תרגיל 1 - אלגברה לינארית 2 - פתרון

1 (א) נמצא את המטריצות $[I]_S^B$, $[I]_S^C$.

ונשתמש בשוויון $[I]_C^B = [I]_C^S [I]_S^B$

את $[I]_B^C$ נמצא בעזרת הצבות $[I]_B^C = \left([I]_C^B\right)^{-1}$.

מתקיים:

$$[I]_S^B = \left([b_1]_S \mid [b_2]_S \mid [b_3]_S\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[I]_S^C = \left([c_1]_S \mid [c_2]_S \mid [c_3]_S\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[I]_C^S = \left([I]_S^C\right)^{-1} = \frac{1}{\det [I]_S^C} \cdot \operatorname{adj} [I]_S^C = \frac{1}{\det [I]_S^C} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

ולכן

$$[I]_C^B = [I]_C^S [I]_S^B = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

נחשב את $[I]_B^C = \left([I]_C^B\right)^{-1}$.

נקבל:

$$[I]_B^C = \left([I]_C^B\right)^{-1} = \frac{1}{\det([I]_C^B)} \operatorname{adj} [I]_C^B =$$

$$= \frac{1}{\det([I]_C^B)} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(1/2)} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(ב) נמצא את מטריצת מעבר $[I]_C^B$ ישירות.

נסמן:

$$[I]_C^B = \left([b_1]_C, [b_2]_C, [b_3]_C\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

לפי הגדרה של $[b_i]_C$ מתקיים:

$$b_i = a_{1i}c_1 + a_{2i}c_2 + a_{3i}c_3 = a_{1i}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_{2i}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a_{3i}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b_i = a_{1i}c_1 + a_{2i}c_2 + a_{3i}c_3 = a_{1i}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + a_{2i}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + a_{3i}\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$

ולכן:

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{1i}\\a_{2i}\\a_{3i}\end{bmatrix}$$

קיבלנו 3 מערכות של משוואות:

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix} = \left[b_1 \mid b_2 \mid b_3\right] = \begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

נפתור אות את המערכות יחד

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&1&1\\1&0&1&0&1&1\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&1\\0&1&1&1&1&1\\1&1&0&0&0&1\end{array}\right] \xleftrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 - R_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&1\\0&1&1&1&1&1\\0&1&-1&0&-1&0\end{array}\right] \xleftrightarrow{R_3 \leftarrow R_2 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&1\\0&1&1&1&1&1\\0&0&-2&-1&-2&-1\end{array}\right] \xleftrightarrow{R_3 \leftarrow -\frac{1}{2}R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&1\\0&1&1&1&1&1\\0&0&1&\frac{1}{2}&1&\frac{1}{2}\end{array}\right] \xleftrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&1\\0&1&0&1/2&0&1/2\\0&0&1&1/2&1&1/2\end{array}\right] \xleftrightarrow{R_1 \leftarrow R_1 - R_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-1/2&0&1/2\\0&1&0&1/2&0&1/2\\0&0&1&1/2&1&1/2\end{array}\right] \Rightarrow [I]_C^B = \begin{bmatrix}-1/2&0&1/2\\1/2&0&1/2\\1/2&1&1/2\end{bmatrix}$$

נחשב את $[I]_B^C$ על ידי היפוך של $[I]_C^B$ כמו בסעיף הקודם

<u>שאלה 2</u>: נפתור מערכת משוואות $p(x) = 2+2x+3x^2 = \alpha \cdot b_1 + \beta \cdot b_2 + \gamma \cdot b_3$

על מנת לחשב את $[p(x)]_B = \begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix}$.

$$2+2x+3x^2 = \alpha \cdot b_1 + \beta \cdot b_2 + \gamma \cdot b_3 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot (1+x) + \gamma \cdot (1+2x+x^2)$$

נשווה את המקדמים של החזקות בשני האגפים ונקבל:

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma = 2\\ \beta + 2\gamma = 2\\ \gamma = 3\end{cases} \Rightarrow \beta = 2 - 2\gamma = -4 \Rightarrow \alpha = 2 - \beta - \gamma = 2-(-4)-3 = 3$$

נבדוק שזה אכן הפתרון: $3 \cdot 1 - 4 \cdot (1+x) + 3 \cdot (1+2x+x^2) = 2+2x+3x^2 = p(x)$

כמו שרצינו.

<u>שאלה 3</u>: תחילה, נמצא מטריצת המעבר $[I]_B^S$ עבור הבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$

$$S = \left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$$

$$S = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]_B = \begin{bmatrix} \frac12 \\ \frac12 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[I]_B^S = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

ולכן מטריצת מעבר

אם $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \Leftarrow [A]_S = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix}$,

לכן: $[A]_B = [I]_B^S [A]_B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac12(a_{11}+a_{22}) \\ \frac12(a_{11}-a_{22}) \\ \frac12(a_{12}+a_{21}) \\ \frac12(a_{12}-a_{21}) \end{bmatrix}$

תרגיל 4: נסמן $s_i = x^i$, $b_i = 2x^i$ עבור $0 \le i \le 3$

קל לראות שמתקיים: $b_i = 2s_i$ ו $\frac{1}{2} b_i = s_i$.

ולכן, $[b_i]_S = 2e_i$, $[s_i]_B = \frac{1}{2} e_i$.

מכאן:
$$[I]_B^S = \left([s_1]_B \middle| [s_2]_B \middle| [s_3]_B \middle| [s_4]_B \right)$$
$$= \left(\tfrac12 e_1 \middle| \tfrac12 e_2 \middle| \tfrac12 e_3 \middle| \tfrac12 e_4 \right)$$
$$= \frac12 \left(e_1 | e_2 | e_3 | e_4 \right) = \frac12 I \rightarrow \frac12 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

באותו אופן
$$[I]_S^B = 2(e_1 | e_2 | e_3 | e_4) = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ב) נשים לב, שאם $B = (b_1, \dots b_n)$ הוא בסיס ל V

אזי $\alpha B = (\alpha b_1, \dots \alpha b_n)$ ומתקיים: $b_i = \frac{1}{\alpha}(\alpha b_i)$ ולכן $[b_i]_{\alpha B} = \frac{1}{\alpha} e_i$.

מכאן ש
$$[I]_{\alpha B}^B = \left(\tfrac{1}{\alpha} e_1 \middle| \dots \middle| \tfrac{1}{\alpha} e_n \right) = \frac{1}{\alpha} I$$

כאשר I היא מטריצת היחידה.

תרגיל 5: C הוא בסיס של V אם ורק אם C בת"ל,

כיוון ש- $|C| = 3 = |B|$, ו- B הוא בסיס של V על פי הנתון.

$\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ בת"ל, אם ורק אם $[\bar{c}_1]_B, [\bar{c}_2]_B, [\bar{c}_3]_B$ בת"ל אם ורק אם

המטריצה $A = ([c_1]_B | [c_2]_B | [c_3]_B)$ הפיכה.

על פי הנתון,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

ו- A הפיכה אם ורק אם $a_{ii} \neq 0$ לכל $1 \leq i \leq 3$.

אם C בסיס, אזי $[\bar{c}_1]_B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[\bar{c}_2]_B = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \end{pmatrix}$,

$[\bar{c}_3]_B = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$

ו- $[I]^C_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = A$

על מנת למצוא את $[I]^B_C$ נחשב את ההופכית של A. (נקבל)

$$[I]^C_B = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A = \frac{1}{a_{11}a_{22}a_{33}} \begin{pmatrix} a_{22}a_{33} & -a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ 0 & a_{11}a_{33} & -a_{11}a_{23} \\ 0 & 0 & a_{11}a_{22} \end{pmatrix}$$

(2) מטריצת מעבר היא

$$[I]^C_B = ([\bar{c}_1]_B | \dots | [c_n]_B) = (a_{ij})_{i,j=1}^n.$$

מטריצה $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ היא משולשית עליונה אם ורק אם $a_{ij} = 0$ לכל $i > j$.

כלומר: $\bar{c}_j = \sum_{i=1}^{j} a_{ij} \bar{b}_i \Leftarrow$ לכל $1 \leq j \leq n$,

$\bar{c}_j \in span\{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_j\}$.

מצד שני, כיוון ש- $A = [I]^C_B$ משולשית עליונה והפיכה, ערכי האלכסון

אינם מתאפסים, כלומר $a_{jj} \neq 0$,

לכן $\bar{c}_j = a_{jj}\bar{b}_j + \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}\bar{b}_i$

ולכן $\bar{c}_j \notin span\{\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_{j-1}\}$.

בסה"כ, קיבלנו $\bar{c}_j \in span\{b_1, \dots, b_j\} \setminus \{b_1, \dots, b_{j-1}\}$, זה תנאי הכרחי ומספיק.

(ב) $[I]^C_B$ משולשית עליונה, לכן $([I]^C_B)^{-1} = [I]^B_C$ משולשית עליונה.

(ג) נמצא דוגמה נגדית. (הערה: ניתן להשתמש בדוגמה למט' 3ה הפיכה שגם,

כיוון שבכל מיטר יש לכל היותר 2 מיקומים שאינם מתאפסים).

כיוון שבכל מיצר יש לכל פותר ב מיצרים שאינם מתאפסים).

כיוון ש $[I]_C^B$ משולשית עליונה לפי סעיף ב, $\alpha_{ij}=0$ לכל $j<i$.

מתקיים $\bar{c}_1 = a_{11}\bar{b}_1$ ולכן $\frac{1}{a_{11}}\bar{c}_1=\bar{b}_1$.

נניח שמצאנו α_{ij} לכל $j\le m$.

נמצא את $\alpha_{i,m+1}$,

מתקיים:
$$\bar{c}_{m+1}=\sum_{i=1}^{m+1} a_{i,m+1}\bar{b}_i$$

נעביר אגפים, ונקבל $a_{m+1,m+1}\bar{b}_{m+1}=\bar{c}_{m+1}-\sum_{i=1}^{m} a_{i,m+1}\bar{b}_i$.

$$=\bar{c}_{m+1}-\sum_{i=1}^{m} a_{i,m+1}\Big(\sum_{j=1}^{i}\alpha_{ji}\bar{c}_j\Big)=\bar{c}_{m+1}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i}\alpha_{ij}a_{i,m+1}\bar{c}_j$$

נעזרים ב רקורסיביות
(עם מקרה בסיס $\alpha_{11}=\frac{1}{a_{11}}$ ו $\alpha_{ij}=0$ לכל $i>j$)

נחל. אינדקסים, תחום ההגדרה של i ו j
הוא $1\le i\le m$ ו $1\le i\le j$
$\Longleftrightarrow$ $1\le j\le m$ ו $j\le i\le m$

נחל. את סדר הסכימה - כלומר, נסכום לפי j קודם i ונקבל:

$$a_{m+1,m+1}\bar{b}_{m+1}=\bar{c}_{m+1}-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i}\alpha_{ij}a_{i,m+1}\bar{c}_j=\bar{c}_{m+1}-\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=j}^{m}\alpha_{ij}a_{i,m+1}\bar{c}_j$$

$$=\bar{c}_{m+1}-\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=j}^{m}\alpha_{ij}a_{i,m+1}\Big)\bar{c}_j$$

נחלק את שני הצדדים ב $a_{m+1,m+1}$ ונשווה את המקדמים.

נקבל:
$$\bar{b}_{m+1}=\underbrace{\frac{1}{a_{m+1,m+1}}}_{\alpha_{m+1,m+1}}\bar{c}_{m+1}+\sum_{j=1}^{m}\underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_{ij}a_{i,m+1}}{a_{m+1,m+1}}\Big)}_{\alpha_{j,m+1}}c_j$$
$1\le j\le m$

<u>תרגיל 6</u>: (יש לציין שבשאלה הושמטה המילה "הפיכה")

כל מר: הנוסח הנכון הוא: הראו, שלכל $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ $\boxed{\text{הפיכה}}$ קיים בסיס יחיד C כך ש $A=[I]_C^B$)

<u>פתרון</u>: תהי $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה. נראה, שקיים בסיס יחיד C של V, כך ש $[I]_C^B=A$, או באופן שקול $A[V]_B=[V]_C$.

$$[V]_C=A[V]_B \Longleftrightarrow [V]_B=A^{-1}[V]_C \Longleftrightarrow A^{-1}=[I]_B^C$$

$$[I]_B^C=A^{-1}=\big([c_1]_B|\dots|[c_n]_B\big).$$

נסמן $A^{-1}=M$ ואת הרכיבים של M יהיו m_{ij}.

נתבונן בוקטורים $\bar{c}_1,\dots,\bar{c}_n$ המוגדרים. על ידי $\bar{c}_j=\sum_i m_{ij}\bar{b}_i$.

לפי ההגדרה, $[c_j]_B = \begin{bmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{bmatrix} = C_j(M)$

סימון של עמודה j של מטריצה.

ולכן $M = ([c_1]_B \dots [c_n]_B) = [I]^C_B \iff A = M^{-1} = [I]^B_C$.

על מנת להראות יחידות, נניח שקיים בסיס $C'=(\bar{c}_1',\dots,\bar{c}_n')$ כך

כך ש $[I]^B_{C'} = A = [I]^B_C$, אז,

$$[I]^C_C = [I]^B_C[I]^{C'}_B = [I]^B_C\left([I]^{C'}_B\right) = A\cdot A^{-1} = I.$$

ולכן $[\bar{c}_i']_C = e_i \iff c_i' = c_i \iff C' = C$.

(ב) נשים לב, שאם נשים את איברי B כעמודות של מטריצה, נקבל את מטריצת המעבר $[I]^B_S$. על מנת למצוא את C, מספיק למצוא את העמודות של $[I]^C_S$.

לפי הנתון, $A=[I]^B_C$ ולכן $A^{-1}=[I]^C_B$ ולכן $[I]^B_S A^{-1} = [I]^B_S[I]^C_B = [I]^C_S$.

נמצא את A^{-1} בעזרת הנוסחה:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\operatorname{adj}A = \frac{1}{\det\begin{pmatrix}\frac13 & \frac12 & \frac16\\ 0 & \frac12 & \frac12\\ \frac23 & 0 & \frac13\end{pmatrix}}\operatorname{adj}\begin{bmatrix}1/3 & 1/2 & 1/6\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ \frac23 & 0 & 1/3\end{bmatrix} = \frac{1}{1/6}\begin{bmatrix}1/6 & -1/6 & 1/6\\ 1/3 & 0 & -1/6\\ -1/3 & 1/3 & 1/6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$[I]^B_S = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow [I]^B_S[I]^C_B = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$C = \left(\begin{bmatrix}0\\-1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}\right)$$

תרגיל 7:

(א) יהיו B_1 ו B_2 בסיסים של V.

נראה ש P קיימת. תהי $Q=[I]^{B_1}_{B_2}$.

מתקיים $[v]_{B_2} = Q[v]_{B_1}$ לכל $v\in V$ על פי הגדרה של $[I]^{B_1}_{B_2}$.

ולכן $[v]^{B_2} = \left([v]_{B_2}\right)^t = \left(Q[v]_{B_1}\right)^t = \left([v]_{B_1}\right)^t Q^t = [v]^{B_2}Q^t$.

ולכן $[v]^{B_2} = \left([v]_{B_2}\right)^t = \left(Q[v]_{B_1}\right)^t = \left([v]_{B_1}\right)Q^t = [v]^{B_2}Q^t$.

ניקח $P = Q^t$.

נראה ש P יחידה. נניח ש $\tilde{P}$ מקיימת $[v]^{B_1}\tilde{P} = [v]^{B_2}$ לכל $v\in V$.

אזי, לכל $v \in V$ $[v]_{B_2} = \left([v]^{B_2}\right)^t = \left([v]^{B_1}\tilde{P}\right)^t = \tilde{P}^t[v]_{B_1}$.

על פי היחידות של מטריצת מעבר, $\tilde{P}^t = [I]^{B_2}_{B_1}$, ולכן

$\tilde{P} = \left(\tilde{P}^t\right)^t = \left([I]^{B_1}_{B_2}\right)^t = P$.

ב) על פי סעיף א), $P = \left([I]^{B_2}_{B_1}\right)^t$, ולכן $\left(C_i\left([I]^{B_2}_{B_1}\right)\right)^t = R_i(P)$ כאשר R_i מסמל שורה i של מטריצה ו C_i את העמודה ה-i של המטריצה.

נסמן: $B_1 = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$.

מתקיים: $C_i\left([I]^{B_1}_{B_2}\right) = [v_i]_{B_2}$.

ולכן $R_i(P) = \left([v_i]_{B_2}\right)^t = [v_i]^{B_2}$.