לכסון אורתוגונלי, תבנית רבועית

משפט 1: מטריצה $A_{n\times n}$ סימטרית $\Leftrightarrow$ A ניתנת ללכסון אורתוגונלי.

תרגיל 1: לכסן באופן אורתוגונלי את המטריצה $A=\begin{bmatrix}4&-4&0&-4\\-4&0&0&0\\0&0&-3&0\\-4&0&0&0\end{bmatrix}$.

פתרון: נחשב פולינום אופייני:

$$P_A(\lambda)=\det\begin{bmatrix}4-\lambda&-4&0&-4\\-4&-\lambda&0&0\\0&0&-3-\lambda&0\\-4&0&0&-\lambda\end{bmatrix}\overset{R_3}{=}$$
$$=-(3+\lambda)\det\begin{bmatrix}4-\lambda&-4&-4\\-4&-\lambda&0\\-4&0&-\lambda\end{bmatrix}\overset{R_3}{=}$$
$$=-(3+\lambda)\left(-4\det\begin{bmatrix}-4&-4\\-\lambda&0\end{bmatrix}-\lambda\det\begin{bmatrix}4-\lambda&-4\\-4&-\lambda\end{bmatrix}\right)=$$
$$=-(3+\lambda)\left[16\lambda-\lambda\left(-\lambda\left(4-\lambda\right)-16\right)\right]=$$
$$=-(3+\lambda)\left(32\lambda+\lambda^2\left(4-\lambda\right)\right)=$$
$$=\lambda(3+\lambda)\left(\lambda^2-4\lambda-32\right)=$$
$$=\lambda(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda-8).$$

הערכים עצמיים הם $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-3,\ \lambda_3=-4,\ \lambda_4=8$. נמצא וקטורים עצמיים:
$\lambda=\lambda_1=0$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c}4&-4&0&-4&0\\-4&0&0&0&0\\0&0&-3&0&0\\-4&0&0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{R_2+R_1\\R_4+R_1}]{}\left[\begin{array}{cccc|c}4&-4&0&-4&0\\0&-4&0&-4&0\\0&0&-3&0&0\\0&-4&0&-4&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_4-R_2]{}$$
$$\left[\begin{array}{cccc|c}4&-4&0&-4&0\\0&-4&0&-4&0\\0&0&-3&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[R_i/c]{}\left[\begin{array}{cccc|c}-1&1&0&1&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}-w+x+z=0,\\x+z=0\\y=0\end{cases}$$
$$\Rightarrow x=-z,\ \ w=0\Rightarrow\begin{bmatrix}w\\x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\0\\1\end{bmatrix}t\quad\forall t\in\mathbb{R}.$$

$:\lambda = \lambda_2 = -3$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 7 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{4R_2 + 7R_1, \\ R_3 - R_1}]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[5R_3 + 3R_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -33 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4w + 3x = 0, \\ 5x - 16z = 0 \\ -33z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$:\lambda = \lambda_3 = -4$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 8 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1/2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2 + R_1, \\ R_4 + R_1}]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 + R_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & -2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_i/c]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} 2w - x - z = 0 \\ x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2w - 2z = 0 \\ x = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$\lambda = \lambda_4 = 8$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -4 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ -4 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & -8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_2-R_1,\\ R_4-R_1}]{} \left[\begin{array}{cccc|c} -4 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4+R_2]{}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -4 & -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_i/c]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_1-R_2]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} w+2z=0, \\ x-z=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

ניתן לראות שהוקטורים עצמיים אורתוגונליים זה לזה:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ננרמל $||v_1|| = \sqrt{2}$, $||v_3|| = \sqrt{3}$, $||v_4|| = \sqrt{6}$, לכן

$$w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, w_2 = v_2,\ w_3 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 0 \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}.$$

נסמן $P = [w_1|w_2|w_3|w_4]$ ו- $D = \mathrm{diag}(0,-3,-4,8)$ כיוון ש- $PP^t = I_{4\times 4}$ נקבל $P^{-1} = P^t$, לכן

$$A = PDP^T.$$

תבנית רבועית

תזכורת: תבנית רבועית על $\mathbb{R}^n$היא פונקציה $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ מהצורה $Q(x) =^t xAx$.

תרגיל 2: רשום בצורה מטריציאלית את התבנית הריבועית

$$Q([x_1,x_2,x_3]) = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_1x_2 - x_3^2 + 2x_2x_3.$$

פתרון: באופן כלל צריך למצוא מטריצה **סימטרית** $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$ עבור $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ כך ש־ $Q(x) = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. נבצע כפל

$$Q(x) = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 \end{bmatrix},$$

לכן

$$Q(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

נשווה את המקדמים נקבל $a_{11} = 3$, $a_{22} = -2$, $a_{33} = -1$, $2a_{12} = 4$, $2a_{23} = 2$.
כיוון ש־ $0 \cdot x_1x_3 = 0$ נקבל $2a_{13} = 0$ כלומר $a_{13} = 0$, לכן

$$Q(x) = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

תרגיל 3: (א) לכסן את התבנית הרבועית $Q(x, y) = 2x^2 + 6xy + 2y^2$.
(ב) האם $Q(x, y)$ חיובית לחלוטין, שלילית לחלוטין או מעורבת ?

פתרון: נסמן $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. נחפש מטריצה A **סימטרית** כך ש־ $Q(x, y) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$.
באופן כללי $Q(x, y)$ ניתן לתצוגה

$$\mathbf{x}^t A\mathbf{x} = [x \;\; y] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$$

נשווה מקדמים נקבל $a_{11} = 2$, $a_{22} = 2$ ו־ $2a_{12} = 6$. זאת אומרת $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$.

נסמן $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$. המטריצה A סימטרית, לכן (לפי משפט) קיים החלפה אורתוגונלית של המשתנים: $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$, כך ש־ $P^{-1} = P^t$, כאשר $A = PDP^t$, ו־ D צורה אלכסונית של A.

נחשב פולינום אופייני $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$:

$$P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 3 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 2)^2 - 9 = \lambda^2 - 4\lambda - 5.$$

הערכים עצמיים של A הם $\lambda_1 = -1$ ו־ $\lambda_2 = 5$. נמצא וקטורים עצמיים:

$$\lambda = \lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \widetilde{v_1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\lambda = \lambda_2 = 5 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \widetilde{v_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

הוקטורים $\widetilde{v_2} \perp \widetilde{v_1}$. ננרמל $v_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$. אז $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ כך ש־

$$A = PDP^{-1} = PDP^t, \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

נחשב החלפה משתנים אורתוגונלית:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{\sqrt{2}}t \\ \frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{\sqrt{2}}t \end{bmatrix},$$

כלומר **<u>ההצבות הן</u>:**

$$x := -\frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{\sqrt{2}}t, \quad y := \frac{1}{\sqrt{2}}s + \frac{1}{\sqrt{2}}t.$$

כיוון ש־ $D = P^tAP$ מתקיים

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= 2x^2 + 6xy + 2y^2 = \mathbf{x}^tA\mathbf{x} = (P\mathbf{y})^tA(P\mathbf{y}) = \\ &= (\mathbf{y}^tP^t)A(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^t(P^tAP)\mathbf{y} = \mathbf{y}^tD\mathbf{y} = \\ &= \begin{bmatrix} s & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = -s^2 + 5t^2 = f(s,t). \end{aligned}$$

<u>מסקנה:</u> במקום ביטוי מסובך $Q(x,y)$ קיבלנו ביטוי יותר פשוט $f(s,t)$, לכן יותר קל להבין את הצורה הגיאומטרית של התבנית ריבועית $Q(x,y)$ בעזרת $f(s,t)$.

(ב) A מטריצה סימטרית, $\lambda_1 = -1 < 0$ ו־ $\lambda_2 = 5 > 0$ לכן $Q(x,y)$ מעורבת.

<u>הגדרה:</u> V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ ממימד $n = \dim_{\mathbb{R}} V$, $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n] \in V$. תבנית ריבועית $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^tA\mathbf{x}$ נקראת **<u>תבנית ריבועית בצורה קנונית</u>** אם

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= a_1x_1^2 + \ldots + a_px_p^2 - a_{p+1}x_{p+1}^2 - \ldots - a_{p+q}x_{p+q}^2, \\ &0 \leqslant p, q \leqslant r, \quad p + q = r, \quad a_i \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

כאשר $r = \mathrm{rank}(A)$. המספרים a_i נקראים **המקדמים קנוניים**.

תרגיל 4: רשום צורה קנונית של התבנית הריבועית

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

על ידי שיטה של החלפת משתנים אורתוגונלית.

פתרון: (1) נחשב מטריצה A כך ש- $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}$. באופן כללי ב-$\mathbb{R}^3$ עבור $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{R}^3$ נשתמש בנוסחה:

$$Q(\mathbf{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3.$$

נשווה את המקדמים ונקבל מטריצה סימטרית: $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(2) נחפש ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של A. נחשב פולינום אופייני:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} &\stackrel{C_1}{=} (2-\lambda)\det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} + \\ -2\det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1-\lambda & 2 \end{bmatrix} &= \\ &= (2-\lambda)\left[(\lambda+1)(\lambda-2) - 4\right] - 2\left[2(2-\lambda)+2\right] - \left[4 - (\lambda+1)\right] = \\ &= (2-\lambda)\left(\lambda^2 - \lambda - 6\right) - 4\,(3-\lambda) - (3-\lambda) = \\ &= (2-\lambda)(\lambda+2)(\lambda-3) + 4\,(\lambda-3) + (\lambda-3) = \\ &= \left[-(\lambda^2-4)+5\right](\lambda-3) = -(\lambda^2-9)\,(\lambda-3) = \\ &= -(\lambda+3)(\lambda-3)^2. \end{aligned}$$

לכן, ערכים עצמיים של A הם: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$. נחשב וקטורים עצמיים:
$\lambda = \lambda_1 = -3 \Leftarrow$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_1]{} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2 + 2R_1 \\ R_3 + 5R_1}]{} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 12 & 24 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[\substack{R_2/6 \\ R_3/12}]{} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_1 - 2R_2 \\ R_3 - R_2}]{} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 3 \Leftarrow$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{R_2+2R_1 \\ R_3-R_1}]{} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \widetilde{x} \\ \widetilde{y} \\ \widetilde{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y-z \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

$$\forall y,z \in \mathbb{R} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

קיבלנו וקטורים: $v_1 \perp v_2$ וגם $v_1 \perp v_3$ **אבל** $v_2 \not\perp v_3$. **(#)** נפעיל תהליך גרם־שמידט (שכולל <u>**פעולה מיותרת**</u> ראה הערה בסוף התרגיל):

$$w_1 := v_1, \quad w_2 = v_2.$$

אז

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle w_1, v_3\rangle}{\langle w_1, w_1\rangle} w_1 - \frac{\langle w_2, v_3\rangle}{\langle w_2, w_2\rangle} w_2 =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\langle [1,-2,1],[-1,0,1]\rangle}{\langle [1,-2,1],[1,-2,1]\rangle} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\langle [2,1,0],[-1,0,1]\rangle}{\langle [2,1,0],[2,1,0]\rangle} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \cancel{0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}} + \frac{2}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

$(*)$ נורמל $\widetilde{w_i} \mapsto \frac{w_i}{||w_i||}$ עם $i = 1,2,3$. הנורמות הם $||w_1|| = \sqrt{6}$, $||w_2|| = \sqrt{5}$, $||w_3|| = \sqrt{30}$. לכן $\widetilde{w_1} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\widetilde{w_2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\widetilde{w_3} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ מערכת אורתונורמלית, מהווה בסיס אורתונורמלי ל־ $\mathbb{R}^3$. נרשום מטריצה מלכסנת P, שהיא מטריצה אורטוגונלית, כלומר $P^{-1} = P^t$ כך ש־

$$P = [\widetilde{w_1} | \widetilde{w_2} | \widetilde{w_3}].$$

אז <u>ההחלפה משתנים אורתוגונלית</u> למשתנים החדשים $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ היא $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$:

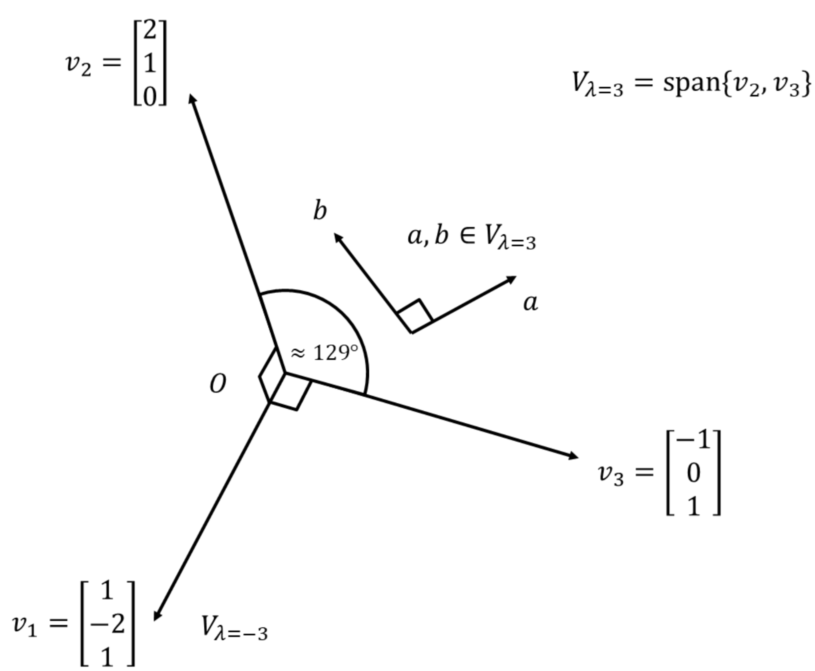
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{30}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{30}}z \\ -\frac{2}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y + \frac{2}{\sqrt{30}}z \\ \frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{5}{\sqrt{30}}z \end{bmatrix}.$$

צורה אלכסונית של A היא $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, לכן צורה קנונית של $Q(\mathbf{x})$ היא:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}) &= 2x_1 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 = \\ &= \mathbf{x}^t A\mathbf{x} = (P\mathbf{y})^t A(P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^t D\mathbf{y} = \\ &= \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -3x^2 + 3y^2 + 3z^2. \end{aligned}$$

הערה: בחישוב ההטעלה של הוקטור v_3 על הוקטור w_1 שווה לוקטור $\mathbf{0}$. זה קורה, כיוון שלפי **משפט הספקטרום למטריצות סמטריות**, המרחבים העצמיים ניצבים זה לזה, כלומר הוקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים - מאונכים זה לזה. לכן מספיק לבצע תהליך אורתוגונליזציה של גרם־שמידט לוקטורי בסיס של מרחב עצמי $V_{\lambda=3}$ בלבד, כלומר למצוא בסיס אורתונורמלי של $V_{\lambda=3}$ (שהם הוקטורים $\widetilde{w_2}, \widetilde{w_3}$), ואז בסה"כ לקבל בסיס אורתונורמלי $\widetilde{w_1}, \widetilde{w_2}, \widetilde{w_3}$ למרחב כולו, כלומר ל־$\mathbb{R}^3$.

דרך ב', ראה (#): הוקטורים $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ לא מאונכים, אבל מהווים בסיס למרחב עצמי $V_{\lambda=3}$, שהוא תת־מרחב ב־$\mathbb{R}^3$. התת־מרחב $V_{\lambda=3}$ נפרש על ידי 2 וקטורים, כלומר $V_{\lambda=3}$ הוא **מישור** ב־$\mathbb{R}^3$.



אבל יש אינסוף זוגות וקטורי בסיס של $V_{\lambda=3}$ אורתוגונליים זה לזה, למשל וקטורים

$$a = \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3, \qquad b = \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3$$

בתנאי ש־ $a \perp b$ ו־ $\mathbb{R} \ni \alpha_i, \beta_i$.

<u>תרגיל 5:</u> למצוא וקטור $a \neq v_2$, וקטור $b \neq v_3$ כך ש־ $V_{\lambda=3} \ni a, b$ בתנאי ש־ $a \perp b$, ולהמשיך את התרגיל 4 משלב $(*)$.

הדרכה: מספיק למצוא גם מקרה פרטי איזה שהוא, למשל $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$,
(בדוק ש־ $V_{\lambda=3} \ni a, b$, $a \perp b$ וגם $a \perp v_1$, $b \perp v_1$), ואז

$$\widetilde{w_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \qquad \widetilde{w_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{66}} \\ \frac{4}{\sqrt{66}} \\ \frac{7}{\sqrt{66}} \end{bmatrix}, \qquad ,\widetilde{w_3} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{11}} \\ -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{11}} \end{bmatrix},$$

ההחלפת משתנים אורתוגונלית $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ תיהיה

$$\begin{aligned} x_1 =& \frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{66}}y - \frac{3}{\sqrt{11}}z, \\ x_2 =& -\frac{2}{\sqrt{6}}x + \frac{4}{\sqrt{66}}y - \frac{1}{\sqrt{11}}z, \\ x_3 =& \frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{7}{\sqrt{66}}y + \frac{1}{\sqrt{11}}z, \end{aligned}$$

ולבסוף, לאחר חישוב ארוך (כדאי פעם אחד לכתוב) נקבל:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{y}) =& 2x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + \\ & -2x_1x_3 + 4x_2x_3 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{66}}y - \frac{3}{\sqrt{11}}z\right)^2 + \\ & -\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}x + \frac{4}{\sqrt{66}}y - \frac{1}{\sqrt{11}}z\right)^2 + 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{7}{\sqrt{66}}y + \frac{1}{\sqrt{11}}z\right)^2 + \\ & +4\left(\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{66}}y - \frac{3}{\sqrt{11}}z\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}x + \frac{4}{\sqrt{66}}y - \frac{1}{\sqrt{11}}z\right) + \\ & -2\left(\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{66}}y - \frac{3}{\sqrt{11}}z\right)\left(\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{7}{\sqrt{66}}y + \frac{1}{\sqrt{11}}z\right) + \\ & +4\left(-\frac{2}{\sqrt{6}}x + \frac{4}{\sqrt{66}}y - \frac{1}{\sqrt{11}}z\right)\left(\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{7}{\sqrt{66}}y + \frac{1}{\sqrt{11}}z\right) = \\ =& \\ & \vdots \\ =& -3(x^2 - y^2 - z^2) = -3x^2 + 3y^2 + 3z^2. \end{aligned}$$

בדיקה יותר פשוטה:

$$D = P^t A P =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{66}} & -\frac{3}{\sqrt{11}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{66}} & -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{7}{\sqrt{66}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{66}} & -\frac{3}{\sqrt{11}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{66}} & -\frac{1}{\sqrt{11}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{7}{\sqrt{66}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{66}} & \frac{4}{\sqrt{66}} & \frac{7}{\sqrt{66}} \\ -\frac{3}{\sqrt{11}} & -\frac{1}{\sqrt{11}} & \frac{1}{\sqrt{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{66}} & -\frac{9}{\sqrt{11}} \\ \sqrt{6} & \frac{12}{\sqrt{66}} & -\frac{3}{\sqrt{11}} \\ -\frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{21}{\sqrt{66}} & \frac{3}{\sqrt{11}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$