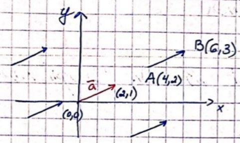
וקטורים.

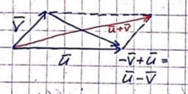


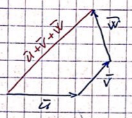
$\bar{a} = \overline{AB} = B - A = (2,1)$

1. $\bar{u} = (5,-3,-2) \quad \bar{v} = (3,-1,1) \quad \bar{w} = (-2,3,0)$

חשב: $2\bar{u} - 3\bar{v} - \bar{w} = 2(5,-3,-2) - 3(3,-1,1) - (-2,3,0) =$

$= (10,-6,-4) - (9,-3,3) - (-2,3,0) = (3,-6,-7)$





2. מצא את x,y,z אם:

$(3x,-2,z) + 2y(7,2,-3) = (-1,z,x+y)$

$$\begin{cases} 3x+14y=-1 \\ -2+4y=z \\ z-6y=x+y \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+14y=-1 \\ 4y-z=2 \\ x+7y-z=0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 14 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-3R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & -7 & 3 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{4R_3+7R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} x=-5 \\ y=1 \\ z=2 \end{array}$$

מרחב וקטורי

$< V, F, +, \cdot >$

מרחב וקטורי מעל שדה F $(V \neq \emptyset)$ + חיבור וקטורים, $\cdot$ כפל בסקלר.

1. $\forall \bar{x},\bar{y} \in \bar{V} \quad \bar{x}+\bar{y} = \bar{y}+\bar{x}$
2. $\forall \bar{x},\bar{y},\bar{z} \in \bar{V} \quad \bar{x}+(\bar{y}+\bar{z}) = (\bar{x}+\bar{y})+\bar{z}$
3. $\exists \bar{0} \in \bar{V} : \forall \bar{x} \in \bar{V} \quad \bar{x}+\bar{0} = \bar{0}+\bar{x} = \bar{x}$
4. $\forall \bar{x} \in \bar{V} \ \exists -\bar{x} \in \bar{V} : \ \bar{x}+(-\bar{x}) = \bar{0}$
5. $\alpha(\beta\bar{x}) = (\alpha\beta)\bar{x}$
6. $1 \cdot \bar{x} = \bar{x}$
7. $(\alpha+\beta)\bar{x} = \alpha\bar{x}+\beta\bar{x}$
8. $\alpha(\bar{x}+\bar{y}) = \alpha\bar{x}+\alpha\bar{y}$

דוגמאות:

א) $\bar{V} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x=-1 \right\}$ למשל: $(-1,0,0)$, $(-1,-2,3)$, $(-1,4,7)$

$\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ לא מקיים תנאי $x=-1$ $\quad \bar{0} \in \bar{V}$ לא מרחב וקטורי כי

ב) $\bar{V} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \right\}$ $\quad \bar{0} \in \bar{V}$: למשל: $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,4)$

$\bar{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad -\bar{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \notin \bar{V}$ לא מרחב וקטורי:

$-4 \neq (-2)^2$

1. $\bar{U} = \left\{ \begin{pmatrix} t & s \\ t-s & 0 \end{pmatrix} \middle| \ t,s \in \mathbb{R} \right\}$ צ"ל ש U מרחב וקטורי:

$\begin{pmatrix} t & s \\ t-s & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ כאשר $t,s=0$

סגירות לחיבור: $\begin{pmatrix} t_1 & s_1 \\ t_1-s_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_2 & s_2 \\ t_2-s_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1+t_2 & s_1+s_2 \\ (t_1+t_2)-(s_1+s_2) & 0 \end{pmatrix} \in U$

סגירות לכפל סקלר: $\alpha\begin{pmatrix} t & s \\ t-s & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha t & \alpha s \\ \alpha(t-s) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha t & \alpha s \\ \alpha t-\alpha s & 0 \end{pmatrix} \in \bar{U}$

U תת-מרחב של $\mathbb{R}^{2\times2}$

2. נגדיר: $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f \text{ רציפה}\}$

פונקציות אי-זוגיות $\bar{W}=\{f\in\bar{V} \mid \forall a\in\mathbb{R}\ \ f(-a)=-f(a)\}$

צ"ל כי $\bar{W}$ מהווה ת"מ של $\bar{V}$

א) $\bar{0}_V\in\bar{W}$ $\quad \bar{0}_V=f_0(x)\equiv 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\ \ f_0(-x)=0=-f_0(x)$

ב) סגירות לחיבור $\quad f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\in\bar{W} \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}\ \ f(-x)=-f(x),\ g(-x)=-g(x)$

$$(f+g)(-x)=f(-x)+g(-x)=-f(x)-g(x)=-(f+g)(x)$$

ג) סגירות לכפל בסקלר $\quad \forall x\in\mathbb{R},\alpha\in\mathbb{R}, f\in\bar{W} \quad (\alpha f)(-x)=\alpha\cdot f(-x)=\alpha(-f(x))=-\alpha f(x)=-(\alpha f)(x)$

3. הוכיחו או הפריכו: קבוצת פתרונות של מערכת $Ax=b$ עבור $b\in\mathbb{R}^{m\times 1}$, $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$ הינו ת"מ של $\mathbb{R}^n$.

דוגמה נגדית:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$(x,y,z)=(1,1,1)$ פתרון של מערכת.

אבל $2(1,1,1)=(2,2,2)$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

אין סגירות לכפל בסקלר

4. $\bar{V}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid x,y,z>0\right\}$

נגדיר פעולות:

$\oplus$ $\ \forall (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\in\bar{V} \quad (x_1,y_1,z_1)\oplus(x_2,y_2,z_2)=(x_1x_2,y_1y_2,z_1z_2)$

$\odot$ $\ \forall (x,y,z)\in\bar{V} \quad \alpha\odot(x,y,z)=(x^\alpha,y^\alpha,z^\alpha)$

האם V מ"ו?

$\bar{0}_V \quad (x,y,z)\oplus\bar{0}_V=(x,y,z) \quad \bar{0}_V=(1,1,1)$

$\forall \bar{u},\bar{v}\in\bar{V} \quad \bar{u}\oplus\bar{v}=(x_1x_2,y_1y_2,z_1z_2)=(x_2x_1,y_2y_1,z_2z_1)=\bar{v}\oplus\bar{u}$

$\forall \bar{u},\bar{v},\bar{w}\in\bar{V} \quad (\bar{u}\oplus\bar{v})\oplus\bar{w}=(x_1x_2,y_1y_2,z_1z_2)\oplus(x_3,y_3,z_3)=$

$=((x_1x_2)x_3,y_1y_2y_3,z_1z_2z_3)=\bar{u}\oplus(\bar{v}\oplus\bar{w})$

$\forall \bar{u}\in\bar{V}\ \exists -\bar{u}=\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)\in\bar{V} \quad \bar{u}+(-\bar{u})=\bar{0}=(1,1,1)$

$\forall \bar{u}\in\bar{V}\ \forall\alpha\in\mathbb{R} \quad \alpha\bar{u}=(x^\alpha,y^\alpha,z^\alpha)\in\bar{V}$

$\forall \bar{u},\bar{v}\in\bar{V}\ \forall\alpha\in\mathbb{R} \quad \alpha\odot(\bar{u}\oplus\bar{v})=((x_1x_2)^\alpha,(y_1y_2)^\alpha,(z_1z_2)^\alpha)=$

$(x_1^\alpha x_2^\alpha,y_1^\alpha y_2^\alpha,z_1^\alpha z_2^\alpha)=(\alpha\odot\bar{u})\oplus(\alpha\odot\bar{v})$

$\forall \bar{u}\in\bar{V}\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{R} \quad (\alpha+\beta)\odot\bar{u}=(x^{\alpha+\beta},y^{\alpha+\beta},z^{\alpha+\beta})=(x^\alpha x^\beta,y^\alpha y^\beta,z^\alpha z^\beta)=$

$=(\alpha\odot\bar{u})\oplus(\beta\odot\bar{u})$

$\forall \bar{u}\in\bar{V}\ \exists 1\in\mathbb{R} \quad 1\odot\bar{u}=(x^1,y^1,z^1)=(x,y,z)=\bar{u}$

5. $\mathbb{Q}(\sqrt{3})=\{a+b\sqrt{3} : a,b\in\mathbb{Q}\}$

א) האם $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ תת-מרחב של $\mathbb{R}$ מעל שדה $\mathbb{R}$?

ב) ________ מעל שדה $\mathbb{Q}$?

א) $\bar{0}=0+0\sqrt{3}\in\mathbb{Q}(\sqrt{3})$

$\forall \bar{u},\bar{v}\in\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \quad \bar{u}+\bar{v}=a_1+b_1\sqrt{3}+a_2+b_2\sqrt{3}=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{3}\in\mathbb{Q}(\sqrt{3})$

(*) $\forall \bar{u}\in\mathbb{Q}(\sqrt{3})\ \forall\alpha\in\mathbb{R} \quad \alpha\bar{u}\in\mathbb{Q}(\sqrt{3})$?

$$\alpha\bar{u}=\alpha(a+b\sqrt{3})=\alpha a+\alpha b\sqrt{3}$$

נניח $\alpha=\sqrt{2}$ האם $\sqrt{2}a\in\mathbb{Q}$? לא

$\Downarrow$

$\alpha a+\alpha b\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}(\sqrt{3})$

ב) (*) $\forall \bar{u}\in\mathbb{Q}(\sqrt{3})\ \forall\alpha\in\mathbb{Q} \Rightarrow \alpha\bar{u}=(\alpha a)+(\alpha b)\sqrt{3}\in\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \Rightarrow$ תת-מרחב