ע'1

לוגיקה ותורת הקבוצות - שעור 4

תחשיב היחסים

הקדמה:

בתחשיב היחסים עוסקים במבנים מתמטיים ובערכי האמת של נוסחאות המתייחסות למבנים אלה.

לדוגמא: $(\mathbb{R}, +_{\mathbb{R}}, \leq_{\mathbb{R}})$ - הוא מבנה מתמטי בו $\mathbb{R}$ היא קבוצה (הנקראת עולם המבנה) והוא "מצויד" בפעולת החיבור $+_{\mathbb{R}}$ ויחס הסדר - שלמי $\leq_{\mathbb{R}}$ ($\leq_{\mathbb{R}}$ כפי שהכרנו) של $\mathbb{R}$. דוגמאות לנוסחאות המתייחסות למבנה זה:

① $x \leq y$ - במקרה זה אם נציב $x=0, y=1$ ערך האמת יהיה T ואם נציב $x=1, y=0$ ערך האמת יהיה F.

עמ' 2

"קיים"

(2) $\exists x\,(x+x\leq x)$ (שפירושו) קיים x

עבורו: $0\leq x+x$) גם מתקיים במבנה הנתון

$(\mathbb{R},+_{\mathbb{R}},\leq_{\mathbb{R}})$: ע"י בחירה $x=0$ למשל.

(3) $\forall x\,\exists y\,(x+y=0)$ (שפירושה - לכל x

קיים y כך ש- $x+y=0$) גם מתקיים

במבנה $(\mathbb{R},+_{\mathbb{R}},\leq_{\mathbb{R}})$: כי לכל $x\in\mathbb{R}$

נבחר $y=-x\in\mathbb{R}$ אז $x+y=x+(-x)=0$.

יחסים n-מקומיים

הגדרה:

עבור סדרה טבעי וקבוצה A, יחס

n-מקומי על A הוא תת קבוצה של:

$$A^n \overset{\text{הגד׳}}{=} \{\underbrace{\langle a_1,a_2,\dots a_n\rangle}_{\text{סדרה באורך } n \text{ של איברים מ-}A} \mid \text{לכל } 1\leq i\leq n : a_i\in A\}$$

נקראת n-יה סדורה מ-A.

דוגמאות:

(1) עבור $n=1$: $A^1=A$ (סדרות באורך 1 מ-A

אנו מדברים על איברים מ-A).

למשל, עבור $A=\mathbb{Z}$ דוגמא ליחס 1-מקומי

על $\mathbb{Z}$ הוא $S=\{5n \mid n\in\mathbb{Z}\}$.

(2) עבור $n=2$: יחס 2-מקומי על A

הוא בדיוק "יחס דו-מקומי על A"

שהכרנו: למשל $\leq_{\mathbb{R}}$ יחס דו-מקומי על $\mathbb{R}$,

כלומר 2-מקומי על $\mathbb{R}$.

(3) דוגמא ליחס 3-מקומי על $\mathbb{P}(\mathbb{R})$

הוא היחס:

$$S=\{\langle A,B,C\rangle \mid A\cup B\subseteq C \ ,\ A,B,C\subseteq\mathbb{R}\}$$

אז למשל: $\langle\{\sqrt{2}\},\mathbb{Z},\mathbb{R}\rangle\in S$

אבל $\langle\{\sqrt{2}\},\mathbb{Z},\mathbb{Q}\rangle\notin S$

(כי $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ לפי עובדה)

(4'ע)

פונקציות n-מקומיות

הגדרה:

פונקציה n-מקומית על קבוצה A

(סכמה טרמי) היא פונקציה $f: A^n \to A$.

דוגמאות:

(1) $n=1$: אלו פונקציות $f: A \to A$, למשל

טרמי $A = \mathbb{R}$, התוצאה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ע"י $f(x) = x^3$ היא פונקציה 1-מקומית (=חד מקומית)

(2) $n=2$: $A = \mathbb{P}(\mathbb{N})$, $f: \mathbb{P}(\mathbb{N})^2 \to \mathbb{P}(\mathbb{N})$

המוגדרת ע"י: לכל $A, B \in \mathbb{P}(\mathbb{N})$:

$$f(\langle A, B\rangle) = A \cap B$$

היא פונקציה 2-מקומית (= דו-מקומית).

(3) $n=3$, $A = \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$f(\langle x, y, z\rangle) = x^2 + \sqrt[3]{y} + z$ פונקציה

3-מקומית.

מבנים המפרשים אוצר מילים

הגדרה לא פורמלית של מבנה מתמטי:

מבנה מתמטי הוא קבוצה לא ריקה (שנקראת העולם של המבנה) המצויד באוסף יחסים n-מקומיים (n אולי משתנה מיחס ליחס), באוסף פונקציות n-מקומיות (n אולי משתנה מפונקציה לפונקציה) ובאוסף מצויד באוסף איברים מסויימים מהעולם שנקראים קבועים.

דוגמא:

$$(\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}, 0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}})$$

הוא המבנה שעולמו $\mathbb{R}$ (העולם נכתב ראשון משמאל) והוא מצויד ביחס 2-מקומי אחד: $\leq_{\mathbb{R}}$, ושתי פונקציות 2-מקומיות: $+_{\mathbb{R}}, \cdot_{\mathbb{R}}$ ובאוסף מצויד בקבועים $0_{\mathbb{R}}, 1_{\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$.

עמ' 6

נשים לב ש- $\leq_{\mathbb{R}}$ הוא יחס דו-מקומי

על $\mathbb{R}$ ולכן הוא תת קבוצה של $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$,

$+_{\mathbb{R}}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ היא הפונקציה $+_{\mathbb{R}}(\langle x,y\rangle)=x+y$

ו- $\cdot_{\mathbb{R}}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ היא הפונקציה $\cdot_{\mathbb{R}}(\langle x,y\rangle)=x\cdot y$

ואילו $0_{\mathbb{R}},1_{\mathbb{R}}$ הם המספרים 0,1 בהתאמה

ב- $\mathbb{R}$. ניתן לחשוב שהיחס $\leq_{\mathbb{R}}$

מפרש את הסימן $\leq$ (ניתן לו פרוש כיחס

דו-מקומי על $\mathbb{R}$), $+_{\mathbb{R}}$ מפרש את

הסימן $+$ כפונקציה דו-מקומית על $\mathbb{R}$

וכנ"ל לגבי $\cdot_{\mathbb{R}}$ (מפרש את $\cdot$). ואילו

$0_{\mathbb{R}},1_{\mathbb{R}}\in\mathbb{R}$ מפרשים את הסימנים 0,1.

(*) כעת נגדיר את המושג של אוצר מילים

אשר מכיל את אוסף הסימנים $L=\{\leq,+,\cdot,0,1\}$

ולאחר מכן את המושג של מבנה כמפרש אוצר

מילים אשר מכיל את המבנה דוגמא המפרש את L.

הגדרה:

אוצר מילים בתחשיב היחסים מורכב מאוסף סימנים המתחלק ל-4 סוגים (לכל היותר):

(1) הסימן = (שנמצא אוטומטית בכל אוצר מילים הוא נרשם)

(2) אוסף סימנים $\mathbb{P}$ הנקרא אוסף סימני היחסים.

(3) אוסף סימנים $\mathbb{F}$ הנקרא אוסף סימני הפונקציות.

(4) אוסף סימנים $\mathbb{C}$ הנקרא אוסף סימני קבועים.

בנוסף, לכל סימן מסוגים (1)-(3) מצורף מספר טבעי ≥ 0 אשר מציין את מספר המקומות המתאים לסימן: לגבי כל סימן $P\in\mathbb{P}$ מספר זה מתאר את מספר המקומות עבור הפרוש של P (כיחס),
לגבי כל $f\in\mathbb{F}$ מספר זה מתאר את מספר המקומות עבור הפרוש של f כפונקציה.

ולגבי הסימן = המספר המתאים יהיה תמיד

2 (כי = תמיד יתפרש כיחס השוויון

שהוא יחס דו-מקומי)

<u>דוגמא:</u>

נגדיר אוצר מילים $L = \{P, f_1, f_2, f_3, c\}$ כאשר

P סימן יחס שהמספר המתאים לו הוא

למשל 3 (נאמר ש-P סימן יחס 3-מקומי),

f_1 סימן פונקציה שהמספר המתאים לו

הוא למשל 1 (נאמר ש-f_1 סימן פונ' 1-מקומית)

f_2 סימן פונקציה 2-מקומית, f_3 סימן

פונ' 3-מקומית. c סימן קבוע.

(וכרגיל הסימן = נמצא ב-L אך אנו

לא רושמים אותו). המקרה לו מבנה

שיפרש את L ויפרש את = תמיד

כיחס השוויון של העולם, את P נפרש
כיחס 3-מקומי של העולם, ואת f_i כפונקציה
i-מקומית של העולם עבור $i \leq 3$ וכו ולבסוף
את c המקנה נפרש כאיבר כלשהו בעולם.

<u>הגדרה:</u>

עבור אוצר מילים L, מבנה M המפרש את L
(או מבנה ל- L) מורכב מ-:

1. עולם המבנה המסומן ע"י $|M|$ שהוא קבוצה לא ריקה כלשהי.
2. סימן השוויון מפרש ב-M כיחס השוויון של העולם $|M|$ של M ומסומן ע"י $=^M$.
3. לכל סימן יחס $P \in L$, M מפרש את P כיחס n-מקומי של $|M|$ כאשר n המספר המתאים ל-P והסימן של הפרוש של P הוא P^M.

(4) לכל סימן פונ' $f \in \mathbb{F}$, M מפרש את
f כפונקציה n-מקומית על $|M|$
כאשר n המספר המתאים ל-f.
את הפרוש של f ב-M נסמן ב-f^M.

(5) לכל סימן קבוע $c \in \mathbb{C}$, M מפרשת
את c כאיבר ב-$|M|$. הפרוש של c
ב-M מסומן ע"י c^M.

<u>דוגמא:</u>

נגדיר אוצר מילים L:

$$L = \{P_1, P_2, f, c\}$$

כאשר P_1 סימן יחס חד-מקומי, P_2
סימן יחס דו-מקומי, f סימן פונקציה
3-מקומית, c - סימן קבוע.

נגדיר שני מבנים שונים המפרשים את L:

ע' 11

① מבנה ראשון: $M=(\mathbb{R}, P_1^M, P_2^M, f^M, c^M)$

כאשר: $\mathbb{R}$ העולם ופירושי הסימנים מוגדרים

באופן הבא:

$P_1^M=\mathbb{Q}$, $P_2^M=\{\langle a,b\rangle\in\mathbb{R}^2 \mid a+b\geq 17\}$

לכל $a,b,c\in\mathbb{R}$: $f^M(a,b,c) = a^2+b^2+c^3$

(אני מגדירים וכותבים $f^M(a,b,c)$ במקום $f^M(\langle a,b,c\rangle)$).

$c^M=\sqrt{2}$

אז M מבנה תקין המפרש את L.

② מבנה שני (באותו אוצר מילים L):

$N=(\{0,1\}, P_1^N, P_2^N, f^N, c^N)$

כאשר $\{0,1\}$ העולם של N ופירושי הסימנים ב-L:

$P_1^N=\{0\}$, $P_2^N=\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,0\rangle\}$

$$f^N(a,b,c)=\begin{cases} 0 & \text{זוגי } a+b+c \\ 1 & \text{אי-זוגי } a+b+c \end{cases}$$

$c^N=1$.

תת-מבנים

הגדרה:

יהיו M,N מבנים בעלי אוצר מילים L.

נאמר ש- M תת-מבנה של N אם:

(א) $|N| \subseteq |M|$ (עולם M מוכל בעולם N)

(ב) לכל סימן יחס n-מקומי P ב-L מתקיים:

$$P^N \cap |M|^n = P^M$$

כלומר: צמצום P^N ל-M הוא P^M.

(ג) לכל סימן פונקציה n-מקומי f ב-L מתקיים:

לכל $a_1, a_2, \dots, a_n \in |M|$:

$$f^M(a_1, \dots, a_n) = f^N(a_1, \dots, a_n)$$

כלומר: צמצום f^N ל-$|M|$ הוא f^M.

(ד) לכל סימן קבוע c ב-L: $c^N = c^M$

כלומר: פרושי הקבועים ב-M וב-N מתלכדים

דוגמא:

יהי $L = \{P, f, c\}$ כאשר P סימן יחס 2-מקומי, f סימן פונקציה 2-מקומי, c סימן קבוע.

יהיו N, M המבנים הבאים המפרשים את L:

$$N = (\mathbb{R}, \leq_{\mathbb{R}}, +_{\mathbb{R}}, 0)$$

$$M = (\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}}, +_{\mathbb{Q}}, 0)$$

כלומר: $p^N = \leq_{\mathbb{R}},\ f^N = +_{\mathbb{R}},\ c^N = 0$

$$p^M = \leq_{\mathbb{Q}},\ f^M = +_{\mathbb{Q}},\ c^M = 0$$

(כאשר $+_{\mathbb{Q}}$ פונקציית החיבור הדו-מקומית

ל- $\mathbb{Q}$, $+_{\mathbb{R}}$ " " "

ל- $\mathbb{R}$, $\leq_{\mathbb{Q}} = \{\langle a,b\rangle \mid a,b\in\mathbb{Q},\ a\leq b\}$

$(\leq_{\mathbb{R}} = \{\langle a,b\rangle \mid a,b\in\mathbb{R},\ a\leq b\})$

אם M תת-מבנה של N, נבדוק כאמור:

(א) $|M| = \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} = |N|$

(ב) $n=2$ במקרה שלנו, נבדוק:

$$p^N \cap |M|^2 = \leq_{\mathbb{R}} \cap\, \mathbb{Q}^2 = \{\langle a,b\rangle \mid a,b\in\mathbb{R},\ a\leq b\} \cap \mathbb{Q}^2$$

$$= \{\langle a,b\rangle \mid a,b\in\mathbb{Q},\ a\leq b\} = p^M$$

ג) $n=2$, יהיו $a_1, a_2 \in |M| = \mathbb{Q}$. אז:

$$f^M(a_1,a_2) = f^N(a_1,a_2)$$

אכן: $f^M(a_1,a_2) = a_1 +_{\mathbb{Q}} a_2$

$$f^N(a_1,a_2) = a_1 +_{\mathbb{R}} a_2$$

אך החיבור $+_{\mathbb{R}}$ על $\mathbb{Q}$ הוא בדיוק החיבור הרגיל לגבי $\mathbb{Q}$ כלומר $a_1 +_{\mathbb{Q}} a_2 = a_1 +_{\mathbb{R}} a_2$ לכל $a_1, a_2 \in \mathbb{Q}$.

3) ברור ש- $c^M = 0 = c^N$ לפי הגדרה של הפרושים c^M, c^N.

<u>דוגמה:</u>

יהי $L = \{P\}$, כאשר P סימן יחס חד-מקומי. נגדיר:

$$M = (\mathbb{Z}, P^M = 2\mathbb{N})$$

$$N = (\mathbb{Q}, P^N = \mathbb{N})$$

כאשר $2\mathbb{N}$ מסמן את קבוצת הטבעיים הזוגיים.

נבדוק את התנאים לתת מבנה:

(א) $|M| = \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} = |N|$, התנאי מתקיים.

(ב) נבדוק את התנאי עבור P:

$$P^N \cap |M|^1 = P^N \cap |M| = \mathbb{N} \cap \mathbb{Z} = \mathbb{N} \neq P^M = 2\mathbb{N}$$

ולכן M איננו תת-מבנה של N.

<u>דוגמא:</u>

באותו אוצר מילים L כמו הדוגמא הקודמת:

אם $N = (\mathbb{Z}, P^N = 2\mathbb{Z})$, $M = (\mathbb{N}, P^M = 2\mathbb{N})$

אז M תת מבנה של N:

$$P^N \cap |M|^1 = 2\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = 2\mathbb{N} = P^M$$

<u>טענה:</u>

יהא N מבנה באוצר מילים L.

ותהא $A \subseteq |N|$ (A תת קבוצה של העולם של N). אז יש תת מבנה M של N כך ש-

$A = |M| \iff$ A סגורה לפונקציות של N, כלומר:

(א) לכל סימן קבוע c ב-L: $c^M \in A$.

(ב) לכל סימן פונקציה n-מקומי f (n כלשהו) ולכל $a_1,\dots,a_n \in A$ מתקיים $f^M(a_1,\dots,a_n)\in A$.

דוגמאות

(1) מצא שני תתי מבנים של $N=(\mathbb{Z},+,0)$.

פתרון:

נגדיר $M_1=(2\mathbb{Z},+,0)$, $M_2=(3\mathbb{Z},+,0)$

שניהם תתי מבנים של M (כאשר $3\mathbb{Z}$ - הכפולות של 3, $2\mathbb{Z}$ - הכפולות של 2). ואכן, נשים לב שהעולמות - $2\mathbb{Z}$ של M_1 ו- $3\mathbb{Z}$ של M_2 סגורים לפונקציה ($2\mathbb{Z},3\mathbb{Z}$ סגורות לחיבור ובנוסף $0\in 2\mathbb{Z}$, $0\in 3\mathbb{Z}$).

(2) הראה שעבור המבנה N מ-(1) אין תת מבנה שעולמו הוא $A=\{0,1,2\}$.

פתרון:

A אינה סגורה לחיבור: למשל $2\in A$ אך $2+2\notin A$.