עוצמה של קבוצות

1. **הגדרה:** $A \approx B$ אם קיימת $f : A \to B$ חח״ע ועל.

2. $[A] = \{B \mid A \approx B\}$. **העוצמה של קבוצה** A, מסומנת $|A|$, היא מחלקת השקילות $[A]$ ביחס ל-$\approx$.

3. $A \approx B \Leftrightarrow |A| = |B|$

4. אם $A \approx \{1, \cdots, n\}$, נסמן $|A| = n$.

5. A **סופית** אם יש n טבעי כך ש-$|A| = n$. אחרת, A **אינסופית**.

6. כל תת-קבוצה של קבוצה סופית היא סופית. הקבוצה $\mathbf{N}$ (וכל קבוצה שהיא מוכלת בה) היא אינסופית.

7. סימון: $|\mathbf{N}| = \aleph_0$.

8. $|\mathbf{Z}| = \aleph_0$, $|\mathbf{N} \times \mathbf{N}| = \aleph_0$

9. הגדרה: $|A| \le |B|$ אם יש $f : A \to B$ חח״ע. אם $|A| \le |B|$ ו-$|A| \ne |B|$, נסמן: $|A| < |B|$.

10. $\le$ בין עוצמות מוגדר היטב, והוא רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

11. אם $A \subseteq B$ אז $|A| \le |B|$.

12. קבוצה A היא **בת-מניה** אם $|A| \le \aleph_0$.

13. כל תת-קבוצה של קבוצה בת-מניה היא בת-מניה.

14. דוגמא: $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \varnothing$ וכל קבוצה סופית הן בנות-מניה.

15. $|A| \le |B|$ $\Leftrightarrow$ יש פונקציה $f : B \to A$ שהיא על.

16. איחוד סופי או בן-מניה של קבוצות בנות-מניה הוא בן-מניה.

17. **משפט הקבוצה האינסופית:** לכל קבוצה אינסופית A, יש תת-קבוצה שעוצמתה $\aleph_0$ (ז״א $\aleph_0 \le |A|$). כמו כן: יש $B \subset A$ (מוכלת ממש), כך ש-$|B| = |A|$. למעשה, לכל $a \in A$, $|A - \{a\}| = |A|$.

עוצמות (המשך)

18. **משפט קנטור-ברנשטיין:** $\leq$ בין עוצמות הוא אנטי-סימטרי.

20. מסקנה: $|\mathbf{Q}| = \aleph_0$.

21. **משפט קנטור:** לכל קבוצה A, מתקיים: $|A| < |P(A)|$.

22. מסקנה: יש אינסוף עוצמות אינסופיות שונות.

23. **משפט** (ללא הוכחה, דורש למת צורן)**:** היחס $\leq$ בין עוצמות הוא מלא, ז"א: לכל שתי קבוצות A, B מתקיים או $|A| \leq |B|$ או $|B| \leq |A|$.

24. **עוצמת הרצף:** $|\mathbf{R}| = \aleph = \mathbf{c}$.

25. $\aleph = \left|\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right|$.

26. לכל שני מספרים ממשיים $a < b$ מתקיים: $\aleph = |(0,1)| = |(a,b)|$

27. לכל שני מספרים ממשיים $a < b$ מתקיים: $\aleph = |[a,b]| = |(a,b]| = |[a,b)| = |(a,b)|$

פעולות חשבוניות על עוצמות

28. הגדרה: κ, λ עוצמות. אם $|A| = \kappa, |B| = \lambda$ והקבוצות A,B *זרות*, אז: $\kappa + \lambda = |A \cup B|$.

29. $\aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 + n = \aleph_0 + 0$

30. $\aleph = \aleph + \aleph$

31. חיבור עוצמות הוא חילופי: עבור κ, λ עוצמות, מתקיים: $\kappa + \lambda = \lambda + \kappa$.

32. הגדרה: κ, λ עוצמות. אם $|A| = \kappa, |B| = \lambda$ אז: $\kappa \cdot \lambda = |A \times B|$.

33. $\aleph_0 = \aleph_0 \cdot \aleph_0$ ולכל k טבעי מתקיים: $\aleph_0^k = \aleph_0$.

34. $\aleph = \aleph \cdot \aleph$.

35. סימון: $A^B = \{f \mid f : B \to A\}$.

36. הגדרה: κ, λ עוצמות. אם $|A| = \kappa, |B| = \lambda$ אז: $\kappa^\lambda = |A^B|$.

37. לכל קבוצה A, מתקיים $|P(A)| = |\{0,1\}^A|$.

38. מסקנה: $|P(A)| = 2^{|A|}$.

39. לכל עוצמה κ, מתקיים $\kappa < 2^\kappa$.

40. $2^{\aleph_0} = \aleph$, ולכן: $\aleph_0 < \aleph$.

41. הפעולות של חיבור וכפל עוצמות מקיימות קיבוץ, חילוף ופילוג.

42. תכונות של חזקות של עוצמות:

א. $(\kappa \cdot \lambda)^\mu = \kappa^\mu \cdot \lambda^\mu$.

ב. $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu$.

ג. $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$.

ד. אם $\kappa \le \lambda$ אז $\kappa^\mu \le \lambda^\mu$.

ה. אם $0 < \lambda \le \mu$ אז $\kappa^\lambda \le \kappa^\mu$.

ו. $\kappa^0 = 1, \quad 1^\kappa = 1$

ז. אם $0 < \kappa$, אז $0^\kappa = 0$

43. **משפט** (ללא הוכחה)**:** אם κ או λ אינסופיות, אז: $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.

44. אם $2 \le \kappa \le 2^\lambda$, ו- λ אינסופית, אז $\kappa^\lambda = 2^\lambda$.

45. דוגמאות: $\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph = \aleph^{\aleph_0}$, $|\mathbf{R}^{\mathbf{N}}| = \aleph^{\aleph_0} = \aleph$.