תרגילים

1. תהי $A\in\Re^{n\times n}$. נסתכל על $W=\left\{B\in\Re^{n\times n}\mid \exists M\in\Re^{n\times n}\ ,\ B=AM\right\}$. הוכח כי W מהווה מ״ו מעל הממשיים, ביחס לפעולת חיבור מטריצות וכפל בסקלר.

2. תהי $A\in\Re^{m\times n}$. הוכח או הפרך -
א) $W=\left\{x\in\Re^{n}\mid Ax=0\right\}$ מהווה מרחב ווקטורים מעל הממשיים עם פעולת חיבור ווקטורים וכפל ווקטורים בסקלר.
ב) יהי $b\in\Re^{m}$. אזי $W'=\left\{x\in\Re^{n}\mid Ax=b\right\}$ מהווה מרחב ווקטורים מעל הממשיים עם פעולת חיבור ווקטורים וכפל ווקטורים בסקלר.

3. יהיו $W=\left\{\begin{pmatrix}a\\2a\\0\end{pmatrix}\mid a\in\Re\right\}$, $U=\left\{\begin{pmatrix}b\\-c\\c\end{pmatrix}\mid b,c\in\Re\right\}$.
א) הוכח כי U ו- W מהווים מרחבי ווקטורים מעל הממשיים ביחס לחיבור ווקטורים וכפל בסקלר.
ב) הוכח כי U מהווה משלים של W ב- $\Re^{3}$.

5. נגדיר $V=\{f:R\to R\mid \textit{רציפה}\ \ f\}$ (אוסף כל הפונקציות הממשיות.) האם אוסף הפונקציות הממשיות המקיימות $f(2)=f(1)$ מהווה ת״מ של V ?

פתרונות

שאלה 1

במקום $W=\{B\in\Re^{n\times n} \mid \exists M\in\Re^{n\times n}\ ,\ B=AM\}$ ניתן לכתוב פשוט $W=\{AB \mid B\in\Re^{n\times n}\}$

מאחר ש- $W\subseteq\Re^{n\times n}$, אם נראה כי W מהווה תת מרחב של $V=\Re^{n\times n}$ נקבל כי W מהווה מ"ו מעל הממשיים.

$0_v\in W$: ניתן לכתוב $[0]=A[0]$, ולכן $[0]\in W$.

סגירות לחיבור: $\forall B_1,B_2\in W\ \ \exists M_1,M_2\in V$ כך ש- $B_1=AM_1\ ,\ \ B_2=AM_2$. אזי מחוק הפילוג למטריצות $B_1+B_2=AM_1+AM_2=A(M_1+M_2)\in W$.

סגירות לכפל בסקלר: $\forall B\in W,\ \ \alpha\in\Re$ קיימת מטריצה ממשית M מסדר n כך ש- $B=AM$.
כעת מתכונות כפל מטריצות: $\alpha B=\alpha AM=A(\alpha M)$.

שאלה 2

א) זהו מרחב ווקטורים, (ואפילו יש לו שם, הוא נקרא מרחב האפס של המטריצה A).
נראה זאת: נראה כי זהו תת מרחב של $\Re^n$.
$0_v\in W$ שייך למרחב: וקטור האפס $x=0_v$ מקיים $Ax=0$.
סגירות לחיבור: יהיו $x,y\in W$. אזי $Ax=0,\ \ Ay=0$. לכן מחוק פילוג מטריצות $A(x+y)=Ax+Ay=0+0$.
סגירות לכפל בסקלר: יהיו $\alpha\in\Re\ ,\ x\in W$. אזי $Ax=0$. לכן $A(\alpha x)=\alpha(Ax)=\alpha 0=0$ (מתכונת כפל מטריצה בסקלר).

ב) זהו לא מ"ו, לא מתקיימת (בין השאר) סגירות לכפל בסקלר. דוגמא נגדית: נסתכל על $\Re^{2\times 2}$,
ניקח $A=I_2$, ו- $b=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. אזי $x=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ מקיים $Ax=b$. אבל – עבור $\alpha=2$ מקבלים ש- $\alpha x=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ אינו מהווה פתרון למערכת, שכן $A\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=b$.

שאלה 3

א) נראה כי W מהווה ת"מ של $V=\Re^3$, ובכך נוכיח כי הוא מ"ו.

$0_v\in W$: עבור $a=0$ מקבלים $W\ni\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a\\0\end{pmatrix}$.

סגירות לחיבור: יהיו $\begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$. אזי

$\begin{pmatrix} a_1 \\ 2a_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ 2a_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ 2a_1+2a_2 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+a_2 \\ 2(a_1+a_2) \\ 0 \end{pmatrix} \in W$, שכן $a_1+a_2 \in \Re$.

סגירות לכפל בסקלר: יהיו $\alpha \in \Re,\ \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} \in W$. אזי בשל קומוטטיביות הכפל בממשיים נקבל

$\alpha \begin{pmatrix} a \\ 2a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ \alpha 2a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a \\ 2\alpha a \\ 0 \end{pmatrix} \in W$, מכיוון ש- $\alpha a \in \Re$.

נראה כי U מהווה ת"מ של $V = \Re^3$, ובכך נוכיח כי הוא מ"ו.

$0_v \in U$: עבור $b = c = 0$ מקבלים $\begin{pmatrix} b \\ -c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$.

סגירות לחיבור: יהיו $\begin{pmatrix} b_1 \\ -c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_2 \\ -c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \in U$. אזי

$\begin{pmatrix} b_1 \\ -c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 \\ -c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+b_2 \\ -c_1-c_2 \\ c_1+c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+b_2 \\ -(c_1+c_2) \\ c_1+c_2 \end{pmatrix} \in U$, שכן $b_1+b_2,\ c_1+c_2 \in \Re$.

סגירות לכפל בסקלר: יהיו $\alpha \in \Re,\ \begin{pmatrix} b \\ -c \\ c \end{pmatrix} \in U$. אזי בשל קומוטטיביות הכפל בממשיים נקבל

$\alpha \begin{pmatrix} b \\ -c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha b \\ \alpha(-c) \\ \alpha c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha b \\ -\alpha c \\ \alpha c \end{pmatrix} \in U$, מכיוון ש- $\alpha a \in \Re$.

ב.

יהי $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Re^3$. נראה כי ניתן לייצגו כסכום של איבר מ- U ואיבר מ- W

אם ניקח $w=\begin{pmatrix} x-\frac{1}{2}(y+z) \\ -z \\ z \end{pmatrix}$, $u=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(y+z) \\ y+z \\ 0 \end{pmatrix}$, נקבל ש- $w\in W$, $u\in U$, ומתקיים $v=u+w$.

נראה כי $W\cap U=\{0_v\}$. יהי $v=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in W\cap U$.

$v=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in W$ ולכן $z=0$, וגם $y=2x$.

מצד שני - $v=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in U$, ולכן $y=-z$.

מכיוון ש- $z=0$ מקבלים $y=-z=0$. מכיוון ש- $y=2x$ מקבלים ש- $x=\frac{1}{2}y=0$. סה"כ $v=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=0_v$.

1. יהי $V = \Re_{(2\times 2)}$, ויהי $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \Re \right\}$. הראה כי תתי המרחבים הבאים

מהווים משלים של W ב- V :

א) $U' = \left\{ \begin{pmatrix} c & c \\ c & d \end{pmatrix}, c, d \in \Re \right\}$

ב) $U'' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & d \\ c & d \end{pmatrix}, c, d \in \Re \right\}$

פתרון

שאלה 1

$W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad a,b\in\Re\right\}$.

א) נראה כי $U'=\left\{\begin{pmatrix} c & c \\ c & d \end{pmatrix}, c,d\in\Re\right\}$ מהווה משלים של W ב- V:

$V=U'+W$: נניח כי $v=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\in\Re_{(2\times 2)}$. נסתכל על המטריצות $u'=\begin{pmatrix} z & z \\ z & w \end{pmatrix}$, ו- $w=\begin{pmatrix} x-z & y-z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. נובע כי $w\in W,\quad u'\in U'$, וכן $v=u'+w$.

$U'\cap W=\{0_v\}$: תהי $A\in U'\cap W=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. אזי $A\in U'=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ וגם $A\in W=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. מ- $A\in U'=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אנו מקבלים כי בהכרח $a=b=c$, ומכך ש- $A\in W=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אנו קבלים ש- $c=d=0$. לכן מחיתוך שני התנאים הנ"ל אנו מקבלים - $a=b=c=d=0$, ומכאן ש- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ב) $V=U''+W$: $U''=\left\{\begin{pmatrix} 0 & d \\ c & d \end{pmatrix}, c,d\in\Re\right\}$. נניח כי $v=\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\in\Re_{(2\times 2)}$. נסתכל על המטריצות $u''=\begin{pmatrix} 0 & w \\ z & w \end{pmatrix}$, ו- $w=\begin{pmatrix} x & y-w \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. נובע כי $w\in W,\quad u''\in U''$, וכן $v=u''+w$.

$U''\cap W=\{0_v\}$: תהי $A\in U''\cap W=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. אזי $A\in U''=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ וגם $A\in W=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. מ- $A\in U''=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אנו מקבלים כי בהכרח $b=d \wedge a=0$, ומכך ש- $A\in W=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ אנו קבלים ש- $c=d=0$. לכן מחיתוך שני התנאים $a=b=c=d=0$, ומכאן ש- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. לגבי כל אחת מן הקבוצות הבאות הוכיחו או הפריכו האם היא מהווה מרחב וקטורים:

א. $V = R_n[x]$ (קבוצת הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n) מעל R עם חיבור פולינומים וכפל פולינומים בסקלר.

ב. $W = \{x \in R \mid x \geq 1\}$ עם הגדרת חיבור זוגות וכפל בסקלר מעל R ע"י:

$$\forall\ x, y \in W, \alpha \in R \qquad x'+'y = x \cdot y \quad , \quad \alpha'\bullet'x = x^{\alpha}$$

ג. $V = R^2$ עם הגדרת חיבור זוגות וכפל בסקלר מעל R ע"י:

$$\forall\ (a,b),(c,d) \in R^2, \alpha \in R \quad (a,b)'+'(c,d) = (a+c+1, b+d)\ ,\ \alpha'\bullet'(a,b) = (\alpha a + \alpha - 1, \alpha b)$$

ד. קבוצת כל הפונקציות הממשיות האי זוגיות מעל R.

תזכורת : $f : R \to R$ אי זוגית אם $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in R$.

ה. קבוצת המטריצות הסימטריות מעל R עם פעולת חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר.

ו. $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in R^{2\times 2} \;\middle|\; ad = bc \right\}$ עם פעולת חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר.

פתרון

(2)

שאלה 2:

(א) $\mathbb{R}_n[x] \subseteq \mathbb{R}[x]$ ו- $\mathbb{R}[x]$ ידוע כי הינו מ"ו (מעל $\mathbb{R}$ עם הפעולות חיבור פולינומים וכפל פולינום בסקלר), לכן מספיק להראות כי $\mathbb{R}_n[x]$ תת-מרחב של $\mathbb{R}[x]$:

(1) $p(x)\equiv 0$ (פולינום האפס) נמצא ב- $\mathbb{R}_n[x]$ (כיון שהגדרנו דרגתו קטנה או שווה ל-n)

אזי $\mathbb{R}_n[x] \neq \emptyset$.

(2) יהיו $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$.

⇐ קיימים $b_0,\dots,b_m, a_0,\dots,a_i \in \mathbb{R}$ כך ש $m, i \le n$ וכך ש $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_ix^i$ ו- $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$.

נניח בה"כ כי $i \le m$ ואזי:

בחילופיות

$$p(x)+q(x) \overset{\downarrow}{=} (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\dots+(a_i+b_i)x^i+b_{i+1}x^{i+1}+\dots+b_mx^m$$

ודרגת $p(x)+q(x)$ הינה $n \ge m$ ולכן לכל $0 \le j \le i$ $a_j+b_j \in \mathbb{R}$ (כי $a_j, b_j \in \mathbb{R}$) והוכח $b_j \in \mathbb{R}$ עבור $i+1 \le j \le m$.

לכן $p(x)+q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$.

(3) יהי $p(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$.

⇐ קיימים $a_0,\dots,a_m \in \mathbb{R}$ כך ש $m \le n$ וכך ש $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$.

אזי: $\alpha p(x) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \dots + \alpha a_m x^m$

הג' כפל פולינום בסקלר

ומתקיים לכל $0 \le i \le m$ כי $\alpha a_i \in \mathbb{R}$ (כי $\alpha, a_i \in \mathbb{R}$)

ולכן $\deg(p(x)) = m \le n$.

⇐ $\alpha p(x) \in \mathbb{R}_n(x)$.

סה"כ לכן $\mathbb{R}_n[x]$ תת-מרחב של $\mathbb{R}[x]$.

(ב) W אינו מ"ו כיון שאינו סגור תחת כפל בסקלר:

$2 \in W$ ו- $\alpha = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ אבל:

$\left(-\frac{1}{2}\right) \text{'}\cdot\text{'}\ 2 =$

'·' '2?'

$2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

ג. V הינו מ"ו. נראה כי מתקיימות כל אקסיומות מ"ו:

(שימו לב כי יש צורך להוכיח את כל 10 האקסיומות כיון שלא ניתן להגדיר את V כתת קבוצה של מ"ו ידוע עם <u>אותן</u> פעולות חיבור וקטורי וכפל בסקלר!!)

(1) סגירות החיבור:

$$\forall\ (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2 \quad (a,b)\text{ '+' }(c,d) \underset{\text{הגד' '+'}}{=} (a+c+1,\ b+d) \in \mathbb{R}^2$$

$a,c,b,d,1\in\mathbb{R}$! $\mathbb{R}$ סגור תחת חיבור

(2) קומוטטיביות החיבור:

$$\forall\ (a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2 \quad (a,b)\text{ '+' }(c,d) \underset{\text{הגד' '+'}}{=} (a+c+1,\ b+d) \underset{\text{קומוטטיביות החיבור ב-}\mathbb{R}}{=} (c+a+1,\ d+b) \underset{\text{הגד' '+'}}{=} (c,d)\text{ '+' }(a,b)$$

(3) אסוציאטיביות החיבור:

$$\forall\ (a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{R}^2 \quad (a,b)\text{ '+' }\big((c,d)\text{ '+' }(e,f)\big) \underset{\text{הגד' '+'}}{=} (a,b)\text{ '+' }(c+e+1,\ d+f) \underset{\text{הגד' '+'}}{=}$$

$$= \big(a+(c+e+1)+1,\ b+(d+f)\big) \underset{\text{אסוציאטיביות וקומוטטיביות החיבור ב-}\mathbb{R}}{=} \big((a+c+1)+e+1,\ (b+d)+f\big) \underset{\text{הגד' '+'}}{=}$$

$$= (a+c+1,\ b+d)\text{ '+' }(e,f) \underset{\text{הגד' '+'}}{=} \big((a,b)\text{ '+' }(c,d)\big)\text{ '+' }(e,f)$$

(4) קיום איבר ניטרלי:

$(-1,0)\in\mathbb{R}^2$ ומתקיים

$$\forall\ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \qquad (a,b)\text{ '+' }(-1,0) \underset{\text{הגד' '+'}}{=} \big(a+(-1)+1,\ b+0\big) = (a,b)$$

$\Leftarrow \quad (-1,0) = 0_V$

(5) קיום הנגדי:

יהי $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ אזי $(-a-2,-b) \in \mathbb{R}^2$ ומתקיים

$$(a,b) \text{ '+' } (-a-2,-b) \underset{\text{הג׳ '+'}}{=} \big(a + (-a-2) + 1,\ b + (-b)\big) = (-1,0) = 0_V$$

$\Leftarrow$ ב-V: $\quad -(a,b) = (-a-2,-b)$.

(7) דיסטריביוטיביות הכפל בסקלר מעל החיבור ב-V:

$$\forall\ (a,b),(c,d) \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R} \qquad \alpha \text{ '}\bullet\text{' } \big((a,b) \text{ '+' } (c,d)\big) \underset{\text{הג׳ '+'}}{=} \alpha \text{ '}\bullet\text{' } (a+c+1, b+d) =$$

$$\underset{\text{הג׳ '}\bullet\text{'}}{=} \big(\alpha(a+c+1) + \alpha - 1,\ \alpha(b+d)\big) \underset{\text{דיסטריביוטיביות הכפל וסקלרים מעל החיבור בממשיים}}{=} \big(\alpha a + \alpha c + \alpha + \alpha - 1,\ \alpha b + \alpha d\big)$$

$$= \big((\alpha a + \alpha - 1) + (\alpha c + \alpha - 1) + 1,\ (\alpha b) + (\alpha d)\big) =$$

$$\underset{\text{הג׳ '+'}}{=} (\alpha a + \alpha - 1, \alpha b) \text{ '+' } (\alpha c + \alpha - 1, \alpha d) \underset{\text{הג׳ '}\bullet\text{'}}{=} \alpha \text{ '}\bullet\text{' } (a,b) \text{ '+' } \alpha \text{ '}\bullet\text{' } (c,d)$$

(8) דיסטריביוטיביות הכפל בסקלר מעל החיבור ב-F:

$$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad (\alpha+\beta) \text{ '}\bullet\text{' } (a,b) \underset{\text{הג׳ '}\bullet\text{'}}{=} \big((\alpha+\beta)a + (\alpha+\beta) - 1,\ (\alpha+\beta)b\big) =$$

$$\underset{\text{דיסטריביוטיביות הכפל מעל החיבור ב-}\mathbb{R}}{=} \big(\alpha a + \beta a + \alpha + \beta - 1,\ \alpha b + \beta b\big) \underset{\text{אסוציאטיביות וקומוטטיביות החיבור ב-}\mathbb{R}}{=} \big((\alpha a + \alpha - 1) + (\beta a + \beta - 1) + 1,\ (\alpha b) + (\beta b)\big) =$$

$$\underset{\text{הג׳ '+'}}{=} (\alpha a + \alpha - 1, \alpha b) \text{ '+' } (\beta a + \beta - 1, \beta b) \underset{\text{הג׳ '}\bullet\text{'}}{=} \alpha \text{ '}\bullet\text{' } (a,b) \text{ '+' } \beta \text{ '}\bullet\text{' } (a,b)$$

(9) אסוציאטיביות:

$$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \qquad (\alpha\beta) \text{ '}\bullet\text{' } (a,b) \underset{\text{הג׳ '}\bullet\text{'}}{=} \big((\alpha\beta)a + (\alpha\beta) - 1,\ (\alpha\beta)b\big) =$$

$$\underset{\text{קיבוציות הכפל בממשיים}}{=} \big(\alpha(\beta a + \beta - 1) + \alpha - 1,\ \alpha(\beta b)\big) \underset{\text{הג׳ '}\bullet\text{'}}{=} \alpha \text{ '}\bullet\text{' } (\beta a + \beta - 1, \beta b) =$$

$$= \alpha \text{ '}\bullet\text{' } \big(\beta \text{ '}\bullet\text{' } (a,b)\big)$$

(10) נראה:

$$1_{\mathbb{R}}\cdot'(a,b) \underset{1_{\mathbb{R}}=1}{=} 1\cdot'(a,b) \underset{\text{הג' יפה}}{=} (1\cdot a+1-1,\ 1\cdot b)=(a,b)$$

(3) נגדיר: $W=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid f \text{ אי זוגית}\}$.

$W\subseteq V$ כאשר $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$! V הוא מ"ו ידוע.

מספיק לכן להוכיח ש- W תת מרחב של V:

(1) $f(x)\equiv 0$ (פונקציית האפס) ב- W כיון:

$\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(-x)=f(x)=-f(x)=0 \Rightarrow f\in W \Rightarrow W\neq\phi$

(2) יהיו $f,g\in W$, אז:

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad (f+g)(x) \underset{\text{הג' חיבור פונק'}}{=} \underset{\mathbb{R}}{f(x)}+\underset{\mathbb{R}}{g(x)}\in\mathbb{R}$$

לכן $f+g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

כמו כן:

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad (f+g)(-x) = f(-x)+g(-x) \underset{f,g\in W \text{ אי-זוגיות}}{=} -f(x)+(-g(x)) = -(f(x)+g(x)) = -((f+g)(x)) \Rightarrow f+g\in W$$

(3) תהי $f\in W$ ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$ סקלר, אז:

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad (\alpha f)(x) \underset{\text{הג' כפל פונק' בסקלר}}{=} \underset{\mathbb{R}}{\alpha}\cdot \underset{\mathbb{R}}{f(x)}\in\mathbb{R}$$

לכן $\alpha f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

כמו כן:

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad (\alpha f)(-x) = \alpha\cdot f(-x) \underset{f\in W \text{ אי-זוגית}}{=} \alpha(-f(x)) \underset{\text{קומוטטיביות ואסוציאטיביות בממשיים}}{=} -(\alpha\cdot f(x)) = -((\alpha f)(x))$$

$\Leftarrow$ $\alpha f\in W$.

סה"כ קיבלנו W תת מרחב של V ולכן מ"ו בפני עצמו.

ה. נגדיר $W=\{A\in\mathbb{R}^{n\times n} \mid A^t=A\}$.

נוכיח כי W תת מרחב של $V=\mathbb{R}^{n\times n}$:

(1) $[0]\in W$ כי $[0]^t=[0]$

$\Leftarrow$ $W\neq\phi$.

(2) יהיו $A,B\in W$.

הוכחנו בעמ' 180

$A,B\in W \Leftarrow A,B\in\mathbb{R}^{n\times n} \Leftarrow A+B\in\mathbb{R}^{n\times n}$

כמו כן:

$$(A+B)^t \underset{\text{transpose תכונת}}{=} A^t + B^t \underset{\substack{A,B\in W \text{ נתון} \\ A^t=A,\ B^t=B}}{=} A+B$$

$\Leftarrow$ $A+B\in W$.

(3) תהי $A\in W$ ו- $\alpha\in\mathbb{R}$.

$A\in W \Rightarrow A\in\mathbb{R}^{n\times n} \underset{\text{בגלל כפל בסקלר}}{\Rightarrow} \alpha A\in\mathbb{R}^{n\times n}$

כמו כן:

$$(\alpha A)^t = \alpha(A^t) \underset{\substack{A\in W \text{ נתון} \\ A^t=A}}{=} \alpha A$$

$\Leftarrow$ $\alpha A\in W$.

סה״כ לכן W תת מרחב של V ולכן מ״ל.

(1) W אינו מ״ו כי אינו סגור תחת חיבור:

$\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}\in W$ (כי $1\cdot6=2\cdot3$)

$\begin{pmatrix}3&12\\1&4\end{pmatrix}\in W$ (כי $3\cdot4=1\cdot12$)

אבל $\begin{pmatrix}1&2\\3&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&12\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&14\\4&10\end{pmatrix}\notin W$ כי $4\cdot10=40\neq56=4\cdot14$

1. לכל אחת מן הקבוצות הבאות עם הפעולות הנתונות, הוכיחו או הפריכו האם היא מ"ו:

א. $W=\left\{A\in R^{2\times2}\,\middle|\,AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&2\\3&3\end{pmatrix}\right\}$ עם חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר מעל R.

ב. $W=\{p(x)\in R[x]\,|\,\exists n\in N\ \deg(p(x))=2n-1\}$ עם פעולת חיבור פולינומים וכפל פולינומים בסקלר מעל R.

ג. $W=\{f:R\to R\,|\,\exists c\in R\quad \forall x\in R\quad f(x)=c\}$ עם פעולת חיבור פונקציות וכפל פונקציות בסקלר מעל R.

ד. $W=\{f:R\to R^{+}\}$ עם פעולת חיבור פונקציות וכפל פונקציות בסקלר מעל R.

2. יהי $V=R^{+}=\{x\in R\,|\,x>0\}$ ויהי $F=R$. נגדיר פעולות '+' ו- '•' כדלהלן:

$\forall x,y\in V\quad x'+'y=x\cdot y$ ו- $\forall x\in V,\alpha\in F\quad \alpha'\bullet'x=x^{\alpha}$.

א. הוכיחו כי V המוגדר לעיל עם פעולות חיבור וקטורים וכפל וקטור בסקלר שהוגדרו מעל R הינו מ"ו.

ב. נגדיר $W=\{x\in V\,|\,x\geq1\}$. הוכיחו או הפריכו: W תת-מרחב של V.

פתרון

1. א.

$$W = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; A\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

נראה כי W תת-מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$:

(1) $W \neq \emptyset$ כי:

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ וגם $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Leftarrow$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W$

(2) סגירות לחיבור:

יהיו $A, B \in W$ אזי

$$(A+B)\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{דיסטריביוטיביות כפל מט'}}{=} A\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + B\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{A,B\in W}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כמו כן $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ גורר גם $A+B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\Leftarrow$ $A+B \in W$

(3) סגירות לכפל בסקלר:

יהיו $A \in W$ ו- $\alpha \in \mathbb{R}$ אזי:

$$(\alpha A)\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \underset{\text{תכונות כפל מט'}}{=} \alpha\left(A\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\right) \underset{A\in W}{=} \alpha\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כמו כן $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ גורר גם $\alpha A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$\Leftarrow$ $\alpha A \in W$

ב.

$$W = \{ p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \exists n \in \mathbb{N} \;\; \deg(p(x)) = 2n-1 \}$$

W = קב' ע הפולינומים הממשיים ממעלה אי-זוגית

W אינו מ"ו כי אינו סגור לחיבור פולינומים:

יהיו $q(x) = -x^3 + x^2$ ו- $p(x) = x^3 + x^2$

אזי $\deg(p(x)) = \deg(q(x)) = 3$ $\Leftarrow$ $p(x), q(x) \in W$

אבל $p(x)+q(x)=2x^2$

ומתקיים $\deg(p(x)+q(x))=2$

$\Leftarrow$ $p(x)+q(x)\notin W$.

ג.

$$W=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \mid \exists\in\mathbb{R}\quad \forall x\in\mathbb{R}\ f(x)=c\}$$

W = קב' כל הפונ' הממשיות הקבועות.

נוכיח כי W תת-מרחב של $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$:

(1) $W\neq\emptyset$ כי פונ' האפס ($\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)=0$) נמצאת [illegible] (עבור $c=0$).

(2) סגירות לחיבור:

יהיו $f,g\in W$

$\Leftarrow$ קיימים $c,d\in\mathbb{R}$ כך ש $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)=c,\ g(x)=d$

$\Leftarrow$

$\forall x\in\mathbb{R}\ \ (f+g)(x)=f(x)+g(x)=c+d$

$\Leftarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}\ (f+g)(x)=\underbrace{c+d}_{\text{קבוע}}$

$\Leftarrow$ $f+g\in W$.

(3) סגירות לכפל בסקלר:

יהיו $f\in W$; $\alpha\in\mathbb{R}$

$\Leftarrow$ קיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש $\forall x\in\mathbb{R}\ \ f(x)=c$

$\Leftarrow$ $\forall x\in\mathbb{R}\ \ (\alpha f)(x)=\alpha\cdot f(x)=\underbrace{\alpha c}_{\text{קבוע}}$

$\Leftarrow$ $\alpha f\in W$

צ.ל. לכן W תת-מרחב של V וכן מ"ו.

(ב) $W=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+\}$

W תת-קבוצה של $V=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\}$ (אך אלה הפונקציות שבה)

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=0$ s $\forall x\in\mathbb{R}$

ידוע (לפי ההגדרה) ש $0_V=f$

אבל $f\notin W$ (כי $0\notin\mathbb{R}^+$) ולכן $0_V\notin W$ ולכן W אינו תת-מרחב

(.2) (א.)

$V = \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

$\forall\, x,y \in V \;\; \alpha \in \mathbb{R} \qquad x \,'\!+'\, y = x \cdot y \;,\;\; \alpha \,'\!\cdot'\, x = x^{\alpha}$

(א) נראה קיום תנאי מ"ו:

(1) סגירות לחיבור:

יהיו $x,y \in V = \mathbb{R}^+ \overset{\text{הג' } V}{\Rightarrow} x,y > 0 \overset{\text{תכונות מס' ממשיים}}{\Rightarrow} x \cdot y > 0$

$\overset{\text{הג' } V}{\Rightarrow} x\cdot y \in V \Rightarrow x \,'\!+'\, y \in V$

$\Rightarrow$ V סגור לחיבור וקטורים.

(2) קומוטטיביות החיבור:

$\forall x,y \in V \quad x \,'\!+'\, y \underset{\text{הג' החיבור ב-}V}{=} x \cdot y \underset{\text{קומוטטיביות הכפל ב-}\mathbb{R}}{=} y \cdot x \underset{\text{הג' החיבור ב-}V}{=} y \,'\!+'\, x$

(3) אסוציאטיביות החיבור:

$\forall x,y,z \in V \quad (x \,'\!+'\, y) \,'\!+'\, z \underset{\text{הג' החיבור ב-}V}{=} (x\cdot y) \,'\!+'\, z = (x \cdot y)\cdot z \underset{\text{אסוציאטיביות הכפל ב-}\mathbb{R}}{=}$

$= x \cdot (y \cdot z) = x \cdot (y \,'\!+'\, z) = x \,'\!+'\, (y \,'\!+'\, z)$

(4) קיום איבר אפס חיבורי:

$1 > 0 \Rightarrow 1 \in V$ ומתקיים

$\forall x \in V \quad 1 \,'\!+'\, x \underset{\text{הג' החיבור ב-}V}{=} 1 \cdot x \underset{\text{א' נייטרלי כפלי ב-}\mathbb{R}}{=} x$

$\Rightarrow \quad 0_V = 1$

(5) קיום איבר נגדי:

$\forall\, x \in V \quad \exists\, \frac{1}{x} \in V \qquad x \,'\!+'\, \frac{1}{x} = x \cdot \frac{1}{x} = 1 = 0_V$

(6) סגירות לכפל בסקלר:

יהיו $x\in V=\mathbb{R}^+$ ו $\alpha\in\mathbb{R}$ $\Leftarrow$ $x>0$ $\Leftarrow$ $x^{\alpha}>0$

$\Leftarrow$ $\alpha\ '\cdot'\ x>0$ $\Leftarrow$ 264 $\alpha\ '\cdot'\ x\in V=\mathbb{R}^+$ $\Leftarrow$ V סגורה לכפל בסקלר

(7) דיסטריבוטיביות הכפל בסקלר מעל החיבור ב-V:

$$\forall x,y\in V,\ \alpha\in\mathbb{R}\quad \alpha\,'\cdot'\,(x\,'+'\,y) \underset{\text{הג' החיבור ב-V}}{=} \alpha\,'\cdot'\,(x\cdot y) \underset{\text{הג' כפל בסקלר ב-V}}{=} (x\cdot y)^{\alpha} =$$

$$\underset{\text{חוקי חזקות ב-}\mathbb{R}}{=} x^{\alpha}\cdot y^{\alpha} = (x^{\alpha})\,'+'\,(y^{\alpha}) = (\alpha\,'\cdot'\,x)\,'+'\,(\alpha\,'\cdot'\,y)$$

(8) דיסטריבוטיביות הכפל בסקלר מעל החיבור ב-F:

$$\forall x\in V,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\quad (\alpha+\beta)\,'\cdot'\,x \underset{\text{הג' כפל בסקלר ב-V}}{=} x^{\alpha+\beta} \underset{\text{חוקי חזקות ב-}\mathbb{R}}{=} x^{\alpha}\cdot x^{\beta} =$$

$$\underset{\text{הג' החיבור ב-V}}{=} (x^{\alpha})\,'+'\,(x^{\beta}) = (\alpha\,'\cdot'\,x)\,'+'\,(\beta\,'\cdot'\,x)$$

(9) אסוציאטיביות:

$$\forall x\in V,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\quad (\alpha\beta)\,'\cdot'\,x \underset{\text{הג' כפל בסקלר ב-V}}{=} x^{\alpha\beta} \underset{\text{חוקי חזקות ב-}\mathbb{R}}{=} (x^{\beta})^{\alpha} =$$

$$= \alpha\,'\cdot'\,(x^{\beta}) = \alpha\,'\cdot'\,(\beta\,'\cdot'\,x)$$

(10) צהלות:

$$\forall x\in V\quad 1_{\mathbb{R}}\,'\cdot'\,x = 1\,'\cdot'\,x \underset{\text{הג' כפל בסקלר ב-}\mathbb{R}}{=} x^{1} = x$$

$\Leftarrow$ סה"כ לכן V עם הפעולות המוגדרות הינו מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

(ב) $W = \{x\in V \mid x \geq 1\}$

W אינו תת מרחב של V (עם הפעולות שהוגדרו על V)

כי אינו סגור תחת כפל בסקלר:

אבל $-\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ ו $2 \in W$

$$-\frac{1}{2} \cdot 2 = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \notin W$$

כי $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

2. לגבי כל אחת מן הקבוצות הבאות הוכח או הפרך האם היא מהווה מרחב וקטורים:

א. $V=\{(a,b)\mid a,b\in R\}$ עם הגדרת חיבור זוגות וכפל בסקלר מעל R ע"י:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d) \quad , \quad \alpha(a,b)=(\alpha^2 a,\alpha^2 b)$$

ב. $V=\{(a,b)\mid a,b\in R\}$. עם הגדרת חיבור זוגות וכפל בסקלר מעל R ע"י:

$$(a,b)+(c,d)=(a+c+1,b+d) \quad , \quad \alpha(a,b)=(\alpha a+\alpha-1,\alpha b)$$

ג. קבוצת כל הפונקציות הממשיות הזוגיות מעל R.

תזכורת : $f:R\to R$ זוגית אם $f(x)=f(-x) \quad \forall x\in R$.

ד. $W=\{(a,b,c)\in R^3 \mid b=4c\}$ עם פעולת חיבור וקטורים וכפל וקטור בסקלר.

ה. $W=\{A\in R(n\times n)\mid A^2=A\}$ עם פעולת חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר.

ו. $W=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \;\middle|\; a=0 \ \vee \ c=0\right\}$ עם פעולת חיבור מטריצות וכפל מטריצות בסקלר.