תשובות לשאלות על יחסי סדר

תשובה לשאלה 1.4.7

נתונה קבוצה $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ונתון היחס S הבא על הקבוצה A:
$S=\{(x,y)|(x\le 5\wedge y\le 5)\vee(x>5\wedge y>5)\}$

1. נוכיח שהיחס S הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזטיבי.
   א. רפלקסיבי:
לכל $x\in A$ מתקיים $(x\le 5\wedge x\le 5)$ או $(x>5\wedge x>5)$. לכן $(x,x)\in S$.
   ב. סימטרי:
יהא $(x,y)\in S$.
כלומר $(x>5\wedge y>5)\vee(x\le 5\wedge y\le 5)$. לכן $(y>5\wedge x>5)\vee(y\le 5\wedge x\le 5)$.
כלומר, $(y,x)\in S$.
   ג. טרנזטיבי:
יהא $(x,y),(y,z)\in S$.
כלומר, $(x>5\wedge y>5)\vee(x\le 5\wedge y\le 5)$ וגם $(y>5\wedge z>5)\vee(y\le 5\wedge z\le 5)$.
במלים אחרות, $(x>5\wedge y>5\wedge z>5)\vee(x\le 5\wedge y\le 5\wedge z\le 5)$.
בפרט, $(x>5\wedge z>5)\vee(x\le 5\wedge z\le 5)$.
כלומר, $(x,z)\in S$.

2. מחלקות השקילות הן:
$[1]^S=\{x|(1,x)\in S\}=\{1,2,3,4,5\}$
$[6]^S=\{x|(6,x)\in S\}=\{6,7,8,9,10\}$

תשובה לשאלה 2.4.7

יהא S יחס שקילות על קבוצה A, ויהיו שני איברים $a,b\in A$. נתבונן במחלקות השקילות:
$[a]^S=\{x|(a,x)\in S\}$
$[b]^S=\{x|(b,x)\in S\}$

1. נתון: $(a,b)\in S$.
צריך להוכיח: $[a]^S=[b]^S$.
הוכחה: נוכיח שוויון באמצעות הכלה דו-כיוונית.
בשלב ראשון נוכיח שמתקיים $[a]^S\subseteq[b]^S$.
יהא $x\in[a]^S$. נראה כי $x\in[b]^S$.
הנתון $x\in[a]^S$ פירושו שמתקיים $(a,x)\in S$.
היחס S הוא יחס שקילות, ולכן הוא סימטרי: נתון כי $(a,b)\in S$ ולכן $(b,a)\in S$.
בנוסף היחס S הוא טרנזטיבי: מתקיים $(b,a),(a,x)\in S$ ולכן $(b,x)\in S$.
כלומר, $x\in[b]^S$ ואכן $[a]^S\subseteq[b]^S$.
בשלב שני נוכיח שמתקיים $[b]^S\subseteq[a]^S$ – בדיוק באותו אופן.
ובסך הכל $[a]^S=[b]^S$.
2. נתון: $[a]^S=[b]^S$.
צריך להוכיח: $(a,b)\in S$.
הוכחה: הנתון $[a]^S=[b]^S$ פירושו: $\{x|(a,x)\in S\}=\{x|(b,x)\in S\}$.
נתון שהיחס S הוא יחס שקילות, ולכן הוא רפלקסיבי. לפיכך $(a,a)\in S$ כלומר $a\in[a]^S$.
נתון $[a]^S=[b]^S$ ולכן $a\in[b]^S$ כלומר $(b,a)\in S$.
נתון שהיחס S הוא יחס שקילות, ולכן הוא סימטרי: $(b,a)\in S$ ולכן $(a,b)\in S$.

תשובה לשאלה 3.4.7

א. נוכיח שהיחס S הוא רפלקסיבי, אנטי-סימטרי וטרנזיטיבי.
רפלקסיבי: לכל $x \in P(\mathrm{A})$ מתקיים $x \subseteq x$, ולכן $(x,x) \in \mathrm{S}$.
אנטי-סימטרי: נניח כי $(x,y) \in \mathrm{S}$ וגם $(y,x) \in \mathrm{S}$.
כלומר $x \subseteq y$ וגם $y \subseteq x$. לכן $x = y$.
טרנסטיבי: נניח כי $(x,y) \in \mathrm{S}$ וגם $(y,z) \in \mathrm{S}$.
כלומר $x \subseteq y$ וגם $y \subseteq z$. לכן $x \subseteq z$. כלומר $(x,z) \in \mathrm{S}$.
ב. נניח כי $|A| \geq 2$. כלומר, קיימים שני איברים שונים $x, y \in A$.
לכן $\{x\},\{y\} \in P(A)$, כאשר $\{x\} \nsubseteq \{y\}$ וגם $\{x\} \nsupseteq \{y\}$.
כלומר, $(\{x\},\{y\}) \notin S$ וגם $(\{y\},\{x\}) \notin S$.
לכן S אינו יחס סדר קוי.
ג. שרשרת עם חמישה איברים: $\{\phi, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$.
אנטי-שרשרת עם ארבעה איברים: $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$.

תשובה לשאלה 4.4.7

מתקיים: $\phi \in P(A)$.
בנוסף $\phi \cap \phi = \phi$ ולכן $(\phi, \phi) \notin S$.
כלומר היחס S אינו רפלקסיבי, ולכן אינו יחס סדר על $P(\mathrm{A})$.
הערה: הנתון על עוצמת הקבוצה A אינו נחוץ.

תשובה לשאלה 5.4.7

נתון שהיחס S (על קבוצה A) הוא טרנזיטיבי.
נוכיח שהיחס $S^* = S \cup \{(a,a)\}$ (עבור $x \in A$) גם הוא טרנזיטיבי.
לשם כך נניח בשלילה שהיחס S^* אינו טרנזיטיבי.
כלומר, נניח שמתקיים: $\boldsymbol{x,y,z \in A}$ המקיימים: $\boldsymbol{(x,y) \in S^*}$ וגם $\boldsymbol{(y,z) \in S^*}$, אבל $\boldsymbol{(x,z) \notin S^*}$.
נתון שהיחס S (שהוא ללא האיבר (a,a)) הוא טרנזיטיבי.
לכן קיימות בסך הכל 3 אפשרויות:

1. *(x,y)=(a,a)* (כלומר, *x=y=a*)

כלומר, נניח שמתקיים: $\boldsymbol{(a,a) \in S^*}$ וגם $\boldsymbol{(a,z) \in S^*}$, אבל $\boldsymbol{(a,z) \notin S^*}$.
קיבלנו סתירה, ולכן המקרה הזה אינו אפשרי.

2. *(y,z)=(a,a)* (כלומר, *z=y=a*)

כלומר, נניח שמתקיים: $\boldsymbol{(x,a) \in S^*}$ וגם $\boldsymbol{(a,a) \in S^*}$, אבל $\boldsymbol{(x,a) \notin S^*}$.
קיבלנו סתירה, ולכן המקרה הזה אינו אפשרי.

3. המקרה הנותר הוא כאשר $(x,y) \in S$ וגם $(y,z) \in S$.
ומטרנזיטיביות היחס S מתקיים $(x,z) \in S$ ולכן $(x,z) \in S^*$.

תשובה לשאלה 6.4.7

נתון שהאיבר a הכי גדול, כלומר, לכל איבר $x \in \mathrm{A}$ מתקיים: $(x,a) \in \mathrm{S}$.
בפרט, עבור x=b מתקיים: $(b,a) \in \mathrm{S}$.
נתון, שאיבר b הוא מירבי, כלומר, לכל איבר $x \in \mathrm{A}$ מתקיים: אם $(b,x) \in \mathrm{S}$, אז x=b.
כאמור, מתקיים: $(b,a) \in \mathrm{S}$. ולכן *a=b*.

תשובה לשאלה 7.4.7

נתון, שאיבר a הוא מירבי, כלומר, לכל איבר $x \in \mathrm{A}$: אם $(a,x) \in \mathrm{S}$, אז x=a.
נתון, שהיחס S הוא סדר קוי, ולכן: לכל איבר $x \in \mathrm{A}$: $(x,a) \in \mathrm{S}$ או $(a,x) \in \mathrm{S}$
ובסך הכל, לכל איבר $x \in \mathrm{A}$ מתקיים: $(x,a) \in \mathrm{S}$ או $(a,a) \in \mathrm{S}$
כלומר, האיבר a הוא הכי גדול.

כעת נניח שהאיבר a הוא מירבי, וגם האיבר b הוא מירבי. נוכיח כי a=b.
על סמך ההוכחה לעיל, האיבר a הוא הכי גדול, וגם האיבר b הוא הכי גדול.
האיבר a הכי גדול, פירושו: לכל איבר $x \in \mathrm{A}$: $(x,a) \in \mathrm{S}$.
בפרט, עבור x=b נקבל כי $(b,a) \in \mathrm{S}$.
האיבר b הכי גדול, פירושו: לכל איבר $x \in \mathrm{A}$: $(x,b) \in \mathrm{S}$.
בפרט, עבור x=a נקבל כי $(a,b) \in \mathrm{S}$.
בסך הכל $(b,a) \in \mathrm{S}$, וגם $(a,b) \in \mathrm{S}$.
אבל נתון שהיחס S הוא סדר קוי, ולכן הוא יחס אנטי-סימטרי. לפיכך a=b.

תשובה לשאלה 8.4.7

יהיו S_1, S_2 שני יחסי סדר חלקי. נתון כי S_1 הוא צמצום של S_2 וגם $S_1 \neq S_2$.
לכן $S_1 \subset S_2$. כלומר, ביחס S_1 קיים איבר (x,y) שאינו קיים ביחס S_1.
נוכיח שגם האיבר (y,x) אינו נמצא ביחס S_1, ולכן S_1 אינו יחס סדר קוי.
ובכן, ברור כי x≠y, כי אם x=y אז (x,y)=(x,x) והוא נמצא ביחס S_1, כי יחס סדר חלקי הוא רפלקסיבי.
בנוסף, אם גם (y,x) נמצא ביחס S_2, אז x=y, כי יחס סדר חלקי הוא אנטי-סימטרי.
לכן (y,x) אינו נמצא ביחס S_2, ולכן אינו נמצא גם ביחס S_1 . לפיכך היחס S_1 הוא סדר חלקי ולא קוי.

תשובה לשאלה 9.4.7

יהיו x,y שני מספרים ממשיים, ובה"כ x<y.
נוכיח שקיים מספר ממשי z המקיים: $x < z < y$ וכן $z \in A$.
1. אם $y - x > 1$, אז נבחר $z = \lfloor x \rfloor + 1$.
מתקיים $x < z < y$. בנוסף, המספר z הוא שלם, ולכן, על פי הנתון, $z \in A$.
2. אם $y - x \leq 1$, אז נסמן: $a = x - \lfloor x \rfloor$, $b = \min\{1, y - \lfloor x \rfloor\}$.
מתקיים: $0 \leq a < b \leq 1$.
נתון כי $A \cap (0,1)$ צפופה בקטע (0,1). בנוסף $0,1 \in A$ (כמספרים שלמים), והקבוצה $A \cap [0,1]$ צפופה בקטע [0,1]. כלומר, קיים מספר $a < c < b$ המקיים $c \in A$.
לכן נבחר $z = c + \lfloor x \rfloor$.
מתקיים: $a + \lfloor x \rfloor < c + \lfloor x \rfloor < b + \lfloor x \rfloor \leq (y - \lfloor x \rfloor) + \lfloor x \rfloor = y$.
כלומר: $x < z < y$.
בנוסף, $c, \lfloor x \rfloor \in A$ (הקבוצה A מכילה את השלמים), ונתון, שהקבוצה A סגורה לחיבור.
על כן $z = c + \lfloor x \rfloor \in \mathrm{A}$, כנדרש.

תשובה לשאלה 10.4.7

נניח שהקבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ צפופה ב-$\mathbb{R}$ וסגורה לחיבור. ונניח כי $\mathbb{R} \setminus A \neq \phi$.
יהא $a^* \in \mathbb{R} \setminus A$ ויהיו c<d ממשיים. מתקיים: $c - a^* < d - a^*$ ולכן מצפיפות A קיימת נקודה $a_0 \in \mathrm{A}$ שעבורה $c - a^* < a_0 < d - a^*$. אבל $a_0 \in \mathrm{A}$, $a^* \notin \mathrm{A}$, ועל כן $a_0 + a^* \notin \mathrm{A}$.
(אחרת, אם $a_0 + a^* \in \mathrm{A}$ וגם $a_0 \in \mathrm{A}$, אז $(a_0 + a^*) - a_0 \in \mathrm{A}$. כלומר, $a^* \in \mathrm{A}$).

לכן $c < a_0 + a^* < d$. לכן $\mathbb{R} \setminus A$ צפופה ב-$\mathbb{R}$.