

# מבחן בקורס הסתברות 1

סמסטר ב', מועד א'

08.07.2020

פרופ' דן חפץ

אוניברסיטת אריאל

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה למדעי המחשב

משך הבחינה: 3 שעות

המבחן הינו עבור מספרי קורס: 1-7028410 ו-2-7028410

מבנה המבחן: 3 שאלות ללא בחירה.

הנחיות:

1. המבחן הינו עם חומר סגור ובכתב יד ללא שימוש בשום אמצעי אלקטרוני (מותר מחשבון פשוט אם כי אין בו צורך). עם זאת, כל סטודנט רשאי להביא דף אחד מגודל A4 כתוב משני צדדיו. על התלמיד לכתוב את שמו ומספר תעודת הזהות שלו על הדף הנ"ל.
2. אין לכתוב בעפרון.
3. יש להוכיח כל טענה שאתם כותבים גם אם לא התבקשתם לעשות זאת במפורש בשאלה.
4. למרות הכתוב בסעיף 3, ניתן להסתמך ללא הוכחה על כל טענה שנלמדה בשיעור (אלא אם כן זו הטענה שהנכם מתבקשים להוכיח בשאלה). יש לצטט את הטענה עליה הנכם מסתמכים בצורה ברורה.
5. בפתרון סעיף כלשהו בשאלה, ניתן להסתמך על תוצאת סעיפים קודמים גם אם לא פתרתם אותם.
6. למרות הניקוד המפורט בשאלות, ציון הבחינה הסופי יהיה עובר/נכשל.

### שאלה 1 (34 נקודות):

מטילים קובייה הוגנת פעמיים, כאשר ההטלות בלתי תלויות. יהי  $X$  מספר ההטלות שתוצאתן 1 ויהי  $Y$  מספר ההטלות שתוצאתן 6.

- א. (15 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של  $X$  ו- $Y$ .
- ב. (6 נקודות) חשבו את התוחלת והשונות של  $X$ .
- ג. (8 נקודות) חשבו את מקדם המתאם  $\rho(X, Y)$ .
- ד. (5 נקודות) חשבו את  $Var(2X - Y + 1)$ .

### שאלה 2 (33 נקודות):

בכד יש שלושה כדורים שחורים ושלושה כדורים לבנים. בכל שלב מוציאים שני כדורים מהכד באופן מקרי אחיד ללא החזרה. אם הכדורים משני צבעים שונים אז עוצרים. אחרת מחזירים את הכדורים לכד וחוזרים על הניסוי שוב (הוצאות הכדורים בשלבים שונים בלתי תלויות זו בזו). יהי  $X$  מספר הפעמים שביצענו את הניסוי הנ"ל ויהי  $Y$  מספר הפעמים שהוצאנו כדור לבן.

- א. (7 נקודות) מהי ההתפלגות של  $X$ ?
- ב. (9 נקודות) חשבו את  $E(Y|X = 3)$ .
- ג. (10 נקודות) חשבו את  $\Pr(Y = 1)$ .
- ד. (7 נקודות) האם  $X$  ו- $Y$  בלתי תלויים? הוכיחו את תשובתכם.

### שאלה 3 (33 נקודות):

לכל  $1 \leq i \leq n$  מטילים קובייה הוגנת (כלומר הסתברות  $1/6$  לכל תוצאה אפשרית) כאשר כל הטלות הקובייה בלתי תלויות. לכל  $1 \leq i \leq n$  יהי  $X_i$  משתנה מקרי המוגדר באופן הבא: אם תוצאת הטלת הקובייה ה- $i$  היא 1, אז  $X_i = -1$ , אם תוצאת הטלת הקובייה ה- $i$  היא 2 או 3, אז  $X_i = 0$  ואחרת (כלומר תוצאת הטלת הקובייה ה- $i$  היא 4, 5 או 6) אז  $X_i = 1$ . לכל  $1 \leq i \leq n - 2$  יהי  $Y_i$  משתנה מקרי המוגדר באופן הבא: אם  $X_i = X_{i+1} = X_{i+2}$  אז  $Y_i = 1$  ואחרת  $Y_i = 0$ . יהי  $Y = \sum_{i=1}^{n-2} Y_i$ .

- א. (7 נקודות) חשבו את  $\Pr(X_1 = 0, Y_1 = 0)$ .
- ב. (8 נקודות) חשבו את התוחלת של  $Y$ .
- ג. (10 נקודות) הוכיחו ש- $Var(Y) \leq n$ .
- ד. (8 נקודות) הוכיחו ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\left(Y \geq \frac{n}{5}\right) = 0$ .

