בס״ד

דף 1

חדו״א - 2

19.7.20.

הרצאה 1

טורי מספרים

נתונה סדרה של מס ממשיים (יכול להיות מורכבים)

(1) $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ (∞ מספרים)

מ(1) מקבלים סכום $u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$ (2)

לפעמים כותבים $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (2)

או $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$

סכום אינסופי (∞)

ל- u_1 קוראים איבר ראשון

ל- u_n קוראים איבר כללי

1. הגדרה של סכומים חלקיים

סכום של n איברים ראשונים קוראים

סכומים חלקיים

ז״א.

$S_1=u_1$

$S_2=u_1+u_2$

$S_3=u_1+u_2+u_3$

$S_n=u_1+u_2+\dots+u_n$

קיבלנו:

בצורה פשוטה סדרה של $\{S_n\}_1^{\infty}$

אבל בצורה זו סכומים סופיים

נספח ג.

הגדרה 2. ל-טור Σ קוראים טור מתכנס

אם קיים (∃) גבול של סדרה של סכומים חלקיים
$S_1, S_2, \dots S_n, \dots$

צ"ל.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = S}$$

צ"ל. התכנסות של טור Σ תלויה
לקיום גבול של סמ"ח חלקיים. ול-S
קוראים סכום של הטור

כדי למצוא סכום של הטור חייבים להרכיב
סמ"ח חלקיים $\{S_n\}_1^\infty$ ולמצוא גבול.

1. **דוגמא:** נתון הטור

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}+\dots$$

נרשום טור בצורה אחרת:

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\dots\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2^n}\right)$$

$$S_1=\frac{1}{2}=\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$S_2=\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$S_3=\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)$$

$$\dots$$

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$$

גבול!

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=1$$

צ"ל. טור מתכנס! סכום $=1$

תרגיל 3. דוגמא 2: למצוא סכום של הטור

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\dots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\dots$$

נתון איבר כללי $U_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

אם לפרק איבר כללי לפי שברים

$$U_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

לפי שברים חלקיים:

לכן

$$U_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$U_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$$

$$U_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$$

....

לפי הגד' סכומים חלקיים

$$S_n=U_1+U_2+\dots+U_n$$

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\dots+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

לכן $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$

ע"כ, סכום של טור המבוקש $=\frac{1}{2}$.

ל"ג

מביא לתרגיל: סכום טור $= \frac{1}{4}$

4 פק'

$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{3\cdot4\cdot5}+\cdots$$

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots=1$$

שארית של שארית

נתון הטור $\cdots + U_{n+2} + U_{n+1} + U_n + \cdots + U_3 + U_2 + U_1$ (1)

לטור קוראים $U_{n+1}+U_{n+2}+\cdots$

שארית n של טור (1)

אפשר לכתוב $U_1+U_2+\cdots+U_n+U_{n+1}+U_{n+2}+\cdots U_{n+m}+\cdots$

מכאן

$$S_{n+m}=S_n+(S_{n+m}-S_n)$$

מכאן אפשר למצוא גבול לפי m

כאשר $m\to\infty$

$$\lim_{m\to\infty} S_{n+m}=S_n+\lim_{m\to\infty}\underbrace{(S_{n+m}-S_n)}_{r_n}$$

$$S=S_n+r_n$$

$$S=\lim_{n\to\infty}(S_n+r_n)=\lim_{n\to\infty}S_n+\lim_{n\to\infty}r_n$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} r_n=0}$$

כי גבול $\lim_{n\to\infty} S_n=S$

קיבלנו. משפט מספיק: חשוב

מספרים] אם טור ② (הנתון) מתכנס וגם
שואפים ל-0 | חיים שווים

טור גאומטרי אין סופי

נתבונן בטור $a, aq, aq^2, \dots, aq^{n-1}, \dots$

$a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + \dots$

כיוון שלכל q מכניסים סכומים חלקיים

$S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1}$

כמו שיודעים - מה זה סכום סופי
של סדרה → טור הנדסי

$$\begin{cases} S_n = \dfrac{a - aq^n}{q-1} \\ \text{או} \\ S_n = \dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1} \end{cases}$$

אותו דבר.

אפשר לכתוב סכום בצורה אחרת

$$S_n = \frac{a_1q^n}{q-1} - \frac{a_1}{q-1} = \frac{a}{1-q} - \frac{a_1q^n}{1-q}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1q^n}{1-q}\right]$$ $|q|<1$:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_1}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{1-q}-\lim_{n\to\infty}\frac{aq^n}{1-q}=\frac{a_1}{1-q}-\lim_{n\to\infty}\frac{aq^n}{1-q}$$

$$=\frac{a_1}{1-q}-a\lim_{n\to\infty}\frac{q^n}{1-q}\to 0$$

$|q|<1$

ממשפט כך ק מתכנס, אם״ם אם

$|q|<1$

קיים גבול! $=\frac{a_1}{1-q}$

ז״א סכום טור הנדסי

$$\boxed{S_n=\frac{a_1}{1-q}}$$

אם $|q|<1$

אם $|q|\geq 1$ לא אפשר

אינסופי. מכאן, סכום של הטור