

מבחן בקורס הסתברות 2

סמסטר א' , מועד ב'

14.02.2022

מרצה: פרופ' דן חפץ

מתרגלים: אילנה שוכמן ואריאל הלוי

אוניברסיטת אריאל

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה למדעי המחשב

משך הבחינה: שלוש שעות

המבחן הינו עבור מספרי קורס: 2-7020111-3, 2-7020111-1

מבנה המבחן: 3 שאלות ללא בחירה.

הנחיות:

1. המבחן הינו עם חומר סגור. עם זאת, כל סטודנט רשאי להביא דף אחד מגודל A4 כתוב משני צדדיו.
2. אין לכתוב בעפרון.
3. יש להוכיח כל טענה שאתם כותבים גם אם לא התבקשתם לעשות זאת במפורש בשאלה.
4. ניתן להסתמך ללא הוכחה על כל טענה שנלמדה בשיעור (אלא אם כן זו הטענה שהנכם מתבקשים להוכיח בשאלה). יש לצטט את הטענה עליה הנכם מסתמכים בצורה ברורה.

שאלה 1 (40 נקודות):

יהי X משתנה מקרי רציף המתפלג אחיד על הקטע $(-1,1)$.

- א. (20 נקודות) חשבו את $E(X^n)$ לכל n טבעי.
 ב. (20 נקודות) תהי סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים המתפלגים אחיד על הקטע $(-1,1)$. מצאו מספרים ממשיים a ו- b עבורם מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(-\sqrt{n} \leq \sum_{i=1}^n X_i \leq \sqrt{n}\right) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

שאלה 2 (30 נקודות):

כתבו אלגוריתם המקיים את כל התכונות הבאות:

- קלט:** מספרים טבעיים $n \geq k \geq 2$ ומשפחה $\{A_1, \dots, A_m\}$ של תת קבוצות של $\{1, \dots, n\}$ כך שמתקיים $|A_i| = k$ לכל $1 \leq i \leq m$ וכן $m \leq 2^{k-2}$.
- פלט:** צביעה של איברי $\{1, \dots, n\}$ בשני צבעים (נניח, אדום וכחול).
- בהסתברות $1 - 2^{-100}$ לפחות, הצביעה של איברי $\{1, \dots, n\}$ תהיה כזו ש- A_i תכיל איברים משני הצבעים (כלומר, לפחות איבר אחד אדום ולפחות איבר אחד כחול) לכל $1 \leq i \leq m$.
- זמן הריצה של האלגוריתם הוא $O(n + mk)$.

הוכיחו את נכונות האלגוריתם וזמן הריצה.

שאלה 3 (30 נקודות):

יהי $G \sim G(n, \frac{\ln n}{n})$ גרף מקרי.

- א. (15 נקודות) הוכיחו שההסתברות שקיים קודקוד ב- G שדרגתו לפחות $10 \ln n$ שואפת ל-0 כאשר n שואף לאינסוף.
 ב. (15 נקודות) הוכיחו שההסתברות שקיימת קבוצת קודקודים $A \subseteq V(G)$ מגודל $1 \leq |A| \leq n^{0.9}$ המכילה לפחות $2|A|$ קשתות שואפת ל-0 כאשר n שואף לאינסוף.

