שיטות חישוב של אינטגרלים לא מסוימים

אינפ' 1 / II

I אינטגרלים מיידיים

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

2) $\int e^x dx = e^x + c$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

4) $\int \cos x\, dx = \sin x + c$

5) $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$

6) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$

7) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c$

8) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$

(A) אם נגזרת הפונקציה $f'(x)$ היא פונקציה האינטגרנדה אז ניתן מיד למצוא את הפונקציה הקדומה $f(x)$:

$$\boxed{\int f'(x)dx = f(x) + c}$$

אינטגרל מיידי מפונקציה מורכבת עם מקור ליניארי $ax+b$ מקבלים מפונקציה קדומה עם אותו מקור ליניארי חילוק a:

$$\boxed{\int f'(ax+b)dx = \frac{1}{a} f(ax+b) + c}$$

$$\frac{1}{a}\int f'(ax+b)\overset{(ax+b)'}{a}\,dx = \frac{1}{a}\int f'(\underbrace{ax+b}_{u})\, d(\underbrace{ax+b}_{u}) = \frac{1}{a}\int f'(u)du = \frac{1}{a} f(u) + c = \frac{1}{a} f(ax+b) + c$$

(B) כאשר גוזרים פונקציה מורכבת כופלים בנגזרת הפנימית. באינטגרציה פונקציה מורכבת מחלקים בנגזרת הפנימית אם היא קבועה.

$$\int \frac{dx}{(\underbrace{1-2x}_{\text{נגזרת }-2})} = \frac{\ln|1-2x|}{\underbrace{-2}_{\text{מחלקים בנגזרת פנימית}}} + c = -\frac{1}{2}\ln|1-2x| + c$$

כשגוזרים מורכבת אז נכפלת בנגזרת פנימית

II שיטת ההצבה

$\boxed{f'_x dx = df(x)}$ במקרה הזה כאשר f הוצב $t = f(x)$

(A) נוכיח קודם כל את שתי הנוסחאות — שנשתמש בהן בהמשך ללא הוכחה.

$$(1)\quad \boxed{\int \frac{1}{1+(ax+b)^2}dx \overset{\text{לפי I (B)}}{=} \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(ax+b) + c}$$

ניתן גם להוכיח בשיטת ההצבה:

$t = ax+b$

$\boxed{t'_x dx} = dt = a\,dx$

$dx = \frac{dt}{a}$

$$\int \frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{dt}{a} = \frac{1}{a}\underbrace{\int \frac{1}{1+t^2}dt}_{\text{אינ' מיידי}} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + c = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(ax+b) + c \quad \text{מש"ל}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(\left(\frac{x}{a}\right)^2+1\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} \overset{\text{לפי II (1)}}{=} \frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$$

$$(2)\quad \boxed{\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c}$$

$$(3)\quad \boxed{\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c}$$

הוכחה דומה להוכחה II (2)

תרגיל לדוגמה: 44/263

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{x}+3}dx = \int \frac{t^2-2}{t+3}\cdot 2t\,dt =$$

$x = t^2 \Leftarrow t = \sqrt{x}$

$dt = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$dx = 2\sqrt{x}\,dt = 2t\,dt$

$$= \int \left(2t^2 - 6t + 14 - \frac{42}{t+3}\right)dt = \frac{2t^3}{3} - 3t^2 + 14t - 42\ln|t+3| + c =$$

$$\frac{2x\sqrt{x}}{3} - 3x + 14\sqrt{x} - 42\ln(\sqrt{x}+3) + c$$

$$\begin{array}{r|l} 2t^3 - 4t & t+3 \\ \hline -(2t^3+6t^2) & 2t^2-6t+14 \\ -6t^2-4t & \\ -(-6t^2-18t) & \\ 14t & \\ -(14t+42) & \\ -42 & \end{array}$$

אינפי 1 / 2 אינטגרל לא מסוים

תרג' לדוגמה: 45/264

$$\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt[3]{x}+1}=\int\frac{x^{\frac12}dx}{x^{\frac13}+1}$$

עמ"מ $\frac13, \frac12$ לפי השבר $\frac16$

$\frac12=3\cdot\frac16$

$\frac13=2\cdot\frac16$

$$\int\frac{(x^{\frac16})^3dx}{(x^{\frac16})^2+1} =$$

הצבה:

$t=x^{\frac16}$

$dt=\frac16x^{-\frac56}dx \quad /\cdot 6x^{\frac56}$

$\Downarrow$

$6x^{\frac56}dt=dx$

$6t^5dt$

$$= 6\int\frac{t^8dt}{t^2+1}=6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$6\left[\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}-t+\operatorname{arctg} t\right]+c=$$

$$=\frac{6x\sqrt[6]{x}}{7}-\frac{6\sqrt[6]{x^5}}{5}+\frac{6\sqrt[6]{x^3}}{3}-6\sqrt[6]{x}+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+c=$$

$$=\frac{1}{105}\left(90\underbrace{x\sqrt[6]{x}}_{x^{7/6}}-126\underbrace{\sqrt[6]{x^5}}_{x^{5/6}}+210\sqrt{x}-630\sqrt[6]{x}\right)+6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+c$$

$\sqrt[6]{x^3}=x^{3/6}=x^{1/2}$

$$
\begin{array}{r|l}
t^6-t^4+t^2-1 & \\
\hline
t^8 & t^2+1 \\
-(t^8+t^6) & \\
\hline
-t^6 & \\
-(-t^6-t^4) & \\
\hline
t^4 & \\
-(t^4+t^2) & \\
\hline
-t^2 & \\
-(-t^2-1) & \\
\hline
1 &
\end{array}
$$

III אינטגרציה בחלקים

$$(f\cdot g)'=f'g+fg'$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\int(f\cdot g)'dx}_{f\cdot g}=\int f'g\,dx+\int fg'dx$$

$$\Downarrow$$

עיקרון של אינטגרציה בחלקים $\boxed{\int f'g\,dx=f\cdot g-\int fg'dx}$

$\int x^n\ln x\,dx$

$f'=x^n$

$g=\ln x$

$f=\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$g'=\frac1x$

[באינטגרל $\int\ln x\,dx$ מניחים $f'=1$, $g=\ln x$]

$\int x^ne^{kx}dx$

מניחים

$f'=e^{kx}$

$g=x^n$

$f=\frac1ke^{kx}$

$g'=nx^{n-1}$

מקטינים מעריך וחוזרים עוד הפעם לאותו מהלך

על שימוש בשיטה זו לאינטגרציית פונקציות טריגונומטריות נדבר בפרק "אינטגרציית פונקציות טריגו"

$\int x^n\operatorname{arctg}x\,dx$

$f'=x^n$

$g=\operatorname{arctg}x$

$f=\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$g'=\frac{1}{x^2+1}$

וממשיכים בתהליך של אינטגרציית פונקציה רציונלית

תרג' לדוגמה - שימוש משתי השיטות!

הן/3,8 בעמ' 267 ו- הן/13,28,31 בעמ' 268

(3) $$\int xe^{\sqrt{x^2-1}}dx=\int\frac{xe^{\sqrt{t-1}}dt}{2x}=\frac12\int e^{\sqrt{t-1}}dt$$

$$=\frac12\int e^s\cdot2s\,ds=\int se^sds=e^ss-\int e^sds=$$

$$=e^ss-e^s+c=e^s(s-1)+c=e^{\sqrt{t-1}}(\sqrt{t-1}-1)+c$$

$$=e^{\sqrt{x^2-1}}(\sqrt{x^2-1}-1)+c$$

הצבה 1:

$\boxed{t=x^2}\Rightarrow dt=2x\,dx\Rightarrow\boxed{\frac{dt}{2x}=dx}$

הצבה 2:

$\boxed{s=\sqrt{t-1}}\Rightarrow ds=\frac{1}{2\sqrt{t-1}}dt$

$2\sqrt{t-1}\,ds=dt$

$\boxed{2s\,ds=dt}$

בחלקים

$f'=e^s$, $g=s$ $\Rightarrow$ $f=e^s$, $g'=1$

אינפי' 1 / 3 . אינטגרל לא מסוים

(8) $\int x\ln(x^2+1)dx = \int \frac{\cancel{x}\ln t\,dt}{2\cancel{x}} = \frac{1}{2}\int \ln t\,dt =$

$= t\ln t - \int dt = t\ln t - t + c =$

$= (x^2+1)\ln(x^2+1) - x^2 - 1 + c$

הצבה

$t = x^2+1 \Rightarrow dt = 2x\,dx \Rightarrow \boxed{dx = \frac{dt}{2x}}$

בחלקים

$f' = 1 \quad | \quad f = t$

$g = \ln t \quad | \quad g' = \frac{1}{t}$

---

(13) $\int \frac{\ln(\ln x)}{\boxed{x}}\boxed{dx} = \int \ln t\,dt = t\ln t - t + c =$

$= \ln x[\ln(\ln x)] - \ln x + c$

הצבה 1

$t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx \Rightarrow x\,dt = dx$

בחלקים

כמו בתרגיל (8)

---

(28) $\int x^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int -x^4 \operatorname{arctg} t\,dt =$

$\int -\frac{1}{t^4}\operatorname{arctg} t\,dt = \frac{\operatorname{arctg} t}{3t^3} - \frac{1}{3}\int \frac{1}{t^3(1+t^2)}dt \ominus$

הצבה 1

$t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2}dx \Rightarrow \boxed{-x^2dt = dx}$

$\boxed{x = \frac{1}{t}}$

בחלקים

$f' = -\frac{1}{t^4} = -t^{-4}$

$g = \operatorname{arctg} t$

$f = -\frac{t^{-3}}{-3} = \frac{t^{-3}}{3}$

$g' = \frac{1}{1+t^2}$

$\frac{1}{t^3(1+t^2)} = \frac{A}{t^3} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t} + \frac{Dt+G}{1+t^2} \quad / \quad t^3(1+t^2)$ מ"מ

$1 = A + At^2 + Bt + Bt^3 + Ct^2 + Ct^4 + Dt^4 + Gt^3$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ A + C = 0 \Rightarrow C = -1 \\ B + G = 0 \Rightarrow G = 0 \\ C + D = 0 \Rightarrow D = 1 \end{cases}$$

כופלים ב- $\frac{1}{2}\cdot 2$

$\ominus \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)}{3\left(\frac{1}{x}\right)^3} - \frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{t} + \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{1}{3}\left[x^3\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{t^{-2}}{-2} + \ln|t| - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right] + c =$

$= \frac{1}{3}\left[x^3\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) + \ln\left|\frac{1}{x}\right| + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right] + c$

---

(31) $\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

$= x\arcsin x - \int \frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{1-t}} = x\arcsin x + \underbrace{\int \frac{ds}{2\sqrt{s}}}_{} =$

$x\arcsin x + \sqrt{s} + c = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c$ מ"צ

בחלקים

$f' = 1 \quad | \quad f = x$

$g = \arcsin x \quad | \quad g' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

הצבה 1:

$t = x^2 \Rightarrow dt = 2x\,dx \Rightarrow \frac{dt}{2} = x\,dx$

הצבה 2:

$s = 1 - t \Rightarrow ds = -dt \Rightarrow dt = -ds$

תרגיל לדוגמה 15/268

$\int \frac{\ln^2 x\,dx}{x^3} = \int \frac{t^2 \cdot x\,dt}{\frac{x^3}{x^2}} = \int \frac{t^2dt}{(e^t)^2} = \int t^2e^{-2t}dt =$

$-\frac{1}{2}t^2e^{-2t} + \frac{1}{2}\cdot 2\int te^{-2t} = -\frac{1}{2}t^2e^{-2t} + \left(-\frac{1}{2}\right)te^{-2t} + \frac{1}{2}\int e^{-2t}dt =$

$= -\frac{1}{2}(\ln x)^2e^{-2\ln x} - \frac{1}{2}\ln x\,e^{-2\ln x} - \frac{1}{4}e^{-2\ln x} + c =$

$= -\frac{\ln^2 x}{2x^2} - \frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + c = \frac{-2\ln^2 x - 2\ln x - 1}{4x^2} + c$

הצבה 1:

$t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx \Rightarrow x\,dt = dx$

$\Downarrow$

$e^t = x$

בחלקים 1:

$f' = e^{-2t}$

$g = t^2$

$f = -\frac{1}{2}e^{-2t}$

$g' = 2t$

בחלקים 2:

$f' = e^{-2t}$

$g = t$

$f = -\frac{1}{2}e^{-2t}$

$g' = 1$

$e^{-2\ln x} = e^{\ln x^{-2}} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

IV אינטגרל לא מסו"ם מפונקציה רציונלית

$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}$ כאשר $P_m(x)$ ו- $P_n(x)$ הם פולינומים מסדר m ו- n בהתאמה.

אם $n \le m$ אז מחלקים $P_m(x)$ ב- $P_n(x)$

$$\frac{P_m(x)}{P_n(x)} = P_k(x) + \frac{P_l(x)}{P_n(x)}$$ כאשר $l<n$

נניח כי $P_n(x)$ פריק והתקבל

$$P_n(x) = (a_1x+b_1)^r(a_2x+b_2)^s(a_3x^2+b_3x+c_3)^t$$

הצגה של השבר $\frac{P_l(x)}{P_n(x)}$ באמצעות שברים חלקיים הינו

$$\frac{P_l(x)}{P_n(x)} = \frac{P_l(x)}{(a_1x+b_1)^r(a_2x+b_2)^s(a_3x^2+b_3x+c_3)^t} =$$

$$= \frac{A}{(a_1x+b_1)^r} + \frac{B}{(a_1x+b_1)^{r-1}} + \dots + \frac{C}{a_1x+b_1} + \frac{D}{(a_2x+b_2)^s} + \dots$$

$$+ \frac{E}{a_2x+b_2} + \frac{Fx+G}{(a_3x^2+b_3x+c_3)^t} + \dots + \frac{Ix+J}{a_3x^2+b_3x+c_3}$$

$$* \int \frac{A}{(a_1x+b_1)^r}dx = \int A(a_1x+b_1)^{-r}dx = \frac{A(a_1x+b_1)^{-r+1}}{-r+1} = -\frac{A}{(r-1)(a_1x+b_1)^{r-1}} + c \qquad r \neq 1$$

$$** \int \frac{dx}{a_1x+b_1} = \frac{\ln|a_1x+b_1|}{a_1} + c \qquad r=1$$

$$*** \int \frac{Ix+J}{\underbrace{a_3x^2+b_3x+c_3}_{\text{תלת איבר ריבועי}}}dx = \int \frac{Ix+J}{R(x+T)^2+S}dx = \int \frac{Ix\,dx}{R(x+T)^2+S} + \int \frac{J\,dx}{R(x+T)^2+S} =$$

תלת איבר ריבועי באמצעות השלמת ריבוע שם ניתן להציג בצורה $R(x+T)^2+S$

$u=(x+T)^2 \quad du = 2(x+T)dx$

$$\frac{I}{2}\int \frac{(2x+2T-2T)dx}{R(x+T)^2+S} + \int \frac{J\,dx}{R(x+T)^2+S} =$$

$$= \frac{I}{2}\int \frac{\overbrace{2(x+T)\,dx}^{=du}}{R\underbrace{(x+T)^2}_{u}+S} + \int \frac{(J-2T)\,dx}{R(x+T)^2+S} =$$

$$= \frac{I}{2}\int \frac{du}{Ru+S} + (J-2T)\int \frac{dx}{R(x+T)^2+S} =$$

$$= \frac{I}{2}\ln|Ru+S| + \frac{(J-2T)}{\sqrt{RS}}\,\text{arctg}\,\frac{\sqrt{R}(x+T)}{\sqrt{S}} + c$$

$$*** \int \frac{(2x+3)\,dx}{\underbrace{2x^2+4x+8}_{\text{אינו פריק}}} = \int \frac{(2x+3)dx}{2(x^2+2x+4)} = \frac{1}{2}\int \frac{(\overbrace{2x+3}^{2x+2+1})\,dx}{(x+1)^2-1+4} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)\,dx}{(x+1)^2+3} + \int \frac{1\,dx}{(x+1)^2+3}$$

$[(x+1)^2]' = 2(x+1) = 2x+2$

$u=(x+1)^2$, $du = 2(x+1)dx$

$v = x+1$, $dv = dx$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{du}{u+3} + \int \frac{dv}{\underbrace{v^2+3}_{v^2+a^2 \Rightarrow a=\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}\ln|u+3| + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{v}{\sqrt{3}} + c =$$

$$\frac{1}{2}\ln[(x+1)^2+3] + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{3}} + c$$

$$**** \int \frac{Fx+G}{(a_3x^2+b_3x+c_3)^t}dx$$

מתחילים מהצבה $u = a_3x^2+b_3x+c_3$

54/271

$$\int \frac{1}{x(x^2+4)^2}dx = \int\left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{(x^2+4)^2} + \frac{Dx+E}{x^2+4}\right)dx =$$

$1 = Ax^4+8Ax^2+16A+Bx^2+Cx+Dx^4+Ex^3+4Dx^2+4Ex$

$A+D=0$, $\boxed{E=0}$, $16A=1$, $\boxed{A=\frac{1}{16}}$

$8A+B+4D=0$, $\boxed{D=-\frac{1}{16}}$

$C+4E=0 \Rightarrow \boxed{C=0}$

$\boxed{B=-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}}$

$$\frac{1}{16}\int\frac{1}{x}dx + \left(-\frac{1}{4}\right)\int\frac{x\,dx}{(x^2+4)^2} - \frac{1}{16}\int\frac{x\,dx\cdot 2\cdot\frac{1}{2}}{x^2+4} = \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{32}\ln(x^2+4) - \frac{1}{4}\int\frac{x\,dx\cdot 2\cdot\frac{1}{2}}{(x^2+4)^2} =$$

(1) (2) (3)

$u=x^2+4$, $du=2x\,dx$

$$\frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{32}\ln(x^2+4) - \frac{1}{8}\int\frac{du}{u^2} = \frac{1}{16}\ln|x| - \frac{1}{32}\ln(x^2+4) + \frac{1}{8(x^2+4)} + C$$

אינפי 1 /$\boxed{5}$ אינטגרל לא מסוים

V אינטגרציה פונקציות טריגונומטריות

כדאי לזכור!!

* $\int \frac{dx}{\cos^2 x} \overset{\text{מ"ז}}{=} tg\, x + c \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} \overset{\text{מ"ז}}{=} -\cot an\, x + c$

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

** $\int \frac{\sin^{2k+1} x\, dx}{\cos^{2m+1} x} \underset{\text{אי זוגיים}}{\overset{\text{מעריכים}}{=\!=}} \int \frac{\sin^{2k} x \cdot \sin x\, dx}{\cos^{2m+1} x} = -\int \frac{(\sin^2 x)^k d\cos x}{\cos^{2m+1} x} = -\int \frac{(1-\cos^2 x)^k d\cos x}{\cos^{2m+1} x} =$

מפרידים גורם אחד מהמונה

$\underset{t=\cos x}{=\!=} -\int \frac{1-t^2}{t^{2m+1}} dt$ אינטגרציה של פונק' רציונלית

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x\, dx}{\cos^5 x} = -\int \frac{(1-\cos^2 x) d\cos x}{\cos^5 x} = -\int \frac{(1-t^2) dt}{t^5} = -\int \frac{dt}{t^5} + \int \frac{t^2}{t^{5}} dt =$$

למשל: $\boxed{14/275}$ $\boxed{t=\cos x}$

$$\frac{-t^{-4}}{-4} + \frac{t^{-2}}{-2} + c = \underbrace{\frac{1}{4\cos^4 x} - \frac{1}{2\cos^2 x}}_{\text{ניתן להשאיר בצורה כזו}} + c = \underbrace{\frac{1}{2\cos^2 x}}_{\frac{1}{2}(1+tg^2 x)}\Big(\underbrace{\frac{1}{2\cos^2 x} - 1}_{\frac{1}{2}(1+tg^2 x)-1}\Big) + c = \frac{1}{4}(1+tg^2 x)^2 - \frac{1}{2}(1+tg^2 x) + c =$$

$$= \frac{1}{4} + \cancel{\frac{1}{2}tg^2 x} + tg^4 x - \frac{1}{2} - \cancel{\frac{1}{2}tg^2 x} + c = tg^4 x \underbrace{- \frac{1}{4} + c}_{\text{הקבוע החדש}} = tg^4 x + c_1$$

*** $\int \frac{\sin^{2k} x\, dx}{\cos^{2m} x} = \int \frac{(\sin^2 x)^k dx}{\cos^{2m} x} = \int \frac{(1-\cos^2 x)^k dx}{\cos^{2m} x}$.

פותחים $(1-\cos^2 x)^k$ וכל אחד ממרכיבי המונה מחלקים במכנה וכל אינטגרל מחשבים בנפרד.

למשל: $\boxed{12/275}$

$$\int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2 dx}{\sin^2 x} = \int \frac{1-2\sin^2 x + \sin^4 x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 2 + \sin^2 x\right) dx =$$

$$= -\cot an\, x - 2x \overset{(*)}{+} \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

**** $\int \frac{a\cos x + b\sin x}{c \cdot \cos x + d\sin x} dx \qquad \int \frac{a\cos^2 x + b\sin^2 x}{c \cdot \cos^2 x + d\sin^2 x} dx$

מחלקים מונה ומכנה ב- $\cos x$ או מבצעים הצבה אוניברסאלית $t = tg\frac{x}{2}$

מחלקים מונה ומכנה ב- $\cos^2 x$

שימוש בזהות טריגונומטרית $\boxed{\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + tg^2 x}$

למשל: $\boxed{2/275}$

$a \neq 0 \quad b \neq 0 \qquad \int \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - 2\sin x} dx = \int \frac{\left(\frac{\sin x}{\cos x} + 1\right) dx}{1 - 2\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{(tg\, x + 1) dx}{1 - 2\, tg\, x} =$

$$= \int \frac{t+1}{1-2t} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t+1}{(1-2t)(1+t^2)} dt = \int \left(\frac{A}{1-2t} + \frac{Bt+C}{1+t^2}\right) dt =$$

$\boxed{t = tg\, x} \quad dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad dt = (1+tg^2 x) dx$

$1 + t = A + At^2 + Bt + C - 2Bt^2 - 2Ct$

$$\frac{6}{5}\int \frac{1}{1-2t} dt + \int \frac{\frac{3}{5}t - \frac{1}{5}}{1+t^2} dt = \frac{6}{5}\frac{\ln|1-2t|}{-2} + \frac{3}{5}\int \frac{t\,dt}{1+t^2} - \frac{1}{5}\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$u = t^2 \quad du = 2t\,dt$

$\begin{cases} A + C = 1 \\ B - 2C = 1 \\ A - 2B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2B + C = 1 \mid \cdot 2 \\ B - 2C = 1 \\ A = 2B \end{cases}$

$5B = 3 \quad B = \frac{3}{5} \quad A = \frac{6}{5} \quad C = 1 - 2B = -\frac{1}{5}$

$$= -0.6\ln|1-2t| + 0.3\ln|1+t^2| - 0.2\, arctg\, t + c = 0.6\ln|1 - 2tg\, x| + 0.3\ln(1 + tg^2 x) - 0.2x + c$$

$arctg(tg\, x) = x$

$$= -0.6\ln\left|\frac{\cos x - 2\sin x}{\cos x}\right| + 0.3\underbrace{\ln\frac{1}{\cos^2 x}}_{\ln \cos^{-2} x = -2\ln|\cos x|} - 0.2x + c = -0.6\ln\left|\frac{\cos x - 2\sin x}{\cancel{\cos x}} \cdot \cancel{\cos x}\right| - 0.2x + c$$