בס"ד

אלגברה לינארית 2

מספר הקורס: 7028210-1,2,3 ⬩ תשפ"ב סמסטר א' מועד ב', 14.2.22

מרצים ומתרגלים: צור יצחקיאן, יונה צרניאבסקי, יובל חצ'טריאן-רזיאל, ברוך כשרים.

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות)..

פתרונות וכללי הבדיקה

חלק א'. ניסוח הגדרות ומשפטים (15 נקודות)

שאלה 1: (8 נקודות) תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. על פי ההגדרה, A לכסינה אם קיימות מטריצה הפיכה $P \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ומטריצה אלכסונית $D \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ כך שמתקיים השוויון $A = PDP^{-1}$. כתבו את שתי התכונות השקולות להגדרה זו. (ארבע נקודות על כל אחת משתי התכונות)

תשובה.

1. המטריצה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ לכסינה אם ורק אם ל-A קיימים n וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית.
2. המטריצה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ לכסינה אם ורק אם עבור כל ערך עצמי של A הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגאומטרי.

בדיקה. בתכונה 1 במקום "ל-A קיימים n וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית" אפשר לכתוב "קיים בסיס ל-$\mathbb{C}^n_{col}$ המורכב (או הבנוי) מווקטורים עצמיים של A" או "מווקטורים עצמיים של A ניתן לבנות בסיס ל-$\mathbb{C}^n_{col}$". זאת גם תשובה נכונה. אם בתכונה 2 במקום "עבור כל ערך עצמי של A הריבוי האלגברי שווה לריבוי הגאומטרי" כתוב "סכום הריבויים הגאומטריים של כל הערכים העצמיים של A שווה ל-n " או " סכום הריבויים הגאומטריים של כל הערכים העצמיים של A שווה לסכום של הריבויים האלגבריים" או "הסכום (הישר) של כל המרחבים העצמיים שווה ל-$\mathbb{C}^n_{col}$" – נחשיב זאת לתשובה נכונה. אם הסטודנט כותב "ל-A קיימים n וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית" כתכונה 1 וכתוב "קיים בסיס ל-$\mathbb{C}^n_{col}$ המורכב (או הבנוי) מווקטורים עצמיים של A" או "מווקטורים עצמיים של A ניתן לבנות בסיס ל-$\mathbb{C}^n_{col}$" כתכונה 2, ניתן לו 4 נקודות כי אין כאן שתי תכונות אלא תכונה אחת בניסוחים שונים. כנ"ל לגבי התכונה השניה.

שאלה 2: (7 נקודות)

יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. יהיו $\vec{a} \in V$,$\vec{b} \in V$,$\vec{c} \in V$ שלושה וקטורים בלתי תלויים לינארית. כתבו נוסחאות למציאת וקטורים $\vec{u} \in V$,$\vec{v} \in V$,$\vec{w} \in V$ כך ש-$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ וגם

$$\operatorname{Span}(\vec{a}) = \operatorname{Span}(\vec{u}) , \ \operatorname{Span}(\vec{a}, \vec{b}) = \operatorname{Span}(\vec{u}, \vec{v}) ,$$
$$\operatorname{Span}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \operatorname{Span}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

אם תשתמשו בסימון $\operatorname{proj}_{\vec{y}}\vec{x}$, הסבירו את הסימון הזה.

תשובה. $\operatorname{proj}_{\vec{y}}\vec{x} = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle}\vec{y}$.

$$\vec{u} = \vec{a}$$
$$\vec{v} = \vec{b} - \operatorname{proj}_{\vec{u}}\vec{b}$$
$$\vec{w} = \vec{c} - \operatorname{proj}_{\vec{u}}\vec{c} - \operatorname{proj}_{\vec{v}}\vec{c}$$

אם לא משתמשים בסימון proj:

$$\vec{u} = \vec{a}$$
$$\vec{v} = \vec{b} - \frac{\langle \vec{b}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}\vec{u}$$
$$\vec{w} = \vec{c} - \frac{\langle \vec{c}, \vec{u} \rangle}{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}\vec{u} - \frac{\langle \vec{c}, \vec{v} \rangle}{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}\vec{v}$$

בדיקה. אם בהגדרת proj במונה מופיע $\langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$ במקום $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$, לא נחשיב זאת לטעות למרות שמעל $\mathbb{C}$ זה לא נכון. כנ"ל לגבי $\langle \vec{u}, \vec{b} \rangle$ במקום $\langle \vec{b}, \vec{u} \rangle$ וכו'
אם רק נוסחה עבור $\vec{u}$ כתובה נכון ($\vec{u} = \vec{a}$) ושתי הנוסחאות הנוספות (עבור $\vec{v}$ ו-$\vec{w}$) כתובות לא נכון – אין לזה ערך כלל, אפס נקודות. אם שתי הנוסחאות (עבור $\vec{u}$ ועבור $\vec{v}$) כתובות נכון והנוסחה עבור $\vec{w}$ לא נכונה – ניתן 4 נקודות (מתוך 7). אם הסטודנט משתמש בסימון proj אך מגדיר אותו לא נכון (פרט לסדר הגורמים במכפלה העומדת במונה שהזכרנו לעיל) – שתי נקודות על כל השאלה (מתוך 7), כמובן אם הנוסחאות עבור $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ נכונות.

חלק ב'. בעיות קלות יחסית (60 נקודות)

בשאלות 3,4,5 מדובר בהעתקה הלינארית

$$\boldsymbol{T}\big(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{p}''(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) \quad , \quad \boldsymbol{T}: \mathbb{R}_3[\boldsymbol{x}] \to \mathbb{R}_3[\boldsymbol{x}]$$

שאלה 3: (15 נקודות) נתון: $p(x) \in \ker(T-I)$, $p(2) \neq p(1)$.
הוכיחו: $\deg\big(p(x)\big) = 1$.
כמובן, כאן I היא העתקת הזהות על $\mathbb{R}_3[x]$.
הסימון $\deg\big(p(x)\big)$ – פירושו המעלה של הפולינום $p(x)$.

פתרון. נזכיר ש-$I\big(p(x)\big) = p(x)$. לכן
$(T-I)\big(p(x)\big) = T(p) - I(p) = p''(x) + p(x) - p(x) = p''(x)$
נתון ש-$p(x) \in \ker(T-I)$, לכן $p''(x) = 0$, כלומר, $p''(x)$ הוא
פולינום האפס. הצורה הכללית של פולינום $p(x) \in \mathbb{R}_3[x]$ היא
$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ עבור a, b, c, d ממשיים מסוימים.
נחשב את הנגזרת השניה: $p'(x) = b + 2cx + 3dx^2$,
$p''(x) = 2c + 6dx$.
הפולינום $2c + 6dx$ הוא פולינום האפס אם ורק אם $c = d = 0$.
כאשר נציב $c = 0, d = 0$ ב-$p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, נקבל:
$p(x) = a + bx$. נסכם את מה שקיבלנו עד כה: אם $p(x) \in \ker(T-I)$,
אז $p(x) = a + bx$ עבור $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ מסוימים.
נעיר שמעלת הפולינום $p(x) = a + bx$ היא 1 אם ורק אם $b \neq 0$.
(כאשר $b = 0$ מעלת הפולינום $p(x) = a + bx$ היא 0.)
כעת נשתמש בנתון "$p(2) \neq p(1)$" .
נחשב: $p(1) = a + b$, $p(2) = a + 2b$.
נתון ש-$p(2) \neq p(1)$, לכן $b \neq 0$, ולכן $\deg\big(p(x)\big) = 1$.

בדיקה. אם הסטודנט הגיע להבנה שאם $p(x) \in \ker(T-I)$, אז
$p(x) = a + bx$, אפשר לתת על זה שבע נקודות (מתוך 15).
מעבר לכך – אין ניקוד חלקי.

<u>שאלה 4</u>: (15 נקודות) האם ההעתקה T לכסינה?

<u>פתרון.</u> נביא שתי דרכים לפתרון. הדרך הראשונה קצרה מהדרך השניה, אך, לכאורה, עבור הסטודנטים יותר טבעי לחשוב בדרך השניה.

<u>דרך 1.</u> נעיר ש-$\dim \mathbb{R}_3[x] = 4$. עלינו לבדוק האם ל-T קיימים ארבעה וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית. כמובן, "הווקטורים העצמיים" כאן הם פולינומים. אנחנו מעוניינים בשוויון $T\big(p(x)\big) = \lambda \cdot p(x)$ כך ש-$p(x)$ הוא לא פולינום האפס.

$$T\big(p(x)\big) = \lambda \cdot p(x) \Leftrightarrow p''(x) + p(x) = \lambda \cdot p(x) \Leftrightarrow$$
$$p''(x) = (\lambda - 1) \cdot p(x)$$

אם $\lambda - 1 \neq 0$, אז $\deg\big(p(x)\big) = \deg\big((\lambda-1)p(x)\big)$.

כאשר גוזרים פולינום, המעלה יורדת, לכן אם $\deg\big(p(x)\big) \geq 1$, אז $\deg\big((\lambda-1)p(x)\big) = \deg\big(p(x)\big) > \deg\big(p''(x)\big)$.

אם $\lambda - 1 \neq 0$ ו-$\deg\big(p(x)\big) = 0$ אבל $p(x)$ הוא לא פולינום האפס, אז $(\lambda-1)p(x)$ הוא לא פולינום האפס, אבל $p''(x)$ הוא פולינום האפס. כך או כך, המסקנה היא שכאשר $\lambda - 1 \neq 0$ השוויון $p''(x) = (\lambda-1)p(x)$ לא יכול להתקיים – לא קיים פולינום $p(x)$ המקיים את השוויון הזה. לכן חייב להיות $\lambda - 1 = 0$, כלומר, $\lambda = 1$. קל לראות שהשיקולים שהבאנו תקפים גם מעל המרוכבים. לכן הערך העצמי היחיד של ההעתקה T הוא 1, כל הווקטורים העצמיים של T שייכים לערך עצמי 1 (כי אין ערכים עצמיים נוספים), והווקטורים העצמיים של T הם הפולינומים מ-$\mathbb{R}_3[x]$ כאלה שהנגזרת השניה שלהם היא פולינום האפס. בפתרון של השאלה 3 הגענו למסקנה הבאה:

$$\{p(x) \in \mathbb{R}_3[x] | p''(x) = 0\} = \{a + bx \,| a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}\}$$
$$= \mathrm{Span}(1, x)$$

המימד של $\mathrm{Span}(1,x)$ הוא 2, לא 4. לכן אין להעתקה T ארבעה וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית, לכן ההעתקה T אינה לכסינה.

<u>דרך 2.</u>

כידוע, ההעתקה T לכסינה אם ורק אם המטריצה $[T]_B^B$, המייצגת את ההעתקה, לכסינה (כאשר B הוא בסיס מסוים למרחב בו ההעתקה T פועלת).

יהי $E = (1, x, x^2, x^3)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$. נמצא את המטריצה המייצגת $[T]_E^E$.

$T(1) = (1)'' + 1 = 0 + 1 = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$,

לכן העמודה הראשונה של המטריצה $[T]_E^E$ היא: $[T(1)]_E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$T(x) = (x)'' + x = 0 + x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$, לכן

העמודה השניה של המטריצה $[T]_E^E$ היא: $[T(x)]_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$T(x^2) = (x^2)'' + x^2 = 2 + x^2 = 2 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$,

לכן העמודה השלישית של המטריצה $[T]_E^E$ היא: $[T(x^2)]_E = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$T(x^3) = (x^3)'' + x^3 = 6x + x^3 = 0 \cdot 1 + 6 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 1 \cdot x^3$

, לכן העמודה הרביעית של המטריצה $[T]_E^E$ היא: $[T(x^3)]_E = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

נסכם: $[T]_E^E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

קל מאד לראות: $\det(\lambda I_4 - [T]_E^E) = (\lambda - 1)^4$. לכן למטריצה זו ערך עצמי יחיד שהוא 1 , עם ריבוי אלגברי 4. אילו המטריצה $[T]_E^E$ היתה לכסינה, היא היתה דומה למטריצה האלכסונית $I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. אבל מטריצת היחידה דומה אך ורק לעצמה: $P \cdot I_4 \cdot P^{-1} = I_4$ עבור כל מטריצה P הפיכה מסדר 4. לכן המטריצה $[T]_E^E$ אינה לכסינה, ולכן ההעתקה T <u>אינה לכסינה</u>.

אפשר לנמק גם בדרך הבאה. נעיר שוב שלמטריצה $[T]_E^E$ יש ערך עצמי יחיד שהוא 1 , עם ריבוי אלגברי 4. נמצא את הריבוי הגאומטרי שלו.

$$([T]_E^E - I_4) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

נזכיר את Rank-Nullity Theorem:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}+\dim\left(\operatorname{Null}\begin{bmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\right)=4 \text{ .}$$

קל לראות ש- $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=2$.

לכן $\dim\left(\operatorname{Null}([T]_E^E-I_4)\right)=\dim\left(\operatorname{Null}\begin{bmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\right)=2$.

על פי ההגדרה הריבוי הגאומטרי המבוקש שווה ל- $\dim\left(\operatorname{Null}([T]_E^E-I_4)\right)$.

קיבלנו שעבור ערך עצמי 1 הריבוי האלגברי שונה מירבוי הגאומטרי. לכן המטריצה $[T]_E^E$ אינה לכסינה, ולכן ההעתקה T אינה לכסינה.

כמובן, לא חייבים להשתמש ב-Rank-Nullity Theorem . המערכת למציאת הווקטורים העצמיים השייכים לערך עצמי 1 היא מאד פשוטה: מהצורה המטריציאלית

$$\begin{bmatrix}0&0&2&0\\0&0&0&6\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

מקבלים שתי משוואות $\begin{cases}2x_3=0\\6x_4=0\end{cases}$. כלומר, $x_3=x_4=0$, כאשר על x_1,x_2 אין הגבלה כלל. רואים שקיימים שני פרמטרים חפשיים בפתרון הכללי, לכן הריבוי הגאומטרי של הערך העצמי 1 שווה ל-2 וקטן מהריבוי האלגברי השווה ל-4, לכן המטריצה, ובעקבות כך גם ההעתקה, אינה לכסינה.

אפשר לנמק גם בלי להזכיר את המושגים "ריבוי אלגברי" ו"ריבוי גאומטרי". המטריצה מסדר 4 לכסינה אם ורק אם יש לה ארבעה וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית. למטריצה $[T]_E^E$ יש ערך עצמי יחיד, לכן כל הווקטורים העצמיים שלה שייכים אליו. ראינו שבפתרון הכללי של המערכת למציאת

הווקטורים העצמיים יש שני פרמטרים חפשיים, לכן המספר המקסימלי של וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית הוא 2, לא 4. כלומר אין למטריצה שלנו ארבעה וקטורים עצמיים בלתי תלויים לינארית, לכן היא אינה לכסינה.
נעיר גם שאפשר היה להשתמש בתוצאת השאלה 3:

$$\dim\Big(\mathrm{Null}([T]_E^E - I_4)\Big) = \dim\Big(\ker(T-I)\Big) = 2$$

כי $\ker(T-I) = \{a+bx \mid a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\} = \mathrm{Span}(1,x)$.

<u>בדיקה.</u> על מטריצה מייצגת נכונה אפשר לתת שבע נקודות (מתוך 15). מטריצה מייצגת נכונה – הכוונה נכונה לגמרי, כל ששה עשר רכיבים נכונים, לא "כמעט" נכונה. מעבר לכך – אין ניקוד חלקי. אין כל ערך (אפס נקודות) לתשובה נכונה ("ההעתקה אינה לכסינה") שאינה מלווה בנימוק נכון.

<u>שאלה 5</u>: (15 נקודות) נעיר ש-T היא העתקה הפיכה. מצאו את T^{-1}.
יש לכתוב את ההגדרה המפורשת של T^{-1},
כלומר, $T^{-1}\big(q(x)\big) = \cdots\cdots$ עבור $q(x)\in\mathbb{R}_3[x]$ כלשהו.
אין כאן צורך להוכיח ש-T היא העתקה הפיכה, יש לקבל זאת כעובדה ידועה ולמצוא את ההעתקה ההפכית.

<u>פתרון.</u> <u>דרך 1.</u> נזכיר: $T\big(p(x)\big) = q(x) \Leftrightarrow T^{-1}\big(q(x)\big) = p(x)$.
כדי להבין כיצד ההעתקה ההפכית פועלת יש לבודד את $p(x)$ מהשוויון $T\big(p(x)\big) = q(x)$. כלומר, יש לבודד את $p(x)$ מהשוויון $p''(x) + p(x) = q(x)$ ולבטא את $p(x)$ באמצעות $q(x)$.
קל מאד לעשות זאת: $p(x) = q(x) - p''(x)$. נשאר לבטא את $p''(x)$ באמצעות $q(x)$. נגזור פעמיים את שני האגפים של השוויון $p(x) = q(x) - p''(x)$ ונקבל $\big(p(x)\big)'' = \big(q(x) - p''(x)\big)''$, ומכאן נקבל $p''(x) = q''(x)$. זאת בגלל שכאשר גוזרים ארבע פעמים את פולינום ממעלה לכל היותר שלוש מקבלים את פולינום האפס:

$$(x^3)' = 3x^2, \quad (x^3)'' = (3x^2)' = 6x,$$
$$(x^3)''' = (6x)' = 6\,, \quad (x^3)'''' = (6)' = 0\,.$$

נציב $p''(x) = q''(x)$ חזרה בשוויון $p(x) = q(x) - p''(x)$ ונקבל $p(x) = q(x) - q''(x)$. נחזור להתחלה:
$p(x) = T^{-1}\big(q(x)\big) = q(x) - q''(x)$.
<u>תשובה סופית:</u> $T^{-1}\big(q(x)\big) = q(x) - q''(x)$.
נעיר שאפשר לבדוק בקלות את התשובה הסופית: כאשר מרכיבים העתקות T ו-T^{-1} (לא משנה באיזה סדר), מקבלים העתקת הזהות.

$$
\begin{aligned}
T^{-1}\left(T\big(p(x)\big)\right) &= T^{-1}\big(p''(x)+p(x)\big)\\
&= \big(p''(x)+p(x)\big)-\big(p''(x)+p(x)\big)''\\
&= p''(x)+p(x)-p''''(x)-p''(x)=p(x)\\
&= I\big(p(x)\big)
\end{aligned}
$$

כי $p''''(x)=0$ עבור כל $p(x)\in\mathbb{R}_3[x]$ כפי שהסברנו לעיל.

<u>דרך 2.</u> קיימת דרך נוספת למציאת ההעתקה T^{-1} .

יהי $E=(1,x,x^2,x^3)$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$. קל למצוא את המטריצה המייצגת $[T]_E^E$. עשינו זאת לעיל בפתרון של השאלה הקודמת. כידוע, $([T]_E^E)^{-1}=[T^{-1}]_E^E$. קל מאד למצוא את המטריצה $([T]_E^E)^{-1}$:

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1&0&2&0&1&0&0&0\\
0&1&0&6&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1
\end{array}\right)
\xrightarrow[L_1-2L_3\to L_1\ ;\ L_2-6L_4\to L_2]{}
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1&0&0&0&1&0&-2&0\\
0&1&0&0&0&1&0&-6\\
0&0&1&0&0&0&1&0\\
0&0&0&1&0&0&0&1
\end{array}\right)
$$

כלומר, $[T^{-1}]_E^E=([T]_E^E)^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&-2&0\\0&1&0&-6\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$.

נשתמש בתכונה העיקרית של המטריצה המייצגת:

$[T^{-1}]_E^E\cdot[q(x)]_E=\left[T^{-1}\big(q(x)\big)\right]_E$.

ניקח $q(x)=\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3\in\mathbb{R}_3[x]$. על פי הגדרת עמודת הקואורדינטות $[q(x)]_E=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{bmatrix}$. לכן:

$$
\left[T^{-1}\big(q(x)\big)\right]_E=[T^{-1}]_E^E\cdot[q(x)]_E=\begin{bmatrix}1&0&-2&0\\0&1&0&-6\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{bmatrix}=
$$

$$
=\begin{bmatrix}\alpha-2\gamma\\\beta-6\delta\\\gamma\\\delta\end{bmatrix}
$$

השוויון $\left[T^{-1}\left(q(x)\right)\right]_E = \begin{bmatrix} \alpha - 2\gamma \\ \beta - 6\delta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$ שקיבלנו מתפרש כך:

$$\begin{aligned} T^{-1}\left(q(x)\right) &= T^{-1}(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3) = \\ &= \alpha - 2\gamma + (\beta - 6\delta)x + \gamma x^2 + \delta x^3 = \\ &= \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 - (2\gamma + 6\delta x) = \\ &= q(x) - q''(x) \end{aligned}$$

כי

$$\begin{aligned} q''(x) = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3)'' = (\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2)' = \\ = 2\gamma + 6\delta x \end{aligned}$$

<u>בדיקה.</u> הצורה הרצויה של התשובה היא $T^{-1}\left(q(x)\right) = q(x) - q''(x)$.

עם זאת, אם הסטודנט כותב את התשובה הסופית בצורה

$T^{-1}(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3) = \alpha - 2\gamma + (\beta - 6\delta)x + \gamma x^2 + \delta x^3$

נקבל זאת כתשובה נכונה ואפשר לתת את כל הנקודות, כמובן, אם הנימוקים הם מלאים ונכונים.

כל צורה אחרת של התשובה – היא טעות: כגון $T^{-1}\left(q(x)\right) = \begin{bmatrix} \alpha - 2\gamma \\ \beta - 6\delta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$ או $T^{-1}\left(\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha - 2\gamma \\ \beta - 6\delta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$. תשובה כזאת מצביעה על חוסר הבנה, לכאורה.

על הנוסחה $\left([T]_E^E\right)^{-1} = [T^{-1}]_E^E$ אפשר לתת שתי נקודות.

על הנוסחה $[T^{-1}]_E^E \cdot [q(x)]_E = \left[T^{-1}\left(q(x)\right)\right]_E$ אפשר לתת שתי נקודות.

על מציאת מטריצה $\left([T]_E^E\right)^{-1}$ אפשר לתת שלוש נקודות.

לסיכום: בהעדר תשובה סופית נכונה – לכל היותר שבע נקודות לפי הפירוט שכתבנו לעיל.

אם הסטודנט פעל בדרך הראשונה והגיע לתשובה בצורה $T^{-1}\left(q(x)\right) = q(x) - p''(x)$, כלומר, לא הצליח לבטא את $p''(x)$ באמצעות $q(x)$, אפשר לתת על זה שלוש נקודות (מתוך 15).

שאלה 6: (15 נקודות) תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

מצאו מטריצות R , Q כך ש-$A = Q \cdot R$, העמודות של Q מהוות בסיס אורתונורמלי (במובן של המכפלה הסקלרית הסטנדרטית) למישור הנפרש על ידי העמודות של A , והמטריצה R היא מטריצה משולשית עליונה עם רכיבים חיוביים באלכסון הראשי.

פתרון. קל מאד לשים לב על כך שווקטור-העמודה $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$

מאונך ל-$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ושייך למישור הנפרש על ידי העמודות של A כי הוא מהווה צירוף לינארי של העמודות של A (חיסור של העמודה הראשונה מהעמודה השניה). הווקטור $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ כבר מנורמל (האורך שלו שווה לאחד). ננרמל את ההוקטור $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ ונקבל $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. זאת בגלל שהאורך של הווקטור $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ שווה ל-2: $\sqrt{0^2 + 1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.

הווקטורים $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ מהווים בסיס אורתונורמלי למישור הנפרש על ידי העמודות של A , לכן $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$. מהשוויון $A = Q \cdot R$ ניתן למצוא את המטריצה R בקלות: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

נחשב את המכפלה באגף הימין ונקבל: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{c}{2} \\ 0 & \frac{c\cdot\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

מכאן: $a = b = 1$, $c = 2$. לכן $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>תשובה סופית:</u> $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

<u>בדיקה.</u> אם הסטודנט לא נירמל את הווקטור $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ וכתב תשובה $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, אפשר לתת עשר נקודות (מתוך 15).

החישובים כאן מאד קלים. בתשובה צריכות להופיע שתי מטריצות. אם הסטודנט מצא ש- $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$, אך R שהוא מצא שונה מ- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, ניתן במקרה כזה שבע נקודות (מתוך 15). אם הסטודנט כתב בתשובה ש- $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$, אך R שהוא מצא שונה מ- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ניתן במקרה כזה שלוש נקודות.

חלק ג'. בעיות חשיבה (55 נקודות)

שאלה 7: (10 נקודות)

יהי V מרחב וקטורי מעל השדה F, תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית.

יהי U תת-מרחב ב-V כך ש-$U \cap \ker(T) = \{\vec{0}\}$.

הוכיחו שאם הווקטורים $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in U$ בלתי תלוים לינארית, אז גם הווקטורים $T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \dots, T(\vec{v}_n)$ הם בלתי תלוים לינארית.

<u>הוכחה.</u> נניח ש-$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in U$ בלתי תלוים לינארית. כדי להוכיח ש-$T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \dots, T(\vec{v}_n)$ בלתי תלוים לינארית יש להניח שמתקיים השויון $\alpha_1 T(\vec{v}_1) + \alpha_2 T(\vec{v}_2) + \dots + \alpha_n T(\vec{v}_n) = \vec{0}$ ולהראות שמהשוויון הזה נובע ש-$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. ההעתקה T היא העתקה לינארית, לכן $\alpha_1 T(\vec{v}_1) + \alpha_2 T(\vec{v}_2) + \dots + \alpha_n T(\vec{v}_n) = T(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n)$, ולכן מהשויון $\alpha_1 T(\vec{v}_1) + \alpha_2 T(\vec{v}_2) + \dots + \alpha_n T(\vec{v}_n) = \vec{0}$ נובע השויון $T(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n) = \vec{0}$.
על פי הגדרת הגרעין של העתקה לינארית, מהשויון האחרון נובע ש-$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \in \ker(T)$.
מצד שני נתון ש-$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in U$, ונתון גם ש-$U$ תת-מרחב, ולכן U סגור לחיבור ולכפל בסקלר, ולכן $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \in U$. קיבלנו שהווקטור $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$ שייך גם ל-$\ker(T)$ וגם ל-U, לכן $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \in U \cap \ker(T)$. אבל על פי הנתון $U \cap \ker(T) = \{\vec{0}\}$, ולכן $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0}$. על פי ההנחה שלנו הווקטורים $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ בלתי תלוים לינארית, ולכן על פי ההגדרה של אי-תלות לינארית מהשויון האחרון נובע ש-$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.
הנחנו ש-$\alpha_1 T(\vec{v}_1) + \alpha_2 T(\vec{v}_2) + \dots + \alpha_n T(\vec{v}_n) = \vec{0}$ וקיבלנו ש-$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. על פי ההגדרה של אי-תלות לינארית, זה אומר שהווקטורים $T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2), \dots, T(\vec{v}_n)$ בלתי תלוים לינארית.

<u>בדיקה.</u> זאת שאלה ממטלה 1 תשפ"א, הפתרון פורסם מזמן. אם הסטודנט כתב מפורשות "נניח ש-$\alpha_1 T(\vec{v}_1) + \alpha_2 T(\vec{v}_2) + \dots + \alpha_n T(\vec{v}_n) = \vec{0}$ ונסיק מהנחה זו ש-$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$", ויתר ההוכחה כתוב לא נכון, אפשר לתת על זה שתי נקודות (מתוך 10). אם הסטודנט כתב " $\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n \in U$" ולא הסביר שזה נובע מכך ש-$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in U$, ונתון גם ש-$U$ תת-מרחב, ולכן U סגור לחיבור ולכפל בסקלר -- 5 נקודות (מתוך 10). בסך הכל -- עד שבע (2+5) נקודות.

<u>שאלה 8</u>: (15 נקודות)

תהיינה $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}), B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ כך שמתקיים:

$AB = BA$, $\operatorname{rank}(A) = n - 1$.

א. (5 נקודות) הוכיחו שאפס הוא ערך עצמי של A.

ב. (10 נקודות) הוכיחו שאם $\vec{v} \in \mathbb{C}^n_{col}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה A השייך לערך עצמי אפס, אז $\vec{v}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה B.

<u>פתרון. סעיף א'.</u> כידוע, עבור $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ מתקיים: $\det(A) \neq 0$ אם ורק אם $\operatorname{rank}(A) = n$. (למדנו זאת בקורס אלגברה לינארית 1)

נתון לנו ש-$\operatorname{rank}(A) = n - 1$, כלומר, $\operatorname{rank}(A) \neq n$,

ולכן $\det(A) = 0$. בקורס הנוכחי למדנו את המשפט הבא:

$\det(A - \lambda I_n) = 0$ אם ורק אם λ הוא ערך עצמי של A. אם נציב במשפט האחרון את 0 $\lambda = 0$ נקבל: $\det(A) = \det(A - 0 \cdot I_n) = 0$ אם ורק אם אפס הוא ערך עצמי של A. נסכם: נתון ש-$\operatorname{rank}(A) = n - 1$, לכן $\det(A) = 0$, ולכן אפס הוא ערך עצמי של A.

<u>בדיקה.</u> אם הסטודנט כותב בקיצור נמרץ משהו כמו

"היות ו-$\operatorname{rank}(A) = n - 1 < n$, המטריצה A בלתי הפיכה, ולכן אפס הוא ערך עצמי שלה", נקבל זאת כתשובה נכונה וניתן את כל חמש הנקודות.

<u>פתרון הסעיף ב'.</u> נסמן: $U = \{\vec{u} \in \mathbb{C}^n_{col} \mid A\vec{u} = \vec{0}\}$. בסעיף א' הוכחנו שאפס הוא ערך עצמי של A. כעת נעיר ש-U הוא המרחב העצמי של הערך העצמי 0. זאת בגלל ש-$A\vec{u} = \vec{0} = 0 \cdot \vec{u}$.

מצד שני $U = \operatorname{Null}(A)$, כלומר, U הוא מרחב כל הפתרונות של המערכת הלינארית ההומוגנית $A\vec{x} = \vec{0}$. כידוע, (Rank-Nullity Theorem),

$\operatorname{rank}(A) + \dim(\operatorname{Null}(A)) = n$. נתון לנו ש-$\operatorname{rank}(A) = n - 1$, לכן $\dim(\operatorname{Null}(A)) = 1$, כלומר, $\dim(U) = 1$. מהעובדה ש-U הוא מרחב חד-מימדי נובע שכל שני וקטורים השייכים ל-U הם וקטורים תלויים לינארית.

כעת נניח ש- $\vec{v} \in \mathbb{C}^n_{col}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה A השייך לערך עצמי 0.

זאת אומרת $\vec{v} \neq \vec{0}$, $A\vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$.

מכאן נובע מיידית: $BA\vec{v} = B(A\vec{v}) = B \cdot \vec{0} = \vec{0}$. נתון ש-$AB = BA$.

לכן: $AB\vec{v} = BA\vec{v} = \vec{0}$. קיבלנו: $A(B\vec{v}) = \vec{0}$. נסכם: $\vec{v} \in U$ כי $A\vec{v} = \vec{0}$;

$B\vec{v} \in U$ כי $AB\vec{v} = \vec{0}$. המרחב U הוא חד-מימדי, שני הווקטורים $B\vec{v}, \vec{v}$ שייכים ל-U , לכן הווקטורים $B\vec{v}, \vec{v}$ תלויים לינארית. היות ו-$\vec{v} \neq \vec{0}$, מכך שהווקטורים $B\vec{v}, \vec{v}$ תלויים לינארית נובע (על פי הגדרת וקטור עצמי) ש-$\vec{v}$ הוא וקטור עצמי של המטריצה B.

<u>בדיקה.</u> אם הסטודנט הסיק מהנתונים שהריבוי הגאומטרי של הערך העצמי 0 אצל המטריצה A שווה ל-1, ניתן במקרה כזה שתי נקודות.

<u>שאלה 9</u>: (30 נקודות)

תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ מטריצה אנטי-סימטרית.

א. (15 נקודות) יהי $\lambda \in \mathbb{C}$ ערך עצמי של A.
הוכיחו ש-$\lambda = yi$ עבור $y \in \mathbb{R}$ מסוים. (במילים אחרות: יש להראות שהחלק הממשי של λ הוא אפס.)

ב. (5 נקודות) הוכיחו שהמטריצות $I + A$, $I - A$ הן מטריצות הפיכות.
ניתן להסתמך על הטענה של הסעיף א' גם אם לא הוכחתם אותה.
(כמובן, כאן I היא מטריצת היחידה $n \times n$)

ג. (10 נקודות) הוכיחו שהמטריצה $(I - A)\cdot(I + A)^{-1}$ אורתוגונלית.

<u>פתרון. סעיף א'.</u> ההוכחה של טענה זו דומה מאד להוכחת הטענה שהצגנו בשיעור: הערכים העצמיים של מטריצה סימטרית ממשית הם מספרים ממשיים.
יהי $\vec{v} \in \mathbb{C}^n_{col}$ וקטור עצמי של המטריצה A השייך לערך העצמי λ. המכפלה $\langle *,* \rangle$ היא המכפלה הסקלרית הסטנדרטית ב-$\mathbb{C}^n_{col}$. נתבונן ב-$\langle A\vec{v}, \vec{v}\rangle$.
מצד אחד $\langle A\vec{v}, \vec{v}\rangle = \langle \lambda\vec{v}, \vec{v}\rangle = \lambda\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle$.
מצד שני $\langle A\vec{v}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{v}, A^t\vec{v}\rangle = \langle \vec{v}, -A\vec{v}\rangle = \langle \vec{v}, -\lambda\vec{v}\rangle = -\bar{\lambda}\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle$.
השוויון $\langle A\vec{v}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{v}, A^t\vec{v}\rangle$ מתקיים כי A היא מטריצה ממשית: למטריצה מרוכבת כללית יש הצמדה של המשוחלפת ברכיב השני: $\langle A\vec{v}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{v}, \overline{A^t}\vec{v}\rangle$.
השוויון $\langle \vec{v}, A^t\vec{v}\rangle = \langle \vec{v}, -A\vec{v}\rangle$ מתקיים כי A היא מטריצה אנטי-סימטרית.
קיבלנו: $\lambda\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle = -\bar{\lambda}\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle$. הווקטור $\vec{v}$ הוא וקטור עצמי, לכן $\vec{v} \neq \vec{0}$, ולכן $\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle \neq 0$. לכן מהשוויון $\lambda\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle = -\bar{\lambda}\langle \vec{v}, \vec{v}\rangle$ נובע ש-$\lambda = -\bar{\lambda}$.
אם נסמן $\lambda = x + yi$ כאשר $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$, נקבל:

$$\lambda = -\bar{\lambda} \Leftrightarrow \lambda + \bar{\lambda} = 0 \Leftrightarrow x + yi + x - yi = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 .$$

מכאן $x = 0$, ולכן $\lambda = yi$ עבור $y \in \mathbb{R}$ מסוים.

<u>בדיקה.</u> ההוכחה זאת פורסמה בקובץ הפתרונות למבחן מועד א'. כחלק מהכנה למועד ב', צפוי שהסטודנטים יקראו בעיון את הפתרונות של מועד א'. לכן אין ניקוד חלקי על הסעיף הזה.

<u>סעיף ב'.</u> בסעיף א' ראינו שכל ערך עצמי של A הוא מספר מרוכב מהצורה $\lambda = yi$ עבור $y \in \mathbb{R}$ מסוים. המספרים הממשיים 1 , -1 אינם מהצורה הזאת, לכן המספרים הממשיים 1 , -1 אינם ערכים עצמיים של A. למדנו את המשפט הבא: $\det(A - \lambda I_n) = 0$ אם ורק אם λ הוא ערך עצמי של A.
במילים אחרות: $\det(A - \lambda I_n) \neq 0$ אם ורק אם λ אינו ערך עצמי של A .
המספר -1 אינו ערך עצמי של A,

לכן $\det(I+A)=\det(A-(-1)\cdot I)\neq 0$. לכן המטריצה $I+A$ הפיכה.
המספר 1 אינו ערך עצמי של A,
לכן $\det(I-A)=(-1)^n\cdot\det(A-I)=\det(A-1\cdot I)\neq 0$.
לכן המטריצה $I-A$ הפיכה.
<u>בדיקה.</u> אם הסטודנט מוכיח נכון שאחת המטריצות $I+A, I-A$ הפיכה, אפשר לתת שלוש נקודות (מתוך 5).

<u>סעיף ג'.</u> נסמן: $B=(I-A)\cdot(I+A)^{-1}$. על פי הגדרת מטריצה אורתוגונלית, יש להוכיח אחד משני השוויונים: $B^tB=I$ או $BB^t=I$.

$$B^tB=\left((I-A)\cdot(I+A)^{-1}\right)^t\cdot(I-A)\cdot(I+A)^{-1}=$$
$$=((I+A)^{-1})^t\cdot(I-A)^t\cdot(I-A)\cdot(I+A)^{-1}=$$
$$=((I+A)^t)^{-1}\cdot(I-A)^t\cdot(I-A)\cdot(I+A)^{-1}=$$
$$=(I^t+A^t)^{-1}\cdot(I^t-A^t)\cdot(I-A)\cdot(I+A)^{-1}=$$
$$=(I-A)^{-1}\cdot(I+A)\cdot(I-A)\cdot(I+A)^{-1}$$

עד כאן השתמשנו בתכונות הפשוטות שנלמדו בקורס אלגברה לינארית 1:
$(PQ)^t=Q^tP^t$, $(P+Q)^t=P^t+Q^t$, $(P^{-1})^t=(P^t)^{-1}$, $I^t=I$.
כמו כן השתמשנו בהגדרת מטריצה אנטי-סימטרית: $A^t=-A$ (וגם במסקנה מיידית מהגדרה זו, $-A^t=A$). על מנת להמשיך מהנקודה בה עצרנו, יש להעיר שהמטריצות $I+A,\ \ I-A$ מתחלפות בכפל. אכן,

$$(I+A)\cdot(I-A)=I^2-I\cdot A+A\cdot I-A^2=$$
$$=I-A+A-A^2=I-A^2$$

וגם $(I-A)\cdot(I+A)=I-A^2$.
לכן $(I+A)\cdot(I-A)=(I-A)\cdot(I+A)$.
נמשיך את החישוב שלנו מהנקודה בה עצרנו:

$$B^tB=(I-A)^{-1}\cdot(I+A)\cdot(I-A)\cdot(I+A)^{-1}$$
$$=(I-A)^{-1}\cdot(I-A)\cdot(I+A)\cdot(I+A)^{-1}=I\cdot I=I$$

השתמשנו כאן בכך ש-$(I-A)^{-1}\cdot(I-A)=I$
וגם $(I+A)\cdot(I+A)^{-1}=I$.
הוכחנו שהמטריצה הריבועית B מקיימת את השוויון $B^tB=I$, לכן על פי ההגדרה המטריצה $B=(I-A)\cdot(I+A)^{-1}$ היא מטריצה אורתוגונלית.

<u>בדיקה.</u> אם הסטודנט רשם נכון את מה שצריך להוכיח (כלומר, הוא זוכר נכון הגדרת מטריצה אורתוגונלית) ניתן שתי נקודות. אם הסטודנט התחיל את החישוב והגיע לכך ש-$B^tB=(I-A)^{-1}\cdot(I+A)\cdot(I-A)\cdot(I+A)^{-1}$,
אפשר לתת עוד שתי נקודות. לסיכום: אם הסטודנט לא הבין שהמטריצות $I+A,\ \ I-A$ מתחלפות בכפל, ובעקבות כך לא הוכיח את הטענה – לכל היותר ארבע נקודות (מתוך 10).