# קומבינטוריקה - אוסף תרגילים - תשובות

1. א. נצמיד כל אישה לבעלה ונסדר אותם על ספסל כזוג: $n!$. נכפול בסידור הפנימי בין כל גבר ואשתו: $2^n$ ובסה"כ: $n! \cdot 2^n$.
ב. לפי הכלה והדחה: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot 2^k \cdot (2n-i)!$.

2. זה בדיוק כמו מספר הפתרונות למשוואה: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=17$ כאשר: $1 \le x_i \le 6$ לכל $1 \le i \le 5$. שזה שווה למספר הפתרונות למשוואה: $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=12$ : כאשר: $0 \le x_i \le 5$ לכל $1 \le i \le 5$. נגדיר $A_i$ - $x_i > 5$ לכל $1 \le i \le 5$. ונשתמש בשיטת המשלים ובעיקרון ההכלה וההדחה. סה"כ האפשרויות: $\binom{12+5-1}{12}$. $|A_i| = \binom{6+5-1}{6}$ לכל $1 \le i \le 5$. $|A_i \cap A_j| = \binom{0+5-1}{0}$ (ב – 2 משתנים יש יותר מ 5). חיתוכים של יותר מ 2 קבוצות שווים ל 0. ולכל סה"כ השובה: $\binom{16}{12} - 5\binom{10}{6} + \binom{5}{2}$.

3. א. לפי עיקרון ההכלה וההדחה: $\binom{52}{50} - \binom{42}{40} - \binom{32}{30} - \binom{22}{20} + \binom{22}{20} + \binom{12}{10} + 1$.
ב. $3^{50} - 3 \cdot 2^{50} + 3$.

4. א. בכל שורה יש $n$ אפשרויות ולכן הפתרון הוא: $n^n$.
ב. כל האפשרויות לסימון $X$ בשורה זה בדיוק מספר תתי הקבוצות של קבוצה בגודל $n$, נחסיר את האפשרות היחידה שבאף תא לא מסומן $X$. כך לכל השורות, ובסה"כ: $(2^n-1)^n$.
ג. נסמן: $R_i$ - בשורה ה $i$ אין X , $C_i$ - בעמודה ה $i$ אין X. עוצמת חיתוך $k$ קבוצות $R_i$ שונות ו $m$ קבוצות $C_i$ שונות היא: $2^{(n-k)(n-m)}$ (כי לוקחים את כל תתי הקבוצות האפשריות של השורות כפול אלו של העמודות) ולכן סה"כ הפתרון לפי ההכלה וההדחה:
$\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}(-1)^{k+m}\binom{n}{k}\binom{n}{m} \cdot 2^{(n-k)(n-m)}$.

5. א. $6^n$.
ב. לפי עקרון ההכלה וההדחה: $\sum_{k=0}^{6}(-1)^k \cdot \binom{6}{k} \cdot (6-k)^n$.

6. א. מספר האפשרויות לסדר 6 אנשים סביב שולחן עגול הוא $5! = \frac{6!}{6}$.
נקבל $\binom{14}{8} \cdot 7! \cdot 5!$.
ב. מספר האפשרויות לסדר 6 אנשים על ספסל הוא $6!$.
נקבל $\binom{14}{8} \cdot 7! \cdot 6!$.

7. מספר האפשרויות לבחור 6 זוגות מתוך 10 זוגות (ללא חזרות, בלי חשיבות לסדר) הוא $\binom{10}{6}$.
לאחר שקבענו 6 זוגות: מספר האפשרויות לבחור נציג אחד מתוך כל זוג הוא $2^6$. מספר האפשרויות לוועד שכולו נשים הוא 1. מספר האפשרויות לוועד שכולו גברים הוא 1.
לכן מספר האפשרויות לבחור ועד שלא כולו נשים ולא כולו גברים הוא $2^6 - 2$.
מעקרון הכפל מספר האפשרויות לבחירת הועד הוא: $\binom{10}{6}(2^6-2)$.

8. א. $\frac{n!}{(j+k)!(n-j-k)!} \le \frac{n!}{j!(n-j)!} \cdot \frac{(n-j)!}{k!(n-j-k)!}$ , נצמצם: $\frac{1}{(j+k)!} \le \frac{1}{j!} \cdot \frac{1}{k!}$ ואכן: $j!\,k! \le (j+k)!$.
ב. הביטוי משמאל מגדיר את מספר האפשרויות לבחור $k + j$ איברים מתוך $\{1,...,n\}$.
הביטוי מימין מגדיר את מספר האפשרויות לבחור j איברים מתוך $\{1,...,n\}$ ואז לבחור k איברים מתוך הנותרים. בפרט, כל בחירה כזו מגדירה בחירה של $k + j$ איברים מתוך $\{1,...,n\}$ (כאשר

לוקחים את האיחוד של שתי הקבוצות שנבחרו) ולכן אי-השוויון מתקיים – על כל בחירה מהסוג הראשון יש לפחות בחירה אחת של אותם k + j איברים מהסוג השני.
נשים לב (זה לא נדרש להוכחה) שאם $j \neq 0$ , $k \neq 0$, אזי יהיו מספר בחירות מהסוג השני שיתאימו לאותה בחירה מסוג הראשון – כי למשל אם k=2,j=1 , אזי הבחירות (מהסוג השני) של {2,5},{4} וגם {2,4},{5} וגם {4,5},{2} יתאימו כולן לאותה בחירה מהסוג הראשון – כלומר {2,4,5}.

9. נרצה לדעת את מספר המילים הבינאריות באורך $n$ בהן יש לפחות 2 אחדות.
בצד ימין, אנו לוקחים את כל האפשרויות ($2^n$) ומחסירים מתוכן את האפשרות שאין כלל 1 ואת האפשרויות שמופיע 1 רק פעם אחת.
בצד שמאל, בוחרים מקום עבור אחד האחדות כך שמשמאלו יישאר מקום למקם את השני (והשאר ממילא אפסים) ומימינו אין כל הגבלה (כי כבר בחרנו 2 אחדות) ולכן נוכל לבחור מהמקום ה 2 ואילך למקם את האחד הראשון במקום ה $i$, לאחריו נבחר לאחד השני את מקומו מתוך $i-1$ המקומות משמאל ואת שאר הסדרה מימין ל 1 הראשון ניצור כרגיל ($2^{n-i}$).
שני הצדדים פותרים את אותה בעיה ולכן השוויון מתקיים.

10. נתבונן בביטוי: $(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^m$ ונחשב את המקדם של האיבר החופשי:
דרך א: $(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^m = (1+x)^n\frac{(x+1)^m}{x^m} = \frac{1}{x^m}(1+x)^{n+m} = \frac{1}{x^m}\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}x^k$
ומכאן, האיבר החופשי יהיה כאשר $k=m$ ולכן התשובה היא: $\binom{n+m}{m}$.
דרך ב: $(1+x)^n\left(1+\frac{1}{x}\right)^m = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}x^{-j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\binom{n}{i}\binom{m}{j}x^i x^{-j}$
ומכאן, האיבר החופשי יהיה כאשר $i=j$ ולכן התשובה היא: $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{m}{i}$. ומכאן השוויון.

11. נרצה למנות את מספר האפשרויות לבחירת $k$ איברים (ללא חשיבות לסדר הבחירה) מתוך הקבוצה: $\{1,2,\dots,n\}$ כאשר $k$ האיברים הראשונים ייבחרו. יש רק אפשרות אחת לבחירה זו כביטוי המוגדר בצד ימין. בצד שמאל משתמשים בהכלה והדחה ובשיטת המשלים: נגדיר: $A_i$ $(1 \leq i \leq k)$ – האיבר ה $i$ לא נבחר. $|A_i| = \binom{n-1}{k}$ - כי נותר עדיין לבחור $k$ מתוך הנותרים (ללא הגבלה). $\left|A_i \cap A_j\right| = \binom{n-2}{k}$ (2 איברים מ $k$ האיברים הראשונים לא נבחרו). חיתוך של $m$ קבוצות: $\binom{n-m}{k}$. נסכום לפי הכלה והדחה ונחסיר מכלל האפשרויות לבחירת $k$ מ $n$ - $\binom{n}{k}$.
נקבל: $\binom{n}{k} - \sum_{i=1}^{k}(-1)^{i+1}\binom{k}{i}\binom{n-i}{k} = \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\binom{n-i}{k}$. 2 הצדדים מונים את אותו דבר ולכן השוויון מתקיים.