פתרון למטלה 1

1. א. תזכורת: בהינתן מספר בינארי x, המספר $x-$ מתקבל ע"י הוספת 0 מוביל, היפוך כל הביטים, והוספת 1 בביט ה LSB. בנו מ"ט המחשבת את $f(x) = -x$. ניתן להפנות לכל מכונה שראיתם בקורס במהלך השאלה ולכתוב "ההמשך כמו שכתוב ב _____".
דוגמות: $1100 \to 1011 \to 0100 \to 100$, $10110 \to 10101 \to 01010 \to 1010$.
ניתן להניח כי $x \neq 0$.

פתרון

למען האמת, כתבתי את השאלה הזו בזריזות ולכן השאלה עצמה לא מדויקת. פתרון הסגל לוקח מחשבון שהשאלה לא מדויקת. היה נכון יותר לכתוב בשאלה כי אם הביט הראשון הוא 0 אזי המספר יהפוך לשלילי, ואם הביט הראשון הוא 1 אזי המספר יהפוך לחיובי, ללא הוספת ה-0 המוביל המוגדר בשאלה. אך כך כתבתי את השאלה, ולכן זה מה שמצופה בפתרון.

גילוי נאות: בפתרון הסגל השתמשנו בשיטה נוחה יותר למעבר למשלים ל-2: הופכים את כל הביטים עד ה-1 הכי ימני, וממנו לא מחליפים. לכן, נלך ימינה עד הסוף, נחזור שמאלה עד ה-1 הראשון שנפגוש שאותו לא נחליף, אבל ממנו ושמאלה נחליף את כל הביטים. כמו-כן, נסמן את הביט הראשון בסרט, שנדע לעצור בחזרה שמאלה.

לשם הנוחות, נגדיר $bit \in \{0,1\}$.

$$\delta(q_0, 0) = (q_{0-r}, \hat{0}, R), \qquad \delta(q_0, 1) = (q_{1-r}, \hat{0}, R)$$
$$\delta(q_{0-r}, bit) = (q_{bit-r}, 0, R), \qquad \delta(q_{1-r}, bit) = (q_{bit-r}, 1, R)$$
$$(q_{bit-r}, \bar{b}) = (q_l, bit, L)$$
$$(q_l, 0) = (q_l, 0, L), \qquad (q_l, 1) = (q_{replace}, 1, L)$$
$$\delta(q_{replace}, bit) = (q_{replace}, 1 - bit, L)$$
$$\delta(q_{replace}, \hat{0}) = (q_{right}, 1, R)$$
$$\delta(q_{right}, bit) = (q_{right}, bit, R)$$
$$\delta(q_{right}, \bar{b}) = (q_{end}, \bar{b}, S)$$

לכן, המכונה מוגדרת כך בשאר הפרמטרים:

$$Q = \{q_0, q_r, q_l, q_{replace-L}, q_{right}, q_{end}\}, \qquad \Sigma = \{0,1\},$$
$$\Gamma = \{0,1, \hat{0}, \hat{1}, \bar{b}\}, \qquad F = \{q_{end}\}$$

ב. פרטו את סדרת הקונפיגורציות כשמריצים את המכונה על הקלט 1010. יש להציג את רצף הקונפיגורציות עד שמגיעים לקונפיגורציה סופית.

פתרון

$$c_0 = (1010, q_0, 1), \qquad c_1 = (\hat{0}010, q_{1-r}, 2), \qquad c_2 = (\hat{0}110, q_{0-r}, 3)$$
$$c_3 = (\hat{0}100, q_{1-r}, 4), \qquad c_4 = (\hat{0}101, q_{0-r}, 5), \qquad c_5 = (\hat{0}1010, q_l, 4)$$
$$c_6 = (\hat{0}1010, q_{replace}, 3), \qquad c_7 = (\hat{0}1110, q_{replace}, 2)$$
$$c_8 = (\hat{0}0110, q_{replace}, 1), \qquad c_9 = (10110, q_{right}, 2)$$
$$c_{10} = (10110, q_{right}, 3), \qquad c_{11} = (10110, q_{right}, 4),$$
$$c_{12} = (10110, q_{right}, 5), \qquad c_{13} = (10110, q_{right}, 6)$$
$$c_{14} = (10110, q_{end}, 6)$$

2. א. תהי מ"ט שהיא בדיוק כמו המכונה הרגילה שהגדרנו, פרט לשינוי שצעדיה על הסרט הן מתוך הקבוצה הבאה: $\{LLL, RR, S\}$. הוכיחו/הפריכו: מודל זה שקול למודל המקורי.

ב. תהי מ"ט שהיא בדיוק כמו המכונה הרגילה שהגדרנו, פרט לשינוי שצעדיה על הסרט הן מתוך הקבוצה הבאה: $\{LLLL, RR, S\}$. הוכיחו/הפריכו: מודל זה שקול למודל המקורי.

פתרון

נסמן M_1 המודל המקורי, ו-M_2 המודל החדש (לכל סעיף. קצת Abuse of notation).

א. המודל אכן שקול. כל שצריך לעשות הוא להראות כיצד שתי המכונות מממשות אחת את צעדי השנייה.

- כיצד המודל המקורי מבצע LLL? לכל מצב q_i נוסיף שני מצבים חדשים q_{iL}, q_{iLL}, ואז בכל פעם ש M_2 מבצעת LLL (ומעבר מ q_k ל q_m) נלך שמאלה ולמצב q_{mL}, וממנו שמאלה ולמצב q_{mLL} וממנו שמאלה למצב q_m.
כיצד המודל המקורי מבצע RR? לכל מצב q_i נוסיף מצב חדש q_{iR}, ואז בכל פעם ש M_2 מבצעת RR (ומעבר מ q_k ל q_m) נלך ימינה ולמצב q_{mR}, וממנו ימינה ולמצב q_m.
שימו לב שבמצבי q_{iL}, q_{iLL}, q_{iR} לא יתבצע שינוי של תוכן הסרט, אלא "מה שהיה הוא שיהיה, ואין כל חדש תחת השמש".

- כיצד המודל החדש מבצע L? לכל מצב q_i נוסיף מצב חדש q_{iL}, ואז בכל פעם ש M_1 מבצעת L (ומעבר מ q_k ל q_m) נלך פעמיים ימינה ולמצב q_{mL}, וממנו שלוש שמאלה ולמצב q_m.
כיצד המודל החדש מבצע R? לכל מצב q_i נוסיף שני מצבים חדשים q_{iR}, q_{iLL}, ואז בכל פעם ש M_1 מבצעת R (ומעבר מ q_k ל q_m) נלך פעמיים ימינה ול-q_{iR}, וממנו פעמיים ימינה ול-q_{iLL}, וממנו שלוש שמאלה ולמצב q_m.
גם כאן, במצבי q_{iL}, q_{iR}, q_{iLL} אין לגעת בתוכן הסרט במעברים "המיותרים" האלו.

נקודה עדינה: למה ללכת 4 ימינה ואז 3 שמאלה, ולא שילוב אחר שיוביל אותנו למקום הנכון? תשובה: כדי לא ליפול מצד שמאל. כי אם היינו מבצעים קודם שמאלה, יתכן ואנחנו כבר בתחילת הסרט ואז נישאר במקום, וכך בצעדי ימינה לא נגיע למקום הרצוי.

ב. המודל אינו שקול. מספיק למצוא שפה אחת שניתן לכתוב לה מכונה מאחד המודלים ומהשני לא, וזו אחת הדוגמות: $L = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w| \equiv 1\ (mod\ 2)\}$. המודל M_2 לא יכול להתמודד עם שפה זו, שכן לא ניתן להגיע לתא אי זוגי ולוודא כי אכן יש שם תווים.
ובהחלט כדאי להכניס כאן את משפט Bezzout $(a,b) \in L(a,b)$ ואת אחת ההשלכות $L(a,b) = \{k(a,b) \mid k \in \mathbb{Z}\}$. היות וכאן $(|RR|, |LLLL|) = 2$, לא ניתן להגיע לתאים אי-זוגיים.

3. א. הוכיחו כי $coRE$ סגורה לאיחוד.
ב. הוכיחו כי $coRE$ סגורה לשרשור.

פתרון

א. יהיו $L_1, L_2 \in coRE$ ויהיו M_1, M_2 מ"ט דוחות עבורן. נבנה מכונה דוחה M עבור $L_1 \cup L_2$:
המכונה M על קלט x בצעד $2i$:
1. מבצעת את הצעד ה-i של המכונה M_1 על x. אם קיבלה, קבל.
המכונה M על קלט x בצד $2i+1$:
2. מבצעת את הצעד ה-i של המכונה M_2 על x. אם קיבלה, קבל.
3. אם בשלב מסוים אחת המכונות דחתה, ממשיכים להריץ רק את השנייה. אם שתיהן דחו, דחה את x.

נכונות: אם $x \in L_1 \cup L_2$ אזי לראשונה מבין M_1, M_2 לוקח j צעדים לקבל אותו, ובאיטרציה זו המכונה M תקבל את x. מקרה נוסף הוא שאף מכונה לא עצרה על x, ואז גם המכונה M לא

תעצור עליו.
אם $x \notin L_1 \cup L_2$ אזי שתיהן בוודאות דוחות את x, ואז גם M תדחה אותו בשלב 3.

ב. יהיו $L_1, L_2 \in coRE$ ויהיו M_1, M_2 מ"ט דוחות עבורן. נבנה מכונה M עבור $L_1 \cdot L_2$:
המכונה M על קלט x:
1. צור מערך של $|x|+1$ זוגות בהם האיבר הראשון הוא i תווים ראשונים של x (רישא באורך i), והאיבר השני הוא $|x|-i$ תווים אחרונים של x (סיפא באורך $|x|-i$).
2. עבור $j=0,\dots$:
   a. אתחל מונה $c=0$.
   b. עבור $i=0,\dots,|x|$:
      i. הרץ את האיבר הראשון מהזוג ה-i למשך j צעדים על M_1 ואת האיבר השני מהזוג ה-i למשך j צעדים על M_2.
      ii. אם אחת מהן דחתה - $c++$. (אם שתיהן דחו, אין קידום כפול)
      iii. אם שתיהן קיבלו – קבל.
      iv. אם $c=|x|$ - דחה.

<u>נכונות:</u>
$\forall x \in L_1 \cdot L_2 \to \exists u \in L_1, v \in L_2 \ such \ that \ x = uv$
$\to M_1(u) = 1 \ or \ does \ not \ stops \wedge M_2(v) = 1 \ or \ does \ not \ stops$
$\to \exists i \in \{0, \dots |x|\} \ such \ that \ u = prefix(i), v = suffix(|x|-i) \ such \ that$
$M_1(u) \neq 0 \ for \ any \ j \ ammount \ of \ steps \to c \ll |x| \to M \ never \ rejects \ x.$
בפרט, אם במקרה המכונות M_1, M_2 יעצרו ויקבלו את u, v בהתאמה, אזי M גם תפלוט 1 בשלב $2.\mathrm{a.iii}$.

$\forall x \notin L_1 \cdot L_2 \to \forall uv = x{:}\ \ u \notin L_1 \cup v \notin L_2$
$\to M_1(u) = 0 \cup M_2(v) = 0 \ after \ at \ most \ t \ steps$
$\to in \ iteration \ j = t \ we \ will \ get \ c = |x| \ and \ thus \ M(x) = 0$

4. הוכיחו כי $HP \notin R$ בעזרת ליכסון. בפרט, אין לכתוב הוכחה הנעזרת בשפה אחרת שהוכחנו שאינה במחלקה R.
הנחייה: היעזרו בהוכחה מההרצאה לגבי L_D.

<u>פתרון</u>

נניח בשלילה כי $HP \in R$ ולכן קיימת לה מכונה מכריעה M_{HP}. נבנה מכונה חדשה $\bar{M}_{HP}$ הפועלת כך:
המכונה $\bar{M}_{HP}$ על קלט $<M>, <x>$: מריצה את M_{HP} על הקלט ועונה הפוך.

שימו לב: כל מה שאנחנו צריכים לטיעון של לכסון הוא המציאות בה הקלט x הוא **<u>קידוד של *M*</u>**.

מכיוון שיש מספר בן מנייה של מכונות טיורינג, ניתן לסדר את כל המכונות בסידור כלשהו (למשל, סידור לקסיקוגרפי של מחרוזות הקידוד). אז נבנה טבלה אינסופית של כל הזוגות האפשריים של מכונות טיורינג, כך שבתא ה i, j נאחסן את התשובה לשאלה: האם המכונה M_i עוצרת על הקלט $<M_j>$.

המכונה M_{HP} יודעת למלא את אלכסון הטבלה, ולכן גם המכונה $\bar{M}_{HP}$ יודעת למלא (בדיוק להיפך).
המכונה $\bar{M}_{HP}$ היא גם מכונת טיורינג, ולכן היא נמצאת במקום כלשהו בטבלה. כלומר, קיים אינדקס i המקיים $\bar{M}_{HP} = M_i$. אם כך, מהו הערך של i, i בטבלה?
כלומר, מהו הערך של $M_i(<M_i>) = \bar{M}_{HP}(<M_i>)$?

אם $\bar{M}_{HP}$ עוצרת על הקלט $<M_i>$ - אזי בתא ה i, i צריך להיות ערך 1. אזי בהרצה של $\bar{M}_{HP}$ על הקלט $<\bar{M}_{HP}>$ המכונה M_{HP} תענה 1, ואז $\bar{M}_{HP}$ תפלוט 0. סתירה.

אם $\bar{M}_{HP}$ לא עוצרת על הקלט $< M_i >$ - אזי בתא ה i, i צריך להיות ערך 0. אזי בהרצה של $\bar{M}_{HP}$ על הקלט $< \bar{M}_{HP} >$ המכונה M_{HP} תענה 0 (לא עוצרת), ואז $\bar{M}_{HP}$ תפלוט 1. סתירה.

■

5. בסעיפים הבאים שייכו את השפות למחלקות המתאימות $(coRE, RE, R)$, הוכיחו את סיווגכם.

א.

$L_1 = \{< M_1 >, < M_2 > \mid such\ that$
$|L(M_1) \cap L(M_2)|\ is\ smaller\ than\ 10\ or\ larger\ than\ 1000\}$

ב.

$L_2 = \{< M_1 > | There\ exists\ < M_2 >\ such\ that$
$|L(M_1) \cap L(M_2)|\ is\ smaller\ than\ 10\ or\ larger\ than\ 1000\}$

ג.

$L_3 = \{< M_1 >, < M_2 > \mid such\ that$
$|L(M_1) \cap L(M_2)|\ is\ larger\ than\ 10\ or\ larger\ than\ 1000\}$

(למען הסר ספק, אין טעות בהגדרות לעיל)

<u>פתרון</u>

הרצה מבוקרת תוכל למצוא האם יש יותר מאלף מילים משותפות. אבל בין 10 ל 1000 אי אפשר, כי תמיד יכולות להיות מילים נוספות שלא מצאנו.

א. $L_1 \in \overline{RE \cup coRE}$. נוכיח ע"י רדוקציות משתי השפות $HP, \overline{HP}$.

$$f: HP \to L_1$$

$$f(< M >, < x >) \to (< M_x >, < M_x >)$$

המכונה M_x על קלט y:

1. אם $y = 1^j$ (עבור $1 \le j \le 12$) קבל.
2. הרץ את M על x.
3. קבל.

הרדוקציה מוגדרת לכל קלט, וניתנת לחישוב (פעולת קומפילציה פשוטה. בפרט, בחישוב f אין הרצה של M על x שעלולה לא לעצור). נוכיח שהיא תקפה:

$$(< M >, < x >) \in HP \to\ M\ stops\ on\ x \to\ L(M_x) = 1^*$$
$$\to |L(M_x)| = \infty \to |L(M_x) \cap L(M_x)| = \infty \to (< M_x >, < M_x >) \in L_1$$

$$(< M >, < x >) \notin HP \to M\ does\ not\ halts\ on\ x \to L(M_x) = \{1, 1^2, \dots 1^{12}\}$$
$$\to |L(M_x)| = 12 \to |L(M_x) \cap L(M_x)| = 12 \geq 10 \to (< M_x >, < M_x >) \notin L_1$$

מסקנה: $L_1 \notin coRE$.

$$f: \overline{HP} \to L_1$$

$$f(< M >, < x >) \to (< M_x >, < M_x >)$$

המכונה M_x על קלט y:

1. הרץ את M על x.
2. אם $y = 1^j$ (עבור $1 \le j \le 12$) קבל.
3. דחה

הרדוקציה מוגדרת לכל קלט, וניתנת לחישוב (פעולת קומפילציה פשוטה. בפרט, בחישוב f אין הרצה של M על x שעלולה לא לעצור). נוכיח שהיא תקפה:

$$(< M >, < x >) \in \overline{HP} \to \ M\ doesn't\ stops\ on\ x \to L(M_x) = \phi$$
$$\to |L(M_x)| = 0 \to |L(M_x) \cap L(M_x)| = 0 < 10 \to (< M_x >, < M_x >) \in L_1$$

$$(< M >, < x >) \notin \overline{HP} \to M\ stops\ on\ x \to L(M_x) = \{1, 1^2, \dots, 1^{12}\}$$
$$\to 10 \leq |L(M_x) \cap L(M_x)| = 12 < 1000 \to (< M_x >, < M_x >) \notin L_1$$

מסקנה: $L_1 \notin RE$.

שילוב שתי המסקנות מוביל לטענה הרשומה בראש הסעיף.

ב. $L_2 \in R$. למעשה, $L_2 = \Sigma^*$, שכן לכל M_1 ניתן לבחור את M_2 להיות M_{stam} שדוחה את כל המילים.

$$\forall M_1 : L(M_1) \cap L(M_{stam}) = \phi \to |L(M_1) \cap L(M_{stam})| = 0 < 10$$

ג. $L_3 \in RE \setminus R$. נראה כי $L_3 \notin R$ ע"י רדוקציה מ HP:

$$f(< M >, < x >) \to (< M_x >, < M_x >)$$

המכונה M_x על קלט y:
- מריצה את M על x
- מקבלת את y.

הרדוקציה מוגדרת לכל קלט (בפרט, אם הקידוד לא תקין היא תפלוט (M_{stam}, M_{stam}) וניתנת לחישוב (פעולת קומפילציה פשוטה. בפרט, אין הרצה של M על x בחישוב f). נוכיח כי הרדוקציה תקפה:

$$< M >, < x > \in HP \to M\ stops\ on\ x \to < M_x > accepts\ each\ y$$
$$\to |L(M_x)| = \infty > 10 \to < M_x, M_x > \in L_3$$
$$< M >, < x > \notin HP \to M\ doesn't\ stops\ on\ x \to < M_x > doesn't\ stops$$
$$-L(M_x) = \phi \to |L(M_x)| = 0 \to < M_x >, < M_x > \notin L_3$$

כעת נראה כי $L_3 \in RE$ בעזרת הרצה מבוקרת:
נסדר את כל המילים מ Σ^* בסדר לקסיקוגרפי, ונבצע את האלגוריתם הבא:

עבור איטרציה ... $i = 1, 2,$
אתחל מונה $c = 0$

עבור איטרציה $j = 1, 2, \dots, i$

הרץ את $< M_1 >, < M_2 >$ על המילים $w_1, \dots w_j$ למשך i צעדים. לכל מילה שהתקבלה קדם את c באחד.
אם $c > 10$ החזר $true$.

אם אכן קיימות 10 מילים משותפות לשפות שתי המכונות, נמצא אותן בהרצה מבוקרת. אם לא קיימות, נרוץ לנצח. לא מפריע ל RE.

שתי השאלות הבאות פתירות רק לאחר הרצאה 3:

6. האם יש שפה שלמה ב $RE \cup coRE$?

פתרון

נניח בשלילה כי קיימת L שלמה ב $RE \cup coRE$. לכן, לכל $L' \in RE \setminus R$ קיימת רדוקציה $L' \leq L$.
אבל לפי משפט הרדוקציה נקבל כי $L \notin coRE$.
מצד שני, לכל $L'' \in coRE \setminus R$ קיימת רדוקציה $L'' \leq L$, ולכן לפי משפט הרדוקציה נקבל כי $L \notin RE$. סתירה, שכן $L \in RE \cup coRE$.

7. הוכיחו את משפט הרדוקציה ל-$coRE$.

פתרון

הטענה: אם $L_2 \leq L_1$ וגם $L_2 \in coRE$ אזי $L_1 \in coRE$.
מהנתון נובע כי קיימת מ"ט M_2 "דוחה" עבור L_2, ויש מ"ט M_f המחשבת את הרדוקציה מ L_1 ל L_2. נתאר מכונה "דוחה" עבור L_1:
M_1 על קלט x:
1. מחשבת את $f(x)$ (ע"י סימלוץ של M_f על הקלט x).
2. מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמוה.

פונקציית הרדוקציה מלאה וניתנת לחישוב, ולכן שלב 1 יסתיים בהצלחה. היות והפונקציה תקפה, התשובה של M_2 בנוגע לשייכות של $f(x)$ זהה לתשובה הדרושה בנוגע לשייכות של x ל L_1.

לכל $f(x) \notin L_2$ המכונה M_2 תדחה, וכך נקבל $x \notin L_1$. אם $f(x) \in L_2$- אם M_2 עצרה נענה כי $x \in L_1$, ואם M_2 לא עצרה – אזי גם M_1 לא תעצור.

בהצלחה!