בעיית כדורי זכוכית

ניסוח הבעיה: נתון מגדל בעל n קומות ו-b כדורי זכוכית כשידוע שהחל מקומה מסוימת כדורי הזכוכית נשברים.
מטרה שלנו לאתר את הקומה ממנה נשברים כדורים במספר הבדיקות המינימלי. ומהו מספר הבדיקות המינימלי לביצוע.
הנחות: כל הכדורים זהים בבחינת החוזק, הגודל וכו"ד.
אם הכדור נשבר מקומה כלשהי, הוא גם יישבר מכל הקומות הגבוהות יותר.
הכדור שלא נשבר, ניתן לשימוש חוזר.

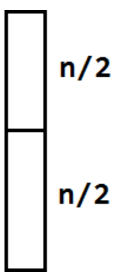
1. כדור אחד b=1 - חיפוש שלם:

מתחילים זריקת הכדור מהקומה התחתונה – אם הוא יישבר, מצאנו את הקומה, במקרה שהכדור לא ישבר, זורקים אותו מהקומה שמעליה וכך עולים קומה-קומה וזורקים את הכדור עד שהוא יישבר.

סיבוכיות של חיפוש שלם: O(n) במקרה הגרוע.

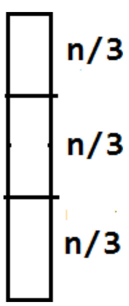
ננסה עוד אלגוריתם: זורקים כדור מקומה $n/2$ – אם הכדור יישבר – סיימנו, אם לא, זורקים מקומה $3n/4$ וכן הלאה. אלגוריתם זה לא נותן פתרון לבעיה מבחינת דיוק הקומה.

2. נגדיל את מספר הכדורים b=2:

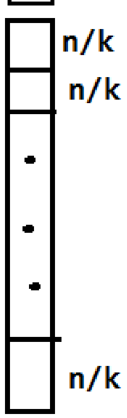


נחלק את הבניין לשני חלקים שווים.

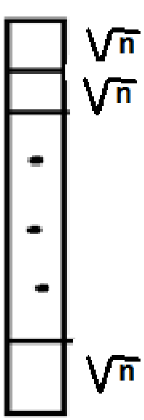
זורקים כדור ראשון מקומה $n/2$:
אם הכדור הראשון נשבר, נשאר עוד כדור אחד (הכדור השני) ו- $n/2$ ניסיונות:
מתחילים מקומה 1 וזורקים אותו מקומות ...1,2,3 עד שהוא יישבר. סה"כ $n/2+1$ ניסיונות במקרה הגרוע.
אם הכדור הראשון לא נשבר, זורקים אותו מקומה $3n/4$, אם הכדור הראשון נשבר, נשאר עוד כדור אחד (הכדור השני) ו- $n/4$ ניסיונות. וכן הלאה.
במרקה הטוב – כאשר הכדור הראשון נשבר רק בניסיון האחרון יש לנו $\log_2 n$ ניסיונות.
זה בעצם מקרה שיש לנו $\log_2 n$ או יותר כדורים. במקרה הגרוע יש לנו $n/2+1$ ניסיונות.



נחלק את הבניין לשלושה חלקים שווים.
זורקים כדור ראשון מקומה $n/3$:
במקרה הגרוע: אם הכדור הראשון נשבר, נשארו שני כדורים ו- $n/3$ ניסיונות.
אם הכדור הראשון לא נשבר, זורקים אותו מקומה $2n/3$, אם הוא נשבר ונשאר לנו $n/3$ ניסיונות.
סה"כ $n/3+2$ ניסיונות במקרה הגרוע.



כאשר **מחלקים בניין ל-k חלקים שווים**, במקרה הגרוע יש $n/_k-(k-1)$ ניסיונות.
אבל כאשר מחלקים בניין ל-n חלקים שווים, במקרה הגרוע יש $n/_n-(n-1)=n$ ניסיונות.



שאלה: **מהי החלוקה האופטימאלית?** במילים אחרות, **מהו הערך של k שנותן מינימום לפונקציה** $f(n,k)=n/_k+(k-1)$ כאשר n הוא מספר קבוע
נחשב: $\min f(x)=(\frac{n}{x}+x)$
שיטה 1: מציאת מינימום באמצעות גזירה: $f'(x)=\left(-\frac{n}{x^2}+1\right)=0$
$$\frac{n}{x^2}=1\rightarrow min\text{: }\mathbf{x}=\sqrt{\boldsymbol{n}}$$
נוודא כי קיבלנו תוצאה נכונה: אם $x<\sqrt{n}$, $f'(x)<0$, אם $x>\sqrt{n}$, $f'(x)>0$

שיטה 2: (באמצעות הוכחה דיסקרטית) מציאת מינימום ללא גזירה: $(a-b)^2\geq 0\rightarrow\ a^2+b^2\geq 2ab$
נסמן: $a^2=u,\ b^2=v$ נציב: $u+v\geq 2\sqrt{uv}$

נסמן שוב: $u = \frac{n}{k},\ v = k$

אז נציב ונקבל: $\frac{n}{k} + k \geq 2\sqrt{\frac{n}{k} * k} = 2\sqrt{n}$

השוויון מתקיים כאשר $k = \sqrt{n}$ כלומר **החלוקה האופטימלית היא ל- $\sqrt{n}$ חלקים ומספר הניסיונות במקרה הגרוע הוא $2\sqrt{n}$.**

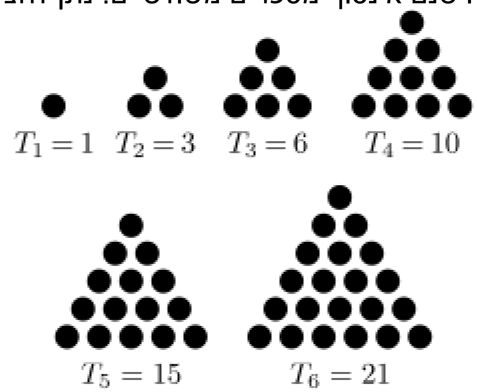
אם n הוא מספר ריבועי, אז $k = \sqrt{n}$. אם n אינו מספר ריבועי, אז ניקח מספר ריבועי קרוב ואך גדול מ– n : $(m-1)^2 \leq \mathrm{n} \leq m^2$

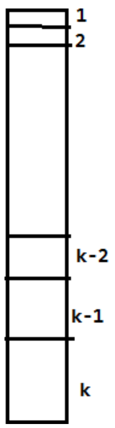
$f(n,k) = 2\sqrt{n}$

סיבוכיות האלגוריתם: $O(2\sqrt{n}) = O(\sqrt{n})$

חלוקה אחרת: שימוש במספרים משולשיים – Triangle Numbers:

מספר משולשי הוא מספר שסכום של המספרים הטבעיים מ-1 שווה למספר עצמו. המספרים המשולשיים הראשונים הם: 1, 3, 6, 10,15, 21, 28, 36, 45
וישנם אינסוף מספרים משולשיים. נתן להציג מספר משולשי בצורת משולש שווה-צלעות.





נניח ש-n הוא מספר משולשי ולפי סכום סידרה חשבונית, מספר בסדרת המספרים המשולשיים נחשב לפי הנוסחה הבאה:

$$n = a_k = 1 + 2 + \cdots + k = \frac{k * (k+1)}{2}$$

דוגמה: עבור $n = 10$ k=4 כוונה הוא מספר רביעי בסדרה כי $10 = a_4 = 1 + 2 + 3 + 4$

נחלק את הבניין לפי פירוק מספר משולשי הקרוב למספר הקמות בניין כוונה ל-k חלקים k, ... 1,2,3

כאשר זורקים את הכדור הראשון מקומה k והוא נשבר, נשאר $k-1$ ניסיונות, כלומר סה"כ k ניסיונות .
כאשר הכדור הראשון לא נשבר, זורקים אותו מקומה $(k-1) + k$, אם הוא נשבר, נשאר $k-2$ ניסיונות, סה"כ שוב k=2+2−k ניסיונות.
כלומר סה"כ תמיד יש לנו k ניסיונות.
כאשר n מספר משולשי וכי- $n = \frac{k*(k+1)}{2} \leftarrow n = \frac{(k^2+k)}{2} \leftarrow k^2 = 2n - k \leftarrow k < \sqrt{2n}$

לפי כך מגיעים למסקנה: חלוקה לפי מספרים משולשיים טובה יותר מהחלוקה הקודמת לחלקים שווים, מכוון ש- $\sqrt{2n} \le 2\sqrt{n}$
סיבוכיות האלגוריתם: $O(\sqrt{2n}) = O(\sqrt{n})$

איך למצוא מספר משולשי הקרוב למספר הקמות:
לפי הנוסחה למספרים משולשיים, לכל מספר משולשי $n = a_k$ מתקיים $8a_k + 1 = 8n + 1 = (2k+1)^2$.

$$(2k+1) = \sqrt{8n+1}$$
$$k = (\sqrt{8n+1} - 1)/2$$

מימוש / סימולציה: מטרה שלנו למצוא מספר מינימלי של בדיקות למציאת קומה ממנה נשברים כדורים ולהחזיר מספר הקומה ע"י שימוש בשני כדורים וחלוקת הבניין לפי השיטות שבחנו עד כה.
מגדירים מערך של מספרים ממשיים $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ כאשר a_{i} מייצג את פוטנציאלים של קומה i לשבירת הכדור ומספר a הוא חוזק הכדור לשבירה. הכדור לא יישבר אם $a_{\mathrm{i}} < a$ ויישבר אם $a_{\mathrm{i}} \ge a$.

אלגוריתם אדפטיבי (adaptive) לחלוקה:
אסטרטגיה במקרה של חלוקה אחידה: בפעם הראשונה זורקים כדור מקומה $\sqrt{n}$ ובשאר הקומות נשתמש באותה אסטרטגיה $\sqrt{n - \sqrt{n}}$: אז לוקחים מקרה גרוע (מקסימום בין שניהם) והאלגוריתם הזה יותר יעיל מהקודם (לא אדפטיבי) כי:

$$\max(\sqrt{n}, \sqrt{n - \sqrt{n}}) < 2\sqrt{n}$$

אסטרטגיה במקרה של חלוקה לפי מספרים משולשיים: כאשר זורקים כדור מקומה k, נשארו $n - k$ קומות אך מספר $n - k$ הוא גם מספר משולשי, על מנת להשתמש באותה אסטרטגיה אין צורך לחלק את $n - k$ למספרים משוליים לפי כך האלגוריתם הזה זהה לקודם (לא אדפטיבי). אז האלגוריתם של חלוקה לפי פירוק מספר משולשי הוא אופטימלי בו מספר הניסיונות המינימלי הוא מספר סידורי של מספר משולשי בסדרה.

3. נגדיל את מספר הכדורים b>2:

שאלה: האם יש חלוקה אופטימאלית? על מנת לענות לשאלה הזאת נשתמש **בתכנון דינאמי**.
נראה כעת כי קיים אלגוריתם בו אין תלות בחלוקה.
בהינתן b כדורים ובניין בעל n קומות, נגדיר פונקציה $f(n,\mathrm{b})$ שמהווה מספר מינימאלי של ניסיונות למציאת קומה ממנה נשברים כדורים במקרה הגרוע.

נשתמש בתכנון דינאמי מורכב יותר כאשר בכל שלב משתמשים בכל התוצאות של השלבים הקודמים.
כוונה רעיון האלגוריתם מבוסס על רקורסיה:
נניח כי b=2,
בסיס הרקורסיה:
עבור n=1, $f(1,2) = 1$
עבור n=2, $f(2,2) = 2$

כאשר זורקים כדור ראשון מקומה i יש שתי אפשרויות:

- הכדור לא נשבר, נשארו 2 כדורים ו- $n{-}i$ קומות.
- הכדור נשבר, נשאר כדור אחד ו- $i{-}1$ קומות. הולכים על המקרה הגרוע ומחשבים את המספר המינימאלי עבור כל הקומות:

$$\boldsymbol{f(n,2) = \min_{1\le i\le n} \max(f(n-i,2), f(i-1,1)) + 1}$$

ball doesn't break↑, ↑ball breaks

בצורה כללית:

$$\boldsymbol{f(n,b) = \min_{1\le i\le n} \max(f(n-i,b), f(i-1,b-1)) + 1}$$

כאשר $\lceil \log_2 n \rceil \geq b$ אז $\boldsymbol{f(n,b)} = 1 + \lfloor \log_2 n \rfloor$

מימוש: על מנת לשמור את התוצאות הקודמות נשתמש במטריצה עם מספר שורות של כמות הכדורים 1+, ועם מספר עמודות של כמות הקומות 1 + .

פסדו-קוד למקרה של b=2:

```
//f(n,2) = min((max(i, f(n-i,2)+1), i=1,...,n(
numberOfChecking2(n)
      f[n+1]
      f[0] = 0, f[1] = 1, f[2] = 2
      for i = 3 to n
            min = n
            for j = 1 to i-1
                  x = max(j, f[i-j]+1) if
                  (x < min) min = x
            end-for f[i]
            = min
      end-for return
      f[n]
end_numberOfChecking2
```

נציין כי אם n הוא מספר משולשי נקבל f[n]=k

פסדו קוד למקרה של b=3:

```
numberOfChecking3(n)
   f3[n+1] // number of checking for 3 balls
   if(n==1) return 1
   if (n==2 || n==3) return 2
   f2[n+1] // number of checking  for 2 balls
   for i=1 to n
         f2[i] = numberOfChecking2(i)
   end-for
   f3[0] = 0, f3[1] = 1, f3[2] = 2, f3[3] = 2
   for i=4; to n
         min = n
         for j = 1 to i-1
               x = max(f2[j-1]+1, f3[i-j]+1)
               if (x < min) min = x
         end-for
         f3[i] = min
   end-for
   return f3[n]
end-numberOfChecking3
```

נציין כי גם כאן כאשר n הוא מספר משולשי נקבל f3[n]=k

פסדו-קוד למקרה כללי כאשר מספר כדורים k <= n

```
// k balls, n floors
int numberOfCheckingK(n, k)
   numChecks = 0
   checks[k+1][n+1]
   for j = 0 to n // one ball
         checks[0][j] = 0
         checks[1][j] = j
   end-for
   for i=2 to k //i - number of the ball
         checks[i][0] = 0
         checks[i][1] = 1
         if (n >= 2) checks[i][2] = 2
         for j = 2 to n //j - number of the floor
               min = n + 1
               for p=1 to j-1 // p - number of the floor
                  min = min(min, max(checks[i-1][p-1], checks[i][j-p])+1)
               end-for
               checks[i][j] = min
         end-for
   end-for
   numChecks = checks[k][n]
   return numChecks
end-numberOfCheckingK
```