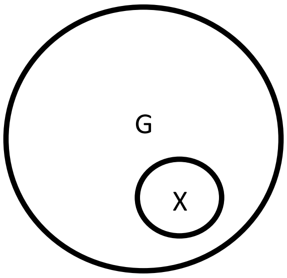
בס"ד



תת חבורה קטנה שמכילה קבוצה

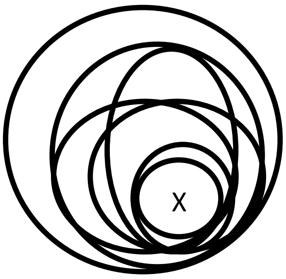
אינטואיציה: יש לנו חבורה G ובה קבוצה X.

רוצים למצוא תת-חבורה קטנה ככל האפשר,

שמכילה את X (G עצמה מכילה את X, אבל

אולי אפשר למצוא תת חבורה קטנה יותר).

לכן, נבצע את הטכניקה הבאה (מאוד סטנדרטית במתמטיקה):



ניקח את כל תתי החבורות שמכילות את X, וניקח את החיתוך

של כולן שגם הוא יוצא תת חבורה (מהמשפט הקודם), והוא התת חבורה

הקטנה ביותר שמכילה את X, שכן כל תת חבורה אחרת שמכילה את X

הייתה בחיתוך, ורק (אולי) הורדנו ממנה איברים.

<u>הגדרה</u>: תהי G חבורה ותהי $X \subset G$ תת קבוצה. נאמר כי $X \subset H \leq G$ היא התת-חבורה הקטנה ביותר של G המכילה את X, אם לכל $X \subset S \leq G$ מתקיים $H \leq S$.

כלומר: התת-חבורה הכי קטנה שמכילה קבוצה X היא H אם כל תת-חבורה אחרת S שמכילה את X מכילה את H כתת-חבורה.

לאחר שהגדרנו את המושג, עלינו להוכיח שקיימת H כזו.

<u>טענה</u>: תהי G חבורה, $X \subset G$ תת קבוצה. אז יש תת-חבורה קטנה ביותר של G שמכילה את X.

<u>הוכחה</u>: נסמן $S' = \{S \,|X \subset S \leq G\}$ אוסף תת החבורות של G המכילות את X. כי $S' \neq \phi$. $G \in S'$. תהי $H = \bigcap_{S \in S'} S$. אזי לפי הטענה שהוכחנו (חיתוך תתי חבורות הוא תת חבורה) מתקיים $H \leq G$, וברור כי $X \subset H$.

קיבלנו כי H הינה תת חבורה של G המכילה את X, ובנוסף כל תת חבורה של G המכילה את X כבר נמצאת ב-S' ולכן $H \leq S$, ולכן H היא התת חבורה הקטנה ביותר של G המכילה את X.

<u>מחלקת צמידות</u>:

<u>הגדרה</u>: תהי G חבורה, $H \leq G$ תת חבורה. יהי $g \in G$. הקבוצה

$$gHg^{-1} = \{ghg^{-1}|h \in H\}$$

נקראת *מחלקת הצמידות* של H ב-G.

אוניברסיטת אריאל

<u>דוגמה</u>: נתבונן בחבורה החיבורית של Z_6 ותהי $\{[0],[2],[4]\} = H \subset Z_6$. נסמן בקיצור $H = \{0,2,4\}$.

נבחר $g = 1$ ולכן $g^{-1} = 5$.

$$gHg^{-1} = 1 + H + 5 = \{1+0+5, 1+2+5, 1+4+5\} = \{0,2,4\}$$

קיבלנו שוב את H משום ש-Z_6 קומוטטיבית. אם היינו עושים הצמדה ל-H בחבורה לא קומוטטיבית, לא בהכרח היינו מקבלים שוב את H.

<u>טענה</u> (מחלקת הצמידות של תת-חבורה היא תת-חבורה):

תהי G חבורה, $H \leq G$ תת-חבורה, $g \in G$. אזי $gHg^{-1} \leq G$.

<u>הוכחה</u>: נראה כי יש סגירות לפעולה ולהפכי:

א. סגירות- ניקח $gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1} \in gHg^{-1}$ ($h_1, h_2 \in H$). אז

$$(gh_1g^{-1})(gh_2g^{-1}) = gh_1g^{-1}gh_2g^{-1} = g(h_1h_2)g^{-1} \in gHg^{-1}$$

שכן $h_1h_2 \in H$ מסגירות של H בתור תת-חבורה.

ד. קיום הופכי- יהי $ghg^{-1} \in gHg^{-1}$ עבור $h \in H$. היות ו-H סגורה להופכי, נובע כי $h^{-1} \in H$. נטען כי ההופכי של ghg^{-1} הוא $gh^{-1}g^{-1} \in gHg^{-1}$:

$$(ghg^{-1})(gh^{-1}g^{-1}) = g(hg^{-1}gh^{-1})g^{-1} = g(heh^{-1})g^{-1} = geg^{-1} = e \in gHg^{-1}$$

$$(gh^{-1}g^{-1})(ghg^{-1}) = g(h^{-1}g^{-1}gh)g^{-1} = g(h^{-1}eh)g^{-1} = geg^{-1} = e \in gHg^{-1}$$

אמנם אין בכך צורך פורמלי, אך כדאי לשים לב לאופן בו מתקיימות שתי האקסיומות הנוספות:

ב. אסוציאטיביות- בירושה מ-G כי $gHg^{-1} \subset G$.

ג. קיום ניטרלי- משום ש-H תת-חבורה נובע $e \in H$ ולכן $e = geg^{-1} \in gHg^{-1}$.