yuvalf@ariel.ac.il

11.3.13E 17:00-16:00

20% לתרגה

80% מבחן

יהשן רוטיב

מסקנה מהמשוואה של אופרטור... ניתן לקבוע... המשוואה הבאה:

$$2x_1 - x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 9$$
$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 5$$

אלו משוואות עם 3 נעלמים לא חייב להיות פתרון

הנעלמים: x_1, x_2, x_3

פתרון: $(x_1, x_2, x_3) = (c_1, c_2, c_3)$

הערה: בשדה של המספרים Q.

$$\pi x - 3y = 2$$
$$5x - ex = 7$$

מסקנה אין לזה פתרון בתוכנו

המקדמים נמצאים בשדה R

באופן כללי: מה נקרא מערכת משוואות של n נעלמים:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m$$

זהו של m משוואות ב-n נעלמים

$x_1, \ldots, x_n$

יהי F שדה ($= Q, R, C, F_g$) $= \text{Field}$

$b_i \in F$, $a_{ij} \in F$

דוגמא:

שלב 1

$\ominus \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

שלב 2

$\ominus \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ -7x_2 - 7x_3 = 0 \end{cases}$

$R_1 - 2R_2$ ① החסרה בין 2 משוואות

② החלפנו סדר המשוואות בין המשוואה השניה לראשונה

אין לזה שינוי בפתרונות

שלב 3

$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

חילק ב-7

החלפנו פעולה

שלב 4

$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

$R_1 - 3R_2$

⑥ החלפנו פעולה

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$$

דף 5

בכל שלב: נרשום מחדש...מערכת...

$R_i \longleftarrow R_i \pm cR_j$ $(i \neq j)$ — מוסיף לשורה i שורה j כפול סקלר

$R_i \longleftarrow cR_i$ $(c \neq 0)$

$R_j \longleftrightarrow R_i$

פעולות אלמנטריות בשורות:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots a_{mn} & b_m \end{array}$$

m שורות

n עמודות

הסדר חשוב! האיבר הכללי a_{ij} נמצא בשורה i, בעמודה j תמיד.

דוגמא:

$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 0 \\ 9 & -\pi & -2 \end{pmatrix}$ $\quad a_{21} = 7$ $\quad a_{13} = 5$

$A = (a_{ij})$ מטריצה בגודל $m \times n$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$

מטריצה בגודל $m \times 1$ $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

מטריצה בגודל $m \times 1$ או $1 \times m$ (וקטור עמודה/שורה).

$AX = B$ הקשר בין מטריצה לוקטור.

מטריצות שקולות שורה:

דוגמא:

$\begin{array}{ccccc} 0&0&1&7&9 \\ 0&1&3&2&9 \\ 3&5&0&0&1 \end{array}$

אם יש לי מטריצה של מקדמים, בצורת שורה שלה.

כשאני מחליף שורות בצורת שקולה, יש לי אפשר אלף מ־א-ם.

כאשר בצורה כללית (כללית) יש בה אפשר אלף מ־א-ם כי זה שקול.

$\begin{array}{ccccc} 3&5&0&0&1 \\ 0&0&1&7&9 \\ 0&1&3&2&9 \end{array}$

בצורה הדרגתית. ניתן לומר כי-ס בצורה הדרגתית הכי שלילית בה יש נקודת עילון ני-ס.

⊛ רק צורה אחת ניתן לסיים ונ... לכל מטריצה.

וו... $R_2 - CR_1$ כך שהמטריצה 0 ... : ... $S \neq 0$ ..... שורת מילון

3 ....
0 ....
1 ....

$$
\begin{pmatrix} S \\ 0 & 07 \\ 0 & 0.0 & 8 \\ 0 & 0.0.0 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} S \\ 0 & 07 \\ 0 & 0.0.0 \\ 0 & 0.0.8 \end{pmatrix}
\xLeftarrow{R_3 + \frac{3}{7}R_2}
\begin{pmatrix} S \\ 0 & 07 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0.0 \end{pmatrix}
\Longleftarrow \quad : \text{שורת מילון} \; S \neq 0 .....
\begin{pmatrix} 0 & 0.0 \\ 0 & - \\ 0 & 07 \end{pmatrix}
$$

צורה ... כ... $R_2 - CR_1$ כך שהמטריצה 0 ... סדר השורות ... גם ...

צורה המדורגת ... מטריצה ה... גם מטריצה נתנ... מ... המ... בצורה מ...

מ... הוא המספר הראשון $\neq 0$ בשורה בצורה.

נ... ... רק 0

כאשר ... כ... צורה מ... נ... ... כ... כ... צורה במ... (כל המ... = 1

ה...: (... במ... ... את המ... ...

$$
\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}
\quad \xLeftarrow{R_1 + R_2} \quad
\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}
$$

... -4 ...
את ... ...
... את ...
... -6 ...

צורה ... ... הא... (... צורה מדורגת ... Gauss-Jordon.

... הקבצים הו... כל צורה מ... ...

$$x_1 + 5x_4 = 1$$

$$x_3 + x_5 = 2$$

$$x_6 = 3$$

כותב ⟵ (A|b)

$$
\begin{array}{cccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\
\textcircled{1} & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 3
\end{array}
$$

$$x_1 = 1 - 5x_4$$

$$x_3 = 2 - x_5$$

$$x_6 = 3$$

x_2, x_4, x_5 חופשיים.

מסקנה: המכפלים k $G{-}J$ אם ישנה מערכת יש להם תשובה: אותה צורת מדורגת קנונית.

$AX = B \neq 0$ נקראת כל ההשוואות

$AX = 0$ נקראת ההומוגנית

$$\text{הוכחה:} \begin{cases} a_1 x_1 + \ldots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_1(cx_1) + \ldots + a_{1n}(cx_n) = 0 \end{cases}$$

נקראת מערכת תלויה להכרת ההשוואות $AX = B$

$AX = 0$ נקראת מערכת ההשוואות

פונקציה לינארית (הדרגה 1) אם ההשוואות $f(cx_1, \ldots, cx_n) = cf(cx_1, \ldots, cx_n)$

דוגמא: $f(x,y) = 0$ $f(x,y) = x - 3y + 5$ לא לינארית

$g(x,y) = 0$ $g(x,y) = x - 3y$ לינארית

$AX = B$ $(A|B) \longrightarrow$ צורה מדורגת קנונית

אם צורת המדורגת יש בה שורה

$b \neq 0$ $0\ 0\ 0\ 0$ אז אין לה פתרונות.

למערכת ההומוגנית תמיד יש פתרון, הפתרון הטריוויאלי 0, $x_i = 0$.

דוגמא: $3x_1 - 5x_2 + 9x_3 = 0$

$$51x_2 - 32x_3 = 0$$

$$13x_1 + 33x_3 = 0$$

גם למערכת ההומוגנית ולהן יש פתרון טריוויאלי.

$$X_1 - 2X_2 + X_3 = 1$$

$$2X_1 + X_2 + X_3 = 2$$

$$5X_2 - X_3 = 3$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 3 \end{array} \qquad R_2 - 2R_1$$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \qquad R_3 - R_2$$

אין פתרון.

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \end{array}$$

$$X_1 - 2X_2 + X_3 = 1 \qquad .2$$

$$2X_1 + X_2 + X_3 = 2$$

$$5X_2 - X_3 = 0$$

$$\underset{\text{מובילים}}{\overset{\downarrow\quad\downarrow}{\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & 0 \end{array}}} \overset{\text{חופשי}}{}$$

$$X_1 = 1 - \frac{5}{3}X_3$$

$$X_2 = \frac{1}{5}X_3$$

$$(X_1, X_2, X_3) = \left(1 - \frac{3}{5}X_3, \frac{1}{5}X_3, X_3\right)$$