

ברוכים הבאים לתרגול 5 😊

שחר אנגל

shaharbel0@gmail.com

תרגול- ימי שני 14-16 וימי חמישי 13-15



נושאי התרגול

- מציאת תת מערך עם סכום מקסימלי - Best - המשך
- בעיית תחנות הדלק



מציאת תת מערך עם סכום מקסימלי - Best

- בהינתן מערך בעל n איברים, מהו תת המערך שסכום איבריו הוא הגדול ביותר?
- ומהו תת המערך הזה הקצר ביותר?
- הערה: תת המערך חייב להיות רצף של תאים



- בשבוע שעבר הגענו למסקנה: לא תמיד כדאי לנו לקחת את השליליים.
- אז מתי כן כדאי?
- אם המספר השלילי משאיר אותנו בסכום חיובי, כדאי לקחת אותו כי הוא מוסיף לנו להמשך. אבל אם הוא מוריד אותנו לסכום שלילי זה כבר לא משתלם כי אולי בהמשך יהיה משהו טוב יותר שעלול להיפגע.
- פתרנו את הבעיה בעזרת מטריצה ב- $O(n^2)$ והיום נפתור בעזרת המסקנה ב- $O(n)$.
- איך?
- נבנה מערך עזר שיסכום לנו את הסכום עד אותו התא. אם נגיע לסכום הקטן מ-0 נתחיל לספור מחדש בתא הבא אחריו.
- דוגמת הרצה: נתון מערך:

1	7	3	-13	2	1	10	-2	1	-20
---	---	---	-----	---	---	----	----	---	-----

- נבנה מערך עזר:

1	8	11	-	2	3	13	11	12	-
---	---	----	---	---	---	----	----	----	---



- במערך שקיבלנו יש לנו את כל הנתונים שאנו צריכים:
- מה הסכום המקסימלי
- מה תת הקטע עם הסכום המקסימלי- אינדקס התחלה ואינדקס סוף

■ דוגמא נוספת:

7	-7	3	9	-15	2
---	----	---	---	-----	---

■ נבנה מערך עזר:

7	0	3	12	-	2
---	---	---	----	---	---

- מה תת הקטע עם הסכום המקסימלי במערך זה?
- יש 2 אפשרויות:
 - $[0,3]$
 - $[2,3]$
- אם ביקשו את תת המערך הקצר ביותר אז נבחר בתשובה השנייה ואם ביקשו את הארוכה ביותר נבחר בתשובה הראשונה.



- מה קורה אם המערך שלנו מעגלי?
- אם נפעיל Best רגיל לא בהכרח נקבל את התשובה הנכונה.

■ לדוגמא:

7	-9	2	1
---	----	---	---

- לאחר הפעלת Best נקבל

7	-	2	3
---	---	---	---
- ולכן 7 תהיה התשובה, אך התשובה הנכונה היא 1, 2, 7 שנותן לנו 10.
- אז איך נעשה זאת?

■ נסתכל על זה בכמה דרכים:

- מטריצה
- מערך כפול
- אפשרות יעילה יותר

■ בואו נראה..



- פתרון 1: מטריצה

- נמלא את המטריצה בדיוק כמו בתרגול שעבר: $M[i,j] = M[i+1,j] + M[i,i]$

7	-2	0	1
	-9	-7	-6
		2	3
			1

- נקבל שהסכום הגדול ביותר הוא 7 במיקום $[1,1]$.

- אך מה אומר לנו התא הצבוע בסגול?

- אם אנחנו מסתכלים על כל תא במשמעות של החל מ- i מסוים ועד j מסוים במעריך, אז התא הסגול הוא $[3,1]$ כלומר מתחילים במיקום 3 במעריך ומסיימים במיקום 1 במעריך.

- איך זה אפשרי?

- המעריך שלנו מעגלי.

- לכן, כל תא במשולש התחתון כאשר $i > j$ מראה לנו תתי קטעים רציפים במעריך מעגלי וכל תא במשולש העליון כאשר $i < j$ מראה לנו תתי קטעים רציפים במעריך רגיל.



■ פתרון 1: מטריצה

■ איך נמלא את המשולש התחתון?

■ בצורה ישירה- אם המשולש העליון מלא כבר, נוכל פשוט להכניס את המשלים שלו בכל הסדרה. כלומר, אם נחשב את הסכום של כל הסדרה (שמופיע לנו בתא הכי ימני למעלה) ונפחית את אחד התאים נקבל את הסכום של המשלים.

■ לדוגמא: $S-[2,2] = [3,1]$ ולכן $1 - (-9) = 10$ וזה אכן הסכום של תת המערך בקטע $[3,1]$.

7	-2	0	1
	-9	-7	-6
		2	3
			1

■ האם זה יתן לנו את הסכום המקסימלי?

■ לאחר שנמלא את כל המטריצה נצטרך לעבור עליה ב- $O(n^2)$ ולחפש את המספר המקסימלי.



▪ פתרון 2: מערך כפול

▪ ניקח את המערך, נשכפל אותו ונפעיל Best. כך נוכל למצוא את תת הקטע המקסימלי במערך מעגלי.

▪ לדוגמא:

7	-2	4	5
---	----	---	---

▪ אם נפעיל Best נקבל:

7	5	9	14
---	---	---	----

 אך הסכום הגדול ביותר הוא 16 בתת הקטע [3,1].

▪ אז נשכפל את המערך ונקבל:

7	-2	4	5	7	-2	4	5
---	----	---	---	---	----	---	---

▪ נפעיל עליו Best ונקבל:

7	5	9	14	21	19	23	28
---	---	---	----	----	----	----	----

▪ איך זה קרה?

▪ חישבנו פעמיים את אותו המספר וכך חישבנו תתי מערכים הגדולים יותר מאורך המערך עצמו.

▪ מה נעשה?

▪ נפעיל Best כל פעם רק על 4 תאים מתוך המערך הכפול וכך נוודא שאנו לא חורגים.

▪ כמובן שבתכנות לא נצטרך לשכפל את המערך אלא להשתמש במודולו.



- פתרון 2: מערך כפול

- מה הסיבוכיות?

- $O(n^2)$

- למה?

- על כל אחד מהאיברים אנו עוברים פעם נוספת על כל איברי המערך.

- לא הצלחנו לרדת בסיבוכיות..

- מה צריך בשביל לרדת?

- לוותר על מטריצה

- לא לעבור בכל איבר שוב על כל האיברים

- איך נעשה את זה?



■ פתרון 3:

■ נבין את התובנה הבאה: כדי לקבל את הסכום הגדול ביותר נוכל לקחת את הסכום הכולל ולהפחית ממנו את הסכום המינימלי.

■ אבל זה יהיה הגדול ביותר בצורה מעגלית. יכול להיות שבצורה סטנדרטית יהיה לנו סכום גדול יותר.

■ לכן, נצטרך לבצע מקסימום בין התוצאה המעגלית לתוצאה הסטנדרטית.

■ אבל איך נמצא את התוצאה המעגלית?

■ או שנשנה את אלגוריתם Best שעכשיו ימצא לנו סכום מינימלי

■ או שנשנה את הנתונים- נכפיל ב- 1 - את כל האיברים במערך ונקבל את המערך ההופכי שלו. כשנפעיל עליו Best נמצא את הסכום המקסימלי במערך ההופכי שמייצג לנו בעצם את הסכום המינימלי במערך המקורי.

■ לדוגמא: $A = \begin{bmatrix} 7 & -9 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

■ אז $-A = \begin{bmatrix} -7 & 9 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

■ כשנפעיל Best על $-A$ נקבל את 9 ולכן נדע שהסכום המינימלי ביותר ב- A הוא -9, וכמו שאמרנו מקודם הסכום של תת הקטע במעגלי המקסימלי הוא הסכום הכולל פחות הסכום המינימלי- $10 = 1 - (-9)$.

■ או בצורה כללית: $S - (-\text{Best}(-A))$

■ וכך נמצא את הסכום המקסימלי ביותר במערך מעגלי.



- פתרון 3:

- אבל אמרנו שאולי בצורה הסטנדרטית התוצאה תהיה טובה יותר ולכן סה"כ נקבל:

- $\text{Max}(\text{Best}(A), S - (-\text{Best}(-A)))$

- מה הסיבוכיות עכשיו?

- $O(n)$ - ביצענו פעמיים את Best .



כעת ניישם הכל...

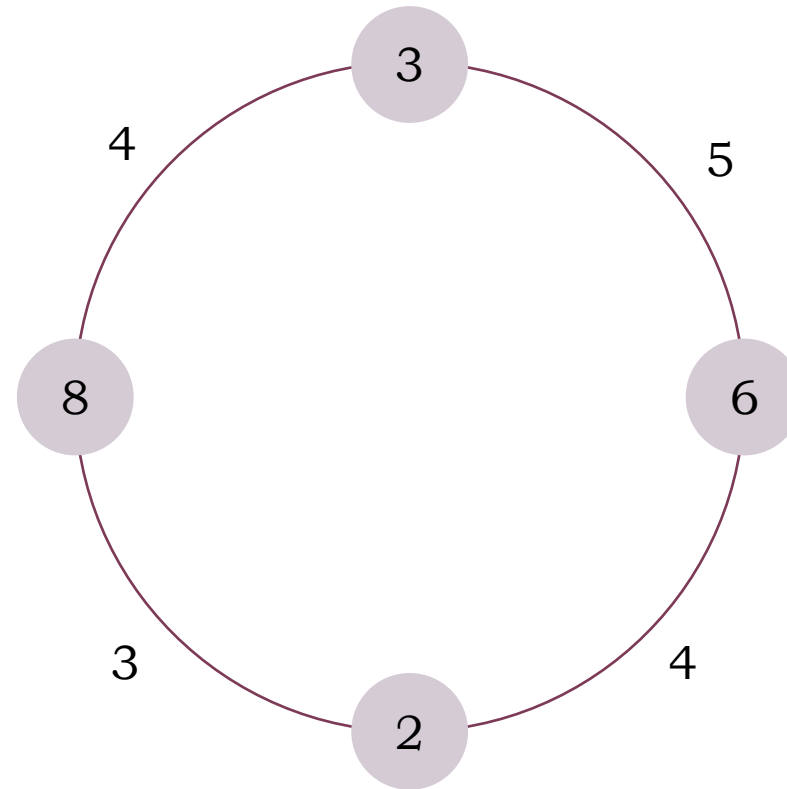
בעיית תחנות הדלק

- נתון מסלול עם תחנות דלק. בכל תחנה ניתן למלא כמות ליטרים מסוימת. כל מקטע דרך בין 2 תחנות צורך כמות ליטרים מסוימת.
- האם ניתן להתחיל בתחנה מסוימת, לעבור בכל התחנות בדרך ולבצע סיבוב שלם בלי שייגמר לנו הדלק?



■ בעיית תחנות הדלק

■ לדוגמא:



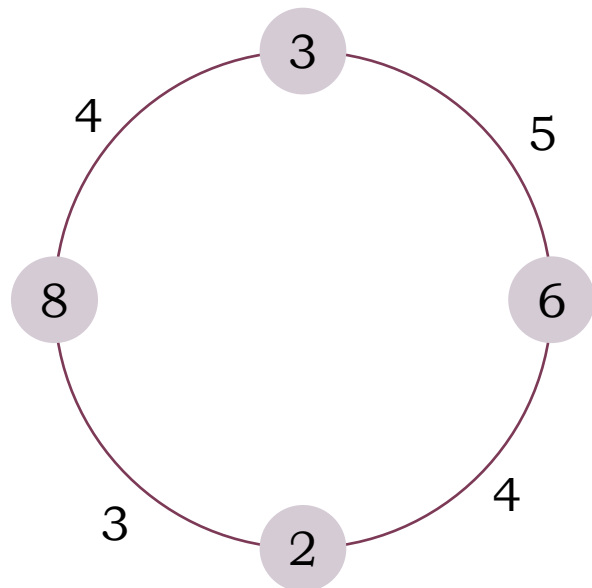
■ בתור התחלה נצטרך לוודא שכמות הדלק הכוללת שאפשר למלא יותר גדולה מהכמות שאנו צורכים, כי אחרת לא יהיה פתרון לבעיה.

■ איך נקבל את הבעיה כקלט?

■ באמצעות 2 מערכים: מערך של תחנות ומערך של עלויות.

■ בדוגמא שלנו נקבל: $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$





A=

3	6	2	8
---	---	---	---

B=

5	4	3	4
---	---	---	---

■ בעיית תחנות הדלק

■ כלומר נצטרך לוודא ש: $\sum a_i \geq \sum b_i$

■ ניצור מערך נוסף C שהמשמעות שלו תהיה A-B - האם בכלל אפשר להגיע מתחנה

אחת לתחנה שאחריה. מערך C יראה כך:

-2	2	-1	4
----	---	----	---

■ כדי להצליח נרצה לצבור כמה שיותר דלק בכל רגע נתון

■ או במילים אחרות: נחפש את תת המערך עם סכום מקסימלי כדי שנוכל להמשיך בדרך

■ בעצם, נפעיל Best בצורה מעגלית וכך נדע מה הסכום המקסימלי וכן מאיזה אינדקס להתחיל.

■ דוגמת הרצה: ניקח את מערך C

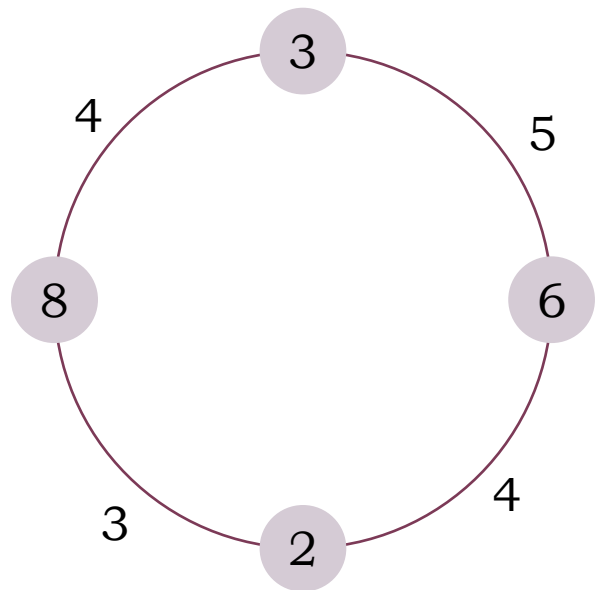
-2	2	-1	4
----	---	----	---

■ ונפעיל עליו Best:

-	2	1	5
---	---	---	---

■ נקבל שהסכום הגדול ביותר בצורה סטנדרטית הוא 5 ואנו צריכים להתחיל מתחנה 2.





A=

3	6	2	8
---	---	---	---

B=

5	4	3	4
---	---	---	---

■ בעיית תחנות הדלק

- כעת נחשב את התוצאה המעגלית: מערך C - נראה כך:

2	-2	1	-4
---	----	---	----
- נפעיל עליו Best:

2	-	1	-
---	---	---	---
- נקבל שהסכום הגדול ביותר הוא 2 ולכן זהו הסכום הקטן ביותר המערך C המעגלי.
- נחשב את הסכום הכולל פחות הסכום המינימלי ונקבל: $3 - (-2) = 5$
- לכן סה"כ נקבל: $\text{Max}(\text{Best}(A), S - (-\text{Best}(-A))) = \text{Max}(5, 5) = 5$
- קיבלנו מקטע סטנדרטי $[2, 4]$ ולכן מומלץ להתחיל מתחנה 2 ולהשלים מעגל ממנה.



אז מה צריך לתכנת?

■ כל מה שדיברנו עליו היום ☺

1. Best רגיל

2. Best מעגלי ב-3 צורות

3. בעיית תחנות הדלק

בהצלחה ☺

