

מבחן בקורס הסתברות 2

סמסטר א' 2017

מועד א'

ד"ר דן חפץ

אוניברסיטת אריאל

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה למדעי המחשב

משך הבחינה: 3 שעות

המבחן הינו עבור מספרי קורס: 1-7037110-2

מבנה המבחן: 4 שאלות ללא בחירה.

הנחיות:

1. המבחן הינו עם חומר סגור ובכתב יד ללא שימוש בשום אמצעי אלקטרוני. עם זאת, כל סטודנט רשאי להביא דף אחד מגודל A4 כתוב משני צדדיו. על התלמיד לכתוב את שמו ומספר תעודת הזהות שלו על הדף הנ"ל.
2. אין לכתוב בעפרון.
3. יש להוכיח כל טענה שאתם כותבים גם אם לא התבקשתם לעשות זאת במפורש בשאלה.
4. ניתן להסתמך ללא הוכחה על כל טענה שנלמדה בשיעור (אלא אם כן זו הטענה שהנכם מתבקשים להוכיח בשאלה). יש לצטט את הטענה עליה הנכם מסתמכים בצורה ברורה.

שאלה 1 (25 נקודות):

מטילים קוביה תקנית 360000 פעם. יהי X משתנה מקרי הסופר את מספר ההטלות שתוצאתן 6.

$$\text{מצאו מספרים } a \text{ ו- } b \text{ עבורם מתקיים } \Pr(54000 \leq X \leq 63000) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx$$

שאלה 2 (25 נקודות):

כתבו אלגוריתם המקיים את כל התכונות הבאות:

1. **קלט:** קבוצה כלשהי A המכילה n מספרים ממשיים.
2. **פלט:** מספר $x \in A$.
3. לכל קלט, הפלט של האלגוריתם צריך לקיים $|\{y \in A : y < x\}| \geq 2n/3$ בהסתברות $1 - 2^{-100}$ לפחות.
4. זמן הריצה של האלגוריתם קבוע (כלומר לא תלוי ב- n).

שאלה 3 (25 נקודות):

עבור וקטורים $p = (p_1, \dots, p_n)$ ו- $q = (q_1, \dots, q_n)$ המקיימים $\sum_{i=1}^n q_i = 1$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ ו- $p_i \geq 0$ ו- $q_i > 0$

לכל $1 \leq i \leq n$, נגדיר את האנדרופיה היחסית של p ביחס ל- q על ידי

$$H(p|q) = \sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i/q_i)$$

יהי $u = (1/n, \dots, 1/n)$ וקטור באורך n . הוכיחו כי

$$H(p_1, \dots, p_n) = \log_2 n - H(p|u)$$

שאלה 4 (25 נקודות):

יהיו $n \geq k \geq 4$ מספרים טבעיים ותהי $\{A_1, \dots, A_m\}$ משפחה של תת קבוצות של $\{1, \dots, n\}$ כך שמתקיים

$|A_i| = k$ לכל $1 \leq i \leq m$ וכן $m < 4^{k-1}/3^k$. הוכיחו שקיימת צביעה של איברי $\{1, \dots, n\}$ בארבעה צבעים

כך ש- A_i תכיל איברים מכל ארבעת הצבעים לכל $1 \leq i \leq m$.