דימיון מטריצות

הגדרה: מטריצה $A,B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ נקראות דומה אם ורק אם קיימת מטריצה $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ כך ש $A = PBP^{-1}$.

משפט: $A,B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ מטריצות דומות, אז $rankA = rankB$.

תרגיל 1: האם מטריצות הבאות דומות?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

פתרון: כיוון ש-$rankB = 2$, נבדוק $rankA$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[2R_3 - R_1]{R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_3 + R_2} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$3 = rankA \neq rankB = 2$, ולפי משפט המטריצות הנ"ל לא דומות.

תרגיל 2: הפרך: $n = rankB = rankA$ אזי מטריצות A ו-B דומות.

פתרון: ניקח $A \neq I$, $I = B$, כך ש-$n = rankI = rankA$,
עבור מטריצה היחידה $I \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. נניח בשלילה ש-$A,B$ מטריצות דומות.
אזי

$$A = PBP^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$$

בסתירה להנחה.

משפט: A,B מטריצות דומות $\Leftarrow trA = trB$.

תרגיל 3: האם מטריצות הבאות דומות?

$$(1) \quad \begin{cases} A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{cases}, (2) \quad \begin{cases} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} (3) \quad \begin{cases} A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{cases}, \ (5) \quad \begin{cases} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{cases}, (5) \quad \begin{cases} A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \end{cases}.$$

פתרון (1): תשובה לא. כיוון ש־ $1 = trB \neq trA = 3$.

פתרון (2): נחשב ערכים עצמיים של $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$:

$$0 = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = -\lambda\,(1-\lambda)$$

$\lambda = 0; 1$ ערכים עצמיים שונים של A
$\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \overrightarrow{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad (t \in \mathbb{R})$$
$$V_0 = ker(-A) = Span \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad dim(V_0) = 1$$

$\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad (t \in \mathbb{R})$$
$$V_1 = ker(I - A) = Span \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad dim(V_1) = 1$$

כיוון ש־ $1 \neq 0$, ו־ $deg0 = dimV_0 = 1$, $deg1 = dimV_1 = 1$
כך ש־ $dimV = dimV_0 + dimV_1 = 2$,
לפי משפט $P := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, והמטריצות A, B דומות נחשב P^{-1}:

$$[P|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\overset{R_1 - R_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] = [I|P^{-1}]$$

לכן

$$PBP^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ו־ A, B מטריצות דומות.

פתרון (3): A, B דומות $\Leftrightarrow$ קיימת מטריצה P^{-1} הפיכה, כך ש-$A = PBP^{-1}$.
נניח A, B דומות. נסמן. נחפש $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, כך ש-$AP = BP$,

כלומר

$$\begin{bmatrix} a & 3a+2b \\ c & 3c+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4a+3c & 4b+3d \\ -2a-c & -2b-d \end{bmatrix}$$

וקיבלנו מערכת משוואות לינאריות הומוגנית

$$\begin{cases} -3a-3c=0 \\ 3a-2b-3d=0 \\ 2a+2c=0 \\ 2b+3c+3d=0 \end{cases}$$

פותרים:

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[3R_3+2R_1]{R_2+R_1} \begin{bmatrix} -3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_4+R_2, \\ -R_2, \\ R_1/-3}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ -\frac{3}{2}(c+d) \\ c \\ d \end{bmatrix}, \quad \left(\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right)$$

כלומר $P = \begin{bmatrix} -c & -\frac{3}{2}(c+d) \\ c & d \end{bmatrix}$. מחפשים P הפיכה. נבחר $c=1$, $d=1$.
נקבל $P = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. השורות של P בת"ל. נמצא P^{-1} :

$$[P|I] = \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2+R_1]{} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[2R_1-3R_2]{}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{1}{2}R_{1,2}]{} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 & -1/2 \end{array}\right] = [I|P^{-1}]$$

לכן

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

ערכים עצמיים וליכסון מטריצות

תרגיל 4: יש לציין מרחבים עצמיים, ולמצוא ערכים עצמיים של מטריצות הבאות:

$$(1)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},(2)\quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix},(3)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$(4)\quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},(5)\quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},(6)\quad \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

פתרון (1): $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}:$

$$0 = det(A-\lambda I) = det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \overset{C_1 - C_3}{=}$$
$$= det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ -(1-\lambda) & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \overset{R_3 + R_1}{=} det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$$
$$= -(1-\lambda)(1+\lambda)(1-\lambda) = -(1+\lambda)(1-\lambda)^2$$

$\lambda = \pm 1$ ערכים עצמיים של מטריצה A. $\lambda = -1$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{2R_2 - R_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_3 - R_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\overset{R_1 + R_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_1/2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad (t \in \mathbb{R})$$
$$V_{-1} = Ker\,(-1 \cdot I - A) = Span\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$:\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_3+R_1}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_1-2R_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$V_1 = Ker\,(I-A) = Span \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

<u>תרגיל 5:</u> יש לציין מרחבים עצמיים, ולמצוא ערכים עצמיים של מטריצות הבאות:

$$(1) \quad \begin{bmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, (2) \quad \begin{bmatrix} 6 & 30 & 12 \\ 4 & 20 & 8 \\ 2 & 10 & 4 \end{bmatrix}, (3) \quad \begin{bmatrix} -3 & 3 & -3 \\ -5 & 5 & -5 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

פתרון (1): $: A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$0 = det(A-\lambda I) = det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -4 & 8 \\ 3 & -3-\lambda & 6 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \overset{2C_1 - C_3}{=}$$

$$= \frac{1}{2} det \begin{bmatrix} -2\lambda & -4 & 8 \\ 0 & -3-\lambda & 6 \\ \lambda & -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \overset{2R_3+R_1}{=} \frac{1}{4} det \begin{bmatrix} -2\lambda & -4 & 8 \\ 0 & -3-\lambda & 6 \\ 0 & -6 & 2(6-\lambda) \end{bmatrix} \overset{C_1}{=}$$

$$= -\frac{\lambda}{2} det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 6 \\ -6 & 2(6-\lambda) \end{bmatrix} \overset{-(\lambda+3)R_3+6R_1}{=}$$

$$= \frac{\lambda}{2\,(\lambda+3)} det \begin{bmatrix} -(3+\lambda) & 6 \\ 0 & 2\lambda(\lambda-3) \end{bmatrix} \overset{C_1}{=} -\lambda^2(\lambda-3).$$

$\lambda = 0;3$ ערכים עצמיים של מטריצה A. $\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 8 \\ 3 & -3 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{4R_2-3R_1 \\ 4R_4-R_1}]{} \begin{bmatrix} 4 & -4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[]{\frac{1}{4}R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Leftarrow x = t-2s, y = t, z = s \Leftarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-2s \\ t \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s, \quad \left(\begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right)$$

$$V_0 = Ker\left(-A\right) = Span\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & -8 \\ -3 & 6 & -6 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2-3R_1 \\ R_3-R_1}]{} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 0 & -6 & 18 \\ 0 & -3 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[2R_3-R_1]{} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 0 & -6 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[]{\frac{1}{6}R_2} \begin{bmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1+4R_2]{} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$V_3 = Ker\left(3I - A\right) = Span\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

<u>תרגיל 6:</u> עבור מטריצות הבאות, יש למצוא פולינום אופייני, ערכים עצמיים וקטורים עצמיים. האם A מטריצה לכסינה? אם כן יש למצוא P הפיכה, כך ש-$P^{-1}AP$ מטריצה אלכסונית.

$$(1) \quad \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 8 & -6 & -8 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \qquad (2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (3) \quad \begin{bmatrix} -6 & 1 & -5 \\ -1 & -8 & 1 \\ -1 & -4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$(4) \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & -4 \\ -7 & 10 & 5 \\ -12 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \qquad (5) \quad \begin{bmatrix} -4 & 1 & -2 \\ -3 & -6 & 10 \\ 2 & -5 & 9 \end{bmatrix}, \qquad (6) \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & -4 \\ -1 & -7 & 7 \end{bmatrix}.$$

פתרון (1): $A=\begin{bmatrix}-7&0&0\\8&-6&-8\\3&5&7\end{bmatrix}$.

$$0=det\begin{bmatrix}-7-\lambda&0&0\\8&-6-\lambda&-8\\3&5&7-\lambda\end{bmatrix}=-\left(\lambda+7\right)det\begin{bmatrix}-6-\lambda&-8\\5&7-\lambda\end{bmatrix}$$
$$=-\left(\lambda+7\right)\left[\left(\lambda+6\right)\left(\lambda-7\right)+40\right]=-\left(\lambda+7\right)\left(\lambda+1\right)\left(\lambda-2\right)$$

$\lambda=-1,2,-7$ ערכים עצמיים שונים של A. $\lambda=-1$:

$$\begin{bmatrix}-6&0&0\\8&-5&-8\\3&5&8\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{3R_2+4R_1\\8R_3+4R_1}]{}\begin{bmatrix}-6&0&0\\0&-15&-24\\0&40&64\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[-\frac{1}{3}R_2,\frac{1}{8}R_3]{}\begin{bmatrix}-6&0&0\\0&5&8\\0&5&8\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3-R_2]{}\begin{bmatrix}-6&0&0\\0&5&8\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-5/8\\1\end{bmatrix}t,\quad(t\in\mathbb{R})$$

$\lambda=2$:

$$\begin{bmatrix}-9&0&0\\8&-8&-8\\3&5&5\end{bmatrix}\xrightarrow[\substack{9R_2+8R_1\\9R_3+3R_1}]{}\begin{bmatrix}-9&0&0\\0&-72&-72\\0&45&45\end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}t,\quad(t\in\mathbb{R})$$

$\lambda=-7$:

$$\begin{bmatrix}0&0&0\\8&1&-8\\3&5&14\end{bmatrix}\xrightarrow[R_1\leftrightarrow R_3]{}\begin{bmatrix}3&5&14\\8&1&-8\end{bmatrix}\xrightarrow[3R_2-8R_1]{}\begin{bmatrix}3&5&14\\0&-37&-136\end{bmatrix}$$
$$\to\begin{bmatrix}3&5&14\\0&-37&-136\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}54/37\\-136/37\\1\end{bmatrix}t,\quad(t\in\mathbb{R})$$

תשובה: A מטריצה לכסינה, $P=\begin{bmatrix}0&0&54/37\\-5/8&-1&-136/37\\1&1&1\end{bmatrix}$ מטריצה מלכסנת.

פתרון (2): $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. הפולינום אופייני

$$0=det\begin{bmatrix}1-\lambda&1&1\\0&-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{bmatrix}=-\lambda\left(\lambda-1\right)^2$$

וקטירוים עצמיים עבור $\lambda = 0$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow z = 0, x = -y \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t, \quad (t \in \mathbb{R})$$

$\lambda = 1$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = z = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t, \quad (t \in \mathbb{R})$$

למטריצה A יש רק 2 וקטורים בת"ל, לכן A לא ניתנת לליכסון.