פתרון דף הכוונה יונה – סמסטר ב' 2022

שאלה 1: $A \in M_{2\times2}$, $Trace(A) = 3$ ו-$Trace(A^2) = 5$ מצאו את $\det(A)$.

פתרון: הפולינום האופייני של $A \in M_{2\times2}$ הוא $\chi_A(x) = x^2 - Trace(A)x + \det(A)$

נשתמש במשפט **קיילי המילטון:** $\chi_A(A) = A^2 - Trace(A)A + \det(A) = 0_{2\times2}$

נפעיל $Trace$ על שני הצדדים:

$$Trace(A^2 - Trace(A)A + \det(A)) = 0_{2\times2}$$

נזכיר תכונות של עקבה: $Trace(A+B) = Trace(A) + Trace(B)$ וגם $Trace(\alpha A) = \alpha Trace(A)$

נשתמש בתכונות אלה ונפתח סוגריים:

$$Trace(A^2) - Trace(A)Trace(A) + \det(A) \cdot Trace(I_{2\times2}) = 0_{2\times2}$$

נציב את הנתונים: $5 - 3 \cdot 3 + \det(A) \cdot 2 = 0_{2\times2} \rightarrow -4 + \det(A)\, 2 = 0_{2\times2} \rightarrow \det(A) = 2$

דרך נוספת:

ניקח מטריצה מסדר 2×2 שרירותית: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ad + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{bmatrix}$

נזכיר שעקבה $Trace$ היא סכום של האיברים באלכסון כלומר:

$$Trace(A) = a + d = 3, \qquad Trace(A^2) = a^2 + bc + cb + d^2 = a^2 + 2bc + d^2 = 5$$

$$\left(Trace(A)\right)^2 = (a+d)^2 = a^2 + 2ad + d^2 = 9$$

$$\left(Trace(A)\right)^2 - (Trace(A^2) = 2(ad - bc) = 4 \rightarrow ad - bc = \det(A) = 2$$

שאלה 2: תהי $A \in M_{2\times2}$ תהי $B \in M_{2\times2}$ ונתון שמתקיים השוויון $(AB)^2 = 0_{2\times2}$

הוכיחו: $(BA)^2 = 0_{2\times2}$

פתרון:

$$(AB)^2 = 0_{2\times2} \rightarrow \det(AB)^2 = 0 \rightarrow (\det(AB))^2 = 0 \rightarrow \det(AB) = 0$$

$$\det(BA) = \det(B) \cdot \det(A) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(AB) \rightarrow \det(BA) = 0$$

נציג את **משפט קיילי המילטון** עבור AB:

$$(AB)^2 - Trace(AB)AB + \det(AB) \cdot I_{2\times2} = 0_{2\times2} \rightarrow Trace(AB)AB = 0_{2\times2} \rightarrow Trace(AB) = 0$$

נזכיר את תכונה העקבה - $Trace(AB) = Trace(BA)$ עבור מכפלה מוגדרת.

אזי גם $Trace(BA) = 0$

כעת נרשום את משפט קיילי המילטון עבור BA:

$$(BA)^2 - Trace(BA)BA + \det(BA) \cdot I_{2\times2} = 0_{2\times2} \rightarrow (BA)^2 = 0_{2\times2}$$

שאלה 3: האם קיימת מטריצה $A \in M_{2\times2}(\mathbb{C})$ כך ש-$A^2 \neq 0_{2\times2}$ אבל $A^3 = 0_{2\times2}$?

<u>פתרון</u>: נזכיר כי אם λ הוא ערך עצמי של A אזי λ^k הוא ערך עצמי של A^k

<u>הוכחה באינדוקציה על k.</u>

ערך עצמי היחיד של מטריצת ה- $0_{2\times2}$ הוא 0. לכן הערך עצמי היחיד של A הוא 0. ולכן הפולינום האופייני יראה כך: $\chi_A(x) = x^2$, לפי **קיילי המילטון** $\chi_A(A) = A^2 = 0$ לכן לא קיימת מטריצה כזו.

שאלה 4: תהי A מטריצה ממשית מסדר 3×3 כך ש-$\det(A) = 8$. נתון בנוסף שהמספר המרוכב $-1 + \sqrt{3}\cdot i$ הוא ערך עצמי של A. הוכיחו $A^3 = 8I_{3\times3}$

פתרון: נתון ש-$-1 + \sqrt{3}\cdot i$ הוא ע"ע של A ולכן גם הצמוד שלו הוא ע"ע של A כלומר $-1 - \sqrt{3}\cdot i$ הוא גם ע"ע. הנ"ל נובע מההגדרה שמעל ממשיים, אם λ הוא ע"ע מרוכב של A אז גם $\bar{\lambda}$ הוא ע"ע.

מכיוון שממד המטריצה 3 אז יכול להיות רק עוד ערך עצמי 1.

מכיוון שמדברים על מרחב מעל שדה המרוכבים נוכל לחשב את $\det(A)$ ע"י מכפלת הערכים העצמיים בהתחשב בריבוי האלגברי שלהם – $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$

$$\det(A) = \left(-1 + \sqrt{3}\cdot i\right)\left(-1 - \sqrt{3}\cdot i\right)\cdot\lambda = 8 \to 4\cdot\lambda = 8 \to \lambda_3 = 2$$

מצאנו שלמטריצה A ישנם 3 ערכים עצמיים שונים והיא ממד 3 ולכן היא ניתנת ללכסון. מהגדרת מטריצה לכסינה, קיימת מטריצה D אלכסונית ומטריצה הפיכה P כך ש-$A = PDP^{-1}$

המטריצה D מורכבת מערכים עצמיים של A באלכסון הראשי שלה

$$A = P\cdot\begin{bmatrix} -1+\sqrt{3}i & 0 & 0 \\ 0 & -1-\sqrt{3}i & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot P^{-1} \to A^2 = PD^3P^{-1} = P\cdot\begin{bmatrix} \left(-1+\sqrt{3}i\right)^3 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-1-\sqrt{3}i\right)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}\cdot P^{-1}$$

$$\left(-1+\sqrt{3}i\right)^3 = \left(-1+\sqrt{3}i\right)^2\left(-1+\sqrt{3}i\right) = \left(-2-2\sqrt{3}i\right)\left(-1+\sqrt{3}i\right) = 2(1+3) = 8$$

$$\left(-1-\sqrt{3}i\right)^3 = \left(-1-\sqrt{3}i\right)^2\left(-1-\sqrt{3}i\right) = \left(-2+2\sqrt{3}i\right)\left(-1-\sqrt{3}i\right) = -2(-1-3) = 8$$

יצא לנו ש-$A^3 = PDP^{-1} = P\cdot\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}\cdot P^{-1} = P8IP^{-1} = 8PI_{3\times3}P^{-1} = 8I_{3\times3}$

דרך נוספת זה לפתוח את הפולינום האופייני: $\chi_A(x) = (x—1+\sqrt{3}i)(x-(-1-\sqrt{3}i)(x-2)$

שאלה 5: תהי $A \in M_{3\times3}$ כך ש-$rank(A) < rank(A+I_3) < rank(A-I_3)$ הוכיחו ש-A לכסינה.

פתרון: נזכיר $rank(A) \le 3$ מכיוון שממד המטריצה הוא 3. לפי האי שוויון ישנם 3 אפשרויות:

$$0 < 1 < 2,\;\; 0 < 2 < 3,\;\; 0 < 1 < 3,\;\; 1 < 2 < 3$$

אם $rank(A-I_3) = 0$ אזי $A = I_3$ וזה לא ייתכן אחרת $rank(A+I_3) = rank(2A) > rank(A)$ בסתירה לנתון. לכן$rank(A) = 3, \;\; rank(A+I_3) = 2, \; rank(A-I_3) = 1$

אם $rank(A) = \dim(A)$ אף שורה לא התאפסה אזי $\det(A) \neq 0$

$rank(A-I_3) = rank(A - 1\cdot I_3) = 1 \to \det(A - 1I_3) = 0$ ולכן $\lambda_1 = 1$

$rank(A+I_3) = rank(A + 1\cdot I_3) = 1 \to \det(A + 1I_3) = 0$ ולכן $\lambda_2 = -1$

ריבויים גאומטריים: $g(1) = \dim(NULL(A - 1\cdot I_3) = 3 - rank(A-I_3) = 2$

$g(-1) = \dim(NULL(A + 1\cdot I_3) = 3 - rank(A+I_3) = 1$

ריבויים אלגבריים: $2 \le 2 \le 1 = a(1) \le g(1) \le 1$ לא 3 כי אז לא היה נשאר לע"ע -1

$$1 \le g(-1) \le a(-1) = 1 \le 1 \le 1$$

ולפי המשפט "...מטריצה לכסינה אמ"מ עבור כל ערך עצמי שלה מתקיים שוויון בין ריבוי אלגברי לריבוי גאומטרי.

שאלה 6: תהי $A \in M_{6\times6}$ מטריצה סימטרית כך ש-$\det(I_6 - A) \neq 0$, $\det(A) = -1$ וגם $\dim\big(Null(A+I_6)\big) = 4$ הוכיחו ש-A לכסינה.

פתרון: נתון כי $\dim\big(Null(A+I_6)\big) = 4$ אזי -1 הוא ערך עצמי של A עם ריבוי גאומטרי 4

נתון: $\det(I_6 - A) \neq 0$ אזי 1 הוא לא ערך עצמי של A.

נתון: $\det(A) = 1$ לכן ניתן לרשום: $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5\lambda_6 = -1$

מכיוון ש--1 הוא ע"ע של A עם ריבוי גאומטרי 4 אזי הריבוי האלגברי שלו לפחות 4.

$$(-1)^4 \cdot \lambda_5, \lambda_6 = \lambda_5\lambda_6 = -1$$

אם $\lambda_5 = -1$ אזי $\lambda_6 = 1$ וזה לא ייתכן בגלל הנתון. כנ"ל גם הפוך.

אם $\lambda_5 = \lambda_6 \to \lambda^2 = -1 \to \lambda_{11} = i, \lambda_{12} = -i$ אבל זה לא ייתכן כי אם עבור λ_5, λ_6 יהיו 2 ע"ע לכל אחד כלומר 4 סה"כ כי נותר מקום רק ל2. ז"א $\lambda_5 \neq \lambda_6$ 2 ערכים עצמיים שונים שכל אחד מהם עם ריבוי אלגברי וגאומטרי 1. ז"א שלערך עצמי (-1) ריבוי גאומטרי וריבוי אלגברי 4 – אזי המטריצה A לכסינה.

שאלה 7: תהי $A \in M_{5\times 5}$ כך ש-$\det(I_5 + A) = 0$, $\det(A) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $rank(A + i \cdot I_5) = 2$

הוכיחו כי $A^{-1} = A^7$ או במילים אחרות $A^8 = I_5$

פתרון:

נתון $\det(A+I) = 0$ אזי -1 הוא ערך עצמי A.

נתון $rank(A + i \cdot I_5) = 2$ אזי $\dim\left(Null(A + i \cdot I_5)\right) = 5 - 2 = 3$ כלומר $-i$ הוא ע"ע של A עם ריבוי גאומטרי 3.

נתון: $\det(A) = \frac{1-i}{\sqrt{2}} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\lambda_5 \rightarrow (-1)(-i)^3 \cdot \lambda_5 = -i \cdot \lambda_5 \rightarrow \lambda_5 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

לסיכום: ערכים עצמיים של A הם $(-1), (-i)^3, (\frac{1+i}{\sqrt{2}})$ ר"א ור"ג של כל אחד מהע"ע שווים ולכן המטריצה לכסינה.

לכן קיימת מטריצה אלכסונית D המורכבת מערכים העצמיים של A ו P הפיכה המורכבת מוקטורים עצמיים של A נרשום אותה כך: $A = PDP^{-1}$ בעזרת זה נחשב את $A^8 = PD^8P^{-1}$

$$A^8 = P \cdot \begin{bmatrix} (-1)^8 & & & & \\ & (-\imath)^8 & & & \\ & & (-1)^8 & & \\ & & & (-1)^8 & \\ & & & & \left(\frac{1+\imath}{\sqrt{2}}\right)^8 \end{bmatrix} P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$= PI_{5\times 5}P^{-1} = I_{5\times 5}$$

ואכן $A^8 = I_5$

שאלה 8: כידוע פעולת שחלוף מטריצה היא העתקה ליניארית. נסמן: $T(A) = A^t$ עבור כל $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

בעצם, ההעתקה T היא פעולת שחלוף מטריצה ריבועית. זו העתקה ליניארית ממרחב $M_{n\times n}$ לעצמו. ללא שימוש במטריצה מייצגת, מצאו את כל הערכים העצמיים של T והבינו האם T לכסינה.

פתרון: $T(A) = A^t$ ולכן ניתן לומר ש-$T(A) = \lambda A \rightarrow A^t = \lambda A$

אם המטריצה סימטרית אז $\lambda = 1$ הוא ע"ע של T וו"ע השייכים לו הם מטריצות סימטריות.

אם המטריצה אנטי סימטרית אז $\lambda = -1$ הוא ע"ע של T וו"ע השייכים לו הם מטריצות אנטי סימטרית.

כל מטריצה ריבועית ניתן להציג כצירוף ליניארי של $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$

מרחב עצמי של מטריצות סימטריות $V_1 = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}) | A^t = A\}$

$V_{-1} = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}) | A^t = A^{-1}\}$

החיתוך בניהם טריוויאלי $V_1 \cap V_{-1} = \{0\} \rightarrow V_1 \oplus V_{-1} = M_{3\times 3}(\mathbb{C})$

דרך נוספת: $A^t = \lambda A \rightarrow (A^t)^t = (\lambda A)^t \rightarrow A = \lambda A^t = \lambda^2 A \rightarrow (1-\lambda)^2 A = 0_{n\times n}$

$A \neq 0_{n\times n}$ ולכן קיים רכיב $a_{ij} \neq 0$ ונוכל לרשום כך $(1-\lambda)^2 a_{ij} = 0_{n\times n}$

$(1-\lambda)^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1\ \lambda_2 = -1$

$$dimV_1 = \frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$dimV_{-1} = \frac{n^2 - n}{2}$$

$$dimV_1 + dimV_{-1} = \frac{n^2 + n}{2} + \frac{n^2 - n}{2} = n^2$$

שאלה 9: נגדיר העתקה $S: M_{n\times n}(\mathbb{C}) \to M_{n\times n}(\mathbb{C})$ כך: $S(A) = A + A^t$ עבור כל $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$

מצאו את כל הערכים העצמיים של S והבינו האם S לכסינה.

פתרון: $A + A^t = \lambda A \to A^t = \lambda A - A \to A^t = (\lambda - 1)A$

אם המטריצה סימטרית אז $\lambda - 1 = 1 \to \lambda = 2$ הוא ע"ע של T ו"ע השייכים לו הם מטריצות סימטריות.

אם המטריצה אנטי סימטרית אז $\lambda - 1 = -1 \to \lambda = 0$ הוא ע"ע של T ו"ע השייכים לו הם מטריצות אנטי סימטרית.

כל מטריצה ריבועית ניתן להציג כצירוף ליניארי של $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$

מרחב עצמי של מטריצות סימטריות $V_2 = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}) | A^t = A\}$

$V_0 = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{C}) | A^t = A^{-1}\}$

$V_2 \oplus V_0 = M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ כלומר סכום הריבויים הגאומטריים שווה לממד עצמו כלומר המטריצה סימטרית.

שאלה 10: יהיו $G = ((1,0,1), (0,1,-1), (1,2,0))$, $B = \big((1,1,2), (1,1,3), (2,3,4)\big)$

שני בסיסים ל-$\mathbb{R}^3$.

יהיו $H = ((2,1), (5,3))$, $C = ((3,4), (2,3)$ שני בסיסים ל-$\mathbb{R}^2$.

העתקה T היא העתקה ליניארית $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ כך ש- $[T]_C^B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ מצאו את המטריצה $[T]_H^G$

פתרון:

$$[T]_H^G = [I]_H^C \cdot [T]_C^B \cdot [I]_B^G$$

$[T]_C^B$ נתונה, כעת נמצא 2 מטריצות מעבר החסרות בעזרת בסיס סטנדרטי:

$$[I]_H^C = [I]_H^E \cdot [I]_E^C = ([I]_E^H)^{-1} \cdot [I]_E^C = \left(\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -9 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[I]_B^G = [I]_B^E \cdot [I]_E^G = ([I]_E^B)^{-1} \cdot [I]_E^G = \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

כעת נציב בנוסחה הגדולה:

$$[T]_H^G = \begin{bmatrix} -11 & -9 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & -9 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 12 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -119 & 9 & -65 \\ 53 & -4 & 29 \end{bmatrix}$$