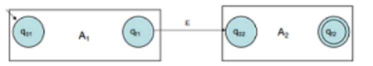
<u>הוכח או הפרך: השפות הלא רגולריות סגורות לפעולות חיתוך.</u>

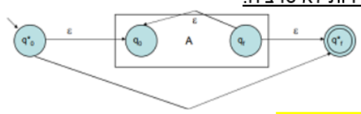
תשובה: נגרום לחיתוך של השפות להיות קבוצה ריקה או רק אפסילון.
דוגמא נגדית: $L_1 = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$, $L_2 = \{c^n d^n | n \in \mathbb{N}\}$ השפות אינן רגולריות, אבל $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ והשפה

הוכחה $(L^*)^* = L^*$
<u>עבור</u> $L^* \subseteq (L^*)^*$ נובע מההגדרה $(L^*)^* = \cup_{i\in\mathbb{N}}(L^*)^i$ ולכן לפי הגדרה איחוד נקבל כי $L^* \subseteq (L^*)^*$ ($A \subseteq A \cup B$)
<u>כיוון שני</u> $(L^*)^* \subseteq L^*$. תיהי $w \in (L^*)^*$, לפי הגדרת איטרציה קיים $i \in \mathbb{N}$ כך ש $w \in (L^*)^i$ ולכן לפי הגדרת חזקה מתקיים: $w = u_1, u_2 \dots u_i$: $u_j : j \in [1, i], u_j \in L^*$, בנוסף כל אחת מהמילים u_j הוא מהצורה $t_{j_1}, t_{j_2}, \dots t_{j_k}$ היות ולכל $u_j \in L^*$ קיים k טבעי כך ש $u_j \in L^k$ ולכן מתקיים כי
$$w = t_{1_1}, t_{1_2}, \dots t_{1_{k_1}} t_{2_1} \dots t_{2_{k_2}} \dots t_{i_1} \dots t_{i_{k_i}} \in L^{k_1 + \cdots k_i} \subseteq L^*$$

<u>סגירות לשרשור :</u>



<u>סגירות לאיטרציה:</u>



<u>למה הניפוח:</u>
תיהי L שפה רגולרית, אזי <u>קיים</u> $n \in \mathbb{N}$ כך <u>שלכל</u> מילה Z ב L שאורכה לפחות n <u>קיים</u> פירוק מהצורה $Z = uvw$ כאשר:
1. $|uv| \le n$
2. $1 \le |v|$
3. <u>לכל</u> $i \ge 0$ טבעי מתיים $uv^iw \in L$

השפה $L = \{a\}^* \cup \{b^i a^{k^2} | j, k \in \mathbb{N}\}$
נראה בעבור L מתקיימת למת הניפוח עם הקבוע $n = 1$
- עבור כל $z \in L$ עם $|z| \ge 1$, נגדיר פירוק uvw כך ש $|v| = 1$ $u = \varepsilon$,
  - אם $z \in \{a\}^*$ אז לכל i גם $z_i = uv^iw \in \{a\}^*$
  - אם z מהצורה $b^i_k a^{k^2}$ כאשר $j > 0$ אז, לכל i גם z_i מצורה.

השפה $L = \{a\}^* \cup \{b^i a^{k^2} | j, k \in \mathbb{N}\}$ <u>אינה רגולרית</u>
- נניח בשלילה כי L רגולרית, אז מסגירות לחיתוך נקבל:
- $L' = \{b^j a^{k^2} | j, k \in \mathbb{N}^+\} = L \setminus \{a\}^* = L \cap \overline{\{a\}^*}$ רגולרית
- כעת מסגירות להיפוך נקבל כי גם $(L')^R = \{a^{k^2} b^j | j, k \in \mathbb{N}^+\}$ רגולרית
- וזו סתירה כי הרי בדוגמה ראינו כי השפה $L = \{a^{k^2} | k \in \mathbb{N}\}$ אינה רגולרית (ניתן בקלות לכתוב אותה כמו שעשינו הוכחה).

<u>הוכחה שהינה רגולרית:</u>

<u>$L = \{a^n b^m c^k d^l | 1 < n < 3,\ m = 2n,\ k \bmod 3 = 1,\ l \bmod 2 = 0\}$</u>
פתרון ע"י ביטוי רגולרי: $L = a^2 b^4 c((c^3)^*)((d^2)^*)$

<u>$L = \{a^q b^p | p, q \text{ are prime, and } p + q < 1000\}$</u>
<u>הוכחה שהנה רגולרית:</u>
השפה היא כמות ראשונים של a-ים , ולאחריה כמות ראשונית של b -ים , כך שסכום הכמויות אינו מעל 1000. לכן, השפה סופית, ולכן רגולרית. נבנה ביטוי רגולרי המכריע את השפה:
$$L = a^2b^2 + a^2b^3 + a^2b^5 + \dots + a^2b^{997} + a^3a^2 + a^3b^3 + \dots + a^3a^{991} + \dots + a^{991}b^2 + a^{991}b^3 + a^{991}b^5 + a^{991}b^7$$

<u>$L = \{a^n b^m | n \text{ divides } m, \text{and } m \text{ divides some } 0 \le i \le 100\}$</u>
כדי ש n יחלק את m , נדרוש $n \le m$. התנאי $m \text{ divides some } 0 \le i \le 100$ אומר ש $m \le 100$, ולכן גם $n \le m$. קיבלנו שפה סופית ולכן רגולרית . נבנה לה ביטוי רגולרי :
$$L = a(b)^{1\dots100} + a^2b^{2i(1\le i\le50)} + a^3b^{3i(1\le i\le33)} + \dots + a^{50}b^{50} + a^{50}b^{100} + a^ib^{i(51\le i\le100)}$$
היות ובנינו אוטומט רגולרי, השפה רגולרית.

$L(A)\Delta L(B)$. עליך להגדיר את האוטומט
נגדיר $C = (\Sigma, Q_A \times Q_B, (q_{0A}, q_{0B})F, \delta)$ שבו :
$F = \{(q,p) | q \in F_A \text{ and } p \notin F_B\} \cup \{(q,p) | q \notin F_A \text{ and } p \in F_B\}$ וכן,
לכל $q \in Q_A$, לכל $p \in Q_B$ ולכל $\sigma \in \Sigma$: $\delta((q,p),\sigma) = (\delta_A(q,\sigma), \delta_B(p,\sigma))$

1. בהינתן אוטומט סופי דטרמיניסטי $A = (\{a,b,c\}, Q, q_0, F, \delta)$ נבנה אוטומט סופי (לא דטרמיניסטי), B, המקבל את L, $B = (\{a,b\}, Q, q_0, F, \mu)$, שפונקציית המעברים שלו מוגדרת כך: לכל $\sigma \in \{a,b\}$ ולכל $q \in Q$: $\mu(q,\sigma) = \delta(q,\sigma)$
לכל $q \in Q$: $\mu(q,\varepsilon) = \delta(q,c)$
2. נבנה את האוטומט הסופי הדטרמיניסטי C השקול ל-B
3. כבמשפט 4.9, נעבור על כל המילים מעל {a,b} שאורכן בין n ל- 2n-1 (עבור n = מספר מצבי C), ואם C יקבל אחת מהן נחליט שהשפה L אינסופית, אחרת נחליט שהיא סופית.

<u>$L = \{a^n b^m c^p | \exists g \in N \text{ so that } p = g^2 \text{ and } p \le 100, \text{and } n = m (\bmod p)\}$</u>
במילים, זוהי שפת כל המילים מהצורה לעיל שבה n-m מתחלק ב p וגם p הוא ריבוע שלם שאינו גדול מ100.
המשתנה p יכול לקבל את כל הערכים הריבועיים עד 100, כלומר:
P={1,4,9,16,25,36,49,64,81,100}. המשתנים n,m שקולים מודולו p, ולכן ניתן להכריע אותם.
משום כך, נוכל לבנות ביטוי רגולרי עבור כל p כזה:
P=1: L= (a)*(b)*c
P=4: $L=((a)^4)^*((b)^4)^*c^4 + ((a)^4)^*a((b)^4)^*bc^4 + ((a)^4)^*a^2((b)^4)^*b^2c^4 + ((a)^4)^*a^3((b)^4)^*b^3c^4$
…
וכן הלאה. לכל p נוכל לבנות ביטוי רגולרי. לכן, הביטוי הרגולרי שיכריע את השפה יהיה איחוד של כולם, כלומר, לשים + בין כל הביטויים שנקבל. היות ובנינו ביטוי רגולרי עבור השפה – L הינה שפה רגולרית.

<u>$-L = \{a^n b^m | n < m, \text{and } n + m < 500\}$</u>
חיתוך של אינו רגולרי עם שפה סופית ולכן נשאר שפה סופית ולכן השפה רגולרית.
השפה היא כמות של a-ים, ואחריה כמות גדולה יותר של b-ים, אך שתיהן ביחד לא מעל 500. לכן, השפה סופית, ולכן נוכל לבנות לה אס"ד (ענק) או ביטוי רגולרי (גם ארוך) שיכריע אותה:
$$L = ab^2 + ab^3 + \dots ab^{498} + a^2b^3 + a^2b^4 + \dots a^2b^{497} + \dots + a^{248}b^{249} + a^{248}b^{250} + a^{248}b^{251} + a^{249}b^{250}$$
בנינו ביטוי רגולרי עבור השפה, ולכן היא רגולרית.

<u>$L = \{a^n (a+b)^m | m \ge 0, n \text{ is a prime number}\}$</u>
נבנה ביטוי רגולרי שמכריע אותה: $L=a^2(a+b)^*$
הסבר: נרצה לראות כמות ראשונית של a – ים בהתחלה, ואז לראות איזשהו המשך של a -ים ו b – ים, שכן זוהי השפה. האופציה לקחת $(a+b)^m$ כאשר m לא מוגבל, "נוטלת את העוקץ" של הראשוניות, והופכת את השפה לרגולרית.

<u>הוכחה ששפות רגולריות לא סגורות לאיחוד אינסופי:</u>
שרשור של שני שפות רגולריות שנותן שפה שאינה רגולרית $L_1 = \{a^n | n \in \mathbb{N}\}$ עם השפה $L_2 = \{b^n | n \in \mathbb{N}\}$ נקבל את השפה $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$

השפה $L = \{a^n b^m | n < m \text{ and } n + m < 500\}$. רגולרית. נבנה ביטוי רגולרי המוכיח את השפה:
$$r = ab^2 + ab^3 + \cdots . ab^{498} + a^2b^3 + a^2b^4 \dots . + a^2b^{497} \dots + a^{248}b^{249} + .. a^{248}b^{251} + a^{249}b^{250} + \cdots + a^{249}b^{250}$$

<u>הוכח או הפרך: אם L רגולרית גם $L_{broken\text{-}subs}$ רגולרית</u>
$$L_{broken-sub} = \{x = x_1x_2 \dots x_n \in \Sigma \,|\, n > 0, \forall i : x_i \in \Sigma, \exists u_1 u_2 .., u_{n+1} \in \Sigma^*, u_1x_1u_2x_2 \dots u_nx_nu_{n+1}\}$$
תשובה: נוכיח את הטענה. השפה L רגולרית, ולכן קיים לה אוטומט NFA – ε המכריע אותה, עם מצב מקבל יחיד. (הוכח בהרצאות שמודל זה שקול לאס"ד רגיל) נסתכל על מסלול החישוב מq_0 ל q_f בין אותיות השפה $L_{broken\text{-}subs}$ ניתן להכניס מילים שלמות, ולכן נוכל לקחת כל תת קבוצה של מצבים במסלול החישוב בתור אוטמט המכריע את $L_{broken\text{-}subs}$ היות וקיים לה NFA – ε השפה רגולרית. נהפוך את המצבים שלקחנו למצבים מקבלים עבור $L_{broken\text{-}subs}$.

<u>תהי $I \subseteq \mathbb{N}$ קבוצת אינדקסים. עבור שפה L נגדיר $L^I = \cup_{i\in I} L^i$.</u>
א. תהי L שפה רגולרית ותהי I קבוצת האינדקסים כך ש $I' = N \setminus I$ שהיא בגודל 2 . נרשום $I' = \{i_1, i_2\}$ בטא את L^I במונחי $L^{I'}$ והוכח שהיא רגולרית.
ב. הוכח או הפרך: יהיו $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \mathbb{N}$ אזי לכל שפה מתקיים שאם L^{I_2} רגולרית אזי גם L^{I_1} רגולרית.

תשובה: א. נגדיר את $L^{I'} = L^{I_2} \cup L^{I_1}$ היות וL רגולרית , בפרט היא רגולרית עבור שני אינדקסים i_1, i_2 . לכן נוכל לכתוב את $L = (L^{I'})'$ = $(L^{I_2} \cup L^{I_1})' = (L^{i_1})' \cap (L^{i_2})'$ היות ו L^{i1} רגולרית , גם המשלימה שלה רגולרית, (תכונות סגור). כנ"ל לגבי L^{i2} חיתוך הוא גם תכונת סגור ולכן L^I רגולרית.
ב. נפריך את הטענה על ידי דוגמא נגדית : תהי $L = \{a^i | i \in \mathbb{N}\}$ תהי הקבוצה $I_2 = \{2i + 1 | i \in \mathbb{N}\}$ (כלומר כל המספרים האי זוגיים) ו $I_1 = \{all\ primes\ except\ 2\}$ באופן טרוויאלי מתקיים: $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \mathbb{N}$ נראה כלי למרות שL^{i_2}רגולרית אזי L^{i_1} אינה רגולרית (ההוכחה עבור השפה a^P.)

ב. בנה ביטוי רגולרי עבור השפה:
L={x∈{a,b,c}* | every substring g of x of the form g=auc or g=cua contains at least two b's}
במילים, זוהי שפה כל המילים, כך שבין כל זוג a ו c במחרוזת (בסדר כלשהו), b חייבת להופיע פעמיים לפחות.
$$r = [(b + (c+bc)^*bb) + a(a + b(a+b^+a))^*b^+c(c+bc)^*bb]^* + (\varepsilon + c(b+c)^*(b+\varepsilon) + a(a + b(a + b^*a))^*bb^+c(c+bc)^*(b+\varepsilon)$$

CUA || AUC

<u>הוכח או הפרך:</u>
לכל ביטוי רגולרי r,s מתקיים $(r+s)^* = (r^*s)^* + (rs^*)^*$. נפריך את השקילות: $sr \in (r+s)^*$ אך $sr \notin (r^*s)^* + (rs^*)^*$ כי כדי להתחיל ב s נלך על החלק של $(r^*s)^*$ כאשר באיטרציה הראשונה לא ניקח אף r. אך במצב זה, הביטוי הרגולרי תמיד מסתיים ב- s ולכן $sr \notin (r^*s)^* + (rs^*)^*$.

<u>הוכח או הפרך: $(rs^*)r = r(sr)^*$</u>
<u>הוכחה:</u> שני הביטויים דומים. נוכיח כי $L[(rs)^*r] \subseteq L[r(sr)^*]$ באינדוקציה על $|w|$.
<u>בסיס:</u> $w = r$ כאשר $(|w| = 1)$. לפי ההגדרה $r \in L[r(sr)^*]$
נניח כי הטענה נכונה לכל wr כאשר $|w| = n$ ונוכיח עבור xr כאשר $|x| = n + 2$ (האיטרציה מוספיה שני איברים בכל פעם).
נרשום $xr = wrsr$ לפי ההנחה $w = r(sr)^k$ $(k \ge 0)$ לכן $xr = wrsr = r(sr)^ksr = r(sr)^{k+1}$ ואכן $r(sr)^{k+1} \in L[r(sr)^*]$.
כיוון שני זהה לכיוון ראשון.

<u>נוכיח שהשפה $L = \{a^{2p} | p \text{ is odd}\}$ הינה שפה רגולרית.</u>
נבנה אוטומט לשפה:
$A = (\Sigma_A, Q_A = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, q_0, F_A = \{q_2\}, \delta_A)$ כך ש
$\delta(q_0, a) = q_1$ $\delta(q_1, a) = q_2$ $\delta(q_2, a) = q_3$
$\delta(q_3, a) = q_0$ מספר המצב מהווה את השארית של חלוקת אורך הקלט ב-4, ולכן q_2 הוא המצב המקבל.

<u>נוכיח שהשפה $L = \{a^n b^m c^p | n + m + p = 100\}$ הינה שפה רגולרית.</u>
השפה סופית, ולכן רגולרית.
נבחר לראות כמות של ה-a-ים (בין אפס ל-100), אח"כ כמות של ה-b-ים (בין אפס ל a-100), ואח"כ הכמות של ה-c-ים.
תהיה קבוצה: $\boxed{L = \sum_{i=0}^{100} \left(a^i \left(\sum_{j=0}^{100-i} (b^j c^{100-i-j})\right)\right)}$
לחילופין, ניתן לבנות לשפות הבאות: $L_1 = \{abc^{98}\}, L_2 = \{a^2bc^{97}\}, L_3 = \{ac^{99}\}, \dots$
ולכל שאר האופציות האפשריות, ואז לבנות אוטומט איחוד בין כל השפות הרגולריות האלו. היות ואיחוד הוא תכונת סגור על כמות סופית של שפות, הרי שנקבל שפה רגולרית.

<u>נוכיח שהשפה L המוגדרת להיות שפת כל המילים $w \in \Sigma^*$ כך שקיימת מילה $w' \in \Sigma^*$ עם $|w'|=2$ המופיעה לפחות פעמיים ב-w (ללא חפיפה). הערה: לכל w יכולה להיות w' אחרת.</u>
נבנה ביטוי רגולרי לשפה:
$$L = (a+b)^*aa(a+b)^*aa(a+b)^* + (a+b)^*bb(a+b)^*bb(a+b)^* + (a+b)^*ba(a+b)^*ba(a+b)^* + (a+b)^*ab(a+b)^*ab(a+b)^*$$

L= 1(0+1)*1 + 0(0+1)*0

האות הראשונה והאחרונה הן w, וכל השאר הן u. אין מגבלה כלל, חוץ מכך ש $w=w^R$.

נוכיח שהשפה $L=\{0^n1^m|(n-m)mod5=0\}$ רגולרית.

השפה היא כמות האפסים פחות כמות האחדות שקולה לאפס מודולו 5.

כיוון ראשון: תהי L כך ש $\varepsilon\in L$. אזי בעת ביצוע השרשור LL נוכל לבחור את ε כדי לקבל את אותן מילים, ואכן $L\subseteq L\cdot L$ כנדרש.

כיוון שני: תהי L כך ש $L\cdot L\subseteq L$. נראה ש $\varepsilon\in L$.

תהי u המילה הקצרה ביותר ב L (קיימת כזו לפי WOP כי L שפה לא ריקה. אם יש כמה מילים באותו אורך מינימלי, נבחר אחת מהן שרירותית). לפי ההנחה, $uu\in L\cdot L$ וגם $uu\in L$ ולכן u המילה הכי קצרה ב $L\cdot L$ ולכן בהכרח $u=0$, כלומר $u=\varepsilon$.

L subseteq LL iff epsilon in L

$$L=(0^5)^*(1^5)^*+(0^5)^*01(1^5)^*+(0^5)^*0^21^2(1^5)^*+(0^5)^*0^31^3(1^5)^*+(0^5)^*0^41^4(1^5)^*$$

יהיו a ו b שני ביטויים רגולריים מעל הא"ב $\{\Sigma,\cup,^*,^+,\cdot,(,)\}$, כלומר ביטויים רגולרים מR_Σ. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות: א. אם $L(a)=L(a^+)$ אזי מתקיים $a=\emptyset$

ב. אם $a=b^*$ אזי מתקיים: $L(b)\subseteq L(a)$.

תשובה: א. נפריך על ידי דוגמא נגדית: $a=\varepsilon$ ולכן מתקיים $L(a)=L(a^+)$ אך $a\neq\emptyset$.

ב. הטענה נכונה. באופן טריוויאלי, אם נשתמש באיטרציה בדיוק פעם אחת, נקבל a=b, ולכן כל מילה שנוכל לבנות מהביטוי הרגולרי b נוכל לבנות גם מהביטוי הרגולרי a. היות וניתן להשתמש באיטרציה כמה פעמים שנרצה, השפה של a גדולה יותר מהשפה b ונוכל לרשום $L(b)\subseteq L(a)$ש

נגדיר שפה יחידת מצב ויחידת מצב הפוכה: שפה L רגולרית הינה יחידת מצב אא"ם קיים אס"ד בעל מצב יחיד כך ש$L=L(A)$. שפה רגולרית הינה יחידת מצב הפוכה אא"ם קיים אס"ד בעל מצב יחיד שאינו מקבל כך ש L=L(A).

א. תנו דוגמא לשפה רגולרית שאיננה יחידת מצב . הסבירו את תשובתכם.

ב. תנו דוגמא לשפה רגולרית שאיננה יחידת מצב הפוכה. הסבירו את תשובתכם.

תשובה: א. כל שפה שחייבת לפחות שני מצבים מקבלים לא תהיה יחידת מצב. $L=\{w\in\{a\}^*||w|=1,2mod3\}$ (חייבת שני מצבים מקבלים) .

ב. כל שפה עם לפחות שני מצבים שאינם מקבלים איננה יחידת מצב הפוכה. דוגמא $L=\{w\in\{a\}^*||w|=1,2\ mod\ 4\}$ השפה דורשת שני מצבים מקבלים ושני מצבים שאינם מקבלים.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם L היא שפת כל המילים w מעל {a,b} המקיימים: בכל רישא w' של w מתקיים: $||w|_a-|w|_b|\leq 10$ כלומר מספר ה-a-ים ברישא פחות ממספר ה-b-ים ברישא קטן או שווה בערכו המוחלט מ10, אזי L רגולרית.(תשובה: אוטומט עם 20 מצבים מ-10 עד 10)

ב. אם L היא שפת כל המילים w המקיימות: $||w|_a-|w|_b|\leq 10$ כלומר מספר ה-a-ים במילה פחות ממספר הb-ים במילה קטן או שווה בערכו המוחלט מ10, אזי L שפה רגולרית.

הטענה איננה נכונה. נגדיר את השפה הבאה: $L=\{w=(a^nb^n)\ |\}$ כלומר לא נרצה לראות את הביטוי ababab... סה"כ יותר מ11 פעמים. ההבדל בשאלה שכאן אין תנאי על הרישות, אלא על המילה הכללית. כאן נוכל להשתמש גם $L=\{a^nb^n\}$ המשך כמו סעיף א ..

L תקרא שפה קו – סופית אם המשלימה שלה היא שפה סופית.הוכיחו או הפריכו:

1. תהי L שפה קו – סופית כלשהי, ותהי P שפה לא רגולרית כלשהי. אז בהכרח $L\cup P$ רגולרית.

2. תהי L שפה קו – סופית כלשהי, ותהי P שפה לא רגולרית כלשהי. אז בהכרח $L\cap P$ רגולרית.

1. היות ו-L קו – סופית, הרי ש- L' שפה סופית. לכן, ניעזר בדה- מורגן ונקבל (הסימן ' משמעו משלים): $L\cup P=(L'\cap P')'$

היות ו- L' סופי, החיתוך שלה עם שפה לא רגולרית נשאר סופי, ולכן רגולרי. לכן, מסגירות למשלים גם $L\cup P$ יהיה רגולרי.

2. עפ"י הדיאגרמה נקבל: $P'=(L'\cup P')\backslash(L'\backslash P')$

היות ו- L'\P' סופי, הוא רגולרי. חיסור הוא תכונת סגור ולכן שומר על רגולריות. אך P' אינו רגולרי ולכן $(L'\cup P')$ לא רגולרי (אחרת P' היה רגולרי). לפי דה- מורגן מתקיים: $L'\cup P'=(L\cap P)'$ ולכן $L\cap P$ לא רגולרי, מסגירות למשלים.

לכל אחת מהטענות הבאות קבעו אם היא נכונה או שגויה ונמקו בקצרה.

1. לכל שפה לא רגולרית L קיימת סדרה אינסופית של שפות $L_0\subseteq L_1\subseteq L_2\subseteq L_3\subseteq\cdots$ כך שלכל - i ≠ j , $L_i\neq L_j$, כך שלכל שפה L_i בסדרה היא תת קבוצה של L.

2. נסמן $L=\{a^nb^n\ |n\in\mathbb{N}\}$. קיימות שפות רגולריות L_1,L_2 כך ש- L_1LL_2 רגולרית.

1. כדי ששפה תהיה לא רגולרית, היא חייבת להיות אינסופית, ועוד משהו שמונע את הרגולריות שלה.

נוכיח את נכונות הטענה: תהי שפה L לא רגולרית. היות והשפה אינסופית, קיימת סדרה אינסופית של אורכי מילים בשפה. נגדיר: באופן טריוויאלי לכל $j\in\mathbb{N}$ מתקיים $L_j\subseteq L_{j+1}$, שהרי כל המילים עד אורך j + 1 מכילות את כל המילים עד אורך j. ואכן, כל שפה L_j בסדרה היא תת קבוצה של L. (כל שפה L_j היא שפה רגולרית, שכן יש כמות סופית של מילים עד אורך j אך השפה L אינה רגולרית, שכן j יכול להיות אינסופי).

2. הטענה נכונה. ניתן דוגמא המקיימת את הטענה: תהי $L_2=a$ ותהי $L_1=\Sigma^*$. כעת נסתכל על השרשור: $\Sigma^*a^nb^na=\Sigma^*$ ולכן רגולרי. זה יעבוד גם אם ניקח את אחת השפות להיות ריקה ואז השרשור יהיה שפה ריקה ולכן רגולרי.

הוכיחו או הפריכו: תהינה L_1,L_2 שפות לא רגולריות כך ש- $L_1\subseteq L_2$, ו- L שפה המקיימת $L_1\subseteq L\subseteq L_2$. אז L בהכרח אינה רגולרית.

פתרונות:

נגדיר את L_1,L_2 בצורה כזו שנוכל להכיל אותך אחת בשנייה, אך עדיין יישארו לא רגולריות, ואת L כך שהיא תוכל בתוך L_2 אך עדיין תישאר רגולרית. נפריך את הטענה ע"י דוגמה נגדית:

תהי $L_1=\{a^nb^n\ |n\in\mathbb{N}\}$ ותהי $L_2=\{a^*b^*c^md^m\ |m\in\mathbb{N}\}$ ותהי $L=\{a^*b^*\}$.

כעת מתקיים $L_1\subseteq L_2$ עבור m = 0, ומתקיים $L_1\subseteq L$ (קל לראות), וגם מתקיים $L\subseteq L_2$, אך L_1,L_2 אינן רגולריות (כבר הוכח ש-a^nb^n אינה רגולרית, וההוכחה עבור c^md^m זהה לחלוטין).

תהי $I\subseteq\mathbb{N}$ L קבוצת אינדקסים עבור שפה L. נגדיר $L^I=U_{i\in I}L^i$ הוכיחו או הפריכו:

א. תהי L שפה רגולרית, ותהי קבוצת האידנקסים I כך ש$\mathbb{N}\backslash I$ קבוצה סופית – אזי L^2 רגולרית.

ב. יהיו $I_1\subseteq I_2\subseteq\mathbb{N}$ אזי לכל שפה L מתקיים שאם L^{I_2} רגולרית אזי גם L^{I_1} רגולרית.

א. עבור $I=\mathbb{N}$ אזי מתקיים ש$L^I=L^*$ ולכן יכול להיות מצב שהשפה רגולרית. אנחנו יודעים ש*I* היא קבוצה אינסופית של אינדקסים, ולכן מסגירות לחיבור\ שרשור של שפה עבודת רק על מספר סופי של אינדקסים.

פתרון: תהי *I* קבוצת האינדקסים כך שמתקיים ש$\mathbb{N}\backslash I$ קבוצה סופית ולכן נוכל לתאר את השפה כך: $L^2=L^*\backslash(\cup_{i\in I}L^i)$ מכיוון ש$\mathbb{N}\backslash I$ קבוצה סופית אזי יש כאן איחוד של מספר סופי של שפות רגולריות, ולכן מסגירות לאיחוד סופי השפה רגולרית.

ב. דוגמא נגדית: $I_2=\{n\in\mathbb{N}\}$ ואילו $I_1=\{a^p|p\ is\ prime\}$ ואזי השפה של I_2 רגולרית ואילו השפה של I_1 אינה רגולרית.

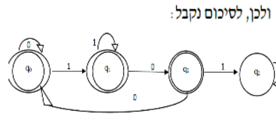
שפת כל המילים מעל Σ={0,1} שאינן מכילות את 101 כתת מילה.

ג) נבנה אוטומט, נאפיין את הדרכים לחזור מ q_0 לעצמו, ואת הדרכים להגיע ממנו לכל אחד מהמצבים המקבלים.

$q_0\to q_0$: $(0)^*+(1)^*0^2+\varepsilon$

$q_0\to q_1$: $(1)^+$ $q_0\to q_2$: $(1)^*0$

ולכן, לסיכום נקבל:



$L=(q_0\to q_0)^*(q_0\to q_0+q_0\to q_1+q_0\to q_2)$

$L=((0)^*+(1)^*0^2)^*(\varepsilon+(1)^++(1)^*0)$

$\boldsymbol{L=\{xy|x,y\in\Sigma^*\ and\ |x|=|y|\}}$

הוכחה: קיים ביטוי רגולרי: $((a+b)(a+b))^*$

דרישות השפה הן שגודל ה x וגודל ה y יהיו זהים. לכאורה זה לא רגולרי, אך x הוא כל המחרוזות האפשריות, y הוא כל המחרוזות האפשריות. שרשור שלהם יוצר גם הוא את כל המחרוזות האפשריות. כל מחרוזת זוגית ניתן לחלקה בדיוק באמצע ולהגדיר את החצי השמאלי כ x והימני כ y. יש להוסיף הוכחה שהשפה המתקבלת ע"י הביטוי הרגולרי אכן השפה הנדרשת בשאלה.

תהי L שפה רגולרית. אז השפה: $extend(L)=\{v\in\Sigma^*\ |\exists u\in L,w\in\Sigma^*s.t.v=uw\}$ גם היא בהכרח

הוכחה:

תהי L שפה רגולרית ויהי A אס"ד המקבל אותה

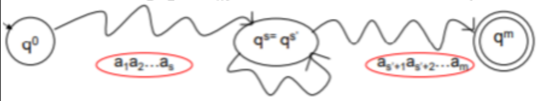
נבחר $n=|Q|$

תיהי $z=a_1a_2,\dots,a_m$ מילה ב L כך ש $m\geq n$

לכל $i\in[0,m]$ נסמן $\delta^i=\delta(q_0,a_1,\dots,a_i)$ כאשר $q^0=q_0$

כיוון ש $n=|Q|$ נובע מעקרון שובך היונים שקיימים זוג אינדקסים $s,s':s\neq s',s<s'$ כך ש $q^{s'}=q^s$

נתבונן בחישוב האוטומט על המילה $z=a_1a_2,\dots a_m$



מכך ש q^m כלומר $z\in L$ נובע שגם $a_1\dots a_sa_{s'+1},\dots a_m\in L$

כעת נרצה באינדוקציה ש $a_1,\dots a_s(a_{s'+1}a_{s'})^ia_{s'+1}\dots a_m\in L$ עבור כל $i\in[0,\backslash infinity)$

- נרשום: $\underbrace{a_1\dots a_s}_u,\underbrace{a_{s'+1}\dots a_{s'}}_v,\underbrace{a_{s'+1}\dots a_m}_w$, מתקיים:
- $|uv|=s'\leq n$ - מאיך שהגדרנו s,s'

המשך