בס"ד

אלגברה לינארית 2

מספר הקורס: 7028210-1,2,3 • תשפ"ב סמסטר א' מועד א', 20.1.22

מרצים ומתרגלים: צור יצחקיאן, יונה צרניאבסקי, יובל חצ'טריאן-רזיאל, ברוך כשרים.

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות)..

עיינו היטב בהוראות הבחינה.

ניתן לענות על כל השאלות. אין להשתמש בחומר עזר מכל סוג. אין להשתמש בדף נוסחאות. אין להשתמש במחשבון. אין להשתמש בטלפון.
בדקו היטב את כל מה שאתם כותבים. בשאלות חישוביות השתדלו מאד לקבל תשובה נכונה. אין לצפות להרבה נקודות "על הדרך" בהעדר תשובה נכונה. ההסברים חייבים לכלול הסברים מילוליים, לא רק חישובים וסימונים מתמטיים. בהוכחות יש לצטט את המשפטים, התכונות, ההגדרות שעליהם אתם מסתמכים. אין לבקש מהמרצה או מהמתרגל בזמן המבחן לעיין במה שכתבתם. אין לבקש מהמרצה או מהמתרגל בזמן המבחן עזרה בפתרון, הכוונה, מיקוד, רמז או הדרכה. בזמן המבחן אפשר לשאול את המרצה או המתרגל רק בנוגע לניסוח של שאלה מחלק ב' וג'. **אנא כתבו את תשובותיכם באופן מסודר.**

חלק א'. ניסוח הגדרות ומשפטים (20 נקודות)

בשאלות הניסוח יש לפרש את כל הסימונים שבשימוש באופן מלא ומפורט.

שאלה 1: (6 נקודות)

א. (2 נקודות) כתבו את ההגדרה של עמודת הקואורדינטות של וקטור לפי בסיס נתון.

ב. (4 נקודות) כתבו את ההגדרה של המטריצה המייצגת העתקה לינארית בבסיסים נתונים. במקום הגדרת המטריצה המייצגת ניתן לכתוב את התכונה העיקרית של המטריצה המייצגת (כי היא שקולה להגדרה).

נא לפרש את כל הסימונים: מהו B, מהו V וכו'

שאלה 2: (6 נקודות)

כתבו את הגדרת הריבוי הגאומטרי של ערך עצמי (של מטריצה או של העתקה לינארית – לבחירתכם).

שאלה 3: (3 נקודות)

כתבו את ההגדרה של הפולינום האופייני של מטריצה.

שאלה 4: (5 נקודות)

כתבו את הניסוח המפורט של משפט קיילי-המילטון.

חלק ב'. בעיות קלות יחסית (60 נקודות)

שאלות 5,6,7,8,9,10,11 הן מעל אותו מבנה. בכל השאלות האלה:
V הוא מרחב המטריצות 3×3 האנטי-סימטריות עם רכיבים ממשיים.
כלומר, $V = \{X \in M_{3\times3}(\mathbb{R}) | X^t = -X\}$.
A היא מטריצה 3×3 אנטי-סימטרית מסויימת עם רכיבים ממשיים, כלומר,
$A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}$. ($a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}$)
וכן,

$$T_A(X) = AX - XA$$

שאלה 5: (10 נקודות) הוכיחו ש-$T_A(X) \in V$ עבור כל $X \in V$. **נמקו היטב.**

שאלה 6: (10 נקודות) הוכיחו ש-$T_A: V \to V$ היא העתקה לינארית. **נמקו היטב.**

שאלה 7: (10 נקודות)

נסמן: $E = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right)$.

הוכיחו ש-E מהווה בסיס של V. **נמקו היטב.**

שאלה 8: (10 נקודות) מצאו את המטריצה $[T_A]_E^E$. **בדקו היטב את תשובתכם.**

שאלה 9: (10 נקודות) הוכיחו שעבור כל מטריצה $A \in V$ ההעתקה הלינארית T_A לכסינה (ניתנת ללכסון) מעל $\mathbb{C}$. **נמקו היטב.**

שאלה 10: (10 נקודות) הוכיחו שאם $A \neq 0_{3\times3}$, אז $\dim(\operatorname{Im}(T_A)) = 2$.
נמקו היטב.

חלק ג'. בעיות חשיבה (45 נקודות)

שאלה 11: (10 נקודות) הסימונים V, A, T_A הם כמו בחלק ב'.
מצאו בסיס B למרחב V כך ש-$A = [T_A]_B^B$.
הערה: יש להביא דוגמה אחת של בסיס B כזה.
נמקו היטב ובדקו היטב את תשובתכם.

שאלה 12: (10 נקודות) תהי $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$. נגדיר את ההעתקה הלינארית הבאה:
$S_A: \mathbb{R}_3[x] \to M_{3\times3}(\mathbb{R})$, $S_A(p) = p(A)$.
הוכיחו ש-$\dim(\ker(S_A)) \geq 1$ עבור כל $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$. **נמקו היטב.**

שאלה 13: (10 נקודות)
יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. יהיו U, W תת-מרחבים של V.
הוכיחו ש-$(U+W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$. **נמקו היטב את ההוכחה.**

שאלה 14: (5 נקודות)
יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית אוניטרית,
כלומר, $\langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$ עבור כל $\vec{u}, \vec{v} \in V$.
יהי $\lambda \in \mathbb{C}$ ערך עצמי של T. הוכיחו: $|\lambda| = 1$. **נמקו היטב.**
הדרכה. יהי $\vec{v}$ וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי λ.
התבוננו במכפלה $\langle T(\vec{v}), T(\vec{v})\rangle$.

שאלה 15: (10 נקודות)
יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית אוניטרית,
כלומר, $\langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$ עבור כל $\vec{u}, \vec{v} \in V$.
יהי $\vec{v}$ וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי λ. יהי $\vec{u}$ וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי μ, כאשר $\lambda \neq \mu$.
הוכיחו ש-$\vec{u}, \vec{v}$ מאונכים זה לזה. כלומר, הוכיחו ש-$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0$. **נמקו היטב.**
הדרכה. התבוננו במכפלה $\langle T(\vec{u}), T(\vec{v})\rangle$. השתמשו בהגדרת העתקה אוניטרית, בהגדרת ערך עצמי וקטור עצמי ובתוצאת השאלה הקודמת, שאלה 14.

בהצלחה !