בס"ד

אלגברה ליניארית 2

מספר הקורס: 7028210-1,2 • תשפ"ג סמסטר א' מועד א', 8.2.23
מרצים ומתרגלים: [illegible]
משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).

עיינו היטב בהוראות הבחינה.

ניתן לענות על כל השאלות. אין להשתמש בחומר עזר מכל סוג. אין להשתמש בדף נוסחאות. אין להשתמש במחשבון. אין להשתמש בטלפון. בדקו היטב את כל מה שאתם כותבים. בשאלות החישוביות השתדלו מאד לקבל תשובה נכונה. הסברים חייבים להכיל מילים, לא רק חישובים וסימונים מתמטיים. בהוכחות יש לצטט את המשפטים, התכונות, ההגדרות שעליהם אתם מסתמכים. אין לבקש מהמרצה או מהמתרגל בזמן המבחן לעיין במה שכתבתם. אין לבקש מהמרצה או מהמתרגל בזמן המבחן עזרה בפתרון, הכוונה, מיקוד, רמז או הדרכה. בזמן המבחן אפשר לשאול את המרצה או המתרגל רק לגבי ניסוח השאלות.

יש לכתוב את כל התשובות במחברת הבחינה, ולא על גבי השאלון כי השאלון לא נסרק.

<u>שאלה 1</u>: (30 נקודות) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$.
יהי $B = (\vec{p}, \vec{q}, \vec{r})$ בסיס של V. תהי $T: V \to V$ העתקה לינארית כך ש-
$T(\vec{p}) = T\left(\frac{1}{2}\vec{q}\right) = T(-\vec{r}) = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$.
נסמן:

$$\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}\ ;\ \vec{b} = \vec{p} + \vec{q}\ ;\ \vec{c} = \vec{p} + \vec{r}\ ;\ \vec{d} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$$

א. (10 נקודות) מצאו את המטריצה $[T]_B^B$.

על סעיפי ב', ג' של שאלה זו יש לענות ללא שימוש במטריצה המייצגת. מי שאינו יודע כיצד לענות על סעיפי ב', ג' ללא שימוש במטריצה המייצגת, יענה על ידי שימוש במטריצה המייצגת, אך יקבל מחצית הנקודות: 5 נקודות לכל היותר על הסעיף ב', 5 נקודות לכל היותר על הסעיף ג'.

ב. (10 נקודות) אילו וקטורים מארבעת הווקטורים $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ הם וקטורים עצמיים של ההעתקה T?

ג. (10 נקודות) מהי קבוצת כל הערכים העצמיים של ההעתקה T?

נמקו היטב ובדקו היטב את התשובות.

<u>שאלה 2</u>: (10 נקודות) יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$, יהיו U, W תת-מרחבים של V כך ש-$U \subseteq W$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות.

א. (5 נקודות) $U^\perp \subseteq W^\perp$.

ב. (5 נקודות) $U^\perp \supseteq W^\perp$.

נמקו היטב ובדקו היטב את התשובות.

<u>שאלה 3</u>: (20 נקודות) תהי $A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{bmatrix} \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$. מצאו את
כל זוגות ערכי הפרמטרים (a,b) עבורם קבוצת כל הערכים העצמיים של
המטריצה A היא $\{-1\,,1\}$. (כלומר, $1\,,-1$ הם ע"ע של A , ואין ל-A ערכים
עצמיים אחרים בנוסף לשני הערכים האלה.)
נמקו היטב ובדקו היטב את התשובה.

<u>שאלה 4</u>: (20 נקודות) יהי V מרחב וקטורי מעל השדה F. תהי $T: V \to V$
העתקה לינארית. יהיו $\lambda, \mu \in F$ ערכים עצמיים שונים של T, כלומר, $\lambda \neq \mu$.
יהי $\vec{u} \in V$ וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי λ, יהיו $\vec{v} \in V, \vec{w} \in V$
וקטורים עצמיים של T השייכים לערך עצמי μ.
נתון שהווקטורים $\vec{v}, \vec{w}$ בלתי תלויים לינארית.
הוכיחו שהווקטורים $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ בלתי תלויים לינארית.
נמקו היטב את ההוכחה.

<u>שאלה 5</u>: (20 נקודות) תהי $A \in M_{3\times3}(\mathbb{C})$, תהי $B \in M_{3\times3}(\mathbb{C})$.
כרגיל, $\chi_B(x) = \det(xI_3 - B)$ הוא הפולינום האופייני של המטריצה B.
נתון ש-$\chi_A(x) = \chi_B(x) = x^3 + x$.
הוכיחו שהמטריצה A דומה למטריצה B.
נמקו היטב את ההוכחה.

<u>שאלה 6</u>: (20 נקודות) תהי $A \in M_{3\times3}(\mathbb{C})$ כך ש-

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A + I_3) = \mathrm{rank}(A + 2I_3) = \mathrm{rank}(A + 3I_3)$$

הוכיחו שהמטריצה A הפיכה.
נמקו היטב את ההוכחה.

בהצלחה!

בס"ד

פתרונות למבחן מועד א' אלגברה לינארית 2, 8.2.23

① (א) $T(\vec{p})=\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}=1\cdot\vec{p}+1\cdot\vec{q}+1\cdot\vec{r}$

לכן העמודה הראשונה של $[T]_B^B$ היא

$$[T(\vec{p})]_B=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

העתקה T לינארית, לכן $T(\frac{1}{2}\vec{q})=\frac{1}{2}T(\vec{q})$, לכן

$$\frac{1}{2}T(\vec{q})=T(\frac{1}{2}\vec{q})=\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}$$

מכאן

$$T(\vec{q})=2\vec{p}+2\vec{q}+2\vec{r}.$$

לכן העמודה השניה של $[T]_B^B$ היא

$$[T(\vec{q})]_B=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}.$$

העתקה T לינארית, לכן $T(-\vec{r})=-T(\vec{r})$, לכן

$$-T(\vec{r})=T(-\vec{r})=\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}.$$

מכאן

$$T(\vec{r})=-\vec{p}-\vec{q}-\vec{r}=(-1)\cdot\vec{p}+(-1)\cdot\vec{q}+(-1)\cdot\vec{r}.$$

לכן העמודה השלישית של $[T]_B^B$ היא

$$[T(\vec{r})]_B=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}.$$

נסכם:

$$[T]_B^B=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&2&-1\\1&2&-1\end{bmatrix}.$$

Scanned with CamScanner

2

1 (ג)

$$T(\vec{a}) = T(2\vec{p}-\vec{q}) = 2T(\vec{p}) - T(\vec{q}) =$$
$$= 2\cdot(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}) - (2\vec{p}+2\vec{q}+2\vec{r}) = \vec{0}$$

קיבלנו: $T(\vec{a}) = \vec{0} = 0\cdot\vec{a}$,

כלומר, $\vec{a}$ הוא וקטור עצמי של T השייך לע"ע 0.

$$T(\vec{b}) = T(\vec{p}+\vec{q}) = T(\vec{p}) + T(\vec{q}) =$$
$$= \vec{p}+\vec{q}+\vec{r}+2\vec{p}+2\vec{q}+2\vec{r} = 3\vec{p}+3\vec{q}+3\vec{r}$$

קל להראות שהווקטורים $\vec{b}, T(\vec{b})$ בת"ל:

נניח ש- $\alpha T(\vec{b}) + \beta\vec{b} = \vec{0}$.

מכאן:
$$\alpha(3\vec{p}+3\vec{q}+3\vec{r}) + \beta(\vec{p}+\vec{q}) = \vec{0}$$
$$(3\alpha+\beta)\vec{p} + (3\alpha+\beta)\vec{q} + 3\alpha\vec{r} = \vec{0}$$

נתון ש- $B=(\vec{p},\vec{q},\vec{r})$ בסיס, לכן $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ בת"ל, לכן
$$3\alpha+\beta = 3\alpha = 0$$
מכאן מיידית נובע ש- $\alpha=\beta=0$.

כמו שראינו הווקטורים $\vec{b}, T(\vec{b})$ בת"ל, לכן $\vec{b}$ אינו וקטור עצמי של T.

$$T(\vec{c}) = T(\vec{p}+\vec{r}) = T(\vec{p}) + T(\vec{r}) = \vec{p}+\vec{q}+\vec{r}-\vec{p}-\vec{q}-\vec{r} = \vec{0} = 0\cdot\vec{c}$$

מכאן $\vec{c}$ הוא ו"ע של T השייך לע"ע 0.

$$T(\vec{d}) = T(\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}) = T(\vec{p}) + T(\vec{q}) + T(\vec{r}) =$$
$$= \vec{p}+\vec{q}+\vec{r}+2\vec{p}+2\vec{q}+2\vec{r}-\vec{p}-\vec{q}-\vec{r} = 2\vec{p}+2\vec{q}+2\vec{r} = 2\vec{d}$$

קיבלנו ש- $T(\vec{d}) = 2\vec{d}$, כלומר $\vec{d}$ הוא וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי 2.

(1) (ג) בסעיף הקודם ראינו ש- 0,2 הם ערכים עצמיים של T. נסביר מדוע אין ל- T ערכים עצמיים נוספים. ראינו ש- $\vec{a},\vec{c}$ הם ו"ע של T השייכים לע"ע 0. נראה ש- $\vec{a},\vec{c}$ בת"ל.

נניח ש- $\alpha\vec{a}+\beta\vec{c}=\vec{0}$. כלומר,

$$\alpha(2\vec{p}-\vec{q})+\beta(\vec{p}+\vec{r})=\vec{0}$$

$$(2\alpha+\beta)\vec{p}-\alpha\vec{q}+\beta\vec{r}=\vec{0}$$

נתון ש- $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ הם וקטורי בסיס, לכן $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ בת"ל, לכן $2\alpha+\beta=-\alpha=\beta=0$, כלומר, $\alpha=\beta=0$!

הוכחנו ש- $\vec{a},\vec{c}$ בת"ל. לכן הריבוי הגאומטרי של הערך העצמי 0 הוא לפחות 2, ולכן הריבוי האלגברי של הערך העצמי 0 הוא גם לפחות 2.

יש לנו עוד ע"ע שהוא המספר 2, והריבוי האלגברי שלו לפחות 1. סכום הריבויים האלגבריים של כל הערכים העצמיים של T שווה לשלוש כי $\dim V=3$, ולכן חייב להיות שאין ל- T עוד ערך עצמי בנוסף ל- 0,2: אילו היה כזה ערך, הריבוי האלגברי שלו היה לפחות 1 ואז הסכום של הריבויים האלגבריים היה לפחות 4, וזה בלתי אפשרי!

$$(2+1+1=4)$$

2 (א) הטענה לא נכונה. יהי V מרחב לא טריוויאלי, כלומר, $V\neq\{\vec{0}\}$.

ניקח $U=\{\vec{0}\}$, $W=V$. התנאי $U\subseteq W$ מתקיים, אבל $U^{\perp}=V$ לא מוכל ב $W^{\perp}=\{\vec{0}\}$.

(ב) הטענה נכונה. ניקח $\vec{a}\in W^{\perp}$ ונראה ש $\vec{a}\in U^{\perp}$.

$\vec{a}\in W^{\perp}$, לכן $\vec{a}$ מאונך לכל וקטורי W, בפרט, $\vec{a}$ מאונך לכל וקטורי U כי U מהווה תת-קבוצה של W.

קיבלנו ש $\vec{a}$ מאונך לכל וקטורי U, לכן, על פי ההגדרה, $\vec{a}\in U^{\perp}$.

הוכחנו שכל וקטור השייך ל $W^{\perp}$, בהכרח שייך גם ל $U^{\perp}$, לכן $W^{\perp}\subseteq U^{\perp}$

5

3

כידוע, הערכים העצמיים של A הם השורשים של הפולינום האופייני של A. A היא מטריצה 3×3, $\chi_A(x)=\det(xI_3-A)$ הוא פולינום ממעלה 3, כדי שקבוצת הערכים העצמיים של A תהיה $\{-1,1\}$ צריך שיתקיים:

$$\chi_A(x)=(x+1)(x-1)^2$$

או

$$\chi_A(x)=(x+1)^2(x-1).$$

$$\chi_A(x)=\det\begin{bmatrix}x-a & -b & -b\\ 1 & x-3 & -2\\ -2 & 8 & x+5\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}x-a & 0 & -b\\ 1 & x-1 & -2\\ -2 & 3-x & x+5\end{bmatrix}=$$

$$=(x-a)\big((x-1)(x+5)-(-2)\cdot(3-x)\big)-b\big(1\cdot(3-x)-(x-1)\cdot(-2)\big)$$

$$=(x-a)(x^2+4x-5+6-2x)-b(3-x+2x-2)=$$

$$=(x-a)(x^2+2x+1)-b(x+1)=$$

$$=(x-a)(x+1)^2-b(x+1)=$$

$$=(x+1)\big((x-a)(x+1)-b\big)=(x+1)\big(x^2+(1-a)x+(-a-b)\big)$$

1. $(x+1)(x-1)^2=(x+1)\big(x^2+(1-a)x+(-a-b)\big)$

$$(x-1)^2=x^2+(1-a)x+(-a-b)$$

$$x^2-2x+1=x^2+(1-a)x+(-a-b)$$

נשווה את המקדמים:
$$\begin{cases}-2=1-a\\ 1=-a-b\end{cases}$$

מכאן מקבלים:
$$\begin{cases}a=3\\ b=-4\end{cases}$$

2. $(x+1)^2(x-1)=(x+1)\big(x^2+(1-a)x+(-a-b)\big)$

$$(x+1)(x-1)=x^2+(1-a)x+(-a-b)$$

$$x^2+0\cdot x-1=x^2+(1-a)x+(-a-b)$$

נשווה את המקדמים:
$$\begin{cases}0=1-a\\ -1=-a-b\end{cases}$$

מכאן מקבלים:
$$\begin{cases}a=1\\ b=0\end{cases}$$

תשובה: $(a,b)=(3,-4)$ או $(a,b)=(1,0)$

או בצורה אחרת: $(a,b)\in\{(1,0),(3,-4)\}$

Scanned with CamScanner

(4) כדי להוכיח ש $\vec{w},\vec{v},\vec{u}$ בת"ל, נניח ש

$$\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0} \quad (*)$$

ונוכיח שמזה נובע ש $\alpha=\beta=\gamma=0$.

נפעיל את T על שני האגפים של השוויון $(*)$:

$$T(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w})=T(\vec{0})$$

העתקה T לינארית, לכן

$$\alpha T(\vec{u})+\beta T(\vec{v})+\gamma T(\vec{w})=\vec{0}$$

נתון ש $T(\vec{u})=\lambda\vec{u},\ T(\vec{v})=\mu\vec{v},\ T(\vec{w})=\mu\vec{w}$,

לכן $\alpha\lambda\vec{u}+\beta\mu\vec{v}+\gamma\mu\vec{w}=\vec{0} \quad (**)$.

כעת נכפול את שני האגפים של $(*)$ בסקלר μ:

$$\alpha\mu\vec{u}+\beta\mu\vec{v}+\gamma\mu\vec{w}=\vec{0} \quad (***)$$

נחסר את השוויון $(***)$ משוויון $(**)$:

$$\begin{array}{lr} \alpha\lambda\vec{u}+\beta\mu\vec{v}+\gamma\mu\vec{w}=\vec{0} & (**) \\ -\ \alpha\mu\vec{u}+\beta\mu\vec{v}+\gamma\mu\vec{w}=\vec{0} & (***) \\ \hline \alpha(\lambda-\mu)\vec{u}=\vec{0} & \end{array}$$

נתון ש $\mu\neq\lambda$, לכן $0\neq\mu-\lambda$. הווקטור $\vec{u}$ הוא וקטור עצמי, לכן $\vec{0}\neq\vec{u}$. לכן חייב להיות ש $\alpha=0$ (כי אם $\alpha\neq0$, אז קיים $\alpha^{-1}(\lambda-\mu)^{-1}$ ואם נכפול בו את שני האגפים של השוויון האחרון, נקבל ש $\vec{u}=\vec{0}$ בסתירה לנתון ש $\vec{u}$ הוא ו"ע)

נציב את $\alpha=0$ בשוויון $(*)$ ונקבל $\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$.

נתון ש $\vec{w},\vec{v}$ בת"ל, לכן $\beta=\gamma=0$.

נסכם: קיבלנו ש $\alpha=0,\ \beta=\gamma=0$, ולכן, על פי ההגדרה, הווקטורים $\vec{w},\vec{v},\vec{u}$ בלתי תלויים לינארית.

(5)

$$\chi_A(x) = x^3+x = x(x^2+1) = x(x+i)(x-i)$$

הערכים העצמיים של A הם השורשים של $\chi_A(x)$,
לכן הערכים העצמיים של A הם $0,-i,i$.
A היא מטריצה 3×3, ויש לA שלושה ע"ע שונים,
לכן A לכסינה והיא דומה ל $D=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-i&0\\0&0&i\end{bmatrix}$.

נתון ש $\chi_B(x)=\chi_A(x)$, לכן כל מה שכתבנו
לעיל לגבי A נכון גם עבור B, כלומר,
גם B דומה לאותה מטריצה אלכסונית $D=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-i&0\\0&0&i\end{bmatrix}$

קיבלנו:

$$A = PDP^{-1}$$
$$B = QDQ^{-1}$$

מהשוויון $A=PDP^{-1}$ נובע ש $D=P^{-1}AP$.
נציב זאת בשוויון $B=QDQ^{-1}$ ונקבל:

$$B = QDQ^{-1} = QP^{-1}APQ^{-1} =$$
$$=(QP^{-1})\cdot A\cdot (QP^{-1})^{-1}$$

(כי $PQ^{-1}=(QP^{-1})^{-1}$).

מהשוויון $B=(QP^{-1})A(QP^{-1})^{-1}$ נובע
שהמטריצות A ו B דומות.

6

A היא מטריצה 3×3, לכן:

A הפיכה $\iff$ $rank(A)=3$.

נניח בשלילה שA לא הפיכה. אם A לא הפיכה, אז $rank(A)<3$. אבל נתון ש
$rank(A)=rank(A+I)=rank(A+2I)=rank(A+3I)$,
לכן $rank(A+I)<3$, $rank(A+2I)<3$, $rank(A+3I)<3$, כלומר,
המטריצות $A+I, A+2I, A+3I$ לא הפיכות.

נזכיר: λ הוא ע"ע של A $\iff$ $det(A-\lambda I)=0$.
אבל $det(A-\lambda I)=0$ $\iff$ $A-\lambda I$ לא הפיכה,
כלומר, λ הוא ע"ע של A $\iff$ $A-\lambda I$ לא הפיכה.

המטריצות $A=A-0\cdot I$, $A+I=A-(-1)\cdot I$, $A+2I$, $A+3I$
כולן לא הפיכות, לכן המספרים $0,-1,-2,-3$
הם ערכים עצמיים של A.

הערכים העצמיים של A הם השורשים של הפולינום האופייני של A, והוא פולינום ממעלה 3. לפולינום ממעלה 3 מעל שדה, יש לכל היותר שלשה שורשים שונים
ואנחנו קיבלנו ארבעה. זו סתירה.
מהסתירה זו נובע שההנחה שA לא הפיכה לא נכונה (כי מהנחה זו הגענו לסתירה),
לכן A הפיכה.