שדה - מבנה: $\langle F, +, \cdot, 0, 1 \rangle$

1) $\forall a,b \in F \quad a+b \in F,\ a\cdot b \in F$

2) $\forall a,b \in F \quad a+b=b+a,\ a\cdot b = b\cdot a$ (חילוף)

3) $\forall a,b,c \in F \quad (a+b)+c = a+(b+c),\ (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ (קיבוץ / אסוציאטיביות)

4) $\exists\, 0,1 \in F \quad 0\neq 1 : \forall a\in F \quad a+0=a,\ a\cdot 1 = a$ איברים ניטרליים

5) $\forall a\in F \ \exists -a\in F : \quad a+(-a)=0$ איבר נגדי

$\forall a\neq 0 \in F \ \exists\, a^{-1}\in F : \quad a\cdot a^{-1}=1$ איבר הפכי

6) $\forall a,b,c\in F \quad a\cdot(b+c) = ab+ac$ פילוג

דוגמה: כל השברים עם המכנה 3 לא שדה: ל $\frac{2}{3}$ איבר הופכי הוא $\frac{3}{2}$ לא שייך לקבוצה.

$\boxed{i^2=-1}$

מספרים מרוכבים. $\mathbb{C}$

$z = a+ib$

$a = \operatorname{Re} z$ חלק ממשי ; $a,b\in\mathbb{R}$

$b = \operatorname{Im} z$ חלק מדומה

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$\bar{z} = a-ib$ צמוד

1. $4i+2-2(1+3i)+(1+2i)(3+i) = 4i+\cancel{2}-\cancel{2}-\cancel{6i}+3+i+\cancel{6i}+2\underbrace{i^2}_{-1} =$

$= 1+5i$

2. $(1+2i)(4-6i)^2 = (1+2i)(16-48i-36) = (1+2i)(-20-48i) =$

$= -20-48i-40i+96 = 76-88i$

3. $\frac{2i}{3+4i} = \frac{2i}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{6i+8}{9+16} = \frac{8}{25}+\frac{6}{25}i$

4. $(2i)^{10} = 2^{10}(i^2)^5 = -1024$

5. $(i^7-i^{17})^2 = \left(i\cdot(i^2)^3 - i\cdot(i^2)^8\right)^2 = (-2i)^2 = -4$

6. לפתור את המשוואה:

$\frac{z+i}{z-2} = -2i \qquad z+i = -2i(z-2) \qquad z+i = -2iz+4i$

$z(1+2i) = 3i \qquad z = \frac{3i}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{3i+6}{1+4} = \frac{3}{5}(2+i)$

7. $z+i=i(\bar{z}-i)$ נפתור את המשוואה:

$z=a+ib$

$a+ib+i=i(a-ib)+1$

$a+i(b+1)=ai+b+1 \Rightarrow \begin{cases} a=b+1 \\ b+1=a \end{cases} \Rightarrow$ למשוואה יש אינסוף פתרונות: $z=b+1+bi$

$b\in\mathbb{R}$

8. $z^2+(-5+6i)z-1-9i=0$ נפתור את המשוואה:

$\Delta=(-5+6i)^2-4\cdot1\cdot(-(1+9i))=-7-24i$

$\sqrt{-7-24i}=a+ib \quad /(\ )^2$

$-7-24i=a^2+2abi-b^2$

$\begin{cases} a^2-b^2=-7 \\ 2ab=-24 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{144}{b^2}-b^2=-7, \quad a=-\frac{12}{b}$

$b^4-7b^2-144=0$

$b^2=\frac{7\pm25}{2} \to b^2=16, \quad \cancel{b^2=-9}$

כי b מספר ממשי

$b_1=4 \quad a_1=-3$

או

$b_2=-4 \quad a_2=3 \quad \Rightarrow \sqrt{\Delta}=\pm(3-4i)$

$z_1=\frac{-(-5+6i)+(3-4i)}{2}=4-5i \qquad z_2=\frac{-(-5+6i)-(3-4i)}{2}=1-i$

9. $|\operatorname{Im} z|\le|z|$ צ"ל: $z=a+ib$

$|b|\le\sqrt{a^2+b^2} \quad /(\ )^2$

$b^2\le a^2+b^2$

10. $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ צ"ל אי-שוויון המשולש:

$z_1=a+ib \qquad z_2=x+iy$

$\sqrt{(a+x)^2+(y+b)^2}\le\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2+y^2}$

$a^2+2ax+x^2+b^2+2by+y^2\le a^2+b^2+2\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}+x^2+y^2$

$ax+by\le\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}$

$a^2x^2+2abxy+b^2y^2\le a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2$

$0\le a^2y^2-2abxy+b^2x^2$

$(ay-bx)^2\ge0$

צ"ל שמספרים מרוכבים - שדה.

1. $\overset{z_1}{a+ib},\ \overset{z_2}{x+iy}\in\mathbb{C}$ $\qquad z_1+z_2=(a+x)+i(b+y)\in\mathbb{C}$

$$z_1\cdot z_2=(ax-by)+i(ay+bx)\in\mathbb{C}$$

2. $z_1+z_2=a+x+i(b+y)=x+a+i(y+b)=z_2+z_1$

3. ...

4. $0=0+0i$ $\qquad a+ib+0=a+ib$

$1=1+0i$ $\qquad (a+ib)\cdot 1=a+ib$

5. $-z=-a-ib$ $\qquad z+(-z)=a+(-a)+i(b+(-b))=0$

$$z^{-1}=\frac{1}{a+ib}\cdot\frac{a-ib}{a-ib}=\frac{1}{a^2+b^2}\cdot(a-ib)$$

$$z\cdot z^{-1}=(a+ib)\cdot\frac{a-ib}{a^2+b^2}=1$$

6. ...

שדה סופי: $\mathbb{Z}_p$

דוגמה: $\mathbb{Z}_5=\{0,1,2,3,4\}$

טבלה לכפל וחיבור:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

x	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

צ"ל $\mathbb{Z}_4$ אינו שדה

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

x	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

איבר היחידה: $1_{\mathbb{Z}_4}=1$ $\qquad$ איבר אפס: $0_{\mathbb{Z}_4}=0$

איבר הנגדי: $\boxminus_4 3=1$ $\quad \boxminus_4 2=2$ $\quad \boxminus_4 1=3$ $\quad \boxminus_4 0=0$

איבר הופכי אינו מוגדר:

$\alpha^{-1} \boxdot_4 \alpha \neq 1_{\mathbb{Z}_4} = 1$

$\Downarrow$

$\mathbb{Z}_4$. אינו שדה

מאפיין של שדה F - מס' הטבעי קטן ביותר: $n \cdot 1_F = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ פעמים}} = 0_F$

$5 \cdot 1 = 1+1+1+1+1 = 0$ $\quad$ $\text{char}\, \mathbb{Z}_5 = 5$ $\quad$ $\text{char}\, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C} = 0$

$\text{char}\, F$ או 0, או מס' ראשוני

הוכחה: נניח $\text{char}\, F = n \cdot m$ לא ראשוני

$(n \cdot m) \cdot 1 = 0$

$(n \cdot 1) \cdot (m \cdot 1) = 0$

$\Downarrow$

$m \cdot 1 = 0$ או $n \cdot 1 = 0$ סתירה כי מאפיין מס' קטן ביותר

חשב $\text{char}\, \mathbb{Z}_4$ $\quad$ $\mathbb{Z}_4$ לא שדה