# <u>סיכום שבוע 3</u>

סיימנו את הנושא של חסימות, תכונות סדר וסנדוויץ' בכך שהבאנו דוגמאות לשימוש במשפט הסנדוויץ'. לאחר מכן דיברנו על אריתמטיקה של גבולות: גבול של סכום והפרש סדרות, מכפלת סדרה חסומה בסדרה אפסה, גבול של מכפלה ומנה של סדרות ולבסוף גבול של סדרה השואפת לגבול בחזקת מספר ממשי קבוע. בסוף השעור התחלנו לדבר על גבולות אינסופיים: הגדרנו מתי סדרה שואפת לאינסוף והצגנו שתי דוגמאות (השניה כללית: מספר גדול מ-1 בחזקת $n$ ולא סיימנו אותה).

<u>ש.ב</u>

1) עמודים 102-104: תרגילים 1-4,א-ה5, 6, 9 .

2) עמוד 115-116 : תרגילים 1-7.

ממ' 102

1 (א) יהיו $\{a_n\}, \{b_n\}$ סדרות חסומות

נוכיח ש- $\{a_n+b_n\}$ חסומה:

לפי הנתון יש $M_1, M_2$ חיוביים כך ש-

$|a_n| \le M_1$ לכל $n$, $|b_n| \le M_2$ לכל $n$.

מכאן $|a_n+b_n| \le |a_n|+|b_n| \le M_1+M_2$.

(ב) מכפלת סדרות חסומות מלעיל לא

בהכרח חסומה <u>מלעיל</u>: נבחר

מינוס

$b_n = a_n = -n$ אז $\{a_n\}, \{b_n\}$ חסומות

מלעיל אך $a_n \cdot b_n = n^2$ אינה חסומה מלעיל.

2 (א) $a_n = \frac{n^2+3}{n^2+5}$ שואפת ל-1

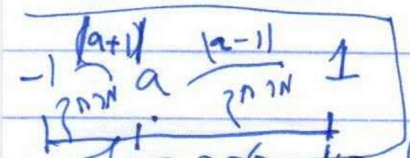
$$\lim a_n = \lim \frac{1+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{5}{n^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

(ב) $$\lim \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = 0$$

כי $0 < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \le \frac{1}{n}$. לכן לפי סנדוויץ'

6) $a_n=[\sqrt{n}]$ חסומה מלרע ע"י 0 אבל

לא חסומה מלעיל כי לכל $M$ ממשי נבחר




$n=M^2$ אז $a_n=[\sqrt{n}]=M\geq M$.

3) שאלה ב' מוגשת לבדיקה פורמלית: אבל הנה הערה קצרה.

$a_n=(-1)^n(1+\frac{1}{n})$ חסומה: $|a_n|=1+\frac{1}{n}\leq 2$

$\{a_n\}$ איננה מתכנסת: נוכיח שלכל $a\neq\pm1$

איננו גבול (לגבי $a=\pm1$ הוכח קודם יותר)

יהי $a\neq\pm1$. אז קיים $N_1\in\mathbb{N}^+$ כך ש-

$\frac{1}{N_1}<\frac{1}{2}\min(|a-1|,|a+1|)$ וקיים $N_2\in\mathbb{N}^+$ כך ש-

$|a_n-a|<\frac{1}{N_1}$ לכל $n\geq N_2$. נבחר $N=\max(N_1,N_2)$.

אז לכל $n\geq N$ אם $n$ זוגי (למשל)

אז $|a_n-1|=\frac{1}{n}$, $|a_n-a|<\frac{1}{N_1}$

ומכאן $\boxed{|a-1|}\leq|a-a_n|+|a_n-1|<\frac{1}{N_1}+\frac{1}{n}$

$=$

$<\frac{2}{N_1}<\boxed{|a-1|}$

סתירה. $\left(\frac{2}{N_1}<\min(|a-1|,|a+1|)\leq|a-1|\right)$

השאלה הבאה מהסוג לא רוטיני כאשר

נזכה לא ... סברות.

3ג

(ב) $a_n = \sqrt{1+\frac{1}{n}}$

$$1 \le \sqrt{1+\frac{1}{n}} \le 1+\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

עבור $a>1$: $a < a^2 \iff 1<a$.

מכאן לפי סנדביץ' $\lim a_n = 1$.

($a \xrightarrow[\infty]{n}$ פירושו שהסדרה שואפת ל- $a$ כאשר $n$ שואף ל- $\infty$).

(1) $a_n = \sqrt{n^2+2} - n$ פתרון:

$$a_n = \frac{2}{\sqrt{n^2+2}+n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2}+n} \le \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$ כי $\lim a_n = 0$

(3) $a_n = 2^{-\sqrt{n}}$. נוכיח ש- $\lim a_n = 0$:

אכן, יהי $\varepsilon > 0$ נבחר $N_1$ טבעי כך ש-

$\frac{1}{2^{N_1}} < \varepsilon$ (יש לפי $\lim s^n = 0$ עבור $0<s<1$)

מכאן נבחר ~~$N \in \mathbb{N}$~~ . $N = N_1^2$ ואז:

לכל $n \geq N$ $\quad 2^{-\sqrt{n}} = \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{2^{\sqrt{N}}} = \frac{1}{2^{N_1}} < \varepsilon$

כנדרש.

3 א) לא נכון: נבחר $a_n = 1$ (סדרה קבועה)

$b_n = \frac{1}{n}$. אז $\lim a_n = \underline{\underline{1 = a}}$, $\lim b_n = 0 = b$

מתקיים $a_n = 1 < 1 + \frac{1}{n} = 1 + b_n$ אך $\overset{a}{1} \not< \overset{b}{0} + 1$

ב) נכון: הוכחה:

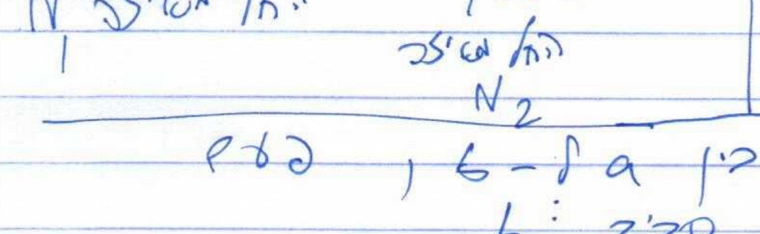
$a_n \to a$ לכן החל מאיזה $N_1$, $a_n < \frac{a+b}{2}$

(לכל $n \geq N_1$).

$b_n \to b$ לכן מאיזה $N_2$ לכל $n \geq N_2$

מתקיים $\frac{a+b}{2} < b_n$

שימו לב לציור:




השתמשנו בסביבה
ברדיוס חצי המרחק בין a ל-b, פעם
הסביבה סביב a ופעם סביב b.

ג) נכון: נתון ש- $b \geq a$, ההוכחה
ש- $a \geq b$ דומה.

ג' 5

נגדיר סדרות $A_n = a_{2n}$ , $B_n = b_{2n}$

אז לפי הנתון ש- $\lim A_n = a$ , $\lim B_n = b$

(כיון ש- $\lim a_n = a$ , $\lim b_n = b$). ולכן

לפי משפט 5.3.4 נקבל (ולפי הנתון ש- $b_n < a_n$

לכל n טבעי) ש- $b \le a$.

# פתרונות לתרגילים בספר הקורס

**עמוד 103 שאלה 3 ד:**

נתון: $a_n \to 0$ , $a_n < b_n < 2a_n$ .

נוכיח: $b_n \to 0$ .

הוכחה: נשתמש בכלל הסנדוויץ' על סמך הנתון: $a_n < b_n < 2a_n$ .

לאגף שמאל כבר נתון: $a_n \to 0$ .

לאגף ימין מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty}(2a_n) = 2\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 2\cdot 0 = 0$ . וזאת על פי אריתמטיקה של גבולות סופיים (או "סידרה חסומה כפול סידרה אפסה").

ובסך הכל על פי סנדוויץ' קיבלנו: $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = 0$ .

**עמוד 103 שאלה 3 ה:**

נתון: $-1 < \frac{a_n}{b_n} < 1$ , $b_n \to b > 0$ .

האם הסידרה $(a_n)$ מתכנסת? נפריך על ידי דוגמה נגדית.

נתבונן בסידרה הקבועה: $b_n = 2$ , ובסידרה המחליפה סימן: $a_n = (-1)^n$ .

ברור, שהסידרה הקבועה מתכנסת לגבול החיובי b=2, והסידרה השניה אינה מתכנסת.

ומתקיים: $\frac{(-1)^n}{2} = \frac{a_n}{b_n}$ . כלומר: $-1 < \frac{a_n}{b_n} < 1$ .

**עמוד 103 שאלה 4:**

יהיו קבועים $a,b>0$ . נחשב את הגבול: $\sqrt[n]{a^n+b^n}$ .

בלי הגבלת הכלליות, נניח, כי: $a \ge b > 0$ .

לכן מתקיים: $a^n \le a^n + b^n \le a^n + a^n$ .

ונוכל להשתמש בכלל הסנדוויץ': $\sqrt[n]{a^n} \le \sqrt[n]{a^n+b^n} \le \sqrt[n]{2a^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a^n}\right) = \lim_{n\to\infty}(a) = a$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2a^n}\right) = a\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{2}\right) = a\cdot 1 = a$$

ולכן גם הגבול המבוקש הוא: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a^n+b^n}\right) = 1$ .

**עמוד 103 שאלה 5 סעיפים א עד ה:**

א. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\{n\}}{2^n}\right)$

החלק השברי מקיים: $0 \le \{n\} = n - [n] < 1$ . ולכן נוכל להשתמש בכלל הסנדוויץ':

$\frac{0}{2^n} \le \frac{\{n\}}{2^n} \le \frac{1}{2^n}$ . ברור שמתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right) = 0 = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{0}{2^n}\right)$ .

ולכן הגבול המבוקש הוא: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\{n\}}{2^n}\right) = 0$ .

ב. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^3-2}\right)$

נחלק מונה ומכנה ב $n^2$ . וביחד עם אריתמטיקה של גבולות, נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n^2}}{n-\frac{2}{n^2}}\right)="\frac{1+0}{\infty-0}"="\frac{1}{\infty}"=0$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n}}\right)$

נכפול את הביטוי בשבר הבא: $\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}=1$.

לאחר פיתוח (שימוש בנוסחת כפל מקוצר) נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n}}\cdot\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{n+\sqrt{n^2+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-(n^2+1)}{\sqrt{n}\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-1}{\sqrt{n}\left(n+\sqrt{n^2+1}\right)}\right)=\frac{-1}{\infty}=0$$

ד. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{n^2+5}{n^2+1}}\right)$

נשתמש בכלל הסנדוויץ': $\frac{n^2+1}{n^2+1}\le\frac{n^2+5}{n^2+1}\le\frac{5n^2+5}{n^2+1}$.

כלומר: $1\le\frac{n^2+5}{n^2+1}\le 5$.

ולכן: $1\leftarrow\sqrt[n]{1}\le\sqrt[n]{\frac{n^2+5}{n^2+1}}\le\sqrt[n]{5}\rightarrow 1$.

ובסך הכל קיבלנו מכלל סנדוויץ': $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{\frac{n^2+5}{n^2+1}}\right)=1$.

ה. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-\left[\sqrt{n}\right]^2}{\sqrt{n}}\right)$

נוכיח שהסידרה אינה מתכנסת.

1. נבחר מספרים טבעיים n מהצורה: $n=k^2$ (עבור k טבעי). נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k^2-\left[\sqrt{k^2}\right]^2}{\sqrt{k^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k^2-[k]^2}{\sqrt{k^2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k^2-k^2}{\sqrt{k^2}}\right)=0$$

2. נבחר מספרים טבעיים n מהצורה: $n=k^2-1$ (עבור k טבעי). נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k^2-1-\left[\sqrt{k^2-1}\right]^2}{\sqrt{k^2-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k^2-1-(k-1)^2}{\sqrt{k^2-1}}\right)$$

כאשר הצבנו: $\left[\sqrt{k^2-1}\right]=k-1$. להלן נוכיח זאת:

$$0 \le k-1 < \sqrt{k^2-1} < k$$
$$\Leftrightarrow (k-1)^2 < \left(\sqrt{k^2-1}\right)^2 < (k)^2$$
$$\Leftrightarrow k^2-2k+1 < k^2-1 < k^2$$
$$\Leftrightarrow -2k+1 < -1$$
$$\Leftrightarrow 2 < 2k$$
$$\Leftrightarrow 1 < k$$

ואכן, $1<k$. לכן: $k-1 < \sqrt{k^2-1} < k$. ובסך הכל: $\left\lfloor \sqrt{k^2-1} \right\rfloor = k-1$.

כעת נמשיך בפיתוח הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k^2-1-(k-1)^2}{\sqrt{k^2-1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{k^2-1-k^2+2k-1}{\sqrt{k^2-1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2k-2}{\sqrt{k^2-1}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2-\frac{2}{k}}{\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}\right) = \frac{2-0}{\sqrt{1-0}} = 2$$

כאשר בשלב האחרון השתמשנו באריתמטיקה של גבולות.

לסיכום, קיבלנו שגבול הסידרה אינו יחיד: חלק מאיברי הסידרה שואפים לגבול 0, וחלק מאיברי הסידרה שואפים לגבול 2.

ולכן הסידרה אינה מתכנסת.

## תרגילים עמ' 115-117

**1** הוכיחו או הפריכו:

(ג) אם $|a_n|\to|a|$ אז $a_n\to a$

דוגמא נגדית: $a_n \to (-1)^n$

(ד) אם $(|a_n|-a)\to 0$ אז $|a_n|\to a$

$(|a_n|-a)\to 0$ ולכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $N$ כך שלכל $n>N$ מתקיים

$$\big||a_n|-a-0\big|<\varepsilon$$

כלומר: $\big||a_n|-a\big|<\varepsilon$

ולפי הגדרת הגבול $|a_n|\to a$

כיוון ש $|a_n|$ אי שלילי אז $|a_n|\to|a|$ (a אי שלילי ולכן $|a|=a$)

(ה) אם $|a_n|\to a$ וגם $|b_n|\to b$ אז $(|a_n|-|b_n|)\to |a|-|b|$

הוכחה:

אם $|b_n|\to b$ אז $-|b_n|\to b$ ולכן:

$$\Big||a_n|+(-|b_n|)-\big(|a|+(-|b|)\big)\Big| \le \big||a_n|-|a|\big| + \big|-|b_n|-(-|b_n|)\big|$$

$$= \big||a_n|-|a|\big| + \big||b_n|-|b|\big| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

**3** חשבו את הגבולות של הסדרות הבאות, או הוכיחו שהגבול לא קיים:

(ג) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{1+(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}$

$\frac{1}{n} \to 0$

לא שואף לשום מקום
אין גבול

n אי-זוגי $\leftarrow 0$
n זוגי $\leftarrow 2$

סדרה אפיסה כפול סדרה חסומה.

$\Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{1+(-1)^n}{\sqrt[n]{2}}=0$

(ה) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cancel{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n}}{\cancel{\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 0$

$\frac{1}{n}\to 0$, $\frac{1}{n}\to 0$

6 (ג) הוכיחו שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש: $B_\delta(x)+B_\delta(y)\subseteq B_\varepsilon(x+y)$

סכום של קבוצות

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}$$

עבור $\varepsilon>0$ נתון נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ ואז עבור

$a\in B_\delta(x)$ : $|a-x|<\delta$

ועבור $b\in B_\delta(y)$ : $|b-y|<\delta$ ומכאן ש:

$$|a+b-(x+y)|=|(a-x)+(b-y)|\le|a-x|+|b-y|<\delta+\delta$$
$$=2\delta=\varepsilon$$

ולכן: $a+b\in B_\varepsilon(x+y)$

כלומר לפי טענה כי עבור $a_n\to x$ , $b_n\to y$

קיימים $N_a,N_b$ בהתאמה כך שלכל $n>N_n$ מתקיים

$$\begin{cases}|a_n-x|<\delta_a\\|b_n-y|<\delta_b\end{cases}$$ לכל $\delta_a,\delta_b$ ובפרט $\delta_a=\delta_b=\frac{\varepsilon}{2}$

ואז: $|a_n+b_n-(x+y)|<\delta_a+\delta_b=\varepsilon$

(ד) הוכיחו שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש: $B_\delta(x)\cdot B_\delta(y)\subseteq B_\varepsilon(x\cdot y)$

$$A\cdot B=\{a\cdot b \mid a\in A,\ b\in B\}$$

$a\in B_\delta(x)\Rightarrow|a-x|<\delta$

$b\in B_\delta(y)\Rightarrow|b-y|<\delta$ ומכאן ש:

$$|ab-xy|=|(a-x)b+(b-y)x|\le|a-x|\cdot|b|+|b-y|\cdot|x|$$

$$<\delta\cdot|b|+\delta|x|\le\delta|y+\delta|+\delta|x|\le\delta\cdot|y|+\delta^2+\delta|x|$$

$$=\delta^2+(|x|+|y|)\delta=\varepsilon \longrightarrow \delta=\frac{-|x|-|y|+\sqrt{(|x|+|y|)^2-4\varepsilon}}{2}>0$$

ולכן: $|ab-xy|<\varepsilon$ כלומר: $a\cdot b\in B_\varepsilon(x\cdot y)$

מ.ש.ל

7) הוכיחו שאין סדרה חיובית המתכנסת ל-0 הכי מהר או הכי לאט. כלומר דייק, הראו שלכל $(a_n)$ סדרה של מספרים חיוביים כך ש: $a_n \to 0$, אז קיימת סדרה $(c_n)$, $(b_n)$ המקיימת: $|b_n| < |a_n| < |c_n|$

אבל $b_n \to 0$ וגם $c_n \to 0$

הוכחה:

אם $a_n \to 0$ אז: לכל $\varepsilon_n > 0$ קיים $N_n$ כך שלכל $n > N_n$ מתקיים $|a_n| < \varepsilon_n$. נבחר $b_n = 2a_n$.

תחילה, נשים לב ש: $|b_n| > |a_n|$ לכל $n$.

שנית, לפי אריתמטיקה של גבולות:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 2a_n = 2\lim_{n\to\infty} a_n = 2\cdot 0 = 0$$

באותו אופן ניקח $c_n = \frac{a_n}{2}$ ולכן $|c_n| < |a_n|$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2} = \frac{0}{2} = 0$$