<u>תרגול – הבינום של ניוטון וזהויות</u>

1. הוכח את הזהות הבאה: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$
   א. ע"י הוכחה אלגברית
   ב. ע"י הוכחה קומבינטורית

2. הוכח את הזהות הבאה: $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$
   א. ע"י הוכחה אלגברית
   ב. ע"י הוכחה קומבינטורית

3. הוכח את הזהות הבאה: $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$
   א. ע"י הוכחה אלגברית
   ב. ע"י הוכחה קומבינטורית

4. הוכח את הזהות הבאה: $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$
   א. ע"י הוכחה אלגברית
   ב. ע"י הוכחה קומבינטורית

5. הוכח את הזהות הבאה: $\sum_{i=0}^{k}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i} = \binom{m+n}{k}$ ע"י הוכחה קומבינטורית.

6. הוכח את הזהות הבאה: $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$
   א. ע"י הוכחה אלגברית
   ב. ע"י הוכחה קומבינטורית

7. הוכח את הזהות הבאה: $\sum_{i=0}^{n}\binom{k+i}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}$
   א. ע"י הוכחה אלגברית
   ב. ע"י הוכחה קומבינטורית

8. הוכח את הזהות הבאה: $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n * 2^{n-1}$
   א. ע"י הוכחה אלגברית
   ב. ע"י הוכחה קומבינטורית

9. הוכח את הזהות הבאה: $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k} = 2^{2n}$ ע"י הוכחה קומבינטורית.

10. הוכח את הזהות הבאה: $\frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$
    א. ע"י הוכחה אלגברית
    ב. ע"י הוכחה קומבינטורית

11. הוכח את הזהות הבאה: $\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k}{k} = \binom{2n}{n-1}$ ע"י משפט זהות פסקל.

12. הוכח את הזהות הבאה: $\sum_{k=0}^{n} 2^k\binom{n}{k} = 3^n$
    א. ע"י הוכחה אלגברית
    ב. ע"י הוכחה קומבינטורית

13. הוכח את הזהות הבאה: $\binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = n^2$
א. ע"י הוכחה אלגברית
ב. ע"י הוכחה קומבינטורית

14. הוכח את הזהות הבאה: $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$
א. ע"י הוכחה אלגברית
ב. ע"י הוכחה קומבינטורית

15. הוכח את הזהות הבאה: $(n+1)\binom{n}{k} = (k+1)\binom{n+1}{k+1}$
א. ע"י הוכחה אלגברית
ב. ע"י הוכחה קומבינטורית

16. הוכח את הזהות הבאה: $\sum_{k=0}^{n-m}\binom{m+k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$
א. ע"י הוכחה אלגברית
ב. ע"י הוכחה קומבינטורית

17. הוכח את הזהות הבאה: $\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$
א. ע"י הוכחה אלגברית
ב. ע"י הוכחה קומבינטורית

18. הוכח את הזהות הבאה: $\binom{n}{k-1}\binom{n}{k+1} \le \binom{n}{k}\binom{n}{k}$, $(k \le n-1)$
א. ע"י הוכחה אלגברית
ב. ע"י הוכחה קומבינטורית

19. הוכח את הזהות הבאה: $\binom{n}{m+k} \le \binom{n}{m}\binom{n-m}{k}$
א. ע"י הוכחה אלגברית
ב. ע"י הוכחה קומבינטורית

20. הוכח שהביטוי: $\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$ הוא מספר שלם.

21. הוכח שהביטוי: $\frac{(k!)!}{(k!)^{(k-1)!}}$ הוא מספר שלם.