דף חזרה – לינארית 1

מספרים מרוכבים

$z = a+bi$ | $Re(z)=a$ | $Im(z)=b$

הצמוד: $\overline{z} = a-bi$

$\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$ | $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$

$r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$

$tan(\alpha) = \frac{b}{a}$

הצגה פולארית: $z = r\cdot cis(\alpha)$

$\overline{z} = r\cdot cis(-\alpha)$

$z_1\cdot z_2 = r_1\cdot r_2\cdot(\alpha+\beta)$

משפט דה-מואבר:

$z^n = r^n\cdot cis(n\cdot\alpha)$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\cdot cis\left(\frac{\alpha+360k}{n}\right)$

שדות

אקסיומות שדה <F , + , · , 0 , 1>

$\mathbb{F}$ שדה אם לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$ מתקיים:

חיבור:

סגירות	$a+b\in\mathbb{F}$
חילוף	$a+b=b+a$
קיבוץ	$(a+b)+c=a+(b+c)$
קיום ניטרלי	$a+0_{\mathbb{F}}=a$
קיום נגדי	$a+(-a)=0$

כפל:

סגירות	$a\cdot b\in\mathbb{F}$
חילוף	$a\cdot b=b\cdot a$
קיבוץ	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$
קיום ניטרלי	$a\cdot 1_{\mathbb{F}}=a$
קיום הופכי (חוץ מ-0)	$a\cdot a^{-1}=1_{\mathbb{F}}$
פילוג (משלב כפל וחיבור)	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

$\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{C}$ הם שדות.

משפט: $\mathbb{Z}_n$ הוא שדה $\Leftrightarrow$ n ראשוני.

בשדה אין מחלקי אפס: אם $a\cdot b=0$ אז $a=0$ או $b=0$.

גודל שדה: בשדה יש לפחות 2 איברים: 0, 1

קיים שדה בגודל n $\Leftrightarrow$ $n=p^\alpha$ כאשר p ראשוני

מאפיין - $char(\mathbb{F})$: מספר הפעמים המינימלי שיש לחבר את $1_{\mathbb{F}}$ כדי לקבל $0_{\mathbb{F}}$. (אם אין, אז הוא שווה 0.)

פתרונות של מטריצה: למערכת הומוגנית לפחות פתרון אחד, הפתרון הטריוויאלי. (לא תיתכן סתירה)

אם יש משתנים חופשיים, מספר הפתרונות הוא גודל השדה בחזקת מספר המשתנים החופשיים. (בשדה אינסופי – אינסוף פתרונות)

תת שדה: $\mathbb{H}$ הוא תת שדה של שדה $\mathbb{F}$ אם:

1) $\mathbb{H}$ שדה בעצמו עם הפעולות של $\mathbb{F}$
2) $0\neq\mathbb{H}\subseteq\mathbb{F}$

קריטריון מקוצר לבדיקת תת שדה:

$\mathbb{H}$ הוא תת שדה של שדה $\mathbb{F}$ אם:

1. $1_{\mathbb{F}}\in\mathbb{H}\subseteq\mathbb{F}$
2. לכל $a,b\in\mathbb{H}$ $(b\neq0)$ מתקיים:
   א) $a\cdot b^{-1}\in\mathbb{H}$
   ב) $a+(-b)\in\mathbb{H}$

מרחבים וקטוריים (מ"ו)

אקסיומות מ"ו:

חיבור: (V מ"ו, $u,v,w\in V$ וקטורים)

סגירות	$u+v\in V$
חילוף	$u+v=v+u$
קיבוץ	$(u+v)+w=u+(v+w)$
קיום ניטרלי (וקטור ה0)	$0_V\in V$
קיום נגדי	$v+v_x=0$

כפל בסקלר: ($\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ סקלרים)

סגירות	$\alpha\cdot v\in\mathbb{F}$
קיבוץ	$(\alpha\cdot\beta)\cdot v=\alpha\cdot(\beta\cdot v)$
הסקלר 1 ניטרלי	$1_{\mathbb{F}}\cdot v=v$
פילוג	$(\alpha+\beta)\cdot v=\alpha\cdot v+\beta\cdot v$
פילוג	$\alpha\cdot(v+w)=\alpha\cdot v+\alpha\cdot w$

משפט: תכונות במ"ו (לא אקסיומות):

- $0_{\mathbb{F}}\cdot v=0_V$
- $\alpha\cdot 0_V=0_V$
- $-1_{\mathbb{F}}\cdot v=-v$

הגדרה - תת-מרחב (ת"מ):

תת קבוצה של V היא ת"מ אם היא בעצמה מ"ו ביחס לפעולות של V.

קריטריון מקוצר לבדיקת ת"מ:

W הוא ת"מ של V אם מתקיימים 2 התנאים:

1) $O_V\in W\subseteq V$
2) $\alpha\cdot w_1+w_2\in W$

טענה: אוסף הפתרונות של ממ"ל הומוגנית מסדר $m\times n$ מעל שדה $\mathbb{F}$ הוא ת"מ של $\mathbb{F}^{n\times1}$ (ולכן גם מ"ו).

יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו U,W ת"מ של V:

טענה: $U\cap W$ הוא ת"מ של V.

משפט: $U+W$ הוא ת"מ של V.

משפט: $U\cup W$ ת"מ של V $\Leftrightarrow$ $U\subseteq W$ או $W\subseteq U$

(איחוד של ת"מ אינו בהכרח ת"מ.)

סכום ישר $U\oplus W$: הסכום המתקבל מחיבור U+W, כאשר מתקיים $U\cap W=\{0_V\}$.

פרישה ליניארית (span / sp):

$span(S)$ הוא אוסף כל הצירופים הלינאריים של איברי S.

אם $span(S)=V$ נאמר ש-S פורשת את V.

משפט: תהי S תת-קבוצה של מ"ו V (כלומר $S\subseteq V$) אזי:

1) $span(S)$ הוא ת"מ של V.
2) $span(S)$ מכיל את S.
3) $span(S)$ הוא ת"מ הקטן ביותר של V שמכיל את S.

טענה: $sp(A)+sp(B)=sp(A\cup B)$

(שימו לב: מדובר על $sp+sp$ ולא $sp\cup sp$)

תלות ליניארית (ת"ל): תת קבוצה S של מ"ו V נקראת תלויה ליניארית (ת"ל) אם קיים צירוף ליניארי (צ"ל) לא טריוויאלי של איבריה ששווה ל-0.

אם לא, היא בלתי תלויה ליניארית (בת"ל).

בסיס למ"ו: קבוצה B היא בסיס למ"ו V אם:

1) B בת"ל
2) $sp(B)=V$

משפט: לכל מ"ו נוצר סופית יש בסיס.

משפט: בסיסים של אותו מ"ו הם באותו גודל (=מימד).

משפט: אם B בסיס למ"ו נוצר סופית V, אז לכל $v\in V$ קיימת הצגה יחידה כצי"ל של B.

משפט: גודל של תת קבוצה בת"ל ב-V הוא לכל היותר גודל של קבוצה הפורשת את V.

מימד - $dim(V)$: מספר האיברים בבסיס של מ"ו.

מימד פולינום: $dim(\mathbb{F}_n[x])=n+1$

משפט - השלישי חינם: אם 2 מתקיימים, גם השלישי:

1) B בת"ל
2) $sp(B)=V$
3) $dim(V)=|B|$

משפט המימדים:

$\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$

מטריצות

מטריצה מדורגת: בכל שורה האיבר הפותח (ציר) של השורה נמצא מימין לאיבר הפותח בשורה הקודמת.

מדורגת קנונית: מטריצה מדורגת כך שכל ציר הוא 1, בכל טור יש ציר אחד ומלבדו אפסים. אם קיימת שורת אפסים, הוא תועבר לסוף.

משפט: לכל מטריצה קיימת הצגה קנונית יחידה.

כפל מטריצות:

תהיינה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}, B\in\mathbb{F}^{n\times p}$ מטריצות שמס' עמודות A שווה למס' שורות B. המכפלה שלהן היא: $AB\in\mathbb{F}^{m\times p}$

איברי המטריצה מוגדרים כך: $AB_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}\cdot B_{kj}$

תכונות של מטריצות:

חילוף בחיבור	$A+B=B+A$
קיבוץ בחיבור	$(A+B)+C=A+(B+C)$
פילוג בכפל בסקלר	$\alpha\cdot(A+B)=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$
פילוג בכפל בסקלר	$(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$
קיבוץ בכפל	$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$
פילוג בכפל	$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$

תכונות מטריצה משוחלפת (transpose):

$(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$

$(A+B)^t=A^t+B^t$

$(\alpha\cdot A)^t=\alpha\cdot A^t$

$\mathrm{rank}(A^t)=\mathrm{rank}(A)$

מטריצה סימטרית: $A^t=A$ **אנטי-סימטרית:** $A^t=-A$

טענה: חיבור פתרון המע' הלא-הומוגנית $Ax=b$ עם פתרון של ההומוגנית $Ax=0$ הוא פתרון של הלא-הומוגנית.

מרחבי המטריצה: (R = Rows, C=Columns, N=Null)

מרחב השורות $R(A)$: נפרש ע"י שורות המט' שהן בת"ל.

מרחב העמודות $C(A)$: נפרש ע"י עמודות המט' שהן בת"ל.

$C(\boldsymbol{A}\cdot B)\subseteq C(\boldsymbol{A})$

$R(A\cdot\boldsymbol{B})\subseteq R(\boldsymbol{B})$

מרחב האפס $N(A)$: מרחב הוקטורים שמאפסים את המטריצה. מימדו הוא מספר המשתנים החופשיים.

דרגת מטריצה (rank / r): תהי A מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$

$rank(A)=\dim(C(A))=\dim(R(A))$

$rank(A)\le\min\{m,n\}$

$rank(A\cdot B)\le\min\{rank(A),rank(B)\}$

$rank(A+B)\le rank(A)+rank(B)$

משפט הדרגה: $rank(A)+\dim(N(A))=n$

מטריצות ריבועיות:

תהי מטריצה ריבועית $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$

מטריצה הופכית: תהיינה A,B מטריצות הפיכות, אזי:

$(A^t)^{-1}=(A^{-1})^t$

$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$

$A^{-1}\cdot A=I_n$

מציאת מטריצה הופכית:

1) מטריצה מסדר 2×2: קיימת נוסחה

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\cdot\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$$

2) מטריצה מכל סדר $n\times n$: דירוג המטריצה $(A\,|\,I_n)$

מטריצה משולשית: משולשית עליונה או תחתונה.

משולשית עליונה: $A_{ij}=0$ עבור $i>j$

משולשית תחתונה: $A_{ij}=0$ עבור $i<j$

מטריצה אלכסונית: $A_{ij}=0$ עבור $i\neq j$

מטריצה סקלרית: $A=\alpha\cdot I_n$

מטריצה אלמנטרית: מטריצה שניתן להגיע אליה ע"י הפעלת פעולת שורה אחת על מטריצת היחידה.

עקבה – (trace / tr): $tr(A)=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}$

משפט: תהי מטריצה $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ (ריבועית) אז אם מתקיים אחד מהבאים הוא גורר את היתר:

$\Leftrightarrow$ A הפיכה.
$\Leftrightarrow$ הצורה הקנונית של A היא I_n
$\Leftrightarrow$ ניתן להציג את A כמכפלת אלמנטריות.
$\Leftrightarrow$ קיימת מטריצה B המקיימת: $A\cdot B=B\cdot A=I$
$\Leftrightarrow$ למערכת $Ax=0$ יש פתרון יחיד – הטריוויאלי.
$\Leftrightarrow$ קיים b כך שלמערכת $Ax=b$ יש פתרון יחיד.
$\Leftrightarrow$ לכל b יש למערכת $Ax=b$ פתרון יחיד.
$\Leftrightarrow$ $rank(A)=n$ (=דרגה מלאה).
$\Leftrightarrow$ שורות A הן בת"ל.
$\Leftrightarrow$ עמודות A הן בת"ל.

פולינומים: ביטויים מהצורה:

$a(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\cdots+a_n\cdot x^n$

הפעולות המוגדרות עליהם הן חיבור פולינומים וכפל בסקלר.

מעלת פולינום - $deg(a(x))$: החזקה הגדולה ביותר שמופיעה על נעלמים שהמקדם שלהם אינו אפס.

סימון: $\mathbb{F}_n[x]$ אוסף הפולינומים במשתנה x מעל שדה $\mathbb{F}$ ממעלה n לכל היותר.

טענה: $\mathbb{F}[x]$ הוא מ"ו מעל $\mathbb{F}$

טענה: $\mathbb{F}_n[x]$ הוא ת"מ של $\mathbb{F}[x]$

מימד פולינום: $dim(\mathbb{F}_n[x])=n+1$

נכתב ע"י נאור אזולאי בהתבסס על ההרצאות של ד"ר רון עדין והתרגולים של עדי בן צבי (שנה"ל תשפ"ב). יהיה זמין לעריכה והורדה ב:
Drive מדמ"ח בר אילן > שנה א' > סמסטר א' > לינארית 1