©צוות קורס "תורת המספרים האלגוריתמית" סמסטר א תש"פ: בר אלון, מיכאל פרי, שמואל שמעוני, אברהים שאהין, דורון מור, חיה קלר, אלעד אייגנר-חורב. נכתב ע"י דורון מור

עיקרון האינדוקציה והסדר הטוב

הגדרה: קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$ מוגדרת באופן הבא:

1. האיבר 1 הינו איבר ב $\mathbb{N}$.
2. אם x הינו איבר ב $\mathbb{N}$ אזי גם $x+1$ ב $\mathbb{N}$.

עקרון הסדר הטוב (WOP): *לכל תת קבוצה לא ריקה של $\mathbb{N}$ או $\mathbb{Z}^+$ יש איבר מינימלי.*

<u>דוגמה</u>: אם נבדוק את סכום המספרים האי זוגיים נראה תופעה מעניינת:

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

עם מעט חשיבה, נגיע למסקנה הבאה:

$$1 = 1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$$

אבל, עד מתי זה נכון? אולי זה תופס רק עד 4? אולי עד 10?

ננסה להוכיח את הטענה הבאה:

<u>טענה</u>: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ מתקיים ש

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

הוכחה (בעזרת WOP): נסמן $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ קבוצת המספרים המקיימים את הטענה, ו-$T = \mathbb{Z}^+ \setminus S$ קבוצת המספרים שלא מקיימים את הטענה. נניח בשלילה כי T לא ריקה. לכן, לפי WOP, קיים לה איבר מינימלי- נקרא לו a.

נשים לב כי 1 כן מקיים את הטענה:

$$\sum_{i=1}^{1} 2i - 1 = 2*1 - 1 = 1 = 1^2$$

ולכן $a > 1$.

לפי ההנחה בשלילה נקבל שעבור a מסוים מתקיים

$$\sum_{i=1}^{a} 2i-1 \neq a^2$$

היות ו-a הוא מינימלי ב-T, נשקול את $a-1$.

$$\sum_{i=1}^{a} 2i-1 \neq a^2$$

$$\sum_{i=1}^{a-1} 2i-1+(2a-1) \neq a^2$$

$$\sum_{i=1}^{a-1} 2i-1 \neq a^2-2a+1$$

$$\sum_{i=1}^{a-1} 2i-1 \neq (a-1)^2$$

כלומר, גם $a-1$ לא מקיים את הטענה! סתירה למינימליות של a.

היות והגענו לסתירה על ההנחה בשלילה, הרי שהטענה נכונה. ∎

אינדוקציה חלשה

<u>משפט 1</u>:

תהי $S \subseteq \mathbb{N}$ תת קבוצה המקיימת:

(I.1) $1 \in S$ וגם

(I.2) אם $k \in S$ אזי $k+1 \in S$

אזי $S=\mathbb{N}$.

הוכחה: נניח בשלילה כי הטענה איננה נכונה, אזי $T := \mathbb{N} \backslash S$ איננה קבוצה ריקה. לפי *WOP* ב-T ישנו איבר מינימלי יהי זה a. היות ו-$1 \in S$ אזי $a > 1$. היות ו-a מינימלי, מתקיים ש $a-1 \in S$. אבל לפי ההגדרה של S אם $a-1 \in S$ אזי $a \in S$ ולכן הגענו לסתירה. ∎

ניסוח יותר נפוץ של משפט 1 הוא הניסוח הבא.

<u>משפט 2</u>:

תהי $S(n)$ טענה מתמטית התלויה ב $n \in \mathbb{N}$,

בסיס: $S(1)$ נכונה.

צעד: אם $S(k)$ נכונה אזי $S(k+1)$ נכונה.

אוניברסיטת אריאל
©צוות קורס "תורת המספרים האלגוריתמית" סמסטר א תש"פ: בר אלון, מיכאל פרי, שמואל שמעוני, איברהים שאהין, דורון מור, חיה קלר, אלעד אייגנר-חורב. נכתב ע"י דורון מור

אזי הטענה $S(n)$ נכונה לכל $n \in \mathbb{N}$.

<u>דוגמה</u>: הוכיחו כי $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ מתקיים ש

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

<u>הוכחה</u> (בעזרת אינדוקציה חלשה): יהי $S \subseteq \mathbb{Z}^+$ קבוצת כל המספרים השלמים אשר מקיימים $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$, נרצה להראות כי

(I.1) $1 \in S$

(I.2) אם $k \in S$ אז גם $k+1 \in S$

ואז $S = \mathbb{Z}^+$.

<u>הוכחה של (I.1) (בסיס האינדוקציה)</u>: היות ומתקיים

$$\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2 * 1 - 1 = 1 = 1^2$$

נקבל כי $1 \in S$.

<u>הוכחה של (I.2) (צעד האינדוקציה)</u>: נראה כי אם $1 \le k \in S$ אז גם $k+1 \in S$. ההנחה כי $1 \le k \in S$ משמעותה כי $\sum_{i=1}^{k}(2i-1) = k^2$ והיא נקראת הנחת האינדוקציה.

נשים לב כי

$$\sum_{i=1}^{k+1}(2i-1) = \underbrace{\sum_{i=1}^{k}(2i-1)}_{=k^2 \text{ לפי הנחת אינדוקציה}} + (2(k+1)-1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

בגלל שהקבוצה S מקיימת את (I.1) ואת (I.2) אזי $S = \mathbb{Z}^+$. ■

<u>אינדוקציה חזקה/שלמה</u>

<u>משפט 3</u>:

תהי $S \subseteq \mathbb{N}$ תת קבוצה המקיימת:

(S.1) $1 \in S$ וגם

(I.2) אם $\{0,1,2,\dots,n\} \in S$ אזי $n+1 \in S$.

אזי $S = \mathbb{N}$.

ניסוח נפוץ יותר למשפט 3 הינו הניסוח הבא:

©צוות קורס "תורת המספרים האלגוריתמית" סמסטר א תש"פ: בר אלון, מיכאל פרי, שמואל שמעוני, אברהים שאהין, דורון מור, חיה קלר, אלעד אייגנר-חורב. נכתב ע"י דורון מור

<u>משפט 4</u>:

תהי $S(n)$ טענה מתמטית התלויה ב $n \in \mathbb{Z}^+$ המקיימת את התנאים הבאים: יהיו $n_0, n_1 \in \mathbb{Z}^+$ כך ש $n_0 \leq n_1$.

בסיס: $S(n_0), S(n_0+1), \dots S(n_1)$ כולן נכונות.

צעד: אם $S(n_0), S(n_0+1), \dots, S(k-1), S(k)$ נכונות אז גם $S(k+1)$ נכונה.

אזי הטענה $S(n)$ נכונה לכל $n_0 \leq n$.

<u>למה 5</u>: אינדוקציה חלשה גוררת אינדוקציה חזקה.

הוכחה: תהי קבוצה S המקיימת את (S.1), (S.2). נרצה להראות ש $S = \mathbb{N}$. נגדיר

$$Q := \{n \in \mathbb{N} : \mathrm{k} \in S \; for\ every\ natural\ k < n\} \cup \{1\}$$

מספיק להראות ש $Q = \mathbb{N}$. אכן אם כך, נשים לב כי אם $n \in \mathbb{N}$ אזי $\{1,2, \dots, n-1\} \subseteq S$ לפי הגדרת Q, ואזי בגלל (I.2) גם $n \in S$ כלומר $S \subseteq \mathbb{N}$.

נותר להראות כי $\mathbb{N} = Q$. לשם כך נשתמש באינדוקציה חלשה. (I.1) מתקיים ישירות מהגדרת Q. כדי להראות את (I.2) יהי $n \in Q$. היות והוא בקבוצה, מתקיים ש- $\{1,2, \dots, n-1\} \subseteq S$ לפי הגדרת Q. ואזי $n \in S$ לפי (S.2) ואם כך $\{1 \dots n\} \subseteq S$ שאומר ש- $n+1 \in S$ כנדרש. ■

<u>למה 6</u>: עיקרון האינדוקציה החזקה גורר את WOP.

הוכחה: נניח בשלילה שקיימת קבוצה $S \subseteq \mathbb{N}$ שאין לה איבר מינימלי. נראה שהקבוצה $T = \mathbb{N} \setminus S$, כלומר, הקבוצה המשלימה של S, אכן מקיימת את עקרון האינדוקציה החזקה, ולכן $T = \mathbb{N}$, כלומר $S = \phi$.

נרצה להראות ש T מקיימת את (S.1), (S.2) ואז נקבל $T = \mathbb{N}$. ולכן $S = \phi$.

היות ו-1 איבר מינימלי ב-$\mathbb{N}$ נקבל ש $1 \notin S$ כי ב-S אין איבר מינימלי. לכן $1 \in T$, ו-T מקיימת את (S.1).

נניח כי $\{1,2, \dots, n\} \subseteq T$ ונרצה להראות כי $n+1 \in T$. נניח בשלילה כי $n+1 \notin T$ כלומר $n+1 \in S$. ההנחה אומרת כי $i \notin S$ לכל $i \in [1,2, \dots, n]$. לכן ההנחה ש $n+1 \in S$ מעידה ש $n+1$ איבר מינימלי ב-S. בסתירה להנחה של-S אין איבר מינימלי. ■

ראינו ש WOP גורר אינדוקציה חלשה (משפט 1). ראינו גם שאינדוקציה חלשה גוררת חזקה (למה 5), ושאינדוקציה חזקה גוררת את ה-WOP (למה 6). כלומר, הוכחנו את המשפט הבא:

<u>משפט 7</u>:

העקרונות של אינדוקציה חלשה, אינדוקציה חזקה, ו-WOP הינם שקולים.