ערכים ווקטורים עצמיים, לכסון, דימיון מטריצות

שאלות ממבחנים של בועז צבאן, ומבחנים משנים קודמות.

<u>תרגיל 1:</u> הוכח למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני ואותם ערכים עצמיים.

הוכחה: A,B מטריצות דומות, אזי לפי הגדרה קיימת מטריצה P הפיכה כך ש- $B=P^{-1}AP$. אזי

$$\begin{aligned}det\left(B-\lambda I\right)&=det\left(P^{-1}AP-\lambda I\right)=det\left(P^{-1}\left(AP-P\left(\lambda I\right)\right)\right)=\\&=det\left(P^{-1}\left(AP-\left(\lambda I\right)P\right)\right)=det\left(P^{-1}(A-\lambda I)P\right)=\\&=det\left(P\right)^{-1}\cdot det\left(A-\lambda I\right)\cdot det\left(P\right)=det\left(A-\lambda I\right).\end{aligned}$$

כאן השתמשנו בעובדה ש- $\left(\lambda I\right)P=P\left(\lambda I\right)$ ו- $det\left(P^{-1}\right)=\left(det\left(P\right)\right)^{-1}$ לכל P. $\square$

<u>תרגיל 2:</u> נתון: $A\in Mat_{2\times 2}\left(\mathbb{R}\right)$ ו- $P_A(\lambda)=\lambda^2-\lambda+1$ הפולינום אופייני של A.

(א) האם A לכסינה מעל $\mathbb{R}$?

(ב) האם A לכסינה מעל $\mathbb{C}$?

(ג) חשב את העקבה $tr(A)$.

פתרון: (א) תשובה **לא**, כיוון ש- $\Delta=1^2-4=-3<0$ ולמשוואה $P_A(\lambda)=0$ אין שורשים ממשיים, ולכן אין ערכים וקטורים עצמיים.

(ב) השורשים של המשוואה $P_A(\lambda)=0$ הם $\lambda_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ו- $\lambda_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ שונים זה מזה. נסמן ב- $w_{1,2}$ את הוקטורים עצמיים השייכים ל-$\lambda_{1,2}$ בהתאם. $\lambda_1\neq\lambda_2$ לכן לפי משפט (5 עמוד 87) $w_{1,2}$ בת"ל. נגדיר אופרטור לינארית $T:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ בבסיס סטנדרטי $e=\left(e_1,e_2\right)$ על ידי מטריצה $T(x)=Ax$ כאשר $A=[T]=[T]_e^e$ עבור $x\in\mathbb{C}^2$ לפי הגדרה (5 עמוד 74). $dim\left(\mathbb{C}^2\right)<\infty$ ו- $w_{1,2}$ בת"ל, לכן לפי הגדרה (8 עמוד 90) $w=\left(w_1,w_2\right)$ בסיס מלכסן של $\mathbb{C}^2$ ביחס ל- T כך שאופרטור T ניתן ללכסון. לכן לפי משפט (6 עמוד 90) המטריצה A ניתנת לליכסון מעל $\mathbb{C}$ והתשובה היא **כן**.

(ג) לפי סעיף (ב) אופרטור T המוגדר על ידי מטריצה $A=[T]_e^e$ ניתנת לליכסון מעל $\mathbb{C}$, לכן לפי משפט (6 עמוד 90) יש מטריצה הפיכה $P=[I]_e^w$ כך ש- $D=P^{-1}AP$, כאשר מטריצה $D:=diag\left(\lambda_{\overline{1,2}}\right)$ על פי הגדרה (6 עמוד 89).

נשתמש בעובדה שלכל שתי מטריצות ריבועיות $A_{n\times n}$ ו- $B_{n\times n}$, מתקיים

$$tr\left(A_{n\times n}B_{n\times n}\right)=tr\left(B_{n\times n}A_{n\times n}\right)$$

כיוון ש־

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij}$$

כאשר a_{ij} ו־ b_{ji} הם איברים של המטריצות $A_{n\times m}$ ו־ $B_{m\times n}$ בהתאם. לכן

$$trA = tr\left(\left(PD\right)P^{-1}\right) = tr\left(P^{-1}\left(PD\right)\right) = tr\left(\left(P^{-1}P\right)D\right) = trD = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

מסכנה:

$$tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1.$$

תרגיל 3: (**א**) מצא מטריצה המייצגת A של האופרטור הגזירה $\mathcal{D}$ במרחב ווקטורי $\mathbb{R}_2[x]$ (של הפולינומים בעלי דרגה לא עולה על 2 עם מקדמים ממשיים) בבסיס f , כאשר $f_1 = 1, f_2 = 1+x, f_3 = 1+x+x^2$. (**ב**) האם מטריצה המייצגת של $\mathcal{D}$ היא הפיכה?

פתרון: (א) נגזור את האיברי בסיס

$$\begin{gathered}\mathcal{D}f_1 = 0,\\ \mathcal{D}f_2 = 1 = f_1,\\ \mathcal{D}f_3 = 1 + 2x = -1 + 2\left(1+x\right) = -f_1 + 2f_2.\end{gathered}$$

לכן המטריצה המייצגת יהיה

$$A = [\mathcal{D}]_f^f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(ב) הגרעין של ההעתקת הגזירה $\mathcal{D} : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת על ידי מטריצה A איזומורפי למרחב הפתרונות של המערכת משוואות $Au = 0$ עבור $\mathbb{R}^3 \ni u$, והוא לא טריוויאלי, כלומר $ker\mathcal{D} \neq \{0\}$ כיוון ש־ $rank\mathcal{D} = rankA = 2 < 3$ ולכן, העתקה $\mathcal{D}$ אינה חח"ע. אזי לפי משפט $\mathcal{D}$ אינו הפיך.

תרגיל 4: נתון: $Mat_{n\times n}\left(\mathbb{R}\right) \ni A$ מטריצה הפיכה, ו־ λ הוא ערך עצמי של A. הוכח: $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של המטריצה A^{-1}.

פתרון: (תזכורת: פתרנו תרגיל שאומר, מטריצה לא הפיכה אם ורק אם $\lambda = 0$ הוא ערך עצמי של A) כיוון ש־A הפיכה $detA \neq 0$ וכול הערכים העצמיים של A שונים מאפס. λ הוא ערך עצמי של A, אז לפי הגדרה $Av = \lambda v$. נכפול משמאל ב־A^{-1} את

המשוואה הנ"ל נקבל $v = A^{-1}(\lambda v) = \lambda A^{-1} v$, או $A^{-1} v = \frac{1}{\lambda} v$, כלומר $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1}.

<u>תרגיל 5:</u> הוכח שעבור כול וקטור $w \in \mathbb{R}^3$ השונה מאפס, לאופרטור לינארי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המוגדר לפי $T(u) = u \times w$ בבסיס סטנדרטי יש ערך עצמי $\lambda = 0$ יחיד.

פתרון: נמצא מטריצה המייצגת A של T בבסיס סטנדרטי $e = (e_1, e_2, e_3)$. כיוון ש־

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = det \begin{bmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ a & b & c \end{bmatrix} =$$
$$= (cy - bz)\, i + (az - cx)\, j + (bx - ay)\, k = \begin{bmatrix} cy - bz \\ az - cx \\ bx - ay \end{bmatrix}$$

נקבל

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{bmatrix},$$
$$T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{bmatrix},$$
$$T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

כלומר $A = [T] = [T]_e^e = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$. נמצא ערכים עצמיים

$$0 = det\,(\lambda I - A) = det \begin{bmatrix} \lambda & -c & b \\ c & \lambda & -a \\ -b & a & \lambda \end{bmatrix} =$$
$$= \lambda^3 - abc + abc - (-\lambda b^2 - \lambda a^2 - \lambda c^2) =$$
$$= \lambda^3 + \lambda\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = \lambda\left(\lambda^2 + a^2 + b^2 + c^2\right).$$

מכוון ש־ $w = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, למשוואה $P_A(\lambda) = 0$ יש פתרון יחיד $\lambda = 0$.

תרגיל 6: נתון: $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. חשב A^{-1} על ידי שימוש במשפט של $Cayley$-$Hamilton$.

פתרון: נמצא פולינום אופייני:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = det \begin{bmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{bmatrix} = \\ = (\lambda-1)\cdot det \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 \end{bmatrix} = (\lambda-1)\left(\lambda^2-1\right) \\ = \lambda^3-\lambda^2-\lambda+1. \end{aligned}$$

לפי משפט הפולינום $\widetilde{P}_A(X) = X^3 - X^2 - X + I$ מאפס את המטריצה A, כאשר I היא מטריצה יחידה מסדר 3. לכן $A^{-1}A = \left(-A^2 + A + I\right) A = I$ כך ש- $A^{-1} = -A^2 + A + I$ אזי.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ולכן

$$A^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$