ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים - המשך

תרגילים מספר של בועז צבאן (עמוד 80)

תרגיל 1.3: יש להוכיח, שלכל מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ עם דרגה נמוכה $rank(A) < n$ יש ערך עצמי אפס.

הוכחה: נגדיר העתקה $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ על ידי מטריצה $T(v) = Av$.
כיוון ש־$rank(A) < n$, למערכת משוואות הומוגנית $Av = 0$ עבור $v \in \mathbb{F}^n$ יש פתרון לא טריוויאלי, לכן הגרעין $kerT \neq \{0\}$, כך ש המימד
$0 < m = dim(kerT) = n - rankA$. יהי $u_1, ..., u_m$ וקטורי בסיס של הגרעין.
ניתן לכתוב $kerT = \left\{a_1u_1 + ... + a_mu_m | a_{\overline{1,m}} \in \mathbb{F}\right\}$.
כיוון ש־ $u_1, ..., u_m$ הם ווקטורי בסיס, אין ביניהם וקטור אפס וברור ש־$0 \neq u_1 \in kerT$. אבל אז נקבל ש־ $Au_1 = 0u_1 = 0$ כלומר 0 הוא ערך עצמי של A.

תרגיל 1.5: תהא $T : V \to V$ העתקה לינארית. הוכח שהתענות הבאות שקולות.
(א) λ ערך עצמי של T.
(ב) ההעתקה $T - \lambda I$ אינה חד־חד ערכית.
(ג) ההעתקה $T - \lambda I$ אינה על.
(ד) $det(T - \lambda I) = 0$.

הוכחה: נוכיח (א) $\Leftarrow$ (ב). נגדיר העתקה $S : V \to V$ כך ש־ $S(v) = (T - \lambda I)v$.
λ ערך עצמי של T וכיוון ש־ $T(v) = \lambda v$, למערכת הומוגנית $(T - \lambda I)v = 0$ יש פתרון לא טריוויאלי ולכן $0 < dim(kerS)$, שזה אומר ש־S אינה חח"ע. נוכיח (ב) $\Leftarrow$ (ג).
נסמן $m = dim(kerS)$. לפי משפט המימדים $dimImS = n - dim(kerS) = n - m$.
אבל אז $dimImS < dimV$, כלומר T לא על. נוכיח (ג) $\Leftarrow$ (ד). כיוון שהעתקה S אינה על ו־$dimImS = rank(T - \lambda I) < n$ מתקיים $det\,(T - \lambda I) = 0$.
נוכיח (ד) $\Leftarrow$ (א). נתון $det\,(T - \lambda I) = 0$. זה אומר שלמערכת משוואות $(T - \lambda I)\,v = 0$ יש פתרון לא טריוויאלי עבור $v \in V$. לכן $Tv = \lambda v$
ולפי הגדרה λ הוא ערך עצמי של T.

תרגיל 1.7: הוכח שלמטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ אין ערכים עצמיים.

הוכחה. נבנה פולינום אופייני $P_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$:

$$P_A(\lambda) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

כיוון ש־ $\triangle = (-2)^2 - 4 \cdot 2 = -4 < 0$, למשוואה $P_A(\lambda) = 0$ אין שורשים ממשיים. $\lambda \not\in \mathbb{R}$ לכן למטריצה A אין ערכים עצמיים.

תרגיל 1.8: תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, ותהא ρ פעולת שורה/עמודה אלמנטרית.
הוכח או הפרך: (א) ל־ A ול־ $\rho(A)$ יש אותם ערכים עצמיים.
(ב) ל־A ול־ $\rho(A)$ יש אותם מרחבים עצמיים.
רמז: יש לבדוק קודם מקרה פרטי כאשר $A \in \mathbb{F}^{2\times 2}$.

פתרון: (א) תשובה לא. נבחר $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{2\times 2}$ ו־ $\rho = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ מטריצה המבצעת פעולה אלמנטרית = החלפת בין השורות של מטריצה A כלומר $\rho(A) = \begin{bmatrix} 0 & d \\ a & 0 \end{bmatrix}$. הפולינום האופייני של המטריצה A יהיה $P_A(\lambda) = (a-\lambda)(d-\lambda)$.
מצד שני הפולינום האופייני של המטריצה $\rho(A)$ יהיה $P_{\rho(A)}(\lambda) = det \begin{bmatrix} -\lambda & d \\ a & -\lambda \end{bmatrix}$, כלומר $P_{\rho(A)}(\lambda) = \lambda^2 - ad$. כיוון ש־ $P_{\rho(A)}(\lambda) \neq P_A(\lambda)$ השורשים של הפולינומים הנ"ל שונים, לכן גם שונים הערכים עצמיים של המטריצות A ו־$\rho(A)$.

(ב) תשובה לא. נתבונן בסעיף (א) כאשר $a = d = 1$ כלומר $A = I$ מטריצה היחידה. נקבל $P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2$, כך ש־ $V_1 = ker(A - (1)\cdot I) = ker(0) = \mathbb{R}^2$.
מצד שני $P_{\rho(A)}(\lambda) = \lambda^2 - 1$. $P_{\rho(A)}(1) = 0$, נציב $\lambda = 1$ במטריצה $\rho(I) - \lambda I$ ונמצא פתרון לא טריוויאלי של המערכת משוואות הומוגנית $(\rho(I) - I)\, v = 0$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 + R_1]{} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot t, \quad t \in \mathbb{R}$$

כלומר המרחב עצמי U_1 המתאים לערך עצמי 1 של המטריצה $\rho(A)$ יהיה

$$U_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} t : t \in \mathbb{R} \right\}$$

כיוון ש־ $dimV_1 = dim\mathbb{R}^2 = 2$ ו־ $dimU_1 = 1$ נקבל $V_1 \neq U_1$.

<u>תרגיל 1.16:</u> תהא $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת לפי $T(x, y) = (y, x)$.
יש למצוא ספקטרום של T.

פתרון: המטריצה המייצגת של ההעתקה היא $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ כך ש $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. נמצא ערכים עצמיים של A:

$$0 = det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1$$

לכן $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$ הם ערכים עצמיים והספקטרים $\sigma(T) = \{-1, 1\}$.

<u>תרגיל 1.18:</u> (א) $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: $\sigma(AB) = \sigma(BA)$
[רמז: לתפל במקרה כאשר $Av = 0$ ולהשתמש בשיוויון $A(BA)v = (AB)Av$].
(ב) תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. הוכח: $\sigma(A) = \sigma(A^t)$.

פתרון: (א) הספקטרום של המטריצה AB זה כול השורשים של הפולינום אופייני $det(AB - \lambda I) = 0$, אם ורק אם למערכת משוואות הומוגנית $(AB - \lambda I)v = 0$

יש פתרון לא טריוויאלי $\mathbb{F}^n \ni v \neq 0$, כך ש $(AB)\,v = \lambda v$. מצד שני הספקטרום של המטריצה BA זה כול השורשים של הפולינום אופייני $det(BA - \lambda I) = 0$, אם ורק אם למערכת משוואות הומוגנית $(BA - \lambda I)v = 0$ יש פתרון לא טריוויאלי $\mathbb{F}^n \ni v \neq 0$ כך ש־ $(BA)\,v = \lambda v$.

נתבונן במקרה כאשר $Av \neq 0$ עבור $\mathbb{F}^n \ni v \neq 0$ (אחרת, אם $Av = 0$ לכל $\mathbb{F}^n \ni v$, מתקיים $AB = BA = A = 0$, כאשר $P_0(\lambda) = (\lambda - 1)^n$ פולינום אופייני של $\mathbb{F}^{n\times n} \ni 0$, $\lambda = 1$ ערך עצמי היחיד (ראה 1.8־ב) ונקבל ש־ $\sigma(AB) = \sigma(BA) = \{1\}$.)

נציב $u = Av$ במשוואה $(AB)\,u = \lambda u$, נקבל $(AB)\,(Av) = \lambda\,(Av)$,
כלומר $Av \neq 0$ הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי λ של המטריצה AB.
מצד שני מהמשוואה $(BA)\,u = \lambda u$ נקבל $(BA)\,(Av) = \lambda\,(Av)$,
כלומר $Av \neq 0$ הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי λ של המטריצה BA.
קיבלנו שלמטריצות AB ו־ BA יש אותם ערכים עצמיים, כלומר $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

(ב) מהתכונה של דטרמיננט, נובע

$$P_A(\lambda) = det(A - \lambda I) = det(A - \lambda I)^t = P_{A^t}(\lambda)$$

כלומר הפולינומים שווים. כיוון שפולינומים שווים, יש להם אותם שורשים, והקבוצות $\sigma(A) = \sigma(A^t)$.

<u>תרגיל 2.6:</u> תהא $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$. חשב A^n בצורה מפורשת לכל $\mathbb{N} \ni n$.

<u>תרגיל 2.7:</u> תהא $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. (א) לכסן את המטריצה A.

(ב) חשב בעזרת (א) את המטריצה $\frac{1}{2^{21}}A^{21}$.

<u>תרגיל 2.10:</u> תהא $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. מצא את כל הערכים של a שעבורם המטריצה A לכסינה.