

אלגברה לינארית מרצה: ד"ר סבטלנה בונימוביץ

משך הבחינה: 60 דקות ויש לענות על 4 שאלות.

שאלה 1 (25%)

נסמן $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות: מערכת משוואות לינאריות – ממ"ל.

- (א). אם לממ"ל $Ax = \vec{b}$ קיים פתרון יחיד אז לממ"ל $Ax = \vec{c}$ קיים פתרון יחיד.
(ב). אם לממ"ל $Ax = \vec{b}$ יש אינסוף פתרונות אז לממ"ל $Ax = \vec{0}$ יש אינסוף פתרונות.

שאלה 2: (25%)

מצאו את התנאים שהמספרים a, b צריכים לקיים על מנת שהמטריצה

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

תהיה הפיכה.

שאלה 3: (25%)

נתונה מערכת: $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $a = b = c = 1$. אם הטענה שלמערכת יש הפתרון

הכללי הבא: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ כאשר t – פרמטר חופשי נכונה או לא?

שאלה 4: (25%) אם $z = 1.5 - 2i$ הוא הפתרון למשוואה הבאה: $|z| - z = 1 + 2i$ נכון או לא נכון?

שאלה 1	שאלה 2	שאלה 3	שאלה 4
כן	$b=0$ $a=b$	לא נכון	נכון

הציון _____

אלגברה לינארית מרצה: ד"ר סבטלנה בונימוביץ

משך הבחינה: 60 דקות ויש לענות על 4 שאלות.

שאלה 1 (25%)

$$\begin{vmatrix} n+2b & -y & 3y+b \\ p+2c & -z & 3z+c \\ m+2a & -x & 3x+a \end{vmatrix} \quad \text{השב את} \quad \begin{vmatrix} m & n & p \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6$$

שאלה 2 (25%)

מצאו את התנאים שהמספרים a, b צריכים לקיים על מנת שהמטריצה

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{bmatrix}$$

תהיה סינגולרית.

שאלה 3 (25%)

נתונה מערכת המשוואות הבאה, התלויה בפרמטר k :

$$\begin{cases} (k-1)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = x_2 + 1 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = x_3 + 2 \end{cases}$$

קבע לאילו ערכים של הפרמטר k (אם בכלל) יהיה למערכת פתרון יחיד.

שאלה 4 (25%) מצא מספר מרוכב $z = a + ib$ שמקיים את המשוואה: $i(z + \bar{z}) + z - 2\bar{z} = 1 + i$

שאלה 1	שאלה 2	שאלה 3	שאלה 4

הציון

$$1. \begin{vmatrix} n & -y & 3y \\ p & -z & 3z \\ m & -x & 3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2b & -y & 3y \\ 2c & -z & 3z \\ 2a & -x & 3x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} n & -y & b \\ p & -z & c \\ m & -x & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ab & -y & b \\ ac & -z & c \\ ad & -x & a \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} n & p & m \\ y & z & x \\ b & c & a \end{vmatrix} = 6$$

$$2. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{vmatrix} = b \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b(b-a) = 0 \quad b=0 \quad \text{או} \quad b=a$$

$$3. \begin{vmatrix} k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \\ 1 & 1 & k-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_1+C_2+C_3} \begin{vmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ k+1 & k-1 & 1 \\ k+1 & 1 & k-1 \end{vmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1, R_3-R_1} \begin{vmatrix} k+1 & 1 & 1 \\ 0 & k-2 & 0 \\ 0 & 0 & k-2 \end{vmatrix} = (k-2)^2 = 0 \quad k=2, -1$$

$$4. i(a+ib+a-ib) + a+ib - 2a+2ib = 1+i \\ 2ai + 3ib - a = 1+i \\ a = -1, b = 1$$

משך הבחינה: 60 דקות ויש לענות על 4 שאלות. יש לכתוב את שם ומספר זהות על הדף הזה ועל כל אחד מהדפים האחרים שאתה מגישה. יש לכתוב את כל תשובה במקום המיועד לה בדף הזה. יש לבדוק היטב את כל התשובות!

שאלה 1 נתון: $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$. מצאו את $X^{-1} \cdot Y$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 100 \\ 1 & 1 & 5 & | & 010 \\ 4 & 3 & 0 & | & 001 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 100 \\ 0 & 0 & 1 & | & -110 \\ 0 & -1 & -16 & | & -401 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & | & 100 \\ 0 & 0 & 1 & | & -110 \\ 0 & -1 & -16 & | & -401 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 5-40 \\ 0 & 0 & 1 & | & -110 \\ 0 & -1 & -16 & | & -401 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1512 \\ 0 & 1 & 0 & | & 20-16-1 \\ 0 & 0 & 1 & | & -110 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -155 \\ 206 \\ -11 \end{pmatrix} \quad X^{-1} \cdot Y =$$

תשובה:

שאלה 2 נתון:

$$C = \begin{pmatrix} 1-2k^2 & 2k & 2 \\ -k+k^3 & 1-k^2 & -k \\ -k^2 & k & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ -k^2 & k & 1 \end{bmatrix}, \quad C = A \cdot B$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ k & 1 & -k \\ 0 & -k & 1-k^2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 2k & -2 \\ k & 1-k^2 & k \\ 0 & -k & 1 \end{bmatrix}$$

עבור אילו ערכים של k המטריצה C הפיכה?

תשובה: $k \neq 0$

אחת המטריצות P, Q היא המטריצה ההפכית של C . האם $P = C^{-1}$ או $Q = C^{-1}$?

תשובה: P

שאלה 3 נתון: A היא מטריצה 3×3 הפיכה כזאת ש- $A^{-1} = A$, B היא מטריצה 3×3

כזאת ש- $\det(B) = -96$. מצאו את $\det\left(\frac{1}{2}ABA\right)$.

$$\det\left(\frac{1}{2}ABA\right) =$$

תשובה:

שאלה 4 מצאו את כל המספרים המרוכבים $z = x + iy$ כך שמתקיים השוויון

$$z^2 = -\bar{z}$$

תזכורת: $\bar{z} = x - iy$

תשובה:

בהצלחה!

אוניברסיטת אריאל בשומרון

מבחן בנושא: אלגברה ליניארית

מס' קורס: 2-7313310-1

המרצה: ד"ר רוברט שוורץ

סמסטר א', בחן אמצע סמסטר, תשע"ו 15.12.2015

זמן הבחינה: 45 דקות

יש לענות על כל אחת משתי השאלות

שאלה 1

(א) עבור אילו ערכים של k למערכת המשוואות הבאה יש פתרון יחיד? אינסוף פתרונות? אין פתרון?

$$k \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2k & 3k \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 - R_3 \\ = \\ R_2 - R_3 \end{matrix} \quad k \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2-k \\ 0 & 2k+1 & 2k \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = k(4k - (2-k)(2k+1)) =$$

$$= k(2k^2 + k - 2) = 0$$

$$k=0 \quad k = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{aligned} kx + ky + 2kz &= -1 \\ x + 2ky + 3kz &= k - 3 \\ x - y + kz &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + 2ky + 3kz = k - 3 \\ x + y + 2z = -\frac{1}{k} \\ x - y + kz = 5 \end{cases} \quad \begin{aligned} 2x + 2(2k)z &= 5 - \frac{1}{k} \\ 2x + 2(2-k)z &= 5 - \frac{1}{k} \end{aligned} \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left[5 - \frac{1}{k} - 2(2k)z \right] \\ y &= \frac{1}{2} \left[5 - \frac{1}{k} - 2(2-k)z \right] \end{aligned}$$

(ב) במקרה של פתרון יחיד, בטא את הפתרון בעזרת k .

(ג) במקרה של אינסוף פתרונות, מצא פתרון כללי.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[5 - \frac{1}{k} - 2(2k)z \right] + k \left[5 - \frac{1}{k} - 2(2-k)z \right] + 3kz &= k - 3 \\ 2(-k - 2 - 4k + 2k^2 + 6k) &= 2k - 6 + 2 + 10k - 5 + \frac{1}{k} \\ 2(2k^2 + k - 2) &= \frac{12k^2 - 9k + 1}{k} \end{aligned}$$

שאלה 2

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{נתונה המטריצה הבאה:}$$

$$\det A = 95 \neq 0$$

(א) הוכח שמטריצה A היא מטריצה רגולרית.

(ב) מצא $I = \det(A^T \cdot A^{-1})$.

(ג) האם שלושת הוקטורים הבאים נמצאים על מישור אחד?

$$\vec{v}_1 = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$\vec{v}_2 = 8\vec{i} + 7\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{v}_3 = 2\vec{i} + 9\vec{j} - 5\vec{k}$$

בהצלחה!!!

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 8 & 7 & 3 \\ 2 & 9 & -5 \end{vmatrix} = -92 \neq 0$$