גבול פונקציה – תרגילים נוספים2

תרגיל 1:

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת ע"י:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{3+x^n}$$

חשבו את הביטויים הבאים:

$$f(1),\ f(-1),\ \lim_{x\to 1^-} f(x),\ \lim_{x\to 1^+} f(x),\ \lim_{x\to -1^-} f(x),\ \lim_{x\to -1^+} f(x)$$

תרגיל 2:

תהי a_n סדרה כלשהי, ונגדיר $f:(0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ ע"י: $f(x)=a_n,\ \forall\, n-1<x\le n$.

הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

תרגיל 3:

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת x_0.

א. הראו כי אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל־x_0 קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ (אבל לא ידוע שזהו אותו הגבול עבור כל סדרה אפשרית $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$), אזי קיים הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

ב. נניח כי לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $0<|x-x_0|<\delta$ ו־$0<|y-x_0|<\delta$, אז $|f(x)-f(y)|<\epsilon$.

הוכיחו ע"י סעיף (א) כי קיים הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

תרגיל 4:

הוכיחו שהגבול הבא לא קיים

$$\lim_{x\to 0} \frac{[2\sin x]}{\sin x}$$

בשלוש דרכים שונות:

א) על פי הגדרת קושי ($\epsilon-\delta$).

ב) על הגדרת היינה (סדרות).

ג) ע"י גבולות חד־צדדיים.