הרצאה 1 – קומבינטוריקה

עקרון הספירה הבסיסי – חוק הכפל

אם מבצעים ניסוי בשני שלבים – לשלב א יש m תוצאות אפשריות ולשלב ב יש n תוצאות אפשרויות – אז בסה"כ לניסוי יש $n \cdot m$ תוצאות אפשריות.

דוגמא: אגודת הסטודנטים בוחרת שני נציגים לראשות הועד – סטודנטית וסטודנט. כמה אפשרויות יש לבחור ועד אם יש במכללה 2600 סטודנטיות ו2500 סטודנטים?

פתרון: שלב א – בחירת הסטודנטית, עם 2600 אופציות. שלב ב – בחירת סטודנט, עם 2500 אופציות. אז סה"כ יש $2500 \cdot 2600 = 6{,}500{,}000$.

ראייה קבוצתית: נסמן בA את קבוצת התוצאות האפשריות של שלב א ובB את קבוצת התוצאות האפשריות של שלב ב. אז קבוצת התוצאות האפשריות של הניסוי הכולל היא $A \times B$.

הכללה: אם ישנם k שלבים ומספר האופציות בכל שלב הוא n_k סך התוצאות האפשריות הוא $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

חזרה על ניסוי מספר פעמים

יש ניסוי שיש לו n תוצאות אפשריות, ומבצעים אותו k פעמים. אז מספר התוצאות האפשריות הכולל הוא n^k.

דוגמא: ישנם 5 ספורטאים שמתחרים ב4 מקצי ריצה ובכל מקצה רושמים את שם הזוכה. כמה אפשרויות שונות יש לרשימת הזכיות הסופית?

פתרון: בכל מקצה יש 5 אפשרויות לזוכה במקצה. אז סה"כ האפשרויות לרשימה הסופית הוא 5^4.

סידורים ("פרמוטציות"\"תמורות")

בהינתן קבוצה בת n איברים, מספר הדרכים שבהן ניתן לסדר את האיברים בשורה הוא $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

שאלה: 4 סטודנטיות ו6 סטודנטים עשו תחרות תכנות. תוצאת התחרות היא רשימה של הסטודנטים המסודרים לפי הזמן שלקח להם לכתוב קוד שעובד.

א. כמה תוצאות שונות יש לתחרות?
ב. כמה תוצאות שונות יש לתחרות אם מכינים שתי רשימות נפרדות – אחת לסטודנטיות ואחת לסטודנטים?

פתרון:

בסעיף א, ישנם סה"כ 10 סטודנטים, אז מספר הרשימות האפשריות הוא $10!$.

בסעיף ב', מספר הרשימות האפשריות של סטודנטיות הוא $4!$ ושל סטודנטים הוא $6!$, ולכן סה"כ מספר התוצאות האפשריות הוא $6!\cdot 4!$.

<u>בחירת תת-קבוצה</u>

בהינתן קבוצה בת n איברים, מספר האפשרויות לבחור תת-קבוצה בת k איברים הוא

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

הביטוי הזה נקרא "הבינום של ניוטון", והוא חשוב במתמטיקה בין היתר משום שהוא מתאר את פתיחת הסוגריים בנוסחת החזקה של סכום של שני מספרים

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

דוגמא: מתוך קבוצה של 40 סטודנטים רוצים לבחור ועד כיתה בן 6 סטודנטים. כמה ועדים אפשריים יש?

פתרון: $\binom{40}{6}$.

<u>המקדם המולטינומי</u>

בהינתן מספר n שלם חיובי, ומספרים שלמים אי-שליליים $k_1, k_2, \dots, k_m$ המקיימים

$$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$$

המקדם המולטינומי מוגדר להיות

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_m!}$$

בפרט, אם $m = 2$ אז $k_2 = n - k_1$ ומקבלים

$$\binom{n}{k_1, k_2} = \frac{n!}{k_1!\,(n-k_1)!} = \binom{n}{k_1}$$

אז הבינום של ניוטון הוא מקרה פרטי של המקדם המולטינומי.

משמעות 1: מספר האפשרויות לחלק קבוצה A לאיחוד זר של תתי-קבוצות $B_1, \dots, B_m$ עם $|B_i| = k_i$ ככה שלשם הקבוצות יש משמעות.

דוגמא: נתונה קבוצה של 7 עובדי חברת סטארט-אפ שעובדים על פרויקט. צריך לחלקם לשלוש קבוצות – צוות טכני בן 3 עובדים, צוות ניהולי בן 2 עובדים וצוות שיווקי בן 2 עובדים. כמה אפשרויות חלוקה יש?

פתרון: נסמן A קבוצת העובדים, B_1 קבוצת הצוות הטכני, B_2 קבוצת הצוות הניהולי וB_3 קבוצת הצוות השיווקי. מספר הדרכים לחלק את A לאיחוד זר של $B_1 \cup B_2 \cup B_3$ הוא $\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!} = 210$.

משמעות 2: מספר האפשרויות לסדר n אובייקטים בשורה, כאשר n האובייקטים מתחלקים לקבוצות בגדלים $k_1, \ldots, k_m$ כאשר בכל אחת מהקבוצות, האובייקטים באותה קבוצה הם זהים (כלומר, בלתי ניתנים להבחנה), אבל יש שוני בין האובייקטים מהקבוצות השונות.

דוגמא: מה מספר הדרכים להרכיב מילים (גם חסרות משמעות) מהאותיות המרכיבות את המילה *PEPPER*?

פתרון: המילה הנ"ל מורכבת מ6 אותיות, מתוכן 3 עותרים של *P* (שלא ניתן להבדיל ביניהן), 2 עותקים של *E* ועותק אחד של *R*. אז מספר המילים השונות הניתן להרכיב מהאותיות האלה הוא $\binom{6}{3,2,1} = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 60$.

הערה: אם בוחרים $\mathrm{m} = \mathrm{n}$ ו$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 1$ אז מקבלים

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_m} = \frac{n!}{1! \cdot \ldots \cdot 1!} = n!$$

המשמעות היא שלקחנו קבוצה וחילקנו אותה לn קבוצות בנות איבר אחד, כאשר הקבוצות עצמן סדורות. זה בדיוק כמו לסדר את האיברים עצמם, משום שכל קבוצה מכילה בדיוק איבר אחד, ולכן לא פלא שהתוצאה זהה לתוצאה המוכרת של סידור n איברים שונים בשורה.

<u>חלוקת קבוצה לאוסף תת-קבוצות חסרות שם</u>

בהינתן $n = mk$, אם רוצים לחלק קבוצה A בת n איברים לאיחוד זר של m תתי-קבוצות זרות בגודל k כל אחת, כך שהקבוצות הן "חסרות שם", כלומר אין חשיבות לסדר של תת-הקבוצות, אז החישוב הוא לחלק את הקבוצה לקבוצות בעלות שם $B_1, \ldots, B_m$ ולחלק את התוצאה במספר הסידורים האפשריים של $B_1, \ldots, B_m$, שהוא $m!$. הנוסחה היא אם כך

$$\frac{\binom{n}{k, \ldots, k}}{m!}$$

דוגמא: רוצים לחלק קבוצה בת 9 תלמידים לשלוש קבוצות בנות 3 תלמידים. בכמה דרכים ניתן לעשות זאת?

פתרון: לקבוצות העבודה אין חשיבות לסדר, ולכן הנוסחה תהיה

$$\frac{\binom{9}{3,3,3}}{3!} = \frac{9!}{3!\cdot 3!\cdot 3!\cdot 3!} = 280$$

<u>בחירות של k איברים מתוך n</u>

מספר האפשרויות	עם סדר	בלי סדר
עם חזרות	n^k	$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$
בלי חזרות	$n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

דוגמא: עושים תחרות ריצה בין 10 ספורטאים ומחלקים מדליית זהב למי שסיים ראשון, מדליית כסף למי שסיים שני, ומדליית ארד למי שסיים שלישי. בכמה אופנים יכולות להינתן המדליות?

פתרון: מדובר בבחירה של 3 ספורטאים מתוך עשרה, כאשר לסדר יש חשיבות (יש חשיבות למי סיים ראשון, מי שני ומי שלישי) ואין חזרות (ספורטאי אחד לא יכול לסיים גם ראשון וגם שני). לכן התשובה היא $10\cdot 9\cdot 8 = 720$

דוגמא: ישנם k כדורים וn כדים. בכמה אופנים ניתן להניח את הכדורים בכדים, כאשר התוצאה שאנחנו רואים בסוף היא מספר הכדורים שכל כד מכיל?

פתרון: מדובר על k בחירות מתוך n אופציות כאשר הסדר לא משנה ואפשר לחזור על אותה הבחירה פעמיים. מה שבוחרים כל פעם הוא כד אחד מתוך n הכדים הקיימים, ושמים בו כדור אחד. הבחירה הזאת מתבצעת k פעמים, משום שכל פעם אנחנו מאבדים כדור אחד, וישם סה"כ k כדורים, אז העסק ייגמר אחרי k בחירות. כלומר, מספר האופנים שבו ניתן להניח את הכדורים בכדים הוא $\binom{n+k-1}{k}$.

תרגיל: הסבירו מדוע הנוסחה לביצוע k בחירות מתוך n איברים ללא סדר ועם חזרות היא $\binom{n+k-1}{k}$.

הסבר: זו בעיה שקולה להרכבת מילה בת $n+k-1$ אותיות שמתוכן k אותיות הן עותקים של A ו$n-1$ הן עותקים של B. כל מילה כזאת מתאימה לתרחיש אחר של הנחת הכדורים בכדים – מספר האותיות A שמופיעות לפני הB הראשון הוא מספר הכדורים ששמים בכד הראשון, מספר העותקים של A שמופיעים בין הB הראשון לשני הוא מספר הכדורים ששמים בכד השני, וכן הלאה. מספר המילים האלה הוא אכן $\binom{n+k-1}{k}$.