

# עבודה מסכמת בקורס הסתברות 2

סמסטר א'

30.01.2019

פרופ' דן חפץ

אוניברסיטת אריאל

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה למדעי המחשב

המבחן הינו עבור מספרי קורס: 2-7037110-1

מבנה המבחן: 4 שאלות ללא בחירה.

**הנחיות:**

1. אין לכתוב בעפרון.
2. יש להוכיח כל טענה שאתם כותבים גם אם לא התבקשתם לעשות זאת במפורש בשאלה.
3. ניתן להסתמך ללא הוכחה על כל טענה שנלמדה בשיעור (אלא אם כן זו הטענה שהנכם מתבקשים להוכיח בשאלה). יש לצטט את הטענה עליה הנכם מסתמכים בצורה ברורה.
4. ניתן להסתמך על סעיפים קודמים גם אם לא הצלחתם לפתור אותם.
5. סכום הנקודות במבחן הוא 110 אבל הציון המירבי שניתן לקבל הוא 100.

### שאלה 1 (30 נקודות):

- תהי  $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$  סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים כך ש- $X_i \sim U(\{-1, 0, 1\})$  לכל  $i \in \mathbb{N}$ .  
 לכל  $n \in \mathbb{N}$  יהי  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .  
 א. (15 נקודות) השתמשו באי שוויון צ'רנוף (כפי שנלמד בהרצאות) כדי למצוא חסם עליון טוב ככל האפשר על  $\Pr(|S_n| > 2\sqrt{n})$ .  
 ב. (15 נקודות) השתמשו במשפט הגבול המרכזי כדי למצוא הערכה טובה ככל האפשר ל- $\Pr(|S_n| > 2\sqrt{n})$ .

### שאלה 2 (25 נקודות):

כתבו אלגוריתם המקיים את כל התכונות הבאות:

1. **קלט:** מספרים ממשיים  $0 \leq a_1, a_2, \dots, a_n \leq 1$  ו- $\varepsilon > 0$  ו- $\delta > 0$ .
2. **פלט:** מספר ממשי  $x$ .
3. לכל קלט, הפלט של האלגוריתם צריך לקיים  $\left| \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} - x \right| < \varepsilon$  בהסתברות  $1 - \delta$  לפחות.
4. זמן הריצה של האלגוריתם קבוע (כלומר לא תלוי ב- $n$  אבל יכול להיות תלוי ב- $\varepsilon$  וב- $\delta$ ).

### שאלה 3 (25 נקודות):

- יהיו  $n \geq k \geq 2$  וכן  $m < 2^{k-1}$  מספרים טבעיים. תהי  $\{A_1, \dots, A_m\}$  משפחה של תת קבוצות של  $\{1, \dots, n\}$  כך ש- $|A_i| = k$  לכל  $1 \leq i \leq m$ . הוכיחו שקיימת צביעה של איברי  $\{1, \dots, n\}$  בשלושה צבעים כך ש- $A_i$  תכיל איברים משני צבעים שונים לפחות לכל  $1 \leq i \leq m$ .

### שאלה 4 (30 נקודות):

- א. (10 נקודות) יהי  $X$  משתנה מקרי עם תוחלת  $E(X) = 3/5$  ופונקציית צפיפות

$$f_X(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

מצאו את  $a$  ו- $b$ .

- ב. (10 נקודות) יהי  $Y$  משתנה מקרי רציף המתפלג אחיד על הקטע  $(0, 5)$ . מה ההסתברות שלמשוואה  $4z^2 + 4zY + Y + 2 = 0$  יש שני פתרונות ממשיים שונים?

- ג. (10 נקודות) יהי  $Z$  משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי ויהי  $a > 0$  מספר ממשי. הוכיחו ש- $\Pr(|Z| > a) = 2 \Pr(Z > a)$ .