בס"ד

לוגיקה ותורת הקבוצות

חוברת תרגילים

עדי ירדן
13/12/2017

תרגילים בסיסיים בתורת הקבוצות

1. נכון או לא?

א. $1\in\{1,2,3\}$
ב. $1\in\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$
ג. $\{1,2\}\subseteq\{1,2,3\}$
ד. $\{1,2\}\subseteq\{1,3,4\}$
ה. $\{1\}\in\{1,2,3\}$
ו. $\{1\}\in\{\{1\},2\}$
ז. $\{1\}\in\{\{1\},1\}$
ח. $\{\{1\}\}\subseteq\{\{1\},\{2\},3\}$
ט. $\{1,2\}=\{2,1\}$
י. $\{1,\{1\},\{\{1\}\}\}=\{\{1\},1,\{\{1\}\}\}$

2. חשבו את הקבוצות הבאות:
א. $\{1,2\}\cup\{2,3\}$
ב. $\{1,2\}\cap\{2,3\}$
ג. $\{1,2\}\setminus\{2,3\}$

3. בדקו נכונות של כל טענה:
א. אם $1\in A$, אז $\{1\}\in P(A)$.
ב. אם $\{1,2\}\subseteq A$, אז $\{1\}\in P(A)$.

4. נתון: $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3,4\}$. כתבו במפורש את הקבוצה $(B\setminus A)\cup\{3\}$.

5. נתון: $A=\{(1,2),(4,5),[3,5)\}$.
א. כמה אברים יש ב-A?
ב. האם $A\subseteq P(R)$? (R היא קבוצת המספרים הממשיים).

6. נניח $\{1\}\in A$. אלו מהמסקנות הבאות הכרחיות:
א. $\{1\}\subseteq A$. ב. $1\in A$. ג. $A\subseteq\{1,2\}$. ד. $A=\{\{1\}\}$.

7. נתון: $A=\{\emptyset,1\}$. כתבו את $P(A)$.

8. אלו מהטענות הבאות נכונות?

א. $1\in\{1,2\}$
ב. $1\in\{\{1\},2\}$
ג. $\{2\}\subseteq\{\{1\},2\}$
ד. $\emptyset\subseteq\{\{1,2\},2\}$
ה. $\{1,2,3\}=\{1,\{2\},3\}$
ו. $\{1,3\}\in\{\{1\},\{3\}\}$
ז. $\{1\}\in\{1,2,\{3\}\}$
ח. $\{1,2\}\in\{\{\{1\},2\},3\}$
ט. $\{1,2\}\subseteq\{\{\{1\},2\},3\}$
י. $\{1,2\}\subseteq\{\{1\},2,3\}$
יא. $\{\emptyset\}\subseteq P(\emptyset)$
יב. $\{\emptyset\}\in P(\emptyset)$
יג. $\{1,2,3\}\subseteq\{\{1,2,3\},1,2,3\}$
יד. $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}=P(P(\emptyset))$
טו. $\{\{\emptyset\}\}\subseteq P(P(P(\emptyset)))$
טז. $\{\{\emptyset\}\}\in P(P(P(\emptyset)))$
יז. $\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}\subseteq P(\mathbb{N})$
יח. $[0,1]\in P([0,2])$
יט. $[0,1]\subseteq P([0,2])$
כ. $\{\emptyset\}\cup\{[-1,1]\}\subseteq P([-1,1])$

9. נתונה הקבוצה האוניברסאלית $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ והקבוצות $C=\{2,4,6,7,9\}$ $B=\{1,2,4,5,6,9\}$ $A=\{1,3,5,8,9\}$
מצא:

א. $\overline{\emptyset}$
ב. $\overline{U}$
ג. $\overline{A}$
ד. $\overline{B}$
ה. $\overline{C}$
ו. $A\setminus B$
ז. $B\setminus A$
ח. $A\cup B$
ט. $B\cap C$
י. $(A\cup B)\setminus C$
יא. $\overline{A\cup B}\cap\overline{B\cup C}$
יב. $(A\cup C)\setminus(\overline{C\setminus A})$
יג. $A\triangle B$
יד. $A\triangle B\triangle C$

10. אילו מן הטענות הבאות הן נכונות? נמק!

א. $\{\phi\} = \phi$

ב. $\{\phi\} \in \{\phi, \{1\}\}$

ג. $\phi \subset \{\phi, 1\}$

ד. $\phi \subset \{\phi, \{\phi\}\}$

ה. $\{1\} \in \{\phi, 1\}$

ו. $\{1\} \subseteq \{\phi, \{1\}\}$

ז. $\phi \not\subset \{\phi\}$

ח. $\{\{1\},\phi\} \subseteq \{1, \{\phi\}\}$

ט. $\{1, \phi\} \subset \{\phi, 1\}$

י. $\{1, \phi\} \subseteq \{\phi, 1\}$

11. נתון $A = \{1,\{1\},\{1,2\}\}$, אלו מן הטענות הבאות הן נכונות? נמק!

א. $|A| = 4$

ב. $\{2\} \in A$

ג. $\{1\} \in A$

ד. $\{1\} \in P(A)$

ה. $1 \in P(A)$

ו. $\phi \in P(A)$

ז. $\{1,\{1\}\} \in P(A)$

ח. $\{1,2\} \in A$

ט. $\{1,2\} \subset A$

12. אילו מהקבוצות הבאות שוות זו לזו?

- $A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m|<2\}$
- $B = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^3=m\}$
- $C = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \le 2m\}$
- $D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \le 1\}$
- $E = \{0,1,2\}$

13. נתון $A = \{1,2\}$, $B = \{0,2,4\}$

א. מצא את A^2, B^2

ב. מצא $|A \times B|$

ג. מצא את $A \times B$

14. תהי $U = \mathbb{Z}$ קבוצה אוניברסלית.

תהיינה $A = \{2n: n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{m: m^2 < 2\}$, $C = \{m: -3 \le m \le 6\}$

רשום את הקבוצות הבאות:

א. $A \cap B$

ב. $A \cup C$

ג. $A \cap \overline{B}$

ד. $\left(\overline{B} \cup C\right) \setminus A$

ה. $(A \cap C) \triangle B$

ו. $\overline{C} \setminus (A \triangle B)$

15. עבור כל אחת מהקבוצות הבאות, קבע האם היא שווה ל $\mathbb{Q}$ או הסבר מדוע הקבוצה שונה מ $\mathbb{Q}$.

א. $A = \{2x - 3: x \in \mathbb{Q}\}$

ב. $B = \{x: \frac{1}{x} \in \mathbb{Q}\}$

ג. $C = \{x \subseteq Q: |x| = 1\}$

ד. $D = \{\frac{x}{y}: x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, x \neq y + 2\}$

16. רשום את מספר האיברים בקבוצות הבאות:

א. $A = \{x^2: x \in (-100,100] \cap \mathbb{Z}\}$

ב. $B = \{x \subseteq (1,3): 2 \in x , x \setminus \{2 + \frac{n}{5}: n \in \mathbb{N}\} = \emptyset\}$

ג. $C = \{x \subseteq \mathbb{R}: \mathbb{R} \setminus \{2,4,6\} \subseteq x\}$

תרגילים בסיסיים על יחסים

1. לכל אחד מהיחסים:
   - רשום 2 איברים השייכים ליחס.
   - רשום 2 איברים שלא שייכים ליחס ושייכים למכפלה הקרטזית.

   א. נתונות הקבוצות $A=\{x\in\mathbb{R}\mid 0\le x<10\}$ ו $B=\{x\mid x\in\mathbb{R}\}$ והיחס $R=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B, a\le b\}$

   ב. נתונות הקבוצות $A=\{x\mid x\in\mathbb{Q}\}$ ו $B=\{x\mid x\in\mathbb{Q}\}$ והיחס $R=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B, a+b=0\}$

   ג. נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,4,5,6\}$ והיחס $R=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in P(A), a\in b\}$

   ד. נתונה הקבוצה $A=[0,10)$ והיחס מעל A $R=\{<1,2>,<2,3>,<1,4>,<5,5>\}$

   ה. נתונות הקבוצות $A=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}, 0\le x\le 5\}$ ו $B=\{x\mid x\in\mathbb{R}\}$
   והיחס $R=\{<a,b>\mid a\in A,\ b\in B\}$

   ו. נתונות הקבוצות $A=\{x\mid x\in\mathbb{N}\}$ ו $B=\{x\mid x\in\mathbb{Z}\}$ והיחס $R=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B,\ a \text{ זוגי},\ b=a^2\}$

   ז. נתונות הקבוצות $A=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}, x=y\}$ ו $B=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}, x^2+y^2=4\}$
   והיחס $R=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B\}$

   ח. נתונות הקבוצות $A=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N}, x=y\}$ ו $B=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{N},\ y=x \text{ סכום הספרות של }\}$
   והיחס $R=\{(a,b)\mid a\in A,\ b\in B,\ a\ne b\}$

2. נתונות קבוצות: $B=\{2n: n\in\mathbb{N}\}$ $A=[1,3]$, נגדיר יחס: $R=\left\{(a,b): a\in A, b\in B, \frac{b}{a}\notin\mathbb{N}\right\}$
   אלו מהטענות הבאות נכונות?
   א. $(3,8)\in R$
   ב. $\left(\frac{1}{3},4\right)\in R$
   ג. $(3,18)\in R$
   ד. $\left(\frac{1}{4},4\right)\in R$
   ה. $\left(\frac{2}{9},18\right)\in R$
   ו. $\{(2,b): b\in B\}\subseteq R$

3. נתונות קבוצות: $A=(0,1]\setminus\left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\}$, $B=\left\{\frac{p}{q}: p,q\in(\mathbb{N}\setminus\{0\}), p^2\le q\right\}$, $C=P(A)\times B$
   נגדיר יחס: $R=\left\{\left(a,b,(c_1,c_2)\right): a\in A, b\in B, (c_1,c_2)\in C, c_2\cdot b\in B\right\}$
   אלו מהטענות הבאות נכונות?
   א. $\left(\frac{2}{3},\frac{3}{10},\left(\left\{\frac{99}{100}\right\},\frac{10}{729}\right)\right)\in R$
   ב. $\left(\frac{2}{4},\frac{4}{17},\left(\left\{\frac{9}{13},\frac{9}{14}\right\},\frac{17}{290}\right)\right)\in R$
   ג. $\left(\frac{5}{9},\frac{1}{2},\left(\left[\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right]\setminus\left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\},\frac{8}{73}\right)\right)\in R$
   ד. $\left(\frac{123}{124},\frac{3}{5},\left(\left\{x: 0<x\le\frac{1}{100}\right\}\setminus\left\{\frac{1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\},\frac{10}{101}\right)\right)$

4. רשמו באמצעות קבוצות את היחסים הבאים מעל הקבוצה: $A=\{1,2,\dots,n\}$:
   א. יחס קטן שווה בין 2 מספרים.
   ב. יחס 3 מקומי בו סכום כל 2 איברים קטן מהשלישי.
   ג. יחס n מקומי בו כל האיברים בסדרה שונים זה מזה.
   ד. יחס 6 מקומי המתאר סדרת 6 תתי קבוצות של A כך שכולן זרות זו לזו (החיתוך בין כל 2 קבוצות שווה לקבוצה הריקה)

5. נתונה הקבוצה $A=\{1,2,3,4,5\}$ והיחסים $R=\{(a,b)\mid a,b\in P(A), |a|\le|b|\}$, $S=\{(a,b)\mid a,b\in P(A), a\subseteq b\}$
   האם $S\subseteq R$?

6. תהיינה A, B קבוצות ויהיו R,S יחסים בין A ל B. האם $R \cup S$ בהכרח יחס בין A ל B?
7. מהי המכפלה הקרטזית של: הקבוצה הריקה בעצמה? של $\{1,2\}$ ב $\{2,7,9\}$?

8. תהיינה A,B,C,D קבוצות. האם $S = (A \times B) \cap (C \times D)$ בהכרח יחס בין A לB?
האם S בהכרח יחס בין A ל C? בין B ל D? בין $A \cap C$ לבין $B \cap D$?

9. תהיינה A, B קבוצות ויהיו R,S יחסים בין A ל B, האם $R \cap S$, $R \Delta S$ בהכרח יחס בין A ל B? מה לגבי $R \times S$?

10. תהא $S = \{ (m,n) \in Q \times Q \mid mn \text{ זוגי} \}$. האם S יחס דו-מקומי על N?

11. האם היחס בשאלה 5 יחס דו-מקומי על Z? על Q? על R?

12. מצא את כל היחסים בין הקבוצות $A = \{1,2,3\}$ ו-$B = \{2,3,5\}$. כמה יחסים יש?

13. מהו מספר היחסים בין קבוצה בגודל m לקבוצה בגודל n?

14. מהם כל היחסים התלת מקומיים על $A = \{1,2\}$?

15. מצא יחס תלת מקומי על R אשר מכיל ממש את היחס $S = \{(a,b,c) \mid a+b+c=0\}$ אבל אין בו שלשה (a,b,c) שכל הקורדינטות שלה שליליות.

16. כמה יחסים תלת מקומיים יש על קבוצה בגודל 5?

17. תן דוגמא של יחס 4 מקומי על קבוצת החזקה של הקבוצה הריקה.

18. נתונה קבוצה $A=\{1,2,3,4\}$. יהי R היחס על A שהוא קבוצת הזוגות הסדורים של מספרים כך שהשמאלי קטן מהימני. האם $\langle 1,2\rangle \in R$? האם $\langle 2,1\rangle \in R$?

19. נגדיר יחס R על $A=\{1,2,3\}$ כך: $\langle x,y\rangle \in R$ אס"ם $x<y$. נגדיר יחס S על A כך: $S=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,3\rangle\}$. האם $R \subseteq S$?
האם $S \subseteq R$? האם $R=S$?

20. נתון יחס $R=\{\langle(1,2),(1,3)\rangle,\langle(2,3),(1,3)\rangle\}$ על $A=\{(a,b): a,b \in R,\ a<b\}$. האם $\langle\{x: 1<x<2\},\{x: 1<x<3\}\rangle \in R$?

21. נגדיר יחס R על N כך: $\langle x,y\rangle \in R$ אס"ם סכום הספרות של המספר x שווה לזה של y. כתבו אבר ששייך ל-R ואבר אחר ששייך למכפלה הקרטזית של N עם עצמה ובכל זאת לא שייך ל-R.

22. נגדיר יחס R על P(A), כאשר $A=\{1,2,3\}$ כך: $\langle x,y\rangle \in R$ אס"ם $|x|=|y|$ (לשתי הקבוצות יש אותה עוצמה). כתבו שני אברים ששייכים ל-R (כלומר שני זוגות סדורים של קבוצות ב-P(A) שיש להן אותו מספר אברים).

23. נגדיר יחס T על N כך: $\langle x,y\rangle \in T$ אס"ם קבוצת המספרים הראשוניים ש-x מתחלק בהם שווה לקבוצת המספרים הראשוניים ש-y מתחלק בהם. כתבו זוג ב-T וכתבו זוג במכפלה הקרטזית של N עם עצמו שאיננו ב-T.

תרגילים על פונקציות

1. נגדיר $f: R \to R$ על ידי $f(x)=(2x+3)/(x+1)$. האם זו פונקציה?

2. מה מהבאים הוא פונקציה? אם לא, נמקו!
   א. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מוגדר ע״י $f(x) = \sqrt{x}$
   ב. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מוגדר ע״י $f(x) = x^2$
   ג. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מוגדר ע״י $f(x) = \frac{1}{x}$
   ד. $f: \{1,2\} \to \mathbb{N}$ מוגדר ע״י $f(1) = 0,\ f(2) = 0$
   ה. $f: \{1,2\} \to \mathbb{N}$ מוגדר ע״י $f(1) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 2$
   ו. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ מוגדר ע״י $f(x,y) = x + y$

3. נגדיר $f: R-\{-3/2\} \to R-\{2\}$ על ידי $f(x)=(2x+3)/(x+1)$. האם זו פונקציה? האם היא חח״ע? אם לא נמקו. האם היא על? אם לא, נמקו. אם היא חח״ע ועל חשבו את הפונקציה ההפכית שלה.

4. נגדיר $f: R-\{-1\} \to R-\{1\}$, על ידי $f(x)=(x+3)/(x+1)$. האם זו פונקציה? האם היא חח״ע? אם לא נמקו. האם היא על? אם לא, נמקו. אם היא חח״ע ועל חשבו את הפונקציה ההפכית שלה.

5. נגדיר $f: R-\{1\} \to R-\{1\}$ על ידי הנוסחה: $f(x)=(x-1)^{-1}$. האם זו פונקציה? האם היא חח״ע? אם לא נמקו. האם היא על? אם לא, נמקו. אם היא חח״ע ועל חשבו את הפונקציה ההפכית שלה.

6. האם הפונקציה חד-חד-ערכית? האם הפונקציה על? אם היא חח״ע ועל, חשבו את ההופכית שלה.
   א. $f:\mathbf{Z} \to \mathbf{Z},\ f(x) = -x+7$
   ב. $f:\mathbf{Z} \to \mathbf{R},\ f(x) = -x+7$
   ג. $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = -x+7$
   ד. $f:\mathbf{Z} \to \mathbf{Z},\ f(x) = 4x-3$
   ה. $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^2$
   ו. $f:[0,\infty) \to [0,\infty),\ f(x) = x^2$

7. נגדיר $k(x) = \dfrac{x-1}{x},\ h(x) = 1-x,\ g(x) = x,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$. חשב:
   א. $f \circ g$
   ב. $g \circ f$
   ג. $h \circ k$
   ד. $h \circ f$
   ה. $k \circ h$
   ו. $g \circ k$

8. לכל אחת מהפונקציות f הבאות:
   1) האם f חח״ע?
   2) האם f על?
   3) אם f הפיכה, מצא f^{-1}
   4) הרכב את f עם הפונקציה g $(f(g(x)))$
   א. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ מוגדר ע״י $f(x) = \sqrt{x}$, $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $g(x) = x^2$, $(\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\})$
   ב. $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ מוגדר ע״י $f(x) = x + 1$, $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $g(x) = x^5$,
   ג. $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ מוגדר ע״י $f(x) = (x+3)^2$, $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $g(x) = \frac{x+3}{x+7}$,
   ד. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ מוגדר ע״י $f(x) = 2^x$, $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $g(x) = x^2 + x + 3$
   ה. $f: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ מוגדר ע״י $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $g: \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ $g(x) = \frac{x+3}{x}$,
   ו. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ מוגדר ע״י $f(x) = |x|$, $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ $g(x) = (x+3)^2$,

9. תהא הקבוצה: $A = \{1,2,3\}$, נגדיר פונקציה: $f: A \to P(A)$ ע״י: $f(x) = \{1,2,3\}\backslash\{x\}$. הוכח או הפרך:
   א. f חח״ע
   ב. f על

10. תהא הפונקציה: $f: (0,1) \to N\backslash\{0\}$ המוגדרת ע״י: $f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$ – כלומר, הפונקציה מחזירה את הערך התחתון של החלוקה של 1 ב x.

א. האם f חח״ע? הוכח!
ב. האם f על? הוכח!

11. לכל אחת מהפונקציות הבאות קבע האם היא פונקציה, האם היא חח״ע והאם היא על הטווח.
א. $f(x) = x \cdot (6-x)\ ,\ f: \{1,2,3,4\} \to \{4,5,6,7,8\}$
ב. $f(x) = \frac{x}{10}\ ,\ f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
ג. $f(x) = \lfloor x \rfloor\ ,\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{N}$
ד. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ -x, & x > 0 \end{cases}\ ,\ f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
ה. $f(x) = x^3 + 2\ ,\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
ו. $f(x) = \sqrt{x}\ ,\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
ז. $f(X) = X \cup \{0\}\ ,\ f: P(\mathbb{N}\setminus\{0\}) \to P(\mathbb{N})$
ח. $f(X,Y) = X \cup Y\ ,\ f: P(\mathbb{N})^2 \to P(\mathbb{N})$

12. בכל אחד מהסעיפים הבאים כתבו פונקציה מתאימה:
א. כתבו פונקציה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שהיא חח״ע ולא על.
ב. כתבו פונקציה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שהיא לא חח״ע ועל.
ג. כתבו פונקציה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שהיא לא חח״ע ולא על.
ד. כתבו פונקציה $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שהיא חח״ע ועל.

13. תהיינה 2 קבוצות: $A = \mathbb{N}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x\ is\ odd\}$. בכל אחד מהסעיפים הבאים תן דוגמא (אין צורך להוכיח) לפונקציה $f: A \to B$:
א. פונקציה f חח״ע ועל.
ב. פונקציה f חח״ע ולא על.
ג. פונקציה f לא חח״ע ועל.
ד. פונקציה f לא חח״ע ולא על.
ה. פונקציה f שבתמונה שלה יש רק 2 איברים. כלומר: יש רק 2 איברים ב B שיש להם מקורות.

14. לכל זוג פונקציות, חשב את ההפוכה של f או הסבר מדוע לא קיימת הפוכה, ואת ההרכבה של $f \circ g$, אם לא ניתן להרכיב, הסבר מדוע:
א. $g(x) = \sin x\ ,\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = x^3\ ,\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
ב. $g(x) = x^2 + 5\ ,\ g: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}\ ,\ f(x) = 100 - x\ ,\ f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
ג. $g(x) = \{x\}\ ,\ g: \{1,2,3\} \to P(\{1,2,3\})\ ,\ f(X) = |X|\ , f: P(\{1,2\}) \to \{0,1,2\}$
ד. $g(x) = 3^x\ ,\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ ,\ f(x) = 2^{x+1} + 3\ ,\ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

15. תהא $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה. נגדיר את הקבוצות הבאות:
$S = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{N}^2 \mid f(x_1) < f(x_2)\}$, $T = \{y \in \mathbb{N} \mid exists\ x \in \mathbb{N} : f(x) = y\}$.
א. כתבו דוגמא לפונקציה עבורה: $S = \emptyset$.
ב. האם יש פונקציה עבורה $T = \emptyset$?
ג. נניח ש f היא על. מהי הקבוצה T?
ד. נניח ש f חח״ע. נגדיר: $g: T \to \mathbb{N}$ ע״י: $g(x) = f(x)$. האם g היא פונקציה? האם g חח״ע? האם g על?
ה. נניח ש f חח״ע ועל. נגדיר $h: S \to S$ ע״י: $h(x,y) = \big(f(x), f(y)\big)$. האם h היא פונקציה?

16. נתונה פונקציה 5-מקומית על N: $f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=x_1x_2+x_4$. למשל: $f(1,2,3,4,5)=1*2+4=6$. חשבו את $f(1,1,1,1,1)$.

17. נתונה פונקציה תלת-מקומית על R כך ש: אם $y=1$, אז $f(x,y,z)=x$ ואם $y\neq1$ אז $f(x,y,z)=1$. חשבו את $f(1,2,3)$ ואת $f(2,1,3)$.

תרגילים על תחשיב הפסוקים

1. קבע האם הפסוק טאוטולוגיה, פסוק שקר או לא טאוטולוגיה ולא פסוק שקר:

א. $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

ב. $(A \to \neg A) \to [(\neg B \wedge A \wedge C) \vee (\neg A)]$

ג. $(A \leftrightarrow \neg A) \wedge [(B \vee \neg A \vee C) \to A]$

ד. $(A \vee B \vee C) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

2. לכל אחד מהפסוקים הבאים:

- בנה טבלת אמת
- כתוב פסוק שקול המשתמש בקשרים: "או", "וגם" ו"שלילה" בלבד, השלילה תופיע רק על פסוקים אטומיים.
- הצג את שלילת הפסוק, כך שהשלילה תופיע על פסוקים אטומיים בלבד.

א. $(A \to B) \to C$

ב. $(A \wedge \neg B) \leftrightarrow (C \vee \neg A)$

ג. $(A \to B) \vee (A \to C)$

ד. $(A \wedge B) \vee (\neg A \to \neg B)$

ה. $A \leftrightarrow (\neg A \to B)$

ו. $\left[\left((A \wedge B) \vee C\right) \to (\neg C \vee A)\right] \to (\neg A \leftrightarrow \neg B)$

ז. $(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \to (B \wedge C))$

ח. $A \vee [(B \to C) \wedge (D \to \neg A)]$

ט. $(A \vee B) \wedge (A \to \neg B) \wedge (\neg A \leftrightarrow B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

י. $(A \to C) \vee (\neg B \vee \neg A)$

יא. $(B \wedge C) \vee (B \wedge \neg A)$

3. לכל אחד מהפסוקים הבאים בחר את הפסוק או הפסוקים השקולים אליו:

א. $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$

1) $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C)$

2) $[A \wedge (B \leftrightarrow C)] \vee [\neg A \wedge \left((B \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge C)\right)]$

3) $[(A \to B) \to C] \wedge [C \to (B \to A)]$

ב. $(A \wedge B) \vee (C \to \neg A)$

1) $\neg A \vee B \vee \neg C$

2) $\neg C \vee (A \wedge B) \vee \neg A$

3) $(A \wedge B) \vee \neg A$

ג. $(A \to \neg B) \wedge (A \to C)$

1) $A \to (\neg B \wedge C)$

2) $(\neg A \wedge B) \vee (\neg A \wedge C)$

3) $\neg A \vee (\neg B \wedge C)$

ד. $B \leftrightarrow [A \to (C \wedge D)]$

1) $\left[B \wedge \left(\neg A \vee (C \wedge D)\right)\right] \vee [\neg B \wedge (A \wedge (\neg C \vee \neg D)]$

2) $\left[B \wedge \left(\neg A \vee (C \wedge D)\right)\right] \vee [\neg B \wedge (A \wedge (\neg C \wedge \neg D)]$

3) $(B \leftrightarrow A) \to [B \leftrightarrow (C \wedge D)]$

ה. $(A \wedge B \wedge C) \vee [(\neg A \vee B \vee C) \to A]$

1) $(\neg A \vee B \vee C) \to A$

2) A

3) $(A \wedge B \wedge C) \vee \neg A$

ו. $A \wedge [(A \to B) \vee \neg C]$

1) $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg C)$

2) A

3) $A \wedge (C \to (A \to B))$

4. בנה טבלת אמת לפסוקים הבאים והצג אותם בצורת DNF :

א. $(A \wedge \neg B) \vee C$

ב. $A \leftrightarrow (B \vee A)$

ג. $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C)$

ד. $A \leftrightarrow \big(\neg B \rightarrow (A \vee C)\big)$

ה. $A \wedge \big(B \vee (\neg C \rightarrow A)\big)$

ו. $(A \wedge B) \leftrightarrow (B \vee \neg C)$

ז. $\big(\neg A \rightarrow (B \wedge C)\big)$

ח. $(\neg A \vee B) \leftrightarrow \big(B \wedge (C \rightarrow A)\big)$

5. עבור הפסוקים הבאים רשום אילו פסוקים הם טאוטולוגיות, אילו פסוקים הם פסוקי שקר ואילו פסוקים הם לא זה ולא זה :

א. $(A \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B)$

ב. $(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)$

ג. $\big((A \wedge B) \vee C\big) \vee \big((\neg A \vee \neg B) \wedge \neg C\big)$

ד. $\Big(A \rightarrow \big((A \vee B) \rightarrow C\big)\Big) \rightarrow \Big(\big(A \rightarrow (A \vee B)\big) \rightarrow (A \rightarrow C)\Big)$

ה. $(A \rightarrow B) \wedge A \wedge \neg B$

ו. $(A \leftrightarrow B) \wedge \big((\neg A \vee \neg B) \wedge (A \vee B)\big)$

ז. $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee \big((B \vee C) \wedge \neg A\big)$

ח. $\big((A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow B)\big) \leftrightarrow \big((A \vee C) \rightarrow B\big)$

6. הוכח או הפרך את השקילויות הבאות :

א. $(A \vee B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B) \equiv \neg A \vee \neg B$

ב. $\big(A \rightarrow (B \leftrightarrow C)\big) \equiv \big(\neg A \vee (B \wedge C) \vee (\neg B \wedge \neg C)\big)$

ג. $\big(A \wedge (\neg B \vee \neg C)\big) \equiv (A \wedge \neg B) \rightarrow (A \wedge \neg C)$

ד. $\big(A \rightarrow (B \vee C)\big) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C)$

ה. $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

ו. $\big(A \leftrightarrow (B \vee A)\big) \equiv A \vee (\neg A \wedge \neg B)$

ז. $\neg(A \wedge B \wedge C) \equiv (\neg A \vee \neg B \vee \neg C)$

7. לכל אחד מהפסוקים הבאים :

- בנה טבלת אמת.
- ציין האם הפסוק טאוטולוגיה, פסוק שקר או לא טאוטולוגיה ולא פסוק שקר.
- מצא פסוק שקול המשתמש בקשרים : $\wedge,\vee,\neg$.
- הצג את שלילת הפסוק ללא שלילה מחוץ לסוגריים.

א. $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

ב. $(A \rightarrow B) \rightarrow C$

ג. $(A \wedge \neg B) \leftrightarrow (C \vee \neg A)$

ד. $(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$

ה. $(A \wedge B) \vee (\neg A \rightarrow \neg B)$

ו. $A \leftrightarrow (\neg A \rightarrow B)$

ז. $\big[\big((A \wedge B) \vee C\big) \rightarrow (\neg C \vee A)\big] \rightarrow (\neg A \leftrightarrow \neg B)$

ח. $(\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \rightarrow (B \wedge C))$

ט. $A \vee [(B \rightarrow C) \wedge (D \rightarrow \neg A)]$

י. $(A \vee B) \wedge (A \rightarrow \neg B) \wedge (\neg A \leftrightarrow B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

יא. $(A \rightarrow C) \vee (\neg B \vee \neg A)$

יב. $(A \rightarrow \neg A) \rightarrow [(\neg B \wedge A \wedge C) \vee (\neg A)]$

יג. $(A \leftrightarrow \neg A) \wedge [(B \vee \neg A \vee C) \rightarrow A]$

יד. $(B \wedge C) \vee (B \wedge \neg A)$

טו. $(A \vee B \vee C) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B \wedge \neg C)$

8. מצא ברשימה הנ"ל זוגות של פסוקים שקולים (כמה שיותר).
   א. $(A\to B) \vee (A \wedge \neg B)$
   ב. $(A \wedge \neg A) \vee (\neg A)$
   ג. $((B\leftrightarrow A) \wedge (\neg B\to A)) \vee (B \wedge \neg A)$
   ד. $A \vee (B\wedge A)$
   ה. $A \wedge (B\leftrightarrow(C \vee B))$
   ו. $B \vee (A\wedge B) \vee \neg B$
   ז. $(A\wedge B\wedge C)\to((\neg A \vee B) \wedge (\neg C \vee B))$
   ח. $A \leftrightarrow (\neg B \vee A)$
   ט. $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$
   י. $(\neg A \to B) \wedge (\neg B\to A)$

9. נתונים המשפטים/הטענות הבאים:
   א. אם x מתחלק ב 3,5,7 אז x מתחלק במכפלה של שלושתם. (מקרה פרטי של משפט מתורת המספרים).
   ב. אם $x \in A$ וגם $A \subseteq B$ אז $x \in B$.
   ג. פונקציה היא הפיכה אם ורק אם היא חח"ע ועל.
   ד. אם הקבוצות A, B שוות וגם C, D שוות אז אם A מוכלת ב C וגם C מוכלת ב B אז $A = D$.

   לכל אחד מהמשפטים רשום:
   1. את שלילת המשפט.
   2. את המשפט השקול על פי השקילות: $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$ - רק עבור הסעיפים א,ב,ד.

10. נתון שהפסוקים הבאים מתקיימים:
   א. $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow E)$
   ב. $C \to F$
   ג. $(\neg E \wedge C) \vee (E \wedge \neg C)$
   ד. $D \to B$
   ה. $E \leftrightarrow D$
   ו. $\neg B \leftrightarrow F$

   הוכח ש A מתקיים.

11. נגדיר את הקשר הבא F כך שטבלת האמת של F היא:
   הראה שהמערכת: $\{\to, F\}$ שלמה.

A	F(A)
T	F
F	F

תרגילים בסיסיים על מבנים

1. נתון אוצר המילים $L = \{f, g, S, c\}$ כאשר f הוא סימן פונקציה חד- מקומית, g סימן פונקציה דו- מקומית, S סימן יחס דו מקומי ו c סימן קבוע.
   א. האם המבנה $< N, +, \cdot, <, 0 >$ מפרש את L? נמק!
   ב. האם המבנה $< N, f, \cdot, >, 12 >$ כאשר $f(x) = x + 1$, מפרש את L? נמק!
   ג. האם המבנה $< R, f, g, S, e >$ כאשר $g(x,y) = x^y$, $S = \{(x,y) \mid x + y = 0\}$, $f(x) = e^x$, מפרש את L? נמק!
   ד. האם המבנה $< \{1,2,3,4,5\}, <, 2 >$ מפרש את L? נמק!

2. האם $< N, - >$ (הטבעיים עם פעולת חיסור) הוא מבנה מתמטי? נמק!

3. האם $< Z, S, 0 >$ הוא מבנה מתמטי כאשר S הוא הסימן > (דו מקומי) במספרים השלמים? נמק!

4. האם $< \{1,2,3,4,5\}, + >$ הוא מבנה מתמטי? נמק!

5. האם $< P(X), \in, \cap >$ כאשר X קבוצה כלשהי לא ריקה, הוא מבנה מתמטי? נמק!

6. האם $< N \backslash \{9\}, f >$ כאשר $f(x) = x + 2$, הוא מבנה מתמטי? נמק!

7. האם $< Z, S, 0.5 >$ כאשר $S = \{(x,y) | x/y \in Z\}$, הוא מבנה מתמטי? נמק!

8. האם $< \{1,2,3,4,5\}, S >$ כאשר $S = \{(x) | x > 5\}$, הוא מבנה מתמטי? נמק!

9. האם $< \mathbb{N} \times \mathbb{N}, S, (1,1) >$ כאשר $S = \{((a,b),(c,d)) \mid a > c \text{ and } b > d\}$ הוא מבנה מתמטי? נמק!

10. נתון אוי"מ $L = \{R, c\}$ כאשר R סימן יחס חד מקומי ו c סימן קבוע אישי.
    רשום את כל המבנים האפשריים ב L עם העולם $\{1,2\}$.

11. נתון אוי"מ $L = \{f, c\}$ כאשר f סימן פונקציה תלת מקומית ו c סימן קבוע אישי.
    רשום 3 מבנים המפרשים את L כך ש:
    - לכל מבנה עולם שונה וסופי
    - הקבוע מתפרש אחרת בכל מבנה
    - הפונקציה מתפרשת אחרת בכל מבנה.

12. יהי $L = (c_1, c_2, R, f)$ אוצר מילים כאשר c_1, c_2 הם קבועים אישיים R הוא יחס תלת מקומי ו f היא פונקציה חד מקומית.
    אילו מהמבנים הבאים מפרשים את אוצר המילים?
    א. $M_1 = (\{0,1,2,3\}, 1, 2, R^{M_1}, f^{M_1})$ כאשר: $R^{M_1} = \{(1,2,3), (2,3,0)\}$
    ו- $f^{M_1}(x)$ מחזירה את שארית החלוקה של $2x$ ב4.
    ב. $M_2 = (\mathbb{N}, 0, 1, R^{M_2}, f^{M_2})$ כאשר: $R^{M_2} = \{(n,m,k): n,m,k \in \mathbb{N}, nm = k\}$, $f^{M_2}(n) = n + 2$.
    ג. $M_3 = \left((0,1], \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, R^{M_3}, f^{M_3}\right)$ כאשר: $R^{M_3} = \{(x,y,z): x,y,z \in (0,1], x < y < z\}$, $f^{M_3}(x) = \frac{1}{x}$.
    ד. $M_4 = (P(\mathbb{Z}), 0, 1, R^{M_4}, f^{M_4})$ כאשר: $R^{M_4} = \{(A,B,C): A \subseteq B \subseteq C \subseteq \mathbb{Z}\}$, $f^{M_4}(A) = A$.
    ה. $M_5 = (\mathbb{R}, 1, 2, R^{M_5}, f^{M_5})$ כאשר: $R^{M_5} = \{(x,y,z): x,y,z \in \mathbb{R}, x + y + z = 1\}$, $f^{M_5}(x) = 2^x$.

13. נתון אוצר המילים: $L = \{S, f, g, c\}$ כאשר: S סימן יחס דו מקומי, f סימן פונקציה חד מקומית, + פונקציה דו מקומית, c סימן קבוע. קבע לכל אחד מהמבנים הבאים האם הוא מבנה תקין והאם הוא מפרש את L. אם לא, נמק!
    א. $M =< \emptyset, <, \emptyset, f(x) = x, g(x,y) = x + y >$.
    ב. $M =< \{1,3,5,7,9\}, \{(x,y)| \, x + y = 10\}, f(x) = 3, g(x,y) = y, 9 >$
    ג. $M =< Z, <, f(x) = x^2, g(x,y) = x - y, 2.5 >$
    ד. $M =< R, f(x) = 2x + 1, g(x,y) = x^2, 0 >$
    ה. $M =< P(\mathbb{R}), \subseteq, f(X) = X \backslash \mathbb{Z}, g(X,Y) = X \cap Y, \mathbb{R} >$
    ו. $M =< \{3x \mid x \in \mathbb{N}\}, <, f(x) = x + 3, g(x,y) = (x + 2)^2, 0 >$
    ז. $M =< \{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}, \{(x,y)| \, x \cdot y = 1\}, f(x) = x^2, g(x,y) = x \cdot y, 1 >$

תרגילים על תתי מבנים

1. יהי $M=(\mathbb{Z},0,<,+,\cdot)$ מבנה. אילו מהבאים מהווים תת-מבנה של M?
   א. $M_1=(\mathbb{N},0,<,+,\cdot)$
   ב. $M_2=(\{0,1,2\},0,<,+,\cdot)$
   ג. $M_3=(\{2m: m\in\mathbb{Z}\},0,<,+,\cdot)$

2. נתון מבנה $M=(P(\mathbb{N}),\emptyset,\mathbb{N},\subseteq,\cap,\cup)$, כאשר $\emptyset$ ו$\mathbb{N}$ הם קבועים אישיים. האם יש לM תת מבנה עם עולם בגודל 1? מה לגבי עולם בגודל 2?

3. האם $<\{2n\mid n\in\mathbb{N}\},<>$ הוא תת מבנה של $<N,<>$? נמק!

4. האם $<\{2n\mid n\in\mathbb{N}\},f>$, $f(x)=2x+2$ הוא תת מבנה של $<N,f>$? נמק!

5. האם $<\{n\in\mathbb{N}\mid n\le 10\},+>$ הוא תת מבנה של $<N,+>$? נמק!

6. רשום 2 תת מבנים שונים למבנה $\mathrm{M}=<R,S,f,g>$, $\mathrm{S^M}=\{(a,b,c)\mid a+b+c=0\}$, $f^M(x)=x^2$, $g^M(x,y)=x+2y$.

7. רשום תת מבנה ל $M=<Q,<,\frac{1}{2}>$

8. רשום תת מבנה ל $M=<Q,+,\frac{1}{2}>$

9. האם $<N,\cdot,0>$ הוא תת מבנה של $<Z,+,0>$? נמק!

10. נתון: $M=<[0,1],<,\cdot>$, רשום 2 תת מבנים שונים של M.

11. נתון: $L=\{f,R,c\}$ אוצר מילים כאשר f סימן פונקציה דו-מקומית, R סימן יחס תלת מקומי ו c סימן קבוע אישי. רשום מבנה עם עולם אינסופי המפרש את L ומצא לו תת מבנה השונה ממנו.

12. כמה תת מבנים קיימים למבנה $M=<A,S,0>$ כאשר $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid -20\le x\le 20\}$ ו S הוא יחס דו מקומי המוגדר: $S=\{(a,b)\mid a+b=2k\,,a,b\in A,\ k\in\mathbb{Z}\}$?

13. בכל אחד מהסעיפים הבאים, <u>האם M' הוא תת מבנה של M?</u>
   א. M'=(N, +) , M=(R, +, *)
   ב. M'=(Q, ≤) , M=(Z, ≤, 0)
   ג. M'=({1, 2, 3}, 1, +) , M=(N, 0, 1, +, <)
   ד. M'=(R, 0, 1, *) , M=(C, 0, 1, *)
   ה. M'=(N, +, 1) , M=(Q, +, 0)
   ו. M'=(N, +, *, 1, ≤) , M=(Z, +, *)

14. נתון אוצר המילים: $L=\{S,c,f\}$ כאשר S – סימן יחס דו מקומי, c – סימן קבוע, f – סימן פונקציה דו מקומית.
   לכל אחד מזוגות המבנים הבאים המפרשים את L קבע האם N הוא תת מבנה של M והוכח!
   בכל הסעיפים, + מסמן חיבור רגיל של מספרים.
   א. $M=<R,>,0,+>$, $N=<Q,>,0,+>$
   ב. $M=<N,>,0,+>$, $N=<\{2,4,6,8\},>,0,+>$
   ג. תהא X קבוצה כלשהי, $M=<P(X),\subset,\emptyset,\cup>$ עבור $N=<P(Y),\subset,\emptyset,\cup>$:$Y\subseteq X$.
   ד. $M=<N,\{(x,y)\mid x\text{ is even}\},2,+>$, $N=<\{2x\mid x\in\mathbb{N}\},\{(x,y)\mid x-y\text{ is even}\},2,+>$
   ה. $M=<R,>,1,+>$, $N=<Z,>,2,+>$

15. הוכח או הפרך:
   א. בכל תת מבנה של $<Q,\cdot>$ יש מספר $x\in Z$.
   ב. בכל תת מבנה של $<Q,+>$ יש מספר $x\in Z$.

16. יהא אוצר המילים: $L = \{S, f, c\}$ כאשר S סימן יחס דו מקומי, f סימן פונקציה חד מקומית. רשמו 3 תתי מבנים שונים למבנים הבאים למעט המבנים עצמם. אם לא קיימים 3, רשמו את המבנים הקיימים והסבירו למה לא קיימים יותר.

א. $M_1 =< \{1,2,3\}, S, f, 1 >$ כאשר $S = \{(x,y): x \neq y\}$, $f(x) = 4 - x$.

ב. $M_2 =< R, S, f, 1 >$ כאשר $S = \{(x,y): |x| < |y|\}$, $f(x) = x - x^2$.

ג. $M_3 =< N, S, f, 0 >$ כאשר $S = \{(x,y): \ x - y \ is \ even\}$, $f(x) = x + 1$.

17. יהא $L = \{f\}$ אוצר מילים כאשר f סימן פונקציה חד מקומית. האם לכל $n > 0$ טבעי קיים מבנה M המפרש את L ובו יש n איברים בדיוק כך שלכל תת מבנה N של M מתקיים שהעולם של N שווה לעולם של M? הוכח!

18. יהא M מבנה כלשהו באוצר המילים: $L = \{f, S, c\}$ כאשר f סימן פונקציה חד מקומית, c סימן קבוע, S סימן יחס דו מקומי, N תת מבנה של M. קבע האם כל אחת מהטענות הבאות מתקיימת <u>בהכרח</u>:

א. N הוא מבנה סופי.

ב. אם f^M היא פונקציה חח״ע ועל אז לכל תת מבנה N של M , f^N היא חח״ע ועל.

ג. אם N תת מבנה של M, f^N חח״ע ועל אז גם f^M חח״ע ועל.

ד. אם קיימים $x, y \in M$ כך ש $(x,y) \in S^M$ אז גם קיימים $a, b \in N$ כך ש $(a,b) \in S^N$.

ה. אם לכל $x \in M$ מתקיים $(c^M, x) \in S^M$ אז לכל $x \in N$ מתקיים: $(c^N, x) \in S^N$.

תרגילים על איזומורפיזם

בסיסי

1. נתון מודל $M_1=(N,f_1)$ לאוצר המילים $\{f\}$, כאשר f הוא סָמן של פונקציה חד-מקומית והפונקציה $f_1: M_1 \to M_1$ מוגדרת על ידי $f_1(x)=3x$. ידוע ש-$M_2=(N-\{6\},f_2)$ הוא מודל לאותו אוצר מילים. נתון איזומורפיזם $H: M_1 \to M_2$ כך ש: עבור $x \le 3$, $H(x)=x$, $H(4)=5$, $H(5)=4$ ועבור x שהוא גדול מ-5, $H(x)=x+1$. מהי הפונקציה f_2?

2. בשאלות הבאות, ידוע מבנה אחד וידוע איזומורפיזם בינו לבין מבנה שני. אתם צריכים למצוא את המבנה השני.
   א. נתון מודל $M_1=(\{1,2,3,4\},R^{M_1}=\{<1,2>,<3,4>\})$. $M_2=(\{1,2,3,4\},R^{M_2})$ הוא מודל נוסף. ידוע שהפונקציה הבאה היא איזומורפיזם: $H: M_1 \to M_2,\ H(n)=5-n$. הציגו את היחס R^{M_2} באפן מפרש.
   ב. נתון מודל $M_1=(\{1,2,3,4\},f^{M_1}(n)=n)$. $M_2=(\{1,2,3,4\},f^{M_2})$ הוא מודל נוסף. ידוע שהפונקציה הבאה היא איזומורפיזם: $H: M_1 \to M_2,\ H(n)=5-n$. חשבו את $f^{M_2}(3)$.
   ג. נתון מודל $M_1=(\{1,2,3,4\},\ R^{M_1}=\{<1,2>,<3,4>\},f^{M_1}(n)=n)$. $M_2=(\{2,3,4,5\},R^{M_2},f^{M_2})$ הוא מודל נוסף. ידוע שהפונקציה הבאה היא איזומורפיזם: $H: M_1 \to M_2,\ H(n)=6-n$. חשבו את $f^{M_2}(3)$ והציגו במפרש את R^{M_2}.
   ד. נתון מודל $M_1=(\{1,2,3\},\ R^{M_1}=\{<1,2>,<3,1>\},f^{M_1}(1)=1,\ f^{M_1}(2)=3,\ f^{M_1}(3)=1)$. $M_2=(\{3,4,5\},R^{M_2},f^{M_2})$ הוא מודל נוסף. ידוע שהפונקציה הבאה היא איזומורפיזם: $H: M_1 \to M_2,\ H(n)=6-n$. הציגו במפרש את היחס R^{M_2} ואת הפונקציה f^{M_2}.

3. נתון מבנה $M_1=(\{1,2\},\{<1,1>,<1,2>\},\{<1,2,2>,<2,1,2>\})$ לאוצר המילים $\{S_1,S_2\}$, כאשר S_1 הוא סָמן יחס דו-מקומי ו-S_2 הוא סָמן יחס תלת-מקומי. נתון מבנה נוסף $M_2=(\{1,2\},S_1^{M_2},S_2^{M_2})$ לאותו אוצר מילים. ידוע שהפונקציה הבאה היא איזומורפיזם $H: M_1 \to M_2,\ H(n)=3-n$. כתבו במפרש את היחסים $S_1^{M_2},S_2^{M_2}$.

הוכחת איזומורפיזם

4. האם הפונקציה $h(x) = 2x+3$ $h: M_1 \to M_2$ היא איזומורפיזם בין המבנים:
   - $M_1 =< \{x \in \mathbb{N} \mid x \ge 10\}, \{(x) \mid 11 \le x \le 99\}, 11 >$
   - $M_2 =< \mathbb{N}, \{(x) \mid 4 \le x \le 48\}, 4 >$

   אם כן, הוכח! אם לא, נמק!

5. האם הפונקציה $h(x) = e^x$ $h: M_1 \to M_2$ היא איזומורפיזם בין המבנים:
   - $M_1 =< R, +, 0 >$
   - $M_2 =< [0,\infty), *, 1 >$

   אם כן, הוכח! אם לא, נמק!

6. האם הפונקציה $h(x) = x^2$ $h: M_1 \to M_2$ היא איזומורפיזם בין המבנים:
   - $M_1 =< R, >, +, 2 >$
   - $M_2 =< R, >, +, 4 >$

   אם כן, הוכח! אם לא, נמק ומצא פונקציה שהיא איזומורפיזם בין המבנים.

7. נתבונן באוצר המילים הבא: $\{R\}$, כאשר R הוא יחס דו-מקומי. נתבונן במודלים הבאים שמפרשים אוצר מילים זה: $M_1=(\{1,2,3..\},<)$, $M_2=(\{3,4,5..\},<)$. הוכיחו שהפונקציה הבאה היא איזומורפיזם: $H: \{1,2,3..\} \to \{3,4,5..\},\ H(n)=n+2$.
   הדרכה: עליכם להוכיח שהיא חח"ע, על ושהיא מקיימת $n<m$ אם"ם $H(n)<H(m)$.

8. בהמשך לשאלה הקודמת נתון מודל נוסף: $M_3=(\{1,3,5,6\},<)$. הוכיחו שהפונקציה $H: \{1,3,5,6\} \to \{1,2,3..\},\ H(n)=5n+1$ היא העתקה חח"ע ושומרת על הסדר מ-M_3 למודל M_1. אין צֹרך (וגם בלתי אפשרי) להוכיח שהיא על.

מציאת איזומורפיזם

9. בכל אחת מהשאלות הבאות נתונים שני מבנים. עליכם לבדוק אם הם איזומורפיים. אם כן, מִצאו איזומורפיזם ביניהם.
   א. $M_1=(\{1,2,3\},S^{M_1}\{<1,2>,<2,3>,<2,1>\}),M_2=(\{1,2,3\}, S^{M_2}=\{<2,3>,<3,2>,<3,1>\}$.
   ב. $M_1=(\{1,2,3,4\},S^{M_1}\{<1,2,3>,<2,3,4>\}),M_2=(\{2,3,4,5\}, S^{M_2}=\{<2,3,5>,<2,4,5>\}$.
   ג. $M_1=(\{1,2,3\},g_1),M_2=(\{1,2,4\}, g_2\}$, כאשר $g^1(1,2)=3,\ g_1(2,3)=1,\ g_1(1,3)=3$ ואילו $g_2(1,4)=2,\ g_2(2,1)=4,\ g_2(2,4)=4$.

10. $M_1=(N,<),M_2=(\{a_n: n\in N\},<)$, כאשר a_n מוגדר כך: $a_0=-2,\ a_1=-3,$ ועבור n גדול מ-0 $a_{2n}=2^n,\ a_{2n+1}=2^n-1$.
   רמזים:
   א. מדוע הנוסחה $H(n)=a_n$ איננה מגדירה איזומורפיזם?
   ב. הרעיון שמאחורי השאלה הוא שמציאת נוסחה מפורשת לסדרה של מספרים, היא למעשה דוגמא למציאת איזומורפיזם.
   ג. טפלו תחילה במקרה ש-$n>1$.
   ד. יש איזומורפיזם יחיד, H. כתבו את 10 האברים הקטנים ביותר במבנה M_2 וחשבו את $H(3),H(5),H(7)$. עכשיו כבר קל להציג נוסחה כללית ל-$H(2n+1)$, כלומר נוסחה ל-H עבור מספרים אי-זוגיים.
   ה. עתה טפלו במספרים הזוגיים ולבסוף חשבו את $H(0),H(1)$.

11. מצאו איזומורפיזם בין 2 מבין המבנים הבאים:
   - $M_1 =< \{1,2,3,4,5\}, \{< 1,3 >, < 1,4 >, < 2,4 >\} >$
   - $M_2 =< \{1,2,3\}, \{< 1,2 >, < 1,3 >\} >$
   - $M_3 =< \{1,2,3,4,5\}, \{< 2,4 >, < 1,4 >, < 2,3 >\} >$
   - $M_4 =< \{2,3,4,5,6\}, \{< 2,5 >, < 3.4 >, < 3,5 >\} >$
   - $M_5 =< \{1,3,4\}, \{< 4,1 >, < 1,3 >\} >$

12. האם קיים מבנה איזומורפי M' למבנה $M =< N, <>$ (שהוא לא המבנה עצמו) באוצר המילים $L = \{<\}$ כאשר $<^{M'}$ הוא למעשה היחס ההפוך (כלומר, $>$)?

13. נתבונן באוצר המילים $\{E,S\}$, כאשר E הוא סֵמן של יחס דו-מקומי ואילו S סֵמן של יחס חד-מקומי. נגדיר שני מודלים שמפרשים אוצר מילים זה: $M_1=(\{1,2,3,4,5,6,7\},E_1,S_1)$, כאשר $S_1=\{3,5\}$, $E_1=\{<1,2>,<2,1>,<5,6>,<6,7>,<5,7>\}$. $M_2=(\{11,12,13,14,15,16,17\},E_2,S_2)$, כאשר $S_2=\{13,15\}$, $E_2=\{<11,12>,<12,11>,<15,16>,<16,17>,<15,17>\}$. הוכיחו שהמודלים M_1,M_2 איזומורפיים (כלומר הציגו איזומורפיזם ביניהם). אתגר: מצאו איזומורפיזמים נוספים בין מודלים אלו.

14. נתבונן באוצר המילים $\{E,S\}$ כמו בשאלה הקודמת. נגדיר שני מודלים שמפרשים אוצר מילים זה: $M_1=(\{1,2,3,4,5\},E_1,f_1)$, כאשר $S_1=\{3,5\}$, $E_1=\{<1,2>,<2,1>\}$. $M_2=(\{11,12,13,14,15\},E_2,S_2)$, כאשר $S_1=\{12,15\}$, $E_2=\{<11,13>,<13,11>\}$.
   הוכיחו שהמודלים M_1,M_2 איזומורפיים (כלומר הציגו איזומורפיזם ביניהם).
   אתגר: מצאו איזומורפיזמים נוספים בין מודלים אלו.

15. הוכיחו שהמודלים הבאים איזומורפיים: $M_1=(\{1,2,3\},S_1,f_1)$, כך ש-$S_1=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<3,3>\}$ והפונקציה f_1 מקיֶמת $f_1(x)=2$ לכל x. $M_2=(\{3,5,15\},S_2,f_2)$, כך ש-S_2 היא קבוצת הזוגות, $<x,y>$ כך ש-x הוא כפולה של y והפונקציה f_2 מקיֶמת $f_2(x)=3$ לכל x.

16. נתבונן באוצר המילים $\{c,F\}$ שבו c הוא סֵמן של קבוע אישי ואילו F הוא סֵמן של פונקציה חד-מקומית. הוכיחו שהמודלים הבאים איזומורפיים: $M_1=(\{1,2,4\},2,f)$, שבו f מוגדרת באפן מפֹרט על ידי $f(1)=2,\ f(2)=4,\ f(4)=1$. $M_2=(\{1,2,4\},2,g)$, שבו g מוגדרת באפן מפֹרט על ידי $g(1)=4,\ g(2)=1,\ g(4)=2$. הדרכה: יהי H האיזומורפיזם המבוקש. ברור ש-$H(2)=2$, כי 2 הוא הפֵּרוש של שני המודלים לסֵמן הקבוע האישי c, ולפי הגדרת איזומורפיזם $H(c^{M_1})=c^{M_2}$. עתה לפי הגדרת איזומורפיזם, $H(f(x))=g(H(x))$ לכל x. הציבו בשוויון זה $x=2$. עתה נסו ללא הדרכה נוספת.

17. הוכיחו שהפונקציה $H(x)=x+1$, $H:(0,1)\to(0,9)$ היא העתקה חח"ע ושומרת סדר של המודל $M_1=((0,1),<)$ במודל $M_2=((0,9),<)$. האם תוכלו להצביע על העתקות נוספות שהן חח"ע ושומרות סדר של המודל M_1 במודל M_2?
אתגר: האם תוכלו לִמצֹא העתקה כזו של המודל M_2 במודל M_1? האם תוכלו לִמצֹא אחרת?

18. מצא זוגות של מבנים מבין הבאים שהם איזומורפיים ומצא איזומורפיזם ביניהם:
- $M_1 =< \{3x \mid x \in \mathbb{Z}\}, \{(3x,3y) \mid \text{זוגי } x\}, 0 >$
- $M_2 =< Z, \{(x,y) \mid \text{אי־זוגי } x\}, 1 >$
- $M_3 =< N, >, 0 >$
- $M_4 =< R, >, 0 >$
- $M_5 =< (-2,2), <, 0 >$
- $M_6 =< \{3^n \mid n \in \mathbb{N}\}, >, 1 >$
- $M_7 =< \mathbb{R}^+, \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{N}\}, 0 >$

תרגילים מתקדמים

19. יהיו $M_1 =< Z\backslash N, f^{M_1}(x) = x-1 >$, $M_2 =< N \cup \{-1\}, f^{M_2}(x) = x+1 >$ מבנים באוצר מילים $L=\{f\}$ כך ש f סימן פונקציה דו מקומית. הוכח: $M_1 \cong M_2$.

20. יהא $M_1 =< \mathbb{R}, f^{M_1}(x) = 2x+1 >$ ויהא: $M_2 =< \mathbb{R}^+, f^{M_2} >$, נתון שקיים איזומורפיזם בין המבנים: $h: M_1 \to M_2$ המוגדר ע"י: $h(x) = 3^x$. מצא את $f^{M_2}(x)$.

21. יהיו $M_1 =< \{\{0,1,\dots,n\} \mid n \in \mathbb{N}\}, \subseteq, \cup >$, $M_2 =< \mathbb{N}, \leq, f^{M_2}(x,y) = \max(x,y) >$ מבנים באוצר מילים $L=\{S,f\}$ כך ש S סימן יחס דו מקומי ו f פונקציה דו מקומית, כאשר הסימנים S,f מתפרשים ב M_1 כהכלה ואיחוד בין קבוצות. הוכח: $M_1 \cong M_2$.

22. רשום דוגמא למבנים הבאים:
א. מבנה M באוצר המילים $L=\{f\}$ כאשר f סימן פונקציה דו מקומית ותת מבנה N כך ש $N \subset M$ ומתקיים: $N \cong M$.
ב. מבנה M באוצר המילים $L=\{f\}$ כאשר f סימן פונקציה דו מקומית שאיזומורפי למבנה: $M_2 =< (0,1), f(x,y) = x \cdot y >$ אבל: $M \neq M_2$.
ג. מבנה M באוצר המילים $L=\{S\}$ כאשר S סימן יחס חד מקומי, כך שהאיזומורפיזם היחיד בין M לעצמו הוא: $h(x) = x$.

23. הוכח שהמבנה $< R\backslash\{0\}, \cdot >$ לא איזומורפי למבנה $< \mathbb{R}^+, \cdot >$. (ב 2 המבנים הפעולה היא הכפל הרגיל של מספרים ממשיים).

24. עבור $1 < n \in \mathbb{N}$ יהא אוצר המילים $L_n = \{S,f\}$ כאשר S סימן יחס n מקומי, f סימן פונקציה n מקומית. נגדיר את המבנה הבא: $M_n =< R, S, f >$ כאשר היחס מתפרש:
$S = \{(x_1,x_2,\dots,x_n) : |x_i - x_j| < 1 \; for \; all \; i \neq j\}$,
והפונקציה היא: $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n$.
ונגדיר את המבנה הבא: $N_n =< \mathbb{R}, S, f >$ כאשר היחס הוא:
$S = \{(x_1,x_2,\dots,x_n) : |x_i - x_j| < n \; for \; all \; i \neq j\}$ והפונקציה היא:
$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}{n^{n-1}}$.
א. הוכיחו שלכל $1 < n$ טבעי הפונקציה: $f: M_n \to N_n$ המוגדרת ע"י: $f(x) = x+2$ אינה איזומורפיזם.
ב. הוכיחו שלכל $1 < n$ טבעי: $M_n \cong N_n$.

25. יהא $L=\{S\}$ אוצר מילים כאשר S הוא סימן יחס דו מקומי. ראינו שאיזומורפיזם מקיים שימור יחס בין המבנים, בפרט אם $M_1 \cong M_2$ ופונקצית האיזומורפיזם היא $f: M_1 \to M_2$ אז עבור יחס דו מקומי S באוצר המילים מתקיים: שלכל $x_1, x_2 \in$ M_1 מתקיים: $(x_1,x_2) \in S^{M_1}$ אם ורק אם $(h(x_1),h(x_2)) \in S^{M_2}$.
נראה כעת מדוע צריך אם ורק אם:
תנו דוגמא ל 2 מבנים M_1, M_2 כך שיש פונקציה $f: M_1 \to M_2$ חח"ע ועל המקיימת שלכל $x_1, x_2 \in M_1$, אם $(x_1,x_2) \in S^{M_1}$ אז $(h(x_1),h(x_2)) \in S^{M_2}$ אבל $M_1 \ncong M_2$. הוכיחו את תשובתכם.

קיום של פסוקים במבנים איזומורפיים

26. הגדרה: אגודה היא מודל, M, לאוצר המילים {f} שבו f מִתפרשת כפונקציה דו-מקומית שמקיימת $\forall x[\forall y[\forall z[f(f(x,y),z)=f(x,f(y,z))]]]$ (אגב, זה נִקרא חק הקִבוץ). הוכיחו שהמודל $M_1=(\{1,2,3..\},+)$ הוא אגודה. הוכיחו שהמודל $M_2=(\{2,4,6..\},+)$ איזומורפי למודל M_1. לפי איזה משפט תוכלו להסיק שגם M_2 הוא אגודה?

27. בהמשך לשאלה 26: בדקו אם הפסוק $\forall x[\forall y[f(x,y)=f(y,x)]]$ (חק החִלוף) מתקיים במודל M_2. האם הוא מתקיים במודל M_1?

28. נתבונן באוצר המילים {c,R} כאשר R הוא סמן של יחס דו-מקומי ו-c הוא סמן של קבוע אישי. נתבונן במודלים הבאים: $M_1=(Z,1,<)$, $M_2=(Z,2,<)$. האם הם איזומורפיים? אם כן, הציגו איזומורפיזם ביניהם. אם לא, חפשו פסוק שאחד מקיים והשני לא. אם אין פסוק כזה, חפשו נִימוק אחר לכך שהם אינם איזומורפיים.

29. הוכח: (ע"י פסוק המתקיים באחד מהמבנים ולא בשני)

א. $<R,*>$ לא איזומורפי ל $<Q,*>$

ב. $<Z,+>$ לא איזומורפי ל $<Q,+>$

ג. $<N,<>$ לא איזומורפי ל $<Z,<>$

ד. $<Z,+,0>$ לא איזומורפי ל $<Z,+,1>$

ה. $<\{1,2,3\},\{(1,1),(1,2),(1,3)\}>$ לא איזומורפי ל $<\{4,5,6\},\{(4,4),(5,6),(6,4)\}>$

ו. $<N,*>$ לא איזומורפי ל $<N\setminus\{0\},*>$

ז. $<N,+>$ לא איזומורפי ל $<N\setminus\{0\},+>$

ח. $<\{2x|\ x\in\mathbb{N}\},\{(a)|a \bmod 4=0\},2>$ לא איזומורפי ל $<\{3x|\ x\in\mathbb{N}\},\{(a)|a \bmod 6=0\},6>$

ט. $<\{1,2,3\},\{(1,2),(2,3),(3,1)\}>$ לא איזומורפי ל $<\{3,4,5\},\{(3,4),(4,5),(5,4)\}>$

י. $<\{1,2,3\},\{(1),(2)\}>$ לא איזומורפי ל $<\{3,4,5\},\{(5)\}>$

יא. $<R,<>$ לא איזומורפי ל $<(0,1],<>$

יב. $<\{1,2,3\},\{(1,2,3),(2,1,1),(3,3,1)\}>$ לא איזומורפי ל $<\{3,4,5\},\{(3,4,4),(4,5,5),(3,3,5)\}>$

30. בכל אחד מהסעיפים הבאים, הוכח שאין איזומורפיזם בין המבנים הנתונים:

א. $M_1=<Q,\cdot>$, $M_2=<Z,\cdot>$

ב. $M_1=<(-1,1)\setminus\{0\},\cdot>$, $M_2=<(0,1),\cdot>$

ג. $M_1=<\{1,2,3,\dots,2^n\},div>$, $M_2=<P(\{1,2,\dots n\}),\subseteq>$ כאשר: $1<n\in\mathbb{N}$.

ד. $M_1=<Z,+,m>$, $M_2=<Z,+,n>$ כאשר: $0<m,n\in\mathbb{N}\ ,\ m\neq n$

ה. $M_1=<P(\mathbb{N}),\Delta>$, $M_2=<P(\mathbb{N}),\cup>$

ו. $M_1=<\{1,2,4,8\},\{(x,y,z)|\exists a\in\mathbb{N}^+:2x=y,ay=z\}>$, $M_2=<\{1,2,3,4\},\{(x,y,z)|\ x<y\leq z\}>$

31. האם בין כל 2 מבנים יש איזומורפיזם? אם כן, הצג פונקצית איזומורפיזם והוכח. אם לא, הוכח ע"י פסוק.

א. $M_1=<N\setminus\{0\},>,*,2>$, $M_2=<\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots\right\},<,*,\frac{1}{2}>$

ב. $M_1=<(0,1),<,*>$, $M_2=<R^+,<,+>$

ג. $M_1=<(0,1),<>$, $M_2=<R^+,<>$

ד. $M_1=<\{2x|x\in N\},>,*,2>$, $M_2=<\{2^x|\ x\in Z\},<,*,\frac{1}{2}>$

ה. $M_1=<R,\leq>$, $M_2=<P(N),\subseteq>$

ו. $M_1=<Q,<>$, $M_2=<Q\cap(0,1),<>$

ז. $M_1=<Q^+,\div>$, $M_2=<\{a^x|\ x\in Q^+\},\div>$

ח. $M_1=<\{A\subseteq N|\ |A|=5\},f(X,Y)=\{|x+y|\ |\ x\in X,y\in Y\}>$,
$M_2=<\{A\subseteq N|\ |A|=5\},f(X,Y)=\{|x-y|\ |\ x\in X,y\in Y\}>$.

ט. $M_1=<N,div>$, $M_2=<N,S=\{(x,y)|\ x\cdot y=3t\ ,t\in N\}>$ כאשר div הוא יחס החלוקה, כלומר: (a,b) אומר ש b מתחלק ב a ללא שארית.

י. $M_1=<R,f(x)=x^3>$, $M_2=<R,f(x)=x^2>$

יא. $M_1=<(2,5),<>$, $M_2=<(4,5),>>$

יב. $M_2 =< R, \pi >$, $M_1 =< R, e >$

יג. $M_2 =< R^+, f(x,y) = \frac{x+y}{2} >$, $M_1 =< (5,6), f(x,y) = \frac{x+y}{2} >$

יד. $M_2 =< Q^+ \cap (2,\infty), <, * ,8 >$, $M_1 =< Q^+ \cap (1,\infty), <, * ,2 >$

תרגילים על תחשיב היחסים

נוסחאות ושמות עצם

1. חשבו את ערך האמת של הפסוק S[2,f(1,3)] במבנים הבאים:
   א. (N,<,+) (כלומר שהעולם הוא קבוצת המספרים הטבעיים, S(x,y) פירושו x<y והפונקציה הדו מקומית f מוגדרת על N לפי f(x,y)=x+y).
   ב. (Z,<,-) (כלומר שהעולם הוא קבוצת המספרים השלמים, היחס הדו מקומי S מתפרש כמו בחלק א והפונקציה f מוגדרת לפי f(x,y)=x-y).
   ג. (R,<,f) כאשר R היא קבוצת המספרים הממשיים, היחס S מתפרש כמו בחלק א והפונקציה f מתפרשת כפונקציה f שמוגדרת כך לפי f(x,y)=7x-y.

2. חשבו את ערך האמת של הפסוק S[f[3,g(2,2)]] במודלים הבאים:
   א. העולם הוא N (קבוצת המספרים הטבעיים), היחס החד מקומי S מתפרש כך: S(x) פירושו ש-x הוא מספר זוגי, הפונקציה הדו מקומית f מתפרשת כך: f(x,y)=x+y והפונקציה הדו מקומית g מתפרשת כך: g(x,y)=xy (כלומר כפל).
   ב. כמו ב-א, אבל הפרושים של f,g מתחלפים ביניהם. באפן מפרט: העולם הוא N (קבוצת המספרים הטבעיים), היחס החד מקומי S מתפרש כך: S(x) פירושו ש-x הוא מספר זוגי, הפונקציה הדו מקומית f מתפרשת כך: f(x,y)=xy והפונקציה הדו מקומית g מתפרשת כך: g(x,y)=x+y.

3. נתון $\mathrm{L}=\{\mathrm{c,d,f,g}\}$ אוצר מילים כאשר c,d סימני קבועים, f,g סימני פונקציות דו מקומיות ו x_1,x_2,x_3 משתנים. חשב את הערך של כל שם עצם במבנה M המפרש את L: $\mathrm{M}=<Z,0,1,+,*>$ $f^M=+,g^M=*$ והשהמה הנתונה, $c^M=0,d^M=1$.
   א. $A(2,5)=?\,,\ \mathrm{A}(x_1,x_2)=\mathrm{g}(f(x_1,x_2),d)$
   ב. $A(-1,3)=?\,,\ \mathrm{A}(x_1,x_2)=f(f(x_1,x_2),g(x_2,c))$
   ג. $A=?\,,\ \mathrm{A}=\mathrm{f}(f(f(d,d),d),d)$
   ד. $A(5,2,4)=?\,,\ \mathrm{A}(x_1,x_2,x_3)=g(g(x_1,f(x_2,x_1)),g(x_2,x_3))$

4. חשב את 4 הסעיפים בשאלה 3 כאשר המבנה הוא: $N=<Q,-1,0.5,+,->$ $f^N=+,g^N=-,c^N=-1,d^N=0.5$

5. נתון $\mathrm{L}=\{\mathrm{c,x,f,g}\}$ אוצר מילים כאשר c,x סימני קבועים, f,g סימני פונקציות דו מקומיות ונתונים x_1,x_2 משתנים. נתון מבנה המפרש את L: $M=<P(X),\emptyset,X,\cap,\cup>$ $f^N=\cap,g^N=\cup,c^N=\emptyset,x^N=X$ כאשר $\mathrm{X}=\{1,2,3,4,5\}$
   חשב את הערך של שמות העצם הבאים בהשמה הנתונה:
   א. $A=?\,,\ \mathrm{A}=\mathrm{f}(x,c)$
   ב. $A(\{1,2\},\{2,3,5\})=?\,,\ \mathrm{A}(x_1,x_2)=\mathrm{g}(f(x_1,x_2),f(x_1,x))$
   ג. $A(\{1,2\},\{2,3,5\})=?\,,\ \mathrm{A}(x_1,x_2)=f(g(x_1,x_2),g(x_1,x))$

6. נתון $L=\{c,f,g,S\}$ אוצר מילים כאשר c סימן קבוע, f סימן פונקציה חד מקומיות, g סימן פונקציה דו מקומיות ו S סימן יחס דו מקומי. נתונים גם: x_1,x_2,x_3 משתנים, $M=<N,2,f^M,+,<>$,$S^M=<$,$c^{\mathrm{M}}=2$,$g^M=+$,$f^M(x)=x^2$ מבנה ב L. חשב את ערך האמת של הנוסחאות הבאות במבנה M:
   א. $\mathrm{S}(\mathrm{f}(\mathrm{c}),\mathrm{g}(\mathrm{c},\mathrm{c}))$
   ב. $[S(f(x_1),x_2)\rightarrow S(g(x_1,x_2),g(x_1,c))]$ כאשר $x_1=2\ ,x_2=3$
   ג. $[\mathrm{S}(g(f(x_1),f(x_2)),c)\vee[S(x_3,g(x_2,x_2))]$ כאשר: $x_1=1\,,x_2=2\ ,x_3=5$

חישוב ערך אמת של פסוק במבנה

7. חשבו את ערך האמת של הפסוק $[\forall x[\exists y(S(y,x)]] \to [\forall y[\exists x(S(y,x)]]$ במודלים הבאים:
   א. $(N,<)$ (כלומר שהעולם הוא קבוצת המספרים הטבעיים והיחס הדו מקומי S מתפרש כך: $S(x,y)$ פירושו $x<y$).
   ב. $(N,>)$.
   ג. $(Z,<)$.
   ד. $(Z,>)$.
   ה. $([-3,5),<)$.
   ו. (N,div) כלומר שהיחס הדו מקומי S מתפרש כיחס div שמוגדר כך: $div(x,y)$ פירושו ש-x מחלק את y, כלומר ש-y הוא כפולה של x.

8. חשבו את ערך האמת של הפסוק $\forall x[[\exists y(S(y,f(x))] \to [\forall y(S(y,f(x))]]$ במודלים הבאים:
   א. העולם הוא N, $S(x,y)$ פירושו $x<y$ ו-$f(x)$ מתפרשת כ- $x+5$.
   ב. העולם הוא Z, $S(x,y)$ פירושו $x<y$ ו-$f(x)$ מתפרשת כ- $x-5$.

9. בשאלה זו היחס $S(x,y)$ יתפרש כ-$x=y$. כתבו את ערך האמת של כל אחד מהפסוקים, בהתאם לעולם הדיון:
   א. $\forall x \exists y[S(x,y)]$ בעולם $\{1,2\}$.
   ב. $\exists x \forall y[S(x,y)]$ בעולם $\{1\}$.
   ג. $\exists x \forall y[S(x,y)]$ בעולם $\{1,2\}$.
   ד. $\exists x \forall y[S(x,y) \to S(y,x)]$ בעולם $\{1,2\}$.

10. מהו ערך האמת של הפסוק $\forall x[[\exists y(x<y)] \to [\exists y(y<x)]]$ בעולם $\{1,2,3\}$?

11. נתון אוצר המילים $L = \{S\}$ כאשר S סימן יחס דו מקומי, ונתון הפסוק $A = \forall x(\forall y(S(x,y) \wedge S(y,x)))$. לכל אחד מהמבנים הבאים בדוק האם המבנה מספק את A, אם לא, הסבר!
   א. $M = < N, <>$
   ב. $M = < N, \geq>$
   ג. $M =< \{0,1\}, \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\} >$
   ד. $M =< R, \{(a,b) \mid |a| = |b|\} >$
   ה. $M =< R, \{(a,b) \mid a+b = 0\} >$

12. רשום דוגמא למבנה באוצר מילים $\mathrm{L} = \{\mathrm{c}, \mathrm{S}, \mathrm{R}\}$ (R ו S סימני יחס דו מקומיים, c סימן קבוע) המקיים את הפסוק: $[\forall x(R(x,c))] \to [\exists x S(c,x)]$.

13. נתונים 2 פסוקים באו"מ $L = \{S, R\}$, R סימן יחס דו מקומי, S סימן יחס חד מקומי:
   - $\forall x(\forall y(S(x) \leftrightarrow R(x,y)))$
   - $\forall x(\exists y(S(x) \leftrightarrow R(x,y)))$

   א. רשום מבנה המקיים את הפסוק הראשון ולא את השני.
   ב. רשום מבנה המקיים את הפסוק השני ולא את ראשון.
   ג. רשום מבנה המקיים את שני הפסוקים.
   ד. רשום מבנה שאינו מקיים אף אחד משני הפסוקים.

14. נתונים 2 מבנים באו"מ $L = \{f, S\}$, S סימן יחס דו מקומי, f סימן פונקציה דו מקומית:
   - $M_1 =< N, +, >>$
   - $M_2 =< Q, +, >>$

   א. רשום פסוק המתקיים במבנה הראשון ולא בשני.
   ב. רשום פסוק המתקיים במבנה השני ולא בראשון.

15. מהו ערך האמת של הפסוק $[\forall x\forall y[R(x,y)\to\exists z[R(x,z)\wedge R(z,y)]]]\to[\forall x\exists y[R(x,y)]]$ בעולם $(0,1]$, כאשר $R(x,y)$ פירושו $x<y$?

16. מהו ערך האמת של הפסוק $[\forall x[\exists y(x<y)]]\to[\forall x[\exists y(y<x)]]$ בעולם $[0,1)$?

17. מהו ערך האמת של הפסוק $[\forall x[\exists y(x<y)]]\to[\exists y[\neg[\exists x(y<x)]]]$ בעולם המספרים הממשיים?

18. מהו ערך האמת של הפסוק $[\forall x[\exists y[S(x,y)]]]\to[\forall y[\exists x[S(y,x)\vee S(x,y)]]]$ בעולם $\{1,2,3\}$ כאשר היחס $S(x,y)$ פירושו $x\leq y$?

19. מהו ערך האמת של הפסוק $[\forall x[\exists y[P(x)\to\neg P(y)]]]$ בעולם $\{1,2,3,4,..\}$, כאשר היחס $P(x)$ פירושו $x<3$?

20. מהו ערך האמת של הפסוק $[\forall x[\exists y[R(x,y)]]]\to[\exists x[\forall y[R(x,y)]]]$ בעולם $\{1\}$ כאשר היחס $R(x,y)$ פירושו $x=y$?

21. כתבו את ערך האמת של הפסוקים הבאים בעולמות המתאימים. אין צרך לנמק!
   א. $\forall x[\exists y(y=x)]$ בעולם המספרים הטבעיים. זכרו שאין חובה ש-x,y יהיו מספרים שונים. ייתכן שהם שמות שונים של אותו מספר.
   ב. $\exists y[\forall x(y=x)]$ בעולם המספרים הטבעיים.
   ג. $\exists y[\forall x(y=x)]$ בעולם $\{7\}$.
   ד. $\forall x[\exists y(y=x)]\to\exists y[\forall x(y=x)]$ בעולם המספרים הטבעיים.
   ה. $\forall x[(0<x^2)\vee(x=0)\vee(2x<0)]$ בעולם המספרים השלמים (כלומר $\{..-3,-2,-1,0,1,2,3..\}$).
   ו. $\forall x[(x=x)\to(x\neq 2)]$ בעולם המספרים הטבעיים.
   ז. $\forall x[0<x)\leftrightarrow(-x>0)]$ בעולם המספרים הטבעיים.
   ח. $[\exists x[[\exists y(x<y)\wedge[\exists y(y<x)]]]\wedge[\exists x[(x<2)\wedge(-2<x)]]$ בעולם $\{-3,0,2\}$.
   ט. $\forall x[\forall y[R(x,y)\to R(y,x)]]$ כאשר העולם הוא קבוצת הישובים במדינת ישראל והיחס $R(x,y)$ פירושו שהמרחק בין הישובים x,y קטן מ-30 ק"מ.
   י. $[\exists x[[\exists y(x<y)\wedge[\exists y(y<x)]]]\vee[\exists x[(x<2)\wedge(-2<x)]]$ בעולם $\{-3,0,2\}$.
   יא. $[\exists x[[\exists y(x<y)\wedge[\exists y(y<x)]]]\to[\exists x[(x<2)\wedge(0<x)]]$ בעולם $\{-3,0,2\}$.
   יב. $[\exists x[[\exists y(x<y)\wedge[\exists y(y<x)]]]\to[\forall x[(x<2)\wedge(-2<x)]]$ בעולם $\{-3,0,2\}$.
   יג. $[\exists x[[\exists y(x<y)\wedge[\forall y(y<x)]]]\vee[\forall x[(x<2)\vee(-2<x)]]$ בעולם $\{-3,0,2\}$.
   יד. $\forall x[[\exists y(y^2=x)]\to[\exists y[(y^2=x)\wedge((-y)^2=x)]]]$ בעולם המספרים הממשיים (כלומר כל המספרים).

22. חשבו את ערך האמת של הפסוקים הבאים בעולמות המתאימים.
   א. $\forall x_1[\exists x_2[\forall x_3[\exists x_4(x_1=x_2\wedge x_3=x_4)]]]$ בעולם $\{1,2,3\}$
   ב. $\forall x_1[\exists x_2[\forall x_3[\exists x_4(x_1=x_3\wedge x_2=x_4)]]]$ בעולם $\{1,2,3\}$
   ג. $\forall x_1[\exists x_2[\forall x_3[\exists x_4(x_1=x_3\vee x_2=x_4)]]]$ בעולם $\{1,2,3\}$
   ד. $\forall x_1[\exists x_2[\forall x_3[\exists x_4(x_1=x_3\vee x_1+x_2=x_4)]]]$ בעולם השלמים: $Z=\{..-3,-2,-1,0,1,2..\}$
   ה. $\exists x_1[\forall x_2[\forall x_3[\exists x_4(x_1=x_3\vee x_1+x_4=x_2)]]]$ בעולם המספרים השלמים החיוביים: $\{1,2,3..\}$
   ו. $\forall x_1[\exists x_2[\forall x_3[\exists x_4(x_1=x_3\vee x_1+x_4=x_2)]]]$ בעולם המספרים הטבעיים: $N=\{0,1,2..\}$

23. חשבו את ערכי האמת של הפסוקים הבאים בעולם $(1,2]\cup[3,4)$.
   א. $\exists x[(\forall y(y\leq x))\vee(\forall y(x\leq y))]$
   ב. $\exists x[\exists y[x<y\wedge(\forall z(\neg(x<z<y)))]]$
   ג. $\exists x[\exists y[(\forall z(\neg(x<z<y)))]]$
   ד. $\exists x[\exists y[x\leq y\wedge(\forall z(\neg(x<z<y)))]]$
   ה. $\exists x[\exists y[x\leq y\wedge(\forall z(\neg(x<z<y)))]\wedge[\exists w[x\leq w\wedge(\forall z(\neg(x<z<w)))]]$

ו. $\exists x[\exists y[x\le y\wedge(\forall z(\neg(x<z<y)))]\wedge[\exists w[w\neq y\wedge[[x\le w\wedge(\forall z(\neg(x<z<w)))]]$

24. חשבו את ערכי האמת של הפסוקים הבאים בעולם R (כל המספרים הממשיים, כולל שברים, כולל שורש של 2, כולל פאי וכו'):

א. $[\forall x[\forall y[(x<y)\rightarrow[\exists z(x<z<y)]]]]\rightarrow[\exists z[\forall x[\forall y[(x<y)\rightarrow(x<z<y)]]]]$

ב. $\forall x[[\exists y(3<y<x)]\rightarrow[\exists z[(3<z<x)\wedge(\exists y(z<y<x))]]]$

25. חשבו את ערכי הפסוקים הבאים בעולם N (המספרים הטבעיים):

א. $[\forall x[(\exists y(2y=x))\vee(\exists y(2y+1=x))]]\rightarrow[\exists x[(\exists y(2y=x))\vee(\exists y(2y+1=x))]]$

ב. $[\exists x[(\exists y(2y=x))\vee(\exists y(2y+1=x))]]\rightarrow[\forall x[(\exists y(2y=x))\vee(\exists y(2y+1=x))]]$

ג. $[\exists x[(\exists y(2y=x))\wedge(\exists y(2y+1=x))]]\rightarrow[\forall x[(\exists y(2y=x))\vee(\exists y(2y+1=x))]]$

ד. $\forall x[[\forall z[\exists y(x+z=y)]]\rightarrow[\forall y[\exists z(x+y=z)]]$

נוסחאות שקולות במבנה

26. חשבו את ערך האמת של הפסוק

$$\forall x[\exists y[(x<y)\wedge[\forall z(x<z<y\rightarrow\exists w(w\neq z\wedge x<w<y))]\wedge[\forall z_1,z_2,z_3((x<z_1<y\wedge x<z_2<y\wedge x<z_3<y\wedge z_1\neq z_2)\rightarrow(z_1=z_3\vee z_2=z_3)]]]$$

במבנה $M=<N,<>$, לפי השלבים הבאים: (באפן פורמאלי, זה איננו פסוק, כי הסמן > הוא הפרוש ולא סמן יחס)

א. נגדיר $A=\exists w(w\neq z\wedge x<w<y)$. הסבירו מדוע היא שקולה במבנה M לנוסחא $x+2\le y\wedge(y=x+2\rightarrow z\neq x+1)$. שימו לב, שהנוסחא האחרונה היא חסרת כמתים.

ב. נגדיר $B=\forall z(x<z<y\rightarrow A)$. הראו בעזרת סעיף א ש-B שקולה ב-M לנוסחא $x+3\le y$ או $y\le x+1$, כלומר $y\neq x+2$.

ג. נגדיר $C=\forall z_1,z_2,z_3((x<z_1<y\wedge x<z_2<y\wedge x<z_3<y\wedge z_1\neq z_2)\rightarrow(z_1=z_3\vee z_2=z_3)]$. הסבירו מדוע C שקולה ב-M לנוסחא $y\le x+3$.

ד. הסבירו מדוע הפסוק המקורי שקול ב-M לפסוק $\forall x[\exists y[x<y\wedge y\neq x+2\wedge y\le x+3]]$.

ה. הסיקו שהפסוק המקורי שקול לפסוק ב-M $\forall x[\exists y(y=x+3\vee y=x+1)]$.

ו. חשבו את ערך האמת של הפסוק ב-M.

27. חשבו את ערך האמת של הפסוק $\forall x,y[\exists z,w_1,w_2(f(x,w_1)=z\wedge f(z,w_2)=y)]$ במבנה $M=<N-\{0\},+>$, לפי השלבים הבאים:

א. נגדיר $A=\exists w_2(f(x,w_1)=z\wedge f(z,w_2)=y)$. מצאו נוסחא השקולה ל-A במבנה M.

ב. נגדיר $B=\exists w_1(A)$. מצאו נוסחא השקולה ל-B במבנה M.

ג. נגדיר $C=\exists z(B)$. מצאו נוסחא השקולה ל-C במבנה M.

ד. הציגו פסוק השקול למקורי במבנה M וחשבו את ערך האמת של הפסוק ב-M.

28. שאלה ששלביה הראשונים פתורים באפן מפורט (מתאימה אפילו למי שלא הבין כלל את הרעיון של נוסחאות שקולות!):

חשבו את ערך האמת של הפסוק

$\exists x[[x=a\rightarrow(\forall y(\exists z(\forall w(w=x\vee w=y\vee w=z))))]\wedge[x=b\rightarrow(\forall y(\forall z(y\neq 1\rightarrow z=1)))]\wedge[x=c\rightarrow(\forall y(y=x))]]$ במבנה

$M=<\{1,2,3\},1,2,3>$ (כלומר $a^M=1,\ b^M=2,\ c^M=3$), לפי השלבים הבאים (ב-4 הראשונים צריך רק לקרא את הפתרון):

א. נגדיר נוסחא $A=\forall w(w=x\vee w=y\vee w=z)$. נוסחא זו מופיעה בתוך הפסוק. יש בה רק כמת אחד. נרצה למצא נוסחא השקולה לה, שהיא פשוטה יותר, כלומר שאין בה בכלל כמתים. זאת אומרת ש-w לא יופיע בנוסחא השקולה שנמצא. המשתנים החופשיים ב-A הם x,y,z. נבחר אברים מתוך העולם ונציב במקום x,y,z. כך A יהפוך לפסוק (כי כבר לא יהיו בו משתנים חופשיים). למשל, נציב $x=1,\ y=2,\ z=3$. כך A יהפוך לפסוק $\forall w(w=1\vee w=2\vee 2=3)$ וזהו פסוק אמיתי ב-M. אולם אם נציב $x=1,\ y=1,\ z=2$, אז נקבל פסוק שקרי. אחרי כמה נסיונות מתברר הכלל: על מנת שהפסוק יהיה אמיתי, צריך להציב 3 מספרים שונים. לכן A שקולה לנוסחא $x\neq y\neq z\neq x$, נקרא לנוסחא זו A'.

ב. בשלב זה, נגדיר $B=\exists z(A)$. שימו לב שהנוסחא B מופיעה בפסוק (ודאו!). אמנם ב-B יש שני כמתים, אבל מאחד מהם, אנחנו כבר יודעים להפטר. למעשה, B שקולה ל-$\exists z(A')=\exists z(x\neq y\neq z\neq x)$ ובנוסחא האחרונה יש רק כמת אחד. y,z

חופשיים בנוסחא זו. אם נציב y=1, z=1, אז נקבל פסוק שקרי: זה לא נכון שיש x כך ש-$x\neq1\neq1\neq x$. אם נציב y=1,z=2, אז נקבל פסוק אמיתי: $\exists z(x\neq1\neq2\neq x)$ (באפן פורמאלי, זה לא פסוק, כי השתמשנו בפרושים ולא בסמנים שבאוצר המילים, אבל זה לא שצריך להעסיק אותנו בפתרון שאלות מסוג זה). מתברר ש-B שקולה לנוסחא $y\neq z$.

ג. נגדיר נוסחא $C=\forall y(B)$. לפי תוצאת שלב ב, C שקולה לנוסחא $\forall y(y\neq z)$ וברור שהיא שקרית לכל ערך של z. לכן היא שקולה ל-F.

ד. נתבונן בנוסחא $D=x=1\rightarrow C$. לפי שלב ג, היא שקולה לנוסחא $x=1\rightarrow F$. יש בה משתנה חופשי אחד והוא x. עבור x=1, נקבל F, ועבור ערכים אחרים של x נקבל T. לכן D שקולה לנוסחא $x\neq1$.

ה. מצאו נוסחא ללא כמתים שהיא שקולה לנוסחא $[x=b\rightarrow(\forall y(\forall z(y\neq1\rightarrow z=1)))]$. בצעו זאת בשלשה שלבים. בכל שלב, הגדירו נוסחא שיש בה לכל היותר כמת אחד ומצאו נוסחא השקולה לה שאין בה אף כמת.

ו. מצאו נוסחא ללא כמתים שהיא שקולה לנוסחא $[x=c\rightarrow(\forall y(y=x))]$. חשבו זאת בשני שלבים.

ז. מה ערך האמת של הפסוק המקורי?

תרגילים מתקדמים

29. מהו ערך האמת של הפסוק $\forall x[[\exists z(S(z,x)\wedge(\forall w(f(w,z)=z)))]\rightarrow[\forall y(S(y,xy))]]$ במבנה M שעולמו הוא R, S^M הוא היחס קטן ו-f^M היא פונקצית הכפל?

30. מה ערך האמת של הפסוק $\exists x\forall y\exists z[\neg[S(x,z)\vee S(y,z)\vee x=z\vee y=z]]$ במבנה M שעולמו הוא $\{1,2,3,4,5\}$ ו-$S^M=\{<x,y>\in\{1,2,3,4,5\}\times\{1,2,3,4,5\}:|x-y|\in\{1,4\}\}$?

31. במבנה שבשאלה הקודמת, חשבו את ערך האמת של הפסוק הבא:

$$\forall x\exists y\forall z[(z\neq x\wedge z\neq y)\rightarrow[\exists w[y\neq x\wedge w\neq x\wedge w\neq y\wedge w\neq z\wedge[S(x,w)\leftrightarrow S(x,z)]\wedge[S(y,w)\leftrightarrow S(y,z)]]]]$$

(הצעה: ציירו את המספרים 1,2,3,4,5 במעגל)

הוכחות – קיום של פסוק במבנה

32. נתון המבנה $M=<N,+,<>$ באוצר המילים $L=\{f,S\}$
כאשר $f^M=+$, $S^M=<$.
עבור כל אחד מהפסוקים הבאים בדוק האם הפסוק מתקיים ב M.
אם כן, הוכח! אם לא, נסח את שלילת הפסוק כך ששלילה תופיע רק על נוסחה אטומית והוכח את שלילת הפסוק!

א. $\forall x\forall y[S(x,y)\vee S(y,x)]$
ב. $(\forall x\forall y[S(x,y)])\vee(\forall x\forall y[S(y,x)])$
ג. $\forall x\exists y[S(f(x,y),x)]$
ד. $\exists x\forall y[S(y,x)\vee(x=y)]$
ה. $\exists x\forall y[(x\neq y)\rightarrow S(x,y)]$
ו. $[\exists x\forall y[(x\neq y)]]\rightarrow[\exists x\forall y[S(x,y)]]$
ז. $\forall y\exists x[(x\neq y)\rightarrow S(x,y)]$
ח. $\forall x\forall y[(x\neq y)\rightarrow S(x,y)]$

33. נתון המבנה $M=<N,+,*,<,0>$ באוצר המילים $L=\{f,g,S,c\}$
כאשר $f^M=+$, $g^M=*$, $S^M=<$, $c^M=0$.
עבור כל אחד מהפסוקים הבאים בדוק האם הפסוק מתקיים ב M.
אם כן, הוכח! אם לא, נסח את שלילת הפסוק כך ששלילה תופיע רק על נוסחה אטומית והוכח את שלילת הפסוק!

$\forall x\forall y\forall z[((x=y)\wedge S(x,z))\rightarrow S(y,z)]$

א. $\forall x\exists y\exists z[S(f(x,y),z)]$
ב. $\forall x\exists y\forall z[S(f(x,y),z)]$
ג. $\forall x\forall y\forall z[(S(f(x,y),g(x,y))\rightarrow S(x,z))]\rightarrow\forall y\forall z[S(y,z)]$

ד. $\forall x\exists y\forall z\exists w[(S(x,y)\wedge S(x,w))\rightarrow(S(z,y)\wedge S(z,w))]$

ה. $\exists x\exists y\exists z[f(g(x,y),g(x,z))=g(f(x,y),f(x,z))]$

ו. $\forall x\exists y[(S(y,x)\vee S(x,y))\rightarrow S(c,x)]$

ז. $\exists y\forall x[(S(y,x)\vee S(x,y))\rightarrow S(c,x)]$

ח. $\exists x\forall y\exists z\forall w[S(g(x,z),f(y,w))]$

ט. $\forall x\exists y\forall z\exists w[S(g(x,z),f(y,w))]$

י. $\forall y\forall w\exists x\exists z[S(g(x,z),f(y,w))]$

יא. $\forall x\exists y[S(x,y)\leftrightarrow S(y,f(x,x))]$

יב. $\forall x\exists y[f(g(x,x),x)=y]$

יג. $\forall x[\forall y(S(y,x))\rightarrow\forall y\left(S(y,g(x,x))\right)]$

יד. $\forall x\forall y\forall z\exists w[\left(f\left(x,f(y,f(z,c))\right)=w\right)\rightarrow(S(x,w)\wedge S(y,w)\wedge S(z,w))]$

טו. $\exists x\forall y\exists z[S(x,y)\wedge S(y,z)]$

34. נתון המבנה $M=<R,+,*,\leq,0,1>$ באוצר המילים $L=\{f,g,S,c,d\}$
כאשר $f^M=+$, $g^M=*$, $S^M=\leq$, $c^M=0$, $d^M=1$.
עבור כל אחד מהפסוקים הבאים בדוק האם הפסוק מתקיים ב M.
אם כן, הוכח! אם לא, נסח את שלילת הפסוק כך ששלילה תופיע רק על נוסחה אטומית והוכח את שלילת הפסוק!

א. $\forall x\forall y\forall z[S(f(g(x,x),g(y,y)),z)\rightarrow S(c,z)]$

ב. $\forall x\exists y[S(x,y)\rightarrow S(g(y,c),x)]$

ג. $\exists y\forall z[S(y,z)\leftrightarrow\forall x(S(x,y))]$

ד. $\forall x\exists y\forall z[S(y,z)\leftrightarrow S(x,y)]$

ה. $\exists x\exists y\forall z[S(g(x,z),y)\wedge(S(f(g(x,z),d),y))]$

ו. $\forall x\forall y\forall z\forall w[(f(x,y)=f(z,w))\vee((x\neq z)\wedge(x\neq w)\wedge(y\neq z)\wedge(y\neq w))]$

ז. $\forall x\exists y\forall z[S(y,f(y,d))\leftrightarrow S(g(x,y),z)]$

תרגילים מתקדמים בתחשיב היחסים

35. יהא $L=\{f,c\}$ אוצר מילים כאשר f - סימן פונקציה דו מקומי, c - סימן קבוע.
יהיו $M_1=<\mathbb{N},f(x,y)=x+y,0>$, $M_2=<\{1,2,3,4,5\},f(x,y)=\min(x,6-y),3\}$ מבנים ב L. המתקבל בסעיפים הבאים בכל אחד מהמבנים:

א. חשב את הערך $f(c,c)$ בכל אחד מהמבנים.

ב. חשב את הערך $f(f(x,y),f(c,x))$ בכל אחד מהמבנים עבור: $x=1,y=5$

ג. $f(x,y)\neq f(y,x)$ - מצא את הערכים שעבורם הנוסחה מתקיימת ואת הערכים שעבורם הנוסחה אינה מתקיימת בכל אחד מהמבנים.

ד. יהא L אוצר מילים, תהא $A[x_1,\ldots,x_n]$ נוסחא ב L עם n משתנים ($x_1,\ldots,x_n$ משתנים חופשיים) ויהיו 2 מבנים M_1,M_2 ב L כך ש $|M_1|=|M_2|$.
נתון: $M_1\nvDash A[a_1,\ldots,a_n]$ לכל השמה $a_1,\ldots a_n\in|M_1|$.
האם מתקיים בהכרח: $M_2\nvDash A[b_1,\ldots,b_n]$ לכל השמה $b_1,\ldots b_n\in|M_2|$? הוכח!

36. נתונים המבנים: $M_1=<Z,<,f(x)=x^2>$, $M_2=<Z,>,f(x)=x^3>$ באוצר המילים $L=\{S,f\}$

א. רשום פסוק ב L המתקיים בשני המבנים.

ב. רשום פסוק ב L שאינו מתקיים באף אחד מהמבנים.

ג. רשום פסוק ב L המתקיים ב M_1 ולא ב M_2.

ד. רשום פסוק ב L המתקיים ב M_2 ולא ב M_1.

37. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. אם קיים פסוק המתקיים במבנה M_1 ולא במבנה M_2 אז קיימים אינסוף פסוקים המתקיימים ב M_1 ולא ב M_2.

ב. לכל 2 מבנים עם עולם סופי כך שכמות האיברים במבנה הראשון שונה מכמות האיברים במבנה השני קיים פסוק המתקיים באחד מהם ולא בשני.

ג. תהיינה: $A_1[x], A_2[x], \dots A_n[x]$ נוסחאות עם משתנה חופשי x ויהא M מבנה כלשהו, נתון: לכל $1 \le i \le n$ קיים $c \in M$ כך ש $M \vDash A_i[c]$., הוכח או הפרך:
$M \vDash \forall x(A_1[x] \vee A_2[x] \vee \dots \vee A_n[x])$.

ד. יהא $L = \{f\}$ אוצר מילים כך ש f סימן פונקציה חד מקומית. אזי קיים מבנה M המקיים את הפסוק:
$\exists x \exists y \exists z(f(x) = y \wedge f(x) = z \wedge y \neq z)$.

38. תהא: $A[x]$ נוסחא באוצר מילים L שבה המשתנה החופשי הוא x. נגדיר: $L' = L \cup \{S\}$ אוצר מילים חדש שבו S סימן יחס דו מקומי, יהא המבנה $M =< |M|, S >$ שבו היחס S מתפרש כ: $S = \{(a,b) |\ a, b \in |M|\ , M \vDash A[b],\ M \nvDash A[a]\}$.
האם מתקיים:
$\mathrm{M} \vDash \forall x \forall y \forall z\big[\big(S(x,y) \wedge S(y,z)\big) \rightarrow (A[x] \leftrightarrow A[z])\big]$? נמק!

39. יהא $L = \{S, f\}$ אוצר מילים ובו S סימן יחס חד מקומי, f סימן פונקציה דו מקומית.
יהיו המבנים: $M_1 =< R, f(x,y) = xy - x - y, S = \{x |\ |x| < 2\} >$
$M_2 =< P(\mathbb{N}), f(x,y) = x \backslash y, S = \{x |\ |x| < 100\} >$
עבור כל אחד מהפסוקים הבאים בדוק האם הוא מתקיים ב M_1, M_2, נמק! (אין צורך להוכיח)

א. $\forall x \forall y\big(S(f(x,y)) \rightarrow S(f(y,x))\big)$

ב. $\forall x\Big(S(x) \rightarrow \exists y\Big(S(y) \wedge S\big(f(y,x)\big)\Big)\Big)$

ג. $\forall x\Big(S(x) \rightarrow \forall y\Big(S(y) \rightarrow S\big(f(y,x)\big)\Big)\Big)$

ד. $\exists x \exists y\Big(\neg S(x) \wedge \neg S(y) \wedge S\big(f(x,y)\big)\Big)$

40. יהא $L = \{f, g\}$ אוצר מילים כך ש f, g סימני פונקציות דו מקומיות. נתון הפסוק:
$A = \forall x \exists y \exists z\Big(f(x,y) = z \wedge \forall w \exists v\big(g(v,z) = w \rightarrow g\big(f(x,y), f(w,v)\big) = z\big)\Big)$.
א. הוכח או הפרך: המבנה $M_1 =< R, f^M(x,y) = x + y, g^M(x,y) = x \cdot y >$ מקיים את A.
ב. הוכח או הפרך: המבנה $M_2 =< R, f^M(x,y) = x \cdot y, g^M(x,y) = x + y >$ מקיים את A.

41. יהא $L = \{S, f, c\}$ אוצר מילים כך ש S סימן יחס דו מקומי, f סימן פונקציה דו מקומית, c סימן קבוע. נתון הפסוק:
$A = \forall x \forall y \forall z\bigg[\big((x \neq y) \wedge (x \neq z) \wedge (y \neq z)\big) \rightarrow \bigg(\Big(\exists w\Big(S\big(f\big(x, f(y,z)\big), w\big) \wedge (w \neq c)\Big)\Big) \leftrightarrow S\big(c, f\big(f(x,y), z\big)\big)\bigg)\bigg]$,
יהא המבנה: $M =< \{X \subseteq \mathbb{N} \mid X\ is\ infinite\}, S^M, f^M, c^M >$, כאשר: $S^M = \subset$ - יחס הכלה ממש (ללא שוויון), $f^M(x,y) = x \cup y$, $c^M = \mathbb{N}$. האם M מקיים את A? הוכח!

42. יהי אוצר המילים: $L = \{S, f\}$ כאשר S סימן יחס דו מקומי, f סימן פונקציה תלת מקומית.
יהא המבנה: $M =< R, <, f(x,y,z) = \frac{x+y+z}{3} >$ באוצר המילים L. הוכח או הפרך: M מקיים את הפסוק:
$A = \forall x \forall y\bigg(S(x,y) \rightarrow \exists z\bigg(\forall w\Big(\big(w \neq z \wedge S(x,w) \wedge S(w,y)\big) \rightarrow \Big(S\big(z, f(x,y,w)\big) \leftrightarrow S(w,z)\Big)\Big)\bigg)\bigg)$.

43. יהי $L = \{f, S\}$ אצר מילים כאשר S סימן יחס דו מקומי, f סימן פונקציה דו מקומית. יהי הפסוק הבא: $A = \exists y \forall x \forall z\Big(\big(S(x,y) \leftrightarrow S(z,y)\big) \rightarrow \Big(S\big(f(x,z), y\big)\Big)\Big)$
ויהי המבנה: $M =< \mathbb{R}^+, S, f >$ כאשר S מתפרש כיחס $<$. f מתפרשת כפונקצית הכפל.
לכל אחת מההוכחות הבאות המנסות להוכיח ש M מקיים או לא מקיים את A הסבר למה ההוכחה **לא נכונה**:

a. ניקח $y = 2$. יהיו x, z השייכים ל $\mathbb{R}^+$. לא מתקיים בהכרח ש $x < y$ אם ורק אם $z < y$ כי ייתכן ש $z > y$ למרות ש $x < y$ ולכן צד שמאל של הגרירה הוא $false$ ולכן לפי הגרירה הפסוק נכון.

b. יהא y ויהיו x, z השייכים ל $\mathbb{R}^+$. ניקח $y = xz + 1$ ולכן בהכרח: $x < y$ וגם $z < y$ ולכן צד שמאל של הגרירה מתקיים. כעת, $xz < y$ מתקיים ולכן הפסוק מתקיים.

c. ניקח $y = 1$. יהיו $x, z \in \mathbb{R}^+$. נניח ש $x < 1$ אם ורק אם $z < 1$. צ"ל: $xz < 1$. לפי ההנחה: x, z הם שברים ולכן המכפלה שלהם תשאר קטנה מ 1 ולכן הפסוק מתקיים.

- כעת, הוכיחו או הפריכו: האם M מקיים את A?

44. נתון הפסוק הבא: $A = \forall a \exists x \left(\forall y \left(S(y,c) \to \exists z \left(\left(S(z,c)\right) \wedge \left(\forall w \left(S(f(w,a),c) \wedge S\big(z, f(w,a)\big) \right) \to S\big(y, f(g(w),x)\big) \right) \right) \right) \right)$,

באוצר המילים: $L = \{S, f, g\}$ כאשר S סימן יחס דו מקומי, f סימן פונקציה דו מקומית, g סימן פונקציה חד מקומית.
יהא המבנה: $M =< R, >, f(x,y) = |x-y|, g(x) = 6x^3, c = 0 >$. האם M מקיים את A? הוכח!

תרגילים בהוכחות – תורת הקבוצות

1. נתון: $A\subseteq B$. הוכיחו או הפריכו: $P(A)\subseteq P(B)$.

2. הוכיחו שאם $A\subseteq B$ וגם $A\subseteq C$ אז $A\times A\subseteq B\times C$.

3. נניח $A\subseteq B$. עליכם להוכיח או להפריך כל אחת מהמסקנות הבאות:
   א. אם $1\in A$, אז $\{1\}\subseteq B$.
   ב. אם $\{1\}\subseteq A$, אז $1\in B$.
   ג. אם $1\notin A$, אז $1\notin B$.
   ד. אם $1\in A$, אז $\{\emptyset,\{1\}\}\subseteq P(B)$.

4. הוכיחו שלכל A,B,C מתקיֵם: $A\cap B\subseteq A\cup C$.

5. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:
   א. לכל B,A מתקיֵם $A\subseteq A\cap B$.
   ב. לכל A,B מתקיֵם $A\cap(A\cup B)=A$.

6. הוכיחו או הפריכו:
   א. $A\cup(A\cap B)=A$
   ב. $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\setminus C$
   ג. $(A\triangle B)\triangle A=B$
   ד. $\overline{(A\cup B)}\cap(C\cup D)=\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap C\right)\cup\overline{\left(A\cap\overline{B}\cap D\right)}$

7. הוכח או הפרך:
   א. $(A\setminus B)\cup(B\setminus C)=A\setminus C$
   ב. $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$
   ג. $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D)$
   ד. $(A\triangle C=B\triangle C)\rightarrow A=B$
   ה. $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$
   ו. $C\cap(A\triangle B)=(C\cap A)\triangle(C\cap B)$
   ז. $P(A\setminus B)\neq P(A)\setminus P(B)$
   ח. $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$
   ט. $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$

8. הוכח או הפרך:
   א. $(A\times B)\cap(B\times C)\subseteq A\times C$
   ב. $A\times B\subseteq P(A\times B)$
   ג. $P(A)\times P(B)=P(A\times B)$
   ד. $[A\times B\subseteq B\times C]\leftrightarrow[(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq C)]$
   ה. $(A\times B)\subseteq A^2\rightarrow B\subseteq A$
   ו. $(A\times B)\setminus(C\times C)=(A\setminus C)\times(B\setminus C)$

תרגילים בהוכחות – פונקציות

9. נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\setminus\{-2.5\}$ המוגדרת ע״י $f(x)=\frac{5-x}{2x}-2$, האם הפונקציה חח״ע ועל? הוכח!

10. נתונה פונקציה $f: N\to N,\ f(x)=3x+5$.
   א. הוכיחו שהיא חח״ע (כלומר $\forall a,b\in N[f(a)=f(b)\to a=b]$).
   ב. הוכיחו שהיא איננה על (כלומר נסחו והוכיחו את שלילת הפסוק $\forall y\in N[\exists x\in N[f(x)=y]]$).

11. כהקדמה להגדרת פונקציה, נגדיר לכל זוג $(n,m)\in N\times N$ את הקבוצה $A_{n,m}=\{(n',m'\in N\times N: n'+m'<n+m \text{ or } (n'+m'=n+m \text{ but } n'<n)\}$. למשל: $A_{1,1}=\{(0,0),(0,1),(1,0),(0,2)\}$.
נגדיר פונקציה דו-מקומית על N : $f(n,m)=|A_{n,m}|$. למשל $f(1,1)=4$, כי יש 4 אברים בקבוצה $A_{1,1}$.
   א. חשבו את $f(0,0),f(0,1),f(1,0),f(2,2)$.
   ב. הוכיחו שלכל זוג $(n,m)\in N\times N$ בהכרח $(n,m)\notin A_{n,m}$.
   ג. הוכיחו שאם $f(n_1,m_1)=f(n_2,m_2)$ אז $(n_1,m_1)\notin A_{n2,m2}$ וגם $(n_2,m_2)\notin A_{n1,m1}$.
   ד. הוכיחו שאם $f(n_1,m_1)=f(n_2,m_2)$ אז $n_1+m_1=n_2+m_2$.
   ה. הוכיחו שהפונקציה f היא חח״ע. (אכן, מדהים! למרות שנדמה שבקבוצה $N\times N$ יש הרבה יותר אברים מאשר בקבוצה N, יש פונקציה חח״ע מ-$N\times N$ ל-N. נדון בתופעה זו בהמשך הקורס).

12. נתונות 2 פונקציות $f: A\to B$, $g: B\to C$, נתון f, g חח״ע ועל, הוכח או הפרך: $g\circ f$ חח״ע ועל.

13. נתונות 2 פונקציות $f: A\to B$, $g: B\to C$, נתון $g\circ f$ חח״ע ועל, הוכח או הפרך: f חח״ע, f על, g חח״ע, g על.

14. תהי הפונקציה: $f:\mathbb{Q}\setminus\{-1\}\to\mathbb{Q}$ המוגדרת ע״י: $f(x)=\frac{3x-5}{x+1}$.
   א. הוכח או הפרך: f חח״ע.
   ב. הוכח או הפרך: f על.

15. תהי הפונקציה: $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^+$ המוגדרת באופן הבא: $f(x)$ מחזירה את מספר הספרות של x. (בייצוג עשרוני)
   א. הוכח או הפרך: f חח״ע.
   ב. הוכח או הפרך: f על.

16. נסמן: A - קבוצת כל תתי הקבוצות הסופיות של $\mathbb{N}$.
תהי הפונקציה: $f: A\to P(\mathbb{N})\setminus A$ המוגדרת באופן הבא: $f(x)=\mathbb{N}\setminus x$
   א. הוכח או הפרך: f חח״ע.
   ב. הוכח או הפרך: f על.

17. תהיינה $f: A\to C$, $g: B\to D$ פונקציות כאשר: A,B,C,D קבוצות לא ריקות זרות בזוגות כלשהן. נגדיר את הפונקציה: $h: A\cup B\to C\cup D$ ע״י: $h(x)=\begin{cases} f(x), & x\in A \\ g(x), & x\notin A\end{cases}$. הוכח: h פונקציה חח״ע ועל אם ורק אם f, g חח״ע ועל.

18. תהא $f: X\to Y$ פונקציה כאשר: X, Y קבוצות לא ריקות כלשהן. תהיינה $A,B\subseteq X$. נסמן לכל קבוצה S: $F(S)=\{f(x)|\ x\in S\}$. הוכח או הפרך: $F(A\Delta B)=F(A)\Delta F(B)$.

19. תהיינה X, Y קבוצות ותהי $f: X\to Y$ פונקציה כלשהי.
נגדיר פונקציה אחרת: $F: P(X)\to P(Y)$ ע״י: $F(A)=\{f(a)|\ a\in A\}$ לכל $A\in P(X)$.
הוכח:
   א. אם f חח״ע אז גם F חח״ע.
   ב. אם f על אז גם F על.

הדרכה: השתמשו בהגדרות של פונקציה חח״ע ועל.

תרגילים בהוכחות – תכונות של יחסים

20. הוכח:
   - *א.* $\leq$ - *יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי ב* $\mathbb{R}$.
   - *ב.* *"x מחלק את y" – יחס רפלקסיבי וטרנזיטיבי ב* $\mathbb{N}$.
   - *ג.* $\{(x,y) \mid x+y=z,\ \ z\in\mathbb{Z}\}$ - *יחס סימטרי. ב* $\mathbb{R}$.
   - *ד.* $\subset$ - *יחס טרנזיטיבי (בעולם הקבוצות)*

21. בכל אחת מהשאלות דלעיל הוגדר יחס אחד לפחות. לגבי כל אחד מהיחסים השיבו על השאלות הבאות:
   - i. האם זהו יחס רפלקסיבי?
   - ii. האם זהו יחס סימטרי?
   - iii. האם זהו יחס טרנזיטיבי?
   - iv. האם זהו יחס שקילות?
   - v. האם זהו יחס סדר חלקי?
   - vi. האם זהו יחס סדר מלא (כלומר קָוִוי ובלעז לינארי)?
   - א. היחס $S=\{<1,1>,<2,2>,<1,2>\}$ על העולם $\{1,2,3\}$.
   - ב. היחס $S=\{<1,2>,<2,1>\}$ על העולם $\{1,2\}$.
   - ג. היחס $S=\{<1,2>,<2,3>,<3,2>\}$ על העולם $\{1,2,3\}$.

22. רשום 3 יחסים שונים שהם סימטריים, רפלקסיביים וטרנזיטיביים מעל $\{1,2,3,4,5\}$.

23. על קבוצת המספרים הטבעיים הוגדר היחס $_{E3}=\{(n,m): |n-m|=3\}$. הוכיחו שזהו יחס לא רפלקסיבי וכן סימטרי.

24. הוכיחו שהיחס $S=\{<n,m>\in N^2: 7\backslash(n-m)\}$ (הזוגות של מספרים טבעיים ששווים מודולו 7) הוא יחס שקילות על N וחשבו את מחלקות השקילות שלו.

25. תהי A קבוצת המשולשים. תהי S קבוצת הזוגות הסדורים $<x,y>$, שיש להם אותו שטח. הוכיחו ש-S הוא יחס שקילות על A. האם מספר מחלקות השקילות שלו הוא סופי?

26. נתונה חלוקה של המספרים הטבעיים ל-3 קבוצות: $\{\{1,2,3\},\{4,5,6\},\{n\in N: 6<n\}\}$. מהו יחס השקילות המתאים לחלוקה זו?

27. הרעיון שעומד מאחורי שאלה זו, הוא הקשר בין קבוצת הזוגות של מספרים שלמים (כך שהשני חיובי) לבין קבוצת המספרים הרציונליים. נגדיר $A=Z\times(N-\{0\})$. נתון יחס דו-מקומי S על A כך: $S=\{<<n_1,m_1>,<n_2,m_2>>\in A\times A: n_1m_2=n_2m_1\}$. הרעיון מאחורי הגדרת S הוא שאם נחשוב על $<n_1,m_1>$ כעל השבר n_1/m_1, אז שוויון בין שברים נִקבע לפי כפל בהצלבה. נגדיר $M=<A,S>$ (העולם של M הוא קבוצה של זוגות של מספרים ו-S הוא יחס דו-מקומי על M).
   - א. האם הזוג $<<2,3>,<4,6>>$ מקיים את היחס S? נמקו.
   - ב. האם S הוא יחס רפלקסיבי? כלומר האם במבנה M מתקיים $\forall x[S(x,x)]$?
   - ג. האם זהו יחס סימטרי? כלומר, האם המבנה M מקיים $\forall x,y[S(x,y)\rightarrow S(y,x)]$?
   - ד. האם זהו יחס טרנזיטיבי? כלומר, האם M מקיים $\forall x,y,z[[S(x,y)\wedge S(y,z)]\rightarrow S(x,z)]$?
   - ה. מדוע S הוא יחס שקילות? (זה סעיף קל מאד, לאור הסעיפים הקודמים).
   - ו. (חלק זה של השאלה קשה במיוחד והוא רלונטי, רק אם כבר הוגדר המושג איזומורפיזם). נתון: $M_1=(Q,<_1)$, כאשר $<_1$ הוא היחס "קטן" בין המספרים הרציונליים. נגדיר שני דברים כהכנה להגדרת מבנה נוסף. לכל זוג $<n,m>$ ב-A נגדיר קבוצה $a_{n,m}=\{<n',m'>\in A: S(<n,m>,<n',m'>\}$. עתה נגדיר $B=\{a_{n,m}: <n,m>\in A\}$. נגדיר מבנה $M_2=(A,<_2)$, כאשר $<_2$ לא ידוע. נתון שהפונקציה $h: M_1\rightarrow M_2$, $h(n/m)=a_{n,m}$ היא איזומורפיזם (במילים: h מתאימה לכל מספר רציונלי n/m את קבוצת הזוגות $<n',m'>$ כך ש-$n'/m'=n/m$. אחרי שנלמד על הקשר בין יחס שקילות לבין מחלקות שקילות, תוכלו לראות שh מתאימה לכל מספר רציונלי מחלקת שקילות של היחס S). חשבו את היחס $<_2$.

28. האם היחס "שני הפסוקים שקולים לוגית" הוא יחס שקילות על אסף הפסוקים באוצר מילים נתון?

29. נתון היחס : $S \subseteq \{1,2,3,4,5,6\}^2$ המוגדר ע"י : $S = \{(a,b)|\ a+b>6\}$
   א. האם היחס רפלקסיבי? הוכח!
   ב. האם היחס סימטרי? הוכח!
   ג. האם היחס אנטי סימטרי? הוכח!
   ד. האם היחס טרנזיטיבי? הוכח!

30. יהא $S = \{(1,1),(2,1),(3,2),(2,3),(2,2),(3,3)\}$ יחס דו מקומי מעל הקבוצה : $\{1,2,3\}$.
   א. האם S יחס רפלקסיבי? נמק!
   ב. האם S יחס סימטרי? נמק!
   ג. האם S יחס אנטי סימטרי? נמק!
   ד. האם S יחס טרנזיטיבי? נמק!

31. יהיו S_1, S_2 יחסים דו מקומיים מעל קבוצה A כלשהי. הוכח או הפרך :
   א. אם $S_2 \subseteq S_1$ ומתקיים ש S_2 סימטרי אז S_1 סימטרי.
   ב. אם $S_2 \subseteq S_1$ ומתקיים ש S_2 אנטי סימטרי אז S_1 אנטי סימטרי.
   ג. אם $S_1 \cup S_2$ טרנזיטיבי אז $S_1 \cap S_2$ טרנזיטיבי.

32. נגדיר את היחס הדו מקומי מעל קבוצת המספרים הטבעיים :
$S = \{(x,y)|\ x,y \in N\backslash\{0,1\}\ ,\ \sqrt{x\cdot y} \in N\}$. האם S רפלקסיבי? סימטרי? אנטי סימטרי? הוכח!

33. תהי $(\mathbb{N}\times\mathbb{N},\le)$ כאשר $\le$ מוגדר ע"י הכלל $(a_1,a_2)\le(b_1,b_2)$ אם ורק אם : $a_1+b_1 \le a_2+b_2$. האם $\le$ הוא יחס סדר חלקי?

34. נתונה הקבוצה : $A = \{1,2,3,4\}$ והיחס R על A $R = \{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(4,2),(4,4)\}$, האם R רפלקסיבי, סימטרי, אנטי סימטרי, טרנזיטיבי?

35. נתונים היחסים S_1,S_2,S_3 על הקבוצה $\mathbb{R}$, $S_1 = \{(x,y)|\ |x-y|<1\}$
$S_2 = \{(x,y)|\ x-y<1\}$ ו $S_3 = \{(x,y)|\ x-y=-1\}$, בדוק עבור כל יחס האם הוא יחס שקילות, יחס סדר חלקי, יחס קווי?

36. הוכח שהיחס הבא S על קבוצה $\mathbb{N}$ הוא יחס שקילות והצג את מחלקות השקילות שלו : $S = \{(x,y)|$ זוגי $x+y\}$

37. האם היחסים הבאים הם יחסי שקילות. אם כן, רשום את מחלקות השקילות שלהם :
   - S ב $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ המוגדר ע"י $S = \{((a,b),(c,d))|\ a+d=b+c\}$
   - S ב $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ המוגדר ע"י $S = \{((a,b),(c,d))|\ a\cdot d=b\cdot c\}$
     כאשר $a,b,c,d>0$.

38. יהיו S ו R יחסי שקילות בקבוצה A. הוכח ש $S \cap R$ הוא יחס שקילות.

39. יהא היחס S על $P(\mathbb{N})$ המוגדר ע"י $(A,B) \in S$ אם ורק אם $A\Delta B$ קבוצה סופית. הוכח ש S הוא יחס שקילות.

40. תהי A קבוצה לא ריקה, הוכח שהיחס $\subseteq$ (הכלה) הוא יחס סדר חלקי בקבוצה $P(A)$.

41. הוכח שהקבוצה $(\mathbb{N}^+, div)$ סדורה חלקית (כלומר ש-$div = \{(a,b)|$ b מחלק את $a\}$ הוא סדר חלקי)

42. האם היחס S על $P(\mathbb{N})$ המוגדר ע"י $S = \{(x,y)|\ x\subseteq y$ או $y\subseteq x\}$ הוא יחס סדר חלקי? האם S יחס שקילות?

43. הראה כי היחס S על $P(\mathbb{R})$ כאשר $S = \{(X,Y)|\ X\cap\mathbb{N} = Y\cap\mathbb{N}\}$ הוא יחס שקילות. מהם מחלקות השקילות?

44. נתונים 2 יחסים על $\mathbb{Z}$: $S_1 = \{(x,y)|\ x+y=5k\ ,k\in\mathbb{Z}\}$, $S_2 = \{(x,y)|\ x-y=5k\ ,k\in\mathbb{Z}\}$.

האם $S_1 \cap S_2$ הוא יחס שקילות.

45. נתון היחס S על $\mathbb{N}$ כך ש: $S = \{(a,b) |$ ל a ו b יש אותם מחלקים ראשוניים$\}$, האם S יחס שקילות?

46. יהיו S יחס סדר חלקי על A ו R יחס סדר חלקי על B נגדיר יחס T על $A \times B$ כאשר:
$T = \{((a,b),(c,d)) | (a \neq c \ \wedge (a,c) \in S) \vee (a = c \ \wedge (b,d) \in S)\}$, הוכח ש T הוא יחס סדר חלקי.

47. תהי (A,S) קבוצה סדורה (כלומר ש-S הוא סדר חלקי על A). ותהא $B \subseteq A$. נגדיר יחס $R = S \cap (B \times B)$, הוכח: R יחס סדר חלקי על B.

48. נתון היחס $S = \{((a,b),(c,d)) | a \leq c, b \leq d\}$
א. האם היחס S על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ הוא יחס סדר חלקי?
ב. האם היחס S על $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ הוא יחס סדר חלקי?

49. יהא יחס S על $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ המוגדר ע"י: $S = \{((a,b),(c,d)) | (a^2 \leq c^2) \wedge (b \mid d)\}$ האם S יחס סדר חלקי?

50. נגדיר יחס S על $\mathbb{N}^+$ ע"י: $(a,b) \in S \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}, a \cdot 2^k = b$.
האם S יחס סדר חלקי על $\mathbb{N}^+$? האם S סדר קווי?

51. יהא L או"מ ותהא S קבוצת כל המבנים באו"מ L שעולמם הוא $\mathbb{N}$.
הוכח שהיחס E על S המוגדר ע"י: $(M,N) \in E$ אם ורק אם M,N מבנים איזומורפיים הוא יחס שקילות על S.

52. תן דוגמא של יחס שקילות על $\mathbb{N}$ שיש לו אינסוף מחלקות אינסופיות.
תזכורת: אם יחס E הוא יחס שקילות על קבוצה X אז מחלקה של E הינו קבוצה מהצורה: $[a]_E = \{b \in X | (a,b) \in E\}$ כאשר $a \in X$.

תרגילים בשקילויות לוגיות

1. לכל אחד מהפסוקים הבאים, הציגו את הפסוק השקול כך שכל הכמתים יופיעו בתחילת הפסוק.

א. $\exists x[S(x,x,x) \rightarrow [\forall y[S(x,y,x)]]]$

ב. $[\forall x[S_1(x) \rightarrow S_2(x,c)]] \rightarrow [S(x,x,x) \rightarrow [\forall y[S(x,y,x)]]]$.

ג. $[\exists x[S(x,x)]] \rightarrow [\forall x[S(x,x)]]$.

ד. $[\exists y[S(c)]] \rightarrow [\exists x[S(c)]]$.

ה. $[\forall x[\exists y[S(x,y)]] \rightarrow [\forall z[\exists w[S(z,w)]]$

ו. $[\forall x[\exists y[S(x,y)]] \rightarrow [\forall y[\exists x[S(y,x)]]$

ז. $S(c) \rightarrow [\exists x[S(x)]]$.

ח. $[\forall x[S(x)]] \wedge [\exists x[\neg S(x)]]$.

ט. $[\forall x[S(x)] \rightarrow [\exists x[\neg S(x)]]$ (זו איננה סתירה! חִשבו על כך!)

י. $[\forall x[S(x)]] \vee [\exists x[\neg S(x)]]$.

יא. $S(c) \rightarrow [\neg \exists x[S(x)]$.

יב. $\exists x[\exists y[S(x,y)]] \vee [\forall x[\exists y[S(x,y)]]$.

יג. $[\exists x[\exists y[S(x,y)]] \vee [\forall x[\exists y[S(x,y)]]] \rightarrow [\forall x[\forall y[S(y,x)]]]$

2. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $\forall x \exists y[S(x,y) \rightarrow \exists z R(z,x)]$
- $\forall z \exists y \exists x[S(z,x) \rightarrow R(y,z)]$

3. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $\forall x[S(x) \vee \exists y R(x,y)] \rightarrow \forall x[S(x) \vee \forall y R(y,x)]$
- $\forall x \forall z \forall y \exists w\big[[S(x) \vee R(x,w)] \rightarrow [S(z) \vee R(y,z)]\big]$

4. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $[\forall x\, R(x)] \vee [\forall x\, S(x)]$
- $\forall x[R(x) \vee S(x)]$

5. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $[\exists x\, R(x)] \wedge [\exists x\, S(x)]$
- $\exists x,y[R(x) \wedge S(y)]$

6. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $\exists x\big[[\forall y\, R(x,y)] \rightarrow [\exists y\, R(y,x)]\big]$
- $\exists x,y,z[R(x,y) \rightarrow R(z,x)]$

7. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $[\exists x\, R(x)] \rightarrow [\exists y\, S(y)]$
- $\exists x,y[R(x) \rightarrow S(y)]$

8. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $[\forall x\, R(x)] \rightarrow [\forall y\, S(y)]$
- $\forall x,y[R(x) \rightarrow S(y)]$

9. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $\forall x,y\left[\left[R\big(f(x,y),f(y,x)\big)\right] \to \left[[\exists z\, f(x,z)=y] \vee [\forall z\, f(y,z)=x]\right]\right]$
- $\forall x,y,z\exists w\left[\left[R\big(f(x,y),f(y,x)\big)\right] \to f(x,w)=y \vee f(y,z)=x\right]$

10. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $\left[\neg\big(\exists xP(x) \vee \forall yQ(y)\big) \wedge \exists zP\big(f(c,z)\big)\right]$
- $\exists z\forall x\exists y\left[\left[\neg Q(y) \wedge \neg P(x) \wedge P\big(f(c,z)\big)\right]\right]$

11. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $\forall x\left[p(x) \to \big(q(x) \wedge r(x)\big)\right]$
- $\forall x[p(x) \to q(x)] \wedge \forall x[p(x) \to r(x)]$

12. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $\forall x\left[p(x) \to \big(q(x) \vee r(x)\big)\right]$
- $\forall x[p(x) \to q(x)] \vee \forall x[p(x) \to r(x)]$

13. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $[\exists x\, p(x)] \vee [\exists y \neg p(y)]$
- $[\forall x\, p(x)] \to [\exists y p(y)]$

14. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $\left[\forall x\left[R(x) \to \left[\exists y\big(S(x,y)\big)\right]\right]\right] \to \left[\forall x\big(S(2,x)\big)\right]$
- $\exists x\forall y,z\left[[\neg R(x) \to S(2,z)] \wedge [S(x,y) \to S(2,z)]\right]$

15. האם הפסוקים הבאים שקולים לוגית? אם כן, הוכח! אם לא, רשום דוגמא נגדית!
- $\left[\forall x[R(x) \leftrightarrow S(x,c)]\right] \wedge \left[\exists x[R(x) \to \neg R(x)]\right]$
- $\forall x\exists y\left[[\neg R(x) \vee S(x,c)] \wedge [R(x) \vee \neg S(x,c)] \wedge \big(\neg R(y)\big)\right]$

16. יהא $L=\{f,S\}$ אוצר מילים כאשר S סימן יחס דו מקומי, f סימן פונקציה דו מקומית.
בכל אחד מזוגות הפסוקים הבאים, קבע האם הפסוקים שקולים לוגית והוכח:

א. $A=\forall x\left[\Big(\exists y\big(S(x,y)\big)\Big) \to \big(\forall y\exists z(f(x,y)=z)\big)\right]$, $B=\forall x\forall z\left[\big(\forall y(f(x,z)\neq y)\big) \to \Big(\forall y\big(\neg S(x,y)\big)\Big)\right]$

ב. $A=\exists x\forall y[(S(x,y) \vee \exists z(f(z,z)=y))] \to \exists y\forall x[f(x,x)=y \leftrightarrow S(x,y)]$,
$B=\forall x\exists y[\left[\big(\neg S(x,y) \wedge \forall z(f(z,z)\neq y)\big)\right] \vee [f(x,x)=y \leftrightarrow S(x,y)]]$.

17. יהא $L=\{S\}$ אוצר מילים כאשר: S סימן יחס תלת מקומי. נתונים 5 הפסוקים הבאים, מצא 2 פסוקים שאינם שקולים ע"י מבנה המקיים את אחד מהם ולא את השני.

א. $A=\forall x\exists y\left[S(x,y,x) \to [\exists zS(x,y,z) \vee \forall zS(x,z,y)]\right]$

ב. $B=\forall x\exists z\left[[\forall y\neg S(x,z,y) \to \forall yS(x,y,z)] \vee \neg S(x,z,x)\right]$

ג. $C=\forall x\forall y\exists w\exists z\left[[\neg S(x,z,w) \to \neg S(x,z,x)] \vee S(x,y,z)\right]$

ד. $D=\forall x\forall y\exists w\exists z\left[[\neg S(y,w,z) \to \neg S(y,w,y)] \vee S(y,x,w)\right]$

ה. $E=\forall y\forall z\left[[\forall xS(y,x,z) \to \forall xS(y,z,x)] \vee \neg S(y,z,y)\right]$

תרגילים בתורות ומודלים

1. יהא $L = \{S\}$ אוצר מילים כאשר S סימן יחס דו מקומי. תהי התורה: $T = \{\forall x \exists y(S(y,x)), \forall x \exists y(S(x,y))\}$
   א. האם המבנה: $M =< N, <>$ מקיים את T? נמק!
   ב. האם המבנה: $M =< (0,1], <>$ מקיים את T? נמק!
   ג. האם המבנה: $M =< Z, <>$ מקיים את T? נמק!
   ד. האם התורה T עיקבית? נמק!

2. עבור כל אחת מהטענות הבאות, קבע האם היא נכונה או לא, הוכח את תשובתך!
   א. התורה $T = \emptyset$ (כלומר, תורה שאין בה פסוקים) היא עיקבית.
   ב. יהי L אוצר מילים אז התורה שמכילה את כל הפסוקים האפשריים ב L היא עיקבית.

3. יהא $L = \{f, g\}$ אוצר מילים כך ש f סימן פונקציה חד מקומית, g סימן פונקציה דו מקומית.
   יהא $M =< \mathbb{R}, f(x) = x^2, g(x,y) = x \cdot y >$ מבנה המפרש את L.
   א. האם M מקיים את התורה $T = \{\forall x(f(x) = g(x,x)), \exists x \exists y(x \neq y \wedge f(x) = g(x,y))\}$?
   ב. הסבירו מדוע M לא מקיים את התורה: $T = \{\forall y \exists x(f(x) = y), \forall z \exists x \exists y(g(x,y) = z)\}$?
   ג. רשמו מבנה M' שכן מקיים את התורה בסעיף ב'.

4. יהא $\mathrm{L} = \{\mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{c}_0, \mathrm{c}_1\}$ אוצר מילים ויהא: $M =< N, +, *, 0, 1 >$ מבנה המפרש את L כאשר: $f^M = +$, $g^M = *$, ${c_0}^M = 0$, ${c_1}^M = 1$. תהא T קבוצת הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M.
   א. נגדיר: $T^* = T \cup \{\forall x, y \exists z(\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{z} \rightarrow (\exists \mathrm{w}(\mathrm{g}(\mathrm{x},\mathrm{w}) = z)))\}$, האם T^* עקבית?
   ב. נגדיר: $T^{**} = T \cup \{\exists \mathrm{x}[\forall \mathrm{y}(\exists \mathrm{z}(\mathrm{g}(\mathrm{x},\mathrm{z}) = \mathrm{y}))]\}$, האם T^{**} עקבית?

5. יהא $L = \{S\}$ אוצר מילים כאשר S סימן יחס דו מקומי. יהא $M =< R, <>$ מבנה המפרש את L. תהא T קבוצת כל הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M.
   א. נגדיר: $T^* = T \cup \{\forall x, y \exists \mathrm{z}(S(\mathrm{x},\mathrm{y}) \rightarrow (\mathrm{S}(\mathrm{x},\mathrm{z}) \wedge \mathrm{S}(\mathrm{z},\mathrm{y})))\}$, האם T^* עקבית?
   ב. נגדיר: $T^+ = T \cup \{\exists x[\forall \mathrm{y}\left[\left(S(\mathrm{y},\mathrm{x}) \vee \left(\exists \mathrm{w}(\mathrm{S}(\mathrm{w},\mathrm{y}) \rightarrow \mathrm{S}(\mathrm{w},\mathrm{x}))\right)\right)\right]]\}$, האם T^+ עקבית?

6. יהא $L = \{S\}$ אוצר מילים כאשר S סימן יחס דו מקומי. יהא $M =< \{0,1\}, <>$ מבנה המפרש את L. תהא T קבוצת כל הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M.
   א. האם T שווה לקבוצת כל הפסוקים המתקיימים במבנה $M =< \{1,2\}, <>$?
   ב. האם התורה $T \cup \{\forall \mathrm{x} \exists \mathrm{y}(\mathrm{S}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \rightarrow \mathrm{S}(\mathrm{x},\mathrm{y}))\}$ עקבית?

7. יהא $\mathrm{L} = \{S, \mathrm{f}, \mathrm{g}, \mathrm{c}_0, \mathrm{c}_1\}$ אוצר מילים ויהא: $M =< R, <, +, *, 0, 1 >$ מבנה המפרש את L כאשר: $f^M = +$, $g^M = *$, ${c_0}^M = 0$, ${c_1}^M = 1$, $S^M =<$. תהא T קבוצת הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M.
   א. נגדיר: $T^* = T \cup \{\forall x, y(\mathrm{S}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \leftrightarrow (\exists \mathrm{z}(\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{z}) = y)))\}$, האם T^* עקבית?
   ב. נגדיר: $T^+ = T \cup \{\forall \mathrm{x}[(\mathrm{S}(\mathrm{c}_0,\mathrm{x}) \wedge \mathrm{S}(\mathrm{x},\mathrm{c}_1)) \rightarrow \left(\exists \mathrm{y}\left((\mathrm{S}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \wedge \mathrm{S}(\mathrm{c}_1,\mathrm{y})) \rightarrow g(x,y) = c_1\right)\right)]\}$
   האם T^+ עקבית?

8. תהיינה T_1, T_2 תורות כלשהן באוצר מילים L כלשהו. נתון: T_1, T_2 עקביות.
   א. האם $T_1 \cap T_2$ עקבית? הוכח!
   ב. האם בהכרח התורה $T_1 \cup \{A\}$ כאשר: $\mathrm{A} \in T_2$, אינה עקבית?

9. תהא T תורה כלשהי באוצר מילים L. נתון שכל: $T^* \in \mathrm{P}(T) \backslash \{T\}$ עקבית, האם T עיקבית? הוכח!

10. יהא $L = \{S\}$ אוצר מילים כאשר S סימן יחס דו מקומי. יהא $M =< N, <>$ מבנה המפרש את L. תהא T קבוצת כל הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M.
   א. האם קיים ל T מודל בו בין כל 2 איברים יש איבר?
   ב. האם קיים ל T מודל בו יש קבוע המקיים: $S(c,y)$ וגם $S(x,c)$ לכל 2 איברים $x, y \in N$?

11. יהא $L=\{S\}$ אוצר מילים. ויהא $M=<R,<>$ מבנה המפרש את L. תהא T קבוצת כל הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M.
נגדיר אוצר מילים חדש: $L^+=L\cup\{g\}$ כאשר g סימן פונקציה דו מקומית. האם קיים ל T מודל M^* ובו מתקיים:
$S(g(x,y),x)$ וגם $S(g(x,y),y)$ לכל 2 איברים x,y מהעולם של M^*.

12. יהא $L=\{f,g,S,c\}$ אוצר מילים כאשר f,g סימני פונקציות חד מקומיות, S סימן יחס דו מקומי, c סימן קבוע.
לכל אחת מהתורות הבאות קבע האם היא עיקבית או לא והוכח:
א. $T_1=\{\exists x[f(x)=g(x)],\ \forall y[\exists x(f(x)=y)\to\forall x(g(x)\neq y)]\}$
ב. $T_2=\{\forall x\big(x\neq c\to S(c,x)\big),\ \forall x\big(x\neq c\to S(x,c)\big),f(c)\neq c\}$
ג. $T_3=\{\forall x\Big(f\big(g(x)\big)=g\big(f(x)\big)\Big),\ \forall x\big(f(x)\neq g(x)\big)\}$
ד. $T_4=\{\forall x,y[S(x,y)\to\neg S(y,x)],\forall x,y,z\big[\big(S(x,y)\wedge S(y,z)\big)\to S(x,z)\big],\forall x(\neg S(x,x))\}$
ה. $T_5=T_4\cup\{\exists x_1,x_2,\dots x_n(S(f(c),x_1)\wedge S(x_1,x_2)\wedge\dots\wedge S(x_{n-1},x_n)\wedge S(x_n,c)|n\in\mathbb{N}^+\}$

13. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
א. יהא L אוצר מילים כלשהו. תהיינה T_1,T_2 קבוצות כל הפסוקים ב L המתקיימים במודלים M_1,M_2 בהתאמה. נסמן: $\overline{T_1}$ - קבוצת כל הפסוקים ב L שאינם ב T_1 אזי: $\overline{T_1}\cap T_2$ עיקבית.
ב. יהא L_1 אוצר מילים כלשהו ויהא L_2 אוצר מילים אחר כך ש $L_1\cap L_2=\emptyset$ ויהיו M_1 מבנה ב L_1, M_2 מבנה ב L_2 כך ש $|M_1|=|M_2|$. נגדיר: T_1 קבוצת כל הפסוקים ב L_1 המתקיימים ב M_1, T_2 קבוצת כל הפסוקים ב L_2 המתקיימים ב M_2. אזי קיים מודל ב $L_1\cup L_2$ ל $T_1\cup T_2$.
ג. יהא L אוצר מילים כלשהו ,תהא T תורה כלשהי ב L. יהיו M_1,M_2 מבנים ב L, נגדיר:
$T'=\{A\in T|$ בדיוק אחד מ M_1,M_2 מקיים את A$\}$, אזי T' עיקבית.

תרגילי הכנה למשפט הקומפקטיות

בשאלות הבאות A תהיה תת-קבוצה של N ונגדיר פסוק $\alpha=\forall x\exists y(S(x,y))$.

1. נניח שהפסוק α מתקיים במבנה $\langle A,<\rangle$ (העולם הוא A וסמן היחס S מתפרש כיחס $<$). הוכיחו שאם $a_0,a_1,..,a_{n-1}$ היא סדרה עולה של אברים מתוך A, אז יש אבר ב-A שהוא גדול מכל אלו (רמז: איזה אבר יש להציב במקום x בפסוק α?). המסקנה: יש סדרה עולה $a_0,a_1,..$ של אברים מתוך N.
2. המשך: באותן הנחות של השאלה הקודמת, הגדירו פונקציה $f:N\rightarrow A$ והוכיחו שהיא חח"ע. (הסיקו ש-A אינסופית ועוצמתה היא אלף אפס).
3. נניח ש-A סופית. האם בהכרח α לא מתקיים במבנה $\langle A,<\rangle$?
4. הוכיחו שאם A סופית, אז קיים n^* כך ש-$A\subseteq\{0,1,..,n^*-1\}$. רמז: מה נתן להסיק משלילת α?
5. נתונה קבוצה B. נתונה פונקציה חח"ע $g:N\rightarrow B$. נגדיר $C=\{g(n):n\in N\}$. נניח $A=\{n\in N:g(n)\in C\}$. הוכיחו ש-$|A|=|C|$.
6. המשך: בהנחות של השאלה הקודמת, הוכיחו שאם C סופית, אז קיים n^* טבעי כך ש-$A\subseteq\{0,1,..,n^*-1\}$ וגם $C\subseteq\{g(n):n<n^*\}$.
7. נתונה קבוצה של פסוקים $\{\alpha_n:n\in N\}$ כך שעבור n,k שונים α_n,α_k הם פסוקים שונים. נתונות שתי תורות T,T^-. נניח $T^-\subseteq T\cup\{\alpha_n:n\in N\}$.
   הוכיחו שאם T^- סופית, אז יש n^* טבעי כך ש-$T^-\cap\{\alpha_n:n\in N\}\subseteq\{\alpha_n:n<n^*\}$.

תרגילים על משפט הקומפקטיות

1. יהא $L=\{f,g,S,c_0,c_1\}$ אוצר מילים ויהא: $M=<R,+,*,<,0,1>$ מבנה המפרש את L כאשר: $f^M=+$, $g^M=*$, $S^M=<$, $c_0{}^M=0$, $c_1{}^M=1$. תהא T קבוצת הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M.

נגדיר את שם העצם: $\bar{n}$ כאשר: $\bar{n}=f((\dots f(f(f(1,1),1),1)\dots),1)$ – מפעילים את f n פעמים.

א. האם יש ל T מודל ובו קיים איבר טבעי a המקיים $\bar{a}=f(c_1,c_0)$ וגם $\bar{a}=g(c_1,c_0)$.

ב. האם יש מודל M ל T ובו איבר a כך ש: $M\vDash\bar{n}<a$ לכל n טבעי.

2. יהא $L=\{f,g,S\}$ אוצר מילים ויהא: $M=<N,+,*,<>$ מבנה המפרש את L כאשר: $f^M=+$, $g^M=*$, , $S^M=<$. תהא T קבוצת הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M. האם יש מודל של T ובו "סדרה אינסופית יורדת", $a_0>a_1>\dots>a_n>\cdots$?
(באפן מדויק יש לכתב ש-$S(a_1,a_0)$ מתקיים במודל במקום $a_0>a_1$ וכן הלאה).

3. תהיינה $T_0\subseteq T_1\subseteq T_2\ldots\subseteq T_n\subseteq\cdots$ תורות באוצר מילים L (T_n תורה לכל n טבעי) ונניח שלכל n , , התורה T_n עקבית. הוכח: $T^*=\bigcup_{n=0}^{\infty}T_n$ עקבית (T^* היא איחוד כל התורות).

4. יהא $L=\{S,f\}$ אוצר מילים כאשר S סימן יחס דו מקומי ו f סימן פונקציה דו מקומית. יהיו 3 מבנים המפרשים את L :

$M_1=<Q,<,*>$, $M_2=<R^+,<,*>$, $M_3=<R,<,+>$ תהא T_1 קבוצת כל הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M_1 , T_2 קבוצת כל הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M_2 ו T_3 קבוצת כל הפסוקים ב L המתקיימים במבנה M_3.

א. האם התורה $T_1\cup T_3$ עקבית? הוכח!

ב. האם התורה $T_2\cup T_3$ עקבית? הוכח!

ג. האם יש מודל M ל T_3 בו קיים איבר c המקיים: $S(f(x,y),c)$ לכל 2 איברים x,y מהעולם של M? הוכח!

5. יהא $L=\{S,a_1,a_{-1}a_2,a_{-2},\dots\}$ אוצר מילים כאשר S הוא יחס דו מקומי, ו $a_1,a_{-1}a_2,a_{-2},\dots$ הם אינסוף סימני קבועים. נתון: $M=<\mathbb{Z},<,1,-1,2,-2,\dots>$ מבנה ב L. (כלומר, הפירוש של S ב M הוא היחס קטן ממש ו-$a_i{}^M=a_i$). תהי T קבוצת כל הפסוקים שמתקיימים ב M.

א. האם יש ל T מודל בו יש איבר c שגדול מכל הפירושים של $a_1,a_{-1}a_2,a_{-2},\dots$ במודל, כלומר מתקיים $S(a_i,c)$ לכל i.

ב. האם יש ל T מודל בו יש איבר שקטן מכל הפירושים של $a_1,a_{-1}a_2,a_{-2},\dots$ במודל, כלומר מתקיים $S(c,a_i)$ לכל i.

6. יהי $L=<a,S,f>$ אוצר מילים כאשר a הוא סימן קבוע כלשהו, S הוא סימן יחס דו מקומי ו f הוא סימן פונקציה חד מקומית. עבור תורה T כלשהיא ב L האם ייתכן שיתקיימו 2 התנאים הבאים:

א. לכל n טבעי יש מודל M_n של T ובו לפחות n איברים שונים: $a_1,a_2,\dots,a_n$ המקיימים את הנוסחא $S(a,f(x))$ כלומר כאשר מציבים כל אחד מ $a_1,a_2,\dots,a_n$ במשתנה x שבנוסחה, הפסוק שמתקבל מקבל ערך T בM_n .

ב. אין מודל של T בו קיימים אינסוף איברים המקיימים את הנוסחא $S(a,f(x))$.

7. יהא $L=\{S,f\}$ אוצר מילים כאשר S סימן יחס דו מקומי, f סימן פונקציה דו מקומית. יהא

$M=<\{A\subseteq\mathbb{N}|$ סופית $A\},\subseteq,\cup>$. תהא T קבוצת כל הפסוקים ב L המתקיימים ב M.

א. האם התורה:

$T^+=T\cup\{\exists x\forall y\exists x_1,x_2,\dots x_n(S(x,y)\rightarrow f(x_1,f(x_2,\dots,f(x_{n-1},x_n)\dots))=y)|n\in\mathbb{N}\}$ עיקבית? הוכח!

נגדיר אוצר מילים חדש: $L^+=L\cup\{c\}$ כאשר: c סימן קבוע.

ב. יהא $k\in\mathbb{N}^+$, האם התורה: $T^+=T\cup\{\exists x_1,x_2,\dots x_n(A\wedge B)|k\leq n\in\mathbb{N}^+\}$ עיקבית כאשר:

$A=(x_1\neq x_2\wedge x_1\neq x_3\wedge\dots\wedge x_{n-1}\neq x_n)$ - כלומר,כל האיברים $x_1,\dots,x_n$ שונים ו-

$B=(S(x_1,x_2)\wedge S(x_2,x_3)\wedge\dots\wedge S(x_k,c)\wedge S(c,x_{k+1})\wedge S(x_{k+1},x_{k+2})\wedge\dots\wedge S(x_{n-1},x_n))$?

ג. האם יש מודל M' ב L^+ ל T המקיים את הנוסחא $A[a]=S(a,c)$ לכל $a\in|M'|$? הוכח!

8. סדר קווי S על קבוצה A הוא סדר טוב אם ורק אם לכל תת קבוצה לא ריקה של A יש איבר ראשון (מינימאלי) לפי הסדר S, באופן שקול, לא קיימת סדרה יורדת אינסופית ב A (כלומר לא קיימת סדרה אינסופית $a_0,a_1,\dots$ של איברים שונים זה מזה מ-A כך שלכל $i\in\mathbb{N}$ $S(a_{i+1},a_i)$).
הוכח באמצעות משפט הקומפקטיות שלא קיימת תורה T באוצר המילים L={R} שבו R סימן יחס דו-מקומי, כל שלכל מבנה M ב-L , M מקיים את T אם ורק אם R מתפרש ב-M כסדר טוב (הדרכה: הוסף אינסוף קבועים לאוצר המילים).

9. תהי A קבוצת התת-קבוצות הסופיות של N (למשל, $\{1,2,6\}\in A$ אבל קבוצת המספרים הזוגיים לא שייכת ל-A כי היא אינסופית).
נתון <u>אוצר מילים</u> L שיש בו סמן יחס דו-מקומי S, סמן פונקציה דו-מקומית g וסמן של קבוע אישי c_a לכל a בקבוצה A. למשל, $c_{\{4,3\}}\in L$.
נגדיר <u>מבנה</u> M שמפרש את L כך: העולם של M הוא A, S^M הוא יחס ההכלה (למשל, $S^M(\{1,5\},\{1,2,5\})$, כי $\{1,5\}\subseteq\{1,2,5\}$).
g^M היא פונקציית האיחוד (למשל $g^M(\{1,2\},\{1,3\})=\{1,2,3\}$). לבסוף $c_a{}^M=a$ לכל a בקבוצה A.
נסמן ב-Th(M) את קבוצת הפסוקים ב-L שמתקיימים במבנה M.
נגדיר <u>אוצר מילים</u> $L^+=L\cup\{d\}$ (ב-L^+ מופיע בנוסף לסמנים שמופיעים ב-L, גם סמן של קבוע אישי d).
נגדיר <u>תורה</u> $T^+=Th(M)\cup\{S(c_a,d):a\in A\}$.
הוכיחו בעזרת משפט הקומפקטיות ש-T^+ עקבית.

תרגילים על עוצמות של קבוצות

1. הוכח: $|A| = |\mathbb{N}|$ כאשר: $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x \text{ איזוגי}\}$.

2. הוכח שהקבוצה: $A = \{2^x \mid x \in \mathbb{N}\}$ היא בת מניה.

3. הוכח שהקבוצה: $A = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x \geq -12\}$ היא בת מניה.

4. תהי A קבוצה בת מניה. הוכח שכל תת-קבוצה שלה גם היא בת-מניה.

5. תהיינה A, B, C, D קבוצות כך ש $A \cap C = B \cap D = \emptyset$, וגם $|A| = |B|, |C| = |D|$. הוכח ש$|A \cup C| = |B \cup D|$.

6. הוכח: $|A \times B| = |B \times A|$.

7. הוכח: $|(A \times B) \times C| = |A \times (B \times C)|$.

8. הוכח שאם $|D| \geq |C|, |B| \geq |A|$, אז $|B \times D| \geq |A \times C|$.

9. הסיקו מהשאלה הקודמת שאם הקבוצות A,B הן בנות-מניה אז $A \times B$ היא קבוצה בת-מניה.

10. הוכיחו באנדוקציה שלכל n טבעי חיובי, N^n היא קבוצה בת-מניה. (הוכיחו תחילה טענת עזר: $|N^{n+1}|=|N^n \times N|$. הסבר: כל אבר באגף שמאל הוא סדרה של $n+1$ מספרים טבעיים. אבר באגף ימין הוא זוג סדור, שאברו הראשון הוא סדרה של n מספרים טבעיים ואברו השני הוא מספר טבעי).

11. הסיקו מהשאלה הקודמת שקבוצת הסדרות הסופיות של מספרים טבעיים היא בת-מניה.

12. הסיקו מהשאלה הקודמת שקבוצת הקבוצות הסופיות של מספרים טבעיים היא בת-מניה.

13. הראה שהקבוצה: $A = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{N},\ a < b < c\}$ היא בת מנייה.

14. הוכח: אם $|A| = |B|$ אז $|P(A)| = |P(B)|$.

15. הוכח: $|[0,1]| = |(0,2)|$. הוכח: $|(0,1)| = |(2,4)|$.

16. הוכח: $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N}^+|$.

17. תהיינה A , B קבוצות. נתון כי $A \sim B$ (כלומר $|A|=|B|$), $a \in A$ ו- $b \in B$. הוכח כי: $A \setminus \{a\} \sim B \setminus \{b\}$.

18. הוכח: אם $A \backslash B \sim B \backslash A$ אז $A \sim B$.

19. תהי A קבוצה לא ריקה.
הוכח שהתנאים הבאים שקולים:
    א. קיימת פונקציה f מ- $\mathbb{N}$ על A.
    ב. קיימת פונקציה $g: A \to \mathbb{N}$ חח״ע.

20. יחס סדר מלא $(A, \leq)$ נקרא סדר טוב אם לכל $B \subseteq A$ יש איבר ראשון. הוכח שאם A בת מניה אז ניתן להגדיר עליה יחס סדר טוב, כלומר סדר קווי שבו לכל תת קבוצה יש איבר קטן ביותר.

21. הוכח שקבוצת כל המעגלים במישור $\mathbb{R}^2$, כך שמרכזם בעלי קואורדינטות רציונליות והרדיוס שלהם הוא מספר רציונלי, היא קבוצה בת מניה.

22. מהי העוצמה של הקבוצה $A \cup \mathbb{N}$ כאשר A היא קבוצת המספרים האי רציונאליים ששייכים לקבוצה $\{\sqrt[n]{m} \mid m , n \in \mathbb{N}\}$?

23. הוכח ש:
    - $|\mathbb{R}| = |[0,\infty)|$

24. $|\mathbb{R}| = |(3,4)|$

25. $|\mathbb{R}| = |[0,1]|$

- $|\mathbb{R}| = |(0,1]|$
- $|\mathbb{R}| = |P(\mathbb{N})|$

26.

27. יהי $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש $a < b$. מה תוכלו להגיד על עוצמת הקבוצות הבאות? (מצאו קבוצות אחרות השוות בעוצמתן לקבוצות אלו).

א. (a, ∞) ג. $(-\infty, a)$ ה. (a, b)

ב. $[a, \infty)$ ד. $(-\infty, a]$ ו. $[a, b]$

28. יהי A, B קבוצות כך ש$|A| = |B| = |\mathbb{R}|$.

א. האם $|A \cup B| = |\mathbb{R}|$? רמז: שימו לב $|(-\infty, -1]| = |(-1,1)| = |[1, \infty)| = |\mathbb{R}|$

ב. האם $|A \cap B| = |\mathbb{R}|$?

29. יהי $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$. הוכח ש$|A| = |B|$.

30. האם יש שני מבנים איזומורפיים M_1, M_2, כך שהעולם של M_1 הוא N ואילו העולם של M_1 הוא R?

31. האם יש שני מבנים איזומורפיים M_1, M_2, כך שהעולם של M_1 הוא N ואילו העולם של M_1 הוא Z?

32. בכל אחד מהסעיפים הבאים, הוכח או הפרך שהקבוצה היא בת מניה:

א. $A = \{a \in \mathbb{R}^+ | \exists q \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Q}^+ : a^q = k\}$

ב. $B = \{X \subseteq R | \exists a \in \mathbb{Z} : X \cup \{a\} = \mathbb{R}\}$

ג. $C = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{R} : x^2 = y \wedge |x - y| < 1\}$

ד. $D = \{X \in \mathbb{P}(\mathbb{N}) | X \cup \{x \in \mathbb{N} | x < 100\} = \mathbb{N} \vee X \backslash \{x \in \mathbb{N} | x < 100\} = \emptyset\}$

33. תהא X: קבוצה של קבוצות לא ריקות כך שלכל 2 איברים A, B ב X מתקיים: $|A| \neq |B|$.
הוכח או הפרך: קיימת $M \in X$ כך ש $|X| \leq |M|$.

34. סדר את הקבוצות הבאות לפי העוצמה שלהן וציין אם יש שוויון:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} | x \cdot \pi \in \mathbb{Z}\}$

ב. $B = \{(X, Y) | X \subseteq \mathbb{Q}, Y \subseteq \mathbb{Q}, |X| < |Y|\}$

ג. $C = \{X \subseteq P(\mathbb{N}) | \bigcup_{x \in X} x = \mathbb{N}\}$, (רמז: הסתכל על $P(\mathbb{N}) \backslash \{\mathbb{N}\}$).

ד. $D = \{X \subseteq \mathbb{R} | \forall x, y \in X : |x - y| > 10\}$

ה. $E = \{X \subseteq \mathbb{Q} | |X \cap (0,1)| = |X \cap (-1,0)|\}$

35. א. הוכח ש $\{X \in P(\mathbb{N}) | X$ אינסופית$\}$ אינה בת מניה.
ב. מצא את עוצמת קבוצת כל הסדרות הטבעיות האינסופיות המונוטוניות עולות.