בס"ד

עבודת בית 3

1. תהי A מטריצה $n\times n$ כך שקבוצת כל הערכים העצמיים שלה היא $\{1,2,3\}$.
כרגיל, I_n היא מטריצת היחידה $n\times n$. האם המטריצה $3A-I_n$ הפיכה?

2. תהיינה B,C שורות בעלות ארבעה רכיבים (במילים אחרות, מטריצות 1×4).
נגדיר: $A=B^tC$. מצאו את הערכים העצמיים של A. מה הם התנאים על השורות B,C כך ש-A תהיה ניתנת ללכסון?

3. נתבונן בהעתקה $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת כך:
$T(x,y,z)=(7x-2y-2z,-2x+7y-2z,-2x-2y+7z)$.
האם קיים בסיס B ל-$\mathbb{R}^3$ כך ש-$[T]_B^B=\begin{bmatrix}9&1&1\\0&9&-5\\0&0&3\end{bmatrix}$?
אם כן – מצאו אותו. אם לא – הוכיחו שהוא לא קיים.

4. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$, $T,S:V\to V$ העתקות לינאריות.
הפולינום האופייני של העתקה לינארית $T:V\to V$ מוגדר כך:
$p_T(x)=p_{[T]_B^B}(x)=\det\left(xI_n-[T]_B^B\right)$.

כאן $n=\dim V$, B בסיס מסוים של V, I_n היא מטריצת היחידה $n\times n$.

הוכיחו שאם לפחות אחת מהעתקות T,S הפיכה, אז $p_{T\circ S}(x)=p_{S\circ T}(x)$.

5. יהי V מרחב וקטורי של כל הסדרות המתכנסות עם איברים ממשיים:

$$V=\left\{(a_1,a_2,a_3,\ldots..)\,|\ \forall i\in\mathbb{N}: a_i\in\mathbb{R}\ \&\ \exists\lim_{n\to\infty}a_n\right\}$$

נגדיר את ההעתקה $T:V\to V$ כך:

$T(a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots..)=(a_2,a_3,a_4,\ldots..)$. כלומר, T היא "הזזה שמאלה", היא מוחקת את האיבר הראשון של הסדרה. מצאו את כל הערכים העצמיים (הממשיים) של T.

כלומר, יש למצוא את כל המספרים הממשיים λ כך שקיימת סדרה מתכנסת $(a_1,a_2,a_3,\ldots..)$ עם לפחות איבר אחד שונה מאפס המקיימת את השויון $T(a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots..)=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3,\lambda a_4,\ldots..)$.

6. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$.

תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית כך ש- $T^2=T$, $\operatorname{Im}(T)\neq V$, $\operatorname{Im}(T)\neq\{\vec{0}\}$.

מצאו את כל הערכים העצמיים של T.

7. תהיינה A, B מטריצות ריבועיות מסדר n, המקיימות: AB=BA.

נתון: rank(A)=n-1, והוקטור v הוא ו"ע של A עם ע"ע אפס.

הוכח: הוקטור v הוא ו"ע של המטריצה B.