

מבחן בקורס הסתברות 2

סמסטר א', מועד א'

10.02.2021

פרופ' דן חפץ

אוניברסיטת אריאל

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה למדעי המחשב

משך הבחינה: שעתיים

המבחן הינו עבור מספרי קורס: 2-7037110-3, 2-7037110-1

מבנה המבחן: 3 שאלות ללא בחירה.

הנחיות:

1. המבחן הינו עם חומר סגור. עם זאת, כל סטודנט רשאי להביא דף אחד מגודל A4 כתוב משני צדדיו.
2. אין לכתוב בעפרון.
3. יש להוכיח כל טענה שאתם כותבים גם אם לא התבקשתם לעשות זאת במפורש בשאלה.
4. ניתן להסתמך ללא הוכחה על כל טענה שנלמדה בשיעור (אלא אם כן זו הטענה שהנכם מתבקשים להוכיח בשאלה). יש לצטט את הטענה עליה הנכם מסתמכים בצורה ברורה.
5. יש להעלות את הפתרון בקובץ יחיד מסוג WORD, jpeg, pdf, או png.

שאלה 1 (40 נקודות):

תהי

$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)(1+x) & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- א. (13 נקודות) מצאו את c עבורו f היא פונקציית צפיפות.
- ב. (14 נקודות) יהי X משתנה מקרי עם פונקציית צפיפות f . חשבו את פונקציית ההסתברות המצטברת של X .
- ג. (13 נקודות) חשבו את התוחלת של X .

שאלה 2 (30 נקודות):

נתונה משפחה \mathcal{F} של וקטורים בינאריים באורך n . נניח כי לכל וקטור ב- \mathcal{F} יש לפחות $n/2$ קואורדינטות השוות ל-1. כמו כן, נניח כי לכל שני וקטורים שונים $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{F}$ מתקיים $|\{1 \leq i \leq n : x_i = y_i = 1\}| \leq n/4$.

כתבו אלגוריתם רנדומי המקיים את כל התכונות הבאות:

1. **קלט:** שני וקטורים (לאו דווקא שונים) $\bar{x}, \bar{y} \in \mathcal{F}$.
2. **פלט:** $\bar{x} = \bar{y}$ או $\bar{x} \neq \bar{y}$.
3. אם $\bar{x} = \bar{y}$ אז פלט האלגוריתם יהיה $\bar{x} = \bar{y}$.
4. אם $\bar{x} \neq \bar{y}$ אז פלט האלגוריתם יהיה $\bar{x} \neq \bar{y}$ בהסתברות $1 - 2^{-100}$ לפחות.
5. זמן הריצה של האלגוריתם קבוע (כלומר לא תלוי ב- n). הניחו כאן כרגיל שבחירת מספר אקראי מתוך קבוצה לוקח זמן קבוע.

שאלה 3 (30 נקודות):

יהי $G \sim G(n, \ln n / n)$ גרף מקרי. הוכיחו שההסתברות שקיימות שתי קבוצות זרות של קודקודים של G מגודל $n/100 \leq t \leq n$ כל אחת ללא אף קשת של G ביניהן שואפת ל-0 כאשר n שואף לאינסוף.