תרגול – כללי מניה בסיסיים - תשובות

1. א. ניתן לבחור ספר באנגלית או בצרפתית או בעברית ולכן זה עקרון הסכום:
$5 + 6 + 10 = 21$.
ב. יש לבחור ספר אחד באנגלית (6 אפשרויות) וגם ספר אחד בצרפתית (5 אפשרויות) וגם ספר אחד בעברית (10 אפשרויות) ולכן זה עקרון הכפל: $5 \cdot 6 \cdot 10 = 300$

2. יש לבחור צבע אחד (12 אפשרויות) וגם מין אחד (2 אפשרויות) וגם גודל אחד (4 אפשרויות) וגם רמת איחוד (3 אפשרויות) ולפי עקרון הכפל: $12 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = 288$

3. א. עבור הדרך מ A ל B יש 3 אוטובוסים או 2 רכבות (סה"כ 5 דרכים שונות) ועבור הדרך מ B ל C יש 2 אוטובוסים או 3 רכבות (סה"כ 5 דרכים שונות). כדי להגיע מ A ל C צריך גם להגיע מ A ל B וגם מ B ל C ולכן לפי עיקרון הכפל: $(3+2) \cdot (2+3) = 25$.
ב. אפשרות א' – רק אוטובוסים: מ A ל B יש 3 אפשרויות ,מ B ל C יש 2 אפשרויות ולכן לפי עקרון הכפל יש 6 אפשרויות.
אפשרות ב' – רק רכבות: מ A ל B יש 2 אפשרויות ,מ B ל C יש 3 אפשרויות ולכן לפי עקרון הכפל יש 6 אפשרויות.
ולפי עקרון הסכום יש בסה"כ: $(3 \cdot 2) + (2 \cdot 3) = 12$ אפשרויות.

4. המספר 2000 מתפרק לגורמים הראשוניים כך: $2000 = 2^4 \cdot 5^3$ וכל מחלק של 2000 חייב להכיל חלק מהגורמים הראשוניים (אבל לא יותר מהם), לדוגמא: $5 \cdot 2^2 = 20$ מחלק של 2000. עבור החזקה של הגורם 2 יש 5 אפשרויות $(0 - 4)$ ועבור החזקה של הגורם 5 יש 4 אפשרויות $(0 - 3)$ ולכן לפי עקרון הכפל יש $5 \cdot 4 = 20$ מחלקים שונים למספר 2000.

5. מכיוון שיחס ההיכרות הוא הדדי אז נקבל $56 \cdot 6 = |A| \cdot 7$ כאשר A – קבוצת הבנות. (כלומר סה"כ ההיכרויות מבחינת הבנים – כל בן מכיר 6 בנות שווה לסה"כ ההיכרויות מבחינת הבנות) ומכאן מספר הבנות הוא: $|A| = \frac{56 \cdot 6}{7} = 48$.

6. עבור המקום הראשון בשורה יש 8 אפשרויות, עבור המקום השני יש 7 אפשרויות (ללא מי שכבר ישב במקום הראשון) וכן הלאה עד המקום האחרון בו ישב האחרון שנשאר ולכן מספר האפשרויות הוא: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40320$.

7. יש לבחור דלת אחת (4 אפשרויות) וגם חלון אחד (8 אפשרויות) ולכן לפי עקרון הכפל יש:
$4 \cdot 8 = 32$ אפשרויות.

8. יש לבחור דלת אחת לכניסה (n אפשרויות) ואז לבחור דלת לצאת דרכה ($n-1$ אפשרויות – ללא הדלת שנכנסנו דרכה) ולכן לפי עקרון הכפל יש $n \cdot (n-1)$ אפשרויות.

9. א. לכל תו בשם יש 26 אפשרויות (מספר האותיות באנגלית) ולכן לפי עקרון הכפל יש: $26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 26 = 26^5 = 11881376$ שמות שונים.
ב. לתו הראשון יש 26 אפשרויות, לשני 25 (ללא האות שנבחרה בתו הראשון) וכן הלאה ובסה"כ: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 7893600$.

10. א. לספרה הראשונה יש 9 אפשרויות (ללא 0) ולספרה השנייה יש 10 אפשרויות ובסה"כ יש $9 \cdot 10 = 90$ מספרים שונים.
ב. לספרת האחדות יש 5 אפשרויות (ספרות זוגיות) ולספרת העשרות יש 9 אפשרויות (ללא 0) ובסה"כ: $9 \cdot 5 = 45$.

ג. לספרת האחדות יש 2 אפשרויות (0 ו 5) ולספרת העשרות יש 9 אפשרויות (ללא 0) ובסה"כ: $9 \cdot 2 = 18$.

ד. נשתמש בשיטת המשלים: נחסר מסה"כ המספרים הדו ספרתיים את אלו שמתחלקים ב 5 ללא שארית ובסה"כ נקבל: $90 - 18 = 72$.

ה. נפרק למקרים: אם ספרת העשרות היא זוגית (4 אפשרויות – ללא 0) אז יש 5 אפשרויות לספרת היחידות (ספרה אי-זוגית) ואם ספרת העשרות היא אי-זוגית אז יש 4 אפשרויות לספרת היחידות (ספרה אי-זוגית השונה מזו שבספרת העשרות).

ו. לספרה הראשונה יש 9 אפשרויות (ללא 0) ולשאר הספרות יש 10 אפשרויות ובסה"כ: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$.

ז. לספרה הראשונה יש 8 אפשרויות (ללא 0 וללא 1) ולשאר הספרות יש 9 אפשרויות (ללא 1) ובסה"כ: $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$.

ח. לספרה הראשונה יש 9 אפשרויות (ללא 0) ולכל ספרה נוספת יש 9 אפשרויות (כל הספרות ללא זו שכבר נבחרה לספרה מימין) ובסה"כ: $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$.

11. עבור 2 התווים הראשונים יש 26 אפשרויות (אותיות באנגלית) ועבור 3 התווים האחרים יש לכל אחד 10 אפשרויות (כל הספרות) ובסה"כ: $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^2 \cdot 10^3 = 676000$.

12. לכל משחק מ 16 המשחקים יש 3 אפשרויות ולכן בסה"כ: $3^{16} = 43046721$ **אפשרויות.**

13. לכל קובייה יש 6 אפשרויות ולכן בסה"כ: $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$

14. נפרק למקרים: 2 האותיות הן A – אפשרות אחת. האות הראשונה היא A – יש 25 אפשרויות לאות השנייה (ללא A). האות השנייה היא A - יש 25 אפשרויות לאות הראשונה (ללא A). ובסה"כ נחבר את המקרים: $1 + 25 + 25 = 51$.

15. א. כל אחד מ n האנשים אמר שלום ל $n-1$ האחרים ולכן בסה"כ נאמרו: $n \cdot (n-1)$ אמירות שלום.

ב. כל אחד מ n האנשים לחץ ידיים ל $n-1$ האחרים אבל בחישוב זה ספרנו כל לחיצת יד פעמיים (א' לחץ ל ב' וגם ב' לחץ ל א') ולכן נחלק ב 2 ונקבל : $\frac{n(n-1)}{2}$ לחיצות ידיים.

16. א. לצריח הראשון יש 64 אפשרויות (מספר המשבצות בלוח) ולצריח השני יש 49 אפשרויות (המשבצות בלוח ללא השורה והעמודה של הצריח הראשון) ובסה"כ: $64 \cdot 49 = 3136$.

ב. אם 2 הצריחים הם באותו צבע אז ההחלפה ביניהם לא חשובה (כלומר, הראשון ב א' והשני ב ב' או השני ב א' והראשון ב ב') ולכן נחלק את מה שקיבלנו ב א' ב 2 ונקבל: 1568 אפשרויות.

17. א. לתפקיד הראשון יש 30 מועמדים, לשני יש 29 (כי אדם אחד לא יכול להיות ב 2 תפקידים) ולשלישי 28 מועמדים ובסה"כ: $30 \cdot 29 \cdot 28 = 24360$.

ב. יש לבחור 3 אנשים ללא חשיבות לסדר הבחירה ואין חזרות - $\binom{30}{3} = 4060$ אפשרויות.

18. א. נושיב תחילה את 2 האנשים שרוצים לשבת זה לצד זה ביחד – יש 2 אפשרויות לסידור ביניהם. ואז נתייחס אליהם כאדם אחד ונסדר את $n-1$ האנשים על הספסל: $(n-1)!$ ולכן בסה"כ: $(n-1)! \cdot 2!$ אפשרויות.

ב. נשתמש במשלים – נחסר מסה"כ האפשרויות להושיב n אנשים על ספסל $(n!)$ את מספר האפשרויות ש 2 האנשים כן יושבים אחד ליד השני (כמו בסעיף א') ונקבל: $n! - (n-1)! \cdot 2!$.

ג. נושיב תחילה את 4 האנשים שרוצים לשבת זה לצד זה ביחד – יש $4!$ אפשרויות לסידור ביניהם. ואז נתייחס אליהם כאדם אחד ונסדר את $n-3$ האנשים על הספסל: $(n-3)!$ ולכן בסה"כ: $(n-3)! \cdot 4!$ אפשרויות.
ד. נושיב תחילה את k האנשים שרוצים לשבת זה לצד זה ביחד – יש $k!$ אפשרויות לסידור ביניהם. ואז נתייחס אליהם כאדם אחד ונסדר את $n-k-1$ האנשים על הספסל: $(n-k-1)!$ ולכן בסה"כ: $(n-k-1)! \cdot k!$ אפשרויות.

19. מכיוון שניתן תמיד לסובב את השולחן אין חשיבות למקום בו ישב האדם הראשון ולכן יש רק אפשרות אחת להושיב אותו. עבור השני, יש $n-1$ אפשרויות (ישיבתו של האדם הראשון נתנה חשיבות לסדר בין המקומות – האם לשבת ליד הראשון או רחוק ממנו), לשני יש $n-2$ אפשרויות וכן הלאה ובסה"כ יש $(n-1)!$ אפשרויות.

20. נושיב תחילה את הנשים בשולחן עם רווח של מקום אחד בין כל 2 נשים – לסידור ביניהן יש $4! = 24$ אפשרויות (לראשונה יש רק אפשרות אחת כי השולחן עגול). ולאחר מכן, נושיב בין כל 2 נשים גבר אחד – יש $5!$ אפשרויות לסידור בין הגברים ובסה"כ יש: $4! \cdot 5! = 2880$ אפשרויות.

21. א. לספרה הראשונה יש 9 אפשרויות (כל הספרות ללא 0), לשנייה יש 9 אפשרויות (ללא זו שנבחרה בראשונה) לשלישית יש 8 אפשרויות (ללא ה 2 שנבחרו) וכן הלאה ובסה"כ: $9 \cdot 9! = 3265920$ אפשרויות.
ב. מכיוון שיש רק 10 ספרות אז $1 < n \leq 10$. ובמקרה זה נקבל: $\ldots \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9$ ואם $n = 1$ נקבל 10 אפשרויות.

22. א. לכל אחת מ 4 הספרות יש 4 אפשרויות ולכן בסה"כ: $4^4 = 256$.
ב. לספרה הראשונה יש 4 אפשרויות (ללא 0) ולשאר יש 5 אפשרויות ולכן בסה"כ: $4 \cdot 5^3 = 500$ אפשרויות.

23. יש לבחור מועמד לתפקיד A (2 אפשרויות) וגם מועמד לתפקיד B (4 אפשרויות) וגם מועמד לתפקיד C (2 אפשרויות) ובסה"כ: $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ אפשרויות.

24. יש לבחור שאלה אחת מכל קבוצה ולכן לפי עקרון הכפל יש: $10 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 1200$ אפשרויות.

25. לתפקיד הראשון יש 4 מועמדים ולאחר מכן, לתפקיד השני נותרים 3 מועמדים (ללא זה שנבחר לתפקיד הראשון). סה"כ: $4 \cdot 3 = 12$ אפשרויות.

26. לאדם הראשון יש 6 אפשרויות (מושבים), לשני יש 5 אפשרויות ולשלישי יש 4 אפשרויות. סה"כ: $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

27. לכל סביבון 4 אפשרויות ולכן לפי עקרון הכפל: $4 \cdot 4 = 16$.

28. לכל ספרה מ 6 הספרות יש 10 אפשרויות ולכן בסה"כ יש: $10^6 = 1000000$ אפשרויות.

29. א. לכל איבר ב A יש 10 אפשרויות ולכן על פי עקרון הכפל יש $10^7 = 10000000$ פונקציות.
ב. לאיבר הראשון ב A יש 10 אפשרויות, לשני 9 וכן הלאה ולכן מספר הפונקציות החח"ע הוא: $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 604800$.

30. א. נבחר את המקום בו יופיע ה 0 היחיד: 6 אפשרויות (כי הספרה הראשונה לא יכולה להיות 0), לאחר מכן, לכל 6 הספרות האחרות יש 9 אפשרויות ובסה"כ: $6 \cdot 9^6 = 3188646$.

ב. נפרק למקרים: אם 3 מופיע במקום הראשון, לכל 6 הספרות האחרות יש 9 אפשרויות לכל אחת ואם 3 מופיע במקום אחר אז יש 6 אפשרויות לבחירת המקום עבורו, לספרה הראשונה יש 8 אפשרויות ולכל 5 הספרות האחרות יש 9 אפשרויות. סה"כ נקבל:

$9^6 + 6 \cdot 8 \cdot 9^5 = 3365793$.

ג. נשתמש בשיטת המשלים ונחסיר מכלל המספרים ה 7 ספרתיים את אלו שלא מכילים את 0 בכלל. סה"כ המספרים: $9 \cdot 10^6$. סה"כ המספרים שלא מכילים את 0: 9^7 ובסה"כ:

$9 \cdot 10^6 - 9^7 = 4217031$

ד. נפרק למקרים: נחשב את המקרים בהם 3 מופיע 0 פעמים, פעם אחת ו 2 פעמים:

0 פעמים: $8 \cdot 9^6$. פעם אחת: $9^6 + 6 \cdot 8 \cdot 9^5$.

פעמיים: נפרק למקרים: מקרה ראשון - אחד מהמופעים של 3 הוא בספרה הראשונה: נותר לבחור מקום נוסף ל 3 השני: 6 אפשרויות ולשאר הספרות יש 9 אפשרויות לכל אחת ובסה"כ: $6 \cdot 9^5$ אפשרויות. מקרה שני – 2 המופעים של 3 לא בספרה הראשונה – יש $\binom{6}{2}$ אפשרויות לבחור את המקומות עבור 2 המופעים של 3. לספרה הראשונה יש 8 אפשרויות ולשאר הספרות יש 9 אפשרויות לכל אחת ובסה"כ: $\binom{6}{2} \cdot 8 \cdot 9^4$. נחבר את כל המקרים ונקבל בסה"כ:

$8 \cdot 9^6 + 9^6 + 6 \cdot 8 \cdot 9^5 + 6 \cdot 9^5 + \binom{6}{2} \cdot 8 \cdot 9^4 = 4507407$.