

מבחן במבנה נתונים – מועד א
מספר קורס: 7015910
סמסטר ב תשע"ה
תאריך: 21.6.15
מרצים: ד"ר ענת פסקין צרניאבסקי, ד"ר ליעד גוטליב

חומר עזר מותר לשימוש: אין חומר עזר
אין להוציא את השאלון בסוף המבחן - יש להשאירו במחברת הבחינה
משך המבחן: 180 דקות

הוראות כלליות:

1. תשובות יש לכתוב במחברת המצורפת בלבד.
2. נא לכתוב בכתב ברור ומסודר. תשובות מסורבלות או ארוכות מדי לא יזכו בניקוד מלא.
3. אין לענות על שתי שאלות באותו עמוד.
4. יש לכתוב את **הסיבוכיות** של כל פונקציה שכתבת.

בהצלחה!

שאלה 1 (20 נקודות). כתוב מחלקה MaxHeap שמהווה עץ ערמה של מספרים שלמים, ממומש על ידי מערך פנימי.

1. הגדר את המחלקה ואת השדות (המשתנים) שלה.
2. הוסף בנאי שמקבל גודל למערך הפנימי:
`public MaxHeap(int capacity)`
3. הוסף פונקציה להכנסת איבר:
`public boolean add(int x)`
4. הוסף פונקציה שמחזירה ומוחקת את האיבר הגדול באוסף:
`public int remove()`

שאלה 2 (20 נקודות). צייר איך נראה עץ אדום-שחור אחרי הוספת כל איבר מהסדרה הבאה:
1,2,3,8,4. סך הכל חמישה ציורים. יש לרשום ליד כל צומת R או B (או לצייר בעט אדום). מהוא סיבוכיות של הוספת איבר?

שאלה 3 (20 נקודות). צייר עץ אחזור (trie) דחוס לאוסף הבא: he, head, hear, seal, seed, seer. ציירו את העץ הדחוס אחרי מחיקת איבר seal. מה זמן ריצה של (1) חיפוש איבר (2) הוספת איבר (3) ומחיקת איבר?

שאלה 4 (20 נקודות). מימוש עץ חיפוש בינארי. נניח שקיימת מחלקה בשם Node שמהווה צומת של עץ בינארי, עם השדות: Node left, Node right, Node parent, int data, int des. (השדה האחרון des ישמור מספר צאצאים של הצומת). נניח גם שקיימים getters & setters לכל שדה.

1. הגדר מחלקה בשם BST שמהווה עץ חיפוש בינארי של מספרים שלמים.
2. כתוב פונקציה להוספת איבר כך שאחרי ההוספה, כל צומת שומר מספר הצאצאים שלו. זמן ריצה יהיה $O(L)$ כש-L הוא מספר הרמות בעץ הנוכחי.

`public void add(int x)`

3. כתוב פונקציה שבהינתן צומת, מחזירה את מספר הצאצאים שלה בזמן ריצה $O(1)$:

`public int descendants(Node n)`

4. כתוב פונקציה שבהינתן מספר x, מחזירה כמה איברים באוסף קטנים ממש מ-x. זמן ריצה יהיה $O(L)$ כש-L הוא מספר הרמות בעץ הנוכחי.

`public int less(int x)`

שאלה 5 (20 נקודות). נגדיר מונה בינארי המכיל k ספרות (ביטים). נתחיל עם מערך של 111...11, ונבצע סדרה של $n=2^k-1$ פעולות של -1, עד לקבלת 000...00. נרצה לספור כמה פעולות ביטיות נבצע. למשל, במעבר מ 111...111 ל 111...110 נבצע פעולה אחת בלבד (שינינו ביט בודד). במעבר מ 111...110 ל 111...101 נבצע שתי פעולות וכן הלאה.

1. מה הסיבוכיות במקרה הגרוע של פעולה בסדרה? כלומר, כמה ביטים יכולה פעולה אחת לשנות.
2. הצע פונקצית פוטנציאל מתאימה, והראה שהסיבוכיות בממוצע (amortized) של פעולה בודדת בסדרה היא $O(1)$.

3. אם נרשה פעולת -1 וגם פעולת +1, אזי הסיבוכיות בממוצע לפעולה היא $O(k)$. הראו סדרה "יקרה" כזו של n פעולות, שבממוצע פעולה נוגעת ב- k ביטים.

תזכורות: פיתחנו בכיתה פונקציות פוטנציאל מתאימות עבור כמה דוגמאות. חלק עשוי להיות מועיל בהתאמת פונקצית הפוטנציאל לשאלה זו:

1. מחסנית עם $\text{push}(x)$, $\text{multipop}(\text{int } k)$: סיבוכיות $O(1)$ amortized לפעולה (החל ממחסנית ריקה). הוכחנו באמצעות פונקצית הפוטנציאל

$$\Phi(S) = \text{number of elements in } S$$

2. מונה בינארי עם k סיביות (המאותחל לאפסים), עם פעולת +1. סיבוכיות $O(1)$ amortized לפעולה. הוכחנו באמצעות פונקצית הפוטנציאל

$$\Phi(S) = \text{number of 1's in } S$$

3. מערך בגודל משתנה (החל ממערך ריק) עם הפעולות:

- $\text{insert}(x)$ – הכנסה לסוף המערך. אם לא נשאר מקום, מקצים מערך מגודל כפול, מעתיקים את תוכן המערך הישן אליו ומכניסים את x כרגיל (לסוף המערך החדש).
- delete – הוצאה מסוף המערך. אם המערך פחות מ-0.25 מלא, נקצה מערך בחצי גודל, ונעתיק את תוכן המערך הישן אליו. כעת נמחק את האיבר האחרון במערך החדש.

סיבוכיות $O(1)$ amortized לפעולה. הוכחנו באמצעות פונקצית הפוטנציאל

$$\Phi(S) = \begin{cases} 2\text{Num}(S) - \text{Size}(S) & \text{if } 2\text{Num}(S) \geq \text{Size}(S) \\ \text{Size}(S)/2 - \text{Num}(S) & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאן Num, Size הם גודל המערך ומספר האיברים בו בהתאמה.