חשבון אינפיניטסימלי 2

טורים:

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ קוראים טור מתכנס אם קיים גבול של סדרה של סכומים חלקיים

$$s_1+s_2+s_3+\ s_4+s_5\ldots+s_n+\cdots$$

ז"א:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

אם טור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס אז קיבלנו שארית שואפת ל-0 כלומר $\lim_{m\to\infty} r_n = 0$.

(קריטריון קושי להתכנסות) טור $u_1,\ u_2,\ u_3, u_4\ , u_5 \ldots., u_n \ldots$ מתכנס אם לכל p טבעי קיים לכל $\varepsilon > 0$ *מתקיים* $N(\varepsilon)$ $n >$ *כך ש:* $\left|u_{n+1}+\ldots.+u_{n+p}\right| < \varepsilon$.

משפט: (תנאי הכרחי להתכנסות) נתון טור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1+u_2+u_3+\ u_4+u_5\ldots+u_n+\cdots$ אם $u_1,\ u_2,\ u_3, u_4\ , u_5 \ldots., u_n \ldots.$ אז האיבר כללי שואף ל-0

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

טור הנדסי: $a+aq+aq^2+\ldots+aq^{n-1} = \begin{cases} |q|<1 & \text{מתכנס } \frac{a}{1-q} \\ |q|\geq 1 & \text{מתבדר} \end{cases}$

משפט: אם $A = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ו- $B = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ מתכנסים אז גם $\sum_{n=1}^{\infty}[u_n \pm v_n]$ מתכנס.

אם $A = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ו- $B = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ הם טורים הנבדלים במספר סופי של איברים אז $A = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ מתכנס אם ורק אם $B = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ מתכנס.

מבחן ההשוואה הראשון:
נתונים שתי תורים :

I. $A = u_1+u_2+u_3+\ u_4+u_5\ldots+u_n+\cdots$
II. $B = v_1+v_2+v_3+\ v_4+v_5\ldots+v_n+\cdots$

כך ש: $\forall n:\ u_n < v_n$ מכאן נובע מן ההתכנסות של *B* נובע ההתכנות של ש*A*
אם *A* מתבדר אז גם *B* מתבדר

מבחן ההשוואה השני:
אם $\exists$ גבול סופי של $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = k \neq 0$ אז או ששניהם מתכנסים או ששניהם מתבדרים.

מבחן השלישי:
אם לכל n מתקיים :

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n} \\ u_n \neq 0 \\ v_n \neq 0 \end{cases}$$

א. אזי אם טור B מתכנס אזי גם טור A מתכנס.
ב. אזי אם טורA מתבדר אזי גם טור B מתבדר.

מבחן דלמברג:
אם קיים גבול לטור $u_1+u_2+u_3+\ u_4+u_5\ldots+u_n+\cdots$ אזי:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = D\begin{cases} D<1 & \text{מתכנס} \\ D>1 & \text{מתבדר} \end{cases}$$

מבחן קושי:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \begin{cases} k<1 & \text{מתכנס} \\ k=1 & ? \\ k>1 & \text{מתבדר} \end{cases}$$

מבחן האינטגרל:
לפי טור A בונים אינטגרל כזה:
$\int_1^{\infty} f(x)dx$ כך ש: $u_n = f(n)$
אם קיים אינטגרל אז הטור מתכנס אם לא קיים אינטגרל אז הטור מתבדר.

טור הרמוני – $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots..+\frac{1}{n}+\ldots$

מבחן ההתכנסות לפי לבייניץ' –
אם מתקיימים התנאים הבאים :

$$\left|u_{n+1}\right| < \left|u_n\right| \quad (1)$$
$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \quad (2)$$

אז הטור מתכנס.

נתון $\boldsymbol{A = \sum_1^{\infty}(-1)^n u_n}$ ו- $\boldsymbol{B = \sum_1^{\infty}|u_n|}$ אם **B** מתכנס אז **A** מתכנס בערך מוחלט.

לטור $\sum_1^{\infty}\boldsymbol{u_n}$ קוראים טור מתכנס אם $\sum_1^{n\infty}|u_n|$ מתבדר.

אינגרלים:

תכונות של אינטגרליים לא מסוימים:

1. הגדרה: $\int f(x)\,dx = F(x)+c$ כאשר $F'(x) = f'(X)$.
2. $(\int f(x)\,dx)' = f(x)$
3. $d(\int f(x)\,dx)' = f(x)\,dx$
4. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
5. $\int[f_1(x) \pm f_2(X)]\,dx = \int f_1(x)\,dx\ \pm \int f_2(X)\,dx$
6. $\boldsymbol{\int\frac{f(X)}{g(X)}dx \neq \frac{\int f(X)\,dx}{\int g(x)\,dx}}$
7. $\boldsymbol{\int f(x) * g(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx * \int g(x)\,dx}$

אינטגרליים מיידים:

1. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c$
2. $\int 1\,dx = x+c$
3. $\int\frac{1}{x}dx = \ln|x|+c$
4. $\int\frac{dx}{1+x^2} = arc\tan x+c$
5. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\sin x+c$
6. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a}+c$
7. $\int e^x\,dx = e^x$
8. $\int\sin x\,dx = -\cos x+c$
9. $\int\cos x\,dx = \sin x+c$
10. $\int\frac{dx}{(\cos x)^2} = \tan x+c$
11. $\int\frac{dx}{(\sin x)^2} = \cot x+c$
12. $\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arc\sin\left(\frac{x}{a}\right)+c$
13. $\int\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}arc\cos\left(\frac{x}{a}\right)+c$
14. $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+\lambda}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+\lambda}\right|+c$
15. $\int\left(\sqrt{a^2-x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2 arc\sin x\right)$

אינטגרציה בחלקים : $\int u\,dv = u\cdot v-\int v\,du$

האינטגרל המסויים:

האינטגרל לפי רימן:

- $\lambda = max(x_{k+1}-x_k)$
- סכום רימן $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(x_{k+1}-x_k)$
- סכום רימן σ מתכנס למספר I אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\forall\varepsilon\exists\eta(\varepsilon) > 0, |I-\sigma| < \varepsilon$

  $$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = I$$
- **קריטריון קושי לאינטגרליות:** תנאי הכרכי ומספיק ($\Leftrightarrow$ אם ורק אם) להתכנסות של σ (לפונקציה $f(x)$) $\lambda' < \eta_1, \lambda'' < \eta\ :\ \forall\varepsilon > 0\ \exists\lambda',\lambda''$ כך ש: $|\sigma'-\sigma''| < \varepsilon$
- סכום רימן $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(x_{k+1}-x_k)$
- אם הסכומים תלויים בחלוקת [a,b] ובחירת $c_k \in [x_k, x_{k+1}]$ אורך מקסימלי של קטע c_k *נסמן* λ
- $\lambda = max(x_{k+1}-x_k)$
- σ מתכנס למספר I כאשר $\lambda\to 0$ אם $\forall\varepsilon > 0$ קיים $n > 0$ כאשר $\lambda > n$

  $$|\sigma-I| < \varepsilon$$
  $$\lim_{n\to\infty}\sigma = I$$
- *פונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אם סכום רימן מתכנס כאשר* $\lambda\to 0$

סכום דרבו:

- **סכומי דרבו**: ניקח פונקציה $f(x)$ בקטע $[a,b]$ חסומה.
- אף סכום עליון הוא לא קטן מאף סכום תחתון.
- <u>מסקנה:</u> כל פונקציה $f(x)$ קיים אי שיוויון $\underline{I} \leq \overline{I}$
- **סכומי דרבו עוסק בפונקציות חסומות (חסם עליון וחסם תחתון)**

תנאים מספיקים לאינטגרביליות (פונקציות חסומות):
לסיכום:

- תכונות אינטגרל מסוים:
  1. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
  2. $\int_a^b[f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
  3. אם $f(x)$ אינטגרלית ב- ב $[a,b]$ ו- ב $[b,c]$ אז: $\int_a^c f(x)\,dx =$

     $\int_a^b f(x)\,dx = \int_b^c f(x)\,dx$
  4. $\int_a^a f(x)\,dx = 0,\ \int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$
  5. אם $m \leq f(x) \leq M$ אז $m(b-a) < \int_a^b f(x)\,dx < M(b-a)$
- $f(x)$ אינטגרלית בקטע $[a,b]$ אם ורק אם $\lim_{\lambda\to 0}[S-s] = 0$
- כל $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$היא אינטגרלית.
- כל פונקציה מונוטונית ב $[a,b]$ היא אינטגרלית.
- כל $f(x)$ שחסומה ויש ב- $[a,b]$ ויש מספר סופי של נקודות אי רציפות (או $f(x)$ רציפה במקטעים) היא אינטגרבילית.

- יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ אנטגרביליות ב- $[a,b]$ אזי: $f(x)\pm g(x)$ גם אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.
- לכל קבוע c אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אז גם $c\cdot f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו-

$$\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)$$

- יהיו $f(x)$ ו- $g(x)$ אנטגרביליות ב- $[a,b]$ אזי: $f(x)\cdot g(x)$ גם אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.
- אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע$[c,b]$ $[a,c]$ אז גם $f(x)$ אינטגרבילית בכל הקטע $[a,b]$.
- **הכללה:** אם נחלק את הקטע $[a,b]$ כך: $[a,b]=$
$[a,x_1],[x_1,x_2],[x_2,x_3],\dots,[x_{n-1},b]$אז:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{x_1}f(x)\,dx+\int_{x_1}^{x_2}f(x)\,dx+\int_{x_2}^{x_3}f(x)\,dx+\ldots+\int_{x_{n-1}}^{b}f(x)\,dx$$

- אם $f(x),g(x)$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$
 א. אם $\forall x\in[a,b]$, $f(x)\ge m$ מתקיים: $\int_a^b f(x)\,dx\ge m(b-a)$
 ב. אם $\forall x\in[a,b]$, $f(x)\le M$ מתקיים: $\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$
 ג. אם $\forall x\in[a,b]$, $f(x)\ge g(x)$ מתקיים: $\int_a^b f(x)\,dx\ge\int_a^b g(x)$
 כל שלולה משפטים אלו מתבססים על ההגדרה סכומי רימן.
- (ערך הבניים של אינטגרל) אם $f(x)$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$ אזי קיימת נקודה c כך ש:

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$$

- אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ אזי גם $|f(x)|$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ומתקיים:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\le\int_a^b|f(x)|\,dx$$

אינטגרל של גבול משתנה:

- $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,dt=\ldots$
- (x) רציפה ב-$[A,B]$
- תהי $f(x)$ פונקציה רציפה ב- $[A,B]$ לכל $c\in[A,B]$ אז הפונקציה מוגדרת באופן הבא: $F(x)=\int_c^x f(t)dt$ אזי ל$f(x)$ יש פונקציה קדומה: $F'(x)=f(x)$
- (משפט יסודי של חשבון איפינטיסימלי, משפט-ניוטון לייבניץ) אם $f(x)$ רציפה ב-$[a,b]$ ו-$F(x)$ פונקציה קדומה של $f(x)$, אז:

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$$

- (שטח של טרפז בין שתי עקומים) מספר שונות $\int_a^b f(x)\,dx$ מבחינה גאומטרית מייצג שטח שחסום ע"י

אינטגרלים לא אמתיים:

- אם קיים $b\to\infty$ אזי אינטגרל I_1 מתכנס.

$$I_1=\int_a^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

- אם קיים $a\to-\infty$ אזי אינטגרל I_2 מתכנס.

$$I_2=\int_{-\infty}^b f(x)\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

- אם קיימים $b\to\infty$ ו-, $a\to-\infty$ אזי אינטגרל I_3 מתכנס.

$$I_3=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx$$

- אם ל- $f(x)$ יש נקודת אי רציפות אינסופית (∞) בנקודה c כך ש: $c\in[a,b]$ ורציפה בקטעים: $a\le x<c\cap c<x\le b$ אזי קיים אינטגרל I_4 מתכנס.

$$I_4=\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\alpha\to\infty}\int_a^{c-\alpha}f(x)\,dx+\lim_{\beta\to\infty}\int_{c+\beta}^b f(x)\,dx$$

- האינטגרל $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ תכנס כאשר $p>1$ ומתבדר כאשר $p\le1$.
- האינטגרל $\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^p}$ מתכנס כאשר $p<1$ ומתבדר כאשר $p\ge1$.
- נתון האינטגרל $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ אם$f(x)$ פונקציה אינטגרלית ב- $[a,b]$ כך ש $a<b$.
- a נקודה קבוע יהיה $M,p>0$ (מספרים קבועים)
 א. אם $p>1$ ו- $0\le f(x)\le\frac{M}{x^p}$ כך ש: $x\in[a,+\infty]$ אזי: $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx<\infty$ מתכנס.
 ב. אם $p=1$ ו- $f(x)\ge\frac{M}{x^p}$ אזי:$\forall x\in[a,\infty)$ האינטגרל $\int_a^{\infty}f(x)\,dx$ מתבדר.

התכנסות אינטגרליים בהחלט:

נתונה הפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ (כך ש: $a<b$ וגם a נקודה קבוע) $f(x)$ אינטגרבילית בהחלט בקטע $[a,+\infty)$ אם האינטגרל לא אמיתי מתכנס. *אם אינטגרל לא אמיתי $\int_a^{+\infty}f(x)\,dx$ (a נקודה קבוע) מתכנס אז האינטגרל מתכנס. אזי:* $\int_a^{+\infty}|f(x)|\,dx$.

מבחני השוואה להתכנסות טורים:

משפט: עבור כל שני פונקציות שהן לא שליליות בקטע $[a,\infty)$ ואינטגרבילית בקטע $[a,b]$ (עבור $b>a$) נניח שקיים מספר ממשי כך ש b_0 $x\ge b_0$ ומתקיים: $f(x)\le g(x)$ אזי:

א. אם האינטגרל $\int_a^b g(x)$ מתכנס אז גם האינטגרל $\int_a^b f(x)$ מתכנס.

ב. אם האינטגרל $\int_a^b f(x)$ מתבדר אז גם האינטגרל $\int_a^b g(x)$ מתבדר.

טורים:

- אנו אומרים שהסדרה של $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת בנקודה x_0 כאשר $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x_0)$
- (התכנסות במידה שווה) אנו אומרים שהסדרה $\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$ מתכנסת ממש לפונקציה $f(x)$ אם

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon):n>N(\varepsilon)$$

מתקיים

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

וניתן לרשום זאת כך:

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$$

- הגדרות הבאות שקולות:
 א. הטור $\sum_{n=1}^\infty a_n(x-x_0)^n$ מפותח בסביבת x_0 .
 ב. הטור $\sum_{n=1}^\infty a_n(x-x_0)^n$ מפותח לפי טור חזקות שבסיסו $x-x_0$.
- (משפט אבל) כל טור חזקות $\sum_{n=1}^\infty a_n(x-x_0)^n$ מתכנס בתחום $-R<x-x_0<R$ כאשר רדיוס $=R$.
- לרדיוס התכנסות של טור קוראים ל R (מספר) שבתוכו הטור מתכנס ומחוצה לו הטור מתבדר.
- כדי למצוא רדיוס R יש נוסחאות קושי אדמה:

$$\begin{cases}R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{a_n}}\\[2mm] R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|\end{cases}$$

- נניח $f(x)$מוגדר בקטע $[A,B]$והיא גזירה עד ∞ (כלומר ניתן לגזור את הפונקציה אינסוף פעמים). לכל $n\in\mathbb{N}$ וכל $x\in[A,B]$ מתקיים: $|f^n(x)|\le k$, אזי לכל $(x,x_0)\in[A,B]$ מתקיים טור טיילור ז"א אפשר לפתוח את $f(x)$ לפי טיילור.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{2!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^n(x_0)}{n!}(x-x_0)+\cdots$$

- טורים אלמנטרים של טיילור מקלורן
 1. $e=1+1\cdot x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{n!}x^n$
 2. $\sin x=1\cdot x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7\ldots$
 3. $\cos x=1\cdot x-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6\ldots$
 4. $\ln(x+1)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\ldots$
 5. $\frac{1}{1\pm x}=1\pm x+x^2\pm x^2+\cdots$
- **(משפט/מבחן וירשטראס):** הסדרה $\sum_{n=1}^\infty f(x)=f_1+f_2+\cdots$ שמוגדרת בתחום E, אם קיים טור $\sum_{k=1}^\infty a_k$ חיוביים לכל $x\in E$ ומתקיים: $|f_k(x)|\le a_k$ מ-K מסוים, אזי הטור $\sum_{n=1}^\infty f(x)$ מתכנס ממש.
- **(משפט וויירשטרס השני):** נתונה סדרה $\{f(x)\}_1^\infty$ רציפה ב- E והטור $S(x)=$ $\sum_{n=1}^\infty f(x)$ מתכנס ממש אזי $\sum_{n=1}^\infty f(x)$ רציפה.
- אם סכום של טור $S(x)$ של פונקציות רציפות מתכנס לפונקציה לא רציפה באותו תחום אזי הטור $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ לא מתכנס במידה שווה.
- $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)=(x)$ אם $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ רציף במידה שווה אז $S(x)$ רציף.
- **משפט:** נתונה סדרה של רציפה ב- $[a,b]$ ו-$S(x)$ סכום טור מתכנס במידה שווה, זאת אומרת $S(x)=\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$ אזי קיים:

$$\int_a^b S(x)\,dx=\int_a^b\left(\sum_a^b f_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^\infty\int_a^b f_n(x)\,dx$$

- **משפט:** נתונה סדרה של $\{f(x)\}_1^\infty$ רציפות וגזירות בקטע $[a,b]$ והטור מתכנס במידה שווה אזי $\sum_{n=1}^\infty\int_a^b f'_n(x)$ מתכנס במידה ממש ו- $\int_a^b S'(x)=$ $(\sum_{k=1}^\infty f_k(x))'=\sum_{n=1}^\infty\int_a^b f'_n(x)$.
-