גבול פונקציה - תרגילים נוספים2

תרגיל 1:

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת ע"י:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{3+x^n}$$

חשבו את הביטויים הבאים:

$$f(1),\ f(-1),\ \lim_{x\to 1^-} f(x),\ \lim_{x\to 1^+} f(x),\ \lim_{x\to -1^-} f(x),\ \lim_{x\to -1^+} f(x)$$

פתרון:

$$f(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1^n}{3+1^n} = \frac{1}{4}$$

$$f(-1) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{3+(-1)^n} = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} \frac{1}{4}, & n=2k \\ \frac{-1}{2}, & n=2k+1 \end{cases}$$

לכן גבול זה אינו קיים.

לכל $0<x=q<1$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{3+q^n} = \frac{0}{3+0} = 0 \implies \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$$

לכל $x=q>1$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{3+q^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{3}{q^n}+1} = \frac{1}{0+1} = 1 \implies \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$

לכל $x=q<-1$ מתקיים (נשים לב ש $\lim_{n\to\infty} q^n$ לא קיים, אבל $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} = 0$):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{3+q^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{3}{q^n}+1} = \frac{1}{0+1} = 1 \implies \lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$$

לכל $0>x=q>-1$ מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{3+q^n} = \frac{0}{3+0} = 0 \implies \lim_{x\to -1^+} f(x) = 0$$

תרגולים ומרתונים 050.246.5033

תרגיל 2:

תהי a_n סדרה כלשהי, ונגדיר $f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ ע"י: $f(x)=a_n,\ \forall n-1<x\leq n$.

הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$ אם ורק אם $\lim_{n\to\infty}a_n=L$.

פתרון:

ע"פ הגדרת הגבול, מתקיים:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=L\Longleftrightarrow\forall\epsilon>0,\ \exists X_0:\ \forall x>X_0,\ |f(x)-L|<\epsilon$$

לכן בהינתן $\epsilon>0$ נבחר $N=[X_0]+1$ ואז לכל $n>N$ מתקיים $a_n=f(x),\ x>X_0$ ולכן

$$|a_n-L|=|f(x)-L|<\epsilon$$

מצד שני, אם $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ אז ע"פ ההגדרה: $\forall\epsilon>0,\ \exists N:\ \forall n>N,\ |a_n-L|<\epsilon$

ולכן עבור $X_0=N+1$ נקבל שאם $x>X_0$ אזי $f(x)=a_n$ כאשר $x>n-1>N$ ולכן:

$$|f(x)-L|=|a_n-L|<\epsilon.$$

תרגיל 3:

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת x_0.

א. הראו כי אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל־x_0 קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}f(x_n)$ (אבל לא ידוע שזהו אותו הגבול עבור כל סדרה אפשרית $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$), אזי קיים הגבול $\lim_{x\to x_0}f(x)$.

ב. נניח כי לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $0<|x-x_0|<\delta$ ו־$0<|y-x_0|<\delta$, אז $|f(x)-f(y)|<\epsilon$.

הוכיחו ע"י סעיף (א) כי קיים הגבול $\lim_{x\to x_0}f(x)$.

פתרון:

א. ניקח 2 סדרות $a_n,b_n\longrightarrow x_0$, נסמן $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=a,\ \lim_{n\to\infty}f(b_n)=b$, ונניח בשלילה ש $a\neq b$.

נגדיר סדרה חדשה: $c_n=\begin{cases}a_n, & n=2k\\ b_n, & n=2k+1\end{cases}$, אזי על פי הנתון קיים $\lim_{n\to\infty}f(c_n)=c$ אבל אם קיים גבול של סדרה, אזי כל תתי־הסדרות שלה מתכנסות לאותו הגבול, ולכן $f(c_{2k}),\ f(c_{2k+1})\longrightarrow c$, ולכן $a=b=c$.

כלומר קיבלנו כי לכל סדרה x_n ששואפת ל x_0 מתקיים כי $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=c$ ולכן על פי משפט היינה, קיים הגבול $\lim_{x\to x_0}f(x)$ והוא שווה ל c.

ב. תהי x_n סדרה כלשהי ששואפת ל x_0, אזי קיים N כך שלכל $n,m>N$ מתקיים $0<|x_n-x_0|<\delta$ ו־$0<|x_m-x_0|<\delta$, ולכן על פי הנתון $|f(x_n)-f(x_m)|<\epsilon$.

לכן הסדרה $f(x_n)$ היא סדרת קושי, ולכן היא מתכנסת. קיבלנו כי עבור כל סדרה x_n ששואפת ל x_0, קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}f(x_n)$, ולכן על פי סעיף א, קיים הגבול $\lim_{x\to x_0}f(x)$.

תרגולים ומרתונים 050.246.5033

תרגיל 4:

הוכיחו שהגבול הבא לא קיים

$$\lim_{x\to 0}\frac{[2\sin x]}{\sin x}$$

בשלוש דרכים שונות:

א) על פי הגדרת קושי $(\epsilon-\delta)$.

ב) על הגדרת היינה (סדרות).

ג) ע"י גבולות חד־צדדיים.

פתרון:

א) יהי L מספר כלשהו, נוכיח ע"פ הגדרת קושי שהוא אינו גבול של הביטוי הנתון.

מכיוון ש $\sin x\longrightarrow 0$ כאשר $x\longrightarrow 0$ אזי קיימת סביבת δ_0 של אפס שבה $|\sin x|<\frac{1}{2}\Longleftarrow|2\sin x|<1$ ולכן:

$$\forall x\in(0,\delta_0)\,,\ [2\sin x]=0;\ \ \forall x\in(-\delta_0,0)\,,\ [2\sin x]=-1$$

לכן עבור $\epsilon_0=\frac{1}{4}$ נקבל כי לכל $\delta>0$ נסמן $\delta_1=\min\{\delta,\delta_0\}$ ואז עבור $x_1\in(-\delta_1,0)$ ו $x_2\in(0,\delta_1)$ נקבל כי:

$$f(x_1)\,,f(x_2)\in\left(L-\frac{1}{4},\,L+\frac{1}{4}\right)\Longrightarrow -1,0\in\left(L-\frac{1}{4},\,L+\frac{1}{4}\right)$$

וזאת סתירה כי שני מספרים שהמרחק ביניהם שווה ל 1 לא יכולים להיות בקטע באורך $\frac{1}{2}$.

ב) נתבונן בסדרה $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$, עבורה מתקיים:

$$f(a_{2n})=\frac{\left[2\sin\frac{1}{2n}\right]}{\sin\frac{1}{2n}}\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}0,\ \ f(a_{2n+1})=\frac{\left[2\sin\frac{-1}{2n+1}\right]}{\sin\frac{-1}{2n+1}}\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}-1$$

לכן לא קיים הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}f(a_n)$$

ולכן ע"פ היינה לא קיים הגבול:

$$\lim_{x\to 0}\frac{[2\sin x]}{\sin x}$$

ג) לפי סעיף א:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{[2\sin x]}{\sin x}=0\neq-1=\lim_{x\to 0-}\frac{[2\sin x]}{\sin x}$$

לכן שני הגבולות החד־צדדיים לא שווים ולכן אין גבול בנקודה אפס עצמה.

תרגולים ומרתונים 050.246.5033