בס"ד

תורת הגרפים - תרגילים

בסיסי

1. האם קיים גרף עם סדרת הדרגות הבאה:
   א. 3,3,3,3,3,3
   ב. 3,3,3,3,3
   ג. 1,1,2,3,4,5

2. האם ייתכן כי בגרף G בו דרגת כל קודקוד שווה ל 3 יהיו 100 צלעות?

3. יהי G גרף פשוט מסדר גדול מ 1. הוכח: קיימים 2 קודקודים ב G עם דרגה זהה.

4. תן דוגמא לגרף פשוט בו יש <u>בדיוק</u> 2 קודקודים עם דרגה זהה.

5. יהא G גרף על 6 קודקודים. הוכח: אם אין ב G משולש אז ב $\bar{G}$ יש משולש.

6. האם בגרף מכוון עם $\binom{n}{2}$ צלעות בהכרח יש מעגל? נמקן!

7. הוכח כי אם בגרף G יש n קודקודים , $n+4$ קשתות וכל הדרגות לפחות 3, אז $n \geq 8$.

8. הוכח כי אם בגרף n קודקודים שדרגת כולם לפחות 3 ואין בו מעגל באורך לכל היותר 4 אז: $n \geq 10$.

9. הוכח כי אם בגרף פשוט עם n קודקודים אין משולש אז יש בו לכל היותר $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ קשתות.

10. יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט עם n קודקודים. k מספר טבעי כלשהו ו $u,v \in V$ קודקודים לא סמוכים בעלי דרגה שהיא לפחות: $\frac{n+k}{2}$. הוכח: ל u ו v לפחות $k+2$ שכנים משותפים.

11. הוכיחו כי בכל קבוצה בת מספר זוגי של אנשים יש לפחות 2 אנשים שמספר המכרים המשותף שלהם זוגי.

12. כמה מעגלים פשוטים שונים ייתכנו לכל היותר בגרף בעל n קודקודים?

13. הוכח שאם בגרף $G=(V,E)$ עבור $|V| \geq 3$ מתקיים: $|E| \geq |V|$ אז ב G יש מעגל.

14. יהי $G=(V,E)$ גרף פשוט. הוכח כי G מכיל לפחות: $|E|-|V|+1$ מעגלים.

15. יהי G גרף שבו אורך המעגל המינימאלי הוא 5, והדרגה המינימאלית היא לפחות k. הוכיחו כי ב G יש לפחות k^2+1 קודקודים.

קשירות

16. מהו הקוטר המרבי של גרף קשיר עם n קודקודים?

17. הוכח: לכל גרף G מתקיים: G קשיר או הגרף המשלים של G קשיר.

18. יהי G גרף לא מכוון ולא קשיר עם 2 רכיבי קשירות. הוכח כי הקוטר של הגרף המשלים של G הוא לכל היותר 2.

19. הוכח: גרף G קשיר אם ורק אם G אינו איחוד זר של גרפים.

20. הוכח שהגרף עם 100 קודקודים שדרגת כולם היא לפחות 50 הוא גרף קשיר.

21. יהי G גרף לא מכוון עם n קודקודים שבו דרגת כל קודקוד היא לפחות $\frac{n-1}{2}$. הוכח ש G קשיר ושהקוטר של G הוא לכל היותר 2.

22. יהי G גרף פשוט כאשר: $|V| = n$ ו $|E| = m$ $(m, n \in N^+)$ הוכח: אם $m < n - 1$ אז יש ב G לפחות $n - m$ רכיבי קשירות.

23. יהי $\mathrm{G} = (\mathrm{V}, \mathrm{E})$ גרף קשיר, ותהא $S \subset V$, $S \neq \emptyset$, הוכח כי קיים $v \notin S$ כך שיש ל v שכן ב S.

24. הוכח: גרף קשיר אם ורק אם עבור כל חלוקה של קודקודי הגרף ל 2 קבוצות לא ריקות, קיימת צלע עם קצוות ב 2 הקבוצות.

מעגל אוילר/המילטון

25. הוכח כי אם הגרף הדו צדדי: $G = (V, E)$ עם חלוקה ל 2 קבוצות A ו B מכיל מעגל המילטוני אז $|\mathrm{B}| = |\mathrm{A}|$.

26. יהא $G = (V, E)$ גרף עם $|V| \geq 2$ קודקודים. הוכח: אם ב G קיים רכיב קשירות שאינו מכיל מעגל אוילר, ניתן להוסיף לו קודקוד ומספר כלשהו של צלעות המחוברות אליו כך שבגרף שיתקבל, כל רכיב קשירות יכיל מעגל אוילר.

27. 20 סטודנטים פותרים 20 שאלות. כל סטודנט הצליח לפתור בדיוק 2 שאלות. הוכח כי ניתן לכתוב את הפתרונות לכל השאלות כך שכל סטודנט יכתוב פתרון לבדיוק אחת מהשאלות שהוא פתר ולכל שאלה ייכתב בדיוק פתרון אחד.

משפחות של גרפים

28. הוכח שהעובדות הבאות שקולות: (1) G עץ. (2) G גרף מקסימאלי ללא מעגלים.

29. הוכח שכל עץ בעל $n \geq 2$ (n סופי) קודקודים מכיל עלה.

30. הוכח שמספר הצלעות בעץ בעל n קודקודים הוא $n - 1$.

31. הוכח כי אם משמיטים עלה מעץ מקבלים גרף שהוא עץ.

32. יהא T עץ. הוכח כי לאחר הוספה של קודקוד וחיבורו בדיוק לקודקוד אחד ב T נקבל עץ.

33. יהא $G = (V, E)$ גרף לא מכוון. הוכח כי אם לכל $e \in E$ הגרף: $\mathrm{G} - \{\mathrm{e}\}$ הוא עץ, אז G הוא מעגל.

34. הוכח כי בעץ יש יותר עלים מאשר קודקודים מדרגה שהיא לפחות 3.

35. יהיו $T_1 = (V, E_1)$, $T_2 = (V, E_2)$ 2 עצים על אותה קבוצת קודקודים. הוכח כי קיים קודקוד $v \in V$ שסכום דרגותיו ב 2 העצים הוא לכל היותר 3.

36. א. יהא k מספר אי זוגי. הוכח: קיים גרף k רגולרי מסדר n אם ורק אם n זוגי.
ב. תן 3 דוגמאות לגרפים 3 רגולריים מסדר 10.

37. צובעים ב n צבעים את קשתות הגרף K_n כך שכל צבע מופיע לפחות פעם אחת. הוכיחו כי בהכרח קיים:
א. מעגל פשוט שכל קשת בו צבועה בצבע אחר.
ב. משולש שכל קשת בו צבועה בצבע אחר.

38. הוכח: G גרף דו צדדי אם ורק אם כל המעגלים בו הם באורך זוגי.

גרפים מישוריים

39. קבע האם הגרפים הבאים מישוריים:
א. K_7
ב. C_n
ג. $K_{2,7}$

40. הוכח כי k_5 אינו מישורי.

41. יהי G גרף מישורי עם k רכיבי קשירות ועם קבוצת פאות F, הוכח כי מתקיים:
$|V| - |E| + |F| = 1 + k$.

42. הוכח: כל גרף מישורי הוא 6-צביע.

43. יהי G גרף על n קודקודים, $n \geq 11$. צ"ל: ש G או $\bar{G}$ אינם מישוריים.

צביעה של גרפים

44. הוכח: גרף חסר מעגלים הוא 2-צביע.

45. הוכח שבגרף G שמספר הצביעה שלו הוא $\chi(\mathrm{G}) = \mathrm{k}$ יש לפחות $\binom{k}{2}$ צלעות.

46. נסמן: $\omega(G)$ - גודל הקליקה המקסימאלית בגרף G. קבע האם הטענות הבאות נכונות או לא נכונות ונמק:
א. $\omega(G) \leq \chi(G)$
ב. $\chi(G) \leq \omega(G)$

47. יהא G גרף פשוט בעל מספר צביעה $\chi(\mathrm{G}) = \mathrm{k}$ הוכח שיש ב G לפחות k קודקודים שדרגתם לפחות $k-1$.

48. יהיו $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$ גרפים 3 - צביעים על אותה קבוצת קודקודים. הוכח כי הגרף $G = (V, E_1 \cup E_2)$ הוא 9-צביע.

49. יהיו $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$ גרפים מישוריים על אותה קבוצת קודקודים. הוכח כי הגרף $G = (V, E_1 \cup E_2)$ הוא 12-צביע.

50. הוכח שעבור $K_{n,m}$ מתקיים: $\chi(K_{n,m}) = \max(n, m)$.

זיווגים ומשפט HALL

51. הוכח: יהי G גרף דו צדדי d - רגולרי , אז יש ב G זיווג מושלם.

52. חשב את מספר הזיווגים המושלמים ב $K_{n,n}$.

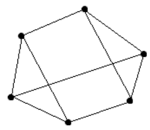
53. חשב את מספר הזיווגים המושלמים ב K_{2n}.

54. הוכח: בעץ יש לכל היותר זיווג מושלם אחד.

פתרונות

בסיסי

1. א. כן.



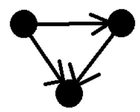
ב. לא כי סכום הדרגות הוא אי זוגי בסתירה למשפט: $\sum_{v\in V} degree(v) = 2|E|$.
ג. לא. כי יש 2 קודקודים המחוברים לפחות ל 4 מתוך ה 5 האחרים ולכן לא ייתכן שקיימים 2 קודקודים בעלי דרגה 1.

2. לא, כי לפי משפט סכום הדרגות נקבל: $3|V| = 2 \cdot 100$ אבל 200 לא מתחלק ב 3.

3. יהא G גרף מסדר n, מספר האפשרויות לדרגות בגרף הוא $n-1$, כי כל קודקוד יכול להיות מחובר ל 0 עד $n-1$ קודקודים, אבל אם יש קודקוד מדרגה 0 אז בהכרח אין קודקוד מדרגה $n-1$ וכן להיפך. קיבלנו שיש n קודקודים ו $n-1$ דרגות שונות אפשריות ולכן לפי עיקרון שובך היונים קיימים לפחות 2 קודקודים בעלי דרגה זהה.

4.  - דרגת כל קודקוד היא 1.

5. יהא G גרף על 6 קודקודים. ויהא v קודקוד ב G, נגדיר: A – קבוצת הקודקודים השכנים של v , B - קבוצת הקודקודים שאינם שכנים של v. מכיוון שכל קודקוד אחר בגרף הוא שכן של v או לא שכן של v אזי לפי עיקרון שובך היונים, קיימים 3 קודקודים השייכים ל A או 3 קודקודים השייכים ל B. אם 3 הקודקודים שייכים ל A - נתבונן בקודקודים אלו: אם לפחות 2 מהם מחוברים בצלע – סיימנו כי ביחד עם v קיבלנו משולש ב G. אחרת, אין צלע בין אף אחד מ 3 הקודקודים ולכן ב $\bar{G}$ הם מהווים משולש. אם 3 הקודקודים שייכים ל B - נתבונן בקודקודים אלו: אם לפחות 2 מהם אינם מחוברים בצלע – סיימנו כי ביחד עם v קיבלנו משולש ב $\bar{G}$. אחרת, יש צלע בין כל 2 מ 3 הקודקודים ולכן קיבלנו משולש ב G.

6. לא, בגרף  יש 3 צלעות: $\binom{3}{2}$. אבל אין מעגל בגרף.

7. לפי משפט סכום הדרגות, נקבל: $3n \geq 2(n+4)$ ומכאן: $n \geq 8$.

8. יהא G גרף על n קודקודים כך ש $\deg(v) \geq 3$ לכל $v \in V$ ואין בו מעגל עם פחות מ 5 צלעות.
צ"ל: $n \geq 10$. יהא $u \in V$ כלשהו, לפי הנתונים, $\deg(u) \geq 3$, כלומר, ל u יש לפחות 3 שכנים שונים. לכל אחד מהשכנים יש לפחות 2 שכנים ייחודיים (מלבד u) כאשר אין קשת בין 3 השכנים של u כי אחרת נקבל מעגל באורך 3 ואין שכן משותף ל 2 מתוך השכנים של u כי אחרת נקבל מעגל באורך 4. ולכן בהכרח קיימים לפחות: $1+3+3*2=10$ קודקדים (u , 3 השכנים שלו ועוד 2 שכנים עבור כל שכן של u).

9. נוכיח באינדוקציה על n: בסיס: $n=1$ - בגרף הריק עם קודקוד אחת יש $0 = \left\lfloor \frac{1^2}{4} \right\rfloor$ קשתות.
הנחה: נניח שהטענה נכונה לכל $1 \leq k < n$. צ"ל: נכונות הטענה עבור n. יהא G גרף פשוט על n קודקודים ללא משולש. אם G ללא קשתות – סיימנו. נניח כי יש ב G לפחות קשת אחת:

$(u,v)\in E$ עבור $u,v\in V$. אם כך, נוריד את 2 הקודקודים (ואת הקשתות החלות בהם), קיבלנו גרף עם $n-2$ קודקודים וללא משולש ולכן לפי הנחת האינדוקציה, יש בגרף זה לכל היותר:
$\left\lfloor\frac{(n-2)^2}{4}\right\rfloor$ קשתות. נמצא את מספר הקשתות שהורדנו ונוסיף למספר הקשתות בגרף שקיבלנו.
נוסיף את מספר השכנים של u,v , בין u ל v יש קשת לפי ההנחה ולכן לא ייתכן שיש להם שכן משותף ולכן מספר השכנים (של u ו v) בסה"כ הוא לכל היותר $n-1$. ולכן:
$|E|\le\left\lfloor\frac{(n-2)^2}{4}\right\rfloor+n-1=\left\lfloor\frac{n^2-4n+4+4n-4}{4}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$.

10. נסמן ב: M את קבוצת הקודקודים בגרף שאינם שכנים של u,v. מספר הקודקודים בגרף הוא:
$|V|=|\{u,v\}|+|N(u)|+|N(v)|-|N(u)\cap N(v)|+|M|$, נציב את הנתונים:
$n=2+\frac{n+k}{2}+\frac{n+k}{2}-|N(u)\cap N(v)|+|M|$ ומכאן: (נוריד את M ונקבל אי שוויון).
$|N(u)\cap N(v)|\ge -n+2+n+k$ ולכן: $|N(u)\cap N(v)|\ge k+2$.

11. נמיר את הבעיה לגרף שבו כל קודקוד מייצג אדם וכל צלע מייצגת היכרות. נשתמש בטענה: אם מספר הקודקודים בגרף הוא אי זוגי אז בהכרח קיים קודקוד אחד לפחות שדרגתו זוגית כי אחרת, סך כל הדרגות יהיה אי זוגי. נפרק למספר מקרים:
   א. קיים אדם x עם מספר מכרים אי זוגי. לפי הטענה, קיים אדם y עם מספר מכרים זוגי מתוך השכנים של x. (ייתכן גם 0) ולכן מספר המכרים המשותפים שלהם הוא זוגי.
   ב. לכולם מספר מכרים זוגי. נבחר אדם x כלשהו, מספר האנשים ש x לא מכיר הוא אי זוגי כי סה"כ יש מספר זוגי של אנשים פחות מספר זוגי ופחות x נקבל מספר אי זוגי. לפי הטענה, בקבוצה ש x לא מכיר קיים y המכיר בקבוצה זו מספר זוגי של אנשים. ומכיוון שסה"כ מספר האנשים ש y מכיר הוא זוגי אז גם מספר האנשים ש y מכיר מתוך השכנים של x הוא זוגי ולכן מספר השכנים המשותפים של x ו y בהכרח זוגי.

12. $\sum_{\mathrm{k}=3}^{\mathrm{n}}\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}}=2^{\mathrm{n}}-\frac{\mathrm{n(n-1)}}{2}-\mathrm{n}-1$. – כי נבחר מתוך n הקודקודים את הקודקודים שירכיבו מעגל באורך 3, 4, וכו'.

13. יהא G גרף המקיים: $|E|\ge|V|=n$ כאשר: $n\ge 3$. נוכיח שיש מעגל ב G באינדוקציה על n.
בסיס: עבור $n=3$ נקבל ש $|E|=3$ - גרף המשולש ובפרט הוא מעגל.
צעד: נניח שהטענה נכונה לכל הגרפים עם n קודקודים ו $|E|\ge n$ צלעות ונוכיח עבור גרפים עם $n+1$ קודקודים ולפחות $n+1$ צלעות. יהא G גרף כזה. אם ב G יש קודקוד שדרגתו היא לכל היותר 1 – נוריד קודקוד זה, נשים לב שהורדנו לכל היותר צלע אחת ולכן נקבל גרף עם n קודקודים ולפחות n צלעות ולפי הנחת האינדוקציה – יש ב $G-v$ מעגל. הוספת v לא פוגעת במעגל ולכן סיימנו.
אם כל הקודקודים ב G הם מדרגה 2 או יותר אזי יהא v קודקוד ב G, נצא מקודקוד זה ונטייל ב G. מכיוון שכל קודקוד בדרגה לפחות 2 נוכל להמשיך את המסלול ולא לחזור לצלע שממנה הגענו. מכיוון ש G סופי, בהכרח קיים שלב שבו נחזור לקודקוד שכבר ביקרנו בו ולכן סגרנו מעגל.

14. נסמן: $|V|=n,|E|=m$. נוכיח באינדוקציה על m:
אם $m<n$ הטענה נכונה באופן טריוויאלי כי לכל גרף יש לפחות $0\ge m-n+1$ מעגלים.
בסיס: $m=n$, לפי המשפט: בכל גרף עם $m\ge n$ צלעות יש מעגל – הטענה מתקיימת ולכן יש לפחות מעגל אחד. $m-n+1=1$.
צעד: נניח שהטענה נכונה לכל הגרפים עם $m-1$ צלעות ונוכיח עבור גרפים עם m צלעות.
יהי G גרף על n קודקודים ו m צלעות כאשר $m>n$. לפי המשפט: בכל גרף עם $m\ge n$ צלעות יש מעגל – בהכרח קיים לפחות מעגל אחד ב G, יהי C מעגל כזה, נוריד מ C צלע אחת ונקבל גרף G' עם n קודקודים ו $m-1$ צלעות ולפי הנחת האינדוקציה, קיימים ב G'

לפחות $m-1-n+1$ מעגלים. נוסיף את הצלע בחזרה ונקבל שיש ב G מעגל נוסף C שלא היה קיים ב G' (כי הורדנו צלע ממעגל זה) ולכן ב G יש לפחות: $m-n+1$ מעגלים.

15. יהי G גרף שבו אורך המעגל המינימאלי הוא 5 והדרגה המינימאלית היא לפחות k. יהי v קודקוד ב G. לפי ההנחה, יש ל v לפחות k שכנים שונים שאינם מחוברים בצלע כי אחרת נקבל מעגל באורך 3. לכל אחד מ k השכנים יש לפחות $k-1$ שכנים שונים שאינם מחוברים בצלע כי אחרת נסגור מעגל באורך 4. מכאן, יש ב G לפחות $1+k+k(k-1)=k^2+1$ קודקודים – v, השכנים של v והשכנים של השכנים.