טענה 7 (מבחן ההשוואה הגבולי): יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות אינטגרביליות בכל קטע $[a,t]$, כאשר $a<t<b$ (b יכול גם להיות אינסוף) וכן $f(x)>0, g(x)>0$ לכל x בקטע זה. ונניח שהגבול $\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}$ קיים במובן הרחב. אזי,

אם הגבול סופי, שונה מאפס, אז $\int_a^b g(x)dx$ מתכנס אמ"מ $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס.

אם הגבול 0, אז אם $\int_a^b g(x)dx$ מתכנס, אז $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס.

אם הגבול הוא אינסוף, אז אם $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס, אז $\int_a^b g(x)dx$ מתכנס.

הוכחה: נוכיח במקרה ש- b מספר ממשי, המקרה האינסופי באופן דומה. נניח ש- $\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=c>0$ מספר ממשי. יהי $0<\varepsilon<c$, אזי קיימת $\delta>0$, כך שלכל $b-\delta<x<b$, $0<c-\varepsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<c+\varepsilon$.

מכאן ש- $0<(c-\varepsilon)\cdot g(x)<f(x)<(c+\varepsilon)\cdot g(x)$. ולפי מבחן ההשוואה $\int_a^b g(x)dx$ מתכנס אמ"מ $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס, כנדרש.

אם $\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, אז $f(x)=o(g(x))$ ולכן גם $f(x)=O(g(x))$, לכן לפי מבחן ההשוואה אם $\int_a^b g(x)dx$ מתכנס, אז $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס, כנדרש.

אם $\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$, אז $\lim_{x\to b}\frac{g(x)}{f(x)}=0$ ומכאן הטענה ברורה. □

טענה 9 (מבחן דיריכלה): יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ פונקציות רציפות בתחום $x\ge a$, כך ש-

א. $f(x)\ge 0$, בעלת נגזרת רציפה, מונוטונית יורדת ומתכנסת ל- 0 בקטע $[a,\infty)$.

ב. הפונקציה $G(x)=\int_a^x g(t)dt$ חסומה ב- $[a,\infty)$.

אזי, $\int_a^\infty f(x)g(x)dx$ מתכנס.

הוכחה: $\int_a^\infty f(x)g(x)dx=f(x)\cdot G(x)\Big|_a^\infty-\int_a^\infty f'(x)\cdot G(x)dx$. מאחר ש- G חסומה, קיים $M>0$, כך ש- $|G(x)|<M$ ומאחר ש- f אפיסה באינסוף, המחובר הראשון שווה ל- $0-f(a)\cdot G(a)=0-0=0$.

לפיכך, $\int_a^\infty f(x)g(x)dx=\int_a^\infty -f'(x)\cdot G(x)dx$, נראה שאינטגרל זה מתכנס בהחלט. מאחר ש- f יורדת $-f'(x)>0$ לכל x. ולכן

$\int_a^\infty \left|-f'(x)\cdot G(x)\right|dx=\int_a^\infty -f'(x)\cdot|G(x)|dx\le M\cdot\int_a^\infty -f'(x)dx=M\cdot f(a)$. מכאן שאינטגרל זה מתכנס בהחלט ולכן גם מתכנס. □

טענה 11 (תנאי הכרחי להתכנסות באינסוף): אם קיים הגבול $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ ואם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס, אז בהכרח $L = 0$.

הוכחה: נניח בשלילה ש- $\lim_{x\to\infty} f(x) = L \neq 0$. אם $L > 0$, אז קיים $M > 0$ כך שלכל $x > M$, $f(x) > \frac{L}{2}$ ומאחר ש- $\int_a^\infty \frac{L}{2}dx$ מתבדר, גם $\int_a^\infty f(x)dx$ מתבדר, סתירה. במקרה ש- $L < 0$, נראה ש- $\int_a^\infty -f(x)dx$ מתבדר מה שגם מוביל לסתירה. □

טענה 2 (תנאי הכרחי להתכנסות טור): תנאי הכרחי להתכנסות טור $\sum_{n=1}^\infty a_n$ הוא ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

הוכחה: נניח שהטור $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס, ויהי $\varepsilon > 0$, לפי קריטריון קושי, קיים $N > 0$, כך שלכל $n, n-1 > N$, $|S_n - S_{n-1}| = |a_n| < \varepsilon$, מכאן ש- $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, מה שגורר לפי טענה מקורס קודם, ש- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

טענה 5: יהי $\sum_{n=1}^\infty a_n$ טור חיובי. אם הטור אינו מתכנס, אז הטור מתבדר לאינסוף.

הוכחה: נסתכל על סדרת הסכומים החלקיים $(S_n)_{n=1}^\infty$. סדרה זו הינה מונוטונית עולה מאחר שלכל $n \geq 2$ טבעי מתקיים: $S_n - S_{n-1} = a_n > 0$, כלומר $S_{n-1} < S_n$. מה שמבטיח שסדרת הסכומים החלקיים מתכנסת או שואפת לאיסוף, כנדרש. □

טענה 9: יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ שני טורים חיוביים. אם $\frac{b_{n+1}}{b_n} \le \frac{a_{n+1}}{a_n}$ עבור כמעט כל n, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מכסה את הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

הוכחה: נראה שבתנאים אלו $a_n = O(b_n)$. אפשר להניח ש- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ עבור כל n (מאחר שהתכנסות אינה תלויה באיברים הראשונים של הטור). יהי $c > 0$, כך ש- $a_1 < c \cdot b_1$, (קיים כזה c, למשל $c = \frac{a_1}{b_1} + 1$). כעת, נראה באינדוקציה שלכל n, מתקיים $a_n < c \cdot b_n$.

המקרה $n = 1$ הוכח לעיל.

נניח נכונות הטענה עבור n, כלומר נניח ש- $a_n < c \cdot b_n$ ונוכיח את הטענה עבור $n+1$, כלומר נוכיח ש- $a_{n+1} < c \cdot b_{n+1}$. לשם כך מספיק להראות ש- $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{c \cdot b_{n+1}}{c \cdot b_n}$. אך אי שוויון זה נתון. □

טענה 14: אם טור מתכנס בהחלט, אז הוא גם מתכנס.

הוכחה: אם נסמן $S_m = \sum_{n=1}^{m} |a_n|$ ו- $S_m^* = \sum_{n=1}^{m} a_n$, אז, לפי קריטריון קושי, מאחר שהטור מתכנס בהחלט, אם $\varepsilon > 0$, אז קיים $N > 0$, כך שלכל $m,n > N$ טבעיים $|S_m - S_n| < \varepsilon$ ולכן לפי אי שוויון המשולש, אם נניח גם בה"כ ש- $m > n$

$$|S_m^* - S_n^*| = |a_m + \cdots + a_{n+1}| \le |a_m| + \cdots + |a_{n+1}| = \left||a_m| + \cdots + |a_{n+1}|\right| = |S_m - S_n| < \varepsilon$$ □

משפט 1 (משפט אבל): אם טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס עבור $x = x_0$, $x_0 \neq 0$, אז הוא מתכנס בהחלט עבור כל x , כך ש- $|x| < |x_0|$.

הוכחה: לפי ההנחה, הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ מתכנס, לפיכך $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$, מכאן שהסדרה $a_n x_0^n$ חסומה, כלומר, קיים $M > 0$ כך ש- $|a_n x_0^n| < M$.

כעת, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \leq M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ ומאחר שהטור באגף ימין הינו טור הנדסי מתכנס, הטור באגף שמאל מתכנס. □

משפט 2: עבור כל טור חזקות, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, קיים $0 \leq r \leq \infty$ כך שהטור מתכנס בהחלט עבור כל $|x| < r$ ומתבדר עבור כל $|x| > r$.

הוכחה: תהי A קבוצת כל ערכי ה- x עבורם הטור מתכנס. $A \neq \phi$, כי $0 \in A$. אם A אינה חסומה מלעיל, אז הטור מתכנס עבור כל $x > 0$, כי אחרת אם $x_1 > 0$ הוא מספר עבורו הטור מתבדר, אז מאחר ש- A אינה חסומה מלעיל, קיים $a \in A$, כך ש- $x_1 < a$ בסתירה למשפט הקודם, אבל זה גורר (שוב לפי המשפט הקודם) שהטור מתכנס גם עבור כל $x < 0$. כעת אם A חסומה מלעיל, אז יהי $a = \sup A$. לפי המשפט הקודם הטור מתכנס עבור כל $|x| < a$ ומתבדר עבור כל $|x| > a$. □