

מבחן בקורס הסתברות 1

סמסטר ב, מועד ב

20.07.2021

פרופ' דן חפץ

אוניברסיטת אריאל

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה למדעי המחשב

מתרגלים: בר אלון, נעה דה רוס ורומן גילגור

משך הבחינה: 3 שעות

המבחן הינו עבור מספרי קורס: 2-7028410-1, 2-7028410-2, 2-7028410-3.

מבנה המבחן: 4 שאלות ללא בחירה.

הנחיות:

1. המבחן הינו עם חומר סגור ובכתב יד ללא שימוש בשום אמצעי אלקטרוני (מותר מחשבון פשוט אם כי אין בו צורך). עם זאת, כל סטודנט רשאי להביא דף אחד מגודל A4 כתוב משני צדדיו. על התלמיד לכתוב את שמו ומספר תעודת הזהות שלו על הדף הנ"ל.
2. אין לכתוב בעפרון.
3. יש להוכיח כל טענה שאתם כותבים גם אם לא התבקשתם לעשות זאת במפורש בשאלה.
4. למרות הכתוב בסעיף 3, ניתן להסתמך ללא הוכחה על כל טענה שנלמדה בשיעור (אלא אם כן זו הטענה שהנכם מתבקשים להוכיח בשאלה). יש לצטט את הטענה עליה הנכם מסתמכים בצורה ברורה.
5. בפתרון סעיף כלשהו בשאלה, ניתן להסתמך על תוצאת סעיפים קודמים גם אם לא פתרתם אותם.

שאלה 1 (25 נקודות):

כד מכיל 10 כדורים שונים, 5 מהם אדומים, 2 צהובים והשאר ירוקים. מוציאים מהכד באופן מקרי אחד ולא החזרה 3 כדורים. יהי X מספר הכדורים האדומים שהוצאו, יהי Y מספר הכדורים הצהובים שהוצאו ויהי Z מספר הכדורים הירוקים שהוצאו.

- א. (14 נקודות) חשבו את ההתפלגות המשותפת של X ו- Y .
- ב. (5 נקודות) חשבו את ההתפלגויות השוליות של X ושל Y .
- ג. (6 נקודות) חשבו את התוחלת של Z .

שאלה 2 (25 נקודות):

יהי $X \sim \text{Geom}(1/2)$ משתנה מקרי. יהי $Y = X \bmod 3$ (כלומר Y הוא השארית המתקבלת מחלוקת X ב-3).

- א. (10 נקודות) חשבו את ההתפלגות של Y .
- ב. (8 נקודות) חשבו את ההסתברות ש- $Y < X$.
- ג. (7 נקודות) חשבו את $P(X \geq 10 | Y = 0)$.

שאלה 3 (25 נקודות):

יהיו X ו- Y משתנים מקריים באותו מרחב הסתברות. הוכיחו או הפריכו (ע"י דוגמה נגדית) את הטענות הבאות:

- א. (8 נקודות) אם $E(X) \geq E(Y)$, אז $E(X^2) \geq E(Y^2)$.
- ב. (8 נקודות) אם $\text{Var}(X - Y) > 0$, אז $\text{Var}(X) \geq \text{Var}(Y)$.
- ג. (9 נקודות) אם $E(X) \geq E(Y)$, אז $P(X \geq Y) \geq 1/2$.

שאלה 4 (25 נקודות):

יהי $n \geq 2$ מספר טבעי. לכל $1 \leq i \leq n$ מטילים קוביה הוגנת, כאשר כל הטלות הקוביה בלתי תלויות. לכל $1 \leq i \leq n$ נסמן ב- Y_i את תוצאת ההטלה ה- i . יהי X משתנה מקרי הסופר את מספר האינדקסים $1 \leq i \leq n-1$ כך ש- $|Y_{i+1} - Y_i| \geq 2$ וגם $Y_{i+1} \cdot Y_i$ אי זוגי.

- א. (8 נקודות) חשבו את התוחלת של X .
- ב. (10 נקודות) חשבו את השונות של X .
- ג. (7 נקודות) הוכיחו שמתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X \geq n/3) = 0.$$