מחפלה פנימית

<u>תרגיל 1.3:</u> הוכח שפונקציה $< A,B >:= tr(AB^*)$ היא מכפלה פנימית על $\mathbb{C}^{m\times n}$.

פתרון: נבדוק תכונות של מכפלה פנימית (תזכורת: $C^* = \overline{C}^T$)

1) הרמיטיות: יהיו $A,B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. אזי

$$\begin{aligned}
< A,B > &= tr(AB^*) = tr(A\overline{B^T}) = tr(A\overline{B}^T) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ij}}^T = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{b_{ji}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \overline{b_{ji}}a_{ij} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} \overline{b_{ji}\overline{a_{ij}}} = \overline{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ji}\overline{a_{ij}}} = \overline{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ji}\overline{a_{ji}}^T} \\
&= \overline{tr(B\overline{A}^T)} = \overline{tr(BA^*)} = \overline{< B,A >}
\end{aligned}$$

2) בי־לינאריות: יהיו $A,B,C \in \mathbb{C}^{m\times n}$, ו־ $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$. אזי

$$\begin{aligned}
< \alpha A+\beta B, C > &= tr\left(\left(\alpha A+\beta B\right)C^*\right) = tr\left(\left(\alpha A+\beta B\right)\overline{C}^T\right) \\
&= tr\left(\alpha A\overline{C}^T + \beta B\overline{C}^T\right) = tr\left(\alpha A\overline{C}^T\right) + tr\left(\beta B\overline{C}^T\right) \\
&= \alpha\cdot tr\left(A\overline{C}^T\right) + \beta\cdot tr\left(B\overline{C}^T\right) = \alpha\cdot tr\left(AC^*\right) + \beta\cdot tr\left(BC^*\right) \\
&= \alpha < A,C > + \beta < B,C >
\end{aligned}$$

3) אי־שליליות: יהי $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. אזי

$$\begin{aligned}
< A,A > &= tr(AA^*) = tr(A\overline{A^T}) = tr(A\overline{A}^T) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{a_{ij}}^T = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{a_{ij}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

ו־ $< A,A > = 0$ אם ורק אם $A = [a_{ij}] = 0$.

תרגיל 1.4: חשב מכפלה פנימית של המטריצות $\begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix}$, ו־ $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}$ לפי תרגיל 1.3.

פתרון:

$$\begin{aligned} &< \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix} >= tr\left(\begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}^*\right) \\ &= tr\left(\begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix} \overline{\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}}^T\right) = tr\left(\begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 2 \end{bmatrix}^T\right) \\ &= tr\left(\begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 2 \end{bmatrix}\right) = tr\begin{bmatrix} 1 & -4i \\ -2i & 7 \end{bmatrix} = 8 \end{aligned}$$

תרגיל 1.6: לאילו ערכים של α הפונקציה

$$< [x_1, x_2], [y_1, y_2] >:= x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + \alpha x_2y_2$$

היא מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}^2$?

פתרון: הקואורדינטות של $[x_1, x_2], [y_1, y_2] \in \mathbb{R}^2$ הם ממשיים, לכן הכפל בין הקואורדינטות הוא קומוטטיבי. נבדוק תכונות של המכפלה פנימית.

1) סימטריות: לכל α מתקיים

$$\begin{aligned} &< [x_1, x_2], [y_1, y_2] >= x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + \alpha x_2y_2 \\ &= y_1x_1 - 3y_2x_1 - 3y_1x_2 + \alpha y_2x_2 =< [y_1, y_2], [x_1, x_2] > \end{aligned}$$

2) בי־לינאריות: יהי $[z_1, z_2] \in \mathbb{R}^2$ ו־ $a, b \in \mathbb{R}$. אזי, לכל α מתקיים

$$\begin{aligned} &< a[x_1, x_2] + b[y_1, y_2], [z_1, z_2] >= \\ &=< [ax_1, ax_2] + [by_1, by_2], [z_1, z_2] >=< [ax_1 + by_1, ax_2 + by_2], [z_1, z_2] > \\ &= (ax_1 + by_1) z_1 - 3(ax_1 + by_1) z_2 - 3(ax_2 + by_2) z_1 + \alpha (ax_2 + by_2) z_2 \\ &= a(x_1z_1 - 3x_1z_2 - 3x_2z_1 + \alpha x_2z_2) + b(y_1z_1 - 3y_1z_2 - 3y_2z_1 + \alpha y_2z_2) \\ &= a < [x_1, x_2], [z_1, z_2] > + b < [y_1, y_2], [z_1, z_2] > \end{aligned}$$

3) אי־שליליות: יהא $[x_1, x_2] \in \mathbb{R}^2$, אז

$$\begin{aligned} &< [x_1, x_2], [x_1, x_2] >= x_1x_1 - 3x_1x_2 - 3x_2x_1 + \alpha x_2x_2 \\ &= x_1^2 - 6x_1x_2 + \left(\sqrt{\alpha}x_2\right)^2 = x_1^2 - 6x_1x_2 + (3x_2)^2 + \left(\sqrt{\alpha}x_2\right)^2 - (3x_2)^2 \\ &= (x_1 - 3x_2)^2 + (\alpha - 9)x_2^2 \geq 0, \quad \forall \alpha > 9 \end{aligned}$$

<u>תרגיל 1.8 (עמוד 96):</u> יהא V ממ"פ ממימד n. יהיו $v_1, ..., v_n \in V$. נגדיר מטריצה A לפי $a_{ij} =< v_i, v_j >$. הוכח: $det(A) = 0$ אם ורק אם $v_1, ..., v_n$ ת"ל.

פתרון: A מוגדרת לפי $a_{ij} =< v_i, v_j >$, המשמעות היא

$$A = \begin{bmatrix} < v_1, v_1 > & < v_1, v_2 > & \cdots & < v_1, v_n > \\ < v_2, v_1 > & < v_2, v_2 > & \cdots & < v_2, v_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < v_n, v_1 > & < v_n, v_2 > & \cdots & < v_n, v_n > \end{bmatrix}$$

$(\Leftrightarrow)$ נניח $det(A) = 0$. זה אומר שהשורות של המטריצה A ת"ל. נסמן דרך $< v_1, v_i >$ את השורה ראשונה, ב־ $< v_2, v_i >$ את השורה השנייה, ..., וב־ $< v_n, v_i >$ את השורה ה־n־נית של המטריצה A. השהשורות הנ"ל ת"ל. נניח, בלי הגבלת הכלליות $\alpha_1 = 1$, אזי

$$\begin{aligned} 0 =&< v_1, v_i > -\alpha_2 < v_2, v_i > +... - \alpha_n < v_n, v_i >= \\ =&< v_1, v_i > + < -\alpha_2 v_2, v_i > +...+ < -\alpha_n v_n, v_i >= \\ =&< v_1 - \alpha_2 v_2 + ... - \alpha_n v_n, v_i > \quad \forall i = 1, ..., n \end{aligned}$$

וזה יתכן אם ורק אם $v_1 - \alpha_2 v_2 + ... - \alpha_n v_n = 0$ כלומר $v_1 = \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n$ והוקטורים $v_1, ..., v_n$ ת"ל.

<u>תרגיל 1.10</u>: יהא V מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית, ויהא $u \in V$ כך שלכל $0 \neq v \in V$ מתקיים $< u, v >= 0$. הוכח ש־ $u = 0$.

פתרון: נתבונן בבסיס סטנדרטי $e_1, ..., e_n$ של V. נגדיר באופן יחיד $u = \sum_{i=1}^n u_i e_i$ ו־ $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$. אזי

$$\begin{aligned} < u, v >= \left\langle \sum_{i=1}^n u_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i v_j < e_i, e_j > \\ = \sum_{i=1}^n u_i v_i = u_1 v_1 + ... + u_n v_n = 0 \qquad (*) \end{aligned}$$

כיוון ש־ $v \neq 0$ כלשהו, מתקיים $v_1^2 + ... + v_n^2 > 0$ כלומר v_i לא כולם אפס, לכן השיוויון $(*)$ יתכן אם ורק אם $u_1 = ... = u_n = 0$, לכן $u = 0$.