תרגיל מס' 2 באלגברה לינארית 2

תרגיל 1. הוכיחו או הפריכו על ידי דוגמה נגדית את הטענות הבאות.

1. קיימת העתקה לינארית חח"ע $T : \mathbb{R}^{15} \to \mathbb{R}^{9}$.
2. לא קיימת העתקה לינארית על $T : \mathbb{R}^{9} \to \mathbb{R}^{15}$.
3. אם $T : V \to W$ העתקה לינארית ו $\dim(\mathrm{Im}T) = \dim V$ אזי T חח"ע.
4. תהי $T : V \to W$ העתקה לינארית ונניח ש $\dim V > \dim W$. אזי T על.
5. יהי $\mathbb{F}$ שדה ו $f : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$. אזי f היא העתקה לינארית, אם ורק אם קיים $\alpha \in \mathbb{F}$ כך ש $f(x) = \alpha x$.

תרגיל 2. יהי $\mathbb{C}$ שדה המרוכבים.

1. הראו ש $\mathbb{C}$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$. מה הוא המימד?
2. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מ $\mathbb{C}$ לעצמה, קבעו האם היא העתקה לינארית. במידה והיא לינארית, מצאו גרעין, תמונה ומימד.
   (א) $f(z) = \mathrm{Re}z$ (החלק הממשי של z).
   (ב) $f(z) = i \cdot \mathrm{Im}z$ (החלק המרוכב של z כפול i).
   (ג) $f(z) = |z|$.
   (ד) $f(z) = \overline{z}$, כאשר $\overline{z}$ מסמל את הצמוד של z.
   (ה) $f(z) = cz$ עבור $c \in \mathbb{C}$.
   (ו) $f(z) = c + z$ עבור $c \in \mathbb{C}$.
3. מצאו $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ כך ש f העתקה לינארית של מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{R}$, אך אינה העתקה לינארית של מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{C}$.
4. נזכר, שלכל $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 = (x, y)$ קיימת הצגה קוטבית $(x, y) = r(\cos\theta, \sin\theta)$ כאשר $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ולכל $(x, y) \neq (0, 0)$ מתקיים

$$\cos\theta = .\frac{x^2}{x^2+y^2}, \sin\theta = \frac{y^2}{x^2+y^2}$$

(מבחינה ויזואלית, θ היא זווית של (x, y) עם הכיוון החיובי של ציר ה x). לכן, לכל מספר מרוכב $z = a + ib$ קיימת הצגה קוטבית $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ כאשר $r = \sqrt{a^2+b^2}$ ו θ היא הזווית שהוקטור (a, b) יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה x. המספר θ נקרא ארגומנט של z ומסומן על ידי $\mathrm{Arg}(z)$. הביטוי $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ מסומן על ידי $\mathrm{cis}\theta$ או $e^{i\theta}$.

   (א) הראו, שמתקיים $r_1e^{i\theta_1}r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

(ב) מהי המשמעות הגאומטרית של הפונקציה $f_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ המוגדרת על ידי $f_\theta(z) = e^{i\theta} z$?

(ג) יהי $\alpha \in \mathbb{R}$. נגדיר העתקת הסיבוב בזווית α כאשר $T_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ על ידי $T_\alpha(r(\cos(\alpha+\theta), \sin(\alpha+\theta))) = r(\cos(\alpha+\theta), \sin(\alpha+\theta))$. הראו, ש T_α לינארית.

תרגיל 3. בכל אחד מהמקרים הבאים קבעו האם העתקה T היא העקתה לינארית. במידה וכן, מצאו את המימד, את התמונה ואת הגרעין.

1. עבור V ת"מ של הפונקציות מ $\mathbb{R}$ לעצמה, הנפרש על ידי $B = \left\{x^2 e^x, xe^x, x\right\}$, $T : V \to V$ המוגדרת על ידי

$$T(f(x)) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.$$

2. $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$ המוגרת על ידי

$$T(p(x)) = \frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x}.$$

3. $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{2n}[x]$ המיגדרת על ידי $T(p(x)) = p(x) \cdot p(x)$.
4. עבור $q(x) \in \mathbb{R}_m(x)$, $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n+m}[x]$ המודרת על ידי $T(p(x)) = q(x)p(x)$.
5. $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{2n}[x]$ המוגדרת על ידי $T(p(x)) = p\left(x^2\right)$.
6. $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ המוגדרת על ידי

$$T(p(x)) = \frac{1}{x}\int_0^x p(t)\,\mathbf{d}t.$$

7. $T : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_n[x]$ המוגדרת על ידי

$$T(p(x)) = x\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x}.$$

8. עבור $V = F^{n\times n}$ ו $A \in V$, העתקה T המוגדרת על ידי $T(B) = AB - BA$. (אין צורך למצוא את הגרעין והתמונה במידה והיא לינארית).

תרגיל 4. הוכיחו/הפריכו: לכל מרחב וקטורי V קיימת העתקה לינארית $T : V \to V$ כך ש $\ker T = \mathrm{Im} T$.

תרגיל 5. יהי $T : V \to W$ העתקה לינארית ו U ת"מ של V.

1. הראו, ש $T(U)$ הוא ת"מ של W.
2. הראו, שמתקיים:

$$\dim(T(U)) = \dim U - \dim(W \cap \ker T) .$$

תרגיל 6. עבור $A \in \mathbb{F}^{n\times m}$ תהי $L_A : \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}^n$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי $L_A(v) = AV$. הראו, שלכל $A, B \in \mathbb{F}^{n\times m}$, מתקיים: $L_A = L_B$ אם ורק אם $A = B$.

תרגיל 7. בכל אחד מהמקים, תארו את T באופן מפורש (כלומר על ידי נוסחא).

1. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המקיימת $T(3,1) = (1,2), T(-1,0) = (1,1)$.
2. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המקיימת $T(4,1) = (1,1)$, $T(1,1) = (3,1)$.
3. $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ המקיימת $T(-1,1) = (6,3), T(1,1) = (2,1)$.

תרגיל 8. מצאו העתקה לינארית $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת

$$\mathrm{Im}T = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

תרגיל 9. תהי הפונקציה $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_1[x]$ המוגדרת על ידי $f(a,b) = a + b + d^2 + 1 + ax$. האם קיים ערך $d \in \mathbb{R}$ עבורו f היא לינארית? האם קיים ערך כזה ב $\mathbb{C}$?

תרגיל 10. תהי $T : V \to W$ העתקה לינארית ויהי $\mathbf{w} \in W$. יהי $\mathbf{v_0} \in U$ כך ש $L(\mathbf{v}_0) = w$. הראו, ש v הוא פתרון של המשוואה $T(v) = w$ אם ורק אם קיים $u \in \ker T$ כך ש $v = v_0 + u$.

תרגיל 11. תהי $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}_2[x]$ העתקה לינארית שמקיימת:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 + x^2, T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 1 + x + x^2, T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2, T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2x^2.$$

1. חשבו את $T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$
2. חשבו את $T(A)$ לכל $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.
3. מצאו בסיס ומימד ל $\ker T$, $\mathrm{Im}T$.

תרגיל 12. יהי $V = \mathbb{F}^{n\times n}$ עבור תת-שדה $\mathbb{F}$ שמקיים $1 + 1 \neq 0$ (ז"א, $\mathbb{F}$ אינו יכול להיות $\mathbb{Z}_2$ למשל). יהי $\mathcal{S}$ אוסף המטריצות הסימטריות ו $\mathcal{A}$ אוסף המטריצות האנטיסימטריות. נגדיר $T : V \to V$ על ידי

$$T(A) = \frac{A + A^t}{2}.$$

1. הראו, ש T לינארית.
2. מה הוא הגרעין של T?
3. מה היא התמונה של T?
4. מצאו בסיס של $\mathcal{S}$ ובעזרתו חשבו את $\dim \mathcal{S}$.
5. בעזרת הסעיפים הקודמים, חשבו את $\dim \mathcal{A}$.