אי-רציונאליות של שורש 2

אלעד אייגנר-חורב

המחלקה למדעי המחשב
אוניברסיטת אריאל

משפט 1. $\sqrt{2}$ הינו אי-רציונאלי.

שתי הוכחות תסופקנה במסגרת תקציר זה. על הראשונה ניתן לומר שזו איננה "מלאה". לעומתה השנייה לא תחסיר שום פרט.

לשם ההוכחה הראשונה אנו נזדקק לעובדה הבאה; הוכחתה של זו מואצלת לקורא כתרגיל חימום.

למה 2. יהי $a \in \mathbb{Z}$. אזי a^2 הינו אי-זוגי אם ורק אם a הינו אי-זוגי.

<u>הוכחה ראשונה עבור משפט 1:</u>

נניח בשלילה כי הטענה איננה נכונה וכי $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. אם כך נוכל לרשום $\sqrt{2} = \frac{a}{b}, b \neq 0$, כאשר ללא הגבלת הכלליות, נוכל להניח כי השבר $\frac{a}{b}$ איננו ניתן לצימצום. אם כך, $a^2 = 2b^2$ ומכך ניתן להסיק כי a^2 זוגי ואזי, לפי למה 2, a זוגי אף הוא.

על מנת להגיע לסתירה נראה כי b הינו זוגי גם כן, בסתירה לכך שהשבר $\frac{a}{b}$ איננו ניתן לצימצום. לשם כך, נוכל לרשום כי $a = 2c$ עבור שלם c כלשהוא, שכן a זוגי. הצבה למשוואה $a^2 = 2b^2$ נותנת $(2c)^2 = 2b^2$ ומשם נקבל כי $b^2 = 2c^2$. לפי למה 2, נובע כי b זוגי.

Q.E.D.

הבעיה המרכזית בהוכחה לעיל הינה שאין לנו מושג אם ההנחה המרכזית בהוכחה זו - שהשבר $\frac{a}{b}$ איננו ניתן לצימצום - הינה נכונה. אנו כעת נספק הוכחה נוספת למשפט 1; כזו שלא יהיו בה חלקים חסרים. ההבדל המרכזי בין שתי ההוכחות הינו שבהוכחה השנייה אנו נוכיח ששברים שאינם ניתנים לצימצום קיימים באופן הנדרש לעיל. ההוכחה הזו תישען על עיקרון הסדר הטוב.

<u>הוכחה שנייה עבור משפט 1:</u>

נניח בשלילה כי $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ואזי קיימים שלמים $m, n \in \mathbb{Z}$ כך ש $\sqrt{2} = \frac{m}{n}, n \neq 0$. היות ו $2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2$ נוכל להניח כי $m, n \in \mathbb{N}$. נובע אם כן, כי הקבוצה

$$S := \{(m,n) : m^2 = 2n^2, m, n \in \mathbb{N}\}$$

איננה ריקה. ואם כך, הקבוצה

$$S' := \{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ s.t. } (m,n) \in S\}$$

איננה ריקה אף היא. היות והאחרונה תת קבוצה של המספרים הטבעיים, קיים בזו איבר מינימאלי על פי עיקרון הסדר הטוב. יהי n^* האיבר המינימאלי ב S'. אזי, קיים $m^* \in \mathbb{N}$ כך ש $(m^*, n^*) \in S$.

על מנת להגיע לסתירה נראה כי קיים זוג $(p,q) \in S$ המקיים $q < n^*$. לשם כך נגדיר $q := m^* - n^*$.
היות ו $(m^*)^2 = 2(n^*)^2$ נובע כי $n^* < m^*$ ולכן $q \in \mathbb{N}$. בנוסף, מתקיים כי $q < n^*$. על מנת לראות את זה, הבה נניח בשלילה כי לא כך הדבר וכי $q \geq n^*$. דהיינו, $m^* - n^* \geq n^*$ ובצורה יותר קומפקטית נרצה להוכיח כי $m^* \geq 2n^*$. אם כך, נקבל כי,

$$(m^*)^2 \geq (2n^*)^2 > 2(n^*)^2.$$

אי-שיוויון זה עומד בסתירה להנחה כי $(m^*)^2 = 2(n^*)^2$. הוכח, אם כן, כי $q < n^*$ ובפרט הוכחנו כי

$$m^* < 2n^*. \quad (1)$$

נותר להגדיר $p \in \mathbb{N}$ כך ש $(p,q) \in S$. הווה אומר, יש להראות כי קיים $p \in \mathbb{N}$ כך ש $2q^2 = p^2$.
נבחין כי

$$\begin{aligned}
2q^2 &= 2(m^* - n^*)^2 \\
&= 2(m^*)^2 - 4m^*n^* + 2(n^*)^2 \\
&= 2 \cdot 2(n^*)^2 - 4m^*n^* + (m^*)^2 \\
&= 4(n^*)^2 - 2(2n^*)(n^*) + (m^*)^2 \\
&= (2n^* - m^*)^2 .
\end{aligned}$$

נגדיר $p = 2n^* - m^*$. נשים לב כי נובע מ (1) ש $p \in \mathbb{N}$.

Q.E.D.