לינארית 2

תרגילים מספר של בועז צבאן

<u>תרגיל 1.3 (עמוד 95):</u> הוכח שהפונקציות הבאות הן מכפלות פנימיות:

(א) $< (a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) >_S := a_1\overline{b_1} + ... + a_n\overline{b_n}$ על $\mathbb{F}^n$.
(ב) $< v, u > := v^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} u$ מעל $\mathbb{R}^2$.
(ג) $< A, B > := tr\left(AB^*\right)$ על $\mathbb{C}^{m\times n}$.
(ד) $< f, g > := \int_a^b f(x)g(x)dx$ (כאשר $a < b$) על מרחב הפונקציות הרציפות $h : [a, b] \to \mathbb{R}$.

פתרון (ב): צריך לבדוק תכונות.
1) יהיו $\mathbb{R}^2 \ni v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$. אזי

$$< v, u >= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = [v_1\ v_2] \begin{bmatrix} u_1 + u_2 \\ u_1 + 2u_2 \end{bmatrix} =$$
$$= v_1\left(u_1 + u_2\right) + v_2\left(u_1 + 2u_2\right) = \left(v_1u_1 + v_1u_2\right) + \left(v_2u_1 + 2v_2u_2\right) =$$
$$= \left(v_1u_1 + v_2u_1\right) + \left(v_1u_2 + 2v_2u_2\right) = \left(u_1v_1 + u_1v_2\right) + \left(u_2v_1 + 2u_2v_2\right) =$$
$$= u_1\left(v_1 + v_2\right) + u_2\left(v_1 + 2v_2\right) = [u_1\ u_2] \begin{bmatrix} v_1 + v_2 \\ v_1 + 2v_2 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} =< u, v >$$

כלומר $<,>$ פעולה סימטרית.

יהי $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ו- $\mathbb{R}^2 \ni w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$. אזי

$$< \alpha v + \beta u, w >= \left(\alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right)^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} =$$
$$= \left(\alpha\,[v_1\ v_2] + \beta\,[u_1\ u_2]\right) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} =$$
$$= \alpha\,[v_1\ v_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} + \beta\,[u_1\ u_2] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} =$$
$$= \alpha\left(\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\right) + \beta\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\right) =$$
$$= \alpha < v, w > +\beta < u, w >$$

כלומר $<,>$ לינארית במשתנה הראשון.

$$\begin{aligned} < u,u >= \left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}\right]^t \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}\right] = [u_1\ u_2] \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array}\right] = \\ = [u_1\ u_2] \left[\begin{array}{c} u_1+u_2 \\ u_1+2u_2 \end{array}\right] = u_1\left(u_1+u_2\right)+u_2\left(u_1+2u_2\right) = \\ = \left(u_1^2+2u_1u_2+u_2^2\right)+u_2^2 = \left(u_1+u_2\right)^2+u_2^2 \geq 0 \end{aligned}$$

כלומר $<,>$ אי־שלילית, לכן הפונקציה שמוגדרת בסעיף (ב) היא מכפלה פנימית.

<u>תרגיל $1.10\frac{1}{2}$:</u> תהא $T:V\to V$ העתקה לינארית. הוכח:
(א) אם לכל $u,v\in V$ מתקיים $< T(u),v >=0$ אז $T=0$.
(ב) אם S קבוצה פורשת של V ו־ D קבוצה פורשת של $\mathrm{Im}\,(T)$,
ולכל $u\in S$ ו־ $v\in D$ מתקיים $< T(u),v >=0$, אז $T=0$.

פיתרון: (א). נתון $< T(u),v >=0$, לכל $v\in V$. זה אומר שגם נכון ש־ $< T(u),T(u) >=0$ לכל $u\in V$. לפי תכונה של אי־שליליות נובע ש־ $T(u)=0$ לכל $u\in V$, אבל זה יכול להיות רק כאשר $T=0$.

(ב) נגדיר $S=\{s_1,...,s_m\}$. נתון ש־ $V=\mathrm{Span}\,\{s_1,...,s_m\}$, כלומר <u>כול</u> וקטור $a\in V$ ניתן לתצוגה $a=\alpha_1 s_1+...+\alpha_n s_n$. נגדיר $D=\{d_1,...,d_n\}$. נתון ש־ $\mathrm{Im}\,(T)=\mathrm{Span}\left\{d_{\overline{1,n}}\right\}$, כלומר $T(w)\in\mathrm{Im}\,(T)$ כך ש־ $T(w)=\beta_1 d_1+...+\beta_n d_n$. בנוסף, יהיה $v\in\mathrm{Im}\,(T)$ שרירותי, אזי $v=\gamma_1 d_1+...+\gamma_n d_n$, ולכן

$$\begin{aligned} < T(a),v >=< T(\alpha_1 s_1+...+\alpha_n s_n),\gamma_1 d_1+...+\gamma_n d_n > \\ =< T(\alpha_1 s_1)+...+T(\alpha_n s_n),\gamma_1 d_1+...+\gamma_n d_n >= \\ =< \alpha_1 T(s_1)+...+\alpha_n T(s_n),\gamma_1 d_1+...+\gamma_n d_n >= \\ =< \alpha_1 T(s_1),\gamma_1 d_1+...+\gamma_n d_n > +...+ < \alpha_n T(s_n),\gamma_1 d_1+...+\gamma_n d_n >= \\ = \alpha_1 < T(s_1),\gamma_1 d_1 > +\alpha_1 < T(s_1),\gamma_2 d_2 > +...+\alpha_n < T(s_n),\gamma_n d_n >= \\ = \alpha_1\overline{\gamma_1} < T(s_1),d_1 > +\alpha_1\overline{\gamma_2} < T(s_1),d_2 > +...+\alpha_n\overline{\gamma_n} < T(s_n),d_n >= 0 \end{aligned}$$

כיוון שנתון ש־ $< T(s_i),d_j >=0$ לכל $1\leq i\leq m$ ולכל $1\leq j\leq n$.

מצד שני $v\in\mathrm{Im}\,(T)$. נבחר v, כך ש־ $T(a)=v$ נקבל $0=< T(a),v >=< T(a),T(a) >$ עבור $a\in V$ שרירותי. אבל, לפי אי־שליליות של המכפלה הפנימית, נקבל $T(a)=0 \quad \forall a\in V$, וזה יתכן אם ורק אם T היא העתקת האפס.

<u>תרגיל 1.12:</u> יהא $B=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס עבור V.
(א) יהא $v\in V$ כך שלכל i מתקיים $< v_i,v >=0$. הוכח ש־ $v=0$.
(ב) יהיו $u,w\in V$ כך שלכל i מתקיים $< v_i,u >=< v_i,w >$. הוכח ש־ $u=w$.

פיתרון: (א) B בסיס ב־V, לכן קיימים $\alpha_{\overline{1,n}}$ כך ש־$v=\alpha_1 v_1+...+\alpha_n v_n\in V$.

$< v_i, v >= 0$ לכל i, אז גם $< v_i, \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n >= 0$ לכל i, לכן

$$0 =< v_i, \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n >= \overline{\alpha_1} \cdot < v_i, v_1 > + ... + \overline{\alpha_n} \cdot < v_i, v_n >$$

נגדיר $a = v_j \in V$ עבור $j \neq i$. אזי $< v_i, a >= 0$, לכן $\overline{\alpha_i} \cdot < v_i, v_i >= 0$. כיוון ש־$v_{i=\overline{1,n}}$ הם וקטורי בסיס מתקיים $v_i \neq 0$ לכל i, לכן בהכרח $\alpha_i = \overline{\alpha_i} = 0$ כלומר $v = 0$.

(ב) $< v_i, u >=< v_i, w >$ לכל i, לכן $\overline{< v_i, u > - < v_i, w >} = 0$ לכל i, אזי

$$\begin{aligned} 0 = \overline{0} &= \overline{< v_i, u >} - \overline{< v_i, w >} = \\ &=< u, v_i > - < w, v_i >= \\ &=< u - w, v_i > \end{aligned}$$

שוב פעם B בסיס ב־V, לכן קיימים $\beta_{\overline{1,n}}$ כך ש־$u - w = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n \in V$. לכן

$$\begin{aligned} 0 &=< u - w, v_i >=< \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n, v_i >= \\ &= \beta_1 \cdot < v_i, v_1 > + ... + \beta_n \cdot < v_i, v_n > \end{aligned}$$

קיבלנו מערכת משוואות הומוגנית

$$(*) \quad \begin{cases} \beta_1 \cdot < v_1, v_1 > + ... + \beta_n \cdot < v_1, v_n >= 0 \\ \beta_1 \cdot < v_2, v_1 > + ... + \beta_n \cdot < v_2, v_n >= 0 \\ \vdots \\ \beta_1 \cdot < v_n, v_1 > + ... + \beta_n \cdot < v_n, v_n >= 0 \end{cases}$$

או בצורה מטריצות

$$\begin{bmatrix} < v_1, v_1 > & < v_1, v_2 > & ... & < v_1, v_n > \\ < v_2, v_1 > & < v_2, v_2 > & ... & < v_2, v_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < v_n, v_1 > & < v_n, v_2 > & ... & < v_n, v_n > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

בתרגיל 1.8 הוכחנו, ש־ $det(A) \neq 0$ אם ורק אם $\{v_1, ..., v_n\}$ בת"ל. לכן למערכת משוואות הומוגנית $(*)$ יש פיתרון טריוויאלי, והוא $\beta_1 = ... = \beta_n = 0$, שזה אומר $u - w = 0$, כלומר $u = w$ וזה מה שצריך להוכיח.