סיכום הנושא טורים עם סימנים מתחלפים המתבסס על פתרונות מלאים של דף תרגיל 2: התכנסות בהחלט, התכנסות בתנאי, משפט לייבניץ

הטור (1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \dots + a_n - \dots$

כאשר $a_n \geq 0$ לכל $n \in \mathbb{N}$, נקרא טור עם סימנים מתחלפים.

לטור הזה ניתן להתאים טור (2) $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n+1}a_n| = \sum_{n=1}^{\infty}a_n$, הבנוי מערכי מוחלט של איברי הטור (1) והוא טור עם איברים חיוביים, כאשר התכנסות ניתן לבדוק באמצעות מבחני ההתכנסות שנלמדו.

הוכח כי אם $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ מתכנס ובמקרה כזה אומרים כי הטור (1) מתכנס בהחלט [שימו לב, כי הגורם $(-1)^{kn+m}$ לא בהכרח מביא לטור עם סימנים מתחלפים, למשל: $(-1)^{2n+3} = -1$ כי $(-1)^{2n+3} = \underbrace{(-1)^{2n}}_{1}\cdot\underbrace{(-1)^3}_{-1} = -1$ וזה אומר שלאחר הוצאת 1- מחוץ לסוגריים, נקבל טור עם איברים חיוביים; במקרה $(-1)^{2n+4} = 1$ נותן טור עם איברים חיוביים וכו'. לפי גורם $(-1)^n$, $(-1)^{n-1}$, $(-1)^{3n}$, $(-1)^{n+1}$, $(-1)^{5n+k}$; $[(-1)^3]^n = (-1)^n$; $(-1)^{5n+k} = (-1)^k\cdot[(-1)^5]^n$

ניתן לקבוע שמדובר על הטור עם סימנים מתחלפים.

במקרים כאלו לפתרון יכולים להיות שלושה שלבים:

I בדיקה שטור הוא טור עם סימנים מתחלפים.

II בדיקת התכנסות בהחלט (אם טור מתכנס בהחלט, אז הוא מתכנס ואין צורך בהמשך הבדיקה)

III שימוש במשפט לייבניץ לטורים עם סימנים מתחלפים, כלומר בדיקת התנאים:

(1) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

(2) $a_{n+1} \leq a_n$ לכל n (יכול להיות החל מ-N מסוים)

אם שני התנאים מתקיימים אומרים כי האיברים a_n מונוטונית שואפים ל-0

$\boxed{1.}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n-1}$ טור עם סימנים מתחלפים $\longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2^n-1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-1} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ טור הנדסי מתכנס $0<q<1 \Rightarrow$ מתכנס $\Rightarrow$ הטור הנתון מתכנס בהחלט.

$\boxed{2}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n-1}(-1)^n$ I טור עם סימנים מתחלפים $\longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2^n+1}{3^n-1}(-1)^n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n-1}$ II נבדוק התכנסות בהחלט

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{3^n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overset{?}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{b_n}$$ נבדוק שקילות ל-

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2^n+1)\cdot 3^n}{(3^n-1)\cdot 2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{2^n}(1+\frac{1}{2^n})\cancel{3^n}}{\cancel{3^n}(1-\frac{1}{3^n})\cancel{2^n}} = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

מתכנס כי טור הנדסי ו- $q=\frac{2}{3}$ $\Longleftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ <u>הטור הנתון מתכנס בהחלט</u>.

$\boxed{3}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^n \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}\right)^n$ <u>נבדוק התכנסות בהחלט</u>

טור עם סימנים מתחלפים

לפי מבחן השורש (מבחן קושי)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} = 0 < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

מתכנס $\Longleftarrow$ <u>הטור הנתון מתכנס בהחלט</u>

$\boxed{4}$ $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)}$ I <u>הטור הוא טור עם סימנים מתחלפים</u>

II <u>נבדוק התכנסות בהחלט</u> $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)} \longrightarrow \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(\ln n)}$

לפי המשפט $\ln(n) < n^{\alpha}$ כאשר $n\to\infty$ לכל $\alpha>0$, נוכל לקבוע כי $\ln n < n$, מכאן

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} < \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n} < \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(\ln n)}$$

<u>נגדיל את מכנה של איבר</u> a_n אם מ- $\ln n$ נעבור ל- n ובזה נקטין את a_n

טור הרמוני מתבדר, לכן לפי מבחן ההשוואה גם הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln(\ln n)}$ מתבדר, כלומר <u>אין התכנסות בהחלט</u>

$$\left[\frac{1}{\infty}\right]$$

III הטור הוא טור עם סימנים מתחלפים לכן נבדוק האם תנאי משפט לייבניץ מתקיימים:

(1) $\lim_{n\to\infty}a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln(\ln n)} = 0$

(2) $a_{n+1} = \frac{1}{\ln(\ln(n+1))} < \frac{1}{\ln(\ln n)} = a_n$

כי $\ln n = y$ זו פונקציה עולה ואם מכנה גדל, האיבר קטן לכן $a_{n+1} < a_n$ לכל n

מכאן נובע כי הטור הנתון לפי משפט לייבניץ <u>מתכנס בתנאי</u>.

$\boxed{5.}$ $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \ln\left(\frac{e^n+1}{e^n}\right)$ $\to 0$ (פנים הלוגריתם שואף ל-1)

I טור עם סימנים מתחלפים

II נבדוק התכנסות בהחלט

$$\sum_{n=2}^{\infty}\underbrace{\ln\left(\frac{e^n+1}{e^n}\right)}_{a_n} = \sum_{n=2}^{\infty}\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{e^n}\right)}_{a_n} \qquad \frac{1}{e^n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ידוע גבול מיוחד: $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}=1$

נשתמש במבחן השוואה גבולי לפי הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{e^n}}_{b_n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\left(\frac{1}{e^n}\right)\right)}{\left(\frac{1}{e^n}\right)}=1$$

לפי הגבול המיוחד

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n=\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{e^n}\right) \overset{\Downarrow}{\sim} \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n=\sum_{n=2}^{\infty}b_n$$

מתכנס כטור הנדסי עם $q=\frac{1}{e}<1$

$\Leftarrow$ הטור $\sum_{n=2}^{\infty}a_n$ מתכנס $\Leftarrow$ הטור הנתון מתכנס בהחלט

$\boxed{6.}$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\overbrace{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}{3\cdot5\cdot7\cdots(2n+1)}}^{a_n>0}$

I טור עם סימנים מתחלפים

II נבדוק התכנסות בהחלט

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overbrace{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}^{n \text{ גורמים}}}{\underbrace{3\cdot5\cdot7\cdot9\cdots(2n+1)}_{n \text{ גורמים}}}=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots\cancel{(2n-3)}\cancel{(2n-1)}}{3\cdot5\cdot7\cdots\cancel{(2n-1)}(2n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\quad\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq0\right)$$

מתבדר $\Leftarrow$ מתבדר $\Leftarrow$ אין התכנסות בהחלט.

III לטור עם סימנים מתחלפים נבדוק התכנסות בתנאי לפי משפט לייבניץ

(1) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$

(2) $a_{n+1}=\frac{1}{2n+3}<\frac{1}{2n+1}=a_n$ לכל $n\in N$

$\Rightarrow$ תנאי משפט לייבניץ מתקיימים

והטור הנתון מתכנס בתנאי

$\boxed{7}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{5^{n+1}n!\,n!}$

I טור עם סימנים מתחלפים

II נבדוק התכנסות בהחלט

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{(2n)!}{5^{n+1}n!\cdot n!}}_{a_n}$$

לפי מבחן המנה (מבחן ד'אלמבר)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!\cdot n!\cdot n!\cdot\cancel{5^{n+1}}}{\cancel{5^{n+2}}_{5}(n+1)!(n+1)!(2n)!}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{5\cdot(n+1)(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{5n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{4}{5}<1$$

$\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס $\Leftarrow$ הטור הנתון מתכנס בהחלט

$\boxed{8}$ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\, n}{3n\sqrt{n-1}+2}$$

I טור עם סימנים מתחלפים

II נבדוק התכנסות בהחלט

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{n}{3n\sqrt{n-1}+2}}_{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cancel{n}}{3\cancel{n}\left(\sqrt{n-1}+\frac{2}{3n}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{3\left(\sqrt{n-1}+\frac{2}{3n}\right)}}$$

אפשר גם להציג את a_n בצורה כזו

נשתמש במבחן השוואה גבולי לפי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{3\left(\sqrt{n-1}+\frac{2}{3n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{n-1}}=\frac{1}{3}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}}$$

($\frac{2}{3n}\to 0$, $\frac{n}{n-1}\to 1$)

$\lambda=\frac{1}{2}<1$ מתבדר $\Leftarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר $\Leftarrow$ אין התכנסות בהחלט

III נבדוק התכנסות בתנאי לפי משפט לייבניץ לטור עם סימנים מתחלפים.

נבדוק 2 התנאים מתקיימים:

(1) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\left(\sqrt{n-1}+\frac{2}{3n}\right)}\overset{\left[\frac{1}{\infty}\right]}{=}0$ ($\sqrt{n-1}\to\infty$, $\frac{2}{3n}\to 0$)

(2) $a_{n+1}=\frac{1}{3\left(\sqrt{n}+\frac{2}{3(n+1)}\right)}<a_n$ האם לכל n?

$$\frac{1}{3\left(\sqrt{n}+\frac{2}{3(n+1)}\right)}-\frac{1}{3\left(\sqrt{n-1}+\frac{2}{3n}\right)}<0\ \Big/\cdot 3$$

$$\frac{\sqrt{n-1}+\frac{2}{3n}-\sqrt{n}-\frac{2}{3(n+1)}}{\left(\sqrt{n}+\frac{2}{3(n+1)}\right)\left(\sqrt{n-1}+\frac{2}{3n}\right)}\overset{?}{<}0$$

$$\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}+\frac{2}{3n(n+1)}}{\left(\sqrt{n}+\frac{2}{3(n+1)}\right)\left(\sqrt{n-1}+\frac{2}{3n}\right)}<0$$

נכפול מונה ומכנה בביטוי $(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})$

$$\frac{n-1-n+\frac{2(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}{3n(n+1)}}{(\dots)(\dots)(\sqrt{n-1}+\sqrt{n})}<0$$

$$\frac{-1+\frac{2\sqrt{n}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+1\right)}{\frac{3n(n+1)}{\sqrt{n}}}}{(\dots)(\dots)(\dots)}<0 \text{ לכל } n$$

(2) דרך אחרת לבדוק את (2) כלומר את המונוטוניות של השאיפה ל-0 במקרים שגדל גם מונה וגם מכנה של הביטוי עבור a_n נעזר בפונקציה

$$f(x)=\frac{x}{3x\sqrt{x-1}+2}$$

$$f'(x)=\frac{3x\sqrt{x-1}+2-x\left(3\sqrt{x-1}+\frac{3x}{2\sqrt{x-1}}\right)}{\left(3x\sqrt{x-1}+2\right)^2}$$

$$=\frac{2-\frac{3x^2}{2\sqrt{x-1}}}{\left(3x\sqrt{x-1}+2\right)^2}<0 \quad \text{לכל } x>1$$

(כלומר בתחום) $f(x)\downarrow \Rightarrow a_n\downarrow$ (קטנים)

לכן לפי משפט לייבניץ הטור הנתון מתכנס בתנאי

<u>הערה:</u> שלב של בדיקת מונוטוניות שאיפה ל-0 של איבר' הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ במקרה של בדיקת התכנסות בתנאי של הטור עם סימנים מתחלפים $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ הוא שלב חשוב מאוד: למשל, לטור $\sum(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}$ בבדיקה לפי נגזרת הפונקציה $f(x)=\frac{\sin^2 x}{x}$

$$f'(x)=\frac{\sin x(2\cos x-\sin x)}{x^2}$$

קל לראות שהתנאי של מונוטוניות לא מתקיים כי $f'(x)>0$, למשל, בנקודות $x=\frac{5\pi}{4}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ ולא שלילית בכל התחום.

$\boxed{9}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\underbrace{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}_{>0}}\overset{(*)}{=}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n(1+\frac{1}{n})}+\sqrt{n(1-\frac{1}{n})}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\underbrace{\frac{2}{\sqrt{n(1+\frac{1}{n})}+\sqrt{n(1-\frac{1}{n})}}}_{a_n}$$

בפעולות האלו האיבר הכללי של הטור לא השתנה, אבל הצגתו בצורה אחרת מאפשרת יותר בקלות לחקור הטור להשוואה.

<u>I</u> <u>טור עם סימנים מתחלפים</u>

<u>II</u> <u>בדיקת התכנסות בהחלט</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n}\,(\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}_{\to 1}+\underbrace{\sqrt{1-\frac{1}{n}}}_{\to 1})}\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

נשווה לטור $\frac{1}{n^{1/2}}$ מתבדר $\alpha=\frac{1}{2}<1$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\underbrace{(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}})}_{\to 2}}=1\neq 0$$

$\Downarrow$

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר

$\Downarrow$

אין התכנסות בהחלט

<u>III</u> <u>בדיקת התכנסות בתנאי</u>

נבדוק שתנאי משפ' לייבניץ מתקיימים:

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}\underbrace{(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}})}_{\to 2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\overset{[\frac{1}{\infty}]}{=}0$$

$$(2)\ a_n\overset{(*)}{=}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}>\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=a_{n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N}$$

מכנה גדל, אז שבר קטן

לכן לפי משפ' לייבניץ הטור עם סימנים מתחלפים <u>מתכנס בתנאי</u>

$\boxed{10}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+1}\right)^{-n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\overbrace{\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^{-n^2}}^{a_n}$$

נבדוק תנאי הכרחי במקרה של אי וודאות $[1^{-\infty}]$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\underbrace{\left[\left(1+\frac{n}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}\right]}_{\lim\limits_{\alpha(n)\to 0}(1+\alpha(n))^{\frac{1}{\alpha(n)}}=e}{}^{\frac{n}{n^2+1}}\right)^{-n^2}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n\cdot(-n^2)}{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}e^{-n}\overset{[\frac{1}{e^n}]}{=}0\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}$$

טור הנדסי $\frac{1}{e^n}=\left(\frac{1}{e}\right)^n$, $0<\frac{1}{e}<1$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס $\Leftarrow$ הטור הנתון <u>מתכנס בהחלט</u>

$\boxed{11}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{3n-1}}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt n}$

I $0<\frac{1}{\sqrt n}\le 1 \Rightarrow \sin\frac{1}{\sqrt n}>0$

(סינוס חיובי בתחום
בין 0 ל-1 רדיאן)

סימני איברי הטור מוגדרים ע"י $(-1)^n$ ⇐ הטור הוא טור עם סימנים מתחלפים

II בדיקת התכנסות בהחלט

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{3n-1}}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt n}\to\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{3n-1}}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt n}}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

$\frac{1}{\sqrt n}\ \ \ge 0\ \ \ \frac{1}{\sqrt n}\to 0\ \ \sim\frac{1}{\sqrt n}$

$\boxed{\text{גבול מיוחד}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\ \Downarrow\ \sin x\sim x,\ x\to 0}$

לבדיקת התכנסות נשתמש במבחן השוואה גבולי ונבחר להשוואה בטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt n}\cdot\frac{1}{\sqrt n}}_{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt n}}{\sqrt{3n-1}\cdot\frac{1}{\sqrt n}\cdot\frac{1}{\sqrt n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt n}\cdot\sqrt n}{\frac{1}{\sqrt n}\cdot\sqrt{3n-1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{3n-1}}=\frac{1}{\sqrt3}\ne 0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

מתבדר ⇐ אין התכנסות בהחלט ⇐ מתבדר

III בדיקה התכנסות בתנאי

נבדוק שתנאי משפט לייבניץ מתקיימים:

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{3n-1}}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt n}=0$

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ✓

(2) $\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt n}\Rightarrow\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\sin\frac{1}{\sqrt n}$

$\frac{1}{\sqrt{3n+3-1}}<\frac{1}{\sqrt{3n-1}}$

$\Rightarrow a_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{3n+2}}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{3n-1}}\sin\frac{1}{\sqrt n}=a_n$ לכל $n\in N$ ✓

לפי משפט לייבניץ הטור הנתון עם סימנים מתחלפים <u>מתכנס בתנאי</u>

$\boxed{12}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{\sqrt n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt n}$. $\boxed{\cos(n\pi)=(-1)^n}$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt n}$ מתבדר ($\lambda=\frac12$), אבל מתקיימים תנאי משפט לייבניץ,
לכן הטור הנתון <u>מתכנס בתנאי</u>.

13 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\underbrace{\arctan(n)}_{a_n}$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}}$$

עפ' הגבול ידוע שכתוב מימין $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\pi}{2}\neq 0$,
לכן לא מתקיים <u>תנאי הכרחי</u> להתכנסות הטור
גם בהחלט וגם בתנאי ומכאן נובע כי <u>הטור מתבדר</u>

14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos n\pi}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot(-1)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overset{1}{\overbrace{(-1)^{2n}}}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ טור הרמוני שהוא טור מתבדר.

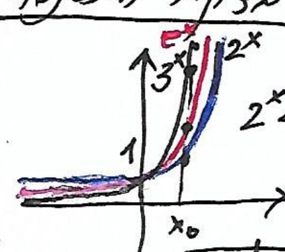
15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{\ln n}}\to\sum_{n=1}^{\infty}\overbrace{\frac{1}{2^{\ln n}}}^{a_n}$

I טור עם סימנים מתחלפים

II <u>בדיקת התכנסות בהחלט</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln n}}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$$

מתבדר, $\Longrightarrow$ מתבדר
<u>אין</u> התכנסות בהחלט



$2^x<e^x<3^x$

$\boxed{e^{\ln x}=x \quad x>0}$

III <u>בדיקת התכנסות בתנאי</u>: נבדוק שטור עם סימנים מתחלפים מתקיימים תנאי משפ' לייבניץ:

(1) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}\overset{\left[\frac{1}{2^{\infty}}\right]}{=}0$

(2) $a_{n+1}=\frac{1}{2^{\ln(n+1)}}<\frac{1}{2^{\ln n}}=a_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$

ככל ש-n גדל גדלים מכני השברים וקטנים איברי הטור (של ערכים מוחלטים)

$\Downarrow$

עפ' משפ' לייבניץ הטור הנתון עם סימנים מתחלפים <u>מתכנס בתנאי</u>

16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{\ln n}}\longrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$

I גם טור עם סימנים מתחלפים

מתבדר, אבל מתבדר
הטור שמגביל את הטור הנתון <u>מלמעלה</u>,
לכן זה לא אומר כלום על ההתכנסות של הטור הנתון.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln 3^{\ln n}}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{\ln n\cdot\ln 3}}\ominus \Longleftarrow \boxed{f(x)>0 \quad f(x)=e^{\ln f(x)}}$$

עפ' זהות יסוד הלוגריתמית $a^{\log_a b}=b$

$$\ominus\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(e^{\ln n})^{\ln 3}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln 3}} \qquad \lambda=\ln 3>1$$

$\Longleftarrow$ מתכנס
הטור הנתון <u>מתכנס בהחלט</u>

17 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\sqrt{n}}} \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}}_{a_n}$

I. טור עם סימנים מתחלפים

II <u>בדיקת התכנסות בהחלט</u>

במכנה של איבר a_n עומד ערך של פונקציה <u>מעריכית מורכבת</u>

לפי פונקציה מעריכית הוכח משפט:

לפונקציה מעריכית $y=a^x$ כאשר $a>1$.

מתקיים אי שוויון $a^x > x^k$ כאשר $x\to\infty$ ו-k הוא מספר גדול ככל שאפשר.

נבדוק כי מתקיים $2^{\sqrt{n}} > n^2$ כאשר $n\to\infty$, לצורך זה נחשב גבול:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\sqrt{x}}}{x^2} \underset{Lop}{\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}2^{\sqrt{x}}\ln 2}{2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2^{\sqrt{x}}\cdot\ln 2}{4\underbrace{x\sqrt{x}}_{x^{3/2}}} \underset{Lop}{\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}}$$

יחס בין ערכים של שתי פונקציות רציפות וגזירות ל- $x>0$

$$\frac{\ln 2}{4}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2^{\sqrt{x}}\ln 2}{\frac{3}{2}x^{1/2}} = \frac{\ln^2 2}{12}\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\sqrt{x}}}{x} \underset{Lop}{\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}}$$

$$\frac{\ln^3 2}{12}\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \underset{Lop}{\overset{[\frac{\infty}{\infty}]}{=}} \underbrace{\frac{\ln^4 2}{24}}_{\text{מספר}}\lim_{x\to\infty}\frac{2^{\sqrt{x}}\to\infty}{\cancel{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\cancel{2\sqrt{x}}}} = \infty.$$

$\Downarrow$

$2^{\sqrt{x}} > x^2$, $x\to\infty$, אז נקבל

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

הקטנו את מכנה השבר. $\Leftarrow$ גם הטור הנ"ל מתכנס $\Leftarrow$ הטור הנתון <u>מתכנס בהחלט</u>

$\lambda=2>1$ ← התקבל טור מתכנס

18 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{n}\ln^3 n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}\ln^3 n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{1/2}\ln^3 n}$ (**)

I <u>טור עם סימנים מתחלפים</u>

$k=\frac{1}{2}<1$

II <u>נבדוק התכנסות בהחלט</u>:

<u>מתבדר</u> $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1/2}\cdot n^{1/2}} < \sum_{n=2}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{n^{1/2}\ln^3 n}}_{a_n>0}$ גם מתבדר

<u>אין התכנסות בהחלט</u>

לפי המשפט שהוכח: כאשר $x\to+\infty$ $\ln x < x^k$ לכל $k>0$ הקטן ככל שאפשר

$\ln n < n^{1/6}$ $|^3$

$\ln^3 n < n^{1/2}$

III לפי ההצגה (**) של הטור קל לראות שלטור הנתון מתקיימים תנאי משפט לייבניץ לטורים עם סימנים מתחלפים $\Leftarrow$ הטור הנתון <u>מתכנס בתנאי</u>

$\boxed{19}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{3^{n+3}\, n!\, n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, $a_n > 0$

I <u>טור עם סימנים מתחלפים</u>

II <u>בדיקת התכנסות בהחלט</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{3^{n+3}\, n!\, n!}$$

נשתמש במבחן המנה!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)! \cdot \cancel{3^{n+3}} \cdot n!\, n!}{\cancel{3^{n+4}}_{3} (n+1)!\,(n+1)!\,(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(2n)!}(2n+1)(2n+2)\cancel{n!}\,\cancel{n!}}{3\cancel{n!}(n+1)\cancel{n!}(n+1)\cancel{(2n)!}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2(1+\frac{1}{2n})(1+\frac{1}{n})}{3\cdot[n(1+\frac{1}{n})]^2} = \frac{4}{3} > 1 \Rightarrow$$

<u>אין התכנסות בהחלט</u>, בנוסף

אפשר להסיק שאם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, אז איברי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

מונוטונית עולים <u>ולא יורדים</u>, זה

אומר שאיבר הטור אינו שואף ל-0 ולכן לא

מתקיים גם התנאי ההכרחי להתכנסות הטור,

לכן <u>הטור הנתון מתבדר</u>.