העתקות לינאריות:

1.1 תרגיל. יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל שדה $\mathbb{F}$, ותהא $T:V\to W$ העתקה לינארית. הוכח: $T(\vec{0})=\vec{0}$. (ההוכחה צריכה להיות נכונה בלי קשר לאופיין של השדה $\mathbb{F}$.)

1.4 תרגיל. יהיו $S,T:V\to W$ העתקות לינאריות המתלכדות על בסיס (או אפילו רק קבוצה פורשת) $\{v_1,\dots,v_n\}$ של V (כלומר לכל $i=1,\dots,n$ מתקיים $T(v_i)=S(v_i)$). הוכח ש $S=T$, כלומר לכל $v\in V$ מתקיים $S(v)=T(v)$.

אוסף ההעתקות הלינאריות $T:V\to W$ מסומן $\mathrm{Hom}(V,W)$. מגדירים פעולות על אוסף זה בצורה הבאה:
- עבור $T,S\in\mathrm{Hom}(V,W)$, ההעתקה $T+S\in\mathrm{Hom}(V,W)$ מוגדרת ע"י $(T+S)(v):=T(v)+S(v)$.
- עבור $T\in\mathrm{Hom}(V,W)$ וסקלר $\alpha\in\mathbb{F}$, ההעתקה αT מוגדרת ע"י $(\alpha T)(v):=\alpha\cdot T(v)$.

1.5 תרגיל. הוכח $T+S$ וכן αT המוגדרות לעיל הן העתקות לינאריות מ V ל W (ולכן שייכות ל $\mathrm{Hom}(V,W)$).

1.8 תרגיל. תהא $T:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ההעתקה המוגדרת ע"י $T(z)=\overline{z}$. קבע האם היא לינארית:

א. כאשר $\mathbb{C}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.

ב. כאשר $\mathbb{C}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.

1.10 תרגיל. א. נגדיר $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ לפי: $T(x,y)=(x+2y,2x+y)$ הוכח (ישירות) ש T העתקה לינארית.

ב. **העתקת המטריצה**: נקבע מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$. נגדיר $T:\mathbb{F}^{n\times 1}\to\mathbb{F}^{1\times m}$, $S:\mathbb{F}^{m\times 1}\to\mathbb{F}^{n\times 1}$ ע"י $T(v)=Av$ ו $S(v)=v^tA$. הוכח ש T,S העתקות לינאריות.

סעיפים (ד) (ה) – לעבודה עצמית.

1.11 תרגיל. תהא $T:V\to W$ העתקה לינארית. הוכח:

א. אם $T(v_1),\dots,T(v_n)$ בת"ל, אז גם $v_1,\dots,v_n$ בת"ל.

ב. אם T חד-חד ערכית, ו $v_1,\dots,v_n$ בת"ל, אז גם $T(v_1),\dots,T(v_n)$ בת"ל.

<u>תרגילים לעבודה עצמית (העתקות לינאריות):</u>

1.3 תרגיל. א. מצא מרחב וקטורי V והעתקה $T: V \to V$ כך שלכל $v_1, v_2 \in V$ מתקיים $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$, ובכל זאת לא מתקיימת הדרישה $T(\alpha v)=\alpha T(v)$ לכל $\alpha \in \mathbb{F}, v \in V$. [רמז: צמוד מרוכב]

ב. יהיו U, V מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{Z}_p$, ותהא $T: V \to U$ העתקה כך שלכל $v_1, v_2 \in V$ מתקיים $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$. הוכח שמתקיים $T(\alpha v)=\alpha T(v)$ לכל $\alpha \in \mathbb{Z}_p, v \in V$. למה הטיעון הזה לא עובד ב(א)?

ג. מצא מרחב וקטורי V והעתקה $T: V \to V$ כך שלכל $v \in V$ ולכל $\alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $T(\alpha v)=\alpha T(v)$, ובכל זאת לא מתקיימת הדרישה $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$ לכל $v_1, v_2 \in V$. [רמז: קח $V=\mathbb{R}^2$, ובחר העתקה של כפל בסקלר אחד אם הוקטור ברביע ראשון או שלישי, ובסקלר אחר במקרה הנותר]

[**$1.5\frac{1}{2}$ תרגיל**. הוכח שהאוסף $\mathrm{Hom}(V, W)$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$]

1.6 תרגיל. בכל אחד מהסעיפים הבאים מוגדרת העתקה $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. מצא באילו מהם ההעתקה לינארית.

א. $T(x)=2x$.

ב. $T(x)=2x+1$.

ג. $T(x)=x^2$.

ד. $T(x)=|x|$.

ה. $T(x)=\cos(x)$.

ו. $T(x)=[x]$. (הערך השלם של x)

1.9 תרגיל. הוכח שההעתקה $\mathrm{tr}: \mathbb{F}^{n \times n} \to \mathbb{F}$ היא לינארית.

1.10 תרגיל. א. נגדיר $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ לפי: $T(x,y)=(x+2y, 2x+y)$ הוכח (ישירות) ש T העתקה לינארית.

ב. **העתקת המטריצה**: נקבע מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$. נגדיר $T: \mathbb{F}^{n \times 1} \to \mathbb{F}^{1 \times m}$, $S: \mathbb{F}^{m \times 1} \to \mathbb{F}^{n \times 1}$ ע"י $T(v)=Av$ ו $S(v)=v^t A$. הוכח ש T, S העתקות לינאריות.

ג. השתמש ב(ב) להוכיח את (א) בדרך אחרת.

ד. הוכח שאם $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, $0 \neq b \in \mathbb{F}^m$ ו $T: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ מוגדרת ע"י $T(v)=Av+b$, אזי T אינה העתקה לינארית.

ה. נסח והוכח את סעיפים (ב) ו(ד) עבור המקרה הכללי: $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$, ו $T: \mathbb{F}^{n \times k} \to \mathbb{F}^{m \times k}$.

1.12 תרגיל. א. האם יש העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ כך ש T על?

א. האם יש העתקה לינארית $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ כך ש T חד-חד ערכית?