בס"ד

פתרון למבחן - לבודקים

מועד א', תש"פ, סמסטר א', אלגברה לינארית 2

7028210-01,02, התקיים בתאריך 27/01/21 בשעה 10:00-13:00.
יובל פליקר, יונה צרניאבסקי, זאב סמירנוף, יבגני פורמן, אורית אברהם, סגל רן.
יש במבחן 13 שאלות, 10 נקודות לשאלה חוץ משאלות $9, 6, 3$, שהן שוות
חמש נקודות כל אחת. מקסימום 100 נקודות.

יש לשלוח פתרונות ברורים, קצרים אך מלאים, בלי זיבולים מיותרים. אין להניח ש"אבין למה אתם מתכוונים" בלי הסבר מלא וברור מצד שני כתיבת דברים לא מועילים ומיותרים מקשה על הקריאה. בכל אופן, רוב הפתרונות קצרים.

__שאלה 1:__ נתונים שני בסיסים $B = \left(\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)$, $C = \left(\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$ ל-$\mathbb{R}^2$.

(א) (**5 נק'**) מצא את מטריצת המעבר $[I]_C^B$ מהבסיס B לבסיס C.

$$[I]_E^B = (b_1 \dots b_n), \quad [I]_C^B = [I]_C^E [I]_E^B = C^{-1}B = \begin{pmatrix}-1 & 1\\-1 & -2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 4\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2 & -1\\1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 4\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}-7/3 & -10/3\\-1/3 & -1/3\end{pmatrix}$$

(ב) (2 **נק'**) מצא את וקטור הקואורדינטות $[v]_B$ של הוקטור $v = \begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ ביחס לבסיס B.

$$v = \begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix} = \beta_1\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\beta_1 + 3\beta_2\\3\beta_1 + 4\beta_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}4 & -3\\-3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-19\\13\end{pmatrix}$$
$$[v]_B = \begin{pmatrix}-19\\13\end{pmatrix}$$

(ג) (**3 נק'**) מצא את וקטור הקואורדינטות $[v]_C$ של v לפי הבסיס C בשימוש ב-**(א)** ו-**(ב)**.

$$[v]_C = [I]_C^B [v]_B = \begin{pmatrix}-7/3 & -10/3\\-1/3 & -1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-19\\13\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}\overset{133}{7 \cdot 19} - 130\\19 - 13\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

שאלה כל כך פשוטה שאין ניקוד חלקי על טעויות חשבון

__שאלה 2:__ **(א)** (9 נק') חשב את הפולינום האופייני של המטריצה הסימטרית $S = \begin{pmatrix}8 & 10 & 4\\10 & 17 & 14\\4 & 14 & 20\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}p(x) = \begin{vmatrix}x-8 & -10 & -4\\-10 & x-17 & -14\\-4 & -14 & x-20\end{vmatrix} &= (x-8)\left((x-17)(x-20) - 14\cdot 14\right)\\
&\quad +10(-10(x-20) - 4\cdot 14)\\
&\quad -4(140 + 4(x-17)) =\\
&= (x-8)(x-17)(x-20) - 14\cdot 14(x-8) +\\
&\quad -100(x-20) - 140\cdot 4 +\\
&\quad -4\cdot 140 - 16(x-17)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= x^3 - (8+17+20)x^2 + (17\cdot 20 + 8\cdot 17 + 8\cdot 20 - 14\cdot 14 - 100 - 16)x\\
&\quad +(-8\cdot 17\cdot 20 + 14\cdot 14\cdot 8 + 100\cdot 20 - 2\cdot 4\cdot 140 + 16\cdot 17)\end{aligned}$$

כמובן יותר פשוט לחשב קודם את הדטרמיננטה

$$\begin{aligned}
&= x^3-45x^2+4(17\cdot 5+2\cdot 17+4\cdot 10-7\cdot 7-25-4)x\\
&\qquad -16(17\cdot 10-14\cdot 7-25\cdot 5+70-17)\\
&= x^3-45x^2+4(7(17-7)+36-25)x\\
&\qquad -16(240-98-125-17)\\
&= x^3-45x^2+324x-16(125-125)\\
&= x^3-45x^2+324x-\det S\\
&= x(x^2-45x+324), \qquad\qquad \det S=0\\
&= x(x-9)(x-36)
\end{aligned}$$

4 נק' אם מצאו

(**ב**) (**1 נק'**) מצא את הערכים העצמיים. יש להראות באופן ברור את חישוביכם.

$$\lambda_1=36,\quad \lambda_2=9,\quad \lambda_3=0$$

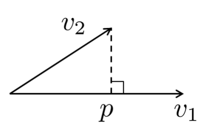
שאלה 3: יהא V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. הגדר: V הוא מרחב מכפלה פנימית.

תשובה:

3 נק' עבור הגדרה נכונה מעל הממשיים, 5 אם נתנו שתי הגדרות נכונות. אין ערך להגדרה לא מלאה.

מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{C}$ נקרא **מרחב מכפלה פנימית** אם קיימת פונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{C}$: (i) לינארית במשתנה הראשון; (ii) $\langle x,y\rangle=\overline{\langle y,x\rangle}$; ($iii$) $\langle x,x\rangle\geqslant 0$, $0=\langle x,x\rangle\Leftrightarrow x=0$.
מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$ נקרא ממ"פ אם קיימת $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$ שמקיימת (i), (ii), (iii).

שאלה 4: (**10 נק'**) נתונים שני וקטורים v_1,v_2 במרחב מכפלה פנימית $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.
כתוב נוסחא עבור ההטלה $p=\mathrm{pr}_{v_1}(v_2)$ של v_2 בכיוון v_1:



תשובה: $\mathrm{pr}_{v_1}(v_2)=\frac{\langle v_1,v_2\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}v_1$.

שאלה 5: (**10 נק'**) מצא בסיס אורתוגונלי $\{w_1,w_2\}$ עבור המרחב הנפרש על ידי $v_1=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, $v_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ כאשר $w_1=v_1$.

תשובה:

$$\begin{aligned}
w_2=v_2-\mathbf{pr}_{v_1}v_2&=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{\langle v_1,v_2\rangle}{\langle v_1,v_1\rangle}v_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{\langle(0,1,-1),(-1,1,0)\rangle}{\langle(0,1,-1),(0,1,-1)\rangle}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1/2\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

אין ניקוד חלקי: או שהתשובה והחשבון נכון, או שלא.

שאלה 6: (**5 נק'**) מצא בסיס אורתונורמלי u_1,u_2 עבור המרחב הנפרש על ידי הווקטורים w_1,w_2 של שאלה 5.

תשובה:

$$u_1=\begin{pmatrix}0\\1/\sqrt{2}\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix},\qquad u_2=\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}-1\\1/2\\1/2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

אם כתוב v_2 במקום w_2, אין ערך לתשובה.

<u>שאלה 7:</u> **(10 נק')** כתוב את הנוסחה להטלה של וקטור $y \in \mathbb{R}^3$ למרחב W שנפרש על ידי $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

תשובה:

$$p = \mathrm{pr}_W y = \mathrm{pr}_{w_1} y + \mathrm{pr}_{w_2} y = \frac{\langle y, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 + \frac{\langle y, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2.$$

<u>שאלה 8:</u> **(10 נק')** מצא את הווקטור p הקרוב ביותר ל־ $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ במרחב W משאלה 7.

תשובה:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\langle (1,5,1), (0,1,-1) \rangle}{\langle (0,1,-1), (0,1,-1) \rangle} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{\langle (1,5,1), (-1,1/2,1/2) \rangle}{\langle (-1,1/2,1/2), (-1,1/2,1/2) \rangle} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \\ &= 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{4}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 8/3 \\ -4/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

<u>שאלה 9:</u> **(5 נק')** מצא את המרחק $\mathrm{dist}(y, W)$ בין $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ לבין W של שאלה 7.

תשובה:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 7/3 \\ 7/3 \\ 7/3 \end{pmatrix} \right\| = \frac{7}{\sqrt{3}}.$$

<u>שאלה 10:</u> **(10 נק')** כתוב את הפרוק $A = QR$ של $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ בשימוש בשאלה 6.

תשובה:

$$A = QR, \quad Q = (u_1 | u_2) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad R = {}^tQA = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

<u>שאלה 11:</u> **(10 נק')** מהם הערכים הסנגולרים של מטריצה A מגודל $m \times n$?

תשובה: השורשים של הערכים העצמיים של המטריצה הסימטרית ${}^tAA$.

<u>שאלה 12:</u> **(10 נק')** חשב את הערכים הסנגולרים של $A = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

תשובה: ע"ע של ${}^tAA = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 7 \\ 14 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 11 & 14 \\ 8 & 7 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 & 100 & 40 \\ 100 & 170 & 140 \\ 40 & 140 & 200 \end{pmatrix}$ הם $\lambda_1 = 360$, $\lambda_2 = 90$, $\lambda_3 = 0$; $\sigma_1 = 6\sqrt{10}$, $\sigma_2 = 3\sqrt{10}$, $\sigma_3 = 0 \not< 0$, לפי שאלה 2.

<u>שאלה 13:</u> **(10 נק')** תהא $T : V \to V$ העתקה לינארית יוניטרית על מרחב מכפלה פנימית V מעל $\mathbb{C}$. נניח $a, b \in \mathbb{C}$ ערכים עצמיים שונים של T ששייכים לוקטורים עצמיים u, v. הראו $u \perp v$.

זכור, T יוניטרית פרושו $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ לכל x, y ב־V.

הוכחה: $Tu = au$, $Tv = bv$,

$$\left. \begin{aligned} \langle u, v \rangle = \langle Tu, Tv \rangle = \langle au, bv \rangle = a\bar{b} \langle u, v \rangle; \langle u, v \rangle \neq 0 \Rightarrow a\bar{b} = 1 \\ \langle v, v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = \langle bv, bv \rangle = b\bar{b} \langle v, v \rangle; v \neq 0 \Rightarrow b\bar{b} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = b$$

לכן אם $a \neq b$ אז $\langle u, v \rangle = 0$, כלומר $u \perp v$.