

מבחן בקורס הסתברות 2

סמסטר א' 2017

מבחן לדוגמה

ד"ר דן חפץ

אוניברסיטת אריאל

הפקולטה למדעי הטבע

המחלקה למדעי המחשב

משך הבחינה: 3 שעות

המבחן הינו עבור מספרי קורס: 1-7037110-2

מבנה המבחן: 4 שאלות ללא בחירה.

הנחיות:

1. המבחן הינו עם חומר סגור ובכתב יד ללא שימוש בשום אמצעי אלקטרוני. עם זאת, כל סטודנט רשאי להביא דף אחד מגודל A4 כתוב משני צדדיו. על התלמיד לכתוב את שמו ומספר תעודת הזהות שלו על הדף הנ"ל.
2. אין לכתוב בעפרון.
3. יש להוכיח כל טענה שאתם כותבים גם אם לא התבקשתם לעשות זאת במפורש בשאלה.
4. ניתן להסתמך ללא הוכחה על כל טענה שנלמדה בשיעור (אלא אם כן זו הטענה שהנכם מתבקשים להוכיח בשאלה). יש לצטט את הטענה עליה הנכם מסתמכים בצורה ברורה.

שאלה 1 (25 נקודות):

חלקיק נמצא בנקודה 0 על ציר המספרים. בכל שלב הוא נע צעד אחד ימינה (כלומר מ- t ל- $t+1$) בהסתברות $1/2$ או שמאלה (כלומר מ- t ל- $t-1$) בהסתברות $1/2$ באופן בלתי תלוי בשלבים הקודמים. הוכיחו שההסתברות שאחרי 100 השלבים החלקיק נמצא בנקודה שהיא מימין ל-20 היא לכל היותר e^{-2} .

שאלה 2 (25 נקודות):

תהי F משפחה של וקטורים בינאריים באורך n . כל וקטור $(x_1, \dots, x_n) \in F$ מקיים $\sum_{i=1}^n x_i \geq 2n/3$ (במקרה זה נאמר שהוקטור (x_1, \dots, x_n) הוא גדול) או $\sum_{i=1}^n x_i \leq n/3$ (במקרה זה נאמר שהוקטור (x_1, \dots, x_n) הוא קטן). כתבו אלגוריתם המקיים את כל התכונות הבאות:

1. **קלט:** וקטור $(x_1, \dots, x_n) \in F$ כלשהו.
2. **פלט:** " (x_1, \dots, x_n) קטן" או " (x_1, \dots, x_n) גדול".
3. לכל קלט, הפלט של האלגוריתם צריך להיות נכון בהסתברות $1 - 2^{-100}$ לפחות.
4. זמן הריצה של האלגוריתם קבוע (כלומר לא תלוי ב- n).

שאלה 3 (25 נקודות):

יהי X משתנה מקרי המקיים $\Pr(X = x_i) = p_i$ לכל $1 \leq i \leq n$ ויהי Y משתנה מקרי המקיים $\Pr(Y = y_j) = q_j$ לכל $1 \leq j \leq m$. הוכיחו שאם X ו- Y בלתי תלויים אז $H(X, Y) = H(X) + H(Y)$, כאשר H היא פונקציית האנתרופיה.

שאלה 4 (25 נקודות):

הוכיחו כי $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(\text{קשיר } B(n, n, 1/2)) = 1$.