בסיס ומימד המשך

25.7.17

1. תתי מרחבים של V $W = span\{x+1,\ x^3-2x^2+x,\ 2x^3-4x^2+3x+1\}$, $V = P_3[x]$

$U = span\{1,\ x-x^3,\ x^2-x^3\}$

א) מצא בסיס ומימד של U, W

ב) האם $W = U$

א) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{1} \end{pmatrix}$ $\dim W = 2$

בסיס:

$W = span\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$W = span\{x^3-2x^2+x,\ x+1\}$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\dim U = 3$

בסיס:

$U = span\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$U = span\{-x^3+x,\ x^2-x,\ 1\}$

ב) $\dim W \neq \dim U \Rightarrow W \neq U$

5. $U = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{array}{l} w-2x=0 \\ w-x+y=0 \\ x+4y+z=0 \end{array} \right\}$ $V = span\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ נתון:

א) מצא בסיס ל U

ב) מצא משוואות ל V

ג) האם $U \subseteq V$? האם $V \subseteq U$

א) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\dim U = 1$ $x = t$, $w = 2t$, $y = x-w = -t$, $z = -x-4y = 3t$ $\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$U = span\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

ב) $\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & w \\ 2 & 3 & x \\ 1 & 0 & y \\ -2 & 1 & z \end{array}\right) \xrightarrow[R_4+R_2]{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y \\ 2 & 3 & x \\ 0 & 2 & w \\ 0 & 4 & z+x \end{array}\right) \xrightarrow[R_4-2R_3]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y \\ 0 & 3 & x-2y \\ 0 & 2 & w \\ 0 & 0 & z+x-2w \end{array}\right) \xrightarrow{3R_3-2R_2}$

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & y \\ 0 & 3 & x-2y \\ 0 & 0 & 3w-2x+4y \\ 0 & 0 & z+x-2w \end{array}\right)$ $V = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{array}{l} 3w-2x+4y=0 \\ z+x-2w=0 \end{array} \right\}$

ג) $U \subseteq V$ $\begin{cases} 6-2-4=0 \\ 3+1-4=0 \end{cases}$ $V \not\subseteq U$

כי $\dim V = 2 > \dim U = 1$

1.7.15

נתונים שלושה וקטורים ב $\mathbb{R}^3$:

$\bar{u}=(k+5,k-4,2-k)$ $\bar{v}=(1,1-k,k-2)$ $\bar{w}=(0,k-2,2-k)$

בחרו את הטענה הנכונה:

א) $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ מהווים בסיס ל $\mathbb{R}^3$ עבור כל ערך של k

ב) $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ מהווים בסיס ל $\mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow k\notin\{-3,2\}$

ג) $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ מהווים בסיס ל $\mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow k\in\{-3,2\}$

ד) $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ מהווים בסיס ל $\mathbb{R}^3$ $\Leftrightarrow k\neq 0$

$$\begin{pmatrix}1 & 1-k & k-2\\ 0 & k-2 & 2-k\\ k+5 & k-4 & 2-k\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-(k+5)R_1}\begin{pmatrix}1 & 1-k & k-2\\ 0 & k-2 & 2-k\\ 0 & k^2+5k-9 & (k-2)(-k-6)\end{pmatrix}\quad k=2\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

$\dim=2$

לא מהווים בסיס ל $\mathbb{R}^3$

א', ג' לא נכון

$(3,2)$ $k-4-(k+5)(1-k)=k^2+5k-9$

$(3,3)$ $-(k-2)-(k+5)(k-2)=(k-2)(-k-6)$

$k\neq 2$

$R_2/(k-2)$
$$\begin{pmatrix}1 & 1-k & k-2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & k^2+5k-9 & (k-2)(-k-6)\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-(k^2+5k-9)R_2}\begin{pmatrix}1 & 1-k & k-2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & k+3\end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

ב' נכון

$(3,3)$ $-k^2-4k+12+k^2+5k-9=k+3$

דוגמה

א) האם וקטורים $(1,i),(i,-1)$ תלויים או בלתי תלויים לינארית מעל $\mathbb{C}$? מעל $\mathbb{R}$?

מעל $\mathbb{C}$ תלוי:

$i(1,i)+(-1)(i,-1)=0$

או

$$\begin{pmatrix}1 & i\\ i & -1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2+iR_1}\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

מעל $\mathbb{R}$ בת"ל

$a+ib\to(a,b)$

$(1,i)\to(1,0,0,1)$

$(i,-1)\to(0,1,-1,0)$