

מבחן בקורס הסתברות 1

סמסטר ב, מועד א

30.06.2019

פרופ' דן חפץ

אוניברסיטת אריאל

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה למדעי המחשב

משך הבחינה: 3 שעות

המבחן הינו עבור מספרי קורס: 2-7028410-1 ו-2-7028410-3

מבנה המבחן: 4 שאלות ללא בחירה.

הנחיות:

1. המבחן הינו עם חומר סגור ובכתב יד ללא שימוש בשום אמצעי אלקטרוני (מותר מחשבון פשוט אם כי אין בו צורך). עם זאת, כל סטודנט רשאי להביא דף אחד מגודל A4 כתוב משני צדדיו. על התלמיד לכתוב את שמו ומספר תעודת הזהות שלו על הדף הנ"ל.
2. אין לכתוב בעפרון.
3. יש להוכיח כל טענה שאתם כותבים גם אם לא התבקשתם לעשות זאת במפורש בשאלה.
4. למרות האמור בסעיף 3 לעיל, ניתן להסתמך ללא הוכחה על כל טענה שנלמדה בשיעור (אלא אם כן זו הטענה שהנכם מתבקשים להוכיח בשאלה). יש לצטט את הטענה עליה הנכם מסתמכים בצורה ברורה.
5. בפתרון סעיף כלשהו בשאלה, ניתן להסתמך על תוצאת סעיפים קודמים גם אם לא פתרתם אותם.

שאלה 1 (25 נקודות):

יהיו X ו- Y משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים $P(X = 0) = P(Y = 1) = 1/3$ ו- $P(X = 1) = P(Y = 0) = 2/3$. יהיו $Z_1 = X + Y$ ו- $Z_2 = X - Y$.

- א. (15 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של Z_1 ו- Z_2 .
- ב. (5 נקודות) חשבו את ההתפלגות השולית של Z_2 .
- ג. (5 נקודות) חשבו את $P(Z_1 > Z_2)$.

שאלה 2 (25 נקודות):

יהיו B, A ו- C מאורעות כלשהם באותו מרחב הסתברות (Ω, P) . הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

- א. (8 נקודות) אם A ו- B בלתי תלויים וגם B ו- C בלתי תלויים אז A ו- C בלתי תלויים.
- ב. (8 נקודות) אם $P(A|C) > 2/3$ וגם $P(A|C^c) > 2/3$ אז $P(A) > 2/3$.
- ג. (9 נקודות) אם A ו- B בלתי תלויים בהנתן C והם גם בלתי תלויים בהנתן C^c אז הם בלתי תלויים.

שאלה 3 (25 נקודות):

יהי $n \geq 1$ מספר טבעי. לכל $1 \leq i \leq n$, בסיבוב ה- i מטילים שלושה מטבעות הוגנים ששני צידיהם מסומנים ב-0 וב-1, כאשר כל ההטלות בלתי תלויות (גם בין הסיבובים וגם בתוך כל סיבוב). יהי X משתנה מקרי הסופר את מספר הסיבובים בהם תוצאות כל שלוש ההטלות היו 0 ויהי Y משתנה מקרי הסופר את מספר הסיבובים בהם יותר הטלות נתנו את התוצאה 1 מאשר את התוצאה 0. יהי Z משתנה מקרי הסופר את כל הטלות המטבע שתוצאתן 0.

- א. (8 נקודות) חשבו את ההתפלגות של X ואת ההתפלגות של Y .
- ב. (7 נקודות) חשבו את התוחלת של Z .
- ג. (10 נקודות) הוכיחו ש- $P(Z - X \geq 2n) < 3/4$.

שאלה 4 (25 נקודות):

יהי $n \geq 1$ מספר טבעי. לכל $1 \leq i \leq n$ מטילים קוביה הוגנת, כאשר כל הטלות הקוביה בלתי תלויות. יהי X משתנה מקרי הסופר את מספר ההטלות שתוצאתן קטנה ממש מ-4 ויהי Y משתנה מקרי הסופר את מספר ההטלות שתוצאתן 3 או 4.

- א. (6 נקודות) חשבו את השונות של X ואת השונות של Y .
- ב. (12 נקודות) חשבו את $Var(X - Y)$.
- ג. (7 נקודות) הוכיחו ש- $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X > Y) = 1$.

