דף נוסחאות אינפי 2 מורחב

זהויות טריגונומטריות

$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha\mp\beta}{2}\right)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$

$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$

$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$

$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta \pm \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta \mp \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1+\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\arcsin\alpha + \arccos\alpha = \frac{\pi}{2}$

נגזרות מידיות

$\sin' x = \cos x$

$\cos' x = -\sin x$

$\sinh' x = \cosh x$

$\cosh' x = \sinh x$

$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$arc\cot'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$

$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\cot'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x}$

$(e^x)' = e^x$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\log_a^x)' = \frac{1}{x\ln a}$

אינטגרלים מיידים

$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + c$

$\int \ln x dx = x\ln x - x + c$

$\int \sin x = -\cos x + c$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} = \tan x + c$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} = -\cot x + c$

$\int \tan x dx = -\ln(\cos x) + c$

$\int \cot x dx = \ln(\sin x) + c$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x + c$

$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$

$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c$

$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}dx = \ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right) + c$

$\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln(x-a) + C$

$\int \frac{A}{(x-a)^n}dx = A\cdot\frac{1}{1-n}(x-a)^{1-n} + C$

$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} = \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)$

סדרות

חשבונית $a_n = a_0 + n\cdot d, s_n = (a_0 + a_n)\cdot\frac{n+1}{2}$

הנדסית $a_n = a_0\cdot q^n, s_n = a_0\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$

הסדרה תמיד מתכנסת כאשר q<1

אינטגרלים לא אמיתיים

סוג ראשון-תחום הפונקציה עד ∞

סוג שני-a,b נקודות שבהן פונקציה לא חסומה

$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$

$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$

התכנסות בהחלט:

אם קיים $\int_a^\infty |f(x)|dx$ אז אומרים כי $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס בהחלט

משפט השוואה להתכנסות:

אם $0\le f(x)\le g(x)$ בקטע $[a,+\infty)$ אז $\int_a^\infty f(x)dx \le \int_a^\infty g(x)dx$

השוואות נפוצות:

אינטגרל	$\alpha > 1$	$\alpha = 1$	$\alpha < 1$
$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$	מתכנס	מתבדר	מתבדר
$\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^\alpha}$	מתבדר	מתבדר	מתכנס
$\int_a^\infty \frac{dx}{x\ln^\alpha(x)}$	מתכנס	מתבדר	מתבדר
$\int_a^\infty \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta(x)}$	מתכנס	מתבדר	מתבדר

משפט המנה(משפט השוואה גבולי):

נניח $0\le f(x), g(x)\ne 0$ וקיים גבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = L$ אז:

1. $L=0$: מהתכנסות $\int_a^\infty g(x)dx$ נובעת התכנסות $\int_a^\infty f(x)dx$
2. $L=\infty$: מהתכנסות $\int_a^\infty f(x)dx$ נובעת התכנסות $\int_a^\infty g(x)dx$
3. $0<L<\infty$: $\int_a^\infty f(x)dx, \int_a^\infty g(x)dx$ מכנסים ומתבדרים יחד

טורים אינסופיים

טור אינסופי: $\sum_{n=1}^\infty a_n$

סכום חלקי של טור: $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$

תנאי הכרחי אך לא מספיק להתכנסות טורים: אם $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס אז $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. כלומר, אם a_n באינסוף לא שואף ל- 0 אז הטור מתבדר.

טור מתכנס בהחלט: אם $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ מתכנס.

טור מתכנס על תנאי: מתכנס אך לא בהחלט.

משפט: אם טור מתכנס בהחלט אז הטור המקורי מתכנס.

שארית / זנב של טור

הגדרה: $r_m \triangleq \sum_{n=m+1}^\infty a_n$ (לכל m טבעי).

משפט: אם $\sum_{n=1}^\infty a_n = S$ אז $r_m = S - S_m$.

טורים חיוביים

הגדרה: טור המכיל רק איברים חיוביים: $a_n > 0$. כלומר, $\{S_n\}_{n=1}^\infty$ מונוטונית עולה.

קריטריון השוואה ראשון:

אם עבור n מספיק גדול מתקיים $a_n \le b_n$ אז:

1. אם $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתכנס - אז $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס.
2. אם $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתבדר - אז $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתבדר.

קריטריון השוואה שני (לטורים חיוביים):

אם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L$ אז:

1. עבור $0<L<\infty$: $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ו- $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחד
2. עבור $L=0$: אם $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס.
3. עבור $L=\infty$: אם $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^\infty b_n$ מתכנס.

קריטריון השוואה של קושי (לא רק לטורים חיוביים):

יהי $\sum^\infty a_n$ טור אינסופי חיובי. נסמן $C = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

1. אם $C < 1$ אז הטור מתכנס בהחלט.
2. אם $C > 1$ אז הטור מתבדר.
3. אם $C = 1$ אז לא ניתן לדעת ע"פ קריטריון זה.

משפט דה-למבר (לא רק לטורים חיוביים):

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור אינסופי חיובי. נסמן $D = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|$

1. אם $D < 1$ אז הטור מתכנס בהחלט.
2. אם $D > 1$ אז הטור מתבדר.
3. אם $D = 1$ אז לא ניתן לדעת ע"פ קריטריון זה.

הערות:

- אם לא קיים גבול D (אך הוא לא אינסוף) אז ניתן למצוא את הערך המקסימלי של הביטוי ואם הוא קטן מאחד אז הטור מתכנס.
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt[n]{a_n}$

מבחן אינטגרל להתכנסות טורים:

פונקציה מוגדרת בקטע חצי אינסופי.

אם הפונקציה מונוטונית יורדת בקטע זה אז מתקיים:

$$a_n = f_{(n)} : \int_1^{\infty} f_{(x)}dx = const_1 \Leftrightarrow \sum a_n = const_2$$

ז"א גם הטור מתכנס. יש לשים לב שהפונקציה והטור מתכנסים אך לא לאותו ערך!

<u>טורי חזקות</u>

טור חזקות סביב הנקודה x_0:

$$\sum_{n=0}^{n} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$$

סכום חלקי של טור חזקות:

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n$$

התכנסות של טור חזקות:

אם הסדרה $\{S_n(x)\}$ מתכנסת אז טור החזקות מתכנס.

הערה: בנקודה x=0 כל טור חזקות מתכנס, והאיבר a_0 יהיה סכומו..

רדיוס התכנסות:

משפט קושי – הדמר עבור טורי חזקות:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

משפט דה-למבר עבור טורי חזקות:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lim\frac{a_n}{a_{n+1}}$$

1. עבור x שמקיים $|x-x_0| < R$ הטור מתכנס בהחלט.
2. עבור x שמקיים $|x-x_0| > R$ הטור מתבדר.
3. אם $R = 0$ אז הטור מתכנס בהחלט עבור x=0 ומתבדר בכל נקודה אחרת.
4. אם $R = \infty$ אז הטור מתכנס בהחלט לכל x ממשי.
5. אם נבנה פונק' סכומים $S_{(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$ אז פונק' זו רציפה לכל x שברדיוס ההתכנסות.
6. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$ נכון לכל טור חזקות עם רדיוס התכנסות חיובי. לשני הטורים יש אותו רדיוס התכנסות.
7. עבור כל x שבתוך רדיוס ההתכנסות מתקיים: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \int_0^x t^n dt = \int_0^x S_{(t)}dt$
8. עבור כל x בתחום ההתכנסות מתקיים: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n \cdot x^n\right)' = S'_{(x)}$
9. אם נתון טור מסוג: $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n^n} \cdot x^{n^n}$ אז $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^n]{a_{n^n}}}$

<u>טורים עם סימנים מתחלפים</u>

הגדרה: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ כאשר $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי.

הערה: אם טור מחליף סימן אז גם הזנב שלו הוא טור מחליף סימן.

משפט לייבניץ (אך ורק לטורים עם סימנים מתחלפים):

נסמן: $S = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$

אם $\{a_n\}$ סדרה חיובית, מונוטונית יורדת ושואפת ל- 0 אז:

1. הטור S מתכנס.
2. $0 < S < a_1$.
3. $|r_m| < a_{m+1}$ ו- $(-1)^m \cdot r_m > 0$.

<u>טור טילור:</u>

אם פונקציה $f_{(x)}$ גזירה אינסוף פעמים וגם $\left|f^{(n)}_{(x)}\right| < M$ אז ניתן להציג הפונקציר כ:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

פולינום טור טילור:

$$P_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(X_0)}{n!}(X-X_0)^n$$

שארית טור טילור:

$$R_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n+1)}(C)}{(n+1)!}(X-X_0)^{n+1}$$

<u>טורים נפוצים:</u>

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot x^n = 1 - x + x^2 - x^3 \ldots \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 \ldots \quad |x| < 1$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \ldots \quad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \ldots \quad |x| < 1$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \ldots \quad |x| < \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \ldots \quad |x| < \infty$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \ldots \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} \quad |x| < 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots \quad |x| < 1$$

<u>טור פורייה</u>

פיתוח פונקציה $f(x)$ בתחום $-l \le x < l$ ומחזור $T = 2l$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)dx$$

פונקציה זוגית מורכבת מטור קוסינוסים בלבד

פונקציה אי זוגית מורכבת מטור סינוסים בלבד

הערה חשובה: אם $f(x)$ יש נק. אי רציפות סוג I אז בנקודה טור פורייה שווה לערך הממוצע של הגבולות

<u>נגזרות חלקיות</u>

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f_{(x_0+\Delta x, y_0)} - f_{(x_0, y_0)}}{\Delta x}$$

<u>דיפרנציאל שלם של מספר משתנים:</u>

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy$$

<u>חישוב ערך מקורב:</u>

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)$$

<u>גזירת פונקציה מורכבת-כלל שרשרת:</u>

$$F = f(x, y), x = x(t, s), y = y(t, s)$$

$$F'_t = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

נוסחאות נוספות

<u>אינטגרציה בחלקים</u>: $\int f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\cdot g(x)dx$.

<u>אינטגרל לא אמיתי</u> אם $f(x)$ רציפה עבור $a \le x$: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx$

$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ מתכנס אם ורק אם $\alpha > 1$. $\int_0^{1}\frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ מתכנס אם ורק אם $\alpha < 1$.

אם $f(x), g(x)$ רציפות עבור $a \le x$ ו- $0 \le f(x) \le g(x)$ עבור כל $a \le x$ אז:

(1) אם $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ מתבדר אז גם $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ מתבדר.

(2) אם $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ מתכנס אז גם $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ מתכנס.

אם $f(x), g(x)$ רציפות וחיוביות עבור $a \le x$ וקיים גבול חיובי סופי $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ אז לאינטגרלים $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ אותה התנהגות, כלומר, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ מתכנס אם ורק אם $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ מתכנס.

אם $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ מתכנס אז גם $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ מתכנס.

<u>משפט לייבניץ</u> אם $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ וקיים n_0 כך שלכל $n_0 < n$ מתקיים $a_n \ge a_{n+1} \ge 0$, אזי:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ מתכנס.
2. $\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n - \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}\cdot a_n\right| \le a_{N+1}$

נוסחאות בסיסיות

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$
$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

זהויות טריגונומטריות

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \qquad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]\,]$$
$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

לכל n טבעי $\sin(n\pi) = 0$, $\cos(n\pi) = (-1)^n$

נגזרות

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln a \qquad (x^n)' = nx^{n-1}$$
$$(\cos x)' = -\sin x \qquad (\sin x)' = \cos x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \qquad (tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (arctgx)' = \frac{1}{x^2+1}$$

אינטגרלים

$$\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} \qquad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ (n \neq -1)$$
$$\int e^{mx+n}dx = \frac{e^{mx+n}}{m} \qquad \int a^{mx+n}dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a}$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = tgx \qquad \int \sin x dx = -\cos x \qquad \int \cos x dx = \sin x$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} \qquad \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}$$

טורים כלליים

1. אם $\sum a_n$ מתכנס אז $\lim a_n = 0$.
2. אם a_n יורד ל- 0 מונוטונית, אז $\sum (-1)^n a_n$ מתכנס.
3. אם $\sum |a_n|$ מתכנס, אז גם $\sum a_n$ מתכנס.

טורים חיוביים ($\sum a_n$ טור עם איברים חיוביים)

1. $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ מתכנס אמ"ם $\alpha > 1$.
2. אם $a_n \le b_n$ לכל n, אזי:
   אם $\sum b_n$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס
   ואם $\sum a_n$ מתבדר, אז $\sum b_n$ מתבדר.
3. אם $\lim \frac{a_n}{b_n} = k > 0$ כאשר k ממשי כלשהו, אז $\sum a_n$ ו- $\sum b_n$ מתכנסים או מתבדרים יחדיו.
4. אם $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$, זה גורר ש- $a_n \le b_n$ החל מ- n מסוים
5. אם $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$, זה גורר ש- $a_n \ge b_n$ החל מ- n מסוים
6. אם $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, אז:
   $q < 1$ גורר $\sum a_n$ מתכנס, $q > 1$ גורר $\sum a_n$ מתבדר.
   $q = 1$ לא ניתן לקבוע עפ"י כלל זה.
7. אם $\lim \sqrt[n]{a_n} = q$, אז:
   $q < 1$ גורר $\sum a_n$ מתכנס, $q > 1$ גורר $\sum a_n$ מתבדר.
   $q = 1$ לא ניתן לקבוע עפ"י כלל זה.
8. $\int_a^{\infty} a_x dx$ מתכנס עבור $a > 0$ אמ"ם $\sum a_n$ מתכנס (a_n יורדת ל- 0).

טורי חזקות, טורי טיילור ומקלורן

1. טור חזקות סביב $x = a$ הוא טור מהצורה $\sum a_n (x-a)^n$.
2. רדיוס ההתכנסות של הטור: $R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$
3. טור טיילור סביב a :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)^1}{1!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n(x)$$

(2) אם $x=g(t)$, אז $\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$

(3) אינטגרציה בחלקים : $\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx$

פיתוח פונקציות לטור מקלורן

.1 $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\qquad -\infty<x<\infty$$

.2 $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1},\qquad -\infty<x<\infty$$

.3 $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\qquad -\infty<x<\infty$$

.4 $$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n,\qquad -1<x\le 1$$

.5 $$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\ldots+(-1)^n x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\qquad -1<x<1$$

.6 $$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots=$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n,\qquad -1<x<1$$

פיתוח פונקציות לטור פורייה

(1) תהיה פונקציה $f(x)$ רציפה או

בעלת מספר סופי של נקודות אי- רציפות מסוג הראשון ב- $[-\pi,\pi]$,

(2) מונוטונית למקוטעין , אז הטור $S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, כאשר

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx,\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx, n=1,2,3,\ldots$$

מתכנס ל- $f(x)$ בכל נקודת רציפות של $f(x)$ ב- $[-\pi,\pi]$,כלומר $S(x)=f(x)$,

$S(x_0)=\frac{1}{2}\left(f(x_0-0)+f(x_0+0)\right)$ בכל נקודת x_0 אי -רציפות של $f(x)$ ב- $[-\pi,\pi]$,

$S(\pi)=S(-\pi)=\frac{1}{2}\left(f(-\pi+0)+f(\pi-0)\right)$ בקצוות הקטע $[-\pi,\pi]$.

גבולות חשובים

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\log_a e \quad (a>0,\ a\neq 0)$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a>0)$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$

$\sim$ גודלי שקילות

$\alpha=\alpha(x)$

אופר סמן

$\sin\alpha\sim\alpha$

$tg\,\alpha\sim\alpha$

$1-\cos\alpha\sim\frac{\alpha^2}{2}$

$\arcsin\alpha\sim\alpha$

$\operatorname{arctg}\alpha\sim\alpha$

$\ln[1+\alpha]\sim\alpha$

$a^\alpha-1\sim\alpha\ln a \quad (a>0)$

$e^\alpha-1\sim\alpha$ אם $a=e$

$[1+\alpha]^P-1\sim P\alpha$

$(1+\alpha)^{1/n}-1\sim\alpha/n$ בפרט

15 . טבלת הנגזרות

$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$, **במקרה פרטי** $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$, **במקרה פרטי** $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$

$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a} = \dfrac{\log_a e}{x}$, **במקרה פרטי** $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

$$\left(\sin x\right)' = \cos x,\qquad \left(\cos x\right)' = -\sin x,\qquad \left(\tan x\right)' = \frac{1}{\cos^2 x},\qquad \left(\cot x\right)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ **כאשר** $|x|<1$

$$\left(\arctan x\right)' = \frac{1}{1+x^2},\qquad \left(\operatorname{arc\,cot} x\right)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(\sinh x\right)' = \cosh x\ ,\quad \left(\cosh x\right)' = \sinh x\ ,\quad \left(\tanh x\right)' = \frac{1}{\cosh^2 x}\ ,\quad \left(\coth x\right)' = -\frac{1}{\sinh^2 x}$$

16 . טבלת האינטגרלים

$\displaystyle\int\frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $\displaystyle\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ כאשר $\alpha \neq -1$

$\displaystyle\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C,\quad (a>0)$, **במקרה פרטי** $\displaystyle\int e^{x}dx = e^{x} + C$

$$\int \cos x dx = \sin x + C\quad,\quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C\quad,\quad \int\frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C\quad,\quad \int\frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C,\qquad (a\neq 0)$$

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\quad (a\neq 0)\ ,\quad \int\frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\quad (a>0)\ ,\quad \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C,\quad (a\neq 0)$$

$$\int \sinh x dx = \cosh x + C\quad,\quad \int \cosh x dx = \sinh x + C$$

$$\int\frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x + C\quad,\quad \int\frac{dx}{\sinh^2 x} = -\coth x + C$$

17 . שיטות האינטגרציה

(1) אם $F(x)$ **פונקציה קדומה של** $f(x)$ **, אז** $\displaystyle\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

(2) אם $x = g(t)$, **אז** $\displaystyle\int f(x)dx = \int f(t)g'(t)dt$

(3) אינטגרציה בחלקים : $\displaystyle\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot u'(x)dx$

כללי הגזירה

$(c)' = 0$, c - קבוע

$(cu)' = c\,u'$, c - קבוע , $u(x)$ - פונקציה של x

$(u \pm v)' = u' \pm v'$, $u(x), v(x)$ - פונקציות של x

$(u \cdot v)' = u'v + v'u$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \quad v \neq 0$

טבלת הנגזרות

$(x^n)' = nx^{n-1}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(x > 0)$

$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (|x| < 1)$, $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (|x| < 1)$

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

טבלת האינטגרלים

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$, $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

$\int e^x dx = e^x + C$, $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0)$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$, $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$

$\int \sin x dx = -\cos x + C$, $\int \cos x dx = \sin x + C$

$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0)$

$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$, $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad (a \neq 0)$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C, \quad (a \neq 0)$ $\quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad (a > 0)$

שיטות האינטגרציה

(1) אם $F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$ אז, $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ ,\ \ \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ ,\ \ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\tan\alpha\pm\tan\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\qquad \cot\alpha\pm\cot\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$$

	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$
$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0
$\cot\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	∞

13. הגבולות הידועים

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x}=e^a$, $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=e^a$, a - קבוע.

14. כללי הגזירה (c - קבוע ו- $u(x),v(x)$ - פונקציות של x)

$$(c)'=0$$

$$(x)'=1$$

$$(cu)'=c\,u'$$

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

$$(u\cdot v)'=u'v+v'u$$

$v\neq 0$, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$, במקרה פרטי $\left(\frac{c}{v}\right)'=\frac{-cv'}{v^2}$

נוסחאות הכפל ופרוק לגורמים

1. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 2. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ 3. $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

4. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 5. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

6. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ כאשר $a\neq 0$, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

7. נוסחאות וייטה: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$, כאשר x_1,x_2 הם שורשים של המשוואה $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

8. סידרה חשבונית $a_n=a_1+(n-1)d$, $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=\dfrac{[2a_1+(n-1)d]n}{2}$

9. סידרה הנדסית $a_n=a_1q^{n-1}$, $S_n=\dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1}$

10. פונקציה מעריכית . $y=a^x$ $(a>0,\quad a\neq 1)$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x},\quad (ab)^x=a^x\cdot b^x,\quad (a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1\cdot x_2},\quad a^{x_1-x_2}=\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}},\quad a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}$$

11. פונקציה לוגריתמית $y=\log_a x$ $(x>0,\ a>0,\quad a\neq 1)$

$$\log_a(x_1\cdot x_2)=\log_a|x_1|+\log_a|x_2|,\ \log_a\frac{x_1}{x_2}=\log_a|x_1|-\log_a|x_2|\ ,\ \log_a x^k=k\log_a|x|$$

$$a^{\log_a M}=M\quad,\ \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}\qquad a\neq 1,\ c\neq 1,\ a>0,\ b>0,\ c>0$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}\qquad a\neq 1,\ b\neq 1,\ a>0,\ b>0$$

12. זהויות טריגונומטריות

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\qquad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha},\quad 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\qquad 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\ ,\qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta},\qquad \cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\alpha\pm\cot\beta}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\qquad \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2},\qquad 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\qquad \cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\qquad \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

נוסחאות הכפל ופרוק לגורמים

1. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 2. $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ 3. $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

4. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ 5. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

6. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ כאשר $a\neq 0$, $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

7. **נוסחאות וייטה:** $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$, **כאשר** x_1,x_2 **הם שורשים של המשוואה** $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

8. **סידרה חשבונית** $a_n=a_1+(n-1)d$, $S_n=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}=\dfrac{[2a_1+(n-1)d]n}{2}$

9. **סידרה הנדסית** $a_n=a_1q^{n-1}$, $S_n=\dfrac{a_1(q^n-1)}{q-1}$

10. **פונקציה מערכית** $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$

$$a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2},\qquad a^{x_1-x_2}=\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}},\ (a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1\cdot x_2}\ ,(ab)^x=a^x\cdot b^x\ ,\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}$$

11. **פונקציה לוגריתמית** $y=\log_a x$ $(x>0,\ a>0,\ a\neq 1)$

$$\log_a(x_1\cdot x_2)=\log_a|x_1|+\log_a|x_2|,\ \log_a\frac{x_1}{x_2}=\log_a|x_1|-\log_a|x_2|\ ,\ \log_a x^k=k\log_a|x|$$

$$a^{\log_a M}=M\quad,\ \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}\qquad a\neq 1,\ c\neq 1,\ a>0,\ b>0,\ c>0$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}\qquad a\neq 1,\ b\neq 1,\ a>0,\ b>0$$

12. **זהויות טריגונומטריות**

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\qquad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha},\quad 1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha},\qquad 1+\cot^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta},\qquad \cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp 1}{\cot\alpha\pm\cot\beta}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\beta,\qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\qquad \tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2},\qquad 1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\qquad \cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},\qquad \tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$