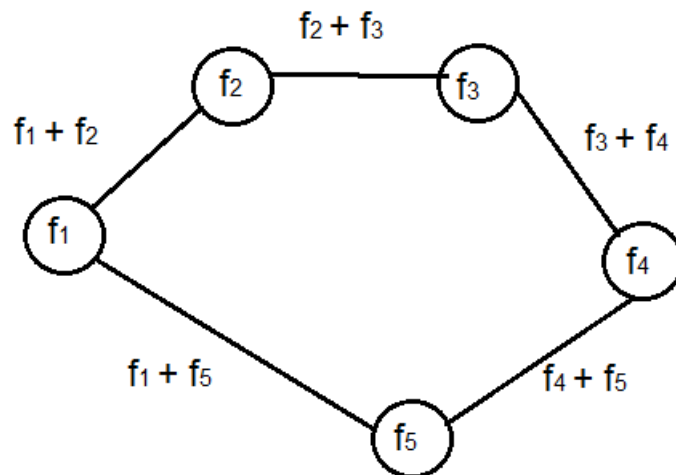


שעור 2 תורת הגרפים – המרחקים הקצרים ביותר - המשך

משקלים מוגדרים על קדקודי הגרף:



f_i – משקל של קדקוד i ,

הגדרות:

הגדרה 1: עלות המעבר בין קדקוד a לקדקוד b היא $f_a + f_b$, כאשר קדקודים a ו- b מחוברים ע"י צלע.

הגדרה 2: עלות המעבר בין קדקוד i לקדקוד j היא $f_i + \dots + f_j$, כאשר קיים מסלול כלשהו העובר דרך קדקודים i, j .

המטרה היא למצוא את המסלול הקצר (הזול) ביותר שיוכל כל קדקודי הגרף. האלגוריתם של פלואיד-וורשל מבוסס על משקלי הצלעות. יש שתי דרכים לפתור את הבעיה:
דרך אחת – להמציא אלגוריתם חדש,
דרך שנייה – להתאים את האלגוריתם הקיים לנתונים חדשים.
אנו בוחרים בדרך השנייה.

נגדיר משקל על הצלע, שמחברת קדקודים a ו- b , באופן הבא:

$$\text{weight}(a,b) = f_a + f_b \quad (1)$$

נסמן ב- $h(i,j)$ עלות המעבר בין קדקוד i לקדקוד j לפי צלעות,
וב- $d(i,j)$ עלות המעבר בין קדקוד i לקדקוד j לפי הקדקודים. אזי

$$d(i,j) = f_i + f_{i+1} + \dots + f_{j-1} + f_j$$

$$h(i,j) = f_i + 2(f_{i+1} + \dots + f_{j-1}) + f_j$$

נכפיל את המשוואה הראשונה ב-2:

$$2d(i,j) = 2f_i + 2(f_{i+1} + \dots + f_{j-1}) + 2f_j$$

ונחסיר ממנה את המשוואה הראשונה, נקבל:

$$2d(i,j) - h(i,j) = f_i + f_j$$

או

$$h(i,j) = 2d(i,j) - f_i - f_j \quad (2)$$

$$d(i,j) = (h(i,j) + f_i + f_j) / 2 \quad (3)$$

תיאור האלגוריתם למציאת את כל המסלולים הקצרים ביותר בין קדקודי הגרף כאשר המשקלים מוגדרים על קדקודי הגרף:

קלט: מערך של משקלים המוגדרים על קדקודי הגרף ומטריצה בוליאנית המגדירה את צלעות הגרף.

פלט: מטריצה המייצגת את המרחקים הקצרים ביותר בין קדקודי הגרף.

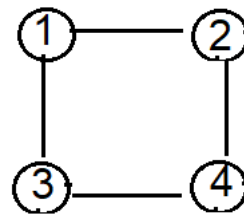
שלבי האלגוריתם:

1. בונים מטריצה המייצגת את המשקלים על צלעות הגרף לפי נוסחה (1)
2. מפעילים עליה אלגוריתם של פלויד-וורשל, מקבלים $h[i][j]$ - מטריצת העלויות הקטנות ביותר, כאשר המשקלים מוגדרים על צלעות הגרף.
3. ממירים ע"י נוסחה (3) את העלויות המוגדות על הצלעות לעלויות המוגדרות על הקדקודים.

דוגמא:

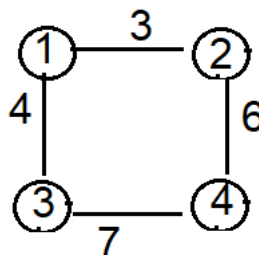
נתונה מטריצה בוליאנית המייצגת את הגרף ומערך המייצג את משקלי הקדקודים:

$$f_1=1, f_2=2, f_3=3, f_4=4$$



f	t	t	f
t	f	f	t
t	f	f	t
f	t	t	f

נעבור למשקלי הצלעות:



0	3	4	∞
3	0	∞	6
4	∞	0	7
∞	6	7	0

ונפעיל אלגוריתם של Floyd-Warshall על מטריצת משקלי הצלעות::

0	3	4	7
3	0	6	6
4	6	0	7
7	6	7	0

ונחזור לעלויות לפי הקדקודים:

0	3	4	9
3	0	7	6
4	7	0	7
9	6	7	0