אוניברסיטת אריאל ושומרון- המחלקה למדעי המחשב

<u>מבחן בחשבון אינפינטסימלי 2</u>

מספר קורס: **2-7017710-3**

סמסטר קיץ מועד א'- 30.9.20 , יב' תשרי תשפ"א

מרצה: דר' שלמה ינץ

מתרגלים: ריטה דובמן, אריאל כהן

חומר עזר: מחשבון ודפי עזר מצורפים

אורך המבחן: 150 דק', שעתיים וחצי

<u>הוראות:</u>

המבחן מורכב משני חלקים, כל חלק שווה 50 נק'.

נא לכתוב את התשובות באופן מסודר וברור, להסביר באופן מלא את דרך הפתרון ולציין בבירור את השאלות שנבחרו ולאיזה חלק הם שייכות.

<u>חלק א:</u>

יש לבחור 2 שאלות מתוך 3.

1. נסח והוכח את משפט האינטגרביליות של פונקציה מונטונית בקטע סגור.
2. נסח והוכח את מבחן השוואה II(שני) להתכנסות טור מספרים חיוביים.
3. נסח והוכח את משפט ערך הביניים (ערך ממוצע) של האינטגרל בקטע [a,b].

<u>חלק ב:</u>

יש לבחור 3 שאלות מתוך 4.

1. חקור את ההתכנסות של **<u>אחד</u>** משני האינטגרלים הבאים: (בחירה א' או ב')

<u>א.</u> $$\int_1^\infty \left(1-\cos\frac{2}{x}\right)dx$$

<u>ב.</u> $$\int_1^e \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{\ln x}}$$

2. חשב **<u>אחד</u>** משני האינטגרלים הבאים: (בחירה א' או ב')

<u>א.</u> $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\cdot dx}{6-5\sin x+5\sin^2 x}$$

<u>ב.</u> $$\int \frac{dx}{1+e^x}$$

3. בחר **<u>אחד</u>** משני הסעיפים הבאים: (בחירה א' או ב')

<u>א.</u> הוכח שהטור הבא מתכנס במ"ש ב - R^1 :

$$\frac{\sin x}{1^2}+\frac{\sin 2x}{2^2}+\ldots+\frac{\sin nx}{n^2}+\ldots$$

ב. מצא פיתוח של $f\left(x\right)=\frac{x}{x^2-5x+6}$ בסביבת $x_0=5$, מצא את רדיוס ההתכנסות וחקור את ההתכנסות בקצוות .

4. מצא פיתוח מקלורן ותחום ההתכנסות של הפונקציה הבאה:

$$f\left(x\right)=\ln\frac{1+x}{1-x}$$

בהצלחה!

שנה טובה ומבורכת!

דף נוסחאות אינפי 2 מורחב

זהויות טריגונומטריות

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$
$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$$
$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$
$$1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$
$$\arcsin\alpha + \arccos\alpha = \frac{\pi}{2}$$

נגזרות מידיות

$$\sin' x = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x \qquad \sinh' x = \cosh x \qquad \cosh' x = \sinh x$$
$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
$$arc\cot'(x) = \frac{-1}{1+x^2} \qquad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$$
$$(e^x)' = e^x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (a^x)' = a^x\ln a \qquad (\log_a^x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

אינטגרלים מיידים

$$\int\frac{1}{x}dx = \ln x + c$$
$$\int\ln x dx = x\ln x - x + c$$
$$\int\sin x = -\cos x + c$$
$$\int\frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + c$$
$$\int\frac{1}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$
$$\int\tan x dx = -\ln(\cos x) + c$$
$$\int\cot x dx = \ln(\sin x) + c$$
$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$
$$\int\frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$$
$$\int\frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$$
$$\int\frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + c$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$$
$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right) + c$$
$$\int\frac{A}{x-a}dx = A\ln(x-a) + C$$
$$\int\frac{A}{(x-a)^n}dx = A\cdot\frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n} + C$$
$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q} = \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)$$

סדרות

חשבונית $a_n = a_0 + n\cdot d,\ s_n = (a_0+a_n)\cdot\frac{n+1}{2}$

הנדסית $a_n = a_0\cdot q^n,\ s_n = a_0\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$

הסדרה תמיד מתכנסת כאשר q<1

אינטגרלים לא אמיתיים

סוג ראשון-תחום הפונקציה עד ∞

סוג שני-a,b נקודות שבהן פונקציה לא חסומה

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$
$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx \qquad \int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

התכנסות בהחלט:

אם קיים $\int_a^\infty |f(x)|dx$ אז אומרים כי $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס בהחלט

משפט השוואה להתכנסות:

אם $0\le f(x)\le g(x)$ בקטע $[a,+\infty)$ אז $\int_a^\infty f(x)dx \le \int_a^\infty g(x)dx$

השוואות נפוצות:

אינטגרל	$\alpha>1$	$\alpha=1$	$\alpha<1$
$\int_a^\infty\frac{dx}{x^\alpha}$	מתכנס	מתבדר	מתבדר
$\int_a^b\frac{dx}{(x-b)^\alpha}$	מתבדר	מתבדר	מתכנס
$\int_a^\infty\frac{dx}{x\ln^\alpha(x)}$	מתכנס	מתבדר	מתבדר
$\int_a^\infty\frac{dx}{x^\alpha\ln^\beta(x)}$	מתכנס	מתבדר	מתבדר

משפט המנה(משפט השוואה גבולי):

נניח $0\le f(x), g(x)\ne0$ וקיים גבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$ אז:

1. $L=0$: מהתכנסות $\int_a^\infty g(x)dx$ נובעת התכנסות $\int_a^\infty f(x)dx$
2. $L=\infty$: מהתכנסות $\int_a^\infty f(x)dx$ נובעת התכנסות $\int_a^\infty g(x)dx$
3. $0<L<\infty$: $\int_a^\infty f(x)dx, \int_a^\infty g(x)dx$ מכנסים ומתבדרים יחד

טורים אינסופיים

טור אינסופי: $\sum_{n=1}^\infty a_n$

סכום חלקי של טור: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$

תנאי הכרחי אך לא מספיק להתכנסות טורים: אם $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס אז $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. כלומר, אם a_n באינסוף לא שואף ל- 0 אז הטור מתבדר.

טור מתכנס בהחלט: אם $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ מתכנס.

טור מתכנס על תנאי: מתכנס אך לא בהחלט.

משפט: אם טור מתכנס בהחלט אז הטור המקורי מתכנס.

שארית / זנב של טור

הגדרה: $r_m \triangleq \sum_{n=m+1}^\infty a_n$ (לכל m טבעי).

משפט: אם $\sum_{n=1}^\infty a_n = S$ אז $r_m = S - S_m$.

טורים חיוביים

הגדרה: טור המכיל רק איברים חיוביים: $a_n > 0$. כלומר, $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ מונוטונית עולה.

קריטריון השוואה ראשון:

אם עבור n מספיק גדול מתקיים $a_n \le b_n$ אז:

1. אם $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתכנס - אז $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס.
2. אם $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתבדר - אז $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתבדר.

קריטריון השוואה שני (לטורים חיוביים):

אם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L$ אז:

1. עבור $0<L<\infty$: $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ו- $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד
2. עבור $L=0$: אם $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס.
3. עבור $L=\infty$: אם $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתכנס.

קריטריון השוואה של קושי (לא רק לטורים חיוביים):

יהי $\sum_{n}^\infty a_n$ טור אינסופי חיובי. נסמן $C = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

1. אם $C<1$ אז הטור מתכנס בהחלט.
2. אם $C>1$ אז הטור מתבדר.
3. אם $C=1$ אז לא ניתן לדעת ע"פ קריטריון זה.

משפט דה-למבר (לא רק לטורים חיוביים):

יהי $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור אינסופי חיובי. נסמן $D=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|$

1. אם $D<1$ אז הטור מתכנס בהחלט.
2. אם $D>1$ אז הטור מתבדר.
3. אם $D=1$ אז לא ניתן לדעת ע"פ קריטריון זה.

הערות:

- אם לא קיים גבול D (אך הוא לא אינסוף) אז ניתן למצוא את הערך המקסימלי של הביטוי ואם הוא קטן מאחד אז הטור מתכנס.
- $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\sqrt[n]{a_n}$

מבחן אינטגרל להתכנסות טורים:

פונקציה מוגדרת בקטע חצי אינסופי.

אם הפונקציה מונוטונית יורדת בקטע זה אז מתקיים:

$$a_n=f_{(n)}:\ \int_1^{\infty}f_{(x)}dx=const_1\Leftrightarrow\sum a_n=const_2$$

ז"א גם הטור מתכנס. יש לשים לב שהפונקציה והטור מתכנסים אך לא לאותו ערך!

טורי חזקות

טור חזקות סביב הנקודה x_0:

$$\sum_{n=0}^{n}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots$$

סכום חלקי של טור חזקות:

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k(x-x_0)^k=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\dots+a_n(x-x_0)^n$$

התכנסות של טור חזקות:

אם הסדרה $\{S_n(x)\}$ מתכנסת אז טור החזקות מתכנס.

הערה: בנקודה x=0 כל טור חזקות מתכנס, והאיבר a_0 יהיה סכומו..

רדיוס התכנסות:

משפט קושי – הדמר עבור טורי חזקות:

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

משפט דה-למבר עבור טורי חזקות:

$$R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}}=\lim\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

1. עבור x שמקיים $|x-x_0|<R$ הטור מתכנס בהחלט.
2. עבור x שמקיים $|x-x_0|>R$ הטור מתבדר.
3. אם $R=0$ אז הטור מתכנס בהחלט עבור x=0 ומתבדר בכל נקודה אחרת.
4. אם $R=\infty$ אז הטור מתכנס בהחלט לכל x ממשי.
5. אם נבנה פונק' סכומים $S_{(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot x^n$ אז פונק' זו רציפה לכל x שברדיוס ההתכנסות.
6. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\int_0^x t^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}$ נכון לכל טור חזקות עם רדיוס התכנסות חיובי. לשני הטורים יש אותו רדיוס התכנסות.
7. עבור כל x שבתוך רדיוס ההתכנסות מתקיים: $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\int_0^x t^n dt=\int_0^x S_{(t)}dt$
8. עבור כל x בתחום ההתכנסות מתקיים: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\cdot x^n\right)'=S'_{(x)}$
9. אם נתון טור מסוג: $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n^{\alpha}}\cdot x^{n^{\alpha}}$ אז $R=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^{\alpha}]{a_{n^{\alpha}}}}$

טורים עם סימנים מתחלפים

הגדרה: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ כאשר $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ טור חיובי.

הערה: אם טור מחליף סימן אז גם הזנב שלו הוא טור מחליף סימן.

משפט לייבניץ (אך ורק לטורים עם סימנים מתחלפים):

נסמן: $S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$

אם $\{a_n\}$ סדרה חיובית, מונוטונית יורדת ושואפת ל- 0 אז:

1. הטור S מתכנס.
2. $0<S<a_1$.
3. $|r_m|<a_{m+1}$ ו- $(-1)^m\cdot r_m>0$.

טור טילור:

אם פונקציה $f_{(x)}$ גזירה אינסוף פעמים וגם $\left|f^{(n)}_{(x)}\right|<M$ אז ניתן להציג הפונקציה

כ: $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$

פולינום טור טילור:

$$P_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(X_0)}{n!}(X-X_0)^n$$

שארית טור טילור:

$$R_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(X-X_0)^{n+1}$$

טורים נפוצים:

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^n=1-x+x^2-x^3\dots\quad |x|<1$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3\dots\quad |x|<1$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\dots\quad |x|<1$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\dots\quad |x|<1$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}\dots\quad |x|<\infty$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}\dots\quad |x|<\infty$$

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\dots\quad |x|<1$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\quad |x|<1$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\dots\quad |x|<1$$

טור פורייה

פיתוח פונקציה $f(x)$ בתחום $-l\le x<l$ ומחזור $T=2l$:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

פונקציה זוגית מורכבת מטור קוסינוסים בלבד

פונקציה אי זוגית מורכבת מטור סינוסים בלבד

הערה חשובה: אם $f(x)$ יש נק. אי רציפות סוג I אז בנקודה טור פורייה שווה לערך הממוצע של הגבולות

נגזרות חלקיות

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_{(x_0+\Delta x,y_0)}-f_{(x_0,y_0)}}{\Delta x}$$

דיפרנציאל שלם של מספר משתנים:

$$df(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)dx+f'_y(x_0,y_0)dy$$

חישוב ערך מקורב:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+df(x_0,y_0)$$

גזירת פונקציה מורכבת-כלל שרשרת:

$$F=f(x,y),\ x=x(t,s),\ y=y(t,s)$$

$$F'_t=\frac{\partial F}{\partial t}=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

נוסחאות נוספות

<u>אינטגרציה בחלקים</u>: $\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx$.

<u>אינטגרל לא אמיתי</u> אם $f(x)$ רציפה עבור $a \le x$: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\,dx$ מתכנס אם ורק אם $\alpha > 1$. $\int_0^{1}\frac{1}{x^\alpha}\,dx$ מתכנס אם ורק אם $\alpha < 1$.

אם $f(x), g(x)$ רציפות עבור $a \le x$ ו- $0 \le f(x) \le g(x)$ עבור כל $a \le x$ אז:

(1) אם $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ מתבדר אז גם $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ מתבדר.

(2) אם $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ מתכנס אז גם $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ מתכנס.

אם $f(x), g(x)$ רציפות וחיוביות עבור $a \le x$ וקיים גבול חיובי סופי $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ אז לאינטגרלים

$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ אותה התנהגות, כלומר, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ מתכנס אם ורק אם $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ מתכנס.

אם $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ מתכנס אז גם $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ מתכנס.

<u>משפט לייבניץ</u> אם $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ וקיים n_0 כך שלכל $n_0 < n$ מתקיים $a_n \ge a_{n+1} \ge 0$, אזי:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ מתכנס.

2. $\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n - \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\cdot a_n\right| \le a_{N+1}$

נוסחאות בסיסיות

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$
$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$
$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$
$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$
$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$$

זהויות טריגונומטריות

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha \qquad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2} \qquad 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\,]$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

לכל n טבעי $\sin(n\pi)=0$, $\cos(n\pi)=(-1)^n$

נגזרות

$$(e^x)'=e^x \qquad (a^x)'=a^x\ln a \qquad (x^n)'=nx^{n-1}$$
$$(\cos x)'=-\sin x \qquad (\sin x)'=\cos x \qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$
$$(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (arctgx)'=\frac{1}{x^2+1}$$

אינטגרלים

$$\int\frac{1}{ax+b}dx=\frac{\ln|ax+b|}{a} \qquad \int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\ (n\neq-1)$$
$$\int e^{mx+n}dx=\frac{e^{mx+n}}{m} \qquad \int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\cdot\ln a}$$
$$\int\frac{1}{\cos^2 x}dx=tgx \qquad \int\sin x\,dx=-\cos x \qquad \int\cos x\,dx=\sin x$$
$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a} \qquad \int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}$$

טורים כלליים

1. אם $\sum a_n$ מתכנס אז $\lim a_n=0$.
2. אם a_n יורד ל- 0 מונוטונית, אז $\sum(-1)^n a_n$ מתכנס.
3. אם $\sum|a_n|$ מתכנס, אז גם $\sum a_n$ מתכנס.

טורים חיוביים ($\sum a_n$ טור עם איברים חיוביים)

1. $\sum\frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס אמ"ם $\alpha>1$.
2. אם $a_n\le b_n$ לכל n, אזי:
   אם $\sum b_n$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס
   ואם $\sum a_n$ מתבדר, אז $\sum b_n$ מתבדר.
3. אם $\lim\frac{a_n}{b_n}=k>0$ כאשר k ממשי כלשהו, אז $\sum a_n$ ו- $\sum b_n$ מתכנסים או מתבדרים יחדיו.
4. אם $\lim\frac{a_n}{b_n}=0$, זה גורר ש- $a_n\le b_n$ החל מ- n מסוים
5. אם $\lim\frac{a_n}{b_n}=\infty$, זה גורר ש- $a_n\ge b_n$ החל מ- n מסוים
6. אם $\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$, אז:
   $q<1$ גורר $\sum a_n$ מתכנס, $q>1$ גורר $\sum a_n$ מתבדר.
   $q=1$ לא ניתן לקבוע עפ"י כלל זה.
7. אם $\lim\sqrt[n]{a_n}=q$, אז:
   $q<1$ גורר $\sum a_n$ מתכנס, $q>1$ גורר $\sum a_n$ מתבדר.
   $q=1$ לא ניתן לקבוע עפ"י כלל זה.
8. $\int_a^\infty a_x dx$ מתכנס עבור $a>0$ אמ"ם $\sum a_n$ מתכנס (a_n יורדת ל- 0).

טורי חזקות, טורי טיילור ומקלורן

1. טור חזקות סביב $x=a$ הוא טור מהצורה $\sum a_n(x-a)^n$.
2. רדיוס ההתכנסות של הטור: $R=\lim\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$
3. טור טיילור סביב a :

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)(x-a)^1}{1!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}+R_n(x)$$

(2) אם $x=g(t)$, אז $\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$

(3) אינטגרציה בחלקים : $\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx$

פיתוח פונקציות לטור מקלורן

.1 $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad -\infty<x<\infty$$

.2 $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\qquad -\infty<x<\infty$$

.3 $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\qquad -\infty<x<\infty$$

.4 $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n,\qquad -1<x\le 1$$

.5 $$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\qquad -1<x<1$$

.6 $$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots=$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n,\qquad -1<x<1$$

פיתוח פונקציות לטור פורייה

(1) תהיה פונקציה $f(x)$ רציפה או

בעלת מספר סופי של נקודות אי- רציפות מסוג הראשון ב- $[-\pi,\pi]$,

(2) מונוטונית למקוטעין , אז הטור $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, כאשר

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx,\ n=1,2,3,\ldots$$

מתכנס ל- $f(x)$ בכל נקודת רציפות של $f(x)$ ב- $[-\pi,\pi]$,כלומר $S(x)=f(x)$,

$S(x_0)=\frac{1}{2}\left(f(x_0-0)+f(x_0+0)\right)$ בכל נקודת x_0 אי -רציפות של $f(x)$ ב- $[-\pi,\pi]$,

$S(\pi)=S(-\pi)=\frac{1}{2}\left(f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right)$ בקצוות הקטע $[-\pi,\pi]$.

גבולות חשובים

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\log_a e \quad (a>0,\ a\neq 0)$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a \quad (a>0)$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$

$\sim$ [illegible]

$\alpha=\alpha(x)$

אפשר לסמן

$\sin\alpha\sim\alpha$

$tg\,\alpha\sim\alpha$

$1-\cos\alpha\sim\frac{\alpha^2}{2}$

$\arcsin\alpha\sim\alpha$

$\operatorname{arctg}\alpha\sim\alpha$

$\ln[1+\alpha]\sim\alpha$

$a^{\alpha}-1\sim\alpha\ln a \quad (a>0)$

$e^{\alpha}-1\sim\alpha$ אם $a=e$

$[1+\alpha]^{P}-1\sim P\alpha$

$(1+\alpha)^{1/n}-1\sim\alpha/n$ במקרה

15 . טבלת הנגזרות

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$$, **במקרה פרטי** $$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$$, **במקרה פרטי** $$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$$

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\ln a} = \frac{\log_a e}{x}$$, **במקרה פרטי** $$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin x)' = \cos x, \qquad (\cos x)' = -\sin x, \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$, $$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$ **כאשר** $|x|<1$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$, $$(\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$(\sinh x)' = \cosh x \ , \ (\cosh x)' = \sinh x \ , \ (\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x} \ , \ (\coth x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

16 . טבלת האינטגרלים

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$, $$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$ כאשר $\alpha \neq -1$

$$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, \qquad (a>0)$$, **במקרה פרטי** $$\int e^{x}dx = e^{x} + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad , \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C \quad , \quad \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C \quad , \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C, \qquad (a\neq 0)$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \qquad (a\neq 0) \quad , \quad \int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \qquad (a>0) \quad , \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C, \qquad (a\neq 0)$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C \quad , \quad \int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C \quad , \quad \int \frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$$

17 . שיטות האינטגרציה

(1) אם $F(x)$ **פונקציה קדומה של** $f(x)$ **, אז** $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

(2) אם $x = g(t)$ **, אז** $\int f(x)dx = \int f(t)g'(t)dt$

(3) אינטגרציה בחלקים : $\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx$

כללי הגזירה

$(c)' = 0$, c - קבוע

$(cu)' = c\,u'$, c - קבוע , $u(x)$ - פונקציה של x

$(u \pm v)' = u' \pm v'$, $u(x), v(x)$ - פונקציות של x

$(u \cdot v)' = u'v + v'u$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, $v \neq 0$

טבלת הנגזרות

$(x^n)' = nx^{n-1}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(x > 0)$

$(\sin x)' = \cos x$ $\quad (\cos x)' = -\sin x$ $\quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\quad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(|x| < 1)$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

טבלת האינטגרלים

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

$\int e^x dx = e^x + C$, $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0)$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$, $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

$\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$

$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0)$

$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$, $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad (a \neq 0)$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, \quad (a \neq 0)$ $\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad (a > 0)$

שיטות האינטגרציה

(1) אם $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$ אז, $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ ,\ \ \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ ,\ \ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha\pm\tan\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\qquad \cot\alpha\pm\cot\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$
$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0
$\cot\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞

13. הגבולות הידועים

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{1/x}=e^{a}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{x}=e^{a}$, a - קבוע .

14. כללי הגזירה (c - קבוע ו- $u(x),v(x)$ - פונקציות של x)

$$(c)'=0$$

$$(x)'=1$$

$$(cu)'=c\,u'$$

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

$$(u\cdot v)'=u'v+v'u$$

$v\neq 0$, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^{2}}$, במקרה פרטי $\left(\frac{c}{v}\right)'=\frac{-cv'}{v^{2}}$

נוסחאות הכפל ופרוק לגורמים

1. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 2. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ 3. $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

4. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 5. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

6. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ כאשר $a\neq 0$, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

7. נוסחאות וייטה: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$, כאשר x_1,x_2 הם שורשים של המשוואה $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

8. סידרה חשבונית $a_n=a_1+(n-1)d$, $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=\dfrac{[2a_1+(n-1)d]n}{2}$

9. סידרה הנדסית $a_n=a_1q^{n-1}$, $S_n=\dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1}$

10. פונקציה מערכית . $y=a^x$ $(a>0,\quad a\neq 1)$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\quad (ab)^x=a^x\cdot b^x,\quad (a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1\cdot x_2},\quad a^{x_1-x_2}=\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}},\quad a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}$$

11. פונקציה לוגריתמית $y=\log_a x$ $(x>0,\ a>0,\quad a\neq 1)$

$$\log_a(x_1\cdot x_2)=\log_a|x_1|+\log_a|x_2|,\ \log_a\frac{x_1}{x_2}=\log_a|x_1|-\log_a|x_2|\ ,\ \log_a x^k=k\log_a|x|$$

$$a^{\log_a M}=M\quad,\ \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}\qquad a\neq 1,\ c\neq 1,\ a>0,\ b>0,\ c>0$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}\qquad a\neq 1,\ b\neq 1,\ a>0,\ b>0$$

12. זהויות טריגונומטריות

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\qquad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha},\quad 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\qquad 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\ ,\qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta},\qquad \cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\alpha\pm\cot\beta}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\qquad \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2},\qquad 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\qquad \cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\qquad \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

נוסחאות הכפל ופרוק לגורמים

1. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ .2 $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ .3 $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

4. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ .5 $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

6. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ **כאשר** $a\neq 0$, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

7. **נוסחאות וייטה:** $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$, **כאשר** x_1,x_2 **הם שורשים של המשוואה** $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

8. **סידרה חשבונית** $a_n=a_1+(n-1)d$, $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=\dfrac{[2a_1+(n-1)d]n}{2}$

9. **סידרה הנדסית** $a_n=a_1q^{n-1}$, $S_n=\dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1}$

10. **פונקציה מערכית** $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\quad (ab)^x=a^x\cdot b^x,\quad (a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1\cdot x_2},\quad a^{x_1-x_2}=\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}},\quad a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}$$

11. **פונקציה לוגריתמית** $y=\log_a x$ $(x>0,\ a>0,\ a\neq 1)$

$$\log_a(x_1\cdot x_2)=\log_a|x_1|+\log_a|x_2|,\quad \log_a\frac{x_1}{x_2}=\log_a|x_1|-\log_a|x_2|,\quad \log_a x^k=k\log_a|x|$$

$$a^{\log_a M}=M\quad,\ \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}\qquad a\neq 1,\ c\neq 1,\ a>0,\ b>0,\ c>0$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}\qquad a\neq 1,\ b\neq 1,\ a>0,\ b>0$$

12. **זהויות טריגונומטריות**

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\quad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha},\quad 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\quad 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta},\quad \cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\alpha\pm\cot\beta}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\beta,\quad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\quad \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2},\quad 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\quad \cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\quad \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$