

שאלת קדמה אונת:

משפט: אם $f(x)$ חסומה ב $[a,b]$ ורציפה ב a ו b (כלומר f רציפה ב a ו b) אז f רציפה ב $[a,b]$.

יש להוכיח: נניח שיש לה f ב (a,b) ו f רציפה ב a ו b .
 $a < c < b$ (בחר סביבת c של c בתוך (a,b)):

$$(c-\delta, c+\delta) \subset [a,b]$$

נחלק את $[a,b]$ באמצעות נקודות $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

$$0 \leq k \leq n-1 \quad \lambda = \max_{k=1, \dots, n} (x_k - x_{k-1})$$

$$S - s = \sum_{k=1}^{n-1} [M_k - m_k] \Delta x_k$$

M_k, m_k מקסימום ו מינימום של f ב $[x_{k-1}, x_k]$

S, s סכומי ריבוי

סביבת a ו b ו c ו d ו e ו f ו g ו h ו i ו j ו k ו l ו m ו n ו o ו p ו q ו r ו s ו t ו u ו v ו w ו x ו y ו z ו α ו β ו γ ו δ ו ϵ ו ζ ו η ו θ ו ι ו κ ו λ ו μ ו ν ו ξ ו \omicron ו π ו ρ ו σ ו τ ו υ ו ϕ ו χ ו ψ ו ω ו α ו β ו γ ו δ ו ϵ ו ζ ו η ו θ ו ι ו κ ו λ ו μ ו ν ו ξ ו \omicron ו π ו ρ ו σ ו τ ו υ ו ϕ ו χ ו ψ ו ω

$A = [a, c-\delta]$ סביבת a ו c ו d ו e ו f ו g ו h ו i ו j ו k ו l ו m ו n ו o ו p ו q ו r ו s ו t ו u ו v ו w ו x ו y ו z ו α ו β ו γ ו δ ו ϵ ו ζ ו η ו θ ו ι ו κ ו λ ו μ ו ν ו ξ ו \omicron ו π ו ρ ו σ ו τ ו υ ו ϕ ו χ ו ψ ו ω

$B = [c+\delta, b]$ סביבת c ו b ו α ו β ו γ ו δ ו ϵ ו ζ ו η ו θ ו ι ו κ ו λ ו μ ו ν ו ξ ו \omicron ו π ו ρ ו σ ו τ ו υ ו ϕ ו χ ו ψ ו ω

$C = [c-\delta, c+\delta]$ סביבת c ו α ו β ו γ ו δ ו ϵ ו ζ ו η ו θ ו ι ו κ ו λ ו μ ו ν ו ξ ו \omicron ו π ו ρ ו σ ו τ ו υ ו ϕ ו χ ו ψ ו ω

נניח כי f רציפה ב a ו b ו c ו d ו e ו f ו g ו h ו i ו j ו k ו l ו m ו n ו o ו p ו q ו r ו s ו t ו u ו v ו w ו x ו y ו z ו α ו β ו γ ו δ ו ϵ ו ζ ו η ו θ ו ι ו κ ו λ ו μ ו ν ו ξ ו \omicron ו π ו ρ ו σ ו τ ו υ ו ϕ ו χ ו ψ ו ω

$$S - s = A + B + C + D$$

$$C < 2\delta(M-m)$$

$$2\delta = \text{אורך קטע } M-m$$

$$D < 2\lambda(M-m)$$

$$2\lambda = \text{אורך קטע } M-m$$

הצבה

$$S - s < A + B + 2\delta(M-m) + 2\lambda(M-m)$$

$$S - s < A + B + 2\lambda(M-m) + \frac{\epsilon}{3}$$

$$\delta < \frac{\epsilon}{6(M-m)}$$

לסביבת $f(x)$ ב $[a,b]$ ו f רציפה ב a ו b ו c ו d ו e ו f ו g ו h ו i ו j ו k ו l ו m ו n ו o ו p ו q ו r ו s ו t ו u ו v ו w ו x ו y ו z ו α ו β ו γ ו δ ו ϵ ו ζ ו η ו θ ו ι ו κ ו λ ו μ ו ν ו ξ ו \omicron ו π ו ρ ו σ ו τ ו υ ו ϕ ו χ ו ψ ו ω

$\epsilon = \frac{\epsilon}{3(b-a)}$ (בחר ϵ ו δ ו λ ו μ ו ν ו ξ ו \omicron ו π ו ρ ו σ ו τ ו υ ו ϕ ו χ ו ψ ו ω)

אז f רציפה ב $[a,b]$ ו f רציפה ב a ו b ו c ו d ו e ו f ו g ו h ו i ו j ו k ו l ו m ו n ו o ו p ו q ו r ו s ו t ו u ו v ו w ו x ו y ו z ו α ו β ו γ ו δ ו ϵ ו ζ ו η ו θ ו ι ו κ ו λ ו μ ו ν ו ξ ו \omicron ו π ו ρ ו σ ו τ ו υ ו ϕ ו χ ו ψ ו ω

ניקח x', x'' ששייכים ל $[a, c-\delta]$ ו $[c+\delta, b]$ ו α ו β ו γ ו δ ו ϵ ו ζ ו η ו θ ו ι ו κ ו λ ו μ ו ν ו ξ ו \omicron ו π ו ρ ו σ ו τ ו υ ו ϕ ו χ ו ψ ו ω

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\epsilon}{3(b-a)}$$

אנחנו צריכים להראות: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ו $\epsilon > 0$ ו $\delta > 0$ ו $\eta > 0$ ו $\lambda > 0$ ו $\mu > 0$ ו $\nu > 0$ ו $\xi > 0$ ו $\omicron > 0$ ו $\pi > 0$ ו $\rho > 0$ ו $\sigma > 0$ ו $\tau > 0$ ו $\upsilon > 0$ ו $\phi > 0$ ו $\chi > 0$ ו $\psi > 0$ ו $\omega > 0$

$$\eta = \min(\eta_1, \frac{\epsilon}{6(M-m)})$$

$$\max \rightarrow 2\lambda(M-m) < 2\eta(M-m) \leftarrow x < \eta$$

$$\frac{2\varepsilon(M-m)}{6(M-m)} = \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\lambda < \eta < \eta_1$$

3) * (א) כל הפונקציות הן פונקציות רציפות (על פניו)

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \quad (*)$$

$$A+B < \underbrace{\frac{\varepsilon}{3(b-a)}}_{\text{קטן מדי}} \underbrace{(c-\delta-a)}_{\text{קטן מדי}} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{3(b-a)}}_{\text{קטן מדי}} \underbrace{(b-c-\delta)}_{\text{קטן מדי}}$$

הקטנים הם: $[a, c-\delta]$ ו- $[c+\delta, b]$ הם קטנים מדי

$$A+B < \frac{\varepsilon}{3(b-a)} (b-a-2\delta) < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$S-s < \frac{\varepsilon}{3}$$

כלומר

$$\lim_{x \rightarrow 0} (S-s) = 0$$

כלומר