©צוות קורס "תורת המספרים האלגוריתמית" סמסטר א תשף:

בר אלון, מיכאל טוויטו , שמואל שמעוני, צבי מינץ, דורון מור, איבראהים שאהין,

מיכאל פרי, חיה קלר, אלעד אייגנר-חורב.

נכתב ע"י צבי מינץ, נערך ע"י איבראהים שאהין.

תרגול 2

תרגילי כיתה:

התרגיל הבא מדגים עקרון חשוב, עקרון זה מראה שלפעמים נצטרך להוכיח טענה חזקה יותר מאשר הטענה המקורית.

ניסיון ראשון:

תרגיל 1: הוכיחו כי

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \le 2$$

ההוכחה הינה באינדוקציה על n.

בסיס: עבור $n = 1$ נקבל כי $\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i^2} = 1 \le 2$, ואכן הטענה מתקיימת עבור $n = 1$.

צעד: נניח כי הטענה נכונה עבור $n \ge 1$ כלשהו ונשקול את הטענה הבאה עבור $n + 1$, יש להוכיח כי:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} \le 2 .$$

לפי הנחת האינדוקציה מתקיים ש $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \le 2$, אם כך נוכל לרשום כי:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + \left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \le 2 + \left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) .$$

כעת "נתקענו", שכן לא הצלחנו להוכיח כי $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} \le 2$.

אנו שמים לב כי הבעיה הינה שלא "השארנו מקום" עבור הגורם $\frac{1}{(n+1)^2}$ בהנחת האינדוקציה.

ננסה אם כן להוכיח את הטענה שוב, אלא שהפעם ננסה להוכיח <u>טענה חזקה יותר</u>.

במקום להוכיח כי $\forall n \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \le 2$

נוכיח כי:

טענה:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \le 2 - \frac{1}{n} .$$

בר אלון, מיכאל טוויטו , שמואל שמעוני, צבי מינץ, דורון מור, איבראהים שאהין,

מיכאל פרי, חיה קלר, אלעד אייגנר-חורב.

נכתב ע"י צבי מינץ, נערך ע"י איבראהים שאהין.

הוכחה:

בסיס: עבור $n = 1$ נשים לב כי:

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i^2} = 1 \leq 2 - \left(\frac{1}{1}\right) = 1 .$$

ואכן הטענה מתקיימת עבור $n = 1$.

צעד: נניח כי הטענה נכונה עבור $n \geq 1$ כלשהו ונשקול את הטענה עבור $n + 1$, נרצה להוכיח כי:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1} .$$

לפי הנחת האינדוקציה מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 2 - \frac{1}{n} .$$

ולכן נקבל כי:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} .$$

על מנת לסיים יש להראות ש:

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1} .$$

כלומר:

$$\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} = \frac{\mathrm{n}+2}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n} .$$

נשים לב כי $n(n+2) = n^2 + 2n$ בעוד ש $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

נכפיל ב$n(n+1)^2$ ונקבל

$$n(n+2) = n^2 + 2n \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

נחסר $n^2 + 2n$ ונקבל:

$$0 < 1$$

ואם כך האי-שוויון האחר מתקיים בטענה ■ .

כעת משראינו הוכחה לטענה נשאל באשר ל"תפקידו" של המספר 2 בהוכחה. אנו שמים לב שהוא פשוט התבטל בשלב מסוים. דבר זה גורם לנו אולי לתהות שנוכחותו של 2 אולי שרירותית.
האם ניתן, למשל, להחליף את 2 במספר קטן יותר?
הבה ננסה להוכיח את הטענה הבאה:

ננסה להוכיח כי

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+: \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

עבור צעד האינדוקציה נקבל:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + \left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \leq 1 - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \leq 1 - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

אז בשלב זה אנו עשויים להאמין כי החלפת 2 ב-1 אפשרית. עם זאת, העובדה שאנו יכולים להוכיח את צעד האינדוקציה חסרת משמעות אלא אם כן נמצא n כלשהו ממנו נוכל להתחיל.

אולם, לא נוכל למצוא n שכזה. היות ולכל $n \in \mathbb{Z}^+$ *מתקיים* $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} \geq 1$ זאת היות והאיבר הראשון הינו 1.

בר אלון, מיכאל טוויטו , שמואל שמעוני, צבי מינץ, דורון מור, איבראהים שאהין,

מיכאל פרי, חיה קלר, אלעד אייגנר-חורב.

נכתב ע"י צבי מינץ, נערך ע"י איבראהים שאהין.

מספרי פיבונאצ'י

אחת הסדרות המפורסמות ביותר קרויה על שמו של פיבונאצ'י, לאחר שהופיעה בספרו ב-1202. פיבונאצ'י התמודד עם הבעיה הבאה, הקשורה לארנבים. זוג ארנבים, אחד מכל מין, היו על אי. בהנחה כי ארנבים לא ממליטים עד שהם בני חודשיים, ונניח כי מגיל חודשיים כל זוג ממליט זוג טוב מדי חודש.

כמה זוגות ארנבים יהיו אחרי n חודשים?

נציין ב- f_n את מספר זוגות הארנבים שהיו על האי לאחר n חודשים. אז $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ היות ואנחנו צריכים לחכות חודשיים עבור ההמלטה הראשונה. בחודש השלישי יש לנו שני זוגות משום שהזוג הראשון חיכה חודשיים ועכשיו המליט ולכן $f_3 = 2$, ובאופן כללי יותר $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ בגלל שעבור כל זוג שזה עתה נולד עלינו לחכות חודשיים.

סדרת פיבונאצ'י מוגדרת באופן הבא:

$$f_1 = 1$$
$$f_2 = 1$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} , \forall n \geq 3$$

כלומר מנוסחת הנסיגה נקבל את הסדרה הבאה:

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144 \ldots.$$

סדרת פיבונאצ'י **<u>המורחבת</u>** מוגדרת באופן הבא:

$$f_0 = 0$$
$$f_1 = 1$$
$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} , \forall n \geq 2$$

כלומר מנוסחת הנסיגה נקבל את הסדרה הבאה:

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144 \ldots$$

נשים לב שבסדרה זו f_0 מוגדר.

©צוות קורס "תורת המספרים האלגוריתמית" סמסטר א תשף:

בר אלון, מיכאל טוויטו , שמואל שמעוני, צבי מינץ, דורון מור, איבראהים שאהין,

מיכאל פרי, חיה קלר, אלעד אייגנר-חורב.

נכתב ע"י צבי מינץ, נערך ע"י איבראהים שאהין.

<u>תרגיל 2:</u> הוכיחו כי

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ : \sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$$

<u>הוכחה:</u>

<u>בסיס:</u> עבור $n = 1$ נקבל ש $f_1 = 1$ ו $f_{1+2} - 1 = f_3 - 1 = 2 - 1 = 1$, ואכן הטענה מתקיימת עבור $n = 1$.

<u>צעד:</u> נניח כי הטענה נכונה עבור $n \geq 1$ כלשהו, כלומר לפי ההנחה מתקיים:

$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{n+2} - 1$.

נוכיח כי הטענה נכונה עבור $n + 1$ כלומר:

$\sum_{i=1}^{n+1} f_i = f_{n+3} - 1$.

נשים לב כי:

$\sum_{i=1}^{n+1} f_i = \sum_{i=1}^{n} f_i + f_{n+1} = f_{n+2} - 1 + f_{n+1} = f_{n+3} - 1$.

מכאן הטענה נובעת ■ .

<u>תרגיל 3:</u> הוכיחו כי $\forall n > 5 : f_n = 5f_{n-4} + 3f_{n-5}$.

נשים לב כי:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} = 2f_{n-2} + f_{n-3} = 3f_{n-3} + 2f_{n-4} = 5f_{n-4} + 3f_{n-5}$$

<u>תרגיל 4:</u> הוכיחו כי $\forall n \geq 11$ מתקיים $f_n < 2^{n-4}$.

<u>ההוכחה הינה באינדוקציה חזקה על n</u>

<u>בסיס:</u> עבור שלב הבסיס נבדוק את הטענה עבור $n = 11$ ועבור $n = 12$. נקבל כי עבור $n = 11$

$f_{11} = 89 < 2^{11-4} = 128$.

עבור $n = 12$ נקבל כי:

$f_{12} = 144 < 2^{12-4} = 256$.

<u>צעד:</u> עבור $n \geq 13$ נניח כי $f_k < 2^{k-4}$ עבור כל $11 \leq k \leq n - 1$.

לפי הגדרת פיבונאצ'י נקבל $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

ההנחה של האינדוקציה החזקה מאפשרת לנו להציב גם עבור f_{n-1} וגם עבור f_{n-2}. לכן נקבל:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \underset{\uparrow}{<} 2^{n-5} + 2^{n-6} = 2^{n-6} \cdot (2 + 1) < 2^{n-6} \cdot 2^2 = 2^{n-4}$$

(הנחה חזקה)

ומכאן הטענה נובעת.■

בר אלון, מיכאל טוויטו , שמואל שמעוני, צבי מינץ, דורון מור, איבראהים שאהין,
מיכאל פרי, חיה קלר, אלעד אייגנר-חורב.
נכתב ע"י צבי מינץ, נערך ע"י איבראהים שאהין.

תרגילי בית:

שאלה: מהו הפתרון של המשוואה:
$.a^2 - a - 1 = 0$

תרגיל 1: יהי $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398875$ אזי: $\forall n \geq 3 : f_n > a^{n-2}$

ההוכחה היא באינדוקציה על n.

בסיס: עבור שלב הבסיס נבדוק את הטענה עבור $n = 3$ ועבור $n = 4$. נקבל כי עבור $n = 3$
$f_3 = 2 > a^{3-2} = a$, עבור $n = 4$ נקבל כי $f_4 = 3 > a^{4-2} = a^2 \approx 2.61803398875$.

צעד: נניח כי הטענה נכונה לכל $4 < k < n$. לפי ההנחה מתקיים ש $f_k > a^{k-2}$ עבור
$3 \leq k < n$ נוכיח כי הטענה נכונה עבור n.

לפי הנחת האינדוקציה נקבל ש:

$$.f_n = f_{n-1} + f_{n-2} > a^{n-3} + a^{n-4}$$

אנחנו רוצים להראות ש:

$$.a^{n-3} + a^{n-4} \geq a^{n-2}$$

על מנת לסיים נציין ש:

$$.a^{n-3} + a^{n-4} = (a+1)a^{n-4}$$

נשים לב כי $(a+1) = a^2$, היות ואכן a הוא פתרון למשוואה $a^2 - a - 1 = 0$ נקבל ש:

$$.(a+1)a^{n-4} = \mathrm{a}^2 \cdot a^{n-4} = a^{n-2}$$

ומכאן הטענה נובעת ■ .

<u>תרגיל 2:</u> הוכיחו כי

$$\forall n \geq 1 : \ 2 \cdot 5^n \leq 4^n + 6^n$$

<u>ההוכחה הינה באינדוקציה על n.</u>

<u>בסיס:</u> נבדוק שהטענה נכונה עבור $n = 1$. אכן מתקיים כי $2 \cdot 5^1 \leq 4^1 + 6^1$

<u>צעד:</u> נניח כי הטענה נכונה עבור $n \in \mathbb{N}$ כלשהו כלומר $2 \cdot 5^n \leq 4^n + 6^n$ ונוכיח כי הטענה נכונה עבור $n + 1$.

כלומר צ"ל כי:

$$2 \cdot 5^{n+1} \leq 4^{n+1} + 6^{n+1} .$$

נסתכל על צד שמאל של המשוואה, ידוע כי:

$$2 \cdot 5^{n+1} \leq 2 \cdot 5 \cdot 5^n \leq 5(4^n + 6^n).$$

$$\leq 5 \cdot 4^n + 5 \cdot 6^n = 4^{n+1} + 6^{n+1} + 4^n - 6^n$$

$$\leq 4^{n+1} + 6^{n+1}$$

<u>תרגיל 3:</u> נגדיר את הסדרה הבאה:

$$a_0 = 1, a_n = 5a_{n-1} + 4 , \forall n \geq 1$$

הוכיחו כי $a_n \leq 5^{n+1}$ *עבור כל* $n \in \mathbb{Z}^+$.

נוכיח טענה חזקה יותר.

נוכיח כי $a_n \leq 5^{n+1} - 1$.

<u>ההוכחה הינה באינדוקציה על n.</u>

<u>בסיס:</u> נבדוק שהטענה נכונה עבור$\mathrm{n} = 1$.

$$a_1 = 5a_0 + 4 = 5 + 4 = 9 \leq 5^2 - 1 = 24.$$

<u>צעד:</u> נניח כי הטענה נכונה עבור n כלשהו כלומר מתקיים:

$$a_n \leq 5^{n+1} - 1 .$$

ונוכיח כי הטענה עבור $\mathrm{n} + 1$. כלומר צ"ל כי

$$a_{n+1} \leq 5^{n+2} - 1.$$

נשים לב כי לפי ההגדרה $a_n = 5a_{n-1} + 4$.

לפי הנחת האינדוקציה ידוע כי

$$a_n \leq 5^{n+1} - 1$$

ולכן מתקיים:

$$a_{n+1} = 5a_n + 4 \leq 5(5^{n+1} - 1) + 4 = 5^{n+2} - 1$$

ולכן לפי משפט האינדוקציה הטענה נכונה לכל $n \in \mathbb{Z}^+$.