

מבחן בקורס הסתברות 1

סמסטר ב, מועד ב

22.07.2019

פרופ' דן חפץ

אוניברסיטת אריאל

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה למדעי המחשב

משך הבחינה: 3 שעות

המבחן הינו עבור מספרי קורס: 2-7028410-1 ו-2-7028410-3

מבנה המבחן: 4 שאלות ללא בחירה.

הנחיות:

1. המבחן הינו עם חומר סגור ובכתב יד ללא שימוש בשום אמצעי אלקטרוני (מותר מחשבון פשוט אם כי אין בו צורך). עם זאת, כל סטודנט רשאי להביא דף אחד מגודל A4 כתוב משני צדדיו. על התלמיד לכתוב את שמו ומספר תעודת הזהות שלו על הדף הנ"ל.
2. אין לכתוב בעפרון.
3. יש להוכיח כל טענה שאתם כותבים גם אם לא התבקשתם לעשות זאת במפורש בשאלה.
4. למרות האמור בסעיף 3 לעיל, ניתן להסתמך ללא הוכחה על כל טענה שנלמדה בשיעור (אלא אם כן זו הטענה שהנכם מתבקשים להוכיח בשאלה). יש לצטט את הטענה עליה הנכם מסתמכים בצורה ברורה.
5. בפתרון סעיף כלשהו בשאלה, ניתן להסתמך על תוצאת סעיפים קודמים גם אם לא פתרתם אותם.

שאלה 1 (25 נקודות):

מטילים קוביה הוגנת עד הפעם הראשונה שמתקבלת התוצאה 6, כאשר כל ההטלות בלתי תלויות. יהי X משתנה מקרי הסופר את מספר ההטלות הכולל. יהי $Y = \min\{X, 3\}$ ויהי $Z = \lfloor i/2 \rfloor$ כאשר i היא תוצאת ההטלה הראשונה.

- א. (14 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של Y ו- Z .
- ב. (6 נקודות) חשבו את התוחלת של $Y + Z$.
- ג. (5 נקודות) חשבו את $P(Z > Y)$.

שאלה 2 (25 נקודות):

יהיו X ו- Y משתנים מקריים כלשהם באותו מרחב הסתברות (Ω, P) המקיימים $X(\omega) \leq Y(\omega)$ לכל $\omega \in \Omega$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

- א. (8 נקודות) $E(X) \leq E(Y)$.
- ב. (9 נקודות) $Var(X) \leq Var(Y)$.
- ג. (8 נקודות) $E(|X|) \leq E(|Y|)$.

שאלה 3 (25 נקודות):

בוחרים מספר מהקבוצה $\{1, 2, \dots, 100\}$ באופן מקרי אחיד, יהי X המספר הנבחר. מטילים מטבע הוגן X פעמים, כאשר כל ההטלות בלתי תלויות. יהי Y מספר ההטלות שתוצאתן פלי.

- א. (5 נקודות) חשבו את $P(Y = 1 | X = 3)$.
- ב. (12 נקודות) חשבו את התוחלת של Y .
- ג. (8 נקודות) הוכיחו ש- $P(Y \geq 60) < 1/2$.

שאלה 4 (25 נקודות):

יהי $n \geq 2$ מספר טבעי. לכל $1 \leq i \leq n$ מטילים קוביה הוגנת, כאשר כל הטלות הקוביה בלתי תלויות. לכל $1 \leq i \leq n$ יהי X_i תוצאת ההטלה ה- i . לכל $1 \leq i \leq n-1$ יהי Y_i האינדיקטור של המאורע $X_i + X_{i+1} = 8$. יהי $Y = \sum_{i=1}^{n-1} Y_i$.

- א. (6 נקודות) חשבו את התוחלת של Y .
- ב. (12 נקודות) חשבו את השונות של Y .
- ג. (7 נקודות) הוכיחו ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y < n/6) = 1$.