מטריצה מייצגת - מעבר מבסיס לבסיס

תרגיל 1: נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת לפי $T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+2y-z\\x+z\end{bmatrix}$.

נתונים בנוסף $v=\left(v_1=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},v_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},v_3=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right)$ בסיס ב-$\mathbb{R}^3$

ו-$e=\{e_1,e_2\}$ בסיס סטנדרתי ב-$\mathbb{R}^2$. יש לחשב $[T]_e^v$.

פתרון:

$$T\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+2-1\\0+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2-0\\1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=3\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+1\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+4-1\\1+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=4\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+2\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

לכן

$$[T]_e^v=\begin{bmatrix}1&1\\3&1\\4&2\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1&3&4\\1&1&2\end{bmatrix}$$

תרגיל 2: נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת לפי $T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-y+z\\x+y-z\end{bmatrix}$.

נתונים בנוסף $v=\left(v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},v_3=\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}\right)$ בסיס ב-$\mathbb{R}^3$

ו-$w=\left(w_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},w_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)$ בסיס ב-$\mathbb{R}^2$. יש לחשב $[T]_w^v$.

פתרון:

$$T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-1+0\\1+1-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=a_1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+a_2\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0-1+0\\0+1-0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=b_1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+b_2\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-3+1\\1+3-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

פותרים 3 מערכות משוואות לינאריות:

$$\left\{\begin{array}{c}a_1+a_2=1\\2a_2=2\end{array}\right.\Rightarrow\begin{array}{c}a_1=0\\a_2=1\end{array},\quad\left\{\begin{array}{c}b_1+b_2=-1\\2b_2=1\end{array}\right.\Rightarrow\begin{array}{c}b_1=-\frac{3}{2}\\b_2=\frac{1}{2}\end{array},$$

$$\left\{\begin{array}{c}c_1+c_2=0\\2c_2=3\end{array}\right.\Rightarrow\begin{array}{c}c_1=-\frac{3}{2}\\c_2=\frac{3}{2}\end{array}$$

לכן

$$[T]_w^v=\begin{bmatrix}0&1\\-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}0&-\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\1&\frac{1}{2}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

תרגיל 3: נתונה העתקה לינארית $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת לפי $T\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+y-z\\x+2y+z\\y+3z\end{bmatrix}$.
חשב $[T]_v:=[T]_v^v$ כאשר $v=\left(v_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},v_3=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}\right)$ בסיס ב-$\mathbb{R}^3$.

פתרון:

$$T\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2-3\\1+4+3\\2+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\8\\11\end{bmatrix}=a_1\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+a_2\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+a_3\cdot\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0+1-1\\0+2+1\\1+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\\4\end{bmatrix}=b_1\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+b_2\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+b_3\cdot\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+3-2\\1+6+2\\3+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\9\\9\end{bmatrix}=c_1\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+c_2\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+c_3\cdot\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$$

נסמן: $X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. צריך לפתור 3 מערכות משוואות לינאריות:

$X\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix}$, $X\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, ו־$X\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix}$.

כדי לפשט את החישובים נמצא X^{-1}:

$$[X|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{2R_1 + R_3 \\ 2R_2 + R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{\frac{1}{2}R_1 \\ \frac{1}{2}R_2 \\ -\frac{1}{2}R_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -5/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] = \left[I|X^{-1}\right]$$

לכן

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -5/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ 19/2 \\ -3/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -5/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 7/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -5/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

אזי

$$[T]_v = \begin{bmatrix} 3/2 & 19/2 & -3/2 \\ 1/2 & 7/2 & -1/2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{19}{2} & \frac{7}{2} & 4 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

תרגיל 4: תהי $T : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית המוגדרת לפי

$T\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w+2x \\ x+y \\ z \end{bmatrix}$. חשב $[T]_B^E := [T]_B$ כאשר

$B = \left(B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$ בסיס ב־$\mathbb{R}^3$

ו־E הוא בסיס סטנדרטי ב־$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$.

פתרון:

$$T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 0+0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2 \\ 1+0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = b_1\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + b_3\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 \\ 0+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 \\ 0+0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = d_1\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} + d_2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + d_3\begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

נסמן $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$. צריך לפתור 4 מערכות משוואות ליניאריות

$X\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $X\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $X\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ו־ $X\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. לאחר חישוב של ההופכית של X נקבל

$X^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -11 & 5 & -14 \\ -9 & 4 & -11 \end{bmatrix}$. אזי

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -11 & 5 & -14 \\ -9 & 4 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -11 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -11 & 5 & -14 \\ -9 & 4 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -17 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -11 & 5 & -14 \\ -9 & 4 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 \\ -11 & 5 & -14 \\ -9 & 4 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -14 \\ -11 \end{bmatrix}$$

והתשובה תיהיה

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 5 & -11 & -9 \\ 8 & -17 & -14 \\ -2 & 5 & 4 \\ 6 & -14 & -11 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -2 & 6 \\ -11 & -17 & 5 & -14 \\ -9 & -14 & 4 & -11 \end{bmatrix}$$

__הערה:__ כתוצאה ניתן להגדיר את ההעתקה T בצורה:

$$T \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & -2 & 6 \\ -11 & -17 & 5 & -14 \\ -9 & -14 & 4 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

__תרגיל 5:__ **(א)** נתונה פרבולה $y = x^2$ במערכת צירים הסטנדרטית. יש למצוא משווה של פרבולה במערכת צירים $e_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ ו־ $e_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$.

__פתרון:__ נשים לב שהציר e_1 מתקבל מהציר $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ לאחר סיבוב בזווית $\frac{\pi}{4}$ נגד כיוון השעון. כנ"ל הציר e_2 מתקבל מהציר $\overrightarrow{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ לאחר סיבוב בזווית $\frac{\pi}{4}$ נגד כיוון השעון. במילים אחרות, מטריצה A (הנקראת מטריצת סיבוב סביב ציר ה־z) מעבירה וקטור המייוצג בבסיס סטנדרתי לווקטור המיוצג בבסיס $e_{\overline{1,2}}$ והיא $A(\varphi) = \begin{bmatrix} cos\varphi & -sin\varphi \\ sin\varphi & cos\varphi \end{bmatrix}$ כאשר $\frac{\pi}{4} = \varphi$. אנחנו צריכים מטריצה שמעבירה מבסיס $e_{\overline{1,2}}$ לבסיס סטנדרתי, כלומר צריך לבצע סיבוב עם כיוון השעון בזווית $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ וזואת תיהיה המטריצה $A\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \begin{bmatrix} cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) & -sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) & cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$. נסובב את המערכת צירים נקבל

$$A\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{array}\right] := \left[\begin{array}{c} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{array}\right]$$

ונציב $\left[\begin{array}{c} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \end{array}\right]$ במשוואה $y = x^2$ נקבל

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}x$$

(ב): יש לחשב 3-4 נקודות ולצייר גרף כולל צירים $e_{\overline{1,2}}$.

תרגיל 6: יש למצוא מטריצה מעבר $[I]_v^e$ מבסיס ישן $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, ו- $a_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ לבסיס חדש (הבסיס סטנדרטי e).

פתרון:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2+R_1 \\ R_3+2R_1}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3+4R_2]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_1+R_2+2R_3 \\ -R_2+R_3}]{} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 14 & 9 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

$$[I]_v^e = \begin{bmatrix} 14 & 9 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

תרגיל 7: ב-$\mathbb{R}^3$ נתונים וקטורים $v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, ו- $v_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.
(א) יש להראות שהווקטורים $v = (v_1, v_2, v_3)$ הם בסיס ב-$\mathbb{R}^3$. **(ב)** יש לרשום מטריצה מעבר $[I]_e^v$ כאשר e הוא בסיס סטנדרטי. **(ג)** יש למצוא את הקואורדינטות של הווקטור $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ בבסיס v.

פתרון: [א] נבדוק שהווקטורים v_1, v_2, v_3 בת"ל:

$$det \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 4 & -1 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (-4) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)(-1) + 2(4-12) - 4(-4) = 1 \neq 0.$$

[ב]

$$[I]_e^v = [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -4 \\ 4 & -1 & -3 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[ג] צריך לחשב $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_v$. נשתמש בנוסחה $[I(\overrightarrow{x})]_e = [I]_e^v [\overrightarrow{x}]_v$,

כלומר $([I]_e^v)^{-1}[\overrightarrow{x}]_e=[\overrightarrow{x}]_v$. נסמן $A=[I]_e^v$. נחשב $A^{-1}=[I]_v^e$ בשיטה של מטריצה מצורפת:

$$A^{-1}=\frac{1}{detA}\mathrm{adj}(A)=\frac{1}{1}\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \\ \\ -\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \\ \\ +\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^t$$

$$=\begin{bmatrix} -1 & 8 & -4 \\ 2 & -17 & 8 \\ 2 & -19 & 9 \end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 8 & -17 & -19 \\ -4 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

ולכן

$$[\overrightarrow{x}]_v=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_v=[I]_v^e[\overrightarrow{x}]_e=\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 8 & -17 & -19 \\ -4 & 8 & 9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -28 \\ 13 \end{bmatrix}$$