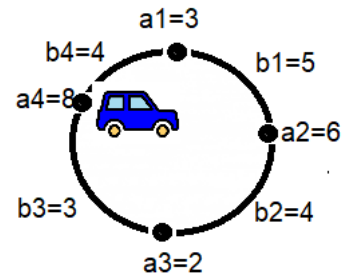


בעיה של תחנות דלק.

n תחנות דלק נמצאות במעגל סגור.
 a_i – הוא את כמות הדלק בליטרים שיש בתחנה i ,
 b_i – הוא כמות הדלק הנדרשת לאוטו כדי מתחנה i לתחנה $i+1$.
 האוטו צריך לעבור על כל התחנות ולחזור לתחנת ההתחלה,
 כלומר לעשות סיבוב שלם.
 האוטו יכול לתדלק בכל התחנה.

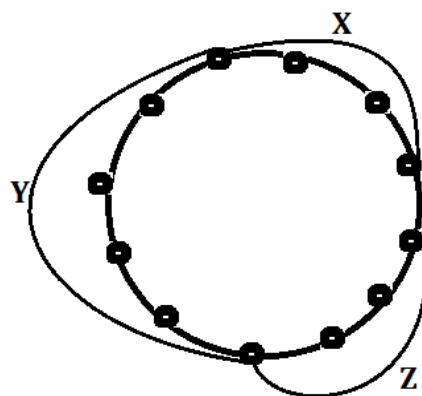


האוטו מתחיל לנסוע עם טנק ריק.
 על נהג האוטו של לבחור תחנה כך שיהיה לו מספיק דלק לחזור לתחנת שהוא התחיל ממנה.
 (א) בדוגמה הזו האוטו לא יכול להתחיל מתחנה 1, כוון שיהי לו בטנק 3 ליטרים וכדי להגיע לתחנה הבאה (תחנה 2) הוא צריך 5 ליטרים.
 (ב) כאשר האוטו מתחיל לזוז נתחנה 4, היה לו בטנק 8 ליטרים,
 הוא מגיע לתחנה 1 עם 4 ליטרים,
 מתחנה 1 הוא יוצא עם 7 ליטרים, ומגיע לתחנה 2 עם 2 ליטרים,
 יוצא מתחנה 2 עם 8 ליטרים ומגיע לתחנה 3 עם 4 ליטרים,
 יוצא מתחנה 3 עם 6 ליטרים ומגיע לתחנה 4 עם 3 ליטרים בטנק.

הפתרון.

קודם כול כמות הדלק בכול התחנות צריך להיות גדול או שווה לכמות הדלק הנדרשת כדי לסגור את המעגל, כלומר $\sum_{i=1}^n a_i \geq \sum_{i=1}^n b_i$. זה התנאי ההכרחי.
 ברור שצריך להתייחס להפרשים בין כמות הדלק שיש בתחנה לכמות הדלק הנדרשת למעבר לתחנה הבאה: $c_i = a_i - b_i$. והתנאי ההכרחי אפשר לכתוב בעזרת c_i : $\sum_{i=1}^n c_i \geq 0$.
 אם במערך מעגלי $\{c_i\}$ למצוא קטע בעל סכום גדול ביותר, אז סכום האיברים שנמצאים מחוץ לקטע זה יהיה קטן יותר. השאלה היא: האם יכול להיות שבדרך נקבל חוסר דלק?

נתבונן באיור הבא. נסמן ב- X את הסכום גדול ביותר. נניח $X + Y < 0$. לפי התנאי ההכרחי $\sum_{i=1}^n c_i = X + Y + Z \geq 0$, אם $X + Y < 0$ אז $Z > 0$ ו- $X + Z > X$, כלומר X הוא לא סכום גדול ביותר – סתירה להנחה ש- X הוא הסכום הגדול ביותר. לכן אין מצב שבדרך יהיה לאוטו חוסר דלק.



המסקנה: אם האוטו יתחיל לזוז מתחילת הקטע בעל סכום גדול ביותר יהיה לו מספיק דלק כדי לעשות סיבוב שלם. כמות הדלק שיישאר בטנק שווה בדיוק ל

$$\sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n c_i$$