בס"ד

עבודת בית 2

<u>הקדמה לשאלות 1,2.</u> אם V הוא מרחב וקטורי ממימד סופי ו- U תת-מרחב של V כך ש- $U \neq V$, אז בוודאי V ו- U אינם איזומורפיים: קל להוכיח שאם V ו- U הם מרחבים וקטוריים ממימד סופי כך ש- $\dim(U) < \dim(V)$ ו- $T: V \to U$ העתקה לינארית, אז T איננה חד-חד-ערכית. אבל אם V הוא מרחב וקטורי שאינו ממימד סופי ו- U תת-מרחב של V כך ש- $U \neq V$, בכל זאת יתכן ו- U איזומורפי ל- V.

1. יהי $V = \mathbb{R}[x]$ -- מרחב כל הפולינומים במשתנה אחד עם מקדמים ממשיים. נסמן: $U = \{ p(x) \in V \mid p(0) = 0 \}$. כלומר, U הוא תת-מרחב ב- V של כל הפולינומים מהצורה $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x$, האיבר החפשי שווה לאפס. הוכיחו ש- V ו- U איזומורפיים.

2. יהי V מרחב וקטורי של כל הסדרות המתכנסות עם איברים ממשיים: $V = \left\{ (a_1, a_2, a_3, ...) \,\middle|\, \forall i \in \mathbb{N} : a_i \in \mathbb{R} \ \& \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n \right\}$.
נסמן: $U = \left\{ (a_1, a_2, a_3, ...) \in V \,\middle|\, \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \right\}$. כלומר, U תת-מרחב ב- V של כל הסדרות הממשיות השואפות לאפס. הוכיחו ש- V ו- U איזומורפיים.
<u>הדרכה.</u> יש לבנות העתקה לינארית חד-חד-ערכית ו"על" $T: V \to U$.
קיימת העתקה מאד טבעית מ- V ל- U:
$(a_1, a_2, a_3, ...) \mapsto \left(a_1 - \lim\limits_{n\to\infty} a_n, a_2 - \lim\limits_{n\to\infty} a_n, a_3 - \lim\limits_{n\to\infty} a_n, ... \right)$. אבל העתקה זו איננה חד-חד-ערכית. לדוגמה, שתי סדרות שונות $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right)$ ו- $\left(2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, ...\right)$ נשלחות על ידי העתקה זו לאותה תמונה $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right)$. נסו "לתקן" את ההעתקה הזאת כדי לקבל העתקת איזומורפיזם.

3. מצאו את כל הערכים הממשיים של k כך שהעמודה $\begin{bmatrix}1\\k\\k\end{bmatrix}$ תהיה וקטור עצמי של המטריצה $\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$.

4. מצאו את ההגדרה המפורשת עבור הסדרה המוגדרת על ידי נוסחת נסיגה:

$a_n = 10a_{n-1} - 31a_{n-2} + 30a_{n-3}$, $a_1 = a_2 = 1$, $a_0 = 0$.

5. תהי A מטריצה 3×3 אנטי-סימטרית (כלומר, $A^t = -A$) עם רכיבים ממשיים.

א. הוכיחו שהערך העצמי הממשי היחיד של A הוא אפס.

ב. האם A ניתנת ללכסון מעל $\mathbb{C}$?

6. הוכיחו קיום ויחידות של מטריצה $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ כך ש-

$$A\cdot\begin{bmatrix}1&-1&3\\-2&2&1\\3&3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&0\\0&-3&0\end{bmatrix}.$$

מצאו את הערכים העצמיים של A והוכיחו ש-A ניתנת ללכסון.