סיכום כללי לחשבון אינפיניטסימלי 1

כפיר גולדפרב – סמסטר ב' 2020

כללים חישוביים:

אי-שיוויון המשולש:

$$\forall x, y: |x+y| \leq |x|+|y|$$

חסמים:

1. חסם מלעיל: איבר גדול מכל איברי הסדרה.
2. חסם עליון: איבר גדול מכל אברי הסדרה הכי קטן (Sup).
3. מקסימום: איבר גדול מכל אברי הסדרה הכי קטן ונמצא בסדרה (Max).
4. חסם מלרע: איבר קטן מכל איברי הסדרה.
5. חסם תחתון: איבר קטן מכל אברי הסדרה הכי גדול (Inf).
6. מינימום: איבר קטן מכל איברי הסדרה הכי גדול ונמצא בסדרה (Min).

תכונת הארכימדיות: $\mathbb{N}$ אינה חסומה מלעיל, (עבור כל $n \epsilon \mathbb{N}$ קיים $n+1 \in \mathbb{N}$).

תכונות במספרים ממשיים:

אקסיומית החסם העליון: לכל סדרה לא ריקה של מספרים ממשיים וחסומה מלעיל יש חסם עליון.

$\mathbb{Q}$ צפופה ב-$\mathbb{R}$: לכל $x, y \epsilon \mathbb{R}$ קיים $z \epsilon \mathbb{Q}$ כך שמתקיים: $x<z<y$.

הגדרת גבול של סדרה:

סדרה מתכנסת (שואפת לגבול שהוא מספר):

$$\forall \varepsilon>0\ \exists n*\ \forall n>n*\ (|a_n-L|<\varepsilon)$$

סדרה מתבדרת (שואפת לגבול שהוא אינסוף או מינוס אינסוף):

$$\forall L \exists \varepsilon>0\ \forall n*\ \exists n>n*\ (|a_n-L| \geq \varepsilon)$$

- יחידות גבול של סדרה - אם $\langle a_n \rangle$ סדרה שיש לה גבול (מתכנסת) אז הוא יחיד.
  בצורה דומה אפשר להגיד שאם $\langle a_n \rangle$ שואפת ל-L וגם ל-K, אזי $L=K$.

גבול של סדרה במובן הרחב:

$\forall M\epsilon R\ \exists n*\ \ \forall n>n*\,(a_n>M)$

- אם סדרה עולה במובן הרחב וחסומה מלעיל אז היא מתכנסת ל- Sup שלה.
- אם סדרה יורדת במובן הרחב וחסומה מלרע אז היא מתכנסת ל- Inf שלה.

חשבון גבולות:

יהי $\mathrm{a_n}\rightarrow \mathrm{L}, \mathrm{b_n}\rightarrow \mathrm{K}$ סדרות מתכנסות אז מתקיים:

1. $|a_n|\rightarrow_{n\rightarrow\infty}|L|$
2. $|a_n|\rightarrow_{n\rightarrow\infty}0$, ($L=0$ אם ורק אם)
3. $ca_n\rightarrow_{n\rightarrow\infty}cL, c\epsilon\mathbb{R}$ (סקלר)
4. $a_nb_n\rightarrow_{n\rightarrow\infty}LK$
5. $a_n+b_n\rightarrow_{n\rightarrow\infty}L+K$
6. $\frac{a_n}{b_n}\rightarrow_{n\rightarrow\infty}\frac{L}{K}$, ($\forall k\epsilon b_n: k\neq 0$ אם ורק אם)
7. $\sqrt{a_n}\rightarrow_{n\rightarrow\infty}\sqrt{L}$, ($\forall n, a_n\geq 0, L\geq 0$ אם ורק אם)

סדרות מונוטוניות:

1. סדרה <u>עולה</u> כש: $a_n\leq a_{n+1}$.
2. סדרה <u>עולה ממש</u> כש: $a_n<a_{n+1}$.
3. סדרה <u>יורדת</u> כש: $a_n\geq a_{n+1}$.
4. סדרה <u>יורדת ממש</u> כש: $a_n>a_{n+1}$.

כלל הסנדוויץ':

יהי a_n, b_n, c_n סדרות אשר מקיימות $a_n\leq b_n\leq c_n$,

אם $lim\, a_n=lim\, c_n=L$ אז גם $lim\, b_n=L$.

הלמה של קנטור:

תהי $\langle[\mathrm{a_n},\mathrm{b_n}]\rangle$ סדרה יורדת של קטעים סגורים לא ריקיים שמקיימת:

$$lim(\mathrm{a_n}-\mathrm{b_n})=0$$

אז בקבוצה הבאה יש רק איבר אחד:

$$\bigcap_{\mathrm{n}}[\mathrm{a_n},\mathrm{b_n}]$$

<u>הוכחה</u>:

$$[\mathrm{a_n},\mathrm{b_n}]=[\mathrm{lima_n},\mathrm{limb_n}]\neq\emptyset$$

$$a-b=lima_n-limb_n=lim(a_n-b_n)=0$$

■

לפי הלמה של קנטור אם קיימת סדרה $\mathrm{b_n}$ יורדת ו$\mathrm{a_n}$ עולה המקיימת $a_n-b_n\ =\ 0$ אזי a_n שואפת ל Sup שלה, וb_n שואפת ל-Inf שלה, שניהן שואפות לאותו מספר נקרא לו c ואז מתקיים:

$$\bigcap_n[\mathrm{a_n},\mathrm{b_n}]=c=lima_n=Supa_n=limb_n=Infb_n$$

תתי-סדרות *(גבולות חלקיים):*

סימון: $\boldsymbol{a_{n_k}}$ (k זה אינדקס מסויים שבעזרתו ניתן לקחת רק חלק מהאיברים של a_n, לדוגמא אם $k=2k+1$ אזי התת סדרה תראה כך: $\boldsymbol{a_{n_{2k+1}}}$ והיא תכיל את כל האיברים האי-זוגיים של a_n).

תכונות חשובות של תתי-סדרות:

1. אם $a_n\to L$ אזי כל תת-סדרה של $\langle a_n\rangle$ שואפת ל-L.
2. אם לסדרה יש שני גבולות חלקיים שונים אזי היא לא מתכנסת אפילו לא במובן הרחב.
3. לכל סדרה יש תת-סדרה מונוטונית.
4. משפט בולצאנו ויירשטרס הוא משפט על תתי-סדרות בפני עצמו שממנו גם יש מסקנות:

משפט בולצאנו ויירשטרס:

"לכל סדרה חסומה ש גבול גבול חלקי (שהוא מספר)".

הוכחה:

מהמסקנה (של תתי-סדרות) שלכל סדרה יש תת סדרה מונוטונית, ומכיוון שהסדרה חסומה, התת-סדרה שואפת לגבול מספרי.

■

מסקנות ממשפט בולצאנו ויירשטרס:

1. לכל סדרה חסומה יש לפחות גבול חלקי אחד (הוכחה לפי מהשפט עצמו).
2. לכל סדרה יש תת-סדרה מתכנסת במובן הרחב (גבול סופי אינסוף או מינוס אינסוף).
3. לכל סדרה יש לפחות גבול חלקי אחד במובן הרחב.
4. סדרה מתכנסת (במובן הרחב) אם"ם יש לה בדיוק גבול חלקי אחד (במובן הרחב).
5. לכל סדרה יש תת סדרה מנוטונית (רעיון ההוכחה לפי 2).

טענות נוספות לפי משפט בולצאנו ויירשטרס:

- תהי $\langle a_n \rangle$ סדרה:
  א. ∞ גבול חלקי שלה אם ורק אם $\langle a_n \rangle$ אינה חסומה מלעיל.
  ב. $-\infty$ גבול חלקי שלה אם ורק אם $\langle a_n \rangle$ אינה חסומה מלרע.
- תהי $\langle a_n \rangle$ סדרה, L גבול חלקי של $\langle a_n \rangle$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ הקבוצה $\{n : a_n \in B_\varepsilon(L)\}$ אינסופית.
- תהי $\langle a_n \rangle$ סדרה שמתכנסת במובן הרחב, אז יש לה לפחות שני גבולות חלקיים <u>שונים</u> במובן הרחב.
- תוצאה של 3 – סדרה מתכנת במובן הרחב אם ורק אם יש לה גבול יחיד במובן הרחב.

תנאי קושי *(תנאי שקול להתכנסות של סדרה):*

הסדרה $\langle a_n \rangle$ מקיימת את תנאי קושי פירושו שלכל $\varepsilon > 0$ ולכל n, k גדולים מספיק מתקיים: $|a_n - a_k| < \varepsilon$.

סדרת קושי היא סדרה המקיימת את תנאי קושי.

מסקנות מתנאי קושי:

1. כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי (מקיימת את תנאי קושי).

<u>הוכחה:</u>

נניח כי $a_n \to L$ ונוכיח ש-$\langle a_n \rangle$ סדרת קושי,

יהי $\varepsilon > 0$, קים $n*$ כך ש: $\forall n \geq n * (|an - L| < \frac{\varepsilon}{2})$,

יהיו $n, k \geq n*$, עלינו להוכיח ש-$|a_n - a_m| < \varepsilon$. אכן מתקיים:

$$|a_n - a_m| = |a_n - L + L - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m| = |a_n - L| + |a_m - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

■

2. כל סדרת קושי היא חסומה.
3. תהי $\langle a_n \rangle$, אז $\langle a_n \rangle$ מתכנסת אם ורק אם $\langle a_n \rangle$ סדרת קושי.

סביבות:

<u>סביבות מנוקבות</u> – סימון: $B_\delta^*(c)$, בפירוש: $B_\delta^* = (c-\delta, c) \cap (c+\delta, c)$

או במילים אחרות: $B_\delta^*(c) = B_\delta(c) \backslash \{c\}$.

<u>סביבה של ∞</u> - הוא קטע פתוח מהצורה (M, ∞), <u>סביבה של $-\infty$</u> הוא קטע פתוח מהצורה $(-\infty, M)$.

<u>סביבה מצד אחד</u> - יהיו $c\epsilon\mathbb{R}, r\epsilon(0,\infty)$, הסביבה ימנית של c ברדיוס r היא הקטע $[c, c+r)$, באופן דומה מגדירים סביבה שמאלית.

<u>סביבה מנוקבת מצד אחד</u> - הסביבה הימנית המנוקבת של c ברדיוס r היא הקטע $(c, c+r)$, באופן דומה מגדירים סביבה מנוקבת שמאלית.

גבול של פונקציה:

סימון שאיפה של פונקציה:

תהי f פונקציה ויהיו $c, L\epsilon\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, הפונקציה שואפת ל-$L$, כאשר x שואף ל-c, בסימון:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \text{ או } f(x) \to_{x\to c} L$$

ניתן לחלק את הגדרת הגבול של פונקציה למספר מקרים:

1. <u>אם הפונקציה שואפת ל-∞, וגם x שואף ל-∞</u>, נסמן:
   $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ או $(x) \to_{x\to\infty} \infty$,

   פירושו שלכל M_1 קיים M_2 כך שלכל $x > M_2$ מתקיים $f(x) > M_1$
   או במילים אחרות: $\forall M_1 \exists M_2\ \forall x(x > M_2 \ \to f(x) > M_1)$
   והשיוויונות $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, מוגדרים באופן דומה.

2. <u>אם פונקציה שואפת לגבול L, כאשר x שואף ל-∞</u>, נסמן:
   $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ או $f(x) \to_{x\to\infty} L$,

   פירושו שלכל סביבה $B_\varepsilon(L)$ של L קיים M כך שלכל $x > M$ מתקיים $f(x)\epsilon B_\varepsilon(L)$
   או במילים אחרות: $\forall\varepsilon > 0 \exists M \forall x > M[f(x)\epsilon B_\varepsilon(L)]$, הגדרת $(x) \to_{x\to-\infty} L$ באופן דומה.

3. <u>כאשר הפוקניצה שואפת ל-L כאשר x שואף ל-c</u>, בסימון:
   $\lim_{x\to c} f(x) = L$ או $(x) \to_{x\to c} L$,

   פירושו שלכל סביבה $B_\varepsilon(L)$ של L קיימת סביבה מנוקבת $B_\varepsilon^*(c)$ של c כך שלכל $x\epsilon B_\varepsilon^*(c)$ מתקיים $f(x)\epsilon B_\varepsilon(L)$,
   או במילים אחרות: $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0\ \forall x\epsilon B_\varepsilon^*(c)[f(x)\epsilon B_\delta(L)]$.

- <u>יחידות הגבול של פונקציה</u> (בדומה ליחידות גבול של סדרה), אם קיימת לפונקציה $f(x)$ גבול אז הוא יחיד, או בצורה דומה ניתן לומר שאם $limf(x) = L$ וגם $limf(x) = K$ אז $L = K$.

גבול של חד-צדדי:

תהי f פונקציה ויהיו $c, L\epsilon\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, הפונקציה שואפת ל-$L$, כאשר x שואף ל-c מצד ימין, בסימון:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = L \text{ או } f(x) \to_{x\to c^+} L$$

באופן דומה ניתן להגיד שהפונקציה שואפת ל-L כאשר x שואף ל-c מצד שמאל בסימון: c^-.

פירושו שלכל M יש סביבה ימנית מנוקבת של c כך שלכל $x\epsilon(c, c+\delta)$, מתקיים $f(x) > M$, באופן דומה מגדירים שאיפה למינוס אינסוף או שאיפה משמאל.

- אם הפונקציות f, g, שוות בסביבה המנוקבת של c אז מתקיים: $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^+} g(x)$.
- תהי f פונקציה, $c\epsilon\mathbb{R}$, $L\epsilon\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, שאז הגבול $\lim_{x\to c} f(x)$ קיים אם ורק אם שני הגבולות החד-צדדיים $\lim_{x\to c^-} f(x)$, $\lim_{x\to c^+} f(x)$ קיימים ושווים, במקרה זה:
$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$$

פונקצית דיריכלה:

$$D(x) = 1_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x\epsilon\mathbb{Q} \\ x, & \neg x\epsilon\mathbb{Q} \end{cases}$$

תכונות של <u>פונקצית דיריכלה:</u>

א. הפונקציה איננה רציפה באף נקודה בישר.

ב. אין קטע שהיא מונוטונית בו.

איפיון היינה לגבולות (שיטה לאפיֵן גבול של פונקציה בעזרת גבול של סדרה):

סימון: $c \neq x_n \to c$, פירושו הסדרה $\langle a_n\rangle$ שואפת ל-c כאשר כל אבריה שונים מ-c.

<u>איפיון היינה לגבול של פונקציה</u> – תהי f פונקציה ויהיו $c, L\epsilon\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, אז $f(x) \to_{x\to c} L$ אם ורק אם לכל סדרה $\langle x_n\rangle$, מתקיים:

$$[c \neq x_n \to c] \to [f(x_n) \to L]$$

<u>מסקנה מאיפיון היינה</u> - $\lim_{x\to c} f(x)$ קיים אם ורק אם לכל סדרה $\langle x_n\rangle$ מתקיים: אם $c \neq x_n \to c$ אז הסדרה $\langle f(x_n)\rangle$ מתכנסת.

רציפות:

רציפות פירושו שמתקיים:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$$

דרישות לרציפות:

1. f מוגדרת בנקודה c.
2. הגבול $\lim_{x\to c} f(x)$ קיים.
3. הגבול $\lim_{x\to c} f(x)$ שווה לערכה של הפונקציה בנקודה c.

רציפות מימין פירושו שמתקיים:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = f(c)$$

באופן דומה מוגדר רציפות משמאל.

- מסקנה: f רציפה ב-c אם ורק אם f רציפה מימין ומשמאל.

  רציפות בקטע $[a,b)$ פירושו ש-f רציפה בקטע הפתוח (a,b) והיא רציפה משמאל בנקודה c.

  רציפות בקטע מאחד מהסוגים $(-\infty,\infty), (a,\infty), (-\infty,b), [a,b], (a,b], (a,b)$, מוגדרות באופן דומה.

אפיון היינה לרציפות:

f רציפה ב-c אם ורק אם לכל סדרה $\langle x_n \rangle$ מתקיים:

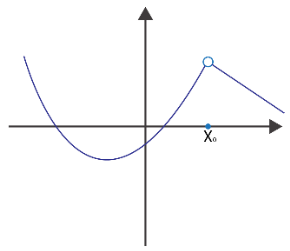
$$[x_n \to c] \to [f(x_n) \to f(c)]$$

- הפונקציה f רציפה בקטע הפתוח (a,b) פירושו שהיא רציפה בכל נקודה בקטע (a,b).
- הפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ פירושו שהיא רציפה בקטע (a,b), רציפה מימין ב-b ורציפה משמאל ב-a.

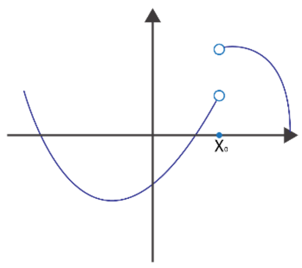
מיון נקודות אי-רציפות:

נקודות אי רציפות מתחלקות לשלושה סוגים:

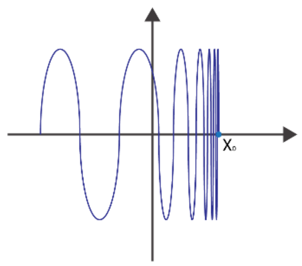
1. "<u>אי רציפות סליקה</u>": בנקודה c קיימת אי-רציפות סליקה אם הגבול $\lim\limits_{n\to c} f(x)$ קיים, (ייתכן כי הפונקציה אינה מוגדרת בנקודה שבה $x = c$), אי רציפות כזו נקראת "סליקה" שכן אפשר "לתקן" את הפונקציה f על ידי הגדרת $f(c) = \lim\limits_{n\to c} f(x)$, וכך תתקבל פונקציה שרציפה בנקודה c, במקרה זה הגבולות החד צדדים $\lim\limits_{n\to c^+} f(x), \lim\limits_{n\to c^-} f(x)$ קיימים ושווים.



2. "<u>אי רציפות מסוג ראשון</u>" ("קפיצה"): בנקודה c קיימת אי רציפות מהסוג הראשון, אם הגבול $\lim\limits_{n\to c} f(x)$ אינו קיים, איך קיימים שני הגבולות החד צדדים של f, למשל אם יש פונקציה ממשית אשר שני הגבולות החד צדדיים $\lim\limits_{n\to c^+} f(x), \lim\limits_{n\to c^-} f(x)$ קיימים אבל שונים אז הפונקציה בנקודה c אי רציפה מסוג ראשון.



3. "<u>אי רציפות מסוג שני</u>" ("עיקרי"): בנקודה c קיימת אי רציפות מהסוג השני, אם לפחות אחד משני הגבולות החד צדדיים שלה לא קיים, למשל אם הפונקציה ממשית ולפחות אחד מהגבולות $\lim\limits_{n\to c^+} f(x), \lim\limits_{n\to c^-} f(x)$ אינו קיים (אינו ערך ממשי) אז הפונקציה בנקודה c היא אי רציפות מהסוג השני.



חישוב גבולות של פונקציה:

נניח ש-f, g הן פונקציות שתחומן הוא קבוצת המספרים הממשים A, אז הפונקציות $f - g, f +$ $fg, \frac{f}{g}, |f|, g$, שתחומן הוא A (למעט $\frac{f}{g}$ שהיא איננה מוגדרת ב-x עוברו $g(x) = 0$) והן מוגדרות:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$|f|(x) = |f(x)|$$

<u>דוגמא</u>, נניח:

א. הפונקציה f חסומה בסביבה מנוקבת של c.
ב. $g(x) \to_{x \to c} 0$.

אז $(fg)(x) \to_{x \to c} 0$.

הוכחה: לפי תנאי א, יש M וסביבה מנוקבת V_1 של c כך ש:

$$\forall x \epsilon V[-M < f(x) < M]$$

לפיכך:

$$\forall x \epsilon V[-Mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)]$$

לפי תנאי ב, קל להוכיח שהביטויים $-Mg(x), Mg(x)$ שואפים ל-0. עתה לפי כלל הסנדוויץ'

$$(fg)(x) \to_{x \to c} 0$$

■

גבול של פונקציה מורכבת:

התנאם הבאים שקולים:

1. $f(x) \to_{x \to c} L$.
2. $(f - L)(x) \to_{x \to c} 0$.
3. $|f - L|(x) \to_{x \to c} 0$.

<u>דוגמא נוספת לחישוב גבולות של פונקציות</u>, נניח:

$$f(x) \to_{x\to c} L_1$$

$$g(x) \to_{x\to c} L_2$$

אז:

$$(f+g)(x) \to_{x\to c} L_1 + L_2$$

$$(f-g)(x) \to_{x\to c} L_1 - L_2$$

$$(fg)(x) \to_{x\to c} L_1 L_2$$

$$L_2 \neq 0 \to \left(\frac{f}{g}\right)(x) \to_{x\to c} \frac{L_1}{L_2}$$

$$|f|(x) \to_{x\to c} |L_1|$$

<u>סימון של פונקיצה מורכבת</u>: $f^\circ g$.

או בפירוט יותר, נתונות שתי הפונקציות:

$$f: A \to B$$

$$g: C \to D$$

ההרכבה של g על f מוגדרת כך:

$$g^\circ f: A \to C$$

$$(g^\circ f)(x) = g(f(x))$$

או כך במקרה הפוך:

$$(f^\circ g)(x) = f(g(x))$$

- נתונים $L, M \epsilon \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, **נניח:**

א. $f(x) \to_{x\to c} L$

ב. $g(x) \to_{x\to c} M$

ג. g רציפה ב-L (במקרה ש-L מספר) או שיש סביבה מנוקבת V של c כך ש:

$$\forall x \epsilon V [f(x) \neq L]$$

אז:

$$(g^\circ f)(x) \to_{x\to c} M$$

<u>מסקנה</u>:

אם f רציפה ב-c ו-g רציפה ב-$f(c)$ אז $g^\circ f$ רציפה ב-c.

תנאי קושי לקיום גבול של פונקציה בנקודה:

הפונקציה f מקיימת את תנאי קושי לקיום גבול ב-c פירושו:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x,y\epsilon B_{\delta}^{*}(c)[|f(x)-f(y)|<\varepsilon]$$

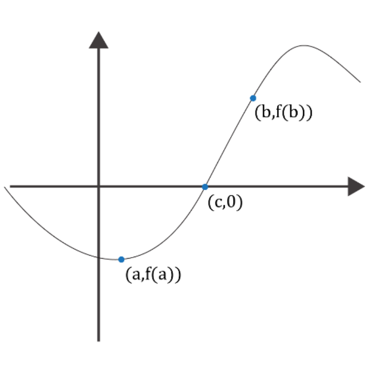
משפט מסקנה: הגבול $f(x)$ $lim\to_{x\to c}$ קיים אם ורק אם הפונקציה f מקיימת את תנאי קושי להתכנסות ב-c.

משפט ערך הביניים:

משפט ערך הביניים מאפשר להוכיח קשרים בין התכונות הבאות של פונקציה: רציפה, מונוטונית ממש, תמונת קטע תחת פונקציה היא קטע, הפונקציה חח"ע, ההופכית שלה רציפה וכו'...

משפט הכנה (מקרה פרטי של משפט ערך הביניים):

תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה אם ל-$f(a)$ ול-$f(b)$ יש סימנים הפוכים אז קיימת c כך ש: $a<c<b$ כך ש: $f(c)=0$.



משפט ערך הביניים:

נתון:

א. f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$.
ב. $f(b)<y<f(a)$ או $f(a)<y<f(b)$

אז:

$$\exists x\epsilon[a,b](f(x)=y)$$

מונוטוניות ורציפות:

- נתונה הפונקציה f שהיא עולה במובן הרחב. אם f מוגדרת בסביבה שמאלית מנוקבת של c אז הגבול החד-צדדי $lim_{x\to c^-}f(x)$ קיים במובן הרחב ומתקיים השיוויון:
$$lim_{x\to c^-}f(x) = sup\{f(x): x < c\}$$
- אם f מוגדרת בסביבה הימנית המנוקבת של c אז הגבול החד צדדי $lim_{x\to c^+}f(x)$ קיים במובן הרחב ומתקיים השיוויון:
$$lim_{x\to c^+}f(x) = inf\{f(x): x > c\}$$
- אם f עולה במובן הרחב בסביבה המנוקבת של c אז הגבולות החד-צדדים ב-c קיימים ומתקיים אי-השיוויון:
$$lim_{x\to c^-}f(x) \leq lim_{x\to c^+}f(x)$$

תנאי דומה מתקיים עבור פונקציה יורדת במובן הרחב, אולם אי-השיוויון מתהפך.

<u>סימון:</u> תהי f פונקציה ותהיי I קבוצה של מספרים בתחום של f, נסמן את התמונה של I תחת הפונקציה f כך:

$$f[I] = \{f(x): x\epsilon I\}$$

- תהיי f פונקציה מונוטונית במובן הרחב בקטע I, אז f רציפה ב-I אם ורק אם $f[I]$ הוא קטע.

פונקציות רציפות בקטע סגור:

<u>משפט החסימות של ויירשטראס:</u>

"כל פונקציה רציפה בקטע סגור היא חסומה בו".

<u>הוכחה:</u>

נניח ש-f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, נוכיח ש-f חסומה מלעיל ב-$[a,b]$, נניח בשלילה שהיא איננה חסומה בו.

לפיכך יש סדרה $\langle x_n \rangle$ של מספרים ב- $[a,b]$ כך ש:

$$f(x_n) \to \infty$$

לפי משפט בולצאנו ויירשטראס, יש תת סדרה מתכנסת $\langle x_{n_k} \rangle$.

מכיוון ש-f רציפה הסדרה $\langle f(x_{n_k}) \rangle$ מתכנסת למספר בקטע $[a,b]$, זאת בסתירה להיותה שואפת ל-∞.

<u>משפט המקסימום של ויירשטראס:</u>

תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, אז יש ל-f נקודת מקסימום ונקודת מינימום ב-$[a,b]$.

רציפות במידה שווה:

ההבדל בין רציפות במידה שווה לרציפות רגילה הוא בסדר הכמתים – דורשים למצוא δ שמתאים בבת אחת לכל הx-ים.

הפונקציה f רציפה במידה שווה בקטע I פירושו:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \epsilon I [(|x_1 - x_2| < \delta) \to (|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)]$$

או במילים אחרות – f רציפה ב-I אם ורק אם:

$$\forall \varepsilon > 0 \forall x_1 \epsilon I \exists \delta > 0 \forall x_2 \epsilon I [(|x_1 - x_2| < \delta) \to (|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)]$$

<u>משפט קנטור על רציפות במידה שווה:</u>

"פונקציה רציפה בקטע סגור היא רציפה במידה שווה".

נגזרות:

הגדרת הנגזרת של פונקציה f בנקודה c מוגדרת כך:

$$f'(c) = lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

- אם הגבול אינו קיים אז אומרים ש-f איננה גזירה ב-c.
- תחום ההגדרה של פונקצית הנגזרת f' היא קבוצת הנקודות עבורן הגבול קיים.

תהיי f פונקציה, אז (דרך נוספת להראות נגזרת במקום לכתוב $h\to 0$, לכתוב $x\to c$):

$$f'(c) = lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

הנגזרת הימנית של הפונקציה f בנקודה c מוגדרת כך (בהנחה שהגבול החד-צדדי קיים):

$$f'_{+}(c) = lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

באופן דומה מוגדרת הנגזרת השמאלית של f בנקודה c.

<u>**מסקנות**</u>:

1. הפונקציה f גזירה ב-c אם ורק אם הנגזרות החד-צדדיות בנקודה c קיימות ושוות.
2. אם הפונקציה גזירה בנקודה אז היא רציפה בה.
3. <u>כללי גזירות</u>:

לכל שתי פונקציות f,g מתקיימים השוויונות הבאים כאשר אגף ימין שלהם מוגדר:

$$(f+g)'(c) = f'(c)+g'(c)$$

$$(f-g)'(c) = f'(c)-g'(c)$$

$$(fg)'(c) = f'(c)g(c)+f(c)g'(c)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{g^2(c)}$$

הנגזרת של פונקציה מורכבת:

<u>כלל השרשרת (חישוב נגזרת של פונקציה מורכבת)</u>:

לכל שתי פונקציות f,g ומספר ממשי x_0 מתקיים השיוויון הבא (בהנחה שאגף ימין שלו מוגדר):

$$(g^\circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)$$

הנגזרת של פונקציה הופכית:

אם f^{-1} גזירה בנקודה y אז מתקיים:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

פונקציות זוגיות ואי-זוגיות:

אם הפוקנציה f זוגית פירושו:

$$\forall x[f(-x) = f(x)]$$

אם הפונקציה f אי-זוגית פירושו:

$$x\forall[f(-x) = -f(x)]$$

<u>דוגמא</u>: לכל n טבעי הפונקציה $f(x) = x^n$ היא זוגית אם ורק אם n זוגי, ואי-זוגית אם ורק אם n אי-זוגי.

- נתונות f,g פונקציות אז:

  א. אם f,g זוגיות אז $f+g$ זוגית.

  ב. אם f,g אי-זוגיות אז $f+g$ אי-זוגית.

  ג. אם f,g זוגיות שונות אז $f+g$ אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

  ד. אם f,g אותה זוגיות אז $fg,\frac{f}{g}$ זוגית.

  ה. אם f,g זוגיות שונות אז $fg,\frac{f}{g}$ אי-זוגית.

<u>מסקנות</u>:

1. פולינום הוא פונקציה זוגית אם ורק אם בכל המחוברים שמופיעים בו, המעריכים זוגיים, באותה דרך מגדירים פולינום פונקציה אי-זוגי.
2. תהי f פונקציה זוגית אם הגבול החד-צדדי $lim_{x\to 0^+}f(x)$ קים אז הגבול הדו-צדדי $lim_{x\to 0}f(x)$ קיים ושווה לו.

נגזרות של פולינום:

<u>נגזרת של כל איבר בפולינום:</u>

לכל n שלם מתקיים:

$$(x_n)' = nx^{n-1}$$

נגזרת של פולינום מהצורה הבאה:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

היא:

$$p(x)' = \sum_{i=0}^{n} i a_i x^{i-1}$$

פונקציות גזירות בקטע:

- c נקודת עליה של f (או במילים אחרות, f עולה בנקודה c) פירושו שיש סביבה מנוקבת V של c כל שלכל $x \epsilon V$ מתקיים:
$$[x < c \rightarrow f(x) < f(c)] \cap [x > c \rightarrow f(x) > f(c)]$$

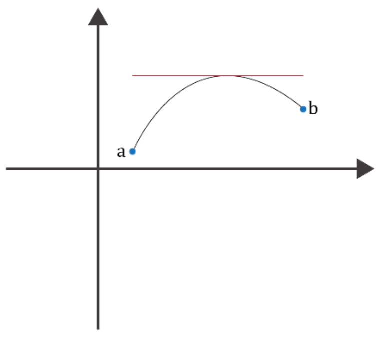
- f יורדת בנקודה c, פירושו שיש סביבה מנוקבת V של c כך שלכל $x \epsilon V$ מתקיים:
$$[x < c \rightarrow f(x) > f(c)] \cup [x > c \rightarrow f(x) < f(c)]$$

- c נקודת מקסימום מקומי של f פירושו שיש סביבה מנוקבת V של c כך שלכל $x \epsilon V$ מתקיים:
$$f(x) < f(c)$$
ונקודת מינימום מוגדרת באופן דומה.

- c נקודת קיצון מקומי של f פירושו ש-c נקודת מקסימום מקומי או נקודת מינימום מקומי של f.
- אין נקודה אחת שמקיימת בבת אחת יותר מאחת מההגדרות: עליה, ירידה, מקסימום מקומי, מינימום מקומי.
- אם $f'(c) > 0$ אז c נקודת עליה של f. אם $f'(c) < 0$ אז c נקודת ירידה של f.

<u>משפט פרמה:</u>

"אם c נקודת קיצון מקומי ו-$f'(c)$ מוגדר אז $f'(c)=0$".



<u>הוכחה:</u>

נניח בשלילה ש-$f'(c)\neq 0$. אם $f'(c)>0$, אז c היא נקודת עליה ולא נקודת קיצון מקומי, אם $f'(c)<0$ אז c נקודת ירידה ולא קיצון מקומי.

■

<u>משפט רול:</u>

אם f גזירה בקטע הפתוח (a,b), רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, ו-$f(a)=f(b)$ אז יש נקודת $c\epsilon(a,b)$ כך ש-$f'(c)=0$.

<u>הוכחה:</u>

לפי משפט המקסימום של ויירשטראס, יש בקטע $[a,b]$ נקודת מקסימום מוחלט ויש בו נקודת מינימום מוחלט.

מקרה א' – יש $c\epsilon(a,b)$ שהיא נקודת מקסימום מוחלט או מינימום מוחלט. לכן היא נקודת קיצון מקומי f גזירה בנקודה c ולכן לפי משפט פרמה $f'(c)=0$.

מקרה ב' – אין בקטע (a,b) נקודת קיצון מוחלטת. לפיכך a,b הן נקודות המקסימום והמינימום המוחלטות. אולם $f(a)=a$, לפיכך f קבועה בקטע $[a,b]$, אם כך, $f'(x)=0$ לכל $x\epsilon(a,b)$.

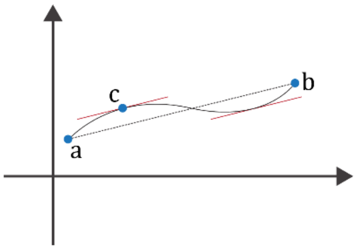
■

<u>משפט ערך הביניים של לגרנז'</u> (הכללה של משפט רול שבה מניחים $f(a)=f(b)$):

נניח ש-f גזירה בקטע (a,b) ורציפה ב-$[a,b]$.

אז יש נקודת $c\epsilon(a,b)$ כך ש:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



<u>מסקנות:</u>

1. נניח:
   א. f גזירה קטע (a,b) ורציפה בקטע $[a,b]$.
   ב. $\forall x\epsilon(a,b)[f'(x)=0]$

   אז f קבועה בקטע $[a.b]$.

2. תהי f פונקציה גזירה ב-$[a,b]$. אז:
   א. אם $f'\geq 0$ ב-(a,b) אז f עולה במובן הרחב ב-$[a,b]$.
   ב. אם $f'\leq 0$ ב-(a,b) אז f יורדת במובן הרחב ב-$[a,b]$.
   ג. אם $f'>0$ ב-(a,b) אז f עולה ממש ב-$[a,b]$.
   ד. אם $f'<0$ ב-(a,b) אז f יורדת ממש ב-$[a,b]$.

<u>משפט ערך הביניים של קושי:</u>

נתונות שתי הפונקציות: $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$.

שהן רציפות ב-$[a,b]$ וגזירות ב-(a,b). אם $\forall x\epsilon(a,b)[g'(x)\neq 0]$ אז:

$$\exists c\epsilon(a,b)[\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}]$$