מרתון - הסתברות 1

מרחב הסתברות:
מבנה מתמטי: (Ω, P) כאשר
Ω הוא מרחב הדגימות.

$P: \Omega \to [0, 1]$ היא פונקציית ההסתברות המקיימת: $\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1$.

דוגמא: הוצאת 2 כדורים מתוך כד שיש בו 2 כדורים לבנים, 1 שחור, 1 אדום.
$\Omega = \{\{w, w\}, \{w, b\}, \{w, r\}, \{b, r\}\}$.
$P(\{w, w\}) = \frac{1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$.
$P(\{w, b\}) = \frac{2}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{3}$.
$P(\{w, r\}) = \frac{2}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{3}$.
$P(\{b, r\}) = \frac{1}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$.

דוגמא נוספת: הטלת 2 קוביות:
$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), \ldots, (6, 6)\}$.
$P((x, y)) = \frac{1}{36}$. הסתברות אחידה.

דוגמא נוספת: סכום הטלת 2 קוביות:
$\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.
$P(2) = \frac{1}{36}$.
$P(7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
...

מאורע:
קבוצה של דגימות.
לדוגמא: עבור המרחב של סכום הטלת 2 קוביות: $A = \{2, 4, 5\}$ הוא מאורע.
עבור הטלת 2 קוביות: $A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ הוא מאורע.

הסתברות של מאורע: $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$.
לדוגמא: עבור הטלת 2 קוביות: $A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ נקבל:
$P(A) = P((1, 1)) + P((2, 2)) + P((3, 3)) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36}$.

תכונות:
1. $P(\Phi) = 0$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
4. אם $A \subseteq B$ אז $P(A) \le P(B)$.
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ בתנאי ש A, B זרים.

6. $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$ בתנאי ש $A_1, A_2, ..., A_n$ זרים זה לזה (זרים בזוגות).
7. חסם איחוד: $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

מאורעות זרים:

- אם A, B, C זרים אז: $A \cap B \cap C = \Phi$ אבל ייתכן שחיתוך בין שתי קבוצות לא יהיה ריק.
- אם A, B, C זרים בזוגות אז: $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \Phi$ ובפרט: $A \cap B \cap C = \Phi$.

הסתברות אחידה:

כאשר: $P(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$.

חישוב הסתברות של מאורע כאשר ההסתברות אחידה: $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

תרגיל:

6. מטילים מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.
א. רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?
ב. רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:
A- התקבל פעם אחת עץ.
D- התקבל לפחות פלי אחד.
ג. מהו המאורע המשלים ל –D.
ד. חשבו את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיפים ב- ג.

פתרון:

א. $\Omega = \{TTT, TTH, THT, HTT, HTH, THH, HHT, HHH\}$.

מרחב המדגם הוא אחיד כי: $P(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. ומתקיים: $|\Omega| = 8$.

ב. $A = \{THH, HTH, HHT\}$. $D = \Omega \backslash \{TTT\}$.

ג. $D^c = \{TTT\}$.

ד. $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{8}$. $P(D) = \frac{7}{8}$, $P(D^c) = \frac{1}{8}$.

הכלה והדחה:

אם A, B, C מאורעות לא זרים אז:

$P(A \cup B \cup C)$

.

באופן יותר כללי: אם $A_1, A_2, ..., A_n$ מאורעות לא זרים אז:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + ... + (-1)^{n+1} P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

תרגיל ממבחן:

שאלה 2 (25 נקודות):

א. (6 נקודות) יהי X משתנה מקרי המקבל רק ערכים שלמים אי-שליליים. הוכיחו ש-$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$. ניתן להשתמש בפעולות שונות על טורים (כגון הפרדה לסכומים, שינוי סדר סכימה וכו') ללא הסבר מדוע זה מותר.

ב. (10 נקודות) מטילים קוביה הוגנת מספר פעמים כאשר כל ההטלות בלתי תלויות. המספרים 1 ו-2 שעל הקוביה צבועים באדום, המספרים 3 ו-4 בכחול והמספרים 5 ו-6 בצהוב. לכל k טבעי חשבו את ההסתברות שב-k ההטלות הראשונות התקבלו מספרים משני צבעים שונים לכל היותר (שימו לב גם לערכי k קטנים).

ג. (9 נקודות) יהי X משתנה מקרי הסופר את מספר ההטלות הנדרשות בניסוי המתואר בסעיף הקודם עד שמתקבלים בפעם הראשונה כל שלושת הצבעים. הוכיחו ש-$E(X) = 5.5$ (שוב שימו לב לערכים הקטנים).

פתרון סעיף ב:

נקבע k כלשהו.

נגדיר את המאורעות הבאים:

R_k - ב k ההטלות הראשונות התקבל אדום.

B_k - ב k ההטלות הראשונות התקבל כחול.

Y_k - ב k ההטלות הראשונות התקבל צהוב.

נחשב את ההסתברות ל 2 צבעים שונים לכל היותר:

$$P(R_k \cap B_k \cap {Y_k}^c) = P(R_k \cap {B_k}^c \cap Y_k) = P({R_k}^c \cap B_k \cap Y_k) = (\frac{2}{3})^k$$

ולכן סה"כ ההסתברות היא: $3 \cdot (\frac{2}{3})^k - 3 \cdot (\frac{1}{3})^k$.

הסתברות מותנה:

העולם באופן כללי הוא Ω.

לעיתים אלו יודעים שהתרחש **מאורע** ואז שואלים מהי ההסתברות לדגימה או למאורע אחר.

התרחשות המאורע מקטינה את עולם הגימות שלנו רק לשטח שבו נמצא המאורע.

כלומר, כל דגימה ששייכת למאורע נשארת אבל מקבלת הסתברות שונה יחסית לגודל המאורע וכל דגימה שהיא מחוץ למאורע, מקבלת הסתברות 0.

לדוגמא: עבור הטלת 2 קוביות.

$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), ..., (6, 6)\}$.

אם ידוע שיצא דאבל אז: $B = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), ..., (6, 6)\}$.

מה הסיכוי שיצא $(1, 1)$? תשובה: $\frac{1}{6}$.

מה הסיכוי שיצא $(1, 2)$? תשובה: 0.

סימון: $P(\omega|B) = 0$ אם $\omega \notin B$.

נוסחת ההסתברות המותנה: $P(\omega|B) = \frac{P(\omega)}{P(B)}$ אם $\omega \in B$.

אם A, B מאורעות אז: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

תרגיל:

בכד 1 יש 10 כדורים: 3 אדומים, 3 כחולים, 4 ירוקים.

בכד 2 יש 8 כדורים: 4 אדומים, 2 כחולים, 2 ירוקים.

מטילים קוביה, אם יוצא 1 או 2, מוצאים כדור אחד מכד 1, אחרת מוציאים כדור אחד מכד 2.

א. מה ההסתברות שיצא כדור אדום?

$P(Red) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{3} = \frac{13}{30}$.

ב. ידוע שיצא כדור אדום. מה ההסתברות שבחרנו בכד 2?

$P(\#_2|Red) = \frac{P(\#_2 \cap Red)}{P(Red)} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{13}{30}} = \frac{30}{13 \cdot 3} = \frac{10}{13}$.

ג. ידוע שכד 2 נבחר, מה ההסתברות שיצא כדור אדום?

$P(Red|\#_2) = \frac{P(\#_2 \cap Red)}{P(\#_2)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$.

נוסחאות הקשורות להסתברות מותנה:

- הסתברות מותנה: אם A, B מאורעות אז: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
- נוסחת ההסתברות השלמה: אם A, B מאורעות אזי:

  $P(A) = P(B) \cdot P(A|B) + P(B^c) \cdot P(A|B^c)$.
- נוסחת בייס: $P(B|A) = \frac{P(B) \cdot P(A|B)}{P(A)}$.

מאורעות תלויים:

נאמר שמאורע A בלתי תלוי ב B אם: $P(A|B) = P(A)$.

משפט: מאורעות A, B הם בלתי תלויים אם ורק אם $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

תרגילים:

Exercise 1 A library holds 10 different books on probability theory, of which 5 include solutions to all exercises and 5 do not. In an unexplained burst of anger, the librarian chose one of these books uniformly at random and destroyed it. Alon comes to the library, chooses one of the remaining 9 books on probability theory uniformly at random, borrows it and then returns it one week later. Two months later, Ben comes to the library, chooses one of the remaining 9 books on probability theory uniformly at random, borrows it and then returns it one week later. Let A be the event that Alon borrows a book with solutions and let B be the event that Ben borrows a book with solutions. Are the events A and B independent?

פתרון:

נגדיר מאורע נוסף: C - הספרנית בחרה ספר עם תשובות.

$P(A) = P(C) \cdot P(A|C) + P(C^c) \cdot P(A|C^c) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{2}$.

$P(B) = \frac{1}{2}$.

ומצד שני:

$P(A \cap B) =$

אבל: $P(A \cap B) = \frac{41}{162} \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$.

לכן A, B תלויים.

תרגיל מבחן:

שאלה 2 (25 נקודות):

יהיו B, A ו-C מאורעות כלשהם באותו מרחב הסתברות (Ω, P). הוכיחו או הפריכו כל אחת מן הטענות הבאות:

א. (8 נקודות) אם A ו-B בלתי תלויים וגם B ו-C בלתי תלויים אז A ו-C בלתי תלויים.
ב. (8 נקודות) אם $P(A|C) > 2/3$ וגם $P(A|C^c) > 2/3$ אז $P(A) > 2/3$.
ג. (9 נקודות) אם A ו-B בלתי תלויים בהנתן C והם גם בלתי תלויים בהנתן C^c אז הם בלתי תלויים.

פתרון:

א. דוגמא נגדית: $\Omega = \{1, 2, 3\},\ A = C = \{1\}, B = \Phi$. בהסתברות אחידה.

מכאן: $P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$ ומצד שני: $P(A \cap B) = P(\Phi) = 0$ ולכן A, B ב"ת.

מכאן: $P(C) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$ ומצד שני: $P(C \cap B) = P(\Phi) = 0$ ולכן C, B ב"ת.

אבל: $P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ ומצד שני: $P(A \cap C) = P(\{1\}) = \frac{1}{3}$ ולכן A, C תלויים.

ב. נניח את הנתונים. ונשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה:

$$P(A) = P(C) \cdot P(A|C) + P(C^c) \cdot P(A|C^c) > \frac{2}{3}P(C) + \frac{2}{3}P(C^c) = \frac{2}{3}(P(C) + P(C^c)) = \frac{2}{3}.$$

ג. דוגמא נגדית: $\Omega = \{1, 2, 3, 4\},\ C = \{1, 2\},\ A = \{1\},\ B = \{3\}$ בהסתברות אחידה.

מכאן: $P(A|C) = \frac{1}{2},\ P(B|C) = 0$ ומצד שני: $P(A \cap B|C) = 0$ ולכן A, B ב"ת בהינתן C.

וגם: $P(A|C^c) = 0,\ P(B|C^c) = \frac{1}{2}$ ומצד שני: $P(A \cap B|C^c) = 0$ ולכן A, B ב"ת בהינתן C^c.

אבל: $P(A) = \frac{1}{4}, P(B) = \frac{1}{4}$ ומצד שני: $P(A \cap B) = 0$ ולכן A, B תלויים.

תרגיל מבחן:

שאלה 2 (25 נקודות):

בוחרים שני מספרים מהקבוצה $\{10, 11, \dots, 99\}$ באופן מקרי אחיד ובלי החזרה. יהי A המאורע: "לשני המספרים אותה ספרת עשרות", יהי B המאורע: "שני המספרים שנבחרו זוגיים" ויהי C המאורע: "הערך המוחלט של ההפרש בין שני המספרים הוא לכל היותר 2".

א. (13 נקודות) חשבו את $P(A \cup B \cup C)$.
ב. (6 נקודות) חשבו את $P(A \cap B \mid C)$.
ג. (6 נקודות) חשבו את $P(A \mid B \cap C)$.

פתרון:

לפי נוסחת ההכלה וההדחה:

$P(A \cup B \cup C)$

.

נחשב כל ערך בנפרד:

$P(A)=\frac{9\cdot\binom{10}{2}}{\binom{90}{2}}$. גודל המרחב הוא $\binom{90}{2}$ כי בוחרים 2 מספרים מתוך ה 90 ללא חזרות וללא חשיבות לסדר.

עבור גודל A נבחר את ספרת העשרות המשותפת ואז מתוך 10 המספרים שיש להם את אותה ספרת עשרות, נבחר 2 מספרים.

$P(B)=\frac{\binom{45}{2}}{\binom{90}{2}}$. יש 45 מספרים זוגיים בקבוצה ואנו צריכים לבחור 2 מתוכם.

$P(C)=\frac{89+88}{\binom{90}{2}}$. נחלק למקרים: אם ההפרש הוא בדיוק 1 אז למספר הראשון יש 89 אפשרויות (בין 10 ל 98 כולל) והשני יהיה בדיוק 1 מעליו. אם ההפרש הוא בדיוק 2 אז למספר הראשון יש 88 אפשרויות (בין 10 ל 97 כולל) והשני יהיה בדיוק 2 מעליו.

$P(A\cap B)=\frac{9\cdot\binom{5}{2}}{\binom{90}{2}}$.

$P(A\cap C)=\frac{9\cdot(9+8)}{\binom{90}{2}}$.

$P(B\cap C)=\frac{44}{\binom{90}{2}}$.

$P(A\cap B\cap C)=\frac{9\cdot 4}{\binom{90}{2}}$.

נציב בנוסחה ונקבל את התשובה.

ב. לפי נוסחת הסתברות מותנה: $P(A\cap B|C)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)}=\frac{36}{177}$.

ג. לפי נוסחת הסתברות מותנה: $P(A|B\cap C)=\frac{P(A\cap B\cap C)}{P(B\cap C)}=\frac{36}{44}$.

משתנים מקריים בדידים (מרחב מדגם לא רציף)

משתנה מקרי הוא פונקציה: $X:\Omega\rightarrow R$.

כמו שראינו, על מרחב המדגם יש הסתברות ולכן יש גם על X.

לכל דגימה: ω, הערך $X(\omega)$ מתקבל בהסתברות כלשהי.

דוגמא: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $X(k)=2k$.

מה ההסתברות ש: $X=10$? הסיכוי שווה לסיכוי שיצא 5 שהוא $\frac{1}{6}$.

דוגמא: $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $X(k)=k$ אם $k\leq 3$. $X(k)=6-k$ אם $k>3$.

מה ההסתברות ש: $X=2$? הסיכוי שווה לסיכוי שיצא 2 או 4 שהוא: $\frac{1}{3}$.

באופן כללי: $X=k$ הוא מאורע: $"X=k"=\{\omega: X(\omega)=k\}$.

בדוגמא האחרונה: $"X=2"=\{2,4\}$.

לכן נרצה לרוב לחשב: $P(X=k)$.

אוסף כל הערכים של X (התמונה/הטווח) נקרא **תומך**.

בדוגמא האחרונה: התומך של X הוא: $\{0,1,2,3\}$.

הערך של $P(X=k)$ לכל k אפשרי (בתומך) נקרא ההתפלגות של X.

כלומר אם מבקשים לחשב את ההתפלגות של X אז צריך לחשב את ההסתברות ש $X=k$ לכל k אפשרי.

דוגמא: מטילים 2 קוביות. X יהיה סכום 2 ההטלות. חשבו את ההתפלגות של X.

פתרון: לכל ערך אפשרי ש X יכול לקבל, נחשב את ההסתברות לערך הזה:
כמות הערכים היא סופית ולכן נעשה זאת בטבלה:

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$

סימון אחר: פונקציה המראה את ההסתברות לכל ערך $X\sim$