<u>תרגול – קצב גידול של פונקציות</u>

1.

א. הטענה נכונה. <u>הוכחה</u>: צ"ל שקיימים $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $2n^4+n\le c\cdot n^5$, נגדיל את צד שמאל: $2n^4+n\le 2n^5+n^5=3n^5\le c\cdot n^5$ ולכן נוכל לבחור $n_0=1$ ו $c=3$ (או יותר גדול) ואכן אי השוויון מתקיים.
<u>דרך נוספת</u>: $2n^4=O(n^4)$, $n=O(n)$ (לפי רפלקסיביות) ולכן:
$O(n)+O(n^4)=O(n^4)$ הקטן מ $O(n^5)$ (לפי המשפט של סכום סדרי גודל).

ב. הטענה נכונה. <u>הוכחה</u>: צ"ל א. $\sqrt{n}+\left(\frac{n}{9}\right)^2=O(n^2)$, ב. $\sqrt{n}+\left(\frac{n}{9}\right)^2=\Omega(n^2)$. נוכיח א:
צ"ל שקיימים $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $\sqrt{n}+\left(\frac{n}{9}\right)^2\le c\cdot n^2$, נגדיל את צד שמאל: $n^2+\left(\frac{n}{9}\right)^2=\frac{82\cdot n^2}{81}\le c\cdot n^2$ ולכן נוכל לבחור $n_0=1$ ו $c=\frac{82}{81}$ (או יותר גדול) ואכן אי השוויון מתקיים.
נוכיח ב: צ"ל שקיימים $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $\sqrt{n}+\left(\frac{n}{9}\right)^2\ge c\cdot n^2$, נקטין את צד שמאל: $\left(\frac{n}{9}\right)^2=\frac{n^2}{81}\ge c\cdot n^2$ ולכן נוכל לבחור $n_0=1$ ו $c=\frac{1}{81}$ (או יותר קטן) ואכן אי השוויון מתקיים.

ג. הטענה נכונה. <u>הוכחה</u>: צ"ל שקיימים $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $\frac{n!}{5!(n-5)!}\ge c\cdot n^5$, נפשט את צד שמאל:
$(n-4)(n-3)(n-2)(n-1)n\ge c\cdot n^5$, נקבל פולינום ממעלה 5 ולכן לפי הדרך ב א' נקבל שיש שוויון בין הצדדים עבור c מסוים ולכן $\binom{n}{5}=\Omega(n^5)$.

ד. *הטענה לא נכונה. הוכחה: נניח בשלילה שקיימים* $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים:
$(\ln n^2)^n\le c\cdot 2^n$, *נקבל:* $(2\ln n)^n\le c\cdot 2^n$. *נצמצם ב* 2^n *ונקבל:*
$(\ln n)^n\le c$, n שואף לאינסוף ולכן לא קיים קבוע המקיים את אי השוויון. סתירה.

ה. *הטענה לא נכונה.* $\sqrt{2}^n<2^n$ *(קטן ממש) ולכן לא ייתכן שקיימים* $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $\sqrt{2}^n\ge c\cdot 2^n$ ולכן $2^{\frac{n}{2}}\ne\Omega(2^n)$.

ו. *הטענה לא נכונה. הוכחה: נקטין את צד שמאל:* $(n!)^{(n!)}>n^n\cdot n^{n-1}$ *ולא קיים* c *המקיים:*
$n^n\cdot n^{n-1}<cn^n$ *(ולאחר צמצום)* $n^{n-1}<c$.

ז. *הטענה נכונה.* <u>הוכחה</u>: צ"ל שקיימים $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים:
$(\sqrt{\log n})^{\log n}\ge cn^k$, נצמיד log ל 2 האגפים: $log(\sqrt{\log n})^{\log n}\ge\log cn^k$ ונקבל לפי חוקי לוגריתמים: $\frac{\log n}{2}\cdot\log(log\, n)\ge\log c+k\cdot\log n$, n שואף לאינסוף ולכן נוכל להתעלם מהקבועים. מכאן: $\log n\cdot\log(log\, n)\ge c_1\cdot\log n$, נצמצם ב $\log n$ ונקבל:
$\log(log\, n)\ge c_1$ ואכן פסוק זה נכון כי $\log(log\, n)$ שואף לאינסוף ולכן הוא גדול מכל קבוע.

ח. הטענה לא נכונה. הוכחה: *נניח בשלילה שקיימים* $c,n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים:
$e^{\frac{1}{n}}\ge c\cdot n^k$, *נגדיל את צד שמאל ונקבל:* $e^{\ln n}\ge c\cdot n^k$ *ומכאן:*
$n\ge c\cdot n^k$ ולכן: $1\ge c\cdot n^{k-1}$. n שואף לאינסוף ולכן – סתירה.

ט. הטענה לא נכונה. הוכחה: *נניח בשלילה שלכל קבוע* $c>0$ *קיים* $n_0>0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים: $k^{\log n}<c\cdot n^2$, נצמיד log ל 2 האגפים: $\log k^{\log n}<\log c\cdot n^2$ ונקבל לפי חוקי לוגריתמים: $\log n\cdot\log k<\log c+2\log n$, n שואף לאינסוף ולכן נוכל להתעלם מהקבועים. מכאן: $\log n<c\log n$ - עבור $0<c<1$ אי השוויון לא מתקיים בסתירה לכך שלכל c יש $n_0>0$ שממנו הטענה נכונה.

י. הטענה לא נכונה עבור $(2+\frac{1}{\ln n})^{n^2} = O(3^n)$. הוכחה: נניח בשלילה שקיימים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים: $(2+\frac{1}{\ln n})^{n^2} \leq c \cdot 3^n$, נצמיד ln ל 2 האגפים ונקבל: $ln(2+\frac{1}{\ln n})^{n^2} \leq \ln c \cdot 3^n$ ולפי חוקי לוגריתמים: $n^2 \ln(2+\frac{1}{\ln n}) \leq \ln c + n \cdot \ln 3$, n שואף לאינסוף ולכן נוכל להתעלם מהקבועים. מכאן: $n^2 \ln(2+\frac{1}{\ln n}) \leq c \cdot n$, נקטין את צד שמאל: $n^2 \ln(2) \leq c \cdot n$ ועדיין קיבלנו סתירה: $n^2 \leq c \cdot n$.

.2

א. נפתח סוגריים לפי הבינום של ניוטון: $(n^n+3)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot n^{kn} \cdot 3^{5-k}$, $\binom{5}{k} = \Theta(1)$ כי k קבוע בכל איבר בסכום וכן: $3^{5-k} = \Theta(1)$, מכאן:
$\sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} \cdot n^{kn} \cdot 3^{5-k} = \Theta(1) + \Theta(n^n) + \Theta(n^{2n}) + \Theta(n^{3n}) + \Theta(n^{4n}) + \Theta(n^{5n})$ לפי כלל מכפלה של סדרי גודל. ומכאן:
$\Theta(1) + \Theta(n^n) + \Theta(n^{2n}) + \Theta(n^{3n}) + \Theta(n^{4n}) + \Theta(n^{5n}) = \Theta(n^{5n})$ לפי כלל סכום סדרי גודל.

ב. נמצא O: נגדיל את הפונקציה: $\sum_{k=1}^{n} k^2 \leq \sum_{k=1}^{n} n^2 = n^3 = O(n^3)$
נמצא Ω: נקטין את הפונקציה:
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} k^2 + \sum_{k=\frac{n}{2}}^{n} k^2 \geq \sum_{k=\frac{n}{2}}^{n} k^2 \geq \sum_{k=\frac{n}{2}}^{n} (\frac{n}{2})^2 = \left(\frac{n}{2}+1\right)\left(\frac{n}{2}\right)^2 = \left(\frac{n}{2}\right)^3 + \left(\frac{n}{2}\right)^2 = \Omega(n^3)$$
ולכן: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \Theta(n^3)$.

ג. $\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} = \Theta(n^4) + \Theta(n^3) + \Theta(n^2) + \Theta(n) + \Theta(1) = \Theta(n^4)$

ד. נמצא הערכה ל $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$ – זה סכום סדרה הנדסית אינסופית עם מנה $\frac{1}{2}$. ולכן הסכום הוא: $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 = \Theta(1)$, $n^{\log n} = \Theta(n^{\log n})$ ולכן המכפלה ביניהם היא: $\Theta(n^{\log n})$.

ה. נמצא O: ניקח: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{i} = n \cdot O(\log n) = O(n \cdot \log n)$

.3

א. נניח $f = O(g)$ צ"ל $f + g = \Theta(g)$. לפי ההנחה, קיימים $c, n_0 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים: $f = c \cdot g$, נוסיף את g ל 2 האגפים ונקבל: $f + g = c \cdot g + g$ ומכאן: $f + g = (c+1)g$ ולכן: $f + g = \Theta(g)$.

ב. לא. דוגמא נגדית: $n = O(n^2)$ אבל: $n \cdot n^2 \neq \Theta(n^2 \cdot n^2)$.

ג. נניח $f = O(g)$ וגם $g = O(h)$, צ"ל: $f = O(h)$. לפי ההנחה: קיימים $c_1, c_2, n_0, n_1 > 0$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים: $f \leq c_1 \cdot g$ וכן לכל $n \geq n_1$ מתקיים: $g \leq c_2 \cdot h$. נציב את g באי השוויון הראשון: $f \leq c_1 \cdot c_2 \cdot h$ (זה נכון כי הצבנו פונקציה גדולה או שווה ל g) ולכן: $f = O(h)$.

ד. לא. דוגמא נגדית: $f = n$ ונבחר: $2n = O(n), n = O(n)$ ומכאן: $(2n)^n = O(n^n)$ אבל שוויון זה אינו מתקיים. הוכחה:נראה כי לא קיים $c > 0$ קבוע המקיים: $(2n)^n \leq c \cdot n^n$. נחלק את 2 הצדדים ב n^n ונקבל: $2^n \leq c$ ולא קיים קבוע הגדול מביטוי השואף לאינסוף.

.4

א. $g = O(f)$, נראה כי קיימים $n_0, c > 0$ כך ש $n^{\log n} \leq c \cdot 2^n$ לכל $n \geq n_0$.
נצמיד log ל 2 האגפים: $\log n \cdot \log n \leq \log c + n$ לפי חוקי לוגריתמים.

$\log n \cdot \log n = o(n)$ מתקיים ולכן גם האי שוויון מתקיים לכל c.

ב. $f = O(g)$, נראה כי קיימים $n_0, c > 0$ כך ש $(n!)^2 \leq c \cdot n^2!$ לכל $n \geq n_0$.
נצמיד log ל 2 האגפים: $2\log n! \leq \log c + \log n^2!$. לפי סטרלינג, $\log n! = O(n \cdot \log n)$
ולכן נובע כי: $2n \cdot \log n \leq \log c + n^2 \log n^2$, נבחר: $c = 1$ ונחלק ב $2n \cdot \log n$ ומכאן:
$n \leq 1$, ואכן אי שוויון זה מתקיים עבור $n_0 = 1$.

ג. $g = O(f)$, נראה כי קיימים $n_0, c > 0$ כך ש $n^n \leq c \cdot n! \cdot 2^n$ לכל $n \geq n_0$.
נצמיד log ל 2 האגפים: $\log n^n \leq \log c + \log n! + \log 2^n$ ומכאן,לפי חוקי לוגריתמים ולפי סטרלינג: $n \cdot \log n \leq \log c + n \cdot \log n + n$, נבחר: $c = 1$, $n_0 = 1$ ואכן: $0 \leq n$ מתקיים.

ד. $f = O(g)$

ה. $g = O(f)$

ו. $g = O(f)$

ז. $f = \binom{2n}{n}^n$, $g = \binom{n^2}{n}$