

תרגול 2 – עקרון שובר היונים

1. קיימים 12 חודשים שונים ו 13 אנשים ולכן אם נחלק כל אדם לחודש נפרד (אם נבחר ל 2 אנשים את אותו חודש – סיימנו) לפי עקרון שובר היונים יהיה לפחות חודש אחד ובו נולדו לפחות 2 אנשים.
2. לפי עקרון שובר היונים, אם נחלק 91 מכתבים ל 10 תאים, אם נשים בתא אחד יותר מ 9 – סיימנו ולכן לכל היותר נשים 9 בכל תא ובסה"כ 90 מכתבים, נותר עוד מכתב אחד לשים ובהכרח לפחות בתא אחד יהיו לפחות 10 מכתבים.
3. נגדיר קבוצות מספרים: מספרים שההפרש בין ספרותיהם הוא 0, מספרים שהפרש ספרותיהם הוא 1 וכן הלאה עד 9 (כי במספרים דו ספרתיים ההפרש המקסימאלי בין הספרות הוא 9). קיבלנו 10 קבוצות שונות. אם בוחרים 11 מספרים דו ספרתיים, בהכרח, לפי עקרון שובר היונים, יהיו לפחות 2 מספרים מתוך אותה קבוצה. ולפי הגדרת הקבוצות, ל 2 מספרים אלו יש אותו הפרש בין הספרות.
4. נגדיר את קבוצות ההיכרות: אנשים שמכירים 0 אנשים אחרים, מכירים אדם אחד, וכן הלאה עד הקבוצה שמכירה $n-1$ אנשים. סה"כ n קבוצות. אם נבחר n אנשים נקבל: אם יש אדם שמכיר 0 אנשים אז בהכרח אין אדם שמכיר $n-1$ אנשים (כי אז זה אומר שיש מישהו שמכיר את כולם ומצד שני יש אדם שלא מכיר אף אחד ויחס ההיכרות הוא הדדי) וכן להיפך, אם יש אדם שמכיר $n-1$ אנשים אז בהכרח אין אדם שמכיר 0 אנשים. מכאן שאנו מחלקים n אנשים ל $n-1$ קבוצות ולפי עקרון שובר היונים בקבוצה אחת נמצאים 2 אנשים. כלומר, יש זוג שמכירים אותו מספר של אנשים.
5. נחלק את האנשים לאוטובוסים: 2000 אנשים לתוך 30 אוטובוסים.
א. אם הכנסנו 66 או פחות אנשים לתוך אחד האוטובוסים – סיימנו. לכן נכניס 67 לתוך כל אוטובוס אך לאוטובוס האחרון יישארו רק 57 אנשים להכניס ולכן בהכרח יהיו לפחות 14 מקומות פנויים.
- ב. לפי עקרון שובר היונים המוכלל, נקבל שאם נחלק 2000 אנשים לתוך 30 אוטובוסים (66 לכל אחד – כי אחרת סיימנו) נקבל שבאוטובוס אחד יהיו לפחות 67 אנשים (האחד שנשאר לאחר שחילקנו 66 לכל אוטובוס).
6. נגדיר כל יום בשבוע להיות קבוצה. לפי עקרון שובר היונים, אם נחלק 30 אנשים ל 7 קבוצות אלו נקבל בהכרח שבקבוצה אחת יהיו לפחות 5 אנשים, כלומר 5 אנשים שנולדו באותו יום בשבוע.
7. נגדיר את הקבוצות: $\{1,11\}$, $\{2,10\}$, $\{3,9\}$, $\{4,8\}$, $\{5,7\}$, $\{6\}$. 6 קבוצות סה"כ. אם בוחרים 7 מספרים בין 1 ל 12 ויש רק 6 קבוצות אז לפי עקרון שובר היונים בהכרח יהיו 2 מספרים מאותה קבוצה ולכן, לפי הגדרת הקבוצות, סכום 2 מספרים אלו הוא 12.

8. נגדיר 50 קבוצות של זוגות מספרים עוקבים: $\{1,2\}$, $\{3,4\}$, ... $\{99,100\}$.
אם בוחרים 51 מספרים בין 1 ל 100 אז לפי עקרון שובר היונים, בהכרח יהיו 2 מספרים באותה קבוצה ולפי הגדרת הקבוצות, מספרים אלו עוקבים.
9. נגדיר 50 קבוצות של מספרים אי זוגיים: $\{1\}$, $\{3\}$, $\{5\}$, ... $\{99\}$, נוסיף לכל קבוצה k (k האיבר האי זוגי שבה) את האיברים: $2k, 4k, 8k, \dots$ ונקבל קבוצות זרות: $\{1,2,4,8,16,32,64\}$, $\{3,6,12,24,48,96\}$, $\{5,10,20,40,80\}$ וכן הלאה. נשים לב שבכל קבוצה נמצאים איברים שהם כפולה אחד של השני. אם נבחר 51 מספרים בין 1 ל 100 אז לפי עקרון שובר היונים, בהכרח יהיו 2 מספרים באותה קבוצה ולפי הגדרת הקבוצות, אחד מהמספרים האלו הוא כפולה של השני.
10. א. אותו עקרון כמו בשאלה 9, רק שעכשיו זה עם 101 מתוך 200.
ב. $\{101, 197, 198, 199, 200\}$.
11. בה"כ, נגדיר 2 קבוצות: מכירים את א' ולא מכירים את א'. לפי עיקרון שובר היונים, לפחות 3 או שמכירים את א' או שלא. בה"כ נניח שיש 3 שמכירים את א': והם ב', ג' ו ד'. אם בין 2 מהם יש יחס היכרות – סיימנו (כי יש שלושה שמכירים אחד את השני: א' ו 2 האחרים) אחרת, כלומר בין ב', ג' ו ד' אין יחס היכרות אז מצאנו 3 אנשים שלא מכירים אחד את השני וסיימנו.
12. נחלק את הריבוע בגודל 2 ל 4 ריבועים שווים בגודל 1 ולפי עקרון שובר היונים, אם בוחרים 5 נקודות בתוך הריבוע אז לפחות 2 מהן בתוך אחד הריבועים הקטנים. המרחק המקסימאלי בין 2 נקודות בכל ריבוע קטן הוא בין שני קודקודי האלכסון שזה שורש 2 ולכן המרחק בין 2 הנקודות האלו הוא לכל היותר שורש 2.
13. נחלק את המשולש בגודל 2 ל 4 משולשים ש"צ שווים בגודל 1 ולפי עקרון שובר היונים, אם בוחרים 5 נקודות בתוך המשולש אז לפחות 2 מהן בתוך אחד המשולשים הקטנים. המרחק המקסימאלי בין 2 נקודות בכל משולש קטן הוא בין שני קודקודים שזה בדיוק 1 ולכן המרחק בין 2 הנקודות האלו הוא לכל היותר שורש 1.
14. נגדיר קבוצה: $\{2^1, 2^2, \dots, 2^{58}\}$. לפי עיקרון שובר היונים, בהכרח קיימים לפחות 2 מהמספרים בקבוצה שהגדרנו שלהם אותה שארית חלוקה ב 57 ולכן ההפרש ביניהם בהכרח מתחלק ב 57.
15. התשובה לשאלה זו היא דומה לזו שבשאלה 4.
16. נגדיר את קבוצת המספרים: $\{7, 77, 777, \dots\}$ המכילה 360 מספרים שונים (המספר האחרון מכיל 360 ספרות של 7) לפי עיקרון שובר היונים, בהכרח קיימים לפחות 2 מהמספרים בקבוצה שהגדרנו שלהם אותה שארית חלוקה ב 359 ולכן ההפרש ביניהם בהכרח מתחלק ב 359 והוא מורכב רק מהספרות 7 ו 0.