לינארית 2

שאלות ממבחנים קודמים

<u>תרגיל 1:</u>

תהי $V \subset \mathbb{E}^4$ תת־מרחב וקטורי, הנפרש על ידי וקטורים

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -8 \\ -10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix},$$

המיוצגים בקואורדינטות של הבסיס אורטונורמלי מסויים.
מצא בסיס אורטונורמלי של המשלים $V^{\perp}$.

פתרון: נבנה מערכת משוואות הומוגנית

$$\begin{cases} x+2y+11z+14t=0, \\ 2x+10z+12t=0, \\ -x-y-8z-10t=0, \\ 3y+9z+12t=0. \end{cases}$$

נמצא מרחב הפיתרונות של המערכת.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 14 \\ 2 & 0 & 10 & 12 \\ -1 & -1 & -8 & -10 \\ 0 & 3 & 9 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2-2R_1, \\ R_3+R_1}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 14 \\ 0 & -4 & -12 & -16 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 9 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 14 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -12 & -16 \\ 0 & 3 & 9 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_3+4R_2, \\ R_4-3R_2}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 11 & 14 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_1-2R_2]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5z-6t \\ -3z-4t \\ z \\ t \end{bmatrix}$$

כלומר המרחב הפיתרונות של המערכת הנ"ל יהיה

$$V^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} s : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

קיבלנו וקטורי בסיס $v_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, ו־$v_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, לא אורטונורמלים.
נבצע תהליך גרם שמידט.

$$u_1 := \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{proj}_u(v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle u, u \rangle} u$$

$$u_2 = v_2 - \mathrm{proj}_{u_1}(v_2) = v_2 - \frac{\langle u_1, v_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{42}{35} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{6}{5} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ -\frac{18}{5} \\ \frac{6}{5} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \\ \frac{6}{5} \\ -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{25 + 9 + 1} = \sqrt{35}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{4 + 36 + 25} = \sqrt{65}$$

לכן, פתרון הסופי

$$V^{\perp} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{5}{\sqrt{35}} \\ \frac{3}{\sqrt{35}} \\ -\frac{1}{\sqrt{35}} \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{65}} \\ \frac{6}{\sqrt{65}} \\ -\frac{5}{\sqrt{65}} \end{bmatrix} s : t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

תרגיל 2: נתון תת־מרחב וקטורי L של $\mathbb{R}^4$ בבסיס אורטונורמלי מסוים
על ידי מרחב האפסים של המערכת משוואות הומוגנית

$$(*) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

מצא אופרטור ההטעלה המאונכת P_L בבסיס הנ"ל ממרחב $\mathbb{R}^4$ על L.

פתרון: נמצא בסיס למרחב האפסים: $t, s \in \mathbb{R}$ אזי

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = t + s, \\ 2x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

ו־

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

לכן

$$L = \operatorname{span}(A) = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

כיוון ש־$\dim L = 2$ אז $\dim L^{\perp} = 4 - 2 = 2$. השורות של $(*)$ בת"ל,
לכן נבחר אותן בתור בסיס ל־$L^{\perp}$:

$$L^{\perp} = \operatorname{span}(B) = \operatorname{span}\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

כיוון שהוקטורים מהקבוצה $A \cup B$ בת"ל, הם מהווים בסיס ל־$\mathbb{R}^4$.

נסמן:

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

אנו צריכים למצוא אופרטור P_L. לפי משפט 2 (עמוד 103) מתקיים:

$$P_L(v_1) = v_1, \quad P_L(v_2) = v_2, \quad P_L(v_3) = 0, \quad P_L(v_4) = 0,$$

כך שהמטריצה P של האופרטור P_L בבסיס $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ היא

$$[P]_v^v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

מצד שני ידוע שהמטריצה מעבר מבסיס סטנדרטי e לבסיס v היא

$$[I]_e^v = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

אבל $[P]_v^v = [I]_v^e \, [P]_e^e \, [I]_e^v$ כלומר $[P]_v^v = ([I]_e^v)^{-1} \, [P]_e^e \, [I]_e^v$,
לכן $[P]_e^e = [I]_e^v [P]_v^v \, ([I]_e^v)^{-1}$. לאחר חישוב של המטריצה ההפוכה,
נקבל

$$([I]_e^v)^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & -5 \\ -1 & 2 & -5 & 6 \\ -1 & 2 & -5 & -5 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

לכן

$$\begin{aligned} [P]_e^e &= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 & -5 \\ -1 & 2 & -5 & 6 \\ -1 & 2 & -5 & -5 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 2 & -4 & -1 & -1 \\ -4 & 8 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 6 & -5 \\ -1 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

__תרגיל 3:__ נגדיר את המכפלה הפנימית f על $\mathbb{R}_1[x]$על ידי

$$f(p(x), q(x)) := \int_1^2 p(x)q(x)dx$$

(א) חשבו את $f(x+1, 2x-3)$.

(ב) חשבו את $\|4x+1\|$ על פי המכפלה הפנימית הנ"ל.
(ג) מצאו בסיס אורטונורמלי ב־ $\mathbb{R}_1[x]$ על פי המכפלה הפנימית הנ"ל.

פתרון: (א)

$$f(x+1,2x-3)=\int_1^2 (x+1)(2x-3)dx=\int_1^2 (2x^2-x-3)dx$$
$$=\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x\Big|_1^2=\left(\frac{16}{3}-\frac{4}{2}-6\right)-\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-3\right)=-\frac{8}{3}+\frac{17}{6}=\frac{1}{6}$$

(ב) נגדיר נורמה $\|p(x)\|:=\sqrt{f(p(x),p(x))}$, אזי

$$\|4x+1\|=\sqrt{f(4x+1,4x+1)}=\sqrt{\int_1^2 (4x+1)^2dx}=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{12}(4x+1)^3\Big|_1^2}=\sqrt{\frac{1}{12}\left((4\cdot 2+1)^3-(4\cdot 1+1)^3\right)}=$$
$$=\sqrt{\frac{1}{12}\left(9^3-5^3\right)}=\sqrt{\frac{151}{3}}$$

(ג) נתבונן בבסיס קנוני $(u_1=1,u_2=x)$ של $\mathbb{R}_1[x]$.
נבצע תהליך גרם שמידט.

$$w_1:=u_1=1$$
$$w_2(x)=u_2-\frac{\langle u_2,w_1\rangle}{\langle w_1,w_1\rangle}w_1=x-\frac{f(x,1)}{f(1,1)}\cdot 1=x-\frac{\int_1^2 xdx}{\int_1^2 dx}=$$
$$=x-\frac{\frac{x^2}{2}\Big|_1^2}{x|_1^2}=x-\frac{\frac{4}{2}-\frac{1}{2}}{2-1}=x-\frac{\frac{3}{2}}{1}=x-\frac{3}{2}$$
$$\|w_1\|=\sqrt{f(1,1)}=\sqrt{\int_1^2 dx}=\sqrt{x|_1^2}=\sqrt{2-1}=1,$$
$$\|w_2\|=\sqrt{f(w_2,w_2)}=\sqrt{\int_1^2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx}=\sqrt{\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\Big|_1^2}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{3}\left(\left(2-\frac{3}{2}\right)^3-\left(1-\frac{3}{2}\right)^3\right)}=\sqrt{\frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)}=\sqrt{\frac{1}{12}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

לכן

$$e_1(x) = \frac{w_1(x)}{||w_1(x)||} = \frac{1}{1} = 1$$
$$e_2(x) = \frac{w_2(x)}{||w_2(x)||} = \frac{6}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

יהיה בסיס אורטונורמלי ב־ $\mathbb{R}_1[x]$.

תרגיל 4: נתון ש־V הוא מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$, עם מכפלה פנימית f.
נתון שהווקטורים $u, v \in V$ מקיימים

$$f(u,v) = 4 + i, \quad ||u|| = \sqrt{3}$$

נגדיר את תת־המרחב U של V על ידי $U = \mathrm{Span}\{u\}$.
נגדיר $w = \alpha u + (3i)v$ כאשר $\alpha \in \mathbb{C}$ הוא סקלר נעלם.
מצאו α כך ש־ $w \in U^{\perp}$.

פתרון: נגדיר נורמה על ידי מכפלה פנימית $\|u\|^2 := f(u,u)$, אז

$$\begin{gathered} 0 = f(w,u) = f(\alpha u + (3i)v, u) = f(\alpha u, u) + f((3i)v, u) \\ = \alpha f(u,u) + 3if(v,u) = \alpha\|u\|^2 + 3i\overline{f(u,v)} = \alpha\|u\|^2 + 3i(4-i) = \\ = 3\alpha + 3(4i+1) = 3\left[\alpha + (4i+1)\right] \end{gathered}$$

לכן $\alpha = -1 - 4i$.