צירוף לינארי:

וקטור $\bar{v}$ הוא צירוף לינארי של וקטורים $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ אם קיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ כך ש- $\bar{v} = \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \dots + \alpha_n \bar{u}_n$

1. האם $\bar{u} = (3,1,-2,-2) \in Span(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$.

כאשר: $\bar{u}_1 = (1,0,-1,1)$ $\bar{u}_2 = (-1,0,2,1)$ $\bar{u}_3 = (5,0,-7,1)$ $\bar{u}_4 = (2,1,0,-1)$

$$\bar{u} = \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \alpha_3 \bar{u}_3 + \alpha_4 \bar{u}_4$$

$$(3,1,-2,2) = \alpha_1(1,0,-1,1) + \alpha_2(-1,0,2,1) + \alpha_3(5,0,-7,1) + \alpha_4(2,1,0,-1)$$

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 + 5\alpha_3 + 2\alpha_4 = 3 \\ \alpha_4 = 1 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 7\alpha_3 = -2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -7 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -7 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+R_1]{R_2-R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -6 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3=2R_3+3R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-7R_4}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$rankA = 3 \neq rankA|b = 4$

אין פתרון

$\Downarrow$

$\bar{u} \notin span(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4)$

2. עבור אילו ערכים של a,b,c מתקיים:

$$(a,b,c) \in span((1,-1,2),(2,1,0),(0,3,-4))$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ -1 & 1 & 3 & b \\ 2 & 0 & -4 & c \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & a \\ 0 & 3 & 3 & b+a \\ 0 & -4 & -4 & c-2a \end{array}\right) \xrightarrow{3R_3+4R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ 0 & 3 & -4 & b+a \\ 0 & 0 & 0 & 3c-2a+4b \end{array}\right)$$

עבור כל a,b,c המקיימים $3c+4b-2a=0$

5.6.16 בדוק אם $(-1,i,1-i) \in span\left\{\begin{array}{l}(3+2i, i-4, 1-3i) \\ (i, 1-i, -1)\end{array}\right\}$ מעל $\mathbb{C}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & 3+2i & -1 \\ 1-i & i-4 & i \\ -1 & 1-3i & 1-i \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1-3i & 1-i \\ 1-i & i-4 & i \\ i & 3+2i & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+iR_1]{R_2+(1-i)R_1} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1-3i & 1-i \\ 0 & -6-3i & -i \\ \cancel{0} & \cancel{6+3i} & \cancel{i} \end{array}\right)$$

$(2,2)$ $i-4+(1-i)(1-3i) = i-4+1-3i-i-3 = -6-3i$

$(2,3)$ $i+(1-i)(1-i) = i+1-2i-1 = -i$

$(3,2)$ $3+2i+i(1-3i) = 3+2i+i+3 = 6+3i$

$(3,3)$ $-1+i(1-i) = -1+i+1 = i$

פתרון יחיד

$\Downarrow$

התשובה "כן"

$rankA = rankA|b = 2 = n$

16.8.17

U תת מרחב של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$

האם $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} \in U$ $\quad U = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -9 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & -6 \\ -9 & -3 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3+9R_1 \\ R_4-2R_1}]{R_2-5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 11 & -33 & -11 \\ 0 & -21 & 63 & 21 \\ 0 & 5 & -15 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3/(-21) \\ R_4/5}]{R_2/11} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \end{array}\right)$$

אינסוף פתרונות $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 12 & -3 \end{pmatrix} \in U$

הגדרה: וקטורים $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ בלתי תלויים לינארית אם

$$\alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \dots + \alpha_n \bar{u}_n = \bar{0} \iff \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = 0$$

1. האם פולינומים הבאים בת"ל?

$P(x) = x^3 + 4x^2 - 2x + 3$

$Q(x) = x^3 + 6x^2 - x + 4$

$R(x) = 3x^3 + 8x^2 - 8x + 7$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & 8 & 0 \\ -2 & -1 & -8 & 0 \\ 3 & 4 & 7 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{R_3+2R_1 \\ R_4-3R_1}]{R_2-4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & +1 & -2 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

אינסוף פתרונות $\Rightarrow$ ת"ל

2. האם פונקציות $f(x)=x$, $g(x)=x^2$, $h(x)=e^x$ בת"ל?

נניח: פונקציה כללית $ax+bx^2+ce^x$

$f(x) \to (1,0,0)$

$g(x) \to (0,1,0)$ $\Rightarrow$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ פתרון יחיד $\Downarrow$ בת"ל

$h(x) \to (0,0,1)$

3. נתונים וקטורים: $\bar{a} = (1,1,1,x)$ $\bar{b} = (1,1,x,1)$

$\bar{c} = (1,x,1,1)$ $\bar{d} = (x,1,1,1)$

א) עבור אילו ערכים של x וקטורים יהיו ת"ל?

ב) עבור לכך שלא שמצאת בסעיף א' רשום את $\bar{d}$ כצירוף לינארי של $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

א)

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & x & 0 \\ 1 & 1 & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 & 1 & 0 \\ x & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_4-xR_1]{R_2, R_3-R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 1-x & 0 \\ 0 & x-1 & 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 1-x & 1-x & 1-x^2 & 0 \end{array}\right)$$

$x=1 \to (1\ 1\ 1\ 1|0)$

אינסוף פתרונות

$\Downarrow$

ת"ל

$x \neq 1$

$R_2, R_3, R_4 / (x-1)$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & x+1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & x+1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 = R_4 + R_2 + R_3}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 & 0 \end{array}\right)$ דרגת מט' 3 $\Downarrow$ בת"ל

ב) $x = 1$ $\left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\alpha_3 = t$
$\alpha_2 = s$
$\alpha_1 = 1 - t - s$

$\bar{d} = (1-t-s)\bar{a} + s\bar{b} + t\bar{c}$

3. להוכיח שאם במרחב וקטורי V וקטורים $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ בת"ל
אז גם וקטורים $\bar{u}, \bar{u}+\bar{v}, \bar{u}+\bar{v}+\bar{w}$ בת"ל.

נתון: $\alpha_1 \bar{u} + \alpha_2 \bar{v} + \alpha_3 \bar{w} = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

הוכחה: $\beta_1, \beta_2, \beta_3 = ?$

$\beta_1 \bar{u} + \beta_2(\bar{u}+\bar{v}) + \beta_3(\bar{u}+\bar{v}+\bar{w}) = \bar{0}$

$(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)\bar{u} + (\beta_2 + \beta_3)\bar{v} + \beta_3 \bar{w} = 0$

$\Downarrow$

$\begin{cases} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ \beta_2 + \beta_3 = 0 \\ \beta_3 = 0 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ דרגת מט' 3 $\Downarrow$ $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ $\Downarrow$ בת"ל

4. האם וקטורים $\bar{u} = (1,2,0)$, $\bar{v} = (0,-1,2)$, $\bar{w} = (3,-7,8)$, $\bar{r} = (10,0,-3)$ בת"ל?

לא

5. האם וקטורים $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ בת"ל?

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -5 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & -1 \\ 0 & -7 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \end{pmatrix}$