Notebook

Lê Trọng Khôi

Bài 1:

Chứng minh các bất đẳng thức:

(a) $a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3b + b^3c + c^3a$ với $a \geq b \geq c$,

(b) $3abc(a + b + c) \leq 1$ với $ab + bc + ca = 1$.

Lời giải

(a) Xét hiệu

$$\begin{aligned}
&a^4 + b^4 + c^4 - a^3b - b^3c - c^3a \\
&= a^3(a-b) + b^3(b-c) + c^3(c-a) \\
&= a^3(a-b) - b^3(a-b) + b^3(a-c) - c^3(a-c) \\
&= (a-b)(a^3 - b^3) + (a-c)(b^3 - c^3) \geq 0
\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

(b) Vì $ab + bc + ca = 1 \Rightarrow (ab + bc + ca)^2 = 1$

Xét hiệu

$$\begin{aligned}
&(ab + bc + ca)^2 - 3abc(a + b + c) \\
&= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2bc + 2b^2ca + 2c^2ab - 3a^2bc - 3b^2ca - 3c^2ab \\
&= a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 - a^2bc - b^2ca - c^2ab \\
&= \frac{2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - 2a^2bc - 2b^2ca - 2c^2ab}{2} \\
&= \frac{(ab - bc)^2 + (bc - ca)^2 + (ca - ab)^2}{2} \geq 0
\end{aligned}$$

nên $3abc(a + b + c) \leq (ab + bc + ca)^2 = 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Bài 2:

Cho $x, y > 0$ thỏa mãn $x + y = 2$. Chứng minh rằng:

(a) $xy(x^2 + y^2) \leq 2$,

(b) $\dfrac{1}{x^2 + y^2} + \dfrac{1}{xy} \geq \dfrac{3}{2}$.

Lời giải

(a) Áp dụng bất đẳng thức $ab \leq \dfrac{(a+b)^2}{4}$, ta có:

$$xy(x^2 + y^2) = \frac{2xy(x^2 + y^2)}{2} \leq \frac{(2xy + x^2 + y^2)^2}{8} = \frac{(x+y)^4}{8} = \frac{16}{8} = 2.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

(b) Ta có:

$$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2xy}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$ và $\frac{(a+b)^2}{4}\geq ab$, ta có:

$$\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2xy}\geq\frac{4}{x^2+y^2+2xy}=\frac{4}{(x+y)^2}=1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{2xy}\geq\frac{1}{\frac{(x+y)^2}{2}}=\frac{1}{2} \quad (2)$$

Cộng các vế của (1) và (2), ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$

Bài 3:

Cho $x,y,z\geq 0$ thỏa mãn $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

(a) $x^2+y^2+z^2+2\sqrt{3xyz}\leq 1$,

(b) $xyz(x^2+y^2+z^2)\leq\frac{1}{81}$

Lời giải

(a) Vì $x+y+z=1$,

$$x^2+y^2+z^2+2\sqrt{3xyz}=x^2+y^2+z^2+2\sqrt{3xyz(x+y+z)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức $3abc(a+b+c)\leq(ab+bc+ca)^2$ ta được:

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2+2\sqrt{3xyz(x+y+z)}&\leq x^2+y^2+z^2+2\sqrt{(xy+yz+zx)^2}\\&=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)=(x+y+z)^2=1.\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

(b) Vì $x+y+z=1$,

$$xyz(x^2+y^2+z^2)=xyz(x+y+z)(x^2+y^2+z^2).$$

Áp dụng bất đẳng thức $3abc(a+b+c)\leq(ab+bc+ca)^2$ ta được:

$$\begin{aligned}xyz(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)&\leq\frac{(xy+yz+zx)^2(x^2+y^2+z^2)}{3}\\&\overset{AM-GM}{\leq}\frac{\frac{2(xy+yz+zx)+x^2+y^2+z^2}{27}}{3}=\frac{(x+y+z)^2}{81}=\frac{1}{81}\end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$

Bài 4:

Chứng minh với mọi số thực không âm a,b,c ta luôn có

$$(a+b)^4(b+c)^4(c+a)^4\geq 512(abc)^2(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2).$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \geq 4xy$ ta có:

$$(a+b)^4 = (a^2+2ab+b^2)^2 \geq 4(a^2+b^2)(2ab) \quad (1)$$
$$(b+c)^4 \geq 4(b^2+c^2)(2bc) \quad (2)$$
$$(c+a)^4 \geq 4(c^2+a^2)(2ca) \quad (3)$$

Nhân các vế của (1), (2) và (3), ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 5:

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $a+b+c=2$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{bc}{2a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{2b+ca}} + \sqrt{\frac{ab}{2c+ab}} \leq \frac{3}{2}$$

Lời giải

Ta có:

$$\sqrt{\frac{bc}{2a+bc}} = \sqrt{\frac{bc}{2(2-b-c)+bc}} = \sqrt{\frac{bc}{4-2b-2c+bc}} = \sqrt{\frac{bc}{(2-b)(2-c)}}$$
$$= \sqrt{\frac{bc}{(a+c)(a+b)}} \leq \frac{1}{2}.\left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c}\right)$$

Tương tự ta có $\sqrt{\frac{ca}{2b+ca}} \leq \frac{1}{2}.\left(\frac{c}{b+c} + \frac{a}{b+a}\right)$, $\sqrt{\frac{ab}{2c+ab}} \leq \frac{1}{2}.\left(\frac{a}{c+a} + \frac{b}{c+b}\right)$

Cộng hai vế của các BĐT trên ta được:

$$VT \leq \frac{1}{2}.\left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{b+a} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{c+b}\right) = \frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{2}{3}$

Bài 6:

Cho các số a, b nhỏ hơn 2 thỏa mãn $ab<2$. Chứng minh rằng $a+b<3$.

Lời giải

Vì $a<2, b<2$ nên $(a-2)(b-2)>0$.

$\Rightarrow ab-2a-2b+4>0$

$\Rightarrow ab+4>2a+2b$

$\Rightarrow 2+4=6>2(a+b) \Rightarrow 3>a+b$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 7:

Cho $ab \geq 1$. Chứng minh rằng $a^2+b^2 \geq a+b$.

Lời giải

Áp dụng BĐT AM - GM ta có:

$$a^2+b^2 \geq 2ab \quad (1)$$
$$a^2+1 \geq 2a \quad (2)$$
$$b^2+1 \geq 2b \quad (3)$$

Cộng từng vế của $(1), (2), (3)$ ta được:
$2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b.$
$\Rightarrow a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \geq 1 + a + b.$
$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq a + b.$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 1$.

Bài 8:

Chứng minh rằng nếu a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác thì

$$(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) > 2(a^3 + b^3 + c^3)$$

Lời giải
Vì a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $a + b > c;\ b + c > a;\ c + a > b$.
Ta có:

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) &= a^3 + b^3 + c^3 + a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)\\ &> a^3 + b^3 + c^3 + a^3 + b^3 + c^3 = 2(a^3 + b^3 + c^3).\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 9:

Cho $a < b < c < d$ và $x = (a + b)(c + d);\ y = (a + c)(b + d);\ z = (a + d)(b + c)$.
Chứng minh rằng $x < y < z$.

Lời giải
Xét hiệu $y - x$ ta có:

$$\begin{aligned}(a + c)(b + d) - (a + b)(c + d) &= ab + ad + bc + cd - ac - ad - bc - bd\\ &= ab + cd - ac - bd = d(c - b) + a(b - c)\\ &= d(c - b) - a(c - b) = (d - a)(c - b)\end{aligned}$$

Vì $d > a$ và $c > b$ nên $(d - a)(c - b) > 0 \Rightarrow y - x > 0$. Vậy $y > x$ (1).
Xét hiệu $z - y$ ta có:

$$\begin{aligned}(a + d)(b + c) - (a + b)(c + d) &= ab + ac + bd + cd - ac - ad - bc - bd\\ &= ab + cd - ad - bc = c(d - b) + a(b - d)\\ &= c(d - b) - a(d - b) = (c - a)(d - b)\end{aligned}$$

Vì $c > a$ và $d > b$ nên $(c - a)(d - b) > 0 \Rightarrow z - y > 0$. Vậy $z > y$ (2).
Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

Bài 10:

Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $\dfrac{a}{a^3 + 2} \leq \dfrac{1}{3}$ với $a > 0$.

b) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \geq \dfrac{a + 1}{b + 1} + \dfrac{b + 1}{a + 1}$ với $a, b > 0$.

Lời giải

a) Áp dụng BĐT AM - GM ta có:
$a^3 + 2 = a^3 + 1 + 1 \geq 3\sqrt[3]{a^3.1.1} = 3a$.
Suy ra $\dfrac{a}{a^3 + 2} \leq \dfrac{a}{3a} = \dfrac{1}{3}$, ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = 1$.

b) Ta có: $\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{y}-2=\dfrac{x^2+y^2+2xy}{xy}=\dfrac{(x-y)^2}{xy}$

Ta có $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq\dfrac{a+1}{b+1}+\dfrac{b+1}{a+b}\Leftrightarrow\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2\geq\dfrac{a+1}{b+1}+\dfrac{b+1}{a+b}-2$

$\Leftrightarrow\dfrac{(a-b)^2}{ab}\geq\dfrac{(a-b)^2}{(a+1)(b+1)}$

$\Leftrightarrow ab\leq(a+1)(b+1)$ (luôn đúng).

Suy ra $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\geq\dfrac{a+1}{b+1}+\dfrac{b+1}{a+b}$ luôn đúng, ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Bài 11:

Chứng minh các bất đẳng thức sau với $a,b,c>0$:

a) $\dfrac{1}{2a+b}+\dfrac{1}{2b+c}+\dfrac{1}{2c+a}\leq\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$;

b) $\dfrac{1}{2a+b+c}+\dfrac{1}{2b+c+a}+\dfrac{1}{2c+a+b}\leq\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$;

c) $\dfrac{a^2-c^2}{b+c}+\dfrac{b^2-a^2}{c+a}+\dfrac{c^2-b^2}{a+b}\geq 0$.

Lời giải

a) Từ bất đẳng thức $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\geq\dfrac{9}{x+y+z}$ ta có:

$\dfrac{1}{2a+b}=\dfrac{1}{a+a+b}\leq\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$

Suy ra vế trái $\leq\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{2}{c}+\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{b}+\dfrac{3}{c}\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

b) Từ bất đẳng thức $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\geq\dfrac{4}{x+y}$ ta có:

$\dfrac{1}{2a+b+c}=\dfrac{1}{(a+b)+(a+c)}\leq\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{a+c}\right)\leq\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}\right)$

$=\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

Suy ra vế trái $\leq\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{2}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{c}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)=\dfrac{1}{16}\left(\dfrac{4}{a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{4}{c}\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

c) Không mất tính tổng quát, ta giả sử $a\geq b\geq c$.

Ta có:

$\dfrac{a^2-c^2}{b+c}+\dfrac{b^2-a^2}{c+a}+\dfrac{c^2-b^2}{a+b}=\dfrac{a^2-c^2}{b+c}+\dfrac{(c^2-a^2)-(c^2-b^2)}{c+a}+\dfrac{c^2-b^2}{a+b}$

$=(a^2-c^2)\left(\dfrac{1}{b+c}-\dfrac{1}{a+b}\right)+(c^2-b^2)\left(\dfrac{1}{a+b}-\dfrac{1}{a+c}\right)$

Do $a \geq c \Rightarrow a^2 - c^2 \geq 0$; $b + c \leq a + b \Rightarrow \dfrac{1}{b+c} \geq \dfrac{1}{a+b} \Rightarrow \dfrac{1}{b+c} - \dfrac{1}{a+b} \geq 0$

$\Rightarrow (a^2 - c^2)\left(\dfrac{1}{b+c} - \dfrac{1}{a+b}\right) \geq 0$

Do $c \leq b \Rightarrow c^2 - b^2 \leq 0$; $a + b \geq a + c \Rightarrow \dfrac{1}{a+b} \leq \dfrac{1}{a+c} \Rightarrow \dfrac{1}{a+b} - \dfrac{1}{a+c} \leq 0$

$\Rightarrow (c^2 - b^2)\left(\dfrac{1}{a+b} - \dfrac{1}{a+c}\right) \geq 0$

Suy ra vế phải ≥ 0, ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 12:

Với a, b, c là các số thực dương, chứng minh rằng: $\dfrac{a^3}{b} + \dfrac{b^3}{c} + \dfrac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca$;

Lời giải

Ta có: $a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \Rightarrow a^3 \geq ab(a + b) - b^3$.

$$\Rightarrow \frac{a^3}{b} \geq \frac{a^2b + ab^2 - b^3}{b} = a^2 + ab - b^2.$$

Tương tự với các số hạng còn lại ở vế trái rồi cộng các vế lại ta được:

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq (a^2 + ab - b^2) + (b^2 + bc - c^2) + (c^2 + ca - a^2) = ab + bc + ca$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 13:

Cho a, b, x, y, z là các số thực dương, chứng minh rằng:

$$\frac{x}{ay + bz} + \frac{y}{az + bx} + \frac{z}{ax + by} \geq \frac{3}{a+b}.$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{x}{ay + bz} + \frac{y}{az + bx} + \frac{z}{ax + by} = \frac{x^2}{axy + bxz} + \frac{y^2}{ayz + bxy} + \frac{z^2}{axz + byz}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng cộng mẫu ta được:

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{axy + bxz} + \frac{y^2}{ayz + bxy} + \frac{z^2}{axz + byz} &\geq \frac{(x + y + z)^2}{axy + bxz + ayz + bxy + axz + byz} \\ &= \frac{(x + y + z)^2}{(a + b)(xy + yz + zx)}\end{aligned}$$

Giờ ta cần chứng minh

$$\frac{(x + y + z)^2}{xy + yz + zx} \geq 3$$

Ta có:

$$\frac{(x + y + z)^2}{xy + yz + zx} = \frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)}{(xy + yz + zx)} = 2 + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xy + yz + zx}$$

Lại có

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx &\Rightarrow 2(x^2+y^2+z^2) \geq 2(xy+yz+zx) \\ &\Rightarrow x^2-2xy+y^2+y^2-2yz+z^2+z^2-2zx+x^2 \geq 0 \\ &\Rightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0 \qquad \text{(luôn đúng)} \end{aligned}$$

Vậy

$$2+\frac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx} \geq 2+1=3$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

Bài 14:

Cho các số thực a,b,c,d sao cho $a^2+b^2+c^2+d^2 \leq 4$. Chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3+d^3 \leq 8.$$

Lời giải
Vì $a^2,\ b^2,\ c^2,\ d^2 \geq 0$ mà $a^2+b^2+c^2+d^2 \leq 4$ nên $a^2 \leq 4 \Rightarrow a \leq 2$
$\Rightarrow a^2(a-2) \leq 0 \Rightarrow a^3 \leq 2a^2$.
Tương tự ta có $b^3 \leq 2b^2,\ c^3 \leq 2c^2,\ d^3 \leq 2d^2$. Suy ra

$$a^3+b^3+c^3+d^3 \leq 2(a^2+b^2+c^2+d^2) = 2.4 = 8.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c,d) = (2,0,0,0)$ và các hoán vị.

Bài 15:

Cho a,b,c và x,y,z là các số thực dương thỏa mãn

$$a+b+c = x+y+z.$$

Chứng minh rằng

$$ax(a+x)+by(b+y)+cz(c+z) \geq 3(abc+xyz).$$

Lời giải
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz cho 2 bộ số

$$(a\sqrt{x},\ b\sqrt{y},\ c\sqrt{z}),\ (\sqrt{xy},\ \sqrt{yz},\ \sqrt{zx})$$

ta có:

$$(a^2x+b^2y+c^2z)(xy+yz+zx) \geq xyz(a+b+c)^2.$$

Lại có

$$(a+b+c)^2 = (x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx).$$

Suy ra

$$a^2x+b^2y+c^2z \geq 3xyz.$$

Tương tự ta có $ax^2+by^2+cz^2 \geq 3abc$.
Cộng hai vế của hai bất đẳng thức trên, ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=x=y=z$.

Bài 16:

Cho ba số thực dương a,b,c. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{bc(c+a)}+\frac{b}{ca(a+b)}+\frac{c}{ab(b+c)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

Lời giải
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng cộng mẫu ta có:

$$\frac{a}{bc(c+a)}+\frac{b}{ca(a+b)}+\frac{c}{ab(b+c)}=\frac{a^2}{abc(c+a)}+\frac{b^2}{abc(a+b)}+\frac{c^2}{abc(b+c)}$$
$$\geq\frac{(a+b+c)^2}{2abc(a+b+c)}=\frac{(a+b+c)^3}{2abc(a+b+c)^2}=\frac{\frac{(a+b+c)^3}{abc}}{2(a+b+c)^2}$$

Giờ ta chỉ cần chứng minh
$$\frac{(a+b+c)^3}{abc}\geq 27$$
hay
$$(a+b+c)^3\geq 27abc$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có:

$$a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow (a+b+c)^3\geq 27abc.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 17:

Cho các số thực a,b,c sao cho $ab+bc+ca=3$. Chứng minh rằng:

$$(3a^2+1)(3b^2+1)(3c^2+1)\geq 64.$$

Lời giải
Đặt
$$a=\frac{x}{\sqrt{3}};\ b=\frac{y}{\sqrt{3}};\ c=\frac{z}{\sqrt{3}}$$
Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)\geq 64$ với mọi $xy+yz+zx=9$.
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$\begin{aligned}(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)&=(x^2+1)[(y^2+1)(z^2+1)]=(x^2+1^2)[(yz)^2+y^2+z^2+1]\\&=(x^2+1^2)[y^2+2yz+z^2+(yz)^2-2yz+1]\\&=(x^2+1^2)[(y+z)^2+(yz-1)^2]\\&\geq[x(y+z)+(yz-1)]^2=8^2=64\end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $xy+yz+zx=9$ và

$$\begin{aligned}\frac{y+z}{x}=yz-1&\Leftrightarrow y+z=(yz-1)x=\frac{(yz-1)(9-yz)}{y+z}\\&\Leftrightarrow (y+z)^2+(yz-1)(yz-9)=0\\&\Leftrightarrow (y-z)^2+(yz-3)^2=0\\&\Leftrightarrow y=z=\pm\sqrt{3}\end{aligned}$$

Từ $xy+yz+zx=9$ ta có $x=y=z=\pm\sqrt{3}$, nên $a=b=c=\pm 1$

Bài 18:

Cho $a,b,c>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$\frac{a}{2b+3c}+\frac{b}{2c+3a}+\frac{c}{2a+3b}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$\frac{a}{2b+3c}+\frac{b}{2c+3a}+\frac{c}{2a+3b}=\frac{a^2}{2ab+3ca}+\frac{b^2}{2bc+3ab}+\frac{c^2}{2ca+3bc}\geq\frac{(a+b+c)^2}{5(ab+bc+ca)}$$
$$\geq\frac{3(ab+bc+ca)}{5(ab+bc+ca)}=\frac{3}{5}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 19:

Cho x,y,z thỏa mãn $x^2+y^2+z^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{1+2yz}+\frac{y^2}{1+2zx}+\frac{z^2}{1+2xy}\geq\frac{3}{5}$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có:

$$\sum\frac{x^2}{1+2yz}=\sum\frac{x^4}{x^2+2x^2yz}\geq\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2+y^2+z^2+2xyz(x+y+z)}$$

Ta có:

$$(x^2+y^2+z^2)^2\geq(xy+yz+zx)^2\geq 3xyz(x+y+z)$$

Mà $x^2+y^2+z^2=1$ nên

$$1\geq 3xyz(x+y+z)\Rightarrow\frac{2}{3}\geq 2xyz(x+y+z)$$

Suy ra

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^2+y^2+z^2+2xyz(x+y+z)}\geq\frac{1}{1+\frac{2}{3}}=\frac{3}{5}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=\sqrt{\frac{1}{3}}$

Bài 20:

Với $a,b,c,d\geq 0$, chứng minh rằng

$$abc+bcd+cda+dab\leq\frac{1}{16}(a+b+c+d)^3$$

Lời giải

Ta có:

$$abc+bcd+cda+dab=bc(a+d)+ad(b+c)$$

Áp dụng bất đẳng thức $xy\leq\frac{(x+y)^2}{4}$ ta được:

$$bc(a+d)+ad(b+c)\leq\frac{(b+c)^2(a+d)+(a+d)^2(b+c)}{4}=\frac{(b+c)(a+d)(a+b+c+d)}{4}$$

Áp dụng bất đẳng thức này một lần nữa ta được

$$\frac{(b+c)(a+d)(a+b+c+d)}{4}\leq\frac{(a+b+c+d)^2(a+b+c+d)}{16}=\frac{1}{16}(a+b+c+d)^3.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d$.

Bài 21:

Với $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$, chứng minh rằng

$$\sqrt{3a^2 + 6b^2} + \sqrt{3b^2 + 6c^2} + \sqrt{3c^2 + 6a^2} \geq 9.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thưc Cauchy - Schwarz ta có:

$$3a^2 + 6b^2 = 3(a^2 + b^2) = (1 + (\sqrt{2})^2)(a^2 + (b\sqrt{2})^2) \geq (a + 2b)^2.$$

vậy

$$\sqrt{3a^2 + 6b^2} \geq a + 2b$$

Tương tự ta có

$$\sqrt{3b^2 + 6c^2} \geq b + 2c,\ \sqrt{3c^2 + 6a^2} \geq c + 2a.$$

Suy ra

$$\sqrt{3a^2 + 6b^2} + \sqrt{3b^2 + 6c^2} + \sqrt{3c^2 + 6a^2} \geq 3(a + b + c) = 9.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 22:

Với $a, b, c, d \geq -1$ thỏa mãn $a + b + c + d = -1$, chứng minh rằng

$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq -\frac{7}{4}.$$

Lời giải

Vì $a \geq -1 \Rightarrow a + 1 \geq 0 \Rightarrow (a + 1)(2a - 1)^2 \geq 0$. Sau khi rút gọn, ta được $4a^3 \geq 3a - 1$.
Tương tự ta có

$$4b^3 \geq 3b - 1,\ 4c^3 \geq 3c - 1,\ 4d^3 \geq 3d - 1$$

Cộng hai vế của các bất đẳng thức trên ta được

$$4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) \geq 3(a + b + c + d) - 4 = -7$$

Suy ra $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \geq -\frac{7}{4}$, ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a, b, c, d) = (-1, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ và các hoán vị.

Bài 23:

Với $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 22$, chứng minh rằng

$$\frac{a}{a + 1} + \frac{b}{b + 4} + \frac{c}{c + 9} \leq 2.$$

Lời giải

Ta có

$$\frac{a}{a + 1} + \frac{b}{b + 4} + \frac{c}{c + 9} = 1 - \frac{1}{a + 1} + 1 - \frac{4}{b + 4} + 1 - \frac{9}{c + 9} = 3 - \frac{1}{a + 1} - \frac{4}{b + 4} - \frac{9}{c + 9}$$

Vậy ta cần chứng minh

$$\frac{1}{a + 1} + \frac{4}{b + 4} + \frac{9}{c + 9} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu ta có

$$\frac{1}{a + 1} + \frac{4}{b + 4} + \frac{9}{c + 9} \geq \frac{(1 + 2 + 3)^2}{a + 1 + b + 4 + c + 9} = \frac{36}{36} = 1$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{4}{b+4}=\dfrac{9}{c+9}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta được

$$\frac{1}{a+1}=\frac{2}{b+4}=\frac{3}{c+9}=\frac{1+2+3}{a+1+b+4+c+9}=\frac{1}{6}.$$

Vậy $a=5,\ b=8,\ c=9$.

Bài 24:

Với $a,b,c>0$ thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a)\le 8$, chứng minh rằng $ab+bc+ca\le 3$.

Lời giải
Ta có

$$8\ge (a+b)(b+c)(c+a)\ge \frac{8}{9}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

Bình phương hai vế ta được

$$64\ge \frac{64}{81}(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2$$

Từ bất đẳng thức $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$ suy ra

$$64\ge \frac{64}{81}(a+b+c)^2(ab+bc+ca)^2\ge \frac{64}{27}(ab+bc+ca)^3$$

nên

$$1\ge \frac{(ab+bc+ca)^3}{27}\Rightarrow (ab+bc+ca)^3\le 27\Rightarrow ab+bc+ca\le 3.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Bài 25:

Với $a,b,c>0$ thỏa mãn $a+b+c+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=10$, chứng minh rằng $1\le a+b+c\le 9$.

Lời giải
Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge \dfrac{9}{a+b+c}$ ta được

$$10=a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge a+b+c+\frac{9}{a+b+c}$$

Đặt $t=a+b+c,\ t>0$ ta được $10\ge t+\dfrac{9}{t}$.
Suy ra

$$t+\frac{9}{t}-10\le 0$$

Vì $t>0$, nhân t vào cả hai vế ta được

$$t^2-10t+9\le 0$$

nên

$$(t-1)(t-9)\le 0$$

Vậy $t-1$ và $t-9$ khác dấu. Sau khi xét trường hợp ta được $1\le t\le 9$. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 26:

Với $a,b,c>0$, chứng minh rằng

$$(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$3(a^2+b^2+c^2)=(1+1+1)(a^2+b^2+c^2)\geq(a+b+c)^2$$

Tương tự ta có

$$3\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2$$

Vậy

$$VT\geq\frac{1}{9}\left[(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\right]^2$$

Áp dụng bất đẳng thức $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$ ta được

$$VT\geq\frac{1}{9}.9.(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 27:

Với $x, y, z > 0$, chứng minh rằng

$$\frac{x-y}{xy+2y+1}+\frac{y-z}{zy+2z+1}+\frac{z-x}{xz+2x+1}\geq 0.$$

Lời giải

Ta có:

$$\frac{x-y}{xy+2y+1}+1=\frac{xy+x+y+1}{xy+2y+1}=\frac{(x+1)(y+1)}{xy+2y+1}$$

Tương tự, ta có bất đẳng thức cần chứng minh là

$$\sum\frac{(x+1)(y+1)}{xy+2y+1}\geq 3$$

Đặt $a=x+1, b=y+1, c=z+1$, ta được

$$\sum\frac{ab}{ab-a+b}\geq 3$$

suy ra

$$\sum\frac{1}{1-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}\geq 3$$

Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{9}{a+b+c}$ ta có

$$\sum\frac{1}{1-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}\geq\frac{9}{3-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{1}{c}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{9}{3}=3$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 28:

Cho $a, b, c\in[0;1]$, chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b+ac}+\frac{b}{1+c+ab}+\frac{c}{1+a+bc}\leq 1.$$

Lời giải
Với $x, y \in [0;1]$ ta có $(1-x)(1-y) \geq 0 \Rightarrow x + y \leq 1 + xy$.
Do đó $1 + b + ac \leq a + b + c \Rightarrow \dfrac{a}{1+b+ac} \leq \dfrac{a}{a+b+c}$
Tương tự ta có $\dfrac{b}{1+c+ab} \leq \dfrac{b}{a+b+c}$, $\dfrac{a}{1+a+bc} \leq \dfrac{c}{a+b+c}$.
Cộng hai vế của các bất đẳng thức trên ta có điều phải chứng minh.

Bài 29:

Với $a, b, c > 0$, chứng minh rằng
$$\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} \geq \frac{2a}{c+2a}.$$

Lời giải
Ta có:

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} \geq \frac{2a}{c+2a} \\
&\Rightarrow \frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} \geq 1 - \frac{c}{c+2a} \\
&\Rightarrow \frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \geq 1
\end{aligned}$$

Vậy ta cần chứng minh
$$\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \geq 1$$

Áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu ta được
$$\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} = \frac{a^2}{a^2+2ab} + \frac{b^2}{b^2+2bc} + \frac{c^2}{c^2+2ca} \geq \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} = 1$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 30:

Cho x, y, z là các số dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 12$. Chứng minh rằng:
$$P = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{y^3+1}} + \frac{1}{\sqrt{z^3+1}} \geq 1.$$

Lời giải
Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có
$$\sqrt{x^3+1} = \sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} \leq \frac{(x+1)+(x^2-x+1)}{2} = \frac{x^2+2}{2}.$$

Vậy $\dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}} \geq \dfrac{2}{x^2+2} = \dfrac{4}{2x^2+4}$.
Tương tự và áp dụng bất đẳng thức cộng mẫu ta được
$$P \geq \frac{4}{2x^2+4} + \frac{4}{2y^2+4} + \frac{4}{2z^2+4} \geq \frac{(2+2+2)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+12} = \frac{36}{36} = 1.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

Bài 31:

Cho các số thực $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x + 2y + 3z = 18$. Chứng minh rằng

$$\frac{2y+3z+5}{1+x} + \frac{3z+x+5}{1+2y} + \frac{x+2y+5}{1+3z} \geq \frac{51}{7}.$$

(Vòng 2, THPT Chuyên Đại học Vinh, 2009 - 2010)

Lời giải
Đặt $a = 1 + x,\ b = 1 + 2y,\ c = 1 + 3z$, theo giả thiết ta có $a + b + c = 21$.

$$\frac{2y+3z+5}{1+x} + \frac{3z+x+5}{1+2y} + \frac{x+2y+5}{1+3z} = \frac{b+c+3}{a} + \frac{c+a+3}{b} + \frac{a+b+3}{c} =$$

$$\left(\frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + 3\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM và bất đẳng thức $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{9}{a+b+c}$ ta được

$$VT \geq 2 + 2 + 2 + \frac{27}{21} = \frac{51}{7}.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c \Rightarrow x = 2y = 3z \Rightarrow x = 6,\ y = 3,\ z = 2$.

Bài 32:

Cho $a, b, c, d > 0$ thỏa mãn $ab = cd = 1$. Chứng minh rằng

$$(a + b)(c + d) + 4 \geq 2(a + b + c + d).$$

(Đề thi tuyển sinh lớp 10 Phổ thông Năng khiếu, ĐHQG TP. Hồ Chí Minh)

Lời giải
Đặt $x = a + b,\ y = c + d$, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$xy + 4 \geq 2(x + y)$$

hay

$$xy + 4 - 2(x + y) \geq 0$$

Ta có $xy + 4 - 2(x + y) = xy + 4 - 2x - 2y = x(y - 2) - 2(y - 2) = (x - 2)(y - 2)$.
Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$x = a + b \geq 2\sqrt{ab} = 2;\ y = c + d \geq 2\sqrt{cd} = 2.$$

Vậy $(x - 2)(y - 2) \geq 0$, ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = d = 1$.

Bài 33:

Cho $a, b \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $a^2 + b^2 = 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

$$P = ab + 3(a + b)$$

Lời giải
Ta có $a^2 + b^2 \geq 2ab$ nên $a^2 + b^2 + 2ab \leq 2(a^2 + b^2) = 4$, vậy $(a + b)^2 \leq 4 \Rightarrow -2 \leq a + b \leq 2$.
Mà $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 2 + 2ab$ nên $ab = \dfrac{(a+b)^2 - 2}{2}$.

Vậy $P = \dfrac{(a+b)^2-2}{2} + 3(a+b)$.
Xét tổng $2P+10$ ta có

$$\begin{aligned} 2P+10 &= (a+b)^2 - 2 + 6(a+b) + 10 \\ &= (a+b)^2 + 4(a+b) + 4 + 2(a+b) + 4 \\ &= (a+b+2)^2 + 4 + 2(a+b) \\ &\geq 0 + 4 - 4 = 0. \end{aligned}$$

Suy ra $2P \geq -10$ hay $P \geq -5$.
Vậy P đạt giá trị nhỏ nhất bằng -5 khi và chỉ khi $a = b = -1$.

Bài 34:

Cho $a, b, c > 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{b}-1} + \frac{b}{\sqrt{c}-1} + \frac{c}{\sqrt{a}-1} \geq 12.$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

(THPT Chuyên - TP. Hải Phòng, 2005 - 2006)

Lời giải
Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 3 số thực dương ta được

$$\frac{a}{\sqrt{b}-1} + \frac{b}{\sqrt{c}-1} + \frac{c}{\sqrt{a}-1} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)(\sqrt{c}-1)}}$$

Ta sẽ đi chứng minh $\dfrac{a}{\sqrt{a}-1} \geq 4$. Thật vậy

$$(\sqrt{a}-2)^2 \geq 0 \Rightarrow a - 4\sqrt{a} + 4 \geq 0 \Rightarrow a \geq 4(\sqrt{a}-1) \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{a}-1} \geq 4.$$

Tương tự ta có $\dfrac{b}{\sqrt{b}-1} \geq 4,\ \dfrac{c}{\sqrt{c}-1} \geq 4$.
Vậy ta có

$$VT \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)(\sqrt{c}-1)}} \geq 3\sqrt[3]{4.4.4} = 3.4 = 12.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = 4$.

Bài 35:

Cho các số thực dương a, b bất kì. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{8ab}{(a+b)^2} \geq 4.$$

Lời giải
Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{a}{b} + \frac{4ab}{(a+b)^2} \geq 2.\sqrt{\frac{4a^2}{(a+b)^2}} = 2.\frac{2a}{a+b} = \frac{4a}{a+b}.$$

$$\frac{b}{a} + \frac{4ab}{(a+b)^2} \geq 2.\sqrt{\frac{4b^2}{(a+b)^2}} = 2.\frac{2b}{a+b} = \frac{4b}{a+b}.$$

Cộng hai vế của các bất đẳng thức trên ta được

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{8ab}{(a+b)^2}\geq\frac{4(a+b)}{a+b}=4.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

Bài 36:

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh

$$\sqrt{a(b+3c)}+\sqrt{b(c+3a)}+\sqrt{c(a+3b)}\leq 6.$$

Lời giải
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\sqrt{4a(b+3c)}+\sqrt{4b(c+3a)}+\sqrt{4c(a+3b)}\leq 12.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM dạng $\sqrt{ab}\leq\dfrac{a+b}{2}$ ta có

$$\sqrt{4a(b+3c)}\leq\frac{4a+b+3c}{2},\ \sqrt{4b(c+3a)}\leq\frac{4b+c+3a}{2},\ \sqrt{4c(a+3b)}\leq\frac{4c+a+3b}{2}$$

Cộng hai vế của các bất đẳng thức trên ta được

$$\sqrt{4a(b+3c)}+\sqrt{4b(c+3a)}+\sqrt{4c(a+3b)}\leq\frac{4a+b+3c}{2}+\frac{4b+c+3a}{2}+\frac{4c+a+3b}{2}=\frac{8(a+b+c)}{2}=12.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 37:

Cho a,b,c là các số dương thỏa mãn $a+2b+3c\geq 20$. Chứng minh

$$a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}\geq 13.$$

Lời giải
Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$a+\frac{3}{a}=\left(\frac{3a}{4}+\frac{3}{a}\right)+\frac{a}{4}\geq 2.\sqrt{\frac{9}{4}}+\frac{a}{4}=3+\frac{a}{4}.$$

$$b+\frac{9}{2b}=\left(\frac{b}{2}+\frac{9}{2b}\right)+\frac{b}{2}\geq 2.\sqrt{\frac{9}{4}}+\frac{b}{2}=3+\frac{2b}{4}.$$

$$c+\frac{4}{c}=\left(\frac{c}{4}+\frac{4}{c}\right)+\frac{3c}{4}\geq 2.\sqrt{\frac{4}{4}}+\frac{3c}{4}=2+\frac{3c}{4}.$$

Cộng hai vế của các bất đẳng thức trên ta được

$$a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}\geq 3+3+2+\frac{a+2b+3c}{4}\geq 8+\frac{20}{4}=13.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=2$, $b=3$, $c=4$.

Bài 38:

Cho a,b,c là các số thực dương tùy ý. Chứng minh rằng

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geq abc(a+b+c).$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2.\sqrt{a^2b^4c^2} = 2ab^2c.$$

Tương tự, ta có

$$b^2c^2 + c^2a^2 \geq 2abc^2,\ c^2a^2 + a^2b^2 \geq 2a^2bc$$

Cộng hai vế của các bất đẳng thức trên ta được

$$2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \geq 2(ab^2c + abc^2 + a^2bc) = 2abc(a+b+c)$$

hay

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$$

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 39:

Chứng minh rằng với mọi số thực dương tùy ý a, b, c ta luôn có

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}.$$

Lời giải

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+a} + \frac{c-a}{a+b} \geq 0.$$

Cộng 1 vào từng hạng tử ở vế phải ta được

$$\frac{(b+c)+a-b}{b+c} + \frac{(c+a)+b-c}{c+a} + \frac{(a+b)+c-a}{a+b} \geq 3$$

hay

$$\frac{c+a}{b+c} + \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{a+b} \geq 3.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM cho 3 số thực dương ta có

$$\frac{c+a}{b+c} + \frac{a+b}{c+a} + \frac{b+c}{a+b} \geq 3.\sqrt[3]{\frac{c+a}{b+c}.\frac{a+b}{c+a}.\frac{b+c}{a+b}} = 3$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c$.

Bài 40:

Cho x, y là các số dương thỏa mãn $x + y = 2$. Chứng minh

$$x^3y^3(x^3 + y^3) \leq 2.$$

Lời giải

Vì $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 2(x^2 - xy + y^2)$ nên ta chỉ cần chứng minh $x^3y^3(x^2 - xy + y^2) \leq 1$.

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM bộ 4 số dạng $abcd \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$ ta có

$$x^3y^3(x^2 - xy + y^2) = (xy)(xy)(xy)(x^2 - xy + y^2) \leq \left(\frac{xy + xy + xy + x^2 - xy + y^2}{4}\right)^2 = \left[\frac{(x+y)^2}{4}\right] = 1$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Bài 41:

Cho a, b, c là các số thực không âm bất kì. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca).$$

Lời giải
Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\begin{aligned}
& a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 \geq 2(ab + bc + ca) \\
\Leftrightarrow\ & a^2 + b^2 + c^2 + 2abc + 1 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & (a^2 - 2ab + b^2) + (c^2 - 2c + 1) + 2abc - 2bc - 2ca + 2c \geq 0 \\
\Leftrightarrow\ & (a-b)^2 + (c-1)^2 + 2c(a-1)(b-1) \geq 0
\end{aligned}$$

Theo nguyên lí Dirichlet, trong ba số $a-1$; $b-1$ và $c-1$ luôn tồn tại hai số cùng không âm hoặc cùng không dương. Không mất tính tổng quát giả sử $(a-1)(b-1) \geq 0$. Khi đó $2c(a-1)(b-1) \geq 0$ nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 42:

Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} \leq \frac{3}{4}$$

Lời giải
Ta có

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{2a+b+c} + \frac{b}{2b+c+a} + \frac{c}{2c+a+b} = \frac{a}{(a+b)+(c+a)} + \frac{b}{(b+c)+(a+b)} + \frac{c}{(c+a)+(b+c)} \\
& = \frac{1}{\frac{a+b}{a} + \frac{c+a}{a}} + \frac{1}{\frac{b+c}{b} + \frac{a+b}{b}} + \frac{1}{\frac{c+a}{c} + \frac{b+c}{c}}
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \geq \dfrac{4}{x+y}$ ta được

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\frac{a+b}{a} + \frac{c+a}{a}} + \frac{1}{\frac{b+c}{b} + \frac{a+b}{b}} + \frac{1}{\frac{c+a}{c} + \frac{b+c}{c}} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\frac{a+b}{a}} + \frac{1}{\frac{c+a}{a}}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\frac{b+c}{b}} + \frac{1}{\frac{a+b}{b}}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\frac{c+a}{c}} + \frac{1}{\frac{b+c}{c}}\right) \\
& = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+b} + \frac{a}{c+a} + \frac{b}{c+b} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{c+a} + \frac{c}{b+c}\right) = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c > 0$.

Bài 43:

Cho ba số thực a, b, c không âm thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh $\dfrac{a}{a^2+1} + \dfrac{b}{b^2+1} + \dfrac{c}{c^2+1} \leq \dfrac{9}{10}$.

Lời giải
Ta có $\dfrac{a}{a^2+1} \leq \dfrac{18}{25}a + \dfrac{3}{50}$. Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương

$$50a \leq (36a+3)(a^2+1) \Leftrightarrow 36a^3 + 3a^2 - 14a + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (36a+27)\left(a - \frac{1}{3}\right)^2 \geq 0$$

luôn đúng vì a không âm. Dấu bằng xảy ra khi $a = \frac{1}{3}$.

Tương tự ta có $\dfrac{a}{a^2+1}+\dfrac{b}{b^2+1}+\dfrac{c}{c^2+1}\le\dfrac{18}{25}(a+b+c)+\dfrac{9}{50}=\dfrac{9}{10}$.
Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bài 44:

Cho các số thực không âm a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$(ab+c)(ac+b)\le 4.$$

Lời giải
Theo bất đẳng thức AM - GM, ta có

$$(ab+c)(ac+b)\le\left[\frac{(ab+c)+(ac+b)}{2}\right]^2=\frac{[(a+1)(b+c)]^2}{4}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh $(a+1)(b+c)\le 4$.
Tiếp tục áp dụng bất đẳng thức AM - GM như trên ta được

$$(a+1)(b+c)\le\left[\frac{(a+1)+(b+c)}{2}\right]^2=4.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$, khi $a=1,\ b=0,\ c=2$ và khi $a=1,\ b=2,\ c=0$.

Bài 45:

Cho a,b,c,d là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\ge 2$$

Lời giải
Ta có $\dfrac{2}{x^2+1}\ge 2-x$. Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương $\dfrac{x(x-1)^2}{x^2+1}$ luôn đúng. Áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh ta được

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\ge\frac{1}{2}[8-(a+b+c+d)]=2.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=d=1$.

Bài 46:

Cho các số thực a,b,c là ba cạnh của một tam giác, có chu vi bằng 1. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)-\left(\frac{ab+bc+ca}{abc}\right).$$

Lời giải
Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge max\{b,c\}$. Khi đó ta có $a<\dfrac{1}{2}$ vì nếu $a\ge\dfrac{1}{2}$ thì $b+c\le\dfrac{1}{2}\le a$ mà do a,b,c là ba cạnh của một tam giác nên $a<b+c$ suy ra mâu thuẫn. Tương tự ta có $0<a,b,c<\dfrac{1}{2}$
Theo giả thiết ta có $a+b+c=1$, suy ra $b+c=1-a$, $c+a=1-b$, $a+b=1-c$.
Vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$4\left(\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}+\frac{1}{1-c}\right)-\left(\frac{ab}{abc}+\frac{bc}{abc}+\frac{ca}{abc}\right)$$

hay
$$\frac{4}{1-a}+\frac{4}{1-b}+\frac{4}{1-c}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}.$$
Ta sử dụng bất đẳng thức sau $\dfrac{4}{1-a}-\dfrac{1}{a}\le 18a-3$. Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương $\dfrac{(18a-3)(1-a)a-5a+1}{a(1-a)}\ge 0$ hay $\dfrac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2(9-18a)}{a(1-a)}\ge 0$ luôn đúng với mọi $0<a<\dfrac{1}{2}$.
Tương tự ta có
$$\frac{4}{1-a}+\frac{4}{1-b}+\frac{4}{1-c}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=\left(\frac{4}{1-a}-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{4}{1-b}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{4}{1-c}-\frac{1}{c}\right)\le 18(a+b+c)-9=9.$$
Vậy biểu thức đạt giá trị lớn nhất bằng 9 khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Bài 47:

Cho a,b,c là các số thực dương có $abc=1$. Chứng minh
$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3\ge 2(a+b+c)$$

Lời giải
Không mất tính tổng quát, ta giả sử
$$\begin{cases}a-1 & \ge 0\\ b-1 & \ge 0\end{cases}\quad \text{hoặc} \quad \begin{cases}a-1 & \le 0\\ b-1 & \le 0\end{cases}$$
Khi đó $(a-1)(b-1)\ge 0$.
Vì $abc=1$ nên $c=\dfrac{1}{ab},\ \dfrac{1}{c^2}=a^2b^2$. Vậy bất đẳng thức cần chứng minh tương đương
$$\begin{aligned}&\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+a^2b^2+3\ge 2\left(a+b+\frac{1}{ab}\right)\\ \Leftrightarrow\ &\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+a^2b^2+3-2a-2b-\frac{2}{ab}\ge 0\\ \Leftrightarrow\ &\left(\frac{1}{a^2}-\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}\right)+(a^2b^2-2ab+1)+(2ab-2a-2b+2)\ge 0\\ \Leftrightarrow\ &\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+(ab-1)^2+2(a-1)(b-1)\ge 0 \text{ (đúng)}\end{aligned}$$
Như vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

Bài 48:

Chứng minh rằng với mọi số thực a,b,c,d,e ta có
$$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$$

ĐTTS lớp 10 chuyên Lê Hồng Phong, TP. Hồ Chí Minh 2001 - 2002

Lời giải
Nhân cả hai vế với 4, ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương
$$\begin{aligned}&4a^2+4b^2+4c^2+4d^2+4e^2-4ab-4ac-4ad-4ae\ge 0\\ \Leftrightarrow\ &(a^2-4ab+4b^2)+(a^2-4ac+4c^2)+(a^2-4ad+4d^2)+(a^2-4ae+4e^2)\ge 0\\ \Leftrightarrow\ &(a-2b)^2+(a-2c)^2+(a-2d)^2+(a-2e)^2\ge 0\end{aligned}$$

Vì bất đẳng thức cuối cùng đúng nên ta có điều phải chứng minh.
Đẳng thức xảy ra khi $a = 2b = 2c = 2d = 2e$.

Bài 49:

Chứng minh bất đẳng thức sau đúng với mọi số thực a, b

$$a + b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$$

Đề thi HSG lớp 9 TP. Hồ Chí Minh, 2000 - 2001

Lời giải

- **Trường hợp 1:** $a + b \leq 0$.
  Vì $\sqrt{2(a^2 + b^2)} \geq 0$ với mọi a, b nên bất đẳng thức trên đúng.
- **Trường hợp 2:** $a + b \geq 0$.
  Bình phương hai vế ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\begin{aligned} & (a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \\ \Rightarrow\ & 2a^2 + 2b^2 - (a^2 + 2ab - b^2) \geq 0 \\ \Rightarrow\ & (a-b)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

  Bất đẳng thức cuối cùng đúng vậy ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b$.

Bài 50:

Cho ba số thực dương a, b, c. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} \leq \frac{1}{abc}$$

USAMO 1997

Lời giải

Bổ đề. Với hai số thực dương a, b tùy ý, ta có: $a^3 + b^3 \geq ab(a + b)$.

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{a^3 + a^3 + b^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3a^3b^3} = a^2b, \quad \frac{a^3 + b^3 + b^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3b^3} = ab^2$$

Cộng hai bất đẳng thức này lại ta được $a^3 + b^3 \geq a^2b + ab^2 = ab(a + b)$.
Bổ đề được chứng minh. □

Sử dụng bổ đề vừa chứng minh ta được

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3 + b^3 + abc} + \frac{1}{b^3 + c^3 + abc} + \frac{1}{c^3 + a^3 + abc} &\leq \frac{1}{ab(a+b) + abc} + \frac{1}{bc(b+c) + abc} + \frac{1}{ca(c+a) + abc} \\ = \frac{1}{ab(a+b+c)} + \frac{1}{bc(b+c+a)} + \frac{1}{ca(c+a+b)} &= \frac{1}{abc}\left(\frac{c}{a+b+c} + \frac{a}{b+c+a} + \frac{b}{c+a+b}\right) = \frac{1}{abc} \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh hoàn tất.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Bài 51:

Một tam giác có độ dài ba cạnh là a, b, c thỏa mãn

$$(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 = a^3 + b^3 + c^3.$$

Chứng minh tam giác đó là tam giác đều.

Đề thi tuyển sinh lớp 10 Toán - Tin chuyên Quảng Trị, 2010

Lời giải

Bổ đề. Với mọi $x, y > 0$, ta có: $x^3 + y^3 \geq \dfrac{(x+y)^3}{4}$.

Chứng minh. Do $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$ nên bất đẳng thức tương đương với $x^2 - xy + y^2 \geq \dfrac{(x+y)^2}{4}$.

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM hai số dạng $xy \leq \dfrac{(x+y)^2}{4}$ ta được

$$x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy \geq (x+y)^2 - 3.\frac{(x+y)^2}{4} = \frac{(x+y)^2}{4}.$$

Bổ đề được chứng minh. □

Vì a, b, c là ba cạnh tam giác nên ta có

$$a+b-c > 0,\ b+c-a > 0,\ c+a-b > 0$$

Áp dụng bổ đề ta có

$$\begin{aligned}
(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 &\geq \frac{[(a+b-c)+(b+c-a)]^3}{4} = 2b^3\\
(b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 &\geq \frac{[(b+c-a)+(c+a-b)]^3}{4} = 2c^3\\
(c+a-b)^3 + (a+b-c)^3 &\geq \frac{[(c+a-b)+(a+b-c)]^3}{4} = 2a^2
\end{aligned}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế ta được

$$\begin{aligned}
&2[(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3] \geq 2(a^3+b^3+c^3)\\
\Leftrightarrow\ &(a+b-c)^3 + (b+c-a)^3 + (c+a-b)^3 \geq a^3+b^3+c^3
\end{aligned}$$

Mà theo giả thiết ban đầu thì dấu bằng xảy ra, do vậy ta có

$$\begin{cases} a+b-c = b+c-a \\ b+c-a = c+a-b \\ c+a-b = a+b-c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Vậy tam giác đã cho là tam giác đều.

Bài 52:

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab} + \frac{bc}{b^5+c^5+bc} + \frac{ca}{c^3+a^3+ca} \leq 1.$$

IMO Shortlist 1996

Lời giải

Bổ đề. Với mọi $a, b > 0$, ta có: $a^5 + b^5 \geq a^2b^2(a+b)$.

Chứng minh. Ta có $a^5 + b^5 = (a-b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$. Do đó bất đẳng thức tương đương

$$a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4 \geq a^2b^2 \Leftrightarrow a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3.$$

Sử dụng bất đẳng thức AM - GM bộ bốn số ta có

$$a^3b \leq \frac{a^4 + a^4 + a^4 + b^4}{4},\ ab^3 \leq \frac{a^4 + b^4 + b^4 + b^4}{4}.$$

Cộng hai bất đẳng thức trên theo vế ta có ngay $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$. Bổ đề được chứng minh. □

Sử dụng bổ để kết hợp với giả thiết $abc = 1$ ta có

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq \frac{ab}{a^2b^2(a+b) + ab} = \frac{1}{ab(a+b) + 1} = \frac{abc}{ab(a+b+c)} = \frac{c}{a+b+c}$$

Tương tự ta có

$$\frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} \leq \frac{a}{a+b+c},\ \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq \frac{b}{a+b+c}$$

Cộng ba bất đẳng thức trên lại theo vế ta thu được

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^3 + a^3 + ca} \leq \frac{c+a+b}{a+b+c} = 1.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

Bài 53:

Với ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $x + y + z = 1$, chứng minh rằng

$$\frac{1-x^2}{x+yz} + \frac{1-y^2}{y+zx} + \frac{1-z^2}{z+xy} \geq 6.$$

Đề thi tuyển sinh THPT chuyên, Sở GD-ĐT Hà Nội, 2014-B

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{1-x^2}{x+yz} \geq \frac{1-x^2}{x + \dfrac{(y+z)^2}{4}} = \frac{(1-x)(1+x)}{x + \dfrac{(1-x)^2}{4}} = \frac{(1-x)(1+x)}{\dfrac{4x + 1 - 2x + x^2}{4}} = \frac{(1-x)(1+x)}{\dfrac{(x+1)^2}{4}} = \frac{4-4x}{x+1}$$

Vậy ta cần chứng minh

$$\frac{4-4x}{x+1} + \frac{4-4y}{y+1} + \frac{4-4z}{z+1} \geq 6$$

Ta có $\dfrac{4-4x}{x+1} \geq -\dfrac{9}{2}x + \dfrac{7}{2}$. Thật vậy, bất đẳng thức này tương đương

$$\begin{aligned} 8 - 8x &\geq -9x^3 - 11x^2 + 5x + 7 \\ &\Leftrightarrow 9x^3 + 3x^2 - 5x + 1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 (9x+9) \geq 0 \end{aligned}$$

Vì bất đẳng thưc cuối cùng đúng do $x > 0$, nên bất đẳng thức ban đầu đúng. Dấu bằng xảy ra khi $x = \frac{1}{3}$.
Tương tự ta có

$$\frac{4-4y}{y+1} \geq -\frac{9}{2}y + \frac{7}{2},\ \frac{4-4z}{z+1} \geq -\frac{9}{2}z + \frac{7}{2}.$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$\frac{4-4x}{x+1} + \frac{4-4y}{y+1} + \frac{4-4z}{z+1} \geq -\frac{9}{2}(x+y+z) + \frac{21}{2} = -\frac{9}{2} + \frac{21}{2} = 6.$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 54:

Với mọi x, y, z dương, hãy chứng minh

$$\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \geq x + y + z.$$

Canada MO 2002

Lời giải
Cách 1:
Sử dụng bất đẳng thức AM - GM bộ ba số ta có

$$\frac{x^3}{yz} + y + z \geq 3x,\ \frac{y^3}{zx} + z + x \geq 3y,\ \frac{z^3}{xy} + x + y \geq 3z$$

Cộng ba bất đẳng thức trên theo vế ta thu được

$$\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} + 2(x+y+z) \geq 3(x+y+z)$$
$$\Rightarrow \frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} \geq x + y + z.$$

Ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.
Cách 2:
Sử dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz dạng phân thức ta có

$$\frac{x^3}{yz} + \frac{y^3}{zx} + \frac{z^3}{xy} = \frac{x^4}{xyz} + \frac{y^4}{yzx} + \frac{z^4}{zxy} \geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{3xyz}.$$

Ta sẽ chứng minh

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{3xyz} \geq \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z}$$

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cauchy - Schwarz ta có

$$(x^2+y^2+z^2)(x+y+z) \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} \cdot 3\sqrt[3]{xyz} = 9xyz \Leftrightarrow \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{3xyz} \geq \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z}$$

Do $3(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$ nên

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{3xyz} \geq \frac{3(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x+y+z} = x + y + z$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$.

Bài 55:

Cho a, b là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$a + b \geq \frac{12ab}{9 + ab}.$$

Lời giải
Sử dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$(a + b)(9 + ab) \geq 2\sqrt{ab}.6\sqrt{ab} = 12ab$$

suy ra $a + b \geq \dfrac{12ab}{9 + ab}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = 3$.

Bài 56:

Cho ba số thực x, y, z dương thỏa mãn $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{z(z^2 + x^2)} + \frac{y^2}{x(x^2 + y^2)} + \frac{z^2}{y(y^2 + z^2)} \geq \frac{3}{2}$$

HSG Huyện Ba Vì, 2022 - 2023

Lời giải

$$\frac{x^2}{z(z^2 + x^2)} = \frac{1}{z} - \frac{z^2}{z(z^2 + x^2)} = \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2 + x^2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\frac{z}{z^2 + x^2} \leq \frac{z}{2xz} = \frac{1}{2x} \Rightarrow \frac{1}{z} - \frac{z}{z^2 + x^2} \geq \frac{1}{z} - \frac{1}{2x}$$

Suy ra

$$\frac{x^2}{z(z^2 + x^2)} + \frac{y^2}{x(x^2 + y^2)} + \frac{z^2}{y(y^2 + z^2)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2z}\right) = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 1$.

Bài 57:

Cho hai số $a \neq 0$ và $b \neq 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 \geq 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

HSG TP. Nha Trang, 2022 - 2023

Lời giải

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 4 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + 2.\frac{a}{b}.\frac{b}{a} + 2 = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 + 2$$

Đặt $t = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$t^2 + 2 \geq 3t \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t - 2) \geq 0.$$

Mà theo bất đẳng thức AM - GM ta có

$$t = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2.$$

Vậy bất đẳng thức trên luôn đúng. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

Bài 58:

Cho a, b, c không âm thỏa mãn $a + b + c \geq abc$. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq abc.$$

Irish MO 1997

Lời giải

Nếu một trong ba số a, b, c có một số bằng 0 thì bất đẳng thức cần chứng minh luôn đúng. Vì vậy ta sẽ chỉ xét trường hợp $a, b, c > 0$.

Giả sử bất đẳng thức cần chứng minh sai, hay $abc > a^2 + b^2 + c^2$. Mà $a, b, c > 0$ nên $abc > a^2 + b^2 + c^2 > a^2 \Rightarrow bc > a$.

Tương tự ta có $ca > b,\ ab > c \Rightarrow a + b + c < ab + bc + ca$.

Lại có $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ nên

$$abc > a^2 + b^2 + c^2 > ab + bc + ca > a + b + c$$

$\Rightarrow abc > a + b + c$ (mâu thuẫn với giả thiết $a + b + c \geq abc$).

Vậy bất đẳng thức cần chứng minh luôn đúng.

Bài 59:

Cho x, y, z là các số dương thỏa $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$. Chứng minh

$$\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{2y + z + x} + \frac{1}{2z + x + y} \leq 1.$$

Lời giải

Áp dụng liên tục bất đẳng thức $\frac{1}{x + y} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ ta có

$$\frac{1}{2x + y + z} = \frac{1}{(x + y) + (x + z)} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x + y} + \frac{1}{x + z}\right) \leq \frac{1}{4}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right)\right] = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)$$

Tương tự ta có

$$\frac{1}{2y + z + x} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z}\right);\ \frac{1}{2z + x + y} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z}\right)$$

Cộng các bất đẳng thức trên theo vế

$$\frac{1}{2x + y + z} + \frac{1}{2y + z + x} + \frac{1}{2z + x + y} \leq \frac{1}{16}\left(\frac{4}{x} + \frac{4}{y} + \frac{4}{z}\right) = \frac{1}{16}\left[4\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\right] = \frac{1}{16}(4 \cdot 4) = 1.$$

Bất đẳng thức được chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = \frac{3}{4}$.

Bài 60:

Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{4}{a^2 + b^2} \geq \frac{32(a^2 + b^2)}{(a + b)^4}$$

Inequalities with Beautiful Solutions

Lời giải
Áp dụng bất đẳng thức AM - GM ta có

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+\frac{4}{a^2+b^2} \geq 2\sqrt{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\frac{4}{a^2+b^2}}=\frac{4}{ab}.$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{4}{ab} \geq \frac{32(a^2+b^2)}{(a+b)^4}$$

Bất đẳng thức trên tương đương

$$(a+b)^4 \geq 8ab(a^2+b^2)$$

luôn đúng do

$$(a+b)^4-8ab(a^2+b^2)=(a-b)^4 \geq 0.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Bài 61:

Cho a, b là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\sqrt{2}(\sqrt{a(a+b)^3}+b\sqrt{a^2+b^2}) \leq 3(a^2+b^2).$$

Irish MO 2004

Lời giải
Theo bất đẳng thức AM - GM

$$\sqrt{2a(a+b)^3}=(a+b)\sqrt{2a(a+b)} \leq \frac{2a(a+b)+(a+b)^2}{2}=\frac{2a^2+2ab+a^2+2ab+b^2}{2}=\frac{3a^2+b^2+4ab}{2}.$$

$$b\sqrt{2(a^2+b^2)}=\sqrt{2b^2(a^2+b^2)} \leq \frac{2b^2+a^2+b^2}{2}=\frac{a^2+3b^2}{2}.$$

Cộng hai bất đẳng thức trên theo vế ta được

$$VT \leq \frac{4a^2+4b^2+4ab}{2}=2a^2+2b^2+2ab \leq 2a^2+2b^2+a^2+b^2=3(a^2+b^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b$.

Notes

Hằng đẳng thức

- Hằng đẳng thức đáng nhớ:
  - $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
  - $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.
  - $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
  - $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 2ab^2 - b^3$.
  - $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
  - $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$.
  - $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.
- Một số hằng đẳng thức khác:
  - $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.
  - $(a+b-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$.
  - $(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a)$.
  - $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \dfrac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2}$.
  - $(a+b+c)(ab+bc+ca) = (a+b)(b+c)(c+a) + abc$.
  - $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.
  - $a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + ... + b^{k-1})$

Bất đẳng thức

Một số bất đẳng thức thường dùng

Bất đẳng thức AM - GM: Với $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$ $(n \geq 2)$, ta có:

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.
Dạng tương đương của **bất đẳng thức AM - GM**:

$$a_1 a_2 ... a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^n$$

Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz: Với $2n$ số thực $a_1, a_2, ...a_n$ và $b_1, b_2, ...b_n$ tùy ý, ta có

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.
Một dạng khác thường dùng của **bất đẳng thức Cauchy - Schwarz**: Với n số thực $a_1, a_2, ...a_n$ và n số thực dương $b_1, b_2, ...b_n$, ta có

$$\sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + ... + \sqrt{a_nb_n} \leq \sqrt{(a_1 + a_2 + ... + a_n)(b_1 + b_2 + ...b_n)}.$$

Dạng cộng mẫu của **bất đẳng thức Cauchy - Schwarz**: Với n số thực $a_1, a_2, ...a_n$ và n số thực dương $b_1, b_2, ...b_n$ ta có

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2}{b_1 + b_2 + ... + b_n}.$$

- $a^2 + b^2 \geq 2ab$
- $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$
- $2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 \geq 4ab$
- $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$
- $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$
- $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$
- $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a + b + c)$
- $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$
- $(a_1 + a_2 + ... + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$
- $(a + b)(b + c)(c + a) \geq \frac{8}{9}(a + b + c)(ab + bc + ca)$

Các bài toán về đa thức

- Đa thức $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ có a_n là hệ số cao nhất, a_0 là hệ số tự do và có bậc n.
- Số c là nghiệm của đa thức nếu $f(c) = 0$.
- Nếu $a_i \in \mathbb{Z}\ \forall i$ thì ta gọi đa thức $f \in \mathbb{Z}[x]$ tức tập các đa thức hệ số nguyên.
- Với mọi đa thức $f(x)$ và mọi đa thức $g(x)$ khác 0 luôn tìm được một đa thức $q(x)$ và đa thức $r(x)$ sao cho $f(x) = g(x).q(x) + r(x)$ $(deg(r) < deg(v))$.

Một số tính chất cần nắm

Với $f \in \mathbb{Z}[x]$ và a, b là hai số nguyên khác nhau, ta luôn có $f(a) - f(b)$ chia hết cho $f(a - b)$.

Định lý Bezout. Phần dư trong phép chia đa thức $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ cho đa thức bậc nhất $(x - a)$ là một hằng số và bằng giá trị của đa thức $f(x)$ tại $x = a$.

Hệ quả 1. Mọi đa thức bậc n đều không có quá n nghiệm thực.

Hệ quả 1.1. Nếu đa thức $f(x)$ có bậc không quá n mà có nhiều hơn n nghiệm thì từng hệ số của đa thức $f(x)$ bằng 0.

Hệ quả 1.2. Nếu đa thức bậc n nhận giá trị bằng nhau tại $(n + 1)$ giá trị của x thì đa thức đó là đa thức hằng.

Hệ quả 2. Nếu a là nghiệm của đa thức $f(x)$ khi đó ta có phép chia hết $f(x) = (x - a).g(x)$ trong đó $g(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_{n-2}x + b_{n-1}$.

Định lý Viète. Giả sử đa thức $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ có các nghiệm $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Khi đó ta có các đẳng thức sau:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n} \\ x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n &= \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n &= -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ x_1x_2x_3\ldots x_n &= (-1)^n\frac{a_0}{a_n} \end{aligned}$$

Định lý Viète đảo. Nếu như các số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thỏa mãn hệ:

$$S_k = (-1)^k\frac{a_{n-k}}{a_n},\ k = \overline{1, k}$$

Khi đó $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là n nghiệm của đa thức bậc n: $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$.