

Τεχνικές Βελτιστοποίησης

Project



Γκατζή Κωνσταντίνα

AEM: 10037

Email: gikonstan@ece.auth.gr

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	3
2	Εξελικτικοί αλγόριθμοι	3
3	Γενετικοί αλγόριθμοι	3
3.1	Αρχικοποίηση πληθυσμού	4
3.2	Αξιολόγηση	4
3.3	Επιλογή	7
3.4	Διασταύρωση	8
3.5	Αντικατάσταση	10
3.6	Μετάλλαξη	11
4	Αποτελέσματα	12

1 Εισαγωγή

Η βελτιστοποίηση είναι ένα εργαλείο για εύρεση της καλύτερης δυνατής λύσης σε προβλήματα, ενσωματώνοντας σε αυτό τους πιθανούς περιορισμούς και στόχους. Αυτή η προσέγγιση περιλαμβάνει διάφορες μεθόδους, οι οποίες προσαρμόζονται ανάλογα με τη φύση του εκάστοτε προβλήματος και την επιθυμητή επίδοση. Κατά τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας, είναι σημαντικό να λαμβάνονται υπόψη όλες οι διαφορετικές πτυχές και παράμετροι που επηρεάζουν το σύστημα. Συνήθως το πρόβλημα μετατρέπεται σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης συνάρτησης κόστους. Αυτό συμβάλλει στη βελτίωση της απόδοσης του συστήματος και την αντιμετώπιση πιθανών προκλήσεων. Η εφαρμογή της βελτιστοποίησης επεκτείνεται σε ποικίλους τομείς, αποκαλύπτοντας σημαντικά στοιχεία για πολύπλοκα ερωτήματα και προσφέροντας πρακτικές λύσεις.

2 Εξελικτικοί αλγόριθμοι

Οι εξελικτικοί αλγόριθμοι εκπροσωπούν μια καινοτόμο προσέγγιση στον τομέα της βελτιστοποίησης, η ιδέα των οποίων βασίζεται στην λειτουργία της φύσης και στην βιολογική εξέλιξη των ειδών. Η πρόκληση που καλούνται να αντιμετωπίσουν είναι η τάση για εγκλωβισμό σε τοπικά ελάχιστα των απλών αλγορίθμων βελτιστοποίησης. Οι εξελικτικές μέθοδοι παρουσιάζουν δυναμική συμπεριφορά που προσαρμόζεται στις μεταβαλλόμενες συνθήκες του συστήματος με το πέρασμα του χρόνου και είναι κατάλληλες για τέτοια προβλήματα. Βασίζονται σε έναν τυχαίο αρχικό πληθυσμό που περιλαμβάνει τις αρχικές λύσεις και μέσω διαδικασιών πραγματοποιούν αλλαγές πάνω σε αυτόν, έτσι ώστε να ταιριάζουν στο πρόβλημα. Η σημαντικότητα κάθε λύσης αξιολογείται από μια συνάρτηση καταλληλότητας (*fitness function*), που καθορίζει το πόσο καλά προσαρμόζεται στις απαιτήσεις του προβλήματος.

3 Γενετικοί αλγόριθμοι

Οι γενετικοί αλγόριθμοι αποτελούν ένα είδος εξελικτικών αλγορίθμων που βασίζονται στην τυχαιότητα και αναπτύχθηκαν εμπνευσμένοι από τη θεωρία της εξέλιξης. Η λειτουργία τους αντιγράφει τη διαδικασία αυτή, όπου οι καλύτερα προσαρμοσμένοι οργανισμοί έχουν μεγαλύτερες πιθανότητες επιβίωσης και

μετάδοσης των γενετικών τους χαρακτηριστικών. Εφαρμόζονται συνεχώς μικρές αλλαγές στον αρχικό πληθυσμό και έτσι οι λύσεις ανανεώνονται σταδιακά επιτυγχάνοντας θετικά αποτελέσματα σε προβλήματα βελτιστοποίησης.

3.1 Αρχικοποίηση πληθυσμού

Ο πληθυσμός του γενετικού αλγορίθμου αποτελείται από έναν προσαρμοσμένο αριθμό χρωμοσωμάτων (*population_number*). Χρησιμοποιείται συνδυασμός γκαουσιανών συναρτήσεων με μεταβαλλόμενο πλάτος $G(u_1, u_2) = Ae^{-\left(\frac{u_1-c_1}{2\sigma_1^2} + \frac{u_2-c_2}{2\sigma_2^2}\right)}$, οπότε κάθε χρωμόσωμα έχει $gene_number = 5 * gaussian_number$, αφού κάθε γκαουσιανή χρειάζεται 5 γονίδια. Τα χρωμοσώματα αυτά περιέχουν όλες τις πιθανές λύσεις για το πρόβλημα οπότε είναι σημαντικό να αρχικοποιηθούν σωστά έτσι ώστε να επιταχυνθεί η σύγκλιση του αλγορίθμου στη λύση. Η ποικιλομορφία αυτών των λύσεων μπορεί να εξασφαλίσει εκτενέστερη αναζήτηση του αλγορίθμου στο χώρο αναζήτησης.

Η αρχικοποίηση των τιμών του πλάτους συμβαίνει με τυχαίες τιμές μεταξύ του ελάχιστου και του μέγιστου της πραγματικής συνάρτησης. Οι τιμές c από τα κέντρα της γκαουσιανής λαμβάνουν τυχαίες τιμές ανάμεσα από τα ελάχιστα και τα μέγιστα των εισόδων, αν αυτά προστεθούν. Οι τιμές σ λαμβάνουν τυχαίες τιμές μεταξύ της διαφοράς των απόλυτων τιμών του ελάχιστου και του μέγιστου της συνάρτησης και της διαφοράς του ελάχιστου από το μέγιστο.

Συνεπώς για τα γονίδια αυτά οι τιμές βρίσκονται στα διαστήματα:

$$A \in [-0.9996, 0.8415]$$

$$c_1, c_2 \in [-4, 4]$$

$$\sigma_1, \sigma_2 \in [0.1582, 1.8411]$$

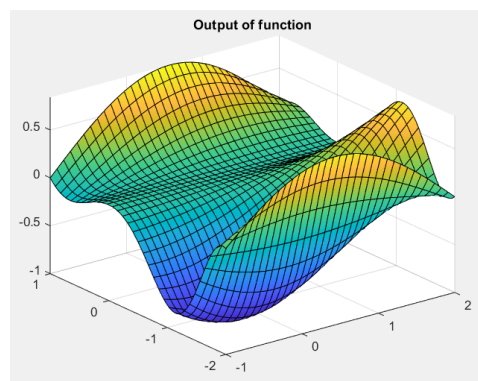
Ο πίνακας *population* που προκύπτει από τη συνάρτηση *initialize* περιέχει αυτές τις τυχαίες τιμές και έχει μέγεθος $chromosome_number \times gene_number$, αφού περιέχει τις τιμές όλων των χρωμοσωμάτων του πληθυσμού για όλα τα γονίδια.

3.2 Αξιολόγηση

Η αξιολόγηση αναφέρεται στον υπολογισμό της καταλληλότητας της κάθε λύσης του πληθυσμού, που πραγματοποιείται με τη συνάρτηση καταλληλότητας. Στόχος

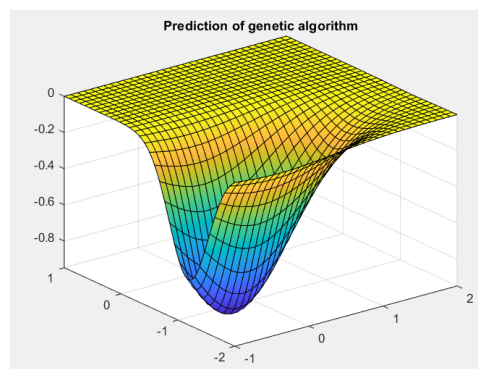
της διαδικασίας αυτής είναι να ξεχωρίσουν οι ταιριαστές λύσεις από όλες τις υπάρχουσες. Αφού υπολογίζεται η τιμή της συνάρτησης πρόβλεψης για ολόκληρο τον πληθυσμό, ανάλογα με τον αριθμό γκαουσιανών που χρησιμοποιήθηκαν στη συνάρτηση *value*, ξεκινάει η φάση της αξιολόγησης. Η συνάρτηση *prediction_fitness* επιστρέφει το τετραγωνικό σφάλμα από την πραγματική τιμή.

Παρουσιάζεται η εικόνα της πραγματικής συνάρτησης.



Σχήμα 1: Πραγματική συνάρτηση

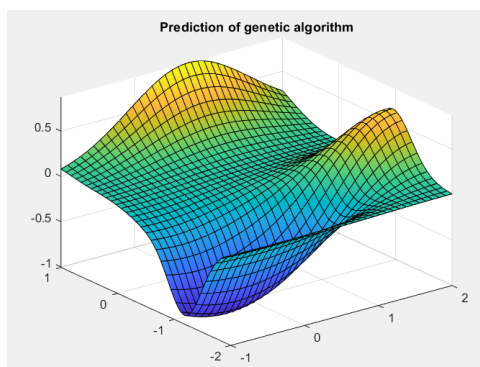
Στη συνέχεια πραγματοποιείται μια έρευνα σχετικά με τον κατάλληλο αριθμό γκαουσιανών συναρτήσεων. Το πεδίο ορισμού του αριθμού, ξεκινάει από 1 και φτάνει στο 15, αποδεικνύεται όμως εύκολα ότι δεν θα ήταν αποτελεσματικό να χρησιμοποιηθεί μικρός αριθμός.



Σχήμα 2: Πρόβλεψη με μια μόνο γκαουσιανή συνάρτηση

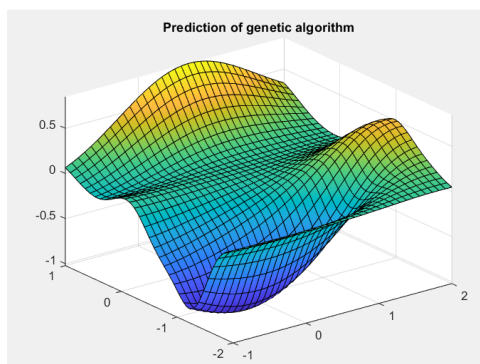
Σε αυτή την περίπτωση, οι δυνατότητες της συνάρτησης πρόβλεψης είναι περιορισμένες, λόγω του μικρού αριθμού γονιδίων. Το μόνο που επιτυγχάνεται είναι η εύρεση του ολικού ελαχίστου της συνάρτησης.

Όσο πιο περίπλοκη είναι η συνάρτηση που πρέπει να προσεγγιστεί, τόσο περισσότερα γονίδια χρειάζεται ο αλγόριθμος. Ο αριθμός άρα αυξάνεται σε 5.



Σχήμα 3: Πρόβλεψη με 5 γκαουσιανές συναρτήσεις

Ήδη, η εικόνα μοιάζει περισσότερο με την εικόνα της πραγματικής συνάρτησης. Σίγουρα όμως μπορεί να υπάρξει καλύτερο αποτέλεσμα, εφόσον επιτρέπεται χρήση περισσότερων γκαουσιανών.



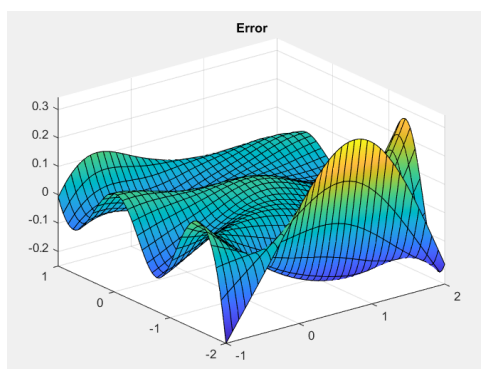
Σχήμα 4: Πρόβλεψη με 10 γκαουσιανές συναρτήσεις

Η πρόβλεψη δεν βελτιώθηκε σημαντικά, παρά τις 5 επιπλέον γκαουσιανές συναρτήσεις. Ένα σημαντικό στοιχείο που πρέπει να μελετηθεί είναι και η ταχύτητα σύγκλισης, που έχει αρκετό περιθώριο να βελτιωθεί, κάτι που μπορεί να συμβεί

ρυθμίζοντας τις υπόλοιπες παραμέτρους.

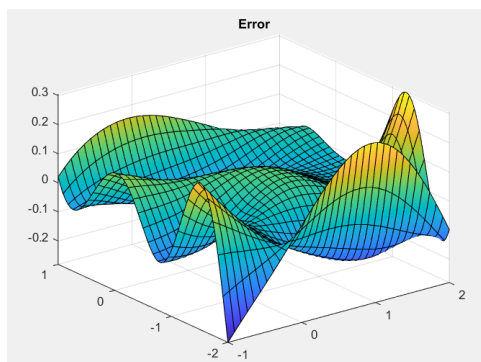
3.3 Επιλογή

Η επιλογή γονέων είναι μια πολύ σημαντική διαδικασία για τον γενετικό αλγόριθμο, καθώς επιλέγονται οι βέλτιστες λύσεις από τον υπάρχοντα πληθυσμό που θα συνεχίσουν στις επόμενες φάσεις. Ο πληθυσμός ταξινομείται με βάση την καταλληλότητά του και επιλέγονται οι καλύτερες λύσεις. Ο αριθμός των λύσεων είναι μια παράμετρος για την οποία πρέπει να βρεθεί η τιμή που ταιριάζει καλύτερα στο πρόβλημα. Ορίζεται σαν ποσοστό του συνολικού πληθυσμού και παρουσιάζεται μια μελέτη σχετικά με το σφάλμα που προκύπτει ανάλογα με το ποσοστό αυτό.



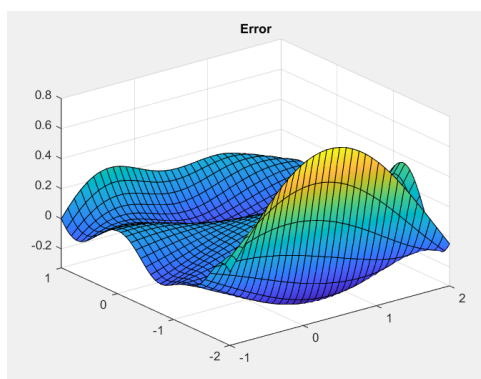
Σχήμα 5: Σφάλμα πρόβλεψης με ποσοστό διασταύρωσης 0.1

Το σφάλμα πρόβλεψης με ποσοστό 0.1 είναι χαμηλό και θα μπορούσε να είναι ακόμα χαμηλότερο, αν ο αλγόριθμος δεν τερμάτιζε στις 650 γενιές. Η συνθήκη τερματισμού σχετίζεται με την τιμή της καταλληλότητας και ο αλγόριθμος σταματάει αν επιτευχθεί ο στόχος που ορίστηκε (τετραγωνικό σφάλμα μικρότερο του 0.05).



Σχήμα 6: Σφάλμα πρόβλεψης με ποσοστό διασταύρωσης 0.4

Το σφάλμα βρίσκεται στο ίδιο σχεδόν επίπεδο, παρά την αύξηση του ποσοστού, όμως η ταχύτητα σύγκλισης είναι μεγαλύτερη. Είναι λογικό, ότι όσο περισσότερες λύσεις επιλέγονται, τόσο περισσότερες μη κατάλληλες λύσεις βρίσκονται σε αυτό το σύνολο. Αν επιλεχθούν μόνο λίγες από τις ταξινομημένες του αρχικού πληθυσμού, θα είναι σίγουρα οι καταλληλότερες.



Σχήμα 7: Σφάλμα πρόβλεψης με ποσοστό διασταύρωσης 0.9

Όντως, όσο αυξάνεται το ποσοστό, αυξάνεται και το σφάλμα, διότι οι τα κριτήρια που εφαρμόζονται στις λύσεις είναι λιγότερα. Οπότε το ποσοστό διατηρεί την τιμή 0.1.

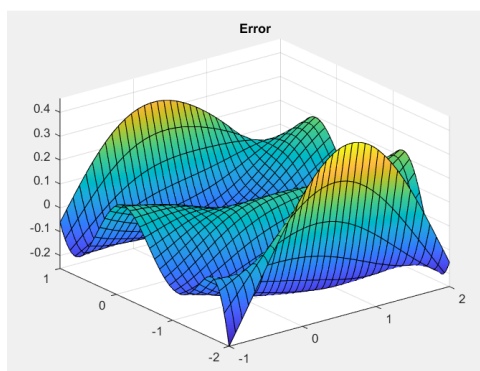
3.4 Διασταύρωση

Η διασταύρωση είναι μια πολύ σημαντική διαδικασία, κατά την οποία 2 γονείς από τον πληθυσμό που επιλέχθηκε στην προηγούμενη φάση, συνδυάζονται για τη

δημιουργία απογόνων. Με αυτόν τον τρόπο, οι καλύτερες λύσεις συνδυάζουν τα χαρακτηριστικά τους, παράγοντας νέες αποδοτικότερες λύσεις. Σκοπός αυτής της διαδικασίας είναι να καταφέρει να εξερευνηθεί ολόκληρος ο χώρος λύσεων, δίνοντας περισσότερη βάση σε συγκεκριμένες περιοχές όπου έχει αποδειχτεί πως περιέχουν τις καλύτερες λύσεις. Οι απόγονοι εχμεταλλεύονται τα χαρακτηριστικά των γονέων και τις ιδιότητες των γονιδίων τους, διαφοροποιώντας τα με τη διασταύρωση.

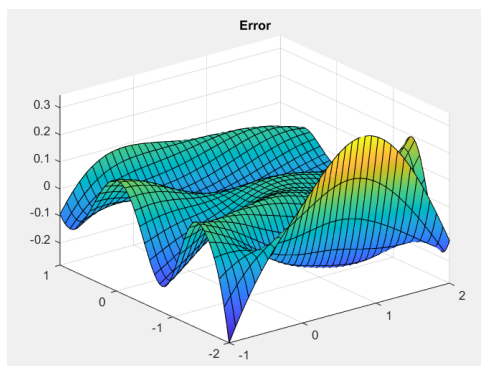
Η συνάρτηση *crossover* που υλοποιεί αυτή τη διαδικασία επιστρέφει τον πίνακα *offsprings* που περιέχει τα χρωμοσώματα απογόνους της διασταύρωσης. Επιλέγει τυχαία 2 γονείς από το κομμάτι πληθυσμού που του δίνεται από την προηγούμενη συνάρτηση και δημιουργεί τον απόγονο, ο οποίος περιέχει τον μέσο όρο των τιμών γονιδίων των γονέων (*uniform crossover*).

Ο αριθμός απογόνων που δημιουργείται ρυθμίζεται ως ποσοστό του πληθυσμού με την παράμετρο *offspring_percentage*. Πραγματοποιούνται δοκιμές για τον κατάλληλο αριθμό απογόνων ξεκινώντας από μικρή τιμή.



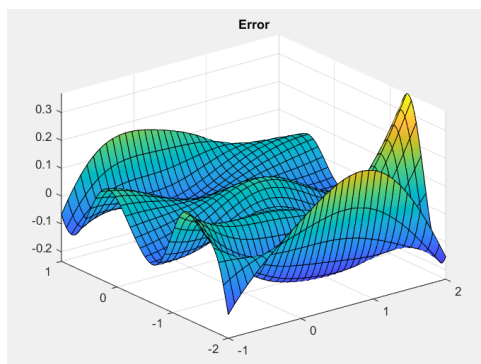
Σχήμα 8: Σφάλμα πρόβλεψης με ποσοστό απογόνων 0.1

Το σφάλμα φαίνεται υψηλό σε αρκετά σημεία του χώρου, αφού με το να αντικαθίσταται μόνο το 10% του πληθυσμού με απογόνους, σημαίνει ότι οι καλύτερες λύσεις (γονείς) δεν χρησιμοποιούνται σε αρκετά μεγάλο βαθμό. Για να εκμεταλλευτεί ο αλγόριθμος όσο χρειάζεται τα επιλεγμένα αυτά χρωμοσώματα απαιτείται μεγαλύτερο ποσοστό.



Σχήμα 9: Σφάλμα πρόβλεψης με ποσοστό απογόνων 0.4

Όντως, το σφάλμα παρουσιάζεται μειωμένο όταν αντικαθίσταται σχεδόν ο μισός πληθυσμός με συνδυασμό των καλύτερων λύσεων. Επιπλέον, η σύγκλιση γίνεται σύντομα (415 γενιές) σε σχέση με τις προηγούμενες περιπτώσεις.



Σχήμα 10: Σφάλμα πρόβλεψης με ποσοστό απογόνων 0.9

Ωστόσο, η αντικατάσταση σχεδόν ολόκληρου του πληθυσμού δεν προκαλεί σημαντική βελτίωση του σφάλματος. Ο λόγος που δεν συμβαίνει αυτό εξηγείται στην επόμενη διαδικασία.

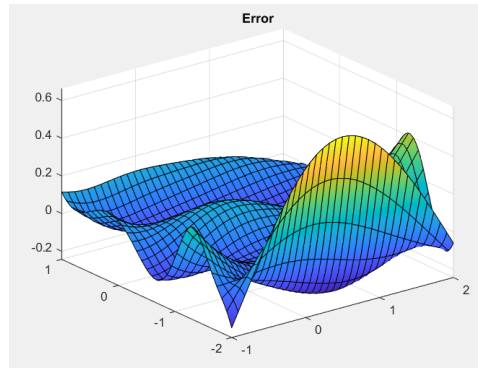
3.5 Αντικατάσταση

Σε αυτή τη φάση του γενετικού αλγορίθμου, οι λύσεις με την χειρότερη επίδοση αντικαθίστανται με τους απογόνους. Στο τέλος μένουν οι απόγονοι και οι γονείς που αξιολογήθηκαν ως καλύτεροι. Συνεπώς, δεν χρειάζεται να αντικατασταθεί ολόκληρο το ποσοστό του πληθυσμού, αρκεί να διατηρηθούν

τα καλύτερα χρωμοσώματα και οι συνδυασμοί τους.

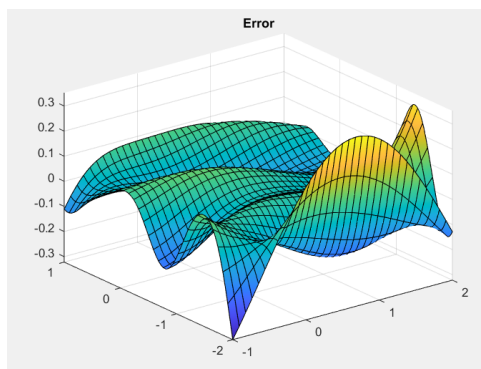
3.6 Μετάλλαξη

Η μετάλλαξη είναι μια διαδικασία κατά την οποία τροποποιούνται κάποια γονίδια με μια πιθανότητα, με σκοπό να διατηρείται η ποικιλομορφία στο χώρο. Διαφορετικά, η δημιουργία απογόνων από συγκεκριμένο συνδυασμό γονέων θα είχε ως αποτέλεσμα έναν νέο πληθυσμό με πολύ όμοια χαρακτηριστικά και την πρόωρη σύγκλιση του αλγορίθμου σε υποβέλτιστη λύση. Η πιθανότητα ορίζεται χειροκίνητα, οπότε χρειάζεται να μελετηθεί η τιμή της.



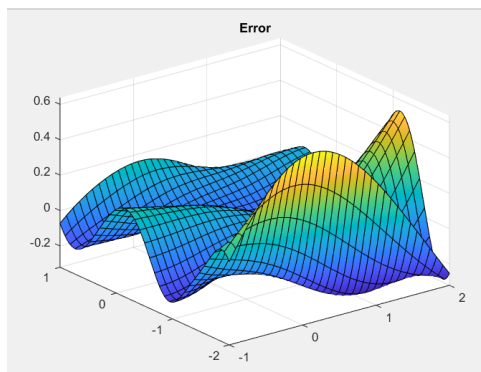
Σχήμα 11: Σφάλμα πρόβλεψης με πιθανότητα μετάλλαξης 0.1

Φαίνεται ότι πολύ μικρή πιθανότητα δεν αρκεί για να αποτρέψει αυτό το πρόβλημα, οπότε δοκιμάζεται μια μεγαλύτερη τιμή.



Σχήμα 12: Σφάλμα πρόβλεψης με πιθανότητα μετάλλαξης 0.4

Αποδεικνύεται ότι με πιθανότητα μετάλλαξης 0.4 το αποτέλεσμα είναι πολύ πιο θετικό με το σφάλμα να έχει μειωθεί στη μισή του τιμή.



Σχήμα 13: Σφάλμα πρόβλεψης με πιθανότητα μετάλλαξης 0.9

Με μεγάλη πιθανότητα μετάλλαξης οι καλές λύσεις δεν διατηρούνται οπότε το σφάλμα αυξάνεται. Χρειάζεται άρα μια τιμή, στο ενδιάμεσο του πεδίου ορισμού της.

4 Αποτελέσματα

Το τελικό μοντέλο επιλέχθηκε με βάση τα χαρακτηριστικά που κρίθηκαν πιο αποτελεσματικά από τις έρευνες που πραγματοποιήθηκαν.

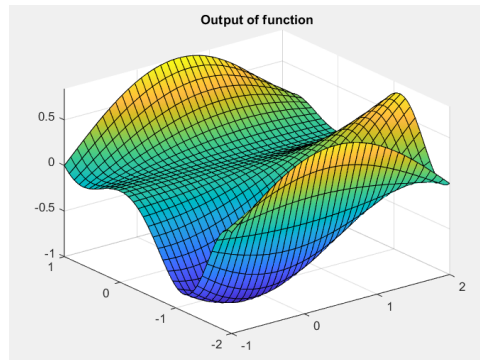
- Η καλύτερη προσέγγιση της πραγματικής συνάρτησης γίνεται όταν χρησιμοποιούνται και οι 15 γκαουσιανές συναρτήσεις

- Ο πληθυσμός είναι 50, αφού παρατηρήθηκε πως αν αυξηθεί δεν προκαλεί μικρότερο σφάλμα, αυξάνει όμως αρκετά το χρόνο
- Το ποσοστό διασταύρωσης ορίζεται 10% έτσι ώστε να επιλεχθούν οι καλύτερες λύσεις του αρχικού πληθυσμού
- Το ποσοστό απογόνων ορίζεται 60% για να χρησιμοποιηθούν τα χαρακτηριστικά των γονέων χωρίς να αντικατασταθεί μεγάλο μέρος του πληθυσμού
- Η πιθανότητα μετάλλαξης επιλέγεται ίση με 40%, αφού αυτός είναι ο αριθμός που οδηγεί στην καλύτερη λύση
- Ο μέγιστος αριθμός γενεών είναι 800, παρόλο που στο καλύτερο μοντέλο χρειάζονται μόνο 300-400

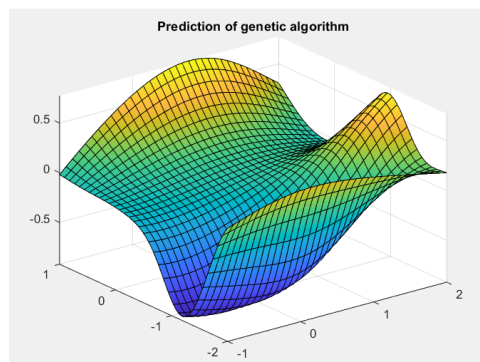
Αριθμός Γκαουσιανών	Πλάτος	Κέντρο 1	Κέντρο 2	Διακύμανση 1	Διακύμανση 2
1	-0.403	-1.244	-1.621	1.513	1.463
2	0.767	-0.161	-2.128	1.278	0.333
3	0.318	0.745	1.129	1.070	0.363
4	-0.604	-0.823	-1.164	1.234	0.311
5	-0.432	0.448	-1.507	0.702	0.230
6	0.693	-3.051	-0.541	1.056	1.141
7	0.727	2.922	-0.942	1.041	0.341
8	0.690	0.512	2.022	1.052	1.554
9	0.336	2.084	-1.019	0.850	0.511
10	-0.310	1.017	1.031	1.146	1.228
11	-0.941	-3.028	1.279	1.128	0.618
12	0.323	1.355	2.322	0.722	1.276
13	0.675	1.005	2.635	1.368	0.945
14	-0.206	3.534	0.372	1.161	0.916
15	-0.792	-2.393	2.271	0.803	0.982

Πίνακας 1: Τιμές παραμέτρων των γκαουσιανών που προέκυψαν από το γενετικό αλγόριθμο

Παρακάτω δίνεται το σχήμα της πραγματικής συνάρτησης και η αντίστοιχη πρόβλεψη που προέκυψε από τις συγκεκριμένες παραμέτρους.

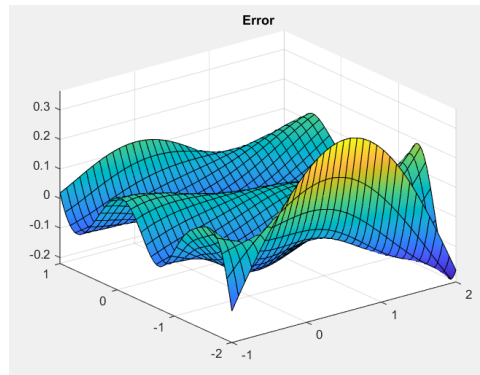


Σχήμα 14: Πραγματική συνάρτηση



Σχήμα 15: Πρόβλεψη πραγματικής συνάρτησης

Οι δύο εκόνες είναι αρκετά όμοιες, πράγμα που επιβεβαιώνεται και από το χαμηλό σφάλμα.



Σχήμα 16: Σφάλμα πρόβλεψης