פתרון תרגילים להרצאה 10

הגדרה 1: נתון $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C})$ מרחב מטריצות בגודל $m\times n$ עם רכיבים מרוכבים.
מגדירים מכפלה פנימית $\langle A,B\rangle := \mathrm{tr}(AB^*)$ עבור $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{C}) \ni A,B$
כאשר $B^* = {}^t\,\overline{B}$.

תרגיל 1: חשב מכפלה פנימית של $\begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}$ לפי הגדרה 1.

פתרון:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix} \right\rangle = \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix}^* \right) =$$
$$= \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix} \overline{\begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 3 \end{bmatrix}} \right) = \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{bmatrix} \right) =$$
$$= \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2i \\ 4i & 7 \end{bmatrix} \right) = 1 + 7 = 8.$$

תרגיל 2: $(x_i, y_i \in \mathbb{C})$ $\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = (x_1 - x_2)(\overline{y_1 - y_2})$ אינה מכפלה פנימית על $\mathbb{C}^2$.

פתרון: דוגמא נגדית: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, אבל

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = (1-1)(\overline{1-1}) = 0 \cdot 0 = 0,$$

כלומר הפונקציה הנתונה $\langle \cdot, \cdot \rangle$ לא מקיימת את התכונה 3 של מכפלה פנימית.

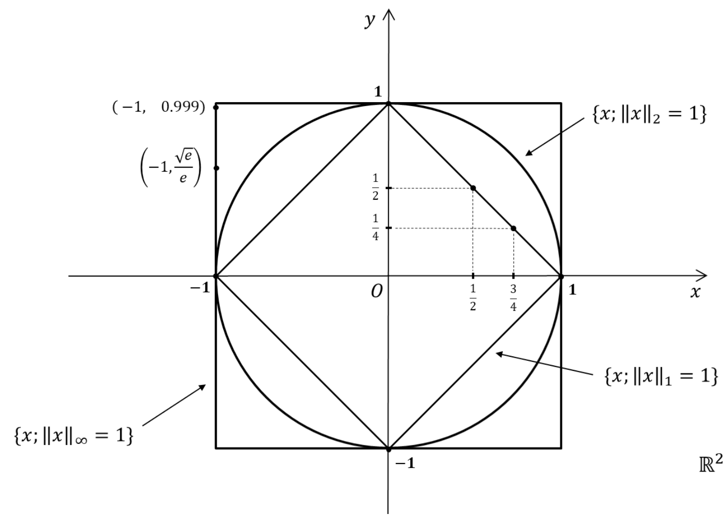
תרגיל 3: (א) נרמל $\left(v \mapsto \frac{1}{||v||} v \right)$ את הוקטור $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ בנורמות $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.
(ב) צייר את מעגל היחידה ב-$\mathbb{R}^2$ לפי הנורמות $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ $(S = \{x; \|x\| = 1\})$.
(ג) חשב את היחס בין היקפי המעגלים לקוטר (פעמיים הרדיוס) שלהם.

פתרון: (א)

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_1 = \left(|1|^1 + |1|^1 \right)^{1/1} = 2, \quad \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_2 = \sqrt{|1|^2 + |1|^2} = \sqrt{2},$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\|_\infty = \max\{|1|, |1|\} = 1.$$

(ב)



(ג) תהי $\mathbb{R}^2 \supset C$ מעגל היחידה. נגדיר מרחק $\mathrm{dist}(x,y) := \|x-y\|$ לכל $\mathbb{R}^2 \ni x,y$ וקוטר של C לפי $\mathrm{diam}(C) := \sup\limits_{x,y\in C} \mathrm{dist}(x,y)$ בהתאם לנורמות $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.

ג.1) עבור נורמה $\|\cdot\|_1$ המעגל היחידה הוא $C=\{x\in\mathbb{R}^2;\|x\|_1=1\}$, לכן

$$\pi_1=\frac{\mathrm{perimeter}(C)}{\mathrm{diam}(C)}=\frac{4\cdot\mathrm{dist}((1,0),(0,1))}{\sup\limits_{x,y\in C}\mathrm{dist}(x,y)}=\frac{4\cdot\|(1,0)-(0,1)\|_1}{\mathrm{dist}((1,0),(-1,0))}=$$
$$=\frac{4\cdot\|(1,-1)\|_1}{\|(1,0)-(-1,0)\|_1}=\frac{4\cdot(|1|+|-1|)}{\|(2,0)\|_1}=\frac{4\cdot 2}{|2|}=4.$$

ג.2) עבור נורמה $\|\cdot\|_2$ המעגל היחידה הוא $C=\{x\in\mathbb{R}^2;\|x\|_2=1\}$, רדיוס $R=1$ והקוטר $2=2R=d$. לכן היחס יהיה

$$\pi_2=\pi=\frac{2\pi R}{d}\approx 3.1415926.$$

ג.3) עבור נורמה $\|\cdot\|_\infty$ המעגל היחידה הוא $C=\{x\in\mathbb{R}^2;\|x\|_\infty=1\}$, לכן

$$\pi_\infty=\frac{\mathrm{perimeter}(C)}{\mathrm{diam}(C)}=\frac{4\cdot\mathrm{dist}((1,-1),(1,1))}{\sup\limits_{x,y\in C}\mathrm{dist}(x,y)}=\frac{4\cdot\|(1,-1)-(1,1)\|_\infty}{\mathrm{dist}((-1,-1),(1,1))}=$$
$$=\frac{4\cdot\|(0,-2)\|_\infty}{\|(-1,-1)-(1,1)\|_\infty}=\frac{4\cdot\max\{0,|2|\}}{\|(-2,-2)\|_\infty}=\frac{4\cdot 2}{\max\{|-2|,|-2|\}}=4.$$

מסקנה: קיבלנו הגדרה של המספר $\pi=\pi_2\approx 3.1415<\pi_1=\pi_\infty$ בשלושה דרכים לפי נורמות $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$.

תרגיל 4: אם $B=(v_1,\dots,v_n)$ בסיס אורתונורמלי אז $\forall v\in V$, $v=\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\langle v,v_i\rangle v_i$,
$[v]_B=\begin{bmatrix}\langle v,v_1\rangle\\ \vdots\\ \langle v,v_n\rangle\end{bmatrix}$.

פתרון: נניח $x=\sum_{k=1}^n\alpha_k v_k\in V$, כלומר $[x]_B=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}$. הבסיס B אורתונורמלי,
לכן $\langle x,v_i\rangle=\langle\sum_{k=1}^n\alpha_k v_k,v_i\rangle=\langle\alpha_i v_i,v_i\rangle=\alpha_i\langle v_i,v_i\rangle=\alpha_i\cdot 1\mapsto\alpha_i$ לכל i.

תרגיל 5: $B=(v_1,\dots,v_n)$ בסיס אורתונורמלי של ממ"פ $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$. אז
$\langle u,v\rangle=\langle[u]_B,[v]_B\rangle_{\mathrm{st}}$ (בצד ימין: המכפלה פנימית סטנדרטית על $\mathbb{C}^n$).
כלומר: $\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\langle u,v_j\rangle\overline{\langle v,v_j\rangle}=[\langle u,v_1\rangle,\dots,\langle u,v_n\rangle]\cdot\begin{bmatrix}\overline{\langle v,v_1\rangle}\\ \vdots\\ \overline{\langle v,v_n\rangle}\end{bmatrix}=\langle u,v\rangle$.

פתרון: נניח $x=\sum_{i=1}^n\alpha_i v_i$ ו־ $y=\sum_{j=1}^n\beta_j v_j$. זאת אומרת $[x]_B=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ ו־ $[y]_B=(\beta_1,\dots,\beta_n)$. לכן

$$\langle x,y\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^n\alpha_i v_i,\sum_{j=1}^n\beta_j v_j\right\rangle=\sum_{i=1}^n\left\langle\alpha_i v_i,\sum_{j=1}^n\beta_j v_j\right\rangle=$$
$$=\sum_{i=1}^n\alpha_i\left\langle v_i,\sum_{j=1}^n\beta_j v_j\right\rangle=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\alpha_i\langle v_i,\beta_j v_j\rangle=$$
$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\alpha_i\overline{\beta_j}\langle v_i,v_j\rangle=\sum_{k=1}^n\alpha_k\overline{\beta_k}.$$

לפי תרגיל 4 נובע $\alpha_k=\langle x,v_k\rangle$ ו־ $\beta_k=\langle y,v_k\rangle$ לכל $k\in\{1,2,\dots,n\}$. לכן

$$\langle x,y\rangle=\sum_{k=1}^n\alpha_k\overline{\beta_k}=\sum_{j=1}^n\alpha_j\overline{\beta_j}=\sum_{1\leqslant j\leqslant n}\langle x,v_j\rangle\overline{\langle y,v_j\rangle}=\langle[x]_B,[y]_B\rangle_{\mathrm{st}}.$$

תרגיל 6: המטריצה U אוניטרית $\Leftrightarrow$ העמודות (השורות) של U מהוות בסיס אורתונורמלי ל-$\mathbb{C}^n$.

פתרון: $(\Leftarrow)$ נניח U אוניטרית. נסמן $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ כך ש- $u_{i=\overline{1,n}}$ **השורות** של U. אז

$$\begin{aligned} UU^* &= \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \left[\overline{{}^t u_1} | \ldots | \overline{{}^t u_n} \right] = \\ &= \begin{bmatrix} \left\langle u_1, \overline{{}^t u_1} \right\rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \left\langle u_n, \overline{{}^t u_n} \right\rangle \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \langle u_1, \overline{u_1} \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \langle u_n, \overline{u_n} \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

כלומר $\langle u_i, \overline{u_j} \rangle = \delta_{ij}$ ו- $u_1, ..., u_n$ בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{C}^n$.

$(\Rightarrow)$ נניח U לא אוניטרית. אז קיים $i \neq j$ כך ש- $\langle u_i, \overline{u_j} \rangle \neq 0$ כלומר השורות $u_1, \ldots, u_n$ לא אורתוגונלים ולכן לא אורתונורמליים.

הערה: אם U אוניטרית, אז $UU^* = U^*U = I$. לכן, נסמן $U = [v_1 | \ldots | v_n]$ כך ש- $v_{i=\overline{1,n}}$ יהיו **העמודות** של U. אז

$$\begin{aligned} U^*U &= [v_1 | \ldots | v_n]^* \, [v_1 | \ldots | v_n] = \\ &= \begin{bmatrix} \overline{{}^t v_1} \\ \vdots \\ \overline{{}^t v_n} \end{bmatrix} [v_1 | \ldots | v_n] = \begin{bmatrix} \left\langle \overline{{}^t v_1}, v_1 \right\rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \left\langle \overline{{}^t v_n}, v_n \right\rangle \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \langle \overline{v_1}, v_1 \rangle & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \langle \overline{v_n}, v_n \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

לכן $\langle \overline{v_i}, v_j \rangle = \delta_{ij}$ ו- $v_1, ..., v_n$ בסיס אורתונורמלי ל- $\mathbb{C}^n$. כנ"ל בכיוון הפוך: אם U לא אוניטרית, אז קיים $i \neq j$ כך ש- $\langle \overline{v_i}, v_j \rangle \neq 0$, כלומר העמודות $v_1, \ldots, v_n$ לא אורתוגונלים ולכן לא אורתונורמליים.

תרגיל 7: E,F בסיסים אורתונורמלים בממ"פ V מעל $\mathbb{C}$. אז $P=[I]_F^E$ אוניטרית.

פתרון: לכל בסיס $\mathcal{E}$ של V מעל $\mathbb{C}$ מתקיים $P=[I]_F^E=[I\circ I]_F^E=[I]_F^{\mathcal{E}}[I]_{\mathcal{E}}^E$. ניקח $\mathcal{E}$ בסיס סטנדרטי. אז $[I]_{\mathcal{E}}^E,[I]_F^{\mathcal{E}}$ מטריצות אוניטריות כך ש־

$$[I]_{\mathcal{E}}^F=\left([I]_F^{\mathcal{E}}\right)^{-1}=\left(\overline{[I]_F^{\mathcal{E}}}\right)^t,\quad [I]_E^{\mathcal{E}}=\left([I]_{\mathcal{E}}^E\right)^{-1}=\left(\overline{[I]_{\mathcal{E}}^E}\right)^t,$$

כיוון ש־ $I=[\mathcal{E}]=[I]_{\mathcal{E}}^F\cdot\left(\overline{[I]_F^{\mathcal{E}}}\right)^t=[I]_E^{\mathcal{E}}\cdot\left(\overline{[I]_{\mathcal{E}}^E}\right)^t$. לכן

$$P^{-1}=\left([I]_F^{\mathcal{E}}[I]_{\mathcal{E}}^E\right)^{-1}=\left([I]_{\mathcal{E}}^E\right)^{-1}\left([I]_F^{\mathcal{E}}\right)^{-1}=\left(\overline{[I]_{\mathcal{E}}^E}\right)^t\left(\overline{[I]_F^{\mathcal{E}}}\right)^t=$$
$$=\left(\overline{[I]_F^{\mathcal{E}}}\cdot\overline{[I]_{\mathcal{E}}^E}\right)^t=\left(\overline{\left([I]_F^{\mathcal{E}}[I]_{\mathcal{E}}^E\right)}\right)^t=\left(\overline{P}\right)^t=P^*.$$

תרגיל 8: V מרחב וקטורי ממימד סופי. לכל בסיס B של V קיים בסיס E כך ש־ $[I]_E^B$ וגם $[I]_B^E$ מטריצות משולשות (רמז: תהליך רגם־שמידט).