חישוב מימד של מרחבים ווקטורים

דוגמה 1: מה הוא מימד של הקבוצה

$$? \quad V=\left\{a\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\0\\0\end{bmatrix}+b\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\0\\-1\end{bmatrix}:a,b\in\mathbb{F}\right\}$$

תשובה: $dim_{\mathbb{R}}V=2$ (כאן זה לא טעות ורשמתי $\mathbb{R}$ בכוונה, ראו דוגמה 7,8).

דוגמה 2: מה הוא $dim_{\mathbb{C}}V$ עבור

$$? \quad V=\left\{\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix}\cdot t:t\in\mathbb{C}\right\}$$

תשובה: $dim_{\mathbb{C}}V=1$ כי יש סה"כ רק איבר אחד בבסיס וזה מטריצה נתונה.

דורמה 3:

$$dim_{\mathbb{Q}}V=dim_{\mathbb{Q}}\left\{a\cdot 1+b\sqrt{2}:a,b\in\mathbb{Q}\right\}=2$$

כיוון ש־$\left\{1,\sqrt{2}\right\}$ זה בסיס של V. מדוע 1 ו־ $\sqrt{2}$ בת"ל ?

דוגמה 4: $dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}=\infty$. זה נכון, כיוון שלא נצליח לקחת מספר סופי של איברים ולבנות ממנו בסיס ל־$\mathbb{R}$ כך שהצירוף הלינארי של איברי הבסיס עם המקדמים מ־$\mathbb{Q}$ יתן מספר ממשי. נניח בשלילה שאפשר, אז נגיה למצב שזה לא מספיק.
למשל מספר אי־רציונלי $y\le\sqrt{2}\approx 1.4$ (לדוגמה $y=\sqrt{1+\frac{1}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$)
ניתן לחשב על ידי טור ידוע:

$$.\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3-\frac{1}{32}x^4+...,\qquad |x|\le 1$$

במקרה כזה נקבל שהבסיס הוא אינסופי $\left\{1,x,x^2,x^3,...\right\}$. למה x ולא $\frac{1}{2}$?
כי יכולנו לקחת במקום $\frac{1}{3}$ מספר ממשי אחר למשל $\frac{1}{\pi}$ ואז הבסיס יהיה $\left\{1,\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi^2},...\right\}$.
הערה: לא מדובר כאן שצריך להוכיח ש־ $\left\{1,\frac{1}{\pi},\frac{1}{\pi^2},\frac{1}{\pi^3},...\right\}$ זה בסיס ל־$\mathbb{R}$.

דוגמה 5: $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}=2$. (ראה לדוגמה 3), $\{1,i\}$ זה בסיס של $\mathbb{C}$ והמקדמים הם מ־ $\mathbb{R}$.

דוגמה 6: $dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}=1$ או $dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}=1$.

תרגיל 1: מה יהיה $dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}$ ו־ $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}$?

דוגמה 7: תזכורת $i \equiv \sqrt{-1}$. תהי $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ בסיס קנוני (בסיס סטנדרטי)

כלומר $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, ... , $e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$. המימד של המרחב וקטורי מרוכב $\mathbb{C}^n$ **מעל הממשיים** $\mathbb{R}$ הוא $\boxed{dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n = 2n}$, כך השקבוצה

$$\{e_1, ..., e_n, \sqrt{-1}e_1, ..., \sqrt{-1}e_n\}$$

נקראת $\boxed{\textbf{בסיס ממשי}}$ ל-$\mathbb{C}^n$. למה אומרים בסיס ממשי למרות שכתוב $\sqrt{-1}$?
כדי להבין את זה נראה

דוגמה 8: נראה שהמימד של מרחב וקטורי מרוכב $\mathbb{C}^n$ **מעל המרוכבים** $\mathbb{C}$ שווה ל-n,
כלומר $\boxed{dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n = n}$. לפשטות, נתבונן במקרה של $\mathbb{C}^2$. באנלוגיה לדוגמה (7)
נניח **בשלילה**, שהקבוצה

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sqrt{-1} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix} \right\}$$

היא קבוצה של הווקטורים בת"ל **מעל** $\mathbb{C}$.
נכתוב צירוף לינארי של האיברים מהקבוצה B:

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} \sqrt{-1} \\ 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix}.$$

אמרנו שהמקדמים $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ שייכים ל- $\mathbb{C}$. ניקח $\alpha = \sqrt{-1}$, ו- $\beta = \gamma = \delta = 0$.
אזי נקבל שהווקטור $w = \begin{bmatrix} \sqrt{-1} \\ 0 \end{bmatrix}$ תלוי לינארי מהוקטור $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, כיוון ש-

$$\alpha \cdot u = \alpha \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \sqrt{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{-1} \\ 0 \end{bmatrix} = w$$

כנ"ל נקבל $\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ עבור $\beta = \sqrt{-1}$ ו- $\alpha = \gamma = \delta = 0$,
כלומר הוקטור $\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{-1} \end{bmatrix}$ תלוי לינארי מהוקטור $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. לכן בקבוצה B יש רק **2**
וקטורים בת"ל. נבחר $B = \{e_1, e_2\}$, אזי הבסיס הנ"ל נקראת $\boxed{\textbf{בסיס מרוכב}}$ של $\mathbb{C}^2$.

מסכנה:

$$dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n = 2n, \qquad dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^n = n.$$

תרגיל 2: הוכח שהאיברים מהקבוצה $\{e_1, ..., e_n, \sqrt{-1}e_1, ..., \sqrt{-1}e_n\}$ במונכים של דוגמה 7 הם בת"ל ולכן מהווים בסיס ל-$\mathbb{C}^n$ מעל הממשיים.

תרגיל 3: לחזור לדוגמה 1. האם $dim_{\mathbb{F}}V = dim_{\mathbb{R}}V$?