

1. נתונה מ"ט א"ד  $M$ . נבנה את המכונה הבאה:  $M'$  זהה למכונה  $M$  מלבד החלפת המצב המקבל והדוחה (swap). תהיינה  

$$L = L(M), O = L(M')$$
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה, והוכיחו:  
א. בהכרח מתקיים  $O = \bar{L}$   
ב. בהכרח מתקיים  $\bar{L} \subseteq O$   
ג. בהכרח  $O \subseteq \bar{L}$
2. א. שפה  $A$  נקראת  $coNPC$  אם היא שייכת ל  $coNP$  ולכל שפה  $B$  ששייכת ל  $NP$  יש רדוקציה פולינומית אליה  $A \leq_p B$ .  
הוכיחו ששפה  $coNPC$  אם ורק אם המשלימה שלה היא  $NPC$ .  
ב. נניח כי  $P \neq NP$ . תהי השפה  

$$L = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ is undirected graph and for every } v \in V(G) \deg(v) \leq 10, \text{ and } G \text{ contains a clique of size at least } k \}$$
האם  $L \in P$ ? הוכיחו את תשובתכם.
3. קבוצה שולטת בגרף. נמצא במטלה 3, לא נפתור את זה.
4. נגדיר את השפה הבאה:  

$$L = \{ \langle M_1 \rangle, \langle M_2 \rangle \mid M_1 \text{ and } M_2 \text{ are TM and } L(M_1) \cap L(M_2) \neq \emptyset \}$$
הוכיחו/הפריכו:  
א.  $L \in R$   
ב.  $L \in RE$

#### פתרון

1. לא ולא ולא. דוגמות נגדיות עם לולאה אינסופית, ניחוש ביט שגורם לשפה להיות  $\Sigma^*$ .
2. א. לפי הגדרות. ב. כן! צריך לעבור רק על גודל  $k$ , ובהכרח  $k \leq 10$ .
3. במטלה
4. א. לא. רדוקציה מ  $HP, L_u$ .
- ב. כן. נבנה מכונה א"ד לשפה.

1. הוכיחו כי הבעיה הבאה  $NPC$ :  
 $L_1 = \{ \langle G, k, \phi \rangle \mid G \text{ contains a } k - \text{size clique, and } \phi \text{ is satisfiable} \}$
2. א. בסעיף זה נניח כי  $P \neq NP$ . הוכיחו/הפריכו: השפה הבאה היא  $NPC$ -  
 $L_2 = \{ \langle A, b \rangle \mid A \text{ is } m \times n \text{ matrix of integers, The system } Ax = b \text{ has a solution satisfying at least } m - 10 \text{ of the equations of the system} \}$   
הנחיה: קיים אלגוריתם לפתרון מערכת של  $m$  משוואות ב  $n$  נעלמים.  
ב. בסעיף זה נניח שלכל  $L \in NP$  גם  $\bar{L} \in NP$ . הוכיחו שהשפה  
 $SAT^t = \{ \langle M, x, 1^t \rangle \mid M \text{ is non-deterministic TM that runs with time bound } t, \text{ and accepts } x \text{ on all paths} \}$   
שייכת ל  $NP$ . (שפת כל השלוש  $M$ -ש מקבלת את  $x$  בכל המסלולים, ורצה לכל היותר  $t$  צעדים בכל מסלול).
3. בהינתן  $L$  נגדיר  $L_{sup} = \{ x \mid \exists w \in L, \exists u \text{ such that } x = wu \}$ . כלומר, זוהי שפת כל המילים שרישא כלשהי שלהן שייכת ל  $L$ . הוכיחו/הפריכו:  
אם  $L \in R$  אזי גם  $L_{sup} \in R$ .
4. נגדיר מודל חדש של מ"ט א"ד- מכונה לא החלטית. מוסיפים מצב  $q_{don't know}$ . מכונה כזו מקבלת שפה  $L$  אם: כל מילה  $x \in L$  מתקבלת במסלול אחד לפחות, ואינה נדחית בשום מסלול (אבל יכולה להגיע ל  $q_{don't know}$  או שיהיו מסלולים אינסופיים). כל מילה  $x \notin L$  נדחית לפחות במסלול אחד, ואינה מתקבלת בשום מסלול (אבל יתכנו מסלולי  $q_{don't know}$  או מסלולים אינסופיים).  
א. הוכיחו שאם  $L \in NP \cap coNP$  אזי קיימת מ"ט לא החלטית חסומה פולינומית שמקבלת את  $L$ .  
ב. הוכיחו/הפריכו: אם שפה מתקבלת ע"י מכונה לא החלטית שתמיד עוצרת, אזי השפה כריעה.

פתרון:

1. שייכות ל  $NP$  + רדוקציה מ  $SAT$  (או מקליקה)
2. א.  $L_2 \in P$ , ולכן  $L_2 \notin NPC$ . יש אלגוריתם לפתרון מערכת משוואות, וצריך רק לחפש כל תתי הקבוצות בגודל  $m - 10$  ולא כולן.  
ב. נבנה מכונה א"ד למשלימה המנחשת מסלול באורך  $t + 1$ . אם דחתה באמצע- קבל. אם לא עצרה- קבל. אחרת דחה.
3. כן. קיימת מכונה מכריעה ל  $L$ , ולכן נבנה איתה מכריעה ל  $L_{sup}$  עם כל הפירוקים של  $x$ .
4. א. קיימת מ"ט מכריעות ל  $L, \bar{L}$ . נריץ את שתיהן. נענה לפי זו שקיבלה. שתיהן דחו "לא ידוע".  
ב. נריץ את הלא החלטית. קיבלה- קבל. דחתה או "לא ידוע" - דחה.

1. לכל אחת מהשפות הבאות, קבעו אם היא ניתן להוכיח שהיא לא כריעה בעזרת רייס. אם כן, הוכיחו. אם לא, הוכיחו בדרכים אחרות או הראו שהיא כריעה:

א.  $L_1 = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ stops after more than 10 steps on each input} \}$

ב.  $L_2 = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is a TM and } |L(M)| \geq 100 \}$

ג.  $L_3 = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is a TM, } \exists w \in L(M) \text{ s.t. } M \text{ accepts in less than } |w| \text{ steps} \}$

2. א.  $L_1, L_2 \in NP$ .  $L_1 \cup L_2 \in P$  וגם  $L_1 \cap L_2 \in P$ . הוכיחו כי  $L_1, L_2 \in coNP$ .

ב. נניח כי  $P \neq NP$ . תהי

$L = \{ \langle G \rangle \mid G \text{ is undirected graph with IS of size at least 5} \}$

קבעו (והוכיחו) האם  $L \in P$ .

3. תהי  $DoubleClique = \{ \langle G, k \rangle \mid G \text{ is undirected graph with two different } k - \text{size cliques} \}$

הוכיחו כי  $DoubleClique \in NPC$ .

4. תהי  $E_{TM} = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ is a TM and } L(M) = \emptyset \}$ . הוכיחו/הפריכו:

א.  $E_{TM} \leq Clique$

ב.  $Clique \leq E_{TM}$

פתרון:

1. א. לא. זו תכונה של מכונה ולא של שפה. רדוקציה מ  $HP$  or  $L_u$  (ביצוע 10 צעדים סתם)

ב. כן.  $S = \{ L \in RE \mid |L| \geq 100 \}$ .  $S \neq RE$  כי  $\emptyset \notin S$ , וגם  $\emptyset \neq S$  ולכן  $L_S \notin R$ .

ג. לא. זה תכונה של מכונה. רדוקציה מ  $L_u$ .

2. א.  $\overline{L_1} = (\Sigma^* \setminus (L_1 \cup L_2)) \cup (L_2 \setminus (L_1 \cap L_2))$ . סגירות לחיתוך.  $P$  סגורה משלים.

ב. כל תתי קבוצות בגודל 5. בהחלט פולינומי.

3. ניחוש שתי קבוצות. רדוקציה- הוספת  $K_k$ . (בהנחה ש  $|V(G)| \leq k$ ).

4. א. ממש לא!  $Clique \in R$  אבל  $E_{TM} \in coRE \setminus R$ .

ב. בהחלט: נריץ את  $M_{Clique}$  ונענה הפוך.

