

# מבחן בית בקורס הסתברות 2

סמסטר א', מועד ב'

03.03.2021

פרופ' דן חפץ

אוניברסיטת אריאל

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה למדעי המחשב

משך הבחינה: שעתיים

המבחן הינו עבור מספרי קורס: 2-7037110-3, 2-7037110-1

מבנה המבחן: 3 שאלות ללא בחירה.

הנחיות:

1. המבחן הינו עם חומר סגור. עם זאת, כל סטודנט רשאי להביא דף אחד מגודל A4 כתוב משני צדדיו.
2. אין לכתוב בעפרון.
3. יש להוכיח כל טענה שאתם כותבים גם אם לא התבקשתם לעשות זאת במפורש בשאלה.
4. ניתן להסתמך ללא הוכחה על כל טענה שנלמדה בשיעור (אלא אם כן זו הטענה שהנכם מתבקשים להוכיח בשאלה). יש לצטט את הטענה עליה הנכם מסתמכים בצורה ברורה.
5. יש להעלות את הפתרון בקובץ יחיד מסוג WORD, jpeg, pdf, או png.

שאלה 1 (40 נקודות):

תהי

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2/2 & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- א. (6 נקודות) הוכיחו ש- $f$  היא פונקציית צפיפות.  
ב. (14 נקודות) יהי  $X$  משתנה מקרי עם פונקציית צפיפות  $f$ . מצאו את התוחלת והשונות של  $X$ .  
ג. (20 נקודות) תהי  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי צפיפות  $f$  (כלומר  $f$  היא הצפיפות של  $X_i$  לכל  $i$ ). מצאו מספרים ממשיים  $a$  ו- $b$  עבורם מתקיים

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(-\sqrt{n} \leq \sum_{i=1}^n X_i \leq 2\sqrt{n}\right) = \Phi(b) - \Phi(a)$$

שאלה 2 (30 נקודות):

- יהיו  $n \geq k \geq 4$  וכן  $m < 2^{k-3}$  מספרים טבעיים. תהי  $\{A_1, \dots, A_m\}$  משפחה של תת קבוצות של  $\{1, \dots, n\}$  כך ש- $|A_i| = k$  לכל  $1 \leq i \leq m$ . הוכיחו שקיימת צביעה של איברי  $\{1, \dots, n\}$  בארבעה צבעים כך ש- $A_i$  תכיל איברים משלושה צבעים שונים לפחות, לכל  $1 \leq i \leq m$ .

שאלה 3 (30 נקודות):

יהי  $G \sim G(n, n^{-3/2})$  גרף מקרי.

- א. (15 נקודות) הוכיחו שההסתברות שיש ב- $G$  לפחות  $\sqrt{n}$  קשתות שואפת ל-0 כאשר  $n$  שואף לאינסוף.  
ב. (15 נקודות) הוכיחו שההסתברות ש- $G$  יער (כלומר גרף חסר מעגלים) שואפת ל-1 כאשר  $n$  שואף לאינסוף.