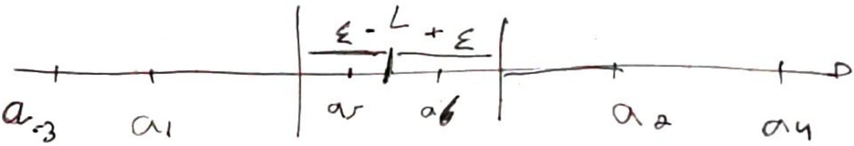
אינפי 1 - תרגול 2:

סדרה, היא רשימה מסודרת של מספרים ממשיים.
בהמשך יעניין אותנו לחקור תכונות של סדרות

<u>הגדרה:</u> סדרה שיש לה $\underbrace{\text{גבול סופי}}$ מתכנסת

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

<u>גבול סדרה:</u> זה מס' ממשי אליו מתקרבים כמעט כל איברי הסדרה.



$$\forall \varepsilon>0\ \exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}\ \forall n>N_\varepsilon\ |a_n-L|<\varepsilon$$

כיצד נוכיח התכנסות של סדרה לפי הגדרה:

א: <u>הוכחת גבול סדרה לפי הגדרה:</u>

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-3n+1}{5n^2+3n-2}=\frac{2}{5}$$

שלב 1, נרשום את הגדרת הגבול:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n^*\in\mathbb{N}\ \forall n>n^*:\ \left|\frac{2n^2-3n+1}{5n^2+3n-2}-\frac{2}{5}\right|<\varepsilon$$

שלב 1, נניח $\varepsilon>0$, כלומר יהי $\varepsilon>0$, מספר ממשי שנבחר.

שלב 2, נתבונן באי-שיוון שצריך להוכיח ומקיים נפרק את אגף שמאל שלו.

$$\left|\frac{2n^2-3n+1}{5n^2+3n-2}-\frac{2}{5}\right| =$$ נבצע הפעולות שומרות שיוויון.

• למשל: מכנה משותף, הכפלה ב-1, להוציא חורים וכו', הצמצום, להוסיף 0.

$$\left|\frac{10n^2-15n+5-10n^2-6n+4}{25n^2+25n-10}\right| = \left|\frac{-21n+9}{25n^2+15n-10}\right|$$

שלב 3, נמצא ביטוי פשוט מאגף ימין (כאן לכל n)

בלי שינוי סדר גודל המונה ובמכנה!

$n<n^2<n^3$, $2<n$, וכו' n

לפי הגדלה מונה או הקטנת מכנה.

$$\text{אגף שמאל} = \left|\frac{-21n+9}{25n^2+15n-10}\right| \leq \left|\frac{-21+n}{25n^2+15n-10}\right|$$

$$-21n+9<9$$

⇐ הגדלה נכונה, אך משנה סדרי הגודל ולכן לא נבצע אותה.

$$= \left|\frac{-20n}{25n^2+15n-10}\right| \le \left|\frac{-20n}{25n^2+15n-10n}\right| =$$

נקטין
מכנה

$$-10 > -10n$$

$$\left|\frac{-20n}{25n^2+5n}\right| \le \left|\frac{-20n}{25n^2+0}\right| = \left|\frac{-20n}{25n^2}\right| =$$

נקטין
מונה

$$5n>0$$

$$\frac{|-20|\cdot|n|}{|25|\cdot|n^2|} = \frac{20n}{25n^2} = \boxed{\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{n}} = M$$

חסם
מלעיל

נקרא לו
M

שלב 4, נמצא את n כך שיתקיים: $\ell m < \varepsilon$.

$$\frac{4}{5n} < \varepsilon \iff \frac{4}{5\varepsilon} < n$$

שלב 5, נגדיר את n^*:

$$n^* = \left\lceil \frac{4}{5\varepsilon} \right\rceil \longrightarrow$$

עיגול
כלפי מעלה.

שלב 6, נרשום שוב את הגדרת הגבול,
הפעם נרשום בציון מיהו: n^*.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n^* = \left\lceil \frac{4}{5\varepsilon} \right\rceil \ \forall n > n^* : \ |a_n - L| < \ell m < \varepsilon$$

שלב 3. שלב 4.

$\blacksquare$

כיצד להראות שמספר מסוים הוא <u>לא</u>
גבול הסדרה.

צריך להראות שהגדרת הגבול לא מתקיימת.

דוגמה: שאלה 4:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+4+(-1)^n}{n+2(-1)^n} \neq 2$$

<u>סכם: להראות ש-L לא גבול של סדרה:</u>

נראה שהגדרת הגבול לא מתקיימת

$$\neg\left(\forall\varepsilon>0\ \exists n^*\ \forall n>n^*: |a_n - L| > \varepsilon\right)$$

כלומר, עלי למצוא קיים $\varepsilon>0$ כך ש:

$$|a_n - L| > \varepsilon$$

1) נתבונן בצד שמאל

$$\left|\frac{3n+4+(-1)^n}{n+2(-1)^n} - \frac{2}{1}\right| =$$

עבודות
שומרות
שיוויון.

$$\left|\frac{3n+4+(-1)^n-2n-4(-1)^n}{n+2(-1)^n}\right| =$$

$$= \left|\frac{n+4-3\cdot(-1)^n}{n+2\cdot(-1)^n}\right|$$

Q) נקטין את הביטוי ונמצא חסם מלרע.

אבל: לשנות סדרי גודל

$$\left|\frac{n+4-3(-1)^n}{n+2(-1)^n}\right| \underset{\text{נקטין מונה}}{\geq} \left|\frac{n+0-3}{n+2(-1)^n}\right| \geq$$

$-3 \geq -\frac{1}{2}n$

$4>0$

$-3(-1)^n$

$$\left|\frac{n-3}{n+2(-1)^n}\right| \geq \left|\frac{n-\frac{1}{2}n}{n+2(-1)^n}\right| =$$

$$= \left|\frac{\frac{1}{2}n}{n+2(-1)^n}\right| \underset{\text{נגדיל מכנה}}{\geq} \left|\frac{\frac{1}{2}n}{n+2}\right| \geq \left|\frac{\frac{1}{2}n}{2n}\right| =$$

$\{2<n\}$

$2(-1)^n = \{-2, 2, -2, 2 \dots\} \leq 2$

$$\left|\frac{1}{4}\right| = \boxed{\frac{1}{4}} \rightarrow$$ נקרא לו m

חסם מלרע

שלב 3, נראה שהחסם מלרע $\geq \varepsilon$ כלשהו שנבחר.

מצאתי שהחסם מלרע הוא $\frac{1}{4}$, כלומר

אם: ניקח $\varepsilon = \frac{1}{8}$ או $\varepsilon = \frac{1}{100}$

נוכל להראות ש: $|a_n - L| > M \Rightarrow \frac{1}{8}$

כלומר לא לכל ε. $|a_n - L| < \varepsilon$

שאלה 5: נכון לא נכון.

הערה של אורז: "אני מאוד מעצבן מניח שכל השאלות נכון/לא נכון הן לא נכונות כי אז אני מחפש דוגמאות נגדיות ואחרי 4 נסיונות אני אנסה להוכיח את הטענה".

א) סכום סדרות חסומות, חסום:

הערה: הסדרות "הקלאסיות" שאני מחפש דוגמאות נגדיות הן:

$a_n=(-1)^n \to \{-1,1,-1,1\dots\}$

$a_n=n$.

$a_n=\frac{1}{n}$.

$a_n=\sqrt[n]{n}$

$a_n=\sqrt{n}$

$a_n=\{0,1,0,1,0,1\dots\}$

$a_n=\{1,2,3,2,3,4,3,4,5\dots\}$

$a_n=(-2)^n$

$a_n=-n, n^2$

$a_n=\frac{1}{n+1}$

a_n חסומה $\iff |a_n| < M$

שקול

$m < a_n < M$

ננסה למצוא דוגמא נגדית ניקח 2 סדרות חסומות ונקווה שהחיבור לא חסום.

$a_n = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$

$b_n = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots\}$

$a_n + b_n = \{-1, 2, -1, 2, \dots\}$ חיבור חסום

לכן נחפש דוגמא נוספת:

ונניח שלא הצלחנו למצוא, ננסה להוכיח את הטענה.

שלבים להוכחות:

1. קורא ומבין את הטענה ומילים סוג; לכל, קיים, שלכם

2) בגישה 33ב אני ארשום נתונים, כל נתון בעמודה.

3) ארשום את ההגדרות ונחפש בעיקר $<, =,$ ערך מוחלט.

4) ננסה להבין כיצד להגיע מהנתונים לצ"ל.

לחבר, לחסר, להקטין, לבודד, להציב

5) ניסוח למרצה, כלומר לעבוד על מילים ואז להגיע פורמלית.

הוכחת שאלה א':

1) אם a_n ו־b_n סדרות חסומות אז: a_n+b_n חסומה.

2) מילים:

צ"ל	נתון 2	נתון 1
a_n+b_n חסומה	b_n חסומה	a_n חסומה
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$A \overset{?}{<} a_n+b_n \overset{?}{<} B$	$m_b < a_n < M_b$	$m_a < a_n < M_a$

3)

נחבר בין הנתונים

4) $\underbrace{m_b + m_a}_{\text{נגדיר כ: } A} < a_n + b_n < \underbrace{M_a + M_b}_{\text{נגדיר כ: } B}$

5) ניסוח למרצה:

נתונות 2 סדרות חסומות, b_n ו־a_n.

כלומר, לפי ההגדרה:

$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m_a, M_a : m_a < a_n < M_a$

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists m_b, M_b : m_b < b_n < M_b$$

כלומר, אם נחבר את a_n+b_n נקבל:

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \exists m_a, m_b, M_a, M_b : m_a + m_b < a_n+b_n < M_a+M_b$$

כלומר a_n+b_n חסומה.