חישוביות וסיבוכיות

מצגת 5- BHP ושפות שלמות

המחלקות R ו-RE (תזכורת)

- קבוצת השפות שקיימת עבורן מכונת טיורינג **שמקבלת** אותן:

$$RE = \{L \subseteq \Sigma^* \mid there\ exists\ a\ turing\ mechine\ M\ such\ that\ L(M) = L\}$$

- קבוצת השפות שקיימן עבורן מכונת טיורינג **המכריעה** אותן:

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* \mid there\ exists\ a\ turing\ mechine\ M\ such\ that\ L(M) = L \\ and\ M\ halts\ on\ every\ input.\}$$

שפת העצירה תחת הגבלת **מקום** או **מספר צעדים**.

נתונה השפה

$$L_c = \{< M, x > | M \; halts \; on \; x \; within \; c \in \mathbb{N} \; steps\}$$

שפה נוספת:

$$BHP = \{< M, x > | M \; halts \; on \; x, and \; M \; dosen't \; enter \; the \; (|x|^2+1)'th \; cell \; of \; its \; tape\}$$

השפות הללו ניתנות להכרעה

- 2 השפות הללו הן ב-R!

- (חימום) נוכיח קודם עבור L_c, נתאר מכונה מכריעה:

U על קלט $< M,x >$:

1. הרץ את M על הקלט x למשך c צעדים.
2. אם M קיבלה את x – קבל. אחרת - דחה.

(השלימו הוכחת נכונות)

Bounded Halting Problem

$$BHP = \{< M, x > | M \ halts \ on \ x, and \ M \ dosen't \ enter \ the \ (|x|^2+1)'th \ cell \ of \ its \ tape\}$$

כדי להוכיח $BHP \in R$ צריך טיפה יותר עבודה:

נשים לב שמותר למכונה להשתמש בלכל היותר $|x|^2$ תאי זכרון.

האם במצב הזה ניתן לזהות אי עצירה?

Bounded Halting Problem

$$BHP = \{< M, x > | M \text{ halts on } x, \text{and } M \text{ dosen't enter the } (|x|^2+1)'th \text{ cell of its tape}\}$$

כדי להוכיח $BHP \in R$ צריך טיפה יותר עבודה:

נשים לב שמותר למכונה להשתמש בלכל היותר $|x|^2$ תאי זכרון.

האם במצב הזה ניתן לזהות אי עצירה?

תשובה – כן!

- מה הם המקרים האפשריים, והאם אפשר לזהות אותם?

1. M נכנסת לתא האסור (בין אם עוצרת ובין אם לא עוצרת)
2. M עוצרת מבלי להיכנס לתא האסור
3. M נכנסת ללולאה אינסופית בתוך התאים המותרים.

Bounded Halting Problem

ניזכר בהגדרה של קונפיגורציות:

בכל שלב של ריצת המכונה, קונפיגורציה היא תיאור המצב הכללי של המכונה בנקודה הספציפית:

$$c = (\alpha, q, i)$$

תוכן הסרט

המצב הנוכחי

מיקום הראש

(בסימונים הקודמים שלנו קונפיגורציה נראית כך: uqv, כאשר u ו-v הן מילים מעל Γ (אלפבית הסרט) ו-q הוא מצב, הראש מצביע למקום |u|+1).

במקרה שלנו, מכיוון שכמות התאים המותרים לשימוש מוגבלת ע"י $|x|^2$, ניתן לחשב חסם עליום למספר הקונפיגורציות השונות האפשריות.

חסם לכמות הקונפיגורציות **השונות** האפשריות בתוך $|x|^2$ תאים:

$$\#(\alpha) \leq |\Gamma|^{|x|^2}$$
$$\#(q) \leq |Q|$$
$$\#(i) \leq |x|^2$$

נחשב חסם כללי לכמות הקונפיגורציות השונות:

$$T = |\Gamma|^{|x|^2} \cdot |Q| \cdot |x|^2$$

איך מתקדמים עכשיו?

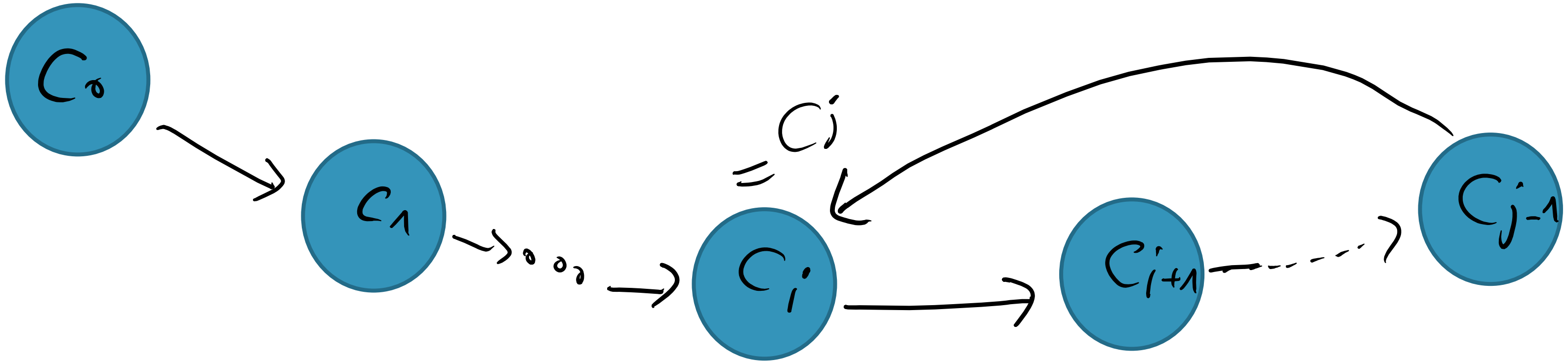
אבחנה: אם נריץ את המכונה ל-T+1 צעדים, בהכרח המכונה הייתה באותה קונפיגורציה פעמיים.

(עקרון שובך היונים)

חסם לכמות הקונפיגורציות **השונות** האפשריות בתוך $|x|^2$ תאים:

אם המכונה הייתה באותה קונפיגורציה פעמיים, אפשר להסיק שהמסלול של המכונה מכיל מעגל.

נניח שקיימים i,j כך ש-$c_i = c_j$:



קיום המעגל נובע מכך שפונקציית המעברים היא דטרמיניסטית.

מעגל כזה, הוא בעצם לולאה אינסופית!

המשך ההוכחה

$$BHP = \{< M, x > | M \text{ halts on } x, \text{and } M \text{ dosen't enter the } (|x|^2+1)'th \text{ cell of its tape}\} \in R$$

נתאר מכונה מכריעה:

U על קלט $< M,x >$:

1. הרץ את M על הקלט x למשך $T + 1$ צעדים.
2. בכל שלב:
   - אם M נכנסה לתא ה-$|x|^2 + 1$ - דחה
   - אחרת, אם M עצרה על x – קבל.
3. אם הסתיימו $T + 1$ צעדים ללא עצירה – דחה

- U היא מכונה מכריעה – תמיד עוצרת.

הוכחה ש- $L(U) = BHP$

- $\langle M,x \rangle \in BHP$

M עוצרת על x בלי לעבור את התא ה-$|x|^2$.
זה יקרה בתוך T צעדים לכל היותר.
מכאן ש-U תזהה עצירה ותקבל. לכן $\langle M,x \rangle \in L(U)$.

הוכחה ש- $L(U) = BHP$

- $\langle M,x\rangle \in BHP$
M עוצרת על x בלי לעבור את התא ה- $|x|^2$.
זה יקרה בתוך T צעדים לכל היותר.
מכאן ש-U תזהה עצירה ותקבל. לכן $\langle M,x\rangle \in L(U)$.

- $\langle M,x\rangle \notin BHP$
יש שני מקרים:

1. M נכנסת לתא ה-$|x|^2 + 1$. U תזהה זאת ותדחה.
2. M נכנסת ללולאה אינסופית בתוך $|x|^2$ התאים הראשונים. לכן M אכן תבצע $T + 1$ צעדים. U תסיים את ריצת כלל $T + 1$ הצעדים בלי לזהות עצירה, ואז תדחה.

בשני המקרים, U דוחה. כלומר $\langle M,x\rangle \notin L(U)$