

תרגול – עקרון שובר היונים

1. הסבר מדוע בכל קבוצה של 13 אנשים, לפחות שתיים מהם נולד באותה חודש?
2. הסבר את הטענה שאם שמים 91 מכתבים ב-10 תאים, אז לפחות אחד מהתאים יכיל 10 מכתבים
3. הוכח שבכל קבוצה S של 11 מספרים בעל 2 ספרות כל אחד, יש שני מספרים שהפרש סיפרתם זהות. (לדוגמה, ב- $S = \{10, 14, 18, 19, 22, \dots, 28, \dots, 53, 49, 90, 93\}$, $9-3 = 6$ ו- $8-2 = 6$)
4. הראה שבחברה עם n אנשים כאשר כמה מהם מכירים אחד את השני, יש זוג שמכירים אותו מספר של אנשים.
5. 30 אוטובוסים צריכים להוביל 2000 אנשים. בכל אוטובוס יש 80 כיסאות. הראה ש-
א. באחד מהאוטובוסים יהיה 14 מקומות ריקים
ב. אחד מהאוטובוסים יכיל לפחות 67 נוסעים
6. הראה שאם בוחרים קבוצה של 30 אנשים אז ניתן לבחור תת-קבוצה של 5 מהם כך שכל חמישה נולד באותה יום של השבוע.
7. הוכח שאם בוחרים 7 מספרים שונים מקבוצת המספרים $S = \{1, 2, \dots, 11\}$ אז קיימים שתיים מהם שסכומם הוא 12.
8. בוחרים 51 מספרים שונים מהשלמים 1 ל-100 (כולל). הוכח ששתיים מהמספרים שנבחרו הם מספרים עוקבים.
9. בוחרים 51 מספרים שונים מהשלמים 1 ל-100 (כולל). הוכח ששתיים מהמספרים שנבחרו מקיימים ש: אחד הוא כפולה של השני.
10. א. הוכח שאם בוחרים 101 מספרים מהקבוצה $\{1, 2, \dots, 200\}$, תמיד קיימים שני מספרים שאחד מהם מחלק את השני.
ב. הראה איך לבחור 100 מספרים מהקבוצה $\{1, 2, \dots, 200\}$, כך שאין ביניהם שני מספרים שאחד מהם מחלק את השני.
11. הוכח שבכל קבוצה של 6 אנשים – או שיש 3 שכל שניים מהם מכירים זה את זה או שיש 3 שכל שניים מהם אינם מכירים זה את זה.
12. הוכח שבכל בחירה של 5 נקודות בתוך ריבוע שצלעו 2 יש זוג נקודות שהמרחק ביניהן הוא לכל היותר שורש של 2.
13. הוכח שבכל בחירה של 5 נקודות בתוך משולש שכל צלעותיו באורך 2, יש זוג נקודות שהמרחק ביניהן הוא לכל היותר 1.
14. הוכח שקיימים $a, b \in \mathbb{N}$ $a \neq b$ כך ש $2^a - 2^b \mid 57$
15. n אנשים נפגשו במסיבה ולחצו ידיים זה לזה. הוכח כי קיימים לפחות 2 אנשים שלחצו את אותו מספר של ידיים.

16. הוכח שקיים מספר שניתן לרשום רק ע"י הספרות 7 ו 0 שמתחלק ב 359 ללא שארית.
17. הוכח שלכל סדרה של 10 מספרים שלמים יש תת סדרה רצופה שסכום איבריה מתחלק ב 10. לדוגמא: עבור הסדרה: 3,4,5,2,2,3,5,1,4 ניתן לקחת את תת הסדרה: 2,3,5.
18. נתון לוח שחמט שהורידו ממנו 2 משבצות הנמצאות בפינות נגדיות של הלוח. האם ניתן לכסות לוח זה ב 31 אבני דומינו, כך שכל אבן מכסה 2 משבצות סמוכות?
19. נסדר את המספרים: 1,2,...,10 סביב מעגל בסדר כלשהו. הוכח שקיימים 3 מקומות רצופים על המעגל שסכומם לפחות 17.
20. יהא n טבעי אי-זוגי ותהא σ תמורה על $\{1,2,\dots,n\}$
 $(\sigma: \{1,2,\dots,n\} \rightarrow \{1,2,\dots,n\})$ הוכח כי המכפלה:
 $(n - \sigma(n)) \dots (2 - \sigma(2))(1 - \sigma(1))$ היא זוגית.