עבודת בית 2 . פתרונות.

<u>הקדמה לשאלות 1,2.</u> אם V הוא מרחב וקטורי ממימד סופי ו- U תת-מרחב של V כך ש- $U \neq V$, אז בוודאי V ו- U אינם איזומורפיים: קל להוכיח שאם V ו- U הם מרחבים וקטוריים ממימד סופי כך ש- $\dim(U) < \dim(V)$ ו- $T: V \to U$ העתקה לינארית, אז T איננה חד-חד-ערכית. אבל אם V הוא מרחב וקטורי שאינו ממימד סופי ו- U תת-מרחב של V כך ש- $U \neq V$, בכל זאת יתכן ו- U איזומורפי ל- V.

1. יהי $V = \mathbb{R}[x]$ -- מרחב כל הפולינומים במשתנה אחד עם מקדמים ממשיים. נסמן: $U = \{ p(x) \in V \mid p(0) = 0 \}$. כלומר, U הוא תת-מרחב ב- V של כל הפולינומים מהצורה $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x$, האיבר החפשי שווה לאפס. הוכיחו ש- V ו- U איזומורפיים.

<u>פתרון.</u> נגדיר את ההעתקה $\varphi: V \to U$ כך: $\varphi\left(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\right) = a_n x^{n+1} + a_{n-1} x^n + \cdots + a_1 x^2 + a_0 x$. במילים אחרות: $\varphi\left(p(x)\right) = x \cdot p(x)$ עבור $p(x) \in \mathbb{R}[x]$.

היא לינארית כי
$$\varphi\left(p(x) + \alpha q(x)\right) = x\left(p(x) + \alpha q(x)\right) = \\ = xp(x) + \alpha x q(x) = \varphi\left(p(x)\right) + \alpha \varphi\left(q(x)\right)$$

קל לראות ש- $\ker(\varphi)$ טריוויאלי כי $\varphi\left(a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0\right)$ הוא פולינום האפס אם ורק אם $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ הוא פולינום האפס. כלומר, $a_n = \cdots = a_1 = a_0 = 0$. לכן ההעתקה φ היא חד-חד-ערכית.
כדי להראות ש- φ היא "על" ניקח $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x \in U$ ונעיר ש- $\varphi\left(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1\right) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x$. קיבלנו ש- φ לינארית, חד-חד-ערכית ו"על", לכן היא איזומורפיזם, ולכן V ו- U איזומורפיים.

2. יהי V מרחב וקטורי של כל הסדרות המתכנסות עם איברים ממשיים:
$V=\left\{(a_1,a_2,a_3,.....) \mid \forall i\in\mathbb{N}: a_i\in\mathbb{R}\ \&\ \exists\lim_{n\to\infty}a_n\right\}$.

נסמן: $U=\left\{(a_1,a_2,a_3,.....)\in V \mid \lim_{n\to\infty}a_n=0\right\}$. כלומר, U תת-מרחב ב- V של כל הסדרות הממשדיות השואפות לאפס. הוכיחו ש- V ו- U איזומורפיים.

<u>הדרכה.</u> יש לבנות העתקה לינארית חד-חד-ערכית ו"על" $T:V\to U$.

קיימת העתקה מאד טבעית מ- V ל- U:
$(a_1,a_2,a_3,.....)\mapsto\left(a_1-\lim_{n\to\infty}a_n, a_2-\lim_{n\to\infty}a_n, a_3-\lim_{n\to\infty}a_n,.....\right)$. אבל העתקה זו איננה חד-חד-ערכית. לדוגמה, שתי סדרות שונות $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},.....\right)$ ו- $\left(2,\frac{3}{2},\frac{4}{3},\frac{5}{4},.....\right)$ נשלחות על ידי העתקה זו לאותה תמונה $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},.....\right)$. נסו "לתקן" את ההעתקה הזאת כדי לקבל העתקת איזומורפיזם.

<u>פתרון.</u> נגדיר העתקה $T:V\to U$ כך:

$T(a_1,a_2,a_3,.....)=\left(\lim_{n\to\infty}a_n, a_1-\lim_{n\to\infty}a_n, a_2-\lim_{n\to\infty}a_n, a_3-\lim_{n\to\infty}a_n,.....\right)$. קודם כל נעיר שהסדרה $\left(\lim_{n\to\infty}a_n, a_1-\lim_{n\to\infty}a_n, a_2-\lim_{n\to\infty}a_n, a_3-\lim_{n\to\infty}a_n,.....\right)$ אכן שואפת לאפס, ולכן T באמת פועלת מ- V ל- U. לינאריות של T נובעת בקלות מתכונות הגבול. (יש לבדוק, כמובן!)

נניח ש-$T(a_1,a_2,a_3,.....)=(0,0,0,0,.....)$. כלומר,
$\left(\lim_{n\to\infty}a_n, a_1-\lim_{n\to\infty}a_n, a_2-\lim_{n\to\infty}a_n, a_3-\lim_{n\to\infty}a_n,.....\right)=(0,0,0,0,.....)$.

מכאן נובע מיידית ש-$a_j=0$ לכל $j\in\mathbb{N}$. קיבלנו שהגרעין של T טריוויאלי (מכיל רק את הסדרה הקבועה שכל איבריה אפסים), לכן T חד-חד-ערכית.

נראה ש- T היא העתקת "על". ניקח $(b_1,b_2,b_3,.....)\in U$. נגדיר את הסדרה $(c_1,c_2,c_3,.....)$ כך:

$c_1=b_2+b_1,\ c_2=b_3+b_1,\dots,c_n=b_{n+1}+b_1,\dots$. נעיר ש-$\lim_{n\to\infty}b_n=0$ כי $(b_1,b_2,b_3,.....)\in U$.

לכן $\lim_{n\to\infty}c_n=b_1$. נעיר גם ש-

$$T(c_1,c_2,c_3,.....)=\left(\lim_{n\to\infty}c_n\,,c_1-\lim_{n\to\infty}c_n\,,c_2-\lim_{n\to\infty}c_n\,,c_3-\lim_{n\to\infty}c_n,.....\right)=$$
$$=\left(b_1,b_2+b_1-b_1,b_3+b_1-b_1,\ldots,b_n+b_1-b_1,\ldots\right)=\left(b_1,b_2,b_3,\ldots,b_n,\ldots\right)$$

קיבלנו ש- $(b_1,b_2,b_3,.....)\in \operatorname{Im}(T)$. כלומר, סדרה כלשהי מ- U שייכת ל- $\operatorname{Im}(T)$. לכן T "על".

קיבלנו ש- T לינארית, חד-חד-ערכית ו"על", לכן היא איזומורפיזם, ולכן V ו- U איזומורפיים.

3. מצאו את כל הערכים הממשיים של k כך שהעמודה $\begin{bmatrix}1\\k\\k\end{bmatrix}$ תהיה וקטור עצמי של המטריצה $\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$.

<u>פתרון.</u> דרך 1. על פי ההגדרה $\begin{bmatrix}1\\k\\k\end{bmatrix}$ מהווה וקטור עצמי של $\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$ אם קיים מספר λ כך שמתקיים השויון $\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\k\\k\end{bmatrix}=\lambda\cdot\begin{bmatrix}1\\k\\k\end{bmatrix}$. מכאן $\begin{cases}4+2k=\lambda\\1+5k=\lambda k\\1+5k=\lambda k\end{cases}$. נציב $4+2k=\lambda$ במשוואה $1+5k=\lambda k$ ונקבל משוואה $1+5k=(4+2k)k$. זאת משוואה ריבועית $2k^2-k-1=0$. הפתרונות שלה הם $k=-\frac{1}{2}$, $k=1$.

בדיקה: $k=1$. $\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\6\\6\end{bmatrix}=6\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, ז.א. $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ הוא וקטור עצמי של $\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$ השייך לערך עצמי 6.

$k=-\frac{1}{2}$. $\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\end{bmatrix}=3\cdot\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$, ז.א. $\begin{bmatrix}1\\-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ הוא וקטור עצמי של $\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$ השייך לערך עצמי 3.

דרך 2. אנחנו רוצים ש- $\begin{bmatrix}1\\k\\k\end{bmatrix}$ יהיה וקטור עצמי של $\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$. כל וקטור עצמי שייך לערך עצמי מסוים. נמצא את כל הערכים העצמיים של המטריצה הנתונה.

$$\det\begin{bmatrix}4-\lambda&1&1\\1&4-\lambda&1\\1&1&4-\lambda\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}6-\lambda&1&1\\6-\lambda&4-\lambda&1\\6-\lambda&1&4-\lambda\end{bmatrix}=(6-\lambda)\det\begin{bmatrix}1&1&1\\1&4-\lambda&1\\1&1&4-\lambda\end{bmatrix}=$$
$$=(6-\lambda)\det\begin{bmatrix}1&1&1\\0&3-\lambda&0\\0&0&3-\lambda\end{bmatrix}=(6-\lambda)(3-\lambda)^2$$

מכאן רואים שהערכים העצמיים של המטריצה הנתונה הם 6 ו-3.

כדי ש- $\begin{bmatrix}1\\k\\k\end{bmatrix}$ יהיה וקטור עצמי של $\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$ השייך לערך עצמי 6 צריך שיתקיים השויון $\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\k\\k\end{bmatrix}=6\cdot\begin{bmatrix}1\\k\\k\end{bmatrix}$. מכאן $\begin{cases}4+2k=6\\1+5k=6k\\1+5k=6k\end{cases}$. מכאן $k=1$.

כדי ש- $\begin{bmatrix}1\\k\\k\end{bmatrix}$ יהיה וקטור עצמי של $\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}$ השייך לערך עצמי 3 צריך שיתקיים השויון $\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\k\\k\end{bmatrix}=3\cdot\begin{bmatrix}1\\k\\k\end{bmatrix}$. מכאן $\begin{cases}4+2k=3\\1+5k=3k\\1+5k=3k\end{cases}$. מכאן $k=-\frac{1}{2}$.

4. מצאו את ההגדרה המפורשת עבור הסדרה המוגדרת על ידי נוסחת נסיגה:

$a_0=0 \quad , \quad a_1=a_2=1 \quad , \quad a_n=10a_{n-1}-31a_{n-2}+30a_{n-3}$.

<u>פתרון.</u> נעיר שמתקיים השויון

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & -31 & 30 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & -31 & 30 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 10 & -31 & 30 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \\ a_{n-4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & -31 & 30 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2\cdot\begin{bmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \\ a_{n-4} \end{bmatrix}=\cdots\cdots$$

$$=\begin{bmatrix} 10 & -31 & 30 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2}\cdot\begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & -31 & 30 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{n-2}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

נסמן $A=\begin{bmatrix} 10 & -31 & 30 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. כדי למצוא את A^{n-2} נוכיח ש-A לכסינה ונמצא את P,D כך ש-

$A=PDP^{-1}$. אחרי שנמצא את P,D האלה, החישוב יהיה קל:

$A^{n-2}=\left(PDP^{-1}\right)\left(PDP^{-1}\right)\cdots\left(PDP^{-1}\right)=PD^{n-2}P^{-1}$. באלכסון הראשי של מטריצה אלכסונית D עומדים הערכים העצמיים של A. הערכים העצמיים של A הם פתרונות של המשוואה $\det\left(xI_3-A\right)=0$.

$$\det\left(xI_3-A\right)=\det\begin{bmatrix} x-10 & 31 & -30 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix}=x^3-10x^2+31x-30 .$$

ידוע שאם לפולינום עם מקדמים שלמים $x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\cdots+c_1x+c_0$ יש שורש שלם, אז השורש השלם הזה חייב להיות אחד המחלקים של האיבר החפשי c_0. לכן נציב בפולינום $x^3-10x^2+31x-30$ את המחלקים של -30, כך נגלה ש-2,3,5 הם שורשים של הפולינום הזה. לכן $x^3-10x^2+31x-30=\left(x-2\right)\left(x-3\right)\left(x-5\right)$.

המספרים 2,3,5 הם הערכים העצמיים של A. אין ערכים עצמיים נוספים כי אלה הם כל השורשים של הפולינום האופייני של A. למדנו שאם למטריצה $n\times n$ יש n ערכים עצמיים שונים, אז היא ניתנת ללכסון, לכן A ניתנת ללכסון, ולכן $D=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

העמודות של מטריצה הפיכה P הן וקטורים עצמיים של A השייכים לערכים עצמיים של A בהתאם לסדר שהערכים העצמיים עומדים באלכסון הראשי של D. נמצא וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי 2.

$$\left(A-2I_3\right)\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}8&-31&30\\1&-2&0\\0&1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2y\\y=2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4z\\y=2z\end{cases}$$

נציב $z=1$ ונקבל ש- $\begin{bmatrix}4\\2\\1\end{bmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי 2.

בדרך דומה נמצא ש- $\begin{bmatrix}9\\3\\1\end{bmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי 3, $\begin{bmatrix}25\\5\\1\end{bmatrix}$ הוא וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי 5. מכאן $P=\begin{bmatrix}4&9&25\\2&3&5\\1&1&1\end{bmatrix}$. ידוע היטב כיצד מוצאים את מטריצה הפכית: $P^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{8}{3}&5\\-\frac{1}{2}&\frac{7}{2}&-5\\\frac{1}{6}&-\frac{5}{6}&1\end{bmatrix}$. נחזור להתחלה:

$$\begin{bmatrix}a_n\\a_{n-1}\\a_{n-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&-31&30\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}^{n-2}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&9&25\\2&3&5\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^{n-2}&0&0\\0&3^{n-2}&0\\0&0&5^{n-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&-\frac{8}{3}&5\\-\frac{1}{2}&\frac{7}{2}&-5\\\frac{1}{6}&-\frac{5}{6}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}4&9&25\\2&3&5\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^{n-2}&0&0\\0&3^{n-2}&0\\0&0&5^{n-2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{7}{3}\\3\\-\frac{2}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&9&25\\2&3&5\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{7}{3}\cdot2^{n-2}\\3^{n-1}\\-\frac{2}{3}\cdot5^{n-2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{7}{3}\cdot2^n+3^{n+1}-\frac{2}{3}\cdot5^n\\@\\\$\end{bmatrix}$$

נתבקשנו למצוא נוסחה מפורשת עבור a_n, לכן הרכיבים שני ושלישי בעמודה האחרונה לא מעניינים אותנו. תשובה: $a_n=-\frac{7}{3}\cdot2^n+3^{n+1}-\frac{2}{3}\cdot5^n=\frac{-7\cdot2^n+3^{n+2}-2\cdot5^n}{3}$.

בדיקה: יש להציב את הנוסחה שמצאנו בנוסחת נסיגה נתונה ולראות שאכן מתקיים השויון:

$$10\cdot\frac{-7\cdot 2^{n-1}+3^{n+1}-2\cdot 5^{n-1}}{3}-31\cdot\frac{-7\cdot 2^{n-2}+3^{n}-2\cdot 5^{n-2}}{3}+30\cdot\frac{-7\cdot 2^{n-3}+3^{n-1}-2\cdot 5^{n-3}}{3}$$
$$=\frac{-70\cdot 2^{n-1}+10\cdot 3^{n+1}-20\cdot 5^{n-1}+217\cdot 2^{n-2}-31\cdot 3^{n}+62\cdot 5^{n-2}-210\cdot 2^{n-3}+30\cdot 3^{n-1}-60\cdot 5^{n-3}}{3}=$$
$$=\frac{(-70\cdot 4+217\cdot 2-210)\cdot 2^{n-3}+(10\cdot 9-31\cdot 3+30)\cdot 3^{n-1}+(-20\cdot 25+62\cdot 5-60)\cdot 5^{n-3}}{3}=$$
$$=\frac{(-56)\cdot 2^{n-3}+27\cdot 3^{n-1}+(-250)\cdot 5^{n-3}}{3}=\frac{(-7)\cdot 2^{3}\cdot 2^{n-3}+3^{3}\cdot 3^{n-1}+(-2)\cdot 5^{3}\cdot 5^{n-3}}{3}=\frac{-7\cdot 2^{n}+3^{n+2}-2\cdot 5^{n}}{3}$$

נעיר ש- $\frac{-7\cdot 2^{0}+3^{0+2}-2\cdot 5^{0}}{3}=0$, $\frac{-7\cdot 2^{1}+3^{1+2}-2\cdot 5^{1}}{3}=\frac{3}{3}=1$, $\frac{-7\cdot 2^{2}+3^{2+2}-2\cdot 5^{2}}{3}=\frac{-78+81}{3}=1$.

בדקנו שהנוסחה $a_n=\frac{-7\cdot 2^{n}+3^{n+2}-2\cdot 5^{n}}{3}$ מקיימת את נוסחת נסיגה הנתונה $a_n=10a_{n-1}-31a_{n-2}+30a_{n-3}$ וגם נותנת תנאי התחלה הנתונים כאשר מציבים $n=0,1,2$, לכן הנוסחה המפורשת $a_n=\frac{-7\cdot 2^{n}+3^{n+2}-2\cdot 5^{n}}{3}$ נכונה.

5. תהי A מטריצה 3×3 אנטי-סימטרית (כלומר, $A^t=-A$) עם רכיבים ממשיים.
   א. הוכיחו שהערך העצמי הממשי היחיד של A הוא אפס.
   ב. האם A ניתנת ללכסון מעל $\mathbb{C}$?

<u>פתרון.</u> מהנתון נובע ש- $A=\begin{bmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{bmatrix}$ עבור $a,b,c\in\mathbb{R}$ מסוימים.

$$p_A(x)=\det(xI-A)=\det\begin{bmatrix}x&-a&-b\\a&x&-c\\b&c&x\end{bmatrix}=x(x^2+c^2)+a(ax+bc)-b(ac-bx)=$$
$$=x(x^2+a^2+b^2+c^2)$$

קודם כל, רואים מיד שאפס הוא ערך עצמי ממשי יחיד של A כי $p_A(0)=0$ ולמשוואה $x^2+a^2+b^2+c^2=0$ אין פתרונות ממשיים כאשר $a^2+b^2+c^2>0$, ואם $a^2+b^2+c^2=0$ אז $p_A(x)=x^3$ ואפס הוא ערך עצמי יחיד של A. המספר

$a^2+b^2+c^2$ הוא מספר ממשי לא שלילי כי $a,b,c\in\mathbb{R}$. אם $a^2+b^2+c^2>0$ אז למטריצה A יש שלושה ערכים עצמיים שונים $0\,,\pm i\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ ולכן A ניתנת ללכסון מעל $\mathbb{C}$. אם $a^2+b^2+c^2=0$ אז $a=b=c=0$ כי a,b,c ממשיים, ובמקרה הזה A היא מטריצת האפס – מקרה פרטי של מטריצה אלכסונית.

6. הוכיחו קיום ויחידות של מטריצה $A\in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ כך ש-

$$A\cdot\begin{bmatrix}1&-1&3\\-2&2&1\\3&3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&0\\0&-3&0\end{bmatrix}.$$

מצאו את הערכים העצמיים של A והוכיחו ש-A ניתנת ללכסון.

<u>פתרון.</u> נסמן $C=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&-2&0\\0&-3&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&-1&3\\-2&2&1\\3&3&-1\end{bmatrix}$. קל לראות ש- B הפיכה:

$$\det B=\det\begin{bmatrix}1&-1&3\\-2&2&1\\3&3&-1\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}0&-1&3\\0&2&1\\6&3&-1\end{bmatrix}=6\cdot\left((-1)\cdot 1-3\cdot 2\right)=-42\neq 0.$$

לכן מהנתון $AB=C$ נובע: $A=CB^{-1}$, כלומר, A קיימת ומוגדרת חד-משמעית.

הוכחנו קיום ויחידות של A. מהנתון נובע:

$$A\cdot\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=0\cdot\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}\quad,\quad A\cdot\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\-3\end{bmatrix}=(-1)\cdot\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}\quad,\quad A\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=0\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}.$$

רואים מכאן ש- $0\,,-1$ הם ע"ע של A, וגם ש- $\begin{bmatrix}3\\1\\-1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}$ הם ו"ע של A.

העמודות האלה הן בת"ל כי הן עמודות של מטריצה הפיכה B. מטריצה A היא 3×3, יש

לה שלושה ו"ע בת"ל, לכן A ניתנת ללכסון. נסביר מדוע אין ל-A ע"ע בנוסף ל-$0,-1$.

הריבוי הגאומטרי של ערך עצמי 0 הוא לפחות 2 כי $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ הם שני ו"ע של A בת"ל השייכים לע"ע 0, ולכן גם הריבוי האלגברי הוא לפחות 2. המספר -1 הוא ע"ע של A ולכן הריבוי האלגברי שלו הוא לפחות 1, לכן בפירוק לגורמים של $p_A(x)$ מופיע $x^2(x+1)$. הדרגה של הפולינום $x^2(x+1)$ שווה ל-3, ולכן $p_A(x)=x^2(x+1)$ כי מטריצה A היא 3×3, ולכן הערכים העצמיים של A הם $0,-1$ בלבד.