בס"ד

אלגברה לינארית 2

מספר הקורס: 7028210-1,2,3 ⬩ תשפ"ב סמסטר א' מועד א', 20.1.22
מרצים ומתרגלים: צור יצחקיאן, יונה צרניאבסקי, יובל חצ'טריאן-רזיאל, ברוך כשרים.
משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות)..

פתרונות וכללי הבדיקה

חלק א'. ניסוח הגדרות ומשפטים (20 נקודות)

בשאלות הניסוח יש לפרש את כל הסימונים שבשימוש באופן מלא ומפורט.

שאלה 1: (6 נקודות)

א. (2 נקודות) כתבו את ההגדרה של עמודת הקואורדינטות של וקטור לפי בסיס נתון.

ב. (4 נקודות) כתבו את ההגדרה של המטריצה המייצגת העתקה לינארית בבסיסים נתונים. במקום הגדרת המטריצה המייצגת ניתן לכתוב את התכונה העיקרית של המטריצה המייצגת (כי היא שקולה להגדרה).

נא לפרש את כל הסימונים: מהו B, מהו V וכו'

<u>הגדרת עמודת הקואורדינאטות והמטריצה המייצגת.</u> יהיו V, W מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל השדה F. תהי $T: V \to W$ העתקה לינארית, יהי $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ בסיס של V, ויהי $C = (\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_k)$ בסיס של W. לכל וקטור $\vec{w} \in W$ קיים יצוג יחיד כצירוף לינארי של וקטורי הבסיס C:
$\vec{w} = \alpha_1 \vec{c}_1 + \alpha_2 \vec{c}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{c}_k$. הסקלרים $\alpha_1 \ , \ \alpha_2 \ , \ldots , \ \alpha_k \in F$ נקראים הקואורדינטות של הווקטור $\vec{w}$ לפי הבסיס C.

נסמן: $[\vec{w}]_C = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{bmatrix}$, עמודה זו היא עמודת הקואורדינאטות של הווקטור $\vec{w}$ לפי הבסיס C.

המטריצה המייצגת את ההעתקה T בבסיסים B ו-C היא מטריצה $k \times n$ כך שהעמודה מס' i היא עמודת הקואורדינאטות של הווקטור $T(\vec{b}_i)$ לפי הבסיס C, כלומר, $[T(\vec{b}_i)]_C$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. סימון: $[T]_C^B$.

$[T]_C^B = \left[\ [T(\vec{b}_1)]_C \mid [T(\vec{b}_2)]_C \mid \cdots \mid [T(\vec{b}_n)]_C \ \right]$.

אפשר במקום ההגדרה לכתוב את התכונה העיקרית: המטריצה המייצגת את ההעתקה T בבסיסים B ו-C היא מטריצה $k \times n$ המסומנת $[T]_C^B$ כך שלכל וקטור $\vec{v} \in V$ מתקיים: $[T]_C^B \cdot [\vec{v}]_B = [T(\vec{v})]_C$.

<u>בדיקה:</u> שתי נקודות על הגדרת עמודת הקואורדינאטות, ארבע נקודות על הגדרת מטריצה מייצגת. אין ערך להגדרה לא מלאה: חייב להיות כתוב ש-V, W הם מרחבים וקטוריים, וכן ש-B ו-C בסיסים שלהם וכו', אם זה לא כתוב -- אפס נקודות על הסעיף הזה. אין ערך להגדרת מטריצה מייצגת בהעדר הגדרת עמודת הקואורדינאטות. אין לתת נקודות למי שמתמקד במקרה פרטי $T: V \to V$ וכותב את הגדרת $[T]_B^B$.
אין לתת נקודות למי שכותב את הגדרת מטריצת מעבר מבסיס לבסיס, $[I]_C^B$.

<u>שאלה 2:</u> (6 נקודות)
כתבו את הגדרת הריבוי הגאומטרי של ערך עצמי (של מטריצה או של העתקה לינארית – לבחירתכם).
<u>הגדרת הריבוי הגאמטרי של ערך עצמי של העתקה לינארית.</u> יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$, תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית, יהי $\lambda \in \mathbb{C}$ ערך עצמי של T. נסמן: $V_\lambda = \{\vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}\}$. הריבוי הגאומטרי של הערך העצמי λ הוא $\dim(V_\lambda)$ (כלומר, המימד של V_λ). במילים אחרות: הריבוי הגאומטרי של הערך העצמי λ הוא המספר המקסימלי של הווקטורים העצמיים הבלתי תלויים לינארית השייכים לערך העצמי λ.
<u>הגדרת הריבוי הגאמטרי של ערך עצמי של מטריצה.</u> תהי A מטריצה ריבועית עם רכיבים מרוכבים: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. יהי $\lambda \in \mathbb{C}$ ערך עצמי של A. כרגיל, I_n היא מטריצת היחידה $n \times n$. נסמן:
$$V_\lambda = \{\vec{v} \in \mathbb{C}^n_{col} \mid A\vec{v} = \lambda\vec{v}\} = \left\{\vec{v} \in \mathbb{C}^n_{col} \;\middle|\; (A - \lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}\right\} =$$
$$= \mathrm{Null}(A - \lambda I_n)$$
הריבוי הגאומטרי של הערך העצמי λ הוא $\dim(V_\lambda)$ (כלומר, המימד של V_λ).
במילים אחרות: הריבוי הגאומטרי של הערך העצמי λ הוא המספר המקסימלי של הווקטורים העצמיים הבלתי תלויים לינארית השייכים לערך העצמי λ.
<u>בדיקה.</u> אם לא כתוב שההעתקה T פועלת מ-V ל-V (או לא כתוב שהמטריצה A היא מטריצה ריבועית) – לכל היותר שתי נקודות על השאלה הזאת. אם במקום $\mathbb{C}$ כתוב שדה F כלשהו -- זאת לא טעות. אם כתוב ש"הריבוי הגאומטרי של הערך העצמי λ הוא המספר של הווקטורים העצמיים הבלתי תלויים לינארית השייכים לערך העצמי λ" , כלומר, המילה "המקסימלי" חסרה -- אפס נקודות.
אם הסטודנט לא כותב ש-I_n זו מטריצת היחידה – לא נקפיד על זה.
אם כתוב "$\dim(V_\lambda)$" ולא מוסבר מהו V_λ -- אפס נקודות. אם הסטודנט כותב הגדרה עבור העתקה ושוכח לציין שהמרחב V הוא מרחב ממימד סופי -- לא נקפיד על זה.

<u>שאלה 3</u>: (3 נקודות)
כתבו את ההגדרה של הפולינום האופייני של מטריצה.
<u>הגדרת הפולינום האופייני של מטריצה.</u> תהי A מטריצה ריבועית עם רכיבים משדה F: $A \in M_{n\times n}(\boldsymbol{F})$. כרגיל, I_n היא מטריצת היחידה $n \times n$.
הפולינום האופייני של A הוא: $\chi_A(x) = det(xI_n - A)$.
<u>בדיקה.</u> אם הסטודנט לא כותב ש-I_n זו מטריצת היחידה – לא נקפיד על זה.
אם במקום $det(xI_n - A)$ כתוב $det(A - xI_n)$ – לא נקפיד על זה.
אם במקום שדה F כלשהו כתוב $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ -- לא נקפיד על זה.

<u>שאלה 4</u>: (5 נקודות)
כתבו את הניסוח המפורט של משפט קיילי-המילטון.
<u>משפט קיילי-המילטון.</u> תהי A מטריצה ריבועית עם רכיבים משדה F:
$A \in M_{n\times n}(\boldsymbol{F})$. נסמן על יד $\chi_A(x)$ את הפולינום האופייני של A, כלומר,
$\chi_A(x) = det(xI_n - A)$. אז $\chi_A(A) = 0_{n\times n}$.
(כלומר, המטריצה $\chi_A(A)$ היא מטריצת האפס $n \times n$.)

<u>חלק ב'. בעיות קלות יחסית</u> (60 נקודות)

שאלות 5,6,7,8,9,10,11 הן מעל אותו מבנה. בכל השאלות האלה:
V הוא מרחב המטריצות 3×3 האנטי-סימטריות עם רכיבים ממשיים.
כלומר, $\boldsymbol{V} = \{\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) | \boldsymbol{X}^t = -\boldsymbol{X}\}$.
A היא מטריצה 3×3 אנטי-סימטרית מסויימת עם רכיבים ממשיים, כלומר,
$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{a} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{c} \\ -\boldsymbol{b} & -\boldsymbol{c} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}. \quad (\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R})$$
וכן,
$$\boldsymbol{T_A(X) = AX - XA}$$

<u>שאלה 5</u>: (10 נקודות) הוכיחו ש-$T_A(X) \in V$ עבור כל $X \in V$.

<u>הוכחה.</u> יש להראות שאם X,A הן מטריצות אנטי-סימטריות, אז גם המטריצה $AX - XA$ היא מטריצה אנטי-סימטרית, כלומר,
$(AX - XA)^t = -(AX - XA)$.
$$(AX - XA)^t = (AX)^t - (XA)^t = X^tA^t - A^tX^t =$$
$$= (-X)(-A) - (-A)(-X) = XA - AX = -(AX - XA)$$
השתמשנו כאן במספר תכונות פשוטות שלמדנו בקורס אלגברה לינארית 1:
$(AX)^t = X^tA^t$, $(P - Q)^t = P^t - Q^t$, $(-X)(-A) = XA$.
<u>בדיקה.</u> אם הסטודנט כתב את החישוב ולא ציין את התכונות הפשוטות הנ"ל, נקבל את הפתרון וניתן לו את כל עשר הנקודות.

שאלה 6: (10 נקודות) הוכיחו ש- $T_A: V \to V$ היא העתקה לינארית.

הוכחה. יש להראות ש-T_A מקיימת את שתי התכונות המופיעות בהגדרת העתקה לינארית: שמירה על חיבור ושמירה על כפל בסקלר.

ניקח מטריצות $X \in V$, $Y \in V$, וסקלר $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$T_A(X+Y) = A(X+Y) - (X+Y)A = AX + AY - XA - YA =$$
$$= AX - XA + AY - YA = T_A(X) + T_A(Y)$$

$$T_A(\alpha X) = A(\alpha X) - (\alpha X)A = \alpha AX - \alpha XA =$$
$$= \alpha(AX - XA) = \alpha T_A(X)$$

השתמשנו כאן בכך שמתקיים חוק הפילוג עבור מטריצות ובתכונות פשוטות של כפל מטריצה בסקלר.

במקום להוכיח שמתקיימות שתי התכונות המופיעות בהגדרת העתקה לינארית אפשר להוכיח ש-$T_A(X+\alpha Y) = T_A(X) + \alpha T_A(Y)$ עבור כל $X \in V$, $Y \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$. (למדנו שזה שקול להגדרת העתקה לינארית.)

$$T_A(X+\alpha Y) = A(X+\alpha Y) - (X+\alpha Y)A$$
$$= AX + A(\alpha Y) - XA - (\alpha Y)A =$$
$$= AX - XA + \alpha(AY - YA) = T_A(X) + \alpha T_A(Y)$$

שאלה 7: (10 נקודות)

נסמן: $E = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$.

הוכיחו ש- E מהווה בסיס של V.

הוכחה. נציין שהמטריצות המרכיבות את E הן מטריצות אנטי-סימטריות, כלומר, שייכות למרחב V. כל $X \in V$ נראה כך: $X = \begin{bmatrix} 0 & p & q \\ -p & 0 & r \\ -q & -r & 0 \end{bmatrix}$ עבור p, q, r ממשיים מסוימים. הערה:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & p & q \\ -p & 0 & r \\ -q & -r & 0 \end{bmatrix} =$$
$$= p\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + q\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + r\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

משויון זה נובע שהמטריצות $\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}$

פורשות את V (כי כל איבר של V הוא צירוף לינארי של המטריצות האלה).

כעת נניח שמתקיים השויון

$$p\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}+q\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix}+r\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

האגף שמאל הוא $\begin{bmatrix}0&p&q\\-p&0&r\\-q&-r&0\end{bmatrix}$,

כלומר, הנחנו ש- $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&p&q\\-p&0&r\\-q&-r&0\end{bmatrix}$. מכאן נקבל:

$p=q=r=0$.

זה מוכיח שהמטריצות $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ הן

איברים בלתי תלויים לינארית ב-V. לכן שלוש מטריצות אלו מהוות בסיס ל-V (כבר ראינו שהן פורשות את V).

<u>בדיקה.</u> כאשר מוכיחים ש-E מהווה בסיס ל-V, יש להוכיח שני דברים: שהמטריצות של E פורשות את V ושהן בת"ל. אם הסטודנט הוכיח רק אחד משני הדברים האלה – שלוש נקודות. מעבר לזה – אין ניקוד חלקי.

<u>שאלה 8</u>: (10 נקודות) מצאו את המטריצה $[T_A]_E^E$.

<u>פתרון.</u> נסמן:

$$e_1=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},e_2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},e_3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}.$$

כלומר, $E=(e_1,e_2,e_3)$. על פי הגדרת המטריצה המייצגת העמודה הראשונה של המטריצה $[T_A]_E^E$ היא $\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\\alpha_{21}\\\alpha_{31}\end{bmatrix}$ כאשר $[T_A(e_1)]_E=\begin{bmatrix}\alpha_{11}\\\alpha_{21}\\\alpha_{31}\end{bmatrix}$

$T_A(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \alpha_{31}e_3$. נכתוב

$$T_A(e_1) = A \cdot e_1 - e_1 \cdot A =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ c & -b & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -a & 0 & c \\ 0 & -a & -b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & b \\ c & -b & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (-c) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0 \cdot e_1 + (-c) \cdot e_2 + b \cdot e_3$$

מכאן שהעמודה הראשונה של המטריצה $[T_A]_E^E$ היא $\begin{bmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{bmatrix}$.

על פי הגדרת המטריצה המייצגת העמודה השניה של המטריצה $[T_A]_E^E$ היא $[T_A(e_2)]_E = \begin{bmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{bmatrix}$ כאשר $T_A(e_2) = \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + \alpha_{32}e_3$. נכתוב

$$T_A(e_2) = A \cdot e_2 - e_2 \cdot A =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -b & 0 & 0 \\ -c & 0 & -a \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -b & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c & 0 \\ -c & 0 & -a \\ 0 & a & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= c \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + (-a) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= c \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + (-a) \cdot e_3$$

מכאן שהעמודה השניה של המטריצה $[T_A]_E^E$ היא $\begin{bmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{bmatrix}$.

על פי הגדרת המטריצה המייצגת העמודה השלישית של המטריצה $[T_A]_E^E$ היא $[T_A(e_3)]_E = \begin{bmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{bmatrix}$ כאשר $T_A(e_3) = \alpha_{13}e_1 + \alpha_{23}e_2 + \alpha_{33}e_3$. נכתוב

$$T_A(e_3) = A \cdot e_3 - e_3 \cdot A =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -b & a \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 \\ a & 0 & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= (-b) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + a \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (-b) \cdot e_1 + a \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$$

מכאן שהעמודה השלישית של המטריצה $[T_A]_E^E$ היא $\begin{bmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$.

נסכם: $[T_A]_E^E = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$.

<u>בדיקה.</u> אם המטריצה בתשובה היא לא 3×3 (אלא ממידות אחרות) -- זו טעות חמורה, אפס נקודות על כל השאלה הזאת.
אם המטריצה בתשובה היא 3×3 והסטודנט כתב נכון בצורה מפורשת מהי המטריצה שמחפשים כאן, כלומר, העמודה הראשונה היא $[T_A(e_1)]_E = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{bmatrix}$
כאשר $T_A(e_1) = \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + \alpha_{31}e_3$, אפשר לתת על זה שלוש נקודות. מעבר לזה אין ניקוד חלקי כי החישובים קלים והשאלה לגמרי טכנית וטריוויאלית. לסיכום: בהעדר תשובה נכונה -- לכל היותר שלוש נקודות אם המטריצה בתשובה היא 3×3 וכתוב נכון מה מחפשים.

<u>שאלה 9:</u> **(10 נקודות)** הוכיחו שעבור כל מטריצה $A \in V$ ההעתקה הלינארית T_A לכסינה (ניתנת ללכסון) מעל $\mathbb{C}$.
הוכחה. נמצא את הערכים העצמיים של T_A.

$$\det([T_A]_E^E - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & c & -b \\ -c & -\lambda & a \\ b & -a & -\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= -\lambda \cdot det \begin{bmatrix} -\lambda & a \\ -a & -\lambda \end{bmatrix} - c \cdot det \begin{bmatrix} -c & a \\ b & -\lambda \end{bmatrix} - b \cdot det \begin{bmatrix} -c & -\lambda \\ b & -a \end{bmatrix}$$

$$= -\lambda(\lambda^2 + a^2) - c(c\lambda - ab) - b(ac + b\lambda) =$$

$$= -\lambda^3 - \lambda a^2 - \lambda c^2 + cab - bac - \lambda b^2 =$$

$$= -\lambda(\lambda^2 + a^2 + b^2 + c^2)$$

אם $A \neq 0_{3\times 3}$, כלומר, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, אז למשוואה

$-\lambda(\lambda^2 + a^2 + b^2 + c^2) = 0$

שלושה פתרונות (שונים זה מזה) ב-$\mathbb{C}$:

0 , $i\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, $-i\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

למדנו משפט: אם למטריצה $n \times n$ יש n ערכים עצמיים שונים, אז המטריצה לכסינה (כי וקטורים עצמיים השייכים לערכים עצמיים שונים הם בת"ל, ויוצא שמכך שלמטריצה $n \times n$ כזאת יש n וקטורים עצמיים בת"ל). המטריצה $[T_A]_E^E$ היא מטריצה 3×3 ויש לה שלושה ערכים עצמיים שונים, לכן המטריצה $[T_A]_E^E$ לכסינה מעל $\mathbb{C}$, ולכן ההעתקה הלינארית T_A לכסינה מעל $\mathbb{C}$.

אם $A = 0_{3\times 3}$, אז $[T_A]_E^E = 0_{3\times 3}$ (במקרה זה T_A היא העתקת האפס).

כמובן, מטריצת האפס היא מטריצה לכסינה – היא בעצמה אלכסונית.

הוכחנו ש-T_A לכסינה עבור כל $A \in V$.

<u>בדיקה.</u> אם הסטודנט התייחס רק למקרה $A \neq 0_{3\times 3}$ וכתב פתרון נכון עבור המקרה הזה – שמונה נקודות. מעבר לזה אין ניקוד חלקי, ולא משנה איפה הטעות -- השאלה סטנדרטית וקלה מאד.

הערה בנוגע לערכים עצמיים של מטריצה אנטי-סימטרית ממשית

בפתרון של השאלה מס' 9 ראינו שהערכים העצמיים של המטריצה האנטי-סימטרית הממשית $[T_A]_E^E = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$ הם המספרים המרוכבים $-i\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $i\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, 0.
רואים שלמספרים האלה יש תכונה משותפת: החלק הממשי שלהם שווה לאפס.
אכן, נכונה הטענה הכללית הבאה:
תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ מטריצה אנטי-סימטרית. יהי $\lambda \in \mathbb{C}$ ערך עצמי של A.
אזי $\lambda = yi$ עבור y ממשי מסוים. (במילים אחרות: החלק הממשי של λ הוא אפס.)
ההוכחה של הטענה הזאת דומה מאד להוכחת הטענה שהערכים העצמיים של מטריצה סימטרית ממשית הם מספרים ממשיים.
יהי $\vec{v} \in \mathbb{C}^n_{col}$ וקטור עצמי של המטריצה A השייך לערך העצמי λ. המכפלה $\langle *,* \rangle$ היא המכפלה הסקלרית הסטנדרטית ב-$\mathbb{C}^n_{col}$. נתבונן ב-$\langle A\vec{v},\vec{v}\rangle$.
מצד אחד $\langle A\vec{v},\vec{v}\rangle = \langle \lambda\vec{v},\vec{v}\rangle = \lambda\langle \vec{v},\vec{v}\rangle$.
מצד שני $\langle A\vec{v},\vec{v}\rangle = \langle \vec{v},A^t\vec{v}\rangle = \langle \vec{v},-A\vec{v}\rangle = \langle \vec{v},-\lambda\vec{v}\rangle = -\bar{\lambda}\langle \vec{v},\vec{v}\rangle$.
השוויון $\langle A\vec{v},\vec{v}\rangle = \langle \vec{v},A^t\vec{v}\rangle$ מתקיים כי A היא מטריצה ממשית: למטריצה מרוכבת כללית יש הצמדה של המשוחלפת ברכיב השני: $\langle A\vec{v},\vec{v}\rangle = \langle \vec{v},\overline{A^t}\vec{v}\rangle$.
השוויון $\langle \vec{v},A^t\vec{v}\rangle = \langle \vec{v},-A\vec{v}\rangle$ מתקיים כי A היא מטריצה אנטי-סימטרית.
קיבלנו: $\lambda\langle \vec{v},\vec{v}\rangle = -\bar{\lambda}\langle \vec{v},\vec{v}\rangle$. הווקטור $\vec{v}$ הוא וקטור עצמי, לכן $\vec{v} \neq \vec{0}$, ולכן $\langle \vec{v},\vec{v}\rangle \neq 0$. לכן מהשוויון $\lambda\langle \vec{v},\vec{v}\rangle = -\bar{\lambda}\langle \vec{v},\vec{v}\rangle$ נובע ש-$\lambda = -\bar{\lambda}$.
אם נסמן $\lambda = x + yi$ כאשר $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$, נקבל:

$$\lambda = -\bar{\lambda} \Leftrightarrow \lambda + \bar{\lambda} = 0 \Leftrightarrow x + yi + x - yi = 0 \Leftrightarrow 2x = 0$$

מכאן $x = 0$, ולכן $\lambda = yi$ עבור $y \in \mathbb{R}$ מסוים.

<u>שאלה 10:</u> (10 נקודות) הוכיחו שאם $A \neq 0_{3\times 3}$, אז $\dim\big(\mathrm{Im}(T_A)\big) = 2$.

<u>הוכחה.</u> כידוע, $\dim\big(\mathrm{Im}(T_A)\big) = \dim\Big(\mathrm{Col}([T_A]_E^E)\Big)\Big(= \mathrm{rank}([T_A]_E^E)\Big)$.

נזכיר: $[T_A]_E^E = \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$. ידוע שמטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי היא בלתי הפיכה (אפשר לראות זאת ישירות אם נציב $\lambda = 0$ בחישוב של $\det\begin{bmatrix} -\lambda & c & -b \\ -c & -\lambda & a \\ b & -a & -\lambda \end{bmatrix}$ שראינו בפתרון של השאלה מס' 9).

לכן $\dim\Big(\mathrm{Col}([T_A]_E^E)\Big) < 3$.

אם $A \neq 0_{3\times 3}$, אז לפחות אחד מהמספרים a, b, c שונה מאפס. אם $c \neq 0$, אז העמודות הראשונה והשניה, $\begin{bmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{bmatrix}$ ו-$\begin{bmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{bmatrix}$, הן בלתי תלויות לינארית.

אם $a \neq 0$, אז העמודות השניה והשלישית, $\begin{bmatrix} c \\ 0 \\ -a \end{bmatrix}$ ו-$\begin{bmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{bmatrix}$, הן בת"ל.

אם $a = c = 0$, אז $b \neq 0$, ואז העמודות הראשונה והשלישית, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$ ו-$\begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ הן בת"ל. לסיכום -- בכל מקרה יש למטריצה $[T_A]_E^E$ שתי עמודות בלתי תלויות לינארית, ולכן $2 \leq \dim\Big(\mathrm{Col}([T_A]_E^E)\Big)$.

קיבלנו: $2 \leq \dim\Big(\mathrm{Col}([T_A]_E^E)\Big) < 3$. מכאן $\dim\Big(\mathrm{Col}([T_A]_E^E)\Big) = 2$.

אפשר לנמק בדרך אחרת: ראינו בפתרון של השאלה מס' 9 שאם לפחות אחד מהמספרים a, b, c שונה מאפס, אז אפס הוא ערך עצמי של T_A עם הריבוי הגאומטרי 1. כידוע, הריבוי הגאוטמרי של ערך עצמי אפס שווה למימד הגרעין של ההעתקה. לכן $\dim\big(\ker(T_A)\big) = 1$. נזכיר את משפט המימדים:

$\dim\big(\ker(T_A)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T_A)\big) = \dim(V) = 3$.

מכאן: $\dim\big(\mathrm{Im}(T_A)\big) = 3 - \dim\big(\ker(T_A)\big) = 3 - 1 = 2$.

<u>בדיקה.</u> אם הסטודנט כתב ש-

$$\dim\big(\mathrm{Im}(T_A)\big) = \dim\Big(\mathrm{Col}([T_A]_E^E)\Big)\Big(= \mathrm{rank}([T_A]_E^E)\Big)$$

או כתב ש-$\mathrm{Im}(T_A) = \mathrm{Span}\big(T_A(e_1), T_A(e_2), T_A(e_3)\big)$ או כתב את משפט המימדים $\dim\big(\ker(T_A)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T_A)\big) = \dim(V)(= 3)$ – אפשר לתת שלוש נקודות גם אם אין הוכחה נכונה, אבל בלי "כפל מבצעים". זאת אומרת, לכל היותר שלוש נקודות אם אין הוכחה נכונה.

חלק ג'. בעיות חשיבה (45 נקודות)

שאלה 11: (10 נקודות) הסימונים V, A, T_A הם כמו בחלק ב'.

מצאו בסיס B למרחב V כך ש-$A = [T_A]_B^B$.

הערה: יש להביא דוגמה אחת של בסיס B כזה.

פתרון. אנחנו מחפשים $B = (v_1,\ v_2,\ v_3)$ כך שיתקיימו השוויונים

$$[T_A(v_3)]_B = \begin{bmatrix} b \\ c \\ 0 \end{bmatrix},\ [T_A(v_2)]_B = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{bmatrix},\ [T_A(v_1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -a \\ -b \end{bmatrix}.$$

זאת אומרת, אנחנו רוצים שיתקיימו השוויונים (1), (2), (3) הבאים:

$$T_A(v_1) = 0 \cdot v_1 + (-a) \cdot v_2 + (-b) \cdot v_3 \qquad (1)$$

$$T_A(v_2) = a \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + (-c) \cdot v_3 \qquad (2)$$

$$T_A(v_3) = b \cdot v_1 + c \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \qquad (3)$$

נתבונן בשוויון (1). המקדמים הם $0, -a, -b$.

ראינו בפתרון של השאלה מס' 8 שוויון דומה עם מקדמים $-b, a, 0$:

$$T_A(e_3) = (-b) \cdot e_1 + a \cdot e_2 + 0 \cdot e_3\ .$$

נכתוב את השוויון האחרון בצורה הבאה:

$$T_A(e_3) = 0 \cdot e_3 + (-a) \cdot (-e_2) + (-b) \cdot e_1.$$

נכתוב שוב את השוויון (1):

$$T_A(v_1) = 0 \cdot v_1 + (-a) \cdot v_2 + (-b) \cdot v_3.$$

כאשר מתבוננים בשני השוויונים האחרונים ביחד, ניתן לראות שיש להגדיר את $v_1,\ v_2,\ v_3$ כך: $v_1 = e_3\ ,\ \ v_2 = -e_2\ ,\ \ v_3 = e_1$.

אכן, אם נגדיר את $v_1,\ v_2,\ v_3$ כך, גם השוויונים (2) ו-(3) יתקיימו:

$$\begin{aligned} T_A(v_2) &= T_A(-e_2) = -T_A(e_2) = -(c \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + (-a) \cdot e_3) \\ &= a \cdot e_3 + 0 \cdot (-e_2) + (-c) \cdot e_1 = a \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + (-c) \cdot v_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_A(v_3) &= T_A(e_1) = 0 \cdot e_1 + (-c) \cdot e_2 + b \cdot e_3 \\ &= b \cdot e_3 + c \cdot (-e_2) + 0 \cdot e_1 = b \cdot v_1 + c \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \end{aligned}$$

קל מאד להבין מדוע $B = (v_1,\ v_2,\ v_3) = (e_3,\ -e_2\ , e_1)$ מהווה בסיס ל-V אחרי שהוכחנו בשאלה 7 ש-$E = (e_1,\ e_2, e_3)$ מהווה ל-V.

לסיכום. נגדיר:

$$v_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{bmatrix}, v_2=\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}, v_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$B=(v_1,\ v_2,\ v_3)$, $[T_A]_B^B=\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}=A$.

<u>בדיקה.</u> בשאלה זו אין ניקוד חלקי. אין כל ערך לדוגמה נכונה ללא הסבר או עם הסבר לא נכון. אם הסטודנט הביא דוגמה נכונה של בסיס B והסביר נכון מדוע באמת מתקיים השוויון $[T_A]_B^B=A$, אך לא הסביר מדוע B מהווה בסיס ל-V -- לא נחשיב זאת לטעות וניתן את כל עשר הנקודות על שאלה זו.

<u>שאלה 12</u>: (10 נקודות) תהי $A\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$. נגדיר את ההעתקה הלינארית הבאה:
$S_A:\mathbb{R}_3[x]\to M_{3\times3}(\mathbb{R})$, $S_A(p)=p(A)$.
הוכיחו ש-$\dim(\ker(S_A))\geq 1$ עבור כל $A\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$.

<u>הוכחה.</u> הצבת מטריצה ריבועית בפולינום, $p(A)$, מזכירה מיד את משפט קיילי-המילטון.
המטריצה A היא מטריצה 3×3, הפולינום האופייני שלה הוא לא פולינום האפס אלא פולינום ממעלה 3: $\chi_A(x)=\det(xI_3-A)=x^3+\cdots\cdots$.
על פי משפט קיילי-המילטון מתקיים השוויון: $\chi_A(A)=0_{3\times3}$.
כלומר, $S_A(\chi_A)=\chi_A(A)=0_{3\times3}$. מכאן: $\chi_A\in\ker(S_A)$. כמו שאמרנו, הפולינום χ_A הוא אינו פולינום האפס. לכן הגרעין של ההעתקה S_A מכיל איבר שונה מאפס, ולכן המימד של הגרעין של S_A הוא לפחות 1.

<u>בדיקה.</u> אין ניקוד חלקי.

<u>שאלה 13</u>: (10 נקודות)
יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. יהיו U,W תת-מרחבים של V.
הוכיחו ש-$(U+W)^\perp=U^\perp\cap W^\perp$.

<u>הוכחה.</u> ניקח $\vec{a}\in U^\perp\cap W^\perp$. נוכיח ש-$\vec{a}\in(U+W)^\perp$.
יש להראות ש-$\langle\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\rangle=0$ עבור כל $\vec{b}\in U,\vec{c}\in W$.
$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=0$ לכל $\vec{b}\in U$ כי $\vec{a}\in U^\perp$, $\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=0$ לכל $\vec{c}\in W$ כי $\vec{a}\in W^\perp$.
לכן $\langle\vec{a},\vec{b}+\vec{c}\rangle=\langle\vec{a},\vec{b}\rangle+\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=0+0=0$.
הוכחנו ש-$(U+W)^\perp\supseteq U^\perp\cap W^\perp$.

ניקח $\vec{a} \in (U+W)^\perp$ ונוכיח ש-$\vec{a} \in U^\perp \cap W^\perp$.
$\vec{a} \in (U+W)^\perp$, לכן $\langle \vec{a}, \vec{b}+\vec{c} \rangle = 0$ עבור כל $\vec{b} \in U, \vec{c} \in W$. אם נציב $\vec{c} = \vec{0}$, נקבל $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$ לכל $\vec{b} \in U$, לכן $\vec{a} \in U^\perp$. אם נציב $\vec{b} = \vec{0}$, נקבל $\langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 0$ לכל $\vec{c} \in W$, לכן $\vec{a} \in W^\perp$. קיבלנו ש-$\vec{a}$ שייך גם ל-$U^\perp$ וגם ל-$W^\perp$. לכן $\vec{a} \in U^\perp \cap W^\perp$. הוכחנו ש-$(U+W)^\perp \subseteq U^\perp \cap W^\perp$.
משתי ההכלות שהוכחנו נובע ש-$(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$.

בדיקה. זו שאלה ממטלה 5 תשפ"א, הפתרון פורסם מזמן. חמש נקודות על כל אחת משי ההכלות. מעבר לזה אין ניקוד חלקי.

שאלה 14: (5 נקודות)

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית אוניטרית, כלומר, $\langle T(\vec{u}), T(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ עבור כל $\vec{u}, \vec{v} \in V$.
יהי $\lambda \in \mathbb{C}$ ערך עצמי של T. הוכיחו: $|\lambda| = 1$.
הדרכה. יהי $\vec{v}$ וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי λ.
התבוננו במכפלה $\langle T(\vec{v}), T(\vec{v}) \rangle$.

הוכחה. יהי $\vec{v}$ וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי λ. מהגדרת העתקה אוניטרית נובע ש- $\langle T(\vec{v}), T(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$.
מצד שני, $\langle T(\vec{v}), T(\vec{v}) \rangle = \langle \lambda\vec{v}, \lambda\vec{v} \rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$. כאן השתמשנו בכך ש-$\vec{v}$ וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי λ, ולכן $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.
השתמשנו גם בתכונות הבאות של מכפלה פנימית:
$\langle \alpha\vec{u}, \vec{v} \rangle = \alpha\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, $\langle \vec{u}, \alpha\vec{v} \rangle = \bar{\alpha}\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.
נסכם: $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle T(\vec{v}), T(\vec{v}) \rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$, כלומר, $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$.
וקטור $\vec{v}$ שונה מווקטור האפס כי $\vec{v}$ הוא וקטור עצמי, לכן $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle \neq 0$. (נזכיר שעל פי אחת האקסיומות של מכפלה פנימית $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0$ אם ורק אם $\vec{v} = \vec{0}$).
לכן, אפשר לצמצם את השוויון $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ ב-$\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle$ ולקבל $\lambda\bar{\lambda} = 1$.
נזכיר ש-$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ לכל $z \in \mathbb{C}$, לכן מהשויון $\lambda\bar{\lambda} = 1$ נובע ש-$|\lambda| = 1$.

בדיקה. זו שאלה ממטלה 5 תשפ"א, הפתרון פורסם מזמן. אין ניקוד חלקי.

שאלה 15: (10 נקודות)
יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית אוניטרית,
כלומר, $\langle T(\vec{u}), T(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ עבור כל $\vec{u}, \vec{v} \in V$.
יהי $\vec{v}$ וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי λ . יהי $\vec{u}$ וקטור עצמי של T השייך
לערך עצמי μ , כאשר $\lambda \neq \mu$.
הוכיחו ש-$\vec{u}, \vec{v}$ מאונכים זה לזה. כלומר, הוכיחו ש-$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.
<u>הדרכה.</u> התבוננו במכפלה $\langle T(\vec{u}), T(\vec{v}) \rangle$. השתמשו בהגדרת העתקה אוניטרית,
בהגדרת ערך עצמי וקטור עצמי ובתוצאת השאלה הקודמת, שאלה 14.

<u>הוכחה.</u> מהנתון עולה: $T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$, $T(\vec{u}) = \mu \vec{u}$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$.
מצד אחד: $\langle T(\vec{u}), T(\vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ כי T אוניטרית.
מצד שני: $\langle T(\vec{u}), T(\vec{v}) \rangle = \langle \mu \vec{u}, \lambda \vec{v} \rangle = \mu \bar{\lambda} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ על פי הנתון ועל פי
התכונות של מכפלה פנימית.
קיבלנו: $\mu \bar{\lambda} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.
המספר המרוכב λ הוא ערך עצמי של העתקה אוניטרית, לכן $\lambda \bar{\lambda} = 1$ כמו
שהוכחנו בשאלה הקודמת, מס' 14.
נתון ש-$\mu \neq \lambda$, ולכן $\mu \bar{\lambda} \neq 1$: אם נניח בשלילה ש-$\mu \bar{\lambda} = 1$,
נקבל $\mu \bar{\lambda} = 1 = \lambda \bar{\lambda}$, ומזה נובע ש-$\mu = \lambda$ כי $\bar{\lambda} \neq 0$, זאת סתירה לנתון.
מהשויון $\mu \bar{\lambda} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, ומזה ש-$\mu \bar{\lambda} \neq 1$ נובע ש-$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$:
$\mu \bar{\lambda} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \Leftrightarrow \left(\mu \bar{\lambda} - 1 \right) \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.
אבל $\mu \bar{\lambda} - 1 \neq 0$, לכן $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

<u>בדיקה.</u> זו שאלה ממטלה 5 תשפ"א, הפתרון פורסם מזמן. אין ניקוד חלקי.