

# מבחן בקורס הסתברות 1

סמסטר ב', מועד ב'

02.08.2020

פרופ' דן חפץ

אוניברסיטת אריאל

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה למדעי המחשב

משך הבחינה: 3 שעות

המבחן הינו עבור מספרי קורס: 1-7028410 ו-2-7028410

מבנה המבחן: 3 שאלות ללא בחירה.

הנחיות:

1. המבחן הינו עם חומר סגור. עם זאת, כל סטודנט רשאי להביא דף אחד מגודל A4 כתוב משני צדדיו.
2. אין לכתוב בעפרון.
3. יש להוכיח כל טענה שאתם כותבים גם אם לא התבקשתם לעשות זאת במפורש בשאלה.
4. למרות הכתוב בסעיף 3, ניתן להסתמך ללא הוכחה על כל טענה שנלמדה בשיעור (אלא אם כן זו הטענה שהנכם מתבקשים להוכיח בשאלה). יש לצטט את הטענה עליה הנכם מסתמכים בצורה ברורה.
5. בפתרון סעיף כלשהו בשאלה, ניתן להסתמך על תוצאת סעיפים קודמים גם אם לא פתרתם אותם.
6. למרות הניקוד המפורט בשאלות, ציון הבחינה הסופי יהיה עובר/נכשל.

### שאלה 1 (34 נקודות):

בכד שני כדורים אדומים, שני כדורים ירוקים ושני כדורים כחולים. מוציאים מהכד שני כדורים ללא החזרה. יהי  $X$  מספר הכדורים האדומים שהוצאו, יהי  $Y$  מספר הכדורים הירוקים שהוצאו ויהי  $Z$  מספר הכדורים הכחולים שהוצאו.

- א. (14 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .
- ב. (7 נקודות) חשבו את השונות של  $X + Y + Z$ .
- ג. (8 נקודות) חשבו את  $P(Z = 1 | X \geq Y)$ .
- ד. (5 נקודות) האם  $X$  ו- $Y$  בלתי תלויים? נמקו את תשובתכם.

### שאלה 2 (33 נקודות):

יהיו  $X \sim \text{Bin}\left(n, \frac{1}{n+1}\right)$  ו- $Y \sim \text{Poi}(1)$  משתנים מקריים בלתי תלויים.

- א. (7 נקודות) חשבו את התוחלת של  $\frac{1}{Y+1}$ .
- ב. (7 נקודות) חשבו את התוחלת של  $\frac{X}{Y+1}$ .
- ג. (9 נקודות) הוכיחו או הפריכו:  $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X > 1.1) = 0$ .
- ד. (10 נקודות) חשבו את התוחלת של  $\frac{1}{X+1}$ .

### שאלה 3 (33 נקודות):

מטילים קוביה הוגנת (כלומר הסתברות  $1/6$  לכל תוצאה אפשרית) עד הפעם הראשונה שמתקבלת התוצאה 6, כאשר כל הטלות הקוביה בלתי תלויות. יהי  $X$  מספר ההטלות הכולל ויהי  $Y$  סכום תוצאות כל ההטלות.

- א. (5 נקודות) מה ההתפלגות של  $X$ ? נמקו את תשובתכם.
- ב. (8 נקודות) חשבו את  $\text{Var}(Y | X = 10)$ .
- ג. (12 נקודות) חשבו את התוחלת של  $Y$ .
- ד. (8 נקודות) הוכיחו ש- $P(Y \geq 100) \leq 1/4$ .

**הערה:** בשאלה 3 ניתן להשתמש ללא הוכחה בעובדה ש- $\sum_{i=0}^{\infty} (i+1)x^i = \frac{1}{(1-x)^2}$  מתקיים לכל  $-1 < x < 1$ .

