פתרון למבחן באלגברה לינארית 1 תש"פ סמסטר ד, 2.7.20.

הערה: אין תשובות שדורשות חלק א צריך להיות מלאה, מי שמקבל פחות מ-15 נכשל.

(1) רשימת האקסיומות כמופיעה ברשימות להרצאה הראשונה שלי, בספר לימוד.

[$a+b\in F$ לכל $F\ni a,b$] אינה אקסיומה אלא חלק מההגדרה של פעולה בינרית.

[$a\cdot 0=0$] אינה אקסיומה אלא תוצאה. [$a(b/c)=a/bc$] אינה אקסיומה אלא בכלל זו.

[$a(bc)=(ab)c$ לכל $F\ni a,b,c$] היא אקסיומה ברורה. [החוק האסוציאטיבי] זה לא תואר האקסיומה, אלא רק שם, כמו [אקסיומה מספר 5].

(2) $u,v,w\in V$ בת"ל אם הפתרון היחיד של $0=au+bv+cw$ ב-$a,b,c\in F$ הוא $a=b=c=0$.

[דוגמא להגדרה בלתי ברורה: "הוקטורים u,v,w בת"ל כאשר קיימים סקלרים (היכן?) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כך ש- $\alpha_1u+\alpha_2v+\alpha_3w=0$ בהכרח כל הסקלרים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ שווים ל-0". כמובן שקיימים $\alpha_i=0$ מה שאנו מנסים ללמד במתמטיקה הוא מבנה משפט פשוט וברור: אם $0=au+bv+cw$ עבור $a,b,c\in F$, אז $a=b=c=0$.]

(3) $A\in M_{3\times 3}(F)$ בלתי הפיכה אם"ם למערכת $AX=0$ יש אינסוף פתרונות (או לא רק הפתרון $X=0$, או: לפחות שני פתרונות. אבל: "אין פתרון יחיד" היא תשובה לא נכונה: "אין פתרונות" לא נכון).

(4) $U+W=\{u+w;\ u\in U, w\in W\}$ (או $\mathrm{Span}(U\cup W)=$, או Span(בסיס של U, בסיס של W), אבל ברור שאלו הגדרות שקולות, כלומר תוצאות, ולא ההגדרה המקורית. למשל ב-(2) אמנם נכון ש"אף וקטור אינו צירוף לינארי של השניים האחרים", אבל זוהי תוצאה, לא הגדרה). שם, לא בהכרח נכון, אבל בגלל נפסל בבחינה הבחין התלמיד לא יעבור 15/20 מחלק זה.

(5)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&4&1\\1&2&1&0&0\\2&1&1&1&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&0&1&1\\0&0&1&2&2\end{array}\right)\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{array}{cccc} \alpha=0 & \alpha=1 & \alpha=2 & \\ \begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}2\\1\\2\\0\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix} & \beta=0\\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}2\\2\\0\\1\end{pmatrix} & \beta=1\\ \begin{pmatrix}2\\0\\1\\2\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}0\\1\\1\\2\end{pmatrix}, & \begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\end{pmatrix} & \beta=2\end{array}$$

$\alpha,\beta\in F_3$, לכן יש $3\times 3=9$ פתרונות, צריך לכתוב אותם.

(6) $U=Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$, $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$, $U+W=Sp\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}}_{\text{מ-}W},\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\2\\3\end{pmatrix}}_{\text{מ-}U}\right\}\Rightarrow \dim(U+W)=3$; ברור ש: $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\in W$.

$Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}=U\cap W$, כי $W\not\ni\begin{pmatrix}0\\0\\2\\3\end{pmatrix}$, $W\ni\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$. $\dim U\cap W=1$.

(8) $W=Sp(u-av, u+av, u+v+aw, u+v-aw)$; $a\in F$; $\dim Sp(u,v)=2$; $u,v,w\in V$, $F=\mathbb{R}$

$u=\frac{1}{2}(u-av)+\frac{1}{2}(u+av)\in W$; $u+v=\frac{1}{2}(u+v+aw)+\frac{1}{2}(u+v-aw)\in W\Rightarrow u,v\in W\Rightarrow \dim W\geq 2$

$W\subset Sp(u,v,w)$; $\dim Sp(u,v,w)\leq 3\Rightarrow \dim W\leq 3$.

(7) $|B|=-(-i)=i$, $|A|=(2-i)(1+2i)(1+i)$

$|A||B|^{-1}=i(i-2)(1-2+3i)$

$=(-1-2i)(-1+3i)$

$=1+6+2i-3i=7-i$

(9) $\begin{pmatrix}-1&1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

(10) $V=\{(a_{ij});\ a_{ij}=a_{ji}\in F\ \forall i,j\ (1\le i,j\le n)\}$

בסיס ל-V: $\{E_{ii}\ (1\le i\le n),\ E_{ij}+E_{ji}\ (1\le i<j\le n)\}$

כאשר E_{ij} היא המטריצה שכל מקדמיה 0 חוץ מ-1 בשורה i ועמודה j.

מספר ה-E_{ii} הוא n. מספר הזוגות $1\le i<j\le n$ הוא: $\frac{n(n-1)}{2}=\underset{i=n-1,\ n-2}{1+2}+\dots+\underset{i=1}{(n-1)}$.

סה"כ: $n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$. אם לא ברור, עשו קודם את הדוגמאות הקטנות: $n=2$, $n=3$, $n=4$.

(11) F שדה. $A\in M_{4\times2}(F)$, $B\in M_{2\times4}(F)$, $C=AB$ היא 4×4. $U=$ מרחב הפתרונות של: $CX=0$.

לכן, מרחב הפתרונות לא ישתנה אם נבצע פעולות שורה אלמנטריות על C, כלומר נכפיל את C במטריצות אלמנטריות משמאל, כלומר נכפיל את A במטריצות אלמנטריות משמאל, כלומר נבצע פעולות שורה אלמנטריות על A, כלומר אפשר להניח ששתי השורות התחתונות של A הן $(0,0)$, ושתי השורות העליונות הן: $\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}$, או $\begin{smallmatrix}1&a\\0&0\end{smallmatrix}$ $(a\in F)$, או $\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}$. במילים אחרות הצורה המדורגת הקנונית של A מכילה לכל היותר שני מובילים. לכן שתי השורות התחתונות של AB, לאחר דרוג, הן 0, ויש ב-AB לאחר דרוג לכל היותר שני מובילים, כלומר לפחות שני משתנים חופשיים. לכן $\dim U\ge 2$.

בפרק הבא שננסח שאלה זאת נדרש לא להשתמש במשפטים כבדים, אלא אם כן אותם מוכיחים שוב. מי שהתחכם והשתמש ב-Rank+Null משפט, לא קיבל נקודות, הפרק.

(12) $\max(-.2x+y, 0)$, $y=$ ממוצע בין 0 ל-20 של 4 המטלות הגבוהות, $x=$ סכום ציוני $(1)+..+(11)$ בתנאי ש $55\le x$, $x\le 99$.

(13) 5 נקודות אם מטלה 5 יותר מ-80%.

מטרת הבונוס (12)+(13) אינה מוסרית, ואני מקווה שלא תפגע בציונכם. המטלות נועדו שתרכשו נסיון. מי שלא רוצה ללמוד, בבקשה. אין טעם בבדיקת מטלות בהן המתרגל מקבל ציון "משוב מלמידים" על בדיקת המטלה.