בס"ד

אלגברה לינארית 2

מספר הקורס: 7028210-5 ⬩ תשפ"ב סמסטר קיץ מועד א', 2.10.22

מרצה ומתרגל: יונה צרניאבסקי, ענבר סדון.

משך הבחינה: שלוש שעות (180 דקות).

עיינו היטב בהוראות הבחינה.

ניתן לענות על כל השאלות. אין להשתמש בחומר עזר מכל סוג. אין להשתמש בדף נוסחאות. אין להשתמש במחשבון. אין להשתמש בטלפון. בדקו היטב את כל מה שאתם כותבים. בשאלות החישוביות השתדלו מאד לקבל תשובה נכונה. הסברים חייבים להכיל מילים, לא רק חישובים וסימונים מתמטיים. בהוכחות יש לצטט את המשפטים, התכונות, ההגדרות שעליהם אתם מסתמכים. אין לבקש מהמרצה או מהמתרגל בזמן המבחן לעיין במה שכתבתם. אין לבקש מהמרצה או מהמתרגל בזמן המבחן עזרה בפתרון, הכוונה, מיקוד, רמז או הדרכה. בזמן המבחן אפשר לשאול את המרצה או המתרגל רק לגבי ניסוח השאלות.

יש לכתוב את כל התשובות במחברת הבחינה, ולא על גבי השאלון כי השאלון לא נסרק.

שאלה 1: (15 נקודות) יהי V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ כך ש-$\dim V = 2$.

יהיו $B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2), C = (\vec{c}_1, \vec{c}_2)$ שני בסיסים של המרחב V.

תהי $T: V \to V$ התעקה לינארית כך ש-

$$T(3\vec{b}_1 + 5\vec{b}_2) = 2\vec{c}_1 - \vec{c}_2\ ,\ T(4\vec{b}_1 + 7\vec{b}_2) = \vec{c}_1 - 2\vec{c}_2\ .$$

מצאו את המטריצה $[T]_C^B$. **נמקו היטב ובדקו היטב את התשובה.**

שאלה 2: (25 נקודות) נזכיר:

$$\mathbb{R}_4[x] = \{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \mid a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\}$$

נתבונן בהעתקה הלינארית הבאה:

$T: \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]\ ,\ T(p(x)) = x^4 p\left(\frac{1}{x}\right)$. קל לראות ש-$T$ העתקה לינארית, אין צורך להוכיח זאת כאן.

מצאו בסיס של $\mathbb{R}_4[x]$ הבנוי מווקטורים העצמיים של T.

הערה. במקרה הזה הווקטורים העצמיים הם פולינומים.

נמקו היטב ובדקו היטב את התשובה.

שאלה 3: (20 נקודות) תהי $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$. כרגיל, I_n היא מטריצת היחידה.

הוכיחו שאם עבור $\alpha \in \mathbb{C}$ המטריצה A דומה למטריצה $A + \alpha I_n$, אז $\alpha = 0$.

נמקו היטב את ההוכחה.

<u>שאלה 4</u>: (20 נקודות) נתון: U,V מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{R}$, $\dim V = 4,\ \dim U = 2$. ההעתקות $T: V \to U,\ \ S: U \to V$ הן העתקות לינאריות, ההעתקה S חד-חד-ערכית, ההעתקה T "על". נזכיר את הגדרת ההרכבה: $(S \circ T)(\vec{v}) = S\big(T(\vec{v})\big)$.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. אם הטענה אינה נכונה, הביאו דוגמה נגדית. אם הטענה נכונה, הוכיחו את הטענה. אם הטענה נכונה ואתם מוכיחים אותה, ההוכחה צריכה להיות כללית – צריכה לכסות את כל האפשרויות של מרחבים וקטוריים U,V והעתקות S,T כך שהתנאים הנתונים מתקיימים.

א. (10 נקודות) ההעתקה $S \circ T$ בלתי הפיכה.
ב. (5 נקודות) ההעתקה $T \circ S$ בלתי הפיכה.
ג. (5 נקודות) ההעתקה $T \circ S$ הפיכה.

נמקו היטב ובדקו היטב את התשובות.

<u>שאלה 5</u>: (10 נקודות) האם קיימות מטריצות $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}), B \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ כך ש- $(AB)^2 = 0_{2\times 2}$ אבל $(BA)^2 \neq 0_{2\times 2}$?
אם המטריצות A,B כאלה קיימות, הביאו דוגמה. אחרת – הוכיחו שהן לא קיימות. **נמקו היטב ובדקו היטב את התשובה.**

<u>שאלה 6</u>: (20 נקודות) נסמן: $\mathcal{F} = \left\{a + b\sqrt{2} \,\middle|\, a,b \in \mathbb{Q}\right\}$.
כידוע, $\mathcal{F}$ מהווה שדה. כמו כל שדה, $\mathcal{F}$ מהווה מרחב וקטורי (חד-מימדי) מעל עצמו. כמו כן, קל לראות ש- $\mathcal{F}$ מהווה מרחב וקטורי (דו-מימדי) מעל $\mathbb{Q}$.
נגדיר את ההעתקה $T: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ כך: $T\big(a + b\sqrt{2}\big) = a - b\sqrt{2}$.
א. (10 נקודות) האם ההעתקה T לינארית מעל $\mathbb{Q}$?
ב. (10 נקודות) האם ההעתקה T לינארית מעל $\mathcal{F}$?
נמקו היטב ובדקו היטב את התשובות.

<u>שאלה 7</u>: (10 נקודות) תהי $A \in M_{k\times n}(\mathbb{R})$. כידוע, המטריצה A^tA היא מטריצה $n \times n$ סימטרית. יהי המספר λ ערך עצמי של המטריצה A^tA .
כידוע, המספר λ הוא מספר ממשי, אין צורך להוכיח זאת כאן.
הוכיחו ש-λ הוא מספר ממשי לא שלילי, כלומר, $\lambda \geq 0$.
נמקו היטב את ההוכחה.

בהצלחה !