דפי נוסחאות בלוגיקה ותורת הקבוצות

תחשיב הפסוקים

1). חק החלוף לגבי האִווי : $\alpha\vee\beta\equiv\beta\vee\alpha$

2). חק החלוף לגבי הגִמום : $\alpha\wedge\beta\equiv\beta\wedge\alpha$

3). חק הקִבוץ לגבי האִווי : $(\alpha\vee\beta)\vee\gamma\equiv\alpha\vee(\beta\vee\gamma)$

4). חק הקִבוץ לגבי הגִמום : $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\equiv\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$

5). חֹק הפִלוג של האִווי מעל הגִמום : $\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)\equiv(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)$

6). חֹק הפִלוג של הגִמום מעל האִווי : $\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)\equiv(\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)$

7). כללי דה-מורגן : $\neg(\alpha\vee\beta)\equiv\neg\alpha\wedge\neg\beta,\ \neg(\alpha\wedge\beta)\equiv\neg\alpha\vee\neg\beta$

8). $\alpha\rightarrow\beta\equiv\neg\alpha\vee\beta,\ \neg(\alpha\rightarrow\beta)\equiv\alpha\wedge\neg\beta$

9). $\alpha\leftrightarrow\beta\equiv(\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha)\equiv(\alpha\wedge\beta)\vee(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$

10) חֻקי האמת : $\alpha\wedge T\equiv\alpha,\ \alpha\vee T\equiv T,\ \alpha\wedge F\equiv F,\ \alpha\vee F\equiv\alpha$

11) חֻקי הספיגה (הרוב קובע) : $\alpha\wedge(\alpha\vee\beta)\equiv\alpha,\ \alpha\vee(\alpha\wedge\beta)\equiv\alpha$

הגדרה: המבנה M הוא **תת מבנה** של המבנה N אם העולם של M מוכל בעולם של N, והסמנים שמופיעים באוצר המילים מתפרשים אותו דבר ב-N,M, כלומר:

א. לכל סמן יחס R n-מקומי ולכל n אברים $a_1,a_2..a_n$ בעולם של M מתקיים : $R^M(a_1..a_n)$ אם"ם $R^N(a_1..a_n)$.

ב. לכל סמן של פונקציה f n-מקומית ולכל n אברים $a_1,a_2..a_n$ בעולם של M מתקיים : $f^M(a_1,a_2..a_n)=f^N(a_1,a_2..a_n)$.

ג. לכל סמן של קבוע אישי, c, מתקיים $c^M=c^N$.

איזומורפיזם:

הגדרה: נתונים שני מבנים M_1,M_2 שמפרשים אותו אוצר מילים. איזומורפיזם בין המבנים M_1,M_2 הוא פונקציה $H:M_1\rightarrow M_2$ שמקיימת את התכונות הבאות:

א. H חח״ע ועל.
ב. לכל סמן של יחס n-מקומי, R, באוצר המילים ולכל n אברים $a_1,a_2..a_n$ מ-M_1 מתקיים: $R^{M1}(a_1,a_2..a_n)$ אס״ם $R^{M2}(H(a_1),H(a_2)..H(a_n))$.
ג. לכל סמן של פונקציה n-מקומית, f, ולכל n אברים $a_1,a_2..a_n$ בעולם של M_1 מתקיים: $H(f^{M1}(a_1,a_2..a_n))=f^{M2}(H(a_1),H(a_2)..H(a_n))$.
ד. לכל סמן של קבוע אישי, c, מתקיים $H(c^{M1})=c^{M2}$.

הגדרה: המבנים M_1,M_2 איזומורפיים אם יש איזומורפיזם $H:M_1\rightarrow M_2$.

משפט: אם $M_1\cong M_2$ אז כל פסוק שנכון באחד מהם, נכון בשני.

שקילות לוגית

הגדרת שקילות לוגית: הפסוקים B,A שקולים לוגית פירושו שלכל מבנה M, אם A מתקיים, אז B מתקיים ואם B מתקיים אז A מתקיים.

החֻקים האנלוגיים לחֻקי דה-מורגן: (טִפול בשלילה שמופיעה לפני סוגריים)

א. $\neg[\forall x(\alpha)]\equiv\exists x(\neg\alpha)$.
ב. $\neg[\exists x(\alpha)]\equiv\forall x(\neg\alpha)$.

החלפת שם של משתנה מכומת: בפסוק $\forall x(\alpha)$ נתן להחליף את x ב-y, בהנחה ש-x מופיע ב-α רק כמשתנה חופשי ו-y כלל לא מופיע ב-α (אין צֹרך לִזכֹר את ההנחה, אלא רק להבין את הרעיון ולתרגל).

משפט הוצאת הכמתים מחוץ לסוגריים: אם x לא מופיע בפסוק β, אז $[\forall x(\alpha)]\wedge\beta\equiv\forall x[\alpha\wedge\beta]$. אותו דבר אם יופיע $\exists$ במקום $\forall$. אותו דבר אם יופיע $\vee$ במקום $\wedge$.

הרעיון של המשפט: אין קשר בין הכִמות על x לבין הפסוק β. לכן זה לא משנה אם β יופיע בתוך הסוגריים או מחוץ להם.

<u>משפט המחמיר והמֵקֵל:</u>

א. $[\forall x(\alpha)]\wedge[\forall x(\beta)]\equiv\forall x[\alpha\wedge\beta]$.

ב. $[\exists x(\alpha)]\vee[\exists x(\beta)]\equiv\exists x[\alpha\vee\beta]$.

הרעיון: יש דִמיון בין הכמת $\forall$ ובין הקשר $\wedge$. שניהם "מחמירים", כלומר מקשים לקבל ערך אמת. הכמת $\forall$ אומר שאפילו אם יש x אחד שלא מקיים, אז נקבל F. הקשר $\wedge$ אומר שאפילו אם רק אחד משני הפסוקים שקרי, אז נקבל F. בחלק א של המשפט יש שלוב של הכמת המחמיר עם הקשר המחמיר. לכן אפשר להחליף סדר ביניהם. בחלק ב יש שלוב של הכמת המקל, $\exists$, עם הקשר המקל, $\vee$.

<u>המשפטים היסודיים של תורת המודלים</u>

<u>תורה</u> = קבוצה של פסוקים באוצר מילים מסוים.

תורה היא <u>עקבית</u> אם יש לה מודל, כלומר יש מבנה המקיים את כל הפסוקים בה.

<u>משפט הקומפקטיות:</u>

תורה היא עקבית אם ורק אם כל תת קבוצה סופית שלה היא עקבית.

תורת הקבוצות

$N=\{0,1,2...\}$: **המספרים הטבעיים**, Z: **המספרים השלמים**, Q: **המספרים הרציונלים**

R: **המספרים הממשיים**.

תכונות של איחוד וחיתוך :

1). האִחוד מקיים את חק החלוף : $A\cup B=B\cup A$.

2). החִתוך מקיים את חק החלוף : $A\cap B=B\cap A$.

3). האִחוד מקיים את חק הקִבוץ :
$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

4). החִתוך מקיים את חק הקִבוץ :
$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

5). חֻקי הפִלוג : $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

6) כללי דה-מורגן : $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

<u>הגדרה:</u> קבוצה A היא בת מניה אם היא ריקה או שקיימת פונקציה **על** $f:N\rightarrow A$.

<u>משפט:</u> אם קבוצה A היא אחוד של אוסף בן מניה של קבוצות בנות מניה, אז A בת מניה.

<u>הגדרה:</u> קבוצות B,A תקראנה שוות עוצמה אם יש פונקציה חח"ע ועל מ-A ל-B.

<u>הגדרה:</u> עוצמת A גדולה או שווה לעוצמת B אם יש פונקציה חח"ע מ-B ל-A.

<u>הגדרה:</u> עוצמת A גדולה מעוצמת B אם עוצמת A גדולה או שווה לעוצמת B אבל A, B אינן שוות עוצמה.

<u>משפט קנטור:</u> לכל קבוצה A עוצמת קבוצת החזקה P(A) של A גדולה מעוצמת A.

<u>משפט:</u> עוצמת המספרים הממשיים R שווה לעוצמת P(N) ולכן גדולה

מעוצמת N.

<u>משפט קנטור ברנשטיין:</u> לכל שתי קבוצות B,A: אם עוצמת A גדולה או שווה לעוצמת B וכן עוצמת B גדולה או שווה לעוצמת A אז B,A שוות עוצמה.

<u>משפט השוואת העוצמות:</u> אם B,A קבוצות אז עוצמת A גדולה או שווה לעוצמת B או עוצמת B גדולה או שווה לעוצמת A.

<u>דף נוסחאות מורחב (דף זה ימסר כתוספת רק לזכאים)</u>

טבלת ההוכחות	הוכחת הפסוק	מסקנה מהפסוק
$\forall x(\alpha)$	יהי x בעולם הדיון. צ"ל α	$\alpha(t)$, כאשר t שם עצם כשר להצבה, כלומר שאין בו משתנה שיהיה מכומת אחרי ההצבה של t במקום x.
$\exists x(\alpha)$	נגדיר ..=x (באגף ימין יופיע שם עצם הכשר להצבה ב-α במקום x). צ"ל α.	$\alpha(c)$ כאשר c הוא סמן של קבוע אישי חדש.
$\alpha\wedge\beta$	שלב א: צ"ל α. שלב ב: צ"ל β.	α (אפשר גם להסיק β, כמובן).
$\alpha\vee\beta$	מספיק להוכיח אחד מהם.	מקרה א: α. מקרה ב: β. מהפסוק מסיקים שבהכרח אחד המקרים יתקיים.
$\alpha\rightarrow\beta$	נניח α. צ"ל β.	אם כבר הוכחנו את α, אז נסיק את β.
$\alpha\leftrightarrow\beta$	שלב א: צ"ל $\alpha\rightarrow\beta$. שלב ב: צ"ל $\beta\rightarrow\alpha$.	$\alpha\rightarrow\beta$ (אפשר כמובן גם להסיק $\beta\rightarrow\alpha$).

דוגמאות לשמושים שגויים, כי השם לא כשר להצבה:

א. שמוש שגוי בשורה הראשונה בטבלה: מ-$\forall x[\exists y(y\neq x)]$ נסיק בטעות ש-$\exists y(y\neq y)$. הטעות נובעת מהצבת y במקום x בנוסחא $A=\exists y(y\neq x)$, שבה y מכומת.

ב. שמוש שגוי בשורה השניה בטבלה: על מנת להוכיח ש-$\exists x[\forall y(x=y)]$ נכתב בטעות כך: נגדיר $x=y$. צ"ל $\forall y(y=y)$. הטעות נובעת מהצבת y במקום x בנוסחא $A=\forall y(x=y)$ שבה y מכומת.

יחסים:

הגדרה: יהי S יחס דו-מקומי על הקבוצה A.

א. S רפלקסיבי אס"ם לכל $x\in A$ מתקיים $<x,x>\in S$.

ב. סימטרי אס"ם לכל $x,y\in A$ אם $<x,y>\in S$ אז $<y,x>\in S$.

ג. S אנטי-סימטרי אס"ם לכל $x,y\in A$ אם $<x,y>\in S$ וגם $<y,x>\in S$ אז $y=x$.

ד. S תורשתי (=טרנזיטיבי) אס"ם לכל $x,y,z\in A$ אם $<x,y>\in S$ וגם $<y,z>\in S$ אז $<x,z>\in S$.

ה. יחס שקילות אס"ם S גם רפלקסיבי, גם סימטרי וגם טרנזיטיבי.

ו. S יחס סדר חלקי אס"ם S גם רפלקסיבי, גם אנטי סימטרי וגם טרנזיטיבי.