משפט החלוקה

הגדרה: נאמר כי b מחלק את a ונסמן $b|a$ אם קיים מספר טבעי c כך שמתקיים $a = bc$.

משפט 1 (משפט החלוקה): אם a, b מספרים שלמים כך ש $b > 0$ אזי קיימים מספרים טבעיים יחידים q, r כך ש $a = bq + r, \ \ 0 \leq r < b$.

הוכחה: ההוכחה מתחלקת לשני חלקים- קיום של q, r ויחידות שלהם.

קיום: בשביל להוכיח את הקיום של q, r ניעזר ב-WOP. תהי

$$S = \{a - bk : k \in \mathbb{Z} \ and \ a - bk \geq 0\}.$$

תחילה נראה כי S אינה קבוצה ריקה. לדוגמה, הצבת $k = -|a| - 1$ מניבה את האיבר הבא:

$$a - (-|a| - 1)b = a + |a|b + b \geq a + |a| + 1 \geq 0$$

בגלל ש $b > 0$. לכן, הקבוצה S מכילה איבר מינימלי לפי WOP. יהי $r = a - bq$ איבר זה. אם כן, קיום q הוכח. נותר להראות כי $0 \leq r < b$. לפי הגדרת S מתקיים $0 \leq r$. נניח בשלילה כי $r \geq b$. לכן מתקיים:

$$r > r - b = a - bq - b = a - b(q + 1) \geq 0$$

ולכן $r - b \in S$, בסתירה למינימליות של r.

יחידות: נניח כי $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$ כך ש $0 \leq r_1, r_2 < b$. נראה ש $q_1 = q_2$ וגם $r_1 = r_2$. נחסיר את המשוואות אחת מהשנייה ונקבל

$$0 = b(q_1 - q_2) + (r_1 - r_2)$$

כלומר, $r_2 - r_1 = b(q_1 - q_2)$ ולכן $b | r_2 - r_1$. היות ו-$r_1, r_2 \in [0, b - 1]$ מתקיים ש $-b < r_1 - r_2 < b$. ולכן, כדי שיתקיים $b | r_2 - r_1$ חייב להתקיים $r_2 - r_1 = 0$ או במילים אחרות $r_2 = r_1$. נובע אם כך שגם $q_1 = q_2$.

■

דוגמה: יהי $a = 17$ ויהי $b = 7$. מצאו את q, r.

פתרון: לפי משפט החלוקה, נחפש פתרון למשוואה

$$17 = 7 \cdot q + r$$

כאשר $0 \leq r < 7$.

קל לראות כי מתקיים

$$17 = 7 \cdot 2 + 3$$

ולכן $q = 2, r = 3$.