Προσομοίωση και Μοντελοποίηση Δυναμικών Συστημάτων Project

Γκατζή Κωνσταντίνα
ΑΕΜ: 10037
mail: gikonstan@ece.auth.gr

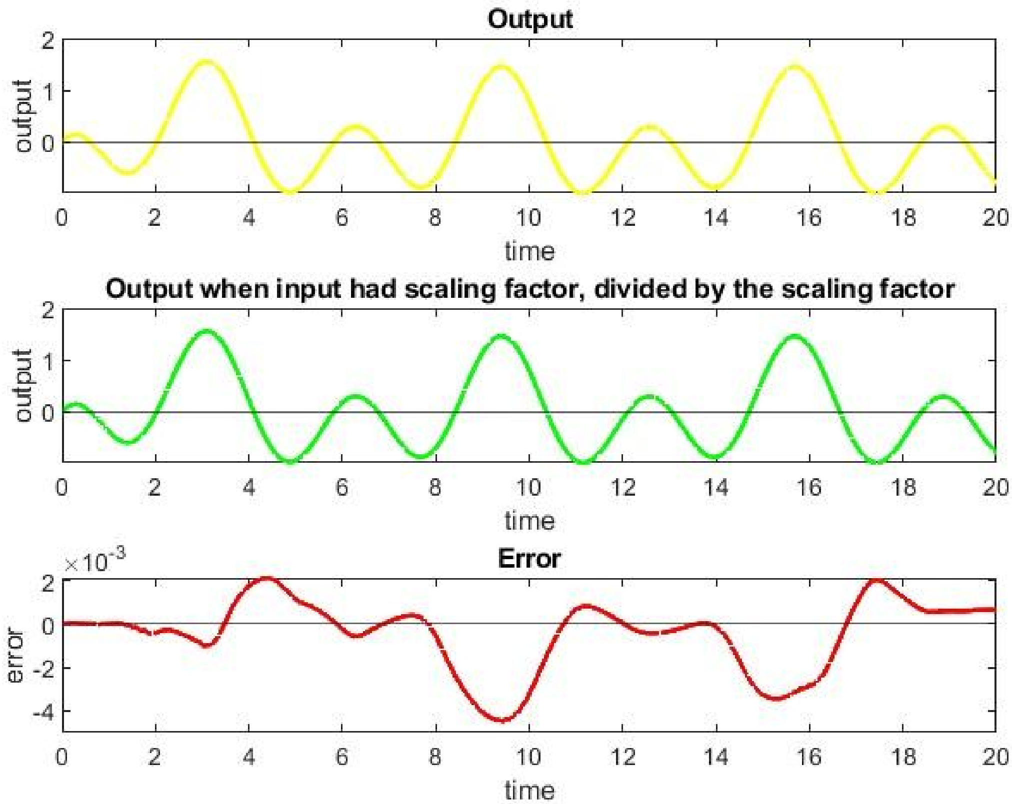
Ερώτημα 1

Απόδειξη γραμμικότητας

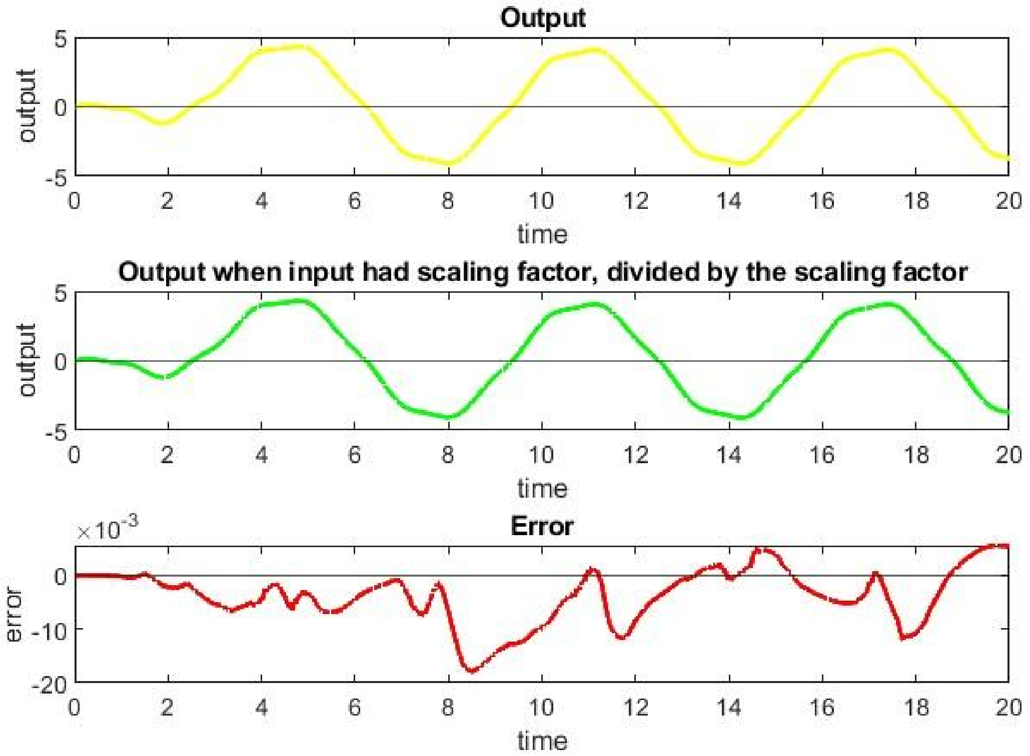
Για να είναι ένα σύστημα γραμμικό πρέπει να ισχύουν οι αρχές της ομογένειας (homogeneity) και της επαλληλίας (superposition).

Ομογένεια

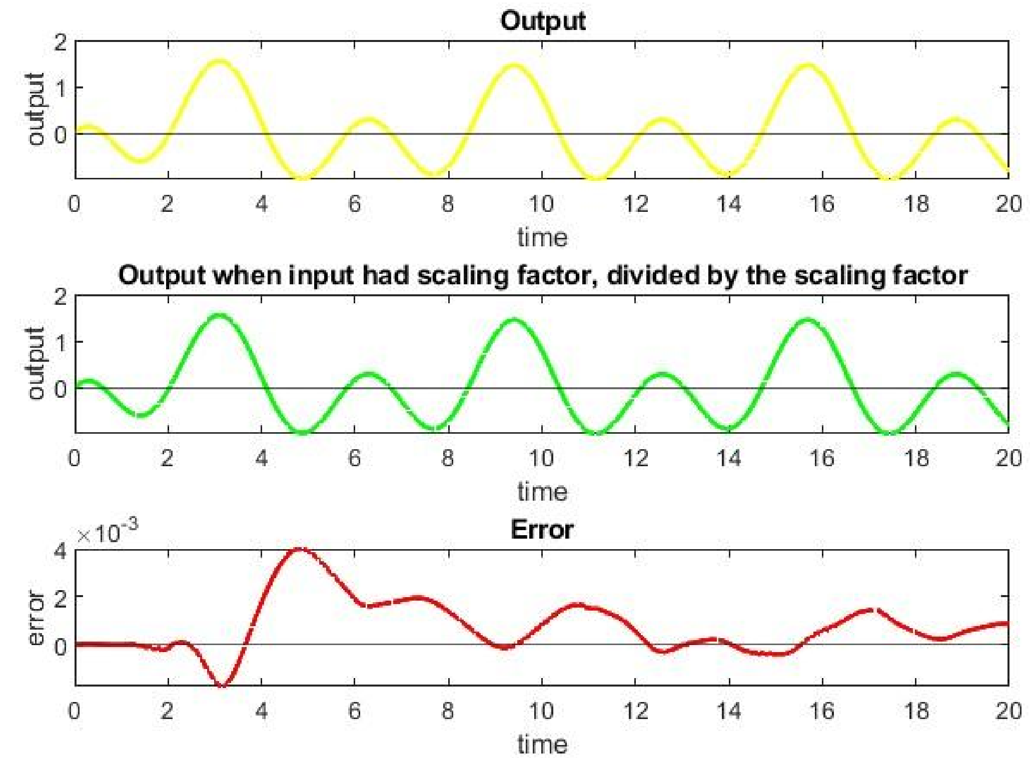
Για την ιδιότητα της ομογένειας χρειάζονται οι μετρήσεις εισόδου και εξόδου. Σημαίνει ότι κλιμάκωση της εισόδου προκαλεί αντίστοιχη κλιμάκωση της εξόδου. Αν με είσοδο u, παρατηρείται έξοδος y, τότε πρέπει για είσοδο k*u, όπου k η σταθερά κλιμάκωσης, να καταγράφεται έξοδος k*y.
Για να το αποδείξω στο matlab κατέγραψα με συγκεκριμένη είσοδο την είσοδο και την έξοδο και έπειτα κλιμάκωσα την είσοδο και κατέγραψα τις αντίστοιχες εξόδους. Το αποτέλεσμα φάνηκε στην σύγκριση της αρχικής εξόδου y και της δεύτερης εξόδου y_2/k. Εφόσον οι τιμές είναι ίδιες με ελάχιστο error τάξης 10^{-3} θεώρησα ότι η ιδιότητα ισχύει.
Δίνονται τα διαγράμματα που προέκυψαν, δοκιμασμένα και σε διαφορετικά k και εισόδους.



Different input

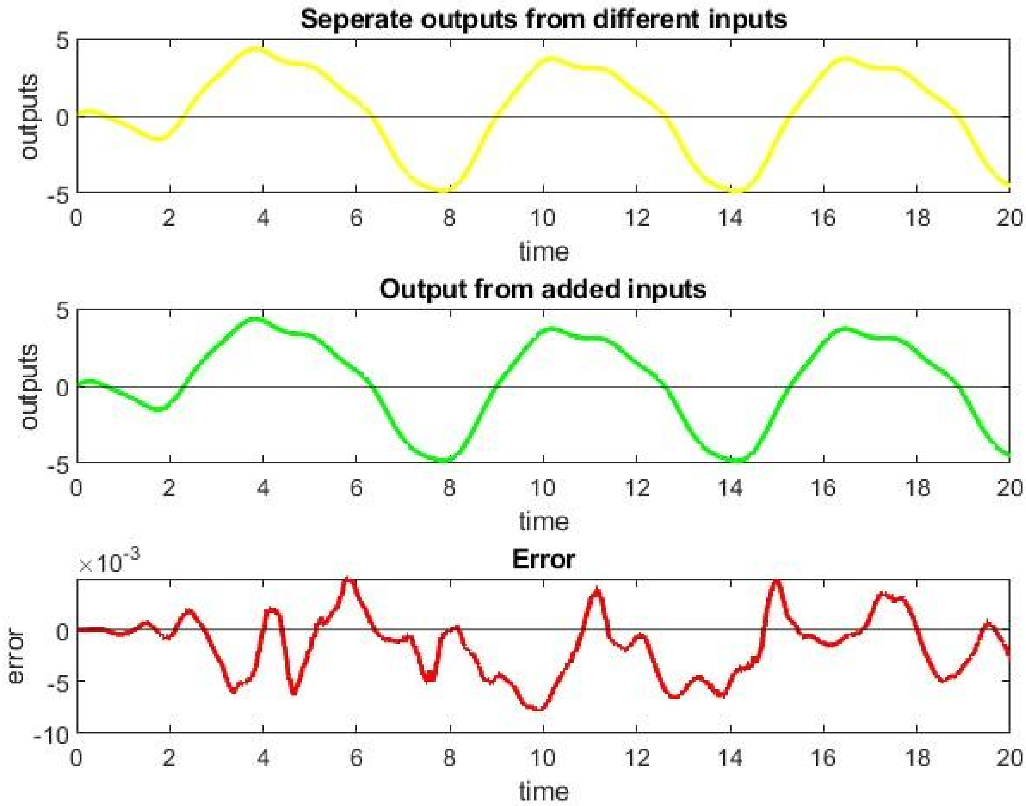


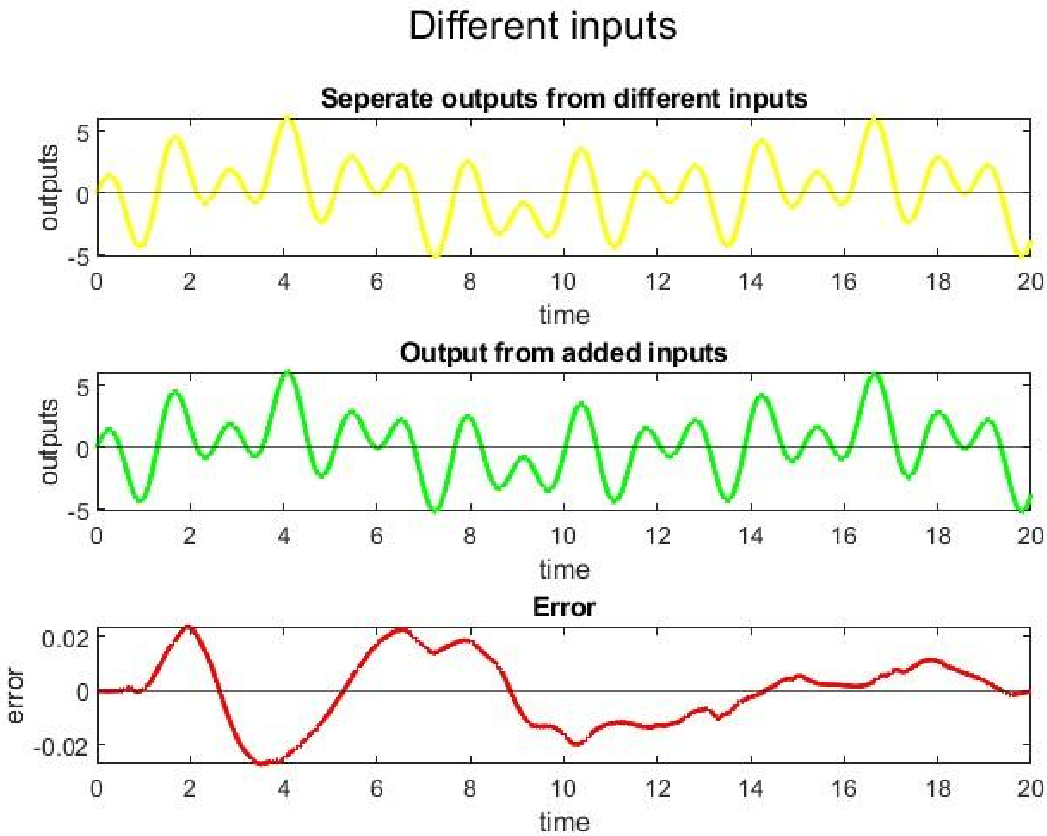
Different k



Επαλληλία

Για την ιδιότητα της επαλληλίας πρέπει να εφαρμόσω 2 διαφορετικές εισόδους u_1 και u_2 ξεχωριστά και προσθέσω τις αντίστοιχες εξόδους να προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα με την εφαρμογή εισόδου $u = u_1 + u_2$. Παραθέτω τα διαγράμματα που προέκυψαν στην προσπάθεια να αποδειχθεί η ιδιότητα.





Συμπέρασμα

Εφόσον και οι 2 ιδιότητες ισχύουν με ελάχιστο σφάλμα, σύμφωνα με τα πειραματικά αποτελέσματα, προκύπτει το συμπέρασμα ότι το άγνωστο σύστημα είναι γραμμικό.

Ερώτημα 2

Προσδιορισμός παραμέτρων

Για την αναγνώριση του συστήματος επιλέχθηκε η είσοδος u=sin(2t) καθώς είναι ικανά πλούσια τάξης 2, έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη επιμένουσας διέγερσης (ΣΕΔ) ακόμα και για σύστημα 2ου βαθμού.
Έτσι καταγράφω τις μετρήσεις εισόδου και εξόδου για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.

Offline method: Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων

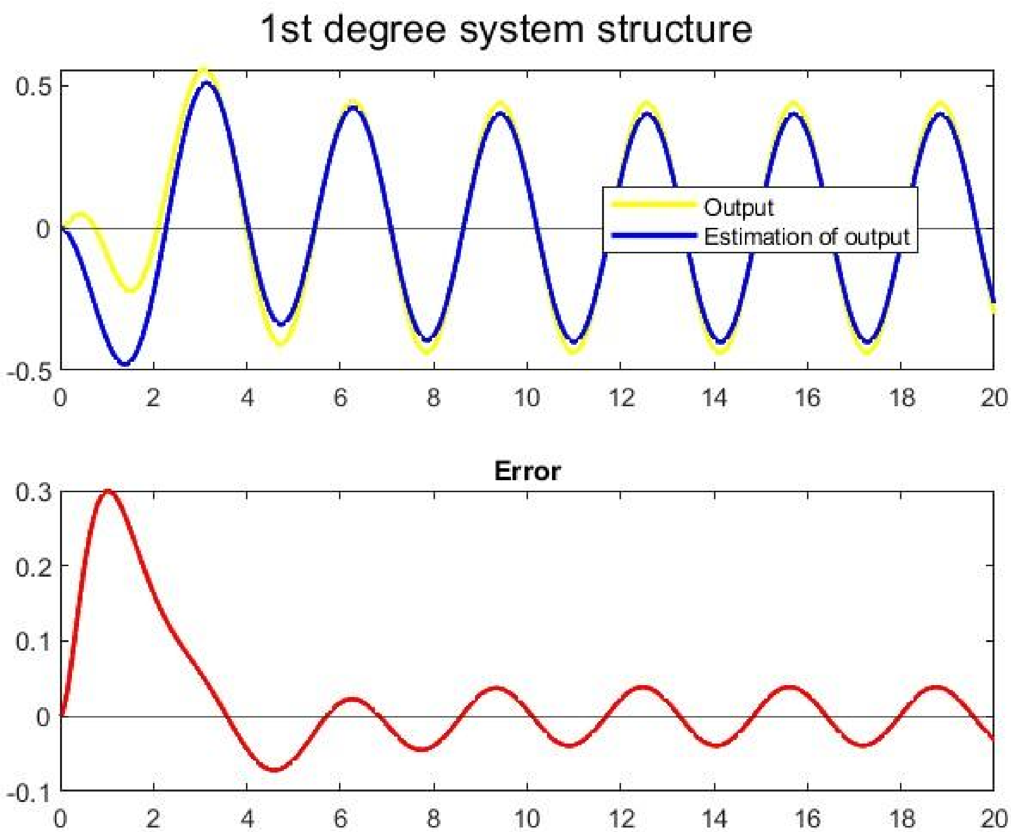
Για τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων θεωρώ ότι έχω σύστημα στην γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή $y = \theta^* \phi$ και το μοντέλο της εκτίμησής μου $\hat{y} = \hat{\theta}\phi$, άρα εμφανίζεται σφάλμα πρόβλεψης $e = y - \hat{y}$. Το φ θεωρείται γνωστό και το $\hat{\theta}$ διάνυσμα ίσης διάστασης με το θ. Προσπαθώ να ελαχιστοποιήσω το τετράγωνο του ευκλείδιου μέτρου του σφάλματος μέσω της συνάρτησης $V_N(\theta) = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} \frac{|e(t)|^2}{2}$, η οποία ελαχιστοποιείται στο σημείο $\frac{\partial V_N(\theta)}{\partial \theta}|_{\theta=\theta_0} = 0$. Καταλήγω ότι σε κάθε τέτοια περίπτωση επιλέγω για διάνυσμα παραμέτρων $\theta_0 = Y^T \Phi(\Phi^T \Phi)^{-1}$ όπου Φ ο πίνακας $N \times d$ διάστασης που έχει αποθηκευμένες τις μετρήσεις του διανύσματος φ για κάθε χρονική στιγμή.

Δοκιμή με σύστημα 1ου βαθμού

Για τον προσδιορισμό παραμέτρων με μέθοδο μη πραγματικού χρόνου χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων. Για την επιλογή δομής ακολούθησα την προσθετική δόμηση ξεκινώντας από ένα απλό μοντέλο 1ου βαθμού.
Συγκεκριμένα το σύστημα $\dot{y} = b_1 y + b_2 u$.

Εφαρμόζω μετασχηματισμό Laplace: $sy = b_1 y + b_2 u$ και έπειτα φίλτρο $\Lambda(s) = \dfrac{1}{s+\lambda}$ για να φέρω το σύστημα στη γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή. Προσθέτοντας την ποσότητα $\pm\dfrac{y}{s+\lambda}$, όπου λ>0, καταλήγω στην μορφή $y = \theta^* \phi$ όπου $\theta^* = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ και $\phi = \begin{bmatrix} \frac{2y}{s+\lambda} & \frac{u}{s+\lambda} \end{bmatrix}^T$

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν από αυτή την μορφή είναι τα εξής:



Μοντέλο 1: $y = \begin{bmatrix} 0.45 & -0.79 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2y}{s+1} \\ \frac{u}{s+1} \end{bmatrix}$

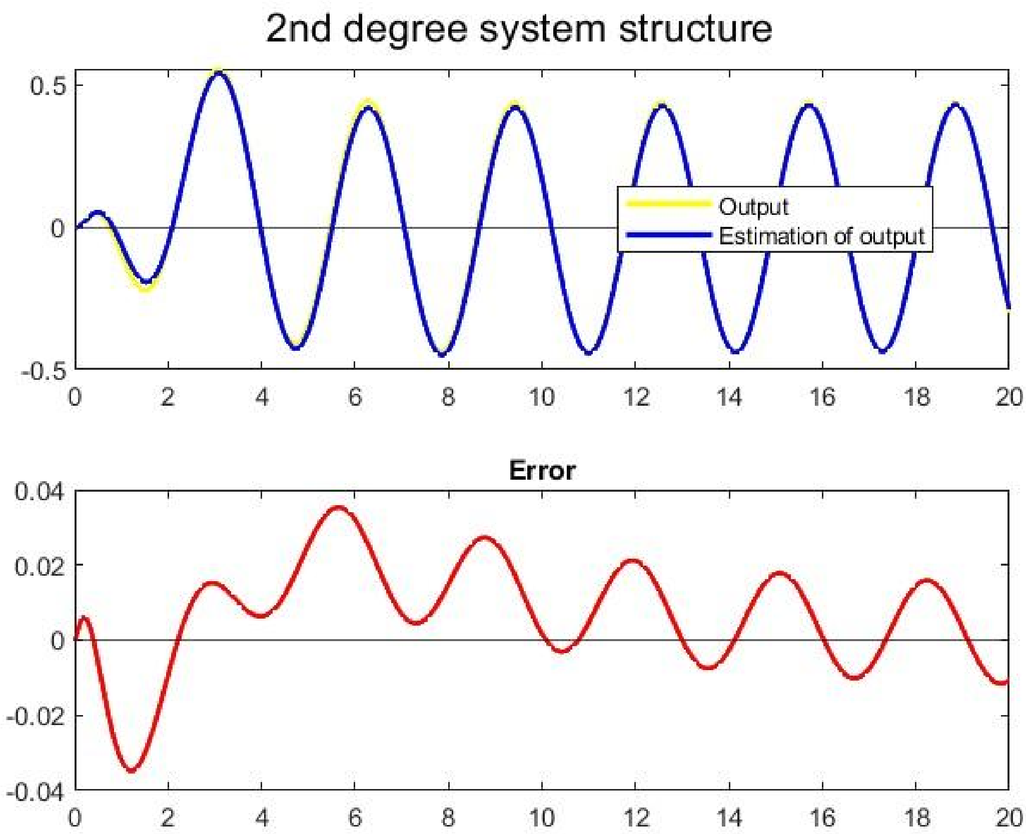
Δοκιμή με σύστημα 2ου βαθμού

Οι δοκιμές συνεχίστηκαν με το σύστημα $\ddot{y} = b_1\dot{y} + b_2 y + b_3 u$.
Ακολούθησε μετασχηματισμός Laplace $s^2 y = b_1 s y + b_2 y + b_2 u$ και εφαρμογή φίλτρου $\Lambda(s) = \dfrac{1}{s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2}$, όπου λ θετικές σταθερές.

Προστέθηκε η ποσότητα $\pm\dfrac{(\lambda_1 s + \lambda_2)y}{s^2 + \lambda_1 s + \lambda_2}$ και καταλήξαμε στη γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή $y = \theta^* \phi$, όπου $\theta^* = \begin{bmatrix} b_1 & 1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$ και

$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{sy}{s^2+\lambda_1 s+\lambda_2} & \frac{(\lambda_1 s+\lambda_2)y}{s^2+\lambda_1 s+\lambda_2} & \frac{y}{s^2+\lambda_1 s+\lambda_2} & \frac{u}{s^2+\lambda_1 s+\lambda_2} \end{bmatrix}^T$$

Τα αποτελέσματα που προέκυψαν δίνονται παρακάτω:



Μοντέλο 2:

$$y = \begin{bmatrix} 16.25 & 0.28 & 0.14 & 0.61 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{sy}{s^2+22s+4} & \frac{(22s+4)y}{s^2+22s+4} & \frac{y}{s^2+22s+4} & \frac{u}{s^2+22s+4} \end{bmatrix}^T$$

Online method: Μέθοδος Κλίσης (Gradient)

Για τη μέθοδο κλίσης θεωρώ ότι έχω γραμμικά παραμετροποιημένο σύστημα $y = \theta^* \phi$ και το σύστημα αναγνώρισης $\hat{y} = \hat{\theta}\phi$, άρα το σφάλμα πρόβλεψης $e = y - \hat{y}$. Θα χρησιμοποιήσω συνάρτηση κόστους $K = \frac{e^2}{2}$ που ελαχιστοποιείται στο σημείο $\nabla K(\hat{\theta})|_{\hat{\theta}=\theta^*} = 0$.

Άρα βρίσκω τις τιμές των παραμέτρων αν λύσω την $\dot{\hat{\theta}} = \gamma e \phi$, όπου γ θετική παράμετρος. Έτσι μπορώ να αποδείξω και ευστάθεια, εισόδου εξόδου για το πραγματικό σύστημα και με τη χρήση συνάρτησης Lyapunov για το σύστημα αναγνώρισης.

Με συνάρτηση Lyapunov $V = \frac{\tilde{\theta}}{2} > 0$, καταλήγω σε ομοιόμορφα φραγμένο παραμετρικό σφάλμα L_∞ αφού $\dot{V} = -\gamma e^2 \leq 0$. Επιπλέον η συνάρτηση Lyapunov είναι φθίνουσα και μεγαλύτερη του μηδενός, άρα υπάρχει σίγουρα το V_∞. Από εκεί οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι $e \in L_2$, αφού $\int_{0^\infty} e^2 d\tau = -\frac{1}{\gamma}\int_{0^\infty} \dot{V}(\tau) d\tau = -\frac{1}{\gamma}(V_\infty - V(0))$.

Είναι γνωστό ότι $\hat{\theta} \in L_\infty$ και $u \in L_\infty$, οπότε $\hat{y} \in L_\infty$. Αφού $e = y - \hat{y}$ ισχύει εκτός από $e \in L_2$ και $e \in L_\infty$ και αφού $\dot{u} \in L_\infty$,τότε $\dot{e} \in L_\infty$.

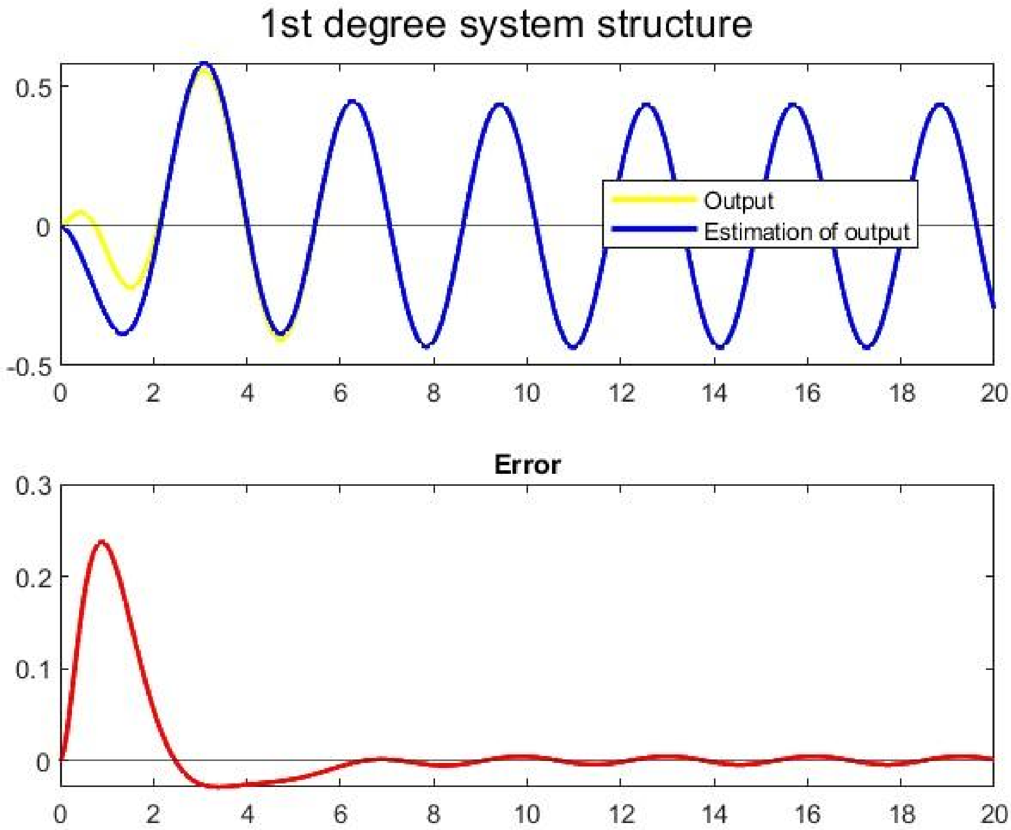
Σύμφωνα με το λήμμα Barbalat, αυτό σημαίνει ότι $\lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ και επειδή $\lim_{t\to\infty} \dot{\hat{\theta}} = 0$ αφού είναι συνάρτηση του σφάλματος και της ομοιόμορφα φραγμένης εισόδου. Οπότε η εκτίμηση των παραμέτρων τείνει σε σταθερή τιμή άρα το σύστημα αναγνώρισης είναι ευσταθές.

Δοκιμή με σύστημα 1ου βαθμού

Χρησιμοποιήθηκε σύστημα 1ου βαθμού, συγκεκριμένα, $\dot{y} = b_1 y + b_2 u$

Εφαρμόστηκε μετασχηματισμός Laplace, αφού προστέθηκε η ποσότητα $\pm a_m y$ και το σύστημα ήρθε στη γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή $y = \theta^* \phi$, όπου $\theta = \begin{bmatrix} a_m + b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ και $\phi = \begin{bmatrix} \frac{y}{s+a_m} & \frac{u}{s+a_m} \end{bmatrix}^T$

Οι παράμετροι που επιλέχθηκαν είναι οι λύσεις των $\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma e \phi_1$ και $\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma e \phi_2$ και τα αποτελέσματα είναι τα εξής



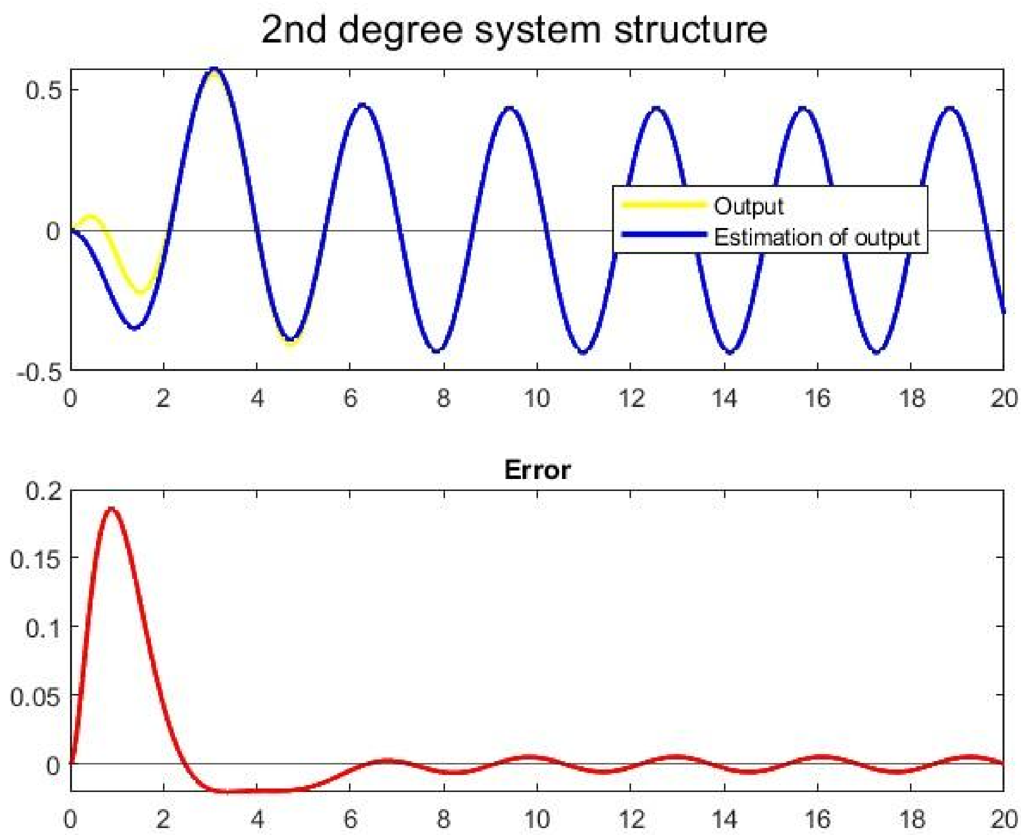
Μοντέλο 3: $y = \begin{bmatrix} 1.93 & -0.87 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{y}{s+2} & \frac{u}{s+2} \end{bmatrix}^T$

Δοκιμή με σύστημα 2ου βαθμού

Επιλέχθηκε σύστημα 2ου βαθμού, συγκεκριμένα $\ddot{y} = b_1 \dot{y} + b_2 y + b_3 u$.

Εφαρμόζω μετασχηματισμό Laplace αφού πρόσθεσα την ποσότητα $\pm a_m y$ και κατέληξα στην γραμμικά παραμετροποιημένη μορφή $y = \theta^* \phi$ με $\theta^* = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 + a_m & b_3 \end{bmatrix}$ και $\phi = \begin{bmatrix} \frac{sy}{s^2+a_m} & \frac{y}{s^2+a_m} & \frac{u}{s^2+a_m} \end{bmatrix}^T$

Οι παράμετροι είναι οι λύσεις των $\dot{\hat{\theta}}_1 = \gamma e \phi_1$, $\dot{\hat{\theta}}_2 = \gamma e \phi_2$, $\dot{\hat{\theta}}_3 = \gamma e \phi_3$



Μοντέλο 4: $y = \begin{bmatrix} 0.21 & 1.93 & -0.68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{sy}{s^2+2} & \frac{y}{s^2+2} & \frac{u}{s^2+2} \end{bmatrix}^T$

Ερώτημα 3

Αξιολόγηση

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που προέκυψαν μέσω πειραμάτων, για την είσοδο που έθεσα, θεώρησα ότι δεν χρειάστηκε να δοκιμάσω μοντέλο 3ου βαθμού, ή παραπάνω, καθώς τα σφάλματα φάνηκαν να τείνουν στο 0.
Με είσοδο που περιέχει 2 συχνότητες αντί για μία, ίσως χρειαζόταν ένα μοντέλο μεγαλύτερου βαθμού, αλλά σταμάτησα εκεί, αφού ακολούθησα προσθετική δόμηση.
Με τη συγκεκριμένη επιλογή παραμέτρων θεωρώ καλύτερο το μοντέλο 4
$y = \begin{bmatrix} 0.21 & 1.93 & -0.68 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{sy}{s^2+2} & \frac{y}{s^2+2} & \frac{u}{s^2+2} \end{bmatrix}^T$, με u=sin(2t), αφού το σφάλμα παρουσιάστηκε να συγκλίνει σε μικρό χρόνο.
Παρουσιάζω ξανά το διάγραμμα που προέκυψε από το μοντέλο που επέλεξα.