

# מבחן בקורס הסתברות 1

סמסטר ב, מועד א

11.07.2018

פרופ' דן חפץ

אוניברסיטת אריאל

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה למדעי המחשב

משך הבחינה: 3 שעות

המבחן הינו עבור מספרי קורס: 1-7028410 ו-2-7028410

מבנה המבחן: 4 שאלות ללא בחירה.

**הנחיות:**

1. המבחן הינו עם חומר סגור ובכתב יד ללא שימוש בשום אמצעי אלקטרוני (מותר מחשבון פשוט אם כי אין בו צורך). עם זאת, כל סטודנט רשאי להביא דף אחד מגודל A4 כתוב משני צדדיו. על התלמיד לכתוב את שמו ומספר תעודת הזהות שלו על הדף הנ"ל.
2. אין לכתוב בעפרון.
3. יש להוכיח כל טענה שאתם כותבים גם אם לא התבקשתם לעשות זאת במפורש בשאלה.
4. ניתן להסתמך ללא הוכחה על כל טענה שנלמדה בשיעור (אלא אם כן זו הטענה שהנכם מתבקשים להוכיח בשאלה). יש לצטט את הטענה עליה הנכם מסתמכים בצורה ברורה.
5. בפתרון סעיף כלשהו בשאלה, ניתן להסתמך על תוצאת סעיפים קודמים גם אם לא פתרתם אותם.

### שאלה 1 (25 נקודות):

כד מכיל כדור לבן אחד, שני כדורים שחורים ושלושה כדורים אדומים. מוציאים באופן מקרי אחד וללא החזרה שלושה כדורים מהכד. יהי  $X$  משתנה מקרי הסופר את מספר הכדורים הלבנים שהוצאו ויהי  $Y$  משתנה מקרי הסופר את מספר הכדורים האדומים שהוצאו.

- א. (15 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .
- ב. (5 נקודות) חשבו את ההתפלגות השולית של  $X$ .
- ג. (5 נקודות) חשבו את  $P(X > Y)$ .

### שאלה 2 (25 נקודות):

מטילים מטבע הוגן (שצדדיו הם 0 ו-1) עד הפעם הראשונה שמתקבל הרצף 10, כל ההטלות בלתי תלויות. יהי  $X$  מספר ההטלות שתוצאתן 0 ויהי  $Y$  מספר ההטלות שתוצאתן 1.

- א. (7 נקודות) חשבו את ההתפלגות של  $X$ .
- ב. (9 נקודות) חשבו את ההתפלגות של  $Y$ .
- ג. (9 נקודות) הוכיחו ש- $P(X + Y \geq 12) \leq 1/3$ .

### שאלה 3 (25 נקודות):

מטילים קוביה הוגנת עד הפעם הראשונה שמתקבלת תוצאה **שונה** מ-6 כאשר כל ההטלות בלתי תלויות. יהי  $X$  סכום תוצאות כל ההטלות.

- א. (6 נקודות) חשבו את  $P(X = k)$  לכל  $k$  טבעי.
- ב. (7 נקודות) הוכיחו ע"י חישוב ישיר שמתקיים  $\sum_{k=1}^{\infty} P(X = k) = 1$ .
- ג. (12 נקודות) חשבו את התוחלת של  $X$  (התשובה הסופית צריכה להיות מספר ממשי כלשהו, תשובה המכילה סכום אינסופי תזכה לניקוד חיובי אך נמוך מאוד).

### שאלה 4 (25 נקודות):

יהי  $n \geq 2$  מספר טבעי. לכל  $1 \leq i \leq n$  מטילים קוביה הוגנת, כאשר כל הטלות הקוביה בלתי תלויות. לכל  $1 \leq i \leq n - 1$  נגדיר משתנה מקרי  $X_i$  באופן הבא: אם תוצאת ההטלה ה- $i$  קטנה ממש מתוצאת ההטלה ה- $i + 1$  אז  $X_i = 1$ , אם תוצאת ההטלה ה- $i$  גדולה ממש מתוצאת ההטלה ה- $i + 1$  אז  $X_i = -1$ , ואחרת  $X_i = 0$ . יהי  $X = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$ .

- א. (6 נקודות) עבור  $n = 3$ , חשבו את  $P(X = 1)$ .
- ב. (8 נקודות) חשבו את התוחלת של  $X$ .
- ג. (11 נקודות) חשבו את השונות של  $X$ .