

# מבחן בקורס הסתברות 1

סמסטר ב' 2017

מועד א'

פרופ' דן חפץ

אוניברסיטת אריאל

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה למדעי המחשב

משך הבחינה: 3 שעות

המבחן הינו עבור מספרי קורס: 1-7028410-2

מבנה המבחן: 4 שאלות ללא בחירה.

**הנחיות:**

1. המבחן הינו עם חומר סגור ובכתב יד ללא שימוש בשום אמצעי אלקטרוני (מותר מחשבון פשוט אם כי אין בו צורך). עם זאת, כל סטודנט רשאי להביא דף אחד מגודל A4 כתוב משני צדדיו. על התלמיד לכתוב את שמו ומספר תעודת הזהות שלו על הדף הנ"ל.
2. אין לכתוב בעפרון.
3. יש להוכיח כל טענה שאתם כותבים גם אם לא התבקשתם לעשות זאת במפורש בשאלה.
4. ניתן להסתמך ללא הוכחה על כל טענה שנלמדה בשיעור (אלא אם כן זו הטענה שהנכם מתבקשים להוכיח בשאלה). יש לצטט את הטענה עליה הנכם מסתמכים בצורה ברורה.

### שאלה 1 (25 נקודות):

יהיו  $X_1 \sim \text{Bin}\left(2, \frac{1}{2}\right)$ ,  $X_2 \sim U(1, 2, 3)$  משתנים מקריים בלתי תלויים. נגדיר

$$Z := \max\{X_1, X_2\} \text{ ו- } Y := \min\{X_1, X_2\}.$$

- א. (12 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של  $Y$  ו- $Z$ .
- ב. (8 נקודות) חשבו את ההתפלגויות השוליות של  $Y$  ושל  $Z$ .
- ג. (5 נקודות) האם  $Y$  ו- $Z$  בלתי תלויים?

### שאלה 2 (25 נקודות):

- א. (6 נקודות) יהי  $X$  משתנה מקרי המקבל רק ערכים שלמים אי-שליליים. הוכיחו ש- $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$ . ניתן להשתמש בפעולות שונות על טורים (כגון הפרדה לסכומים, שינוי סדר סכימה וכו') ללא הסבר מדוע זה מותר.
- ב. (10 נקודות) מטילים קוביה הוגנת מספר פעמים כאשר כל ההטלות בלתי תלויות. המספרים 1 ו-2 שעל הקוביה צבועים באדום, המספרים 3 ו-4 בכחול והמספרים 5 ו-6 בצהוב. לכל  $k$  טבעי חשבו את ההסתברות שב- $k$  ההטלות הראשונות התקבלו מספרים משני צבעים שונים לכל היותר (שימו לב גם לערכי  $k$  קטנים).
- ג. (9 נקודות) יהי  $X$  משתנה מקרי הסופר את מספר ההטלות הנדרשות בניסוי המתואר בסעיף הקודם עד שמתקבלים בפעם הראשונה כל שלושת הצבעים. הוכיחו ש- $E(X) = 5.5$  (שוב שימו לב לערכים הקטנים).

### שאלה 3 (25 נקודות):

- כד מכיל 8 כדורים לבנים, 4 כדורים שחורים ו-2 כדורים אדומים. מוציאים מקרית וללא החזרה שני כדורים מהכד. על כל כדור לבן שנוציא נפסיד שקל, על כל כדור שחור נרוויח שני שקלים ועל כדור אדום לא נפסיד ולא נרוויח. יהי  $X$  משתנה מקרי הסופר כמה כסף הרווחנו (שימו לב שהרווח עשוי להיות שלילי, כלומר הפסד).
- א. (10 נקודות) חשבו את ההתפלגות של  $X$ .
  - ב. (8 נקודות) בהנתן המאורע  $\{X \geq 0\}$ , מה ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו שחורים?
  - ג. (7 נקודות) מהמר משחק במשחק הזה שוב ושוב עד הפעם הראשונה שהוא מפסיד כסף (בסיבוב ספציפי, לאו דווקא בסך הכל). מה תוחלת מספר הסיבובים שהוא ישחק?

### שאלה 4 (25 נקודות):

- מטילים קוביה הוגנת  $n$  פעמים כאשר כל ההטלות בלתי תלויות. נסמן ב- $X$  את מספר הזוגות של הטלות רצופות שהתקבלו בהן שתי תוצאות שונות. נסמן ב- $Y$  את מספר הזוגות של הטלות רצופות שהתקבלו בהן שתי תוצאות מאותה זוגיות (כלומר, שתיהן זוגיות או שתיהן אי זוגיות).
- א. (15 נקודות) חשבו את  $Cov(X, Y)$ .
  - ב. (5 נקודות) האם  $X$  ו- $Y$  בלתי תלויים?
  - ג. (5 נקודות) האם מקדם המתאם של  $X$  ו- $Y$  חיובי, שלילי או 0? נמקו תשובתכם (ניתן להניח  $Var(X) \neq 0$  ו- $Var(Y) \neq 0$ ).