**אלגברה ליניארית 2 – תרגיל 2.**

**תרגילים מספר של ד"ר בעז צבאן**

## העתקות לינאריות – המשך.

## תרגילים בכיתה:

**1.16 תרגיל**. נקבע מטריצות $A\in\mathbb{F}^{k\times n}, B\in\mathbb{F}^{m\times p}$. הוכח שההעתקה $T:\mathbb{F}^{n\times m}\to\mathbb{F}^{k\times p}$ המוגדרת ע"י $T(X)=AXB$ היא העתקה לינארית. [רמז: נובע מתרגילים קודמים]

**1.20 תרגיל**. יהא $U\subseteq V$ תת מרחב, יהא $W$ מ"ו ותהא $T: W\to V$ העתקה לינארית.
נגדיר $T^{-1}[U]:=\{w\in W : Tw\in U\}$. הוכח ש $T^{-1}[U]$ תת מרחב של $W$.

**1.24 תרגיל** (איזומורפיזם ההצגה לפי בסיס). יהא $V$ מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$. נסמן $n=\dim(V)$, ונקבע בסיס כלשהו $B$ עבור $V$. הוכח שההעתקה $T: V\to\mathbb{F}^n$ המוגדרת על ידי $T(v)=[v]_B$ היא איזומורפיזם (בפרט, $V\cong\mathbb{F}^n$).

**1.28 תרגיל**. נתונה ההעתקה $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת על ידי

$$T(1)=x^2;\ T(x)=2x+3;\ T(x^2)=3x.$$

חשב את $T(f)$ ואת $T^{-1}(f)$ עבור וקטור כללי $f\in\mathbb{R}_2[x]$.

## תרגילים לעבודה עצמית:

**1.18 תרגיל**. נזכור שעבור מטריצה $A$, אנו מסמנים ב $L_A$ את ההעתקה הלינארית של כפל משמאל ב $A$.
הוכח: לכל $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ולכל $f(x)\in\mathbb{F}[x]$ מתקיים $f(L_A)=L_{f(A)}$.

**1.21 תרגיל**. יהיו $D,S$ כנ"ל.

א. הוכח ש $D,S$ העתקות לינאריות.

ב. הוכח: $DS=I$, אבל $SD\neq I$.

ג. האם זה שונה מהידוע לך במטריצות? נסה להציע הסבר.

**1.23 תרגיל**. הוכח שהיחס $V\cong U$ ("$V$ איזומורפי ל $U$") הוא יחס שקילות.

# גרעין ותמונה:

## תרגילים בכיתה:

**2.3 תרגיל**. תהא $T: V\to V$ העתקה לינארית. הוכח:

א. $\ker(T)\subseteq\ker(T^2)$.

ב. $\mathrm{im}(T^2)\subseteq\mathrm{im}(T)$.

**2.6 תרגיל**. תהא $T: V\to V$ העתקה לינארית. יהא $U$ תת-מרחב של $V$ כך ש $U\cap\ker(T)=\{0\}$. הוכח שאם $v_1, \dots, v_n\in U$ בת"ל, אזי גם $T(v_1), \dots, T(v_n)$ בת"ל.

## תרגילים לעבודה עצמית:

**2.1 תרגיל**. בהתאם להגדרה הנ"ל, הוכח:

א. $\ker(T)$ הוא תת-מרחב של $V$.

ב. $\mathrm{im}(T)$ הוא תת-מרחב של $W$.

**2.2 תרגיל**. הוכח: $T(v_1)=T(v_2) \iff v_1-v_2\in\ker(T)$.

**2.5 תרגיל**. הוכח או הפרך: יהיו $S, T: V\to V$ העתקות לינאריות כך ש $\ker(T)=\ker(S)$ וכן $\mathrm{im}(T)=\mathrm{im}(S)$. אזי $T=S$.

<u>(רמז ל-2.5: יש לתת דוגמא נגדית.)</u>