מטלה 2 בחישוביות, חורף 2022-23

נושאים: משפט Rice,

P,NP,coNP, NP-completeness, polynomial-time redcutions

הנחיות כלליות למטלות:

- אין חובה להגיש את המטלות. כל מטלה תקנה עד 3 נקודות בונוס בציון הסופי של הקורס, בתנאי שהציון במבחן יהיה לפחות 60.
- ההגשה היא בזוגות. אין הגשה ביחידים. (אפשר זוגות מקבוצות שונות.) התייעצות עם אחרים מותרת (אם כי עדיף קודם לשבור את הראש לבד), אך חובה לכתוב את הפתרון לבד.
- רק בן-זוג אחד יגיש את המטלה במודל. זה חשוב על מנת למנוע עבודה כפולה בבדיקה. המטלה תכלול את ת"ז של שני המגישים בשם הקובץ ובעמוד הראשון
- מותר להתייעץ עם מספר מועט של סטודנטים אחרים ולחפש מידע באינטרנט, אך חייבים לכתוב את התשובות לבד עם חומר סגור.
- במידה והתייעצתם או חיפשתם מידע, יש לציין את המקורות.
- תשובות דומות אחת לשנייה בצורה לא סבירה ייחשבו כהעתקה.
- בכל מקרה של העתקה הסטודנטים המעורבים יקבלו ציון 0 בקורס.
- צילומי דפים צריכים להיות קריאים. מומלץ להשתמש באפליקציה כגון CAMSCANNER. צילומים באיכות ירודה לא ייבדקו.
- אפשר להגיש עד 2 ימי איחור, אך מטלה באיחור תקנה רק עד נקודת בונוס אחת
- הבדיקה תהיה מדגמית. יהיה ניקוד חלקי.

הנחיות טכניות למטלה זו:

- ההגשה עד ה- 6.1.2023 בחצות דרך המודל.
- באף שאלה אין צורך בבניה מלאה של מכונות טיורינג, אלא מספיק להסביר את אופן הפעולה של המכונה בצורה מילולית.
- באף אחד מהסעיפים אין צורך ביותר מחצי עמוד (ובד"כ נתן להסתפק בהרבה פחות) יש להוכיח את תשובותיכם, אלא אם נאמר אחרת במפורש.

שאלות

1. בשאלה זו נדון במשפט Rice ל RE.

   א. תנו דוגמה לתכונה אינסופית של שפות ב RE, כך ש $L_S \in RE - R$.
   ב. בסעיף זה נספק תנאי מספיק נוסף על תכונות S של שפות ב RE, לכך ש $L_S \notin RE$. נאמר ש S היא "בעלת רזולוציה חצי" אם אינה טריוויאלית, והיא מכילה רק שפות אינסופיות שבהן לכל מילה x, או ש $1x, 0x \in L$ או ש $1x, 0x \notin L$. הוכיחו שעבור תכונות S "בעלות רזולוציה חצי", $L_S \notin RE$.

2. בשאלה זו נגדיר סוג חדש של רדוקציות: רדוקציות טיורינג. נגדיר תחילה מכונת רדוקציה. מכונה כזו, $M^?$, היא מ"ט דו סרטית רגילה, פרט לשינוי הבא.

   - למכונה יש סרט אחד רגיל וסרט "שאלות".
   - המכונה מתחילה את הריצה כמו מ"ט דו-סרטית רגילה.
   - קיימים שלושה מצבים מיוחדים q_{no}, q_{yes}, q_{ask}. כאשר המכונה עוברת למצב q_{ask}, המחשב מבצע את הצעד הבא בצורה מיוחדת. באופן "קסום" מחושב האם תוכן הסרט השני (משמאל לראש) שייך לשפה ? או לא (ה"קסם" הוא שהדבר מובטח גם אם ? אינה כריעה!). אם כן, הוא עובר למצב המיוחד q_{yes}. אחרת, הוא עובר למצב המיוחד q_{no}. בכל מקרה, הצעד נחשב כצעד בודד. בשאר המצבים, המכונה מתנהגת לפי טבלת המעברים שלה באופן רגיל. שימו לב ששלושת המצבים המיוחדים אינם סופיים, למען הסדר הטוב, הדרך היחידה להגיע ל q_{yes}, q_{no} היא דרך q_{ask}, אבל היציאות מהם לא מוגבלות מראש, ונקבעות על ידי ה δ של המכונה הספציפית של $M^?$.
   - כדי להריץ את $M^?$, יש להציב שפה מסויימת L' במקום ה "?". כלומר, על השאלות של המכונה יענו לפי שייכות ל L'. שימו

לב שה δ של $M^?$ היא קבועה, ואינה תלויה בשפה שמציבים! מהלך הריצה תלוי בכך, כמובן. נסמן הצבה כזו, שמגדירה את פעולת המכונה על ידי $M^{L'}$. כרגיל,

$$L(M^{L'}) = \{x \in \Sigma^* | \text{M halts on x with } q_{acc}\}$$

- זמן ריצה של מכונה כזו, $t(n)$ על קלט מסויים מחושב כרגיל, כמספר הצעדים כתלות באורך הקלט במקרה הגרוע.

נאמר ששפה L_1 ניתנת לרדוקציית טיורינג לשפה L_2, נסמן $L_1 \leq_T L_2$, אם קיימת מכונת רדוקציה $M^?_{1,2}$, כך ש $L(M^{L_2}_{1,2}) = L_1$.
נאמר ששפה L_1 ניתנת לרדוקציית טיורינג פולינומית לשפה L_2, נסמן $L_1 \leq_{PT} L_2$, אם בנוסף, $M^{L_2}_{1,2}$ לעיל רצה בזמן פולינומי.

שאלות:

א. שאלת חימום (לא להגשה): נסו להבין ראשית, כיצד קיום רדוקציה "רגילה" $L_1 \leq L_2$ גוררת קיום רדוקציית טיורינג $L_1 \leq_T L_2$ (בררו לעצמכם מהן $M^?$ ו L' הרלוונטיות).

ב. הוכיחו או הפריכו: אם $L_1 \leq_{PT} L_2$, ו $L_2 \in P$, אז L_1 גם ב P.

ג. נניח שאם $L_1 \leq_{PT} L_2$, ו $L_2 \in NP$, אז L_1 גם ב NP. הראו שנכונות הטענה גוררת פתרון לבעיה פתוחה ידועה. כתבו מהי, ומה הפתרון. הוכיחו את תשובתכם.

3. לכל אחת מהשפות הבאות, קבעו האם היא ב P ב NPC או ב NPH. בכל סעיף הוכיחו את הטענה הכי חזקה שתוכלו. אם בסעיף מסויים הוכחתם רק שהשפה ב NPH, הסבירו מה הקושי בלהראות שהשפה ב NP (ההסבר אינו מהווה הוכחת אי שייכות ל NP, אלא מדוע גישה פשוטה שניסיתם לא עובדת). בשאלה זו ניתן להניח שכל שפה שלמדנו בתרגול או בהרצאה שהיא NPC שהיא אכן NPC ללא צורך בהוכחה. הדבר נכון גם לגבי משפט Cook.

א. $SAT_5 = \{\phi(x_1, \ldots, x_n) | \phi \text{ is a CNF formula with at least 5 satisfying assignments.}\}$
ב. $SAT_{>21/128} = \{\phi(x_1, \ldots, x_n) | \phi \text{ is a CNF formula such that more than } 21/128 \text{ of its assignments are satisfying}\}$
רמז: הזכרו שכל פונקציה בוליאנית $f(x_1, \ldots, x_n)$ ניתנת למימוש על ידי פסוק CNF כלשהו התלוי במשתנים אלה. הערה: הקבוע בשאלה שונה מ 0.2 כדי להקל עליכם. גם זה פתיר, אבל יותר קשה. מומלץ למי שרוצה אתגר (אבל הוא לא להגשה)..
ג. $VC_{15} = \{(< G, k > | \text{k> n-15, and G is an undirected graph which has a VC of size } \leq k\}$
ד.
$SubsetSum_U = \{(1^{x_1}, \ldots, 1^{x_t}, 1^k) | \text{ all } x_i's \text{ are positive and pairwise distinct , and there exists } I \subseteq [t] \text{ such that } \Sigma_{i \in I} x_i = k\}$.
בשאלה זו מותר בנוסף להניח ש SubsetSum היא ב NPC.

4. בשאלה זו נדון בנסיון לשפר את שיעור "התשובות הנכונות" של מ"ט א"ד, ונבין מדוע אינו עוזר :)

א. נתבונן בהגדרה של NP באמצעות מ"ט א"ד בעלת שני צעדים אפשריים בדיוק. כלומר δ שלה מוגדרת כ $\delta : Q' \times \Gamma \rightarrow (Q \times \Gamma \times \{L, S, R\})^2$.
הראו שלכל מכונה כזו קיימת מ"ט שקולה N באותו מודל, שבה לכל קלט ב $L(N)$ מספר מסלולי החישוב המקבלים בעץ החישוב המתאים ל x הוא לפחות 0.99 מכלל המסלולים.

ב. **סעיף העשרה, לא להגשה.** נממש מ"ט א"ד על ידי הטלת מטבע לבחירת האפשרות בכל צעד. הסבירו המכונה שבניתם בסעיף 4א, לא בהכרח תתן הסתברות קבלה של לפחות 0.99 עבור קלטים בשפה.

5. **שאלה לתרגול נוסף, לא להגשה.**
בשאלה זו נשלים פרט מסויים שאינו מפורט בשקפים. נניח ש $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ הוא פסוק 2CNF שבו לא קיים מסלול ממשתנה אל שלילתו. הוכיחו שכל השמה למשתני הפסוק אינה יוצרת סתירה.
רמז: חישבו על גרף הגרירות שיצרנו באלגוריתם להכרעת 2SAT. הוכיחו שאין בו סתירה כלשהי. בפרט, כדי למצוא השמה מספקת, אין צורך לעבור על כל ההשמות האפשריות - כל השמה תתאים.