פקולטה: מדעי הטבע. מחלקה: מתמטיקה מדעי המחשב. שם הקורס: לוגיקה ותורת הקבוצות.

קוד הקורס : 2-7016510.

תש"ף סמסטר ב מועד ב   תאריך: 5 לאוגוסט 2020   מרצה: ד"ר זיו שמי.

מתרגלים: מר אוהד מדמון , מר ברוך כשרים.

משך הבחינה :195 דקות. חומר עזר: דפי הנוסחאות שמצורפים בסוף . **עליכם להשיב על 5 השאלות הבאות. כל תשובה נכונה מזכה ב-20 נקודות.**

סימונים: מספרים טבעיים: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3 \dots\}$ שלמים: $\mathbb{Z}$ רציונלים: $\mathbb{Q}$ ממשיים: $\mathbb{R}$

טבעיים חיוביים: $\mathbb{N}^+$ קבוצת החזקה של A : P(A).

סימונים לקטעים הממשיים : $a \le x \le b$: $[a,b]$, $a < x < b$: (a,b) , $a < x \le b$: $(a,b]$, $a \le x < b$: $[a,b)$.

הנחיות לביצוע המבחן המקוון: יש לפתוח את המצלמות בפגישת הזום במהלך המבחן. שאלות הבהרה למרצה יש לשאול רק באימייל zivshami@gmail.com או בטלפון 03-5340807 .**אין לשאול שאלות בזום, גם לא בצ'אט !** אני אעביר הערות כלליות לכולם בצ'אט אם יהיה צורך.

1) לגבי כל אחד מהפסוקים הבאים קבע האם הוא מתקיים במבנה $(\mathbb{R},+,\cdot,\leq,0)$. **יש להסביר בכל סעיף מדוע הפסוק מתקיים או לא מתקיים.**

א) $\forall x \exists y \forall z\, [(x \cdot y \leq z \cdot z \cdot z)]$

ב) $\exists x \forall y \forall z [(0 \leq z) \rightarrow (x \leq y + z)]$

ג) $\exists x \forall y \exists z \forall w (z + y \leq w + x)$

2) לגבי כל זוג מבנים, המופיע בכל סעיף, קבע האם הם איזומורפיים. **הסבר בקצרה את טענתך בכל סעיף: אם המבנים לא איזומורפיים יש רק להציג פסוק המעיד על כך (באוצר מילים המשותף) ולכתוב איזה מבנה מקיים את הפסוק ואיזה מבנה לא מקיים. אם המבנים איזומורפיים יש רק להגדיר פונקציית איזומורפיזם.**

א) $M_2 = (\mathbb{Z},+)$,$M_1 = (\mathbb{N},\cdot)$

(המבנים מפרשים את $L = \{f\}$, $f^{M_1} = \cdot$, $f^{M_2} = +$, כאשר $+$ חיבור על השלמים, $\cdot$ כפל על הטבעיים).

ב) $M_2 = (\mathbb{R},\cdot)$, $M_1 = (P(\mathbb{Q}),\cap)$

(המבנים מפרשים את $L = \{f\}$, $f^{M_1} = \cap$, $f^{M_2} = \cdot$, כאשר $\cap$ היא "חיתוך קבוצות", $\cdot$ היא פעולת הכפל הרגילה על המספרים הממשיים).

ג) $M_2 = ((0,2),<)$, $M_1 = ((0,2) \cup [3,4),<)$ (כאן $L = \{<\}$).

3) לגבי כל זוג קבוצות, המופיע בכל סעיף, קבע איזו קבוצה עוצמתה גדולה יותר או האם עוצמות הקבוצות שוות. **הוכח את תשובתך בכל סעיף. מותר לצטט ללא הוכחה כל משפט (טענה או מסקנה) שהיו בהרצאה.**

א) $B = P(\{0,1,2\})$,$A = \{X \subseteq \mathbb{R} :\ X \cap (0,1] = [0,1]\}$

ב) $B = \{X \in P(\mathbb{Z}):\ X \cap \mathbb{N} = \emptyset\}$, $A = \{\langle x,y \rangle \in P(\mathbb{R})^2 : x \subseteq \mathbb{Q},\ x \cap y = \emptyset\}$

ג) $B = P(\mathbb{R})$, $A = P(\mathbb{Q})$

4) האם הפונקציה $f: P(\mathbb{N})^2 \to P(\mathbb{N})$ המוגדרת ע"י $f(\langle A, B\rangle) = A \cap B$ היא:

א. חח"ע?

ב. על?

הוכח את תשובתך ישירות מההגדרה.

5) תהא $X = P(\mathbb{N})$ קבוצת כל תת הקבוצות של המספרים הטבעיים. נגדיר יחס דו-מקומי S^* על X ע"י: לכל $A, B \in X$: $\langle A, B\rangle \in S^*$ אם ורק אם [$A \subseteq B$ וגם $B \setminus A$ אינסופית].
יהא L אוצר המילים המכיל סימן יחס דו-מקומי S ובנוסף מכיל לכל $A \in X$ סימן קבוע c_A.
נגדיר מבנה M המפרש את L באופן הבא: עולם M הוא X, $S^M = S^*$
ולכל $A \in X$, ${c_A}^M = A$.
תהא T התורה של המבנה M, כלומר T היא קבוצת כל הפסוקים ש-M מקיים. נגדיר תורות T_1, T_2, T_3 באוצר מילים $L^+ = L \cup \{d, e\}$, באשר d, e סימני קבועים חדשים:

$$T_1 = \mathrm{T} \cup \{S(c_A, d) : A \in X\}$$

$$T_2 = \mathrm{T} \cup \{S(c_A, d) \wedge S(d, e) : \text{סופית } A \in X\}$$

$$T_3 = \mathrm{T} \cup \{S(c_A, d) \wedge S(c_A, e) : \text{סופית } A \in X\}$$

א) לגבי כל אחת מהתורות T_1, T_2, T_3 עליכם לבחור באפשרות היחידה הנכונה מבין האפשרויות הבאות:

1. לא עקבית.
2. עקבית ויש לה מודל שהוא העשרה של M ל- L^+.
3. עקבית, אבל אין לה מודל שהוא העשרה של M ל-L^+.

בחלק זה, אין צרך לנמק כלל. (העשרה של M ל-L^+ במקרה זה מתקבלת ע"י הוספת פרושים עבור d, e כאיברים בעולם של M, שהוא X). (8 נקודות)

ב) בחרו תורה לגביה התשובה הנכונה בחלק א **היא אפשרות 3 והוכיחו** שהיא אכן עקבית. הניקוד ינתן רק במקרה שבחרתם בתורה נכונה. מותר כמובן לצטט משפטים מההרצאה או מדף הנוסחאות. (12 נקודות)

בהצלחה!

<u>דפי נוסחאות בלוגיקה ותורת הקבוצות</u>

<u>תחשיב הפסוקים</u>

1). חק החלוף לגבי האִווי : $\alpha\vee\beta\equiv\beta\vee\alpha$

2). חק החלוף לגבי הגִמום : $\alpha\wedge\beta\equiv\beta\wedge\alpha$

3). חק הקִבוץ לגבי האִווי : $(\alpha\vee\beta)\vee\gamma\equiv\alpha\vee(\beta\vee\gamma)$

4). חק הקִבוץ לגבי הגִמום : $(\alpha\wedge\beta)\wedge\gamma\equiv\alpha\wedge(\beta\wedge\gamma)$

5). חֹק הפִלוג של האִווי מעל הגִמום : $\alpha\wedge(\beta\vee\gamma)\equiv(\alpha\wedge\beta)\vee(\alpha\wedge\gamma)$

6). חֹק הפִלוג של הגִמום מעל האִווי : $\alpha\vee(\beta\wedge\gamma)\equiv(\alpha\vee\beta)\wedge(\alpha\vee\gamma)$

7). כללי דה-מורגן: $\neg(\alpha\vee\beta)\equiv\neg\alpha\wedge\neg\beta,\ \neg(\alpha\wedge\beta)\equiv\neg\alpha\vee\neg\beta$

8). $\alpha\rightarrow\beta\equiv\neg\alpha\vee\beta,\ \neg(\alpha\rightarrow\beta)\equiv\alpha\wedge\neg\beta$

9). $\alpha\leftrightarrow\beta\equiv(\alpha\rightarrow\beta)\wedge(\beta\rightarrow\alpha)\equiv(\alpha\wedge\beta)\vee(\neg\alpha\wedge\neg\beta)$

10) חֻקי האמת : $\alpha\wedge T\equiv\alpha,\ \alpha\vee T\equiv T,\ \alpha\wedge F\equiv F,\ \alpha\vee F\equiv\alpha$

11) חֻקי הספיגה (הרוב קובע) : $\alpha\wedge(\alpha\vee\beta)\equiv\alpha,\ \alpha\vee(\alpha\wedge\beta)\equiv\alpha$

הגדרה: המבנה M הוא **תת מבנה** של המבנה N אם העולם של M מוכל בעולם של N, והסמנים שמופיעים באוצר המילים מתפרשים אותו דבר ב-N,M, כלומר:

א. לכל סמן יחס R n-מקומי ולכל n אברים $a_1,a_2..a_n$ בעולם של M מתקיים : $R^M(a_1..a_n)$ אס״ם $R^N(a_1..a_n)$.
ב. לכל סמן של פונקציה f n-מקומית ולכל n אברים $a_1,a_2..a_n$ בעולם של M מתקיים : $f^M(a_1,a_2..a_n)=f^N(a_1,a_2..a_n)$.
ג. לכל סמן של קבוע אישי, c, מתקיים $c^M=c^N$.

איזומורפיזם:

הגדרה: נתונים שני מבנים M_1,M_2 שמפרשים אותו אוצר מילים. איזומורפיזם בין המבנים M_1,M_2 הוא פונקציה $H:M_1\rightarrow M_2$ שמקיימת את התכונות הבאות:

א. H חח״ע ועל.
ב. לכל סמן של יחס n-מקומי, R, באוצר המילים ולכל n אברים $a_1,a_2..a_n$ מ-M_1 מתקיים: $R^{M1}(a_1,a_2..a_n)$ אס״ם $R^{M2}(H(a_1),H(a_2)..H(a_n))$.
ג. לכל סמן של פונקציה n-מקומית, f, ולכל n אברים $a_1,a_2..a_n$ בעולם של M_1 מתקיים: $H(f^{M1}(a_1,a_2..a_n))=f^{M2}(H(a_1),H(a_2)..H(a_n))$.
ד. לכל סמן של קבוע אישי, c, מתקיים $H(c^{M1})=c^{M2}$.

הגדרה: המבנים M_1,M_2 איזומורפיים אם יש איזומורפיזם $H:M_1\rightarrow M_2$.

משפט: אם $M_1\cong M_2$ אז כל פסוק שנכון באחד מהם, נכון בשני.

שקילות לוגית

הגדרת שקילות לוגית: הפסוקים B,A שקולים לוגית פירושו שלכל מבנה M, אם A מתקיים, אז B מתקיים ואם B מתקיים אז A מתקיים.

החֻקים האנלוגיים לחֻקי דה-מורגן: (טִפול בשלילה שמופיעה לפני סוגריים)

א. $\neg[\forall x(\alpha)]\equiv\exists x(\neg\alpha)$.
ב. $\neg[\exists x(\alpha)]\equiv\forall x(\neg\alpha)$.

החלפת שם של משתנה מכומת: בפסוק $\forall x(\alpha)$ נתן להחליף את x ב-y, בהנחה ש-x מופיע ב-α רק כמשתנה חופשי ו-y כלל לא מופיע ב-α (אין צֹרך לִזכֹר את ההנחה, אלא רק להבין את הרעיון ולתרגל).

משפט הוצאת הכמתים מחוץ לסוגריים: אם x לא מופיע בפסוק β, אז $[\forall x(\alpha)]\wedge\beta\equiv\forall x[\alpha\wedge\beta]$. אותו דבר אם יופיע $\exists$ במקום $\forall$. אותו דבר אם יופיע $\vee$ במקום $\wedge$.

הרעיון של המשפט: אין קשר בין הכִמות על x לבין הפסוק β. לכן זה לא משנה אם β יופיע בתוך הסוגריים או מחוץ להם.

<u>משפט המחמיר והמֵקֵל:</u>

א. $[\forall x(\alpha)]\wedge[\forall x(\beta)]\equiv\forall x[\alpha\wedge\beta]$.

ב. $[\exists x(\alpha)]\vee[\exists x(\beta)]\equiv\exists x[\alpha\vee\beta]$.

הרעיון: יש דִמיון בין הכמת $\forall$ ובין הקשר $\wedge$. שניהם "מחמירים", כלומר מקשים לקבל ערך אמת. הכמת $\forall$ אומר שאפילו אם יש x אחד שלא מקיים, אז נקבל F. הקשר $\wedge$ אומר שאפילו אם רק אחד משני הפסוקים שקרי, אז נקבל F. בחלק א של המשפט יש שלוב של הכמת המחמיר עם הקשר המחמיר. לכן אפשר להחליף סדר ביניהם. בחלק ב יש שלוב של הכמת המקל, $\exists$, עם הקשר המקל, $\vee$.

<u>ההגדרות הבסיסיות של תורת המודלים ומשפט הקומפקטיות</u>

<u>תורה</u> = קבוצה של פסוקים באוצר מילים מסוים.

תורה היא <u>עקבית</u> אם יש לה מודל, כלומר יש מבנה המקיים את כל הפסוקים בה.

<u>משפט הקומפקטיות:</u>

תורה היא עקבית אם ורק אם כל תת קבוצה סופית שלה היא עקבית.

תורת הקבוצות

$N=\{0,1,2...\}$: **המספרים הטבעיים**, Z: **המספרים השלמים**, Q: **המספרים הרציונלים**

R: **המספרים הממשיים**.

תכונות של איחוד וחיתוך:

1). האִחוד מקיים את חק החלוף: $A\cup B=B\cup A$.

2). החִתוך מקיים את חק החלוף: $A\cap B=B\cap A$.

3). האִחוד מקיים את חק הקִבוץ:
$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.

4). החִתוך מקיים את חק הקִבוץ:
$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

5). חֻקי הפִלוג: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

6) כללי דה-מורגן: $\mathbf{(A\cup B)^c=A^c\cap B^c}$, $\mathbf{(A\cap B)^c=A^c\cup B^c}$

<u>הגדרה:</u> קבוצה A היא בת מניה אם היא ריקה או שקיימת פונקציה **על** $f:N\to A$.

<u>משפט:</u> אם קבוצה A היא אחוד של אוסף בן מניה של קבוצות בנות מניה, אז A בת מניה.

הגדרה: קבוצות B,A תקראנה שוות עוצמה אם יש פונקציה חח"ע ועל מ-A ל-B.

הגדרה: עוצמת A גדולה או שווה לעוצמת B אם יש פונקציה חח"ע מ-B ל-A.

הגדרה: עוצמת A גדולה מעוצמת B אם עוצמת A גדולה או שווה לעוצמת B אבל A, B אינן שוות עוצמה.

משפט קנטור: לכל קבוצה A עוצמת קבוצת החזקה $P(A)$ של A גדולה מעוצמת A.

משפט: עוצמת המספרים הממשיים R שווה לעוצמת $P(N)$ ולכן גדולה

מעוצמת N.

משפט קנטור ברנשטיין: לכל שתי קבוצות B,A: אם עוצמת A גדולה או שווה לעוצמת B וכן עוצמת B גדולה או שווה לעוצמת A אז B,A שוות עוצמה.

משפט השוואת העוצמות: אם B,A קבוצות אז עוצמת A גדולה או שווה לעוצמת B או עוצמת B גדולה או שווה לעוצמת A.