עבודת בית 5

1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. יהיו U,W תת-מרחבים של V.

הוכיחו או הפריכו:

א. $(U+W)^{\perp}=U^{\perp}+W^{\perp}$ **ב.** $(U+W)^{\perp}=U^{\perp}\cap W^{\perp}$ **ג.** $(U+W)^{\perp}=(U\cap W)^{\perp}$

2. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית אוניטרית, כלומר, $\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle=\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ עבור כל $\vec{u},\vec{v}\in V$. יהי $\lambda\in\mathbb{C}$ ערך עצמי של T.

הוכיחו: $|\lambda|=1$.

<u>הדרכה.</u> יהי $\vec{v}$ וקטור עצמי של T השייך לע"ע λ. התבוננו במכפלה $\langle T(\vec{v}),T(\vec{v})\rangle$.

3. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית אוניטרית.

יהיו $\lambda\in\mathbb{C}$, $\mu\in\mathbb{C}$ ערכים עצמיים של T, $\lambda\neq\mu$.

יהי $\vec{v}$ וקטור עצמי של T השייך לע"ע λ. יהי $\vec{u}$ ו"ע של T השייך לע"ע μ.

הוכיחו ש- $\vec{u}$, $\vec{v}$ מאונכים זה לזה. כלומר, הוכיחו ש-$\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=0$.

<u>הדרכה.</u> התבוננו במכפלה $\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle$. השתמשו בהגדרת העתקה אוניטרית, בהגדרת ע"ע וו"ע ובתוצאת השאלה הקודמת, שאלה 2.

4. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית, ונתון ש- $\|T(\vec{v})\|=\|\vec{v}\|$ לכל $\vec{v}\in V$. (תזכורת: $\|\vec{v}\|=\sqrt{\langle\vec{v},\vec{v}\rangle}$). הוכיחו ש- T היא העתקה אוניטרית, כלומר, הוכיחו ש-$\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle=\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$ עבור כל $\vec{u},\vec{v}\in V$.

<u>הדרכה.</u> קחו שני וקטורים שרירותיים $\vec{u},\vec{v}\in V$. התבוננו ב-$\|T(\vec{u}+\vec{v})\|^2$ כדי להוכיח ש-$\operatorname{Re}\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle=\operatorname{Re}\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$. אחר כך התבוננו ב-$\|T(i\vec{u}+\vec{v})\|^2$ כדי להוכיח ש-$\operatorname{Im}\langle T(\vec{u}),T(\vec{v})\rangle=\operatorname{Im}\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$. כמובן, כאן "Im" מסמן את החלק המדומה של מספר מרוכב, לא את תמונה של העתקה. כאשר $y\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}$, $z=x+iy$, המספר הממשי x נקרא החלק הממשי של z, וכותבים $x=\operatorname{Re}z$, המספר הממשי y נקרא החלק המדומה של z, וכותבים $y=\operatorname{Im}z$.