# מיקוד הוכחות אינפי 1

## הוכחות (מעודכן לתאריך 19.05.2019) –

- ☐ טענה 2.13 (אי-שוויון ברנולי)
- ☐ טענה 2.14
- ☐ טענה 2.15
- ☐ טענה 2.23
- ☐ טענה 2.24 (מבחן דלאמבר)
- ☐ טענה 2.30 (אפיון)
- ☐ משפט 2.31
- ☐ טענת עזר 2.35
- ☐ טענת עזר 2.36
- ☐ טענה 2.39 (הלמה של קנטור)
- ☐ משפט 2.42 (בולצאנו ויירשטראס)
- ☐ משפט 3.6 (גבול של הרכבת פונקציות)
- ☐ משפט 4.6 (ערך הביניים)
- ☐ משפט 4.7 (ערך הביניים של קושי)
- ☐ משפט 4.8 (ויירשטראס)
- ☐ טענה 4.11
- ☐ משפט 5.7 (פרמה)
- ☐ משפט 5.8 (רול)
- ☐ .
- ☐ .
- ☐ .
- ☐ .
- ☐ .
- ☐ .
- ☐ .
- ☐ .
- ☐ .
- ☐ .
- ☐ .
- ☐ .

**טענה 2.13 (אי שוויון ברנולי):** לכל $n$ טבעי ולכל $b \geq -1$ ממשי מתקיים: $(1+b)^n \geq 1+nb$.

**הוכחה:** באינדוקציה על $n$.

עבור $n=1$ הטענה ברורה.

נניח נכונות עבור n. צ"ל: $(1+b)^{n+1} \geq 1+(n+1)b$.

$(1+b)^n(1+b) \geq (1+nb)(1+b) = 1+nb+b+nb^2 \geq 1+nb+b$, כנדרש. □

**טענה 2.14:** אם $-1<a<1$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

**הוכחה:** נניח ש- $0<a<1$, קיים $b>0$ כך ש- $a=\frac{1}{1+b}$ ($b=\frac{1}{a}-1$).

לפי אי שוויון ברנולי $0<a^n = \frac{1}{(1+b)^n} \leq \frac{1}{1+nb} \leq \frac{1}{nb}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{bn} = \frac{1}{b}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ ומסנדוויץ' ינבע $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

המקרה $a=0$ ברור.

אם $-1<a<0$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}|a|^n = 0$, מכאן ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\left|a^n\right| = 0$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ □

**טענה 2.15:** לכל $0<a$ ממשי, מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

**הוכחה:** נפריד לשלושה מקרים.

עבור $a>1$. נסמן $a_n = \sqrt[n]{a}-1$, נשים לב לכך ש- $a_n \geq 0$. נראה ש- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, עובדה זו מובילה לכך ש- $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

מאי שוויון ברנולי נקבל: לכל $n$, $a = (1+a_n)^n \geq 1+na_n > na_n$.

מכאן ש- $0 \leq a_n < \frac{a}{n}$. לכן לפי משפט הסנדוויץ' $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, כנדרש.

עבור $a=1$ הטענה ברורה.

ואם $0<a<1$, אז $1<\frac{1}{a}$, לכן $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = 1 = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$. □

**טענה 2.23**: יהיו $(a_n)$ ו- $(b_n)$ שתי סדרות חיוביות.

א. $a_n = O(b_n)$ אם ורק אם הסדרה $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ חסומה.

ב. אם $a_n = o(b_n)$, אז $a_n = O(b_n)$.

ג. $a_n = O(1)$ אמ"ם הסדרה $(a_n)$ חסומה.

ד. אם $a_n = o(b_n)$ ול- $(b_n)$ יש גבול במובן הרחב, אז $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

**הוכחה:**

א. $\Leftarrow$ $a_n = O(b_n)$, לכן קיים $c > 0$, כך ש- $a_n \le c \cdot b_n$, לכל $n$. מכאן ש- $0 \le \frac{a_n}{b_n} \le c$, כנדרש.

$\Rightarrow$ לפי הנתון קיים $M > 0$, כך ש- $0 \le \frac{a_n}{b_n} \le M$ לכל $n$. לכן $a_n \le M \cdot b_n$, לכל $n$, כנדרש.

ב. $a_n = o(b_n)$, לכן $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, לכן הסדרה $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ חסומה ולפי א' $a_n = O(b_n)$.

ג. לפי א', $a_n = O(1)$ אמ"ם הסדרה $\left(\frac{a_n}{1}\right)$ חסומה.

ד. $\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot \left(\frac{a_n}{b_n} + 1\right) = \lim_{n\to\infty} b_n \cdot 1 = \lim_{n\to\infty} b_n$ □

## מבחן המנה לגבולות

**טענה 2.24 (מבחן דלאמבר)**: תהי $(a_n)$ חיובית ויהי $0 < q < 1$ מספר ממשי. אם מתקיים לכל $n$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le q$, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**הוכחה:** $\frac{a_n}{a_1} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{a_3}{a_2} \cdot \frac{a_4}{a_3} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \le q^{n-1}$, לפיכך $0 \le a_n \le \frac{a_1}{q} \cdot q^n$. לפי טענה 2.14, אגף ימין מתכנס ל- $0$ ומסנדוויץ' נובעת הטענה. □

**טענה 2.30 (אפיון):** תהי $A$ קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים, חסומה מלעיל, ויהי $y$ חסם מלעיל של $A$. אז $y=\sup A$ אמ"ם לכל $\varepsilon>0$ קיים $x\in A$ המקיים $x>y-\varepsilon$.

**הוכחה**: $(\Leftarrow)$ נפריד לשני מקרים:

$y = max\,A$ : בתור מקסימום $y\in A$, לכן לכל $\varepsilon>0$, $y$ הוא איבר ב- $A$, המקיים $y>y-\varepsilon$.

$y\notin A$ : נניח בשלילה שקיים $\varepsilon>0$ כך שבקטע $(y-\varepsilon,y)$ אין אף איבר של $A$, אזי כל האיברים בקטע זה הם חסמים מלעיל של $A$ אשר קטנים מ- $y$, בסתירה לנתון.

$(\Rightarrow)$ נניח בשלילה שקיים $z$ חסם מלעיל של $A$, כך ש- $z<y$. לפי ההנחה קיים $x\in A$, כך ש- $z<x<y$, זאת בסתירה לכך ש- $z$ חסם מלעיל של $A$. □

טענה דומה עבור חסם תחתון.

**משפט 2.31:** כל סדרה מונוטונית וחסומה, מתכנסת. אם $(a_n)$ עולה וחסומה, אז

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n\in N\}$$

ואם $(a_n)$ יורדת וחסומה, אז

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n \mid n\in N\}$$

**הוכחה:** נוכיח ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n \mid n\in N\}$, עבור סדרה לא יורדת. ההוכחה לחלק השני של המשפט באופן דומה. מאחר שהסדרה $(a_n)$ חסומה קיים $a = sup\{a_n \mid n\in N\}$. יהי $\varepsilon>0$, לפי משפט האפיון של החסם העליון, קיים $N>0$, כך ש- $a-\varepsilon<a_N\le a$. מאחר שהסדרה $(a_n)$ לא יורדת, לכל $n>N$, $a-\varepsilon<a_N\le a_n\le a$, מכאן ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = a = sup\{a_n \mid n\in N\}$. □

**טענת עזר 2.35:** הסדרה $a_n$ חסומה.

**הוכחה:** לפי הבינום של ניוטון בצורתו $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$:

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\binom{n}{0}\cdot 1^n\cdot\frac{1}{n^0}+\binom{n}{1}\cdot 1^{n-1}\cdot\frac{1}{n^1}+\binom{n}{2}\cdot 1^{n-2}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\binom{n}{n}\cdot 1^0\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{n!}{2!(n-2)!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n!}{3!(n-3)!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n!}{n!(n-n)!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{n!}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$\le 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=1+\frac{1\cdot\left(\frac{1}{2^n}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=1+2\cdot\left(1-\frac{1}{2^n}\right)\le 3$$

כמובן ברור ש- $2\le a_n$ □

**הערה:** נעשה שימוש בהוכחה בעובדה שעבור כל $n$ טבעי $2^{n-1}\le n!$.

**למה (אי שוויון הממוצעים):** עבור סדרה סופית $a_1,\dots,a_n$ הממוצע הגאומטרי קטן או שווה מהממוצע האלגברי. כלומר, $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdots a_n}\le\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$.

**טענת עזר 2.36:** הסדרה $a_n$ מונוטונית לא יורדת.

**הוכחה:**

לפי אי שוויון הממוצעים $\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\le\frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}=\frac{n+2}{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$

לפיכך, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$. □

## הלמה של קנטור

**טענה 2.39 (הלמה של קנטור):** תהי $(I_n)$ סדרה של קטעים סגורים, $I_n = [a_n, b_n]$, המקיימת את התנאים הבאים:

א. $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots$.

ב. סדרת אורכי הקטעים שואפת ל- $0$, כלומר $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$.

אז קיימת נקודה אחת ויחידה, $x$, המשותפת לכל הקטעים. כלומר $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$.

ומתקיים: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = x$.

**הוכחה:** $(a_n)$ מונוטונית לא יורדת וחסומה מלעיל על ידי $b_1$, לכן קיים $a = \lim_{n\to\infty} a_n$, באופן דומה קיים $b = \lim_{n\to\infty} b_n$. $b - a = \lim_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$ ולכן $a = b$. נסמן ב- $x$ את הערך המשותף כלומר $a = b = x$.

נותר להראות שני דברים:

א. $x$ שייך לכל הקטעים: עובדה זו נובעת מכך ש- $a_n \le x \le b_n$ לכל $n$.

ב. $x$ היא הנקודה היחידה אשר שייכת לכל הקטעים: נניח ש- $y$ היא נקודה נוספת השייכת לכל הקטעים, אז $a_n \le y \le b_n$ לכל $n$. ניתן להסתכל על $y$ בעל סדרה קבועה אשר מתכנסת ל- $y$ ומכלל הסנדוויץ' נובע $a = b = y = x$. □

**משפט 2.42 (בולצאנו ויירשטראס):** לכל סדרה חסומה יש תת סדרה מתכנסת.

**הוכחה:** תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה ויהי $M > 0$, כך ש- $-M \le a_n \le M$, לכל $n$. יהי $I_1 = [-M, M]$.

נבחר $a_{n_1} \in I_1$ ונחצה קטע זה לחצי. נקרא $I_2$ לאחד החצאים שמכיל אינסוף מאברי הסדרה, נבחר $a_{n_2} \in I_2$, נמשיך כך עד אינסוף. אם נסמן ב- $I_k = [x_k, y_k]$, אז סדרת הקטעים מקיימת את תנאי הלמה של קנטור ומכיוון ש- $x_k \le a_{n_k} \le y_k$, ומאחר ש- $\lim_{k\to\infty} x_k = \lim_{k\to\infty} y_k$. אזי לפי כלל הסנדוויץ' נובע: $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{k\to\infty} x_k$. כלומר תת הסדרה $\left(a_{n_k}\right)$ של הסדרה $(a_n)$ מתכנסת. □

**משפט 3.6 (גבול של הרכבת פונקציות):** תהיינה $f(x)$ ו- $g(t)$ פונקציות המקיימות:

א. קיים הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$ .

ב. מתקיים $\lim_{t\to t_0} g(t)=x_0$ .

ג. יש סביבה נקובה של $t_0$ בה מתקיים $g(t)\neq x_0$ ,

אז מתקיים $\lim_{t\to t_0} f(g(t))=L$ .

**הוכחה:** יהי $\varepsilon>0$, קיים $\delta_1>0$ כך שלכל $x\in N^*_{\delta_1}(x_0)$ , $f(x)\in N_\varepsilon(L)$ וקיים $\delta_2>0$ כך שלכל $t\in N^*_{\delta_2}(t_0)$ , $g(t)\in N_{\delta_1}(x_0)$ , מאחר שיש סביבה נקובה ברדיוס $\delta_3$ של $t_0$ בה מתקיים $g(t)\neq x_0$ , אז עבור $\delta=min\{\delta_2,\delta_3\}$ , מתקיים: לכל $t\in N^*_\delta(t_0)$ , $g(t)\in N^*_{\delta_1}(x_0)$ ולכן $f(g(t))\in N_\varepsilon(L)$ , כנדרש.

□

**משפט 4.6 (ערך הביניים):** תהי $f$ פונקציה המוגדרת ברציפות בקטע הסגור $[a,b]$ ונניח גם ש- $f(a)\cdot f(b)<0$ , אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ עבורה $f(c)=0$ .

**הוכחה:** בה"כ $f(a)<0,\ f(b)>0$ . נסמן $I_1=[a_1,b_1]$ , $b_1=b$ , $a_1=a$ . נחצה קטע זה לשני חצאים. אם ערך הפונקציה במרכז הקטע הוא אפס, סיימנו. אחרת ערך הפונקציה במרכז הקטע בעל סימן שונה מאחד הקצוות. לחצי הקטע בו קצותיו שונים בסימן נקרא $I_2$ , $I_2=[a_2,b_2]$ . אם תהליך זה לא הסתיים בשלב כלשהו נקבל סדרת קטעים המקיימת את תנאי הלמה של קנטור ולכן קיים $x\in\bigcap_{n\in N} I_n$ . כך ש- $\lim_{n\to\infty} a_n=x=\lim_{n\to\infty} b_n$ . בעת מאחר ש- $f$ רציפה ב- $I$ ולכן רציפה ב- $x$ ומכיוון שלכל $n$ $f(a_n)<0$ ו- $f(b_n)>0$ . לכן, $f(x)=\lim_{n\to\infty} f(a_n)\leq 0$ וכן $f(x)=\lim_{n\to\infty} f(b_n)\geq 0$ . מכאן ש- $f(x)=0$ . □

**משפט 4.7 (משפט ערך הביניים של קושי):** תהי $f$ פונקציה המוגדרת ברציפות בקטע הסגור $[a,b]$ . אם $d$ הוא ערך כלשהו בין $f(a)$ ל- $f(b)$ , אז קיימת נקודה $c\in(a,b)$ עבורה $f(c)=d$ .

**הוכחה:** אם $f(a)=f(b)$ , הטענה ברורה. אחרת, בה"כ נניח ש- $f(a)<f(b)$ , אזי נגדיר $g:[a,b]\to R$ להיות $g(x)=f(x)-d$ . $g$ רציפה בקטע $[a,b]$ ומתקיים $g(a)<0,\ g(b)>0$ , ולכן קיימת נקודה $c\in(a,b)$ עבורה $g(c)=f(c)-d=0$ , כלומר $f(c)=d$ . □

**משפט 4.8 ויירשטראס:** תהי $f$ פונקציה המוגדרת ברציפות בקטע הסגור $[a,b]$, אזי $f$ חסומה שם.

**הוכחה:** נניח בשלילה ש- $f$ אינה חסומה ב- $[a,b]$, בה"כ נניח שהיא אינה חסומה מלעיל, אזי לכל $n$ טבעי קיים $x_n\in[a,b]$ כך ש- $f(x_n)>n$ . מאחר שהסדרה $(x_n)$ חסומה, קיימת לה (לפי בולצאנו ויירשטראס) תת סדרה $(x_{n_k})$ מתכנסת ל- $x_0$ אשר, בגלל סנדוויץ', שייך לקטע $[a,b]$. בעת מאחר ש- $f$ רציפה בקטע, $\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(x_0)$ , זאת בסתירה לכך ש- $f(x_{n_k})$ היא תת סדרה של סדרה השואפת לאינסוף.

□

## פונקציה מונוטונית ופונקציות הפוכות

**טענה 4.11:** אם $f$ היא פונקציה מונוטונית המוגדרת בקטע הפתוח $(a,b)$, אז קיימים, במובן הרחב, הגבולות החד צדדיים הבאים: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ו- $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$. אם $f$ חסומה, אז הגבולות קיימים במובן הסופי שלהם.

**הוכחה:** נניח ש- $f$ מונוטונית לא יורדת.

נניח ש- $f$ חסומה, ותהי $A=\{f(x)|\, x\in(a,b)\}$, אזי קיימים $M=\sup A$ ו- $m=\inf A$. נטען ש- $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=M$ ו- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=m$. נראה את הראשון, השני באותו אופן.

יהי $\varepsilon>0$, אזי לפי משפט האיפיון של החסם העליון קיים $x_0\in(a,b)$, כך ש- $M-\varepsilon<f(x_0)\le M$.

מאחר ש- $f$ לא יורדת, לכל $x_0<x<b$, $M-\varepsilon<f(x_0)\le f(x)\le M$. מה שמוכיח ש- $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=M$, כאשר $\delta=b-x_0$.

נניח ש- $f$ אינה חסומה, נראה ש- $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$ ו- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$. יהי $M>0$ כלשהו, מאחר ש- $f$ אינה חסומה, קיים $x_0\in(a,b)$, כך ש- $M<f(x_0)$. מאחר ש- $f$ לא יורדת, לכל $x_0<x<b$, $M<f(x_0)\le f(x)$. מה שמוכיח ש- $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=\infty$. את העובדה ש- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ נוכיח באופן דומה. □

## המשפטים היסודיים של החשבון הדיפרנציאלי

**משפט 5.7 (פרמה):** תהי $f$ פונקציה המוגדרת בקטע $(a,b)$ ותהי $x_0\in(a,b)$. אם $f$ גזירה ב- $x_0$ ואם $f$ מקבלת ב- $x_0$ את ערכה הגדול ביותר, או הקטן ביותר, בקטע, אז $f'(x_0)=0$.

**מסקנה:** תהי $f$ פונקציה המוגדרת ברציפות בקטע סגור $[a,b]$, אזי נקודות הקיצון המוחלטות של הקטע, המובטחות לפי משפט ויירשטראס, יכולות להתקבל רק ב-

א. נקודה $x_0\in(a,b)$ בה הפונקציה גזירה ומתקיים $f'(x_0)=0$.

ב. נקודה $x_0\in(a,b)$ בה הפונקציה אינה גזירה.

ג. נקודות הקצה של הקטע, כלומר $x=a,b$.

- **בשלב זה לתרגל את התרגילים של פרק 8 (לגבי קטעים סגורים).**

**משפט 5.8 (רול):** תהי $f$ פונקציה המוגדרת בקטע סגור $[a,b]$ ומקיימת את הדברים הבאים:

א. $f$ רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.

ב. $f$ גזירה בקטע הפתוח $(a,b)$.

ג. $f(a)=f(b)$.

אזי קיימת $x_0$, $a<x_0<b$ שבה $f'(x_0)=0$.