תמורות

הגדרה 1 (תמורה/פרמוטציה): תמורה היא העתקה חד-חד-ערכית ועל מ-X ל-X כאשר X קבוצה לא ריקה.

סימון: נסמן תמורה בצורת טבלה בעלת שתי שורות- השורה העליונה היא איברי הקבוצה המקורית לפי הסדר (התחום), והשורה השנייה היא האיברים אליהם מועתקים איברי הקבוצה בסדר כלשהו (הטווח).

דוגמה 2:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

משמעו שהאיבר 1 מומר לאיבר 2, האיבר 2 מומר לאיבר 1 והאיבר 3 מומר לאיבר 3.

הגדרה 3: עבור תמורה על הקבוצה $X = [1 \dots n]$ נסמן ב-S_n את אוסף כל התמורות מעל X.

דוגמה 4:

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

חידה: כמה תמורות יש ב-S_4? תשובה: !4.

פעולת הרכבה, דוגמה:

יהיו

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

אזי

$$\sigma\tau = \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\tau\sigma = \tau \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(מפעילים את התמורה הימנית, ועל התוצאה מפעילים את התמורה השמאלית)

הרכבה של שתי תמורות יוצרת תמורה חדשה.

הגדרה 5: שתי תמורות $\sigma, \tau \in S_n$ נקראות **מתחלפות** אם $\sigma\tau = \tau\sigma$.

דוגמה 6: התמורות σ, τ שראינו לעיל אינן מתחלפות.

הגדרה 7 (תמורת הזהות): $1_{S_n} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. לכל תמורה σ מתקיים

$$1_{S_n}\sigma = \sigma = \sigma 1_{S_n}$$

דוגמה 8: תהי

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

אזי

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

אבחנה 9: תמורת הזהות מתחלפת עם כל תמורה.

הגדרה 10 (תמורה הופכית) לכל תמורה $\sigma \in S_n$ קיימת תמורה הופכית $\sigma^{-1} \in S_n$ כך שמתקיים

$$\sigma\sigma^{-1} = 1_{S_n} = \sigma^{-1}\sigma$$

דוגמה 11: תהי

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

אזי

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ואכן מתקיים

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \sigma^{-1}\sigma$$

חוק הצמצום לתמורות 12: יהיו $\alpha, \beta, \gamma \in S_n$.

1. אם $\alpha\beta = \alpha\gamma$ אזי $\beta = \gamma$ (צמצום משמאל)
2. אם $\beta\alpha = \gamma\alpha$ אזי $\beta = \gamma$ (צמצום מימין)

הוכחה:

1. כדי להראות $\beta = \gamma$ עלינו להראות כי לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $\beta(i) = \gamma(i)$. נניח בשלילה כי קיים $i \in [n]$ עבורו $\beta(i) \neq \gamma(i)$ לכן מתקיים $\alpha(\gamma(i)) \neq \alpha\left(\beta(i)\right)$ כלומר $(\alpha\beta)(i) \neq (\alpha\gamma)(i)$ סתירה להנחה. (ההוכחה של 2 באופן סימטרי.)