חישוביות וסיבוכיות
שיעור 3- רדוקציות

המחלקות R ו-RE (תזכורת)

- קבוצת השפות שקיימת עבורן מכונת טיורינג **שמקבלת** אותן:

$$RE = \{L \subseteq \Sigma^* | \; there\ exists\ a\ turing\ mechine\ M\ such\ that\ L(M) = L\}$$

- קבוצת השפות שקיימן עבורן מכונת טיורינג **המכריעה** אותן:

$$R = \{L \subseteq \Sigma^* | \; there\ exists\ a\ turing\ mechine\ M\ such\ that\ L(M) = L \\ and\ M\ halts\ on\ every\ input.\}$$

תזכורת

- בסוף המצגת הקודמת, הראנו שאם קיים אלגוריתם מכריע ל-HP, אז היה אפשר להשתמש בו כדי להכריע את השפה L_D (בסתירה לכך שהיא לא כריעה).
- מכך הסקנו שגם השפה HP איננה ב-R.
- במילים אחרות, הראנו קשר בין השפות.
- ניתן לומר: HP קשה לפחות כמו L_D.
- בשקפים הבאים נחקור את הקשר הזה בין השפות.

רדוקציה

הגדרה:

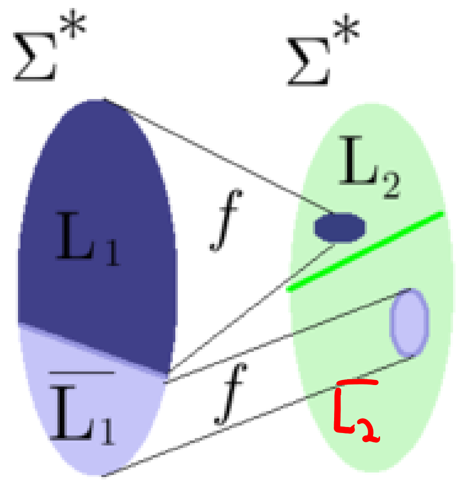
תהינה $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$,

נאמר ש-$\boldsymbol{L_1 \leq L_2}$ (במילים: L_1 ניתנת **לרדוקציה** ל-L_2) אם"ם:

קיימת פונקציה $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ שהיא:

- מלאה (כלומר, מוגדרת לכל קלט)
- ניתנת לחישוב (כלומר קיימת מכונת טיורינג שיכולה לחשב אותה)
- תקפה $\forall x \in \Sigma^* : x \in L_1 \iff f(x) \in L_2$

תקפות של פונקצית רדוקציה (בציור):

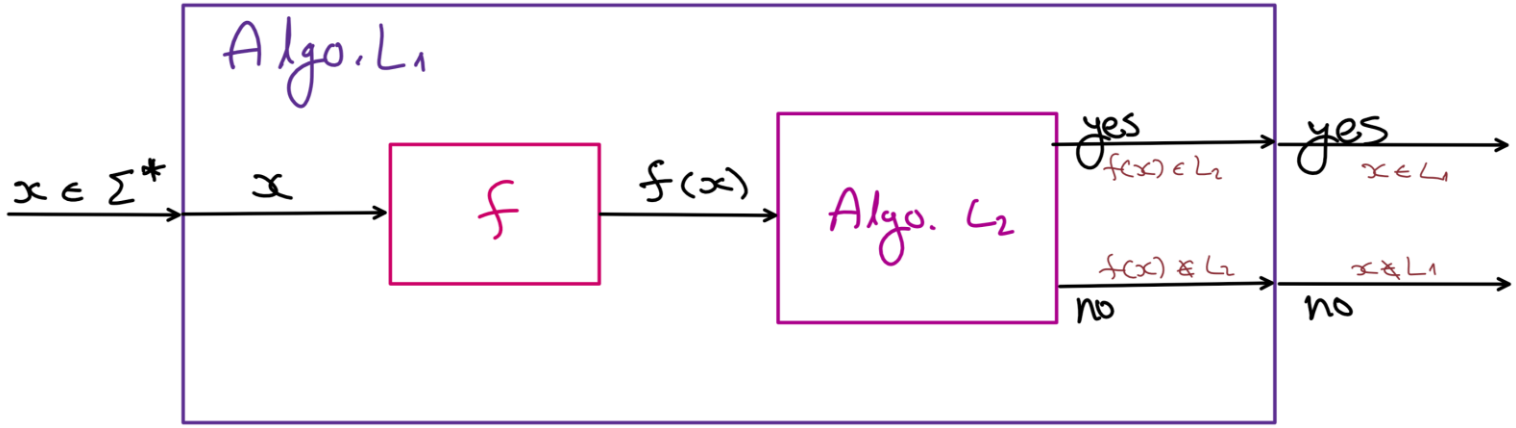


$$\forall x \in \Sigma^*: x \in L_1 \Leftrightarrow f(x) \in L_2$$

אופן השימוש

ברדוקציה:

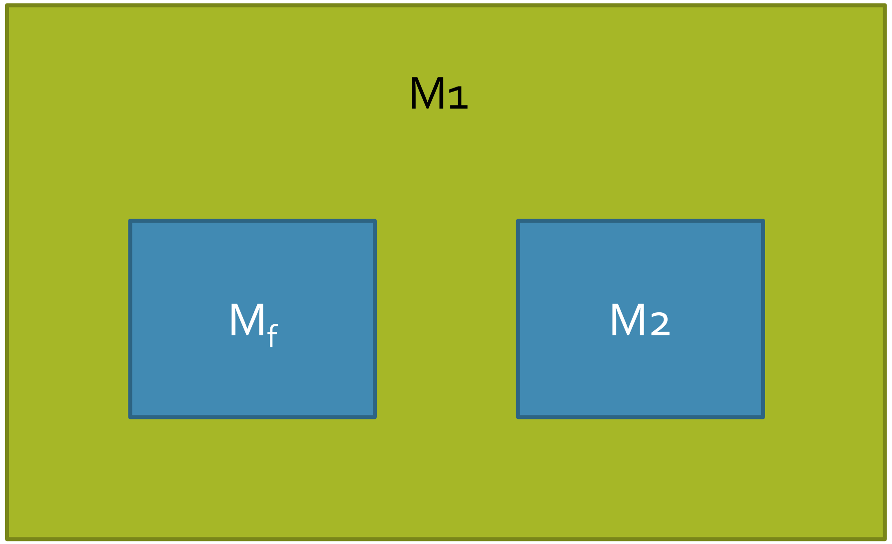
$\boldsymbol{L_1 \leq L_2}$



משפט הרדוקציה

אם $L_1 \le L_2$ אז:

- אם $L_2 \in R$ אז גם $L_1 \in R$.
- אם $L_2 \in RE$ אז גם $L_1 \in RE$.
- אם $L_2 \in coRE$ אז גם $L_1 \in coRE$.



- רעיון ההוכחה (בציור)

משפט הרדוקציה - הוכחה

הוכחה (נוכיח עבור R, ועבור שתי המחלקות הנוספות ההוכחה דומה.)

<u>הטענה</u>: אם $L_1 \leq L_2$ וגם $L_2 \in R$ אז $L_1 \in R$.

<u>הוכחה</u>: נניח ש-$L_1 \leq L_2$ וגם ש- $L_2 \in R$

אזי קיימת מכונת טיורינג M_f המחשבת את פונקציית הרדוקציה מ– L_1 ל– L_2

וכן, קיימת מכונת טיורינג M_2 המכריעה את השפה L_2.

נתאר מכונה מכריעה לשפה L_1:

<u>M_1 על קלט x:</u>

1. מחשבת את $f(x)$ (ע"י סימלוץ של ריצת M_f על הקלט x)
2. מריצה את M_2 על $f(x)$ ועונה כמוה.

משפט הרדוקציה - הוכחה

נכונות המכונה נובעת ישירות מהתכונות של פונקציית הרדוקציה.

- מכיוון שהפונקציה מלאה וניתנת לחישוב, השלב הראשון תמיד יעבור בהצלחה.
- מכיוון שהפונקציה תקפה, התשובה של M_2 בנוגע לשייכות של $f(x)$ ל-L_2 זהה לתשובה הדרושה בנוגע לשייכות של x לשפה L_1.
- התנאים בנוגע למתי המכונה M_1 עוצרת ומתי לא, זהים עבור המכונה M_2.

משפט הרדוקציה – ניסוח שקול (ושימושי יותר)

אם $L_1 \leq L_2$ אז:

- אם $L_1 \notin R$ אז גם $L_2 \notin R$
- אם $L_1 \notin RE$ אז גם $L_2 \notin RE$
- אם $L_1 \notin coRE$ אז גם $L_2 \notin coRE$

- ניזכר בהוכחה בסוף של מצגת 2, למעשה הוכחנו שיש רדוקציה

$$L_D \leq HP$$

ואז, מכיוון ש- $L_D \notin R$, לפי משפט הרדוקציה נובע ש- $HP \notin R$.

הוכחת $HP \notin R$ ע"י רדוקציה.

נוכיח כעת שנית את אותה הוכחה. נראה כי $HP \notin R$ (שראינו בסוף המצגת הקודמת) אך הפעם נעשה זאת במבנה הוכחה של רדוקציה.

טענה: $\boldsymbol{HP \notin R}$

<u>הוכחה</u>: נוכיח ע"י בניית רדוקציה $L_D \leq HP$, ואז לפי משפט הרדוקציה נקבל שמכיוון ש- $L_D \notin R$ אז גם $HP \notin R$.

פונקציית הרדוקציה: $f(<M>) = <M', <M>>$

כאשר M' על קלט y:

- מסמלצת את ריצת M על y
- אם M קיבלה גם M' מקבלת. ואם M דחתה, M' נכנסת ללולאה אינסופית.

הוכחת $HP \notin R$ ע"י רדוקציה.

כעת, צריך להוכיח שהפונקציה מלאה, ניתנת לחישוב ותקפה.

הפונציה מלאה וניתנת לחישוב מכיוון שמכל מכונה M שנתונה לנו, ניתן לבנות את המכונה M', ובנוסף, למדנו שכל מכונת טיורינג ניתנת לקידוד כמחרוזת.

הערה- מספיק להראות זאת בנוגע לקלט תקין.

הוכחת $R \notin HP$ ע"י רדוקציה.

הפונקציה תקפה:

(מבנה ההוכחה: $x \in L_1 \rightarrow f(x) \in L_2$ וגם $x \notin L_1 \rightarrow f(x) \notin L_2$)

.

הוכחת $HP \notin R$ ע"י רדוקציה.

הפונקציה תקפה:

(מבנה ההוכחה: $x \in L_1 \rightarrow f(x) \in L_2$ וגם $x \notin L_1 \rightarrow f(x) \notin L_2$)

$$< M >\in L_D \rightarrow M\ accepts < M >$$
$$\rightarrow M'also\ accepts < M >$$
$$\rightarrow f(< M >) =< M', < M \gg\in HP$$

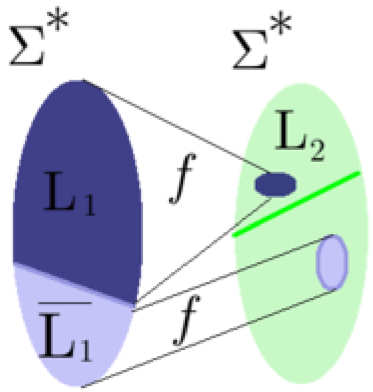
$$< M >\notin L_D \rightarrow M\ rejects < M > or\ doesn't\ stops$$
$$\rightarrow M'\ enters\ infinite\ loop\ on < M >$$
$$\rightarrow f(< M >) =< M', < M \gg\notin HP$$

הוכחת $R \notin HP$ ע"י רדוקציה.

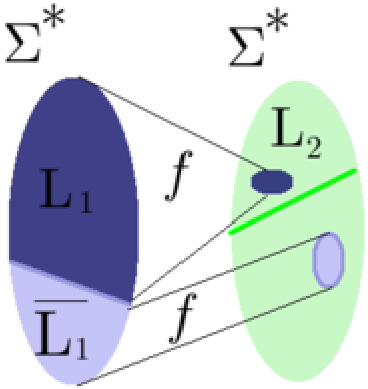
אבחנה, הפונקציה הזו מתאימה גם אם נחליף את השפה HP בשפה L_u.

כלומר, $f(x) =< M',x >$. לכן מתקיים כי- $L_D \leq L_u$. מכאן גם $L_u \notin R$.

בציור:



תכונות של יחס הרדוקציה

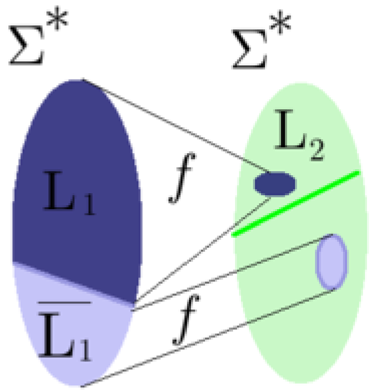


- אם $L_1 \leq L_2$ אז גם $\overline{L_1} \leq \overline{L_2}$

הוכחה: זוהי תוצאה ישירה של התקפות של הרדוקציה.

האם אפשר להשתמש באותה הפונקציה?

תכונות של יחס הרדוקציה



- אם $L_1 \le L_2$ אז גם $\overline{L_1} \le \overline{L_2}$

הוכחה: זוהי תוצאה ישירה של התקפות של הרדוקציה.

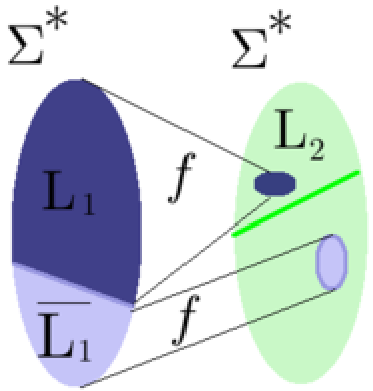
האם אפשר להשתמש באותה הפונקציה?

- היחס $\le$ הוא **רפלקסיבי**.

כלומר: לכל שפה L מתקיים $L \le L$

רעיון ההוכחה: פונקציית הזהות

תכונות של יחס הרדוקציה



- אם $L_1 \le L_2$ אז גם $\overline{L_1} \le \overline{L_2}$

הוכחה: זוהי תוצאה ישירה של התקפות של הרדוקציה.

האם אפשר להשתמש באותה הפונקציה?

- היחס $\le$ הוא **רפלקסיבי**.

כלומר: לכל שפה L מתקיים $L \le L$

רעיון ההוכחה: פונקציית הזהות

- היחס $\le$ הוא **טרנזיטיבי**.

כלומר: אם $L_1 \le L_2$ וגם $L_2 \le L_3$

אז $L_1 \le L_3$.

רעיון ההוכחה: הרכבת פונקציות.

תכונות של יחס הרדוקציה

- היחס $\leq$ אינו סימטרי.

כלומר: אם $L_2 \leq L_1$ אז לא בהכרח מתקיים ש $L_1 \leq L_2$.

<u>דוגמא</u>: ניקח את השפות HP ו-Σ^*. אפשר לחשוב על רדוקציה $HP \leq \Sigma^*$, למשל:

$f(x) =< M_{stam}, x >$

מצד שני $\Sigma^* \leq HP$ לא מתקיים, כי אז לפי משפט הרדוקציה היינו מקבלים כי גם HP ב-R.

תרגיל 1 – שאלה לדוגמה

נתונה השפה $L = \{< M > | |L(M)| \geq 4\}$

קבעו **א**. האם L ב-RE? הוכיחו את תשובותיכם.

פתרון:

א. השפה ב-RE, נוכיח ע"י תיאור מכונת טיורינג מקבלת לשפה L:

נצטרך פה הרצה מבוקרת "חזקה", שיכולה (תיאורטית) לעבור על כל המילים בסיגמא כוכבית.

נשתמש בסידור לקסיקוגרפי (אינסופי) של סיגמא כוכבית $w_1, w_2, w_3, \ldots\ldots$

לכל $i \in N \setminus \{0\}$,

לכל $0 < j \leq i$

הרץ את המכונה M על המילה w_j למשך i צעדים.

הרצה מבוקרת חזקה:

<u>דוגמת הרצה:</u>

- $i = 1$ מריצים את M על w_1 למשך צעד בודד.
- $i = 2$ מריצים את M על w_1,w_2 למשך 2 צעדים כל אחת (אחת אחרי השניה).
- $i = 3$ מריצים את M על w_1,w_2,w_3 למשך 3 צעדים כל אחת.
- $i = 4$ מריצים את M על w_1,w_2,w_3,w_4 למשך 4 צעדים כל אחת.
- וכן הלאה...

תרגיל 1 א

$$L = \{< M >||L(M)| \geq 4\}$$

א. השפה ב-RE, נוכיח ע"י תיאור מכונת טיורינג מקבלת לשפה L:

<u>המכונה U על קלט $< M >$:</u>

בהינתן סידור לקסיקוגרפי (אינסופי) של סיגמא כוכבית: $w_1, w_2, w_3, \ldots.$

- אתחל קאונטר $c = 0$. בכל שלב אם $c = 4$ עצור וקבל.
- לכל $i = 1,2,3, \ldots.$
  - לכל $j = 1,2, \ldots, i$
    - הרץ את המכונה M על המילה w_j למשך i צעדים.
    - אם M קיבלה, $c++$
  - אפס את c.

תרגיל 1 א

$$L = \{< M > || L(M) \geq 4\}$$

המשך- נוכיח שהמכונה U מקבלת את השפה L: (השלימו).

$\langle M \rangle \in L$ $\Downarrow$

$\langle M \rangle \notin L$ $\Downarrow$

תרגיל 1 ב

נתונה השפה $L = \{< M > | |L(M)| \geq 4\}$

קבעו **ב**. האם L ב-R? הוכיחו את תשובתכם.

פתרון:

ב. השפה איננה ב-R. נוכיח זאת ע"י רדוקציה $HP \leq L$
$f(< M, x >) =< M_x >$

כאשר M_x על קלט y:

- מריצה את M על x (מתעלמת מהקלט y!)
- מקבלת (את y)

תרגיל 1 ב

הפונקציה מלאה וניתנת לחישוב, לכל קידוד של מכונה וקלט נתונים, ניתן לבנות את המכונה M_x, וכל מכונת טיורינג ניתנת לקידוד כמחרוזת.

הפונקציה תקפה: (השלימו)

$\langle M, x\rangle \in H_P$ $\Downarrow$

$\langle M, x\rangle \notin H_P$ $\Downarrow$

תרגיל 2

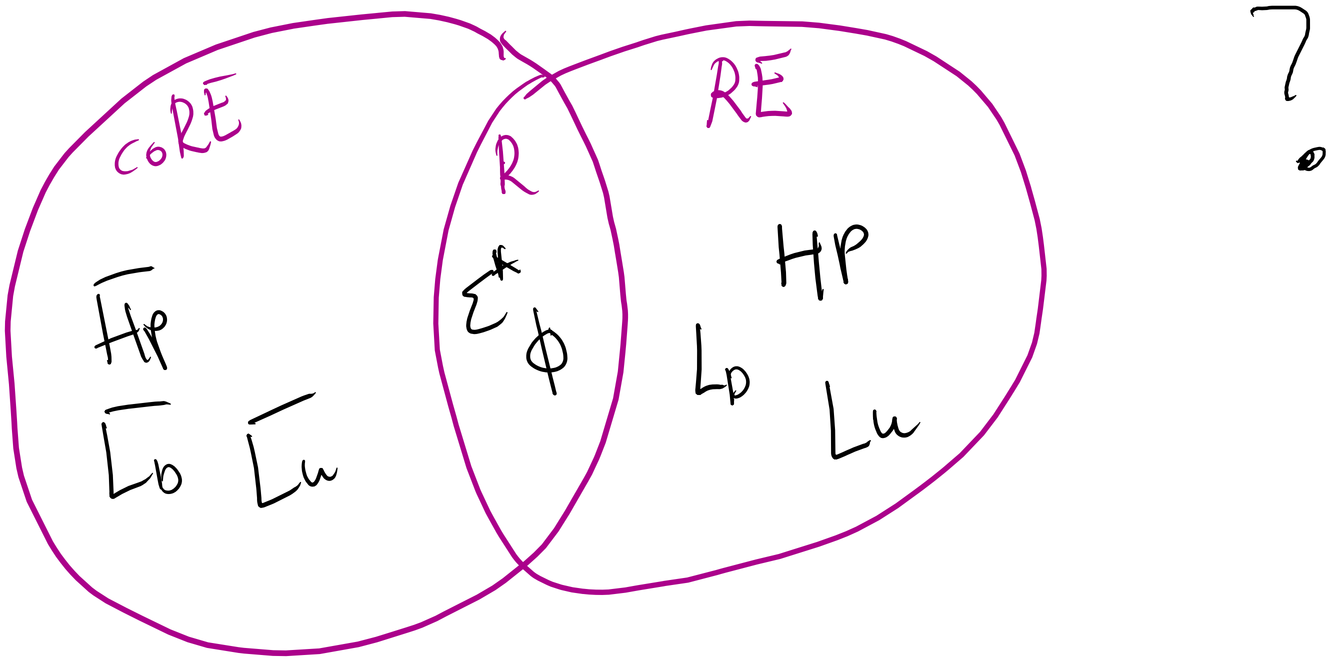
$$L_2 = \{< M > |M \; stops \; for \; every \; input \; x \in \Sigma^*\}$$

נשים לב שהרדוקציה האחרונה שראינו, מתאימה גם לשפה הזו.

לכן $L_2 \notin R$ (בנוסף, $L_2 \notin coRE$, נחזור לזה בהמשך).

נוכיח תקפות (השלימו):

תמונת העולם עד כה



ננסה למצוא דוגמאות לשפות שאינן שייכות ל- RE ולא ל- $coRE$

רוב השפות לא שייכות ל-RE ולא ל-$coRE$
(הקדמה)

- כל מ"ט מורכבת משביעייה
- כל איבר בשביעייה מכיל קבוצה שגודלה הוא בן מניה
- מ"ט מורכבת ממכפלה קרטזית של 7 קבוצות בנות מניה
- לכן יש מספר בן מניה של שפות ב-RE

רוב השפות לא שייכות ל-RE ולא ל-$coRE$
(הקדמה)

- ניתן להציג כל פונקציה ע"י טבלה כזו:
- לכל אחד מה-$f(x_i)$, יש $\aleph_0$ אפשרויות. לכן עוצמת קבוצת הפונקציות הינה $\aleph_1 = 2^{\aleph_0} \leq {\aleph_0}^{\aleph_0}$

x	$f(x)$
$x1$	$f(x1)$
$x2$	$f(x2)$
$x3$	$f(x3)$
$x4$	$f(x4)$
…	…
…	…
…	…

רוב השפות לא שייכות ל-RE ולא ל-coRE

- **נוכיח משיקולי עוצמות:**

-לכל א"ב לא טריוויאלי $\sum$, RE היא בת מניה וכן $co-RE$:

  - קבוצת כל מכונות הטיורינג היא בת מניה –לכל מכונה M מתאים באופן חח"ע קידוד $<M>$ שהוא מחרוזת סופית, וכן קבוצת המחרוזות הסופיות מעל א"ב סופי היא בת מניה.
  - שפה ב-RE מתקבלת ע"י מכונת טיורינג. לכן RE היא בת מניה.
  - RE שקולה ל-$coRE$ כי לכל שפה ב-RE מתאימה השפה המשלימה ב-$coRE$, וזו התאמה חח"ע ועל.
  - מכאן גם האיחוד של RE ו-$coRE$ הוא בן מניה.

-עוצמת קבוצת השפות מעל $\sum$ היא עוצמת הרצף. $(P(\Sigma^*))$

מכאן נקבל שרוב השפות לא שייכות ל-RE ולא ל-$coRE$.

תרגיל 3: דוגמא לשפה ששייכת ל-$\overline{RE \cup coRE}$

$$L_\infty = \{< M > \,||L(M)| = \infty\}$$

אינטואיציה: גם אם נצליח לוודא שהמכונה מקבלת המון קלטים, כל כמות שנצליח לבדוק היא בהכרח סופית...

טענה: $\boldsymbol{L_\infty \in \overline{RE \cup coRE}}$

ההוכחה תהיה בשני שלבים:

1. $HP \leq L_\infty$ – ממשפט הרדוקציה נובע ש-$L_\infty \notin coRE$
2. $\overline{HP} \leq L_\infty$ – ממשפט הרדוקציה נובע ש-$L_\infty \notin RE$

תרגיל 3

$$L_\infty = \{< M > \mid |L(M)| = \infty\}$$

טענה $\boldsymbol{L_\infty \in \overline{RE \cup coRE}}$

הוכחה: (1) $HP \leq L_\infty$ (זאת שוב אותה רדוקציה כמו קודם...)

$$f(< M, x >) =< M_x >$$

כאשר M_x על קלט y:

- מריצה את M על x (מתעלמת מ-y)
- מקבלת

(השלימו את הוכחת הנכונות)

תרגיל 3

$$L_\infty = \{< M > \, || L(M)| = \infty\}$$

טענה $\boldsymbol{L_\infty \in \overline{RE \cup coRE}}$

הוכחה: (2) $\overline{HP} \le L_\infty$

$$f(< M, x >) =< M'_x >$$

כאשר M'_x על קלט y:

1. מריצה את M על x למשך $|y|$ צעדים
2. אם M לא עצרה בשלב 1 -קבל.
3. אחרת (M עצרה) -דחה.

תרגיל 3

הרדוקציה מלאה וניתנת לחישוב כי בהינתן כל מכונה וקלט עבורה ניתן לבנות את המכונה M'_x. בנוסף, ראינו כי כל מכונת טיורינג ניתנת לקידוד למחרוזת.

תקפות הרדוקציה:

נחזור ל-L_2 (המשך תרגיל 2)

$$L_2 = \{< M > | M \ stops \ for \ every \ input \ x \in \Sigma^*\}$$

ראינו ש- $L_2 \notin R$, מה לגבי שייכות ל-RE?

אפשר לשנות מעט את הרדוקציה שראינו $L_\infty \leq \overline{HP}$ כדי להתאים לשפה L_2.

טענה: $L_2 \notin RE$

הוכחה: נראה כי $\overline{HP} \leq L_2$.

$\overline{HP} \leq L_2$

- $L_2 = \{< M > | M\ stops\ for\ every\ input\ x \in \Sigma^*\}$

$$f(< M, x >) =< M'_x >$$

כאשר M'_x על קלט w:

1. מריצה את M על x למשך $|w|$ צעדים
2. אם M לא עצרה בשלב 1 -קבל.
3. אחרת (M עצרה) - לולאה אינסופית.

תקפות הרדוקציה:

תרגיל 4- שפה נוספת

$$L_{\Sigma^*} = \{< M > | L(M) = \Sigma^*\}$$

טענה: $\boldsymbol{L_{\Sigma^*} \in \overline{RE \cup coRE}}$

אבחנה, שתי פונקציות הרדוקציה שראינו עבור $HP \leq L_\infty$, $\overline{HP} \leq L_\infty$

מתאימות גם עבור השפה L_{Σ^*}.

(השלימו את ההוכחה).

תרגיל 5: דוגמא נוספת

$$L_{eq} = \{< M_1, M_2 >) | L(M_1) = L(M_2)\}$$

טענה: $\boldsymbol{L_{eq} \in \overline{RE \cup coRE}}$

הוכחה: אפשר להוכיח ע"י שתי רדוקציות, כמו קודם.

תרגיל 5: דוגמא נוספת

$$L_{eq} = \{< M_1, M_2 >) | L(M_1) = L(M_2)\}$$

טענה: $\boldsymbol{L_{eq} \in \overline{RE \cup coRE}}$

<u>הוכחה</u>: אפשר להוכיח ע"י שתי רדוקציות, כמו קודם.

קיצור דרך: אפשר להוכיח ע"י רדוקציה משפה שאנחנו כבר יודעים עליה שהיא ב- $\overline{RE \cup coRE}$.

הוכחה: נראה זאת ע"י רדוקציה $L_{\Sigma^*} \le L_{eq}$

הרדוקציה: $f(< M >) = (< M, M_{stam} >)$

- הפונקציה מלאה וניתנת לחישוב (יש כאן בסה"כ שרשור של מחרוזת קבועה בסוף הקלט)
- נוכיח תקפות: (השלימו)

שפות שלמות

הגדרה: **שפה שלמה ב- $\boldsymbol{RE}$**

שפה L היא **שלמה** ב-RE אם"ם היא מקיימת:

- $L \in RE$
- $\forall (L' \in RE): L' \leq L$

נסמן $L \in RE - complete$

כאשר $RE - complete$ היא מחלקת השפות השלמות ב-RE

שפות שלמות

באופן דומה ניתן להגדיר שפות שלמות עבור **מחלקות נוספות**, למשל:

שפה היא **שלמה ב-$\boldsymbol{R}$** אם"ם:

- $L \in R$
- $\forall (L' \in R): L' \leq L$

(נסמן $L \in R - complete$)

תרגיל 6: דוגמא לשפה שלמה ב-RE

טענה: השפה $L_u = \{< M,w > | w \in L(M)\}$ היא שפה שלמה ב-RE.

תרגיל 6: דוגמא לשפה שלמה ב-RE

טענה: השפה $L_u = \{< M,w > | w \in L(M)\}$ היא שפה שלמה ב-RE.

הוכחה:

א. הוכחנו בשיעורים קודמים ש-$L_u \in RE$

ב. נראה רדוקציה מ**כל** שפה ב-RE אל L_u

תרגיל 6: דוגמא לשפה שלמה ב-RE

טענה: השפה $L_u = \{< M,w > |w \in L(M)\}$ היא שפה שלמה ב-RE.

הוכחה:

א. הוכחנו בשיעורים קודמים ש-$L_u \in RE$

ב. נראה רדוקציה מ**כל** שפה ב-RE אל L_u

תהי שפה $L' \in RE$, אזי קיימת עבורה מכונת טיורינג M' המקבלת את L'.

יהי $< M' >$ קידוד של המכונה M'. אזי פונקציית הרדוקציה עבור $L' \leq L_u$ היא:

$$f(x) =< M', x >$$

תרגיל 6 - המשך

$$f(x) =< M', x >$$

הפונקציה מלאה וניתנת לחישוב (שרשור של מחרוזת קבועה למילה הנתונה)

הפונקציה תקפה:

האם יש עוד שפות שלמות ב-RE?

נתונה שפה $L \in RE - complete$

ונתונה שפה נוספת $L^* \in RE$

אז אם מתקיים ש- $L \leq L^*$ נסיק שגם $L^* \in RE - complete$

(למה זה נכון?)

מסקנה: השפה $\boldsymbol{HP}$ היא גם שלמה ב-RE.

רעיון הרדוקציה: $HP \geq L_u$: $f(< M,x >) =< M',x >$

כך ש-M' זהה למכונה M, רק שאם M דוחה, M' נכנסת ללולאה אינסופית.

(השלימו את ההוכחה)

שיטה להוכחת שלמות של שפה

נתונה שפה $L \in RE - complete$

ונתונה שפה נוספת $L^* \in RE$

אז אם מתקיים ש$L \leq L^*$ אז נסיק שגם $L^* \in RE - complete$

תזכורת: בשיעור הקודם ראינו רדוקציה $HP \leq L_\infty$

שאלה: האם זה אומר ש-L_∞ גם היא שלמה ב-RE?

תשובה, לא! כי היא לא שייכת ל-RE.

שאלה 7: האם יש שפות שלמות ב-R?

האם יש שפות שלמות ב-R?

תשובה: כן, כמעט כולן! יש בדיוק 2 שפות שלא יכולות להיות שלמות ב-R.

טענה: $\boldsymbol{R-complete = R \setminus \{\Sigma^*,\phi\}}$

הוכחה: ראשית, נשים לב שלא יכולה להיות קיימת רדוקציה משפה כלשהי L שאינה טריוויאלית אל אחת מהשפות הטריוויאליות:

שאלה 7: האם יש שפות שלמות ב-R?

טענה: $\boldsymbol{R - complete = R \setminus \{\Sigma^*, \phi\}}$

המשך ההוכחה:

נוכיח שבהינתן שתי שפות כלשהן $L_1 \in R, L_2 \in R \setminus \{\Sigma^*, \phi\}$ מתקיים ש $L_1 \leq L_2$:

תהיינה $L_1 \in R, L_2 \in R \setminus \{\Sigma^*, \phi\}$

תהי M_1 מכונת טיורינג המכריעה את השפה L_1.

נבחר שתי מילים $y \notin L_2$, $x \in L_2$ (האם אפשר לבחור?)

נתאר מכונה לחישוב פונקציית הרדוקציה $L_1 \leq L_2$:

M_f על קלט w:

מסמלצת את ריצת M_1 על הקלט w, אם M_1 קיבלה – מחזירה את x , אם M_1 דחתה – מחזירה את y.

שאלה 7: האם יש שפות שלמות ב-R?

המשך ההוכחה: הפונקציה מלאה וניתנת לחישוב – תיארנו את האלגוריתם של המכונה שמחשבת את הפונקציה.

בנוסף, M_1 מכריעה את L_1, כך שלכל מילה, M_1 עוצרת. לכן לכל מילה מ- Σ^*, M_f תחזיר פלט.

הפונקציה תקפה: (השלימו)

שאלה 7 : האם יש שפות שלמות ב-R?

המשך ההוכחה: הפונקציה מלאה וניתנת לחישוב – תיארנו את האלגוריתם של המכונה שמחשבת את הפונקציה.

הפונקציה תקפה: