<u>קומבינטוריקה</u>

<u>הגדרה</u>: ענף במתמטיקה העוסק במנייה של עצמים המקיימים תנאי מסוים בקבוצות בנות מניה.

סוגי בעיות:

- בעיות מניה – מספר הפתרונות לבעיה מסוימת.
- בעיות חיפוש ואופטימיזציה – מציאת הפתרון האופטימאלי.
- בעיות הכרעה – האם קיים פתרון לבעיה.

כללי מניה בסיסיים:

<u>עיקרון הסכום</u>: תהיינה A, B קבוצות סופיות וזרות. אז מתקיים:

הכללה של המשפט: לכל n קבוצות סופיות וזרות אחת מהשנייה מתקיים:

<u>עיקרון המכפלה</u>: תהיינה A, B קבוצות סופיות. אז מתקיים:

הכללה של המשפט: לכל n קבוצות סופיות מתקיים:

<u>עיקרון המשלים:</u> רצוי = סה"כ פחות לא רצוי.

<u>עיקרון שובך היונים:</u>

אם מכניסים יותר מ k איברים לתוך k תאים אז קיים לפחות תא אחד בו יימצאו 2 איברים או יותר.

אם מכניסים $kn + 1$ איברים לתוך n תאים אז בהכרח לפחות אחד מהתאים יכיל לפחות $k + 1$ איברים.

משפט ארדש – סקרש: לכל סדרה באורך $ab + 1$ של מספרים ממשיים שונים יש תת סדרה עולה באורך $a + 1$ או תת סדרה יורדת באורך $b + 1$.

<u>תמורה (פרמוטציה)</u>: מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים בשורה:

$n!$ - כלומר, למקום הראשון קיימים n אפשרויות, למקום השני קיימים $n-1$ אפשרויות, וכן הלאה.

<u>**חליפות עם חזרות**</u>: מספר האפשרויות לבחירת k איברים מתוך n <u>עם</u> חזרות ו<u>עם</u> חשיבות לסדר הבחירה: (k יכול להיות גדול מ n).

n^k - כלומר לכל אחד מ k האיברים קיימים n אפשרויות.

- <u>**חליפות**</u>: מספר האפשרויות לבחירת k איברים מתוך n <u>ללא</u> חזרות ו<u>עם</u> חשיבות לסדר הבחירה:

$\frac{n!}{(n-k)!}$ - כלומר, למקום הראשון קיימים n אפשרויות, למקום השני קיימים $n-1$ אפשרויות, וכן הלאה עד מקום k שבו קיימים $n-k+1$ אפשרויות.

- <u>**צירופים**</u>: מספר האפשרויות לבחירת k איברים מתוך n <u>ללא</u> חזרות ו<u>ללא</u> חשיבות לסדר הבחירה:
  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ - כלומר, בהתחלה מונים בחירת k איברים מתוך n ללא חזרות **ועם** חשיבות לסדר הבחירה, ומקבלים שמנינו את הקבוצה כמספר התמורות שלה ולכן מחלקים ב $k!$.
  <u>זהות</u>: $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

<u>**חלוקות**</u>: מספר האפשרויות לבחירת k איברים מתוך n <u>עם</u> חזרות ו<u>ללא</u> חשיבות לסדר הבחירה: (k יכול להיות גדול מ n).

$\binom{k+n-1}{k}$ - כלומר, מסדרים את האיברים לפי החזרות (איברים חוזרים יהיו סמוכים אחד לשני) ומתייחסים לכל האיברים כאיברים זהים, כעת הבעיה היא כזו: מספר האפשרויות לחלק k איברים זהים ל n תאים כך שסה"כ יש לנו בשורה אחת k איברים ו $n-1$ מחיצות כדי ליצור n תאים (סה"כ: $n-1+k$ עצמים), נשאר רק לבחור היכן לשים את המחיצות (או לחלופין, היכן לשים בין המחיצות את k האיברים) וזו בעיית צירופים (ללא חזרות וללא חשיבות לסדר).

סיכום הנוסחאות:

	עם חשיבות לסדר	בלי חשיבות לסדר
עם חזרות		
ללא חזרות		

<u>הבינום של ניוטון</u>:

<u>זהות פסקל</u>:

חלוקת הבחירה של k איברים מתוך n ל -2 סוגי קבוצות: קבוצות שמכילות את האיבר הראשון ובהן נותר לבחור $k-1$ איברים מתוך $n-1$ שנשארו (ללא הראשון). וקבוצות שאינן מכילות את האיבר הראשון ובהן צריך לבחור את k האיברים מתוך $n-1$ שנשארו (ללא הראשון).

<u>משולש פסקל</u>:

<u>תכונות של משולש פסקל</u>:

1. כל שורה במשולש סימטרית סביב האמצע שלה.
2. כל איבר מתקבל מסכום 2 האיברים שמעליו.
3. סכום השורה ה – n במשולש הוא: 2^{n-1}.
4. סכום הערכים במקומות הזוגיים בשורה שווה לסכום הערכים במקומות האי זוגיים.
5. בשורה ה n במשולש נמצאים המקדמים של הפיתוח: $(a+b)^{n-1}$.
6. הסדרה בצלע החיצונה היא: $1,1,1,1,1, \ldots$

7. הסדרה בקו השני היא: $1,2,3,4, \dots$ (המספרים הטבעיים).
8. הסדרה בקו השלישי היא: $1,3,6,10, \dots$ (המספרים המשולשים).

<u>מספרי קטלן</u>: $1,1,2,5,14,42,132,429,1430 \dots$

C_n מונה את מספר הדרכים לשים סוגריים על $n+1$ גורמים שונים.

<u>עיקרון ההכלה וההדחה</u>:

תהיינה A, B קבוצות סופיות. אז מתקיים:

הכללה של המשפט: לכל n קבוצות סופיות מתקיים שגודל האיחוד שווה לסכום המתחלף:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| =$$

אם רוצים לחשב את המשלים:

כאשר U מונה את סה"כ כל האפשרויות. (הקבוצה האוניברסאלית)

- נוסחת אוילר: יהא n מספר טבעי כלשהו ויהיו $P_1, P_2, \dots, P_k$ הגורמים הראשוניים השונים של n. כמות המספרים הקטנים מ n וזרים לו:

φ