נוסחאות נסיגה

הגדרה: נוסחא רקורסיבית: נוסחא המחשבת תוצאה של בעיה מסוימת המתבססת על חישוב של אותה בעיה עבור ערכים קודמים.

לכל נוסחת נסיגה נגדיר:

- בסיס/ תנאי עצירה: פתרון של הנוסחא עבור הערך הפשוט ביותר.
- צעד רקורסיבי: חישוב המסתמך על התוצאה של ערך/ערכים קודמים.

הגדרה רקורסיבית:

קבוצה: הגדרה רקורסיבית של קבוצה תתבצע באופן הבא:

בסיס: איבר או קבוצת איברים שידוע לנו שהם שייכים לקבוצה.

צעד רקורסיבי: שייכות של איבר כללי לקבוצה על סמך איברים אחרים שנמצאים כבר בקבוצה.

לדוגמא: קבוצת המספרים הטבעיים מוגדרת באופן הבא:

$0 \in \mathbb{N}$ - בסיס , $x \in \mathbb{N}$ גורר ש $x+1 \in \mathbb{N}$ - צעד רקורסיבי.

ועכשיו, אם נרצה לדעת האם איבר a שייך לקבוצה, נצטרך לחזור אחורה עד הבסיס כדי לדעת האם האיברים הקודמים שייכים לקבוצה וכך נדע עבור האיבר עצמו.

פונקציה: הגדרה רקורסיבית של פונקציה תתבצע באופן הבא:

בסיס/תנאי התחלה: הערכים שהפונקציה מחזירה עבור האיבר/האיברים הראשונים.

צעד רקורסיבי: הפונקציה עצמה שבתוכה יש קריאה לפונקציה עבור איברים קודמים.

לדוגמא: פונקציה המחשבת עצרת $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$ מוגדרת באופן הבא:

$f(0)=1$ – תנאי התחלה , $f(n)=n*f(n-1)$ עבור $n>0$ - צעד רקורסיבי.

שיטות לפתרון נוסחאות נסיגה

המטרה: להגיע מנוסחת נסיגה לנוסחא מפורשת (נוסחא שמציבים בה n ומקבלים מיידית את התשובה).

- <u>שיטת הניחוש/ הצבה חוזרת</u>:

אם נתונה פונקציה רקורסיבית $f(n)$ אז נפתור ע"י הצבת $f(n-1)$ ואז נציב $f(n-2)$ וכן הלאה עד תנאי ההתחלה.

לדוגמא: $f(n) = 2 * f(n-1)$, $f(0) = 3$.

נציב: $f(n-1) = 2 * f(n-2)$ בנוסחא ונקבל אחרי הצבה אחת:

$f(n) = 2 * 2 * f(n-2)$ נמשיך ונציב: $f(n-2) = 2 * f(n-3)$ בנוסחא ונקבל אחרי 2 הצבות: $f(n) = 2 * 2 * 2 * f(n-3)$ עד שרואים את החוקיות ומנחשים שהפתרון אחרי $k-1$ הצבות יהיה: $f(n) = 2^k f(n-k)$. צריך להגיע ל $f(0)$ ולכן נציב: $k = n$ (כי $n-k = n-n = 0$) ונקבל:

$f(n) = 2^n f(0)$, נציב את $f(0)$ ונקבל נוסחא מפורשת: $f(n) = 3 * 2^n$.

כאשר משתמשים בשיטת הניחוש, צריך להוכיח את התוצאה ע"י אינדוקציה.

- <u>פתרון נוסחאות נסיגה ליניאריות הומוגניות ע"י הפולינום האופייני</u>:

אם נתונה פונקציה רקורסיבית מהצורה הבאה:

$f(n) = a_1 f(n-1) + a_2 f(n-2) + \cdots + a_k f(n-k)$ עם k תנאי התחלה: $f(1) = c_1, f(2) = c_2, \ldots, f(k) = c_k$ (<u>הערה</u>: תנאי ההתחלה יכולים להיות מ 0 עד $k-1$), כלומר: נוסחא התלויה ב k האיברים הקודמים.ואין לנוסחא איבר חופשי (לדוגמא: $f(n) = 2f(n-1) + \mathbf{2}$). אז נפתור את הנוסחא ע"י השלבים הבאים:

1. נציב: $f(n) = x^n$, $f(n-1) = x^{n-1}$, $f(n-2) = x^{n-2}$, ... , $f(n-k) = x^{n-k}$. ונקבל את הפולינום האופייני:

2. נפתור את המשוואה (מסדר k) ונקבל את הפתרונות: $x_1, x_2, \ldots, x_k$.
3. כעת, <u>אם קיבלנו k פתרונות שונים</u>, הנוסחא תראה כך:
$f(n) = b_1 {x_1}^n + b_2 {x_2}^n + \cdots + b_k {x_k}^n$, נותר למצוא את המקדמים: $b_1, b_2, \ldots, b_k$. נמצא את המקדמים ע"י הצבת תנאי ההתחלה ונקבל מערכת של k משוואות עם k נעלמים:

נציב את הפתרונות של $b_1, b_2, \dots, b_k$ בנוסחא:
$f(n) = b_1{x_1}^n + b_2{x_2}^n + \cdots + b_k{x_k}^n$ וזו הנוסחא המפורשת.
אם יש פתרונות זהים: לדוגמא: $x_1 = x_2$ אז אין לנו k פתרונות שונים ולכן,
נכפול את x_1 או את x_2 ב n ונקבל:
$f(n) = b_1{x_1}^n + \boldsymbol{n}b_2{x_2}^n + \cdots + b_k{x_k}^n$. אם יש ריבוי של פתרונות (m
פתרונות זהים, לדוגמא: $x_1 = x_2 = \cdots = x_m$), נכפול כל פתרון זהה ב n
(חוץ מהראשון) כדי לקבל m פתרונות שונים והנוסחא תראה כך:
$f(n) = b_1{x_1}^n + \boldsymbol{n}b_2{x_2}^n + \boldsymbol{n^2}b_3{x_3}^n + \boldsymbol{n^3}b_4{x_4}^n + \cdots + \boldsymbol{n^{m-1}}b_m{x_m}^n + \cdots + b_k{x_k}^n$.