בס"ד

עבודת בית 1

1. נתון: $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ העתקה לינארית, $[T]_C^B=\begin{bmatrix}-1&1&5\\1&0&-1\\3&1&2\\2&-1&-3\end{bmatrix}$, $B=\big((1,0,1),(1,1,3),(4,2,7)\big)$,

$C=\big((1,0,1,1),(0,1,1,-1),(0,0,-1,1),(0,0,0,-1)\big)$.

מצאו את ההגדרה המפורשת של T. כלומר, $T(x,y,z)=(*,*,*,*)$.

2. נתון: $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(x-y,7x-3y)$.
מצאו את $[T]_B^B$ כאשר $B=\big((1,2),(2,3)\big)$.

3. יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, יהי $B=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ בסיס ל- V.
א. הוכיחו ש-$C=(\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w},\ \vec{u}+\vec{v}+3\vec{w}\ ,\ \vec{u}+2\vec{v}+2\vec{w})$ גם בסיס ל- V.
ב. מצאו את $[I]_C^C$.
ג. מצאו את $[I]_C^B$.
ד. מצאו את $[3\vec{u}-\vec{v}+8\vec{w}]_C$.

4. יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל שדה F, תהיינה $T,S:V\to W$ שתי העתקות. נזכיר שהעתקה $T+S:V\to W$ מוגדרת כך: $(T+S)(\vec{v})=T(\vec{v})+S(\vec{v})$ לכל $\vec{v}\in V$.
הוכיחו שאם $T,S:V\to W$ העתקות לינאריות אזי העתקה $T+S:V\to W$ היא גם העתקה לינארית.

5. נתון: V מרחב וקטורי מעל שדה F, $T:V\to V$ העתקה לינארית, עבור כל $\vec{v}\in V$ קיימים $\vec{w}\in\ker T$, $\vec{u}\in\operatorname{Im}T$ כך ש-$\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}$.
הוכיחו ש-$\vec{0}=T(\vec{v})$ אם ורק אם $\vec{0}=T(T(\vec{v}))$.

פתרון שאלה 1

נשתמש בקשר $[T]_{E_4}^{E_3}=[I]_{E_4}^{C}\,[T]_{C}^{B}\,[I]_{B}^{E_3}$ כאשר

$E_4=\left((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\right)\quad , \quad E_3=\left((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right)$.

$$[I]_{B}^{E_3}=\left([I]_{E_3}^{B}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&4\\0&1&2\\1&3&7\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&-5&2\\-2&-3&2\\1&2&-1\end{bmatrix}\quad , \quad [I]_{E_4}^{C}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&-1&0\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}.$$

$$[T]_{E_4}^{E_3}=[I]_{E_4}^{C}\,[T]_{C}^{B}\,[I]_{B}^{E_3}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&1&-1&0\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&1&5\\1&0&-1\\3&1&2\\2&-1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&-5&2\\-2&-3&2\\1&2&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&12&-5\\-2&-7&3\\5&19&-8\\6&18&-7\end{bmatrix}$$

$$[T]_{E_4}^{E_3}\left[(x,y,z)\right]_{E_3}=\left[T(x,y,z)\right]_{E_4}$$

$$[T]_{E_4}^{E_3}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&12&-5\\-2&-7&3\\5&19&-8\\6&18&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4x+12y-5z\\-2x-7y+3z\\5x+19y-8z\\6x+18y-7z\end{bmatrix}$$

$$T(x,y,z)=(4x+12y-5z\,,-2x-7y+3z\,,5x+19y-8z\,,6x+18y-7z)$$

פתרון שאלה 2

$[T]_B^B = [I]_B^E [T]_E^E [I]_E^B$ כאשר $E = ((1,0),(0,1))$ בסיס סטנדרטי ל- $\mathbb{R}^2$.

מהנתון מיידית נובע: $[I]_E^B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $[T]_E^E = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$.

לכן:

$$[T]_B^B = [I]_B^E [T]_E^E [I]_E^B = \left([I]_E^B\right)^{-1} [T]_E^E [I]_E^B = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$$

תשובה: $[T]_B^B = \begin{bmatrix} 5 & 13 \\ -3 & -7 \end{bmatrix}$.

פתרון שאלה 3

א. נתון $B=(\bar{u},\bar{v},\bar{w})$ בסיס.. צריך להוכיח ש-$C=(\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w},\ \vec{u}+\vec{v}+3\vec{w}\ ,\ \vec{u}+2\vec{v}+2\vec{w})$ מהווה בסיס ל-V.

הוכחה: מהנתון ש-$B=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ הוא בסיס ל-V נובע ש-$\dim V=3$. באלגברה לינארית 1 למדנו משפט שאומר ש-n וקטורים במרחב ממימד n מהווים בסיס אם ורק אם הם בלתי תלויים לינארית. לכן עלינו להראות ששלושה וקטורים $\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w},\ \vec{u}+\vec{v}+3\vec{w}\ ,\ \vec{u}+2\vec{v}+2\vec{w}$ בלתי תלויים לינארית. נניח שמתקיים השוויון $x(\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w})+y(\vec{u}+\vec{v}+3\vec{w})+z(\vec{u}+2\vec{v}+2\vec{w})=\vec{0}$ ונוכיח ש-$x=y=z=0$. מהשויון שהנחנו נובע ש-$(x+y+z)\vec{u}+(x+y+2z)\vec{v}+(2x+3y+2z)\vec{w}=\vec{0}$. היות ו-$B=(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ בסיס, הווקטורים $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ בלתי תלויים לינארית, ולכן $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+2z=0 \\ 2x+3y+2z=0 \end{cases}$. קל לפתור את המערכת הזאת ולראות שיש לה פתרון יחיד שהוא הפתרון הטריביאלי $(x,y,z)=(0,0,0)$. מכאן $\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w},\ \vec{u}+\vec{v}+3\vec{w}\ ,\ \vec{u}+2\vec{v}+2\vec{w}$ בת"ל, ולכן $C=(\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w},\ \vec{u}+\vec{v}+3\vec{w}\ ,\ \vec{u}+2\vec{v}+2\vec{w})$ מהווה בסיס ל-V.

ב. $[I]_C^C=I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. נסמן וקטורי בסיס C על ידי $\vec{c}_1,\vec{c}_2,\vec{c}_3$.

$\vec{c}_1=1\cdot\vec{c}_1+0\cdot\vec{c}_2+0\cdot\vec{c}_3\ ,\ \vec{c}_2=0\cdot\vec{c}_1+1\cdot\vec{c}_2+0\cdot\vec{c}_3\ ,\ \vec{c}_3=0\cdot\vec{c}_1+0\cdot\vec{c}_2+1\cdot\vec{c}_3$,

לכן $[\vec{c}_3]_C=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix},[\vec{c}_2]_C=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},[\vec{c}_1]_C=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, ולכן $[I]_C^C=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

זה מקרה פרטי של תופעה כללית: מטריצת מעבר מבסיס לעצמו היא תמיד מטריצת היחידה.

ג. $\vec{u}+2\vec{v}+2\vec{w}=1\cdot\vec{u}+2\cdot\vec{v}+2\cdot\vec{w}\ ,\ \vec{u}+\vec{v}+3\vec{w}=1\cdot\vec{u}+1\cdot\vec{v}+3\cdot\vec{w},\ \vec{u}+\vec{v}+2\vec{w}=1\cdot\vec{u}+1\cdot\vec{v}+2\cdot\vec{w}$, לכן

$[\vec{u}+2\vec{v}+2\vec{w}]_B=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}\ ,\ [\vec{u}+\vec{v}+3\vec{w}]_B=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\ ,\ [\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w}]_B=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$, ולכן $[I]_B^C=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&2\\2&3&2\end{bmatrix}$.

$$[I]_C^B=\left([I]_B^C\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&2\\2&3&2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}4&-1&-1\\-2&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}.$$

ד. $\left[3\vec{u}-\vec{v}+8\vec{w}\right]_B=\begin{bmatrix}3\\-1\\8\end{bmatrix}$.

$\left[3\vec{u}-\vec{v}+8\vec{w}\right]_C=\left[I\right]_C^B\left[3\vec{u}-\vec{v}+8\vec{w}\right]_B=\begin{bmatrix}4&-1&-1\\-2&0&1\\-1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-1\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\2\\-4\end{bmatrix}$.

קל לבדוק את התוצאה שקיבלנו:

$$5\left(\vec{u}+\vec{v}+2\vec{w}\right)+2\left(\vec{u}+\vec{v}+3\vec{w}\right)-4\left(\vec{u}+2\vec{v}+2\vec{w}\right)=\left(5+2-4\right)\vec{u}+\left(5+2-4\cdot2\right)\vec{v}+\left(5\cdot2+2\cdot3-4\cdot2\right)\vec{w}=3\vec{u}-\vec{v}+8\vec{w}$$

פתרון שאלה 4 יש להוכיח שני דברים:

1. $(T+S)(\vec{v}+\vec{w})=(T+S)(\vec{v})+(T+S)(\vec{w})$ לכל $\vec{v},\vec{w}\in V$.
2. $(T+S)(\alpha\vec{v})=\alpha(T+S)(\vec{v})$ לכל $\vec{v}\in V$ ולכל סקלר α.

נוכיח את 1: $(T+S)(\vec{v}+\vec{w})=T(\vec{v}+\vec{w})+S(\vec{v}+\vec{w})$ על פי הגדרת העתקה $T+S$.

$S(\vec{v}+\vec{w})=S(\vec{v})+S(\vec{w})$, $T(\vec{v}+\vec{w})=T(\vec{v})+T(\vec{w})$ כי T,S הן העתקות לינאריות. לכן:

$$(T+S)(\vec{v}+\vec{w})=T(\vec{v}+\vec{w})+S(\vec{v}+\vec{w})=T(\vec{v})+T(\vec{w})+S(\vec{v})+S(\vec{w})=$$
$$=T(\vec{v})+S(\vec{v})+T(\vec{w})+S(\vec{w})=(T+S)(\vec{v})+(T+S)(\vec{w})$$

כי $T(\vec{w})+S(\vec{w})=(T+S)(\vec{w})$, $T(\vec{v})+S(\vec{v})=(T+S)(\vec{v})$ על פי הגדרת העתקה $T+S$.

נוכיח את 2: $(T+S)(\alpha\vec{v})=T(\alpha\vec{v})+S(\alpha\vec{v})$ על פי הגדרת העתקה $T+S$.

$S(\alpha\vec{v})=\alpha S(\vec{v})$, $T(\alpha\vec{v})=\alpha T(\vec{v})$ כי T,S הן העתקות לינאריות. לכן:

$$(T+S)(\alpha\vec{v})=T(\alpha\vec{v})+S(\alpha\vec{v})=\alpha T(\vec{v})+\alpha S(\vec{v})=\alpha\left(T(\vec{v})+S(\vec{v})\right)=\alpha(T+S)(\vec{v})$$

כי $T(\vec{v})+S(\vec{v})=(T+S)(\vec{v})$ על פי הגדרת העתקה $T+S$.

פתרון שאלה 5

כיוון 1:

אם $T(\vec{v})=\vec{0}$ אזי כיוון ש T טרסנפורמציה ליניארית היא מקיימת $T(T(\vec{v}))=T(\vec{0})=\vec{0}$.

כיוון 2:

כל $\vec{v}\in V$ ניתן לכתוב כסכום של וקטור מהגרעין של T ווקטור מהתמונה של T , לכן

$V=ker(T)+Im(T)$,

ולכן $dim(V)=dim(ker(T))+dim(Im(T))-dim(ker(T)\cap Im(T))$.

מצד שני, לפי משפט המימדים: $dim(V)=dim(ker(T))+dim(Im(T))$.

כלומר $dim(ker(T)\cap Im(T))=0$ או במילים אחרות $ker(T)\cap Im(T)=\{\vec{0}\}$.

כיוון ש: $T(T(\vec{v}))=\vec{0}$ אזי $T(\vec{v})\in ker(T)$ ובוודאי ש: $T(\vec{v})\in Im(T)$ (הוא התמונה של $\vec{v}$)

לכן $T(\vec{v})\in ker(T)\cap Im(T)$ ולכן $T(\vec{v})=\vec{0}$. מ.ש.ל.