שפות NP-שלמות נוספות

- בהרצאה הקודמת הכרנו שתי שפות $\boldsymbol{NP}$-שלמות:

$SAT = \{< \phi >|\phi\ is\ a\ satisfiable\ Boolean\ formula\}$

$CNF - SAT = \{< \phi > |\phi\ is\ a\ satisfiable\ CNF\ Boolean\ formula\}$

בהרצאה הנוכחית נתוודע לכמה שפות $\boldsymbol{NP}$-שלמות נוספות

– בעיות $\boldsymbol{NP}$-שלמות קיימות במגוון של תחומים

איך נוכיח על שפות נוספות?

- ברגע שידועה לנו שפה NP-שלמה אחת, אפשר להוכיח על שפות נוספות שגם הן NP-שלמות.

איך נוכיח על שפות נוספות?

- ברגע שידועה לנו שפה $\boldsymbol{NP}$-שלמה אחת, אפשר להוכיח על שפות נוספות שגם הן $\boldsymbol{NP}$-שלמות.
- **משפט**: אם L_1 $\boldsymbol{NP}$-שלמה, ו-L_2 מקיימת
  - L_2 שייכת ל-$\boldsymbol{NP}$
  - $L_1 \leq_P L_2$ (שימו לב היטב לכיוון של הרדוקציה!)

  אז גם L_2 $\boldsymbol{NP}$-שלמה.

איך נוכיח על שפות נוספות?

- ברגע שידועה לנו שפה $\boldsymbol{NP}$-שלמה אחת, אפשר להוכיח על שפות נוספות שגם הן $\boldsymbol{NP}$-שלמות.
- **משפט**: אם L_1 $\boldsymbol{NP}$-שלמה, ו-L_2 מקיימת
  - L_2 שייכת ל-$\boldsymbol{NP}$
  - $L_1 \leq_P L_2$ (שימו לב היטב לכיוון של הרדוקציה!)

  אז גם L_2 $\boldsymbol{NP}$-שלמה.
- **תרגיל**: הוכיחו את המשפט
  - זכרו כי היחס $\leq_P$ הוא טרנזיטיבי.

$3SAT$

- פסוק בתחשיב הפסוקים הוא ב-$3CNF$ אם
  - הפסוק ב-CNF.
  - בכל פסוקית יש שלושה ליטרלים.
- **דוגמה** : $(x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee w)$

$$3SAT \;=\; \{<\phi>|\phi \; is \; a \; satisfiable$$

$$3CNF \; Boolen \; formula\}$$

- זוהי שפת הפסוקים הספיקים ב-$3CNF$

<u>תזכורת</u>:
בהינתן פסוק
$\phi(x_1, \dots, x_n)$
$x_1, \dots x_n$ הם המשתנים שלו
$x_1, \neg x_1, \dots x_n, \neg x_n$ הם הליטרלים שלו

$3SAT$ היא NP-שלמה

- נוכיח ש-$3SAT$ היא $\boldsymbol{NP}$-שלמה
  - **תרגיל**: הוכיחו ש-$3SAT$ שייכת ל-$\boldsymbol{NP}$.
  - נראה: $CNF - SAT \leq_P 3SAT$

רעיון כללי של הרדוקציה: $f\big(\phi(x_1, \dots, x_n)\big) = \phi'(x_1, \dots, x_n)$

- כל פסוקית ב-ϕ נמיר לפסוקית אחת או יותר בעלות שלושה ליטרלים ב-ϕ.
- נוכיח נכונות.
- נוכיח שהרדוקציה תעשה בזמן פולינומי.

בה״כ נניח של-ϕ יש n משתנים ו-m פסוקיות.

<u>תזכורת</u>: כדי להוכיח ששפה כלשהי היא שלמה במחלקה יש להראות:
1. שהיא שייכת למחלקה
2. שהיא קשה במחלקה

$SAT \leq 3SAT$

בניית $f(\phi) = \phi'$

נחלק את הפסוקיות ב-ϕ לשלושה סוגים ונטפל בכל סוג בנפרד:

1. פסוקיות עם פחות מ-3 ליטרלים – פסוקיות כאלה פשוט נשכפל את אחד הליטרלים עד שנגיע ל-3 ליטרלים.
   הסיבוכיות היא $O(m)$
2. פסוקיות עם 3 ליטרלים – פסוקיות כאלה לא נשנה.
   הסיבוכיות היא $O(1)$
3. פסוקיות עם לפחות 4 ליטרלים – מצריך עבודה יותר עדינה.

$\boldsymbol{SAT \leq 3SAT}$

בניית $f(\phi) = \phi'$

עבור כל פסוקית עם איזשהו $k \geq 4$ ליטרלים נוסיף עוד $k-3$ משתנים חדשים, ונפצל את הפסוקית ל-$k-4$ פסוקיות בגודל 3 באופן הבא:

הפסוקית המקורית:

$$(l_1 \vee l_2 \vee l_3 \vee l_4 \ldots \vee l_{k-2} \vee l_{k-3} \ \vee l_k\ )$$

הפסוקית החדשה:

$$(l_1 \vee l_2 \vee z_1) \wedge \ (\neg z_1 \vee l_3 \vee z_2) \wedge (\neg z_2 \vee l_4 \vee z_3) \wedge \cdots$$
$$\wedge (\neg z_{i-2} \vee l_i \vee z_{i-1}) \wedge \cdots$$
$$\wedge (\neg z_{k-4} \vee l_{k-2} \vee z_{k-3}) \wedge (\neg z_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)$$

הסיבוכיות היא $O(n \cdot m)$ משום שיהיו לכל היותר m פסוקיות המצריכות 'טיפול' כזה ובכל פסוקית יהיו לכל היותר n ליטרלים

סה"כ סיבוכיות כל הרדוקציה היא:

$$O(m + m \cdot n\ ) = O(m \cdot n)$$

הערה

- ניתן להגדיר את $3CNF$ כך שאין פסוקיות בהן משתנה מופיע יותר מפעם אחת.
- במצב כזה, עבור פסוקית בעלת פחות מ-3 משתנים, נצטרך לבצע את הרדוקציה אחרת.
- עבור פסוקית עם שני משתנים $(l_1 \vee l_2)$ ניצור שתי פסוקיות חדשות:

$$(l_1 \vee l_2 \vee x) \wedge (l_1 \vee l_2 \vee \neg x)$$

- תרגיל: מה יקרה עבור פסוקית עם משתנה יחיד?
- תרגיל: מה הסיבוכיות של ההמרות הללו?

תרגיל כדי לתת לרעיון לשקוע

המירו את הפסוק הבא לצורת $3CNF$:

$$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4 \vee \neg x_5 \vee x_6) \wedge (x_3) \wedge (x_1 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_3 \vee x_4 \vee \neg x_6)$$

$SAT \leq 3SAT$

הוכחת נכונות (1)

נרצה להוכיח שהפונקציה שיצרנו היא אכן רדוקציה:

$$\phi \in SAT \leftrightarrow \phi' \in 3SAT$$

כיוון שטיפלנו' בכל פסוקית בנפרד, נרצה להוכיח שכל פסוקית ב-ϕ אמ"מ הפסוקית או הפסוקיות המקבילות לה ב-ϕ' ספיקות.

מקרים 1+2 טריוויאלים

ולכן נפרט רק על 3.

תנאים לרדוקציה:

1. מלאה
2. ניתנת לחישוב
3. תקפה

ברדוקציה פולינומית נוכיח בנוסף שהיא ניתנת לחישוב בזמן פולינומי

$SAT \leq 3SAT$

הוכחת נכונות (2)

ϕ ספיקה אמ״מ ϕ' ספיקה:

אם הפסוק ספיק אז הפסוקית הגדולה ספיקה, אז יש בה לפחות ליטרל אחד חיובי.

נפצל שוב לשלושה מקרים משלימים:

a. אם הליטרל הזה נמצא בפסוקית הראשונה שנוצרה
b. אם הליטרל הזה נמצא בפסוקית האחרונה שנוצרה
c. אם הוא נמצא באמצע

$SAT \leq 3SAT$

הוכחת נכונות (3)

a. אם הליטרל הזה נמצא בפסוקית הראשונה שנוצרה

נוכל להגדיר שלכל $j \in [k-3]$ יתקיים $z_j = F$ ולכן כל הפסוקיות שנוצרו יסתפקו

$$(l_1 \vee l_2 \vee z_1) \wedge (\neg z_1 \vee l_3 \vee z_2) \wedge (\neg z_2 \vee l_4 \vee z_3) \wedge \cdots$$

$$\wedge (\neg z_{i-2} \vee l_i \vee z_{i-1}) \wedge \cdots$$

$$\wedge (\neg z_{k-4} \vee l_{k-2} \vee z_{k-3}) \wedge (\neg z_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)$$

$SAT \leq 3SAT$

הוכחת נכונות (4)

b. אם הליטרל הזה נמצא בפסוקית האחרונה שנוצרה נוכל להגדיר שלכל $j \in [k-3]$ יתקיים $z_j = T$ ולכן כל הפסוקיות שנוצרו יסתפקו

$$(l_1 \vee l_2 \vee z_1) \wedge (\neg z_1 \vee l_3 \vee z_2) \wedge (\neg z_2 \vee l_4 \vee z_3) \wedge \cdots$$

$$\wedge (\neg z_{i-2} \vee l_i \vee z_{i-1}) \wedge \cdots$$

$$\wedge (\neg z_{k-4} \vee l_{k-2} \vee z_{k-3}) \wedge (\neg z_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)$$

$SAT \leq 3SAT$

הוכחת נכונות (5)

c. אם הליטרל הזה נמצא בפסוקית ה-i

נוכל להגדיר שלכל $j \in [i-2]$ יתקיים $z_j = T$

ושלכל $\mathrm{i}-3 \leq j \leq k-3$ יתקיים $z_j = F$

ולכן כל הפסוקיות שנוצרו יסתפקו

$$(l_1 \vee l_2 \vee z_1) \wedge (\neg z_1 \vee l_3 \vee z_2) \wedge (\neg z_2 \vee l_4 \vee z_3) \wedge \cdots$$

$$\wedge (\neg z_{i-2} \vee l_i \vee z_{i-1}) \wedge \cdots$$

$$\wedge (\neg z_{k-4} \vee l_{k-2} \vee z_{k-3}) \wedge (\neg z_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)$$

$SAT \leq 3SAT$

הוכחת נכונות (6)

אם לעומת זאת הפסוקית המקורית לא הסתפקה, נרצה להוכיח שגם צירוף הפסוקיות הבאות לא יסתפק. מאחר והפסוקית המקורית לא הסתפקה כל הליטרלים בה שליליים.

נניח בשלילה שהוא כן ספיק, אם כך בהכרח $z_1 = T$ ולכן בהכרח $z_2 = T$ ונמשיך ככה עד $z_{k-3} = T$ ונקבל שהפסוקית האחרונה לא מסתפקת!

$$(l_1 \vee l_2 \vee z_1) \wedge (\neg z_1 \vee l_3 \vee z_2) \wedge (\neg z_2 \vee l_4 \vee z_3) \wedge \cdots$$

$$\wedge (\neg z_{i-2} \vee l_i \vee z_{i-1}) \wedge \cdots$$

$$\wedge (\neg z_{k-4} \vee l_{k-2} \vee z_{k-3}) \wedge (\neg z_{k-3} \vee l_{k-1} \vee l_k)$$

$2SAT$

- כמו שהגדרנו פסוקים ב-$3CNF$, אפשר להגדיר פסוקים ב-$2CNF$
  - **דוגמה**: פסוק ב-$2CNF$: $(x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y)$

$$2SAT = \{< \phi > | \phi \text{ is a satisfiable } 2CNF \text{ Boolen formula}\}$$

- זוהי שפת הפסוקים הספיקים ב-$2CNF$.
- שאלה: האם $2SAT \in NPC$?

$2SAT$

- כמו שהגדרנו פסוקים ב-$3CNF$, אפשר להגדיר פסוקים ב-$2CNF$
  - **דוגמה**: פסוק ב-$2CNF$: $(x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y)$

$$2SAT = \{< \phi > | \phi \text{ is a satisfiable } 2CNF \text{ Boolen formula}\}$$

- זוהי שפת הפסוקים הספיקים ב-$2CNF$.
- שאלה: האם $2SAT \in NPC$?
- פתרון: אי אפשר! נוכיח עוד רגע כי $2SAT \in P$!

$2SAT \in P$

הסבר: במקרה של פסוקית שיש בה רק שני ליטרלים, אם ידוע לנו על אחד מהם שהוא false אז השני חייב להיות true כדי שהפסוק יסתפק.

מה שאומר שניתן לבנות גרף מכוון שירכז את כל התנאים של כל הפסוקיות ולהשתמש בגרף הנ"ל כדי למצוא השמה מספקת.

כך שאם השמה כזו איננה קיימת נוכל לזהות זאת ולהחזיר תשובה שלילית.

(1) $2SAT \in P$

- **משפט** : $2SAT$ שייכת ל-P.
- **הוכחה** : נוכיח על ידי בניית גרף שייצג שקילות לוגית לפסוק. הבנייה תעשה בזמן פולינומי, הפעולות על הגרף ייעשו בזמן פולינומי, סה"כ נקבל אלגוריתם פולינומי הבודק האם פסוק 2CNF ספיק.

הפסוק שנעסוק בו הוא $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ בעל m פסוקיות.

(2) $2SAT \in P$

תזכורת: פסוקית מהצורה $(l_i \vee l_j)$ שקולה לוגית לפסוק

$\neg l_i \rightarrow l_j$ ולפסוק $\neg l_j \rightarrow l_i$.

– נייצג כל פסוקית $(l_i \vee l_j)$ בגרף על ידי השקילות הלוגית $(\neg l_j \rightarrow l_i) \wedge (\neg l_i \rightarrow l_j)$

(תזכורת: $\neg\neg x = x$)

נרצה לבנות את הגרף $G = (V,E)$ באופן הבא:

$$V := \{x_i, \neg x_i : i \in [n]\}$$

$$E := \{\neg x_i \rightarrow x_j,\ \ \neg x_j \rightarrow x_i \ \ : \ \ (x_i \vee x_j) \in \phi\}$$

בגרף יהיו $2n$ קודקודים ו-$2m$ צלעות ולכן קידדו יצריך זמן פולינמי בגודל הפסוק.

(3) $2SAT \in P$

אבחנה 1 : נשים לב שהגרף סימטרי, כלומר אם יש קשת $u \rightarrow v$ אז גם יש קשת $\bar{v} \rightarrow \bar{u}$.

(נובע ישירות מכך שאם יש קשת $u \rightarrow v$ אז מופיעה הפסוקית $(\bar{u} \vee v)$ ולכן בגרף ישנה הצלע $\bar{v} \rightarrow \bar{u}$)

אם נשתמש באבחנה זו מספר פעמים נשים לב שמסלול :

$$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow v_{k-1} \rightarrow v_k$$

גורר את הצלעות :

$$\overline{v_2} \rightarrow \overline{v_1}\ , \qquad \overline{v_3} \rightarrow \overline{v_2}\ , \qquad \ldots \qquad , \overline{v_k} \rightarrow \overline{v_{k-1}}$$

שיגררו את קיום המסלול :

$$\overline{v_k} \rightarrow \overline{v_{k-1}} \rightarrow \cdots \rightarrow \overline{v_2} \rightarrow \overline{v_1}$$

אבחנה 2 : לכל צלע $u \rightarrow v$ מתקיים : אם הקודקוד u קיבל ערך $true$ אז גם הקודקוד v צריך לקבל ערך $true$. (כי $(u \rightarrow v \equiv (\bar{u} \vee v)$

(4) $2SAT \in P$

<u>ננסח קריטריון כללי</u>:

- קיים בגרף משתנה x, כך ש-x ו-$\bar{x}$ נמצאים שניהם על מעגל מכוון אחד <u>אמ"מ</u> אין השמה מספקת לפסוק.

הוכחת הקריטריון:

<u>כיוון ראשון</u>: (אם קיים בגרף משתנה x כך ש-x ו-$\bar{x}$ נמצאים שניהם על מעגל מכוון אחד, אזי אין השמה מספקת לפסוק)

נניח שיש קודקוד x כך שיש מסלול מ-x אל $\bar{x}$, וגם יש מסלול מ- $\bar{x}$ אל x.

אם $x = true$ אז צריך שגם $\bar{x} = true$ סתירה!

אם $\bar{x} = true$ אז צריך שגם $x = true$ גם סתירה!

(5) $2SAT \in P$

- <u>כיוון שני</u>: (אם לא קיים בגרף משתנה x כך ש-x ו-$\bar{x}$ נמצאים שניהם על מעגל מכוון אחד, אזי קיימת השמה מספקת לפסוק)

נניח שלא קיים קודקוד x כך שיש מסלול מ-x אל $\bar{x}$ וגם מסלול מ-$\bar{x}$ אל x. נחפש קודקוד (ליטרל) $\bar{u}$ אשר יש ממנו מסלול אל שלילתו. ($\bar{u} \rightsquigarrow u$) (אם לא קיים כזה מסלול, נבחר קודקוד שרירותי).

- ניתן לליטרל u ערך $true$ ולליטרל $\bar{u}$ ערך $false$.
- לכל הקודקודים שיש מסלול אליהם מ-u, ניתן ערך $true$, ו-$false$ לשלילתם.

(6) $2SAT \in P$

שתי בעיות עלולות לצוץ בשיטה הזו:

- יש מסלול מ-u אל קודקוד כלשהו w וגם מסלול מ-u אל $\bar{w}$.
- יש קודקוד שנרצה לתת לו ערך $true$ אבל הוא כבר קיבל ערך $false$.

(7) $2SAT \in P$

- <u>יש מסלול מ-u אל קודקוד כלשהו w וגם מסלול מ-u אל $\bar{w}$:</u>

בגלל הסימטריה של הגרף מכיוון שיש מסלול מ-u אל w אז גם יש מסלול מ-$\bar{w}$ אל $\bar{u}$,
כלומר יש מעגל המכיל את u וגם את $\bar{u}$, בסתירה להנחה!

- <u>יש קודקוד שנרצה לתת לו ערך $true$ אבל הוא כבר קיבל ערך $false$</u>

זה יקרה אם $\bar{w}$ קיבל ערך $true$. כלומר יש מסלול מ-u אל $\bar{w}$. שוב, בגלל הסימטריה של הגרף, נובע שיש מסלול מ-w אל $\bar{u}$,
בסתירה להנחה!

מ.ש.ל (הקריטריון הכללי)

(8) $2SAT \in P$

לסיכום, בהינתן פסוק $CNF-2$ נתאר מכונה/אלגוריתם דטרמיניסטי פולינומי:

M_{2sat} על קלט $<\varphi>$

1. בונה את הגרף הנ"ל.
2. לכל $v \in V$:
   – מבצעת BFS (או DFS) מ-v.
   – אם קיים מסלול מ-v אל $\bar{v}$, מבצעת גם BFS מ-$\bar{v}$, אם נמצא שהמסלול מגיע חזרה אל v- דחה.
3. קבל.

<u>נכונות</u>: נובעת ישירות מנכונות הקריטריון שהוכחנו.

<u>סיבוכיות</u>: סיבוכיות של DFS היא $O(|V|+|E|)=O(n+n^2)$

ונבצע את ה-DFS למשך $|V|=n$ פעמים.

סה"כ $O(n^3)$– פולינומי.

הפסקה

שפות נוספות ב NPC

- כיצד מגלים אם שפה L ב-NPC?

- $L \in NP$

- רדוקציה משפה אחרת ב NPC אל L

איך מגלים את הרדוקציה מהשפה האחרת? מאיזו שפה מנסים בכלל?

ציטוט של פיינמן: "ישנה בעיה, חושבים הרבה, ובסוף פותרים נכון ע"י ניסוי וטעייה **מרובים**".

כיסוי קודקודים

- קבוצת צמתים U בגרף לא מכוון $G = (V,E)$ נקראת **כיסוי קדקודים**, אם לכל קשת (uv) ב-E, או $u \in U$, או $v \in U$ (או שניהם).
  - צמתי U "מכסים" את כל קשתות הגרף.

$VERTEX - COVER$

$VERTEX - COVER = \{< G, k > | G\ is\ an\ undirected\ graph\ that\ has\ a\ k - node\ vertex\ cover\}$

- נוכיח שזו שפה $\boldsymbol{NP}$-שלמה:
  - **תרגיל**: הוכיחו שהיא שייכת ל-$\boldsymbol{NP}$.
- נראה כי $3SAT \leq_P VC$

$VERTEX - COVER$

– **תרגיל**: הוכיחו שהיא שייכת ל-$\boldsymbol{NP}$.

$VERTEX - COVER$

– **תרגיל**: הוכיחו שהיא שייכת ל-$\boldsymbol{NP}$.

– **פתרון**: (שלא תגידו שאנחנו תמיד משאירים לכם את העבודה השחורה ולא עושים כלום בעצמנו)

נתאר מכונה א״ד לשפה VC. המכונה M על קלט $< G,k >$:

- מנחשת קבוצת קודקודים בגודל k
- עוברת על כל הצלעות בגרף, אם מוצאת צלע שחלה בקודקוד שאינו בקבוצה – דוחה.
- מקבלת.

• שימו לב: לא ביקשנו כיסוי מינימלי $\left(\tau(G)\right)$. יתכן ויהיו קודקודים זהים בקבוצה שמנחשים.

(1) $3SAT \leq_P VC$

- נגדיר את הרדוקציה מ-$3SAT$.
- לכל פסוק ϕ ב-$3CNF$ יש לבנות, בזמן פולינומיאלי בגודל של ϕ, גרף לא מכוון G ומספר טבעי k, כך שב-G יש VC בגודל k אם ורק אם ϕ ספיק.
- בהינתן פסוק $3CNF$ עם n משתנים $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ו-m פסוקיות: $\varphi = \wedge_{i=1}^{m} \varphi_i$ כאשר כל φ_i היא פסוקית עם 3 ליטרלים: $\varphi_i = (l_{i1} \vee l_{i2} \vee l_{i3})$

(כל ליטרל הוא מהצורה $l_{ij} = x_k$ או $l_{ij} = \overline{x_k}$)

(2) $3SAT \leq_P VC$

נבנה את הגרף הבא: $G = (V,E)$

$$V = \{x_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{\overline{x_i} | 1 \leq i \leq n\}$$
$$\cup \{l_{jr} | 1 \leq j \leq m, 1 \leq r \leq 3\}$$

נבנה את קבוצת הצלעות E כך:

- לכל i נגדיר את הצלע $\{x_i, \overline{x_i}\}$
- לכל פסוקית, ניצור משולש שקודקודיו הם הליטרלים של הפסוקית.
- נחבר כל ליטרל במשולשים של הפסוקיות עם המשתנה המתאים לו בקשתות של המשתנים.

(3) $3SAT \leq_P VC$

באופן פורמלי, אנחנו צריכים לוודא שבמשולשים אין קודקודים ששמותיהם חוזרים על עצמם. אפשר למשל לכתוב lx_{ij} כאשר j אינדקס המשולש.

(4) $3SAT \leq_P VC$

באופן פורמלי, אנחנו צריכים לוודא שבמשולשים אין קודקודים ששמותיהם חוזרים על עצמם. אפשר למשל לכתוב lx_{ij} כאשר j אינדקס המשולש.

(5) $3SAT \leq_P VC$

- לסיכום: הרדוקציה היא $f(<\varphi>) =< G,k >$

כך ש-G הוא הגרף שתיארנו בעמוד הקודם, ו-
$k = 2m + n$.

(לכסות צלעות משתנים - n. לכסות משולשים - $2m$)

<u>סיבוכיות</u>:

גודל הקלט הוא $O(m + n)$ וזהו גם סדר הגודל של הגרף המתואר.

(כמות הצלעות היא בדיוק $n + 3m + 3m$)

(ואם הלכנו למטריצת שכנויות, אז ריבועי. עדיין פולינומי)

(6) $3SAT \leq_P VC$

<u>תקפות</u>:

כיוון ראשון: נניח ש-$\varphi \in 3SAT$ ותהי π השמה מספקת עבורה.

נבנה כיסוי קודקודים ל-G שגודלו בדיוק $2m + n$:

(7) $3SAT \leq_P VC$

<u>תקפות</u>:

כיוון ראשון: נניח ש-$\varphi \in 3SAT$ ותהי π השמה מספקת עבורה.

נבנה כיסוי קודקודים ל-G שגודלו בדיוק $2m + n$:

- מהקשתות של המשתנים, ניקח מכל זוג $\{x_i, \overline{x_i}\}$ את הליטרל שמקבל ערך true בהשמה π.

(8) $3SAT \leq_P VC$

<u>תקפות</u>:

כיוון ראשון: נניח ש-$\varphi \in 3SAT$ ותהי π השמה מספקת עבורה.

נבנה כיסוי קודקודים ל-G שגודלו בדיוק $2m + n$:

- מהקשתות של המשתנים, ניקח מכל זוג $\{x_i, \overline{x_i}\}$ את הליטרל שמקבל ערך true בהשמה π.
- לכל משולש של פסוקית, נבחר את כל קודקודי הליטרלים בפסוקית שלא הסתפקו. (יש לכל היותר 2 כאלה לכל פסוקית, כי π נותנת ערך true ללפחות ליטרל אחד מכל פסוקית.)

(9) $3SAT \leq_P VC$

<u>תקפות</u>:

כיוון ראשון: נניח ש-$\varphi \in 3SAT$ ותהי π השמה מספקת עבורה.

נבנה כיסוי קודקודים ל-G שגודלו בדיוק $2m + n$:

- מהקשתות של המשתנים, ניקח מכל זוג $\{x_i, \overline{x_i}\}$ את הליטרל שמקבל ערך true בהשמה π.
- לכל משולש של פסוקית, נבחר את כל קודקודי הליטרלים בפסוקית שלא הסתפקו. (יש לכל היותר 2 כאלה לכל פסוקית, כי π נותנת ערך true ללפחות ליטרל אחד מכל פסוקית.)

גודל הקבוצה שתיארנו הוא $2m + n$ (לכל היותר).

למה קבוצה זו מהווה כיסוי בקודקודים?

(10) $3SAT \leq_P VC$

<u>תקפות</u>(**כיוון ראשון**):

נראה ששלושת סוגי הצלעות מכוסות:

1. בין משתנה לשלילתו- בהשמה חוקים בדיוק אחד מהם מסתפק ולכן צלעות אלו מכוסות.
2. בכל משולש יש 2 קודקודים בקבוצה- 2 קודקודים מכסים משולש.
3. הסיבה שבגינה כל צלע בין החלק העליון (ממשתנה לשלילתו) לחלק התחתון (משלושי הפסוקיות) מכוסה מצריכה הסבר.

(11) $3SAT \leq_P VC$

<u>תקפות</u>(**כיוון ראשון**):

נניח בשלילה שישנה צלע בין החלק העליון לתחתון שאינה מכוסה- אם כך שני קודקודי הצלע לא בקבוצת הקודקודים שנבחרו.

- הקודקוד בחלק העליון לא בקבוצה, כלומר הליטרל שהוא מייצג לא מסתפק, ולכן הפסוקית מטה לא מסתפקת ממנו.
- הקודקוד התחתון לא מיוצג בקבוצה ואם כך יש כבר שני קודקודים בפסוקית שנבחרו (אחרת פשוט היינו מוסיפים אותו).
- אבל לפי בניית הקבוצה הוספנו את כל הקודקודים מהמשולש שלא מסתפקים- סתירה.

**יש לכל היותר שני ליטרלים שלא מסתפקים בפסוקית ספיקה.

סה"כ הקבוצה שבחרנו היא אכן VC כי כל הצלעות מכוסות ע"י קודקודי הקבוצה.

(12) $3SAT \leq_P VC$

<u>תקפות</u>:

כיוון שני: נניח שבגרף G יש VC בגודל $2m+n$ בדיוק, נסמנו S. נשתמש ב-S הנ״ל כדי למצוא השמה המספקת את הפסוק φ.

(13) $3SAT \leq_P VC$

תקפות:

כיוון שני: נניח שבגרף G יש VC בגודל $2m + n$ בדיוק, נסמנו S. נשתמש ב-S הנ"ל כדי למצוא השמה המספקת את הפסוק φ.

ראשית, כדי לכסות צלעות של משולש, צריך לבחור לפחות שני קודקודים, וכדי לכסות צלע בין משתנה ושלילתו צריך לפחות קודקוד אחד.

מכיוון שהגודל של S הוא בדיוק $2m + n$, נובע ש-S אכן מכיל לפחות קודקוד אחד מכל צלע של משתנה ושלילתו, ולפחות 2 קודקודים מכל משולש של פסוקית.

(14) $3SAT \leq_P VC$

<u>תקפות</u>:

כיוון שני: נניח שבגרף G יש VC בגודל $2m+n$ בדיוק, נסמנו S. נשתמש ב-S הנ"ל כדי למצוא השמה המספקת את הפסוק φ.

ראשית, כדי לכסות צלעות של משולש, צריך לבחור לפחות שני קודקודים, וכדי לכסות צלע בין משתנה ושלילתו צריך לפחות קודקוד אחד.

מכיוון שהגודל של S הוא בדיוק $2m+n$, נובע ש-S אכן מכיל לפחות קודקוד אחד מכל צלע של משתנה ושלילתו, ולפחות 2 קודקודים מכל משולש של פסוקית.

נגדיר השמה מספקת ל-φ באופן הבא: ההשמה תתן true לליטרלים שנבחרו ל-S מתוך הצלעות בין משתנה ושלילתו, ו-false לאחרים.
ההשמה הנ"ל חייבת להיות השמה מספקת - אחרת נקבל שיש משולש שכל הצלעות שיוצאות ממנו לא מגיעות לקודקוד כלשהו ב-S, וזאת סתירה לכך ש-S היא כיסוי קודקודים של G.

(15) $3SAT \leq_P VC$

<u>תקפות</u>**(כיוון שני)** : נרצה להראות שיש לפחות ליטרל אחד חיובי בכל פסוקית, מה שיגרור שהפסוק ספיק. נניח בשלילה שהיא לא מספקת את הפסוק- אם כך, יש לפחות פסוקית אחת שלא מסתפקת.

- מכאן שכל הליטרלים בה שליליים.
- בדיוק שני קודקודים מכל משולש נבחרו. נתבונן בקודקוד שלא נבחר בפסוקית זו.
- כדי שהליטרל בפסוקית שקודקוד זה מייצג, לא יסתפק- הקודקוד שמייצג את ליטרל זה בחלק העליון לא נבחר אל S. מאחר וגם הקודקוד בפסוקית לא נבחר אליה, הצלע ביניהם לא מכוסה, סתירה.

INDEPENDENT-SET

- **תזכורת**: קבוצה בלתי תלויה של צמתים בגרף לא מכוון G היא קבוצת צמתים שאין קשת בין כל שניים מהם

$INDEPENDENT-SET = \{< G,k > | G \text{ is an undirected graph that has a } k-\text{node independent}-\text{set}\}$

- נוכיח שזו שפה $\boldsymbol{NP}$-שלמה:
  - **תרגיל**: הוכיחו שהיא שייכת ל-$\boldsymbol{NP}$ (עשינו לפני שבועיים!)
  - **תרגיל**: הוכיחו: קבוצת צמתים U בגרף לא מכוון $G = (V,E)$ היא כיסוי קדקודים ב-G, אם ורק אם $V \setminus U$ היא קבוצה בלתי תלויה ב-G.
    - מומלץ להוכיח בשלילה כל אחד מן הכיוונים. (האמת שגם את זה עשינו)
  - **תרגיל**: הוכיחו כי $INDEPENDENT-SET$ (בקיצור IS) היא $\boldsymbol{NP}$-שלמה. (רמז: בצעו רדוקציה מ-VC)

$CLIQUE$ היא NP-שלמה

- **תזכורת**: קליקה בגרף לא מכוון G היא קבוצה של צמתים שיש צלע בין כל שניים מהם

$$CLIQUE = \{< G, k > | G \text{ is an undirected graph with a } k - \text{clique}\}$$

- הראינו ש-$CLIQUE$ שייכת ל-$\boldsymbol{NP}$ (לפני שבועיים), והראינו כי $IS \leq_P CLIQUE$ (מעבר לגרף המשלים)
- **מסקנה**: $CLIQUE$ היא $\boldsymbol{NP}$-שלמה.

$HAMPATH$

- **תזכורת**: מסלול המילטון בגרף מכוון G הוא מסלול פשוט (ללא מעגלים) שמבקר בכל צומת פעם אחת ויחידה.

$$HAMPATH = \{< G, s, t > | G \text{ is a directed graph with a Hamiltonian path from } s \text{ to } t\}$$

- $HAMPATH \in NPC$:
  – כבר הראינו שהיא שייכת ל-$\boldsymbol{NP}$
  – אם ישאר זמן נראה כי $3SAT \leq_P HAMPATH$.

$SUBSET - SUM$

- **תזכורת**: הקלט הוא קבוצה S של מספרים ומספר t. השאלה: האם יש ל-S תת-קבוצה שהסכום שלה בדיוק t?

$$SUBSET - SUM = \{< S,t > | S = \{x_1, \dots, x_n\} \\ \exists \{y_1, \dots, y_k\} \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}, \Sigma y_i = t\}$$

- נוכיח שזו שפה $\boldsymbol{NP}$-שלמה:
  - כבר הראינו שהיא שייכת ל-$\boldsymbol{NP}$
  - נראה כי $3SAT \leq_P SUBSET - SUM$.

$3SAT \leq_P SUBSET-SUM$

מפסוק ϕ ב-$3CNF$ נבנה קבוצת מספרים טבעיים S ומספר טבעי t באופן הבא:

- כל המספרים יהיו בייצוג עשרוני, כל המספרים יהיו באורך $O(n+m)$ (אם המספר יהיה קצר יותר נרפד אותו ב-0)
- נייצר את המספרים בקבוצה S כך שספרותיהם יהיו רק 0,1,2.
- כל ספרה במספרים שנייצר תייצג ערך 'אמתי' לעמודה בה היא נמצאת (נשמע מטושטש- תכף נפרט ונראה דוגמה).
- לכל משתנה x_i בפסוק נייצר 2 מספרים y_i, z_i.
- לכל פסוקית c_j נייצר את שני המספרים h_j, g_j.
- המספרים יווצרו ע"י הטבלה הבאה:

$3SAT \leq_P SUBSET - SUM$

בניית מספרי הקבוצה

באגף הימני של המשתנים:

- בשורה y_i ובעמודה x_i יהיה 1 אמ"מ $x_i = T$
ביתר השורה עבור יתר המשתנים יהיה 0.
- בשורה z_i ובעמודה x_i יהיה 1 אמ"מ $x_i = F$
ביתר השורה עבור יתר המשתנים יהיה 0.

באגף השמאלי של הפסוקיות:

- בשורה y_i ובעמודה c_i יהיה 1 אמ"מ x_i מופיע בפסוקית זו
ביתר השורה עבור יתר הפסוקיות יהיה 0.
- בשורה z_i ובעמודה x_i יהיה 1 אמ"מ $\overline{x_i}$ מופיע בפסוקית זו
ביתר השורה עבור יתר הפסוקיות יהיה 0.

$3SAT \le_p SUBSET - SUM$

<u>המשך (1) בניית מספרי הקבוצה</u>

באגף הימני של המשתנים: נרפד ב-0.

באגף השמאלי של הפסוקיות: בשורות h_j, g_j בעמודה ה-c_j יהיה 1 וביתר הפסוקיות יהיה 0.

<u>בניית המספר t</u>

באגף הימני של המשתנים: יהיה 1 בכל עמודה- זאת על מנת להבטיח שלכל משתנה תהיה הצבה אחת בדיוק, 0 או 1.

באגף השמאלי של הפסוקיות: יהיה 3 בכל עמודה. בצורה זו לכל פסוק.

$$\boxed{3SAT \leq_P SUBSET-SUM}$$

סיום הרדוקציה

	x_1	x_2	….	x_l	c_1	c_2	….	c_k
y_1	1	0		0	1	0		0
z_1	1	0		0	0	1		0
y_2		1		0	0	0		1
z_2		1		0	0	0		0
…								
y_l				1	0	0		0
z_l				1	0	0		0
g_1					1	0		0
h_1					1	0		0
g_2						1		0
h_2						1		0
…								
g_k								1
h_k								1
t	1	1	…	1	3	3	…	3

תרגול והוכחת נכונות

- **תרגיל**: איזו ספרה תהיה במספר t במקום של כל פסוקית?
- **תרגיל**: בנו את קבוצת המספרים S ואת המספר t המתאימים לפסוק הבא:

$$(x \vee \neg y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee w) \wedge (y \vee z \vee \neg w)$$

- **תרגיל**: הוכיחו שהרדוקציה תקפה.
הוכיחו שהיא ניתנת לחישוב בזמן פולינומיאלי.
- **מסקנה**: $SUBSET-SUM$ היא $\boldsymbol{NP}$-שלמה.

בעיות NP-שלמות נוספות

- גרפים לא מכוונים שיש להם צביעה חוקית בשלושה צבעים
  - רדוקציה של $3SAT$.
- גרפים לא מכוונים שיש להם מסלול המילטון מ-s ל-t
  - רדוקציה של $HAMPATH$.
- גרסה נוספת של מסלול המילטון:
  $HAMPATH' = \{< G > | G\ is\ an\ undirected\ graph\ with\ a\ Hamiltonian\ path\}$
- מעגל המילטון $\mathrm{H}AMCYCLE = \{< G > | G\ is\ an\ undirected\ graph\ with\ a\ Hamiltonian\ cycle\}$

$3SAT \leq 3COLOR$

- בהינתן פסוק ϕמהצורה $3CNF$ נרצה לבנות גרף שיהיה 3צביע אמ"מ הפסוק מסתפק.
- הפסוק שנעסוק בו הוא $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ בעל m פסוקיות.
- הגרף $G = (V,E)$ ייבנה באופן הבא:

  ניצור 3 קודקודים T,F,B ונחבר אותם

$3SAT \leq 3COLOR$

- בהינתן פסוק ϕ מהצורה $3CNF$ נרצה לבנות גרף שיהיה 3צביע אמ"מ הפסוק מסתפק.
- הפסוק שנעסוק בו הוא $\phi(x_1, \dots, x_n)$ בעל m פסוקיות.
- הגרף $G = (V, E)$ ייבנה באופן הבא:

  ניצור 3 קודקודים T, F, B ונחבר אותם

  לכל ליטרל בפסוק ניצור קודקוד ונחבר אותו ל-B

$3SAT \leq 3COLOR$

- בהינתן פסוק ϕ מהצורה $3CNF$ נרצה לבנות גרף שיהיה 3צביע אמ"מ הפסוק מסתפק.
- הפסוק שנעסוק בו הוא $\phi(x_1, \dots, x_n)$ בעל m פסוקיות.
- הגרף $G = (V,E)$ ייבנה באופן הבא:
  - ניצור 3 קודקודים T,F,B ונחבר אותם
  - לכל ליטרל בפסוק ניצור קודקוד ונחבר אותו ל-B
  - נחבר בין כל משתנה לשלילתו

$3SAT \leq 3COLOR$

- בהינתן פסוק ϕ מהצורה $3CNF$ נרצה לבנות גרף שיהיה 3 צביע אמ"מ הפסוק מסתפק.
- הפסוק שנעסוק בו הוא $\phi(x_1, \dots, x_n)$ בעל m פסוקיות.
- הגרף $G = (V,E)$ ייבנה באופן הבא:

  ניצור 3 קודקודים T,F,B ונחבר אותם

  לכל ליטרל בפסוק ניצור קודקוד ונחבר אותו ל-B

  נחבר בין כל משתנה לשלילתו

  לכל שלושה ליטרלים המהווים פסוקית

  נוסיף 'תוספתי' בעלת

  6 קודקודים ו-13 צלעות

$3SAT \leq 3COLOR$

סיבוכיות :

גודל הקלט הוא $O(m+n)$

בגרף יש $O(3+n+3\cdot m)=O(n+m)$ קודקודים

ו- $O(3n+13\cdot m)=O(n+m)$ צלעות,

סה"כ פולינומי בגודל הקלט.

$3SAT \le 3COLOR$

<u>תקפות</u>: **כיוון ראשון:** נניח ש- ϕספיק ונרצה להוכיח שהגרף הוא 3צביע.

לכל פסוקית יש לפחות ליטרל אחד חיובי.

ניקח ליטרל אחד כזה ובהתאמה לאיור משמאל, נצבע אותו בירוק, את הקודקוד תחתיו באדום ואת הקודקוד תחתיו בכחול.

את יתר השורה העליונה נצבע באדום.

את יתר השורה האמצעית נצבע בכחול.

ואת שני הקודקודים הנותרים בשורה התחתונה

נצבע בהתאמה לאיור.

סה״כ לכל ׳תוספתי׳ של פסוקית תהיה השמה

מספקת. ההשמות מכבדות זו את זה.

$3SAT \leq 3COLOR$

<u>תקפות</u>: **כיוון שני:** נניח שישנו גרף בצורה הזו ונרצה לבנות ל-ϕ השמה מספקת.

תחילה נשים לב שההשמות חוקיות- לכל ליטרל יהיה בדיוק ערך אחד (ירוק או אדום), משום שהם מחוברים ל-B. בנוסף, לכל משתנה תהיה השמה אחת בדיוק שהפוכה לשלילה שלו- משום שבין כל משתנה ושלילתו יש צלע.

ניקח צביעה כלשהי ונקבע השמה באופן הבא-

כל ליטרל שבירוק יהיה T.

נותר להראות שכל פסוקית מסתפקת.

נניח בשלילה שישנה פסוקית שלא מסתפקת,

אם כך כל הקודקודים המייצגים את הליטרלים שלה

הם באדום.

$3SAT \leq 3COLOR$

<u>תקפות</u>: **כיוון שני:** נניח שישנו גרף בצורה הזו ונרצה לבנות ל- ϕהשמה מספקת.

תחילה נשים לב שההשמות חוקיות- לכל ליטרל יהיה בדיוק ערך אחד (ירוק או אדום), משום שהם מחוברים ל-B. בנוסף, לכל משתנה תהיה השמה אחת בדיוק שהפוכה לשלילה שלו- משום שבין כל משתנה ושלילתו יש צלע.

ניקח צביעה כלשהי ונקבע השמה באופן הבא-

כל ליטרל שבירוק יהיה T.

נותר להראות שכל פסוקית מסתפקת.

נניח בשלילה שישנה פסוקית שלא מסתפקת,

אם כך כל הקודקודים המייצגים את הליטרלים שלה

הם באדום.

אם כך, כל קודקודי האמצע הם כחולים בהכרח,

משום שלכל אחד מהם שכן כחול ושכן ירוק.

$3SAT \leq 3COLOR$

תקפות: **כיוון שני:** נניח שישנו גרף בצורה הזו ונרצה לבנות ל- ϕהשמה מספקת.

תחילה נשים לב שההשמות חוקיות- לכל ליטרל יהיה בדיוק ערך אחד (ירוק או אדום), משום שהם מחוברים ל-B. בנוסף, לכל משתנה תהיה השמה אחת בדיוק שהפוכה לשלילה שלו- משום שבין כל משתנה ושלילתו יש צלע.

ניקח צביעה כלשהי ונקבע השמה באופן הבא-

כל ליטרל שבירוק יהיה T.

נותר להראות שכל פסוקית מסתפקת.

נניח בשלילה שישנה פסוקית שלא מסתפקת,

אם כך כל הקודקודי המייצגים את הליטרלים שלה

הם באדום.

אם כך, כל קודקודי האמצע הם כחולים בהכרח,

משום שלכל אחד מהם שכן כחול ושכן ירוק.

סתירה.

$3SAT \leq_p HAMPATH$

מטרה:

לייצר רדוקציה שבזמן פולינומי באורך הקלט מקבלת פסוק $3CNF$ והופכות אותו לגרף, כך שהפסוק יהיה ספיק אמ"מ בגרף יהיה מסלול המילטוני.

שוב, אנו עוסקים בפסוק עם n משתנים ו-m פסוקיות.

לפרטים:

https://opendsa-server.cs.vt.edu/ODSA/Books/Everything/html/threeSAT_to_hamiltonianCycle.html