

מבחן בקורס הסתברות 1

סמסטר ב, מועד א

23.06.2021

פרופ' דן חפץ

אוניברסיטת אריאל

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה למדעי המחשב

מתרגלים: בר אלון, נעה דה רוס ורומן גילגור

משך הבחינה: 3 שעות

המבחן הינו עבור מספרי קורס: 2-7028410-1, 2-7028410-2, 2-7028410-3.

מבנה המבחן: 4 שאלות ללא בחירה.

הנחיות:

1. המבחן הינו עם חומר סגור ובכתב יד ללא שימוש בשום אמצעי אלקטרוני (מותר מחשבון פשוט אם כי אין בו צורך). עם זאת, כל סטודנט רשאי להביא דף אחד מגודל A4 כתוב משני צדדיו. על התלמיד לכתוב את שמו ומספר תעודת הזהות שלו על הדף הנ"ל.
2. אין לכתוב בעפרון.
3. יש להוכיח כל טענה שאתם כותבים גם אם לא התבקשתם לעשות זאת במפורש בשאלה.
4. למרות הכתוב בסעיף 3, ניתן להסתמך ללא הוכחה על כל טענה שנלמדה בשיעור (אלא אם כן זו הטענה שהנכם מתבקשים להוכיח בשאלה). יש לצטט את הטענה עליה הנכם מסתמכים בצורה ברורה.
5. בפתרון סעיף כלשהו בשאלה, ניתן להסתמך על תוצאת סעיפים קודמים גם אם לא פתרתם אותם.

שאלה 1 (25 נקודות):

יהי Z משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטרים 4 ו- $1/2$ (כלומר $Z \sim \text{Bin}(4, \frac{1}{2})$). יהיו $X = \min\{Z, 2\}$ ו- $Y = \max\{Z, 2\}$.

- א. (14 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של X ו- Y .
- ב. (5 נקודות) חשבו את ההתפלגויות השוליות של X ושל Y .
- ג. (6 נקודות) חשבו את התוחלת של $X + Y$.

שאלה 2 (25 נקודות):

בכד יש כדור לבן אחד, שני כדורים אדומים וארבעה כדורים שחורים. בכל שלב מוציאים כדור אחד מהכד באופן מקרי אחיד. אם הכדור שהוצא לבן, אז עוצרים. אחרת מחזירים את הכדור לכד וחוזרים על הניסוי שוב (הוצאות הכדורים בשלבים שונים בלתי תלויות זו בזו). יהי X מספר הפעמים שביצענו את הניסוי הנ"ל ויהי Y מספר הפעמים שהוצאנו כדור אדום.

- א. (7 נקודות) חשבו את ההסתברות ש- $X < 10$.
- ב. (9 נקודות) חשבו את ההסתברות ש- $Y = 0$.
- ג. (9 נקודות) חשבו את ההסתברות ש- $X = Y + 1$.

שאלה 3 (25 נקודות):

יהיו X ו- Y משתנים מקריים שערכיהם שלמים חיוביים (כלומר התומכים של שניהם הם תת קבוצות של המספרים הטבעיים). הוכיחו או הפריכו (ע"י דוגמה נגדית) את הטענות הבאות:

- א. (9 נקודות) אם $P(X \geq a) \geq P(Y \geq a)$ לכל a טבעי, אז $E(X) \geq E(Y)$.
- ב. (8 נקודות) אם $E(X) \geq E(Y)$, אז $P(X \geq a) \geq P(Y \geq a)$ לכל a טבעי.
- ג. (8 נקודות) $\rho(X, Y) \geq 0$ (כלומר מקדם המתאם של X ו- Y אינו שלילי).

שאלה 4 (25 נקודות):

יהי $n \geq 3$ מספר טבעי. לכל $1 \leq i \leq n$ מטילים קוביה הוגנת, כאשר כל הטלות הקוביה בלתי תלויות. לכל $1 \leq i \leq n$ נסמן ב- Y_i את תוצאת ההטלה ה- i . יהי X משתנה מקרי הסופר את מספר האינדקסים $1 \leq i \leq n-2$ כך ש- $Y_{i+1} = 2Y_i$ וגם $Y_{i+2} = Y_i$.

- א. (8 נקודות) חשבו את התוחלת של X .
- ב. (10 נקודות) חשבו את השונות של X .
- ג. (7 נקודות) הוכיחו שמתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X \geq n/2) = 0.$$