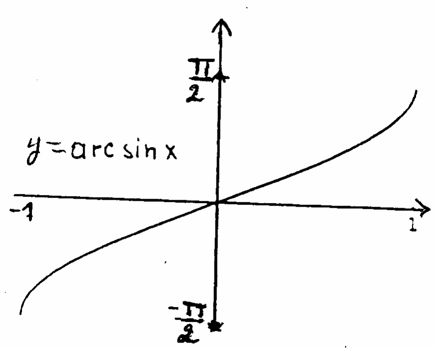
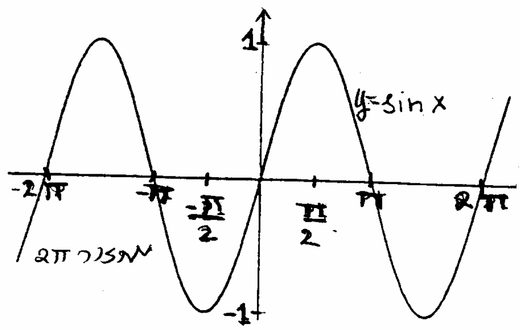
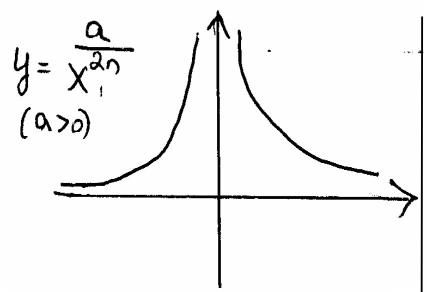
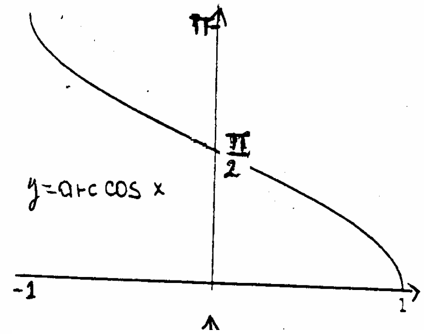
פרק 7 - פונקציות של משתנה אחד

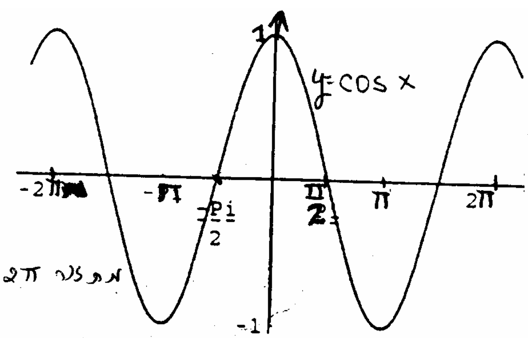
א. הפונקציות האלמנטריות:

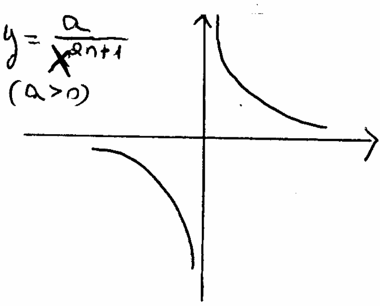


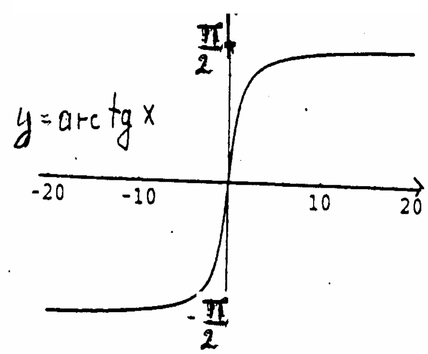


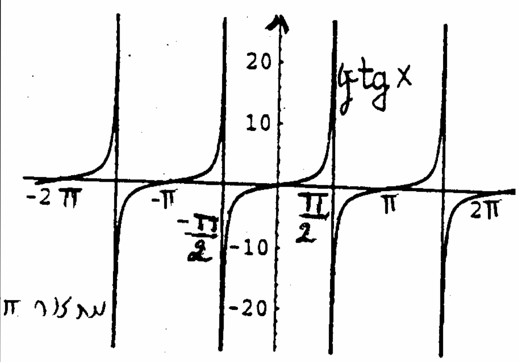


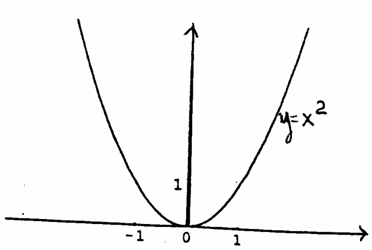


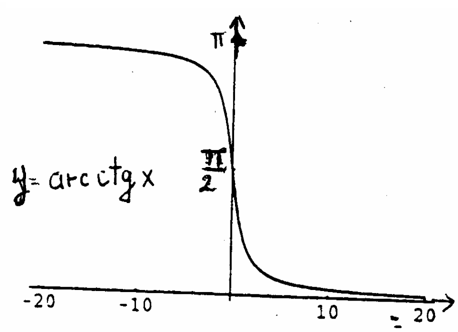


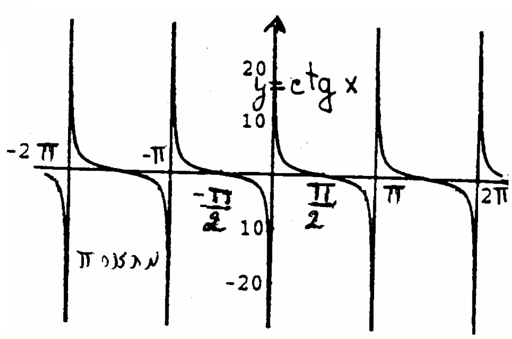


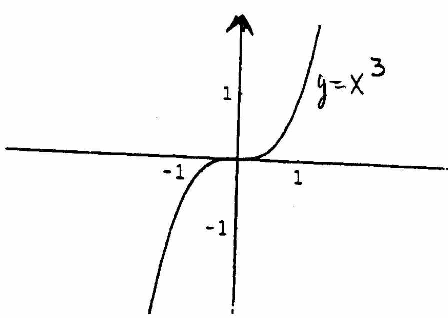


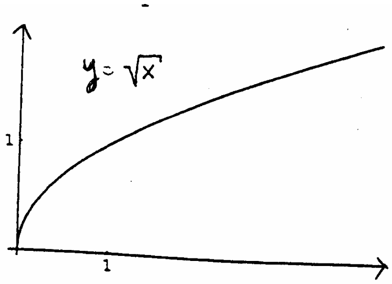


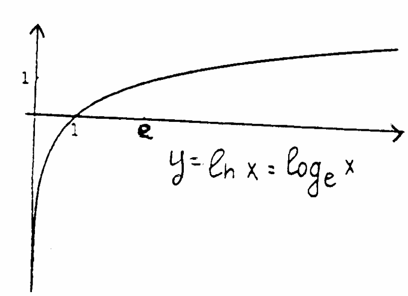


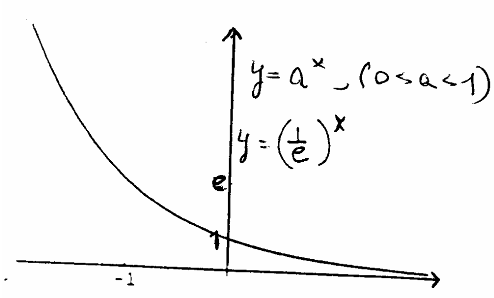


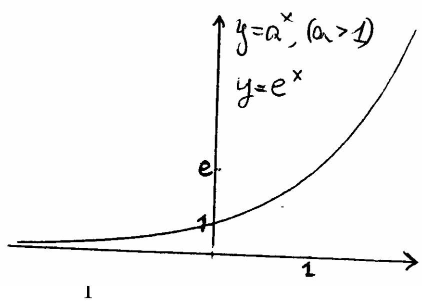












ב. תכונות של פונקציות ממשיות:

תחום הגדרה:

$f(x)=\frac{1}{g(x)}$: $g(x)\neq 0$.

$f(x)=\sqrt[2n]{g(x)}$: $g(x)\geq 0$.

$f(x)=\ln(g(x))$: $g(x)>0$.

$f(x)=\tan(g(x))$: $g(x)\neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, לכל k שלם.

$f(x)=\cot(g(x))$: $g(x)\neq \pi k$, לכל k שלם.

$f(x)=\arcsin(g(x))$: $-1\leq g(x)\leq 1$.

$f(x)=\arccos(g(x))$: $-1\leq g(x)\leq 1$.

התמונה:

$$\mathrm{Im}(f)=\{f(x)\mid x\in Dom(f)\}=\{y\mid \exists x\in Dom(f),\ y=f(x)\}$$

הרכבת פונקציות:

בהנתן שתי פונקציות ממשיות, $f(x), g(x)$, כך ש $\mathrm{Im}(f)\subseteq Dom(g)$ נגדיר את הפונקציה: $g\circ f$ באופן הבא:
לכל $x\in Dom(f)$, $g\circ f(x)=g(f(x))$.

פונקציה חח"ע:

$f(x)$ נקראת חד-חד-ערכית אם לכל $x_1,x_2\in Dom(f)$, אם $x_1\neq x_2$ אז $f(x_1)\neq f(x_2)$.

פונקציה הפוכה:

אם $f(x)$ חח"ע, אז קיימת פונקציה יחידה $f^{-1}:\mathrm{Im}(f)\to Dom(f)$ כך שלכל $y\in \mathrm{Im}(f), x\in Dom(f)$
מתקיים: $y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-1}(y)$. f^{-1} היא הפונקציה ההפוכה של f.
לכל $x\in Dom(f)$, $f^{-1}(f(x))=x$.
לכל $y\in \mathrm{Im}(f)$, $f(f^{-1}(y))=y$.
הגרף של הפונקציה ההפוכה $x=f^{-1}(y)$ סימטרי ביחס לישר $y=x$ לגרף של הפונקציה $y=f(x)$.

מונוטוניות:

א. $f(x)$ מונוטונית **עולה** אם לכל x_1,x_2 בתחום $x_1\leq x_2 \Leftarrow f(x_1)\leq f(x_2)$
ב. $f(x)$ מונוטונית **עולה ממש** אם לכל x_1,x_2 בתחום $x_1<x_2 \Leftarrow f(x_1)<f(x_2)$
ג. $f(x)$ מונוטונית **יורדת** אם לכל x_1,x_2 בתחום $x_1\leq x_2 \Leftarrow f(x_1)\geq f(x_2)$
ד. $f(x)$ מונוטונית **יורדת ממש** אם לכל x_1,x_2 בתחום $x_1<x_2 \Leftarrow f(x_1)>f(x_2)$
טענה: אם $f(x)$ יורדת/עולה ממש אז היא חח"ע.

זוגיות: $f(x)$ מוגדרת בתחום סימטרי D (כלומר: $x\in D\Leftrightarrow -x\in D$)
$f(x)$ **זוגית** אם $f(-x)=f(x)$ לכל $x\in D$. ($f(x)$ סימטרית ביחס לציר y).
$f(x)$ **אי-זוגית** אם $f(-x)=-f(x)$ לכל $x\in D$. ($f(x)$ סימטרית ביחס לראשית).

מחזוריות: $f(x)$ **מחזורית** אם קיים $T>0$ כך שלכל x מתקיים $f(x\pm T)=f(x)$.
ה-T הקטן ביותר (אם קיים כזה) המקיים תנאי זה נקרא **המחזור** של $f(x)$.

ג. גבול של פונקציה ממשית:

התכנסות של פונקציות – הגדרה לפי היינה:

- תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבות הנקודה $x=a$, פרט אולי לנקודה a עצמה.
  נאמר כי $\lim_{x\to a} f(x)=L$ אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת ל-a ו-ש $x_n \neq a$, הסדרה $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-L.
- תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בחצי ישר ימני (a,∞).
  נאמר כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ השואפת לאינסוף, הסדרה $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-L.

התכנסות של פונקציות – הגדרה לפי קושי:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x \quad \left(0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon\right)$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x \quad \left(a<x<a+\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon\right)$$
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x \quad \left(a-\delta<x<a \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon\right)$$
$$\lim_{x\to a} f(x)=\infty \quad\Leftrightarrow\quad \forall M>0\ \exists\delta>0\ \forall x \quad \left(0<|x-a|<\delta \Rightarrow f(x)>M\right)$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=L \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0\ \exists E\ \forall x \quad \left(x>E \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon\right)$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \quad\Leftrightarrow\quad \forall M>0\ \exists D\ \forall x \quad \left(x>D \Rightarrow f(x)>M\right)$$

טענה: $\lim_{x\to a} f(x)=L \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L$

משפט:

יהיו $f(x)$, $g(x)$ שתי פונקציות, ונניח כי בנקודה $x=a$ קיימים הגבולות $\lim_{x\to a} f(x)=A$ ו- $\lim_{x\to a} g(x)=B$, ויהי c מספר ממשי קבוע, אזי

א. $\lim_{x\to a} c=c$.

ב. $\lim_{x\to a} cf(x)=cA$.

ג. $\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)=A\pm B$.

ד. $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=(\lim_{x\to a} f(x))(\lim_{x\to a} g(x))=AB$.

ה. אם $B\neq 0$ אזי $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{A}{B}$.

<u>תרגילים:</u>

5.1

מצאו את תחום ההגדרה של הפונקציה הבאות:

א) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ ב) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{4-x^2}}$ ג) $f(x)=\sqrt{3x-x^3}$

ד) $f(x)=(x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ ה) $f(x)=\ln(x+2)+\ln x$ ו) $f(x)=\sqrt[3]{\ln(3-2x)}$

ז) $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\ln\sqrt{1-4x^2}$ ח) $f(x)=\sqrt{x^3-3x+2}+\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$

ט) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$ י) $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x}$

5.2

מצאו את התמונה של הפונקציות הבאות:

א) $f(x)=\log_2(1-\cos x)$ ב) $f(x)=\sin x+\cos x$

ג) $f(x)=\sqrt{2x+1}$ ד) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

5.3

מצאו את הפונקציות ההפוכות לפונקציות הבאות, אם זה אפשרי:

א) $y=3^x$ ב) $y=\ln(2x+3)$ ג) $y=\frac{x+1}{x-1}$

ד) $y=\begin{cases} 2\cdot 3^x, & x\le 0 \\ 2-x, & x>0 \end{cases}$ ה) $y=2^{\frac{x+1}{x-1}}$

5.4

מצאו את $f(x)$ כאשר:

א) $f(x^3+1)=\frac{x^6+2x^3+4}{3x^3+5}$ ב) $f\left(\frac{2}{x^2}\right)=\frac{-2x^2}{x^4+4}$

5.5

מי מהטענות הבאות נכונה הכרחית:

א) אם $f(x)$ מונוטונית עולה ממש לכל x אז $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$

ב) אם $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ אז $f(x)$ מונוטונית עולה ממש.

ג) אם $\lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x))=\infty$ ואם $\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=\infty$ אז $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$

5.6

תהיינה $f(x)$ פונקציה חיובית עולה ו- $g(x)$ פונקציה חיובית יורדת. בדקו מונוטוניות של הפונקציות הבאות:

(א) $f(x)+g(x)$ (ב) $f(x)-g(x)$ (ג) $f(x)\cdot g(x)$

(ד) $\frac{f(x)}{g(x)}$ (ה) $f(g(x))$ (ו) $g(f(x))$

5.7

בדקו זוגיות של הפונקציות הבאות:

(א) $f(x)=x^2+1+\cos x+|x|$ (ב) $f(x)=3x^5+tg\,x-\sqrt[3]{x}+sgn(x)$

(ג) $f(x)=5^{x^4-x}+5^{x^2+x}$ (ד) $f(x)=\frac{x\sin 2x}{\ln|x^2-7|}$ (ה) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$

(ו) $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$ (ז) $f(x)=\frac{(1+2^x)^2}{2^x}$ (ח) $f(x)=\frac{6^x}{4^x+9^x}$

(ט) $f(x)=\frac{3^x+1}{3^x-1}$ (י) $f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ (יא) $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$

5.8

תהי $f(x)$ פונקציה אי-זוגית. בדקו זוגיות של הפונקציות:

(א) $f(|x|)$ (ב) $(f(x))^2$ (ג) $f(x^3)$

5.9

תהיינה $f(x)$, $g(x)$ פונקציות אי-זוגיות. בדקו זוגיות של הפונקציות:

(א) $f(x)-g(x)$ (ב) $f(x)g(x)$ (ג) $f(g(x))$

5.10

תהי $f(x)$ פונקציה זוגית ו $g(x)$ אי-זוגית. בדקו זוגיות של הפונקציות:

(א) $f(x)-g(x)$ (ב) $f(x)\,g(x)$ (ג) $f(g(x))$

5.11

תהי $f(x)$ פונקציה כלשהי. בדקו זוגיות של הפונקציות:

(א) $f(x)+f(-x)$ (ב) $f(x)-f(-x)$ (ג) $f(x)f(-x)$ (ד) $\ln\left(\frac{f(x)}{f(-x)}\right)$

5.12

הוכיחו שכל פונקציה ניתנת לרישום כסכום של פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית.

5.13

הוכיחו שאם $f(x)$ אי-זוגית אז $f(0)=0$

5.14

תהי $f(x)=ax^7+bx^3+cx$. נתון $f(5)=2$, חשבו $f(-5)=?$

5.15

מצאו את המחזור של הפונקציות הבאות:

(א) $f(x)=\cos 3x$ (ב) $f(x)=\cos 3x \sin 3x$ (ג) $f(x)=\sin(4x+\frac{\pi}{3})$

(ד) $f(x)=\sin 3x+\cos 6x$ (ה) $f(x)=\sin 3x+\cos 4x$

(ו) $f(x)=\sin(\frac{x}{2})+\cos(\frac{x}{3})$ (ז) $f(x)=\cos^2 x$ (ח) $f(x)=\sin 5x \cos 3x$

(ט) $f(x)=|\cos x|$ (י) $f(x)=\sin(\frac{x}{3})-2tg(x-1)$ (יא) $f(x)=x-[x]$

5.16

תהי $f(x)$ פונקציה מחזורית עם מחזור T, ותהי $g(x)=f(ax+b)$ $(a,b>0)$. הוכיחו כי $g(x)$ מחזורית עם מחזור $\frac{T}{a}$.

5.17

הוכח כי פונקצית דיריכלה $\chi(x)=\begin{cases} 1 & , \quad x \text{ רציונאלי} \\ 0 & , \quad x \text{ אי-רציונאלי} \end{cases}$ הינה פונקציה מחזורית וכל מספר רציונאלי משמש לה מחזור.

5.18

הוכח שפונקציה $f(x)=\sin(x^2)$ לא מחזורית.

5.19 כתבו בלשון "ε-δ" את ההגדרות הבאות:

א. $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$ ב. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$

ג. $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ ד. $\lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

ה. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ ו. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

ז. $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ח. $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ ט. $\lim_{x\to a^-} f(x)=L$

י. $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$ יא. $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$ יב. $\lim_{x\to a^-} f(x)=\infty$

יג. $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ יד. $\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$ טו. $\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

5.20

אילו מהטענות הבאות שקולות ל $\lim_{x\to a} f(x)=b$?

(א) $\forall\delta>0\,\exists\epsilon>0: f\big((a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)\big)\subset(b-\epsilon,b+\epsilon)$

(ב) $\forall\epsilon>0\,\exists\delta>0: f\big((a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)\big)\subset(b-\epsilon,b+\epsilon)$

(ג) $\forall\epsilon>0\,\exists\delta>0: f^{-1}\big((b-\epsilon,b+\epsilon)\big)\subset(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$

(ד) $\forall\epsilon>0\,\exists\delta>0: f^{-1}\big((b-\epsilon,b+\epsilon)\big)\supset(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$

(ה) $\forall\epsilon>0\,\exists n: f\big((a-\frac{1}{n},a)\cup(a,a+\frac{1}{n})\big)\subset(b-\epsilon,b+\epsilon)$

(ו) $\exists m:\forall n\geq m f\big((a-\frac{1}{n},a)\cup(a,a+\frac{1}{n})\big)\subset(b-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n})$

(ז) $\forall n>0\,\exists m: f\big((a-\frac{1}{m},a)\cup(a,a+\frac{1}{m})\big)\subset(b-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n})$

5.21 הוכיחו לפי קושי:

[א] $\lim_{x\to3}4x+3=15$.

[ב] $\lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-1}{2x+2}=\frac{1}{2}$.

[ג] $\lim_{x\to2}\frac{x-1}{x^2+1}=\frac{1}{5}$.

[ד] $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{1}{2}$

[ה] $\lim_{x\to1}\left(x^2-2\right)\neq-2$

[ו] $\lim_{x\to\infty}x(\cos x+1)\neq\infty$.

5.22 הוכיחו לפי קושי:

[א] אם $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$ אז $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=0$.

[ב] אם $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$ אז $\lim_{x\to0^+}f(\frac{1}{x})=L$ (כאשר L הוא מספר סופי).

[ג] אם $\lim_{x\to b}f(x)$ קיים וערכו L, ואם $a\neq0$, אז גם $\lim_{x\to0}f(ax+b)=L$.

[ד] אם $f(x)>0$, $\lim_{x\to0}f(x)=0$, $\lim_{x\to0}g(x)=a<0$, הרי $\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x)}=-\infty$.

[ה] אם $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\infty$ אז $\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\infty$.

5.23

הוכיחו אי קיום הגבולות הבאים לפי היינה (סדרות):

[א] $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

[ב] $\lim_{x\to 0}\ln(e+x)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

[ג] $\lim_{x\to x_0} D(x)$ לכל $x_0\in\mathbb{R}$ כאשר:

$$D(x)=\begin{cases}1 & , \quad x \text{ רציונלי} \\ 0 & , \quad x \text{ אי רציונלי}\end{cases}$$

5.24 תהי f פונקציה המוגדרת בקטע (M,∞).

[א] הוכח כי אם $f(x)$ מונוטונית וקיים הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A$, אזי גם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

[ב] האם הטענה נכונה גם בלי הנחת המונוטוניות ?

5.25

תהי פונקציה $f(x)$ מחזורית : קיים $T>0$ כך ש $f(x+T)=f(x)$ לכל x.

הוכח כי אם $f(x)$ לא קבועה אזי הגבול $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x}\right)$ לא קיים.

1

(א) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}} \Rightarrow \frac{x}{1-x}\ge 0 \Rightarrow \frac{x(x-1)}{(x-1)^2}\le 0 \Rightarrow \begin{cases} x(x-1)\le 1 \\ x\ne 1\end{cases} \Rightarrow 0\le x<1$

(ב) $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{4-x^2}} \Rightarrow 4-x^2>0 \Rightarrow x^2<4 \Rightarrow -2<x<2$

(ג) $f(x)=\sqrt{3x-x^3} \Rightarrow 3x-x^3\ge 0 \Rightarrow x^3-3x\le 0 \Rightarrow (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})x\le 0 \Rightarrow$ $0\le x\le\sqrt{3}$ או $x\le-\sqrt{3}$

(ד) $f(x)=(x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \Rightarrow \frac{1+x}{1-x}\ge 0 \Rightarrow \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)^2}\le 0 \Rightarrow \begin{cases}(x-1)(x+1)\le 0 \\ x\ne 1\end{cases} \Rightarrow -1\le x<1$

(ה) $f(x)=\ln(x+2)+\ln x \Rightarrow \begin{cases} x+2>0 \\ x>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x>0\end{cases} \Rightarrow x>0$

(ו) $f(x)=\sqrt[3]{\ln(3-2x)} \Rightarrow 3-2x>0 \Rightarrow 2x<3 \Rightarrow x<\frac{3}{2}$

(ז) $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\ln\sqrt{1-4x^2} \Rightarrow \begin{cases} x^2-1\ge 0 \\ 1-4x^2>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le -1 \text{ או } x\ge 1 \\ -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \phi$

(ח) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}+\frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}} \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x+2\ge 0 \\ 3+2x-x^2>0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\le 1 \text{ או } x\ge 2 \\ -1<x<3\end{cases} \Rightarrow$ $-1<x\le 1$ או $2\le x<3$

(ט) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sin\pi x} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \sin\pi x\ne 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ \pi x\ne\pi k \quad (k\in\mathbb{Z})\end{cases} \Rightarrow$ לכל $k\in N$: $x\ge 0$, $x\ne k$

(י) $f(x)=\arcsin\frac{2x}{1+x} \Rightarrow -1\le\frac{2x}{1+x}\le 1 \xRightarrow{\cdot(1+x)^2} -(x+1)^2\le 2x(x+1)\le(x+1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x(x+1)-(x+1)^2\le 0 \\ 2x(x+1)+(x+1)^2\ge 0 \\ x\ne -1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1)\le 0 \\ (3x+1)(x+1)\ge 0 \\ x\ne -1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1<x\le 1 \\ x<-1 \text{ או } x\ge -\frac{1}{3}\end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{3}\le x\le 1$

2

(א) $f(x)=\log_2(1-\cos x)$; $-1\le\cos x\le 1 \Rightarrow 0\le 1-\cos x\le 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_2 0 \le f(x)\le\log_2 2 \Rightarrow -\infty<f(x)\le 1$

(ב) $f(x)=\sin x+\cos x = \sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow |f(x)|\le\sqrt{2}$

(ג) $f(x)=\sqrt{2x+1} \Rightarrow f(x)\ge 0$

(ד) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; $1\le x^2+1<\infty \Rightarrow 1\ge\frac{1}{x^2+1}>0 \Rightarrow 0<f(x)\le 1$

3

(א) $y=3^x \Rightarrow x=\log_3 y \Rightarrow f^{-1}(x)=\log_3 x$

(ב) $y=\ln(2x+3) \Rightarrow e^y=2x+3 \Rightarrow x=\frac{1}{2}(e^y-3) \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{2}(e^x-3)$

(ג) $y=\frac{x+1}{x-1} \Rightarrow xy-y=x+1 \Rightarrow xy-x=y+1 \Rightarrow x=\frac{y+1}{y-1} \Rightarrow f^{-1}(x)=f(x)$

(ד) $\begin{cases} f(1)=2-1=1 \\ f(\log_3(1/2))=2\cdot 3^{\log_3(1/2)}=2\cdot\frac{1}{2}=1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ לא חח"ע f $\Rightarrow \nexists f^{-1}(x)$

(ה) $y=2^{\frac{x+1}{x-1}} \Rightarrow \log_2 y=\frac{x+1}{x-1} \overset{\text{סעיף ג}}{\Rightarrow} x=\frac{\log_2 y+1}{\log_2 y-1} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{\log_2 x+1}{\log_2 x-1}$

4

(א) $f(x^3+1)=\frac{x^6+2x^3+4}{3x^3+5}=\frac{(x^3+1)^2+3}{3(x^3+1)+2} \Rightarrow f(x)=\frac{x^2+3}{3x+2}$

(ב) $f\left(-\frac{2}{x^2}\right)=\frac{-2x^2}{x^4+4} \underset{/x^4}{=} \frac{-2/x^2}{1+(-2/x^2)^2} \Rightarrow f(x)=\frac{x}{1+x^2}$

5

(א) X דוגמה נגדית: $y=\arctan x$ עולה אבל $\lim_{x\to\infty}(\arctan x)=\frac{\pi}{2}$

(ב) X דוגמה נגדית: $y=x^2$. אבל $\lim_{x\to\infty}(x^2)=\infty$ בתחום $(-\infty,0)$ y יורדת.

(ג) V

$f(x)=\frac{f(x)+g(x)}{2}+\frac{f(x)-g(x)}{2} \to \infty+\infty=\infty$

6

(א) אין תשובה חד-משמעית, למשל בתחום $[0,1]$:

* $f(x)=2x$ חיובית ועולה, $g(x)=1-x$ חיובית ויורדת, $f(x)+g(x)=x+1$ עולה
* $f(x)=x$ חיובית ועולה, $g(x)=2-2x$ חיובית ויורדת, $f(x)+g(x)=2-x$ יורדת

(ב) $g(x)$ יורדת $\Leftarrow$ $-g(x)$ עולה $\Leftarrow$ $f(x)-g(x)=f(x)+(-g(x))$ עולה

(ג) אין תשובה חד-משמעית, למשל בתחום $[0,1]$:

* $f(x)=x^3$ עולה, $g(x)=\frac{1}{x}$ יורדת; $f(x)g(x)=x^2$ עולה
* $f(x)=x$ עולה, $g(x)=\frac{1}{x^2}$ יורדת; $f(x)g(x)=\frac{1}{x}$ יורדת

(ד) $g(x)$ יורדת $\Leftarrow$ $1/g(x)$ עולה $\Leftarrow$ $f(x)/g(x)=f(x)\cdot 1/g(x)$ עולה

(ה) $x_1\le x_2 \xRightarrow{\text{יורדת } g} g(x_1)\ge g(x_2) \xRightarrow{\text{עולה } f} f(g(x_1))\ge f(g(x_2)) \Rightarrow$ fg יורדת

(ו) $x_1\le x_2 \xRightarrow{\text{עולה } f} f(x_1)\le f(x_2) \xRightarrow{\text{יורדת } g} g(f(x_1))\ge g(f(x_2)) \Rightarrow$ gf יורדת

7

(א) $f(x)=x^2+1+\cos x+|3x|$

$f(-x)=(-x)^2+1+\cos(-x)+|-3x|=f(x) \Rightarrow$ זוגית

(ב) $f(x)=3x^5+tg\,x-\sqrt[3]{x}+sgn(x)$ $\Rightarrow$ אי-זוגית

$f(-x)=3(-x)^5+tg(-x)-\sqrt[3]{-x}+sgn(-x)=-3x^5-tg\,x+\sqrt[3]{x}-sgn(x)$

(ג) $f(x)=5^{x^4-x}+5^{x^2+x}$ כללי

$f(-x)=5^{x^4+x}+5^{x^2-x} \Rightarrow$

(ד) $f(x)=\dfrac{x\sin 2x}{\ln|x^2-7|}$ $\Rightarrow$ זוגית

$f(-x)=\dfrac{(-x)(-\sin 2x)}{\ln|(-x)^2-7|}=\dfrac{x\sin 2x}{\ln|x^2-7|}=f(x)$

(ה) $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$ $\Rightarrow$ זוגית

$f(-x)=\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}$

(ו) $f(x)=\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}$ $\Rightarrow$ אי-זוגית

$f(-x)=\sqrt{x^2-x}-\sqrt{x^2+x}=-f(x)$

(ז) $f(x)=\dfrac{(1+2^x)^2}{2^x}=\dfrac{1+2\cdot 2^x+2^{2x}}{2^x}=2^{-x}+2+2^x$

$f(-x)=2^x+2+2^{-x}=f(x) \Rightarrow$ זוגית

(ח) $f(x)=\dfrac{6^x}{4^x+9^x} \underset{=}{/6^x} \dfrac{1}{(\frac{2}{3})^x+(\frac{3}{2})^x}=\dfrac{1}{(\frac{2}{3})^x+(\frac{2}{3})^{-x}}$

$f(-x)=\dfrac{1}{(\frac{2}{3})^{-x}+(\frac{2}{3})^x}=f(x) \Rightarrow$ זוגית

(ט) $f(x)=\dfrac{3^x+1}{3^x-1}$ $\Rightarrow$ אי-זוגית

$f(-x)=\dfrac{3^{-x}+1}{3^{-x}-1} \underset{=}{\cdot 3^x} \dfrac{1+3^x}{1-3^x}=-f(x)$

(י) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

$f(-x)=\ln(1-x)-\ln(1+x)=-f(x) \Rightarrow$ אי-זוגית

(יא) $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$

$f(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)=\ln\left[\dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{(\sqrt{x^2+1}+x)}\right]=\ln\left[\dfrac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right] \Rightarrow$ אי-זוגית

$=\ln\left[\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right]=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)^{-1}=-\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=-f(x)$

(8) נתון: $f(-x)=-f(x)$

(א) $h(x)=f(|x|) \Rightarrow h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x) \Rightarrow$ זוגית

(ב) $h(x)=[f(x)]^2 \Rightarrow h(-x)=(f(-x))^2=(-f(x))^2=f(x)^2=h(x) \Rightarrow$ זוגית

(ג) $h(x)=f(x^3) \Rightarrow h(-x)=f(-x^3)=-f(x^3)=-h(x) \Rightarrow$ אי-זוגית

(9) נתון: $f(-x)=-f(x)$, $g(-x)=-g(x)$

(א) $h(x)=f(x)-g(x) \Rightarrow h(-x)=f(-x)-g(-x)=-f(x)+g(x)=-h(x) \Rightarrow$ אי-זוגית

(ב) $h(x)=f(x)g(x) \Rightarrow h(-x)=f(-x)g(-x)=(-f(x))(-g(x))=f(x)g(x)=h(x) \Rightarrow$ זוגית

(ג) $h(x)=f(g(x)) \Rightarrow h(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=-f(g(x))=-h(x) \Rightarrow$ אי-זוגית

(10) נתון: $f(-x)=f(x)$, $g(-x)=-g(x)$

(א) $h(x)=f(x)-g(x) \Rightarrow h(-x)=f(-x)-g(-x)=f(x)+g(x) \Rightarrow$ כללית

(ב) $h(x)=f(x)g(x) \Rightarrow h(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)\cdot(-g(x))=-f(x)g(x)=-h(x) \Rightarrow$ אי-זוגית

(ג) $h(x)=f(g(x)) \Rightarrow h(-x)=f(g(-x))=f(-g(x))=f(g(x)) \Rightarrow$ זוגית

(11)

(א) $h(x)=f(x)+f(-x) \Rightarrow h(-x)=f(-x)+f(x)=h(x) \Rightarrow$ זוגית

(ב) $h(x)=f(x)-f(-x) \Rightarrow h(-x)=f(-x)-f(x)=-h(x) \Rightarrow$ אי-זוגית

(ג) $h(x)=f(x)f(-x) \Rightarrow h(-x)=f(-x)f(x)=h(x) \Rightarrow$ זוגית

(ד) $h(x)=\ln\left(\frac{f(x)}{f(-x)}\right) \Rightarrow h(-x)=\ln\left(\frac{f(-x)}{f(x)}\right)=\ln\left(\frac{f(x)}{f(-x)}\right)^{-1}=-\ln\left(\frac{f(x)}{f(-x)}\right)=-h(x) \Rightarrow$ אי-זוגית

(12)

$$f(x)=\underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{זוגית (לפי 11א)}}+\underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{אי-זוגית (לפי 11ב)}}$$

(13) $f(0)=0 \Leftarrow f(-0)=-f(0) \Leftarrow f(-x)=-f(x) \Leftarrow$ אי-זוגית $f(x)$

(14) $f(-x)=-ax^7-bx^3-cx=-f(x) \Leftarrow f(x)=ax^7+bx^3+cx$

$f(-5)=-f(5)=-2 \Leftarrow$

15

(א) $f(x)=\cos 3x$

$f(x+T)=\cos[3(x+T)]=f(x) \Rightarrow 3T=2\pi k \Rightarrow T=\frac{2}{3}\pi$

(ב) $f(x)=\sin 3x\cos 3x=\frac{1}{2}\sin 6x$

$f(x+T)=\frac{1}{2}\sin[6(x+T)]=f(x) \Rightarrow 6T=2\pi k \Rightarrow T=\frac{\pi}{3}$

(ג) $f(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{3}\right)$

$f(x+T)=\sin\left[4(x+T)+\frac{\pi}{3}\right]=f(x) \Rightarrow 4T=2\pi k \Rightarrow T=\frac{\pi}{2}$

(ד) $f(x)=\sin 3x+\cos 6x$

$f(x+T)=\sin[3(x+T)]+\cos[6(x+T)]=f(x) \Rightarrow \begin{cases}3T=2\pi k\\ 6T=2\pi k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}T=\frac{2}{3}\pi k\\ T=\frac{1}{3}\pi k\end{cases} \Rightarrow T=\frac{2}{3}\pi$

(ה) $f(x)=\sin 3x+\cos 4x$

$f(x+T)=\sin[3(x+T)]+\cos[4(x+T)]=f(x) \Rightarrow \begin{cases}3T=2\pi k\\ 4T=2\pi k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}T=\frac{2}{3}\pi k\\ T=\frac{1}{2}\pi k\end{cases} \Rightarrow T=2\pi$

(ו) $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

$f(x+T)=\sin\left(\frac{x+T}{2}\right)+\cos\left(\frac{x+T}{3}\right)=f(x) \Rightarrow \begin{cases}\frac{T}{2}=2\pi k\\ \frac{T}{3}=2\pi k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}T=4\pi k\\ T=6\pi k\end{cases} \Rightarrow T=12\pi$

(ז) $f(x)=\cos^2 x=\sin 2x-\cos 2x$

$f(x+T)=\sin[2(x+T)]-\cos[2(x+T)]=f(x) \Rightarrow 2T=2\pi k \Rightarrow T=\pi$

(ח) $f(x)=\sin 5x\cos 3x=2[\sin 4x+\cos x]$

$f(x+T)=2\left[\sin[4(x+T)]+\cos(x+T)\right]=f(x) \Rightarrow \begin{cases}4T=2\pi k\\ T=2\pi k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}T=\frac{\pi}{2}k\\ T=2\pi k\end{cases} \Rightarrow T=2\pi$

(ט) $f(x)=|\cos x|$; $\begin{cases}\cos x=\cos(x+2\pi k)\\ \cos x=-\cos(x+\pi k)\end{cases} \Rightarrow T=\pi$

(י) $f(x)=x-[x]$

$f(x+n)=x+n-[x+n]=x+n-[x]-n=x-[x]=f(x) \Rightarrow T=1$

(יא) $f(x)=\sin\frac{x}{3}-2tg(x-1)$

$f(x+T)=\sin\left(\frac{x+T}{3}\right)-2tg[(x+T)-1]=f(x) \Rightarrow \begin{cases}\frac{T}{3}=2\pi k\\ T=\pi k\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}T=6\pi k\\ T=\pi k\end{cases} \Rightarrow T=6\pi$

(16)

$$g\left(x+\frac{T}{a}\right)=f\left(a\left(x+\frac{T}{a}\right)+b\right)=f\left((ax+b)+T\right)\overset{\text{מחזוריות של } f \text{ } T}{=}f(ax+b)$$

(17)

יהי $q\in\mathbb{Q}$ מספר רציונאלי. אזי לכל $x\in\mathbb{Q}$ רציונאלי, גם $x+q$ רציונאלי ולכן, לפי הגדרת הפונקציה,

$1=\chi(x)=\chi(x+q)=1$, כלומר $\chi(x)=\chi(x+q)$ לכל $x\in\mathbb{Q}$ רציונאלי.

כעת יהי $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ אי רציונאלי, גם $x+q$ אי רציונאלי ולכן, לפי הגדרת הפונקציה,

$0=\chi(x)=\chi(x+q)=0$, כלומר $\chi(x)=\chi(x+q)$ גם לכל $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ אי רציונאלי.

כלומר כל $q\in\mathbb{Q}$ הינו מחזור של $\chi(x)$.

יהי $t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ אי רציונאלי, אזי $1=\chi(0)\neq\chi(t)=0$, לכן t אינו מחזור של $\chi(x)$.

(18)

בדרך שלילה נניח שקיים מספר $T>0$ כך ש: $\sin(x^2)=\sin((x+T)^2)\quad \forall x\in(-\infty,\infty)\ (*)$

אז בפרט: $0=\sin 0=\sin(T^2)$.

לכן $T^2=\pi\cdot n$, כאשר n מספר שלם. מפה $T=\sqrt{\pi\cdot n}\,,\ n=1,2,3,...$

נציב T לשוויון $(*)$ ונקבל: $\sin(x^2)=\sin(x^2+2x\sqrt{\pi n}+\pi n)\ \ \forall x\in(-\infty,\infty)\ (**)$

נקבע עכשיו x כך ש: $2x\sqrt{\pi n}=\pi n+\pi$, כלומר $x=\dfrac{n+1}{2\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\pi}$.

נציב x הזה לשוויון $(**)$ ונקבל: $\sin(x^2)=\sin(x^2+2\pi n+\pi)=-\sin(x^2)$

$$\Leftrightarrow\ \sin(x^2)=0\ \Leftrightarrow\ x^2=\pi k,\ k=0,1,2,...$$

מקבלים ש: $\dfrac{(n+1)^2}{4n}\cdot\pi=\left(\dfrac{n+1}{2\sqrt{n}}\cdot\sqrt{\pi}\right)^2=\pi k$,

מפה $(n+1)^2=4nk$, כאשר $n,k=1,2,...$.

אם $n>1$ אז שוויון הזה לא יתכן כי מספר טבעי $(n+1)^2=n^2+2n+1$ לא מתחלק ב- n

ומספר $4nk$ כן מתחלק ב n. סתירה זאת אומרת שמחזור T לא קיים.

נטפל במקרה $n=1$. אז $T=\sqrt{\pi}$. נציב לשוויון $(**)$ $x=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. נקבל ש $\sin(\frac{\pi}{2})=\sin(\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}\pi+\pi)$.

אבל $\sin(\frac{\pi}{2})=1$ ו- $\sin(\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}\pi+\pi)=-\cos(\sqrt{2}\pi)\neq 1$. סתירה.

(19)

הגדרה	סימון
לכל $\varepsilon>0$ קיים M כך שלכל $x>M$ מתקיים $\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L$
לכל $\varepsilon>0$ קיים M כך שלכל $x<M$ מתקיים $\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$
לכל $M>0$ קיים $K>0$ כך שלכל $x>K$ מתקיים $f(x)>M$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$
לכל $M>0$ קיים $K>0$ כך שלכל $x>K$ מתקיים $f(x)<-M$	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$
לכל $M>0$ קיים $K>0$ כך שלכל $x<-K$ מתקיים $f(x)>M$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$
לכל $M>0$ קיים $K>0$ כך שלכל $x<-K$ מתקיים $f(x)<-M$	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$
לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ מתקיים $\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$
לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_0<x<x_0+\delta$ מתקיים $\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$
לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_0-\delta<x<x_0$ מתקיים $\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$
לכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ מתקיים $f(x)>M$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$
לכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_0<x<x_0+\delta$ מתקיים $f(x)>M$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$
לכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_0-\delta<x<x_0$ מתקיים $f(x)>M$	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$
לכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ מתקיים $f(x)<-M$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$
לכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_0<x<x_0+\delta$ מתקיים $f(x)<-M$	$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$
לכל $M>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_0-\delta<x<x_0$ מתקיים $f(x)<-M$	$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$

(20)

(ג), (ב), (ה), (ד) שקולות להגדרת הגבול.

(א), (ז), (ו) אינן שקולות להגדרת הגבול.

נפריך את (ו) ונוכיח את (ד).

(ו): תהי $f(x)=\sqrt{|x|}$; ניקח $a=b=0$. אז $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$.

מתקיים,

$$f\left(\left(-\frac{1}{n},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{n}\right)\right)=\left(0,\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\not\subseteq\left(0,\frac{1}{n}\right)$$

עבור $n\geq 2$.

(ב): נניח ש- $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b$. ניקח $\varepsilon=\frac{1}{m}$ בהגדרת
הגבול; נקבל: קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\neq a$, $|x-a|<\delta$,
מתקיים: $|f(x)-b|<\frac{1}{m}$. ניקח n גדול כך ש- $\frac{1}{n}<\delta$
אזי לכל $x\neq a$, $|x-a|<\frac{1}{n}$, ובפרט, מתקיים:
$|f(x)-b|<\frac{1}{m}$. מכאן

$$f\left(\left(a-\tfrac{1}{m},a\right)\cup\left(a,a+\tfrac{1}{m}\right)\right)\subset\left(b-\tfrac{1}{n},b+\tfrac{1}{n}\right).$$

להיפך, נניח שהטענה מתקיימת. יהי $\varepsilon>0$; נבחר
$n>\frac{1}{\varepsilon}$. אזי קיים m כך ש-

$$\left[f\left(\left(a-\tfrac{1}{m},a\right)\cup\left(a,a+\tfrac{1}{m}\right)\right)\right]\subset\left(b-\tfrac{1}{n},b+\tfrac{1}{n}\right)\subset(b-\varepsilon,b+\varepsilon).$$

מכאן קיים $\delta=\frac{1}{m}$ כך ש-

$$x\neq a,\ |x-a|<\tfrac{1}{m}\ \Rightarrow\ |f(x)-b|<\tfrac{1}{n}<\varepsilon.$$

(21א)

יהי $\varepsilon>0$ ונמצא $\delta>0$ כך שיתקיים:

$$\forall x:\ |x-3|<\delta\ \Rightarrow\ |4x+3-15|<\varepsilon$$

ברור כי $|4x+3-15|=|4x-12|=4|x-3|$ ולכן נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$ ונקבל כי:

$$|x-3|<\delta\ \Rightarrow\ 4|x-3|<4\delta=\varepsilon$$

(21ב)

יהי $\varepsilon>0$ ונמצא $\delta>0$ כך שיתקיים:

$$\forall x\ |x-1|<\delta\ \Rightarrow\ \left|\frac{x^2+2x-1}{2x+2}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$$

ברור כי:

$$\left|\frac{x^2+2x-1}{2x+2}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x^2+2x-1-(1+x)}{2(1+x)}\right|=\left|\frac{x^2+x-2}{2(x+1)}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{(x-1)(x+2)}{(x+1)}\right|\leq\frac{1}{2}|(x-1)(x+2)|=\frac{1}{2}|x-1||x+2|$$

ולכן נבחר $\delta_1=1$ ונקבל כי

$$|x-1|<\delta_1\ \Leftrightarrow\ -1<x-1<1\ \Leftrightarrow\ 0<x<2$$

נוסיף 2 לאי השיוויון האחרון ונחלק ב 2 ונקבל $1<\frac{x+2}{2}<2$ לכן נבחר סה״כ $\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{2}\}$.

(21ג)

יהי $\varepsilon > 0$ ונמצא $\delta > 0$ כך שיתקיים:

$$\forall x \ |x-2| < \delta \ \Rightarrow \ \left|\frac{x-1}{x^2+1} - \frac{1}{5}\right| < \varepsilon$$

ברור כי:

$$\left|\frac{x-1}{x^2+1} - \frac{1}{5}\right| = \left|\frac{5(x-1)-(x^2+1)}{5(x^2+1)}\right| = \left|\frac{x^2-5x+6}{5(x^2+1)}\right| \le \frac{1}{5}|x-2||x-3|$$

על פי אי שיוויון המשולש אנו מקבלים כי $|x-3| = |(x-2)-1| \le |x-2|+1$ ולכן

$$\left|\frac{x-1}{x^2+1} - \frac{1}{5}\right| \le \frac{1}{5}|x-2|(|x-2|+1)$$

צריך למצוא $\delta > 0$ כך שיתקיים

$$|x-2| < \delta \ \Rightarrow \ \frac{1}{5}|x-2|(|x-2|+1) < \varepsilon$$

נסמן $a = |x-2|$ ונקבל את המשוואה הבאה $\frac{1}{5}a(a+1) < \varepsilon$ פתרונות המשוואה הם $a_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+5\varepsilon}$ היות והדרישה היא ל $\delta > 0$ נבחר $\delta = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+5\varepsilon}$ ועבור $\delta > 0$ כזו התלוייה ב ε נקבל את המבוקש.

(21ד)

נוכיח ש- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{1}{2}$.

$$\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x-1}{2(2x^2-x-1)}\right| =$$

$$= \frac{|x-1|}{|4x^2-2x-2|} \le \frac{|x|+1}{4|x|^2-2(|x|+1)} \le \frac{2|x|}{4(|x|^2-|x|)} = \frac{1}{2(|x|-1)}$$

עבור $|x|+1 \le |x|^2$

יהי $M = \frac{1}{2\varepsilon}+2$; אם $x \ge M$ אזי $\frac{1}{2(|x|-1)} < \varepsilon$

וכן $|x|^2 \ge |x|+1$ (מדוע?). לכן $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$.

21ה)

ניקח , למשל , את $\varepsilon = 0.1$. נוכיח שלכל $\delta > 0$ קיים x בקטע $(1-\delta, 1+\delta)$ כך ש- $\left|x^2 - 2 - (-2)\right| \ge 0.1$.

אם $\delta > 1$ אז ניקח, למשל, $x = \frac{3}{2}$ (שכמובן נמצא בקטע $(1-\delta, 1+\delta)$) . נובע כי

$$\left|\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 - (-2)\right| = \left|\frac{9}{4}\right| > 0.1 .$$

אם $0 < \delta \le 1$ ניקח , למשל, $x = 1 + \frac{\delta}{2}$

$$\left|\left(1+\frac{\delta}{2}\right)^2 - 2 - (-2)\right| = \left|1 + 2\delta + \frac{\delta^2}{4}\right| > 1 > 0.1$$

21ו)

לא נכון. נראה ש- $\lim\limits_{x\to\infty} x(\cos x + 1) \ne \infty$.

כלומר עלינו להראות שקיים $M > 0$ כך שלכל $N > 0$ קיים $x > N$ המקיים $x(\cos x + 1) \le N$.

נבחר $M = 1$, ויהי $N > 0$.

יהי $n > N$ טבעי (קיים n כזה, כי קבוצת המספרים הטבעיים אינה חסומה מלעיל).

אזי $x = 2\pi n + \pi > n > N$, ו- $\cos x = -1$, ולכן $x(\cos x + 1) = x \cdot 0 = 0 < N$.

22א)

הוכחה: יהא $\epsilon > 0$. קים $\delta > 0$ כך שלכל x כך ש $0 < |x - x_0| < \delta$ מתקיים $f(x) > \frac{1}{\epsilon} > 0$.
ל x כזה מתקיים $\epsilon < \frac{1}{f(x)} < 0$ ולכן $|\frac{1}{f(x)} - 0| < \epsilon$.

הוכחנו שלכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x - x_0| < \delta$ אז $|\frac{1}{f(x)} - 0| < \epsilon$.

22ב)

<u>זה</u>: יהי $\varepsilon_0 > 0$ עלינו להראות שקיים $\delta_0 > 0$ כך שלכל x המקיים $0 < x < \delta_0$ מתקיים $|f(\frac{1}{x}) - L| < \varepsilon_0$.

מאחר ונתון ש- $f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}L$ קיים $M_0 > 0$ כך ש- $t > M_0 \Leftarrow |f(t) - L| < \varepsilon_0$ (ε_0 אותו).

אם נבחר $\delta_0 = \frac{1}{M_0}$ נקבל ש- $0 < x < \delta_0 \Leftarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta_0} = M_0$.

ולכן $\frac{1}{x} > M_0$ ולכן $|f(\frac{1}{x}) - L| < \varepsilon_0$ לכל x המקיים $0 < x < \delta_0$.

(22ג)
בהנתן $\varepsilon > 0$, על-פי הנתון קיים $\delta' > 0$ כך ש-

$$\text{אם } 0 < |t-b| < \delta' \text{ אז } |f(t)-L| < \varepsilon. \qquad (1)$$

וצריך להוכיח שקיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x| < \delta$ אז

$$|f(ax+b)-L| < \varepsilon. \qquad (2)$$

נשתמש ב- (1) עבור $t = ax+b$, ונקבל ש- (2) מתקיים כאשר $0 < |(ax+b)-b| < \delta'$, כלומר כאשר $0 < |x| < \dfrac{\delta'}{|a|}$. לכן $\delta = \dfrac{\delta'}{|a|}$ מקיים את הנדרש.

(22ד)
נבחר $M < 0$. קיימים $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ שעבורם

$$|x| < \delta_1 \Longrightarrow |g(x)-a| < \frac{|a|}{2} \Longrightarrow g(x) < \frac{a}{2} \Longrightarrow -g(x) > \frac{|a|}{2} > 0,$$

$$|x| < \delta_2 \Longrightarrow 0 < f(x) < \frac{|a|}{2|M|} \Longrightarrow \frac{1}{f(x)} > \frac{2|M|}{|a|} > 0.$$

נגדיר $0 < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ונקבל

$$|x| < \delta \Longrightarrow -\frac{g(x)}{f(x)} > \frac{2|M|}{|a|} \cdot \frac{|a|}{2} = |M| \Longrightarrow \frac{g(x)}{f(x)} < M.$$

(שני אי - השויונים שהוכפלו היו עם מספרים חיובים.)

(22ה)
צריך להוכיח כי לכל A קיים B כך שלכל $x > B$ מתקיים $f(x) - x > A$.

נתון כי לכל A קיים B_1 כך שלכל $x > B_1$ מתקיים $\dfrac{f(x)}{x} > A+1$.

יהי $B = \max\{1, B_1\}$.

ברור כי לכל $x > B$ מתקיים

$$f(x) - x = x\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) \underset{x>B>1}{\underset{\uparrow}{>}} \left(\frac{f(x)}{x} - 1\right) \underset{x>B_1 \Rightarrow \frac{f(x)}{x}>A+1}{\underset{\uparrow}{>}} (A+1) - 1 = A$$

קיבלנו כי לכל A קיים B כך שלכל $x > B$ מתקיים $f(x) - x > A$ וזה מש"ל.

<u>דרך נוספת, אולי פשוטה יותר:</u>

נתון כי לכל A_1 קיים B_1 כך שלכל $x>B_1$ מתקיים $\frac{f(x)}{x}>A_1$.

זה נכון לכל A_1 ולכן גם עבור $A_1=2$. מכאן שלכל $x>B_1$ מתקיים $\frac{f(x)}{x}>2$.

אם גם $x>B_1>0$ אז $f(x)>2x$.

יהי A מספר טבעי כל שהוא, ויהי $B=\max\{1,B_1,A\}$.

ברור כי לכל $x>B$ מתקיים

$$f(x)-x \underset{\substack{\uparrow \\ x>B_1\Rightarrow f(x)>2x}}{>} 2x-x=x>B>A$$

קיבלנו כי לכל A קיים B כך שלכל $x>B$ מתקיים $f(x)-x>A$ וזה מש"ל.

23א)

נקח שתי סדרות $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{\frac{1}{2n\pi}\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\{-\frac{1}{2n\pi}\}_{n=1}^{\infty}$ השואפות לאפס ונקבל כי:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}(2n\pi)\cos(2n\pi)=\lim_{n\to\infty}(2n\pi)\cdot(1)=\infty$$

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n)=\lim_{n\to\infty}(-2n\pi)\cos(-2n\pi)=\lim_{n\to\infty}(-2n\pi)\cdot(1)=-\infty$$

כלומר מצאנו שתי סדרות שיש להן אותו גבול אבל $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ ולכן הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ איננו קיים.

23ב)

נקח שתי סדרות $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}=\{\frac{1}{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ ו $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}=\{\frac{1}{\frac{1}{2}+2n}\}_{n=1}^{\infty}$ השואפות לאפס ונקבל כי:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{2n}+e\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{\frac{1}{2n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{2n}+e\right)\cdot\sin^2(2n\pi)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{2n}+e\right)\cdot(0)=0$$

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+2n}+e\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{\frac{1}{\frac{1}{2}+2n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+2n}+e\right)\cdot\sin^2\left(\left(\frac{1}{2}+2n\right)\pi\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+2n}+e\right)\cdot(1)=\ln(e)\cdot(1)=1$$

כלומר מצאנו שתי סדרות שיש להן אותו גבול אבל $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\neq\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ ולכן הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ איננו קיים.

(23ג)

נקח מספר ממשי כלשהו $x_0 \in \mathbb{R}$ ונוכיח כי הגבול $\lim_{x\to x_0} D(x)$ לא קיים. אנו יודעים שלכל מספר ממשי יש סדרת מספרים רציונליים המתכנסת אליו ולכן נקח סדרה כזו ונסמנה $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ אזי $\lim_{n\to\infty} r_n = x_0$. בגלל שזו סדרת מספרים רציונליים נקבל על פי הגדרת הפונקציה $D(x)$ כי $D(r_n) = 1$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכן נקבל כי $\lim_{n\to\infty} D(r_n) = 1$. כעת נבנה את הסדרה הבאה $t_n = r_n + \frac{1}{\sqrt{2}n}$ שהיא בודאי סדרת מספרים אי רציונליים המקיימת $\lim_{n\to\infty} t_n = x_0$ אבל לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $D(t_n) = 0$ כלומר $\lim_{n\to\infty} D(t_n) = 0$. אי לכך על פי היינה נקבל כי אין הגבול לא קיים.

(24א)

<u>דרך 1 (עם משפטים):</u>

$f(x)$ מונוטונית. נניח בלי הגבלת הכלליות כי היא מונוטונית עולה.

מתקיים $[x] \le x \le [x]+1$ ומהמונוטוניות נובע כי $f([x]) \le f(x) \le f([x]+1)$ (1).

מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(n) = A$, ולכן גם $\lim_{x\to\infty} f([x]) = \lim_{x\to\infty} f([x]+1) = A$.

לכן ממשפט הסנדויץ' (עבור פונקציות) ומהאי שוויון (1) נובע כי גם $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$. מש"ל

<u>דרך 2 (לפי ההגדרה):</u>

נתון כי $\lim_{n\to\infty} f(n) = A$ לכן $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |A - f(n)| < \varepsilon$.

$f(x)$ מונוטונית, נניח כי היא מונוטונית עולה, לכן $0 \le A - f(n) = |A - f(n)| < \varepsilon$.

מהמונוטוניות נובע גם כי לכל x מתקיים $f([x]) \le f(x)$.

אם נבחר $B = N + 1$, אזי לכל $x > B$ מתקיים $[x] > N$

ולכן $0 \le A - f(x) < A - f([x]) < \varepsilon$.

קיבלנו $\forall \varepsilon > 0, \exists B = N, \forall x > B, |A - f(x)| < \varepsilon$ ולפיכך $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$. מש"ל.

<u>דרך 3:</u>

$f(n)$ סדרה מונוטונית, נניח בלי הגבלת הכלליות שהיא מונוטונית עולה.

הגבול של סדרה מונוטונית עולה ומתכנסת הוא הסופרמום שלה,

לכן A הוא הסופרמום של הסדרה $f(n)$.

מתקיים $[x] \le x \le [x]+1$ ומהמונוטוניות נובע כי $f([x]) \le f(x) \le f([x]+1)$ (1).

אבל $f(n) \le A$ לכל n טבעי ולכן מכאן ומהאי שוויון (1) נקבל כי $f(x) \le f([x]+1) \le A$.

כלומר, הפונקציה $f(x)$ מונוטונית עולה וחסומה ולכן יש לה גבול כאשר $x \to \infty$.

לפי משפט היינה גם הסדרה $f(n)$ מתכנסת לאותו הגבול.

לכן $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$. מש"ל.

(24ב)

(ג) לא נכון. לדוגמא: $f(x)=\sin \pi x$.

פתרון: ניקח את הסדרה $n \in Z$, $x_n = \pi n,$

נשתמש בהגדרת הגבול של **Heine** : $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin \pi n = 0$

ניקח את הסדרה השניה $n \in Z$, $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$ נקבל

$$\lim_{x\to\infty} \sin x = \lim_{n\to\infty} \sin(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 .$$

(25)

$$\forall x \; f(x) = f(x+T), T > 0$$

נתון ש $f(x)$ אינה קבועה, ז"א קיימים $t_1 \neq t_2$ כך ש $f(t_1)\neq f(t_2)$.

צריך להוכיח ש $\lim\limits_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x}\right)$ אינו קיים. ניקח $x_n^{(2)} = \frac{1}{t_2 + nT}$ ו- $x_n^{(1)} = \frac{1}{t_1 + nT}$.

$$f\left(\frac{1}{x_n^{(2)}}\right) = f(t_2 + nT) = f(t_2) \quad , \quad f\left(\frac{1}{x_n^{(1)}}\right) = f(t_1 + nT) = f(t_1) .$$

ז"א מצאנו 2 סדרות: $x_n^{(1)} \to 0$ ו $x_n^{(2)} \to 0$, כך ש

$$\lim_{x_n^{(2)}\to 0} f\left(\frac{1}{x_n^{(2)}}\right) = f(t_2) \quad , \quad \lim_{x_n^{(1)}\to 0} f\left(\frac{1}{x_n^{(1)}}\right) = f(t_1) .$$

אבל $f(t_1)\neq f(t_2)$, מ.ש.ל.