<u>תרגיל 1.7:</u> תהא $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:
(א) הפונקציה $< v,u >:= vAu^T$ היא מכפלה פנימית.
(ב) $A = A^T$, $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ ו־$det(A) > 0$.

(א) ביליניאריות מתקיים לכל $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, כי

$$\begin{aligned}
< [w,x] + [y,z], [u,v] > &= [w+y, x+z] \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\
&= [w+y, x+z] \begin{bmatrix} \alpha u + \beta v \\ \delta v + \gamma u \end{bmatrix} \\
&= (w+y)(\alpha u + \beta v) + (x+z)(\delta v + \gamma u) \\
&= (w(\alpha u + \beta v) + x(\delta v + \gamma u)) + (y(\alpha u + \beta v) + z(\delta v + \gamma u)) \\
&= [w,x] \begin{bmatrix} \alpha u + \beta v \\ \delta v + \gamma u \end{bmatrix} + [y,z] \begin{bmatrix} \alpha u + \beta v \\ \delta v + \gamma u \end{bmatrix} \\
&= [w,x] \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + [y,z] \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \\
&=< [w,x], [u,v] > + < [y,z], [u,v] >
\end{aligned}$$

פתרון: (א)$\Leftarrow$(ב). יהא $[u_1, u_2] \in \mathbb{R}^2$ ו־ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. אזי, לפי אי־שליליות

$$\begin{aligned}
< [u_1,u_2], [u_1,u_2] > &= [u_1,u_2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\
= [u_1,u_2] \begin{bmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{bmatrix} &= u_1(a_{11}u_1 + a_{12}u_2) + u_2(a_{21}u_1 + a_{22}u_2) \\
= a_{11}u_1^2 + a_{12}u_1u_2 + a_{21}u_2u_1 + a_{22}u_2^2 &= \left(a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2\right) + (a_{12} + a_{21})u_2u_1 \\
&= \left(a_{11}u_1^2 + 2\sqrt{a_{11}a_{22}}u_1u_2 + a_{22}u_2^2\right) - 2\sqrt{a_{11}a_{22}}u_1u_2 + (a_{12}+a_{21})u_2u_1 \\
&= \left(\sqrt{a_{11}}u_1 + \sqrt{a_{22}}u_2\right)^2 + \left(a_{12} - 2\sqrt{a_{11}a_{22}} + a_{21}\right)u_1u_2 \geqslant 0, \quad \forall u_{\overline{1,2}} \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_{12} - 2\sqrt{a_{11}a_{22}} + a_{21} = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$a_{12} + a_{21} = 2\sqrt{a_{11}a_{22}}$$

השיוויון אחרון יתכן אם ורק אם $a_{11} \cdot a_{22} \geq 0$. יהי $u = [x,0] \neq [0,0]$.
נשתמש בהגדרה $\|u\|^2 :=< u,u > \geqslant 0$ ונבדוק מקרים:

1) אם $a_{11} < 0$ וגם $a_{22} < 0$, נקבל

$$[x,0] \begin{bmatrix} -1 & a_{12} \\ a_{21} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = -x^2 < 0$$

2) אם $a_{11}=0$ ו־ $a_{22}<0$, נקבל

$$[x,0]\left[\begin{array}{cc} 0 & a_{12} \\ a_{21} & -1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x \\ 0 \end{array}\right]=0$$

3) אם $a_{11}<0$ ו־ $a_{22}=0$, נקבל

$$[x,0]\left[\begin{array}{cc} -1 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x \\ 0 \end{array}\right]=-x^2<0$$

בשלושת המקרים הנ"ל קיבלנו סתירה לכך ש־ $\|u\|^2=0 \Leftrightarrow u=0$.

<u>מסכנה:</u> $a_{11}>0$ וגם $a_{22}>0$.

נגדיר מטריצה $A=\left[\begin{array}{cc} \alpha^2 & a \\ b & \beta^2 \end{array}\right]$ כאשר $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. אזי

$$\begin{aligned} [x,y]\left[\begin{array}{cc} \alpha^2 & a \\ b & \beta^2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right] &= [x,y]\left[\begin{array}{c} \alpha^2 x+ay \\ \beta^2 y+bx \end{array}\right] \\ &= \alpha^2x^2+xy(a+b)+\beta^2y^2 \\ &= \alpha^2x^2+2\alpha\beta xy+\beta^2y^2+(a+b-2\alpha\beta)\,xy \\ &= (\alpha x+\beta y)^2+(a+b-2\alpha\beta)\,xy \geqslant 0 \end{aligned}$$

אי־שיוויון מתקיים לכל $x,y\in\mathbb{R}$ אם $a+b=2\alpha\beta$.

1) $a+b=2\alpha\beta>0 \Leftarrow \left\{\begin{array}{c} -b<a\wedge a<0<b \\ -a<b\wedge b<0<a \\ a=0\wedge b>0 \\ a>0\wedge b=0 \\ 0<a,b\wedge a\neq b \\ 0<a=b \end{array}\right\}$

2) $a+b=2\alpha\beta<0 \Leftarrow \left\{\begin{array}{c} a<-b\wedge a<0<b \\ b<-a\wedge b<0<a \\ a=0\wedge b<0 \\ a<0\wedge b=0 \\ a,b<0\wedge a\neq b \\ a=b<0 \end{array}\right\}$

צריך לבדוק את כול האפשרויות:

1.1) אם $-b<a\wedge a<0<b$, נגדיר $A=\left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{array}\right]$.

אבל $[1,-1] \neq 0$ ו־ $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$ $[1,-1] \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, כלומר (1.1) לא יתכן.

1.2) אם $-a < b \wedge b < 0 < a$, נגדיר $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

אזי $[1,-1] \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$, כלומר (1.2) לא יתכן.

1.3) אם $a = 0 \wedge b > 0$, נגדיר $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

אזי $[1,-1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$, כלומר (1.3) לא יתכן.

1.4) אם $a > 0 \wedge b = 0$, נגדיר $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

אזי $[1,-1] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$, כלומר (1.4) לא יתכן.

1.5) אם $0 < a, b \wedge a \neq b$, נגדיר $A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}$.

אזי $[1,-1] \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0$, כלומר (1.5) לא יתכן.

2.1) אם $a < -b \wedge a < 0 < b$, נגדיר $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

אבל $[1,1] \neq 0$ ו־ $[1,1] \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, כלומר (2.1) לא יתכן.

2.2) אם $b < -a \wedge b < 0 < a$, נגדיר $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$.

אזי $[1,1] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, כלומר (2.2) לא יתכן.

2.3) אם $a = 0 \wedge b < 0$, נגדיר $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

אזי $[1,1] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, כלומר (2.3) לא יתכן.

2.4) אם $a < 0 \wedge b = 0$, נגדיר $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

אזי $[1,1] \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, כלומר (2.4) לא יתכן.

2.5) אם $a, b < 0 \wedge a \neq b$, נגדיר $A = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix}$.

אזי $[1,1] \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$, כלומר (2.5) לא יתכן.

מסקנה: מ־(1.6) ו־(2.6) נקבל $a = b$, כלומר מטריצה A מהצורה

$$A = \begin{bmatrix} \alpha^2 & a \\ a & \beta^2 \end{bmatrix}$$

דטרמיננט של A יהיה

$$det(A) = (a\beta)^2 - a^2$$

נניח בשלילה ש־ $det(A) < 0$. אזי $(a\beta)^2 < a^2$, וזה לא יתכן כי למשל,
אם $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ אז עבור $\left[\sqrt{3}-2,1\right] \neq 0$ נקבל

$$\left[\sqrt{3}-2,1\right] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}-2 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\sqrt{3}-2,1\right] \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 2\sqrt{3}-3 \end{bmatrix}$$
$$= \left(3-2\sqrt{3}\right) + \left(2\sqrt{3}-3\right) = 0$$

נניח בשלילה ש־$det(A) = 0$. אזי $(a\beta)^2 = a^2$, וזה לא יתכן גם, כי למשל
אם $A = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$ אז עבור $[1,-1] \neq 0$ נקבל

$$[1,-1] \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = [1,1] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

מסכנה סופית: $A = A^T$, $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ ו־$det(A) > 0$.

כיוון $(\Rightarrow)$ נובע מכל הבדיקות שעשינו.