Lecture 4 of Geiger & Itai's slide brochure
www.cs.technion.ac.il/~dang/courseDS

עצים מאוזנים

הגדרה: משפחת עצים תקרא מאוזנת אם $h(T) = O(\log n)$.

©Geiger & Itai, 2001

Lecture 4 of Geiger & Itai's slide brochure
www.cs.technion.ac.il/~dang/courseDS

עצים מאוזנים

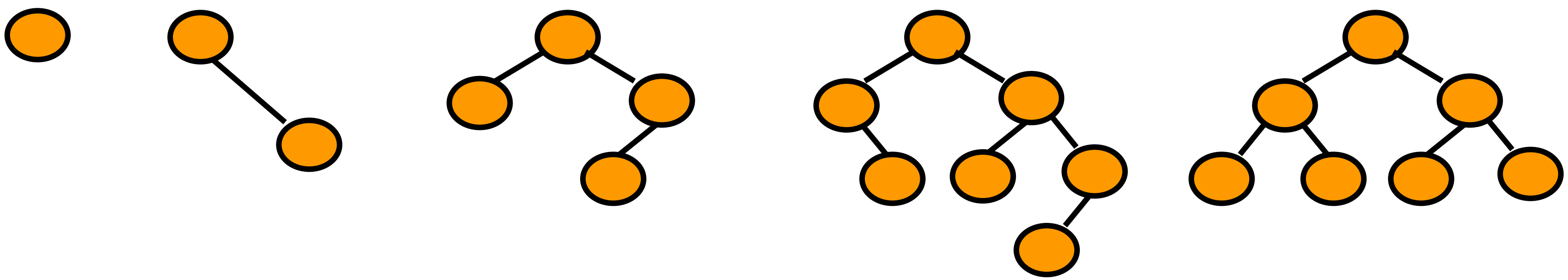
הגדרה: משפחת עצים תקרא מאוזנת אם $h(T) = O(\log n)$.

עצי AVL (Adelson-Velsky, Landis)

הגדרה: עץ AVL הוא עץ חיפוש בינרי שבו לכל צומת v התכונה:

$$| h(v \rightarrow \text{left}) - h(v \rightarrow \text{right}) | \leq 1$$

דוגמאות



©Geiger & Itai, 2001

עצים מאוזנים

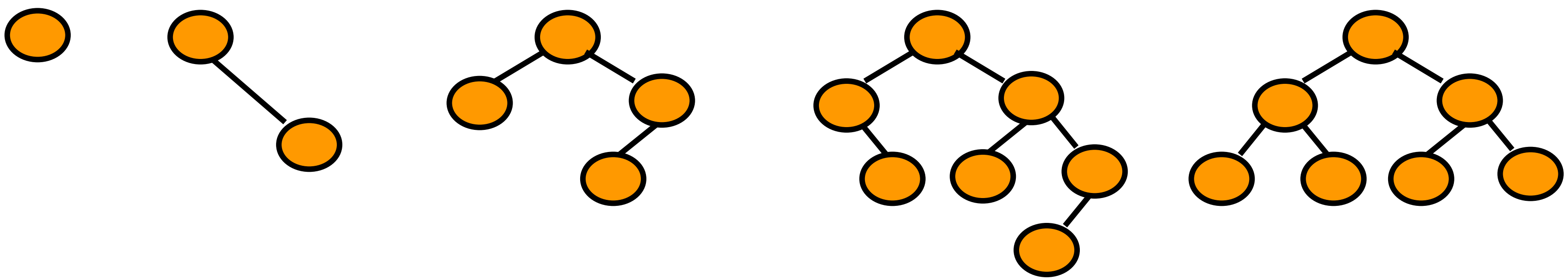
<u>הגדרה</u>: משפחת עצים תקרא <u>מאוזנת</u> אם $h(T) = O(\log n)$.

עצי AVL (Adelson-Velsky, Landis)

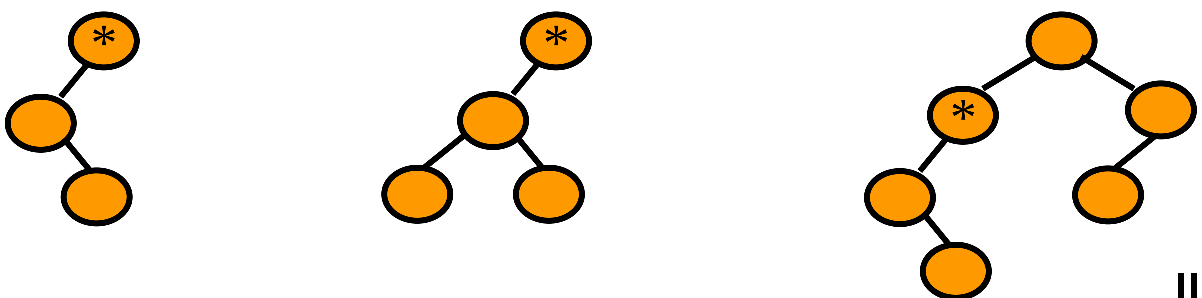
<u>הגדרה</u>: עץ AVL הוא עץ חיפוש בינרי שבו לכל צומת v התכונה:

$$| h(v \rightarrow \text{left}) - h(v \rightarrow \text{right}) | \leq 1$$

<u>דוגמאות</u>



<u>דוגמאות נגד</u>



* בצומת בו מופר האיזון

©Geiger & Itai, 2001

תרשים הוכחה למציאת חסם לגובה עץ AVL

נגדיר משפחת עצים (עצי פיבונצי Fibonacci trees) $F_1,\ldots,F_h,\ldots$

נראה שמספר הצמתים בעץ F_h מקיים $|F_h|>a^h$ עבור קבוע a.

נראה שמספר הצמתים $n=|T|$ של עץ AVL <u>כלשהו</u> בגובה h גדול מ-$|F_h|$.

©cs,Technion

תרשים הוכחה למציאת חסם לגובה עץ AVL

נגדיר משפחת עצים (עצי פיבונצי Fibonacci trees) $F_1,\ldots,F_h,\ldots$

נראה שמספר הצמתים בעץ F_h מקיים $|F_h|>a^h$ עבור קבוע a.

נראה שמספר הצמתים $n=|T|$ של עץ AVL <u>כלשהו</u> בגובה h גדול מ-$|F_h|$.

<u>מסקנה</u>: לכל עץ AVL עם n צמתים מתקיים: $n>|F_h|>a^h$.

©cs,Technion

תרשים הוכחה למציאת חסם לגובה עץ AVL

נגדיר משפחת עצים (עצי פיבונצי Fibonacci trees) $F_1,\ldots,F_h,\ldots$

נראה שמספר הצמתים בעץ F_h מקיים $|F_h|>a^h$ עבור קבוע a.

נראה שמספר הצמתים $n=|T|$ של עץ AVL כלשהו בגובה h גדול מ-$|F_h|$.

מסקנה: לכל עץ AVL עם n צמתים מתקיים: $n>|F_h|>a^h$.
לפיכך הגובה h חסום ע"י $\log_a n$.

©cs,Technion

תרשים הוכחה למציאת חסם לגובה עץ AVL

נגדיר משפחת עצים (עצי פיבונצי Fibonacci trees) $F_1,\ldots,F_h,\ldots$

נראה שמספר הצמתים בעץ F_h מקיים $|F_h|>a^h$ עבור קבוע a.

נראה שמספר הצמתים $n=|T|$ של עץ AVL <u>כלשהו</u> בגובה h גדול מ-$|F_h|$.

<u>מסקנה</u>: לכל עץ AVL עם n צמתים מתקיים: $n>|F_h|>a^h$.

לפיכך הגובה h חסום ע"י $\log_a n$.

<u>מסקנה</u>: משפחת עצי AVL מאוזנת.

©cs,Technion

תרשים הוכחה למציאת חסם לגובה עץ AVL

נגדיר משפחת עצים (עצי פיבונצי Fibonacci trees) $F_1,\ldots,F_h,\ldots$

נראה שמספר הצמתים בעץ F_h מקיים $|F_h|>a^h$ עבור קבוע a.

נראה שמספר הצמתים $n=|T|$ של עץ AVL <u>כלשהו</u> בגובה h גדול מ-$|F_h|$.

<u>מסקנה</u>: לכל עץ AVL עם n צמתים מתקיים: $n>|F_h|>a^h$.

לפיכך הגובה h חסום ע"י $\log_a n$.

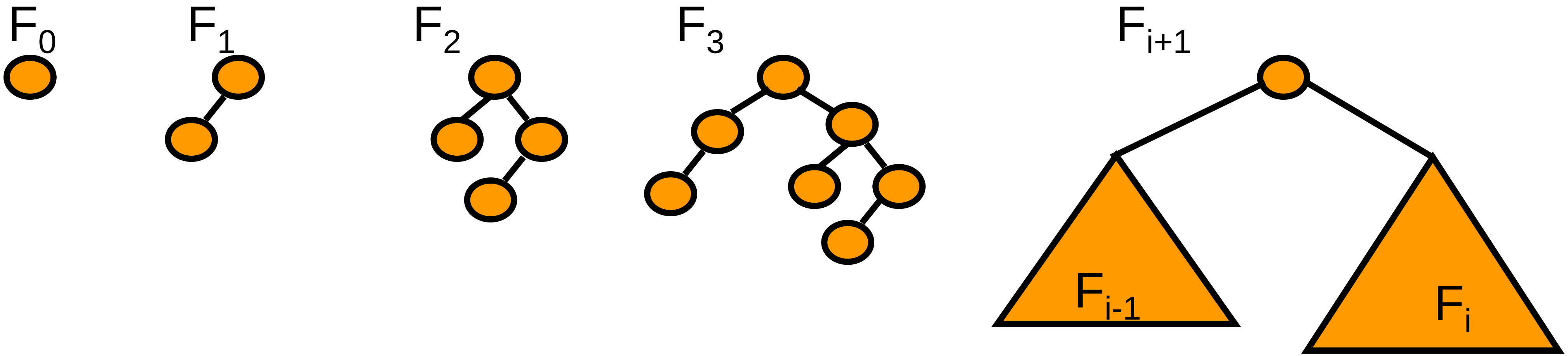
<u>מסקנה</u>: משפחת עצי AVL מאוזנת.

<u>הערה</u>: עצי פיבונצי הם עצי AVL בהם הגובה גדל הכי מהר כפונקציה של n.

©cs,Technion

חסם לגובה עץ AVL

נגדיר משפחת עצים (עצי פיבונצי Fibonacci trees):

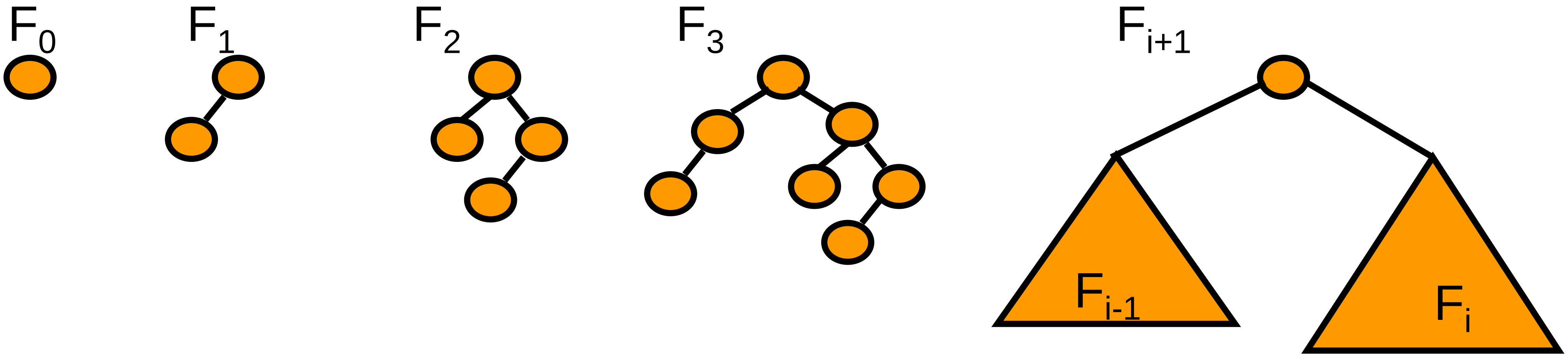


<u>טענה 1</u>: לכל h, לעץ F_h גובה h.

©cs,Technion

חסם לגובה עץ AVL

נגדיר משפחת עצים (עצי פיבונצ'י Fibonacci trees):



<u>טענה 1</u>: לכל h, לעץ F_h גובה h.

<u>הוכחה</u>: נכון עבור F_0 ועבור F_1.

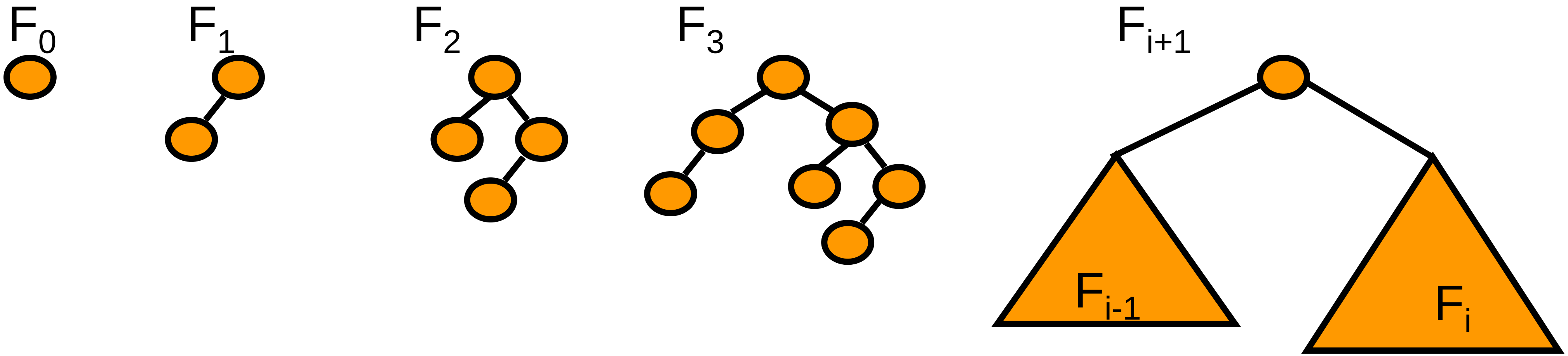
נמשיך באינדוקציה. מתקיים לפי הגדרת עץ פיבונצ'י

$height(F_{i+1}) = height(F_i) + 1 = i + 1$.

©cs,Technion

חסם לגובה עץ AVL

נגדיר משפחת עצים (עצי פיבונצי (Fibonacci trees):



<u>טענה 1</u>: לכל h, לעץ F_h גובה h.

<u>הוכחה</u>: נכון עבור F_0 ועבור F_1.

נמשיך באינדוקציה. מתקיים לפי הגדרת עץ פיבונצי

$\text{height}(F_{i+1}) = \text{height}(F_i) + 1 = i + 1$.

<u>טענה 2</u>: $|F_h| = 1 + |F_{h-1}| + |F_{h-2}| \geq |F_{h-1}|$.

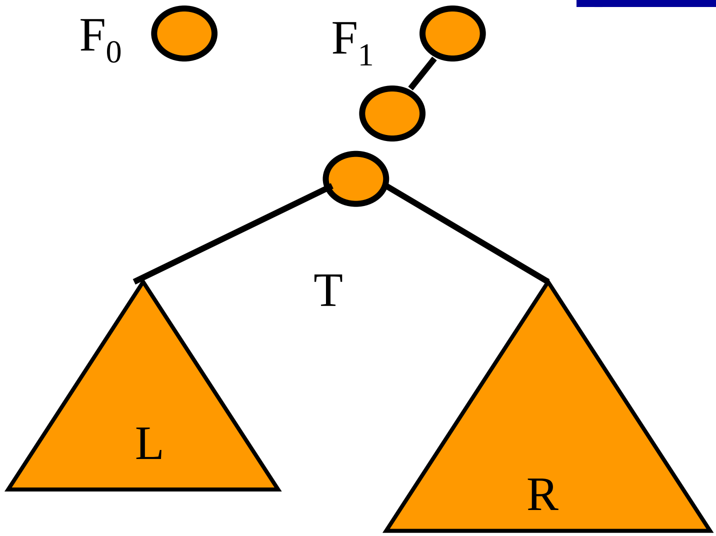
©cs,Technion

חסם לגובה עץ AVL (המשך)

טענה 3: יהי T עץ AVL בעל גובה h. אזי $|F_h| \geq |T|$.

הוכחה: באינדוקציה על h. נכון עבור h=0 ועבור h=1 .

חסם לגובה עץ AVL (המשך)



טענה 3: יהי T עץ AVL בעל גובה h. אזי $|F_h| \geq |T|$.

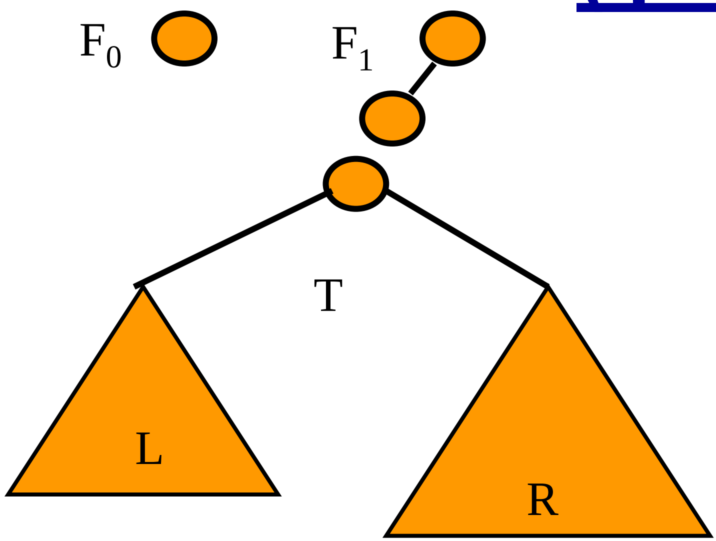
הוכחה: באינדוקציה על h. נכון עבור h=0 ועבור h=1 .

יהי T עץ AVL בעל גובה h.

יהי L תת-העץ השמאלי ו-R תת-העץ הימני כמצויר.

©cs,Technion

חסם לגובה עץ AVL (המשך)



<u>טענה 3</u>: יהי T עץ AVL בעל גובה h. אזי $|F_h| \leq |T|$.

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על h. נכון עבור h=0 ועבור h=1 .

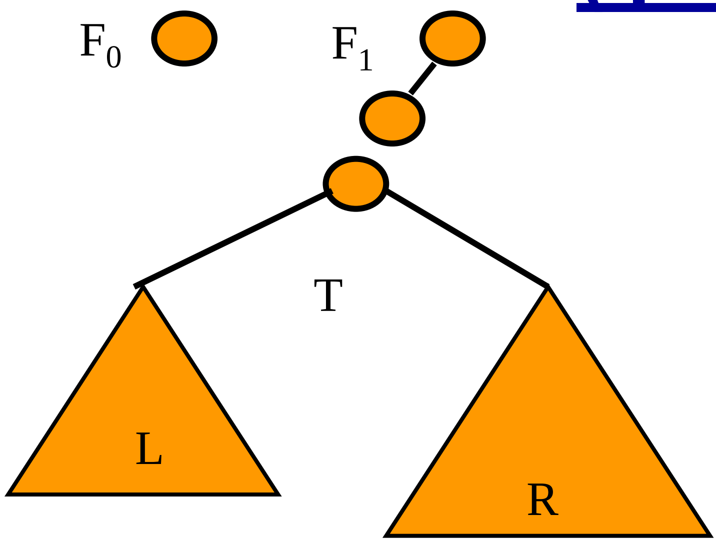
יהי T עץ AVL בעל גובה h.

יהי L תת-העץ השמאלי ו-R תת-העץ הימני כמצויר.

- תתי העצים R ו- L הם עצי AVL בגובה קטן מהגובה של T.

©cs,Technion

חסם לגובה עץ AVL (המשך)



<u>טענה 3</u>: יהי T עץ AVL בעל גובה h. אזי $|F_h| \leq |T|$.

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על h. נכון עבור h=0 ועבור h=1 .

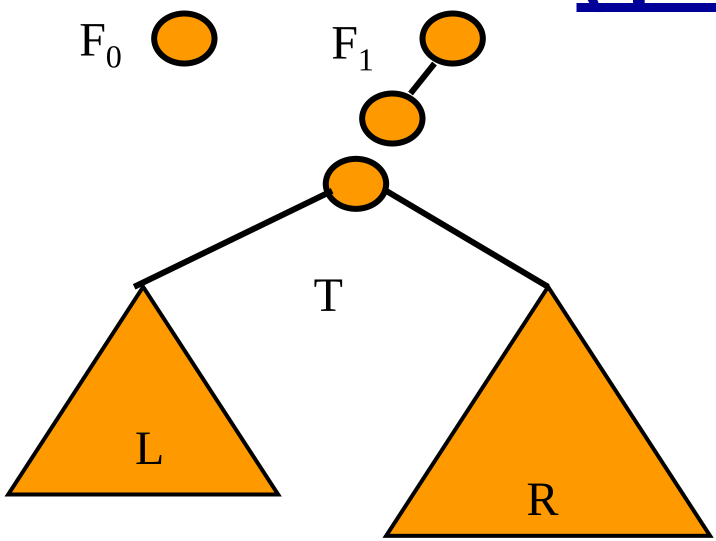
יהי T עץ AVL בעל גובה h.

יהי L תת-העץ השמאלי ו-R תת-העץ הימני כמצויר.

- תתי העצים R ו- L הם עצי AVL בגובה קטן מהגובה של T.
- אחד מהם (נאמר R) בגובה h-1 והשני בגובה h-1 או h-2.

©cs,Technion

חסם לגובה עץ AVL (המשך)



טענה 3: יהי T עץ AVL בעל גובה h. אזי $|F_h| \le |T|$.

הוכחה: באינדוקציה על h. נכון עבור h=0 ועבור h=1 .

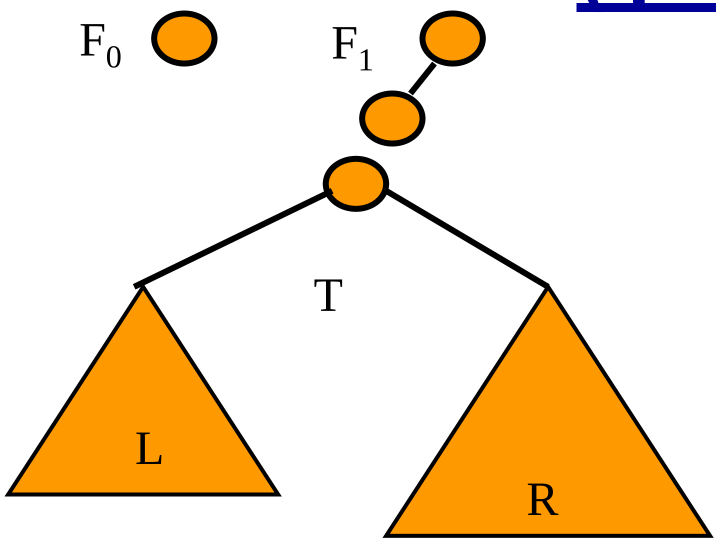
יהי T עץ AVL בעל גובה h.

יהי L תת-העץ השמאלי ו-R תת-העץ הימני כמצויר.

- תתי העצים R ו- L הם עצי AVL בגובה קטן מהגובה של T.
- אחד מהם (נאמר R) בגובה h-1 והשני בגובה h-1 או h-2.
- לפי הנחת האינדוקציה, $|F_{h-1}| \le |R|$.

©cs,Technion

חסם לגובה עץ AVL (המשך)



טענה 3: יהי T עץ AVL בעל גובה h. אזי $|T| \geq |F_h|$.

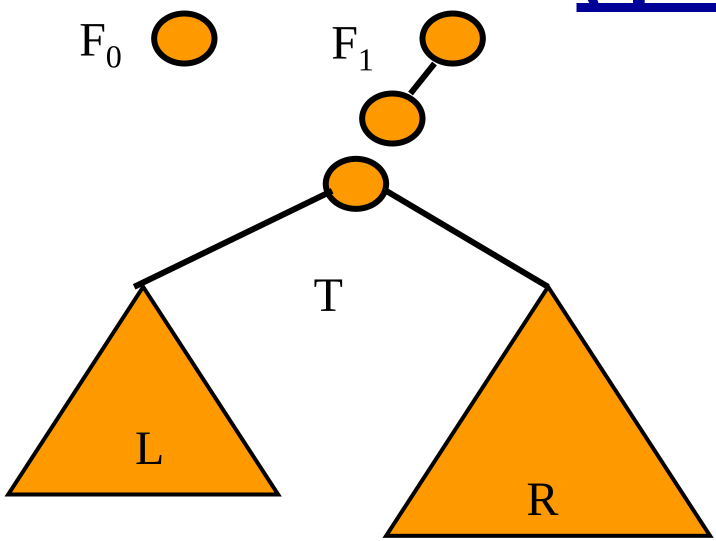
הוכחה: באינדוקציה על h. נכון עבור h=0 ועבור h=1 .

יהי T עץ AVL בעל גובה h.

יהי L תת-העץ השמאלי ו-R תת-העץ הימני כמצויר.

- תתי העצים R ו- L הם עצי AVL בגובה קטן מהגובה של T.
- אחד מהם (נאמר R) בגובה h-1 והשני בגובה h-1 או h-2.
- לפי הנחת האינדוקציה, $|R| \geq |F_{h-1}|$.
- לפי הנחת האינדוקציה וטענה 2, $|L| \geq \min\{|F_{h-1}|, |F_{h-2}|\} = |F_{h-2}|$.

חסם לגובה עץ AVL (המשך)



<u>טענה 3</u>: יהי T עץ AVL בעל גובה h. אזי $|T| \geq |F_h|$.

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על h. נכון עבור h=0 ועבור h=1.

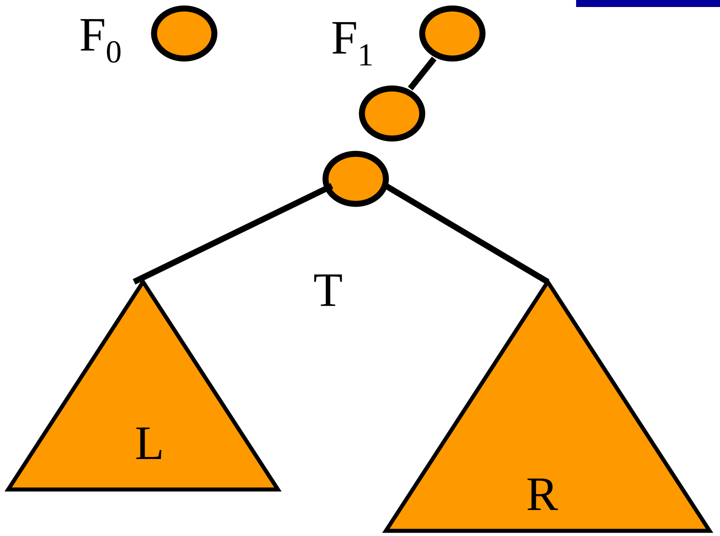
יהי T עץ AVL בעל גובה h.

יהי L תת-העץ השמאלי ו-R תת-העץ הימני כמצויר.

- תתי העצים R ו- L הם עצי AVL בגובה קטן מהגובה של T.
- אחד מהם (נאמר R) בגובה h-1 והשני בגובה h-1 או h-2.
- לפי הנחת האינדוקציה, $|R| \geq |F_{h-1}|$.
- לפי הנחת האינדוקציה וטענה 2, $|L| \geq \min\{|F_{h-1}|, |F_{h-2}|\} = |F_{h-2}|$.
- לפיכך T הוא עץ בן לפחות $|F_h|$ צמתים שכן מתקיים:

©cs,Technion

חסם לגובה עץ AVL (המשך)



<u>טענה 3</u>: יהי T עץ AVL בעל גובה h. אזי $|F_h| \geq |T|$.

<u>הוכחה</u>: באינדוקציה על h. נכון עבור h=0 ועבור h=1 .

יהי T עץ AVL בעל גובה h.

יהי L תת-העץ השמאלי ו-R תת-העץ הימני כמצויר.

- תתי העצים R ו- L הם עצי AVL בגובה קטן מהגובה של T.
- אחד מהם (נאמר R) בגובה h-1 והשני בגובה h-1 או h-2.
- לפי הנחת האינדוקציה, $|R| \geq |F_{h-1}|$.
- לפי הנחת האינדוקציה וטענה 2, $|L| \geq \min\{|F_{h-1}|, |F_{h-2}|\} = |F_{h-2}|$.
- לפיכך T הוא עץ בן לפחות $|F_h|$ צמתים שכן מתקיים:

$$|T| = 1 + |R| + |L| \geq 1 + |F_{h-1}| + |F_{h-2}| = |F_h|$$

©cs,Technion

מספרי פיבונצי

סדרת פיבונצי n_i מוגדרת באופן הבא :

$n_0 = 0, \quad n_1=1, \quad n_{i+1} = n_i + n_{i-1}$

$n_2=1, \quad n_3=2, \quad n_4=3, \quad n_5=5, \quad n_6=8$

<u>טענה 4</u>: מתקיים $n_i = \frac{\Phi^i - \overline{\Phi}^i}{\sqrt{5}}$ כאשר $\overline{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ וכן $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.608$

(Φ נקרא יחס הזהב).

<u>הערה:</u> מכיוון שמתקיים $|\Phi| > 1 > |\overline{\Phi}|$ נובע גם $n_i \approx \frac{\Phi^i}{\sqrt{5}}$ עבור i גדול.

©cs,Technion

מספרי פיבונצי (המשך)

הוכחת טענה 4: נתונה המשוואה הבאה. $n_{i+1} = n_i + n_{i-1}$

נניח פתרון מהצורה: $n_i = a \cdot x^i$

מספרי פיבונצי (המשך)

הוכחת טענה 4: נתונה המשוואה הבאה. $n_{i+1} = n_i + n_{i-1}$

נניח פתרון מהצורה: $n_i = a \cdot x^i$

נציב במשוואה ונקבל:

$$a \cdot x^{i+1} = a \cdot x^i + a \cdot x^{i-1}$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \overline{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

©cs,Technion

מספרי פיבונצי (המשך)

<u>הוכחת טענה 4</u>: נתונה המשוואה הבאה. $n_{i+1} = n_i + n_{i-1}$

נניח פתרון מהצורה: $n_i = a \cdot x^i$

נציב במשוואה ונקבל:

$$a \cdot x^{i+1} = a \cdot x^i + a \cdot x^{i-1}$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \overline{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

משוואת ההפרשים ליניארית ולכן כל צרוף ליניארי של פתרונות מהווה פתרון:

$$n_i = a \cdot \Phi^i + b \cdot \overline{\Phi}^i$$

©cs,Technion

מספרי פיבונצי (המשך)

<u>הוכחת טענה 4</u>: נתונה המשוואה הבאה.

$$n_{i+1} = n_i + n_{i-1}$$

נניח פתרון מהצורה:

$$n_i = a \cdot x^i$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$a \cdot x^{i+1} = a \cdot x^i + a \cdot x^{i-1}$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \overline{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

משוואת ההפרשים ליניארית ולכן כל צרוף ליניארי של פתרונות מהווה פתרון:

$$n_i = a \cdot \Phi^i + b \cdot \overline{\Phi}^i$$

שימוש בתנאי השפה מוביל למציאת הקבועים:

$$n_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot \Phi^0 + b \cdot \overline{\Phi}^0 = a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -a$$

$$n_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - a \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

מספרי פיבונצי (המשך)

הוכחת טענה 4: נתונה המשוואה הבאה. $n_{i+1} = n_i + n_{i-1}$

נניח פתרון מהצורה: $n_i = a \cdot x^i$

נציב במשוואה ונקבל: $a \cdot x^{i+1} = a \cdot x^i + a \cdot x^{i-1}$

$$x^2 = x + 1$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \qquad \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \overline{\Phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

משוואת ההפרשים ליניארית ולכן כל צרוף ליניארי של פתרונות מהווה פתרון:

$$n_i = a \cdot \Phi^i + b \cdot \overline{\Phi}^i$$

שימוש בתנאי השפה מוביל למציאת הקבועים:

$$n_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot \Phi^0 + b \cdot \overline{\Phi}^0 = a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -a$$

$$n_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad a \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - a \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

לפיכך פתרון המשוואה הוא: $n_i = \dfrac{\Phi^i - \overline{\Phi}^i}{\sqrt{5}}$

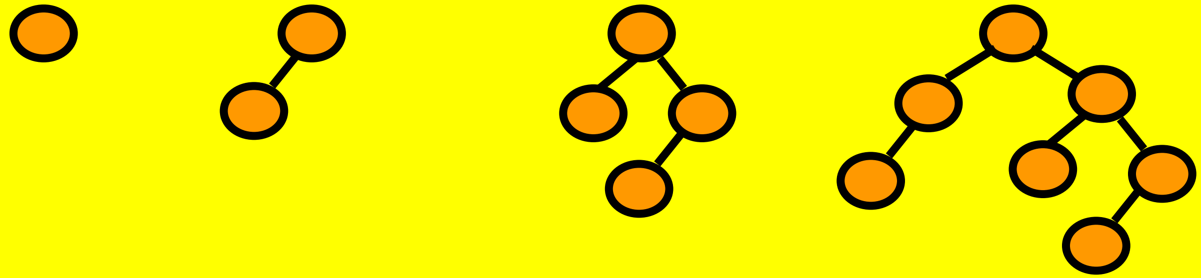
©cs,Technion

ניתוח גובה עץ AVL

טענה 5: לעץ פיבונצי F_i יש $|F_i| = n_{i+3} - 1$ צמתים כאשר n_i הוא מספר פיבונצי ה-i.

לדוגמא:

F_0 F_1 F_2 F_3



$n_3=2,\quad n_4=3,\quad n_5=5,\quad n_6=8$

ניתוח גובה עץ AVL

<u>טענה 5</u>: לעץ פיבונצי F_i יש $|F_i| = n_{i+3} - 1$ צמתים כאשר n_i הוא מספר פיבונצי ה-i.

ניתוח גובה עץ AVL

<u>טענה 5</u>: לעץ פיבונצי F_i יש $|F_i| = n_{i+3} - 1$ צמתים כאשר n_i הוא מספר פיבונצי ה-i.

<u>הוכחה</u>: מתקיימת המשוואה הרקורסיבית הבאה:

$$\left|F_{i+1}\right| = \left|F_i\right| + \left|F_{i-1}\right| + 1$$

$$\left|F_0\right| = 1 \quad \left|F_1\right| = 2$$

ניתוח גובה עץ AVL

<u>טענה 5</u>: לעץ פיבונצי F_i יש $|F_i| = n_{i+3} - 1$ צמתים כאשר n_i הוא מספר פיבונצי ה-i.

<u>הוכחה</u>: מתקיימת המשוואה הרקורסיבית הבאה:

$$|F_{i+1}| = |F_i| + |F_{i-1}| + 1$$

$$|F_0| = 1 \quad |F_1| = 2$$

במקום לפתור משוואה זו ישירות, נבצע שנוי משתנים כדי לקבל את המשוואה שכבר פתרנו.

ניתוח גובה עץ AVL

<u>טענה 5</u>: לעץ פיבונצי F_i יש $|F_i| = n_{i+3} - 1$ צמתים כאשר n_i הוא מספר פיבונצי ה-i.

<u>הוכחה</u>: מתקיימת המשוואה הרקורסיבית הבאה:

$$\left|F_{i+1}\right| = \left|F_i\right| + \left|F_{i-1}\right| + 1$$

$$\left|F_0\right| = 1 \quad \left|F_1\right| = 2$$

במקום לפתור משוואה זו ישירות, נבצע שנוי משתנים כדי לקבל את המשוואה שכבר פתרנו.

יהי t_i מספר הצמתים ב-F_i ועוד אחד. כלומר מתקיים $|F_i| = t_i - 1$.

ניתוח גובה עץ AVL

טענה 5: לעץ פיבונצי F_i יש $|F_i| = n_{i+3} - 1$ צמתים כאשר n_i הוא מספר פיבונצי ה-i.

הוכחה: מתקיימת המשוואה הרקורסיבית הבאה:

$$|F_{i+1}| = |F_i| + |F_{i-1}| + 1$$

$$|F_0| = 1 \quad |F_1| = 2$$

במקום לפתור משוואה זו ישירות, נבצע שנוי משתנים כדי לקבל את המשוואה שכבר פתרנו.

יהי t_i מספר הצמתים ב-F_i ועוד אחד. כלומר מתקיים $|F_i| = t_i - 1$.

נציב במשוואה הרקורסיבית ונקבל:

$$t_{i+1} - 1 = (t_i - 1) + (t_{i-1} - 1) + 1$$

$$t_{i+1} = t_i + t_{i-1}$$

$$t_0 = 2 \quad t_1 = 3$$

ניתוח גובה עץ AVL

טענה 5: לעץ פיבונצי F_i יש $|F_i| = n_{i+3} - 1$ צמתים כאשר n_i הוא מספר פיבונצי ה-i.

הוכחה: מתקיימת המשוואה הרקורסיבית הבאה:

$$|F_{i+1}| = |F_i| + |F_{i-1}| + 1$$

$$|F_0| = 1 \quad |F_1| = 2$$

במקום לפתור משוואה זו ישירות, נבצע שנוי משתנים כדי לקבל את המשוואה שכבר פתרנו.

יהי t_i מספר הצמתים ב-F_i ועוד אחד. כלומר מתקיים $|F_i| = t_i - 1$.

נציב במשוואה הרקורסיבית ונקבל:

$$t_{i+1} - 1 = (t_i - 1) + (t_{i-1} - 1) + 1$$

$$t_{i+1} = t_i + t_{i-1}$$

זו המשוואה של מספרי פיבונצי כשנקודת ההתחלה מוזזת בשלושה אינדקסים ולכן מתקיים:

$$t_0 = 2 \quad t_1 = 3$$

$$t_i = n_{i+3}$$

ניתוח גובה עץ AVL

<u>טענה 5</u>: לעץ פיבונצי F_i יש $|F_i| = n_{i+3} - 1$ צמתים כאשר n_i הוא מספר פיבונצי ה-i.

<u>הוכחה</u>: מתקיימת המשוואה הרקורסיבית הבאה:

$$|F_{i+1}| = |F_i| + |F_{i-1}| + 1$$

$$|F_0| = 1 \quad |F_1| = 2$$

במקום לפתור משוואה זו ישירות, נבצע שנוי משתנים כדי לקבל את המשוואה שכבר פתרנו.

יהי t_i מספר הצמתים ב-F_i ועוד אחד. כלומר מתקיים $|F_i| = t_i - 1$.

נציב במשוואה הרקורסיבית ונקבל:

$$t_{i+1} - 1 = (t_i - 1) + (t_{i-1} - 1) + 1$$

$$t_{i+1} = t_i + t_{i-1}$$

$$t_0 = 2 \quad t_1 = 3$$

$$t_i = n_{i+3}$$

זו המשוואה של מספרי פיבונצי כשנקודת ההתחלה מוזזת בשלושה אינדקסים ולכן מתקיים:

הוכחה פורמלית מתקבלת באינדוקציה על i. בסיס האינדוקציה:

$$t_0 = 2 = n_3 \quad t_1 = 3 = n_4$$

צעד האינדוקציה:

$$t_{i+1} = t_i + t_{i-1} = n_{i+3} + n_{i+2} = n_{i+4}$$

ניתוח גובה עץ AVL (המשך)

<u>טענה 6</u>: יהי T עץ AVL בן n צמתים וגובה h, אזי $h=O(\log n)$.

ניתוח גובה עץ AVL (המשך)

<u>טענה 6</u>: יהי T עץ AVL בן n צמתים וגובה h, אזי $h=O(\log n)$.

לאור טענה 3 מתקיים:

$$n = |T| \geq |F_h|$$

©cs,Technion

ניתוח גובה עץ AVL (המשך)

<u>טענה 6</u>: יהי T עץ AVL בן n צמתים וגובה h, אזי h=O(log n).

לאור טענה 3 מתקיים:

$$n = |T| \geq |F_h|$$

לאור טענות 5, 4 מתקיים:

$$n \geq |F_h| = n_{h+3} - 1 = \frac{\Phi^{h+3} - \overline{\Phi}^{h+3}}{\sqrt{5}} - 1 \geq \frac{\Phi^{h+3}}{\sqrt{5}} - 2$$

©cs,Technion

ניתוח גובה עץ AVL (המשך)

טענה 6: יהי T עץ AVL בן n צמתים וגובה h, אזי h=O(log n).

לאור טענה 3 מתקיים:

$$n = |T| \geq |F_h|$$

לאור טענות 4, 5 מתקיים:

$$n \geq |F_h| = n_{h+3} - 1 = \frac{\Phi^{h+3} - \overline{\Phi}^{h+3}}{\sqrt{5}} - 1 \geq \frac{\Phi^{h+3}}{\sqrt{5}} - 2$$

לקיחת לוגריתם משני צדי המשוואה:

$$h + 3 \leq \log_{\Phi}\left(\sqrt{5}(n+2)\right)$$

ניתוח גובה עץ AVL (המשך)

טענה 6: יהי T עץ AVL בן n צמתים וגובה h, אזי h=O(log n).

לאור טענה 3 מתקיים:

$$n = |T| \geq |F_h|$$

לאור טענות 5, 4 מתקיים:

$$n \geq |F_h| = n_{h+3} - 1 = \frac{\Phi^{h+3} - \overline{\Phi}^{h+3}}{\sqrt{5}} - 1 \geq \frac{\Phi^{h+3}}{\sqrt{5}} - 2$$

לקיחת לוגריתם משני צדי המשוואה:

$$h + 3 \leq \log_{\Phi}\left(\sqrt{5}(n+2)\right)$$

$$h \leq \log_{\Phi}(n+2) + \log_{\Phi}\left(\sqrt{5}\right) - 3$$

©cs,Technion

ניתוח גובה עץ AVL (המשך)

טענה 6: יהי T עץ AVL בן n צמתים וגובה h, אזי h=O(log n).

לאור טענה 3 מתקיים:

$$n = |T| \geq |F_h|$$

לאור טענות 5, 4 מתקיים:

$$n \geq |F_h| = n_{h+3} - 1 = \frac{\Phi^{h+3} - \overline{\Phi}^{h+3}}{\sqrt{5}} - 1 \geq \frac{\Phi^{h+3}}{\sqrt{5}} - 2$$

לקיחת לוגריתם משני צדי המשוואה:

$$h + 3 \leq \log_{\Phi}\left(\sqrt{5}(n+2)\right)$$

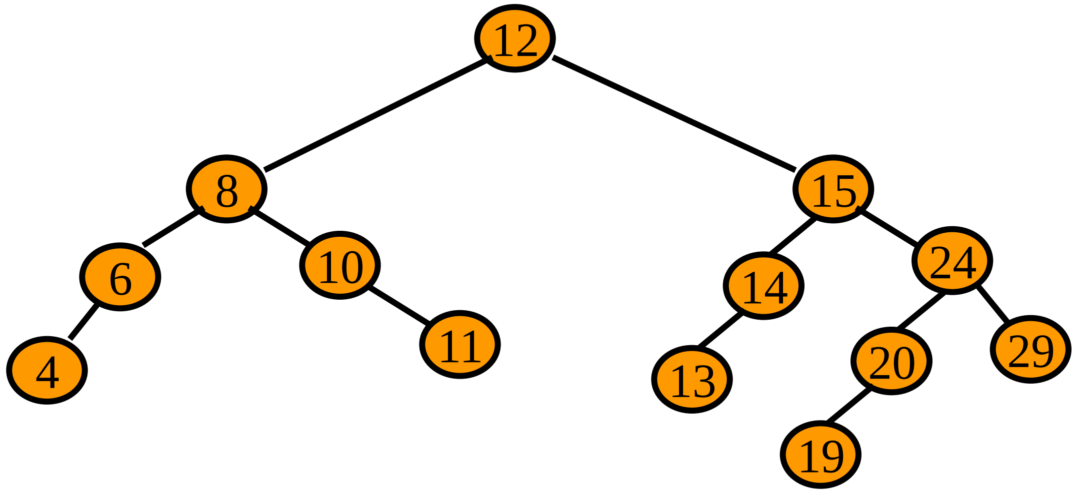
$$h \leq \log_{\Phi}(n+2) + \log_{\Phi}\left(\sqrt{5}\right) - 3$$

$$\therefore \quad h = O(\log n)$$

©cs,Technion

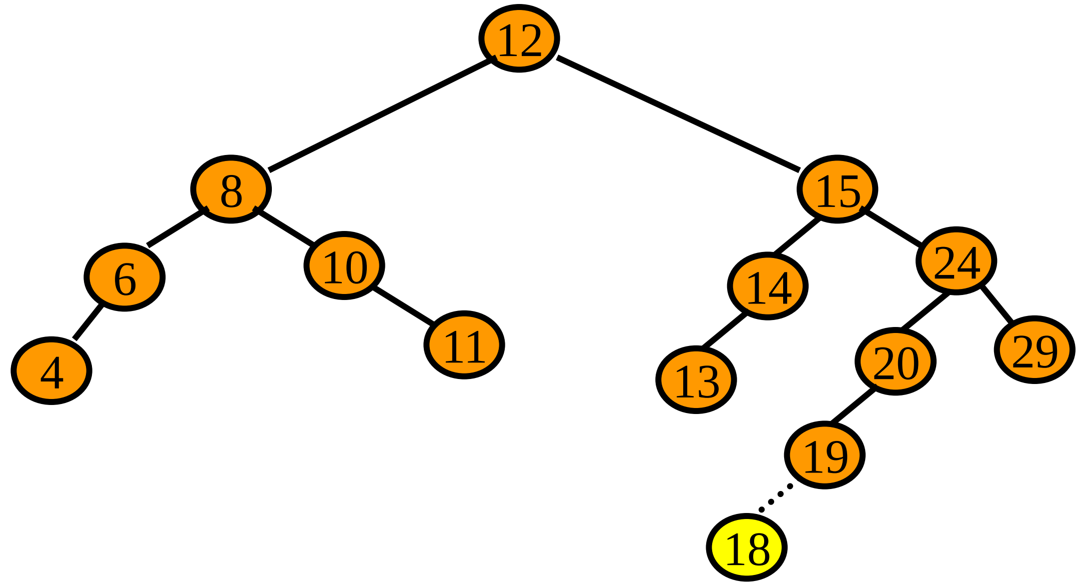
איזון בעץ AVL

מטענה 6 נובע שזמן החיפוש בעץ AVL הוא O(log n). נצטרך לדאוג שלאחר הכנסה או הוצאה, העץ הנותר יהיה עץ AVL.

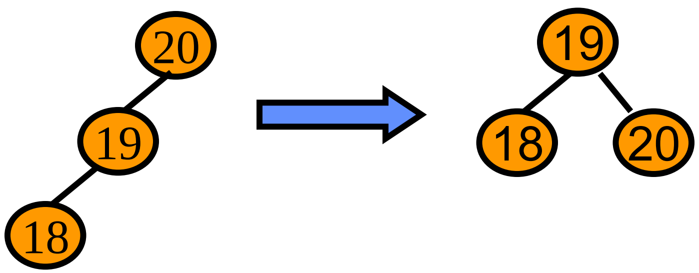


איזון בעץ AVL

מטענה 6 נובע שזמן החיפוש בעץ AVL הוא O(log n). נצטרך לדאוג שלאחר הכנסה או הוצאה, העץ הנותר יהיה עץ AVL.



לאחר הוספת האיבר 18 נתקבל עץ שאינו עץ AVL.
אבל נתן לשנות את תת העץ שבו הופר האיזון בצורה הבאה:



תיקון כזה נקרא <u>גלגול</u>.

בזמן הוצאה קיימת הפרת איזון דומה. למשל בהוצאת 29.

איזון בעץ AVL (המשך)

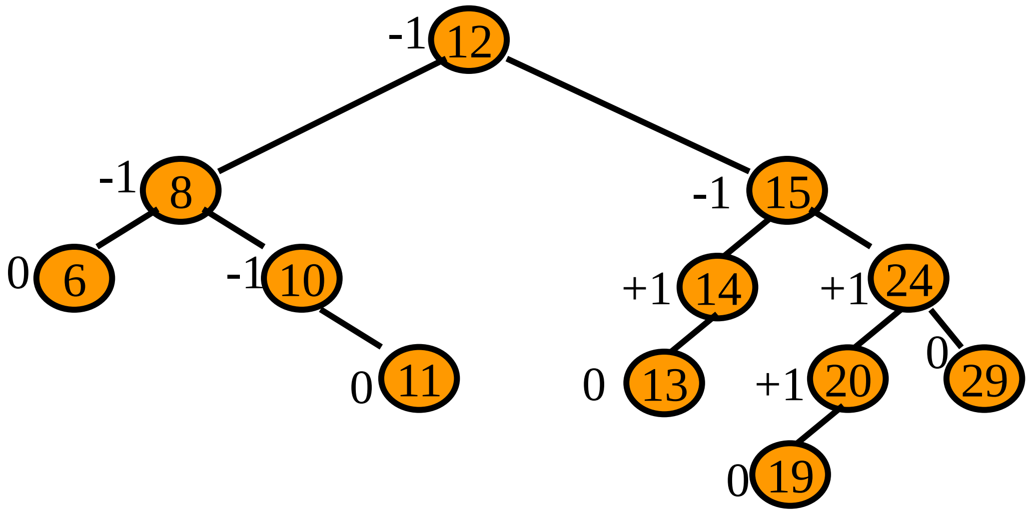
עבור צומת v בעץ בינרי נסמן:

$h_L(v)$ גובה תת העץ השמאלי של v.

$h_R(v)$ גובה תת העץ הימני של v.

גורם האיזון (Balance Factor) מחושב כהפרש הגבהים: $BF(v) = h_L(v) - h_R(v)$

לדוגמא:



מצד שמאל של כל צומת מסומן גורם האיזון.

©cs,Technion

איזון בעץ AVL (המשך)

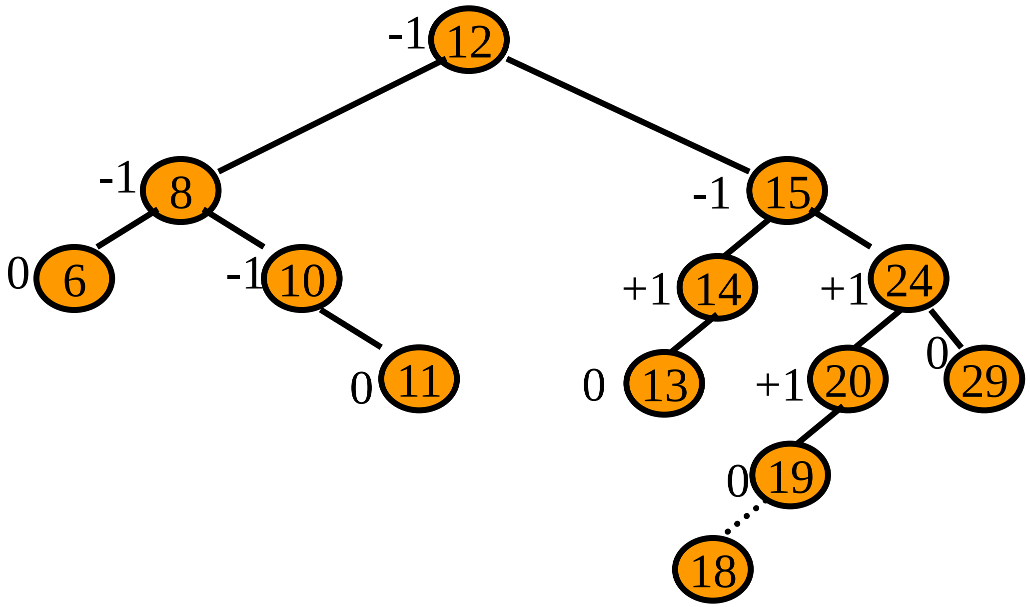
עבור צומת v בעץ בינרי נסמן:

$h_L(v)$ גובה תת העץ השמאלי של v.

$h_R(v)$ גובה תת העץ הימני של v.

גורם האיזון (Balance Factor) מחושב כהפרש הגבהים: $BF(v) = h_L(v) – h_R(v)$

לדוגמא:

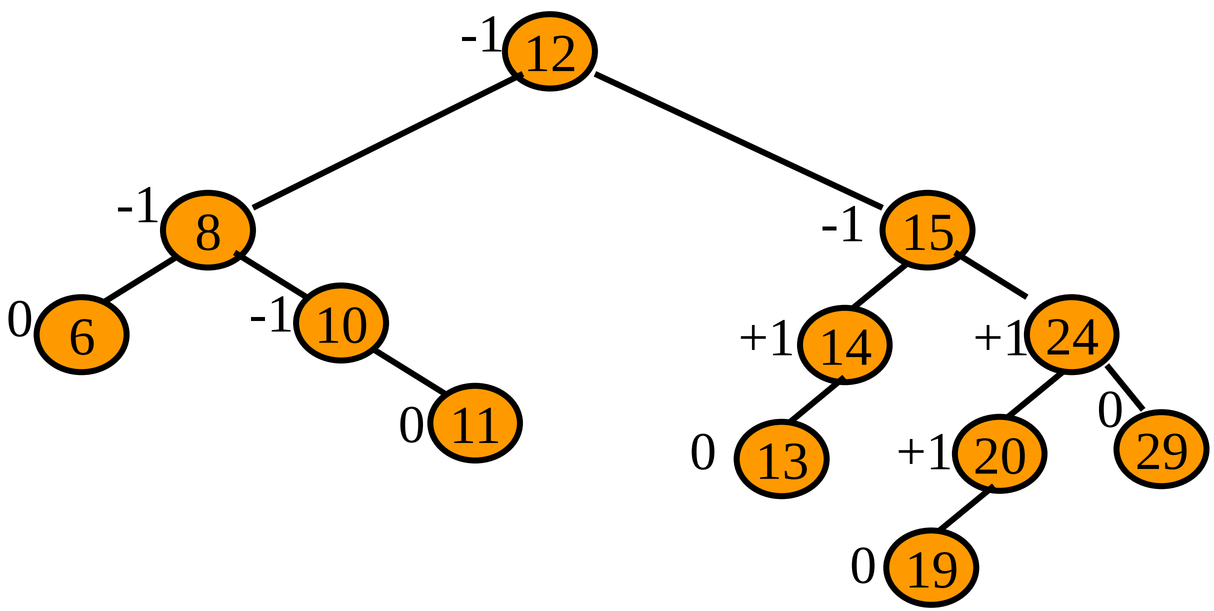


מצד שמאל של כל צומת מסומן גורם האיזון.

אחרי ההכנסה של 18 גורם האיזון מופר על מסלול ההכנסה.

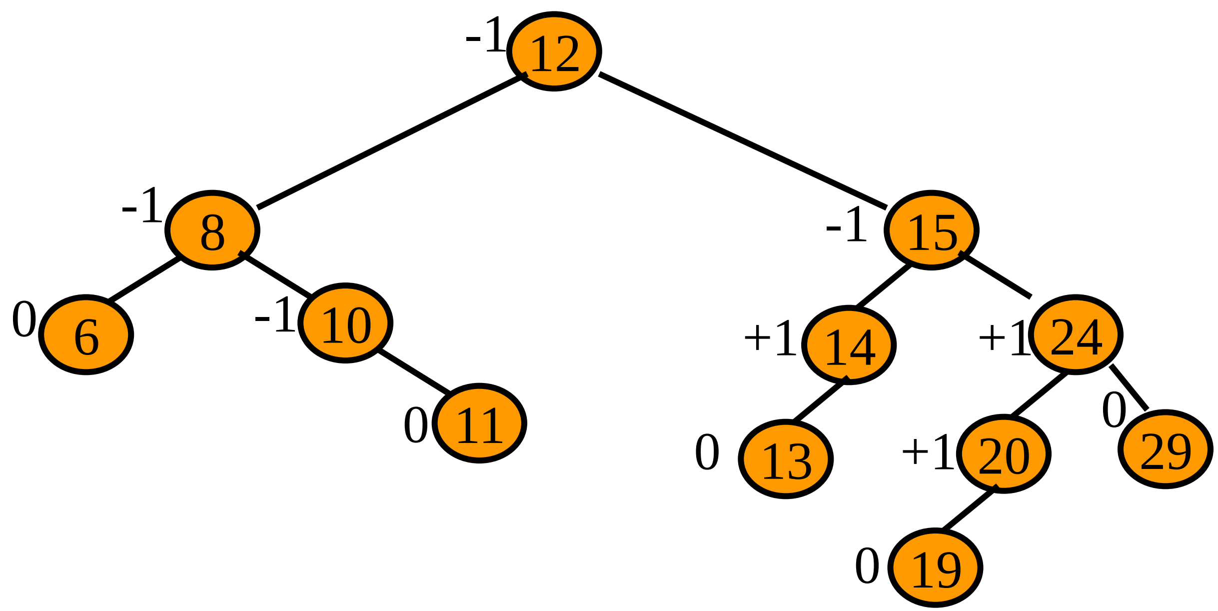
©cs,Technion

אבחנות



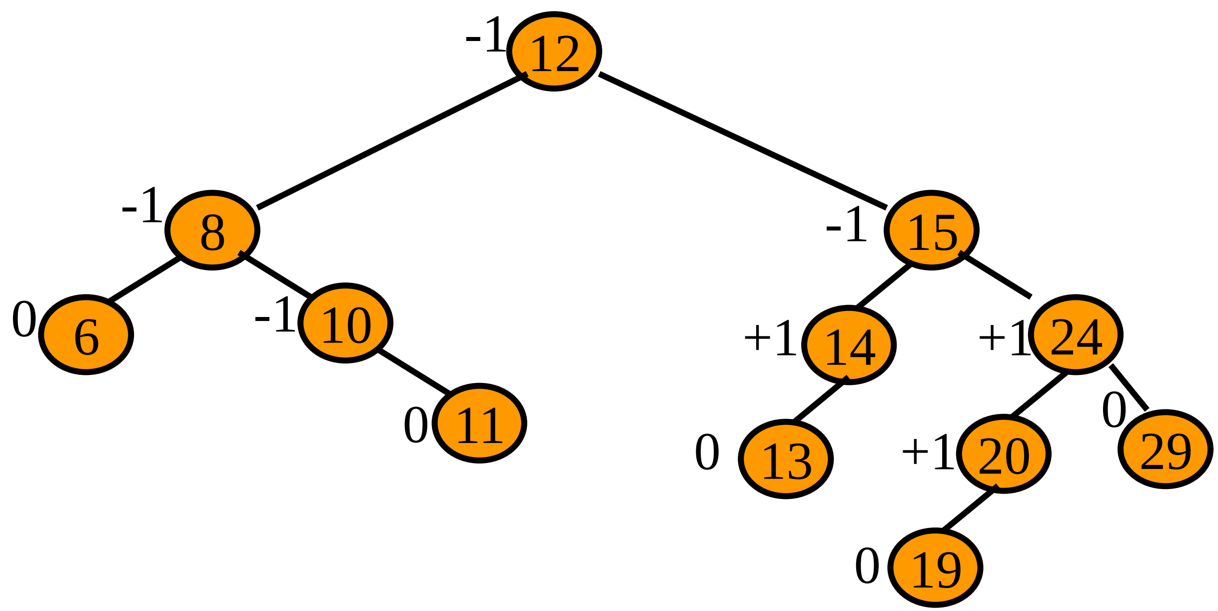
אבחנות

1. הצמתים היחידים שאולי הופר בהם האיזון הם הצמתים לאורך מסלול הכנסה/הוצאה.



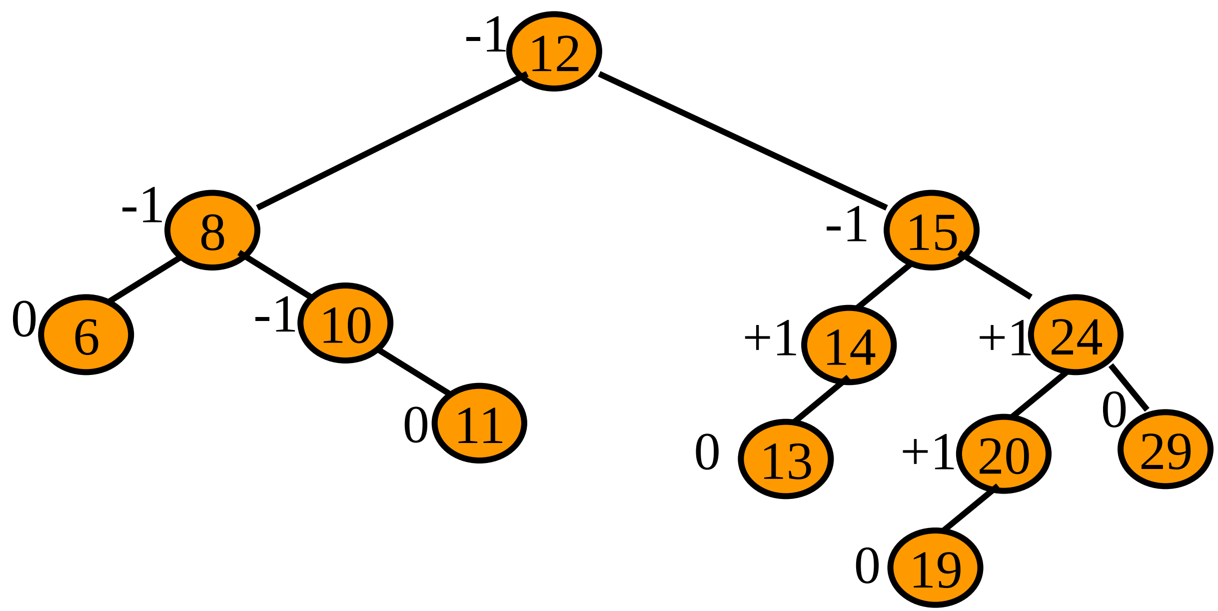
אבחנות

1. הצמתים היחידים שאולי הופר בהם האיזון הם הצמתים לאורך מסלול הכנסה/הוצאה.
2. אם עבור צומת v במסלול הנ"ל גובה העץ ששורשו v לא השתנה אזי גורמי האיזון בצמתים שמעליו במסלול לא השתנו.



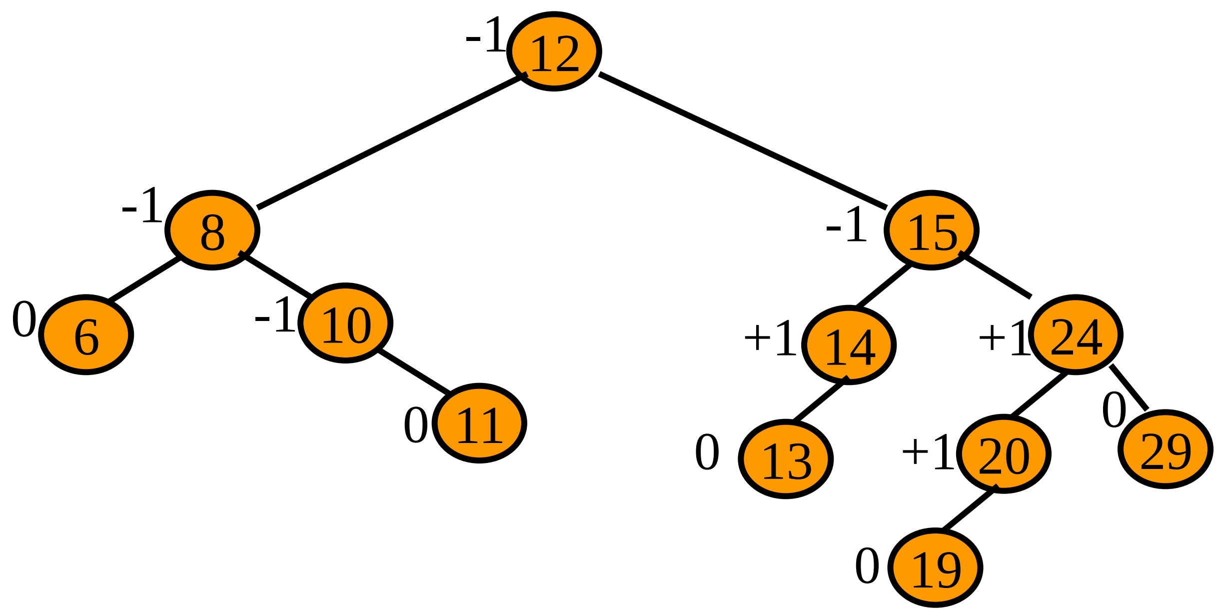
אבחנות

1. הצמתים היחידים שאולי הופר בהם האיזון הם הצמתים לאורך מסלול הכנסה/הוצאה.
2. אם עבור צומת v במסלול הנ"ל גובה העץ ששורשו v לא השתנה אזי גורמי האיזון בצמתים שמעליו במסלול לא השתנו.
3. אם גורם האיזון הופך ל-2 או ל 2-, אזי יש לבצע גלגול על מנת שהעץ יחזור להיות עץ AVL.



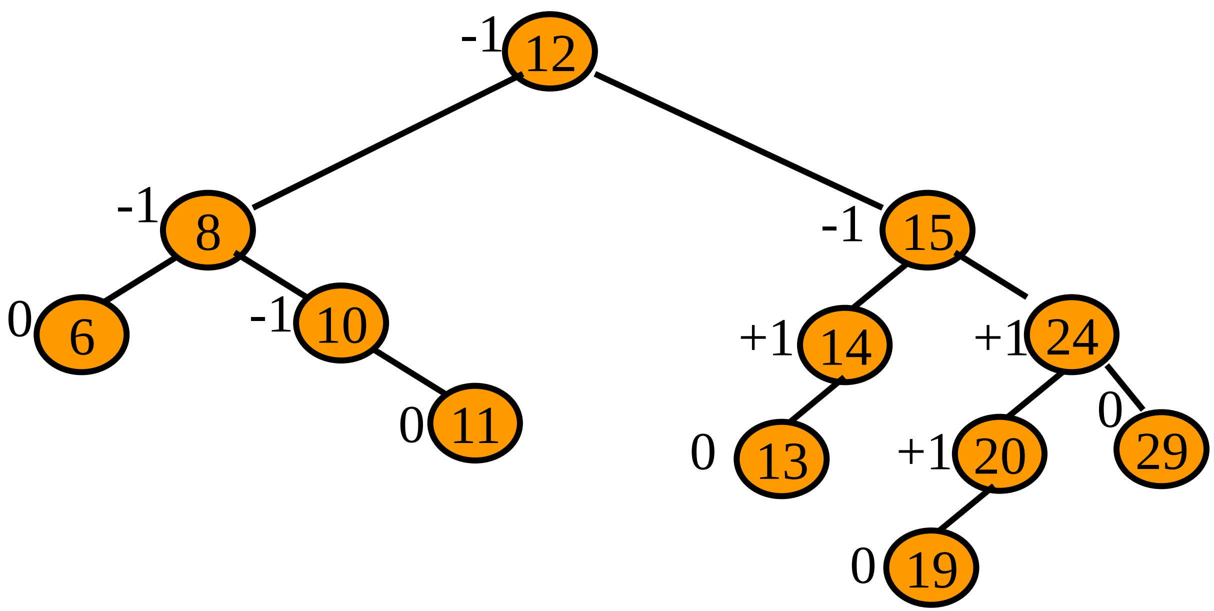
אבחנות

1. הצמתים היחידים שאולי הופר בהם האיזון הם הצמתים לאורך מסלול הכנסה/הוצאה.
2. אם עבור צומת v במסלול הנ"ל גובה העץ ששורשו v לא השתנה אזי גורמי האיזון בצמתים שמעליו במסלול לא השתנו.
3. אם גורם האיזון הופך ל-2 או ל 2-, אזי יש לבצע גלגול על מנת שהעץ יחזור להיות עץ AVL.
4. **גלגול**– פעולה המתבצעת על צומת שהופר בו האיזון על מנת להחזירו לתחום המותר [1 … 1-].



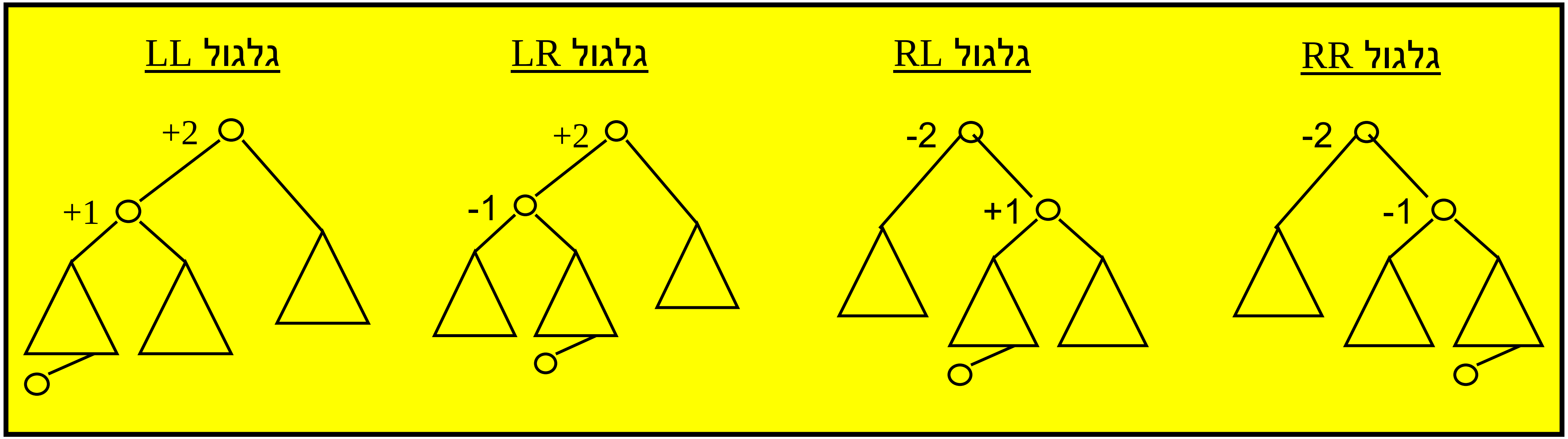
אבחנות

1. הצמתים היחידים שאולי הופר בהם האיזון הם הצמתים לאורך מסלול הכנסה/הוצאה.
2. אם עבור צומת v במסלול הנ"ל גובה העץ ששורשו v לא השתנה אזי גורמי האיזון בצמתים שמעליו במסלול לא השתנו.
3. אם גורם האיזון הופך ל-2 או ל 2-, אזי יש לבצע גלגול על מנת שהעץ יחזור להיות עץ AVL.
4. **<u>גלגול</u>**– פעולה המתבצעת על צומת שהופר בו האיזון על מנת להחזירו לתחום המותר [1 ... 1-].
5. גורם האיזון לא יכול להיות גדול מ-2 בערכו המוחלט כי בכל הכנסה/הוצאה הוא משתנה ב-1 לכל היותר.



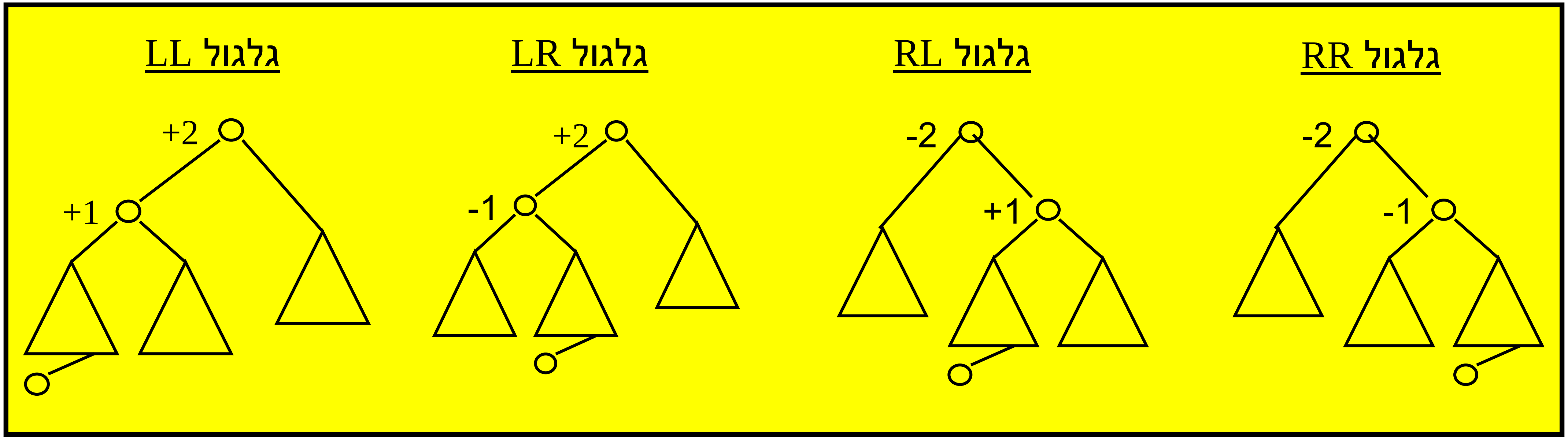
סוגי הגלגולים

סוג הגלגול, כלומר הדרך לתקן חוסר איזון בצומת, תלוי בצורה בה האיזון מופר.
נתן לסווג חוסר איזון בארבע קטגוריות שונות המכסות את כל המקרים.



סוגי הגלגולים

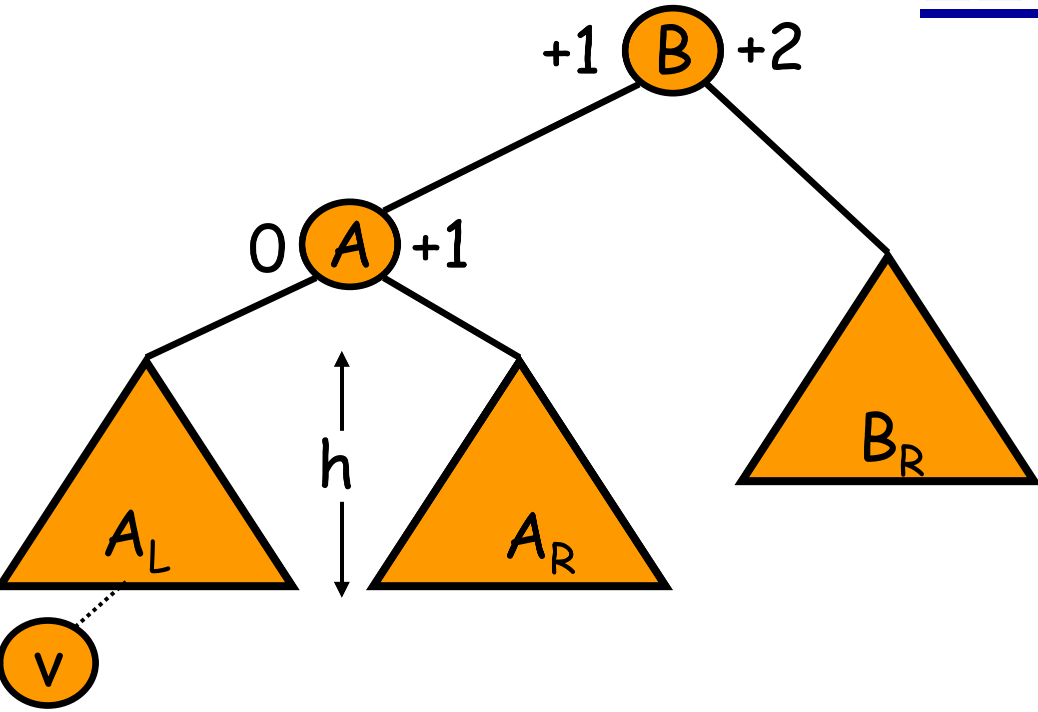
סוג הגלגול, כלומר הדרך לתקן חוסר איזון בצומת, תלוי בצורה בה האיזון מופר.
נתן לסווג חוסר איזון בארבע קטגוריות שונות המכסות את כל המקרים.



בשורש v	בבן השמאלי v_L	בבן הימני v_R	הגלגול המתאים
BF(v)=2	$BF(v_L) \geq 0$		LL
BF(v)=2	$BF(v_L) = -1$		LR
BF(v)= -2		$BF(v_R) \leq 0$	RR
BF(v)= -2		$BF(v_R) = 1$	RL

©cs,Technion

גלגול LL



לפני הכנסת v: גובה העץ הוא h +2.

הוכנס צומת v שהגדיל את גובה A_L ל-h +1.

גלגול LL : יעביר את A לשורש

מצד ימין של הצמתים מסומנים גורמי האיזון שהשתנו.

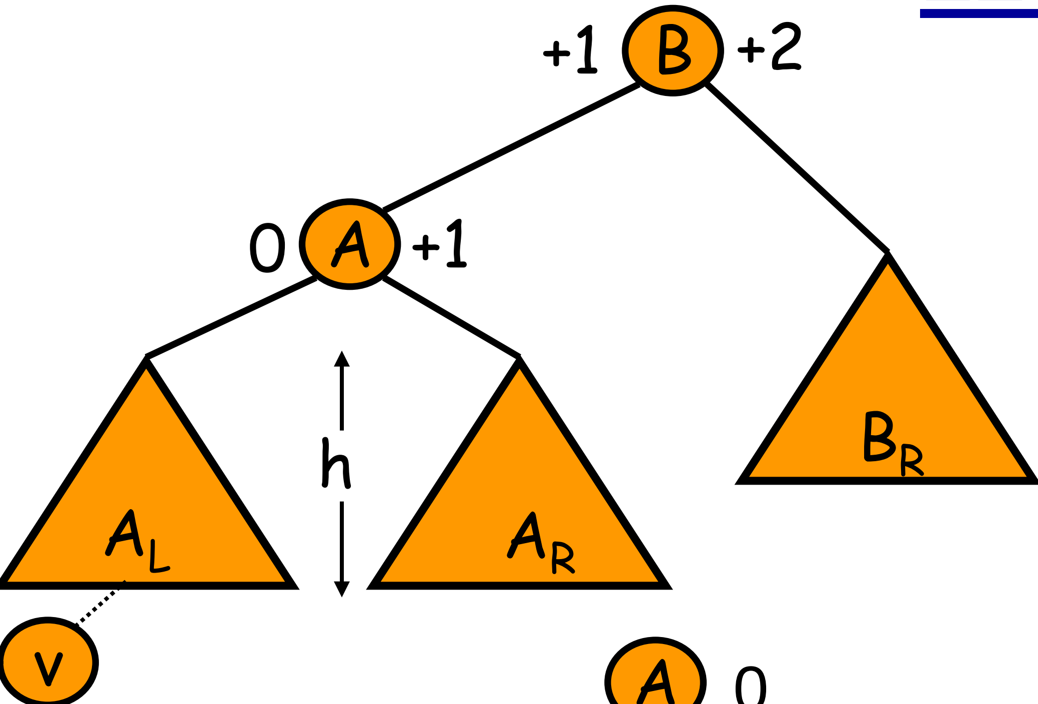
גלגול LL

<u>לפני הכנסת v</u>: גובה העץ הוא h +2.

הוכנס צומת v שהגדיל את גובה A_L ל-h +1.

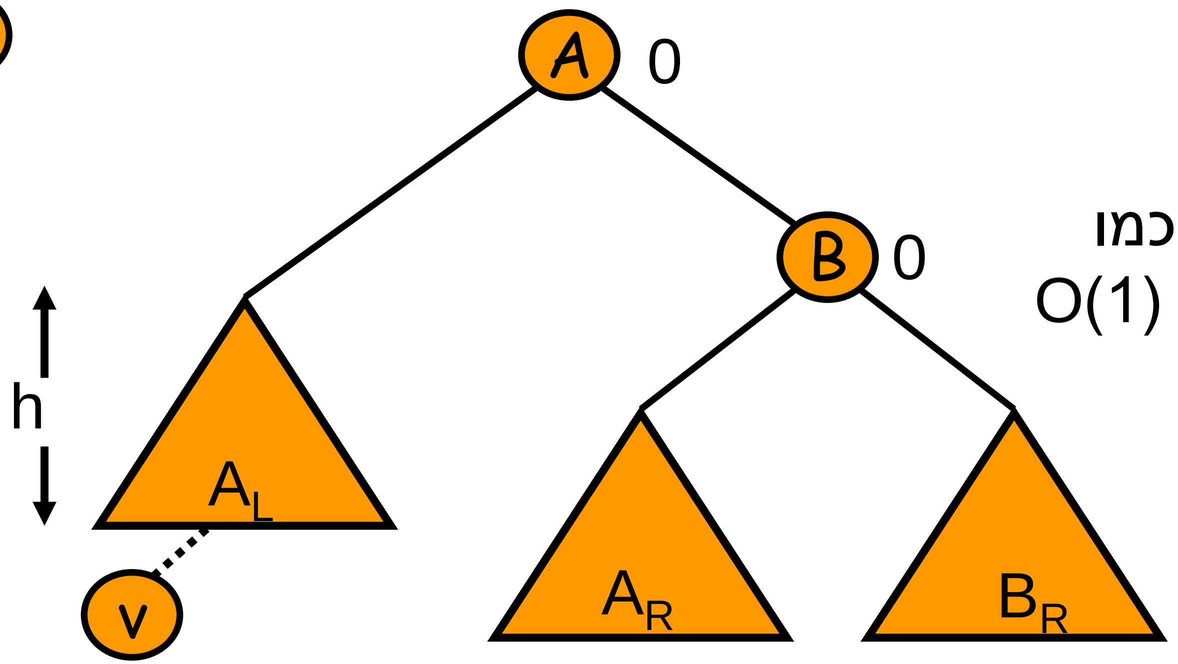
<u>גלגול LL</u> : יעביר את A לשורש

מצד ימין של הצמתים מסומנים גורמי האיזון שהשתנו.

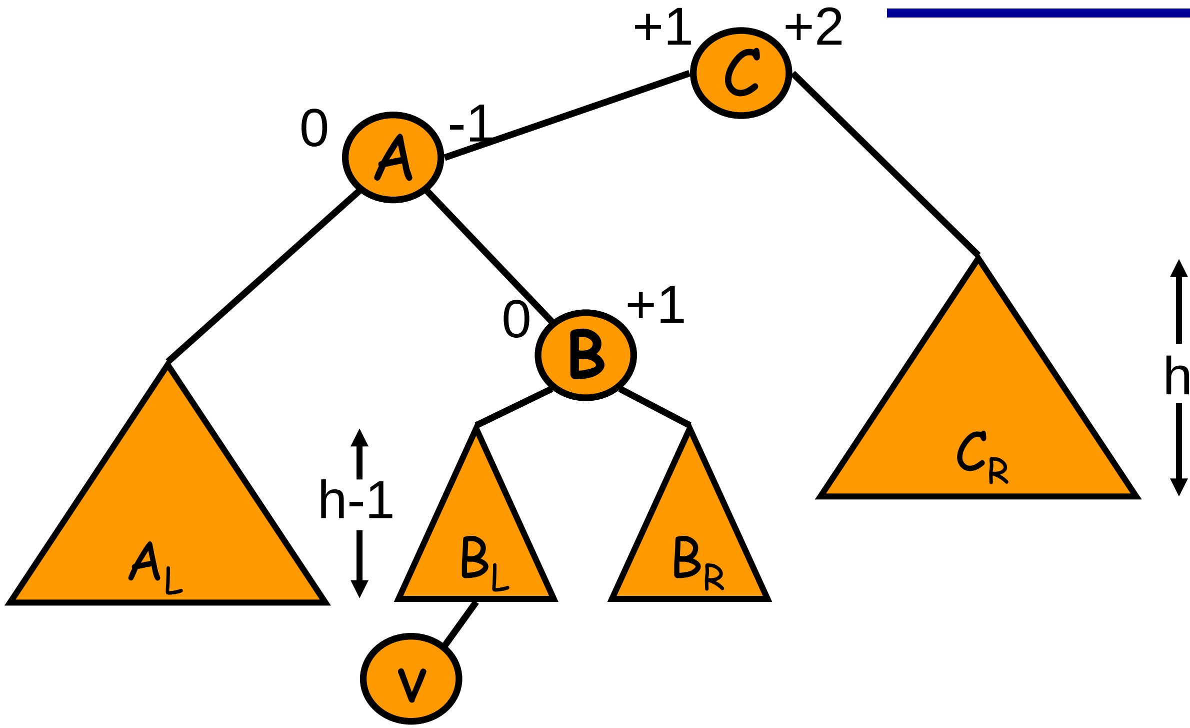


<u>אחרי הכנסת v</u>:

גובה העץ לאחר הגלגול הוא h +2, כמו לפני ההכנסה. השורש מאוזן. שינינו O(1) מצביעים ולכן זמן הגלגול O(1).



גלגול LR

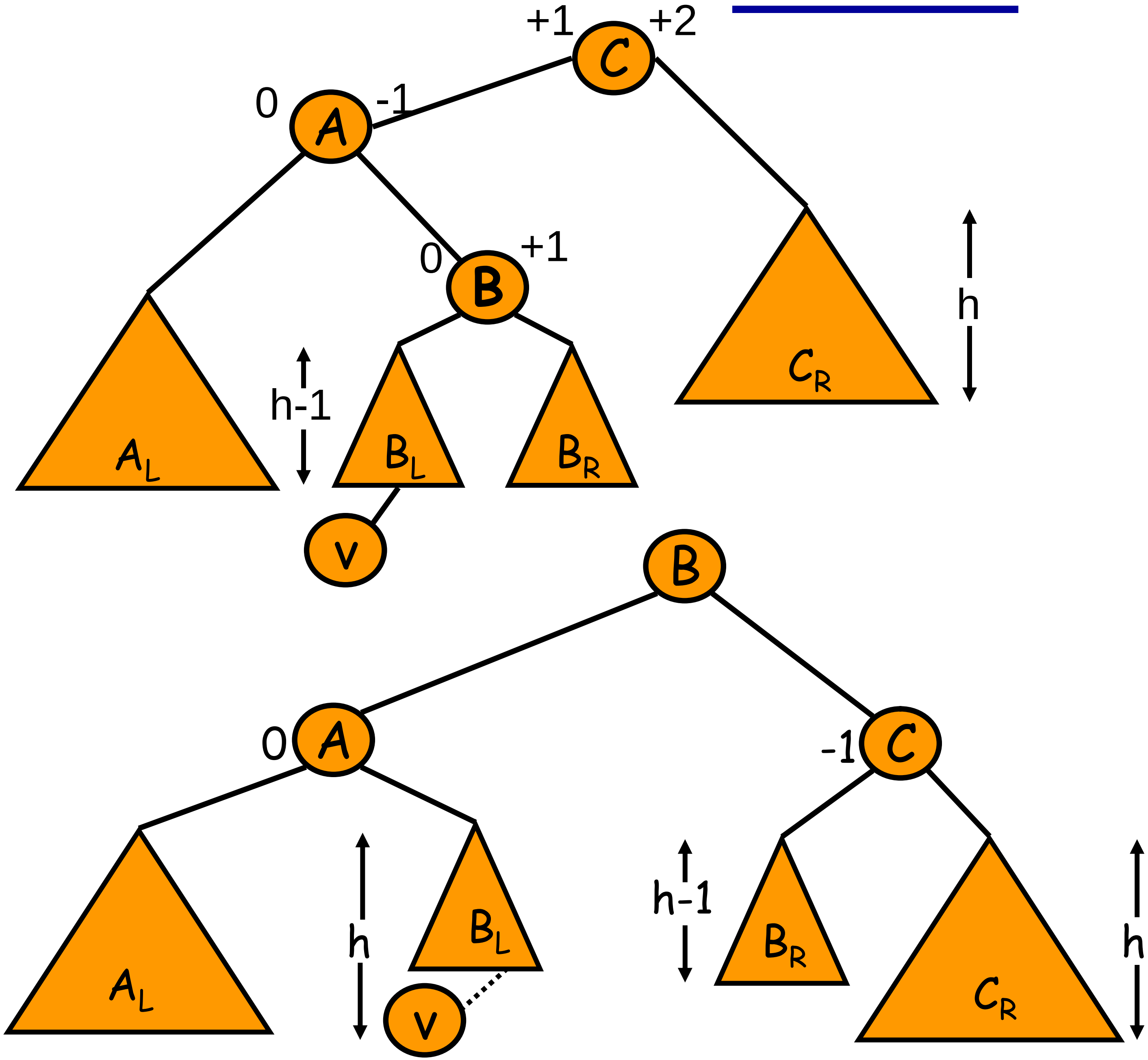


<u>לפני הכנסת איבר v:</u>

הוכנס איבר ל-B_L שגרם לו להעלות את גובהו ל-h.

<u>גלגול LR:</u>

גלגול LR



<u>לפני הכנסת איבר v:</u>

הוכנס איבר ל-B_L שגרם לו להעלות את גובהו ל-h.

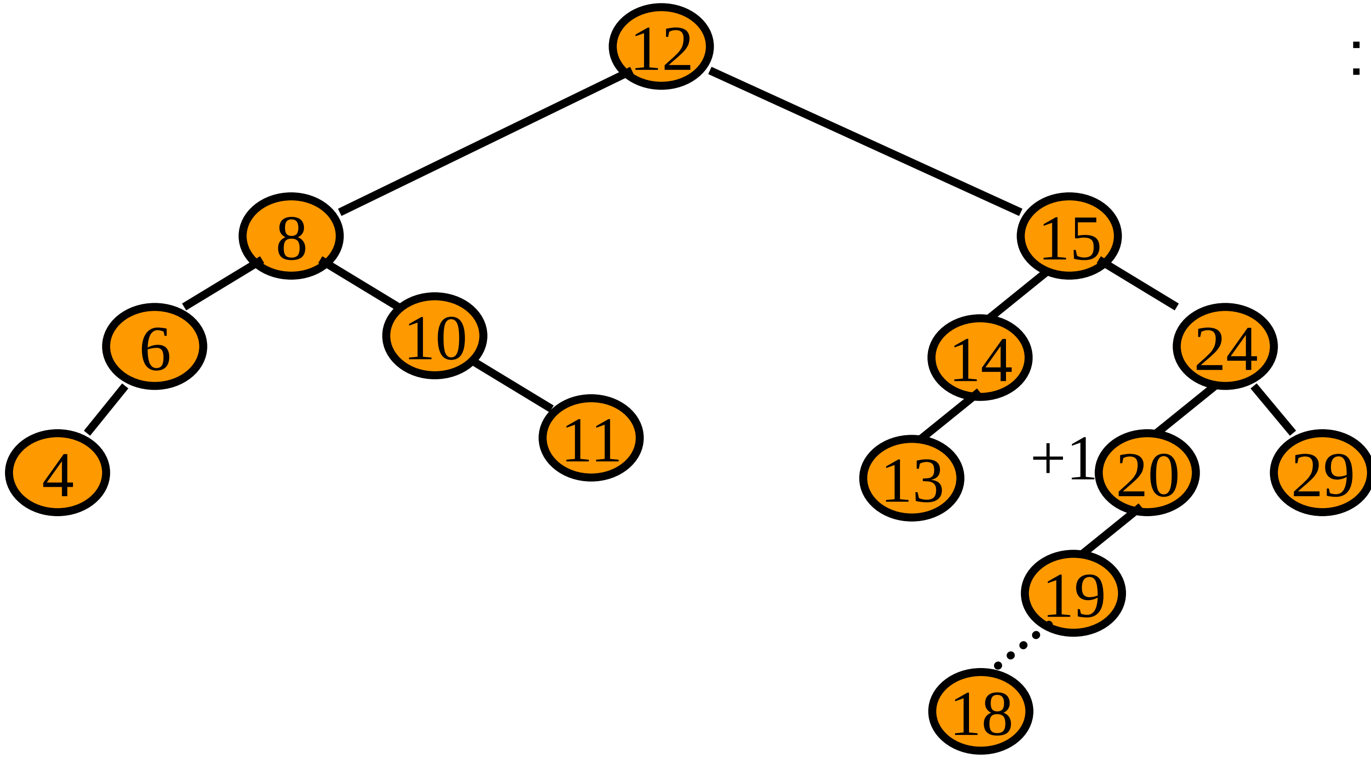
<u>גלגול LR:</u>

גובה העץ אחרי הגלגול הוא h +2, כמו לפני ההכנסה.

שינינו O(1) מצביעים ולכן זמן הגלגול O(1).

דוגמא להכנסת ערך x לעץ AVL

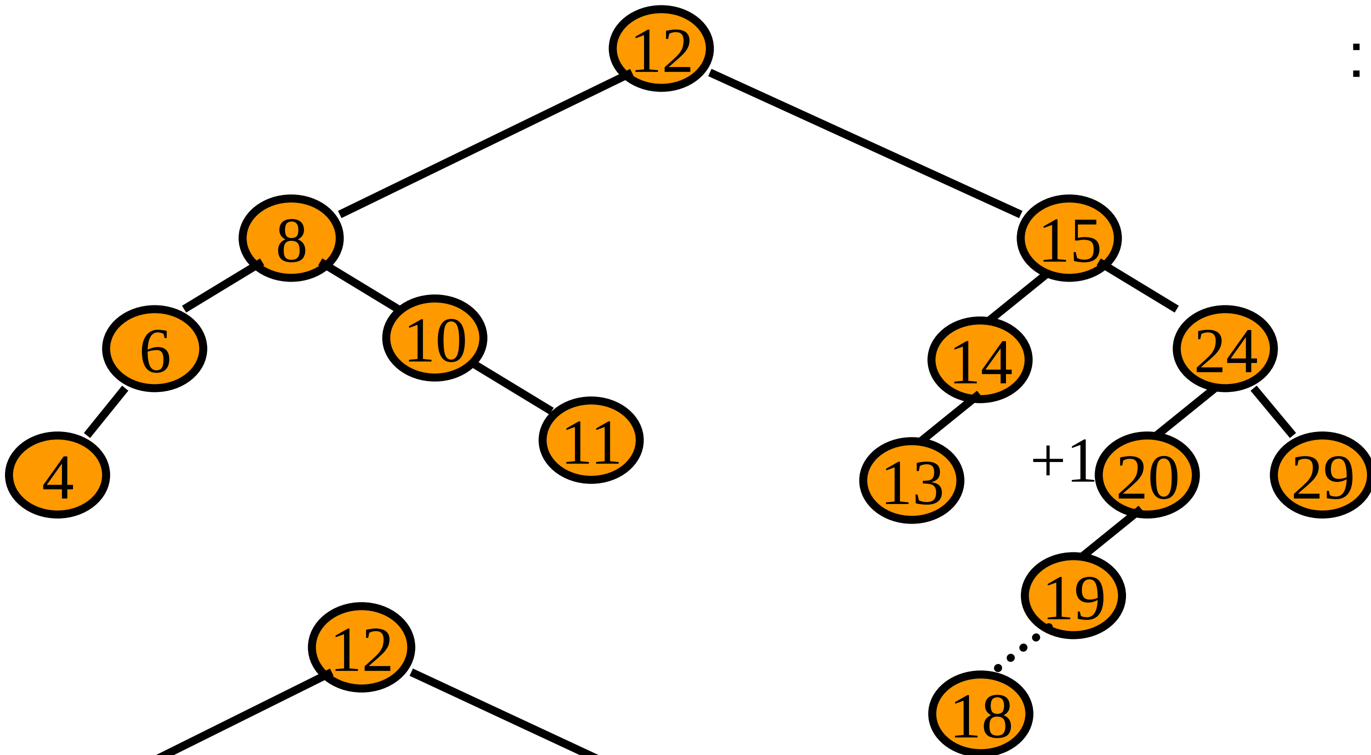
הוסף 18:



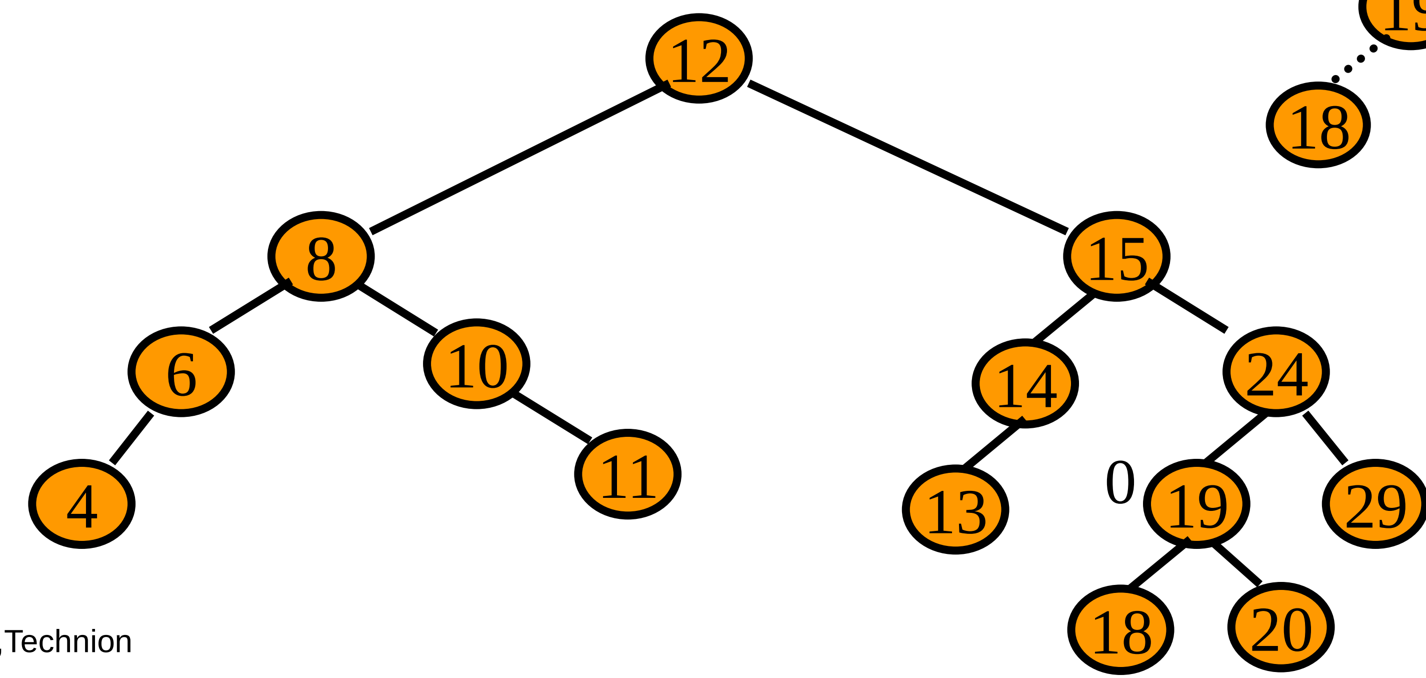
©cs,Technion

דוגמא להכנסת ערך x לעץ AVL

הוסף 18:



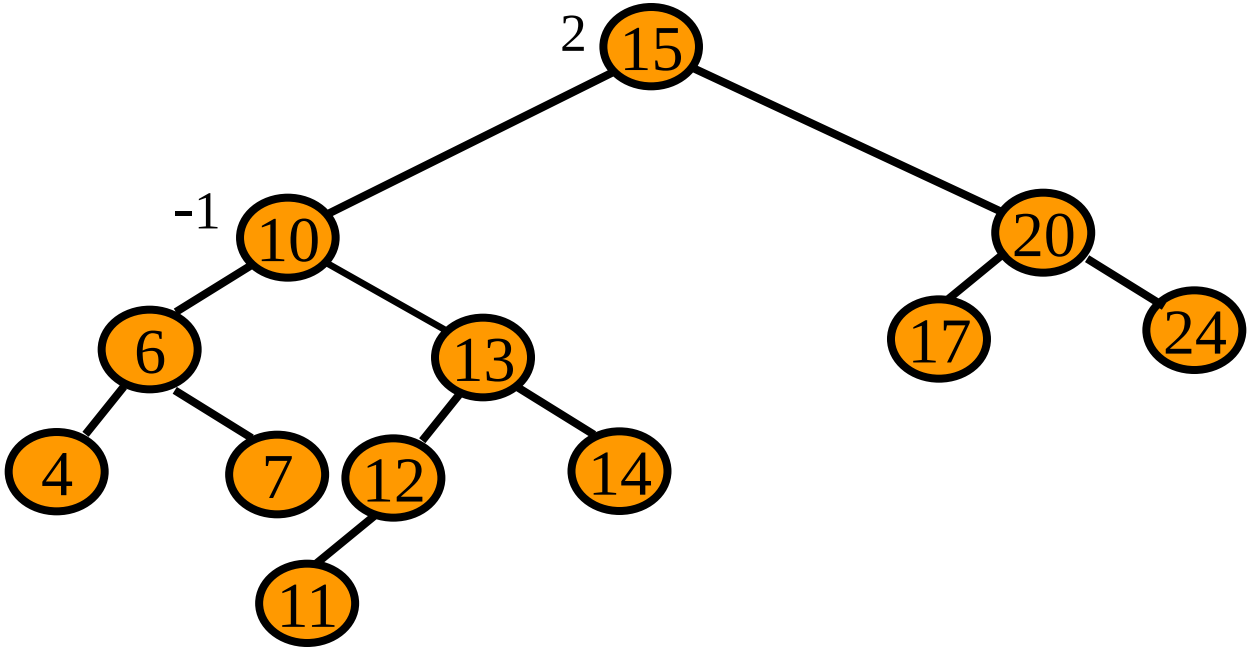
לאחר גלגול LL:



©cs,Technion

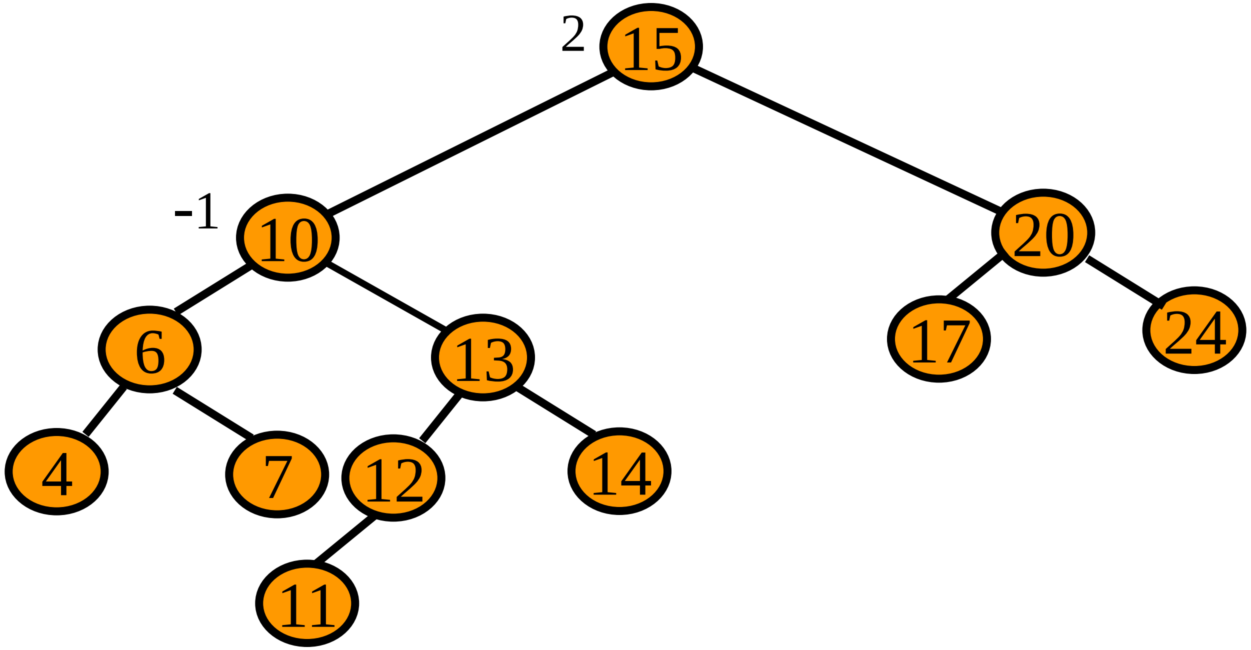
דוגמא להכנסת ערך x לעץ AVL

הוסף 11 :

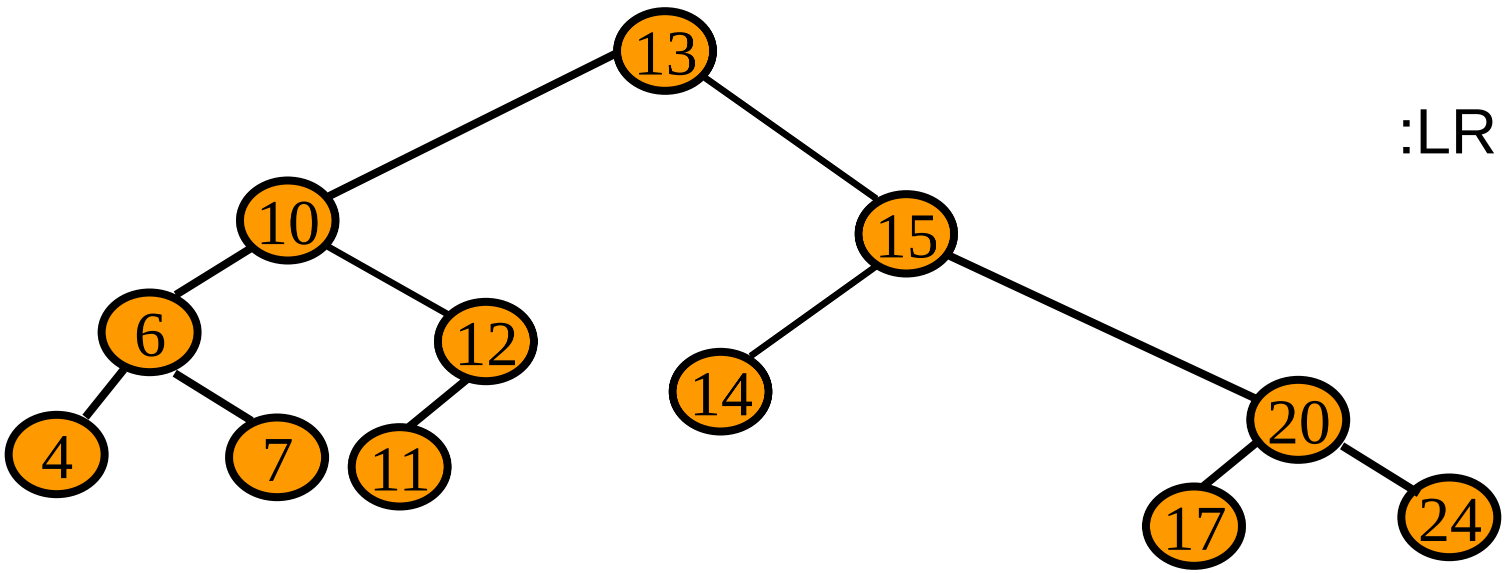


דוגמא להכנסת ערך x לעץ AVL

הוסף 11 :

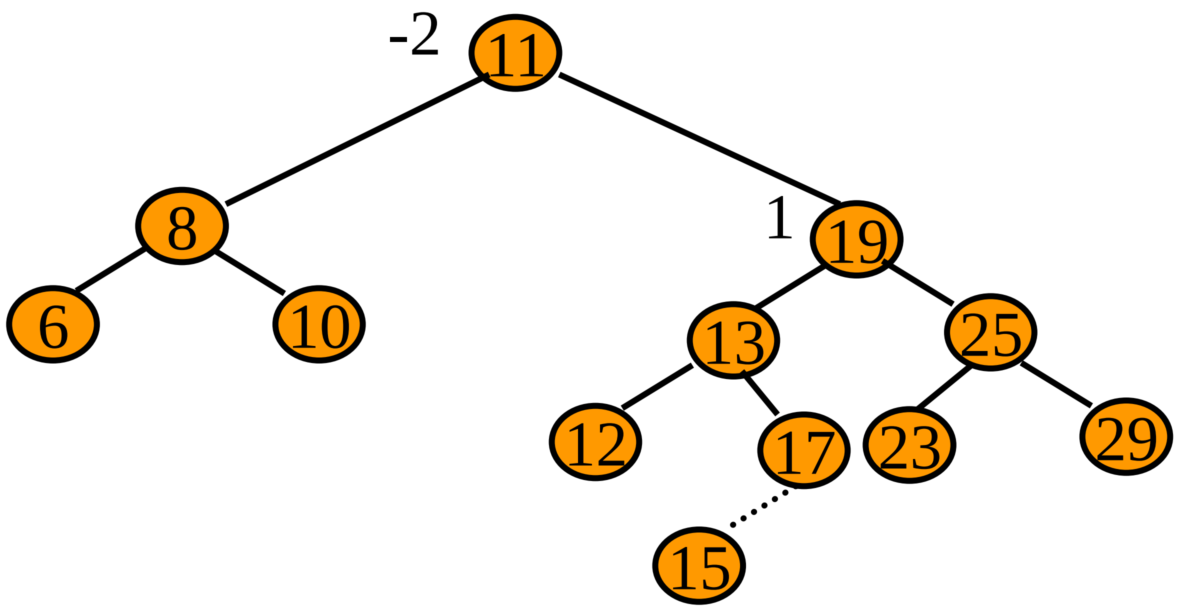


לאחר גלגול LR:



דוגמא להכנסת ערך x לעץ AVL

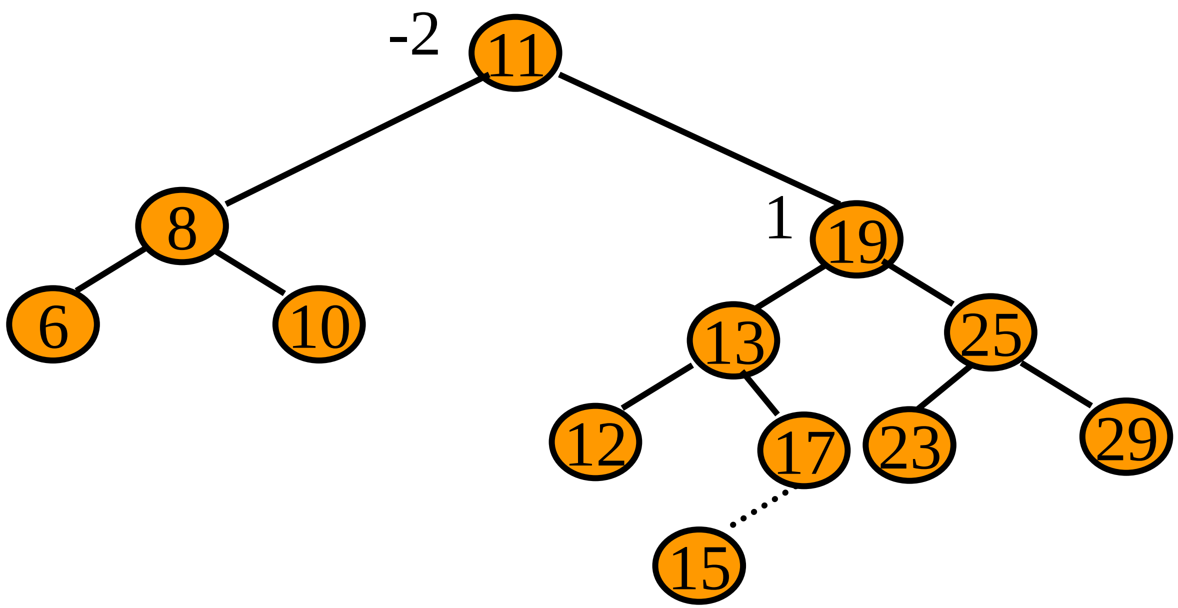
הוסף 15 (נחוץ גלגול RL)



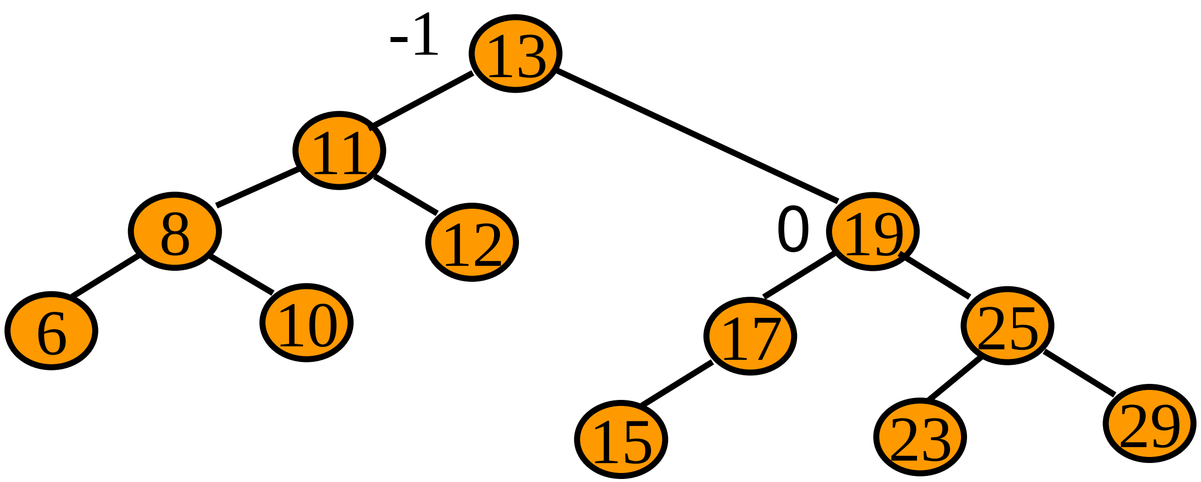
לאחר גלגול RL:

דוגמא להכנסת ערך x לעץ AVL

הוסף 15 (נחוץ גלגול RL)

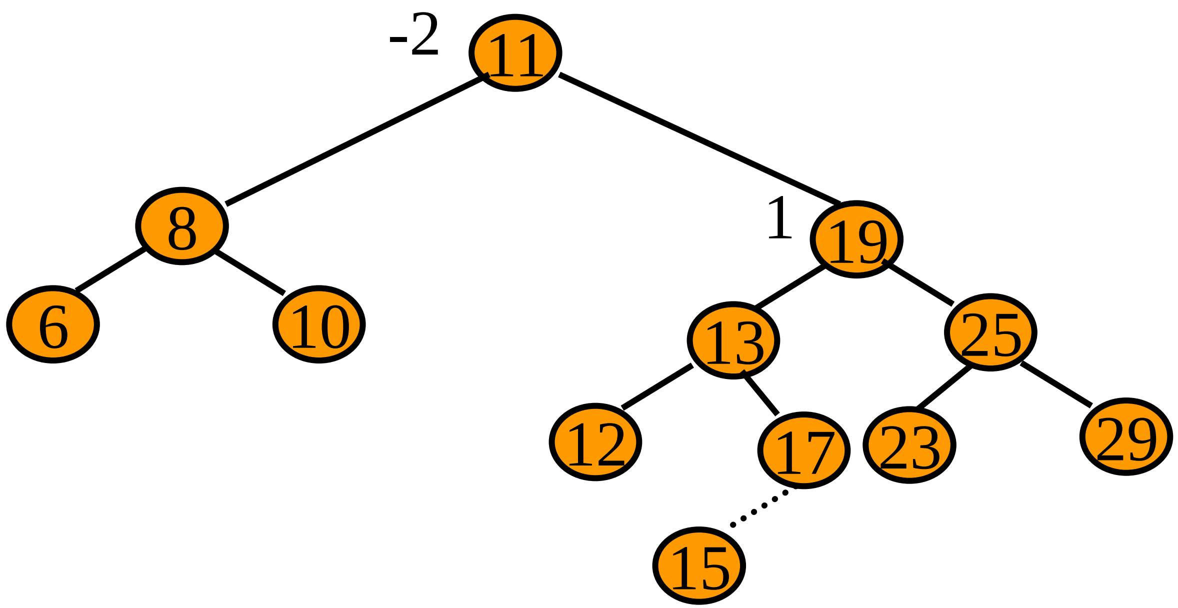


לאחר גלגול RL:

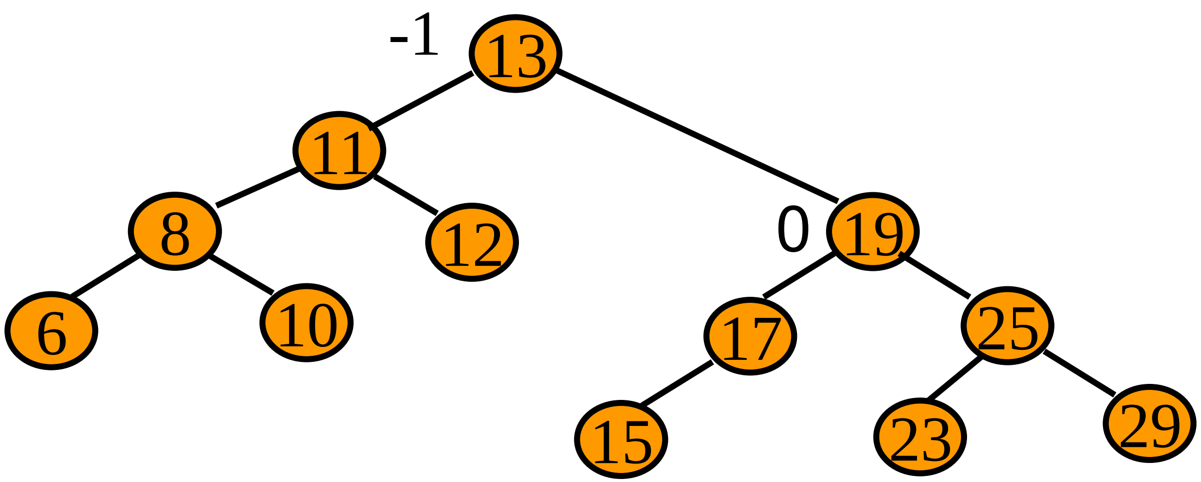


דוגמא להכנסת ערך x לעץ AVL

הוסף 15 (נחוץ גלגול RL)



לאחר גלגול RL:



בהכנסה, לאחר גלגול אחד העץ מאוזן מכיוון שגובה תת העץ בו נעשה השנוי לא השתנה.

אלגוריתם להכנסת ערך x לעץ AVL

1. הכנס את x כמו לעץ חיפוש בינרי. יהי v העלה שהוסף.
2. $h(v) = 0$
3. כל עוד $v \neq root$ בצע:
   4. $p = parent(v)$
   5. אם $h(p) \geq h(v) + 1$ סיים.
   6. $h(p) = h(v) + 1$
   7. אם ב- p הופר האיזון, בצע גלגול וסיים.
   8. אחרת $v = p$

©cs,Technion

אלגוריתם להכנסת ערך x לעץ AVL

1. הכנס את x כמו לעץ חיפוש בינרי. יהי v העלה שהוסף.
2. $h(v) = 0$
3. כל עוד $v \neq root$ בצע:
   4. $p = parent(v)$
   5. אם $h(p) \geq h(v) + 1$ סיים.
   6. $h(p) = h(v) + 1$
   7. אם ב- p הופר האיזון, בצע גלגול וסיים.
   8. אחרת $v = p$

איך נחשב את $parent(v)$?

©cs,Technion

אלגוריתם להכנסת ערך x לעץ AVL

1. הכנס את x כמו לעץ חיפוש בינרי. יהי v העלה שהוסף.
2. $h(v) = 0$
3. כל עוד $v \neq root$ בצע:
4. $p = parent(v)$
5. אם $h(p) \geq h(v) + 1$ סיים.
6. $h(p) = h(v) + 1$
7. אם ב- p הופר האיזון, בצע גלגול וסיים.
8. אחרת $v = p$

איך נחשב את $parent(v)$?

נוציא אותו מהמחסנית בה נמצאים כל הצמתים על המסלול מהשורש ועד v.

זמן ההכנסה מעץ AVL

כיוון שהצומת בו עושים גלגול לא משנה את גובהו,
מבצעים רק גלגול אחד.

מציאת המקום הדרוש להכנסה	$O(h)$
הוספת הצומת	$O(1)$
מציאת המקום בו מופר האיזון	
(אם מופר)	$O(h)$
תיקון האיזון	$O(1)$
סה"כ	$O(h) = O(\log n)$

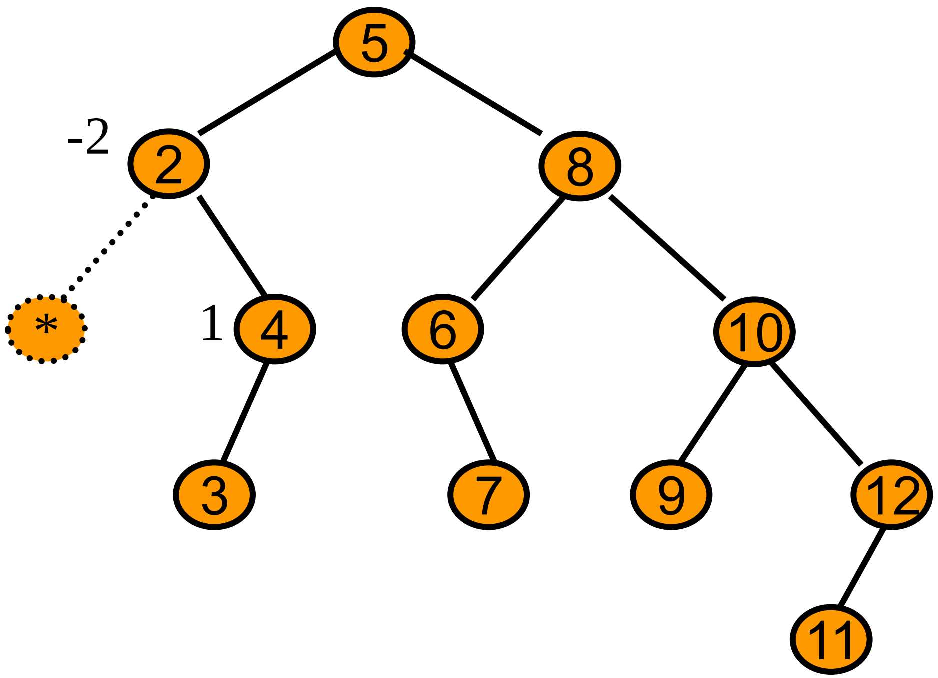
אלגוריתם הוצאה/הכנסה

- הוצא (הכנס) צומת v כפי שהפעולה מתבצעת בעץ חיפוש בינרי.
- תקן את גורמי האיזון בצורה הבאה. לכל צומת v לאורך המסלול
  החל מלמטה ועד לשורש בצע:
  - עדכן את BF(v)
  - אם $|BF(v)| = 2$, בצע גלגול והמשך כלפי מעלה.
  - אם גובה תת העץ ששורשו v לא השתנה, סיים.
  - אם גובה תת העץ השתנה ו- BF(v) תקין, המשך כלפי מעלה.

בהוצאה יתכן יותר מגלגול אחד.

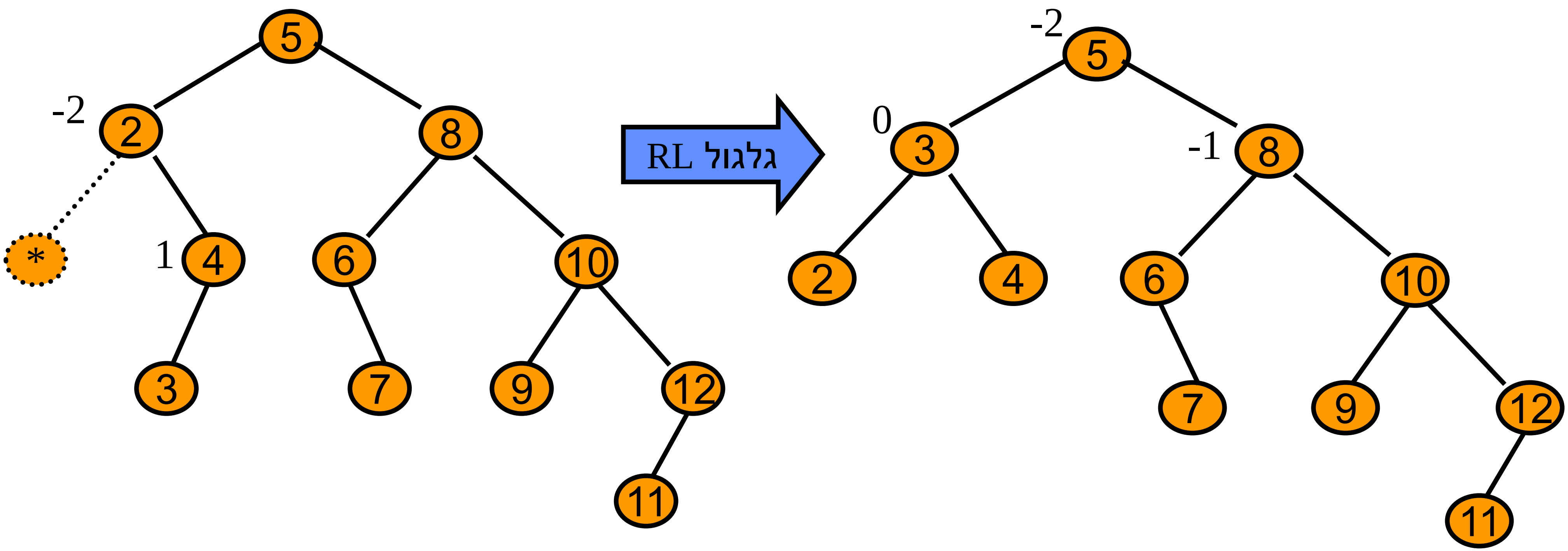
©cs,Technion

דוגמא להוצאה מעץ AVL



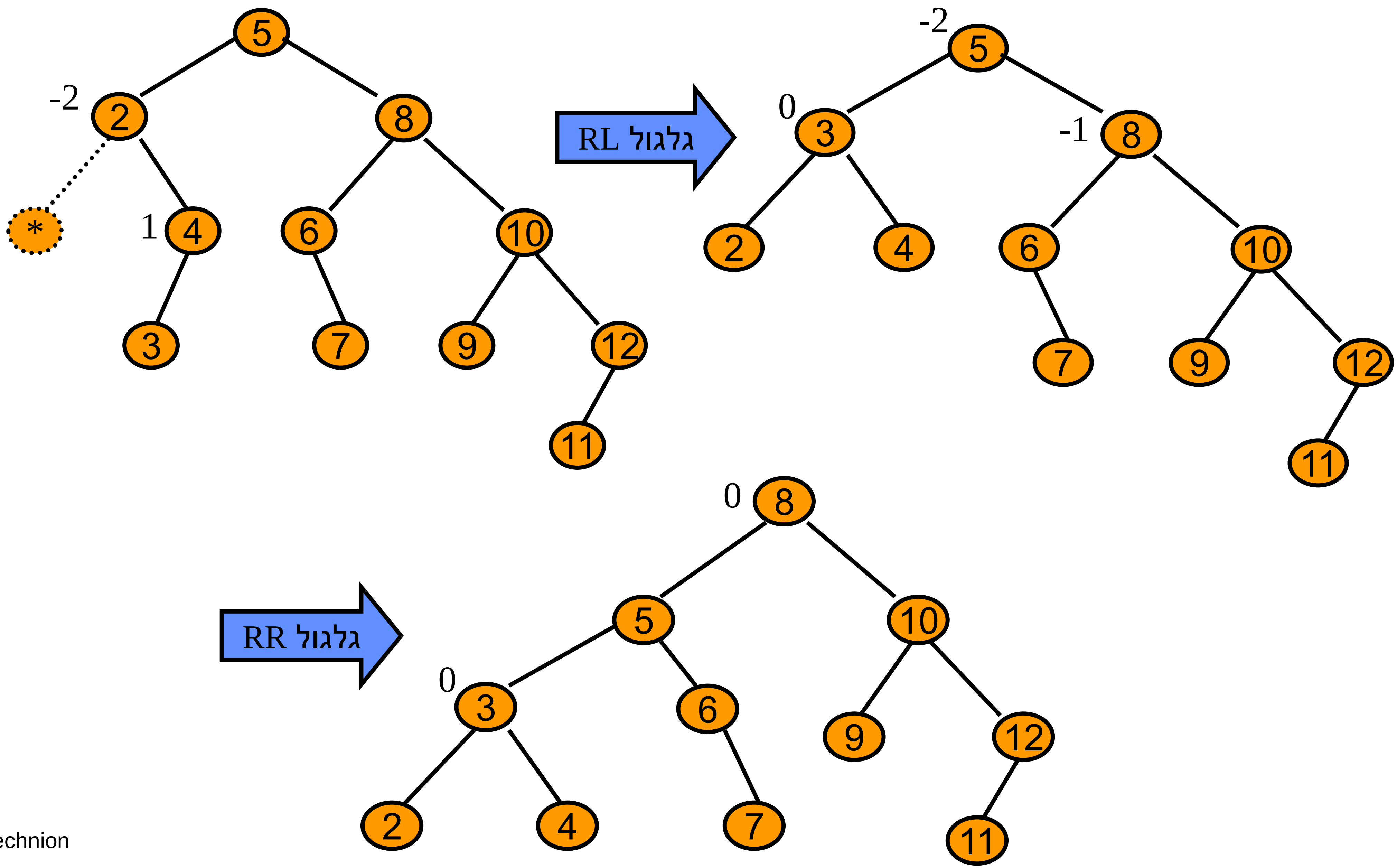
©cs,Technion

דוגמא להוצאה מעץ AVL

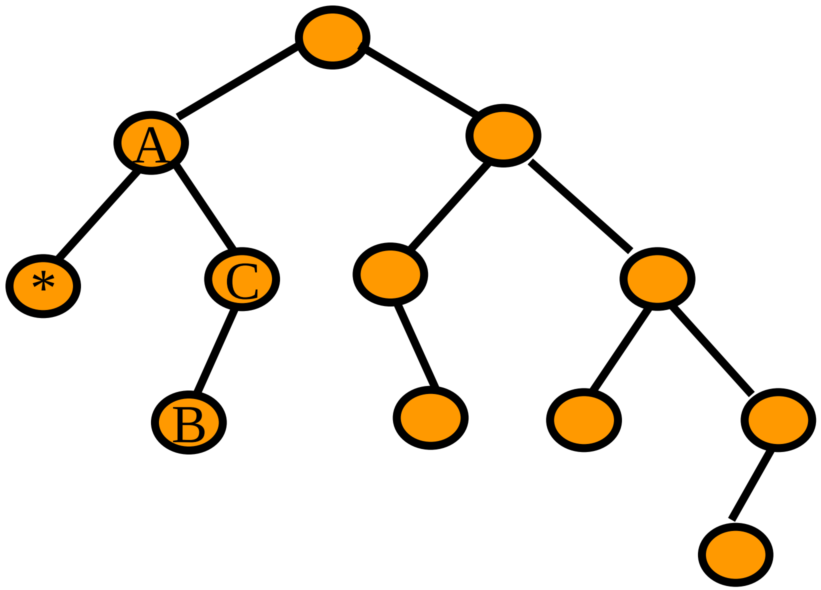


©cs,Technion

דוגמא להוצאה מעץ AVL



דוגמא: הוצאה מעץ פיבונצי



בהוצאה יתכן גלגול בכל צומת על המסלול בין הצומת המוצא ובין השורש.

לדוגמא כאשר מוציאים עלה ראשון מעץ פיבונצי - F_i.

תרגיל לבית: מהי סדרת הגלגולים המתבצעת כאשר מוציאים עלה ראשון מעץ פיבונצי - F_i.

©cs,Technion

זמן הוצאה מעץ AVL

מציאת המקום הדרוש להוצאה $O(h)$

מציאת המקום בו מופר האיזון

(אם מופר) $O(h)$

תיקון האיזון $O(h)$

(לכל היותר פעם בכל רמה)

סה"כ $O(h) = O(\log n)$

עצי AVL מאפשרים חיפוש, הכנסה, הוצאה בזמן $O(\log n)$

©cs,Technion

זמן הוצאה מעץ AVL

מציאת המקום הדרוש להוצאה	O(h)
מציאת המקום בו מופר האיזון	
(אם מופר)	O(h)
תיקון האיזון	O(h)
(לכל היותר פעם בכל רמה)	
סה"כ	O(h) = O(log n)

עצי AVL מאפשרים חיפוש, הכנסה, הוצאה בזמן O(log n)

ראו הדגמה באתר הקורס (בחרו links/AVL tree animation):

http://www.cs.technion.ac.il/~cs234218

Fun movie demonstration

(**Building an AVL tree of height 8 -** YouTube)

http://www.youtube.com/watch?v=JbibvS1S7N0