מטריצה הפוכה

תרגיל

תהי $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{pmatrix}$. מצא את A^{-1} ע״י הבאת $(A\,|\,I)$ לצורה מצומצמת שורות.

פתרון

$$(A\,|\,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\2&-1&3&0&1&0\\4&1&8&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\leftarrow R_3-4R_1]{R_2\leftarrow R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&1&0&-4&0&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&1&0&-4&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3+R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&0&-1&-6&1&1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&0&-1&-6&1&1\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\leftarrow(-1)\cdot R_2]{R_3\leftarrow(-1)\cdot R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&1&2&-1&0\\0&0&1&6&-1&-1\end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&1&1&2&-1&0\\0&0&1&6&-1&-1\end{array}\right)\xrightarrow[R_1\leftarrow R_1-2R_3]{R_2\leftarrow R_2-R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-11&2&2\\0&1&0&-4&0&1\\0&0&1&6&-1&-1\end{array}\right)$$

לפיכך המטריצה ההפכית של $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{pmatrix}$ היא $A^{-1}=\begin{pmatrix}-11&2&2\\-4&0&1\\6&-1&-1\end{pmatrix}$.

תרגיל: מצאו את המטריצה ההפוכה ל־

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\2&0&4\\0&1&1\end{pmatrix}$$

כמו כן, הציגו את A כמכפלה של מטריצות אלמנטריות.

פתרון נדרג את $(A \mid I)$, ובאגף ימין נקבל את המטריצה ההפוכה (אם A אכן הפיכה):

$$(A\mid I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&0&0\\2&0&4&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&4&0&1&0\\0&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\leftarrow\left(\frac{1}{2}\right)\cdot R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&1&0&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-2\cdot R_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2&\frac{1}{2}&-2\\0&1&0&1&0&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right)$$

ולכן

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2&\frac{1}{2}&-2\\1&0&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

תרגיל: פתרו את מערכת המשוואות $\left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ בעזרת המטריצה ההופכית.

$$\begin{cases} y = 1 \\ 2x + 4z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \qquad A \cdot X = B \Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X \neq B \cdot A^{-1} \qquad \underline{\underline{AXA^{-1}}} = BA^{-1}$$

פתרון: ראינו בתרגיל הקודם שמטריצת המקדמים $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ של מערכת המשוואות הפיכה. לכן, למערכת זו קיים פתרון יחיד והוא

$$x = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

תרגיל(בונוס): האם קיים a ממשי עבורו המטריצה $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$ הפיכה ? האם קיים a ממשי כך שבנוסף $A^{-1} = A$?

פתרון: עבור $a = 0$ המטריצה A הפיכה (במקרה זה ברור ש־A שקולת שורות למטריצת היחידה ולכן הפיכה). לגבי החלק השני : עבור כל מטריצה הפיכה B, $B^{-1} = B$ אמ"מ $B^2 = I$. נכתוב את התנאי $A^2 = I$ במפורש

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} a^2 - 1 & 0 & 2a \\ 0 & 1 & 0 \\ -2a & 0 & a^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

הדבר השקול לכך ש־$a^2 - 1 = 1$ ו־$\pm 2a = 0$. אבל למשוואות אלו אין פתרון ולכן לא קיים a עבורו $A^2 = I$.

25.01.16

מצאו את מטריצה X שמקיימת:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot X^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X^T = B \Rightarrow \underbrace{A^{-1}A}_{I} X^T = A^{-1} \cdot B \rightarrow X^T = A^{-1} \cdot B$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 = R_3 + 3R_2]{R_2 = R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow -R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 = R_1 - 2R_3]{R_2 = R_2 - 3R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = R_1 + R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow X^T = \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} -4 & -8 & -1 \\ -3 & -6 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} -6 & 3 \\ -5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\text{(right block)} = A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

15.7.19

$$A = \begin{pmatrix} i+1 & 2 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

א) חשבו את A^{-1}

ב) פתרו את המערכת: $A \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2i \\ 2-3i \end{pmatrix}$

א) $$\left(\begin{array}{cc|cc} i+1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 = R_1 + 2iR_2} \left(\begin{array}{cc|cc} i+1 & 0 & 1 & 2i \\ 0 & i & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 = -iR_2]{R_1 = (1-i)R_1}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1-i & 2i+2 \\ 0 & 1 & 0 & -i \end{array}\right) \xrightarrow{R_1/2} A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & 1+i \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

ב) $$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1+2i \\ 2-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i & 1+i \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+2i \\ 2-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13-i}{2} \\ -3-2i \end{pmatrix}$$