

מבחן בקורס הסתברות 1

סמסטר ב' 2017

מבחן לדוגמה

פרופ' דן חפץ

אוניברסיטת אריאל

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה למדעי המחשב

משך הבחינה: 3 שעות

המבחן הינו עבור מספרי קורס: 1-7028410-2

מבנה המבחן: 4 שאלות ללא בחירה.

הנחיות:

1. המבחן הינו עם חומר סגור ובכתב יד ללא שימוש בשום אמצעי אלקטרוני (מותר מחשבון פשוט אם כי אין בו צורך). עם זאת, כל סטודנט רשאי להביא דף אחד מגודל A4 כתוב משני צדדיו. על התלמיד לכתוב את שמו ומספר תעודת הזהות שלו על הדף הנ"ל.
2. אין לכתוב בעפרון.
3. יש להוכיח כל טענה שאתם כותבים גם אם לא התבקשתם לעשות זאת במפורש בשאלה.
4. ניתן להסתמך ללא הוכחה על כל טענה שנלמדה בשיעור (אלא אם כן זו הטענה שהנכם מתבקשים להוכיח בשאלה). יש לצטט את הטענה עליה הנכם מסתמכים בצורה ברורה.

שאלה 1 (25 נקודות):

- יהיו X_1, X_2 משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה על הקבוצה $\{-1, 0, 1\}$.
- א. (12 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של $Y := X_1 + X_2$ ו- $Z := X_1^2 + X_2^2$.
- ב. (8 נקודות) חשבו את ההתפלגויות השוליות של Y ושל Z .
- ג. (5 נקודות) האם Y ו- Z בלתי תלויים?

שאלה 2 (25 נקודות):

- יהי $0 < p < 1$ ויהי $X \sim \text{Geom}(p)$ משתנה מקרי בעל התפלגות גיאומטרית.
- א. (8 נקודות) הוכיחו שלכל שלם אי שלילי k מתקיים $P(X > k) = (1 - p)^k$.
- ב. (10 נקודות) הוכיחו שלכל שלם אי שלילי n ושלם חיובי k מתקיים
- $$P(X = n + k | X > n) = P(X = k)$$
- ג. (7 נקודות) חשבו את התוחלת והשונות של $Y := \frac{pX-1}{\sqrt{1-p}}$.

שאלה 3 (25 נקודות):

- מטילים קובייה הוגנת שוב ושוב עד הפעם הראשונה שמתקבלת התוצאה 6 (ההטלות בלתי תלויות). יהי N מספר ההטלות הכולל ויהי X מספר ההטלות בהן התקבלה התוצאה 1.
- א. (5 נקודות) חשבו את $E(N)$.
- ב. (7 נקודות) האם X ו- N בלתי תלויים?
- ג. (13 נקודות) חשבו את $E(X)$.

שאלה 4 (25 נקודות):

- א. (7 נקודות) יהי Y משתנה מקרי בעל תוחלת סופית שאינה 0. חשבו את $\rho(Y, 10 - Y)$.
- ב. (18 נקודות) מטילים קובייה הוגנת 420 פעם כאשר כל ההטלות הן בלתי תלויות. נסמן ב- X את סכום תוצאות כל ההטלות הנ"ל. השתמשו באי שוויון צ'בישב כדי להוכיח ש-
- $$P(1400 < X < 1540) \geq 3/4$$