עבודת בית 1 . פתרונות.

1. כרגיל, $\mathbb{R}^5=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5):x_1\in\mathbb{R},x_2\in\mathbb{R},x_3\in\mathbb{R},x_4\in\mathbb{R},x_5\in\mathbb{R}\}$. יהי $B=\left((1,1,1,0,-1),(1,1,0,-1,1),(1,0,-1,1,1),(0,-1,1,1,1),(-1,0,1,0,-1)\right)$ בסיס ל-$\mathbb{R}^5$.

יהי C בסיס ל-$\mathbb{R}^5$ כך ש-$[I]_C^B=\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&1&1\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$. מצאו את הבסיס C.

<u>פתרון.</u> נסמן על ידי E את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^5$:

$E=\left((1,0,0,0,0),(0,1,0,0,0),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\right)$.

$$[I]_E^C=[I]_E^B\cdot[I]_B^C=[I]_E^B\cdot\left([I]_C^B\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1&0&-1\\1&1&0&-1&0\\1&0&-1&1&1\\0&-1&1&1&0\\-1&1&1&1&-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&1&-2&0&-2\\0&-1&1&0&2\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&-1&-1\\1&0&-1&-1&-1\\1&1&-3&2&0\\0&1&0&0&-1\\-1&-2&4&0&4\end{bmatrix}$$

העמודה מס' j של המטריצה $[I]_E^C$ היא עמודת קואורדינאטות לפי הבסיס הסטנדרטי E של הווקטור מס' j מבסיס C , לכן

$C=\left((1,1,1,0,-1),(0,0,1,1,-2),(0,-1,-3,0,4),(-1,-1,2,0,0),(-1,-1,0,-1,4)\right)$.

2. יהי V מרחב וקטורי. הוכיחו או הפריכו: אם $S,T:V\to V$ העתקות לינאריות כך ש-$\ker(T)=\ker(S)$ וגם $\operatorname{Im}(T)=\operatorname{Im}(S)$, אזי $T=S$.

<u>פתרון.</u> הטענה לא נכונה. משמעות השויון $T=S$ היא ש-T,S לא שתי העתקות שונות אלא אותה העתקה. לדוגמה ניקח שתי העתקות הפיכות מ-$\mathbb{R}^2$ ל-$\mathbb{R}^2$. לשתי העתקות האלה. הגרעין הוא $\{(0,0)\}$ והתמונה היא $\mathbb{R}^2$, וברור שיש אין סוף העתקות כאלה. למשל $S,T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $S(x,y)=(y,x)$, $T(x,y)=(x+y,x-y)$.
$\ker(T)=\ker(S)=\{(0,0)\}$, $\operatorname{Im}(T)=\operatorname{Im}(S)=\mathbb{R}^2$, אבל קל לראות ש-$T\neq S$. לדוגמה, $T(5,1)=(6,4)\neq(1,5)=S(5,1)$.

3. יהי V מרחב וקטורי מעל השדה F, תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. יהי U תת-מרחב ב-V כך ש-$U\cap\ker(T)=\{\vec{0}\}$. הוכיחו שאם $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\in U$ בלתי תלוים לינארית, אזי גם $T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n)$ בלתי תלוים לינארית.

<u>הוכחה.</u> נניח ש-$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\in U$ בלתי תלוים לינארית. כדי להוכיח ש-$T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n)$ בלתי תלוים לינארית יש להניח שמתקיים השויון $\alpha_1T(\vec{v}_1)+\alpha_2T(\vec{v}_2)+\cdots+\alpha_nT(\vec{v}_n)=\vec{0}$ ולהראות שמזה נובע ש-$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$. העתקה T לינארית, לכן $\alpha_1T(\vec{v}_1)+\alpha_2T(\vec{v}_2)+\cdots+\alpha_nT(\vec{v}_n)=T(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n)$, ולכן מהשויון $\alpha_1T(\vec{v}_1)+\alpha_2T(\vec{v}_2)+\cdots+\alpha_nT(\vec{v}_n)=\vec{0}$ נובע השויון $T(\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n)=\vec{0}$. על פי הגדרת גרעין, מהשויון האחרון נובע ש-$\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n\in\ker(T)$. מצד שני נתון ש-$\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\in U$, נתון גם ש-$U$ תת-מרחב, ולכן הוא סגור לחיבור ולכפל בסקלר, ולכן $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n\in U$. קיבלנו שווקטור $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n$ שייך גם ל-$\ker(T)$ וגם ל-U, לכן $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n\in U\cap\ker(T)$. אבל על פי הנתון $U\cap\ker(T)=\{\vec{0}\}$, ולכן $\alpha_1\vec{v}_1+\alpha_2\vec{v}_2+\cdots+\alpha_n\vec{v}_n=\vec{0}$. אבל $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ בלתי תלוים לינארית, ולכן מהשויון האחרון נובע ש-$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$.
הנחנו ש-$\alpha_1T(\vec{v}_1)+\alpha_2T(\vec{v}_2)+\cdots+\alpha_nT(\vec{v}_n)=\vec{0}$ וקיבלנו ש-$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$. על פי ההגדרה של אי-תלות לינארית, זה אומר ש-$T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n)$ בלתי תלוים לינארית.

4. יהי V מרחב וקטורי. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית כך ש- $T^2=T$.
הוכיחו: $V=\ker(T)\oplus\operatorname{Im}(T)$.

<u>הוכחה.</u> כל $v\in V$ אפשר להציג כך: $\vec{v}=\vec{v}-T(\vec{v})+T(\vec{v})$.
על פי הגדרת התמונה, $T(\vec{v})\in\operatorname{Im}(T)$. נוכיח ש-$\vec{v}-T(\vec{v})\in\ker(T)$. בשביל זה יש להראות ש-$T(\vec{v}-T(\vec{v}))=\vec{0}$. משמעות השויון $T^2=T$ היא ש-$T(\vec{v})=T(T(\vec{v}))=T^2(\vec{v})$ לכל $\vec{v}\in V$. לכן, $T(\vec{v}-T(\vec{v}))=T(\vec{v})-T(T(\vec{v}))=\vec{0}$. (השויון $T(\vec{v}-T(\vec{v}))=T(\vec{v})-T(T(\vec{v}))$ מתקיים בגלל ש- T העתקה לינארית.) היות וכל $\vec{v}\in V$ אפשר להציג $\vec{v}=\vec{v}-T(\vec{v})+T(\vec{v})$ והיות ו- $T(\vec{v})\in\operatorname{Im}(T)$,$\vec{v}-T(\vec{v})\in\ker(T)$, יש לנו כעת $V=\ker(T)+\operatorname{Im}(T)$. נוכיח שהסכום הוא ישר, ז.א. נוכיח ש-$\ker(T)\cap\operatorname{Im}(T)=\{\vec{0}\}$. ניקח $\vec{v}\in\ker(T)\cap\operatorname{Im}(T)$ ונראה שבהכרח $\vec{v}=\vec{0}$.
$\vec{v}\in\ker(T)$, לכן $T(\vec{v})=\vec{0}$. $\vec{v}\in\operatorname{Im}(T)$, לכן קיים $\vec{w}\in V$ כך ש-$\vec{v}=T(\vec{w})$.
$\vec{v}=T(\vec{w})=T(T(\vec{w}))=T(\vec{v})=\vec{0}$. השויון $T(T(\vec{w}))=T(\vec{w})$ מתקיים בגלל ש- $T^2=T$.
קיבלנו שלכל $\vec{v}\in\ker(T)\cap\operatorname{Im}(T)$ מתקיים $\vec{v}=\vec{0}$, לכן $\ker(T)\cap\operatorname{Im}(T)=\{\vec{0}\}$, ולכן יחד עם מה שכבר הוכחנו ש-$V=\ker(T)+\operatorname{Im}(T)$, קיבלנו $V=\ker(T)\oplus\operatorname{Im}(T)$.

5. יהי V מרחב וקטורי. תהיינה $T,S:V\to V$ העתקות לינאריות המקיימות

(א) $T+S=I_V$ (ב) $T\circ S=0$ (ג) $T\circ T=T$.

הוכיחו על סמך נתונים אלו ש-$V=\operatorname{Im}(T)\oplus\operatorname{Im}(S)$.

<u>הוכחה.</u> I_V זו העתקת הזהות על V, 0 בסעיף (ב) היא העתקת האפס, כלומר, העתקה השולחת כל וקטור של V לווקטור האפס של V. כדי להוכיח ש-$V=\operatorname{Im}(T)\oplus\operatorname{Im}(S)$, יש להוכיח ש-$V=\operatorname{Im}(T)+\operatorname{Im}(S)$ וש-$\operatorname{Im}(T)\cap\operatorname{Im}(S)=\{\vec{0}\}$.

נוכיח תחילה ש-$V=\operatorname{Im}(T)+\operatorname{Im}(S)$. נזכיר שהעתקה $T+S:V\to V$ מוגדרת כך: $(T+S)(\vec{v})=T(\vec{v})+S(\vec{v})$ לכל $\vec{v}\in V$. הנתון (א) אומר ש-$T+S=I_V$. נתון זה מתפרש כך: $T(\vec{v})+S(\vec{v})=(T+S)(\vec{v})=I_V(\vec{v})=\vec{v}$ לכל $\vec{v}\in V$. קיבלנו שלכל $\vec{v}\in V$ מתקיים השויון $\vec{v}=T(\vec{v})+S(\vec{v})$. על פי הגדרת התמונה, $T(\vec{v})\in\operatorname{Im}(T)$, $S(\vec{v})\in\operatorname{Im}(S)$, לכן $V=\operatorname{Im}(T)+\operatorname{Im}(S)$.

כעת נוכיח ש-$\operatorname{Im}(T)\cap\operatorname{Im}(S)=\{\vec{0}\}$.

הנתון (ב) מתפרש כך: $T(S(\vec{v}))=\vec{0}$ לכל $\vec{v}\in V$. בשויון $T(S(\vec{v}))=\vec{0}$ בעצם כתוב ש-$\operatorname{Im}(S)\subseteq\ker(T)$. בנתון (ג) כתוב ש-$T\circ T=T^2=T$, ולכן על פי התרגיל הקודם (4), $\ker(T)\cap\operatorname{Im}(T)=\{\vec{0}\}$.

נתבונן במצב הבא: יש שתי קבוצות A,B עם איבר משותף יחיד x, ז.א. $A\cap B=\{x\}$. תהי C תת-קבוצה של A, ז.א. $C\subseteq A$. עבור החיתוך של B ו-C יש שתי אפשרויות בלבד: אם $x\in C$, אז $C\cap B=\{x\}$, ואם $x\notin C$, אז $C\cap B=\varnothing$.

אצלנו $\ker(T)\cap\operatorname{Im}(T)=\{\vec{0}\}$, ו-$\operatorname{Im}(S)$ היא תת-קבוצה של $\ker(T)$, ו-$\vec{0}\in\operatorname{Im}(S)$ (כי $\vec{0}=S(\vec{0})$) ולכן $\operatorname{Im}(S)\cap\operatorname{Im}(T)=\{\vec{0}\}$.