פתרון מטלה 2

תרגיל 1

משפט הממדים: תהא העתקה לינארית $T:V\to W$

מתקיים $\dim \operatorname{Im}T+\dim\ker T=\dim V$

1. לא נכון.
ממשפט הממדים: $\dim\ker T=15-\dim \operatorname{Im}T$. מתקיים: $\dim \operatorname{Im}T\le 9$, ולכן: $\dim\ker T\ge 4$.
בסך הכול $\dim\ker T\ne 0$ ולכן העתקה T אינה חח"ע.
2. לא נכון.
ממשפט הממדים: $\dim \operatorname{Im}T=9-\dim\ker T$. מתקיים: $\dim\ker T\ge 0$, ולכן: $\dim \operatorname{Im}T\le 9$.
בסך הכול $\dim \operatorname{Im}T\ne 15$ ולכן העתקה T אינה על.
3. נכון.
ממשפט הממדים: $\dim V+\dim\ker T=\dim V$. מתקיים: $\dim\ker T=0$, ולכן T היא חח"ע.
4. לא נכון.
דוגמה נגדית. נגדיר: $T:R^3\to R^2$ על ידי: $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. ברור, שההעתקה T אינה על.
5. נכון.
אם $f(x)=\alpha x$ אז $f(cx+y)=\alpha(cx+y)=c(\alpha x)+(\alpha y)=cf(x)+f(y)$. כלומר, f לינארית.
ואם $f(x)\ne\alpha x$ אז f אינה לינארית. לדוגמה, עבור: $f(x)=x^2\left(f(x)\ne\alpha x\right)$.
מתקיים: $f(2)=2^2=4\ne 1^2+1^2=f(1)+f(1)$. כלומר, f אינה לינארית.

תרגיל 2

1. נשים לב, שקיימת התאמה חח"ע ועל בין המספרים המרוכבים לנקודות במישור: $f:C\to R^2$.
כאשר: $f(a+ib)=(a,b)$. בנוסף, קיימת התאמה בין חיבור מספרים מרוכבים לבין חיבור וקטורים במישור, וקיימת התאמה בין כפל מספר מרוכב במספר ממשי לבין כפל וקטור במישור למספר ממשי. כלומר:
$$f\left((a+ib)+(c+id)\right)=f\left((a+c)+i(b+d)\right)=(a+c,b+d)=(a,b)+(c,d)$$
$$f\left(\alpha(a+ib)\right)=f\left(\alpha a+i\alpha b\right)=(\alpha a,\alpha b)=\alpha(a,b)\qquad \alpha\in R$$
לכן קבוצת המספרים המרוכבים עם פעולת חיבור מספרים מרוכבים, ועם פעולת כפל בסקלר ממשי, היא מרחב וקטורי (אשר איזומורפי למרחב הוקטורי R^2).
2. בכל סעיף נחליף את הפונקציה הנתונה $f:C\to C$ בהעתקה לינארית שקולה: $T:R^2\to R^2$,
כאשר: $T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=f(a+ib)$. כעת קל למצוא גרעין ותמונה.

(א) נתון: $f(a+ib)=a+i0$, כלומר: $T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}$. קל להוכיח שזו העתקה לינארית.

בנוסף, $\operatorname{Im}T=span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ $\qquad\ker T=span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$.

כלומר, בגרעין של f כל מספר מדומה טהור, ובתמונה של f כל מספר ממשי טהור.

(ב) נתון: $f(a+ib)=0+ib$, כלומר: $T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$. קל להוכיח שזו העתקה לינארית.

בנוסף, $\operatorname{Im}T = span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$ $\ker T = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

כלומר, בגרעין של f כל מספר ממשי טהור, ובתמונה של f כל מספר מדומה טהור.

(ג) נתון: $f(a+ib)=\sqrt{a^2+b^2}+i0$, כלומר: $T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{a^2+b^2}\\0\end{pmatrix}$. זו אינה העתקה לינארית!

לדוגמה: $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{1^2+0^2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=T\left((-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\sqrt{(-1)^2+0^2}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

כלומר: $T\left((-1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}(-1)T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

(ד) נתון: $f(a+ib)=a-ib$, כלומר: $T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}$. זו העתקה לינארית.

הגרעין של f הוא המספר 0, והתמונה של f היא C (כל המספרים המרוכבים).

(ה) יהא קבוע: $c=x_0+iy_0$.

נתון: $f(a+ib)=(x_0+iy_0)(a+ib)=(x_0a-by_0)+i(x_0b+y_0a)$.

כלומר: $T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0a-by_0\\x_0b+y_0a\end{pmatrix}$. זו אינה העתקה לינארית.

(ו) יהא קבוע: $c=x_0+iy_0$.

נתון: $f(a+ib)=(x_0+iy_0)+(a+ib)=(x_0+a)+i(y_0+b)$.

כלומר: $T\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0+a\\y_0+b\end{pmatrix}$. זו אינה העתקה לינארית. לדוגמה, עבור $c\neq 0$ מתקיים: $T\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

3. דוגמה: $f(a+ib)=2a+ib^2$.

העתקה זו לינארית ברכיב הממשי, אך אינה לינארית ברכיב המדומה (בדוק!).

3. (א)

$$r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1(\cos(\theta_1)+i\sin(\theta_1))\cdot r_2(\cos(\theta_2)+i\sin(\theta_2))$$
$$r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)-\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)+i(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2)+\sin(\theta_2)\cos(\theta_1)))$$
$$r_1e^{i\theta_1}\cdot r_2e^{i\theta_2}=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2))=r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

ובשלב האחרון השתמשנו בשתי זהויות טריגונומטריות, עבור $\sin(\theta_1+\theta_2)$ ועבור $\cos(\theta_1+\theta_2)$.

(ב) יהא מספר מרוכב $z=re^{i\alpha}$. מתקיים: $f_\theta(z)=f_\theta(re^{i\alpha})=e^{i\theta}re^{i\alpha}=re^{i(\alpha+\theta)}$.

ולכן העתקה f_θ היא סיבוב של הוקטור $\begin{pmatrix}r\cos(\alpha)\\r\sin(\alpha)\end{pmatrix}$ בזווית θ נגד כיוון השעון.

(ג) נתונה העתקה: $T_\alpha:R^2\to R^2$ המוגדרת ע"י: $T_\alpha(r\cdot(\cos(\theta),\sin(\theta)))=r\cdot(\cos(\theta+\alpha),\sin(\theta+\alpha))$.

זו העתקת סיבוב בזווית α, ועל סמך הסעיפים הקודמים, ניתן לרשום: $T_\alpha(z)=e^{i\theta}z$.

נוכיח שזו העתקה לינארית. יהא סקלר ממשי t. מתקיים:

$$T_\alpha(t\cdot z_1+z_2)=e^{i\theta}(t\cdot z_1+z_2)=t\cdot e^{i\theta}z_1+e^{i\theta}z_2=t\cdot T_\alpha(z_1)+T_\alpha(z_2)$$

<u>תרגיל 3</u>

א. ההעתקה T היא לינארית, מהלינאריות של אופרטור הגזירה.

נסמן: $v_1 = x^2e^x, v_2 = xe^x, v_3 = e^x$.

מתקיים:

$$T(v_1) = v_1 + 2v_2$$
$$T(v_2) = v_2 + v_3$$
$$T(v_3) = v_3$$

המטריצה המייצגת של T בבסיס B היא:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

המטריצה המייצגת של T היא הפיכה, ולכן העתקה T היא חח"ע ועל.

כלומר, $\dim \operatorname{Im} T = 3 \qquad \dim \ker T = 0$.

ב. ההעתקה T היא לינארית, מהלינאריות של אופרטור הגזירה.

הפולינומים היחידים שנגזרתם היא אפס הם הקבועים. ולכן: $\ker T = \{c \in R\}$ (ממד 1).

ממשפט הממדים מתקיים: $\dim \operatorname{Im} T = \dim V - \dim \ker T = n-1$.

ג. העתקה T אינה לינארית. דוגמה: $(2x)^2 = T(2x) \neq 2T(x) = 2x^2$.

ד. העתקה T היא לינארית. הוכחה: יהיו $p_1(x), p_2(x) \in R_n[x]$. מתקיים:

$$T(\alpha \cdot p_1(x) + p_2(x)) = (\alpha \cdot p_1(x) + p_2(x))q(x) = \alpha \cdot p_1(x)q(x) + p_2(x)q(x)$$
$$\Rightarrow T(\alpha \cdot p_1(x) + p_2(x)) = \alpha \cdot T(p_1(x)) + T(p_1(x))$$
$$\ker T = \{p(x) \equiv 0\}$$

ה. נוכיח שהעתקה T היא לינארית. נוכיח, שמתקיים: $T(\alpha \cdot p(x) + q(x)) = \alpha \cdot T(p(x)) + T(q(x))$.

$$T\left(\alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + \sum_{k=1}^{n} b_k x^k\right) = T\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha(a_k + b_k)x^k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(a_k + b_k)x^{2k} = \alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k x^{2k} + \sum_{k=1}^{n} b_k x^{2k}$$
$$\Rightarrow T\left(\alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + \sum_{k=1}^{n} b_k x^k\right) = \alpha \cdot T\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x^k\right) + T\left(\sum_{k=1}^{n} b_k x^k\right)$$
$$\ker T = \{p(x) \equiv 0\}$$

ו. נוכיח שהעתקה T היא לינארית:

$$T(\alpha \cdot p(x) + q(x)) = T\left(\alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + \sum_{k=1}^{n} b_k x^k\right) = T\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha(a_k + b_k)x^k\right) = \frac{1}{x}\int_0^x \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha(a_k + b_k)t^k\right)dt$$
$$= \alpha\left(\frac{1}{x}\int_0^x \sum_{k=1}^{n} a_k t^k dt\right) + \left(\frac{1}{x}\int_0^x \sum_{k=1}^{n} b_k t^k dt\right) = \alpha \cdot T\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x^k\right) + T\left(\sum_{k=1}^{n} b_k x^k\right)$$
$$T(\alpha \cdot p(x) + q(x)) = \alpha \cdot T(p(x)) + T(q(x))$$
$$\ker T = \{p(x) \equiv 0\}$$

ז. נוכיח שההעתקה T היא לינארית:

$$T(\alpha \cdot p(x) + q(x)) = T\left(\alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + \sum_{k=1}^{n} b_k x^k\right) = T\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha(a_k + b_k)x^k\right) = x \cdot \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha(a_k + b_k)x^k\right) =$$

$$= x \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha (a_k + b_k) k x^{k-1} \right) = x \cdot \left(\alpha \sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} b_k k x^{k-1} \right) =$$
$$= \alpha \cdot x \cdot \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x^k \right) + x \cdot \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k x^k \right)$$
$$\Rightarrow T\left(\alpha \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k x^k + \sum_{k=1}^{n} b_k x^k \right) = \alpha \cdot T\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x^k \right) + T\left(\sum_{k=1}^{n} b_k x^k \right) = \alpha \cdot T(p(x)) + T(q(x))$$
$$\ker T = \{ p(x) \equiv c \mid c \in R \}$$

ח. נוכיח שהעתקה T היא לינארית:

$$T(\alpha B + C) = A(\alpha B + C) - (\alpha B + C)A = \alpha AB + AC - \alpha BA - CA = \alpha(AB - BA) + (AC - CA)$$
$$\Rightarrow T(\alpha B + C) = \alpha T(B) + T(C)$$

<u>תרגיל 4</u>

לא נכון.

דוגמה נגדית: עבור $V = R^3$. אם $\ker T = \mathrm{Im} T$ אז $n = \dim \ker T = \dim \mathrm{Im} T$.

וממשפט הממדים נקבל: $\dim \ker T + \dim \mathrm{Im} T = \dim V$. כלומר: $2n = 3$. והדבר אינו אפשרי.

<u>תרגיל 5</u>

נוכיח ש T(U) הוא תת מרחב של W.

א. נתון: U תת מרחב של V ולכן $0 \in U$. כמו כן, העתקה T לינארית, ולכן: $T(0) = 0$.
לפיכך: $0 \in T(U)$.

ב. יהיו $w_1, w_2 \in T(U)$, ויהא סקלר α. נוכיח: $\alpha w_1 + w_2 \in T(U)$.
ואכן, מהנתון $w_1, w_2 \in T(U)$ קיימים $u_1, u_2 \in U$ שעבורם: $T(u_1) = w_1, (u_2) = w_2$.
נתון: U תת מרחב של V ולכן $\alpha u_1 + u_2 \in U$. וכמו כן, $T(\alpha u_1 + u_2) \in T(U)$.
העתקה T לינארית, ולכן: $T(\alpha u_1 + u_2) = \alpha T(u_1) + T(u_2) = \alpha w_1 + w_2 \in T(U)$. מ.ש.ל.

<u>תרגיל 6</u>

נתון: $L_A = L_B$.

צריך להוכיח: A=B.

הוכחה: נתון, שלכל וקטור v מתקיים: $L_A(v) = L_B(v)$, כלומר: $Av = Bv$. בפרט, עבור וקטור יחידה $v = e_n \in F^m$, מתקיים: $L_A(e_n) = Ae_n = Be_n = L_B(e_n)$. כלומר, עמודה מספר n במטריצה A שווה לעמודה מספר n במטריצה B. ולכן המטריצה A זהה למטריצה B.

והכיוון ההפוך פשוט: אם מתקיים B=A, אז לכל וקטור v מתקיים: $Av = Bv$, כלומר: $L_A(v) = L_B(v)$.

ובמלים אחרות: $L_A = L_B$.

תרגיל 7

1. נמצא את T:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\left(\frac{x+y}{4}\right)\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{3y-x}{4}\right)\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\left(\frac{x+y}{4}\right)\cdot T\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{3y-x}{4}\right)\cdot T\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\left(\frac{x+y}{4}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\left(\frac{3y-x}{4}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\(x+5y)/4\end{pmatrix}$$

2. נמצא את T:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\left(\frac{4y-x}{3}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{x-y}{3}\right)\cdot\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\left(\frac{x+y}{4}\right)\cdot T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{3y-x}{4}\right)\cdot T\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\left(\frac{x+y}{4}\right)\cdot\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{3y-x}{4}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3y-x}{2}\\y\end{pmatrix}$$

3. נמצא את T:

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{y-x}{4}\right)\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{y-x}{4}\right)\cdot T\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\left(\frac{y-x}{4}\right)\cdot\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5y-x}{2}\\\frac{5y-x}{4}\end{pmatrix}$$

תרגיל 8

העתקה לינארית T מוגדרת עפ"י הגדרתה על איברי בסיס.

לדוגמה, נגדיר את T על בסיס סטנדרטי באופן הבא (יש אפשרויות רבות נוספות):

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\qquad T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\qquad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

על פי משוואות אלו נקבל:

$$T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=T\left(x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x+y\\2y\\x+2y\end{pmatrix}$$

תרגיל 9

כדי שהפונקציה תהיה לינארית צריך להתקיים:

$$f\left(\alpha(a,b)+(s,t)\right)=\alpha f(a,b)+f(s,t)$$
$$f(\alpha a+s,\alpha b+t)=\alpha f(a,b)+f(s,t)$$

נציב במשוואה האחרונה:

$$f(a,b)=a+b+d^2+1+ax$$
$$f(s,t)=s+t+d^2+1+sx$$
$$f(\alpha a+s,\alpha b+t)=(\alpha a+s)+(\alpha b+t)+d^2+1+(\alpha a+s)x$$

מתקבלת המשוואה:

$$(\alpha a+s)+(\alpha b+t)+d^2+1+(\alpha a+s)x=\alpha\left(a+b+d^2+1+ax\right)+\left(s+t+d^2+1+sx\right)$$

נאסוף חזקות של x:

$$(\alpha a+s)+(\alpha b+t)+d^2+1+(\alpha a+s)x=\left(\alpha\left(a+b+d^2+1\right)+s+t+d^2+1\right)+(\alpha a+s)x$$

ועל ידי השוואת מקדמים, נקבל שתי משוואות:

$$(\alpha a+s)+(\alpha b+t)+d^2+1+(\alpha a+s)x=\left(\alpha\left(a+b+d^2+1\right)+s+t+d^2+1\right)+(\alpha a+s)x$$
$$\Rightarrow\begin{cases}(\alpha a+s)+(\alpha b+t)+d^2+1=\alpha\left(a+b+d^2+1\right)+s+t+d^2+1\\ \alpha a+s=\alpha a+s\end{cases}$$

כלומר, צריך להתקיים: $\alpha a+\alpha b=\alpha\left(a+b+d^2+1\right)$.

וזה מתקיים אם: $d^2+1=0$, כלומר: $d=\pm i$.

מסקנה: הפונקציה f אינה לינארית בשדה הממשיים.

תרגיל 10

נתון שההעתקה T היא לינארית, ולכן: $T(v)=T(v_0+u)=T(v_0)+T(u)$.

מתקיים: $T(v)=w\Leftrightarrow T(v_0)+T(u)=w\Leftrightarrow w+T(u)=w\Leftrightarrow T(u)=0\Leftrightarrow u\in\ker T$.

תרגיל 11

נסמן: $v_4=2t^2 \qquad v_3=2 \qquad v_2=1+t+t^2 \qquad v_1=1+t^2$.

נציג וקטור כללי $\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$ כצירוף לינארי של המטריצות הנתונות בשאלה:

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b+d & a+b \\ b+c+d & 2b+c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = a+b+d \\ y = a+b \\ z = b+c+d \\ w = 2b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = z+2y-w-x \\ b = w+x-y-z \\ c = 2y+2z-x \\ d = x-y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (z+2y-w-x)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (w+x-y-z)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (2y+2z-x)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (x-y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (z+2y-w-x)T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + (w+x-y-z)T\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + (2y+2z-x)T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + (x-y)T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (z+2y-w-x)v_1 + (w+x-y-z)v_2 + (2y+2z-x)v_3 + (x-y)v_4$$

.1

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)v_1 + (1)v_2 + (-1)v_3 + (1)v_4 = v_2 + v_4 - v_1 - v_3$$

$$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = (1+t+t^2) + (2t^2) - (1+t^2) - (2) = 2t^2 + t - 2$$

.2

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (z+2y-w-x)(1+t^2) + (w+x-y-z)(1+t+t^2) + (2y+2z-x)(2) + (x-y)(2t^2)$$

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (2y+2z-2w)t^2 + (w+x-y-z)t + (-2x+5y+4z)$$

3. נמצא את הגרעין של T:

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (2y+2z-2w)t^2 + (w+x-y-z)t + (-2x+5y+4z) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y+2z-2w = 0 \\ w+x-y-z = 0 \\ -2x+5y+4z = 0 \end{cases}$$

תרגיל 12

1. נראה שזו העתקה לינארית:

$$T(\alpha A+B) = \frac{(\alpha A+B)+(\alpha A+B)^t}{2} = \frac{\alpha(A+A^t)+(B+B^t)}{2} = \alpha T(A) + T(B)$$

2. נמצא את הגרעין של T:

$$T(A)=0 \Leftrightarrow \frac{A+A^t}{2}=0 \Leftrightarrow A^t=-A$$

נתון שבשדה F מתקיים: $1+1\neq 0$.

לכן הגרעין של T הוא קבוצת המטריצות האנטי-סימטריות (מסומנת בשאלה באות A)

3. נמצא את התמונה של T:
נשים לב, שלכל מטריצה A מתקיים:

$$T(A)=\frac{A+A^t}{2}=\left(\frac{A+A^t}{2}\right)^t=\frac{A^t+\left(A^t\right)^t}{2}$$

ולכן התמונה של T היא קבוצת המטריצות הסימטריות (מסומנת בשאלה באות S).

4. נתון, שהמרחב V הוא המטריצות הריבועיות מסדר n. ולכן הממד של תת המרחב S (אוסף המטריצות הסימטריות) הוא $\frac{n^2+n}{2}=n^2-\left(\frac{n^2-n}{2}\right)$ (חיסרנו איברים במשולש תחתון). וזהו ממד התמונה של T.

5. לפי משפט הממדים: $\dim \operatorname{Im} T+\dim\ker T=\dim V$.

במקרה שלנו מתקיים: $\frac{n^2+n}{2}+\dim\ker T=n^2$.

ולכן: $\dim A=\dim\ker T=n^2-\left(\frac{n^2+n}{2}\right)=\frac{n^2-n}{2}$.