בס"ד

אלגברה לינארית 2

מספר הקורס: 7028210-5 • תשפ"ב סמסטר קיץ מועד ב', 7.11.22
מרצה ומתרגלת: יונה צרניאבסקי, ענבר סדון.
משך הבחינה: שלוש שעות (180 דקות).

עיינו היטב בהוראות הבחינה.

ניתן לענות על כל השאלות. אין להשתמש בחומר עזר מכל סוג. אין להשתמש בדף נוסחאות. אין להשתמש במחשבון. אין להשתמש בטלפון. בדקו היטב את כל מה שאתם כותבים. בשאלות החישוביות השתדלו מאד לקבל תשובה נכונה. הסברים חייבים להכיל מילים, לא רק חישובים וסימונים מתמטיים. בהוכחות יש לצטט את המשפטים, התכונות, ההגדרות שעליהם אתם מסתמכים. אין לבקש מהמרצה או מהמתרגל בזמן המבחן לעיין במה שכתבתם. אין לבקש מהמרצה או מהמתרגל בזמן המבחן עזרה בפתרון, הכוונה, מיקוד, רמז או הדרכה. בזמן המבחן אפשר לשאול את המרצה או המתרגל רק לגבי ניסוח השאלות.

יש לכתוב את כל התשובות במחברת הבחינה, ולא על גבי השאלון כי השאלון לא נסרק.

שאלה 1: (26 נקודות)
יהיו $B=\big((1,1),(2,3)\big), C=\big((-5,-4),(-4,-3)\big)$ שני בסיסים של המרחב $\mathbb{R}^2$.
תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית כך ש- $[T]_C^B=\begin{bmatrix}-5 & -8\\ 5 & 7\end{bmatrix}$.
מצאו את כל הערכים העצמיים של ההעתקה T.
תזכורת. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל השדה F, יהי B בסיס של V, תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. אזי: הסקלר $\lambda\in F$ הוא ערך עצמי של ההעתקה T אם ורק אם λ הוא ערך עצמי של המטריצה $[T]_B^B$.
נמקו היטב ובדקו היטב את התשובה.

שאלה 2: (22 נקודות) נזכיר: $\mathbb{R}_2[x]=\{a+bx+cx^2 \mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$.
נתבונן בהעתקה הלינארית הבאה:
$T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$, $T\big(p(x)\big)=p(3x+1)$. קל לראות ש-T היא העתקה לינארית לכסינה, אין צורך להוכיח זאת כאן.
מצאו בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$ הבנוי מווקטורים העצמיים של T .
הערה. במקרה הזה הווקטורים העצמיים הם פולינומים.
נמקו היטב ובדקו היטב את התשובה.

שאלה 3: (12 נקודות) תהי $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ מטריצה לכסינה.
תהי $B\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ מטריצה שאיננה לכסינה. הוכיחו ש-B איננה דומה ל-A .
נמקו היטב את ההוכחה.

<u>שאלה 4</u>: (20 נקודות)

נתון: $A,B,C \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ כך שהמטריצה $A+B$ דומה למטריצה $A+C$.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות. אם הטענה אינה נכונה, הביאו דוגמה נגדית. אם הטענה נכונה, הוכיחו את הטענה.

א. (7 נקודות) $\det(B)=\det(C)$.

ב. (7 נקודות) $\text{Trace}(B)=\text{Trace}(C)$.

ג. (6 נקודות) אם $A=I_2$, אז $\chi_B(x)=\chi_C(x)$ (כאשר $\chi_B(x)$ הוא הפולינום האופייני של המטריצה B: $\chi_B(x)=\det(xI_2-B)$.)

נמקו היטב ובדקו היטב את התשובות.

<u>שאלה 5</u>: (15 נקודות) כידוע, $M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ עם פעולות חיבור מטריצות וכפל מטריצה בסקלר הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{C}$ ממימד 9. תהי $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{C})$ מטריצה הפיכה, ונגדיר את תת-המרחב הבא של $M_{3\times 3}(\mathbb{C})$:
$V_A=\text{Span}(A^{-1}, I_3, A, A^2)$. הוכיחו ש- $\dim(V_A)\le 3$.

נמקו היטב את ההוכחה.

<u>שאלה 6</u>: (15 נקודות) יהי $2\le n\in\mathbb{N}$.

תהי $A\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ כך ש- $\text{rank}(A)=1$.

א. (8 נקודות) הוכיחו שהמספר $\text{Trace}(A)$ הוא ערך עצמי של A.

ב. (7 נקודות) הוכיחו שאם $\text{Trace}(A)=0$, אז A איננה לכסינה.

נמקו היטב ובדקו היטב את ההוכחות.

<u>שאלה 7</u>: (10 נקודות) יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$.

הוכיחו שעבור כל $\vec{u},\vec{v}\in V$ מתקיים אי-השוויון $\|\vec{u}+\vec{v}\|\le\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$.

<u>תזכורת.</u> 1. $\|\vec{u}\|=\sqrt{\langle\vec{u},\vec{u}\rangle}$.

2. $|\langle\vec{u},\vec{v}\rangle|\le\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$ עבור כל $\vec{u},\vec{v}\in V$.

נמקו היטב את ההוכחה.

בהצלחה !

בס״ד

① λ הוא ע״ע של T אם ורק אם λ הוא ע״ע של $[T]_B^B$.

לנו נתונה מטריצה $[T]_C^B$ כאשר B, C הם בסיסים שונים.

לכן, קודם כל, נמצא את המטריצה $[T]_B^B$.

$$[T]_B^B = [I]_B^C [T]_C^B = [I]_B^E [I]_E^C [T]_C^B =$$

$$= \left([I]_E^B\right)^{-1} [I]_E^C [T]_C^B = \begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-5&-4\\-4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5&-8\\5&7\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}3&-2\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5&-4\\-4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5&-8\\5&7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-7&-6\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5&-8\\5&7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5&14\\0&-1\end{bmatrix}$$

כלומר, $[T]_B^B = \begin{bmatrix}5&14\\0&-1\end{bmatrix}$. ($E=((1,0),(0,1))$ בסיס סטנדרטי.)

$$\det\left([T]_B^B - \lambda I\right) = \det\begin{bmatrix}5-\lambda & 14\\ 0 & -1-\lambda\end{bmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda)$$

לפתור: $(5-\lambda)(-1-\lambda)=0$ יש פתרונות: $5, -1$.

הערכים העצמיים של T הם $5, -1$.

במקום $[T]_B^B$ אפשר להשתמש ב- $[T]_C^C$ או ב- $[T]_E^E$.

$$[T]_E^E = [I]_E^C [T]_C^B [I]_B^E = \begin{bmatrix}-5&-4\\-4&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5&-8\\5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2\\-1&1\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}5&12\\5&11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&-2\\-1&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3&2\\4&1\end{bmatrix}$$

$$\det\left([T]_E^E - \lambda I\right) = \det\begin{bmatrix}3-\lambda & 2\\ 4 & 1-\lambda\end{bmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)-8 = \lambda^2-4\lambda-5$$

לפתור: $\lambda^2-4\lambda-5=0$ יש פתרונות: $\lambda=5$ או $\lambda=-1$

נס״פ ②   פרק א'

$$T(p(x)) = T(a+bx+cx^2) = a + b(3x+1) + c(3x+1)^2 =$$
$$= a+b+c + (3b+6c)x + 9cx^2$$

$$a+b+c + (3b+6c)x + 9cx^2 = \lambda a + \lambda b x + \lambda c x^2$$

$$\begin{cases} a+b+c = \lambda a \\ 3b+6c = \lambda b \\ 9c = \lambda c \end{cases}$$

$9c = \lambda c \Leftarrow \lambda = 9$ או $c=0$.

$\lambda = 9$:

$$\begin{cases} a+b+c = 9a \\ 3b+6c = 9b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+b+c = 9a \\ b = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8a+2b = 0 \\ b = c \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 4a \\ c = b = 4a \end{cases}$$

רואים ש $\lambda=9$ הוא ע"ע (לא קיבלנו כל סתירה).

ו"ע הש״ים לע"ע 9 הם: $a + 4ax + 4ax^2$, $a \neq 0$

כאמור:

$$T(1+4x+4x^2) = 1 + 4(3x+1) + 4(3x+1)^2 =$$
$$= 1 + 12x + 4 + 36x^2 + 24x + 4 =$$
$$= 9 + 36x + 36x^2 = 9(1+4x+4x^2)$$

נבדוק מה קורה כאשר $c=0$.

$$\begin{cases} a+b = \lambda a \\ 3b = \lambda b \end{cases}$$

$3b = \lambda b \Leftarrow \lambda = 3$ או $b=0$. אם $\lambda=3$:

$$\begin{cases} a+b = 3a \\ 3b = 3b \end{cases}$$

$\lambda=3$ הוא ע"ע. ו"ע הש״ים לע"ע 3 הם: $c \neq 0$, $b=2a$, $a \neq 0$, כלומר, $a + 2ax$. כאמור

$$T(1+2x) = 1 + 2(3x+1) = 3 + 6x = 3(1+2x)$$

3

אם $b=0$ (נזכיר שאז $c=0$), נשאר לנו השוויון אחד $a=\lambda a$.

$a=0$ לא מעניין אותנו כי אם $a=b=c=0$, יש לנו פולינום האפס שלא יכול להיות וקטור עצמי.

אם $a\neq 0$, אז $\lambda=1$. מצאנו עוד ע"ע: $\lambda=1$.

ו"ע השייך לע"ע 1 הוא פולינום קבוע a (כאשר $a\neq 0$).

בסיס ל-$\mathbb{R}_2[x]$ הבנוי מו"ע של T הוא:

$$(1,\ 1+2x,\ 1+4x+4x^2)$$

<u>דרך ב'</u> (כנראה, הסטודנטים יעדיפו את הדרך הזאת).

יהי $E=(1,x,x^2)$ בסיס סטנדרטי של $\mathbb{R}_2[x]$.

$$T(1)=1=1\cdot 1+0\cdot x+0\cdot x^2$$

לכן העמודה הראשונה של $[T]_E^E$ היא $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.

$$T(x)=3x+1=1\cdot 1+3\cdot x+0\cdot x^2$$

לכן העמודה השניה של $[T]_E^E$ היא $\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}$.

$$T(x^2)=(3x+1)^2=9x^2+6x+1=1\cdot 1+6\cdot x+9\cdot x^2$$

לכן העמודה השלישית של $[T]_E^E$ היא $\begin{bmatrix}1\\6\\9\end{bmatrix}$.

מצאנו ש: $[T]_E^E=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&3&6\\0&0&9\end{bmatrix}$. מכאן רואים מיד ע"ע של T הם $1,3,9$.

ו"ע השייכים לע"ע 1: $\begin{bmatrix}0&1&1\\0&2&6\\0&0&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$. $\begin{cases}b+c=0\\2b+6c=0\\8c=0\end{cases}$ מכאן $b=c=0$,

אבל על a אין הגבלה, כלומר, הווקטורים העצמיים הם פולינומים קבועים a (כאשר $a\neq 0$). אם נציב $a=1$ נקבל 1.

ו"ע השייכים לע"ע 3: $\begin{bmatrix}-2&1&1\\0&0&6\\0&0&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ $\begin{cases}-2a+b+c=0\\6c=0\end{cases}$ מכאן $c=0$, $b=2a$.

לכן ו"ע הוא $a+2ax$, $a\neq 0$. אם נציב $a=1$, נקבל $1+2x$.

ו"ע השייכים לע"ע 9: $\begin{bmatrix}-8&1&1\\0&-6&6\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ $\begin{cases}-8a+b+c=0\\-6b+6c=0\end{cases}$ $\begin{cases}a=\frac{c}{4}\\b=c\end{cases}$. ו"ע השייכים לע"ע 9 הם

פולינומים $\frac{c}{4}+cx+cx^2$, $c\neq 0$. אם נציב $c=4$, נקבל $1+4x+4x^2$.

(3) נניח בשלילה שB דומה לA, כלומר, נניח שקיימת מטריצה $X\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ הפיכה כך ש $B=XAX^{-1}$.
נתון לנו שA לכסינה, כלומר, קיימות מטריצה אלכסונית $D\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ ומטריצה הפיכה $Y\in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ כך ש $A=YDY^{-1}$. נציב זאת בשוויון הקודם ונקבל:

$$B=XAX^{-1}=XYDY^{-1}X^{-1}=(XY)D(XY)^{-1}$$

בשוויון $B=(XY)D(XY)^{-1}$ כתוב שB דומה למטריצה אלכסונית D, כלומר, קיבלנו שB לכסינה.
בו סתירה לנתון שB איננה לכסינה.
ההנחה שB דומה לA הביאה אותנו לסתירה,
לכן B איננה דומה לA.

4 א) הטענה לא נכונה. ניקח לדוגמה

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad A+C=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

קל לחשב שלמטריצה $\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ יש שני ע"ע שונים $1, -1$, ולכן היא דומה למטריצה אלכסונית $\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$:

$$\det\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\right)=\det\begin{bmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-1=(\lambda+1)(\lambda-1)$$

כלומר, המטריצות

$$A+B=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$$

$$A+C=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

דומות.

למרות זאת,

$$\det(B)=\det\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}=-1$$

$$\det(C)=\det\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\end{bmatrix}=0$$

כלומר, $\det(B)\neq\det(C)$ למרות שהמטריצות $A+B$ ו $A+C$ דומות.

4) ב) הטענה נכונה. היות ו- $A+B$ ו- $A+C$ דומות, יש לנו שוויון $Trace(A+C)=Trace(A+B)$.
כידוע $Trace(A+B)=Trace(A)+Trace(B)$.
לכן השוויון $Trace(A+B)=Trace(A+C)$ אפשר לכתוב כך:

$$Trace(A)+Trace(B)=Trace(A)+Trace(C)$$

מכאן מקבלים מיידית ש- $Trace(B)=Trace(C)$.

ג) הטענה נכונה. נתון לנו ש- $I+B$ ו- $I+C$ דומות, ועלינו להראות ש- $\chi_B(x)=\chi_C(x)$. מהנתון נובע שקיימת מטריצה P 2×2 הפיכה כך ש- $I+B=P(I+C)P^{-1}$.
מכאן: $I+B=PIP^{-1}+PCP^{-1}=I+PCP^{-1}$.
ומכאן $B=PCP^{-1}$. כלומר, המטריצות B,C דומות, ולכן יש להן אותו פולינום אופייני: $\chi_B(x)=\chi_C(x)$.
זו הדרך הפשוטה והטבעית ביותר, אבל אפשר להוכיח את הטענה גם כך: $\chi_{I+B}(x)=\chi_{I+C}(x)$ כי $I+B, I+C$ דומות.
נזכיר ש- $\chi_{I+B}(x)=det(xI-(I+B))$.

$$det(xI-(I+B))=det((x-1)I-B)$$
$$det(xI-(I+C))=det((x-1)I-C)$$

קיבלנו ש- $\chi_B(x-1)=\chi_C(x-1)$. אם נציב x במקום $x-1$, נקבל את השוויון המבוקש.

(5)

$\chi_A(x) = x^3+\alpha_2x^2+\alpha_1x-\det A$

לפי משפט קיילי-המילטון: $A^3+\alpha_2A^2+\alpha_1A-(\det A)I_3=0_{3\times3}$

מכאן:
$$A^3+\alpha_2A^2+\alpha_1A=(\det A)I_3$$
$$A(A^2+\alpha_2A+\alpha_1I_3)=(\det A)I_3$$

נתון ש-A הפיכה, לכן $\det A\neq 0$, לכן
$$A\cdot\frac{1}{\det A}(A^2+\alpha_2A+\alpha_1I_3)=I_3$$

מכאן
$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}(A^2+\alpha_2A+\alpha_1I_3)=$$
$$=\frac{1}{\det A}A^2+\frac{\alpha_2}{\det A}A+\frac{\alpha_1}{\det A}I_3$$

רואים ש-A^{-1} מהווה צירוף לינארי של A^2, A, I_3.

לכן A^{-1}, I_3, A, A^2 תלויים לינארית
כאיברים של המרחב $(M_{3\times3}(\mathbb{C}))$
$$A^{-1}\in Span(I_3, A, A^2)$$

לכן $V_A=Span(A^{-1}, I_3, A, A^2)=Span(I_3, A, A^2)$

המרחב V_A נפרש ע"י שלשה וקטורים I_3, A, A^2,

לכן $\dim V_A\le 3$

6

לכן, $\operatorname{rank} A = 1$, $\dim Null(A) = n-1 \geq 1$

(כזכור ע״פ Rank-Nullity Theorem:

$\operatorname{rank} A + \dim Null(A) = n$)

מכאן 0 הוא ע״ע של A עם ריבוי גאומטרי $n-1$.

מכאן הריבוי האלגברי של ע״ע 0 הוא לפחות $n-1$,

כלומר, $n-1$ או n.

(א)

$$\chi_A(x) = x^{n-1}(x-\alpha)$$

(הגורם x^{n-1} חייב להיות בגלל ש-0 הוא ע״ע עם ריבוי אלגברי לפחות $n-1$)

$$\chi_A(x) = x^{n-1}(x-\alpha) = x^n - \alpha x^{n-1}$$

כידוע, המקדם של x^{n-1} ב-$\chi_A(x)$ הוא $-Trace(A)$.

לכן $\alpha = Trace(A)$. כמו שראינו $\alpha = Trace(A)$ הוא שורש של $\chi_A(x)$ (הפולינום $\chi_A(x)$ מתחלק ב-$(x-\alpha)$)

לכן $\alpha = Trace(A)$ הוא ערך עצמי של A.

(ב) אם $Trace(A)=0$, אז $\chi_A(x) = x^n$. אפס הוא ערך עצמי עם ריבוי אלגברי n וריבוי גאומטרי $n-1$, לכן המטריצה A איננה לכסינה. (כי הריבוי האלגברי של הערך העצמי 0 אינו שווה לריבוי הגאומטרי שלו)

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v} \rangle = \langle \vec{u},\vec{u}\rangle + \langle \vec{u},\vec{v}\rangle + \langle \vec{v},\vec{u}\rangle + \langle \vec{v},\vec{v}\rangle =$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + \langle \vec{u},\vec{v}\rangle + \overline{\langle \vec{u},\vec{v}\rangle} + \|\vec{v}\|^2 =$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + 2Re\langle \vec{u},\vec{v}\rangle + \|\vec{v}\|^2 \leq \quad (*)$$

$$\leq \|\vec{u}\|^2 + 2|\langle \vec{u},\vec{v}\rangle| + \|\vec{v}\|^2 \leq \quad (**)$$

$$\leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 = (\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|)^2$$

קיבלנו ש: $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|)^2$

היות ו- $\|\vec{u}+\vec{v}\|, \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ הם מספרים ממשיים לא שליליים,

מכאן נובע ש: $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$.

הסבר לאי-השוויון (*):

לכל $x \leq \sqrt{x^2+y^2}$ לכל $x,y\in\mathbb{R}$

$Re z \leq |z|$ לכל $z=x+yi \in \mathbb{C}$

אי-השוויון (**)

כנ"ל אי השוויון של קושי שוורץ