חוברת מבחנים הסתברות 1 למדעי המחשב

תוכן עניינים

סיכום החומר:
הגדרות
ומשפטים

סיכום החומר

סימנים:

- ❖ – מייצג הגדרה.
- ▪ – מייצג תוספת/הערה.
- ○ – מייצג דוגמא.
- ★ – מייצג משפט/נוסחא.
- ● – מייצג טיפ.

בסיסי:

❖ מרחב הסתברות (יסומן בדרך כלל ב Ω): קבוצה של כל האפשרויות לתוצאות של הניסוי. לדוגמא, אם הניסוי הוא הטלת קוביה אחת אזי: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. ואם הניסוי הוא הגרלת סידור של 3 איברים בשורה אזי: $\Omega=\{(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,1,2),(3,2,1)\}$.

▪ לכל איבר במרחב ישנה הסתברות שהוא ייקרה, ייתכן ולכל אחד מהאיברים תהיה אותה הסתברות לקרות ואז נאמר שההסתברות היא אחידה ושווה ל: $P(k)=\frac{1}{|\Omega|}$ לכל $k\in\Omega$. (אחד מתוך כלל האיברים)

▪ הדרישות מפונקציית ההסתברות הן:
1. לכל איבר תהיה הסתברות גדולה או שווה ל 0 וקטנה או שווה ל 1, כלומר: $0\le P(k)\le 1$ לכל $k\in\Omega$.
2. סכום כל ההסתברויות שווה ל 1. כלומר: $P(\Omega)=1$.

❖ מאורע: מאורע הוא קבוצה החלקית למרחב ההסתברות.

○ דוגמא: אם מרחב ההסתברות הוא הטלת קוביה: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$ אזי "לקבל מספר זוגי" הוא מאורע השווה לקבוצה: $\{2,4,6\}$.

▪ הסתברות של מאורע A שווה לסכום ההסתברויות לקבל את כל אחד מהאיברים במאורע.

○ בדוגמא לעיל, ההסתברות למספר זוגי היא: $P(\{2,4,6\})=P(2)+P(4)+P(6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$.

★ תכונה: $P(\emptyset)=0$, $P(\Omega)=1$.

פעולות בין מאורעות

❖ איחוד בין מאורעות: $A\cup B$. המשמעות: כל האפשרויות שייקרה המאורע A **או** המאורע B.
נסמן את ההסתברות לאיחוד ב: $P(A\cup B)$.

❖ חיתוך בין מאורעות: $A\cap B$. המשמעות: כל האפשרויות שייקרה המאורע A **וגם** המאורע B.
נסמן את ההסתברות לחיתוך ב: $P(A\cap B)$ ולרוב נרשום פשוט: $P(A,B)$ (הפרדה של פסיק בין המאורעות).

❖ מאורע משלים: $\bar{A}$. המשמעות: כל האפשרויות **שלא** ייקרה המאורע A.

★ נוסחא: $P(\bar{A})=1-P(A)$.

מאורעות זרים

❖ A,B ייקראו מאורעות זרים אם ורק אם $A\cap B=\emptyset$. המשמעות היא שאין שום איבר משותף בין 2 המאורעות. לכן: $P(A,B)=P(\emptyset)=0$.

- לדוגמא: A = "לקבל בהטלת הקוביה מספר המתחלק ב 3": $A = \{3,6\}$.
B = "לקבל מספר הקטן מ 3": $B = \{1,2\}$. מכאן החיתוך ביניהם ריק ולכן הם מאורעות זרים.

- נשים לב: כל מאורע תמיד זר למאורע המשלים שלו. כי $A \cap \bar{A} = \emptyset$.

❖ מאורעות זרים בזוגות: עבור מספר מאורעות A, B, C.
כאשר אומרים שהם זרים אז: $A \cap B \cap C = \emptyset$ (כמו שהוסבר לעיל). אבל ייתכן שהחיתוך בין 2 מתוך הקבוצות **אינו** ריק.

- לדוגמא: $A = \{1,2\}, B = \{2,3\}, C = \{3,4\}$ אז $A \cap B \cap C = \emptyset$ כי אין אף איבר משותף בין 3 הקבוצות. אבל החיתוך $A \cap B, B \cap C$ אינו ריק.

▪ כאשר אומרים שהם זרים בזוגות אז: $A \cap B = \emptyset$, $A \cap C = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$ (כלומר, החיתוך בין כל 2 הוא ריק) וכל שכן ש $A \cap B \cap C = \emptyset$.

מאורעות בלתי תלויים

❖ A, B ייקראו מאורעות בלתי תלויים אם $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. המשמעות היא שהידיעה שקרה מאורע A לא משפיעה כלל על ההסתברות שקרה מאורע B.
ולכן כדי לחשב את ההסתברות שגם A קרה וגם B קרה ניתן לחשב את ההסתברות שכל אחד קרה בנפרד ואז להכפיל.

- כדי להוכיח ששני מאורעות בלתי תלויים יש לחשב את $P(A \cap B)$ בנפרד ואת $P(A) \cdot P(B)$ בנפרד ולהראות שיש שוויון.

- לדוגמא: אם מרחב ההסתברות הוא להטיל קובייה אחת ומטבע אחד הוגן בעל 2 צדדים (0 או 1). כלומר: $\Omega = \{(1,0), (1,1), (2,0), (2,1), \ldots, (6,0), (6,1)\}$ (הראשון בזוג הוא תוצאת הקוביה והשני הוא תוצאת המטבע – ישנם 12 זוגות).
A = "יצא בקוביה מספר הגדול מ 4". B =המטבע נפל על הצד של 0.
אז A, B בלתי תלויים כי $P(A \cap B) = P(\{(5,0), (6,0)\}) = \frac{2}{12}$ ומצד שני:
$P(A) = P(\{(5,0), (6,0), (5,1), (6,1)\}) = \frac{4}{12}$,
$P(B) = P(\{(1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (5,0), (6,0)\}) = \frac{1}{2}$
והמכפלה היא: $P(A) \cdot P(B) = \frac{4}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{12} = P(A \cap B)$.

- הקשר בין מאורעות זרים ובלתי תלויים:
אין קשר בין השניים, בדרך כלל מאורעות זרים הם **כן תלויים**. (כיוון ש $P(A \cap B) = 0$ ולכן רק אם אחד מ: $P(A), P(B)$ הוא 0 נקבל שוויון עבור $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$)
ייתכנו מאורעות שאינם זרים וכן תלויים וייתכנו מאורעות שאינם זרים ובלתי תלויים.

- לדוגמא: A = "לקבל בהטלת הקוביה מספר המתחלק ב 3": $A = \{3,6\}$.
B = "לקבל מספר הקטן מ 3": $B = \{1,2\}$. אז מצד אחד: $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$. אבל מצד שני:
$P(A) = \frac{2}{6}$, $P(B) = \frac{2}{6}$ ולכן: $P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{4}{36} \neq 0$.

עיקרון ההכלה וההדחה

❖ אם מאורעות A, B זרים אז ההסתברות לאיחוד שלהם שווה לחיבור ההסתברויות של A, B.
כלומר: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- אבל אם A,B אינם זרים אז חייבים להשתמש בהכלה והדחה כדי לחשב את ההסתברות לאיחוד:
כלומר: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$. ובאופן כללי עבור n מאורעות:
$P(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)=\Sigma_{i=1}^{n}P(A_i)-\Sigma_{i,j}P\left(A_i\cap A_j\right)+\Sigma_{\mathrm{i,j,k}}P\left(A_i\cap A_j\cap A_k\right)-\cdots+$.

הסתברות מותנית

- כאשר **ידוע** לנו שמאורע B התרחש וכעת עלינו לבדוק מהי ההסתברות שמאורע A התרחש אנו צריכים לחשב את $P(A|B)$ - מה הסיכוי ל A בהינתן ש B כבר קרה.

★ הנוסחה להסתברות מותנית היא: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$. כלומר, מה הסיכוי שגם A קרה וגם B קרה מתוך הסה"כ ש B קרה. נשים לב שהמשמעות היא שמכיוון שאנו יודעים ש B התרחש, אנו מחשיבים אותו למרחב ההסתברות ה"חדש" ולכן מחלקים בהסתברות שלו.

- לדוגמא: מה ההסתברות לקבל מספר זוגי בקוביה כאשר ידוע שיצא מספר גדול מ 3. אז:
נסמן: $A=\{2,4,6\}$ (יצא מספר זוגי). $B=\{4,5,6\}$ (יצא מספר גדול מ 3). וכעת עלינו לחשב את $P(A|B)$.
נחשב: $P(A\cap B)=P(\{4,6\})=\frac{2}{6}$, $P(B)=P(\{4,5,6\})=\frac{1}{2}$ ונציב בנוסחת ההסתברות המותנית: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$. כלומר, מכיוון שידוע שיצא מספר הגדול מ 3 אז האופציות הן 4,5,6 ולכן גודל מרחב המדגם החדש הוא 3 ומתוכו 2 מספרים הם זוגיים ולכן ההסתברות היא 2/3.

★ אם A,B מאורעות בלתי תלויים אז $P(A|B)=P(A)$ כי הידיעה ש B קרה לא מעלה או מורידה את ההסתברות ש A ייקרה.

★ נוסחת ההסתברות השלמה: אם A, B מאורעות אז: $P(A)=P(B)\cdot P(A|B)+P(\bar{B})\cdot P(A|\bar{B})$. כלומר, כדי לחשב את ההסתברות ש A קרה, נחלק למקרים דרך המאורע B. מה הסיכוי ש B קרה ואז בידיעה שהוא קרה, מה הסיכוי ל A או מה הסיכוי ש B לא קרה ואז מה הסיכוי ש A קרה בידיעה ש B לא קרה. (סה"כ המקרים משלימים לסיכוי ש A קרה בלי קשר ל B)

★ באופן כללי: אם $B_1,B_2,\ldots,B_n$ כולם מאורעות זרים בזוגות המשלימים ביחד את כל המרחב Ω אזי ניתן לחשב את ההסתברות ל A באופן הבא:
$P(A)=P(B_1)\cdot P(A|B_1)+P(B_2)\cdot P(A|B_2)+\cdots+P(B_n)\cdot P(A|B_n)$.
המשמעות היא שכדי לחשב את הסתברות A אנו מחלקים את מרחב ההסתברות Ω לשטחים המכסים את כל המרחב ואז עוברים שטח שטח ושואלים מה הסיכוי שנפלנו שם כפול הסיכוי ש A התרחש כאשר ידוע לנו שנפלנו באותו שטח. (וזה מכסה את כל האפשרויות ש A קרה בלי קשר לשטחים).

- נשתמש בנוסחא זו כאשר החישוב הישיר של $P(A)$ מסובך ועדיף לחלק למקרים.

★ חוק בייס: הופך את ההתניה בין 2 המאורעות: $P(A|B)=\frac{P(B|A)\cdot P(A)}{P(B)}$.

- נשתמש בחוק זה כאשר קל יותר לחשב את ההסתברות המותנית ההפוכה וקשה לחשב את החיתוך. (כי בדרך כלל חישוב הסתברות מותנית קל מחישוב חיתוך ותמיד כדאי, אם אפשר, בתרגילים להמיר את הנתונים לחישוב הסתברות מותנית מאשר לחישוב חיתוך).

משתנים מקריים

- משתנה מקרי X הוא פונקציה בין מרחב ההסתברות לערכים בטווח כלשהו. (בקורס זה נדבר רק על משתנים בדידים = יכולים לקבל כל ערכים מקבוצות בנות מניה בלבד)
  - לדוגמא: אם מרחב ההסתברות הוא הטלת 2 קוביות שונות אז:
    $\Omega = \{(1,1),(1,2),(2,1),\dots,(6,6)\}$ (כל האפשרויות לתוצאות של ההטלות) אז X יכול להיות לדוגמא סכום 2 ההטלות: $X(1,1) = 2$, $X(6,6) = 12$, וכו'...
    לכן X הוא פונקציה מ Ω ל $\{2,3,4,\dots,12\}$ (סכומי 2 הטלות אפשריים).

- כאשר שואלים מה ההסתברות ש X יהיה שווה ל k מסויים או בכתיב מתמטי: $P(X=k)$.
  אז למעשה $X=k$ הוא מאורע = קבוצה של כל האיברים ב Ω ש X עבורם נותן את k.
  - בדוגמא לעיל: $X=4$ הוא המאורע: $\{(1,3),(3,1),(2,2)\}$ (כל האפשרויות ל 2 הטלות שסכומן הוא 4).
    ומכאן: $P(X=4)=\frac{3}{36}$ כיוון שלכל תוצאה בקוביה יש הסתברות אחידה של $\frac{1}{6}$ לקבל אותה ולכן זוג תוצאות מתקבל בהסתברות של $\frac{1}{36} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}$. ומכיוון שיש 3 תוצאות טובות (שסכומן 4) נקבל את ההסתברות המבוקשת.

- תומך של משתנה מקרי X: קבוצת הערכים האפשריים של X (בדוגמא לעיל זה הטווח: $\{2,3,4,\dots,12\}$) שעבור כל ערך בקבוצה יש לפחות הסתברות כלשהי לקבל את הערך. (ולכן לדוגמא $\{1,2,3,\dots,12\}$ אינו התומך של X כי ההסתברות לקבל סכום 1 היא 0)

התפלגות של משתנה מקרי

- פונקציית ההתפלגות של משתנה מקרי היא למעשה חישוב $P(X=k)$ עבור k כללי. ולכן, כאשר מבקשים לחשב את ההתפלגות של משתנה מקרי X אז למעשה יש לחשב את $P(X=k)$ כאשר k פרמטר. כמובן שאם כמות ה k בטווח היא סופית, ניתן לחשב לכל k את ההסתברות בנפרד או לעשות פונקציה מפוצלת.

- נשים לב שהסכום $\Sigma_{k\in\Omega}P(X=k)$ (סכום עבור כל ה k) שווה ל 1. (אחרת, זו אינה התפלגות)
  - לדוגמא: אם מרחב ההסתברות הוא הטלת קוביה עד שיוצא 6 בפעם הראשונה אז:
    $\Omega = \{(6),(1,6),(2,6),\dots,(5,6),(1,1,6),\dots\}$ (קבוצה אינסופית של סדרות באורך כלשהו של הטלות קוביה המסתיימות בתוצאה 6). X מונה את מספר ההטלות. אזי לדוגמא: $P(X=3)=\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)$ כי צריך שלא יצא 6 (5 אפשרויות) ב 2 פעמים הראשונות ואז בפעם ה 3 צריך שיצא 6 (אופציה אחת מתוך ה 6).
    לכן, פונקציית ההתפלגות של X היא: $P(X=k)=\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)$ - כדי שיהיה k הטלות, צריך שלא יצא 6 ב $k-1$ ההטלות הראשונות ואז בהטלה ה k יצא 6. $k\in\mathbb{N}^+$.

- סימון נוסף לפונקציית ההתפלגות (נסמנה ב D) הוא: $X\sim D$.

תוחלת של משתנה מקרי

- תוחלת של משתנה מקרי (שתסומן ב $E(X)$) הוא הערך הממוצע שהמשתנה מקבל. ומוגדרת באופן הבא: לכל ערך שיכול להתקבל כתוצאה של המשתנה (בטווח של הערכים), נוסיף לסכום את הערך כפול ההסתברות שהמשתנה ייתן את הערך. $E(X)=\Sigma_k P(X=k)\cdot k$.

- נשים לב שתוחלת יכולה להיות כל מספר (לא רק בין 0 ל 1) כי גם X יכול לקבל ערכים מעבר לטווח 0 עד 1. ואף ייתכן ותוחלת של משתנה תהיה אינסופית.
  - לדוגמא: אם מרחב ההסתברות הוא הטלת 2 קוביות. X = כמות המספרים הזוגיים שיצאו בתוצאת ההטלה. אז הטווח של X הוא: $\{0,1,2\}$ ולכן התוחלת שלו תהיה: $E(X) = 0 \cdot P(X=0) + 1 \cdot P(X=1) + 2 \cdot P(X=2) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$.

תכונות של תוחלת

- ★ חישוב ישיר של התוחלת: $E(X) = \Sigma_k P(X=k) \cdot k$.
- ★ $E(c) = c$ לכל קבוע c.
- ★ $E(aX) = aE(X)$ כאשר X משתנה מקרי, a קבוע.
- ★ $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ כאשר X, Y משתנים מקריים, a, b קבועים. (3 תכונות אלו נקראות ליניאריות התוחלת)
- ★ סכום של n משתנים $\Sigma_{i=1}^{n} X_i$ אז: $E(\Sigma_{i=1}^{n} X_i) = \Sigma_{i=1}^{n} E(X_i)$.
- ★ אם $f(X)$ היא פונקצייה התלויה במשתנה X (לדוגמא: $f(X) = X^2$)

  אזי: $E\big(f(X)\big) = \Sigma_k P(X=k) \cdot f(k)$. (שימו לב שההסתברות מהחישוב הרגיל לא השתנתה אלא רק הפעלנו את הפונקציה על כל ערך k).
- ★ $E\big(E(X)\big) = E(X)$.
- ★ אם X, Y משתנים **בלתי מתואמים** (נגדיר זאת בהמשך) אז $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

- נשתמש בתכונות אלו בתרגילים בהם ידוע לנו תוחלת של משתנה X (או משתנים $X, Y, \ldots$) ואז מגדירים משתנה חדש התלוי במשתנים הידועים ומבקשים למצוא את התוחלת שלו.
  - לדוגמא: אם ידוע ש $E(X) = 3$. נגדיר: $Y = \frac{2X+1}{4}$ אז נוכל לחשוב את התוחלת של Y באופן הבא: $E(Y) = E\left(\frac{2X+1}{4}\right) = E\left(\frac{2X}{4} + \frac{1}{4}\right) = E\left(\frac{1}{2}X\right) + E\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}E(X) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot 3 + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$.

שונות של משתנה מקרי

❖ שונות של משתנה מקרי (שתסומן ב $Var(X)$) היא מדד הפיזור של ערכי המשתנה (כלומר, עד כמה הערכים השונים שהמשתנה יכול לקבל רחוקים זה מזה). את השונות מחשבים כממוצע המרחקים בריבוע של ערכי המשתנה מהממוצע שלו, כלומר: $Var(X) = E\left(\big(X - E(X)\big)^2\right) = \cdots = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$.
נשים לב ששונות היא מספר הגדול או שווה ל 0 (אינה שלילית כי היא מרחק) ויכולה להיות כל מספר (לא רק בין 0 ל 1). ואף ייתכן ושונות של משתנה תהיה אינסופית.

- כדי לחשב שונות של X באופן ישיר עלינו לחשב תחילה את התוחלת של X: $E(X)$ ואת התוחלת של X^2: $E(X^2)$ ולבסוף לחשב: $Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$.
  - דוגמא לחישוב שונות: אם מרחב ההסתברות הוא הטלת 2 קוביות. X = כמות המספרים הזוגיים שיצאו בתוצאת ההטלה. אז הטווח של X הוא: $\{0,1,2\}$. את התוחלת של X חישבנו לעיל: $E(X) = 1$. כעת נחשב את התוחלת של X^2, לפי תכונה של תוחלת פונקציה של X: (כאשר: $f(X) = X^2$)

    $E(X^2) = 0^2 \cdot P(X=0) + 1^2 \cdot P(X=1) + 2^2 \cdot P(X=2) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$.

    ולבסוף נציב בנוסחא: $Var(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$.

תכונות של שונות

- ★ חישוב ישיר של השונות: $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.
- ★ $Var(X) \geq 0$
- ★ $Var(c) = 0$ לכל c קבוע.
- ★ $Var(aX + b) = a^2Var(X)$ כאשר X משתנה מקרי, a, b קבועים.
- ★ אם X, Y משתנים מקריים **בלתי תלויים** (יוסבר בהמשך) אז: $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$.
- ★ סכום של n משתנים **בלתי תלויים**: $\Sigma_{i=1}^{n}X_i$ אז: $Var(\Sigma_{i=1}^{n}X_i) = \Sigma_{i=1}^{n}Var(X_i)$.
- ★ אם X, Y משתנים **תלויים** אז: $Var(X + Y) = Var(X) + Cov(X, Y) + Var(Y)$ כאשר $Cov(X, Y)$ היא השונות המשותפת של X ו Y. (נראה איך לחשב אותה בהמשך)
- ★ סכום של n משתנים **תלויים**: $\Sigma_{i=1}^{n}X_i$ אז: $Var(\Sigma_{i=1}^{n}X_i) = \Sigma_{i=1}^{n}\Sigma_{j=1}^{n}Cov(X_i, X_j)$.

★ נוסחא לסטיית תקן: $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

התפלגויות מיוחדות

- ראינו שההתפלגות של משתנה היא הפונקציה: $P(X = k)$ לכל k בטווח הערכים של X. כעת נראה התפלגויות נפוצות של משתנה מקרי ואת התוחלת והשונות שלהם כך שאם נזהה בתרגיל שהמשתנה מתפלג ככה, זה יחסוך לנו את החישובים של פונקצית ההתפלגות, התוחלת והשונות.
נציין תחילה שרוב המשתנים המקריים **אינם מתפלגים כמו אף אחת** מההתפלגויות הבאות ולכן ייתכן ונתון משתנה שיש לחשב את ההתפלגות שלו.

1. **התפלגות ברנולי:** סימון: $X \sim Ber(p)$. טווח הערכים של X הוא $\{0,1\}$. כלומר X יכול לקבל רק את הערך 0 או את הערך 1. במקרה זה אנו מכנים את X אינדיקטור (1 – דלוק (האירוע קרה), 0 – כבוי (האירוע לא קרה)).
   - ★ פונקציית ההתפלגות: $P(X = 0) = 1 - p$, $P(X = 1) = p$.
   - ★ תוחלת: $E(X) = P(X = 1) = p$. (התוחלת של אינדיקטור שווה פשוט להסתברות שהוא שווה ל 1).
   - ★ שונות: $Var(X) = p(1 - p)$.
   - ★ מתי יודעים ש X מתפלג כך: לפי הערכים (0 או 1).
   - ★ דוגמא: הטלת מטבע הוגן: $X \sim Ber\left(\frac{1}{2}\right)$ כאשר צד אחד של המטבע הוא 0 והצד השני הוא 1.

2. **התפלגות אחידה:** סימון: $X \sim U[a, b]$. טווח הערכים של X הוא כל המספרים השלמים בין a ל b (לעיתים זה יכול להיות מסומן טיפה שונה). המשמעות היא שלכל איבר בטווח יש בדיוק את אותה הסתברות לקרות (אחד חלקי גודל הטווח).
   - ★ פונקציית ההתפלגות: $P(X = k) = \frac{1}{n}$. כאשר n = מספר האיברים בטווח: $n = b - a + 1$.
   - ★ תוחלת: $E(X) = \frac{a+b}{2}$.
   - ★ שונות: $Var(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$.
   - ★ מתי יודעים ש X מתפלג כך: אם רואים שההסתברות זהה לכל k.
   - ★ דוגמא: הטלת קובייה: $X \sim U[1,6]$ כי טווח הערכים הוא מספרים שלמים בין 1 ל 6 ולכן כמות האיברים היא: $n = 6 - 1 + 1 = 6$ וההסתברות לכל איבר היא זהה: $\frac{1}{6}$.

3. **התפלגות בינומית:** סימון: $X \sim B(n, p)$. טווח הערכים של X הוא $\{0,1,2, \dots, n\}$. המשמעות של משתנה זה היא שמבצעים n ניסויים כאשר לכל ניסוי יש סיכוי p להצלחה (וסיכוי $1 - p$ לכשלון) ואין תלות בין הניסויים (תוצאת הניסוי האחד לא משפיעה כלל על הניסוי האחר) אז X סופר בכמה ניסויים מתוך ה n הייתה

הצלחה ולכן הערכים האפשריים שלו הם בין 0 (לא הייתה הצלחה באף ניסוי) ל n (הייתה הצלחה בכל הניסויים)

- ★ פונקציית ההתפלגות: $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. מה הסיכוי ל k הצלחות מתוך n: נבחר k מתוך n ניסויים שבהם תהיה הצלחה (ובשאר יהיה כשלון) כפול ההסתברות להצלחה עבור כל אחד מ k הניסויים שבהם הייתה הצלחה וכפול ההסתברות לכישלון עבור כל אחד מ $n-k$ הניסויים שבהם היה כישלון.
- ★ תוחלת: $E(X)=np$.
- ★ שונות: $Var(X)=np(1-p)$.
- ★ מתי יודעים ש X מתפלג כך: בודקים האם יש משהו שמבצעים שוב ושוב אבל ידוע כמה מבצעים סה"כ (אם הניסוי מתבצע כמות לא ידועה של פעמים אז זה לא בינומי), אין תלות בין הנסיונות, בכל ניסיון יש "הצלחה" (הצלחה יכולה גם להיות: לקבל 6 בקוביה, הכוונה למשהו של כן ולא) ו"כשלון".
- ★ דוגמא: הטלת קובייה 10 פעמים ורוצים לספור כמה פעמים יצא לנו 6: $X\sim Bin\left(10,\frac{1}{6}\right)$ כי יש 10 נסיונות (10 הטלות) בלתי תלויים (מה שיצא מקודם לא משפיע על ההטלה הבאה) ובכל נסיון יש סיכוי להצלחה (הכוונה לסיכוי שיצא 6) של $\frac{1}{6}$.

4. **התפלגות גיאומטרית:** סימון: $X\sim Geom(p)$. טווח הערכים של X הוא מספר שלם בין 1 ל ∞. המשמעות של משתנה זה היא שמבצעים כמות לא ידועה של ניסויים כאשר לכל ניסוי יש סיכוי p להצלחה (וסיכוי $1-p$ לכשלון) ואין תלות בין הניסויים (תוצאת הניסוי האחד לא משפיעה כלל על הניסוי האחר) ומנסים שוב ושוב עד הפעם הראשונה שיש הצלחה (ואז מפסיקים). אז X סופר כמה ניסויים היו עד שקיבלנו את ההצלחה הראשונה ולכן הערכים האפשריים שלו הם בין 1 (הייתה הצלחה כבר בניסיון הראשון) למשהו לא חסום (ההצלחה יכולה לבוא הרבה אחרי...)

- ★ פונקציית ההתפלגות: $P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p$. מה הסיכוי שהיו k ניסיונות עד שהצלחנו. אז נדרוש הסתברות לכישלון בכל אחד מ $k-1$ הנסיונות הראשונים כפול ההסתברות להצליח בדיוק בנסיון ה k.
- ★ תוחלת: $E(X)=\frac{1}{p}$.
- ★ שונות: $Var(X)=\frac{1-p}{p^2}$.
- ★ מתי יודעים ש X מתפלג כך: בודקים האם יש משהו שמבצעים שוב ושוב ולא ידוע כמה מבצעים סה"כ אבל עוצרים בפעם הראשונה שקורה משהו (זו ההצלחה), אין תלות בין הנסיונות, בכל ניסיון יש "הצלחה" (הצלחה יכולה גם להיות: לקבל 6 בקוביה, הכוונה למשהו של כן ולא) ו"כשלון".
- ★ דוגמא: הטלת קובייה עד שיצא לנו 6 ורוצים לספור כמה הטלנו עד שיצא 6: $X\sim Geom\left(\frac{1}{6}\right)$ כי הסיכוי להצלחה (שיצא 6) הוא $\frac{1}{6}$.

5. **התפלגות בינומית שלילית:** סימון: $X\sim NB(r,p)$. טווח הערכים של X הוא מספר שלם בין 0 ל ∞. המשמעות של משתנה זה, בדומה להתפלגות גיאומטרית, היא שמבצעים כמות לא ידועה של ניסויים כאשר לכל ניסוי יש סיכוי p להצלחה (וסיכוי $1-p$ לכשלון) ואין תלות בין הניסויים (תוצאת הניסוי האחד לא משפיעה כלל על הניסוי האחר) ומנסים שוב ושוב עד שיש לנו r **כשלונות** (ואז מפסיקים). אז X סופר בכמה ניסויים הצלחנו (בדומה לבינומית) עד שקיבלנו את r הכשלונות. ולכן הערכים האפשריים שלו הם בין 0 (היו בדיוק r ניסויים ובכולם כשלון) למשהו לא חסום (ההצלחה יכולה לבוא בכל נסיון...)

- ★ פונקציית ההתפלגות: $P(X=k)=\binom{r+k-1}{k}(1-p)^r\cdot p^k$. מה הסיכוי שהיו k הצלחות עד שהגיע הכשלון ה r. אם כן, הניסוי האחרון (זה שעצר אותנו) בטוח היה כשלון ולכן היו סה"כ: $r+k$ נסיונות (כדי שיהיו לנו k הצלחות) שמתוכם האחרון הוא כשלון. ולכן נבחר מתוך $r+k-1$ הנסיונות

הראשונים את k הנסיונות שבהם הייתה הצלחה ונדרוש הסתברות של כשלון לכל אחד מ r הכשלונות כפול הסתברות להצלחה לכל אחת מההצלחות.

- ★ תוחלת: $E(X) = \frac{pr}{1-p}$.
- ★ שונות: $Var(X) = \frac{pr}{(1-p)^2}$.
- ★ מתי יודעים ש X מתפלג כך: בודקים האם יש משהו שמבצעים שוב ושוב ולא ידוע כמה מבצעים סה"כ אבל עוצרים בפעם ה r שקורה משהו (זה הכשלון, אבל לא צריך שהכישלונות יהיו רצופים), אין תלות בין הנסיונות, בכל ניסיון יש "הצלחה" (הצלחה יכולה גם להיות: לקבל 6 בקוביה, הכוונה למשהו של כן ולא) ו"כשלון".
- ★ דוגמא: הטלת קובייה עד שיצא לנו 6 שלוש פעמים ורוצים לספור כמה פעמים לא יצא לנו 6 עד שעצרנו: $X \sim NB\left(3, \frac{1}{6}\right)$.

6. **התפלגות היפר-גאומטרית:** סימון: $X \sim HG(N, D, n)$ (כאשר D, n קטנים או שווים ל N). טווח הערכים של X הוא מספר שלם בין 0 ל D. דוגמא למשמעות של משתנה זה: יש לנו N כדורים בכד, מתוכם D לבנים, והשאר לא לבנים. מוציאים מהכד n כדורים. X סופר כמה מתוך אלו שהוצאנו היו לבנים.

- ★ פונקציית ההתפלגות: $P(X = k) = \frac{\binom{D}{k} \cdot \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$. מה הסיכוי שיצאו לנו בדיוק k כדורים לבנים. סה"כ האפשרויות להוציא n כדורים מתוך N - זהו המכנה. מתוך זה, האפשרויות התקינות הן: נבחר מתוך D הכדורים הלבנים את ה k שיצאו לנו. ומהשאר $(N - D)$ נבחר $n - k$ להשלים ל n כדורים ביד.
- ★ תוחלת: $E(X) = \frac{nD}{N}$.
- ★ שונות: $Var(X) = \frac{n\left(\frac{D}{N}\right)\left(1-\frac{D}{N}\right)(N-n)}{(N-1)}$.
- ★ מתי יודעים ש X מתפלג כך: אם רואים סיפור הדומה לדוגמא שתיארנו.
- ★ דוגמא: נתונה.

7. **התפלגות פואסון:** סימון: $X \sim Pois(\lambda)$. טווח הערכים של X הוא מספר שלם בין 0 ל ∞. המשמעות של משתנה זה היא שידוע לנו שאירוע מתרחש בממוצע כל λ יחידות זמן. X סופר כמה אירועים כאלו התרחשו ביחידת זמן אחת.

- ★ פונקציית ההתפלגות: $P(X = k) = \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$. מה הסיכוי שהתרחשו בדיוק k אירועים ביחידת זמן אחת.
- ★ תוחלת: $E(X) = \lambda$.
- ★ שונות: $Var(X) = \lambda$
- ★ מתי יודעים ש X מתפלג כך: אם רואים סיפור הדומה למה שתיארנו.
- ★ דוגמא: נתון שבממוצע עוברות 10 מכוניות בדקה. ורוצים לספור כמה מכוניות יעברו בדקה הקרובה. $X \sim Pois(10)$.

שני משתנים מקריים

- ❖ $P(X = a, Y = b)$ מייצג את ההסתברות שגם $X = a$ וגם $Y = b$ (חיתוך מאורעות)
  - o לדוגמא: מטילים קובייה פעמיים (כאשר ההטלות בלתי תלויות זו בזו). X סופר כמה פעמים יצא 1. Y סופר כמה מספרים זוגיים יצאו. נחשב את $P(X = 1, Y = 0)$, כלומר מה הסיכוי שיצא בדיוק פעם אחת 1 ולא יצאו מספרים זוגיים בכלל: $P(X = 1, Y = 0) = P(\{(1,3), (1,5), (3,1), (5,1)\}) = \frac{4}{36}$.

תלות בין 2 משתנים מקריים

❖ נאמר ש X,Y משתנים מקריים בלתי תלויים אם ורק אם $P(X=a,Y=b)=P(X=a)\cdot P(Y=b)$ לכל ערכי a,b בטווח הערכים של X,Y בהתאמה.

- כלומר, כדי להוכיח שמשתנים X,Y הם בלתי תלויים צריך להוכיח עבור a,b כלליים שהשוויון מתקיים. כדי להפריך, מספיק להראות דוגמא ל a,b מספרים כך שהשוויון לא יוצא נכון.

  - בדוגמא לעיל (X סופר כמה פעמים יצא 1. Y סופר כמה מספרים זוגיים יצאו) המשתנים תלויים זה בזה כי כמות האחדות יכולה להשפיע על כמות הזוגיים. נראה שהם תלויים: לדוגמא:
    $P(X=2,Y=1)=0$ - כי אם יצאו 2 אחדות אז לא ייתכן שיצא מספר זוגי אחד (היו רק 2 הטלות).
    מצד שני: $P(X=2)=P(\{(1,1)\})=\frac{1}{36}$, $P(Y=1)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (כי יש הסתברות של 1/2 למספר זוגי ולמספר אי-זוגי וכפול 2 כי יכול להיות זוגי-איזוגי או איזוגי-זוגי) וניתן לראות שהמכפלה בין $P(X=2)$ לבין $P(Y=1)$ אינה 0 ולכן לא שווה ל $P(X=2,Y=1)$.

התפלגות משותפת

❖ ההתפלגות המשותפת של X,Y היא חישוב הפונקציה (ב 2 משתנים: a,b): $P(X=a,Y=b)$ לכל a בטווח של X ולכל b בטווח של Y. כלומר, מה ההסתברות ש $X=a$ **וגם** $Y=b$ כאשר a,b פרמטרים כלליים. (חישוב של כל החיתוכים)

- אם הטווח של הערכים של X,Y הוא סופי, ניתן לחשב את הכל בטבלה.

  - בדוגמא לעיל (X סופר כמה פעמים יצא 1. Y סופר כמה מספרים זוגיים יצאו) נבנה את הטבלה הבאה:

Y \ X	0	1	2	Σ
0	$\frac{2}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{36}$	$2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{4}{36}$	$\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$	$\frac{9}{36}$
1	$2\cdot\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{12}{36}$	$2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{6}{36}$	0	$\frac{18}{36}$
2	$\frac{3}{6}\cdot\frac{3}{6}=\frac{9}{36}$	0	0	$\frac{9}{36}$
Σ	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

הסבר לחישובים בטבלה:
$P(X=0,Y=0)$ - לא יצא 1 וגם לא יצא מספר זוגי ולכן יצאו 2 איזוגיים (אבל לא 1) ולכן לכל הטלה יש רק 2 אפשרויות (התוצאה 3 או 5) מתוך 6 המספרים.
$P(X=1,Y=0)$ - יצא פעם אחת 1 וגם לא יצא מספר זוגי ולכן נבחר האם יצא אחד בהטלה הראשונה או השנייה (לכן כפול 2) כפול 1/6 (הסיכוי לקבל 1) וכפול 2/6 (עבור האיזוגי השני)
$P(X=2,Y=0)$ - יצאו 2 אחדות. זה פשוט 1/6 כפול 1/6.
...

- אם הטווח הוא אינסופי, נצטרך לחשב ממש פונקציה כללית.

התפלגות שולית

❖ כאשר יש התפלגות משותפת של 2 משתנים X,Y אז ההתפלגות השולית של X זו ההתפלגות הרגילה של X שהיא הפונקציה: $P(X=k)$ עבור k כללי. אך מכיוון ש 2 המשתנים תלויים זה בזה, ניתן לחשב את

$P(X=k)$ באמצעות מעבר על כל ערכי ה Y האפשריים וסכימה של כל ההסתברויות ש $X=k$ וגם $Y=a$ עבור כל a בטווח של Y (באופן סימטרי מחשבים את ההתפלגות השולית של Y).

- בדוגמא שלנו טווח ערכי X הוא סופי ולכן ניתן לחשב לכל k בנפרד: (נראה דוגמא רק עבור $k=0$) $P(X=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)=\frac{4}{36}+\frac{12}{36}+\frac{9}{36}=\frac{25}{36}$.
  נשים לב שבטבלה זה פשוט סכימת כל עמודה עבור ההתפלגות השולית של X וסכימת כל שורה על ההתפלגות השולית של Y (ולכן הוספתי עמודה של Σ ושורה של Σ).

שונות משותפת

- עבור 2 משתנים X,Y השונות המשותפת שלהם תסומן ב $Cov(X,Y)$ - המשמעות היא עד כמה המשתנים מתואמים אחד עם השני (הכוונה למדד תלות, לדוגמא ככל ש X קטן, Y גדל פי 2).
  ניתן לחשב בחישוב ישיר את השונות המשותפת באמצעות הנוסחא: $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$, כלומר יש לחשב את התוחלת של כל אחד מהמשתנים וכן את התוחלת של XY (זהו משתנה נוסף המכיל את כל המכפלות האפשריות של ערכי X בערכי Y).
  - בדוגמא לעיל(X סופר כמה פעמים יצא 1. Y סופר כמה מספרים זוגיים יצאו) נחשב את $Cov(X,Y)$:
    תחילה נחשב את $E(X)$ (לפי הטבלה לעיל והגדרות התוחלת): $E(X)=0\cdot\frac{25}{36}+1\cdot\frac{10}{36}+2\cdot\frac{1}{36}=\frac{1}{3}$.
    נחשב את $E(Y)$ (לפי הטבלה לעיל והגדרות התוחלת): $E(Y)=0\cdot\frac{9}{36}+1\cdot\frac{18}{36}+2\cdot\frac{9}{36}=1$.
    כעת נחשב את $E(XY)$. המשתנה XY הוא משתנה המקבל את הערכים של X כפול הערכים של Y ולכן ערכיו בדוגמא הם בין 0 ל 4 (2 כפול 2). נחשב את ההסתברויות לכל ערך ולאחר מכן נחשב את התוחלת:
    $P(XY=0)$ - כדי שהמכפלה תהיה 0 צריך שלפחות אחד מהמשתנים יהיה 0 ולכן נסכום את התאים הרלוונטיים בטבלה לעיל:
    $P(XY=0)=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)+$,
    $+P(X=1,Y=0)+P(X=2,Y=0)=\frac{30}{36}$.
    באותו אופן נחשב: $P(XY=1)=P(X=1,Y=1)=\frac{6}{36}$, $P(XY=2)=0$, $P(XY=3)=0$,
    $P(XY=4)=0$ (עבור 2, זה רק כאשר $X=1,Y=2$ או $X=2,Y=1$ ותאים אלו בטבלה הם 0, עבור 3 לא ייתכן מכפלת ערכי X,Y שתתן 3, ועבור 4 זה רק אם $X=2,Y=2$ ובמקרה זה ההסתברות היא 0 כמו שראינו לעיל). כעת: $E(XY)=0\cdot\frac{30}{36}+1\cdot\frac{6}{36}+2\cdot 0+3\cdot 0+4\cdot 0=\frac{6}{36}$.
    נציב בנוסחא ונקבל: $Cov(X,Y)=\frac{6}{36}-\frac{1}{3}\cdot 1=-\frac{6}{36}$. (יצא שלילי כי המשתנים מנוגדים – ככל ש X גדל, Y קטן כי אם יש יותר אחדות יש פחות מספרים זוגיים).

תכונות של שונות משותפת

- ★ חישוב ישיר: $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$.
- ★ $Cov(X,X)=Var(X)$ - שונות משותפת של משתנה עם עצמו זה פשוט השונות של המשתנה.
- ★ $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$ - כי פשוט הופכים בכפל.
- ★ $Cov(aX,Y)=a\cdot Cov(X,Y)$
- ★ $Cov(X+Y,Z)=Cov(X,Z)+Cov(Y,Z)$
- ★ $Cov(aX+bY,Z)=a\cdot Cov(X,Z)+b\cdot Cov(Y,Z)$

- ★ עבור סכומים של משתנים מקריים נקבל ש: $Cov(\Sigma_{i=1}^{n}X_i,\Sigma_{i=1}^{m}Y_i)=\Sigma_{i=1}^{n}\Sigma_{i=1}^{m}Cov(X_i,Y_j)$, כלומר, Cov של סכום משתנים מול סכום משתנים הוא לבצע Cov בין כל משתנה בסכום שבצד שמאל עם כל משתנה בסכום שבצד ימין.
- ★ אם X,Y **בלתי תלויים** אזי: $Cov(X,Y)=0$.
- ★ אם X,Y משתנים **תלויים** אז: $Var(X+Y)=Var(X)+Cov(X,Y)+Var(Y)$
- ★ סכום של n משתנים **תלויים**: $\Sigma_{i=1}^{n}X_i$ אז: $Var(\Sigma_{i=1}^{n}X_i)=\Sigma_{i=1}^{n}\Sigma_{j=1}^{n}Cov(X_i,X_j)$.

  מכאן: $Var(\Sigma_{i=1}^{n}X_i)=\Sigma_{i=1}^{n}Var(X_i)+2\cdot\Sigma_{i<j}Cov\left(X_i,X_j\right)$ וזאת מכיוון שעבור $i=j$ זה $Cov(X_i,X_i)=Var(X_i)$ ומתקיים $Cov\left(X_i,X_j\right)=Cov(X_j,X_i)$ ולכן זה כפול 2 וחישוב רק עבור צד אחד (ש $i<j$)

- ▪ שימו לב: אם המשתנים X,Y בלתי תלויים אז $Cov(X,Y)=0$ אבל אם $Cov(X,Y)=0$ **זה לא אומר** ש X,Y בלתי תלויים (אלא ייתכן שהם בלתי מתואמים).

מקדם המתאם

- ❖ מקדם המתאם של 2 משתנים מקריים X,Y מוגדר כך: $\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\cdot\sqrt{Var(Y)}}$ - עד כמה המשתנים קשורים ליניארית זה בזה.

תכונות של מקדם המתאם

- ★ חישוב ישיר: $\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\cdot\sqrt{Var(Y)}}$
- ★ אם X,Y בלתי תלויים אז $\rho(X,Y)=0$
- ★ $-1\le\rho(X,Y)\le 1$
- ★ $\rho(aX,bY)=s\cdot\rho(X,Y)$ כאשר a,b משתנים (שאינם 0), s = סימן המכפלה בין סימני a,b.
- ★ $\rho(X,X)=1$

הסתברות מותנית בין 2 משתנים

- כאשר יש 2 משתנים מקריים X,Y, ייתכן שיש תלות בין המשתנים כך שחישוב ההסתברות עבור אחד המשתנים יהיה מותנה בערך של המשתנה השני.
  במקרה זה נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה (כמו שראינו לעיל, רק שהפעם זה עם משתנים מקריים ולא מאורעות, אבל זה אותו דבר): $P(X=k)=\Sigma_a P(Y=a)\cdot P(X=k|Y=a)$. (זה כאשר X תלוי ב Y, אם Y תלוי ב X נחשב $P(Y=k)=\Sigma_a P(X=a)\cdot P(Y=k|X=a)$)
  - o לדוגמא: מטילים קוביה עד שיוצא 6. X סופר כמה הטלות היו. Y סופר כמה פעמים יצא 1.
    נשים לב שאם ברצוננו לחשב $P(Y=0)$ - מה ההסתברות שלא היו אחדות זה תלוי בכמה הטלות היו.
    ולכן החישוב יהיה קל יותר באופן הבא: נעבור על כל ערכי ה X האפשריים ונבצע את נוסחת ההסתברות השלמה כי אם ידוע ש $X=n$ אז: $Y|X=n$ זהו משתנה מקרי חדש שבו ידוע שהיו n נסיונות (כאשר באחרון יצא 6) ומתוך זה סופרים הצלחות ולכן הוא מתפלג בינומית: $Y|X=n\sim Bin\left(n-1,\frac{1}{5}\right)$. הסיבה ל $n-1$ היא כי אם ידוע שהיו n הטלות זה אומר שבאחרונה בטוח היה 6 ובשאר בטוח לא היה 6 ולכן יש רק $n-1$ הטלות שעבורם עושים הסתברות ל 1 וההסתברות היא 1 מתוך 5 כי 6 לא יכול לצאת (תמיד בהסתברות מותנית משנים את הנתונים לפי מה שידוע). כעת, קל יותר לחשב את ההסתברות $P(Y=0|X=n)$.
    נחזור לחישוב: (באמצעות נוסחת ההסתברות השלמה)

$$P(Y=0)=\Sigma_{n=1}^{\infty}P(X=n)\cdot P(Y=0|X=n)=\Sigma_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}\cdot\binom{n-1}{0}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{0}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}=$$

$$\frac{1}{6}\Sigma_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{6}\right)^{n-1}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{6}}=\frac{1}{2},$$

כאשר בשוויון האחרון השתמשנו בסכום סדרה הנדסית.

משפט התוחלת השלמה (תוחלת מותנית)

- כאשר יש 2 משתנים X,Y הנמצאים יחד ורוצים לחשב תוחלת, בהרבה מקרים (בעיקר כשיש תלות בין X ל Yת כלומר כשמתקיים: $X|Y=k$ אז קל לחשב את התפלגות X) ניתן להשתמש במשפט הבא:

★ משפט התוחלת השלמה: $E(X)=E\big(E(X|Y)\big)=\Sigma_k P(Y=k)E(X|Y=k)$ כי כאשר ידוע Y, בדרך כלל, קל יותר לחשב את תוחלת X. (הסיגמא עוברת על כל הערכים האפשריים ל Y)

אי-שוויונים בהסתברות

- כאשר נדרשים לחשב אי-שוויון עבור הסתברות (ולא הסתברות מדוייקת) נשתמש באי השוויונים הבאים:

<u>אי-שוויון מרקוב:</u>

יהא X משתנה מקרי, $a>0$ אזי: $P(|X|\geq a)\leq\frac{E(|X|)}{a}$

<u>אי-שוויון צ'בישב:</u> (חסם יותר הדוק אבל קשה יותר לחישוב)

יהא X משתנה מקרי, $a>0$ אזי: $P(|X-E(X)|\geq a)\leq\frac{Var(X)}{a^2}$

- כדי להשתמש באי השויון הזה, צריך להביא את מה שבפנים למצב $|X-E(X)|\geq a$. (לא תמיד זה יהיה נתון מההתחלה).

נוסחאות נוספות

★ סכום סדרה הנדסית אינסופית: $\Sigma_{k=0}^{\infty}a\cdot q^k=\frac{a}{1-q}$ כאשר $|q|<1$. אחרת, הסכום שווה לאינסוף.

★ סכום סדרה חשבונית (מקרה פרטי): $\Sigma_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.

★ סכום ריבועי איברים: $\Sigma_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

★ נוסחת הבינום של ניוטון: $\Sigma_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k\cdot y^{n-k}=(x+y)^n$.

★ $\Sigma_{k=0}^{\infty}k\cdot q^k=\frac{q}{(1-q)^2}$

★ סכומים נפוצים המהווים התפלגויות שלמות (ואז הם שווים ל 1):
- התפלגות גיאומטרית: $\Sigma_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}\cdot p=1$.
- התפלגות בינומית: $\Sigma_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot(1-p)^k\cdot p^{n-k}=1$.
- התפלגות פואסון: $\Sigma_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k\cdot e^{-\lambda}}{k!}=1$.

מבחנים קודמים

מבחן לדוגמא

מבחן לדוגמא

שאלה 1 (25 נקודות)

יהיו X_1, X_2 משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי התפלגות אחידה על הקבוצה $\{-1,0,1\}$.

א. (12 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של $Y := X_1 + X_2$ ו- $Z = X_1^2 + X_2^2$.

ב. (8 נקודות) חשבו את ההתפלגויות השוליות של Y ושל Z.

ג. (5 נקודות) האם Y ו- Z בלתי תלויים?

שאלה 2 (25 נקודות)

יהי $0 < p < 1$ ויהי $X \sim Geom(p)$ משתנה מקרי בעל התפלגות גיאומטרית.

א. (8 נקודות) הוכיחו שלכל שלם אי שלילי k מתקיים: $P(x > k) = (1-p)^k$.

ב. (10 נקודות)הוכיחו שלכל שלם אי שלילי n ושלם חיובי k מתקיים:
$P(X = n + k | X > n) = P(X = k)$.

ג. (7 נקודות) חשבו את התוחלת והשונות של $Y := \frac{pX-1}{\sqrt{1-p}}$.

שאלה 3 (25 נקודות)

מטילים קובייה הוגנת שוב ושוב עד הפעם הראשונה שמתקבלת התוצאה 6 (ההטלות בלתי תלויות). יהי N מספר ההטלות הכולל ויהי X מספר ההטלות בהן התקבלה התוצאה 1.

א. (5 נקודות) חשבו את $E(N)$.

ב. (7 נקודות) האם X ו- N בלתי תלויים?

ג. (13 נקודות) חשבו את $E(X)$.

שאלה 4 (25 נקודות)

א. (7 נקודות) יהי Y משתנה מקרי בעל תוחלת סופית שאינה 0. חשבו את $\rho(Y, 10 - Y)$.

ב. (18 נקודות) מטילים קובייה הוגנת 420 פעם כאשר כל ההטלות הן בלתי תלויות. נסמן ב X את סכום תוצאות כל ההטלות הנ"ל. השתמשו באי-שוויון צ'ביצ'ב כדי להוכיח ש –
$P(1400 < X < 1540) \geq 3/4$.

פתרון מבחן לדוגמא

שאלה 1

א. נתון ש 2 המשתנים X_1, X_2 מתפלגים התפלגות אחידה על $\{-1,0,1\}$ ולכן ההסתברות שכל משתנה יהיה שווה לאחד מהערכים הנ"ל היא $\frac{1}{3}$.

ההתפלגות המשותפת של Y, Z היא חישוב של $P(Y=k, Z=m)$ לכל k, m ערכים אפשריים ל Y, Z.

תחילה נחשב מהם הערכים האפשריים ל Y:

מכיוון ש $Y = X_1 + X_2$ אז הערכים האפשריים ל Y הם: $\{-2,-1,0,1,2\}$ (כל סכום אפשרי של 2 ערכים מהקבוצה $\{-1,0,1\}$)

כעת, נחשב את הערכים האפשריים עבור Z:

מכיוון ש $Z = X_1^2 + X_2^2$ אזי הסכומים האפשריים הם: $\{0,1,2\}$.

מכיוון שהטווח של 2 המשתנים הוא סופי, ניתן לחשב כל קומבינציה בנפרד ובסוף להכניס את כל התוצאות לטבלה אחת (זאת מעין פונקציה עם שני משתנים מפוצלת). בכל תא מחשבים את ההסתברות ש Y יהיה שווה לערך של אותה עמודה וגם Z יהיה שווה לערך של אותה שורה.

נחשב: (נעבור על כל הערכים האפשריים)

אם $Z=0$ זה ייתכן רק אם $X_1=0$ וגם $X_2=0$ ולכן גם $Y=0$. מכאן, ההסתברות ש $Z=0$ וגם Y יהי שווה לערך השונה מ 0 היא 0 (אין סיכוי כזה).

$P(Y=0, Z=0) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ כי דורשים ש $X_1 = 0$ וגם $X_2 = 0$ ומכיוון שהמשתנים הם בלתי תלויים אז נכפול את ההסתברויות שכל אחד מהם יהיה 0 ומכיוון שההתפלגות היא אחידה, ההסתברות שכל אחד מהם יהיה 0 היא $1/3$.

אם $Z=1$ אז זה כי $X_1 = 0, X_2 = -1$ או $X_1 = -1, X_2 = 0$ כי $(-1)^2 + 0^2 = 1$ ובמקרים אלו $Y=-1$ (הסכום של $X_1 + X_2$) ומכאן $P(Y=-1, Z=1) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$. (ההכפלה ב 2 היא כי יש 2 אפשרויות לערכי X_1, X_2).

וייתכן ש $Z=1$ כי $X_1 = 0, X_2 = 1$ או $X_1 = 1, X_2 = 0$ כי $1^2 + 0^2 = 1$ ובמקרים אלו $Y=1$ (הסכום של $X_1 + X_2$) ומכאן $P(Y=1, Z=1) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$.

כל ערך אחר של Y לא ייתכן אם $Z=1$ ולכן ההסתברויות עבור ערכים אלו הם 0.

אם $Z=2$ זה ייתכן רק אם $X_1 = 1, X_2 = 1$ כי $1^2 + 1^2 = 2$ ואז $Y=2$ ומכאן $P(Y=2, Z=2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

וייתכן ש $Z=2$ כי $X_1 = -1, X_2 = -1$ כי $(-1)^2 + (-1)^2 = 2$ ואז $Y=-2$ ומכאן: $P(Y=2, Z=2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

שאר הערכים הם בהסתברות 0.

לסיכום: (ניתן לוודא שסכום כל השורות והעמודות הוא 1) – הטבלה היא התשובה ל א'.

Y Z	-2	-1	0	1	2	Σ
0	0	0	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
1	0	$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$	0	$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$	0	$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
Σ	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

ב. התפלגות שולית של Y היא $P(Y=k)$ לכל ערך k אפשרי. ניתן לראות זאת מסכומי העמודות בטבלה:
$P(Y=-2)=\frac{1}{9}, P(Y=-1)=\frac{2}{9}, P(Y=0)=\frac{3}{9}, P(Y=1)=\frac{2}{9}, P(Y=2)=\frac{1}{9}$.
באותו אופן, את ההתפלגות השולית של Z ניתן לראות מסכומי השורות בטבלה:
$P(Z=0)=\frac{1}{9}, P(Z=1)=\frac{4}{9}, P(Z=2)=\frac{4}{9}$.
(זאת התשובה ואין צורך לכתוב אחרת כי טווח הערכים הוא סופי).

ג. כדי שהמשתנים Y,Z יהיו בלתי תלויים צריך ש $P(Y=a,Z=b)=P(Y=a)\cdot P(Z=b)$ לכל ערכי a,b אפשריים. לפי האינטואיציה ניתן לשלול זאת כי שני המשתנים בנויים מערכי X_1,X_2 המשפיעים על שניהם. לכן נראה דוגמא נגדית לשוויון הנ"ל:
$P(Y=2,Z=2)=\frac{1}{9}$ - לפי הטבלה בסעיף א'.
$P(Y=2)=\frac{1}{9}$, $P(Z=2)=\frac{4}{9}$ ולכן המכפלה תהיה: $\frac{4}{81}=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{9}$ השונה מ $\frac{1}{9}$ ולכן המשתנים כן תלויים.

שאלה 2

א. יהי k שלם אי שלילי. נשים לב שההסתברות ש X גדול מ k שווה להסתברות ש $X=k+1$ או $X=k+2$ או... (עד אינסוף) ולכן: $P(X>k)=\Sigma_{i=k+1}^{\infty}P(X=i)$. (העדפנו לעבור לשוויון כי את השוויון אנו יודעים לפתוח לפי ההתפלגות של X). כעת, נתון כי X מתפלג גאומטרית עם הסתברות p ולכן: $P(X=i)=(1-p)^{i-1}\cdot p$. נציב בסכום ונקבל: $P(X>k)=\Sigma_{i=k+1}^{\infty}(1-p)^{i}\cdot p$.
p אינו תלוי ב i ולכן ניתן להוציאו מחוץ לסכום: $P(X>k)=p\cdot\Sigma_{i=k+1}^{\infty}(1-p)^{i-1}$.
כעת נשים לב שזה סכום סדרה הנדסית אינסופית עם איבר ראשון: $(1-p)^k$ ו- $q=(1-p)$ (מנה קטנה מ 1 כי $0<p<1$) ולכן סכומה הוא: $S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{(1-p)^k}{1-(1-p)}=\frac{(1-p)^k}{p}$.
ולכן: $P(X>k)=p\cdot\frac{(1-p)^k}{p}=(1-p)^k$ מש"ל.

ב. נשתמש בנוסחת ההסתברות המותנית: $P(X=n+k|X>n)=\frac{P(X=n+k,X>n)}{P(X>n)}$.
עבור המונה, ניתן לומר ש $P(X=n+k,X>n)=P(X=n+k)$ כי $k>0$ ולכן ההסתברות להיות שווה ל $n+k$ וגם להיות גדול מ n שווה פשוט להסתברות להיות שווה ל $n+k$ כי אז ממילא X יהיה גדול מ n. מכיוון ש X מתפלג גיאומטרית נובע ש: $P(X=n+k)=(1-p)^{n+k-1}\cdot p$.
עבור המכנה, ניתן לומר לפי סעיף א' ש: $P(X>n)=(1-p)^n$.
נציב ונקבל: $P(X=n+k|X>n)=\frac{P(X=n+k,X>n)}{P(X>n)}=\frac{(1-p)^{n+k-1}\cdot p}{(1-p)^n}=(1-p)^{k-1}\cdot p$. ומכאן נשים לב ש $(1-p)^{k-1}\cdot p=P(X=k)$ כי X מתפלג גיאומטרית, מש"ל.

ג. אנו רואים כי Y מוגדר לפי X וקבועים ולכן נחשב את התוחלת והשונות שלו לפי תכונות של תוחלת ושונות.
X מתפלג גיאומטרית ולכן: $E(X)=\frac{1}{p}$, $Var(X)=\frac{1-p}{p^2}$
נשים לב ש p קבוע (לא משתנה מקרי) ומכאן, לפי תכונות של תוחלת:
$0=\frac{p}{\sqrt{+1-p}}E(X)-\frac{1}{\sqrt{1-p}}=E\left(\frac{p}{\sqrt{1-p}}X-\frac{1}{\sqrt{1-p}}\right)=E\left(\frac{pX-1}{\sqrt{1-p}}\right)=E(Y)$.
כעת נחשב את השונות: $Var(Y)=Var\left(\frac{pX-1}{\sqrt{1-p}}\right)=Var\left(\frac{p}{\sqrt{1-p}}X-\frac{1}{\sqrt{1-p}}\right)=\frac{p^2}{1-p}Var(X)=1$ לפי תכונות של שונות.

שאלה 3

א. מכיוון שמבצעים הטלות שוב ושוב עד שמתקבל 6, ההטלות בלתי תלויות, N סופר כמה הטלות היו, נובע ש $N \sim Geom\left(\frac{1}{6}\right)$ כי 1/6 הוא הסיכוי לקבל 6 ולעצור. ולכן: $E(N) = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$.

ב. כן תלויים. נראה דוגמא שבה אין שוויון בין ההסתברות של החיתוך לבין כפל ההסתברויות: מצד אחד: $P(X = 2, Y = 1) = 0$ כי לא ייתכן שהייתה רק הטלה אחת (ובה יצא 6) וגם היו 2 הטלות בהן יצא 1. אבל מצד שני: $P(Y = 1) > 0$ כי יש סיכוי להטלה אחת. וגם $P(X = 2) > 0$ כי יש סיכוי שיצא פעמיים 1 (לדוגמא אם יהיו 3 הטלות ובשתיים הראשונות יצא 1) ולכן המכפלה אינה 0 ולכן אינה שווה ל $P(X = 2, Y = 1)$.

ג. מכיוון ש X תלוי ב N, שכן קל יותר לספור כמה אחדות היו ברגע **שידוע** כמה הטלות היו, נשתמש בנוסחת התוחלת המותנה: $E(X) = E\big(E(X|N)\big) = \Sigma_{n=1}^{\infty} P(N = n) \cdot E(X|N = n)$. נשים לב ש $X|N = n$ הוא משתנה מקרי חדש שסופר כמה אחדות היו מתוך n הטלות (כאשר באחרונה בטוח היה 6 ובאחרות בטוח לא היה) ולכן הוא מתפלג בינומית עם $n - 1$ ניסויים (כי באחרון בטוח יש 6) ועם הסתברות של $\frac{1}{5}$ לקבל 1 מתוך המספרים הנותרים. ולכן: $E(X|N = n) = \frac{n-1}{5}$ (לפי תוחלת של משתנה המתפלג בינומית).
לפי סעיף א׳, $N \sim Geom\left(\frac{1}{6}\right)$ ולכן: $P(N = n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$. נציב הכל בנוסחת התוחלת המותנה:
$E(X) = \Sigma_{n=1}^{\infty} P(N = n) \cdot E(X|N = n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cdot \frac{n-1}{5}$, נוציא מהסכום את 1/5 ונקבל: $\frac{1}{5} \Sigma_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{6}\right) \cdot (n - 1)$. נשנה את הסכימה של הטור: נציב $m = n - 1$ ונקבל: $\frac{1}{5} \Sigma_{m=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{m} \left(\frac{1}{6}\right) \cdot m$. כעת נוציא $\frac{5}{6}$ אחד מתוך הסכום: $\frac{5}{30} \Sigma_{m=0}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{6}\right) \cdot m$ ונשים לב שהאיבר הראשון בסכום הוא 0 כי אם ניב $m = 0$ זה יאפס את המכפלה ולכן ניתן להתחיל את הסכום מ 1:
$\frac{5}{30} \Sigma_{m=1}^{\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{m-1} \left(\frac{1}{6}\right) \cdot m$. קיבלנו בתוך הסכום בדיוק את החישוב הישיר של תוחלת משתנה המתפלג גיאומטרית עם הסתברות 1/6 ולכן התוחלת שווה ל 6 וזהו גם סכום הטור: סה״כ קיבלנו: $\frac{5}{30} \cdot 6 = 1$ ולכן $E(X) = 1$.

שאלה 4

א. לפי תכונות של מקדם המתאם: $\rho(Y, 10 - Y) = \rho(Y, -Y) = -\rho(Y, Y) = -1$.

ב. כדי להשתמש באי-שוויון צ׳ביצ׳ב, עלינו לחשב את $E(X), Var(X)$ ולסדר את מה שבתוך ההסתברות לצורה עם $P(|X - E(X)| \geq a)$. נתחיל מחישוב $E(X)$: נשים לב ש X הוא הסכום ולכן מאוד קשה לחשב כך את התוחלת שלו (יש הרבה סכומים אפשריים ולכן חישוב ישיר יהיה ארוך מאוד) לכן, כדי להקל על החישוב, נביע את X כסכום משתנים מקריים X_i כך שכל אחד מהם הוא התוצאה של ההטלה ה i.
מכאן: $X = \Sigma_{i=1}^{420} X_i$ כאשר $X_i \sim U[1,6]$. כעת, לפי תכונה של תוחלת, מתקיים:
$E(X) = E(\Sigma_{i=1}^{420} X_i) = \Sigma_{i=1}^{420} E(X_i)$ ולכן מספיק לחשב את התוחלת של כל X_i.
נשים לב ש $X_i \sim U[1,6]$ ולכן: $E(X_i) = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$. ומכאן: $E(X) = \Sigma_{i=1}^{420} E(X_i) = \Sigma_{i=1}^{420} \left(\frac{7}{2}\right) = 1470$.
נעבור לסידור אי השוויון. מכיוון ש $E(X) = 1470$ אזי:
$P(1400 < X < 1540) = P(-70 < X - 1470 < 70)$ (כי הורדנו 1470 מכל האגפים). מכאן נקבל:
$P(|X - 1470| < 70)$ (כי סגרנו לערך מוחלט), אבל עדיין ניתן לראות שהסימן בתוך אי השוויון הפוך ממה שיש בצ׳בישב ולכן נחשב את המשלים:
$P(|X - 1470| < 70) = 1 - P(|X - 1470| \geq 70)$. כעת, ניתן להשתמש בצ׳בישב ולקבל:

$P(|X-1470|\geq 70)\leq \frac{Var(X)}{70^2}$. נותר לחשב את $Var(X)$ ולהציב.

לפי תכונות של שונות ומכיוון ש X_i בלתי תלויים זה בזה כי נתון שההטלות אינן תלויות, נקבל:

$Var(X)=Var(\Sigma_{i=1}^{420}X_i)=\Sigma_{i=1}^{420}Var(X_i)$. כעת, מכיוון ש $X_i\sim U[1,6]$

אז $Var(X_i)=\frac{(6-1+1)^2-1}{12}=\frac{35}{12}$. ולכן נקבל:

$Var(X)=\Sigma_{i=1}^{420}Var(X_i)=\Sigma_{i=1}^{420}\left(\frac{35}{12}\right)=420\cdot\frac{35}{12}=1225$.

נציב באי השוויון ונקבל: $P(|X-1470|\geq 70)\leq\frac{Var(X)}{70^2}=\frac{1225}{4900}$. נציב באי השוויון המקורי ונקבל:

$P(|X-1470|<70)=1-P(|X-1470|\geq 70)\geq 1-\frac{1225}{4900}=\frac{3675}{4900}=\frac{3}{4}$.

מבחן 2017
סמסטר ב
מועד א

מבחן 2017 סמסטר ב מועד א

שאלה 1 (25 נקודות)

יהיו $X_2 \sim U(1,2,3)$, $X_1 \sim Bin(2,\frac{1}{2})$ משתנים מקריים בלתי תלויים. נגדיר:
$Z := max\,\{X_1, X_2\}$ ו- $Y := min\,\{X_1, X_2\}$.

א. (12 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של Y ו- Z.
ב. (8 נקודות) חשבו את ההתפלגויות השוליות של Y ושל Z.
ג. (5 נקודות) האם Y ו- Z בלתי תלויים?

שאלה 2 (25 נקודות)

א. (6 נקודות) יהא X משתנה מקרי המקבל רק ערכים שלמים אי שליליים. הוכיחו ש- $E(X) = \Sigma_{k=0}^{\infty} P(X > k)$. ניתן להשתמש בפעולות שונות על טורים (כגון הפרדה לסכומים, שינוי סדר סכימה וכו') ללא הסבר מדוע זה מותר.
ב. (10 נקודות) מטילים קובייה הוגנת מספר פעמים כאשר כל ההטלות בלתי תלויות. המספרים 1 ו-2 שעל הקובייה צבועים באדום, המספרים 3 ו-4 בכחול והמספרים 5 ו-6 בצהוב. לכל k טבעי חשבו את ההסתברות שב-k ההטלות הראשונות התקבלו מספרים משני צבעים שונים לכל היותר (שימו לב גם לערכי k קטנים).
ג. (9 נקודות) יהי X משתנה מקרי הסופר את מספר ההטלות הנדרשות בניסוי המתואר בסעיף הקודם עד שמתקבלים בפעם הראשונה כל שלושת הצבעים. הוכיחו ש- $E(X) = 5.5$ (שוב שימו לב לערכים הקטנים).

שאלה 3 (25 נקודות)

כד מכיל 8 כדורים לבנים, 4 כדורים שחורים ו- 2 כדורים אדומים. מוציאים מקרית וללא החזרה שני כדורים מהכד. על כל כדור לבן שנוציא נפסיד שקל, על כל כדור שחור נרוויח שני שקלים ועל כדור אדום לא נפסיד ולא נרוויח. יהי X משתנה מקרי הסופר כמה כסף הרווחנו (שימו לב שהרווח עשוי להיות שלילי, כלומר הפסד).

א. (10 נקודות) חשבו את ההתפלגות של X.
ב. (8 נקודות) בהינתן המאורע $\{X \geq 0\}$, מה ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו שחורים?
ג. (7 נקודות) מהמר משחק במשחק הזה שובו ושוב עד הפעם הראשונה שהוא מספיד כסף (בסיבוב ספציפי, לאו דווקא בסך הכל). מה תוחלת מספר הסיבובים שהוא ישחק?

שאלה 4 (25 נקודות)

מטילים קובייה הוגנת n פעמים כאשר כל ההטלות בלתי תלויות. נסמן ב X את מספר הזוגות של הטלות רצופות שהתקבלו בהן שתי תוצאות שונות. נסמן ב Y את מספר הזוגות של הטלות רצופות שהתקבלו בהן שתי תוצאות מאותה זוגיות (כלומר, שתיהן זוגיות או שתיהן אי זוגיות).

א. (15 נקודות) חשבו את $Cov(X, Y)$.
ב. (5 נקודות) האם X ו- Y בלתי תלויים?
ג. (5 נקודות) האם מקדם המתאם של X ו-Y חיובי, שלילי או 0? נמקו תשובתכם (ניתן להניח ללא הוכחה ש- $Var(X) \neq 0$ ו- $Var(Y) \neq 0$).

פתרון מבחן 2017 סמסטר ב מועד א

שאלה 1

א. נשים לב שערכי X_1 יכולים להיות : $\{0,1,2\}$ (לפי משתנה המתפלג בינומית). וערכי X_2 יכולים להיות : $\{1,2,3\}$ ולכן : Y יכול לקבל את הערכים : $\{0,1,2\}$ (כי הוא בוחר את המינימום), Z יכול לקבל את הערכים : $\{1,2,3\}$ (כי הוא בוחר את המקסימום). כעת, נחשב את כל החיתוכים :
תחילה נשים לב שאנו יודעים לחשב את ההתפלגויות של X_1, X_2 ומכיוון שהם בלתי תלויים ניתן להפריד את החיתוך למכפלת ההסתברויות.
לפני חישוב ערכי הטבלה, נחשב את ההסתברויות של כל ערך בנפרד :

$$P(X_2=1)=P(X_2=2)=P(X_2=3)=\frac{1}{3}\ ,$$

$$P(X_1=0)=\binom{2}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\ ,\ P(X_1=1)=\binom{2}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}\ ,$$

$$P(X_1=2)=\binom{2}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0=\frac{1}{4}.$$

נחשב :

$P(Y=0,Z=1)=P(X_1=0,X_2=1)=P(X_1=0)\cdot P(X_2=1)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$, כי כדי שהמינימום יהיה 0 צריך שאחד מ X_1, X_2 יהיה 0 והיחיד שיכול לקבל ערך 0 הוא X_1 ולכן כדי שהמקסימום יהי 1 אז $X_2=1$.

באופן דומה :

$$P(Y=0,Z=2)=P(X_1=0,X_2=2)=P(X_1=0)\cdot P(X_2=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}\ ,$$

$$P(Y=0,Z=3)=P(X_1=0,X_2=3)=P(X_1=0)\cdot P(X_2=3)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}.$$

כעת, נחשב את העמודה השנייה :

$P(Y=1,Z=1)=P(X_1=1,X_2=1)=P(X_1=1)\cdot P(X_2=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{12}$ כי גם המינימום וגם המקסימום הוא 1 ולכן X_1, X_2 שניהם 1.

$$P(Y=1,Z=2)=P(X_1=1,X_2=2)+P(X_1=2,X_2=1)=P(X_1=1)\cdot P(X_2=2)+$$
$$+P(X_1=2)\cdot P(X_2=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{3}{12}$$

כי המינימום הוא 1 והמקסימום הוא 2 ולכן ייתכנו 2 מקרים : $X_1=1, X_2=2$ או $X_1=2, X_2=1$.

$P(Y=1,Z=3)=P(X_1=1,X_2=3)=P(X_1=1)\cdot P(X_2=3)+=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{12}$ כי רק X_2 יכול לקבל את הערך 3.

העמודה השלישית :

$P(Y=2,Z=1)=0$ כי לא ייתכן שהמינימום גדול מהמקסימום.

$$P(Y=2,Z=2)=P(X_1=2,X_2=2)=P(X_1=2)\cdot P(X_2=2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}\ ,$$

$$P(Y=2,Z=3)=P(X_1=2,X_2=3)=P(X_1=2)\cdot P(X_2=3)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}\ .$$

תשובה סופית (הטבלה) :

Y / Z	0	1	2	Σ
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	0	$\frac{3}{12}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{4}{12}$
Σ	$\frac{3}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{12}$	1

ב. לפי סכומי השורות והעמודות בטבלה:
התפלגות Y: $P(Y=0)=\frac{3}{12}$, $P(Y=1)=\frac{7}{12}$, $P(Y=2)=\frac{2}{12}$. (סכומי עמודות)
התפלגות Z: $P(Z=1)=\frac{3}{12}$, $P(Z=2)=\frac{5}{12}$, $P(Z=3)=\frac{4}{12}$. (סכומי שורות)

ג. אינטואיציה, שניהם תלויים בערכי X_1, X_2 (לוקחים מינימום ומקסימום מביניהם) ולכן תיתכן תלות ביניהם. נראה דוגמא נגדית: $P(Y=2, Z=1)=0$ כי לא ייתכן שהמינימום גדול מהמקסימום. מצד שני: $P(Y=2)=\frac{2}{12}$, $P(Z=1)=\frac{3}{12}$ ולכן: $P(Y=2)\cdot P(Z=1)=\frac{2}{12}\cdot\frac{3}{12}\neq 0$. לכן Y, Z תלויים.

שאלה 2

א. ננסה לפשט את $\Sigma_{k=0}^{\infty}P(X>k)$ ולהגיע ל – $E(X)$. נשים לב ש: $P(X>k)=\Sigma_{i=k+1}^{\infty}P(X=i)$ כי ההסתברות ש X יהיה גדול מ k שווה להסתברות ש X יהיה שווה ל $k+1$ או ש X יהיה שווה ל $k+2$ או... עד אינסוף. ולכן נוכל להציב ולקבל: $\Sigma_{k=0}^{\infty}P(X>k)=\Sigma_{k=0}^{\infty}\Sigma_{i=k+1}^{\infty}P(X=i)$.
כעת, נשים לב שלכל i, $P(X=i)$ מופיע סה"כ בכל הסכימות i פעמים כי i גדול יותר מהמספרים $k=0,1,2,\dots,i-1$ ולכן עבור כל אחד מהם, $P(X=i)$ יופיע. לכן נשנה את סדר הסכימה באופן הבא:
$$\Sigma_{k=0}^{\infty}\Sigma_{i=k+1}^{\infty}P(X=i)=1\cdot P(X=1)+2\cdot P(X=2)+\cdots=\Sigma_{i=0}^{\infty}i\cdot P(X=i)$$
מכיוון ש X מקבל רק ערכים שלמים אי שליליים אז לפי הנוסחא לחישוב ישיר של התוחלת של X נקבל ש: $E(X)=\Sigma_{i=0}^{\infty}i\cdot P(X=i)$ השווה בדיוק לביטוי שקיבלנו לעיל.

ב. בשאלות מהסגנון הזה נעדיף להציג את הנתונים באמצעות משתנים מקריים, אם יש משהו הקשור לספירה. או באמצעות מאורעות אם מדובר במשהו שקרה או לא קרה. בתרגיל הזה יש לחשב את ההסתברות לקבלת 2 צבעים שונים לכל היותר ולכן מדובר במאורעות.
נגדיר את המאורעות:
R_k - יצא צבע אדום ב k ההטלות הראשונות.
B_k - יצא צבע כחול ב k ההטלות הראשונות.
Y_k - יצא צבע צהוב ב k ההטלות הראשונות.
כעת, אנו רוצים לחשב את ההסתברות שיצא ב k ההטלות הראשונות רק אדום או רק כחול או רק צהוב או אדום וכחול או אדום וצהוב או כחול וצהוב. נחשב תחילה את המקרים שיש בדיוק צבע אחד (נדרוש שיצא הצבע הזה וגם שלא יצאו 2 הצבעים האחרים):
$P(R_k\cap\overline{B_k}\cap\overline{Y_k})=P(\overline{R_k}\cap B_k\cap\overline{Y_k})=P(\overline{R_k}\cap\overline{B_k}\cap Y_k)=\left(\frac{1}{3}\right)^k$ כי אם דורשים את אותו הצבע בכל k ההטלות אזי יש 2 מתוך 6 אפשרויות (2 הפאות הצבועות בצבע המתאים) לקבל את הצבע הדרוש.
עבור 2 צבעים, נחשב (נדרוש שיצאו 2 הצבעים וגם שלא יצא הצבע השלישי):
$P(R_k\cap B_k\cap\overline{Y_k})=P(R_k\cap\overline{B_k}\cap Y_k)=P(\overline{R_k}\cap B_k\cap Y_k)=\left(\frac{2}{3}\right)^k-2\left(\frac{1}{3}\right)^k$ כי אם דורשים רק את 2 הצבעים בכל k ההטלות אזי יש 4 מתוך 6 אפשרויות (2 הפאות הצבועות בצבע האחד + 2 הפאות הצבועות בצבע השני) לקבל את הצבע הדרוש אבל נוריד את ההסתברות שיצא הכל בצבע אחד מתוך ה 2 (כי כבר חישבנו זאת) ולכן נוריד $\left(\frac{1}{3}\right)^k$ (ההסתברות לצבע אחד) פעמיים (עבור כל צבע).
סה"כ: $3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^k-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)=3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^k-2\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k=P(k)$ כאשר $k>0$ (הכפל ב 3 היא כי יש 3 הסתברויות שונות לכל מקרה (לפי הצבע שבחרנו)). אם $k=0$ ההסתברות $P(0)$ שווה ל 1.

ג. מספר ההטלות הנדרשות בניסוי המתואר לעיל הוא מספר אי שלילי ולכן לפי סעיף א', מתקיים: $E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X>k)$. כעת, ההסתברות שיהיו יותר מ k הטלות היא שבמהלך ה k ההטלות הראשונות, לא התקבלו כל הצבעים – וזו בדיוק ההסתברות שחישבנו בסעיף ב' (לקבל לכל היותר 2 צבעים). לכן נציב ונקבל: $E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X>k)=1+\sum_{k=1}^{\infty}3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^k-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)$. (ההפרדה של 1

מהסכום עבור $k=0$ כי ההסתברות בסעיף ב׳ עבור $k=0$ הייתה לא לפי הביטוי שמצאנו אלא פשוט 1.
מכאן נוציא את 3 מהסכום, נפצל את הסכום ל 2 סכומים ונחשב כל סכום לפי סכום סדרות הנדסיות:

$$= 1+\sum_{k=0}^{\infty} 3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^k-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right) = 1+3\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k\right) = 1+3\left(\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) =,$$

$$= 1+3\left(2-\frac{1}{2}\right) = 1+\frac{9}{2} = \frac{11}{2},$$

מש״ל.

שאלה 3

א. צריך לחשב את $P(X=k)$ לכל ערך k ש X יכול לקבל. תחילה נראה מהו טווח הערכים של X: נשים לב ש X סופר כמה כסף הרווחנו סה״כ על הוצאת 2 הכדורים.
X יכול להיות -2: הוצאת 2 כדורים לבנים.
X יכול להיות -1: הוצאת כדור לבן וכדור אדום.
X יכול להיות 0: הוצאת 2 כדורים אדומים.
X יכול להיות 1: הוצאת כדור שחור וכדור לבן.
X יכול להיות 2: הוצאת כדור שחור וכדור אדום.
X יכול להיות 4: הוצאת 2 כדורים שחורים.
כעת נחשב את ההסתברות לקבלת כל ערך מהערכים $\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$.
$P(X=-2)=\frac{\binom{8}{2}}{\binom{14}{2}}=\frac{28}{91}$ - כל האפשרויות לבחור 2 כדורים לבנים מתוך 8 הכדורים הלבנים שבכד חלקי סה״כ האפשרויות להוציא 2 כדורים כלשהם מהכד. (מכיוון שזו הוצאה של כמה פריטים ללא החזרה ולא חשוב הסדר השתמשנו ב $\binom{n}{k}$ וחישבנו את ההסתברות בדרך של מספר אפשרויות רצויות חלקי סה״כ).

$P(X=-1)=\frac{\binom{8}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{14}{2}}=\frac{16}{91}$.

$P(X=0)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{14}{2}}=\frac{1}{91}$.

$P(X=1)=\frac{\binom{8}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{14}{2}}=\frac{32}{91}$.

$P(X=2)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{14}{2}}=\frac{8}{91}$.

$P(X=4)=\frac{\binom{4}{2}}{\binom{14}{2}}=\frac{6}{91}$.

כדי לבדוק שצדקנו, נשים לב שסכום כל ההסתברויות לערכי X הוא 1 כדרוש לפי תכונת התפלגות:
$1=\frac{91}{91}=\frac{6}{91}+\frac{8}{91}+\frac{32}{91}+\frac{1}{91}+\frac{16}{91}+\frac{28}{91}$.

ב. נשים לב שאם יצאו 2 שחורים אז התקיים המאורע $X=4$. כעת, לפי השאלה, עלינו לחשב את ההסתברות המותנית הבאה: $P(X=4|X\geq 0)$ ולפי הנוסחא להסתברות המותנית מתקיים:
$P(X=4|X\geq 0)=\frac{P(X=4,X\geq 0)}{P(X\geq 0)}=\frac{P(X=4)}{P(X\geq 0)}$ כאשר השוויון האחרון הוא כי אם $X=4$ אז ברור ש $X\geq 0$ גם כן מתקיים ולכן מספיק לדרוש רק $X=4$. כעת,
כעת נותר לחשב את $P(X=4)$ ואת $P(X\geq 0)$. את $P(X=4)$ חישבנו בסעיף א׳ ולכן נחשב רק את $P(X\geq 0)$ באופן הבא: $P(X\geq 0)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=4)$ כי ההסתברות ש X יקבל ערך גדול או שווה ל 0 זה להיות אחד מהערכים שהם גדולים או שווים ל 0.

לפי סעיף א', נציב את ההסתברויות ונקבל: $P(X \geq 0) = \frac{1}{91} + \frac{32}{91} + \frac{8}{91} + \frac{6}{91} = \frac{47}{91}$. נחזור ונציב במה שקיבלנו לעיל: $P(X = 4 | X \geq 0) = \frac{P(X=4)}{P(X\geq 0)} = \frac{\frac{6}{91}}{\frac{47}{91}} = \frac{6}{47}$.

ג. נשים לב שיש כאן ניסויים (לשחק במשחק) בלתי תלויים שחוזרים על עצמם עד שקורה משהו (מפסידים) ובכל ניסוי יש סיכוי ל"הצלחה" ("הצלחה" זה מה שגורם לעצירה ולכן הצלחה במקרה שלנו זה דווקא להפסיד במשחק) ו"כשלון" (בכל ניסוי זאת אותה הסתברות ללא תלות בניסויים האחרים) ולכן אם נסמן במשתנה המקרי Y (כי צריך לחשב תוחלת ולכן כדאי להגדיר משתנה מקרי הסופר את מספר הסיבובים) את מספר הסיבובים שהמהמר שיחק, נקבל ש $Y \sim Geom(p)$ כאשר p הוא הסיכוי להפסיד כסף. כעת נחשב את p. הסיכוי להפסיד כסף, לפי סעיפים קודמים הוא: $P(X < 0)$ ולכן נחשב (לפי תוצאות סעיף א'): $p = P(X < 0) = P(X = -1) + P(X = -2) = \frac{28}{91} + \frac{16}{91} = \frac{44}{91}$.

מבקשים בשאלה למצוא את התוחלת ומכיוון ש Y מתפלג גיאומטרית עם הסתברות p ל"הצלחה" אז התוחלת של Y היא: $E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{44}{91}} = \frac{91}{44}$ לפי ה p שמצאנו.

שאלה 4

א. כדי לחשב את $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$ עלינו לחשב תחילה את התוחלת של X, Y. נשים לב שקשה לחשב את התוחלות של X, Y כי לא ברור איך X, Y מתפלגים (קשה למנות את מספר הזוגות כי יש חיתוכים בין זוג אחד לסמוך לו) ולכן, כאשר צריך למנות משהו מורכב, נעדיף לפרק את המשתנים המקריים למשתנים קטנים יותר שאחראים לכל זוג הטלות בנפרד. בדרך כלל אלו יהיו אינדיקטורים (משתנים המקבלים 0 או 1 כאשר 0 מציין שלא קרה המקרה הרצוי, 1 – כן קרה) ואז המשתנה הגדול יימנה את האחדות (פשוט יהיה הסכום של כל האינדיקטורים). במקרה שלנו: לכל $1 \leq i \leq n-1$, נגדיר את X_i להיות משתנה מקרי (אינדיקטור) המקבל 1 אם בזוג ההטלות $i, i+1$ התקבלו תוצאות שונות, ו – 0 אם התוצאות היו זהות. (לכל זוג הטלות סמוכות יהיה משתנה כזה: X_1 – עבור הטלות 1 ו- 2, X_2 עבור הטלות 2 ו- 3, ... ו- X_{n-1} עבור הטלות $(n-1)$ ו- n). מכאן: $X = \Sigma_{i=1}^{n-1} X_i$ כי מספר הזוגות המקיימים את התנאי הוא סכום האינדיקטורים (כמה מהם שווים ל 1 זה מספר המקרים הטובים).

באותו אופן, נגדיר לכל $1 \leq i \leq n-1$ את Y_i להיות אינדיקטור השווה ל 1 אם בהטלות $i, i+1$ יצאו 2 מספרים זוגיים או 2 מספרים אי זוגיים. ושווה ל 0 אחרת. ומכאן: $Y = \Sigma_{i=1}^{n-1} Y_i$.

כעת, חישוב ה $Cov(X,Y)$ יהיה פשוט יותר לפי תכונה של Cov של סכום משתנים מול סכום משתנים כי:

$Cov(X,Y) = Cov(\Sigma_{i=1}^{n-1} X_i, \Sigma_{i=1}^{n-1} Y_i) = \Sigma_{i=1}^{n-1} \Sigma_{j=1}^{n-1} Cov(X_i, Y_j)$.

כעת, נחשב לכל i, j את $Cov(X_i, Y_j)$. לפי החישוב הישיר של שונות משותפת נקבל:

$Cov(X_i, Y_j) = E(X_i Y_j) - E(X_i) \cdot E(Y_j)$.

לפי תכונות של שונות משותפת, אם X_i, Y_j בלתי תלויים אז $Cov(X_i, Y_j) = 0$. נבדוק כעת האם המשתנים תלויים. נשים לב שמכיוון שההטלות בלתי תלויות זו בזו, תוצאה של הטלה אחת לא משפיעה על תוצאה של הטלה אחרת. ולכן X_i, Y_j יהיו תלויים רק אם הם מתייחסים לאותן הטלות או לפחות שתהיה הטלה אחת משותפת ל 2 המשתנים. ולכן תיתכן תלות רק אם $i = j$ או שההפרש בין i ל j (בערך מוחלט) הוא 1 (כי אז יש "חיתוך" בהטלות שהם מתייחסים אליהן).

כעת, נמשיך בחישוב ה Cov עבור מקרים אלו:

חישוב התוחלת של X_i פשוטה לפי תוחלת של משתנה המתפלג ברנולי:

מכאן: $E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{5}{6}$ (לכל i) כיוון שכדי לקבל בהטלות $i, i+1$ תוצאות שונות יש $\frac{6}{6}$ תוצאות אפשרויות להטלה ה i (מותר הכל) כפול $\frac{5}{6}$ אפשרויות להטלה ה $i+1$ (הכל חוץ ממה שיצא בהטלה ה i)

באותו אופן, עבור חישוב התוחלת של Y_i נקבל: $E(Y_i) = P(Y_i = 1) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ (לכל i) כי יש 2 אפשרויות לבחור האם שתי התוצאות תהיינה זוגיות או אי זוגיות, כפול ההסתברות למספר כזה להטלה ה

i כפול מספר כזה להטלה ה $i+1$.
נותר לחשב את $E(X_iY_j)$. נשים לב שמכפלת 2 אינדיקטורים הוא גם משתנה אינדיקטור כי הערכים שהוא יכול לקבל הם 0 (אם מכפילים 0 ב 0 או 1 ב 0 או 0 ב 1) או 1 (אם מכפילים 1 ב 1) ולכן :
$E(X_iY_j) = P(X_iY_j = 1) = P(X_i = 1, Y_j = 1)$ כי כדי שהמכפלה תהיה 1 צריך שכל משתנה בעצמו יהיה 1. כעת, ההסתברות $P(X_i = 1, Y_j = 1)$ דורשת שגם הטלה i תהיה שונה בתוצאה מההטלה ה $i+1$ וגם בהטלות $j, j+1$ יהיו מספרים מאותה הזוגיות.
נחשב זאת רק עבור זוגות המשתנים שייתכן ויהיו תלויים (כמו שהצגנו לעיל) :
נתחיל מ $j = i+1$: מכאן : $P(X_i = 1, Y_{i+1} = 1) = \frac{6}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{12}$. באותו אופן אם $j = i-1$ (נקבל את אותה ההסתברות). כי למספר הראשון מותר הכל, השני צריך להיות שונה מהראשון ולכן זה $\frac{5}{6}$ והשלישי צריך להיות באותה הזוגיות של מה שסמוך אליו : $\frac{1}{2}$ (או רק זוגי או רק אי זוגי).
כאשר $i = j$: $P(X_i = 1, Y_i = 1) = \frac{6}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ כי מדובר באותן 2 הטלות : $i, i+1$ אז לראשונה אין הגבלות. אבל תוצאת ההטלה ה $i+1$ צריכה להיות גם מאותה זוגיות של ההטלה ה i וגם להיות שונה מההטלה ה i ולכן יש רק 2 אפשרויות מתוך ה 6 (לדוגמא אם בהטלה ה i יצא 2 אז להטלה ה $i+1$ יש רק את האופציות 4 או 6 – זוגי ושונה מ 2).
נחזור לחישוב השונות המשותפת :
$\Sigma_{i=1}^{n-1}\Sigma_{j=1}^{n-1}Cov(X_i, Y_j) = \Sigma_{i=1}^{n-1}Cov(X_i, Y_i) + \Sigma_{i=1}^{n-2}Cov(X_i, Y_{i+1}) + \Sigma_{i=1}^{n-2}Cov(X_{i+1}, Y_i)$ כי כל שאר הסכומים הם 0 ורק אלו ייתכן ויהיו תלויים. כעת, נציב בחישוב השונות המשותפת :

$$Cov(X_i, Y_i) = E(X_iY_i) - E(X_i)\cdot E(Y_i) = P(X_i = 1, Y_i = 1) - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{5}{12} = -\frac{1}{12},$$

$$Cov(X_i, Y_{i+1}) = E(X_iY_{i+1}) - E(X_i)\cdot E(Y_{i+1}) = P(X_i = 1, Y_{i+1} = 1) - \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{2} = \frac{5}{12} - \frac{5}{12} = 0,$$

ובאותו אופן : $Cov(X_{i+1}, Y_i) = 0$ ולכן סה"כ :
$\Sigma_{i=1}^{n-1}Cov(X_i, Y_i) + \Sigma_{i=1}^{n-2}Cov(X_i, Y_{i+1}) + \Sigma_{i=1}^{n-2}Cov(X_{i+1}, Y_i) = \Sigma_{i=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{12}\right) = \frac{-(n-1)}{12}$ (נשארנו רק עם הסכום הראשון כי שאר הסכומים הם 0 לפי מה שיצא לנו) ומכאן : $Cov(X,, Y) = \frac{-(n-1)}{12}$.

ב. לפי סעיף א', קיבלנו $Cov(X, Y) \neq 0$ ולכן X, Y כן תלויים.

ג. לפי הגדרת מקדם המתאם של X, Y : $\rho(X, Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}$ ומכיוון שבסעיף א' יצא לנו $Cov(X, Y)$ שלילי והשורשים הם תמיד מספרים חיוביים נקבל שלילי חלקי חיובי ולכן מקדם המתאם שלילי.

מבחן 2017

סמסטר ב

מועד ב

מבחן 2017 סמסטר ב מועד ב

שאלה 1 (25 נקודות)

כד מכיל 2 כדורים לבנים, 2 כדורים שחורים ו- 2 כדורים אדומים. מוציאים מקרית וללא החזרה שלושה כדורים מהכד. יהי X משנה מקרי הסופר את מספר הכדורים הלבנים שהוצאו ויהי Y משתנה מקרי הסופר את מספר הכדורים השחורים שהוצאו.

א. (12 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של X ו- Y.
ב. (7 נקודות) חשבו את $P(X > Y)$.
ג. (6 נקודות) חשבו את תוחלת XY.

שאלה 2 (25 נקודות)

א. (12 נקודות) יהי $0 < p < 1$ מספר ממשי ויהיו $X \sim Geom(p)$, $Y \sim Geom(p)$ משתנים מקריים בלתי תלויים. הוכיחו שמתקיים $P(X = k|X + Y = n) = \frac{1}{n-1}$ לכל $1 \leq k \leq n - 1$.
ב. (13 נקודות) יהיו X ו- Y משתנים מקריים המקבלים ערכים שלמים אי שליליים. הוכיחו כי X ו- Y בלתי תלויים אם ורק אם לכל 2 שלמים אי שליליים a ו- b מתקיים:
$P(X \geq a, Y \geq b) = P(X \geq a) \cdot P(Y \geq b)$.

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי $N \sim Poi(\lambda)$ משתנה מקרי בעל התפלגות פואסון עם פרמטר $\lambda > 0$. מטילים מטבע הוגן N פעמים כאשר ההטלות בלתי תלויות. יהי X משתנה מקרי הסופר את מספר ההטלות שתוצאתו עץ.

א. (11 נקודות) חשבו את $E(X)$.
ב. (6 נקודות) האם X ו- N בלתי תלויים? נמקו את תשובתכם.
ג. (8 נקודות) הוכיחו ש $P(X \geq \lambda) \leq 1/2$.

שאלה 4 (25 נקודות)

מטילים קובייה הוגנת $n \geq 5$ פעמים כאשר כל ההטלות בלתי תלויות. נסמן ב X את מספר השלשות של הטלות רצופות שסכום תוצאותיהן הוא 5.

א. (7 נקודות) חשבו את תוחלת X.
ב. (18 נקודות) חשבו את שונות X.

פתרון מבחן 2017 סמסטר ב מועד ב

שאלה 1

א. טווח הערכים של X הוא $\{0,1,2\}$ (כי אפשר שלא יצאו כלל כדורים לבנים ובמקסימום יצאו 2 הלבנים שיש). באותו אופן, טווח הערכים של Y הוא $\{0,1,2\}$. סופיים ולכן נשתמש בטבלה. נחשב תחילה את כל החיתוכים של ההסתברויות לערכי X, Y:

$P(X=0, Y=0)=0$ כאשר מוציאים 3 כדורים, לא ייתכן שאף אחד מה-3 לא יהיה שחור וגם לא לבן כי אז נותרו רק 2 כדורים כאלו (אדומים) וצריכים להוציא 3 כדורים.

$P(X=0, Y=1)=\frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{10}$, בוחרים 2 כדורים אדומים מתוך ה 2 וכדור אחד שחור מתוך ה 2 חלקי סה"כ האפשרויות לבחור 3 כדורים מתוך ה 6.

$P(X=0, Y=2)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{10}$, (אדום ו 2 שחורים)

$P(X=1, Y=0)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{10}$, (לבן ו 2 אדומים)

$P(X=1, Y=1)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}}=\frac{4}{10}$, (אדום, שחור ולבן)

$P(X=1, Y=2)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{10}$, (לבן ו 2 שחורים)

$P(X=2, Y=0)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{10}$, (2 לבנים ואדום)

$P(X=2, Y=1)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{10}$, (2 לבנים ושחור)

$P(X=2, Y=2)=0$, אין אפשרות להוציא 2 לבנים וגם 2 שחורים כי מוציאים רק 3 כדורים.

סה"כ: (התשובה היא הטבלה)

X \ Y	0	1	2	Σ
0	0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$
1	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$
2	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{2}{10}$
Σ	$\frac{2}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{10}$	1

ב. לפי הערכים האפשריים: $P(X>Y)=P(X=1, Y=0)+P(X=2, Y=0)+P(X=2, Y=1)$ – אלו כל המקרים בהם X קיבל ערך גדול יותר מ Y. נציב לפי הטבלה:

$P(X>Y)=\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{3}{10}$.

ג. המשתנה XY מקבל את כל ערכי המכפלות של ערך של X עם ערך של Y. נחשב את התוחלת של XY לפי חישוב ישיר של התוחלת כאשר הערכים האפשריים הם:

$\{0\cdot 0, 0\cdot 1, 0\cdot 2, 1\cdot 0, 1\cdot 1, 1\cdot 2, 2\cdot 0, 2\cdot 1, 2\cdot 2\}$, מכאן:

$E(XY)=\Sigma_{i=0}^{2}\Sigma_{j=0}^{2} i\cdot j\cdot P(X=i, Y=j)$ כי כדי לקבל את המכפלה $i\cdot j$ צריך ש $X=i$ וגם $Y=j$.

נציב ונחשב לפי הטבלה של סעיף א', נוכל לקצר ולהתעלם מהמקרים בהם אחד המשתנים הוא 0 כי זה מאפס את כל האיבר בסכום. ולכן: $E(XY)=1\cdot 1\cdot\frac{4}{10}+2\cdot 1\cdot\frac{1}{10}+1\cdot 2\cdot\frac{1}{10}+2\cdot 2\cdot 0=\frac{8}{10}$.

שאלה 2

א. הוכחה: יהא n טבעי ויהא $1 \le k \le n-1$ שלם. נשתמש בנוסחת ההסתברות המותנה:
$P(X=k|X+Y=n)=\frac{P(X=k,X+Y=n)}{P(X+Y=n)}=\frac{P(X=k,Y=n-k)}{P(X+Y=n)}$ כאשר השוויון האחרון הוא מכיוון שאם $X=k$ וגם $X+Y=n$ אז פשוט $Y=n-k$ (כי מציבים את X). נתון ש X,Y בלתי תלויים ולכן מתקיים ש: $P(X=k,Y=n-k)=P(X=k)\cdot P(Y=n-k)$ ומכיוון ש X,Y מתפלגים גיאומטרית עם הסתברות p להצלחה, נובע ש: $P(X=k)=(1-p)^{k-1}\cdot p$, $P(Y=n-k)=(1-p)^{n-k-1}\cdot p$.
נציב הכל בביטוי שקיבלנו:
$\frac{P(X=k,Y=n-k)}{P(X+Y=n)}=\frac{P(X=k)\cdot P(Y=n-k)}{P(X+Y=n)}=\frac{(1-p)^{k-1}\cdot p\cdot(1-p)^{n-k-1}\cdot p}{P(X+Y=n)}=\frac{(1-p)^{n-2}\cdot p^2}{P(X+Y=n)}$. כעת נותר רק לחשב את $P(X+Y=n)$. מכיוון ש X,Y בלתי תלויים, נעבור על כל הערכים ל X (מ 1 עד $n-1$ כי גם Y הוא מינימום 1 כי הם משתנים המתפלגים גיאומטרית) ועבור כל ערך נחשב את ההסתברות ש X שווה לערך הזה כפול ההסתברות ש Y יהיה שווה לערך המשלים ל n.
$P(X+Y=n)=\Sigma_{i=1}^{n-1}P(X=i)\cdot P(Y=n-i)=\Sigma_{i=1}^{n-1}(1-p)^{i-1}\cdot p\cdot(1-p)^{n-i-1}\cdot p$
כאשר השוויון האחרון הוא כי המשתנים מתפלגים גיאומטרית עם הסתברות להצלחה: p. ומכאן:
$\Sigma_{i=1}^{n-1}(1-p)^{i-1}\cdot p\cdot(1-p)^{n-i-1}\cdot p=\Sigma_{i=1}^{n-1}(1-p)^{n-2}\cdot p^2=(n-1)(1-p)^{n-2}\cdot p^2$
כאשר השוויון האחרון הוא כי הביטוי בתוך הסכום אינו תלוי ב i ולכן נסכם $n-1$ פעמים.
נציב בחזרה בביטוי לעיל ונקבל: $P(X=k|X+Y=n)=\frac{(1-p)^{n-2}\cdot p^2}{P(X+Y=n)}=\frac{(1-p)^{n-2}\cdot p^2}{(n-1)(1-p)^{n-2}\cdot p^2}=\frac{1}{n-1}$
מש״ל.

ב. כיוון 1: נניח כי X,Y ב״ת. ויהיו a,b שלמים אי שליליים. מכאן:
$P(X\ge a,Y\ge b)=\Sigma_{k=a}^{\infty}\Sigma_{m=b}^{\infty}P(X=k,Y=m)$ כי כדי ש X יהיה גדול שווה ל a וגם Y יהיה גדול שווה ל b נעבור על כל הערכים k האפשריים ל X הגדולים או שווים ל a ונעבור על כל הערכים m האפשריים ל Y הגדולים או שווים ל b ונחשב את ההסתברות ש X יהיה שווה ל k וגם Y יהיה שווה ל m. (ניסינו לעבור לשוויון כי אז נוכל להשתמש בהגדרה של משתנים בלתי תלויים) וכעת, X,Y ב״ת ולכן נוכל להפריד כל ״וגם״ לכפל הסתברויות:
$\Sigma_{k=a}^{\infty}\Sigma_{m=b}^{\infty}P(X=k,Y=m)=\Sigma_{k=a}^{\infty}\Sigma_{m=b}^{\infty}P(X=k)\cdot P(Y=m)$.
כעת, הביטוי השמאלי תלוי רק ב k והביטוי הימני תלוי רק ב m ולכן ניתן להפריד את הסכומים:
$\Sigma_{k=a}^{\infty}\Sigma_{m=b}^{\infty}P(X=k)\cdot P(Y=m)=\Sigma_{k=a}^{\infty}P(X=k)\cdot\Sigma_{m=b}^{\infty}P(Y=m)$. וכעת, באותו אופן שהסברנו לעיל, הסכום הראשון מציין את $P(X\ge a)$ והשני מציין את $P(Y\ge b)$ ולכן קיבלנו את מה שצריך להוכיח: $P(X\ge a,Y\ge b)=\Sigma_{k=a}^{\infty}P(X=k)\cdot\Sigma_{m=b}^{\infty}P(Y=m)=P(X\ge a)\cdot P(Y\ge b)$.
כיוון 2: נניח כי $P(X\ge a,Y\ge b)=P(X\ge a)\cdot P(Y\ge b)$ מתקיים לכל a,b שלמים אי שליליים.
צריך להוכיח כי X,Y ב״ת, כלומר: $P(X=a,Y=b)=P(X=a)\cdot P(Y=b)$ לכל a,b ש X,Y יכולים לקבל.
יהיו a,b שלמים איש שליליים. נשתמש בטריק הבא: ההסתברות ש $X=a$ שווה להסתברות ש $X\ge a$ פחות ההסתברות ש $X\ge a+1$ (כי X,Y מקבלים רק ערכים שלמים), כלומר:
$P(X=a)=P(X\ge a)-P(X\ge a+1)$ כי מורידים מכל הגדולים או שווים ל a את אלו הגדולים ממש מ a. באותו אופן עבור Y. נקבל:
$P(X=a)\cdot P(Y=b)=[P(X\ge a)-P(X\ge a+1)]\cdot[P(Y\ge b)-P(Y\ge b+1)]=$,
$=P(X\ge a)\cdot P(Y\ge b)-P(X\ge a)\cdot P(Y\ge b+1)-P(X\ge a+1)\cdot P(Y\ge b)+$
$P(X\ge a+1)\cdot P(Y\ge b+1)$,
ולפי ההנחה, כל מכפלה כזו ניתן לחבר ל״וגם״:
$=P(X\ge a,Y\ge b)-P(X\ge a,Y\ge b+1)$,
$-P(X\ge a+1,Y\ge b)+P(X\ge a+1,Y\ge b+1)$,

נשים לב שקיבלנו מעין הכלה והדחה: מתוך כל האפשרויות ש $X \geq a$ וגם $Y \geq b$ נוריד את המקרים בהם $X \geq a$ אבל $Y > b$ ונוריד את המקרים בהם $Y \geq b$ אבל $X > a$ ונחזיר את המקרים בהם גם $X > a$ וגם $Y > b$ (כי הורדנו אותם פעמיים). נשארנו אם כן, רק עם המקרה שבו $X = a$ וגם $Y = b$. (כי מקרים עבורם $X < a$ או $Y < b$ לא ספרנו בכלל, מקרים בהם X גדול ממש מ a ירדו, מקרים בהם Y גדול ממש מ b ירדו ומקרים בהם גם X גדול ממש וגם Y גדול ממש ירדו פעמיים ונוספו פעם אחת ולכן ירדו).
לכן: $P(X = a) \cdot P(Y = b) = P(X = a, Y = b)$. מש"ל.

שאלה 3

א. נשים לב ש X תלוי ב N כי אם ידוע לנו כמה N, יהי קל למנות כמה פעמים יצא עץ. מכאן, נשים לב שכאשר ידוע ש $N = n$, X מתפלג בינומית כי יש מספר נסיונות ידוע, כל נסיון בלתי תלוי באחר, לכל נסיון יש הצלחה או כשלון ומתוכם X סופר את מספר ההצלחות (קבלת עץ). לכן: $X|N = n \sim Bin\left(n, \frac{1}{2}\right)$ (ההסתברות 1/2 היא לקבלת עץ במטבע).
נחשב את $E(X)$ באמצעות נוסחת התוחלת השלמה ולפי הנוסחאות להתפלגויות השונות:
$E(X) = E\big(E(X|N)\big) = \Sigma_{n=0}^{\infty} P(N = n) \cdot E(X|N = n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda^n \cdot e^{-\lambda}}{n!}\right) \cdot \frac{n}{2}$ (ניתן להתחיל את הסכום מ 1 כי עבור $n = 0$ מכפילים ב 0), נצמצם את n, נוציא λ אחת ונסדר: $\frac{\lambda}{2} \cdot \Sigma_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda^{n-1} \cdot e^{-\lambda}}{(n-1)!}\right)$,
נבצע הצבה: $t = n - 1$ ונקבל: $\frac{\lambda}{2} \cdot \Sigma_{t=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda^t \cdot e^{-\lambda}}{t!}\right)$. כעת נשים לב שהסכום (פרט ל $\frac{\lambda}{2}$) הוא כל ההתפלגות של משתנה פואסוני (סוכמים את כל הערכים שלו) ולכן סכום זה הוא 1. מכאן: $E(X) = \frac{\lambda}{2}$.

ב. הם כן תלויים. דוגמא: $P(X = 2, N = 1) = 0$ כי לא ייתכן שיצא פעמיים עץ אם הייתה רק הטלה אחת. מצד שני: $P(X = 2) > 0$ כי יש סיכוי לפעמיים עץ (אם יהיו לפחות 2 הטלות ובשתיהן יצא עץ) וגם $P(N = 1) = \lambda \cdot e^{-\lambda} > 0$ כי $\lambda > 0$. ולכן: $P(X = 2) \cdot P(X = 1) \neq 0$.

ג. מדובר באי שוויון ולכן נשתמש באי שוויון מרקוב (ובסעיף א'): $P(X \geq \lambda) \leq \frac{E(X)}{\lambda} = \frac{\frac{\lambda}{2}}{\lambda} = \frac{1}{2}$. מש"ל.

שאלה 4

א. ספירת שלשות היא מורכבת ולכן נשתמש באינדיקטורים. לכל $1 \leq i \leq n - 2$. נגדיר: X_i להיות אינדיקטור השווה ל 1 אם סכום ההטלות $i, i + 1, i + 2$ הוא 5. ושווה 0 אחרת. מכאן: $X = \Sigma_{i=1}^{n-2} X_i$.
כעת קל יותר לחשב את התוחלת של X לפי תכונת ליניאריות התוחלת:
$E(X) = E(\Sigma_{i=1}^{n-2} X_i) = \Sigma_{i=1}^{n-2} E(X_i)$. נותר לחשב את התוחלת של כל X_i. מכיוון ש X_i הוא משתנה אינדיקטור, התוחלת שלו שווה להסתברות שהוא יהיה 1:
$E(X_i) = P(X_i = 1) = P(\{(1,1,3), (1,3,1), (3,1,1), (1,2,2), (2,1,2), (2,2,1)\}) = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$ כי אלו כל האפשרויות לסכום 5 עבור שלשה רצופה מתוך סה"כ 6^3 התוצאות האפשריות.
לכן: $E(X) = \Sigma_{i=1}^{n-2} E(X_i) = \Sigma_{i=1}^{n-2} \left(\frac{1}{36}\right) = \frac{n-2}{36}$.

ב. נמשיך עם האינדיקטורים מסעיף א', לפי תכונה של שונות:
$Var(X) = Var(\Sigma_{i=1}^{n-2} X_i) = \Sigma_{i=1}^{n-2} \Sigma_{j=1}^{n-2} Cov(X_i, X_j)$. נותר לחשב את $Cov(X_i, X_j)$. אנו צריכים לחשב זאת רק עבור X_i, X_j תלויים כי עבור אלו שהם ב"ת נקבל: $Cov\big(X_i, X_j\big) = 0$. מכיוון שההטלות הן בלתי תלויות אחת בשנייה. כדי ש X_i, X_j יהיו תלויים, השלשות שהם מייצגים צריכות להיחתך. לכן זה ייקרה רק אם $|j - i| \leq 2$ (כדי שהשלשות לא יהיו רחוקות ביותר מ 2 ואז יהיה חיתוך).
נתחיל מחישוב ה Cov עבור $i = j$: $Cov(X_i, X_i) = Var(X_i) = \frac{1}{36} \cdot \frac{35}{36} = \frac{35}{6^4}$ לפי תכונה של Cov ולפי נוסחת שונות למשתנה ברנולי (אינדיקטור) שהיא ההסתברות ל 1 כפול ההסתברות ל 0.

עבור $j = i + 1$ (ובאופן סימטרי אם $j = i - 1$): $Cov(X_i, X_{i+1}) = E(X_i X_{i+1}) - E(X_i) \cdot E(X_{i+1})$.
את התוחלות של כל X_i כבר חישבנו בסעיף א׳. נותר לחשב את $E(X_i X_{i+1})$ המשתנה $X_i X_{i+1}$ הוא אינדיקטור ולכן: $E(X_i X_{i+1}) = \mathrm{P}(X_i X_{i+1} = 1) = P(X_i = 1, X_{i+1} = 1)$. כדי לחשב את ההסתברות, עלינו לבדוק בכמה מקרים הסכום של הטלות $i, i+1, i+2$ יהיה 5 וגם הסכום של $i+1, i+2, i+3$ יהיה 5. נמנה את כל האפשרויות: $\{(1,1,3,1), (1,3,1,1), (3,1,1,3), (1,2,2,1), (2,1,2,2), (2,2,1,2)\}$
ולכן יש 6 מתוך 6^4 (כי מדובר כאן ב 4 הטלות סמוכות) ולכן: $E(X_i X_{i+1}) = \frac{6}{6^4} = \frac{1}{6^3}$.
סה״כ: $Cov(X_i, X_{i+1}) = E(X_i X_{i+1}) - E(X_i) \cdot E(X_{i+1}) = \frac{1}{6^3} - \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{5}{6^4}$.
עבור $j = i + 2$ (ובאופן סימטרי אם $j = i - 2$): $Cov(X_i, X_{i+2}) = E(X_i X_{i+2}) - E(X_i) \cdot E(X_{i+2})$.
את התוחלות של כל X_i כבר חישבנו בסעיף א׳. נותר לחשב את $E(X_i X_{i+2})$ המשתנה $X_i X_{i+2}$ הוא אינדיקטור ולכן: $E(X_i X_{i+2}) = \mathrm{P}(X_i X_{i+2} = 1) = P(X_i = 1, X_{i+2} = 1)$. כדי לחשב את ההסתברות, עלינו לבדוק בכמה מקרים הסכום של הטלות $i, i+1, i+2$ יהיה 5 וגם הסכום של $i+2, i+3, i+4$ יהיה 5. נמנה את כל האפשרויות:
$(1,1,3,1,1), (1,3,1,3,1), (1,3,1,1,3), (1,3,1,2,2), (3,1,1,3,1), (3,1,1,1,3), (3,1,1,2,2)$,
$(2,2,1,1,3), (2,2,1,3,1), (2,2,1,2,2), (1,2,2,1,2), (1,2,2,2,1), (2,1,2,1,2), (2,1,2,2,1)$
ולכן יש 14 מתוך 6^5 (כי מדובר כאן ב 5 הטלות סמוכות) ולכן: $E(X_i X_{i+2}) = \frac{14}{6^5}$.
סה״כ: $Cov(X_i, X_{i+1}) = E(X_i X_{i+1}) - E(X_i) \cdot E(X_{i+1}) = \frac{14}{6^5} - \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = \frac{8}{6^5}$.
מכאן, נציב הכל ונקבל: $Var(X) = Var(\Sigma_{i=1}^{n-2} X_i) = \Sigma_{i=1}^{n-2} \Sigma_{j=1}^{n-2} Cov(X_i, X_j)$,
$= \Sigma_{i=1}^{n-2} Cov(X_i, X_i) + 2 \cdot \Sigma_{i=1}^{n-3} Cov(X_i, X_{i+1}) + 2 \cdot \Sigma_{i=1}^{n-4} Cov(X_i, X_{i+2})$, (שימו לב לסכום השני שהוא עד $n-3$ והשלישי עד $n-4$ כדי למנוע חריגה) הכפל ב 2 הוא כי גם יש את הצד השני, לדוגמא: $Cov(X_i, X_{i-1})$ הזהה בערכו ל $Cov(X_i, X_{i+1})$.
נציב את מה שקיבלנו:

$$= \Sigma_{i=1}^{n-2} \left(\frac{35}{6^4}\right) + 2 \cdot \Sigma_{i=1}^{n-3} \left(\frac{5}{6^4}\right) + 2 \cdot \Sigma_{i=1}^{n-4} \left(\frac{8}{6^5}\right) = \frac{35(n-2)}{6^4} + \frac{10(n-3)}{6^4} + \frac{16(n-4)}{6^5} = \frac{286n - 664}{6^5}$$

תשובה סופית: $Var(X) = \frac{286n - 664}{6^5}$.

מבחן 2017
סמסטר קיץ
מועד א

מבחן 2017 סמסטר קיץ מועד א

שאלה 1 (34 נקודות)

נתונות שתי קוביות הוגנות, אחת אדומה ואחת כחולה. על כל אחת מהן מופיע המספר 1 על שתי פאות, המספר 2 על שתי פאות והמספר 3 על שתי פאות. מטילים את שתי הקוביות שוב ושוב עד הפעם הראשונה שתוצאת הקובייה האדומה זהה לתוצאת הקובייה הכחולה. יהי X מספר הפעמים שמטילים את זוג הקוביות ויהי Y סכום שתי הקוביות בהטלה הראשונה.

א. (6 נקודות) מהי ההתפלגות של X?
ב. (18 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של X ו- Y.
ג. (10 נקודות) חשבו את $P(Y=4)$.

שאלה 2 (33 נקודות)

נתונים $n \geq 3$ זוגות נשואים (לצורך השאלה כל זוג מורכב מאישה אחת וגבר אחד). כל הגברים והנשים מתיישבים באופן מקרי אחיד (כלומר, כל שני סידורים אפשריים הם שווי הסתברות) על ספסל ארוך בעל $2n$ מושבים הממוספרים מ-1 עד $2n$ משמאל לימין. יהי X מספר הזוגות הנשואים היושבים אחד ליד השני ויהי Y מספר האינדקסים $1 \leq i \leq 2n-2$ כך שבמקומות ה-i, ה- $i+1$ וה-$i+2$ יושבים גברים.

א. (7 נקודות) חשבו את תוחלת X.
ב. (10 נקודות) חשבו את תוחלת Y.
ג. (8 נקודות) האם X ו-Y בלתי תלויים? הוכיחו את תשובתכם.
ד. (8 נקודות) הוכיחו שלכל $1 \leq k \leq n$ מתקיים: $P(X \geq k) \leq \frac{1}{k}$.

שאלה 3 (33 נקודות)

בכל יום במהלך חודש בן 30 יום אריאל אוכל פרי אחד. על מנת להחליט איזה פרי לאכול, הוא מטיל קובייה הוגנת כאשר הטלות קובייה בימים שונים הן בלתי תלויות. אם תוצאת הקובייה היא 1,2 או 3 הוא אוכל תפוח, אם היא 4 או 5 הוא אוכל אפרסק ואם היא 6 הוא אוכל בננה. יהי X מספר התפוחים הכולל שאריאל אכל, יהי Y מספר האפרסקים הכולל שאריאל אכל ויהי Z מספר הבננות הכולל שאריאל אכל.

א. (6 נקודות) חשבו את תוחלת ושונות X.
ב. (15 נקודות) חשבו את $\rho(Y,Z)$.
ג. (12 נקודות) הוכיחו ש- $P(X+Z \geq 25) \leq \frac{4}{15}$.

פתרון מבחן 2017 סמסטר קיץ מועד א

שאלה 1

א. נשים לב שיש כאן ניסוי (הטלת 2 קוביות) המתבצע שוב ושוב באופן בלתי תלוי כך שבכל ניסוי יש סיכוי להצלחה (התוצאה של הקוביה האדומה זהה לתוצאה של הקוביה הכחולה) ועוצרים בהצלחה הראשונה.
X סופר את מספר ההצלחות ולכן מתפלג גיאומטרית עם הסתברות p להצלחה. נותר רק לחשב את p ומכיוון ש $X \sim Geom(p)$ ינבע ש $E(X) = \frac{1}{p}$.
ההסתברות לתוצאה זהה ב 2 הקוביות היא $1 \cdot \frac{1}{3}$ כי לקוביה האחת יש את כל האפשרויות ואז לשנייה יש 2/6 אפשרויות טובות (המספר שיצא בראשונה ומופיע על 2 פאות של הקוביה השנייה). ולכן: $p = \frac{1}{3}$
ומכאן: $E(X) = 3$.

ב. טווח הערכים של X הוא מ 1 עד אינסוף (אינסופי) ולכן כאן לא נשתמש בטבלה. טווח הערכים של Y הוא: $\{2,3,4,5,6\}$ (הסכומים האפשריים ל 2 הקוביות) – סופי ולכן נוכל לפצל ולחשב לכל ערך בנפרד:
נחשב: $P(X = 1, Y = 2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. (יש רק הטלה אחת ויצא בה 1+1=2 – כדי שנסיים את התהליך)
מכיוון ש Y מושפע רק מההטלה הראשונה, והצואה של ההטלה הראשונה יכולה גם להשפיע על X נחלק את החישוב ל $X = 1$ עם כל ערך של Y ואז $X = k$ כללי עבור $k \geq 2$ עם כל ערך של Y.
$P(X = 1, Y = 3) = 0$ (לא ייתכן שבהטלה הראשונה יצאו מספרים זהים והסכום הוא איזוגי)
$P(X = 1, Y = 4) = \frac{1}{9}$ (יצא 2+2)
$P(X = 1, Y = 5) = 0$ (באותו אופן כמו $Y = 3$)
$P(X = 1, Y = 6) = \frac{1}{9}$ (יצא 3+3)
כעת נעבור ל $X = k$ עבור $X \geq 2$:
$P(X = k, Y = 2) = 0$ (כי חייב להיות 1+1 בהטלה ה 1 ואז לא תהיינה עוד הטלות)
$P(X = k, Y = 3) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ (יצא 1+2 או 2+1 בהטלה הראשונה (מתוך התוצאות השונות), עוד $k - 2$ הטלות לא יצא זהה ובהטלה ה k יצא זהה).
$P(X = k, Y = 4) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ (יצא 1+3 או 3+1 בהטלה הראשונה (אבל לא 2+2 כי אז נעצור), עוד $k - 2$ הטלות לא יצא זהה ובהטלה ה k יצא זהה).
$P(X = k, Y = 5) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$ (יצא 2+3 או 3+2 בהטלה הראשונה, עוד $k - 2$ הטלות לא יצא זהה ובהטלה ה k יצא זהה).
$P(X = k, Y = 6) = 0$ (כדי שיהיה סכום 6 חייב 3+3 ואז לא תהיינה עוד הטלות)

ג. לפי סעיף ב', נעבור על כל ערכי X ונסכום את ההסתברויות לקבל $Y = 4$ וגם כל ערך של X:
$P(Y = 4) = P(X = 1, Y = 4) + \Sigma_{k=2}^{\infty} P(X = k, Y = 4) = \frac{1}{9} + \Sigma_{k=2}^{\infty} \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$. כעת, לפי סכום סדרה הנדסית נקבל: $P(Y = 4) = \frac{1}{9} + \Sigma_{k=2}^{\infty} \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdot 2 = \frac{1}{3}$.

שאלה 2

א. יש כאן ספירה מורכבת ולכן נשתמש באינדיקטורים: לכל $1 \leq i \leq n$ נגדיר X_i להיות 1 אם ורק אם הזוג ה i יושבים זה לצד זה. לכל $1 \leq i \leq 2n - 2$ נגדיר Y_i להיות 1 אם ורק אם במקומות $i, i+1, i+2$ יושבים גברים. $X = \Sigma_{i=1}^{n} X_i$, $Y = \Sigma_{i=1}^{2n-2} Y_i$.

נחשב את התוחלת של X לפי תכונת ליניאריות התוחלת: $E(X) = E(\Sigma_{i=1}^{n} X_i) = \Sigma_{i=1}^{n} E(X_i)$. נותר לחשב את $E(X_i)$ לכל i. נחשב לפי קומבינטוריקה: $E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{2(2n-1)!}{(2n)!} = \frac{1}{n}$ כי נתייחס לזוג ה i כאדם אחד ונסדר את $2n-1$ ה"אנשים" ($2n-2$ אנשים וזוג אחד) בשורה. חלקי סה"כ לסדר $2n$ אנשים בשורה.

כעת, $E(X) = \Sigma_{i=1}^{n} E(X_i) = \Sigma_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = \frac{n}{n} = 1$.

ב. שוב לפי אותו תהליך: $E(Y) = E(\Sigma_{i=1}^{2n-2} Y_i) = \Sigma_{i=1}^{2n-2} E(Y_i)$. נחשב את $E(Y_i)$:
$E(Y_i) = P(Y_i = 1) = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(2n-3)!}{(2n)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{(2n)(2n-1)(2n-2)} = \frac{n-2}{4\cdot(2n-1)}$ כאשר החישוב היה לפי קומבינטוריקה: במונה – מספר האפשרויות לסדר $2n$ אנשים בשורה (n גברים ו n נשים) כך שבמקומות המבוקשים יהיו גברים: למיקום i יש n אפשרויות (כי יש n גברים), למיקום $i+1$ יש $n-1$ אפשרויות ולמיקום $i+2$ יש $n-2$ אפשרויות. בשאר המקומות נסדר את $2n-3$ הנותרים בכל סידור אפשרי.
במכנה: סה"כ האפשרויות לסדר $2n$ אנשים בשורה.

כעת, $E(Y) = \Sigma_{i=1}^{2n-2} E(Y_i) = \Sigma_{i=1}^{2n-2} \frac{n-2}{4\cdot(2n-1)} = \frac{(n-2)(2n-2)}{4\cdot(2n-1)} = \frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot(2n-1)}$.

ג. X, Y כן תלויים. דוגמא: $P(X = n, Y = 1) = 0$ כי אם כל הזוגות יושבים זה לצד זה אז אין מצב שיהיה 3 גברים סמוכים. מצד שני: $P(X = n) > 0$ כי יש סידור עבורו כל הזוגות יושבים זה לצד זה.
$P(Y = 1) > 0$ כי יש סידור עבורו יש 3 גברים זה לצד זה. ולכן: $P(X = n) \cdot P(Y = 1) \neq 0$.

ד. נשתמש באי שוויון מרקוב: $P(X \geq k) \leq \frac{E(X)}{k} = \frac{1}{k}$ כאשר השוויון האחרון הוא לפי סעיף א', מש"ל.

שאלה 3

א. נשים לב שיש כאן 30 ניסויים (ימים בהם אריאל מטיל קוביה) כאשר הניסויים בלתי תלויים ובכל ניסוי יש סיכוי להצלחה וכשלון. X סופר את ההצלחות (הצלחה במובן שיצא 1,2,3 ואריאל אכל תפוח), Y סופר את מספר ההצלחות (במובן שיצא 4,5 ואריאל אכל אפרסק), Z סופר את מספר ההצלחות (במובן שיצא 6 ואריאל אכל בננה). לכן כל המשתנים מתפלגים בינומית:
$X \sim Bin\left(30, \frac{1}{2}\right), Y \sim Bin\left(30, \frac{1}{3}\right), Z \sim Bin\left(30, \frac{1}{6}\right)$.
לכן, לפי הנוסחאות לתוחלת ושונות התפלגות בינומית:
$E(X) = 30 \cdot \frac{1}{2} = 15$, $Var(X) = 30 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$.

ב. כדי לחשב את מקדם המתאם, עלינו תחילה לחשב את $Cov(Y, Z)$. לכן, כדי להקל על החישוב, נפרק את Y, Z לאינדיקטורים. נגדיר לכל $1 \leq i \leq 30$ את Y_i – שווה 1 אם ורק אם אריאל אכל אפרסק ביום i.
Z_i - שווה 1 אם ורק אם אריאל אכל בננה ביום i. מכאן: $Y = \Sigma_{i=1}^{30} Y_i$, $Z = \Sigma_{i=1}^{30} Z_i$.
לפי תכונת שונות משותפת לסכום מול סכום:
$Cov(Y, Z) = Cov(\Sigma_{i=1}^{30} Y_i, \Sigma_{i=1}^{30} Z_i) = \Sigma_{i=1}^{30} \Sigma_{j=1}^{30} Cov(Y_i, Z_j)$, נותר לחשב את $Cov(Y_i, Z_j)$ לכל i, j:
נשים לב שאם $i \neq j$ אז Y_i, Z_j בלתי תלויים כי ההטלות בימים שונים הן בלתי תלויות ולכן:
$Cov\left(Y_i, Z_j\right) = 0$. נותר לחשב Cov רק עבור $i = j$:
לפי הנוסחא לחישוב ישיר של השונות המשותפת:
$Cov(Y_i, Z_i) = E(Y_i Z_i) - E(Y_i) \cdot E(Z_i)$, כל המשתנים הם אינדיקטורים ולכן:
$E(Y_i Z_i) = P(Y_i Z_i = 1) = P(Y_i = 1, Z_i = 1) = 0$ כי לא ייתכן שאריאל אכל גם אפרסק וגם בננה כי הוא מטיל את הקוביה רק פעם אחת ועבור כל תוצאה הוא אוכל פרי אחד.
$E(Y_i) = \frac{1}{3}$ כי עבור התוצאות 4,5 אריאל אוכל אפרסק.
$E(Z_i) = \frac{1}{6}$ כי רק אם יוצא 6 אריאל אוכל בננה.

לכן: $Cov(Y_i,Z_i)=0-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=-\frac{1}{18}$.
נחזור ונציב למעלה:
$Cov(Y,Z)=\Sigma_{i=1}^{30}\Sigma_{j=1}^{30}Cov(Y_i,Z_j)=\Sigma_{i=1}^{30}Cov(Y_i,Z_i)=\Sigma_{i=1}^{30}\left(-\frac{1}{18}\right)=-\frac{30}{18}$.
נמשיך ונחשב את $Var(Y)$: לפי תכונה של שונות של סכום משתנים בלתי תלויים (כי ההטלות בימים שונים בלתי תלויות: $Var(Y)=Var(\Sigma_{i=1}^{30}Y_i)=\Sigma_{i=1}^{30}Var(Y_i)=\Sigma_{i=1}^{30}\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{60}{9}=\frac{20}{3}$ כאשר החישוב של $Var(Y_i)$ לכל i הוא לפי נוסחת השונות של משתנה ברנולי (אינדיקטור).
באותו אופן עבור Z: $Var(Z)=Var(\Sigma_{i=1}^{30}Z_i)=\Sigma_{i=1}^{30}Var(Z_i)=\Sigma_{i=1}^{30}\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{150}{36}=\frac{25}{6}$.
נציב הכל לנוסחת חישוב מקדם המתאם:

$$\rho(Y,Z)=\frac{Cov(Y,Z)}{\sqrt{Var(Y)}\sqrt{Var(Z)}}=-\frac{\frac{30}{18}}{\sqrt{\frac{20}{3}}\sqrt{\frac{25}{6}}}=-\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

ג. נשים לב שמכיוון ש $X+Y+Z=30$ (כי בכל יום אריאל אוכל פרי (תפוח או אפרסק או בננה) ולכן:
$P(X+Z\geq 25)=P(Y\leq 5)$,
נזכיר כי $Y\sim Bin\left(30,\frac{1}{3}\right)$ ולכן: $E(Y)=\frac{30}{3}=10$, $Var(Y)=30\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{20}{3}$
נשתמש באי שוויון צ׳בישב (כי הסימן הפוך אז מרקוב לא יעזור): נשתמש בטריקים של העברת אגפים והוספה ל 2 הצדדים כדי שהביטוי בתוך ההסתברות יהיה דומה לביטוי באי השוויון של צ׳בישב:
$P(Y\leq 5)=P(-Y\geq -5)=P(-Y+10\geq -5+10)=P(10-Y\geq 5)$, נמשיך ב״טריקים״ ונשים לב ש $P(10-Y\geq 5)\leq P(|10-Y|\geq 5)$ כי כשיש ערך מוחלט זה מתחלק לסכום של 2 הסתברויות, אחת שהייתה ($P(10-Y\geq 5)$) + אחת בכיוון השלילי ($P(10-Y\leq -5)$) ולכן $P(|10-Y|\geq 5)$ גדול או שווה ל $P(10-Y\geq 5)$. לכן:
$P(10-Y\geq 5)\leq P(|10-Y|\geq 5)=\mathrm{P}(|\mathrm{Y}-10|\geq 5)=\mathrm{P}(|\mathrm{Y}-\mathrm{E(Y)}|\geq 5)$. הפכנו את ההפרש בתוך הערך המוחלט ומתקיים: $E(Y)=10$. למעשה, השתמשנו בטריקים כדי להגיע לביטוי מהצורה $\mathrm{P}(|\mathrm{Y}-\mathrm{E(Y)}|\geq 5)$ כדי שנוכל להשתמש באי השוויון של צ׳בישב ולכן הורדנו 10 מ 2 האגפים כי ידענו ש 10 היא התוחלת של Y. כעת נשתמש באי השוויון ונקבל:
$\mathrm{P}(|\mathrm{Y}-\mathrm{E(Y)}|\geq 5)\leq\frac{\mathrm{Var(Y)}}{5^2}=\frac{\frac{20}{3}}{25}=\frac{20}{75}=\frac{4}{15}$ ולכן: $P(X+Z\geq 25)\leq\frac{4}{15}$ מש״ל.

מבחן 2017

סמסטר קיץ

מועד ב

מבחן 2017 סמסטר קיץ מועד ב

שאלה 1 (34 נקודות)

נתון מטבע הנותן 1 בהסתברות $1/3$ ו- 0 בהסתברות $2/3$. מטילים את המטבע 4 פעמים כאשר ההטלות בלתי תלויות. יהי X סכום תוצאות 2 ההטלות הראשונות, יהי Y סכום תוצאת ההטלה השנייה והשלישית ויהי Z סכום תוצאות שתי ההטלות האחרונות.

א. (15 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של X ו $Y-$.
ב. (5 נקודות) האם X ו- Y בלתי תלויים? הוכיחו את תשובתכם.
ג. (7 נקודות) חשבו את $P(X+Y+Z=4)$.
ד. (7 נקודות) חשבו את $P(X=1, Y=1|Z=1)$.

שאלה 2 (33 נקודות)

בכד יש ארבעה כדורים אדומים, ארבעה כדורים כחולים ושני כדורים צהובים. בכל שלב מוציאים כדור אחד מהכד באופן מקרי אחיד. אם הכדור צהוב אז עוצרים, אחרת מחזירים את הכדור לכד וחוזרים על הניסוי שוב (הוצאות הכדורים השונות בלתי תלויות זו בזו). יהי X מספר הפעמים שהוצאנו כדור מהכד ויהי Y מספר הפעמים שהוצאנו כדור כחול.

א. (6 נקודות) מהי ההתפלגות של X.
ב. (7 נקודות) חשבו את $P(X=5, Y=2)$.
ג. (10 נקודות) יהי $n \geq 1$ מספר שלם כלשהו. חשבו את ההתפלגות של $Y|X=n$.
ד. (10 נקודות) חשבו את התוחלת של Y.

הערה: בשאלה 2 ניתן להשתמש ללא הוכחה בעובדה ש $\Sigma_{i=1}^{\infty} i x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$ לכל $-1 < x < 1$.

שאלה 3 (33 נקודות)

לכל $1 \leq i \leq 20$ מטילים מטבע הוגן (כלומר הסתברות 1/2 לעץ והסתברות 1/2 לפלי) כאשר כל הטלות המטבע בלתי תלויות. תהי A קבוצת כל השלמים בין 1 ל-20 שתוצאת המטבע שהוטל עבורם הייתה עץ. יהי $X = \Sigma_{i\in A} i$.

א. (6 נקודות) חשבו את $P(X \leq 3)$.
ב. (9 נקודות) חשבו את התוחלת של X.
ג. (11 נקודות) חשבו את השונות של X.
ד. (7 נקודות) הוכיחו ש- $P(|X-105| \geq 41) \leq \frac{35}{82}$.

הערה: בשאלה 3 ניתן להשתמש בעובדה ש $\Sigma_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

פתרון מבחן 2017 סמסטר קיץ מועד ב

שאלה 1

א. עבור X,Y,Z טווח הערכים שהם מקבלים הוא: $\{0,1,2\}$ - סופי ולכן נשתמש בטבלה:
נחשב את כל החיתוכים של ערכי X וערכי Y:
$P(X=0,Y=0)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$ – נדרוש שב 3 ההטלות הראשונות יצא 0 במטבע.
$P(X=1,Y=0)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{27}$ – נדרוש בהטלה ה 1 שיצא אחד ובשתיים האחרות 0.
$P(X=2,Y=0)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=0$ – אם $X=2$ אז בהטלה ה 2 יצא 1 ואז Y לא יכול להיות 0.
$P(X=0,Y=1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$ – נדרוש שב 2 ההטלות הראשונות יצא 0 ובשלישית 1.
$P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{6}{27}$ – נדרוש (1,0,1) או (0,1,0) כי ההטלה ה 2 נספרת גם ל X וגם ל Y.
$P(X=2,Y=1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$ – נדרוש ב 2 ההטלות הראשונות 1 ובשלישית 0.
$P(X=0,Y=2)=0$ – אם $Y=2$ אז בהטלה ה 2 יצא 1 ואז X לא יכול להיות 0.
$P(X=1,Y=2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$ – נדרוש בהטלה ה 1 שיצא 0 ובשתיים האחרות 1.
$P(X=2,Y=2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27}$ – נדרוש 1 ב 3 ההטלות.
תשובה סופית:

X Y	0	1	2	Σ
0	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{27}$	0	$\frac{12}{27}$
1	$\frac{4}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{2}{27}$	$\frac{12}{27}$
2	0	$\frac{2}{27}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$
Σ	$\frac{12}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{3}{27}$	1

ב. המשתנים תלויים. דוגמא: $P(X=2,Y=0)=0$ לפי הטבלה בסעיף א'.
מצד שני: $P(X=2)=0+\frac{2}{27}+\frac{1}{27}=\frac{3}{27}$ (סכימת עמודה), $P(Y=0)=\frac{8}{27}+\frac{4}{27}+0=\frac{12}{27}$ (סכימת שורה), ורואים ש $P(X=2)\cdot P(Y=0)=\frac{3}{27}\cdot\frac{12}{27}\neq 0$ ולכן המשתנים תלויים.

ג. כדי לחשב את $P(X+Y+Z=4)$ נשים לב שעבור הסדרה (a,b,c,d) של הטלות המטבע. אם יש 1 ב b הוא נספר פעמיים: פעם אחת ב X ופעם אחת ב Y, כמו כן, אם יש 1 ב c אז הוא נספר פעמיים: פעם אחת ב Y ופעם אחת ב Z. עבור 1 ב a או ב d הוא נספר פעם אחת. ולכן הסדרות שייתנו 4 בס"ה הן: $\{(0,1,1,0),(1,1,0,1),(1,0,1,1)\}$ ומכאן:
$P(X+Y+Z=4)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3^4}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^4}=\frac{8}{81}$.

ד. לפי נוסחת ההסתברות המותנה: $P(X=1,Y=1|Z=1)=\frac{P(X=1,Y=1,Z=1)}{P(Z=1)}$. נחשב את ההסתברויות:
$P(X=1,Y=1,Z=1)=P(\{(0,1,0,1),(1,0,1,0)\})=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{81}$ כי צריך שהסכום יהיה 3 ובאותו האופן כמו בסעיף הקודם.
עבור $P(Z=1)$ נדרוש שבהטלה ה 3 יצא 1 וברביעית 0 או להיפך ולכן: $P(Z=1)=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$.
נציב ונקבל: $P(X=1,Y=1|Z=1)=\frac{P(X=1,Y=1,Z=1)}{P(Z=1)}=\frac{\frac{8}{81}}{\frac{4}{9}}=\frac{2}{9}$.

שאלה 2

א. יש כאן ניסויים (הוצאת כדור) המתבצעים שוב ושוב ללא תלות אחד בשני עד להצלחה הראשונה (הוצאת כדור צהוב) לכל ניסוי סיכוי להצלחה ולכישלון, X סופר כמה ניסויים היו ולכן הוא מתפלג גיאומטרית עם הסתברות להצלחה p. נותר לחשב את p. $p = P(\text{יצא כדור צהוב}) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. ולכן: $X \sim Geom(\frac{1}{5})$.

ב. מכיוון שיש לנו את ההתפלגות של X אז קל לחשב את ההסתברות ש X יהיה שווה לערך ולכן נעדיף להשתמש בהסתברות מותנית: לפי נוסחת ההסתברות המותנית:
$P(X=5, Y=2) = P(X=5) \cdot P(Y=2|X=5)$. מכיוון ש $X \sim Geom(\frac{1}{5})$
נובע ש $P(X=5) = \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{5}$. נותר רק לחשב את $P(Y=2|X=5)$.
נ שים לב ש $Y|X = 5 \sim Bin\left(4, \frac{1}{2}\right)$ וזאת מכיוון שאם ידוע ערכו של X אז ישנה כמות ניסויים ידועה ובכל ניסוי יש סיכוי להצלחה (הוצאת כדור כחול) וכשלון. Y סופר את כמות ההצלחות ולכן מתפלג בינומית עם 4 ניסויים (כי ב 5 בטוח יצא צהוב אז אין כאן ניסיון, שהרי עצרנו) והסיכוי להוציא כדור כחול זה 4 מתוך 8 הכדורים שיש בכד (פרט לצהובים כי ידוע שלא יצאו) ולכן ההסתברות להצלחה היא $\frac{1}{2}$.
לכן נותר לחשב לפי הנוסחא להתפלגות בינומית:
$$P(X=5, Y=2) = P(X=5) \cdot P(Y=2|X=5) = \left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{5} \cdot \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{32}{5^5}.$$

ג. לפי ב' מצאנו ש $Y|X = n \sim Bin\left(n-1, \frac{1}{2}\right)$.

ד. מכיוון ש Y תלוי ב X נשתמש בנוסחת התוחלת השלמה ובנוסחאות להתפלגויות של X ושל $Y|X=k$:
$E(Y) = E\big(E(Y|X)\big) = \Sigma_{k=1}^{\infty} P(X=k) \cdot E(Y|X=k) = \Sigma_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{(k-1)}{2}$. כעת, נבצע הצבה: $t = k-1$ ונוציא את $\frac{1}{10}$ מהסכום. נקבל: $\frac{1}{10}\Sigma_{t=0}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot t = \frac{1}{10}\Sigma_{t=1}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^t \cdot t$ כאשר השוויון הוא כי האיבר הראשון הוא 0 אז אפשר להתחיל את הסכום מהאיבר השני.
כעת, לפי העובדה שניתנה בשאלה: $\Sigma_{i=1}^{\infty} i x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$ עבור $x = \frac{4}{5}$ ניתן לומר שהסכום שווה ל:
$\frac{1}{10} \cdot \frac{\frac{4}{5}}{\left(1-\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{20}{10} = 2$. ולכן התשובה הסופית היא: $E(Y) = 2$.

שאלה 3

א. בשאלה מדובר בקבוצה A של כל האינדקסים של הטלות בהן יצא עץ. X הוא סכום של כל האינדקסים הללו. מכאן, בשאלה מבקשים את ההסתברות שסכום האינדקסים קטן או שווה ל 3. נשים לב שאם כן, האפשרויות הן: $A = \emptyset$ (כלומר, לא היה אינדקס שבו יצא עץ) או $A = \{1\}$ (רק בהטלה הראשונה יצא עץ) או $A = \{2\}$ או $A = \{3\}$ או $A = \{1,2\}$.
$$P(A = \emptyset) = \left(\frac{1}{2}\right)^{20}, P(A = \{1\}) = P(A = \{2\}) = P(A = \{3\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{19} = \left(\frac{1}{2}\right)^{20},$$
$$P(A = \{1,2\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{18} = \left(\frac{1}{2}\right)^{20}.$$
ולכן: $P(X \le 3) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ (סכום כל האפשרויות).

ב. כדי לחשב את התוחלת של X נצטרך לעבור על כל הסכומים האפשריים וזה ארוך. לכן נפרק את X לסכום משתנים מקריים (אינדיקטורים) באופן הבא: נגדיר לכל $1 \le i \le 20$ את X_i להיות אינדיקטור השווה ל 1 אם בהטלה ה i יצא עץ ו 0 אחרת. מכאן, X סוכם את האינדקסים ולכן: $X = \Sigma_{i=1}^{20} i \cdot X_i$ (ככה רק אלו שיצא בהם עץ ייכנסו לסכום כי אלו שיצא בהם פלי ייתאפסו בגלל האינדיקטור).
כעת נוכל לחשב את התוחלת של X לפי תכונת ליניאריות התוחלת:

$E(X) = E(\Sigma_{i=1}^{20} i \cdot X_i) = \Sigma_{i=1}^{20} E(i \cdot X_i) = \Sigma_{i=1}^{20} i \cdot E(X_i)$. נותר לחשב את $E(X_i)$.

$E(X_i) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$ (יצא עץ). נציב ונקבל:

$E(X) = \Sigma_{i=1}^{20} i \cdot E(X_i) = \frac{1}{2}\Sigma_{i=1}^{20} i = \frac{1}{2} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} = 105$, כאשר השוויון לפני האחרון הוא לפי סכום סדרה חשבונית.

ג. נמשיך עם האינדיקטורים, ולפי תכונות של שונות: $Var(X) = Var(\Sigma_{i=1}^{20} i \cdot X_i)$ ומכיוון שההטלות הן בלתי תלויות, גם iX_i, jX_j אינם תלויים זה בזה ולכן לפי תכונות של שונות:

$Var(X) = Var(\Sigma_{i=1}^{20} i \cdot X_i) = \Sigma_{i=1}^{20} i^2 \cdot Var(X_i)$, כעת, לפי הנוסחא לשונות של משתנה ברנולי:

$Var(X_i) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. נציב ונקבל: $Var(X) = \Sigma_{i=1}^{20} i^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \cdot \Sigma_{i=1}^{20} i^2$ ולפי הנוסחא שניתנה בשאלה, הסכום שווה ל: $Var(X) == \frac{1}{4} \cdot \Sigma_{i=1}^{20} i^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} = \frac{35 \cdot 41}{2} = 717.5$.

ד. נשתמש באי שוויון צ'בישב, ניזכר כי $E(X) = 105$, $Var(X) = \frac{35 \cdot 41}{2}$ ומכאן:

$P(|X - 105| \geq 41) = P(|X - E(X)| \geq 41) \leq \frac{Var(X)}{41^2} = \frac{\frac{35 \cdot 41}{2}}{41^2} = \frac{35}{82}$ מש"ל.

מבחן 2018

סמסטר ב

מועד א

מבחן 2018 סמסטר ב מועד א

שאלה 1 (25 נקודות)

כד מכיל כדור לבן אחד, שני כדורים שחורים ושלושה כדורים אדומים. מוציאים באופן מקרי אחיד וללא החזרה שלושה כדורים מהכד. יהי X משתנה מקרי הסופר את מספר הכדורים הלבנים שהוצאו ויהי Y משתנה מקרי הסופר את מספר הכדורים האדומים שהוצאו.

א. (15 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של X ו- Y.
ב. (5 נקודות) חשבו את ההתפלגות השולית של X.
ג. (5 נקודות) חשבו את $P(X > Y)$.

שאלה 2 (25 נקודות)

מטילים מטבע הוגן (שצדדיו הם 0 ו-1) עד הפעם הראשונה שמתקבל הרצף 10, כל ההטלות בלתי תלויות. יהי X מספר ההטלות שתוצאתן 0 ויהי Y מספר ההטלות שתוצאתן 1.

א. (7 נקודות) חשבו את ההתפלגות של X.
ב. (9 נקודות) חשבו את ההתפלגות של Y.
ג. (9 נקודות) הוכיחו ש- $P(X + Y \geq 12) \leq 1/3$.

שאלה 3 (25 נקודות)

מטילים קוביה הוגנת עד הפעם הראשונה שמתקבלת תוצאה שונה מ 6 כאשר כל ההטלות בלתי תלויות. יהי X סכום תוצאות כל ההטלות.

א. (6 נקודות) חשבו את $P(X = k)$ לכל k טבעי.
ב. (7 נקודות) הוכיחו ע"י חישוב ישיר שמתקיים $\Sigma_{\mathrm{k=1}}^{\infty}\mathrm{P(X = k)} = 1$.
ג. (12 נקודות) חשבו את התוחלת של X (התשובה הסופית צריכה להיות מספר ממשי כלשהו, תשובה המכילה סכום אינסופי תזכה לניקוד חיובי אך נמוך מאוד).

שאלה 4 (25 נקודות)

יהי $n \geq 2$ מספר טבעי. לכל $1 \leq i \leq n$ מטילים קוביה הוגנת, כאשר כל הטלות הקוביה בלתי תלויות. לכל $1 \leq i \leq n-1$ נגדיר משתנה מקרי X_i באופן הבא: אם תוצאת ההטלה ה- i קטנה ממש מתוצאת ההטלה ה- $i+1$ אז $X_i = 1$. אם תוצאת ההטלה ה- i גדולה ממש מתוצאת ההטלה ה- $i+1$ אז $X_i = -1$, ואחרת $X_i = 0$.
יהי $X = \Sigma_{i=1}^{n-1} X_i$.

א. (6 נקודות) עבור $n = 3$, חשבו את $P(X = 1)$.
ב. (8 נקודות) חשבו את התוחלת של X.
ג. (11 נקודות) חשבו את השונות של X.

פתרון מבחן 2018 סמסטר ב מועד א

שאלה 1

א. טווח הערכים של X הוא $\{0,1\}$, טווח הערכים של Y הוא $\{0,1,2,3\}$. סופיים ולכן נשתמש בטבלה. נחשב תחילה את כל החיתוכים של ההסתברויות לערכי X, Y:

$P(X=0, Y=0)=0$ כי חוץ מאדומים ולבנים יש רק 2 שחורים בכד ומוציאים 3 כדורים כך שלא ייתכן שלא יצאו לבנים וגם לא יצאו אדומים.

$P(X=1, Y=0)=\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{20}$ - נדרוש לבן ו 2 שחורים.

$P(X=0, Y=1)=\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{3}{20}$ - נדרוש אדום ו 2 שחורים.

$P(X=1, Y=1)=\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{6}{3}}=\frac{6}{20}$ - נדרוש לבן, שחור ואדום.

$P(X=0, Y=2)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{6}{20}$ - נדרוש 2 אדומים ושחור.

$P(X=1, Y=2)=\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{3}{2}}{\binom{6}{3}}=\frac{3}{20}$ - נדרוש לבן ו 2 אדומים..

$P(X=0, Y=3)=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{6}{3}}=\frac{1}{20}$ - נדרוש 3 אדומים.

$P(X=1, Y=3)=0$ – מוציאים רק 3 כדורים ולא 4.

תשובה סופית:

X \ Y	0	1	Σ
0	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$
1	$\frac{3}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{9}{20}$
2	$\frac{6}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{9}{20}$
3	$\frac{1}{20}$	0	$\frac{1}{20}$
Σ	$\frac{10}{20}$	$\frac{10}{20}$	1

ב. לפי הטבלה (סכומי העמודות): $P(X=0)=P(X=1)=\frac{1}{2}$.

ג. $P(X>Y)=P(X=1, Y=0)=\frac{1}{20}$ כי זוהי האופציה היחידה שערכו של X יהיה גדול ממש מערכו של Y.

שאלה 2

א. נשים לב שטווח הערכים של X הוא בין 1 (מינימום פעם אחת יצא 0 כי עוצרים ברצף 10) לאינסוף. אם כן, אנו צריכים לחשב את $P(X=k)$ לכל k שלם חיובי. נשים לב שסדרת ההטלות חייבת להיות בפורמט של רצף אפסים (באורך כלשהו, ייתכן גם באורך 0) ואז רצף אחדות (באורך כלשהו, מינימום 1) ולבסוף 0 אחד. כעת, אם דורשים ש $X=k$ אז היו k אפסים ולכן כמות האפסים ברצף הפותח היא $k-1$ ולאחר מכן רצף אחדות באורך לפחות 1 ובסוף עוד 0 אחד. נעבור על כל האפשרויות לרצף האחדות ונסכום:

$P(X=k)=\Sigma_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\Sigma_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+i}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$. (דורשים $k-1$ אפסים ואז i אחדות ולבסוף אפס אחד) כאשר השוויון לפני האחרון הוא לפי סכום סדרה הנדסית.

ב. באופן דומה בדיוק לסעיף א׳: (רק שהפעם k מייצג את כמות האחדות)
$P(Y=k)=\Sigma_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)=\Sigma_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$ כאשר המעבר האחרון חושב כבר בסעיף א׳.

ג. נשתמש באי שוויון מרקוב (נתייחס ל $X+Y$ כאל משתנה אחד): $P(X+Y\geq 12)\leq\frac{E(X+Y)}{12}$. נותר לחשב את $E(X+Y)$. לפי תכונת ליניאריות התוחלת מתקיים: $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$. כעת, בסעיפים א׳ ו-ב׳ הראינו ש X,Y מתפלגים גיאומטרית עם הסתברות $\frac{1}{2}$ להצלחה כי $P(X=k)=P(Y=k)=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)$. ולכן, לפי נוסחא לתוחלת משתנה המתפלג גיאומטרית, נובע ש $E(X)=E(Y)=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ ולכן: $E(X+Y)=4$ ומכאן:
$P(X+Y\geq 12)\leq\frac{E(X+Y)}{12}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$. מש״ל.

שאלה 3

א. נשים לב שכל תוצאות ההטלות פרט לאחרונה הן 6, והאחרונה בהכרח לא 6. לכן מעובדה זו נובע שסכום ההטלות הוא: $6n+i$ כאשר $n+1$ = מספר ההטלות שהיו. כי זה 6+6+6+...+6+התוצאה האחרונה (שאינה 6), i תוצאת ההטלה האחרונה: $1\leq i\leq 5$.
לכן, אם k הוא כפולה של 6 אז $P(X=k)=0$ כי אין סיכוי לסכום שהוא כפולה של 6.
אחרת, $P(X=k)=P(X=6n+i)=\left(\frac{1}{6}\right)^{n}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$ כי n מציין כמה פעמים 6 נכנס ב k ולכן דורשים שנקבל בכל ההטלות הראשונה כמות כזו של 6. ולבסוף עוד $\frac{1}{6}$ לקבל את השארית המבוקשת.
(לדוגמא: אם $k=15$ אז נדרוש שיהיו $n=2$ נטלות שיצא בהן 6 (הסתברות 1/6 לכל אחת כזו) ובהטלה האחרונה שיצא 3 (הסתברות 1/6)).

ב. נחשב לפי סעיף א׳: $\Sigma_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\Sigma_{n=0}^{\infty}\Sigma_{i=1}^{5}P(X=6n+i)$ כי פשוט נעבור על כל המספרים בדרך של כפולות של 6 + שארית שאינה 0. נמשיך לחשב לפי תוצאת סעיף א׳:
$\Sigma_{k=1}^{\infty}P(X=k)=\Sigma_{n=0}^{\infty}\Sigma_{i=1}^{5}P(X=6n+i)=\Sigma_{n=0}^{\infty}\Sigma_{i=1}^{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}=\Sigma_{n=0}^{\infty}5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}$ כאשר השווין האחרון הוא כי בסכום הפנימי סוכמים את אותו הדבר 5 פעמים.
כעת, לפי סכום סדרה הנדסית: $\Sigma_{n=0}^{\infty}5\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}=5\cdot\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=1$ ולכן: $\Sigma_{k=1}^{\infty}P(X=k)=1$ מש״ל.

ג. נחשב את X באמצעות התכונות של תוחלת, לשם כך נגדיר Y להיות משתנה מקרי הסופר כמה הטלות היו. Z – תוצאת ההטלה האחרונה. נשים לב ש $Y\sim Geom\left(\frac{5}{6}\right)$ כי מטילים שוב ושוב עד שיוצא מספר השונה מ 6 (שזו ההצלחה) ולכן: $E(Y)=\frac{1}{\frac{5}{6}}=\frac{6}{5}$. בנוסף, $Z\sim U[1,5]$ כי לכל מספר יש סיכוי שווה לצאת בהטלה האחרונה (פרט ל 6 שלא יכול לצאת) ולכן, לפי נוסחא של תוחלת של משתנה המתפלג אחיד:
$E(Z)=\frac{1+5}{2}=3$. כעת: $X=6(Y-1)+Z$ כי אם היו Y הטלות אז ב $Y-1$ הראשונות יצא 6 ובהטלה האחרונה יצא Z ולכן הסכום הוא כזה. מכאן, לפי ליניאריות התוחלת:
$E(X)=E(6Y-6+Z)=6E(Y)-6+E(Z)=\frac{36}{5}-6+3=\frac{21}{5}$.

שאלה 4

א. מכיוון ש $n=3$ אזי היו 3 הטלות ומתקיים: $X=X_1+X_2$. לכן, כדי שייתקיים: $X=1$ נדרוש ש $X_1=0,X_2=1$ או $X_1=1,X_2=0$. כלומר:

$P(X=1)=P(X_1=1,X_2=0)+P(X_1=0,X_2=1)$. כעת, אם $X_1=1$ זה אומר שהתוצאה הראשונה קטנה מהשנייה, $X_2=0$ אומר שהתוצאה השנייה שווה לשלישית. ולכן אנו מחפשים את כל האפשרויות לתוצאות מהצורה: (a,b,b) כאשר $a<b$. אלו למעשה כל האפשרויות לבחור 2 מספרים שונים מתוך ה 6 ללא חזרות וללא חשיבות לסדר (כי הסדר כבר נקבע) מתוך סה"כ התוצאות. ולכן:

$P(X=1,X_2=0)=\frac{\binom{6}{2}}{6^3}$. באופן זהה וסימטרי עבור: $P(X_1=0,X_2=1)$ ולכן סה"כ:

$P(X=1)=2\cdot\frac{\binom{6}{2}}{6^3}=\frac{30}{6^3}=\frac{5}{36}$.

ב. לפי ליניאריות התוחלת: $E(X)=E(\Sigma_{i=1}^{n-1}X_i)=\Sigma_{i=1}^{n-1}E(X_i)$. לכן נותר לחשב את $E(X_i)$ לכל i.
לפי חישוב ישיר של תוחלת: $E(X_i)=(-1)\cdot P(X_i=-1)+0\cdot P(X_i=0)+1\cdot P(X_i=1)$.
כעת, מכיוון שהסיכוי שיצא (a,b) זהה לסיכוי שיצא (b,a) לכל a,b בטווח $1,2,..,6$ אזי נובע ש $P(X_i=1)=P(X_i=-1)$ לכל $1\le i\le n$ ולכן: $-P(X_i=-1)+P(X_i=1)=0$ ומכאן קיבלנו ש: $P(X_i)=0$ ולכן גם: $P(X)=0$.

ג. לפי תכונות של שונות של סכום משתנים (המנצאת בתכונות של שונות משותפת):
$Var(X)=Var(\Sigma_{i=1}^{n-1}X_i)=\Sigma_{i=1}^{n-1}Var(X_i)+2\cdot\Sigma_{i<j}Cov\left(X_i,X_j\right)$. כעת עלינו לחשב את $Var(X_i)$ לכל $1\le i\le n-1$ וגם $Cov\left(X_i,X_j\right)$ לכל $i<j$.
נתחיל מחישוב $Var(X_i)$: לפי חישוב ישיר של שונות נקבל:
$Var(X_i)=E(X_i^2)-\left(E(X_i)\right)^2$. נותר לחשב את התוחלות:
$E(X_i)=0$לפי מה שראינו בסעיף ב' ,
נחשב כעת את התוחלת של X_i^2: נשים לב שמכיוון ש X_i יכול לקבל את הערכים: $\{-1,0,1\}$ אזי X_i^2 יכול לקבל את הערכים $\{0,1\}$ ולכן הוא אינדיקטור ומכאן:
$E(X_i^2)=P(X_i^2=1)=1-P(X_i^2=0)=1-P(X_i=0)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$, בחרנו לחשב את המשלים (ההסתברות לקבל 0) כי יש בה פחות מקרים (עבור 1 יש את 1 ואת מינוס 1). וכן:
$P(X_i=0)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ – כי נבחר מספר 1 מתוך ה 6 שישמש אותנו לתוצאה הזהה של 2 ההטלות: $i,i+1$.
מכאן: $Var(X_i)=E(X_i^2)-\left(E(X_i)\right)^2=\frac{5}{6}-0^2=\frac{5}{6}$.
נעבור לחישוב $Cov(X_i,X_j)$ לכל $i<j$. לפי תכונות של שונות משותפת, אם X_i,X_j בלתי תלויים אז $Cov\left(X_i,X_j\right)=0$. נכיוון שההטלות הן בלתי תלויות נובד ש X_i,X_j תלויים רק אם יש ביניהם חיתוך (שניהם יתייחסו להטלות משותפות) וזה ייקרה רק אם $j=i+1$ (כי אנחנו מחשבים רק עבור $j>i$)
נחשב עבור $j=i+1$ לפי תכונת שונות משותפת: $Cov(X_i,X_{i+1})=E(X_iX_{i+1})-E(X_i)\cdot E(X_{i+1})$.
$E(X_i)=E(X_{i+1})=0$ ולכן נותר לחשב את $E(X_iX_{i+1})$. המשתנה X_iX_{i+1} מקבל ערכים שהם מכפלות של X_i ב X_{i+1} ולכן מקבל את הערכים: $\{-1,0,1\}$. מכאן, לפי חישוב ישיר של תוחלת נקבל:
$E(X_iX_{i+1})=(-1)\cdot P(X_iX_{i+1}=-1)+0\cdot P(X_iX_{i+1}=0)+1\cdot P(X_iX_{i+1}=1)$, נחשב את ההסתברויות:
$P(X_iX_{i+1}=-1)=P(X_i=1,X_{i+1}=-1)+P(X_i=-1,X_{i+1}=1)$.
$P(X_iX_{i+1}=1)=P(X_i=-1,X_{i+1}=-1)+P(X_i=1,X_{i+1}=1)$.
כדי לחשב את ההסתברויות, נתבונן בשלשות של התוצאות עבור $i,i+1,i+2$: (a,b,c).
נחשב:
$P(X_i=-1,X_{i+1}=1)=\frac{\binom{6}{3}\cdot 2}{6^3}+\frac{\binom{6}{2}}{6^3}=\frac{40+15}{6^3}=\frac{55}{6^3}$ כי דורשים ש: $a>b$ וגם $c>b$ ולכן נחלק למקרים: אם $a\ne c$ אזי נבחר 3 מספרים שונים מתוך ה 6, המינימאל מביניהם יהיה b ואז כפול 2 מי יהיה a ומי יהיה c (כמובן, חלקי סה"כ התוצאות ל 3 הטלות: 6^3). ואם $a=c$ אזי נבחר רק 2 מספרים

שונים מתוך ה 6, המינימאלי יהיה b ו- a,c יקבלו את המספר השני.

באופן סימטרי: $P(X_i=1,X_{i+1}=-1)=\frac{55}{6^3}$ כי דורשים ש $a<b$ וגם $b>c$ ואז b הוא מקסימאלי במקום מינימאלי אבל אלו אותם אפשרויות.

$P(X_i=1,X_{i+1}=1)=\frac{\binom{6}{3}}{6^3}=\frac{20}{6^3}$ כי דורשים ש: $a<b<c$ ולכן נבחר 3 מספרים שונים מתוך ה 6 והסדר מייד נקבע (המינימאלי a, המקסימאלי c והשלישי יהיה ל b) חלקי סה״כ האפשרויות.

באופן סימטרי: $P(X_i=-1,X_{i+1}=-1)=\frac{20}{6^3}$ כי דורשים ש: $a>b>c$.

נציב ונקבל:

$P(X_iX_{i+1}=-1)=P(X_i=1,X_{i+1}=-1)+P(X_i=-1,X_{i+1}=1)=2\cdot\frac{55}{6^3}=\frac{110}{6^3}$.

$P(X_iX_{i+1}=1)=P(X_i=-1,X_{i+1}=-1)+P(X_i=1,X_{i+1}=1)=2\cdot\frac{20}{6^3}=\frac{40}{6^3}$.

ומכאן:

$E(X_iX_{i+1})=-\frac{110}{6^3}+\frac{40}{6^3}=-\frac{70}{6^3}$.

נציב ונקבל: $Cov(X_i,X_{i+1})=E(X_iX_{i+1})-E(X_i)\cdot E(X_{i+1})=-\frac{70}{6^3}-0=-\frac{70}{6^3}$

מכאן: נציב את הכל ב $Var(X)=Var(\Sigma_{i=1}^{n-1}X_i)=\Sigma_{i=1}^{n-1}Var(X_i)+2\cdot\Sigma_{i<j}Cov\left(X_i,X_j\right)$ ונקבל:

$$=\Sigma_{i=1}^{n-1}Var(X_i)+2\cdot\Sigma_{i=1}^{n-2}Cov(X_i,X_{i+1})=\Sigma_{i=1}^{n-1}\left(\frac{5}{6}\right)+2\cdot\Sigma_{i=1}^{n-2}\left(-\frac{70}{6^3}\right)=\frac{5(n-1)}{6}-\frac{140(n-2)}{6^3}$$

מבחן 2018

סמסטר ב

מועד ב

מבחן 2018 סמסטר ב מועד ב

שאלה 1 (25 נקודות)

לאריאל יש שלושה זוגות מכנסיים בצבעים שיסומנו ב- 1,2,3 וארבע חולצות בצבעים שיסומנו ב - 1,2,3,4. במשך 90 ימים, בכל יום הוא בוחר מכנסיים וחולצה ללבוש באופן הבא: תחילה הוא בוחר מכנסיים באופן מקרי אחיד (מבין שלושה הזוגות שברשותו) ואז הוא בוחר חולצה באופן אחיד מבין החולצות שברשותו שצבען שונה מצבע המכנסיים שבחר. הבחירות בימים שונים בלתי תלויות.

א. (9 נקודות) יהי X מספר המכנס הנבחר ביום כלשהו ויהי Y מספר החולצה שנבחרה באותו יום. חשבו את ההתפלגות המשותפת של X ו-Y.

ב. (6 נקודות) חשבו את $P(X=1|Y=3)$.

ג. (10 נקודות) יהי Z משתנה מקרי הסופר את מספר הימים (מתוך ה-90) בהם אריאל לבש את חולצה מספר 4. הוכיחו ש- $P(|Z-30|\geq 10)\leq \frac{1}{5}$.

שאלה 2 (25 נקודות)

בוחרים שני מספרים מהקבוצה $\{10,11,\ldots,99\}$ באופן מקרי אחיד ובלי החזרה. יהי A המאורע: "לשני המספרים אותה ספרת עשרות", יהי B המאורע: "שני המספרים שנבחרו זוגיים" ויהי C המאורע: "הערך המוחלט של ההפרש בין שני המספרים הוא לכל היותר 2".

א. (13 נקודות) חשבו את $P(A\cup B\cup C)$.

ב. (6 נקודות) חשבו את $P(A\cap B|C)$.

ג. (6 נקודות) חשבו את $P(A|B\cap C)$.

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי $n\geq 3$ מספר טבעי. לכל $1\leq i\leq n$ מטילים מטבע הוגן שצדדיו הם 0 ו-1, כאשר כל הטלות המטבע בלתי תלויות. יהי X משתנה מקרי הסופר את מספר הפעמים שהתקבל הרצף 10, כלומר את מספר האינדקסים $1\leq i\leq n-1$ כך שתוצאת ההטלה ה i היא 1 ותוצאת ההטלה ה- $i+1$ היא 0. יהי Y משתנה מקרי הסופר את מספר הפעמים שהתקבל הרצף 101.

א. (6 נקודות) חשבו את התוחלת של Y.

ב. (9 נקודות) חשבו את השונות של X.

ג. (10 נקודות) חשבו את השונות המשותפת $Cov(X,Y)$ של X ושל Y.

שאלה 4 (25 נקודות)

יהי $n\geq 2$ מספר טבעי. לכל $1\leq i\leq n$ מטילים קוביה הוגנת, כאשר כל הטלות הקוביה בלתי תלויות. יהי X מספר ההטלות עד הפעם הראשונה שהתקבלה התוצאה 3 (כולל ההטלה הנ"ל). אם לא יוצא 3 באף אחת מ- n ההטלות אז נאמר ש- $X=0$. יהי Y משתנה מקרי הסופר את מספר הפעמים שהתקבל הרצף 66, כלומר את מספר האינדקסים $1\leq i\leq n-1$ כך שתוצאות ההטלות ה- i וה-$i+1$ הן 6.

א. (8 נקודות) חשבו את ההתפלגות של X.

ב. (11 נקודות) חשבו את התוחלת של Y בהינתן המאורע $X=0$.

ג. (6 נקודות) האם X ו- Y בלתי תלויים? נמקו את תשובתכם.

פתרון מבחן 2018 סמסטר ב מועד ב

שאלה 1

א. טווח הערכים של X הוא $\{1,2,3\}$, טווח הערכים של Y הוא $\{1,2,3,4\}$. נחשב תחילה את כל החיתוכים של ההסתברויות לערכי X,Y:

נשים לב שלא ייתכן ש $X=Y$ כי אריאל בוחר חולצה בצבע השונה מהמכנס שבחר ולכן:

$P(X=k,Y=k)=0$ לכל $1\le k\le 3$.

אחרת, לפי נוסחת הסתברות מותנית (כי קל לחשב כאן – ברור למה Y תלוי ב X)

$P(X=k,Y=m)=P(X=k)\cdot P(Y=m|X=k)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ לכל $1\le k\le 3$ ולכל $1\le m\le 4$ פרט ל $k=m$. כי ההסתברות לבחור מכנס (בצבע ספציפי) היא 1/3 (אחידה) ואז בהינתן שמכנס k נבחר, ההסתברות לבחור את החולצה בצבע m (כאשר $m\neq k$) היא 1 מתוך ה 3 אפשריות (מורידים את החולצה שהיא באותו הצבע של הכנס שנבחר כי היא לא יכולה להיבחר).

תשובה סופית: (אפשרי לעשות גם כאן טבלה אבל מכיוון שמצאנו באופן כללי אז נשתמש בנוסחא שמצאנו)

$$P(X=k,Y=m)=\begin{cases}\frac{1}{9}\text{ , if m}\neq\text{k}\\ 0\text{ , if m}=\text{k}\end{cases}.$$

ב. לפי נוסחת ההסתברות המותנית: $P(X=1|Y=3)=\frac{P(X=1,Y=3)}{P(Y=3)}$. לפי א' $P(X=1,Y=3)=\frac{1}{9}$ ולפי סכימת ערכים (בטבלה זו סכימת שורה או עמודה) נחשב את $P(Y=3)$ ונקבל:

$P(Y=3)=P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=3)+P(X=3,Y=3)=\frac{1}{9}+\frac{1}{0}+0=\frac{2}{9}$.

נציב הכל ונקבל ש: $P(X=1|Y=3)=\frac{P(X=1,Y=3)}{P(Y=3)}=\frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}}=\frac{1}{2}$.

ג. נשים לב ש Z סופר הצלחות (בחירת חולצה 4) מתוך כמות נסיונות ידועה (90 יום) כאשר כל הניסויים בלתי תלויים זה בזה ויש לכל ניסוי סיכוי להצלחה ולכישלון ולכן: $Z\sim Bin(90,p)$ כאשר לפי א':

$p=P(Y=4)=P(X=1,Y=3)+P(X=2,Y=3)+P(X=3,Y=3)=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$.

ולכן: $E(Z)=90\cdot\frac{1}{3}=30$, $Var(Z)=90\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=20$ לפי נוסחאות לתוחלת ושונות של התפלגות בינומית.

נשים לב שהביטוי נראה כמו אי שיוויון צ'בישב ולכן נשתמש באי שוויון זה:

$P(|Z-30|\ge 10)=P(|Z-E(Z)|\ge 10)\le\frac{Var(Z)}{10^2}=\frac{20}{100}=15$ משל.

שאלה 2

א. נשים לב שהמאורעות לא זרים כי ייתכנו מספרים עם אותה ספרת עשרות שהם זוגיים וכדומה. לכן נשתמש בעיקרון ההכלה וההדחה.

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+$$
$$+P(A\cap B\cap C).$$

כעת, נעבור לחישוב כל ההסתברויות: נשתמש בקומבינטוריקה:

$P(A)=\frac{9\cdot\binom{10}{2}}{\binom{90}{2}}=\frac{9}{89}$ – נבחר את ספרת העשרות (יש 9 אפשרויות) ואז נבחר 2 מספרים מתוך 10 המספרים שיש להם ספרה כזו. חלקי סה"כ בחירת 2 מספרים מתוך ה 90 הנתונים. (בין 10 ל 99 כולל יש 90 מספרים שונים)

$P(B)=\frac{\binom{45}{2}}{\binom{90}{2}}=\frac{22}{89}$ - מתוך 45 המספרים הזוגיים שיש בטווח, נבחר 2 מספרים. חלקי הסה"כ.

$P(C)=\frac{89+88}{\binom{90}{2}}=\frac{59}{15\cdot 89}$ – נחלק ל 2 מקרים: ההפרש הוא 1 וההפרש הוא 2.
עבור הפרש 1 – יש 89 אפשרויות לבחור את המספר הקטן ואז כפול אפשרות אחת לבחור את המספר העוקב לו. (89 כי אי אפשר שהמספר הקטן יהיה 99 כי אין לו עוקב). חלקי הסה"כ.
עבור הפרש 2: יש 88 אפשרויות לבחור את המספר הקטן ואז כפול אפשרות אחת לבחור את המספר הגדול ממנו ב 2. (88 כי אי אפשר שהמספר הקטן יהיה 99 או 98 כי אין גדולים מהם ב 2). חלקי הסה"כ.

$P(A\cap B)=\frac{9\cdot\binom{5}{2}}{\binom{90}{2}}=\frac{2}{89}$ – (צריך גם אותה ספרת עשרות וגם שניהם זוגיים) נבחר את ספרת העשרות ואת מתוך 5 המספרים הזוגיים שיש להם ספרה כזו נבחר 2 מספרים. (כמובן חלקי הסה"כ).

$P(A\cap C)=\frac{9\cdot(9+8)}{\binom{90}{2}}=\frac{17}{5\cdot 89}$ – (צריך גם אותה ספרת עשרות וגם הפרש לכל היותר 2) נבחר תחילה את ספרת העשרות ואז נחלק ל 2 מקרים: ההפרש הוא 1 וההפרש הוא 2.
עבור הפרש 1 – יש 9 אפשרויות לבחור את המספר הקטן ואז כפול אפשרות אחת לבחור את המספר העוקב לו. (אם לדוגמא בחרנו את ספרת העשרות 2 אז ניתן לבחור כל מספר בין 20 ל 28 (כולל) אבל לא את 29 כי אין לו עוקב עם אותה ספרת עשרות). חלקי הסה"כ.
עבור הפרש 2: יש 8 אפשרויות לבחור את המספר הקטן ואז כפול אפשרות אחת לבחור את המספר הגדול ממנו ב 2. (באותו אופן כמו בהפרש 1, לא ניתן לבחור את 28 ואת 29 כי אם נוסיף להם 2 לא נקבל מספר עם אותה ספרת עשרות). חלקי הסה"כ.

$P(B\cap C)=\frac{44}{\binom{90}{2}}=\frac{44}{45\cdot 89}$ – (צריך גם שניהם זוגיים וגם הפרש לכל היותר 2). במקרה זה לא ייתכן הפרש אחד כי צריך את שניהם זוגיים. כעת, מתוך הזוגיים נבחר את המספר הקטן (יש 45 זוגיים אבל רק 44 אפשרויות כי אי אפשר לבחור את 98 כי אין לו בטווח מספר הגדול ממנו ב 2) ואז כפול אפשרות אחת לבחור את המספר הגדול ממנו ב 2. חלקי הסה"כ.

$P(A\cap B\cap C)=\frac{9\cdot 4}{\binom{90}{2}}=\frac{4}{5\cdot 89}$ – (צריך 2 זוגיים עם אותה ספרת עשרות והפרש 2. גם במקרה זה ההפרש הוא בדיוק 2 כי צריך 2 זוגיים. נבחר את ספרת העשרות. ולאחר מכן יש רק 4 אפשרויות. (לדוגמא: אם בחרנו את ספרת העשרות להיות 2 אז ניתן לבחור את 20 + 22 או 24+22 או 26+24 או 28+26). חלקי הסה"כ.
נציב הכל בנוסחת ההכלה וההדחה ונקבל:

$$P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{89}+\frac{22}{89}+\frac{59}{15\cdot 89}-\frac{2}{89}-\frac{17}{5\cdot 89}-\frac{44}{45\cdot 89}+\frac{4}{5\cdot 89}=\frac{1321}{45\cdot 89}.$$

ב. לפי נוסחת הסתברות מותנית: $P(A\cap B|C)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{4}{5\cdot 89}}{\frac{59}{15\cdot 89}}=\frac{12}{59}$. (חישבנו הכל ב-א')

ג. לפי נוסחת הסתברות מותנית: $P(A|B\cap C)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)}=\frac{\frac{4}{5\cdot 89}}{\frac{44}{45\cdot 89}}=\frac{9}{11}$. (חישבנו הכל ב-א')

שאלה 3

א. מכיוון שהספירה מורכבת נפרק את המשתנים לסכום אינדיקטורים:
נגדיר לכל $1\le i\le n-1$ את X_i להיות אינדיקטור השווה ל 1 אם תוצאת ההטלה ה i הייתה 1 וגם תוצאת ההטלה ה $i+1$ הייתה 0. מכאן: $X=\Sigma_{i=1}^{n-1}X_i$.
כמו כן: נגדיר לכל $1\le i\le n-2$ את Y_i להיות אינדיקטור השווה ל 1 אם תוצאת ההטלה ה i הייתה 1 וגם תוצאת ההטלה ה $i+1$ הייתה 0 וגם תוצאת ההטלה ה $i+2$ הייתה 1. מכאן: $Y=\Sigma_{i=1}^{n-2}Y_i$.
כעת, נחשב את התוחלת של Y לפי תכונת ליניאריות התוחלת: $E(Y)=E(\Sigma_{i=1}^{n-2}Y_i)=\Sigma_{i=1}^{n-2}E(Y_i)$.
נותר לחשב את $E(Y_i)$ לכל i. מכיוון ש Y_i אינדיקטור אז:
$E(Y_i)=P(Y_i=1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$ – נדרוש 101 בדיוק בהטלות: $i,i+1,i+2$.
נציב ונקבל: $E(Y)=\Sigma_{i=1}^{n-2}E(Y_i)=\Sigma_{i=1}^{n-2}\left(\frac{1}{8}\right)=\frac{n-2}{8}$.

ב. לפי תכונות של שונות של סכום משתנים :
$Var(X) = Var(\Sigma_{i=1}^{n-1} X_i) = Var(\Sigma_{i=1}^{n} X_i) = \Sigma_{i=1}^{n-1} Var(X_i) + 2 \cdot \Sigma_{i<j} Cov(X_i, X_j)$. נעבור לחישוב $Var(X_i)$: לפי נוסחא לשונות של אינדיקטור : $Var(X_i) = P(X_i = 1) \cdot P(X_i = 0)$.

$P(X_i = 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ כי נדרוש 10 בהטלות ה $i, i+1$.

נציב ונקבל : $Var(X_i) = P(X_i = 1) \cdot P(X_i = 0) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$.

כעת נעבור לחישוב $Cov(X_i, X_j)$ לכל $i < j$.

לפי תכונה של שונות משותפת, אם X_i, X_j בלתי תלויים אז $Cov(X_i, X_j) = 0$.
היות וההטלות בלתי תלויות זו בזו נובע שהמשתנים יהיו תלויים רק אם הם יתייחסו לאותן הטלות (יהיה חיתוך). דבר זה ייקרה רק אם $j = i + 1$ כי אז ההטלה ה $i + 1$ משותפת.
מכאן נחשב עבור $j = i + 1$ לפי הנוסחא לחישוב שונות משותפת :
$Cov(X_i, X_{i+1}) = E(X_i X_{i+1}) - E(X_i) \cdot E(X_{i+1})$.
חישבנו את $P(X_i = 1) = \frac{1}{4}$ ולכן : $E(X_{i+1}) = E(X_i) = \frac{1}{4}$.
נותר לחשב את $E(X_i X_{i+1})$: מכפלת אינדיקטורים הוא אינדיקטור ולכן :
$E(X_i X_{i+1}) = P(X_i X_{i+1} = 1) = P(X_i = 1, X_{i+1} = 1) = 0$ כי אם בהטלה ה i יצא 1 ובהטלה ה $i + 1$ יצא 0 אז כבר לא ייתכן שבהטלה ה $i + 1$ יצא 1.
לכן נציב הכל ונקבל : $Cov(X_i, X_{i+1}) = 0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{16}$.
מכאן :
$Var(X) = \Sigma_{i=1}^{n-1} Var(X_i) + 2 \cdot \Sigma_{i<j} Cov(X_i, X_j) = \Sigma_{i=1}^{n-1} Var(X_i) + 2 \cdot \Sigma_{i=1}^{n-2} Cov(X_i, X_{i+1})$,
נציב את מה שקיבלנו ונחשב :
$= \Sigma_{i=1}^{n-1}\left(\frac{3}{16}\right) + 2 \cdot \Sigma_{i=1}^{n-2}\left(-\frac{1}{16}\right) = \frac{3(n-1)}{16} - \frac{2(n-2)}{16} = \frac{n+1}{16}$.

ג. לפי תכונות של שונות משותפת של סכום מול סכום :
$Cov(X, Y) = Cov(\Sigma_{i=1}^{n-1} X_i, \Sigma_{i=1}^{n-2} Y_i) = \Sigma_{i=1}^{n-1} \Sigma_{j=1}^{n-2} Cov(X_i, Y_j)$. נותר לחשב $Cov(X_i, Y_j)$ לכל i, j.
נשים לב שאם X_i, Y_j אינם תלויים אז $Cov(X_i, Y_j) = 0$. לכן נחשב כאשר הם תלויים.
היות וההטלות אינן תלויות, ייתכן ו X_i, Y_j תלויים רק אם הם חולקים הטלות משותפות.
Y_j מתייחס להטלות : $j, j+1, j+2$.
ו- X_i מתייחס להטלות $i, i+1$.
לכן יהיו חיתוכים אם : $j = i - 2$, $j = i - 1$, $j = i$, $j = i + 1$
נחשב : (לפי חישוב של שונות משותפת)
את התוחלות של X_i, Y_i חישבנו לעיל לכל i : $E(X_i) = \frac{1}{4}, E(Y_i) = \frac{1}{8}$.
עבור $j = i - 2$. $Cov(X_i, Y_{i-2}) = E(X_i Y_{i-2}) - E(X_i) \cdot E(Y_{i-2})$. כאשר :
$E(X_i Y_{i-2}) = P(X_i = 1, Y_{i-2} = 1) = \frac{1}{16}$ כאשר השוויון הראשון הוא כי $X_i Y_{i-2}$ הוא אינדיקטור ויקבל 1 רק כאשר 2 המשתנים בעצמם 1. והשוויון השני הוא כי אנו דורשים את הרצף (1,0,1,0) במקומות : (i-2,i-1,i,i+1) בהתאמה וישנה הסתברות של 1/2 לכל תוצאה.
ולכן : $Cov(X_i, Y_{i-2}) = E(X_i Y_{i-2}) - E(X_i) \cdot E(Y_{i-2}) = \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{32}$.
עבור $j = i - 1$. $Cov(X_i, Y_{i-1}) = E(X_i Y_{i-1}) - E(X_i) \cdot E(Y_{i-1})$. כאשר :
$E(X_i Y_{i-1}) = P(X_i = 1, Y_{i-1} = 1) = 0$ כי אם $Y_{i-1} = 1$ אז היה הרצף (1,0,1) במקומות : (i-1,i,i+1) ואז במקומות (i,i+1) אין את הרצף 10.
ולכן : $Cov(X_i, Y_{i-1}) = E(X_i Y_{i-1}) - E(X_i) \cdot E(Y_{i-1}) = 0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{32}$.
עבור $j = i$. $Cov(X_i, Y_{i-1}) = E(X_i Y_i) - E(X_i) \cdot E(Y_i)$. כאשר :

$E(X_iY_i) = P(X_i = 1, Y_i = 1) = \frac{1}{8}$ כי אם $Y_i = 1$ אז היה הרצף (1,0,1) במקומות: (i,i+1,i+2) ואז במקומות (i,i+1) כבר יש את הרצף 10. ולכן ההסתברות היא 1/2 לכל מקום ובסה"כ 1/8.

ולכן: $Cov(X_i, Y_{i-1}) = E(X_iY_{i-1}) - E(X_i) \cdot E(Y_{i-1}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{32}$.

עבור $j = i + 1$. $Cov(X_i, Y_{i+1}) = E(X_iY_{i+1}) - E(X_i) \cdot E(Y_{i+1})$. כאשר:

$E(X_iY_{i+1}) = P(X_i = 1, Y_{i+1} = 1) = 0$ כי אם $Y_{i+1} = 1$ אז היה הרצף (1,0,1) במקומות: (i+1,i+2,i+3) ואז במקומות (i,i+1) לא יכול להיות הרצף 10. (כי במקום i+1 יש כבר 1)

ולכן: $Cov(X_i, Y_{i+1}) = E(X_iY_{i+1}) - E(X_i) \cdot E(Y_{i+1}) = 0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = -\frac{1}{32}$.

נציב הכל ונקבל:

$$Cov(X, Y) = \Sigma_{i=1}^{n-1}\Sigma_{j=1}^{n-2}Cov(X_i, Y_j) = \Sigma_{i=1}^{n-1}Cov(X_i, Y_{i-2}) + \Sigma_{i=1}^{n-1}Cov(X_i, Y_{i-1}) + \Sigma_{i=1}^{n-2}Cov(X_i, Y_i) + \Sigma_{i=1}^{n-3}Cov(X_i, Y_{i+1}),$$

$$= \Sigma_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{32}\right) + \Sigma_{i=1}^{n-1}\left(-\frac{1}{32}\right) + \Sigma_{i=1}^{n-2}\left(\frac{3}{32}\right) + \Sigma_{i=1}^{n-3}\left(-\frac{1}{32}\right) = \frac{n-1}{32} - \frac{n-1}{32} + \frac{3(n-2)}{32} - \frac{n-3}{32} = \frac{2n-3}{32} =$$

כאשר תחומי הסיגמא נקבעו לפי כמות משתני X_i $(n-1)$ וכמות משתני Y_i $(n-2)$ שנכנסים אבל נדרוש שלא תהיה חריגה.

שאלה 4

א. נשים לב שטווח הערכים של X הוא $\{0,1, \dots, n\}$ (לכל היותר n הטלות או שלא יצא בכלל 3 ואז $X = 0$) אנו צריכים לחשב את $P(X = k)$ לכל k בטווח.

עבור $k = 0$: $P(X = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ כי דורשים שלא יצא 3 באף הטלה אז מותר שיצאו בכל אחת מ n ההטלות רק 5 מתוך 6 המספרים שעל הקובייה.

עבור $k \neq 0$: $P(X = k) = \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{6}$ כי דורשים שב $k - 1$ ההטלות הראשונות לא יצא 3 ובהטלה ה k כן יצא 3.

ב. יש כאן ספירה מורכבת (תוצאה של 2 אינדקסים) ולכן נשתמש באינדיקטורים: לכל $1 \leq i \leq n - 1$ נגדיר את Y_i להיות האינדיקטור השווה ל 1 אם ורק אם בהטלות $(i, i + 1)$ יצא (6,6). אז: $Y = \Sigma_{i=1}^{n-1}Y_i$.

כעת, נחשב את התוחלת של $Y|X = 0$ לפי תכונת ליניאריות התוחלת:

$E(Y|X = 0) = E(\Sigma_{i=1}^{n-1}Y_i|X = 0) = \Sigma_{i=1}^{n-1}E(Y_i|X = 0)$. (יש לשים לב שאנו מתייחסים לכל הביטוי: $Y|X = 0$ כמשתנה מקרי חדש, ובאותו אופן: $Y_i|X = 0$)

נותר לחשב את $E(Y_i|X = 0)$ לכל $1 \leq i \leq n - 1$.

נזכיר כי $Y_i|X = 0$ הוא אינדיקטור (כי עדיין מקבל ערכים כמו Y_i) ולכן:

$E(Y_i|X = 0) = \mathrm{P(Y_i = 1|X = 0)} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{25}$ כי אנו דורשים שיצא 6 ב 2 ההטלות $(i, i + 1)$

ומכיוון שידוע ש $X = 0$ אז 3 לא יכול לצאת כתוצאה ולכן נותרנו עם 5 מספרים ואנו דורשים שיצא 6. ולכן ההסתברות לכל הטלה היא $\frac{1}{5}$.

נציב ונקבל: $E(Y|X = 0) = E(\Sigma_{i=1}^{n-1}Y_i|X = 0) = \Sigma_{i=1}^{n-1}E(Y_i|X = 0) = \Sigma_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{25}\right) = \frac{n-1}{25}$.

ג. המשתנים כן תלויים. נראה דוגמא:

$P(X = 1, Y = n - 1) = 0$ כי אם $X = 1$ זה אומר שיצא 3 בפעם הראשונה. אבל: $Y = n - 1$ וזה אומר שיצאו 6 בכל ההטלות – מה שאינו הגיוני. מצד שני:

$P(X = 1) = \frac{1}{6} > 0$ וגם $P(Y = n - 1) = \left(\frac{1}{6}\right)^n > 0$ ולכן המכפלה ביניהם תהיה שונה מ 0 ולכן לא שווה ל $P(X = 1, Y = n - 1)$.