3) $\begin{cases} x+y=1 \\ y+z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2=R_2-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3}$

$-1 = 2z_3$

$\mathbb{Z}_3$ ... -3 -2 -1 0 1 2 3 4 ... z

... 0 1 2 0 1 2 0 1 ... z_3

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$

$z=0$

$y+z=2 \Rightarrow y=2$

$x+y+z=1 \Rightarrow x=-1=2_3$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

4) $\begin{cases} iz_1 - iz_3 = 1 \\ z_2 - (1+4i)z_3 = 1 \\ (2-i)z_1 + iz_2 + 3z_3 = -1 \end{cases}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} i & 0 & -i & 1 \\ 0 & 1 & -(1+4i) & 1 \\ (2-i) & i & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1/i} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -i \\ 0 & 1 & -(1+4i) & 1 \\ 2-i & i & 3 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow$

$\xrightarrow{R_3=R_3-(2-i)R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -i \\ 0 & 1 & -(1+4i) & 1 \\ 0 & i & 5-i & 2i \end{array}\right) \xrightarrow{R_3/i}$

3,3 יעד $3+(2-i)$

3,4 יעד $-1+i(2-i) = -1+2i+1$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -i \\ 0 & 1 & -(1+4i) & 1 \\ 0 & 1 & -1-5i & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=R_3-R_2}$

$3,3 \quad -1-5i+(1+4i) = -i$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -i \\ 0 & 1 & -(1+4i) & 1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{array}\right)$

$-iz_3 = 1 \Rightarrow z_3 = \frac{1}{-i} = \frac{i}{i} = i$

$z_2 - (1+4i)\cdot i = 1 \Rightarrow z_2 = 1+i-4 = -3+i$

$z_1 - i = -i \Rightarrow z_1 = 0$

$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3+i \\ i \end{pmatrix}$

16.08.17

5. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-2 & 3a & 3a \\ a & a^2-a-1 & 3a^2+a-1 & 3a^2+a-1 \\ 3 & 8a-11 & a^2+3a-7 & a^2+2a-8 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-3R_1]{R_2-aR_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-2 & 3a & 3a \\ 0 & a-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & 5(a-1) & a^2+4a-7 & a^2+3a-8 \end{array}\right)$

$\xrightarrow{R_3-5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-2 & 3a & 3a \\ 0 & a-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 & a^2-2a-3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-2 & 3a & 3a \\ 0 & a-1 & a-1 & a-1 \\ 0 & 0 & (a-2)(a+1) & (a-3)(a+1) \end{array}\right)$

$a=1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$ $rankA = rankA^* = 2 < n=3 \Rightarrow$ אין פתרון יחיד

$a=2$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$ $rankA = 2 \neq rankA^* = 3 \Rightarrow$ אין פתרון

A

A^*

$a=-1$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $rankA = rankA^* = 2 < n=3 \Rightarrow$ אין פתרון יחיד

ג'ה' $a \neq \pm 1, 2$ (ג

אין פתרון יחיד $a = \pm 1$ (ב

אין פתרון $a = 2$ (ב

$a = 1$ יח"ל (א

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$ $y = t$, $z = 2$

$x - t + 6 = 3 \Rightarrow x = t - 3$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-3 \\ t \\ 2 \end{pmatrix}$ אין פתרון יחיד

6. $\begin{cases} (1+i)x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + (1-i)x_2 = 1-2i \end{cases}$

S.6.16 (ג' מועד)

$\left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 1 & 1 \\ 2 & 1-i & 1-2i \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 = R_2 - (1-i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1+i & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -i \end{array}\right)$

שורה 2,1: $2 - (1+i)(1-i) = 2 - (1+1) = 0$

$rankA = 1 \neq rankA^* = 2 \Rightarrow$ אין פתרון

4. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 4x + 2y + 3z = 1 \\ x + 4y + 4z = 2 \end{cases}$ $\mathbb{Z}_7$ מעל

$\mathbb{Z}$ ... -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 ...

$\mathbb{Z}_7$ ... 3 4 5 6 0 1 2 3 4 5 6 0 ...

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \overset{\mathbb{Z}_7}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 = 5R_3 - 3R_2}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -7 \end{array}\right) \overset{\mathbb{Z}_7}{=} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow z = 0$

$5y = 4$

$y = 4 \cdot \frac{1}{5} = 4 \cdot 3 = 12 = 5$

$5 \cdot ? = 1_{\mathbb{Z}_7} \Rightarrow 5 \cdot 3 = 15 = 1_{\mathbb{Z}_7}$

$x + 5 = 1$

$x = -4 = 3$

שאלה 5

$$\begin{cases} x + (a-2)y + 3az = 3a \\ ax + (a^2 - a - 1)y + (3a^2 + a - 1)z = 3a^2 + a - 1 \\ 3x + (8a - 11)y + (a^2 + 13a - 7)z = a^2 + 12a - 8 \end{cases}$$

מצא עבור אלו ערכים של a למערכת קיים:

א. פתרון יחיד

ב. לא קיים למערכת פתרון

ג. קיימים אינסוף פתרונות למערכת

ד. מצא את אינסוף הפתרונות לערך שמצאת בסעיף ג. (במידה ויש יותר מערך אחד של a מצא את אינסוף הפתרונות רק עבור ערך אחד).