ההוכחה הלא מושלמת (ומה שבעצם ההוכחה שנראית לנו הגיונית כבר הוכחה עד השאלה)

נניח בשלילה כי $\sqrt{2}$ רציונלי, כלומר יש $n,k \in \mathbb{N}$ כך ש $\sqrt{2}=\frac{n}{k}$, נניח בה"כ כי $\frac{n}{k}$ שבר מצומצם (כי אחרת נצמצם...)

$$\frac{n}{k}=\sqrt{2} \quad \backslash \text{ בריבוע}$$
$$\frac{n^2}{k^2}=2$$
$$n^2=2k^2$$

⇐ n^2 זוגי $\overset{\text{טענה}}{\Leftarrow}$ n זוגי $n=2c$ עבור $c\in\mathbb{N}$

$$(2c)^2=2k^2$$
$$4c^2=2k^2 \quad \backslash :2$$
$$2c^2=k^2$$

⇐ k^2 זוגי ⇐ k זוגי. קבלנו כי גם n וגם k זוגיים בסתירה לכך ש-$\frac{n}{k}$ שבר מצומצם. (מהותית: צמצום אינסופי) מש"ל

הבעיה בהוכחה היא שלא הוכחנו שכל מספר רציונלי ניתן להצגה כשבר מצומצם. לכן נביא עכשיו הוכחה אלטרנטיבית שבה נשתמש בעקרון הסדר הטוב כדי לקבל הוכחה שלא מניחה אף הנחה סמויה.

<u>הרצאה II</u>

הוכחה עם עקרון הסדר הטוב (פחות אינטואיטיבית ויותר כבדה מהקודמת) ← כיון שההוכחה מפורטת, ההוכחה יותר מסובכת במובנה

נניח בשלילה כי קיימים $n,k\in\mathbb{N}$ כך ש $\sqrt{2}=\frac{n}{k}$

⇐ $2=\frac{n^2}{k^2}$ ⇐ $2k^2=n^2$

נגדיר

זוגות (מונה, מכנה) שמתארים $\sqrt{2}$

$S=\{(n,k) \mid 2k^2=n^2,\ n,k\in\mathbb{N}\}$ $\overset{\text{עפ"י הנחת השלילה}}{\Leftarrow}$ $S\neq\emptyset$

על S אי אפשר להפעיל את עקרון הסדר הטוב כי זו קב' של זוגות ולא של טבעיים. לכן נגדיר קב' חדשה

$S'=\{k\in\mathbb{N} \mid \overset{\text{קיים}}{\exists}\, n\in\mathbb{N} \text{ s.t. } (n,k)\in S\}$: "המכנים" מתוך S

"כל הטבעיים שהם הרכיב הימני של זוג ב-S".

$S\neq\emptyset \Rightarrow \emptyset\neq S'\subseteq\mathbb{N} \Rightarrow$ יש ב-S' איבר מינימלי k^*.

יהי n^* (המונה המתאים = "בן הזוג" של k^* ב-S) מקיים $(n^*,k^*)\in S$.

[הסתירה שנקבל לבד: יש זוג $(p,q)\in S$ (ומאליו $q\in S'$) כך ש- $q<k^*$.]

נבחר $q=n^*-k^*$. נרצה להראות:

א. $k^*>q\in\mathbb{N}$

ב. יש סוף p כך ש- $(p,q)\in S$ ומאליו $q\in S'$.

{ מכיון נקבל סתירה להיותו של k^* איבר מינימלי של S'.

נראה את א: צ"ל: $k^*>\overbrace{n^*-k^*}^{q}>0$ [זה ימין ברור כי $k^*<n^*$ לפי ?]

צ"ל: $2k^*>n^*$ (הנתון הידוע: $(n^*,k^*)\in S$ ולכן $2(k^*)^2=(n^*)^2$)

הוכחה: נניח בשלילה $2k^*\le n^*$ (השלילה של $>$ זה $\le$) $\Leftarrow 4(k^*)^2\le (n^*)^2 = 2(k^*)^2$ $\Leftarrow 4\le 2$ סתירה.

נראה את ב: מחפשים סוף p כך ש $2q^2=p^2$.

$$2q^2=2(n^*-k^*)^2=2\left[(n^*)^2-2n^*k^*+(k^*)^2\right]=$$

$$=\underbrace{\underbrace{2(n^*)^2}_{(n^*)^2+(n^*)^2}}_{2(k^*)^2+(n^*)^2}-4n^*k^*+2(k^*)^2$$

$$=4(k^*)^2-4n^*k^*+(n^*)^2=(\underbrace{2k^*-n^*}_{p})^2$$

נבחר $p=2k^*-n^*>0$ $\Leftarrow$ אז $q>0$ ומקיים $2q^2=p^2$ $\Leftarrow$ $(p,q)\in S$, $q<k^*$ $\Leftarrow$ $q\in S'$

בסעיף א הראנו כי $2k^*>n^*$

בסתירה למינימליות k^* ב-S'.

[כאן אני מדלגת על הוכחה שלישית המופיעה בספר]

סוף הרצאה 1

דוגמא של דף נספח!

כצב

דיון: אם רוצים להוכיח שטענה נכונה לכל n שגדול מ-n_0, מה משתנה? (תשובה: בסיס ל-n_0)

פונקציית העצרת

(פונק' גמא היא הרחבה של העצרת למספרים מרוכבים $\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$)

אנחנו זוכרים מהתיכון כי $n! = 1\cdot 2\cdots n$. כדאי לזכור כי $0!=1$

הגדרה (רקורסיבית, אינדוקטיבית) יהי $n\in\mathbb{N}$, אז $n!$ מוגדר ע"י

א. $1!=1$

ב. $n! = n\cdot(n-1)!$

טענה: $\underset{\text{לכל } 4\le n\in\mathbb{N}}{2^n \le} \; n! \; \underset{\text{לכל } n\in\mathbb{N}}{\le n^n}$

הבעיה: $\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{n\text{ פעמים}} \le 1\cdot 2\cdots n \le \underbrace{n\cdots n}_{n\text{ פעמים}}$ (נשים לב מה קורה ב-$n=1,2,3$)

הוכחה באינדוקציה:

טענה: לכל $n\in\mathbb{N}$ $n!\le n^n$

הוכחה. בדיקה עבור $n=1$: $1!=1\le 1^1$

הנ"א: נניח נכונות עבור k כלשהו: $k!\le k^k$

צ"ל עבור $k+1$: $(k+1)!\le (k+1)^{k+1}$

אזהרה: לא לכתוב "נניח נכונות לכל k טבעי" (היו שנים שהורידו על זה במבחן)

הוכחה:

$$(k+1)! = k!\cdot(k+1) \underset{\text{לפי ה"א}}{\le} k^k\cdot(k+1) \underset{\text{רק הגדלנו בסיס (כפולים)}}{\le} (k+1)^k\cdot(k+1) = (k+1)^{k+1}$$

טענה: לכל $4\le n\in\mathbb{N}$: $2^n\le n!$

הוכחה: בדיקה עבור $k=4$: $16=2^4\le 4!=24$ ✓

הנ"א: נניח נכונות עבור k כלשהו: $2^k\le k!$

צ"ל עבור $k+1$: $2^{k+1}\le (k+1)!$

הוכחה:

$$2^{k+1} = 2\cdot 2^k \underset{\text{ה"א}}{\le} 2\cdot k! \underset{\text{רק הגדלנו איבר}}{\le} (k+1)\cdot k! = (k+1)!$$

$\boxed{\text{לא הספקנו מספר 2 ...}}$