דוגמאות למבחן
אינפי_2.

מבחן מורכב עם 2 חלקים
חלק א' לפתור 2 שאלות מתוך 3.

כל חלק 50 נקודות

אפשר להשתמש מחשבון ודפי-עזר מצורף.
זמן המבחן 180 דקות = 3 שעות

חלק א'

1) לנסח ולהוכיח השוואה I - כושון להתכנסות טורי-מספרים חיוביים

2) כל פונקציה שחסומה ב-[a,b] ורציפה במקוטעין היא אינטגרבילית

3) לנסח ולהוכיח מבחן I השוואה להתכנסות אינטגרל לא אמיתי

חלק ב'

פתור 3 מתוך 4.

1) לפי: $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$
להעריך $\int_{\pi/4}^{\pi/2}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$

2) לחשב אינטגרל לא אמיתי
(א) $\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$
חשב אינטגרל
(ב) $\int \frac{(x^2-x+2)dx}{x^4-5x^2+4}$
לבחור או (א) או (ב)

3) לפי נוסחת מציאת רדיוס התכנסות של טור חזקות (Cauchy-Hadamard)
למצוא תחום התכנסות של
$$\frac{x}{10}+\frac{x^2}{200}+\frac{x^3}{3000}+\dots+\frac{x^n}{n\cdot 10^n}+\dots$$
ולבדוק בקצוות של תחום.

4) למצוא פיתוח מקלורן של $f(x)=\frac{x}{1+x-2x^2}$

בהצלחה!

~~פתרונאשאלו~~ פתרונות של חלק ב'

מבחן לדוגמה בקורס אינפ' 2, תש"פ, סמ' קיץ

חלק ב' (פתרו 3 מתוך 4)

1) לפי אי שוויון $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$

להעריך את האינטגרל $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$

$f(x)=\sqrt{1+\cos^2 x}$

פונקציה רציפה ואינטגרבילית על הקטע $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ $\quad b=\frac{\pi}{2}\quad a=\frac{\pi}{4}$

נמצא את המקסימום M ואת המינימום m המוחלטים בקטע הנתון.

$$f'(x)=\frac{-\cancel{2}\cos x\cdot\sin x}{\cancel{2}\sqrt{1+\cos^2 x}}$$

$f'(x)=0$

$\cos x\cdot\sin x=0$

$\frac{1}{2}\sin 2x=0$

$2x=\pi k \qquad k\in\mathbb{Z}$

$x=\frac{\pi k}{2} \qquad x\ge 0 \quad x=0,\ x=\frac{\pi}{2},\dots$

	$\frac{\pi}{4}$	$\le x \le$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0
$f(x)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	$\searrow$	1
	$M=\max$ מוחלט בקטע		$m=\min$ מוחלט בקטע

$$\frac{\pi}{4} \le \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx \le \sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}\pi}{8}$$

2) לבחור באחד משני הסעיפים א' או ב':

א) חשבו את האינטגרל הלא אמיתי:

$$\int_1^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{a\to1^+}\int_a^2\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}}=$$

$x=1$ נקודת אי הגדרה

$$\lim_{a\to1^+}\int_{a^2-1}^{3}\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\lim_{a\to1^+}\sqrt{t}\Big|_{a^2-1}^{3}=$$

$$\lim_{a\to1^+}\Big[\sqrt{3}-\underbrace{\sqrt{a^2-1}}_{a\to1,\ \to 0}\Big]=\underline{\underline{\sqrt{3}}}$$

הצבה

$t=x^2-1$

$dt=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{dt}{2x}$

$x=a \quad t=a^2-1$

$x=2 \quad t=3$

2/3 (ב) חשבו את האינטגרל הלא מסויים:

$$\int \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4}\,dx =$$

$x^2=t \quad x^4-5x^2+4=t^2-5t+4=(t-1)(t-4)$
$=(x^2-1)(x^2-4)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$

$$\frac{x^2-x+2}{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}=\frac{\overset{(x+1)(x^2-4)}{A}}{x-1}+\frac{\overset{(x-1)(x^2-4)}{B}}{x+1}+\frac{\overset{(x+2)(x^2-1)}{C}}{x-2}+\frac{\overset{(x-2)(x^2-1)}{D}}{x+2}$$

$$x^2-x+2=A(x+1)(x^2-4)+B(x-1)(x^2-4)+C(x+2)(x^2-1)+D(x-2)(x^2-1)$$

$x=-1$	$B(-2)(-3)=4$	$B=\frac{2}{3}$
$x=1$	$A\cdot 2(-3)=2$	$A=-\frac{1}{3}$
$x=2$	$C\cdot 4\cdot 3=4$	$C=\frac{1}{3}$
$x=-2$	$D\cdot(-4)\cdot 3=8$	$D=-\frac{2}{3}$

$$\int\left(\frac{-1/3}{x-1}+\frac{2/3}{x+1}+\frac{1/3}{x-2}-\frac{2/3}{x+2}\right)dx=$$

$$\frac{1}{3}\left(-\ln|x-1|+2\ln|x+1|+\ln|x-2|-2\ln|x+2|\right)+C$$

$$C=\frac{1}{3}\ln C_1 \qquad \underline{\underline{C_1>0}}$$

$$=\frac{1}{3}\ln\frac{C_1|x-2|(x+1)^2}{|x-1|(x+2)^2}=$$

$$\ln\sqrt[3]{\frac{C_1|x-2|(x+1)^2}{|x-1|(x+2)^2}}$$

(3) לפי נוסחת מציאת רדיוס ההתכנסות של טור חזקות (נוסחת Cauchy Hadamard) למצוא תחום התכנסות של הטור

$$\frac{x}{10}+\frac{x^2}{200}+\frac{x^3}{3000}+\dots+\frac{x^n}{n\cdot 10^n}+\dots$$

ולחקור התכנסות בקצוות התחום.

$$\frac{x}{10}+\frac{x^2}{200}+\frac{x^3}{3000}+\dots+\frac{x^n}{n\cdot 10^n}+\dots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n \quad (a_n\ge 0 \text{ לכל } n\in\mathbb{N})$$

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} \qquad x\in(-r,r)$$

כאשר $(-r,r)$ זה תחום ההתכנסות בהחלט

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 10^{n+1}}{n\cdot 10^n}=10\lim_{n\to\infty}\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)}_{\to 1}=10$$

נבדוק התכנסות בקצוות התחום!

$\boxed{x=-10}$

מציבים בטור ומקבלים:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-10)^n}{n\cdot 10^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot \cancel{10^n}}{n\cdot \cancel{10^n}}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$$

התקבל טור עם סימנים מתחלפים

נבדוק שתנאי מבחן לייבניץ מתקיימים:

(1) $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ (2) $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}=a_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$

לכן לפי משפט לייבניץ הטור הנתון מתכנס בתנאי עבור $x=-10$

$\boxed{x=10}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^n}{n\cdot 10^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ התקבל טור הרמוני שהוא טור מתבדר

מכאן, תחום ההתכנסות של הטור הוא $[-10,10)$ $(-10\le x<10)$

4 מצאו פיתוח לטור מקלורן:

3/3

$$f(x) = \frac{x}{1+x-2x^2} = -\frac{x}{2x^2-x-1} = -x\cdot\frac{1}{2(x-1)(x+\frac{1}{2})} =$$

$$= -\frac{x}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\left(\frac{1}{\underbrace{x-1}_{-(1-x)}} - \frac{1}{x+\frac{1}{2}}\right) = \frac{x}{3}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{\frac{1}{2}(1+2x)}\right)$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+\frac{1}{2})} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+\frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \frac{1}{2}A - B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}A = 1 \\ B = -A \end{cases} \qquad A = \frac{2}{3} \quad B = -\frac{2}{3}$$

$$= \frac{x}{3}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^n\right) = \frac{x}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n 2^{n+1}\right)x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^n 2^{n+1}}{3}\cdot x^{n+1}$$

ת.פ.

$$\begin{cases} -1<x<1 \\ -1<2x<1 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}}$$ תחום ההתכנסות של הטור