בס"ד

מבחן סוף מועד א'

קורס: חשבון אינפיניטסימלי 2

שם: כפיר גולדפרב

ציון - 98

אימייל: kfir.goldfarb@msmail.ariel.ac.il

חלק ב:

ב

(*) נוסח:

נתונים שני טורים חיוביים:

$A = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$

$B = w_1 + w_2 + \dots + w_n + \dots$

אם קיים גבול סופי כך:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{w_n} = k \neq 0$$

אז או ששני הטורים מתבדרים או ששני הטורים מתכנסים.

(*) הוכחה:

נחלק למקרים:

1) כך $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{w_n} \neq 0$ אז A מתכנס אם ורק אם B מתכנס.

2) אם $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{w_n} = 0$ אז מהתכנסות B נובעת התכנסות A.

3) כך $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{w_n} = \infty$ אז מהתכנסות A נובעת התכנסות B.

הוכחה (1):

יהי $\varepsilon > 0$ קיים k כך שלכל $n > k$ מתקיים $L - \varepsilon < \frac{u_n}{w_n} < L + \varepsilon$

(כאשר L הינו הגבול כלומר $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{w_n} = L$), נקבל כי

~~[illegible]~~ $(L-\varepsilon) w_n < u_n < (L+\varepsilon) w_n$ ולכן לפי מבחן ההשוואה I

אם B מתכנס אז גם A מתכנס. ($\Leftarrow$ גם ההפך נכון).

~~אז~~ או ששניהם מתכנסים או ששניהם מתבדרים.

(*) המשך בעמוד הבא!

הוכחה (2):

לפי הגדרת הגבול קיים k כך שלכל $n>k$ מתקיים

$\left|\frac{u_n}{w_n}-0\right| = \frac{u_n}{w_n} < 1$ אז $u_n < w_n$ ולכן לפי

מבחן השוואה 1 אם B מתכנס אז גם A מתכנס.

הוכחה (3):

לפי הגדרת הגבול קיים K כך שלכל $n>k$ מתקיים

$\frac{u_n}{w_n} > 1$ אז $w_n < u_n$ ולכן לפי מבחן השוואה 1 אם

A מתכנס אז גם B מתכנס.

מ.ש.ל ■

חלק ג' :

3

(א) נוסח: תהיה הפונקציה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית ורציפה, קיימת נקודה $c\in[a,b]$ המקיימת

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

(ב) מהמסקנה 6 הנובעת אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו- $M=\sup f(x)$ ו- $m=\inf f(x)$ אז מתקיים:

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$$

נחלק את שני האגפים ב- $(b-a)$:

$$m\le\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx\le M$$

ולכן קיימת נקודה $c\in[a,b]$ כך ש:

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$ (כי היא בין M ל-m כלומר $m\le f(c)\le M \Rightarrow m\le f(c)\le M$)

ו- $f(c)$ היא הממוצע של $f(x)$ בקטע $[a,b]$

מש"ל

חלק ג :

1) ב)

$$\int_1^e \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{\ln x}}$$

נסמן: $x=e^t$

דיפרנציאל: $dx=e^t dt$ (כי $x=e^t$)

נציב:

$$\int_1^e \frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{\ln x}} = \int_0^1 \frac{e^t\,dt}{e^t\cdot\sqrt[3]{\ln e^t}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{\ln e^t}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{3}}}$$

~~אנו~~ נשווה למה כי:

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{3}}} \sim \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

ולכן האינטגרל מתכנס אם ורק אם $\alpha<1$.

ולכן מתכנס! כי $\frac{1}{3}<1$.

חלק ב':

2) ב)

$$\int \frac{dx}{1+e^x}$$

נשים לב כי:

$$\frac{1}{1+e^x} = -\frac{e^x}{1+e^x} + 1$$

ולכן נקבל:

$$-\int \frac{e^x}{1+e^x}dx + \int dx$$

תשובה סופית:

$$\boxed{= -\ln|1+e^x| + x + c}$$

$$c = c_1 + c_2$$

חישוב עזר:

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$$

חלק ב':

א

חוק לוגריתמים:

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n}$$ כאשר $|x|<1$

$-1 < x < 1$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

כאשר $|x|<1$

$-1 < x < 1$

הינו:

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot x^n}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

נחבר לטור אחד:

נקבל:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}}$$ $|x|<1$

$-1 < x < 1$

נבדוק את תחום ההתכנסות:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\dfrac{x^{2(n+1)-1}}{2(n+1)-1}}{\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1} \cdot (2n-1)}{(2n+1)\cdot x^{2n-1}}\right| < 1$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\cancel{x^{2n}}\cdot x \cdot (2n-1)}{(2n+1)\cdot \cancel{x^{2n}} \cdot x^{-1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2 (2n-1)}{(2n+1)}\right| < 1$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^2 \cdot \cancel{n}(2-\frac{1}{n})}{\cancel{n}(2+\frac{1}{n})}\right| = \left|\frac{x^2(\cancel{2}-0)}{\cancel{2}+0}\right| < 1 \to \quad |x^2| < 1$$

$$-1 < x^2 < 1 \to \boxed{-1 < x < 1} \quad |x|<1$$