עבודת בית 4

1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. יהי $\vec{u}\in V$ כך שעבור כל $\vec{v}\in V$ מתקיים השויון $\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = 0$. הוכיחו ש-$\vec{u}=\vec{0}$.

2. הוכיחו שהנוסחה $\langle A,B\rangle = Trace\left(AB^t\right)$ מגדירה מכפלה פנימית ב-$M_{k\times n}\left(\mathbb{R}\right)$.

3. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. האם קיימת העתקה לינארית $T:V\to V$ כך ש-$\left\|T\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\right\| = \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ עבור כל $\vec{u},\vec{v}\in V$?

4. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית כך ש-$\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{v}\rangle = 0$ עבור כל $\vec{u},\vec{v}\in V$. הוכיחו ש-$T=0$.

5. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית כך ש-$\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{u}\rangle = 0$ עבור כל $\vec{u}\in V$. הוכיחו ש-$T=0$. הוכיחו שמעל $\mathbb{R}$ הטענה לא נכונה.
הדרכה. על ידי התבוננות ב-$\langle T\left(\vec{u}+\vec{v}\right),\vec{u}+\vec{v}\rangle$ הוכיחו ש-$\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{v}\rangle = -\langle T\left(\vec{v}\right),\vec{u}\rangle$.
עכשיו הציבו $i\vec{u}$ במקום $\vec{u}$.

6. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו את כלל המקבילית:
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right)$ עבור כל $\vec{u},\vec{v}\in V$.