

עבודת בית 3

1. תהי A מטריצה $n \times n$ כך שקבוצת כל הערכים העצמיים שלה היא $\{1, 2, 3\}$.

כרגיל, I_n היא מטריצת היחידה $n \times n$. האם המטריצה $3A - I_n$ הפיכה?

2. תהיינה B, C שורות בעלות ארבעה רכיבים (במילים אחרות, מטריצות 1×4).
נגדיר: $A = B^t C$. מצאו את הערכים העצמיים של A . מה הם התנאים על השורות B, C כך ש- A תהיה ניתנת ללכסון?

3. נתבונן בהעתקה $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ המוגדרת כך:

$$T(x, y, z) = (7x - 2y - 2z, -2x + 7y - 2z, -2x - 2y + 7z)$$

$$[T]_B^B = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{האם קיים בסיס } B \text{ ל-} \mathbb{R}^3 \text{ כך ש-} [T]_B^B = \begin{bmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 0 & 9 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} ?$$

אם כן – מצאו אותו. אם לא – הוכיחו שהוא לא קיים.

4. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל \mathbb{C} , $T, S: V \rightarrow V$ העתקות לינאריות.

הפולינום האופייני של העתקה לינארית $T: V \rightarrow V$ מוגדר כך:

$$p_T(x) = p_{[T]_B^B}(x) = \det(xI_n - [T]_B^B)$$

כאן $n = \dim V$, B בסיס מסוים של V , I_n היא מטריצת היחידה $n \times n$.

הוכיחו שאם לפחות אחת מהעתקות T, S הפיכה, אז $p_{T \circ S}(x) = p_{S \circ T}(x)$.

5. יהי V מרחב וקטורי של כל הסדרות המתכנסות עם איברים ממשיים:

$$V = \left\{ (a_1, a_2, a_3, \dots) \mid \forall i \in \mathbb{N} : a_i \in \mathbb{R} \text{ \& } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right\}$$

נגדיר את ההעתקה $T: V \rightarrow V$ כך:

$$T(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) = (a_2, a_3, a_4, \dots)$$

כלומר, T היא "הזזה שמאלה", היא מוחקת את

האיבר הראשון של הסדרה. מצאו את כל הערכים העצמיים (הממשיים) של T .

כלומר, יש למצוא את כל המספרים הממשיים λ כך שקיימת סדרה מתכנסת

$$(a_1, a_2, a_3, \dots)$$

עם לפחות איבר אחד שונה מאפס המקיימת את השוויון

$$T(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \lambda a_4, \dots)$$

6. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל \mathbb{R} .

$$T: V \rightarrow V \text{ תהי העתקה לינארית כך ש- } T^2 = T, \text{ Im}(T) \neq V, \text{ Im}(T) \neq \{\vec{0}\}.$$

מצאו את כל הערכים העצמיים של T .