תרגול 2 – בעיות מניה בסיסיות

1.

א. 36^k - אין הגבלה על הסימנים (36 סימנים סה"כ), יש חשיבות לסדר ויש חזרות.

ב. $26\cdot 36^{\mathrm{k}-1}$ – חייבים להתחיל באות אנגלית וכל שאר הסימנים כמו בסעיף א'.

2. $10\cdot 9\cdot 8$ – יש חשיבות לסדר (סוגי מדליות) ואין חזרות (אדם אחד לא יכול לזכות ב 2 מדליות).

3. $\binom{n}{2}$ – בחירת זוג אנשים מתוך n כאשר אין חשיבות לסדר ואין חזרות.

4. $\binom{4}{2}\cdot\binom{9}{3}$ – נבחר 2 בנות מתוך ה 4 ואח"כ נבחר 3 בנים מתוך ה 9 אין חזרות ואין חשיבות לסדר.

5. $\binom{5}{3}\cdot\binom{6}{4}\cdot\binom{3}{2}$ – נבחר בחלק א 3 שאלות מ 5 , בחלק ב נבחר 4 מ 6 ובחלק ג נבחר 2 מ 3 ללא חזרות וללא חשיבות לסדר.

6. $\binom{x+y}{\mathrm{x}}$ - סה"כ הסימנים x+y (x אפסים ו y אחדות) , נבחר את x המקומות עבור האפסים ללא חזרות וללא חשיבות לסדר וממילא ייבחרו y המקומות הנותרים עבור האחדות.

7. $\binom{9}{7}$ - סה"כ הסימנים 2+7 (7 a ו 2 b) , נבחר את 7 המקומות עבור ה a ללא חזרות וללא חשיבות לסדר וממילא ייבחרו 2 המקומות הנותרים עבור ה b.

8.

א. $\binom{m+1}{\mathrm{n}}$ - בהנחה ש n<m (אחרת אין אפשרות שלא יהיו אחדות סמוכים). נסדר את m האפסים בצורה כזו שנשאיר בין כל 2 אפסים מקום פנוי לאחדות. מספר המקומות הפוטנציאלים הוא m+1 ולכן נבחר את n המקומות מתוך m+1 שבהם נשים את האחדות.

ב. $\binom{m+n}{\mathrm{n}}-\binom{\mathrm{n}+1}{\mathrm{m}}$ – נשתמש בשיטת המשלים – נחשב סה"כ האפשרויות לסדר m אפסים ו n אחדות בדומה לשאלה 6 ונחסיר את מספר המקרים בהם יש אפסים סמוכים בדומה לסעיף א' (רק שכאן זה עבור האפסים).

9. $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}+\cdots+\binom{n}{n}$ – מספר תתי הקבוצות באורך k הוא בדיוק בחירת k איברים מתוך n איברי הקבוצה, כנ"ל לגבי תת קבוצה בגודל k+1 וכן הלאה.

10. $\binom{4}{4}+\binom{4}{3}+\frac{1}{2}\binom{4}{2}$ – נבחר תת קבוצה עם 4 איברים והשנייה עם 0 איברים או שנבחר תת קבוצה עם 3 איברים והאיבר הנותר יהיה בקבוצה השנייה או שנבחר תת קבוצה עם 2 איברים וה 2 האחרים יהיו בקבוצה השנייה ונחלק ב 2 כי אין חשיבות לסדר בין הקבוצות.

11.

א. $\binom{10}{6}+\binom{10}{5}+\binom{10}{4}$ - נבחר 6 ספרים לקופסא מספר 1 ו 4 האחרים יהיו בשנייה או שנבחר 5 לקופסא הראשונה וה5 האחרים יהיו בשנייה או שנבחר 4 לראשונה ו 6 הנותרים יהיו בשנייה.

ב. $\binom{10}{6}+\frac{1}{2}\binom{10}{5}$ - כמו סעיף א' , רק שאין מונים את 6-4 ו 4-6 כשתי אפשרויות נפרדות ונחלק ב 2 עבור בחירת 5 הספרים כי אין חשיבות לסדר בין הקבוצות.

ג.

12. $\binom{4}{1}\cdot\binom{10}{6}+\frac{1}{2}\binom{4}{2}\cdot\binom{10}{5}$ – מקרה א': אישה אחת בקבוצה הראשונה ו 3 בקבוצה השנייה – נבחר את האישה שתהיה בקבוצה הראשונה ונשלים ע"י בחירת 6 הגברים שיהיו בקבוצה הראשונה. מקרה ב': 2 נשים לכל קבוצה ו 5 גברים משלימים ומכיוון שאין חשיבות לסדר של הקבוצות נחלק ב 2.

13.

א. $\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{2}{2}$ – נבחר 2 אנשים מתוך 2n הזוגות לזוג הראשון, מבין הנותרים, נבחר זוג נוסף וכן הלאה.

ב. $\frac{1}{n!}\cdot\binom{2n}{2}\cdot\binom{2n-2}{2}\cdot\ldots\cdot\binom{2}{2}$ - כמו ב א' רק שצריך להוריד את הסדר בין הזוגות (התמורות ביניהן).

14. $\binom{6-1+k}{k}$ – מספר התוצאות: n=6 , מספר הניסיונות: k עם חזרות על התוצאות של ההטלות וללא חשיבות לסדר.

15. $\binom{n-1+k}{k}$ - מספר המשתנים (התאים): n, מספר העצמים לחלוקה: k עם חזרות על הערכים של המשתנים וללא חשיבות לסדר.

16. $\binom{n+k}{k}$ - נוסיף משתנה נוסף שיקבל את ההפרשים בין k לסכום המשתנים ועכשיו הבעיה היא כמו בשאלה 15 רק שעכשיו ישנם n+1 משתנים.

17. $\binom{10+3}{10}$ - נכניס מראש לכל תא את כמות הכדורים המינימאלית הנדרשת בכל תא ונותר לנו לבחור 10 כדורים להכניס ל 3 תאים עם חזרות על התאים וללא חשיבות לסדר.

18. $\binom{10+3}{10}$ - מידול הבעיה זהה לשאלה 17.

19. $21^n-\binom{12+n}{12}$ – נשתמש בשיטת המשלים – סה"כ האפשרויות לערכים האי שליליים של המשתנים פחות סה"כ האפשרויות לפתרון האי שוויון $x_1+x_2+\cdots+x_n\le 12$ (בהתאם לשאלה 16).

20. נפרק למקרים: מכפלה של מספרים שלמים שווה 10 - $2\cdot5\ ,\ 5\cdot2\ ,\ 10\cdot1\ ,\ 1\cdot10$
$1\cdot10,\ 10\cdot1$ - מכאן: $x_1+x_2=10$ וגם $x_3+x_4=1$ ולהיפך והפתרון הוא: $\binom{2}{1}\cdot\binom{11}{1}\cdot2$.
$2\cdot5,\ 5\cdot2$ - מכאן: $x_1+x_2=5$ וגם $x_3+x_4=2$ ולהיפך והפתרון הוא: $\binom{3}{1}\cdot\binom{6}{1}\cdot2$.

21. א. יש לבחור 13 קלפים מתוך 52 - $\binom{52}{13}$.
ב. נבחר 13 קלפים למשתתף הראשון (מתוך 52 הקלפים), מהנותרים נבחר 13 לשני, וכן לשלישי וכן לרביעי - $\binom{13}{13}\cdot\binom{26}{13}\cdot\binom{39}{13}\cdot\binom{52}{13}$.
ג. כמו ב – ב' אך מכיוון שאין חשיבות לסדר בין הערמות – נחלק בסידור הפנימי שלהן –
$\binom{13}{13}\cdot\binom{26}{13}\cdot\binom{39}{13}\cdot\binom{52}{13}\cdot\frac{1}{4!}$

22. מכיוון שיש 10 גברים אז בהכרח יהיה גבר אחד לפחות בכל קבוצה ולכן התשובה תהיה זהה לשאלה 12 - $\binom{10}{5}\cdot\binom{4}{2}\frac{1}{2}+\binom{10}{6}\cdot\binom{4}{1}$.

23. נפרק למקרים – ניקח k איברים מהסוג שנמצא רק 5 פעמים ונבחר לו את המקומות: $\binom{7}{k}$ וממילא שאר המקומות יהיו עבור האיברים מהסוג הראשון (זה שמופיע 8 פעמים). k יכול להיות כל מספר בין 0 ל 5 ולכן התשובה היא: $\binom{7}{5}+\binom{7}{4}+\binom{7}{3}+\binom{7}{2}+\binom{7}{1}+\binom{7}{0}$.

24. תחילה ניתן פרי אחד מכל סוג לכל ילד (כל הפירות שווים ולכן זו רק אפשרות אחת). נותר לחלק ל 4 ילדים 5 תפוזים ו 7 תפוחים. עבור 5 התפוזים זה כמו מספר הפתרונות למשוואה: $x_1+x_2+x_3+x_4=5$ השווה ל $\binom{8}{3}$ ועבור 7 התפוחים זה כמו מספר הפתרונות למשוואה: $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ השווה ל $\binom{10}{3}$. ולכן סה"כ הפתרון: $\binom{10}{3}\cdot\binom{8}{3}$.

25. נבחר תחילה 5 זוגות נעליים מתוך 9 הזוגות - $\binom{9}{5}$ ולאחר מכן, נבחר רק נעל אחת מכל זוג – לכל זוג יש 2 אפשרויות לבחירת הנעל (ימין או שמאל) ולכן יש 2^5 אפשרויות ולכן הפתרון בסה"כ: $\binom{9}{5}\cdot 2^5$.

26. א. יש לקחת מספר מנעולים כמספר האפשרויות לבחור 6 מדענים מתוך ה 11 - $\binom{11}{6}$.
ב. לכל מדען צריך להיות מפתחות כמספר הקבוצות של 6 מדענים בהן הוא מופיע: נכניס אותו לקבוצה – נותר לבחור 5 מדענים מתוך 10 הנותרים ולכן מספר האפשרויות הוא: $\binom{10}{5}$.

27. א. מספר תתי הקבוצות של D הצבועות בצבע זהה שווה למספר תתי הקבוצות של A + מספר תתי הקבוצות של B + מספר תתי הקבוצות של C ולכן בסה"כ: $2^n+2^m+2^k-2$ (ונוריד את הקבוצה הריקה פעמיים כי ספרנו אותה 3 פעמים).
ב. נבחר תת קבוצה אחת מתוך תתי הקבוצות הלא ריקות של A וגם תת קבוצה אחת מתוך תתי הקבוצות הלא ריקות של B וגם תת קבוצה אחת מתוך תתי הקבוצות הלא ריקות של C ולכן סה"כ הפתרון הוא: $(2^n-1)(2^m-1)(2^k-1)$.
ג. נבחר תת קבוצה אחת מתוך תתי הקבוצות הלא ריקות של A ואחת מ B או אחת מ A ואחת מ C או אחת מ B ואחת מ C ובסה"כ:
$(2^n-1)(2^m-1)+(2^n-1)(2^k-1)+(2^m-1)(2^k-1)$. מספר זה הוא אי-זוגי תמיד כי מספר תתי הקבוצות ללא הריקה של כל קבוצה הוא אי-זוגי ומכפלה של אי-זוגיים היא אי-זוגית וסכום של 3 אי-זוגיים הוא אי-זוגי. (ניתן גם לפתוח סוגריים ולראות שהמכפלה של כולם זוגית חוץ מ 3 פעמים 1 ולכן מספר זוגי + 3 שווה למספר אי-זוגי).

28. א. לכל כדור יש k אפשרויות לתא שאליו הוא ייכנס ולכן בסה"כ: k^{10k}
ב. נבחר 10 כדורים שייכנסו לתא הראשון, לאחר מכן, מהנותרים נבחר את ה 10 לתא השני וכן הלאה: סה"כ: $\binom{10k}{10}\cdot\binom{10k-10}{10}\cdot\binom{10k-20}{10}\cdot\ldots\cdot\binom{10}{10}=\frac{(10k)!}{(10!)^k}$.
ג. כמו ב – ב' רק שאין חשיבות לסדר בין התאים ולכן נחלק בסידור הפנימי שלהם: $\frac{(10k)!}{k!(10!)^k}$

29. א. נבחר תחילה את $2n$ התאים בהם יהיו הכדורים הלבנים - $\binom{3n}{2n}$. ולאחר מכן נסדר את n הכדורים הצבעוניים ב n התאים הנותרים – $n!$. סה"כ: $\binom{3n}{2n}\cdot n!$.
ב. נבחר את $2n$ התאים בהם יהיו הכדורים הלבנים ואז עבור כל כדור צבעוני יש $3n$ אפשרויות לתא שאליו הוא ייכנס ובסה"כ: $\binom{3n}{2n}\cdot(3n)^n$.

30. ישנן $k+1$ אפשרויות למספר הכדורים שיכולים להיות בתאים (בסדר עולה – מ 0 עד k כולל) וצריך לבחור n ערכים שונים מתוך הערכים האלו ולכן הפתרון הוא: $\binom{k+1}{n}$.

31. נסתכל על איברי הקבוצה בשורה ונמנה את המרווחים שצריכים להיות בין כל 2 איברים שנבחרו לתת הקבוצה בגודל k , כל מרווח חייב להיות גדול או שווה ל 1 למעט הראשון. נייצג כל מרווח ע"י משתנה ונקבל את אי השוויון: $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n - k$ כי ישנם בסה"כ k מרווחים (לפני הראשון, בין הראשון לשני וכן הלאה...) וסכומם יכול להיות לכל היותר $n - k$ כי אחרת נדלג על יותר מדי איברים ולא נוכל להשלים בחירה של k איברים מתוך קבוצה של n איברים. $x_i \geq 1$ לכל $2 \leq i \leq k$ כי המרווח צריך להיות לפחות 1 כדי שלא נקבל איברים עוקבים. כעת הבעיה היא מספר הפתרונות לאי השוויון תחת האילוצים. נכניס תחילה 1 לכל x_i $(2 \leq i \leq k)$ ונקבל את אי השוויון: $x_1 + x_2 + \cdots + x_k \leq n - 2k + 1$ כאשר: $x_i \geq 0$ עבור $1 \leq i \leq k$. נוסיף משתנה נוסף ונגיע למשוואה: $x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n - 2k + 1$ ומספר הפתרונות הוא: $\binom{n-2k+1+k+1-1}{k+1-1}$ ($n - 2k + 1$ כדורים זהים ל $k + 1$ תאים שונים) ובסה"כ: $\binom{n-k+1}{k}$.