תורות ומודלים

אוצר מילים:
$L = \{0,+,g\}$. הסימנים הם חסרי משמעות עד שלא מגדירים אותם.

מבנה/מודל:
$M =< N, 0,+, g(x) = x + 1 >$.

פסוק:
ביטוי של $True/False$ שאין לו משתנים חופשים (כולם עם כמתים) המשתמש רק בסימנים מאוצר המילים.
$\forall x \exists y(0 + x = g(y))$

תורה:
קבוצת פסוקים באוצר המילים L.
יכולה להיות קבוצה ריקה/אינסופית/סופית.

תורה של מבנה: קבוצת כל הפסוקים באוצר המילים המתקיימים במבנה.
תורה אינסופית בהכרח המכילה את כל הפסוקים בעולם שהמבנה מקיים. (כמובן מדובר בפסוקים שמורכבים מסימנים מאוצר המילים)

תורה עיקבית: תורה שיש מבנה באותו אוצר מילים שמקיים את כל הפסוקים בה.
כדי להוכיח שתורה היא עיקבית: נותנים מבנה ספציפי שמקיים את כל הפסוקים בתורה או משתמשים במשפט הקומפקטיות.

תורה של מבנה -
תמיד אינסופית
תמיד עיקבית (כי המבנה שלה מקיים אותה)

תורה עיקבית -
לא חייבת להיות אינסופית
יש מבנה שמקיים אותה, אבל ייתכנו פסוקים נוספים שהמבנה מקיים והם לא בתורה.

כדי להוכיח שתורה לא עיקבית. צריך למצוא בתוך התורה 2 פסוקים (או יותר) שסותרים זה את זה תמיד (לא משנה מהו המבנה).
$T = \{A , B , A \rightarrow \neg B\}$

העשרה של אוצר המילים:
הוספת סימנים חדשים לאוצר מילים קיים.
$L^+ = L \cup \{....\}$

מודל העשרה של מבנה M:
יש אוצר מילים L, המבנה M מפרש את L.
אחרי זה מגדירים אוצר מילים חדש L^+ עם תוספת של סימנים נוספים.

אם יש לתורה מבנה **שלא משנה שום דבר ב M אלא רק מוסיף פירוש לסימנים החדשים** אז נקרא לו מודל העשרה.

אם לא אפשרי לקיים את התורה עם הסימנים הישנים אלא צריך לשנות משהו (חוץ ממה שצריך להוסיף) אז זה כבר **לא העשרה** (גם אם מוסיפים את הסימנים החדשים)

משפט הקומפקטיות: בא לעזור להוכיח שתורה היא עיקבית מתי שלא מצליחים למצוא מודל העשרה.
המשפט אומר: תורה היא עיקבית אם ורק אם כל תת קבוצה סופית שלה עיקבית.
במילים אחרות, במקום לנסות להוכיח שיש מבנה שמקיים את כל התורה בבת אחת, מספיק להראות שלכל קבוצה קטנה וסופית של פסוקים אפשרי למצוא מבנה שיקיים רק את הכמות המצומצמת.

תרגיל 5 ממבחן 2020 ב' מועד א'
$X = \{\{0\}, \{1\}, ..., \{0,1\}, \{0,1,2\}, ...\}$
S^* - יחס שאומר שכדי ש (A,B) יקיים את היחס, צריך שלכל איבר ב A יהיה איבר ב B גדול ממנו.
$L = \{S, C_A : A \in X\}$
$M =< X, S^*, C_A = A : A \in X >$.
$T = Th(M)$.
$L^+ = L \cup \{d\}$.
T_1, T_2, T_3 תורות ב L^+.

סדר פעולות: מסתכלים על הפסוקים שיש בתורה ומפרשים את הסימנים לפי M (המבנה הישן) כי הוא כבר מקיים את T:
נתחיל מ T_1: לכל $A \in X$. לכל $a \in A$ קיים $b \in d$ כך ש: $a < b$.
לא ייתכן שיש d אחד קבוע לכולם כי אם לדוגמא: $d = \{100, 200, 300\}$ אז $A = \{400\}$ לא ייתקיים.
מסקנה - אין מודל העשרה.

המשך סדר פעולות: אחרי שגילינו שלא ניתן למצוא מודל העשרה (לא 2)
מנסים להעזר במשפט הקומפקטיות. שואלים, אם כמות הפסוקים הייתה מוגבלת למספר סופי, האם עכשיו היה אפשר למצוא d כזה.
$A_1 = \{1,\ 4,\ 90\},\ A_2 = \{77\},\ A_3 = \{4, 56, 100\},\ d = \{101\}$
לכן המסקנה היא שהתשובה היא (3).

נעבור ל T_2: לכל $B \in X$. לכל $a \in d$ קיים $b \in B$ כך ש: $a < b$.
לא ייתכן שיש d כזה כי אפילו אם $d = \{0\}$ זה לא ייתקיים עבור: $B = \{0\}$ כי $0 < 0$ לא מתקיים.
מסקנה - אין מודל העשרה.

גם אם נגביל את כמות הפסוקים לסופית עדיין אם אחת מהקבוצות הסופיות תהיה $B = \{0\}$ לא קיים d שיקיים את זה.
לכן המסקנה היא שהתשובה היא (1). לא עיקבית.
$\forall x(\neg S(x, c_{\{0\}}))$ סותר את $S(d, c_{\{0\}})$.

נעבור ל T_3: לכל $\{0, 1, ..., 100\} \subseteq B$. קיים $a \in d$ לכל $b \in B$ כך ש: $a \geq b$.
עבור $d = \{101\}$ זה מתקיים. המודל העשרה: $M^+ =< X, S^*, c_A = A : A \in X, d = \{101\} >$

לכן המסקנה היא שהתשובה היא (2).