

מבחן בקורס הסתברות 1

סמסטר ב' 2017

מועד ב'

פרופ' דן חפץ

אוניברסיטת אריאל

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה למדעי המחשב

משך הבחינה: 3 שעות

המבחן הינו עבור מספרי קורס: 1-7028410-2

מבנה המבחן: 4 שאלות ללא בחירה.

הנחיות:

1. המבחן הינו עם חומר סגור ובכתב יד ללא שימוש בשום אמצעי אלקטרוני (מותר מחשבון פשוט אם כי אין בו צורך). עם זאת, כל סטודנט רשאי להביא דף אחד מגודל A4 כתוב משני צדדיו. על התלמיד לכתוב את שמו ומספר תעודת הזהות שלו על הדף הנ"ל.
2. אין לכתוב בעפרון.
3. יש להוכיח כל טענה שאתם כותבים גם אם לא התבקשתם לעשות זאת במפורש בשאלה.
4. ניתן להסתמך ללא הוכחה על כל טענה שנלמדה בשיעור (אלא אם כן זו הטענה שהנכם מתבקשים להוכיח בשאלה). יש לצטט את הטענה עליה הנכם מסתמכים בצורה ברורה.

שאלה 1 (25 נקודות):

כד מכיל 2 כדורים לבנים, 2 כדורים שחורים ו-2 כדורים אדומים. מוציאים מקרית וללא החזרה שלושה כדורים מהכד. יהי X משתנה מקרי הסופר את מספר הכדורים הלבנים שהוצאו ויהי Y משתנה מקרי הסופר את מספר הכדורים השחורים שהוצאו.

- א. (12 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של X ו- Y .
- ב. (7 נקודות) חשבו את $P(X > Y)$.
- ג. (6 נקודות) חשבו את תוחלת XY .

שאלה 2 (25 נקודות):

- א. (12 נקודות) יהי $0 < p < 1$ מספר ממשי ויהיו $X \sim \text{Geom}(p)$ ו- $Y \sim \text{Geom}(p)$ משתנים מקריים בלתי תלויים. הוכיחו שמתקיים $P(X = k | X + Y = n) = \frac{1}{n-1}$ לכל $1 \leq k \leq n-1$.
- ב. (13 נקודות) יהיו X ו- Y משתנים מקריים המקבלים ערכים שלמים אי שליליים. הוכיחו כי X ו- Y בלתי תלויים אם רק אם לכל שני שלמים אי שליליים a ו- b מתקיים $P(X \geq a, Y \geq b) = P(X \geq a)P(Y \geq b)$.

שאלה 3 (25 נקודות):

- א. יהי $N \sim \text{Poi}(\lambda)$ משתנה מקרי בעל התפלגות פואסון עם פרמטר $\lambda > 0$. מטילים מטבע הוגן N פעמים כאשר ההטלות בלתי תלויות. יהי X משתנה מקרי הסופר את מספר ההטלות שתוצאתן עץ. (11 נקודות) חשבו את $E(X)$.
- ב. (6 נקודות) האם X ו- N בלתי תלויים? נמקו את תשובתכם.
- ג. (8 נקודות) הוכיחו ש- $P(X \geq \lambda) \leq 1/2$.

שאלה 4 (25 נקודות):

- א. מטילים קוביה הוגנת $n \geq 5$ פעמים כאשר כל ההטלות בלתי תלויות. נסמן ב- X את מספר השלשות של הטלות רצופות שסכום תוצאותיהן הוא 5. (7 נקודות) חשבו את תוחלת X .
- ב. (18 נקודות) חשבו את שונות X .