פתרונות לשאלות מבחן

מבחן 23.01.2019 מועד (א)

שאלה 2: **(א)** הוכח כי יחס דמיון בין מטריצות הוא יחס שקילות.
(ב) הוכח כי קיימת מטריצה $A \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{F}) \setminus \{0\}$ שדומה רק לעצמה.

פתרון: (א) רפלקסיביות: לכל $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F})$ מתקיים $A = I^{-1}AI$ כאשר I היא מטריצה יחידה, לכן $A \sim A$. סימטריות: יהיו $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ מטריצות דומות. אזי קיימת מטריצה $P \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה, כך ש- $A = P^{-1}BP$. אבל אז $B = Q^{-1}AQ$ כאשר $Q^{-1} = P$, כלומר אם $A \sim B$ אז גם $B \sim A$.
טרנזיטיביות: יהי $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ מטריצה דומה ל $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, ומטריצה B דומה למטריצה $C \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. אזי קיימת מטריצה P הפיכה כך ש- $A = P^{-1}BP$. מצד שני קיימת מטריצה F הפיכה כך ש- $B = F^{-1}CF$. לכן

$$\begin{aligned} A &= P^{-1}BP = P^{-1}\left(F^{-1}CF\right)P = \left(P^{-1}F^{-1}\right)C\left(FP\right) \\ &= \left(FP\right)^{-1}C\left(FP\right) = \widetilde{P}^{-1}C\widetilde{P}, \end{aligned}$$

כאשר $\widetilde{P} = FP$. כלומר אם $A \sim B$ וגם $B \sim C$ מקבלים שגם $A \sim C$.

(ב) נתבונן במטריצה יחידה $I \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F})$. לפי הגדרה $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצות דומות אם קיימת מטריצה $P \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה, כך ש- $A = P^{-1}BP$. לפי סעיף (א) כול מטריצה דומה לעצמה, כגון מטריצה היחידה $A = I$ דומה לעצמה. אבל בלי הגבלת הכלליות P מטריצה הפיכה ונכון ש- $PAP^{-1} = PP^{-1} = I$, כלומר מטריצה דומה למטריצה יחידה היא מטריצה יחידה בלבד.

שאלה 4: נתונה מטריצה התלויה בפרמטר a: $M = \begin{bmatrix} a & a-5 & 4 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.
(א) לאילו ערכים של a המטריצה לכסינה?
(ב) לאילו ערכים של a הווקטור $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ הוא וקטור עצמי של M?

פתרון: (א) נתונה מטריצה ריבועית מסדר $n = 3$.
נמצא ערכים עצמיים של המטריצה M: הפולינום אופייני הוא

$$P_M(\lambda) = det\begin{bmatrix} a-\lambda & a-5 & 4 \\ 0 & 3-\lambda & a \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda)$$

והשורשים של המשוואה $P_M(\lambda) = 0$ הם $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = 3$ ו- $\lambda_3 = 4$. אם נבחר פרמטר a כך ש- $\lambda_1 \neq \lambda_2$ וגם $\lambda_1 \neq \lambda_3$, כיוון ש- $\lambda_2 \neq \lambda_3$ נקבל שערכים עצמיים שונים זה מזה בזוגות ולכן לפי משפט, נקבל $n = 3$ ווקטורים עצמיים $v_{\overline{1,3}}$ בת"ל. $v_{\overline{1,3}}$ בת"ל לכן מהווים בסיס ב-$\mathbb{R}^3$. אזי לפי משפט מטריצה ניתנת לליכסון כאשר

$[v_1|v_2|v_3]$ מטריצה מלכסנת ו־

$$[v_1|v_2|v_3]^{-1}\, M\, [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

יהי $a = 3$. נמצא ערכים עצמיים:

$$0 = det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 3-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2\,(4-\lambda)\,.$$

$\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_3 - R_2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2/3} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_1 - 4R_2} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

קיבלנו $V_{\lambda=3} = Span \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ כך שהריבועי גאומטרי של $\lambda = 3$ הוא $dimV_{\lambda=3} = 1$, והריבועי אלגברי של $\lambda = 3$ הוא 2. לפי משפט, כיוון ש־ $1 \neq 2$, עבור $a = 3$ המטריצה M לא ניתנת לליכסון.

הערה: אין צורך להמשיך כאן להציב $\lambda = 4$, כי מספיק שתנאי אחד של המשפט לא מתקיים כדי לקבוע שמטריצה לא ניתנת לליכסון (משפט 7 עמוד 93).

יהי $a = 4$. נמצא ערכים עצמיים:

$$0 = det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 & 4 \\ 0 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (4-\lambda)^2\,(3-\lambda)\,.$$

$\lambda = 4$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} s, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

כלומר $V_{\lambda=4} = Span \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ כך ש־ $dimV_{\lambda=4} = 2$. כיוון שריבועי

אלגברי של $\lambda = 4$ שווה לריבועי גאומטרי צריך להמשיך את הבדיקה.

נבדוק מקרה כאשר $\lambda = 3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[4R_3 - R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 - R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_2/4]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

כלומר $V_{\lambda=3} = Span \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ כך ש־ $dimV_{\lambda=3} = 1$. קיבלנו שבשני המקרים עבור $a = 4$, הריבועי אלגברי של $\lambda = 4$ שווה לריבועי גאומטרי, וגם ריבועי אלגברי של $\lambda = 3$ שווה לריבועי גאומטרי, לפי משפט המטריצה M ניתנת ללכסון.

מסכנה: המטריצה M ניתנת ללכסון אם ורק אם $a \neq 3$.

(ב) נתון $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. נחפש מספרים λ ו־a כך ש־ $Mv = \lambda v$:

$$Mv = \begin{bmatrix} a & a-5 & 4 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-5 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda v$$

לפי כך $a = 5$ ו־ $\lambda = 3$ מקיימים את השיוויון, כלומר עבור $a = 5$,
והוקטור עצמי $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ מתאים לערך עצמי $\lambda = 3$.

מבחן 17.02.2019 מועד (ב)

שאלה 1: **(א)** יהי $\mathbb{R}^{2\times 2}$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2. נתון:
$S = \left\{ M \in \mathbb{R}^{2\times 2} : M \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. הוכיחו כי S הוא תת־מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.
(ב) הוכיחו: אם למטריצה Z יש ערך עצמי λ עם וקטור עצמי v, אז למטריצה $Z^3 + I$ יש ערך עצמי $\lambda^3 + 1$ עם אותו וקטור עצמי v.

פתרון: (א) $\mathbf{0} \in S$, כי $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ כלומר $S \neq \emptyset$. יהיו $A, B \in S$ ומספרים $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. אזי

$$(\alpha A + \beta B) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = (\alpha A) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + (\beta B) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \left(A \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \beta \left(B \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$
$$= \alpha \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \beta \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

כלומר $\alpha A + \beta B \in S$ והקבוצה S היא תת־מרחב של $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(ב) יהי $Z \in Mat_{n\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה, וקטור עצמי $v \in \mathbb{F}^n$ המתאים לערך עצמי $\lambda \in \mathbb{F}$ של המטריצה Z. במילים אחרות מתקיים $Zv = \lambda v$. אזי

$$\left(Z^3 + I\right) v = Z^3 v + \{Iv\} = Z^2 (Zv) + \{v\} = Z^2 (\lambda v) + v$$
$$= \lambda Z (Zv) + v = \lambda Z (\lambda v) + v = \lambda^2 (Zv) + v$$
$$= \lambda^2 (\lambda v) + v = \lambda^3 v + v = \left(\lambda^3 + 1\right) v$$

קיבלנו ש־ $\left(Z^3 + I\right) v = \left(\lambda^3 + 1\right) v$, כלומר בלי הגבלת הכלליות $v \in \mathbb{F}^n$ הוא וקטור עצמי המתאים לערך עצמי $\lambda^3 + 1$ של המטריצה $Z^3 + I$.

שאלה 2: יהי $\mathbb{R}_1[x]$ המרחב הווקטורי של הפולינומים במשתנה x בעלי דרגה קטנה־שווה ל־1 עם מקדמים ממשיים. נתון: $p(x) = 3x - 2, \quad q(x) = 5x - 4$.
בנוסף נתון ש־B הוא בסיס ל־$\mathbb{R}_1[x]$ המקיים $[p]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, [q]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$.
(א) מצאו את הבסיס B.
(ב) נתון $[r(x)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. מצאו את $r(x)$.

פתרון: (א) התצוגה $[p(x)]_E = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, ו־ $[q(x)]_E = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$ היא תצוגה של הוקטורים $p(x)$ ו־ $q(x)$ בבסיס סטנדרטי E של $\mathbb{R}_1[x]$. נסמן $B = (b_1, b_2)$, ונגדיר מטריצת מעבר $A = [I]_E^B$ מבסיס B לבסיס E. יהי $T : \mathbb{R}_1[x] \to \mathbb{R}_1[x]$ ההעתקת זהות $T \equiv I$. לפי משפט $[T(v)]_E = [T]_E^B \cdot [v]_B$, ולכן $[v]_E = [I]_E^B \cdot [v]_B$, כאשר מטריצה מעבר $[I]_E^B = [b_1 | b_2]$ מורכבת מהעמודות $[b_1]_E = b_1$ ו־ $[b_2]_E = b_2$.

אזי

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = [I]_E^B \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

נשים לב, שהשורות במטריצה מימין הן בת"ל, לכן לפי שיטה של מטריצה מצורפת

$$[I]_E^B = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}^t \right)$$
$$= \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -14 \\ 10 & 17 \end{bmatrix}$$

כלומר הקואורדינטות של הווקטורי בסיס B בבסיס סטנדרטי הם $[b_1]_E = \begin{bmatrix} -8 \\ 10 \end{bmatrix}$,
$[b_2]_E = \begin{bmatrix} -14 \\ 17 \end{bmatrix}$, והוקטורי בסיס יהיו $b_1(x) = -8 + 10x$ ו־ $b_2(x) = -14 + 17x$.

(א) דרך 2.

$$\begin{cases} 2b_{11} - b_{12} = -2 \\ 2b_{21} - b_{22} = 3 \end{cases} \Leftarrow \quad 2 \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -8 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \Leftarrow \begin{cases} \frac{1}{2} b_{11} = -4 \\ \frac{1}{2} b_{21} = 5 \end{cases} \Leftarrow \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} -14 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} \quad \Leftarrow \begin{cases} 2\,(-8) - b_{12} = -2 \\ 2\,(10) - b_{22} = 3 \end{cases} \quad \Leftarrow$$
$$[b_2(x)]_E = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ 17 \end{bmatrix} \quad , [b_1(x)]_E = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \Leftarrow$$
$$.b_2(x) = -14 + 17x \quad , b_1(x) = -8 + 10x \quad \Leftarrow$$

(ב) כיוון ש־ $[r(x)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ והבסיס B מצאנו, נקבל

$$[r(x)]_E = 0 \cdot [b_1(x)]_E + 1 \cdot [b_2(x)]_E = \begin{bmatrix} -14 \\ 17 \end{bmatrix}$$

לכן

$$.r(x) = -14 + 17x$$

שאלה 3: נתון ש־A היא מטריצה מסדר 2×2 שיש לה וקטור עצמי $v_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ השייך לערך עצמי $\lambda_1=0$, ווקטור עצמי $v_2=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$ השייך לערך עצמי $\lambda_2=-1$.

(א) מצאו את A.

(ב) האם v_1+v_2 הוא וקטור עצמי של A?

(ג) חשבו את A^9.

פתרון: (א) נחפש מטריצה A כך ש־ $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ וגם $\begin{bmatrix}-4\\-5\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}$.

נרשום את שתי שיוויונים הנ"ל כמשוואה אחת $\begin{bmatrix}0&-4\\0&-5\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}1&4\\1&5\end{bmatrix}$.

נשים לב שהוקטורים $v_{\overline{1,2}}$ בת"ל, כלומר ניתן לחשב מטריצה הופכית ולכן

$$A=\begin{bmatrix}0&-4\\0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4\\1&5\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&-4\\0&-5\end{bmatrix}\left(\frac{1}{1}\begin{bmatrix}5&-1\\-4&1\end{bmatrix}^{t}\right)$$
$$=\begin{bmatrix}0&-4\\0&-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&-4\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-4\\5&-5\end{bmatrix}$$

(ב) הפולינום אופייני של A הוא $P_A(\lambda)=\det\begin{bmatrix}4-\lambda&-4\\5&-5-\lambda\end{bmatrix}=\lambda(\lambda+1)$.

כאשר $\lambda=0,-1$ ערכים עצמיים. נמצא מרחבים עצמיים של המטריצה A.

$\lambda=0$:

$$\left[\begin{array}{cc|c}4&-4&0\\5&-5&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}t,\qquad t\in\mathbb{F}$$

לכן

$$V_{\lambda=0}=ker(A)=Span\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

$\lambda=-1$:

$$\left[\begin{array}{cc|c}5&-4&0\\5&-4&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\1\end{bmatrix}t,\qquad t\in\mathbb{F}$$

לכן

$$V_{\lambda=-1}=ker(A+I)=Span\left\{\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

נחשב $v_1+v_2=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$. קיבלנו ש־ $\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\notin V_{\lambda=0}$

וגם $V_{\lambda=-1} \notin \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$, לכן הווקטור $v_1 + v_2$ הוא לא וקטור עצמי של המטריצה A.

(ג) לפי משפט $D = P^{-1}AP$, כאשר A נתונה, $D = diag\,(0,-1)$, והמטריצה מלכסנת היא $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. אזי $A = PDP^{-1}$ ולכן

$$
\begin{aligned}
A^9 &= \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}^9 = \left(\begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \right)^9 = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-1)^9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{5} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} = A.
\end{aligned}
$$