19-11-12

דף 1

עיין סדר משפטים

משפט 2. חיבוריות לחלוקת קטע $[a,b]$

אם $f(x)$ אינטגרבילית ב $[a,c],[c,b]$

אזי אינטגרבילית גם $\Leftarrow [a,b]$

הוכחה קלה אם נבצע נפרד בנפרד סכומי רימן $[a,c]$ ו $[c,b]$ ש"ב

מסקנה: לכל חלוקה של $[a,b]$

$$[a,b] \to a < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < b$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \dots + \int_{x_{k-1}}^b f(x)dx$$

3. משפט 3. אם $f(x)$ ו $g(x)$ 2 פונקציות אינטגרביליות ב $[a,b]$ אזי מתקיים

א) אם $f(x) \geq m \quad \forall x \in [a,b]$

אזי $\Downarrow$

$$\int_a^b f(x)dx \geq m(b-a)$$

ב) אם $f(x) \geq M \quad \forall x \in [a,b]$

אזי $\Downarrow$

$$\int_a^b f(x)dx \geq M(b-a)$$

ג) אם $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

10-11

הוכחות של משפט (3-א) — דף 3

(א) לכל חלוקה של $c_i \in [a,b]$

$c_i \in \Delta x_i$

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\Delta x_i \geq \sum_{i=1}^{\infty} m\,\Delta x_i = m\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i = m(b-a)$$

לכן

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} m\,\Delta x_i \geq m(b-a)$$

(ב) לכל חלוקה $x\in[a,b]$ מתקיים

$$f(x)-g(x)\geq 0$$

לכן

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx \geq 0$$

(ג) נשתמש בהוכחה תכונות משפט (1)

נקבל ע"מ (1)

$$\int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$$

בסוף

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

משפט: אם $f(x)$ אינטגרבילית ב $[a,b]$ ו M ו m sup ו inf של $f(x)$ אז

$$\boxed{m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)}$$

אי-שוויון חלק מאוחד הוכחה נשתמש (1) ו (2) ישיר

10.11

פרק 4

משפט: ערך הביניים

אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$

אזי $\exists$ נק' $c \in [a,b]$ ש-

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$ → משפט ערך הביניים

משפט קורא

הוכחה: מהמסקנה קודמת נובע ש-

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

אם נכפיל שני האגפים $(b-a)$

נקבל תוצאה: צ"ל $\exists$ נק' $c \in [a,b]$ ש-

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

לכן $f(c)$ נקרא ממוצע של $f(x)$ בקטע $[a,b]$.

---

1. דוגמה: להעריך $\int_0^2 e^{x^2}dx$ בקטע $[0,2]$

פיתרון: בקטע $[0,2]$ מתקיים $1 \le e^{x^2} \le e^4$

לכן

$$2 \le \int_0^2 e^{x^2}dx \le 2e^4$$

---

2. דוגמה: להעריך $\int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4}$ בקטע $[-1,3]$

בקטע שלנו מתקיים

$$\frac{1}{82} \le \frac{1}{1+x^4} \le 1$$

לכן

$$\frac{2}{41} \le \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \le 4$$

דף 1

תכונת חשובה של אינטגרל בין גבולות סימטריים

משפט

$$\int_{-a}^{+a} f(x)dx = \begin{cases} 2\int_0^a f(x)dx & \longleftarrow \text{ אם } f(x) \text{ זוגי} \\ 0 & \longleftarrow \text{ אם הוא אי-זוגי} \end{cases}$$

תזכורת

הגדרה 1 לפונקציה f קוראים זוגית ב-$[-a,+a]$ אם f
$f(x)=f(-x)$

דוגמאות $y=e^{x^2}$, $y=x^2$

הגדרה 2 ל-$f(x)$ קוראים אי-זוגי ב-$[-a,a]$
אם $f(x)=-f(-x)$
דוגמאות $y=x$, $y=\sin x$, $y=x^3$

הוכחת של משפט

נתבונן ש-$f(x)$ אינטגרבילית ב-$[-a,+a]$
אזי $f(x)$ גם אינטגרבילית ב-$[0,a]$, $[-a,0]$
ניקח $f(x)$ ב-קטע $[-a,0]$ ונעשה שינוי משתנים
$t=-x$ לכן נקבל $dx=-dt$

(1) $$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt$$

ל-(1) נחליף עוד פעם x
במקום $x \leftrightarrow t$

לכן נקבל

(*) $$\boxed{\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx}$$

בפרט: אם $f(x)$ זוגי ב-$[-a,+a]$
צ"ל $f(-x)=f(x)$ במקרה $f(x)$ זוגי נקבל

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx \overset{*}{=} \int_0 f(x)dx$$

זוגיות ואי-זוגיות ב- $[-a,a]$

משפט

ⓑ אם $f(x)$ אי-זוגית $f(-x)=-f(x)$
אזי לפי נוסחת ⊛ נקבל:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

בנוסף לפי קטעים

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

ואם נחבר את המשוואות נקבל

$$\int_{-a}^{+a} f(x)\,dx = \begin{cases} 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx & \text{אם } f \text{ זוגי} \\ 0 & \text{אם } f \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

מש"ל