

העתקות לינאריות

1. נתונה ההעתקה הלינארית הבאה $T: R^3 \rightarrow R^3$ המוגדרת

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y - z \\ 2x - y + 2z \\ 3x - 2y + z \end{pmatrix}$$

א. מצא מטריצה A המקיימת $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ לכל $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3$.

ב. מצא בסיס ל- $\ker T$ ול- $\operatorname{Im} T$.

ג. קבע האם T היא מונומורפיזם, אפימורפיזם, איזומורפיזם או אף אחד מהנ"ל.

ד. חשב את $T^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

2. T היא העתקה לינארית מ- R^3 ל- R^2 המקיימת: $T(1,0,2) = (1,1)$, $T(1,2,3) = (1,2)$

ו- $T(0,6,0) = (1,3)$.

א. חשב את $T(x, y, z)$.

ב. קבע האם T היא על והאם היא חח"ע.

ג. מצא בסיס ל- $\ker T$ ול- $\operatorname{Im} T$.

3. נתונה ההעתקה הלינארית הבאה $T: R^3 \rightarrow R^3$ המוגדרת

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y - z \\ y + 2z \\ 3x + z \end{pmatrix}$$

א. הוכח ש- T היא איזומורפיזם.

ב. חשב $T^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

4. נתונה ההעתקה הלינארית הבאה $T: R^3 \rightarrow R^3$ המוגדרת

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y - z \\ x + z \\ 5x - 2y + z \end{pmatrix}$$

א. הוכח ש- T אינה איזומורפיזם.

ב. מצא העתקה לינארית $S: R^3 \rightarrow R^3$ כך ש- $T \circ S = 0$.

$$5. \quad S = \left\{ T \in \text{Hom}(R^3, R^2) \mid T \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{תהי}$$

א. הוכח ש-S היא תת מרחב של $\text{Hom}(R^3, R^2)$.

ב. מצא בסיס ל-S.

6. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ותהי $T: V \rightarrow V$ העתקה לינארית.

א. הוכח: $T^2 = 0$ אם ורק אם $\ker T \subseteq \text{Im} T$.

ב. מצא מטריצה $A \neq 0$, מסדר 2×2 מעל R, המקיימת $A^2 = 0$.

ג. מצא $T: R^2 \rightarrow R^2$ המקיימת $T \neq 0$ ו- $T^2 = 0$.