ההוכחה הלא מושלמת (רמה טכנית ההוכחה שקראנו לגבי הגיונית כבר הוכחה עד השלמה)

נניח בשלילה כי $\sqrt{2}$ רציונלי, כלומר יש $n,k\in\mathbb{N}$ כך ש $\sqrt{2}=\frac{n}{k}$, נניח בה"כ כי $\frac{n}{k}$ שבר מצומצם (כי אחרת נצמצם...)

$$\frac{n}{k}=\sqrt{2} \quad \backslash \text{ בריבוע}$$
$$\frac{n^2}{k^2}=2$$
$$n^2=2k^2$$

$\Leftarrow$ n^2 זוגי $\overset{\text{למה}}{\Leftarrow}$ n זוגי $n=2c$ עבור $c\in\mathbb{N}$

$$(2c)^2=2k^2$$
$$4c^2=2k^2 \quad \backslash :2$$
$$2c^2=k^2$$

$\Leftarrow$ k^2 זוגי $\Leftarrow$ k זוגי. קבלנו כי גם n וגם k זוגיים בסתירה לכך ש-$\frac{n}{k}$ שבר מצומצם. (מהותית: צמצום אינסופי) משל

הבעיה בהוכחה היא שלא הוכחנו שכל מספר רציונלי ניתן להציג כשבר מצומצם. לכן נביא עכשיו הוכחה אלטרנטיבית שבה נשתמש בעקרון הסדר הטוב כדי לקבל הוכחה שלא מניחה אף הנחה סמויה.

כאן מתחילה הרצאה II

הוכחה עם עקרון הסדר הטוב (פחות אינטואיטיבית ויותר כבדה מהקודמת)

כאן ההוכחה → פורמלית. הוכחה יותר מסובכת שבמובן

נניח בשלילה כי קיימים $n,k\in\mathbb{N}$ כך ש $\sqrt{2}=\frac{n}{k}$.

$\Leftarrow$ $2=\frac{n^2}{k^2}$ $\Leftarrow$ $2k^2=n^2$

נגדיר

זוגות (מונה, מכנה) שמתארים $\sqrt{2}$

$$S=\{(n,k)\mid 2k^2=n^2,\ n,k\in\mathbb{N}\} \overset{\text{עם הנחת השלילה}}{\Rightarrow} S\neq\emptyset$$

על S אי אפשר להפעיל את עקרון הסדר הטוב כי זו קבוצה של זוגות ולא של טבעיים. לכן נגדיר קבוצה חדשה

"המכנים" מתוך S : $S'=\{k\in\mathbb{N}\mid \overset{\text{קיים}}{\exists} n\in\mathbb{N} \text{ s.t. } (n,k)\in S\}$

"כל הטבעיים שהם הרכיב הימני של זוג ב-S".

$S\neq\emptyset \Rightarrow \emptyset\neq S'\subseteq\mathbb{N} \Rightarrow$ יש ב-S' איבר מינימלי k^*.

יהי n^* (המונה המתאים = "מן הזוג של k^* ב-S") מקיים $(n^*,k^*)\in S$.

בס"ד

[הסתירה שרצינו לקבל: יש זוג $(p,q)\in S$ (ומכאן $q\in S'$) כך ש- $q<k^*$.)

נבחר $q=n^*-k^*$. נרצה להראות:

א. $k^*>q\in \mathbb{N}$

ב. יש $p>0$ כך ש- $(p,q)\in S$ ומכאן $q\in S'$. } מכאן נקבל סתירה להיותו של k^* איבר מינימלי של S'.

<u>הנתון הקבוע:</u> $(n^*,k^*)\in S$ ולכן $2(k^*)^2=(n^*)^2$

נוכיח את א': צ"ל: $k^* > \overbrace{n^*-k^*}^{q} > 0$ [צד ימין ברור כי $n^*>k^*$ לפי "הנתון הקבוע"]

צ"ל: $2k^* > n^*$

הוכחה: נניח בשלילה $2k^* \leq n^*$ (השלילה של $>$ היא $\leq$) $\Rightarrow 4(k^*)^2 \leq (n^*)^2 \underset{\text{לפי הנתון הקבוע}}{=} 2(k^*)^2 \Rightarrow 4\leq 2$ סתירה.

נוכיח את ב': מחפשים $p>0$ כך ש $2q^2=p^2$.

$$2q^2 = 2(n^*-k^*)^2 = 2\left[(n^*)^2-2n^*k^*+(k^*)^2\right] =$$

$$= \underbrace{\underbrace{2(n^*)^2}_{(n^*)^2+(n^*)^2}}_{2(k^*)^2+(n^*)^2} - 4n^*k^* + 2(k^*)^2$$

לפי "הנתון הקבוע"

$$= 4(k^*)^2 - 4n^*k^* + (n^*)^2 = \underbrace{(2k^*-n^*)}_{p}{}^2$$

נבחר $p=2k^*-n^*>0$ (בסעיף א' הראינו כי $2k^*>n^*$) $\Rightarrow$ אז $q>0$ ומקיים $2q^2=p^2 \Rightarrow (p,q)\in S \Rightarrow q\in S'$ וכן $q<k^*$

בסתירה למינימליות k^* ב-S'.

[כעת אני מדלג על הוכחה שלישית המופיעה בספר]

בס"ד

תזכורת על מושגים יסודיים:

$C=\{1,2,4,6\}$, $D=\{1,2,3,4,5,6\}$

קב' = אוסף איברים ללא חזרות. (גם 1 מופיע פעמיים זה כמו אם מופיע פעם אחת)

$1\in C$ "איבר בקב' A"

$A\subseteq B$ "A מוכלת ב-B" "A חלקית ל-B" "A תת קב' של B"

<u>הגדרה:</u> $A\subseteq B$ אם לכל $a\in A$ מתקיים $a\in B$

(אם רוצים להראות כי $A\subseteq B$ עלינו להראות שכל איבר ב-A הוא גם איבר ב-B)

לפעמים מסמנים $A\subset B$ ולא $A\subseteq B$.

$\emptyset$ = קב' ריקה.

אמת/שקר

$\emptyset\in C$ ✗

$\emptyset\subset C$ ✓

לכל קב' A, מתקיים $\emptyset\subset A$

איך נראה שוויון בין 2 קבוצות? כדי להראות $A=B$ עלינו להראות $A\subset B$ וגם $B\subset A$

$A\subset B$: כל איבר של A נמצא גם ב-B

$B\subset A$: כל איבר ב-B נמצא גם ב-A

לפעמים מסמנים:

$\{x\in\mathbb{R} \mid 0<x<1\} = (0,1)$ = הקטע הפתוח בין 0 ל-1, אין איבר מינימלי!

עקרון האינדוקציה החלשה - תזכורת:

יהי $S(n)$ היגד עבור $n\in\mathbb{N}$.

<u>אם</u>

(בסיס) $S(1)$ נכונה

(צעד האינדוקציה) מכך ש-$S(k)$ נכונה נובע ש-$S(k+1)$ נכונה

<u>אז</u> הטענה נכונה לכל $n\in\mathbb{N}$.

8.5

עקרון האינדוקציה החזקה (השלמה)

יהי $S(n)$ היגד עבור $n\in\mathbb{N}$.

אם:

(בסיס) $S(1)$ נכונה.

(צעד האינדוק') מההנחה ש-$S(1),S(2),\ldots,S(k)$ נכונות נובע שגם $S(k+1)$ נכונה.

אזי: $S(n)$ נכונה לכל $n\in\mathbb{N}$.

ההבדל בין עקרון האינדוק' החלש לעקרון האינדוק' החזק:

באינדוק' חלשה מניחים כי פסוק נכונות לאבר כלשהו k ומוכיחים עבור האבר הבא בתור.

באינדוק' חזקה מניחים נכונות לכל האיברים מ-1 עד k, ומוכיחים עבור האבר הבא בתור, $k+1$.

רקע העשרה למי שרוצה להבין את פשר המושגים "חלשה" ו"חזקה" כאן:

מתי אומרים שטענה מתמטית מסוימת היא חזקה יותר מטענה אחרת?
טענה מתמטית אפשר לנסח כ"אם ___ אז ___". כדי שטענה תיחשב חזקה יותר מטענה אחרת יש שתי אפשרויות - או שהתוצאה ב"אז" תהיה חזקה יותר (משיגים יותר מידע) או שהדרישה ב"אם" תהיה חלשה יותר (דורשים פחות ובכל זאת מקבלים אותו דבר).

עקרון האינדוקציה החזקה, הוא טענה חזקה יותר מעקרון האינדוק' החלשה, במובן השני - דורשים פחות ומשיגים אותו דבר. כי הדרישה בצעד האינדוקציה היא חלשה יותר דווקא בעקרון האינדוקציה החזקה: בעוד שבעקרון האינדוק' החלשה כבר מנכונות $S(k)$ נובעת נכונות $S(k+1)$, בעקרון האינדוק' החזקה צריך הרבה יותר מזה - צריך נכונות של $S(1),\ldots,S(k)$ כדי לקבל נכונות של $S(k+1)$. מכיוון ש"צעד האינדוק'" נמצא בתוך ה"אם" של שני העקרונות, יוצא שה"אם" של עקרון האינדוק' החזקה היא חלש יותר, ולכן העקרון כולו חזק יותר. (זה באמת מבלבל...) ☺