

# Простые решения уравнения фильтрации

версия 0.2

14 октября 2024 г.

# 1 Уравнение фильтрации

Уравнение фильтрации многофазного потока в пористой среде - основная математическая модель пласта используемая в инженерных приложениях. Используется не само уравнение, а разнообразные частные решения, описывающие те или иные ситуации. Наиболее известным примером решения уравнения фильтрации, возможно, является численное, которое строится трехмерными гидродинамическими симуляторами (eclipse, tnavigator и так далее).

В основе уравнения фильтрации лежат следующие соотношения:

1. закон Дарси:

$$u_r = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr} \quad (1.1)$$

2. уравнение неразрывности:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho u_r)}{\partial r} = -\varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.2)$$

3. уравнение состояния:

$$c_0 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (1.3)$$

Опираясь на эти соотношения уравнение фильтрации в радиальной форме для однофазного слабо сжимаемого флюида можно привести к виду для величин СИ.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\varphi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.4)$$

Здесь используются следующие обозначения

$u_r$  - скорость фильтрации в направлении  $r$ , м/сек

$k$  - проницаемость, м<sup>2</sup>

$\mu$  - вязкость флюида, Па с

$p$  - давление, Па

$r$  - расстояние, м

$\rho$  - плотность флюида, кг/м<sup>3</sup>

$\varphi$  - пористость породы, доли единиц.

$c_t$  - общая сжимаемость породы и флюида, 1/Па

$t$  - время, сек

Закон Дарси



Иногда бывает удобно записать уравнение используя другие единицы измерения, например практические метрические - уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\varphi \mu c_t}{0.00036k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.5)$$

$k$  - проницаемость, мД

$\mu$  - вязкость флюида, сП

$p$  - давление, атм

$r$  - расстояние, м

$\rho$  - плотность флюида, кг/м<sup>3</sup>

$\varphi$  - пористость породы, доли единиц.

$c_t$  - общая сжимаемость породы и флюида, 1/атм

$t$  - время, час

## 1.1 Вывод уравнения фильтрации

Вывод уравнения фильтрации основан на следующих предположениях:

- пласт однородный и изотропный - пористость и проницаемость одинаковы во всем пласте и во всех направлениях и не зависят от давления
- добывающая скважина вскрывает весь продуктивный горизонт и обеспечивает радиальный приток к скважине
- пласт насыщен одним флюидом на всем протяжении
- температура не меняется в пласте, изотермичность

Схема притока приведена на рисунке 1.1.

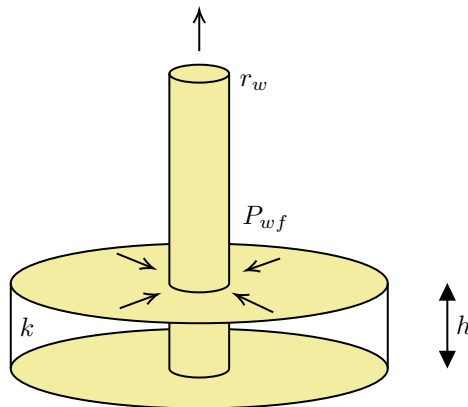


Рис. 1.1: Схема радиального притока к скважине

Используются следующие обозначения параметров:

$h$  - толщина пласта  
 $k$  - средняя проницаемость  
 $r$  - радиус (расстояние от скважины)  
 $r_e$  - внешний радиус зоны дренирования  
 $r_w$  - радиус скважины  
 $p$  - давление  
 $q$  - объемный расход флюида в рабочих условиях - дебит  
 $t$  - время  
 $u_r$  - приведенная скорость  
 $\varphi$  - пористость  
 $\mu$  - вязкость  
 $\rho$  - плотность флюида

### Радиальная модель притока

Уравнение фильтрации или уравнение движения флюидов основывается на законе сохранения массы (уравнение неразрывности) и законе Дарси. Эффекты турбулентности и отклонения потока от Дарси (нелинейная фильтрация) не учитываются. Они важны для газовых скважин и могут быть введены в уравнение фильтрации отдельно.

Закон сохранения массы или принцип неразрывности можно выразить в радиальной форме следующим соотношением

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r \rho u_r)}{\partial r} = -\varphi \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.6)$$

Принцип неразрывности показывает, что для определенного объема пласта, масса флюида которое втекла в контрольный объем пласта минус масса которая вытекла равна массе которая накопилась в объеме.

Сохранение импульса или закон Дарси можно выразить соотношением

$$u_r = -\frac{k}{\mu} \frac{dp}{dr} \quad (1.7)$$

Закон Дарси здесь используется как псевдоустановившаяся аппроксимация обобщенного уравнения сохранения импульса (то есть слагаемым отвечающим за накопление импульса пренебрегаем). Это предположение справедливо если не учитывать возмущения давления в среде двигающиеся со скоростью звука. Все изменения давления описываемые моделью связаны с локальными изменениями градиента давления за счет ламинарного режима потока. Хотя далее в модели будет учтена сжимаемость системы всеми "звуковыми" эффектами в системе мы пренебрегаем.

Поток предполагается горизонтальным, поэтому давление  $p$  может быть использовано в качестве потенциала потока, гравитационными силами пренебрегаем.

Комбинируя уравнения (1.6), (1.7) получим:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \left( \frac{r \rho k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right)}{\partial r} = \varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) – дифференциальное уравнение в частных производных описывающее нестационарный поток однофазного флюида в пористой среде при ламинарном потоке.

Вообще говоря приведенное уравнение является нелинейным, так как плотность  $\rho = \rho(p)$  и вязкость  $\mu = \mu(p)$  являются функциями давления. Уравнение содержит две зависимые переменные - давление  $p$  и плотность  $\rho$ . Поэтому для его решения необходимо задать еще одно соотношение, каковым может быть уравнение состояния флюида связывающее плотность флюида и давление  $\rho = \rho(p)$ .

### Флюид постоянной сжимаемости

Нестационарное поведение давления в пласте связано со сжимаемостью системы. При изменении давления в какой то точке, часть флюида сжимается, происходит накопление или отдача флюида, что вызывает задержку в распространении изменения флюида. Несмотря на то, что сжимаемость флюидов и породы малы и во многих случаях ими можно пренебречь, это не верно для пластовых систем добычи нефти. Большие объемы пласта и флюидов и высокие давления компенсируют малость сжимаемости и требуют ее учета.

Для однофазного флюида разумным является предположение постоянства сжимаемости.

Сжимаемость можно определить как

$$c = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right) \quad (1.9)$$

учтем, что

$$\rho = \frac{m}{V}$$

тогда получим

$$c = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \quad (1.10)$$

Для флюида с постоянной сжимаемостью, проинтегрировав приведенное уравнение можно получить

$$\rho = \rho_i e^{c(p-p_i)}$$

где  $\rho_i$  плотность флюида при некотором заданном давлении  $p_i$

Продифференцировав выражение для плотности по времени получим

$$c\rho \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Подставив это выражение в ранее полученное уравнение фильтрации получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \rho k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \right) = \varphi c \rho \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.11)$$

Приведенное дифференциальное уравнение в частных производных все еще нелинейно, поскольку зависит от плотности  $\rho$

### Общая сжимаемость

Если пористость не является постоянной величиной и меняется с давлением, тогда слагаемое отвечающее за накопление флюида в пласте можно выразить как

$$\frac{\partial \varphi \rho}{\partial t} = \varphi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi c_l \rho \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

где  $c_l$  сжимаемость жидкости.

Определим сжимаемость породы как

$$c_f = \frac{1}{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial p}$$

тогда

$$\frac{\partial \varphi \rho}{\partial t} = \varphi \rho (c_l + c_f) \frac{\partial p}{\partial t}$$

хотя пористость здесь является функцией давления - в первом приближении мы можем считать ее константой равной пористости при некотором среднем давлении в пласте. Это справедливо для маленькой сжимаемости породы, что верно почти всегда.

Уравнение для сжимаемости можно еще уточнить, учтя что в пласте могут находиться различные флюиды - вода и нефть с насыщенностями  $s_w$  и  $s_o$

тогда

$$c_l = s_o c_o + s_w c_w$$

тогда можно ввести общую сжимаемость системы

$$c_t = c_l + c_f = s_o c_o + s_w c_w + c_f \quad (1.12)$$

Заметим, что проницаемость  $k$  в законе Дарси это не абсолютная проницаемость, но относительная проницаемость по нефти при насыщенности водой соответствующей связанной воде.

$$k = k_o(s_{wc})$$

### Линеаризация уравнения фильтрации

Раскрыв производную в левой части уравнения (??) и предположив, что  $\frac{\partial p}{\partial r}$  мало, а следовательно слагаемым  $r\rho c_t \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)^2$  можно пренебречь, получим линеаризованный вид уравнения фильтрации

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\varphi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (1.13)$$

### 1.2 Безразмерные переменные

Часто для анализа уравнений неустановившейся фильтрации используются безразмерные переменные

$$r_D = \frac{r}{r_w}$$

$$t_D = \frac{kt}{\varphi \mu c_t r_w^2}$$

$$p_D = \frac{2\pi kh}{q_s B \mu} (p_i - p_{wf})$$

Здесь использование единицы измерения СИ.  
 $q_s$  - дебит скважины на поверхности, приведенный к нормальным условиям м3/с

$\varphi$  - пористость, доли единиц

$\mu$  - вязкость нефти в пласте, Па с

$B$  - объемный коэффициент нефти, м3/м3

$p_i$  - начальное давление в пласте, Па

$p_{wf}$  - давление забойное, Па

$c_t$  - общая сжимаемость системы в пласте, 1/Па

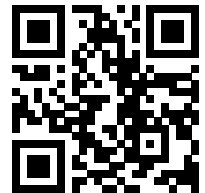
Использование безразмерных переменных позволяет упростить уравнение фильтрации, которое примет вид

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right)$$

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{1}{r_D} \left[ \frac{\partial}{\partial r_D} \left( r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) \right]$$

Решение этого уравнения - функция безразмерного давления от безразмерных времени и расстояния  $p_D(r_D, t_D)$

Обезразмеривание  
на  
[en.wikipedia.org](https://en.wikipedia.org)



Для практических расчетов удобнее бывает использовать безразмерные переменные полученные для практических метрических единиц измерения.

$$r_D = \frac{r}{r_w}$$

$$t_D = \frac{0.00036kt}{\varphi\mu c_t r_w^2}$$

$$p_D = \frac{kh}{18.41q_s B\mu} (p_i - p_{wf})$$

Здесь использование единицы измерения СИ.

$q_s$  - дебит скважины на поверхности, приведенный к нормальным условиям  
м3/сут

$\varphi$  - пористость, доли единиц

$\mu$  - вязкость нефти в пласте, сП

$B$  - объемный коэффициент нефти, м3/м3

$p_i$  - начальное давление в пласте, атм

$p_{wf}$  - давление забойное, атм

$c_t$  - общая сжимаемость системы в пласте, 1/атм

Дополнительно можно ввести безразмерный коэффициент влияния ствола скважины

$$C_D = \frac{0.159}{h\varphi\mu c_t r_w^2} C_s$$

### 1.2.1 Расчет безразмерных переменных в Unifloc VBA

Несмотря на простоту определений безразмерных переменных их часто приходится применять при проведении расчетов. Поэтому в надстройке Unifloc VBA реализован набор функций расчета безразмерных переменных.

Эти функции начинаются с префикса transient\_def.

```
transient_def_cd
transient_def_cs_1atm
transient_def_td
transient_def_t_day
transient_def_pd
transient_def_pwf_atma
```

Описания функций и из аргументов можно найти в руководстве пользователя Unifloc VBA



## 2 Стационарные решения уравнения фильтрации

Широкое распространение на практике получили стационарные решения уравнения фильтрации. Приведем некоторые из них.

### 2.1 Решение для постоянного давления на круговой границе

Рассматривается самая простая модель работы добывающей скважины - радиальная стационарная фильтрация в однородном изотропном пласте круговой формы. Скважина находится в центре пласта (рис. 2.1). На границе пласта поддерживается постоянное давление. Фактически это означает, что через границу пласта идет поток жидкости, уравновешивающий дебит скважины.

Решение можно получить как решения уравнения фильтрации, учитывая стационарность потока

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (2.1)$$

Или можно получить его непосредственно из закона Дарси, который должен быть приведен к радиальной форме и в таком варианте известен как Формула Дюпюи. Для приведенной конфигурации можно записать закон Дарси в форме.

$$u_r = \frac{q}{2\pi r h} = \frac{k}{\mu} \frac{dP}{dr}$$

Проинтегрировав выражение по замкнутому контуру радиуса  $r_e$  вокруг скважины получим выражение известное как формула Дюпюи

$$q = \frac{2\pi k h (P_e - P_w)}{\mu \left( \ln \frac{r_e}{r_w} \right)} \quad (2.2)$$

В приведенном выражения использованы единицы СИ.

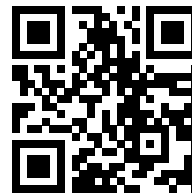
Здесь

$u_r$  - приведенная скорость фильтрации на расстоянии  $r$  от скважины, м/с

$q$  - объемные дебит скважины в рабочих условиях, м<sup>3</sup>/с

$r$  - радиус - расстояние от центра скважины, м

Дюпюи, Жюль



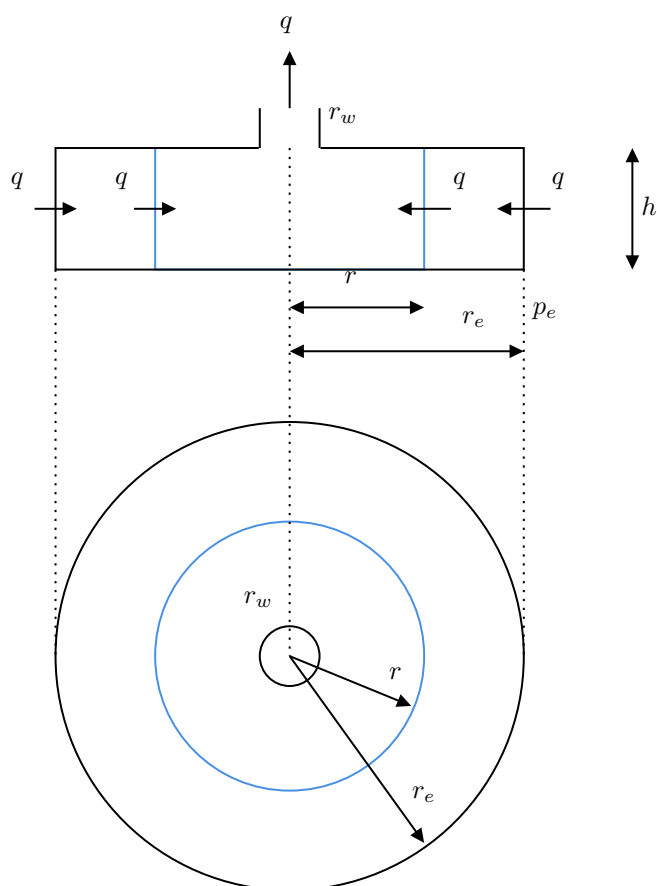


Рис. 2.1: Схема радиального притока к скважине при наличии постоянного давления на границе

$r_e$  - радиус зоны дренирования, на котором поддерживается постоянное давление, м

$r_w$  - радиус скважины, на котором измеряется забойное давление, м

$P$  - давление, Па

$P_e$  - давление на внешнем контуре дренирования, Па

$P_w$  - давление на забое скважины, Па

$k$  - проницаемость, м<sup>2</sup>

$\mu$  - вязкость нефти в зоне дренирования, Па·с

На практике часто бывает удобнее пользоваться значениями в практических метрических единицах измерения.

$$q = \frac{kh (P_e - P_w)}{18.4\mu \left( \ln \frac{r_e}{r_w} \right)} \quad (2.3)$$

где

$q$  - объемные дебит скважины в рабочих условиях, м<sup>3</sup>/сут

$r$  - радиус - расстояние от центра скважины, м

$r_e$  - радиус зоны дренирования, на котором поддерживается постоянное давление, м

$r_w$  - радиус скважины, на котором измеряется забойное давление, м

$P$  - давление, атм

$P_e$  - давление на внешнем контуре дренирования, атм

$P_w$  - давление на забое скважины, атм

$k$  - проницаемость, мД

$\mu$  - вязкость нефти в зоне дренирования, сП

Далее если не указано особо будем использовать практические метрические единицы.

## 2.2 Учет скин-фактора

Скин-фактор — гидродинамический параметр, характеризующий дополнительное фильтрационное сопротивление течению флюидов в околоскважинной зоне пласта, приводящее к изменению добычи (дебита) по сравнению с совершенной (идеальной) скважиной. Скин-фактор может приводить как к снижению дебита (например при загрязнении ПЗС), так и увеличению (образование высокопроводящих каналов в ПЗС).

Концепция скин-фактора получила широкое распространение на практике. Все инженеры-нефтяники знают этот параметр и оперируют им на практике.

Изначально скин-фактор был введен как параметр учитывающий изменение проницаемости (загрязнение) призабойной зоны при расчете производительности скважины. Такое загрязнение может быть вызвано различными причинами:

- проникновением бурового раствора в пласт и блокировкой поровых каналов;
- набуханием глин при контакте с фильтратом бурового раствора;
- химическим осаждением элементов бурового раствора, жидкости глушения или пластовых флюидов в призабойной зоне скважины, например осаждением солей или асфальтенов;
- продвижением песчаных частиц к стволу скважины;
- повреждением породы при перфорации;
- другими причинами.

Для модели загрязненной призабойной зоны величину скин-фактора можно выразить формулой Хокинса [1]. Скин-фактор для плоскорадиального установившегося потока несжимаемой жидкости:

$$S = \left( \frac{k}{k_s} - 1 \right) \ln \frac{r_s}{r_w} \quad (2.4)$$

здесь:

- $k_s$  - проницаемость в загрязненной ПЗП;
- $k$  - однородная проницаемость по всему пласту;
- $r_s$  - радиус загрязненной зоны;
- $r_w$  - радиус скважины.

Концепция скин-фактора оказалась удобной для описания характеристики соединения скважины и пласта и была распространена на другие случаи, когда производительность скважины могла отличаться от производительности идеальной скважины:

- для горизонтальных скважин;
- для скважин вскрывающих пласт под углом;
- для скважин пересеченных трещиной ГРП;
- для скважин вскрытых перфорацией и учета гидравлического сопротивления потока на перфорационных отверстиях;
- другими причинами.

Для многих подобных случаев предположение о радиальном притоке к скважине не верно, но величину скин-фактора используют, так как она позволяет сравнить производительность скважины со сложным заканчиванием с простой вертикальной скважиной. В таких случаях говорят о псевдорадиальном скин-факторе - такой величине скин-фактора  $S$ , которая обеспечила бы такую же производительность для вертикальной скважины полностью вскрывающей пласт.

Для стационарной радиальной модели притока учет скин-фактора приводит к следующим соотношениям:

$$(P_e - P_{wf}) = \frac{18.4\mu q}{kh} \left( \ln \frac{r_e}{r_w} + S \right) \quad (2.5)$$

$$q = \frac{kh (P_e - P_w)}{18.4\mu \left( \ln \frac{r_e}{r_w} + S \right)} \quad (2.6)$$

### 2.3 Производительность скважины

Уравнение производительности скважины можно записать в виде

$$Q = T \Delta P J_D \quad (2.7)$$

где

- $Q$  - дебит жидкости скважины на поверхности, приведенный к стандартным условиям, м<sup>3</sup>/сут.

$$Q = qB$$

- $T$  - параметр зависящий от гидропроводности пласта

$$T = \frac{18.41 \mu B q}{kh} \quad (2.8)$$

- $\Delta P$  - депрессия на пласт, атм

$$\Delta P = (P_e - P_w) \quad (2.9)$$

- $J_D$  - безразмерный коэффициент продуктивности скважины,

$$J_D = \frac{1}{\left( \ln \frac{r_e}{r_w} + S \right)} \quad (2.10)$$

Уравнение (2.7) можно интерпретировать следующим образом. Параметр  $T$  отвечает за свойства пласта и флюида на которые трудно повлиять в ходе эксплуатации. Это то, что дала природа в точке где находится скважина. Депрессия  $\Delta P$  – параметр которым можно управлять в ходе эксплуатации регулируя забойное давление. Например за счет установки насоса и задания параметров его работы. На этом параметре должно быть сосредоточено основное внимание при анализе работы скважины. Параметр  $J_D$  – определяет качество соединения скважины с пластом или качество заканчивания. Его мы можем выбирать при строительстве скважины и можем менять в ходе эксплуатации проводя ГТМ, хотя и достаточно большой ценой. Поскольку мы можем влиять на  $J_D$  важно понимать, какое оптимальное значение продуктивности можно достичь на конкретной скважине и как его можно изменить.

Задачей гидродинамических исследований является установление величин  $T$  и  $J_D$ , хотя традиционно речь ведется об определении проницаемости  $k$  и скин-фактора  $S$ .

### 2.4 Решение для постоянного давления на круговой границе с учетом среднего давления в области дренирования

В приведенное выражение входит значение давления на контуре, которым не всегда бывает удобно пользоваться. В практических случаях значение на контуре трудно оценить, контур зоны дренирования может значительно отличаться

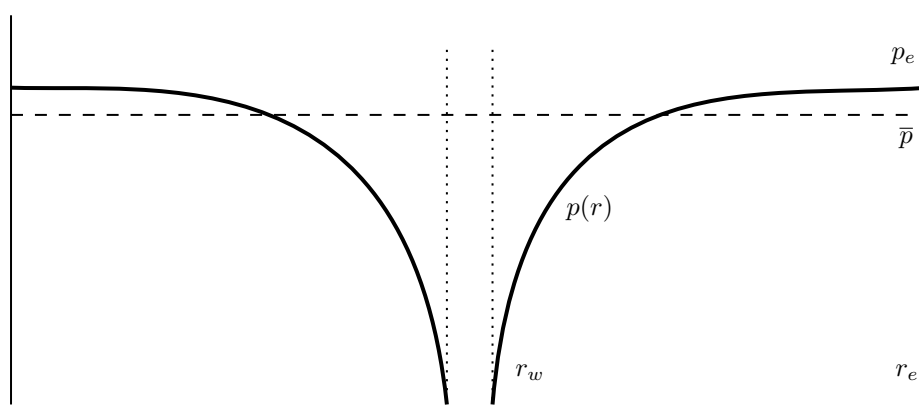


Рис. 2.2: Схема радиального притока к скважине при наличии постоянного давления на границе

от кругового, да и радиус оценить может быть сложно. Удобнее пользоваться средним давлением в зоне дренирования  $\bar{P}$ , которое может быть оценено по материальному балансу (смотри рисунок 2.2).

В этом случае выражение для дебита примет вид

$$q = \frac{kh (\bar{P} - P_w)}{18.41\mu \left( \ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{1}{2} + S \right)}$$

## 2.5 Решение для круговой непроницаемой границы

Схема модели радиального притока для условия непротекания на круговой границе приведена на рисунке 2.3.

При условии непротекания давления на границе условия стационарности (неизменности давления) не достигаются. При работе скважины с постоянным дебитом забойное давление будет постоянно снижаться. Однако начиная с некоторого момента, когда влияние скважины достигнет границ - давление в всей области дренирования начнет снижаться равномерно (смотри рисунок 2.4).

Такой режим, при котором забойное давление меняется, но перепад давления  $P_e - P_w$  остается постоянным называют псевдо-установившимся режимом работы (pss - pseudo steady state).

Для псевдо-установившегося режима можно записать выражение

$$q = \frac{kh (P_e - P_w)}{18.41\mu \left( \ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{1}{2} + S \right)}$$

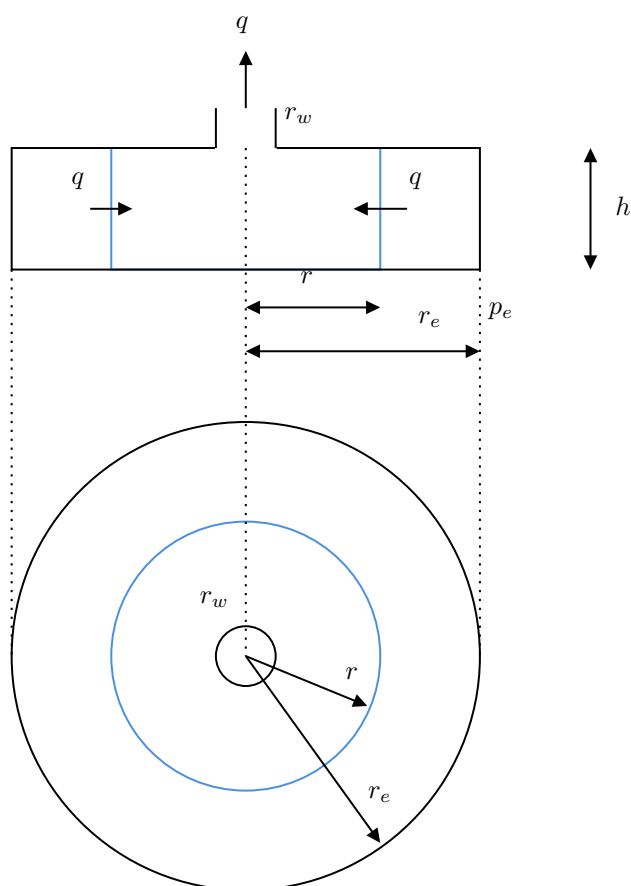


Рис. 2.3: Схема радиального притока к скважине при наличии непроницаемой границы

где

- $q$  - объемные дебит скважины в рабочих условиях, м<sup>3</sup>/сут;
- $r$  - радиус - расстояние от центра скважины, м;
- $r_e$  - радиус зоны дренирования, на котором поддерживается постоянное давление, м;
- $r_w$  - радиус скважины, на котором измеряется забойное давление, м;
- $P$  - давление, атм;
- $P_e$  - давление на внешнем контуре дренирования, атм;
- $P_w$  - давление на забое скважины, атм;
- $k$  - проницаемость, мД;
- $\mu$  - вязкость нефти в зоне дренирования, сП.

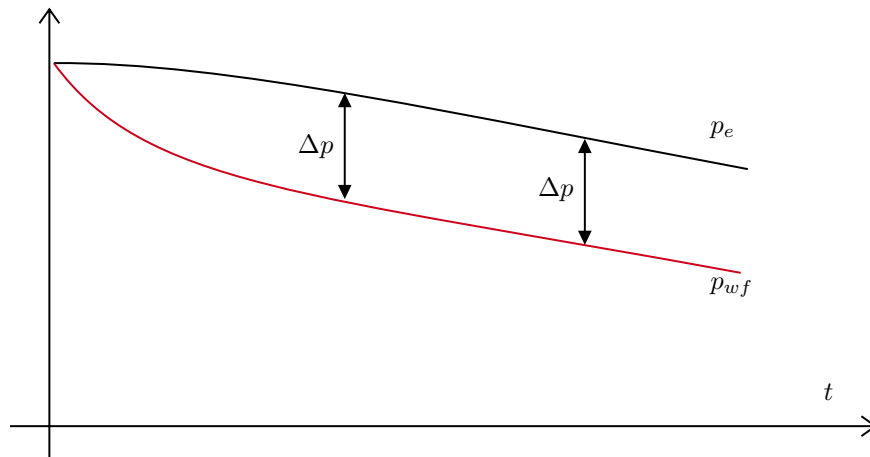


Рис. 2.4: Изменение давления на границе и на забое скважины во времени

### 2.5.1 Решение для круговой непроницаемой границы с учетом среднего давления в зоне дренирования

Аналогично случаю для постоянного давления на границе можно переписать выражение с использованием среднего давления в области дренирования.

$$q = \frac{kh (\bar{P} - P_w)}{18.41\mu \left( \ln \frac{r_e}{r_w} - \frac{3}{4} + S \right)}$$

## 2.6 Стационарные решения для вертикальной скважины в резервуаре произвольной формы

Здесь уравнения и методы расчета для горизонтальных, наклонно направленных скважин, скважин с ГРП, горизонтальных скважин с МГРП.

$$q = \frac{kh (\bar{P} - P_w)}{18.41\mu \left( \ln \frac{2.2458A}{C_A r_w^2} + S \right)} \quad (2.11)$$

$q$  - объемные дебит скважины в рабочих условиях, м<sup>3</sup>/сут;

$A$  - площадь области дренирования, м<sup>2</sup>;

$C_A$  - фактор формы, зависит от формы резервуара и расположения скважины;

$r_w$  - радиус скважины, на котором замеряется забойное давление, м;

$\bar{P}$  - среднее давление в области дренирования, атм;

$P_e$  - давление на внешнем контуре дренирования, атм;

$P_w$  - давление на забое скважины, атм;



$k$  - проницаемость, мД;

$\mu$  - вязкость нефти в зоне дренирования, сП.





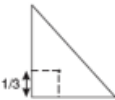

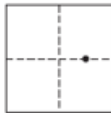
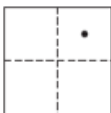
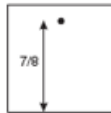


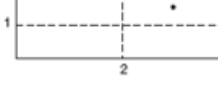

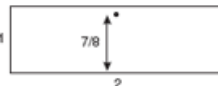
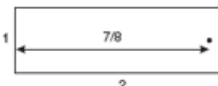
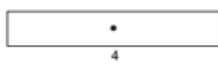
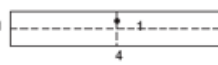
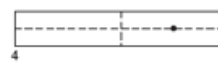
	$C_A$ 31.62 $t_{DAss}$ 0.1		$C_A$ 30.88 $t_{DAss}$ 0.1		$C_A$ 31.6 $t_{DAss}$ 0.1
	$C_A$ 27.6 $t_{DAss}$ 0.2		$C_A$ 21.9 $t_{DAss}$ 0.4		$C_A$ 0.098 $t_{DAss}$ 0.9
	$C_A$ 12.98 $t_{DAss}$ 0.7		$C_A$ 4.51 $t_{DAss}$ 0.6		$C_A$ 3.34 $t_{DAss}$ 0.7
	$C_A = 21.8$ $t_{DAss} = 0.3$		$C_A = 10.8$ $t_{DAss} = 0.4$		$C_A = 2.08$ $t_{DAss} = 1.7$
	$C_A = 4.51$ $t_{DAss} = 1.5$		$C_A = 3.15$ $t_{DAss} = 0.4$		$C_A = 0.58$ $t_{DAss} = 2.0$
	$C_A = 5.38$ $t_{DAss} = 0.8$		$C_A = 2.70$ $t_{DAss} = 0.8$		$C_A = 0.23$ $t_{DAss} = 4.0$

Рис. 2.5: Значения фактора формы

Безразмерное время достижения псевдо-установившегося режима притока, определяемое видом резервуара

$$t_{DAps} = \frac{kt_{ps}}{\varphi\mu c_t A}$$

## 2.7 Стационарные решения для скважины с трещиной ГРП

Для больших времен скважину с трещиной ГРП можно представить как скважину с увеличенным "эффективным радиусом"  $r_{eff}$ , или, что эквивалентно, как

скважину с отрицательным скин-фактором.

$$r_{eff} = r_w e^{-S} \quad (2.12)$$

Это верно, только если  $x_f \ll r_e$

Для трещины бесконечной проводимости

$$r_{eff} = \frac{x_f}{2} \quad (2.13)$$

тогда

$$S = \frac{2r_w}{x_f} \quad (2.14)$$

## 2.8 Формула Дюпюи

Простое решение для задачи стационарного притока к вертикальной скважине в однородном изотропном пласте круговой формы с постоянным давлением на границе имеет вид

$$Q = \frac{kh}{18.41\mu B} \frac{P_{res} - P_{wf}}{\ln \frac{r_e}{r_w} + S} \quad (2.15)$$

где:

-  $Q$  - дебит скважины на поверхности, приведённый к нормальным условиям, ст. м<sup>3</sup>/сут

-  $\mu$  - вязкость нефти в пласте, сП

-  $B$  - объёмный коэффициент нефти, м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>

-  $P_{res}$  - пластовое давление или давление на контуре с радиусом  $r_e$ , атма

-  $P_{wf}$  - давление забойное, атма

-  $k$  - проницаемость, мД

-  $h$  - мощность пласта, м

-  $r_e$  - внешний контур дренирования скважины, м

-  $r_w$  - радиус скважины, м

-  $S$  - скин-фактор скважины, м

Это решение известно как закон Дарси [https://ru.wikipedia.org/wiki/Закон\\_Дарси](https://ru.wikipedia.org/wiki/Закон_Дарси) или формула Дюпюи.

Выражение можно переписать в виде

$$P_r = P_{res} - 18.41 \frac{Q\mu B}{kh} \left[ \ln \frac{r_e}{r} + S \right] \quad (2.16)$$

который удобен для расчёта распределения давления в пласте  $P_r$  на произвольном расстоянии от скважины  $r$ . В выражении (2) задано граничное значение давления  $p_e$  на контуре  $r_e$ . Расчёт позволит найти любое значение внутри контура, в том числе и забойное давление  $P_{wf}$  на  $r = r_w$

Выражение можно переписать

$$P_r = P_{wf} + 18.41 \frac{Q\mu B}{kh} \left[ \ln \frac{r}{r_w} + S \right] \quad (2.17)$$

где по известному дебиту и забойному давлению можно найти давление в пласте. При известном пластовом давлении можно оценить радиус контура на котором оно достигается.

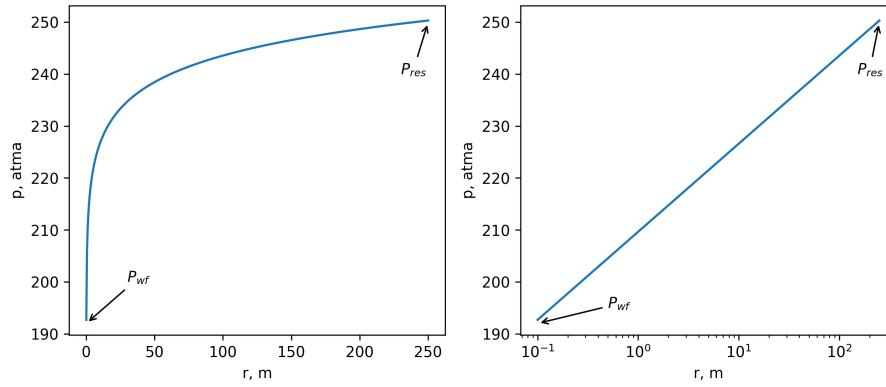


Рис. 2.6: Распределение давления в круговом пласте

### 2.8.1 Формула Дюпюи в декартовых координатах

Для построения карты распределения давлений в пласте полезно вспомнить, что расстояние от скважины с координатами  $(x_{well}, y_{well})$  до произвольной точки пласта с координатами  $(x, y)$  можно найти по формуле

$$r = \sqrt{(x - x_{well})^2 + (y - y_{well})^2}$$

Тогда выражение для расчета давления в любой точке пласта примет вид

$$P_r = P_{res} - 18.41 \frac{Q\mu B}{kh} \left[ \ln \frac{r_e}{\sqrt{(x - x_{well})^2 + (y - y_{well})^2}} + S \right] \quad (2.18)$$

Простой вариант расчета - можно создать пустую матрицу со значениями давления по сетке и перебирая все точки на сетке/матрице рассчитать давления

## 2.9 Суперпозиция для стационарного решения

### 2.9.1 Суперпозиция для нескольких скважин с постоянным дебитом

Для стационарного решения работает принцип суперпозиции - сумма двух решений также будет решением, это позволяет построить карту для нескольких скважин. Давление в любой точке пласта можно найти по формуле

$$P_{res} - P_{x,y} = \sum_i 18.41 \frac{Q_i \mu B}{kh} \left[ \ln \frac{r_e}{\sqrt{(x - x_{w,i})^2 + (y - y_{w,i})^2}} + S \right] \quad (2.19)$$

Выражение справедливо только если  $\sqrt{(x - x_{w,i})^2 + (y - y_{w,i})^2} < r_e$ .

### 2.9.2 Суперпозиция для нескольких скважин с постоянным забойным давлением

При наличии нескольких скважин можно записать выражение для оценки забойных давлений скважин

$$P_{res} - P_{wf,j} = \sum_i 18.41 \frac{Q_i \mu B}{kh} \left[ \ln \frac{r_e}{\sqrt{(x_{w,j} - x_{w,i})^2 + (y_{w,j} - y_{w,i})^2}} + S \right]$$

Если считать забойные давления  $P_{wf,j}$  известными а дебиты скважин  $Q_i$  не известными, тогда выражение (6) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений вида

$$AX = B$$

Где

$$A_{[i,j]} = 18.41 \frac{\mu B}{kh} \left[ \ln \frac{r_e}{\sqrt{(x_{w,j} - x_{w,i})^2 + (y_{w,j} - y_{w,i})^2}} + S \right]$$

$$B_{[j]} = P_{res} - P_{wf,j}$$

такую систему можно решить например с использованием пакета ‘scipy.linalg’

## 2.10 Задания для самостоятельной работы

Для совершенствования навыков работы с python выполните следующие задания:

1. Постройте график распределения давления в пласте для композитного пласта. В композитном пласте на расстоянии  $r < r_1$  проницаемость равна  $k = k_1$ , а для  $r \geq r_1$ ,  $k = k_2$ .

2. Постройте двумерную тепловую или контурную карту распределения давления в пласте для моделей однородного и композитного пласта.

3. Рассчитайте среднюю величину давления в круговой области дренирования для однородного пласта. Насколько среднее давление в круговой области дренирования будет отличаться от давления на контуре. Чему будет равен коэффициент  $S$  в выражении  $Q = \frac{kh}{18.41\mu B} \frac{P_{res} - P_{wf}}{\ln(\frac{r_e}{r_w}) + S}$  при использовании вместо

давления на контуре среднего давления? Постройте график, на котором будет отображаться распределение давления в зоне дренирования и величина среднего давления (в виде линии).

4. Для примера с несколькими скважинами имитирующими трещину ГРП рассчитайте дебиты скважин таким образом, чтобы забойное давление на всех скважинах было одинаковым. Постройте графики распределения давления в пласте. Постройте график дебитов вдоль "скважины".

## 3 Нестационарные решения уравнения фильтрации

Для установившегося режима фильтрации давление в пласте не меняется. Для псевдо-установившегося режима постоянным остается перепад давления между пластом и забоем. После запуска, остановки или изменения режима работы скважины эти условия не выполняются. Давление в различных точках пласта может меняться по-разному. Такой режим называют неустановившимся, а решения его описывающие нестационарными (зависят от времени).

Неустановившиеся решения уравнения фильтрации (transient solutions) представляют значительный практический интерес во многих задачах, включая задачи интерпретации ГДИС. В тоже время они относительно сложны и требуют применения компьютерных алгоритмов. В данном пособии проведение расчетов иллюстрируется с использованием макросов для Excel – Unifloc VBA.

### 3.1 Решение линейного стока

Для решения уравнения фильтрации - линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка необходимо задать начальные и граничные условия.

Самое простое решение можно получить для случая вертикальной скважины бесконечно малого радиуса запускающейся с постоянным дебитом. Условия соответствующие этому случаю можно выразить следующим образом:

- Начальное условие. До запуска скважины в момент времени  $t_D = 0$  давление в пласте равно начальному во всех точках  $p = p_i$

$$t_D < 0, p_D = 0$$

- Граничное условие на скважине. Условие постоянства дебита на скважине можно трансформировать в граничное условие опираясь на закон Дарси.

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = -1$$

- Граничное условие на бесконечном расстоянии от скважины. Давление в пласте на бесконечно большом расстоянии от скважины равно начальному.

$$r_D = \infty, p_D = 0$$

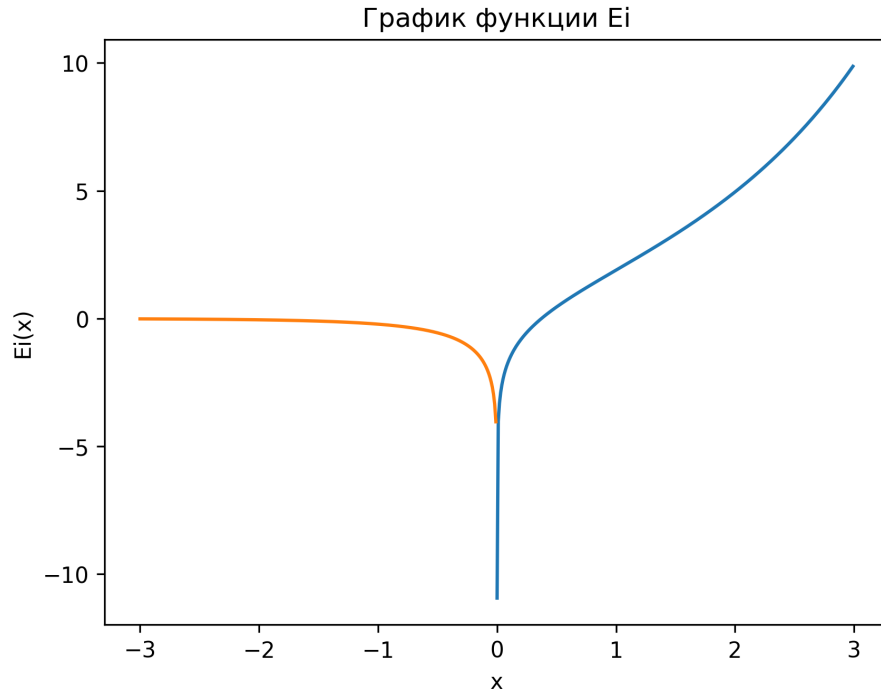


Рис. 3.1: График функции Ei

В этом случае решение может быть выражено через функцию интегральной экспоненты

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{2} Ei \left( -\frac{r_D^2}{4t_d} \right) \quad (3.1)$$

где  $-Ei(-x)$  - интегральная показательная функция, рисунок 3.1.

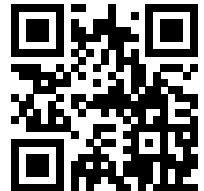
$$Ei(x) = - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

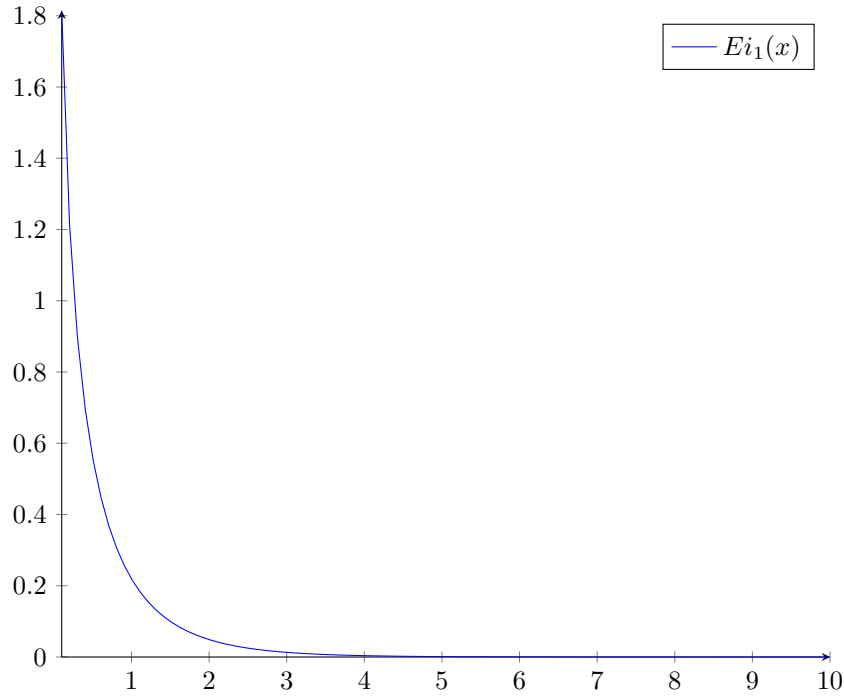
Часто для проведения расчетов, особенно с использованием компьютерных библиотек расчетов, бывает удобнее пользоваться модифицированной интегральной показательной функцией  $Ei_1(x)$  или  $E_1(x)$  или  $Ei_n(x)$  при  $n = 1$ .

$$Ei_n(x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-tx}}{t^n} dt$$

График интегральной показательной функции  $Ei_1(x)$  приведен на рисунке 3.2. Для вещественных положительных  $x \in \mathbb{R}, x > 0$  верно  $E_1(x) = -Ei(-x)$

*Ei(x)*  
Wolfram Alpha




 Рис. 3.2: График функции интегральной экспоненты  $Ei_1(x)$ .

Функцию интегральной экспоненты можно представить в виде ряда.

$$Ei(x) = - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = \gamma + \ln | -x | + \sum_{n \geq 1} \frac{-x^n}{n! \cdot n}, \quad x \in \mathbb{R},$$

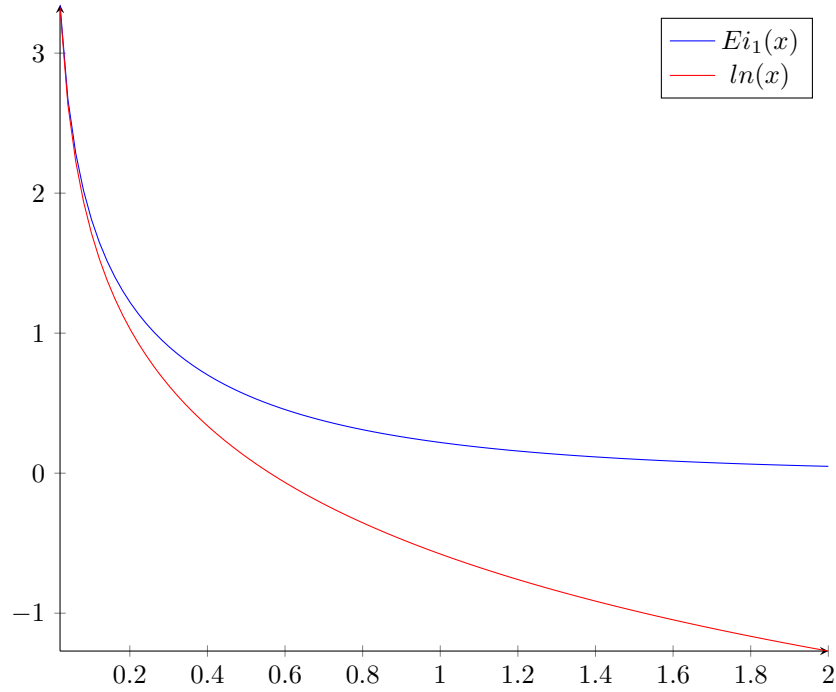
Из приведенного выражения можно сделать выводы, что для маленьких значений аргумента функция интегральной экспоненты  $E_1(x)$  может быть аппроксимирована логарифмической зависимостью.

$$E_1(x) = -\ln(x) - \gamma$$

График сравнения функций  $E_1(x)$  и  $\ln(x)$  показан на рисунке 3.3. Видно, что хорошей аппроксимация будет только для маленьких значений аргумента  $x < 0.01$ . Но для решения уравнения фильтрации именно эта зона представляет наибольший интерес.

Представление интегральной экспоненты в виде логарифмической аппроксимации удобно на практике, так как логарифм легче вычислять. В большинстве языков программирования и инструментов для проведения расчетов расчет логарифма реализован по умолчанию. А для расчета интегральной экспоненты, часто приходится предпринимать дополнительные шаги.




 Рис. 3.3: Сравнение функций интегральной экспоненты  $E_1(x)$  и  $\ln(x)$ .

Решение уравнения фильтрации для линейного стока с учетом логарифмической аппроксимации можно представить в виде

$$p_D(r_D, t_D) = \frac{1}{2} \left( \ln \left( \frac{t_D}{r_D^2} \right) + 0.809 \right) \quad (3.2)$$

при использовании данного уравнения, следует помнить, что приближенное решение применимо при  $\frac{r_D^2}{4t_D} < 0.01$

Решение линейного стока в размерных переменных

$$p(r, t) = p_i - \frac{18.41q_s B \mu}{kh} \left( -\frac{1}{2} Ei \left( -\frac{\varphi \mu c_t r^2}{0.00144 kt} \right) \right) \quad (3.3)$$

Решение с учетом логарифмической аппроксимации в размерных переменных

$$p(r, t) = p_i - \frac{9.205q_s B \mu}{kh} \left( \ln \frac{kt}{\varphi \mu c_t r^2} - 7.12 \right) \quad (3.4)$$

верно при

$$\frac{kt}{\varphi \mu c_t r^2} > 70000$$

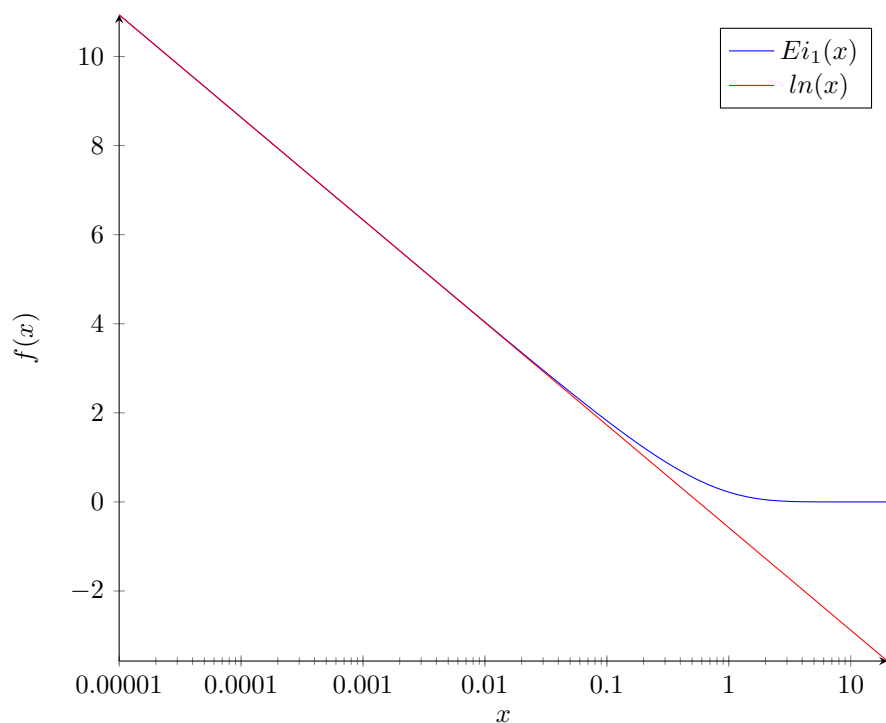


Рис. 3.4: Сравнение функций интегральной экспоненты  $E_1(x)$  и  $\ln(x)$  в логарифмическом масштабе. Можно оценить диапазон применимости логарифмической аппроксимации.

Решения приведены для практических метрических единиц измерения, что можно увидеть по размерному коэффициенту.

Нестационарное решение с учетом скин-фактора будет иметь вид

$$P(r, t) = P_i - \frac{9.205 q_s B \mu}{k h} \left( \ln \frac{kt}{\varphi \mu c_t r^2} - 7.12 + 2S \right) \quad (3.5)$$

### Расчет в Unifloc VBA

Следующие функции реализованы в Unifloc VBA

Ei  
E\_1

Описания функций и их аргументов можно найти в руководстве пользователя Unifloc VBA

### 3.2 Радиус влияния скважины

Нестационарное решение в безразмерных переменных

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{1}{2} Ei \left( -\frac{r_D^2}{4t_D} \right)$$

где безразмерные переменные введены как

$$r_D = \frac{r}{r_w}$$

$$t_D = \frac{0.00036kt}{\varphi \mu c_t r_w^2}$$

$$p_D = \frac{kh}{18.41q_s B \mu} (p_i - p)$$

Здесь использование единицы измерения СИ. -  $r_w$  - радиус скважины, м  
 -  $r$  - расстояние от центра скважины до точки в пласте, м  
 -  $q_s$  - дебит скважины на поверхности, приведенный к нормальным условиям  
 м<sup>3</sup>/сут

- $\varphi$  - пористость, доли единиц
- $\mu$  - вязкость нефти в пласте, сП
- $B$  - объемный коэффициент нефти, м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>
- $p_i$  - начальное давление в пласте, атм
- $p$  - давление на расстоянии  $r$ , атм
- $c_t$  - общая сжимаемость системы в пласте, 1/атм

Для этих же безразмерных переменных, считая начальное давление равным давлению на контуре можно записать стационарное решение для движения в круговом пласте

$$p_D = \ln r_{eD} - \ln r_D$$

сравним это решение с логарифмической аппроксимацией (1)

$$p_D(r_D, t_D) = -\frac{q_D}{2} \left[ \ln \left( \frac{r_D^2}{4t_D} \right) + \gamma \right]$$

которое можно преобразовать к виду

$$p_D(r_D, t_D) = -q_D \ln r_D + \frac{q_D}{2} [\ln(4t_D) - \gamma]$$

сравнивая со стационарным решением можно найти выражение безразмерного радиуса контура в зависимости от безразмерного времени

$$\ln r_{eD} = \frac{1}{2} (\ln(4t_D) - \gamma)$$

$$r_{eD} = \sqrt{4t_D e^{-\gamma}}$$

наконец получим

$$r_{eD} = \sqrt{2.2458t_D}$$

это значение называют радиусом влияния скважины. Используя это значение для определенного момента времени можно получить стационарное распределение давления в системе хорошо приближающее решение линейного стока работающего в бесконечном пласте. Можно считать это расстояние на которое распространяется влияние скважины.

достижение радиуса влияния внешних границ будет обуславливать начало перехода от неустановившегося режима фильтрации к режиму обусловленному влиянием границ - стационарному для границы постоянного давления или псевдо установившемуся для непроницаемой границы.

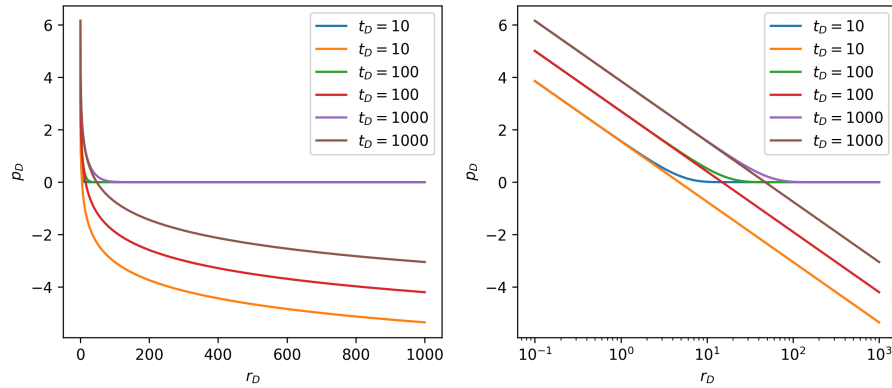


Рис. 3.5: Изменение радиуса влияния скважины со временем. Сравнение стационарного и нестационарного решений

### 3.3 Решение для конечного радиуса скважины

Для получения сложных решений уравнения фильтрации часто используется преобразование Лапласа.

$$L[f(t)] = \tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

где  $s$  параметр пространства Лапласа соответствующий времени

Решение для бесконечно малого радиуса скважины в пространстве Лапласа будет иметь вид

$$\tilde{p}_D(s) = \frac{1}{s} K_0(r_D \sqrt{s}) \quad (3.6)$$

решение для конечного радиуса скважины [2]

преобразование  
Лапласа



$$\tilde{p}_D(s) = \frac{K_0(r_D \sqrt{s})}{s \sqrt{s} K_1(\sqrt{s})} \quad (3.7)$$

где

$K_0, K_1$  - модифицированные функции Бесселя;

$s$  - переменная пространства Лапласа;

$\tilde{p}_D(s)$  - изображение функции  $p_D$  в пространстве Лапласа;

$r_D$  - безразмерный радиус скважины.

модифицированные  
функции  
Бесселя



Перевод решения из пространства Лапласа в обычное пространство не всегда возможен аналитически. В современных условиях перевод делается численно с использованием компьютеров, что позволяет строить и исследования решения уравнения фильтрации при различных условиях.

Широко распространено применения алгоритма Стефеста для численного обратного преобразования Лапласа.

#### Расчет в Unifloc VBA

Следующие функции реализованы в Unifloc VBA

```
transient_pd_radial
transient_pwf_radial_atma
```

Описания функций и из аргументов можно найти в руководстве пользователя Unifloc VBA

### 3.4 Учет влияния ствола скважины

Часто управление дебитом скважины производится на поверхности – за счет регулировки на скважинной арматуре. При этом, например, перекрытие потока на скважинной арматуре не сразу приведет к прекращению притока из пласта на забое скважины. Для скважины оснащенной насосом со свободным динамическим уровнем приток из пласта будет продолжаться пока не заполнится затрубное пространство скважины. Для фонтанирующей скважины с пакером тот же эффект, хотя и заметно менее выраженный будет наблюдаться из за высокой сжимаемость газожидкостной смеси в стволе скважины.

Эффект различия скоростей изменения дебита жидкости на устье и забое называют эффектом влияния ствола скважины или эффектом послепритока (wellbore storage). Он часто встречается, оказывает большое влияние на качество исследования и обязательно должен учитываться при интерпретации и моделировании исследований.

Простейший вариант учета эффекта послепритока описывается с использованием постоянного коэффициента послепритока или коэффициента влияния ствола скважины  $C_s$ , определяющего "сжимаемость" жидкости в стволе скважины.

$$C_s = -\frac{\Delta V}{\Delta p}$$

Для фонтанирующей скважины:

Изменение объема жидкости в стволе скважины происходит за счет сжимаемости жидкости:

$$\Delta V = -cV_w \Delta P$$

$$C_s = -\frac{\Delta V}{\Delta p}$$

Для фонтанирующей скважины, коэффициент ствола скважины:

$$C_s = cV_w$$

$V_w$  - объем жидкости в стволе скважины [м<sup>3</sup>]  $c$  - сжимаемость жидкости или газожидкостной смеси в стволе скважины [1/атм]

Влияние ствола в механизированной скважине:

$$C_s = -\frac{\Delta V}{\Delta p}$$

$$\Delta V = A_{cas} \Delta h$$

$$\Delta P = \rho g \Delta h$$

$$C_s = \frac{A_{cas}}{\Delta p}$$

$A_{cas}$  - площадь поперечного сечения затрубного пространства, [м<sup>2</sup>]

$\Delta h$  - изменение уровня жидкости в затрубном пространстве, [ м ]

Решение уравнения фильтрации с учетом скин-фактор и послепритока Для решения линейного стока граничное условие соответствующее послепритоку с постоянным  $C_s$  можно записать как

$$\lim_{r_D \rightarrow 0} r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = -1 + C_D \frac{\partial p_D}{\partial t_D} \Big|_{t_D=1}$$

Предположим, что у нас имеется решение задачи запуска скважины с постоянным дебитом в пространстве Лапласа без учета скин-фактора и послепритока  $\tilde{p}_D^*$ . Где  $s$  параметр пространства Лапласа соответствующий  $t_D$ .

Например для бесконечного пласта и скважины нулевого радиуса такое решение имеет вид:

$$\tilde{p}_D^*(s) = \frac{1}{s} K_0(r_D \sqrt{s})$$

Тогда решение с учетом скин-фактора и послепритока может быть выражено

$$\tilde{p}_D(s) = \frac{s\tilde{p}_D^* + S}{s(1 + sC_D(s\tilde{p}_D^* + S))}$$

### 3.5 Суперпозиция для нестационарных решений

Большинство моделей используемых при интерпретации ГДИС основаны на линеаризованном дифференциальном уравнении в частных производных - уравнении фильтрации (уравнении пьезопроводности или диффузии).

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\varphi \mu c_t}{k} \frac{\partial p}{\partial t}$$

Для линейных уравнений справедлив принцип суперпозиции - линейная комбинация решений также является решением. То есть если  $f(t, r)$  и  $g(t, r)$  являются решениями, то  $\alpha f(t, r) + \beta g(t, r)$  также является решением.

Это позволяет строить сложные решения уравнения фильтрации на основе простых.

#### 3.5.1 Расчет кривой восстановления давления

Один из самых простых примеров применения суперпозиции. Предположим, что добывающая скважина в однородном изотропном пласте запускается в момент времени  $t = 0$  и работает  $t_p$  часов, после чего останавливается. После остановки скважины забойное давление растет - и мы получим кривую восстановления давления.

Пусть решение задачи запуска скважины (падения давления) будет  $P_D(t_D, r_D)$ . Тогда решение для изменения давления при запуске и последующей остановки скважины можно представить в виде

$$P_{bu.D}(t_D, t_{prod.D}, r_D) = P_D(t_D) - P_D(t_D - t_{prod.D}, r_D) \cdot \mathcal{H}(t_D - t_{prod.D}) \quad (3.8)$$

где

-  $t_D$  - безразмерное время после запуска скважины,

-  $t_{prod.D}$  - безразмерное время работы скважины после запуска

-  $\mathcal{H}$  - ступенчатая функция Хевисайда [https://ru.wikipedia.org/wiki/Функция\\_Хевисайда](https://ru.wikipedia.org/wiki/Функция_Хевисайда) (в некоторых книгах обозначается как  $\theta$ )

-  $P_D(t_D, r_D)$  - безразмерное давление - решение задачи запуска скважины (падения давления)

-  $P_{bu.D}(t_D, t_{prod.D}, r_D)$  - безразмерное давление- решение задачи запуска и последующей остановки скважины

Для проведения векторных расчетов в python удобно выражение с использованием функции Хевисайда

$$\mathcal{H} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Применение функции Хевисайда позволяет избежать в расчетных функциях условных операторов в явном виде для отдельных элементов входных массивов. Это потенциально ускоряет расчет.

### Решение для остановки скважины (КВД)

Для наших целей определим принцип суперпозиции следующим образом: перепад давления в любых точках пласта определяется как сумма перепадов давлений в этих точках, вызванных работой отдельных скважин на залежи.

Пусть известно решение уравнения фильтрации для запуска скважины с постоянным дебитом в невозмущенном пласте  $p(t)$ .

Известно, что скважина запустилась с дебитом  $q$  на период времени  $t_p$  и потом остановилась. Требуется найти зависимость изменения давления в скважине после остановки.

$$p_D^{bu}(\Delta t) = p_D(t_p + \Delta t) - p_D(\Delta t)$$

при  $\Delta t > 0$

Пример 1.

Рассмотрим случай, когда добывающая скважина работает в различные периоды времени при некоторых постоянных дебитах, как показано на рисунке.

Итак, рассматривается скважина, работающая с постоянным дебитом  $q_1$  в интервале времени от 0 до  $t_1$ , затем в момент времени  $t_1$  дебит изменился и стал равным  $q_2$ , а при времени  $t_2$  дебит вновь изменился и стал равным  $q_3$ .

Наша задача состоит в определении функции давления на стенке скважины в период времени  $t > t_2$ .

Для решения этой задачи так же, как и ранее, применим метод суперпозиции, но не в виде учета интерференции соседних скважин, а в виде суммирования дополнительных перепадов давления в самой рассматриваемой скважине:

То есть рассматривается работа нескольких скважин, находящихся в одной точке, но запущенных в работу в разное время. Решение получено для начального дебита  $q_1$ , за полученное время  $t_n$ . В момент времени  $t_1$  запускается в работу новая скважина с точным известным месторасположением и начальным дебитом  $(q_2 - q_1)$ , так, что чистый дебит скважины после времени  $t_1$  будет равен  $q_2$ . В момент времени  $t_2$  запускается в работу новая скважина с точным известным месторасположением и начальным дебитом  $(q_3 - q_2)$ , который превращается в дебит  $q_3$  после времени  $t_2$  ... и т. д.

Общее снижение давления в скважине определится с учетом двух изменений дебита притока как:

$$\begin{aligned} (P - P_c) &= (\Delta P)_1 + (\Delta P)_2 + (\Delta P)_3 = \\ &= -\frac{q_1 \mu}{4\pi k h} \left( \ln \frac{1,78 \mu m c_t r_c^2}{k t} - 2S \right) - \\ &\quad - \frac{(q_2 - q_1) \mu}{4\pi k h} \left( \ln \frac{1,78 \mu m c_t r_c^2}{k (t - t_1)} - 2S \right) - \\ &\quad - \frac{(q_3 - q_2) \mu}{4\pi k h} \left( \ln \frac{1,78 \mu m c_t r_c^2}{k (t - t_2)} - 2S \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$



### 3.5.2 Решение для произвольной истории дебитов (ступенчатое изменение дебита)

Для расчета изменения давления при переменном дебите введем произвольное референсное значение дебита  $q_{ref}$  (например первое не нулевое значение дебита при запуске скважины). Используем это значение для определения безразмерного давления.

$$p_D = \frac{kh}{18.41 q_{ref} B \mu} (p_i - p)$$

и безразмерного дебита

$$q_D = \frac{q}{q_{ref}}$$

Тогда, используя принцип суперпозиции, можем выписать выражение для изменения давления на скважине и вокруг нее для произвольного момента времени

$$P_{mr.D}(t_D, r_D) = \sum_i [q_{D(i)} - q_{D(i-1)}] \cdot p_D(t_D - t_{D(i)}, r_D) \cdot \mathcal{H}(t_D - t_{D(i)}) \quad (7)$$

где

- $i$  - индекс значения дебита в таблице изменения дебитов
- $q_{D(i)}$  - безразмерный дебит с номером  $i$ , который стартует в момент времени  $t_i$ . Для первого момента времени  $i$  дебит следующий перед ним считается равным нулю
- $t_{D(i)}$  - безразмерный момент времени - включения дебита с номером  $i$
- $t_D$  - безразмерный момент времени для которого проводится расчет
- $\mathcal{H}$  - ступенчатая функция Хевисайда
- $p_D(t)$  - зависимость безразмерного давления от времени - решение задачи запуска скважины с постоянным единичным дебитом
- $P_{mr.D}$  - безразмерное давление  $P_{mr.D}(t_D, r_D)$  учитывающее историю изменения дебитов скважины

### 3.5.3 Случай для произвольной истории дебитов (линейное изменение дебита)

для линейно меняющегося дебита  $dq_D t_D$  решение можно представить как интеграл

$$p_D = \int_0^{t_D} -\frac{dq_D}{2} Ei \left( -\frac{r_D^2}{4t_D} \right) dt_D$$

Для линейно меняющегося дебита во времени (как и для любой другой зависимости) надо решение проинтегрировать по времени (надо бы подробнее расписать - сделать это позже, например как у Щелкачева в основах нестационарной фильтрации на стр 321).

Для линейной зависимости дебита от времени

$$Q_D = dQ_D \cdot t_D$$

можно получить выражение

$$p_D(r_D, t_D, dQ_D) = -\frac{dQ_D t_D}{2} \left[ \left( 1 + \frac{r_D^2}{4t_D} \right) Ei \left( -\frac{r_D^2}{4t_D} \right) + e^{-\frac{r_D^2}{4t_D}} \right]$$

где  $dQ_D$  - скорость изменения дебита.

Для таблично заданных дебитов и времен можно оценить

$$dQ_{D(i)} = \frac{Q_{D(i)} - Q_{D(i-1)}}{t_{D(i)} - t_{D(i-1)}}$$

Сравните формулу (11) с формулой (9.68) в книге Щелкачева "Основы неуставившейся фильтрации"

Тогда, используя принцип суперпозиции, можем выписать выражение для изменения давления на скважине и вокруг нее для произвольного момента времени

$$P_{mr.D}(t_D, r_D) = \sum_i p_D(t_D - t_{D(i)}, r_D, dQ_{D(i+1)} - dQ_{D(i)}) \cdot \mathcal{H}(t_D - t_{D(i)})$$

где

- $i$  - индекс значения дебита в таблице изменения дебитов
- $dQ_{D(i)}$  - изменение безразмерного дебита относительно безразмерного времени (14.4)
- $t_{D(i)}$  - безразмерный момент времени - включения дебита с номером  $i$
- $t_D$  - безразмерный момент времени для которого проводится расчет
- $\mathcal{H}$  - ступенчатая функция Хевисайда
- $p_D(t)$  - зависимость безразмерного давления от времени - решение задачи запуска скважины с постоянным единичным дебитом
- $P_{mr.D}$  - безразмерное давление  $P_{mr.D}(t_D, r_D)$  учитывающее историю изменения дебитов скважины

следует обратить внимание, при суперпозиции скорость изменения дебита вычисляется как  $dQ_{D(i+1)} - dQ_{D(i)}$ . при реализации расчета необходимо предусмотреть, чтобы для первого и последнего шага расчет прошел корректно. Для этого можно, например, добавить к массивам дебитов и времени дополнительные значения в начале и в конце массивов соответствующие постоянным значениям дебита.

Также надо учитывать, что в приведенном выражении массивы должны начинаться со значений  $Q_D = 0$

### 3.5.4 Решение для скважины в пласте с непроницаемой границей

надо добавить мнимую скважину

Пусть скважина, представленная на рисунке, находится на расстоянии  $L$  от прямолинейной непроницаемой границы, через которую отсутствует поток жидкости.

Математическая задача о работе скважины, находящейся на каком-то расстоянии  $L$  от непроницаемой прямолинейной границы, может быть рассмотрена как работа двух скважин - данной и воображаемой, в данной случае добывающей, находящейся на расстоянии  $2L$  от рассматриваемой. Воображаемая скважина работает с той же производительностью, что и фактическая скважина. Рассмотрение работы двухскважинной системы как аналога работы одной скважины с границей в пласте базируется на том, что равновесие двух рядом находящихся одинаково работающих скважин может наступить только при условии, что через линию, проходящую между скважинами и равноотстоящую от них, нет потока (то есть, градиент давления вдоль этой линии равен нулю). Таким образом можно записать работу двух скважин в бесконечном пласте в виде:

$$P - P_c = -\frac{q_A \mu}{4\pi k h} \left( \ln \frac{1,67 \mu m c_t r_c^2}{k t} - 2S \right) - \frac{q_B \mu}{4\pi k h} Ei \left( \frac{1,78 \mu c_t m (2L)^2}{4 k t} \right)$$

Здесь также можно отметить, что в воображаемой скважине не принят во внимание скин - фактор, так как рассматривается влияние этой скважины на работу фактической скважины, находящийся на большем расстоянии от нее.

Решение для скважины в пласте с границей постоянного давления Тут тоже надо добавить мнимую скважину и описать пример построения решения

### 3.5.5 Другие применения принципа суперпозиции

также можно добавить ряд других примеров

## Список литературы

1. *Hawkins M. F.* A Note on the Skin Effect // Journal of Petroleum Technology. — 1956. — DOI: <https://doi.org/10.2118/732-G>.
2. *Everdingen A. F. V., Hurst W.* The Application of the Laplace Transformation to Flow Problems in Reservoirs // Journal of Petroleum Technology. — 1949. — DOI: <https://doi.org/10.2118/949305-G>.

# Приложение 1. Преобразование размерных величин

1 октября 2024 г.

## 1 Примеры преобразования размерных величин

Преобразования размерных величин удобно выполнять с модулем символьных вычислений `python-sympy`. Преобразования размерностей ключевых величин полезно знать наизусть, хотя всегда можно найти их в таблицах. Значения многих физических констант зашинены в модуле `scipy.constants`, иногда это оказывается удобным, при этом автоматически будет учитываться достаточно большое количество знаков после запятой в константах. Рассмотрим размерности ряда величин широко применяемых в нефтяном инжиниринге.

```
[29]: import sympy as sp
import scipy.constants as const
```

```
[30]: # в модуле scipy.constants есть значения общепринятых констант
      ↪ -например значение pi
print(const.pi)
```

3.141592653589793

### 1.1 Объемный расход $q$

В СИ измеряется в  $[м^3/сек]$ , в практических метрических единицах измеряется в  $[м^3/сут]$ , в американских промысловых единицах измеряется в  $[bbl/day]$ .

- $1 [м^3/сек] = 543439 [bbl/day] = 86400 [м^3/сут]$
- $1 [м^3/сут] = \frac{1}{86400} [м^3/сек] = 1.157407 \cdot 10^{-5} [м^3/сек]$
- $1 [bbl/day] = 0.15898 [м^3/сут]$

```
[8]: # выведем некоторые переводные коэффициенты для объемных расходов
print(f'Одни [сут] = {24*60*60} = {const.day} [сек]')
print(f'Один [м3/сут] = {1/const.day} [м3/сек]')
print(f'Один баррель в день [bbl/day] = {const.bbl} [м3/сут]')
print(f'Один баррель в день [bbl/day] = {const.bbl/const.day} [м3/сек]')
print(f'Один [м3/сут] = {1/const.day} [м3/сек]')
```

Одни [сут] = 86400 = 86400.0 [сек]

Один [м3/сут] = 1.1574074074074073e-05 [м3/сек]

Один баррель в день [bbl/day] = 0.15898729492799998 [м3/сут]

Один баррель в день [bbl/day] = 1.8401307283333331e-06 [м<sup>3</sup>/сек]  
Один [м<sup>3</sup>/сут] = 1.1574074074074073e-05 [м<sup>3</sup>/сек]

## 1.2 Проницаемость $k$

В СИ измеряется в [м<sup>2</sup>], в практических метрических единицах измеряется в [мД], в американских промышленных единицах измеряется в [mD].

Определение: в пористой среде с проницаемостью в один Дарси для поддержания течения жидкости с динамической вязкостью 1 сП со скоростью фильтрации 1 см/с необходимо поддерживать перепад давления жидкости приблизительно в одну атмосферу на 1 см вдоль направления течения. При использовании физической атмосферы для расчета перепада давления (физическая атмосфера = 101 325 Па) единица проницаемости равняется приблизительно 0.986923 мкм<sup>2</sup>.

В отечественной литературе при определении дарси в качестве величины атмосферы было принято использовать техническую атмосферу (1 кгс/см<sup>2</sup> = 98 066,5 Па), так что для величины дарси получалось значение приблизительно 1,02 мкм<sup>2</sup>, причём эпизодические случаи использования западного определения дарси специально отмечались [ru.wikipedia.org/wiki/Дарси]. Согласно ГОСТ 26450.2-85 величины 1 Дарси =  $0.9869 \cdot 10^{-12}$  м<sup>2</sup>.

- 1 [м<sup>2</sup>] =  $1.01325 \cdot 10^{15}$  [мД]
- 1 [мД] =  $0.986923 \cdot 10^{-15}$  [м<sup>2</sup>]

```
[9]: print(f'Один [мД] = {1e5/const.atm * 1e-15} [м²]')
```

Один [мД] = 9.86923266716013e-16 [м<sup>2</sup>]

## 1.3 Вязкость $\mu$

- 1 [Па·с] = 1000 [сП]
- 1 [сП] =  $10^{-3}$  [Па·с]

## 1.4 Давление $p$

- 1 [Па] = 0.0001450 [psi] = 0.00000987 [атм]
- 1 [атм] = 14.6959 [psi] = 101325 [Па]

```
[5]: AT = 98066.5 # technical atmosphere in Pa, техническая атмосфера в
    ↪ Па
print(f'Один [psi] в [Па] = {const.psi}')
print(f'Один [bar] в [Па] = {const.bar}')
print(f'Один [atm] в [Па] = {const.atm}')
print(f'Один [at] в [Па] = {AT}')
print(f'Один [atm] в [psi] = {const.atm/const.psi}')
```

Один [psi] в [Па] = 6894.757293168361

Один [bar] в [Па] = 100000.0

Один [atm] в [Па] = 101325.0

Один [at] в [Па] = 98066.5

Один [atm] в [psi] = 14.69594877551345

## 1.5 Расстояние $x$

- 1 [м] = 3.28 [ft]

## 2 Размерный коэффициент для формулы Дюпюи

Используя рассчитанные выше переводные коэффициенты для различных размерных величин рассчитаем переводной коэффициент в формуле Дюпюи

$$Q = \frac{2\pi kh}{\mu B} \frac{(p_i - p)}{\ln \frac{r_e}{r_w} + S}$$

```
[23]: # зададим переменные sympy
Q, k, h, mu, B, pres, pwf, re, rw, S, pi = sp.symbols('Q k h mu B
↳ p_res p_wf r_e r_w S pi', real=True, positive=True)
```

```
[24]: # определим уравнение
eq = sp.Eq(Q, 2 * pi * k * h / (mu * B) * (pres - pwf) / (sp.ln(re/
↳ rw) + S))
eq
```

[24]:

$$Q = \frac{2hk\pi(p_{res} - p_{wf})}{B\mu\left(S + \log\left(\frac{r_e}{r_w}\right)\right)}$$

```
[25]: # подставим в уравнение переводные величины
eq = eq.subs(Q, 1/const.day * Q) # дебит, [м3/сут] в [м3/сек]
f_k = 1e5/const.atm * 1e-15
eq = eq.subs(k, f_k * k) # проницаемость, [мД] в [м2]
eq = eq.subs(mu, 1e-3 * mu) # вязкость, [сП] в [Па сек]
eq = eq.subs(pres, const.atm * pres) # давление [атм] в [Па]
eq = eq.subs(pwf, const.atm * pwf) # давление [атм] в [Па]
eq = eq.subs(pi, const.pi)

display(eq)
```

$$1.15740740740741 \cdot 10^{-5} Q = \frac{6.20102176874373 \cdot 10^{-12} h k (101325.0 p_{res} - 101325.0 p_{wf})}{B \mu \left( S + \log \left( \frac{r_e}{r_w} \right) \right)}$$

Решим полученное уравнение относительно Q и упростим средствами sympy

```
[26]: eq1 = sp.simplify(sp.solve(eq, Q)[0])
display(sp.Eq(Q, eq1))
```

$$Q = \frac{0.0542867210540316 h k (p_{res} - p_{wf})}{B \mu \left( S + \log \left( \frac{r_e}{r_w} \right) \right)}$$

Выделим полученную константу в явном виде и найдем обратную величину - это и будет необходимый нам переводной коэффициент.

```
[27]: f = 1/eq1.args[0]
      f
```

```
[27]: 18.4207110060064
```

По умолчанию `sympy` автоматически организует порядок элементов в своих выражениях. Этот порядок может отличаться от привычного - хотя и суть формул при этом не меняется. Применяя некоторые хитрости можно заставить `sympy` вывести выражения в приемлимом виде.

```
[28]: a = sp.symbols('a')
      eq2 = eq1.subs(eq1.args[0], 1/a)
      with sp.evaluate(False):
          display(eq2.subs(a, f))
```

$$\frac{hk(p_{res} - p_{wf})}{18.4207110060064B\mu \left( S + \log\left(\frac{r_e}{r_w}\right) \right)}$$

Но иногда результат проще переписать руками в нужном виде. В итоге уравнение Дюпюи в практических метрических единицах измерения примет вид.

$$Q = \frac{kh}{18.42\mu B} \frac{(p_i - p)}{\ln \frac{r_e}{r_w} + S}$$

где

- $Q$  - дебит скважины на поверхности, приведенный к нормальным условиям, ст. м<sup>3</sup>/сут
- $\mu$  - вязкость нефти в пласте, сП
- $B$  - объемный коэффициент нефти, м<sup>3</sup>/м<sup>3</sup>
- $P_{res}$  - пластовое давление или давление на контуре с радиусом  $r_e$ , атма
- $P_{wf}$  - давление забойное, атма
- $k$  - проницаемость, мД
- $h$  - мощность пласта, м
- $r_e$  - внешний контур дренирования скважины, м
- $r_w$  - радиус скважины, м
- $S$  - скин-фактор скважины, м

```
[ ]:
```