

## תרגיל כיתה מס' 5 – הסתברות מותנית

### הסתברות מותנית

ההסתברות המותנית של מאורע  $A$  בהינתן מאורע  $B$  (המקיים  $P(B) > 0$ ) היא

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

### נוסחת הכפל

עבור שני מאורעות:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B | A) = P(B)P(A | B)$$

עבור  $n$  מאורעות:

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

### נוסחת ההסתברות השלמה

אם  $A_1, A_2, \dots, A_n$  הם מאורעות זרים בזוגות שאיחודם  $\Omega$ , אז לכל מאורע  $B$ ,

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i)$$

מקרה פרטי נפוץ, שבו  $n = 2$ :

$$P(B) = P(B | A)P(A) + P(B | \bar{A})P(\bar{A})$$

### נוסחת בייס

$$P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

אם  $A_1, A_2, \dots, A_n$  הם מאורעות זרים בזוגות שאיחודם  $\Omega$ , אז לכל מאורע  $B$ ,

$$P(A_k | B) = \frac{P(B | A_k)P(A_k)}{\sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i)}, \quad P(B) > 0$$

1. מטילים שתי קוביות. נגדיר:

$A$  = "סכום המספרים שהתקבלו הוא 5"  
 $B$  = "שני המספרים שהתקבלו קטנים או שווים ל-3"

- א. מהי ההסתברות של  $A$  בהינתן  $B$ ?  
ב. מהי ההסתברות של  $B$  בהינתן  $A$ ?

2. נתון

$$P(A) = 0.5, \quad P(B) = 0.4, \quad P(B | A) = 0.6, \quad P(C | A \cap B) = 0.4$$

מצאו את  $P(A \cap C | B)$ .

3. הראו כי אם המאורע  $B$  מגדיל את הסתברות המאורע  $A$  (כלומר  $P(A | B) > P(A)$ ), אז המאורע  $A$  מגדיל את הסתברות המאורע  $B$  (כלומר  $P(B | A) > P(B)$ ).

4. בארנק נמצאות 8 מטבעות הוגנות ו-2 מטבעות המראות H בהסתברות  $2/3$  ו-T בהסתברות  $1/3$ . שולפים באקראי מטבע מהארנק, ומטילים אותה.

- א. מה ההסתברות שיתקבל H?  
ב. אם ידוע כי התקבל H, מהי ההסתברות שהמטבע שנבחרה היא הוגנת?

5. קלע יורה למטרה 3 פעמים. ההסתברות שלו לפגוע במטרה בירייה הראשונה היא 0.5. בניסיונות הבאים ההסתברות שלו לפגוע במטרה תלויה בהצלחתו בירייה הקודמת. אם בירייה הקודמת פגע במטרה, אז ההסתברות שלו לפגוע במטרה בירייה שלאחריה היא 0.8; אם בירייה הקודמת החטיא את המטרה, אז ההסתברות שלו לפגוע בירייה שלאחריה היא 0.4.

- א. מהי ההסתברות שהקלע יפגע במטרה פעם אחת בלבד?  
ב. אם ידוע שהקלע פגע במטרה פעמיים, מהי ההסתברות שהירייה בה החטיא היתה הירייה השנייה?

6. במרחב המדגם  $\Omega = \{a, b, c, d\}$  מתקיים כי

$$P(\{a\}) = 0.1, \quad P(\{b\}) = 0.2, \quad P(\{c\}) = 0.3, \quad P(\{d\}) = 0.4.$$

נגדיר שלושה מאורעות –

$$A = \{a, c\}, \quad B = \{b, c, d\}, \quad C = \{a, d\}$$

חשבו את הסתברויות המותנות הבאות :

א.  $P(A | B)$

ב.  $P(B | A)$

ג.  $P(A \cup C | B)$

ד.  $P(\bar{C} | A \cap B)$

7. ההסתברות שסטודנט עובד בתקופת לימודיו היא 0.6. ההסתברות שסטודנט גר עם ההורים בתקופת לימודיו היא 0.8. ההסתברות שסטודנט עובד וגר עם ההורים היא 0.45. אם ידוע שסטודנט אינו עובד, מהי ההסתברות ש-

א. הוא גר עם ההורים ?

ב. הוא לא גר עם ההורים ?

8. נתונים שני כדים. בכד א' 2 כדורים שחורים וכדור אחד לבן, בכד ב' 2 כדורים לבנים וכדור אחד שחור. מטיילים קוביה; אם התוצאה גדולה מ-2 מוציאים באקראי שני כדורים עם החזרה מכד א', אחרת מוציאים באקראי שני כדורים עם החזרה מכד ב'.

א. מהי ההסתברות שהכדור הראשון שהוצא לבן?

ב. מהי ההסתברות ששני הכדורים שהוצאו לבנים?

ג. אם ידוע שהכדור הראשון שהוצא הוא לבן, מהי ההסתברות שהוא הוצא מכד א'?

ד. אם ידוע ששני הכדורים שהוצאו הם לבנים, מהי ההסתברות שהם הוצאו מכד ב'?

9. כל פרויקט של חברה לחיפושי נפט מתחיל במחקר גיאולוגי של האתר המועמד לקידוח, והחברה מתחילה לקדוח רק אם תוצאות המחקר הן חיוביות. ההסתברות שתוצאות המחקר יהיו חיוביות היא 0.15 וההסתברות למציאת נפט בקידוח (לאחר שהתקבלו תוצאות מחקר חיוביות) היא 0.3.

א. הציגו את הסיטואציה המתוארת באמצעות עץ הסתברות.

ב. מהי ההסתברות שבפרויקט יימצא נפט?

ג. אם ידוע שפרויקט מסוים לא הסתיים במציאת נפט, מהי ההסתברות שהדבר קרה בשל תוצאות מחקר שליליות?