מטלה 1 בחישוביות, חורף 2022-23

הנחיות כלליות למטלות:

- אין חובה להגיש את המטלות. כל מטלה תקנה עד 3 נקודות בונוס בציון הסופי של הקורס, בתנאי שהציון במבחן יהיה לפחות 60.
- ההגשה היא בזוגות. אין הגשה ביחידים. (אפשר זוגות מקבוצות שונות.) התייעצות עם אחרים מותרת (אם כי עדיף קודם לשבור את הראש לבד), אך חובה לכתוב את הפתרון לבד.
- רק בן-זוג אחד יגיש את המטלה במודל. זה חשוב על מנת למנוע עבודה כפולה בבדיקה. המטלה תכלול את ת"ז של שני המגישים בשם הקובץ ובעמוד הראשון
- מותר להתייעץ עם מספר מועט של סטודנטים אחרים ולחפש מידע באינטרנט, אך חייבים לכתוב את התשובות לבד עם חומר סגור.
- במידה והתייעצתם או חיפשתם מידע, יש לציין את המקורות.
- תשובות דומות אחת לשנייה בצורה לא סבירה ייחשבו כהעתקה.
- בכל מקרה של העתקה הסטודנטים המעורבים יקבלו ציון 0 בקורס.
- צילומי דפים צריכים להיות קריאים. מומלץ להשתמש באפליקציה כגון CAMSCANNER. צילומים באיכות ירודה לא ייבדקו.
- אפשר להגיש עד 2 ימי איחור, אך מטלה באיחור תקנה רק עד נקודת בונוס אחת
- הבדיקה תהיה מדגמית. יהיה ניקוד חלקי.

הנחיות טכניות למטלה זו:

- ההגשה עד ה- 5.12.2022 בחצות דרך המודל.
- באף שאלה פרט ל 1, אין צורך בבניה מלאה של מכונות טיורינג, אלא מספיק להסביר את אופן הפעולה של המכונה בצורה מילולית.
- יש לפתור את המטלה על סמך החומר שלמדנו בארבעת ההרצאות הראשונות, וההנחות שמניחים בחלק מהשאלות, ולא מעבר לכך (לא כולל משפט Rice)!
- באף אחד מהסעיפים אין צורך ביותר מחצי עמוד (ובד"כ נתן להסתפק בהרבה פחות) יש להוכיח את תשובותיכם, אלא אם נאמר אחרת במפורש.

נושאים: הגדרת מכונת טיורינג, שקילות מודלים, המחלקות R,RE,coRE ותכונות שלהן. רדוקציות. סיווג שפות.

שאלות

1. נזכיר שעבור א"ב סופיים $\Sigma \subset \Gamma$, פונקציה $f : \Sigma^* \to \Gamma^*$ היא מלאה, אם היא מוגדרת על כל קלט. בנוסף, הפונקציה ניתנת לחישוב, אם קיימת מ"ט M, כך שלכל $x \in \Sigma^*$ עליו f מוגדרת M מחזירה את $f(x)$, ואם $f(x)$ לא מוגדרת, M אינה עוצרת על x. בה"כ נקבע $\Sigma = \{0,1\}, \Gamma = \{0,1,b\}$ בכל הסעיפים פרט לאחרון. בשאלה זו אין להשתמש במשפטים שלמדנו לגבי אי כריעות של שפות מסויימות (בפרט, יש להשתמש במה שנלמד לפני הגדרת המחלקות R, RE, לא כולל).
   א. נתונה פונקציה f מלאה ושאינה ניתנת לחישוב. תנו דוגמה לפונקציה f' שאינה מלאה ושאינה ניתנת לחישוב. הוכיחו את תשובתכם! רמז: הניחו בשלילה ש f' שהגדרתם ניתנת לחישוב, והראו מ"ט המחשבת את f.
   ב. הוכיחו כי קיימת פונקציה שאינה מלאה ואינה ניתנת לחישוב. (כאן לא ניתן להשתמש בהנחת קיום הפונקציה f מסעיף 1, שבה הניחו קיום פונקציה כזו, אך לא הוכיחו אותו).
   ג. תנו דוגמה לפונקציה מלאה הניתנת לחישוב.
   ד. תנו דוגמה לפונקציה שאינה מלאה הניתנת לחישוב.
2. לכל אחד מהמודלים הבאים, הוכיחו או הפריכו שקילות למ"ט.
   א. מכונת טיורינג עם אינסוף סרטים, המהווה הרחבה טבעית למודל הדו סרטי. בפרט פונקציית המעברים שלה מוגדרת כך:
   $$\delta : Q \times \Gamma \times \Gamma \ldots \to Q \times (\Gamma \times \{S,R,L\}) \times (\Gamma \times \{S,R,L\}) \ldots$$
   בכל צעד, אם נמצאים במצב q, והראשים על סרטים $1,2,\ldots$ רואים $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots)$ בהתאמה, הפעולה בסרט ה i היא לפי הקורדינאטה ה i ב $\delta(\bar{a})$. השאר הוא כמו במודל הדו סרטי.
   ב. מכונת טיורינג בעלת אינסוף סרטים, כמו בסעיף א. אלא שכאן δ היא בעלת מבנה מיוחד, שבו הצעד בסרט ה i תלוי רק בתוכן הראש בסרט זה. כלומר, $\delta(q,\bar{a}) = (p, \delta_1(q,a_1), \delta_2(q,a_2) \ldots)$
   ג. מ"ט שבה Q יכול להיות אינסופי, כל השאר כמו במ"ט רגילה (בפרט, Σ, Γ סופיים).
   ד. מ"ט שבה Γ יכול להיות אינסופי, כל השאר כמו במ"ט רגילה (בפרט, Σ, Q סופיים).
   ה. נשים לב שמודלים חישוביים מגדירים פונקציות המתאימות לכל מחרוזת $< M >$, פונקציה חלקית, המחושבת על ידי ה"מחשב" המקודד על ידי אותה מחרוזת M. גם מודלים אחרים, כגון NFA או RAM מגדירים התאמה כזו, ברגע שנקבע קידוד מסויים עבור "תוכנות"/"מחשבים". לדוגמה, המודל הרגיל של מ"ט מתאים לקידוד חוקי של מכונה את הפונקציה המחושבת על ידי אותה מכונה, ואחרת את הפונקציה הממפה כל מחרוזת ל ϵ (המחושבת על ידי M_{stam}). נתבונן במשפחה של מודלים $\mathcal{M}_{T.M,g} : \{0,1\}^* \to \{f : \Sigma^* \to \Gamma^* | \text{f is a partial function and } \Sigma \subsetneq \Gamma \text{ are finite alphabets}\}$ המרחיבים את המודל $\mathcal{M}_{T.M} : \{0,1\}^* \to \{f : \Sigma^* \to \Gamma^* | \text{f is a partial function and }, \Sigma \subsetneq \Gamma \text{ are finite alphabets}\}$ של מכונת טיורינג הרגיל כך: $g : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ היא פונקציה חלקית כלשהי, והמודל $\mathcal{M}_{T.M,g}$ הוא כמו המודל הרגיל, אלא שמחרוזת p שאינה מהווה קידוד חוקי של מ"ט חוקית מקיימת: $\mathcal{M}_{T.M,g}(p) = g(p)$. זאת במקום הפונקציה של M_{stam} המקיימת $f(x) = \epsilon$ על כל קלט (קבענו שכל קידוד כזה הוא קידוד של מ"ט שמיד עוצרת ומקבלת כל קלט, בפרט הפלט שלה הוא ϵ). הוכיחו או הפריכו:
      1. ישנם אינסוף מודלים במשפחה $M_{T.M,g}$ השקולים למ"ט.
      2. ישנם אינסוף מודלים במשפחה $M_{T.M,g}$ שאינם שקולים למ"ט.
3. א. הוכיחו או הפריכו:
      1. RE סגורה לשרשור.
      2. תהי A קבוצת שפות שאינה בת מניה. אזי לא קיימת שפה שלמה לקבוצת השפות הנ"ל.
      3. הוכיחו שקיים אופרטור אונארי (המוכר לכם מסגירויות של אוטומטים 1) $S : P(\Sigma^*) \to P(\Sigma^*)$ ש R סגורה תחתיו ואילו RE אינה סגורה.

   הסבר נוסף: אופרטור אונארי על שפות הוא פשוט פונקציה כלשהי שממפה שפות לשפות, למשל $S(L) = L^*$. רמז: הזכרו שקיימת שפה ב RE/R.

   ב. תנו דוגמה לאופרטור אונארי חד חד ערכי (כלומר הפונקציה שהאופרטור מהווה היא חח"ע) כך ש RE סגורה תחתיו, אבל R אינה סגורה תחתיו. בניגוד לסעיף הקודם, כאן האופרטור לא צריך להיות "מוכר" או "שימושי". רמז: הזכרו שקיימת שפה ב RE/R.
4. בשאלה זו נחקור את גבולות השימושיות של פונקציה מסויימת בתור פונקציית רדוקציה בין זוגות שפות רבים. תהי $f(x) : \Sigma^* \to \Sigma^*$ פונקציית מלאה וניתנת לחישוב. נסמן ב $Ref_f = \{(L_1, L_2) \subseteq (\Sigma^*)^2 | f \text{ is a reduction function from } L_1 \text{ to } L_2\}$. הוכיחו או הפריכו:
   א. $|\{L_2 | \exists L_1 \text{ such that } (L_1, L_2) \in Ref_f\}| = \infty$ (תמיד, לכל בחירה של f).
   ב. $|\{L_1 | \exists L_2 \text{ such that } (L_1, L_2) \in Ref_f\}| = \infty$ (תמיד, לכל בחירה של f)
   ג. $\{L_1 | \exists L_2 \text{ such that } (L_1, L_2) \in Ref_f\}$ הקבוצה היא סופית (תמיד, לכל בחירה של f).
5. לכל אחת מהשפות הבאות קבעו האם היא שייכת למחלקות לכל אחת מהמחלקות $R, RE, coRE$. הוכיחו את תשובתכם.
   א. $L_1 = \{< M > | \exists M', \text{ where } | < M' > | > | < M > |, \text{ and } L(M) \subseteq L(M')\}$

   בעברית: L_1 היא אוסף כל קידודי המכונות $< M >$ כך שקיימת מכונה בעלת קידוד ארוך מזה של M, שהשפה שלה מכילה את השפה של M.

   ב. $L_2 = \{< M > | M \text{ accepts infinitely many words of evenlength, and rejects infinitely many words of odd length.}\}$

   בעברית: L_2 היא אוסף כל קידודי המכונות $< M >$ שמקבלות אינסוף מילים באורך זוגי, ודוחות אינסוף מילים באורך אי זוגי.

   ג. $L_3 = \{< M > | \exists M', \text{ where } | < \mathrm{M}' > | > | < M > | \text{ and } L(M) \cap L(M') \geq 3\}$

   בעברית: L_3 היא אוסף כל קידודי המכונות $< M >$ כך שקיימת מכונה בעלת קידוד הארוך מזה של M והחיתוך בין השפה שלה לשפה של M הוא לפחות 3.

   ד. $L_4 = \{< M > | \forall M', \text{ where } | < \mathrm{M}' > | > | < M > | L(M) \cap L(M') \leq 3\}$

   בעברית: L_3 היא אוסף כל קידודי המכונות $< M >$ כך שלכל מכונה בעלת קידוד הארוך מזה של M החיתוך בין השפה שלה לשפה של M הוא לכל היותר 3.