עבודת בית 3 . פתרונות.

1. תהי A מטריצה $n\times n$ כך שקבוצת כל הערכים העצמיים שלה היא $\{1,2,3\}$.
כרגיל, I_n היא מטריצת היחידה $n\times n$. האם המטריצה $3A-I_n$ הפיכה?

<u>פתרון.</u> כידוע, λ הוא ע"ע של מטריצה A אם ורק אם $\det(A-\lambda I)=0$.

$\det(3A-I)=\det\left(3\left(A-\frac{1}{3}I\right)\right)=3^n\cdot\det\left(A-\frac{1}{3}I\right)\neq 0$ כי מהנתון נובע ש-$\frac{1}{3}$ לא ע"ע של A.

קיבלנו $\det(3A-I)\neq 0$ ולכן המטריצה $3A-I_n$ הפיכה.

2. תהיינה B,C שורות בעלות ארבעה רכיבים (במילים אחרות, מטריצות 1×4).
נגדיר: $A=B^tC$. מצאו את הערכים העצמיים של A. מה הם התנאים על השורות B,C כך ש-A תהיה ניתנת ללכסון?

<u>פתרון.</u> נסמן: $B=[a\quad b\quad c\quad d]\ ,\ \ C=[p\quad q\quad r\quad s]$.

$$A=B^tC=\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}\cdot[p\quad q\quad r\quad s]=\begin{bmatrix}ap&aq&ar&as\\bp&bq&br&bs\\cp&cq&cr&cs\\dp&dq&dr&ds\end{bmatrix}.$$

אם $B=[0\quad 0\quad 0\quad 0]$ או $C=[0\quad 0\quad 0\quad 0]$, אז A היא מטריצת האפס, היא ניתנת ללכסון כי היא כבר אלכסונית, הערך העצמי היחיד שלה הוא אפס.

נניח ש-$B\neq[0\quad 0\quad 0\quad 0]$ ו-$C\neq[0\quad 0\quad 0\quad 0]$. אז A היא לא מטריצת האפס. נוכיח שמימד המרחב הנפרש על ידי העמודות של A הוא 1. זה קל מאד: כל העמודות של A הן כפולות של העמודה B^t בסקלרים p,q,r,s, לכן המימד הנ"ל הוא לכל היותר 1. העמודה B^t היא לא עמודת אפסים, הסקלרים p,q,r,s לא כולם אפסים, לכן המימד הנ"ל לא אפס.

במילים אחרות, הוכחנו ש-$rank(A)=1$. היות ו-A היא 4×4 ו-$rank(A)=1$, המימד של מרחב הפתרונות של מערכת לינארית הומוגנית $Ax=0$ הוא 3. זה למדנו באלגברה לינארית 1, זה גם נובע ממשפט המימדים שלמדנו בקורס הנוכחי. כל פתרון לא טריוויאלי של המערכת $Ax=0$ הוא וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי 0:
$Ax=0=0\cdot x$. קיבלנו שהריבוי הגאומטרי של ערך עצמי 0 הוא 3. ולכן הריבוי האלגברי של ערך עצמי 0 הוא לפחות 3. לכן הפולינום האופייני של A נראה כך:
$p_A(x)=x^3(x-\omega)$. אם $\omega\neq 0$, אז A לכסינה: יש לה ערך עצמי אפס עם ריבוי גאומטרי ואלגברי שווה לשלוש וערך עצמי ω עם ריבוי גאומטרי ואלגברי שווה לאחד.

אם $\omega=0$, אז A איננה לכסינה כי הפולינום האופייני שלה $p_A(x)=x^4$, כלומר, הריבוי האלגברי של ערך עצמי 0 הוא 4 אבל הריבוי הגאומטרי של ערך עצמי 0 הוא 3.

נשאר להבין מהו ω. נזכיר שהעקבה (Trace) של מטריצה ריבועית היא סכום רכיבי האלכסון הראשי. כידוע, $p_Q(x)=x^n-(TrQ)x^{n-1}+\cdots\cdots$ עבור מטריצה Q $n\times n$.

אצלנו: $p_A(x)=x^3(x-\omega)=x^4-\omega x^3$. כלומר, $\omega=Tr(A)=ap+bq+cr+ds$. נסכם:

א. אם $B=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$ או $C=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$, אז A היא מטריצת האפס, היא ניתנת ללכסון כי היא כבר אלכסונית, הערך העצמי היחיד שלה הוא אפס.

ב. אם $B\neq[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$ ו-$C\neq[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$ ו-$Tr(A)=ap+bq+cr+ds\neq 0$, אז הערכים העצמיים של A הם 0 , $ap+bq+cr+ds$ ו-A ניתנת ללכסון.

ג. אם $B\neq[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$ ו-$C\neq[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$ ו-$Tr(A)=ap+bq+cr+ds=0$, אז 0 הוא הערך העצמי היחיד של A ו-A אינה ניתנת ללכסון.

אפשר להביא טיעון אלגנטי יותר ממה שכתבנו לעיל המוכיח ש-$Tr(A)=ap+bq+cr+ds$ הוא ערך עצמי של A:

$$A\cdot B^t=\left(B^t\cdot C\right)\cdot B^t=B^t\cdot\left(C\cdot B^t\right)=B^t\cdot[ap+bq+cr+ds]=\left(Tr(A)\right)\cdot B^t .$$

כאשר B^t היא לא עמודת אפסים, השויון $A\cdot B^t=\left(Tr(A)\right)\cdot B^t$ אומר ש-B^t מהווה וקטור עצמי של A השייך לערך עצמי $Tr(A)$.

3. נתבונן בהעתקה $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת כך:

$$T(x,y,z)=(7x-2y-2z,-2x+7y-2z,-2x-2y+7z).$$

האם קיים בסיס B ל-$\mathbb{R}^3$ כך ש-$[T]_B^B=\begin{bmatrix}9&1&1\\0&9&-5\\0&0&3\end{bmatrix}$?

אם כן – מצאו אותו. אם לא – הוכיחו שהוא לא קיים.

<u>פתרון.</u> כרגיל, נסמן על ידי E את הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$:

$E=\left((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\right)$. מהנתון מיד נובע ש-$[T]_E^E=\begin{bmatrix}7&-2&-2\\-2&7&-2\\-2&-2&7\end{bmatrix}$.

אילו היה קיים בסיס B ל-$\mathbb{R}^3$ כך ש-$[T]_B^B=\begin{bmatrix}9&1&1\\0&9&-5\\0&0&3\end{bmatrix}$, המטריצות

$X=\begin{bmatrix}7&-2&-2\\-2&7&-2\\-2&-2&7\end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix}9&1&1\\0&9&-5\\0&0&3\end{bmatrix}$ היו דומות, אבל הן אינן דומות כמו שנסביר, ולכן בסיס B כזה לא קיים.

טענת עזר: אם X מטריצה $n\times n$ לכסינה ו-Y מטריצה $n\times n$ שאיננה לכסינה, אזי מטריצות X,Y אינן דומות. הוכחה: נניח בשלילה ש-X,Y דומות, ז.א. $X=QYQ^{-1}$ עבור מטריצה Q מסוימת הפיכה. מטריצה X לכסינה, לכן קיימות מטריצה P הפיכה ומטריצה D אלכסונית כך ש-$X=PDP^{-1}$. קיבלנו: $PDP^{-1}=QYQ^{-1}$. מכאן: $Y=\left(Q^{-1}P\right)D\left(Q^{-1}P\right)^{-1}$, ז.א. Y לכסינה בסתירה לנתון.

זה בדיוק מה שקורה אצלנו: בעזרת חישובים פשוטים קל לראות ש-$X=\begin{bmatrix}7&-2&-2\\-2&7&-2\\-2&-2&7\end{bmatrix}$

לכסינה, ואילו $Y=\begin{bmatrix}9&1&1\\0&9&-5\\0&0&3\end{bmatrix}$ איננה לכסינה.

$$\det(X-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}7-\lambda & -2 & -2\\ -2 & 7-\lambda & -2\\ -2 & -2 & 7-\lambda\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}3-\lambda & -2 & -2\\ 3-\lambda & 7-\lambda & -2\\ 3-\lambda & -2 & 7-\lambda\end{bmatrix}=$$

$$=\det\begin{bmatrix}3-\lambda & -2 & -2\\ 0 & 9-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 9-\lambda\end{bmatrix}=(3-\lambda)(9-\lambda)^2$$

$$\det(Y-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}9-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 9-\lambda & -5\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{bmatrix}=(3-\lambda)(9-\lambda)^2$$

הערה: אילו היינו מקבלים פולינומים אופיינים שונים היינו יכולים לקבוע כבר בשלב הזה שמטריצות X,Y אינן דומות. אבל, כמו שרואים, ל- X ול- Y יש אותו פולינום אופייני.

הריבוי הגאומטרי של ערך עצמי 9 אצל מטריצה X שווה ל-2:

$(X-9I)\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow x+y+z=0$, מכאן ו"ע של X השייכים

לע"ע 9 נראים כך: $\begin{bmatrix}-y-z\\ y\\ z\end{bmatrix}$. לכן הריבוי הגאומטרי של ע"ע 9 אצל X שווה ל-2 כי יש

שני ו"ע של X בת"ל השייכים לע"ע 9: לדוגמה, $\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$. לכן X לכסינה.

הריבוי הגאומטרי של ערך עצמי 9 אצל מטריצה Y שווה ל-1:

$(Y-9I)\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -5\\ 0 & 0 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Leftrightarrow y=z=0$, מכאן ו"ע של Y השייכים

לע"ע 9 נראים כך: $\begin{bmatrix}x\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$, זה ציר ה-x במרחב $\mathbb{R}^3$.

לכן הריבוי הגאומטרי של ע"ע 9 אצל Y שווה ל-1 כי אין בציר ה-x (כמו בכל ישר אחר) שני וקטורים בת"ל. לכן Y איננה לכסינה.

4. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{C}$, $T,S:V\to V$ העתקות לינאריות. הפולינום האופייני של העתקה לינארית $T:V\to V$ מוגדר כך:
$$p_T(x)=p_{[T]_B^B}(x)=\det\left(xI_n-[T]_B^B\right).$$

כאן $n=\dim V$, B בסיס מסוים של V, I_n היא מטריצת היחידה $n\times n$.

הוכיחו שאם לפחות אחת מהעתקות T,S הפיכה, אז $p_{T\circ S}(x)=p_{S\circ T}(x)$.

<u>פתרון</u>. כידוע, $[S\circ T]_B^B=[S]_B^B\cdot[T]_B^B$, $[T\circ S]_B^B=[T]_B^B\cdot[S]_B^B$. נסמן: $Q=[S]_B^B$, $R=[T]_B^B$.

עלינו להראות ש-$p_{RQ}(x)=p_{QR}(x)$. נתון שלפחות אחת מהעתקות T,S הפיכה. בלי הגבלת הכלליות אפשר להניח שההעתקה T הפיכה. כידוע, $\left[T^{-1}\right]_B^B=\left([T]_B^B\right)^{-1}=R^{-1}$.

המטריצות RQ ו-QR דומות: $RQ=R(QR)R^{-1}$.

למדנו שלמטריצות דומות יש אותו פולינום אופייני: אם $U=ZYZ^{-1}$ אז

$$\begin{aligned}p_U(x)&=\det(xI_n-U)=\det\left(Z(xI_n)Z^{-1}-ZYZ^{-1}\right)=\det\left(Z(xI_n-Y)Z^{-1}\right)=\\&=\det(Z)\det(xI_n-Y)\det\left(Z^{-1}\right)=\det(xI_n-Y)=p_Y(x)\end{aligned}$$

כי $\det(Z)\det\left(Z^{-1}\right)=1$.

היות והמטריצות RQ, QR דומות, $p_{RQ}(x)=p_{QR}(x)$, ולכן $p_{T\circ S}(x)=p_{S\circ T}(x)$.

5. יהי V מרחב וקטורי של כל הסדרות המתכנסות עם איברים ממשיים:

$V=\left\{\left(a_1,a_2,a_3,.....\right) \middle| \forall i\in\mathbb{N}: a_i\in\mathbb{R} \ \& \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n\right\}$. נגדיר את ההעתקה $T:V\to V$ כך:

$T\left(a_1,a_2,a_3,a_4,.....\right)=\left(a_2,a_3,a_4,.....\right)$. מצאו את כל הערכים העצמיים (הממשיים) של T.

כלומר, יש למצוא את כל המספרים הממשיים λ כך שקיימת סדרה מתכנסת

$\left(a_1,a_2,a_3,.....\right)$ עם לפחות איבר אחד שונה מאפס המקיימת את השויון

$T\left(a_1,a_2,a_3,a_4,.....\right)=\left(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3,\lambda a_4,.....\right)$.

<u>פתרון.</u> על פי הגדרת T, $T\left(a_1,a_2,a_3,a_4,.....\right)=\left(a_2,a_3,a_4,.....\right)$. לכן השויון

$T\left(a_1,a_2,a_3,a_4,.....\right)=\left(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3,\lambda a_4,.....\right)$ נראה כך:

$\left(a_2,a_3,a_4,a_5.....\right)=\left(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3,\lambda a_4,.....\right)$. מכאן:

$a_2=\lambda a_1, a_3=\lambda a_2, a_4=\lambda a_3,\ldots,a_n=\lambda a_{n-1},\ldots$. מכאן:

$a_2=\lambda a_1, a_3=\lambda a_2=\lambda^2 a_1, a_4=\lambda a_3=\lambda^3 a_1,\ldots,a_n=\lambda^{n-1}a_1,\ldots$. כלומר,

$\left(a_1,a_2,a_3,a_4,.....\right)=\left(a_1,\lambda a_1,\lambda^2 a_1,\lambda^3 a_1,\ldots,\lambda^{n-1}a_1,\ldots\right)=a_1\left(1,\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\ldots,\lambda^{n-1},\ldots\right)$.

נשאר להבין מה התנאי לכך שהסדרה $a_1\left(1,\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\ldots,\lambda^{n-1},\ldots\right)$ תהיה שונה מסדרת אפסים ומתכנסת. כידוע, אם $-1<\lambda<1$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda^n=0$. אם $\lambda>1$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda^n=+\infty$. אם $\lambda\le -1$ הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda^n$ אינו קיים. ואם $\lambda=1$, אז $\lambda^n=1$ לכל $n\in\mathbb{N}$, ולכן הסדרה $a_1\left(1,\lambda,\lambda^2,\lambda^3,\ldots,\lambda^{n-1},\ldots\right)$ היא סדרה קבועה $a_1\left(1,1,1,1,\ldots,1,\ldots\right)=\left(a_1,a_1,a_1,\ldots\right)$. נסכם:

כל λ, $-1<\lambda\le 1$, הוא ערך עצמי של T, וכל λ אחר אינו ערך עצמי של T.

קבוצת כל הערכים העצמיים של T היא קטע פתוח שמאל וסגור מימין $(-1,1]$.

אם המרחב הוא ממימד סופי מספר הערכים העצמיים הוא תמיד סופי, אבל כאן לא...

6. יהי V מרחב וקטורי ממימד סופי מעל $\mathbb{R}$.

תהי $T:V\to V$ העתקה לינארית כך ש- $T^2=T$, $\operatorname{Im}(T)\neq V$, $\operatorname{Im}(T)\neq\{\vec{0}\}$.

מצאו את כל הערכים העצמיים של T.

<u>פתרון.</u> נעיר שהגרעין של T לא טריוויאלי, כלומר קיים $\vec{0}\neq\vec{v}\in V$ כך ש- $T(\vec{v})=\vec{0}$.
הסיבה לכך היא: V הוא מרחב ממימד סופי, לכן $\dim V=\dim\ker(T)+\dim\operatorname{Im}(T)$, נתון ש- $\operatorname{Im}(T)\neq V$, לכן $\dim\operatorname{Im}(T)<\dim V$ ולכן $\dim\ker(T)>0$. מכאן אפס הוא ערך עצמי של T: $T(\vec{v})=\vec{0}=0\cdot\vec{v}$, $\vec{0}\neq\vec{v}$.

נתון ש- $\operatorname{Im}(T)\neq\{\vec{0}\}$, לכן קיים $\vec{v}\in V$ כך ש- $T(\vec{v})\neq\vec{0}$. נתון גם ש- $T^2=T$,

לכן $T(T(\vec{v}))=T(\vec{v})$.

בעצם, כתוב כאן שהמספר 1 הוא ערך עצמי של T: $T(T(\vec{v}))=T(\vec{v})=1\cdot T(\vec{v})$. (הווקטור $T(\vec{v})$, הוא שונה מווקטור האפס, הוא וקטור עצמי של T השייך לערך עצמי 1)

עד כאן – הוכחנו שהמספרים אפס ואחד הם ערכים עצמיים של T. נשאר להראות שאין ל- T ערכים עצמיים נוספים. נניח, λ הוא ערך עצמי של T. אם כך, קיים $\vec{0}\neq\vec{u}\in V$ כך ש- $T(\vec{u})=\lambda\vec{u}$. מכאן $T^2(\vec{u})=T(T(\vec{u}))=T(\lambda\vec{u})=\lambda T(\vec{u})=\lambda\cdot\lambda\vec{u}=\lambda^2\vec{u}$. אבל $T^2=T$, ולכן $\lambda\vec{u}=T(\vec{u})=T^2(\vec{u})=\lambda^2\vec{u}$, כלומר, $(\lambda-\lambda^2)\vec{u}=\vec{0}$. היות ו- $\vec{0}\neq\vec{u}$, מהשויון האחרון נובע ש- $\lambda-\lambda^2=0$, זאת אומרת, $\lambda=0$ או $\lambda=1$. השתמשנו כאן רק בנתון ש- $T^2=T$, ומה שהוכחנו עכשיו – אם λ הוא ערך עצמי של T, אז λ חייב להיות 0 או 1; לא נובע מזה שגם 0 וגם 1 הם ערכים עצמיים של T -- זאת הוכחנו לעיל על ידי שימוש בנתונים $\operatorname{Im}(T)\neq V$, $\operatorname{Im}(T)\neq\{\vec{0}\}$. לסיכום: קבוצת כל הערכים העצמיים של T היא $\{0,1\}$.