גבול פונקציה - תרגילים נוספים1

תרגיל 1:

הוכיחו על פי ההגדרה:

א) $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$.

ב) $\lim_{x\to 2} \frac{x+1}{x-1} = 3$.

ג) $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x+1}{x-1} = 2$,

(תזכורת $\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$ אם לכל $\epsilon > 0$ קיים $N > 0$ כך שאם $x < -N$ אז $|f(x) - L| < \epsilon$).

ד) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sqrt{\pi-2x}} = 0$.

פתרון:

* הערה: בתרגיל זה, אני לוקח כל הזמן δ יותר קטנה ממה שצריך להוכחה, כדי שלא יהיו אי־הבנות לגבי האי־שוויונים.

א) עבור $|x-2| < \delta$ נעשה הערכה:

$$\left|x^3 - 3\right| = |x-2|\left|x^2+2x+4\right| < \delta\left|x^2+2x+4\right|$$

כדי לחסום את הביטוי השני, נדרוש למשל ש $\delta < 1$ ואז $|x-2| < \delta < 1 \Longleftarrow 1 < x < 3$ ואז $|x^2+2x+4| < |3^2+6+4| = 19$.

לכן בהינתן $\epsilon > 0$, עבור $\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{20}\right\}$ נקבל:

$$\left|x^3 - 8\right| = |x-2|\left|x^2+2x+4\right| < \delta\left|x^2+2x+4\right| < \delta 19 < \epsilon$$

ב) עבור $|x-2| < \delta$ נעשה הערכה:

$$\left|\frac{x+1}{x-1} - 3\right| = \left|\frac{-2x+4}{x-1}\right| = 2\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$$

כדי לחסום את הביטוי במכנה, נדרוש למשל ש $\delta < \frac{1}{2}$ ואז $|x-2| < \delta < \frac{1}{2} \Longleftarrow \frac{3}{2} < x$ ואז $\frac{1}{|x-1|} < \frac{1}{\left|\frac{3}{2}-1\right|} = 2$.

לכן בהינתן $\epsilon > 0$, עבור $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{\epsilon}{8}\right\}$ נקבל:

$$\left|\frac{x+1}{x-1} - 3\right| = \left|\frac{-2x+4}{x-1}\right| = 2\left|\frac{x-2}{x-1}\right| < 4\delta < \epsilon$$

ג) עבור $x < -N$ נעשה הערכה:

$$\left|\frac{2x+1}{x-1} - 2\right| = \left|\frac{3}{x-1}\right| = 3\left|\frac{1}{x-1}\right| < \frac{3}{3N} = \frac{1}{N}$$

לכן בהינתן $\epsilon > 0$, עבור $N = \max\left\{1, \frac{2}{\epsilon}\right\}$ נקבל:

$$\left|\frac{2x+1}{x-1} - 2\right| = \left|\frac{3}{x-1}\right| = 3\left|\frac{1}{x-1}\right| < \frac{3}{3N} = \frac{1}{N} < \epsilon$$

ד)

$$\left|\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sqrt{\pi - 2x}}\right| < \frac{1}{\sqrt{2}}\left|\frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}{\sqrt{\frac{\pi}{2} - x}}\right| < \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\frac{3}{2}} < \delta^{\frac{3}{2}}$$

לכן עבור $\delta = \epsilon^{2/3}$ נקבל כי:

$$\left|\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sqrt{\pi - 2x}}\right| < \delta^{\frac{3}{2}} = \epsilon$$

תרגיל 2:

תהי $f(x) = \begin{cases} 5 - x, & x \notin \mathbb{Q} \\ x + 1, & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$, הוכיחו כי:

א) $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$.

ב) $\lim_{x\to 0} f(x)$ לא קיים.

פתרון:

א) נסמן לשם נוחות $f_1(x) = 5 - x$ ו $f_2(x) = x + 1$.

מכיוון ש: $3 \xrightarrow{x\to 2} f_1(x)$ אז עבור $\epsilon > 0$ קיימת $\delta_1 > 0$ כך שאם $0 < |x - 2| < \delta_1$ אז $|f_1 - 3| < \epsilon$.

באותו אופן, מכיוון ש: $3 \xrightarrow{x\to 2} f_2(x)$ אז עבור $\epsilon > 0$ קיימת $\delta_2 > 0$ כך שאם $0 < |x - 2| < \delta_2$ אז $|f_2 - 3| < \epsilon$.

לכן עבור $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ נקבל שלכל x המקיים $0 < |x - 2| < \delta$ יתקיים כי:

$$|f(x) - 3| \le \max\{|f_1 - 3|, |f_2 - 3|\} < \epsilon$$

* שימו לב שבניגוד לסדרות, לא ניתן כאן להשאיף בנפרד את המשתנה הרציף על הרציונאליים ועל האי־רציונאליים! x מקבל את כל הערכים בסביבה של הנקודה אליה הוא שואף.

ב) נניח בשלילה שקיים L שהוא הגבול של הפונקציה באפס, אזי בהינתן $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שאם $|x| < \delta$אז $|f(x) - 3| < \epsilon$.

בפרט עבור $\epsilon_0 = 1$ קיימת $\delta_0 > 0$ כך שאם $|x| < \delta$אז:

$$f(x) \in (L - 1, L + 1)$$

נבחר $|x_1|, |x_2| < \min\left\{\delta, \frac{1}{2}\right\}$ כך ש x_1 רציונאלי ו x_2 אי־רציונאלי, ואז:

$$f(x_1) = x_1 + 1 < 2, \quad f(x_2) = 5 - x_2 > 4$$

ולא יתכן ש

$$f(x_1), f(x_2) \in (L - 1, L + 1)$$

כי שתי נקודות שהמרחק ביניהן גדול מ 3 לא יכולות להימצא בקטע באורך 2.

תרגיל 3:

יהי a מספר ממשי כלשהו, הוכח או הפרך:

א) אם $\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} g(x)$ אזי קיימת סביבה נקובה של a שבה $f(x) = g(x)$

ב) קיימת פונקציה המוגדרת לכל x אבל איננה חסומה בכל סביבה של $x = a$.

ג) תהי $f(x)$ פונקציה החסומה בסביבה כלשהי של $x = a$. אם קיים הגבול $\lim_{x\to a} f(x) = L$ אזי הוא סופי.

פתרון:

א) לא נכון. $f(x) = x,\ g(x) = x^2$ יש להם את אותו הגבול באפס, אבל הן שונות בכל נקודה אחרת.

ב) נכון.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ג) נכון. נתון כי קיים הגבול $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ונתון כי הפונקציה חסומה בסביבת $x = a$, לכן קיימים δ, N כך שלכל $0 < |x-a| < \delta$ מתקיים $-N < f(x) < N$.

נניח בשלילה שהגבול אינו סופי, אזי קיימת δ_1 כך שלכל $0 < |x-a| < \delta_1$ מתקיים $f(x) > N$ וזאת סתירה.

תרגיל 4:

הוכח על פי ההגדרה כי אם $a \neq -1$ וקיים הגבול הסופי $\lim_{x\to 0} f(x) = L$ אזי $\lim_{x\to\infty} f(\frac{a+1}{2x}) = L$.

פתרון:

נתון כי לכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta' > 0$ כך שאם $0 < |y| < \delta'$ אז $|f(y) - L| < \epsilon$.

נסמן $y = \frac{a+1}{2x}$ ואז

$$0 < |y| < \delta \Leftrightarrow 0 < \left|\frac{a+1}{2x}\right| < \delta \Leftrightarrow x > \frac{2\delta}{|a+1|}$$

לכן עבור $X_0 = \frac{2\delta}{|a+1|}$ נקבל שלכל $x > X_0$ מתקיים $0 < |y| < \delta$ ולכן $|f(y) - L| < \epsilon$ כלומר: $\left|f(\frac{a+1}{2x}) - L\right| < \epsilon$ מכאן:

$$\lim_{x\to\infty} f(\frac{a+1}{2x}) = L.$$

תרגיל 5(לא להגשה):

הוכיחו כי הגבול $\lim_{x\to\infty} \sin(x - [x])$ אינו קיים.

פתרון:

נניח בשלילה ש $\lim_{x\to\infty}\sin(x-[x])=L$, אזי עבור $\epsilon_0=\frac{\sin 0.5}{4}$ קיים X_0 כך שלכל $x>X_0$ מתקיים

$$|\sin(x-[x])-L|<\epsilon_0 \Longrightarrow \sin(x-[x])\in(L-\epsilon_0,L+\epsilon_0)$$

אבל לכל X_0 קיימים $X_0<n\in\mathbb{N}$ ו $x_1=n$ ו$x_2=n+0.5$ כך שמתקיים:

$$\sin(x_1-[x_1])=0,\ \ \sin(x_2-[x_2])=\sin(0.5)$$

ולא יתכן כי שני מספרים אלו שהמרחק ביניהם הוא $\sin(0.5)$, נמצאים בתוך קטע באורך $2\epsilon_0=\frac{\sin 0.5}{2}$, לכן לא יתכן שיש לפונקציה הנ"ל גבול.