בס"ד

עבודת בית 4 . פתרונות.

1. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. יהי $\vec{u}\in V$ כך שעבור כל $\vec{v}\in V$ מתקיים השויון $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=0$. הוכיחו ש-$\vec{u}=\vec{0}$.

פתרון. נציב $\vec{u}$ במקום $\vec{v}$ בשויון הנתון $\langle\vec{u},\vec{v}\rangle=0$ ונקבל: $\langle\vec{u},\vec{u}\rangle=0$. על פי אחת האקסיאומות של מכפלה פנימית מזה נובע ש-$\vec{u}=\vec{0}$.

2. הוכיחו שהנוסחה $\langle A,B\rangle=Trace\left(AB^t\right)$ מגדירה מכפלה פנימית ב-$M_{k\times n}(\mathbb{R})$.

פתרון. בהזדמנות זו נזכיר הגדרה ותכונות של העקבה, Trace. העקבה של מטריצה ריבועית $X=\left[x_{ij}\right]_{i,j=1}^{k}$, $Trace(X)$, היא סכום של כל רכיבי אלכסון הראשי של X:

$Trace(X)=x_{11}+x_{22}+\cdots+x_{kk}=\sum_{i=1}^{k}x_{ii}$. התכונות הבאות נובעות מיידית מההגדרה.

א. אם X , Y שתי מטריצות $k\times k$, אז $Trace(X+Y)=Trace(X)+Trace(Y)$.

ב. אם X מטריצה ריבועית ו- α סקלר, אז $Trace(\alpha X)=\alpha\cdot Trace(X)$.

ג. אם X מטריצה ריבועית, אז $Trace\left(X^t\right)=Trace(X)$.

ד. אם P מטריצה $k\times n$ ו-Q מטריצה $n\times k$, אז $Trace(PQ)=Trace(QP)$.

ה. אם X , Y מטריצות $k\times k$ דומות, אז $Trace(X)=Trace(Y)$. (נובע מד')

ו. אם $P=\left[p_{ij}\right]_{i=1,\,j=1}^{k\quad n}$ מטריצה $k\times n$, אז $Trace\left(PP^t\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(p_{ij}\right)^2\right)$.

בפתרון של הבעיה שלנו לא נזדקק לתכונות ד',ה'.
נחזור לבעיה שלנו. תחילה נעיר שאם $A,B\in M_{k\times n}(\mathbb{R})$, אז AB^t היא מטריצה $k\times k$, ולכן העקבה שלה מוגדרת. יש לוודא שמתקיימות כל האקסיאומות של מכפלה פנימית.

$$\langle A+C,B\rangle=Trace\left((A+C)B^t\right)=Trace\left(AB^t+CB^t\right)=Trace\left(AB^t\right)+Trace\left(CB^t\right)=\langle A,B\rangle+\langle C,B\rangle$$

כאן השתמשנו בתכונה א' של Trace.

$$\langle\alpha A,B\rangle=Trace\left((\alpha A)B^t\right)=\alpha Trace\left(AB^t\right)=\alpha\langle A,B\rangle.$$

כאן השתמשנו בתכונה ב' של Trace.

$$\langle B,A\rangle = Trace\left(BA^t\right) = Trace\left(\left(AB^t\right)^t\right) = Trace\left(AB^t\right) = \langle A,B\rangle$$

כאן השתמשנו בתכונה ג' של Trace ובתכונות פשוטות של פעולת שחלוף:

$\left(P^t\right)^t = P \quad , \quad \left(PQ\right)^t = Q^tP^t$.

תהי $A\in M_{k\times n}\left(\mathbb{R}\right)$. נסמן את רכיבי A על ידי a_{ij}. בעזרת תכונה ו' של Trace נקבל:

$\langle A,A\rangle = Trace\left(AA^t\right) = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_{ij}\right)^2\right) \geq 0$ כי סכום הריבועים של מספרים ממשיים תמיד לא שלילי.

אם $\langle A,A\rangle = 0$, אז $a_{ij}=0$ לכל i,j, $1\leq i\leq k, 1\leq j\leq n$, כלומר, A היא מטריצת האפס.

3. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. האם קיימת העתקה לינארית $T:V\to V$ כך ש- $\left\|T\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\right\| = \|\vec{u}\|+\|\vec{v}\|$ עבור כל $\vec{u},\vec{v}\in V$?

<u>פתרון.</u> תחילה נעיר שאם $V=\left\{\vec{0}\right\}$, אז ההעתקה היחידה $T:V\to V$ היא העתקת האפס $T\left(\vec{0}\right)=\vec{0}$ והיא מקיימת את הדרישות: קל מאד לראות שהיא לינארית, וגם $0=\left\|\vec{0}\right\| = \left\|T\left(\vec{0}\right)\right\| = \left\|T\left(\vec{0}+\vec{0}\right)\right\| = \left\|\vec{0}\right\|+\left\|\vec{0}\right\|$.

כעת נניח ש- $V\neq\left\{\vec{0}\right\}$ ונוכיח שהעתקה כזאת אינה קיימת.

נניח בשלילה שהיא קיימת. היות ו- $V\neq\left\{\vec{0}\right\}$, קיים $\vec{0}\neq\vec{u}\in V$. ניקח $\vec{v}=-\vec{u}$.

מצד אחד $\left\|T\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\right\| = \left\|T\left(\vec{u}-\vec{u}\right)\right\| = \left\|T\left(\vec{0}\right)\right\| = \left\|\vec{0}\right\| = 0$, כי $T\left(\vec{0}\right)=\vec{0}$ בגלל ש- T לינארית.

מצד שני $\left\|T\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\right\| = \left\|T\left(\vec{u}+\left(-\vec{u}\right)\right)\right\| = \|\vec{u}\|+\|-\vec{u}\| = 2\|\vec{u}\| \neq 0$ כי $\vec{0}\neq\vec{u}$. זו סתירה, ממנה נובע שהעתקה T כזאת אינה קיימת.

4. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית כך ש- $\left\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{v}\right\rangle = 0$ עבור כל $\vec{u},\vec{v}\in V$. הוכיחו ש- $T=0$.

<u>פתרון.</u>

ניקח $\vec{u}\in V$ כלשהו וניקח $\vec{v}=T\left(\vec{u}\right)$. על פי הנתון נקבל:

$0=\left\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{v}\right\rangle = \left\langle T\left(\vec{u}\right),T\left(\vec{u}\right)\right\rangle$.

מהשוויון $0=\left\langle T\left(\vec{u}\right),T\left(\vec{u}\right)\right\rangle$ על פי אחת האקסיאומות של מכפלה פנימית נובע ש- $T\left(\vec{u}\right)=\vec{0}$.

קיבלנו ש- $T\left(\vec{u}\right)=\vec{0}$ עבור כל $\vec{u}\in V$, ז.א. T היא העתקת האפס, $T=0$.

5. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{C}$. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית כך ש- $\left\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{u}\right\rangle=0$ עבור כל $\vec{u}\in V$. הוכיחו ש- $T=0$. הוכיחו שמעל $\mathbb{R}$ הטענה לא נכונה.
הדרכה. על ידי התבוננות ב- $\left\langle T\left(\vec{u}+\vec{v}\right),\vec{u}+\vec{v}\right\rangle$ הוכיחו ש- $\left\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{v}\right\rangle=-\left\langle T\left(\vec{v}\right),\vec{u}\right\rangle$.
עכשיו הציבו $i\vec{u}$ במקום $\vec{u}$.

<u>פתרון.</u> מהנתון $\left\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{u}\right\rangle=0$ ומלינאריות של ההעתקה T נובע:

$$0=\left\langle T\left(\vec{u}+\vec{v}\right),\vec{u}+\vec{v}\right\rangle=\left\langle T\left(\vec{u}\right)+T\left(\vec{v}\right),\vec{u}+\vec{v}\right\rangle=\left\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{u}\right\rangle+\left\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{v}\right\rangle+\left\langle T\left(\vec{v}\right),\vec{u}\right\rangle+\left\langle T\left(\vec{v}\right),\vec{v}\right\rangle=$$
$$=0+\left\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{v}\right\rangle+\left\langle T\left(\vec{v}\right),\vec{u}\right\rangle+0=\left\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{v}\right\rangle+\left\langle T\left(\vec{v}\right),\vec{u}\right\rangle \quad\Rightarrow\quad \left\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{v}\right\rangle=-\left\langle T\left(\vec{v}\right),\vec{u}\right\rangle$$

נציב בחישוב האחרון $i\vec{u}$ במקום $\vec{u}$ ונקבל: $\left\langle T\left(i\vec{u}\right),\vec{v}\right\rangle=-\left\langle T\left(\vec{v}\right),i\vec{u}\right\rangle$. מצד שני $\left\langle T\left(i\vec{u}\right),\vec{v}\right\rangle=\left\langle iT\left(\vec{u}\right),\vec{v}\right\rangle=i\left\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{v}\right\rangle$, $\left\langle T\left(\vec{v}\right),i\vec{u}\right\rangle=\bar{i}\left\langle T\left(\vec{v}\right),\vec{u}\right\rangle=-i\left\langle T\left(\vec{v}\right),\vec{u}\right\rangle$. קיבלנו $i\left\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{v}\right\rangle=\left\langle T\left(i\vec{u}\right),\vec{v}\right\rangle=-\left\langle T\left(\vec{v}\right),i\vec{u}\right\rangle=-\left(-i\left\langle T\left(\vec{v}\right),\vec{u}\right\rangle\right)$. מכאן $\left\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{v}\right\rangle=\left\langle T\left(\vec{v}\right),\vec{u}\right\rangle$.

בסך הכל קיבלנו: $\left\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{v}\right\rangle=\left\langle T\left(\vec{v}\right),\vec{u}\right\rangle=-\left\langle T\left(\vec{v}\right),\vec{u}\right\rangle$ מזה נובע ש- $\left\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{v}\right\rangle=0$. היות ולא הטלנו שום הגבלות על $\vec{u},\vec{v}$, קיבלנו ש- $\left\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{v}\right\rangle=0$ עבור כל $\vec{u},\vec{v}\in V$. על פי מה שהוכחנו בבעיה מס' 4 מזה נובע ש- $T=0$.

מעל $\mathbb{R}$ הטענה לא נכונה. השוויון $\left\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{u}\right\rangle=0$ אומר שכל וקטור מאונך לתמונה שלו. באמת אין שום קושי להגדיר העתקה כזאת מעל $\mathbb{R}$. נתבונן במרחב $\mathbb{R}^2$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית וניקח לדוגמה העתקת סיבוב המישור בתשעים מעלות נגד כיוון השעון: $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $T\left(x,y\right)=\left(-y\,,\,x\right)$. כמובן, זאת לא העתקת האפס, והתנאי $\left\langle T\left(\vec{u}\right),\vec{u}\right\rangle=0$ עבור כל $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$ מתקיים: $\left\langle T\left(x,y\right),\left(x,y\right)\right\rangle=\left\langle\left(-y\,,\,x\right),\left(x,y\right)\right\rangle=-yx+xy=0$.

6. יהי V מרחב מכפלה פנימית מעל $\mathbb{R}$ או מעל $\mathbb{C}$. הוכיחו את כלל המקבילית:

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=2\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right)$ **עבור כל** $\vec{u},\vec{v}\in V$.

פתרון. בהוכחה נשתמש רק באקסיאומות ובתכונות מיידיות של מכפלה פנימית ובהגדרת נורמה.

$$\begin{aligned}
&\|\vec{u}+\vec{v}\|^2+\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\langle\vec{u}+\vec{v},\vec{u}+\vec{v}\rangle+\langle\vec{u}-\vec{v},\vec{u}-\vec{v}\rangle=\\
&=\langle\vec{u},\vec{u}\rangle+\langle\vec{u},\vec{v}\rangle+\langle\vec{v},\vec{u}\rangle+\langle\vec{v},\vec{v}\rangle+\langle\vec{u},\vec{u}\rangle+\langle\vec{u},-\vec{v}\rangle+\langle-\vec{v},\vec{u}\rangle+\langle-\vec{v},-\vec{v}\rangle=\\
&=\|\vec{u}\|^2+\langle\vec{u},\vec{v}\rangle+\langle\vec{v},\vec{u}\rangle+\|\vec{v}\|^2+\|\vec{u}\|^2-\langle\vec{u},\vec{v}\rangle-\langle\vec{v},\vec{u}\rangle+\|\vec{v}\|^2=2\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2\right)
\end{aligned}$$