לינארית 2 - אופרטורים צמודים

<u>הגדרה 1:</u> V מרחב מכפלה פנימית. האופרטור לינארי $\boldsymbol{A}^* : V \to V$ נקרא **צמוד** לאופרטור לינארי $\boldsymbol{A} : V \to V$ אם לכל זוג הוקטורים $x, y \in V$ מתקיים

$$\langle \boldsymbol{A}x, y \rangle = \langle x, \boldsymbol{A}^* y \rangle .$$

<u>משפט 1:</u> V מרחב מכפלה פנימית. לכל אופרטור לינארי $\boldsymbol{A} : V \to V$ קיים אופרטור צמוד $\boldsymbol{A}^*$ והוא **<u>יחיד</u>**.

<u>משפט 2:</u> אם $A = (a_{ij})$ היא המטריצה המייצגת של האופרטור לינארי A בבסיס אורטונורמלי $\mathfrak{B}$, אז באותו בסיס $\mathfrak{B}$ המטריצה $A^* = (a^*_{ij})$ כך ש- $a^*_{ij} = \overline{a}_{ji}$, היא מטריצה המייצגת של האופרטור הצמוד A^*. (המטריצה A^* נקראת מטריצה צמודה למטריצה A).

<u>תרגיל 1:</u> מצא אופרטור הצמוד $A^* : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ של האופרטור לינארי $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ הנתון לפי

$$Ax = a \times x.$$

<u>פתרון:</u> נשתמש בזהות של מכפלה מעורבת (triple scalar product)

$$\langle u \times v, w \rangle = \langle v \times w, u \rangle = \langle w \times u, v \rangle .$$

אזי

$$\begin{aligned} \langle Ax, y \rangle &= \langle a \times x, y \rangle = \langle y \times a, x \rangle = \\ &= \langle x, y \times a \rangle = \langle x, -a \times y \rangle = \langle x, -Ay \rangle \end{aligned}$$

קבלנו ש- $A^* = -A$.

<u>תרגיל 2:</u> נתון: $C_0^\infty([0,1])$ מרחב של כל הפונקציות הגזירות אינסוף פעמים בקטע $[0,1]$, כך הנגזרות מסדר כלשהו (כולל נגזרת מסדר 0) מתאפסות בקצבות 0 ו- 1. (בדוק שזה מרחב וקטורי עם הפעולות הרגילות).

נגדיר מכפלה פנימית

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt,$$

ויהא A אופרטור לינארי המקיים $Af = f'$, כלומר לכל פונקציה $f \in C_0^\infty([0,1])$ האופרטור A מתאים ל-f את הנגזרתה.

מצא אופרטור הצמוד A^*.

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים עבור $f,g \in C_0^\infty([0,1])$:

$$\langle Af,g\rangle = \int_0^1 f'(t)g(t)dt = f(t)g(t)|_0^1 - \int_0^1 f(t)g'(t)dt =$$
$$= -\int_0^1 f(t)g'(t)dt = \int_0^1 f(t)\left[-g'(t)\right]dt = \langle f,-Ag\rangle .$$

תרגיל 3: נתון שהמטריצה המייצגת של אופרטור לינארי $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ בבסיס $B=(b_1,b_2,b_3)$ היא

$$[A]_B^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

נתון $E=(e_1,e_2,e_3)$ בסיס סטנדרטי כך ש־

$$b_1 = e_1+2e_2+e_3,\quad b_2=e_1+e_2+2e_3,\quad b_3=e_1+e_2.$$

מצא מטריצה המייצגת של האופרטור הצמוד A^* בבסיס B.

פתרון: הבסיס B הוא לא אורטונורמלי (תרגיל), לכן לא ניתן להשתמש במשפט 2. נמצא קודם מטריצה המייצגת $[A]_E^E$. ידוע ש־

$$[I]_E^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

כאשר

$$[I]_B^E = \left([I]_E^B\right)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

כיוון ש־

$$[A]_B^B = [I]_B^E\,[A]_E^E\,[I]_E^B$$

נקבל

$$[A]_E^E = [I]_E^B\,[A]_B^B\,[I]_B^E = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 6 & -4 & 6 \\ 6 & -5 & 5 \end{bmatrix},$$

לכן, לפי משפט 2

$$[A^*]_E = [A^*]_E^E = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -3 & -4 & -5 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}.$$

מכאן

$$[A^*]_B^B = [I]_B^E [A^*]_E^E [I]_E^B = \begin{bmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{bmatrix}.$$

<u>תרגיל 4:</u> הוכח שפעולה $*$ המעבירה את האופרטור A לצמוד שלו A^* מקיימת תכונות:

1) $(A^*)^* = A$;
2) $(A+B)^* = A^* + B^*$;
3) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

<u>תרגיל 5:</u> במרחב הפולינומים $\mathbb{R}_2[x]$ עם המקדמים ממשיים נתונה מכפלה פנימית

$$\langle f, g \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$$

כאשר $\mathbb{R}_2[x] \ni f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$.

מצא מטרימות: של האופרטור הגזירה $D = \frac{d}{dx}$ ואופרטור הצמוד D^* בבסיס

$$B = \left(1, t, \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right).$$

<u>תזכורת:</u> מחרב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$ ($\mathbb{C}$ או $\mathbb{R}$) עם מכפלה פנימית $\langle \cdot, \cdot \rangle$ המקיימת

1) $V \ni u, v \Leftarrow \langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ (הרמיטיות),
2) $V \ni u, v, w \Leftarrow \langle au + bv, w \rangle = a \langle u, w \rangle + b \langle v, w \rangle$ (ליניאריות במשתנה הראשון),
3) $V \ni u \Leftarrow \langle u, u \rangle \geqslant 0$ ו־ $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (חיובית לחלוטין),

נקרא **מרחב אוניטרי**.

<u>תזכורת:</u> מרחב וקטורי V נקרא **מרחב אוקלידי** ברגע שב־V מגדירים (במידע ויש) את המכפלה הפנימית.

<u>הגדרה 2:</u> אופרטור לינארי H במרחב מכפלה פנימית V נקרא **צמוד לעצמו** אם $H^* = H$. אופרטור המצוד לעצמו במרחב <u>אוניטרי</u> (אוקלידי) נקרא גם <u>הרמיטי</u> (סימטרי).

<u>תזכורת:</u> מטריצה A נקראת אורטוגונלית אם $A^t = A^{-1}$.

<u>הגדרה 3:</u> אופרטור לינארי U במרחב אוניטרי (אוקלידי) נקרא **אוניטרי (אורטוגונלי)** אם

$$UU^* = U^*U = I$$

כלומר $U^* = U^{-1}$, כאשר I היא מטריצה היחידה.

<u>תרגיל 6:</u> יש להראות שבמרחב $\mathbb{R}^3$ אופרטורים הבאים הם סימטריים:

א) $Ax = \lambda x$ (λ הוא מספר קבוע),
ב) $Ax = \langle x, e\rangle\, e$, e הוא וקטור ב־$\mathbb{R}^3$,
ג) $Ax = x - \langle x, e\rangle\, e$ כאשר $||e|| = 1$.

<u>פתרון (א):</u> צריך להראות ש־ $A^* = A$. ניקח $x, y \in \mathbb{R}^3$. אז

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle &= \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle = \lambda\overline{\langle y, x\rangle} = \lambda\langle y, x\rangle = \\ &= \langle \lambda y, x\rangle = \overline{\langle x, \lambda y\rangle} = \langle x, \lambda y\rangle = \langle x, Ay\rangle\,.\end{aligned}$$

<u>פתרון (ב):</u> ניקח $x, y \in \mathbb{R}^3$. אז

$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle &= \langle\langle x, e\rangle\, e, y\rangle = \langle x, e\rangle\langle e, y\rangle = \overline{\langle e, x\rangle}\,\overline{\langle y, e\rangle} = \\ &= \langle e, x\rangle\langle y, e\rangle = \langle y, e\rangle\cdot\langle e, x\rangle = \langle\langle y, e\rangle\, e, x\rangle = \overline{\langle x, \langle y, e\rangle\, e\rangle} = \\ &= \langle x, \langle y, e\rangle\, e\rangle = \langle x, Ay\rangle\,.\end{aligned}$$

<u>תרגיל 7:</u> הראה שבמרחב הפולינומים $\mathbb{R}_2[x]$ עם המכפלה פנימית (ראה תרגיל 5) האופרטורים הבאים הם סימטריים:

א) $f(t) \to f(-t)$,
ב) $f(t) = t^n f\left(\frac{1}{t}\right)$

<u>פתרון (א):</u> יהא $A : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ אופרטור המוגדר לפי $Af(x) = f(-x)$ לכל $f(x) \in \mathbb{R}_2[x]$. ניקח $a_0 + a_1x + a_2x^2 = f(x),\ b_0 + b_1x + b_2x^2 = g(x) \in \mathbb{R}_2[x]$. אזי לפי הגדרה של המכפלה הפנימית $\langle\cdot,\cdot\rangle$ של התרגיל 5 נקבל

$$\begin{aligned}\langle Af(x), g(x)\rangle &= \langle f(-x), g(x)\rangle = \left\langle a_0 - a_1x + a_2x^2, b_0 + b_1x + b_2x^2\right\rangle = \\ &= a_0b_0 - a_1b_1 + a_2b_2 = \left\langle a_0 + a_1x + a_2x^2, b_0 - b_1x + b_2x^2\right\rangle = \\ &= \langle f(x), g(-x)\rangle = \langle f(x), Ag(x)\rangle\,.\end{aligned}$$

<u>תרגיל 8:</u> הראה שהאופרטורים (ראה תרגיל 6) הם אורטוגונליים.