בס"ד

אלגברה לינארית 2

מספר הקורס: 2-7028210-1,2,3 ⬩ תש"ף סמסטר א' מועד ב', 27.2.20

מרצים ומתרגלים: יובל פליקר, יונה צרניאבסקי, זאב סמירנוף, ענבר סדון, אוהד מדמון, שי לוי, רן סגל, יבגני פורמן. משך הבחינה: 3 שעות.

עיינו היטב בהוראות הבחינה!

אפשר לענות על כל השאלות. המלצה: התמקדו תחילה בחלק 1 המכיל את שאלות קלות יחסית. מותר להשתמש רק בדפי חומר עזר המצורפים לשאלון ובמחשבון כיס פשוט. אסור להשתמש בכל מכשיר אלקטרוני אחר. בדקו היטב את כל מה שאתם כותבים! בשאלות חישוביות השתדלו מאד לקבל תשובה נכונה! אין לצפות להרבה נקודות "על הדרך" בהעדר תשובה נכונה! הסברים חייבים להכיל מילים, לא רק חישובים וסימונים מתמטיים. בהוכחות יש לצטט את המשפטים או התכונות או ההגדרות שעליהם אתם מסתמכים. אין לבקש ממרצה או ממתרגל בזמן המבחן לעיין במה שכתבתם. אין לבקש ממרצה או ממתרגל בזמן המבחן עזרה בפתרון או הכוונה או רמז או הדרכה. בזמן המבחן אפשר לשאול מרצה או מתרגל רק בעניין ניסוח של שאלה.

חלק 1. חישובים והוכחות קלות יחסית (80 נקודות)

שאלה 1: (16 נקודות) נתון: $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(x-y,7x-3y)$.

מצאו את $[T]_B^B$ כאשר $B=\big((1,2),(2,3)\big)$. בדקו היטב את התשובה!

שאלה 2: (16 נקודות) נתון: $S:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$,

$S(a,b,c,d)=(8a-2b+2c-8d\,,\,-7a+b+8d\,,\,-6a+2c+6d\,,\,a-2b+3c-d)$.

האם המספר 8 הוא ערך עצמי של S? נמקו היטב ובדקו היטב את התשובה!

שאלה 3: (16 נקודות) תהי $A\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ אנטי-סימטרית (ז.א. $A^t=-A$).

הוכיחו שהערך העצמי הממשי היחיד של A הוא אפס. נמקו היטב!

שאלה 4: (20 נקודות) נתון: $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,

$L(x,y,z)=(4x+y+z\,,\,x+4y+z\,,\,x+y+4z)$. מצאו בסיס אורתונורמלי ל-$\mathbb{R}^3$ המורכב מווקטורים עצמיים של L. (ערכים עצמיים: 6 נקודות. וקטורים עצמיים: 6 נקודות. ארתוגונליזציה ונירמול: 8 נקודות.) בדקו היטב את התשובה!

שאלה 5: (12 נקודות) יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית כך ש-$\langle T(\vec{u}),\vec{v}\rangle=0$ עבור כל $\vec{u},\vec{v}\in V$.

הוכיחו ש-$T=0$. נמקו היטב!

חלק 2. בעיות חשיבה (40 נקודות)

שאלה 6: (10 נקודות) נתון: $Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית, $\dim\ker(Q)=1$,
המספר $\sqrt{2}$ הוא ערך עצמי של Q, $\vec{0}\neq\vec{w}\in\operatorname{Im}(Q)$, $\vec{0}\neq\vec{u}\in\ker(Q)$.
הוכיחו שהווקטורים $\vec{u},\vec{w}$ בלתי תלויים לינארית. נמקו היטב!

שאלה 7: (10 נקודות) נתון: $B=\begin{bmatrix} a & 1 \\ c & 3 \end{bmatrix}$, $a,c\in\mathbb{Z}$ כך שהפולינום האופייני של B
הוא $(x-1)^2$, ז.א. $\det(xI_2-B)=(x-1)^2$. מצאו את המספרים a,c (4 נקודות)
והוכיחו על פי הגדרת דמיון מטריצות ש-B דומה למטריצה $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

שאלה 8: (10 נקודות) תהי A מטריצה 4×4 עם רכיבים ממשיים
כך ש-$Trace(A)=rank(A)=1$. הוכיחו ש-A ניתנת ללכסון. נמקו היטב!

שאלה 9: (10 נקודות) כרגיל, $M_{2\times2}(\mathbb{R})=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\middle| a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$ מרחב
מטריצות עם פעולות חיבור וכפל בסקלר טבעיות.
נגדיר: $U=\left\{A\in M_{2\times2}(\mathbb{R})\,\middle|\, Trace(A)=0\right\}$.
האם קיימת העתקה לינארית $T:M_{2\times2}(\mathbb{R})\to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ המקיימת את התנאים
הבאים: $\ker(T)=U$ וגם $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\in\operatorname{Im}(T)$?
אם כן, הביאו דוגמה מפורשת של העתקה כזאת.
אם לא, הוכיחו שהעתקה כזאת אינה קיימת.
נמקו היטב!

בהצלחה !

בס"ד

<u>הגדרות, משפטים, נוסחאות. אלגברה לינארית 2</u>

<u>הגדרת העתקה לינארית.</u> יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל שדה F. העתקה $T:V\to W$ נקראת לינארית אם (1) $T\left(\vec{v}_1+\vec{v}_2\right)=T\left(\vec{v}_1\right)+T\left(\vec{v}_2\right)$ לכל $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$ וגם

(2) $T\left(\alpha\vec{v}\right)=\alpha T\left(\vec{v}\right)$ לכל $\vec{v}\in V,\alpha\in F$.

<u>הגדרת גרעין ותמונה</u> של העתקה לינארית $T:V\to W$.

גרעין: $\ker T=\left\{\vec{v}\in V\mid T\left(\vec{v}\right)=\vec{0}\right\}$. תמונה: $\operatorname{Im}T=\left\{\vec{w}\in W\mid \exists\vec{v}\in V:\vec{w}=T\left(\vec{v}\right)\right\}$.

<u>הגדרת מטריצה מייצגת.</u> תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית, $B=\left(\vec{b}_1,...,\vec{b}_n\right)$ בסיס של V, $C=\left(\vec{c}_1,...,\vec{c}_k\right)$ בסיס של W. לכל וקטור $\vec{w}\in W$ קיים יצוג יחיד כצירוף לינארי של וקטורי בסיס C: $\vec{w}=\alpha_1\vec{c}_1+\alpha_2\vec{c}_2+...+\alpha_k\vec{c}_k$. סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k\in F$ נקראים קואורדינטות של וקטור $\vec{w}$ בבסיס C. נסמן $\left[\vec{w}\right]_C=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_k\end{bmatrix}$. אז מטריצה המייצגת של העתקה T בבסיסים B ו- C היא בנויה מעמודות $\left[T\left(\vec{b}_i\right)\right]_C$ $(i=1,2,...,n)$: $\left[T\right]_C^B=\left[\ \left[T\left(\vec{b}_1\right)\right]_C\mid\left[T\left(\vec{b}_2\right)\right]_C\mid\cdots\mid\left[T\left(\vec{b}_n\right)\right]_C\ \right]$.

התכונה העיקרית של מטריצה מייצגת. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית, יהי $B=\left(\vec{b}_1,...,\vec{b}_n\right)$ בסיס של V, יהי $C=\left(\vec{c}_1,...,\vec{c}_k\right)$ בסיס של W. אזי לכל וקטור $\vec{v}\in V$ מתקיים: $\left[T\right]_C^B\cdot\left[\vec{v}\right]_B=\left[T\left(\vec{v}\right)\right]_C$.

מטריצת מעבר בין שני בסיסים באותו מרחב: $B=\left(\vec{b}_1,...,\vec{b}_n\right)$ ו $C=\left(\vec{c}_1,...,\vec{c}_n\right)$ שני בסיסים של V,

$I:V\to V$ העתקת הזהות, ז.א. $I(\vec{v})=\vec{v}$ לכל $\vec{v}\in V$.

מטריצת מעבר היא $\left[I\right]_C^B=\left[\ \left[\vec{b}_1\right]_C\mid\left[\vec{b}_2\right]_C\mid\cdots\mid\left[\vec{b}_n\right]_C\ \right]$. $\left[I\right]_C^B\left[\vec{v}\right]_B=\left[\vec{v}\right]_C$ לכל $\vec{v}\in V$.

<u>**תכונות נבחרות של העתקות לינאריות**</u>

1. תהי $T:V\to W$ העתקה המקיימת את התכונה הבאה:
$T\left(\vec{v}_1+\vec{v}_2\right)=T\left(\vec{v}_1\right)+T\left(\vec{v}_2\right)$ לכל $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$. אזי $T\left(\vec{0}\right)=\vec{0}$.

2. העתקה $T:V\to W$ לינארית אם ורק אם
$T\left(\vec{v}_1+\alpha\vec{v}_2\right)=T\left(\vec{v}_1\right)+\alpha T\left(\vec{v}_2\right)$ לכל $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$, $\alpha\in F$.

בתכונות הבאות: V,W מרחבים וקטוריים ממימד סופי, $T:V\to W$ העתקה לינארית.

3. $\ker T$ מהווה תת-מרחב ב- V.

4. $\operatorname{Im}T$ מהווה תת-מרחב ב- W.

5. T חד-חד-ערכית אם ורק אם $\ker T=\left\{\vec{0}\right\}$.

6. אם $V=Span\left(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\right)$ אז $\operatorname{Im}T=Span\left(T\left(\vec{v}_1\right),T\left(\vec{v}_2\right),\dots,T\left(\vec{v}_n\right)\right)$.

7. אם $T\left(\vec{v}_1\right),T\left(\vec{v}_2\right),\dots,T\left(\vec{v}_n\right)$ בת"ל ב- W אז $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ בת"ל ב- V.

8. $\dim V=\dim\ker T+\dim\operatorname{Im}T$.

9. נניח ש- $\dim V=\dim W$. אזי T חד-חד-ערכית אם ורק אם T "על".

10. אם $\dim V < \dim W$ אזי T לא "על".
11. אם $\dim V > \dim W$ אזי T לא חד-חד-ערכית.
12. יהי $B=\left(\vec{b}_1,...,\vec{b}_n\right)$ בסיס של V, יהיו $\vec{w}_1,...,\vec{w}_n \in W$. אזי קיימת העתקה לינארית $T:V\to W$ יחידה כך ש- $T\left(\vec{b}_i\right)=\vec{w}_i$ לכל i, $1\le i\le n$. (כלומר, העתקה לינארית מוגדרת באופן חד-משמעי על ידי קביעת תמונות של וקטורי בסיס מסוים)

<u>הגדרת הרכבת העתקות.</u> יהיו V, W, U מרחבים וקטוריים מעל שדה F, תהיינה $T:V\to W$, $S:W\to U$ שתי העתקות. העתקה $S\circ T:V\to U$ מוגדרת כך: $\left(S\circ T\right)\left(\vec{v}\right)=S\left(T\left(\vec{v}\right)\right)$ לכל $\vec{v}\in V$
.

20. יהיו V, W, U מרחבים וקטוריים מעל שדה F, תהיינה $T:V\to W$, $S:W\to U$ שתי העתקות לינאריות. אזי העתקה $S\circ T:V\to U$ הינה העתקה לינארית.
21. יהיו V, W, U מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל שדה F, תהיינה $T:V\to W$, $S:W\to U$ שתי העתקות לינאריות, יהי B בסיס של V, יהי C בסיס של W, יהי D בסיס של U. אזי
$\left[S\circ T\right]_D^B=\left[S\right]_D^C\cdot\left[T\right]_C^B$.

<u>הגדרת דמיון מטריצות.</u> מטריצות X , Y $n\times n$ נקראות דומות אם קיימת Z הפיכה כך ש- $X=ZYZ^{-1}$.
22. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה F, תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, יהיו B, C בסיסים של V. אזי מטריצות $\left[T\right]_B^B$, $\left[T\right]_C^C$ דומות, $\left[T\right]_B^B=\left(\left[I\right]_C^B\right)^{-1}\left[T\right]_C^C\left[I\right]_C^B$.

<u>**ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצה:**</u> תהי A מטריצה ריבועית $n\times n$.
מספר λ נקרא ערך עצמי של A אם קיים וקטור-עמודה $\vec{v}$ עם n רכיבים השונה מווקטור האפס כך ש $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$. במקרה הזה $\vec{v}$ נקרא וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ .
ניסוח אחר: וקטור-עמודה $\vec{v}$ עם n רכיבים השונה מווקטור האפס נקרא וקטור עצמי של A אם קיים מספר λ כך ש $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$. במילים אחרות: וקטור-עמודה $\vec{v}$ עם n רכיבים השונה מווקטור האפס נקרא וקטור עצמי של A אם הווקטורים $\vec{v}$, $A\vec{v}$ תלויים ליניארית.

<u>**משפט:**</u> מספר λ הוא ערך עצמי של A אם ורק אם $\det\left(A-\lambda I\right)=0$. (I היא מטריצת היחידה)
בפרט, מטריצה ריבועית A בלתי הפיכה אם ורק אם אפס הוא ערך עצמי שלה.
אם λ הוא ערך עצמי של A , אז הווקטורים העצמיים של A השייכים לערך עצמי λ הם פתרונות לא טריביאליים של מערכת משוואות ליניאריות הומוגניות $\left(A-\lambda I\right)\cdot\vec{x}=\vec{0}$.

<u>**משפט:**</u> אם מספר λ הוא ערך עצמי של A , אז λ^k הוא ערך עצמי של A^k לכל $1\le k\in\mathbb{N}$.
<u>**הגדרה:**</u> אומרים שמטריצה A $n\times n$ ניתנת ללכסון (לכסינה) אם קיימות מטריצה אלכסונית D $n\times n$ ומטריצה הפיכה P $n\times n$ כך ש- $A=PDP^{-1}$.
<u>**משפט:**</u> מטריצה A $n\times n$ ניתנת ללכסון אם ורק אם ל-A קיימים n וקטורים עצמיים בת"ל.
<u>**משפט:**</u> מטריצה A $n\times n$ לכסינה מעל $\mathbb{C}$ אם ורק אם עבור כל ערך עצמי שלה הריבוי האלגברי והריבוי הגאומטרי שווים.
הגדרת פולינום אופייני של מטריצה A $n\times n$: $p_A\left(x\right)=\det\left(xI_n-A\right)$. (I_n היא מטריצת היחידה).
הגדרת העקבה: העקבה של מטריצה ריבועית A , $Trace(A)$, היא סכום של רכיבי אלכסון הראשי של A .

<u>**הערה:**</u> $p_A\left(x\right)=x^n-\left(Trace\left(A\right)\right)x^{n-1}+\cdots+\left(-1\right)^n\cdot\det\left(A\right)$ עבור כל מטריצה A $n\times n$.

<u>**משפט:**</u> אם מטריצות A,B $n\times n$ דומות, אז $p_A\left(x\right)=p_B\left(x\right)$. מזה נובע שלמטריצות דומות יש אותה דטרמיננטה ואותה עקבה.

הגדרה. וקטור $\vec{v}\neq\vec{0}$ נקרא וקטור עצמי של העתקה לינארית T אם קיים סקלר λ (שנקרא "ערך עצמי") כך ש $T\vec{v}=\lambda\vec{v}$. אם V מרחב וקטורי ממימד סופי, $T:V\to V$ העתקה לינארית, B בסיס ל- V אז: λ הוא ערך עצמי של T אם ורק אם $\det\left(\left[T\right]_B^B-\lambda I_n\right)=0$ (I_n היא מטריצת היחידה).

משפט. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, יהיו $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k\in V$ וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ בהתאמה, ז.א. $T\left(\vec{v}_j\right)=\lambda_j\vec{v}_j$, $1\le j\le k$, וגם נתון ש- $\lambda_i\neq\lambda_j$, $1\le i<j\le k$.
אזי הווקטורים $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k$ בלתי תלויים לינארית.

מכפלה פנימית. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, (F הוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$). פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle:V\times V\to F$ נקראת מכפלה פנימית על V אם: (1) $\langle\vec{u}+\vec{v},\vec{w}\rangle=\langle\vec{u},\vec{w}\rangle+\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$ לכל $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$
(2) $\langle\lambda\vec{u},\vec{v}\rangle=\lambda\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ לכל $\lambda\in F,\ \vec{u},\vec{v}\in V$ (3) $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\overline{\langle\vec{v},\vec{u}\rangle}$ לכל $\vec{u},\vec{v}\in V$
(4) $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle\ge 0$ לכל $\vec{u}\in V$. $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle=0$ אם ורק אם $\vec{u}=\vec{0}$.

תכונות מיידיות: $\langle\vec{w},\vec{u}+\vec{v}\rangle=\langle\vec{w},\vec{u}\rangle+\langle\vec{w},\vec{v}\rangle$ לכל $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$;
$\langle\vec{u},\lambda\vec{v}\rangle=\bar{\lambda}\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ לכל $\lambda\in F,\ \vec{u},\vec{v}\in V$; $\langle\vec{u},\vec{0}\rangle=0$ לכל $\vec{u}\in V$.

נורמה: V מרחב מכפלה פנימית, $\vec{u}\in V$. אז $\|\vec{u}\|=\sqrt{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}$.

תכונות: $\|\lambda\vec{u}\|=|\lambda|\cdot\|\vec{u}\|$ לכל $\vec{u}\in V,\lambda\in F$ ולכל סקלר λ.

$|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle|\le\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$ לכל $\vec{u},\vec{v}\in V$ (אי-שויון קושי-שוורץ).

$\|\vec{u}+\vec{v}\|\le\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ לכל $\vec{u},\vec{v}\in V$. (אי-שויון המשולש).

תהליך גרם-שמידט: יהי $B=\left(f_1,\dots,f_n\right)$ בסיס. בסיס אורתוגונלי $C=\left(u_1,\dots,u_n\right)$ המתקבל מבסיס B על ידי תהליך גרם-שמידט הוא:

$$u_1=f_1\ ,\ u_2=f_2-\frac{\langle f_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1\ \ ,\ u_3=f_3-\frac{\langle f_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle f_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2\ \ ,\ ....$$

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$. הזווית בין שני וקטורים שונים מאפס $\vec{u},\vec{v}\in V$ היא מספר θ, $0\le\theta\le\pi$, כך ש- $\cos\theta=\dfrac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$.

1. אלגברה לינארית

תלות ליניארית. וקטורים $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ בלתי תלויים ליניארית אם השוויון $a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\dots+a_n\vec{v}_n=\vec{0}$ מתקיים אך ורק כאשר $a_1=a_2=\dots=a_n=0$.

תת-מרחב. יהי V מרחב וקטורי. תת-קבוצה U של V היא תת-מרחב של V אם
(1) $\vec{0}\in U$ **(2)** $\vec{u},\vec{v}\in U\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}\in U$ **(3)** $a\vec{u}\in U$ לכל $\vec{u}\in U$ ולכל סקלר a.

הנפרש של קבוצת וקטורים: V מרחב וקטורי מעל שדה F, $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\in V$. הגדרה:

$$Span\left(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\right)=\left\{a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\dots+a_n\vec{v}_n\mid a_1,a_2,\dots,a_n\in F\right\}$$

הגדרה: אומרים שווקטורים $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ פורשים את V אם $Span\left(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\right)=V$.

הגדרה: מרחב V נקרא מרחב ממימד סופי אם קיימת ב- V קבוצה פורשת סופית.

בסיס: V מרחב וקטורי ממימד סופי, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$. הקבוצה הסדורה $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ נקראת בסיס של V אם (1) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ פורשים את V (2) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ בלתי תלויים ליניארית.

הגדרה: המימד של V (סימון: $\dim(V)$) הוא מספר וקטורים בבסיס של V .

משפט: V מרחב וקטורי, $\dim(V)=n$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$. אז $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ בסיס של V אם ורק אם $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ בלתי תלויים לינארית.

משפט: יהי V מרחב ממימד סופי, U תת-מרחב של V . אזי $\dim(U) \le \dim(V)$.

משפט: יהי V מרחב ממימד סופי, U תת-מרחב של V , $\dim(U)=\dim(V)$. אזי $U=V$.

משפט: יהי V מרחב וקטורי, $\dim(V)=n$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$, $k>n$. אזי הווקטורים $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ תלויים ליניארית.

משפט: יהי V מרחב וקטורי, $\dim(V)=n$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$, $k<n$. אזי הווקטורים $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ אינם פורשים את V , ז.א. קיים $\vec{v} \in V$ כך ש- $\vec{v} \notin Span(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$.

משפט: יהי V מרחב ממימד סופי, U,W תת-מרחבים של V . אזי

$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$.

תכונות נבחרות של פעולות על מטריצות

$A(B+C)=AB+AC$ לכל מטריצות B,C $n\times m$ ולכל מטריצה A $k\times n$.

אם $B_1,B_2,...,B_n$ הן עמודות של מטריצה B , אז עמודות של המכפלה AB הן $AB_1,AB_2,...,AB_n$:

$A\cdot B=A\cdot[B_1|B_2|\cdots|B_n]=[A\cdot B_1|A\cdot B_2|\cdots|A\cdot B_n]$.

$(AB)^t=B^tA^t$ לכל מטריצה B $n\times m$ ולכל מטריצה A $k\times n$.

מטריצה הפכית: מטריצה ריבועית A $n\times n$ נקראת **הפיכה** אם קיימת מטריצה ריבועית B $n\times n$ כך ש $AB=BA=I$. במקרה זה B נקראת **הפכית** של A .

סימון: $B=A^{-1}$.

תכונות נבחרות של מטריצות הפיכות: (א) $(A^{-1})^{-1}=A$ (ב) אם A,B הפיכות אז AB הפיכה, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. (ג) אם A הפיכה אז גם A^t הפיכה ומתקיים השוויון $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

משפט: אם A מטריצה ריבועית $n\times n$ עם רכיבים משדה F , אז הטענות הבאות שקולות:

(א) A הפיכה. (ב) שורות של A בלתי תלויות ליניארית . (ג) עמודות של A בלתי תלויות ליניארית.

(ד) $\det(A)\ne 0$.(ה) למערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ קיים פתרון יחיד עבור כל $\vec{b}\in F^n$. (ו) $rank(A)=n$.

תכונות נבחרות של דטרמיננטה:

(א) אם A הפיכה, אז $\det\left(A^{-1}\right)\cdot\det\left(A\right)=1$. (ב) $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

(ג) אם A מטריצה $n\times n$, c סקלר, אז $\det(cA)=c^n\det(A)$. (ד) $\det(A^t)=\det(A)$.

$A=\left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^n$. נסמן על ידי A_{ij} מטריצה המתקבלת מ A על ידי מחיקת שורה מס' i ועמודה מס' j .

פיתוח לפי שורה מס' i **:**

$$\det A=\sum_{j=1}^n(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})=(-1)^{i+1}a_{i1}\det(A_{i1})+(-1)^{i+2}a_{i2}\det(A_{i2})+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}\det(A_{in})$$

A,B מטריצות ריבועיות. (א) אם מטריצה B מתקבלת ממטריצה A על ידי פעולת שורה $R_i\leftarrow R_i+aR_j$ (הוספה של שורה מס' j כפולה בסקלר a לשורה מס' i), אז $\det B=\det A$.

(ב) אם B מתקבלת מ- A על ידי פעולת שורה $R_i\leftarrow aR_i$ (הכפלה של שורה מס' i בסקלר a), אז $\det B=a\cdot\det A$. (ג) אם B מתקבלת מ- A על ידי חילוף שורות $R_i\leftrightarrow R_j$, אז $\det B=-\det A$

.