בס"ד

עבודת בית 1

1. כרגיל, $\mathbb{R}^5=\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5):x_1\in\mathbb{R},x_2\in\mathbb{R},x_3\in\mathbb{R},x_4\in\mathbb{R},x_5\in\mathbb{R}\}$. יהי $B=\big((1,1,1,0,-1),(1,1,0,-1,1),(1,0,-1,1,1),(0,-1,1,1,1),(-1,0,1,0,-1)\big)$ בסיס ל-$\mathbb{R}^5$.

יהי C בסיס ל-$\mathbb{R}^5$ כך ש-
$$[I]_C^B=\begin{bmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&1&1\\0&0&1&1&-1\\0&0&0&1&-1\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$
. מצאו את הבסיס C .

2. יהי V מרחב וקטורי. הוכיחו או הפריכו: אם $S,T:V\to V$ העתקות לינאריות כך ש-$\ker(T)=\ker(S)$ וגם $\operatorname{Im}(T)=\operatorname{Im}(S)$, אזי $T=S$.

3. יהי V מרחב וקטורי מעל השדה F , תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית. יהי U תת-מרחב ב- V כך ש- $U\cap\ker(T)=\{\vec{0}\}$. הוכיחו שאם $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\in U$ בלתי תלוים לינארית, אזי גם $T(\vec{v}_1),T(\vec{v}_2),\dots,T(\vec{v}_n)$ בלתי תלוים לינארית.

4. יהי V מרחב וקטורי. תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית כך ש- $T^2=T$.
הוכיחו: $V=\ker(T)\oplus\operatorname{Im}(T)$.

<u>תזכורת.</u> אם U,W הם תת-מרחבים של מרחב וקטורי V, אומרים ש- V הוא סכום ישר של U ו- W וכותבים $V=U\oplus W$ כאשר עבור כל $\vec{v}\in V$ קיימים $\vec{u}\in U,\vec{w}\in W$ כך ש- $\vec{v}=\vec{u}+\vec{w}$ ו- $U\cap W=\{\vec{0}\}$.

5. יהי V מרחב וקטורי. תהיינה $T,S:V\to V$ העתקות לינאריות המקיימות

(א) $T+S=I_V$ (ב) $T\circ S=0$ (ג) $T\circ T=T$.

הוכיחו על סמך נתונים אלו ש-$V=\operatorname{Im}(T)\oplus\operatorname{Im}(S)$.

<u>תזכורת.</u> I_V היא העתקת הזהות: $I_V(\vec{w})=\vec{w}$ עבור כל $\vec{w}\in V$.