

מבחן בקורס הסתברות 1

סמסטר קיץ 2017

מועד ב'

פרופ' דן חפץ

אוניברסיטת אריאל

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה למדעי המחשב

משך הבחינה: 3 שעות

המבחן הינו עבור מספרי קורס: 2-7028410

מבנה המבחן: 3 שאלות ללא בחירה.

הנחיות:

1. המבחן הינו עם חומר סגור ובכתב יד ללא שימוש בשום אמצעי אלקטרוני (מותר מחשבון פשוט אם כי אין בו צורך). עם זאת, כל סטודנט רשאי להביא דף אחד מגודל A4 כתוב משני צדדיו. על התלמיד לכתוב את שמו ומספר תעודת הזהות שלו על הדף הנ"ל.
2. אין לכתוב בעפרון.
3. יש להוכיח כל טענה שאתם כותבים גם אם לא התבקשתם לעשות זאת במפורש בשאלה.
4. ניתן להסתמך ללא הוכחה על כל טענה שנלמדה בשיעור (אלא אם כן זו הטענה שהנכם מתבקשים להוכיח בשאלה). יש לצטט את הטענה עליה הנכם מסתמכים בצורה ברורה.
5. בפתרון סעיף כלשהו בשאלה, ניתן להסתמך על תוצאת סעיפים קודמים גם אם לא פתרתם אותם.

שאלה 1 (34 נקודות):

נתון מטבע הנותן 1 בהסתברות $\frac{1}{3}$ ו-0 בהסתברות $\frac{2}{3}$. מטילים את המטבע 4 פעמים כאשר ההטלות בלתי תלויות. יהי X סכום תוצאת שתי ההטלות הראשונות, יהי Y סכום תוצאת ההטלה השנייה והשלישית ויהי Z סכום תוצאת שתי ההטלות האחרונות.

- (15 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של X ו- Y .
- (5 נקודות) האם X ו- Y בלתי תלויים? הוכיחו את תשובתכם.
- (7 נקודות) חשבו את $\Pr(X + Y + Z = 4)$.
- (7 נקודות) חשבו את $\Pr(X = 1, Y = 1 | Z = 1)$.

שאלה 2 (33 נקודות):

בכד יש ארבעה כדורים אדומים, ארבעה כדורים כחולים ושני כדורים צהובים. בכל שלב מוציאים כדור אחד מהכד באופן מקרי אחיד. אם הכדור צהוב אז עוצרים. אחרת מחזירים את הכדור לכד וחוזרים על הניסוי שוב (הוצאות הכדורים השונות בלתי תלויות זו בזו). יהי X מספר הפעמים שהוצאנו כדור מהכד ויהי Y מספר הפעמים שהוצאנו כדור כחול.

- (6 נקודות) מהי ההתפלגות של X .
- (7 נקודות) חשבו את $\Pr(X = 5, Y = 2)$.
- (10 נקודות) יהי $n \geq 1$ מספר שלם כלשהו. חשבו את ההתפלגות של $Y | X = n$.
- (10 נקודות) חשבו את התוחלת של Y .

הערה: בשאלה 2 ניתן להשתמש ללא הוכחה בעובדה ש- $\sum_{i=1}^{\infty} ix^i = \frac{x}{(1-x)^2}$ לכל $-1 < x < 1$.

שאלה 3 (33 נקודות):

לכל $1 \leq i \leq 20$ מטילים מטבע הוגן (כלומר הסתברות $\frac{1}{2}$ לעץ והסתברות $\frac{1}{2}$ לפלי) כאשר כל הטלות המטבע בלתי תלויות. תהי A קבוצת כל השלמים בין 1 ל-20 שתוצאת המטבע שהוטל עבורם הייתה עץ. יהי $X = \sum_{i \in A} i$.

- (6 נקודות) חשבו את $\Pr(X \leq 3)$.
- (9 נקודות) חשבו את התוחלת של X .
- (11 נקודות) חשבו את השונות של X .
- (7 נקודות) הוכיחו ש- $\Pr(|X - 105| \geq 41) \leq \frac{35}{82}$.

הערה: בשאלה 3 ניתן להשתמש ללא הוכחה בעובדה ש- $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.