

ברוכים הבאים לתרגול 7 😊

שחר אנגל

shaharbel0@gmail.com

תרגול- ימי שני 14-16 וימי חמישי 13-15



נושא התרגול

- מציאת תת מטריצה בעלת סכום מקסימלי



מציאת תת מטריצה עם סכום מקסימלי

- בהינתן מטריצה בגודל $m \times n$, מהי תת המטריצה שסכום איבריה הוא הגדול ביותר?



■ לדוגמא: נתונה מטריצה:

2	1	-3	-4	5
0	6	3	4	1
2	-2	-1	4	-5
-3	3	1	0	3

■ מהי תת המטריצה בעלת הסכום המקסימלי עבודה?

■ איך נחשב זאת?

■ בכמה דרכים:



■ פתרון א' - חיפוש שלם

■ כמו שאנו יודעים, חיפוש שלם עובר על כל תתי המטריצות האפשריות, מחשב את הסכום שלהן ומחזיר לנו בסוף את התשובה הנכונה.

■ מה החיסרון שלו?

■ בדר"כ זמן הריצה שלו גדול..

■ איך נגדיר מלבן?



■ כלומר, נצטרך לקחת את כל האפשרויות של i,j – הפינה השמאלית העליונה של המלבן, וכל האפשרויות של $k,1$ – הפינה הימנית התחתונה של המלבן, לסכום ולקחת את המקסימום.

■ כמה לולאות for נצטרך?

■ 6

■ 2 בשביל i,j , 2 בשביל $k,1$, ועוד 2 בשביל לסכום



▪ פתרון א' - חיפוש שלם

▪ פסאודו קוד:

- for i=1 to n
 - for j=1 to m
 - for k=i to n
 - for l=j to m
 - for x=i to k
 - for y=j to l
 - נחשב סכום
 - נעדכן מקסימום ואינדקסים

▪ סיבוכיות:

▪ $O(n^6)$



▪ פתרון ב' - מערך עזר

▪ בפתרון זה נוכל להשתמש ב-Best כדי שיעזור לנו.

▪ נייצר את כל תתי השורות ואת כל תתי העמודות, נפעיל Best ונדע את התשובה.

▪ לדוגמא:

2	1	-3	-4	5
0	6	3	4	1
2	-2	-1	4	-5
-3	3	1	0	3

▪ אם נרצה לחבר את שורות 1-2 נעשה זאת כך:

2	4	2	8	-4
---	---	---	---	----

▪ אם נפעיל עליו את Best מה הוא יחזיר?

▪ את תאים 1-4

▪ אבל מה זה בעצם אומר?

▪ שהוא מחזיר לנו את תת המטריצה מתא (0,1) לתא (2,3)

▪ כלומר, נרצה לקחת את כל תתי השורות האפשריות, להכניס למערך עזר, להפעיל את Best על המערך ולקבל את התשובות עבור תת מטריצה.



2	1	-3	-4	5
0	6	3	4	1
2	-2	-1	4	-5
-3	3	1	0	3

▪ פתרון ב' - מערך עזר

▪ סיבוכיות:

▪ $O(n^2)$ לייצר את כל תתי השורות

▪ $O(n^2)$ לסכום את כל תתי המטריצה שקיבלנו

▪ $O(n)$ להפעיל Best

▪ סה"כ נקבל: $O(n^4)$

▪ פסאודו קוד:

- for i=1 to n
 - for j=i to n
 - איפוס של מערך העזר
 - for k=i to j
 - for l=1 to m
 - `arr[l] += Mat[k,l]`
 - Best(arr)
 - נעדכן מקסימום ואינדקסים



■ פתרון ג' - מטריצת עזר

■ בפתרון זה נוכל להשתמש בתכנות דינאמי.

■ הרעיון שעומד מאחורי הפתרון הוא שאם נתונים לנו סכומים חלקיים נוכל בעזרתם לחשב את הסכום הכולל.

■ מה הכוונה?

■ נגיד שאנו רוצים לחשב את תת המטריצה הזו:

2	1
0	6

 ויש לנו כבר את הסכום של השורה הראשונה $= 3$, העמודה הראשונה $= 2$, ו-2, אז נוכל לקחת את הערך של 6 להוסיף לו את הסכום של השורה הראשונה, להוסיף את הסכום של העמודה הראשונה ולהוריד את הערך של 2 (כי ספרנו פעמיים) וכך לקבל סה"כ $= 9$

■ נוכל לחשב את זה כך: נייצר מטריצת עזר שהערך בכל תא יהיה הסכום של המטריצה מנקודת ההתחלה ועד התא הזה

■ לדוגמא:

1	-3
6	3

■ מטריצת העזר תראה כך:

1	-2
7	7

■ איך זה עוזר לנו?



▪ פתרון ג' - מטריצת עזר

▪ בעזרת מטריצת העזר נוכל לחשב סכומים אחרים.

1	-2	ומטריצת העזר שלה	1	-3	דוגמא קטנה: נתונה המטריצה
7	7		6	3	

▪ אם נרצה לחשב את הסכום בתא (2,2) נוכל לקחת את הסכום הכולל של (1,1) עד (2,2) במטריצת העזר, ולהוריד ממנו את הסכומים האחרים וכך להישאר עם הסכום שרצינו.

					= H						= A

▪ אם נרצה לחשב את תת המטריצה האדומה המתחילה בתא (1,2) ומסתיימת בתא (2,4) נוכל לחשב זאת כך:

▪ בתא הסגול יש לנו את הסכום הכולל מ-(0,0) ועד (2,4), בתא הירוק יש לנו את הסכום הכולל מ-(0,0) ועד (0,4), בתא הכחול יש לנו את הסכום הכולל מ-(0,0) ועד (2,1) ובתא הכתום יש לנו את הסכום הכולל מ-(0,0) ועד (0,1).

▪ כעת, נחשב: התא הסגול - התא הירוק - התא הכחול + התא הכתום = הסכום של תת המטריצה האדומה שזה בדיוק מה שאנחנו צריכים ☺



פתרון ג' - מטריצת עזר

אבל איך בונים את מטריצת העזר H?

נתחיל מהתאים הקלים: נמלא תחילה את השורה הראשונה והעמודה הראשונה:

$H[0,j] = H[0,j-1] + A[0,j]$ וכנ"ל את העמודה (רק $H[i,0]$)

בשביל למלא את שאר המטריצה נוכל להיעזר במה שמילאנו כבר:

$$H[i,j] = A[i,j] + H[i,j-1] + H[i-1,j] - H[i-1,j-1]$$

אחרי שבנינו את מטריצת העזר H, אנו צריכים לעבור עליה ולחשב את הסכומים של כל תתי המטריצות האפשריות:

- for i=1 to n
 - for j=1 to m
 - for k=i to n
 - for t=j to m
 - sum = $H[k,t] - H[k,j-1] - H[i-1,t] + H[i-1,j-1]$
 - נעדכן מקסימום ואינדקסים

סיבוכיות:

$O(n^4)$



▪ פתרון ד' - super Best

- איך ניתן עכשיו לשפר את הסיבוכיות ל- $O(n^3)$?
- מה עזר לנו לרדת בסיבוכיות מ- $O(n^6)$ ל- $O(n^4)$?
- להוסיף עזר כדי לשמור נתוני ביניים
- תכנות דינאמי/Best
- בואו נשתמש בעזרים אלו כדי לשפר עוד קצת את הסיבוכיות:
- במקום לאפס את מערך העזר בכל פעם, נשתמש בקיים ורק נוסיף את השורה החדשה, נפעיל Best ונמצא את כל תתי המטריצות שקשורות לתאים אלו.

▪ דוגמת הרצה:

start R =
start C =
end R =
end C =
sum =

2	1	-3	-4	5
0	6	3	4	1
2	-2	-1	4	-5
-3	3	1	0	3



▪ פתרון ד' - super Best

▪ פסאודו קוד:

- for i=1 to m
 - איפוס של מערך העזר
 - for j=i to m
 - for k=1 to n
 - $arr[k] += Mat[k,j]$
 - Best(arr)
 - נעדכן מקסימום ואינדקסים

▪ סיבוכיות:

▪ $O(n^3)$

▪ אבל זה רק סדר גודל.. הסיבוכיות האמיתית היא $O(n*m^2)$

▪ האם כדאי לרוץ על השורות ולסכום עמודות או לרוץ על העמודות ולסכום את השורות?

▪ תלוי בקלט- אם המטריצה לאורך נרוץ על שורות ואם היא לרוחב אז נרוץ על עמודות.



אז מה צריך לתכנת?

■ כל מה שדיברנו עליו היום ☺

1. חיפוש שלם- $O(n^6)$

2. מערך עזר ו-Best- $O(n^4)$

3. מטריצת עזר- $O(n^4)$

4. Super Best- $O(n^3)$

בהצלחה ☺

