אלגברה לינארית 2 מועד ב'

<u>תשובות, פתרונות ועקרונות הבדיקה</u>

<u>שאלה 1.</u> (5 נקודות) כתבו את ההגדרה של עמודת קואורדינטות של הווקטור לפי הבסיס. כתבו את ההגדרה של המטריצה המייצגת את העתקה לינארית בבסיסים נתונים. אל תשכחו לפרש את כל הסימונים: מהו B, מהו V וכו'

<u>הגדרת עמודת קואורדינאטות ומטריצה מייצגת.</u> יהיו V,W מרחבים וקטוריים ממימד סופי מעל השדה F. תהי $T:V\to W$ העתקה לינארית , $B=\left(\vec{b}_1,...,\vec{b}_n\right)$ בסיס של V, $C=\left(\vec{c}_1,...,\vec{c}_k\right)$ בסיס של W. לכל וקטור $\vec{w}\in W$ קיים יצוג יחיד כצירוף לינארי של וקטורי בסיס C:
$\vec{w}=\alpha_1\vec{c}_1+\alpha_2\vec{c}_2+...+\alpha_k\vec{c}_k$. הסקלרים $\alpha_1 , \alpha_2 ,..., \alpha_k \in F$ נקראים קואורדינטות של הווקטור $\vec{w}$ לפי הבסיס C.

נסמן: $\left[\vec{w}\right]_C=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_k\end{bmatrix}$, זו עמודת קואורדינאטות של הווקטור $\vec{w}$ לפי הבסיס C.

המטריצה המייצגת את ההעתקה T בבסיסים B ו-C היא מטריצה $k\times n$ כך שהעמודה מס' i היא עמודת קואורדינאטות של הווקטור $T\left(\vec{b}_i\right)$ לפי הבסיס C,

כלומר, $\left[T\left(\vec{b}_i\right)\right]_C$ $(i=1,2,...,n)$. סימון: $[T]_C^B$.

$[T]_C^B=\left[\ \left[T\left(\vec{b}_1\right)\right]_C \mid \left[T\left(\vec{b}_2\right)\right]_C \mid \cdots \mid \left[T\left(\vec{b}_n\right)\right]_C\ \right]$.

אפשר במקום ההגדרה לכתוב את התכונה העיקרית: המטריצה המייצגת את ההעתקה T בבסיסים B ו-C היא מטריצה $k\times n$ המסומנת $[T]_C^B$ כך שלכל וקטור $\vec{v}\in V$ מתקיים: $[T]_C^B\cdot[\vec{v}]_B=\left[T\left(\vec{v}\right)\right]_C$.

<u>בדיקה:</u> שתי נקודות על הגדרת עמודת קואורדינאטות, שלוש נקודות על הגדרת מטריצה מייצגת. אין ערך להגדרה לא מלאה. אין ערך להגדרת מטריצה מייצגת בהעדר הגדרת עמודת קואורדינאטות. לא לתת נקודות למי שמתמקד במקרה פרטי $T:V\to V$ וכותב הגדרת $[T]_B^B$. לא לתת נקודות למי שכותב הגדרת מטריצת מעבר מבסיס לבסיס, $[I]_C^B$.

שאלה 2. (5 נקודות) נסחו את אי-השויון קושי-שוורץ. יש לנסח את המשפט באופן מלא, יש לפרש את כל הסימונים.

ניסוח: יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. אז $\left|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle\right|\le\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$ לכל $\vec{u}\in V,\vec{v}\in V$.

סימונים: $\|\vec{u}\|=\sqrt{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}$, הנורמה של הווקטור $\vec{u}$. $\left|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle\right|$ מסמן את הערך המוחלט של המספר הממשי או המרוכב $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle$.

בדיקה: אין נקודות אם לא כתוב "V מרחב מכפלה פנימית" או אם לא כתוב "לכל $\vec{u}\in V,\vec{v}\in V$". אם לא מפורט מה זה נורמה, לא להקפיד על זה, זה לא חסרון.

שאלה 3. נתבונן בהעתקה $T:M_{2\times2}(\mathbb{R})\to M_{2\times2}(\mathbb{R})$ המוגדרת כך: $T(A)=A+A^t$.

א. (5 נק') מצאו בסיס ל-$\ker T$.
ב. (5 נק') הוכיחו ש-$\operatorname{Im}T$ הוא המרחב של כל המטריצות הסימטרית מ-$M_{2\times2}(\mathbb{R})$.
ג. (10 נק') הוכיחו שכל מטריצה סימטרית או אנטי-סימטרית מ-$M_{2\times2}(\mathbb{R})$ השונה ממטריצת האפס מהווה וקטור עצמי של ההעתקה T.
ד. (5 נק') מצאו את כל הערכים העצמיים של T.
ה. (10 נק') הוכיחו ש-T היא העתקה לכסינה.
ו. (5 נק') בחרו כרצונכם בסיס B ל-$M_{2\times2}(\mathbb{R})$ ומצאו את $[T]_B^B$.

פתרון.

א. $\ker T=\left\{A\in M_{2\times2}(\mathbb{R})\,\middle|\,T(A)=0\right\}=\left\{A\in M_{2\times2}(\mathbb{R})\,\middle|\,A+A^t=0\right\}=\left\{A\in M_{2\times2}(\mathbb{R})\,\middle|\,A^t=-A\right\}$

כלומר, הגרעין של T הוא מרחב של כל המטריצות האנטי-סימטריות ב-$M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

נסמן $A=\begin{bmatrix}p&q\\r&s\end{bmatrix}$. אז $A^t=\begin{bmatrix}p&r\\q&s\end{bmatrix}$. לכן: $A^t=-A\Leftrightarrow\begin{bmatrix}p&r\\q&s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-p&-q\\-r&-s\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}p=s=0\\r=-q\end{cases}$.

מכאן:

$$\ker T=\left\{A\in M_{2\times2}(\mathbb{R})\,\middle|\,A^t=-A\right\}=\left\{\begin{bmatrix}0&q\\-q&0\end{bmatrix}\,\middle|\,q\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{q\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\,\middle|\,q\in\mathbb{R}\right\}=Span\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right)$$

רואים שבסיס ל- $\ker T$ מורכב ממטריצה אחת, למשל $\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right)$ -- בסיס ל- $\ker T$.

בדיקה: אין ניקוד חלקי בסעיף א'.

ב. יש להוכיח שכל מטריצה מ- $\operatorname{Im}T$ היא סימטרית ושכל מטריצה סימטרית מ- $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ שייכת ל- $\operatorname{Im}T$.

הוכחה: ניקח $B\in\operatorname{Im}T$. על פי הגדרת $\operatorname{Im}T$ קיימת $A\in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ כך ש- $B=T(A)=A+A^t$.

$B^t=\left(A+A^t\right)^t=A^t+\left(A^t\right)^t=A^t+A=A+A^t=B$. השתמשנו בתכונות מיידיות של פעולת שחלוף ובכך שחיבור מטריצות חילופי והוכחנו ש- $B^t=B$, כלומר, B היא מטריצה סימטרית. הוכחנו שכל מטריצה מ- $\operatorname{Im}T$ היא סימטרית.

עכשיו ניקח מטריצה סימטרית $A\in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ ונראה ש- $A\in\operatorname{Im}T$. קל לראות:

$T\left(\frac{1}{2}A\right)=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A^t\underset{(A^t=A)}{=}\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A=A$, כלומר, $T\left(\frac{1}{2}A\right)=A$, ז.א. A מתקבלת מהפעלת העתקה T על מטריצה מסוימת, ולכן $A\in\operatorname{Im}T$. הוכחנו שכל מטריצה סימטרית מ- $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ שייכת ל- $\operatorname{Im}T$.

בדיקה: לתת שתי נקודות למי שהוכיח הכלה אחת בלבד.

ג. נזכיר את ההגדרה. הווקטור $\vec{0}\neq\vec{v}\in V$ נקרא וקטור עצמי של העתקה לינארית $T:V\to V$ אם קיים סקלר λ (שנקרא "ערך עצמי") כך ש- $T(\vec{v})=\lambda\vec{v}$. ניקח מטריצה סימטרית $0_{2\times2}\neq A\in M_{2\times2}(\mathbb{R})$, ז.א. $A^t=A$. על פי הגדרת ההעתקה T שלנו:

$T(A)=A+A^t=A+A=2A$ (כי $A^t=A$), כלומר, $T(A)=2A$. מכאן רואים שכל מטריצה סימטרית מ- $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ השונה ממטריצת האפס מהווה וקטור עצמי של ההעתקה T (השייך לערך עצמי 2).

ניקח מטריצה אנטי-סימטרית $0_{2\times2}\neq A\in M_{2\times2}(\mathbb{R})$, ז.א. $A^t=-A$. על פי הגדרת ההעתקה T שלנו:

$T(A)=A+A^t=A-A=0_{2\times2}=0\cdot A$ (כי $A^t=-A$), כלומר, $T(A)=0\cdot A$. מכאן רואים שכל מטריצה אנטי-סימטרית מ- $M_{2\times2}(\mathbb{R})$ השונה ממטריצת האפס מהווה וקטור עצמי של ההעתקה T (השייך לערך עצמי 0). בעצם, ראינו את זה כבר בסעיף א': הגרעין של T הוא מרחב כל המטריצות האנטי-סימטריות ב- $M_{2\times2}(\mathbb{R})$, ובאופן כללי אנחנו יודעים שכל וקטור שונה מ- $\vec{0}$ מהגרעין של ההעתקה $T:V\to V$ הוא וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי 0.

בדיקה: בסעיף הזה יש שתי טענות – אחת על מטריצות סימטריות והשניה על מטריצות אנטי-סימטריות. יש לתת חמש נקודות למי שהוכיח נכון טענה אחת בלבד.

ד. ראינו בסעיף הקודם (סעיף ג') שהמספרים 0,2 הם ערכים עצמיים של T. נוכיח שאין ל-T ערכים עצמיים נוספים. נעיר תחילה ש-$\dim\left(M_{2\times2}(\mathbb{R})\right)=4$, ולכן הפולינום האופייני של T הוא פולינום מדרגה 4. כמו שראינו לעיל (בסעיף א'), $\dim(\ker T)=1$, לכן הריבוי הגאומטרי של ערך עצמי 0 הוא 1, ולכן הריבוי האלגברי של ערך עצמי 0 הוא לפחות 1.

המרחב של כל המטריצות הסימטרית מ-$M_{2\times2}(\mathbb{R})$ הוא מרחב תלת-מימדי:

$$\left\{A\in M_{2\times2}(\mathbb{R})\,\middle|\,A^t=A\right\}=\left\{\begin{bmatrix}p & r\\ r & s\end{bmatrix}\middle|\,p\in\mathbb{R},r\in\mathbb{R},s\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=\left\{p\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}+r\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\middle|\,p\in\mathbb{R},r\in\mathbb{R},s\in\mathbb{R}\right\}=Span\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

המטריצות הסימטריות $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ הן שלושה וקטורים עצמיים של T בלתי תלויים לינארית השייכים לערך עצמי 2 (ראינו זאת בסעיף ג'). לכן הריבוי הגאומטרי של ערך עצמי 2 הוא 3, ולכן הריבוי האלגברי של ערך עצמי 2 הוא לפחות 3. נסכם: בפירוק הפולינום האופייני של T לגורמים חייבים להופיע הגורמים x ו-$(x-2)^3$. אבל הפולינום הוא מדרגה 4, לכן קיבלנו שהפולינום האופייני של T הוא $x(x-2)^3$. כל השורשים של הפולינום הזה הם 0,2, לכן כל הערכים העצמיים של T הם 0,2 ואין ל-T ערכים עצמיים נוספים.

בדיקה: מי שרק כותב שהערכים העצמיים הם 2,0 (על פי הסעיף הקודם) אבל לא מוכיח שאין ערכים עצמיים נוספים – לתת שתי נקודות.

ה. העובדה ש-T לכסינה נובעת מיידית מהסעיף הקודם. ל-T יש שני ערכים עצמיים בלבד,ולכל אחד מהם הרבוי האלגברי שווה לריבוי הגאומטרי: אצל ערך עצמי 0 שני הריבויים הם 1, ואצל ערך עצמי 2 שני הריבויים הם 3. על פי הקריטריון שלמדנו מזה נובע ש-T לכסינה.

ו. אחרי כל מה שעשינו בסעיפים הקודמים מתבקש לבחור בסיס ל-$M_{2\times2}(\mathbb{R})$ המורכב מווקטורים עצמיים של T -- ניקח את שלוש המטריצות המהוות בסיס למרחב של כל המטריצות הסימטריות מ-$M_{2\times2}(\mathbb{R})$ ונצרף להן מטריצה אחת הפורשת את מרחב המטריצות האנטי-סימטריות ב-$M_{2\times2}(\mathbb{R})$: $B=\left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right)$. כמובן, המטריצה המייצגת את T בבסיס זה היא אלכסונית: $[T]_B^B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

בדיקה: לא הכרחי לפתור את הסעיפים של השאלה מס' 3 בסדר שהצגנו לעיל. אפשר להתחיל מהסעיף האחרון ולבחור את הבסיס הסטנדרטי של $M_{2\times2}(\mathbb{R})$:

$B=\left(\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right)$ **. אז** $[T]_B^B=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix}$**. עכשיו אפשר למצוא את הערכים העצמיים ואת הווקטורים העצמיים של המטריצה הזאת ולהוכיח (בקלות) שהיא לכסינה. גם את הגרעין ואת התמונה של** T **אפשר למצוא בקלות בעזרת המטריצה הזאת. רק צריך לתרגם חזרה את עמודות קואורדינאטות למטריצות** 2×2**. למי שכותב שבסיס ל-** $\ker T$ **הוא וקטור-עמודה** $\begin{bmatrix}0\\1\\-1\\0\end{bmatrix}$ **-- לתת אפס נקודות על אותו סעיף. כנ"ל לגבי עניינים אחרים: וקטור-עמודה** $\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}$ **הוא לא מטריצה סימטרית** 2×2**, הוא עמודת קואורדינאטות של המטריצה הסימטרית** $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ **לפי הבסיס הסטנדרטי. לא להבחין בין וקטור (איבר במרחב וקטורי) לבין עמודת קואורדינאטות של הווקטור לפי בסיס כזה או אחר – זו טעות חמורה.**

מי שלא כתב הגדרה נכונה של מטריצה מייצגת בשאלה מס' 1, לא יקבל נקודות על הסעיף ו' של השאלה מס' 3. מי שכתב נכון בשאלה מס' 1 את ההגדרה של $[T]_B^B$ **במקום ההגדרה הכללית של** $[T]_C^B$**, אמנם לא יקבל על זה נקודות בשאלה מס' 1, אבל אפשר לתת לו נקודות על הסעיף ו' של השאלה מס' 3.**

<u>שאלה 4.</u> (20 נקודות) מצאו בסיס אורתונורמלי של $\mathbb{R}^3$ המורכב מווקטורים עצמיים של המטריצה A^tA כאשר $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$.

<u>פתרון.</u> $A^tA=\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}$. נציין שהמטריצה A הנתונה מתחלפת בכפל עם המשוחלפת שלה, $A^tA=AA^t$, ולכן גם אם מסמנים את המשוחלפת של A כ-${}^tA$, ואז מפרשים את המכפלה A^tA בהתאם, עדיין מקבלים אותה תוצאה.

בדיקה: מי שהעתיק את המטריצה A לא נכון או טעה בחישוב המכפלה A^tA -- לתת לו אפס על כל השאלה מס' 4, אין טעם לבדוק את מה שהוא כתב בהמשך של שאלה זו.

תחילה מוצאים את הערכים העצמיים של A^tA:

$$\det\left(A^tA-\lambda I\right)=\det\begin{bmatrix}2-\lambda&1&1\\1&2-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}4-\lambda&1&1\\4-\lambda&2-\lambda&1\\4-\lambda&1&2-\lambda\end{bmatrix}=$$

$$=\left(4-\lambda\right)\det\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2-\lambda&1\\1&1&2-\lambda\end{bmatrix}=\left(4-\lambda\right)\det\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1-\lambda&0\\0&0&1-\lambda\end{bmatrix}=\left(4-\lambda\right)\left(1-\lambda\right)^2$$

מכאן, הערכים העצמיים של A^tA הם $1,4$.

כדי למצוא את הווקטורים העצמיים של A^tA השייכים לערך עצמי 4 פותרים את מערכת $\begin{bmatrix}2-4&1&1\\1&2-4&1\\1&1&2-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ ומוצאים וקטור-עמודה $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$. כדי למצוא את הווקטורים העצמיים של A^tA השייכים לערך עצמי 1 פותרים את מערכת $\begin{bmatrix}2-1&1&1\\1&2-1&1\\1&1&2-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ ומוצאים וקטורי-עמודה בלתי תלויים לינארית $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$. שלושה וקטורי-עמודה $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ מהווים

בסיס ל-$\mathbb{R}^3$. הווקטור $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ מאונך לכל וקטור ב-$Span\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}\right)$ כי $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ מאונך גם ל-$\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$ וגם ל-$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$: קל לראות זאת ישירות, גם ראוי לציין שזה מקרה פרטי של המשפט המבטיח שווקטורים עצמיים של מטריצה צמודה לעצמה השייכים לערכים עצמיים שונים מאונכים זה לזה.

אפשר ליישר זווית בין הווקטורים $\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ על ידי פעימה אחת של תהליך גרם-שמידט. אפשר לפעול על פי השיקולים הבאים. המערכת למציאת וקטורים עצמיים השייכים לערך עצמי 1 היא בעצם משוואה אחת בלבד $x+y+z=0$. כל הווקטורים של המישור המוגדר על ידי המשוואה הזאת מאונכים לווקטור $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, לכן כדי למצוא בסיס אורתוגנלי ל-$\mathbb{R}^3$ המורכב מווקטורים עצמיים של A^tA נשאר לנו למצוא בסיס אורתוגונלי למישור $\left\{\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3 \middle| x+y+z=0\right\}$. ניקח וקטור $\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$ השייך למישור זה ונמצא במישור זה וקטור המאונך ל-$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$. בשביל זה נפתור את המערכת $\begin{cases}x+y+z=0\\x-z=0\end{cases}$.

המשוואה $x+y+z=0$ דורשת השתייכות של הווקטור $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ למישור הנ"ל, המשוואה $x-z=0$ דורשת זווית ישרה בין $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ ו-$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$. מקבלים: $\begin{cases}x=z\\y=-2z\end{cases}$. אם נציב $z=1$ נקבל וקטור $\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$.

כעת $\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right)$ הוא בסיס אורתוגונאלי ל-$\mathbb{R}^3$ המורכב מווקטורים עצמיים של A^tA **.**

מחלקים כל וקטור בבסיס האורתוגונלי שמצאנו בנורמה שלו ומקבלים בסיס אורתונורמלי ל-$\mathbb{R}^3$

המורכב מווקטורים עצמיים של A^tA : $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}\right)$,

או בצורה מפורטת יותר $\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\\frac{-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\right)$.

בדיקה: קודם כל יש לציין שתשובה נכונה כאן היא לא יחידה. בכל תשובה נכונה חייב להופיע אחד משני וקטורים: $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ או $\frac{-1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$. שני הווקטורים הנוספים של בסיס אורתונורמלי המבוקש יכולים להיות שונים מאלה שכתבנו לעיל, אבל הם חייבים לקיים את המשוואה $x+y+z=0$, חייבים להיות מאונכים זה לזה ולהיות בעלי נורמה 1. במבחן מועד ב' לפני שנה היתה שאלה מאד דומה לשאלה זו, המטריצה שם היתה $\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$, בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים בדיוק כמו בשאלה שלנו. אותו מבחן מזמן פורסם במודל עם פתרון מלא ומפורט, לכן הבדיקה של השאלה הזאת צריכה להיות קפדנית. מי שלא הגיע לתשובה נכונה לא יקבל יותר מחמש נקודות, ולא משנה מה הטעות, גם אם שכח מינוס או משהו כזה. אם מצא נכון בסיס אורתוגונלי רק לא נירמל אותו – חמש נקודות. על מציאת ערכים עצמיים בלבד – שתי נקודות, על מציאת וקטורים עצמיים -- שתי נקודות.

שאלה 5. (15 נק') יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית.

הוכיחו: $\operatorname{Im}(T^2)=\operatorname{Im}(T) \Leftrightarrow \ker(T)=\ker(T^2)$.

הערה: יש להוכיח תחילה ש-$\operatorname{Im}(T^2)$ הוא תת-מרחב של $\operatorname{Im}(T)$ ו-$\ker(T)$ הוא תת-מרחב של $\ker(T^2)$.

פתרון. נוכיח תחילה ש-$\ker(T)$ הוא תת-מרחב של $\ker(T^2)$ ו-$\operatorname{Im}(T^2)$ הוא תת-מרחב של $\operatorname{Im}(T)$.
ניקח $\vec{v}\in\ker(T)$ ונוכיח ש-$\vec{v}\in\ker(T^2)$. על פי הגדרת גרעין, כדי להוכיח ש-$\vec{v}\in\ker(T^2)$ יש להראות ש-$T^2(\vec{v})=\vec{0}$. באמת, $T^2(\vec{v})=T(T(\vec{v}))=T(\vec{0})=\vec{0}$ כי $\vec{v}\in\ker(T)$ ולכן על פי הגדרת גרעין $T(\vec{v})=\vec{0}$, ו-$T(\vec{0})=\vec{0}$ כי T העתקה לינארית. הוכחנו ש-$\ker(T)\subseteq\ker(T^2)$. היות וגרעין של כל העתקה לינארית הוא מרחב וקטורי מהכלה זו נובע ש-$\ker(T)$ הוא תת-מרחב של $\ker(T^2)$.
כעת ניקח $\vec{w}\in\operatorname{Im}(T^2)$ ונוכיח ש-$\vec{w}\in\operatorname{Im}(T)$.
$\vec{w}\in\operatorname{Im}(T^2)\Rightarrow\exists\vec{v}\in V:\vec{w}=T^2(\vec{v})=T(T(\vec{v}))$.
נסמן $\vec{u}=T(\vec{v})$. קיבלנו $\vec{w}=T(\vec{u})$. על פי הגדרת $\operatorname{Im}(T)$, מזה נובע ש-$\vec{w}\in\operatorname{Im}(T)$.

הוכחנו ש-$\operatorname{Im}(T^2)\subseteq\operatorname{Im}(T)$. היות ותמונה של כל העתקה לינארית היא מרחב וקטורי מהכלה זו נובע ש-$\operatorname{Im}(T^2)$ הוא תת-מרחב של $\operatorname{Im}(T)$.

בדיקה: מי שהוכיח ש-$\ker(T)$ הוא תת-מרחב של $\ker(T^2)$ -- שלוש נקודות. אם הוכיח רק את ההכלה $\ker(T)\subseteq\ker(T^2)$ אבל לא התייחס לעניין של תת-מרחב – שתי נקודות. כנ"ל לגבי $\operatorname{Im}(T^2)$ ו-$\operatorname{Im}(T)$. כלומר, מי שכתב את כל מה שכתוב לעיל – שש נקודות.

נכתוב את משפט המימדים עבור העתקה T: $\dim(V)=\dim(\ker(T))+\dim(\operatorname{Im}(T))$.
נכתוב את משפט המימדים עבור העתקה T^2: $\dim(V)=\dim(\ker(T^2))+\dim(\operatorname{Im}(T^2))$.
קיבלנו: $\dim(\ker(T^2))+\dim(\operatorname{Im}(T^2))=\dim(\ker(T))+\dim(\operatorname{Im}(T))$.
אם נתון ש-$\ker(T)=\ker(T^2)$, אז $\dim(\ker(T))=\dim(\ker(T^2))$, ומהשויון
$\dim(\ker(T^2))+\dim(\operatorname{Im}(T^2))=\dim(\ker(T))+\dim(\operatorname{Im}(T))$ נובע ש-
$\dim(\operatorname{Im}(T^2))=\dim(\operatorname{Im}(T))$. היות ו-$\operatorname{Im}(T^2)$ הוא תת-מרחב ב-$\operatorname{Im}(T)$, משויון המימדים
$\dim(\operatorname{Im}(T^2))=\dim(\operatorname{Im}(T))$ נובע ש-$\operatorname{Im}(T^2)=\operatorname{Im}(T)$. הטיעון האחרון הוא על פי אחד המשפטים מבקורס אלגברה לינארית 1: אם U הוא תת-מרחב של W ו-$\dim U=\dim W$, אז $U=W$.

הוכחנו את הגרירה $\ker(T)=\ker(T^2) \Leftarrow \operatorname{Im}(T^2)=\operatorname{Im}(T)$.

אם נתון ש- $\operatorname{Im}(T)=\operatorname{Im}(T^2)$, אז $\dim(\operatorname{Im}(T))=\dim(\operatorname{Im}(T^2))$, ומהשויון
$\dim(\ker(T^2))+\dim(\operatorname{Im}(T^2))=\dim(\ker(T))+\dim(\operatorname{Im}(T))$ נובע ש-
$\dim(\ker(T^2))=\dim(\ker(T))$. היות ו- $\ker(T)$ הוא תת-מרחב של $\ker(T^2)$, משויון המימדים
$\dim(\ker(T))=\dim(\ker(T^2))$ נובע ש- $\ker(T)=\ker(T^2)$.

הוכחנו את הגרירה $\ker(T)=\ker(T^2) \Rightarrow \operatorname{Im}(T^2)=\operatorname{Im}(T)$.

הוכחנו את שתי הגרירות, כלומר, הוכחנו את הטענה:
$\ker(T)=\ker(T^2) \Leftrightarrow \operatorname{Im}(T^2)=\operatorname{Im}(T)$.

בדיקה: מי שמוכיח נכון אחת הגרירות ואחר כך אומר שעל ידי טיעונים דומים אפשר להוכיח את הגרירה השניה – לא להוריד על זה, כי באמת הטיעונים דומים מאד.
מי שהשתמש בכך ש- $\operatorname{Im}(T^2)$ **הוא תת-מרחב של** $\operatorname{Im}(T)$ **ו-** $\ker(T)$ **הוא תת-מרחב של** $\ker(T^2)$ **אבל לא הוכיח את הטענות האלה – עד עשר נקודות.**
מי שכתב את השויון $\dim(\ker(T^2))+\dim(\operatorname{Im}(T^2))=\dim V=\dim(\ker(T))+\dim(\operatorname{Im}(T))$ **אבל לא המשיך נכון – לתת חמש נקודות. אם רק הזכיר את המשפט** $\dim(V)=\dim(\ker(T))+\dim(\operatorname{Im}(T))$ **ולא התקדם מעבר לכך – אין לזה ערך כלל. מי שמסיק מהנתונים ש-** $T^2=T$**, לתת אפס על כל השאלה כי זו טעות חמורה. באמת, אילו היה נתון ש-** $T^2=T$**, אין כבר מה להוכיח: אם העתקות** T **ו-** T^2 **הן אותו דבר, אז ברור שיש להן אותו גרעין ואותה תמונה.**

<u>**שאלה 6.**</u> (15 נק') יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית כך ש- $T^2=T$, $\operatorname{Im}(T)\neq V$, $\operatorname{Im}(T)\neq\{\vec{0}\}$. מצאו את כל הערכים העצמיים של T.

<u>פתרון.</u> נעיר שהגרעין של T לא טריוויאלי, כלומר קיים $\vec{0}\neq\vec{v}\in V$ כך ש- $T(\vec{v})=\vec{0}$. הסיבה לכך היא: V הוא מרחב ממימד סופי, לכן $\dim V=\dim\ker(T)+\dim\operatorname{Im}(T)$, נתון ש- $\operatorname{Im}(T)\neq V$, לכן $\dim\operatorname{Im}(T)<\dim V$ ולכן $\dim\ker(T)>0$. מכאן אפס הוא ערך עצמי

של T: $T(\vec{v})=\vec{0}=0\cdot\vec{v}$, $\vec{v}\neq\vec{0}$.

נתון ש- $\mathrm{Im}(T)\neq\{\vec{0}\}$, לכן קיים $\vec{v}\in V$ כך ש- $T(\vec{v})\neq\vec{0}$. נתון גם ש- $T^2=T$,

לכן $T(T(\vec{v}))=T(\vec{v})$.

בעצם, כתוב כאן שהמספר 1 הוא ערך עצמי של T: $T(T(\vec{v}))=T(\vec{v})=1\cdot T(\vec{v})$. (הווקטור $T(\vec{v})$, הוא שונה מווקטור האפס, הוא וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי 1)

עד כאן – הוכחנו שהמספרים אפס ואחד הם ערכים עצמיים של T. נשאר להראות שאין ל- T ערכים עצמיים נוספים. נניח, λ הוא ערך עצמי של T. אם כך, קיים $\vec{0}\neq\vec{u}\in V$ כך ש- $T(\vec{u})=\lambda\vec{u}$. מכאן $T^2(\vec{u})=T(T(\vec{u}))=T(\lambda\vec{u})=\lambda T(\vec{u})=\lambda\cdot\lambda\vec{u}=\lambda^2\vec{u}$. אבל $T^2=T$, ולכן $\lambda\vec{u}=T(\vec{u})=T^2(\vec{u})=\lambda^2\vec{u}$, כלומר, $(\lambda-\lambda^2)\vec{u}=\vec{0}$. היות ו- $\vec{u}\neq\vec{0}$, מהשויון האחרון נובע ש- $\lambda-\lambda^2=0$, זאת אומרת, $\lambda=0$ או $\lambda=1$. השתמשנו כאן רק בנתון ש- $T^2=T$, ומה שהוכחנו עכשיו – אם λ הוא ערך עצמי של T, אז λ חייב להיות 0 או 1; לא נובע מזה שגם 0 וגם 1 הם ערכים עצמיים של T -- זאת הוכחנו לעיל על ידי שימוש בנתונים $\mathrm{Im}(T)\neq V$, $\mathrm{Im}(T)\neq\{\vec{0}\}$.

לסיכום: קבוצת כל הערכים העצמיים של T היא $\{0,1\}$.

בדיקה: בשאלה זו יש שלושה חלקים: להראות שאפס הוא ערך עצמי; להראות שאחד הוא ערך עצמי; להראות שאין ל- T ערכים עצמיים נוספים. כל חלק – חמש נקודות. לא חייבים לפתור לפי הסדר שכתבנו לעיל, אין חשיבות לסדר של שלושת החלקים הנ"ל.

שאלה 7. (15 נק') נתון: $A\in M_{k\times n}(\mathbb{R})$, המספר λ הוא ערך עצמי של A^tA. הוכיחו ש- λ הוא מספר ממשי לא שלילי, כלומר, $\lambda\geq 0$.

הוכחה. כאן המכפלה הפנימית היא המכפלה הפנימית הסטנדרטית של $\mathbb{R}^n$ והנורמה – בהתאם. יהי $\vec{0}\neq\vec{v}\in\mathbb{R}^n$ וקטור(-עמודה) עצמי של A^tA השייך לערך עצמי λ: $A^tA\vec{v}=\lambda\vec{v}$.

$$\|A\vec{v}\|^2=\langle A\vec{v},A\vec{v}\rangle=(A\vec{v})^tA\vec{v}=(\vec{v}^tA^t)A\vec{v}=\vec{v}^t(A^tA\vec{v})=\vec{v}^t(\lambda\vec{v})=\lambda\vec{v}^t\vec{v}=\lambda\langle\vec{v},\vec{v}\rangle=\lambda\|\vec{v}\|^2.$$

$\|\vec{v}\|^2>0$ (כי $\|\vec{v}\|\neq 0$ בגלל ש- $\vec{v}\neq\vec{0}$), $\|A\vec{v}\|^2\geq 0$, לכן $\lambda=\dfrac{\|A\vec{v}\|^2}{\|\vec{v}\|^2}\geq 0$.

בדיקה: מי שבמקום הטענה הזאת מוכיח שערך עצמי של מטריצה ממשית סימטרית הוא ממשי – אפס. מי שמשתמש ב-SVD – אפס.