פקולטה: מדעי הטבע. מחלקה: מתמטיקה מדעי המחשב. שם הקורס: לוגיקה ותורת הקבוצות.

קוד הקורס : 2-7016510.

תש"ף סמסטר ב מועד א    תאריך: 14 ליולי 2020   מרצה: ד"ר זיו שמי.

מתרגלים: מר אוהד מדמון , מר ברוך כשרים.

משך הבחינה : 3 שעות. חומר עזר: דפי הנוסחאות שמצורפים בסוף . **עליכם להשיב על 5 השאלות הבאות. כל תשובה נכונה מזכה ב-20 נקודות.**

**סימונים:** מספרים טבעיים: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3 \dots\}$ שלמים: $\mathbb{Z}$ רציונלים: $\mathbb{Q}$ ממשיים: $\mathbb{R}$
טבעיים חיוביים: $\mathbb{N}^+$ קבוצת החזקה של A : P(A).
סימונים לקטעים הממשיים : $a \le x \le b$ : $[a,b]$ , $a < x < b$ : $(a,b)$ , $a < x \le b$ : $(a,b]$ , $a \le x < b$ : $[a,b)$.

הנחיות לביצוע המבחן המקוון: יש לפתוח את המצלמות בפגישת הזום במהלך המבחן. שאלות הבהרה למרצה יש לשאול רק באימייל zivshami@gmail.com או בטלפון 03-5340807 .**אין לשאול שאלות בזום, גם לא בצ'אט !** אני אעביר הערות כלליות לכולם בצ'אט אם יהיה צורך.

1) לגבי כל אחד מהפסוקים הבאים קבע האם הוא מתקיים במבנה $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq)$. **יש להסביר בכל סעיף מדוע הפסוק מתקיים או לא מתקיים.**

א) $\forall x \exists y \forall z\ [x+y \leq z \cdot z]$

ב) $\exists x \forall y \forall z [(x \leq z) \rightarrow (x \leq y+z)]$

ג) $\forall x \forall y \exists z \exists w [(x+z \leq y) \wedge (z \leq w+x)]$

2) לגבי כל זוג מבנים, המופיע בכל סעיף, קבע האם הם איזומורפיים. **הסבר בקצרה את טענתך בכל סעיף: אם המבנים לא איזומורפיים יש רק להציג פסוק המעיד על כך. אם המבנים איזומורפיים יש רק להציג את האיזומורפיזם.**

*א)* $M_2=(\mathbb{Z},\cdot)$ ,$M_1=(\mathbb{N},\cdot)$

*ב)* $M_2=(P(\mathbb{R}),\subseteq)$, $M_1=(P(\mathbb{R}),\supseteq)$

(המבנים מפרשים את $L=\{S\}$, $\langle x,y\rangle \in S^{M_1} \Leftrightarrow x \supseteq y$, $\langle x,y\rangle \in S^{M_2} \Leftrightarrow x \subseteq y$)

ג) $M_2=((0,2),<)$ , $M_1=((0,1]\cup[2,3),<)$

3) לגבי כל זוג קבוצות, המופיע בכל סעיף, קבע איזו קבוצה עוצמתה גדולה יותר או האם עוצמות הקבוצות שוות. **הוכח את תשובתך בכל סעיף. מותר לצטט ללא הוכחה כל משפט (טענה או מסקנה) שהיו בהרצאה.**

א) $B=P(\mathbb{Q})$ ,$A=\{X\subseteq\mathbb{R}:\ X\cup\{2\}=[1,2]\}$.

ב) $B=\{X\in P(\mathbb{Z})$: $X$ סופית$\}$ , $A=\{\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2 : x+y=0\}$

ג) $B=\{\frac{m+\sqrt{l}}{k}$ : $k,l,m>0$ טבעיים$\}$ , $A=\{X\subseteq\mathbb{N}:\ 3\notin X\}$

4) הוכח שהקבוצה $\{X\in P(\mathbb{N}\times\mathbb{N})|$ $X$ אינסופית$\}$ איננה בת מניה. **מותר לצטט ללא הוכחה כל משפט (או טענה, מסקנה) שהוצגו <u>בהרצאה</u> (או מדף הנוסחאות) אבל אסור לצטט תרגיל ממטלה או משעורי בית.**

5) תהא X קבוצת כל תתי הקבוצות הסופיות הלא ריקות של המספרים הטבעיים. נגדיר יחס דו-מקומי $S^*$ על X ע״י: לכל $A, B \in X$:

$\langle A,B\rangle \in S^*$ אם ורק אם לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ כך ש- $a < b$.

יהא L אוצר המילים המכיל סימן יחס דו-מקומי S ובנוסף מכיל לכל $A \in X$ סימן קבוע $c_A$.

נגדיר מבנה M המפרש את L באופן הבא: עולם M הוא X , $S^M = S^*$ ולכל $A \in X$ ,

$c_A{}^M = A$.

תהא T התורה של המבנה M , כלומר T היא קבוצת כל הפסוקים ש-M מקיים. נגדיר תורות $T_1, T_2, T_3$ באוצר מילים $L^+ = L \cup \{d\}$ באשר $d$ הוא סימן קבוע חדש:

$$T_1 = \mathrm{T} \cup \{S(c_A, d) : A \in X\}$$

$$T_2 = \mathrm{T} \cup \{S(d, c_B) : B \in X\}$$

$$T_3 = \mathrm{T} \cup \{\neg S(d, c_B) : B \in X,\ B \subseteq \{0,1,\dots,100\}\}$$

א) לגבי כל אחת מהתורות $T_1, T_2, T_3$ עליכם לבחור באפשרות היחידה הנכונה מבין האפשרויות הבאות:

1. לא עקבית.
2. עקבית ויש לה מודל שהוא העשרה של M ל- $L^+$.
3. עקבית, אבל אין לה מודל שהוא העשרה של M ל-$L^+$.

**בחלק זה, אין צרך לנמק כלל**. (העשרה של M ל-$L^+$ במקרה זה מתקבלת ע״י הוספת פרוש עבור d כאיבר בעולם של M, שהוא X). (8 נקודות)

ב) בחרו תורה לגביה התשובה הנכונה בחלק א **היא אפשרות 3 והוכיחו** שהיא אכן עקבית. הניקוד ינתן רק במקרה שבחרתם בתורה נכונה. מותר כמובן לצטט משפטים מההרצאה או מדף הנוסחאות. (12 נקודות)

## בהצלחה!

# <u>דפי נוסחאות בלוגיקה ותורת הקבוצות</u>

## <u>תחשיב הפסוקים</u>

1). חק החלוף לגבי האִווי : $\alpha\vee\beta\equiv\beta\vee\alpha$

2). חק החלוף לגבי הגִמום : $\alpha\wedge\beta\equiv\beta\wedge\alpha$

3). חק הקִבוץ לגבי האִווי : $(\alpha\vee\beta)\vee\gamma\equiv\alpha\vee(\beta\vee\gamma)$

4). חק הקִבוץ לגבי הגִמום : $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\equiv\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$

5). חֹק הפִלוג של האִווי מעל הגִמום : $\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)\equiv(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)$

6). חֹק הפִלוג של הגִמום מעל האִווי : $\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)\equiv(\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)$

**7). כללי דה-מורגן:** $\neg(\alpha\vee\beta)\equiv\neg\alpha\wedge\neg\beta,\ \neg(\alpha\wedge\beta)\equiv\neg\alpha\vee\neg\beta$

**8).** $\alpha\rightarrow\beta\equiv\neg\alpha\vee\beta,\ \neg(\alpha\rightarrow\beta)\equiv\alpha\wedge\neg\beta$

9). $\alpha\leftrightarrow\beta\equiv(\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha)\equiv(\alpha\wedge\beta)\vee(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$

10) חֻקי האמת : $\alpha\wedge T\equiv\alpha,\ \alpha\vee T\equiv T,\ \alpha\wedge F\equiv F,\ \alpha\vee F\equiv\alpha$

11) חֻקי הספיגה (הרוב קובע) : $\alpha\wedge(\alpha\vee\beta)\equiv\alpha,\ \alpha\vee(\alpha\wedge\beta)\equiv\alpha$

הגדרה: המבנה M הוא **תת מבנה** של המבנה N אם העולם של M מוכל בעולם של N, והסמנים שמופיעים באוצר המילים מתפרשים אותו דבר ב-N,M, כלומר:

א. לכל סמן יחס R n-מקומי ולכל n אברים $a_1,a_2..a_n$ בעולם של M מתקיים : $R^M(a_1..a_n)$ אס״ם $R^N(a_1..a_n)$.
ב. לכל סמן של פונקציה f n-מקומית ולכל n אברים $a_1,a_2..a_n$ בעולם של M מתקיים : $f^M(a_1,a_2..a_n)=f^N(a_1,a_2..a_n)$.
ג. לכל סמן של קבוע אישי, c, מתקיים $c^M=c^N$.

## איזומורפיזם:

הגדרה: נתונים שני מבנים $M_1,M_2$ שמפרשים אותו אוצר מילים. איזומורפיזם בין המבנים $M_1,M_2$ הוא פונקציה $H:M_1\to M_2$ שמקיימת את התכונות הבאות:

א. $H$ חח״ע ועל.
ב. לכל סמן של יחס $n$-מקומי, $R$, באוצר המילים ולכל $n$ אברים $a_1,a_2..a_n$ מ-$M_1$ מתקיים: $R^{M1}(a_1,a_2..a_n)$ אם״ם $R^{M2}(H(a_1),H(a_2)..H(a_n))$.
ג. לכל סמן של פונקציה $n$-מקומית, $f$, ולכל $n$ אברים $a_1,a_2..a_n$ בעולם של $M_1$ מתקיים: $H(f^{M1}(a_1,a_2..a_n))=f^{M2}(H(a_1),H(a_2)..H(a_n))$.
ד. לכל סמן של קבוע אישי, $c$, מתקיים $H(c^{M1})=c^{M2}$.

הגדרה: המבנים $M_1,M_2$ איזומורפיים אם יש איזומורפיזם $H:M_1\to M_2$.

משפט: אם $M_1\cong M_2$ אז כל פסוק שנכון באחד מהם, נכון בשני.

## שקילות לוגית

הגדרת שקילות לוגית: הפסוקים $B,A$ שקולים לוגית פירושו שלכל מבנה $M$, אם $A$ מתקיים, אז $B$ מתקיים ואם $B$ מתקיים אז $A$ מתקיים.

החֻקים האנלוגיים לחֻקי דה-מורגן: (טִפול בשלילה שמופיעה לפני סוגריים)

א. $\neg[\forall x(\alpha)]\equiv\exists x(\neg\alpha)$.
ב. $\neg[\exists x(\alpha)]\equiv\forall x(\neg\alpha)$.

החלפת שם של משתנה מכומת: בפסוק $\forall x(\alpha)$ נתן להחליף את x ב-y, בהנחה ש-x מופיע ב-$\alpha$ רק כמשתנה חופשי ו-y כלל לא מופיע ב-$\alpha$ (אין צֹרך לִזכֹר את ההנחה, אלא רק להבין את הרעיון ולתרגל).

משפט הוצאת הכמתים מחוץ לסוגריים: אם x לא מופיע בפסוק $\beta$, אז $[\forall x(\alpha)]\wedge\beta\equiv\forall x[\alpha\wedge\beta]$. אותו דבר אם יופיע $\exists$ במקום $\forall$. אותו דבר אם יופיע $\vee$ במקום $\wedge$.

הרעיון של המשפט: אין קשר בין הכִמות על x לבין הפסוק $\beta$. לכן זה לא משנה אם $\beta$ יופיע בתוך הסוגריים או מחוץ להם.

<u>משפט המחמיר והמֵקֵל:</u>

א. $[\forall x(\alpha)]\wedge[\forall x(\beta)]\equiv\forall x[\alpha\wedge\beta]$.

ב. $[\exists x(\alpha)]\vee[\exists x(\beta)]\equiv\exists x[\alpha\vee\beta]$.

הרעיון: יש דִמיון בין הכמת $\forall$ ובין הקשר $\wedge$. שניהם "מחמירים", כלומר מקשים לקבל ערך אמת. הכמת $\forall$ אומר שאפילו אם יש x אחד שלא מקיים, אז נקבל F. הקשר $\wedge$ אומר שאפילו אם רק אחד משני הפסוקים שקרי, אז נקבל F. בחלק א של המשפט יש שלוב של הכמת המחמיר עם הקשר המחמיר. לכן אפשר להחליף סדר ביניהם. בחלק ב יש שלוב של הכמת המקל, $\exists$, עם הקשר המקל, $\vee$.

## <u>ההגדרות הבסיסיות של תורת המודלים ומשפט הקומפקטיות</u>

<u>תורה</u> = קבוצה של פסוקים באוצר מילים מסוים.

תורה היא <u>עקבית</u> אם יש לה מודל, כלומר יש מבנה המקיים את כל הפסוקים בה.

<u>משפט הקומפקטיות:</u>

תורה היא עקבית אם ורק אם כל תת קבוצה סופית שלה היא עקבית.

# <u>תורת הקבוצות</u>

$N=\{0,1,2...\}$: **המספרים הטבעיים**, $Z$: **המספרים השלמים**, $Q$: **המספרים הרציונלים**

$R$: **המספרים הממשיים**.

תכונות של איחוד וחיתוך :

1). האִחוד מקיים את חק החלוף : $A\cup B=B\cup A$.

2). החִתוך מקיים את חק החלוף : $A\cap B=B\cap A$.

3). האִחוד מקיים את חק הקִבוץ :
$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

4). החִתוך מקיים את חק הקִבוץ :
$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

5). חֻקי הפִלוג : $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

**6) כללי דה-מורגן :** $\mathbf{(A\cup B)^c=A^c\cap B^c}$, $\mathbf{(A\cap B)^c=A^c\cup B^c}$

<u>הגדרה:</u> קבוצה A היא בת מניה אם היא ריקה או שקיימת פונקציה **על** $f:N\to A$.

<u>משפט:</u> אם קבוצה A היא אחוד של אוסף בן מניה של קבוצות בנות מניה, אז A בת מניה.

הגדרה: קבוצות B,A תקראנה שוות עוצמה אם יש פונקציה חח"ע ועל מ-A ל-B.

הגדרה: עוצמת A גדולה או שווה לעוצמת B אם יש פונקציה חח"ע מ-B ל-A.

הגדרה: עוצמת A גדולה מעוצמת B אם עוצמת A גדולה או שווה לעוצמת B אבל A, B אינן שוות עוצמה.

משפט קנטור: לכל קבוצה A עוצמת קבוצת החזקה P(A) של A גדולה  מעוצמת A.

משפט: עוצמת המספרים הממשיים R שווה לעוצמת P(N) ולכן גדולה

מעוצמת N.

משפט קנטור ברנשטיין: לכל שתי קבוצות B,A: אם עוצמת A גדולה או שווה לעוצמת B וכן עוצמת B גדולה או שווה לעוצמת A אז B,A שוות עוצמה.

משפט השוואת העוצמות: אם B,A קבוצות אז עוצמת A גדולה או שווה לעוצמת B או עוצמת B גדולה או שווה לעוצמת A.