infi – 2 – הרצאות

מבחנים להתכנסות של טורים

טורים – חיוביים:

נ1
69

משפט 1 נתון טור

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1+u_2+\cdots+u_n+u_{n+1}+\cdots \quad (1)$$

אם טור (1) מתכנס אז איבר כללי שואף ל-0.

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

הוכחה.

נני טור (1) מתכנס $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

כאשר: $S_n = u_1+u_2+\cdots u_{n-1}+u_n$

$$S_n = S_{n-1}+u_n$$

אם טור מתכנס
ציין.
לכל n

$$\left.\begin{array}{l} S_n \longrightarrow S \\ S_{n-1} \longrightarrow S \end{array}\right\} n\to\infty$$

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} S_n}_{S} = \lim_{n\to\infty}[S_{n-1}+u_n] = \underbrace{\lim_{n\to\infty} S_{n-1}}_{S} + \lim_{n\to\infty} u_n$$

$$S = S + \lim_{n\to\infty} u_n \Rightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

מ.ש.ל.

① מסקנה: אם איבר כללי $\to 0$ זה לא אומר לגבי התכנסות של טור

② אם איבר כללי $\to a\neq 0$ $\Leftarrow$ טור מתבדר

ח-

חורף

פרק 2 | מבחנים עיקריים של התכנסות טורים עם מס' חיוביים

נתון 2 טורים (A) ו (B)

(A) $u_1+u_2+u_3+\dots+u_n+\dots$

(B) $v_1+v_2+v_3+\dots+v_n+\dots$

I $\boxed{\text{מבחן השוואה 1}}$

אם כל האיברים של טור (A) יותר קטן לאיברים של (B)

צ"ל: $u_n \le v_n \quad (\forall n=1,2,3)$

(א) אם טור (B) מתכנס אז ⇐ גם טור (A) מתכנס

(ב) אם טור (A) מתבדר ⇐ אז גם טור (B) מתבדר

II $\boxed{\text{מבחן השוואה 2}}$

נתונים שני טורים $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ו $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

ו קיים (ב):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}=k\neq 0$$

אז שניהם (A) ו (B) מתכנסים

או שניהם (A) ו (B) מתבדרים

הערה: השוואה צריך להיות עם (במקרה) טור ידוע ח"ב לפי התנהגות של טור 1

III $\boxed{\text{מבחן השוואה 3}}$

אם לכל n מתקיים

(*) $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\frac{v_{n+1}}{v_n}$, $u_n\neq 0$, $v_n\neq 0$

(א) אז: מ.ה. התכנסות (B) ⇐ התכנסות (A)

(ב) מ.ה. התבדרות טור (A) ⇐ התבדר (B)

הוכחה (השוואה 3)

נכתוב (*) עבור $n=1,2,\dots$ נקבל

$$\frac{u_2}{u_1}\le\frac{v_2}{v_1};\quad \frac{u_3}{u_2}\le\frac{v_3}{v_2};\quad\dots\quad \frac{u_n}{u_{n-1}}\le\frac{v_n}{v_{n-1}}$$

או נכתוב בצמוד

$$\left.\begin{array}{l}\frac{u_2}{u_1}\le\frac{v_2}{v_1}\\ \frac{u_3}{u_2}\le\frac{v_3}{v_2}\\ \dots\\ \frac{u_n}{u_{n-1}}\le\frac{v_n}{v_{n-1}}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

ואם נכפיל את האי-שוויונים נקבל

$$\frac{a_n}{u_1}\le\frac{v_n}{v_1}$$

או

$$u_n\le\frac{u_1}{v_1}v_n$$

ולפי מבחן השוואה 1 (הערה) נקבל מ.ש.ל.

III מ. מבחן דלמבר או מנה Dalamber

אם קיים גבול לטור (1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}=D \Rightarrow \begin{cases} D<1 & \text{מתכנס אם} \\ D=1=? \\ D>1 & \text{מתבדר} \end{cases}$$

IV מבחן קושי – Coshi או מ. מבחן שורש

נניח קיים גבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{U_n}=C$

$$\begin{cases} C<1 & \text{אזי מתכנס} \\ C=1=? \\ C>1 & \text{אזי מתבדר} \end{cases}$$

V מבחן אינטגרלי

אם $f(x)$ פונקציה מונוטונית, חיובית (יורדת)

לכל $x\geq 1$ של טור $\sum_{n=1}^{\infty}U_n$

כאשר $U_n=f(n)$

אזי התכנסות או התבדרות של טור

תלויה ב- אינטגרל

$$\int_1^{\infty}f(x)dx$$

VI מבחן לייבניץ Laibniz

נתון טור עם סימנים מתחלפים

$U_1-U_2+U_3-U_4+\cdots$

כאשר $U_n>0 \quad (n=1,2,\ldots)$

משפט 4 משפט לייבניץ

הטור עם סימנים מתחלפים מתכנס אם

א) לפי ערך מוחלט

(א) 1) $u_1 > u_2 > u_3 > \dots$

(ב) 2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

אזי טור מתכנס (ב)

נתון הטור סימנים מתחלפים

$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ (1)

הגדרה: טור (1) מתכנס: אם מתכנס

$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots$

קוראים התכנסות בהחלט

לכן לטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ קורים התכנסות בהחלט

הגדרה ב: לטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ - יש מתכנס

קוראים מתכנס על תנאי אם $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \Leftarrow$ טור מתבדר

המשך הרצאות - 1 לפני הרצאה - 2

1 דף

משפטים בסיסיים של התכנסות טורים.

משפט 1. אם מס' $c\neq 0$ קבוע אזי הטורים

$$\sum_{k=1}^{\infty} c u_k \quad \text{ו} \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_k$$

מתכנסים או מתבדרים ביחד

הוכחה

נסמן S_n - סכומים חלקיים של טור $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$

S'_n סכומים חלקיים של $\sum_{k=1}^{\infty} u_k \cdot c$

$\Downarrow$

מכיוון ש $S'_n = c\cdot S_n$ בגלל ש c קבוע יוצא לפני סכום,

לכן הסדרות $\{S_n\}_1^{\infty}$ ו $\{S'_n\}_1^{\infty}$

מתכנסים או מתבדרים ביחד גם טורים

משפט 2. אם הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A$ ו $B = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

A ו B מתכנסים $\Rightarrow$ אז גם

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n \pm v_n]$$

מתכנסים ו אפשר לכתוב

$$\sum_{n=1}^{\infty} [u_n \pm v_n] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = A \pm B$$

הוכחה

נסמן A_n ו B_n סכומים חלקיים בהתאמה

למשל סכומים חלקיים של טור $\sum_{n=1}^{\infty} [u_n \pm v_n]$

לכן $\Rightarrow$ נקבל

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} [u_n \pm v_n] = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n = A_n + B_n$$

דף 2

דף 2

לאחרון נעבור לגבול כאשר $n\to\infty$ נקבל

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}[A_n \pm B_n] = \lim_{n\to\infty} A_n \pm \lim_{n\to\infty} B_n = A \pm B$$

משפט חשוב | אם לבטל (או להכניס) איברים מס' סופי איברים לטור מתכנס אז טור נשאר מתכנס אם מקורו מתכנס. ומתבדר אם מקורו מתבדר!

ז"א לא משפיע הורדה או הוספה (הוספות) מס' איברים סופי בתוך הטור.

הוכחה

נתון: טור ① $u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$

קודם להכניס מס' אפסים בטור ①

$$u_1+u_2+\dots+u_k+0+0+\dots+0+\dots$$

בעולה כזה לא משפיע על התכנסות של טור ולא הסכום שלו! נניח טור חדש נקבל ונסמן

② $v_1+v_2+\dots+v_n+\dots$

נתבונן עוד טור חדש

③ $w_1+w_2+\dots+w_n+\dots$

שאותו מיקום עומד טור ② כולל $0.0.0\dots0.$

סכום של ③ נקבל לפי משפט: סכום

$$(v_1+w_1)+(v_2+w_2)+\dots+(v_n+w_n)+\dots$$

טור מתכנס: עם הטור ② ! ③

מסקנה אם לטור מתכנס להוריד מס' סופי של איברים לא משפיע על התכנסות של טור

הרצאה - 3 , infi-2-

תכונות של טורים מספריים חיוביים
ומבחנים - הוכחות

מבחן ראשון: מבחן ההשוואה 1.

ניסוח: נתונים 2 טורים A ו B

A $u_1+u_2+u_3+\dots u_n+\dots$

B $v_1+v_2+v_3+\dots+v_n+\dots$

ומתקיים יחס בין B ו A ש:

(החל מ $n=\dots$) $u_n \le v_n \quad \forall n$

(א) אזי אם טור B מתכנס $\Longleftarrow$ נובע גם טור A מתכנס

(ב) ואם טור A מתבדר $\Longleftarrow$ נובע גם B מתבדר

הוכחה

נשתמש תכונה אם טור מתכנס: אזי אפשר להוריד מס' סופי איברים ולא משפיע על התכנסות: נניח:

הן סכומים
$S_1, S_2, S_3 \dots S_n \rightarrow (u_n)$
$t_1, t_2, t_3 \dots t_n \rightarrow (v_n)$

חלקיים של B ו A בהתאמה

לפי הנתון $u_n \le v_n$
נובע

(סכומים חלקיים (u_n)   (סכומים חלקיים (v_n)

$S_n \le t_n \quad (n=1,\dots)$ דף 12

נניח שטור B מתכנס ; סכומים חלקיים t

א) אם (∃) קיים גבול סופי של $\lim_{n\to\infty} t_n = t$

אזי סדרה $\{u_n\}$ חסומה ע"י t לכן / לפי משפט

קיים גבול $\lim_{n\to\infty} u_n$; הטור A מתכנס.

ב) אם הטור A מתבדר אזי $\infty = \lim_{n\to\infty} t_n \ge \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

זה הטור B מתבדר גם כן ! הערה למשפט 1.

המשפט נכון גם אם תנאי מתקיים רק עבור c קבוע $u_n \le c v_n$

משפט 2. (השוואה גבולית - שני)

אם (∃) גבול $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k \ne 0$

א) $k \ne 0 \Rightarrow 0 < k < \infty$ [הטורים A ; B]

מתכנסים או מתבדרים יחד

ב) אם $0 = k \Rightarrow$ מהתכנסות של טור B נובעת התכנסות של טור A

ג) $k = \infty \Rightarrow$ מהתבדרות של הטור A נובעת התבדרות של טור B

הוכחה

דף הבא 3

דף 3

הוכחה $\Updownarrow$

לכל $\varepsilon>0$ כך ש- $k-\varepsilon>0$, נניח
ש- $\forall\varepsilon$ $\exists N_0(\varepsilon)$ כך ש- לכל $n>N_0(\varepsilon)$
מתקיים

$$(1)\quad k-\varepsilon<\frac{u_n}{v_n}<k+\varepsilon$$

אז

$$(2)\quad v_n(k-\varepsilon)<u_n<v_n(k+\varepsilon)$$

לפי משפט 1 השוואה ראשונה מאי שוויון (2)

אפשר לכתוב
$u_n<v_n(k+\varepsilon)$; משפט 1
$u_n>v_n(k-\varepsilon)$
השוואה $\Leftarrow$
נובע הוכחה (א)

לנסות לבד להוכיח (ב) ; (ג)

משפט 3. Dalamber - דלמבר

הוכחה

(א) נתון מתקיים $n\ge k$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\le q=\frac{q^{n+1}}{q^n}<1$$

כאשר לפי טור גאומטרי $\sum q^n$ עם $|q|<1$
מתכנס: אז לפי משפט השוואה (3) טור (1) מתכנס.
לפי משפט 3. טור (1) $\Leftarrow$ (A) $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ מתכנס.

(ב) מה אי שוויון

$$u_{n+1}>u_n \Leftarrow \frac{u_{n+1}}{u_n}\ge 1$$

לכן סדרה $\{u_n\}_1^{\infty}$ חיובית מונוטונית עולה לכן $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0$
ז"א לא מתקיים תנאי הכרחי של התכנסות לכן טור מתבדר.

נספח 4 | מבחן קושי - Cauchy |

נתון טור (A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ איברים חיוביים.

אם החל ממקום מסוים איברי הטור

(1) $\sqrt[n]{u_n} \le q < 1$ $(n \ge n_0)$

(א) אזי טור מתכנס.

(ב) אם $1 < \sqrt[n]{u_n}$ טור מתבדר.

אם $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = C$
$$\begin{cases} C > 1 & \text{מתבדר, טור} \\ C = 1 \; ? & \text{דרוש חקירה נוספת?} \\ C < 1 \Rightarrow & \text{טור מתכנס} \end{cases}$$

הוכחה

ניתבונן לטור $u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots$

לפי (1) אפשר לכתוב על חלק הראשון של משפט. $u_{n_0} \le q^{n_0}$, $u_{n_0+1} \le q^{n_0+1}$

צ"א. איברי של טור (A) קטנים מאיברי של סדרה הנדסית

$q^{n_0}, q^{n_0+1}, \dots$

ובגלל $q < 1 \Rightarrow$ התכנסות.

לפי משפט: בדומה בהוכחה נקבל!

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} q & \text{מתכנס} \Leftarrow q<1 \text{ אם} \\ =1 & ? \\ q & \text{מתבדר } q>1 \text{ אם} \end{cases}$$

מ.ש.ל.

המשך הרצאות - 3

משפט: לייבניץ

טור עם סימנים מתחלפים

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n \quad (u_n>0)$$

אם איברי של טור מקיימים 2 תנאים א' ו-ב'

א) $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots$

ב) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

אז טור (1) מתכנס.

הוכחה

נתבונן ב- סכומים חלקיים לכל $n=1,2,\dots$

$$(2) \qquad S_{2n} = (u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\dots+(u_{2n-1}-u_{2n}).$$

בגלל ש- סדרה $\{u_n\}_1^\infty$ מונוטונית - יורדת כל איברי בסדרה בסוגריים $(u_{2k-1}-u_{2k})$ חיוביים. ⇐ לכן סדרה של סכומים חלקיים $\{S_{2n}\}$ מונוטונית עולה.

צריך להוכיח שגם חסומה

להוכיח ש- (2) חסומה נרשום (2) בצורה אחרת.

$$S_{2n} = u_1 - \underbrace{(u_2-u_3)}_{>0 \text{ כל חוב}} - \underbrace{(u_4-u_5)}_{>0} - \dots - \overbrace{(u_{2n-2}-u_{2n-1})}^{>0} - u_{2n}.$$

לכן לכל n ⇐ $S_{2n}<u_1$ ⇐ ז"א

סדרה $\{S_{2n}\}$ מונוטונית עולה ! חסומה

דף 2

לכן יש משפט: כל סדרה מונוטונית וחסומה קיים גבול

לגבי S_{2n} $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$

מה שוויון $S_{2n-1} = S_{2n} + U_{2n}$! $\lim_{n\to\infty} U_{2n} = 0$

מקבלים ש $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1} = S$

לכן סדרה $\{S_n\}$ מתכנס. $\to$ ל- S.

מכאן טור מתכנס. ל- S.

הערה

(1) מ- (2) $\Leftarrow$ $\underbrace{S_{2n} - U_1 < -(U_2 - U_3)}$ <0

אם $n>2$

ואם נעבור לגבול $n\to\infty$ נקבל

$$S - U_1 < -(U_2 - U_3) < 0$$

אז $S < U_1$

(2) אם נרשום השארית ה-n-ית

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{n+1} U_k$$

(זה מחליף סימן) $\Leftarrow$ אז לפי (1) מקבלים

$$|r_n| < U_{n+1}.$$

דף 1

הרצאה 3 - ב

משפט קושי - או קריטריון של קושי לטורים

נתון טור $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ (1)

טור (1) מתכנס אם ורק אם $\Longleftrightarrow$

אם ל- $\forall p$ טבעי $\forall n,\ n>N(\varepsilon)$

$\forall \varepsilon$ קיים

ש: $|u_{n+1}+\dots+u_{n+p}|<\varepsilon$

או

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k\right|<\varepsilon.$$

הוכחה

נניח טור (1) מתכנס $\Rightarrow$ נובע ש: הסדרה $\{S_n\}_1^{\infty}$ מתכנסת.

א) נשתמש בקריטריון של קושי לסדרות (אינפי 1)

$\forall\varepsilon$ $\exists$ $N(\varepsilon)$ כאשר $n>N(\varepsilon)$ $\forall$ p טבעי

$$|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$$

או $|u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+p}|<\varepsilon$

וכך הוכחנו כיוון אחד.

ב) כיוון שני: נניח תנאי קושי מתקיים

לכן לפי קריטריון של סדרות הסדרה $\{S_n\}_1^{\infty}$

מתכנסת $\Rightarrow$ גם טור מתכנס.

המשך הרצאה - 3 . ב

התכנסות בהחלט ; בתנאי

נושא 1

משפט 1. טור מתכנס בהחלט ← מתכנס

נתון טור $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ (1)

1. **הגדרה** אומרים כי טור (1) מתכנס בהחלט אם טור מורכב עם ערך מוחלט | | (2)

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \quad (2)$$

מתכנס.

צ"ל. התכנסות טור (1) (עם סימנים מתחלפים) תלויה בהתכנסות טור (2)

מ-(2) נובע התכנסות של (1).

הוכחה

הוכחה מתבסס על קריטריון של קושי

משפט קושי

לכל $\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N$ קבוע, $\forall p\in N$

$$|u_{n+1}|+\dots+|u_{n+p}|<\varepsilon$$

צריך להוכיח כי טור (1) מתכנס.

נשתמש בתכונה מפורסם אי-שוויון ידוע

$$|u_{n+1}+u_{n+2}+\dots+u_{n+p}|\le|u_{n+1}|+\dots+|u_{n+p}|<\varepsilon$$

מכאן ⇐ של טור (1) איברים (1) מקיים קריטריון של קושי לכן טור (1) מתכנס.

2 **הגדרה** אומרים כי טור (1) מתכנס על תנאי - או בתנאי

אם (1) מתכנס בהחלט אך טור (2) מתבדר.

1

דוגמה 2: נסדר את איברי טור ליבניץ (דוגמה 1.3)

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \ldots \tag{3}$$

באופן הבא

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} + \ldots \tag{4}$$

נוכיח שטור (4) מתכנס ל- $\frac{1}{2}\ln 2$.

נסמן על-ידי S_n ו- $\widetilde{S}_n$ את הסכומים החלקיים של הטורים (3) ו-(4) בהתאמה. נחשב

$$\widetilde{S}_{3n} = \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2}S_{2n}$$

באופן דומה $\widetilde{S}_{3n-1} = \frac{1}{2}S_{2n} + \frac{1}{4n}$; $\widetilde{S}_{3n-2} = \frac{1}{2}S_{2n} + \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n-2}$

היות ו- $\lim_{n\to\infty}\widetilde{S}_{3n} = \lim_{n\to\infty}\widetilde{S}_{3n-1} = \lim_{n\to\infty}\widetilde{S}_{3n-2} = \frac{1}{2}\ln 2$.

אנו מגיעים למסקנה שטור (4) מתכנס ל- $\frac{1}{2}\ln 2$, כלומר טור מסודר מחדש מתכנס לסכום שונה מהסכום של הטור המקורי.

הסבר לתופעה זו ייתן את המשפט הבא.

משפט 4: **(רימן, Riemann)** אם הטור

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{5}$$

מתכנס בתנאי, אזי ניתן לסדר את איבריו באופן כזה, שהטור המסודר מחדש יתכנס לכל מספר L הנתון מראש, ואף יתבדר.

הוכחה: נסמן על-ידי $p_1, p_2, \ldots$ את כל האיברים החיוביים של (5) הנימצאים באותו סדר כפי שהם מופיעים בטור הנתון. נסמן על-ידי $q_1, q_2, \ldots$ את הערך המוחלט של האיברים השליליים של (5) הרשומים באותו סדר כפי שהם מופיעים בטור הנתון.

נבנה שני טורים חיוביים: $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ (P) , $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ (Q).

2 ומשך

ראשית, נוכיח שהטורים (P) ו-(Q) מתבדרים. יהי S_n סכום חלקי של טור (5). נסמן על-ידי P_n את סכום כל האיברים החיוביים הנימצאים ב-S_n, ועל ידי Q_n את סכום האיברים השליליים בערך המוחלט הנימצאים ב-S_n. מהתכנסות טור (5) נובע

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(P_n - Q_n) = S \qquad (6)$$

ומכיוון שההתכנסות היא רק בתנאי

$$\lim_{n\to\infty}(P_n + Q_n) = \infty \qquad (7)$$

מ-(6) נובע שאף אחד מטורים אלו אינו מתכנס או ששניהם מתכנסים. מ-(7) נובע שהטורים (P) ו-(Q) אינם מתכנסים יחד. לכן, שני טורים אילו מתבדרים, כלומר $\lim_{n\to\infty} P_n = \infty \; ; \; \lim_{n\to\infty} Q_n = \infty$.

יהי L מספר נתון מראש. ניבנה מהאיברים של (5) טור המתכנס ל-L לפי האלגוריתם הבא. היות והטור (P) מתבדר, ניתן לקחת מספר k_1 איברים, כך ש:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1} > L \ge p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1 - 1}$$

נסמן $S_1 = p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1}$. ברור ש-$0 < S_1 - L \le p_{k_1}$.

היות והטור (Q) מתבדר, נוכל לקחת m_1 איברים, כך ש:

$$S_1 - q_1 - q_2 - \ldots - q_{m_1} < L \le S_1 - q_1 - q_2 - \ldots - q_{m_1 - 1}$$

נסמן $S_2 = S_1 - q_1 - q_2 - \ldots - q_{m_1}$, כמו-כן S_2 מקיים $0 < L - S_2 \le q_{m_1}$, נמצא k_2 כך ש:

$$S_2 + p_{k_1+1} + \ldots + p_{k_2} > L \ge S_2 + p_{k_1+1} + \ldots + p_{k_2 - 1}$$

נסמן $S_3 = S_2 + p_{k_1+1} + \ldots + p_{k_2}$. ברור ש-$0 < S_3 - L \le p_{k_2}$. נמשיך באופן כזה ונקבל טור

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_{k_1}) - (q_1 + \ldots + q_{m_1}) + (p_{k_1+1} + \ldots + p_{k_2}) - \ldots \qquad (8)$$

טור (8) מכיל את כל האיברים של טור (5), נוכיח שהוא מתכנס ל-L, אמנם:

$$|L - S_n| \le \begin{cases} p_{k_{\frac{n+1}{2}}} & n \text{ אי-זוגי} \\ q_{m_{\frac{n}{2}}} & n \text{ זוגי} \end{cases}$$

, היות וטור (5) מתכנס, הרי $a_n \to 0$ ולכן גם $p_n, q_n \to 0$. מאי-השיוויון האחרון נובע ש-$L = \lim_{n\to\infty} S_n$.

קיבלנו טור מסודר מחדש (8) המתכנס ל-L $(-\infty < L < \infty)$ הנתון מראש.

אם $L = \infty$ נפעיל תהליך דומה. ניקח $S_1 > 2$, אחר-כך $S_2 = S_1 - q_1$ וניבנה S_3 כך ש-$S_3 > 4$, $S_4 = S_3 - q_2$, ניבנה S_5 כך ש-$S_5 > 8$ וכו'. נמשיך באופן כזה ונקבל טור מסודר מחדש שמתבדר. ■

ראינו שבטור, המתכנס בתנאי, ניתן להחליף את מקומותיהם של אינסוף איברים ולשנות את התכנסותו. נראה עתה שטור מתכנס בהחלט מתנהג כמו סכום סופי.

משפט 5: (קושי). אם טור

286. $\dfrac{1}{2\cdot 1-1}+\dfrac{\sqrt{2}}{2\cdot 2-1}+\dfrac{\sqrt{3}}{2\cdot 3-1}+\dfrac{\sqrt{4}}{2\cdot 4-1}+\dots .$

Using Cauchy's test, investigate the convergence of the following series:

287. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+2n+1}{5n^2+2n+1}\right)^n$. **288.** $3+(2.1)^2+(2.01)^3+(2.001)^4+\dots .$

Conv. $<\infty$ $>\infty$

Using D'Alembert's test, investigate the convergence of the following series:

289. $\dfrac{10}{11}+\left(\dfrac{10}{11}\right)^2\cdot 2^5+\left(\dfrac{10}{11}\right)^3\cdot 3^5+\left(\dfrac{10}{11}\right)^4\cdot 4^5+\dots .$

290. $\dfrac{11}{10}+\left(\dfrac{11}{10}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2^5}+\left(\dfrac{11}{10}\right)^3\cdot\dfrac{1}{3^5}+\left(\dfrac{11}{10}\right)^4\cdot\dfrac{1}{4^5}+\dots .$

Use the integral test to investigate the convergence of the following series:

291. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$, if $p>1$. **292.** $\dfrac{1}{9\ln 9}+\dfrac{1}{19\ln 19}+\dfrac{1}{29\ln 29}+\dots .$

Test the following sign-changing series for convergence and establish the nature of the convergence:

293. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{5}+\dfrac{7}{8}-\dfrac{10}{11}+\dots .$

294. $1.1-1.02+1.003-1.0004+\dots .$

295. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}(n+1)}{n^2+n+1}.$

296. $\dfrac{1}{10}+\dfrac{7}{10^2}-\dfrac{13}{10^3}+\dfrac{19}{10^4}+\dfrac{25}{10^5}-\dfrac{31}{10^6}+\dots .$

297. $3\dfrac{1}{2}+3\dfrac{1}{4}-3\dfrac{1}{8}-3\dfrac{1}{16}+3\dfrac{1}{32}+3\dfrac{1}{64}-3\dfrac{1}{128}-3\dfrac{1}{256}+\dots .$

Test the following series for convergence:

298. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dots .$ **299.** $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\dots .$

300. $\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{40}+\dots .$ **301.** $\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{28}+\dfrac{1}{38}+\dots .$

302. $1+\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{4}{5^3}+\ldots$ **303.** $\frac{1!}{5}+\frac{2!}{5^2}+\frac{3!}{5^3}+\ldots$

304. $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{4^4}+\ldots$ **305.** $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots$

306. $\frac{1}{2\ln 2\cdot\ln\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3\cdot\ln\ln 3}+\frac{1}{4\ln 4\cdot\ln\ln 4}+\ldots$

307. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3+1}+\frac{1}{3^3+1}+\frac{1}{4^3+1}+\ldots$

308. $\frac{2}{2^3+1}-\frac{3}{3^3+2}+\frac{4}{4^3+3}-\frac{5}{5^3+4}+\ldots$

309. $1-2+3-4+5-6+\ldots$ **310.** $1-\frac{1}{2^4}-\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}-\frac{1}{5^4}-\frac{1}{6^4}+\ldots$

311. $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{5}{6}-\frac{6}{7}+\ldots$

312. $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots$ **313.** $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\ldots$

314. Find the product of the absolutely convergent series $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$ and $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+\ldots$

315. Show that the series $1-\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}-\frac{2^3}{3!}+\ldots$ is absolutely convergent and raise it to the second power (multiply by itself).

3.2. Functional Series

The series

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots,$$

whose terms are the functions of x, is called *functional*. The collection of the values of x at which the functions $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x) \ldots$ are defined and the series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converges, is called the *domain of the convergence* of the functional series. Most often, such a domain is some interval of the x-axis. Each value of the domain of convergence X is associated with a certain value of the quantity $\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n} u_n(x)$. This quantity, which is a function of x, is called the *sum* of the functional series and is denoted $S(x)$.

Let us represent the sum of the series as $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, where

$$S_n(x) = u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x), \quad R_n(x) = u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots$$

($R_n(x)$ is the remainder of the functional series).

287. Converges. **288.** Diverges. **289.** Converges. **290.** Diverges. **291.** Converges. **292.** Diverges. **293.** Diverges. **294.** Diverges. **295.** Is conditionally convergent. **296.** Is absolutely convergent. **297.** Diverges. **298.** Is conditionally convergent. **299.** Is absolutely convergent. **300.** Diverges. **301.** Diverges (compare to the series in the preceding example). **302.** Converges. **303.** Diverges. **304.** Converges. **305.** Converges. **306.** Diverges. **307.** Converges. **308.** Is absolutely convergent. **309.** Diverges. **310.** Is absolutely convergent. **311.** Diverges. **312.** Is absolutely convergent. **313.** Is conditionally convergent. **314.** $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \frac{1}{729} + \ldots$.

315. $1 - \frac{4}{1!} + \frac{4^2}{2!} - \frac{4^3}{3!} + \ldots$. **323.** Diverges at points $x = 1$ and $x = 2$, converges at point $x = 3$. **324.** Diverges at point $x = 1$, converges at point $x = 2$. **325.** $0 < x < +\infty$. **326.** $1 < x < +\infty$. **327.** $-\infty < x < +\infty$. **331.** Is uniformly convergent. **332.** Yes. **333.** Yes. **334.** No, the series diverges for any value of x. **346.** $-\infty < x < +\infty$. **347.** $3 \leqslant x < 5$. **348.** $1 < x < 3$. **349.** The series converges only at point $x = 0$. **350.** The series converges at any value of x. **351.** $-1 < x < 1$. **352.** $-2 \leqslant x < 2$. **353.** $-3 < x < 3$. **354.** $-1 < x < 3$. **355.** $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **356.** $a/(a-x)^2$. **357.** $a \ln a/(a-x) - x$. **358.** $2a/(a-x)^3$.

359. $-2x/(1+x^2)^2$. **365.** $1 + x \ln 3 + \frac{x^2 \ln^2 3}{2!} + \frac{x^3 \ln^3 3}{3!} + \ldots (-\infty < x < +\infty)$.

366. $1 - \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} - \frac{8x^3}{3!} + \ldots (-\infty < x < +\infty)$.

367. $1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 - \frac{2^5}{6!}x^6 + \ldots (-\infty < x < +\infty)$.

368. $\frac{2}{2!}x^2 + \frac{2^3}{4!}x^4 + \frac{2^5}{6!}x^6 + \frac{2^7}{8!}x^8 + \ldots$ $(-\infty < x < +\infty)$. **369.** $\ln a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \frac{x^4}{4a^4} + \ldots$ $(-a < x \leqslant a)$. **370.** $\sqrt{a}\left[1 + \frac{x}{2a} - \frac{x^2}{(2a)^2 \cdot 2!} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^3}{(2a)^3 \cdot 3!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^4}{(2a)^4 \cdot 4!} + \ldots\right] (-a < x \leqslant a)$.

371. $1 + \frac{2}{2!} \cdot x^4 + \frac{2^3}{4!} \cdot x^8 + \frac{2^5}{6!} \cdot x^{12} + \frac{2^7}{8!} \cdot x^{16} + \ldots (-\infty < x < +\infty)$. **384.** 2.71828. **385.** 0.60653. **386.** 0.1564. **387.** 1.0453. **388.** 1.0196. **389.** 5.196. **390.** -0.0202. **391.** 0.0953. **392.** 1.0986. **393.** 2.3026. **394.** 0.4636. **395.** 3.142. **400.** 1/3. **401.** 1. **402.** 0.1996. **403.** 0.102. **412.** $2, -2, 2\sqrt{2}, -\pi/4$. **413.** $z = 13(\cos 157°23' + i \sin 157°23')$. **414.** i. **415.** 1. **416.** $2 \cos 10° (\cos 10° + i \sin 10°)$. **417.** $-46 + 9i$. **418.** $(249/1025) - (68/1025)i$. **419.** $(5/169) + (12/169)i$. **420.** $5.831 [\cos(-30°58') + i \sin(-30°58')]$. **421.** $\sqrt{2}(\cos 135° + i \sin 135°)$. **422.** $(\sqrt{2}/2) + (\sqrt{2}/2)i$. **423.** $\cos(-150°) + i \sin(-150°) = -(\sqrt{3}/2) - (1/2)i$.

424. $\cos 22°30' + i \sin 22°30' = 0.9239 + 0.3827i$;
$\cos 112°30' + i \sin 112°30' = -0.3827 + 0.9239i$;
$\cos 202°30' + i \sin 202°30' = -0.9239 - 0.3827i$;