



Université Claude Bernard



UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD LYON 1

GEP 3043L ETUDE ET RÉALISATION D'UN PROJET

# Modélisation et commande d'un système de lévitation magnétique : introduction à l'approche hamiltonienne à ports

Achraf EL MESSAOUDI

achraf.el-messaoudi@etu.univ-lyon1.fr

Nouredine KHAOUS

nouredine.khaous@etu.univ-lyon1.fr

Encadré par

Dr Boussad HAMROUN

boussad.hamroun@univ-lyon1.fr

Université Claude Bernard Lyon 1 - LAGEPP

Année scolaire 2022-2023

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Système de lévitation magnétique</b>	<b>3</b>
2.1	Présentation de la maquette expérimentale . . . . .	3
2.2	Modélisation dynamique standard . . . . .	3
2.2.1	Partie électrique . . . . .	3
2.2.2	Partie mécanique . . . . .	3
2.2.3	Modèle d'état non-linéaire. . . . .	4
2.2.4	Linéarisation du système autour d'un point d'équilibre . . . . .	4
2.2.5	Linearisation du systeme . . . . .	5
2.3	Approches de commande classiques : PID avec Feedforward . . . . .	6
2.3.1	Contrôle du courant PI . . . . .	6
2.4	Description du contrôleur . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Le formalisme Hamiltonien à ports</b>	<b>7</b>
3.1	Presentation du formalisme hamiltonien . . . . .	7
3.2	Modélisation d'une balle en sustentation aérodynamique . . . . .	7
3.3	Modélisation du pendule simple . . . . .	7
3.4	Modélisation du Moteur DC . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Formulation hamiltonienne à port pour la lévitation magnétique</b>	<b>8</b>
4.1	Commande IDA-PBC . . . . .	9
4.1.1	Affectation de l'interconnexion . . . . .	9
4.1.2	Affectation d'amortissement . . . . .	10
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>References</b>	<b>11</b>
<b>7</b>	<b>Annexe</b>	<b>12</b>

# 1 Introduction

La lévitation magnétique est un domaine fascinant avec des applications allant des systèmes de transport à la robotique et aux équipements industriels. Dans ce papier, nous présentons un travail de recherche sur la modélisation et la commande d'un système de lévitation magnétique en utilisant deux approches distinctes. La première est une approche classique basée sur un correcteur PID, tandis que la seconde est une approche hamiltonienne à port en utilisant l'IDA-PBC, Interconnection and Damping Assignment Passivity-Based Control, un contrôle basé sur la passivité.

L'IDA-PBC propose un changement de paradigme pour la conception de contrôleurs en s'éloignant de l'approche traditionnelle, qui se concentre sur les signaux d'entrée et de sortie pour décrire les modèles de systèmes et les contrôleurs. Dans ce nouveau paradigme, les modèles de systèmes et les contrôleurs sont considérés comme des processeurs de signaux qui interagissent entre eux, plutôt que comme des entités distinctes fonctionnant indépendamment. Cette approche permet de mieux prendre en compte les interactions entre les différents éléments du système. Les spécifications de contrôle, telles que le suivi des trajectoires et l'atténuation des perturbations, sont définies en termes de signaux. Toutefois, cette vision repose sur l'hypothèse implicite que les actionneurs et les capteurs sont toujours présents et fonctionnent correctement, ce qui n'est pas toujours vrai dans les systèmes réels. De plus, cette approche est conceptuellement limitée car elle néglige les interactions entre les systèmes et ne peut pas facilement prendre en compte les incertitudes et les perturbations.

Le paradigme IDA-PBC permet de surmonter ces limitations en proposant une vision plus réaliste et flexible des systèmes physiques. En adoptant l'idée qu'il n'y a pas d'entrées et de sorties dans la nature, l'IDA-PBC s'appuie sur une représentation des systèmes physiques en termes d'échange et de transformation d'énergie. Cette approche permet de mieux comprendre les interactions entre les différents éléments du système et offre une base plus solide pour la conception de contrôleurs performants et robustes.

En adoptant cette approche, on reconnaît que certains systèmes physiques peuvent être vus comme des dispositifs multiports qui transforment et échangent

de l'énergie entre leurs différentes parties. L'IDA-PBC cherche alors à préserver cette propriété de transformation d'énergie tout en modifiant les fonctions d'énergie et de dissipation pour atteindre les objectifs de commande souhaités. Concrètement, l'IDA-PBC se traduit par la mise en forme de l'énergie, c'est-à-dire la modification des fonctions d'énergie stockée pour qu'elles correspondent aux besoins du système en termes de performance et de stabilité, et par l'attribution de l'amortissement, qui permet d'ajuster la dissipation d'énergie pour assurer un comportement stable et performant du système.

L'approche IDA-PBC a été introduite par Ortega et Spong dans le contexte des manipulateurs de robots et a depuis été appliquée avec succès dans de nombreux autres domaines, attestant de sa pertinence et de sa flexibilité.

L'article a été cité plus de 600 fois et est le 13e article le plus cité sur les 4250 publiés dans *Automatica* depuis 1989. PBC a été cité plus de 2500 fois dans Google scholar.

En offrant une représentation plus naturelle des systèmes physiques et en prenant en compte les interactions entre les différents éléments, l'IDA-PBC constitue un changement de paradigme pour la conception de contrôleurs et ouvre la voie à de nouvelles perspectives pour l'amélioration des performances et de la stabilité des systèmes dynamiques non linéaires.

En guise de conclusion à notre introduction, nous exposons la structure de notre article de recherche, qui se divise en deux parties principales : Tout d'abord, nous présentons la maquette expérimentale QUANSER et la modélisation dynamique classique standard. Nous abordons ensuite l'approche de commande classique PID avec feedforward pour la gestion du système de lévitation magnétique. Dans un second temps, nous introduisons le formalisme hamiltonien à portée et expliquons son fonctionnement à l'aide de quelques exemples simples d'application. Nous appliquons ensuite ce formalisme ainsi que la commande IDA-PBC à notre système de lévitation magnétique, en montrant les avantages de cette approche par rapport à la méthode classique PID. En suivant ce plan, nous souhaitons démontrer l'efficacité et la pertinence de l'approche IDA-PBC pour la commande de systèmes de lévitation magnétique, en

comparaison avec une méthode plus conventionnelle.

## 2 Système de lévitation magnétique

### 2.1 Présentation de la maquette expérimentale

Nous envisageons l'utilisation d'un système de lévitation magnétique QUANSER pour faire élever une bille d'acier grâce à la force électromagnétique produite par un électro-aimant. Le système se compose d'un électro-aimant, d'une bille en acier, d'un support pour la bille ainsi que d'un capteur de position de la bille. L'ensemble du dispositif est contenu dans une enceinte rectangulaire qui se décompose en trois sections distinctes. La section supérieure contient un électro-aimant constitué d'une bobine de solénoïde avec un noyau en acier. La partie centrale est constituée d'une chambre dans laquelle se déroule la lévitation de la bille. L'un des pôles de l'électro-aimant est orienté vers le sommet d'un poteau noir sur lequel se trouve une bille d'acier d'un pouce de diamètre. Un capteur photosensible, intégré dans le poteau, mesure la hauteur de la bille par rapport au poteau. La dernière section du système maglev abrite le circuit de conditionnement du signal nécessaire au capteur de position à intensité lumineuse. Le système maglev est divisé en deux sous-systèmes, à savoir le sous-système mécanique et le sous-système électrique. Le courant de la bobine est ajusté pour contrôler la position de la bille dans le système mécanique, tandis que la tension de la bobine est modifiée pour contrôler le courant de la bobine dans le système électrique. Ainsi, la tension appliquée à l'électro-aimant contrôle indirectement la position de la bille. Dans la section suivante, nous déterminons le modèle mathématique non linéaire du système maglev et nous le linéarisons dans la zone de fonctionnement afin de concevoir un contrôleur stabilisateur.

Les paramètres de notre dispositif sont présentés dans le tableau en Annexe.

## 2.2 Modélisation dynamique standard

### 2.2.1 Partie électrique

Dans la partie électrique de notre modèle, on utilise des équations qui relient la tension et le courant

électrique dans le circuit électrique. Ces équations permettent de déterminer le courant électrique qui circule dans le circuit, et donc la force magnétique qui est exercée sur la bille.

Le circuit électrique est modélisé en utilisant la loi de maille électrique :  $V_c(t) = R_t i(t) + L \frac{di(t)}{dt}$ , qui décrit la relation entre la tension  $V_c(t)$  dans le circuit et le courant électrique  $i(t)$  qui circule dans ce circuit, et les paramètres électriques du circuit, tels que la résistance totale  $R_{Totale}$  et l'inductance  $L$ .

En utilisant la transformée de Laplace, on peut transformer cette équation en une équation algébrique dans le domaine de la fréquence, qui permet de calculer le facteur de transfert de l'énergie électrique en énergie mécanique de la bille. Ce facteur de transfert, noté  $H_{Electrique}$ , est défini comme la relation entre le courant électrique  $I_c(s)$  et la tension  $V_c(s)$  dans le domaine de la fréquence :  $H_{Electrique} = \frac{I_c(s)}{V_c(s)}$ .

En simplifiant l'expression de  $H_{Electrique}$  obtenue, on peut réécrire ce facteur de transfert sous la forme  $H_{Electrique} = \frac{K_c}{1+\tau_c s}$ , où  $K_c$  et  $\tau_c$  sont des paramètres qui décrivent la réponse dynamique du système. Cette expression montre que le facteur de transfert dépend de la résistance totale du circuit  $R_{Totale}$ , de l'inductance  $L$ , ainsi que des paramètres  $K_c$  et  $\tau_c$ .

### 2.2.2 Partie mécanique

Dans cette partie, on s'intéresse aux forces qui agissent sur la bille en lévitation. En particulier, on modélise la force de gravité et la force magnétique qui s'opposent à la gravité et permettent à la bille de léviter. Ces forces sont utilisées pour déterminer l'accélération de la bille dans un référentiel inertiel.

La force de gravité qui s'applique sur la bille est donnée par la loi de la gravitation universelle :  $F_g = mg$ , où  $m$  est la masse de la bille et  $g$  est l'accélération gravitationnelle locale. Cette force est dirigée vers le bas, en direction du centre de la Terre.

La force magnétique qui s'applique sur la bille est donnée par la loi de Lorentz :  $F_m = \frac{K_m}{2mx^2} i^2(t)$ , où  $K_m$  est une constante qui dépend des propriétés magnétiques du système de lévitation et  $x$  est la distance entre la bille et le système de lévitation. Démonstration :

Établissons d'abord les relations fondamentales :

La force magnétique exercée sur un objet par une bobine dépend du champ magnétique  $B$  généré par la bobine, de la susceptibilité magnétique  $\xi$  de l'objet et du volume  $V$  de l'objet. La force magnétique ( $F_m$ ) peut être exprimée comme suit :  $F_m = \frac{\xi B^2 V}{2\mu_0}$ , où  $\mu_0$  est la perméabilité magnétique du vide.

Relions le champ magnétique à la bobine :

Le champ magnétique  $B$  généré par une bobine dépend du courant  $i$  qui la traverse, du nombre de spires ( $N$ ) et de la géométrie de la bobine. Dans le cas d'une bobine longue et étroite, la relation est la suivante :  $B = \mu_0 N i L$ , où  $L$  est la longueur de la bobine. La force magnétique dépend donc du courant :  $F_m = \frac{\xi (\frac{\mu_0 N i}{L})^2 V}{2\mu_0}$ .

Introduisons la distance  $x$  entre la bobine et la balle :

La force magnétique dépend également de la distance entre la bobine et la balle en acier. Lorsque la distance augmente, l'effet de la force magnétique diminue. Pour inclure cette dépendance, on peut considérer un facteur proportionnel à l'inverse du carré de la distance :  $1/x^2$ .

Regroupons les constantes :

On peut regrouper toutes les constantes qui ne dépendent pas du courant  $i$  et de la distance  $x$  pour simplifier l'équation. Ainsi, on obtient :  $F_m = \frac{K_m}{2mx^2} i^2(t)$ , où  $K_m$  est une constante de la force électromagnétique qui regroupe les autres constantes ( $\xi$ ,  $\mu_0$ ,  $N$ ,  $L$  et  $V$ ).

En utilisant les équations du mouvement, on peut écrire l'équation suivante pour la balle en lévitation :  $m\ddot{x} = mg - F_m$ , où  $\ddot{x}$  représente l'accélération de la balle dans un référentiel inertiel. Cette équation permet de calculer l'accélération de la balle en fonction des forces de gravité et magnétique qui agissent sur elle.

### 2.2.3 Modèle d'état non-linéaire.

Dans le modèle d'état non-linéaire de la lévitation magnétique de la balle, on combine les équations de

la partie électrique et de la partie mécanique pour obtenir un modèle dynamique de la balle en lévitation. Ce modèle permet de décrire l'évolution de l'état de la balle dans le temps et de prédire son comportement.

Le modèle d'état non-linéaire est de la forme  $\dot{z} = f(z) + BU$ , où  $z$  représente l'état de la balle,  $f(z)$  décrit la dynamique de l'état et  $B$  représente la matrice de commande.

L'état  $z$  de la balle est défini par le vecteur  $(i, x, \dot{x})^T$ , où  $i$  est le courant électrique dans le circuit de la lévitation magnétique,  $x$  est la distance entre la balle et le système de lévitation, et  $\dot{x}$  est la vitesse de la balle.

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L} V_c(t) - \frac{R}{L} i(t)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t)$$

$$\frac{d\dot{x}(t)}{dt} = g - \frac{K_m}{2mx^2} i^2(t)$$

Ces équations décrivent l'évolution du courant électrique dans le circuit de la lévitation magnétique, ainsi que l'évolution de la position et de la vitesse de la balle.

La matrice de commande  $B$  est donnée par  $\begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$ , qui permet de modéliser l'influence de la tension  $V_c(t)$  sur l'évolution du courant électrique dans le circuit de la lévitation magnétique.

$$\begin{cases} \frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L} V_c(t) - \frac{R}{L} i(t) \\ \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) \\ \frac{d\dot{x}(t)}{dt} = g - \frac{K_m}{2mx^2} i^2(t) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i(t) \\ x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} i(t) \\ \dot{x}(t) \\ g - \frac{K_m}{2mx^2} i^2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} V_c(t)$$

### 2.2.4 Linéarisation du système autour d'un point d'équilibre

Nous allons maintenant linéariser notre système autour d'un point d'équilibre. En effet, autour du point d'équilibre, le modèle linéarisé est une approximation raisonnable de notre système non linéaire. Si le système opère principalement autour de ce point,

le contrôleur que nous allons concevoir pour le modèle linéaire sera efficace pour le système non linéaire également.

Nous avons un point d'équilibre lorsque :  $f(z) + BU^* = 0$

1<sup>ère</sup> equation :

$$-\frac{R}{L}z_1^* + \frac{1}{L}U^* = 0$$

$$z_1^* = \frac{1}{R}U^*$$

2<sup>ème</sup> equation :

$$z_3^* = 0$$

3<sup>ème</sup> equation :

$$g - \frac{K_m}{2mz_2^{*2}}z_1^2 = 0$$

$$z_2^* = \sqrt{\frac{K_m U^{*2}}{2mgR_{T\text{totale}}^2}}$$

Donc au final on obtient :

$$z^{*T} = \left[ \frac{U^*}{R_T}, \sqrt{\frac{K_m U^{*2}}{2mgR_{T\text{totale}}^2}}, 0 \right]$$

Le point d'équilibre déterminé,  $z^*$ , représente l'état de stabilisation du système, à savoir lorsque la balle en acier se trouve en lévitation stable. Les composantes de  $z^*$  ont les significations suivantes :

La première composante  $\frac{U^*}{R_T}$  représente le courant d'équilibre  $i^*$  dans la bobine.  $U^*$  correspond à la tension d'entrée à l'équilibre et  $R_T$  représente la résistance totale du circuit. Au point d'équilibre, le courant dans la bobine génère une force magnétique suffisante pour contrebalancer la force gravitationnelle agissant sur la balle.

La deuxième composante,  $\sqrt{\frac{K_m x^{*2}}{2mgR_{T\text{totale}}^2}}$ , représente la position d'équilibre  $x^*$  de la balle en acier par rapport à la bobine (ou au point de référence). À cette position, la force magnétique produite par le courant d'équilibre est égale et opposée à la force gravitationnelle agissant sur la balle, ce qui permet une lévitation stable.

La troisième composante, qui vaut 0, représente la vitesse d'équilibre  $\dot{x}^*$  de la balle en acier. À l'état

d'équilibre, la vitesse est nulle, ce qui signifie que la balle reste stationnaire à la position  $x^*$ .

En somme, ce point d'équilibre représente un état stable de lévitation magnétique, où la balle en acier est suspendue dans les airs sans mouvement vertical. Il est maintenant possible de linéariser le système autour de ce point d'équilibre et de concevoir un contrôleur pour maintenir la lévitation de la balle.

## 2.2.5 Linearisation du systeme

### Rappel

$\dot{z} = f(z) + BU$  : Cette équation représente le système d'origine non linéaire avec les états  $z$ , l'entrée  $U$  et les fonctions  $f(z)$  et  $B$ .

$f(z^*) + BU^* = 0$  : Cette équation indique que le point d'équilibre  $z^*$  est un état stable du système où les dérivées temporelles des états sont nulles. Le point d'équilibre est défini pour un certain niveau d'entrée constant  $U^*$ .

Nous allons maintenant faire une approximation de Taylor du premier ordre pour approcher la fonction non linéaire  $f(z)$  autour du point d'équilibre  $z^*$ . La matrice jacobienne  $\left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z^*}$  est calculée en prenant les dérivées partielles de  $f(z)$  par rapport à chaque état  $z_i$  et en les évaluant au point d'équilibre  $z^*$ .

Nous prenons :  $\tilde{z} = z - z^*$ . On introduit ici les états perturbés  $\tilde{z}$  comme la différence entre les états réels  $z$  et le point d'équilibre  $z^*$ . Les états perturbés représentent les écarts par rapport au point d'équilibre.

Le developpement de Taylor est donné par :

$$f(z) \approx f(z^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial z} \right|_{z^*} (z - z^*) + \mathcal{O}((z - z^*)^2)$$

Pour finir, nous exprimons la dynamique du système en termes des états perturbés  $\tilde{z}$  en remplaçant  $f(z)$  par son approximation linéaire. Cette équation représente le système linéarisé autour du point d'équilibre  $z^*$ .

Maintenant, après avoir transformé l'équation différentielle linéarisée en une équation différentielle dans le domaine de Laplace (en supposant des conditions initiales nulles), nous allons définir une variable de sortie  $Y = z_2$  (car nous aimerions contrôler la position), et nous exprimerons  $\tilde{y}$  en termes de  $\tilde{z}$  :

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{z}} &= A\tilde{z} + B(u - u^*) \\
\dot{\tilde{z}} &= A\tilde{z} + B\tilde{u} \\
s\tilde{z}(s) &= A\tilde{z}(s) + B\tilde{u}(s) \\
[SI_3 - A]\tilde{z}(s) &= B\tilde{u}(s) \\
\tilde{z}(s) &= [SI_3 - A]^{-1} B\tilde{u}(s) \\
Y = z_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \\
\tilde{y} &= c\tilde{z} = cz - cz^* \\
\tilde{y}(s) &= C\tilde{z}(s) = C[SI - A]^{-1} B\tilde{U}(s) \\
H_{\text{Totale}}(s) &= \frac{\tilde{Y}(s)}{\tilde{U}(s)} = C[SI - A]^{-1} B
\end{aligned}$$

La fonction de transfert mécanique est donnée par :

$$H_{\text{mec}} = \frac{K_b \omega_b^2}{s^2 - \omega_b^2}$$

La fonction de transfert électrique est donnée par :

$$H_{\text{elec}} = \frac{K_c}{1 + \tau_c s}$$

La fonction de transfert totale est le produit des fonctions de transfert mécanique et électrique :

$$H_{\text{total}} = H_{\text{mec}} * H_{\text{elec}}$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
H_{\text{Totale}}(s) &= \frac{X_b(s)}{X_{b,d}(s)} \\
&= \frac{2gx_{b0}(K_{ff,b} + k_{p,c})s + k_{i,b}}{-I_{c0}x_{b0}s^3 + 2x_{b0}gk_{v,b}s^2 + (2x_{b0}gk_p + 2I_{c0}g)s + 2x_{b0}gk_i}
\end{aligned}$$

## 2.3 Approches de commande classiques : PID avec Feedforward

### 2.3.1 Contrôle du courant PI

Dans un premier temps, nous avons mis en place un correcteur proportionnel-intégral (PI) sur le courant pour générer un courant de référence  $I_d$ , comme illustré dans la figure 4.

Le but de la constante  $B$  est de pondérer la consigne pour protéger le système contre les variations brusques.

La figure 5 montre les résultats expérimentaux du correcteur PI du courant. Nous pouvons y observer que le courant suit parfaitement la consigne, ce qui nous permet de remplacer tout le bloc par un élément unique. Ainsi, seule la partie mécanique du système reste à contrôler.

## 2.4 Description du contrôleur

La loi de commande appliquée dans ce schéma est définie comme suit :  $I_c(s) = \left(k_{p,b} + \frac{k_{i,b}}{s}\right) (X_{b,d}(s) - X_b(s)) - k_{v,bs}X_b(s) + K_{ff,b}X_{b,d}(s)$ .

$I_c(s)$  est le courant souhaité de la boucle interne,  $k_{p,b}$ ,  $k_{v,bs}$  et  $K_{ff,b}$  ont été définis dans la section précédente, tandis que  $k_{i,b}$  est le gain intégral de position. L'accord des gains de ce contrôleur a été réalisé en fonction de la position des pôles de la fonction de transfert du système en boucle fermée linéarisé autour du point de fonctionnement.

Les valeurs obtenues sont :  $k_{p,b} = 380 \text{ A/m}$ ,  $k_{i,b} = 750 \text{ A/s-m}$ ,  $k_{v,bs} = 15 \text{ A-s/m}$ .

L'utilisation du contrôleur PIV plutôt que PID a pour but de protéger le système contre les changements rapides de la consigne, tels que les échelons, qui peuvent être dangereux à hautes fréquences.

### FeedForward :

Nous avons déterminé le vecteur d'équilibre précédemment, à partir duquel nous avons pu déduire l'expression du courant en fonction de la position pour un point d'équilibre donné :  $z1^* = z2^* \times K_{ff}$ , où  $K_{ff} = \sqrt{\frac{2mg}{k}} = 142,9292 \text{ [A m]}$ .

Dans un premier temps le correcteur PIV ramène d'abord le système vers le point d'équilibre où il existe une relation directe entre le courant et la position. C'est ensuite le rôle de  $K_{ff}$  de contrôler le système. Dès que le système est perturbé,  $K_{ff}$  cesse de fonctionner et laisse le contrôleur PIV ramener le système à l'équilibre. La Figure 4 présente les résultats expérimentaux de notre contrôleur PIV et  $K_{ff}$ , où l'on observe que la réponse de position à l'entrée échelon a un dépassement, mais tend asymptotiquement à la valeur désirée.

En somme, les résultats obtenus confirment l'efficacité de notre approche pour le contrôle du courant et de la position dans le système considéré. Les prochaines étapes de notre travail consisteront à améliorer encore plus la précision du contrôle, à augmenter la plage de fonctionnement du système et à intégrer d'autres fonctionnalités telles que la détection de pannes et la reconfiguration dynamique du système.

### 3 Le formalisme Hamiltonien à ports

#### 3.1 Présentation du formalisme hamiltonien

Le formalisme hamiltonien décrit les systèmes dynamiques avec un Hamiltonien, généralement  $H(q, p)$ , fonction des coordonnées généralisées  $q$  et des moments généralisés  $p$ . Il est cependant important de noter que le choix des coordonnées généralisées et de l'Hamiltonien dépend du système étudié et des conditions physiques du problème. L'évolution temporelle de ces variables est donnée par l'équation de Hamilton. La matrice antisymétrique jacobienne  $J$  est introduite pour exprimer l'équation de Hamilton sous forme matricielle, tandis que la matrice  $R$  représente les variations secondaires de l'énergie potentielle. Cette formulation matricielle facilite la résolution numérique et l'étude des propriétés des systèmes dynamiques, comme la symétrie et l'invariance.

#### 3.2 Modélisation d'une balle en sustentation aérodynamique

Considerons une balle en sustentation aérodynamique grâce à une turbine :  
En utilisant la relation  $p = mv$ , on peut réécrire cette expression comme :

$$H = \frac{1}{2m}p^2 + mgx$$

Nous avons donc la relation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F_{\text{Turbine}}$$

Montrons maintenant que  $J = -J^\top$  :

$$J^T = \frac{1}{\text{Det}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -J$$

On retrouve bien que  $J = -J^\top$ .

La relation  $J^T = -J$  est une propriété importante de la matrice antisymétrique  $J$  dans le formalisme à port Hamiltonien. Elle est nécessaire pour garantir que l'hamiltonien est bien défini pour le système considéré.

Rajoutons maintenant le terme amorti qui correspond aux frottements :

$$F_f = -\alpha \dot{x} = -\alpha \frac{\partial H}{\partial p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q}$$

Ainsi, la relation de départ devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F_{\text{Turbine}}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_J - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}}_R + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F_{\text{Turbine}}}_{\text{Puissance apportée}}$$

Nous avons donc :

$$\frac{dH(q, p)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q}^\top & \frac{\partial H}{\partial p}^\top \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dq}{dt} \\ \frac{dp}{dt} \end{pmatrix}$$

$$\frac{dH(q, p)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p}$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} (J - R) \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} B \mu$$

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} J \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x} R \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x} B u$$

$$\frac{dH}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} & \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} + y^\top \mu$$

$$\frac{dH}{dt} = -\alpha \dot{x}^2 + y^\top \mu$$

#### 3.3 Modélisation du pendule simple

Considerons maintenant le modèle classique du pendule simple L'Hamiltonien du système vaut  
 $H(p, q) = \frac{1}{2} \frac{p^2}{ml^2} + mgl(1 - \cos q)$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{p}{ml^2} \\ mgl \sin \theta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_J \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial \theta} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}$$

Interessons nous maintenant au bilan de puissance dans le formalisme hamiltonien à ports, cela s'écrit :  
 $\frac{dE}{dt} = \nabla H(x)^T \frac{dx}{dt} = \underbrace{\nabla H(x)^T J(x) \nabla H(x)}_{P_c=0}$

$$- \underbrace{\nabla H(x)^T R(x) \nabla H(x)}_{Q \geq 0} + \underbrace{y^T u}_{P_{\text{ext}}}$$

-  $P_c = 0$  car  $J = -J^T$  (échanges de puissance entre composants stockants)

-  $Q \geq 0$  car  $R \geq 0$  (puissance dissipée à cause des frottements de l'air qu'on va prendre ici en considération)



- Pext est la puissance apportée via les entrées-sorties (ports externes)

Cette écriture élégante nous permet d'analyser les échanges de puissance à travers les ports (ou entrées-sorties) du système. Dans le cas du pendule simple, nous avons une entrée (ou port d'entrée) qui correspond à la force externe appliquée au système (par exemple, une force qui maintient le fil tendu), et une sortie (ou port de sortie) qui correspond au mouvement angulaire du pendule.

Nous pouvons maintenant simplifier et réécrire l'équation précédente :

$$\frac{dE}{dt} = -\nabla H(\theta)^T R(\theta) \nabla H(\theta) + y^T u$$

Si par exemple la force externe  $u$  est nulle, l'équation précédente montre que la puissance dissipée dans le système est toujours positive ou nulle, ce qui implique que l'énergie du système diminue au fil du temps. Cela correspond à l'intuition que le pendule finit par s'arrêter en raison des frottements dans l'articulation du fil.

### 3.4 Modélisation du Moteur DC

Considerons un moteur à courant continu.

Les éléments stockeurs d'énergie (ici supposés linéaires) sont donnés par :

Inducteur :

$$\begin{cases} \dot{\phi} = -V_L \\ I = \frac{d}{d\phi} \left( \frac{1}{2L} \phi^2 \right) = \frac{\phi}{L} \end{cases}$$

Inertie :

$$\begin{cases} \dot{p} = -\tau_J \\ \omega = \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{2J} p^2 \right) = \frac{p}{J} \end{cases}$$

Pour trouver l'expression des deux éléments stockant de l'énergie, nous devons examiner les principes physiques qui gouvernent leur comportement.

L'inducteur (L) :

L'inducteur stocke de l'énergie sous forme de champ magnétique. L'énergie stockée dans un inducteur est liée à l'intensité du courant électrique qui le traverse (I) et à sa valeur d'inductance (L). L'énergie stockée dans un inducteur est donnée par :  $E_L = \frac{1}{2} L I^2$

Cependant, pour exprimer l'énergie en fonction de la variable d'état  $\phi$  (liaison de flux), nous utilisons

la relation entre le flux magnétique et l'intensité du courant :  $\phi = L I$

On isole I et on remplace dans l'expression de l'énergie stockée :  $E_L = \frac{1}{2} L \left( \frac{\phi}{L} \right)^2$

L'inertie de rotation (J) :

L'inertie de rotation représente la résistance d'un objet à changer son état de rotation. L'énergie cinétique stockée dans un objet en rotation est liée à son moment d'inertie (J) et à sa vitesse angulaire ( $\omega$ ). L'énergie cinétique d'un objet en rotation est donnée par :  $E_J = \frac{1}{2} J \omega^2$

Pour exprimer l'énergie en fonction de la variable d'état  $p$  (moment angulaire), nous utilisons la relation entre le moment angulaire et la vitesse angulaire :  $p = J \omega$

L'hamiltonien vaut donc :  $H(p, \phi) = \frac{1}{2L} \phi^2 + \frac{1}{2J} p^2$

## 4 Formulation hamiltonienne à port pour la lévitation magnétique

L'Hamiltonien de notre système peut être décrit comme suit :

$$H(q, p, \phi) = mgq + \frac{p^2}{2m} + \frac{(c - q)}{2k} \phi^2$$

Avec  $\frac{(c-q)}{2k} \phi^2$  l'énergie potentielle électromagnétique associée au champ magnétique variable  $\phi$  à travers la bobine, qui dépend de la position  $q$  de l'objet.

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{J}} - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}} \right\} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{\partial H}{\partial \phi} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_G u,$$

Nous avons encore une fois respecté la propriété de cyclo-passivité dont bénéficient les systèmes hamiltoniens à port, qui garantit :

$$\frac{dH}{dt} \leq y^T u$$

Le taux de variation de l'énergie du système ne peut pas dépasser la puissance fournie par l'extérieur.

L'attribution de l'interconnexion et de l'amortissement IDA-PBC : Pour un système à ports hamiltoniens, l'objectif de conception IDA-PBC est d'obtenir un système en boucle fermée de la forme :

$$\dot{x} = (J_d(x) - R_d(x)) \frac{\partial H_d}{\partial x}$$

où les matrices d'interconnexion et d'amortissement souhaitées satisfont respectivement à la symétrie asymétrique et à la définition positive symétrique, c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} J_d(x) &= -J_d^T(x) \\ R_d(x) &= R_d^T(x), \quad R_d(x) \geq 0. \end{aligned}$$

L'objectif de la boucle fermée peut être atteint par l'entrée de contrôle :

$$u = (g^T(x)g(x))^{-1} g^T(x) ((J_d(x) - R_d(x)) \frac{\partial H_d}{\partial x} - (J(x) - R(x)) \frac{\partial H}{\partial x})$$

où l'hamiltonien désiré  $H_d(x)$  et les matrices du système  $J_d(x), R_d(x)$  sont obtenus en résolvant la "matching equation" suivante

$$g^\perp(J(x) - R(x)) \frac{\partial H}{\partial x} = g^\perp(J_d(x) - R_d(x)) \frac{\partial H_d}{\partial x}$$

telle que  $H_d(x)$  satisfasse la condition d'équilibre souhaitée.

Considérons notre système MAGLEV à stabiliser en  $x^*$ . Supposons que l'on puisse trouver des fonctions  $u(x)$  et  $H_a(x)$ , et des matrices  $J_a(x)$  et  $R_a(x)$  telles que les conditions suivantes soient remplies :

- Affectation de l'équilibre : à  $x^*$  le gradient de  $H_a(x)$  vérifie

$$\frac{\partial H_a}{\partial x}(x^*) + \frac{\partial H}{\partial x}(x^*) = 0.$$

- Condition minimale : le Hessien de  $H_a(x)$  à  $x^*$  est égal à

$$\frac{\partial^2 H_a}{\partial x^2}(x^*) + \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x^*) > 0$$

Alors,  $x^*$  sera un équilibre (localement) stable de notre système en boucle fermée. Il sera (localement) asymptotiquement stable si, de plus, le plus grand ensemble invariant sous la dynamique en boucle fermée contenu dans

$$\left\{ x \in \mathcal{X} \mid \frac{\partial^T H_d}{\partial x}(x) R_d(x) \frac{\partial H_d}{\partial x}(x) = 0 \right\}$$

est égal à  $\{x^*\}$ .

Supposons que nous essayons d'abord de stabiliser le système en façonnant uniquement l'hamiltonien sans modifier les matrices d'interconnexion et d'amortissement. L'EDP se réduit alors à

$$\frac{\partial H_a}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial H_a}{\partial p} = 0, \quad -R \frac{\partial H_a}{\partial \varphi} = u(x),$$

ce qui signifie que  $H_a$  ne peut dépendre que de  $\varphi$ . Ainsi, l'hamiltonien en boucle fermée résultant sera de la forme

$$H(q, p, \phi) = mgq + \frac{p^2}{2m} + \frac{(c-q)}{2k} \varphi^2 + H_a(\varphi)$$

## 4.1 Commande IDA-PBC

### 4.1.1 Affectation de l'interconnexion

Même si, avec un choix approprié de  $H_a$ , nous pouvons satisfaire la condition d'affectation à l'équilibre, le hessien de  $H_d$  à  $(q^*, 0, \pm\sqrt{2kmg})$  ne sera jamais défini positif. La source du problème est l'absence d'un couplage efficace entre les sous-systèmes électriques et mécaniques.

Même si, avec une sélection appropriée de  $H_a(\varphi)$ , nous pouvons satisfaire la condition d'affectation d'équilibre (prenons  $x_1 : \varphi$  et  $x_2 : q$ ), la Hessienne sera définie comme

$$\frac{\partial^2 H_d}{\partial x^2}(x) = \begin{bmatrix} \frac{(c-x_2)}{k} + \frac{\partial^2 H_a}{\partial x^2}(x_1) & -\frac{x_1}{k} & 0 \\ -\frac{x_1}{k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

qui est de signe indéfini pour tout  $H_a(x_1)$ . On peut en effet montrer que l'équilibre n'est pas stable.

En effet, la matrice d'interconnexion  $J$  ne couple que la position avec la vitesse. Pour surmonter ce problème, nous proposons d'imposer un couplage entre le flux-liaison  $\varphi$  et la quantité de mouvement  $p$ . Pour cela, nous modifions la structure d'interconnexion pour

$$J_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix},$$

où  $\alpha$  est une constante, de sorte qu'on ait

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_a}{\partial p} &= 0 \\ -\frac{\partial H_a}{\partial q} - \alpha \frac{\partial H_a}{\partial \varphi} &= -\alpha \frac{(1-q)}{k} \varphi, \\ \alpha \frac{\partial H_a}{\partial p} - R \frac{\partial H_a}{\partial \varphi} &= \alpha \frac{p}{m} + u(x). \end{aligned}$$

La troisième équation définit le contrôle, tandis que la seconde peut être résolue avec par exemple

langage de programmation symbolique comme MATLAB pour obtenir :

$$H_a(q, \varphi) = \frac{\varphi^3}{6k\alpha} + \frac{1}{2k}(1-q)\varphi^2 + \Phi\left(q + \frac{\varphi}{\alpha}\right),$$

Or un choix convenable de  $\Phi$  est

$$\Phi\left(q + \frac{\varphi}{\alpha}\right) = mg \left[ -\left(\tilde{q} + \frac{1}{\alpha}\tilde{\varphi}\right) + \frac{b}{2}\left(\tilde{q} + \frac{1}{\alpha}\tilde{\varphi}\right)^2 \right]$$

avec  $\tilde{q} = q - q^*$ ,  $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi^*$  et  $\alpha, b > 0$ .

Nous venons donc de montrer que la loi de contrôle vaut

$$u = \frac{R}{k}(1-q)\varphi - K_p\left(\frac{1}{\alpha}\tilde{\varphi} + \tilde{q}\right) - \frac{\alpha}{m}p - \frac{R}{\alpha}\left(\frac{1}{2k}\varphi^2 - mg\right)$$

stabilise asymptotiquement le point d'équilibre  $x_*$  pour tout  $K_p, \alpha > 0$ , où nous avons défini une nouvelle constante  $K_p$ .

#### 4.1.2 Affectation d'amortissement

Nous pouvons voir que le dernier terme, qui est proportionnel à l'accélération, contient une non-linéarité indésirable qui pourrait saturer l'action de contrôle. Nous proposons donc la matrice d'amortissement ajoutée suivante

$$\mathcal{R}_a = \begin{bmatrix} -R & 0 & 0 \\ 0 & R_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cette loi de contrôle est proposée dans (Rodriguez et al., 2000; Ortega et al., 2001), et s'exprime comme suit,

$$u(t) = -k_p\tilde{q} - \frac{k_p}{\alpha}\tilde{\varphi} - k_v p + \frac{R}{k}[c - q]\varphi$$

Le réglage du gain a été effectué de manière expérimentale avec  $k_p = \frac{b\alpha}{R_a}$  et  $k_v = \left[\frac{\alpha}{m} + k_p R_a\right]$  où  $\alpha, b, R_a > 0$ , et les valeurs suivantes ont été obtenues :  $k_p = 60 \times 10^3 \left[\frac{\text{V}}{\text{m}}\right]$ ,  $k_v = 10 \times 10^3 \left[\frac{\text{V-s}}{\text{kg-m}}\right]$ ,  $\alpha = 2 \left[\frac{\text{Wb}}{\text{m}}\right]$  et  $R_a = 0,1661 \left[\frac{\text{s}}{\text{kg}}\right]$ .

Malaheureusement, nous n'avons pas obtenu le résultat espéré. En effet le système avait une erreur beaucoup trop grande. Après recherche dans la littérature, nous avons trouvé que c'était normal.

En effet, afin de réduire l'erreur en régime permanent que nous avons observée, il est nécessaire d'ajouter un terme intégral.

Nous n'avons malheureusement pas eu le temps de le faire.

## 5 Conclusion

Au cours de ce projet, nous nous sommes fixés pour objectif d'évaluer et de comparer deux méthodes de contrôle couramment utilisées : l'approche classique et l'approche IDA PBC. Toutefois, nous avons rencontré des obstacles lors de l'implémentation de l'approche passive, ce qui a limité notre comparaison. Malgré cela, nous prévoyons de poursuivre nos efforts pour parvenir à une évaluation complète des performances de ces deux contrôleurs. Par ailleurs, bien que nous avions initialement prévu d'intégrer des modèles de machine learning pour renforcer notre analyse, des contraintes de temps nous ont contraints à réorienter notre attention sur la finalisation du projet en cours. Néanmoins, dans le cadre d'un futur stage au sein du laboratoire LAGEPP, nous envisageons de parachever l'approche IDA PBC et d'explorer l'utilisation de réseaux de neurones pour améliorer davantage la comparaison des performances des deux méthodes de contrôle étudiées.

## 6 References

### Références

- [1] Sira-Ramirez. Passivity-Based Control of Euler- Lagrange Systems. Springer-Verlag, Berlin, Communications and Control Engineering, 1998.
- [2] J. L6vine, J. Lottin and J. C. Ponsart. A Nonlinear Approach to the Control of Magnetic Bearings. IEEE nuns. Control Systems Technology 524-544, 1996.
- [3] A. Rundell, S. Drakunov and R. DeCarlo. A Sliding Mode Observer and Controller for Stabilization of Rotational Motion of a Vertical Shaft Magnetic Bearing, IEEE, Tran. Control Systems Technology, Vol. 4, No.5, 598-608, September 1996.
- [4] M. de Queiroz and D. Dawson. Nonlinear Control of Active Magnetic Bearings : A Backstepping Approach, IEEE, Tran. Control Systems Technology, Vol. 4, No.5, 545-552, September 1996.
- [5] R. Ortega, A. van der Schaft, I. Mareels and B. Maschke, Energy Shaping Revisited, International Conference on Control Applications, Anchorage, Alaska, USA, September 2000.
- [6] Thyssen. Technische Berichte, 6. Band, Herft, 1980.
- [7] R. Ortega, A. van der Schaft, B. Maschke and G. Escobar, Stabilization of port-controlled Hamiltonian systems via energy balancing, in Stability and Stabilization of Nonlinear Systems, eds. Dirk Aeyels, Fkanqoise Lamnabhi-Lagarrigue and Arjan van der Schaft, Springer-Verlag, London, 1999.
- [8] David Hill/Jun Zhao (ANU), Robert Gregg (UTDallas) and Romeo Ortega (LSS) 20 Years of Passivity-Based Control (PBC) : Theory and Applications.

## 7 Annexe

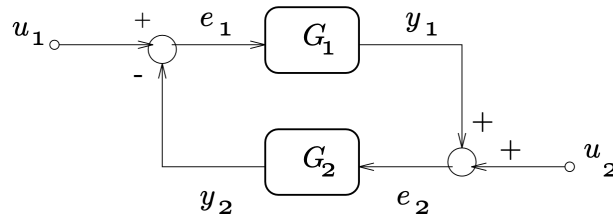


FIGURE 1 – PBC apporte un changement de paradigme dans la conception des contrôleurs

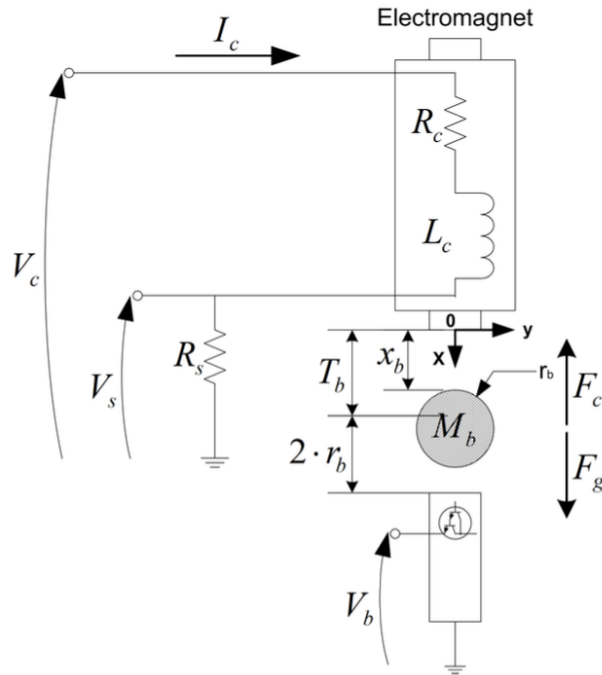


FIGURE 2 – Représentation schématique de notre système

Tableau 1 - Paramètres de notre dispositif, présentés dans le tableau ci-après.

Symbole	Description	Valeur
$L_c$	Inductance de la bobine	412.5mH
$R_c$	Resistence de la bobine	10 $\Omega$
$N_c$	Nombre de spires de la bobine	2450
$l_c$	Longueur de la bobine	0.0825 m
$r_c$	Rayon du noyau	0.008 m
$R_s$	Resistence	1 $\Omega$
$K_m$	Constante liée à la force electromagnetique	6.5308E – 005 N · m <sup>2</sup> /A <sup>2</sup>
$r_b$	Rayon de la balle en acier	1.27E – 002 m
$M_b$	Masse de la balle	0.068 kg
$K_b$	Sensibilité du capteur de position de la balle	2.83E – 003 m/V
$g$	Constante gravitationnelle	9.81 m/s <sup>2</sup>



FIGURE 3 – Maquette du système de lévitation magnétique QUANSER

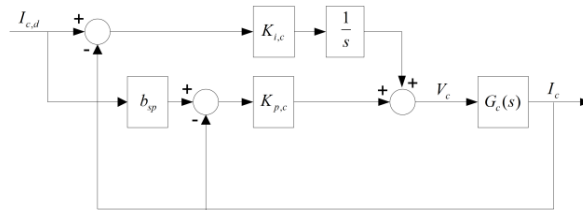


FIGURE 4 – Representation en schema bloc de la BF (courant)

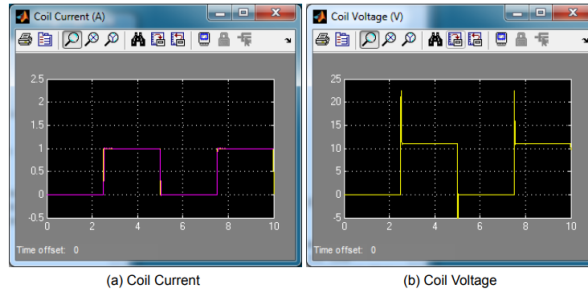


FIGURE 5 – Resultat experimental de la BF (courant)

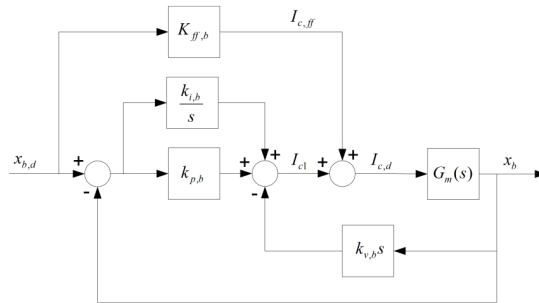


FIGURE 6 – Schema bloc du controleur PIV avec FeedForward pour la position de la balle

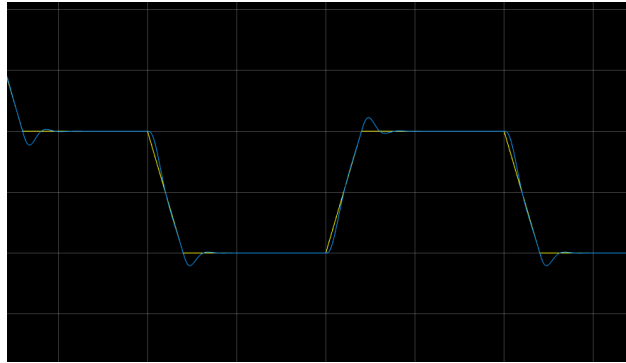


FIGURE 7 – Resultat esperimental de la BF (position)

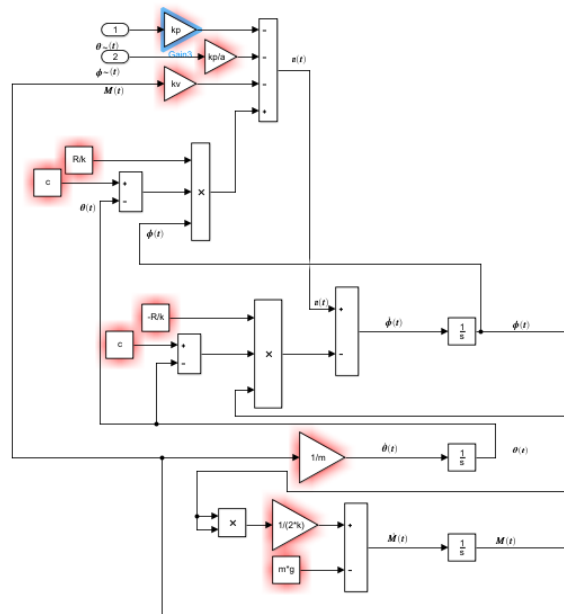


FIGURE 8 – Representation en schema bloc avec le contrôleur IDA-PBC