

תרגול – קומבינטוריקה

1. באולם יש n שורות של כסאות: בשורה הראשונה יש m כסאות, ובכל שורה יש 2 כסאות יותר מאשר בשורה הקודמת. (בשורה האחרונה יש $m + 2(n - 1)$ כסאות).
 - א. בכמה דרכים ניתן להושיב k אנשים בשורות ללא הגבלה?
 - ב. בכמה דרכים ניתן להושיב n אנשים בשורות כך שבכל שורה יהיה אדם אחד בדיוק?
 - ג. בכמה דרכים ניתן להושיב $4n$ אנשים (בהנחה שיש מספיק מקום) בשורות כך שבכל שורה יהיה לפחות אדם אחד?
2. נתונים n כדורים זהים ו m כדורים שונים הממוספרים מ 1 עד m . מה מספר האפשרויות לפזר את כל הכדורים ב m תאים שונים הממוספרים מ 1 עד m כך ש:
 - א. בכל תא יש רק כדור אחד. (שאר הכדורים יישארו בחוץ).
 - ב. אחד מהתאים בדיוק יישאר ריק. (לשאר התאים אין הגבלה).
 - ג. לכל $1 \leq i \leq m$ כדור מספר i לא יהיה בתא מספר i .
 - ד. לא יהיה תא בו יש כדור מהכדורים הזחים וגם כדור מהכדורים השונים.
3. מה מספר הפתרונות השלמים למשוואה: $x_1 + x_2 + \dots + x_n = k$ כאשר:
 - א. $x_i \geq -2$ לכל $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
 - ב. $x_i \geq 0$, קיים i שעבורו $x_i = 0$.
 - ג. $x_i \leq 2i$ לכל $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
 - ד. x_i מתחלק ב i ללא שארית. לכל $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
4. מה מספר הפונקציות $f: A \rightarrow A \times A$ כאשר $|A| = n$ המקיימות:
 - א. f חח"ע.
 - ב. לא קיים $x \in A$ כך ש $f(x) = (x, x)$.
 - ג. לא קיים $x \in A$ כך ש $f(x) = (x, a)$ או $f(x) = (a, x)$ לכל $a \in A$.
5. נתונה טבלה שבה יש n שורות ו m עמודות. בכמה דרכים ניתן למלא את הטבלה באיברי הקבוצה: $A = \{1, 2, \dots, k\}$ כך ש:
 - א. בכל עמודה יופיע האיבר k בדיוק פעם אחת?
 - ב. בכל שורה יופיע האיבר k בדיוק פעמיים?
 - ג. בכל עמודה יופיע האיבר k בדיוק פעם אחת ובכל שורה יופיע k בדיוק פעמיים?
 - ד. בכל עמודה יהיה לפחות מופע אחד של k ?
 - ה. בכל שורה יופיע k לפחות פעמיים?
 - ו. תהיה שורה אחת בדיוק שבה מופיע רק האיבר k .
6. בכמה דרכים ניתן לצבוע לוח $n \times n$ ב k צבעים כך ש:
 - א. בכל שורה יופיעו כל הצבעים (בהנחה ש $k < n$)?
 - ב. צביעות המתקבלות זו מזו ע"י סיבוב הלוח נחשבות זהות?
7. מה מספר המילים באורך n מעל $\{1, 2, \dots, m\}$ בהן:
 - א. מספר המופעים של 1 הוא אי-זוגי?
 - ב. מספר המופעים של 1 הוא אי-זוגי ומספר המופעים של 2 הוא זוגי?
 - ג. כל האיברים מופיעים מספר אי-זוגי של פעמים? (בהנחה שניתן לעשות זאת)
 - ד. המילה היא פלינדרום (ניתן לקרוא אותה מההתחלה לסוף ולהתחלה באופן זהה).