עבודת בית 5. פתרונות.

1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. יהיו U,W תת-מרחבים של V.

הוכיחו או הפריכו:

א. $(U+W)^{\perp}=U^{\perp}+W^{\perp}$ **ב.** $(U+W)^{\perp}=U^{\perp}\cap W^{\perp}$ ג. $(U+W)^{\perp}=(U\cap W)^{\perp}$

<u>פתרון.</u> נזכיר את ההגדרה: $U^{\perp}=\{\vec{w}\in V \mid \forall \vec{u}\in U:\langle \vec{u},\vec{w}\rangle=0\}$.
הטענות א',ג' לא נכונות. דוגמה נגדית: $V=\mathbb{R}^2=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R}\}$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית, $U=\{(x,0)|x\in\mathbb{R}\}$, $W=\{(0,y)|y\in\mathbb{R}\}$. ז.א. U הוא ציר ה-x, W הוא ציר ה-y. $(U+W)^{\perp}=(\mathbb{R}^2)^{\perp}=\{(0,0)\}$. $U^{\perp}+W^{\perp}=W+U=\mathbb{R}^2$, לכן הטענה א' לא נכונה.
$(U\cap W)^{\perp}=(\{(0,0)\})^{\perp}=\mathbb{R}^2$, לכן הטענה ג' לא נכונה. הטענה ב' נכונה. נוכיח אותה. ניקח $\vec{a}\in U^{\perp}\cap W^{\perp}$. נוכיח ש-$\vec{a}\in(U+W)^{\perp}$. יש להראות ש-$\langle \vec{a},\vec{b}+\vec{c}\rangle=0$ עבור כל $\vec{b}\in U,\vec{c}\in W$.
$\langle \vec{a},\vec{b}\rangle=0$ לכל $\vec{b}\in U$ כי $\vec{a}\in U^{\perp}$, $\langle \vec{a},\vec{c}\rangle=0$ לכל $\vec{c}\in W$ כי $\vec{a}\in W^{\perp}$. לכן $\langle \vec{a},\vec{b}+\vec{c}\rangle=\langle \vec{a},\vec{b}\rangle+\langle \vec{a},\vec{c}\rangle=0+0=0$. הוכחנו ש-$(U+W)^{\perp}\supseteq U^{\perp}\cap W^{\perp}$. ניקח $\vec{a}\in(U+W)^{\perp}$ ונוכיח ש-$\vec{a}\in U^{\perp}\cap W^{\perp}$. $\vec{a}\in(U+W)^{\perp}$, לכן $\langle \vec{a},\vec{b}+\vec{c}\rangle=0$ עבור כל $\vec{b}\in U,\vec{c}\in W$. אם נציב $\vec{c}=\vec{0}$ נקבל $\langle \vec{a},\vec{b}\rangle=0$ לכל $\vec{b}\in U$. אם נציב $\vec{b}=\vec{0}$ נקבל $\langle \vec{a},\vec{c}\rangle=0$ לכל $\vec{c}\in W$. לכן $\vec{a}\in U^{\perp}\cap W^{\perp}$. הוכחנו ש-$(U+W)^{\perp}\subseteq U^{\perp}\cap W^{\perp}$.
משתי ההכלות שהוכחנו נובע ש-$(U+W)^{\perp}=U^{\perp}\cap W^{\perp}$.

2. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית אוניטרית, כלומר, $\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle=\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ עבור כל $\vec{u},\vec{v}\in V$. יהי $\lambda\in\mathbb{C}$ ערך עצמי של T.
הוכיחו: $|\lambda|=1$.

<u>פתרון.</u> יהי $\vec{v}$ וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי λ. מהגדרת העתקה אוניטרית נובע ש- $\langle T(\vec{v}),T(\vec{v})\rangle=\langle\vec{v},\vec{v}\rangle$. מצד שני, $\langle T(\vec{v}),T(\vec{v})\rangle=\langle\lambda\vec{v},\lambda\vec{v}\rangle=\lambda\bar{\lambda}\langle\vec{v},\vec{v}\rangle$. כאן השתמשנו בכך ש- $\vec{v}$ וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי λ, ולכן $T(\vec{v})=\lambda\vec{v}$. השמשנו גם בתכונות הבאות של מכפלה פנימית: $\langle\alpha\vec{u},\vec{v}\rangle=\alpha\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$, $\langle\vec{u},\alpha\vec{v}\rangle=\bar{\alpha}\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$. נסכם:
$\langle\vec{v},\vec{v}\rangle=\langle T(\vec{v}),T(\vec{v})\rangle=\lambda\bar{\lambda}\langle\vec{v},\vec{v}\rangle$, כלומר, $\langle\vec{v},\vec{v}\rangle=\lambda\bar{\lambda}\langle\vec{v},\vec{v}\rangle$. וקטור $\vec{v}$ שונה מווקטור האפס כי $\vec{v}$ הוא וקטור עצמי, לכן $\langle\vec{v},\vec{v}\rangle\neq 0$. (נזכיר שעל פי אחת האקסיומות של מכפלה פנימית $\langle\vec{v},\vec{v}\rangle=0$ אם ורק אם $\vec{v}=\vec{0}$). לכן, אפשר לצמצם את השויון $\langle\vec{v},\vec{v}\rangle=\lambda\bar{\lambda}\langle\vec{v},\vec{v}\rangle$ ב-$\langle\vec{v},\vec{v}\rangle$ ולקבל $\lambda\bar{\lambda}=1$. נזכיר ש- $|z|=\sqrt{z\bar{z}}$ לכל $z\in\mathbb{C}$, לכן מהשויון $\lambda\bar{\lambda}=1$ נובע ש-$|\lambda|=1$.

3. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית אוניטרית.
יהיו $\lambda\in\mathbb{C}$, $\mu\in\mathbb{C}$ ערכים עצמיים של T, $\lambda\neq\mu$.
יהי $\vec{v}$ וקטור עצמי של T השייך לע"ע λ. יהי $\vec{u}$ ו"ע של T השייך לע"ע μ.
הוכיחו ש- $\vec{u}$, $\vec{v}$ מאונכים זה לזה. כלומר, הוכיחו ש-$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=0$.
<u>הדרכה.</u> התבוננו במכפלה $\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle$. השתמשו בהגדרת העתקה אוניטרית, בהגדרת ע"ע וו"ע ובתוצאת השאלה הקודמת, שאלה 2.
<u>פתרון.</u> מהנתון עולה: $T(\vec{v})=\lambda\vec{v}$, $T(\vec{u})=\mu\vec{u}$, $\vec{u}\neq\vec{0}$, $\vec{v}\neq\vec{0}$. מצד אחד:
$\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle=\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ כי T אוניטרית. מצד שני: $\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle=\langle\mu\vec{u},\lambda\vec{v}\rangle=\mu\bar{\lambda}\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ על פי הנתון ועל פי התכונות של מכפלה פנימית. קיבלנו: $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\mu\bar{\lambda}\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$. המספר המרוכב λ הוא ערך עצמי של העתקה אוניטרית, לכן $\lambda\bar{\lambda}=1$ כמו שהוכחנו בתרגיל הקודם. נתון ש-$\lambda\neq\mu$, ולכן $\mu\bar{\lambda}\neq 1$: אם נניח בשלילה ש-$\mu\bar{\lambda}=1$, נקבל $\mu\bar{\lambda}=1=\lambda\bar{\lambda}$, ומזה נובע ש-$\lambda=\mu$ כי $\bar{\lambda}\neq 0$, זאת סתירה לנתון. מהשויון $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\mu\bar{\lambda}\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ ומזה ש-$\mu\bar{\lambda}\neq 1$ נובע ש-$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=0$:
$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=\mu\bar{\lambda}\langle\vec{u},\vec{v}\rangle\Leftrightarrow(\mu\bar{\lambda}-1)\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=0$. אבל $\mu\bar{\lambda}-1\neq 0$, לכן $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=0$.

4. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, ונתון ש-$\|T(\vec{v})\|=\|\vec{v}\|$ לכל $\vec{v}\in V$. (תזכורת: $\|\vec{v}\|=\sqrt{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}$). הוכיחו ש-$T$ היא העתקה אוניטרית, כלומר, הוכיחו ש-$\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle=\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ עבור כל $\vec{u},\vec{v}\in V$.

<u>הדרכה.</u> קחו שני וקטורים שרירותיים $\vec{u},\vec{v}\in V$. התבוננו ב-$\|T(\vec{u}+\vec{v})\|^2$ כדי להוכיח ש-$\operatorname{Re}\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle=\operatorname{Re}\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$. אחר כך התבוננו ב-$\|T(i\vec{u}+\vec{v})\|^2$ כדי להוכיח ש-$\operatorname{Im}\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle=\operatorname{Im}\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$. כמובן, כאן "Im" מסמן את החלק המדומה של מספר מרוכב, לא את תמונה של העתקה. כאשר $y\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$, $z=x+iy$, המספר הממשי x נקרא החלק הממשי של z, וכותבים $x=\operatorname{Re}z$, המספר הממשי y נקרא החלק המדומה של z, וכותבים $y=\operatorname{Im}z$.

<u>פתרון.</u> יהי z מספר מרוכב: $y\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$, $z=x+iy$. נעיר:

$$z+\bar{z}=x+iy+x-iy=2x=2\operatorname{Re}z \quad , \quad z-\bar{z}=x+iy-(x-iy)=2iy=2i\operatorname{Im}z .$$

ניקח שני וקטורים שרירותיים $\vec{u},\vec{v}\in V$.

$$\|T(\vec{u}+\vec{v})\|^2=\langle T(\vec{u}+\vec{v}),T(\vec{u}+\vec{v})\rangle=\langle T(\vec{u}),T(\vec{u})\rangle+\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle+\langle T(\vec{v}),T(\vec{u})\rangle+\langle T(\vec{v}),T(\vec{v})\rangle=$$
$$=\|T(\vec{u})\|^2+\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle+\overline{\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle}+\|T(\vec{v})\|^2=\|T(\vec{u})\|^2+2\operatorname{Re}\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle+\|T(\vec{v})\|^2$$

(העתקה T לינארית, לכן $T(\vec{u}+\vec{v})=T(\vec{u})+T(\vec{v})$.) מצד שני:

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\langle\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{v}\rangle=\langle\vec{u},\vec{u}\rangle+\langle\vec{u},\vec{v}\rangle+\langle\vec{v},\vec{u}\rangle+\langle\vec{v},\vec{v}\rangle=$$
$$=\|\vec{u}\|^2+\langle\vec{u},\vec{v}\rangle+\overline{\langle\vec{u},\vec{v}\rangle}+\|\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+2\operatorname{Re}\langle\vec{u},\vec{v}\rangle+\|\vec{v}\|^2$$

נתון ש-$\|T(\vec{v})\|=\|\vec{v}\|$ לכל $\vec{v}\in V$, ולכן $\|T(\vec{u}+\vec{v})\|^2=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$, $\|T(\vec{u})\|^2=\|\vec{u}\|^2$, $\|T(\vec{v})\|^2=\|\vec{v}\|^2$. מכל זה נובע ש-$\operatorname{Re}\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle=\operatorname{Re}\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$.

עכשיו נעשה חישובים דומים, רק נציב $i\vec{u}$ במקום $\vec{u}$. נעיר ש-$i\bar{i}=|i|^2=1$, $\bar{i}=-i$.

$$\|T(i\vec{u}+\vec{v})\|^2=\langle T(i\vec{u}+\vec{v}),T(i\vec{u}+\vec{v})\rangle=$$
$$=\langle T(i\vec{u}),T(i\vec{u})\rangle+\langle T(i\vec{u}),T(\vec{v})\rangle+\langle T(\vec{v}),T(i\vec{u})\rangle+\langle T(\vec{v}),T(\vec{v})\rangle=$$
$$=\|T(i\vec{u})\|^2+\langle T(i\vec{u}),T(\vec{v})\rangle+\overline{\langle T(i\vec{u}),T(\vec{v})\rangle}+\|T(\vec{v})\|^2=$$
$$=|i|^2\|T(\vec{u})\|^2+i\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle+\overline{i\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle}+\|T(\vec{v})\|^2=$$
$$=\|T(\vec{u})\|^2+i\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle-i\cdot\overline{\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle}+\|T(\vec{v})\|^2=\|T(\vec{u})\|^2-2\operatorname{Im}\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle+\|T(\vec{v})\|^2$$

כאן השתמשנו בכך ש-T היא העתקה לינארית, ולכן $T(i\vec{u})=iT(\vec{u})$.

בדומה לזה מקבלים:

$$\left\|i\vec{u}+\vec{v}\right\|^2=\left\langle i\vec{u}+\vec{v},i\vec{u}+\vec{v}\right\rangle=\left\langle i\vec{u},i\vec{u}\right\rangle+\left\langle i\vec{u},\vec{v}\right\rangle+\left\langle \vec{v},i\vec{u}\right\rangle+\left\langle \vec{v},\vec{v}\right\rangle=$$

$$=\left\|i\vec{u}\right\|^2+\left\langle i\vec{u},\vec{v}\right\rangle+\overline{\left\langle i\vec{u},\vec{v}\right\rangle}+\left\|\vec{v}\right\|^2=\left|i\right|^2\left\|\vec{u}\right\|^2+i\left\langle \vec{u},\vec{v}\right\rangle+\overline{i}\cdot\overline{\left\langle \vec{u},\vec{v}\right\rangle}+\left\|\vec{v}\right\|^2$$

$$=\left\|\vec{u}\right\|^2+i\left\langle \vec{u},\vec{v}\right\rangle-i\cdot\overline{\left\langle \vec{u},\vec{v}\right\rangle}+\left\|\vec{v}\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2-2\operatorname{Im}\left\langle \vec{u},\vec{v}\right\rangle+\left\|\vec{v}\right\|^2$$

נתון ש-$\left\|T\left(\vec{v}\right)\right\|=\left\|\vec{v}\right\|$ לכל $\vec{v}\in V$, ולכן $\left\|T\left(i\vec{u}+\vec{v}\right)\right\|^2=\left\|i\vec{u}+\vec{v}\right\|^2$, $\left\|T\left(\vec{u}\right)\right\|^2=\left\|\vec{u}\right\|^2$,

$\left\|T\left(\vec{v}\right)\right\|^2=\left\|\vec{v}\right\|^2$. מכל זה נובע ש-$\operatorname{Im}\left\langle T\left(\vec{u}\right),T\left(\vec{v}\right)\right\rangle=\operatorname{Im}\left\langle \vec{u},\vec{v}\right\rangle$.

נשאר להזכיר שמספרים מרוכבים z_1,z_2 שווים אם $\operatorname{Re}z_1=\operatorname{Re}z_2$ וגם $\operatorname{Im}z_1=\operatorname{Im}z_2$.

אצלנו: $\operatorname{Re}\left\langle T\left(\vec{u}\right),T\left(\vec{v}\right)\right\rangle=\operatorname{Re}\left\langle \vec{u},\vec{v}\right\rangle$, $\operatorname{Im}\left\langle T\left(\vec{u}\right),T\left(\vec{v}\right)\right\rangle=\operatorname{Im}\left\langle \vec{u},\vec{v}\right\rangle$,

ולכן $\left\langle T\left(\vec{u}\right),T\left(\vec{v}\right)\right\rangle=\left\langle \vec{u},\vec{v}\right\rangle$.