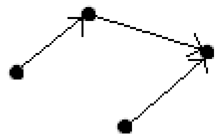
<u>תורת הגרפים</u>

<u>הגדרה</u>: ענף במתמטיקה העוסק בתכונותיהם של גרפים.

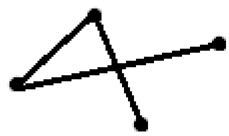
<u>מושגים:</u>

<u>גרף</u>: קבוצה של צמתים (קודקודים) וקבוצה של קשתות בין הקודקודים.

- גרף מכוון: גרף שבו יש משמעות לכיוון של הקשת.
  סימון: $D = (V, E)$. כאשר V היא קבוצת הצמתים (הקודקודים).
  ו $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{V} \times \mathrm{V}$ היא קבוצת הקשתות (זוגות סדורים). לכל קשת יש כיוון:
  $e = (u, v)$ היא קשת שיוצאת מ u ומגיעה ל v.

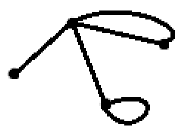


- גרף לא מכוון: אין משמעות לכיוון של הקשת.
  סימון: $G = (V, E)$. כך שבמקרה זה: $E \subseteq \{\{u, v\} | \, u, v \in V\}$.



<u>גרף פשוט</u>: גרף שבין כל 2 צמתים יש לכל היותר קשת אחת ואין קשת מקודקוד לעצמו.

גרף לא פשוט:



<u>שכנות:</u> 2 קודקודים יקראו שכנים אם קיימת קשת ביניהם.

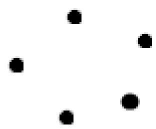
<u>דרגה של צומת:</u> מספר הקשתות המחוברות לצומת.

סימון: $\mathrm{deg}ree\ (v)$.

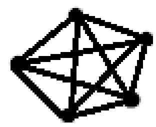
- בגרף מכוון יש <u>דרגת כניסה</u>: מספר הקשתות הנכנסות לצומת. $\mathrm{indegree}(v)$
  <u>ודרגת יציאה</u>: מספר הקשתות היוצאות מהצומת. $\mathrm{outdegree}(v)$.
- עלה: קודקוד בעץ שהדרגה שלו היא 1.
- צומת מבודד: קודקוד שהדרגה שלו היא 0.
- גרף שדרגות כל הצמתים בו שוות ל k נקרא גרף k - רגולרי.

משפט: סכום כל הדרגות בגרף הוא זוגי (כי כל קשת "תורמת" 2 דרגות: כניסה ויציאה) ושווה ל $\sum_{\mathrm{v}\in\mathrm{V}}\mathrm{degree(v)} = 2|\mathrm{E}|$ (פעמיים מספר הקשתות).

גרף ריק: גרף שבו אין קשתות. סימון N_n כאשר n - מספר הקודקודים.



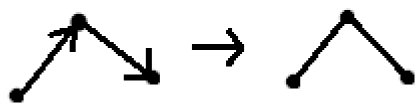
גרף שלם: גרף שבו בין כל 2 קודקודים יש קשת. סימון k_n כאשר n - מספר הקודקודים.



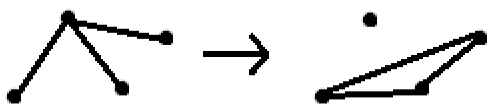
קליקה: תת גרף שבו בין כל 2 קודקודים יש קשת. (תת גרף שלם)

גרף אינסופי: גרף שבו קבוצת הצמתים היא אינסופית.

גרף תשתית: גרף התשתית של גרף מכוון הוא גרף שאינו מכוון שבו יש אותם קודקודים ואותם קשתות כמו במכוון רק ללא הכיוון.



גרף משלים: הגרף המשלים שיסומן כ $\overline{\mathrm{G}}$, של גרף G הוא גרף עם אותם קודקודים כך שבמקום שלא הייתה קשת בגרף המקורי יש קשת ב $\overline{\mathrm{G}}$ ובמקום שהייתה קשת ב G אין קשת ב $\overline{\mathrm{G}}$.



מסלול: סדרה של קשתות סמוכות בגרף (כך שסוף קשת מתחברת לתחילת חברתה). גרף מסלול (גרף שכולו מסלול אחד) יסומן כ P_n.

- מסלול פשוט: מסלול שלא עובר באף צומת יותר מפעם אחת.
- מסלול אוילר: מסלול העובר בכל הקשתות בגרף בדיוק פעם אחת.
  - מסלול אוילר קיים אם ורק אם יש בדיוק 0 או 2 צמתים בעלי דרגה אי זוגית.

- מסלול המילטוני: מסלול העובר בכל הצמתים בגרף בדיוק פעם אחת.
- אורך של מסלול – מספר הקשתות במסלול.

<u>מרחק בין 2 קודקודים</u>: כמות הקשתות במסלול **<u>הקצר</u>** ביותר בין 2 הקודקודים. אם אין מסלול אז המרחק שווה לאינסוף. מרחק מקודקוד לעצמו שווה 0.

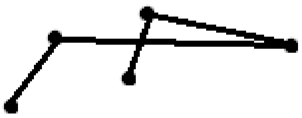
פונקצית המרחק בגרף לא מכוון מקיימת:

$$d(u,v) = d(v,u)$$

$$d(u,v) + d(v,w) \geq d(u,w)$$

<u>קוטר של גרף</u>: המרחק הגדול ביותר בגרף. אם הגרף אינו קשיר אז הקוטר הוא אינסוף.

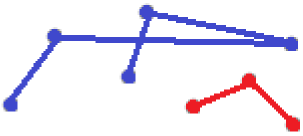
<u>גרף קשיר</u>: גרף לא מכוון שבו בין כל שני צמתים קיים מסלול (אפשר להגיע מכל קודקוד לחברו).



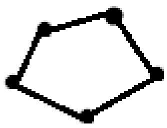
גרף לא קשיר:

<u>רכיב קשירות</u>: תת גרף קשיר מקסימאלי (כלומר, הגרף מתפרק לתתי גרפים כך שמכל קודקוד בתת גרף הראשון אי אפשר להגיע לאף קודקוד בתת הגרף השני.

רכיבי הקשירות:



<u>מעגל</u>: מסלול לא ריק המתחיל ומסתיים באותו צומת. גרף מעגל הוא גרף שכולו מעגל. יסומן כ C_n כאשר n - מספר הקודקודים.



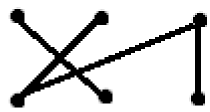
- מעגל פשוט: מעגל שלא עובר באף צומת יותר מפעם אחת.
- מעגל אוילר: מעגל העובר בכל הקשתות בגרף בדיוק פעם אחת.
  - מעגל אוילר קיים אם ורק אם אין צמתים בעלי דרגה אי זוגית.
- מעגל המילטוני: מעגל העובר בכל הצמתים בגרף בדיוק פעם אחת.

עץ: גרף קשיר ללא מעגלים. סימון T_n כאשר n - מספר הקודקודים.

- עץ בינארי: עץ שיש לו שורש ולכל קודקוד יש לכל היותר 2 בנים (והדרגה בעץ היא לכל היותר 3).

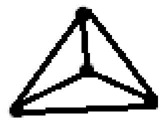
יער: גרף ללא מעגלים. (לא חייב להיות קשיר, כל רכיב קשירות הוא עץ).

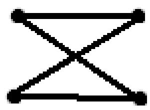
גרף דו צדדי: גרף שאפשר לחלק את הקודקודים שלו ל 2 קבוצות זרות כך שלא קיימת קשת בין 2 קודקודים השייכים לאותה קבוצה.



גרף דו צדדי מלא: גרף דו צדדי בו נמצאות כל הקשתות האפשריות. סימון: $K_{n,m}$ כאשר n קודקודים בצד אחד ו m קודקודים בצד שני.

גרף מישורי: גרף שניתן לייצג אותו במישור מבלי שהקשתות יחתכו זו את זו.



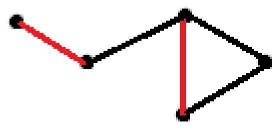
גרף שאינו מישורי: 

- פאה בגרף: פאה בגרף היא השטח הכלוא בין צלעות הגרף. הפאה החיצונה נספרת גם היא ונקראת הפאה האינסופית. קבוצת הפאות תסומן בד"כ ב F.
  בגרף  יש 3 פאות.

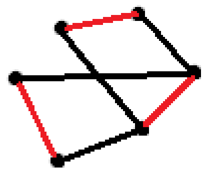
- <u>נוסחת אוילר</u>: יהא G גרף <u>מישורי</u> <u>קשיר</u>, V - קבוצת הקודקודים, E - קבוצת הצלעות ו F - קבוצת הפאות. אז מתקיים: $|V| - |E| + |F| = 2$.
- הכללת הנוסחא לגרפים לא קשירים: $|V| - |E| + |F| = 1 + c$ כאשר c - מספר רכיבי הקשירות בגרף.
- <u>משפט</u>: בגרף מישורי מתקיים: $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$
- <u>משפט</u>: בגרף מישורי קיים קודקוד אחד לפחות שדרגתו קטנה או שווה ל 5.

<u>גרף k - צביע</u>: גרף שניתן לצבוע את הקודקודים שלו ב k צבעים כך שכל 2 קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע. מספר הצביעה של הגרף הוא ה k המינימאלי שנדרש כדי לצבוע את הקודקודים בצורה חוקית ויסומן כ: $\chi(\mathrm{G})$.

<u>זיווג בגרף</u>: זיווג בגרף G הוא אוסף של קשתות מהגרף כך שאין 2 קשתות מהאוסף שנוגעות בקודקוד משותף.



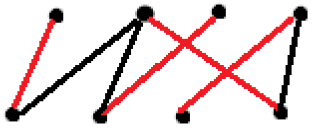
<u>זיווג מושלם</u>: זיווג מושלם ב G הוא זיווג שבו משתתפים כל הקודקודים בגרף. (חלוקת קודקודי הגרף לזוגות כך שכל זוג קודקודים מחוברים בקשת)



<u>משפטים בתורת הגרפים</u>

- בגרף קשיר לא מכוון עם n יש לפחות $n - 1$ צלעות.
- בכל גרף G המקיים: $|E| \geq |V|$ ו $|V| \geq 3$ יש מעגל.
- גרף הוא דו צדדי אם ורק אם הוא 2 צביע.
- גרף הוא דו צדדי אם ורק אם אין בו מעגלים מאורך איזוגי.
- כל עץ הוא גרף דו צדדי.
- <u>משפט ארבעת הצבעים</u>: כל גרף מישורי הוא 4 – צביע.
- <u>משפט טורן</u>: הגרף בעל n קודקודים ומספר קשתות מקסימאלי שאינו מכיל קליקה בגודל $t + 1$ הוא גרף המחולק ל t קבוצות צמתים זרות מאותו גודל (עד כמה שאפשר) ושלכל צומת יש קשת לכל שאר הצמתים בקבוצות האחרות.

- <u>משפט Hall (משפט החתונה)</u>: יהא $G = (V \uplus U, E)$ גדף דו צדדי, $|U| = |V|$, אם לכל תת קבוצה של קודקודים $S \subseteq V$ מתקיים: $|\Gamma(S)| \leq |S|$ כאשר $\Gamma(S)$ מייצג את אוסף השכנים של קודקודי S אז קיים ב G זיווג מושלם.

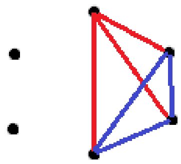


<u>מסקנה</u>: יהא G גדף דו צדדי k רגולרי אז קיים ב G זיווג מושלם.

- <u>משפט רמזי</u>: לכל n טבעי קיים גרף שלם כך שאם נצבע את הקשתותה שלו ב 2 צבעים בהכרח נקבל תת גרף שלם (קליקה) בגודל n.

- לכל גרף K_n, אם נצבע את הקשתות שלו ב 2 צבעים שונים, בהכרח נקבל קליקה בגודל $R_{n,m}$ הצבועה כולה באחד מן הצבעים כאשר $R_{n,m}$ הוא מספר רמזי.

משפט רמזי עבור K_6:



- מספר רמזי $R(m,n) = r$ אומר שאם נצבע את K_r ב 2 צבעים (כחול ואדום) אז בהכרח נקבל K_m צבועה כולה בכחול או K_n צבועה כולה באדום. מהדוגמא לעיל רואים כי: $R(3,3) = 6$ - אם נצבע את K_6 ב 2 צבעים (אדום וכחול) נקבל בהכרח קליקה בגודל 3 (משולש) הצבועה כולה באדום או קליקה בגודל 3 הצבועה כולה בכחול.