בס"ד

מטלה 1 - חישוביות

ת.ז מגישים:

1. 208980359
2. 323083105

שאלה 1:

<u>א.</u>

תהיי f פונקציה מלאה ושאינה ניתנת לחישוב, כלומר היא מוגדרת לכל קלט אבל לא קיימת מ"ט M כך שלכל $x \in \Sigma^*$ עליו f מוגדרת מחזירה את $f(x)$,

תהיי f' פונקציה שאינה מלאה ואינה ניתנת לחישוב, כך ש-f' מוגדרת כך:

$$f'(x) = \begin{cases} f(x) & , x \neq 10 \\ \text{לא מוגדר} & , x = 10 \end{cases}$$

נשים לב כי f' אינה מלאה כיוון שאם $x \neq 10$ הפונקציה תחזיר כמו $f(x)$, ועבור $x = 10$, $f'(10)$ לא מוגדר.

נניח בשלילה ש-f' ניתנת לחישוב, ולכן לפי ההגדרה קיימת עבורה מ"ט M' המחשבת את f'.

תהיי מ"ט M המחשבת את f,

M על x:

1. אם $x = 10$, החזר $f(10)$,
2. אחרת, סמלץ את ריצת M' על x וענה כמוה, כלומר החזר $f(x)$.

הראנו כי קיימת מ"ט עבור f מכאן ניתן להסיק לפי ההגדרה כי f ניתנת לחישוב בסתירה להנחה.

<u>ב.</u>

נוכיח כי קיימת פונקציה f שאינה מלאה ואינה ניתנת לחישוב בלי ההנחה בסעיף א',

ניזכר שלמדנו בהרצאה שכל מ"ט ניתן לייצג בעזרת קידוד בינארי - מכאן ניתן לייצג כל מ"ט מעל $\Sigma^* = \{0, 1\}^*$,

כעת ניזכר כי $|\Sigma^*| = \aleph_0$ כלומר גודלו הוא בן מניה ולכן כמות המ"ט שניתן לייצג הוא בן מניה,

מסקנה: מספר המ"ט שניתן לייצג = $\aleph_0$,

כעת ניזכר שכמות הפונקציות $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ הוא לא בן מניה ($\aleph_0 <$),

מכאן ניתן להסיק כי קיימות פונקציות אשר אין להן מ"ט אשר מחשבות אותן, כלומר שפות אלה אינן ניתנות לחישוב לפי ההגדרה, כעת ניתן פשוט לבחור משפות אלה שפה שהיא אינה מלאה כמו שבחרנו בסעיף א' וסיימנו.

<u>ג.</u>

נבחר את $f(x) = x$ (פונקציית הזהות), נראה כי הפונקציה מלאה וכי ניתנת לחישוב על ידי בניית מ"ט,

מלאה:

פונקצית הזהות היא פונקציות המוגדרת לכל קלט כיוון שמתקיים: $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ (טריוויאלי)

ניתנת לחישוב:

תהיי M מ"ט המוגדרת בצורה הבאה:

$$M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, F, \delta, \overline{b})$$

כאשר:

$$Q = \{q_0, q_{end}\},\ F = \{q_{end}\},\ \Sigma = \{0,1\},\ \Gamma = \{0,1,\overline{b}\}$$

והפונקציה δ מוגדרת בצורה הבאה:

$$\delta(q_0,\ 0) = (q_0, 0, R)$$
$$\delta(q_0, 1) = (q_0, 1, R)$$
$$\delta(q_0, \overline{b}) = (q_{end}, \overline{b}, S)$$

ד.

נגדיר את הפונקציה הבאה: $f(x) = \perp$

הפונקציה לא מוגדרת לכל x ולכן אינה מלאה, נבנה לה מ"ט שמחשבת אותה וכך נראה שהיא ניתנת לחישוב:

תהיי M מ"ט המוגדרת בצורה הבאה:

$$M = (Q, q_0, \Sigma, \Gamma, F, \delta, \overline{b})$$

כאשר:

$$Q = \{q_0, q_{end}\},\ F = \{q_{end}\},\ \Sigma = \{0,1\},\ \Gamma = \{0,1,\overline{b}\}$$

והפונקציה δ מוגדרת בצורה הבאה:

$$\delta(q_0,\ \sigma) = (q_{end}, \sigma, S)$$

שאלה 2:

א. הפרכה

המודלים לא שקולים,

תהיי M מ"ט רגיל ותהיי M' מ"ט מהמודל החדדש כמו שמוגדר בשאלה,

עבור קלט x למכונה M':

נרשום כל תו בקלט x בסדרט המתאים לפי האינדקס: התו x_i יתכתב בסרט במקום ה-$i+1$

כלומר הסרט הראשון יהיה ללא שינוי בתוכנו,

לאחר שהמכונה M' רשמה את כל הקלט x על הסרטים נבדוק:

אם $x \in L \leftarrow$ נעבור למצב q_{acc}

אם $x \neq L \leftarrow$ נעבור למצב q_{rej}

ובצורה זו נוכל להכריע כל שפה - אבל זו סתירה, כיוון שאנחנו יודעים כי ישנם שפות שלא ניתנות להכרעה (מוכח בשאלה 1 סעיף ב')

ב. הוכחה

המודלים כן שקולים,

לפי הגדרת המודל החדש כל סרט תלוי אך ורק במה שיש בו ולכן זה אומר מצבי הפונקציה δ הוא סופית, ולכן נוכל "לאחד" בין כל הסרטים שעבדו לפי אותה δ ובסופו של דבר לאחר הצמצום נישאר עם מספר סופי של סרטים, למדנו בכיתה כי מ"ט בעל k סרטים שקול למ"ט רגיל.

ג+ד. הפרכה

למדנו בכיתה שמ"ט הוא מודל המכיל רכיבים סופיים בלבד (למשל כמות סופית מצבים, כמות סופית של סרטים אינסופיים, מספר סופי של Σ, ו-Γ), דבר זה נובע מתזת טיורינג-צ'רץ שאומר שרק מודל

כללי וסביר שקול למ"ט רגיל, כאשר סביר - לא מכיל רכיבים אינסופים (חוץ מזה שהסרט יכול להיות אינסופי), כללי - חזק מבחינה חישובית לפחות כמו מ"ט.

שאלה 3:

א.

1) הוכחה:

הוכחה כי RE סגורה לשרשור, יהיו $L_1, L_2 \in RE$ נוכיח כי $L_1 \cdot L_2 \in RE$,

לפי ההנחה ש-$L_1, L_2 \in RE$ ולפי הגדרת RE קיימות מ"ט M_1, M_2 המקבלות את L_1 ואת L_2 בהתאמה, תהי $M_{1\cdot2}$ מ"ט על קלט x:

1. נגדיר $i = 1$
2. לכל $x = w_1 \cdot w_2$ כך שמתקיים: $|x| \leqslant |w_1| \leqslant 0$ וגם $|x| \leqslant |w_2| \leqslant 0$:
   2.1. $M_{1\cdot2}$ מסמלצת את ריצת M_1 על w_1 למשך i צעדים, וגם את ריצת M_2 על w_2 למשך i צעדים,
   אם גם M_1 וגם M_2 קיבלו - קבל.
3. נבצע i++ ונבצע את שלב 2 שוב.

נכונות:

אם $x \in L_1 \cdot L_2$ ← קיים ב-x פירוק שני שני מילים w_1, w_2 כך שמתקיים: $x = w_1 \cdot w_2$
← המכונה M_1 וגם המכונה M_2 יקבלו ביחד לאחר i מסויים (סופי) של צעדים
← $M_{1\cdot2}$ תקבל
← $x \in L(M_{1\cdot2})$

אם $x \neq L_1 \cdot L_2$ ← **לא** קיים ב-x פירוק שני שני מילים w_1, w_2 כך שמתקיים: $x = w_1 \cdot w_2$
← המכונה M_1 וגם המכונה M_2 לא יקבלו ביחד לכל i צעדים
← $M_{1\cdot2}$ לא תעצור
← $x \neq L(M_{1\cdot2})$

הראנו כי המכונה $M_{1\cdot2}$ או עוצרת ומקבלת או לא עוצרת ולכן המכונה נמצאת ב-RE וגם הראנו כי אם $L_1, L_2 \in RE$ אז גם $L_1 \cdot L_2 \in RE$.

2) הוכחה:

תהיי A קבוצת שפות לא בת מניה כלומר $|A| > \aleph_0$, נוכיח כי לא קיימת שפה שלמה לקבוצה A,

לפי הגדרת שפות שלמות:

שפה שלמה L היא שפה אשר נמצאת באיזה שהיא מחלקה, וקיימת רדוקציה מכל שפה L' שנמצאת באותה מחלקה אל שפה L, כלומר:

$L' \leqslant L$, או במילים אחרות - קיימת פונקציה חד חד ערכית ועל המתאימה את המילים (את את האיברים) מ-L' אל L,

לפי הגדרת קבוצה בת מנייה שלמדנו בתורת הקבוצות - קבוצה בת מנייה היא קבוצה שקיימת פונקצייה חד חד ערכית ועל ממנה אל קבוצת המספרים הטבעים - כלומר שניתן לסדר את כל אבריה בסדר כלשהו בסדרה ללא חזרות,

כעת מכיוון ש-A היא לא קבוצה בת מנייה, אזי לא קיימת לה פונקצייה חד-חד ערכית ועל שניתנת לסידור איברה ← לא קיימת רדוקציה מכל שפה אחרת במחלקה שלה אליה ← לכל שפה שנבחר במחלקה של A לא נוכל לבנות רדוקציה ממנה אל A ← לא קיימת שפה שלמה לקבוצה A.

3) הוכחה:

נגדיר את האופרטור האונארי הבא: $S:P\left(\Sigma^*\right)\to\left(\Sigma^*\right)$ כך ש: $S(L)=\overline{L}$,
כלומר הגדרנו אופרטור המקבל שפה ומחזיר את המשלים שלה, נראה כי R מקיימת את האופרטור בעוד RE אינה מקיימת את האופרטור שהגדרנו:

לפי הגדרת R ידוע לנו כי היא סגורה למשלים (למדנו בכיתה) ולכן לכל $L\in R$ גם $\overline{L}\in R$,

כעת ניזכר בהגדרת $coRE$: $coRE=\{L:\overline{L}\in RE\}$ כלומר לפי הגדרת $coRE$, כל שפה שנמצאת ב-RE בהכרח המשלים שלה נמצא ב-$coRE$,

ולכן אם קיימת לנו שפה $L'\in RE/R$ אז לפי ההגדרה $\overline{L'}\in coRE\leftarrow\overline{L'}\notin RE$ ולכן RE לא מקיימת את האופרטור S.

<u>ב.</u>

נגדיר את האופרטור האונארי הבא: $S:P\left(\Sigma^*\right)\to\left(\Sigma^*\right)$ כך ש: $S(L)=L\cdot HP$.

נכונות:

$L\in RE/R\leftarrow$ קיימת מ"ט המקבלת את השפה $L\cdot HP\leftarrow$ ידוע לנו כי $HP\in RE$ וגם לפי ההנחה $L\in RE\leftarrow RE$ סגורה לשרשור ולכן $L\cdot HP\in RE$

$L\in E\leftarrow$ קיימת מ"ט המכריעה את השפה $L\cdot HP\leftarrow$ סתירה לכך שקיימת מ"ט שמכריע את השפה $HP\leftarrow$ לא נוכל לבנות מ"ט עבורה $\leftarrow L\cdot HP\notin R$

<u>שאלה 4:</u>

נסמן: $Ref_f=\left\{(L_1,L_2)\subseteq\left(\Sigma^*\right)^2|f\ is\ a\ reduction\ function\ from\ L_1\ to\ L_2\right\}$

<u>א. הוכחה:</u>

$|\{L_2|\exists L_1\ s.t\ (L_1,L_2)\in Ref_f\}|=\infty$, או במילים אחרות צריך להוכיח שכמות השפות L_2 שקיימות עבורן שפה כלשהיא L_1 שקיימת רדוקציה בין L_1 אל L_2 היא אינסופית,

ידוע לנו כי מספר השפות בכללי הוא אינסופי וידוע לנו כי יחס הרדוקציה $\leqslant$ הוא רפלקסיבי (למדנו בכיתה), ולכן לכל שפה L שנבחר לא משנה איזו ומאיזו מחלקה - מתקיים $L\leqslant L$ לפי הגדרת הרדוקציה ולכן יש אינסוף שפות שיש להן רדוקציה בינן לבין עצמן, כעת עבור השפה L_2 נבחר גם את L_2 ואז יתקיים $(L_2,L_2)\in Ref_f$ לכל L_2 שנבחר.

<u>ב. הוכחה:</u>

נובע מאותה הוכחה של סעיף א' - לכל שפה שנבחר יש לה רדוקציה בינה לבין עצמה בשני הכיוונים ולכן לכל שפה L_1 נבחר עבורה את L_1 וגם יתקיים $L_1\leqslant L_1$ ואז יתקיים $(L_1,L_1)\in Ref_f$, מכיוון שלפי הגדרת הרדוקציה לכל שפה יש רדוקציה בינה לבין עצמה וקיימות אינסוף שפות אז מתקיים:

$|\{L_1|\exists L_2\ s.t\ (L_1,L_2)\in Ref_f\}|=\infty$

<u>ג. הפרכה:</u>

נניח בשלילה ש- $\{L_1|\exists L_2\ s.t\ (L_1,L_2)\in Ref_f\}$ היא קבוצה סופית, נוכיח כי היא קבוצה אינסופית,

על מנת להוכיח שקבוצה כזו סופית צריך להוכיח שקיים מספר מוגבל של שפות L_1 כך **שלכל** שפה L_2 שנבחר, לא קיימת רדוקציה בין L_1 ל-L_2, הראנו בסעיפים הקודמים כי רדקוציה מקיימת את תכונת הרפלקסיביות ולכן לכל שפה שנבחר L לא משנה איזו ומאיזו מחלקה, תמיד תיהיה קיימת

רדוקציה $L \leqslant L$, ולכן לכל שפה שנבחר לא משנה איזה, לא נוכל אף פעם להגיד שלא קיימת איזה שהיא שפה שיש לה רדוקציה בינה לבין השפה שבחרנו, ולכן לכל שפה שנבחר לא משנה איזו, תמיד נוכל למצוא שקיימת איזה שהיא שפה שיש בינה רדוקציה לבין השפה שבחרנו, ולכן קיבלנו סתירה כי יש אינסוף שפות שתמיד לכל אחת מהן יש לפחות רדוקציה אחת בינה לבין עצמה לפי תכונת הרפלקסיביות של הרדוקציה.

<u>שאלה 5:</u>

<u>א.</u>

השפה ב-R,

לכל $< M >$ כפלט, נבחר את M' להיות המכונה שמקבלת את כל המילים ב-Σ^*, ואם גודל קידוד המוכנה של $< M' >$ קטן מגודל קידוד המכונה $< M >$ נוסיף קידוד מיותר, נשים לב שהתנאי עכשיו תמיד מתקיים וגם טריוואלי (למדנו בכיתה ש-R מכילה את השפות הטריוויאליות) וכן השפה ב-R,

בניית מכונה:

תהיי M^* מ"ט על $< M >$:

נבחר את $M' = M_{\Sigma^*}$ (מכונה שמקבלת את כל המילים בסיגמא כוכבית).

קבל.

נכונות:

$< M > \ \in L_1$ ← מכיוון ש-$M' = M_{\Sigma^*}$ אזי תמיד מתקיים לכל M: $| < M > | < | < M' > |$ וגם $L(M) \subseteq L(M')$ ← M^* נקבלת ← $L_1 \in L(M)$

$< M > \notin L_1$ ← המכונה עדיין מקבלת כי אמרנו שהתנאי הוא איטואטיבי ו-M^* מקבלת כמו במקרה ש-$< M > \ \in L_1$

<u>ג.</u>

השפה ב-RE,

תהיי M^* מ"ט על $< M >$:

1. נבחר את M' להיות מכונה שמקבלת כל פלט, וגם שאם הקידוד $< M' >$ קטן בגודלו מ-$< M >$ - הוסף קידוד מיותר למכונה $< M' >$ כך שיתקיים: $| < M > < | < M' > |$.
2. הגדר $counter = 0$
3. לכל $w_i \in \Sigma^*$ מסודר בסדר לקסוגרפי:
    3.1. סמלץ את ריצת M על w_i למשך i צעדים, אם M קיבלה, בצע $counter ++$
    3.2. אם $counter = 3$, קבל

נכונות:

$< M > \in L_3$ ← קיימים 3 מילים כלשהם כך ש-M מקבלת אותם ← בריצה על כל המילים w_i בסגמה כוכבית בסדר לקסוגרפי מתישהו נקבל 3 מילים ש-M קיבלה וגם M' קיבלה כי מקבלת כל פלט ← $counter = 3$ וגם $|L(M) \cap L(M')| = 3$ ← M^* מקבלת.

$< M > \neq L_3$ ← לא קיימות 3 מילים כלשהן כך ש-M מקבלת אותם ← בריצה על כל המילים w_i בסגמה כוכבית בסדר לקסוגרפי לכל מילה אף פעם לא נקבל ש-M קיבלה יותר מ-3 מילים ← $counter < 3$ וגם $|L(M) \cap L(M')| < 3$ תמיד ← M^* לא עוצרת.

הוכחנו ש-M^* מקבלת או לא עוצרת ולכן השפה שלנו היא ב-RE

ד.

השפה ב-$coRE$,

תהי M^* מ"ט על $< M >$:

1. לכל $< M_i >$ מסודר בסדר לקסוגרפי של גודל הקידוד של המכונות $| < M_i > |$ כאשר $| < M > | > | < M_i > |$:
   1.1. הגדר $counter = 0$
   1.2. לכל $w_j \in \Sigma^*$ מסודרת בסדר לקסוגרפי מוגבל עד $i \cdot j + 3$ צעדים (ריצה מבוקרת):
      1.2.1. סמלץ את ריצת מכונה M על w_j למשך j צעדים (ריצה מבוקרת)
      סמלץ את ריצת המכונה M_i על w_j למשך j צעדים (ריצה מבוקרת)
      אם שתיהן קיבלו בצע: $counter$ ++
      1.2.2. אם $counter > 3$ דחה
2. קבל

נכונות:

$L_4 \in\, < M >$ ← לכל מכונה M' כך שגודל הקידוד שלה גדול מגודל הקידוד של M לכל מילה תמיד החיתוך בין $L(M)$ לבין $L(M')$ יהיה לכל היותר 3 ← לכל מכונה שנבחר לכל מילה שנבחר - לא נדחה ← $L_4 \in L(M)$

$L_4 \neq\, < M >$ ← קיימת מכונה M_i עבור איזשהו i מסויים כך שקיימות עבורה לפחות 4 מילים כך ש-M' וגם M מקבלות אותם ← על ריצה עבור M_i כזו עבור i מסויים ועל ריצה על Σ^* נקבל כי $|L(M) \cap L(M')| > 4$ ← $counter > 3$ ← M^* דוחה ← $L_4 \neq L(M)$