עדיין שבוע 3 !

חישוביות וסיבוכיות
מצגת 4- משפט רייס

המחלקות R ו-RE (תזכורת)

- קבוצת השפות שקיימת עבורן מכונת טיורינג **שמקבלת** אותן:

$$RE = \{L \subseteq \Sigma^* \mid there\ exista\ a\ turing\ mechine\ M\ such\ that\ L(M) = L\}$$

- קבוצת השפות שקיימן עבורן מכונת טיורינג **המכריעה** אותן:

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* \mid there\ exists\ a\ turing\ mechine\ M\ such\ that\ L(M) = L \\ and\ M\ halts\ on\ every\ input.\}$$

משפט רייס - הקדמה

- עד עכשיו, כשראינו שפה מהצורה
$L = \{< M >| L(M)\ has\ a\ particular\ property\}$

ניסינו להתאים לה רדוקציה ספציפית כדי להוכיח עבורה לאיזה מחלקה היא איננה שייכת.

- במקרים כאלה, משפט רייס נותן לנו קיצור דרך.

הגדרה- תכונה של שפות ב-RE

אבחנה: כשמדברים על תכונה מסויימת, נוח לדבר על **הקבוצה** של האובייקטים אשר מקיימים את התכונה. לדוגמא:

- התכונה "עיניים חומות" $\equiv$ קבוצת האנשים בעלי עיניים חומות.

אנו נתמקד בתכונות של שפות למשל:

- שפות בעלות לפחות 5 מילים.
- שפות בעלות מספר אינסופי של מילים.
- שפות המכילות רק מילים בעלות אורך זוגי.
- שפות המכילות את המילה ε.

הגדרה- תכונות לא טריוויאליות

משפט רייס עוסק בתכונות של שפות שהמאפיין אותן הוא היותן תתי קבוצות לא ריקות החלקיות ממש ל-RE.

$\neq \Sigma^*$

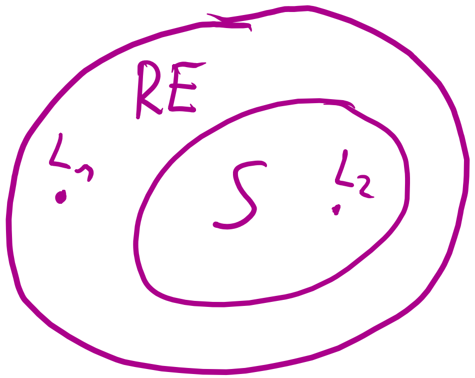
$\neq \emptyset$

$\subsetneq RE$

הגדרה- תכונות לא טריוויאליות

משפט רייס עוסק בתכונות של שפות שהמאפיין אותן הוא היותן תתי קבוצות לא ריקות החלקיות ממש ל-RE.

<u>הגדרה</u>: תכונות **לא טריוויאליות** ב-RE הן תכונות S כך ש-$S \subseteq RE$, וכן $\emptyset \neq S \neq RE$



הגדרה- תכונות לא טריוויאליות

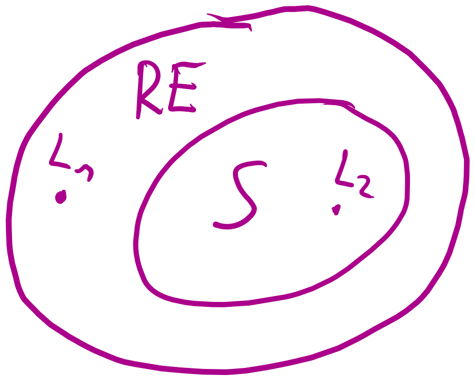
משפט רייס עוסק בתכונות של שפות שהמאפיין אותן הוא היותן תתי קבוצות לא ריקות החלקיות ממש ל-RE.

<u>הגדרה</u>: תכונות **לא טריויאליות** ב-RE הן תכונות S כך ש-$S \subseteq RE$, וכן $\emptyset \neq S \neq RE$

אבחנה: לכל תכונה לא טריויאלית S

קיימת לפחות שפה אחת ב-S

ולפחות שפה אחת ב-$RE \setminus S$.



נסמן: $\emptyset$- קבוצה ריקה של שפות,
φ – השפה הריקה

הגדרה- השפה L_S

<u>הגדרה</u>: בהינתן תכונה $S \subseteq RE$

נגדיר את השפה $L_s = \{< M > |L(M) \in S\}$ כלומר, L_s היא שפת קידודי המכונות כך ששפת המכונה שייכת לתכונה S.

דוגמאות:

- לתכונה $s_1 = \{L \in RE|\ \ |L| \geq 2\}$ מתאימה השפה $L_{s_1} = \{\langle M\rangle||L(M)| \geq 2\}$
- לתכונה $s_2 = \{L \in RE|\varepsilon \in L\}$ מתאימה השפה $L_{s_2} = \{\langle M\rangle|\varepsilon \in L(M)\}$
- לתכונה $s_3 = \{\varphi, \Sigma^*, \{11,0\}\}$ מתאימה השפה $L_{s_3} = \{\langle M\rangle|L(M) \in s_3\}$
- לתכונה $s_4 = \{L \in RE|\ \ |L|\ is\ infinite\}$ מתאימה השפה

$L_\infty = \{\langle M\rangle|\ |L(M)|\ is\ infinite\}$

נסמן: $\emptyset$- קבוצה ריקה של שפות,
φ – השפה הריקה

משפט רייס

משפט רייס:

לכל תכונה לא טריוויאלית $RE \subsetneq S \neq \emptyset$ מתקיים $L_S \notin R$

נסמן: $\emptyset$- קבוצה ריקה של שפות,
φ – השפה הריקה

משפט רייס

<u>משפט רייס:</u>

לכל תכונה לא טריוויאלית $RE \subsetneq S \neq \emptyset$ מתקיים $L_S \notin R$

<u>משפט רייס המורחב:</u>

בנוסף,

- אם $\varphi \notin S$ אז גם $L_S \notin coRE$
- אם $\varphi \in S$ אז גם $L_S \notin RE$

נסמן: $\emptyset$- קבוצה ריקה של שפות,
φ – השפה הריקה

משפט רייס - הוכחה

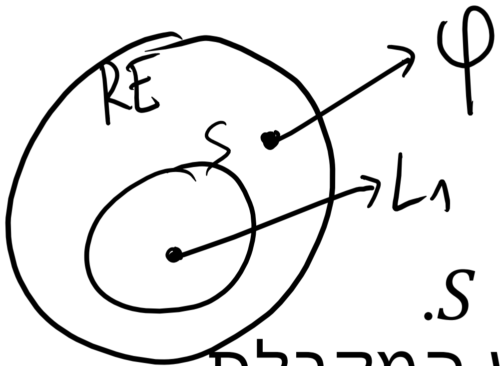
רעיון ההוכחה:

- אם $S \notin \varphi$ אז נראה כי $L_S \geq HP$ ומזה נובע כי $L_S \notin coRE$.
- אם $S \in \varphi$ אז נראה כי $L_S \geq \overline{HP}$ ומזה נובע כי $L_S \notin RE$.

בשני המקרים, נקבל כי $L_S \notin R$.

נחלק למקרים:

1. $\varphi \notin S$
2. $\varphi \in S$



משפט רייס – הוכחה (מקרה 1)

1. $S \notin \varphi$, כלומר השפה הריקה לא מקיימת את התכונה S. לכן, $\varphi \in RE \setminus S$. לכן, קיימת L_1 שפה ב-S, ותהי M_{L_1} מ"ט המקבלת את L_1.

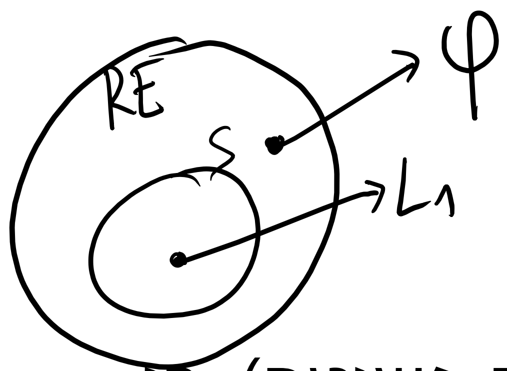
נוכיח ש-$HP \leq L_S$

פונקצית הרדוקציה: $f(< M,x >) =< M_x >$

כך ש:

M_x על קלט $y \in \Sigma^*$:

1. מריצה את M על x. מאסום
2. מריצה את M_{L_1} על y ועונה כמוה.

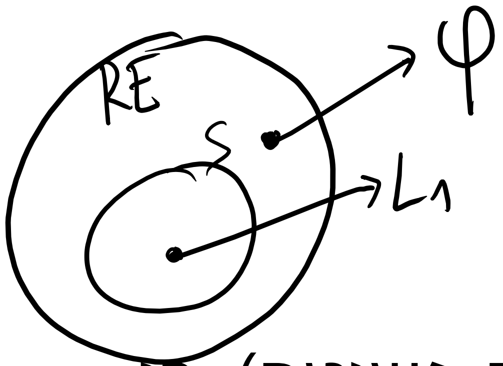


משפט רייס – הוכחה (מקרה 1)

הפונקציה מלאה (מהגדרה) וניתנת לחישוב (פעולת קומפליציה פשוטה), כי ראינו שניתן לקודד כל מכונת טיורינג.

תקפות הרדוקציה:

- $\langle M, x\rangle \in HP$ $\rightarrow$ M stops on x $\rightarrow$ M_x runs M_{L_1} on y $\rightarrow$ $L(M_x) = L(M_{L_1})$ $\rightarrow$ $M_x \in L_S$ $(f\langle M, x\rangle) \in L_S$
- $\langle M, x\rangle \notin HP$ $\rightarrow$ M runs forever on x $\rightarrow$ M_x runs forever $\rightarrow$ $L(M_x) = \emptyset$ $\rightarrow$ $M_x \notin L_S$



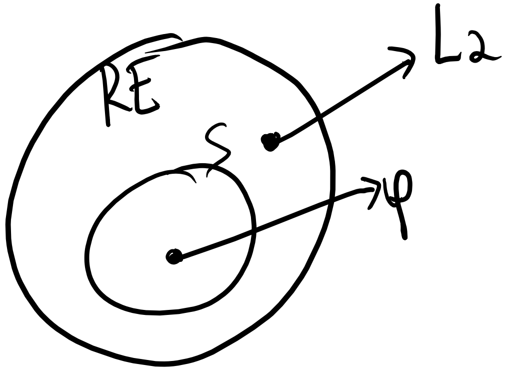
משפט רייס – הוכחה (מקרה 1)

הפונקציה מלאה (מהגדרה) וניתנת לחישוב (פעולת קומפליציה פשוטה), כי ראינו שניתן לקודד כל מכונת טיורינג.

תקפות הרדוקציה:

- $\langle M,x\rangle \in HP \ \rightarrow M_x \ answers \ on \ y \ as \ M_{L_1} \ and \ stops \ \rightarrow M_1 \ stops \ on \ y \rightarrow L_1 = L(M_1) = L(M_x) \rightarrow f(< M >, < x >) \in L_s$

- $\langle M,x\rangle \notin HP \ \rightarrow M_x \ runs \ infinite \ is \ step \ 1 \ for \ each \ y \ \rightarrow L(M_x) = \Phi \rightarrow f(< M >, < x >) = M_x \notin L_s$



משפט רייס – הוכחה (מקרה 2)

$S \ni \varphi$, השפה הריקה מקיימת את התכונה S

תהי L_2 שפה ב-$RE \backslash S$, ותהי M_{L_2} מ"ט המקבלת את L_2.

נוכיח ש-$L_s \geq \overline{HP}$

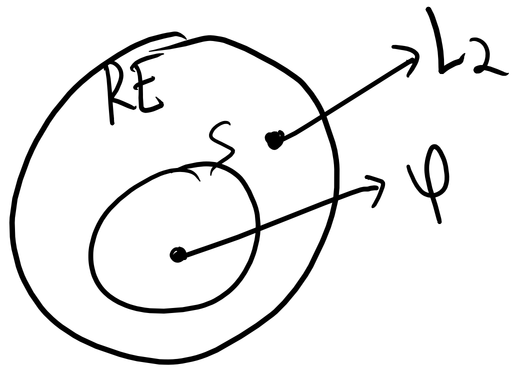
פונקצית הרדוקציה: $f(< M,x >) =< M_x >$

כך ש:

M_x על קלט y:

1. מריצה את M על x [illegible]
2. מריצה את M_{L_2} על y ועונה כמוה.

$\langle M,x \rangle \in \overline{HP} \Rightarrow$
$L(M_x) = \emptyset$



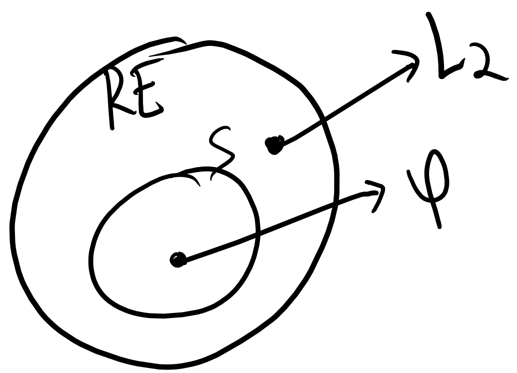
משפט רייס – הוכחה (מקרה 2)

הפונקציה מלאה וניתנת לחישוב, כי ראינו שניתן לקודד כל מכונת טיורינג.

תקפות הרדוקציה:

- $\langle M, x \rangle \in \overline{HP}$

- $\langle M, x \rangle \notin \overline{HP}$



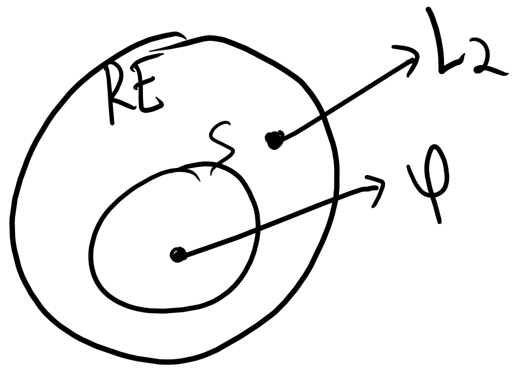
משפט רייס – הוכחה (מקרה 2)

הפונקציה מלאה וניתנת לחישוב, כי ראינו שניתן לקודד כל מכונת טיורינג.

תקפות הרדוקציה:

- $\langle M,x\rangle \in \overline{HP} \rightarrow L(M_x) = \Phi \in S \rightarrow < M_x > \in L_s$

- $\langle M,x\rangle \notin \overline{HP} \rightarrow L(M_x) = L\left(M_{L_2}\right) = L_2 \notin S \rightarrow < M_x > \notin L_s$



משפט רייס – הוכחה (מקרה 2)

אפשרות נוספת להוכחה כי $L_S \notin R$ עבור מקרה 2 ($\varphi \in S$):

נתבונן בשפה המשלימה

$$\overline{L_S} = \{< M > |L(M) \in RE \setminus S\}$$

$$= \{< M >| \ L(M) \in \bar{S}\} = L_{\bar{S}}$$

עבור $\bar{S}$ מתקיים ש-$\bar{S} \notin \varphi$ מכאן שלפי משפט רייס (המקרה הראשון)

מתקיים כי $\overline{L_S} = L_{\bar{S}}$ איננה ב-R.

לכן, גם L_S איננה ב-R.

(נניח בשלילה ש-L_S ב-R , מכיוון ש-R סגורה למשלים, נובע ש-$\overline{L_S}$ גם ב-R.

סתירה!)

מ.ש.ל.

מה קורה כאשר התכונה S **כן** טריוויאלית?

אם נתון ש-S טריוויאלית אז:

1. אם $\boldsymbol{S = RE}$, אז אפשר לקבל כל קידוד של מכונת טיורינג. מכיוון שהנחנו כי כל מחרוזת מתארת מכונת טיורינג כלשהי, נקבל כי השפה L_S מכילה את כל המחרוזות, כלומר $L_S = \Sigma^*$, ואכן $\Sigma^* \in R$.
2. אם $\boldsymbol{S} = \emptyset$, אז אפשר לדחות כל קידוד של מכונת טיורינג.
כלומר, השפה L_S לא מכילה מילים כלל, כלומר $L_S = \varphi$, ואכן $\varphi \in R$.

מסקנה, אם התכונה טריוויאלית, משפט רייס "לא עובד".

מתי מותר להשתמש במשפט רייס?

- מותר להשתמש במשפט רייס רק כשהשפה הנתונה לנו L היא אכן קבוצת אובייקטים של תכונה מסוימת של שפות, כלומר, קיימת תכונה S כך ש-
$L = L_s = \{< M > | L(M) \in S\}$

- לפעמים התכונה נראית מסובכת, אבל היא טריוויאלית.

-איך מוכיחים שתכונה היא לא טריוויאלית?

מראים דוגמא לשפה שמקיימת את התכונה ושפה שלא מקיימת את התכונה.

מתי מותר להשתמש במשפט רייס?

- אם התכונה המדוברת היא תכונה של **המכונה** ולא תכונה של **השפה** של המכונה אז משפט רייס **לא עובד**.

דוגמא: $L = \{< M > | M\ halts\ on\ every\ input\}$

עצירה היא תכונה של מכונה ולא של שפה – בהינתן תכונה לא טריוויאלית S, יתכן שישנן מכונות שתמיד עוצרות שהשפה שלהן ב-S, אבל ישנן מכונות שמקבלות את אותה שפה שלא עוצרות על מילים שלא בשפה.

התכונה היחידה של משפט רייס שעשויה להתאים ל-L היא $S = R$,

אבל, אפשר לחשוב על מכונה שמקבלת שפה ב-R ולא עוצרת על מילים שלא בשפה. (למה זה לא סותר את זה שהשפה ב-R?)

במקרה כזה, צריך להוכיח בדרכים שונות (כלומר ע"י רדוקציה...)

כמה דוגמאות:

השפה	שייכות ל-R	שייכות ל-RE	האם ניתן להשתמש ברייס?
$L_1 = \{< M >\| \|L(M)\| \leq 3\}$	✗	✓	✓
$L_2 = \{< M > \|L(M) \subseteq \Sigma^*\}$ [illegible] ל טריוויאלי	✓	✓	✓
$L_3 = \{< M > \|M \text{ accepts the word } \varepsilon\}$	✗	✓	✗
$L_4 = \{< M > \|\varepsilon \in L(M)\}$	✗	✓	✓
$L_5 = \{< M > \|L(M) \in coRE\}$			
$L_6 = \{< M > \|L(M) \notin R\}$	✗	✓	✓
$L_7 = \{< M >\|\|L(M)\| \text{is odd, and } \|< M >\| \leq 1000\}$	✗	✗	✗

$L_5 \notin RE$ אזי $\varphi \in S$
$L_5 \notin coRE$ אזי $\varphi \notin S$

כמה דוגמאות:

השפה	שייכות ל-R	שייכות ל-RE	האם ניתן להשתמש ברייס?
$L_1 = \{< M >\mid \lvert L(M)\rvert \leq 3\}$	X (רייס)	X (רייס המורחב)	כן +רייס המורחב
$L_2 = \{< M > \mid L(M) \subseteq \Sigma^*\}$	V	V	תכונה טריוויאלית
$L_3 = \{< M > \mid M \text{ accepts the word } \varepsilon\}$	X(רייס)	V	כן, שימו לב שזו לא תכונה של מכונה.
$L_4 = \{< M > \mid \varepsilon \in L(M)\}$	X(רייס)	V	כן
$L_5 = \{< M > \mid L(M) \in coRE\}$ $\varphi \in L_5$	X (רייס)	X (רייס המורחב)	כן
$L_6 = \{< M > \mid L(M) \notin R\}$	X (רייס)	X (צריך רדוקציה מ-$\overline{HP}$)	כן
$L_7 = \{< M >\mid \lvert L(M)\rvert is\ odd, and\ \lvert< M >\rvert \leq 1000\}$	V	V	השפה סופית!

לגבין ?

$L_q = \{\langle M\rangle \mid \varepsilon \notin L(M)\} \neq L_P = \{\langle M\rangle \mid$ M מגיעה
ביו-ε $\}$

רייס.

לא רייס.

לא ניתן להשתמש ברייס כי זו תכונה
של המכונה.