מרתון - חישוביות - 6.1
מבחן 2021 סמסטר א מועד ב

1. (30 נקודות) לכל אחת מהשפות הבאות, קבעו האם היא ב R והאם היא ב RE. הוכיחו את תשובתכם.

א.
$L_1 = \{< M > |\text{There exists an infinite series } x_1, x_2, \ldots \text{ where each } x_i \text{ is a proper prefix of } x_{i+1} \text{ and M accepts every such } x_i\}$.

בעברית: זוהי שפת כל קידודי המכונות, כך שקיימת סדרת מילים אינסופית, כל שכל מילה בסדרה היא רישא ממש של המילה הבאה בסדרה, ו M מקבלת את כולן.

ב. $L_2 = \{(< M >, < x >)|\text{There exists an infinite series } < M_1 >=< M >, < M_2 >, \ldots \text{ where each } < M_i >$ is a prefix of $< M_{i+1} >$ and every M_i where $i \geq 2$ accepts $x\}$

בעברית: זוהי שפת הזוגות של קידוד מכונה וקלט x, כך שקיימת סדרת קידודי מכונות אינסופית, כך שכל קידוד הוא רישא של הקידוד העוקב, והקידוד הראשון בסדרה הוא קידוד המכונה שבקלט. בנוסף, כל מ"ט המיוצגת על ידי הקידוד השני ומעלה בסדרה מקבלת את x. תזכורת: הזכרו שכל מחרוזת שאינה קידוד חוקי של מ"ט , מהווה קידוד של M_{STAM} שמיד עוצרת ומקבלת כל קלט.

ג.
$L_3 = \{(< M >, n)|\text{There exists a series } x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ where each } x_i \text{is a proper prefix of } x_{i+1} \text{ and M accepts every such } x_i\}$.

בעברית: זוהי שפת כל קידודי זוגות של קידוד מכונה ומספר n, כך שקיימת סדרת מילים באורך n, כך שכל מילה בסדרה היא רישא ממש של המילה הבאה בסדרה, ו M מקבלת את כולן.

פתרון:

א. לא ב RE.

הוכחה: נראה רדוקציה: $\bar{HP} \leq L_1$ ע"י: $f(< M, x >) =< M' >$ כאשר:

M': על קלט w:

- הרץ את M על x למשך $|w|$ צעדים.
- אם בזמן המוקצב M עצרה - דחה.
- אחרת - קבל.

הרדוקציה מלאה וניתנת לחישוב - כתיבת תיאור של מ"ט שמסמלצת ריצה מבוקרת של מכונה אחרת.

תקפות:

אם $< M, x >\in \bar{HP}$ אז M לא עוצרת על x ולכן לכל w, המכונה M על x לא תעצור לאחר $|w|$ צעדים ולכן M' תמיד תקבל. מכאן: $L(M') = \Sigma^*$ ובפרט יש בשפה הזו אינסוף מילים שאחת היא רישא ממש של השנייה וכולן מתקבלות ב M'. לכן: $< M' >\in L_1$.

אם $< M, x >\notin \bar{HP}$ אז M עוצרת על x לאחר k צעדים (זמן סופי) ולכן עבור מילים w באורך קטן מ k המכונה M' תקבל (כי בזמן כזה M עדיין לא עוצרת על x) אבל עבור על מילה w באורך לפחות k המכונה M תספיק לעצור על x בתוך $|w|$ המעדים ולכן נדחה. מכאן השפה של המכונה M' היא סופית ובפרט לא קיימות אינסוף מילים כנ"ל. לכן: $< M' >\notin L_1$.

ב. השפה ב R.

הוכחה: נשים לב שיש אינסוף קידודים שאינם תקינים ולכן מייצגים את המכונה שמקבלת הכל.

לכן תמיד נוכל לקחת את הקידוד של $< M >$ ולהוסיף לו תווים (0 או 1) כך שיהיה קידוד לא תקין: $< M_2 >$.

נמשיך שוב עם התהליך ונוסיף עוד תווים כך שנקבל שוב קידוד לא תקין: $< M_3 >$ נמשיך באותו אופן ונקבל כך סדרה אינסופית של קידודי מכונות שכל קידוד הוא רישא של הקידוד הבא וכולם מייצגים קידוד לא תקין של מ"ט ולכן כל המכונות הנ"ל מקבלות הכל ובפרט את x.

ולכן לכל $< M, x >$ התנאי מתקיים ולכן השפה היא שפת כל המילים בעולם - שהיא כריעה.

ג. השפה ב RE ולא ב R

הוכחת שייכות ל RE: נגדיר את המ"ט הבאה:

M': על קלט $< M, n >$ כאשר M היא מ"ט, n הוא מספר:
- עבור i מ n עד אינסוף בצע:
  - count=0
  - הרץ את M על כל אחת מ i המילים הראשונות בסדר לקסיקוגרפי של Σ^* למשך i צעדים.
  - עבור כל מילה שהתקבלה נבצע: $count$ ++ ונשמור את המילה שהתקבלה ב S.
  - עבור על כל אפשרות לבחירת n מילים: $x_1, x_2, ..., x_n$ מתוך S ובדוק שכל מילה x_i היא ריישא ממש של x_{i+1}. אם נמצאו n מילים כאלה - קבל.

נכונות: אנו מבצעים מעבר על כל המילים האפשרויות ולוקחים בכל שלב לקבוצה את כל המילים ש M מקבלת ומתוך קבוצה זו מחפשים עבור כל האפשרויות את המילים המקיימות את התנאי הנ"ל ולכן בהכרח נמצא מילים כאלו אם ורק אם $< M, n > \in L_3$.

הוכחת אי שייכות ל R: נראה רדוקציה $HP \le L_3$ ע"י: $f(< M, x >) =< M', n >$ כאשר:
$n = 2$.
M': על קלט w:
- הרץ את M על x.
- קבל.

הרדוקציה מלאה וניתנת לחישוב - כתיבת תיאור של מ"ט שמסמלצת ריצה מבוקרת של מכונה אחרת.
תקפות:
אם $< M, x > \in HP$ אז M עוצרת על x ולכן M' תקבל כל מילה ובפרט השפה של M' מכילה 2 מילים שאחת היא רישא ממש של השנייה. ולכן: $< M', n > \in L_3$.
אם $< M, x > \notin HP$ אז M לא עוצרת על x ולכן M' לא תקבל אף מילה. ולכן: $< M', n > \notin L_3$.

2. (26 נקודות) בשאלה זו, אם אתם מציגים רדוקציה או אלגוריתם (כחלק מהוכחה או הפרכה), אין חובה להוכיח נכונות שלהם.

א. (9 נקודות) תהי $S = R \setminus \{\phi\}$. הוכיחו ש $L_S \notin RE$. יינתנו 4 נקודות על הוכחה של התוצאה היותר חלשה ש $L_S \notin R$.

ב. (6 נקודות) נסחו כל אחת משתי השפות L_1, L_2 הבאות במונחי L_S כאשר S תכונה של שפות ב RE. (כלומר לכל שפה, אמרו מהי S). אין צורך להוכיח נכונות: $L_1 = \{< M > | L(M) \geq 5\}$. תהי L' שפה כלשהי ב RE. $L_2 = \{< M > | L(M) = L'\}$.

ג. (5 נקודות) הוכח או הפרך: תהי $S \subseteq RE$ קבוצה אינסופית לא טריוויאלית של שפות. אזי $L_S \notin RE$. רמז: ניתן להעזר בדוגמאות של L_S-ים מתשובותיכם על הסעיף הקודם.

ד. (6 נקודות) הוכח או הפרך: תהי M מ"ט לזיהוי שפות, שאינה עוצרת אך ורק על הקלטים "000" ו "1010". אזי $L(M) \in R$.

פתרון:
תזכורת: $L_S = \{< M >: L(M) \in S\}$.

א. נראה רדוקציה: $\overline{HP} \le L_S$ ע"י: $f(< M, x >) =< M' >$ כאשר:
M': על קלט w:
- אם $w = 0$ - קבל.
- הרץ את M על x.
- הרץ את המכונה של HP על w וענה כמוה.

ב. עבור השפה L_1 נקבל: $S = \{L \in RE: |L| \geq 5\}$.
עבור השפה L_2 נקבל: $S = \{L \in RE: L = L'\}$.

ג. הפרכה: דוגמא נגדית: ניקח את : $S = \{L \in RE: |L| \geq 5\}$ אז זו קבוצה אינסופית של שפות כי יש אינסוף שפות בגודל לפחות 5. והקבוצה אינה טריוויאלית כי יש שפות שלא נמצאות בה (שפות בגודל 4 ומטה).
ולמרות זאת, $L_s = \{< M >: |L(M)| \geq 5\} \in RE$. נראה זאת:

M': על קלט $< M >$:
- עבור i מ 5 עד אינסוף:
  - count=0
  - הרץ את M על כל אחת מ i המילים הראשונות בסדר לקסיקוגרפי של Σ^* למשך i צעדים.
  - עבור כל מילה שהתקבלה בזמן המוקצב - $count++$.
  - אם $count \geq 5$ - קבל.

ד. הוכחה: נראה ש $L(M) \in R$. נגדיר את המכונה המכריעה הבאה:
M' על קלט x:
- אם $x = "000"$ או $x = "1010"$ - דחה.
- אחרת, הרץ את M על x וענה כמוה.

1. (30 נקודות) לכל אחת מהשפות הבאות, קבעו אם היא ב P או ב NPC.
הוכיחו את תשובותיכם. קחו בחשבון שרב הניקוד, כ 70%, יינתן על נכונות הרדוקציה/אלגוריתם עצמם, וחלק קטן יותר על הוכחת הנכונות (רלוונטי בעיקר אם אתם מרגישים שחסר לכם זמן). כמובן שלא מומלץ לוותר על הוכחת נכונות הרדוקציה מראש, גם בגלל הניקוד על ההוכחה עצמה, וגם כי זה עוזר לתפוס טעויות ועוזר לנו להבין את רעיון ההוכחה שלכם, גם אם ישנן טעויות ברדוקציה עצמה.

א. $L_1 = \{(n, k, S_1, \ldots, S_t) | (n, k, S_1, \ldots, S_t) \in HS \text{ and each } S_i \text{ is of size at least } 100\}$ *

בעברית: זהו אוסף כל המילים ב Hitting Set, כך שבנוסף בכל קבוצה ישנם לפחות 100 איברים.

תזכורת:
$$HS = \{(n, k, S_1, \ldots, S_t) | n, k \in \mathbb{N}, \forall i \in [t]\ (S_i \subseteq [n]), \exists U \subseteq [n] \text{ such that} |U| = k \text{ and } \forall i \in [t] (U \cap S_i \neq \emptyset)\}$$

ב.
$L_2 = \{\phi(x_1, \ldots, x_n) | \phi \in 3CNF \text{where every variable appears in some clause and there exists a satisfying assignment for } \phi$ where at most a 100 variables are assigned `False'$\}$

בעברית: זהו אוסף כל פסוקי ה 3CNF כך שכל משתנה מופיע כליטרל בפסוקית כלשהי, וקיימת עבורו השמה מספקת שמציבה False בלכל היותר 100 משתנים. תזכורת: ב 3CNF מותר שפסוקית תכיל מספר מופעים של משתנה או ליטרל (למשל $x_1 \vee \bar{x}_1 \vee x_1$ היא פסוקית חוקית).

ג.
$L_3 = \{\phi(x_1, \ldots, x_n) | \phi \in 3CNF \text{where every variable appears in some clause and there exists a satisfying assignment for } \phi$ where at most n/2 variables are assigned `False'$\}$

בעברית: זהו אוסף כל פסוקי ה 3CNF כך שכל משתנה מופיע כליטרל בפסוקית כלשהי, וקיימת עבורו השמה מספקת שמציבה False בלכל היותר $n/2$ משתנים.

פתרון:
א. השפה שייכת ל NPC:
הוכחת שייכות ל NP: נראה את המ"ט הא"ד הבאה:
N_1: על קלט $< n, k, S_1, S_2, \ldots, S_t >$:
- עבור i מ 1 עד t:
  - אם $|S_i| < 100$ - דחה.
- נחש קבוצה U של k מספרים מתוך $\{1, 2, \ldots, n\}$.
- עבור i מ 1 עד t:
  - עבור כל $x \in U$, אם $x \in S_i$ - עבור לאיטרציה הבאה.
  - אם עברת על כל U ולא היה איבר שנמצא גם ב S_i - דחה.
- קבל.

נכונות: אם $< n, k, S_1, S_2,..., S_t >\in L_1$ אזי גודל כל S_i הוא לפחות 100 ולכן נעבור את הבדיקה של הלולאה הראשונה, בנוסף $< n, k, S_1, S_2,..., S_t >\in HS$ ולכן קיימת קבוצה U בגודל k כך שהחיתוך שלה עם כל S_i אינו ריק ולכן קיים מסלול חישוב בו ננחש את הקבוצה הנ"ל ובלולאה השנייה תמיד יהיה איבר ב U שנמצא גם ב S_i ולכן נעבור את הבדיקה ונקבל.

אם קיים ל N_1 מסלול חישוב מקבל אזי מכיוון שעברנו את הלולאה הראשונה, מתקיים כי: $|S_i| \geq 100$ ומכיוון שעברנו את הלולאה השנייה אזי ניחשנו קבוצה U בגודל k ולכל i מצאנו איבר משותף בין U ל S_i (כי לא דחינו) ולכן הקבוצה הנ"ל מהווה HS תקין ולכן: $< n, k, S_1, S_2,..., S_t >\in HS$ ויחד עם הנתון הראשון נקבל: $< n, k, S_1, S_2,..., S_t >\in L_1$.

סיבוכיות:

לולאה ראשונה: $O(t \cdot N)$ כאשר N הוא הגודל של הקבוצה S_i המקבימאלית - חסום בגודל הקלט.

ניחוש: $O(k \cdot n)$ - חסום בגודל קלט.

לולאה שנייה: $O(t \cdot |U| \cdot N) = O(t \cdot k \cdot N)$ - חסום בגודל הקלט.

סה"כ פולינומי בגודל הקלט.

הוכחת שייכות ל NPH:

נראה רדוקציה: $HS\leq_p L_1$ ע"י: $f(< n, k, S_1,..., S_t >) =< n', k', S_1',..., S_t' >$ כאשר:

$n' = n + 100t$.

$k' = k$.

$S_i' = S_i \cup \{n + 100(i - 1) + 1, n + 100(i - 1) + 2,..., n + 100i\}$.

הרדוקציה מלאה וניתנת לחישוב - חישובי סכום, העתקת הקלט והוספת איברים לקבוצה

סיבוכיות:

העתקת n הוספת 100t - פולינומי בגודל הקלט: $O(nt)$.

העתקת k - $O(k)$ - חסום בגודל הקלט.

מעבר על כל קבוצה והוספת 100 האיברים החדשים: $O(t \cdot n)$ - חסום בגודל הקלט.

סה"כ פולינומי בגודל הקלט.

תקפות:

אם $< n, k, S_1,..., S_t >\in HS$ אזי קיימת קבוצה $|U| = k$ כך ש: $U \cap S_i \neq \Phi$ לכל i.

מכאן, לפי בניית S_i' נקבל: $|S_i'| \geq 100$ כי הוספנו לכל קבוצה 100 איברים. ובנוסף, מכיוון שלא שינינו את האיברים הקיימים ולא שינינו את k נקבל שאותה קבוצה U מקיימת: $U \cap S_i \neq \Phi$ לכל i. ולכן: $< n', k', S_1',..., S_t' >\in HS$ ולכן: $< n', k', S_1',..., S_t' >\in L_1$.

אם $< n', k', S_1',..., S_t' >\in L_1$ אזי: $< n', k', S_1',..., S_t' >\in HS$ ולכן קיימת קבוצה $|U| = k' = k$ כך ש $U \cap S_i' \neq \Phi$ לכל i.

מכיוון שהאיברים החדשים שהוספנו לכל קבוצה הם שונים מקבוצה לקבוצה (אין אף איבר חדש משותף) נקבל שכנגד כל איבר חדש $a \in U$ נחליף אותו מאיבר $b \leq n$ השייך לאותה קבוצה (אם אין בקבוצה איברים קטנים או שווים ל n אז נחליף לאיבר שרירותי) ולכן התכונה $U \cap S_i' \neq \Phi$ עדיין תישמר לכל i.

ולכן קיבלנו ש: $U' \cap S_i \neq \Phi$ לכל i. כאשר U' היא הקבוצה לאחר ההחלפות. ולכן: $< n, k, S_1,..., S_t >\in HS$.

ב. השפה שייכת ל P. נראה מ"ט דטרמיניסטית עבור השפה:

M_2: על קלט $<\ \phi(x_1,..., x_n)\ >$:
- עבור k מ 0 עד 100
  - עבור כל אפשרות בחירה של k משתנים מתוך n:
    - הצב false בכל אחד מהמשתנים הנבחרים, הצב true בכל האחרים.
    - עבור על ϕ ובדוק את ערך האמת, אם יצא true - קבל.
- דחה.

נכונות: היות ואנו עוברים על כל האפשרויות אזי נמצא השמה כזו מספקת אם ורק אם יש השמה מספקת לנוסחה שבה לכל היותר יש 100 משתנים שמקבלים false אם ורק אם $<\ \phi(x_1,..., x_n)\ > \in L_2$.

סיבוכיות: מעבר על כל k מ 0 עד 100 ואז מעבר על כל האפשרויות לבחירת k מתוך n ועבור כל בחירה כזו - בדיקה האם הנוסחא מתקיימת:

סה"כ: $O(N(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} +.... + \binom{n}{100}))$

נשים לב ש $\binom{n}{k} = O(n^k)$ ולכן הסיבוכיות הכוללת תהיה: $O(N \cdot n^{100})$ כאשר N הוא גודל הנוסחא.

כלומר לכל היותר: $O(N^{101})$ - פולינומי בגודל הקלט. ($n \le N$ כי n=מספר משתנים, N=גודל הנוסחא)

ג. השפה שייכת ל NPC:

הוכחת שייכות ל NP: נראה את המ"ט הא"ד הבאה:

N_3: על קלט $<\ \phi(x_1,..., x_n)\ >$:
- נחש $0 \le k \le n/2$.
- נחש k משתנים מתוך ה n והצב בהם $false$. בשאר המשתנים הצב true.
- בדוק האם הנוסחא מסתפקת כעת. אם כן - קבל. אחרת - דחה.

נכונות:

אם $<\ \phi(x_1,..., x_n)\ > \in L_3$ אזי קיימת ל ϕ השמה מספרת בה יש לכל היותר $n/2$ משתנים המקבלים false ולכן קיים מסלול חישוב בו ננחש את k = הכמות של המשתנים הללו וננחש את המשתנים הנכונים, נציב בהם false ובשאר true והפסוק יסתפק ולכן נקבל.

אם קיבלנו, אזי קיים k שהוא לכל היותר $n/2$ כך שיש מסלול בו בחרנו k משתנים, הצבנו בהם false ובשאר true וקיבלנו שהפסוק מסתפק ולכן ישנה השמה מספקת לנוסחה הנ"ל שבה יש לכל היותר $n/2$ משתנים שמקבלים false.

סיבוכיות: עבור הניחוש - פולינומי בגודל הקלט: $O(n)$.

עבור ניחוש המשתנים - פולינומי בגודל הקלט: $O(n^2)$.

בדיקת הנוסחא: $O(N)$ - פולינומי בגודל הקלט.

הוכחת שייכות ל NPH:

נראה רדוקציה: $3SAT \le_p L_3$ ע"י: $f(<\ \phi(x_1,..., x_n)\ >) = <\ \phi'(x_1,..., x_n, y_1, y_2,..., y_n)\ >$ כאשר:

$\phi' = \phi \wedge (y_1 \vee y_1 \vee y_1) \wedge (y_2 \vee y_2 \vee y_2) \wedge ... \wedge (y_n \vee y_n \vee y_n)$.

הרדוקציה מלאה וניתנת לחישוב - העתקת הקלט + הוספת פסוקיות ומשתנים חדשים.

סיבוכיות: $O(N)$ - העתקה + הוספת של n פסוקיות בגודל קבוע.

תקפות: מכיוון שלקחנו את ϕ והוספנו לו את הפסוקיות מהצורה: $(y_i \vee y_i \vee y_i)$ אזי בהכרח לכל השמה מספקת של ϕ' מתקיים ש $y_i = true$ לכל i. ולכן גם אם נשים false בכל x_i עדיין זה לכל היותר בחצי מהמשתנים של ϕ' ולכן יש השמה מספקת ל ϕ' אם ורק אם יש השמה מספקת למשתני ϕ ולכן:
$< \phi' > \in L_3$ אם ורק אם $< \phi > \in 3SAT$.

2. (25 נקודות) בשאלה זו, אם אתם מציגים רדוקציה או אלגוריתם (כחלק מהוכחה או הפרכה), אין צורך להוכיח נכונות שלהם.

א. (7 נקודות) הוכח או הפרך: לכל $L \in NP$ שאינה ריקה, קיים יחס NP $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ עבור השפה, כך שלכל מילה $x \in L$ קיימים לפחות 100 y ים עבורם $(x, y) \in R$.

ב. (9 נקודות) בסעיף זה נניח ש $P \neq NP$. הוכח או הפרך: קיימת סדרה אינסופית של שפות $\ldots \subseteq L_3 \subseteq L_2 \subseteq L_1$ כך ש $L_1 \in NPC$ וגם $L_j \in NP \setminus NPC$ לכל $j > 1$.

ג. (9 נקודות) תנו דוגמה לשפה $L_1 \in P$ ולפונקציה $f \in POLY$ כך ש f מהווה פונקציית רדוקציה מ L_1 ל L_2 עבור אינסוף שפות $L_2 \in \Sigma^*$.

פתרון:

א. הוכחה: תהי $L \in NP$ אזי קיים יחס NP עבור השפה: R_L כך שלכל $x \in L$ קיימת y כך ש: $(x, y) \in R_L$.
נגדיר את היחס: R - כמו R_L פרט לכך שבארגומנט השני נתעלם מ 100 הביטים הראשונים ואז נשלוף את y ונכניס את x,y ליחס R_L.
מכיון ש R_L הוא יחס NP אזי גם R הוא יחס NP כיוון שגודל המילה y גדל רק ב 100 - קבוע ולכן הוא עדיין פולינומי בגודל של x.
ומתקיים שלכל $x \in L$ קיים y כך ש $(x, y) \in R_L$ ולכן גם: $(x, w \cdot y) \in R$ לכל $|w| = 100$ ויש 2^{100} כאלו - ולכן יש לפחות 100 $y' = wy$ שונים כך ש $(x, y') \in R$.

ב. ניקח את השפות הבאות:
$L_1 = 3SAT \in NPC$.
$L_2 = 3CNF = \{< \phi > \ | \phi \ is\ 3CNF\ formula\} \in P$ (פשוט עוברים פסוקית פסוקית ובודקים שיש בכל פסוקית בדיוק 3 ליטרלים)
$L_3 \in P$ - כל הנוסחאות שבכל פסוקית יש לכל היותר 4 ליטרלים.
$L_4 \in P$ - כל הנוסחאות שבכל פסוקית יש לכל היותר 5 ליטרלים.
....
$L_n \in P$ - כל הנוסחאות שבכל פסוקית יש לכל היותר n+1 ליטרלים.
השפה הראשונה שייכת ל NPC (הוכחנו בכיתה)
שאר השפות שייכות ל P, מכילות אותה ומוכלות אחת בשנייה, כלומר: $L_i \subseteq L_{i+1}$.
ומתקיים: $P \subseteq NP$ אבל: כל שפה השייכת ל P לא שייכת ל NPC כי נתון ש $P \neq NP$ ולכן: $L_i \in NP \backslash NPC$ לכל $i \geq 2$.

ג. דוגמא: $L_1 = \Phi$. $f(x) = 0$.
מכאן, לכל שפה L_2 שלא מכילה את המילה 0 (יש אינסוף כאלה) מתקיים: f היא פונקציית רדוקציה מ L_1 ל L_2
$L_1 \in P$ כי ב $O(1)$ ניתן להחזיר עבור כל קלט שהוא לא בשפה.
$f \in POLY$ כי מ"ט יכולה לחשב את הפונקציה אפילו ב $O(1)$ - כתיבת 0, תזוזה צעד ימינה ועצירה.

מבחן 2021 סמסטר א מועד א

1. (30 נקודות) לכל אחת מהשפות הבאות, קבעו האם היא ב R והאם היא ב RE. הוכיחו את תשובתכם.

א. $L_1 = \{< M > | \exists x \in \Sigma^*, \text{ such that } |x| \leq 10000 \text{ and M halts on } x\}$.

בעברית: זוהי שפת כל קידודי המכונות, כך שקיימת מילה באורך לכל היותר 10000 שעליה המכונה בעלת קידוד זה עוצרת.

ב. $L_2 = \{< M > || < M > | \leq 10000, \text{ and } \exists x \in \Sigma^*, \text{ such that } |x| \leq 10000 \text{ and M halts on } x\}$

בעברית: זוהי שפת כל קידודי המכונות שאורכם לכל היותר 10000, כך שקיימת מילה באורך לכל היותר 10000 שעליה המכונה בעלת קידוד זה עוצרת.

ג. $L_3 = \{< M > | \text{There exist at most 10000 words } x \in \Sigma^* \text{ on which M does } \textbf{not halt}\}$

בעברית: זוהי שפת כל קידודי המכונות, כך שקיימות לכל היותר 10000 מילים שעליהם המכונה בעלת קידוד זה **אינה** עוצרת.

פתרון:

א. השפה שייכת ל RE ולא ל R.

הוכחת שייכות ל RE: נראה מ"ט מזהה עבור השפה:

M_1: על קלט: $< M >$:

- עבור i מ 1 עד אינסוף:
  - עבור כל אחת מהמילים הראשונות בסדר לקסיקוגרפי של Σ^* בגודל לכל היותר 10000 הרץ את M למשך i צעדים.
  - אם קיימת מילה שעבורה M עצרה בזמן המוקצב - קבל.

נכונות:....

הוכחת אי שייכות ל R: נראה רדוקציה: $HP \leq L_1$ ע"י: $f(< M, x >) =< M' >$ כאשר:

M': על קלט w:

- הרץ את M על x.
- עצור.

הרדוקציה מלאה וניתנת לחישוב.

תקפות:

אם M עוצרת על x אז M' עוצרת על כל המילים ובפרט על מילה באורך עד 10000.

אם M לא עוצרת על x אז M' לא עוצרת על אף מילה ובפרט לא על מילים באורך עד 10000.

לפי משפט הרדוקציה: $HP \notin R$ ולכן: $L_1 \notin R$.

ב. השפה שייכת ל R.

נשים לב שאורך קידוד המכונות שבשפה מוגבל ללכל היותר 10000 ולכן השפה L_2 היא סופית וכל שפה סופית היא כריעה.

ג. השפה לא שייכת ל RE.

הוכחת אי שייכות ל RE: נראה רדוקציה $\bar{HP} \leq L_3$ ע"י: $f(< M, x >) =< M' >$ כאשר:

M': על קלט w:

- הרץ את M על x למשך $|w|$ צעדים.
- אם M עצרה בזמן המוקצב - היכנס ללולאה אינסופית.
- אחרת - עצור.

הרדוקציה מלאה וניתנת לחישוב - כתיבת תיאור של מ"ט שמריצה מ"ט אחרת.
תקפות: אם M לא עוצרת על x אז לכל w המכונה M לא תעצור על x תוך $|w|$ צעדים ולכן M' תעצור על כל המילים ובפרט יהיו לכל היותר 10000 מילים ש M' לא עוצרת עליהן.
אם M עוצרת על x לאחר k צעדים אזי לכל w באורך לפחות k המכונה M תספיק לעצור ולכן M' תיכנס ללולאה אינסופית.

לפי משפט הרדוקציה: $\bar{HP} \notin RE$ ולכן: $L_3 \notin RE$.

2. (25 נקודות) בשאלה זו, אם אתם מציגים רדוקציה או אלגוריתם (כחלק מהוכחה או הפרכה), אין צורך להוכיח נכונות שלהם.

א. (11 נקודות) בסעיף זה נוכיח מקרה פרטי נוסף של משפט Rice ל RE - כלומר נוכיח תנאי מספיק חדש על התכונה S, כך ש $L_S \notin RE$ (בהרצאה הוכחנו עבור המקרה שבו $\emptyset \in S$ - שימו לב שלא מספיק כאן פשוט להשתמש במשפט ההוא). תהי S תכונה לא טריוויאלית של שפות ב RE המקיימת $S \subseteq \{L \in RE \,|\, |L| = \infty \text{ and no pair of inputs } x_1, x_2 \text{ satisfying } |x_1| + 1 = |x_2| \text{ are both in } L\}$. הוכיחו ש $L_S \notin RE$.

ב. (9 נקודות) נגדיר את הפונקציה החלקית הבאה:

$$f(<M>, 1^n) = \begin{cases} \text{the lexicographically smallest x} \in \{0,1\}^n \cap L(M) & n > 100 \text{ and } L(M) \cap \{0,1\}^n \neq \phi \\ \text{undefined} & \text{Otherwise} \end{cases}$$

הוכח או הפרך: f ניתנת לחישוב.

ג. (5 נקודות) יהיו מכונות טיורינג M_1, M_2 לזיהוי שפות המקבלות שפות $L_1 \subsetneq L_2$ בהתאמה. הוכח או הפרך: לא ייתכן ש f_{M_2} מוגדרת על תת קבוצה ממש של קבוצת המילים עליהן f_{M_1} מוגדרת.

פתרון:
א. מכיוון ש S אינה טריוויאלית אזי:
$S \neq \Phi$ ומכיוון שנתונה ההכלה לעיל, קיימת שפה $L \in RE$ כך ש: $L \in S$ ומקיימת את תנאי הקבוצה המכילה. כלומר: $|L| = \infty$ וגם אין 2 מילים בשפה באורך עוקב.
$S \neq RE$ ולכן קיימת שפה שלא שייכת ל S - נסמנה ב L'.
נראה רדוקציה: $\bar{HP} \leq L_S$ ע"י: $f(<M, x>) =< M' >$ כאשר:
M': על קלט w:
- הרץ את M על x למשך $|w|$ צעדים.
- אם M לא עצרה בזמן המוקצב, הרץ את המכונה של השפה L (קיימת כזו כי $L \in RE$) על w וענה כמוה.
- אחרת, דחה.

הרדוקציה מלאה וניתנת לחישוב - כתיבת תיאור של מ"ט שמריצה מ"ט אחרת.
תקפות: אם M לא עוצרת על x אז לכל w המכונה M לא תעצור על x תוך $|w|$ צעדים ולכן M' תתנהג בדיוק כמו המכונה של L עבור כל קלט ולכן: $L(M') = L \in S$.
אם M עוצרת על x לאחר k צעדים אזי לכל w באורך לפחות k המכונה M תספיק לעצור ולכן M' תדחה.
מכאן: $|L(M')|$ סופי ובפרט לפי ההכלה לא ייתכן ששייך ל S.

לפי משפט הרדוקציה: $\bar{HP} \notin RE$ ולכן: $L_S \notin RE$.

ב. f לא ניתנת לחישוב.
נניח בשלילה ש f ניתנת לחישוב ולכן קיימת מ"ט M_f המחשבת אותה.
נראה שבאמצעות מכונה זו ניתן להכריע שפה שאינה כריעה וזו תהיה סתירה ולכן נגיע למסקנה שאין מכונה כזאת ולכן f אינה ניתנת לחישוב.
נבחר את השפה L_u ונראה מ"ט מכריעה עבור השפה:

M_{L_u}: על קלט $< M, x >$:

- בנה מ"ט חדשה M'' באופן הבא:
  - המכונה תקבל כקלט w, אם $w = 1$ - קבל. אחרת: $w = 0$ - הרץ את M על x וענה כמוה.
  - בכל מקרה אחר - דחה.
- הרץ את $M_f(< M'', 1 >)$. אם החזירה 0 - קבל. ואם החזירה 1 - דחה.

קיבלנו ש L_u כריעה וזו סתירה.

ג. לא נכון. לדוגמא: $L_1 = \Phi,\ L_2 = \{0\}$ ומכאן: $L_1 \subset L_2$.

נגדיר את המכונות:

M_1: על קלט x:

- אם $x = 0$ או $x = 1$ - דחה.
- אחרת - אל תעצור.

M_2: על קלט x:

- אם $x = 0$ קבל.
- אחרת - אל תעצור.

$L(M_1) = L_1 = \Phi,\ L(M_2) = L_2 = \{0\}$.

אבל הפונקציה f_{M_1} מוגדרת על 2 קלטים: $\{0, 1\}$

ואילו הפונקציה f_{M_2} מוגדרת על קלט אחד: $\{0\}$

1. (30 נקודות) לכל אחת מהשפות הבאות, קבעו אם היא ב
P, NPC או NPH.הוכיחו את תשובותיכם. עבור שפה שלדעתכם ב NPH אך כנראה אינה ב NPC, אין צורך להוכיח אינה ב NPC, אלא רק לספק
הסבר קצר מדוע גישה פשוטה לבנות מ"ט אי דטרמיניסטית יעילה/יחס NP עבורה לא תעבוד. קחו בחשבון שרב הניקוד (70-80%) יינתן על נכונות הרדוקציה/תיאור אלגוריתמים עצמם, וחלק קטן יותר על הוכחת הנכונות (רלוונטי בעיקר אם אתם מרגישיםשחסר לכם זמן).
רמז: באחד הסעיפים הקשורים ל SC ניתן להוכיח באמצעות רדוקציה מ SC השומרת על מספר הקבוצות.

א. $L_1 = \{(n, k, S_1, \ldots, S_t) | (n, k, S_1, \ldots, S_t) \in SC \text{ and each } S_i \text{ of odd size}\}$

בעברית: זהו אוסף כל המילים ב Set Cover, כך שבנוסף בכל קבוצה יש מספר איברים זוגי.

תזכורת:
$SC = \{(n, k, S_1, \ldots, S_t) | n, k \in \mathbb{N}, \forall i \in [t]\ S_i \subseteq [n], \exists I \subseteq [t] \text{ such that} |I| = k \text{ and } \bigcup_{i \in I} S_i = [n]\}$

ב. $L_2 = \{(n, S_1, \ldots, S_t) | \exists \text{ an even } k \in \mathbb{N} \text{ such that} (n, k, S_1, \ldots, S_t) \in SC\}$

בעברית: זהו אוסף כל הרצפים $(n, S_1, \ldots, S_t)$ עבורם קיים מספר זוגי k כך ש $(n, k, S_1, \ldots, S_t)$ שייך לשפה Set Cover (SC).

ג. $L_3 = \{(G, k) | \text{There exist at least } 2^{k/2} \text{ vertex covers of G of size } k\}$

בעברית: זהו אוסף הזוגות (G, k) כך שבגרף G יש לפחות $2^{k/2}$ כיסויים בצמתים שגודל כל אחד הוא k.

פתרון:

א. השפה שייכת ל NPC.

שייכות ל NP: נראה מ"ט א"ד עבור השפה:

N_1: על קלט $< n, k, S_1, \ldots, S_t >$:

- עבור i מ 1 עד t:
  - אם $|S_i|\ (mod\ 2) = 1$ - דחה.

- נחש קבוצה I של k מספרים מתוך: $\{1, 2, ..., t\}$.
- הגדר: $A = \Phi$.
- עבור $i \in I$:
    - $A = A \cup S_i$.
- אם $A = \{1, 2, ..., n\}$ - קבל.
- אחרת - דחה.

נכונות: ...
סיבוכיות: ...

שייכות ל NPH: נראה רדוקציה $SC \leq_p L_1$ ע"י: $f(< n, k, S_1, .., S_t >) =< n', k', S_1', ..., S_t' >$ כאשר:
$n' = 2n$
$k' = k$
$S_i' = S_i \cup \{n + a : a \in S_i\}$.

הרדוקציה מלאה וניתנת לחישוב.
סיבוכיות: הכפלת n ב 2 - פולינומי בגודל הקלט.
העתקת k.
הכפלת מספר האיברים ב S_i - פולינומי בגודל הקלט.

תקפות: אם $< n, k, S_1, .., S_t > \in SC$ אזי קיימת קבוצת אינדקסים: $|I| = k$ כך ש: $\bigcup_{i \in I} S_i = [n]$.
לפי בניית S_i' נקבל שלכל $a \leq n$ מתקיים שאם $a \in S_i'$ אז גם $a + n \in S_i'$ ולכן הכיסוי של המספרים 1 עד n מכסה גם את המספרים $n + 1$ עד $2n$ עם אותן קבוצות ולכן: $\bigcup_{i \in I} S_i' = [2n]$ ולכן זהו כיסוי חוקי.
וכל הקבוצות בגודל זוגי (כי כמות האיברים בכל קבוצה היא כפולה ממה שהיה).

אם $< n', k', S_1', ..., S_t' > \in L_1$ אזי קיים כיסוי $\bigcup_{i \in I} S_i' = [2n]$ ולפי הבנייה $\bigcup_{i \in I} S_i = [n]$ ולכן זהו כיסוי רגיל עבור $< n, k, S_1, .., S_t >$.

ב. השפה שייכת ל P.
כי בהינן הקלט: $< n, S_1, .., S_t >$ אז אם t זוגי. נבחר: $k = t$ ואז אם האיחוד של כולן מכסה את $\{1, 2, ..., n\}$
אז מצאנו את ה k המבוקש ולכן נקבל. ואחרת נדחה כי אם האיחוד של כולן לא כיסה את הכל אז גם אם נאחד חלק מהקבוצות , לא נצליח לכסות את הכל.
אם t אי זוגי אז נבחר: $k = t - 1$ ואז יש לעבור על $\binom{t}{t-1} = \binom{t}{1} = O(t)$ אפשרויות לבחור את $t - 1$ הקבוצות מתוך ה t, לאחד אותן ולבדוק האם האיחוד מכסה את $\{1, 2, ..., n\}$. אם מצאנו - נקבל. ואם לא מצאנו בכלל - נדחה כי לא ייתכן שכמות קטנה יותר תכסה הכל.

סיבוכיות: פולינומית בגודל הקלט.

ג.
התנאי אינו טריוויאלי כיוון שיש גרפים (לדוגמא ללא צלעות) שבהם יש $2^{k/2}$ כיסויי צמתים.

ומכיוון שכדי לוודא שאכן יש כאלה צריך לעבור על כל $2^{k/2}$ האפשרויות (אקספוננציאלי) אז השפה לא שייכת ל NP ולכן היא שייכת ל NPH.

הוכחת שייכות ל NPH:
נראה רדוקציה $VC \le L_3$ ע"י: $f(< G, k >) =< G', k' >$ כאשר:
G' יהיה גרף עם עוד $2k$ צמתים המחולקים לזוגות זוגות המחוברים בצלע אחת ביניהם.
$k' = 2k$.

סיבוכיות: העתקת הגרף עם תוספת $O(n)$ צלעות וקודקודים לכל היותר. העתקת k וכפולה שלו ב 2 ולכן סה"כ פולינומי בגודל הקלט.

תקפות: אם יש ב G כיסוי בגודל k אזי אותו כיסוי עם כיסוי k הצלעות הנוספות מהווה כיסוי בגודל 2k ב G'.
בנוסף, ניתן לצרף לכיסוי של G כל קומבינציית כיסוי מהקודקודים הנוספים (עבור כל צלע חדשה יש 2 אפשרויות לבחור את הקודקוד המכסה) ולכן סה"כ יש לפחות $2^k = 2^{k'/2}$ כיסויים שונים בגרף בגודל $2k = k'$

אם יש ב G' לפחות 2^k כיסויים בגודל $k' = 2k$ אזי מכיוון שלכיסוי k הצלעות החדשות מספיק k קודקודים בדיוק נובע שבתוך G יש כיסוי של כל הצלעות באמצעות k קודקודים ולכן יש ב G כיסוי בגודל k.

2. (25 נקודות) בשאלה זו, אם אתם מציגים רדוקציה או אלגוריתם (כחלק מהוכחה או הפרכה), אין צורך להוכיח נכונות שלהם.

א. (6 נקודות) הוכח או הפרך: לכל $L \in NP$, קיימים אינסוף יחסים $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ חסומים פולינומית, וניתנים לזיהוי פולינומי, כך ש $L = \{x \in \Sigma^* | \exists y, (x, y) \in R\}$.

ב. (6 נקודות) נניח ש $P \neq NP$. הוכח או הפרך: לכל זוג שפות $L_1, L_2 \in (NP \cup coNP) \setminus P$ מתקיים $L_1 \cup L_2 \notin P$.

ג. (7 נקודות) תנו דוגמה לשפות $L_1, L'_1, L_2, L'_2 \in NP$ כך ש $L_1 \subsetneq L'_1, L_2 \subsetneq L'_2$ ולפונקציה $f \in POLY$ כך ש f מהווה פונקציית רדוקציה (פולינומית) מ L_1 ל L_2 וגם מ L'_1 ל L'_2.

הסבר מילולי: רוצים למצוא פונקציית רדוקציה המתאימה בתור פונקציית רדוקציה פולינומית עבור שני זוגות שונים של שפות המקיימים תכונות מסויימות. שימו לב שלא כל ארבעת השפות חייבות להיות שונות.

ד. (6 נקודות) נניח ש $P \neq NP$. הוכח או הפרך: השפה הבאה היא ב P. $\{(G(V,E), k), 0^{2^{|V|}}) | (G, k) \in VC\}$.

הערה: שימו לב ש 0^m מסמל רצף של m אפסים.

פתרון:
א. הוכחה: אם $L \in NP$ אזי קיים יחס NP עבור השפה: R_L. כלומר: $L = \{x: \exists y, (x, y) \in R_L\}$.

נגדיר את אוסף היחסים הבאים: $R_i = \{(x, 1^i y) :\ (x, y) \in R_L\}$.

ברור ש $L = \{x: \exists y', (x, y') \in R_i\}$ לכל i. כי נבחר: $y' = 1^i y$.

היחסים ניתנים לזיהוי פולינומי וחסומים פולינומית כיוון ש R_L הוא כזה.

ב. דוגמא נגדית: $L_1 = 3SAT \in NP\backslash P,\ L_2 = \overline{3SAT} \in coNP\backslash P$ (השפות לא ב P כי הן שלמות ומכיוון ש $P \neq NP$ אז כל שפה NPC או $coNPC$ לא שייכת ל P) אבל: $L_1 \cup L_2 = \Sigma^* \in P$.

ג. נבחר: $L_1 = L_2 = \{0\},\ L_1' = L_2' = \{0, 1\}$ ומכאן: $f(x) = x$ היא פונקציית רדוקציה: $L_1 \le L_2$ וגם $L_1' \le L_2'$. השפות שייכות ל P ובפרט ל NP כי הן סופיות. והפונקציה היא חישובית פולינומית (מחזיר את הקלט).

ד. השפה שייכת ל P. נראה מ"ט דטרמיניסטית עבור השפה:

M: על קלט: $< G, k, 0^{2^{|v|}} >$:

- עבור על הקלט ומנה את רצף האפסים בסוף ובדוק שהוא אכן שווה ל 2 בחזקת מספר קודקודי הגרף. אם לא - דחה.
- עבור על כל האפשרויות לבחירת k קודקודים מתוך $|V|$ ועבור כל אפשרות כזו:
  - הגדר: $A = \Phi$.
  - עבור כל קודקוד v שנבחר, הכנס ל A את כל הצלעות המחוברות אליו.
  - אם בסוף קיבלנו ש: $A = E$ - קבל.
- דחה.

נכונות: ...

סיבוכיות: מניית האפסים: $O(2^{|V|}) = O(N)$ - ליניארי בגודל הקלט.

מעבר על כל תתי הקבוצות של קודקודים חסום ב $O(2^{|V|}) = O(N)$ ועבור כל תת קבוצה יש לבדוק האם כל צלע נגעת בקודקוד כלשהו מתת הקבוצה: $O(|E| \cdot |V|)$ - חסום בגודל הקלט בריבוע.

סה"כ: פולינומי בגודל הקלט.