תרגול 4 – הכלה והדחה - תשובות

1. א. נגדיר: A – מספר העכברים בעלי זנב ארוך. B – בעלי זנב ארוך שאוהבים גבינה קשה C - בעלי זנב ארוך שאוהבים גבינה רכה. $B \cap C$ - בעלי זנב ארוך שאוהבים את 2 סוגי הגבינות. $|A| = |B| + |C| - |B \cap C|$ ומכאן: $|B \cap C| = |B| + |C| - |A|$.
לפי הנתונים: $|B \cap C| = 4 + 7 - 10 = 1$.
ב. מכיוון ש 2 עכברים אוהבים את 2 סוגי הגבינות ואחד מהם הוא בעל זנב ארוך בהכרח השני בעל זנב קצר.
ג. בעלי זנב קצר שאוהבים גבינה רכה: $9 - 7 = 2$,
בעלי זנב קצר שאוהבים גבינה קשה: $5 - 4 = 1$, בעלי זנב קצר שאוהבים את 2 הסוגים: 1 ולכן סה"כ בעלי זנב קצר: $2 + 1 - 1 = 2$ ומכאן סה"כ עכברים במאורה: $10 + 2 = 12$.

2. א. נגדיר: A – סטודנטים מתגוררים בחיפה. B – סטודנטים שלומדים קומבינטוריקה למדעי המחשב ומתגוררים בחיפה. C - סטודנטים שלומדים אלגברה א' ומתגוררים בחיפה. $B \cap C$ - סטודנטים שלומדים גם קומבינטוריקה למדעי המחשב וגם אלגברה א' ומתגוררים בחיפה. $|A| = |B| + |C| - |B \cap C|$ ומכאן: $|B \cap C| = |B| + |C| - |A|$.
לפי הנתונים: $|B \cap C| = 12 + 7 - 16 = 3$.
ב. 5 סטודנטים לומדים את 2 הקורסים ו 3 מהם גרים בחיפה ולכן 2 סטודנטים גרים בתל אביב ולומדים את 2 הקורסים.
ג.סטודנטים הגרים בתל אביב ולומדים קומבינטוריקה: $15 - 12 = 3$. סטודנטים הגרים בתל אביב ולומדים אלגברה א': $10 - 7 = 3$. סטודנטים הגרים בתל אביב ולומדים את 2 הקורסים: 2. ולכן מספר הסטודנטים הגרים בתל אביב: $3 + 3 - 2 = 4$ ומכאן סה"כ כל הסטודנטים בקבוצה: $16 + 4 = 20$.

3. נגדיר: A_i - החבר ה i $(1 \le i \le 8)$ אינו מוזמן כלל. נקבל: סה"כ האפשרויות ללא הגבלה: $|U| = \binom{8}{4}^7$, $|A_i| = \binom{7}{4}^7$ - כי בכל יום מ 7 הימים ראובן בוחר 4 חברים להזמין (מתוך 7 הנותרים). $|A_i \cap A_j| = \binom{6}{4}^7$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{5}{4}^7$, $|A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| = \binom{4}{4}^7$, כל שאר החיתוכים הם 0 (כי ראובן צריך להזמין 4 חברים בכל יום ויישארו פחות מ 3). אנו מחפשים:
$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8}| = |U| - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8|$, כלומר, כולם מוזמנים.
ולכן: $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8| = \sum_{i=1}^{8} |A_i| - \sum_{1 \le i < j}^{8} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k}^{8} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \sum_{1 \le i < j < k < l}^{8} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l|$
נציב: $|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_8}| = \binom{8}{4}^7 - \left[8 \cdot \binom{7}{4}^7 - \binom{8}{2} \cdot \binom{6}{4}^7 + \binom{8}{3} \cdot \binom{5}{4}^7 - \binom{8}{4} \cdot \binom{4}{4}^7\right]$

4. נגדיר: A – מופיעה המחרוזת "אינ". B – מופיעה המחרוזת "גדולה". C – מופיעה המחרוזת "כמו". D – מופיעה המחרוזת "ביתר". $|A| = 20!$, $|B| = 18!$, $|C| = 20!$, $|D| = 19!$, $|A \cap B| = 16!$, $|A \cap C| = 18!$ $|A \cap D| = 0$, $|B \cap C| = 0$, $|B \cap D| = 15!$, $|C \cap D| = 17!$, $|A \cap B \cap C| = 0$, $|A \cap B \cap D| = 0$, $|A \cap C \cap D| = 0$, $|B \cap C \cap D| = 0$, $|A \cap B \cap C \cap D| = 0$. ומכאן:
$|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap D| - |C \cap D|$
נציב ונקבל את מספר הפרמוטציות בהן מופיעות המחרוזות ולכן לפי שיטת המשלים, התשובה תהיה: $22! - |A \cup B \cup C \cup D|$.

5. א. נבחר את הקוביות שמראות 6 : $\binom{9}{3}$. לכל אחת משאר הקוביות יש 5 אפשרויות. ובסה"כ: $\binom{9}{3}\cdot 5^6$.

ב. סה"כ: 6^9 אפשרויות. נגדיר: A_i $(1\le i\le 6)$ – בדיוק 3 קוביות מראות i.

$|A_i|=\binom{9}{3}\cdot 5^6$, $|A_i\cap A_j|=\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot 5^3$, $|A_i\cap A_j\cap A_k|=\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}$,

שאר החיתוכים – 0 כי אין אפשרות שמתוך 9 קוביות יהיו יותר מ 3 מספרים שמופיעים 3 פעמים. אנו מחפשים: $|\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_6}|=|U|-|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_6|$ ולכן התשובה:

$$|\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_6}|=6^9-\left[6\cdot\binom{9}{3}\cdot 5^6-\binom{6}{2}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot 5^3+\binom{6}{3}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\right]$$

ג. כמו ב – ב' רק שבסעיף זה אנו מחפשים: $|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_6|$

6. נגדיר A_i - הזוג ה i יושבים אחד ליד השני. $|A_i|=(2n-2)!\,2!$,

$|A_i\cap A_j|=(2n-3)!\,2^2$, ...

$\bigcap_{1\le i1<\cdots<ik}^{k}|A_{i1}\cap A_{i2}\cap\ldots\cap A_{ik}|=(2n-k-1)!\,2^k$

ולכן התשובה: $(2n-1)!-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(2n-k-1)!\,2^k$.

7. נגדיר A_i - האדם ה i עדיין רואה את זה שהיה לפניו. $|A_i|=(n-1)!$,

$|A_i\cap A_j|=(n-2)!$, ... $\bigcap_{1\le i1<\cdots<ik}^{k}|A_{i1}\cap A_{i2}\cap\ldots\cap A_{ik}|=(n-k)!$

ולכן התשובה: $n!-\binom{n}{1}(n-1)!+\binom{n}{2}(n-2)!-\cdots=n!\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

8. $30+42-20=52$

9. $100-(30+25-8)=53$

10. נגדיר A_3 - המספרים בין 1 ל 3000 המתחלקים ב 3. A_5 - המספרים בין 1 ל 3000 המתחלקים ב 5. $|A_3|=\frac{3000}{3}=1000$, $|A_5|=\frac{3000}{5}=600$,

$|A_3\cap A_5|=\frac{3000}{15}=200$.

ולכן התשובה: $|\overline{A_3\cup A_5}|=3000-(1000+600-200)=1600$.

11. נגדיר A_3 - המספרים בין 1 ל 3000 המתחלקים ב 3. A_5 - המספרים בין 1 ל 3000 המתחלקים ב 5. A_5 - המספרים בין 1 ל 3000 המתחלקים ב 7.

$|A_3|=\frac{3000}{3}=1000$, $|A_5|=\frac{3000}{5}=600$, $|A_7|=\left\lfloor\frac{3000}{7}\right\rfloor=428$,

$|A_3\cap A_5|=\frac{3000}{15}=200$, $|A_3\cap A_7|=\left\lfloor\frac{3000}{21}\right\rfloor=142$, $|A_5\cap A_7|=\left\lfloor\frac{3000}{35}\right\rfloor=85$,

$|A_3\cap A_5\cap A_7|=\left\lfloor\frac{3000}{105}\right\rfloor=28$.

ולכן התשובה:

$|\overline{A_3\cup A_5\cup A_7}|=3000-(1000+600+428-142-85-200+28)=$ 1627.

12. נגדיר: A_2 - המספרים שמופיעה בהם הספרה 2 , A_3 - המספרים שמופיעה בהם הספרה 3 , A_4 - המספרים שמופיעה בהם הספרה 4. אנו מחפשים $|A_2\cap \mathrm{A}_3\cap A_4|$.

$|A_2\cap A_3\cap A_4|=|U|-|\overline{A_2\cap A_3\cap A_4}|=9000-|\overline{A_2}\cup\overline{A_3}\cup\overline{A_4}|=9000-(|\overline{A_2}|+|\overline{A_3}|+|\overline{A_4}|-|\overline{A_2}\cap\overline{A_3}|-|\overline{A_2}\cap\overline{A_4}|-|\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|+|\overline{A_2}\cap\overline{A_3}\cap\overline{A_4}|)=$ 198.

13. א. 6^n

ב. נגדיר: A_i $(1\le i\le 6)$ – המספר i אינו מופיע כלל: $|A_i|=5^n$, $|A_i\cap A_j|=4^n$,

$|A_i\cap A_j\cap A_k|=3^n$ ... , $|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_6|=1$.

$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_6}| = 6^n - [6 \cdot 5^n - \binom{6}{2} \cdot 4^n + \binom{6}{3} \cdot 3^n - \cdots - 1]$.

14. סה"כ הדרכים ללא הגבלה: $\binom{80+5-1}{5-1}$. נגדיר A_i – $(1 \le i \le 5)$ בתא ה i יש יותר מ 24 כדורים. $|A_i| = \binom{55+5-1}{5-1}$, $|A_i \cap A_j| = \binom{30+5-1}{5-1}$, $|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{5+5-1}{5-1}$, שאר החיתוכים – 0 כי לא ייתכן שביותר מ 3 תאים יהיו בכל אחד מהם לפחות 25 כדורים.
תשובה: $\left|\overline{\bigcup_{i=1}^{5} A_i}\right| = |U| - [\sum_{i=1}^{5}|A_i| - \sum_{1\le i<j}^{5}|A_i \cap A_j| + \cdots + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5|]$

15. נשים 1 בכל משתנה ונקבל את המשוואה: $\sum_{i=1}^{6} x_i = 14$ כאשר $0 \le x_1, x_2, \ldots, x_6 \le 3$
מידול הבעיה: בכמה דרכים ניתן לפזר 14 כדורים זהים ב 6 תאים שונים, כך שבאף תא לא יהיו יותר מ 3 כדורים. והפתרון באותה דרך כמו בשאלה 14.

16. זה בדיוק כמו מספר הפתרונות למשוואה: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$ כאשר:
$1 \le x_1, x_2, x_3, x_4 \le 6$ והפתרון באותה דרך כמו בשאלה 15.

17. סה"כ הפרמוטציות: $\frac{11!}{2!2!2!}$. נגדיר: A_1 - הרצף MAT מופיע. A_2 - הרצף CAT מופיע. A_3 - הרצף THE מופיע. $|A_1| = 9! - \frac{7!}{2}$ כי יש !9 פרמוטציות כאשר *MAT* מופיע. ומורידים את הפרמוטציות בהן *MAT* מופיע פעמיים. $|A_2| = \frac{9!}{2}$, $|A_3| = \frac{9!}{4}$. $|A_1 \cap A_2| = 7!$,
$|A_1 \cap A_3| = 7! + 7! - 5!$ (מופיע MATHE או מופיע MAT ו THE פחות המקרים שמופיע MAT פעמיים), $|A_2 \cap A_3| = \frac{7!}{2} + \frac{7!}{2}$ (מופיע CATHE או מופיע CAT ו THE),
$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 2 \cdot 5!$ (מופיע CATHE ו MAT או MATHE ו CAT).
הפתרון: $|U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.

18. מידול הבעיה לכדורים. נשים i כדורים בתא ה i ונקבל את המשוואה:
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 15$ כאשר: $i \le x_i \le 2i$. בסה"כ האפשרויות: $\binom{15+5-1}{5-1}$.
נגדיר: A_i $(1 \le i \le 5)$ – יש חריגה ממספר הכדורים המותר בתא ה i .
$|A_1| = \binom{12+5-1}{5-1}$, $|A_2| = \binom{10+5-1}{5-1}$, $|A_3| = \binom{8+5-1}{5-1}$, $|A_4| = \binom{6+5-1}{5-1}$
, $|A_5| = \binom{4+5-1}{5-1}$, $|A_1 \cap A_2| = \binom{7+5-1}{5-1}$, $|A_1 \cap A_3| = \binom{5+5-1}{5-1}$
, $|A_1 \cap A_4| = \binom{3+5-1}{5-1}$, $|A_1 \cap A_5| = \binom{1+5-1}{5-1}$, $|A_2 \cap A_3| = \binom{3+5-1}{5-1}$,
$|A_2 \cap A_4| = \binom{1+5-1}{5-1}$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \binom{0+5-1}{5-1} = 1$
כל שאר החיתוכים 0 כי החריגה יותר מ 15.
הפתרון: $|U| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5|$.

19. סה"כ הסידורים: $\frac{(2n)!}{2^n}$. נגדיר A_i $(1 \le i \le n)$ – הסדרות בהן מופיע הרצף $a_i a_i$.
$|A_i| = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$ - סידור כל האיברים (חילוק בסדר הפנימי בין כל 2 איברים זהים (חוץ מ a_i שכבר סידרנו מראש))
חיתוך של k קבוצות: $\frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$ ולכן הפתרון הוא:
$\frac{(2n)!}{2^n} - \left[\binom{n}{1} \cdot \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}} - \binom{n}{2} \cdot \frac{(2n-2)!}{2^{n-2}} + \cdots\right] = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}}$

20. א. על כל סידור של הצריח הראשון בשורה הראשונה, יש 7 סידורים שונים לשני (חוץ מהעמודה שבה הוצב הראשון) , לשלישי 6 , וכן הלאה. ולכן התשובה: !8.
ב. נגדיר: A_i - הצריח ה i נמצא בעמודה ה i ולכן: $|A_i| = 7!$, חיתוך של k קבוצות: $(8-k)!$ ולכן הפתרון הוא:
$8! - \left[\binom{8}{1} \cdot 7! - \binom{8}{2} \cdot 6! + \cdots\right] = \sum_{k=0}^{8}(-1)^k \cdot \binom{8}{k} \cdot (8-k)!$.

ג. נפצל ל 2 קבוצות: הצריחים בשורות האי זוגיות ואלו שבשורות הזוגיות. סה"כ הסידורים לכל קבוצה: !4. נגדיר A_i - כמו בסעיף ב'. ולכן הפתרון יהיה:
$\sum_{k=0}^{4}(-1)^k \cdot \binom{4}{k} \cdot (4-k)! \cdot \sum_{k=0}^{4}(-1)^k \cdot \binom{4}{k} \cdot (4-k)!$.

21. דרך הפתרון זהה לשאלה 6.

22. נגדיר: A - הרצף aa מופיע. B - הרצף bb מופיע. C - הרצף cc מופיע. D - הרצף dd מופיע. $|A| = |B| = |C| = |D| = \frac{7!}{2!2!2!}$, $|A \cap B| = \cdots = \frac{6!}{2!2!}$, $|A \cap B \cap C| = \cdots = \frac{5!}{2!}$, $|A \cap B \cap C \cap D| = 4!$. והתשובה:
$\frac{8!}{2!2!2!2!} - [\binom{4}{1}\frac{7!}{2!2!2!} - \binom{4}{2}\frac{6!}{2!2!} + \binom{4}{3}\frac{5!}{2!} - 4!]$.

23. רוצים להכניס k כדורים זהים ל n תאים כך שבכל תא לפחות כדור אחד. בצד ימין של המשוואה מכניסים לכל תא כדור אחד ונשאר לפזר $k-n$ כדורים ל n תאים ולפי ההגדרה (ללא חשיבות לסדר ועם חזרות): $\binom{n+k-n-1}{k-n} = \binom{k-1}{k-n}$. ובצד ימין מגדירים: A_i - מספר האפשרויות לפזר את הכדורים כאשר יש 0 כדורים בתא ה i.
$|A_i| = \binom{n-1+k-1}{k}$ - כי נשאר לפזר k כדורים ל $n-1$ תאים. חיתוך של m קבוצות: $\binom{n-m+k-1}{k}$ סה"כ האפשרויות: $\binom{n+k-1}{k}$. ולכן קיבלנו:
$$\binom{n+k-1}{k} - \left[\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1+k-1}{k} - \sum_{1\le i\le j}^{n}\binom{n-2+k-1}{k} + \cdots\right] = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{n-i+k-1}{k}$$
ומכאן קיבלנו ששני צדדי המשוואה סופרים את אותו דבר.