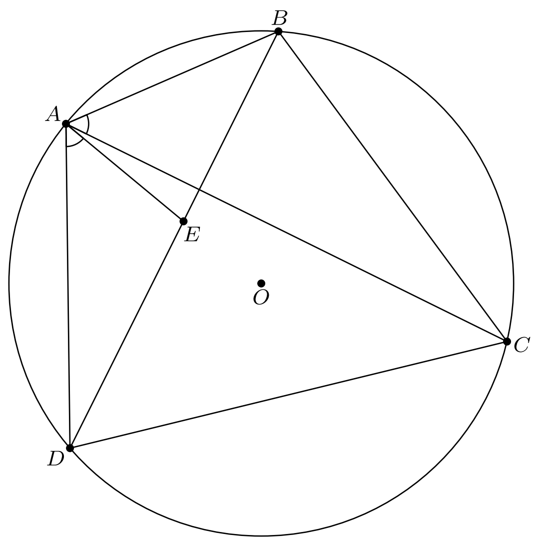
Geometry

Lê Trọng Khôi, lớp 9E trường THPT Chuyên Hà Nội - Amsterdam

Ngày 4 tháng 1 năm 2023

Định lý 1 (Ptolemy)**.** Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Khi đó ta có:

$$AB.CD + AD.BC = AC.BD$$



Chứng minh. Trên BD lấy E sao cho $\angle DAE = \angle BAC$. Lại có $\angle ADE = \angle ACB$ nên $\triangle ADE \sim \triangle ACB \Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow AD.BC = AC.DE$ (1).

Do $\angle DAE = \angle CAB$ nên $\angle DAC = \angle EAB$ mà $\angle DCA = \angle EBA$ nên $\triangle ABE \sim \triangle ACD \Rightarrow \frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow AB.CD = AC.BE$ (2)

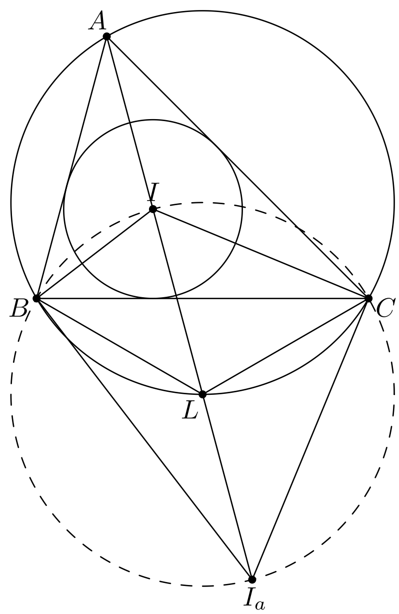
Từ (1) và (2) $\Rightarrow AD.BC + AB.CD = AC.DE + AC.BE = AC.(DE + BE) = AC.BD$.

□

Bổ đề 1 (Incenter/Excenter Lemma)**.** Cho $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn tâm I. Tia AI cắt (ABC) tại điểm L khác A. I_a đối xứng với I qua L. Khi đó

1. I, B, C, I_a nằm trên đường tròn tâm L đường kính II_a hay $LI = LB = LC = LI_a$.

2. Tia BI_a và CI_a là phân giác góc ngoài của $\triangle ABC$.



Chứng minh. Đầu tiên ta sẽ chứng minh $LB = LI$. Có

$$\angle LBI = \angle LBC + \angle CBI = \angle LAC + \angle IBA = \angle IAB + \angle IBA = \angle LIB.$$

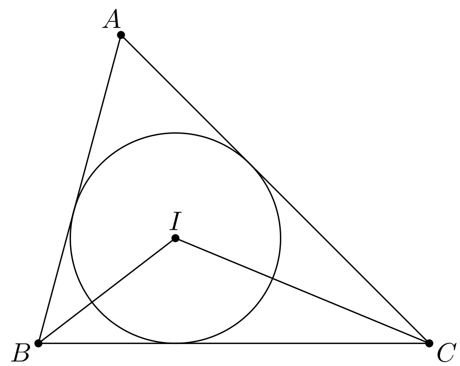
Vậy $\triangle LBI$ cân tại L nên $LB = LI$. Tương tự, ta có $LC = LI$. Vì $LI = LB = LC$ nên L là tâm (BIC). Mà L là trung điểm II_a nên II_a là đường kính của (BIC).

II_a là đường kính (BIC) nên $\angle I_aBI = 90^\circ$ hay $BI_a \perp BI$ mà BI là phân giác $\angle ABC$ nên BI_a là phân giác của góc ngoài $\triangle ABC$ tại B. Tương tự có CI_a là phân giác góc ngoài $\triangle ABC$ tại C.

□

Bổ đề 2. Nếu I là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ ta có

$$\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}A$$



Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\angle BIC &= 180^\circ - (\angle IBC + \angle ICB)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(B + C)\\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - A)\\ &= 90^\circ + \frac{1}{2}A\end{aligned}$$

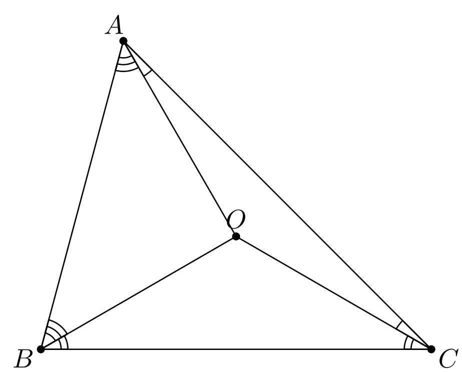
□

Bổ đề 3. Nếu O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ ta có

$$\angle OBC = \angle OCB = 90^\circ - \angle A$$

$$\angle OCA = \angle OAC = 90^\circ - \angle B$$

$$\angle OBA = \angle OAB = 90^\circ - \angle C$$



Chứng minh. Đặt

$$x = \angle OBC = \angle OCB$$

$$y = \angle OCA = \angle OAC$$

$$z = \angle OBA = \angle OAB$$

Vậy ta cần chứng minh

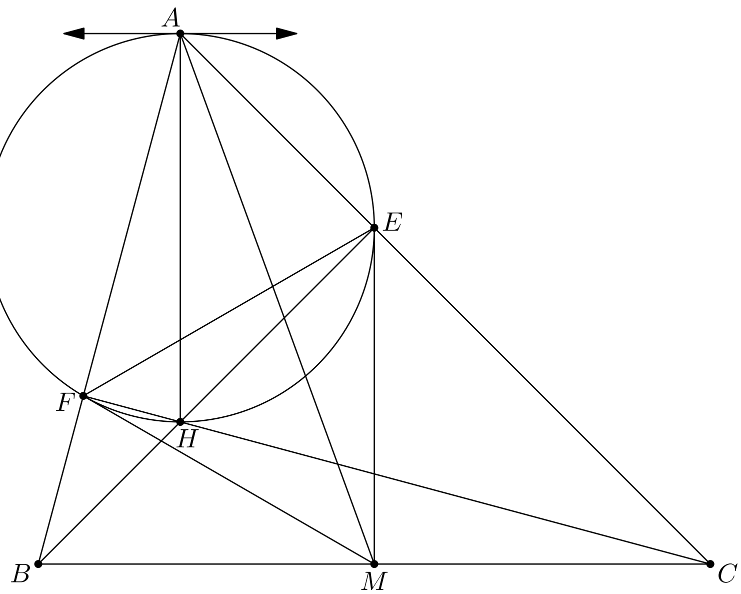
$$x = 90^\circ - (y+z),\ y = 90^\circ - (z+x),\ z = 90^\circ - (x+y)$$

tương đương với $x+y+z = 90^\circ$. Ta có

$$(x+y)+(y+z)+(z+x) = \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

vậy $x+y+z = 90^\circ$, ta có điều phải chứng minh. □

Bổ đề 4. Cho $\triangle ABC$ nhọn có các đường cao BE, CF, M là trung điểm BC. Khi đó ME, MF và đường thẳng qua A song song với BC là tiếp tuyến của (AEF).



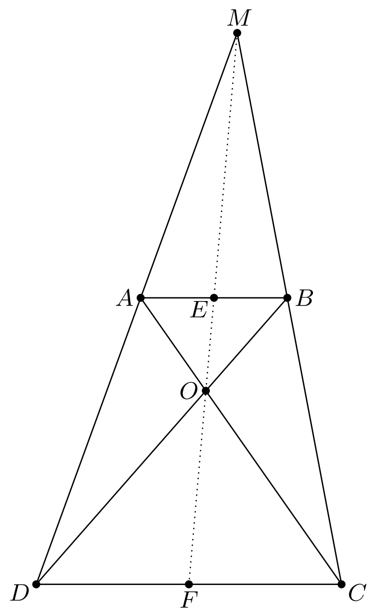
Chứng minh. Gọi H là trực tâm $\triangle ABC$. Có $\angle AFH = \angle AEH = 90^\circ$ nên (AFE) có đường kính là AH.

$AH \perp BC$ nên đường thẳng qua A song song với BC cũng vuông góc với AH. Vậy đường thẳng qua A song song với BC là tiếp tuyến của (AEF).

Có $BFEC$ là tứ giác nội tiếp do $\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$ nên $\angle FEB = \angle FCB$. $ME = MB = MC = MF$ nên $\triangle MEB, \triangle MEF$ cân tại M nên ta có $\angle BEM = \angle MBE, \angle FME = \angle FEM$.

Từ đó suy ra $\angle FEM = \angle FEB + \angle BEM = \angle FCB + \angle MBE = \angle CHE = \angle FAE$. Có $\angle FME = \angle FEM = \angle FAE$ nên ME, MF là tiếp tuyến của (AEF). $\square$

Bổ đề 5 (Bổ đề hình thang)**.** Trong hình thang hai đáy không bằng nhau, giao điểm của hai đường thẳng chứa hai cạnh bên, giao điểm của hai đường chéo và trung điểm của hai đáy cùng nằm trên một đường thẳng.



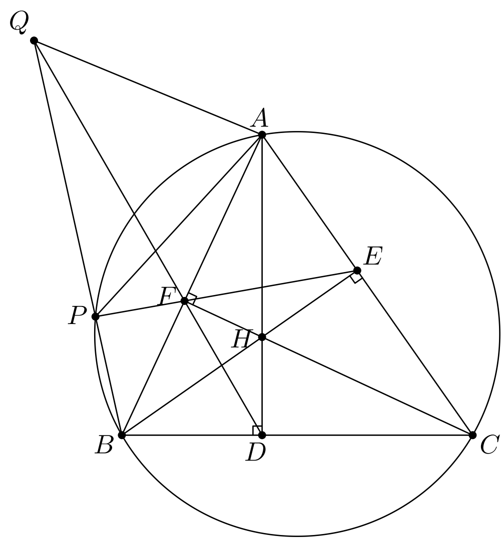
Chứng minh. Cho hình thang $ABCD$, M là giao của hai cạnh bên AD và CB, E là trung điểm AC, F là trung điểm BD, O là giao của AC và BD.

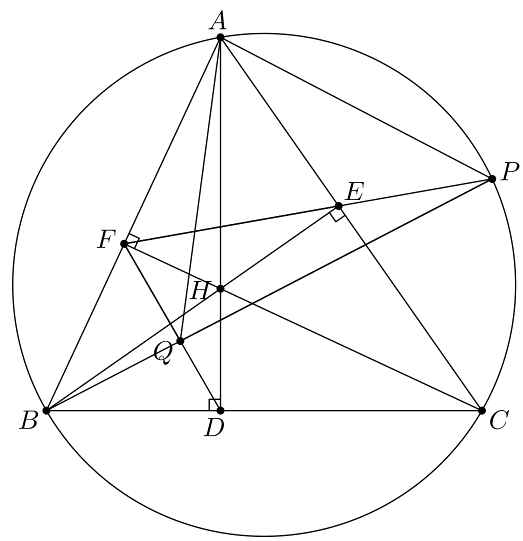
$\triangle ABO \sim \triangle CDO$ $(g.g)$ nên $\frac{AB}{CD} = \frac{AO}{CO} \Rightarrow \frac{2AE}{2CF} = \frac{AO}{CO} \Rightarrow \frac{AE}{CF} = \frac{AO}{CO}$. Lại có $\angle EAO = \angle FCO$ nên $\triangle AEO \sim \triangle CFO \Rightarrow \angle AOE = \angle COF$ nên E, O, F thẳng hàng (1).

Có $\triangle AEM \sim \triangle DFM$ $(g.g) \Rightarrow \angle AME = \angle DMF$ nên M, E, F thẳng hàng (2).

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh. □

Bài 1 (IMO Shortlist 2010/G1)**.** Cho tam giác ABC nhọn với D, E, F lần lượt là chân đường cao trên BC, CA, AB. Một trong hai giao điểm của đường thẳng EF với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là P. Hai đường thẳng BP và DF cắt nhau tại Q. Chứng minh $AP = AQ$.





Trường hợp 1: P thuộc tia EF.

Ta thấy $\angle APQ = \angle ACB$ vì tứ giác $APBC$ nội tiếp.

Dễ chứng minh tứ giác $AFDC, BFEC$ nội tiếp, từ đó ta có $\angle AFQ = \angle ACB$ và $\angle AFE = \angle ACB$.

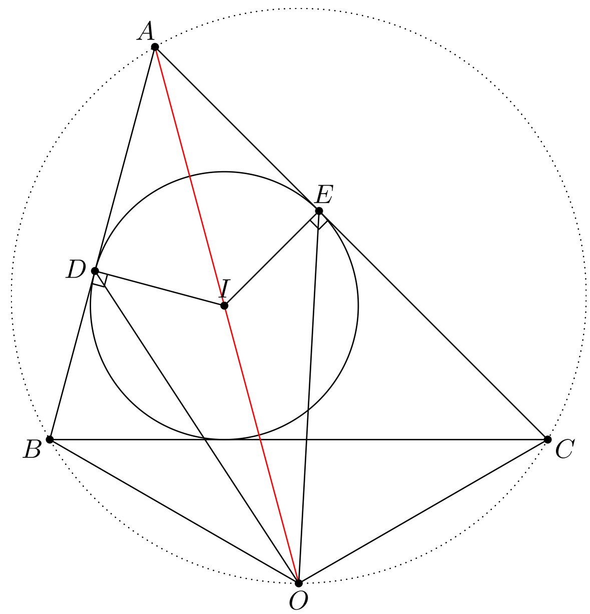
Vậy $\angle APQ = \angle AFQ$ suy ra tứ giác $APFQ$ nội tiếp. Do đó $\angle AFE = \angle AQP$ mà $\angle AFE = \angle APQ = \angle ACB$ nên $\angle AQP = \angle APQ$ suy ra $\triangle APQ$ cân tại A. Vì vậy $AP = AQ$, ta có điều phải chứng minh.

Trường hợp 2: P thuộc tia FE.

Có $\angle APQ = \angle ACB = \angle BFD = 180^\circ - \angle AFQ$ nên tứ giác $APQF$ nội tiếp.

Từ đó có $\angle AQP = \angle AFP = \angle ACB$ mà $\angle APQ = \angle ACB$ nên $\angle APQ = \angle AQP$. Vậy $\triangle APQ$ cân tại A nên $AP = AQ$.

Bài 2 (CGMO 2012/5)**.** Cho $\triangle ABC$. Đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$ có tâm là I và tiếp xúc với AB, AC lần lượt tại D, E. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle BCI$.

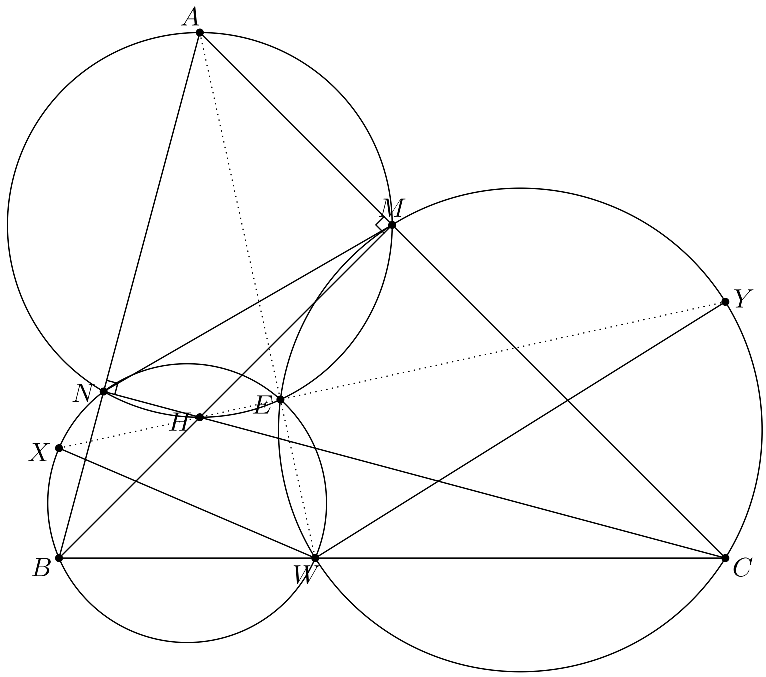


Theo **Bổ đề 1**, $O \in AI$.

Có AD, AE là hai tiếp tuyến đến (I) nên AI là trung trực DE suy ra $AD = AE$.

Khi đó $\triangle ADO = \triangle AEO$ (c - g - c) nên $\angle ADO = \angle AEO$, từ đây dễ dàng thấy được $\angle ODB = \angle OEC$.

Bài 3 (IMO 2013/4)**.** Cho tam giác ABC nhọn với trực tâm H, W là một điểm trên cạnh BC, nằm giữa B và C. M và N lần lượt là chân đường cao hạ từ B và C. ω_1 là đường tròn ngoại tiếp của tam giác BWN và X là một điểm sao cho WX là đường kính của ω_1. Tương tự, ω_2 là đường tròn ngoại tiếp của tam giác CWM và Y là một điểm sao cho WY là đường kính của ω_2. Chứng minh ba điểm X, Y và H thẳng hàng.

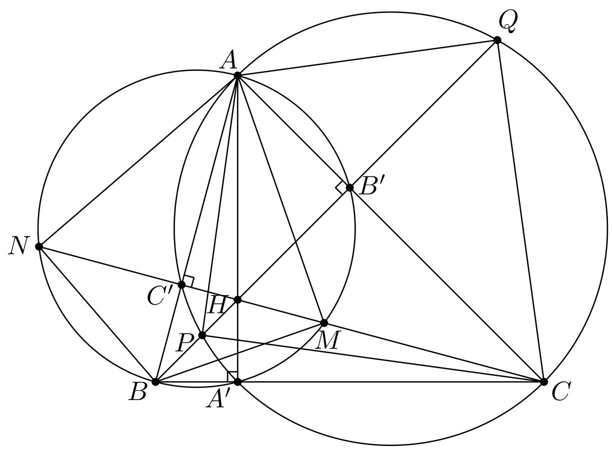


Gọi E là giao điểm thứ hai của ω_1 và ω_2, E là điểm Miquel nên E cũng thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN có đường kính AH. Có E và W là hai giao điểm của ω_1 và ω_2 nên EW là trục đẳng phương của ω_1 và ω_2.

Ta có $BNMC$ là tứ giác nội tiếp nên $AN.AB = AM.AC$ mà ANB là cát tuyến đến ω_1, AMC là cát tuyến đến ω_2 suy ra A thuộc trục đẳng phương của ω_1 và ω_2 hay A, E, W thẳng hàng.

Có $XE \perp EW,\ HE \perp AE$ và $YE \perp EW,\ HE \perp AE$ mà A, E, W thẳng hàng nên X, H, E thẳng hàng và Y, E, H thẳng hàng. Vậy X, Y, H thẳng hàng.

Bài 4 (USAMO 1990/5)**.** Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn đường kính AB cắt đường cao CC' kéo dài tại M và N, đường tròn đường kính AC cắt đường cao BB' kéo dài tại P và Q. Chứng minh M, N, P, Q đồng viên.



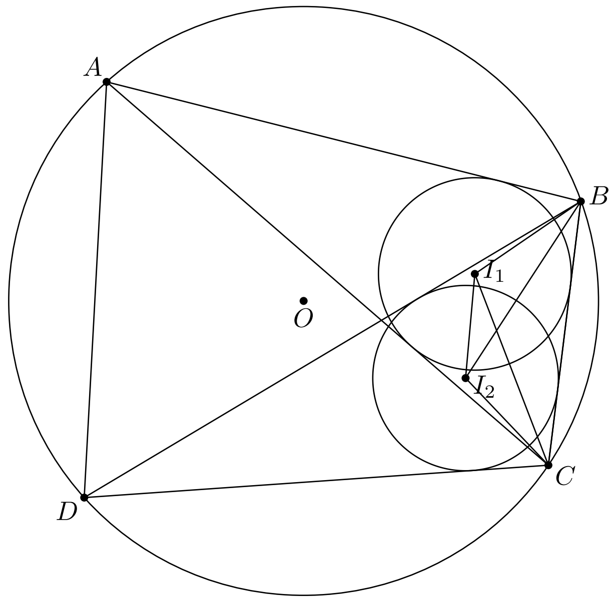
Cách 1: $\triangle ABN$ vuông tại N có NC' là đường cao $\Rightarrow AN^2 = AC'.AB$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông). Tương tự ta có $AQ^2 = AB'.AC$, $AM^2 = AC'.AB$, $AP^2 = AB'.AC$.

Mà tứ giác $BC'BC$ nội tiếp nên $AB'.AC = AC'.AB$ suy ra $AN = AM = AP = AQ$. Vậy M, N, P, Q cùng thuộc một đường tròn tâm A.

Cách 2: Gọi ω_1 là đường tròn đường kính AB và ω_2 là đường tròn đường kính AC.

Kẻ đường cao AA'. $AA' \perp BC$ nên $A' \in \omega_1,\ A' \in \omega_2$. Có A và A' là hai giao điểm của ω_1 và ω_2 nên đường thẳng AA' là trục đẳng phương của ω_1 và ω_2. Trực tâm $H \in AA'$ nên $HN.HM = HQ.HP$ suy ra tứ giác $MPNQ$ nội tiếp.

Bài 5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp. I_1, I_2 lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$ và $\triangle DBC$. Chứng minh rằng B, C, I_1, I_2 đồng viên.

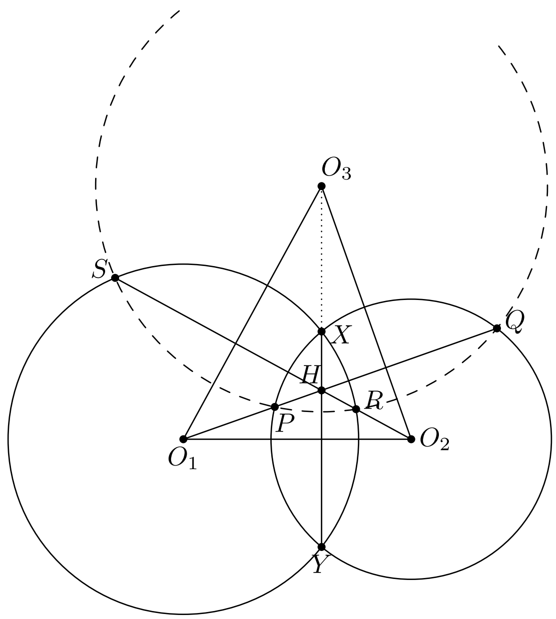


Từ **Bổ đề 2** ta có

$$\angle CI_1B = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle CAB$$
$$\angle CI_2B = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle CDB$$

Mà $\angle CAB = \angle CDB$ do tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $CI_1B = CI_2B$. Vậy B, C, I_1, I_2 đồng viên.

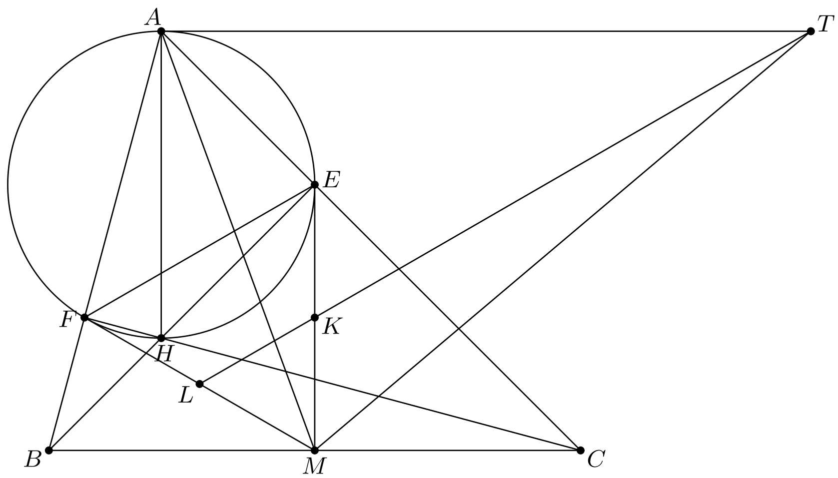
Bài 6 (USAMO 2009/1)**.** Cho hai đường tròn ω_1 và ω_2 cắt nhau tại X và Y. Vẽ đường thẳng ℓ_1 đi qua tâm của ω_1 và cắt ω_2 tại P và Q. Tương tự, vẽ đường thẳng ℓ_2 đi qua tâm của ω_2 và cắt ω_1 tại R và S. Chứng minh rằng nếu P, Q, R, S cùng thuộc một đường tròn thì đường tròn này có tâm nằm trên đường thẳng XY.



$PQ \cap RS = H$. Do P, Q, R, S đồng viên nên $HP.HQ = HR.HS$ suy ra H thuộc trục đẳng phương XY của ω_1 và ω_2.

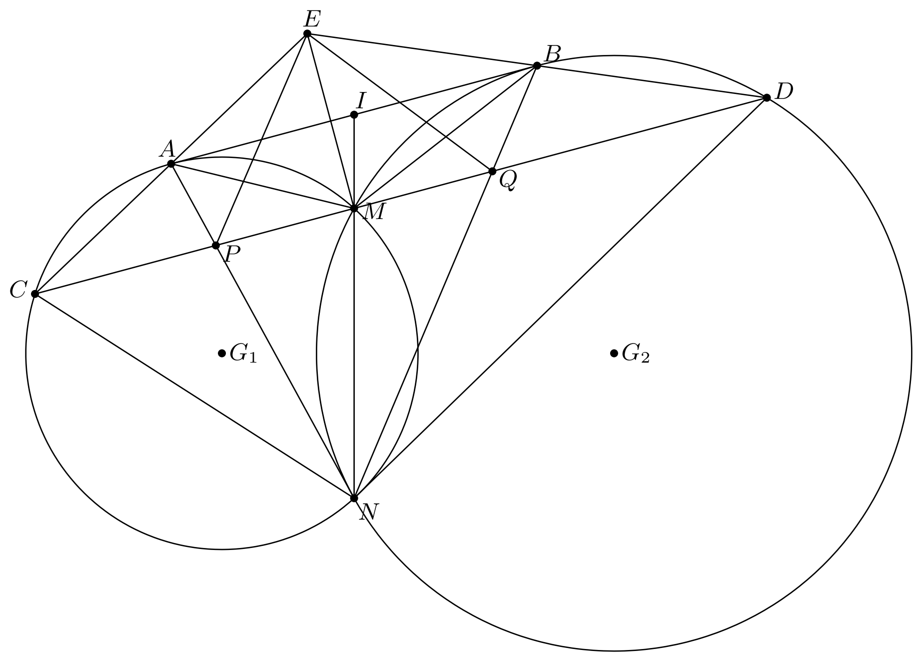
Gọi tâm của $(PQRS)$ là O_3, từ đó ta có $O_1O_3 \perp SH$ do SH là dây chung của $(PQRS)$ và ω_1. Tương tự có $O_2O_3 \perp QH$. Vậy H là trực tâm của $\triangle O_1O_2O_3$ suy ra $O_3H \perp O_1O_2$ mà $XY \perp O_1O_2$ và X, Y, H thẳng hàng nên $O_3 \in XY$.

Bài 7 (Iran TST 2011/1)**.** Cho tam giác ABC nhọn có $\angle B$ lớn hơn $\angle C$. Gọi M là trung điểm BC và E, F là chân đường cao hạ lần lượt từ B và C. Gọi K, L lần lượt là trung điểm của ME và MF và gọi T là điểm nằm trên đường thẳng KL sao cho $TA \parallel BC$. Chứng minh rằng $TA = TM$.



Từ **Bổ đề 5** ta có ME, MF, AT là các tiếp tuyến của (AEF). Gọi ω là đường tròn tâm M bán kính 0. K là trung điểm ME nên $KE^2 = KM^2$, K là điểm có phương tích tới (AEF) và ω bằng nhau nên K thuộc trục đẳng phương của (AEF) và ω. Chứng minh tương tự ta cũng có L thuộc trục đẳng phương của (AEF) và ω nên đường thẳng KL chính là trục đẳng phương của hai đường tròn này. Có $T \in KL$, TA là tiếp tuyến của (AEF) nên $TA^2 = TM^2$ suy ra $TA = TM$.

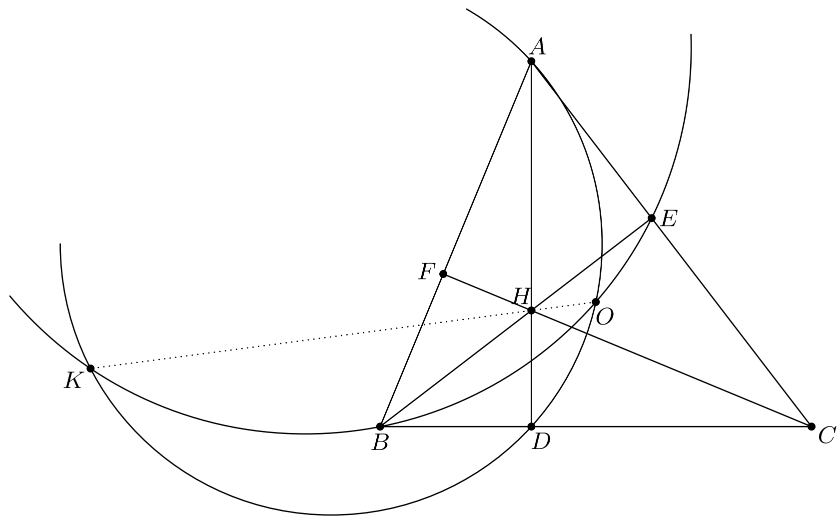
Bài 8 (IMO 2000/1)**.** Hai đường tròn G_1 và G_2 cắt nhau tại hai điểm M và N. AB là tiếp tuyến của hai đường tròn lần lượt tại A và B sao cho M nằm gần AB hơn so với N. Gọi CD là đường thẳng qua M song song với AB, với C thuộc G_1 và D thuộc G_2. AC cắt BD tại E; AN cắt CD tại P; BN cắt CD tại Q. Chứng minh rằng $EP = EQ$.



Gọi MN cắt AB tại I, khi đó $IA^2 = IB^2$ suy ra $IA = IB$ do I thuộc trục đẳng phương MN của hai đường tròn G_1 và G_2. Theo **Bổ đề 5** ta cũng có M là trung điểm PQ.

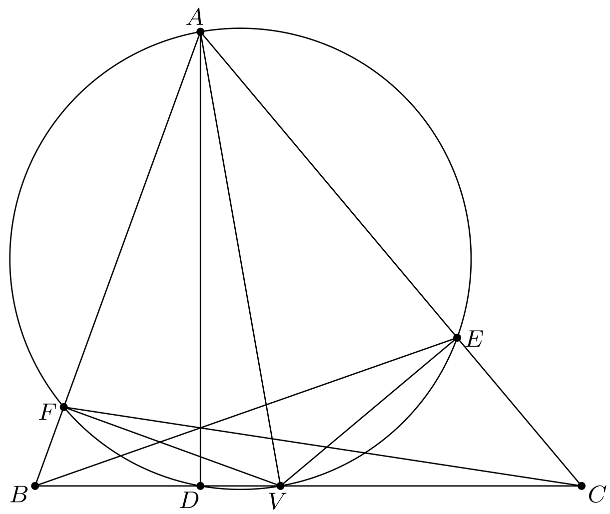
Do AB là tiếp tuyến của G_1 và $CD \parallel AB$ nên $\angle MAB = \angle MCA = \angle EAB$. Tương tự ta có $\angle MBA = \angle EBA$. Vì vậy $\triangle EAB = \triangle MAB$ $(c.g.c)$ suy ra $AE = AM, BE = BM$ hay AB là trung trực ME. $AB \perp EM$, $AB \parallel CD$ suy ra $EM \perp CD$ mà M là trung điểm PQ suy ra tam giác EPQ cân tại E, suy ra $EP = EQ$.

Bài 9. Cho tam giác ABC có độ dài ba cạnh khác nhau. Gọi AD, BE, CF lần lượt là các đường cao và O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Chứng minh rằng (AOD), (BOE) và (COF) đồng quy tại một điểm khác O.



Gọi (AOD) cắt (BOE) tại K khác O nên OK là trục đẳng phương của hai đường tròn này. Có $AH.HD = BH.HE = CH.HF$ do các tứ giác $AFHE$, $BFEC$ nội tiếp. $AH.HD = BH.HE$ nên H ,thuộc OK hay O, H, K thẳng hàng. Tứ giác $AODK$ nội tiếp nên $OH.HK = AH.HD = CH.HF$ hay tứ giác $COFK$ nội tiếp. Vậy (AOD), (BOE) và (COF) đồng quy tại K khác O.

Bài 10 (Korea 1997)**.** Cho $\triangle ABC$ nhọn có $AB \neq AC$, gọi V là giao điểm của phân giác góc A và BC và gọi D là chân đường cao hạ từ A xuống BC. Chứng minh rằng nếu E và F lần lượt là giao của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AVD$ với AC và AB thì AD, BE, CF đồng quy.



Có $BF.BA = BD.BV \Rightarrow \frac{BD}{BF} = \frac{BA}{BV}$. Tương tự ta có $\frac{CD}{CE} = \frac{CA}{CV}$. Mà $\frac{BA}{BV} = \frac{CA}{CV}$ do AV là phân giác $\angle BAC$ nên $\frac{BD}{BF} = \frac{CD}{CE} \Rightarrow \frac{BD}{BF}.\frac{CE}{CD} = 1$ (1).

$\angle AFV = \angle ADV = 90°,\ \angle AEV = 180° - \angle ADV = 90° \Rightarrow \angle AFV = \angle AEV$. Lại có $\angle FAV = \angle EAV \Rightarrow \triangle AFV = \triangle AEV$ $(ch.gn)$ nên $AF = AE \Rightarrow \frac{AF}{AE} = 1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BD}{CD}.\frac{CE}{AE}.\frac{AF}{BF} = 1$ nên theo **Định lý Ceva** thì AD, BE, CF đồng quy.