ההטעלה מאונכת

<u>**משפט 1:**</u> יהא W תת־מרחב של $\mathbb{R}^n$. אזי כל וקטור $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ניתן לכתוב באופן יחיד, בצורה

$$\mathbf{y} = \widehat{\mathbf{y}} + \mathbf{z},$$

כך ש־ $\widehat{\mathbf{y}} \in W$ ו־ $\mathbf{z} \in W^\perp$. באופן כללי, אם $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ הוא בסיס אורתוגונלי כלשהו ל־W, אז

$$\widehat{\mathbf{y}} = \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{y}) + \ldots + \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_p}(\mathbf{y}),$$

ו־ $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}}$.

<u>**תזכורת:**</u> הוקטור $\mathbf{z}$ המתקבל מוקטור $\mathbf{y}$, יהיה אורתוגונלי לכל אחד מהוקטורים $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p$ ויהיה גם אורתוגונלי לוקטור $\mathbf{y}$ (גרם־שמידט).

<u>**דוגמא 1:**</u> נתון: $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$. נתון בנוסף $W = \mathrm{sp}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$. מצא סכום $\mathbf{y} = \widehat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$ כך ש־ $\widehat{\mathbf{y}} \in W$ ו־ $\mathbf{z} \in W^\perp$.

<u>**פתרון:**</u> נשים לב ש־ $\mathbf{u}_1 \perp \mathbf{u}_2$, כלומר $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ בסיס אורתוגונלי ל־ W.
אז לפי משפט 1

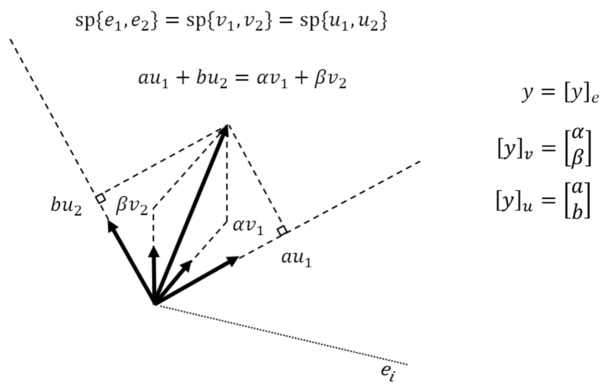
$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{y}} &= \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{y}) + \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{y}) \\
&= \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2 \\
&= \frac{2+10-3}{2^2+5^2+1^2}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{-2+2+3}{2^2+1^2+1^2}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{9}{30}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{3}{6}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

בנוסף

$$\mathbf{z} = \mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 14/5 \end{bmatrix},$$

לכן

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 2 \\ 1/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7/5 \\ 0 \\ 14/5 \end{bmatrix}.$$



ננסח אנלוג של המשפט 3 בעמוד 105:

<u>**משפט 2:**</u> יהא W תת־מרחב של $\mathbb{R}^n$ ויהא $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ וקטור <u>כלשהו</u>. נסמן $\widehat{\mathbf{y}} := \mathrm{proj}_W(\mathbf{y})$ ההטעלה המאונכת של $\mathbf{y}$ ל־ W. אזי $\widehat{\mathbf{y}} \in W$ הוא וקטור **הקרוב ביותר** לוקטור $\mathbf{y}$ $\therefore$

$$||\mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}}|| < ||\mathbf{y} - \mathbf{v}||,$$

לכל $\mathbf{v} \in W$ השונה מ־$\widehat{\mathbf{y}}$.

<u>**דוגמא 2:**</u> המרחק מנקודה $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ לתת־מרחב W מוגדר כמרחק מ־$\mathbf{y}$ לנקודה הקרובה ביותר ב־W. מצא מרחק מ־$\mathbf{y}$ ל־ $W = \mathrm{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$, אם נתון ש־

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

<u>**פתרון:**</u> לפי משפט 2, המרחק מ־$\mathbf{y}$ ל־W הוא $||\mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}}||$ כך ש־ $\widehat{\mathbf{y}} = \mathrm{proj}_W(\mathbf{y})$.
כיוון ש־ $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ בסיס אורתוגונלי ל־W מקבלים

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{y}} &= \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{y}) + \mathrm{proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{y}) \\
&= \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 + \frac{\langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2 \\
&= \frac{-5+10+10}{5^2+2^2+1^2} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{-1-10-10}{1^2+2^2+1^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{15}{30} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{21}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -8 \\ 4 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

לכן

$$||\mathbf{y} - \widehat{\mathbf{y}}|| = \sqrt{(-1+1)^2 + (-5+8)^2 + (10-4)^2} = 3\sqrt{5}.$$

משפט 3: אם $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ בסיס אורתונורמלי לתת־מרחב W של $\mathbb{R}^n$, אז

$$(1) \quad \mathrm{proj}_W(\mathbf{y}) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \ldots + \langle \mathbf{y}, \mathbf{u}_p \rangle \mathbf{u}_p.$$

אם $U = [\mathbf{u}_1 | \ldots | \mathbf{u}_p]$ אז

$$(2) \quad \mathrm{proj}_W(\mathbf{y}) = UU^T\mathbf{y}$$

לכל $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

תרגיל 1: להוכיח את המשפט.

פירוק QR

משפט 4: אם A היא מטריצה מסדר $m \times n$ עם העמודות בת"ל, אז A ניתנת לפירוק

$$A = QR,$$

כך ש־ Q היא מטריצה $m \times n$ שבנויה מהעמודות של הוקטורים אורתונורמליים, המהווים בסיס ל־$\mathrm{Col}(A)$, ו־ R היא מטריצה הפיכה משולשת עליונה מסדר $n \times n$ עם איברים חיוביים באלכסון הראשי.

דוגמא 4: מצא פירוק QR למטריצה $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

פתרון: נשים לב ש־ $A = [x_1|x_2|x_3]$ מסדר 4×3, כך שהעמודות x_1, x_2, x_3 בת"ל.
נמצא בסיס אורתונורמלי ל־$\mathrm{Col}(A)$ על ידי שיטת גרם־שמידט: $v_1 := x_1$, אז

$$\begin{aligned}
v_2 &= x_2 - \mathrm{proj}_{v_1}(x_2) \\
&= x_2 - \frac{\langle x_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \\
v_3 &= x_3 - \mathrm{proj}_{v_1}(x_3) - \mathrm{proj}_{v_2}(x_3) \\
&= x_3 - \frac{\langle x_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle x_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{12} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

בדיקה: $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, v_3\rangle = \langle v_2, v_3\rangle = 0$. ננרמל:

$$f_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}, f_2 = \frac{v_2}{||v_2||} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \\ \sqrt{3}/6 \end{bmatrix}, f_3 = \frac{v_3}{||v_3||} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \end{bmatrix}.$$

אז

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/6 & -\sqrt{6}/3 \\ 1/2 & \sqrt{3}/6 & \sqrt{6}/6 \\ 1/2 & \sqrt{3}/6 & \sqrt{6}/6 \end{bmatrix}.$$

כיוון ש־$Q^TQ = I_{4\times 4}$, לפי משפט 4 מתקיים:

$$Q^TA = Q^T(QR) = I_{4\times 4}R = R,$$

לכן

$$R = Q^TA = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -\sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/6 & \sqrt{3}/6 & \sqrt{3}/6 \\ 0 & -\sqrt{6}/3 & \sqrt{6}/6 & \sqrt{6}/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix},$$

כלומר

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/6 & -\sqrt{6}/3 \\ 1/2 & \sqrt{3}/6 & \sqrt{6}/6 \\ 1/2 & \sqrt{3}/6 & \sqrt{6}/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}.$$

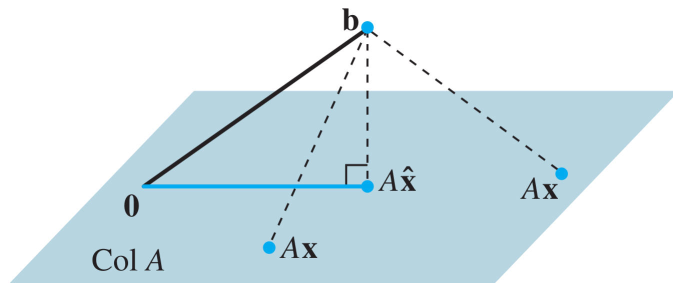
שיטת הריבועים הפחותים

הגדרה 1: אם A היא מטריצה ממשית מסוג $m \times n$ ו־$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, אז הפתרון **בשיטת הריבועים הפחותים** של המערכת משוואות $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, הוא $\widehat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ כך שלכל $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים:

$$||A\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}|| \leqslant ||A\mathbf{x} - \mathbf{b}||.$$

הערה: עבור מערכת משוואות $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ידוע ש־ $A\mathbf{x} \in \mathrm{Col}(A)$.

המתרה היא, למצוא פתרון טוב ביותר ב־$\mathrm{Col}(A)$. הווקטור $\mathbf{b}$ קרוב יותר ל־$A\widehat{\mathbf{x}}$ מאשר ל־$A\mathbf{x}$ עבור אפשרויות $\mathbf{x}$ אחרים.



<u>הגדרה 2:</u> $A_{m\times n}$ מטריצה ממשית $(m>n)$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ וקטור קבוע, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ וקטור הנעלמים.המערכת משוואות

$$(*) \quad A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

נקראת מערכת ממשוואות **נורמליות**. הפתרון $\mathbf{x}$ של המערכת $(*)$ מסמנים ב־ $\widehat{\mathbf{x}}$.
המרחק $||\mathbf{b} - A\widehat{\mathbf{x}}||$ הוא השגאיה, נקרא least-squares error של הקירוב.

<u>משפט 5:</u> הקבוצה של הפתרונות least-squares של $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, מתלקדת עם הקבוצה <u>לא ריקה</u> של הפתרונות של המערכת משוואות נורמלית $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

<u>הערה:</u> אם המטריצה A^TA הפיכה, אז הפתרון הקירוב הוא מהצורה

$$\widehat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b}$$

אם A^TA לא הפיכה, אז משתמשים בשיטה אחרת.

<u>דוגמא 5:</u> מצא פתרון הטוב ביותר של המערכת משוואות **סותרת** $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, כאשר

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

חשב את השגאיה.

<u>פתרון:</u> $A_{3\times 2}$כך ש־ $2 > 3$, לכן $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. כדי להשתמש במשפט 5, נחשב A^TA ו־ $A^T\mathbf{b}$:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

מכאן ניתן לרשום את המערכת משוואות נורמליות $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 17 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

המטריצה A^TA הפיכה, כך ש־ $(A^TA)^{-1} = \frac{1}{84}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 17 \end{bmatrix}$, לכן

$$\widehat{\mathbf{x}} = (A^TA)^{-1}A^T\mathbf{b} = \frac{1}{84}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

נחשב שגיאה:

$$\begin{aligned} ||\mathbf{b} - A\widehat{\mathbf{x}}|| &= \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| \\ &= \left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} \right\| \approx 9.165 \end{aligned}$$

משפט 6: תהא A מעריצה $m \times n$. התנאים הבאים שקולים:
א) למערכת $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ יש פתרון הקירוב יחיד לכל $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
ב) העמודות של המטריצה A הן בת"ל.
ג) המטריצה A^TA הפיכה.

שילוב של פירוק QR

משפט 7: נתונה מטריצה A מסדר $m \times n$, ונניח $A = QR$ הוא הפירוק QR של A.
אזי, לכל $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$למשוואה $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ יש פתרון ה־least-squares יחיד מהצורה

$$\widehat{\mathbf{x}} = R^{-1}Q^T\mathbf{b}.$$

דוגמא 6: יש למצוא פתרון least-squares של המערכת $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ עבור

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

פתרון: העמודות של A בת"ל, לכן לפי משפט 4, A ניתנת לפירוק QR. לפי גרם־שמידט,

$A=[x_1|x_2|x_3]$, $v_1:=x_1$. אז

$$
\begin{aligned}
v_2 &= x_2 - \mathrm{proj}_{v_1}(x_2)\\
&= \begin{bmatrix} 3\\1\\1\\3 \end{bmatrix} - \frac{8}{4}\begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\-1\\-1\\1 \end{bmatrix},\\
v_3 &= x_3 - \mathrm{proj}_{v_1}(x_3) - \mathrm{proj}_{v_2}(x_3)\\
&= \begin{bmatrix} 5\\0\\2\\3 \end{bmatrix} - \frac{5}{2}\begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{bmatrix} - \frac{3}{2}\begin{bmatrix} 1\\-1\\-1\\1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\\-1\\1\\-1 \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

לכן המטריצה

$$
Q = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2 & -1/2\\ 1/2 & -1/2 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix},
$$

ו־

$$
R = Q^TA = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.
$$

אז

$$
Q^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3\\5\\7\\-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\\-6\\4 \end{bmatrix},
$$

ומקבלים את המערכת משוואות $R\mathbf{x}=Q^T\mathbf{b}$ (ראה משפט 4, R מטריצה **הפיכה**, **משולשת עליונה**):

$$
\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\x_2\\x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6\\-6\\4 \end{bmatrix},
$$

כך ש־ $\widehat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 10\\-6\\2 \end{bmatrix}$ הוא הפתרון הטוב ביותר.

פירוק ערך סינגולרי

נתבונן במטריצה $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$.

הגדרה 3: מספר חיובי $\sigma \in \mathbb{R}_{>0}$ נקרא **ערך סינגולרי** של המטריצה A
אם ורק אם, קיימים שני וקטורים מנורמלים $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$ כך ש־

$$Av = \sigma u, \qquad A^T u = \sigma v.$$

משפט 8: $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\mathrm{rank}A = r$, אז קיימת $\Sigma \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{R})$ עם

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D_{r\times r} & 0_{r\times n-r} \\ 0_{m-r\times r} & 0_{m-r\times n-r} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix}$$

כאשר $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_r > 0$ הם r הערכים הסינגולרים הראשונים של A,
וקיימת מטריצה U אורתוגונלית $m \times m$ ומטריצה אורתוגונלית V מסוג $n \times n$ עם

$$(\#) \qquad A = U\Sigma V^T.$$

העמודות ב־U נקראות **וקטורים סינגולרים משמאל**; העמודות ב־V **וקטורים סינגולרים מימין**;
הנוסחה $(\#)$ נקראת **פירוק ערך סנגולרי** (**singular value decomposition**).

דוגמא 7: מצא פירוק ערך סנגולרי למטריצה $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

אלגוריתם:

שלב א: לכסון אורתוגונלי של A^TA: נמצא ע"ע + ו"ע מנורמלים של A^TA.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

ע"ע: $\det\left(A^TA - \lambda I\right) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-9) = 0 \Leftarrow \widetilde{\lambda_1} = 0$, $\widetilde{\lambda_2} = 1$ ו־ $\widetilde{\lambda_3} = 9$.
נמצא ו"ע מנורמלים המתאימים:

$$\widetilde{v_1} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{v_2} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{v_3} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \end{bmatrix}.$$

שלב ב: מסדרים את $\widetilde{\lambda_{i_1}} \geqslant \widetilde{\lambda_{i_2}} \geqslant \widetilde{\lambda_{i_3}} \geqslant 0$ **בסדר יורד**. דורשים $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \lambda_3 \geqslant 0$.
הו"ע המתאימים להם הם הוקטורים הסנגולרים מימין:

$$V = [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{18} & -1/\sqrt{2} & -2/3 \\ 1/\sqrt{18} & 1/\sqrt{2} & -2/3 \\ 4/\sqrt{18} & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

מעומדים סנגולרים הם $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = 3, \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = 1, \quad \sigma_3 = \sqrt{\lambda_3} = 0$.
$A \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, לכן לפי משפט 8, $\Sigma \in \mathrm{Mat}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ ו־ $D \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,
כיוון ש־ $\sigma_3 = 0 \not> 0$. זאת אומרת

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D_{2\times 2} & 0_{2\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

<u>שלב ג:</u> נשאר לבנות את U. אם $\mathrm{rank}A = r$, r העמודות של U הם הוקטורים באורך 1 שמתקבלים מ: $Av_1, \ldots Av_r$. לכן $U = [u_1|u_2]$. לפי הגדרה 3, $\sigma \neq 0$ כך ש־ $Av = \sigma u$ לכן $u = \frac{1}{\sigma}Av$. אז:

$$u_1 = \frac{1}{\sigma_1}Av_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{18} \\ 1/\sqrt{18} \\ 4/\sqrt{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

$$u_2 = \frac{1}{\sigma_2}Av_2 = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

כלומר

$$U = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix},$$

תשובה:

$$A = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{18} & 1/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -2/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

<u>דוגמא 8:</u> מצא פירוק ערך סנגולרי למטריצה $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

<u>פתרון:</u>

<u>שלב א:</u> מחפשים לכסון אורתוגונלי של A^TA. נמצא ע"ע + ו"ע מנורמלים של A^TA.

$$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

מפולינום אופייני $P_{A^TA}(\lambda)$ ומשוואה $\det\left(A^TA - \lambda I\right) = -\lambda(\lambda-6)^2 = 0$ נובע:

$$\begin{array}{c|c|c} \widetilde{\lambda_1} = 0 & \widetilde{\lambda_2} = 6 & \widetilde{\lambda_3} = 6 \\ \widetilde{w_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} & \widetilde{w_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \widetilde{w_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

ע"ע והו"ע בהתאם.

<u>שלב ב:</u> נסדר ע"ע בסדר יורד $\lambda_1 := 6 \geqslant \lambda_2 := 6 \geqslant \lambda_3 := 0$ בהתאם גם ו"ע

$$\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 = 6 & \lambda_2 = 6 & \lambda_3 = 0 \\ w_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & w_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & w_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

כיוון ש־ $w_3 \perp w_1$ וגם $w_3 \perp w_2$ נסמן $f_3 = \frac{w_3}{||w_3||}$. נפעיל גרם־שמידט על w_2 ביחס ל־ $f_1 := w_1$:

$$\begin{aligned} f_2 &= w_2 - \mathrm{proj}_{f_1}(w_2) = w_2 - \mathrm{proj}_{w_1}(w_2) \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{5}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 2/5 \\ 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

נרשום את הוקטורים המנורמלים:

$$v_1 = \frac{w_1}{||f_1||} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \frac{f_2}{||f_2||} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}, \quad v_3 = f_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

נרשום את **הוקטורים סנגולרים מימין**

$$V = [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

המטריצה $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$, לכן $\Sigma \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. $\sigma = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{6} \neq 0$ לכן $D_{2\times 2} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & \sqrt{6} \end{bmatrix}$ ו־

$$\Sigma = \begin{bmatrix} D_{2\times 2} & 0_{2\times 1} \\ 0_{1\times 2} & 0_{1\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

<u>שלב ג:</u> נבנה מטריצה $U = [u_1|u_2|u_3] \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. לפי הגדרה $u = \frac{1}{\sigma}Av_i$ עבור $i = 1,2$ ו־ $\sigma = \sqrt{6} \neq 0$, לכן

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{6}}Av_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix}=\widetilde{u_1},$$

$$u_2=\frac{1}{\sqrt{6}}Av_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{30}}\\\frac{2}{\sqrt{30}}\\\frac{5}{\sqrt{30}}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}0\\-1\\2\end{bmatrix}=\widetilde{u_2}.$$

קיבלנו $\widetilde{u_1}\perp\widetilde{u_2}$. נשים לב ש־ $x=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ (לא דווקה רק v_3 כי יש ∞ אפשרויות) לא תלוי ב־ $\widetilde{u_1}$ ו־ $\widetilde{u_2}$, כלומר $\det[\widetilde{u_1}|\widetilde{u_2}|x]\neq 0$. לכן, נשלים עם $\widetilde{u_3}$ את הקבוצה $\{\widetilde{u_1},\widetilde{u_2}\}$ על ידי x לבסיס של $\mathbb{R}^3$ לפי גרם־שמידט:

$$\widetilde{u_3}=x-\mathrm{proj}_{\widetilde{u_1}}(x)-\mathrm{proj}_{\widetilde{u_2}}(x)=$$
$$=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-\frac{5}{30}\begin{bmatrix}5\\2\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}$$

ננרמל, $u_3=\frac{\widetilde{u_3}}{||\widetilde{u_3}||}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\end{bmatrix}$. אז **הוקטורים סינגולרים משמאל** הם

$$U=[u_1|u_2|u_3]=\left[\frac{\widetilde{u_1}}{||\widetilde{u_1}||}|\frac{\widetilde{u_2}}{||\widetilde{u_2}||}|\frac{\widetilde{u_3}}{||\widetilde{u_3}||}\right]=\begin{bmatrix}\frac{5}{\sqrt{30}}&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{-1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}.$$

תשובה:

$$\begin{bmatrix}\frac{5}{\sqrt{30}}&0&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{-1}{\sqrt{5}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{6}&0&0\\0&\sqrt{6}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\\frac{-1}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{5}{\sqrt{30}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&0\\1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}.$$