בס"ד

אלגברה ליניארית 2. פתרונות.

מספר הקורס: 2-7028210-1,2,3 • תש"ף סמסטר א' מועד א', 6.2.20

מרצים: יובל פליקר, יונה צרניאבסקי.

חלק 1. חישובים והוכחות קלות יחסית (80 נקודות)

שאלה 1: (16 נקודות) נתון: $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $T(x,y,z)=(x+y+6z\,,4x+5y-z)$,
$B=((9,-6,-1),(-6,4,1),(-1,1,0))$, $E=((1,0),(0,1))$. מצאו את $[T]_E^B$.

פתרון. $T(9,-6,-1)=(9-6+6\cdot(-1),4\cdot 9+5\cdot(-6)-(-1))=(-3,7)$

$T(-6,4,1)=(-6+4+6\cdot 1,4\cdot(-6)+5\cdot 4-1)=(4,-5)$

$T(-1,1,0)=(-1+1+6\cdot 0,4\cdot(-1)+5\cdot 1-0)=(0,1)$

$$[T]_E^B=\left[\ [T(9,-6,-1)]_E\ |\ [T(-6,4,1)]_E\ |\ [T(-1,1,0)]_E\ \right]=$$
$$=\left[\ [(-3,7)]_E\,|\,[(4,-5)]_E\,|\,[(0,1)]_E\ \right]=\begin{bmatrix}-3 & 4 & 0\\ 7 & -5 & 1\end{bmatrix}$$

שאלה 2: (16 נקודות) נתון: $S:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $S(x,y,z)=(x+2y\,,2x+y+z\,,y+z)$.
האם $(2,\sqrt{5},1)$ הוא וקטור עצמי של S?

פתרון.

$$S(2,\sqrt{5},1)=(2+2\sqrt{5},2\cdot 2+\sqrt{5}+1,\sqrt{5}+1)=(2+2\sqrt{5},5+\sqrt{5},\sqrt{5}+1)=$$
$$=((1+\sqrt{5})\cdot 2,(1+\sqrt{5})\cdot\sqrt{5},(1+\sqrt{5})\cdot 1)=(1+\sqrt{5})\cdot(2,\sqrt{5},1)$$

על פי ההגדרה וקטור $\vec{v}\neq\vec{0}$ הוא וקטור עצמי של S אם עבור סקלר מסוים λ מתקיים השוויון $S(\vec{v})=\lambda\vec{v}$. זה בדיוק המצב אצלנו, $\vec{v}=(2,\sqrt{5},1)$, $\lambda=1+\sqrt{5}$:
$S(2,\sqrt{5},1)=(1+\sqrt{5})\cdot(2,\sqrt{5},1)$. תשובה: כן. $(2,\sqrt{5},1)$ הוא וקטור עצמי של S .

שאלה 3: (16 נקודות) נתון: $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $Q(x,y,z)=(x+y\,,2x+y-z\,,y+z)$.

א. (7 נקודות) מצאו בסיס ל- $\ker(Q)$. ב. (9 נקודות) מצאו בסיס ל- $\operatorname{Im}(Q)$.

פתרון.

$$\ker(Q)=\{(x,y,z)\,|\,Q(x,y,z)=(0,0,0)\}=\{(x,y,z)\,|\,(x+y\,,2x+y-z\,,y+z)=(0,0,0)\}=$$
$$=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\begin{cases}x+y=0\\2x+y-z=0\\y+z=0\end{cases}\right\}=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,\begin{cases}x=z\\y=-z\end{cases}\right\}=\{(z,-z,z)\,|\,z\in\mathbb{R}\}=Span((1,-1,1))$$

רואים ש- $\dim\ker(Q)=1$, בסיס של $\ker(Q)$ בנוי מווקטור אחד $(1,-1,1)$.

ממשפט שלמדנו נובע ש- $3=\dim(\mathbb{R}^3)=\dim\ker(Q)+\dim\operatorname{Im}(Q)=1+\dim\operatorname{Im}(Q)$.
מכאן $\dim\operatorname{Im}(Q)=2$. מצד שני אנחנו יודעים ש-
$\operatorname{Im}(Q)=Span\left(Q(1,0,0),Q(0,1,0),Q(0,0,1)\right)=Span\left((1,2,0),(1,1,1),(0,-1,1)\right)$.
הווקטורים $(1,2,0),(1,1,1)$ בלתי תלויים לינארית, $\dim\operatorname{Im}(Q)=2$, לכן
$\left((1,2,0),(1,1,1)\right)$ בסיס ל- $\operatorname{Im}(Q)$.

<u>שאלה 4</u>: (16 נקודות) יהיו V,W מרחבים וקטוריים מעל שדה F. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית כך ש- $\ker T=\{\vec{0}\}$. הוכיחו ש- T חד-חד-ערכית. נמקו היטב!
תזכורת: העתקה f היא חד-חד-ערכית אם השויון $f(a)=f(b)$ גורר $a=b$.

<u>פתרון.</u> צריך להניח ש- $T(\vec{u})=T(\vec{w})$ ולהסיק מזה ש- $\vec{u}=\vec{w}$.
$T(\vec{u})=T(\vec{w}) \quad \Rightarrow T(\vec{u})-T(\vec{w})=\vec{0}$ כי במרחב וקטורי מותר להעביר אגפים.
$\vec{0}=T(\vec{u})-T(\vec{w})=T(\vec{u}-\vec{w})$ כי T העתקה לינארית.
$T(\vec{u}-\vec{w})=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}-\vec{w}\in\ker T$ על פי הגדרת גרעין. נתון ש- $\ker T=\{\vec{0}\}$, לכן
$\vec{u}-\vec{w}\in\{\vec{0}\}$, מזה נובע ש- $\vec{u}-\vec{w}=\vec{0}$, ולכן $\vec{u}=\vec{w}$.

<u>שאלה 5</u>: (16 נקודות) נתון: V מרחב מכפלה פנימית, $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$, $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|=1$, $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\langle\vec{u},\vec{w}\rangle=\langle\vec{v},\vec{w}\rangle=0$. הוכיחו ש- $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ בלתי תלויים לינארית.

<u>פתרון.</u> נניח שמתקיים השויון $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$. עלינו להראות ש- $\alpha=\beta=\gamma=0$.
נכפול את שני האגפים של השויון $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ ב- $\vec{u}$ ונקבל:
$\langle\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w},\vec{u}\rangle=\langle\vec{0},\vec{u}\rangle$. מכאן $\alpha\langle\vec{u},\vec{u}\rangle+\beta\langle\vec{v},\vec{u}\rangle+\gamma\langle\vec{w},\vec{u}\rangle=0$. מהנתון נובע:
$\langle\vec{u},\vec{u}\rangle=\|\vec{u}\|^2=1,\langle\vec{v},\vec{u}\rangle=\langle\vec{w},\vec{u}\rangle=0$. לכן $\alpha=0$. בדרך דומה אם נכפול את שני האגפים של השויון $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ ב- $\vec{v}$ נקבל $\beta=0$, וכשאר נכפול את שני האגפים של השויון $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$ ב- $\vec{w}$ נקבל $\gamma=0$.

חלק 2. בעיות חשיבה (40 נקודות)

שאלה 6: (10 נקודות) נתון: V מרחב וקטורי מעל שדה F, $T:V\to V$ העתקה לינארית, עבור כל $\vec{v}\in V$ קיימים $\vec{w}\in\ker T$, $\vec{u}\in\operatorname{Im}T$ כך ש-$\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}$.

הוכיחו ש-$\vec{0}=T(\vec{v})$ אם ורק אם $\vec{0}=T(T(\vec{v}))$.

פתרון. יש להוכיח שתי טענות: אם $\vec{0}=T(\vec{v})$ אז $\vec{0}=T(T(\vec{v}))$, והגריה בכיוון ההפוך – אם $\vec{0}=T(T(\vec{v}))$ אז $\vec{0}=T(\vec{v})$.

נניח ש-$\vec{0}=T(\vec{v})$. נעיר ש-$\vec{0}=T(\vec{0})$ בגלל ש-T העתקה לינארית.

לכן: $\vec{0}=T(\vec{0})=T(T(\vec{v}))$.

הכיוון ההפוך פחות טריביאלי. נניח ש-$\vec{0}=T(T(\vec{v}))$. עלינו להוכיח ש-$\vec{0}=T(\vec{v})$.

הנתון " עבור כל $\vec{v}\in V$ קיימים $\vec{w}\in\ker T$, $\vec{u}\in\operatorname{Im}T$ כך ש-$\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}$" בעצם אומר ש- $V=\operatorname{Im}T+\ker T$. יש משפט שלמדתם בקורס אלגברה לינארית 1: יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי, U,W תת-מרחבים של V. אזי

$$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W) .$$

אצלנ אם נציב $U=\operatorname{Im}T,\ W=\ker T$ נקבל:

$$\dim(\operatorname{Im}T+\ker T)=\dim(\operatorname{Im}T)+\dim(\ker T)-\dim(\operatorname{Im}T\cap\ker T) .$$

אבל אנחנו כבר יודעים ש- $V=\operatorname{Im}T+\ker T$ ולכן

$$\dim V=\dim(\operatorname{Im}T+\ker T)=\dim(\operatorname{Im}T)+\dim(\ker T)-\dim(\operatorname{Im}T\cap\ker T) .$$

מצד שני, לפי משפט שלמדנו בקורס הנוכחי $\dim V=\dim(\ker T)+\dim(\operatorname{Im}T)$.

לכן $\dim(\operatorname{Im}T\cap\ker T)=0$. לכן $\operatorname{Im}T\cap\ker T=\{\vec{0}\}$. נזכיר שהנחנו ש-$\vec{0}=T(T(\vec{v}))$, ז.א. הנחנו ש-$T(\vec{v})\in\ker T$. מצד שני $T(\vec{v})\in\operatorname{Im}T$ על פי הגדרת התמונה. לכן $T(\vec{v})\in\operatorname{Im}T\cap\ker T$. מזה נובע ש-$\vec{0}=T(\vec{v})$ כי קיבלנו לעיל שב-$\operatorname{Im}T\cap\ker T$ נמצא רק וקטור האפס.

<u>שאלה 7</u>:(10 נקודות) יהיו V,W מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל שדה F, תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית חד-חד-ערכית ו"על", יהיו $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\in V$.
הוכיחו את הטענה הבאה: $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n)$ בסיס של V אם ורק אם $(T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n))$ בסיס של W.

<u>פתרון</u>. נוכיח תחילה שאם $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n)$ בסיס של V אז $(T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n))$ בסיס של W. נניח ש-$(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n)$ בסיס של V. ז.א. $V=Span(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n)$ ו- $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ בת"ל. עלינו להוכיח ש-$W=Span(T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n))$ ו- $T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n)$ בת"ל. על פי טענה 6 (גם בדפי חומר עזר היא מופיעה תחת המספר 6), מזה ש-$V=Span(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n)$ נובע ש-$\operatorname{Im}T=Span(T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n))$. נתון ש- T "על", לכן $W=\operatorname{Im}T$. קיבלנו ש-$W=Span(T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n))$. כדי להראות ש-$T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n)$ בת"ל נניח שמתקיים השויון $\alpha_1T(\vec{v}_1)+\alpha_2T(\vec{v}_2)+\cdots+\alpha_nT(\vec{v}_n)=\vec{0}$ ונוכיח ש-$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$.
נעיר ש-$\alpha_1T(\vec{v}_1)+\alpha_2T(\vec{v}_2)+\cdots+\alpha_nT(\vec{v}_n)=T(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n)$ ו-$T(\vec{0})=\vec{0}$ כי T העתקה לינארית. לכן מהשויון $\alpha_1T(\vec{v}_1)+\alpha_2T(\vec{v}_2)+\cdots+\alpha_nT(\vec{v}_n)=\vec{0}$ נובע השויון $T(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n)=T(\vec{0})$. מהשויון האחרון נובע ש-$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n=\vec{0}$ כי T העתקה חד-חד-ערכית. כמו שכבר אמרנו לעיל מהנחה ש-$(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n)$ בסיס נובע ש-$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ בת"ל, ולכן על פי הגדרת אי-תלות לינארית מהשויון $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n=\vec{0}$ נובבע ש-$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$.
כעת נוכיח את הכיוון השני. נניח ש-$(T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n))$ בסיס של W ונסיק מזה ש-$(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n)$ בסיס של V. מהנחה ש-$(T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n))$ בסיס נובע ש-$T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n)$ בת"ל. על פי טענה 7 (גם בדפי חומר עזר היא מופיעה תחת המספר 7), מאי-תלות לינארית של $T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n)$ נובע שגם $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ בת"ל. נשאר להראות ש-$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ פורשים את V. ניקח $\vec{v}\in V$. יש להראות שקיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ כך ש-$\vec{v}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n$. נתבונן בווקטור $T(\vec{v})$. כמובן, $T(\vec{v})\in W$. לכן קיימים סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ כך ש-$T(\vec{v})=\alpha_1T(\vec{v}_1)+\alpha_2T(\vec{v}_2)+\cdots+\alpha_nT(\vec{v}_n)$ כי $(T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n))$ בסיס של W ולכן $T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n)$ פורשים את W. נעיר שוב ש-$\alpha_1T(\vec{v}_1)+\alpha_2T(\vec{v}_2)+\cdots+\alpha_nT(\vec{v}_n)=T(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n)$ כי T העתקה לינארית.
לכן $T(\vec{v})=\alpha_1T(\vec{v}_1)+\alpha_2T(\vec{v}_2)+\cdots+\alpha_nT(\vec{v}_n)=T(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n)$. היות ו- T העתקה חד-חד-ערכית, מהשויון $T(\vec{v})=T(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n)$ נובע השויון $\vec{v}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n$.

<u>שאלה 8</u>: (10 נקודות) נתון: A היא מטריצה 8×8, בעמודה הראשונה של A יש רכיב שונה מאפס, הפולינום האופייני של A הוא x^8, ז.א. $\det(xI_8 - A) = x^8$.
הוכיחו ש- A אינה ניתנת ללכסון.
<u>פתרון.</u> נניח בשלילה ש- A ניתנת ללכסון. ז.א. A דומה למטריצה אלכסונית מסוימת D 8×8. למטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני, לכן $p_D(x) = p_A(x) = x^8$. כידוע, $p_D(x) = (x-d_{11})(x-d_{22})\cdots(x-d_{88})$ כאשר d_{ii} הם איברי האלכסון הראשי של D. קיבלנו ש- $(x-d_{11})(x-d_{22})\cdots(x-d_{88}) = x^8$, לכן $d_{ii} = 0$ לכל i, $1\le i\le 8$. לכן $D = 0$, כלומר, D היא מטריצת האפס 8×8. קל לראות שמטריצת האפס דומה רק לעצמה: $P\cdot 0\cdot P^{-1} = 0$ עבור כל P 8×8 הפיכה. הנחנו ש- A דומה ל- D, ז.א. A דומה למטריצת האפס, ולכן A בעצמה היא מטריצת האפס. אבל נתון לנו שבעמודה הראשונה של A יש רכיב שונה מאפס, לכן A היא לא מטריצת האפס. זו סתירה, ממנה נובע שההנחה ש- A ניתנת ללכסון לא נכונה, ולכן A אינה ניתנת ללכסון.

<u>שאלה 9</u>: (10 נקודות) יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. תהי $T: V\to V$ העתקה לינארית כך ש- $\|T(\vec{u}+\vec{v})\| = \|T(\vec{u})\| + \|T(\vec{v})\|$ עבור כל $\vec{u},\vec{v}\in V$.
הוכיחו ש- $T = 0$.
<u>פתרון.</u>
נניח בשלילה ש- $T\ne 0$. אם כך, קיים $\vec{u}\in V$ כך ש- $T(\vec{u})\ne\vec{0}$ ולכן $\|T(\vec{u})\|\ne 0$.
ניקח $\vec{v} = -\vec{u}$. מצד אחד $\|T(\vec{u}+\vec{v})\| = \|T(\vec{u}-\vec{u})\| = \|T(\vec{0})\| = \|\vec{0}\| = 0$, כי $T(\vec{0}) = \vec{0}$ בגלל ש- T לינארית.
מצד שני $\|T(\vec{u})\| + \|T(\vec{v})\| = \|T(\vec{u})\| + \|T(-\vec{u})\| = \|T(\vec{u})\| + \|-T(\vec{u})\| = 2\|T(\vec{u})\| \ne 0$ כי $T(-\vec{u}) = -T(\vec{u})$ בגלל ש- T לינארית. קיבלנו שהשויון הנתון $\|T(\vec{u}+\vec{v})\| = \|T(\vec{u})\| + \|T(\vec{v})\|$ אינו מתקיים. זו סתירה, ממנה נובע שההנחה $T\ne 0$ לא נכונה, ולכן ש- $T = 0$.

בס"ד

הגדרות, משפטים, נוסחאות. אלגברה לינארית 2

<u>הגדרת העתקה לינארית.</u> יהיו V, W מרחבים וקטוריים מעל שדה F. העתקה $T:V\to W$ נקראת לינארית אם (1) $T(\vec{v}_1+\vec{v}_2)=T(\vec{v}_1)+T(\vec{v}_2)$ לכל $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$ וגם
(2) $T(\alpha\vec{v})=\alpha T(\vec{v})$ לכל $\vec{v}\in V, \alpha\in F$.

<u>הגדרת גרעין ותמונה</u> של העתקה לינארית $T:V\to W$.

גרעין: $\ker T=\left\{\vec{v}\in V \mid T(\vec{v})=\vec{0}\right\}$. תמונה: $\operatorname{Im}T=\left\{\vec{w}\in W \mid \exists\vec{v}\in V:\vec{w}=T(\vec{v})\right\}$.

<u>הגדרת מטריצה מייצגת.</u> תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית, $B=\left(\vec{b}_1,...,\vec{b}_n\right)$ בסיס של V, $C=\left(\vec{c}_1,...,\vec{c}_k\right)$ בסיס של W. לכל וקטור $\vec{w}\in W$ קיים יצוג יחיד כצירוף לינארי של וקטורי בסיס C: $\vec{w}=\alpha_1\vec{c}_1+\alpha_2\vec{c}_2+...+\alpha_k\vec{c}_k$. סקלרים $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_k\in F$ נקראים קואורדינטות של וקטור $\vec{w}$ בבסיס C. נסמן $\left[\vec{w}\right]_C=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_k\end{bmatrix}$. אז מטריצה המייצגת של העתקה T בבסיסים B ו- C היא בנויה מעמודות $\left[T(\vec{b}_i)\right]_C$ $(i=1,2,...,n)$: $[T]_C^B=\left[\ \left[T(\vec{b}_1)\right]_C \mid \left[T(\vec{b}_2)\right]_C \mid \cdots \mid \left[T(\vec{b}_n)\right]_C\ \right]$.

התכונה העיקרית של מטריצה מייצגת. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית, יהי $B=\left(\vec{b}_1,...,\vec{b}_n\right)$ בסיס של V, יהי $C=\left(\vec{c}_1,...,\vec{c}_k\right)$ בסיס של W. אזי לכל וקטור $\vec{v}\in V$ מתקיים: $[T]_C^B\cdot[\vec{v}]_B=\left[T(\vec{v})\right]_C$.

מטריצת מעבר בין שני בסיסים באותו מרחב: $B=\left(\vec{b}_1,...,\vec{b}_n\right)$ ו $C=\left(\vec{c}_1,...,\vec{c}_n\right)$ שני בסיסים של V,

$I:V\to V$ העתקת הזהות, ז.א. $I(\vec{v})=\vec{v}$ לכל $\vec{v}\in V$.

מטריצת מעבר היא $[I]_C^B=\left[\ \left[\vec{b}_1\right]_C \mid \left[\vec{b}_2\right]_C \mid \cdots \mid \left[\vec{b}_n\right]_C\ \right]$. $[I]_C^B[\vec{v}]_B=[\vec{v}]_C$ לכל $\vec{v}\in V$.

<u>תכונות נבחרות של העתקות לינאריות</u>

1. תהי $T:V\to W$ העתקה המקיימת את התכונה הבאה:
$T(\vec{v}_1+\vec{v}_2)=T(\vec{v}_1)+T(\vec{v}_2)$ לכל $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$. אזי $T(\vec{0})=\vec{0}$.

2. העתקה $T:V\to W$ לינארית אם ורק אם
$T(\vec{v}_1+\alpha\vec{v}_2)=T(\vec{v}_1)+\alpha T(\vec{v}_2)$ לכל $\vec{v}_1,\vec{v}_2\in V$, $\alpha\in F$.

בתכונות הבאות: V,W מרחבים וקטוריים ממימד סופי, $T:V\to W$ העתקה לינארית.

3. $\ker T$ מהווה תת-מרחב ב- V.

4. $\operatorname{Im}T$ מהווה תת-מרחב ב- W.

5. T חד-חד-ערכית אם ורק אם $\ker T=\left\{\vec{0}\right\}$.

6. אם $V=Span\left(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\right)$ אז $\operatorname{Im}T=Span\left(T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n)\right)$.

7. אם $T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n)$ בת"ל ב- W אז $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ בת"ל ב- V.

8. $\dim V=\dim\ker T+\dim\operatorname{Im}T$.

9. נניח ש- $\dim V=\dim W$. אזי T חד-חד-ערכית אם ורק אם T "על".

10. אם $\dim V < \dim W$ אזי T לא "על".
11. אם $\dim V > \dim W$ אזי T לא חד-חד-ערכית.
12. יהי $B=\left(\vec{b}_1,...,\vec{b}_n\right)$ בסיס של V, יהיו $\vec{w}_1,...,\vec{w}_n \in W$. אזי קיימת העתקה לינארית $T:V \to W$ יחידה כך ש- $T\left(\vec{b}_i\right)=\vec{w}_i$ לכל i, $1 \le i \le n$. (כלומר, העתקה לינארית מוגדרת באופן חד-משמעי על ידי קביעת תמונות של וקטורי בסיס מסוים)

<u>הגדרת הרכבת העתקות.</u> יהיו V, W, U מרחבים וקטוריים מעל שדה F, תהיינה $T:V \to W$, $S:W \to U$ שתי העתקות. העתקה $S \circ T:V \to U$ מוגדרת כך: $\left(S \circ T\right)\left(\vec{v}\right)=S\left(T\left(\vec{v}\right)\right)$ לכל $\vec{v} \in V$.

20. יהיו V, W, U מרחבים וקטוריים מעל שדה F, תהיינה $T:V \to W$, $S:W \to U$ שתי העתקות לינאריות. אזי העתקה $S \circ T:V \to U$ הינה העתקה לינארית.
21. יהיו V, W, U מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל שדה F, תהיינה $T:V \to W$, $S:W \to U$ שתי העתקות לינאריות, יהי B בסיס של V, יהי C בסיס של W, יהי D בסיס של U. אזי $\left[S \circ T\right]_D^B=\left[S\right]_D^C \cdot \left[T\right]_C^B$.

<u>הגדרת דמיון מטריצות.</u> מטריצות X, Y $n \times n$ נקראות דומות אם קיימת Z הפיכה כך ש- $X=ZYZ^{-1}$.
22. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל שדה F, תהי $T:V \to V$ העתקה לינארית, יהיו B, C בסיסים של V. אזי מטריצות $\left[T\right]_B^B$, $\left[T\right]_C^C$ דומות, $\left[T\right]_B^B=\left(\left[I\right]_C^B\right)^{-1}\left[T\right]_C^C\left[I\right]_C^B$.

<u>ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של מטריצה:</u> תהי A מטריצה ריבועית $n \times n$.
מספר λ נקרא ערך עצמי של A אם קיים וקטור-עמודה $\vec{v}$ עם n רכיבים השונה מווקטור האפס כך ש $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$. במקרה הזה $\vec{v}$ נקרא וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי λ.
ניסוח אחר: וקטור-עמודה $\vec{v}$ עם n רכיבים השונה מווקטור האפס נקרא וקטור עצמי של A אם קיים מספר λ כך ש $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$. במילים אחרות: וקטור-עמודה $\vec{v}$ עם n רכיבים השונה מווקטור האפס נקרא וקטור עצמי של A אם הווקטורים $A\vec{v}$, $\vec{v}$ תלויים ליניארית.

<u>משפט:</u> מספר λ הוא ערך עצמי של A אם ורק אם $\det\left(A-\lambda I\right)=0$. (I היא מטריצת היחידה)
בפרט, מטריצה ריבועית A בלתי הפיכה אם ורק אם אפס הוא ערך עצמי שלה.
אם λ הוא ערך עצמי של A , אז הווקטורים העצמיים של A השייכים לערך עצמי λ הם פתרונות לא טריביאליים של מערכת משוואות ליניאריות הומוגניות $\left(A-\lambda I\right)\cdot\vec{x}=\vec{0}$.

<u>משפט:</u> אם מספר λ הוא ערך עצמי של A , אז λ^k הוא ערך עצמי של A^k לכל $1 \le k \in \mathbb{N}$.
<u>הגדרה:</u> אומרים שמטריצה A $n \times n$ ניתנת ללכסון (לכסינה) אם קיימות מטריצה אלכסונית D $n \times n$ ומטריצה הפיכה P $n \times n$ כך ש- $A=PDP^{-1}$.
<u>משפט:</u> מטריצה A $n \times n$ ניתנת ללכסון אם ורק אם ל- A קיימים n וקטורים עצמיים בת"ל.
<u>משפט:</u> מטריצה A $n \times n$ לכסינה מעל $\mathbb{C}$ אם ורק אם עבור כל ערך עצמי שלה הריבוי האלגברי והריבוי הגאומטרי שווים.
הגדרת פולינום אופייני של מטריצה A $n \times n$: $p_A\left(x\right)=\det\left(xI_n-A\right)$. (I_n היא מטריצת היחידה).
הגדרת העקבה: העקבה של מטריצה ריבועית A, $Trace(A)$, היא סכום של רכיבי אלכסון הראשי של A.

<u>משפט:</u> אם מטריצות A, B $n \times n$ דומות, אז $p_A\left(x\right)=p_B\left(x\right)$. מזה נובע שלמטריצות דומות יש אותה דטרמיננטה ואותה עקבה.

וקטור $\vec{v} \neq \vec{0}$ נקרא וקטור עצמי של העתקה לינארית T אם קיים סקלר λ (שנקרא "ערך עצמי") כך ש $T\vec{v}=\lambda\vec{v}$.
אם V מרחב וקטורי ממימד סופי, $T:V \to V$ העתקה לינארית, B בסיס ל- V אז: λ הוא ערך עצמי של T אם ורק אם $\det\left(\left[T\right]_B^B-\lambda I_n\right)=0$ (I_n היא מטריצת היחידה).

מכפלה פנימית. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, (F הוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$). פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V\to F$ נקראת מכפלה פנימית על V אם: (1) $\langle\vec{u}+\vec{v},\vec{w}\rangle=\langle\vec{u},\vec{w}\rangle+\langle\vec{v},\vec{w}\rangle$ לכל $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$

(2) $\langle\lambda\vec{u},\vec{v}\rangle=\lambda\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ לכל $\lambda\in F,\ \vec{u},\vec{v}\in V$ (3) $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\overline{\langle\vec{v},\vec{u}\rangle}$ לכל $\vec{u},\vec{v}\in V$

(4) $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle\geq 0$ לכל $\vec{u}\in V$. $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle=0$ אם ורק אם $\vec{u}=\vec{0}$.

תכונות מיידיות: $\langle\vec{w},\vec{u}+\vec{v}\rangle=\langle\vec{w},\vec{u}\rangle+\langle\vec{w},\vec{v}\rangle$ לכל $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in V$;

$\langle\vec{u},\lambda\vec{v}\rangle=\bar{\lambda}\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ לכל $\lambda\in F,\ \vec{u},\vec{v}\in V$; $\langle\vec{u},\vec{0}\rangle=0$ לכל $\vec{u}\in V$.

<u>7</u> **נורמה:** V מרחב מכפלה פנימית, $\vec{u}\in V$. אז $\|\vec{u}\|=\sqrt{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}$.

תכונות: $\|\lambda\vec{u}\|=|\lambda|\cdot\|\vec{u}\|$ לכל $\vec{u}\in V,\lambda\in F$ ולכל סקלר λ.

$|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle|\leq\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$ לכל $\vec{u},\vec{v}\in V$ (אי-שויון קושי-שוורץ).

$\|\vec{u}+\vec{v}\|\leq\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ לכל $\vec{u},\vec{v}\in V$. (אי-שויון המשולש).

תהליך גרם-שמידט: יהי $B=(f_1,\ldots,f_n)$ בסיס. בסיס אורתוגונלי $C=(u_1,\ldots,u_n)$ המתקבל מבסיס B על ידי תהליך גרם-שמידט הוא:

$$u_1=f_1\ ,\ u_2=f_2-\frac{\langle f_2,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1\ \ ,\ \ u_3=f_3-\frac{\langle f_3,u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1-\frac{\langle f_3,u_2\rangle}{\|u_2\|^2}u_2\ \ ,\ldots\ldots.$$

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$. הזווית בין שני וקטורים שונים מאפס $\vec{u},\vec{v}\in V$ היא מספר θ, $0\leq\theta\leq\pi$, כך ש- $\cos\theta=\dfrac{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$.

אלגברה לינארית 1.

<u>תלות ליניארית.</u> וקטורים $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$ בלתי תלויים ליניארית אם השוויון $a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\cdots+a_n\vec{v}_n=\vec{0}$ מתקיים אך ורק כאשר $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$.

<u>תת-מרחב .</u> יהי V מרחב וקטורי. תת-קבוצה U של V היא תת-מרחב של V אם **(1)** $\vec{0}\in U$ **(2)** $\vec{u},\vec{v}\in U\Rightarrow\vec{u}+\vec{v}\in U$ **(3)** $a\vec{u}\in U$ לכל $\vec{u}\in U$ ולכל סקלר a.

<u>**הנפרש של קבוצת וקטורים:**</u> V מרחב וקטורי מעל שדה F, $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\in V$. הגדרה:

$$Span(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n)=\{a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\cdots+a_n\vec{v}_n\mid a_1,a_2,\ldots,a_n\in F\}$$

<u>**הגדרה:**</u> אומרים שווקטורים $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$ פורשים את V אם $Span(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n)=V$.

<u>הגדרה:</u> מרחב V נקרא מרחב ממימד סופי אם קיימת ב- V קבוצה פורשת סופית.

<u>**בסיס:**</u> V מרחב וקטורי ממימד סופי, $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\in V$. הקבוצה הסדורה $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n)$ נקראת בסיס של V אם (1) $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$ פורשים את V (2) $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$ בלתי תלויים ליניארית.

<u>**הגדרה:**</u> המימד של V (סימון: $\dim(V)$) הוא מספר וקטורים בבסיס של V.

<u>**משפט:**</u> V מרחב וקטורי, $\dim(V)=n$, $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\in V$. אז $(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n)$ בסיס של V אם ורק אם $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n$ בלתי תלויים לינארית.

<u>**משפט:**</u> יהי V מרחב ממימד סופי, U תת-מרחב של V. אזי $\dim(U)\leq\dim(V)$.

<u>**משפט:**</u> יהי V מרחב ממימד סופי, U תת-מרחב של V, $\dim(U)=\dim(V)$. אזי $U=V$.

משפט: יהי V מרחב וקטורי, $\dim(V)=n$, $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k\in V$, $k>n$. אזי הווקטורים $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k$ תלויים ליניארית.

משפט: יהי V מרחב וקטורי, $\dim(V)=n$, $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k\in V$, $k<n$. אזי הווקטורים $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k$ אינם פורשים את V , ז.א. קיים $\vec{v}\in V$ כך ש- $\vec{v}\notin Span(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k)$.

משפט: יהי V מרחב ממימד סופי, U,W תת-מרחבים של V . אזי $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$.

תכונות נבחרות של פעולות על מטריצות

$A(B+C)=AB+AC$ לכל מטריצות B,C $n\times m$ ולכל מטריצה A $k\times n$.

אם $B_1,B_2,\dots,B_n$ הן עמודות של מטריצה B , אז עמודות של המכפלה AB הן $AB_1,AB_2,\dots,AB_n$: $A\cdot B=A\cdot[B_1|B_2|\cdots|B_n]=[A\cdot B_1|A\cdot B_2|\cdots|A\cdot B_n]$.

$(AB)^t=B^tA^t$ לכל מטריצה B $n\times m$ ולכל מטריצה A $k\times n$.

מטריצה הפכית: מטריצה ריבועית A $n\times n$ נקראת **הפיכה** אם קיימת מטריצה ריבועית B $n\times n$ כך ש $AB=BA=I$. במקרה זה B נקראת **הפכית** של A .

סימון: $B=A^{-1}$.

תכונות נבחרות של מטריצות הפיכות: (א) $(A^{-1})^{-1}=A$ (ב) אם A,B הפיכות אז AB הפיכה, $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. (ג) אם A הפיכה אז גם A^t הפיכה ומתקיים השוויון $(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$.

משפט: אם A מטריצה ריבועית $n\times n$ עם רכיבים משדה F , אז הטענות הבאות שקולות:
(א) A הפיכה. (ב) שורות של A בלתי תלויות ליניארית . (ג) עמודות של A בלתי תלויות ליניארית.
(ד) $\det(A)\neq 0$. (ה) למערכת $A\vec{x}=\vec{b}$ קיים פתרון יחיד עבור כל $\vec{b}\in F^n$. (ו) $rank(A)=n$.

תכונות נבחרות של דטרמיננטה:

(א) אם A הפיכה, אז $\det\left(A^{-1}\right)\cdot\det\left(A\right)=1$. (ב) $\det(AB)=\det(A)\det(B)$.

(ג) אם A מטריצה $n\times n$, c סקלר, אז $\det(cA)=c^n\det(A)$. (ד) $\det(A^t)=\det(A)$.

$A=\left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^n$. נסמן על ידי A_{ij} מטריצה המתקבלת מ A על ידי מחיקת שורה מס' i ועמודה מס' j .

פיתוח לפי שורה מס' i :

$$\det A=\sum_{j=1}^n(-1)^{i+j}a_{ij}\det(A_{ij})=(-1)^{i+1}a_{i1}\det(A_{i1})+(-1)^{i+2}a_{i2}\det(A_{i2})+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}\det(A_{in})$$

A,B מטריצות ריבועיות. (א) אם מטריצה B מתקבלת ממטריצה A על ידי פעולת שורה $R_i\leftarrow R_i+aR_j$ (הוספה של שורה מס' j כפולה בסקלר a לשורה מס' i), אז $\det B=\det A$.
(ב) אם B מתקבלת מ- A על ידי פעולת שורה $R_i\leftarrow aR_i$ (הכפלה של שורה מס' i בסקלר a), אז $\det B=a\cdot\det A$. (ג) אם B מתקבלת מ- A על ידי חילוף שורות $R_i\leftrightarrow R_j$, אז $\det B=-\det A$.

כלל קרמר: $b=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix}$, $\det A\neq 0$, $A\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=b$. אז $x_i=\dfrac{\det(A_{(i)})}{\det(A)}$ לכל $1\le i\le n$

כאשר מטריצה $A_{(i)}$ מתקבלת ממטריצה A על ידי החלפת עמודה מס' i של A בעמודה b.