תרגול 3 – הבינום של ניוטון וזהויות – תשובות

1. הוכחה אלגברית:
נשתמש בבינום של ניוטון:
$$2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}*1^{n-k}*1^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$
הוכחה קומבינטורית:
2^n סופר את מספר כל תתי הקבוצות של קבוצה בגודל n.
$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ סופר את מספר תתי הקבוצות בגודל k של קבוצה בגודל n.
ומכיוון ש k מקבל ערכים מ 0 עד n וכל k יוצר קבוצות הזרות אחת לשנייה, הסכום של כולם מונה את מספר כל תתי הקבוצות של קבוצה בגודל n.
2. הוכחה אלגברית:
נשתמש בבינום של ניוטון:
$$0=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}*1^{n-k}*(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}*(-1)^k$$
הוכחה קומבינטורית:
נעביר אגפים ונקבל: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k+1}$, כלומר, מספר תתי הקבוצות עם מספר איברים זוגי מתוך קבוצה בגודל n שווה למספר תתי הקבוצות עם מספר אי זוגי של איברים מתוך קבוצה בגודל n.
מכיוון שמספר כל תתי הקבוצות (זוגיים ואי זוגיים) הוא $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ אז לפי שאלה 1, מספיק להוכיח ש: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{2k}=2^{n-1}$ (כי אם מספר הזוגיים והאי זוגיים שווה וסכומם הוא 2^n אז כמות האיברים רק בזוגיים הוא חצי מהכמות הזו). צד שמאל סופר את מספר תתי הקבוצות הזוגיים של קבוצה בגודל n – $\left(\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots\right)$. צד ימין סופר את מספר תתי הקבוצות של n ללא האיבר האחרון כך: לכל אחת מתתי הקבוצות האלו, אם בחרנו כבר כמות זוגית של איברים אז האיבר האחרון לא ייכנס לקבוצה וקיבלנו קבוצה עם מספר זוגי של איברים, ואם מספר האיברים שבחרנו הוא אי זוגי, נוסיף את האיבר האחרון לקבוצה ושוב קיבלנו קבוצה עם מספר זוגי של איברים וכך למעשה מנינו את כל תתי הקבוצות הזוגיים של קבוצה בגודל n.
3. הוכחה אלגברית:
נתבונן בזהות: $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$, לפי הבינום של ניוטון, נוכל לפתוח סוגריים:
$$\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right]\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\cdots+\binom{n}{n}x^n\right]=\binom{2n}{0}+\binom{2n}{1}x+\binom{2n}{2}x^2+\cdots+\binom{2n}{n}x^n+\cdots+\binom{2n}{2n}x^{2n}$$
אנו רוצים למצוא זהות השווה למקדם של x^n שבצד ימין של השוויון ולכן נתמקד בפתיחת הסוגריים במקדמים שנקבל עבור x^n. ונקבל:

$\binom{n}{0}\binom{n}{n}x^n + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1}x^n + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{0}x^n = \binom{2n}{n}x^n$

נשתמש בזהות: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ונשווה מקדמים:

$\binom{n}{0}\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{n}{n} = \binom{2n}{n}$ ומכאן קיבלנו: $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$

<u>הוכחה קומבינטורית:</u>

נשתמש בזהות: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ונתבונן בביטוי: $\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$

בצד ימין אנו סופרים את מספר האפשרויות לבחור n אנשים מתוך קבוצה של n גברים ו n נשים ללא חזרות ללא חשיבות לסדר.

בצד שמאל אנו בוחרים קודם k גברים מתוך קבוצת הגברים ומשלימים ל n אנשים ע"י בחירה של $n-k$ נשים. k יכול לקבל כל מספר מ 0 עד n (כי ייתכן ולא בחרנו גברים כלל או שכולם גברים או מספר כלשהו בין 0 ל n) ולכן נחבר את כל האפשרויות. קיבלנו שצד ימין של המשוואה וצד שמאל מונים את אותו דבר.

4. <u>הוכחה אלגברית:</u>

$\frac{n!(n-m)!}{m!(n-m)!(k-m)!(n-m-k+m)!} = \frac{n!k!}{k!(n-k)!m!(k-m)!}$ נצמצם:

$\frac{n!}{m!(k-m)!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!m!(k-m)!}$ מש"ל.

<u>הוכחה קומבינטורית:</u>

רוצים לבחור ועד של k אנשים מתוך n מועמדים ואז לבחור m נציגים לוועד מתוך האנשים שנבחרו לוועד. צד שמאל מגדיר את מספר האפשרויות לעשות זאת. בצד ימין בוחרים קודם את m הנציגים לוועד מתוך n המועמדים ואז משלימים את מספר אנשי הוועד ל k ע"י בחירת $k-m$ האנשים מתוך $n-m$ שנשארו.

5. <u>הוכחה קומבינטורית:</u>

רוצים לבחור k אנשים מתוך m גברים ו n נשים. בצד ימין אנו מונים את מספר האפשרויות לעשות זאת (לפי הגדרה). בצד שמאל בוחרים קודם i גברים ומשלימים ל k אנשים ע"י בחירה של $k-i$ נשים. i יכול להיות כל מספר בין 0 ל k ולכן נחבר את האפשרויות. קיבלנו שאנו מונים את אותו דבר בשני צדדי השוויון.

6. <u>הוכחה אלגברית:</u>

$\frac{(2n)!}{2(2n-2)!} = 2 * \frac{n!}{2(n-2)!} + n^2$, נצמצם: $(2n-1)n = (n-1)n + n^2$

ונקבל: $2n^2 - n = 2n^2 - n$.

<u>הוכחה קומבינטורית:</u>

נשתמש בכך ש: $\binom{n}{1} = n$ ונתבונן בביטוי: $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + \binom{n}{1}\binom{n}{1}$

בצד שמאל אנו מונים בחירה של 2 אנשים מתוך n גברים ו n נשים.

בצד ימין אנו מחברים את כל האפשרויות לבחירת האנשים כך: או שנבחרו 2 גברים או שנבחרו 2 נשים או שנבחר גבר אחד ואישה אחת.

7. <u>הוכחה אלגברית</u>:

נוכיח באינדוקציה על n: בסיס האינדוקציה: $n=0$, נקבל:

$1=\binom{k+1}{k+1}=\binom{k}{k}$ ביטוי נכון.

הנחת האינדוקציה:

$\sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{k}=\binom{n+k+1}{k+1}$ מתקיים עד n כלשהו. צ"ל: שהטענה נכונה עבור $n+1$: $\sum_{i=0}^{n+1}\binom{k+i}{k}=\binom{n+k+2}{k+1}$.

נפתח את הסכום: $\sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{k}+\binom{k+n+1}{k}=\binom{n+k+2}{k+1}$ ולפי הנחת האינדוקציה: $\binom{n+k+1}{k+1}+\binom{k+n+1}{k}=\binom{n+k+2}{k+1}$ ומכאן:

$\frac{(n+k+1)!}{(k+1)!n!}+\frac{(n+k+1)!}{k!(n+1)!}=\frac{(n+k+2)!}{(k+1)!(n+1)!}$, מכנה משותף:

$(n+1)(n+k+1)!+(k+1)(n+k+1)!=(n+k+2)!$, נצמצם:

$(n+1)+(k+1)=(n+k+2)$ וקיבלנו ביטוי נכון.

<u>הוכחה קומבינטורית</u>:

בצד ימין אנו מונים את מספר האפשרויות להכניס n כדורים זהים לתוך $k+2$ תאים (לפי ההגדרה – ללא חשיבות לסדר ועם חזרות).

בצד שמאל אנו מונים את מספר האפשרויות להכניס n כדורים זהים לתוך $k+2$ תאים כאשר בראשון יש כבר $n-i$ כדורים. לדוגמא: אם בראשון יש n כדורים אז מספר האפשרויות לפיזור שאר הכדורים הוא 1 ($\binom{k}{k}$) אם בראשון יש $n-1$ כדורים אז מספר האפשרויות לפיזור שאר הכדורים הוא: $\binom{k+1}{k}$. וכו'. מכיוון ש i יכול להיות כל מספר בין 0 ל n, נחבר את כל האפשרויות ואכן 2 צדדי המשוואה מונים את אותו מספר אפשרויות.

8. <u>הוכחה אלגברית</u>:

נתבונן בבינום של ניוטון עבור: $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. נגזור את 2 האגפים לפי x ונקבל: $n(1+x)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k$. נציב $x=1$ ונקבל:

$n\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$.

<u>הוכחה קומבינטורית</u>:

נתבונן בביטוי: $\binom{n}{1}\cdot 2^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$.

בצד ימין אנו מונים את מספר תתי הקבוצות כאשר בוחרים איבר אחד מתוך קבוצה עם n איברים. ואז בונים את כל תתי קבוצות המכילים את אותו איבר שבחרנו. בצד שמאל אנו קודם בונים את כל תתי הקבוצות בגודל k מתוך קבוצה בגודל n ואז בוחרים את האיבר המיוחד מתוך k האיברים שבקבוצה. אכן אנו מונים את אותם אפשרויות ב 2 הצדדים.

9. <u>הוכחה קומבינטורית</u>:

בצד ימין אנו מונים את מספר האפשרויות לחלק $2n$ כדורים שונים ל 2 קבוצות: קבוצה א' וקבוצה ב' (יש חשיבות לשם הקבוצה). לכן לכל כדור יש 2 אפשרויות ובסה"כ: 2^{2n} אפשרויות. בצד שמאל אנו מחלקים את הכדורים ל 2 קבוצות מבלי להחליט מי קבוצה א' ומי קבוצה ב' ולכן נוסיף כדור נוסף שיצביע מי זו קבוצה א' (הקבוצה שהוא יהיה בתוכה). ועכשיו נבחר k כדורים לקבוצה אחת מתוך $2n+1$ הכדורים וממילא ייבחרו $2n+1-k$ הכדורים הנותרים לקבוצה השנייה. k יכול להיות כל מספר בין 0 ל n (לא מעבר ל n כי נקבל כפילויות שהרי אנו לא בוחרים את שם הקבוצה אלא הכדור הנוסף הוא זה שייבחר מי זו קבוצה א'). ומכאן ש 2 הצדדים מונים את אותו דבר.

10. <u>הוכחה אלגברית</u>:

$\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{n(n+1)}{2}$, נצמצם: $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

<u>הוכחה קומבינטורית</u>:

בצד ימין אנו בוחרים 2 אנשים מתוך $n+1$ אנשים ללא חזרות וללא חשיבות לסדר. בצד שמאל אנו בוחרים את 2 האנשים עם חשיבות לסדר – את הראשון מתוך $n+1$ האנשים ואז את השני מ n הנותרים. לבסוף אנו מחלקים בסידור שלהם – !2 כדי להוריד את המניה של חשיבות הסדר וכך אנו למעשה מונים את אותו דבר כמו בצד ימין.

11. הוכחה:

נפתח את הביטוי $\binom{2n}{n-1}$ לפי זהות פסקל - $\binom{2n}{n-1} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-1}{n-2}$,

נמשיך לפתוח את הביטוי $\binom{2n-1}{n-2}$ לפי זהות פסקל:

$\binom{2n-1}{n-2} = \binom{2n-2}{n-2} + \binom{2n-2}{n-3}$ ומכאן: $\binom{2n}{n-1} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-2}{n-2} + \binom{2n-2}{n-3}$,

לאחר $n-1$ צעדים נקבל:

$\binom{2n}{n-1} = \binom{2n-1}{n-1} + \binom{2n-2}{n-2} + \binom{2n-2}{n-3} + \cdots + \binom{n}{0}$ ומכאן נובע השוויון.

(יש להוכיח את הנכונות של המעבר הכללי באינדוקציה).

12. <u>הוכחה אלגברית</u>:

נשתמש בבינום של ניוטון:

$$3^n = (1+2)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^{n-k}\cdot 2^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^k$$

<u>הוכחה קומבינטורית</u>:

בצד ימין אנו מונים את מספר האפשרויות ליצור סדרה באורך n המורכבת מהספרות 0,1,2 בלבד – לכל מקום בסדרה יש 3 אפשרויות ולכן סה"כ יש 3^n אפשרויות.

בצד שמאל אנו בוחרים תחילה את k המקומות בהם יהיו רק הספרות 0,1 וממילא בכל שאר המקומות נשים את 2 - $\binom{n}{k}$. לאחר מכן, בכל אחד מ k המקומות נבחר האם הספרה שנשים תהיה 0 או 1 – ישנם 2 אפשרויות

לכל אחד מ k המקומות – 2^k אפשרויות. k יכול להיות כל מספר בין 0 ל n ולכן סה"כ מספר האפשרויות השונות הוא: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^k$.

13. <u>הוכחה אלגברית:</u>

$\frac{n!}{2!(n-2)!}+\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}=n^2$, נצמצם: $\frac{n\cdot(n-1)}{2}+\frac{(n+1)\cdot n}{2}=n^2$ ומכאן:

$n^2-n+n^2+n=2n^2$ - השוויון מתקיים.

<u>הוכחה קומבינטורית:</u>

הבעיה: מספר האפשרויות לבחור זוג איברים מתוך קבוצה של $n+1$ איברים כאשר אחד האיברים הוא הנציג, בנוסף, ידוע כי האיבר ה $n+1$ אינו יכול להיות נציג.

בצד ימין: נבחר תחילה את הנציג מתוך הקבוצה: $\{1,2,\dots,n\}$ - יש n אפשרויות, לאחר בחירת הראשון, נבחר את השני מתוך הקבוצה: $\{1,2,\dots,n+1\}$ ללא אותו אחד שנבחר – יש n אפשרויות לעשות זאת ולכן סה"כ: n^2 אפשרויות.

בצד שמאל: נפרק למקרים: מקרה א': מספרו הסידורי של הנציג קטן ממספרו הסידורי של השני – נבחר 2 איברים מתוך כלל האיברים: $\binom{n+1}{2}$ - ונבחר את הנציג להיות מי שמספרו הסידורי קטן יותר.

מקרה ב': מספרו הסידורי של הנציג גדול יותר – האיבר $n+1$ אינו יכול להיות נציג ולכן נבחר 2 איברים מתוך ה n - $\binom{n}{2}$ ונבחר את הנציג להיות מי שמספרו הסידורי גדול יותר.

14. <u>הוכחה אלגברית:</u>

$\frac{n}{k}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ - ואכן, השוויון מתקיים.

<u>הוכחה קומבינטורית:</u>

מספר האפשרויות k אנשים מתוך קבוצה של n אנשים.

בצד ימין: לפי ההגדרה של $\binom{n}{k}$.

בצד שמאל: נבחר תחילה איש אחד מתוך n האנשים – n אפשרויות. לאחר מכן, מהנותרים, נבחר את $k-1$ האנשים הנוספים. מכיוון שאין חשיבות לסדר, נפחית את כמות האפשרויות שמנינו – בכל אפשרות כזו, כל אחד מ k האנשים בבחירה היה יכול להיות הראשון ולכן כל אפשרות נמנתה k פעמים ולכן נחלק ב k. מכאן, סה"כ: $\frac{n\cdot\binom{n-1}{k-1}}{k}$.

15. <u>הוכחה אלגברית:</u>

$\frac{(k+1)\cdot(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!}=\frac{(n+1)\cdot n!}{k!(n-k)!}$ - ואכן, השוויון מתקיים.

<u>הוכחה קומבינטורית:</u>

מספר האפשרויות לבחור נציג אחד ו k אנשים ללא חשיבות לסדר מתוך קבוצה של $n+1$ אנשים.

בצד שמאל: נבחר תחילה את הנציג מתוך קבוצת האנשים – $n+1$ אפשרויות, ולאחר מכן, נבחר את k האנשים מתוך ה n הנותרים - $\binom{n}{k}$ אפשרויות ולכן בסה"כ נקבל: $(n+1)\binom{n}{k}$ אפשרויות.

בצד ימין: נבחר תחילה $k+1$ אנשים מתוך הקבוצה – $\binom{n+1}{k+1}$ אפשרויות, ומתוך האנשים שבחרנו, נבחר נציג לקבוצה – $k+1$ אפשרויות, ולכן סה"כ נקבל: $(k+1)\binom{n+1}{k+1}$ אפשרויות.

16. הוכחה אלגברית:

נוכיח באינדוקציה על n. בסיס: $n=m$ (אחרת 2 הצדדים שווים ל 0 לפי ההגדרה) – נקבל: $\binom{m}{m}=\binom{m+1}{m+1}=1$ - מתקיים.

נניח שהטענה נכונה עבור $n\geq m$ כלשהו ונוכיח עבור $n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1-m}\binom{m+k}{m}=\sum_{k=0}^{n-m}\binom{m+k}{m}+\binom{m+n-m+1}{m}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-m}\binom{m+k}{m}+\binom{n+1}{m}=\binom{n+1}{m+1}+\binom{n+1}{m}=\binom{n+2}{m+1}$$

כאשר השוויון ה 3 הוא לפי הנחת האינדוקציה והאחרון הוא לפי זהות פסקל. מש"ל.

הוכחה קומבינטורית:

בדומה לשאלה 7 רק עם $m+2$ תאים ו $n-m$ כדורים.

17. הוכחה אלגברית:

נוכיח באינדוקציה על n. בסיס: $n=0$ - נקבל: $0=1!-1$ - מתקיים.

נניח שהטענה נכונה עבור n כלשהו ונוכיח עבור $n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1}k\cdot k!=\sum_{k=0}^{n}k\cdot k!+(n+1)\cdot(n+1)!=$$

$$(n+1)!-1+(n+1)\cdot(n+1)!=(n+1)!\cdot[n+1+1]-1=$$

$$(n+1)!\,(n+2)-1=(n+2)!-1$$

כאשר השוויון ה 2 הוא לפי הנחת האינדוקציה. מש"ל.

הוכחה קומבינטורית:

מספר האפשרויות לסדר את איברי הקבוצה $\{1,2,\dots,n+1\}$ בשורה ללא המקרה בו כל האיברים מסודרים בסדר עולה.

צד ימין: נמנה את כל האפשרויות לסדר $n+1$ איברים שונים בשורה – $(n+1)!$ ונחסיר את האפשרות בה כל הסדרה ממוינת – אפשרות אחת.

בצד שמאל: נמנה את כל הסידורים בהם האיבר ה $k+1$ מהסוף הורס את הסדר, כלומר, עד האיבר ה $n+1-k-1$ הסדרה ממוינת בסדר עולה. לאיבר במיקום ה $k+1$ מהסוף יש k אפשרויות (כל ה $k+1$ הנותרים למעט האיבר שמקומו הסידורי נמצא שם). לאחר בחירה זו, נמנה את כל האפשרויות לסדר את כל הנותרים בהמשך – $k!$ ולכן סה"כ: $k\cdot k!$.

הפרמטר k יכול להיות כל מספר בין 1 ל n ולכן סה"כ נקבל: $\sum_{k=0}^{n}k\cdot k!$ אפשרויות. ($k=0$ - אינו שייך לסכום).

18. <u>הוכחה אלגברית</u>:

$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} \le \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \cdot \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$, נצמצם:

$\frac{1}{k(n-k)} \cdot \frac{1}{k(n-k)} \le \frac{1}{(n-k)(n-k+1)} \cdot \frac{1}{(k+1)\cdot k}$, נכפול ונעביר אגפים:

$k^2(n-k)^2 \le k(k+1)(n-k)(n-k+1)$, ומכאן:

$kn - k^2 = k(n-k) \le (k+1)(n-k+1) = kn - k^2 + n + 1$

מתקיים. מש"ל.