חשבון אינפיניטסימלי

עדי ירדן

בס"ד ז' בתמוז ה'תש"פ

תוכן העניינים

פרק 1

המספרים הממשיים

לפני שנוכל להכנס לחשבון האינפיניטסימלי, עלינו ללמֹד מעט על המספרים הממשיים.

1.1 תאור קבוצה

כהקדמה לדיון לגבי המספרים הממשיים, אנחנו צריכים ללמֹד על קבוצות. קבוצה היא אֹסף של אברים. סוגרַיִם מסֻלסלים מסמנים קבוצה (בתורת הקבוצות מקפידים על סוג הסוגרַיִם, כי לכל סוג של סוגרַיִם יש משמעות שונה). שִׁוְיון בין קבוצות פֵּרושו שיש בהן אותם אברים. למשל,

$$\{1,1,2,1\}=\{1,2\}$$

בקבוצה אין חשיבות לסדר האברים. למשל,

$$\{1,2\}=\{2,1\}$$

$\in$ מסמן שיַכות. $a\in A$ פרושו שהאבר a שיָך לקבוצה A. למשל,

$$7\in\{3,2,7\}$$

ואילו

$$4\notin\{3,2,7\}$$

קבוצה סופית אפשר לתאר בעזרת רִשום מפֹרט של אֵבריה.

דוגמא 1.1.1.

$$\{3,2,7\}$$

היא קבוצה שיש בה שלשה אברים, 3 שיָך אליה ואילו 5 לא שיָך אליה.

אפשר להגדיר קבוצות גם בעזרת תכונות.

דוגמא 1.1.2. קבוצת המספרים $A=\{2,4,6\}$ היא קבוצת הכפולות ב-2 של מספרים מהקבוצה $\{1,2,3\}$ ולכן התאור שלה בעזרת תכונה הוא:

$$A=\Big\{2x:x\in\{1,2,3\}\Big\}$$

איך קוראים את זה? A היא קבוצת המספרים מהצורה $2x$ כאשר x שיָך לקבוצה $\{1,2,3\}$. הבִּטוי $2x$ הוא שם של אבר כללי בקבוצה. נניח למשל, שאנחנו רוצים לבדֹק אם $6\in A$. לשם כך נציב 6 $2x=$ ונקבל $x=3$. אכן $3\in\{1,2,3\}$ ולכן $6\in A$.

1.2 יחס ההכלה בין קבוצות

את הבִטוי $A \subseteq B$ קוראים: הקבוצה A מוכלת בקבוצה B. פֵרוש הדבר, שכל אבר ששַיָך ל-A שַיָך גם ל-B. נסמן ב- $\emptyset$ את הקבוצה הריקה, כלומר $\{\} = \emptyset$.

דוגמאות.

א. $\{2,4\} \subseteq \{2,1,4\}$

ב. $\emptyset \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

ג. $\{2n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$

ד. $\{1,2\} \not\subseteq \{1,4,5\}$

1.3 קבוצות של מספרים

קבוצת המספרים הטבעיים-$\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$$

בתורת המספרים 0 לא נחשב מספר טבעי. אולם אנחנו נִנהג כאן כמנהג אנשי תורת הקבוצות, שמחשיבים את 0 כמספר טבעי.

קבוצת המספרים השלמים-$\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\cdots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

קבוצת המספרים הרציונליים-$\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{n}{k} : n,k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0\right\}$$

למשל, $\frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$. גם $2 \in \mathbb{Q}$, כי $2 = \frac{2}{1}$.

קבוצת המספרים הממשיים-$\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ היא קבוצת כל המספרים על ציר המספרים. זוהי קבוצת כל המספרים שנִתָן להציג בצורה עשרונית:

$$n.a_0a_1a_2\dots$$

כאשר n הוא מספר שלם והסִמנים $a_0, a_1, a_2, \dots$ מיַצגים ספרות. זו איננה הגדרה רשמית. טִפול מדֻיק בנושא זה ראוי שיתבצע במסגרת קורס בתורת הקבוצות האקסיומטית.[1]

המספרים הממשיים שאינם רציונליים נקראים **אי-רציונליים**. למשל, $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי (בהמשך נוכיח שאכן יש מספר שהוא שרש של 2 ונציג אחת מההוכחות הרבות לעובדה ש-$\sqrt{2}$ איננו מספר רציונלי). באפן כללי, אם למספר שלם a אין שֹרש שהוא מספר שלם, אז $\sqrt{a}$ הוא מספר אי-רציונלי. גם המספרים π, e ועוד אחרים אינם רציונליים. בהצגה עשרונית של מספר אי-רציונלי מופיעה סדרה אינסופית לא מחזורית של ספרות.

[1] למרצה: הרעיון להגדיר את $\mathbb{R}$ בעזרת היִצוג העשרוני ואז להגדיר $+, \times, <$ כך שיתקבל שדה סדור שלם איננו יעיל. הקֹשי העיקרי הוא שלא ברור כיצד לשכן את $\mathbb{Q}$ ב- $\mathbb{R}$. לדעתינו, גם הגישה לפיה מציגים את האקסיומות של שדה סדור שלם ואין מוכיחים שיש מבנה שמקַיֵם אותן, איננה מועילה להוראת חשבון אינפיניטסימלי. אחד הפתרונות הטובים הוא הגדרת חתכי דדקינד.

1.4 קטעים פתוחים וסגורים

נתונים שני מספרים ממשיים a, b כך ש- $a < b$. הקבוצה

$$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

נקראת הקטע הפתוח מ-a עד b וסִמונה (a, b). הקבוצה

$$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

נקראת הקטע הסגור מ-a עד b וסִמונה $[a, b]$. הקבוצות

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

נקראות קטעים חצי פתוחים וחצי סגורים. יש לשים לב, שסוגר עגול מסמן שהמספר לא כלול בקטע ואילו סוגר מרֻבע מסמן שהמספר כן כלול בקטע.

אפשר להציב במקום a, b את הסמלים $-\infty, \infty$. כך מגדירים

$$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

ובאפן דומה מגדירים

$$(-\infty, b), [a, \infty), (-\infty, b]$$

וכצפוי

$$(-\infty, -\infty) = \mathbb{R}$$

דוגמאות.

א. $[2, 3) \ni 2$, אולם $2 \notin (2, 3)$

ב. $(1, 6) \supseteq (2, 5)$, אולם $(3, 10) \not\supseteq (2, 5)$

ג. $(2, 3) = (1, 3) \cap (2, 5)$

ד. $(4, 5] = (3, 5] \cap (4, 6)$

ה. $(3, 6) = (3, 5] \cup (4, 6)$

ו. $(1, 2] = (2, 5) \setminus (1, 4)$

ז. $(0, 3] \cup [5, 10) = (3, 5) \setminus (0, 10)$

1.5 אקסיומת החסם העליון

אנחנו נניח שהתכונות הבסיסיות של המספרים הממשיים שמתיַחסות לפעולות האלגבריות $+, \cdot$ ידועות מהתיכון. גם הסדרים $<, \leq$ על המספרים הממשיים מוכרים היטב. אולם לצֹרך לִמוד חשבון אינפיניטסימלי, חשוב להכיר תכונה מיוחדת של הסדר על המספרים הממשיים: אקסיומת החסם העליון. לפני הצגת האקסיומה, יש להציג כמה הגדרות.[2]

הגדרה 1.5.1 תהי $B \subseteq \mathbb{R}$ ויהי $a \in \mathbb{R}$.

א. a חסם מלעיל של B פֵרושו שלכל $b \in B$ מתקיֵם $b \leq a$.

[2] הגדרות אלו נלמדות גם במסגרת קורס בתורת הקבוצות. שם בדרך כלל, מתעמקים בנושא הרבה יותר. מכיון שאנחנו מניחים שהתלמיד לומד במקביל קורס בלוגיקה ותורת הקבוצות, כאן נציג רק מה שהכרחי למטרותינו.

ב. a חסם מלרע של B פֵּרושו שלכל $b \in B$ מתקיֵם $a \le b$.

ג. B חסומה מלעיל פֵּרושו של- B יש חסם מלעיל. באֹפן דומה מגדירים קבוצה חסומה מלרע.

ד. B חסומה פֵּרושו ש- B חסומה גם מלעיל וגם מלרע.

דוגמאות.

א. הקבוצה $(0,1)$ חסומה.

ב. הקבוצה $(0,\infty)$ חסומה מלרע ולא מלעיל.

ג. הקבוצה $\mathbb{Q}$ איננה חסומה מלרע ואיננה חסומה מלעיל.

הגדרה 1.5.2. תהי B קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים. יהי $a \in \mathbb{R}$. a הוא החסם העליון של B פֵּרושו ש- a הוא חסם מלעיל של B ולכל חסם מלעיל x של B מתקיֵם $a \le x$. במילים אחרות, כל מספר x שהוא קטן מ- a איננו חסם מלעיל של B. באֹפן דומה מגדירים את החסם התחתון של B.

השִׁמוש בהא הידיעה עלול להיות מטעה, כי הוא מחביא טענה יחידות בתוך ההגדרה: לא יכולים להיות שני חסמים עליונים שונים לאותה קבוצה. אולם במקרה שלנו, יש הצדקה לשִׁמוש בהא הידיעה:

טענה 1.5.3. אם x, y הם חסמים עליונים של (הקבוצה הלא ריקה וחסומה מלעיל) B אז $x = y$.

הוכחה. מכיון ש- y חסם עליון של B, בהכרח y הוא חסם מלעיל של B. עתה מכיון ש- x חסם עליון של B, מתקיֵם $x \le y$. באֹפן דומה, $y \le x$. לפיכך $x = y$. $\square$

אקסיומה 1.5.4 (אקסיומת החסם העליון)**.** לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים יש חסם עליון.

דוגמא 1.5.1. נגדיר $B = (0,1)$, $a = 1$. במקרה זה, a הוא החסם העליון של B. מצד אחד, 1 הוא חסם מלעיל של $(0,1)$, כי כל אבר ב- $(0,1)$ איננו גדול מ- 1. מצד שני, לכל חסם מלעיל x של $(0,1)$ מתקיֵם $1 \le x$. למשל, 2 הוא חסם מלעיל של $(0,1)$ ואכן $1 \le 2$.

במילים אחרות, כל מספר שהוא קטן יותר מ- 1 איננו חסם מלעיל של $(0,1)$. נוכיח זאת: נניח $x < 1$. עלינו להוכיח ש- x איננו חסם מלעיל של $(0,1)$, כלומר שלא נכון $\forall b \in B (b \le x)$. נניח בלי הגבלת כלליות, ש- $0 < x$, כי אחרת ברור ש- x איננו חסם מלעיל של $(0,1)$. כדי להוכיח ש- x איננו חסם מלעיל של $(0,1)$, עלינו להוכיח שכן נכון:

$$\exists b \in (0,1)(x < b)$$

לשם כך נגדיר $b = \frac{x+1}{2}$. ברור ש- $b \in (0,1)$ (כי $0 < x < b < 1$) ומכיון ש- $x < b$, בזאת הוכח ש- x איננו חסם מלעיל של $(0,1)$. לסכום, הוכחנו ש- 1 הוא החסם העליון של $(0,1)$.

לאקסיומת החסם העליון אין הקבלה ב- $\mathbb{Q}$ ועל כך נכתב רבות. אבל כדי לא לסטות מנושא הספר, לא נרחיב את הדִּבור על נושא זה. שלשת המשפטים הבאים הם יישומים של אקסיומת החסם העליון.

משפט 1.5.5. לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע של מספרים ממשיים יש חסם תחתון.

הוכחה. תהי B קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע של מספרים ממשיים. אז הקבוצה $-B = \{-x : x \in B\}$ היא קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל של מספרים ממשיים. לכן לפי אקסיומת החסם העליון, יש לה חסם עליון, a. עתה קל להוכיח ש- $-a$ הוא החסם התחתון של B (בדוק!). $\square$

משפט 1.5.6 (תכונת הארכימדיות)**.** $\mathbb{N}$ איננה חסומה מלעיל.

הוכחה. נניח בשלילה ש- $\mathbb{N}$ חסומה מלעיל. היא כמובן לא ריקה. לכן לפי אקסיומת החסם העליון, יש לה חסם עליון x. לכן $x - 1$ איננו חסם מלעיל שלה. לכן יש n טבעי כך ש- $x - 1 < n$. לפיכך $x < n + 1 \in \mathbb{N}$ וקבלנו סתירה לעובדה ש- x הוא החסם העליון (ובפרט חסם מלעיל) של $\mathbb{N}$. $\square$

הגדרה 1.5.7. תהי A קבוצה של מספרים ממשיים. A צפופה ב- $\mathbb{R}$ פֵּרושו שלכל שני מספרים ממשיים $x < y$ יש מספר $a \in A$ כך ש- $x < a < y$.

משפט 1.5.8. $\mathbb{Q}$ צפופה ב- $\mathbb{R}$.

הוכחה. נניח $x<y$. צריך להוכיח שיש $z\in\mathbb{Q}$ כך ש- $x<z<y$.

מקרה פרטי: $0<x$. לפי תכונת הארכימדיות, יש k טבעי כך ש- $\frac{1}{y-x}<k$ כלומר

$$\frac{1}{k}<y-x \quad (1).$$

לפי תכונת הארכימדיות, יש מספר טבעי n, כך ש- $kx<n$ כלומר

$$x<\frac{n}{k} \quad (2).$$

מכיון שקבוצת המספרים הטבעיים סדורה היטב, נוכל לבחֹר את ה- n הקטן ביותר שמקיֵם את (2). [3] חשוב לציֵן ש- $n\geq 1$ (לפי ההנחה ש- $0<x$) ולכן $n-1$ הוא מספר טבעי. מכיון ש- n הוא הקטן ביותר והמספר $n-1$ הוא טבעי, $n-1$ לא מקיֵם זאת. לפיכך

$$\frac{n-1}{k}\leq x \quad (3).$$

נחבר את אי-שִויונות $(1),(3)$ ונסיק

$$\frac{n}{k}<y \quad (4).$$

לפי (2),(4),

$$x<\frac{n}{k}<y$$

המקרה הכללי: עתה לא נניח ש- $0<x$. תחילה נסביר את הרעיון ורק אחר כך נציג הוכחה מדֻיקת. אנחנו רוצים להעתיק את הקטע (x,y) לקטע אחר שהקצה השמאלי שלו הוא מספר חיובי (בקטע כזה, נוכל למצֹא מספר רציונלי לפי המקרה הפרטי). לשם כך נרצה להוסיף לכל הנקודות בקטע מספר m כך ש- $0<x+m$.

עתה נוכיח באֹפן מדֻיק. לפי תכונת הארכימדיות, יש מספר טבעי m כך ש- $-x<m$. נגדיר $x'=x+m$, $y'=y+m$. מכיון ש- $0<x'<y'$, לפי המקרה הפרטי, יש מספר רציונלי q כך ש- $x'<q<y'$. לכן $x<q-m<y$. נותר להעיר ש- $q-m$ הוא מספר רציונלי, כי הוא הפרש של שני מספרים רציונליים. □

תוצאה 1.5.9. לכל מספר חיובי x יש מספר רציונלי q, כך ש- $0<q<x$.

אפשר לחסֹך את החלוקה למקרים בהוכחת משפט 1.5.8, בעזרת הטענה הבאה. למרות ש- $\langle\mathbb{Z},\leq\rangle$ איננו סדר טוב, הטענה הבאה מציגה קבוצות של מספרים שלמים שיש בהן אבר מזערי.

טענה 1.5.10. לכל מספר ממשי, x, בקבוצה $\{n\in\mathbb{Z}:n>x\}$ יש אבר מזערי.

הוכחה. יהי $x\in\mathbb{R}$. לפי תכונת הארכימדיות, יש $k\in\mathbb{N}$ כך ש- $-x<k$. כלומר $0<k+x$. נסמן ב- k את המספר הטבעי הראשון כך ש- $0<k+x$. נסמן ב- m את האבר המזערי בקבוצה $\{m\in\mathbb{N}:m>k+x\}$. עתה $m-k$ הוא האבר המזערי בקבוצה $\{n\in\mathbb{Z}:n>x\}$, כי אם $x<m-k-1$ אז המספר הטבעי (מדוע הוא טבעי?) $m-1$ מקיֵם $x+k<m-1$ בסתירה למזעריות m.

□

שאלה 1.5.2. הוכח שוב את משפט 1.5.8 ללא חלוקה למקרים, תוך הסתמכות על טענה 1.5.10.

אפשר להוכיח בעזרת אקסיומת החסם העליון את הטענה לפיה, למספר 2 יש שֹרש שהוא מספר ממשי. אולם לא נעשה זאת כרגע, מכיון שטענה זו היא מקרה פרטי של משפט ערך הביניים שיופיע בהמשך.

[3] אם לא היינו מחלקים למקרים, אז בשלב הזה, היינו צריכים למצא את המספר הקטן ביותר בקבוצה של מספרים שלמים וקיומו יֻצדק רק בטענה הבאה.

1.6 פונקצַיַת החזקה

במהלך לִמודי התיכון לומדים חזקות, כאשר המעריך הוא מספר רציונלי. פונקציה זו חשובה להצגת דוגמאות בחשבון איפיניטסימלי. יתר על כן, בהמשך הקורס נלמד הכללה של ההגדרה למעריך ממשי, שאיננו בהכרח רציונלי. תחילה נחזור בקִצור נמרץ על הגדרת החזקה, כאשר המעריך רציונלי:

הגדרה 1.6.1. נגדיר באֹפן השראתי (רקורסיבי) את החזקה a^q כאשר $q \in \mathbb{Q}$ כך:

$$
\begin{aligned}
&a^0 = 1\\
&a^{n+1} = a^n \cdot a\\
&a^{-n} = \frac{1}{a^n}\\
&a^{\frac{n}{k}} = \sqrt[k]{a^n}
\end{aligned}
$$

פרק 2

תבניות הוכחה

במתמטיקה מקפידים הקפדה יתֵרה על כתיבת הוכחות מדֻיקות. בעוד בצבא הכללים נכתבו בדם, כאן התבניות נִכתבו בדמעות (של תלמידים שנכשלו בכתיבת הוכחות, או בהבנת הוכחות). בפרט נעמֹד על ההבדל בין "לכל" לבין "קיָם", שאי-הפנמתו היא גורם מרכזי לקשיים.

יש לציֵן שלמרות שנלמד לכתֹב הוכחות מפֹרטות מאד, בדרך כלל נקצר. כיצד אם כן יֵדע תלמיד, עד כמה הוא חיָב לפרט? כאשר תלמיד מרגיש שקשה לו לפרט, אז הוא דוקא חיָב לפרט. אבל כאשר התלמיד מרגיש שכל הפרטים ברורים, אז עדיף לו להמעיט בכתיבת פרטי ההוכחה.

נסמן ב- $\neg$ את המלה "לא", ב- $\wedge$ את המלה "וגם", ב- $\vee$ את המלה "או", ב- $\beta \Rightarrow \alpha$ את הבִטוי "אם α אז β",[1] ב- $\Leftrightarrow$ את הבִטוי "אם ורק אם", ב- $\forall$ את המלה "לכל" וב- $\exists$ את המלה "קיָם". הסִמנים $\Leftrightarrow ,\Rightarrow ,\vee ,\wedge ,\neg$ נקראים קָשָרים והסמנים $\exists ,\forall$ נקראים כַּמָתים.

המשתנים x, y, z, x_1 וכדומה ייַצגו מספרים ממשיים אם לא נאמר אחרת. המשתנים n, k, m ייַצגו מספרים שלמים, אלא אם נאמר אחרת.

2.1 הוכחת פסוק כולל

הנה תבנית להוכחת פסוק (כלומר טענה) שמתחיל במלה "לכל", כלומר פסוק מהסוג $\forall x(\alpha)$: יהי x. נוכיח α.

דוגמא 2.1.1. נוכיח שלכל שני מספרים ממשיים x, y מתקיֶמת הנֻסחה:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

במילים אחרות נוכיח:

$$\forall x, y[(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2]$$

הוכחה. יהיו x, y מספרים ממשיים. נוכיח

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

הוכחה:

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

□

למשפט הבא נודעת חשיבות בחשבון אינפיניטסימלי ובענפים אחרים של המתמטיקה. הוכחתו היא דוגמא נוספת להוכחת פסוק כולל וגם דוגמא להוכחה בהשראה.

[1] הסִמן $\rightarrow$ מקֻבל גם כן, אבל בקורס בחשבון אינפיניטסימלי, נועד לסִמן זה תפקיד אחר.

משפט 2.1.1 (אי-השִוְיון של ברנולי)**.** לכל $x > -1$ ולכל n טבעי מתקיֵם

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

הוכחה. יהי $x > -1$. נוכיח שאי-השִוְיון מתקיֵם לכל n טבעי, בהשראה.
שלב הבסיס: עבור $n = 0$, בשני האגפים נקבל 1.
שלב המעבר:
הנחת ההשראה:[2]

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

צריך להוכיח את הטענה עבור $n+1$, כלומר להוכיח ש-

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x = 1+nx+x$$

הוכחה:

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}\cdot(1+x) \geq_{\text{הה''ה}} \underbrace{(1+nx)}(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+nx+x$$

יש לשים לב שבשלב שבו השתמשנו בהנחת ההשראה (הה"ה) (מתחת לכל אחד מאגפיה מופיעים סוגריִם מסֻלסלים), למעשה כפלנו את אי-השִוְיון שמופיע בהנחת ההשראה ב- $x+1$ ולפי הנחת המשפט, בִטוי זה הוא חיובי ולכן כאשר כופלים בו, אי-השִוְיון נשמר. □

2.2 הוכחת פסוק יֵשי

הנה תבנית להוכחה טענה שמתחילה במלה "קיָם" (או יש), כלומר טענה מהסוג $\exists x(\alpha)$: נגדיר $x = \ldots$ נוכיח α.

דוגמא 2.2.1. נוכיח שיש מספר טבעי x שכאשר מחלקים אותו ב- 3 או ב- 5 מקבלים שארית 2.

הוכחה. נגדיר $x = 17$. נוכיח שני דברים:

א. $x-2$, כלומר 15 הוא כפולה של 3.

ב. $x-2$ הוא כפולה של 5.

אכן $3\cdot 5 = 15$ ולכן הוא כפולה גם של 3 וגם של 5. □

2.3 הוכחת אִמוז

הנה תבנית להוכחת טענה מהסוג "אם אז", כלומר $\alpha \Rightarrow \beta$: נניח: α. נוכיח: β.

שאלה 2.3.1. הוכיחו שלכל שלשה מספרים טבעיים x,y,z אם x מחלק את y וגם y מחלק את z אז x מחלק את z.
במילים אחרות, הוכיחו את הטענה הבאה:

$$\forall x,y,z \in \mathbb{N}\big[[(\exists n \in \mathbb{N}(x\cdot n = y)) \wedge (\exists m \in \mathbb{N}(y\cdot m = z))] \Rightarrow [\exists k \in \mathbb{N}(x\cdot k = z)]\big]$$

פִתרון. יהיו $x,y,z \in \mathbb{N}$. נוכיח:

$$[(\exists n \in \mathbb{N}(x\cdot n = y)) \wedge (\exists m \in \mathbb{N}(y\cdot m = z))] \Rightarrow [\exists k \in \mathbb{N}(x\cdot k = z)]$$

נניח:

$$(\exists n \in \mathbb{N}(x\cdot n = y)) \wedge (\exists m \in \mathbb{N}(y\cdot m = z))$$

[2] אינדוקציה בלע"ז

נוכיח:

$$\exists k \in \mathbb{N}(x \cdot k = z)$$

נגדיר

$$k = n \cdot m$$

עתה מוטל על הקורא להוכיח:

$$x \cdot k = z$$

פרק 3

הגבול של סדרה

אם יש מושג שראוי לתאר "המושג החשוב ביותר בחשבון האינפיניטסימלי", זהו מושג הגבול. בפרק זה, נלמד את הגדרת הגבול של סדרה, אבל נדחה את חִשוב הגבול לפרק מאֻחר יותר. הצגת הגדרת הגבול בשלב זה, תאפשר לנו לתרגל לוגיקה תוך התיַחסות להגדרת הגבול. רק אחרי שנסיֵם את ההכנות בתחום הלוגיקה, נחזור ונדון בחִשוב גבולות כנושא בפני עצמו.

3.1 הגדרת הגבול של סדרה

קל להשתכנע שהסדרה $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ הולכת ומתקרבת ל- 0 . אולם למה בעצם הכוָנה? נסביר זאת שלש פעמים:

א. בדו-שיח

ב. בשיטת המשחק

ג. בהגדרה מדֻיקת

הנה דו-שיח:

אמית: הסדרה שואפת ל- 0 .

בועז: אינני מסכים אתך. אבריה של הסדרה כלל אינם קרובים ל- 0 .

אמית: אנא, הגדר מהו בעיניך "מספר קרוב ל- 0 ".

בועז: בעיני רק מספר שערכו המֻחלט קטן מ- 0.01 יכול להחשב כמספר קרוב ל- 0 .

אמית: ובכן, כמעט כל המספרים בסדרה הם קרובים ל- 0 .

בועז: אבל אני רואה שיש בסדרה המון אברים שאינם קרובים ל- 0 !

אמית: קבוצת האברים בסדרה שאינם קרובים ל- 0 היא סופית (רק 100 אברים) שהרי החל מהאבר $\frac{1}{101}$ כל האברים קרובים ל- 0. לעומת זאת, קבוצת האברים שכן קרובים ל- 0 היא אינסופית.

הסבר בשיטת המשחק: השאיפה של הסדרה ל- 0 היא בעצם העובדה שאמית מנצחת את בועז במשחק הבא: בועז בוחר מספר $\varepsilon > 0$ (למשל, 0.01) שמבטא את המִדה שבה הוא מצפה שהאברים יהיו קרובים ל- 0. עתה אמית בוחרת n^* (למשל, 101). עתה בועז בוחר מספר $n \leq n^*$ אם n קרוב ל- 0, כלומר שערכו המֻחלט קטן מ- ε אז אמית מנצחת. אחרת בועז מוכרז כמנצח.

הגדרה 3.1.1. $L \; a_n \to_{n\to\infty}$ פֵרושו שלכל $\varepsilon > 0$ יש n^* כך שלכל מספר טבעי $n \leq n^*$ מתקיֵם

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

הנה נֻסוח של אותה הגדרה תוך שִמוש בסִמנים לוגיים:

הגדרה 3.1.2. L $a_n \to_{n\to\infty}$ פֵּרושו

$$\forall\varepsilon > 0\exists n^*\forall n \in \mathbb{N}(n^* \leq n \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$$

נסמן זאת גם כך:

$$lim_{n\to\infty}a_n = L$$

או בקִצור נמרץ:

$$a_n \to L$$

במילים: a_n שואף ל- L (כאשר n שואף לאינסוף).

שאלה 3.1.1. הוכיחו:

$$\frac{1}{n} \to 0$$

פִתרון. צריך להוכיח:

$$\forall\varepsilon > 0\exists n^*\forall n \in \mathbb{N}(n^* < n \Rightarrow |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon)$$

יהי $\varepsilon > 0$. נוכיח:

$$\exists n^*\forall n \in \mathbb{N}(n^* < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon)$$

נגדיר את n^* כמספר הטבעי הראשון (הכי קטן) כך ש- $\frac{1}{\varepsilon} \leq n^*$ (לפי עקרון הארכימדיות יש מספר טבעי שהוא גדול מ- $\frac{1}{\varepsilon}$). עלינו להוכיח:

$$\forall n \in \mathbb{N}(n^* < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon)$$

יהי $n \in \mathbb{N}$ ונניח $n^* < n$. נשאיר לקורא להוכיח:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

3.2 שלילת פסוק

כיצד נוכיח שסדרה איננה שואפת למספר מסֻים? נרחיב את השאלה: כיצד מוכיחים שפסוק איננו מתקיֵם? נתמקד עתה בפסוק מהצורה $\forall x(\beta)$. למשל, נניח ש- α הוא הפסוק

$$\forall x(x \in \mathbb{N}))$$

שלילת α היא הפסוק:

$$\neg\forall x(x \in \mathbb{N})$$

המשמעות של $\neg\alpha$ היא זו:

$$\exists x(x \notin \mathbb{N})$$

באֹפן כללי, המשפט הבא אומר שכאשר מכניסים את השלילה פנימה הכָּמָתים (כלומר הסמנים $\forall, \exists$) מתהפכים:

משפט 3.2.1 (חֻקי דה-מורגן של תחשיב היחסים)**.** נתון פסוק α. אז:

א. אם α הוא הפסוק $\forall x(\beta)$ אז $\neg(\alpha)$ מתקיֵם אם"ם (אם ורק אם) מתקיֵם הפסוק $\exists x(\neg\beta)$.

ב. אם α הוא הפסוק $\exists x(\beta)$ אז $\neg(\alpha)$ מתקיֵם אם"ם מתקיֵם הפסוק $\forall x(\neg\beta)$.

נזכיר שהטענה $a_n \to L$ פִּרושה:

$$\forall\varepsilon > 0\exists n^*\forall n \geq n^*(|a_n - L| < \varepsilon)$$

תוצאה 3.2.2. תהי $\langle a_n \rangle$ סדרה ויהי $L \in \mathbb{R}$. אז הטענה $a_n \to L$ שגויה אם"ם מתקיים:

$$\exists\varepsilon > 0 \forall n^* \exists n \geq n^* (|a_n - L| \geq \varepsilon)$$

דוגמא 3.2.1. נוכיח שהטענה הבאה שגויה:

$$\frac{1}{n} \to 3$$

עלינו להוכיח:

$$\exists\varepsilon > 0 \forall n^* \exists n \geq n^* (|\frac{1}{n} - 3| \geq \varepsilon)$$

נגדיר $\varepsilon = 1$.[1] יהי $n^* \in \mathbb{N}$. נגדיר n כך: $n = n^*$. עתה נקבל

$$|\frac{1}{n} - 3| \geq |1 - 3| = 2 > \varepsilon$$

[1] יכולנו להגדיר את ε גם אחרת.

פרק 4

המצאת הוכחות: החשיבה הלוגית

בפרק זה, נדון בחשיבה הלוגית שמאחורי המצאת הוכחות. החשיבה הציורית חשובה לא פחות מהחשיבה הלוגית, אולם לא נעסוק בה בפרק זה. רֹב הדוגמאות שנבחר תהיינה קשורות למושג הגבול וכך נתרגל אותו. זו למעשה הסבה שהקדמנו את הגדרת הגבול לנושא "המצאת הוכחות".

4.1 שיטת המִשחק

בשיטת המשחק מבררים אם פסוק אמיתי. השיטה נותנת גם השראה לכתיבת הוכחה לנכונותו של הפסוק כאשר הוא נכון, ולכתיבת הוכחה לשלילתו כאשר הוא שגוי. שיטת ההעתקה במשחק מקבילי, שתוצג בסעיף הבא, בנויה על שיטת המשחק.

נתון פסוק α. נחשֹב על α כעל מִשחק של שני שחקנים: שחקן הלכל ושחקן הקיָם. שחקן הלכל טוען שהפסוק α לא מתקיֵם, כלומר α שָקרי. שחקן הקיָם טוען ש-α כן מתקיֵם. המִשחק מִתנהל בתורות. $\exists x$ פֵּרושו שתור שחקן הקיָם לשחק והוא צריך לִבחֹר את האבר שיוצב בְמקום המִשתנה x. $\forall x$ פֵּרושו שתור שחקן הלכל לשחק והוא צריך לִבחֹר את האבר שיוצב בְמקום המִשתנה x. בסוף המשחק, אם מקבלים T אז שחקן הקיָם מנצח ואם מקבלים F אז שחקן הלכל מנצח.

כמו בהרבה משחקים, איננו יכולים לצַפות לתוצאה קבועה. למשל, במשחק איקס עִגול, לפעמים השחקן הראשון מנצח ולפעמים השני. אולם אם השחקנים ישחקו טוב, כלומר לא יבצעו שגיאות, אז תוצאת המִשחק תהיה קבועה. כך גם במשחק שלנו, מִתברר שאם שחקן הקיָם ושחקן הלכל ישחקו טוב, אז תוצאת המשחק תהיה קבועה, T או F. אם התוצאה הקבועה היא T, אז הפסוק אמיתי ואם התוצאה הקבועה היא F, אז הפסוק שקרי. איסטרטגיַת נִצחון היא שיטה שאם שחקן ינקֹט בה, אז הוא בטוח ינצח. במִשחק שלנו, אם לשחקן הקיָם יש איסטרטגיית נִצחון, אז הפסוק אמיתי ואם לשחקן הלכל יש איסטרטגיַת נִצחון אז הפסוק שָקרי. [1] כאשר נאמר שיש איסטרטגיית נצחון מבלי לציֵן במפֹרש לאיזה שחקן, הכַּוָנה תהיה לאיסטרטגיית נצחון לשחקן הקיָם.

דוגמא 4.1.1. נבדֹק אם הפסוק $\forall x \exists y (x < y)$ אמיתי. כללי המשחק: בשלב א, השחקן $\forall$ בוחר מספר ממשי שהוא יהיה x. בשלב ב, השחקן $\exists$ בוחר מספר ממשי שהוא יהיה y. אם $x < y$ אז שחקן ה-$\exists$ מנצח. מִתברר שיש לשחקן ה-$\exists$ דרך פשוטה לנצח. הוא צריך לִבחֹר מספר יותר גדול מזה שחברו בחר. אם כך, הנה איסטרטגיַת נִצחון עבור שחקן הקיָם: בחר את y כך ש-$y = x + 1$. אם שחקן הקיָם ישחק כך, הוא ינצח תמיד. מכיון שמצאנו איסטרטגיַת נִצחון לשחקן הקיָם, הפסוק אמיתי.

דוגמא 4.1.2. נבדֹק אם הפסוק $\forall n \exists k (k < n)$ אמיתי (n, k מיַצגים מספרים טבעיים). במִקרה זה, לשחקן הלכל יש איסטרטגיַת נִצחון: בחר $n = 0$. אם הוא ישחק לפי האיסטרטגיה הזאת, אז לא יתקיֵם $k < n$ לפיכך הפסוק שקרי.

דוגמא 4.1.3. נציג איסטרטגיית נצחון שתשכנע אותנו בכך ש-

$$\frac{1}{n} \to 0$$

[1] הערה לבעלי רקע בלוגיקה: שיטת המִשחק מתאימה לחִשוב ערכי אמת של פסוקים מסוג מסוים בִלבד: פסוקים שבהם כל הכמתים מופיעים בתחילת הפסוק. אם יש קשר שמופיע משמאל לכמת, אז לא נִשתמש בשיטת המִשחק.

עלינו למצֹא איסטרטגיית נִצחון (לשחקן הקיָם), כאשר הפסוק הוא

$$\forall\varepsilon>0\exists n^*\forall n\in\mathbb{N}(n^*\leq n\to\frac{1}{n}<\varepsilon)$$

שחקן הקיָם נדרש לבחֹר את n^*, כאשר הוא יודע רק את ε ולא את n. בחירת n^* כמספר הטבעי הראשון כך ש- $\frac{1}{\varepsilon}<n^*$ היא איסטרטגיית נִצחון לשחקן הקיָם. לפי תכונת הארכימדיות ועקרון הסדר הטוב יש n^* כזה.

דוגמא 4.1.4. נתרגל מציאת איסטרטגיַת נצחון עבור "משחק הגדרת הגבול":

$$\forall\varepsilon>0\exists n^*\forall n\geq n^*(|a_n-L|<\varepsilon)$$

נתונה סדרה אינסופית $\langle a_n\rangle$ והגבול L שאליו היא שואפת. המשחק מתנהל ב-3 סבובים. בכל סבוב, נתון $0<\varepsilon$ ששחקן הלכל בחר ואתם נדרשים למצֹא את המספר n^* הכי קטן שיאפשר לכם לנצח במשחק.

הסדרה היא סדרה אקראית של מספרים. לכן נוכל להציג רק מספר סופי של אברים שלה. הניחו ששאר האברים (אלו שמתחבאים בשלֹש נקודות) עוד יותר קרובים לגבול מאלו שמופיעים.

$$\langle 2.3,2.4,2.1,1.9,2.05,1.92,2.03,1.96,2.001,1.992,2.00000005,1.9999994,\dots\rangle\to 2$$

$\varepsilon=0.1,\varepsilon=0.01,\varepsilon=0.001$. פתרון: $n^*=5,9,11$. הסבר: בסבוב הראשון, שחקן הלכל בחר $\varepsilon=0.1$ והפתרון הוא $n^*=5$. אכן החל מהאבר החמישי, המספרים שבסדרה קרובים מאד ל- 2, כלומר שהם מקיְמים

$$|a_n-2|<0.1$$

הערה: אמנם אם היינו בוחרים n^* גדול יותר, גם אז היינו מנצחים במשחק. אולם לצֹרך התרגיל, נחפש את ה- n^* הכי קטן עבור שחקן הקיָם מנצח את המשחק.

שאלה 4.1.5. נתרגל את משחק הגדרת הגבול בדומה לדוגמא 4.1.4, עבור הסדרה הבאה:

$$\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2.5},\frac{1}{3},\frac{1}{3.8},\frac{1}{20},\frac{1}{30},\frac{1}{2000},\dots\rangle\to 0$$

שחקן הלכל בחר במספרים הבאים: $\varepsilon=0.5,0.1,0.01$ עליכן לבחֹר בהתאם מספרים n^*.

שאלה 4.1.6. נתרגל את משחק הגדרת הגבול בדומה לדוגמא 4.1.4, עבור הסדרה הבאה שמֻגדרת לפי חוקיות:

$$\langle\frac{1}{n}\rangle\to 0$$

שחקן הלכל בחר במספרים הבאים: $\varepsilon=0.5,0.1,0.01$ עליכן לבחֹר בהתאם מספרים n^*.

שאלה 4.1.7. נתרגל את משחק הגדרת הגבול בדומה לדוגמא 4.1.4, עבור הסדרה הבאה שמֻגדרת לפי חוקיות:

$$\langle\frac{1}{n}\rangle\to 0$$

שחקן הלכל בוחר $\varepsilon>0$. עליכם להציג איסטרטגיַת נצחון לשחקן הקיָם, כלומר להגדיר n^* כפונקציה של ε, כלומר בעזרת ε. (אין חובה לבחֹר את ה- n^* הכי קטן שאפשר).

פִּתרון. נגדיר את n^* כמספר הראשון שהוא גדול מ- $\frac{1}{\varepsilon}$.

שאלה 4.1.8. נתרגל את משחק הגדרת הגבול עבור:

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\to 0$$

שחקן הלכל בחר $\varepsilon=0.3$. עליכם למצֹא n^* כך שתנצחו את המשחק.

פִּתרון. נכתֹב את האברים הראשונים בסדרה:

$$\langle 0,\frac{1}{4},\frac{2}{9},\frac{3}{16},\dots\rangle$$

נבחר $n^*=2$. אכן עבור $n\geq 2$ נקבל $a_n\leq\frac{1}{4}<0.3=\varepsilon$ ולכן $|a_n-0|<\varepsilon$.

4.2 שיטת ההעתקה (במשחק מקבילי)

בסעיף זה נחשוף אחד מהסודות שיושבים בראש של מי שממציא הוכחה למשפט במתמטיקה בכלל ולחשבון אינפיניטסימלי בפרט. המטרה היא להוכיח שאם פסוק אחד מתקיֵם אז פסוק שני מתקיֵם. הרעיון יֵסבר במשל.

יש תחרויות בהן מופיע אומן בשחמט והוא משחק במקביל נגד הרבה שחקנים. במשחק כזה, לא הרבה שחקנים יצליחו להגיע לתוצאה של תיקו מול האומן והרֹב מפסידים בדרך כלל. אולם הנה שיטה להבטחת תיקו לפחות: שני חברים מגיעים למשחק. נניח אפילו שהם שחקנים גרועים מאֹד בשחמט. אחד מהם משחק בלבן ויקרא מעתה השחקן הלבן. השחקן השני משחק בשחור ויקרא השחקן השחור.

בשלב הראשון, האומן בוחר מסע בלבן מול השחקן השחור. השחקן הלבן מעתיק את מסעו של האומן: הוא רואה את בחירתו של האומן מול השחקן השחור ובוחר בדיוק אותו מסע. האומן מגיב למסעו של השחקן הלבן (שזהו בעצם מסעו של האומן במשחק מול השחקן השחור) וכך ממשיכים. כל מסע של האומן מול השחקן הלבן מועתק על ידי השחקן השחור וכל מסע של האומן מול השחקן השחור מועתק על ידי השחקן הלבן. כך מתקבלת אותה סדרת מסעים בשני המשחקים ולכן לשניהם אותה תוצאה: או תיקו בשני המשחקים, או שבשני המשחקים הלבן מנצח או שבשניהם השחור מנצח. כך יוצא שלפחות אחד מהשחקנים לא הפסיד מול האומן.

בעוד המשל מתיחס למשחק שחמט מקבילי, הנמשל מתיחס להוכחות של טענות בחשבון אינפיניטסימלי. אולם כרגיל, אין דמיון מֻשלם בין המשל לנמשל. ההבדל העיקרי הוא שבעוד במשחק שחמט מקבילי בכל לוח משחקים בדיוק לפי אותם כללים, בחשבון אינפיניטסימלי משחקים בשני משחקים שיש ביניהם הבדלים קטנים מבחינת כללי המשחק: לא נשוֶה בין שתי טענות זהות, אלא תמיד יהיה הבדל קטן בין הטענות.

דוגמא 4.2.1. נתונה סדרה $\langle a_n \rangle$ ומספר $c \in \mathbb{R}$. נתבונן בשני המשחקים (כלומר הפסוקים) הבאים:

$$\begin{aligned} &\forall\varepsilon^* > 0 \exists n^* \forall n (n^* \leq n \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon^*) \\ &\forall\varepsilon > 0 \exists n^* \forall n (n^* \leq n \Rightarrow |a_n + c - (L + c)| < \varepsilon) \end{aligned}$$

ננמק את העובדה שאם הפסוק הראשון נכון, אז כך גם השני. איסטרטגיַת נִצחון במשחק הראשון היא למעשה שיטה לבחירת n^*, כך ששחקן הקיָם ינצח. נניח שיש שיטה כזו במשחק הראשון. אז אפשר להעתיק אותה ולבחר בדיוק אותו n^* במשחק השני. כך מכיון שבמשחק הראשון נקבל

$$n^* \leq n \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon^*$$

יתקיֵם גם

$$n^* \leq n \Rightarrow |a_n + c - (L + c)| < \varepsilon^*$$

(כי $a_n + c - (L + c) = a_n - L$) וכך נצליח לנצח במשחק השני.

נחזור על הרעיון בפֵרוט רב: נניח שבמשחק הראשון האומן הוא שחקן ה $\exists$ ובשני הוא שחקן ה $\forall$. מטרתנו היא לנצח לפחות באחד מהמשחקים, כלומר לנצח את האומן במשחק השני, אם נפסיד בראשון.

בדיאגרמה הבאה מופיעים שני הפסוקים (בכל שורה פסוק), בתוספת חץ מכל משתנה למשתנה שערכו יבחר אחריו:

$$\begin{tikzcd}
\forall\varepsilon^* \arrow[r] & \exists n^* \arrow[d] & \forall n & |a_n - L| < \varepsilon^* \\
\forall\varepsilon \arrow[u] & \exists n^* \arrow[r] & \forall n \arrow[u] & |a_n + c - (L + c)| < \varepsilon
\end{tikzcd}$$

תחילה נחכה שהאומן יבחר ε במשחק השני. אנחנו נבחר את ε^* כך: $\varepsilon = \varepsilon^*$. עתה האומן יבחר במשחק הראשון את n^*. אנחנו נבחר בדיוק באותו n^* למשחק השני. עתה האומן יבחר במשחק השני במספר ממשי שיֻצב במקום n. אנחנו נבחר באותו n למשחק הראשון. לבסוף, נניח שהאומן נִצח אותנו במשחק הראשון. זאת אומרת ש-

$$|a_n - L| < \varepsilon^*$$

לפיכך

$$|a_n + c - (L + c)| < \varepsilon^*$$

זאת אומרת שנצחנו במשחק השני.

המסקנה: אם הפסוק הראשון נכון, אז גם השני נכון. במילים אחרות, אם $a_n \to L$ אז $a_n + c \to L + c$. לא נטרח לכתֹב הוכחה רשמית לטענה ברורה זו.

כהקדמה לדוגמא הבאה, נציֵן שבאֹפן כללי, כדי להוכיח שסדרה $\langle a_n \rangle$ שואפת ל- a, אנחנו מוצאים איסטרטגיית נִצחון (לשחקן הקיָם) עבור הפסוק

$$\forall\varepsilon > 0 \exists n^* \forall n \geq n^* [|a_n - a| < \varepsilon]$$

איסטרטגיה זו היא למעשה, שיטה לבחירת n^*, בהנתן $\varepsilon > 0$ כך שיתקיֵם המשך הפסוק.

דוגמא 4.2.2. נתונה סדרה $\langle a_n \rangle$ ומספר ממשי c. נתבונן בשני המשחקים (כלומר הפסוקים) הבאים:

$$\forall\varepsilon^* > 0 \exists n^* \forall n (n^* \leq n \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon^*)$$
$$\forall\varepsilon > 0 \exists n^* \forall n (n^* \leq n \Rightarrow |c \cdot a_n - (c \cdot L)| < \varepsilon)$$

נניח שהאומן משחק בראשון בתפקיד $\exists$ ובשני בתפקיד $\forall$. מטרתנו היא לנצח את האומן במשחק השני, אם נפסיד בראשון. אם $c = 0$, אז נצחוננו במשחק השני מובטח. נניח מעתה ש- $c \neq 0$. בדיאגרמה הבאה מופיעים שני הפסוקים (כל פסוק בשורה נפרדת), בתוספת חץ מכל משתנה למשתנה שערכו יבחר אחריו:

$$\begin{tikzcd}
\forall\varepsilon^* > 0 \arrow[r] & \exists n^* \arrow[d] & \forall n \geq n^* & |a_n - L| < \varepsilon^* \\
\forall\varepsilon > 0 \arrow[u] & \exists n^* \arrow[r] & \forall n \geq n^* \arrow[u] & |c \cdot a_n - c \cdot L| < \varepsilon
\end{tikzcd}$$

לפני שנתחיל את המשחק נתכנן את צעדינו: אם האומן ינצח במשחק הראשון, אז יתקיֵם

$$|a_n - L| < \varepsilon^*$$

אבל אנחנו רוצים לנצח במשחק השני, כלומר שיתקיֵם

$$|c \cdot a_n - (c \cdot L)| < \varepsilon$$

לשם כך דרוש השִוְיון:

$$\varepsilon = |c| \cdot \varepsilon^*$$

עתה נתחיל לשחק. תחילה נחכה שהאומן יבחר ε במשחק השני. אנחנו נבחר את ε^* כך: $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{|c|}$. עתה האומן יבחר במשחק הראשון את n^*. אנחנו נבחר בדיוק באותו n^* למשחק השני. עתה האומן יבחר במשחק השני במספר ממשי שיֻצב במקום n. אנחנו נבחר באותו n למשחק הראשון. לבסוף, נניח שהאומן נִצח אותנו במשחק הראשון. זאת אומרת ש-

$$|a_n - L| < \varepsilon^*$$

נכפֹל את שני האגפים ב- $|c|$ ונקבל:

$$|c \cdot a_n - c \cdot L| < |c| \cdot \varepsilon^* = \varepsilon$$

זאת אומרת שנצחנו את האומן במשחק השני! למעשה, הראינו שאם יש איסטרטגיית נצחון במשחק הראשון (האומן השתמש בה כדי לנצח אותנו) אז יש שיטה לנצח גם במשחק השני (אנחנו השתמשנו בה כדי לנצח את האומן). במילים אחרות, אם $a_n \to L$ אז $c \cdot a_n \to c \cdot L$. אולם הסבר בעזרת שיטת המשחק איננו מהוה הוכחה רשמית.

דוגמא 4.2.3. מטרת דוגמא זו היא לתרגל על ידי דוגמא מספרית את האמור בדוגמא 4.2.2. נשחק במשחק המקבילי שמופיע בדוגמא זו:

$$\begin{tikzcd}
\forall\varepsilon^*>0 \arrow[r] & \exists n^* \arrow[d] & \forall n\geq n^* & \lvert a_n-L\rvert<\varepsilon^* \\
\forall\varepsilon>0 \arrow[u] & \exists n^* \arrow[r] & \forall n\geq n^* \arrow[u] & \lvert c\cdot a_n-c\cdot L\rvert<\varepsilon
\end{tikzcd}$$

נתונה סדרה $\langle a_n\rangle$ ששואפת ל- $L=5$ ונתון מספר $c=3$. בכל שלב בוחרים מספרים ומתקדמים לשלב הבא לפי כוון החץ. בשורה העליונה, אתה שחקן הלכל ובשורה התחתונה אתה שחקן הקיָם. בשלב ראשון, האומן בחר $\varepsilon=\frac{1}{10}$. אתה בוחר $\varepsilon^*=\frac{1}{30}$. עתה האומן בחר במשחק הראשון $n^*=34$. אתה בוחר במשחק השני $n^*=34$. שחקן הלכל בוחר במשחק השני $n=34$. אתה בוחר במשחק הראשון $n=34$. עתה אם האומן נִצח במשחק הראשון (מה שצפוי, כי הוא אומן), אז

$$|a_n-5|<\frac{1}{30}$$

לכן

$$|3a_n-15|<\frac{1}{10}$$

שאלה 4.2.4. מטרת שאלה זו היא לתרגל שוב על ידי דוגמא מספרית את האמור בדוגמא 4.2.2. נשחק במשחק המקבילי שמופיע בדוגמא זו:

$$\begin{tikzcd}
\forall\varepsilon^*>0 \arrow[r] & \exists n^* \arrow[d] & \forall n\geq n^* & \lvert a_n-L\rvert<\varepsilon^* \\
\forall\varepsilon>0 \arrow[u] & \exists n^* \arrow[r] & \forall n\geq n^* \arrow[u] & \lvert c\cdot a_n-c\cdot L\rvert<\varepsilon
\end{tikzcd}$$

נתונה סדרה $\langle a_n\rangle$ ששואפת ל- $L=10$ ונתון מספר $c=2$. בכל שלב בוחרים מספרים ומתקדמים לשלב הבא לפי כוון החץ. בשורה העליונה, אתה שחקן הלכל ובשורה התחתונה אתה שחקן הקיָם.

א. בשלב ראשון האומן בחר $\varepsilon=\frac{1}{10}$. כיצד תבחר את ε^*?

ב. עתה האומן בחר במשחק הראשון $n^*=34$. כיצד תבחר במשחק השני את n^*?

הטענה הבאה היא גרסה רשמית לאמור בדוגמא 4.2.2:

טענה 4.2.1. אם $a_n\to L$ אז לכל מספר c מתקיֵם $c\cdot a_n\to c\cdot L$.

הוכחה. נניח שתי הנחות:

$$a_n\to L \quad (1)$$
$$c\in\mathbb{R} \quad (2)$$

עלינו להוכיח:

$$c\cdot a_n\to c\cdot L$$

אם $c=0$, אז זה ברור. נניח ש- $c\neq 0$. יהי $\varepsilon>0$. עלינו להוכיח:

$$\exists n^*\forall n\geq n^*(|c\cdot a_n-c\cdot L|<\varepsilon)$$

לפי הנחה (1), מתקיֵם:

$$\forall\varepsilon^*>0\exists n^*\forall n\geq n^*(|a_n-L|<\varepsilon^*)$$

בפרט עבור $\varepsilon^*=\frac{\varepsilon}{|c|}$, יש n^* כך ש:

$$\forall n\geq n^*\left(|a_n-L|<\varepsilon^*=\frac{\varepsilon}{|c|}\right) \quad (3)$$

נוכיח:

$$\forall n \geq n^*(|c \cdot a_n - c \cdot L| < \varepsilon)$$

יהי $n \leq n^*$. נכפל את (3) ב- $|c|$ ונקבל

$$(|c \cdot a_n - c \cdot L| < \varepsilon)$$

□

טענה 4.2.2 (אי-רגישות הגבול להזזה)**.** נתון מספר ממשי L מספר טבעי k ושתי סדרות $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ כך שלכל n מתקיֵם $b_n = a_{n+k}$. אז $a_n \to L$ אם"ם $b_n \to L$.

קל לשכנע בנכונות הטענה בנפנופי ידיִם ("הוכחה" שאיננה מתקבלת): כוון אחד: אם לכל n מספיק גדול, a_n קרוב ל- L אז לכל n מספיק גדול גם $n+k$ מספיק גדול ולכן גם a_{n+k} קרוב ל- L.

כוון שני: אם לכל n מספיק גדול a_{n+k} קרוב ל- L, אז לכל n עבורו $n-k$ מספיק גדול, נקבל $a_n = a_{n-k+k}$ קרוב ל- L.

לפני שנוכיח את הטענה, נדגים אותה: לפי הטענה מכיון ש-

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots \to 0$$

גם

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \dots \to 0$$

בדוגמא זו, $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{n+3}$ (למשל, האבר הראשון של הסדרה השניה הוא $b_1 = \frac{1}{4} = a_4$).

נדון בדוגמא זו בעזרת שני המשחקים הבאים שמתקיְמים במקביל:

$$\begin{tikzcd}
\forall\varepsilon \arrow[r] & \exists n^* \arrow[d] & \forall n & n \geq n^* \Rightarrow |\frac{1}{n+3}| < \varepsilon \\
\forall\varepsilon \arrow[u] & \exists n^* \arrow[r] & \forall n \arrow[u] & n \geq n^* \Rightarrow |\frac{1}{n}| < \varepsilon
\end{tikzcd}$$

נדגים כיצד העתקה מדֻיקת נכשלת, מכיון שחֻקי המשחק שונים: (ליד כל משתנה מופיע המספר שהשחקן בחר):

$$\begin{tikzcd}
\varepsilon = 0.1 \arrow[r] & n^* = 8 \arrow[d] & n = 8 & \underbrace{8 \geq 8 \Rightarrow |\frac{1}{8+3}| < 0.1}_{\text{אמת}} \\
\varepsilon = 0.1 \arrow[u] & \underbrace{n^* = 8}_{\text{בחירה גרועה}} \arrow[r] & n = 8 \arrow[u] & \underbrace{8 \geq 8 \Rightarrow |\frac{1}{8}| < 0.1}_{\text{שקר}}
\end{tikzcd}$$

כך הפסדנו בשני המשחקים (במשחק הראשון האומן הוא שחקן ה- $\exists$ והוא טוען שהפסוק אמיתי. במשחק השני האומן הוא שחקן ה- $\forall$ והוא טוען שהפסוק שקרי). אולם שני הפסוקים אמיתיים ולכן יכולנו לנצח במשחק השני, לו רק שחקנו טוב

יותר. המסקנה היא שיש "להעתיק בחכמה". נשחק שוב:

$$\begin{tikzcd}
\varepsilon=0.1 \arrow[r] & n^*=8 \arrow[d] & n=8 & \underbrace{8\geq 8\Rightarrow|\frac{1}{8+3}|<0.1}_{\text{אמת}} \\
\varepsilon=0.1 \arrow[u] & \underbrace{n^*=11}_{\text{בחירה טובה}} \arrow[r] & n=11 \arrow[u] & \underbrace{11\geq 11\Rightarrow|\frac{1}{11}|<0.1}_{\text{אמת}}
\end{tikzcd}$$

הסבר מהלך המשחק: האומן בחר $\varepsilon = 0.1$ במשחק השני, בחרנו אותו דבר במשחק הראשון. האומן בחר $n^* = 8$ במשחק הראשון, בחרנו $n^* = 11$ במשחק השני. האומן בחר $n = 11$ במשחק השני, בחרנו $n = 8$ במשחק הראשון. לבסוף האומן נצח במשחק הראשון (התקבל אמת) ואנחנו במשחק השני (התקבל אמת). השלב של בחירת n^* הוא השלב העיקרי בדרך כלל במשחקים אלו של הגבול ובפרט במשחק הנוכחי. אכן מתברר שכדי לנצח במשחק השני, צריך לבחֹר n^* במשחק השני כך שיהיה גדול ב- 3 מה- n^* שהאומן בחר במשחק הראשון. אחרי הדגמה זו, נוכיח את טענה 4.2.2 (באֹפן כללי, לא רק לגבי הסדרות שהופיעו בדוגמא).

הוכחה. נתחיל דוקא בכוון הקשה, כי בו עסקנו לפני ההוכחה: נוכיח שאם $b_n \to L$ אז $a_n \to L$.

נתון:

$$\forall\varepsilon > 0\exists n^*\forall n[n \geq n^* \Rightarrow |b_n - L| < \varepsilon \quad (1)$$

ננסח את מה שצריך להוכיח תוך שִמוש במשתנים m^*, m במקום במשתנים n^*, n:

$$\forall\varepsilon > 0\exists m^*\forall m[m \geq m^* \Rightarrow |a_m - L| < \varepsilon$$

יהי $\varepsilon > 0$. לפי (1), נוכל לבחֹר n^* כך ש:

$$\forall n[n \geq n^* \Rightarrow |b_n - L| < \varepsilon \quad (2)$$

נגדיר את m^* כך:

$$m^* = n^* + k \quad (3)$$

נניח ש- m מקיֵם:

$$m^* \leq m \quad (4)$$

נוכיח

$$|a_m - L| < \varepsilon$$

נגדיר את n כך:

$$n = m - k \quad (5)$$

לפי (3),(4),(5), מתקיֵם:

$$n^* \leq n \quad (6)$$

לפי (2),(6), מתקיֵם:

$$|b_n - L| < \varepsilon \quad (7)$$

אולם

$$b_n = a_{n+k} =_{(5)} a_m$$

ולכן לפי (7), מתקיֵם:

$$|a_m - L| < \varepsilon$$

הכוון הקל: נוכיח שאם $a_n \to L$ אז $b_n \to L$.

נניח:

$$\forall\varepsilon>0\exists n^*\forall n[n\geq n^*\Rightarrow|a_n-L|<\varepsilon] \quad (1)$$

צריך להוכיח:

$$\forall\varepsilon>0\exists n^*\forall n[n\geq n^*\Rightarrow|a_{n+k}-L|<\varepsilon]$$

יהי $\varepsilon>0$. לפי ההנחה יש n^* כך שמתקיֵם:

$$\forall n[n\geq n^*\Rightarrow|a_n-L|<\varepsilon] \quad (2)$$

יהי

$$n^*\leq n \quad (3)$$

נוכיח:

$$|a_{n+k}-L|<\varepsilon$$

לפי (3), מתקיֵם:

$$n^*\leq n+k \quad (4)$$

נציב ב- (2) $n+k$ במקום n ונקבל:

$$|a_{n+k}|<L$$

□

טענה 4.2.3. נניח $a_{2n}\to L$ וגם $a_{2n+1}\to L$. אז $a_n\to L$.

הוכחה. יהי $\varepsilon>0$. יש n_1 כך שלכל $n\leq n_1$ מתקיֵם $|a_{2n}-L|<\varepsilon$ ויש n_2 כך שלכל $n\leq n_2$ מתקיֵם $|a_{2n+1}-L|<\varepsilon$. נגדיר $n^*=max\{2n_1,2n_2+1\}$. לכל $n\leq n^*$ מתקיֵם $|a_n-L|<\varepsilon$. □

שאלה 4.2.5. הוכיחו בעזרת טענה 4.2.3 שהסדרה הבאה שואפת ל- 3:

$$a_n=\begin{cases}3+\frac{1}{n}, & \text{זוגי } n\\ 3-\frac{2}{n}, & \text{אי-זוגי } n\end{cases}$$

נבהיר את הוכחת טענה 4.2.3 בעזרת דוגמא:

דוגמא 4.2.6. נתונה סדרה

$$a_n=\begin{cases}\frac{30}{n^2}, & \text{אי-זוגי } n\\ \frac{1}{n}, & \text{זוגי } n\end{cases}$$

זו הסדרה

$$30,\frac{1}{2},\frac{30}{9},\frac{1}{4},\frac{30}{25},\frac{1}{6},\frac{30}{49},\frac{1}{8},\ldots$$

על מנת להוכיח ש- $a_n\to0$, צריך להוכיח:

$$\forall\varepsilon>0\exists n^*\forall n\geq n^*|a_n|<\varepsilon$$

נניח ששחקן הלכל בחר $\varepsilon=0.01$. אנחנו צריכים לבחֹר n^* מתאים. כדי לקבל $|a_n|<0.01$ כאשר n הוא מספר זוגי, הכרחי ש- $n\leq102$. לכן נגדיר $n_1=102$. כדי לקבל $|a_n|<0.01$ כאשר n אי-זוגי, דרוש $\frac{30}{n^2}<0.01$, כלומר $n^2<3000$, מספיק לדרֹש ש- $n\leq60$ (לא צריך למצֹא את המספר הכי קטן האפשרי, העיקר ש- $60^2<3000$). לכן נגדיר $n_2=60$. אכן לכל מספר אי-זוגי $n\leq60$, מתקיֵם $|a_n|<0.01$. עתה נגדיר $n^*=max\{n_1,n_2\}=102$. לכל $n\leq102$ נקבל $|a_n|<0.01$.

פרק 5

התעמקות במושג הגבול של סדרה

5.1 גבול במונחים אחרים ויחידות הגבול

עתה נכיר את מושגי ההתכנסות והתבדרות של סדרה, "כמעט לכל n" סביבות של נקודות והקשרים בין מושגים אלו למושג הגבול של סדרה. נסיֵם את הסעיף בהוכחת יחידות הגבול.

הגדרה 5.1.1. הסדרה $\langle a_n \rangle$ מתכנסת פֵרושו שיש מספר L כך ש- $a_n \to L$. במקרה זה, L יקרא הגבול של הסדרה $\langle a_n \rangle$. סדרה מתבדרת היא סדרה שאיננה מתכנסת.

הערה. נתונה סדרה $\langle a_n \rangle$. הסדרה מתכנסת אם"ם

$$\exists L \forall \varepsilon > 0 \exists n^* \forall n \geq n^* (|a_n - L| < \varepsilon)$$

הסדרה מתבדרת אם"ם

$$\forall L \exists \varepsilon > 0 \forall n^* \exists n \geq n^* (|a_n - L| \geq \varepsilon)$$

הגדרה 5.1.2. תהי P תכונה של מספרים טבעיים. נסמן ב- $P(n)$ את הטענה "המספר n מקיֵם את התכונה P".
את הטענה

$$\exists n^* \forall n \geq n^* [P(n)]$$

מקֻבל לנסח בצורות שונות:

- כמעט לכל n מתקיֶמת התכונה P,
- לכל n מספיק גדול מתקיֵם $P(n)$ או
- התכונה P מתקיֶמת לכל n החל ממקום מסֻים.

הוכחת הטענה הבאה מושארת לקורא.

טענה 5.1.3. תהי P תכונה של מספרים טבעיים. כמעט לכל n מתקיֵם $P(n)$ אם"ם הקבוצה הבאה היא סופית:

$$\{n \in \mathbb{N} : \neg P(n)\}$$

דוגמא 5.1.1. כמעט לכל n המספר $\frac{300}{n}$ קטן מ- 1.

טענה 5.1.4. אם P_1, P_2 הן שתי תכונות של מספרים טבעיים ושתיהן מתקיְמות כמעט לכל n, אז כמעט לכל n מתקיֵם $P_1(n) \wedge P_2(n)$.

דוגמא 5.1.2. כמעט לכל n, מתקיֵם $n^2 > n+2$, שכן זה מתקיֵם החל מ- 10. כמוכן כמעט לכל n מתקיֵם $(n+1)^2 > n^2$ שהרי זה מתקיֵם החל מ- 1.

לפיכך כמעט לכל n מתקיְמות שתי הטענות יחד: $n^2 > n+2 \wedge (n+1)^2 > n^2$.

נוכיח את הטענה:

הוכחה. לפי ההנחות יש n_1 כך ש:

$$\forall n \geq n_1 [P_1(n)]$$

ויש n_2 כך ש:

$$\forall n \geq n_2 [P_2(n)]$$

נגדיר $n^* = max\{n_1, n_2\}$ ונקבל:

$$\forall n \geq n^* [P_1(n) \wedge P_2(n)]$$

□

הערה. הגדרה 5.1.2 מאפשרת לנסח את הגדרת הגבול של סדרה כך: $a_n \to L$ פֵרושו שלכל $\varepsilon > 0$ כמעט לכל n מתקיֵם $|a_n - L| < \varepsilon$.

טענה 5.1.5. נתונות שתי סדרות $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$. נניח שכמעט לכל n מתקיֵם $a_n = b_n$. אז הסדרה $\langle a_n \rangle$ מתכנסת אם"ם הסדרה $\langle b_n \rangle$ מתכנסת.

הגדרה 5.1.6. יהי $\varepsilon > 0$ ויהי $x \in \mathbb{R}$. הסביבה ברדיוס ε של הנקודה a, בִסמון $B_\varepsilon(a)$ היא הקטע הפתוח

$$B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

דוגמא 5.1.3.

$$B_{\frac{1}{2}}(3) = (2.5, 3.5)$$

עתה נוכל להציג שוב את הגדרת הגבול של סדרה, תוך שִמוש במושג הסביבה:

טענה 5.1.7. $a_n \to L$ אם"ם לכל $\varepsilon > 0$ כמעט לכל n האבר a_n שיָך לסביבה של L ברדיוס ε.

תוצאה 5.1.8. הטענה $a_n \to L$ שגויה אם"ם יש $\varepsilon > 0$ כך שעבור אינסוף nים האבר a_n איננו שיָך לסביבה של L ברדיוס ε.

טענה 5.1.9. נניח $a < b$. אז יש $\varepsilon > 0$ כך ש- $B_\varepsilon(a) \cap B_\varepsilon(b) = \emptyset$.

שאלה 5.1.4. הוכיחו את הטענה האחרונה.

לפי המשפט הבא השִמוש בהא הידיעה במושג "הגבול של הסדרה" מוצדק, שכן יש לכל היותר גבול אחד לסדרה.

משפט 5.1.10 (יחידות הגבול). אם $a_n \to L_1$ וגם $a_n \to L_2$ אז $L_1 = L_2$.

הוכחה. נניח בשלילה שהם שונים. נניח בלי הגבלת הכלליות, $L_1 < L_2$. לפי טענה 5.1.9, יש $\varepsilon > 0$ כך ש:

$$B_\varepsilon(L_1) \cap B_\varepsilon(L_2) = \emptyset$$

אולם כמעט לכל n מתקיֵם:

$$a_n \in B_\varepsilon(L_1) \cap B_\varepsilon(L_2)$$

קבלנו סתירה. □

5.2 אי-שִוְיון המשֻלש

מכיון שהערך המֻחלט משחק תפקיד חשוב בהגדרת הגבול של סדרה, נדון בו כנושא בפני עצמו. גולת הכותרת של הסעיף היא אי-שִוְיון המשֻלש.

הגדרה 5.2.1.

$$|a| = \begin{cases} a, & 0 \leq a \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

למשל, $|-2| = -(-2) = 2$. מההגדרה נובע שלכל a, מתקיֵם $a \leq |a|$.

טענה 5.2.2. לכל שני מספרים a, b מתקיֵם

$$|a-b| = \begin{cases} a-b, & a \geq b \\ b-a, & b > a \end{cases}$$

משפט 5.2.3 (אי-שִוְיון המשֻלש).

$$\forall a, b(|a+b| \leq |a| + |b|)$$

נציג שלש הוכחות שונות לאי-שִוְיון המשֻלש, למרות שאחת מספיקה.

הוכחה. מקרה א: $0 \leq a+b$. במקרה זה,

$$|a+b| = a+b \leq |a| + |b|$$

מקרה ב: $a+b < 0$. במקרה זה,

$$|a+b| = -(a+b) = (-a) + (-b) \leq |a| + |b|$$

□

הוכחה. מקרה א: כל אחד מהמספרים x, y הוא חיובי או 0 (בקִצור אי-שלילי). במקרה זה $|x| = x, |y| = y$ ולכן

$$|x+y| = x+y = |x| + |y|$$

מקרה ב: המספרים x, y שליליים. ההוכחה דומה למקרה א.
מקרה ג: הסִמנים של x, y שונים ומתקיֵם $0 \leq x+y$. נניח בה"כ (בלי הגבלת כלליות) ש- $x < 0 \leq y$
במקרה זה, $|x| = -x, |y| = y, |x+y| = x+y$ ולכן

$$|x+y| = x+y = -|x| + |y| < |x| + |y|$$

מקרה ד: הסִמנים של x, y שונים ומתקיֵם $x+y < 0$. מקרה זה דומה למקרה ג. □

הוכחה. מכיון ששני אגפי אי-שִוְיון המשֻלש הם מספרים אי-שליליים, מספיק להוכיח ש-

$$|a+b|^2 \leq (|a| + |b|)^2$$

נוכיח זאת:

$$|a+b|^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = |a|^2 + 2ab + |b|^2 \leq |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$$

הערה: $|ab| = |a| \cdot |b|$. □

תוצאה 5.2.4. יהיו $a, b \in \mathbb{R}$. אז

א. $|a-b| \geq |a| - |b|$

ב. $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$

הוכחה. א. נציב $a-b$ במקום a באי-שִוְיון המשֻלש ואז נעביר אגפים.
ב. לכל c, d מתקיֵם $|c-d| = c-d$ או $|c-d| = d-c$ (תלוי אם $c \leq d$ או $d < c$).
בפרט עבור $c = |a|, d = |b|$ נקבל $\big||a| - |b|\big| = |b| - |a|$ או $\big||a| - |b|\big| = |a| - |b|$. עתה לפי חלק א, בִטוי זה הוא לא יותר מ- $|a-b|$. □

5.3 חִשוב הגבול של סדרה

נשאיר את הוכחת הטענה הבאה לקורא.

טענה 5.3.1. תהי $\langle a_n \rangle$ סדרה ויהי a מספר. התנאים הבאים שקולים:

א. $a_n \to a$

ב. $a_n - a \to 0$

ג. $|a_n - a| \to 0$

טענה 5.3.2. אם $a_n \to L$ אז $|a_n| \to |L|$.

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. לכל n החל ממקום מסֵים מתקיֵם:

$$\big||a_n| - |L|\big| \leq_{5.2.4} |a_n - L| < \varepsilon$$

$\square$

משפט 5.3.3 (כלל החִבור)**.** $lim(a_n + b_n) = lima_n + limb_n$, בתנאי שלאגף ימין יש משמעות, כלומר שיש גבולות לשתי הסדרות $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$.

הוכחה. נגדיר: $a = lima_n, b = limb_n$. עלינו להוכיח ש-

$$lim(a_n + b_n) = a + b$$

יהי $\varepsilon > 0$. כמעט לכל n, מתקיֵם

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

כמעט לכל n מתקיֵם גם

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

מכאן נסיק שכמעט לכל n מתקיֵם

$$|a_n + b_n - a - b| \leq_{\text{אי-שִוְיון המשֻלש}} |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\square$

שאלה 5.3.1. נסח והוכח את כלל החִסור. רמז: יש להשתמש בכלל החִבור (חִסור הוא חִבור הנגדי) וגם בטענה 4.2.1.

טענה 5.3.4. נתונות שתי סדרות $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$. אם שתיהן מתכנסות אז הסדרה $\langle a_n + b_n \rangle$ מתכנסת. אם אחת מהן מתכנסת והשניה מתבדרת, אז $\langle a_n + b_n \rangle$ מתבדרת.

הוכחה. אם שתי הסדרות מתכנסות אז סכומן מתכנס לפי כלל החִבור. נניח שאחת מתכנסת ואחת מתבדרת. נניח בלי הגבלת כלליות ש- $\langle a_n \rangle$ מתכנסת ואילו $\langle b_n \rangle$ מתבדרת. עלינו להוכיח ש- $\langle a_n + b_n \rangle$ מתבדרת. נניח בשלילה שהיא מתכנסת. אז לפי כלל החִסור, $\langle b_n = (a_n + b_n) - a_n \rangle$ מתכנסת. $\square$

הערה. נניח ששתי הסדרות $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ מתבדרות. מכך לא נִתן להסיק דבר לגבי ההתכנסות של הסדרה $\langle a_n + b_n \rangle$. יתכן שהיא מתבדרת, כמו בדוגמא 5.3.2. מצד שני, יתכן שהסדרה $\langle a_n + b_n \rangle$ מתכנסת, כמו בדוגמא 5.3.3.

דוגמא 5.3.2. $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^n$. במקרה זה, $a_n + b_n = 2 \cdot (-1)^n$ וזו סדרה מתבדרת (אם נניח בשלילה $2 \cdot (-1)^n \to L$. אז נקבל $(-1)^n \to \frac{L}{2}$ ולכן היא מתכנסת).

דוגמא 5.3.3. $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^{n+1}$. במקרה זה, $a_n + b_n = 0$ וסדרה של אפסים כמובן שואפת ל- 0.

כאשר אומרים על סדרה שהיא חסומה, מתכוְנים שקבוצת אבריה חסומה. כך גם לגבי תכונות נוספות.

טענה 5.3.5. תהי $\langle a_n\rangle$ סדרה מתכנסת. אז $\langle a_n\rangle$ היא סדרה חסומה. אם $lima_n < M$ אז כמעט לכל n, מתקיֵם $M < a_n$.

הוכחה. תחילה נוכיח את החלק הראשון. נניח ש-

$$a_n \to L$$

אז עבור $\varepsilon = 1$ יש n^* כך שלכל $n \geq n^*$ מתקיֵם $a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. במילים אחרות,

$$\{a_{n^*}, a_{n^*+1}, a_{n^*+2}, a_{n^*+3}, a_{n^*+4}, \dots\} \subseteq (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

נגדיר

$$m = min\{L-\varepsilon, a_1, a_2, \dots, a_{n^*-1}\}$$
$$M = max\{L+\varepsilon, a_1, a_2, \dots, a_{n^*-1}\}$$

נוכיח שלכל n מתקיֵם:

$$a_n \in [m, M]$$

יהי $n \in \mathbb{N}$. מקרה א: $n < n^*$. במקרה זה נקבל:

$$m \leq a_n \leq M$$

מקרה ב: $n^* \leq n$. במקרה זה נקבל:

$$a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$$

לכן:

$$m \leq L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon \leq M$$

בזאת הוכחנו שהסדרה $\langle a_n\rangle$ חסומה. עתה נוכיח את החלק השני של הטענה: נסמן $a = lima_n$. נניח $M < a$. נגדיר $\varepsilon = a - M$. לפי הגדרת הגבול, כמעט לכל n מתקיֵם $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) = (M, 2a-M)$. לכן כמעט לכל n מתקיֵם $M < a_n$. □

שאלה 5.3.4. אם נחליף בטענה האחרונה כל הופעה של היחס $>$ ב- $\leq$ נקבל טענה שגויה. במילים אחרות, מ- $M \leq lima_n$ לא נִתן להסיק שכמעט לכל n, מתקיֵם $M \leq a_n$. הדגימו זאת.

טענה 5.3.6. אם $lima_n < \lim b_n$ אז כמעט לכל n, מתקיֵם $a_n < b_n$.

הוכחה. נגדיר $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, $a = lima_n, b = limb_n$. מכיון ש- $a_n \to a$, כמעט לכל n, מתקיֵם $a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ולכן

$$a_n < a+\varepsilon = \frac{a+b}{2}$$

באֹפן דומה, כמעט לכל n מתקיֵם $b_n \in (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ ולכן

$$b_n > b-\varepsilon = \frac{a+b}{2}$$

לפיכך כמעט לכל n, מתקיֵם

$$a_n < \frac{a+b}{2} < b_n$$

□

משפט 5.3.7 (כלל הסנדביץ'). אם $lima_n = limc_n = L$ וכמעט לכל n מתקיֵם $a_n \leq b_n \leq c_n$ אז $limb_n = L$.

ראוי לציֵן שלא הנחנו שהסדרה $\langle b_n\rangle$ מתכנסת ולמרות זאת המשפט טוען שהיא מתכנסת!

הוכחה. יהי $\varepsilon > 0$. מכיון ש- $a_n \to L$, יש n_1 כך ש:

$$\forall n \geq n_1(|a_n - L| < \varepsilon$$

מכיון ש- $c_n \to L$, יש n_2 כך ש:

$$\forall n \geq n_2(|c_n - L| < \varepsilon$$

יש n_3 כך שלכל $n \geq n_3$, מתקיֵם:

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

נגדיר:

$$n^* = max\{n_1, n_2, n_3\}$$

יהי $n \geq n^*$. נוכיח:

$$|b_n - L| < \varepsilon$$

אכן:

$$-\varepsilon < a_n - L \leq b_n - L \leq c_n - L < \varepsilon$$

□

השאלה הבאה מבהירה, שלו ידענו שהסדרה $\langle b_n \rangle$ מתכנסת, אז כלל הסנדביץ' היה משתנה בשני היבטים: מצד אחד הוכחתו היתה הופכת לפשוטה יותר. אבל מצד שני, יכולנו להחליף את המילים "כמעט לכל n" במילים "עבור אינסוף nים".

שאלה 5.3.5. הוכח את הגרסה הבאה של כלל הסנדביץ' תוך שמוש בטענה 5.3.6:
אם $lima_n = limc_n = L$, הסדרה $\langle b_n \rangle$ מתכנסת ועבור אינסוף nים מתקיֵם $a_n \leq b_n \leq c_n$ אז $limb_n = L$.

תוצאה 5.3.8. אם לכל n מתקיֵם $0 \leq a_n \leq b_n$ ו- $b_n \to 0$ אז $a_n \to 0$.

דוגמא 5.3.6. $\frac{1}{n+3} \to 0$ כי $0 \leq \frac{1}{n+3} \leq \frac{1}{n} \to 0$.

תוצאה 5.3.9. אם $a_n \to 0$ ו- $\langle b_n \rangle$ סדרה חסומה אז $a_n \cdot b_n \to 0$.

הוכחה. מכיון שהסדרה $\langle b_n \rangle$ חסומה, יש מספר חיובי M כך ש-

$$\forall n(|b_n| \leq M)$$

לכן

$$0 \leq |a_n b_n| \leq |a_n| M \to 0$$

לכן לפי תוצאה 5.3.8

$$|a_n b_n| \to 0$$

כלומר:

$$a_n b_n \to 0$$

□

משפט 5.3.10 (כלל המכפלה). $lim(a_n b_n) = lima_n \cdot limb_n$, בתנאי שלאגף ימין יש משמעות, כלומר שהגבולות $\lim a_n, limb_n$ קיָמים.

הוכחה. נגדיר $a = lima_n, b = limb_n$ ונוכיח:

$$a_n b_n - ab \to 0$$

לפי טענה 5.3.5 ותוצאה 5.3.9 נקבל:

$$a_n b_n - ab = \underbrace{a_n}_{\text{חסומה}} \underbrace{(b_n - b)}_{\text{שואפת לאפס}} + b \underbrace{(a_n - a)}_{\text{שואפת לאפס}} \to 0$$

□

הטענה הבאה היא הכנה לכלל המנה:

טענה 5.3.11. אם $b_n \to b \neq 0$ אז $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$.

הוכחה. נוכיח:

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \to 0$$

לשם כך, נוכיח תחילה שהסדרה $\langle \frac{1}{b_n} \rangle$ חסומה. $|b_n| \to |b|$ ולכן עבור $\varepsilon = \frac{|b|}{2}$ כמעט לכל n, מתקיֵם $|b_n| \in B_\varepsilon(|b|)$.
במילים אחרות, כמעט לכל n, מתקיֵם $|b_n| \in (\frac{|b|}{2}, \frac{3|b|}{2})$ ולכן כמעט לכל n, מתקיֵם $\frac{2}{|b|} > \frac{1}{|b_n|}$ כלומר $\frac{1}{b_n} \in (-\frac{2}{|b|}, \frac{2}{|b|})$.
בזאת הוכחנו שהסדרה $\langle \frac{1}{b_n} \rangle$ חסומה. לפיכך:

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{b_n b} = \underbrace{(b - b_n)}_{\text{שואפת לאפס}} \underbrace{\frac{1}{b_n}}_{\text{חסומה}} \underbrace{\frac{1}{b}}_{\text{קבועה}} \to 0$$

□

משפט 5.3.12 (כלל המנה)**.** אם $a_n \to a$ ו- $b_n \to b \neq 0$ אז $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$.

הוכחה. לפי כלל המכפלה וטענה 5.3.11 נקבל:

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \to a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

□

מתבקש להציג את כלל החזקה, שמטפל בהשפעה של חזקה על הגבול. אולם עד עכשו לא הגדרנו את פונקצִיַת החזקה עבור מעריך ממשי, אלא רק עבור מעריך רציונלי. אחרי שנלמד על אינטגרלים, יהיה הרבה יותר קל ללמֹד את פונקצִיַת החזקה. בינתיים, כדי שלא להשאיר את הקורא בסקרנותו, נציג את כלל החזקה ללא הוכחה.

משפט 5.3.13 (כלל החזקה)**.** אם $a_n \to L$ אז $a_n^x \to L^x$ (בתנאי ש- L^x מֻגדר והסדרה $\langle a_n^x \rangle$ מֻגדרת כמעט לכל n).

דוגמאות.

$$(3 + \frac{1}{n})^2 \to 9$$
$$(3 + \frac{1}{n})^4 \to 81$$

נִתן להגיע לאמור בדוגמאות אלו בעזרת נֻסחת הבינום של ניוטון שנִלמד עכשו במקום בעזרת כלל החזקה. נֻסחת הבינום של ניוטון היא נוסחה לחִשוב $(x+y)^n$ עבור n טבעי ו- x, y ממשיים.
עבור $n = 2$, אנחנו כבר יודעים את הנוסחה:

$$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$$

עבור $n = 3$, מתקיֵם:

$$(x+y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$$

עבור $n = 4$, מתקיֵם:

$$(x+y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

משֻלש פסקל יעזור לגלות את הנֻסחה עבור n כללי. נציג את שורותיו הראשונות:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

השורה העליונה היא שורה מספר 0. שורה מספר 3 היא השורה

$$1 \qquad 3 \qquad 3 \qquad 1$$

אכן אלו המקדמים של הנֻסחה לחִשוב $(x+y)^3$.

אולם כיצד מוצאים את המספרים שבמשֻלש פסקל? נמליץ לקורא להתבונן דקה או שתיִם במשֻלש ונסות לגלות את החוקיות לבד. עברה דקה? הנה החוקיות: בקצה של כל שורה מופיע 1 וכל אבר הוא סכום שני המספרים שמעליו. עתה תוכל לכתֹב בעצמך את שורה 5 של משֻלש פסקל ועוד שורות לפי הצֹרך.

ההגדרות הבאות מאפשרות לגלות את המספרים שבמשֻלש פסקל בדרך אחרת:

הגדרה 5.3.14. עבור n טבעי, נגדיר $n!$, קרי "n עצרת" כך:

$$0! = 1, (n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

דוגמאות. א. $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

ב. $6! = 1 \cdot \ldots 5 \cdot 6 = 3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$

הגדרה 5.3.15. שני הסִמונים $\binom{n}{k}, c_k^n$ משמשים לסַמון אותו בִטוי:

$$\binom{n}{k} = c_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$\binom{n}{k}$ הוא המספר שמופיע במשֻלש פסקל בשורה n במקום ה- k, כאשר המקום ה- 0 הוא המקום השמאלי ביותר בשורה. אפשר למצֹא מספר זה בעזרת המחשבון. בכל אֹפן, כאשר רוצים לחשב שורה שלמה של משֻלש פסקל, הדרך הקלה היא לכתֹב את כל המשֻלש עד לשורה המבֻקשת, בדרך שהֻסברה לעיל (ולא בעזרת מחשבון): אחדות בקצוות וכל אבר הוא סכום שני אלו שמעליו. נכתֹב שוב את השורות הראשונות של משֻלש פסקל:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0}=1 & & & & \\ & & & \binom{1}{0}=1 & & \binom{1}{1}=1 & & & \\ & & \binom{2}{0}=1 & & \binom{2}{1}=2 & & \binom{2}{2}=1 & & \\ & \binom{3}{0}=1 & & \binom{3}{1}=3 & & \binom{3}{2}=3 & & \binom{3}{3}=1 & \\ \binom{4}{0}=1 & & \binom{4}{1}=4 & & \binom{4}{2}=6 & & \binom{4}{3}=4 & & \binom{4}{4}=1 \end{array}$$

עתה נציג את נוסחה הבינום של ניוטון:

משפט 5.3.16 (נוסחת הבינום של ניוטון). לכל $n \le 1$ טבעי ולכל שני מספרים x, y, מתקיֶמת הנֻסחה

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \binom{n}{0} x^n y^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} y^1 + \cdots + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + \binom{n}{n} x^0 y^n$$

שאלה 5.3.7. הוכח בעזרת נֻסחת הבינום של ניוטון:

$$(3 + \frac{1}{n})^4 \to 3^4 = 81$$

5.4 גבולות במובן הרחב

הגדרה 5.4.1. $a_n \to \infty$ פֵּרושו שלכל מספר ממשי M כמעט לכל n מתקיֵם $a_n > M$. במילים אחרות,

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists n^* \forall n \geq n^* (a_n > M)$$

באֹפן דומה מגדירים $a_n \to -\infty$. סדרה מתכנסת במובן הרחב היא סדרה שמתכנסת (למספר) או שהיא שואפת ל-$\pm\infty$.

דוגמאות.

$$n \to \infty$$
$$n^2 \to \infty$$
$$\sqrt{n} \to \infty$$

נסביר את הדוגמא האחרונה בשיטת המשחק, כלומר נציג איסטרטגיַת נצחון למשחק הבא:

$$\forall M \exists n^* \forall n \geq n^* (\sqrt{n} > M)$$

האיסטרטגיה: בחר את n^* כמספר הטבעי הראשון שגדול מ- M^2. מדוע זו איסטרטגיַת נצחון? נניח $n^* \leq n$. אז $M^2 < n$ ולכן $M \leq |M| < \sqrt{n}$.

לפי הטענה הבאה, בהגדרת סדרה שואפת לאינסוף, יכולנו לדרֹש ש- M יהיה גדול ממספר נתון. נשתמש בטענה זו מבלי להזכירה, כאשר $l = 0$.

טענה 5.4.2. יהי $l \in \mathbb{R}$. אז $a_n \to \infty$ אם"ם

$$\forall M > l \exists n^* \forall n \geq n^* (a_n > M)$$

הוכחת הטענה ברורה, כאשר חושבים על הטענה בשיטת המשחק: הגבלת שחקן הכלל על ידי הדרישה $l < M$ איננה מפריעה לו כלל, כי ככל שהוא יבחר מספר יותר גדול, יהיה לו קל יותר לנצח במשחק, כלומר לקבל $a_n \leq M$. הנה הוכחה רשמית:

הוכחה. הכוון הקל: נניח $a_n \to \infty$. יהי $M > l$. אז לפי הגדרת הגבול, יש n^* כנדרש.

הכוון הקשה: נניח

$$\forall M > l \exists n^* \forall n \geq n^* (a_n > M) \quad (1)$$

עלינו להוכיח:

$$a_n \to \infty$$

יהי $M \in \mathbb{R}$. נגדיר

$$M^* = max\{M, l+1\}$$

לפי (1), יש n^* כך ש:

$$\forall n \geq n^* (a_n > M^*) \quad (2)$$

יהי $n \geq n^*$. עלינו להוכיח:

$$a_n > M$$

אכן, לפי (2) מתקיֵם:

$$a_n > M^* \geq M$$

□

נציג משפטים מקבילים לאלו שהופיעו לגבי סדרה ששואפת למספר. מכיון שההוכחות דומות נשאיר אותן לקורא. הקורא גם ידע איך להתאים את המשפטים למקרה שהסדרה שואפת ל- $-\infty$.

משפט 5.4.3 (יחידות הגבול במובן הרחב)**.** נתונים $L_1, L_2 \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$.
אם $a_n \to L_1$ וגם $a_n \to L_2$ אז $L_1 = L_2$.

משפט 5.4.4 (מבחן ההשוָאה לגבולות במובן הרחב)**.** אם כמעט לכל n מתקיֵם $a_n \leq b_n$ והסדרה $\langle a_n \rangle$ שואפת לאינסוף, אז $b_n \to \infty$.

משפט 5.4.5 (כלל הסכום לגבולות במובן הרחב)**.** אם $a_n \to \infty$ ו- $\langle b_n \rangle$ סדרה חסומה מלרע, אז $a_n + b_n \to \infty$.

משפט 5.4.6 (כלל המכפלה לגבולות במובן הרחב)**.** אם $a_n \to \infty$ ולסדרה $\langle b_n \rangle$ יש חסם מלרע חיובי, אז $a_n b_n \to \infty$.

הוכחה. תחילה נוכיח את המשפט עבור מקרה הפרטי שבו הסדרה $\langle b_n \rangle$ קבועה: יש $l > 0$ כך שלכל n מתקיֵם $b_n = l$. נוכיח ש- $a_n l \to \infty$.
יהי $M > 0$. מכיון ש- $a_n \to \infty$ יש n^* כך שלכל $n \geq n^*$ מתקיֵם $a_n > \frac{M}{l}$.
יהי $n \geq n^*$. נוכיח ש- $a_n b_n > M$. אכן

$$a_n b_n = a_n l > \frac{M}{l} l = M$$

המקרה כללי: לא מניחים שהסדרה $\langle b_n \rangle$ קבועה. לפי הנתון יש מספר $l > 0$ כך שלכל n מתקיֵם $b_n \geq l$. לכן לפי המקרה הפרטי,

$$a_n b_n \geq a_n l \to \infty$$

מכאן נסיק לפי מבחן ההשוָאה לגבולות במובן הרחב,

$$a_n b_n \to \infty$$

□

דוגמא 5.4.1. נגדיר: $a_n = n^2$, $b_n = (-1)^n + 3$. במקרה זה, $a_n \to \infty$ ו- $\langle b_n \rangle$ היא סדרה חסומה מלרע על ידי 2 שהוא מספר חיובי. לכן $a_n b_n \to \infty$.

דוגמא 5.4.2. נגדיר: $a_n = n^2$, $b_n = (-1)^n$. במקרה זה, $a_n \to \infty$ והסדרה $\langle b_n \rangle$ חסומה מלרע על ידי -1. הסדרה $\langle a_n b_n \rangle$ מתבדרת אפילו במובן הרחב. כדי להוכיח ש- $a_n b_n \nrightarrow \infty$, מספיק לציֵן שעבור $M = 1$ יש אינסוף nים כך ש- $a_n b_n < 0$ ולכן $a_n b_n \leq M$.
כדי להוכיח שהיא מתבדרת (אפילו במובן הרחב), יש לטרֹח עוד.

דוגמא 5.4.3. נגדיר: $a_n = n^2$, $b_n = \sin(n)$. במקרה זה, $a_n \to \infty$ ו- b_n חסומה מלרע על ידי -1 שהוא מספר שלילי. נוכיח ש- $a_n b_n \nrightarrow \infty$. עלינו להוכיח:
$$\exists M \forall n^* \exists n \geq n (a_n b_n \leq M)$$

נגדיר $M = 1$. יהי $n^* \in \mathbb{N}$. נגדיר n כמספר הטבעי הראשון שהוא גדול מ- $(2n^* + 1)\pi$. זה אפשרי לפי עקרון הארכימדיות והעובדה ש- $\mathbb{N}$ סדורה היטב. לפי הגדרת n, מתקיֵם $n \geq n^*$ וגם

$$n - 1 \leq (2n^* + 1)\pi < n$$

ולכן

$$(2n^* + 1)\pi < n \leq (2n^* + 1)\pi + 1 < (2n^* + 1)\pi + \pi = (2n^* + 2)\pi$$

לפיכך:

$$(2n^* + 1)\pi < n < (2n^* + 2)\pi$$

לכן:

$$\sin(n) < 0$$

נוכיח:

$$a_nb_n \le M = 1$$

אכן:

$$a_nb_n = n^2\sin(n) < 0 < M$$

שאלה 5.4.4. נגדיר $a_n = n, b_n = \frac{1}{n}$. מצד אחד, $a_n \to \infty, 0 < b_n$. אבל מצד שני, $a_nb_n \to 1$. מדוע אין בכך סתירה לכלל המכפלה לגבולות במובן הרחב?

משפט 5.4.7 (כלל המנה לגבולות במובן הרחב)**.** נתונה סדרה $\langle a_n \rangle$ שאבריה שונים מ- 0. אז $a_n \to 0$ אם"ם $\frac{1}{|a_n|} \to \infty$.

לפני הצגת הוכחה רשמית, נסביר את רעיון ההוכחה של הכוון הראשון בשיטת ההעתקה במשחק מקבילי. נניח ש- $a_n \to 0$ ונסביר מדוע מכך נובע ש- $\frac{1}{|a_n|} \to \infty$.

$$\begin{tikzcd}
\forall\varepsilon > 0 \arrow[r] & \exists n^* \arrow[d] & \forall n \ge n^* & |a_n| < \varepsilon \\
\forall M \arrow[u] & \exists n^* \arrow[r] & \forall n \ge n^* \arrow[u] & \frac{1}{|a_n|} > M
\end{tikzcd}$$

תחילה האומן בוחר M. אם הוא בחר M אי-חיובי, אז ברור שהוא יפסיד במשחק השני. נניח שהוא בחר $0 < M$. אנחנו נבחר את ε כך: $\varepsilon = \frac{1}{M}$. עתה האומן בוחר n^* במשחק הראשון ואנחנו מעתיקים אותו למשחק השני. האומן בוחר n במשחק הראשון ואנחנו מעתיקים אותו למשחק השני. נצחון של האומן במשחק הראשון פֵּרושו ש-

$$|a_n| < \varepsilon$$

לכן

$$\frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = M$$

כך נִצחנו במשחק השני.

הוכחה. הכוון הראשון: נניח $a_n \to 0$, כלומר:

$$\forall\varepsilon > 0\exists n^*\forall n \ge n^*(|a_n| < \varepsilon) \text{ (1)}$$

נוכיח: $\frac{1}{|a_n|} \to \infty$, כלומר:

$$\forall M\exists n^*\forall n \ge n^*(\frac{1}{|a_n|} > M)$$

יהי $0 < M$ (ראה טענה 5.4.2). נגדיר $\varepsilon = \frac{1}{M}$. לפי (1) יש n^* כך ש:

$$\forall n \ge n^*(|a_n| < \varepsilon) \text{ (2)}$$

יהי $n^* \le n$. נוכיח:

$$\frac{1}{|a_n|} > M$$

אכן לפי (2) מתקיֵם:

$$\frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = M$$

הכוון השני: נניח $\frac{1}{|a_n|} \to \infty$, כלומר:

$$\forall M\exists n^*\forall n \ge n^*(\frac{1}{|a_n|} > M) \text{ (1)}$$

עלינו להוכיח:

$$\forall\varepsilon > 0\exists n^*\forall n \geq n^*(|a_n| < \varepsilon)$$

יהי $\varepsilon > 0$. נגדיר $M = \frac{1}{\varepsilon}$. לפי (1) יש n^* כך ש:

$$\forall n \geq n^*(\frac{1}{|a_n|} > M) \text{ (2)}$$

יהי $n \geq n^*$. נוכיח:

$$|a_n| < \varepsilon$$

אכן לפי (2) נקבל:

$$|a_n| < \frac{1}{M} = \varepsilon$$

□

שאלה 5.4.5. נגדיר:

$$a_n = [(-1)^n \cdot n]$$

הגבול $lima_n$ איננו קַיָם, למרות ש- $\frac{1}{|a_n|} \to 0$. מדוע אין בכך סתירה לכלל המנה לגבולות במובן הרחב?

5.5 סדרות עולות וחסם עליון

הגדרה 5.5.1. נתונה סדרה $\langle a_n\rangle$. הסדרה עולה פֵּרושו שלכל n מתקיֵם $a_n < a_{n+1}$. הסדרה עולה במובן הרחב פֵּרושו שלכל n מתקיֵם $a_n \leq a_{n+1}$. באֹפן דומה מגדירים סדרה יורדת וסדרה יורדת במובן הרחב. הסדרה מונוטונית פֵּרושו שהיא עולה במובן הרחב או יורדת במובן הרחב. לפעמים אומרים סדרה עולה ממש, כדי להדגיש שזה לא במובן הרחב. כך גם לגבי יורדת ממש וכן לגבי מונוטונית ממש.

טענה 5.5.2. $\langle a_n\rangle$ סדרה עולה במובן הרחב אס"ם

$$\forall n, k \in \mathbb{N}(n < k \Rightarrow a_n \leq a_k)$$

הוכחה. הכוון הקל: נניח שפסוק זה מתקים. אז אז על ידי הצבת $k = n + 1$ נקבל שהסדרה עולה במובן הרחב.

הכוון הקשה מוכח בהשראה: נניח שהסדרה עולה במובן הרחב. יהי $n \in \mathbb{N}$. נוכיח בהשראה על k:

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2, \ldots n\}(a_n \leq a_k)$$

שלב הבסיס: עבור $k = n + 1$, זה נובע מהגדרת סדרה עולה במובן הרחב.
שלב המעבר:
הנחת ההשראה: $a_n \leq a_k$.
צריך להוכיח: $a_n \leq a_{k+1}$.
אכן, לפי הנחת ההשראה והגדרת סדרה עולה במובן הרחב, נקבל $a_n \leq a_k \leq a_{k+1}$. □

דוגמא 5.5.1. הסדרה $\langle 2^n\rangle$ עולה ממש.

דוגמא 5.5.2. הסדרה $\langle \frac{1}{n}\rangle$ יורדת ממש.

דוגמא 5.5.3. הסדרה $\langle 2^n - n^2\rangle$ איננה עולה ואיננה יורדת (אפילו במובן הרחב).

נציג משפטים עבור סדרות עולות או עולות במובן הרחב. נשתמש בחופשיות במשפטים המקבילים עבור סדרות יורדות או יורדות במובן הרחב, גם במקרים שבהם הם לא יוצגו במפֹרש.

טענה 5.5.3. אם $\langle a_n\rangle$ עולה במובן הרחב ואיננה חסומה מלעיל, אז $a_n \to \infty$.

הוכחה. יהי $M \in \mathbb{R}$. מכיון שהסדרה $\langle a_n \rangle$ איננה חסומה מלעיל, המספר M איננו חסם מלעיל שלה. לכן יש n^* כך ש- $a_{n^*} > M$. יהי $n^* \leq n$. נוכיח ש- $M < a_n$. אכן מכיון שהסדרה $\langle a_n \rangle$ עולה במובן הרחב, $M < a_{n^*} \leq a_n$. □

הטענה הבאה מקבילה לטענה 5.5.3 ולכן לא נוכיחה.

טענה 5.5.4. אם $\langle a_n \rangle$ יורדת במובן הרחב ואיננה חסומה מלרע, אז $a_n \to -\infty$.

טענה 5.5.5. אם הסדרה $\langle a_n \rangle$ עולה במובן הרחב וחסומה מלעיל, אז הסדרה מתכנסת. יתר על כן,

$$lima_n = sup\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}$$

הוכחה. נגדיר

$$A = \{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}$$
$$L = sup(A)$$

עלינו להוכיח ש- $a_n \to L$. יהי $0 < \varepsilon$. המספר $L - \varepsilon$ איננו חסם מלעיל של הקבוצה A, כי הוא קטן מהחסם העליון שלה. לכן יש n^* כך ש-

$$a_{n^*} > L - \varepsilon \text{ (1)}$$

מכיון ש- L הוא החסם העליון של A, הוא בפרט חסם מלעיל שלה. לכן

$$\forall n(a_n \leq L) \text{ (2)}$$

יהי $n^* \leq n$. מכיון שהסדרה $\langle a_n \rangle$ עולה במובן הרחב, נקבל:

$$L - \varepsilon <_{(1)} a_{n^*} \leq a_n \leq_{(2)} L$$

לפיכך:

$$|a_n - L| < \varepsilon$$

□

טענה 5.5.6. אם הסדרה $\langle a_n \rangle$ יורדת במובן הרחב וחסומה מלרע, אז הסדרה מתכנסת. יתר על כן,

$$lima_n = sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

משפט 5.5.7. אם סדרה היא מונוטונית במובן הרחב, אז היא מתכנסת במובן הרחב.

הוכחה. מקרה א: הסדרה עולה במובן הרחב ואיננה חסומה מלעיל. במקרה זה הסדרה מתכנסת במובן הרחב לפי טענה 5.5.3.

מקרה ב: הסדרה עולה במובן הרחב וכן חסומה מלעיל. במקרה זה הסדרה מתכנסת לפי טענה 5.5.5.
אם הסדרה יורדת במובן הרחב, אז היא מתכנסת לפי טענות 5.5.45.5.6,. □

לפעמים אפשר לחשב גבול של סדרה בעזרת טענה 5.5.6. זה מפתיע, כי הטענה טוענת לקיומו של הגבול בלבד.

דוגמא 5.5.4. נניח ש- $a \in (0,1)$. נוכיח:

$$a^n \to 0$$

ראשית, נראה שהסדרה $\langle a^n \rangle$ יורדת:

$$a^{n+1} = a^n a < a^n$$

כל אברי הסדרה חיוביים ולכן הסדרה חסומה מלרע על ידי 0. לפיכך ולפי טענה 5.5.6, זו סדרה מתכנסת. נסמן:

$$L = lima^n$$

לפיכך גם הסדרה $\langle a^{n+1}\rangle$ שואפת ל- L. אולם לפי כלל המכפלה:

$$L = lima^{n+1} = a \cdot lima^n = aL$$

קבלנו $L = aL$ ולכן אם $L \neq 0$ אז $a = 1$, סתירה. לפיכך

$$L = 0$$

לסכום,

$$\forall a \in (0,1)[a^n \to 0]$$

הגדרה 5.5.8. תהי $\langle A_n\rangle$ סדרה של קבוצות. הסדרה $\subseteq$- יורדת (בקצור יורדת) פֵּרושו שלכל n מתקיֵם $A_n \supseteq A_{n+1}$. באֹפן דומה מגדירים סדרה $\subseteq$- עולה.

הגדרה 5.5.9. תהי $\langle A_n\rangle$ סדרה של קבוצות. נגדיר:

$$\bigcup_n A_n = \{x : \exists n(x \in A_n)\}$$
$$\bigcap_n A_n = \{x : \forall n(x \in A_n)\}$$

דוגמאות.

- $\bigcup_{n\geq 1}[n, n+1] = [1, \infty)$
- $\bigcup_{n\geq 0}(n, n+1) = (0, \infty) \setminus \mathbb{N}$
- $\bigcap_n (n, n+1) = \emptyset$
- $\bigcap_n (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$
- $\bigcap_n [-1, \frac{1}{n}] = [-1, 0]$

טענה 5.5.10. אם $\emptyset \neq (a,b) \subseteq (c,d)$ אז $c \leq a \leq b \leq d$.

הוכחה. נניח בשלילה ש- $(a,b) \subseteq (c,d)$ והמסקנה לא מתקיֶמת. נניח בלי הגבלת הכלליות, ש- $a < c$. נגדיר

$$x = min\{\frac{a+c}{2}, \frac{a+b}{2}\}$$

אז $x \in (a,b) \setminus (c,d)$. סתירה. $\square$

טענה 5.5.11. תהי $\langle [a_n, b_n]\rangle$ סדרה יורדת של קטעים סגורים לא ריקים. אז

$$\bigcap_n [a_n, b_n] = [lima_n, limb_n] \neq \emptyset$$

הוכחה. ראשית, יש לודא שהסדרות $\langle a_n\rangle$, $\langle b_n\rangle$ מתכנסות. לפי טענה 5.5.10, הסדרה $\langle a_n\rangle$ עולה במובן הרחב והסדרה $\langle b_n\rangle$ יורדת במובן הרחב. הסדרה $\langle a_n\rangle$ חסומה מלעיל על ידי b_1, כי לכל n מתקיֵם

$$a_n \leq b_n \leq b_1$$

לפיכך ולפי טענה 5.5.5, הסדרה $\langle a_n\rangle$ מתכנסת וגבולהּ הוא $sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. באֹפן דומה, הסדרה $\langle b_n\rangle$ מתכנסת וגבולהּ הוא $inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. נגדיר:

$$a = lima_n = sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$
$$b = limb_n = inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$$

נוכיח:

$$\bigcap_n [a_n, b_n] = [a, b] \neq \emptyset$$

כוון ראשון: יהי

$$x \in \bigcap_n [a_n, b_n] \text{ (1)}$$

נוכיח:

$$x \in [a, b]$$

לפי (1) לכל n מתקיֵם

$$a_n \leq x$$

לכן x הוא חסם מלעיל של הקבוצה $\{a_n : n \geq 1\}$. לפיכך ולפי הגדרת החסם העליון,

$$a \leq x$$

באפן דומה,

$$x \leq b$$

כוון שני: נניח

$$x \in [a, b] \text{ (1)}$$

נוכיח:

$$x \in \bigcap_n [a_n, b_n]$$

מכיון ש- a הוא חסם מלעיל של הקבוצה $\{a_n : n \geq 1\}$, לכל n מתקיֵם:

$$a_n \leq a \leq x$$

באפן דומה,

$$x \leq b \leq b_n$$

לפיכך:

$$x \in \bigcap_n [a_n, b_n]$$

בזאת סיָמנו את הוכחת השוְיון:

$$\bigcap_n [a_n, b_n] = [lim a_n, lim b_n]$$

נותר להוכיח שזו איננה קבוצה ריקה. לשם כך מספיק להוכיח:

$$a \leq b$$

טענה 5.5.12 (טענת עזר). נוכיח שלכל n, k מתקיֵם:

$$a_n \leq b_k$$

הוכחה. נגדיר $m = max\{n, k\}$ ונקבל:

$$a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_k$$

□

נחזור לגוף ההוכחה. לפי טענת העזר, כל אבר בקבוצה $\{b_n : n \geq 1\}$ הוא חסם מלעיל של הקבוצה $\{a_n : n \geq 1\}$.
לפיכך, ולפי הגדרת החסם העליון, לכל n

$$a \leq b_n$$

במילים אחרות, a הוא חסם מלרע של הקבוצה $\{b_n : n \geq 1\}$ ולכן לפי הגדרת החסם התחתון,

$$a \leq b$$

□

משפט 5.5.13 (הלמה של קנטור). תהי $\langle [a_n, b_n] \rangle$ סדרה יורדת של קטעים סגורים לא ריקים שמקיֶמת:

$$lim(b_n - a_n) = 0$$

אז בקבוצה הבאה יש אבר אחד בדיוק:

$$\bigcap_n [a_n, b_n]$$

הוכחה. לפי טענה 5.5.11, הקבוצה היא קטע סגור לא ריק: $[a, b] = [lima_n, limb_n]$. נותר להוכיח שאין בה יותר מאבר אחד, כלומר ש- $a = b$.

$$b - a = limb_n - lima_n = lim(b_n - a_n) = 0$$

□

מפאת חשיבות הנושא ללִמוד נושא האינטגרל, נמשיך להתעמק בו.
הגדרה: תהיינה A, B שתי קבוצות לא ריקות של מספרים ממשיים. $A \leq^{set} B$ פרושו

$$\forall a \in A \forall b \in B (a \leq b)$$

נגדיר:

$$B - A = \{b - a : a \in A, b \in B\}$$

דוגמא:

$$(1,3) \leq^{set} (4,3)$$

דוגמא:

$$(1,3) \not\leq^{set} (2,6)$$

דוגמא:

$$\{1,2\} - \{1,3\} = \{0, -2, 1, -1\}$$

דוגמא:

$$(1,2) - (1,2) = (-1,1)$$

טענה: אם $A \leq^{set} B$ אז A חסומה מלעיל, B חסומה מלרע ומתקיֵם:

$$sup(A) \leq inf(B)$$

הוכחה. כל אבר $b \in B$ הוא חסם מלעיל של הקבוצה A. לכן הוא שוֶה לפחות לחסם העליון של A:

$$\forall b \in B [sup(A) \leq b]$$

לכן $sup(A)$ הוא חסם מלרע של B. לכן הוא לא יותר מהחסם התחתון של B:

$$sup(A) \leq inf(B)$$

□

המשפט הבא דומה ללמה של קנטור, אבל נקודת המוצא היא קיום שתי קבוצות A, B שמהוות תחליף לקבוצות $\{a_n : n \geq 1\}, \{b_n : n \geq 1\}$ שהופיעו במשפט קנטור.

משפט 5.5.14. נתונות שתי קבוצות לא ריקות A, B, כך ש- $A \leq^{set} B$.
אז התנאים הבאים שקולים:

א. $sup(A) = inf(B)$

ב. $\forall\varepsilon > 0\exists a \in A\exists b \in B(b - a < \varepsilon)$

ג. בקבוצה $\{x : \forall a \in A\forall b \in b(a \leq x \leq b)\}$ יש אבר יחיד.

ד. יש סדרה עולה (במובן הרחב) $\langle a_n \rangle$ של אברים מתוך A וסדרה יורדת (במובן הרחב) $\langle b_n \rangle$ של אברים מתוך B כך שמתקיֵם: $lima_n = limb_n$.

במקרה שתנאים אלו מתקיְמים, מתקיֵם השוְיון הבא:

$$lima_n = sup(A) = inf(B) = limb_n$$

הוכחה. □

הגדרה 5.5.15. תהיינה A, B קבוצות של מספרים ממשיים. נגדיר:

$$B - A = \{b - a : a \in A, b \in B\}$$

טענה 5.5.16. נתונות שתי קבוצות A, B כך ש- $A \leq^{set} B$. אז

$$inf(B - A) = inf(B) - sup(A)$$

הוכחה. ראשית, נראה ש- $inf(B) - sup(A)$ חסם מלרע של $B - A$. אבר ב- $B - A$ הוא אבר מהצורה $b - a$ כך ש- $a \in A, b \in B$. לפי הגדרת החסם העליון:

$$a \leq sup(A)$$

לפי הגדרת החסם התחתון:

$$b \geq inf(B)$$

לפיכך:

$$b - a \geq inf(B) - sup(A)$$

בזאת הוכח ש- $inf(B) - sup(A)$ הוא חסם מלרע של $B - A$.
יהי

$$x > inf(B) - sup(A)$$

נוכיח ש- x איננו חסם מלרע של $B - A$ ומכך נסיק ש- $inf(B) - sup(A)$ הוא החסם התחתון של $B - A$.
נגדיר:

$$\varepsilon = x - [inf(B) - sup(A)] \quad (1)$$

$sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ איננו חסם מלעיל של A, כלומר יש $a \in A$ כך ש:

$$sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < a \quad (2)$$

באופן דומה, יש $b \in B$ כך ש:

$$b < inf(B) + \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

לפי (1),(2),(3) מתקיֵם:

$$b - a < inf(B) + \frac{\varepsilon}{2} - [sup(A) - \frac{\varepsilon}{2}] = inf(B) - sup(A) + \varepsilon = x$$

בזאת הוכח ש- x איננו חסם מלרע של $B - A$. לפיכך $inf(B) - sup(A)$ הוא החסם התחתון של $B - A$.
□

לקראת הוכחת הטענה הבאה, נדגים כיצד מחשבים קבוצה מהסוג $A-A$. יש לשים לב, שאין מדֻבר בחִסור במובן התורת קבוצתי.

דוגמא 5.5.5.

$$(0,1)-(0,1)=\{x-y : x,y\in(0,1)\}=(-1,1)$$

נוכיח את האמור בדוגמא, כלומר את השִוְיון בין שני האגפים שבקצות השִויון (השמאלי והימני).

הוכחה. כוון ראשון: נניח $z\in(0,1)-(0,1)$, כלומר $z=x-y$, $x,y\in(0,1)$. לכן

$$-1=0+(-1)<x+(-y)<1+0=1$$

קבלנו $z\in(-1,1)$.

כוון שני: נניח $z\in(-1,1)$ ונוכיח $z\in(0,1)-(0,1)$. נגדיר

$$x=\frac{1+z}{2}$$
$$y=\frac{1-z}{2}$$

כך נקבל:

$$z=x-y$$
$$0<x<1$$
$$0=\frac{1+(-1)}{2}<\underbrace{\frac{1+(-z)}{2}}_{y}<\frac{1+1}{2}=1$$

הוכחנו: $x,y\in(0,1)$ ולכן $z\in(0,1)-(0,1)$. □

טענה 5.5.17. תהי A קבוצה חסומה. אז

$$sup\{A-A\}=sup(A)-inf(A)$$

הוכחה. ראשית, נוכיח ש- $sup(A)-inf(A)$ הוא חסם מלעיל של הקבוצה $A-A$. יהי $z\in A-A$. אז יש $x,y\in A$ כך ש- $z=x-y$. לכן

$$z=x+(-y)\le sup(A)+(-inf(A))$$

עתה נוכיח שכל מספר שהוא קטן יותר מ- $sup(A)-inf(A)$ איננו חסם מלעיל של הקבוצה $A-A$. יהי $s<sup(A)-inf(A)$. עלינו להוכיח ש- s איננו חסם מלעיל של $A-A$. נגדיר:

$$\varepsilon=sup(A)-inf(A)-s$$
$$x=sup(A)-\frac{\varepsilon}{3}$$
$$y=inf(A)+\frac{\varepsilon}{3}$$

□

5.6 גבולות חלקיים

דוגמא 5.6.1. נתבונן בשתי הסדרות הבאות:

$$-1,1,-1,1,-1,1,\dots$$
$$1,1,1,1,1,\dots$$

נִתן לקבל את הסדרה השניה על ידי מחיקת אברים מתוך הסדרה הראשונה. במילים אחרות, אם נתבונן באברים שבמקומות הזוגיים של הסדרה הראשונה, נקבל את הסדרה השניה. הסדרה השניה היא תת-סדרה של הראשונה. את הסדרה הראשונה אפשר להציג כך: $a_n = (-1)^n$. את הסדרה השניה אפשר להציג בעזרת הסדרה הראשונה כ- $\langle a_{2n}\rangle$. בכך השתמשנו בסדרת האינדקסים $\langle 2n\rangle$ כדי לקבֹע את האברים מהסדרה הראשונה שיופיעו בסדרה השניה.

הגדרה 5.6.1. תהי $\langle a_n\rangle$ סדרה ותהי $\langle n_k\rangle$ סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים חיוביים. נקרא לה סדרת אינדקסים. הסדרה $\langle a_{n_k}\rangle$ נקראת תת-סדרה של $\langle a_n\rangle$.

טענה 5.6.2. אם $\langle n_k\rangle$ סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים חיוביים אז $\forall k(n_k \geq k)$.

טענה 5.6.3. תהי $\langle n_k\rangle$ סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים חיוביים ותהי P תכונה של מספרים טבעיים. אז:

א. אם $P(m)$ מתקיֶמת כמעט לכל m אז $P(n_k)$ מתקיֶמת כמעט לכל k.

ב. אם $P(n_k)$ מתקיֶמת כמעט לכל k אז $P(m)$ מתקיֶמת עבור אינסוף mים.

טענה 5.6.4. תהי A קבוצה לא ריקה של מספרים שלמים. אז A סופית אם"ם A חסומה.

הוכחה. כוון ראשון: נניח ש- A חסומה ונוכיח שהיא סופית. יהי L חסם של A.

$$A \subseteq \{-L,-L+1,-L+2,\dots,-1,0,1,\dots L-2,L-1,L\}$$

מכיון שאגף ימין הוא קבוצה סופית, גם A היא קבוצה סופית.

כוון שני: נוכיח בהשראה שלכל $n \in \mathbb{N}$ אם $|A| = n$ אז A היא קבוצה חסומה. שלב הבסיס: עבור $n = 1$, האבר היחיד ששיָך ל- A הוא גם חסם (מלעיל ומלרע) שלה.

שלב המעבר:

הנחת ההשראה: הטענה נכונה עבור n.

נוכיח את הטענה עבור $n+1$.

נניח $|A| = n+1$. מכיון ש- A איננה ריקה, יש $x \in A$. מספר אברי הקבוצה $A\setminus\{x\}$ הוא n. לכן לפי הנחת ההשראה, היא חסומה. לכן יש L כך שלכל $a \in A\setminus\{x\}$ מתקיֶם:

$$|a| \leq L$$

נגדיר:

$$M = max(L,x)$$

עתה לכל $a \in A$ מתקיֶם:

$$|a| \leq M$$

□

הטענה הבאה אומרת ש"אפשר לסדר קבוצה אינסופית של מספרים טבעיים חיוביים".

טענה 5.6.5. אם A קבוצה אינסופית של מספרים טבעיים חיוביים אז יש סדרה עולה ממש $\langle n_k\rangle$ כך ש:

$$A = \{n_k : k \in \mathbb{N}^+\}$$

הוכחה. נגדיר את n_k כמספר הראשון בקבוצה

$$A \setminus \{n_i : i < k\}$$

הקורא יוכיח שהסדרה $\langle n_k \rangle$ עולה ומתקיֵם השוָיון:

$$A = \{n_k : k \in \mathbb{N}^+\}$$

□

הגדרה 5.6.6. תהי $\langle a_n \rangle$ סדרה ויהי L מספר ממשי או ∞ או $-\infty$. נאמר ש- L גבול חלקי של $\langle a_n \rangle$ אם יש תת-סדרה $\langle a_{n_k} \rangle$ של $\langle a_n \rangle$ כך ש-

$$a_{n_k} \to L$$

טענה 5.6.7. אם $a_n \to L$ אז כל תת-סדרה של $\langle a_n \rangle$ שואפת ל- L.

הוכחה. מקרה א: $L \in \mathbb{R}$. נניח ש- $a_n \to L$ כלומר:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n^* \forall n \geq n^* (|a_n - L| < \varepsilon) \quad (1)$$

צריך להוכיח $a_{n_k} \to L$, כלומר:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n^* \forall n \geq n^* (|a_{n_k} - L| < \varepsilon)$$

יהי $\varepsilon > 0$. לפי (1), יש n^* כך ש:

$$\forall n \geq n^* (|a_n - L| < \varepsilon) \quad (2)$$

נוכיח:

$$\forall k \geq n^* (|a_{n_k} - L| < \varepsilon)$$

יהי $k \geq n^*$. אז $n^* \leq k \leq n_k$. נציב ב-(2) את n_k במקום n ונקבל:

$$(|a_{n_k} - L| < \varepsilon)$$

מקרה ב: $L = \infty$. ההוכחה מושארת לקורא.
מקרה ג: $L = -\infty$. ההוכחה דומה למקרה ב.

□

תוצאה 5.6.8. אם לסדרה יש שני גבולות חלקיים שונים אז היא איננה מתכנסת אפילו במובן הרחב.

משפט 5.6.9. לכל סדרה יש תת-סדרה מונוטונית.

נוכל להציג את רעיון ההוכחה כך: מנסים למצא מקום שהחל ממנו נוכל לבנות תת-סדרה אינסופית עולה. אם לא הצלחנו, זה אומר שלכל אבר יש אבר בהמשך הסדרה (כלומר שהאינדקס שלו בסדרה גדול יותר) שהוא דוקא קטן יותר. אם כך, אז נוכל למצא תת-סדרה יורדת. האברים בקבוצה A שמופיעה בהוכחה שלהלן, מקשים עלינו במובן מסֵים למצא תת-סדרה עולה.

הוכחה. תהי $\langle a_n \rangle$ סדרה. נגדיר:

$$A = \{n \in \mathbb{N}^+ : \forall m > n (a_n \geq a_m)\}$$

מקרה א: A סופית. במקרה זה, יש n^* כך ש:

$$\forall n \geq n^* (n \notin A)$$

כלומר:

$$\forall n \geq n^* \exists m \geq n (a_n < a_m) \quad (1)$$

נגדיר סדרה עולה של מספרים טבעיים $\langle n_k \rangle$ בהשראה על k כך: $n_1 = n^*$, $a_{n_k} < a_{n_{k+1}}$. מדוע יש n_{k+1} כזה? נציב ב-(1) $n = n_k$. הוא לפחות n^*. לכן לפי (1) יש m שהוא גדול ממנו כך ש- $a_{n_k} < a_m$. נקרא ל- m בשם n_{k+1}. הסדרה $\langle a_{n_k} \rangle$ היא סדרה עולה.

מקרה ב: A אינסופית. במקרה זה, יש סדרה עולה של מספרים טבעיים, $\langle n_k \rangle$ כך ש:

$$A = \{n_k : k \in \mathbb{N}^+\}$$

עתה נוכיח שהסדרה $\langle a_{n_k} \rangle$ יורדת. יהי $k \in \mathbb{N}^+$. נוכיח ש- $a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}$. מכיון ש- $n_k \in A$, לפי הגדרת A, לכל $n_k < m$ מתקיֵם $a_{n_k} \geq a_m$. אולם $n_k < n_{k+1}$ (כי הסדרה $\langle n_k \rangle$ עולה) ולכן $a_{n_k} \geq a_{n_k}$.

□

ממשפט 5.6.9 נסיק את משפט בולצאנו ויירשטראס:

משפט 5.6.10 (משפט בולצאנו ויירשטראס). לכל סדרה חסומה יש גבול חלקי שהוא מספר (כלומר לא אינסופי).

הוכחה. תהי $\langle a_n \rangle$ סדרה חסומה. לפי משפט 5.6.9, יש תת-סדרה $\langle a_{n_k} \rangle$ של a_n שהיא מונוטונית. היא גם חסומה, כי $\langle a_n \rangle$ חסומה. לכן היא מתכנסת למספר. □

משפט 5.6.11. לכל סדרה יש גבול חלקי.

הוכחה. תהי $\langle a_n \rangle$ סדרה. לפי משפט 5.6.9, יש תת-סדרה $\langle a_{n_k} \rangle$ של a_n שהיא מונוטונית. אם היא איננה חסומה מלעיל, אז היא שואפת ל- ∞. אם היא איננה חסומה מלרע, אז היא שואפת ל- $-\infty$. אם היא חסומה (מלעיל ומלרע) אז היא שואפת למספר. □

טענה 5.6.12. נתונה סדרה $\langle a_n \rangle$. אז:

א. ∞ הוא גבול חלקי של הסדרה $\langle a_n \rangle$ אם"ם הסדרה $\langle a_n \rangle$ איננה חסומה מלעיל.

ב. $-\infty$ הוא גבול חלקי של הסדרה $\langle a_n \rangle$ אם"ם הסדרה $\langle a_n \rangle$ איננה חסומה מלרע.

הוכחה. נסתפק בהוכחת א, שכן הוכחת ב דומה. הכוון הקל: נניח ש- ∞ הוא גבול חלקי של $\langle a_n \rangle$, כלומר:

$$a_{n_k} \to L$$

עבור תת-סדרה מסוימת. נוכיח שהקבוצה $\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ איננה חסומה מלעיל. יהי $M \in \mathbb{R}$. יש n^* כך שלכל $n^* \leq n$ מתקיֵם $M < a_n$. בפרט

$$M < a_{n^*}$$

הכוון הקשה: נניח שהסדרה $\langle a_n \rangle$ איננה חסומה מלעיל, כלומר שהקבוצה $\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ איננה חסומה מלעיל. עלינו לבנות תת-סדרה ששואפת לאינסוף. לשם כך, נגדיר בהשראה סדרה עולה של מספרים טבעיים חיוביים $\langle n_k \rangle$ כך ש:

$$\forall k (k < a_{n_k})$$

הרעיון הוא שכדי שהסדרה $\langle a_{n_k} \rangle$ תשאף לאינסוף, אנחנו דואגים שאבריה יהיו יותר גדול מאברי הסדרה $\langle k \rangle$.

לפני שנמשיך, נסביר את הקשי בשלב העוקב, כלומר בבחירת n_{k+1}: אנחנו נדרשים להתמודד עם שתי משימות במקביל. מצד אחד דרוש $n_k < n_{k+1}$ ומצד שני, דרוש $a_{n_k} < a_{n_{k+1}}$. עם כל דרישה בפני עצמהּ קל להתמודד. הדרישה הראשונה קלה, שכן היא בסך הכל אומרת שצריך לבחֹר מספר יותר גדול מזה שבחרנו בשלב k. גם הדרישה השניה קלה, כי a_{n_k} איננו חסם מלעיל של הקבוצה $\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ (שהרי היא כלל לא חסומה מלעיל). אבל כיצד נוכל להתמודד עם שתי הדרישות בבת אחת? הטענה הבאה, שהוכחתהּ מֻשארת לקורא, סוללת בפנינו דרך עקיפה להתמודד עם הדרישה הראשונה, באֹפן שקשור לעובדה שהקבוצה איננה חסומה מלעיל.

טענה 5.6.13.

א. אם $a_n > a_m$ אז $n \neq m$.

ב. אם $max\{a_1, a_2, \ldots, a_m\} < a_n$ אז $m < n$.

עתה נחזור להוכחת טענה 5.6.12. נגדיר את הסדרה $\langle n_k\rangle$ באפן השראתי: $n_1 = 1$. בהנחה שכבר הגדרנו את n_k, נגדיר את n_{k+1} כמספר הראשון בקבוצה הבאה:

$$A = \{n \in \mathbb{N}^+ : max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_k}, k+1\} < a_n\}$$

A איננה ריקה, כי המספר $max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_k}, k+1\}$ איננו חסם מלעיל של הקבוצה $\{a_n : n \in \mathbb{N}^+\}$ (כזכור, היא איננה חסומה מלעיל). להגדרת n_{k+1} כפי שהגדרנו כרגע, יש שני יתרונות: ראשית, נשים לב שלכל אבר $n \in A$ מתקיֵם $k+1 < a_n$, ובפרט $k+1 < a_{n_{k+1}}$. שנית, לכל n בקבוצה A מתקיֵם $max\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_k}\} < a_n$ ולכן לפי טענה 5.6.13, $n_k < n$. בפרט $n_{k+1} \in A$ ולכן $n_k < n_{k+1}$. נותר להוכיח:

$$a_{n_k} \to \infty$$

יהי $0 < M$. לפי תכונת הארכימדיות, יש $M < k^* \in \mathbb{N}$. לפיכך:

$$\forall k \geq k^*(M < k^* \leq k < a_{n_k})$$

□

הטענה הבאה היא הגרסה של טענה 5.6.12 עבור גבול סופי.

טענה 5.6.14. נתונה סדרה $\langle a_n\rangle$ ומספר ממשי L. המספר L הוא גבול חלקי של הסדרה $\langle a_n\rangle$ אם"ם לכל $0 < \varepsilon$ הקבוצה $\{n : a_n \in B_\varepsilon(L)\}$ היא אינסופית.

הוכחה. כוון ראשון: נניח ש- L גבול חלקי של $\langle a_n\rangle$. זאת אומרת שיש סדרה עולה ממש $\langle n_k\rangle$ כך ש:

$$a_{n_k} \to L \quad (1)$$

יהי $0 < \varepsilon$. לפי (1), יש k^* כך ש:

$$\forall k \geq k^*(a_{n_k} \in B_\varepsilon(L))$$

לפיכך:

$$\{n : a_n \in B_\varepsilon(L)\} \supseteq \{n_k : k \geq k^*\}$$

לכן היא אינסופית.

כוון שני: נגדיר

$$A_\varepsilon = \{n : a_n \in B_\varepsilon(L)\}$$

נניח שלכל $0 < \varepsilon$ הקבוצה A_ε היא אינסופית. נגדיר n_k בהשראה כך ש- n_k הוא האבר הראשון בקבוצה

$$A_{\frac{1}{k}} \setminus \{1, 2, 3, \ldots n_{k-1}\}$$

(עבור $k = 1$, n_1 יהיה האבר הראשון ב- A_1). יש לשים לב, שמכיון שהקבוצה $A_{\frac{1}{k}}$ אינסופית, הקבוצה $A_{\frac{1}{k}} \setminus \{1, 2, 3, \ldots n_{k-1}\}$ איננה ריקה ולכן אפשר לבחֹר אבר מתוכהּ. קבלנו סדרה עולה $\langle n_k\rangle$. נותר להוכיח ש- $a_{n_k} \to L$. יהי $0 < \varepsilon$. לפי תכונת הארכימדיות, יש k^* שהוא גדול מ- $\frac{1}{\varepsilon}$. לכן $\frac{1}{k^*} < \varepsilon$. יהי $k^* \leq k$. נוכיח:

$$a_{n_k} \in B_\varepsilon(L)$$

$n_k \in A_{\frac{1}{k}}$, כלומר:

$$a_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(L)$$

אולם $\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k^*} < \varepsilon$ ולכן

$$a_{n_k} \in B_\varepsilon(L)$$

□

טענה 5.6.15. תהי $\langle a_n\rangle$ סדרה שאיננה מתכנסת במובן הרחב. אז יש לה לפחות שני גבולות חלקיים שונים במובן הרחב.

הוכחה. לפי משפט 5.6.11, יש $L_1 \in \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ שהוא גבול חלקי של $\langle a_n\rangle$. אולם

$$a_n \nrightarrow L_1$$

לכן יש $0 < \varepsilon$ כך שהקבוצה הבאה אינסופית:

$$A = \{n \in \mathbb{N}^+ : a_n \notin B_\varepsilon(L_1)\}$$

לכן יש סדרה עולה $\langle n_k\rangle$ של מספרים ב- $\mathbb{N}^+$ כך ש:

$$A = \{n_k : k \in \mathbb{N}^+\}$$

נשתמש שוב במשפט 5.6.11 ונסיק שיש $L_2 \in \mathbb{R}$ שהוא גבול חלקי של הסדרה $\langle a_{n_k}\rangle$. נותר להוכיח ש- $L_1 \neq L_2$. כמעט לכל k מתקיֵם $a_{n_k} \in B_\varepsilon(L_2)$. אולם לכל k מתקיֵם $n_k \in A$ ולכן $a_{n_k} \notin B_\varepsilon(L_1)$.

□

תוצאה 5.6.16. סדרה היא מתכנסת במובן הרחב אם"ם יש לה גבול חלקי יחיד במובן הרחב.

5.7 תנאי קושי

הגדרנו סדרה מתכנסת ככזו שיש לה גבול L. אולם L בדרך כלל איננו שייָך לסדרה. קושי מצא תנאי שקול להתכנסות של סדרה, שאיננו מתיָחס לאבר שאיננו שייָך לסדרה, אלא מתיָחס רק לאברי הסדרה עצמם.

כהקדמה להצגת תנאי קושי, נדון בתכונות של זוגות סדורים של מספרים טבעיים. במסגרת הדיון על התכנסות של סדרה, הגדרנו קיום של תכונה כמעט לכל n. עתה נציג הגדרה דומה ביחס לתכונה של זוג סדור של מספרים טבעיים.

הגדרה 5.7.1. תהי P תכונה של זוגות סדורים של מספרים טבעיים. כמעט לכל n, k מתקיֵם $P(n, k)$ פֵּרושו שעבור כל n, k גדולים מספיק, התכונה $P(n, k)$ מתקיֶמת, כלומר:

$$\exists n^* \forall n, k \geq n^* [P(n, k)]$$

הגדרה 5.7.2. הסדרה $\langle a_n\rangle$ מקיֶמת את תנאי קושי פֵּרושו שלכל $0 < \varepsilon$ ולכל n, k גדולים מספיק:

$$|a_n - a_k| < \varepsilon$$

במילים אחרות:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n^* \forall n > n^* \forall k > n^* [|a_n - a_k| < \varepsilon]$$

סדרת קושי היא סדרה שמקיֶמת את תנאי קושי.

טענה 5.7.3. כל סדרת מתכנסת היא סדרת קושי.

הוכחה. נניח $a_n \to L$ ונוכיח ש- $\langle a_n\rangle$ היא סדרת קושי. יהי $0 < \varepsilon$. אז יש n^* כך ש:

$$\forall n \geq n^* (|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2})$$

יהיו $n^* \leq n, k$. עלינו להוכיח ש- $|a_n - a_m| < \varepsilon$. אכן:

$$|a_n - a_m| = |a_n - L + L - a_m| \leq_{\text{אי-שוויון המשֻלש}} |a_n - L| + |L - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

שאלה 5.7.1. תהיינה A, B קבוצות חסומות של מספרים ממשיים. הוכיחו ש- $A \cup B$ היא קבוצה חסומה.

טענה 5.7.4. כל סדרת קושי היא חסומה.

הוכחה. תהי $\langle a_n\rangle$ סדרת קושי, כלומר:

$$\forall\varepsilon>0\exists n^*\forall n,k\geq n^*(|a_n-a_k|<\varepsilon)$$

בפרט עבור $\varepsilon=1$ יש n^* כך ש:

$$\forall k,n\geq n^*(|a_n-a_k|<1)$$

בפרט עבור $k=n^*$ נקבל:

$$\forall n\geq n^*(|a_{n^*}-a_n|<1)$$

נסמן: $M=a_{n^*}$ ונקבל:

$$\forall n\geq n^*(M-1<a_n<M+1)$$

לכן הקבוצה $\{a_n:n\geq n^*\}$ חסומה, כי כל אבריה שַׁיָּכִים לקטע $(M-1,M+1)$.
לפי שאלה 5.7.1, נותר להוכיח שהקבוצה $\{a_1,a_2,\ldots,a_{n^*-1}\}$ חסומה. אולם היא ודאי חסומה, כי היא סופית. □

משפט 5.7.5 (תנאי קושי). תהי $\langle a_n\rangle$ סדרה. אז $\langle a_n\rangle$ מתכנסת אם"ם $\langle a_n\rangle$ היא סדרת קושי.

הוכחה. כוון אחד הוא טענה 5.7.3. כוון שני: נניח ש- $\langle a_n\rangle$ היא סדרת קושי ונוכיח שהיא מתכנסת. לפי טענה 5.7.4, הסדרה $\langle a_n\rangle$ חסומה. לפי משפט בולצאנו-ויירשטראס יש לה תת-סדרה $\langle a_{n_k}\rangle$ שהיא מתכנסת. נסמן:

$$L=lima_{n_k}\ \text{(1)}$$

נוכיח:

$$a_n\to L$$

הרעיון הוא שמכיון שאברי הסדרה קרובים אחד לשני, הם גם יהיו קרובים לאברי תת-הסדרה $\langle a_{n_k}\rangle$ ולכן קרובים ל- L.
יהי $\varepsilon>0$. לפי תנאי קושי, יש n_1 כך ש:

$$\forall n,m\geq n_1(|a_n-a_m|<\frac{\varepsilon}{2})\ \text{(2)}$$

לפי (1), יש n_2 כך ש:

$$\forall k\geq n_2(|a_{n_k}-L|<\frac{\varepsilon}{2})\ \text{(3)}$$

נגדיר $n^*=max\{n_1,n_2\}$. נוכיח:

$$\forall k\geq n^*(|a_k-L|<\varepsilon)$$

יהי $n^*\leq k$. לפי אי-שִׁוְיוֹן המְשֻׁלָּש,(2),(3) נקבל:

$$|a_k-L|\leq|a_k-a_{n_k}|+|a_{n_k}-L|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

(המספרים k,n_k הם לפחות n_1, ולכן השִׁמּוּש ב-(2) אפשרי) □

פרק 6

גבול של פונקציה

6.1 הגדרת הגבול של פונקציה

תחילה נכליל את המושג סביבה בשני מובנים (בשתי ההגדרות הבאות).

הגדרה 6.1.1. יהיו $c \in \mathbb{R}, \delta \in (0,\infty)$. הסביבה המְנֻקבת של c ברדיוס δ , בסִמון $B^*_\delta(c)$ מֻגדרת כך :

$$B^*_\delta(c) = (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)$$

במילים אחרות,

$$B^*_\delta(c) = B_\delta(c) \setminus \{c\}$$

עד עכשו הגדרנו רק סביבה של מספר ממשי. ההגדרה הבאה מכלילה את מושג הסביבה כך שיהיה מֻגדר גם עבור $\infty, -\infty$.

הגדרה 6.1.2. סביבה של ∞ היא קטע פתוח מהצורה (M,∞). סביבה של $-\infty$ היא קטע פתוח מהצורה $(-\infty, M)$.
סביבה מְנֻקבת של ∞ היא סביבה של ∞. כך גם לגבי $-\infty$.[1]

במהלך לִמוד גבול של סדרה, הגדרנו שאיפה למספר בנפרד משאיפה לאינסוף. עתה אחרי שצברנו נסיון, נוכל להגדיר שאיפה של פונקציה למספר ולגבול אינסופי בבת-אחת. יתר על כן, גם x יוכל לשאֹף למספר, ל- ∞ או ל- $-\infty$. [2] הגדרה זו מתאימה רק לתלמיד מצטיֵן במיֻחד או לחזרה על החומר. למי שמצטיֵן פחות וקורא את החומר בפעם הראשונה, נמליץ לדלג על הגדרה זו ולעבור להגדרות שאחריה שהן חוזרות עליה באֹפן הרבה יותר מפֹרט.

הגדרה 6.1.3. תהי f פונקציה ממשית ויהיו $c, L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. הפונקציה f שואפת ל- L כאשר x שואף ל- c, בסִמון

$$f(x) \to_{x \to c} L$$

או

$$lim_{x\to c} f(x) = L$$

פֵרושו שלכל סביבה U של L יש סביבה מְנֻקבת V של c כך שלכל $x \in V$, מתקיֵם $f(x) \in U$.

ארבע ההגדרות הבאות הן מקרים פרטיים של הגדרה 6.1.3 : בהגדרה 6.1.4 גם x וגם הפונקציה שואפים ל- $\pm\infty$. בהגדרה 6.1.5 x שואף ל- $\pm\infty$ ואילו הפונקציה שואפת למספר. בהגדרה 6.1.6 x שואף למספר ואילו הפונקציה שואפת ל- $\pm\infty$. בהגדרה 6.1.7 גם x וגם הפונקציה שואפים למספרים.

---

[1] הסבה שלגבי $\pm\infty$ איננו מבחינים בין סביבה לבין סביבה מְנֻקבת היא ש- $\pm\infty$ איננו מספר ולכן הוא איננו שיָך לאף קטע.

[2] כפי שיתברר בסעיף הבא, אפשר להכליל את ההגדרה עוד יותר, על ידי החלפת $x \to c$ ב- $\substack{x \to c \\ x \in A}$. כך ההגדרה תכלול בעקיפין גבולות חד-צדדים.

הגדרה 6.1.4. תהי f פונקציה ממשית. הפונקציה f שואפת ל- ∞ כאשר x שואף ל- ∞, בסִמון

$$f(x) \to_{x\to\infty} \infty$$

או

$$lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

פֵּרושו שלכל M_1 יש M_2 כך שלכל $M_2 < x$ מתקיֵם $f(x) > M_1$. במילים אחרות:

$$\forall M_1 \exists M_2 \forall x[x > M_2 \Rightarrow f(x) > M_1]$$

השִׁוְיונות $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ מֻגדרים באֹפן דומה.

דוגמא 6.1.1.

$$x^2 - 5 \to_{x\to\infty} \infty$$

נסביר את הדוגמא באמצעות דו-שיח:

אמית: $x^2 - 5$ שואף ל- ∞ כאשר x שואף ל- ∞.

בועז: הרבה מספרים מהצורה $x^2 - 5$ כלל אינם קרובים ל- ∞.

אמית: אנא, הגדר מהו בעיניך "מספר קרוב ל- ∞".

בועז: בעיני רק מספר שהוא גדול ממיליון יכול להחשב כמספר קרוב ל- ∞.

אמית: ובכן, לכל x מספיק גדול, המספר $x^2 - 5$ גדול ממיליון.

בועז: הגדירי מהו בעינֶיךָ x מספיק גדול.

אמית: x מספיק גדול הוא x שגדול מ- 1000. עבור כל $x > 1000$ המספר $x^2 - 5$ גדול ממיליון.

הסבר בשיטת המשחק: העובדה ש- $lim_{x\to\infty}(x_2 - 5) = \infty$ מתבטאת בעובדה שלאמית יש איסטרטגיַת נצחון במשחק הבא: בועז בוחר $M_1 > 1$[3] שמבטא כמה הפונקציה צריכה להיות גדולה, כדי שתחשב בעיניו כקרובה לאינסוף. אמית בוחרת M_2 שמבטא כמה x צריך להיות גדול, כדי שיחשב קרוב לאינסוף. אחר כך בועז בוחר x שהוא גדול מ- M_2 ואז בודקים את התוצאה: אם $M_1 < x^2 - 5$ אז אמית מנצחת. אחרת, בועז מנצח.

איסטרטגיַת נצחון אחת לאמית במשחק זה היא לבחֹר את M_2 כך:

$$M_2 = \sqrt{M_1 + 5}$$

אכן, אם $M_2 < x$ אז

$$M_1 < x^2 - 5$$

איסטרטגיַת נצחון נוספת לאמית במשחק זה היא לבחֹר את M_2 כך:

$$M_2 = M_1 + 5$$

אכן, אם $M_1 + 5 < x$ אז

$$M_1 < x - 5 < x^2 - 5$$

דוגמא 6.1.2.

$$\sin(x) \nrightarrow_{x\to\infty} \infty$$

כדי להוָכח בעובדה זו, נתבונן במשחק הבא:

$$\forall M_1 \exists M_2 \forall x[x > M_2 \Rightarrow \sin(x) > M_1]$$

הנה איסטרטגיַת נצחון לשחקן ה- $\forall$:

בחר את M_1 כך: $M_1 = 2$.

בחר את x כך: $x = M_2 + 1$.

מדוע זאת איסטרטגיַת נצחון? כי אם שחקן ה- $\forall$ יבחר כך את M_1, x אז ודאי יתקיֵם $M_2 < x$ ואילו $\sin(x) \leq M_1$. לכן ערך האמת של הנֻסחה $x > M_2 \Rightarrow \sin(x) > M_1$ יהיה F, ושחקן ה- $\forall$ ינצח.

[3] למה דוקא גדול מ- 1? סתם לשם הנוחות. כבר הוכחנו לגבי סדרות שמותר לדרֹש בחירת מספר גדול ממספר קבוע.

הגדרה 6.1.5. תהי f פונקציה ממשית ויהי L מספרים ממשי. הפונקציה f שואפת ל- L כאשר x שואף ל- ∞, בסִמון

$$f(x) \to_{x\to\infty} L$$

או

$$lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

פֵרושו שלכל סביבה $B_\varepsilon(L)$ של L יש M כך שלכל $M < x$ מתקיֵם $f(x) \in B_\varepsilon(L)$. במילים אחרות:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists M \forall x > M[f(x) \in B_\varepsilon(L)]$$

הגדרת $lim_{x\to-\infty} f(x)$ דומה.

דוגמא 6.1.3.

$$\frac{1}{x} \to_{x\to\infty} 0$$

דוגמא 6.1.4.

$$\frac{1}{x} + 2 \to_{x\to-\infty} 2$$

הגדרה 6.1.6. תהי f פונקציה ממשית ויהי c מספר ממשי. הפונקציה f שואפת ל- ∞ כאשר x שואף ל- c, בסִמון

$$f(x) \to_{x\to c} \infty$$

או

$$lim_{x\to c} f(x) = \infty$$

פֵרושו שלכל M יש סביבה מנֻקבת $B^*_\delta(c)$ של c כך שלכל $x \in B^*_\delta(c)$ מתקיֵם $f(x) > M$. במילים אחרות:

$$\forall M \in \mathbb{R} \exists\delta > 0 \forall x \in B^*_\delta(c)[f(x) > M]$$

השִויון $lim_{x\to c} f(x) = \infty$ מֻגדר באפן דומה.

דוגמא 6.1.5.

$$\frac{1}{|x|} \to_{x\to 0} \infty$$

דוגמא 6.1.6.

$$\frac{1}{x} \not\to_{x\to 0} \infty$$

אכן, הנה איסטרטגיַת נצחון לשחקן הלכל: בחר

$$M = 0$$
$$x = -\frac{\varepsilon}{2}$$

דוגמא 6.1.7.

$$\ln(|x|) \to_{x\to 0} -\infty$$

הגדרה 6.1.7. תהי f פונקציה ממשית ויהיו c, L מספרים ממשיים. הפונקציה f שואפת ל- L כאשר x שואף ל- c, בסִמון

$$f(x) \to_{x\to c} L$$

או

$$lim_{x\to c} f(x) = L$$

פֵרושו שלכל סביבה $B_\varepsilon(L)$ של L יש סביבה מנֻקבת $B^*_\delta(c)$ של c כך שלכל $x \in B^*_\delta(c)$ מתקיֵם $f(x) \in B_\varepsilon(L)$. במילים אחרות:

$$\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 \forall x \in B^*_\delta(c)[f(x) \in B_\varepsilon(L)]$$

דוגמא 6.1.8.

$$2 + x^2 \to_{x\to 0} 2$$

הטענה הבאה דרושה להוכחת יחידות הגבול.

טענה 6.1.8. יהיו $c, L_1, L_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. אז:

א. אם $L_1 \neq L_2$ אז יש שתי סביבות זרות[4] U_1, U_2 של L_1, L_2 בהתאמה.

ב. לכל שתי סביבות מְנֻקבות V_1, V_2 של c הקבוצה $V_1 \cap V_2$ היא סביבה מְנֻקבת של c.

הוכחה. א. נפריד למקרים. מקרה א: L_1, L_2 הם מספרים. נניח בלי הגבלת כלליות ש- $L_1 < L_2$. נגדיר

$$\varepsilon = \frac{L_2 - L_1}{3}$$

הנה שתי סביבות זרות כנדרש:

$$U_1 = B_\varepsilon(L_1)$$
$$U_2 = B_\varepsilon(L_2)$$

מקרה ב: L_1 מספר ואילו $L_2 = \infty$. הנה שתי סביבות זרות כנדרש:

$$U_1 = B_1(L_1)$$
$$U_2 = (L_1 + 2, \infty)$$

מקרה ג: L_1 מספר ואילו $L_2 = -\infty$. דומה למקרה ב.
מקרה ד: L_2 מספר ואילו $L_1 \in \{-\infty, \infty\}$. דומה למקרה ב.
מקרה ה: $L_1 = \infty, L_2 = -\infty$. הנה שתי סביבות זרות כנדרש:

$$U_1 = (1, \infty)$$
$$U_2 = (-\infty, -1)$$

מקרה ו: $L_1 = -\infty, L_2 = \infty$. דומה למקרה ה.
ב. בכל אחד מהמקרים הבאים קל להוכיח ש- $V_1 \cap V_2$ היא סביבה מְנֻקבת של c:

א. $c \in \mathbb{R}$.

ב. $c = \infty$.

ג. $c = -\infty$.

□

ננסח את משפט יחידות הגבול בבת-אחת לארבעת סוגי הגבולות:

משפט 6.1.9 **(יחידות הגבול).** תהי f פונקציה ויהיו $c, L_1, L_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. אם

$$f(x) \to_{x\to c} L_1$$
$$f(x) \to_{x\to c} L_2$$

אז $L_1 = L_2$.

הוכחת יחידות הגבול של פונקציה דומה להוכחת יחידות הגבול של סדרה ולכן נשמיטה. כך גם לגבי הטענה הבאה.

טענה 6.1.10. אם הפונקציות f, g שוות בסביבה מְנֻקבת של c אז

$$lim_{x\to c} f(x) = lim_{x\to c} g(x)$$

או ששני הגבולות לא קיָמים.

[4] כלומר שחִתוכן הוא הקבוצה הריקה.

6.2 גבול חד-צדדי

בסעיף זה, נגדיר גבול כאשר x שואף למספר מימין או משמאל בלבד. התכונות של הגבול החד-צדדי דומות לתכונות של הגבול. אולם החִדוש המעניֵן של הסעיף הוא משפט הסָכום, לפיו נִתן לחשֹב על הגבול כאל גבול מימין ומשמאל בנפרד.

הגדרה 6.2.1. יהיו $c \in \mathbb{R}, r \in (0,\infty)$. הסביבה הימנית של c ברדיוס r היא הקטע $[c, c+r)$. באפן דומה מגדירים סביבה שמאלית. הסביבה הימנית המנֻקבת של c ברדיוס r היא הקטע $(c, c+r)$. באפן דומה מגדירים סביבה שמאלית מנֻקבת.

הגדרה 6.2.2. תהי f פונקציה, ויהיו $c \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. הפונקציה f שואפת ל- L כאשר x שואף ל- c מימין, בסָמון

$$f(x) \to_{x\to c+} L$$

או

$$lim_{x\to c+} f(x) = L$$

פֵרושו שלכל סביבה U של L יש סביבה ימנית V של c כך שלכל $x \in V$ מתקיֵם $f(x) \in U$. באפן דומה מגדירים שאיפה משמאל.

הנה פֵרוט של הגדרה 6.2.2:

הגדרה 6.2.3. תהי f פונקציה ויהיו $c, L \in \mathbb{R}$. הפונקציה f שואפת לאינסוף כאשר x שואף ל- c מימין, בסָמון

$$f(x) \to_{x\to c+} \infty$$

או

$$lim_{x\to c+} f(x) = \infty$$

פֵרושו שלכל M יש סביבה ימנית מנֻקבת $(c, c+\delta)$ של c כך שלכל $x \in (c, c+\delta)$ מתקיֵם $f(x) > M$. באפן דומה מגדירים שאיפה למינוס אינסוף, או שאיפה משמאל.

הפונקציה f שואפת ל- L כאשר x שואף ל- c מימין, בסָמון

$$f(x) \to_{x\to c+} L$$

או

$$lim_{x\to c+} f(x) = L$$

פֵרושו שלכל סביבה $B_\varepsilon(L)$ של L יש סביבה מנֻקבת ימנית $(c, c+\delta)$ של c כך שלכל $x \in (c, c+\delta)$ מתקיֵם $f(x) \in B_\varepsilon(L)$. באפן דומה מגדירים

$$f(x) \to_{x\to c-} L$$

משפט 6.2.4 (יחידות הגבול החד-צדדי). תהי f פונקציה ויהיו $L, M \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. אם

$$f(x) \to_{x\to c+} L$$
$$f(x) \to_{x\to c+} M$$

או

$$f(x) \to_{x\to c-} L$$
$$f(x) \to_{x\to c-} M$$

אז $M = L$.

טענה 6.2.5. אם הפונקציות f,g שוות בסביבה מנֻקבת ימנית של c אז

$$lim_{x\to c+}f(x)=lim_{x\to c+}g(x)$$

או ששני הגבולות לא קיָמים. טענה דומה מתקיֶמת לגבי גבול חד-צדדי שמאלי.

ההגדרה הבאה היא הרחבה נוספת של הגדרת הגבול בגרסה שמתאימה לתלמיד מצטיֵן. מי שמצטיֵן פחות, יעדיף לקרא את ההגדרה שאחריה.

הגדרה 6.2.6. תהי f פונקציה, תהי A קבוצה של מספרים ממשיים, יהי c מספר ממשי[5] ויהי $L\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$. הפונקציה f שואפת ל- L כאשר x שואף ל- c דרך A, בסִמון

$$f(x)\to_{\substack{x\to c\\ x\in A}}L$$

או

$$lim_{\substack{x\to c\\ x\in A}}f(x)=\infty$$

פֵרושו שלכל סביבה U של L יש סביבה מנֻקבת V של c כך שלכל $x\in V\cap A$, מתקיֵם $f(x)\in U$.

ההגדרה הבאה היא גרסה מפֹרטת של הגדרה 6.2.6.

הגדרה 6.2.7. תהי f פונקציה, תהי A קבוצה של מספרים ממשיים ויהיו c,L מספרים ממשיים.

א. $f(x)\to_{\substack{x\to c\\ x\in A}}\infty$

פֵרושו

$$\forall M\exists\delta>0\forall x\in B_\delta(c)\cap A[f(x)>M]$$

ב. $f(x)\to_{\substack{x\to c\\ x\in A}}-\infty$ פֵרושו $\forall M\exists\delta>0\forall x\in B_\delta(c)\cap A[f(x)<M]$

ג. $f(x)\to_{\substack{x\to c\\ x\in A}}L$ פֵרושו $\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\in B_\delta(c)\cap A[f(x)\in B_\varepsilon(L)]$

דוגמא 6.2.1. נגדיר

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in(0,\infty)\setminus\mathbb{Q}\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$$

אז:

א. $lim_{x\to 0}f(x)$ איננו קיָם.

ב. $lim_{x\to 0+}f(x)$ איננו קיָם.

ג. $lim_{\substack{x\to 0\\ x\in\mathbb{Q}}}f(x)=0$

[5] אפשר להכליל עוד את ההגדרה, כך ש- $c\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$, אבל כדי שלא להקשות על התלמיד, נוָתר על מקרה זה.

ד. $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbb{Q} \cup (1,\infty)}} f(x) = 0$

ה. $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} f(x)$ איננו קיָם.

שאלה 6.2.2. הגדרה 6.2.6 היא הכללה של הגדרת הגבול, כלומר :

$$f(x) \to_{x\to c} L$$

אם"ם

$$f(x) \to_{\substack{x \to c \\ x \in \mathbb{R}}} L$$

לפי הטענה הבאה, הגדרה 6.2.6 היא הכללה של הגדרת הגבולות החד-צדדיים.

טענה 6.2.8.

$$f(x) \to_{x\to c+} L$$

אם"ם

$$f(x) \to_{\substack{x \to c \\ x \in (c,\infty)}} L$$

הטענה המקבילה לגבי גבול חד-צדדי שמאלי מתקיֶמת גם כן.

טענה 6.2.9. אם $A \subseteq B$ והגבול $\lim_{\substack{x \to c \\ x \in B}} f(x)$ קיָם, אז

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in A}} f(x) = \lim_{\substack{x \to c \\ x \in B}} f(x)$$

בפרט, הגבול שבאגף שמאל קיָם.

הנה גולת הכותרת של הסעיף :

משפט 6.2.10. תהי f פונקציה, c מספר ממשי ו- $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. אז הגבול $lim_{x\to c} f(x)$ קיָם אם"ם שני הגבולות החד-צדדיים $lim_{x\to c+} f(x)$, $lim_{x\to c-} f(x)$ קיָמים ושוִים. במקרה זה,

$$lim_{x\to c} f(x) = lim_{x\to c+} f(x) = lim_{x\to c-} f(x)$$

הוכחה. אם הגבול $lim_{x\to c} f(x)$ קיָם כלומר $\lim_{\substack{x \to c \\ x \in \mathbb{R}}} f(x)$ קיָם, אז לפי טענות 6.2.86.2.9, גם הגבולות החד-צדדים קיָמים והם שוִים לו. נותר להוכיח שאם הגבולות החד-צדדים קיָמים ושוִים ל- L שהוא מספר, ∞ או $-\infty$, אז

$$lim_{x\to c} f(x) = L$$

נניח :

$$lim_{x\to c+} f(x) = L \quad (1)$$
$$lim_{x\to c-} f(x) = L \quad (2)$$

מקרה א: $L = \infty$. יהי $M \in \mathbb{R}$. לפי (1) יש δ_1 כך ש:

$$\forall x \in (c, c+\delta_1)[f(x) > M] \quad (3)$$

לפי (2) יש δ_2 כך ש:

$$\forall x \in (c, c-\delta_2)[f(x) > M] \quad (4)$$

נגדיר:

$$\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$$

לפי (3),(4) מתקיֵם:

$$\forall x \in (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)[f(x) > M]$$

לפיכך:

$$f(x) \to_{x \to c} \infty$$

מקרה ב: $L = -\infty$. דומה למקרה א.
מקרה ג: $L \in \mathbb{R}$. יהי $\varepsilon > 0$. לפי (1), יש $\delta_1 > 0$ כך ש:

$$\forall x \in (c, c+\delta_1)[f(x) \in B_\varepsilon(L)] \quad (3)$$

לפי (2), יש $\delta_2 > 0$ כך ש:

$$\forall x \in (c-\delta_2, c)[f(x) \in B_\varepsilon(L)] \quad (4)$$

נגדיר:

$$\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$$

כך נקבל:

$$\forall x \in (c-\delta, c) \cup (c, c+\delta)[f(x) \in B_\varepsilon(L)]$$

לפיכך:

$$f(x) \to_{x \to c} L$$

□

נציג עתה גרסה כללית יותר למשפט 6.2.10 והוכחה קצרה יותר.

משפט 6.2.11. תהי f פונקציה, יהיו $c, L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ ותהי A קבוצה של מספרים. אז הגבול $lim_{x \to c} f(x)$ קיָם אם"ם שני הגבולות

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in A}} f(x)$$

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in \mathbb{R} \setminus A}} f(x)$$

קיָמים ושוִים. במקרה זה,

$$lim_{x \to c} f(x) = \lim_{\substack{x \to c \\ x \in A}} f(x) = \lim_{\substack{x \to c \\ x \in \mathbb{R} \setminus A}} f(x)$$

הוכחה. כוון אחד נובע מטענות 6.2.86.2.9, ושאלה 6.2.2.
הכוון השני: נניח ששני הגבולות שוִים ל- L, כלומר:

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in A}} f(x) = L \quad (1)$$

$$\lim_{\substack{x \to c \\ x \in \mathbb{R} \setminus A}} f(x) = L \quad (2)$$

צריך להוכיח:

$$f(x) \to_{x \to c} L$$

תהי U סביבה של L. לפי (1), יש סביבה מנֻקבת V_1 של c כך שלכל $x \in V_1 \cap A$ מתקיֵם $f(x) \in U$.
לפי (2), יש סביבה מנֻקבת V_2 של c כך שלכל $x \in V_2 \setminus A$ מתקיֵם $f(x) \in U$.
נגדיר

$$V = V_1 \cap V_2$$

V היא סביבה מנֻקבת של c. יהי $x \in V$. נוכיח ש- $f(x) \in U$. מקרה א: $x \in A$. במקרה זה, $x \in V_1 \cap A$ ולכן $f(x) \in U$. מקרה ב: $x \notin A$. במקרה זה, $x \in V_2 \setminus A$ ולכן $f(x) \in U$.

□

6.3 אפיון היינה לגבול

היינה הגה שיטה לאפיֵן גבול של פונקציה בעזרת גבול של סדרה. אפיון זה מאפשר להוכיח משפטים לגבי גבול של פונקציה בעזרת משפטים לגבי גבול של סדרה (וגם להפך). בסעיפים הבאים נוכיח הרבה טענות בעזרת אפיון היינה. לעיתים נעשה זאת כדי לתרגל את אפיון היינה (למשל כאשר נדון באי-שוִיונות לגבי הגבול), לעיתים נעשה זאת כדי לפשט את ההוכחות (למשל כאשר נלמד גבול של סכום, הפרש, מכפלה ומנה של פונקציות). אבל בהוכחת תנאי קושי נעשה שִמוש עמוק באפיון היינה.

סִמון.

$$c \neq x_n \to c$$

פֵרושו שהסדרה $\langle x_n \rangle$ שואפת ל- c וכל אבריה שונים מ- c.

טענה 6.3.1. יהי $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. אז יש סדרה $\langle V_n \rangle$ של סביבות מנֻקבות של c כך שלכל סדרת מספרים ממשיים $\langle x_n \rangle$ אם $\forall n (x_n \in V_n)$ אז $x_n \to c$.[6]

הוכחה. מקרה א: $c \in \mathbb{R}$. במקרה זה, נגדיר

$$V_n = (c - \frac{1}{n}, c) \cup (c, c + \frac{1}{n})$$

נניח

$$\forall n (x_n \in V_n)$$

נוכיח:

$$x_n \to c$$

יהי $0 < \varepsilon$. נבחר $\frac{1}{\varepsilon} < n^*$. יהי $n^* \leq n$. אז

$$|x_n - c| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^*} < \varepsilon$$

[6] אפשר לדרֹש גם כוון שני: לכל סדרה $\langle x_n \rangle$ ששואפת ל- c, יש תת-סדרה $\langle x_{n_k} \rangle$ כך שלכל k, מתקיֵם $x_{n_k} \in V_k$. למעשה הסדרה שנבנה בהוכחה תקיֵם גם דרישה נוספת זו.

מקרה ב: $c=\infty$. נגדיר

$$V_n=(n,\infty)$$

נניח

$$\forall n(x_n\in V_n)$$

נוכיח:

$$x_n\to c$$

יהי $M\in\mathbb{R}$. נבחר $M<n^*$. יהי $n^*\le n$. אז

$$M<n^*\le n<x_n$$

מקרה ג: $c=-\infty$. מקרה זה דומה למקרה ב. $\square$

משפט 6.3.2. [אפיון היינה לגבול של פונקציה] תהי f פונקציה ויהיו $c,L\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,\infty\}$. אז

$$f(x)\to_{x\to c}L$$

אם"ם לכל סדרה $\langle x_n\rangle$, מתקיֵם:

$$[c\ne x_n\to c]\Rightarrow[f(x_n)\to L]$$

הוכחה. כוון ראשון: נניח

$$f(x)\to_{x\to c}L \quad (1)$$

תהי $\langle x_n\rangle$ סדרה. עלינו להוכיח:

$$[c\ne x_n\to c]\Rightarrow[f(x_n)\to L]$$

נניח:

$$c\ne x_n\to c \quad (2)$$

נוכיח:

$$f(x_n)\to L$$

תהי U סביבה של L. לפי (1), יש סביבה מנֻקבת V של c כך ש:

$$\forall x\in V[f(x)\in U] \quad (3)$$

$V\cup\{c\}$ היא סביבה של c. לכן לפי (2), יש n^* כך ש:

$$\forall n\ge n^*[x_n\in(V\cup\{c\})]$$

אולם $x_n\ne c$ ולכן

$$\forall n\ge n^*[x_n\in V] \quad (4)$$

יהי $n^*\le n$. לפי (4), $x_n\in V$. לכן לפי (3), $f(x_n)\in U$.

כוון שני: נניח

$$f(x)\nrightarrow_{x\to c}L \quad (1)$$

נוכיח שיש סדרה $\langle x_n\rangle$ כך שמתקיֶמת שלילת הפסוק הבא:

$$[c\ne x_n\to c]\Rightarrow[f(x_n)\to L]$$

כלומר שמתקיֵם הפסוק הבא:

$$[c\ne x_n\to c]\wedge[f(x_n)\nrightarrow L]$$

לפי (1), יש סביבה U של L כך ש: (2) לכל סביבה מנֻקבת V של c מתקיֵם:

$$\exists x \in V[f(x) \notin U]$$

תהי $\langle V_n \rangle$ סדרה של סביבות מנֻקבות של c כמו בטענה 6.3.1. לכל n נוכל להציב ב-(2) את V_n במקום V ולכן:

$$\exists x \in V_n[f(x) \notin U]$$

לכל n נבחר $x_n \in V_n$ כך ש: $f(x_n) \notin U$. מצד אחד, לפי טענה 6.3.1,

$$x_n \to c$$

מצד שני,

$$f(x_n) \nrightarrow L$$

כי

$$\forall n[f(x_n) \notin U]$$

□

מסקנה 6.3.3. $lim_{x \to c} f(x)$ קיָם אם"ם לכל סדרה $\langle x_n \rangle$ מתקיֵם: אם $c \neq x_n \to c$ אז הסדרה $\langle f(x_n) \rangle$ מתכנסת.

הוכחה. הכוון הקל: נניח ש- $lim_{x \to c} f(x)$ קיָם. נסמנו ב- L. אז לפי אפיון היינה לכל סדרה $\langle x_n \rangle$ אם $c \neq x_n \to c$ אז $f(x_n) \to L$.

הכוון הקשה: נניח שהתנאי מתקיֵם ונוכיח שהגבול $\lim_{x \to c} f(x)$ קיָם. מספיק להוכיח שיש מספר L כך שלכל סדרה $\langle x_n \rangle$ שמקיֶמת $c \neq x_n \to c$ מתקיֵם $f(x_n) \to L$ (יש לשים היטב לסדר הכמתים: לפי התנאי, לכל סדרה כזו יש מספר שאליו היא מתכנסת אבל אנחנו נוכיח שיש מספר L אחד שמתאים בבת-אחת לכל הסדרות האלו), כי מכך נסיק לפי אפיון היינה ש-

$$f(x) \to_{x \to c} L$$

נניח בשלילה שלא קיָם L כזה. אז יש שתי סדרות $\langle x_n \rangle$, $\langle y_n \rangle$ ושני מספרים שונים L_1, L_2 כך ש:

$$\begin{aligned} c \neq x_n &\to c \\ f(x_n) &\to L_1 \\ c \neq y_n &\to c \\ f(y_n) &\to L_2 \end{aligned}$$

נתבונן בסדרה הבאה:

$$x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots$$

באֹפן רשמי, נגדיר

$$z_n = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{אי-זוגי } n \\ y_{\frac{n}{2}}, & \text{זוגי } n \end{cases}$$

כמובן

$$c \neq z_n \to c$$

אבל L_1, L_2 הם שני גבולות חלקיים שונים של הסדרה $\langle f(z_n) \rangle$ ולפיכך היא מתבדרת, בסתירה לתנאי שהנחנו. □

6.4 רציפות

6.4.1 הגדרת רציפות ואפיון היינה לרציפות

הגדרה 6.4.1. f רציפה ב- c פֵּרושו:

$$lim_{x\to c}f(x)=f(c)$$

נפרט את הדרישות לרציפות:

א. f מֻגדרת בנקודה c.

ב. הגבול $lim_{x\to c}f(x)$ קיָם.

ג. הגבול $lim_{x\to c}f(x)$ שוֶה לערכהּ של הפונקציה f בנקודה c.

נציג גרסה חד-צדדית של רציפות:

הגדרה 6.4.2. f רציפה ב- c מימין פֵּרושו:

$$lim_{x\to c+}f(x)=f(c)$$

רציפות משמאל מֻגדרת באֹפן דומה.

טענה 6.4.3. f רציפה ב- c אם"ם f רציפה ב- c מימין ומשמאל.

הגדרה 6.4.4. f רציפה בקטע $[a,b)$ פֵּרושו ש- f רציפה בכל נקודה בקטע הפתוח (a,b) והיא רציפה משמאל בנקודה a.
רציפות בקטע מאחד מהסוגים $(a,b),(a,b],[a,b],(-\infty,b),(a,\infty),(-\infty,\infty)$ מֻגדרת באֹפן דומה.

משפט 6.4.5 (אפיון היינה לרציפות)**.** f רציפה ב- c אם"ם לכל סדרה $\langle x_n\rangle$ מתקיֵם:

$$[x_n\to c]\Rightarrow[f(x_n)\to f(c)]$$

המשפט איננו נובע מיידית מאפיון היינה לגבול, כי שם כל אברי הסדרה $\langle x_n\rangle$ שונים מ- c.

הוכחה. בכוון הקל נניח: (1) לכל סדרה $\langle x_n\rangle$ מתקיֵם:

$$[x_n\to c]\Rightarrow[f(x_n)\to f(c)]$$

עלינו להוכיח ש- f רציפה ב- c כלומר:

$$f(x)\to_{x\to c}f(c)$$

נוכיח זאת בעזרת אפיון היינה לגבול. נניח:

$$c\neq x_n\to c \quad (2)$$

לפי (1),(2) נקבל:

$$f(x_n)\to f(c)$$

הכוון הקשה: נניח ש- f רציפה ב- c, כלומר:

$$f(x)\to_{x\to c}f(c) \quad (1)$$

תהי $\langle x_n\rangle$ סדרה. לפי (1) ואפיון היינה מתקיֵם:

$$[c\neq x_n\to c]\Rightarrow[f(x_n)\to f(c)] \quad (2)$$

נניח:

$$x_n\to c \quad (3)$$

נוכיח:

$$f(x_n) \to f(c)$$

(לו ידענו שכל אברי הסדרה $\langle x_n \rangle$ שונים מ- c אז פה ההוכחה היתה מסתיֶמת). נגדיר:

$$A = \{n \in \mathbb{N}^+ : x_n \neq c\} \quad (4)$$

לפי (2),(4) נקבל:

$$f(x_n) \to_{n\to\infty, n\in A} f(c) \quad (5)$$

עבור $n \notin A$ מתקיֵם $x_n = c$ ולכן $f(x_n) = f(c)$. לפיכך

$$f(x_n) \to_{n\to\infty, n\notin A} f(c) \quad (6)$$

לפי (5),(6):

$$f(x_n) \to f(c)$$

□

הגדרה 6.4.6. הפונקציה f רציפה בקטע פתוח (a,b) פֵרושו שהיא רציפה בכל נקודה ב- I. הפונקציה f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ פֵרושו שהיא רציפה ב- (a,b), רציפה מימין ב- b ורציפה משמאל ב- a. באֹפן דומה מגדירים רציפות בקטעים מהצורות $(a,b]$,$[a,b)$,$[a,\infty)$ וכדומה. הפונקציה f רציפה פֵרושו שהיא רציפה בתחום הגדרתהּ.

6.4.2 מיון נקודות אי-רציפות

נקודות אי-הרציפות מתחלקות לשלשה סוגים.

הגדרה 6.4.7. c היא נקודת אי-רציפות סליקה של f פֵרושו שהגבול $\lim_{x\to c} f(x)$ קיָם, אבל שונה מ- $f(c)$.

מה עומד מאחורי השם "אי-רציפות סליקה"? אפשר לסלק את אי-הרציפות על ידי שִנוי של הפונקציה בנקודה אחת בלבד, כפי שיתברר בשאלה הבאה:

שאלה 6.4.1. נניח ש- c נקודת אי-רציפות סליקה של f. הוכיחו שהפונקציה הבאה רציפה:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq c \\ lim_{x\to c} f(x), & x = c \end{cases}$$

הגדרה 6.4.8. c נקודת אי-רציפות ממין ראשון או אי-רציפות מסוג קפיצה של f פֵרושו:

$$lim_{x\to c-} f(x) \neq lim_{x\to c+} f(x)$$

כלומר: הגבולות החד-צדדים קיָמים, אבל שונים.

הגדרה 6.4.9. c נקודת אי-רציפות ממין שני של f פֵרושו ש- c היא נקודת אי-רציפות של f אבל לא סליקה ולא קפיצה.

6.5 חִשוב גבול של פונקציה

6.5.1 אי-שִויוֹנות לגבי הגבול

בתת-סעיף זה הוכחת הטענות קלה יחסית. חִפוש ההוכחות הוא דרך יעילה להפנים את הגדרת הגבול. מֻמלץ להוכיח כל טענה פעם נוספת בעזרת אפיון היינה, כדי לתרגל את השִמוש באפיון היינה. הטענות הראשונות עוסקות בקשר בין המידע על תמונת הפונקציה (כלומר קבוצת האברים מהצורה $f(x)$, כאשר x בתחום של הפונקציה) לבין הגבול של הפונקציה (בהנחה שהוא קיָם).

טענה 6.5.1. אם

$$lim_{x\to c}f(x) < a$$

אז יש סביבה מנֻקבת V של c כך ש:

$$\forall x \in V[f(x) < a]$$

מצד שני, אם

$$lim_{x\to c}f(x) > a$$

אז יש סביבה מנֻקבת V של c כך ש:

$$\forall x \in V[f(x) > a]$$

מסקנה 6.5.2. אם

$$lim_{x\to c}f(x) > 0$$

אז יש מספר $a > 0$ ויש סביבה מנֻקבת V של c כך ש:

$$\forall x \in V[f(x) > a]$$

טענה 6.5.3. נניח:

$$lim_{x\to c}f(x) \in (a, b)$$

אז יש סביבה מנֻקבת V של c כך ש:

$$\forall x \in V[f(x) \in (a, b)]$$

הוכחה. נגדיר $L = lim_{x\to c}f(x)$, $\varepsilon = min\{L-a, b-L\}$. לפי הגדרת הגבול, יש סביבה מנֻקבת V של c כך ש:

$$\forall x \in V[f(x) \in B_\varepsilon(L)]$$

לכן

$$\forall x \in V[a \le L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon \le b]$$

□

השאלה הבאה מראה, שהכוון השני של טענה 6.5.3 איננו נכון:

שאלה 6.5.1. נתונה פונקציה:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \begin{cases} \cos(x), & \forall k \in \mathbb{Z}(x \neq k\pi) \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

הוכיחו:

א. $\forall x \in \mathbb{R}[f(x) \in (-1, 1)]$.

ב. $lim_{x\to 0}f(x) = 1$ ולכן $lim_{x\to 0}f(x) \notin (-1, 1)$.

טענה 6.5.4 היא גרסה מתֻקנת של הכוון השני: היחס $<$ מֻחלף ביחס $\le$. ברור שאם לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיֵם $f(x) \in [a, b]$ אז לא יתכן ש- f תשאף למספר מחוץ לקטע $[a, b]$ כאשר x שואף למספר כלשהו. יתר על כן, לפי טענה 6.5.4, מספיק להניח שלכל x בסביבה מנֻקבת של c יתקיֵם $f(x) \in [a, b]$ כדי להסיק ש- $lim_{x\to c}f(x) \in [a, b]$ (בתנאי שהגבול קיָם). הוכחת הטענה מֻשארת לקורא.

טענה 6.5.4. תהי f פונקציה ויהי $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. נניח שיש סביבה מנֻקבת V של c כך ש:

$$\forall x \in V(f(x) \in [a, b])$$

אז

$$lim_{x \to c} f(x) \in [a, b]$$

או שהגבול לא קיָם.

הטענה הבאה עוסקת בקשר בין הגבולות של שתי פונקציות.

טענה 6.5.5. נתונות שתי פונקציות f, g, שמֻגדרות בסביבה נקובה V של c. נניח:

$$\forall x \in V[f(x) \leq g(x)]$$

אז:

$$lim_{x \to c} f(x) \leq lim_{x \to c} g(x)$$

בהנחה ששני הגבולות קיָמים.

הוכחה. נסמן: $L_1 = lim_{x \to c} f(x)$, $L_2 = lim_{x \to c} g(x)$. לפי הנתון יש סביבה מנֻקבת V של c כך ש:

$$\forall x \in V[f(x) \leq g(x)] \quad (1)$$

נניח בשלילה:

$$L_2 < L_1$$

נגדיר $\varepsilon = \frac{L_1 - L_2}{2}$ ונקבל:

$$L_2 < L_1 - \varepsilon < L_1$$

מכיון ש- $f(x) \to_{x \to c} L_1$, יש סביבה מנֻקבת V_1 של c כך ש:

$$\forall x \in V_1[L_1 - \varepsilon < f(x) < L_1 + \varepsilon] \quad (2)$$

הקבוצה $V \cap V_1$ היא סביבה מנֻקבת של c. לפי (1),(2) מתקיֵם:

$$\forall x \in V \cap V_1[L_1 - \varepsilon < f(x) \leq g(x)]$$

לכן אין סביבה מנֻקבת של c שבה $g(x) < L_1 - \varepsilon$. עתה לפי טענה 6.5.1 נקבל סתירה:

$$L_2 < L_1 - \varepsilon \leq lim_{x \to c} g(x) = L_2$$

□

שאלה 6.5.2. הציגו שתי פונקציות f, g ומספר c כך ש:

$$\forall x \in \mathbb{R}[f(x) < g(x)]$$
$$lim_{x \to c} f(x) = lim_{x \to c} g(x)$$

כמו בסדרות, החִדוש שבמשפט הבא הוא בעצם קיומו של הגבול.

משפט 6.5.6 (כלל הסנדביץ'). נתונות שלש פונקציות f, g, h וסביבה מנֻקבת V של c כך ש:

$$\forall x \in V[f(x) \leq g(x) \leq h(x)]$$

נניח:

$$lim_{x \to c} f(x) = lim_{x \to c} h(x) = L$$

אז:

$$lim_{x \to c} g(x) = L$$

ההוכחה שלפנינו היא קלה יותר בזכות אפיון היינה.

הוכחה. נניח:

$$c \neq x_n \to c \quad (1)$$

נוכיח:

$$g(x_n) \to L$$

לפי (1), יש n^* כך ש:

$$\forall n \geq n^*(x_n \in V)$$

לכן

$$\forall n \geq n^*[f(x_n) \leq g(x_n) \leq h(x_n)]$$

אולם לפי אפיון היינה, הסדרות $\langle f(x_n)\rangle$,$\langle h(x_n)\rangle$ שואפות ל- L. לכן לפי כלל הסנדביץ' לסדרות, מתקיֵם

$$g(x_n) \to L$$

עתה לפי אפיון היינה, נקבל:

$$g(x) \to_{x \to c} L$$

□

הגדרה 6.5.7. נניח ש- f, g הן פונקציות שתחומן הוא קבוצת המספרים הממשיים A. אז הפונקציות $f+g, f-g, fg, \frac{f}{g}, |f|$ הן הפונקציות שתחומן הוא A (למעט $\frac{f}{g}$ שהיא איננה מֻגדרת בנקודות x עבורן $g(x) = 0$) והן מֻגדרות כך:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x)$$
$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
$$|f|(x) = |f(x)|$$

לצֹרך הגדרה זו נתיַחס למספר כאל פונקציה קבועה. למשל, אם $f(x) = \sin(x)$ אז הפונקציה $f+3$ מתאימה למספר x את $\sin(x)+3$.

מסקנה 6.5.8. נניח:

א. הפונקציה f חסומה בסביבה מנֻקבת של c.

ב. $g(x) \to_{x \to c} 0$.

אז:

$$(fg)(x) \to_{x \to c} 0$$

הוכחה. לפי תנאי א, יש M וסביבה מנֻקבת V_1 של c כך ש:

$$\forall x \in V[-M < f(x) < M]$$

לפיכך:

$$\forall x \in V[-Mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)]$$

לפי תנאי ב, קל להוכיח שהבטויים $-Mg(x)$, $Mg(x)$ שואפים ל- 0. עתה לפי כלל הסנדביץ'

$$(fg)(x) \to_{x \to c} 0$$

□

טענה 6.5.9. התנאים הבאים שקולים:

א. $f(x) \to_{x \to c} L$.

ב. $(f-L)(x) \to_{x \to c} 0$.

ג. $|f-L|(x) \to_{x \to c} 0$.

משפט 6.5.10. נניח:

$$f(x) \to_{x \to c} L_1$$
$$g(x) \to_{x \to c} L_2$$

אז:

$$(f+g)(x) \to_{x \to c} L_1 + L_2$$
$$(f-g)(x) \to_{x \to c} L_1 - L_2$$
$$(fg)(x) \to_{x \to c} L_1 L_2$$
$$L_2 \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}(x) \to_{x \to c} \frac{L_1}{L_2}$$
$$|f|(x) \to_{x \to c} |L_1|$$

הוכחה. לפי האפיון של היינה לגבול, כללים אלו נובעים מהכללים המקבילים לגבי סדרות של מספרים. נציג הוכחה מפֹרטת של כלל המכפלה: נניח

$$c \neq x_n \to c$$

לפי אפיון היינה לגבול, מספיק להוכיח:

$$(fg)(x_n) \to_{x \to c} L_1 L_2$$

נשתמש באפיון היינה לגבי כל פונקציה בנפרד ובכלל המכפלה לגבי סדרות של מספרים:

$$(fg)(x_n) = f(x_n)g(x_n) \to_{x \to c} L_1 L_2$$

(השוְיון נובע מהגדרת הפונקציה fg).

□

6.6 גבול של פונקציה מֻרכבת

הגדרה 6.6.1. נתונות שתי פונקציות

$$f : A \to B$$
$$g : B \to C$$

ההרכבה של g על f מסֻמנת על ידי $g \circ f$ ומֻגדרת כך:

$$g \circ f : A \to C$$
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

נִתן לחשֹב על אפיון היינה כמקרה פרטי של המשפט הבא.

משפט 6.6.2. נתונים L, M ב- $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. נניח:

א. $f(x) \to_{x \to c} L$.

ב. $g(x) \to_{x \to L} M$.

ג. g רציפה ב-L (במקרה זה הוא מספר) או שיש סביבה מנֻקבת V של c כך ש: $\forall x \in V[f(x) \neq L]$.

אז:

$$(g \circ f)(x) \to_{x \to c} M$$

דרישה ג במשפט מפתיעה. לכאורה כאשר x קרוב מאד ל- c, לפי א $f(x)$ מאד קרוב ל- L וכך לפי ב $g(f(x))$ מאד קרוב ל- M. אולם יש לשים לב להבדל בין סביבה לבין סביבה מנֻקבת. כדי להשתמש בתנאי ב עלינו לודא ש- $f(x) \neq L$, או ש- g רציפה ב- $f(c)$. עתה נמליץ לקורא לכתֹב את ההוכחה לבד ואחר כך להשוֹת להוכחה שמופיעה כאן.

הוכחה. תהי U סביבה של M. לפי תנאי ב יש סביבה מנֻקבת V^* של L כך ש:

$$\forall x \in V^*[g(x) \in U] \quad (1)$$

מכיון ש-$V^* \cup \{L\}$ היא סביבה של L, לפי תנאי א יש סביבה מנֻקבת V של c כך ש:

$$\forall x \in V[f(x) \in V^* \cup \{L\}] \quad (2)$$

כאן ההוכחה מתחלקת למקרים שמופיעים בהנחה ג. מקרה א: יש סביבה V_1 של c כך ש:

$$\forall x \in V_1[f(x) \neq L] \quad (3)$$

יהי $x \in V \cap V_1$. נוכיח:

$$\forall x \in V \cap V_1[g(f(x)) \in U]$$

יהי $x \in V \cap V_1$. לפי (2),(3), $f(x) \in V^*$. לכן לפי (1), $g(f(x)) \in U$.
מקרה ב: הפונקציה g רציפה ב- L. יהי $x \in V$. נוכיח:

$$g(f(x)) \in U$$

לפי (2), $f(x) \in V^* \cup \{L\}$. מצד אחד, אם $f(x) \in V^*$ אז לפי (1),

$$g(f(x)) \in U$$

מצד שני, אם $g(x) = L$ אז לפי הרציפות של הפונקציה g בנקודה L, מתקיֵם:

$$g(f(x)) = g(L) = lim_{x \to L} g(x) = M \in U$$

□

הוכחת המסקנה הבאה מֻשארת לקורא.

מסקנה 6.6.3. אם f רציפה ב- c ו- g רציפה ב- $f(c)$ אז $g \circ f$ רציפה ב- c.

6.7 תנאי קושי לקיום גבול של פונקציה בנקודה

הגדרה 6.7.1. הפונקציה f מקיֶמת את תנאי קושי לקיום גבול ב- c פֵרושו :

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0\forall x, y \in B^*_\delta(c)[|f(x) - f(y)| < \varepsilon]$$

משפט 6.7.2. הגבול $lim_{x\to c}f(x)$ קיָם אם"ם הפונקציה f מקיֶמת את תנאי קושי להתכנסות ב- c.

הוכחה. כוון ראשון : נניח

$$f(x) \to_{x\to c} L \quad (1)$$

נוכיח ש-f מקיֶמת את תנאי קושי לקיום גבול ב- c. יהי $\varepsilon > 0$. לפי (1), יש $\delta > 0$ כך ש :

$$\forall x \in B^*_\delta(c)[|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}] \quad (2)$$

נוכיח :

$$\forall x, y \in B^*_\delta(c)[|f(x) - f(y)| < \varepsilon]$$

יהיו $x, y \in B^*_\delta(c)$. לפי אי-שִוְיון המשֻלש :

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - L| + |L - f(y)| <_{(2)} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

כוון שני : נניח ש- f מקיֶמת את תנאי קושי לקיום גבול ב- c. נוכיח שהגבול $\lim_{x\to c} f(x)$ קיָם בעזרת אפיון היינה לקיום גבול של פונקציה (מסקנה 6.3.3). נניח

$$c \neq x_n \to c \quad (1)$$

ונוכיח שהסדרה $\langle f(x_n)\rangle$ מתכנסת. נעשה זאת בעזרת תנאי קושי להתכנסות סדרות, כלומר נוכיח :

$$\forall\varepsilon > 0\exists n^*\forall n, k \ge n^*(|f(x_n) - f(x_k)| < \varepsilon]$$

. יהי $\varepsilon > 0$. לפי ההנחה (f מקיֶמת את תנאי קושי לקיום גבול ב- c) , יש סביבה מנֻקבת V של c כך ש :

$$\forall x, y \in V[|f(x) - f(y)| < \varepsilon] \quad (2)$$

לפי (1), יש n^* כך ש :

$$\forall n \ge n^*[x_n \in V] \quad (3)$$

עלינו להוכיח :

$$\forall n, k \ge n^*(|f(x_n) - f(x_k)| < \varepsilon]$$

יהיו $n^* \le n, k$. לפי (3),

$$x_n, x_k \in V$$

לכן לפי (2),

$$|f(x_n) - f(x_k)| < \varepsilon$$

□

6.8 משפט ערך הביניים

ציורית, נח לחשב על פונקציה רציפה ככזו שאפשר לצַיֵר בלי להרים את העט. רעיון זה מתבטא במשפט ערך הבינַיִם.[7] בעזרת משפט זה, נוכיח שיש פתרון למגוָן גדול של משוָאות ובפרט יש שֹרש רבועי לכל מספר חיובי. בנוסף, משפט ערך הבינַיִם מאפשר להוכיח קשרים בין התכונות הבאות של פונקציה: רציפה, מונוטונית ממש, תמונת קטע תחת הפונקציה היא קטע, הפונקציה חח"ע, ההפכית שלה רציפה.

הטענה הבאה היא גרסה חֲשובית של אפיון היינה לרציפות. לפי הטענה אפשר להחליף סדר בין גבול להפעלת פונקציה רציפה.

טענה 6.8.1. נניח ש- f רציפה ב- c ו- $x_n \to c$. אז:

$$lim_{n\to\infty}f(x_n) = f(lim_{n\to\infty}x_n)$$

סִמון. תהי A קבוצה שאיננה חסומה מלעיל. אז $sup(A)$ יֻגדר כ- ∞.

הטענה הבאה עוסקת בחסם עליון והיא הכנה למשפט ערך הביניים.

טענה 6.8.2. תהי A קבוצה לא ריקה של מספרים ממשיים. יש סדרה $\langle x_n \rangle$ של אברים ב- A כך ש-

$$x_n \to sup(A)$$

הוכחה. נגדיר x_n בהשראה: עבור $n = 1$, מכיון ש-$A \neq \emptyset$, נוכל לבחֹר $x_1 \in A$. נניח שכבר בחרנו את x_n. מכיון ש- $x_n \leq sup(A)$, יש $x_{n+1} \in A$ כך ש:

א. $x_n \leq x_{n+1}$.

ב. אם $sup(A)$ הוא מספר (כלומר שהקבוצה A חסומה מלעיל), אז $|x_{n+1} - sup(A)| < \frac{1}{n+1}$.

ג. אם $sup(A) = \infty$ אז $x_{n+1} > n + 1$.

עתה קל להוכיח ש-$x_n \to sup(A)$. □

משפט 6.8.3 (משפט ערך הביניים)**.** נתון:

א. f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$.

ב. $f(a) < y < f(b)$ או $f(b) < y < f(a)$.

אז:

$$\exists x \in [a, b](f(x) = y)$$

הוכחה. נוכיח את הטענה עבור המקרה $f(a) < y < f(b)$ (המקרה השני דומה). נגדיר

$$A = \{x \in [a, b] : f(x) \leq y\}$$

הקבוצה A איננה ריקה, כי $a \in A$. הקבוצה A חסומה מלעיל על ידי b. לפי אקסיומת החסם העליון אפשר להגדיר:

$$c = sup(A)$$

נוכיח:

$$f(c) = y$$

מומלץ להשכנע על ידי ציור שהטענה נכונה, לפני שממשיכים לקרֹא את ההוכחה. מצד אחד נוכיח:

$$y \leq f(c)$$

[7] מצד שני, יש פונקציות לא רציפות שמקיְמות את מסקנת משפט ערך הביניים.

נניח בשלילה:

$$f(c) < y$$

לפיכך:

$$c < b$$

לכן קל להוכיח בעזרת תכונת הארכימדיות שלכל n מספיק גדול, $c+\frac{1}{n} < b$ ולכן $c+\frac{1}{n}$ הוא בתחום של f. אולם $c+\frac{1}{n} \notin A$ כי c הוא חסם מלעיל של A. לפי טענה 6.8.1 והגדרת A נקבל:

$$y < f(c+\frac{1}{n}) \to f(c)$$

לפיכך:

$$y \leq f(c)$$

בסתירה להנחת השלילה. מצד שני נוכיח:

$$f(c) \leq y$$

לפי טענה 6.8.2 יש סדרה x_n של אברים מ- A ששואפת ל- c. מכיון ש- f רציפה ב-$[a,b]$, לפי טענה 6.8.1 נקבל:

$$y \geq f(x_n) \to f(c)$$

לפיכך:

$$y \geq f(c)$$

$\square$

הגדרנו קטע פתוח, קטע סגור וסוגים נוספים של קטעים. עכשו נגדיר את המושג קטע:[8]

הגדרה 6.8.4. קבוצה I של מספרים ממשיים נקראת קטע אם מתקיֵם:

$$\forall x,y \in I[x < y \Rightarrow (\forall z \in (x,y)[z \in I]]$$

מסקנה 6.8.5. אם f רציפה בקטע I אז התמונה של I, כלומר $\{f(x) : x \in I\}$ היא קטע.

שאלה 6.8.1. ציְרו פונקציה לא רציפה שתחומהּ הוא קטע I ותמונתהּ, $f[I]$ היא קטע.

שאלה 6.8.2. הוכח בעזרת משפט ערך הביניים:

$$\forall y > 0 \exists x(x^2 = y)$$

שאלה 6.8.3. הוכח בעזרת משפט ערך הביניים שיש פתרון למשוָאה הבאה:

$$x + \sin(x) = 3$$

טענה 6.8.6. לכל פולינום ממעלה אי-זוגית יש שורש.

[8] קל לראות שכל אחד מסוגי הקטעים שהגדרנו הוא קטע במובן שנגדיר כאן. בכוון השני, אם I הוא קטע במובן שנגדיר כאן, אז הקצה השמאלי של I הוא $inf(I)$ והקצה הימני שלו הוא $sup(I)$. עתה קל להראות ש- I הוא קטע סגור או פתוח או מאחד הסוגרים שהגדרנו. למשל, אם I חסום מלעיל אך לא מלרע והחסם העליון שלו b שיָך ל- I, אז $I = (-\infty, b]$.

6.9 מונוטוניות ורציפות

לפונקציה מונוטונית יש כמה תכונות טובות שיש לפונקציה רציפה. תחילה נוכיח קיום גבולות חד-צדדיים. לפי משפט 6.9.3 כל נקודת אי-רציפות של פונקציה מונוטונית היא ממין ראשון. משפט 6.9.5 מציג דרך קלה לבדיקת רציפות עבור פונקציה מונוטונית.

דוגמא 6.9.1. נתבונן בפונקציה הבאה:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x + [x]$$

למשל, $f(0.5) = 0.5$, $f(2.3) = 2.3 + 2 = 4.3$, $f(-9.2) = -9.2 + (-10) = -19.2$. הפונקציה f היא עולה ממש. עתה נחשב את הגבול $lim_{x\to c}f(x)$ עבור כמה ערכים של c ובפרט נתבונן בנקודות אי-הרציפות שלה.

$$f(x) \to_{x\to 2-} = 3 \neq f(2)$$
$$f(x) \to_{x\to 2+} = 4 = f(2)$$
$$f(x) \to_{x\to 2.3-} = 4.3 = f(2.3)$$
$$f(x) \to_{x\to 2.3+} = 4.3$$
$$f(x) \to_{x\to 2.3} = 4.3$$

באפן כללי, כל מספר שלם הוא נקודת אי-רציפות ממין ראשון של f. לעומת זאת, כל מספר שלם הוא נקודת רציפות של f.

טענה 6.9.1. נתונה פונקציה f שהיא עולה במובן הרחב. אם f מֻגדרת בסביבה שמאלית מנֻקבת של c אז הגבול החד-צדדי $lim_{x\to c-}f(x)$ קיָם במובן הרחב[9] ומתקיֵם השוִיון:

$$lim_{x\to c-}f(x) = sup\{f(x) : x < c\}$$

אם f מֻגדרת בסביבה ימנית מנֻקבת של c אז הגבול החד-צדדי $lim_{x\to c+}f(x)$ קיָם במובן הרחב[10] ומתקיֵם השוִיון:

$$lim_{x\to c+}f(x) = inf\{f(x) : x > c\}$$

הוכחה. נסתפק בהוכחת אי-השוִיון הראשון. נגדיר:

$$A = \{f(x) : x < c\}$$
$$L = sup(A)$$

נוכיח:

$$f(x) \to_{x\to c-} L$$

מקרה א: A חסומה. יהי $\varepsilon > 0$. לפי הגדרת החסם העליון, $L - \varepsilon$ איננו חסם מלעיל של A ולכן יש $a \in A$ כך ש-$L - \varepsilon < a$. לכן לפי הגדרת A יש $b < c$ כך ש-

$$L - \varepsilon < f(b)$$

נגדיר $\delta = c - b$ ונקבל $c - \delta = b$. נותר להוכיח:

$$\forall x \in (c-\delta, c)[f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)]$$

יהי $x \in (c-\delta, c)$, כלומר $b < x < c$. מכיון ש-f עולה במובן הרחב, נקבל:

$$L - \varepsilon < f(b) \leq f(x) \leq \underbrace{f(\frac{x+c}{2})}_{\text{ב-}A} \leq L < L + \varepsilon$$

[9] יתכן שהוא שוֶה ל-∞.
[10] יתכן שהוא שוֶה ל-$-\infty$.

מקרה ב: A איננה חסומה. במקרה זה, $sup(A) = \infty$. נוכיח:

$$f(x) \to_{x\to c-} \infty$$

יהי $M \in \mathbb{R}$. מכיון ש- A איננה חסומה, יש $c > b$ כך ש- $f(b) > M$. מכיון ש- f עולה במובן הרחב, מתקיֵם:

$$\forall x \in (b,c)[f(x) > M]$$

□

שאלה 6.9.2. נסחו את התנאי המקביל עבור פונקציה יורדת במובן הרחב. יש לשים לב להחלפת תפקידים בין sup לבין inf.

מסקנה 6.9.2. אם f עולה במובן הרחב בסביבה מנֻקבת של c אז הגבולות החד-צדדים ב-c קיָמים ומתקיֵם אי-השוְיון:

$$lim_{x\to c-}f(x) \le lim_{x\to c+}f(x)$$

תנאי דומה מתקיֵם עבור פונקציה יורדת במובן הרחב, אולם אי-השוְיון מתהפך.

משפט 6.9.3. אם f מונוטונית במובן הרחב בקטע הפתוח (a,b) אז כל נקודת אי-רציפות $c \in (a,b)$ היא נקודת אי-רציפות ממין ראשון.

סִמון. תהי f פונקציה ותהי I קבוצה של מספרים בתחום של f. נסמן את התמונה של I תחת הפונקציה f כך:

$$f[I] = \{f(x) : x \in I\}$$

עתה נראה שמונוטוניות מקלה על בדיקת רציפות.

טענה 6.9.4. אם f מונוטונית במובן הרחב בקטע I ו-$f[I]$ הוא קטע, אז f רציפה ב- I.

הוכחה. נניח בלי הגבלת הכלליות ש-f עולה במובן הרחב. נניח בשלילה ש- $c \in I$ היא נקודת אי-רציפות של f. אז לפי משפט 6.9.3:

$$lim_{x\to c-}f(x) < lim_{x\to c+}f(x)$$

נקבע $y \neq f(c)$ שמקיֵם:

$$lim_{x\to c-}f(x) < y < lim_{x\to c+}f(x)$$

כלומר:

$$sup\{f(x) : x < c\} < y < inf\{f(x) : x > c\}$$

לפי הגדרת החסם העליון והתחתון מתקיֵם:

$$\forall x \in I[f(x) \neq y]$$

נראה שזה סותר את העובדה ש-$f[I]$ הוא קטע. נבחר שתי נקודות $x_1, x_2 \in I$ כך ש-$x_1 < c < x_2$. מכיון ש-f עולה במובן הרחב,

$$f(x_1) \le sup\{f(x) : x < c\} = lim_{x\to c-}f(x) < y < lim_{s\to c+}f(x) = inf\{f(x) : x > c\} \le f(x_2)$$

לפיכך:

$$f(x_1) < y < f(x_2)$$

לו $f[I]$ היה קטע, היינו מקבלים $y \in f[I]$. □

משפט 6.9.5. תהי f פונקציה מונוטונית במובן הרחב בקטע I. אז f רציפה ב-I אם"ם $f[I]$ הוא קטע.

הוכחה. כוון אחד: אם f רציפה אז לפי מסקנה 6.8.5 היא קטע.
כוון שני: אם $f[I]$ הוא קטע ו-f מונוטונית במובן הרחב אז לפי טענה 6.9.4 היא רציפה. □

מכאן נעבור לפונקציות מונוטוניות ממש. מי שלמד את המושג איזומורפיזם ויודע שפונקציה הפכית של איזומורפיזם גם היא איזומורפיזם, לא יתפלא שהפכית של עולה היא עולה והפכית של יורדת היא יורדת. מי שאיננו מכיר את המושג איזומורפיזם, ידלג על תנאי ג שמופיע בשאלה הבאה.

שאלה 6.9.3. נתונה פונקציה $f : I \to J$ חח"ע ועל. הוכיחו שהתנאים הבאים שקולים:

א. f עולה ממש.

ב. $f : \langle I, <\rangle \to \langle J, <\rangle$ הוא איזומורפיזם.

ג. $f^{-1} : \langle J, <\rangle \to \langle I, <\rangle$ הוא איזומורפיזם.

ד. f^{-1} עולה ממש.

נסחו תנאים דומים עבור פונקציה יורדת (אל תשכחו להפֹך את הסדר רק במבנה אחד שמופיע בתנאי ב).

טענה 6.9.6. כל פונקציה מונוטונית ממש היא חח"ע.

הוכחה. נניח ש-f איננה חח"ע ונוכיח שהיא איננה מונוטונית ממש. מכיון שהיא איננה חח"ע, יש x, y בתחומהּ כך ש:

$$x < y \wedge f(x) = f(y)$$

לכן היא איננה מונוטונית ממש. $\square$

טענה: אם f חח"ע ולא מונוטונית ממש בקטע I, אז יש שלשה מספרים $a, b, c \in I$ כך ש:

$$a < b < c$$
$$[f(a) < f(b) > f(c)] \vee [f(a) > f(b) < f(c)]$$

הוכחה. נאמר שזוג הנקודות $\langle a, b\rangle$ מעיד ש- f לא עולה, כאשר $a < b \wedge f(a) \geq f(b)$ או $b < a \wedge f(b) \geq f(a)$. באֹפן דומה נגדיר זוג נקודות שמעיד ש-f לא יורדת. נאמר שהנקודה a מעידה ש-f לא עולה אם יש b כך שהזוג $\langle a, b\rangle$ מעיד ש-f לא עולה. באֹפן דומה נגדיר נקודה שמעידה ש-f לא יורדת. עתה נדון במקרה שלנו. מכיון ש-f לא עולה, יש זוג נקודות שמעיד שהיא לא עולה. לכן יש נקודה x שמעידה ש-f לא עולה. באֹפן דומה, מכיון ש-f לא יורדת, יש נקודה y שמעידה ש-f לא יורדת. נפריד לארבעה מקרים בהתאים לשאלה האם $x < y$ ולשאלה האם $f(x) < f(y)$. התכונה המשֻתפת לארבעת המקרים היא שהזוג $\langle x, y\rangle$ מעיד ש-f לא עולה או מעיד שהיא לא יורדת (הוא ודאי מעיד על אחד מהם). מכיון שהמקרים דומים נוכיח את הטענה רק עבור מקרה א.

מקרה א: $x < y \wedge f(x) < f(y)$. מכיון שהנקודה x מעידה ש-f לא עולה, יש z כך שהזוג $\langle x, z\rangle$ מעיד ש-f לא עולה. לא יתכן ש-$y = z$, כי הזוג $\langle x, y\rangle$ איננו מעיד ש-f לא עולה. לכן $y \neq z$. נפריד שוב למקרים.
מקרה א1: $z < x$. במקרה זה, $f(z) \geq f(x)$. נגדיר $a = z, b = x, c = y$.
מקרה א2: $x < z < y$. במקרה זה, $f(z) \leq f(x)$. נגדיר $a = x, b = z, c = y$.
מקרה א3: $y < z$. כמו במקרה הקודם, נקבל $f(z) \leq f(x)$. לכן $f(z) < f(y)$. נגדיר $a = x, b = y, c = z$.
$\square$

עתה יתברר שרציפות מקלה על בדיקת מונוטוניות.

משפט 6.9.7. פונקציה רציפה בקטע היא חח"ע אם"ם היא מונוטונית ממש.

הוכחה. כוון אחד נובע מטענה 6.9.6. הכוון השני: נניח בשלילה שהפונקציה f רציפה בקטע I, חח"ע ואיננה מונוטונית ממש. אז לפי טענה **??** יש ב-I שלשה מספרים $a < b < c$ כך ש: $f(a) < f(b) > f(c)$ או $f(a) > f(b) < f(c)$.
נניח בלי הגבלת הכלליות:

$$f(a) < f(b) > f(c)$$

נגדיר $m = max\{f(a), f(c)\}$. יהי y מספר בקטע הפתוח $(m, f(b))$ כלומר:

$$f(a) < y < f(b)$$
$$f(c) < y < f(b)$$

על ידי שִמוש כפול במשפט ערך הבינַיִם נקבל שני מספרים שונים x_1, x_2 כך ש:

$$a < x_1 < b < x_2 < c$$
$$f(x_1) = y$$
$$f(x_2) = y$$

זאת בסתירה לחח"ע של הפונקציה f. □

נסכם את הקשרים החשובים בין מונוטוניות לרציפות: נתון קטע I, קבוצה J ונתונה פונקציה על J $f : I \to J$.

א. אם f מונוטונית במובן הרחב ו-J קטע, אז f רציפה (לפי משפט 6.9.5).

ב. אם f רציפה וחח"ע, אז היא מונוטונית ממש (לפי משפט 6.9.7).

משפט 6.9.8. נתון קטע I, קבוצה J ופונקציה $f : I \to J$. אם f רציפה והפיכה, אז f^{-1} רציפה (והפיכה כמובן).

הוכחה. נניח ש- $f : I \to J$ רציפה והפיכה. לפי מסקנה 6.8.5, J הוא קטע. מכיון ש-f הפיכה, היא חח"ע. לכן לפי משפט 6.9.7, f מונוטונית ממש. לכן f^{-1} מונוטונית ממש (ראה שאלה 6.9.3). מכיון שתמונת הקטע J תחת הפונקציה f^{-1} היא קטע (הקטע I), לפי משפט 6.9.5, הפונקציה f^{-1} רציפה. □

6.10 פונקציות רציפות בקטע סגור

בסעיף זה נכיר שני משפטים של ויירשטראס שמתיַחסים לקטע סגור בלבד.

משפט 6.10.1 (משפט החסימות של ויירשטראס). כל פונקציה רציפה בקטע סגור היא חסומה בו.

הוכחה. נניח ש- f רציפה בקטע הסגור $[a, b]$. נוכיח ש- f חסומה מלעיל ב- $[a, b]$. נניח בשלילה שהיא איננה חסומה בו. לפיכך יש סדרה $\langle x_n \rangle$ של מספרים ב- $[a, b]$ כך ש-

$$f(x_n) \to \infty$$

לפי משפט בולצאנו ויירשטראס, יש תת-סדרה מתכנסת $\langle x_{n_k} \rangle$. מכיון ש- f רציפה, לפי טענה 6.8.1, הסדרה $\langle f(x_{n_k}) \rangle$ מתכנסת למספר בקטע $[a, b]$. זאת בסתירה להיותה שואפת ל- ∞. □

הגדרה 6.10.2. תהי f פונקציה שמֻגדרת בקבוצה A ויהי $c \in A$. המספר c הוא נקודת מקסימום של f בקבוצה A פֵרושו:

$$\forall x \in A[f(x) \le f(c)]$$

כאשר יש נקודת מקסימום c של f ב- A, הערך המירבי של של f ב- A מֻגדר כ- $f(c)$. באֹפן דומה מגדירים נקודת מינימום וערך מזערי.

דוגמא 6.10.1. לפונקציה $f(x) = x$ אין נקודת מקסימום ואין נקודת מינימום בקטע הפתוח $(0, 1)$. מצד שני, יש לה נקודות מקסימום ומינימום בקטע הסגור $[0, 1]$.

משפט 6.10.3 (משפט המקסימום של ויירשטראס). תהי f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a, b]$. אז יש ל- f נקודת מקסימום ונקודת מינימום ב- $[a, b]$.

הוכחה. נסתפק בהוכחה שיש נקודת מקסימום (קיום נקודת מינימום מוכח באֹפן דומה). נגדיר:

$$A = \{f(x) : x \in [a, b]\}$$

לפי משפט החסימות של ויירשטראס ולפי אקסיומת החסם העליון, אפשר להגדיר:

$$M = sup(A)$$

עלינו למצא $c \in [a,b]$ כך ש- $f(c) = M$, כי אז לפי הגדרת M, המספר c הוא נקודת מקסימום של f בקטע $[a,b]$. לפי טענה ?? יש סדרה $\langle y_n \rangle$ של מספרים ב-A כך ש:

$$y_n \to M$$

לפי הגדרת A, לכל n יש $x_n \in [a,b]$ כך ש-$f(x_n) = y_n$. $\langle x_n \rangle$ היא סדרה של מספרים בקטע $[a,b]$. לפי משפט בולצאנו-ויירשטראס, יש לה תת-סדרה $\langle x_{n_k} \rangle$ שהיא מתכנסת למספר ב-$[a,b]$. נגדיר:

$$c = lim_{k\to\infty} x_{n_k}$$

לפי טענה 6.8.1 (מסקנה מאפיון היינה) נקבל:

$$f(c) = lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = lim_{k\to\infty} y_{n_k} = M$$

לפיכך ולפי הגדרת M, המספר c הוא נקודת מקסימום של f בקטע $[a,b]$. □

6.11 פונקציות הפכיות של פונקציות טריגונומטריות

נפתח בפונקציה sin. לצֹרך הדיון לגבי פונקציה הפכית, חשוב לציֵן את התחום והטוָח שלה ולכן נתאר אותה כך:

$$f : \mathbb{R} \to [-1,1]$$
$$f(x) = \sin(x)$$

קל לראות ש- sin איננה חח"ע ולכן אין לה הפכית. אולם הצמצום של sin לקטע $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ הוא פונקציה חח"ע ועל ולכן הפיכה.

הגדרה 6.11.1. הפונקציה arcsin מֻגדרת כהפכית של הפונקציה הבאה:

$$g : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$$
$$g(x) = \sin(x)$$

נפרט:

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$
$$\arcsin(x) = y \Leftrightarrow \big(\sin(y) = x \wedge y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\big)$$

טענה 6.11.2. arcsin היא פונקציה עולה ורציפה.

הוכחה. מספיק לציֵן ש-arcsin היא הפכית של פונקציה עולה[11] ורציפה. □

הצמצום של הפונקציה cos לתחום $[0,\pi]$ הוא פונקציה חח"ע ועל (כאשר מגדירים את הטוָח כ-$[-1,1]$). לכן היא הפיכה.

הגדרה 6.11.3. הפונקציה arccos מֻגדרת כהפכית של הצִמצום של הפונקציה cos לתחום $[0,\pi]$. נפרט:

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$
$$\arccos(x) = y \Leftrightarrow \big(\cos(y) = x \wedge y \in [0,\pi]\big)$$

טענה 6.11.4. arccos היא פונקציה יורדת ורציפה.

הוכחה. מספיק לציֵן ש-arccos היא הפכית של פונקציה יורדת ורציפה. □

[11] הוכחה לעובדה שהצמצום של sin לתחום הזה היא פונקציה עולה נוכל להציג רק אחרי שנלמד על נגזרות.

הגדרה 6.11.5. הפונקציה arctan מֻגדרת כהפכית של הפונקציה הבאה:

$$f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\rightarrow(-\infty,\infty)$$
$$f(x)=\tan(x)$$

נפרט:

$$\arctan:[-\infty,\infty]\rightarrow(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$$
$$\arctan(x)=y\Leftrightarrow\big(\tan(y)=x\wedge y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\big)$$

6.12 רציפות במדה שוָה

בסעיף זה נלמד סוג חדש של רציפות, רציפות במדה שוָה. כפי שנראה, ההבדל בינהּ לבין רציפות הוא בסדר הכמתים: דורשים למצא δ שמתאים בבת-אחת לכל הxים.

הגדרה 6.12.1. הפונקציה f רציפה במדה שוָה (בראשי תיבות רב"ש) בקטע I פֵּרושו:

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x_1,x_2\in I\big[(|x_1-x_2|<\delta)\Rightarrow(|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon)\big]$$

לשם השוָאה, נצײַן ש-f רציפה ב-I אם"ם:

$$\forall\varepsilon>0\forall x_1\in I\exists\delta>0\forall x_2\in I\big[(|x_1-x_2|<\delta)\Rightarrow(|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon)\big]$$

נצײַן כאן טענה ידוע בלוגיקה מתמטית:

טענה 6.12.2. לכל נֻסחה β, אם $\exists x\forall y(\beta)$ אז $\forall y\exists x(\beta)$.

טענה 6.12.3. אם פונקציה רב"ש בקטע אז היא רציפה בו.

הכוון השני לא בהכרח נכון.

דוגמא 6.12.1. הפונקציה $f(x)=\frac{1}{x}$ רציפה בקטע $(0,1)$ אבל איננה רציפה בו במדה שוָה.

הוכחה. נוכיח:

$$\exists\varepsilon>0\forall\delta>0\exists x_1,x_2\in I\big[(|x_1-x_2|<\delta)\wedge(|f(x_1)-f(x_2)|\geq\varepsilon)\big]$$

נגדיר $\varepsilon=1$.[12] יהי $\delta>0$.

נעצור לרגע את ההוכחה לצֹרך תכנון. אנחנו רוצים למצא שני מספרים x_1,x_2 שההפרש ביניהם קטן מ- δ כך שנקבל $|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}|\geq 1$. אנחנו יודעים ש- $lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty$. זאת אומרת שאם x_2 יהיה קרוב מאד ל-0, אז הערך של $\frac{1}{x_2}$ יהיה גדול מאד וכך נקבל $|f(x_1)-f(x_2)|\geq 1$. כדי לקבל $|x_1-x_2|<\delta$, אפשר להגדיר $x_1=\delta$.

המשך ההוכחה: נגדיר $x_1=\delta$. מכיון ש- $lim_{x\to 0+}f(x)=\infty$, עבור $M=f(x_1)+1$, נוכל למצא $x_2\in(0,\delta)$ כך ש- $f(x_2)>M$. כך נקבל:

$$|x_1-x_2|<\delta$$
$$|f(x_1)-f(x_2)|\geq 1$$

□

כבר למדנו שני משפטים של ויירשטראס על פונקציות רציפות בקטע סגור. עתה נראה שוב תכונה של פונקציות רציפות בקטע סגור דוקא, אבל הפעם המשפט של קנטור.

[12] אפשר לבחֹר גם מספר אחר. זה נֹח לבחֹר כך.

משפט 6.12.4 (משפט קנטור על רציפות במדה שוָה). פונקציה רציפה בקטע סגור היא רציפה בו במדה שוָה.

הוכחה. נניח בשלילה ש- $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ב-$[a,b]$ אבל לא רציפה בו במדה שוָה. זאת אומרת שיש $0<\varepsilon$ כך ש:

$$\forall\delta>0\exists x,y\big[(|x-y|<\delta)\wedge(|f(x)-f(y)|\geq\varepsilon\big]$$

בפרט, לכל n טבעי נציב $\delta=\frac{1}{n}$ ונקבל שיש שני מספרים $x_n,y_n\in[a,b]$ כך ש:

$$(|x_n-y_n|<\frac{1}{n})\wedge(|f(x_n)-f(y_n)|\geq\varepsilon) \quad (1)$$

לפי משפט בולצאנו-ויירשטראס, לסדרה $\langle x_n\rangle$ יש תת-סדרה $\langle x_{n_k}\rangle$ שהיא מתכנסת למספר c. מכיון שכל אברי הסדרה שיָכים לקטע $[a,b]$, גם c שיָך לקטע $[a,b]$. נחשב:

$$y_n=x_n+\underbrace{(y_n-x_n)}_{\text{ערכו המֻחלט קטן מ-}\frac{1}{n}}\to c+0=c$$

מכיון ש-f רציפה, נוכל להשתמש באפיון היינה לרציפות לגבי כל אחת מהסדרות:

$$f(x_{n_k})\to_{k\to\infty}f(c)$$
$$f(y_{n_k})\to_{k\to\infty}f(c)$$

לפיכך:

$$f(x_{n_k})-f(y_{n_k})\to_{k\to\infty}0 \quad (2)$$

אולם יש סתירה בין (1) ל-(2). □

הסבר לא מדֻיק לרעיון של המשפט: נתונה פונקציה שהיא רציפה ולא רב"ש בקטע. יש ε שמעיד על שלילת הרציפות במדה שוָה. מצד אחד, לפי הרציפות לכל x אם נבחר δ מספיק קטן, אז נקבל

$$(|x_1-x_2|<\delta)\Rightarrow(|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon)(1)$$

מצד שני, לפי שלילת הרציפות במדה שוָה, לכל δ יש x_1 כך ששלילת (1) מתקיֶמת. מכיון שהקטע סגור, אפשר לחשוב על הקטע כאילו הוא היה קטן, כלומר שיש בו רק מעט xים. אמנם יש בו אינסוף xים, אבל במובן מסוים הם צפופים וכך נוכל למצא δ שתטפל בכולם בבת-אחת. משפט בולצאנו-ויירשטראס הוא כלי יעיל לטִפול בסדרות בקטע סגור. בעזרתו אנחנו מצליחים ליָצר מכל הxים שמעידים על שלילת הרציפות במדה שוָה, נקודה אחת (גבול של תת-סדרה), c שהיא מיַצגת במובן מסֻים את כל הנקודות שהעידו על שלילת הרציפות במדה שוָה. אולם זה כבר סותר רציפות.

פרק 7

נגזרות

הגדרה 7.0.1. הנגזרת של הפונקציה f בנקודה c מֻגדרת כך:

$$f'(c) = lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

בהנחה שהגבול קיָם. אם הגבול איננו קיָם אז אומרים ש-f איננה גזירה ב-c. תחום ההגדרה של פונקציָת הנגזרת f' היא קבוצת הנקודות עבורן גבול זה קיָם.

טענה 7.0.2. תהי f פונקציה. אז:

$$f'(c) = lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

הגדרה 7.0.3. הנגזרת הימנית של הפונקציה f בנקודה c מֻגדרת כך:

$$f'_{+}(c) = lim_{h\to 0+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

בהנחה שהגבול החד-צדדי קיָם. באפן דומה מֻגדרת הנגזרת השמאלית של f בנקודה c.

טענה 7.0.4. הפונקציה f גזירה ב- c אם"ם הנגזרות החד-צדדיות קיָמות ושוות.

טענה 7.0.5. אם פונקציה גזירה בנקודה אז היא רציפה בה.

משפט 7.0.6 (כללי הגזירה)**.** לכל שתי פונקציות f, g מתקיְמים השוְיונות הבאים כאשר אגף ימין שלהם מֻגדר:

$$(f+g)'(c) = f'(c)+g'(c)$$
$$(f-g)'(c) = f'(c)-g'(c)$$
$$(fg)'(c) = f'(c)g(c)+f(c)g'(c)$$
$$(\frac{f}{g})'(c) = \frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{g^2(c)}$$

7.1 הנגזרת של פונקציה מֻרכבת

כלל השרשרת מציג נֻסחה לחִשוב הנגזרת של פונקציה מֻרכבת.

משפט 7.1.1 (כלל השרשרת)**.** לכל שתי פונקציות f, g ומספר ממשי x_0 מתקיֵם השוְיון הבא (בהנחה שאגף ימין שלו מֻגדר):

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

כדי להבהיר את הרעיון שמאחורי נֻסחה זו והוכחתהּ, נלמד אותה בשלשה שלבים: בשלב הראשון נוכיח את הנֻסחה עבור פונקציות לינאריות. בשלב השני, נוכיח אותה בהנחה מסֻימת ובשלב השלישי נוכיח אותה למקרה הכללי.

שלב א

נחשב את $(g\circ f)'(x_0)$ בהנחה שהפונקציות f,g מיַצגות קוים ישרים. במקרה זה, הנגזרות הן מספרים קבועים. נסמן $y_0=f(x_0)$. נבחר מספר $x\in\mathbb{R}$ ונסמן $y=f(x)$.

$$f'(x_0)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{y-y_0}{x-x_0} \quad (1)$$

$$g'(y_0)=\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} \quad (2)$$

משתי המשוָאות יחד נקבל:

$$g(y)-g(y_0)=_{(2)}g'(y_0)\cdot(y-y_0)=_{(1)}g'(y_0)\cdot f'(x_0)\cdot(x-x_0) \quad (3)$$

לפיכך

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x_0)=&lim_{x\to x_0}\frac{(g\circ f)(x)-(g\circ f)(x_0)}{x-x_0}=\\ &lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\\ &lim_{x\to x_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{x-x_0}=_{(3)}\\ &g'(y_0)\cdot f'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)\end{aligned}$$

השִוְיונות (1),(2) שמופיעים בחִשוב זה נכונים כאשר הפונקציות g,f מיַצגות קוים ישרים. אולם במקרה הכללי, נגזרת היא לא היחס בין השִנוי של y לשִנוי של x , אלא **הגבול** של יחס לא קבוע זה, כאשר $x\to x_0$ ולכן חִשוב זה איננו מוכיח את המקרה הכללי.

שלב ב

לכאורה, אפשר להוכיח את כלל השרשרת כך:

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x_0)=&lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\\ &lim_{x\to x_0}\Big[\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\Big]=\\ &\underbrace{lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}}_{g'(f(x_0))}\cdot\underbrace{lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)}\end{aligned}$$

יש רק בעיה אחת בהוכחה זו: יתכן ש- $f(x)=f(x_0)$, כלומר $f(x)-f(x_0)=0$ ואז חלקנו ב- 0. לפיכך, הוכחנו רק את הטענה הבאה:

טענה 7.1.2. תהי V קבוצה של מספרים ממשיים כך שלכל $x\in V$ מתקיֵם $f(x)\neq f(x_0)$. אז

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in V}}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

(בתנאי שאגף ימין של השִוְיון מֻגדר).

שלב ג

בשלב זה, נוכיח את כלל השרשרת בעזרת 7.1.2, תוך חלוקה לשני מקרים: במקרה ש- $f'(x_0) = 0$, אגף ימין שוֶה ל- 0, ולכן נוכל (כפי שנראה במהלך ההוכחה) להתעלם מה- xים עבורם $f(x) = f(x_0)$. במקרה ש- $f'(x_0) \neq 0$, נראה שיש סביבה V של x_0 שבה $f(x) \neq f(x_0)$.

הוכחה. נוכיח ש-

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \to_{x\to x_0} g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

מקרה א: $f'(x_0) \neq 0$, כלומר

$$lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq 0$$

מכיון שהפונקציה $h(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ היא פונקציה רציפה,[1] לכן יש סביבה מנֻקבת V של x_0 כך שלכל $x \in V$, מתקיֵם

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \neq 0$$

כלומר

$$x \in V \to f(x) - f(x_0) \neq 0$$

המשך ההוכחה כמו בשלב ב, אלא שנדרש ש- x יהיה שיָך ל- V:

$$\begin{aligned}(g\circ f)'(x_0) =& lim_{x\to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \\ & lim_{x\to x_0, x\in V} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} =\end{aligned}$$

לפי טענה 7.1.2, גבול זה שוֶה ל-

$$g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

מקרה ב: $f'(x_0) = 0$. במקרה זה, אגף ימין שוֶה 0 ועלינו להוכיח ש-

$$(g\circ f)'(x) = 0$$

כלומר:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \to_{x\to x_0} 0$$

אם נציב x עבורו $f(x) = f(x_0)$, אז אגף שמאל יהיה שוֶה ל- 0. לכן לפי טענה 7.1.3 שמופיעה למטה, נוכל להתעלם מ x ים כאלו. במילים אחרות, מספיק להוכיח:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \underset{\substack{x\to x_0 \\ f(x)\neq f(x_0)}}{\to} 0$$

לפי טענה 7.1.2, (כאשר מציבים בה את הקבוצה $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq f(x_0)\}$ במקום V),

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \underset{\substack{x\to x_0 \\ f(x)\neq f(x_0)}}{\to} = g'(f(x_0) \cdot f'(x_0) = 0$$

□

[1] המספרים x_0, $f(x_0)$ אינם תלויִם ב- x ולכן זו פונקציה מהצורה $h(x) = \frac{f(x)-c}{x-d}$.

לפי הטענה הבאה, כאשר מוכיחים שפונקציה h שואפת ל- 0, אפשר להתעלם מה- xים עבורם $h(x) = 0$.

טענה 7.1.3. נתונה פונקציה ממשית h ומספר $x_0 \in \mathbb{R}$. נגדיר $A = \{x \in \mathbb{R} : h(x) = 0\}$. אם

$$h(x) \to_{x \to x_0, h(x) \neq 0} 0$$

כלומר

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x [x \in N_\delta^*(x_0) \setminus A \Rightarrow h(x) \in N_\varepsilon(0)]$$

אז

$$h(x) \to_{x \to x_0} 0$$

הוכחה. לפי ההנחה

$$h(x) \to_{x \to x_0, h(x) \neq 0} 0$$

מצד שני, ברור ש:

$$h(x) \to_{x \to x_0, h(x) = 0} 0$$

לכן הטענה נובעת ממשפט 6.2.11. □

שאלה 7.1.1. הוכיחו את טענה 7.1.3 ישירות לפי הגדרת הגבול של פונקציה.

7.1.1 הנגזרת של פונקציה הפכית

נלמד את הנושא בשלשה שלבים:

א. הוכחת הנוסחה בנִפנופי ידַיִם.

ב. הוכחת הנוסחה, בהנחה שההפכית גזירה.

ג. הוכחת הנוסחה, מבלי להניח שההפכית גזירה (לב הענין הוא להוכיח זאת).

הוכחת הנוסחה בנִפנופי ידים

נתונה נקודה x, נתון $h^* > 0$ קטן. נסמן $y = f(x)$, $h = f(x + h^*) - f(x)$. חשוב לציֵר זאת. השלם... אז

$$f'(x) \sim \frac{h}{h^*}$$
$$(f^{-1})'(y) \sim \frac{h^*}{h}$$

לפיכך

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

הוכחת הנוסחה, בהנחה שההפכית גזירה

נניח ש- f גזירה בנקודה x ו-f^{-1} גזירה בנקודה y. לפי הגדרת ההפכית,

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

נגזֹר את שני האגפים ונקבל לפי כלל השרשרת:

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

נחלק ב- $f'(x)$ ונקבל:

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

הוכחת הנוסחה מבלי להניח שהפונקציה ההפכית גזירה

במשפט הבא, לא נניח ש- f^{-1} גזירה. לב הענין הוא הוכחת גזירותה, שכן בהנחה שהיא גזירה, אנחנו כבר חִשבנו את הנוסחה לחִשוב הנגזרת בעזרת כלל השרשרת. מכיון שאנחנו כבר יודעים מה תהיה הנגזרת (בהנחה שהיא גזירה), במקום סתם להוכיח שהיא גזירה, נוכיח שנגזרתהּ היא

$$\frac{1}{f'(x)}$$

משפט 7.1.4. נניח:

א. $y = f(x)$

ב. f הפיכה בסביבה של x.

ג. f גזירה ב- x.

ד. $f'(x) \neq 0$.

ה. f רציפה בסביבה של x.

אז f^{-1} גזירה בנקודה y ומתקיֵם:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

הוכחה. לפי הגדרת נגזרת,

$$(f^{-1})'(y) = lim_{h\to 0}\frac{f^{-1}(y+h) - f^{-1}(y)}{h}$$

נשתמש באִפיון של היינה. נניח $0 \neq h_n \to 0$. צריך להוכיח:

$$\frac{f^{-1}(y+h_n) - f^{-1}(y)}{h_n} \to \frac{1}{f'(x)}$$

מכיון ש- $f'(x) \neq 0$, לפי כלל המנה, נוכל להפֹּך בין מונה למכנה, כלומר מספיק להוכיח:

$$\frac{h_n}{f^{-1}(y+h_n) - f^{-1}(y)} \to f'(x) \quad (*)$$

נקבע שם למכנה:

$$h_n^* = f^{-1}(y+h_n) - \underbrace{f^{-1}(y)}_{x} \quad (1)$$

עתה נבודד את h_n מתוך (1). ראשית נעביר אגפים:

$$f^{-1}(y+h_n) = x + h_n^* \quad (2)$$

לכן

$$y + h_n = f(x + h_n^*)$$

לפיכך:

$$h_n = f(x+h_n^*) - f(x) \quad (3)$$

לפי (1),(3), אגף שמֹאל של (*) שוֶה :

$$\frac{f(x+h_n^*) - f(x)}{h_n^*}$$

לפי הגדרת הנגזרת ואִפיון היינה, על מנת להוכיח שבִּטוי זה שואף ל- $f'(x)$, כל שעלינו לעשות הוא להוכיח ש-

$$0 \neq h_n^* \to 0$$

לפי הנחה ה, יש סביבה V של x שבה f רציפה. לפי משפט 6.9.8, f^{-1} רציפה בקטע $f[V]$ שהוא סביבה של y. מכיון ש-f^{-1} רציפה בנקודה y ו- $y \neq y + h_n \to y$, לפי היינה

$$f^{-1}(y+h_n) \to_{n\to\infty} f^{-1}(y)$$

עתה לפי שִוְיון (1) :

$$h_n^* = f^{-1}(y+h_n) - f^{-1}(y) \to_{n\to\infty} f^{-1}(y) - f^{-1}(y) = 0$$

לפיכך :

$$h_n^* \to 0$$

לא יתכן ש- $h_n^* = 0$ כי אז נסיק מ- (3), ש- $h_n = 0$.

□

7.2 פונקציות זוגיות ואי-זוגיות

הגדרה 7.2.1. הפונקציה f היא זוגית פֵרושו ש-

$$\forall x[f(-x) = f(x)]$$

הפונקציה f היא אי-זוגית פֵרושו :

$$\forall x[f(-x) = -f(x)]$$

דוגמא 7.2.1. לכל n טבעי הפונקציה $f(x) = x^n$ היא זוגית אם"ם n מספר זוגי והיא אי-זוגית אם"ם n הוא מספר אי-זוגי.

דוגמא 7.2.2. הפונקציות $\sin, \tan$ הן אי-זוגיות ואילו הפונקציה $\cos$ היא זוגית.

טענה 7.2.2. נתונות שתי פונקציות f, g. אז :

א. אם f, g זוגיות אז $f + g$ זוגית.

ב. אם f, g אי-זוגיות אז $f + g$ אי-זוגית.

ג. אם לשתי הפונקציות f, g אותה זוגיות שונה (כלומר אחת זוגית והשניה אי-זוגית), אז $f + g$ איננה זוגית ואיננה אי-זוגית.

ד. אם לשתי הפונקציות f, g אותה זוגיות (כלומר שתיהן זוגיות או שתיהן אי-זוגיות), אז $fg, \frac{f}{g}$ זוגיות.

ה. אם לשתי הפונקציות f, g זוגיות שונה, אז $fg, \frac{f}{g}$ אי-זוגיות.

טענה 7.2.3. פולינום הוא פונקציה זוגית אם"ם בכל המחוברים שמופיעים בו, המעריכים הם מספרים זוגיים, כלומר שכל מחֻבר הוא מהצורה $a_{2i}x^{2i}$. פולינום הוא פונקציה אי-זוגית אם"ם כל המחוברים שבו הם מהצורה $a_{2i+1}x^{2i+1}$.

טענה 7.2.4. תהי f פונקציה זוגית. אם הגבול החד-צדדי $lim_{x\to 0+}f(x)$ קיָם אז הגבול (הדו-צדדי) $lim_{x\to 0}f(x)$ קיָם ושוֶה לו.

7.3 נגזרות של פולינומים ופונקציות טריגונומטריות

משפט 7.3.1. לכל n שלם מתקיֵם :

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

שאלה 7.3.1. הציגו שתי הוכחות לנוסחה שבמשפט 7.3.1 עבור n טבעי :

א. בעזרת נוסחת הבינום של ניוטון.

ב. בהשראה, תוך שִׁמוּש בנוסחה לחִשׁוּב הנגזרת של מכפלה.

שאלה 7.3.2. הוכיחו את משפט 7.3.1 תוך שִׁמוּש במקרה שכבר הוכחתם (n שלם) ובנוסחה לחִשׁוּב הנגזרת של מנה.

את המשפט הבא נוכיח רק אחרי שנגדיר חזקה שבה המעריך ממשי. בשלב זה נציג אותו, על מנת לתרגל ולהדגים מושגים שונים.

משפט 7.3.2 (ללא הוכחה)**.** לכל r ממשי מתקיֵם:

$$(x^r)' = rx^{r-1}$$

מסקנה 7.3.3. הנגזרת של פולינום

$$p(x) = \Sigma_{i=0}^{n} a_i x^i$$

היא:

$$p'(x) = \Sigma_{i=0}^{n} i a_i x^{i-1}$$

נציג ללא הוכחה את העובדה הטריגונומטרית שהיא הבסיס לחִשׁוּב הנגזרות של הפונקציות הטריגונומטריות:

טענה 7.3.4.

$$\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})[\sin(x) \leq x \leq \tan(x)]$$

טענה 7.3.5.

$$\frac{x}{\sin(x)} \to_{x\to 0} 1$$

הוכחה. ראשית נטפל בגבול מימין, כלומר נוכיח:

$$\frac{x}{\sin(x)} \to_{x\to 0+} 1$$

אכן לכל $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ מתקיֵם:

$$1 \leq \frac{x}{\sin(x)} \leq \frac{1}{\cos(x)} \to 1$$

ולכן לפי כלל הסנדביץ',

$$\frac{x}{\sin(x)} \to_{x\to 0+} 1$$

עתה מכיון שהפונקציה $\frac{x}{\sin(x)}$ היא זוגית גם הגבול משמאל הוא 1 ולפיכך הגבול הוא 1. □

טענה 7.3.6.

$$\sin'(0) = 1$$

הוכחה.

$$\sin'(0) = lim_{h\to 0}\frac{\sin(h) - \sin(0)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1$$

□

את הטענה הבאה קל יותר להוכיח אחרי שנלמד את כלל לופיטל. בינתיים נציג הוכחה בעזרת זהויות טריגונומטריות.

טענה:

$$\frac{\cos(h) - 1}{h} \to_{h\to 0} 0$$

הוכחת רשות.

$$\frac{\cos(h) - 1}{h} = \frac{-2h\sin^2(\frac{h}{2})}{\frac{1}{4}(\frac{h}{2})^2} \to_{h\to 0} 0$$

□

משפט 7.3.7. הפונקציות $\sin, \cos$ גזירות ב- $\mathbb{R}$ ומתקיים:

$$\sin' = \cos$$
$$\cos' = -\sin$$

הוכחה. נחשב את הנגזרת של $\sin$.

$$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\sin(x)\cos(h)+\sin(h)\cos(x)-\sin(x)}{h} =$$
$$\sin(x)\underbrace{\frac{\cos(h)-1}{h}}_{\text{שואף ל- } 0} + \underbrace{\frac{\sin(h)}{h}}_{\text{שואף ל- } 1}\cos(x) \to_{h\to 0} \cos(x)$$

לפיכך:

$$\sin' = \cos$$

נחשב את הנגזרת של $\cos$.

$$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} =\to_{h\to 0} -\sin(x)$$

לפיכך:

$$\cos' = -\sin$$

□

משפט 7.3.8. הפונקציה $\tan$ גזירה בתחום הגדרתה (כל הנקודות שאינן מהצורה $\frac{\pi}{2}+k\pi$) ומתקיים:

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

הוכחה.

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

לכן לפי נוסחת הגזירה של מנה:

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x)-\sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

□

פרק 8

פונקציות גזירות בקטע

בפרק זה, ננסה ללמֹד מערך הנגזרת בנקודה, מידע לגבי צורת הגרף של הפונקציה. בפרט נִלמד למצא נקודות עליה, ירידה וקיצון מקומי של הפונקציה. ההגדרה הראשונה מתיַחסת לנקודה ולא לקטע.

הגדרה 8.0.1.

א. c נקודת עליה של f (או במילים אחרות, f עולה בנקודה c) פֵרושו שיש סביבה מנֻקבת V של c כך שלכל $x \in V$ מתקיֵם

$$[x < c \Rightarrow f(x) < f(c)] \wedge [x > c \Rightarrow f(x) > f(c)]$$

ב. f יורדת בנקודה c פֵרושו שיש סביבה מנֻקבת V של c כך שלכל $x \in V$ מתקיֵם

$$[x < c \Rightarrow f(x) > f(c)] \wedge [x > c \Rightarrow f(x) < f(c)]$$

ג. c נקודת מקסימום מקומי של f פרושו שיש סביבה מנֻקבת V של c כך שלכל $x \in V$ מתקיֵם

$$f(x) < f(c)$$

ד. נקודת מינימום מקומי מֻגדרת באֹפן דומה.

ה. c נקודת קיצון מקומי של f פֵרושו ש- c נקודת מקסימום מקומי או נקודת מינימום מקומי של f.

טענה 8.0.2. אין נקודה שמקיֶמת בבת-אחת יותר מאחת ההגדרות דלעיל (עליה, ירידה, מקסימום מקומי, מינימום מקומי).

הוכחה. נניח בשלילה ש-c היא גם נקודת עליה של f וגם מקסימום מקומי. שאר המקרים (זוגות של הגדרות שמתקיְמות בבת-אחת) דומים. מצד אחד, יש סביבה מנֻקבת V_1 של c כך ש:

$$\forall x \in V_1 \left[[x < c \Rightarrow f(x) < f(c)] \wedge [x > c \Rightarrow f(x) > f(c)] \right] \quad (1)$$

מצד שני, יש סביבה מנֻקבת V_2 של c כך ש:

$$\forall x \in V_2 \left[f(x) < f(c) \right] \quad (2)$$

נגדיר:

$$V = V_1 \cap V_2$$

V היא סביבה מנֻקבת של c. נבחר $x \in V$ כך ש- $x > c$. נקבל:

$$f(x) <_{(2)} f(c) <_{(1)} f(x)$$

סתירה. $\square$

טענה 8.0.3. אם $f'(c)>0$ אז c נקודת עליה של f . אם $f'(c)<0$ אז c נקודת ירידה של f.

הוכחה. נניח ש- $f'(c)>0$ ונוכיח ש-c נקודת עליה של f. הוכחת החלק השני של הטענה דומה. נסמן $L=f'(c)$ כלומר:

$$L=lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

לפי ההנחה, $L>0$. לכן לפי הגדרת הגבול, עבור $\varepsilon=\frac{L}{2}$ יש $0<\delta$ כך ש:

$$\forall x\in B^*_\delta(c)\ \Big[\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\in B_\varepsilon(L)=B_{\frac{L}{2}}(L)\Big]\quad (1)$$

נגדיר $V=B^*_\delta(c)$. נוכיח:

$$\forall x\in V\ \big[[x<c\Rightarrow f(x)<f(c)]\wedge[x>c\Rightarrow f(x)>f(c)]\big]$$

יהי $x\in V$. לפי (1)

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}>\frac{L}{2}>0$$

לפיכך:

$$[x<c\Rightarrow f(x)<f(c)]\wedge[x>c\Rightarrow f(x)>f(c)]$$

□

משפט 8.0.4 (משפט פרמה)**.** אם c נקודת קיצון מקומי ו- $f'(c)$ מֻגדר, אז $f'(c)=0$.

הוכחה. נניח בשלילה $f'(c)\neq 0$. אם $f'(c)>0$. לכן c היא נקודת עליה ולא נקודת קיצון מקומי. אם $f'(c)<0$ אז f נקודת ירידה ולא קיצון מקומי. □

משפט 8.0.5 (משפט רול)**.** אם f גזירה בקטע הפתוח (a,b), רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ ו- $f(b)=f(a)$ אז יש נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)=0$.

הוכחה. לפי משפט המקסימום של ויירשטראס, יש בקטע $[a,b]$ נקודת מקסימום מֻחלט ויש בו נקודת מינימום מֻחלט.
מקרה א: יש $c\in(a,b)$ שהיא נקודת מקסימום מֻחלט או מינימום מֻחלט. לכן היא נקודת קיצון מקומי. f גזירה בנקודה c ולכן לפי משפט פרמה $f'(c)=0$.
מקרה ב: אין בקטע (a,b) נקודת קיצון מֻחלטת. לפיכך a,b הן נקודות המקסימום והמינימום המֻחלטות. אולם $f(a)=f(b)$. לפיכך f קבועה בקטע $[a,b]$. אם כך, $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$. □

משפט ערך הביניים של לגרנג' הוא הכללה של משפט רול שבה אין מניחים ש- $f(a)=f(b)$.

משפט 8.0.6 (משפט ערך הביניים של לגרנג')**.** נניח ש- f גזירה ב-(a,b) ורציפה ב-$[a,b]$.
אז יש נקודה $c\in(a,b)$ כך ש-

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

אם נסובב את הדף עד לנקודה שבה הקטע שמחבר את הנקודה $(a,f(a))$ עם הנקודה $(b,f(b))$ מקביל לציר ה-x, אז משפט ערך הביניים של לגרנג' יהפֹך למשפט רול. הדרך לבצע זאת, היא להחסיר מ- $f(x)$ את משוָאת הישר שמחבר נקודות אלו. עבור הפרש זה, השִפּוע בין שני הקצוות הוא 0.

הוכחה. יהי l הישר שמחבר את הנקודה $\langle a,f(a)\rangle$ עם הנקודה $\langle b,f(b)\rangle$. הנה הגדרה מפֹרשת של הישר l:

$$l(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$$

נגדיר פונקציה

$$g(x)=f(x)-l(x)$$

נוכיח ש- g מקיֶמת את תנאי משפט רול. g גזירה בקטע הפתוח (a,b) כהפרש של שתי פונקציות גזירות. כמוכן g רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ כי היא הפרש של שתי פונקציות רציפות.

$$g(a) = f(a) - l(a) = f(a) - f(a) = 0$$
$$g(b) = f(b) - l(b) = f(b) - f(b) = 0$$

לפי משפט רול, יש נקודה $c \in (a,b)$ כך ש-

$$g'(c) = 0$$

אולם

$$g'(c) = f'(c) - l'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

לפיכך:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

מסקנה 8.0.7. נניח:

א. f גזירה בקטע הפתוח (a,b) ורציפה בקטע הסגור $[a,b]$.

ב. $\forall x \in (a,b)[f'(x) = 0]$.

אז f קבועה בקטע $[a,b]$.

מסקנה 8.0.8. תהי f פונקציה גזירה ב-$[a,b]$. אז:

א. אם $f' \geq 0$ ב-(a,b) אז f עולה במובן הרחב ב-$[a,b]$.

ב. אם $f' \leq 0$ ב-(a,b) אז f יורדת במובן הרחב ב-$[a,b]$.

ג. אם $f' > 0$ ב-(a,b) אז f עולה ממש ב-$[a,b]$.

ד. אם $f' < 0$ ב-(a,b) אז f יורדת ממש ב-$[a,b]$.

הוכחה. נוכיח את א בלבד. שאר החלקים דומים. נניח

$$\forall x \in (a,b)\ [f'(x) \geq 0]$$

נניח בשלילה ש- f איננה עולה במובן הרחב, כלומר שיש $a', b' \in [a,b]$ כך ש:

$$a' < b' \wedge f(a') > f(b')$$

לפי משפט ערך הבינַיִם של לגרנג', יש $c \in (a', b')$ כך ש:

$$f'(c) = \frac{f(b') - f(a')}{b' - a'} < 0$$

קבלנו סתירה. □

משפט 8.0.9 (משפט ערך הביניים של קושי)**.** נתונות שתי פונקציות

$$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$$

שהן רציפות ב-$[a,b]$ וגזירות ב-(a,b). אם $\forall x \in (a,b)[g'(x) \neq 0]$ אז

$$\exists c \in (a,b)\Big[\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}\Big]$$

נציג הוכחה למשפט ערך הביניים של קושי שיהיה לקורא קל לשחזר אותה מהזכרון. ממשפט ערך הביניים של לגרנג' למדנו שיש קשר בין הנגזרת לבין השִפּוּע לאֹרך קטע. אם כך, ננסה להציב במקום $f'(c)$ את השִפּוּע:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

כך נעשה גם לגבי הפונקציה g. השִוְיון שאנחנו רוצים לקבל יהפֹךְ (אחרי הרחבת השבר ב $x-a$) לשִוְיון הבא:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-f(a)}$$

אחרי כפל בהצלבה נקבל:

$$[f(b)-f(a)][g(x)-g(a)]=[g(b)-g(a)][f(x)-f(a)]$$

במהלך ההוכחה נפעיל את משפט רול על ההפרש בין שני אגפי המשוָאה.

הוכחה. נגדיר:

$$H(x)=[f(b)-f(a)][g(x)-g(a)]-[g(b)-g(a)][f(x)-f(a)]$$

קל להוכיח ש-H גזירה ב-(a,b) ורציפה ב-$[a,b]$. כמוכן:

$$H(a)=0=H(b)$$

לכן לפי משפט רול, יש נקודה $c\in(a,b)$ כך ש:

$$H'(c)=0 \quad (1)$$

נשים לב שבטוי ש-x לא מופיע בו הוא קבוע. לפיכך:

$$H'(x)=[f(b)-f(a)]g'(x)-[g(b)-g(a)]f'(x) \quad (2)$$

לפי (1),(2), נקבל:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$$

זה נכון, בתנאי שלא חלקנו ב-0. נוכיח שזה אכן המצב. הנחנו שהנגזרת איננה מתאפסת בקטע. נותר להוכיח שלא יתכן

$$g(b)=g(a)$$

אכן, אם שִוְיון זה היה מתקיֵם, אז לפי משפט רול היתה נקודה שבה הנגזרת של g היתה מתאפסת. □

שאלה 8.0.1. הוכיחו את משפט ערך הביניים של לגרנג' בעזרת משפט ערך הביניים של קושי.