אוניברסיטת
אריאל
בשומרון

## <u>מבחן לדוגמא</u>

פקולטה: מדעי הטבע. מחלקה: מתמטיקה מדעי המחשב. שם הקורס: לוגיקה ותורת הקבוצות.

קוד הקורס : 2-7016510.

משך הבחינה : 3 שעות. חומר עזר: דפי הנוסחאות שמצורפים בסוף . **עליכם להשיב על 5 השאלות הבאות. כל תשובה נכונה מזכה ב-20 נקודות.**

**<u>סימונים:</u>** מספרים טבעיים: $N=\{0,1,2,3\ldots\}$   שלמים: $Z$   רציונלים $Q$

ממשיים: $R$

1) לגבי כל אחד מהפסוקים הבאים קבע האם הוא מתקיים במבנה $<N,<,+>$. **אין צורך לנמק כלל.**

א) $\alpha=\exists x[\neg[[\exists y(y<x)]\to[\exists y(y+x\neq y)]]]$ (7 נק')

ב) $\beta=\forall x\exists y\forall z[\neg((x<y)\to(y=x+1\vee z+z=x+y))]$ (7 נק')

ג) $\gamma=\exists y\forall x(x<y)$ (8 נק')

2) לגבי כל זוג מבנים, המופיע בכל סעיף, קבע האם הם איזומורפיים. **אין צורך לנמק כלל.**

א) $(\{n\in N:$ 3 מתחלק $n\},<)$ , $(N,<)$ (7 נק')

ב) $(N,+),(Z,+)$ (7 נק')

ג) $(P(N),\cup),(P(Z),\cup)$ (8 נק')

3) לגבי כל זוג קבוצות, המופיע בכל סעיף, קבע איזו קבוצה עוצמתה גדולה יותר או האם עוצמות הקבוצות שוות. **אין צורך לנמק כלל.**

א) $A = P(R),\ \ B = P(P(N))$. (7 נק')

ב) $A = \{a \in R :\ a^3 \in Q$ או $a^7 \in Q \cup \{\sqrt{n} : n \in N\}\},\ \ B = N$. (7 נק')

ג) $A = P(R),\ \ B = (0,2)$. ($(0,2)$ מסמן את הקטע הממשי $0 < x < 2$ )
(8 נק')

4) נתון: $A \subseteq B$. הוכיחו או הפריכו: $P(A) \subseteq P(B)$. (שאלה מחוברת הקורס).

5) תהי A קבוצת הזוגות $\langle n,k \rangle$ של מספרים שלמים כך ש-$n<k$. נגדיר יחס $S^*$ על A כך:
עבור שני אברים $\langle n_1,k_1 \rangle, \langle n_2,k_2 \rangle \in A$, הזוג $\langle\langle n_1,k_1 \rangle, \langle n_2,k_2 \rangle\rangle \in S^*$ אם"ם $n_2<n_1<k_1<k_2$. למשל, $\langle\langle 1,2 \rangle, \langle -5,5 \rangle\rangle \in S^*$, כי $-5<1<2<5$.

נגדיר אוצר המילים L: ב-L יש סמן יחס דו-מקומי S וסמן של קבוע אישי $c_a$ כנגד כל a ב-A.

נגדיר מבנה M שמפרש את L כך: העולם שלו הוא A. S מתפרש ב-M כיחס $S^*$. $c_a$ מתפרש ב-M כקבוע האישי a.

נגדיר תורות: $T_0=Th(M)$, כלומר קבוצת הפסוקים ב-L שמתקיימים ב-M.

$T_1=T_0 \cup \{S(c_a,d) : a \in A\}$ (d הוא סמן של קבוע אישי שאיננו שייך ל-L).

$T_2=T_0 \cup \{S(d,c_a) : a \in A\}$

$T_3=T_1 \cup T_2$

א. לגבי כל אחת מהתורות $T_1,T_2,T_3$ עליכם לבחור באפשרות היחידה הנכונה מבין האפשרויות הבאות: 1. לא עקבית 2. עקבית ויש לה מודל שהוא העשרה של M 3. עקבית, אבל אין לה מודל שהוא העשרה של M. **בחלק זה, אין צורך לנמק כלל.** (העשרה במקרה הזה, פרושו שמוסיפים פרוש ל-d, כלומר שהוא מתפרש כאבר בעולם של M, שהוא A). (8 נקודות)

ב. בחרו תורה לגביה בחרתם בחלק א באפשרות 3 והוכיחו שהיא אכן עקבית. (12 נקודות)

בהצלחה!

בפתרון זה הוספו נימוקים למרות שלא נדרש לנמק בסעיף 1, 2, 3, 5א

(ע')

פתרון:

1) א) $\alpha \equiv \exists x\left(\overbrace{\exists y(y<x)}^{I} \wedge \overbrace{\forall y(y+x=y)}^{II}\right)$

(כי $\neg(A\to B) \equiv A\wedge(\neg B)$). לכן אם $\alpha$ מתקיים

במקרה אז מ-I מתקיים $x>0$ ומ-II

מתחייב $x=0$, לכן סתירה אין $x$ כנ"ל וערך

הפסוק הוא F במקרה.

ב) $\beta \equiv \forall x \exists y \forall z\left((x<y)\wedge(y\neq x+1)\wedge(z+z\neq x+y)\right)$

הפסוק מתקיים כי לכל $x\in\mathbb{N}$ נבחר למשל

$y=x+3$ אז $x+y=2x+3$ אי זוגי (לכן

לכל $z\in\mathbb{N}$ $z+z\neq x+y$). לכן T.

ג) לא מתקיים כי לכל $y\in\mathbb{N}$ נבחר $x=y+1$.

2) א) איזומורפיים $H:\mathbb{N}\to A$, כאשר

$A=\{n\in\mathbb{N} \mid 3|n\}$ המוגדרת ע"י $H(n)=3n$

איזומורפיזם (בדוק!)

ב) לא איזומורפיים: ויהא:

2ג

$$A = \forall x \forall y \exists z \, (x+z=y)$$

אז $(\mathbb{N},+) \models \neg A$ , $(\mathbb{Z},+) \models A$ .

(2) היות ש- $\mathbb{N},\mathbb{Z}$ קבוצ' בנ' מני:

איזומורפיזם קיים $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ חח"ע

ועל. נגדיר: $H: P(\mathbb{N}) \to P(\mathbb{Z})$

ע"י $H(A)=f(A)$ אז $H$ חח"ע ועל

(כאשר $f(A)=\{f(a) \mid a\in A\}$ )

וכן $H(A_1\cup A_2) = f(A_1\cup A_2) = f(A_1)\cup f(A_2)$

$= H(A_1)\cup H(A_2)$

(3) (א) לפי משפט קנטור $\mathbb{R}\approx P(\mathbb{N})$ (שוות עוצמה)

ולכן $P(\mathbb{R})\approx P(P(\mathbb{N}))$ אכן שוות עוצמה.

(ב)

$$A = \{\sqrt[3]{q} \mid q\in\mathbb{Q}\} \cup \{\sqrt[7]{q} \mid q\in\mathbb{Q}\} \cup \{\sqrt[7]{\sqrt{n}} \mid n\in\mathbb{N}\}$$

כל אחת מאלו קבוצות בנות מנ"ה כי

הן תמונה ע"י פונקציה של $\mathbb{N}$ או של $\mathbb{Q}$

לכן לפי משפט $A$ בת מנ"ה (כאיחוד של 3 קבוצות בנות מנ"ה)

לכן עוצמת $A,\mathbb{N}$ שוות.

3) ג) $|(0,2)| = |\mathbb{R}|$ ולפי משפט קנטור:

$|\mathbb{P}(\mathbb{R})| > |\mathbb{R}|$ ולכן עוצמת $A$ גדולה מעוצמת $\mathbb{R}$.

4) נכון: נניח $A \subseteq B$. צ"ל $\mathbb{P}(A) \subseteq \mathbb{P}(B)$.

הוכחה:

תהי $X \in \mathbb{P}(A)$ כלומר $X \subseteq A$ ומכיוון

$A \subseteq B$ לכן $X \subseteq B$ (כי אם $a \in X$

אז $a \in A$ ולכן $a \in B$). מכאן $X \in \mathbb{P}(B)$.

4/8

5) תהי A קבוצת הזוגות $<n,k>$ של מספרים שלמים כך ש-$n<k$. נגדיר יחס $S^*$ על A כך: עבור שני אברים $<n_1,k_1>,<n_2,k_2>\in A$, הזוג $<<n_1,k_1>,<n_2,k_2>>\in S^*$ אס"ם $n_2<n_1<k_1<k_2$. למשל, $<<1,2>,<-5,5>>\in S^*$, כי $-5<1<2<5$.

נגדיר אוצר מילים L: ב-L יש סמן יחס דו-מקומי S וסמן של קבוע אישי $c_a$ כנגד כל a ב-A.

נגדיר מבנה M שמפרש את L כך: העולם שלו הוא A. S מתפרש ב-M כיחס $S^*$. $c_a$ מתפרש ב-M כקבוע האישי a.

נגדיר תורות: $T_0=Th(M)$, כלומר קבוצת הפסוקים ב-L שמתקיימים ב-M.

$T_1=T_0\cup\{S(c_a,d):a\in A\}$ (d הוא סמן של קבוע אישי שאיננו שייך ל-L).

$T_2=T_0\cup\{S(d,c_a):a\in A\}$

$T_3=T_1\cup T_2$

א. לגבי כל אחת מהתורות $T_1,T_2,T_3$ עליכם לבחור באפשרות היחידה הנכונה מבין האפשרויות ה באות: 1. לא עקבית 2. עקבית ויש לה מודל שהוא העשרה של M 3. עקבית, אבל אין לה מודל שהוא העשרה של M. בחלק זה, אין צרך לנמק כלל. (העשרה במקרה הזה, פרושו שמוסיפים פרוש ל-d, כלומר שהוא מתפרש כאבר בעולם של M, שהוא A). (8 נקודות)

ב. בחרו תורה לגביה בחרתם בחלק א באפשרות 3 והוכיחו שהיא אכן עקבית. (12 נקודות)

[פתרון:

א. $T_1$ עקבית, אבל אין לה מודל שהוא העשרה של M (אפשרות 3).

$T_2$ איננה עקבית (אמנם לא דרוש נמוק, אבל הנה נמוק: הפסוק $\neg\exists x(S(x,c_{<1,2>}))$ שייך ל-$T_0$ ולכן ל-$T_2$. לפיכך שני הפסוקים $S(d,c_{<1,2>})$, $\neg\exists x(S(x,c_{<1,2>}))$ שייכים ל-$T_2$ והם כמובן סותרים אחד את השני). $T_3$ איננה עקבית.

ב. נוכיח ש-$T_1$ עקבית. תהי $T^-$ תת-קבוצה סופית של $T_1$. לפי משפט הקומפקטיות, מספיק להוכיח ש-$T^-$ עקבית. תהי B קבוצת הפסוקים מהצורה $S(c_{<n,k>},d)$ שמופיעים ב-$T^-$. מכיון ש-$T^-$ סופית, גם B סופית. לכן יש $n^*,k^*$ שלמים כך שלכל פסוק $S(c_{<n,k>},d)$ ב-B, מתקיים $n^*<n<k<k^*$. נגדיר העשרה $M^-$ של M כך: $d^{M^-}=<n^*,k^*>$. זהו אבר ב-A. נוכיח ש-$M^-$ הוא מודל ל-$T^-$. יהי $\alpha$ פסוק ב-$T^-$.

מקרה א: $\alpha\in T_0$. במקרה זה, מכיון ש-M הוא מודל של $T_0$, הוא גם מקיים את $\alpha$. מכיון ש-$M^-$ הוא העשרה של M, גם הוא מקיים את $\alpha$.

מקרה ב: $\alpha\notin T_0$. במקרה זה, $\alpha\in B$, כלומר ש-$\alpha$ הוא פסוק מהצורה $S(c_{<n,k>},d)$. לכן $n^*<n<k<k^*$. ב-$M^-$ הקבוע האישי $c_{<n,k>}$ מתפרש כ-$<n,k>$ והקבוע האישי d מתפרש כ-$<n^*,k^*>$. לכן $\alpha$ מתקיים ב-$M^-$. מ.ש.ל.]