בה'

# חלק ראשון

## שאלה 1:

### סעיף א':

עבור מרחב וקטורי $V$ מעל $F$ ועבור בסיס $B=(\vec{v}_1,\vec{v}_2\ldots\vec{v}_n)$
עמודת הקואורדינטות של וקטור $\vec{v}\in V$ תוגדר
בכך:
כיון ש $B$ בסיס של $V$, ניתן לייצג כל וקטור ב $B$ כצירוף
לינארי של איברי הבסיס. לכן עבור $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n$ סקלרים
כך שהם מתקיים $\vec{v}=\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2\cdots\alpha_n\vec{v}_n$

עמודת הקואורדינטות של $\vec{v}$ בבסיס $B$ היא וקטור
עמודה של המקדמים הסקלרים הנ"ל

6
(1)
חסר יחידות בהצגה לפי בסיס

$$[\vec{v}]_B=\begin{bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\vdots\\\alpha_n\end{bmatrix}\in F_{col}$$

סימון המייצג "עמודת וקטורים של $\vec{v}$ בבסיס $B$"

### סעיף ב':

בהינתן העתקה לינארית $T:V\to W$, $B$ בסיס
של $V$, $C$ בסיס של $W$,
$B=(\vec{b}_1,\vec{b}_2\ldots\vec{b}_n)$

המטריצה המייצגת את ההעתקה $T$ בבסיסים הנתונים
היא המטריצה

$$[T]_C^B=\Big[[T(\vec{b}_1)]_C\;\Big|\;[T(\vec{b}_2)]_C\;\Big|\;\cdots\;\Big|\;[T(\vec{b}_n)]_C\Big]$$

סימון עבור "העתקה $T$ מבסיס $B$ לבסיס $C$"

כל עמודה במטריצה היא עמודת קואורדינטות בבסיס $C$ של הוקטור המתקבל מהעתקה של איברי $B$.

מספר מחברת 125732

בה"ה

## המשך שאלה 1 סעיף ג':

התכונה העיקרית של המטריצה $[T]_C^B$ היא שהיא מקיימת לכל $\vec{v}\in V$

$$[T]_C^B[\vec{v}]_B=[T(\vec{v})]_C$$

T:V-->V

## שאלה 2:

בהינתן העתקה לינארית T עם ערך עצמי $\lambda$, הריבוי הגיאומטרי של $\lambda$ הוא המימד של מרחב הוקטורים העצמיים המתאימים ל $\lambda$ עבור העתקה T.

כלומר - ריבוי גיאומטרי הוא המימד של המרחב

$$G=\{\vec{v}\in V \mid T(\vec{v})=\lambda\vec{v}\}$$

V היא המקור של T
הקבוצה ממנה T שולח.

5
(2)

## שאלה 3:

עבור מטריצה ריבועית $A\in Mat_{n\times n}(F)$, הפולינום האופייני של המטריצה הוא

$$f_A = \det(\lambda I - A)$$

סימון לפולינום אופייני

3
(3)

כאשר $\lambda$ הוא משתנה המייצג את הערכים העצמיים.

בצורה נוספת: הפולינום האופייני הוא:

$$\det\begin{bmatrix} \lambda-a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \lambda-a_{22} & & \vdots \\ a_{31} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & \lambda-a_{nn} \end{bmatrix}$$

במטריצה משולשית הפולינום האופייני הוא מכפלת האלכסון של $(\lambda I-A)$.

בה'

## שאלה 4:

~ משפט קיילי המילטון; לכל מטריצה $A\in Mat_{n\times n}(F)$ הפיכה ~~מעל~~ מעל שדה סגור אלגברית מתקיים: $f_A(A)=0$

הפולינום האופייני של A

5 (4)

# חלק שני

## שאלה 5:

נוכיח כי המטריצה המתקבלת מ $T_A(X)$ היא מטריצה אנטי סימטרית לכל $X, A$ אנטי סימטריות $3\times3$.

יהיו $X, A$ אנטי סימטריות כלשהן, נסמן מרחב V

$$X=\begin{bmatrix}0&x&y\\-x&0&z\\-y&-z&0\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}$$

לפי הגדרת T

$$T_A(X)\overset{\downarrow}{=}AX-XA=\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&x&y\\-x&0&z\\-y&-z&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&x&y\\-x&0&z\\-y&-z&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}$$

כפל מטריצות

$$=\begin{bmatrix}-xa-yb&-zb&za\\-yc&-ax-zc&-ay\\xc&-xb&-yb-zc\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-xa-yb&-yc&xc\\-zb&-ay-zc&-xb\\za&-ay&-yb-zc\end{bmatrix}$$

חיסור מטריצות

$$=\begin{bmatrix}0&yc-zb&za-xc\\-yc+zb&0&xb-ay\\xc-za&ay-xb&0\end{bmatrix}\in V$$

מטריצה 3x3 מעל R אנטי-סימטרית

10 (5)

מכאן ש V סגורה תחת ההעתקה T. ■

בה"ו

## שאלה ט:

כדי להראות ש $T_A$ העתקה לינארית מעל V צריך להראות שההעתקה משמרת חיבור וכפל בסקלר.

מספיק להראות כי לכל $X,Y\in V$ $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים $T_A(\alpha X+Y)=\alpha T_A(X)+T_A(Y)$

$$T_A(\alpha X+Y)=A(\alpha X+Y)-(\alpha X+Y)A$$

כל המטריצות
חוקי כפל וחיבור
מטריצות

$$\begin{aligned}&=A\alpha X+AY-\alpha XA-YA\\&=\alpha AX-\alpha XA+AY-YA\\&=\alpha(AX-XA)+T_A(Y)\\&=\alpha T_A(X)+T_A(Y)\end{aligned}$$

10
(6)

מכאן ש T העתקה לינארית ■

## שאלה ז:

כדי להוכיח ש E בסיס נוכיח ש E פורש את V וכן שהקבוצה E בת"ל.

פרישה:

יהי $X\in V$ כלשהו, נסמן $X=\begin{bmatrix}0&x&y\\-x&0&z\\-y&-z&0\end{bmatrix}$ $x,y,z\in\mathbb{R}$

נראה כי אפשר לכתוב את X כצירוף לינארי של E.

נבחר $\alpha_1=x$ , $\alpha_2=y$ , $\alpha_3=z$

ונקבל:

$$\underbrace{x\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}}_{\text{איברי הבסיס } E}=\begin{bmatrix}0&x&y\\-x&0&z\\-y&-z&0\end{bmatrix}=X$$

10

(7)

בה"ו

## המשך שאלה 7:

מכאן כי E פורש את V.

**בת"ל:**

יהיו $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$ המקיימים $\overbrace{\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3}^{E\ \text{איברי}}=[0]_{3\times3}$

נוכיח $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

כמו שראינו מקודם, בפעולות של הצירוף הלינארי נקבל את המטריצה:

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_1 & 0 & \alpha_3 \\ -\alpha_2 & -\alpha_3 & 0 \end{bmatrix}$$

מטריצה זו היא מטריצת האפס רק כאשר

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

מש"ל.

## שאלה 8:

כדי לבנות את $[T_A]_E^E$ נפעיל את $T_A$ על כל איבר מאברי E ונביא את התוצאה כוקטור קואורדינטות ב E (התוצאות יהיו עמודות המטריצה, ראה שאלה 1 סעיף ב)

$$T_A\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ c & -b & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a & 0 & c \\ 0 & -a & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & b \\ c & -b & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix} = \text{עמודת קואו' בבסיס } E$$

המשך בעמ' הבא

בה'

המשך שאלה 2:

$$T_A\left(\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-b&0&0\\-c&0&-a\\0&0&-b\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-b&-c&0\\0&0&0\\0&-a&-b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&c&0\\-c&0&-a\\0&a&0\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}c\\0\\-a\end{pmatrix}$$ וקטור קואורדינטות

$$T_A\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&-b&a\\0&-c&0\\0&0&-c\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&0&0\\-b&-c&0\\a&0&-c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-b&a\\b&0&0\\-a&0&0\end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix}-b\\a\\0\end{pmatrix}$$ וקטור קואורדינטות

$$\boxed{[T]_E^E=\begin{bmatrix}0&c&-b\\-c&0&a\\b&-a&0\end{bmatrix}}$$

מטריצה מייצגת של T בבסיס E

10

(8)

בדיקת נכונות: $X=\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&0&1\\-1&-1&0\end{bmatrix}$

$[X]_E=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$[T]_E^E[X]_E=\begin{bmatrix}0&c&-b\\-c&0&a\\b&-a&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c-b\\a-c\\b-a\end{bmatrix}$$

$$T_A(X)=AX-XA$$

$$=\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&0&1\\-1&-1&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0&1&1\\-1&0&1\\-1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}$$

$$=\left[\right.$$

בה'

## שאלה 9:

0

(9)

חסרה תשובה

## שאלה 10:

~~לפי שראינו בשאלה 5 אפשר למצוא את המטריצה המייצגת~~ $\cancel{[T]_E^E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ -2 & 0 & 9 \\ 6 & -9 & 0 \end{bmatrix}}$

נשים לב כי $\dim(\ker(T_A))=1$ לכל $A$, כיוון ש-$\ker(T)$ הוא מרחב המטריצות המתחלפות

$$X \in \ker(T_A) \Leftarrow AX - XA = [0]$$

$$AX = XA$$

משוואה זו עבור $A$ אנטי סימטרית נכונה רק עבור מטריצות $X$ המתחלפות בכפל של $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5

(10)

חישבו הגרעין לא נכון

כיון שהמימד של הגרעין הוא 1 והמימד של $V$ הוא שלוש ממשפט המימד ניתן להסיק

$$\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\mathrm{Im}(T))$$

$$3 = 1 + \dim(\mathrm{Im}(T))$$

$$\boxed{\dim(\mathrm{Im}(T)) = 2}$$

בס״ד

# חלק ג׳

הערה: שאלות לא לפי הסדר!

## שאלה 13

נוכיח $U^\perp \cap W^\perp = (U+W)^\perp$ באמצעות

הכלה דו כיוונית.

$\boxed{\subseteq}$: יהי $\vec{v} \in U^\perp \cap W^\perp$, $\vec{v}$ מאונך לכל וקטור

ב $U$ ולכל וקטור ב $W$. כלומר לכל $\vec{u} \in U$ $\vec{w} \in W$

מתקיים $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$ $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$

מלינאריות של מכפלה פנימית נקבל כי גם

$$\underbrace{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}_{0} + \underbrace{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}_{0} = \langle \vec{v}, \vec{u}+\vec{w} \rangle = 0$$

$\vec{u}+\vec{w}$ הוא וקטור כללי ב $U+W$.

מכאן ש $\vec{v} \in (U+W)^\perp$

10 (13)

$\boxed{\supseteq}$: יהי $\vec{v} \in (U+W)^\perp$, כלומר לכל $\vec{u} \in U$ $\vec{w} \in W$

מתקיים $\langle \vec{v}, \vec{u}+\vec{w} \rangle = 0$ (כי $\vec{u}+\vec{w} \in (U+W)$)

מלינאריות מכפ׳ נקבל

$\cancel{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle =}$

$$\langle \vec{v}, \vec{u}+\vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$$

אם נבחר $\vec{u} = \vec{0}$ נקבל $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$

אם נבחר $\vec{w} = \vec{0}$ נקבל $\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0$

לכן $\vec{v} \in U^\perp \cap W^\perp$

הוכחנו שוויון באמצעות הכלה דו כיוונית ■

בס"ד

## שאלה 14:

נוכיח כי: $|\lambda|=1$.

יהי $\vec{v}$ וקטור עצמי של T השייך לע"ע $\lambda$.

כיון ש T אוניטרית מתקיים

$$\langle T(\vec{v}),T(\vec{v})\rangle = \langle \vec{v},\vec{v}\rangle$$

כמו כן

$$\langle T(\vec{v}),T(\vec{v})\rangle = \langle \lambda\vec{v},\lambda\vec{v}\rangle$$
$$= \lambda\bar{\lambda}\langle \vec{v},\vec{v}\rangle$$

כלומר $\langle \vec{v},\vec{v}\rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle \vec{v},\vec{v}\rangle$

כיון ש $\langle \vec{v},\vec{v}\rangle$ סקלר שונה 0 (כי מכפלה פנימית 0 מתקבלת רק כאשר $\vec{v}=\vec{0}$ אך $\vec{v}$ ו"ע)

נחלק את שני האגפים ב $\langle \vec{v},\vec{v}\rangle$ ונקבל

$$\boxed{1=\lambda\bar{\lambda}=|\lambda|}$$

4

(14)

זה הריבוע של הערך המוחלט

## שאלה 15:

יהיו $T, V, \lambda, \mu, \vec{v}, \vec{u}$ כנתון.

$\cancel{\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle=\langle \vec{u},\vec{v}\rangle=0}$ נתון

$$\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle = \langle \mu\vec{u},\lambda\vec{v}\rangle$$
$$= \mu\bar{\lambda}\langle \vec{u},\vec{v}\rangle$$

כיון ש T אוניטרית מתקיים:

כמו כן מתקיים

$$\langle T(\vec{u})-T(\vec{v})-T(\vec{v}), T(\vec{v})\rangle$$
$$=$$

2

(15)

זאת אינה הוכחה

בה"ב

## שאלה 12:

נראה כי לכל מטריצה A כנדרש יש לפחות פולינום אחד שאינו פולינום ה אפס ~~השאת~~ שמאפס אותו
$f(A) = [0]$
לפי משפט קיילי המילטון, לכל מטריצה A
כנ"ל הפולינום האופייני יאפס $f_A(A) = 0$.
לכן לכל A מתקיים
$\dim(\ker(S_A)) \geq 1$

10
(12)

## שאלה 11:

נשים לב כי הבסיס הסטנדרטי קרוב מאוד לנדרש,
לכן כל מה שנעשה בבסיס B הוא לשנות
את סדר המטריצות ולהפוך את הסימן של $e_2$

$$B = \left( \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

7
(11)
לא ניתן הסבר מספק

סטודנט יקר שים לב! השולים יחתכו לפני הסריקה לכן חל איסור מוחלט לכתוב כאן

- טיוטה -

$AX-XA$

$\langle T\vec{u}, T\vec{v}+Tu-Tu \rangle$

$\langle Tu\ Tv \rangle + \langle Tu, Tu \rangle - \langle Tu\ Tu \rangle$

אני מצטער על
שאלה כזו...
זה קשה לי מבחינת [illegible]

גם שאלה זו לא
הספקתי...

$A$

$AX-XA = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$

אוניברסיטת
אריאל
בשומרון