לינארית 2

פתרון מבחן 14.07.2011 מועד ב.

<u>שאלה 1:</u> כרגיל, $\mathbb{R}^4 = \{[x,y,z,t] : x,y,z,t \in \mathbb{R}\}$.
נתונים 3 וקטורים ב־$\mathbb{R}^4$: $u = [2,3,0,1];\ \ v = [1,2,1,0];\ \ w = [1,1,1,-1]$.
נסמן $V = \mathrm{Span}\,\{u,v,w\}$. על ידי שימוש בתהליך גרם־שמידט מצאו את בסיס אורטונורמלי ל־V. יש להניח ש־V הוא מרחב וקטורי עם מכפלה פנימית הסטנדרטית.

פתרון: נבדוק קודם שהוקטורים u,v,w בת"ל.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{2R_2-R_1,\\ 2R_3-R_1}]{} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow[R_3+R_2]{} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}$$

לכן הוקטורים u,v,w מהווים בסיס לתת־מרחב של $\mathbb{R}^4$ המסומן ב־V, כלומר

$$V = \{\alpha u + \beta v + \gamma w : \alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}\}$$

נמצא בסיס אורטונורמלי ב־V:

$$\begin{aligned}
f_1 :=& u = [2,3,0,1] \\
f_2 =& v - \frac{<v,f_1>}{<f_1,f_1>} f_1 = \\
=& [1,2,1,0] - \frac{<[1,2,1,0],[2,3,0,1]>}{<[2,3,0,1],[2,3,0,1]>}[2,3,0,1] = \\
=& [1,2,1,0] - \frac{8}{14}[2,3,0,1] = (1,2,1,0) - \frac{4}{7}[2,3,0,1] = \\
=& [1,2,1,0] - \left(\frac{8}{7}, \frac{12}{7}, 0, \frac{4}{7}\right) = \\
=& \left[-\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 1, -\frac{4}{7}\right] \sim [-1,2,7,-4]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f_3 =& w - \frac{< w, f_1 >}{< f_1, f_1 >} f_1 - \frac{< w, f_2 >}{< f_2, f_2 >} f_2 = \\
=& [1,1,1,-1] - \frac{< [1,1,1,-1],[2,3,0,1] >}{< [2,3,0,1],[2,3,0,1] >}[2,3,0,1] \\
& \qquad - \frac{< [1,1,1,-1],[-1,2,7,-4] >}{< [-1,2,7,-4],[-1,2,7,-4] >}[-1,2,7,-4] = \\
=& [1,1,1,-1] - \frac{4}{14}[2,3,0,1] - \frac{12}{70}[-1,2,7,-4] = \\
=& [1,1,1,-1] - \frac{2}{7}[2,3,0,1] - \frac{6}{35}[-1,2,7,-4] = \\
=& [1,1,1,-1] - \left[\frac{4}{7}, \frac{6}{7}, 0, \frac{2}{7}\right] - \left[-\frac{6}{35}, \frac{12}{35}, \frac{6}{5}, -\frac{24}{35}\right] = \\
=& \left[\frac{3}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}\right] \sim [3,-1,-1,-3]
\end{aligned}
$$

ננרמל

$$
\begin{aligned}
e_1 =& \frac{f_1}{\|f_1\|} = \frac{[2,3,0,1]}{\sqrt{14}} = \left[\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, 0, \frac{1}{\sqrt{14}}\right] \\
e_2 =& \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{[-1,2,7,-4]}{\sqrt{70}} = \left[-\frac{1}{\sqrt{70}}, \frac{2}{\sqrt{70}}, \frac{7}{\sqrt{70}}, -\frac{4}{\sqrt{70}}\right] \\
e_3 =& \frac{f_3}{\|f_3\|} = \frac{[3,-1,-1,-3]}{\sqrt{20}} = \left[\frac{3}{\sqrt{20}}, -\frac{1}{\sqrt{20}}, -\frac{1}{\sqrt{20}}, -\frac{3}{\sqrt{20}}\right]
\end{aligned}
$$

<u>שאלה 2:</u> כרגיל, $\mathbb{R}^3 = \{[x,y,z] : x,y,z \in \mathbb{R}\}$. נתונה העתקה לינארית

$$
T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad T([x,y,z]) := [y, z-y, -x-y-2z]
$$

מצאו את כול הווקטורים העצמיים של T בעלי נורמה סטנדרטית 1.

פיתרון: יהיה $\mathbb{R}^3 \ni [x,y,z] = v^t$. המטריצה המייצגת של ההעתקה T בבסיס סטנדרטי e היא

$$
A = [T]_e^e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}
$$

כך ש־ $Av^t = T([x,y,z])$. נחפש פתרון לא טריוויאלי של המערכת משוואות $Av^t = \lambda v^t$, כלומר $(A-\lambda I)v^t = 0$ קיים אם ורק אם $P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = 0$.

אזי

$$0=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-\lambda & 1 & 0\\ 0 & -1-\lambda & 1\\ -1 & -1 & -2-\lambda\end{bmatrix}\underline{\underline{C_1}}$$

$$=-\lambda\cdot\det\begin{bmatrix}-1-\lambda & 1\\ -1 & -2-\lambda\end{bmatrix}-\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1-\lambda & 1\end{bmatrix}=$$

$$=-\lambda\cdot\left[(\lambda+1)(\lambda+2)+1\right]-1=$$

$$=-\lambda\cdot\left[\lambda^2+3\lambda+3\right]-1=-\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1=$$

$$=-(\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1)=-(\lambda+1)^3$$

כול הערכים העצמיים של T הם $\lambda=-1$ עם ריבוי אלגברי 3. נמצא וקטורים עצמיים. נציב $\lambda=-1$ במטריצה $A-\lambda I$ ונבצע דירוג

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[R_3+R_1+R_2]{}\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\cdot t,\quad t\in\mathbb{R}$$

כלומר $\left\{\begin{bmatrix}-t\\ t\\ 0\end{bmatrix}:t\in\mathbb{R}\right\}=V_{\lambda=-1}=\operatorname{Ker}(AI)$. נמצא $t\in\mathbb{R}$ כך ש־

$$1=\left\langle\begin{bmatrix}-t\\ t\\ 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-t\\ t\\ 0\end{bmatrix}\right\rangle=2t^2\Leftrightarrow t^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

לכן $\begin{bmatrix}\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0\end{bmatrix}$ הוא וקטור עצמי של T עם הנורמה 1.

שאלה 3: נתון $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$. מצאו את A^{27}.

פיתרון: ננסה ללכסן את המטריצה.

$$0 = P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = -\left(4-\lambda^2\right) + 5 = \lambda^2 + 1$$

למשוואה $P_A(\lambda) = 0$ יש שורשים מרוכבים: $\lambda_{\overline{1,2}} = \pm i$. נמצא וקטורים עצמיים:
$\lambda = -i$ אזי:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2+i & 5 & 0 \\ -1 & -2+i & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -2+i & 0 \\ 2+i & 5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2 + (2+i)R_1]{}$$

$$\xrightarrow[\substack{5+(2+i)(-2+i) \\ =1-1=0}]{} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & i-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i-2 \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad t \in \mathbb{C}$$

$\lambda = i$ אזי:

$$\begin{bmatrix} 2-i & 5 \\ -1 & -2-i \end{bmatrix} \xrightarrow[R_1 \leftrightarrow R_2]{} \begin{bmatrix} -1 & -2-i \\ 2-i & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_2 + (2-i)R_1]{}$$

$$\xrightarrow[\substack{5-(2-i)(2+i) \\ =1-1=0}]{} \begin{bmatrix} -1 & -(i+2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(i+2) \\ 1 \end{bmatrix} t, \quad t \in \mathbb{C}$$

לפי משפט ריבוי אלגברי שווה לריבוי גיאומטרי לכל אחד מהערכים עצמיים $\lambda_{\overline{1,2}} = \pm i$ לכן מטריצה A ניתנת לליכסון, כאשר $P = \begin{bmatrix} i-2 & -i-2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ היא מטריצה מלכסנת, $D = \operatorname{diag}(-i, i) = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$ מטריצה אלכסונית, ו־ $A = PDP^{-1}$. נמצא P^{-1} לפי

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}^t$$

כאשר $(-1)^{i+j} M_{ij}$ הם המשלימים האלגברים. אזי

$$M_{11} = 1, \quad M_{12} = 1, \quad M_{21} = -(i+2), \quad M_{22} = i-2$$
$$\det(P) = \det \begin{bmatrix} i-2 & -(i+2) \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = (i-2) + (i+2) = 2i$$

לכן

$$P^{-1} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ i+2 & i-2 \end{bmatrix}^t = -\frac{i}{2} \begin{bmatrix} 1 & i+2 \\ -1 & i-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2} - i \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2} + i \end{bmatrix}$$

לפי כך

$$\begin{aligned} A^{27} = \left(PDP^{-1}\right)^{27} = P^{-1}D^{27}P = \\ = \begin{bmatrix} i-2 & -i-2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}^{27} \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2}-i \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2}+i \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} i-2 & -i-2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{i}{2} & \frac{1}{2}-i \\ \frac{i}{2} & \frac{1}{2}+i \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} i-2 & -i-2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1+\frac{i}{2} \\ \frac{1}{2} & 1-\frac{i}{2} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

<u>**שאלה 4:**</u> כרגיל, $\mathbb{R}^2 = \{[x,y] : x,y \in \mathbb{R}\}$. נתונים שני בסיסים ב־$\mathbb{R}^2$:

$$B = ([2,-5]\,;[-1,2]) \quad ; \quad C = ([4,3]\,;[3,2])$$

נתון $v \in \mathbb{R}^2$, $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$. מצאו את $[v]_C$.

פיתרון: דרך 1: נמצא מטריצה מעבר $[I]_C^B$ כך ש־ $[v]_C = [I]_C^B[v]_B$. ידוע ש־

$$[I]_C^B = [I \circ I]_C^B = [I]_C^E[I]_E^B$$

עבור בסיס E כלשהוא (ב־$\mathbb{R}^2$). נבחר E בסיס סטנדרטי, אזי $[I]_E^B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ ו־ $[I]_C^E = \left([I]_E^C\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$. נמצא $[I]_C^E$:

$$\det\left([I]_E^C\right) = 8-9 = -1$$
$$M_{11} = 2, \quad M_{12} = 3, \quad M_{21} = 3, \quad M_{22} = 4$$

אזי

$$[I]_C^E = \frac{1}{\det\left([I]_E^C\right)} \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}^t = -\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$$

לכן

$$[I]_C^B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 & 8 \\ 26 & -11 \end{bmatrix}$$

אזי

$$[v]_C = [I]_C^B [v]_B = \begin{bmatrix} -19 & 8 \\ 26 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -78 \\ 107 \end{bmatrix}$$

דרך 2: המשמעות של $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$, היא

$$[v]_E = 2\begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 9\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 20\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -20 \end{bmatrix}$$

אבל, לפי בסיס C, נקבל $[v]_C = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ כאשר

$$[v]_E = \alpha\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ומכאן

$$\alpha\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -20 \end{bmatrix}$$

כלומר צריך לפתור מערכת משוואות

$$\begin{cases} 4\alpha + 3\beta = 9 \\ 3\alpha + 2\beta = -20 \end{cases}$$

פותרים:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & -20 \end{array}\right] \xrightarrow[4R_2-3R_1]{} \left[\begin{array}{cc|c} 4 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & -107 \end{array}\right] \xrightarrow[R_1+3R_2]{}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 0 & -312 \\ 0 & -1 & -107 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_1/4 \\ R_2/(-1)}]{} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -78 \\ 0 & 1 & 107 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -78 \\ 107 \end{bmatrix} = [v]_C$$

וזה מה שהיינו צריכים למצוא.

שאלה 5: תהי $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית המקיימת

$$T\left([0,0,1]\right)=[1,0]\,,\quad T\left([1,1,0]\right)=[1,1]\,,\quad T\left([0,1,2]\right)=[2,3]$$

(א) מצאו את $T\left([x,y,z]\right)$ לכל $[x,y,z]\in\mathbb{R}^3$.
(ב) מצאו $\operatorname{Ker}(T)$ ו־ $\operatorname{Im}(T)$. האם T חח"ע? האם T על?

פיתרון: (א) נחפש מטריצה $A_{2\times 3}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}$ המייצגת של T כך ש־

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{13}\\a_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+a_{12}\\a_{21}+a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{12}+2a_{13}\\a_{22}+2a_{23}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}.$$

לאחר שנציב איברים $a_{13}=1$, $a_{23}=0$ נקבל

$$\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\Leftarrow\begin{bmatrix}a_{12}+2\\a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}\Leftarrow\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

כלומר

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

ו־

$$T\left([x,y,z]\right)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\quad [x,y,z]\in\mathbb{R}^3$$

(ב) $\operatorname{Ker}(T)$ היא קבוצת הוקטורים $[x,y,z]\in\mathbb{R}^3$ כך ש־ $T\left([x,y,z]\right)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.
כלומר צריך לפתור מערכת משוואות

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

פותרים:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_2+2R_1]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right]$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} -1 \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{array}\right] t, \quad t \in \mathbb{R}$$

ולכן

$$\operatorname{Ker}(T) = \left\{ \left[\begin{array}{c} 3 \\ 2 \\ -3 \end{array}\right] t \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \dim(\operatorname{Ker}(\mathrm{T})) = 1$$

$\operatorname{Im}(T)$ היא קבוצה הנפרשת על ידי עמודות של המטריצה המייצגת, כלומר

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Span}\left\{ \left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} 0 \\ 3 \end{array}\right], \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right] \right\}$$

מכיוון שב־ $\mathbb{R}^2$ יש רק 2 וקטורים בת"ל, נבחר וקטורי בסיס ל־$\operatorname{Im}(T)$, נקבל

$$\operatorname{Im}(T) = \operatorname{Span}\left\{ \left[\begin{array}{c} 0 \\ 3 \end{array}\right] t + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right] s \,\middle|\, t, s \in \mathbb{R} \right\}, \quad \dim(\operatorname{Im}(\mathrm{T})) = 2$$

(ב) העתקה T היא לא חח"ע, כי לפי סעיף (א) קיבלנו שהגרעין לא טריוויאלי, אבל העתקה T היא על, כיוון ש־$dim(\operatorname{Im}(T)) = dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

שאלה 6: תהי $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

(א) מצאו את $\left(A^{-1}\right)^5$.

(ב) מצאו את הערכים העצמיים ואת הווקטורים העצמיים של $A^5 + A + 2I$.

פיתרון: (א) ננסה ללכסן את המטריצה A. הפולינום האופייני של A הוא

$$P_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)(4-\lambda)$$

כך שהשורשים של המשוואה $P_A(\lambda) = 0$ הם $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ ו־ $\lambda_3 = 4$.
נמצא וקטורים עצמיים.

$$\lambda = 3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 - 6R_2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$V_{\lambda=3} = \operatorname{Ker}(A - 3I) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} t \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda = 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2/5, \\ R_3/2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 + R_2, \\ R_3 - R_2}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$V_{\lambda=2} = \operatorname{Ker}(A - 2I) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda=4\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc}-1&-1&-1\\0&-2&5\\0&0&0\end{array}\right]\xrightarrow[2R_1-R_2]{}\left[\begin{array}{ccc}-2&0&-7\\0&-2&5\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{c}x\\y\\z\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c}-\frac{7}{2}\\\frac{5}{2}\\1\end{array}\right]t\sim\left[\begin{array}{c}-7\\5\\2\end{array}\right]t,\quad t\in\mathbb{R}$$

$$V_{\lambda=4}=\operatorname{Ker}(A-4I)=\left\{\left[\begin{array}{c}-7\\5\\2\end{array}\right]t\,\middle|\,t\in\mathbb{R}\right\}$$

כיוון ש־ $\dim(V_{\lambda=4})=\dim(V_{\lambda=2})=\dim(V_{\lambda=3})=1$ וזה שווה לריבוי אלגברי של כל אחד מהערכים עצמיים $\lambda=2,3,4$ בהתאם, המטריצה A ניתנת לליכסון, כך שהמטריצה המלכסנת והמטריצה אלכסונית הם

$$P=\left[\begin{array}{ccc}1&1&-7\\0&1&5\\0&0&2\end{array}\right],\quad D=\operatorname{diag}(3,2,4)=\left[\begin{array}{ccc}3&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{array}\right]$$

ומתקיים

$$A=PDP^{-1}$$

נמצא P^{-1}: כיוון ש־ $\det(P)=2$ ו־

$$M_{11}=2,M_{12}=0,M_{13}=0,$$
$$M_{21}=2,M_{22}=2,M_{23}=0,$$
$$M_{31}=12,M_{32}=5,M_{33}=1$$

נקבל

$$P^{-1}=\frac{1}{\det(P)}\left[\begin{array}{ccc}M_{11}&-M_{12}&M_{13}\\-M_{21}&M_{22}&-M_{23}\\M_{31}&-M_{32}&M_{33}\end{array}\right]^T=\frac{1}{2}\left[\begin{array}{ccc}2&0&0\\-2&2&0\\12&-5&1\end{array}\right]^T$$

$$P^{-1}=\left[\begin{array}{ccc}1&-1&6\\0&1&-5/2\\0&0&1/2\end{array}\right]$$

לכן

$$\begin{aligned}
A^{-5} &= \left(A^{-1}\right)^5 = \left(A^5\right)^{-1} = \left[\left(PDP^{-1}\right)^5\right]^{-1} = \left(PD^5P^{-1}\right)^{-1} = \\
&= \left(P^{-1}\right)^{-1}\left(D^5\right)^{-1}P^{-1} = PD^{-5}P^{-1} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3^5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4^5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{243} & -\frac{1}{243} & \frac{2}{81} \\ 0 & \frac{1}{32} & -\frac{5}{64} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2048} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{243} & \frac{211}{7776} & -\frac{9431}{165888} \\ 0 & \frac{1}{32} & -\frac{155}{2048} \\ 0 & 0 & \frac{1}{1024} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(ב) נשתמש במטריצה מלכסנת P ומטריצה אלכסונית D סעיף (א).
נסמן $X = A^5 + A + 2I$. נראה ש־ $X = P\widetilde{D}P^{-1}$ כאשר $\widetilde{D} = P^{-1}XP$ היא צורה אלכסונית של X. אזי, עבור מטריצה מלכסנת P של A נקבל

$$\begin{aligned}
A^5 + A + 2I &= \left(PDP^{-1}\right)^5 + PDP^{-1} + 2PP^{-1} = \\
&= PD^5P^{-1} + PDP^{-1} + P\left(2I\right)P^{-1} = P\left(D^5 + D + 2I\right)P^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 3^5 & 0 & 0 \\ 0 & 2^5 & 0 \\ 0 & 0 & 4^5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} + \right. \\
&\qquad \left. + \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \\
&= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} 248 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 21030 \end{bmatrix}}_{\widetilde{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}}_{P^{-1}}
\end{aligned}$$

כלומר, למטריצה $A^5 + A + 2I$ יש אותם וקטורים עצמיים כמו ל־A, אך שייכים לערכים עצמיים החדשים ־ המופיעים באלכסון של המטריצה $\widetilde{D}$.

שאלה 7: יהי $M_{2\times 2} := \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ מרחב המטריצות הריבועיות בגודל 2.

$$T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2} : T(A) = BAB^t \quad \forall A \in M_{2\times 2}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(א) הראו ש־ T העתקה לינארית. מצאו את $\mathrm{Im}(T)$ ואת $\mathrm{Ker}(T)$. האם T חח"ע?
(ב) מצאו את המטריצה $[T]_B^B$ כאשר בסיס B הוא:

$$B = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

פיתרון: (א) נבדוק שמתקיים $T(\alpha X+\beta Y) = \alpha T(X)+\beta T(Y)$. יהיו $X, Y \in M_{2\times 2}$, אזי

$$\begin{aligned} T(\alpha X + \beta Y) =& B(\alpha X + \beta Y) B^t = (B(\alpha X) + B(\beta Y)) B^t = \\ =& (\alpha BX + \beta BY) B^t = \alpha \left(BXB^t\right) + \beta \left(BYB^t\right) = \\ =& \alpha T(X) + \beta T(Y) \end{aligned}$$

כלומר ההעתקה T היא לינארית. נמצא כעת גרעין של T. $\mathrm{Ker}(T)$ היא קבוצה של כול המטריצות $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$ כך ש־

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a-b & b \\ c-d & d \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a-b-c+d & b \\ c-d & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

קיבלנו מערכת משוואות עם 4 משוואות ו־4 נעלמים:

$$\begin{cases} a-b-c+d = 0 \\ c-d = 0 \\ b = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

הפיתרון של המערכת הנ"ל הוא פיתרון טריוויאלי $a = b = c = d = 0$, ולכן

$$\mathrm{Ker}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \dim(\mathrm{Ker}(T)) = 0$$

כלומר העתקה T היא חח"ע.

נמצא מטריצה המייצגת של T. יהי $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}$ אזי עבור מטריצה

מתקיים $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$BAB^t = \begin{bmatrix} a-b-c+d & b \\ c-d & d \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} d.$$

קיבלנו סכום של 4 <u>מטריצות</u> עם המקדמים החופשיים. כיוון ש־ $M_{2\times 2} \cong \mathbb{R}^4$ (כלומר מרחבים וקטורים איזומורפיים), נרשום את <u>המטריצות</u> הנ"ל בתור וקטורי העמודות. נקבל

$$T([v]_E) = T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} c + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} d =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = [T]_E^E [v]_E, \quad \forall v = [v]_E = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

כאשר $[T]_E^E$ היא המטריצה המייצגת של T. ידוע ש־ $\mathrm{Im}(T)$ זה מרחב העמודות של $[T]_E^E$. רואים ש־ $\mathrm{rank}\left([\mathrm{T}]_\mathrm{E}^\mathrm{E}\right) = 4$, לכן העמודות של $[T]_E^E$ מהווים בסיס ל־ $\mathrm{Im}(T)$, כחומר

$$\mathrm{Im}(T) = M_{2\times 2}$$

וההעתקה T היא על.

(ב) נסדר את הוקטורי בסיס B (הנתונים) בעמודות, נקבל מטריצת מעבר

$$[I]_E^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ידוע ש־

$$[T]_B^B = [I \circ T \circ I]_B^B = [I]_B^W \cdot [T \circ I]_W^B = [I]_B^W \cdot [T]_W^W \cdot [I]_W^B$$

עבור W בסיס כלשהוא (ב$\mathbb{R}^4$) . נבחר $W = E$ בסיס סטנדרטי, נקבל

$$[T]_B^B = [I]_B^E \cdot [T]_E^E \cdot [I]_E^B$$

כך ש־ $[I]_E^B$ ו־$[T]_E^E$ מטריצות ידועות (ראה סעיף א). נמצא $[I]_B^E = \left([I]_E^B\right)^{-1}$. אזי

$$\left[[I]_E^B|I\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{R_1 - R_3 - R_4, \\ R_2 - R_3 - R_4}]{}$$

$$\to \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[I|[I]_B^E\right]$$

ולכן

$$[T]_B^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

וזה מה שנדרש.

<u>**שאלה 8:**</u> נתונה מטריצה $A_{3\times3}$ המקיימת

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

(א) מצאו את המטריצה A.
(ב) מצאו את הערכים העצמיים של A.

פיתרון: נשים לב, שלפי נתון רואים ש־ $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda_1 = 1$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda_2 = 2$, ו־ $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ הוא וקטור עצמי השייך לערך עצמי $\lambda_3 = 3$. לכן, לפי משפט $v_{\overline{1,3}}$ בת"ל. נתבונן במטריצה $P = [v_1|v_2|v_3]$ מלכסנת <u>הכיפה</u>. אזי $D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2\right)$ היא צורה האלכסונית של A שניתנת לחישוב לפי $D = P^{-1}AP$, כאשר A לכסינה לפי

$$A = PDP^{-1}.$$

נחשב P^{-1}: כיוון ש־ $\det(P) = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$ ו־

$$M_{11} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,\ M_{12} = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0,\ M_{13} = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$
$$M_{21} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,\ M_{22} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,\ M_{23} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0,$$
$$M_{31} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0,\ M_{32} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,\ M_{33} = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

נקבל

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)}\begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

לכן

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$