בס"ד

אלגברה לינארית 2

מספר הקורס: 7028210-1,2,3 ⬩ תשפ"ב סמסטר א' מועד ב', 14.2.22

מרצים ומתרגלים: צור יצחקיאן, יונה צרניאבסקי, יובל חצ'טריאן-רזיאל, ברוך כשרים.

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות)..

עיינו היטב בהוראות הבחינה.

ניתן לענות על כל השאלות. אין להשתמש בחומר עזר מכל סוג. אין להשתמש בדף נוסחאות. אין להשתמש במחשבון. אין להשתמש בטלפון.
בדקו היטב את כל מה שאתם כותבים. בשאלות חישוביות השתדלו מאד לקבל תשובה נכונה. אין לצפות להרבה נקודות "על הדרך" בהעדר תשובה נכונה. הסברים חייבים להכיל מילים, לא רק חישובים וסימונים מתמטיים. בהוכחות יש לצטט את המשפטים, התכונות, ההגדרות שעליהם אתם מסתמכים. אין לבקש מהמרצה או מהמתרגל בזמן המבחן לעיין במה שכתבתם. אין לבקש מהמרצה או מהמתרגל בזמן המבחן עזרה בפתרון, הכוונה, מיקוד, רמז או הדרכה. בזמן המבחן אפשר לשאול את המרצה או המתרגל רק בנוגע לניסוח של שאלה מחלק ב' וג'.

חלק א'. ניסוח הגדרות ומשפטים (15 נקודות)

בשאלות הניסוח יש לפרש את כל הסימונים באופן מלא ומפורט.

שאלה 1: (8 נקודות) תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. על פי ההגדרה, A לכסינה אם קיימות מטריצה הפיכה $P \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ומטריצה אלכסונית $D \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ כך שמתקיים השוויון $A = PDP^{-1}$. כתבו את שתי התכונות השקולות להגדרה זו. (ארבע נקודות על כל אחת משתי התכונות)

שאלה 2: (7 נקודות)
יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. יהיו $\vec{a} \in V$, $\vec{b} \in V$, $\vec{c} \in V$ שלושה וקטורים בלתי תלויים לינארית. כתבו נוסחאות למציאת וקטורים $\vec{w} \in V$, $\vec{v} \in V$, $\vec{u} \in V$ כך ש- $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{w}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle = 0$ וגם

$$\mathrm{Span}(\vec{a}) = \mathrm{Span}(\vec{u})\ ,\ \mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}) = \mathrm{Span}(\vec{u}, \vec{v})\ ,$$
$$\mathrm{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \mathrm{Span}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

אם תשתמשו בסימון $\mathrm{proj}_{\vec{y}}\vec{x}$, הסבירו את הסימון הזה.

חלק ב'. בעיות קלות יחסית (60 נקודות)

בשאלות 3,4,5 מדובר בהעתקה הלינארית

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{p}''(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \quad , \quad \boldsymbol{T}: \mathbb{R}_3[\boldsymbol{x}] \to \mathbb{R}_3[\boldsymbol{x}]$$

שאלה 3: (15 נקודות) נתון: $p(x) \in \ker(T - I)$, $p(2) \neq p(1)$.
הוכיחו: $\deg(p(x)) = 1$. **נמקו היטב.**
כמובן, כאן I היא העתקת הזהות על $\mathbb{R}_3[x]$.
הסימון $\deg(p(x))$ – פירושו המעלה של הפולינום $p(x)$.

שאלה 4: (15 נקודות) האם ההעתקה T לכסינה? **נמקו היטב.**

שאלה 5: (15 נקודות) נעיר ש-T היא העתקה הפיכה. מצאו את T^{-1}.
יש לכתוב את ההגדרה המפורשת של T^{-1},
כלומר, $T^{-1}(q(x)) = \cdots\cdots$ עבור $q(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ כלשהו.
אין כאן צורך להוכיח ש-T היא העתקה הפיכה, יש לקבל זאת כעובדה ידועה
ולמצוא את ההעתקה ההפכית. **נמקו היטב ובדקו היטב את תשובתכם.**

שאלה 6: (15 נקודות) תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in M_{3\times2}(\mathbb{R})$.
מצאו מטריצות R , Q כך ש-$A = Q \cdot R$, העמודות של Q מהוות בסיס
אורתונורמלי (במובן של המכפלה הסקלרית הסטנדרטית) למישור הנפרש על ידי
העמודות של A , והמטריצה R היא מטריצה משולשית עליונה עם רכיבים
חיוביים באלכסון הראשי.
בדקו היטב את תשובתכם.

חלק ג'. בעיות חשיבה (55 נקודות)

שאלה 7: (10 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי מעל השדה F, תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית.
יהי U תת-מרחב ב-V כך ש-$U \cap \ker(T) = \{\vec{0}\}$.
הוכיחו שאם הווקטורים $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in U$ בלתי תלוים לינארית, אז גם הווקטורים $T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \dots, T(\vec{v}_n)$ הם בלתי תלוים לינארית. **נמקו היטב.**

שאלה 8: (15 נקודות)

תהיינה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}), B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ כך שמתקיים:
$AB = BA \quad , \operatorname{rank}(A) = n-1$.

א. (5 נקודות) הוכיחו שאפס הוא ערך עצמי של A. **נמקו היטב.**

ב. (10 נקודות) הוכיחו שאם $\vec{v} \in \mathbb{C}^n_{col}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה A השייך לערך עצמי אפס, אז $\vec{v}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה B.
נמקו היטב.

שאלה 9: (30 נקודות)

תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ מטריצה אנטי-סימטרית.

א. (15 נקודות) יהי $\lambda \in \mathbb{C}$ ערך עצמי של A.
הוכיחו ש-$\lambda = yi$ עבור $y \in \mathbb{R}$ מסוים. (במילים אחרות: יש להראות שהחלק הממשי של λ הוא אפס.) **נמקו היטב.**

ב. (5 נקודות) הוכיחו שהמטריצות $I + A \;,\; I - A$ הן מטריצות הפיכות.
ניתן להסתמך על הטענה של הסעיף א' גם אם לא הוכחתם אותה.
(כמובן, כאן I היא מטריצת היחידה $n \times n$) **נמקו היטב.**

ג. (10 נקודות) הוכיחו שהמטריצה $(I - A)\cdot(I + A)^{-1}$ אורתוגונלית.
נמקו היטב.

בהצלחה !