קורס הסתברות
נכתב ע"י צבי מינץ

X,Y כן תלויים. לפי הגדרה X,Y ב"ת אם **לכל** x,y מתקיים $\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(X=x)\mathbb{P}(Y=y)$. נראה דוגמא שזה לא מתקיים ולכן X,Y תלויים.
קודם כל נשים לב כי $\mathbb{P}(X=1,Y=1)=0$, נראה כי $\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)>0$, כי $\mathbb{P}(X=1)>0$ כי קיים סידור עבורו .. ו-$\mathbb{P}(Y=1)>0$ כי קיים סידור עבורו ..

כללי:

$\binom{n}{k}$ לבחור k אנשים מתוך n בלי חזרות ובלי חשיבות לסדר, שקול חישובית ל- $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\binom{k+n-1}{k}$- מספר הדרכים לבחור k עצמים מתוך n עם חזרות ובלי חשיבות לסדר, ניתן להסתכל על בעיית $x_1+x_2+\cdots x_n=k$ או לחלופין לשים k כדורים ב n תאים.

בינום של ניוטון: $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^ky^{n-k}$.

סכום סדרה הנדסית: $\sum_{k=0}^{\infty}a\cdot q^k=\frac{a}{1-p}$ כאשר $|q|<1$ אחרת הסכום שואף ל- ∞

מקובל לסמן את סכום האיברים בסדרה (כלשהי) $S=\sum_{n=N_1}q^n$, כאשר N_1 ו- N_2 הם הגבולות הרצויים.

סכום סדרה חשבונית: $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$

טורים: $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

זהות פסקל $\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m}$.

טענה: $\binom{D}{N}=\frac{D}{N}\binom{D-1}{N-1}$

סכום ריבועי איברים: $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

קיבוע זוג אחד ושאר הזוגות לסדר **במעגל** - $\frac{2\cdot(2n-1)!}{(2n)!}$

קיבוע 3 גברים ובשאר במקומות לסדר $2n-3$ **במעגל** $\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(2n-3)!}{2n!}$

ממבחנים ומטלות:

$\sum_{t=1}^{\infty}t\cdot\mathbb{P}(X=t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{t=k}^{\infty}\mathbb{P}(X=t)$

אם $N\sim Poi(\lambda)$ **ו-**X **תלוי ב-**N אז ניתן להשתמש **בנוסחת התוחלת המותנה**
$\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}\big(\mathbb{E}(X|N)\big)=\sum_{n=0(support)}^{\infty}\mathbb{P}(N=n)\cdot\mathbb{E}(X|N=n)$

$\sum_{t=k+1}^{\infty}p(1-p)^{t-1}=p\cdot(1-p)^k\cdot\sum_{t=0}^{\infty}(1-p)^t=\frac{p(1-p)^k}{p}=(1-p)^k$

נוסחת ההסתברות המותנה $\mathbb{P}(X=n+k\mid X>n)=\frac{\mathbb{P}(X=n+k,X>n)}{\mathbb{P}(X>n)}$

$$\mathbb{E}(X)(\text{א"ש})=\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}(X>k)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=k+1}^{\infty}\mathbb{P}(X=i)=1\cdot\mathbb{P}(X=1)+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot\mathbb{P}(X=i)$$

ב"ת $\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{j=1}^{k}\mathbb{P}(X+Y=k\,|X=j)\cdot\mathbb{P}(X=j)=\sum_{j=1}^{k}\mathbb{P}(Y=k-j)\cdot\mathbb{P}(X=j)$

$$\mathbb{P}(X\ge a,Y\ge b)=\sum_{x=a}^{\infty}\sum_{y=b}^{\infty}\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$

$$\mathbb{E}(XY)=\sum_{z}z\cdot\mathbb{P}(XY=z)=\sum_{x}\sum_{y}xy\cdot\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\sum_{x,y}xy\cdot\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$

$\mathbb{P}(X=x,Y=y)=\mathbb{P}(Y=y|X=x)\cdot\mathbb{P}(X=x)$

מ"מ X **סוכם** את התוצאות של הטלות בלתי תלויות – להביע את X כסכום של מ"מ X_i אשר מייצג את התוצאה של הטלה ה-i ולכן $X_i\sim U[1,6\}$ ו- $X=\sum_{i=1}^{\#number}X_i$

$\mathbb{P}(1400<X<1540)=\mathbb{P}(-70<X-1470<70)=\mathbb{P}(|X-1470|<70)$
$=1-\mathbb{P}(|X-1470|\ge 70)$

$\mathbb{P}(X=a)=\mathbb{P}(X\ge a)-\mathbb{P}(X\ge a+1)$
$\mathbb{P}(X\ge a,Y\ge b)-\mathbb{P}(X\ge a,Y\ge b+1)-\mathbb{P}(X\ge a+1,Y\ge b)+\mathbb{P}(X\ge a+1,Y\ge B+1)=\mathbb{P}(X=a,Y=b)$

$\mathbb{P}(X+Z\ge 25)\underbrace{=}_{X+Y+Z=30}\mathbb{P}(Y\le 5)=\mathbb{P}(-Y\ge -5)=\mathbb{P}(10-Y\ge 5)\le\mathbb{P}(|10-Y|\ge 5)=\mathbb{P}(|Y-10|\ge 5)=\mathbb{P}(|Y-\mathbb{E}(Y)|\ge 5)$

להתנות כדי לחשב! $\mathbb{P}(X=5,Y=2)=\mathbb{P}(Y=2|X=5)\cdot\mathbb{P}(X=5)$

לשים לב אם רשום **סכום** במ"מ או מספר הטלות

אם יוצא $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ אז הוא מתפלג גאומטרי!

שונות
מדד לפיזור סביב התוחלת
כמה אנחנו מרוחקים מהתוחלת?
$Var(X)$

שונות של משתנה מקרי היא 0 אם"ם בהסתברות 1 הוא קבוע על התוחלת שלו

הגדרה: $Var(X)=\mathbb{E}\left(\left(X-\mathbb{E}(X)\right)^2\right)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$

הגדרה: סטיית התקן של X היא $\sigma_X=\sqrt{Var(X)}$

תכונות של שונות:
- $Var(X)=0\Leftrightarrow P\big(X=\mathbb{E}(X)\big)=1$, $Var(X)\ge 0$
- $Var(aX+b)=a^2Var(X)$
- $Var(X\pm Y)=Var(X)\pm 2Cov(X,Y)+Var(Y)$
- $Var(c)=0$

סכום של משתנים **בלתי תלויים**: $Var(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)$
באופן כללי: (אם X_i בעל תוחלת סופית)
$$Var\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Cov(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}Cov(X_i,X_j)$$

הוכחה נוסחת תוחלת במותנה:

$$E[E[X|Y]]=E\left[\sum_x x\cdot P(X=x|Y)\right]$$
$$=\sum_y\left[\sum_x x\cdot P(X=x|Y=y)\right]P(Y=y)$$
$$=\sum_x x\sum_y P(X=x|Y=y)\cdot P(Y=y)$$
$$=\sum_x x\sum_y P(X=x\text{ and }Y=y)$$
$$=\sum_x x\cdot P(X=x)$$
$$=E[X]$$

$$\sum_x\sum_y x\cdot\mathrm{P}(X=x,Y=y)=\sum_x x\sum_y\mathrm{P}(X=x,Y=y)=\sum_x x\cdot\mathrm{P}(X=x)=\mathrm{E}(X).$$

תוחלת
אם נבצע ניסוי פעמיים רבות
התוצאות יתכנסו למספר מסויים (תוחלת)
$\mathbb{E}$

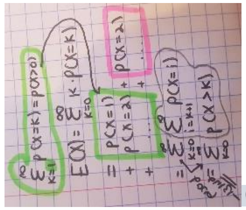
הגדרה: $\mathbb{E}(X)=\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\cdot\mathbb{P}(\omega)=\sum_k k\cdot\mathbb{P}(X=k)$

$$\mathbb{E}\big(f(X)\big)=\sum_{k\in S}f(k)\cdot P(X=k)$$

$\mathbb{E}\big(f(X)\big)=f(\mathbb{E}(X))$ כאשר f היא **פונקצייה לינארית.**

תכונות (לינאריות התוחלת) (כאשר X,Y לא שואפים לאינסוף) :
$\mathbb{E}(aX+bY)=a\mathbb{E}(X)+b\mathbb{E}(Y)$ $\mathbb{E}(c)=c$ $\mathbb{E}(aX+b)=a\mathbb{E}(X)+b$

- **אם** X ו-Y **בלתי מתואמים** אז $\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}(XY)=\sum_{i\in S_x}\sum_{j\in S_Y}i\cdot j\cdot P(X=i,Y=j)$
- $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)$
- $\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{k}\mathbb{E}(X|A_i)\cdot\mathbb{P}(A_i)$
- אם מ"מ X נקבל ערכים בין a ל-b אזי $a\le\mathbb{E}(X)\le b$
- **טענה (מונטניות התוחלת)** אם $\mathbb{P}(X\le Y)=1$ אזי $\mathbb{E}(X)\le\mathbb{E}(Y)$
- $\mathbb{E}(X|A)=\sum_x x\cdot\mathbb{P}(X=x|A)$
- $\mathbb{E}(X+Y|Y=y)=\mathbb{E}(X|Y=y)+y$
- $\mathbb{E}(X+Y|Y)=\mathbb{E}(X|Y)+Y$
- $\mathbb{E}(XY|Y=y)=y\mathbb{E}(X|Y=y)$
- $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n}c_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}c_i\cdot\mathbb{E}(X_i)$
- X מקבל ערכים **שלמים אי שליליים**:
  $\mathbb{E}(X)=\sum_{x=0}^{\infty}\mathbb{P}(X>x)=\sum_{x=1}^{\infty}\mathbb{P}(X\ge x)$
- $\mathbb{E}\big(x(x-1)\big)+\mathbb{E}(x)=\mathbb{E}(X^2)$



שונות משותפת
מדד לקשר בין 2 משתנים מקריים $Cov(X,Y)$

אם X,Y משתנים מקריים בעלי תוחלת סופית אזי $Cov(X,Y)$ סופי ו:
$Cov(X,Y)=\mathbb{E}(X\cdot Y)-\mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$

אם X,Y משתנים מקריים בעלתי תוחלת סופית אזי:
- מתאומים חיובית אם $Cov(X,Y)>0$ (שלילת עם הסימן $<$), כלומר ידיעה ש-X התרחב **מגדילה** את הסיכויים ש-Y התרחב ולהיפך.
- לא מתואמים אם $Cov(X,Y)=0$

$Cov(X,Y)=0\Rightarrow$ **X,Y ב"ת** X,Y ב"ת $\not\Rightarrow Cov(X,Y)=0$

תכונות של שונות משותפת:
- $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$ ו- $Cov(X,X)=Var(X)$
- $Cov(X,a)=0$
- $Cov(aX,bY)=ab\cdot Cov(X,Y)$
- $Cov(aX,Y)=aCov(X,Y)$
- $Cov(X+Z,Y)=Cov(X,Y)+Cov(Z,Y)$
- $Cov(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{j=1}^{m}Y_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}Cov(X_i,Y_j)$

3. (הכלה והדחה) מגרילים באופן מקרי אחיד תמונה $\pi\in S_n$ מה ההסתברות שלπ יש בדיוק k נקודות שבת?
לכל $k\in[0,n]$ נסמן ב-A_k את המאורע "ל-π בדיוק k נק' שבת" נחשב את $\mathbb{P}(A_0)$.
לכל $i\in[1,n]$ נסמן ב-B_i את המאורע "i נק' שבת של π"
אזי $A_0=\bigcap_{i=1}^{n}B_i^c$ ולכן:
$\mathbb{P}(A_0)=\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n}B_i^c)=\sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|}\cdot\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I}B_i)$
$\sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|}\cdot\frac{|\bigcap_{i\in I}B_i|}{n!}=\sum_{I\subseteq[n]}(-1)^{|I|}\cdot\frac{(n-|I|)!}{n!}=\sum_{j=0}^{n}\frac{\binom{n}{j}(-1)^j(n-j)!}{n!}=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}$
הערה: $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_0)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}=\frac{1}{e}$
הערה: כיוון שמרחב ההסתברות אחיד $|A_0|=n!\cdot\mathbb{P}(A_0)=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}\cdot n!$ ($n!$ בא מלסדר את $(n-0)!$ האיברים האחרים)
לכל $k\in[1,n]$ מתקיים $\mathbb{P}(A_k)=\frac{|A_k|}{n!}$, תחילה נבחר בדיוק k נקודות שבת ב$\binom{n}{k}$ ואת כל שאר $n-k$ הנותרים נסדר בשאר המקומות ללא אף נקודת שבת וזאת ניתן לע שות בדיוק ב-$(n-k)!\cdot\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{j!}$ ולכן סה"כ $\mathbb{P}(A_k)=\frac{\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{j!}(n-k)!\binom{n}{k}}{n!}=\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{j!}$

אינדקטורים
- $Cov\big(1_A(\omega),1_B(\omega)\big)=\mathbb{P}(1_A(\omega)=1,1_B(\omega)=1)-\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$
- $Var\big(1_A(\omega)\big)=\mathbb{P}(A)(1-\mathbb{P}(A))$
- $\mathbb{E}\big(1_{A(\omega)}\big)=\mathbb{P}(A=1)=\mathbb{P}(A)$

דוגמא 0. לפתרון תרגיל בעזרת אינדקטורים:
אם $X,Y\sim Bin(1,3)$ אזי $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)=\frac{n}{3}$, עבור כל $i\in[1,n]$ נגדיר:
$X_i=\begin{cases}1 & \text{if the outcome of the ith die roll is 2 or 3}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ $Y_i=\begin{cases}1 & \text{if the outcome of the ith die roll is 1 or 2}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$
ולכן $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$, $Y=\sum_{i=1}^{n}Y_i$ ולכן:
$$Cov(X,Y)=Cov(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{j=1}^{m}Y_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}Cov(X_i,Y_j)=\sum_{i=1}^{n}Cov(X_i,Y_i)$$
כאשר המעבר האחרון נכון כי לכל $i\ne j$ המ"מ X_i,Y_j הם ב"ת כי הם מסתמכים על הטלות שונות שהם בלתי תלויות לפי הנחה ולכן $Cov(X_i,Y_j)=0$
כעת: $Cov(X_i,Y_i)=\mathbb{E}(X_i\cdot Y_i)-\mathbb{E}(X_i)\cdot\mathbb{E}(Y_i)=\mathbb{P}(X_i=1,Y_i=1)-\mathbb{P}(X_i=1)\cdot\mathbb{P}(Y_i=1)=$
$\mathbb{P}(\text{the outcome of the ith die roll is 2})-\frac{1}{9}=\frac{1}{6}-\frac{1}{9}$

מקדם המתאם
מדד לקשר ליניארי בין שני משתנים (כמה הם גדלים ביחד)
$\rho(X,Y)$

הגדרה: $\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\cdot\sigma_Y}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)\cdot Var(Y)}}$

טענה: $\rho(X,Y)=\rho(Y,X)$
טענה: $\rho(X+a,Y)=\rho(X,Y)$ לכל $a\in\mathbb{R}$
טענה: לכל $a\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ מתקיים $\rho(aX,Y)=\frac{a}{|a|}\rho(X,Y)$
טענה: $\rho(X,X)=1$ **טענה:** $\rho(X,Y)=0\iff Cov(X,Y)=0$
טענה: $|\rho(X,Y)|\le 1$
טענה:
$\rho(X,Y)=1\iff\exists\,a>0,b\ s.t\ \mathbb{P}(Y=aX+b)=1$
$\rho(X,Y)=-1\iff\exists\,a<0,b\ s.t\ \mathbb{P}(Y=aX+b)=1$
אם $X'=\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{Var(X)}}$ אזי $\mathbb{E}(X')=0,Var(X')=1$

אי-שיוונים
1. $\mathbb{P}(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)\le\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(A_k)$
2. אי-שיוון מרקוב (הוכחה להגדיר I_t לX ≥ t ולהתחיל מ-$t\cdot\mathbb{P}(X\ge t)$)
יהי X משתני מקרי **אי שלילי** אזי עבור $t>0$ מתקיים $\boxed{\mathbb{P}(X\ge t)\le\frac{\mathbb{E}(X)}{t}}$
3. אי-שיוון צ'בישב
יהי X משתנה מקרי עם התפלגות סופית אזי עבור $t>0$ מתקיים כי:
$$\boxed{\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\ge t)\le\frac{Var(X)}{t^2}}$$
עבור $t=\lambda\sigma_X$ נקבל כי $\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)|\ge\lambda\sigma_X)\le\frac{1}{\lambda^2}$

הכלה והדחה
$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{\emptyset\ne\mathcal{J}\subseteq\{1,\dots,n\}}(-1)^{|I|-1}\mathbb{P}(\bigcap_{i\in\mathcal{J}}A_i)$$
$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c)=\sum_{\mathcal{J}\subseteq\{1,\dots,n\}}(-1)^{|\mathcal{J}|}\mathbb{P}(\bigcap_{i\in\mathcal{J}}A_i)$$
טענה: $\bigcap_{i\in\emptyset}A_i=\Omega$ **טענה:** $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!}=\frac{1}{e}$

דרך פתרון כללית ע"י הכלה והדחה:
1. מגדירים מאורע A_i עבור $i\in[a,b]$ אשר זהו המאורע שאנחנו מחפשים **או** המשלים שלו.
2. $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in\mathcal{J}}A_i)=\frac{|\bigcap_{i\in\mathcal{J}}A_i|}{|\Omega|}$ **אם** המרחב הסתברות אחיד
3. נעזר בה"וה כדי לחשב $\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c)$ **או** את $\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)$ ע"י אחת הנוסחאות ונקבל:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{\emptyset\ne\mathcal{J}\subseteq\{1,\dots,n\}}(-1)^{|\mathcal{J}|-1}\mathbb{P}(\bigcap_{i\in\mathcal{J}}A_i)=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}\cdot(\text{פתרון של }2)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}A_i^c\right)=\sum_{\mathcal{J}\subseteq\{1,\dots,n\}}(-1)^{|\mathcal{J}|}\mathbb{P}(\bigcap_{i\in\mathcal{J}}A_i)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}\cdot(\text{פתרון של }2)$$

שאלה (אינדקטורים סמוכים)
מטילים קובייה הוגנת $n\ge 5$ פעמיים כאשר כל ההטלות ב"ת. נסמן בX את מספר **השלשות** של הטלות רצופות שסכום תוצאותיהן הוא 5. א. חשב את **התוחלת** של X ב. חשב את **השונות** של X
פתרון: יש כאן ספירה מורכבת ולכן נשתמש באינדיקטורים. לכל $i\in[1,n-2]$ **נגדיר X_i להיות אינדקטור השווה ל-1 אם הסכום ההטלות $i,i+1,i+2$ הוא 5**, ו0 אחרת. מכאן $X=\sum_{i=1}^{n-2}X_i$. כעת נשים לב כי $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n-2}X_i)=\sum_{i=1}^{n-2}\mathbb{E}(X_i)$ לפי לינאריות התוחלת, נותר לחשב את התוחלת של כל X_i ומכוון שX_i הוא משתנה אינדקטור, $\mathbb{E}(X)=\mathbb{P}(X=1)$. ולכן $\mathbb{E}(X_i)=\mathbb{P}(X_i=1)=\mathbb{P}(\{(1,1,3)\dots\})=\frac{6}{6^3}=\frac{1}{36}$ כי אלו כל האפשריות לסכום 5 עבור שלשה רצופה מתוך סה"כ 6^3 תוצאות אפשריות ולכן $\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{n-2}\mathbb{E}(X_i)=\frac{n-2}{36}$
ב. לפי תכונה של שונות $Var(X)=Var(\sum_{i=1}^{n-2}X_i)=\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2}Cov(X_i,X_j)$. **נותר לחשב** $Cov(X_i,X_j)$. **אנו צריכים לחשב את זאת רק עבור X_i,X_j תלויים כי עבור ב"ת נקבל כי $Cov(X_i,X_j)=0$ מכיוון שההטלות הן ב"ת אחת בשנייה**. כדי ש-X_i,X_j יהיו תלויים, השלשות שהם **מייצגים צריכים להיחתך. ולכן זה יקרה רק אם $|j-i|\le 2$ (כדי שהשלשות לא יהיו רחוקות ביותר מ-2 ואז יהיה חיתוך)** ולכן: **1**. אם $i=j$ אז $Cov(X_i,X_j)=Cov(X_i,X_i)=Var(X_i)=p(1-p)=\frac{1}{36}\cdot\frac{35}{36}$ לפי נוסחת Cov ולפי נוסחת שונות למשתנה ברנולי (אינדקטור).
2. אם $j=i+1$ או $j=i-1$ (באופן סמטרי) אזי $Cov(X_i,X_{i+1})=\mathbb{E}(X_i\cdot X_{i+1})-\mathbb{E}(X_i)\cdot\mathbb{E}(X_{i+1})$. את התוחלת של X_i חשבנו בסעיף א' לכל i ולכן נותר לחשב את $\mathbb{E}(X_i\cdot X_{i+1})$, בגלל שהמשתנה X_iX_{i+1} הוא אינדקטור אזי $\mathbb{E}(X_iX_{i+1})=\mathbb{P}(X_iX_{i+1}=1)=\mathbb{P}(X_i=1,X_{i+1}=1)$
כאשר המעבר האחרון נכון כי כדי **שהמכפלה תצא 1 צריך שכל משתנה בעצמו יהיה** 1. כדי לחשב את ההסתברות, עלינו לבדוק בכמה מקרים הסכום של ההטלות $i,i+1,i+2$ ו-$i+1,i+2,i+3$ יהיה 5, נמנה את כל האפשריות $\{(1,1,3,1)\dots\}$ ולכן יש 6 מקרים מתוך 6^4 אפשריות ולכן $\mathbb{E}(X_i\cdot X_{i+1})=\frac{6}{6^4}$ ולכן סה"כ להציב $Cov(X_i,X_{i+1})=$.
3. $j=i+2$ או $j=i-2$ (באופן סימטרי) אזי $Cov(X_i,X_{i+2})=\mathbb{E}(X_i\cdot X_{i+2})-\mathbb{E}(X_i)\cdot\mathbb{E}(X_{i+2})$. נותר לחשב את $\mathbb{E}(X_iX_{i+2})=\mathbb{P}(X_iX_{i+2}=1)=\mathbb{P}(X_i=1,X_{i+2}=1)$. כדי לחשב את ההסתברות עלינו לבדוק כמה מקרים סכום ההטלות $i,i+1,i+2$ ו-$i+2,i+3,i+4$ יהיה 5. נמנה את כל האפשריות $\{(1,1,3,1,1),\dots\}$ ולכן יש 14 מתוך 6^5 ולכן $\mathbb{E}(X_iX_{i+2})=\frac{14}{6^5}$, נציב ונקבל.
מכאן, נציב ונקבל $Var(X)=Var(\sum_{i=1}^{n-2}X_i)=\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=1}^{n-2}Cov(X_i,X_j)=\sum_{i=1}^{n-2}Cov(X_i,X_i)+2\sum_{i=1}^{n-3}Cov(X_i,X_{i+1})+2\sum_{i=1}^{n-4}Cov(X_i,X_{i+2})$ (האינדקסים יורדים בשביל למנוע חרגילה והכפל ב-2 בגלל הצד השני $Cov(X_i,X_{i-1})=Cov(X_i,X_{i+1})$).

קורס הסתברות

דוגמה ניסוי: יש כאן ניסוי (הוצאת כדור) המתבצעים שוב ושוב ללא תלות אחד בשני עד להצלחה הראשונה (הוצאת כדור צהוב) לכל ניסוי סיכוי הצלחה ולכשלון, X סופר כמה ניסויים היו ולכן הוא מתפלג גיאומטרית עם הסתברות p להצלחה. נותר לחשב את p
$p = \mathbb{P}(\text{כדור צהוב}) = \frac{1}{5} \Rightarrow \quad X \sim Geom(\frac{1}{5})$

דוגמה 2: מכיוון שיש לנו התפלגות של X אז קל יותר לחשב את ההסתברות של X יהיה שווה לערך ולכן נעדיף להשתמש בהסתברות המותנה: לפי נוסחת ההסתברות המותנה . נשים לב כי $Y|X = n \sim Bin\left(n-1, \frac{1}{2}\right)$

משתנה מקרי

משתנה מקרי התאמה של אירוע אפשרי במרחב הסתברות לערך מספרי

לדוגמה: תוצאת הטלה קוביה (6 ערכים) (ערך שאנחנו מודדים)

משתנה מקרי היא פונקציה $X: \Omega \to S$ כאשר $S \subseteq R$

זה פונקציה מהמרחב המדגם לערך מספרי

תומך תומך של פונקציה היא קבוצת כל הנק' שבהן הפונקציה שונה מ0, לדוגמה עבור $f: S \to [0,1]$ אז $Supp(f) = \{x \in S \mid f(x) \neq 0\}$

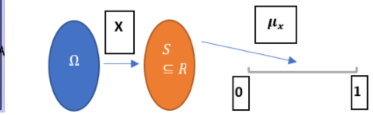
כלומר כל האיברים שהמ"מ ממפה כך שהסתברותם לא 0.

התפלגות היא פונקציה $\mu: S \to [0,1]$ כך שהקבוצה $\{x \in S: \mu(x) \neq 0\}$ (התומך) סופית או בת מנייה ו $\sum_{x \in S} \mu(x) = 1$

כדי להראות ש– μ' היא **התפלגות** צריך **להוכיח כי:**

1. μ' ממפה לערכים $[0,1]$
2. $\sum_{x \in S} \mu'^{(x)} = \sum_{k \in S} \mathbb{P}(X = k) = 1$
3. $\{x \in S: \mu'(x) \neq 0\}$ סופי או בן מנייה

התפלגות של משתנה מקרי X היא פונקציה μ_X שמוגדרת: $\forall x \in S: \mu_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$ כאשר
$\mathbb{P}(X = x) := \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$



סימון:

$\mathbb{P}(Y_1 = i)$ | $Y_1 \sim \begin{cases} 0 & 4/9 \\ 1 & 4/9 \\ 2 & 1/9 \end{cases}$ | התומך של ההתפלגות

X, Y הם משתנים מקריים זהים אם $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(Y = x)$ לכל $x \in S$

הסתברות אחידה לכל $\mathbb{P}(k) = \frac{1}{|\Omega|}$ עבור $k \in \Omega$ ו- $\mathbb{P}(A_k) = \frac{|A_k|}{|\Omega|}$

משתנה מקרי מותנה: $\mathbb{P}(X = x \mid A) = \frac{\mathbb{P}(\{X=x\} \cap A)}{\mathbb{P}(A)}$

משתנים מקריים **זהים** אם $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(Y = y)$ עבור כל $x \in S$

אי תלות

אי-תלות בין מאורעות

המאורעות A, B **בלתי תלויים** אם:
$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$
$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B) \quad if\ P(B) > 0$

באופן כללי המאורעות $A_1, \dots, A_n$ **בלתי תלויים** אם לכל תת קבוצה $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ כך ש $|I| \geq 2$ מתקיים $\mathbb{P}(\cap_{i \in I} A_i) = \Pi_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$

אשר מצריך $2^n - n - 1$ בדיקות, לחלופין ניתן להגיד כי האורעות ב"ת אם $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n B_i) = \Pi_{i=1}^n \mathbb{P}(B_i)$ עבור $B_i \in \{A_i, A_i^c\}$ (2^n אפשרויות)

הערה: מאורעות זרים $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ ואז $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

אי-תלות בזוגות בין מאורעות

לפעמיים קבוצת מאורעות אינם ב"ת אך כל שני מאורעות מתוכם כן ב"ת המאורעות $A_1, \dots, A_n$ בלתי תלויים בזוגות אם לכל $i \neq j$ מתקיים כי
$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}(A_j)$

אם מאורעות בלתי תלויים **אז** הם בלתי תלויים בזוגות **(להפך לא תמיד)**

אי תלות מותנית

מאורעות A, B הם **Conditional Independence** אם בהינתן מאורע C כך ש $\mathbb{P}(C) > 0$ מתקיים:
$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A|C) \cdot \mathbb{P}(B|C)$

כלומר בהינתן מאורע C, ההסתברות שA קרה לא משנה את ההסתברות של B ולהפך.

משתנים מקריים בלתי תלויים

לכל $i \in [1, n]$ יהי $X_i: \Omega \to S_i$ משתנה מקרי, נאמר ש $X_1, \dots, X_n$ משתנים מקריים בלתי תלויים אם לכל x_i עבור $i \in [1, n]$ מתקיים כי:
$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \Pi_{i=1}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$

המשתנים המקריים X, Y **בלתי תלויים** אם **לכל** a, b מתקיים כי:
$\mathbb{P}(X = a, Y = b) = \mathbb{P}(X = a) \cdot \mathbb{P}(Y = b)$

משתנים מקריים בלתי תלויים אם"ם **האינדקטורים שלהם בלתי תלויים**

התפלגות משותפת:

$$\mathbb{P}(X = x) = \sum \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

ג. חשבו את התוחלת והשונות של $Y := \frac{pX-1}{\sqrt{1-p}}$

$E(Y) = E\left(\frac{pX-1}{\sqrt{1-p}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-p}}(pE(X) - 1) = 0$

$Var(Y) = Var\left(\frac{pX-1}{\sqrt{1-p}}\right) = \frac{p^2}{1-p} Var(x) = 1$

התפלגות משותפת ⇐ התפלגות שולית, הפוך לא.

מאורעות – הסתברות מותנת

מאורע הוא קבוצה החלקית למרחב ההסתברות.

A, B **מאורעות זרים** אם"ם $A \cap B = \emptyset \Leftarrow \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

אם A, B, C הם מאורעות **זרים** אזי $A \cap B \cap C = \emptyset$

אבל הם **זרים בזוגות** אם $A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C = \emptyset$

אינדיקטור של מאורע $A \subseteq \Omega$ הוא: $1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases} \sim \begin{cases} 1, & \mathbb{P}(A) \\ 0, & 1 - \mathbb{P}(A) \end{cases}$

הגדרה $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

הגדרה $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B) \cdot \mathbb{P}(B)$

טענה: $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^n A_i) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbb{P}(A_n \mid \cap_{i=1}^{n-1} A_i)$

חוק בייס (Bayce) $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B \mid A)}{\mathbb{P}(B)}$

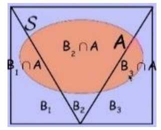
חוק ההסתברות השלמה

יהיו $B_1, \dots, B_n$ מאורעות זרים ואיחודים שווה ל-Ω אזי:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A \mid B_i) \mathbb{P}(B_i)$$

$$\mathbb{P}(A_2 \mid A_1) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_2 \mid B_i \cap A_1) \cdot \mathbb{P}(B_i \mid A_1)$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c) \cdot \mathbb{P}(B)$$



נוסחת התוחלת השלמה:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \sum_k \mathbb{P}(Y = k)\mathbb{E}(X|y = k)$$

נוסחת השונות השלמה:

$$Var(X) = \mathbb{E}(Var(X|Y)) + Var(\mathbb{E}(X|Y))$$

שאלות לדוגמא:

1. בכד יש n כדורים ממוספרים מ1 עד n מוציאים בצורה מקרית ואחידה m כדורים. יהי המאורע M מ"מ השווה לערך הגבוה ביותר מבין m הכדורים שיצאו.

א. חשב את ההתפלגות של M כאשר מוציאים m כדורים **ללא** החזרה.

עבור $M = k$ אזי יש $m - 1$ הוצאות אשר ערכן בין 1 ל $k - 1$

כלומר יש $\binom{m-1}{k-1}$ אפשרויות כאשר k הוא ערך המקסימלי.

בגלל שאין החזרה ומדובר במרחב הסתברות אחיד:

$$P(M = k) = \frac{\binom{k-1}{m-1}}{\binom{n}{m}}$$

ב. חשב את ההתפלגות של M כאשר ההוצאה עם החזרה

נגדיר אינדיקטור להיות **הערך** של הכדור ה i שיצא, ולכן:

$P(X_i \leq k) = \frac{k}{n}$ ולכן $P(M \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^m$ וע"מ למצוא את $P(M = k)$ נעשה כך:

$$P(M = k) = P(M \leq k) - P(M \leq k - 1) = \left(\frac{k}{n}\right)^m - \left(\frac{k-1}{n}\right)^m$$

2. (הכלה והדחה – בדרך כלל רשום הוגנות)

מטילים זוג קוביות הוגנות n פעמיים, מה הסיכוי שכל אחת מהתוצאות הבאות תופיע בהטלה כלשהי? (התוצאות הם (i, i) עבור $(i \in [6]$)

פתרון: עבור כל $i \in [6]$ נגדיר מאורע:

A_i - התוצאה ה (i, i) לא הופיע בשום הטלה

נשים לב כי $|\Omega| = 36^n$ ונשים לב כי $\{1 \ldots 6\} \supseteq \mathcal{J} \neq \emptyset$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(\cap_{i \in \mathcal{J}} A_i) = \frac{|\cap_{i \in \mathcal{J}} A_i|}{|\Omega|} = \frac{(36 - |\mathcal{J}|)^n}{36^n} = \left(1 - \frac{|\mathcal{J}|}{36}\right)^n$$

ולכן **לפי הכלה והדחה** נקבל כי:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^6 A_i^c\right) = \sum_{\mathcal{J} \subseteq \{1..6\}} (-1)^{|\mathcal{J}|} \mathbb{P}(\cap_{i \in \mathcal{J}} A_i) = \sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} (-1)^k \left(1 - \frac{k}{36}\right)^n$$

Example: Flip a fair coin k times
H_i ::= [Head on i^{th} flip]
O ::= [Odd # Heads]

Claim: Any set of k of these events are mutually independent, but all k+1 of them are not.

תרגיל: מטילים קוביה הוגנת עד הפרם הראשונה שמתקבלת תוצאה שונה מ-6 כאשר כל ההטלות ב"ת. יהי X מ"מ שסוכם את תוצאות כל ההטלות – **אזי** $\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 6n + i) = \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$ ולכן $\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(X = 6n + i) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{i=0}^5 \mathbb{P}(X = 6n + i) = \sum_{n=0}^\infty 5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n+1} = 1$

תרגיל: מטילים מטבע הוגן עד הפעם הראשונה מתקבל הרצף 10, כל ההטלות ב"ת. יהי X מספר ההטלות שהתוצאה 0 וY מספר ההטלות שתוצאן 1 – אזי ההתפלגות של X היא $Geom\left(\frac{1}{2}\right) \sim \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^i \sum_{i=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ ו- $\mathbb{P}(X = k) = \sum_{i=1}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(\frac{1}{2}\right)$ ו- $\mathbb{P}(Y = k) = \sum_{i=0}^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)$ ובשביל לחשב $\mathbb{E}(X + Y)$ נתייחס ל-$X + Y$ כאל משתנה יחיד ולכן לפי תכונות לינאריות אפשר להפריד והיות וכל אחד מתפלג גאומטרי עם $\frac{1}{2}$ אז נקבל כי $\mathbb{E}(X + Y) = 4$

תרגיל 1: כד מכיל כדור לבן 1, 2 שחורים, 3 אדומים. מוצאים באופן מקרי אחיד ללא החזרה 3 כדורים. יהי X מ"מ הסופר את מספר הכדורים הלבנים שהוצאו ו-Y מ"מ הסופר את הכדורים האדומים שהוצאו: $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{6}{3}}$ ו- $\mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = \frac{\binom{1}{1}\binom{3}{2}}{\binom{6}{3}}$

שאלה 1 – נשים לב שX_1 מתפלגע מעל $\{0,1,2\}$ (לפי משתנה המפתלג בינומית) ו- X_2 מתפלג מעל התומך $\{1,2,3\}$ ולכן Y יכול לקבל את הערכים $\{1,2,3\}$ ו-Z יכול לקבל את הערכים $\{0,1,2\}$, כעת, נחשב את כל החיתוכים, לכל y, z נחשב את $P(Y = y, Z = z)$.
תחילה נשים לב שאנו יודעים לחשב את ההפלגיות של X_1, X_2 **ומכוון שהם בלתי תלויים ניתן להפריד את החיתוך למכפלת הסתבריות**. נחשב את ההסתברות של כל ערך בנפרד. **סעיף ב'** - $\mathbb{P}(Y = i)$ זה סכום העמודות ו-$\mathbb{P}(Z = i)$ זה סכומי השורות

נשים לב שX תלוי ב-N כי אם ידוע לנו כמה N, יהיה קל למנות כמה פעמיים יצא עץ. מכאן, נשים לב שכאשר $N = n$ אזי X מתפלג בינומית כי יש מספר נסיונות ידוע, כל נסיון ב"ת באחר לכל ניסיון יש הצלחה או כשלון ומתוכם X סופר את מספר ההצלחות (קבלת עץ) ולכן $X|N = n \sim Bin(n, \frac{1}{2})$.
כעת נחשב את $\mathbb{E}(X)$ באמצעות נוסחת התוחלת השלמה ולפי הנוסחאות להתפלגות השונות: $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|N)) = \sum_{n=0}^\infty \mathbb{P}(N = n) \cdot \mathbb{E}(X|N = n) = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(N = n) \cdot \frac{n}{2}$

שם	תומך	התפלגות $\mathbb{P}$	תוחלת $\mathbb{E}$	שונות Var	דוגמא
אחידה $U(a,b)$	$\{a, a+1, \ldots b\}$	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{\lvert b - a + 1\rvert}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$ **הוכחה:** נוסחא ← התפלגות אחידה ← ולהשתמש בנוסחא $\sum_{k=a}^b k = \frac{(b+a)\cdot(b-a+1)}{2}$	$Var(X) = \frac{(b-a+1)^2 - 1}{12}$ **הוכחה:** נרצה להזיז לקטע $(1,n)$. נגדיר משתנה מקרי $Y = X - a + 1$ ונסמן $n = b - a + 1$ לנוחות, נשים לי כי מתקיים $Var(X) = Var(Y + a - 1) = Var(Y)$ ולכן מספיק להוכיח כי $Var(Y) = \frac{n^2-1}{12}$ נשים לב כי $Y \sim U(1,n)$ המשך **בדוגמא**	הטלת קוביה הוגנת. כעת, נחשב תחילה את $\mathbb{E}(Y^2)$: $\mathbb{E}(Y^2) = \sum_y y^2 \cdot \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{k=1}^n k^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ כעת נחשב את $Var(Y)$: $Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n+1}{12} \cdot [4n + 2 - 3n - 3]$
ברנולי $Ber(p)$ $\sim Bin(1,p)$	$\{0,1\}$	$\mathbb{P}(X = 1) = p$ $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$	$\mathbb{E}(X) = p + (1-p) \cdot 0 = p$	$Var(X) = p(1-p)$ **הוכחה** $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{x \in S} x^2 \mathbb{P}(X = x) = p$	X סופר הצלחה 1 בסיכוי p או כישלון 0 בסיכוי $1 - p$
בינומית $Bin(n,p)$ **טענה:** $\mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}$	$[0,n]$ **טענה:** יהיו $X_1, \dots, X_n$ **משתנים מקריים בלתי תלויים** כך ש $X_i \sim Ber(p)$ לכל $i \in [1,n]$ ויהי $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$ אזי $S_n \sim Bin(n,p)$	$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$\mathbb{E}(X) = np$ **הוכחה:** יהי $X = \sum_{i=1}^n X_i$ כאשר כל X_i התפלגויות ברנולי בלתי תלויות ולכן: $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = np$	$Var(X) = np(1-p)$ **הוכחה:** יהי $X = \sum_{i=1}^n X_i$ כאשר כל X_i התפלגויות ברנולי בלתי תלויות ולכן: $Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{(i=1)}^n Var(X_i) = nVar(X_1) = n(1-p)p$	# עץ ב-n הטלות בלתי תלויות **הוכחה כי $Bin(n,p)$ היא התפלגות:** 1. נשים כי התומך בגודל $n + 1$ ולכן סופי. 2. נשים לב כי $\mathbb{P}(X = k) \geq 0$ ולכן $\mathbb{P}(X = k) \in [0,1]$ (נראה $\sum_k \mathbb{P}(X = k) = 1$) 3. נראה כי $\sum_k \mathbb{P}(X = k) = 1$: $\sum_k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1^n$
גאומטרית $Geom(p)$ $\sim NB(1,p)$	$[1, \infty)$	$P(X = k) = p \cdot (1-p)^{k-1}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ **הוכחה:** נוסחא ← להחליף k ל $(k-1)+1$ ואז לפתוח סוגריים. לבסוף לקבל $\mathbb{E}(X) = (1-p) \cdot \mathbb{E}(X) + 1$ כאשר 1 מתקבל מסכום על התומך	$Var(X) = \frac{(1-p)}{p^2}$ $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=1}^\infty k^2 \cdot \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^\infty (k^2 - 2k + 1)(1-p)^{k-1}p + \cdots$	X סופר ניסויים עד וכולל הצלחה ראשונה (תנאי עצירה) בסדרה לא מוגבלת של ניסויים **ב"ת** **דוגמא:** עד הפעם הראשונה שיוצא עץ אז $Geom(\mathbb{P}(\{\text{סיכוי שיצא עץ}\}))$
היפרגאומטרית $Hyp(D,N,n)$	$\{max(0, n + D - N), min(D,n)\}$	$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{D}{k} \cdot \binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$\mathbb{E}(X) = n \cdot \frac{D}{N}$ **הוכחה:** בעזרת $\binom{D}{N} = \frac{D}{N}\binom{D-1}{N-1}$ ולהוציא מהסיגמא $\frac{nD}{N}$	$Var(X) = D \cdot n \cdot (N - D) \cdot \frac{(N-n)}{N^2 \cdot (N-1)}$ **הוכחה:** בעזרת טריק $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2 - X) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$	# הכדורים האדומים מכד עם N כדורים כאשר D מהם אדומים ובוחרים n כדורים **בלי החזרה** $\mathbb{E}(X^2 - X) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \cdots$
פואסון $Poi(\lambda)$	$[0, \infty)$ אם מגרילים באופן אחיד $\pi \in S_n$ ומסמנים ב-X את מס' נק' השבת של π אז $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X = k) = e^{-1} \cdot \frac{1}{k!}$ כלומר כש $n \to \infty$ אזי $X \sim Poi(1)$.	$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$	$\mathbb{E}(X) = \lambda$ **הוכחה:** נוסחא ← $e^{-\lambda}\lambda \sum_{k=1}^\infty \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$ ← טור טיילור	$Var(X) = \lambda$ **הוכחה:** בעזרת אותו **טריק**	לתמורה יש בדיוק k נק' שבת עבור המספרים $1, \ldots, n$ **משפט הגבול הפואסוני:** תהי $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ סדרה של הסתברויות, כך ש $\lim_{n \to \infty} n \cdot p_n = \lambda$ לאיזשהו $\lambda > 0$ ממשי אזי ההתפלגות הבינומית $Bin(n, p_n)$ שואפת להתפלגות $Poi(\lambda)$, כלומר לכל $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ מתקיים $\lim_{n \to \infty} \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$
בינומית שלילית $NB(r,p)$ אם המשתנים המקריים $X_1, \ldots X_r \sim Geon(p)$ ובלתי תלויים אזי $X = \sum_{i=1}^r X_i \sim NB(r,p)$	$[r, \infty)$ זו אכן התפלגות כי התומך בן מנייה (תת קבוצה של $\mathbb{N}$) ו $\binom{n-1}{r-1} \cdot p^r (1-p)^{n-r} \geq 0$ עבור כל $n \geq r$ טבעי. ניתן להוכיח כי $\sum_{n=r}^\infty \binom{n-1}{r-1} \cdot p^r (1-p)^{n-r} = 1$ ע"י הוכחה באינדוקציה על r ש- $\sum_{n=r}^\infty \binom{n-1}{r-1} \cdot (1-p)^{n-r} = p^{-r}$ ושימוש בזהות פסקל $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$	$\mathbb{P}(X = n) = \binom{n-1}{r-1} \cdot p^r (1-p)^{n-r}$	$\mathbb{E}(X) = \frac{r}{p}$ $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=r}^\infty n \cdot \mathbb{P}(X = n) = \cdots = \frac{r}{p} \underbrace{\sum_{n=r}^\infty \binom{n}{r} p^{r+1}(1-p)^{n-r}}_{=1 \to NB(r+1,p)} = \frac{r}{p}$	$Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$ **הוכחה:** בעזרת אותו **טריק** (מתחיל **בדוגמא**) $= \frac{r(r+1)}{p^2} \cdot \sum_{m=r+2}^\infty \binom{m-1}{(r+2)-1} \cdot p^{r+2} \cdot (1-p)^{m-(r+2)} = \frac{r^2 + r}{p^2},$	נטיל מטבע עם הסתברות p לעץ עד שנקבל עץ r פעמיים, כאשר כל ההטלות **בלתי תלויות**. נסמן ב-X את מס' ההטלות הכולל. $\mathbb{E}(X(X+1)) = \sum_{n=r}^\infty n(n+1) \cdot \binom{n-1}{r-1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r} = r(r+1) \cdot \sum_{n=r}^\infty \binom{n+1}{r+1} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r} = \frac{r(r+1)}{p^2} \cdot \sum_{n=r}^\infty \binom{n+1}{r+1} \cdot p^{r+2} \cdot (1-p)^{n-r}$