בס"ד

לוגיקה ותורת הקבוצות

חוברת תרגילים

עדי ירדן
13/12/2017

תוכן

תרגילים בסיסיים בתורת הקבוצות

1. נכון או לא?

א. $1\in\{1,2,3\}$

ב. $1\in\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

ג. $\{1,2\}\subseteq\{1,2,3\}$

ד. $\{1,2\}\subseteq\{1,3,4\}$

ה. $\{1\}\in\{1,2,3\}$

ו. $\{1\}\in\{\{1\},2\}$

ז. $\{1\}\in\{\{1\},1\}$

ח. $\{\{1\}\}\subseteq\{\{1\},\{2\},3\}$

ט. $\{1,2\}=\{2,1\}$

י. $\{1,\{1\},\{\{1\}\}\}=\{\{1\},1,\{\{1\}\}\}$

2. חשבו את הקבוצות הבאות:

א. $\{1,2\}\cup\{2,3\}$

ב. $\{1,2\}\cap\{2,3\}$

ג. $\{1,2\}\setminus\{2,3\}$

3. בדקו נכונות של כל טענה:

א. אם $1\in A$, אז $\{1\}\in P(A)$.

ב. אם $\{1,2\}\subseteq A$, אז $\{1\}\in P(A)$.

4. נתון: $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3,4\}$. כתבו במפורש את הקבוצה $(B\setminus A)\cup\{3\}$.

5. נתון: $A=\{(1,2),(4,5),[3,5)\}$.

א. כמה אברים יש ב-A?

ב. האם $A\subseteq P(R)$? (R היא קבוצת המספרים הממשיים).

6. נניח $\{1\}\in A$. אלו מהמסקנות הבאות הכרחיות:

א. $\{1\}\subseteq A$. ב. $1\in A$. ג. $A\subseteq\{1,2\}$. ד. $A=\{\{1\}\}$.

7. נתון: $A=\{\varnothing,1\}$. כתבו את $P(A)$.

8. אלו מהטענות הבאות נכונות?

א. $1\in\{1,2\}$

ב. $1\in\{\{1\},2\}$

ג. $\{2\}\subseteq\{\{1\},2\}$

ד. $\emptyset\subseteq\{\{1,2\},2\}$

ה. $\{1,2,3\}=\{1,\{2\},3\}$

ו. $\{1,3\}\in\{\{1\},\{3\}\}$

ז. $\{1\}\in\{1,2,\{3\}\}$

ח. $\{1,2\}\in\{\{\{1\},2\},3\}$

ט. $\{1,2\}\subseteq\{\{\{1\},2\},3\}$

י. $\{1,2\}\subseteq\{\{1\},2,3\}$

יא. $\{\emptyset\}\subseteq P(\emptyset)$

יב. $\{\emptyset\}\in P(\emptyset)$

יג. $\{1,2,3\}\subseteq\{\{1,2,3\},1,2,3\}$

יד. $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}=P(P(\emptyset))$

טו. $\{\{\emptyset\}\}\subseteq P(P(P(\emptyset)))$

טז. $\{\{\emptyset\}\}\in P(P(P(\emptyset)))$

יז. $\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}\subseteq P(\mathbb{N})$

יח. $[0,1]\in P([0,2])$

יט. $[0,1]\subseteq P([0,2])$

כ. $\{\emptyset\}\cup\{[-1,1]\}\subseteq P([-1,1])$

9. נתונה הקבוצה האוניברסאלית $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ והקבוצות $C=\{2,4,6,7,9\}$ $B=\{1,2,4,5,6,9\}$ $A=\{1,3,5,8,9\}$

מצא:

א. $\overline{\emptyset}$

ב. $\overline{U}$

ג. $\overline{A}$

ד. $\overline{B}$

ה. $\overline{C}$

ו. $A\setminus B$

ז. $B\setminus A$

ח. $A\cup B$

ט. $B\cap C$

י. $(A\cup B)\setminus C$

יא. $\overline{A\cup B}\cap\overline{B\cup C}$

יב. $(A\cup C)\setminus(\overline{C\setminus A})$

יג. $A\triangle B$

יד. $A\triangle B\triangle C$

10. אילו מן הטענות הבאות הן נכונות? נמק!

א. $\{\phi\} = \phi$

ב. $\{\phi\} \in \{\phi, \{1\}\}$

ג. $\phi \subset \{\phi, 1\}$

ד. $\phi \subset \{\phi, \{\phi\}\}$

ה. $\{1\} \in \{\phi, 1\}$

ו. $\{1\} \subseteq \{\phi, \{1\}\}$

ז. $\phi \not\subset \{\phi\}$

ח. $\{\{1\},\phi\} \subseteq \{1, \{\phi\}\}$

ט. $\{1, \phi\} \subset \{\phi, 1\}$

י. $\{1, \phi\} \subseteq \{\phi, 1\}$

11. נתון $A = \{1,\{1\},\{1,2\}\}$, אלו מן הטענות הבאות הן נכונות? נמק!

א. $|A| = 4$

ב. $\{2\} \in A$

ג. $\{1\} \in A$

ד. $\{1\} \in P(A)$

ה. $1 \in P(A)$

ו. $\phi \in P(A)$

ז. $\{1,\{1\}\} \in P(A)$

ח. $\{1,2\} \in A$

ט. $\{1,2\} \subset A$

12. אילו מהקבוצות הבאות שוות זו לזו?

- $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m|<2\}$
- $B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^3=m\}$
- $C = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \le 2m\}$
- $D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \le 1\}$
- $E = \{0,1,2\}$

13. נתון $B = \{0,2,4\}$, $A = \{1,2\}$

א. מצא את A^2, B^2

ב. מצא |A™B|

ג. מצא את A™B

14. תהי $U = \mathbb{Z}$ קבוצה אוניברסלית.

תהיינה $A = \{2n: n \in \mathbb{N}\}, B = \{m: m^2 < 2\}, C = \{m: -3 \le m \le 6\}$

רשום את הקבוצות הבאות:

א. $A \cap B$

ב. $A \cup C$

ג. $A \cap \overline{B}$

ד. $(\overline{B} \cup C) \setminus A$

ה. $(A \cap C) \triangle B$

ו. $\overline{C} \setminus (A \triangle B)$

15. עבור כל אחת מהקבוצות הבאות, קבע האם היא שווה ל $\mathbb{Q}$ או הסבר מדוע הקבוצה שונה מ $\mathbb{Q}$.

א. $A = \{2x - 3: x \in \mathbb{Q}\}$

ב. $B = \{x: \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}\}$

ג. $C = \{x \subseteq Q: |x| = 1\}$

ד. $D = \{\frac{x}{y}: x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, x \ne y + 2\}$

16. רשום את מספר האיברים בקבוצות הבאות:

א. $A = \{x^2: x \in (-100,100] \cap \mathbb{Z}\}$

ב. $B = \{x \subseteq (1,3): 2 \in x, x \setminus \{2 + \frac{n}{5}: n \in \mathbb{N}\} = \emptyset\}$

ג. $C = \{x \subseteq \mathbb{R}: \mathbb{R} \setminus \{2,4,6\} \subseteq x\}$

תרגילים בסיסיים בתורת הקבוצות - פתרונות

1. תשובות סופיות:
   א. נכון.
   ב. לא נכון.
   ג. נכון.
   ד. לא נכון.
   ה. לא נכון.
   ו. נכון.
   ז. נכון.
   ח. נכון.
   ט. נכון.
   י. נכון.

2.
   א. $\{1,2,3\}$
   ב. $\{2\}$
   ג. $\{1\}$

3.
   א. נכון, נניח $A\ni 1$. אז $\{1\}\subseteq A$. לכן $\{1\}\in P(A)$.
   ב. נכון, נניח $\{1,2\}\subseteq A$. אז $1\in A$. עתה, לפי חלק א, $\{1\}\in P(A)$.

4. $\{3,4\}$.

5.
   א. 3.
   ב. כן, צריך להוכיח שכל אבר ב-A שייך גם לאגף ימין. כלומר שצריך להוכיח 3 דברים: $(1,2)\in P(R)$, $(4,5)\in P(R)$, $3,5)\in P(R)$. לשם קצור נוכיח רק אחד מהם. $[3,5)\subseteq R$. לכן $[3,5)\in P(R)$.

6. תשובות:
   א. דוגמא נגדית: $A=\{\{1\}\}$. במקרה זה $1\notin A$ ולכן $\{1\}$ איננה מוכל ב-A.
   ב. אותה דוגמא נגדית.
   ג. אותה דוגמא נגדית.
   ד. דוגמא נגדית: $A=\{\{1\},2\}$.

7. $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{1\},A\}$ (נתן להשיב גם כך: $P(A)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{1\},\{\varnothing,\{1\}\}\}$. אבל מי ששוכח סוגריים מסולסלים מפסיד נקודות).

8. תשובות סופיות:
   א. $1\in\{1,2\}$ - נכון
   ב. $1\in\{\{1\},2\}$ - לא נכון
   ג. $\{2\}\subseteq\{\{1\},2\}$ - נכון
   ד. $\emptyset\subseteq\{\{1,2\},2\}$ - נכון
   ה. $\{1,2,3\}=\{1,\{2\},3\}$ - לא נכון
   ו. $\{1,3\}\in\{\{1\},\{3\}\}$ - לא נכון
   ז. $\{1\}\in\{1,2,\{3\}\}$ - לא נכון
   ח. $\{1,2\}\in\{\{\{1\},2\},3\}$ - לא נכון
   ט. $\{1,2\}\subseteq\{\{\{1\},2\},3\}$ - לא נכון
   י. $\{1,2\}\subseteq\{\{1\},2,3\}$ - לא נכון
   יא. $\{\emptyset\}\subseteq P(\emptyset)=\{\emptyset\}$ - נכון
   יב. $\{\emptyset\}\in P(\emptyset)=\{\emptyset\}$ - לא נכון
   יג. $\{1,2,3\}\subseteq\{\{1,2,3\},1,2,3\}$ - נכון
   יד. $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}=P(P(\emptyset))=P(\{\emptyset\})=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ - נכון
   טו. $\{\{\emptyset\}\}\subseteq P\Big(P\big(P(\emptyset)\big)\Big)=P(P(\{\emptyset\}))=P(\{\emptyset,\{\emptyset\}\})=\Big\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\Big\}$ - נכון
   טז. $\{\{\emptyset\}\}\in P\Big(P\big(P(\emptyset)\big)\Big)=P(P(\{\emptyset\}))=P(\{\emptyset,\{\emptyset\}\})=\Big\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\Big\}$ - נכון
   יז. $\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}\subseteq P(\mathbb{N})$ - נכון
   יח. $[0,1]\in P([0,2])$ - נכון
   יט. $[0,1]\subseteq P([0,2])$ - לא נכון
   כ. $\{\emptyset\}\cup\{[-1,1]\}\subseteq P([-1,1])$ - נכון

9. תשובות סופיות:

א. $\overline{\emptyset} = U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

ב. $\overline{U} = \emptyset$

ג. $\overline{A} = \{2,4,6,7\}$

ד. $\overline{B} = \{3,5,8\}$

ה. $\overline{C} = \{1,3,5,8\}$

ו. $A \backslash B = \{3,8\}$

ז. $B \backslash A = \{2,4,6\}$

ח. $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8,9\}$,

ט. $B \cap C = \{2,4,6,9\}$

י. $(A \cup B) \backslash C = \{1,3,5,8\}$

יא. $\overline{A \cup B} \cap \overline{B \cup C} = \emptyset$

יב. $(A \cup C) \backslash (\overline{C \backslash A}) = \{2,4,6,7\}$

יג. $A \triangle B = \{2,3,4,6,8\}$

יד. $A \triangle B \triangle C = \{3,7,8,9\}$.

10. תשובות סופיות:

א. לא נכון.
ב. לא נכון.
ג. נכון.
ד. נכון.
ה. לא נכון.
ו. לא נכון.
ז. לא נכון.
ח. לא נכון.
ט. לא נכון.
י. נכון.

11. תשובות סופיות:

א. לא נכון.
ב. לא נכון.
ג. נכון.
ד. נכון.
ה. לא נכון.
ו. נכון.
ז. נכון.
ח. נכון.
ט. לא נכון.

12. $A = B = D = \{-1,0,1\}$, $C = E = \{0,1,2\}$.

13.

א. $A^2 = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$, $B^2 = \{(0,0),(0,2),(0,4),(2,0),(2,2),(2,4),(4,0),(4,2),(4,4)\}$

ב. $|A \times B| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 3 = 6$

ג. $A \times B = \{(1,0),(1,2),(1,4),(2,0),(2,2),(2,4)\}$

14.

א. $A \cap B = \{0\}$.

ב. $A \cup C = \{-3,-2,-1,0,2,4,\dots\}$

ג. $A \cap \overline{B} = \{2n \mid n \geq 2\}$

ד. $(\bar{B} \cup C) \backslash A = Z/A$

ה. $(A \cap C) \triangle B = \{-1,1,2,4,6\}$

ו. $\bar{C} \backslash (A \triangle B) = \{m \mid m < -3$ או $(m > 6$, m זוגי$)\}$

15.

א. $A = \{2x-3 : x \in \mathbb{Q}\}$ - שווה ל $\mathbb{Q}$.

ב. $B = \{x : \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}\}$ – שונה, כי $0 \notin B$.

ג. $C = \{x \subseteq Q : |x| = 1\}$ - שונה כי C היא קבוצה של קבוצות ולא של מספרים.

ד. $D = \{\frac{x}{y} : x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}, x \neq y+2\}$ - שווה ל $\mathbb{Q}$.

16.

א. 101
ב. 16
ג. 8

תרגילים בסיסיים על יחסים

1. לכל אחד מהיחסים:

- רשום 2 איברים השייכים ליחס.
- רשום 2 איברים שלא שייכים ליחס ושייכים למכפלה הקרטזית.

א. נתונות הקבוצות $A=\{x\in\ \mathbb{R}\mid 0\le x<10\}$ ו $B=\{x\mid x\in\ \mathbb{R}\}$ והיחס $R=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B, a\le b\}$

ב. נתונות הקבוצות $A=\{x\mid x\in\ \mathbb{Q}\}$ ו $B=\{x\mid x\in\ \mathbb{Q}\}$ והיחס $R=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B, a+b=0\}$

ג. נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ והיחס $R=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in P(A), a\in b\}$

ד. נתונה הקבוצה $A=[0,10)$ והיחס מעל A $R=\{<1,2>,<2,3>,<1,4>,<5,5>\}$

ה. נתונות הקבוצות $A=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\,, 0\le x\le 5\}$ ו $B=\{x\mid x\in\ \mathbb{R}\}$

והיחס $R=\{<a,b>\mid a\in A,\ b\in B\}$

ו. נתונות הקבוצות $A=\{x\mid x\in\ \mathbb{N}\}$ ו $B=\{x\mid x\in\ \mathbb{Z}\}$ והיחס $R=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B,\ \text{זוגי } a,\ b=a^2\}$

ז. נתונות הקבוצות $A=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\,, x=y\}$ ו $B=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}\,, x^2+y^2=4\}$

והיחס $R=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$

ח. נתונות הקבוצות $A=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N}\,, x=y\}$ ו $B=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{N}\,,\ y=\text{סכום הספרות של } x\}$

והיחס $R=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B,\ a\ne b\}$

2. נתונות קבוצות: $B=\{2n: n\in\mathbb{N}\}$ $A=[1,3]$, נגדיר יחס: $R=\left\{(a,b): a\in A, b\in B, \frac{b}{a}\notin\mathbb{N}\right\}$

אלו מהטענות הבאות נכונות?

א. $(3,8)\in R$

ב. $\left(\frac{1}{3},4\right)\in R$

ג. $(3,18)\in R$

ד. $\left(\frac{1}{4},4\right)\in R$

ה. $\left(\frac{2}{9},18\right)\in R$

ו. $\{(2,b): b\in B\}\subseteq R$

3. נתונות קבוצות: $A=(0,1]\setminus\left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\}$, $B=\left\{\frac{p}{q}: p,q\in(\mathbb{N}\setminus\{0\}), p^2\le q\right\}$, $C=P(A)\times B$

נגדיר יחס: $R=\left\{\left(a,b,(c_1,c_2)\right): a\in A, b\in B, (c_1,c_2)\in C, c_2\cdot b\in B\right\}$

אלו מהטענות הבאות נכונות?

א. $\left(\frac{2}{3},\frac{3}{10},\left(\left\{\frac{99}{100}\right\},\frac{10}{729}\right)\right)\in R$

ב. $\left(\frac{2}{4},\frac{4}{17},\left(\left\{\frac{9}{13},\frac{9}{14}\right\},\frac{17}{290}\right)\right)\in R$

ג. $\left(\frac{5}{9},\frac{1}{2},\left(\left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right]\setminus\left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\},\frac{8}{73}\right)\right)\in R$

ד. $\left(\frac{123}{124},\frac{3}{5},\left(\left\{x: 0<x\le\frac{1}{100}\right\}\setminus\left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\},\frac{10}{101}\right)\right)$

4. רשמו באמצעות קבוצות את היחסים הבאים מעל הקבוצה: $A=\{1,2,\dots,n\}$:

א. יחס קטן שווה בין 2 מספרים.

ב. יחס 3 מקומי בו סכום כל 2 איברים קטן מהשלישי.

ג. יחס n מקומי בו כל האיברים בסדרה שונים זה מזה.

ד. יחס 6 מקומי המתאר סדרת 6 תתי קבוצות של A כך שכולן זרות זו לזו (החיתוך בין כל 2 קבוצות שווה לקבוצה הריקה)

5. נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,4,5\}$ והיחסים $R=\{(a,b)\mid a,b\in P(A), |a|\le|b|\}$, $S=\{(a,b)\mid a,b\in P(A), a\subseteq b\}$

האם $S\subseteq R$?

6. תהיינה A, B קבוצות ויהיו R,S יחסים בין A ל B. האם $R\cup S$ בהכרח יחס בין A ל B?

7. מהי המכפלה הקרטזית של: הקבוצה הריקה בעצמה? של $\{1,2\}$ ב $\{2,7,9\}$?

8. תהיינה D,C,B,A קבוצות. האם $S = (A \times B) \cap (C \times D)$ בהכרח יחס בין A לB?
האם S בהכרח יחס בין A ל C? בין B ל D? בין $A \cap C$ לבין $B \cap D$?

9. תהיינה A, B קבוצות ויהיו R,S יחסים בין A ל B, האם $R \cap S$, $R \Delta S$ בהכרח יחס בין A ל B? מה לגבי $R \times S$?

10. תהא $S = \{ (m,n) \in Q \times Q \mid mn \text{ זוגי} \}$. האם S יחס דו-מקומי על N?

11. האם היחס בשאלה 5 יחס דו-מקומי על Z? על Q? על R?

12. מצא את כל היחסים בין הקבוצות $A = \{1,2,3\}$ ו-$B = \{2,3,5\}$. כמה יחסים יש?

13. מהו מספר היחסים בין קבוצה בגודל m לקבוצה בגודל n?

14. מהם כל היחסים התלת מקומיים על $A = \{1,2\}$?

15. מצא יחס תלת מקומי על R אשר מכיל ממש את היחס $S = \{(a,b,c) \mid a+b+c=0\}$ אבל אין בו שלשה (a,b,c) שכל הקורדינטות שלה שליליות.

16. כמה יחסים תלת מקומיים יש על קבוצה בגודל 5?

17. תן דוגמא של יחס 4 מקומי על קבוצת החזקה של הקבוצה הריקה.

18. נתונה קבוצה $A=\{1,2,3,4\}$. יהי R היחס על A שהוא קבוצת הזוגות הסדורים של מספרים כך שהשמאלי קטן מהימני. האם $R \in <1,2>$? האם $R \in <2,1>$?

19. נגדיר יחס R על $A=\{1,2,3\}$ כך: $<x,y> \in R$ אס"ם $x<y$. נגדיר יחס S על A כך: $S=\{<1,2>,<1,3>,<2,3>\}$. האם $R \subseteq S$?
האם $S \subseteq R$? האם $R=S$?

20. נתון יחס $R=\{<(1,2),(1,3)>,<(2,3),(1,3)>\}$ על $A=\{(a,b): a,b \in R,\ a<b\}$. האם $<\{x: 1<x<2\},\{x: 1<x<3\}> \in R$?

21. נגדיר יחס R על N כך: $<x,y> \in R$ אס"ם סכום הספרות של המספר x שווה לזה של y. כתבו אבר ששייך ל-R ואבר אחר ששייך למכפלה הקרטזית של N עם עצמה ובכל זאת לא שייך ל-R.

22. נגדיר יחס R על P(A), כאשר $A=\{1,2,3\}$ כך: $<x,y> \in R$ אס"ם $|x|=|y|$ (לשתי הקבוצות יש אותה עוצמה). כתבו שני אברים ששייכים ל-R (כלומר שני זוגות סדורים של קבוצות ב-P(A) שיש להן אותו מספר אברים).

23. נגדיר יחס T על N כך: $<x,y> \in T$ אס"ם קבוצת המספרים הראשוניים ש-x מתחלק בהם שווה לקבוצת המספרים הראשוניים ש-y מתחלק בהם. כתבו זוג ב-T וכתבו זוג במכפלה הקרטזית של N עם עצמו שאיננו ב-T.

תרגילים בסיסיים על יחסים - פתרונות

.1

א. $(0,0.5) \in R$, $(2,2) \in R$, $(3,2.5) \notin R$, $(8,-1) \notin R$

ב. $(3,-3) \in R$, $(0.5,-0.5) \in R$, $(0,1.5) \notin R$, $(1,2) \notin R$

ג. $(1,\{1\}) \in R$, $(2,\{1,2\}) \in R$, $(3,\{4\}) \notin R$, $(1,\{2,3\}) \notin R$

ד. $(1,2) \in R$, $(2,3) \in R$, $(0,1) \notin R$, $(1,5) \notin R$

ה. $((0,0),0) \in R$, $((3,1),1) \in R$

ו. $(2,4) \in R$, $(4,16) \in R$, $(1,1) \notin R$, $(8,5) \notin R$

ז. $\big((1,1),(0,2)\big) \in R$, $\big((2,2),(\sqrt{2},\sqrt{2})\big) \in R$

ח. $\big((9,9),(9,9)\big) \notin R$, $\big((1,1),(1,1)\big) \notin R$, $\big((1,1),(12,3)\big) \in R$, $\big((2,2),(5,5)\big) \in R$

.2

א. נכון.

ב. לא נכון כי $\frac{1}{3} \notin A$

ג. לא נכון כי $\frac{18}{3} \in \mathbb{N}$

ד. לא נכון כי $\frac{1}{4} \notin A$

ה. לא נכון כי $\frac{2}{9} \notin A$

ו. לא נכון כי $(2,4) \in \{(2,b): b \in B\}$ אבל $(2,4) \notin R$

.3

א. נכון

ב. לא נכון כי $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \notin A$

ג. נכון

ד. לא נכון כי $\frac{3}{5} \notin A$

.4

א. $'\leq' = \{(x,y): x,y \in A,\ x \leq y\}$

ב. $S = \{(x,y,z): x,y,z \in A,\ x+y<z\ , x+z<y\ , y+z<x\}$

ג. $S = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n): x_1,x_2,\ldots,x_n \in A,\ x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq \cdots \neq x_n\}$

ד. $S = \{(X_1,X_2,\ldots,X_6): X_1,X_2,\ldots,X_6 \subseteq A,\ X_1 \cap X_2 = \emptyset,\ X_1 \cap X_3 = \emptyset, \ldots,\ X_5 \cap X_6 = \emptyset\}$

5. כן. כי לכל 2 קבוצות, אם $A \subseteq B$ אז $|A| \leq |B|$.

6. כן. כי אם $R \subseteq A \times B$ וגם $S \subseteq A \times B$ אז גם $R \cup S \subseteq A \times B$.

7. $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$. $\{1,2\} \times \{2,7,9\} = \{(1,2),(1,7),(1,9),(2,2),(2,7),(2,9)\}$.

8. $S \subseteq A \times B$ (לפי הגדרת חיתוך) ולכן S יחס בין A ל B.
S אינו בהכרח יחס בין A ל C ואינו בהכרח יחס בין B ל D.
S הוא יחס בין $A \cap C$, $B \cap D$.

9. $R \cap S, R\Delta S$ - כן. $R \times S$ – לא.

10. לא, הוא מכיל זוגות שאיבריהן לא מ $\mathbb{N}$.

11. על Z – לא. על R,Q – כן.

12. כל תתי הקבוצות של המכפלה הקרטזית בין A ל B. סה"כ יש $2^{3\cdot 3}$ יחסים.

13. 2^{mn}

14. כל תתי הקבוצות של $\{1,2\}^3$

15. למשל $\{(a,b,c) | \ a+b+c \geq 0\}$

16. 2^{5^3}

17. $S = \{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,\emptyset)\}$

18. $(1,2) \in R$, $(2,1) \notin R$.

19. $S = R$ ובפרט $S \subseteq R$ וגם $R \subseteq S$.

20. כן, $< (1,2),(1,3) > \in R$ (כאן הסוגרים העגולים זה קטע בממשיים והמשולשים זה עבור הזוג ביחס).

21. $< 12,30 > \in R$, $< 1,30 > \notin R$

22. $< \{1\},\{2\} > \in R$, $< \{1\},\{3\} > \in R$

23. $< 4,8 > \in T$, $< 3,5 > \notin T$

תרגילים על פונקציות

1. נגדיר $f: R \to R$ על ידי $f(x)=(2x+3)/(x+1)$. האם זו פונקציה?

2. מה מהבאים הוא פונקציה? אם לא, נמקו!
   א. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מוגדר ע"י $f(x) = \sqrt{x}$
   ב. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מוגדר ע"י $f(x) = x^2$
   ג. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מוגדר ע"י $f(x) = \frac{1}{x}$
   ד. $f: \{1,2\} \to \mathbb{N}$ מוגדר ע"י $f(1) = 0,\ f(2) = 0$
   ה. $f: \{1,2\} \to \mathbb{N}$ מוגדר ע"י $f(1) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 2$
   ו. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ מוגדר ע"י $f(x,y) = x + y$

3. נגדיר $f: R\text{-}\{-3/2\} \to R\text{-}\{2\}$ על ידי $f(x)=(2x+3)/(x+1)$. האם זו פונקציה? האם היא חח"ע? אם לא נמקו. האם היא על? אם לא, נמקו. אם היא חח"ע ועל חשבו את הפונקציה ההפכית שלה.

4. נגדיר $f: R\text{-}\{-1\} \to R\text{-}\{1\}$, על ידי $f(x)=(x+3)/(x+1)$. האם זו פונקציה? האם היא חח"ע? אם לא נמקו. האם היא על? אם לא, נמקו. אם היא חח"ע ועל חשבו את הפונקציה ההפכית שלה.

5. נגדיר $f: R\text{-}\{1\} \to R\text{-}\{1\}$ על ידי הנוסחה: $f(x)=(x-1)^{-1}$. האם זו פונקציה? האם היא חח"ע? אם לא נמקו. האם היא על? אם לא, נמקו. אם היא חח"ע ועל חשבו את הפונקציה ההפכית שלה.

6. האם הפונקציה חד-חד-ערכית? האם הפונקציה על? אם היא חח"ע ועל, חשבו את ההופכית שלה.
   א. $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(x) = -x+7$
   ב. $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{R}, f(x) = -x+7$
   ג. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = -x+7$
   ד. $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, f(x) = 4x-3$
   ה. $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}, f(x) = x^2$
   ו. $f: [0,\infty) \to [0,\infty), f(x) = x^2$

7. נגדיר $f(x) = \frac{1}{x},\ \ g(x) = x,\ \ h(x) = 1-x,\ \ k(x) = \frac{x-1}{x}$. חשב:
   א. $f \circ g$
   ב. $g \circ f$
   ג. $h \circ k$
   ד. $h \circ f$
   ה. $k \circ h$
   ו. $g \circ k$

8. לכל אחת מהפונקציות f הבאות:
   1) האם f חח"ע?
   2) האם f על?
   3) אם f הפיכה, מצא f^{-1}
   4) הרכב את f עם הפונקציה g $(f(g(x)))$
   א. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ מוגדר ע"י $f(x) = \sqrt{x}$, $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $g(x) = x^2$, $(\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | \ x > 0\})$
   ב. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מוגדר ע"י $f(x) = x + 1$, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g(x) = x^5$,
   ג. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ מוגדר ע"י $f(x) = (x+3)^2$, $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $g(x) = \frac{x+3}{x+7}$,
   ד. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ מוגדר ע"י $f(x) = 2^x$, $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $g(x) = x^2 + x + 3$
   ה. $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ מוגדר ע"י $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $g: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x+3}{x}$,
   ו. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ מוגדר ע"י $f(x) = |x|$, $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $g(x) = (x+3)^2$,

9. תהא הקבוצה: $A = \{1,2,3\}$, נגדיר פונקציה: $f: A \to P(A)$ ע"י: $f(x) = \{1,2,3\}\backslash\{x\}$. הוכח או הפרך:
   א. f חח"ע
   ב. f על

10. תהא הפונקציה: $f: (0,1) \to N\backslash\{0\}$ המוגדרת ע"י: $f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ – כלומר, הפונקציה מחזירה את הערך התחתון של החלוקה של 1 ב x.

א. האם f חח״ע? הוכח!

ב. האם f על? הוכח!

11. לכל אחת מהפונקציות הבאות קבע האם היא פונקציה, האם היא חח״ע והאם היא על הטווח.

א. $f(x) = x \cdot (6 - x)\ ,\ f: \{1,2,3,4\} \to \{4,5,6,7,8\}$

ב. $f(x) = \frac{x}{10}\ ,\ f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

ג. $f(x) = \lfloor x \rfloor\ ,\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{N}$

ד. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ -x, & x > 0 \end{cases}\ ,\ f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

ה. $f(x) = x^3 + 2\ ,\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ו. $f(x) = \sqrt{x}\ ,\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ז. $f(X) = X \cup \{0\}\ ,\ f: P(\mathbb{N} \backslash \{0\}) \to P(\mathbb{N})$

ח. $f(X,Y) = X \cup Y\ ,\ f: P(\mathbb{N})^2 \to P(\mathbb{N})$

12. בכל אחד מהסעיפים הבאים כתבו פונקציה מתאימה:

א. כתבו פונקציה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שהיא חח״ע ולא על.

ב. כתבו פונקציה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שהיא לא חח״ע ועל.

ג. כתבו פונקציה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שהיא לא חח״ע ולא על.

ד. כתבו פונקציה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שהיא חח״ע ועל.

13. תהיינה 2 קבוצות: $A = \mathbb{N}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x\ is\ odd\}$. בכל אחד מהסעיפים הבאים תן דוגמא (אין צורך להוכיח) לפונקציה $f: A \to B$:

א. פונקציה f חח״ע ועל.

ב. פונקציה f חח״ע ולא על.

ג. פונקציה f לא חח״ע ועל.

ד. פונקציה f לא חח״ע ולא על.

ה. פונקציה f שבתמונה שלה יש רק 2 איברים. כלומר: יש רק 2 איברים ב B שיש להם מקורות.

14. לכל זוג פונקציות, חשב את ההפוכה של f או הסבר מדוע לא קיימת הפוכה, ואת ההרכבה של $f \circ g$, אם לא ניתן להרכיב, הסבר מדוע:

א. $g(x) = \sin x\ ,\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = x^3\ ,\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ב. $g(x) = x^2 + 5\ ,\ g: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}\ ,\ f(x) = 100 - x\ ,\ f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

ג. $g(x) = \{x\}\ ,\ g: \{1,2,3\} \to P(\{1,2,3\})\ ,\ f(X) = |X|\ ,f: P(\{1,2\}) \to \{0,1,2\}$

ד. $g(x) = 3^x\ ,\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = 2^{x+1} + 3\ ,\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

15. תהא $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה. נגדיר את הקבוצות הבאות:

$T = \{y \in \mathbb{N} | exists\ x \in \mathbb{N} : f(x) = y\}$, $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{N}^2 |\ f(x_1) < f(x_2)\}$.

א. כתבו דוגמא לפונקציה עבורה: $S = \emptyset$.

ב. האם יש פונקציה עבורה $T = \emptyset$?

ג. נניח ש f היא על. מהי הקבוצה T?

ד. נניח ש f חח״ע. נגדיר: $g: T \to \mathbb{N}$ ע״י: $g(x) = f(x)$. האם g היא פונקציה? האם g חח״ע? האם g על?

ה. נניח ש f חח״ע ועל. נגדיר $h: S \to S$ ע״י: $h(x,y) = \big(f(x), f(y)\big)$. האם h היא פונקציה?

16. נתונה פונקציה 5-מקומית על N: $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=x_1x_2+x_4$. למשל: $f(1,2,3,4,5)=1*2+4=6$. חשבו את $f(1,1,1,1,1)$.

17. נתונה פונקציה תלת-מקומית על R כך ש: אם $y=1$, אז $f(x,y,z)=x$ ואם $y\neq1$ אז $f(x,y,z)=1$. חשבו את $f(1,2,3)$ ואת $f(2,1,3)$.

תרגילים על פונקציות – פתרונות

1. לא פונקציה כיוון שלאיבר $1-$ אין תמונה.

2.
   א. לא, לחלק מהאיברים לא קיים שורש בטבעיים.
   ב. כן.
   ג. לא, עבור x=0 אין התאמה.
   ד. כן.
   ה. לא, לאיבר 1 קיימות 2 התאמות.
   ו. לא, לאיבר (0,0) לא קיימת התאמה.

3. לא פונקציה כיוון שלאיבר $1-$ אין תמונה.

4. f היא פונקציה חח״ע ועל. ההופכית: $f^{-1}(x)=\frac{3-y}{y-1}$

5. f היא פונקציה חח״ע שאינה על כי לתמונה 0 אין מקור.

6.
   א. f חח״ע: יהיו $x_1,x_2\in Z$ נניח ש $f(x_1)=f(x_2)$, צ״ל: $x_1=x_2$.
   לפי ההנחה: $-x_1+7=-x_2+7$ ולכן: $x_1=x_2$.
   f על: יהא $y\in Z$, נבחר: $x=-y+7$, $x\in Z$ ומתקיים: $f(x)=-(-y+7)+7=y$.
   ההופכית: $f^{-1}(x)=-x+7$.
   ב. f חח״ע – כמו סעיף א.
   f אינה על כי לתמונה 1/2 לדוגמא, אין מקור.
   ג. f חח״ע – כמו סעיף א.
   f על: יהא $y\in R$, נבחר: $x=-y+7$, $x\in R$ ומתקיים: $f(x)=-(-y+7)+7=y$.
   ההופכית: $f^{-1}(x)=-x+7$.
   ד. f חח״ע: יהיו $x_1,x_2\in Z$ נניח ש $f(x_1)=f(x_2)$, צ״ל: $x_1=x_2$.
   לפי ההנחה: $4x_1-3=4x_2-3$ ולכן: $x_1=x_2$.
   f אינה על כי לתמונה 2 לדוגמא, אין מקור כי ל $4x-3=2$ אין פתרון ב Z.
   ה. f אינה חח״ע כי $f(-1)=f(1)=1$.
   f אינה על כי לתמונה $1-$ אין מקור כי ל $x^2=-1$ אין פתרון ב R.
   ו. f חח״ע: יהיו $x_1,x_2\in[0,\infty)$ נניח ש $f(x_1)=f(x_2)$, צ״ל: $x_1=x_2$.
   לפי ההנחה: $x_1^2=x_2^2$ ולכן: $x_1=x_2$ כי $x_1,x_2\geq 0$.
   f על: יהא $y\in[0,\infty)$. נבחר: $x=\sqrt{y}$. $x\in[0,\infty)$ כי $y\geq 0$ ומתקיים: $f(x)=\left(\sqrt{y}\right)^2=y$.
   ההופכית: $f^{-1}(x)=\sqrt{x}$.

7.
   א. $f\circ g=f(g(x))=f(x)=\frac{1}{x}$
   ב. $g\circ f=g(f(x))=g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}$
   ג. $h\circ k=h(k(x))=h\left(\frac{x-1}{x}\right)=1-\frac{x-1}{x}$
   ד. $h\circ f=h(f(x))=h\left(\frac{1}{x}\right)=1-\frac{1}{x}$
   ה. $k\circ h=k(h(x))=k(1-x)=\frac{1-x-1}{1-x}=-\frac{x}{1-x}$
   ו. $g\circ k=g(k(x))=g\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{x-1}{x}$

8.
   א. f חח״ע ועל, $f^{-1}(x)=x^2$, $f\circ g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $f(g(x))=x$
   ב. f חח״ע, $f\circ g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(g(x))=x^5+1$
   ג. f חח״ע, $f\circ g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $f(g(x))=(\frac{x+3}{x+7}+3)^2$
   ד. f חח״ע ועל, $f^{-1}(x)=\log_2 x$, $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $f(g(x))=2^{x^2+x+3}$
   ה. f חח״ע, $f\circ g:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$, $f(g(x))=\frac{2x+3}{x+3}$

ו. f על, $f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $f(g(x))=|(x+3)|^2$

.9

א. f חח"ע: $f(1)=\{2,3\}$, $f(2)=\{1,3\}$, $f(3)=\{1,2\}$.

ב. f אינה על כי לתמונה $\emptyset$ לדוגמא, אין מקור.

.10

א. f אינה חח"ע: $f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2.5}\right)=2$.

ב. f על כי לכל $y\in N\backslash\{0,1\}$ ניקח את $x=\frac{1}{y}$. $x\in(0,1)$ כי נקבל שבר חיובי הקטן מ 1 ואכן: $f(x)=\left\lfloor\frac{1}{\frac{1}{y}}\right\rfloor=\lfloor y\rfloor=y$.

ואם $y=1$ ניקח $x=\frac{3}{4}$ ואז: $f(x)=\left\lfloor\frac{1}{\frac{3}{4}}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{4}{3}\right\rfloor=1$.

.11

א. f אינה פונקציה כי $f(3)=9\notin\{4,5,6,7,8\}$.

ב. f פונקציה חח"ע, הוכחה: יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{N}$, נניח: $f(x_1)=f(x_2)$, צ"ל: $x_1=x_2$.

לפי ההנחה: $\frac{x_1}{10}=\frac{x_2}{10}$ ולכן: $x_1=x_2$.

f אינה על: דוגמא נגדית: $f(x)=\frac{1}{3}$ ואכן, לא קיים $x\in\mathbb{N}$ כזה: $\frac{x}{10}=\frac{1}{3}$.

ג. f אינה פונקציה כי $f(-2)=-2\notin\mathbb{N}$.

ד. f פונקציה חח"ע, הוכחה: יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{Z}$, נניח: $x_1\neq x_2$, צ"ל: $f(x_1)\neq f(x_2)$.

אם $x_1,x_2>0$ אזי $-x_1\neq -x_2$ כי $x_1\neq x_2$.

אם $x_1>0, x_2\leq 0$ אזי: $-x_1\neq x_2^2$ בהכרח כי ריבוע של מספר שלם אינו יכול להיות שלילי.

אם $x_1,x_2\leq 0$ אזי: $x_1^2\neq x_2^2$ כי $x_1\neq x_2$.

f אינה על: דוגמא נגדית: $f(x)=3$ ואכן, לא קיים $x\in\mathbb{Z}$ כזה: $x^2=3$ עבור $x\leq 0$ או $-x=3$ – עבור $x>0$.

ה. f פונקציה חח"ע, הוכחה: יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, נניח: $f(x_1)=f(x_2)$, צ"ל: $x_1=x_2$.

לפי ההנחה: $x_1^3+2=x_2^3+2$ ולכן: $x_1=x_2$.

f על: יהא $y\in\mathbb{R}$, צ"ל: קיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x)=y$. נבחר: $x=\sqrt[3]{y-2}$.

ו. f אינה פונקציה כי $f(-1)=\sqrt{-1}\notin\mathbb{R}$.

ז. f פונקציה חח"ע, הוכחה: תהיינה $X_1,X_2\in P(\mathbb{N}\backslash\{0\})$, נניח: $f(X_1)=f(X_2)$, צ"ל: $X_1=X_2$. לפי ההנחה: $X_1\cup\{0\}=X_2\cup\{0\}$ ומכיוון ש $0\notin X_1$, $0\notin X_2$ נוריד את 0 מ 2 הקבוצות ונקבל: $X_1=X_2$.

f אינה על: דוגמא נגדית: $f(X)=\{1\}$ ואכן, לא קיים $x\in P(\mathbb{N}\backslash\{0\})$ כזה: $X\cup\{0\}=\{1\}$.

ח. f אינה חח"ע, דוגמא נגדית: $f(\emptyset,\{0\})=f(\{0\},\emptyset)=\{0\}$, אבל: $(\emptyset,\{0\})\neq(\{0\},\emptyset)$.

f על: תהא $Y\in P(\mathbb{N})$, צ"ל: קיים $(X_1,X_2)\in P(\mathbb{N})^2$ כך ש $f(X_1,X_2)=Y$. נבחר: $(X_1,X_2)=(\emptyset,Y)$.

.12

א. $f(x)=2^x$.

חח"ע: יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ נניח ש $f(x_1)=f(x_2)$ צ"ל: $x_1=x_2$.

לפי ההנחה: $2^{x_1}=2^{x_2}$ נצמיד $\log_2()$ ונקבל $x_1=x_2$.

לא על: לאיבר 0 אין מקור כי לא קיים פתרון ממשי ל $2^x=0$.

ב. $f(x)=\begin{cases}0\ ,\ if\ x\leq 0\\ \log_2 x\ ,\ otherwise\end{cases}$. לא חחע: כי $f(-1)=f(-2)=0$.

על: יהא $y\in\mathbb{R}$, צ"ל: קיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש $f(x)=y$. נבחר $x=2^y$. נשים לב ש $x\in\mathbb{R}$ וגם $x>0$ ולכן $f(x)=\log_2 x=\log_2 2^y=y$.

ג. $f(x)=x^2$. לא חח"ע: $f(-1)=f(1)=1$.

לא על: כי ל -1 אין מקור. אין פתרון ממשי ל $x^2=-1$.

ד. $f(x)=x$.

.13

א. $f(x)=2x+1$.

ב. $f(x)=2x+3$

ג. $f(x)=\begin{cases} x, & x\ is\ odd \\ x+1, & x\ is\ even \end{cases}$

ד. $f(x)=1$

ה. $f(x)=\begin{cases} 1, & x\ is\ odd \\ 3, & x\ is\ even \end{cases}$

.14

א. $f(g(x))=f(\sin x)=(\sin x)^3$, $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$.

ב. f^{-1} לא קיימת כי f אינה על: ל $f(x)=-200$ לא קיים $x\in\mathbb{N}$ כזה.
$f(g(x))=f(x^2+5)=100-(x^2+5)=95-x^2$.

ג. f^{-1} לא קיימת כי f אינה חח"ע: $f(\{1\})=f(\{2\})=1$ אבל: $\{1\}\neq\{2\}$.
לא ניתן להרכיב, כי $\{3\}\in P(\{1,2,3\})$ אבל: $\{3\}\notin P(\{1,2\})$.

ד. f^{-1} לא קיימת כי f אינה על: ל $f(x)=-1$ לא קיים $x\in\mathbb{R}$ כזה,
$f(g(x))=f(3^x)=2^{3^x+1}+3$.

.15

א. $f(x)=0$ ולכן לכל x_1,x_2: $f(x_1)=f(x_2)=0$ ולכן לא מתקיים אי השוויון. מכאן $S=\emptyset$.

ב. לא. כי לפי הגדרת פונקציה, לכל מקור יש תמונה ולכן קיים לפחות $y\in\mathbb{N}$ שיש לו מקור ולכן איבר זה יהיה ב T.

ג. לפי הגדרת פונקציה על: $T=\mathbb{N}$ כי לכל $y\in\mathbb{N}$ קיים $x\in\mathbb{N}$ כך ש $f(x)=y$.

ד. g היא פונקציה כי f היא פונקציה ולכן מוגדרת היטב על כל איבר ב $\mathbb{N}$ ובפרט על כל איבר ב T.
g חח"ע: יהיו $x_1,x_2\in T$. נניח ש $g(x_1)=g(x_2)$, צ"ל: $x_1=x_2$.
לפי ההנחה: $f(x_1)=f(x_2)$ ומכיוון ש f היא חח"ע נובע ש $x_1=x_2$.
g אינה על, דוגמא נגדית: $f(x)=x+1$. f היא פונקציה חח"ע. $T=\mathbb{N}\backslash\{0\}$ ולכן עבור 0 לא יהיה פתרון ל $g(x)=$
$f(x)=x+1=0$. כי $-1\notin T$.

ה. h אינה פונקציה. דוגמא נגדית: $f(x)=\begin{cases} x, x\neq 1,3 \\ 1, x=3 \\ 3, x=1 \end{cases}$. f חח"ע ועל. $(3,1)\in S$
כי $f(1)=3<f(3)=1$ אבל לזוג $(3,1)$ אין תמונה כי $h(3,1)=(\mathrm{f(3)},\mathrm{f(1)})=(1,3)$ אבל $(1,3)\notin S$ כי
$f(1)=3\nless f(3)=1$.

.16 $f(1,1,1,1,1)=1\cdot1+1=2$.

.17 $f(1,2,3)=1$ כי $y\neq1$. $f(2,1,3)=2$ כי $y=1$.

תרגילים על תחשיב הפסוקים

1. קבע האם הפסוק טאוטולוגיה, פסוק שקר או לא טאוטולוגיה ולא פסוק שקר:

א. $(A \lor B) \land (\neg A \lor \neg B) \land (\neg A \lor B) \land (A \lor \neg B)$

ב. $(A \to \neg A) \to [(\neg B \land A \land C) \lor (\neg A)]$

ג. $(A \leftrightarrow \neg A) \land [(B \lor \neg A \lor C) \to A]$

ד. $(A \lor B \lor C) \leftrightarrow (\neg A \land \neg B \land \neg C)$

2. לכל אחד מהפסוקים הבאים:

- בנה טבלת אמת
- כתוב פסוק שקול המשתמש בקשרים: "או", "וגם" ו"שלילה" בלבד, השלילה תופיע רק על פסוקים אטומיים.
- הצג את שלילת הפסוק, כך שהשלילה תופיע על פסוקים אטומיים בלבד.

א. $(A \to B) \to C$

ב. $(A \land \neg B) \leftrightarrow (C \lor \neg A)$

ג. $(A \to B) \lor (A \to C)$

ד. $(A \land B) \lor (\neg A \to \neg B)$

ה. $A \leftrightarrow (\neg A \to B)$

ו. $\left[\left((A \land B) \lor C\right) \to (\neg C \lor A)\right] \to (\neg A \leftrightarrow \neg B)$

ז. $(\neg A \land B \land C) \lor (A \to (B \land C))$

ח. $A \lor [(B \to C) \land (D \to \neg A)]$

ט. $(A \lor B) \land (A \to \neg B) \land (\neg A \leftrightarrow B) \land (\neg A \lor \neg B)$

י. $(A \to C) \lor (\neg B \lor \neg A)$

יא. $(B \land C) \lor (B \land \neg A)$

3. לכל אחד מהפסוקים הבאים בחר את הפסוק או הפסוקים השקולים אליו:

א. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$

1) $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$

2) $[A \land (B \leftrightarrow C)] \lor [\neg A \land \left((B \land \neg C) \lor (\neg B \land C)\right)]$

3) $[(A \to B) \to C] \land [C \to (B \to A)]$

ב. $(A \land B) \lor (C \to \neg A)$

1) $\neg A \lor B \lor \neg C$

2) $\neg C \lor (A \land B) \lor \neg A$

3) $(A \land B) \lor \neg A$

ג. $(A \to \neg B) \land (A \to C)$

1) $A \to (\neg B \land C)$

2) $(\neg A \land B) \lor (\neg A \land C)$

3) $\neg A \lor (\neg B \land C)$

ד. $B \leftrightarrow [A \to (C \land D)]$

1) $\left[B \land \left(\neg A \lor (C \land D)\right)\right] \lor [\neg B \land (A \land (\neg C \lor \neg D)]$

2) $\left[B \land \left(\neg A \lor (C \land D)\right)\right] \lor [\neg B \land (A \land (\neg C \land \neg D)]$

3) $(B \leftrightarrow A) \to [B \leftrightarrow (C \land D)]$

ה. $(A \land B \land C) \lor [(\neg A \lor B \lor C) \to A]$

1) $(\neg A \lor B \lor C) \to A$

2) A

3) $(A \land B \land C) \lor \neg A$

ו. $A \land [(A \to B) \lor \neg C]$

1) $(A \land B) \lor (A \land \neg C)$

2) A

3) $A \land (C \to (A \to B))$

4. בנה טבלת אמת לפסוקים הבאים והצג אותם בצורת DNF:

א. $(A \wedge \neg B) \vee C$

ב. $A \leftrightarrow (B \vee A)$

ג. $(A \to B) \wedge (B \to C)$

ד. $A \leftrightarrow \big(\neg B \to (A \vee C)\big)$

ה. $A \wedge \big(B \vee (\neg C \to A)\big)$

ו. $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \vee \neg C)$

ז. $\big(\neg A \to (B \wedge C)\big)$

ח. $(\neg A \vee B) \leftrightarrow \big(B \wedge (C \to A)\big)$

5. עבור הפסוקים הבאים רשום אילו פסוקים הם טאוטולוגיות, אילו פסוקים הם פסוקי שקר ואילו פסוקים הם לא זה ולא זה:

א. $(A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B)$

ב. $(A \to B) \to (B \to A)$

ג. $\big((A \wedge B) \vee C\big) \vee \big((\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C\big)$

ד. $\Big(A \to \big((A \vee B) \to C\big)\Big) \to \Big(\big(A \to (A \vee B)\big) \to (A \to C)\Big)$

ה. $(A \to B) \wedge A \wedge \neg B$

ו. $(A \leftrightarrow B) \wedge \big((\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B)\big)$

ז. $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee \big((B \vee C) \wedge \neg A\big)$

ח. $\big((A \to B) \wedge (C \to B)\big) \leftrightarrow \big((A \vee C) \to B\big)$

6. הוכח או הפרך את השקילויות הבאות:

א. $(A \vee B) \to (\neg A \vee \neg B) \equiv \neg A \vee \neg B$

ב. $\big(A \to (B \leftrightarrow C)\big) \equiv \big(\neg A \vee (B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C)\big)$

ג. $\big(A \wedge (\neg B \vee \neg C)\big) \equiv (A \wedge \neg B) \to (A \wedge \neg C)$

ד. $\big(A \to (B \vee C)\big) \equiv (A \to B) \wedge (A \to C)$

ה. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

ו. $\big(A \leftrightarrow (B \vee A)\big) \equiv A \vee (\neg A \wedge \neg B)$

ז. $\neg(A \wedge B \wedge C) \equiv (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$

7. לכל אחד מהפסוקים הבאים:

- בנה טבלת אמת.
- ציין האם הפסוק טאוטולוגיה, פסוק שקר או לא טאוטולוגיה ולא פסוק שקר.
- מצא פסוק שקול המשתמש בקשרים: $\neg, \vee, \wedge$.
- הצג את שלילת הפסוק ללא שלילה מחוץ לסוגריים.

א. $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

ב. $(A \to B) \to C$

ג. $(A \wedge \neg B) \leftrightarrow (C \vee \neg A)$

ד. $(A \to B) \vee (A \to C)$

ה. $(A \wedge B) \vee (\neg A \to \neg B)$

ו. $A \leftrightarrow (\neg A \to B)$

ז. $\big[\big((A \wedge B) \vee C\big) \to (\neg C \vee A)\big] \to (\neg A \leftrightarrow \neg B)$

ח. $(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \to (B \wedge C))$

ט. $A \vee [(B \to C) \wedge (D \to \neg A)]$

י. $(A \vee B) \wedge (A \to \neg B) \wedge (\neg A \leftrightarrow B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

יא. $(A \to C) \vee (\neg B \vee \neg A)$

יב. $(A \to \neg A) \to [(\neg B \wedge A \wedge C) \vee (\neg A)]$

יג. $(A \leftrightarrow \neg A) \wedge [(B \vee \neg A \vee C) \to A]$

יד. $(B \wedge C) \vee (B \wedge \neg A)$

טו. $(A \vee B \vee C) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

8. מצא ברשימה הנ״ל זוגות של פסוקים שקולים (כמה שיותר).

א. $(A \to B) \vee (A \wedge \neg B)$

ב. $(A \wedge \neg A) \vee (\neg A)$

ג. $((B \leftrightarrow A) \wedge (\neg B \to A)) \vee (B \wedge \neg A)$

ד. $A \vee (B \wedge A)$

ה. $A \wedge (B \leftrightarrow (C \vee B))$

ו. $B \vee (A \wedge B) \vee \neg B$

ז. $(A \wedge B \wedge C) \to ((\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B))$

ח. $A \leftrightarrow (\neg B \vee A)$

ט. $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$

י. $(\neg A \to B) \wedge (\neg B \to A)$

9. נתונים המשפטים/הטענות הבאים:

א. אם x מתחלק ב 3,5,7 אז x מתחלק במכפלה של שלושתם. (מקרה פרטי של משפט מתורת המספרים).

ב. אם $x \in A$ וגם $A \subseteq B$ אז $x \in B$.

ג. פונקציה היא הפיכה אם ורק אם היא חח״ע ועל.

ד. אם הקבוצות A, B שוות וגם C, D שוות אז אם A מוכלת ב C וגם C מוכלת ב B אז $A = D$.

לכל אחד מהמשפטים רשום:

1. את שלילת המשפט.
2. את המשפט השקול על פי השקילות: $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$ - רק עבור הסעיפים א,ב,ד.

10. נתון שהפסוקים הבאים מתקיימים:

א. $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow E)$

ב. $C \to F$

ג. $(\neg E \wedge C) \vee (E \wedge \neg C)$

ד. $D \to B$

ה. $E \leftrightarrow D$

ו. $\neg B \leftrightarrow F$

הוכח ש A מתקיים.

11. נגדיר את הקשר הבא F כך שטבלת האמת של F היא:

F(A)	A
F	T
F	F

הראה שהמערכת: $\{\to, F\}$ שלמה.

תרגילים על תחשיב הפסוקים - פתרונות

1.
א. פסוק שקר.
ב. טאוטולוגיה.
ג. פסוק שקר.
ד. פסוק שקר.

2.
א. 1) טבלת אמת 2) $\neg A \vee \neg B \vee C$ 3) $A \wedge B \wedge \neg C$
ב. 1) טבלת אמת 2) $(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$ 3) $(\neg A \vee \neg B \vee C) \wedge (\neg A \vee B \vee \neg C)$
ג. 1) טבלת אמת 2) $\neg A \vee B \vee C$ 3) $A \wedge \neg B \wedge \neg C$
ד. 1) טבלת אמת 2) $A \vee \neg B$ 3) $\neg A \wedge B$
ה. 1) טבלת אמת 2) $A \vee \neg B$ 3) $\neg A \wedge B$
ו. 1) טבלת אמת 2) $[(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)] \vee (B \wedge C)$ 3) $[(A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A)] \wedge (\neg B \vee \neg C)$
ז. 1) טבלת אמת 2) $\neg A \vee (B \wedge C)$ 3) $A \wedge (\neg B \vee \neg C)$
ח. 1) טבלת אמת 2) $A \vee \neg B \vee C$ 3) $\neg A \wedge B \wedge \neg C$
ט. 1) טבלת אמת 2) $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$ 3) $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$
י. 1) טבלת אמת 2) $\neg A \vee \neg B \vee C$ 3) $A \wedge B \wedge \neg C$
יא. 1) טבלת אמת 2) $B \wedge (\neg A \vee C)$ 3) $\neg B \vee (A \wedge \neg C)$

3.
א. (1) (2)
ב. (1) (2)
ג. (1) (3)
ד. (1)
ה. (1) (2)
ו. (1) (3)

4.
5.
6.
7.
8.
9.
א. 1. x מתחלק ב 3,5,7 אבל לא מתחלק במכפלת שלושתם.
2. אם x לא מתחלק במכפלת 3,5,7 אז x לא מתחלק ב 3 או ב 5 או ב 7.
ב. 1. $x \in A$ וגם $A \subseteq B$ אבל $x \notin B$.
2. אם $x \notin B$ אז $x \notin A$ או $A \nsubseteq B$.
ג. 1. פונקציה היא הפיכה אבל לא חח"ע או לא על או שהפונקציה היא חח"ע ועל אבל לא הפיכה.
ד. 1. הקבוצות A, B שוות וגם C, D שוות וגם A מוכלת ב C וגם C מוכלת ב B אבל $A \neq D$.
2. אם A מוכלת ב C וגם C מוכלת ב B וגם $A \neq D$ אז $A \neq B$ או $C \neq D$.

10. הוכחה: צ"ל: A. לפי א', צ"ל: B אם ורק אם E.
כיוון 1: נניח B, צ"ל: E. מכאן לפי ו' F לא מתקיים ולכן לפי ב', C לא מתקיים ולכן לפי ג' בהכרח E מתקיים.
כיוון 2: נניח E, צ"ל: B. מכאן לפי ה', D מתקיים ולפי ד' B מתקיים. מש"ל.

11. נראה שהמערכת $\{\rightarrow, F\}$ שלמה ע"י ביטוי הקשרים במערכת השלמה: $\{\neg, \vee\}$.
נמצא שקילות לשלילה: $\neg A \equiv A \rightarrow F(A)$ ואכן, אם $A \equiv T$ אז $A \rightarrow F(A) \equiv F$ ואם $A \equiv F$ אז $A \rightarrow F(A) \equiv T$.
כעת נמצא שקילות ל $\vee$: $A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B \equiv \big(A \rightarrow F(A)\big) \rightarrow B$ כאשר השקילות הראשונה היא לפי הזהות של גרירה והשקילות השנייה לפי מה שהראנו לשקילות של שלילה.

תרגילים בסיסיים על מבנים

1. נתון אוצר המילים $L = \{f, g, S, c\}$ כאשר f הוא סימן פונקציה חד- מקומית, g סימן פונקציה דו- מקומית, S סימן יחס דו מקומי ו c סימן קבוע.
   א. האם המבנה $< N, +, \cdot, <, 0 >$ מפרש את L? נמק!
   ב. האם המבנה $< N, f, \cdot, >, 12 >$ כאשר $f(x) = x + 1$, מפרש את L? נמק!
   ג. האם המבנה $< R, f, g, S, e >$ כאשר $g(x, y) = x^y$, $S = \{(x, y) \mid x + y = 0\}$, $f(x) = e^x$, מפרש את L? נמק!
   ד. האם המבנה $< \{1,2,3,4,5\}, <, 2 >$ מפרש את L? נמק!

2. האם $< N, - >$ (הטבעיים עם פעולת חיסור) הוא מבנה מתמטי? נמק!

3. האם $< Z, S, 0 >$ הוא מבנה מתמטי כאשר S הוא הסימן > (דו מקומי) במספרים השלמים? נמק!

4. האם $< \{1,2,3,4,5\}, + >$ הוא מבנה מתמטי? נמק!

5. האם $< P(X), \in, \cap >$ כאשר X קבוצה כלשהי לא ריקה, הוא מבנה מתמטי? נמק!

6. האם $< N \backslash \{9\}, f >$ כאשר $f(x) = x + 2$, הוא מבנה מתמטי? נמק!

7. האם $< Z, S, 0.5 >$ כאשר $S = \{(x, y) | x/y \in Z\}$, הוא מבנה מתמטי? נמק!

8. האם $< \{1,2,3,4,5\}, S >$ כאשר $S = \{(x) | x > 5\}$, הוא מבנה מתמטי? נמק!

9. האם $< \mathbb{N} \times \mathbb{N}, S, (1,1) >$ כאשר $S = \{((a, b), (c, d)) \mid a > c \text{ and } b > d\}$ הוא מבנה מתמטי? נמק!

10. נתון או"מ $L = \{R, c\}$ כאשר R סימן יחס חד מקומי ו c סימן קבוע אישי.
    רשום את כל המבנים האפשריים ב L עם העולם $\{1,2\}$.

11. נתון או"מ $L = \{f, c\}$ כאשר f סימן פונקציה תלת מקומית ו c סימן קבוע אישי.
    רשום 3 מבנים המפרשים את L כך ש:
    - לכל מבנה עולם שונה וסופי
    - הקבוע מתפרש אחרת בכל מבנה
    - הפונקציה מתפרשת אחרת בכל מבנה.

12. יהי $L = (c_1, c_2, R, f)$ אוצר מילים כאשר c_1, c_2 הם קבועים אישיים R הוא יחס תלת מקומי ו f היא פונקציה חד מקומית.
    אילו מהמבנים הבאים מפרשים את אוצר המילים?
    א. $M_1 = (\{0,1,2,3\}, 1,2, R^{M_1}, f^{M_1})$ כאשר: $R^{M_1} = \{(1,2,3), (2,3,0)\}$
    ו- $f^{M_1}(x)$ מחזירה את שארית החלוקה של $2x$ ב4.
    ב. $M_2 = (\mathbb{N}, 0,1, R^{M_2}, f^{M_2})$ כאשר: $R^{M_2} = \{(n, m, k): n, m, k \in \mathbb{N}, nm = k\}$, $f^{M_2}(n) = n + 2$.
    ג. $M_3 = \left((0,1], \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, R^{M_3}, f^{M_3}\right)$ כאשר: $R^{M_3} = \{(x, y, z): x, y, z \in (0,1], x < y < z\}$, $f^{M_3}(x) = \frac{1}{x}$.
    ד. $M_4 = (P(\mathbb{Z}), 0,1, R^{M_4}, f^{M_4})$ כאשר: $R^{M_4} = \{(A, B, C): A \subseteq B \subseteq C \subseteq \mathbb{Z}\}$, $f^{M_4}(A) = A$.
    ה. $M_5 = (\mathbb{R}, 1,2, R^{M_5}, f^{M_5})$ כאשר: $R^{M_5} = \{(x, y, z): x, y, z \in \mathbb{R}, x + y + z = 1\}$, $f^{M_5}(x) = 2^x$.

13. נתון אוצר המילים: $L = \{S, f, g, c\}$ כאשר: S סימן יחס דו מקומי, f סימן פונקציה חד מקומית, + פונקציה דו מקומית, c סימן קבוע. קבע לכל אחד מהמבנים הבאים האם הוא מבנה תקין והאם הוא מפרש את L. אם לא, נמק!
    א. $M =< \emptyset, <, \emptyset, f(x) = x, g(x, y) = x + y >$.
    ב. $M =< \{1,3,5,7,9\}, \{(x, y) | x + y = 10\}, f(x) = 3, g(x, y) = y, 9 >$
    ג. $M =< Z, <, f(x) = x^2, g(x, y) = x - y, 2.5 >$
    ד. $M =< R, f(x) = 2x + 1, g(x, y) = x^2, 0 >$
    ה. $M =< P(\mathbb{R}), \subseteq, f(X) = X \backslash \mathbb{Z}, g(X, Y) = X \cap Y, \mathbb{R} >$
    ו. $M =< \{3x \mid x \in \mathbb{N}\}, <, f(x) = x + 3, g(x, y) = (x + 2)^2, 0 >$
    ז. $M =< \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \{(x, y) | x \cdot y = 1\}, f(x) = x^2, g(x, y) = x \cdot y, 1 >$

תרגילים בסיסיים על מבנים – פתרונות

1.
א. לא, במבנה קיימות 2 פונקציות דו מקומיות ואין פונקציה חד מקומית.
ב. כן
ג. לא, פונקצית החזקה לא סגורה ל R כי $g(-2,0.5) = (-2)^{0.5}$ לא מוגדר.
ד. לא, אין במבנה פירוש לסימני הפונקציות שנמצאות באו"מ.

2. לא, המבנה לא סגור לפעולת החיסור.

3. כן.

4. לא, המבנה לא סגור לפונקצית החיבור.

5. כן.

6. לא, המבנה לא סגור לפונקציה (7+2) לא מוגדר.

7. לא, הקבוע 0.5 לא שייך לעולם.

8. כן.

9. כן.

10.
$M_1 =< \{1,2\}, \{(1)\}, 1 >$, $M_2 =< \{1,2\}, \{(1)\}, 2 >$, $M_3 =< \{1,2\}, \{(2)\}, 1 >$, $M_4 =< \{1,2\}, \{(2)\}, 2 >$,
$M_5 =< \{1,2\}, \{(1),(2)\}, 1 >$, $M_6 =< \{1,2\}, \{(1),(2)\}, 2 >$, $M_7 =< \{1,2\}, \emptyset, 1 >$, $M_8 =< \{1,2\}, \emptyset, 2 >$

11. מבנה 1: $M_1 =< \{x \in \mathbb{N} | 0 \le x \le 10\}, f^{M1}, 1 >$ כאשר $f^{M1}(x,y,z) = 10 - x$
מבנה 2: $M_2 =< \{0,2,4,6,8,10,12,14,16\}, f^{M2}, 16 >$ כאשר $f^{M2}(x,y,z) = 0$
מבנה 3: $M_3 =< \left\{\frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{N},\ 1 \le x \le 100\right\}, f^{M3}, \frac{1}{20} >$ כאשר $f^{M3}(x,y,z) = z$

12.
א. המבנה מפרש את אוצר המילים.
ב. המבנה מפרש את אוצר המילים.
ג. אינו מבנה כלל כי העולם לא סגור לפונקציה: $\mathrm{f}\left(\frac{1}{4}\right) = 4$ שאינו שייך לעולם.
ד. אינו מבנה כלל כי הקבועים לא שייכים לעולם כי הם מספרים והעולם הוא קבוצה של קבוצות.
ה. המבנה מפרש את אוצר המילים.

13.
א. לא תקין – העולם של המבנה לא יכול להיות קבוצה ריקה.
ב. תקין.
ג. לא תקין – הקבוע של המבנה חייב להיות מתוך העולם של המבנה.
ד. תקין אבל לא מפרש את L - אין פירוש לסימן היחס.
ה. תקין.
ו. לא תקין – הפעולה חייבת להיות סגורה בעולם וכאן: $g(3,0) = 25$ שאינו בקבוצה.
ז. תקין.

תרגילים על תתי מבנים

1. יהי $M = (\mathbb{Z}, 0, <, +, \cdot)$ מבנה. אילו מהבאים מהווים תת-מבנה של M?
   - א. $M_1 = (\mathbb{N}, 0, <, +, \cdot)$
   - ב. $M_2 = (\{0,1,2\}, 0, <, +, \cdot)$
   - ג. $M_3 = (\{2m : m \in \mathbb{Z}\}, 0, <, +, \cdot)$

2. נתון מבנה $M = (P(\mathbb{N}), \emptyset, \mathbb{N}, \subseteq, \cap, \cup)$, כאשר $\emptyset$ ו$\mathbb{N}$ הם קבועים אישיים. האם יש לM תת מבנה עם עולם בגודל 1? מה לגבי עולם בגודל 2?

3. האם $<\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, <>$ הוא תת מבנה של $<N, <>$? נמק!

4. האם $<\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}, f>$, $f(x) = 2x + 2$ הוא תת מבנה של $<N, f>$? נמק!

5. האם $<\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10\}, +>$ הוא תת מבנה של $<N, +>$? נמק!

6. רשום 2 תת מבנים שונים למבנה $\mathrm{M} = <R, S, f, g>$, $\mathrm{S}^{\mathrm{M}} = \{(a,b,c) \mid a+b+c = 0\}$, $f^M(x) = x^2$, $g^M(x,y) = x + 2y$.

7. רשום תת מבנה ל $M = <Q, <, \frac{1}{2}>$

8. רשום תת מבנה ל $M = <Q, +, \frac{1}{2}>$

9. האם $<N, \cdot, 0>$ הוא תת מבנה של $<Z, +, 0>$? נמק!

10. נתון: $M = <[0,1], <, \cdot>$, רשום 2 תת מבנים שונים של M.

11. נתון: $L = \{f, R, c\}$ אוצר מילים כאשר f סימן פונקציה דו-מקומית, R סימן יחס תלת מקומי ו c סימן קבוע אישי. רשום מבנה עם עולם אינסופי המפרש את L ומצא לו תת מבנה השונה ממנו.

12. כמה תת מבנים קיימים למבנה $M = <A, S, 0>$ כאשר $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -20 \leq x \leq 20\}$ ו S הוא יחס דו מקומי המוגדר: $S = \{(a,b) \mid a + b = 2k, a, b \in A, \ k \in \mathbb{Z}\}$?

13. בכל אחד מהסעיפים הבאים, <u>האם M' הוא תת מבנה של M?</u>
   - א. M'=(N, +) , M=(R, +, *)
   - ב. M'=(Q, ≤) , M=(Z, ≤, 0)
   - ג. M'=({1, 2, 3}, 1, +) , M=(N, 0, 1, +, <)
   - ד. M'=(R, 0, 1, *) , M=(C, 0, 1, *)
   - ה. M'=(N, +, 1) , M=(Q, +, 0)
   - ו. M'=(N, +, *, 1, ≤) , M=(Z, +, *)

14. נתון אוצר המילים: $L = \{S, c, f\}$ כאשר S – סימן יחס דו מקומי, c – סימן קבוע, f – סימן פונקציה דו מקומית.
   לכל אחד מזוגות המבנים הבאים המפרשים את L קבע האם N הוא תת מבנה של M והוכח!
   בכל הסעיפים, + מסמן חיבור רגיל של מספרים.
   - א. $N =< Q, >, 0, +>$, $M =< R, >, 0, +>$
   - ב. $N =< \{2,4,6,8\}, >, 0, +>$, $M =< N, >, 0, +>$
   - ג. תהא X קבוצה כלשהי, $M =< P(X), \subset, \emptyset, \cup>$, $N =< P(Y), \subset, \emptyset, \cup>$ עבור: $Y \subseteq X$.
   - ד. $N =< \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}, \{(x,y) \mid x - y \ is\ even\}, 2, +>$, $M =< N, \{(x,y) \mid x \ is\ even\}, 2, +>$
   - ה. $N =< Z, >, 2, +>$, $M =< R, >, 1, +>$

15. הוכח או הפרך:
   - א. בכל תת מבנה של $< Q, \cdot >$ יש מספר $x \in Z$.
   - ב. בכל תת מבנה של $< Q, +>$ יש מספר $x \in Z$.

16. יהא אוצר המילים: $L=\{S,f,c\}$ כאשר S סימן יחס דו מקומי, f סימן פונקציה חד מקומית. רשמו 3 תתי מבנים שונים למבנים הבאים למעט המבנים עצמם. אם לא קיימים 3, רשמו את המבנים הקיימים והסבירו למה לא קיימים יותר.
   א. $M_1 =< \{1,2,3\}, S, f, 1 >$ כאשר $S=\{(x,y): x\neq y\}$, $f(x)=4-x$.
   ב. $M_2 =< R, S, f, 1 >$ כאשר $S=\{(x,y): |x|<|y|\}$, $f(x)=x-x^2$.
   ג. $M_3 =< N, S, f, 0 >$ כאשר $S=\{(x,y):\ x-y\ is\ even\}$, $f(x)=x+1$.

17. יהא $L=\{f\}$ אוצר מילים כאשר f סימן פונקציה חד מקומית. האם לכל $n>0$ טבעי קיים מבנה M המפרש את L ובו יש n איברים בדיוק כך שלכל תת מבנה N של M מתקיים שהעולם של N שווה לעולם של M? הוכח!

18. יהא M מבנה כלשהו באוצר המילים: $L=\{f,S,c\}$ כאשר f סימן פונקציה חד מקומית, c סימן קבוע, S סימן יחס דו מקומי, N תת מבנה של M. קבע האם כל אחת מהטענות הבאות מתקיימת <u>בהכרח</u>:
   א. N הוא מבנה סופי.
   ב. אם f^M היא פונקציה חח"ע ועל אז לכל תת מבנה N של M , f^N היא חח"ע ועל.
   ג. אם N תת מבנה של M, f^N חח"ע ועל אז גם f^M חח"ע ועל.
   ד. אם קיימים $x,y\in M$ כך ש $(x,y)\in S^M$ אז גם קיימים $a,b\in N$ כך ש $(a,b)\in S^N$.
   ה. אם לכל $x\in M$ מתקיים $(c^M,x)\in S^M$ אז לכל $x\in N$ מתקיים: $(c^N,x)\in S^N$.

תרגילים על תתי מבנים – פתרונות

1.

א. תת מבנה כי: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, כל הסימנים מתפרשים אותו דבר ו $\mathbb{N}$ סגורה לפונקציות חיבור וכפל.

ב. לא תת מבנה כי אינו סגור לפונקציות: לדוגמא: $2 + 2 = 4$ לא שייך לעולם של המבנה.

ג. תת מבנה כי: $\{2\mathrm{m}: \mathrm{m} \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Z}$, כל הסימנים מתפרשים אותו דבר וקבוצת המספרים הזוגיים סגורה לפונקציות חיבור וכפל.

2. לא קיים תת-מבנה עם עולם בגודל 1 כי בתת-המבנה חייבים להופיע שני הקבועים האישיים $\mathbb{N}, \emptyset$.
המבנה: $M' = (\{\emptyset, \mathbb{N}\}, \emptyset, \mathbb{N}, \subseteq, \cap, \cup)$ הוא תת-מבנה של M.

3. כן, $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$ והיחס נשמר עבור המספרים הזוגיים.

4. כן, $\{2n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$ והפונקציה מחזירה תוצאה זהה עבור המספרים הזוגיים.

5. לא, $<\{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10\}, +>$ אינו מבנה כלל, אין סגירות לפונקצית החיבור.

6. $\mathrm{M}_1 = < Q, S, f, g >$ $\mathrm{M}_2 = < Z, S, f, g >$

7. $M = < (0,1) \cap \mathbb{Q}, <, \frac{1}{2} >$

8. $M = < (0, \infty) \cap \mathbb{Q}, +, \frac{1}{2} >$

9. לא, הפונקציות מחזירות תוצאות שונות. (לדוגמא: $2 \cdot 3 \neq 2 + 3$)

10. $\mathrm{M}_1 = < \left[0, \frac{1}{2}\right], <, \cdot >$ $\mathrm{M}_2 = < \left[0, \frac{1}{3}\right], <, \cdot >$

11. $M = < R, +, \{(0,1,2)\}, 0 >$ $N = < Q, +, \{(0,1,2)\}, 0 >$

12. 2^{40}, היחס לא משפיע על מספר תת המבנים ולכן נשאר למצוא את מספר תת הקבוצות של קבוצה עם 40 איברים (0 חייב להיות בתת מבנה כי יש עבורו קבוע).

13.

א. לא.

ב. לא. (העולם של M' לא מוכל בעולם של M)

ג. לא. (M' אינו מבנה. אין סגירות ביחס לחיבור בעולם של M' , כי למשל 5=2+3 ו-5 אינו איבר בעולם)

ד. כן.

ה. לא. (הקבוע האישי לא מתפרש אותו דבר)

ו. לא. (ב M' קיימים יחס וקבוע אישי שלא מופיעים בM2)

14.

א. N תת מבנה של M: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, $c^M = c^N = 0$,
לכל $x, y \in \mathbb{Q}$ מתקיים: אם $x > y$ אז גם ב $\mathbb{R}$ $x > y$.
לכל $x, y \in \mathbb{Q}$ מתקיים: $x + y$ שווה ל $x + y$ ב $\mathbb{R}$.

ב. N אינו תת מבנה של M כי אינו סגור לפעולה: לדוגמא: $8 + 8 \notin \{2,4,6,8\}$.

ג. N תת מבנה של M: $P(Y) \subseteq P(X)$, $c^M = c^N = \emptyset$,
לכל $A, B \in P(Y)$ מתקיים: אם $A \subset B$ אז גם ב $P(X)$ $A \subset B$.
לכל $A, B \in P(Y)$ מתקיים: $A \cup B$ שווה ל $A \cup B$ ב $P(X)$.

ד. N תת מבנה של M: $\{2x \mid x \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$, $c^M = c^N = 2$,
לכל $a, b \in \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ היחס $\{(x, y) \mid x - y \text{ is even}\}$ מתקיים עבור (a, b) ומכיוון ש a זוגי אז מתקיים היחס $\{(x, y) \mid x \text{ is even}\}$ עבור (a, b).
לכל $x, y \in \{2x \mid x \in \mathbb{N}\}$ מתקיים: $x + y$ שווה ל $x + y$ ב $\mathbb{N}$.

ה. N אינו תת מבנה של M כי הקבוע בשני המבנים לא מתפרש אותו דבר.

.15

א. לא נכון, דוגמא נגדית: $< \{\frac{1}{2^n}: n \in \mathbb{N}^+\}, \cdot >$ מכיוון ש $2^n \neq 1$ לכל $n \in N^+$ נקבל ש $\frac{1}{2^n} \notin \mathbb{Z}$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$.

ב. נכון, הוכחה: יהא M תת מבנה כלשהו של $< Q, + >$, אזי קיים $a \in |M|$.
אם $a \in \mathbb{Z}$ - סיימנו. אחרת, $a = \frac{m}{n}$ כאשר: $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. מכאן, מסגירות לפעולה של המבנה $< Q, + >$ נקבל: $a + a + \dots_{|n|\ times} + a = \frac{m}{n} \cdot |n| \in \mathbb{Z}$.

.16

א. $< \{1,3\}, S, f, 1 > =: N_1$ כאשר $S = \{(x, y): x \neq y\}$, $f(x) = 4 - x$.
לא קיימים תתי מבנים נוספים (חוץ מהמבנה עצמו) כי לפי הקבוע, 1 חייב להיות שייך למבנה ואז לפי הפונקציה גם 3 חייב להיות שייך.

ב. $N_1 =< \{0,1\}, S, f, 1 >$ כאשר $S = \{(x, y): |x| < |y|\}$, $f(x) = x - x^2$.
$N_2 =< Z, S, f, 1 >$ כאשר $S = \{(x, y): |x| < |y|\}$, $f(x) = x - x^2$.
$N_3 =< Q, S, f, 1 >$ כאשר $S = \{(x, y): |x| < |y|\}$, $f(x) = x - x^2$.

ג. לא קיימים תתי מבנים שאינם המבנה עצמו כיוון שלפי הקבוע, 0 חייב להיות במבנה ואז לפי הפונקציה, כל איבר טבעי גם כן חייב להיות שייך למבנה.

17. כן, יהא $n \in \mathbb{N}^+$ כלשהו. נגדיר את המבנה: $M =< \{1,2,3,..,n\}, f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq n \\ 1, & x = n \end{cases} >$
ואכן, יהא N תת מבנה של M, אזי קיים $a \in \{1,2,3,..,n\}$ כך ש $a \in N$ ולפי סגירות לפעולה של M מתקיים: $f(a) \in N, f(f(a)) \in N, \dots, f(f(\dots_{n\ times} f(a) \dots)) \in N$
ולכן: $|N| = \{1,2,3, \dots, n\}$.

.18

א. לא נכון, דוגמא: $M =< R, f(x) = x, c = 0, <> , N =< N, f(x) = x, c = 0, <>$.

ב. לא נכון. דוגמא: $M =< Z, f(x) = x + 1, c = 0, <> , N =< N, f(x) = x + 1, c = 0, <>$ ומתקיים ש N תת מבנה של M אבל f^N אינה על כי ל 0 אין מקור.

ג. לא נכון. דוגמא: $M =< \{1,2\}, f(x) = 2, c = 2, <> , N =< \{2\}, f(x) = 2, c = 2, <>$
ומתקיים: N תת מבנה של M וכן f^N חח"ע ועל אבל f^M אינה חח"ע ועל.

ד. לא נכון. דוגמא: $M =< \{1,2\}, f(x) = x, c = 1, <> , N =< \{1\}, f(x) = x, c = 1, <>$
ומתקיים: N תת מבנה של M וקיימים $1,2 \in \{1,2\}$ כך ש $1 < 2$ אבל ב N אין איברים המקיימים את היחס.

ה. נכון. יהא $M =< |M|, f^M, c^M, S^M >$ מבנה כלשהו ב L כך שמתקיים $(c^M, x) \in S^M$ לכל $x \in |M|$, ויהא $N =< |N|, f^N, c^N, S^N >$ תת מבנה של M. צ"ל: לכל $x \in |N|$ מתקיים: $(c^N, x) \in S^N$.
יהא $x \in |N|$ מכאן: $x \in |M|$ כי N תת מבנה של M ומכאן: $(c^M, x) \in S^M$ ומכיוון ש N תת מבנה אז מתקיים: $c^M = c^N \in |N|$ וכן לכל 2 איברים $a, b \in |N|$ מתקיים: $(a, b) \in S^M$ אם ורק אם $(a, b) \in S^N$ ולכן: $(c^N, x) \in S^N$.

תרגילים על איזומורפיזם

בסיסי

1. נתון מודל $M_1=(N,f_1)$ לאוצר המילים $\{f\}$, כאשר f הוא סמן של פונקציה חד-מקומית והפונקציה $f_1: M_1 \rightarrow M_1$ מוגדרת על ידי $f_1(x)=3x$. ידוע ש-$M_2=(N-\{6\},f_2)$ הוא מודל לאותו אוצר מילים. נתון איזומורפיזם $H: M_1 \rightarrow M_2$ כך ש:
עבור $x \le 3$, $H(x)=x$, $H(4)=5$, $H(5)=4$ ועבור x שהוא גדול מ-5, $H(x)=x+1$. מהי הפונקציה f_2?

2. בשאלות הבאות, ידוע מבנה אחד וידוע איזומורפיזם בינו לבין מבנה שני. אתם צריכים למצא את המבנה השני.
   א. נתון מודל $M_1=(\{1,2,3,4\},R^{M_1}=\{<1,2>,<3,4>\})$. $M_2=(\{1,2,3,4\},R^{M_2})$ הוא מודל נוסף. ידוע שהפונקציה הבאה היא איזומורפיזם: $H: M_1 \rightarrow M_2,\ H(n)=5-n$. הציגו את היחס R^{M_2} באופן מפרש.
   ב. נתון מודל $M_1=(\{1,2,3,4\},f^{M_1}(n)=n)$. $M_2=(\{1,2,3,4\},f^{M_2})$ הוא מודל נוסף. ידוע שהפונקציה הבאה היא איזומורפיזם: $H: M_1 \rightarrow M_2,\ H(n)=5-n$. חשבו את $f^{M_2}(3)$.
   ג. נתון מודל $M_1=(\{1,2,3,4\},\ R^{M_1}=\{<1,2>,<3,4>\},f^{M_1}(n)=n)$. $M_2=(\{2,3,4,5\},R^{M_2},f^{M_2})$ הוא מודל נוסף. ידוע שהפונקציה הבאה היא איזומורפיזם: $H: M_1 \rightarrow M_2,\ H(n)=6-n$. חשבו את $f^{M_2}(3)$ והציגו במפרש את R^{M_2}.
   ד. נתון מודל $M_1=(\{1,2,3\},\ R^{M_1}=\{<1,2>,<3,1>\},f^{M_1}(1)=1,\ f^{M_1}(2)=3,\ f^{M_1}(3)=1)$. $M_2=(\{3,4,5\},R^{M_2},f^{M_2})$ הוא מודל נוסף. ידוע שהפונקציה הבאה היא איזומורפיזם: $H: M_1 \rightarrow M_2,\ H(n)=6-n$. הציגו במפרש את היחס R^{M_2} ואת הפונקציה f^{M_2}.

3. נתון מבנה $M_1=(\{1,2\},\{<1,1>,<1,2>\},\{<1,2,2>,<2,1,2>\})$ לאוצר המילים $\{S_1,S_2\}$, כאשר S_1 הוא סמן יחס דו-מקומי ו-S_2 הוא סמן יחס תלת-מקומי. נתון מבנה נוסף $M_2=(\{1,2\},S_1^{M_2},S_2^{M_2})$ לאותו אוצר מילים. ידוע שהפונקציה הבאה היא איזומורפיזם $H: M_1 \rightarrow M_2,\ H(n)=3-n$. כתבו במפרש את היחסים $S_1^{M_2},S_2^{M_2}$.

הוכחת איזומורפיזם

4. האם הפונקציה $h: M_1 \rightarrow\ M_2\ \ h(x) =\ 2x + 3$ היא איזומורפיזם בין המבנים:
   - $M_1 = < \{x \in \mathbb{N} \mid x \ge 10\}, \{(x)\ |11 \le x \le 99\}, 11 >$
   - $M_2 = < \mathbb{N}, \{(x)\ |4 \le x \le 48\}, 4 >$

   אם כן, הוכח! אם לא, נמק!

5. האם הפונקציה $h: M_1 \rightarrow\ M_2\ \ h(x) =\ e^x$ היא איזומורפיזם בין המבנים:
   - $M_1 = < R, +, 0 >$
   - $M_2 = < [0, \infty), *, 1 >$

   אם כן, הוכח! אם לא, נמק!

6. האם הפונקציה $h: M_1 \rightarrow\ M_2\ \ h(x) =\ x^2$ היא איזומורפיזם בין המבנים:
   - $M_1 = < R, >, +, 2 >$
   - $M_2 = < R, >, +, 4 >$

   אם כן, הוכח! אם לא, נמק ומצא פונקציה שהיא איזומורפיזם בין המבנים.

7. נתבונן באוצר המילים הבא: $\{R\}$, כאשר R הוא יחס דו-מקומי. נתבונן במודלים הבאים שמפרשים אוצר מילים זה:
$M_1=(\{1,2,3..\},<)$, $M_2=(\{3,4,5..\},<)$. הוכיחו שהפונקציה הבאה היא איזומורפיזם: $H: \{1,2,3..\} \rightarrow \{3,4,5..\},\ H(n)=n+2$.
הדרכה: עליכם להוכיח שהיא חח"ע, על ושהיא מקיימת $n<m$ אס"ם $H(n)<H(m)$.

8. בהמשך לשאלה הקודמת נתון מודל נוסף: $M_3=(\{1,3,5,6\},<)$. הוכיחו שהפונקציה $H: \{1,3,5,6\} \rightarrow \{1,2,3..\},\ H(n)=5n+1$ היא העתקה חח"ע ושומרת על הסדר מ-M_3 למודל M_1. אין צרך (וגם בלתי אפשרי) להוכיח שהיא על.

מציאת איזומורפיזם

9. בכל אחת מהשאלות הבאות נתונים שני מבנים. עליכם לבדֹק אם הם איזומורפיים. אם כן, מִצאו איזומורפיזם ביניהם.
   א. $M_1=(\{1,2,3\},S^{M_1}\{<1,2>,<2,3>,<2,1>\}),M_2=(\{1,2,3\}, S^{M_2}=\{<2,3>,<3,2>,<3,1>\}$.
   ב. $M_1=(\{1,2,3,4\},S^{M_1}\{<1,2,3>,<2,3,4>\}),M_2=(\{2,3,4,5\}, S^{M_2}=\{<2,3,5>,<2,4,5>\}$.
   ג. $M_1=(\{1,2,3\},g_1),M_2=(\{1,2,4\}, g_2\}$, כאשר $g^1(1,2)=3, g_1(2,3)=1, g_1(1,3)=3$ ואילו $g_2(1,4)=2, g_2(2,1)=4, g_2(2,4)=4$.

10. $M_1=(N,<),M_2=(\{a_n: n\in N\},<)$, כאשר a_n מוגדר כך: $a_0=-2, a_1=-3,$ ועבור n גדול מ-0, $a_{2n}=2^n, a_{2n+1}=2^n-1$.
    רמזים:
    א. מדוע הנוסחה $H(n)=a_n$ איננה מגדירה איזומורפיזם?
    ב. הרעיון שמאחורי השאלה הוא שמציאת נוסחה מפורשת לסדרה של מספרים, היא למעשה דוגמא למציאת איזומורפיזם.
    ג. טפלו תחילה במקרה ש-$n>1$.
    ד. יש איזומורפיזם יחיד, H. כתבו את 10 האברים הקטנים ביותר במבנה M_2 וחשבו את $H(3),H(5),H(7)$. עכשיו כבר קל להציג נוסחה כללית ל-$H(2n+1)$, כלומר נוסחה ל-H עבור מספרים אי-זוגיים.
    ה. עתה טפלו במספרים הזוגיים ולבסוף חשבו את $H(0),H(1)$.

11. מצאו איזומורפיזם בין 2 מבין המבנים הבאים:
    - $M_1 =< \{1,2,3,4,5\}, \{< 1,3 >, < 1,4 >, < 2,4 >\} >$
    - $M_2 =< \{1,2,3\}, \{< 1,2 >, < 1,3 >\} >$
    - $M_3 =< \{1,2,3,4,5\}, \{< 2,4 >, < 1,4 >, < 2,3 >\} >$
    - $M_4 =< \{2,3,4,5,6\}, \{< 2,5 >, < 3.4 >, < 3,5 >\} >$
    - $M_5 =< \{1,3,4\}, \{< 4,1 >, < 1,3 >\} >$

12. האם קיים מבנה איזומורפי M' למבנה $M = < N, <>$ (שהוא לא המבנה עצמו) באוצר המילים $L = \{<\}$ כאשר $<^{M'}$ הוא למעשה היחס ההפוך (כלומר, $>$)?

13. נתבונן באוצר המילים $\{E,S\}$, כאשר E הוא סֵמן של יחס דו-מקומי ואילו S סֵמן של יחס חד-מקומי. נגדיר שני מודלים שמפרשים אוצר מילים זה: $M_1=(\{1,2,3,4,5,6,7\},E_1,S_1)$, כאשר $S_1=\{3,5\}$, $E_1=\{<1,2>,<2,1>,<5,6>,<6,7>,<5,7>\}$. $M_2=(\{11,12,13,14,15,16,17\},E_2,S_2)$, כאשר $S_2=\{13,15\}$, $E_2=\{<11,12>,<12,11>,<15,16>,<16,17>,<15,17>\}$. הוכיחו שהמודלים M_1,M_2 איזומורפיים (כלומר הציגו איזומורפיזם ביניהם). אתגר: מצאו איזומורפיזמים נוספים בין מודלים אלו.

14. נתבונן באוצר המילים $\{E,S\}$ כמו בשאלה הקודמת. נגדיר שני מודלים שמפרשים אוצר מילים זה: $M_1=(\{1,2,3,4,5\},E_1,f_1)$, כאשר $S_1=\{3,5\}$, $E_1=\{<1,2>,<2,1>\}$. $M_2=(\{11,12,13,14,15\},E_2,S_2)$, כאשר $S_1=\{12,15\}$, $E_2=\{<11,13>,<13,11>\}$.
    הוכיחו שהמודלים M_1,M_2 איזומורפיים (כלומר הציגו איזומורפיזם ביניהם).
    אתגר: מצאו איזומורפיזמים נוספים בין מודלים אלו.

15. הוכיחו שהמודלים הבאים איזומורפיים: $M_1=(\{1,2,3\},S_1,f_1)$, כך ש-$S_1=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$ והפונקציה f_1 מקיֶמת $f_1(x)=2$ לכל x. $M_2=(\{3,5,15\},S_2,f_2)$, כך ש-S_2 היא קבוצת הזוגות, $<x,y>$ כך ש-x הוא כפולה של y והפונקציה f_2 מקיֶמת $f_2(x)=3$ לכל x.

16. נתבונן באוצר המילים $\{c,F\}$ שבו c הוא סֵמן של קבוע אישי ואילו F הוא סֵמן של פונקציה חד-מקומית. הוכיחו שהמודלים הבאים איזומורפיים: $M_1=(\{1,2,4\},2,f)$, שבו f מוגדרת באֹפן מפֹרט על ידי $f(1)=2, f(2)=4, f(4)=1$. $M_2=(\{1,2,4\},2,g)$, שבו g מוגדרת באֹפן מפֹרט על ידי $g(1)=4, g(2)=1, g(4)=2$. הדרכה: יהי H האיזומורפיזם המבוקש. ברור $H(2)=2$, כי 2 הוא הפֵרוש של שני המודלים לסֵמן הקבוע האישי c, ולפי הגדרת איזומורפיזם $H(c^{M_1})=c^{M_2}$. עתה לפי הגדרת איזומורפיזם, $H(f(x))=g(H(x))$ לכל x. הציבו בשוויון זה $x=2$. עתה נסו ללא הדרכה נוספת.

17. הוכיחו שהפונקציה H: (0,1)→(0,9), H(x)=x+1 היא העתקה חח״ע ושומרת סדר של המודל M_1=((0,1),<) במודל M_2=((0,9),<). האם תוכלו להצביע על העתקות נוספות שהן חח״ע ושומרות סדר של המודל M_1 במודל M_2?
אתגר: האם תוכלו לִמצֹא העתקה כזו של המודל M_2 במודל M_1? האם תוכלו לִמצֹא אחרת?

18. מצא זוגות של מבנים מבין הבאים שהם איזומורפיים ומצא איזומורפיזם ביניהם:
- $M_1 =< \{3x \mid x \in \mathbb{Z}\}, \{(3x, 3y) \mid x \text{ זוגי}\}, 0 >$
- $M_2 =< Z, \{(x, y) \mid x \text{ איזוגי}\}, 1 >$
- $M_3 =< N, >, 0 >$
- $M_4 =< R, >, 0 >$
- $M_5 =< (-2,2), <, 0 >$
- $M_6 =< \{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}, >, 1 >$
- $M_7 =< \mathbb{R}^+, \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}\}, 0 >$

תרגילים מתקדמים

19. יהיו $M_1 =< Z \backslash N, f^{M_1}(x) = x - 1 >$, $M_2 =< N \cup \{-1\}, f^{M_2}(x) = x + 1 >$ מבנים באוצר מילים $L = \{f\}$ כך ש f סימן פונקציה דו מקומית. הוכח: $M_1 \cong M_2$.

20. יהיו $M_1 =< \mathbb{R}, f^{M_1}(x) = 2x + 1 >$ ויהא: $M_2 =< \mathbb{R}^+, f^{M_2} >$, נתון שקיים איזומורפיזם בין המבנים: $h: M_1 \to M_2$ המוגדר ע״י: $h(x) = 3^x$. מצא את $f^{M_2}(x)$.

21. יהיו $M_1 =< \{\{0,1, \dots, n\} \mid n \in \mathbb{N}\}, \subseteq, \cup >$, $M_2 =< \mathbb{N}, \leq, f^{M_2}(x, y) = \max(x, y) >$ מבנים באוצר מילים $L = \{S, f\}$ כך ש S סימן יחס דו מקומי ו f פונקציה דו מקומית, כאשר הסימנים S, f מתפרשים ב M_1 כהכלה ואיחוד בין קבוצות. הוכח: $M_1 \cong M_2$.

22. רשום דוגמא למבנים הבאים:
א. מבנה M באוצר המילים $L = \{f\}$ כאשר f סימן פונקציה דו מקומית ותת מבנה N כך ש $N \subset M$ ומתקיים: $N \cong M$.
ב. מבנה M באוצר המילים $L = \{f\}$ כאשר f סימן פונקציה דו מקומית שאיזומורפי למבנה: $M_2 =< (0,1), f(x, y) = x \cdot y >$ אבל: $M \neq M_2$.
ג. מבנה M באוצר המילים $L = \{S\}$ כאשר S סימן יחס חד מקומי, כך שהאיזומורפיזם היחיד בין M לעצמו הוא: $h(x) = x$.

23. הוכח שהמבנה $< R \backslash \{0\}, \cdot >$ לא איזומורפי למבנה $< \mathbb{R}^+, \cdot >$. (ב 2 המבנים הפעולה היא הכפל הרגיל של מספרים ממשיים).

24. עבור $1 < n \in \mathbb{N}$ יהא אוצר המילים $L_n = \{S, f\}$ כאשר S סימן יחס n מקומי, f סימן פונקציה n מקומית. נגדיר את המבנה הבא: $M_n =< R, S, f >$ כאשר היחס מתפרש:
$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): |x_i - x_j| < 1 \; for \; all \; i \neq j\}$,
והפונקציה היא: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$.
ונגדיר את המבנה הבא: $N_n =< \mathbb{R}, S, f >$ כאשר היחס הוא:
$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n): |x_i - x_j| < n \; for \; all \; i \neq j\}$ והפונקציה היא:
$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{n^{n-1}}$.
א. הוכיחו שלכל $n > 1$ טבעי הפונקציה: $f: M_n \to N_n$ המוגדרת ע״י: $f(x) = x + 2$ אינה איזומורפיזם.
ב. הוכיחו שלכל $n > 1$ טבעי: $M_n \cong N_n$.

25. יהא $L = \{S\}$ אוצר מילים כאשר S הוא סימן יחס דו מקומי. ראינו שאיזומורפיזם מקיים שימור יחס בין המבנים, בפרט אם $M_1 \cong M_2$ ופונקצית האיזומורפיזם היא $f: M_1 \to M_2$ אז עבור יחס דו מקומי S באוצר המילים מתקיים: שלכל $x_1, x_2 \in$ M_1 מתקיים: $(x_1, x_2) \in S^{M_1}$ אם ורק אם $(h(x_1), h(x_2)) \in S^{M_2}$.
נראה כעת מדוע צריך אם ורק אם:
תנו דוגמא ל 2 מבנים M_1, M_2 כך שיש פונקציה $f: M_1 \to M_2$ חח״ע ועל המקיימת שלכל $x_1, x_2 \in M_1$, אם $(x_1, x_2) \in S^{M_1}$ אז $(h(x_1), h(x_2)) \in S^{M_2}$ אבל $M_1 \ncong M_2$. הוכיחו את תשובתכם.

קיום של פסוקים במבנים איזומורפיזם

26. הגדרה: אגודה היא מודל, M, לאוצר המילים {f} שבו f מְתפרשת כפונקציה דו-מקומית שמקיימת $\forall x[\forall y[\forall z[f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z))]]]$ (אגב, זה נִקרא חק הקבוץ). הוכיחו שהמודל $M_1=(\{1,2,3..\},+)$ הוא אגודה. הוכיחו שהמודל $M_2=(\{2,4,6..\},+)$ איזומורפי למודל M_1. לפי איזה משפט תוכלו להסיק שגם M_2 הוא אגודה?

27. בהמשך לשאלה 26: בדקו אם הפסוק $\forall x[\forall y[f(x,y)=f(y,x)]]$ (חֹק החִלוף) מתקיים במודל M_2. האם הוא מתקיים במודל M_1?

28. נתבונן באוצר המילים {c,R} כאשר R הוא סמן של יחס דו-מקומי ו-c הוא סמן של קבוע אישי. נתבונן במודלים הבאים: $M_1=(Z,1,<)$, $M_2=(Z,2,<)$. האם הם איזומורפיים? אם כן, הציגו איזומורפיזם ביניהם. אם לא, חפשו פסוק שאחד מקיים והשני לא. אם אין פסוק כזה, חפשו נִימוק אחר לכך שהם אינם איזומורפיים.

29. הוכח: (ע"י פסוק המתקיים באחד מהמבנים ולא בשני)

א. $<R,*>$ לא איזומורפי ל $<Q,*>$
ב. $<Z,+>$ לא איזומורפי ל $<Q,+>$
ג. $<N,<>$ לא איזומורפי ל $<Z,<>$
ד. $<Z,+,0>$ לא איזומורפי ל $<Z,+,1>$
ה. $<\{1,2,3\},\{(1,1),(1,2),(1,3)\}>$ לא איזומורפי ל $<\{4,5,6\},\{(4,4),(5,6),(6,4)\}>$
ו. $<N,*>$ לא איזומורפי ל $<N\backslash\{0\},*>$
ז. $<N,+>$ לא איזומורפי ל $<N\backslash\{0\},+>$
ח. $<\{2x|\ x\in\mathbb{N}\},\{(a)|a \bmod 4=0\},2>$ לא איזומורפי ל $<\{3x|\ x\in\mathbb{N}\},\{(a)|a \bmod 6=0\},6>$
ט. $<\{1,2,3\},\{(1,2),(2,3),(3,1)\}>$ לא איזומורפי ל $<\{3,4,5\},\{(3,4),(4,5),(5,4)\}>$
י. $<\{1,2,3\},\{(1),(2)\}>$ לא איזומורפי ל $<\{3,4,5\},\{(5)\}>$
יא. $<R,<>$ לא איזומורפי ל $<(0,1],<>$
יב. $<\{1,2,3\},\{(1,2,3),(2,1,1),(3,3,1)\}>$ לא איזומורפי ל $<\{3,4,5\},\{(3,4,4),(4,5,5),(3,3,5)\}>$

30. בכל אחד מהסעיפים הבאים, הוכח שאין איזומורפיזם בין המבנים הנתונים:

א. $M_2=<Z,\cdot>\ ,\ M_1=<Q,\cdot>$
ב. $M_2=<(0,1),\cdot>\ ,\ M_1=<(-1,1)\backslash\{0\},\cdot>$
ג. $M_2=<P(\{1,2,\dots n\}),\subseteq>\ ,\ M_1=<\{1,2,3,\dots,2^n\},div>$ כאשר: $1<n\in\mathbb{N}$.
ד. $M_2=<Z,+,n>\ ,\ M_1=<Z,+,m>$ כאשר: $0<m,n\in\mathbb{N}\ ,\ m\neq n$
ה. $M_2=<P(\mathbb{N}),\cup>\ ,\ M_1=<P(\mathbb{N}),\Delta>$
ו. $M_2=<\{1,2,3,4\},\{(x,y,z)|\ x<y\le z\}>\ ,\ M_1=<\{1,2,4,8\},\{(x,y,z)|\exists a\in\mathbb{N}^+: 2x=y, ay=z\}>$

31. האם בין כל 2 מבנים יש איזומורפיזם? אם כן, הצג פונקצית איזומורפיזם והוכח. אם לא, הוכח ע"י פסוק.

א. $M_2=<\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\right\},<,*,\frac{1}{2}>\ ,\ M_1=<N\backslash\{0\},>,*,2>$
ב. $M_2=<R^+,<,+>\ ,\ M_1=<(0,1),<,*>$
ג. $M_2=<R^+,<>\ ,\ M_1=<(0,1),<>$
ד. $M_2=<\{2^x|\ x\in Z\},<,*,\frac{1}{2}>\ ,\ M_1=<\{2x|x\in N\},>,*,2>$
ה. $M_2=<P(N),\subseteq>\ ,\ M_1=<R,\le>$
ו. $M_2=<Q\cap(0,1),<>\ ,M_1=<Q,<>$
ז. $M_2=<\{a^x|\ x\in Q^+\},\div>\ ,M_1=<Q^+,\div>$
ח. $M_1=<\{A\subseteq N|\ |A|=5\},f(X,Y)=\{|x+y|\ |\ x\in X,y\in Y\}>$,
$M_2=<\{A\subseteq N|\ |A|=5\},f(X,Y)=\{|x-y|\ |\ x\in X,y\in Y\}>$.
ט. $M_2=<N,S=\{(x,y)|\ x\cdot y=3t\ ,t\in N\}>\ ,\ M_1=<N,div>$ כאשר div הוא יחס החלוקה, כלומר: (a,b) אומר ש b מתחלק ב a ללא שארית.
י. $M_2=<R,f(x)=x^2>\ ,\ M_1=<R,f(x)=x^3>$
יא. $M_2=<(4,5),>>\ ,\ M_1=<(2,5),<>$

יב. $M_2 =< R, \pi >, M_1 =< R, e >$

יג. $M_2 =< R^+, f(x,y) = \frac{x+y}{2} >, M_1 =< (5,6), f(x,y) = \frac{x+y}{2} >$

יד. $M_2 =< Q^+ \cap (2,\infty), <, * ,8 >, M_1 =< Q^+ \cap (1,\infty), <, * ,2 >$

תרגילים על איזומורפיזם – פתרונות

1. נבדוק לפי הגדרת איזומורפיזם: $f_2(0)=f_2\big(H(0)\big)=H\big(f_1(0)\big)=H(0)=0$,
$f_2(1)=f_2\big(H(1)\big)=H\big(f_1(1)\big)=H(3)=3$, $f_2(2)=f_2\big(H(2)\big)=H\big(f_1(2)\big)=H(6)=7$,
$f_2(3)=f_2\big(H(3)\big)=H\big(f_1(3)\big)=H(9)=10$, $f_2(4)=f_2\big(H(5)\big)=H\big(f_1(5)\big)=H(15)=16$,
$f_2(5)=f_2\big(H(4)\big)=H\big(f_1(4)\big)=H(12)=13$, ולכל $x\geq 7$
$f_2(x)=f_2\big(H(x-1)\big)=H\big(f_1(x-1)\big)=H(3x-3)=3x-2$.

2.
א. $R^{M_2}=\{<4,3>,<2,1>\}$
ב. $f^{M_2}(3)=f^{M_2}\big(H(2)\big)=H\big(f^{M_1}(2)\big)=H(2)=3$
ג. $f^{M_2}(3)=f^{M_2}\big(H(3)\big)=H\big(f^{M_1}(3)\big)=H(3)=3$, $R^{M_2}=\{<5,4>,<3,2>\}$
ד. $f^{M_2}(3)=f^{M_2}\big(H(3)\big)=H\big(f^{M_1}(3)\big)=H(1)=5$,
$f^{M_2}(4)=f^{M_2}\big(H(2)\big)=H\big(f^{M_1}(2)\big)=H(3)=3$,
$f^{M_2}(5)=f^{M_2}\big(H(1)\big)=H\big(f^{M_1}(1)\big)=H(1)=5$, $R^{M_2}=\{<5,4>,<3,5>\}$

3. $S_1^{M_2}=\{<2,2>,<2,1>\}$, $S_2^{M_2}=\{<2,1,1>,<1,2,1>\}$

4. לא $h(x)=2x+3$ היא לא על $\{x\in\mathbb{N}\mid x\geq 3\}$ כיוון שלתמונה 4 (לדוגמא) אין מקור.

5. לא, $h(x)=e^x$ היא לא על $[0,\infty)$ כיוון שלתמונה 0 אין מקור.

6. לא, הסדר לא נשמר, לדוגמא: $(1,-2)\in{}'>'$ אבל $\big(h(1),h(-2)\big)=(1,4)\notin{}'>'$ איזומורפיזם: $h:|M_1|\to|M_2|$,
$h(x)=2x$

7. הוכחת חח"ע: יהיו $x_1,x_2\in M_1$. נניח $H(x_1)=H(x_2)$, צ"ל: $x_1=x_2$.
לפי ההנחה: $x_1+2=x_2+2$ ולכן: $x_1=x_2$.
הוכחת על: יהא $y\in M_2$, צ"ל: קיים $x\in M_1$ כך ש $H(x)=y$.
נבחר: $x=y-2$, $x\in M_1$ ומתקיים: $H(x)=y-2+2=y$.
שמירה על יחס: יהיו $x_1,x_2\in M_1$. נניח ש $x_1<x_2$ אזי $x_1+2<x_2+2$ ולכן: $H(x_1)<H(x_2)$.
נניח ש $H(x_1)<H(x_2)$ אזי $x_1+2<x_2+2$ ולכן: $x_1<x_2$.

8. הוכחת חח"ע: יהיו $x_1,x_2\in M_3$. נניח $H(x_1)=H(x_2)$, צ"ל: $x_1=x_2$.
לפי ההנחה: $5x_1+1=5x_2+1$ ולכן: $x_1=x_2$.
שמירה על יחס: יהיו $x_1,x_2\in M_1$. נניח ש $x_1<x_2$ אזי $5x_1+1<5x_2+1$ ולכן: $H(x_1)<H(x_2)$.
נניח ש $H(x_1)<H(x_2)$ אזי $5x_1+1<5x_2+1$ ולכן: $x_1<x_2$.

9.
א. $h:M_1\to M_2$ ע"י: $h(1)=2$, $h(2)=3$, $h(3)=1$.
ב. לא איזומורפיים.
ג. $h:M_1\to M_2$ ע"י: $h(1)=2$, $h(2)=1$, $h(3)=4$.

10. הסדרה היא: ... $a_0 = -2, a_1 = -3, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 4, a_5 = 3, a_6 = 8, a_7 = 7, a_8 = 16, a_9 = 15, \ldots$ ולכן
האיזומורפיזם יהיה: $H(0) = -3, H(1) = -2$, $H(n) = 2^{n/2} - 1$ עבור $n \geq 2$ זוגי.
$H(n) = 2^{(n-1)/2}$ עבור $n \geq 2$ אי-זוגי.

11. $h_1: M_1 \to M_3$ $h(1) = 2, h(2) = 1, h(3) = 3, h(4) = 4$, $h(5) = 5$
$h_2: M_1 \to M_4$ $h(1) = 3, h(2) = 2, h(3) = 4, h(4) = 5$, $h(5) = 6$
קיים איזומורפיזם גם בין M_3 ל M_4.

12.

13. $M' =< \{0, -1, -2, \ldots\}, >>$ האיזומורפיזם הוא $h: \mathbb{N} \to M'$, $h(x) = -x$

14. $h: M_1 \to M_2$ ע"י: $h(x) = x + 10$

15. $h: M_1 \to M_2$ ע"י: $h(1) = 11$, $h(2) = 13$, $h(3) = 12$, $h(4) = 14$, $h(5) = 15$.

16. $h: M_1 \to M_2$ ע"י: $h(1) = 15$, $h(2) = 3$, $h(3) = 5$.

17. $h: M_1 \to M_2$ ע"י: $h(1) = 4$, $h(2) = 2$, $h(4) = 1$.

18. הוכחת חח"ע: יהיו $x_1, x_2 \in M_1$. נניח $H(x_1) = H(x_2)$, צ"ל: $x_1 = x_2$.
לפי ההנחה: $x_1 + 1 = x_2 + 1$ ולכן: $x_1 = x_2$.
שמירה על יחס: יהיו $x_1, x_2 \in M_1$. נניח ש $x_1 < x_2$ אזי $x_1 + 1 < x_2 + 1$ ולכן: $H(x_1) < H(x_2)$.
נניח ש $H(x_1) < H(x_2)$ אזי $x_1 + 1 < x_2 + 1$ ולכן: $x_1 < x_2$.
העתקות נוספות: $h(x) = x + 2$, $h(x) = 2x$.

19. $M_1 \cong M_2$: $h: \{3x \mid x \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z}$, $h(x) = \frac{x}{3} + 1$
$M_3 \cong M_6$: $h: \mathbb{N} \to \{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $h(x) = 3^x$

20. נגדיר: $h: M_1 \to M_2$ ע"י: $h(x) = -x - 2$. נוכיח ש h איזומורפיזם:
h חח"ע: יהיו $x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ נניח ש $h(x_1) = h(x_2)$, צ"ל: $x_1 = x_2$.
לפי ההנחה: $-x_1 - 2 = -x_2 - 2$ ומכאן: $x_1 = x_2$.
h על: יהא $y \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ צ"ל: קיים $x \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ כך ש $h(x) = y$.
נבחר: $x = -y - 2 \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ ונקבל: $h(x) = -(-y - 2) - 2 = y + 2 - 2 = y$.
h שומרת על הפונקציה: יהא $x \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$ צ"ל: $h(x - 1) = h(x) + 1$ ואכן:
$h(x - 1) = -(x - 1) - 2 = -x - 2 + 1 = -x - 1$ וכן:
$h(x) + 1 = -x - 2 + 1 = -x - 1$.
מכאן: h איזומורפיזם ולכן: $M_1 \cong M_2$.

21. מכיוון ש h איזומורפיזם, בפרט מתקיים לכל $x \in \mathbb{R}$: $h(f^{M_1}(x)) = f^{M_2}(h(x))$.
מכאן: $h(2x + 1) = f^{M_2}(h(x))$ ומכאן: $3^{2x+1} = f^{M_2}(3^x)$. נסמן: $3^x = t$ ונקבל:
$3^{2x+1} = (3^x)^2 \cdot 3 = 3t^2$ ולכן: $f^{M_2}(t) = 3t^2$ ומכאן: $f^{M_2}(x) = 3x^2$.

22. נגדיר: $h: M_1 \to M_2$ ע"י: $h(\{0,1, \ldots, n\}) = n$. נוכיח ש h איזומורפיזם:
h חח"ע: תהיינה $\{0,1, \ldots, n_1\}, \{0,1, \ldots, n_2\} \in M_1$ נניח ש $h(\{0,1, \ldots, n_1\}) = h(\{0,1, \ldots, n_2\})$, צ"ל: $\{0,1, \ldots, n_1\} =$ $\{0,1, \ldots, n_2\}$.
לפי ההנחה: $n_1 = n_2$ ולכן: $\{0,1, \ldots, n_1\} = \{0,1, \ldots, n_2\}$ כי 2 הקבוצות מכילות את כל האיברים מ 0 עד n_1.
h על: יהא $y \in \mathbb{N}$ צ"ל: קיימת $x \in M_1$ כך ש $h(x) = y$.

נבחר: $x = \{0,1, \dots , y\} \in M_1$ ונקבל: $h(x) = h(\{0,1, \dots , y\}) = y$.

hשומרת על היחס: תהיינה $\{0,1, \dots , n_1\}, \{0,1, \dots , n_2\} \in M_1$ נניח: $\{0,1, \dots , n_1\} \subseteq \{0,1, \dots , n_2\}$ צ"ל:

$h(\{0,1, \dots , n_1\}) \leq h(0,1, \dots , n_2)$ ואכן: מכיוון שהקבוצה $\{0,1, \dots , n_1\}$ מכילה את כל האיברים מ 0 עד n_1 ומוכלת ב $\{0,1, \dots , n_2\}$ אזי בהכרח: $n_1 \leq n_2$.

h שומרת על הפונקציה: תהיינה $\{0,1, \dots , n_1\}, \{0,1, \dots , n_2\} \in M_1$ צ"ל:

$h(\{0,1, \dots , n_1\} \cup \{0,1, \dots , n_2\}) = \max\left(h(\{0,1, \dots , n_1\}), h(\{0,1, \dots , n_2\})\right)$.

נניח בה"כ ש $n_2 \geq n_1$ ומכאן: $h(\{0,1, \dots , n_1\} \cup \{0,1, \dots , n_2\}) = h(\{0,1, \dots , n_2\}) = n_2$ וכן:

$\max\big(h(\{0,1, \dots , n_1\}), h(\{0,1, \dots , n_2\})\big) = \max(n_1, n_2) = n_2$.

מכאן: h איזומורפיזם ולכן: $M_1 \cong M_2$.

23. א. $N =< \mathbb{N}^+, f(x,y) = 1 >$, $M =< N, f(x,y) = 1 >$.

ב. $M =< \mathbb{R}^+, + >$

ג. $M =< \{1\}, S = \{1\} >$

24. נניח בשלילה ש $< R\backslash\{0\}, \cdot > \cong < \mathbb{R}^+, \cdot >$, מכאן קיימת פונקציה: $h: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^+$ איזומורפיזם.

לפי הגדרת איזומורפיזם, לכל 2 איברים $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ מתקיים: $h(a \cdot b) = h(a) \cdot h(b)$ ובפרט: $h(1) = h(1 \cdot 1) = h(1)^2$ וגם $h(1) = h\big((-1)\cdot(-1)\big) = h(-1)^2$ מכאן:

$h(1)^2 = h(-1)^2$, מכאן: h חח"ע ולכן: $h(1) = -h(-1)$ אבל זה לא ייתכן כי ב $\mathbb{R}^+$ יש רק איברים חיוביים. ולכן המבנים אינם איזומורפיים.

25.

א. הפונקציה f אינה משמרת את הפונקציה של המבנה, כלומר: עבור $1 \in \mathbb{R}$ לדוגמא: $f^{M_n}(1,1, \dots ,1) = 1^n = 1$ ואז $h(1) = 3$ אבל $f^{N_n}\big(h(1), \dots , h(1)\big) = \frac{1^n}{n^{n-1}}$. כלומר, אם h היא איזומורפיזם אזי מתקיים ש: $\frac{1}{n^{n-1}} = 3$. כלומר: $3n^{n-1} = 1$ אבל לא קיים פתרון לשוויון זה כאשר $1 < n \in \mathbb{N}$.

ב. נגדיר את הפונקציה: $h: M_n \to N_n$ ע"י: $h(x) = nx$. נוכיח ש f היא איזומורפיזם:

- h חח"ע: יהיו $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ נניח ש $h(x_1) = h(x_2)$, צ"ל: $x_1 = x_2$.
  לפי ההנחה: $nx_1 = nx_2$ ולכן $x_1 = x_2$ ($n \neq 0$).
- h על: יהא $y \in \mathbb{R}$. צ"ל: קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש $h(x) = y$. נבחר: $x = \frac{y}{n}$, $n \neq 0, y \in \mathbb{R}$ ולכן $x \in \mathbb{R}$ ומתקיים:
  $h(x) = \frac{ny}{n} = y$.
- h שומרת יחס: יהיו $x_1, x_2, \dots , x_n \in \mathbb{R}$. צ"ל: $|x_i - x_j| < 1$ לכל $i \neq j$ אם ורק אם $|h(x_i) - h(x_j)| < n$ לכל $i \neq j$.
  נשים לב: יהיו $1 \leq i \neq j \leq n$,אם $|x_i - x_j| < 1$ אזי $n|x_i - x_j| < n$ ומכאן
  $|nx_i - nx_j| < n$ ולכן $|h(x_i) - h(x_j)| < n$.
  אם $|h(x_i) - h(x_j)| < n$ אזי $|nx_i - nx_j| < n$ ומכאן $n|x_i - x_j| < n$
  ולכן $|x_i - x_j| < 1$.
- h שומרת על הפונקציה: יהיו $x_1, x_2, \dots , x_n \in \mathbb{R}$
  צ"ל: $h\big(f^{M_n}(x_1, \dots , x_n)\big) = f^{N_n}(h(x_1), \dots , h(x_n))$, ואכן:
  $h\big(f^{M_n}(x_1, \dots , x_n)\big) = h(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) = n \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = \frac{nx_1 \cdot nx_2 \cdot \ldots \cdot nx_n}{n^{n-1}} = \frac{h(x_1) \cdot \ldots \cdot h(x_n)}{\mathrm{n}^{n-1}} = f^{N_n}(h(x_1), \dots , h(x_n))$

לכן $M_n \cong N_n$ לכל $n > 1$ טבעי.

26. דוגמא: $M_1 =< \mathbb{N}^+, | >$, $M_2 =< \mathbb{N}^+, \leq >$ (הסימן "|" מייצג את יחס החלוקה: $x \mid y$ אם ורק אם y מתחלק ב x ללא שארית). והפונקציה: $f: M_1 \to M_2$ המוגדרת ע"י: $f(x) = x$.

- f היא חח"ע ועל (פונקצית הזהות מעולם לעצמו).
- f מקיימת: אם $(x_1, x_2) \in S^{M_1}$ אז $\big(h(x_1), h(x_2)\big) \in S^{M_2}$.

הוכחה: יהיו $x_1, x_2 \in \mathbb{N}^+$ ונניח ש $x_2 \mid x_1$ אזי ברור ש $x_1 \leq x_2$ (לפי תכונות חלוקה ומכיוון ש x_1, x_2 שלמים חיוביים) ולכן: $h(x_1) \leq h(x_2)$.

- $M_1 \ncong M_2$ כי נשים לב שכל 2 איברים x_1, x_2 ב M_2 מקיימים $x_1 \le x_2$ או $x_2 \le x_1$ אבל בחלוקה זה לא מתקיים כי לדוגמא 2 לא מחלק את 3 וגם 3 לא מחלק את 2.

27. הוכחה ש M_1 הוא אגודה: יהיו $x, y, z \in \{1,2, \dots\}$. צ"ל: $(x + y) + z = x + (y + z)$ ואכן תכונה זו מתקיימת מחק הקיבוץ של הפעולה +.

M_1 איזומורפי ל M_2, פונקצית האיזומורפיזם: $h(x) = 2x$.

h חח"ע: יהיו $x_1, x_2 \in M_1$, נניח ש $h(x_1) = h(x_2)$ צ"ל: $\mathrm{x}_1 = \mathrm{x}_2$.

לפי ההנחה: $2x_1 = 2x_2$ ולכן: $x_1 = x_2$.

h על: יהא $y \in M_2$. צ"ל: קיים $x \in M_1$ כך ש $h(x) = y$.

נבחר: $x = y/2$, מכיוון ש y זוגי, נובע ש $x \in M_1$ ומתקיים: $h(x) = \frac{2y}{2} = y$.

h שומרת על הפונקציה: יהיו $x_1, x_2 \in M_1$, צ"ל: $h(x_1 + x_2) = h(x_1) + h(x_2)$ ואכן: $2(x_1 + x_2) = 2x_1 + 2x_2$.

לפי המשפט האומר שכל 2 מבנים איזומורפיים מקיימים את אותם פסוקים נובע שגם M_2 אגודה.

28. יהיו $x, y \in M_2$. צ"ל: $x + y = y + x$ ואכן חוק החילוף מתקיים עבור הפעולה +. גם המבנה M_1 מקיים את הפסוק לפי המשפט שכל 2 מבנים איזומורפיים מקיימים את אותם הפסוקים.

29. המבנים איזומורפיים. פונקצית האיזומורפיזם: $h(x) = x + 1$.

הוכחת חח"ע: יהיו $x_1, x_2 \in M_1$. נניח $h(x_1) = h(x_2)$, צ"ל: $x_1 = x_2$.

לפי ההנחה: $x_1 + 1 = x_2 + 1$ ולכן: $x_1 = x_2$.

הוכחת על: יהא $y \in M_2$, צ"ל: קיים $x \in M_1$ כך ש $h(x) = y$.

נבחר: $x = y - 1$, $x \in M_1$ ומתקיים: $h(x) = y - 1 + 1 = y$.

שמירה על יחס: יהיו $x_1, x_2 \in M_1$. נניח ש $x_1 < x_2$ אזי $x_1 + 1 < x_2 + 1$ ולכן: $H(x_1) < H(x_2)$.

נניח ש $H(x_1) < H(x_2)$ אזי $x_1 + 1 < x_2 + 1$ ולכן: $x_1 < x_2$.

30.

א. נגדיר את הפסוק: $\forall x \exists y (y * y * y = x)$ כלומר: "לכל x קיים שורש מסדר 3" ופסוק זה מתקיים ב $< R, * >$ ולא ב $< Q, * >$.

ב. נגדיר את הפסוק: $\forall x \exists y (y + y = x)$ כלומר: "לכל x קיים חצי ממנו" ופסוק זה מתקיים ב $< Q, + >$ ולא ב $< Z, + >$.

ג. נגדיר את הפסוק: $\exists x \forall y \big((x \neq y) \to (x < y) \big)$ כלומר: "קיים x שכל האיברים האחרים גדולים ממנו" ופסוק זה מתקיים ב $< N, <>$ ולא ב $< Z, <>$.

ד. נגדיר את הפסוק (c - קבוע): $\forall x (c + x = x)$ כלומר: "לכל x , הקבוע האישי אינו משנה את הערך של x בחיבור" ופסוק זה מתקיים ב $< Z, +, 0 >$ ולא ב $< Z, +, 1 >$.

ה. נגדיר את הפסוק (S – יחס דו מקומי): $\exists x \forall y (S(x, y))$ כלומר: "קיים x שכל ה-y נמצאים איתו ביחס מימין" ופסוק זה מתקיים ב $< \{1,2,3\}, \{(1,1), (1,2), (1,3)\} >$ ולא ב $< \{4,5,6\}, \{(4,4), (5,6), (6,4)\} >$.

ו. נגדיר את הפסוק: $\exists x \forall y (y * x = x)$ כלומר: "קיים x שהמכפלה שלו עם כל מספר שווה ל x עצמו" ופסוק זה מתקיים ב $< N, * >$ ולא ב $< N \backslash \{0\}, * >$.

ז. נגדיר את הפסוק: $\exists x \forall y (y + x = y)$ כלומר: "קיים x שהסכום שלו עם כל מספר שווה למספר עצמו" ופסוק זה מתקיים ב $< N, + >$ ולא ב $< N \backslash \{0\}, + >$.

ח. נגדיר את הפסוק (שם עצם) (c – קבוע, S – יחס דו מקומי): $(S(c))$ כלומר: " הקבוע האישי נמצא ביחס" ופסוק זה מתקיים ב $< \{3x |\ x \in \mathbb{N}\}, \{(a) | a \bmod 6 = 0\}, 6 >$ ולא ב $< \{2x |\ x \in \mathbb{N}\}, \{(a) | a \bmod 4 = 0\}, 2 >$.

ט. נגדיר את הפסוק (S – יחס דו מקומי): $\exists x \forall y \big((x \neq y) \to (S(x, y) \vee S(y, x)) \big)$ כלומר: "קיים x שכל ה-y השונים ממנו נמצאים איתו ביחס " ופסוק זה מתקיים ב $< \{3,4,5\}, \{(3,4), (4,5), (5,4)\} >$ ולא ב $< \{1,2,3\}, \{(1,2), (2,3), (3,1)\} >$

י. נגדיר את הפסוק (S – יחס חד מקומי) : $\exists x \exists y\big((x \neq y) \wedge (S(x) \wedge S(y))\big)$ כלומר : "קיימים לפחות 2 איברים שונים שמקיימים את היחס " ופסוק זה מתקיים ב $< \{1,2,3\},\{(1),(2)\} >$ ולא ב $< \{3,4,5\},\{(5)\} >$.

יא. נגדיר את הפסוק : $\exists x \forall y\big((x \neq y) \rightarrow (y < x)\big)$ כלומר : "קיים x שכל האיברים האחרים קטנים ממנו" ופסוק זה מתקיים ב $< (0,1], <>$ ולא ב $< R, <>$.

יב. נגדיר את הפסוק (S – יחס תלת מקומי) : $\exists x \exists y \exists z\Big(\big((x \neq y) \wedge (x \neq z) \wedge (y \neq z)\big) \wedge S(x,y,z)\Big)$
כלומר : "קיימים 3 איברים שונים שנמצאים ביחד ביחס"
ופסוק זה מתקיים ב $< \{1,2,3\},\{(1,2,3),(2,1,1),(3,3,1)\} >$ ולא ב $< \{3,4,5\},\{(3,4,4),(4,5,5),(3,3,5)\} >$.

31.

א. הפסוק: $A = \forall x \exists y\big(f(x, f(x,y)) = x\big)$ מתקיים ב M_1 כי לכל איבר יש את ההופכי שלו.
ולא מתקיים ב M_2.

ב. הפסוק: $A = \exists x \exists y \exists z(x \neq y \wedge f(x,x) = z \wedge f(y,y) = z)$ מתקיים ב M_1 כי נבחר: $x = 0.5, y = -0.5, z = 0.25$. ולא מתקיים ב M_2 כי אם $x^2 = y^2$, $x \neq y$ אז $x = -y$ אבל אין מספרים שליליים ב M_2.

ג. הפסוק: $A = \exists x \forall y(S(y,x))$ מתקיים ב M_2 כי כל הקבוצות מוכלות ב $\{1,2,3,..,n\}$ ולא מתקיים ב M_1 כי $3 \nmid 2^n$ וכל איבר אחר קטן מ 2^n ולכן לא מחלק אותו.

ד. נניח בה"כ ש $n < m$, הפסוק:
$A = \exists x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_m(x_1 \neq x_2 \wedge x_1 \neq x_3 \wedge \dots \wedge x_{m-1} \neq x_m)$ מתקיים ב M_1 כי יש בו m איברים שונים ולא מתקיים ב M_2.

ה. הפסוק: $A = \forall x(f(x,x) = x)$ מתקיים ב M_2 כי לכל קבוצה, האיחוד שלה עם עצמה שווה לקבוצה עצמה ולא מתקיים ב M_1.

ו. הפסוק: $\exists x \exists y \exists z\big(y \neq z \wedge S(x,y,y) \wedge S(x,z,z)\big)$ מתקיים ב M_2 כי נבחר: $x = 1, y = 2, z = 3$ ולא מתקיים ב M_1 כי לכל x יש רק y מתאים אחד (פי 2 מ x).

תרגילים על תחשיב היחסים

נוסחאות ושמות עצם

1. חשבו את ערך האמת של הפסוק [S[2,f(1,3 במבנים הבאים:
   א. (+,>,N) (כלומר שהעולם הוא קבוצת המספרים הטבעיים, S(x,y) פירושו x<y והפונקציה הדו מקומית f מוגדרת על N לפי f(x,y)=x+y).
   ב. (-,>,Z) (כלומר שהעולם הוא קבוצת המספרים השלמים, היחס הדו מקומי S מתפרש כמו בחלק א והפונקציה f מוגדרת לפי f(x,y)=x-y).
   ג. (R,<,f) כאשר R היא קבוצת המספרים הממשיים, היחס S מתפרש כמו בחלק א והפונקציה f מתפרשת כפונקציה f שמוגדרת כך לפי f(x,y)=7x-y.

2. חשבו את ערך האמת של הפסוק [[S[f[3,g(2,2 במודלים הבאים:
   א. העולם הוא N (קבוצת המספרים הטבעיים), היחס החד מקומי S מתפרש כך: S(x) פירושו ש-x הוא מספר זוגי, הפונקציה הדו מקומית f מתפרשת כך: f(x,y)=x+y והפונקציה הדו מקומית g מתפרשת כך: g(x,y)=xy (כלומר כפל).
   ב. כמו ב-א, אבל הפרושים של f,g מתחלפים ביניהם. באפן מפרט: העולם הוא N (קבוצת המספרים הטבעיים), היחס החד מקומי S מתפרש כך: S(x) פירושו ש-x הוא מספר זוגי, הפונקציה הדו מקומית f מתפרשת כך: f(x,y)=xy והפונקציה הדו מקומית g מתפרשת כך: g(x,y)=x+y.

3. נתון $L=\{c,d,f,g\}$ אוצר מילים כאשר c,d סימני קבועים, f,g סימני פונקציות דו מקומיות ו x_1,x_2,x_3 משתנים. חשב את הערך של כל שם עצם במבנה M המפרש את $LM=<Z,0,1,+,*>$: $f^M=+,g^M=*$ $c^M=0,d^M=1$, וההשמה הנתונה.
   א. $A(2,5)=?$, $A(x_1,x_2)=g(f(x_1,x_2),d)$
   ב. $A(-1,3)=?$, $A(x_1,x_2)=f(f(x_1,x_2),g(x_2,c))$
   ג. $A=?$, $A=f(f(f(d,d),d),d)$
   ד. $A(5,2,4)=?$, $A(x_1,x_2,x_3)=g(g(x_1,f(x_2,x_1)),g(x_2,x_3))$

4. חשב את 4 הסעיפים בשאלה 3 כאשר המבנה הוא: $N=<Q,-1,0.5,+,->$ $f^N=+,g^N=-,c^N=-1,d^N=0.5$

5. נתון $L=\{c,x,f,g\}$ אוצר מילים כאשר c,x סימני קבועים, f,g סימני פונקציות דו מקומיות ונתונים x_1,x_2 משתנים. נתון מבנה המפרש את L: $M=<P(X),\emptyset,X,\cap,\cup>$, $f^N=\cap,g^N=\cup,c^N=\emptyset,x^N=X$ כאשר $X=\{1,2,3,4,5\}$
   חשב את הערך של שמות העצם הבאים בהשמה הנתונה:
   א. $A=?$, $A=f(x,c)$
   ב. $A(\{1,2\},\{2,3,5\})=?$, $A(x_1,x_2)=g(f(x_1,x_2),f(x_1,x))$
   ג. $A(\{1,2\},\{2,3,5\})=?$, $A(x_1,x_2)=f(g(x_1,x_2),g(x_1,x))$

6. נתון $L=\{c,f,g,S\}$ אוצר מילים כאשר c סימן קבוע, f סימן פונקציה חד מקומיות, g סימן פונקציה דו מקומיות ו S סימן יחס דו מקומי. נתונים גם: x_1,x_2,x_3 משתנים, $M=<N,2,f^M,+,<>$, $S^M=<$, $c^M=2$, $g^M=+$, $f^M(x)=x^2$ מבנה ב L. חשב את ערך האמת של הנוסחאות הבאות במבנה M:
   א. $S(f(c),g(c,c))$
   ב. $[S(f(x_1),x_2)\rightarrow S(g(x_1,x_2),g(x_1,c))]$ כאשר $x_1=2$, $x_2=3$
   ג. $[S(g(f(x_1),f(x_2)),c)\vee[S(x_3,g(x_2,x_2))]$ כאשר: $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=5$

חישוב ערך אמת של פסוק במבנה

7. חשבו את ערך האמת של הפסוק $[\forall x[\exists y(S(y,x))]] \to [\forall y[\exists x(S(y,x))]]$ במודלים הבאים:
   א. $(N,<)$ (כלומר שהעולם הוא קבוצת המספרים הטבעיים והיחס הדו מקומי S מתפרש כך: $S(x,y)$ פירושו $x<y$).
   ב. $(N,>)$.
   ג. $(Z,<)$.
   ד. $(Z,>)$.
   ה. $([-3,5),<)$.
   ו. (N,div) כלומר שהיחס הדו מקומי S מתפרש כיחס div שמוגדר כך: $div(x,y)$ פירושו ש-x מחלק את y, כלומר ש-y הוא כפולה של x.

8. חשבו את ערך האמת של הפסוק $\forall x[[\exists y(S(y,f(x))] \to [\forall y(S(y,f(x))]]$ במודלים הבאים:
   א. העולם הוא N, $S(x,y)$ פירושו $x<y$ ו-$f(x)$ מתפרשת כ- $x+5$.
   ב. העולם הוא Z, $S(x,y)$ פירושו $x<y$ ו-$f(x)$ מתפרשת כ- $x-5$.

9. בשאלה זו היחס $S(x,y)$ יתפרש כ-$x=y$. כתבו את ערך האמת של כל אחד מהפסוקים, בהתאם לעולם הדיון:
   א. $\forall x\exists y[S(x,y)]$ בעולם $\{1,2\}$.
   ב. $\exists x\forall y[S(x,y)]$ בעולם $\{1\}$.
   ג. $\exists x\forall y[S(x,y)]$ בעולם $\{1,2\}$.
   ד. $\exists x\forall y[S(x,y)\to S(y,x)]$ בעולם $\{1,2\}$.

10. מהו ערך האמת של הפסוק $\forall x[[\exists y(x<y)] \to [\exists y(y<x)]]$ בעולם $\{1,2,3\}$?

11. נתון אוצר המילים $L = \{S\}$ כאשר S סימן יחס דו מקומי, ונתון הפסוק $A = \forall x(\forall y(S(x,y) \land S(y,x)))$. לכל אחד מהמבנים הבאים בדוק האם המבנה מספק את A, אם לא, הסבר!
   א. $M = < N, < >$
   ב. $M = < N, \geq >$
   ג. $M = < \{0,1\}, \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} >$
   ד. $M = < R, \{(a,b) \mid |a| = |b|\} >$
   ה. $M = < R, \{(a,b) \mid a + b = 0\} >$

12. רשום דוגמא למבנה באוצר מילים $L = \{c, S, R\}$ (R ו S סימני יחס דו מקומיים, c סימן קבוע) המקיים את הפסוק:
   $[\forall x(R(x,c))] \to [\exists x S(c,x)]$.

13. נתונים 2 פסוקים באו"מ $L = \{S, R\}$, R סימן יחס דו מקומי, S סימן יחס חד מקומי:
   - $\forall x(\forall y(S(x) \leftrightarrow R(x,y)))$
   - $\forall x(\exists y(S(x) \leftrightarrow R(x,y)))$

   א. רשום מבנה המקיים את הפסוק הראשון ולא את השני.
   ב. רשום מבנה המקיים את הפסוק השני ולא את הראשון.
   ג. רשום מבנה המקיים את שני הפסוקים.
   ד. רשום מבנה שאינו מקיים אף אחד משני הפסוקים.

14. נתונים 2 מבנים באו"מ $L = \{f, S\}$, S סימן יחס דו מקומי, f סימן פונקציה דו מקומית:
   - $M_1 = < N, +, > >$
   - $M_2 = < Q, +, > >$

   א. רשום פסוק המתקיים במבנה הראשון ולא בשני.
   ב. רשום פסוק המתקיים במבנה השני ולא בראשון.

15. מהו ערך האמת של הפסוק $[\forall x\forall y[R(x,y)\rightarrow\exists z[R(x,z)\wedge R(z,y)]]]\rightarrow[\forall x\exists y[R(x,y)]]$ בעולם $(0,1]$,
כאשר $R(x,y)$ פירושו $x<y$?

16. מהו ערך האמת של הפסוק $[\forall x[\exists y(x<y)]]\rightarrow[\forall x[\exists y(y<x)]]$ בעולם $[0,1)$?

17. מהו ערך האמת של הפסוק $[\forall x[\exists y(x<y)]]\rightarrow[\exists y[\neg[\exists x(y<x)]]]$ בעולם המספרים הממשיים?

18. מהו ערך האמת של הפסוק $[\forall x[\exists y[S(x,y)]]]\rightarrow[\forall y[\exists x[S(y,x)\vee S(x,y)]]]$ בעולם $\{1,2,3\}$ כאשר היחס $S(x,y)$ פירושו $x\leq y$?

19. מהו ערך האמת של הפסוק $[\forall x[\exists y[P(x)\rightarrow\neg P(y)]]]$ בעולם $\{1,2,3,4,..\}$, כאשר היחס $P(x)$ פירושו $x<3$?

20. מהו ערך האמת של הפסוק $[\forall x[\exists y[R(x,y)]]]\rightarrow[\exists x[\forall y[R(x,y)]]]$ בעולם $\{1\}$ כאשר היחס $R(x,y)$ פירושו $x=y$?

21. כתבו את ערך האמת של הפסוקים הבאים בעולמות המתאימים. אין צורך לנמק!

א. $\forall x[\exists y(y=x)]$ בעולם המספרים הטבעיים. זכרו שאין חובה ש-x,y יהיו מספרים שונים. ייתכן שהם שמות שונים של אותו מספר.

ב. $\exists y[\forall x(y=x)]$ בעולם המספרים הטבעיים.

ג. $\exists y[\forall x(y=x)]$ בעולם $\{7\}$.

ד. $\forall x[\exists y(y=x)]\rightarrow\exists y[\forall x(y=x)]$ בעולם המספרים הטבעיים.

ה. $\forall x[(0<x^2)\vee(x=0)\vee(2x<0)]$ בעולם המספרים השלמים (כלומר $\{..-3,-2,-1,0,1,2,3..\}$).

ו. $\forall x[(x=x)\rightarrow(x\neq 2)]$ בעולם המספרים הטבעיים.

ז. $\forall x[0<x)\leftrightarrow(-x>0)]$ בעולם המספרים הטבעיים.

ח. $[\exists x[[\exists y(x<y)\wedge[\exists y(y<x)]]]\wedge[\exists x[(x<2)\wedge(-2<x)]]$ בעולם $\{-3,0,2\}$.

ט. $\forall x[\forall y[R(x,y)\rightarrow R(y,x)]]$ כאשר העולם הוא קבוצת הישובים במדינת ישראל והיחס $R(x,y)$ פירושו שהמרחק בין הישובים x,y קטן מ-30 ק"מ.

י. $[\exists x[[\exists y(x<y)\wedge[\exists y(y<x)]]]\vee[\exists x[(x<2)\wedge(-2<x)]]$ בעולם $\{-3,0,2\}$.

יא. $[\exists x[[\exists y(x<y)\wedge[\exists y(y<x)]]]\rightarrow[\exists x[(x<2)\wedge(0<x)]]$ בעולם $\{-3,0,2\}$.

יב. $[\exists x[[\exists y(x<y)\wedge[\exists y(y<x)]]]\rightarrow[\forall x[(x<2)\wedge(-2<x)]]$ בעולם $\{-3,0,2\}$.

יג. $[\exists x[[\exists y(x<y)\wedge[\forall y(y<x)]]]\vee[\forall x[(x<2)\vee(-2<x)]]$ בעולם $\{-3,0,2\}$.

יד. $\forall x[[\exists y(y^2=x)]\rightarrow[\exists y[(y^2=x)\wedge((-y)^2=x]]]$ בעולם המספרים הממשיים (כלומר כל המספרים).

22. חשבו את ערך האמת של הפסוקים הבאים בעולמות המתאימים.

א. $\forall x_1[\exists x_2[\forall x_3[\exists x_4(x_1=x_2\wedge x_3=x_4)]]]$ בעולם $\{1,2,3\}$

ב. $\forall x_1[\exists x_2[\forall x_3[\exists x_4(x_1=x_3\wedge x_2=x_4)]]]$ בעולם $\{1,2,3\}$

ג. $\forall x_1[\exists x_2[\forall x_3[\exists x_4(x_1=x_3\vee x_2=x_4)]]]$ בעולם $\{1,2,3\}$

ד. $\forall x_1[\exists x_2[\forall x_3[\exists x_4(x_1=x_3\vee x_1+x_2=x_4)]]]$ בעולם השלמים: $Z=\{..-3,-2,-1,0,1,2..\}$

ה. $\exists x_1[\forall x_2[\forall x_3[\exists x_4(x_1=x_3\vee x_1+x_4=x_2)]]]$ בעולם המספרים השלמים החיוביים: $\{1,2,3..\}$

ו. $\forall x_1[\exists x_2[\forall x_3[\exists x_4(x_1=x_3\vee x_1+x_4=x_2)]]]$ בעולם המספרים הטבעיים: $N=\{0,1,2..\}$

23. חשבו את ערכי האמת של הפסוקים הבאים בעולם $(1,2]\cup[3,4)$.

א. $\exists x[(\forall y(y\leq x))\vee(\forall y(x\leq y))]$

ב. $\exists x[\exists y[x<y\wedge(\forall z(\neg(x<z<y)))]]$

ג. $\exists x[\exists y[(\forall z(\neg(x<z<y)))]]$

ד. $\exists x[\exists y[x\leq y\wedge(\forall z(\neg(x<z<y)))]]$

ה. $\exists x[\exists y[x\leq y\wedge(\forall z(\neg(x<z<y)))]\wedge[\exists w[x\leq w\wedge(\forall z(\neg(x<z<w)))]]$

ו. $\exists x[\exists y[x\leq y\wedge(\forall z(\neg(x<z<y)))]\wedge[\exists w[w\neq y\wedge[[x\leq w\wedge(\forall z(\neg(x<z<w)))]]$

24. חשבו את ערכי האמת של הפסוקים הבאים בעולם R (כל המספרים הממשיים, כולל שברים, כולל שורש של 2, כולל פאי וכו'):

א. $[\forall x[\forall y[(x<y)\rightarrow[\exists z(x<z<y)]]]]\rightarrow[\exists z[\forall x[\forall y[(x<y)\rightarrow(x<z<y)]]]]$

ב. $\forall x[[\exists y(3<y<x)]\rightarrow[\exists z[(3<z<x)\wedge(\exists y(z<y<x))]]]$

25. חשבו את ערכי הפסוקים הבאים בעולם N (המספרים הטבעיים):

א. $[\forall x[(\exists y(2y=x))\vee(\exists y(2y+1=x))]]\rightarrow[\exists x[(\exists y(2y=x))\vee(\exists y(2y+1=x))]]$

ב. $[\exists x[(\exists y(2y=x))\vee(\exists y(2y+1=x))]]\rightarrow[\forall x[(\exists y(2y=x))\vee(\exists y(2y+1=x))]]$

ג. $[\exists x[(\exists y(2y=x))\wedge(\exists y(2y+1=x))]]\rightarrow[\forall x[(\exists y(2y=x))\vee(\exists y(2y+1=x))]]$

ד. $\forall x[[\forall z[\exists y(x+z=y)]]\rightarrow[\forall y[\exists z(x+y=z)]]$

נוסחאות שקולות

26. חשבו את ערך האמת של הפסוק

$$\forall x[\exists y[(x<y)\wedge[\forall z(x<z<y\rightarrow\exists w(w\neq z\wedge x<w<y))]\wedge[\forall z_1,z_2,z_3((x<z_1<y\wedge x<z_2<y\wedge x<z_3<y\wedge z_1\neq z_2)\rightarrow(z_1=z_3\vee z_2=z_3)]]]$$

במבנה $M=<N,<>$, לפי השלבים הבאים: (באפן פורמאלי, זה איננו פסוק, כי הסמן > הוא הפרוש ולא סמן יחס)

א. נגדיר $A=\exists w(w\neq z\wedge x<w<y)$. הסבירו מדוע היא שקולה במבנה M לנוסחא $x+2\leq y\wedge(y=x+2\rightarrow z\neq x+1)$. שימו לב, שהנוסחא האחרונה היא חסרת כמתים.

ב. נגדיר $B=\forall z(x<z<y\rightarrow A)$. הראו בעזרת סעיף א ש-B שקולה ב-M לנוסחא $x+3\leq y$ או $y\leq x+1$, כלומר $y\neq x+2$.

ג. נגדיר $C=\forall z_1,z_2,z_3((x<z_1<y\wedge x<z_2<y\wedge x<z_3<y\wedge z_1\neq z_2)\rightarrow (z_1=z_3\vee z_2=z_3)]$. הסבירו מדוע C שקולה ב-M לנוסחא $y\leq x+3$.

ד. הסבירו מדוע הפסוק המקורי שקול ב-M לפסוק $\forall x[\exists y[x<y\wedge y\neq x+2\wedge y\leq x+3]]$.

ה. הסיקו שהפסוק המקורי שקול לפסוק ב-M $\forall x[\exists y(y=x+3\vee y=x+1)]$.

ו. חשבו את ערך האמת של הפסוק ב-M.

27. חשבו את ערך האמת של הפסוק $\forall x,y[\exists z,w_1,w_2(f(x,w_1)=z\wedge f(z,w_2)=y)]$ במבנה $M=<N-\{0\},+>$, לפי השלבים הבאים:

א. נגדיר $A=\exists w_2(f(x,w_1)=z\wedge f(z,w_2)=y)$. מצאו נוסחא השקולה ל-A במבנה M.

ב. נגדיר $B=\exists w_1(A)$. מצאו נוסחא השקולה ל-B במבנה M.

ג. נגדיר $C=\exists z(B)$. מצאו נוסחא השקולה ל-C במבנה M.

ד. הציגו פסוק השקול למקורי במבנה M וחשבו את ערך האמת של הפסוק ב-M.

28. שאלה ששלביה הראשונים פתורים באפן מפורט (מתאימה אפילו למי שלא הבין כלל את הרעיון של נוסחאות שקולות!):

חשבו את ערך האמת של הפסוק

$\exists x[[x=a\rightarrow(\forall y(\exists z(\forall w(w=x\vee w=y\vee w=z))))]\wedge[x=b\rightarrow(\forall y(\forall z(y\neq 1\rightarrow z=1)))]\wedge[x=c\rightarrow(\forall y(y=x))]]$ במבנה

$M=<\{1,2,3\},1,2,3>$ (כלומר $a^M=1$, $b^M=2$, $c^M=3$), לפי השלבים הבאים (ב-4 הראשונים צריך רק לקרא את הפתרון):

א. נגדיר נוסחא $A=\forall w(w=x\vee w=y\vee w=z)$. נוסחא זו מופיעה בתוך הפסוק. יש בה רק כמת אחד. נרצה למצא נוסחא השקולה לה, שהיא פשוטה יותר, כלומר שאין בה בכלל כמתים. זאת אומרת ש-w לא יופיע בנוסחא השקולה שנמצא. המשתנים החופשיים ב-A הם x,y,z. נבחר אברים מתוך העולם ונציב במקום x,y,z. כך A יהפוך לפסוק (כי כבר לא יהיו בו משתנים חופשיים). למשל, נציב $x=1$, $y=2$, $z=3$. כך A יהפוך לפסוק $\forall w(w=1\vee w=2\vee 2=3)$ וזהו פסוק אמיתי ב-M. אולם אם נציב $x=1$, $y=1$, $z=2$, אז נקבל פסוק שקרי. אחרי כמה נסיונות מתברר הכלל: על מנת שהפסוק יהיה אמיתי, צריך להציב 3 מספרים שונים. לכן A שקולה לנוסחא $x\neq y\neq z\neq x$, נקרא לנוסחא זו A'.

ב. בשלב זה, נגדיר $B=\exists z(A)$. שימו לב שהנוסחא B מופיעה בפסוק (ודאו!). אמנם ב-B יש שני כמתים, אבל מאחד מהם, אנחנו כבר יודעים להפטר. למעשה, B שקולה ל-$\exists z(A')=\exists z(x\neq y\neq z\neq x)$ ובנוסחא האחרונה יש רק כמת אחד. y,z

חופשיים בנוסחה זו. אם נציב x=1, y=1, z=1, אז נקבל פסוק שקרי: זה לא נכון שיש x כך ש-x≠1≠1≠x. אם נציב y=1,z=2, אז נקבל פסוק אמיתי: ∃z(x≠1≠2≠x) (באפן פורמאלי, זה לא פסוק, כי השתמשנו בפרושים ולא בסמנים שבאוצר המילים, אבל זה לא שצריך להעסיק אותנו בפתרון שאלות מסוג זה). מתברר ש-B שקולה לנוסחה y≠z.

ג. נגדיר נוסחה C=∀y(B). לפי תוצאת שלב ב, C שקולה לנוסחה ∀y(y≠z) וברור שהיא שקרית לכל ערך של z. לכן היא שקולה ל-F.

ד. נתבונן בנוסחה D=x=1→C. לפי שלב ג, היא שקולה לנוסחה x=1→F. יש בה משתנה חופשי אחד והוא x. עבור x=1, נקבל F, ועבור ערכים אחרים של x נקבל T. לכן D שקולה לנוסחה x≠1.

ה. מצאו נוסחה ללא כמתים שהיא שקולה לנוסחה [x=b→(∀y(∀z(y≠1→z=1)))]. בצעו זאת בשלשה שלבים. בכל שלב, הגדירו נוסחה שיש בה לכל היותר כמת אחד ומצאו נוסחה השקולה לה שאין בה אף כמת.

ו. מצאו נוסחה ללא כמתים שהיא שקולה לנוסחה [x=c→(∀y(y=x))]. חשבו זאת בשני שלבים.

ז. מה ערך האמת של הפסוק המקורי?

תרגילים מתקדמים

29. מהו ערך האמת של הפסוק [[∀x[[∃z(S(z,x)∧(∀w(f(w,z)=z)))]→[∀y(S(y,xy))]] במבנה M שעולמו הוא R, S^M הוא היחס קטן ו-f^M היא פונקצית הכפל?

30. מה ערך האמת של הפסוק [[∃x∀y∃z[¬[S(x,z)∨S(y,z)∨x=z∨y=z]] במבנה M שעולמו הוא {1,2,3,4,5} ו-S^M={<x,y>∈{1,2,3,4,5}×{1,2,3,4,5}:|x-y|∈{1,4}}?

31. במבנה שבשאלה הקודמת, חשבו את ערך האמת של הפסוק הבא:

∀x∃y∀z[(z≠x∧z≠y)→[∃w[y≠x∧w≠x∧w≠y∧w≠z∧[S(x,w)↔S(x,z)]∧[S(y,w)↔S(y,z)]]]]

(הצעה: ציירו את המספרים 1,2,3,4,5 במעגל)

הוכחות – קיום של פסוק במבנה

32. נתון המבנה $M=<N,+,<>$ באוצר המילים $L=\{f,S\}$
כאשר $f^M=+$, $S^M=<$.
עבור כל אחד מהפסוקים הבאים בדוק האם הפסוק מתקיים ב M.
אם כן, הוכח! אם לא, נסח את שלילת הפסוק כך ששלילה תופיע רק על נוסחה אטומית והוכח את שלילת הפסוק!

א. $\forall x\forall y[S(x,y)\vee S(y,x)]$
ב. $(\forall x\forall y[S(x,y)])\vee(\forall x\forall y[S(y,x)])$
ג. $\forall x\exists y[S(f(x,y),x)]$
ד. $\exists x\forall y[S(y,x)\vee(x=y)]$
ה. $\exists x\forall y[(x\neq y)\rightarrow S(x,y)]$
ו. $[\exists x\forall y[(x\neq y)]]\rightarrow[\exists x\forall y[S(x,y)]]$
ז. $\forall y\exists x[(x\neq y)\rightarrow S(x,y)]$
ח. $\forall x\forall y[(x\neq y)\rightarrow S(x,y)]$

33. נתון המבנה $M=<N,+,*,<,0>$ באוצר המילים $L=\{f,g,S,c\}$
כאשר $f^M=+$, $g^M=*$, $S^M=<$, $c^M=0$.
עבור כל אחד מהפסוקים הבאים בדוק האם הפסוק מתקיים ב M.
אם כן, הוכח! אם לא, נסח את שלילת הפסוק כך ששלילה תופיע רק על נוסחה אטומית והוכח את שלילת הפסוק!

$\forall x\forall y\forall z[\left((x=y)\wedge S(x,z)\right)\rightarrow S(y,z)]$

א. $\forall x\exists y\exists z[S(f(x,y),z)]$
ב. $\forall x\exists y\forall z[S(f(x,y),z)]$
ג. $\forall x\forall y\forall z\left[\left(S(f(x,y),g(x,y))\rightarrow S(x,z)\right)\right]\rightarrow\forall y\forall z[S(y,z)]$

ד. $\forall x\exists y\forall z\exists w[(S(x,y)\wedge S(x,w))\to(S(z,y)\wedge S(z,w))]$

ה. $\exists x\exists y\exists z[f(g(x,y),g(x,z))=g(f(x,y),f(x,z))]$

ו. $\forall x\exists y[(S(y,x)\vee S(x,y))\to S(c,x)]$

ז. $\exists y\forall x[(S(y,x)\vee S(x,y))\to S(c,x)]$

ח. $\exists x\forall y\exists z\forall w[S(g(x,z),f(y,w))]$

ט. $\forall x\exists y\forall z\exists w[S(g(x,z),f(y,w))]$

י. $\forall y\forall w\exists x\exists z[S(g(x,z),f(y,w))]$

יא. $\forall x\exists y[S(x,y)\leftrightarrow S(y,f(x,x))]$

יב. $\forall x\exists y[f(g(x,x),x)=y]$

יג. $\forall x[\forall y(S(y,x))\to\forall y\left(S(y,g(x,x))\right)]$

יד. $\forall x\forall y\forall z\exists w[\left(f\left(x,f(y,f(z,c))\right)=w\right)\to(S(x,w)\wedge S(y,w)\wedge S(z,w))]$

טו. $\exists x\forall y\exists z[S(x,y)\wedge S(y,z)]$

34. נתון המבנה $M=<R,+,*,\leq,0,1>$ באוצר המילים $L=\{f,g,S,c,d\}$
כאשר $f^M=+$, $g^M=*$, $S^M=\leq$, $c^M=0$, $d^M=1$.
עבור כל אחד מהפסוקים הבאים בדוק האם הפסוק מתקיים ב M.
אם כן, הוכח! אם לא, נסח את שלילת הפסוק כך ששלילה תופיע רק על נוסחה אטומית והוכח את שלילת הפסוק!

א. $\forall x\forall y\forall z[S(f(g(x,x),g(y,y)),z)\to S(c,z)]$

ב. $\forall x\exists y[S(x,y)\to S(g(y,c),x)]$

ג. $\exists y\forall z[S(y,z)\leftrightarrow\forall x(S(x,y))]$

ד. $\forall x\exists y\forall z[S(y,z)\leftrightarrow S(x,y)]$

ה. $\exists x\exists y\forall z[S(g(x,z),y)\wedge(S(f(g(x,z),d),y))]$

ו. $\forall x\forall y\forall z\forall w[(f(x,y)=f(z,w))\vee((x\neq z)\wedge(x\neq w)\wedge(y\neq z)\wedge(y\neq w))]$

ז. $\forall x\exists y\forall z[S(y,f(y,d))\leftrightarrow S(g(x,y),z)]$

תרגילים מתקדמים בתחשיב היחסים

35. יהא $L=\{f,c\}$ אוצר מילים כאשר f - סימן פונקציה דו מקומי, c - סימן קבוע.
יהיו $M_1=<\mathbb{N},f(x,y)=x+y,0>$, $M_2=<\{1,2,3,4,5\},f(x,y)=\min(x,6-y),3\}$ מבנים ב L. המתקבל בסעיפים הבאים בכל אחד מהמבנים:

א. חשב את הערך $f(c,c)$ בכל אחד מהמבנים.

ב. חשב את הערך $f(f(x,y),f(c,x))$ בכל אחד מהמבנים עבור: $x=1,y=5$

ג. $f(x,y)\neq f(y,x)$ - מצא את הערכים שעבורם הנוסחא מתקיימת ואת הערכים שעבורם הנוסחא אינה מתקיימת בכל אחד מהמבנים.

ד. יהא L אוצר מילים, תהא $A[x_1,\dots,x_n]$ נוסחא ב L עם n משתנים ($x_1,\dots,x_n$ משתנים חופשיים) ויהיו 2 מבנים M_1,M_2 ב L כך ש $|M_1|=|M_2|$.
נתון: $M_1\nvDash A[a_1,\dots,a_n]$ לכל השמה $a_1,\dots a_n\in|M_1|$.
האם מתקיים בהכרח: $M_2\nvDash A[b_1,\dots,b_n]$ לכל השמה $b_1,\dots b_n\in|M_2|$? הוכח!

36. נתונים המבנים: $M_1=<Z,<,f(x)=x^2>$, $M_2=<Z,>,f(x)=x^3>$ באוצר המילים $L=\{S,f\}$

א. רשום פסוק ב L המתקיים בשני המבנים.

ב. רשום פסוק ב L שאינו מתקיים באף אחד מהמבנים.

ג. רשום פסוק ב L המתקיים ב M_1 ולא ב M_2.

ד. רשום פסוק ב L המתקיים ב M_2 ולא ב M_1.

37. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. אם קיים פסוק המתקיים במבנה M_1 ולא במבנה M_2 אז קיימים אינסוף פסוקים המתקיימים ב M_1 ולא ב M_2.

ב. לכל 2 מבנים עם עולם סופי כך שכמות האיברים במבנה הראשון שונה מכמות האיברים במבנה השני קיים פסוק המתקיים באחד מהם ולא בשני.

ג. תהיינה: $A_1[x], A_2[x], \dots A_n[x]$ נוסחאות עם משתנה חופשי x ויהא M מבנה כלשהו, נתון: לכל $1 \le i \le n$ קיים $c \in$ M כך ש $M \vDash A_i[c]$., הוכח או הפרך:
$M \vDash \forall x(A_1[x] \vee A_2[x] \vee \dots \vee A_n[x])$.

ד. יהא $L = \{f\}$ אוצר מילים כך ש f סימן פונקציה חד מקומית. אזי קיים מבנה M המקיים את הפסוק:
$\exists x \exists y \exists z(f(x) = y \wedge f(x) = z \wedge y \neq z)$.

38. תהא: $A[x]$ נוסחא באוצר מילים L שבה המשתנה החופשי הוא x. נגדיר: $L' = L \cup \{S\}$ אוצר מילים חדש שבו S סימן יחס דו מקומי, יהא המבנה $M =< |M|, S >$ שבו היחס S מתפרש כ: $S = \{(a,b) |\ a,b \in |M|\ , M \vDash A[b],\ M \nvDash A[a]\}$.
האם מתקיים:
$M \vDash \forall x \forall y \forall z[(S(x,y) \wedge S(y,z)) \to (A[x] \leftrightarrow A[z])]$? נמק!

39. יהא $L = \{S, f\}$ אוצר מילים ובו S סימן יחס חד מקומי, f סימן פונקציה דו מקומית.
יהיו המבנים: $M_1 =< R, f(x,y) = xy - x - y, S = \{x |\ |x| < 2\} >$
$M_2 =< P(\mathbb{N}), f(x,y) = x \backslash y, S = \{x |\ |x| < 100\} >$
עבור כל אחד מהפסוקים הבאים בדוק האם הוא מתקיים ב M_1, M_2, נמק! (אין צורך להוכיח)
א. $\forall x \forall y\big(S(f(x,y)) \to S(f(y,x))\big)$
ב. $\forall x\left(S(x) \to \exists y\left(S(y) \wedge S(f(y,x))\right)\right)$
ג. $\forall x\left(S(x) \to \forall y\left(S(y) \to S(f(y,x))\right)\right)$
ד. $\exists x \exists y\left(\neg S(x) \wedge \neg S(y) \wedge S(f(x,y))\right)$

40. יהא $L = \{f, g\}$ אוצר מילים כך ש f, g סימני פונקציות דו מקומיות. נתון הפסוק:
$A = \forall x \exists y \exists z\left(f(x,y) = z \wedge \forall w \exists v\big(g(v,z) = w \to g(f(x,y), f(w,v)) = z\big)\right)$.
א. הוכח או הפרך: המבנה $M_1 =< R, f^M(x,y) = x + y, g^M(x,y) = x \cdot y >$ מקיים את A.
ב. הוכח או הפרך: המבנה $M_2 =< R, f^M(x,y) = x \cdot y, g^M(x,y) = x + y >$ מקיים את A.

41. יהא $L = \{S, f, c\}$ אוצר מילים כך ש S סימן יחס דו מקומי, f סימן פונקציה דו מקומית, c סימן קבוע. נתון הפסוק:
$A = \forall x \forall y \forall z\left[\big((x \neq y) \wedge (x \neq z) \wedge (y \neq z)\big) \to \left(\left(\exists w\left(S(f(x, f(y,z)), w) \wedge (w \neq c)\right)\right) \leftrightarrow S(c, f(f(x,y), z))\right)\right]$,
יהא המבנה: $M =< \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X\ is\ infinite\}, S^M, f^M, c^M >$, כאשר: $S^M = \subset$ - יחס הכלה ממש (ללא שוויון), $f^M(x,y) = x \cup y$, $c^M = \mathbb{N}$. האם M מקיים את A? הוכח!

42. יהי אוצר המילים: $L = \{S, f\}$ כאשר S סימן יחס דו מקומי, f סימן פונקציה תלת מקומית.
יהא המבנה: $M =< R, <, f(x,y,z) = \frac{x+y+z}{3} >$ באוצר המילים L. הוכח או הפרך: M מקיים את הפסוק:
$A = \forall x \forall y\left(S(x,y) \to \exists z\left(\forall w\left((w \neq z \wedge S(x,w) \wedge S(w,y)) \to \left(S(z, f(x,y,w)) \leftrightarrow S(w,z)\right)\right)\right)\right)$.

43. יהי $L = \{f, S\}$ אצר מילים כאשר S סימן יחס דו מקומי, f סימן פונקציה דו מקומית. יהי
הפסוק הבא: $A = \exists y \forall x \forall z\Big(\big(S(x,y) \leftrightarrow S(z,y)\big) \to \big(S(f(x,z), y)\big)\Big)$
ויהי המבנה: $M =< \mathbb{R}^+, S, f >$ כאשר S מתפרש כיחס $<$. f מתפרשת כפונקצית הכפל.
לכל אחת מההוכחות הבאות המנסות להוכיח ש M מקיים או לא מקיים את A הסבר למה ההוכחה **לא נכונה**:

a. ניקח $y = 2$. יהיו x, z השייכים ל $\mathbb{R}^+$. לא מתקיים בהכרח ש $x < y$ אם ורק אם $z < y$ כי ייתכן ש $z > y$ למרות ש $x < y$ ולכן צד שמאל של הגרירה הוא $false$ ולכן לפי הגרירה הפסוק נכון.

b. יהא y ויהיו x, z השייכים ל $\mathbb{R}^+$. ניקח $y = xz + 1$ ולכן בהכרח: $x < y$ וגם $z < y$ ולכן צד שמאל של הגרירה מתקיים. כעת, $xz < y$ מתקיים ולכן הפסוק מתקיים.

c. ניקח $y = 1$. יהיו $x, z \in \mathbb{R}^+$. נניח ש $x < 1$ אם ורק אם $z < 1$. צ"ל: $xz < 1$. לפי ההנחה: x, z הם שברים ולכן המכפלה שלהם תשאר קטנה מ 1 ולכן הפסוק מתקיים.

- כעת, הוכיחו או הפריכו : האם M מקיים את A?

44. נתון הפסוק הבא : $A = \forall a \exists x \left(\forall y \left(S(y,c) \to \exists z \left(\left(S(z,c)\right) \wedge \left(\forall w \left(S(f(w,a),c) \wedge S\left(z,f(w,a)\right)\right) \to S\left(y,f(g(w),x)\right)\right)\right)\right)\right)$,

באוצר המילים : $L = \{S,f,g\}$ כאשר S סימן יחס דו מקומי, f סימן פונקציה דו מקומית, g סימן פונקציה חד מקומית.
יהא המבנה : $M =< R,>,f(x,y) = |x-y|, g(x) = 6x^3, c = 0 >$. האם M מקיים את A? הוכח!

תרגילים על תחשיב היחסים – פתרונות

.1

א. מתקיים כי $3+1>2$.

ב. לא מתקיים כי $3-1 \nless 2$

ג. מתקיים כי $3-1\cdot 7>2$

.2

א. לא מתקיים, כי: $3+2\cdot 2$ אינו מספר זוגי.

ב. מתקיים, כי: $3\cdot(2+2)$ הוא מספר זוגי.

.3

א. $A(2,5)=7$
ב. $A(-1,3)=2$
ג. $A=4$
ד. $A(5,2,4)=280$

.4

א. $A(2,5)=6.5$
ב. $A(-1,3)=6$
ג. $A=2$
ד. $A(5,2,4)=0$

.5

א. $A=\emptyset$
ב. $A(\{1,2\},\{2,3,5\})=\{1,2\}$
ג. $A(\{1,2\},\{2,3,5\})=\{1,2,3,5\}$

.6

א. False
ב. True
ג. False

.7

א. מתקיים: כי $\forall x\exists y(y<x)$ לא מתקיים ב $\mathbb{N}$ עבור $x=0$ ולכן צד שמאל של הגרירה אינו מתקיים ולכן הפסוק מתקיים.

ב. לא מתקיים כי לכל x נבחר $y=x+1$ גדול ממנו ב $\mathbb{N}$ אבל לא לכל y קיים x קטן ממנו.(עבור $y=0$ זה לא מתקיים).

ג. מתקיים כי לכל x נבחר $y=x-1$ קטן ממנו ב $\mathbb{Z}$ ומתקיים שלכל y נבחר $x=y+1$ גדול ממנו ולכן הטענה מתקיימת.

ד. מתקיים, באותו אופן כמו ג.

ה. לא מתקיים כי לכל $x\in(-3,5]$ נבחר: $y=\frac{-3+x}{2}$ אבל עבור $y=5$ לא קיים x גדול יותר.

ו. מתקיים כי לכל x נבחר $y=x$ ולכל y נבחר $x=y$ כי כל מספר מחלק את עצמו ולכן הטענה מתקיימת.

.8

א. לא מתקיים.

ב. לא מתקיים.

.9

א. מתקיים.

ב. מתקיים.

ג. לא מתקיים.

ד. מתקיים.

10. הפסוק לא מתקיים. נבחר: $x = 1$ ואכן יש y הגדול מ x אבל לא קיים y הקטן מ x.

11.

א. לא מקיים את A.
ב. לא מקיים את A.
ג. מקיים את A.
ד. לא מקיים את A.
ה. לא מקיים את A.

12. $c^M = 0 \,, S^M = \{(0,1)\} \,, R^M =< \,, M =< R, \{(0,1)\}, <, 0 >$

13.

א. אין מבנה כזה, כי אם הפסוק מתקיים לכל y הוא גם מתקיים בפרט עבור y מסוים.
ב. $S^M = \{(0),(1)\}, R^M =< \,, M =< \{0,1\}, \{(0),(1)\}, \leq>$
ג. $S^M = \{(0)\} \,, R^M =< \,, M =< R, \{(0)\}, \{(0,0)\} >$
ד. $S^M = \{(1),(2)\} \,, R^M = \{(1,1)\} \,, M =< \{1,2\}, \{(1),(2)\}, \{(1,1)\} >$

14.

א. $\exists x[\forall y((y \neq x) \to (S(y,x)))]$
ב. $\forall x[\exists y(f(y,y) = x)]$

15. הפסוק לא מתקיים. כי אמנם בין כל $y < x$ יש איבר z אבל ל $x = 1$ לא קיים y הגדול ממנו.
16. הפסוק לא מתקיים. כי לכל x יש איבר יותר גדול ממנו אבל ל $x = 0$ לא קיים איבר הקטן ממנו.
17. הפסוק לא מתקיים. כי אכן לכל x יש איבר הגדול ממנו אבל לא קיים y שכל האחרים גדולים או שווים אליו.
18. הפסוק מתקיים.
19. הפסוק מתקיים.
20. הפסוק מתקיים.
21.

א. הפסוק מתקיים כי לכל x נבחר $y = x$.
ב. הפסוק לא מתקיים כי לכל y נבחר $x \neq y$ כי יש במספקים הטבעיים אינסוף איברים ובפרט 2.
ג. הפסוק מתקיים כי $x = y = 7$. (7 הוא האיבר היחיד בעולם)
ד. הפסוק לא מתקיים.
ה. הפסוק מתקיים כי $x^2 \geq 0$ לכל x שלם.
ו. הפסוק לא מתקיים.
ז. הפסוק לא מתקיים.
ח. הפסוק מתקיים.
ט. הפסוק מתקיים.
י. הפסוק מתקיים.
יא. הפסוק לא מתקיים.
יב. הפסוק לא מתקיים.
יג. הפסוק מתקיים.
יד. הפסוק מתקיים.

22.

א. הפסוק מתקיים.
ב. הפסוק לא מתקיים.
ג. הפסוק מתקיים.
ד. הפסוק מתקיים.
ה. הפסוק לא מתקיים.
ו. הפסוק מתקיים.

.23
א. הפסוק לא מתקיים.
ב. הפסוק מתקיים.
ג. הפסוק מתקיים.
ד. הפסוק מתקיים.
ה. הפסוק מתקיים.
ו. הפסוק מתקיים.

.24
א. הפסוק לא מתקיים.
ב. הפסוק מתקיים.

.25
א. הפסוק מתקיים.
ב. הפסוק מתקיים.
ג. הפסוק מתקיים.
ד. הפסוק מתקיים.

.26 T
.27
.28
.29 הפסוק לא מתקיים.

.30 הפסוק לא מתקיים.

.31
.32

א. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\forall x \forall y[(x<y) \vee (y<x)]$

כלומר, <u>לכל</u> x, y או ש x גדול מ y או ש y גדול מ x. הפסוק **לא מתקיים** ב M , נראה דוגמא נגדית: $x = y$. שלילת הפסוק היא:

$$\neg(\forall x \forall y[(x<y) \vee (y<x)]) \equiv \exists x \exists y[\neg((x<y) \wedge \neg(y<x))] \equiv \exists x \exists y[((x \geq y) \wedge (y \geq x))]$$

נוכיח את הפסוק שקיבלנו: יהיו $x, y \in \mathbb{N}$. נבחר את y להיות $x = y$ ולכן שלילת הפסוק מתקיימת.

ב. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $(\forall x \forall y[x<y]) \vee (\forall x \forall y[y<x])$, נבדוק כל צד בנפרד,

הצד השמאלי אומר ש<u>לכל</u> x, y , y גדול מ x. דוגמא נגדית: $x = y + 1$.

הצד הימני אומר ש<u>לכל</u> x, y , x גדול מ y. דוגמא נגדית: $y = x + 1$.

ולכן הפסוק **לא מתקיים** ב M שלילת הפסוק היא:

$$\neg[(\forall x \forall y[x<y]) \vee (\forall x \forall y[y<x])] \equiv [\exists x \exists y(x \geq y)] \wedge [\exists x \exists y(y \geq x)] ,$$

נוכיח את הפסוק שקיבלנו: יהיו $x, y \in \mathbb{N}$ צ"ל את 2 הצדדים של הפסוק. בשני הצדדים נבחר את y להיות $x = y$ ולכן שלילת הפסוק מתקיימת.

ג. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\forall x \exists y[x+y<x]$

כלומר, לכל x קיים y שהסכום ביניהם יהיה קטן ממש מ x עצמו.

הפסוק **לא מתקיים** ב M, כי סכום של 2 מספרים טבעיים הוא לפחות המספר עצמו (אם אחד המספרים הוא 0). שלילת הפסוק היא:

$$\neg[\forall x \exists y[x+y<x]] \equiv \exists x \forall y[x+y \geq x]$$

נוכיח את הפסוק שקיבלנו: יהיו $x, y \in \mathbb{N}$, מכיוון ש x, y הם מספרים טבעיים אז הסכום שלהם הוא לפחות x או לפחות y ולכן שלילת הפסוק מתקיימת.

ד. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\exists x \forall y[(y<x) \vee (x=y)]$

כלומר, קיים x שעבורו כל הy הם או שווים אליו או קטנים ממנו (במילים אחרות, x הוא איבר מקסימאלי) הפסוק **לא מתקיים** ב M, כי אין איבר מקסימאלי במספרים הטבעיים.

שלילת הפסוק היא: $\neg[\exists x \forall y[(y<x) \vee (x=y)]] \equiv \forall x \exists y[(y \geq x) \wedge (x \neq y)]$

נוכיח את הפסוק שקיבלנו: יהיו $x, y \in \mathbb{N}$,נבחר את y להיות $y = x + 1$ ולכן שלילת הפסוק מתקיימת.

ה. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\exists x \forall y[(x \neq y) \to (x<y)]$

כלומר, קיים x שעבורו כל ה y השונים ממנו הם גדולים ממנו. הפסוק **מתקיים** ב M.

הוכחה: יהיו $x,y \in \mathbb{N}$, נבחר $x = 0$. נניח ש $x \neq y$ צ"ל: $x < y$. מכיוון ש $y \neq 0$ נקבל בהכרח ש $x < y$ כי y הוא מספר טבעי, ולכן הפסוק נכון עבור כל y.

ו. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $[\exists x \forall y[(x \neq y)]] \to [\exists x \forall y (x < y)]$

כלומר, אם קיים x שכל ה y שונים ממנו אז קיים x שכל ה y גדולים ממנו.

הפסוק **מתקיים** ב M, כי לא קיים x שכל ה y שונים ממנו.

הוכחה: יהיו $x,y \in \mathbb{N}$, נבחר את y להיות $x = y$ ולכן הצד השמאלי של הגרירה אינו מתקיים וקיבלנו $F \to P$ ולכן הפסוק נכון.

ז. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\forall y \exists x[(x \neq y) \to (x < y)]$

כלומר, לכל y קיים x שאם $x \neq y$ אז x קטן מ y. הפסוק **מתקיים** ב M.

הוכחה: יהיו $x,y \in \mathbb{N}$, נבחר את x להיות $x = y$, קיבלנו $F \to P$ ולכן הפסוק נכון.

ח. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\forall x \forall y[(x \neq y) \to (x < y)]$

כלומר, לכל x,y אם $x \neq y$ אז x קטן מ y. הפסוק **לא מתקיים** ב M נראה דוגמא נגדית: $x = 3$, $y = 2$. שלילת הפסוק היא:

$$\neg[\forall x \forall y[(x \neq y) \to (x < y)]] \equiv \exists x \exists y[\neg[\neg(x \neq y) \lor (x < y)]] \equiv$$
$$\equiv \exists x \exists y[(x \neq y) \land (x \geq y)]$$

נוכיח את הפסוק שקיבלנו: יהיו $x,y \in \mathbb{N}$, נבחר $x = 3$, $y = 2$ ולכן שלילת הפסוק מתקיימת.

.33

א. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\forall x \forall y \forall z[((x = y) \land (x < z)) \to (y < z)]$

כלומר, לכל x,y,z אם $x = y$ וגם x קטן מ z אז y קטן מ z. הפסוק **מתקיים** ב M.

הוכחה: יהיו $x,y,z \in \mathbb{N}$ נניח ש $x = y$ וגם $x < z$ צ"ל ש $y < z$, לפי ההנחה $x = y$ נציב בביטוי $x < z$ ונקבל $y < z$ ומכיוון שהנחנו שהביטוי $x < z$ נכון קיבלנו ש $y < z$ ולכן הפסוק נכון.

ב. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\forall x \exists y \exists z[x + y < z]$

כלומר, לכל x קיימים y,z כך שהסכום של x ו y קטן מ z. הפסוק **מתקיים** ב M.

הוכחה: יהיו $x,y,z \in \mathbb{N}$, נבחר את y להיות $y = 0$ ואת z נבחר להיות $z = x + 1$

קיבלנו: $x + 0 < x + 1$ ולכן הפסוק נכון עבור כל x.

ג. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\forall x \exists y \forall z[x + y < z]$

כלומר, לכל x קיים y כך שלכל z הסכום של x ו y קטן ממנו. הפסוק **לא מתקיים** ב M נראה דוגמא נגדית: $z = 0$ ובמספרים הטבעיים 0 לא גדול ממש מאף מספר.

שלילת הפסוק: $\neg[\forall x \exists y \forall z[x + y < z]] \equiv \exists x \forall y \exists z[x + y \geq z]$

נוכיח את הפסוק שקיבלנו: יהיו $x,y,z \in \mathbb{N}$, נבחר $x = 0$ ו $z = 0$ וקיבלנו $y \geq 0$, ביטוי זה נכון תמיד במספרים הטבעיים ולכן שלילת הפסוק מתקיימת.

ד. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל:

$$\forall x \forall y \forall z[((x + y < x * y) \to (x < z))] \to \forall y \forall z[y < z]$$

כלומר, אם לכל x,y,z מתקיים ש: הסכום של x ו y קטן מהמכפלה שלהם גורר ש x קטן מ z אז לכל y,z מתקיים ש $y < z$. הפסוק **מתקיים** ב M.

הוכחה: יהיו $x,y,z \in \mathbb{N}$, נניח ש $x + y < x * y$ ונבחר את z להיות $z = 0$. קיבלנו $T \to F$ ולכן צד שמאל של הגרירה לא מתקיים ולכן קיבלנו בפסוק המקורי $F \to P$ ומכאן שהפסוק נכון.

ה. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל:

$$\forall x \exists y \forall z \exists w[((x < y) \land (x < w)) \to ((z < y) \land (z < w))]$$

כלומר, לכל x קיים y ולכל z עבורם קיים w כך ש: אם x קטן מ y וגם מ w אז מתקיים ש z קטן מ y וגם מ w. הפסוק **מתקיים** ב M.

הוכחה: יהיו $x,y,z,w \in \mathbb{N}$ נבחר את y להיות $y = 0$ וקיבלנו שצד שמאל של הגרירה אינו מתקיים, מכאן $F \to P$ ולכן הפסוק נכון.

ו. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל:

$$\exists x \exists y \exists z[(x * y) + (x * z) = (x + y) * (x + z)]$$

כלומר, קיימים x,y,z כך שסכום המכפלות של x עם y ושל x עם z שווה למכפלת הסכומים שלהם.

הפסוק **מתקיים** ב M.

הוכחה: יהיו $x,y,z \in \mathbb{N}$ נבחר $x = y = z = 0$ ולכן הפסוק נכון.

ז. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\forall x \exists y[((y < x) \lor (x < y)) \to (0 < x)]$

כלומר, לכל x קיים y כך שאם x גדול מ y או y גדול מ x אז x גדול מ 0. הפסוק **מתקיים** ב M.

הוכחה: יהיו $x, y \in \mathbb{N}$, נבחר את y להיות $y = x$ וקיבלנו שצד שמאל של הגרירה אינו מתקיים ומכאן $F \rightarrow P$ ולכן הפסוק נכון.

ח. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\exists y \forall x[\left((y < x) \vee (x < y)\right) \rightarrow (0 < x)]$

כלומר, קיים y שעבור כל x שנבחר עבורו מתקיים ש: אם x גדול מ y או y גדול מ x אז x גדול מ 0. הפסוק **מתקיים** ב M.

הוכחה: יהיו $x, y \in \mathbb{N}$, נגדיר $y = 0$. נניח שמתקיים $y < x$ או $x < y$, צ"ל: $0 < x$.

מכיוון ש $y = 0$ אז לא קיים במספרים הטבעיים $x < 0$ ולכן על פי ההנחה בהכרח שמתקיים $0 < x$,מש"ל, ולכן הפסוק נכון.

ט. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\exists x \forall y \exists z \forall w[x * z < y + w]$

כלומר, קיים x שלכל y עבורו קיים z כך שלכל w מתקיים: המכפלה של x עם z קטנה מהסכום של y ו w. הפסוק **לא מתקיים** ב M, נראה דוגמא נגדית: נבחר $y = w = 0$

וקיבלנו $x * z < 0$ ובמספרים הטבעיים 0 לא גדול ממש מאף מספר.

שלילת הפסוק: $\neg[\exists x \forall y \exists z \forall w[x * z < y + w]] \equiv \forall x \exists y \forall z \exists w[x * z \geq y + w]$

נוכיח את הפסוק שקיבלנו: יהיו $x, y, z, w \in \mathbb{N}$, נבחר $y = w = 0$ וקיבלנו $x * z \geq 0$, ביטוי זה נכון תמיד במספרים הטבעיים ולכן שלילת הפסוק מתקיימת.

י. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\forall x \exists y \forall z \exists w[x * z < y + w]$

כלומר, לכל x קיים y כך שלכל z עבורם קיים w כך ש: המכפלה של x עם z קטנה מהסכום של y ו w. הפסוק **מתקיים** ב M.

הוכחה: יהיו $x, y, z, w \in \mathbb{N}$, נבחר $y = 1$ ו $w = x * z$, קיבלנו $x * z < x * z + 1$ וביטוי זה נכון תמיד ולכן הפסוק מתקיים.

יא. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\forall y \forall w \exists x \exists z[x * z < y + w]$

כלומר, לכל y, w קיימים x, z כך ש: המכפלה של x עם z קטנה מהסכום של y ו w. הפסוק **לא מתקיים** ב M. הוכחה כמו בסעיף ט'.

יב. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\forall x \exists y[(x < y) \leftrightarrow (y < x + x)]$

כלומר, לכל x קיים y כך ש: x קטן מ y אם ורק אם y קטן מ $2x$. הפסוק **לא מתקיים** ב M. נראה דוגמא נגדית: $x = 1$, נקבל: $(1 < y) \leftrightarrow (y < 2)$ ולא קיים y במספרים הטבעיים בין 1 ל 2 וכן לא קיים y שהוא גם גדול שווה ל 2 וגם קטן שווה ל 1.

שלילת הפסוק: $\neg\left[\forall x \exists y[(x < y) \leftrightarrow (y < x + x)]\right] \equiv$

$\exists x \forall y \left[\neg\left[[\neg(x < y) \vee (y < x + x)] \wedge [(x < y) \vee \neg(y < x + x)]\right]\right] \equiv$

$\exists x \forall y[[(x < y) \wedge (y \geq x + x)] \vee [(x \geq y) \wedge (y < x + x)]]$

נוכיח את הפסוק שקיבלנו: יהיו $x, y \in \mathbb{N}$, נבחר: $x = 1$ וקיבלנו:

$[(1 < y) \wedge (y \geq 2)] \vee [(1 \geq y) \wedge (y < 2)]$, מספיק להוכיח שאחד הצדדים של האיווי מתקיים ואכן צד שמאל מתקיים לכל $y \geq 2$ וצד ימין מתקיים לכל $y < 2$ ולכן שלילת הפסוק מתקיימת לכל y טבעי.

יג. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\forall x \exists y[(x * x) + x = y]$

כלומר, לכל x קיים y כך ש: $y = (x * x) + x$. הפסוק **מתקיים** ב M.

הוכחה: יהיו $x, y \in \mathbb{N}$ נבחר את y להיות $y = (x * x) + x$ ולכן הפסוק נכון.

יד. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\forall x[\forall y(y < x) \rightarrow \forall y(y < x * x)]$

כלומר, לכל x מתקיים שאם כל ה y קטנים מ x אז כל ה y קטנים מ x^2. הפסוק **מתקיים** ב M.

הוכחה: יהיו $x, y \in \mathbb{N}$, נבחר $y = x$ ולכן צד שמאל של הגרירה אינו מתקיים וקיבלנו $F \rightarrow P$ ומכאן שהפסוק נכון.

טו. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל:

$\forall x \forall y \forall z \exists w[(x + y + z + 0 = w) \rightarrow ((x < w) \wedge (y < w) \wedge (z < w))]$

כלומר, לכל x, y, z קיים w כך שאם w הוא הסכום של x, y, z אז הוא גדול ממש מכולם.

הפסוק **מתקיים** ב M.

הוכחה: יהיו $x, y, z, w \in \mathbb{N}$, נבחר את w להיות $w = x + y + z + 1$ ונקבל $F \rightarrow P$ ולכן הפסוק נכון.

טז. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\exists x \forall y \exists z[(x < y) \wedge (y < z)]$

כלומר, קיים x שלכל y עבורו, קיים z כך ש: x קטן מ y וגם y קטן מ z. הפסוק **לא מתקיים** ב M. דוגמא נגדית: $y = 0$ וקיבלנו $x < 0$ שאינו מתקיים בטבעיים.

שלילת הפסוק: $\neg[\exists x \forall y \exists z[(x < y) \wedge (y < z)]] \equiv \forall x \exists y \forall z[(x \geq y) \vee (y \geq z)]$

נוכיח את הפסוק שקיבלנו: יהיו $x, y, z \in \mathbb{N}$, נבחר $y = 0$ ונקבל $x \geq 0$ שמתקיים תמיד בטבעיים, קיבלנו $T \vee P$ ולכן שלילת הפסוק מתקיימת.

.34

א. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\forall x\forall y\forall z[(x*x+y*y\le z)\to(0\le z)]$
כלומר, לכל x,y,z מתקיים שאם z גדול או שווה לסכום ריבועי x ו y אז $0\le z$.
הפסוק **מתקיים** ב M.
הוכחה: יהיו $x,y,z\in\mathbb{R}$, נניח שמתקיים $x*x+y*y\le z$, צ"ל: $0\le z$.
לפי ההנחה, z גדול מסכום ריבועי מספרים שהוא מספר חיובי או שווה ל 0 ולכן בהכרח $0\le z$ ולכן הפסוק נכון.

ב. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\forall x\exists y[(x\le y)\to(y*0\le x)]$
כלומר, לכל x קיים y כך שאם y גדול או שווה ל x אז x גדול או שווה ל 0.
הפסוק **מתקיים** ב M.
הוכחה: יהיו $x,y\in\mathbb{R}$, נבחר $y=x-1$, קיבלנו $F\to P$ ולכן הפסוק נכון.

ג. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\exists y\forall z[(y\le z)\leftrightarrow\forall x((x\le y))]$
כלומר, קיים y שלכל z עבורו מתקיים: $y\le z$ אם ורק אם קיים x כך ש $x\le y$.
הפסוק **לא מתקיים** ב M. דוגמא נגדית: נבחר $x=z=y+1$.
שלילת הפסוק:
$$\neg[\exists y\forall z[[\neg(y\le z)\vee\forall x\big((x\le y)\big)]\wedge[(y\le z)\vee\neg(\forall x\big((x\le y)\big))]]]\equiv\forall y\exists z[[(y\le z)\wedge\exists x(x>y)]\vee[(y>z)\wedge\forall x(x\le y)]]$$
נוכיח את הפסוק שקיבלנו: יהיו $x,y,z\in\mathbb{R}$, נבחר את z להיות $z=y+1$ ואת x להיות $x=y+1$, קיבלנו $T\vee P$ ולכן שלילת הפסוק מתקיימת.

ד. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\forall x\exists y\forall z[(y\le z)\leftrightarrow(x\le y)]$
כלומר, לכל x קיים y כך שלכל z מתקיים: $y\le z$ אם ורק אם $x\le y$.
הפסוק **לא מתקיים** ב M. דוגמא נגדית: $z=y-1$ במקרה ש $x\le y$, אחרת, נבחר $z=y+1$. שלילת הפסוק היא:
$\neg[\forall x\exists y\forall z[[\neg(y\le z)\vee(x\le y)]\wedge[(y\le z)\vee\neg(x\le y)]]]\equiv\exists x\forall y\exists z[[(y\le z)\wedge(x>y)]\vee[(y>z)\wedge(x\le y)]]$,
נוכיח את הפסוק שקיבלנו: יהיו $x,y,z\in\mathbb{R}$, נבחר את z להיות $z=y-1$ במקרה ש $x\le y$ ונקבל $P\vee T$, אחרת, נבחר $z=y+1$ ונקבל $T\vee P$ ולכן שלילת הפסוק מתקיימת עבור כל y.

ה. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\exists x\exists y\forall z[(x*z\le y)\wedge(x*z+1\le y)]$
כלומר, קיימים x,y כך שלכל z מתקיים שמכפלת x ו z קטנה או שווה ל $y-1$.
הפסוק **מתקיים** ב M.
הוכחה: יהיו $x,y,z\in\mathbb{R}$, נבחר את x להיות $x=0$ ואת y להיות $y=2$ וקיבלנו $1\le 2$ (וכל שכן $0\le 2$) ולכן הפסוק נכון.

ו. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל:
$$\forall x\forall y\forall z\forall w[(x+y=z+w)\vee((\mathrm{x}\ne\mathrm{z})\wedge(x\ne w)\wedge(y\ne z)\wedge(y\ne w))]$$
כלומר, לכל $x,y.z.w$ מתקיים ש $x+y=z+w$ או ש: x שונה מ z ו w וגם y שונה מ z ו w. הפסוק **לא מתקיים** ב M. דוגמא נגדית: $x=1\,,y=2,z=3,w=1$
שלילת הפסוק היא:
$$\neg\forall x\forall y\forall z\forall w[(x+y=z+w)\vee((\mathrm{x}\ne\mathrm{z})\wedge(x\ne w)\wedge(y\ne z)\wedge(y\ne w))]\equiv\exists x\exists y\exists z\exists w[(x+y\ne z+w)\wedge((\mathrm{x}=\mathrm{z})\vee(x=w)\vee(y=z)\vee(y=w))]$$
נוכיח את הפסוק שקיבלנו: יהיו $x,y,z,w\in\mathbb{R}$, נבחר: $x=1\,,y=2,z=3,w=1$ וקיבלנו שהסכום שונה וגם $x=w$ ולכן שלילת הפסוק מתקיימת.

ז. נציב את הסימנים בפסוק ונקבל: $\forall x\exists y\forall z[(y\le y+1)\leftrightarrow(\mathrm{x}*\mathrm{y}\le\mathrm{z})]$
כלומר, לכל x קיים y כך שלכל z מתקיים ש $(y\le y+1)$ אם ורק אם $\mathrm{x}*\mathrm{y}\le\mathrm{z}$.
הפסוק **לא מתקיים** ב M. דוגמא נגדית: $x=0$ ו $z=-1$
שלילת הפסוק היא: $((y\le y+1)\equiv T)$
$$\neg[\forall x\exists y\forall z[(y\le y+1)\leftrightarrow(\mathrm{x}*\mathrm{y}\le\mathrm{z})]]\equiv\exists x\forall y\exists z[x*y>z]$$
נוכיח את הפסוק שקיבלנו: יהיו $x,y,z\in\mathbb{R}$ נבחר $x=0$ ו $z=-1$ ולכן שלילת הפסוק מתקיימת לכל y.

.35

א. ב M_1: $f(c,c)=0+0=0$, ב M_2: $f(c,c)=\min(3,6-3)=3$
ב. ב M_1: $f\big(f(1,5),f(c,1)\big)=(1+5)+(0+1)=7$,
ב M_2: $f\big(f(1,5),f(c,1)\big)=\min\,(\min(1,6-5)\,,6-\min\,(0,6-1))=1$

ג. ב M_1: $x+y\neq y+x$ לא מתקיים לאף x,y.
ב M_2: $\min(x,6-y)\neq\min(y,6-x)$ מתקיים רק עבור $x\neq y$.

ד. לא נכון, דוגמא נגדית: $L=\{S,c\}$, $M_1 < N,<,0 >$, $M_2 =< N,=,0 >$, $A[x_1,x_2,\dots .x_n]=S(x_1,c)\wedge S(x_2,c)\wedge\dots\wedge S(x_n,c)$, $M_1\not\models A$ לכל השמה כי אין ב $\mathbb{N}$ מספרים הקטנים מ 0 אבל $M_2\models A[0,0,\dots,0]$.

36.

א. $\exists x(x=x)$
ב. $\exists x(x\neq x)$
ג. $\exists x\exists y(x\neq y\wedge f(x)=f(y))$
ד. $\forall x\forall y(x=y\vee f(x)\neq f(y))$

37.

א. כן, נניח שקיים פסוק A כך ש $M_1\models A$ וגם $M_2\not\models A$ אז הפסוקים $A\wedge A, A\wedge A\wedge A, A\wedge A\wedge\dots\wedge A,\dots$ מתקיימים ב M_1 ולא ב M_2.

ב. כן, נניח $|M_1|=n$, $|M_2|=m$, $m<n$. אזי הפסוק: $\exists x_1,x_2,\dots x_n(x_1\neq x_2\wedge x_1\neq x_3\wedge\dots\wedge x_{n-1}\neq x_n)$ מתקיים ב M_1 ולא ב M_2 כי ב M_2 אין n איברים שונים.

ג. לא, דוגמא נגדית: $L=\{S,c\}$, $M=< N,<,1 >$, $A_i[x]=S(c,x)$ לכל $1\le i\le n$.
לכל נוסחא: $M\models A_i[2]$ אבל: M לא מקיים את: $\forall x(A_1[x]\vee A_2[x]\vee\dots\vee A_n[x])$ כי נבחר: $x=0$ ומכאן $A_i[0]$ לא מתקיים לכל $1\le i\le n$.

ד. לא, לפי הגדרת פונקציה, f לא יכולה להחזיר 2 ערכים שונים לאיבר אחד.

38. הפסוק מתקיים ב M כי $S(x,y)\wedge S(y,z)$ אינו מתקיים לכל x,y,z כי אם $S(x,y)$ וגם $S(y,z)$ מתקיימים אז $M\models A[y]$ וגם $M\not\models A[y]$ וזו סתירה ולכן נקבל $F\to(A[x]\leftrightarrow A[z])$ ולכן הפסוק מתקיים.

39.

א. M_1: מתקיים, הפעולה ב M_1 קומוטטיבית, כלומר: $f(x,y)=f(y,x)$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$.
M_2: לא מתקיים: דוגמא: $x=\emptyset$, $y=\mathbb{N}$.

ב. M_1: מתקיים כי לכל x המקיים $|x|<2$ נבחר $y=0$ ונקבל: $|-x|<2$.
M_2: מתקיים כי לכל x המקיימת $|x|<100$ נבחר $y=x$ ונקבל: $|y\backslash x|=0<100$.

ג. M_1: לא מתקיים כי נבחר: $x=y=-1$ ונקבל: $|-1|<2$ אבל: $f(-1,-1)=3>2$.
M_2: מתקיים כי לכל x,y המקיימות: $|x|<100, |y|<100$ גם $|y\backslash x|<100$.

ד. M_1: מתקיים כי נבחר: $x=y=2$ ואכן $2\nless 2$ אבל: $f(2,2)=0<2$.
M_2: מתקיים כי נבחר: $x=y=\{1,2,\dots,100\}$ ואכן: $|x|,|y|\nless 100$ אבל: $|x\backslash y|=0$.

40.

א. המבנה M_1 מקיים את A.
הוכחה: יהא $x\in\mathbb{R}$ כלשהו, אם $x\neq 0$ נבחר $z=x, y=0$. מכאן: $x+y=z$ מתקיים.
נותר להוכיח את החלק השני של הפסוק: יהא $w\in\mathbb{R}$ כלשהו. נבחר: $v=\frac{w}{z}+1$ ולכן $v\cdot z\neq w$ ולכן נקבל שצד שמאל של הגרירה אינו מתקיים ולכן החלק השני של הפסוק מתקיים.
אם $x=0$ נבחר $z=1, y=-1$, נותר להוכיח את החלק השני של הפסוק: יהא $w\in\mathbb{R}$ כלשהו. נבחר: $v=w+1$ ולכן $v\cdot z\neq w$ ולכן נקבל שצד שמאל של הגרירה אינו מתקיים ולכן החלק השני של הפסוק מתקיים.

ב. המבנה M_2 מקיים את A.
הוכחה: יהא $x\in\mathbb{R}$ כלשהו, נבחר: $y=z=0$. מכאן: $x\cdot y=z$ מתקיים.
נותר להוכיח את החלק השני של הפסוק: יהא $w\in\mathbb{R}$ כלשהו. נבחר: $v=w+1$ ולכן $v\neq w$ לכן נקבל שצד שמאל של הגרירה אינו מתקיים ולכן החלק השני של הפסוק מתקיים.

41. M לא מקיים את A.
דוגמא נגדית: $x=\{0\}, y=\{1\}, z=\{2\}$. $x\neq y\neq z$ אבל: קיים $w=\{0,1,2,3\}\neq\mathbb{N}$ כך ש $\{0\}\cup\{1\}\cup\{2\}\subset w$ ולא מתקיים: $\{0\}\cup\{1\}\cup\{2\}\subset\mathbb{N}$.

42. המבנה M לא מקיים את הפסוק.
הפרכה: נבחר $x = -1, y = 1$.מתקיים ש $x < y$. כעת, יהא z כלשהו, נחלק למקרים:
מכיוון ש $x < y$ אזי קיימים אינסוף מספרים ביניהם ולכן נבחר w בין x ל y שאינו z, גדול מ z וקטן מ $3z$ או גדול מ $3z$ וקטן מ z (אם z שלילי) ואם z לא בין x ל y אזי נבחר w שרירותי בין x ל y. ואכן, צד שמאל של הגרירה מתקיים וכן: $z < w$ אם ורק אם $w < 3z$ לא מתקיים.

43.

a. ההוכחה לא נכונה כי נותנים דוגמא ל x, z שלא מקיימים את צד שמאל של הגרירה וגורמים לפסוק להיות נכון אך זה לא בהכרח נכון לכל x, z.
b. ההוכחה לא נכונה כי לא ניתן להגדיר את y באמצעות x, z – זהו היפוך בסדר הכמתים.
c. ההוכחה לא נכונה כי לא ניתן להסיק מההנחה ש x, z הם שברים כי יש גם את המקרה בו שניהם לא מקיימים את ה"אם ורק אם".

- הפסוק לא מתקיים: הפרכה: יהא y כלשהו. נבחר: $x = z = |y|$. ואכן מתקיים: $y < |y|$ אם ורק אם $y < |y|$ (כי 2 הצדדים לא מתקיימים) אבל: $xz = y^2 < y$ לא מתקיים.

תרגילים בהוכחות – תורת הקבוצות

1. נתון: $A\subseteq B$. הוכיחו או הפריכו: $P(A)\subseteq P(B)$.

2. הוכיחו שאם $A\subseteq B$ וגם $A\subseteq C$ אז $A\times A\subseteq B\times C$.

3. נניח $A\subseteq B$. עליכם להוכיח או להפריך כל אחת מהמסקנות הבאות:
   א. אם $1\in A$, אז $\{1\}\subseteq B$.
   ב. אם $\{1\}\subseteq A$, אז $1\in B$.
   ג. אם $1\notin A$, אז $1\notin B$.
   ד. אם $1\in A$, אז $\{\varnothing,\{1\}\}\subseteq P(B)$.

4. הוכיחו שלכל A,B,C מתקיֵם: $A\cap B\subseteq A\cup C$.

5. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
   א. לכל B,A מתקיֵם $A\subseteq A\cap B$.
   ב. לכל A,B מתקיֵם $A\cap(A\cup B)=A$.

6. הוכיחו או הפריכו:
   א. $A\cup(A\cap B)=A$
   ב. $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$
   ג. $(A\triangle B)\triangle A=B$
   ד. $\overline{(A\cup B)}\cap(C\cup D)=\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\right)\cup\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap D\right)$

7. הוכח או הפרך:
   א. $(A\setminus B)\cup(B\setminus C)=A\setminus C$
   ב. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$
   ג. $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D)$
   ד. $(A\triangle C=B\triangle C)\rightarrow A=B$
   ה. $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$
   ו. $C\cap(A\triangle B)=(C\cap A)\triangle(C\cap B)$
   ז. $P(A\setminus B)\neq P(A)\setminus P(B)$
   ח. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$
   ט. $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$

8. הוכח או הפרך:
   א. $(A\times B)\cap(B\times C)\subseteq A\times C$
   ב. $A\times B\subseteq P(A\times B)$
   ג. $P(A)\times P(B)=P(A\times B)$
   ד. $[A\times B\subseteq B\times C]\leftrightarrow[(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq C)]$
   ה. $(A\times B)\subseteq A^2\rightarrow B\subseteq A$
   ו. $(A\times B)\setminus(C\times C)=(A\setminus C)\times(B\setminus C)$

תרגילים בהוכחות – פונקציות

9. נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}\backslash\{-2.5\}$ המוגדרת ע״י $f(x)=\frac{5-x}{2x}-2$, האם הפונקציה חח״ע ועל? הוכח!

10. נתונה פונקציה $f: N\to N,\ f(x)=3x+5$.
    א. הוכיחו שהיא חח״ע (כלומר $\forall a,b\in N[f(a)=f(b)\to a=b]$).
    ב. הוכיחו שהיא איננה על (כלומר נסחו והוכיחו את שלילת הפסוק $\forall y\in N[\exists x\in N[f(x)=y]]$).

11. כהקדמה להגדרת פונקציה, נגדיר לכל זוג $(n,m)\in N\times N$ את הקבוצה
$A_{n,m}=\{(n',m')\in N\times N: n'+m'<n+m \text{ or } (n'+m'=n+m \text{ but } n'<n)\}$. למשל: $A_{1,1}=\{(0,0),(0,1),(1,0),(0,2)\}$.
נגדיר פונקציה דו-מקומית על N: $f(n,m)=|A_{n,m}|$. למשל $f(1,1)=4$, כי יש 4 אברים בקבוצה $A_{1,1}$.
    א. חשבו את $f(0,0),f(0,1),f(1,0),f(2,2)$.
    ב. הוכיחו שלכל זוג $(n,m)\in N\times N$ בהכרח $(n,m)\notin A_{n,m}$.
    ג. הוכיחו שאם $f(n_1,m_1)=f(n_2,m_2)$ אז $(n_1,m_1)\notin A_{n2,m2}$ וגם $(n_2,m_2)\notin A_{n1,m1}$.
    ד. הוכיחו שאם $f(n_1,m_1)=f(n_2,m_2)$ אז $n_1+m_1=n_2+m_2$.
    ה. הוכיחו שהפונקציה f היא חח״ע. (אכן, מדהים! למרות שנדמה שבקבוצה $N\times N$ יש הרבה יותר אברים מאשר בקבוצה N, יש פונקציה חח״ע מ-$N\times N$ ל-N. נדון בתופעה זו בהמשך הקורס).

12. נתונות 2 פונקציות $f: A\to B$, $g: B\to C$, נתון g, f חח״ע ועל, הוכח או הפרך: $g\circ f$ חח״ע ועל.

13. נתונות 2 פונקציות $f: A\to B$, $g: B\to C$, נתון $g\circ f$ חח״ע ועל, הוכח או הפרך: f חח״ע, f על, g חח״ע, g על.

14. תהי הפונקציה: $f:\mathbb{Q}\backslash\{-1\}\to\mathbb{Q}$ המוגדרת ע״י: $f(x)=\frac{3x-5}{x+1}$.
    א. הוכח או הפרך: f חח״ע.
    ב. הוכח או הפרך: f על.

15. תהי הפונקציה: $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^+$ המוגדרת באופן הבא: $f(x)$ מחזירה את מספר הספרות של x. (בייצוג עשרוני)
    א. הוכח או הפרך: f חח״ע.
    ב. הוכח או הפרך: f על.

16. נסמן: A - קבוצת כל תתי הקבוצות הסופיות של $\mathbb{N}$.
תהי הפונקציה: $f: A\to P(\mathbb{N})\backslash A$ המוגדרת באופן הבא: $f(x)=\mathbb{N}\backslash x$
    א. הוכח או הפרך: f חח״ע.
    ב. הוכח או הפרך: f על.

17. תהיינה $f: A\to C$, $g: B\to D$ פונקציות כאשר: A,B,C,D קבוצות לא ריקות זרות בזוגות כלשהן. נגדיר את הפונקציה: $h: A\cup B\to C\cup D$ ע״י: $h(x)=\begin{cases} f(x), & x\in A \\ g(x), & x\notin A\end{cases}$. הוכח: h פונקציה חח״ע ועל אם ורק אם f,g חח״ע ועל.

18. תהא $f: X\to Y$ פונקציה כאשר: X,Y קבוצות לא ריקות כלשהן. תהיינה $A,B\subseteq X$. נסמן לכל קבוצה S: $F(S)=\{f(x)|\ x\in S\}$. הוכח או הפרך: $F(A\Delta B)=F(A)\Delta F(B)$.

19. תהיינה X,Y קבוצות ותהי $f: X\to Y$ פונקציה כלשהי.
נגדיר פונקציה אחרת: $F: P(X)\to P(Y)$ ע״י: $F(A)=\{f(a)|\ a\in A\}$ לכל $A\in P(X)$.
הוכח:
    א. אם f חח״ע אז גם F חח״ע.
    ב. אם f על אז גם F על.

הדרכה: השתמשו בהגדרות של פונקציה חח״ע ועל.

תרגילים בהוכחות – תכונות של יחסים

20. הוכח:

א. $\leq$ - *יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי ב $\mathbb{R}$.*

ב. *"x מחלק את y" – יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי ב $\mathbb{N}$.*

ג. $\{(x,y)|\ x+y=z,\ \ z\in\mathbb{Z}\}$ - *יחס סימטרי. ב $\mathbb{R}$.*

ד. $\subset$ - *יחס טרנזיטיבי (בעולם הקבוצות)*

21. בכל אחת מהשאלות דלעיל הוגדר יחס אחד לפחות. לגבי כל אחד מהיחסים השיבו על השאלות הבאות:

i. האם זהו יחס רפלקסיבי?

ii. האם זהו יחס סימטרי?

iii. האם זהו יחס טרנזיטיבי?

iv. האם זהו יחס שקילות?

v. האם זהו יחס סדר חלקי?

vi. האם זהו יחס סדר מלא (כלומר קווי ובלעז לינארי)?

א. היחס $S=\{<1,1>,<2,2>,<1,2>\}$ על העולם $\{1,2,3\}$.

ב. היחס $S=\{<1,2>,<2,1>\}$ על העולם $\{1,2\}$.

ג. היחס $S=\{<1,2>,<2,3>,<3,2>\}$ על העולם $\{1,2,3\}$.

22. רשום 3 יחסים שונים שהם סימטריים, רפלקסיביים וטרנזיטיביים מעל $\{1,2,3,4,5\}$.

23. על קבוצת המספרים הטבעיים הוגדר היחס $_{E3}=\{(n,m):|n-m|=3\}$. הוכיחו שזהו יחס לא רפלקסיבי וכן סימטרי.

24. הוכיחו שהיחס $S=\{<n,m>\in N^2: 7\backslash(n-m)\}$ (הזוגות של מספרים טבעיים ששווים מודולו 7) הוא יחס שקילות על N וחשבו את מחלקות השקילות שלו.

25. תהי A קבוצת המשולשים. תהי S קבוצת הזוגות הסדורים $<x,y>$, שיש להם אותו שטח. הוכיחו ש-S הוא יחס שקילות על A. האם מספר מחלקות השקילות שלו הוא סופי?

26. נתונה חלוקה של המספרים הטבעיים ל-3 קבוצות: $\{\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{n\in N: 6<n\}\}$. מהו יחס השקילות המתאים לחלוקה זו?

27. הרעיון שעומד מאחורי שאלה זו, הוא הקשר בין קבוצת הזוגות של מספרים שלמים (כך שהשני חיובי) לבין קבוצת המספרים הרציונליים. נגדיר $A=Z\times(N-\{0\})$. נתון יחס דו-מקומי S על A כך: $S=\{<<n_1,m_1>,<n_2,m_2>>\in A\times A: n_1m_2=n_2m_1\}$. הרעיון מאחורי הגדרת S הוא שאם נחשוב על $<n_1,m_1>$ כעל השבר n_1/m_1, אז שוויון בין שברים נקבע לפי כפל בהצלבה. נגדיר $M=<A,S>$ (העולם של M הוא קבוצה של זוגות של מספרים ו-S הוא יחס דו-מקומי על M).

א. האם הזוג $<<2,3>,<4,6>>$ מקיים את היחס S? נמקו.

ב. האם S הוא יחס רפלקסיבי? כלומר האם במבנה M מתקיים $\forall x[S(x,x)]$?

ג. האם זהו יחס סימטרי? כלומר, האם המבנה M מקיים $\forall x,y[S(x,y)\rightarrow S(y,x)]$?

ד. האם זהו יחס טרנזיטיבי? כלומר, האם M מקיים $\forall x,y,z[[S(x,y)\wedge S(y,z)]\rightarrow S(x,z)]$?

ה. מדוע S הוא יחס שקילות? (זה סעיף קל מאד, לאור הסעיפים הקודמים).

ו. (חלק זה של השאלה קשה במיוחד והוא רלונטי, רק אם כבר הוגדר המושג איזומורפיזם). נתון: $M_1=(Q,<_1)$, כאשר $<_1$ הוא היחס "קטן" בין המספרים הרציונליים. נגדיר שני דברים כהכנה להגדרת מבנה נוסף. לכל זוג $<n,m>$ ב-A נגדיר קבוצה $a_{n,m}=\{<n',m'>\in A: S(<n,m>,<n',m'>)\}$. עתה נגדיר $B=\{a_{n,m}: <n,m>\in A\}$. נגדיר מבנה $M_2=(A,<_2)$, כאשר $<_2$ לא ידוע. נתון שהפונקציה $h: M_1\rightarrow M_2,\ h(n/m)=a_{n,m}$ היא איזומורפיזם (במילים: h מתאימה לכל מספר רציונלי n/m את קבוצת הזוגות $<n',m'>$ כך ש-$n'/m'=n/m$. אחרי שנלמד על הקשר בין יחס שקילות לבין מחלקות שקילות, תוכלו לראות שh מתאימה לכל מספר רציונלי מחלקת שקילות של היחס S). חשבו את היחס $<_2$.

28. האם היחס "שני הפסוקים שקולים לוגית" הוא יחס שקילות על אסף הפסוקים באוצר מילים נתון?

29. נתון היחס: $S \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}^2$ המוגדר ע"י: $S = \{(a,b) | \ a+b>6\}$
   א. האם היחס רפלקסיבי? הוכח!
   ב. האם היחס סימטרי? הוכח!
   ג. האם היחס אנטי סימטרי? הוכח!
   ד. האם היחס טרנזיטיבי? הוכח!

30. יהא $S = \{(1,1),(2,1),(3,2),(2,3),(2,2),(3,3)\}$ יחס דו מקומי מעל הקבוצה: $\{1,2,3\}$.
   א. האם S יחס רפלקסיבי? נמק!
   ב. האם S יחס סימטרי? נמק!
   ג. האם S יחס אנטי סימטרי? נמק!
   ד. האם S יחס טרנזיטיבי? נמק!

31. יהיו S_1, S_2 יחסים דו מקומיים מעל קבוצה A כלשהי. הוכח או הפרך:
   א. אם $S_1 \subseteq S_2$ ומתקיים ש S_2 סימטרי אז S_1 סימטרי.
   ב. אם $S_1 \subseteq S_2$ ומתקיים ש S_2 אנטי סימטרי אז S_1 אנטי סימטרי.
   ג. אם $S_1 \cup S_2$ טרנזיטיבי אז $S_1 \cap S_2$ טרנזיטיבי.

32. נגדיר את היחס הדו מקומי מעל קבוצת המספרים הטבעיים:
$S = \{(x,y) | \ x,y \in N \backslash \{0,1\}, \ \sqrt{x \cdot y} \in N\}$. האם S רפלקסיבי? סימטרי? אנטי סימטרי? הוכח!

33. תהי $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq)$ כאשר $\leq$ מוגדר ע"י הכלל $(a_1,a_2) \leq (b_1,b_2)$ אם ורק אם: $a_1+b_1 \leq a_2+b_2$. האם $\leq$ הוא יחס סדר חלקי?

34. נתונה הקבוצה: $A = \{1,2,3,4\}$ והיחס R על A $R = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(4,2),(4,4)\}$, האם R רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי, טרנזיטיבי?

35. נתונים היחסים S_1, S_2, S_3 על הקבוצה $\mathbb{R}$, $S_1 = \{(x,y) | \ |x-y|<1\}$
$S_2 = \{(x,y) | \ x-y<1\}$ ו $S_3 = \{(x,y) | \ x-y=-1\}$, בדוק עבור כל יחס האם הוא יחס שקילות, יחס סדר חלקי, יחס קווי?

36. הוכח שהיחס הבא S על קבוצה $\mathbb{N}$ הוא יחס שקילות והצג את מחלקות השקילות שלו: $S = \{(x,y) | x+y$ זוגי$\}$

37. האם היחסים הבאים הם יחסי שקילות. אם כן, רשום את מחלקות השקילות שלהם:
   - S ב $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ המוגדר ע"י $S = \{((a,b),(c,d)) \big| \ a+d=b+c\}$
   - S ב $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ המוגדר ע"י $S = \{((a,b),(c,d)) \big| \ a \cdot d = b \cdot c\}$
     כאשר $a,b,c,d>0$.

38. יהיו S ו R יחסי שקילות בקבוצה A. הוכח ש $R \cap S$ הוא יחס שקילות.

39. יהא היחס S על $P(\mathbb{N})$ המוגדר ע"י $(A,B) \in S$ אם ורק אם $A \Delta B$ קבוצה סופית. הוכח ש S הוא יחס שקילות.

40. תהי A קבוצה לא ריקה, הוכח שהיחס $\subseteq$ (הכלה) הוא יחס סדר חלקי בקבוצה $P(A)$.

41. הוכח שהקבוצה $(\mathbb{N}^+, div)$ סדורה חלקית ($div = \{(a,b) | \ b$ מחלק את $a\}$)

42. האם היחס S על $P(\mathbb{N})$ המוגדר ע"י $S = \{(x,y) | \ x \subseteq y$ או $y \subseteq x\}$ הוא יחס סדר חלקי? האם S יחס שקילות?

43. הראה כי היחס S על $P(\mathbb{R})$ כאשר $S = \{(X,Y) | \ X \cap \mathbb{N} = Y \cap \mathbb{N}\}$ הוא יחס שקילות. מהם מחלקות השקילות?

44. נתונים 2 יחסים על $\mathbb{Z}$: $S_1 = \{(x,y) | \ x+y=5k, k \in \mathbb{Z}\}$, $S_2 = \{(x,y) | \ x-y=5k, k \in \mathbb{Z}\}$.

האם $S_1 \cap S_2$ הוא יחס שקילות.

45. נתון היחס S על $\mathbb{N}$ כך ש: $S = \{(a,b) |$ ל a ו b יש אותם מחלקים ראשוניים$\}$, האם S יחס שקילות?

46. יהיו S יחס סדר חלקי על A ו R יחס סדר חלקי על B נגדיר יחס T על $A \times B$ כאשר:
$\mathrm{T} = \{((\mathrm{a},\mathrm{b}),(\mathrm{c},\mathrm{d})) \mid (\mathrm{a} \neq \mathrm{c} \ \wedge (\mathrm{a},\mathrm{c}) \in \mathrm{S}) \vee (\mathrm{a} = \mathrm{c} \ \wedge (\mathrm{b},\mathrm{d}) \in \mathrm{S})\}$, הוכח ש T הוא יחס סדר חלקי.

47. תהי (A,S) קבוצה סדורה. ותהא $B \subseteq A$. נגדיר יחס $R = S \cap (B \times B)$, הוכח: R יחס סדר חלקי על B.

48. נתון היחס $S = \{((a,b),(c,d)) \mid a \leq c, b \leq d\}$
   א. האם היחס S על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ הוא יחס סדר חלקי?
   ב. האם היחס S על $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ הוא יחס סדר חלקי?

49. יהא יחס S על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ המוגדר ע"י: $S = \{((a,b),(c,d)) \mid (a^2 \leq c^2) \wedge (b \mid d)\}$ האם S יחס סדר חלקי?

50. נגדיר יחס S על $\mathbb{N}^+$ ע"י: $(a,b) \in S \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, a \cdot 2^k = b$.
   האם S יחס סדר חלקי על $\mathbb{N}^+$? האם S סדר קווי?

51. יהא L או"מ ותהא S קבוצת כל המבנים באו"מ L שעולמם הוא $\mathbb{N}$.
   הוכח שהיחס E על S המוגדר ע"י: $(M,N) \in E$ אם ורק אם M, N מבנים איזומורפיים הוא יחס שקילות על S.

52. תן דוגמא של יחס שקילות על $\mathbb{N}$ שיש לו אינסוף מחלקות אינסופיות.
   תזכורת: אם יחס E הוא יחס שקילות על קבוצה X אז מחלקה של E הינו קבוצה מהצורה: $[a]_E = \{b \in X \mid (a,b) \in E\}$
   כאשר $a \in X$.

תרגילים בהוכחות – פתרונות

1. הוכחה: נניח ש $A \subseteq B$ צ"ל $P(A) \subseteq P(B)$.
תהא x קבוצה כלשהי, נניח ש $x \in P(A)$ צ"ל $x \in P(B)$
$x \subseteq A$ לפי הגדרת קבוצת חזקה. ולפי ההנחה והטרנזיטיביות של $\subseteq$ נובע ש $x \subseteq B$ ולכן $x \in P(B)$ לפי הגדרת קבוצת חזקה.

2. הוכחה: נניח ש $A \subseteq B$ וגם $A \subseteq C$ צ"ל: $A \times A \subseteq B \times C$.
יהא $(x,y) \in A \times A$ אזי $x,y \in A$, מכאן, לפי ההנחה: $x \in B$, $y \in C$ ולכן: $(x,y) \in B \times C$.

3.
א. הוכחה: נניח ש $1 \in A$ אזי $\{1\} \subseteq A$ ולפי ההנחה ש $A \subseteq B$ נובע ש $\{1\} \subseteq B$.
ב. הוכחה: נניח ש $\{1\} \subseteq A$ אזי $1 \in A$ ולפי ההנחה ש $A \subseteq B$ נובע ש $1 \in B$.
ג. הפרכה: דוגמא נגדית: $A = \{2\}, B = \{1,2\}$, $A \subseteq B$, $1 \notin A$ אבל $1 \in B$.
ד. הוכחה: נניח ש $1 \in A$ אזי $\{1\} \subseteq A$ ולפי ההנחה ש $A \subseteq B$ נובע ש $\{1\} \subseteq B$ ולכן: $\{1\} \in P(B)$, בנוסף, מתקיים ש $\emptyset \subseteq B$ ולכן: $\emptyset \in P(B)$ ולכן: $\{\emptyset,\{1\}\} \subseteq P(B)$.

4. הוכחה: יהא $x \in A \cap B$.צ"ל: $x \in A \cup C$. לפי הגדרת חיתוך נובע מההנחה ש $x \in A$ ולפי הגדרת איחוד מתקיים ש $x \in A \cup C$.

5.
א. הפרכה: דוגמא נגדית: $A = \{1\}, B = \emptyset$ ולא מתקיים: $\{1\} \subseteq \emptyset$.
ב. הוכחה: כיוון 1: $A \cap (A \cup B) \subseteq A$: יהא $x \in A \cap (A \cup B)$ ולכן לפי הגדרת חיתוך, בפרט $x \in A$.
כיוון 2: $A \subseteq A \cap (A \cup B)$. יהא $x \in A$ אזי בפרט $x \in A \cup B$ לפי הגדרת איחוד. ולפי הגדרת חיתוך מתקיים ש $x \in A \cap (A \cup B)$.

6.

7.
א. דוגמא נגדית: $A = \{1,4,5,7\}$, $B = \{2,4,6,7\}$, $C = \{3,5,6,7\}$
נצי ונקבל: $\{1,2,4,5\} \neq \{1,4\}$.
ב. הוכחה: כדי להוכיח שוויון בין קבוצות נוכיח הכלה דו-כיוונית:
<u>כיוון א'</u>: צ"ל: $(A \backslash B) \backslash C \subseteq A \setminus (B \cup C)$.
יהא x כלשהו, נניח $x \in (A \backslash B) \backslash C$ צ"ל $x \in A \setminus (B \cup C)$.
לפי ההנחה, $x \in A$ וגם: $x \notin B$ וגם $x \notin C$ לפי הגדרת הפרש בין קבוצות. מכיוון ש $x \notin B$ וגם $x \notin C$ נובע ש $x \notin B \cup C$. קיבלנו: $x \in A$ וגם $x \notin B \cup C$, ולפי הגדרת הפרש בין קבוצות נובע ש $x \in A \setminus (B \cup C)$.
<u>כיוון ב'</u>: צ"ל: $A \setminus (B \cup C) \subseteq (A \backslash B) \backslash C$
יהא x כלשהו, נניח $x \in A \setminus (B \cup C)$ צ"ל $x \in (A \backslash B) \backslash C$.
לפי ההנחה, $x \in A$ וגם $x \notin B \cup C$ לפי הגדרת הפרש. מכיוון ש $x \notin B \cup C$ נובע ש $x \notin B$ וגם $x \notin C$.
קיבלנו: $x \in A$ וגם $x \notin B$ וגם $x \notin C$, ולפי הגדרת הפרש בין קבוצות נובע ש $x \in (A \backslash B) \backslash C$
הוכחנו הכלה דו כיוונית ולכן: $(A \backslash B) \backslash C = A \setminus (B \cup C)$
ג. הוכחה: כדי להוכיח שוויון בין קבוצות נוכיח הכלה דו-כיוונית:
<u>כיוון א'</u>: צ"ל: $(A \backslash B) \cap (C \backslash D) \ \subseteq \ (A \cap C)(B \cup D)$
יהא x כלשהו, נניח $x \in (A \backslash B) \cap (C \backslash D)$ צ"ל $x \in (A \cap C) \backslash (B \cup D)$.
לפי ההנחה: $x \in (A \backslash B)$ <u>וגם</u> $x \in (C \backslash D)$ לפי הגדרת חיתוך. ומכאן: $x \in A$ <u>וגם</u> $x \notin B$ <u>וגם</u> $x \in C$ <u>וגם</u> $x \notin D$ לפי הגדרת הפרש. מכיוון ש $x \in A$ וגם $x \in C$ אפשר לומר ש $x \in A \cap C$ לפי הגדרת חיתוך.
ומכיוון ש $x \notin B$ וגם $x \notin D$ אפשר לומר ש $x \notin B \cup D$ לפי הגדרת איחוד.
קיבלנו $x \in A \cap C$ וגם $x \notin B \cup D$ ולפי הגדרת הפרש: $x \in (A \cap C) \backslash (B \cup D)$.
<u>כיוון ב'</u>: צ"ל: $(A \cap C)(B \cup D) \ \subseteq \ (A \backslash B) \cap (C \backslash D)$
יהא x כלשהו, נניח $x \in (A \cap C) \backslash (B \cup D)$ צ"ל $x \in (A \backslash B) \cap (C \backslash D)$.
לפי ההנחה: $x \in A \cap C$ וגם $x \notin B \cup D$ לפי הגדרת הפרש. מכיוון ש $x \notin B \cup D$ אפשר לומר ש $x \notin B$ וגם $x \notin D$ לפי הגדרת איחוד. מכיוון ש $x \in A \cap C$ אפשר לומר ש $x \in A$ וגם $x \in C$ לפי הגדרת חיתוך.
קיבלנו $x \in A$ <u>וגם</u> $x \in C$ <u>וגם</u> $x \notin B$ <u>וגם</u> $x \notin D$. מכיוון ש $x \in A$ וגם $x \notin B$ אפשר לומר ש $x \in (A \backslash B)$ לפי הגדרת הפרש. מכיוון ש $x \in C$ וגם $x \notin D$ אפשר לומר ש $x \in (C \backslash D)$ לפי הגדרת הפרש.
קיבלנו $x \in (A \backslash B)$ <u>וגם</u> $x \in (C \backslash D)$ ולכן $x \in (A \backslash B) \cap (C \backslash D)$ לפי הגדרת חיתוך.

ד. הוכחה: נניח שמתקיים $A \triangle C = B \triangle C$ צ"ל: $A = B$
כדי להוכיח שוויון בין קבוצות נוכיח הכלה דו-כיוונית:
<u>כיוון א'</u>: צ"ל $A \subseteq B$, יהא x כלשהו, נניח: $x \in A$ צ"ל $x \in B$
לפי ההנחה: $A \triangle C = B \triangle C$ ומשום ש $x \in A$ נובעים 2 מקרים:
1) $x \in A \triangle C$ ומכאן ש $x \notin C$ ולכן כדי שיתקיים ש $x \in B \triangle C$ (כדי שיתקיים שוויון) צריך שיתקיים $x \in B$ לפי הגדרת הפרש סימטרי.
2) $x \notin A \triangle C$ ומכאן ש $x \in C$ ולכן כדי שיתקיים ש $x \notin B \triangle C$ (כדי שיתקיים שוויון) צריך שיתקיים $x \in B$ לפי הגדרת הפרש סימטרי.
<u>כיוון ב'</u>: צ"ל $B \subseteq A$
יהא x כלשהו, נניח: $x \in B$ צ"ל $x \in A$
לפי ההנחה: $A \triangle C = B \triangle C$ ומשום ש $x \in B$ נובעים 2 מקרים:
1) $x \in B \triangle C$ ומכאן ש $x \notin C$ ולכן כדי שיתקיים ש $x \in A \triangle C$ (כדי שיתקיים שוויון) צריך שיתקיים $x \in A$ לפי הגדרת הפרש סימטרי.
2) $x \notin B \triangle C$ ומכאן ש $x \in C$ ולכן כדי שיתקיים ש $x \notin A \triangle C$ (כדי שיתקיים שוויון) צריך שיתקיים $x \in A$ לפי הגדרת הפרש סימטרי.

ה. הוכחה: כדי להוכיח שוויון בין קבוצות נוכיח הכלה דו-כיוונית:
<u>כיוון א'</u>: צ"ל $(A \triangle B) \triangle C \subseteq A \triangle (B \triangle C)$. יהא x כלשהו, נניח: $x \in (A \triangle B) \triangle C$ צ"ל $x \in A \triangle (B \triangle C)$
לפי ההנחה נובעים 2 מקרים:
1) $x \in (A \triangle B)$ וגם $x \notin C$ לפי הגדרת הפרש סימטרי.
מ $x \in (A \triangle B)$ נובע ש:
a) $x \in A$ וגם $x \notin B$. קיבלנו: $x \in A$ וגם $x \notin B$ וגם $x \notin C$ ולכן $x \in A \triangle (B \triangle C)$ לפי הגדרת הפרש סימטרי. ($x \in A$ ו $x \notin B \triangle C$).
b) $x \in B$ וגם $x \notin A$. קיבלנו: $x \in B$ וגם $x \notin A$ וגם $x \notin C$ ולכן $x \in A \triangle (B \triangle C)$ לפי הגדרת הפרש סימטרי. ($x \notin A$ ו $x \in B \triangle C$).
2) $x \notin (A \triangle B)$ וגם $x \in C$ לפי הגדרת הפרש סימטרי.
מ $x \notin (A \triangle B)$ נובע ש:
a) $x \notin A$ וגם $x \notin B$. קיבלנו: $x \notin A$ וגם $x \notin B$ וגם $x \in C$ ולכן $x \in A \triangle (B \triangle C)$ לפי הגדרת הפרש סימטרי. ($x \notin A$ ו $x \in B \triangle C$).
b) $x \in B$ וגם $x \in A$. קיבלנו: $x \in B$ וגם $x \in A$ וגם $x \in C$ ולכן $x \in A \triangle (B \triangle C)$ לפי הגדרת הפרש סימטרי.($x \in A$ ו $x \notin B \triangle C$).
<u>כיוון ב'</u>: צ"ל $A \triangle (B \triangle C) \subseteq (A \triangle B) \triangle C$, יהא x כלשהו, נניח: $x \in A \triangle (B \triangle C)$ צ"ל $x \in (A \triangle B) \triangle C$
לפי ההנחה נובעים 2 מקרים:
1) $x \in (B \triangle C)$ וגם $x \notin A$ לפי הגדרת הפרש סימטרי.
מ $x \in (B \triangle C)$ נובע ש:
a) $x \in B$ וגם $x \notin C$. קיבלנו: $x \in B$ וגם $x \notin C$ וגם $x \notin A$ ולכן $x \in (A \triangle B) \triangle C$ לפי הגדרת הפרש סימטרי. ($x \notin C$ ו $x \in A \triangle B$).
b) $x \in C$ וגם $x \notin B$. קיבלנו: $x \in C$ וגם $x \notin A$ וגם $x \notin B$ ולכן $x \in (A \triangle B) \triangle C$ לפי הגדרת הפרש סימטרי. ($x \in C$ ו $x \notin A \triangle B$).
2) $x \notin (B \triangle C)$ וגם $x \in A$ לפי הגדרת הפרש סימטרי.
מ $x \notin (B \triangle C)$ נובע ש:
a) $x \notin B$ וגם $x \notin C$. קיבלנו: $x \notin B$ וגם $x \notin C$ וגם $x \in A$ ולכן $x \in (A \triangle B) \triangle C$ לפי הגדרת הפרש סימטרי. ($x \notin C$ ו $x \in A \triangle B$).
b) $x \in B$ וגם $x \in C$. קיבלנו: $x \in B$ וגם $x \in C$ וגם $x \in A$ ולכן $x \in (A \triangle B) \triangle C$ לפי הגדרת הפרש סימטרי.($x \in C$ ו $x \notin A \triangle B$).

ו. הוכחה: כדי להוכיח שוויון בין קבוצות נוכיח הכלה דו-כיוונית:
<u>כיוון א'</u>: צ"ל: $C \cap (A \triangle B) \subseteq (C \cap A) \triangle (C \cap B)$
יהא x כלשהו, נניח: $x \in C \cap (A \triangle B)$ צ"ל $x \in (C \cap A) \triangle (C \cap B)$
לפי ההנחה: $x \in C$ וגם $x \in (A \triangle B)$ לפי הגדרת חיתוך.
מ $x \in (A \triangle B)$ נובע ש:

1) $x \in A$ וגם $x \notin B$ לפי הגדרת הפרש סימטרי. מכאן קיבלנו $x \in C \cap A$ וגם $x \notin C \cap B$ לפי הגדרת חיתוך.
ולכן $x \in (C \cap A) \triangle (C \cap B)$ לפי הגדרת הפרש סימטרי.

2) $x \in B$ וגם $x \notin A$ לפי הגדרת הפרש סימטרי. מכאן קיבלנו $x \in C \cap B$ וגם $x \notin C \cap A$ לפי הגדרת חיתוך.
ולכן $x \in (C \cap A) \triangle (C \cap B)$ לפי הגדרת הפרש סימטרי.

כיוון ב': צ"ל: $(C \cap A) \triangle (C \cap B) \subseteq C \cap (A \triangle B)$

יהא x כלשהו, נניח: $x \in (C \cap A) \triangle (C \cap B)$ צ"ל $x \in C \cap (A \triangle B)$
לפי ההנחה קיימים 2 מקרים:

1) $x \in C \cap A$ וגם $x \notin C \cap B$ לפי הגדרת הפרש סימטרי. מ $x \in C \cap A$ נובע ש $x \in A$ וגם $x \in C$ לפי הגדרת חיתוך. ולכן מ $x \notin C \cap B$ ינבע ש $x \notin B$ לפי הגדרת חיתוך.
קיבלנו $x \in A$ וגם $x \notin B$ וגם $x \in C$ ולכן $x \in C \cap (A \triangle B)$ לפי הגדרת חיתוך ולפי הגדרת הפרש סימטרי.

2) $x \notin C \cap A$ וגם $x \in C \cap B$ לפי הגדרת הפרש סימטרי. מ $x \in C \cap B$ נובע ש $x \in B$ וגם $x \in C$ לפי הגדרת חיתוך. ולכן מ $x \notin C \cap A$ ינבע ש $x \notin A$ לפי הגדרת חיתוך.
קיבלנו $x \notin A$ וגם $x \in B$ וגם $x \in C$ ולכן $x \in C \cap (A \triangle B)$ לפי הגדרת חיתוך ולפי הגדרת הפרש סימטרי.

ז. הוכחה: נשתמש בתכונה $\emptyset \in P(A)$ (הקבוצה הריקה שייכת לכל קבוצת חזקה)
מכאן $\emptyset \in \mathrm{P}(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B})$ וגם $\emptyset \in P(A)$ וגם $\emptyset \in P(B)$ ולכן לפי הגדרת הפרש נקבל $\emptyset \notin \mathrm{P}(\mathrm{A}) \backslash \mathrm{P}(\mathrm{B})$. קיבלנו איבר השייך לקבוצה $\mathrm{P}(\mathrm{A} \backslash \mathrm{B})$ ולא שייך ל $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \backslash \mathrm{P}(\mathrm{B})$ ולכן הקבוצות בהכרח שונות.

ח. הוכחה: תהא x קבוצה כלשהי, נניח ש $x \in P(A) \cup P(B)$ צ"ל $x \in P(A \cup B)$
לפי ההנחה: $x \in P(A)$ או $x \in P(B)$ לפי הגדרת איחוד.
אם $x \in P(A)$ אז $x \subseteq A$ לפי הגדרת קבוצת חזקה ומכאן ש $x \subseteq A \cup B$ לפי הגדרת איחוד. ולכן $x \in P(A \cup B)$
אם $x \in P(B)$ אז $x \subseteq B$ לפי הגדרת קבוצת חזקה ומכאן ש $x \subseteq A \cup B$ לפי הגדרת איחוד. ולכן $x \in P(A \cup B)$

ט. הוכחה: כדי להוכיח שוויון בין קבוצות נוכיח הכלה דו-כיוונית:
כיוון א': צ"ל $P(A) \cap P(B) \subseteq P(A \cap B)$, תהא x קבוצה כלשהי, נניח ש $x \in P(A) \cap P(B)$ צ"ל $x \in P(A \cap B)$
לפי ההנחה: $x \in P(A)$ וגם $x \in P(B)$ לפי הגדרת חיתוך.$x \subseteq A$ וגם $x \subseteq B$ לפי הגדרת קבוצת חזקה.
ומכאן ש $x \subseteq A \cap B$ לפי הגדרת חיתוך. ולכן $x \in P(A \cap B)$ לפי הגדרת קבוצת חזקה.
כיוון ב': צ"ל $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$, תהא x קבוצה כלשהי, נניח ש $x \in P(A \cap B)$ צ"ל $x \in P(A) \cap P(B)$
לפי ההנחה: $x \subseteq A \cap B$ לפי הגדרת קבוצת חזקה.$x \subseteq A$ וגם $x \subseteq B$ לפי הגדרת חיתוך.
ולכן $x \in P(A) \cap P(B)$ לפי הגדרת קבוצת חזקה והגדרת חיתוך.

8.

א. הוכחה: יהא (x, y) זוג סדור, נניח: $(x, y) \in (A \times B) \cap (B \times C)$ צ"ל $(x, y) \in A \times C$.
לפי ההנחה, $x \in A$ וגם $x \in B$ לפי הגדרת מכפלה קרטזית וחיתוך. וכן $y \in B$ וגם $y \in C$ לפי הגדרת מכפלה קרטזית וחיתוך. מכיוון ש $x \in A$ וגם $y \in C$ אז בהכרח $(x, y) \in A \times C$ לפי הגדרת מכפלה קרטזית.

ב. הטענה לא נכונה כי $A \times B$ היא קבוצת זוגות סדורים ו $\mathrm{P}(\mathrm{A} \times \mathrm{B})$ היא קבוצת קבוצות ואין כלל הכלה בין הקבוצות.

ג. הטענה לא נכונה כי $\mathrm{P}(\mathrm{A}) \times \mathrm{P}(\mathrm{B})$ היא קבוצת זוגות סדורים ו $\mathrm{P}(\mathrm{A} \times \mathrm{B})$ היא קבוצת קבוצות ואין כלל הכלה בין הקבוצות.

ד. הוכחה: כיוון א': $[\mathrm{A} \times \mathrm{B} \subseteq \mathrm{B} \times \mathrm{C}] \rightarrow [(\mathrm{A} \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)]$
נניח ש $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \subseteq \mathrm{B} \times \mathrm{C}$, צ"ל: $(\mathrm{A} \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)$.
יהא $(x, y) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ נאמר ש: $x \in A$ וגם $y \in B$ לפי הגדרת מכפלה קרטזית. לפי ההנחה, $(x, y) \in \mathrm{B} \times \mathrm{C}$ ולכן $x \in B$ וגם $y \in C$ לפי הגדרת מכפלה קרטזית. קיבלנו עבור כל $x \in A$ מתקיים $x \in B$ וגם עבור כל $y \in B$ מתקיים $y \in C$
ולכן $(\mathrm{A} \subseteq B)$ וגם $(B \subseteq C)$ לפי הגדרת הכלה.
כיוון ב': $[(\mathrm{A} \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)] \rightarrow [\mathrm{A} \times \mathrm{B} \subseteq \mathrm{B} \times \mathrm{C}]$
נניח ש $(\mathrm{A} \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)$ צ"ל: $\mathrm{A} \times \mathrm{B} \subseteq \mathrm{B} \times \mathrm{C}$
יהיו $x \in A$ ו $y \in B$ כלשהם, צ"ל $x \in B$ וגם $y \in C$.
לפי ההנחה: $x \in B$ כי $\mathrm{A} \subseteq B$. וכן $y \in C$ כי $B \subseteq C$.

ה. הוכחה: נניח $(A \times B) \subseteq A^2$ צ"ל $B \subseteq A$.
יהיו $x \in A$ ו $y \in B$ כלשהם. צ"ל $y \in A$.
$(x, y) \in A \times B$ לפי הגדרת מכפלה קרטזית. לפי ההנחה, $(x, y) \in A^2$
לפי הגדרת הכלה. ומכאן $x \in A$ וגם $y \in A$ לפי הגדרת מכפלה קרטזית.

ו. הטענה לא נכונה. דוגמא נגדית: $A = \{1,2\}$, $\mathrm{B} = \{3,4\}$, $C = \{2,4\}$
$A \times B = \{(1,3), (1,4), (2,3), (2,4)\}$, $C \times C = \{(2,2), (2,4), (4,2), (4,4)\}$

ולכן $(A\times B)\backslash(C\times C)=\{(1,3),(1,4),(2,3)\}$.
לעומת זאת, $(A\backslash C)=\{1\}$, $(B\backslash C)=\{3\}$ ולכן: $(A\backslash C)\times(B\backslash C)=\{(1,3)\}$.

9. הפונקציה חח״ע. הוכחה: יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. נניח ש $f(x_1)=f(x_2)$ צ״ל: $x_1=x_2$.
לפי ההנחה: $\frac{5-x_1}{2x_1}-2=\frac{5-x_2}{2x_2}-2$ ומכאן: $2x_2(5-x_1)=2x_1(5-x_2)$ ומכאן: $x_1=x_2$.
הפונקציה על: הוכחה: יהא $y\in\mathbb{R}\backslash\{-2.5\}$. צ״ל: קיים $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ כך ש $f(x)=y$.
נבחר: $x=\frac{5}{2y+5}$, ומכיוון ש $y\neq-2.5$ מתקיים ש $x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$. ומתקיים: $y=\frac{5-\frac{5}{2y+5}}{\frac{10}{2y+5}}-2=f(x)$.

10.

א. הוכחת חח״ע: יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{N}$ נניח ש $f(x_1)=f(x_2)$, צ״ל: $x_1=x_2$.
לפי ההנחה: $3x_1+5=3x_2+5$ ולכן: $x_1=x_2$.

ב. הוכחת על: דוגמא נגדית: $y=2$ ואכן לא קיים $x\in\mathbb{N}$ כך ש $3x+5=2$ כי אז $x=-1\notin\mathbb{N}$.

11.

א. $f(0,0)=|\emptyset|=0$. $f(0,1)=|\{(0,0)\}|=1$. $f(1,0)=|\{(0,0),(0,1)\}|=2$. $f(2,2)=|\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(0,2),(1,2),(2,1),(0,3),(3,0),(0,4),(1,3)\}|=12$.

ב. יהיו $m,n\in\mathbb{N}$. $n+m<n+m$ לא מתקיים ולכן התנאי הראשון של הקבוצה לא מתקיים. בנוסף, $n+m=n+m$ אבל $n<n$ לא מתקיים ולכן גם התנאי השני של הקבוצה לא מתקיים ולכן: $(n,m)\notin A_{n,m}$.

ג. נניח ש $f(n_1,m_1)=f(n_2,m_2)$. צ״ל: $(n_1,m_1)\notin A_{n_2,m_2}$. נניח ש $(n_1,m_1)\in A_{n_2,m_2}$ ונחלק למקרים:
מקרה א: $n_1+m_1<n_2+m_2$, נשים לב ש $A_{n_1,m_1}\subseteq A_{n_2,m_2}$ כי לכל $(x,y)\in A_{n_1,m_1}$ מתקיים ש:
$x+y\le n_1+m_1$ לפי הגדרת הקבוצה ולכן בפרט: $x+y<n_2+m_2$ ולכן: $(x,y)\in A_{n_2,m_2}$.
מקרה ב: $n_1+m_1=n_2+m_2$ ולכן: $n_1<n_2$, מכאן: $A_{n_1,m_1}\subseteq A_{n_2,m_2}$ כי לכל $(x,y)\in A_{n_1,m_1}$. אם $x+y<n_1+m_1$ אזי בפרט $x+y<n_2+m_2$. ואם $x+y=n_1+m_1$ אזי $x<n_1$ ובפרט $x<n_2$ ולכן: $(x,y)\in A_{n_2,m_2}$.
בנוסף, בכל אחד מהמקרים, $(n_1,m_1)\in A_{n_2,m_2}$ אבל לפי סעיף ב מתקיים ש $(n_1,m_1)\notin A_{n_1,m_1}$
ולכן: $|A_{n_1,m_1}|<|A_{n_2,m_2}|$ - סתירה לכך ש $f(n_1,m_1)=f(n_2,m_2)$.
באותו אופן נוכיח עבור $(n_2,m_2)\notin A_{n_1,m_1}$.

ד. נניח ש $f(n_1,m_1)=f(n_2,m_2)$. צ״ל: $n_1+m_1=n_2+m_2$. לפי ג׳, $(n_1,m_1)\notin A_{n_2,m_2}$, $(n_2,m_2)\notin A_{n_1,m_1}$ ולכן בפרט: $n_1+m_1=n_2+m_2$ (כי אם צד אחד קטן מהשני אז הוא מקיים את תנאי הקבוצה המוגדרת ע״י הצד השני).

ה. נוכיח ש f חח״ע: יהיו $(n_1,m_1),(n_2,m_2)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, נניח ש $f(n_1,m_1)=f(n_2,m_2)$,
צ״ל: $(n_1,m_1)=(n_2,m_2)$. לפי ההנחה ולפי סעיף ד מתקיים ש $n_1+m_1=n_2+m_2$ ולפי סעיף ג מתקיים ש $n_1=n_2$ ולכן בפרט $m_1=m_2$ ולכן: $(n_1,m_1)=(n_2,m_2)$.

12. <u>הוכחת חח״ע</u>: יהיו $x_1,x_2\in A$ נניח ש $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ צ״ל: $x_1=x_2$.
עבור $f(x_1)$ נקבל $y_1\in B$ כלשהו ועבור $f(x_2)$ נקבל $y_2\in B$ כלשהו. קיבלנו: $g(y_1)=g(y_2)$. g חח״ע לפי ההנחה ולכן $y_1=y_2$ ומכיוון ש f חח״ע לפי ההנחה, $y_1=y_2$ ייתכן רק אם $x_1=x_2$.
<u>הוכחת על</u>: יהא $y\in C$ כלשהו, צ״ל שקיים $x\in A$ כך ש $y=g(f(x))$. מכיוון ש g על לפי ההנחה אז קיים ל y $x_1\in B$ כך ש $y=g(x_1)$. נותר להוכיח שקיים $x_2\in A$ כך ש $f(x_2)=x_1$ ואכן קיים $x_2\in A$ כזה כיוון ש f על לפי ההנחה. מכאן נוכל לבחור $x=x_2$ ונקבל $y=g\big(f(x_2)\big)$.

13. <u>הוכחת f חח״ע</u>: יהיו $x_1,x_2\in A$ $f(x_1)=f(x_2)$ צ״ל: $x_1=x_2$. נפעיל את פונקציה g על 2 האגפים ונקבל: $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ ומכיוון שההרכבה חח״ע נקבל שהשוויון גורר ש $x_1=x_2$.
<u>הוכחת f על</u>: דוגמא נגדית: $f:N\to N$, $g:N\to N$, $f(x)=x+1$, $g(x)=\begin{cases}x-1, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$.
fלא על N (לא קיים מקור ל 0) למרות שההרכבה חח״ע ועל N.
<u>הוכחת g חח״ע</u>: דוגמא נגדית: $f:N\to N$, $g:N\to N$, $f(x)=x+1$, $g(x)=\begin{cases}x-1, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$.
g לא חח״ע ($g(0)=g(1)$) למרות שההרכבה חח״ע ועל N.
<u>הוכחת g על</u>: יהא $y\in C$ צ״ל שקיים $x\in B$ כך ש $y=g(x)$.
מכיוון ש $g\circ f$ על אז קיים $x_1\in A$ כך ש $y=g\big(f(x_1)\big)$ ולכן נוכל לבחור: $x=f(x_1)$.

14.

א. f חח"ע: יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{Q}\backslash\{-1\}$. נניח ש $f(x_1)=f(x_2)$ צ"ל: $x_1=x_2$. לפי ההנחה: $\frac{3x_1-5}{x_1+1}=\frac{3x_2-5}{x_2+1}$.
מכאן: $3x_1x_2+3x_1-5x_2-5=3x_1x_2+3x_2-5x_1-5$ ומכאן: $x_1=x_2$.

ב. f אינה על: דוגמא נגדית: $y=3$. לא קיים $x\in\mathbb{Q}\backslash\{-1\}$ כך ש $\frac{3x-5}{x+1}=3$ כי אחרת נקבל: $3x+3=3x-5$ ולכן: $3=-5$, סתירה.

.15

א. f אינה חח"ע: דוגמא נגדית: $f(1)=f(2)=1$.

ב. f על: יהא $y\in\mathbb{N}^+$. צ"ל: קיים $x\in\mathbb{N}$ כך ש $f(x)=y$. נבחר: $x=10^{y-1}$, $x\in\mathbb{N}$ ומתקיים: $f(x)=y$.

.16

א. f חח"ע: יהיו $x_1,x_2\in A$ נניח ש $f(x_1)=f(x_2)$ צ"ל: $x_1=x_2$.
לפי ההנחה, $\mathbb{N}\backslash x_1=\mathbb{N}\backslash x_2$ ומכיוון ש $x_1,x_2\subseteq\mathbb{N}$ אזי נקבל ש: $\overline{x_1}=\overline{x_2}$ ולכן $x_1=x_2$.

ב. f אינה על: דוגמא נגדית: $y=\{2n: n\in\mathbb{N}\}$. לא קיים $x\in A$ כך ש $\mathbb{N}\backslash x=\{2n: n\in\mathbb{N}\}$
כי אחרת: $x=\{2n+1: n\in\mathbb{N}\}$ אבל $x\notin A$.

17. כיוון 1: נניח f,g חח"ע ועל, צ"ל: h חח"ע ועל.
h חח"ע: יהיו $x_1,x_2\in A\cup B$ נניח: $h(x_1)=h(x_2)$ צ"ל: $x_1=x_2$.
נפרק למקרים: אם $x_1,x_2\in A$ אז לפי ההנחה: $f(x_1)=f(x_2)$, f חח"ע ולכן: $x_1=x_2$.
$x_1,x_2\notin A$ אז לפי ההנחה: $g(x_1)=g(x_2)$, g חח"ע ולכן: $x_1=x_2$.
אם $x_1\in A$, $x_2\in B$ אז מכיוון ש A ו B זרות, $x_1\neq x_2$ ואכן: $f(x_1)\neq g(x_2)$ כי $f(x_1)\in C$, $g(x_2)\in D$ ומתקיים ש C,D זרות. ולכן h חח"ע.
h על: יהא $y\in C\cup D$, צ"ל: קיים $x\in A\cup B$ כך ש $h(x)=y$.
אם $y\in C$ אז מכיוון ש f על, קיים $a\in A$ כך ש $f(a)=y$ ולכן נבחר: $x=a$.
אם $y\in D$ אז מכיוון ש g על, קיים $b\in B$ כך ש $g(b)=y$ ולכן נבחר: $x=b$. ולכן h על.
כיוון 2: נניח ש h חח"ע ועל. צ"ל: f,g חח"ע ועל.
f חח"ע: יהיו $x_1,x_2\in A$ נניח: $f(x_1)=f(x_2)$ צ"ל: $x_1=x_2$.
מכיוון ש $x_1,x_2\in A$, לפי ההנחה ולפי הגדרת h מתקיים: $h(x_1)=h(x_2)$. h חח"ע: ולכן $x_1=x_2$. באותו אופן עבור g.
f על: יהא $y\in C$, צ"ל: קיים $x\in A$ כך ש $f(x)=y$.
$y\in C$ ומתקיים ש h על ולכן קיים $a\in A\cup B$ כך ש $h(a)=y$. מכיוון ש A,B,C,D זרות אז $a\in A$ כי אחרת: $h(a)=g(a)\in D$ אבל $y\in C$. ולכן נבחר: $x=a$. באותו אופן עבור g.

18. דוגמא נגדית: $X=\{1,2,3\},Y=\{1,2,3\}$ $A=\{1\},B=\{2\}$.
$f(x)=3$, $F(A\Delta B)=F(\{1,2\})=\{f(1),f(2)\}=\{3,3\}=\{3\}$
אבל: $F(A)\Delta F(B)=F(\{1\})\Delta F(\{2\})=\{f(1)\}\Delta\{f(2)\}=\{3\}\Delta\{3\}=\emptyset$.

.19

א. נניח f חח"ע, צ"ל: F חח"ע. תהיינה $X_1,X_2\in P(X)$, נניח ש $F(X_1)=F(X_2)$, צ"ל: $X_1=X_2$. לפי ההנחה:
$\{f(x)|x\in X_1\}=\{f(x)|\,x\in X_2\}$. נוכיח הכלה דו כיוונית:
$X_1\subseteq X_2$ - יהא $x\in X_1$, צ"ל: $x\in X_2$. מכאן: $f(x)\in\{f(x)|x\in X_1\}$ ולכן:
$f(x)\in\{f(x)|\,x\in X_2\}$ ומכאן קיים $y\in X_2$ כך ש $f(x)=f(y)$. מכיוון ש f חח"ע נקבל ש: $x=y$ ולכן $x\in X_2$.
באותו אופן הכיוון השני.

ב. נניח f על. צ"ל: F על. תהא $A\in P(Y)$, צ"ל: קיים $B\in P(X)$ כך ש $F(B)=A$.
מכיוון ש f על אזי לכל $a\in A$ קיים $b\in X$ כך ש $f(b)=a$ ולכן נבחר את B להיות קבוצת המקורות של A.

.20

א. $\leq$ - יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי
רפלקסיבי: יהא $\mathrm{x}\in\mathrm{R}$ כלשהו אז מתקיים $\mathrm{x}\leq\mathrm{x}$.
טרנזיטיבי: יהיו $\mathrm{x,y,z}\in\mathrm{R}$ נניח $\mathrm{x}\leq\mathrm{y}$ וגם $\mathrm{y}\leq\mathrm{z}$ אז מתקיים בהכרח $\mathrm{x}\leq\mathrm{z}$.

ב. "x מחלק את y" – יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי
רפלקסיבי: יהא $\mathrm{x}\in\mathbb{N}$ כלשהו אז מתקיים x מחלק את x (כל מספר מתחלק בעצמו).
טרנזיטיבי: יהיו $\mathrm{x,y,z}\in\mathbb{N}$ נניח $\mathrm{y}=\mathrm{k}\cdot\mathrm{x}$ וגם $\mathrm{z}=\mathrm{m}\cdot\mathrm{y}$ $(\mathrm{k,m}\in\mathbb{N})$ אז מתקיים בהכרח $\mathrm{z}=(\mathrm{m}\cdot\mathrm{k})\cdot\mathrm{x}$.

ג. $\{(\mathrm{x,y})|\,\mathrm{x}+\mathrm{y}=\mathrm{z},\ \ \mathrm{z}\in\mathbb{Z}\}$ - יחס סימטרי
סימטרי: יהיו $\mathrm{x,y}\in\mathbb{R}$ נניח $(\mathrm{x,y})$ מתקיים ביחס, צ"ל $(\mathrm{y,x})$ מתקיים ביחס.

מההנחה נובע ש $x+y=z$ כאשר $z\in\mathbb{Z}$ ומכיוון שחיבור הוא קומוטטיבי אז מתקיים $y+x=z$.

ד. $\subset$ - יחס טרנזיטיבי (בעולם הקבוצות)
טרנזיטיבי: יהיו A,B,C קבוצות. נניח ש $A\subset B$ וגם $B\subset C$ אז בהכרח $A\subset C$
כי עבור כל $x\in A$ בהכרח $x\in B$ (כי $A\subset B$) ומכיוון ש $B\subset C$ אז בהכרח גם $x\in C$.

.21

א. אינו רפלקסיבי כי $<3,3>\notin S$. אינו סימטרי כי $<2,1>\notin S$. כן טרנזיטיבי.
אינו יחס שקילות, אינו יחס סדר ובפרט אינו סדר קווי כי S אינו רפלקסיבי וסימטרי.

ב. אינו רפלקסיבי כי $<1,1>\notin S$. כן סימטרי. אינו טרנזיטיבי כי $<2,1>, <1,2>\in S$ אבל $<1,1>\notin S$.
אינו יחס שקילות, אינו יחס סדר ובפרט אינו סדר קווי כי S אינו טרנזיטיבי.

ג. אינו רפלקסיבי כי $<3,3>\notin S$. אינו סימטרי כי $<2,1>\notin S$. אינו טרנזיטיבי כי $<2,3>, <1,2>\in S$ אבל $<1,3>\notin S$. אינו יחס שקילות, אינו יחס סדר ובפרט אינו סדר קווי כי S אינו רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי

.22 $S_1=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$, $S_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1)\}$
$S_2=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(3,1)\}$.

.23 היחס אינו רפלקסיבי כי $(x,x)\notin E_3$ לכל $x\in\mathbb{N}$ כי $|x-x|\neq 3$.
היחס סימטרי, יהיו $x,y\in\mathbb{N}$ ונניח ש $(x,y)\in S$ אזי $|x-y|=3$ ולכן גם $|y-x|=3$ ולכן $(y,x)\in S$.

.24 היחס רפלקסיבי: יהא $x\in\mathbb{N}$ אזי $(x,x)\in S$ כי $7|(x-x)$.
היחס סימטרי: יהיו $x,y\in\mathbb{N}$ ונניח ש $(x,y)\in S$ אזי $7|(x-y)$ ולכן $7|(y-x)$ ולכן $(y,x)\in S$.
היחס טרנזיטיבי: יהיו $x,y,z\in\mathbb{N}$ ונניח ש $(x,y),(y,z)\in S$ אזי $7|(x-y)$ וגם $7|(y-z)$ ולכן $7|(x-y+y-z)$ ומכאן: $7|x-z$ ולכן: $(x,z)\in S$.
מכאן, S יחס שקילות ומחלקות השקילות של היחס הן השאריות מודולו 7: $[x]_S=\{7k+x : k\in\mathbb{N}\}$.

.25 היחס רפלקסיבי כי לכל x. למשולש x יש את אותו שטח כמו לעצמו ולכן $(x,x)\in S$.
היחס סימטרי: יהיו $x,y\in A$ ונניח ש $(x,y)\in S$ אזי ל x,y יש את אותו שטח ולכן גם ל y,x ולכן $(y,x)\in S$.
היחס טרנזיטיבי: יהיו $x,y,z\in\mathbb{N}$ ונניח ש $(x,y),(y,z)\in S$ אזי ל x,y יש את אותו שטח וגם ל y,z יש את אותו שטח ולכן גם ל x,z יש את אותו שטח ולכן: $(x,z)\in S$.
לכן S הוא יחס שקילות ומחלקות השקילות הן כנגד כל השטחים השונים האפשריים (כל מספר ב $\mathbb{R}$) ובפרט כמות אינסופית.

.26 $S=\{(x,y)|x,y\in\{1,2,3\}\vee x,y\in\{4,5,6\}\vee x,y>6\}$.

.27

.28

.29

א. היחס אינו רפלקסיבי, דוגמא נגדית: $(1,1)\notin S$ כי $1+1>6$ לא מתקיים.
ב. היחס סימטרי, כי אם $a+b>6$ אז גם $b+a>6$ לכל $a,b\in\{1,2,3,4,5,6\}$.
ג. היחס אינו אנטי סימטרי, כי $(2,5)\in S$ וגם $(5,2)\in S$ אבל $2\neq 5$.
ד. היחס אינו טרנזיטיבי, כי $(2,5)\in S$ וגם $(5,3)\in S$ אבל $(2,3)\notin S$.

.30

א. כן, כי לכל איבר x ב A הזוג (x,x) שייך ל S – $(1,1),(2,2),(3,3)$.
ב. לא, כי הזוג $(2,1)$ נמצא אבל הזוג $(1,2)$ לא נמצא.
ג. לא, כי הזוג $(2,3)$ נמצא וגם הזוג $(3,2)$ נמצא אבל $2\neq 3$.
ד. לא, כי הזוג $(3,2)$ נמצא וגם הזוג $(2,1)$ נמצא אבל הזוג $(3,1)$ לא נמצא.

.31

א. לא, דוגמא נגדית: $A=\{1,2\}$, $S_2=\{(1,2),(2,1)\}$, $S_1=\{(1,2)\}$, מתקיים כי $S_1\subseteq S_2$ אבל S_1 אינו סימטרי.
ב. כן, הוכחה: צ"ל: S_1 אנטי-סימטרי. יהיו $a,b\in A$ נניח ש $(a,b)\in S_1$ וגם $(b,a)\in S_1$ צ"ל: $a=b$. מכיוון ש $S_1\subseteq S_2$ אז לפי הגדרת הכלה מתקיים כי: $(a,b)\in S_2$ וגם $(b,a)\in S_2$ ומכיוון ש S_2 יחס אנטי סימטרי, מתקיים כי $a=b$.

ג. לא, דוגמא נגדית: $A=\{1,2,3\}$, $S_1=\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$, $S_2=\{(1,2),(2,3)\}$. מתקיים כי $S_1\cup S_2=$ $\{(1,2),(2,3),(1,3)\}$ טרנזיטיבי אבל $S_1\cap S_2=\{(1,2),(2,3)\}$ אינו טרנזיטיבי.

32. S רפלקסיבי, הוכחה: יהא $a\in N$, צ"ל: $(a,a)\in S$. ואכן מתקיים: $\sqrt{a\cdot a}=a\in N$ ולכן: $(a,a)\in S$.

S סימטרי, הוכחה: יהיו $a,b\in N$ נניח ש $(a,b)\in S$, צ"ל: $(b,a)\in S$. לפי ההנחה $\sqrt{a\cdot b}\in N$: ולכן גם: $\sqrt{b\cdot a}\in N$ ולכן: $(b,a)\in S$.

S אינו אנטי סימטרי – כי $(4,9)\in S$ - $\sqrt{4\cdot 9}=6\in N$ וגם: $(9,4)\in S$.

33. נבדוק את התכונות: <u>רפלקסיביות:</u> דוגמא נגדית: $(3,2)$, נקבל: $3+3\le 2+2$ לא מתקיים ולכן: $\big((3,2)(3,2)\big)\notin\le$.
ולכן $\le$ אינו יחס סדר חלקי.

34. <u>רפלקסיבי:</u> לא. כי $(3,3)\notin R$. <u>סימטרי:</u> לא. כי $(4,2)\in \mathrm{R}$ אבל $(2,4)\notin \mathrm{R}$.
<u>אנטי-סימטרי:</u> לא. כי $(3,2)\in \mathrm{R}$ וגם $(2,3)\in \mathrm{R}$ אבל $2\ne 3$.
<u>טרנזיטיבי:</u> לא. כי $(4,2)\in \mathrm{R}$ וגם $(2,3)\in \mathrm{R}$ אבל $(4,3)\notin \mathrm{R}$

35. נבדוק את התכונות עבור S_1:
<u>רפלקסיבי:</u> יהא $x\in\mathbb{R}$ צ"ל: $(x,x)\in S_1$, נקבל: $|\mathrm{x}-\mathrm{x}|=0<1$ ולכן $(x,x)\in S_1$.
<u>סימטרי:</u> יהיו $x,y\in\mathbb{R}$, נתון: $(x,y)\in S_1$ צ"ל: $(y,x)\in S_1$.לפי ההנחה: $|\mathrm{x}-\mathrm{y}|<1$, נוציא (-1) מהערך המוחלט ונקבל: $|y-\mathrm{x}|<1$ ולכן: $(y,x)\in S_1$
<u>אנטי סימטרי:</u> לא. כי סימטריה מתקיימת. <u>טרנזיטיבי:</u> לא. כי $(2.5,2)\in S_1$ וגם $(2,1.5)\in S_1$ אבל $(2.5,1.5)\notin S_1$.
ולכן S_1 לא שקילות ולא יחס סדר.
נבדוק את התכונות עבור S_2:
<u>רפלקסיבי:</u> יהא $x\in\mathbb{R}$ צ"ל: $(x,x)\in S_2$, נקבל: $x-x=0<1$ ולכן $(x,x)\in S_2$.
<u>סימטרי:</u> לא. כי $(2,5)\in S_2$ אבל $(5,2)\notin S_2$.
<u>אנטי סימטרי:</u> לא. כי $(1,0.5)\in S_2$ וגם $(0.5,1)\in S_2$ אבל $1\ne 0.5$. ולכן S_2 לא שקילות ולא יחס סדר.
נבדוק את התכונות עבור S_3:
<u>רפלקסיביות:</u> לא. כי נקבל: $x-x=0\ne 1$ ולכן $(x,x)\notin S_3$. ולכן S_3 לא שקילות ולא יחס סדר.

36. נבדוק את התכונות:
<u>רפלקסיביות:</u> יהא $x\in\mathbb{N}$ צ"ל: $(x,x)\in S$, נקבל: זוגי $x+x=2x-$ ולכן $(x,x)\in S$.
<u>סימטריות:</u> יהיו $x,y\in\mathbb{N}$, נתון: $(x,y)\in S$ צ"ל: $(y,x)\in S$
לפי ההנחה: $x+y=2k$, ולפי חוק החילוף בחיבור נקבל: $y+x=2k$ ולכן: $(y,x)\in S_1$.
<u>טרנזיטיביות:</u> יהיו $x,y,z\in\mathbb{N}$, נתון: $(x,y)\in S$ וגם $(y,z)\in S$ צ"ל: $(x,z)\in S$
לפי ההנחה: $x+y=2k$ וגם $y+z=2m$. נחבר את נמשוואות ונקבל: $x+2y+z=2k+2m$, נחסר את $2y$ ונקבל: $x+z=2(k+m-y)$ - מספר זוגי, ולכן $(x,z)\in S$
<u>מחלקות שקילות:</u> $[0]_S=\{x\in\mathbb{N}\mid x \text{ זוגי}\}$, $[1]_S=\{x\in\mathbb{N}\mid x \text{ איזוגי}\}$

37.
- נבדוק את התכונות:

<u>רפלקסיביות:</u> יהא $(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ צ"ל: $((x,y),(x,y))\in S$, נקבל: $x+y=y+x$ ולכן $((x,y),(x,y))\in S$.
<u>סימטריות:</u> יהיו $(x,y),(w,z)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, נתון: $((x,y),(w,z))\in S$ צ"ל: $((w,z),(x,y))\in S$.
לפי ההנחה: $x+z=y+w$, ולפי סימטריות השוויון נקבל: $w+y=z+x$ ולכן: $((w,z),(x,y))\in S$.
<u>טרנזיטיביות:</u> יהיו $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, נתון: $((a,b),(c,d))\in S$ וגם $((c,d),(e,f))\in S$ צ"ל: $((a,b),(e,f))\in S$.
לפי ההנחה: $a+d=b+c$ וגם $c+f=d+e$. נבודד את d מהמשוואה הראשונה ונקבל: $d=b+c-a$. נציב במשוואה השנייה: $c+f=b+c-a+e$, נסדר ונעביר אגפים: $a+f=b+e$ ולכן $((a,b),(e,f))\in S$.
<u>מחלקות השקילות:</u> $[(a,b)]_S=\{(x+a,x+b)\mid x\in\mathbb{N}\}$,

- נבדוק את התכונות:

<u>רפלקסיביות:</u> יהא $(x,y)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ צ"ל: $((x,y),(x,y))\in S$, נקבל: $x\cdot y=y\cdot x$ ולכן $((x,y),(x,y))\in S$.
<u>סימטריות:</u> יהיו $(x,y),(w,z)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, נתון: $((x,y),(w,z))\in S$ צ"ל: $((w,z),(x,y))\in S$.

לפי ההנחה: $x\cdot z=y\cdot w$, ולפי סימטריות השוויון נקבל: $w\cdot y=z\cdot x$ ולכן: $((w,z),(x,y))\in S$.
טרנזיטיביות: יהיו $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, נתון: $((a,b),(c,d))\in S$ וגם $((c,d),(e,f))\in S$ צ״ל: $((a,b),(e,f))\in S$.
לפי ההנחה: $a\cdot d=b\cdot c$ וגם $c\cdot f=d\cdot e$. נבודד את d מהמשוואה הראשונה ונקבל: $d=\frac{b\cdot c}{a}$. נציב במשוואה השנייה: $c\cdot f=\frac{b\cdot c}{a}\cdot e$, נסדר ונעביר אגפים: $a\cdot f=b\cdot e$, ולכן $((a,b),(e,f))\in S$.
מחלקות השקילות: $[(a,b)]_S=\{(ax,bx)\mid 0<x\in\mathbb{N}\}$.

38. נבדוק את התכונות:
רפלקסיביות: יהא $x\in A$ צ״ל: $(x,x)\in R\cap S$. S יחס שקילות על A ולכן: $(x,x)\in S$.
R יחס שקילות על A ולכן: $(x,x)\in R$. ומכאן: ש $(x,x)\in R\cap S$ לפי הגדרת חיתוך.
סימטריות: יהיו $x,y\in A$, נתון: $(x,y)\in R\cap S$ צ״ל: $(y,x)\in R\cap S$
לפי ההנחה: $(x,y)\in R\cap S$, ולפי הגדרת חיתוך נקבל: $(x,y)\in S$ וגם $(x,y)\in R$.
S יחס שקילות על A ולכן: $(y,x)\in S$. R יחס שקילות על A ולכן: $(y,x)\in R$.
קיבלנו: $(y,x)\in S$ וגם $(y,x)\in R$ ולכן: $(y,x)\in R\cap S$ לפי הגדרת חיתוך.
טרנזיטיביות: יהיו $x,y,z\in A$, נתון: $(x,y)\in R\cap S$ וגם $(y,z)\in R\cap S$ צ״ל: $(x,z)\in R\cap S$.
לפי ההנחה: $(x,y)\in R\cap S$ ולכן: $(x,y)\in S$ וגם: $(x,y)\in R$ לפי הגדרת חיתוך.
וכן: $(y,z)\in R\cap S$ ולכן: $(y,z)\in S$ וגם: $(y,z)\in R$ לפי הגדרת חיתוך.
קיבלנו: $(x,y)\in S$ וגם $(y,z)\in S$ ולכן: $(x,z)\in S$ כי S יחס שקילות.
וקיבלנו: $(x,y)\in R$ וגם $(y,z)\in R$ ולכן: $(x,z)\in R$ כי R יחס שקילות.
מכאן: $(x,z)\in S$ וגם $(x,z)\in R$ ולכן: $(x,z)\in R\cap S$ לפי הגדרת חיתוך.

39. נבדוק את התכונות:
רפלקסיביות: תהא $X\in\mathrm{P}(\mathbb{N})$ צ״ל: $(X,X)\in S$. ואכן: $X\triangle X=\emptyset$ קבוצה סופית ולכן: $(X,X)\in S$.
סימטריות: תהינה $X,Y\in\mathrm{P}(\mathbb{N})$, נתון: $(X,Y)\in S$ צ״ל: $(Y,X)\in S$
לפי ההנחה: $X\triangle Y$ קבוצה סופית, $Y\triangle X$ היא אותה קבוצה לפי הסימטריות של הפרש סימטרי ולכן גם קבוצה זו סופית.
מכאן ש: $(Y,X)\in S$.
טרנזיטיביות: תהינה $X,Y,Z\in\mathrm{P}(\mathbb{N})$, נתון: $(X,Y)\in S$ וגם $(Y,Z)\in S$ צ״ל: $(X,Z)\in S$.
לפי ההנחה: $X\triangle Y$ קבוצה סופית וגם $Y\triangle Z$ קבוצה סופית. נבצע הפרש סימטרי בין הקבוצות: $X\triangle Y\triangle Y\triangle Z$ קבוצה סופית, כי הפרש סימטרי בין קבוצות סופיות הוא קבוצה סופית. נקבל: $X\triangle\emptyset\triangle Z$ קבוצה סופית, ומכאן: $X\triangle Z$ קבוצה סופית לפי הגדרות הפרש סימטרי. ולכן, $(X,Z)\in S$.

40. נבדוק את התכונות:
רפלקסיביות: תהא $X\in P(A)$ צ״ל: $X\subseteq X$. ואכן לפי תכונת הכלה ביטוי זה נכון תמיד.
אנטי סימטריה: תהינה $X,Y\in\mathrm{P}(A)$. נתון $X\subseteq Y$ וגם $Y\subseteq X$. צ״ל: $X=Y$. לפי הגדרת הכלה דו כיוונית הביטוי נכון.
טרנזיטיביות: תהינה $X,Y,Z\in\mathrm{P}(A)$. נתון $X\subseteq Y$ וגם $Y\subseteq Z$. צ״ל: $X\subseteq Z$.
לפי הגדרת הכלה, מ $X\subseteq Y$ נובע שלכל $x\in X$ מתקיים $x\in Y$ ומ $Y\subseteq Z$ נובע ש $x\in Z$
ולכן $X\subseteq Z$. מכאן ש $\subseteq$ יחס סדר חלקי בקבוצה $P(A)$.

41. נבדוק את התכונות:
רפלקסיביות: יהא $x\in\mathbb{N}$ צ״ל: $(x,x)\in div$. ואכן כל מספר מחלק את עצמו.
אנטי סימטריה: יהיו $x,y\in\mathbb{N}$. נתון $(x,y)\in div$ וגם $(y,x)\in div$. צ״ל: $x=y$.
אם x מחלק את y אז בהכרח $x\leq y$ (כי מספר קטן לא יכול לחלק מספר גדול ממנו)
אם y מחלק את x אז בהכרח $y\leq x$ ולכן מתכונת האנטי סימטריה של היחס $\leq$ מתקיים ש $x=y$.
טרנזיטיביות: יהיו $x,y,z\in\mathbb{N}$. נתון $(x,y)\in div$ וגם $(y,z)\in div$. צ״ל: $(x,z)\in div$.
לפי ההנחה: $y=k\cdot x$ ו $z=m\cdot y$, נציב את y ונקבל $z=m\cdot k\cdot x$ ומכיוון ש m,k מספרים טבעיים אז נקבל ש x מחלק את z ולכן: $(x,z)\in div$.
ולכן div יחס סדר חלקי והקבוצה $(\mathbb{N},div)$ סדורה חלקית.

42. נבדוק את התכונות:
רפלקסיביות: תהא $X\in\mathrm{P}(\mathbb{N})$ צ״ל: $(X,X)\in S$. ואכן לפי תכונת הכלה ביטוי זה נכון תמיד.
סימטריות: תהינה $X,Y\in\mathrm{P}(\mathbb{N})$, נתון: $(X,Y)\in S$ צ״ל: $(Y,X)\in S$

לפי ההנחה: $X \subseteq Y$ או $Y \subseteq X$ ולכן בהכרח לפי הגדרת היחס מתקיים ש $(Y, X) \in S$.
<u>אנטי סימטריה:</u> לא. כי $(\{1\},\{1,2\}) \in S$ וגם $(\{1,2\},\{1\}) \in S$
<u>טרנזיטיביות:</u> לא. כי $(\{1\},\{1,2\}) \in S$ וגם $(\{1,2\},\{2\}) \in S$ אבל $(\{1\},\{2\}) \notin S$
ולכן S לא יחס סדר ולא יחס שקילות.

43. נבדוק את התכונות:
<u>רפלקסיביות:</u> תהא $X \in P(\mathbb{R})$ צ״ל: $(X, X) \in S$. ואכן: $X \cap \mathbb{N} = X \cap \mathbb{N}$ ולכן: $(X, X) \in S$.
<u>סימטריות:</u> תהינה $X, Y \in P(\mathbb{R})$, נתון: $(X, Y) \in S$ צ״ל: $(Y, X) \in S$
לפי ההנחה: $X \cap \mathbb{N} = Y \cap \mathbb{N}$ ולפי הסימטריה של השוויון: $Y \cap \mathbb{N} = X \cap \mathbb{N}$ ולכן: $(Y, X) \in S$.
<u>טרנזיטיביות:</u> תהינה $X, Y, Z \in P(\mathbb{R})$, נתון: $(X, Y) \in S$ וגם $(Y, Z) \in S$
צ״ל: $(X, Z) \in S$. לפי ההנחה: $X \cap \mathbb{N} = Y \cap \mathbb{N}$ וגם $Y \cap \mathbb{N} = Z \cap \mathbb{N}$. נציב ונקבל: $X \cap \mathbb{N} = Z \cap \mathbb{N}$ ולכן: $(X, Z) \in S$.
<u>מחלקות השקילות:</u> $[A]_s = \{B \mid A \cap \mathbb{N} = B \cap \mathbb{N}\}$

44. נבדוק את התכונות:
<u>רפלקסיביות:</u> לא. כי: $(2,2) \notin S_1$ ולכן: $(2,2) \notin S_1 \cap S_2$
מכאן ש: $S_1 \cap S_2$ אינו יחס שקילות.

45. נבדוק את התכונות:
<u>רפלקסיביות:</u> יהא $x \in \mathbb{N}$ צ״ל: $(x, x) \in S$, נקבל: ל x יש אותם מספר מחלקים כמו לעצמו וביטוי זה תמיד נכון.
ולכן: $(x, x) \in S$.
<u>סימטריות:</u> יהיו $x, y \in \mathbb{N}$, נתון: $(x, y) \in S$ צ״ל: $(y, x) \in S$
לפי ההנחה: ל x יש אותם מספר מחלקים כמו ל y וביטוי זה נכון גם להיפך (מסימטריות השוויון). ולכן: $(y, x) \in S$.
<u>טרנזיטיביות:</u> יהיו $x, y, z \in \mathbb{N}$, נתון: $(x, y) \in S$ וגם $(y, z) \in S$ צ״ל: $(x, z) \in S$
לפי ההנחה: ל x יש אותם מספר מחלקים כמו ל y ול y יש אותם מספר מחלקים כמו ל z
ולכן לפי טרנזיטיביות השוויון: ל x יש אותם מספר מחלקים כמו ל z ולכן: $(x, z) \in S$.
ולכן S יחס שקילות.

46. נבדוק את התכונות:
<u>רפלקסיביות:</u> יהא $(x, y) \in A \times B$ צ״ל: $((x, y), (x, y)) \in T$. נקבל: $x = x$ וגם
$(y, y) \in R$ כי R יחס סדר חלקי על B ($y \in B$). ולכן: $((x, y), (x, y)) \in T$.
<u>אנטי סימטריה:</u> יהיו $(a, b), (c, d) \in A \times B$. נתון $((a, b), (c, d)) \in T$ וגם $((c, d), (a, b)) \in T$. צ״ל: $(a, b) = (c, d)$.
לפי ההנחה: אם $a \neq c$ אז בהכרח $(a, c) \in S$ וגם $(c, a) \in S$. ומכיוון ש S יחס סדר חלקי על A נקבל ש: $a = c$. וזו סתירה להנחה ש $a \neq c$. ולכן $a = c$.
מכאן שבהכרח: $(b, d) \in R$ וגם $(d, b) \in R$ ומכיוון ש R יחס סדר חלקי על B נקבל ש: $b = d$ ולכן: $(a, b) = (c, d)$.
<u>טרנזיטיביות:</u> יהיו $(a, b), (c, d), (e, f) \in A \times B$. נתון $((a, b), (c, d)) \in T$ וגם $((c, d), (e, f)) \in T$. צ״ל:
$((a, b), (e, f)) \in T$.
לפי ההנחה: אם $a \neq c$ אז בהכרח $(a, c) \in S$ ואם $c \neq e$ אז בהכרח $(c, e) \in S$ ומכיוון ש S יחס סדר חלקי אז: $(a, e) \in S$.
וממילא: $((a, b), (e, f)) \in T$.
אם $a = c$ אז בהכרח $(b, d) \in R$ ואם $c \neq e$ אז בהכרח $(c, e) \in S$ ומכיוון ש S יחס סדר חלקי לא ייתכן ש $(e, c) \in S$.
נציב $c = a$ ונקבל ש: $(a, e) \in S$ וממילא: $((a, b), (e, f)) \in T$.
אם $a = c$ אז בהכרח $(b, d) \in R$ ואם $c = e$ אז בהכרח $(d, f) \in R$ ומכיוון ש R: יחס סדר חלקי נקבל ש: $(b, f) \in R$
ולכן: $((a, b), (e, f)) \in T$.
ולכן T יחס סדר חלקי.

47. נבדוק את התכונות:
<u>רפלקסיביות:</u> יהא $x \in B$ צ״ל: $(x, x) \in R$. נקבל: $(x, x) \in B \times B$ לפי הגדרת מכפלה קרטזית. וכן: $(x, x) \in S$ כי $x \in A$ ($B \subseteq A$) ו S יחס סדר חלקי על A. ולכן:
$x \in S \cap (B \times B)$, ומכאן: $x \in R$.
<u>אנטי סימטריה:</u> יהיו $x, y \in B$. נתון $(x, y) \in R$ וגם $(y, x) \in R$. צ״ל: $x = y$.
לפי ההנחה: $(x, y) \in S \cap (B \times B)$ וגם $(y, x) \in S \cap (B \times B)$ ולכן: $(x, y) \in S$ וגם $(x, y) \in B \times B$ לפי הגדרת חיתוך.
וכן: $(y, x) \in S$ וגם $(y, x) \in B \times B$ לפי הגדרת חיתוך

S יחס סדר חלקי על A ‏(B ⊆ A) ולכן: $x = y$.
<u>טרנזיטיביות:</u> יהיו $x, y, z \in B$. נתון $(x, y) \in R$ וגם $(y, z) \in R$. צ״ל: $(x, z) \in R$.
לפי ההנחה: $(x, y) \in S \cap (B \times B)$ וכן: $(y, z) \in S \cap (B \times B)$ ומכאן ש: $(x, y) \in S$ וגם $(y, z) \in S$ וגם $(x, y) \in B \times B$ וגם $(y, z) \in B \times B$ לפי הגדרת חיתוך. S יחס סדר חלקי ולכן: $(x, z) \in S$. $(x, z) \in B \times B$ לפי הגדרת מכפלה קרטזית.
ומכאן ש: $(x, z) \in S \cap (B \times B)$ ולכן: $(x, z) \in R$.

48. נבדוק את התכונות:
<u>רפלקסיביות:</u> יהא $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ צ״ל: $((x, y), (x, y)) \in S$. ואכן: $x \le x$ וגם $y \le y$.
<u>אנטי סימטריה:</u> יהיו $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. נתון $((a, b), (c, d)) \in S$ וגם $((c, d), (a, b)) \in S$. צ״ל: $(a, b) = (c, d)$.
לפי ההנחה: $c \le a$ ו $b \le d$ וגם $a \le c$ ו $d \le b$ ולפי האנטי סימטריה של היחס ≤ נקבל ש: $a = c$ וגם $b = d$
ולכן: $(a, b) = (c, d)$.
<u>טרנזיטיביות:</u> יהיו $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. נתון $((a, b), (c, d)) \in S$ וגם $((c, d), (e, f)) \in S$. צ״ל: $((a, b), (e, f)) \in S$.
לפי ההנחה: $c \le a$ ו $b \le d$ וגם $e \le c$ ו $d \le f$ ולפי הטרנזיטיביות של היחס ≤ נקבל ש: $e \le a$ ו $b \le f$ ולכן: $((a, b), (e, f)) \in S$.
ולכן: S יחס סדר חלקי על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
אותה ההוכחה לגבי $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

49. נבדוק את התכונות:
<u>רפלקסיביות:</u> יהא $(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ צ״ל: $((x, y), (x, y)) \in S$. ואכן: $x^2 \le x^2$ וגם $y|y$.
<u>אנטי סימטריה:</u> יהיו $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. נתון $((a, b), (c, d)) \in S$ וגם $((c, d), (a, b)) \in S$. צ״ל: $(a, b) = (c, d)$.
לפי ההנחה: $a^2 \le c^2$ ו $b|d$ וגם $c^2 \le a^2$ ו $d|b$ ולפי האנטי סימטריה של היחסים ≤ ו div נקבל ש: $a = c$ וגם $b = d$
ולכן: $(a, b) = (c, d)$.
<u>טרנזיטיביות:</u> יהיו $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. נתון $((a, b), (c, d)) \in S$ וגם $((c, d), (e, f)) \in S$. צ״ל: $((a, b), (e, f)) \in S$. לפי ההנחה: $a^2 \le c^2$ ו $b|d$ וגם $c^2 \le e^2$ ו $d|f$ ולפי הטרנזיטיביות של היחס ≤ והיחס div נקבל ש: $a^2 \le e^2$ ו $b|f$ ולכן: $((a, b), (e, f)) \in S$.
ולכן: S יחס סדר חלקי על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

50. S יחס סדר חלקי, הוכחה:
S רפלקסיבי: יהא $x \in \mathbb{N}^+$, צ״ל: $(x, x) \in S$. ואכן עבור $k = 0$ נקבל: $x = x \cdot 2^0$ מתקיים ולכן: $(x, x) \in S$.
S אנטי סימטרי: יהיו $x, y \in \mathbb{N}^+$ נניח $(x, y) \in S$ וגם $(y, x) \in S$, צ״ל: $x = y$.
לפי ההנחה: קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש $y = x \cdot 2^k$ וגם קיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש $x = y \cdot 2^m$ מכאן,
נציב ונקבל: $y = y \cdot 2^m \cdot 2^k$ ומכאן: $2^{m+k} = 1$ ומכיוון ש $m, k \in \mathbb{N}$ אז בהכרח $m = k = 0$ ולכן $x = y$.
S טרנזיטיבי: יהיו $x, y, z \in \mathbb{N}^+$ נניח ש $(x, y) \in S$ וגם $(y, z) \in S$ צ״ל: $(x, z) \in S$.
לפי ההנחה: קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש $y = x \cdot 2^k$ וקיים $m \in \mathbb{N}$ כך ש $z = y \cdot 2^m$. מכאן, נציב ונקבל: $z = x \cdot 2^k \cdot 2^m$ ומכיוון ש $m + k \in \mathbb{N}$ אז לפי הגדרת S מתקיים: $(x, z) \in S$.
S אינו סדר קווי: דוגמא נגדית: $(2,3) \notin S$ כי לא קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש $2 \cdot 2^k = 3$ כי 3 הוא אי-זוגי וצד שמאל זוגי. וגם $(3,2) \notin S$ כי לא קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש $3 \cdot 2^k = 2$ כי צד שמאל בהכרח גדול מצד ימין.

51. נוכיח ש E יחס שקילות על S:
E רפלקסיבי: יהא $M \in S$ מבנה באו״מ L, צ״ל: $(M, M) \in E$.
ואכן, כל מבנה איזומורפי לעצמו ע״י הפונקציה: $h: M \to M$ המוגדרת ע״י $f(x) = x$ וברור ש f חח״ע, על ושומרת על הקבועים היחסים והפונקציות מ L ש M מפרש.
E סימטרי: יהיו $M, N \in S$ מבנים באו״מ L, נניח ש $(M, N) \in E$, צ״ל: $(N, M) \in E$.
לפי ההנחה: $M \cong N$ ולכן קיימת פונקציה: $h: M \to N$ איזומורפיזם ולפי משפט: אם $h: M \to N$ איזומורפיזם אז גם $h^{-1}: N \to M$ איזומורפיזם ולכן $N \cong M$ ולכן: $(N, M) \in E$.
E טרנזיטיבי: יהיו $M_1, M_2, M_3 \in S$ נניח $(M_1, M_2) \in E$ וגם $(M_2, M_3) \in E$,
צ״ל: $(M_1, M_3) \in E$. לפי ההנחה: קיימות $f: M_1 \to M_2$, $g: M_2 \to M_3$ איזומורפיזם.
נגדיר: $g \circ f: M_1 \to M_3$ ונוכיח כי ההרכבה היא איזומורפיזם בין M_1 ל M_3.
<u>$f \circ g$ חח״ע</u>: יהיו $x_1, x_2 \in M_1$ נניח ש $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, צ״ל: $x_1 = x_2$.

מכיוון ש g חח"ע אזי מההנחה נובע ש: $f(x_1) = f(x_2)$ ומכיוון ש f חח"ע מתקיים: $x_1 = x_2$.

<u>$g \circ f$ על</u>: יהא $y \in M_3$, צ"ל: קיים $x \in M_1$ כך ש $y = g(f(x))$. מכיוון ש g על אזי קיים $a \in M_2$ כך ש $g(a) = y$ ומכיוון ש f על אזי קיים $b \in M_1$ כך ש $f(b) = a$. מכאן נבחר: $x = b$ ואכן: $y = g(a) = g(f(b)) = g(f(x))$.

<u>$g \circ f$ שומרת על הקבוע</u>: יהא c סימן קבוע באוצר המילים ויהיו c^{M_1}, c^{M_3} הפירושים של c ב M_1, M_3. צ"ל: $g(f(c^{M_1})) = c^{M_3}$. ואכן: $g(f(c^{M_1})) = g(c^{M_2}) = c^{M_3}$ כי f, g איזומורפיזמים.

<u>$g \circ f$ שומרת על היחס</u>: יהא S סימן יחס n מקומי באוצר המילים ויהיו S^{M_1}, S^{M_3} הפירושים של S ב M_1, M_3. צ"ל: לכל $x_1, \ldots, x_n \in M_1$ מתקיים: $(x_1, \ldots, x_n) \in S^{M_1} \leftrightarrow (g(f(x_1)), \ldots, g(f(x_n))) \in S^{M_3}$.

ואכן: $(x_1, \ldots, x_n) \in S^{M_1} \leftrightarrow (f(x_1), \ldots, f(x_n)) \in S^{M_1} \leftrightarrow (g(f(x_1)), \ldots, g(f(x_n))) \in S^{M_3}$ כי f, g איזומורפיזמים.

<u>$g \circ f$ שומרת על הפונקציה</u>: יהא h סימן פונקציה n מקומית באוצר המילים ויהיו h^{M_1}, h^{M_3} הפירושים של h ב M_1, M_3.

צ"ל: לכל $x_1, \ldots, x_n \in M_1$

מתקיים: $g\left(f\left(h^{M_1}(x_1, \ldots, x_n)\right)\right) = h^{M_2}\left(g\left(f(x_1)\right), \ldots, g\left(f(x_n)\right)\right)$.

ואכן: $g\left(f\left(h(x_1, \ldots, x_n)\right)\right) = g(h(f(x_1), \ldots, f(x_n))) = h\left(g\left(f(x_1)\right), \ldots, g\left(f(x_n)\right)\right)$

כי f, g איזומורפיזמים.

52. נגדיר את E באופן הבא: $(x, y) \in E$ אם ורק אם המחלק הראשוני הקטן ביותר של x שווה למחלק הראשוני הקטן ביותר של y.

נשים לב שזהו יחס שקילות ומחלקות השקילות הן: לכל ראשוני $p \in \mathbb{N}$, $[p]_E$ תהיה קבוצת כל המספרים שהמחלק הראשוני הקטן ביותר שלהן הוא p – זוהי קבוצה אינסופית. וכן יש אינסוף ראשוניים.

תרגילים בשקילויות לוגיות

1. לכל אחד מהפסוקים הבאים, הציגו את הפסוק השקול כך שכל הכמתים יופיעו בתחילת הפסוק.

א. $\exists x[S(x,x,x)\rightarrow[\forall y[S(x,y,x)]]]$

ב. $[\forall x[S_1(x)\rightarrow S_2(x,c)]]\rightarrow[S(x,x,x)\rightarrow[\forall y[S(x,y,x)]]]$.

ג. $[\exists x[S(x,x)]]\rightarrow[\forall x[S(x,x)]]$.

ד. $[\exists y[S(c)]]\rightarrow[\exists x[S(c)]]$.

ה. $[\forall x[\exists y[S(x,y)]]\rightarrow[\forall z[\exists w[S(z,w)]]$

ו. $[\forall x[\exists y[S(x,y)]]\rightarrow[\forall y[\exists x[S(y,x)]]$

ז. $S(c)\rightarrow[\exists x[S(x)]]$.

ח. $[\forall x[S(x)]]\wedge[\exists x[\neg S(x)]]$.

ט. $[\forall x[S(x)]\rightarrow[\exists x[\neg S(x)]]$ (זו איננה סתירה! חִשבו על כך!)

י. $[\forall x[S(x)]]\vee[\exists x[\neg S(x)]]$.

יא. $S(c)\rightarrow[\neg\exists x[S(x)]$.

יב. $\exists x[\exists y[S(x,y)]]\vee[\forall x[\exists y[S(x,y)]]$.

יג. $[\exists x[\exists y[S(x,y)]]\vee[\forall x[\exists y[S(x,y)]]]\rightarrow[\forall x[\forall y[S(y,x)]]]$

2. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $\forall x\exists y[S(x,y)\rightarrow\exists zR(z,x)]$
- $\forall z\exists y\exists x[S(z,x)\rightarrow R(y,z)]$

3. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $\forall x[S(x)\vee\exists yR(x,y)]\rightarrow\forall x[S(x)\vee\forall yR(y,x)]$
- $\forall x\forall z\forall y\exists w\big[[S(x)\vee R(x,w)]\rightarrow[S(z)\vee R(y,z)]\big]$

4. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $[\forall x\ R(x)]\vee[\forall x\ S(x)]$
- $\forall x[R(x)\vee S(x)]$

5. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $[\exists x\ R(x)]\wedge[\exists x\ S(x)]$
- $\exists x,y[R(x)\wedge S(y)]$

6. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $\exists x\big[[\forall y\ R(x,y)]\rightarrow[\exists y\ R(y,x)]\big]$
- $\exists x,y,z[R(x,y)\rightarrow R(z,x)]$

7. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $[\exists x\ R(x)]\rightarrow[\exists y\ S(y)]$
- $\exists x,y[R(x)\rightarrow S(y)]$

8. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $[\forall x\ R(x)]\rightarrow[\forall y\ S(y)]$
- $\forall x,y[R(x)\rightarrow S(y)]$

9. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $\forall x,y\left[\left[R\big(f(x,y),f(y,x)\big)\right]\to\left[[\exists z\, f(x,z)=y]\vee[\forall z\, f(y,z)=x]\right]\right]$
- $\forall x,y,z\exists w\left[\left[R\big(f(x,y),f(y,x)\big)\right]\to f(x,w)=y\vee f(y,z)=x\right]$

10. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $\left[\neg\big(\exists xP(x)\vee\forall yQ(y)\big)\wedge\exists zP\big(f(c,z)\big)\right]$
- $\exists z\forall x\exists y\left[\left[\neg Q(y)\wedge\neg P(x)\wedge P\big(f(c,z)\big)\right]\right]$

11. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $\forall x\left[p(x)\to\big(q(x)\wedge r(x)\big)\right]$
- $\forall x[p(x)\to q(x)]\wedge\forall x[p(x)\to r(x)]$

12. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $\forall x\left[p(x)\to\big(q(x)\vee r(x)\big)\right]$
- $\forall x[p(x)\to q(x)]\vee\forall x[p(x)\to r(x)]$

13. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $[\exists x\, p(x)]\vee[\exists y\neg p(y)]$
- $[\forall x\, p(x)]\to[\exists y p(y)]$

14. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $\left[\forall x\left[R(x)\to\left[\exists y\big(S(x,y)\big)\right]\right]\right]\to\left[\forall x\big(S(2,x)\big)\right]$
- $\exists x\forall y,z\left[[\neg R(x)\to S(2,z)]\wedge[S(x,y)\to S(2,z)]\right]$

15. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $\left[\forall x[R(x)\leftrightarrow S(x,c)]\right]\wedge\left[\exists x[R(x)\to\neg R(x)]\right]$
- $\forall x\exists y\left[[\neg R(x)\vee S(x,c)]\wedge[R(x)\vee\neg S(x,c)]\wedge\big(\neg R(y)\big)\right]$

16. יהא $L=\{f,S\}$ אוצר מילים כאשר S סימן יחס דו מקומי, f סימן פונקציה דו מקומית.
בכל אחד מזוגות הפסוקים הבאים, קבע האם הפסוקים שקולים לוגית והוכח:

א. $A=\forall x\left[\Big(\exists y\big(S(x,y)\big)\Big)\to\big(\forall y\exists z(f(x,y)=z)\big)\right]$, $B=\forall x\forall z\left[\big(\forall y(f(x,z)\neq y)\big)\to\Big(\forall y\big(\neg S(x,y)\big)\Big)\right]$

ב. $A=\exists x\forall y[(S(x,y)\vee\exists z(f(z,z)=y))]\to\exists y\forall x[f(x,x)=y\leftrightarrow\ S(x,y)]$,
$B=\forall x\exists y[\big[\big(\neg S(x,y)\wedge\forall z(f(z,z)\neq y)\big)\big]\vee[f(x,x)=y\leftrightarrow\ S(x,y)]]$.

17. יהא $L=\{S\}$ אוצר מילים כאשר: S סימן יחס תלת מקומי. נתונים 5 הפסוקים הבאים, מצא 2 פסוקים שאינם שקולים ע"י מבנה המקיים את אחד מהם ולא את השני.

א. $A=\forall x\exists y\left[S(x,y,x)\to[\exists zS(x,y,z)\vee\forall zS(x,z,y)]\right]$

ב. $B=\forall x\exists z\left[[\forall y\neg S(x,z,y)\to\forall yS(x,y,z)]\vee\neg S(x,z,x)\right]$

ג. $C=\forall x\forall y\exists w\exists z\left[[\neg S(x,z,w)\to\neg S(x,z,x)]\vee S(x,y,z)\right]$

ד. $D=\forall x\forall y\exists w\exists z\left[[\neg S(y,w,z)\to\neg S(y,w,y)]\vee S(y,x,w)\right]$

ה. $E=\forall y\forall z\left[[\forall xS(y,x,z)\to\forall xS(y,z,x)]\vee\neg S(y,z,y)\right]$

תרגילים בשקילויות לוגיות – פתרונות

1.

א. $\exists x[S(x,x,x)\to\forall yS(x,y,x)]\equiv\exists x[\neg S(x,x,x)\vee\forall yS(x,y,x)]\equiv\exists x\forall y[\neg S(x,x,x)\vee S(x,y,x)]$

ב. $\forall x[(S_1(x)\to S_2(x,c))\to(S(x,x,x)\to\forall yS(x,y,x))]$ לפי שקילות של גרירה נקבל:

$\forall x[(S_1(x)\to S_2(x,c))\to(\neg S(x,x,x)\vee\forall yS(x,y,x))]$ לפי שקילות של גרירה נקבל:

$\forall x[(S_1(x)\to S_2(x,c))\vee\neg S(x,x,x)\vee\forall yS(x,y,x)]$ ולפי כלל הוצאת הכמת:

$\forall x\forall y[(S_1(x)\to S_2(x,c))\vee\neg S(x,x,x)\vee S(x,y,x)]$.

ג. $(\exists xS(x,x))\to(\forall xS(x,x))\equiv(\forall x\neg S(x,x))\vee(\forall xS(x,x))$ ולפי כלל החלפת משתנים:

$(\forall x\neg S(x,x))\vee(\forall yS(y,y))$ ולפי כלל הוצאת הכמת: $\forall x\forall y(\neg S(x,x)\vee S(y,y))$.

ד. הפסוק תמיד מתקיים.

ה. $[\forall x\exists yS(x,y)]\to[\forall z\exists wS(z,w)]\equiv[\exists x\forall y\neg S(x,y)]\vee[\forall z\exists wS(z,w)]$ לפי כלל שינוי שמות משתנים.

ולפי כלל הוצאת הכמת: $\exists x\forall y\forall z\exists w[\neg S(x,y)\vee S(z,w)]$.

2. כן. $\forall x\exists y[S(x,y)\to\exists zR(z,x)]\equiv\forall x\exists y[\neg S(x,y)\vee\exists zR(z,x)]$ לפי שקילות.
$\forall x\exists y[\neg S(x,y)\vee\exists zR(z,x)]\equiv\forall x\exists y\exists z[\neg S(x,y)\vee R(z,x)]$ כי z לא מופיע בצד שמאל.
$\forall x\exists y\exists z[\neg S(x,y)\vee R(z,x)]\equiv\forall z\exists x\exists y[\neg S(z,x)\vee R(y,z)]$ לפי החלפת משתנים: $z\to y\ ,\ y\to x\ ,\ x\to z$.

3. לא. דוגמא נגדית: $M=<\{1,2\},S=\{(1)\},R=\emptyset>$, מקיים את הפסוק הראשון ולא את השני.

4. לא. דוגמא נגדית: $M=<\{1,2\},S=\{(1)\},R=\{(2)\}>$, מקיים את הפסוק השני ולא את הראשון.

5. כן. $[\exists x\,R(x)]\wedge[\exists x\,S(x)]\equiv[\exists x\,R(x)]\wedge[\exists y\,S(y)]$ לפי החלפת משתנים: $x\to y$
$[\exists x\,R(x)]\wedge[\exists y\,S(y)]\equiv\exists x\exists y[\,R(x)\wedge S(y)]$ כי y לא מופיע בצד שמאל ו x לא מופיע בצד ימין.

6. כן. $\exists x[[\forall y\,R(x,y)]\to[\exists y\,R(y,x)]]\equiv\exists x[[\exists y\neg\,R(x,y)]\vee[\exists y\,R(y,x)]]$ לפי שקילות.
$\exists x[[\exists y\neg\,R(x,y)]\vee[\exists y\,R(y,x)]]\equiv\exists x[[\exists y\neg\,R(x,y)]\vee[\exists z\,R(z,x)]]$ לפי החלפת משתנים: $y\to z$.
$\exists x[[\exists y\neg\,R(x,y)]\vee[\exists z\,R(z,x)]]\equiv\exists x\exists y\exists z[[\neg\,R(x,y)]\vee[\,R(z,x)]]$ כי y לא מופיע בצד ימין ו z לא מופיע בצד שמאל. $\exists x\exists y\exists z[[\neg\,R(x,y)]\vee[\,R(z,x)]]\equiv\exists x\exists y\exists z[R(x,y)\to R(z,x)]$ לפי שקילות.

7. לא. דוגמא נגדית: $M=<\{1,2\},S=\emptyset,R=\{(2)\}>$, מקיים את הפסוק השני ולא את הראשון.

8. לא. דוגמא נגדית: $M=<\{1,2\},S=\{(1)\},R=\{(1)\}>$, מקיים את הפסוק הראשון ולא את השני.

9. כן. $\forall x,y\left[[R(f(x,y),f(y,x))]\to[[\exists z\,f(x,z)=y]\vee[\forall z\,f(y,z)=x]]\right]\equiv\forall x,y\left[\neg[R(f(x,y),f(y,x))]\vee[[\exists z\,f(x,z)=y]\vee[\forall z\,f(y,z)=x]]\right]$ לפי שקילות.

$\forall x,y\left[\neg[R(f(x,y),f(y,x))]\vee[[\exists z\,f(x,z)=y]\vee[\forall z\,f(y,z)=x]]\right]\equiv\forall x,y\left[\neg[R(f(x,y),f(y,x))]\vee[[\exists w\,f(x,w)=y]\vee[\forall z\,f(y,z)=x]]\right]$ לפי החלפת משתנים: $z\to w$.

$\forall x,y\left[\neg[R(f(x,y),f(y,x))]\vee[[\exists w\,f(x,w)=y]\vee[\forall z\,f(y,z)=x]]\right]\equiv$
$\forall x,y\forall z\exists w\left[\neg[R(f(x,y),f(y,x))]\vee[[\,f(x,w)=y]\vee[\,f(y,z)=x]]\right]$ כי z,w לא מופיעים בשאר חלקי הפסוק.
$\forall x,y,z\exists w\left[\neg[R(f(x,y),f(y,x))]\vee[[\,f(x,w)=y]\vee[\,f(y,z)=x]]\right]\equiv$
$\forall x,y,z\exists w\left[[R(f(x,y),f(y,x))]\to[[\,f(x,w)=y]\vee[\,f(y,z)=x]]\right]$
לפי שקילות.

10. כן. $[\neg(\exists xP(x) \vee \forall yQ(y)) \wedge \exists zP(f(c,z))] \equiv [(\forall x\neg P(x) \wedge \exists y\neg Q(y)) \wedge \exists zP(f(c,z))]$ לפי דה מורגן.
$[(\forall x\neg P(x) \wedge \exists y\neg Q(y)) \wedge \exists zP(f(c,z))] \equiv \exists z\forall x\exists y[(\neg P(x) \wedge \neg Q(y)) \wedge P(f(c,z))]$ כי x, y, z לא מופיעים בשאר חלקי הפסוק.

11. כן. $\forall x[p(x) \rightarrow (q(x) \wedge r(x))] \equiv \forall x[\neg p(x) \vee (q(x) \wedge r(x))]$ לפי שקילות.
$\forall x[\neg p(x) \vee (q(x) \wedge r(x))] \equiv \forall x[(\neg p(x) \vee q(x)) \wedge (\neg p(x) \vee r(x))]$ לפי שקילות.
$\forall x[(\neg p(x) \vee q(x)) \wedge (\neg p(x) \vee r(x))] \equiv \forall x[(\neg p(x) \vee q(x))] \wedge \forall x[(\neg p(x) \vee r(x))]$ לפי כלל המחמיר והמקל.
$\forall x[(\neg p(x) \vee q(x))] \wedge \forall x[(\neg p(x) \vee r(x))] \equiv \forall x[(p(x) \rightarrow q(x))] \wedge \forall x[(p(x) \rightarrow r(x))]$ לפי שקילות.

12. לא. דוגמא נגדית: $M =< \{1,2\}, p = \{(1),(2)\}, q = \{(1)\}, r = \{(2)\} >$, מקיים את הפסוק הראשון ולא את השני.

13. כן. $[\exists x\, p(x)] \vee [\exists y\neg p(y)] \equiv [\exists y\neg p(y)] \vee [\exists x\, p(x)]$ לפי שקילות.
$[\exists y\neg p(y)] \vee [\exists x\, p(x)] \equiv [\forall yp(y)] \rightarrow [\exists x\, p(x)]$ לפי שקילות ודה מורגן.
$[\forall yp(y)] \rightarrow [\exists x\, p(x)] \equiv [\forall xp(x)] \rightarrow [\exists y\, p(y)]$ לפי החלפת משתנים: $y \rightarrow x$, $x \rightarrow y$

14. כן. $\left[\forall x\left[R(x) \rightarrow [\exists y(S(x,y))]\right]\right] \rightarrow [\forall x(S(2,x))] \equiv \left[\forall x\left[\neg R(x) \vee [\exists y(S(x,y))]\right]\right] \rightarrow [\forall x(S(2,x))]$ לפי שקילות.
$\left[\forall x\left[\neg R(x) \vee [\exists y(S(x,y))]\right]\right] \rightarrow [\forall x(S(2,x))] \equiv \left[\exists x\left[R(x) \wedge [\forall y\neg(S(x,y))]\right]\right] \vee [\forall x(S(2,x))]$ לפי שקילות ודה מורגן.
$\left[\exists x\left[R(x) \wedge [\forall y\neg(S(x,y))]\right]\right] \vee [\forall x(S(2,x))] \equiv \exists x\left[R(x) \wedge [\forall y\neg(S(x,y))]\right] \vee [\forall z(S(2,z))]$ לפי החלפת משתנים: $x \rightarrow z$.
$\exists x\left[R(x) \wedge [\forall y\neg(S(x,y))]\right] \vee [\forall z(S(2,z))] \equiv \exists x\forall y\forall z\left[\left(R(x) \wedge \neg(S(x,y))\right) \vee (S(2,z))\right]$ כי y, z לא מופיעים בשאר חלקי הפסוק.
$\exists x\forall y\forall z\left[\left(R(x) \wedge \neg(S(x,y))\right) \vee (S(2,z))\right] \equiv \exists x\forall y\forall z\left[[R(x) \vee (S(2,z))] \wedge [\neg(S(x,y)) \vee (S(2,z))]\right]$ לפי שקילות.
$\exists x\forall y\forall z\left[[R(x) \vee (S(2,z))] \wedge [\neg(S(x,y)) \vee (S(2,z))]\right] \equiv \exists x\forall y\forall z\left[[\neg R(x) \rightarrow (S(2,z))] \wedge [(S(x,y)) \rightarrow (S(2,z))]\right]$ לפי שקילות.

15. כן.
$[\forall x[R(x) \leftrightarrow S(x,c)]] \wedge [\exists x[R(x) \rightarrow \neg R(x)]] \equiv$
$\forall x[[R(x) \rightarrow S(x,c)] \wedge [S(x,c) \rightarrow R(x)]] \wedge [\exists x[R(x) \rightarrow \neg R(x)]]$ לפי שקילות.
$\forall x[[R(x) \rightarrow S(x,c)] \wedge [S(x,c) \rightarrow R(x)]] \wedge [\exists x[R(x) \rightarrow \neg R(x)]] \equiv$
$\forall x[[\neg R(x) \vee S(x,c)] \wedge [\neg S(x,c) \vee R(x)]] \wedge [\exists x[\neg R(x) \vee \neg R(x)]]$ לפי שקילות.
$\forall x[[\neg R(x) \vee S(x,c)] \wedge [\neg S(x,c) \vee R(x)]] \wedge [\exists x[\neg R(x) \vee \neg R(x)]] \equiv$
$\forall x[[\neg R(x) \vee S(x,c)] \wedge [\neg S(x,c) \vee R(x)]] \wedge [\exists y[\neg R(y)]]$ לפי שקילות. ולפי החלפת משתנים: $x \rightarrow y$.
$\forall x[[\neg R(x) \vee S(x,c)] \wedge [\neg S(x,c) \vee R(x)]] \wedge [\exists y[\neg R(y)]] \equiv$
$\forall x\exists y[[\neg R(x) \vee S(x,c)] \wedge [\neg S(x,c) \vee R(x)]] \wedge [\neg R(y)]]$ כי y לא מופיע בשאר חלקי הפסוק.

תרגילים בתורות ומודלים

1. יהא $L=\{S\}$ אוצר מילים כאשר S סימן יחס דו מקומי. תהי התורה: $T=\{\forall x\exists y(S(y,x)),\forall x\exists y(S(x,y))\}$
   א. האם המבנה: $M=<N,<>$ מקיים את T? נמק!
   ב. האם המבנה: $M=<(0,1],<>$ מקיים את T? נמק!
   ג. האם המבנה: $M=<Z,<>$ מקיים את T? נמק!
   ד. האם התורה T עיקבית? נמק!

2. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבע האם היא נכונה או לא, הוכח את תשובתך!
   א. התורה $T=\emptyset$ (כלומר, תורה שאין בה פסוקים) היא עיקבית.
   ב. יהי L אוצר מילים אז התורה שמכילה את כל הפסוקים האפשריים ב L היא עיקבית.

3. יהא $L=\{f,g\}$ אוצר מילים כך ש f סימן פונקציה חד מקומית, g סימן פונקציה דו מקומית.
   יהא $M=<\mathbb{R},f(x)=x^2,g(x,y)=x\cdot y>$ מבנה המפרש את L.
   א. האם M מקיים את התורה $T=\{\forall x(f(x)=g(x,x)),\exists x\exists y(x\neq y\wedge f(x)=g(x,y))\}$?
   ב. הסבירו מדוע M לא מקיים את התורה: $T=\{\forall y\exists x(f(x)=y),\forall z\exists x\exists y(g(x,y)=z)\}$?
   ג. רשמו מבנה M' שכן מקיים את התורה בסעיף ב'.

4. יהא $\mathrm{L}=\{\mathrm{f},\mathrm{g},\mathrm{c}_0,\mathrm{c}_1\}$ אוצר מילים ויהא: $M=<N,+,*,0,1>$ מבנה המפרש את L כאשר: $f^M=+$, $g^M=*$, $c_0{}^M=0$, $c_1{}^M=1$. תהא T קבוצת הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M.
   א. נגדיר: $T^*=T\cup\{\forall x,y\exists z(f(x,y)=z\to(\exists w(g(x,w)=z)))\}$, האם T^* עקבית?
   ב. נגדיר: $T^{**}=T\cup\{\exists x[\forall y(\exists z(g(x,z)=y))]\}$, האם T^{**} עקבית?

5. יהא $L=\{S\}$ אוצר מילים כאשר S סימן יחס דו מקומי. יהא $M=<R,<>$ מבנה המפרש את L. תהא T קבוצת כל הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M.
   א. נגדיר: $T^*=T\cup\{\forall x,y\exists z(S(x,y)\to(S(x,z)\wedge S(z,y)))\}$, האם T^* עקבית?
   ב. נגדיר: $T^+=T\cup\{\exists x[\forall y[(S(y,x)\vee(\exists w(S(w,y)\to S(w,x))))]]\}$, האם T^+ עקבית?

6. יהא $L=\{S\}$ אוצר מילים כאשר S סימן יחס דו מקומי. יהא $M=<\{0,1\},<>$ מבנה המפרש את L. תהא T קבוצת כל הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M.
   א. האם T שווה לקבוצת כל הפסוקים המתקיימים במבנה $M=<\{1,2\},<>$?
   ב. האם התורה $T\cup\{\forall x\exists y(S(x,y)\to S(x,y))\}$ עקבית?

7. יהא $\mathrm{L}=\{S,\mathrm{f},\mathrm{g},\mathrm{c}_0,\mathrm{c}_1\}$ אוצר מילים ויהא: $M=<R,<,+,*,0,1>$ מבנה המפרש את L כאשר: $f^M=+$, $g^M=*$, $c_0{}^M=0$, $c_1{}^M=1$, $S^M=<$. תהא T קבוצת הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M.
   א. נגדיר: $T^*=T\cup\{\forall x,y(S(x,y)\leftrightarrow(\exists z(f(x,z)=y)))\}$, האם T^* עקבית?
   ב. נגדיר: $T^+=T\cup\{\forall x[(S(c_0,x)\wedge S(x,c_1))\to(\exists y((S(x,y)\wedge S(c_1,y))\to g(x,y)=c_1))]\}$
   האם T^+ עקבית?

8. תהיינה T_1,T_2 תורות כלשהן באוצר מילים L כלשהו. נתון: T_1,T_2 עקביות.
   א. האם $T_1\cap T_2$ עקבית? הוכח!
   ב. האם בהכרח התורה $T_1\cup\{A\}$ כאשר: $A\in T_2$, אינה עקבית?

9. תהא T תורה כלשהי באוצר מילים L. נתון שכל: $T^*\in P(T)\setminus\{T\}$ עקבית, האם T עיקבית? הוכח!

10. יהא $L=\{S\}$ אוצר מילים כאשר S סימן יחס דו מקומי. יהא $M=<N,<>$ מבנה המפרש את L. תהא T קבוצת כל הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M.
   א. האם קיים ל T מודל בו בין כל 2 איברים יש איבר?
   ב. האם קיים ל T מודל בו יש קבוע המקיים: $S(c,y)$ וגם $S(x,c)$ לכל 2 איברים $x,y\in N$?

11. יהא $L=\{S\}$ אוצר מילים. ויהא $M=<R,<>$ מבנה המפרש את L. תהא T קבוצת כל הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M.
נגדיר אוצר מילים חדש: $L^+=L\cup\{g\}$ כאשר g סימן פונקציה דו מקומית. האם קיים ל T מודל M^* ובו מתקיים:
$S(g(x,y),x)$ וגם $S(g(x,y),y)$ לכל 2 איברים x,y מהעולם של M^*.

12. יהא $L=\{f,g,S,c\}$ אוצר מילים כאשר f,g סימני פונקציות חד מקומיות, S סימן יחס דו מקומי, c סימן קבוע.
לכל אחת מהתורות הבאות קבע האם היא עיקבית או לא והוכח:
א. $T_1=\{\exists x[f(x)=g(x)],\ \forall y[\exists x(f(x)=y)\rightarrow\forall x(g(x)\neq y)]\}$
ב. $T_2=\{\forall x\big(x\neq c\rightarrow S(c,x)\big),\ \forall x\big(x\neq c\rightarrow S(x,c)\big),f(c)\neq c\}$
ג. $T_3=\{\forall x\Big(f\big(g(x)\big)=g\big(f(x)\big)\Big),\ \forall x\big(f(x)\neq g(x)\big)\}$
ד. $T_4=\{\forall x,y[S(x,y)\rightarrow\neg S(y,x)],\forall x,y,z\big[\big(S(x,y)\wedge S(y,z)\big)\rightarrow S(x,z)\big],\forall x(\neg S(x,x))\}$
ה. $T_5=T_4\cup\{\exists x_1,x_2,\dots x_n(S(f(c),x_1)\wedge S(x_1,x_2)\wedge\dots\wedge S(x_{n-1},x_n)\wedge S(x_n,c)|n\in\mathbb{N}^+\}$

13. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
א. יהא L אוצר מילים כלשהו. תהיינה T_1,T_2 קבוצות כל הפסוקים ב L המתקיימים במודלים M_1,M_2 בהתאמה. נסמן: $\overline{T_1}$ - קבוצת כל הפסוקים ב L שאינם ב T_1 אזי: $T_2\cap\overline{T_1}$ עיקבית.
ב. יהא L_1 אוצר מילים כלשהו ויהא L_2 אוצר מילים אחר כך ש $L_1\cap L_2=\emptyset$ ויהיו M_1 מבנה ב L_1, M_2 מבנה ב L_2 כך ש $|M_1|=|M_2|$. נגדיר: T_1 קבוצת כל הפסוקים ב L_1 המתקיימים ב M_1, T_2 קבוצת כל הפסוקים ב L_2 המתקיימים ב M_2. אזי קיים מודל ב $L_1\cup L_2$ ל $T_1\cup T_2$.
ג. יהא L אוצר מילים כלשהו ,תהא T תורה כלשהי ב L. יהיו M_1,M_2 מבנים ב L, נגדיר:
$T'=\{A\in T|$ A מקיים את M_1,M_2 בדיוק אחד מ$\}$, אזי T' עיקבית.

תרגילים בתורות ומודלים – פתרונות

.1

א. לא. M לא מקיים את $\forall x\exists y(y<x)$ ולכן גם לא מקיים את T. כי נבחר $x=0$ ולא קיים ב $\mathbb{N}$ מספר הקטן מ 0.

ב. לא. M לא מקיים את $\forall x\exists y(x<y)$ ולכן גם לא מקיים את T. כי נבחר $x=1$ ולא קיים ב $(0,1]$ מספר הגדול מ 1.

ג. כן. כי ב $\mathbb{Z}$ אין איבר מינימאלי ואין איבר מקסימאלי.

ד. כן. ראינו בסעיף ג' מבנה המקיים את T.

.2

א. כן. כיוון שכל מבנה מקיים את T

ב. לא. כי בפרט הפסוק $\forall x(x\neq x)$ נמצא ב T וזהו פסוק שקר.

.3

א. כן. M מקיים את $\exists x\exists y\big(x\neq y\wedge f(x)=g(x,y)\big)$ כי נבחר $x=0$, $y=1$ ואכן $x\neq y$ ומתקיים: $0^2=0\cdot 1$.
M מקיים את $\forall x\big(f(x)=g(x,x)\big)$ כי $x^2=x\cdot x$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

ב. הפונקציה f אינה על $\mathbb{R}$ ולכן M לא מקיים את $\forall y\exists x(f(x)=y)$.

ג. $M=<\mathbb{R},f(x)=x,g(x,y)=x>$.

.4

א. התורה T^* עקבית. הפסוק $\forall x,y\exists z\big(f(x,y)=z\rightarrow\big(\exists w(g(x,w)=z)\big)\big)$ מתקיים במבנה M כי לכל x,y נבחר z ששונה מהסכום שלהם ומכיוון ש T היא קבוצת כל הפסוקים המתקיימים מ M נובע כי הפסוק שייך ל T ומכאן האיחוד שווה ל $\mathrm{T}=T^*$. ומכיוון ש T היא עקבית כי המבנה M מקיים את כל הפסוקים בה נובע כי T^* עקבית.

ב. התורה T^{**} עקבית. הפסוק $\exists x[\forall y(\exists z(g(x,z)=y))]$ מתקיים במבנה M כי עבור $x=1$ נבחר לכל y: $z=y$ ומכיוון ש T היא קבוצת כל הפסוקים המתקיימים מ M נובע כי הפסוק שייך ל T ומכאן האיחוד שווה ל $\mathrm{T}=T^{**}$. ומכיוון ש T היא עקבית כי המבנה M מקיים את כל הפסוקים בה נובע כי T^* עקבית.

.5

א. התורה T^* עקבית. הפסוק $\forall x,y\exists z\big(x<y\rightarrow(x<z\wedge z<y)\big)$ מתקיים במבנה M כי לכל $x<y$ נבחר z ביניהם (כי העולם הוא המספרים הממשיים) ומכיוון ש T היא קבוצת כל הפסוקים המתקיימים מ M נובע כי הפסוק שייך ל T ומכאן האיחוד שווה ל $\mathrm{T}=T^*$. ומכיוון ש T היא עקבית כי המבנה M מקיים את כל הפסוקים בה נובע כי T^* עקבית.

ב. התורה T^+ עקבית. הפסוק $\exists x\Big[\forall y\Big[\Big(y<x\vee\big(\exists w(w<y\rightarrow w<x)\big)\Big)\Big]\Big]$ מתקיים במבנה M כי לכל y נבחר $w\geq y$ (כי העולם הוא המספרים הממשיים) ונקבל: $f\rightarrow T=T$ ומכיוון ש T היא קבוצת כל הפסוקים המתקיימים מ M נובע כי הפסוק שייך ל T ומכאן האיחוד שווה ל $\mathrm{T}=T^+$. ומכיוון ש T היא עקבית כי המבנה M מקיים את כל הפסוקים בה נובע כי T^+ עקבית.

.6

א. כן. המבנים איזומורפיים ע"י הפונקציה: $f:\{0,1\}\rightarrow\{1,2\}$, $f(x)=x+1$. ולכן כל פסוק שמתקיים במבנה הראשון, מתקיים בשני ומכאן נובע שהתורות של המבנים שוות.

ב. כן. הפסוק $\forall x\exists y(x<y\rightarrow x<y)$ מתקיים במבנה M כי לכל x נבחר $y=x$ ומכיוון ש T היא קבוצת כל הפסוקים המתקיימים מ M נובע כי הפסוק שייך ל T ומכאן האיחוד שווה ל T. ומכיוון ש T היא עקבית כי המבנה M מקיים את כל הפסוקים בה נובע כי התורה עקבית.

.7

א. התורה T^* אינה עקבית. הפסוק $\forall x,y\big(x<y\leftrightarrow\big(\exists z(x+z=y)\big)\big)$ לא מתקיים במבנה M כי נבחר $z=y-x$ אבל מצד שני נבחר: $x\leq y$, ולכן השלילה שייכת ל T ומכאן לא ייתכן מודל המקיים פסוק ושלילתו.

ב. התורה T^+ עקבית. הפסוק $\forall x[(0<x\wedge x<1)\rightarrow\Big(\exists y\big((x<y\wedge 1<y)\rightarrow xy=1\big)\Big)$ מתקיים במבנה M כי נבחר $x=y$. ומכיוון ש T היא קבוצת כל הפסוקים המתקיימים מ M נובע כי הפסוק שייך ל T ומכאן האיחוד שווה ל $\mathrm{T}=T^+$. ומכיוון ש T היא עקבית כי המבנה M מקיים את כל הפסוקים בה נובע כי T^+ עקבית.

.8

א. כן. T_1 עקבית ולכן קיים ל T_1 מודל M כך שלכל $A\in T_1$ מתקיים: $M\vDash A$. ומכיוון ש $T_1\cap T_2\subseteq T_1$ נקבל ש M מקיים את כל הפסוקים של $T_1\cap T_2$. ולכן הוא המודל של $T_1\cap T_2$ ולכן התורה עקבית.

ב. לא. אם $A \in T_1$ אז $T_1 \cup \{A\} = T_1$ ונתון ש T_1 עקבית ולכן הטענה לא מתקיימת בהכרח.

9. התורה T אינה עקבית. דוגמא נגדית: $T = \{\forall x(S(x,c)), \exists x(\neg S(x,c))\}$ באוצר מילים: $L = \{S,c\}$. התורה $\emptyset$ עקבית תמיד (כל כל הפסוקים בה מתקיימים באופן ריק), $\{\forall x(S(x,c))\}$ עקבית כי המודל: $< N, \geq, 0 >$ מקיים את הפסוק בה, $\{\exists x(\neg S(x,c))\}$ עקבית כי המודל: $< N, \geq, 1 >$ מקיים את הפסוק בה אבל T אינה עקבית כי לא ייתכן מודל המקיים פסוק ושלילתו.

10.

א. לא, כי שלילת הפסוק "בין כל 2 איברים קיים איבר" מתקיימת ב M ולכן השלילה שייכת ל T ומכאן לא ייתכן מודל המקיים פסוק ושלילתו.

ב. לא, כי אם מתקיים $S(x,c)$ במודל M אז בהכרח לא מתקיים $S(c,x)$ במודל M ומכאן אם $S(x,c) \in T$ אז $S(c,x) \notin T$ ולכן עבור: $x = y$ נקבל שצריך מודל המקיים פסוק ושלילתו – וזה לא ייתכן.

11. כן. המודל הוא: $M^* =< R, <, g >$ כאשר $g(x,y) = -|x| - |y| - 1$. M^* מקיים את T כי הצמצום של M^* ל L הוא המבנה M. וכן עבור כל 2 מספרים ממשיים מתקיים $g(x,y) < x$ וגם $g(x,y) < y$.

12.

א. לא עיקבית. נניח שיש מבנה M המקיים את T_1 אזי הוא מקיים את $\exists x[f(x) = g(x)]$ ולכן קיים a במבנה כך ש $f(a) = g(a) = b$ כאשר $b \in M$. נראה כעת ש M לא מקים את $\forall y[\exists x(f(x) = y) \rightarrow \forall x(g(x) \neq y)]$. נגדיר: $y = b$. מכאן, קיים $a = x$ כך ש $f(a) = b$ אבל לא מתקיים שעבור כל x: $g(x) \neq b$ כי נבחר $x = a$.

ב. עיקבית. נגדיר את המבנה: $M =< \{1,2\}, c = 1, S = \{(1,2),(2,1)\}, f(x) = 3 - x, g(x) = x >$ ואכן: הפסוקים: $\forall x(x \neq c \rightarrow S(x,c)),\ \forall x(x \neq c \rightarrow S(c,x))$ מתקיימים כי $(1,2),(2,1) \in S$. וכן $f(1) \neq 1$.

ג. עיקבית. נגדיר את המבנה: $M =< \{1,2\}, c = 1, S = \emptyset, f(x) = 3 - x, g(x) = x >$ ואכן ההרכבה $f \circ g = g \circ f = f$ ולכן: $\forall x\left(f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big)\right)$ מתקיים. וכן מתקיים: $f(1) = 2 \neq g(1) = 1$, $f(2) = 1 \neq g(2) = 2$.

ד. עיקבית: נגדיר את המבנה: $M =< \{1\}, c = 1, S = \emptyset, f(x) = x, g(x) = x >$ ואכן: היחס לא מתקיים לאף זוג ולכן בפרט: $\forall x,y[S(x,y) \rightarrow \neg S(y,x)], \forall x,y,z\big[\big(S(x,y) \wedge S(y,z)\big) \rightarrow S(x,z)\big]$ מתקיימים כי נקבל $False$ בצד שמאל של הגרירה. וכן $\forall x(\neg S(x,x))$ מתקיים כי בפרט $(1,1) \notin S$.

ה. עיקבית. נגדיר את המבנה: $M =< [0,1], c = 1, <, f(x) = 1 - x, g(x) = x >$ ואכן, M מקיים את T_4 כי לכל x,y אם $x < y$ אז לא מתקיים ש $y < x$. ולכל x,y,z אם $x < y$ וגם $y < z$ אזי $x < z$ ולכל x לא מתקיים $x < x$.
בנוסף, קיימים אינסוף איברים בין $f(c) = f(1) = 0$ ל $c = 1$ ובפרט לכל n טבעי יש לפחות n איברים שונים בין 0 ל 1 וניתן לבחור אותם בסדר עולה.

תרגילי הכנה למשפט הקומפקטיות

בשאלות הבאות A תהיה תת-קבוצה של N ונגדיר פסוק $\alpha=\forall x\exists y(S(x,y))$.

1. נניח שהפסוק α מתקיים במבנה $<A,<>$ (העולם הוא A וסמן היחס S מתפרש כיחס $<$). הוכיחו שאם $a_0,a_1,..,a_{n-1}$ היא סדרה עולה של אברים מתוך A, אז יש אבר ב-A שהוא גדול מכל אלו (רמז: איזה אבר יש להציב במקום x בפסוק α?). המסקנה: יש סדרה עולה $a_0,a_1,..$ של אברים מתוך N.
2. המשך: באותן הנחות של השאלה הקודמת, הגדירו פונקציה $f:N\rightarrow A$ והוכיחו שהיא חח"ע. (הסיקו ש-A אינסופית ועוצמתה היא אלף אפס).
3. נניח ש-A סופית. האם בהכרח α לא מתקיים במבנה $<A,>>$?
4. הוכיחו שאם A סופית, אז קיים n^* כך ש-$A\subseteq\{0,1,..,n^*-1\}$. רמז: מה נתן להסיק משלילת α?
5. נתונה קבוצה B. נתונה פונקציה חח"ע $g:N\rightarrow B$. נגדיר $C=\{g(n):n\in N\}$. נניח $A=\{n\in N:g(n)\in C\}$. הוכיחו ש-$|A|=|C|$.
6. המשך: בהנחות של השאלה הקודמת, הוכיחו שאם C סופית, אז קיים n^* טבעי כך ש-$A\subseteq\{0,1,..,n^*-1\}$ וגם $C\subseteq\{g(n):n<n^*\}$.
7. נתונה קבוצה של פסוקים $\{\alpha_n:n\in N\}$ כך שעבור n,k שונים α_n,α_k הם פסוקים שונים. נתונות שתי תורות T,T^-. נניח $T^-\subseteq T\cup\{\alpha_n:n\in N\}$.
הוכיחו שאם T^- סופית, אז יש n^* טבעי כך ש-$T^-\cap\{\alpha_n:n\in N\}\subseteq\{\alpha_n:n<n^*\}$.

תרגילי הכנה למשפט הקומפקטיות - פתרונות

1. הפסוק $\forall x\exists y(S(x,y))$ מתקיים במבנה $<A,<>$. בפרט עבור $x=a_{n-1}$, מתקיים $\exists y(S(a_{n-1},y))$. פסוק זה מתפרש ב-$<A,<>$ כ-$\exists y(a_{n-1}<y)$. לכן יש אבר ב-A שהוא גדול מ-a_{n-1}. נקרא לאבר החדש a_n. מכיון שהסדרה $a_0,a_1,..,a_{n-1}$ עולה, a_n גדול מכל הקודמים.
2. נגדיר $f:N\to A$ כך: $f(n)=a_n$. נוכיח שהיא חח"ע: יהיו $n,k\in N$. נניח $f(n)=f(k)$, כלומר $a_n=a_k$. צ"ל $n=k$. נניח בשלילה ש-$n\neq k$. מקרה א: $n<k$. מכיון שהסדרה עולה, $a_n<a_k$, סתירה. מקרה ב: $k<n$. דומה למקרה א. מ.ש.ל. מסקנה: $|N|\le|A|$. מצד שני, $A\subseteq N$ ולכן $|A|\le|N|$. לסכום $|A|=|N|$.
3. כן. הוכחה: נניח בשלילה ש-α כן מתקיים. אז לפי השאלה הקודמת, A איננה סופית.
4. נניח ש-A סופית. לפי השאלה הקודמת במבנה $<A,<>$ מתקיים הפסוק $\neg\alpha$, כלומר (לפי חוקי דה-מורגן), $\exists x\forall y(x\geqslant y)$. לכן יש n (ב-A, אבל זו לא הנקודה החשובה) כך ש-כל המספרים ב-A לא יותר ממנו. נגדיר $n^*=n+1$. לפיכך: $A\subseteq\{0,1,..,n^*-1\}$.
5. פתרון: נגדיר $h:A\to C$ כך: $h(n)=g(n)$. לפי הגדרת A, לכל $n\in A$, מתקיים $g(n)\in C$. לפיכך זו אכן פונקציה. נוכיח שהיא חח"ע ועל. חח"ע: יהיו $n,k\in A$. נניח $h(n)=h(k)$. אז $g(n)=g(k)$. מכיון ש-g חח"ע $n=k$. על: יהי $y\in C$. אז יש $n\in N$, כך ש-$y=g(n)$. לפי הגדרת A, מתקיים $n\in A$. כמוכן $h(n)=y$. מ.ש.ל.
6. אם C סופית, אז A סופית ולכן לפי השאלה הקודמת, יש n^* טבעי כך ש-$A\subseteq\{0,1,..,n^*-1\}$. נותר להוכיח $C\subseteq\{g(n):n<n^*\}$. יהי $c\in C$. צ"ל $c\in\{g(n):n<n^*\}$. לפי הגדרת C, יש n טבעי, כך ש-$c=g(n)$. לפי הגדרת A, מתקיים $n\in A$. לכן $n<n^*$. לכן $c\in\{g(n):n<n^*\}$. מ.ש.ל.
7. נגדיר $A=\{n\in N:\alpha_n\in T^-\}$. נגדיר פונקציה $f:A\to T^-$ כך: $f(n)=\alpha_n$. לפי הגדרת A, $f(n)$ אכן שייך ל-T^- ולכן f היא באמת פונקציה. בדומה לשאלה 5, מוכיחים שהיא חח"ע ועל. לכן $|T^-|=|A|$. מכיון ש-T^- סופית, גם A סופית. לכן לפי שאלה 4, יש n^* טבעי כך ש-$A\subseteq\{0,1,..,n^*-1\}$. צ"ל: $T^-\cap\{\alpha_n:n\in N\}\subseteq\{\alpha_n:n<n^*\}$. יהי α פסוק באגף שמאל. אז $\alpha\in\{\alpha_n:n\in N\}$, כלומר שיש n כך ש-$\alpha=\alpha_n$. לפי הגדרת A, מתקיים $n\in A$. לכן $n<n^*$. לכן α שייך לאגף ימין.

תרגילים על משפט הקומפקטיות

1. יהא $L=\{f,g,S,c_0,c_1\}$ אוצר מילים ויהא: $M=<R,+,*,<,0,1>$ מבנה המפרש את L כאשר: $f^M=+$, $g^M=*$, $S^M=<$, $c_0{}^M=0$, $c_1{}^M=1$. תהא T קבוצת הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M.
נגדיר את שם העצם: $\bar{n}$ כאשר: $\bar{n}=f((\dots f(f(f(1,1),1),1)\dots),1)$ – מפעילים את f n פעמים.
   א. האם יש ל T מודל ובו קיים איבר טבעי a המקיים $\bar{a}=f(c_1,c_0)$ וגם $\bar{a}=g(c_1,c_0)$.
   ב. האם יש מודל M ל T ובו איבר a כך ש: $M\vDash\bar{n}<a$ לכל n טבעי.

2. יהא $L=\{f,g,S\}$ אוצר מילים ויהא: $M=<N,+,*,<>$ מבנה המפרש את L כאשר: $f^M=+$, $g^M=*$, $S^M=<$. תהא T קבוצת הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M. האם יש מודל של T ובו "סדרה אינסופית יורדת", $a_0>a_1>\cdots>a_n>\cdots$?
(באפן מדויק יש לכתב ש-$S(a_1,a_0)$ מתקיים במודל במקום $a_0>a_1$ וכן הלאה).

3. תהיינה $T_0\subseteq T_1\subseteq T_2\ldots\subseteq T_n\subseteq\cdots$ תורות באוצר מילים L (T_n תורה לכל n טבעי) ונניח שלכל n, התורה T_n עקבית. הוכח: $T^*=\bigcup_{n=0}^{\infty}T_n$ עקבית (T^* היא איחוד כל התורות).

4. יהא $L=\{S,f\}$ אוצר מילים כאשר S סימן יחס דו מקומי ו f סימן פונקציה דו מקומית. יהיו 3 מבנים המפרשים את L:
$M_1=<Q,<,*>$, $M_2=<R^+,<,*>$, $M_3=<R,<,+>$ תהא T_1 קבוצת כל הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M_1, T_2 קבוצת כל הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M_2 ו T_3 קבוצת כל הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M_3.
   א. האם התורה $T_1\cup T_3$ עקבית? הוכח!
   ב. האם התורה $T_2\cup T_3$ עקבית? הוכח!
   ג. האם יש מודל M ל T_3 בו קיים איבר c המקיים: $S(f(x,y),c)$ לכל 2 איברים x,y מהעולם של M? הוכח!

5. יהא $L=\{S,a_1,a_{-1}a_2,a_{-2},\ldots\}$ אוצר מילים כאשר S הוא יחס דו מקומי ו, $a_1,a_{-1}a_2,a_{-2},\ldots$ הם אינסוף סימני קבועים.
נתון: $M=<\mathbb{Z},<,1,-1,2,-2,\ldots>$. מבנה ב L. (כלומר, הפירוש של S ב M הוא היחס קטן ממש ו-$a_i{}^M=a_i$). תהי T קבוצת כל הפסוקים שמתקיימים ב M.
   א. האם יש ל T מודל בו יש איבר c שגדול מכל הפירושים של $a_1,a_{-1}a_2,a_{-2},\ldots$ במודל, כלומר מתקיים $S(a_i,c)$ לכל i.
   ב. האם יש ל T מודל בו יש איבר שקטן מכל הפירושים של $a_1,a_{-1}a_2,a_{-2},\ldots$ במודל, כלומר מתקיים $S(c,a_i)$ לכל i.

6. יהי $L=<a,S,f>$ אוצר מילים כאשר a הוא סימן קבוע כלשהו, S הוא סימן יחס דו מקומי ו f הוא סימן פונקציה חד מקומית. עבור תורה T כלשהיא ב L האם ייתכן שיתקיימו 2 התנאים הבאים:
   א. לכל n טבעי יש מודל M_n של T ובו לפחות n איברים שונים: $a_1,a_2,\ldots,a_n$ המקיימים את הנוסחא $S(a,f(x))$ כלומר כאשר מציבים כל אחד מ $a_1,a_2,\ldots,a_n$ במשתנה x שבנוסחה, הפסוק שמתקבל מקבל ערך T ב M_n.
   ב. אין מודל של T בו קיימים אינסוף איברים המקיימים את הנוסחא $S(a,f(x))$.

7. יהא $L=\{S,f\}$ אוצר מילים כאשר S סימן יחס דו מקומי, f סימן פונקציה דו מקומית. יהא

$M=<\{A\subseteq\mathbb{N}|\ A$ סופית $\},\subseteq,\cup>$. תהא T קבוצת כל הפסוקים ב L המתקיימים ב M.

א. האם התורה:

$T^+=T\cup\{\exists x\forall y\exists x_1,x_2,\dots x_n(S(x,y)\to f\big(x_1,f(x_2,\dots,f(x_{n-1},x_n)\dots)\big)=y)|n\in\mathbb{N}\}$ עיקבית? הוכח!

נגדיר אוצר מילים חדש: $L^+=L\cup\{c\}$ כאשר: c סימן קבוע.

ב. יהא $k\in\mathbb{N}^+$, האם התורה: $T^+=T\cup\{\exists x_1,x_2,\dots x_n(A\wedge B)|k\le n\in\mathbb{N}^+\}$ עיקבית כאשר:

$A=(x_1\ne x_2\wedge x_1\ne x_3\wedge\dots\wedge x_{n-1}\ne x_n)$ - כלומר,כל האיברים $x_1,\dots,x_n$ שונים ו-

$B=(S(x_1,x_2)\wedge S(x_2,x_3)\wedge\dots\wedge S(x_k,c)\wedge S(c,x_{k+1})\wedge S(x_{k+1},x_{k+2})\wedge\dots\wedge S(x_{n-1},x_n))$?

ג. האם יש מודל M' ב L^+ ל T המקיים את הנוסחא $A[a]=S(a,c)$ לכל $a\in|M'|$? הוכח!

8. סדר קווי S על קבוצה A הוא סדר טוב אם ורק אם לכל תת קבוצה לא ריקה של A יש איבר ראשון (מינימאלי) לפי הסדר S, באופן שקול, לא קיימת סדרה יורדת אינסופית ב A (כלומר לא קיימת סדרה אינסופית $a_0,a_1,\dots$ של איברים שונים זה מזה מ-A כך שלכל $i\in\mathbb{N}$ $S(a_{i+1},a_i)$).
הוכח באמצעות משפט הקומפקטיות שלא קיימת תורה T באוצר המילים L={R} שבו R סימן יחס דו-מקומי, כל שלכל מבנה M ב-L , M מקיים את T אם ורק אם R מתפרש ב-M כסדר טוב (הדרכה: הוסף אינסוף קבועים לאוצר המילים).

9. תהי A קבוצת התת-קבוצות הסופיות של N (למשל, $\{1,2,6\}\in A$ אבל קבוצת המספרים הזוגיים לא שייכת ל-A כי היא אינסופית).
נתון <u>אוצר מילים</u> L שיש בו סמן יחס דו-מקומי S, סמן פונקציה דו-מקומית g וסמן של קבוע אישי c_a לכל a בקבוצה A. למשל, $c_{\{4,3\}}\in L$.
נגדיר <u>מבנה</u> M שמפרש את L כך: העולם של M הוא A, S^M הוא יחס ההכלה (למשל, $S^M(\{1,5\},\{1,2,5\})$, כי $\{1,5\}\subseteq\{1,2,5\}$).
g^M היא פונקציית האיחוד (למשל $g^M(\{1,2\},\{1,3\})=\{1,2,3\}$). לבסוף $c_a{}^M=a$ לכל a בקבוצה A.
נסמן ב-Th(M) את קבוצת הפסוקים ב-L שמתקיימים במבנה M.
נגדיר <u>אוצר מילים</u> $L^+=L\cup\{d\}$ (ב-L^+ מופיע בנוסף לסמנים שמופיעים ב-L, גם סמן של קבוע אישי d).
נגדיר <u>תורה</u> $T^+=T\cup\{S(c_a,d)\ :\ a\in A\}$.
הוכיחו בעזרת משפט הקומפקטיות ש-T^+ עקבית.

תרגילים על משפט הקומפקטיות - פתרונות

1.

א. לא. הפסוק $\bar{1} = f(c_1, c_0)$ מתקיים במבנה M ולכן: $\bar{1} = f(c_1, c_0) \in T$, וכן הפסוק $\bar{0} = g(c_1, c_0)$ מתקיים במבנה M ולכן: $\bar{0} = g(c_1, c_0) \in T$ (ועבור כל מספר אחר, שלילת הפסוק נמצאת ב T)כי T היא קבוצת כל הפסוקים המתקיימים ב M, מכאן: שאם $\bar{a} = \bar{1}$ אז נקבל שצריך מודל המקיים את הפסוק: $\bar{1} = g(c_1, c_0)$ ואת שלילתו ואם $\bar{a} = \bar{0}$ אז נקבל שצריך מודל המקיים את הפסוק: $\bar{0} = f(c_1, c_0)$ ואת שלילתו. ואם $\bar{a} = \bar{k}$ $(k \in N)$ נקבל שצריך מודל המקיים את 2 הפסוקים ואת שלילתם ולכן לא ייתכן מודל כזה.

ב. נגדיר את אוצר המילים: $L^+ = L \cup \{S, a\}$ ואת התורה: $T^+ = T \cup \{S(\bar{n}, a)\}_{n \in N}$, צ"ל: T^+ עקבית. לפי משפט הקומפקטיות, מספיק להוכיח שלכל תת קבוצה סופית של T^+ קיים מודל ומזה ינבע ש T^+ עקבית. תהא $T^- \subseteq T^+$ תת קבוצה סופית: $T^- \subseteq T \cup \{S(\bar{n}, a)\}_{n=0}^{n^*}$ ($n^* \in N$ מספר סופי כלשהו), צ"ל: T^- עקבית. נגדיר מבנה:

$M^* =< R, +, *, 0, 1, <, a = n^* + 1 >$. M^* מקיים את T כי הצמצום שלו ל L שווה למבנה M וכן $n^* + 1$ גדול מכל הטבעיים שלפניו. ומכאן לפי משפט הקומפקטיות, T^+ עקבית ולכן קיים מודל כנדרש. V

2. נגדיר את אוצר המילים: $L^+ = L \cup \{a_i\}_{i \in N}$, כאשר a_i סימני קבועים חדשים ונגדיר את התורה:

$T^+ = T \cup \{S(a_i, a_j)\}_{i > j \in N}$, צ"ל: T^+ עקבית. לפי משפט הקומפקטיות, מספיק להוכיח שלכל תת קבוצה סופית של T^+ קיים מודל ומזה ינבע ש T^+ עקבית. תהא $T^- \subseteq T^+$ תת קבוצה סופית: אז $T^- \subseteq T \cup \{S(a_i, a_j)\}_{i > j = 0}^{n^*}$ ($n^* \in N$ מספר סופי כלשהו), צ"ל: T^- עקבית. נגדיר מבנה: $M^* =< N, +, *, <, a_i : i \in N >$ כאשר: $a_i = n^* - i$ עבור $i \leq n^*$ ו $a_i = 0$ עבור $i > n^*$. M^* מקיים את T כי הצמצום שלו ל L שווה למבנה M וכן מתקיים $n^* > n^* - 1 > \cdots > 0$. ומכאן לפי משפט הקומפקטיות, T^+ עקבית ולכן קיים מודל כנדרש. V

3. לפי משפט הקומפקטיות, מספיק להוכיח שלכל תת קבוצה סופית של T^* קיים מודל ומזה ינבע ש T^* עקבית. תהא $T^- \subseteq T^*$ תת קבוצה סופית, אז $T^- \subseteq \bigcup_{n=0}^{n^*} T_n$ ($n^* \in N$ מספר סופי כלשהו), צ"ל: T^- עקבית. מכיוון ש $T_0 \subseteq T_1 \subseteq T_2 \ldots \subseteq T_{n^*}$ נקבל שהאיחוד שווה ל T_{n^*} ולפי הנתון, T_{n^*} עקבית ולכן T^- עקבית ולפי משפט הקומפקטיות, גם T^* עקבית. V

4.

א. לא. הפסוק $A = \exists x \forall y (f(x, y) = x)$ מתקיים ב M_1 ולא ב M_3 ולכן $A \in T_1$ ו $\neg A \in T_3$ כי T_1, T_3 הן התורות של M_1, M_3 בהתאמה. ומכאן ש $A \in T_1 \cup T_3$ וגם $\neg A \in T_1 \cup T_3$ ולא ייתכן מבנה המקיים פסוק ושלילתו ולכן התורה אינה עקבית.

ב. כן. המבנים M_3, M_2 איזומורפיים ע"י הפונקציה: $f(x) = e^x$, $f: M_3 \to M_2$ ולכן כל פסוק שמתקיים ב M_2 מתקיים ב M_3 (ולהיפך) ולכן התורות שלהם שוות ומכאן: $T_2 \cup T_3 = T_2 = T_3$ ומכיוון ש T_2, T_3 עקביות נובע ש $T_2 \cup T_3$ עקבית.

ג. לא, ב-M_3 לכל c נבחר $x = 0, y = c$ אז לא מתקיים $x + y < c$. לכן הפסוק $\neg(\exists z \forall x, y\, S(f(x, y), z))$ ב-T_3.

5. נגדיר את אוצר המילים: $L^+ = L \cup \{b, c\}_{i \in N}$ ואת התורה:

$T^+ = T \cup \{S(b, a_i)\}_{i \in Z - \{0\}} \cup \{S(a_i, c)\}_{i \in Z - \{0\}}$, צ"ל: T^+ עקבית. לפי משפט הקומפקטיות, מספיק להוכיח שלכל תת קבוצה סופית של T^+ קיים מודל ומזה ינבע ש T^+ עקבית ולכן סעיפים א,ב ינבעו. תהא $T^- \subseteq T^+$ תת קבוצה סופית: $T^- \subseteq T \cup \{S(b, a_i)\}_{i=-z^*}^{n^*} \cup \{S(a_i, c)\}_{i=-z^*}^{n^*}$ ($z^*, n^* \in N$ מספרים סופיים כלשהם), צ"ל: T^- עקבית. נגדיר מבנה: $M^* =< Z, <, (a_i{}^M : i \in Z - \{0\}), b^{M^*}, c^{M^*} >$ כאשר:

$b^{M^*} = -z^* - 1$ ו $c^{M^*} = n^* + 1$. M^* מקיים את T כי הצמצום שלו ל L שווה למבנה M וכן מתקיים ש c^{M^*} גדול מכל הפירושים עד n^* ו b^{M^*} קטן מכל הפירושים עד $-z^*$. ומכאן לפי משפט הקומפקטיות, T^+ עקבית ולכן קיים מודל כנדרש.

6. לא. נניח בשלילה שמתקיימים התנאים א' ו ב'. נגדיר את התורה: $T^* = T \cup \{S(a, f(c_i)) \mid i \in \mathbb{N}\} \cup \{c_i \neq c_j \mid i < j \in \mathbb{N}\}$, כאשר c_i סימני קבועים חדשים. לפי א' לכל תת קבוצה סופית של T^* יש מודל (מדוע? אנו משאירים לקורא לכתוב את הפרוט!) ולכן לפי משפט הקומפקטיות ל-T^* יש מודל ולכן סתירה לתנאי ב'.

תרגילים על עוצמות של קבוצות

1. הוכח: $|\mathbb{N}| = |A|$ כאשר: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ \text{איזוגי } x\}$.

2. הוכח שהקבוצה: $A = \{2^x \mid x \in \mathbb{N}\}$ היא בת מניה.

3. הוכח שהקבוצה: $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x \geq -12\}$ היא בת מניה.

4. תהי A קבוצה בת מניה. הוכח שכל תת-קבוצה שלה גם היא בת-מניה.

5. תהיינה A, B, C, D קבוצות כך ש $A \cap C = B \cap D = \emptyset$, וגם $|A| = |B|, |C| = |D|$. הוכח ש $|A \cup C| = |B \cup D|$.

6. הוכח: $|A \times B| = |B \times A|$.

7. הוכח: $|(A \times B) \times C| = |A \times (B \times C)|$.

8. הוכח שאם $|D| \geq |C|$, $|B| \geq |A|$, אז $|B \times D| \geq |A \times C|$.

9. הסיקו מהשאלה הקודמת שאם הקבוצות A,B הן בנות-מניה אז $A \times B$ היא קבוצה בת-מניה.

10. הוכיחו באנדוקציה שלכל n טבעי חיובי, N^n היא קבוצה בת-מניה. (הוכיחו תחילה טענת עזר: $|N^{n+1}|=|N^n \times N|$. הסבר: כל אבר באגף שמאל הוא סדרה של $n+1$ מספרים טבעיים. אבר באגף ימין הוא זוג סדור, שאברו הראשון הוא סדרה של n מספרים טבעיים ואברו השני הוא מספר טבעי).

11. הסיקו מהשאלה הקודמת שקבוצת הסדרות הסופיות של מספרים טבעיים היא בת-מניה.

12. הסיקו מהשאלה הקודמת שקבוצת הקבוצות הסופיות של מספרים טבעיים היא בת-מניה.

13. הראה שהקבוצה: $A = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{N},\ a < b < c\}$ היא בת מנייה.

14. הוכח: אם $|A| = |B|$ אז $|P(A)| = |P(B)|$.

15. הוכח: $|[0,1]| = |(0,2)|$. הוכח: $|(0,1)| = |(2,4)|$.

16. הוכח: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^+|$.

17. תהיינה A , B קבוצות. נתון כי $A \sim B$ (כלומר $|A|=|B|$), $a \in A$ ו- $b \in B$. הוכח כי: $A \setminus \{a\} \sim B \setminus \{b\}$.

18. הוכח: אם $A \setminus B \sim B \setminus A$ אז $A \sim B$.

19. תהי A קבוצה לא ריקה.
הוכח שהתנאים הבאים שקולים:
    א. קיימת פונקציה f על מ- $\mathbb{N}$ ל-A.
    ב. קיימת פונקציה $g: A \rightarrow \mathbb{N}$ חח"ע.

20. יחס סדר מלא $(A, \leq)$ נקרא סדר טוב אם לכל $B \subseteq A$ יש איבר ראשון. הוכח שאם A בת מניה אז ניתן להגדיר עליה יחס סדר טוב, כלומר סדר קווי שבו לכל תת קבוצה יש איבר קטן ביותר.

21. הוכח שקבוצת כל המעגלים במישור $\mathbb{R}^2$, כך שמרכזם בעלי קואורדינטות רציונליות והרדיוס שלהם הוא מספר רציונלי, היא קבוצה בת מניה.

22. מהי העוצמה של הקבוצה $A \cup \mathbb{N}$ כאשר A היא קבוצת המספרים האי רציונאליים ששייכים לקבוצה $\{\sqrt[n]{m} \mid m , n \in \mathbb{N}\}$?

23. הוכח ש:
    - $|\mathbb{R}| = |[0,\infty)|$

24. $|\mathbb{R}| = |(3,4)|$

25. $|\mathbb{R}| = |[0,1]|$
-
- $|\mathbb{R}| = |(0,1]|$
-
- $|\mathbb{R}| = |P(\mathbb{N})|$

26.

27. יהי $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש $a < b$. מה תוכלו להגיד על עוצמת הקבוצות הבאות? (מצאו קבוצות אחרות השוות בעוצמתן לקבוצות אלו).

א. (a,∞) ג. $(-\infty,a)$ ה. (a,b)

ב. $[a,\infty)$ ד. $(-\infty,a]$ ו. $[a,b]$

28. יהי A, B קבוצות כך ש$|A| = |B| = |\mathbb{R}|$.
   א. האם $|A \cup B| = |\mathbb{R}|$? רמז: שימו לב $|(-\infty,-1]| = |(-1,1)| = |[1,\infty)| = |\mathbb{R}|$
   ב. האם $|A \cap B| = |\mathbb{R}|$?

29. יהי $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$. הוכח ש$|A| = |B|$.

30. האם יש שני מבנים איזומורפיים M_1, M_2, כך שהעולם של M_1 הוא N ואילו העולם של M_1 הוא R?

31. האם יש שני מבנים איזומורפיים M_1, M_2, כך שהעולם של M_1 הוא N ואילו העולם של M_1 הוא Z?

32. בכל אחד מהסעיפים הבאים, הוכח או הפרך שהקבוצה היא בת מניה:
   א. $A = \{a \in \mathbb{R}^+ | \exists q \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Q}^+ : a^q = k\}$
   ב. $B = \{X \subseteq R | \exists a \in \mathbb{Z} : X \cup \{a\} = \mathbb{R}\}$
   ג. $C = \{(x,y) | x,y \in \mathbb{R} : x^2 = y \wedge |x-y| < 1\}$
   ד. $D = \{X \in \mathbb{P}(\mathbb{N}) | X \cup \{x \in \mathbb{N} | x < 100\} = \mathbb{N} \vee X \backslash \{x \in \mathbb{N} | x < 100\} = \emptyset\}$

33. תהא X: קבוצה של קבוצות לא ריקות כך שלכל 2 איברים A, B ב X מתקיים: $|A| \neq |B|$.
   הוכח או הפרך: קיימת $M \in X$ כך ש $|X| \leq |M|$.

34. סדר את הקבוצות הבאות לפי העוצמה שלהן וציין אם יש שוויון:
   א. $A = \{x \in \mathbb{R} | x \cdot \pi \in \mathbb{Z}\}$
   ב. $B = \{(X,Y) | X \subseteq \mathbb{Q}, Y \subseteq \mathbb{Q}, |X| < |Y|\}$
   ג. $C = \{X \subseteq P(\mathbb{N}) | \bigcup_{x \in X} x = \mathbb{N}\}$, (רמז: הסתכל על $P(\mathbb{N}) \backslash \{\mathbb{N}\}$).
   ד. $D = \{X \subseteq \mathbb{R} | \forall x,y \in X : |x-y| > 10\}$
   ה. $E = \{X \subseteq \mathbb{Q} || X \cap (0,1)| = |X \cap (-1,0)|\}$

35. א. הוכח ש $\{X \in P(\mathbb{N}) | X$ אינסופית$\}$ אינה בת מניה.
   ב. מצא את עוצמת קבוצת כל הסדרות הטבעיות האינסופיות המונוטוניות עולות.

תרגילים על עוצמות של קבוצות – פתרונות

1. נגדיר פונקציה $f: N\to A$ ע"י $f(n)=2n+1$. נוכיח שהיא חח"ע ועל. חח"ע: יהיו $n,k\in N$. נניח $f(n)=f(k)$, כלומר $2n+1=2k+1$. אז $2n=2k$ ולכן $n=k$.
על: יהי $y\in A$. נגדיר $n=(y-1)/2$. נוכיח ש-$n\in N$ וגם $f(n)=y$. מכיון ש-y אי-זוגי, $1<y$. לכן $0\leqslant y-1$. לכן $0\leqslant n$. כמוכן מכיון ש-y אי-זוגי, n מספר שלם. לכן $n\in N$. $f(n)=2n+1=2[(y-1)/2]+1=y-1+1=y$.

2. נגדיר פונקציה על $f:\mathbb{N}\to A$ המוגדרת ע"י $f(x)=2^x$, נבדוק שהיא על:
על: יהא $y\in A$ צ"ל שקיים x כך ש: $f(x)=y$.
נבחר: $x=\log_2 y$ (y הוא מהצורה 2^x ולכן x הוא מספר שלם) ונקבל: $f(\log_2 y)=2^{\log_2 y}=y$.

3. נגדיר פונקציה חח"ע ועל $f:A\to\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f(x)=x+12$, נבדוק שהיא חח"ע ועל:
חח"ע: יהיו $x_1,x_2\in A$ נניח: $f(x_1)=f(x_2)$ צ"ל: $x_1=x_2$. לפי ההנחה: $x_1+12=x_2+12$ ומכאן ש: $x_1=x_2$.
על: יהא $y\in\mathbb{N}$ צ"ל שקיים x כך ש: $f(x)=y$. ואכן נבחר: $x=y-12$. ונקבל: $f(y-12)=y-12+12=y$.

4. מהנתון נובע שקיימת פונקציה חח"ע $f: A\to N$. תהי B תת-קבוצה של A. נגדיר פונקציה $g: B\to N$ ע"י $g(x)=f(x)$. אז g חח"ע (בדקו).

5. לפי ההנחה קיימות פונקציות חח"ע ועל $f: A\to B$, $g: C\to D$. נגדיר פונקציה $h: A\cup C\to B\cup D$ לפי מקרים: עבור $x\in A$, נגדיר $h(x)=f(x)$ ועבור $x\in C$, נגדיר $h(x)=g(x)$. כאן יש להעיר שמכיון ש-A,C זרות, זו אכן הגדרה של פונקציה [אם הן לא היו זרות, אז היה $x\in A\cap C$ ואז $h(x)=f(x)$ וגם $h(x)=g(x)$ ואם $f(x)\neq g(x)$, אז h מתאימה לאבר x שני אברים שונים. לפיכך במקרה כזה h לא היתה פונקציה]. נוכיח ש-h חח"ע ועל. הוכחת חח"ע: יהיו $x,y\in A\cup C$. צ"ל שאם $h(x)=h(y)$ אז $x=y$, כלומר צ"ל $h(x)\neq h(y)$ או $x=y$. מקרה א: $x,y\in A$. במקרה זה אם $h(x)=h(y)$ אז $f(x)=f(y)$ ולפי החח"ע של f, נקבל $x=y$. מקרה ב: $x\in A,y\in C$. במקרה זה, $h(x)=f(x)\in B$ ואילו $h(y)=g(x)\in D$ ומכיון ש-C,D זרות, $h(x)\neq h(y)$. מקרה ג: $x\in B,y\in A$. דומה למקרה ב. מקרה ד: $x,y\in C$. דומה למקרה א. הוכחת על: יהי $y\in B\cup D$. מקרה א: $y\in B$. מכיון ש-f על, יש $x\in A$ כך ש-$f(x)=y$. לכן $h(x)=f(x)=y$. מקרה ב: $y\in D$. דומה למקרה א.

6. נגדיר פונקציה חח"ע ועל $f:A\times B\to B\times A$ ע"י $f(x,y)=(y,x)$, נבדוק שהיא חח"ע ועל:
חח"ע: יהיו $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in A\times B$ נניח: $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$ צ"ל: $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$.
לפי ההנחה: $(y_1,x_1)=(y_2,x_2)$ ומכאן ש: $x_1=x_2$ וגם $y_1=y_2$ ולכן מתקיים ש: $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$.
על: יהא $(y_1,y_2)\in B\times A$ צ"ל שקיים (x_1,x_2) כך ש: $f(x_1,x_2)=(y_1,y_2)$. ואכן נבחר: $x_1=y_2$ ו $x_2=y_1$.
ונקבל: $f(y_2,y_1)=(y_1,y_2)$.

7. נגדיר פונקציה חח"ע ועל $f:(A\times B)\times C\to A\times(B\times C)$ המוגדרת ע"י $f((a,b),c)=(a,(b,c))$, נבדוק שהיא חח"ע ועל:
חח"ע: יהיו $((a_1,b_1),c_1),((a_2,b_2),c_2)\in(A\times B)\times C$
נניח: $f((a_1,b_1),c_1)=f((a_2,b_2),c_2)$ צ"ל: $((a_1,b_1),c_1)=((a_2,b_2),c_2)$. לפי ההנחה: $(a_1,(b_1,c_1))=(a_2,(b_2,c_2))$ ומכאן ש: $a_1=a_2$ וגם $b_1=b_2$ ו גם $c_1=c_2$ ולכן מתקיים ש: $((a_1,b_1),c_1)=((a_2,b_2),c_2)$.
על: יהא $(y_1,(y_2,y_3))\in A\times(B\times C)$ צ"ל שקיים $((x_1,x_2),x_3)$ כך ש: $f((x_1,x_2),x_3)=(y_1,(y_2,y_3))$.
ואכן נבחר: $x_1=y_1$ ו $x_2=y_2$ ו $x_3=y_3$. ונקבל: $f((y_1,y_2),y_3)=(y_1,(y_2,y_3))$.

8. לפי הנתון יש פונקציות על $f: B\to A$, $g: D\to C$. נגדיר פונקציה $h: B\times D\to A\times C$ ע"י $h(b,d)=<f(b),g(d)>$. מספיק להוכיח שהיא על. יהי $y\in A\times C$, כלומר $y=<a,c>$, כאשר $a\in A$, $c\in C$. מכיון ש-f על, יש $b\in B$ כך ש-$f(b)=a$. מכיון ש-g על, יש $d\in D$ כך ש-$g(d)=c$. נגדיר $x=<b,d>$ ונקבל $h(x)=h(<b,d>)=<a,c>=y$.

9. לפי הנתונים $|N|\geq|A|$ וגם $|N|\geq|B|$. לכן לפי השאלה הקודמת $|N\times N|\geq|A\times B|$. אולם לפי משפט, $N\times N$. לכן $A\times B$ בת-מניה.

10. הוכחת טענת העזר: נגדיר $f: N^{n+1}\to N^n\times N$ ע"י $f(<a_1,a_2,..,a_{n+1}>)=<<a_1,..,a_n>,a_{n+1}>$. נוכיח שהיא חח"ע ועל. הוכחת חח"ע:
יהיו $x,y\in N^{n+1}$. נניח $f(x)=f(y)$. צ"ל $x=y$. יש מספרים טבעיים $a_1,..,a_{n+1}$ כך ש-$x=<a_1,..,a_{n+1}>$ ויש מספרים טבעיים $a_1,..,a_{n+1}$ כך ש-$y=<b_1,..,b_{n+1}>$. מכיון ש-$f(x)=f(y)$, מתקיים השוויון $<<a_1,..,a_n>,a_{n+1}>=<<b_1,..,b_n>,b_{n+1}>$. זהו שוויון בין זוגות סדורים. לכן הרכיב השני בשני האגפים שווה, כלומר $a_{n+1}=b_{n+1}$. כמוכן הרכיב הראשון באגף שמאל שווה לרכיב הראשון באגף ימין, כלומר $<a_1,..,a_n>=<b_1,..,b_n>$. קבלנו שוויון בין n-יות סדורות. לכן כל הרכיבים שווים. לפיכך $x=y$. הוכחת על:

יהי $y\in N^n\times N$, כלומר שיש $a_1,..,a_{n+1}$ טבעיים כך ש-$y=<<a_1,..,a_n>,a_{n+1}>$. נגדיר $x=<a_1,..,a_{n+1}>$. אז x שייך לתחום ומתקיים $f(x)=y$. בזאת הוכחה טענת העזר. עתה נוכיח באנדוקציה שלכל n טבעי חיובי, N^n היא קבוצה בת-מניה. עבור n=1, N היא קבוצה בת-מניה. הנחת האנדוקציה: N^n בת-מניה. צ"ל N^{n+1} בת-מניה. הוכחה: לפי טענת העזר והנחת האנדוקציה, N^{n+1} היא מכפלה של שתי קבוצות בנות-מניה. לכן לפי השאלה הקודמת היא בת-מניה.

11. לכל סדרה סופית יש n כך היא בארך n. לכן קבוצת הסדרות הסופיות של מספרים טבעיים היא הקבוצה $\cup\{N^n: n\in N\}$. לפי השאלה הקודמת לכל n, N^n בת-מניה. ולכן לפי משפט, הקבוצה כולה בת-מניה.

12. נעזר בשאלה הקודמת. תהי A קבוצת הסדרות הסופיות של מספרים טבעיים ותהי B קבוצת הקבוצות הסופיות של מספרים טבעיים. נגדיר פונקציה $f: A\to B$ כך: עבור סדרה x, נגדיר f(x) היא קבוצת האברים שמופיעים בסדרה x (לדוגמא: $f(<4,2,6,2>)=\{2,4,6\}$. אם נצליח להוכיח ש-f היא על, אז נסיק ש-$|A|\geq|B|$. מכאן נסיק לפי השאלה הקודמת ש-B בת-מניה. נוכיח ש-f היא על: יהי $y\in B$. נגדיר $n=|y|$. נגדיר את x כסדרה העולה בארך n שהאברים שלה הם אברי y. אז $x\in A$ ומתקיים השוויון $f(x)=y$.

13. נגדיר פונקציה חח"ע: $id: A\to\mathbb{N}^3$ ע"י: $id(a,b,c)=(a,b,c)$ ולכן: $|A|\le|\mathbb{N}^3|$ ומכיוון ש $\mathbb{N}^3$ היא בת מניה (מכפלה קרטזית סופית של קבוצות בנות מניה) אז גם A היא בת מניה.

14. מכיוון ש: $|A|=|B|$ אז קיימת פונקציה חח"ע ועל $f: A\to B$. נגדיר פונקציה $g: P(A)\to P(B)$ ע"י $g(x)=\{f(a): a\in x\}$. נוכיח ש-g חח"ע. יהיו $x,y\in P(A)$. נניח $g(x)=g(y)$. צ"ל $x=y$. כוון ראשון: נוכיח $x\subseteq y$. יהי $a\in x$. אז $f(a)\in g(x)$. לכן $f(a)\in g(y)$. לכן לפי הגדרת g, יש $a'\in y$ כך ש-$f(a)=f(a')$. אולם מכיון ש-f חח"ע, $a=a'$. לכן $a\in y$. הכוון השני דומה. נוכיח ש-g היא על. יהי $y\in P(B)$. נגדיר $x=\{f^{-1}(b): b\in y\}$. אז $x\in P(A)$. נוכיח ש-$g(x)=y$. כוון ראשון: נוכיח $g(x)\subseteq y$. יהי $b\in g(x)$. נוכיח ש-$b\in y$. לפי הגדרת g, יש $a\in x$, כך ש-$b=f(a)$. לכן לפי הגדרת x, יש $b'\in y$, כך ש-$a=f^{-1}(b')$, כלומר $f(a)=b'$. לכן $b'=f(a)=b$. מכיון ש-$b'\in y$, גם $b\in y$. כוון שני: נוכיח ש-$y\subseteq g(x)$. יהי $b\in y$. צ"ל $b\in g(x)$. מכיון ש-f על, יש $a\in A$ כך ש-$f(a)=b$. אם נוכיח ש-$a\in x$, אז נוכל להסיק ש-$b\in g(x)$. אכן, מכיון ש-$a=f^{-1}(b)$, לפי הגדרת x, מתקיים $a\in x$. לפיכך $b\in g(x)$. מ.ש.ל.

15. נגדיר פונקציה חח"ע ועל $f:(0,1)\to(0,2)$ המוגדרת ע"י $f(x)=2x$, נבדוק שהיא חח"ע ועל:
חח"ע: יהיו $x_1,x_2\in(0,1)$ נניח: $f(x_1)=f(x_2)$ צ"ל: $x_1=x_2$. לפי ההנחה: $2x_1=2x_2$ ומכאן ש: $x_1=x_2$.
על: יהא $y\in(0,2)$ צ"ל שקיים x כך ש: $f(x)=y$. ואכן נבחר: $x=\frac{y}{2}$. ונקבל: $f\left(\frac{y}{2}\right)=\frac{2y}{2}=y$.
נגדיר פונקציה חח"ע ועל $f:(0,1)\to(2,4)$ המוגדרת ע"י $f(x)=2x+2$, נבדוק שהיא חח"ע ועל:
חח"ע: יהיו $x_1,x_2\in(0,1)$ נניח: $f(x_1)=f(x_2)$ צ"ל: $x_1=x_2$. לפי ההנחה: $2x_1+2=2x_2+2$ ומכאן ש: $x_1=x_2$.
על: יהא $y\in(2,4)$ צ"ל שקיים x כך ש: $f(x)=y$. ואכן נבחר: $x=\frac{y-2}{2}$. ונקבל: $f\left(\frac{y-2}{2}\right)=\frac{2y-4}{2}+2=y$.

16. נגדיר פונקציה חח"ע ועל $f:\mathbb{N}^+\to\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י $f(x)=x-1$, נבדוק שהיא חח"ע ועל:
חח"ע: יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{N}^+$ נניח: $f(x_1)=f(x_2)$ צ"ל: $x_1=x_2$. לפי ההנחה: $x_1-1=x_2-1$ ומכאן ש: $x_1=x_2$.
על: יהא $y\in\mathbb{N}$ צ"ל שקיים x כך ש: $f(x)=y$. ואכן נבחר: $x=y+1$. ונקבל: $f(y+1)=y+1-1=y$.

17. לפי ההנחה קיימת פונקציה $f: A\to B$ חח"ע ועל. נגדיר פונקציה g חח"ע ועל: $g: A\backslash\{a\}\to B\backslash\{b\}$.
אם: $f(a)=b$ אז נגדיר $g(x)=f(x)$ ולכן g חח"ע ועל כי f חח"ע ועל.
אם $f(a)=y$ ו $f(x)=b$. אז נגדיר: $g(t)=\begin{cases} f(x), & t\neq x\\ y, & t=x\end{cases}$, במקרה הראשון $g(t)=f(x)$ ולכן g חח"ע ועל כי f חח"ע ועל. במקרה השני: $g(x)=y$ וזו התאמה יחידה.

18. לפי ההנחה קיימת פונקציה $f: A\backslash B\to B\backslash A$ חח"ע ועל. נגדיר פונקציה g חח"ע ועל: $g: A\to B$ ע"י: $g(x)=\begin{cases} f(x), & x\in A\backslash B\\ x, & x\in A\cap B\end{cases}$ נבדוק שהיא חח"ע ועל:
חח"ע: יהיו $x_1,x_2\in A$ נניח: $g(x_1)=g(x_2)$ צ"ל: $x_1=x_2$.
לפי ההנחה: אם $x_1,x_2\in A\backslash B$ $f(x_1)=f(x_2)$ ומכיוון ש f חח"ע נקבל ש: $x_1=x_2$.
אם $x_1,x_2\in A\cap B$ אז $x_1=x_2$. (אם $x_1\in X$ ו $x_2\in Y$, אז לא ייתכן ש $g(x_1)=g(x_2)$ כי $A\backslash B$ ו $A\cap B$ זרות)
על: יהא $y\in B$ צ"ל שקיים x כך ש: $g(x)=y$.

אם $y \in B\setminus A$ נבחר: $x = f^{-1}(y)$ ($x \in A\setminus B$) ונקבל: $g\left(f^{-1}(y)\right) = f\left(f^{-1}(y)\right) = y$.
אם $y \in A \cap B$ נבחר: $x = y$ ($x \in A \cap B$) ונקבל: $g(y) = y$.

19. כוון ראשון: נניח א ונוכיח ב. נגדיר $g(a) = min\{n|f(n) = a\}$. נשים לב שמכיוון שf היא על תמיד יהיה לפחות n אחד בקבוצה ולכן g היא פונקציה. יהיו $a, a' \in A$ כך ש$g(a) = g(a')$.
אזי $min\{n|f(n) = a\} = min\{n|f(n) = a'\}$. נסמן ב$n$ את האיבר המוחזר. לכן $f(n) = a$ וגם $f(n) = a'$, אבל f היא פונקציה לכן $a = a'$.
כוון שני: נניח ב ונוכיח א. מכיוון ש$A \neq \emptyset$ קיים $a \in A$. נגדיר פונקציה $f: \mathbb{N} \to A$ ע"י $f(n) = \begin{cases} g^{-1}(n) & if\ exists \\ a & else \end{cases}$
נוכיח תחילה שf היא פונקציה. יהי $n \in \mathbb{N}$, אם קיים לו מקור תחת פונקציה g אז מכיוון שg חח"ע המקור יחיד ולכן $f(n)$ תחזיר איבר אחד ויחיד. אם לא קיים מקור אז $f(n) = a$.
נראה שהיא על: יהי $y \in A$, קל לראות שהמקור שלו תחת f הוא $g(y)$, מכיוון ש$y = g^{-1}\left(g(y)\right) = f\left(g(y)\right)$.

20. A בת מניה ולכן ע"פ התרגיל הקודם קיימת פונקציה $f: A \to \mathbb{N}$ חח"ע. נגדיר יחס $\leq$ ע"י $a \leq a'$ אם"ם $f(a) \leq_{\mathbb{N}} f(a')$, כאשר $\leq_{\mathbb{N}}$ הוא יחס הסדר הרגיל על הטבעיים. נוכיח שהוא יחס סדר מלא.
<u>רפלקסיביות:</u>
יהי $a \in A$. נשים לב שמתקיים $f(a) \leq_{\mathbb{N}} f(a)$ ולכן $a \leq a$.
<u>טרנזיטיביות:</u>
יהי $a, b, c \in A$ כך ש$a \leq b$ וגם $b \leq c$. לפי הגדרה מתקיים $f(a) \leq_{\mathbb{N}} f(b)$ וגם $f(b) \leq_{\mathbb{N}} f(c)$, ומכיוון ש$\leq_{\mathbb{N}}$ טרנזיטיבי נקבל ש$f(a) \leq_{\mathbb{N}} f(c)$ ולכן $a \leq c$.
<u>אנטי-סימטריות:</u>
יהי $a, b \in A$ כך ש$a \leq b$ וגם $b \leq a$. לפי הגדרה מתקיים $f(a) \leq_{\mathbb{N}} f(b)$ וגם $f(b) \leq_{\mathbb{N}} f(a)$, ומכיוון ש$\leq_{\mathbb{N}}$ יחס אנטי-סימטרי נקבל ש$f(a) = f(b)$ ולכן $a = b$.
<u>טוטאליות:</u>
יהי $a, b \in A$. נשים לב ש$f(a) \leq_{\mathbb{N}} f(b)$ או $f(b) \leq_{\mathbb{N}} f(a)$, אך ע"פ הגדרה $a \leq b$ או $b \leq a$. לכן $\leq_{\mathbb{N}}$ יחס סדר מלא.
יהי $B \subseteq A$. נסתכל על הקבוצה $f(B) = \{n \in \mathbb{N}: \exists b \in B\ f(b) = n\} \subseteq \mathbb{N}$.
לפי עקרון המינימום יש לכל תת קבוצה של הטבעיים איבר ראשון, עבור הקבוצה $f(B)$ נסמן את האיבר הראשון בm.
נוכיח ש$f^{-1}(m)$, שמוגדר כי f היא חח"ע, הוא איבר ראשון בB, כלומר לכל $b \in B$ מתקיים $f^{-1}(m) \leq b$. מכיוון שm איבר ראשון ב$f(B)$ לכל $n \in f(B)$ מתקיים $m \leq_{\mathbb{N}} n$. יהי $b \in B$ לכן $m \leq_{\mathbb{N}} f(b)$, ולכן $f^{-1}(m) \leq_{\mathbb{N}} b$.

21. כל מעגל במישור $\mathbb{R}^2$ מוגדר ע"י נקודה $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, המייצגת את מרכז המעגל ומספר $r \in \mathbb{R}$, המייצג את הרדיוס. מכיוון שבקבוצה הנ"ל כל המרכזים הם בעלי קואורדינטות רציונליות ורדיוס רציונלי נקבל בעצם קבוצת כל השלשות $(a,b,r) \in \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^+$. מכיוון $\mathbb{Q}$ בת מניה ומכיוון שמכפלה קרטזית סופית של קבוצות בנות מנייה, היא בת מנייה, נקבל ש$\mathbb{Q}^2$ בת מניה. מכיוון שתת קבוצה של בת מניה, גם היא בת מניה נקבל ש$\mathbb{Q}^+$ היא בת מניה ולפי אותו טיעון כמו מקודם $\mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^+$ בת מניה.

22. הקבוצה בת-מניה. על מנת להוכיח זאת, מספיק להוכיח ש-A בת-מניה. נגדיר פונקציה $f: \mathbb{N}^2 \to A$ לפי מקרים: f מתאימה לזוג הסדור $\langle n,m \rangle$ את השורש ה-n-י של m אם זהו מספר אי-רציונלי. אם זה מספר רציונלי, אז $f(\langle n,m \rangle)$ מוגדר כשורש של 2. זו איננה פונקציה חח"ע. אבל מכיון שהיא פונקציה על, $|\mathbb{N}^2| \leq |A|$. מכיוון ש $\mathbb{N}^2$ היא קבוצה בת מניה אז גם A היא קבוצה בת מניה ולכן האיחוד שלה עם $\mathbb{N}$ הוא גם בן מניה.

23. לצורך ההוכחות נשתמש בשקילות: $|\mathbb{R}| = |(0,\infty)| = |(0,1)|$ ע"י הפונקציות:
$f: \mathbb{R} \to (0,\infty)\ ,\ f(x) = e^x$. ו $g: (0,\infty) \to (0,1)\ ,\ g(x) = e^{-x}$.
<u>נוכיח f חח"ע</u>: יהיו $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ נניח: $f(x_1) = f(x_2)$ צ"ל: $x_1 = x_2$. לפי ההנחה: $e^{x_1} = e^{x_2}$ ולכן: $x_1 = x_2$.
<u>נוכיח f על</u>: יהא $y \in (0,\infty)$ צ"ל שקיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש: $f(x) = y$. נבחר: $x = \ln y$ ונקבל: $f(\ln y) = y$.
<u>נוכיח g חח"ע</u>: יהיו $x_1, x_2 \in (0,\infty)$ נניח: $g(x_1) = g(x_2)$ צ"ל: $x_1 = x_2$. לפי ההנחה: $e^{-x_1} = e^{-x_2}$ ולכן: $x_1 = x_2$.
<u>נוכיח g על</u>: יהא $y \in (0,1)$ צ"ל שקיים $x \in (0,\infty)$ כך ש: $g(x) = y$. נבחר: $x = -\ln y$ ונקבל: $g(-\ln y) = y$.

24. נוכיח ש: $|(3,4)| = |(0,1)|$ ע"י $f: (0,1) \to (3,4)\ ,\ f(x) = x + 3$
<u>נוכיח f חח"ע</u>: יהיו $x_1, x_2 \in (0,1)$ נניח: $f(x_1) = f(x_2)$ צ"ל: $x_1 = x_2$.לפי ההנחה: $x_1 + 3 = x_2 + 3$ ולכן: $x_1 = x_2$.

<u>נוכיח f על</u>: יהא $y\in(3,4)$ צ״ל שקיים $x\in(0,1)$ כך ש: $f(x)=y$. נבחר: $x=y-3$ ונקבל: $f(y-3)=y$.

25. נוכיח ש: $|[0,\infty)|=|(0,\infty)|$ ע״י $f:(0,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\in\mathbb{N}\\ x, & x\notin\mathbb{N}\end{cases}$

<u>נוכיח f חח״ע</u>: יהיו $x_1,x_2\in(0,\infty)$ נניח: $f(x_1)=f(x_2)$ צ״ל: $x_1=x_2$.

לפי ההנחה: אם $x_1,x_2\in\mathbb{N}$ $x_1-1=x_2-1$ ולכן: $x_1=x_2$. אם $x_1,x_2\notin\mathbb{N}$ $x_1=x_2$.

<u>נוכיח f על</u>: יהא $y\in[0,\infty)$ צ״ל שקיים $x\in(0,\infty)$ כך ש: $f(x)=y$.

אם $y\in\mathbb{N}$ נבחר: $x=y+1$ ונקבל: $f(y+1)=y$. ואם $y\notin\mathbb{N}$ נבחר: $x=y$ ונקבל: $f(y)=y$.

26. נוכיח ש: $|[0,1]|=|(0,1)|$ ע״י $f:[0,1]\to(0,1)$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0\\ \frac{1}{3}, & x=1\\ \frac{1}{\frac{1}{x}+2}, & x\in\left\{\frac{1}{x}\in\mathbb{N}, x\neq 1\right\}\\ x, & else\end{cases}$

<u>נוכיח f חח״ע</u>: יהיו $x_1,x_2\in[0,1]$ נניח: $f(x_1)=f(x_2)$ צ״ל: $x_1=x_2$

לפי ההנחה: אם $x_1=x_2=0$, $x_1=x_2=1$ אז ברור ש: $x_1=x_2$.

אם $x_1,x_2\in\left\{\frac{1}{x}\in\mathbb{N}, x\neq 1\right\}$ אז $\frac{1}{\frac{1}{x_1}+2}=\frac{1}{\frac{1}{x_2}+2}$ ולכן: $x_1=x_2$. אחרת נקבל: $x_1=x_2$.

<u>נוכיח f על</u>: יהא $y\in(0,1)$ צ״ל שקיים $x\in[0,1]$ כך ש: $f(x)=y$

אם $y=\frac{1}{2}$ או $y=\frac{1}{3}$ נבחר: $x=0$ או $x=1$ בהתאמה. אם y מהצורה: $\frac{1}{\frac{1}{x}+2}$, נבחר: $x=\frac{y}{1-2y}$ ונקבל: $f(\frac{y}{1-2y})=y$.

אחרת נבחר: $x=y$ ונקבל: $f(y)=y$.

27. נוכיח ש: $|(0,1]|=|(0,1)|$ ע״י $f:(0,1]\to(0,1)$, $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=1\\ \frac{1}{\frac{1}{x}+1}, & x\in\left\{\frac{1}{x}\in\mathbb{N}, x\neq 1\right\}\\ x, & else\end{cases}$

(ההוכחה זהה כמו בפונקציה הקודמת)

28. נשתמש בשקילות: $|A|=|(0,1)|$ כאשר: $A=\{x\in[0,1]|$ רק הספרות 0 ו 1$\}$. ע״י 2 פונקציות חח״ע: $f:(0,1)\to A$

$f(0.a_1a_2a_3\dots)=0.b_{10}b_{11}b_{12}\dots b_{20}b_{21}b_{22}b_{23}\dots$ כאשר: $a_i\in\{0..9\}$ ו b_{ij} הוא 1 אם הספרה $a_i=j$ ו 0 אחרת.

נוכיח ש f חח״ע: יהיו $x,y\in(0,1)$ נניח: $f(x)=f(y)$ צ״ל: $x=y$

לפי ההנחה: $0.x_{10}x_{11}x_{12}\dots=0.y_{10}y_{11}y_{12}\dots$ ומכאן בהכרח: $x_{10}=y_{10}$, $x_{11}=y_{11}$ … ולכן $x=y$.

הפונקציה בכיוון השני תהיה: $id:A\to(0,1)$ (פונקצית הזהות היא חח״ע)

29. נוכיח ש: $|P(\mathbb{N})|=|A|$ ע״י הפונקציה: $f:A\to P(\mathbb{N})$ $f(0.a_0a_1a_2\dots)=\{x\in\mathbb{N}|\ a_x=1\}$

<u>נוכיח f חח״ע</u>: יהיו $x_1,x_2\in A$ נניח: $f(x_1)=f(x_2)$ צ״ל: $x_1=x_2$.

לפי ההנחה: $\{k\in\mathbb{N}|\ x_{1_k}=1\}=\{k\in\mathbb{N}|\ x_{2_k}=1\}$ ומכאן בהכרח ש: $x_1=x_2$.

<u>נוכיח f על</u>: יהא $Y\in P(\mathbb{N})$ צ״ל שקיים $x\in A$ כך ש: $f(x)=Y$.

$Y=\{k\in\mathbb{N}|\ y_k=1\}$ נבחר: $x=0.y_0y_1y_2\dots$ ונקבל: $f(0.y_0y_1y_2\dots)=Y$.

30. לא, כי $|\mathbb{N}|\neq|\mathbb{R}|$.

31. כן, הוכחה: $|Z|=|N|$. לכן יש פונקציה חח״ע ועל $f: Z\to N$. עתה נתבונן באוצר המילים L שהוא הקבוצה הריקה. נגדיר שני מבנים לאוצר מילים זה. $M_1=(Z)$, $M_2=(N)$. f היא איזומורפיזם ביניהם (היא עומדת בתנאי לגבי הקבועים האישיים, כי אין קבועים אישיים. היא עומדת בתנאי לגבי היחסים, כי אין יחסים. כך גם לגבי הפונקציות).