בס"ד

אלגברה ליניארית 2. פתרונות.

מספר הקורס: 2-7028210-1,2,3 • תש"ף סמסטר א' מועד ב', 27.2.20 מרצים ומתרגלים: יובל פליקר, יונה צרניאבסקי, זאב סמירנוף, ענבר סדון, אוהד מדמון, שי לוי, רן סגל, יבגני פורמן.

חלק 1. חישובים והוכחות קלות יחסית (80 נקודות)

שאלה 1: (16 נקודות) נתון: $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y)=(x-y,7x-3y)$.

מצאו את $[T]_B^B$ כאשר $B=\big((1,2),(2,3)\big)$. בדקו היטב את התשובה!

פתרון. $[T]_B^B=[I]_B^E[T]_E^E[I]_E^B$ כאשר $E=((1,0),(0,1))$ בסיס סטנדרטי ל- $\mathbb{R}^2$.

כידוע, $[I]_B^E=\left([I]_E^B\right)^{-1}$. מהנתון מיידית נובע: $[I]_E^B=\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}$, $[T]_E^E=\begin{bmatrix}1&-1\\7&-3\end{bmatrix}$.

לכן:

$$[T]_B^B=[I]_B^E[T]_E^E[I]_E^B=\left([I]_E^B\right)^{-1}[T]_E^E[I]_E^B=\begin{bmatrix}-3&2\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\7&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&13\\-3&-7\end{bmatrix}$$

תשובה: $[T]_B^B=\begin{bmatrix}5&13\\-3&-7\end{bmatrix}$.

בדיקה. אם התשובה נכונה, צריך להתקיים השוויון הבא: $[T]_B^B\cdot[\vec v]_B=\left[T(\vec v)\right]_B$

עבור כל $\vec v\in\mathbb{R}^2$. מספיק לבדוק את השוויון הזה עבור שני וקטורי הבסיס B.

$(1,2)=1\cdot(1,2)+0\cdot(2,3)$, לכן $\left[(1,2)\right]_B=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

$$[T]_B^B\left[(1,2)\right]_B=\begin{bmatrix}5&13\\-3&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$$

$T\big((1,2)\big)=(1-2,7\cdot1-3\cdot2)=(-1,1)=5\cdot(1,2)-3\cdot(2,3)$, ז. א. $\left[T(1,2)\right]_B=\begin{bmatrix}5\\-3\end{bmatrix}$.

קיבלנו: $[T]_B^B\cdot\left[(1,2)\right]_B=\left[T\big((1,2)\big)\right]_B$

בדרך דומה יש לוודא שמתקיים השוויון $[T]_B^B\cdot\left[(2,3)\right]_B=\left[T\big((2,3)\big)\right]_B$.

$(2,3)=0\cdot(1,2)+1\cdot(2,3)$, לכן $\left[(2,3)\right]_B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$.

$$[T]_B^B\left[(2,3)\right]_B=\begin{bmatrix}5&13\\-3&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13\\-7\end{bmatrix}.$$

$T\big((2,3)\big)=(2-3,7\cdot2-3\cdot3)=(-1,5)=13\cdot(1,2)-7\cdot(2,3)$, ז. א. $\left[T(2,3)\right]_B=\begin{bmatrix}13\\-7\end{bmatrix}$.

קיבלנו: $[T]_B^B\cdot\left[(2,3)\right]_B=\left[T\big((2,3)\big)\right]_B$.

שאלה 2: (16 נקודות) נתון: $S:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$,
$S(a,b,c,d)=(8a-2b+2c-8d\ ,-7a+b+8d\ ,-6a+2c+6d\ ,a-2b+3c-d)$.
האם המספר 8 הוא ערך עצמי של S?   נמקו היטב ובדקו היטב את התשובה!

פתרון. נסתמך על המשפט הבא: אם V מרחב וקטורי ממימד סופי, $S:V\to V$ העתקה לינארית , B בסיס ל- V אז: λ הוא ערך עצמי של T אם ורק אם $\det\left([S]_B^B-\lambda I_n\right)=0$ (I_n היא מטריצת היחידה). יהי E בסיס סטנדרטי של $\mathbb{R}^4$:
$E=((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$.

$[S]_E^E=\begin{bmatrix}8&-2&2&-8\\-7&1&0&8\\-6&0&2&6\\1&-2&3&-1\end{bmatrix}$. נחשב $\det\left([S]_E^E-8I_4\right)$.

$$\det\left([S]_E^E-8I_4\right)=\det\begin{bmatrix}0&-2&2&-8\\-7&-7&0&8\\-6&0&-6&6\\1&-2&3&-9\end{bmatrix}\underset{C_2\leftarrow C_2+C_3}{=}\det\begin{bmatrix}0&0&2&-8\\-7&-7&0&8\\-6&-6&-6&6\\1&1&3&-9\end{bmatrix}=0$$

הדטרמיננטה האחרונה שווה לאפס כי שתי העמודות הראשונות שלה זהות.
קיבלנו: $\det\left([S]_E^E-8I_4\right)=0$. על פי המשפט שהבאנו לעיל מזה נובע שהמספר 8 הוא ערך עצמי של S.

שאלה 3: (16 נקודות) תהי $A\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ אנטי-סימטרית (ז.א. $A^t=-A$).
הוכיחו שהערך העצמי הממשי היחיד של A הוא אפס.   נמקו היטב!

פתרון. מהנתון נובע ש- $A=\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}$ עבור $a,b,c\in\mathbb{R}$ מסוימים.

$$p_A(x)=\det(xI-A)=\det\begin{bmatrix}x&-a&-b\\a&x&-c\\b&c&x\end{bmatrix}=x\left(x^2+c^2\right)+a(ax+bc)-b(ac-bx)=$$
$$=x\left(x^2+a^2+b^2+c^2\right)$$

רואים מכאן מיד שאפס הוא הערך העצמי הממשי היחיד של A.
אפס הוא ערך עצמי של A כי $p_A(0)=0$. למשוואה $x^2+a^2+b^2+c^2=0$ אין פתרונות ממשיים כאשר $a^2+b^2+c^2>0$ ולכן במקרה הזה אין ערכים עצמיים ממשיים נוספים, ואם $a^2+b^2+c^2=0$ אז $p_A(x)=x^3$ ואפס הוא הערך העצמי היחיד של A.

שאלה 4: (20 נקודות) נתון: $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,
$L(x,y,z)=(4x+y+z\,,\,x+4y+z\,,\,x+y+4z)$. מצאו בסיס אורתונורמלי ל-$\mathbb{R}^3$ המורכב מווקטורים עצמיים של L. (ערכים עצמיים: 6 נקודות. וקטורים עצמיים: 6 נקודות. ארתוגונליזציה ונירמול: 8 נקודות.) בדקו היטב את התשובה!

פתרון. יהי E בסיס סטנדרטי של $\mathbb{R}^3$: $E=((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$.

$$[L]_E^E=\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}.$$

$$\det\left([L]_E^E-\lambda I_3\right)=\det\begin{bmatrix}4-\lambda&1&1\\1&4-\lambda&1\\1&1&4-\lambda\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}6-\lambda&1&1\\6-\lambda&4-\lambda&1\\6-\lambda&1&4-\lambda\end{bmatrix}=$$

$$=(6-\lambda)\det\begin{bmatrix}1&1&1\\1&4-\lambda&1\\1&1&4-\lambda\end{bmatrix}=(6-\lambda)\det\begin{bmatrix}1&1&1\\0&3-\lambda&0\\0&0&3-\lambda\end{bmatrix}=(6-\lambda)(3-\lambda)^2$$

מכאן $\det\left([L]_E^E-\lambda I_3\right)=0$ אם ורק אם $\lambda=3$ או $\lambda=6$. ז.א. הערכים העצמיים של L הם 6 ו-3. נמצא וקטורים עצמיים של L השייכים לערך עצמי 6:

$$\left([L]_E^E-6I_3\right)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}4-6&1&1\\1&4-6&1\\1&1&4-6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y+z=0\\x+y-2z=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z$$

לדוגמה, $(1,1,1)$ הוא וקטור עצמי של L השייכים לערך עצמי 6.
נמצא וקטורים עצמיים של L השייכים לערך עצמי 3:

$$\left([L]_E^E-3I_3\right)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}4-3&1&1\\1&4-3&1\\1&1&4-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow x+y+z=0\Leftrightarrow x=-y-z$$

הווקטורים העצמיים של L השייכים לערך עצמי 3 הם וקטורים שונים מאפס מהצורה $(-y-z,y,z)$. נבחר בקבוצה הזאת שני וקטורים בלתי תלויים לינארית: $(-1,1,0)$ (הוא מתקבל מהצבה $y=1,z=0$ ב-$(-y-z,y,z)$) ו-$(-1,0,1)$ (הוא מתקבל מהצבה $y=0,z=1$). וקטורים $(1,1,1)$, $(-1,1,0)$, $(-1,0,1)$ מהווים בסיס ל-$\mathbb{R}^3$ והם וקטורים עצמיים של L. נשאר לישר זוויות ולנרמל. נעיר ש-$(1,1,1)$ מאונך לכל וקטור מהמישור $(-y-z,y,z)$:

$$\langle(1,1,1),(-y-z,y,z)\rangle=1\cdot(-y-z)+1\cdot y+1\cdot z=-y-z+y+z=0.$$

נסמן: $\vec{f}_2=(-1,0,1)$, $\vec{f}_1=(-1,1,0)$. כידוע, הווקטורים $\vec{u}_1=\vec{f}_1\,,\vec{u}_2=\vec{f}_2-\frac{\langle\vec{f}_2,\vec{u}_1\rangle}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1$

הם בעלי תכונות הבאות:

$\langle\vec{u}_1,\vec{u}_2\rangle=0$, $Span(\vec{u}_1,\vec{u}_2)=Span(\vec{f}_1,\vec{f}_2)$, $Span(\vec{u}_1)=Span(\vec{f}_1)$.

ז.א. $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ מאונכים זה לזה והם וקטורים עצמיים של L כי הם נמצאים במישור $Span(\vec{f}_1,\vec{f}_2)=\{(-y-z,y,z)\,|\,y,z\in\mathbb{R}\}$. נמצא את $\vec{u}_1,\vec{u}_2$:

$$\vec{u}_1=\vec{f}_1=(-1,1,0),$$
$$\vec{u}_2=\vec{f}_2-\frac{\langle\vec{f}_2,\vec{u}_1\rangle}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1=(-1,0,1)-\frac{\langle(-1,0,1),(-1,1,0)\rangle}{\|(-1,1,0)\|^2}(-1,1,0)=(-1,0,1)-\frac{1}{2}(-1,1,0)=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$$

מכאן: $(1,1,1)$, $(-1,1,0)$, $(1,1,-2)$ הוא בסיס אורתוגונלי ל-$\mathbb{R}^3$ המורכב מווקטורים עצמיים של L. ננרמל ונקבל תשובה סופית:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ ,\ \left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),\ \left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right).$$

כמובן התשובה הזאת היא לא יחידה, יש אין סוף בסיסים אורתונורמליים ל-$\mathbb{R}^3$ המורכבים מווקטורים עצמיים של L.

שאלה 5: (12 נקודות) יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית כך ש-$\langle T(\vec{u}),\vec{v}\rangle=0$ עבור כל $\vec{u},\vec{v}\in V$.

הוכיחו ש-$T=0$. נמקו היטב!

פתרון. ניקח $\vec{u}\in V$ כלשהו וניקח $\vec{v}=T(\vec{u})$.

על פי הנתון נקבל: $0=\langle T(\vec{u}),\vec{v}\rangle=\langle T(\vec{u}),T(\vec{u})\rangle$. מהשויון $0=\langle T(\vec{u}),T(\vec{u})\rangle$ על פי אחת האקסיאומות של מכפלה פנימית נובע ש-$T(\vec{u})=\vec{0}$.

קיבלנו ש-$T(\vec{u})=\vec{0}$ עבור כל $\vec{u}\in V$, ז.א. T היא העתקת האפס, $T=0$.

חלק 2. בעיות חשיבה (40 נקודות)

שאלה 6: (10 נקודות) נתון: $Q:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית, $\dim\ker(Q)=1$,
המספר $\sqrt{2}$ הוא ערך עצמי של Q, $\vec{0}\neq\vec{w}\in\operatorname{Im}(Q)$, $\vec{0}\neq\vec{u}\in\ker(Q)$.
הוכיחו שהווקטורים $\vec{u},\vec{w}$ בלתי תלויים לינארית. נמקו היטב!

פתרון. נתון שהמספר $\sqrt{2}$ הוא ערך עצמי של Q. לכן קיים $\vec{0}\neq\vec{v}\in\mathbb{R}^2$
כך ש- $Q(\vec{v})=\sqrt{2}\cdot\vec{v}$. מכאן $\vec{v}\in\operatorname{Im}(Q)$ כי $\vec{v}=\frac{1}{\sqrt{2}}Q(\vec{v})=Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{v}\right)$ כי Q היא
העתקה לינארית. מצד שני: $2=\dim\mathbb{R}^2=\dim\ker(Q)+\dim\operatorname{Im}(Q)=1+\dim\operatorname{Im}(Q)$
ולכן $1=\dim\operatorname{Im}(Q)$. נסכם את מה שיש לנו בינתיים: $\vec{0}\neq\vec{v}$ הוא וקטור עצמי של
Q השייך לערך עצמי $\sqrt{2}$, $\vec{v}\in\operatorname{Im}(Q)$, $1=\dim\operatorname{Im}(Q)$. מכל זה נובע ש-
$\operatorname{Im}(Q)=Span(\vec{v})$. מכאן כל וקטור שונה מאפס מהתמונה של Q הוא וקטור עצמי
של Q השייך לערך עצמי $\sqrt{2}$. בפרט, הווקטור הנתון $\vec{0}\neq\vec{w}\in\operatorname{Im}(Q)$ הוא וקטור
עצמי של Q השייך לערך עצמי $\sqrt{2}$. הווקטור הנתון $\vec{0}\neq\vec{u}\in\ker(Q)$ הוא וקטור
עצמי של Q השייך לערך עצמי 0: $\vec{u}\in\ker(Q)\Rightarrow Q(\vec{u})=\vec{0}=0\cdot\vec{u}$. קיבלנו
שהווקטורים $\vec{u},\vec{w}$ הם וקטורים עצמיים של Q השייכים לערכים עצמיים שונים,
ולכן הם בלתי תלויים לינארית. הנה הניסוח של המשפט: תהי $T:V\to V$ העתקה
לינארית, יהיו $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k\in V$ וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים
$\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k$ בהתאמה, ז.א. $T(\vec{v}_j)=\lambda_j\vec{v}_j$, $1\le j\le k$, וגם נתון ש- $\lambda_i\neq\lambda_j$, $1\le i<j\le k$.
אזי הווקטורים $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k$ בלתי תלויים לינארית.

<u>שאלה 7</u>:(10 נקודות) נתון: $B=\begin{bmatrix} a & 1 \\ c & 3 \end{bmatrix}$, $a,c\in\mathbb{Z}$, כך שהפולינום האופייני של B הוא $(x-1)^2$, ז.א. $\det(xI_2-B)=(x-1)^2$. מצאו את המספרים a,c (4 נקודות) והוכיחו על פי הגדרת דמיון מטריצות ש-B דומה למטריצה $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

<u>פתרון.</u> $\det(xI_2-B)=\det\begin{bmatrix} x-a & -1 \\ -c & x-3 \end{bmatrix}=x^2-(a+3)x+3a-c$. מצד שני נתון: $\det(xI_2-B)=(x-1)^2=x^2-2x+1$. נשווה מקדמים: $\begin{cases} a+3=2 \\ 3a-c=1 \end{cases}$. מכאן $a=-1, c=-4$.

כעת אנחנו יודעים ש-$B=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$. צריך להוכיח שקיימת מטריצה הפיכה P 2×2 כך ש-$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P^{-1}$. השויון האחרון שקול לשויון $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}P=P\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ בתנאי ש-P הפיכה. נסמן $P=\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix}$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix} -q+s & -r+t \\ -4q+3s & -4r+3t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q & q+r \\ s & s+t \end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} -q+s=q \\ -4q+3s=s \\ -r+t=q+r \\ -4r+3t=s+t \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} s=2q \\ 2r=t-q \end{cases}$$

עלינו לבנות דוגמה של מטריצה הפיכה $P=\begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix}$ כך שיתקיימו התנאים $\begin{cases} s=2q \\ 2r=t-q \end{cases}$. זה לא קשה: לדוגמה, נציב $q=1, t=3$. אז $r=(t-q)/2=1$, $s=2q=2$.

קיבלנו מטריצה $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. ברור שהיא הפיכה, $P^{-1}=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. נבדוק שאכן מתקיים השויון $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}P^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

<u>שאלה 8</u>: (10 נקודות) תהי A מטריצה 4×4 עם רכיבים ממשיים כך ש-$Trace(A)=rank(A)=1$. הוכיחו ש-A ניתנת ללכסון. נמקו היטב!

<u>פתרון.</u> היות ו-A היא 4×4 ו-$rank(A)=1$, המימד של מרחב הפתרונות של מערכת לינארית הומוגנית $Ax=0$ הוא 3. זה למדנו באלגברה לינארית 1, זה גם נובע ממשפט המימדים שלמדנו בקורס הנוכחי. כל פתרון לא טריביאלי של המערכת $Ax=0$ הוא וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי 0: $Ax=0=0\cdot x$. קיבלנו שהריבוי הגאומטרי של ערך עצמי 0 הוא 3. ולכן הריבוי האלגברי של ערך עצמי 0 הוא לפחות 3. לכן $p_A(x)=x^3(x-\omega)=x^4-\omega x^3$ עבור ω מסוים.
נזכיר ש-$p_A(x)=x^n-(Trace(A))x^{n-1}+\cdots$ עבור מטריצה A $n\times n$. לכן $\omega=Trace(A)=1$ כי נתון ש-$Trace(A)=1$. לכן $p_A(x)=x^3(x-1)$. ל-A יש ערך עצמי 0 עם ריבוי אלגברי וגאומטרי 3 וערך עצמי 1 עם ריבוי (אלגברי וגאומטרי) 1. לכן A ניתנת ללכסון.

<u>שאלה 9</u>: (10 נקודות) כרגיל, $M_{2\times 2}(\mathbb{R})=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}\middle| a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$ מרחב מטריצות עם פעולות חיבור וכפל בסקלר טבעיות.
נגדיר: $U=\{A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid Trace(A)=0\}$.
האם קיימת העתקה לינארית $T:M_{2\times 2}(\mathbb{R})\to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ המקיימת את התנאים הבאים: $\ker(T)=U$ וגם $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{bmatrix}\in \operatorname{Im}(T)$?
אם כן, הביאו דוגמה מפורשת של העתקה כזאת.
אם לא, הוכיחו שהעתקה כזאת אינה קיימת.

<u>פתרון.</u> העתקה כזאת קיימת. לדוגמה, נגדיר:
$T(A)=\begin{bmatrix} Trace(A) & 2\cdot Trace(A) \\ 3\cdot Trace(A) & 4\cdot Trace(A)\end{bmatrix}$ עבור $A\in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
העתקה T לינארית, זה נובע בקלות מתכונות מיידיות של עקבה:
$Trace(A+B)=Trace(A)+Trace(B)$, $Trace(\alpha A)=\alpha\cdot Trace(A)$ לכל מטריצות A,B $n\times n$ ולכל סקלר α.
ברור מההגדרה ש-$T(A)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}$ אם ורק אם $Trace(A)=0$. לכן $\ker(T)=U$. קל לראות ש-$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{bmatrix}\in\operatorname{Im}(T)$ כי המטריצה $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{bmatrix}$ היא תמונה של כל מטריצה עם עקבה 1. לדוגמה ניקח $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0\end{bmatrix}$. רואים ש-$Trace(A)=1$. לכן $T(A)=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4\end{bmatrix}$.

בס"ד

הגדרות, משפטים, נוסחאות. אלגברה לינארית 2

הגדרת העתקה לינארית. יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל שדה F. העתקה $T:V\to W$ נקראת לינארית אם (1) $T(\vec{v}_1+\vec{v}_2)=T(\vec{v}_1)+T(\vec{v}_2)$ לכל $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$ וגם
(2) $T(\alpha\vec{v})=\alpha T(\vec{v})$ לכל $\vec{v}\in V,\alpha\in F$.

הגדרת גרעין ותמונה של העתקה לינארית $T:V\to W$.

גרעין: $\ker T=\{\vec{v}\in V\mid T(\vec{v})=\vec{0}\}$. תמונה: $\operatorname{Im}T=\{\vec{w}\in W\mid \exists\vec{v}\in V:\vec{w}=T(\vec{v})\}$.

הגדרת מטריצה מייצגת. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית, $B=(\vec{b}_1,...,\vec{b}_n)$ בסיס של V, $C=(\vec{c}_1,...,\vec{c}_k)$ בסיס של W. לכל וקטור $\vec{w}\in W$ קיים יצוג יחיד כצירוף לינארי של וקטורי בסיס C: $\vec{w}=\alpha_1\vec{c}_1+\alpha_2\vec{c}_2+...+\alpha_k\vec{c}_k$. סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k\in F$ נקראים קואורדינטות של וקטור $\vec{w}$ בבסיס C. נסמן $[\vec{w}]_C=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_k\end{bmatrix}$. אז מטריצה המייצגת של העתקה T בבסיסים B ו- C היא בנויה מעמודות $\left[T(\vec{b}_i)\right]_C$ $(i=1,2,...,n)$: $[T]_C^B=\left[\left[T(\vec{b}_1)\right]_C \mid \left[T(\vec{b}_2)\right]_C \mid \cdots \mid \left[T(\vec{b}_n)\right]_C\right]$.

התכונה העיקרית של מטריצה מייצגת. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית, יהי $B=(\vec{b}_1,...,\vec{b}_n)$ בסיס של V, יהי $C=(\vec{c}_1,...,\vec{c}_k)$ בסיס של W. אזי לכל וקטור $\vec{v}\in V$ מתקיים: $[T]_C^B\cdot[\vec{v}]_B=\left[T(\vec{v})\right]_C$.

מטריצת מעבר בין שני בסיסים באותו מרחב: $B=(\vec{b}_1,...,\vec{b}_n)$ ו $C=(\vec{c}_1,...,\vec{c}_n)$ שני בסיסים של V,

$I:V\to V$ העתקת הזהות, ז.א. $I(\vec{v})=\vec{v}$ לכל $\vec{v}\in V$.

מטריצת מעבר היא $[I]_C^B=\left[[\vec{b}_1]_C \mid [\vec{b}_2]_C \mid \cdots \mid [\vec{b}_n]_C\right]$. $[I]_C^B[\vec{v}]_B=[\vec{v}]_C$ לכל $\vec{v}\in V$.

תכונות נבחרות של העתקות לינאריות

1. תהי $T:V\to W$ העתקה המקיימת את התכונה הבאה:
$T(\vec{v}_1+\vec{v}_2)=T(\vec{v}_1)+T(\vec{v}_2)$ לכל $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$. אזי $T(\vec{0})=\vec{0}$.

2. העתקה $T:V\to W$ לינארית אם ורק אם
$T(\vec{v}_1+\alpha\vec{v}_2)=T(\vec{v}_1)+\alpha T(\vec{v}_2)$ לכל $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$, $\alpha\in F$.

בתכונות הבאות: V,W מרחבים וקטוריים ממימד סופי, $T:V\to W$ העתקה לינארית.

3. $\ker T$ מהווה תת-מרחב ב- V.

4. $\operatorname{Im}T$ מהווה תת-מרחב ב- W.

5. T חד-חד-ערכית אם ורק אם $\ker T=\{\vec{0}\}$.

6. אם $V=Span(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n)$ אז $\operatorname{Im}T=Span\left(T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n)\right)$.

7. אם $T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n)$ בת"ל ב- W אז $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ בת"ל ב- V.

8. $\dim V=\dim\ker T+\dim\operatorname{Im}T$.

9. נניח ש- $\dim V=\dim W$. אזי T חד-חד-ערכית אם ורק אם T "על".

10. אם $\dim V < \dim W$ אזי T לא "על".
11. אם $\dim V > \dim W$ אזי T לא חד-חד-ערכית.
12. יהי $B = \left(\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n\right)$ בסיס של V, יהיו $\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n \in W$. אזי קיימת העתקה לינארית $T: V \to W$ יחידה כך ש- $T\left(\vec{b}_i\right) = \vec{w}_i$ לכל i, $1 \le i \le n$. (כלומר, העתקה לינארית מוגדרת באופן חד-משמעי על ידי קביעת תמונות של וקטורי בסיס מסוים)

<u>הגדרת הרכבת העתקות.</u> יהיו V, W, U מרחבים וקטוריים מעל שדה F, תהיינה $T: V \to W$, $S: W \to U$ שתי העתקות. העתקה $S \circ T: V \to U$ מוגדרת כך: $\left(S \circ T\right)\left(\vec{v}\right) = S\left(T\left(\vec{v}\right)\right)$ לכל $\vec{v} \in V$.

20. יהיו V, W, U מרחבים וקטוריים מעל שדה F, תהיינה $T: V \to W$, $S: W \to U$ שתי העתקות לינאריות. אזי העתקה $S \circ T: V \to U$ הינה העתקה לינארית.
21. יהיו V, W, U מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל שדה F, תהיינה $T: V \to W$, $S: W \to U$ שתי העתקות לינאריות, יהי B בסיס של V, יהי C בסיס של W, יהי D בסיס של U. אזי $\left[S \circ T\right]_D^B = \left[S\right]_D^C \cdot \left[T\right]_C^B$.

<u>הגדרת דמיון מטריצות.</u> מטריצות X, Y $n \times n$ נקראות דומות אם קיימת Z הפיכה כך ש- $X = ZYZ^{-1}$.
22. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה F, תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית, יהיו B, C בסיסים של V. אזי מטריצות $\left[T\right]_B^B$, $\left[T\right]_C^C$ דומות, $\left[T\right]_B^B = \left(\left[I\right]_C^B\right)^{-1} \left[T\right]_C^C \left[I\right]_C^B$.

<u>**ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצה:**</u> תהי A מטריצה ריבועית $n \times n$.
מספר λ נקרא ערך עצמי של A אם קיים וקטור-עמודה $\vec{v}$ עם n רכיבים השונה מווקטור האפס כך ש $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. במקרה הזה $\vec{v}$ נקרא וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ.
ניסוח אחר: וקטור-עמודה $\vec{v}$ עם n רכיבים השונה מווקטור האפס נקרא וקטור עצמי של A אם קיים מספר λ כך ש $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. במילים אחרות: וקטור-עמודה $\vec{v}$ עם n רכיבים השונה מווקטור האפס נקרא וקטור עצמי של A אם הווקטורים $\vec{v}$, $A\vec{v}$ תלויים ליניארית.

<u>**משפט:**</u> מספר λ הוא ערך עצמי של A אם ורק אם $\det\left(A - \lambda I\right) = 0$. (I היא מטריצת היחידה)
בפרט, מטריצה ריבועית A בלתי הפיכה אם ורק אם אפס הוא ערך עצמי שלה.
אם λ הוא ערך עצמי של A, אז הווקטורים העצמיים של A השייכים לערך עצמי λ הם פתרונות לא טריביאליים של מערכת משוואות ליניאריות הומוגניות $\left(A - \lambda I\right) \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

<u>**משפט:**</u> אם מספר λ הוא ערך עצמי של A, אז λ^k הוא ערך עצמי של A^k לכל $1 \le k \in \mathbb{N}$.
<u>**הגדרה:**</u> אומרים שמטריצה A $n \times n$ ניתנת ללכסון (לכסינה) אם קיימות מטריצה אלכסונית D $n \times n$ ומטריצה הפיכה P $n \times n$ כך ש- $A = PDP^{-1}$.
<u>**משפט:**</u> מטריצה A $n \times n$ ניתנת ללכסון אם ורק אם ל-A קיימים n וקטורים עצמיים בת"ל.
<u>**משפט:**</u> מטריצה A $n \times n$ לכסינה מעל $\mathbb{C}$ אם ורק אם עבור כל ערך עצמי שלה הריבוי האלגברי והריבוי הגאומטרי שווים.
הגדרת פולינום אופייני של מטריצה A $n \times n$: $p_A\left(x\right) = \det\left(xI_n - A\right)$. (I_n היא מטריצת היחידה).
הגדרת העקבה: העקבה של מטריצה ריבועית A, $Trace(A)$, היא סכום של רכיבי אלכסון הראשי של A.

<u>**הערה:**</u> $p_A\left(x\right) = x^n - \left(Trace\left(A\right)\right)x^{n-1} + \cdots + \left(-1\right)^n \cdot \det\left(A\right)$ עבור כל מטריצה A $n \times n$.

<u>**משפט:**</u> אם מטריצות A, B $n \times n$ דומות, אז $p_A\left(x\right) = p_B\left(x\right)$. מזה נובע שלמטריצות דומות יש אותה דטרמיננטה ואותה עקבה.

הגדרה. וקטור $\vec{v} \neq \vec{0}$ נקרא וקטור עצמי של העתקה לינארית T אם קיים סקלר λ (שנקרא "ערך עצמי") כך ש $T\vec{v} = \lambda\vec{v}$. אם V מרחב וקטורי ממימד סופי, $T: V \to V$ העתקה לינארית , B בסיס ל- V אז: λ הוא ערך עצמי של T אם ורק אם $\det\left(\left[T\right]_B^B - \lambda I_n\right) = 0$ (I_n היא מטריצת היחידה).

<u>משפט.</u> תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית, יהיו $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k \in V$ וקטורים עצמיים של T השייכים לערכים עצמיים $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ בהתאמה, ז.א. $T\left(\vec{v}_j\right) = \lambda_j \vec{v}_j$, $1 \leq j \leq k$, וגם נתון ש- $\lambda_i \neq \lambda_j$, $1 \leq i < j \leq k$.
אזי הווקטורים $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ בלתי תלויים לינארית.

מכפלה פנימית. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F , (F הוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$). פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V \to F$ נקראת מכפלה פנימית על V אם: (1) $\langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ לכל $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$

(2) $\langle \lambda\vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ לכל $\lambda \in F, \vec{u}, \vec{v} \in V$ (3) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \overline{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}$ לכל $\vec{u}, \vec{v} \in V$

(4) $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0$ לכל $\vec{u} \in V$. $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0$ אם ורק אם $\vec{u} = \vec{0}$.

תכונות מיידיות: $\langle \vec{w}, \vec{u}+\vec{v} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle$ לכל $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$;

$\langle \vec{u}, \lambda\vec{v} \rangle = \bar{\lambda} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ לכל $\lambda \in F, \vec{u}, \vec{v} \in V$; $\langle \vec{u}, \vec{0} \rangle = 0$ לכל $\vec{u} \in V$.

נורמה: V מרחב מכפלה פנימית, $\vec{u} \in V$. אז $\|\vec{u}\| = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}$.

תכונות: $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|$ לכל $\vec{u} \in V, \lambda \in F$ ולכל סקלר λ.

$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ לכל $\vec{u}, \vec{v} \in V$ (אי-שויון קושי-שוורץ).

$\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ לכל $\vec{u}, \vec{v} \in V$. (אי-שויון המשולש).

תהליך גרם-שמידט: יהי $B = \left(f_1, ..., f_n\right)$ בסיס. בסיס אורתוגונלי $C = \left(u_1, ..., u_n\right)$ המתקבל מבסיס B על ידי תהליך גרם-שמידט הוא:

$$u_1 = f_1 \,,\, u_2 = f_2 - \frac{\langle f_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 \;\;,\;\; u_3 = f_3 - \frac{\langle f_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 - \frac{\langle f_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 \;\;, ...$$

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$. הזווית בין שני וקטורים שונים מאפס $\vec{u}, \vec{v} \in V$ היא מספר θ, $0 \leq \theta \leq \pi$, כך ש- $\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$.

1. אלגברה לינארית

<u>תלות ליניארית.</u> וקטורים $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ בלתי תלויים ליניארית אם השוויון $a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$ מתקיים אך ורק כאשר $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

<u>תת-מרחב .</u> יהי V מרחב וקטורי. תת-קבוצה U של V היא תת-מרחב של V אם
(1) $\vec{0} \in U$ **(2)** $\vec{u}, \vec{v} \in U \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in U$ **(3)** $a\vec{u} \in U$ לכל $\vec{u} \in U$ ולכל סקלר a .

<u>הנפרש של קבוצת וקטורים:</u> V מרחב וקטורי מעל שדה F , $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$. הגדרה:

$$Span\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\right) = \left\{a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n \mid a_1, a_2, \ldots, a_n \in F\right\}$$

<u>הגדרה:</u> אומרים שווקטורים $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ פורשים את V אם $Span\left(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\right) = V$.

<u>הגדרה:</u> מרחב V נקרא מרחב ממימד סופי אם קיימת ב- V קבוצה פורשת סופית.

בסיס: V מרחב וקטורי ממימד סופי, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$. הקבוצה הסדורה $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ נקראת בסיס של V אם (1) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ פורשים את V (2) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ בלתי תלויים ליניארית.

הגדרה: המימד של V (סימון: $\dim(V)$) הוא מספר וקטורים בבסיס של V .

משפט: V מרחב וקטורי, $\dim(V) = n$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$. אז $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$ בסיס של V אם ורק אם $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ בלתי תלויים לינארית.

משפט: יהי V מרחב ממימד סופי, U תת-מרחב של V . אזי $\dim(U) \le \dim(V)$.

משפט: יהי V מרחב ממימד סופי, U תת-מרחב של V , $\dim(U) = \dim(V)$. אזי $U = V$.

משפט: יהי V מרחב וקטורי, $\dim(V) = n$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$, $k > n$. אזי הווקטורים $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ תלויים ליניארית.

משפט: יהי V מרחב וקטורי, $\dim(V) = n$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$, $k < n$. אזי הווקטורים $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ אינם פורשים את V , ז.א. קיים $\vec{v} \in V$ כך ש- $\vec{v} \notin Span(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$.

משפט: יהי V מרחב ממימד סופי, U,W תת-מרחבים של V . אזי
$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

תכונות נבחרות של פעולות על מטריצות

$A(B+C) = AB + AC$ לכל מטריצות B,C $n \times m$ ולכל מטריצה A $k \times n$.

אם $B_1, B_2, ..., B_n$ הן עמודות של מטריצה B , אז עמודות של המכפלה AB הן $AB_1, AB_2, ..., AB_n$:
$A \cdot B = A \cdot [B_1 | B_2 | \cdots | B_n] = [A \cdot B_1 | A \cdot B_2 | \cdots | A \cdot B_n]$.

$(AB)^t = B^t A^t$ לכל מטריצה B $n \times m$ ולכל מטריצה A $k \times n$.

מטריצה הפכית: מטריצה ריבועית A $n \times n$ נקראת **הפיכה** אם קיימת מטריצה ריבועית B $n \times n$ כך ש $AB = BA = I$. במקרה זה B נקראת **הפכית** של A .

סימון: $B = A^{-1}$.

תכונות נבחרות של מטריצות הפיכות: (א) $(A^{-1})^{-1} = A$ (ב) אם A,B הפיכות אז AB הפיכה, $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$. (ג) אם A הפיכה אז גם A^t הפיכה ומתקיים השוויון $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

משפט: אם A מטריצה ריבועית $n \times n$ עם רכיבים משדה F , אז הטענות הבאות שקולות:
(א) A הפיכה. (ב) שורות של A בלתי תלויות ליניארית . (ג) עמודות של A בלתי תלויות ליניארית.
(ד) $\det(A) \ne 0$.(ה) למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ קיים פתרון יחיד עבור כל $\vec{b} \in F^n$. (ו) $rank(A) = n$.

תכונות נבחרות של דטרמיננטה:

(א) אם A הפיכה, אז $\det(A^{-1}) \cdot \det(A) = 1$. (ב) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

(ג) אם A מטריצה $n \times n$, c סקלר, אז $\det(cA) = c^n \det(A)$. (ד) $\det(A^t) = \det(A)$.

$A = [a_{ij}]_{i,j=1}^n$. נסמן על ידי A_{ij} מטריצה המתקבלת מ A על ידי מחיקת שורה מס' i ועמודה מס' j .

פיתוח לפי שורה מס' i **:**

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + (-1)^{i+2} a_{i2} \det(A_{i2}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in})$$

A,B מטריצות ריבועיות. (א) אם מטריצה B מתקבלת ממטריצה A על ידי פעולת שורה $R_i \leftarrow R_i + aR_j$ (הוספה של שורה מס' j כפולה בסקלר a לשורה מס' i), אז $\det B = \det A$.
(ב) אם B מתקבלת מ- A על ידי פעולת שורה $R_i \leftarrow aR_i$ (הכפלה של שורה מס' i בסקלר a), אז $\det B = a \cdot \det A$. (ג) אם B מתקבלת מ- A על ידי חילוף שורות $R_i \leftrightarrow R_j$, אז $\det B = -\det A$
.