סיכום קורס מבנים דיסקרטיים – סמסטר ב' תש"פ מדעי המחשב (הועתק מסיכומים מהדריי) עריכה: אייל לוי

הערה: כל החומר במסמך הועתק מסיכומים משנים קודמות ולכן ייתכנו שינויים. יש להפעיל שיקול דעת! אשתדל לעדכן את הסיכומים לקראת תקופת מבחנים

אוניברסיטת אריאל בשומרון

חלק א: קומבינטוריקה

הגדרה: ענף במתמטיקה העוסק במנייה של עצמים המקיימים תנאי מסוים בקבוצות בנות מניה.

סוגי בעיות:

- בעיות מניה – מספר הפתרונות לבעיה מסוימת.
- בעיות חיפוש ואופטימיזציה – מציאת הפתרון האופטימאלי.
- בעיות הכרעה – האם קיים פתרון לבעיה.

כללי מניה בסיסיים:

עיקרון הסכום: תהיינה A,B קבוצות סופיות וזרות. אז מתקיים:

$$|A\cup B|=|A|+|B|$$

הכללה של המשפט: לכל n קבוצות סופיות וזרות אחת מהשנייה מתקיים:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|$$

עיקרון המכפלה: תהיינה A,B קבוצות סופיות. אז מתקיים:

$$|A\times B|=|A|\cdot|B|$$

הכללה של המשפט: לכל n קבוצות סופיות מתקיים:

$$|A_1\times A_2\ldots\times A_n|=\prod_{i=1}^{n}|A_i|$$

עיקרון המשלים: רצוי = סה"כ פחות לא רצוי.

עיקרון שובך היונים:

- אם מכניסים יותר מ k איברים לתוך k תאים אז קיים לפחות תא אחד בו יימצאו 2 איברים או יותר.
- אם מכניסים $kn+1$ איברים לתוך n תאים אז בהכרח לפחות אחד מהתאים יכיל לפחות $k+1$ איברים.

משפט ארדש – סקרש: לכל סדרה באורך $ab+1$ של מספרים ממשיים שונים יש תת סדרה עולה באורך $a+1$ או תת סדרה יורדת באורך $b+1$.

תמורה (פרמוטציה): מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים בשורה:

$n!$ - כלומר, למקום הראשון קיימים n אפשרויות, למקום השני קיימים $n-1$ אפשרויות, וכן הלאה.

חליפות עם חזרות: מספר האפשרויות לבחירת k איברים מתוך n עם חזרות ועם חשיבות לסדר הבחירה: (k יכול להיות גדול מ n).

n^k - כלומר לכל אחד מ k האיברים קיימים n אפשרויות.

- **חליפות:** מספר האפשרויות לבחירת k איברים מתוך n ללא חזרות ועם חשיבות לסדר הבחירה:

$\frac{n!}{(n-k)!}$ - כלומר, למקום הראשון קיימים n אפשרויות, למקום השני קיימים $n-1$ אפשרויות, וכן הלאה עד מקום k שבו קיימים $n-k+1$ אפשרויות.

- **צירופים**: מספר האפשרויות לבחירת k איברים מתוך n ללא חזרות וללא חשיבות לסדר הבחירה:
  $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ - כלומר, בהתחלה מונים בחירת k איברים מתוך n ללא חזרות ו**עם** חשיבות לסדר הבחירה, ומקבלים שמנינו את הקבוצה כמספר התמורות שלה ולכן מחלקים ב $k!$.
  זהות: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

חלוקות: מספר האפשרויות לבחירת k איברים מתוך n עם חזרות וללא חשיבות לסדר הבחירה: (k יכול להיות גדול מ n).

$\binom{k+n-1}{k}$ - כלומר, מסדרים את האיברים לפי החזרות (איברים חוזרים יהיו סמוכים אחד לשני) ומתייחסים לכל האיברים כאיברים זהים, כעת הבעיה היא כזו: מספר האפשרויות לחלק k איברים זהים ל n תאים כך שסה"כ יש לנו בשורה אחת k איברים ו $n-1$ מחיצות כדי ליצור n תאים (סה"כ: $n-1+k$ עצמים), נשאר רק לבחור היכן לשים את המחיצות (או לחלופין, היכן לשים בין המחיצות את k האיברים) וזו בעיית צירופים (ללא חזרות וללא חשיבות לסדר).

סיכום הנוסחאות:

	עם חשיבות לסדר	בלי חשיבות לסדר
עם חזרות	n^k	$\binom{k+n-1}{n-1}$
ללא חזרות	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

הבינום של ניוטון:

$$(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{k}a^ib^{n-i}$$

זהות פסקל:
חלוקת הבחירה של k איברים מתוך n ל -2 סוגי קבוצות: קבוצות שמכילות את האיבר הראשון ובהן נותר לבחור $k-1$ איברים מתוך $n-1$ שנשארו (ללא הראשון). וקבוצות שאינן מכילות את האיבר הראשון ובהן צריך לבחור את k האיברים מתוך $n-1$ שנשארו (ללא הראשון).

$$\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}=\binom{n}{k}$$

משולש פסקל:

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3}$$

תכונות של משולש פסקל:

1. כל שורה במשולש סימטרית סביב האמצע שלה.
2. כל איבר מתקבל מסכום 2 האיברים שמעליו.
3. סכום השורה ה – n במשולש הוא: 2^{n-1}.
4. סכום הערכים במקומות הזוגיים בשורה שווה לסכום הערכים במקומות האי זוגיים.
5. בשורה ה n במשולש נמצאים המקדמים של הפיתוח: $(a+b)^{n-1}$.
6. הסדרה בצלע החיצונה היא: $1,1,1,1,1,\ldots$
7. הסדרה בקו השני היא: $1,2,3,4,\ldots$ (המספרים הטבעיים).
8. הסדרה בקו השלישי היא: $1,3,6,10,\ldots$ (המספרים המשולשים).

מספרי קטלן: $1,1,2,5,14,42,132,429,1430\ldots$

$$C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}$$

C_n מונה את מספר הדרכים לשים סוגריים על $n+1$ גורמים שונים.

עיקרון ההכלה וההדחה:
תהיינה A,B קבוצות סופיות. אז מתקיים:

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

הכללה של המשפט: לכל n קבוצות סופיות מתקיים שגודל האיחוד שווה לסכום המתחלף:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{i<j}^{n}|A_i\cap A_j|+\sum_{i<j<k}^{n}|A_i\cap A_j\cap A_k|\mp\cdots$$

חלק ב': רקורסיה ופתרון נוסחאות נסיגה

נוסחאות נסיגה

הגדרה: נוסחא רקורסיבית: נוסחא המחשבת תוצאה של בעיה מסוימת המתבססת על חישוב של אותה בעיה עבור ערכים קודמים.

לכל נוסחת נסיגה נגדיר:

- בסיס/ תנאי עצירה: פתרון של הנוסחא עבור הערך הפשוט ביותר.
- צעד רקורסיבי: חישוב המסתמך על התוצאה של ערך/ערכים קודמים.

הגדרה רקורסיבית:

קבוצה: הגדרה רקורסיבית של קבוצה תתבצע באופן הבא:

בסיס: איבר או קבוצת איברים שידוע לנו שהם שייכים לקבוצה.
צעד רקורסיבי: שייכות של איבר כללי לקבוצה על סמך איברים אחרים שנמצאים כבר בקבוצה.

לדוגמא: קבוצת המספרים הטבעיים מוגדרת באופן הבא:
$0\in\mathbb{N}$ - בסיס,
$x\in\mathbb{N}$ גורר ש $x+1\in\mathbb{N}$ - צעד רקורסיבי.
ועכשיו, אם נרצה לדעת האם איבר a שייך לקבוצה, נצטרך לחזור אחורה עד הבסיס כדי לדעת האם האיברים הקודמים שייכים לקבוצה וכך נדע עבור האיבר עצמו.

פונקציה: הגדרה רקורסיבית של פונקציה תתבצע באופן הבא:

בסיס/תנאי התחלה: הערכים שהפונקציה מחזירה עבור האיבר/האיברים הראשונים.
צעד רקורסיבי: הפונקציה עצמה שבתוכה יש קריאה לפונקציה עבור איברים קודמים.

לדוגמא: פונקציה המחשבת עצרת $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^+$ מוגדרת באופן הבא:
$f(0)=1$ – תנאי התחלה,
$f(n)=n*f(n-1)$ עבור $n>0$ - צעד רקורסיבי.

שיטות לפתרון נוסחאות נסיגה

המטרה: להגיע מנוסחת נסיגה לנוסחא מפורשת (נוסחא שמציבים בה n ומקבלים מיידית את התשובה).

שיטת הניחוש/ הצבה חוזרת:

אם נתונה פונקציה רקורסיבית $f(n)$ אז נפתור ע"י הצבת $f(n-1)$ ואז נציב $f(n-2)$ וכן הלאה עד תנאי ההתחלה.

לדוגמא: $f(n)=2*f(n-1)$, $f(0)=3$.
נציב: $f(n-1)=2*f(n-2)$ בנוסחא ונקבל אחרי הצבה אחת:
$f(n)=2*2*f(n-2)$
נמשיך ונציב:
$f(n-2)=2*f(n-3)$ בנוסחא
ונקבל אחרי 2 הצבות:
$f(n)=2*2*2*f(n-3)$
עד שרואים את החוקיות ומנחשים שהפתרון אחרי $k-1$ הצבות
יהיה: $f(n)=2^kf(n-k)$.
צריך להגיע ל $f(0)$ ולכן נציב:
$k=n$ (כי $n-k=n-n=0$)
ונקבל: $f(n)=2^nf(0)$,
נציב את $f(0)$ ונקבל נוסחא מפורשת: $f(n)=3*2^n$.

כאשר משתמשים בשיטת הניחוש, צריך להוכיח את התוצאה ע"י אינדוקציה.

פתרון נוסחאות נסיגה ליניאריות הומוגניות ע"י הפולינום האופייני:

אם נתונה פונקציה רקורסיבית מהצורה הבאה:

$f(n)=a_1f(n-1)+a_2f(n-2)+\cdots+a_kf(n-k)$ עם k תנאי התחלה:
$f(1)=c_1,f(2)=c_2,\ldots,f(k)=c_k$
(הערה: תנאי ההתחלה יכולים להיות מ 0 עד $k-1$),
כלומר: נוסחא התלויה ב k האיברים הקודמים.ואין לנוסחא איבר חופשי (לדוגמא: $f(n)=2f(n-1)+\mathbf{2}$). אז נפתור את הנוסחא ע"י השלבים הבאים:

1. נציב: $f(n)=x^n$, $f(n-1)=x^{n-1}$, $f(n-2)=x^{n-2}$, … . $f(n-k)=x^{n-k}$. ונקבל את הפולינום האופייני:
   $x^n=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_kx^{n-k}$
2. נפתור את המשוואה (מסדר k) ונקבל את הפתרונות: $x_1,x_2,\ldots,x_k$.
3. כעת, אם קיבלנו k פתרונות שונים, הנוסחא תראה כך:
   $f(n)=b_1{x_1}^n+b_2{x_2}^n+\cdots+b_k{x_k}^n$, נותר למצוא את המקדמים: $b_1,b_2,\ldots,b_k$. נמצא את המקדמים ע"י הצבת תנאי ההתחלה ונקבל מערכת של k משוואות עם k נעלמים:

$$f(1)=b_1{x_1}^1+b_2{x_2}^1+\cdots+b_k{x_k}^1$$
$$f(2)=b_1{x_1}^2+b_2{x_2}^2+\cdots+b_k{x_k}^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f(k)=b_1{x_1}^k+b_2{x_2}^k+\cdots+b_k{x_k}^k$$

נציב את הפתרונות של $b_1,b_2,\ldots,b_k$ בנוסחא:
$f(n)=b_1{x_1}^n+b_2{x_2}^n+\cdots+b_k{x_k}^n$ וזו הנוסחא המפורשת.
אם יש פתרונות זהים: לדוגמא: $x_1=x_2$ אז אין לנו k פתרונות שונים ולכן, נכפול את x_1 או את x_2 ב n ונקבל:
$f(n)=b_1{x_1}^n+\boldsymbol{n}b_2{x_2}^n+\cdots+b_k{x_k}^n$. אם יש ריבוי של פתרונות (m פתרונות זהים, לדוגמא: $x_1=x_2=\cdots=x_m$), נכפול כל פתרון זהה ב n (חוץ מהראשון) כדי לקבל m פתרונות שונים והנוסחא תראה כך:
$f(n)=b_1{x_1}^n+\boldsymbol{n}b_2{x_2}^n+\boldsymbol{n^2}b_3{x_3}^n+\cdots+\boldsymbol{n^{m-1}}b_m{x_m}^n+\cdots+b_k{x_k}^n$.

חלק ג': תורת הגרפים

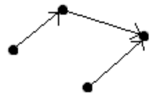
תורת הגרפים

הגדרה: ענף במתמטיקה העוסק בתכונותיהם של גרפים.

מושגים:

גרף: קבוצה של צמתים (קודקודים) וקבוצה של קשתות בין הקודקודים.

- גרף מכוון: גרף שבו יש משמעות לכיוון של הקשת. סימון: $D=(V,E)$. כאשר V היא קבוצת הצמתים (הקודקודים). ו $E \subseteq V \times V$ היא קבוצת הקשתות (זוגות סדורים). לכל קשת יש כיוון: $e=(u,v)$ היא קשת שיוצאת מ u ומגיעה ל v.



- גרף לא מכוון: אין משמעות לכיוון של הקשת. סימון: $G=(V,E)$. כך שבמקרה זה: $E \subseteq \{\{u,v\}|\, u,v \in V\}$.

גרף פשוט: גרף שבין כל 2 צמתים יש לכל היותר קשת אחת ואין קשת מקודקוד לעצמו.

גרף לא פשוט:

שכנות: 2 קודקודים יקראו שכנים אם קיימת קשת ביניהם.

דרגה של צומת: מספר הקשתות המחוברות לצומת.

סימון: $\text{degree}(v)$.

- בגרף מכוון יש דרגת כניסה: מספר הקשתות הנכנסות לצומת. $\text{indegree}(v)$
  ודרגת יציאה: מספר הקשתות היוצאות מהצומת. $\text{outdegree}(v)$.
- עלה: קודקוד בעץ שהדרגה שלו היא 1.
- צומת מבודד: קודקוד שהדרגה שלו היא 0.
- גרף שדרגות כל הצמתים בו שווה ל k נקרא גרף k - רגולרי.

משפט: סכום כל הדרגות בגרף הוא זוגי (כי כל קשת "תורמת" 2 דרגות: כניסה ויציאה) ושווה ל $\sum_{v\in V}\text{degree}(v)=2|E|$ (פעמיים מספר הקשתות).

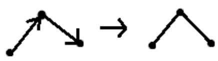
גרף ריק: גרף שבו אין קשתות. סימון N_n כאשר n - מספר הקודקודים.

גרף שלם: גרף שבו בין כל 2 קודקודים יש קשת. סימון k_n כאשר n - מספר הקודקודים.

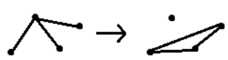
קליקה: תת גרף שבו בין כל 2 קודקודים יש קשת. (תת גרף שלם)

גרף אינסופי: גרף שבו קבוצת הצמתים היא אינסופית.

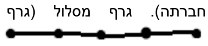
גרף תשתית: גרף התשתית של גרף מכוון הוא גרף שאינו מכוון שבו יש אותם קודקודים ואותם קשתות כמו במכוון רק ללא הכיוון.



גרף משלים: הגרף המשלים שיסומן כ $\bar{G}$, של גרף G הוא גרף עם אותם קודקודים כך שבמקום שלא הייתה קשת בגרף המקורי יש קשת ב $\bar{G}$ ובמקום שהייתה קשת ב G אין קשת ב $\bar{G}$.



מסלול: סדרה של קשתות סמוכות בגרף (כך שסוף קשת מתחברת לתחילת חברתה). גרף מסלול (גרף שכולו מסלול אחד) יסומן כ P_n.



- מסלול פשוט: מסלול שלא עובר באף צומת יותר מפעם אחת.
- מסלול אוילר: מסלול העובר בכל הקשתות בגרף בדיוק פעם אחת.
  - מסלול אוילר קיים אם ורק אם יש בדיוק 0 או 2 צמתים בעלי דרגה אי זוגית.
- מסלול המילטוני: מסלול העובר בכל הצמתים בגרף בדיוק פעם אחת.
- אורך של מסלול – מספר הקשתות במסלול.

מרחק בין 2 קודקודים: כמות הקשתות במסלול **הקצר** ביותר בין 2 הקודקודים. אם אין מסלול אז המרחק שווה לאינסוף. מרחק מקודקוד לעצמו שווה 0.

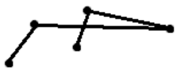
פונקצית המרחק בגרף לא מכוון מקיימת:

$$d(u,v)=d(v,u)$$

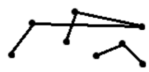
$$d(u,v)+d(v,w)\ge d(u,w)$$

קוטר של גרף: המרחק הגדול ביותר בגרף. אם הגרף אינו קשיר אז הקוטר הוא אינסוף.

גרף קשיר: גרף לא מכוון שבו בין כל שני צמתים קיים מסלול (אפשר להגיע מכל קודקוד לחברו).

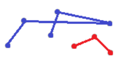


גרף לא קשיר:



רכיב קשירות: תת גרף קשיר מקסימאלי (כלומר, הגרף מתפרק לתתי גרפים כך שמכל קודקוד בתת גרף הראשון אי אפשר להגיע לאף קודקוד בתת הגרף השני.

רכיבי הקשירות:



מעגל: מסלול לא ריק המתחיל ומסתיים באותו צומת. גרף מעגל הוא גרף שכולו מעגל. יסומן כ C_n כאשר n - מספר הקודקודים.

- מעגל פשוט: מעגל שלא עובר באף צומת יותר מפעם אחת.
- מעגל אוילר: מעגל העובר בכל הקשתות בגרף בדיוק פעם אחת.
  - מעגל אוילר קיים אם ורק אם אין צמתים בעלי דרגה אי זוגית.
- מעגל המילטוני: מעגל העובר בכל הצמתים בגרף בדיוק פעם אחת.

עץ: גרף קשיר ללא מעגלים. סימון T_n כאשר n - מספר הקודקודים.

- עץ בינארי: עץ שיש לו שורש ולכל קודקוד יש לכל היותר 2 בנים (והדרגה בעץ היא לכל היותר 3).

יער: גרף ללא מעגלים. (לא חייב להיות קשיר, כל רכיב קשירות הוא עץ).

גרף דו צדדי: גרף שאפשר לחלק את הקודקודים שלו ל 2 קבוצות זרות כך שלא קיימת קשת בין 2 קודקודים השייכים לאותה קבוצה.

גרף דו צדדי מלא: גרף דו צדדי בו נמצאות כל הקשתות האפשריות. סימון: $K_{n,m}$ כאשר n קודקודים בצד אחד ו m קודקודים בצד שני.

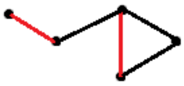
גרף מישורי: גרף שניתן לצייר אותו במישור מבלי שהקשתות יחתכו זו את זו.

גרף שאינו מישורי:

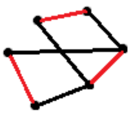
- פאה בגרף: פאה בגרף היא השטח הכלוא בין צלעות הגרף. הפאה החיצונה נספרת גם היא ונקראת הפאה האינסופית. קבוצת הפאות תסומן בד"כ ב F.
  בגרף  יש 3 פאות.
- נוסחת אוילר: יהא G גרף מישורי קשיר, V - קבוצת הקודקודים, E - קבוצת הצלעות ו F - קבוצת הפאות. אז מתקיים: $|V|-|E|+|F|=2$.
- הכללת הנוסחא לגרפים לא קשירים: $|V|-|E|+|F|=1+c$ כאשר c - מספר רכיבי הקשירות בגרף.
- משפט: בגרף מישורי מתקיים: $|E|\le 3\cdot|V|-6$
- משפט: בגרף מישורי קיים קודקוד אחד לפחות שדרגתו קטנה או שווה ל 5.

גרף k - צביע: גרף שניתן לצבוע את הקודקודים שלו ב k צבעים כך שכל 2 קודקודים סמוכים אינם צבועים באותו צבע. מספר הצביעה של הגרף הוא ה k המינימאלי שנדרש כדי לצבוע את הקודקודים בצורה חוקית ויסומן כ: $\chi(G)$.

זיווג בגרף: זיווג בגרף G הוא אוסף של קשתות מהגרף כך שאין 2 קשתות מהאוסף שנוגעות בקודקוד משותף.



זיווג מושלם: זיווג מושלם ב G הוא זיווג שבו משתתפים כל הקודקודים בגרף. (חלוקת קודקודי הגרף לזוגות כך שכל זוג קודקודים מחוברים בקשת)



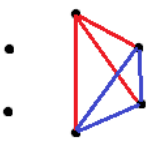
משפטים בתורת הגרפים

- בגרף קשיר לא מכוון עם n יש לפחות $n-1$ צלעות.
- בכל גרף G המקיים: $|V|\ge 3$ ו $|E|\ge|V|$ יש מעגל.
- גרף הוא דו צדדי אם ורק אם הוא 2 צביע.
- גרף הוא דו צדדי אם ורק אם אין בו מעגלים מאורך איזוגי.
- כל עץ הוא גרף דו צדדי.
- משפט ארבעת הצבעים: כל גרף מישורי הוא 4 – צביע.
- משפט טורן: הגרף בעל n קודקודים ומספר קשתות מקסימאלי שאינו מכיל קליקה בגודל $t+1$ הוא גרף המחולק ל t קבוצות צמתים זרות מאותו גודל (עד כמה שאפשר) ושלכל צומת יש קשת לכל שאר הצמתים בקבוצות האחרות.
- משפט Hall (משפט החתונה): יהא $G=(V\uplus U,E)$ גדף דו צדדי, $|V|=|U|$, אם לכל תת קבוצה של קודקודים $S\subseteq V$ מתקיים: $|S|\le|\Gamma(S)|$ כאשר $\Gamma(S)$ מייצג את אוסף השכנים של קודקודי S אז קיים ב G זיווג מושלם.

מסקנה: יהא G גדף דו צדדי k רגולרי אז קיים ב G זיווג מושלם.

- משפט רמזי: לכל n טבעי קיים גרף שלם כך שאם נצבע את הקשתות שלו ב 2 צבעים בהכרח נקבל תת גרף שלם (קליקה) בגודל n.
  - לכל גרף K_n, אם נצבע את הקשתות שלו ב 2 צבעים שונים, בהכרח נקבל קליקה בגודל $R_{n,m}$ הצבועה כולה באחד מן הצבעים כאשר $R_{n,m}$ הוא מספר רמזי.

  משפט רמזי עבור K_6:



  - מספר רמזי $R(m,n)=r$ אומר שאם נצבע את K_r ב 2 צבעים (כחול ואדום) אז בהכרח נקבל K_m צבועה כולה בכחול או K_n צבועה כולה באדום. מהדוגמא לעיל רואים כי: $R(3,3)=6$ - אם נצבע את K_6 ב 2 צבעים (אדום וכחול) נקבל בהכרח קליקה בגודל 3 (משולש) הצבועה כולה באדום או קליקה בגודל 3 הצבועה כולה בכחול.