בס"ד

איבר (כמו איבר לגוף)

סימון: $1 \in \mathbb{N}$

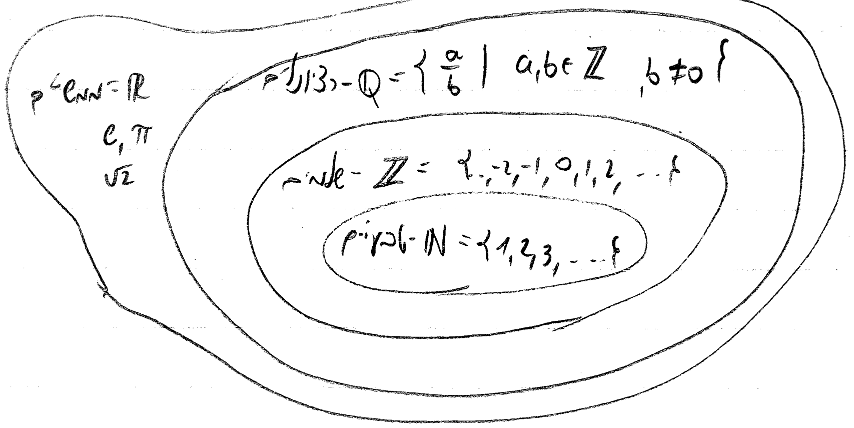
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ (חלקי, מוכל) (כמו קבוצה גוף)

יש כאלו שמגדירים 0 כטבעי

$\mathbb{Z}^+ = \{0,1,2,3,4,\dots\}$

יש גם מרוכבים

רציונלים - פיתוח עשרוני סופי או מחזורי. החל ממקום מסוים



נ.ב. שאל רבי אשי מדוע טוב לספר את הבחירה שאין לומר לא דין:

האם בכל תת קבוצה לא ריקה של $\mathbb{R}$ יש איבר מינימלי? לא, למשל בקטע הפתוח $(0,1)$ אין.

" " " " " " $\mathbb{Z}$ " " " ? לא, למשל $\{-1,-2,-3,\dots\}$

" " " " " " $\mathbb{N}$ " " " ? כן!

אקסיומה/מכתיבים → עקרון הסדר הטוב (well ordering principle - WOP): בכל תת קבוצה לא ריקה של $\mathbb{N}$ יש איבר מינימלי.

דוגמה לשימוש של עקרון הסדר הטוב

הסבר כללי:

$$\sum_{i=3}^{7} i = 3+4+5+6+7$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = 2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4+\dots+2\cdot n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = ?$$

$n=1$: $\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2\cdot1-1 = 1$

$n=2$: $\sum_{i=1}^{2}(2i-1) = \underbrace{2\cdot1-1}_{1} + \underbrace{2\cdot2-1}_{3} = 4$

$n=3$: $\sum_{i=1}^{3}(2i-1) = 1+3+5 = 9$

$n=4$: $\sum_{i=1}^{4}(2i-1) = 1+3+5+7 = 16$

סכמות א' ציונים

אנחנו כבר מנחשים ש $\sum^{5}$ יתן 25 וכו'.

טענה: לכל $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$

הוכחה: נניח בשלילה (הולכים הפוך להפריך) שהטענה אינה נכונה לכל ה-ח"מ. נחלק את $\mathbb{N}$ לשתי קבוצות

T = ה-ח"מ שעבורם הטענה מתקיימת

לדוג': $1,2,3,4 \in T$

S = ה-ח"מ שעבורם הטענה לא מתקיימת

לפי הנחת השלילה $S \neq \emptyset$ וכמובן $S \subset \mathbb{N}$

לפי WOP יש ב-S איבר מינימלי $a \in S$

ומתקיים $a > 1$ (כי $1 \in T$)

בס"ד

כלומר $\boxed{\sum_{i=1}^{a}(2i-1) \neq a^2}$

מינימלי a, נובע כי $\overbrace{a-1}^{\text{טבעי כי } a>1}$ כבר אינו ב-S אלא ב-T ולכן

$$\sum_{i=1}^{a-1}(2i-1) = (a-1)^2$$

(אנחנו רוצים להגיע לסתירה ל-□. כלומר ההנחה שאם סכום a-1 אי"ז ת"מ $(a-1)^2$ אז לא יתכן שסכום a אי"ז ראשונים לא ת"מ a^2).

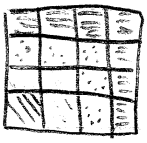
⇓

הנ"א

$$\sum_{i=1}^{a}(2i-1) = \sum_{i=1}^{a-1}(2i-1) + (2a-1) = (a-1)^2 + (2a-1) = a^2-2a+1+2a-1 = a^2$$

בסתירה ל-□. (הנחנו בשלילה, הגענו לסתירה, לכן הנחת השלילה שגויה והטענה נכונה!)
מ.ש.ל.

<u>בונוס</u> - שכנוע ע"י ציור: (<u>לא</u> הוכחה)



$n=4$: $1+3+5+7=4^2$

השראה אופציונלית → <u>אינדוקציה חלשה:</u>

כלי חשוב להוכחת טענות דומות לנ"ל - שאפשר לבדוק נכונות ל-n-ים קטנים ורוצים להוכיח לכל n טבעי.

ניתן דוגמאות:

<u>טענה(?)</u>: לכל n טבעי: $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1}-1$

$n=1$: $2^0+2^1=3=2^2-1$ ✓

$n=2$: $2^0+2^1+2^2 \stackrel{?}{=} 2^{2+1}-1$ ✓

$n=3$ ..

<u>טענה(?)</u>: לכל n טבעי: $2^{(2^n)}+1$ ראשוני

$n=1$: 5 ראשוני

$n=2$: 17 ראשוני

$n=3$: 257 "

$n=4$: 65537 ראשוני

אבל זה שבדקנו עבור ל-n-ים קטנים זה לא מספיק! האמת היא שהטענה הראשונה נכונה (אותה תוכיחו בתרגול). את השניה שיער פרמה (במאה ה-17). מאה שנים אחריו גילה אוילר שהחמישי בסדרה אינו ראשוני. היום ע"י מחשב בדקו עד $n=32$ ולא מצאו אפילו ראשוני אחד! [illegible]

בס"ד

הכל שעבר איתנו מנחוש להוכחה זה האינדוקציה.

נניח שאני יודעת שהטענה נכונה עבור 1 (עומד מבולח) שהיא נכונה עבור k נכונה עבור k+1, אז נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$.

עקרון האינדוקציה החלשה

יהי $S(n)$ תנאי עבור $n \in \mathbb{N}$. **אם**:
(בסיס) $S(1)$ נכונה
(צעד האינדוקציה) מהעובדה ש-$S(k)$ נכונה נובע ש-$S(k+1)$ נכונה
אז $S(n)$ נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$

הסבר - איך מבצעים הוכחה באינדוק'
הטענה נכונה ל- $k=1$
הה': נניח שהטענה נכונה ל-k
צעד האינדוק': (תוך שימוש בה') הטענה נכונה ל-$(k+1)$.

<u>דוגמא</u>: נוכיח באינדוק' את הטענה שראינו קודם:
טענה: לכל $n \in \mathbb{N}$ $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=n^2$

כלומר צ"ל: $1+3+5+7+\dots+(2n-1)=n^2$ $\boxed{\text{-זה } S(n)\text{, הה' }}$

הוכחה באינדוקציה:

<u>בסיס</u>:

בדיקה עבור $k=1$: $\sum_{i=1}^{1}(2i-1)=1=1^2$ $\boxed{S(1) \text{ נכונה}}$

הנחת האינדוק' עבור k:

$$\sum_{i=1}^{k}(2i-1)=k^2$$

צ"ל עבור $k+1$:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)=(k+1)^2$$

$\boxed{\text{מההנחה ש-}S(k)\text{ נכונה נוכיח כי }S(k+1)\text{ נכונה.}}$

<u>הוכחה</u>:

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)=\sum_{i=1}^{k}(2i-1)+(2(k+1)-1)\underset{\text{לפי הה'}}{=}k^2+2(k+1)-1=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

מש"ל.

<u>דוגמא</u>: הוכיח באינדוק' כי לכל $n \in \mathbb{N}$ $3 \mid 4^n+5$ ("3 מחלק את 4^n+5" לדוג': $5 \mid 15$, $5 \mid 100$ אבל $5 \nmid 7$)

<u>הוכחה</u>: (דבר ראשון - בואו נשתכנע... $n=1 \Leftarrow 3 \mid 9$, $n=2 \Leftarrow 3 \mid 21$ ...)

בדיקה עבור $k=1$: $3 \mid 4^1+5$ ✓

הה' עבור k: $3 \mid 4^k+5$

צ"ל עבור $k+1$: $3 \mid 4^{k+1}+5$

הוכחה: (צריכים להשתמש איכשהו בהה'...) נרצה לבטא את $4^{k+1}+5$ ע"י 4^k+5 כדי להשתמש בהה'.

$$4^{k+1}+5=\underbrace{4\cdot(4^k+5)}_{\substack{\text{לפי הה' } 3 \mid 4^k+5\\ \text{ולכן } 3 \mid 4(4^k+5)}}\underbrace{-15}_{3 \mid 15} \Rightarrow 3 \mid 4^{k+1}+5$$

מש"ל

בס״ד

הוכחת עקרון האינדוקציה החלשה

(ע״י מה? כמובן ע״י עקרון הסדר הטוב... השקול היחיד שלמדנו...)

נניח בשלילה כי הטענה $S(n)$ לא נכון לאיזהו $n\in\mathbb{N}$.

נגדיר

$T=\{n\in\mathbb{N} \mid$ הטענה $S(n)$ לא נכון $\}$.

אז $T\subset\mathbb{N}$, $T\neq\emptyset$ לפי הנחת השלילה.

$\Rightarrow$ יש ב-T איבר מינימלי a, בהכרח $a\neq 1$ (כי $1\notin T$)

עקרון הסדר הטוב

$\Rightarrow$ $a-1\notin T$ כלומר $S(a-1)$ נכון $\Rightarrow$ $S(a)$ נכון $\Rightarrow$ $a\notin T$ סתירה.

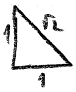
ממינימליות a

ובגלל כי $a\neq 1$

לפי הנחת עקרון האינדוקציה החלשה

דיון: אם רוצים להוכיח שטענה נכונה לכל n עבור הגדול מ-n_0 מה ישתנה?
(חישבו איך נבדוק את בסיס האינדוקציה...)

אי-רציונליות של $\sqrt{2}$

את המספר $\sqrt{2}$ הכירו היוונים הקדמונים - הפיתגוראים באופן גאומטרי 

ובהתחלה הם האמינו שאפשר להציג אותו כיחס $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ $a,b\in\mathbb{N}$. כשהם גילו שלא, ולפי כך כתוב אין פיתגורס הורה לשמור את הגילוי בסוד, ויש טענה שאפילו דן את אחד החברים באסכולה הפיתגוראית למוות בטביעה כי הוא אפשר לחשוף את הסוד.
רק 300 שנה אחר כך, אוקלידס בספרו "האלמנטים" - הוכיח מתמטית כי $\sqrt{2}$ אי-רציונלי. בערך 300 לפנה"ס

הפיתגוראים קראו למספרים שלא ניתנים להציג כ- $\frac{a}{b}$ $a,b\in\mathbb{Z}$ "לא רציונליים" - כלומר לא הגיוניים, - אין להם רישום בכתיבת מס' עשרוני עם מספר סופי של ספרות מחזורי, ולכן מהותם אשר קשה להתגבר עליהם ולא לקבוע אותם ישירות, מה שנראה להם לא הגיוני.

עכשיו נראה את ההוכחה של אוקלידס (בסימונים של ימינו). נביא הוכחה שאני מנסה לכך ש-$\sqrt{2}$ אי רציונלי, אבל בקורס הזה לא נוכל להסתפק בה כי היא מסתמכת על משהו שאנחנו נראה מובן מאליו אבל לא הוכחנו. תנסו לחשוב מה הוא היעדר החסרה כדי שתעבוד ההוכחה...

"הוכחה" לא מושלמת לכך ש-$\sqrt{2}$ אי רציונלי

טענת עזר: לכל $a\in\mathbb{Z}$ a אי זוגי $\overset{\text{אמ"מ}}{\Longleftrightarrow}$ a^2 אי זוגי (דוגמאות...)
הסבר הסימון

הוכחה: $(\Leftarrow)$ נתון: a אי"ז. צ"ל: a^2 אי"ז.
הוכחה: a אי"ז $\Leftarrow$ קיים $k\in\mathbb{Z}$ כך ש- $a=2k+1$ $\Leftarrow$
$a^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(k^2+2k)+1$ אי"ז
$(\Rightarrow)$ נתון: a^2 אי"ז. צ"ל: a אי"ז
הוכחה: נניח בשלילה כי a זוגי $\Leftarrow$ קיים $k\in\mathbb{Z}$ כך ש- $a=2k$ $\Leftarrow$
$a^2=(2k)^2=4k^2$ זוגי, סתירה.

מסקנה: a זוגי $\Leftrightarrow$ a^2 זוגי (תזכורת מתמטית: א $\Leftarrow$ ב אמ"מ לא ב $\Leftarrow$ לא א
ולכן אם א $\Leftrightarrow$ ב אז לא א $\Leftrightarrow$ לא ב).