פרק 09 - רציפות

הגדרה:

$f(x)$ **רציפה בנקודה** $x=x_0$ אם הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ קיים ושווה $f(x_0)$.

$f(x)$ **רציפה בתחום** D אם $f(x)$ רציפה בנקודה $x=x_0$ לכל $x\in D$.

מיון נקודות אי-רציפות:

1. $x=x_0$ נקראת **אי רציפות סליקה** של $f(x)$ אם הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ קיים ושונה מ- $f(x_0)$ (או ש- $f(x_0)$ לא מוגדר).
2. $x=x_0$ נקראת **אי רציפות מסוג ראשון** של $f(x)$ אם הגבולות $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ קיימים (במובן הסופי) ושונים.
3. $x=x_0$ נקראת **אי רציפות מסוג שני** של $f(x)$ אם לפחות אחד מהגבולות $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ לא קיים (במובן הסופי).

טענות:

- אם $f(x)$ ו $g(x)$ פונקציות רציפות בתחום D אז גם הפונקציות $f(x)\cdot g(x)$, $f(x)\pm g(x)$ רציפות ב- D
- אם בנוסף $g(x)\neq 0$ לכל x בתחום D אז גם הפונקציה $f(x)/g(x)$ רציפה ב- D.
- אם $f(x)$ רציפה בתחום D ו $g(x)$ רציפה בתחום $f(D)$ אז הפונקציה $g(f(x))$ רציפה בתחום D.
- הפונקציות האלמנטריות רציפות בתחום הגדרתן.

תרגילים:

8.1 חקרו את הרציפות של הפונקציות הבאות:

640. $f(x)=|x|$

642. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{(x+1)^2}, & x\neq -1\\ A, & x=-1\end{cases}$

641. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2\\ A, & x=2\end{cases}$

643. $f(x)=\begin{cases}\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

644. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

645. $f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x=0\\ A, & x=0\end{cases}$

646. $f(x)=\begin{cases}x\cdot\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

647. $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{-1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

8.2 האם קיים A ממשי כך שהפונקציות הבאות תהיינה רציפות בנקודה x_0?

א. $f(x)=\begin{cases}A & ,x=0\\ \frac{1}{2}\left(1+\frac{|x|}{x}\right)+\dfrac{1}{1+e^{1/x}} & ,x\neq 0\end{cases}$

ב. $f(x)=\begin{cases}A & ,x=1\\ \dfrac{1}{1+e^{1/(x-1)}} & ,x\neq 1\end{cases}$

8.3 מצאו a ממשי ואת $f(0)$ כך שהפונקציות הנתונות תהיינה רציפות בנקודה $x=0$:

א. $f(x)=\begin{cases}e^{ax} & ,x>0\\ a\dfrac{1-\cos 2x}{x^2} & ,x<0\end{cases}$

ב. $f(x)=\begin{cases}\sin ax\cdot\sin\frac{1}{x} & ,x>0\\ a+\dfrac{1-\cos x}{x^2} & ,x<0\end{cases}$

8.4 נתון שהפונקציה $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+bx+c}{x-2} & ,x\neq 2\\ 7 & ,x=2\end{cases}$ רציפה לכל x. מצאו את $b,c=?$.

8.5 הפונקציות הבאות אינן רציפות בנקודה $x=0$. קבעו את סוגה של אי-הרציפות:

א. $f(x)=\dfrac{x^2-x}{x}$ ב. $f(x)=\dfrac{1}{x}$ ג. $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ ד. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$

8.6 לאילו ערכים של x הפונקציות הבאות רציפות? במידה ומצאתם נקודות אי-רציפות, קבעו את סוגן:

א. $f(x)=[x]+[-x]$ ב. $f(x)=|x-a|+|x+a|$ ג. $f(x)=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}$

ד. $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{\ln(x^2)}\right)$ ה. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n}\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+x^2}{1+x^{2n}}$ ו. $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}$

ז. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x} & x<\frac{\pi}{2}\\ [x]-1 & \frac{\pi}{2}\le x\le\frac{5}{2}\\ \dfrac{1}{2x-5} & x>\frac{5}{2}\end{cases}$ ח. $f(x)=x\left[\dfrac{1}{x}\right]$ ט. $f(x)=[x]\sin\dfrac{\pi x}{2}$

8.7*

פונקצית-רימן $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת באופן הבא:

- אם $x\notin\mathbb{Q}$ אי-רציונלי, אז: $f(x)=0$.
- אם $x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$ (p,q זרים ו- $q>0$) אז $f(x)=f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}$
- $f(0)=1$

להוכיח שפונקצית-רימן רציפה בכל נקודה אי-רציונלית, ובעלת אי-רציפות סליקה בכל נקודה רציונלית.

8.8 I מצאו לאילו ערכים של a,A ‏($a>0$):

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^a-1}{x-1} & x>1\\ A & x=1\\ \dfrac{a^x-a}{x-1} & x<1\end{cases}$$

(א) $f(x)$ רציפה בנקודה $x=1$.

(ב) $x=1$ נקודת אי-רציפות סליקה של $f(x)$

(ג) $x=1$ נקודת אי-רציפות מסוג ראשון של $f(x)$

II מצאו לאילו ערכים של a,A:

$$f(x)=\begin{cases}x^{a^2} & x<0\\ A & x=0\\ x^a e^{-x^a} & x>0\end{cases}$$

(א) $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$.

(ב) $x=0$ נקודת אי-רציפות סליקה של $f(x)$

(ג) $x=0$ נקודת אי-רציפות מסוג ראשון של $f(x)$

8.9 $|f(x)|\le|x|$ לכל x. הוכיחו ש $f(x)$ רציפה ב- $x=0$.

8.10 הפונקציות $f(x),g(x)$ מוגדרות בסביבת x_0. נניח כי $f(x)$ רציפה בסביבת x_0 אך $g(x)$ אינה רציפה ב- x_0.

א. הוכח: אם $f(x)\cdot g(x)$ רציפה ב- x_0 אזי $f(x_0)=0$.

ב. הוכח: אם $f(x_0)=0$ ו- $g(x)$ חסומה בסביבת x_0 אזי $f(x)\cdot g(x)$ רציפה ב- x_0.

ג. האם בסעיף ב' ניתן לוותר על ההנחה ש- $g(x)$ חסומה בסביבת x_0?

8.11 הוכח כי אם הפונקציות $\boldsymbol{g(x), f(x)}$ רציפות בנקודה $\boldsymbol{x_0}$, אז גם הפונקציות $\boldsymbol{\psi(x)=\max\{f(x),g(x)\}}$, $\boldsymbol{\varphi(x)=\min\{f(x),g(x)\}}$ רציפות באותה נקודה $\boldsymbol{x_0}$.

8.12 הפונקציה $f(x)$ מוגדרת על (a,b). נניח שקיים קבוע ממשי k כך שלכל שתי נקודות $x_1,x_2\in(a,b)$ מתקיים: $|f(x_1)-f(x_2)|\le k|x_1-x_2|$. הוכיחו כי $f(x)$ רציפה ב-(a,b).

8.13 תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ב $(0,1)$, $f:(0,1)\xrightarrow{\text{על}}(0,2)$. נגדיר: $A=\{x\in(0,1)\mid f(x)>1\}$
הוכיחו שבקבוצה A אין איבר מינימלי ואין איבר מקסימלי.

8.14 תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$ וחיובית שם. נניח כי לכל $0 < \varepsilon < 1$ מתקיים $\inf f((\varepsilon,1]) > 0$.
הוכיחו שאם f רציפה מימין ב- $x = 0$, אז $\inf f([0,1]) > 0$.

8.15 תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה x_0 ורציפה ב- x_0 כך ש- $f(x_0) \neq 0$.
הוכח כי קיימת סביבה של x_0 כך שלכל x בסביבה זו מתקיים $f(x)f(x_0) > 0$.

8.16 הפונקציה $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ רציפה ומקיימת:
$f(x^2) = f(x)$ לכל $0 \le x \le 1$. הוכיחו ש $f(x)$ קבועה.

8.17 (20 נקודות) נניח שפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $(-\infty,+\infty)$ ומקיימת את התנאים הבאים:
1) $f(x)$ רציפה ב 2 בנקודות: $x=1$ ו- $x=0$, 2) $f(x) = f(\sqrt{|x|})$ לכל $x \in (-\infty,+\infty)$.
הוכיחו ש $f(x)$ היא פונקציה קבועה.

8.18 מצא את כל הפונקציות שרציפות בנקודה $x=0$ שמקיימות את התכונה הבאה:
$\forall x \in (-\infty,\infty) \quad f(x) = f(2x)$.

8.19 (20 נקודות) נתון שפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $(-\infty,+\infty)$ ובעלת התכונות הבאות:
1) $f(x)$ רציפה בנקודה $x=1$, 2) $f(x) = f\left(\frac{1+x}{2}\right)$ לכל $x \in (-\infty,+\infty)$.
הוכיחו ש $f(x)$ היא פונקציה קבועה.

8.20 תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בכל הישר הממשי.
הוכיחו שאם כל מספר רציונלי הוא מחזור של הפונקציה, אזי $f(x)$ קבועה.

8.21 נתונה הפונקציה $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \text{ irrational} \\ x, & x \text{ rational} \end{cases}$.
א. האם יש לה נקודות רציפות?
ב. האם היא הפיכה?

8.22
תהא $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש: א. $f(x)$ רציפה באפס. ב. לכל $x,y \in \mathbb{R}$ מתקיים: $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$.
הוכיחו כי $f(x) \equiv 0$ או שקיים c>0 כך ש $f(x) = c^x$.

8.1

.642 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(1+x)^2}, & x\neq -1\\ A, & x=-1\end{cases}$

$x=-1$ נק' אי-רציפות מסוג שני (גבולות חד-צדדיים אינסופיים)

.643 $f(x)=\begin{cases}\left|\frac{\sin x}{x}\right|, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ - פונקציה רציפה : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1=f(0)$.

.644 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{|x|}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$ $\Leftarrow$ $x=0$ נק' אי-רציפות מסוג ראשון.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{-x}=-1 \qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

.645 $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$ $\Leftarrow$ לא קיים $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$, לכן $x=0$ נק' אי-רציפות מסוג שני.

.646 $f(x)=\begin{cases}x\cdot\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$ $\Leftarrow$ $f(x)$ רציפה.

.647 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{-1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{-1}{x^2}}=e^{-\infty}=0=f(0)$ $\Leftarrow$ $f(x)$ רציפה.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{-1}{x^2}}=e^0=1$$

8.2

(א)
$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x)&=\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{1+e^{1/x}}\right)=1+0=1\\ \lim_{x\to 0^-} f(x)&=\lim_{x\to 0^-}\left(0+\frac{1}{1+e^{1/x}}\right)=0+1=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow A=1$$

(ב)
$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} f(x)&=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1+e^{1/(x-1)}}=0\\ \lim_{x\to 1^-} f(x)&=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{1+e^{1/(x-1)}}=1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \nexists A$$

8.3

(א) $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^{ax} = 1$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} a\cdot\frac{1-\cos 2x}{x^2} = a\lim_{x\to0^-}\frac{2\sin^2 x}{x^2} = 2a$ $\Big\} \Rightarrow a=\frac12$

(ב) $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \underbrace{\sin ax}_{\text{חסום}}\cdot\underbrace{\sin\frac1x}_{\to0} = 0$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(a+\frac{1-\cos x}{x^2}\right) = a+\lim_{x\to0^-}\frac{2\sin^2\left(\frac x2\right)}{x^2} = a+\frac12$ $\Big\} \Rightarrow a=-\frac12$

8.4

$f(x)$ רציפה לכל x ממשי. מצא את b,c.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+bx+c}{x-2}, & x\ne2\\ 7 & x=2\end{cases}$$

$f(x)$ רציפה בנקודה $x=2$ $\Leftarrow$ $f(2)=\lim_{x\to2} f(x)$

$\Rightarrow 7=\lim_{x\to2}\frac{x^2+bx+c}{x-2} \Rightarrow \lim_{x\to2} x^2+bx+c=0$

(אחרת נקבל גבול מהצורה $\frac{a}{0}\ne7$) לכן

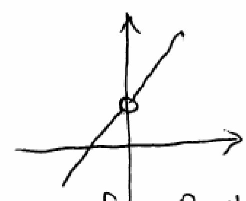
$x^2+bx+c=(x-2)(x+a)$

$\Rightarrow 7=\lim_{x\to2}\frac{x^2+bx+c}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+a)}{x-2}=\lim_{x\to2} x+a=2+a \Rightarrow a=5$

$\Rightarrow x^2+bx+c=(x-2)(x+5)=x^2+3x-10 \Rightarrow \underline{b=3},\ \underline{c=-10}$

8.5

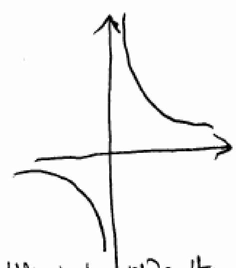
(א) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\ne0\\ \nexists & x=0\end{cases}$



אי-רציפות סליקה

$\lim_{x\to0} f(x)=1$

(ב) $f(x)=\frac1x$

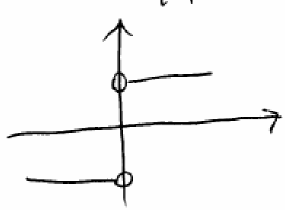


אי רציפות מסוג שני

$\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

$\lim_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

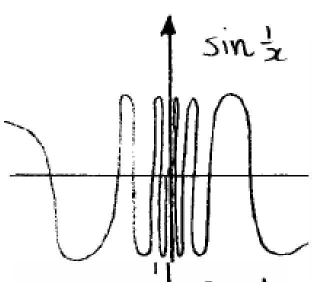
(ג) $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$



אי-רציפות מסוג ראשון

$\lim_{x\to0^+} f(x)=+1$

$\lim_{x\to0^-} f(x)=-1$



אי רציפות מסוג שני

$\nexists\lim_{x\to0} f(x)$

8.6

(ד)

$n < x < n+1 \Leftarrow$

$$[x]+[-x] = n + (-n-1) = -1$$

$x = n \Leftarrow$

$$[x]+[-x] = n + [-n] = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$x \in \mathbb{Z}$ נקודת אי-רציפות סליקה

(ה)

$$|x-a| = \begin{cases} a-x, & x \le a \\ x-a, & x > a \end{cases} \quad ; \quad |x+a| = \begin{cases} -x-a, & x \le -a \\ x+a, & x > -a \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} (-x-a)+(a-x), & x \le -a \\ (x+a)+(a-x), & -a < x \le a \\ (x-a)+(x+a), & x > a \end{cases} = \begin{cases} -2x, & x \le -a \\ 2a & -a \le x \le a \\ 2x & x > a \end{cases}$$

$$f(-a) = \lim_{x \to -a^-} f(x) = \lim_{x \to -a^+} f(x) = 2a$$

$$f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = 2a$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ רציפה לכל x

(ו)

$$f(x) = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$$

$$f(x) = \frac{[(x+1)-x]}{x(x+1)} \cdot \frac{x(x-1)}{[x-(x-1)]} = \frac{(x-1)}{(x+1)} \quad (x \ne 0, \pm 1)$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x+1} = -1 \Rightarrow$$

$x=0$ אי-רציפות סליקה

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x+1} = 0 \Rightarrow$$

$x=1$ אי-רציפות סליקה

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to -1^-} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \to -1^+} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{cases} \Rightarrow$$

$x=-1$ אי-רציפות מסוג II

(ט) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{\ln(x^2)}\right)$

תחום הגדרה: $x^2>0 \Rightarrow x\neq 0$

$\ln(x^2)\neq 0 \Rightarrow x^2\neq e^0=1 \Rightarrow x\neq \pm 1$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \sin\left(\frac{1}{\ln 0}\right) = \sin\left(\frac{1}{-\infty}\right) = \sin(0) = 0 \Rightarrow$ אי-רציפות סליקה $x=0$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \sin\left(\frac{1}{\ln 1^+}\right) = \sin\left(\frac{1}{0^+}\right) = \sin(\infty) \Rightarrow$ אי-רציפות מסוג II $x=1$

(הגבול לא קיים) (כנ"ל לגבי $x=-1$).

(ה) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}}$

$\underline{x<0}$: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}} = \frac{x+e^{-\infty}}{1+e^{-\infty}} = \frac{x+0}{1+0} = x$

$\underline{x=0}$: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{0+e^0}{1+e^0} = \frac{1}{2}$

$\underline{x>0}$: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x+e^{nx}}{1+e^{nx}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{x}{e^{nx}}+1}{\frac{1}{e^{nx}}+1} = \frac{0+1}{0+1} = 1$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x, & x<0 \\ 1/2, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases} \Rightarrow$ אי-רציפות מסוג I $x=0$

(ו) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n}\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+x^2}{x^{2n}+1}$

$\underline{|x|<1}$: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(x^2)^n\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+x^2}{(x^2)^n+1} = \frac{0+x^2}{0+1} = x^2$

$\underline{|x|=1}$: $f(x) = \frac{1^n\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+1}{1^n+1} = \frac{2}{2} = 1$

$\underline{|x|>1}$: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(x^2)^n\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+x^2}{(x^2)^n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\frac{1}{x^{2n-1}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}} = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+0}{1+0} = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^2, & |x|<1 \\ 1, & |x|=1 \\ \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right), & |x|>1 \end{cases} \Rightarrow$ $f(x)$ רציפה לכל x

$$\left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = 1 \end{array}\right]$$

(ד)

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x}{x} & x<\frac{\pi}{2}\\ [x]-1 & \frac{\pi}{2}\le x\le\frac{5}{2}\\ \frac{1}{2x-5} & x>\frac{5}{2}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}=2 \Rightarrow$$ אי רציפות סליקה $x=0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin 2x}{x}=\frac{\sin\pi}{\pi/2}=0\\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+}[x]-1=\left[\frac{\pi}{2}\right]-1=0=f\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{cases} \Rightarrow$$ הפונקציה רציפה $x=\frac{\pi}{2}$

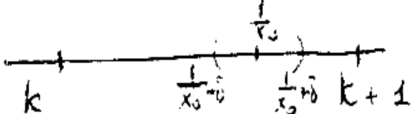
$$\lim_{x\to 2} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 2^-}[x]-1=[2^-]-1=1-1=0\\ \lim_{x\to 2^+}[x]-1=[2^+]-1=2-1=1\end{cases} \Rightarrow$$ אי רציפות מסוג ראשון $x=2$

$$\lim_{x\to\frac{5}{2}} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to\frac{5}{2}^-}[x]-1=[2.5]-1=1\\ \lim_{x\to\frac{5}{2}^+}\frac{1}{2x-5}=\frac{1}{0^+}=+\infty\end{cases} \Rightarrow$$ אי רציפות מסוג שני $x=2.5$

(ה) בפתרון: נראה שבכל $x_0\ne\frac{1}{k}$, כאשר k - מספר שלם, $f(x)$ - רציפה

נניח במקרה $x_0>0$ (מקרה $x_0<0$ בדומה; $x_0=0$ נבדוק אחר כך)

$x_0\ne\frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{x_0}=k+\alpha$, $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $0<\alpha<1 \Rightarrow \exists\delta>0$



$$(k,k+1)\supset\left(\frac{1}{x_0}-\delta,\ \frac{1}{x_0}+\delta\right)$$

ניקח $x_n\to x_0$. אזי $\frac{1}{x_n}\to\frac{1}{x_0}$ (מכיוון ש- $\frac{1}{x}$ - רציפה בכל $x\ne 0$ ו- $x_0\ne 0$). מכאן מקבלים שקיים מספר n_0 כך ש-

$$\forall n>n_0 \quad \frac{1}{x_n}\in\left(\frac{1}{x_0}-\delta,\ \frac{1}{x_0}+\delta\right)\subset(k,k+1)$$

המשך בפתרון: אזי

$$\forall n>n_0 \quad \left[\frac{1}{x_n}\right]=k=\left[\frac{1}{x_0}\right]$$

ולכן

$$\forall n>n_0 \quad f(x_n)=x_n\left[\frac{1}{x_n}\right]=kx_n\to kx_0=x_0\left[\frac{1}{x_0}\right]$$

כלומר $f(x)$ רציפה בנקודה x_0.

נתבונן במקרה $x_0=0$

$$\left(\frac{1}{x}-1\right) < \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x} \qquad /\cdot x$$

$$(1-x) < x\left[\frac{1}{x}\right] \le 1$$

אם $x\to 0$ נקבל לפי כלל סנדביץ'

$$\lim_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

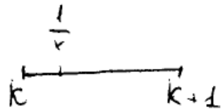
כלומר, $x_0=0$ - נקודת אי-רציפות סליקה - הגבול קיים.

נבדוק נקודות מהצורה $x_0=\frac{1}{k}$, כאשר k-מספר שלם.

נתבונן במקרה $k>0$ ($k<0$ בדומה)

$$\lim_{x\to \frac{1}{k}-0} x\left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

$$\frac{1}{x}\to k \qquad x<\frac{1}{k} \qquad k<\frac{1}{x} \qquad \left[\frac{1}{x}\right]=k$$



$$\lim_{x\to \frac{1}{k}+0} x\left[\frac{1}{x}\right] = \frac{k-1}{k} \neq 1.$$

$$x>\frac{1}{k} \qquad \frac{1}{x}<k \Rightarrow \left[\frac{1}{x}\right]=k-1$$

לכן כל נקודה $x_0=\frac{1}{k}$ - היא נקודת אי-רציפות מסוג I

(ב)

הפונקציה $\sin\frac{\pi x}{2}$ רציפה בכל $\mathbf{R}$, כהרכבה של פונקציות רציפות.

הפונקציה $[x]$ רציפה בכל x שאינו שלם.

לכן $f(x)$ רציפה לכל x שאינו שלם, כמכפלת פונקציות רציפות.

נותר לבדוק מה קורה בנקודות השלמות.

יהי n מספר שלם.

$$\lim_{x\to n^-}[n]=n-1 \quad , \quad \lim_{x\to n^+}[n]=n \quad , \quad \lim_{x\to n}\sin\frac{\pi x}{2}=\sin\frac{\pi n}{2} .$$

לפיכך $\lim_{x\to n^-} f(x)=(n-1)\sin\frac{\pi n}{2}$ $\quad \lim_{x\to n^+} f(x)=n\sin\frac{\pi n}{2}$.

הגבולות החד-צדדים קיימים וסופיים, ולכן אם יש אי-רציפות היא ממין ראשון.

$n\sin\frac{\pi n}{2}=(n-1)\sin\frac{\pi n}{2}$ אם ורק אם $\sin\frac{\pi n}{2}=0$ וזה קורה כאשר n זוגי.

עבור n זוגי מתקיים גם $f(n)=0$, ולכן בנקודות אלה יש רציפות.

לסיכום: f רציפה בכל $\mathbf{R}$, מלבד בנקודות n כאשר n שלם אי-זוגי, ושם יש לה אי-רציפות ממין ראשון.

8.7

<u>פתרון:</u> נוכיח שלכל $x_0 \in \mathbb{R}$ ממשי, מתקיים

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \tag{4}$$

זה יסיים את התרגיל, שכן -

$$f(x_0) : \begin{cases} = 0, & x_0 \notin \mathbb{Q} \\ > 0, & x_0 \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

ומכאן שאם x_0 נקודה אי-רציונלית, אז הפונקציה רציפה ב- x_0, כי, $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = f(x_0)$
ואם x_0 רציונלית, אז היא נקודת אי-רציפות סליקה של הפונקציה. כי, $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \neq f(x_0)$.

<u>הוכחת הגבול (4):</u> תהא $x_0 \in \mathbb{R}$ כלשהי, אז בהינתן $0 < \varepsilon$ צריך למצוא $0 < \delta$ כך ש-

$$\Big|f(x)\Big| < \varepsilon \quad \Leftarrow \quad x \neq x_0\,, \quad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \tag{5}$$

ראשית, נשים לב שעבור N טבעי נתון, בכל קטע סופי- (a, b), יש מספר סופי של שברים מצומצמים: $\frac{p}{q}$ שהמכנה שלהם מקיים $q \leq N$ (או $\frac{1}{N} \leq \frac{1}{q}$), כי אם למשל $N = 5$ ואורך הקטע (a, b) הוא 1, אז יש בקטע-

- לכל היותר 5 שברים מצומצמים $\frac{p}{q}$ שהמכנה שלהם: $q = 5$.
- לכל היותר 4 שברים מצומצמים $\frac{p}{q}$ שהמכנה שלהם: $q = 4$.

$\vdots$

- לכל היותר שבר מצומצם יחיד $\frac{p}{q}$ שהמכנה שלו: $q = 1$.

ובסה"כ מקבלים מספר סופי.
נבחר כעת N טבעי אשר $\frac{1}{N} < \varepsilon$. ויהא S אוסף כל השברים המצומצמים $\frac{p}{q}$ אשר

$$\frac{p}{q} \in \left(x_0 - \tfrac{1}{2}, x_0 + \tfrac{1}{2}\right) \quad \text{ו-} \quad \frac{1}{N} \leq \frac{1}{q}$$

ע"פ ההערה הקודמת, האוסף S הוא סופי. יהא $x_1 = \frac{p_1}{q_1}$ האיבר ב- S שקרוב ביותר ל- x_0 אבל שונה ממנו[4].
ונסמן ב- δ את המרחק בין x_0 לבין x_1, אז לכל x אשר $x \in \Big(x_0 - \delta, x_0 + \delta\Big)$, $x \neq x_0$, יתקיים אחד משניים:

א. $x \notin \mathbb{Q}$ הוא אי-רציונלי ומכאן ש- $f(x) = 0$.

ב. $x = \frac{p}{q}$ הוא רציונלי ו- $f(x) = \frac{1}{q}$. אבל x כזה הוא קרוב יותר ל- x_0 מ- x_1, ומכאן שאינו שייך ל- S
ולכן $f(x) = f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q} < \frac{1}{N} < \varepsilon$

ובסה"כ, מתקיים (5), כי: $x_0 \neq x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad \Leftarrow \quad 0 \leq f(x) < \varepsilon$ ■

I 8.8

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^a-1}{x-1}, & x>1\\ A, & x=1\\ \dfrac{a^x-a}{x-1}, & x<1\end{cases}$$

לאילו ערכים של A,a $(a>0)$:!

א) $f(x)$ רציפה ב $x=1$?

ב) $x=1$ אי-רציפות סליקה של $f(x)$?

ג) $x=1$ אי-רציפות ממין ראשון של $f(x)$?

פתרון!

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^a-1}{x-1}\underset{t=x-1}{=}a\lim_{t\to 0^+}\frac{(t+1)^a-1}{at}=a$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{a^x-a}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{a(a^{(x-1)}-1)}{x-1}\underset{t=x-1}{=}a\lim_{t\to 0^-}\frac{a^t-1}{t}$$

$$=a\lim_{t\to 0^-}\frac{e^{t\ln a}-1}{t}=a\ln a\lim_{t\to 0^-}\frac{e^{t\ln a}-1}{t\ln a}=a\ln a$$

א) $f(x)$ רציפה $x=1$ $\Leftrightarrow f(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)\Leftrightarrow a=A=a\ln a\Leftrightarrow a=A=e$

ב) $x=1$ אי-רציפות סליקה $\Leftrightarrow f(1)\neq\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^-}f(x)\Leftrightarrow A\neq a=a\ln a\Leftrightarrow a=e, A\neq e$

ג) $x=1$ אי-רציפות ממין I $\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+}f(x)\neq\lim_{x\to 1^-}f(x)\Leftrightarrow a\neq a\ln a\Leftrightarrow a\neq e, \forall A$

II 8.8

$$f(x)=\begin{cases}x^{a^2}, & x<0\\ A, & x=0\\ x^a e^{-x^a}, & x>0\end{cases}$$

לאילו ערכים של A,a :

א) $f(x)$ רציפה ב $x=0$?

ב) $x=0$ אי-רציפות סליקה של $f(x)$?

ג) $x=0$ אי-רציפות ממין I של $f(x)$?

פתרון !

א: $a<0$ $\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^{a^2}=0^{a^2}=0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^a e^{-x^a}\underset{t=x^a}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=0$$

ב: $a>0$ $\quad \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^{a^2}=0^{a^2}=0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x^a e^{-x^a}\underset{t=x^a}{=}\lim_{t\to 0} t e^{-t}=0\cdot 1=0$$

ג: $a=0$

$$f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ A, & x=0\\ e^{-1}, & x>0\end{cases}$$

א) $f(x)$ רציפה ב $x=0$ $\Leftrightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)\Leftrightarrow A=0,\ a\neq 0$

ב) $x=0$ אי-רציפות סליקה $\Leftrightarrow f(0)\neq\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)\Leftrightarrow A\neq 0,\ a\neq 0$

ג) $x=0$ אי-רציפות ממין I $\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim_{x\to 0^+}f(x)\Leftrightarrow a=0,\ \forall A$

8.9

$$|f(x)| \le |x| \Rightarrow |f(0)| \le |0| = 0 \Rightarrow f(0)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \le x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) \le \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \\ f(x) \ge x \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) \ge \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

קיבלנו: $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ⇐ $f(x)$ רציפה בנקודה $x=0$.

8.10

נתון: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \ne g(x_0)$

(א) נניח $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0)$ ונניח $f(x_0)\ne 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = \frac{f(x_0)g(x_0)}{f(x_0)} = g(x_0)$$

קיבלנו $g(x)$ רציפה ב x_0 סתירה, לכן $f(x_0)=0$...

(ב) נניח $f(x_0)=0$, $|g(x)| \le M$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \underbrace{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}_{\to 0} \underbrace{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}_{\text{חסום}} = 0 \\ f(x_0)g(x_0) = f(x_0)g(x_0) = 0\, g(x_0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$f(x)g(x)$ רציפה בנקודה $x=x_0$.

(ג) לא! קונטרה דוגמא: $f(x)=x$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$

$f(0)=0$ רציפה בנקודה $x=0$; $g(x)$ לא חסומה בסביבת $x=0$

$f(x)g(x)=\frac{1}{x}$ לא רציפה ב- $x=0$.

8.11

נובע ישירות מהזהויות:

$$\max\{f(x),g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)}{2} + \frac{|f(x)-g(x)|}{2} \ ; \ \min\{f(x),g(x)\} = \frac{f(x)+g(x)}{2} - \frac{|f(x)-g(x)|}{2}$$

8.12

צ"ל כי לכל $a<x_0<b$ קיים הגבול: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

כלומר: קיים לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in(a,b)$

$$|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$$

$$|f(x)-f(x_0)| \underset{\text{נתון}}{\le} k|x-x_0| < \varepsilon \Leftarrow |x-x_0| < \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)$$

נסמן: $\delta=\frac{\varepsilon}{k}$ ∎

8.13

(1) נניח בשלילה שקיימים $x_1,x_2\in A$ כך ש

x_2 מקסימלי ב-A (כלומר: אם $x_2<x$ אז $x\notin A$)

ו- x_1 מינימלי ב-A (כלומר אם $x_1>x$ אז $x\notin A$)

$x_2\in A$ לכן $f(x_2)>1$. $f(x)$ רציפה ב $x=x_2$

~~[illegible]~~

כלומר $\lim_{x\to x_2} f(x)=f(x_2)$ ובפרט $\lim_{x\to x_2^+} f(x)=f(x_2)$

ולפי הגדרת הגבול: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$

שלכל $x\in(0,1)$: $x_2<x<x_2+\delta \Rightarrow |f(x_2)-f(x)|<\varepsilon$.

בפרט עבור $\varepsilon=f(x_2)-1>0$ נקבל:

קיים $\delta>0$ שלכל $x_2<x<x_2+\delta \Rightarrow$ ~~[illegible]~~

$\Rightarrow |f(x_2)-f(x)|<f(x_2)-1$

$\Rightarrow f(x_2)-f(x)<f(x_2)-1$

$f(x)>1$,

מצאנו $x\in(0,1)$ כך ש $x_2<x$ ו- $f(x)>1$, כלומר $x\in A$

סתירה למקסימליות של x_2.

באותו אופן מקבלים מהנחה ש- x_1 מינימלי

ומהנתון ש $\lim_{x\to x_1^-} f(x)=f(x_1)$ סתירה.

8.14

מהנתון $f(0)>0$, ו- f רציפה מימין ב- 0.

לכן עבור $\varepsilon=\frac{f(0)}{2}$ קיים $0<\delta<1$, כך שלכל $0\le x<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(0)|<\varepsilon=\frac{f(0)}{2}$,

ולפיכך בקטע זה $f(x)>f(0)-\frac{f(0)}{2}=\frac{f(0)}{2}$.

לכן $\inf(f([0,\delta))\ge\frac{f(0)}{2}>0$.

מהנתון $\inf(f((\frac{\delta}{2},1])>0$.

$[0,1]=[0,\delta)\cup(\frac{\delta}{2},1]$, ולכן $\inf(f([0,1])=\min\{\underbrace{\inf(f([0,\delta))}_{>0},\underbrace{\inf(f((\frac{\delta}{2},1])}_{>0}\}>0$.

8.15

נתון כי $f(x_0) \neq 0$.

- נניח כי $f(x_0) > 0$.

f רציפה ב- x_0 ולכן (עבור $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$) קיימת סביבה של x_0, $N_\delta(x_0)$, כך שלכל x ב- $N_\delta(x_0)$ מתקיים

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}$$

$\Leftarrow$ לכל x ב- $N_\delta(x_0)$ מתקיים $0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}$ ולכן $f(x)f(x_0) > 0$ כנדרש.

- אם $f(x_0) < 0$, הרי שרציפות f ב- x_0 $\Leftarrow$ (עבור $\varepsilon = -\frac{f(x_0)}{2} > 0$) קיימת סביבה של x_0 , $N_\delta(x_0)$, כך שלכל x בסביבה זו, $|f(x) - f(x_0)| < -\frac{f(x_0)}{2}$ ולכן לכל x ב- $N_\delta(x_0)$, $\frac{3f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{f(x_0)}{2} < 0$

וגם במקרה זה מתקיים $f(x)f(x_0) > 0$ כנדרש.

8.16

הפונקציה $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ רציפה ומקיימת:
$f(x) = f(x^2)$ לכל $0 \le x \le 1$. הוכיחו ש $f(x)$ קבועה.

<u>פתרון</u>: נוכיח שלכל $x \in [0,1]$, $f(x) = f(0)$. יהי $0 < x \le 1$

<u>א</u> $0 < x < 1$: ~~[illegible]~~

נתבונן בסדרה: $a_n = x^{2^n}$

(I) $x^{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (כי $0 < x < 1$)

(II) $f(x^{2^n})$ היא סדרה קבועה
(נובע באינדוקציה מהנתון: $f(x^2) = f(x)$).

(III) $f(x^{2^n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(0)$

(נובע מכך ש $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ כי $f(x)$ רציפה ב $x=0$)

<u>מסקנה</u>: כל איברי הסדרה $f(x^{2^n})$ הם למעשה $f(0)$
ובפרט: $f(x) = f(0)$ מ.ש.ל.

<u>ב</u> $x = 1$:

$f(x)$ רציפה ב $x=1$, לכן $f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(0)$

8.17

נקבע $x \neq 0$ כלשהו ונגדיר סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ על ידי נוסחת הנסיגה:

$x_1 = x$, $x_{n+1} = \sqrt{|x_n|}$ לכל n, כלומר $x_{n+1} = |x|^{(2^{-n})}$.

$\lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$, לכן $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ לכל $x \neq 0$.

על פי רציפות של פונקציה $f(x)$ בנקודה 1 מקבלים ש $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(1)$.

לפי ההנחה $f(x_n) = f(x)$ לכל n ואז $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

קיבלנו ש $f(x) = f(1)$ לכל $x \neq 0$.

על פי רציפות של פונקציה בנקודה 0 מתקיים ש $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

אבל $f(x) = f(1)$ לכל $x \neq 0$, לכן $\lim_{x\to 0} f(x) = f(1)$, זאת אומרת $f(0) = f(1)$.

בכל מיקרה קיבלנו ש $f(x) = f(1)$, זאת אומרת $f(x)$ היא פונקציה קבועה.

8.18

נסמן $f(0) = C$ ונוכיח כי $\forall x \in (-\infty, \infty)$: $f(x) = C = const$.

נקבע x כלשהו. לפי הנתון באינדוקציה: $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right) = \dots = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$ לכל n טבעי.

$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{2^n} = 0$ לכל x, ולכן לפי רציפות של פונקציה $f(x)$ בנקודה $x = 0$

מקבלים ש $f(0) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$, כלומר $f(x) = f(0) = C$ לכל x.

8.19

__שאלה 1__. נתבונן בסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמוגדרת על ידי נוסחת הנסיגה הבאה: $x_1 = x$, $x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{2}$ לכל n.

נוכיח שלכל x מתקיים כי $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

ישנם 3 מיקרים. 1) אם $x = 1$ אז $x_n = 1$ לכל n.

2) אם $x > 1$ אז נוכיח באינדוקציה ש $x_n > 1$ ו- $x_n > x_{n+1}$ לכל n.

בסיס לאינדוקציה: $x_1 = x > 1 \quad \Leftarrow \quad 1 < x_2 = \frac{1+x}{2} < x = x_1$

מעבר: נניח ש $x_n > x_{n-1} > 1$. אז $1 < x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{2} < x_n$.

ובכן סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת וחסומה מלמטה ולכן קיים גבול סופי $\lim_{n\to\infty} x_n = C$.

גם $\lim_{n\to\infty} \frac{1 + x_n}{2} = C = \lim_{n\to\infty} x_{n+1}$, לכן $\frac{1+C}{2} = C$, כלומר $C = 1$.

3) אם $x < 1$ אז באופן דומה מקבלים שסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית עולה וחסומה מלמעלה וגם $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.

ניקח x כלשהו. הוכחנו ש $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ ולכן לפי רציפות של פונקציה $f(x)$ בנקודה 1 מתקיים ש

$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(1)$. לפי ההנחה $f(x_n) = f(x)$ לכל n ואז $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

הגבול של סדרה הוא יחיד.

קיבלנו ש $f(x) = f(1)$ לכל x, כלומר פונקציה $f(x)$ היא פונקציה קבועה.

8.20

מכיוון שכל רציונלי q הוא מחזור של f(x) אז לכל רציונלי q מתקיים: f(0)=f(q)
לכל מספר אי רציונלי r קיימת סדרת רציונלים q_n שמתכנסת ל- r ומרציפות הפונקציה f(x) לפי היינה,
הסדרה $f(q_n)$ מתכנסת ל- f(r).
אבל הסדרה $f(q_n)$ היא סדרה קבועה שכל איבריה הם זהותית f(0), ולכן גם f(r)=f(0).

8.21

א) נוכיח כי בנקודה 1 הפונקציה רציפה. ניקח סדרה $x_n \to 1$;
כל תת-סדרה שלה x_{n_k} שואפת גם ל-1. מכאן $f(x_n) \to 1$, כי כל תת-סדרה שלה מורכבת
ממספרים או ש- $x_{n_k} \to 1$, או ש- $\frac{1}{x_{n_k}} \to 1$. זאת אומרת $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$
ו- $f(x)$ רציפה בנקודה 1. מכיוון שהפונקציה אי-זוגית, היא רציפה גם בנקודה -1.
קל לראות שאין נקודות רציפות אחרות. משל.
הערה: מהגרף רואים את כל זה מייד.
ב) ברור מאליו שאם $x_1 \neq x_2$, אז $f(x_1) \neq f(x_2)$, כלומר כל ערך הפונקציה מקבלת רק פעם אחת.
לכן היא הפיכה.

8.22

<u>פתרון:</u> ראשית, $f(0) = f(0+0) = f(0)\cdot f(0) \Leftarrow f(0) = \left(f(0)\right)^2$ ולכן $f(0)=0$ או ש- $f(0)=1$.

- אם $f(0)=0$ אז $f(x)\equiv 0$, כי לכל x, מתקיים: $f(x) = f(x+0) = f(x)\cdot f(0) = 0$.

נניח, לכן, ש- $f(0)=1$ ונשים לב שזה גורר ש $f(x)$ היא פונקציה חיובית כי

א. $f(x)\neq 0$ לכל x כי אם $f(x)=0$, אז $f(0) = f(x-x) = f(x)\cdot f(-x) = 0$ (ומניחים ש- $f(0)=1$).

ב. וזה גורר ש $0 < f(x)$ לכל x כי $f(x) = f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2})^2 > 0$

נוכיח כעת שהפונקציה היא מהצורה $f(x) = e^{a\cdot x}$ (עבור a מתאים), בשלושה שלבים:

<u>שלב 1:</u> נראה ש- $f(x)$ רציפה בכל $\mathbb{R}$: יהי $x_0\in\mathbb{R}$ כלשהו, אז:

$$\left|f(x_0+h) - f(x_0)\right| = \left|f(x_0)\cdot f(h) - f(x_0)\right| = \left|f(x_0)\right|\cdot\left|f(h) - \overbrace{f(0)}^{1}\right| \tag{3}$$

כדי להוכיח רציפות ב- x_0, צריך להראות שבהינתן $0<\varepsilon$, קיימת $0<\delta$ כך ש-

$$\left|f(x_0+h) - f(x_0)\right| < \varepsilon \quad\Leftarrow\quad |h| < \delta$$

ובאמת, $f(x)$ רציפה באפס ו- $0<f(x_0)$, ולכן עבור $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{f(x_0)} > 0$ קיימת $0<\delta$ כך ש-

$$|f(h) - f(0)| < \varepsilon' \quad\Leftarrow\quad |h| < \delta$$

ולכן לפי 3, לכל $|h|<\delta$ מתקיים:

$$\left|f(x_0+h) - f(x_0)\right| = \left|f(x_0)\right|\cdot\left|f(h) - f(0)\right| < \left|f(x_0)\right|\cdot\varepsilon' = \varepsilon \quad \blacksquare$$

שלב 2 יהי $c = f(1) > 0$, נוכיח שלכל x רציונלי מתקיים: $f(x) = c^x$.

- אם $x = n$ טבעי אז $f(n) = f(\overbrace{1+1+\ldots+1}^{n \text{ פעמים}}) = \overbrace{f(1)\cdot f(1)\cdots f(1)}^{n \text{ פעמים}} = c^n$
- אם $x = \frac{1}{n}$ (n טבעי), אז: $f\left(\frac{1}{n}\right)^n = f\left(\overbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}^{n \text{ פעמים}}\right) = c = f(1)$ ולכן $f\left(\frac{1}{n}\right) = c^{\frac{1}{n}}$
- ועבור $x = \frac{m}{n}$ (m, n טבעיים), נקבל: $f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\overbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}^{m \text{ פעמים}}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right)^m = \left(c^{\frac{1}{n}}\right)^m = c^{\frac{m}{n}}$
- בנוסף, $1 = f(0) = f(x-x) = f(x)\cdot f(-x)$ ולכן $f(-x) = f(x)^{-1}$ ומכאן ש- $f\left(-\frac{m}{n}\right) = c^{-\frac{m}{n}}$
- ולבסוף, מכיוון ש- $f(0) = 1 = c^0$, אז לכל x רציונלי מתקיים: $f(x) = c^x$.

שלב 3 נוכיח שלכל x ממשי $f(x) = c^x$: יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ כלשהו אז קיימת סדרת רציונליים $x_n \to x_0$.
מהרציפות של $f(x)$ ב x_0 נובע ש $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ ומכיוון שה x_n-ים רציונליים אז $f(x_n) = c^{x_n}$ ולכן:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} c^{x_n} = c^{x_0}$$