קורס הסתברות – סמסטר ב' 2019 מדעי המחשב

נכתב ע"י צבי מינץ

סיכום הסתברות

שיעורים

תזכורות:

$\binom{n}{k}$ – לבחור k אנשים מתוך n בלי חזרות ובלי חשיבות לסדר, שקול חשיבות ל- $\frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\binom{k+n-1}{k}$ - מספר הדרכים לבחור k עצמים מתוך n עם חזרות ובלי חשיבות לסדר, ניתן להסתכל על בעיית $x_1 + x_2 + \cdots x_n = k$ או לחלופין לשים k כדורים ב n תאים.

בינום של ניוטון:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

פרומטציה:

על קבוצה $\{1,2,\ldots,n\}$ היא פונקצייה חח"ע
$\pi: \{1,2,\ldots n\} \to \{1,2\ldots,n\}$
נסמן ב S_n את קבוצת על הפרמוטציות מעל $\{1,2,\ldots,n\}$

עם חשיבות לסדר **ועם** חזרות - ___ $(\text{אפשריות})^{\text{כמות}}$

סכום סדרה הנדסית: $S_\infty = a_1 \cdot \frac{\overbrace{q^n}^{\to 0} - 1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}$

סכום סדרה חשבונית: $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$

שיעור 1: מרחב הסתברות

מרחב הסתברות: מרחב הסתברות הוא זוג סדור $(\Omega, \mathbb{P})$ כאשר:
Ω (מרחב המדגם) היא קבוצה סופית או בת מנייה
$\mathbb{P}$ היא פונקצייה מΩ לקטע $[0,1]$ והיא פונקצייה המקיימת כי $\Sigma_{\omega\in\Omega} P(\omega) = 1$

מאורע: מאורע $A \subseteq \Omega$ כך ש $\mathbb{P}(A) = \Sigma_{\omega\in A} P(\omega)$

$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ $\quad$ $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ $\quad$ **טענה:** $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

טענה: אם $A \subseteq B$ אזי $\mathbb{P}(A) \le \mathbb{P}(B)$

טענה: (מאורעות בלתי תלויים)

$$\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

טענה: עבור כל סדרה של מאורעות:

$$\mathbb{P}(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$$

שיעור 2: מרחב הסתברות אחיד

מרחב הסתברות אחיד (*Uniform*):

אם $\mathbb{P}(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ עבור כל $\omega \in \Omega$

טענה: עבור כל מאורע $\mathbb{P}(\mathrm{A}) = \frac{|\mathrm{A}|}{|\Omega|}$ מתקיים במרחב הסתברות אחיד.

שיעור 3: הכלה והדחה והסתברות מותנה

הכלה והדחה: יהיו $A_1,\ldots,A_k$ מאורעות מעל מרחב הסתברות אזי

1
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{\emptyset\neq\mathcal{J}\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|\mathcal{I}|-1}\mathbb{P}(\bigcap\nolimits_{i\in\mathcal{J}} A_i)$$

2
$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) = \sum_{\mathcal{J}\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|\mathcal{J}|}\mathbb{P}(\bigcap\nolimits_{i\in\mathcal{J}} A_i)$$

טענה: $\cap_{i\in\emptyset} A_i = \Omega$

טענה: $\lim_{n\to\infty} \Sigma_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{1}{e}$

דרך פתרון כללית ע"י הכלה והדחה:

1. מגדירים מאורע A_i עבור $i \in [a,b]$ אשר זהו המאורע שאנחנו מחפשים או המשלים שלו.
2. נשים לב כי $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in\mathcal{J}} A_i) = \frac{|\bigcap_{i\in\mathcal{J}} A_i|}{|\Omega|}$

אם המרחב הסתברות אחיד

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{\emptyset\neq\mathcal{J}\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|\mathcal{J}|-1}\mathbb{P}(\bigcap\nolimits_{i\in\mathcal{J}} A_i) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}\cdot (\text{פתרון של } 2)$$

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c\right) = \sum_{\mathcal{J}\subseteq\{1,\ldots,n\}} (-1)^{|\mathcal{J}|}\mathbb{P}(\bigcap\nolimits_{i\in\mathcal{J}} A_i) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}\cdot (\text{פתרון של } 2)$$

3. נשתמש בהכלה והדחה על מנת לחשב את $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} A_i^c)$ או את $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{n} A_i)$ ע"י אחת הנוסחאות, נקבל כי:

מרחב הסתברות מותנה

מייל: zvimints@gmail.com

אוניברסיטת
אריאל
בשומרון
מייל: zvimints@gmail.com

קורס הסתברות – סמסטר ב' 2019 מדעי המחשב
נכתב ע"י צבי מינץ

ביהינתן מרחב הסתברות $(\Omega,\mathbb{P})$ ומאורע $B\subseteq\Omega$ כך ש $\mathbb{P}(B)>0$ אזי מרחב ההסתברות המותנה ב B הוא $(\Omega,\mathbb{P}(\cdot\,|B))$ כאשר לכל $\omega\in\Omega$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(\omega|B)=\begin{cases}0, & \omega\notin B\\ \dfrac{\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}(B)}, & \omega\in B\end{cases}$$

כך ש $\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega\mid B)=1$

שיעור 4: הסתברות השלמה, Bayce, מאורעות ב"ת

טענה: $\mathbb{P}(A\mid B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

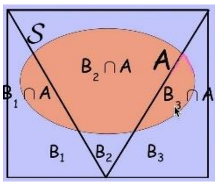
טענה: $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A\mid B)\cdot\mathbb{P}(B)$

טענה: $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n}A_i)=\mathbb{P}(A_1)\cdot\ldots\cdot\mathbb{P}(A_n\mid\cap_{i=1}^{n-1}A_i)$

חוק ההסתברות השלמה:

1
$$\mathbb{P}(A)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A\cap B_i)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A\mid B_i)\,\mathbb{P}(B_i)$$

2
$$\mathbb{P}(A_2\mid A_1)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(A_2\mid B_i\cap A_1)\cdot\mathbb{P}(B_i\mid A_1)$$



חוק בייס *Bayce*:

$$\mathbb{P}(A\mid B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B\mid A)}{\mathbb{P}(B)}$$

מאורעות בלתי תלויים:

1 A,B בלתי תלויים $\Leftrightarrow\mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\mid B)$

2 A,B בלתי תלויים $\Leftrightarrow\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$

אם A,B הם מאורעות בלתי תלויים אזי:

1. $\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$
2. $\mathbb{P}(A\cap B^c)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B^c)$
3. $\mathbb{P}(A^c\cap B)=\mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(B)$
4. $\mathbb{P}(A^c\cap B^c)=\mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(B^c)$

שיעור 5: סדרה של מאורעות בת"ל ומשתנים מקריים

מאורעות $A_1,\ldots,A_n$ נקראים **בלתי תלויים** אם לכל תת קבוצה $I\subseteq\{1,\ldots,n\}$ כך ש $|I|\geq 2$ מתקיים $\mathbb{P}(\cap_{i\in I}A_i)=\Pi_{i\in I}\mathbb{P}(A_i)$

או $\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n}B)=\Pi_{i=1}^{n}\mathbb{P}(B)$ עבור $B_i\in\{A_i,A_i^c\}$

כלומר, כל קומבנציה מהצורות הבאות מתקיימת: (עבור $n=3$)

1. $\mathbb{P}(A\cap B\cap C)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)$
2. $\mathbb{P}(A\cap B\cap C^c)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C^c)$
3. $\mathbb{P}(A\cap B^c\cap C)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B^c)\cdot\mathbb{P}(C)$
4. $\mathbb{P}(A^c\cap B\cap C)=\mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C)$
5. $\mathbb{P}(A\cap B^c\cap C^c)=\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B^c)\cdot\mathbb{P}(C^c)$
6. $\mathbb{P}(A^c\cap B\cap C^c)=\mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(B)\cdot\mathbb{P}(C^c)$
7. $\mathbb{P}(A^c\cap B^c\cap C)=\mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(B^c)\cdot\mathbb{P}(C)$
8. $\mathbb{P}(A^c\cap B^c\cap C^c)=\mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(B^c)\cdot\mathbb{P}(C^c)$

Conditional Independence

מאורעות A,B הם Conditional Independence אם בהינתן מאורע C כך ש $\mathbb{P}(C)>0$ מתקיים:

$$\mathbb{P}(A\cap B\mid C)=\mathbb{P}(A|C)\cdot\mathbb{P}(B|C)$$

שיעור 6: משתנים מקריים

משתנים מקריים

משתנה מקרי היא פונקציה $X:\Omega\to S$ כאשר $S\subseteq R$

אינדקטור של מאורע $A\subseteq\Omega$ הוא:

$$1_A(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A\\ 0, & \omega\notin A\end{cases}$$

התפלגות היא פונקציה $\mu:S\to[0,1]$ כך שהקבוצה $\underbrace{\{x\in S:\mu(x)\neq 0\}}_{\text{התומך}}$ סופית או בת מנייה ו $\sum_{x\in S}\mu(x)=1$

ולכן כדי להראות ש– μ' היא **התפלגות** צריך **להוכיח כי:**

1. μ' ממפה לערכים $[0,1]$
2. $\sum_{x\in S}\mu'(x)=1$
3. $\{x\in S:\mu'(x)\neq 0\}$ סופי או בן מניין

התפלגות של משתנה מקרי X היא פונקצייה μ_x שמוגדרת:

$$\mu_x(x)=\mathbb{P}(X=x):\forall x\in S$$

כאשר $\mathbb{P}(X=x):=\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega:X(\omega)=x\})$

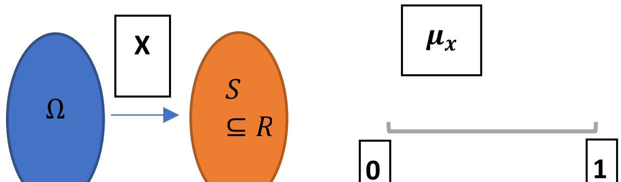
בדרך כלל נסמן עבור תומך של $\{0,1,2\}=\mu_{Y_1}$ אזי

S

$$Y_1\sim\begin{cases}0 & 4/9\\ 1 & 4/9\\ 2 & 1/9\end{cases}$$

$\mathbb{P}(X=x)$

כאשר אגף ימין הם $\mu_{Y_1}(Y_1=i)$ עבור כל $i\in[3]$



אוניברסיטת אריאל בשומרון
מייל: zvimints@gmail.com

הערה: X,Y הם משתנים מקריים זהים אם

$$\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{P}(Y=x)$$

עבור כל $x\in S$

נשים לב כי האינדקטור של מאורע $A\subseteq\Omega$

$$1_A\sim\begin{cases}1, & \mathbb{P}(A)\\ 0, & 1-\mathbb{P}(A)\end{cases}$$

הגדרה (התפלגות משותפת): יהיו $X,Y:\Omega\to S$ משתנים מקריים. **ההתפלגות המשותפת** של X ו- Y היא ההתפלגות של המשתנה המקרי (X,Y) כלומר

$$\mu_{(X,Y)}(x,y)=\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$

לכל $x,y\in S$

ההתפלגות של X ו– Y נקראות **ההתפלגויות השוליות**.

(X,Y) הוא משתנה מקרי $(X,Y):\Omega\to S^2$ כך ש :

$$(X,Y)(\omega)=(\,X(\omega),Y(\omega)\,)\in S^2$$

אבחנה:

התפלגות שוליות $\not\Rightarrow$ התפלגות משותפת

אבל התפלגות משותפת $\Longrightarrow$ התפלגות שולית

היות ו :

$$\mathbb{P}(X=x)=\sum_{y\in S}\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$

$$\mathbb{P}(Y=y)=\sum_{x\in S}\mathbb{P}(X=x,Y=y)$$

שיעור 7: התפלגויות נפוצות

Uniform Distribution – $U\,(S)$

התפלגות אחידה: תהי S קבוצה **סופית** כלשהי אזי נאמר שמשתנה X מתפלג אחיד על S ונסמן $X\sim U(S)$ אם ההסתברות עבור **כל** $x\in S$:

$$\mathbb{P}(X=x)=\frac{1}{|S|}$$

כאשר $S\coloneqq\{a,a+1,\dots b\}$ אזי נסמן $X\sim U(a,b)$

דוגמא: תוצאות הטלה של קובייה הוגנת

Bernoulli Distribution – $Ber\,(p)$

התפלגות ברנולי: יהי $p\in[0,1]$ מספר ממשי כלשהו, נאמר שמשתנה מקרי X מתפלג ברנולי עם פרמטר p ונסמן $X\sim Ber(p)$ אם:

$$\mathbb{P}(X=1)=p$$

$$\mathbb{P}(X=0)=1-p$$

דוגמא: הטלת מטבע עם הסתברות p לעץ.

Binomial Distribution – $Bin\,(n,p)$

התפלגות בינומית: יהי $p\in[0,1]$ מספר ממשי כלשהו ו-n מספר שלם חיובי, נאמר שמשתנה מקרי X מתפלג בינומית עם פרמטרים n ו- p ונסמן $X\sim Bin(n,p)$ אם ו לכל $k\in$ $[0,n]$ שלם (התומך) מתקיים:

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

דוגמא: הטלה של מטבע עם הסתברות p לקבל 1 בכל הטלה בודדת n פעמיים, כאשר כל הטלה היא **בלתי תלויה**. אזי X הוא מספר ההטלות בהם התוצאה הינה 1.

<u>הוכחה כי $Bin(n,p)$ היא התפלגות:</u>

1. נשים כי התומך בגודל $n+1$ ולכן סופי.

2. נשים לב כי $\mathbb{P}(X=k)\geq 0$ (נראה $\sum_k\mathbb{P}(X=k)=1$) ולכן $\mathbb{P}(X=k)\in[0,1]$

3. נראה כי $\sum_k\mathbb{P}(X=k)=1$:

$$\sum_k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=1^n$$

אבחנה: התפלגות $Bin(1,p)$ היא התפלגות $Ber(p)$

טענה: יהיו $X_1,\dots,X_n$ **משתנים מקריים בלתי תלויים** כך ש $X_i\sim Ber(p)$ לכל $i\in[1,n]$ ויהי $S_n\coloneqq\sum_{i=1}^{n}X_i$ אזי $S_n\sim Bin(n,p)$

הגדרה: לכל $i\in[1,n]$ יהי $X_i:\Omega\to S_i$ משתנה מקרי, נאמר ש $X_1,\dots,X_n$ **משתנים מקריים בלתי תלויים** אם לכל x_i עבור $i\in[1,n]$ מתקיים כי:

$$\mathbb{P}(X_1=x_1,\dots,X_n=x_n)=\Pi_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X_i=x_i)$$

הגדרה: המשתנים המקריים X,Y **בלתי תלויים** אם **לכל** a,b מתקיים כי:

$$\mathbb{P}(X=a,Y=b)=\mathbb{P}(X=a)\cdot\mathbb{P}(Y=b)$$

Geometric Distribution – $Geom\,(p)$

התפלגות גאומטרית: יהי $p\in(0,1)$ מספר ממשי, נאמר שמשתנה מקרי X מתפלג גאומטרית עם פרמטר p ונסמן $X\sim Geom(p)$ אם ו לכל $k\in\mathbb{N}$ (לא כולל 0) מתקיים:

$$\mathbb{P}(X=k)=p\cdot(1-p)^{k-1}$$

דוגמא: הטלת מטבע עם הסתברות $p\in(0,1)$ לעץ. שוב ושוב עד הפעם הראשונה שיוצא עץ, יהי X מספר ההטלות.

Hypergeometric Distribution – $Hyp\,(N,D,n)$

התפלגות היפרגאומטרית: יהי D,N,n שלמים חיוביים. נאמר שמשתנה מקרי X מתפלג הפרגאומטרית עם פרמטרים N,D,n ונסמן $X\sim Hyp(N,D,n)$ אם לכל $k\in$ $[0,n]$ שלם מתקיים :

אוניברסיטת אריאל בשומרון
מייל: zvimints@gmail.com

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\binom{D}{k}\cdot\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

תזכורת: $\binom{n}{n+i}=0$ מתקיים כי $\forall i\in\mathbb{Z}^+$

דוגמא: בכד יש N כדורים כאשר D מהם אדומים והשאר כחולים. מוציאים באופן מקרי אחיד **בלי החזרה** n כדורים, יהי X משתנה מקרי הסופר את **מספר הכדורים האדומים** שהוצאנו.

נקבל כי $\mathbb{P}(X=k)=0$ עבור כל $k\notin\{0,\dots,n\}$

K אדומים

כחולים

מרחב אחיד

$$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\binom{D}{k}\cdot\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

הערה: אם מדובר **עם החזרה** נקבל כי $X\sim Bin\left(n,\frac{D}{N}\right)$ כי:

k נבחר כדורים אדומים

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}\left(\frac{D}{N}\right)^k\left(1-\frac{D}{N}\right)^{n-k}$$

הערה: אם n "קטן מאוד" ביחס ל-N ו-D אזי ההתפלגות הבינומית $bin(n,\frac{D}{N})$ היא "קירוב טוב" להתפלגות ההיפרגאומטרית $Hyp(D,N,n)$

שיעור 8: המשך תפלגיות נפוצות

פואסון $Poi(\lambda)$

יהי $\lambda>0$ ממשי, נאמר שמשתנה מקרי X מתפלג פואסון Poisson עם פרמטר λ ונסמן $X\sim Poi(\lambda)$ אם לכל $k\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ מתקיים

$$\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$$

הוכחה שזוהי אכן התפלגות:

נשים לב כי התומך הוא $\mathbb{N}\backslash\{0\}$ ולכן הוא בן-מנייה, כמו כן $e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\geq 0$ לכל $k\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ וכמו כן:

תזכורת: $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ for all x

$$\sum_k\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$$

תזכורת: אם מגרילים באופן אחיד $\pi\in S_n$ ומסמנים ב-X את מס' נק' השבת של π אז $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(X=k)=e^{-1}\cdot\frac{1}{k!}$, כלומר כש $n\to\infty$ אזי $X\sim Poi(1)$.

פרדיגמת פואסון: בהינתן הרבה מאורעות ב"ת או כמעט ב"ת כאשר הצפי הוא שמס' קבוע מהם יתקיים, אזי ההתפלגות שמספר מאורעות שיקרו תשאף להתפלגות פואסון כאשר מס' המאורעות ישאף לאינסוף.

משפט הגבול הפואסוני: תהי $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של הסתברויות, כך ש $\lim_{n\to\infty}n\cdot p_n=\lambda$ לאיזשהו $\lambda>0$ ממשי אזי ההתפלגות הבינומית $Bin(n,p_n)$ שואפת להתפלגות $Poi(\lambda)$, כלומר לכל $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$$

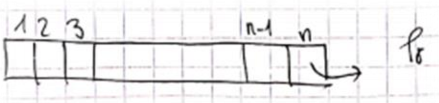
התפלגות בינומית שלילית $NB(r,p)$

יהי γ מס' טבעי ויהי $p\in(0,1)$ ממשי, נאמר שמשתנה מקרי X מתפלג בינומית שלילית עם פרמטרים r ו-p ונסמן $X\sim NB(r,p)$ אם לכל $n\geq r$ טבעי מתקיים

$$\mathbb{P}(X=n)=\binom{n-1}{r-1}\cdot p^r(1-p)^{n-r}$$

דוגמא: נטיל מטבע עם הסתברות p לעץ עד שנקבל עץ r פעמיים, כאשר כל ההטלות בלתי תלויות. נסמן ב-X את מס' ההטלות הכולל. נשים לב שלכל $r\geq n$ טבעי מתקיים

$$\mathbb{P}(X=n)=\binom{n-1}{r-1}\cdot p^r(1-p)^{n-r}$$



© Naomi על היצירה

זו אכן התפלגות כי התומך בן מנייה (תת קבוצה של $\mathbb{N}$) ו $\binom{n-1}{r-1}\cdot p^r(1-p)^{n-r}\geq 0$ עבור כל $n\geq r$ טבעי. ניתן להוכיח כי $\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}\cdot p^r(1-p)^{n-r}=1$ ע"י הוכחה

התפלגות	תוחלת	$\mathbb{P}$	Var	תיאור
אחידה $U(S)$	$\mathbb{E}(X)=\frac{(a+b)}{2}$	$\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{\lvert S\rvert}$	$Var(X)=\frac{(b-a+1)^2-1}{12}$	הטלת קוביה הוגנת
להשלים הוכחה $Ber(p)$	$\mathbb{E}(X)=p$	$\mathbb{P}(X=1)=p$ $\mathbb{P}(X=0)=1-p$	$Var(X)=p(1-p)$	$\binom{n}{m}=\binom{n-1}{m-1}+\binom{n-1}{m}$
בינומית $Bin(n,p)$	$\mathbb{E}(X)=np$	$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	$Var(X)=np(1-p)$	# עץ ב-n הטלות בלתי תלויות
גאומטרית $Geom(p)$	$\mathbb{E}(X)=\frac{1}{p}$	$P(X=k)=p\cdot(1-p)^{k-1}$	$Var(X)=\frac{(1-p)}{p^2}$	# הטלת מטבע עם הסתברות p לעץ עד לפעם הראשונה שיוצא עץ
היפרגאומטרית $Hyp(N,D,n)$	$\mathbb{E}(X)=n\cdot\frac{D}{N}$	$\mathbb{P}(X=k)=\frac{\binom{D}{k}\cdot\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$Var(X)=D\cdot n\cdot(N-D)\cdot\frac{(N-n)}{N^2\cdot(N-1)}$	# הכדורים האדומים מכד עם N כדורים כאשר D מהם אדומים ובוחרים n כדורים **בלי** החזרה
פואסון $Poisson(\lambda)$	$\mathbb{E}(X)=\lambda$	$\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$	$Var(X)=\lambda$	לתמורות יש בדיוק k נק' שבת עבור המספרים $1,\dots,n$
בינומית שלילית $NB(r,p)$	$\mathbb{E}(X)=\frac{r}{p}$	$\mathbb{P}(X=n)=\binom{n-1}{r-1}\cdot p^r(1-p)^{n-r}$	$Var(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$	נטיל מטבע עם הסתברות p לעץ עד שנקבל עץ r פעמיים, כאשר כל ההטלות בלתי תלויות. נסמן ב-X את מס' ההטלות הכולל.

אוניברסיטת אריאל בשומרון
מייל: zvimints@gmail.com

קורס הסתברות – סמסטר ב' 2019 מדעי המחשב

נכתב ע"י צבי מינץ

באינדוקציה על r ש- $\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}\cdot(1-p)^{n-r}=p^{-r}$
ושימוש בזהות פסקל

<u>אבחנה:</u> ההתפלגות $NB(1,p)$ היא בעצם $Geom(p)$

<u>סכום של משתנים מקריים:</u>
יהיו X,Y משתנים מקריים בדידים, אזי ההתפלגות של המשתנים המקרי $X+Y$ מתקבלת מאחת מן המשוואות:
1. $\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_y \mathbb{P}(X=k-y,Y=y)$
2. $\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_x \mathbb{P}(X=x,Y=k-x)$

אם X,Y **<u>בלתי תלויים</u>** אז מקבלים כי:

$$\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_y \mathbb{P}(X=k-y)\cdot\mathbb{P}(Y=y)=\sum_x \mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=k-x)$$

שיעור 9: תוחלת

אם נבצע ניסוי פעמים רבות, התוצאות יתכנו למספר מסוים (תוחלת)

<u>הגדרה:</u> יהי X משתנה מקרי **<u>אי שלילי</u>**, כלומר $X(\omega)\geq 0$ עבור כל $\omega\in\Omega$, אזי **<u>התוחלת</u>** של X מוגדרת באופן הבא:

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)\cdot X(\omega)$$

<u>דוגמא:</u> יהי X משתנה מקרי המונה את התוצאות של הטלת קובייה הוגנת, אזי:

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)\cdot X(\omega)=\sum_{i=1}^{6}\frac{1}{6}\cdot i=\frac{7}{2}$$

<u>הגדרה:</u> יהי $X:\Omega\to S$ מ"ק עם תוחלת סופית, אזי:

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{x\in S}x\cdot\mathbb{P}(X=x)$$

<u>מסקנה:</u> התוחלת של משתנה מקרי תלויה אך ורק בהתפלגות שלו ולא בהגדרה כפונקציה.

- **תוחלת יכולה להיות אינסופית.**

<u>הוכחה: (עבור משתנה מקרי אי שלילי בלבד!)</u>

$$\mathbb{E}(X)\underbrace{=}_{(1)}\sum_{\omega\in\Omega}\mathbb{P}(\omega)\cdot X(\omega)=\sum_{x\in S}\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\X(\omega)=x}}\mathbb{P}(\omega)\cdot X(\omega)$$
$$=\sum_{x\in S}\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\X(\omega)=x}}\mathbb{P}(\omega)\cdot x=\sum_{x\in S}x\sum_{\substack{\omega\in\Omega\\X(\omega)=x}}\mathbb{P}(\omega)$$
$$=\sum_{x\in S}x\cdot\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega:X(\omega)=x\})$$
$$=\sum_{x\in S}x\cdot\mathbb{P}(X=x)$$

תוחלת של התפלגויות נפוצות

Uniform Distribution – $U\ (S)$

<u>טענה:</u> אם $S:=\{a,a+1,\dots,b\}$ עבור $a,b\in\mathbb{N}$ (אי שליליים) אזי $\mathbb{E}(X)=\frac{a+b}{2}$

$$\mathbb{E}(X)\underbrace{=}_{(2)}\sum_{k=a}^{b}k\cdot\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=a}^{b}\frac{k}{b-a+1}$$
$$=\frac{1}{b-a+1}\cdot\sum_{k=a}^{b}k$$
$$=\frac{1}{b-a+1}\cdot\frac{(b+a)\cdot(b-a+1)}{2}$$
$$=\frac{a+b}{2}$$

Bernoulli Distribution – $Ber\ (p)$

<u>טענה:</u> $\mathbb{E}(X)=p$

$$\mathbb{E}(X)\underbrace{=}_{(2)}\sum_{x\in S}x\cdot\mathbb{P}(X=x)=p\cdot 1+(1-p)\cdot 0=p$$

<u>מסקנה:</u> לכל $A\subseteq\Omega$ מתקיים $\mathbb{E}(1_A)=\mathbb{P}(A)$

Binomial Distribution – $Bin\ (n,p)$

<u>טענה:</u> $\mathbb{E}(X)=np$

Geometric Distribution – $Geom\ (p)$

<u>טענה:</u> $\mathbb{E}(X)=\frac{1}{p}$

$$\mathbb{E}(X)\underbrace{=}_{(2)}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot(1-p)^{k-1}\cdot p$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}[(k-1)+1]\cdot(1-p)^{k-1}\cdot p$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\cdot(1-p)^{k-1}\cdot p+\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}\cdot p$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\cdot(1-p)^{k-1}\cdot p+1$$
$$=\sum_{m=0}^{\infty}m\cdot(1-p)^{m}\cdot p+1$$
$$=(1-p)\sum_{m=0}^{\infty}m\cdot(1-p)^{m-1}\cdot p+1$$
$$=(1-p)\cdot\mathbb{E}(X)+1$$

ולכן $\mathbb{E}(X)=(1-p)\cdot\mathbb{E}(X)+1\Rightarrow\mathbb{E}(X)=\frac{1}{p}$

Hypergeometric Distribution – $Hyp\ (N,D,n)$

אם $X\sim Hyp(N,D,n)$ אזי $\mathbb{E}(X)=n\cdot\frac{D}{N}$

<u>הוכחה:</u> בעזרת $\binom{D}{N}=\frac{D}{N}\binom{D-1}{N-1}$

פואסון $Poi(\lambda)$

אם $X\sim Poi(\lambda)$ אזי $\mathbb{E}(X)=\lambda$

<u>הוכחה:</u>
$X\sim Poi(\lambda)$ ולכן לכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים

אוניברסיטת אריאל בשומרון
מייל: zvimints@gmail.com

$$\mathbb{P}(X=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$$

ולכן $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=$

$$\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot k=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{(k-1)!}=$$

$$e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda}=\lambda$$

התפלגות בינומית שלילית $NB(r,p)$

אם $X\sim NB(r,p)$ לכל $n\geq r$ שלם מתקיים:

$$\mathbb{E}(X)=\frac{r}{p}$$

למה: לכל $b\geq a$ שלמים מתקיים $\binom{a-1}{b-1}=\frac{b}{a}\binom{a}{b}$

הוכחה:

$$\binom{a}{b}=\frac{a!}{b!\cdot(a-b)!}$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\frac{(a-1)!}{(b-1)!\,[(a-1)-(b-1)]!}$$

$$=\binom{a-1}{b-1}$$

$$\mathbb{E}(X)\underbrace{=}_{(2)}\sum_{n\in S}n\cdot\mathbb{P}(X=n)$$

$$=\sum_{n=r}^{\infty}n\cdot p^r\cdot(1-p)^{n-r}\cdot\binom{n-1}{r-1}$$

$$=\sum_{n=r}^{\infty}n\cdot p^r\cdot(1-p)^{n-r}\cdot\frac{r}{n}\binom{n-1}{r-1}$$

$$=r\cdot\sum_{n=r}^{\infty}p^r\cdot(1-p)^{n-r}\cdot\binom{n-1}{r-1}$$

$$=\frac{r}{p}\cdot\sum_{n=r}^{\infty}p^{r+1}\cdot(1-p)^{n-r}\cdot\binom{n-1}{r-1}$$

כעת נראה כי $\sum_{n=r}^{\infty}p^{r+1}\cdot(1-p)^{n-r}\cdot\binom{n-1}{r-1}=1$

$$\sum_{n=r}^{\infty}p^{r+1}\cdot(1-p)^{n-r}\cdot\binom{n-1}{r-1}\underbrace{=}_{\substack{m=n+1\\ \Leftarrow n=m-1}}$$

$$\sum_{m=r+1}^{\infty}p^{r+1}\cdot(1-p)^{m-(r+1)}$$

$$\cdot\binom{m-1}{(r+1)-1}\underbrace{=}_{\sum NB((r+1),p)=1}1$$

ליניאריות התוחלת

משפט: יהיו $X,Y:\Omega\to R$ משתנים מקרים אי שליליים בעלי תוחלת סופית ויהי $c>0$ מספר ממשי,אזי:

1. **המוגנויות:** $\mathbb{E}(cX)=c\cdot\mathbb{E}(X)$

הוכחה:

$$\mathbb{E}(cX)=\sum_{\omega\in\Omega}(cX)(\omega)\cdot\mathbb{P}(\omega)=$$

$$=c\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)\cdot\mathbb{P}(\omega)=c\cdot\mathbb{E}(X)$$

2. **ליניאריות:** $\mathbb{E}(X+Y)=\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$

משפט (מונוטוניות התוחלת):

יהיו $X,Y:\Omega\to R$ משתנים מקרים אי שליליים המקיימים $\mathbb{P}(X\leq Y)=1$ אזי $\mathbb{E}(X)\leq\mathbb{E}(Y)$

וכמו כן $\mathbb{E}(X)=\mathbb{E}(Y)$ אם"ם $\mathbb{P}(X=Y)=1$

שיעור 10: שונות

יהי $X:\Omega\to S$ משתנה מקרי ויהי $f:S\to\mathbb{R}$ להיות פונקצייה, אזי $f(X)$ גם כן משתנה מקרי, כעת נשאל מה $\mathbb{E}(f(X))$ לדוגמא $\mathbb{E}(\frac{1}{X})$, מלינאריות התוחלת מתקיים $\mathbb{E}(ax+b)=a\cdot\mathbb{E}(X)+b$ עבור כל $a,b\in\mathbb{Z}$, ולכן מתקיים כי $\mathbb{E}(f(X))=f(\mathbb{E}(X))$ כאשר f היא **פונקצייה ליניארית.**

טענה: אם f פונקציה אי שלילית למספרים הממשיים אזי :

$$\boxed{\mathbb{E}(f(X))=\sum_{x}f(x)\cdot\mathbb{P}(X=x)}$$

הוכחה:

טור אי שלילי

$$\sum_{x}f(x)\cdot\mathbb{P}(X=x)=$$

$$=\sum_{y\in[0,\infty)}\ \sum_{x\in S:f(x)=y}f(x)\cdot\mathbb{P}(X=x)$$

$$=\sum_{y\in[0,\infty)}y\sum_{x\in S:f(x)=y}\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega:X(\omega)=x\})$$

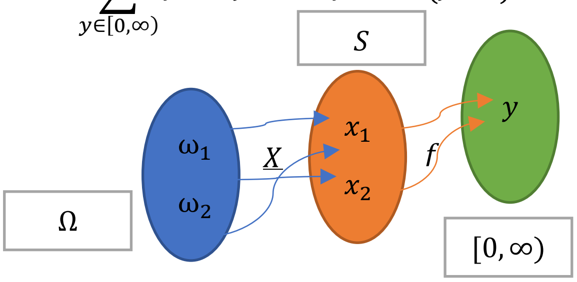
$\{\omega\in\Omega:X(\omega)=x_1\}\cap\{\omega\in\Omega:X(\omega)=x_2\}=\emptyset\quad\forall x_1,x_2\in\Omega$

$$=\sum_{y\in[0,\infty)}y\cdot\mathbb{P}\Big(\bigcup_{x\in S:f(x)=y}\{w\in\Omega:X(\omega)=x\}\Big)$$

$$=\sum_{y\in[0,\infty)}y\cdot\mathbb{P}\Big(\Big\{\omega\in\Omega:\exists x\in S\ s.t\ \begin{matrix}X(\omega)=x\\ f(x)=y\end{matrix}\Big\}\Big)$$

$$=\sum_{y\in[0,\infty)}y\cdot\mathbb{P}(\{\omega\in\Omega:f(X(\omega))=y\})$$

$$=\sum_{y\in[0,\infty)}y\cdot\mathbb{P}(f(X)=y)=\mathbb{E}(f(X))$$



דוגמא:

יהי $X\sim Geom\left(\frac{1}{2}\right)$ ויהי $Y=2^X$. נשים לב כי התומך של $\mu_X=\mathbb{N}$ ולכל $k\in\mathbb{N}$ מתקיים $\mathbb{P}(X=k)=\frac{1}{2^k}$, התומך μ_Y הוא $\{2^k:k\in\mathbb{N}\}$ ו- $\forall k$ $\mathbb{P}(Y=2^k)=\mathbb{P}(X-k)=\frac{1}{2^k}$

כעת נחשב את $\mathbb{E}(Y)$ בעזרת 2 שיטות.

השיטה הראשונה בעזרת ההתפלגות של Y

$$\mathbb{E}(Y)=$$

$$=\sum_{y\in\{2^k:k\in\mathbb{N}\}}y\cdot\mathbb{P}(Y=y)$$

$$\underbrace{=}_{Y=2^k\ iff\ x=k}\sum_{k=1}^{\infty}2^k\cdot\frac{1}{2^k}=\infty$$

השיטה השנייה בעזרת טענה הקודמת.

$$\mathbb{E}(Y)=\sum_{k\in\mathbb{N}}2^k\cdot\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=1}^{\infty}2^k\cdot\frac{1}{2^k}=\infty$$

אוניברסיטת אריאל בשומרון
מייל: zvimints@gmail.com

לסיכום, תכונות התוחלת:

$$\mathbb{E}(c) = c$$
$$\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X)+b$$
$$\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$$
$$\mathbb{E}\big(f(X)\big) = \sum_x f(X)\cdot P(X=x)$$

אם X ו- Y **בלתי תלויים** אזי:
$$\mathbb{E}(X\cdot Y) = \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$$

תוחלת מותנה:
$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y\mid X))$$

שונות (Variance)

מדד לפיזור סביב התוחלת (כמה אנחנו מרוחקים מהתוחלת)?

<u>הגדרה</u>: יהי X משתנה מקרי עם תוחלת סופית $\mu = \mathbb{E}(X)$,
אזי השונות של X מוגדרת להיות:

$$\boxed{Var(X) = \mathbb{E}\Big(\big(X-\mathbb{E}(X)\big)^2\Big) = \mathbb{E}((X-\mu)^2)}$$

<u>הגדרה</u>: יהי X משתנה מקרי עם שונות $Var(X)$ אזי
$$\sigma = \sigma_X = \sqrt{Var(X)}$$
היא **<u>סטיית התקן</u>** של X

תכונות בסיסיות של שונות

<u>טענה 1</u>: $Var(X) \ge 0$
ובנוסף $Var(X)=0$ אם"ם $\mathbb{P}(X=\mu)=1$

<u>טענה 2</u>: לכל $a\in\mathbb{R}$ מתקיים
$$Var(ax) = a^2\cdot Var(X)$$

<u>הוכחה</u>:
$$Var(ax) = \mathbb{E}\Big(\big(ax-\mathbb{E}(ax)\big)^2\Big)$$
$$= \mathbb{E}((ax-a\cdot\mathbb{E}(x)^2)$$
$$= a^2\cdot\mathbb{E}(\,(x-\mu)^2) = a^2\cdot Var(X)$$

<u>טענה 3</u>: ל $b\in\mathbb{R}$ מתקיים $Var(X+b) = Var(X)$

<u>טענה 4</u>: $Var(c) = 0$

$$\boxed{\textbf{טענה: } Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2}$$

<u>הוכחה</u>:
$$Var(X) = \mathbb{E}((X-\mu)^2) = \mathbb{E}(X^2 - 2\mu X + \mu^2)$$
$$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(2\mu X) + \mathbb{E}(\mu^2)$$
$$= \mathbb{E}(X^2) - 2\mu\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(\mu^2)$$
$$= \mathbb{E}(X^2) - 2\mu\mathbb{E}(X) + \mu^2$$
$$= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)^2 + \mathbb{E}(X)^2$$
$$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$$

<u>הערה</u>:
$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2 - X) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$$

שוניות של התפלגויות נפוצות

התפלגות ברנולי

אם $X\sim Ber(p)$
אזי $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - ((\mathbb{E}(X)^2)$
לפי הגדרה, מכיוון ש $X = X^2$ נקבל כי
$$Var(X) = \mathbb{E}(X) - \big(\mathbb{E}(X)\big)^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

התפלגות אחידה

אם $X\sim U(a,b)$ אזי $Var(X) = \frac{(b-a+1)^2-1}{12}$

<u>הוכחה</u>:
נרצה להזיז לקטע $(1,n)$.
נגדיר משתנה מקרי $Y = X-a+1$
ונסמן $n = b-a+1$ לנוחות, נשים לי כי מתקיים
$$Var(X) = Var(Y+a-1) = Var(Y)$$
ולכן מספיק להוכיח כי $Var(Y) = \frac{n^2-1}{12}$
נשים לב כי $Y\sim U(1,n)$
כעת, נחשב תחילה את $\mathbb{E}(Y^2)$:
$$\mathbb{E}(Y^2) = \sum_y y^2\cdot\mathbb{P}(Y=y) = \sum_{k=1}^n k^2\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k^2$$
$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$
$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$
כעת נחשב את $Var(Y)$:
$$Var(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - \big(\mathbb{E}(Y)\big)^2$$
$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$
$$= \frac{n+1}{12}\cdot[4n+2-3n-3]$$
$$= \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

שיעור 11: שונות משותפת

שונות משותפת – Convariance

יהיו X,Y שני משתנים מקריים בעלי תוחלת סופית, אזי השונות המשותפת של X ו- Y היא:
$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}\big(X-\mathbb{E}(X)\big)\cdot\mathbb{E}\big(Y-\mathbb{E}(Y)\big)$$

טענה 1: יהיו X,Y משתנים מקריים בעלי תוחלת סופית, אזי $\mathbb{E}(|X\cdot Y|)$, $\mathbb{E}((X-Y)^2)$ ו- $\mathbb{E}((X+Y)^2)$ גם כן בעלי תוחלת סופית.

טענה 2: אם X,Y משתנים מקרים בעלי תוחלת סופית אזי $Cov(X,Y)$ סופי ו:
$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(X\cdot Y) - \mathbb{E}(X)\cdot\mathbb{E}(Y)$$

הגדרה: יהיו X,Y משתנים מקריים בעלי תוחלת סופית, נאמר שX ו-Y:

- מתאומים חיובית אם $Cov(X,Y) > 0$
- מתואמת שלילית אם $Cov(X,Y) < 0$
- לא מתואמים אם $Cov(X,Y) = 0$

<u>טענה 3</u>: אם X,Y בלתי תלויים אז הם גם בלתי מתואמים אבל ההפך לא נכון.

תכונות של שונות משותפת:

טענה: $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
טענה: $Cov(aX,bY) = ab\cdot Cov(X,Y)$
טענה: $Cov(X+Z,Y) = Cov(X,Y) + Cov(Z,Y)$

משפט: יהיו $X_1, \dots, X_n$ משתנים מקריים בעלי תוחלת סופית ויהי $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ אזי :

$$Var\left(X = \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \cdot \sum_{1<i<j\le n} Cov(X_i, X_j)$$

מסקנה: אם $X_1, \dots, X_n$ בלתי תלויים בזוגות אזי

$$Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$

שיעור 12: מקדם המתאם, מרקוב וצ'יבשב

מקדם המתאם: מדד לקשר ליניארי בין שני משתנים

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}}$$

טענה: $\rho(X,Y) = \rho(Y,X)$

טענה: $\rho(X+a, Y) = \rho(X,Y)$ לכל $a \in \mathbb{R}$

טענה: לכל $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ מתקיים $\rho(aX, Y) = \frac{a}{|a|}\rho(X,Y)$

טענה: $\rho(X,X) = 1$

טענה: $\rho(X,Y) = 0 \iff Cov(X,Y) = 0$

טענה: $|\rho(X,Y)| \le 1$

טענה:

$$\rho(X,Y) = 1 \iff \exists\, a > 0, b\ s.t\ \mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$$

$$\rho(X,Y) = -1 \iff \exists\, a < 0, b\ s.t\ \mathbb{P}(Y = aX + b) = 1$$

הערה: אם $X' = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sqrt{Var(X)}}$ אזי $\mathbb{E}(X') = 0, Var(X') = 1$

אי שיוון מרקוב: אם X משתנה מקרי <u>**אי שלילי**</u> אזי:

$$\mathbb{P}(X \ge t) \le \frac{\mathbb{E}(X)}{t}$$

אי שיוון צ'בשב: יהי X משתנה מקרי כלשהו, אזי

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \ge t) \le \frac{Var(X)}{t^2}$$

אם $t = \lambda\sigma_X$ אזי

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \ge \lambda\sigma_X) \le \frac{1}{\lambda^2}$$

שיעור 13: השלמה

דוגמא:

יהיו $X_1 \dots X_n$ משתנים מקרים בלתי תלויים כך ש:

$$X_i \sim \begin{cases} 1, \frac{1}{2} \\ -1, \frac{1}{2} \end{cases}$$

לכל $i \in [1,n]$, נשתמש במשפט צבישב כדי לבדוק עד כמה $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ מרוכז סביב תוחלתו

מלינאריות התוחלת מתקיים כי

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$$

השונות:

$$Var(X) = Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{1}^{n} Var(X_i)$$

בגלל שהם בלתי תלויים

$$Var(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 1$$

ולכן נקבל כי $Var(X) = n$

מאחר ו- $\sigma_X = \sqrt{n}$ ולכן:

$$\mathbb{P}(|X| \ge 1 - \sqrt{n}) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \ge 10\sigma_X) \le \frac{Var(X)}{(10\sigma_X)^2} = \frac{1}{100}$$

<u>**תוחלת מותנה ושונות מותנה**</u>

<u>**הגדרה:**</u>

תהי X משתנה מקרי במרחב הסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$ ויהי $A \subseteq \Omega$ וכן $\mathbb{P}(A) > 0$ אזי התוחלת של X בהינתן A היא:

$$\mathbb{E}(X|A) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\omega|A)$$

טענה: $\mathbb{X}(X|A) = \sum_k k \cdot \mathbb{P}(X = k\,|A)$

הגדרה:

$$Var(X|A) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X|A)^2 \mid A) = \mathbb{E}(X^2|A) - \mathbb{E}(X|A)^2$$

הגדרה: יהיו X, Y משתנים מקריים במרחב הסתברות $(\Omega, \mathbb{P})$ אזי נגדיר את המבתנה המקרי ע"י:

$$\mathbb{E}(X|Y)(\omega) = \mathbb{E}(X|Y = Y(\omega))$$

הערה: אם היה רשום $Y = 1$ היינו מתנים במאורע.

נחשב את התוחלת של המשתנה המקרי $\mathbb{E}(X|Y)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) &= \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{E}(X|Y)(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{E}(X|Y = \mathbb{Y}(\omega)) \cdot \mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{y} \sum_{\omega\in\Omega, Y(\omega)=y} \mathbb{E}(X|Y)(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{y} \sum_{\omega\in\Omega, Y(\omega)=y} \mathbb{E}(X|Y = y) \cdot \mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{y} \sum_{\omega\in\Omega, Y(\omega)=y} \mathbb{E}(X|Y)(\omega) \cdot \mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{y} \mathbb{E}(X|Y = y) \cdot \sum_{\omega\in\Omega, Y(\omega)=y} \mathbb{P}(\omega) \\
&= \sum_{y} \mathbb{E}(\boldsymbol{X}|\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y})\, \mathbb{P}(\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

משפט (נוסחת תוחלת השלמה) יהיו X, Y משתנים מקריים בעלי תוחלות סופיות במרחב הסתברות אזי $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$

הוכחה: צריך להשלים. (היה בהרצאה)

משפט (נוסחת השונות השלמה)

$$Var(X) = \mathbb{E}(Var(X|Y)) + Var(\mathbb{E}(X|Y))$$

בהצלחה