תרגיל בית 1 - אלגברה לינארית 2 - תשפ"ב.

תרגיל 1. יהיו

$$B=\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right),C=\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

שני בסיסים של $\mathbb{R}^3$. מצאו את מטריצות המעבר $[I]_C^B$ ו $[I]_B^C$ בשתי דרכים.

1. בעזרת שימוש הבסיס הסטנדרטי.
2. ישירות, על ידי מציאת וקטורי הקואורדינטות $[b_i]_C$, $[c_i]_B$ עבור $i=1,2,3$.

תרגיל 2. יהי

$$B=\left(1,1+x,1+2x+x^2\right)$$

בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$. חשבו את וקטור הקואורדינטות $[p(x)]_B$ עבור $p(x)=2+2x+3x^2$.

תרגיל 3. יהי

$$B=\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right)$$

בסיס של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$. עבור $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$, מצאו את $[A]_B$.

תרגיל 4. יהי $S=\left\{1,x,x^2,x^3\right\}$ ו $B=\left\{2,2x,2x^2,2x^3\right\}$ בסיסים של $\mathbb{R}_3[x]$.

1. מצאו את מטריצות המעבר $[I]_B^S$ ו $[I]_S^B$.
2. יהי V מרחב וקטורי מעל שדה $\mathbb{F}$. עבור $S\subseteq V$ ו $\alpha\in\mathbb{F}$, נגדיר $\alpha S=\{\alpha s : s\in S\}$. יהי B בסיס של V. הראו, שלכל $\alpha\neq0$, αB הוא בסיס של V. מה היא מטריצת המעבר $[I]_{\alpha B}^B$?

תרגיל 5.

1. יהי V מרחב וקטורי 3 מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי $B=\left\{\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3\right\}$ בסיס של V ויהי $C=\{\bar{c}_1,\bar{c}_2,\bar{c}_3\}$ כך ש

$$\bar{c}_1=a_{11}\bar{b}_1,\bar{c}_2=\alpha_{12}\bar{b}_1+a_{22}\bar{b}_2,\bar{c}_3=a_{13}\bar{b}_1+a_{23}\bar{b}_2+a_{33}\bar{b}_3.$$

מצאו תנאי על המקדמים a_{ij} לכך ש C בסיס של V. כאשר C בסיס, תארו את מטריצות המעבר $[I]_B^C$ ואת $[I]_C^B$.

2. יהי V מרחב וקטורי n מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $B=\left\{\bar{b}_1,\ldots,\overline{b_n}\right\}$ בסיס של V. יהי $C=\{\bar{c}_1,\ldots,\bar{c}_n\}$ בסיס.

(א) יהיו a_{ij} קואורדינטות של $\bar{c}_j$ ביחס לבסיס B, ז"א,

$$\bar{c}_j=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\bar{b}_i.$$

מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך ש a_{ij} כלך שמטריצת המעבר $[I]_B^C$ היא משולשית עליונה.

(ב) איזה צורה יש למטריצת המעבר $[I]_C^B$?

(ג) יהיו α_{ij} המקדמים של המטריצת המעבר $[I]_C^B$. מצאו נוסחת נסיגה למקדמים α_{ij} בעזרת a_{ij} ו α_{kj} עבור $k<j$.

תרגיל 6. יהי V מרחב וקטורי n מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהי B בסיס של V.

1. הראו, שלכל $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ קיים בסיס יחיד C כך ש $A=[I]_C^B$.

2. יהי

$$B=\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right)$$

בסיס ל $\mathbb{R}^3$ ותהי

$$A=\begin{bmatrix}1/3&1/2&1/6\\0&1/2&1/2\\2/3&0&1/3\end{bmatrix}.$$

מצאו בסיס C כך $[I]_C^B=A$.

תרגיל 7. יהי V מרחב וקטורי n-מימדי מעל שדה $\mathbb{F}$. עבור $v\in V$ ובסיס B של V, נסמן על ידי $[v]^B$ את וקטור שורה המתקבל על ידי שחלוף של וקטור קואורדינטות $[v]_B$. ז"א, אם $[v]_B=\begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$, אזי $[v]^B=[a_1\ldots a_n]$.

1. הראו שלכל שני בסיסים B_1 ו B_2, קיימת מטריצה יחידה $P\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ כך ש $[v]^{B_1}P=[v]^{B_2}$.

2. אפיינו את P בעזרת השורות שלה.