©צוות קורס "תורת המספרים האלגוריתמית" סמסטר א תש"ף:
בר אלון, מיכאל פרי, שמואל שמעוני, איברהים שאהין, דורון מור, ד"ר חיה קלר, ד"ר אלעד אייגנר-חורב. נכתב ע"י צבי מינץ, נערך על ידי מיכאל פרי.

אינדוקציה

התרגילים הבאים מהווים דוגמאות של תרגילים שאנשי מדעי המחשב נתקלים בהם בעת בואם לנתח את "העלות" של לולאות בקוד שלהם.

המשמעות של "עלות" תוסבר בהמשך הקורס.

לפנינו משוואות שעלינו להוכיח את נכונותן.

בהרצאה למדנו על מספר שיטות הוכחה כגון: עקרון הסדר הטוב (W.O.P), אינדוקציה חלשה ואינדוקציה חזקה ובהרצה הבאה תוכיחו את שקילותם.

<u>תרגיל 1:</u> הוכיחו כי $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ מתקיים ש

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

<u>הוכחה באמצעות אינדוקציה חלשה:</u> תהי $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ קבוצת כל המספרים השלמים n אשר מקיימים

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

נרצה להראות כי:

i. $1 \in S$
ii. אם $k \in S$ אז גם $k+1 \in S$

<u>בסיס:</u> עבור $n = 1$ נקבל כי

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(2+1)(1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

ולכן $1 \in S$.

<u>צעד:</u> נניח כי הטענה נכונה עבור $1 \leq k \in S$:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6}$$

ונראה כי $k+1 \in S$, כלומר נראה כי (לכאן נרצה להגיע):

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = (k+1)\frac{(2k+3)(k+2)}{6}$$

<u>השלבים:</u>

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2$$
$$= \frac{(k+1)(2(k+1)+1)\big((k+1)+1\big)}{6}$$
$$= (k+1)\frac{(2k+3)(k+2)}{6}$$

לפי הנחת האינדוקציה ש- $k \in S$ ידוע לנו כי:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6}$$

ולכן:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \sum_{i=1}^{k} i^2 + (k+1)^2 = \frac{k(2k+1)(k+1)}{6} + (k+1)^2$$

נשים לב כי

$$\frac{k(2k+1)(k+1)}{6} + (k+1)^2$$
$$= (k+1)\left(\frac{k(2k+1)}{6} + (k+1)\right)$$
$$= (k+1)\frac{k(2k+1)+6(k+1)}{6}$$
$$= (k+1)\left(\frac{2k^2+7k+6}{6}\right)$$
$$= (k+1)\frac{(2k+3)(k+2)}{6}$$

שזה מה שרצינו להוכיח, בגלל שהקבוצה S מקיימת את (i) ואת (ii) אז $S = \mathbb{Z}^+$ ■

<u>הוכחה באמצעות W.O.P:</u> תהי $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ קבוצת כל המספרים השלמים אשר מקיימים

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

<u>בסיס:</u> עבור $n = 1$ נקבל כי

$$\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(2+1)(1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

ולכן $S \ni 1$ מכאן הקבוצה S אינה ריקה.

נגדיר קבוצה חדשה: תהי $\mathrm{T} \subseteq \mathbb{Z}^+$ קבוצת כל המספרים השלמים אשר אינם מקיימים את המשוואה לעיל.

נניח בשלילה שהקבוצה T אינה ריקה, ומכיוון ש-T מוכלת בעולם של המספרים השלמים החיוביים אז לפי הגדרת $W.O.P$ קיים בו מספר מינימלי, נסמן מספר זה ב-a.

בגלל ש-$1 \in S$ אזי $a > 1$ ולכן $a - 1 \in \mathrm{N}$.

היות ו- $a \in \mathrm{Z}$ ומינימלי ב-T נובע כי $a - 1 \in S$.

משום ש- $a - 1 \in S$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{a-1} i^2 = \frac{a(2a-1)(a-1)}{6}$$

היות ו- $a \in T$ מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{a} i^2 \neq \frac{a(2a+1)(a+1)}{6}$$

אבל נשים לב כי:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{a} i^2 &= \sum_{i=1}^{a-1} i^2 + a^2 \\ &= \frac{a(2a-1)(a-1)}{6} \\ &= \frac{a(2a^2-3a+1)+6a^2}{6} \\ &= \frac{a(2a^2+3a+1)}{6} \\ &= \frac{a(2a+1)(a+1)}{6}\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

וזו סתירה. נובע כי המשוואה נכונה לכל n טבעי ■

<u>תרגיל 2:</u> הוכיחו כי $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ ולכל $-1 < x$ ממשי מתקיים ש

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

בר אלון, מיכאל פרי, שמואל שמעוני, איברהים שאהין, דורון מור, ד"ר חיה קלר, ד"ר אלעד אייגנר-חורב. נכתב ע"י צבי מינץ, נערך על ידי מיכאל פרי.

<u>הוכחה באמצעות אינדוקציה:</u> תהי $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ קבוצת כל המספרים השלמים n אשר מקיימים

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

אנחנו נרצה להראות כי:

i. $1 \in S$

ii. אם $k \in S$ אז גם $k+1 \in S$

<u>בסיס:</u> עבור $n=1$ נקבל כי $1+x \geq 1+x$ אשר מתקיים באופן טריוויאלי ולכן $1 \in S$.

<u>צעד:</u> נניח כי הטענה נכונה עבור $1 \leq k \in S$ ונראה כי $k+1 \in S$. כלומר, נניח כי

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

ונראה כי

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

נבדוק זאת:

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$$

נציב את הנחת האינדוקציה ונקבל:

$$\geq (1+x)(1+nx)$$

$$= 1+\mathrm{nx}+\mathrm{x}+\mathrm{n}x^2$$

$$= 1+x(n+1)+\mathrm{n}x^2$$

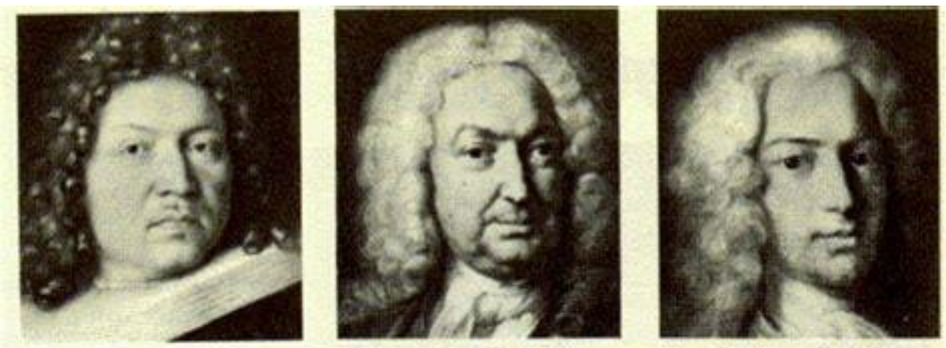
היות ומתקיים $nx^2 \geq 0$ נוכל למחוק אותו, וכך נקבל

$$\geq 1+x(n+1)$$

בגלל שהקבוצה S מקיימת את (i) ואת (ii) אז $S = \mathbb{Z}^+$ ■

למען הסר ספק ולידע הכללי שלכם, כרגע הוכחתם את **אי שוויון ברנולי**.

<u>הידעת:</u> **משפחת ברנולי היינה משפחה סוחרים שוויצרית שגידלה במשך 3 דורות מתמטיקאים מהשורה הראשונה!!**



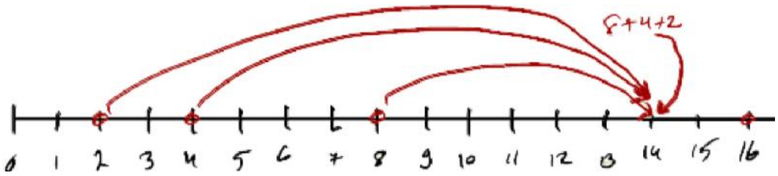
Jakob Bernoulli 1655–1705 | Johann Bernoulli 1667–1748 (a. St.) | Daniel Bernoulli 1700–1782 (a. St.)

<u>תרגיל 3:</u> הוכיחו כי $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ מתקיים ש

$$\sum_{i=1}^{n} 2^i \le 2^{n+1}$$

על מנת להבין טוב יותר את מה שהתבקשנו להוכיח, נסתכל על $n = 3$.

$$\sum_{i=1}^{3} 2^i = 2^1 + 2^2 + 2^3$$
$$= (2+4+8)$$
$$= 14 \le 2^{3+1}$$
$$= 2^4 = 16$$



כעת ניגש להוכחה.

<u>הוכחה:</u>

באינדוקציה על n.

<u>בסיס:</u> עבור $n = 1$ נקבל כי $\sum_{i=1}^{1} 2^i = 2 \le 2^{1+1} = 4$, ואכן הטענה מתקיימת עבור $n = 1$.

<u>צעד:</u> נניח כי הטענה נכונה עבור $n \ge 1$ ונוכיח כי הטענה מתקיימת עבור $n + 1$, כלומר צריך להוכיח כי

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2^i \le 2^{n+2}$$

נשים לב כי :

$$\blacksquare \sum_{i=1}^{n+1} 2^i = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 2^i}_{\text{לפי הנחת האינדוקציה-}\left(\sum_{i=1}^{n} 2^i \le 2^{n+1}\right)} + 2^{n+1} \le 2 \cdot 2^{n+1} = 2^{n+2}$$

עכשיו כשראינו כי $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ מתקיים ש $\sum_{i=1}^{n} 2^i \le 2^{n+1}$, מה אנחנו יכולים לעשות?

מה לגבי לשאול את השאלות הבאות?

1. המספר 1 הוא גם כן חזקה של 2: $2^0 = 1$
אבל הוא לא כלול בסכימה, הרי האינדקס מתחיל מ-1 ולא מ-0 $\left(\sum_{i=1 \leftarrow \text{אינדקס}}^{n} 2^i\right)$

בר אלון, מיכאל פרי, שמואל שמעוני, איברהים שאהין, דורון מור, ד"ר חיה קלר, ד"ר אלעד אייגנר-חורב. נכתב ע"י צבי מינץ, נערך על ידי מיכאל פרי.

האם זה נכון כי $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ מתקיים ש $\sum_{i=0}^{n} 2^i \leq 2^{n+1}$?

נריץ כמה "בדיקות" או "מבחנים":

עבור $n = 0$:
$$1 = \sum_{i=0}^{0} 2^i \leq 2^{0+1} = 2$$

עבור $n = 1$:
$$1 + 2 = \sum_{i=0}^{1} 2^i \leq 2^2 = 4$$

עבור $n = 2$:
$$1 + 2 + 4 = \sum_{i=0}^{2} 2^i \leq 2^3 = 8$$

עבור $n = 3$:
$$1 + 2 + 4 + 8 = \sum_{i=0}^{3} 2^i \leq 2^4 = 16$$

אבל בדיקות אלה הן **<u>לא</u>** הוכחות, אולי ה"בדיקה" הבאה תיכשל? אולי עד $n = 10^6$ הטענה תהיה נכונה אבל עבור $n \geq 10^6 + 1$ הטענה תיכשל?

אז מה נצטרך לעשות? נחזור חזרה להוכחה הקודמת שבה הראנו כי $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ מתקיים ש $\sum_{i=1}^{n} 2^i \leq 2^{n+1}$ וננסה לראות מה אנחנו יכולים לעשות על מנת להתאים את ההוכחה של הטענה הקודמת כדי שזו תתאים לטענה החדשה שלנו.

ההוכחה הקודמת הייתה באינדוקציה על n , אז בואו ננסה זאת. את שלב הבסיס עשינו עם ארבע "בדיקות" כבר, ולכן נתקדם לשלב הצעד.

הנה הטענה שהייתה לנו בעבר

$$\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{n+1} 2^i = \underbrace{\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{n} 2^i}_{\left(\sum_{i=1}^{n} 2^i \leq 2^{n+1}\right)\text{- לפי הנחת האינדוקציה}} + 2^{n+1} \leq 2 * 2^{n+1} = 2^{n+2}$$

כל מה שנצטרך לעשות זה לשנות מ $i = 1$ ל $i = 0$.

$$\sum_{\cancel{i=1}\rightarrow \boldsymbol{i=0}}^{n+1} 2^i = \underbrace{\sum_{\cancel{i=1}\rightarrow \boldsymbol{i=0}}^{n} 2^i}_{\left(\sum_{i=0}^{n} 2^i \leq 2^{n+1}\right)\text{- לפי הנחת האינדוקציה}} + 2^{n+1} \leq 2 * 2^{n+1} = 2^{n+2}$$

ואכן, זה עבד!■

2. עבור השאלה השנייה שלנו, אנו עשויים לתהות עד כמה אנו יכולים "לדחוף" את ההוכחה כדי ליצור אי שוויון חזק יותר.

האם זה נכון ש $\sum_{i=0}^{n} 2^i \leq 2^{n+1} - 2$?

מהבדיקה הקודמת שלנו אנחנו יכולים לדעת שהטענה **__אינה__** נכונה:

$$1+2+4+8=\sum_{i=0}^{3} 2^i = 15 > 2^4 - 2 = 14$$

אז האם זה נכון ש $\sum_{i=0}^{n} 2^i \le 2^{n+1} - 1$?

העובדה שהוכחנו ש $\sum_{i=0}^{n} 2^i \le 2^{n+1}$ לא גוררת את האי-שיוון החדש, שכן יכול להיות שעד n מסויים האי שיוון נכון ומעל n זה הוא אינו נכון.

אז שוב אנחנו חוזרים אל האינדוקציה שלנו, נראה כי הבדיקות שעשינו קודם לכן תומכות בטענה החדשה, בואו נבדוק את שלב הצעד.

$$\sum_{i=0}^{n+1} 2^i = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} 2^i}_{\text{לפי הנחת האינדוקציה החדשה-}(\sum_{i=0}^{n} 2^i \le 2^{n+1}-1)} + 2^{n+1} \le 2 * 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$$

ואכן הצלחנו להוכיח את מה שהיינו צריכים.■

מקווה שלא שכחתם את הכלי המקביל אליו: "עולם הסדר הטוב".

__הוכחה באמצעות W.O.P:__ תהי $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ קבוצת כל המספרים השלמים אשר מקיימים

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i \le 2^{n+1} - 1$$

עבור $n=1$:

$$1+2=\sum_{i=0}^{1} 2^i \le 2^2 = 4$$

ולכן קבוצה S אינה ריקה משום ש- $1 \in S$.

נגדיר קבוצה חדשה: תהי $\mathrm{T} \subseteq \mathbb{Z}^+$ קבוצת כל המספרים השלמים אשר אינם מקיימים את המשוואה לעיל.

נניח בשלילה ש-T אינה ריקה ומכיוון שהיא מוכלת במספרים השלמים החיוביים אז לפי הגדרת $W.O.P$ קיים לה איבר מינימלי וכהרגלינו נסמנו ב-a .

בגלל ש-S $1 \in$ אזי $a > 1$ ולכן $a - 1 \in \mathrm{N}$.

היות ו- $a \in \mathrm{Z}$ ומינימלי ב-T נובע ש: $a - 1 \in S$.

משום ש- $a - 1 \in S$ מתקיים:

$$\sum_{i=0}^{a} 2^i > 2^{a+1} - 1$$

היות ו- $a \in \mathrm{Z}$ מתקיים:

$$\sum_{i=0}^{a-1} 2^i \leq 2^a - 1$$

נשים לב אבל כי:

$$\sum_{i=0}^{a} 2^i = \sum_{i=0}^{a-1} 2^i + 2^a$$

$$\leq 2^a - 1 + 2^a$$

$$= 2^{a+1} - 1$$

כלומר קיבלנו:

$$\sum_{i=0}^{a} 2^i \leq 2^{a+1} - 1$$

<u>וזה בסתירה להנחה בשלילה:</u>

$$\sum_{i=0}^{a} 2^i > 2^{a+1} - 1 \ \blacksquare$$

<u>תרגילי בית:</u>

<u>תרגיל בית 1:</u>

הוכיחו כי $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ מתקיים ש:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

<u>פתרון באמצעות אינדוקציה:</u>

תהי $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ קבוצת כל המספרים השלמים אשר מקיימים

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

אנחנו נרצה להראות כי:

i. $1 \in S$

ii. אם $k \in S$ אז גם $k+1 \in S$

<u>בסיס:</u> עבור $n = 1$ נקבל כי: $1 = 1$ אשר מתקיים באופן טריוויאלי ולכן $1 \in S$.

<u>צעד:</u> נניח כי הטענה נכונה עבור $1 \leq k \in S$ ונראה כי $k + 1 \in S$, כלומר נראה כי:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$$

נבדוק זאת:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} k + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$

$$= \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$$

בגלל שהקבוצה S מקיימת את (i) ואת (ii) אז $S = \mathbb{Z}^+$ ■

<u>פתרון באמצעות W.O.P :</u>

תהי $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ קבוצת כל המספרים השלמים אשר מקיימים

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

קבוצה S אינה ריקה כלומר היא קיימת מכיוון שבאמצעות אינדוקציה חלשה הראינו שהבסיס עובד.

נגדיר קבוצה חדשה: תהי $\mathrm{T} \subseteq \mathbb{Z}^+$ קבוצת כל המספרים השלמים אשר אינם מקיימים את המשוואה לעיל.

נניח בשלילה שT אינה ריקה ומכיוון שהיא מוכלת במספרים השלמים החיוביים אז לפי הגדרת $W.O.P$ קיים לה איבר מינימלי וכהרגלינו נסמנו ב-a .

אם כך אז $a - 1 \in S$ כלומר הוא נמצא בקבוצת הפתרונות שלנו כי $a \in T$.

אנו יודעים לפי ההנחה כי:

$$\sum_{i=1}^{a} i \neq \frac{a(a+1)}{2}$$

וגם:

$$\sum_{i=1}^{a-1} i = \frac{a(a-1)}{2}$$

וכן לפי הנחת האינדוקציה:

$$\sum_{i=1}^{a} i = \sum_{i=1}^{a-1} i + a = \frac{a(a-1)}{2} + a = \frac{a(a+1)}{2}$$

כלומר קיבלנו:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

<u>וזה בסתירה להנחה בשלילה:</u>

$$\sum_{i=1}^{a} i \neq \frac{a(a+1)}{2}$$

ואכן הצלחנו להוכיח את מה שהיינו צריכים.■

<u>תרגיל בית 2:</u>

הוכיחו כי $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ מתקיים ש:

$$\sum_{i=n}^{2n-1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2n}$$

<u>פתרון באמצעות אינדוקציה:</u>

תהי $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ קבוצת כל המספרים השלמים אשר מקיימים

$$\sum_{i=n}^{2n-1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2n}$$

אנחנו נרצה להראות כי:

i. $1 \in S$

ii. אם $k \in S$ אז גם $k+1 \in S$

<u>בסיס:</u> עבור $n = 1$ נקבל כי: $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ אשר מתקיים באופן טריוויאלי ולכן $1 \in S$.

<u>צעד:</u> נניח כי הטענה נכונה עבור $1 \leq k \in S$ ונראה כי $k + 1 \in S$, כלומר נראה כי:

$$\sum_{i=n+1}^{2n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2(n+1)}$$

נבדוק זאת:

$$\sum_{i=n+1}^{2n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=n}^{2n-1} \frac{1}{i(i+1)} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2n(2n+1)} + \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}$$

לפי הנחת האינדוקציה אנו יודעים כי:

$$\sum_{i=n}^{2n-1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2n}$$

לכן:

$$\sum_{i=n+1}^{2n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{2n(2n+1)} + \frac{1}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{2n} - \frac{2n+1}{2n(2n+1)(n+1)}$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1) - 2n - 1}{2n(2n+1)(n+1)}$$

$$= \frac{2n^2 + n}{2n(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2(n+1)}$$

בגלל שהקבוצה S מקיימת את (i) ואת (ii) אז $S = \mathbb{Z}^+$ ■

<u>פתרון באמצעות W.O.P :</u>

תהי $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ קבוצת כל המספרים השלמים אשר מקיימים

$$\sum_{i=n}^{2n-1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2n}$$

קבוצה S אינה ריקה כלומר היא קיימת מכיוון שבאמצעות אינדוקציה חלשה הראינו שהבסיס עובד.

נגדיר קבוצה חדשה: תהי $\mathrm{T} \subseteq \mathbb{Z}^+$ קבוצת כל המספרים השלמים אשר אינם מקיימים את המשוואה לעיל.

בר אלון, מיכאל פרי, שמואל שמעוני, איברהים שאהין, דורון מור, ד"ר חיה קלר, ד"ר אלעד אייגנר-חורב. נכתב ע"י צבי מינץ, נערך על ידי מיכאל פרי.

נניח בשלילה שT אינה ריקה ומכיוון שהיא מוכלת במספרים השלמים החיוביים אז לפי הגדרת $W.O.P$ קיים לה איבר מינימלי וכהרגלינו נסמנו ב-a .

אם כך אז $a-1 \in S$ כלומר הוא נמצא בקבוצת הפתרונות שלנו כי $a \in T$.

אנו יודעים לפי ההנחה כי:

$$\sum_{i=a}^{2a-1} \frac{1}{i(i+1)} \neq \frac{1}{2a}$$

וגם:

$$\sum_{i=a-1}^{2a-3} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2a-2}$$

לכן:

$$\sum_{i=a}^{2a-1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=a-1}^{2a-3} \frac{1}{i(i+1)} - \frac{1}{a(a-1)} + \frac{1}{(2a-2)(2a-1)} + \frac{1}{2a(2a-1)}$$
$$= \frac{1}{2a-2} - \frac{1}{a(a-1)} + \frac{1}{(2a-2)(2a-1)} + \frac{1}{2a(2a-1)} =$$

לפי הנחת האינדוקציה נקבל:

$$\sum_{i=a}^{2a-1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2a-2} - \frac{1}{a(a-1)} + \frac{1}{(2a-2)(2a-1)} + \frac{1}{2a(2a-1)}$$

לאחר מכנה משותף נקבל:

$$\sum_{i=a}^{2a-1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{2a^2-3a+1}{2a(2a-1)(a-1)} = \frac{(a-1)(2a-1)}{2a(a-1)(2a-1)} = \frac{1}{2a}$$

<u>וזה בסתירה להנחה בשלילה:</u>

$$\sum_{i=a}^{2a-1} \frac{1}{i(i+1)} \neq \frac{1}{2a}$$

ואכן הצלחנו להוכיח את מה שהיינו צריכים.■