Простые решения уравнения фильтрации

версия 0.2

26 сентября 2024 г.

1 Простые решения уравнения фильтрации

1.1 Уравнение фильтрации

Уравнение фильтрации многофазного потока в пористой среде - основная математическая модель пласта используемая в инженерных приложениях. Используется не само уравнение, а разнообразные частные решения, описывающие те или иные ситуации. Наиболее широко известным примером решения уравнения фильтрации, возможно является, численное решение которое строится трехмерными гидродинамическими симуляторами (eclipse, tnavigator и так далее)

Как правило, при выводе уравнения фильтрации используются следующие соотношения:

1. закон Дарси:

Закон Дарси

$$u_r = -\frac{k}{\mu}\frac{dp}{dr} \tag{1.1}$$

2. уравнение неразрывности:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\rho u_r\right)}{\partial r} = -\varphi\frac{\partial p}{\partial t} \tag{1.2}$$

3. уравнение состояния:

$$c_0 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial p} \tag{1.3}$$

Опираясь на эти соотношения уравнение фильтрации в радиальной форме можно привести к виду для величин СИ.

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\varphi\mu c_t}{k}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{1.4}$$

Здесь используются следующие обозначения

u_r - скорость фильтрации в направлении r, м/сек

k - проницаемость, м^2

μ - вязкость флюида, Па с

p - давление, Па

r - расстояние, м

ρ - плотность флюида, кг/м^3
φ - пористость породы, доли единиц.
c_t - общая сжимаемость породы и флюида, 1/Па
t - время, сек

Иногда бывает удобно записать уравнение используя другие единицы измерения, например практические метрические - уравнение примет вид:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\varphi \mu c_t}{0.00036k}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{1.5}$$

k - проницаемость, мД
μ - вязкость флюида, сП
p - давление, атм
r - расстояние, м
ρ - плотность флюида, кг/м^3
φ - пористость породы, доли единиц.
c_t - общая сжимаемость породы и флюида, 1/атм
t - время, час

1.1.1 Вывод уравнения фильтрации

Вывод уравнения фильтрации основан на следующих предположениях:

- пласт однородный и изотропный - пористость и проницаемость одинаковы во всем пласте и во всех направлениях и не зависят от давления
- добывающая скважина вскрывает весь продуктивный горизонт и обеспечивает радиальный приток к скважине
- пласт насыщен одним флюидом на всем протяжении
- температура не меняется в пласте, изотермичность

Схема притока приведена на рисунке 1.1.
Используются следующие обозначения параметров:
h - толщина пласта
k - средняя проницаемость
r - радиус (расстояние от скважины)
r_e - внешний радиус зоны дренирования
r_w - радиус скважины
p - давление
q - объемный расход флюида в рабочих условиях - дебит
t - время
u_r - приведенная скорость
φ - пористость
μ - вязкость
ρ - плотность флюида

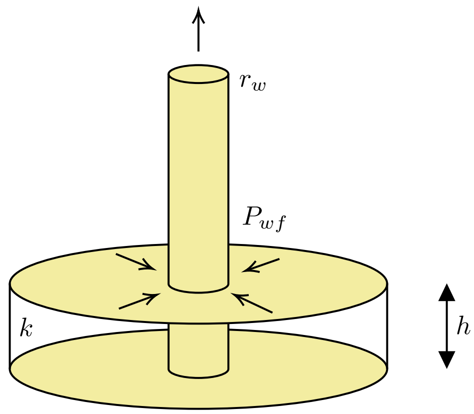

Рис. 1.1: Схема радиального притока к скважине

Радиальная модель притока

Уравнение фильтрации или уравнение движения флюидов основывается на принципах сохранения массы и импульса (количества движения). Для жидкости закон сохранения импульса принимает форму закона Дарси. При этом эффекты турбулентности и отклонения потока от Дарси не учитываются. Они важны для газовых скважин и могут быть введены в уравнение фильтрации отдельно.

Закон сохранения массы или принцип неразрывности можно выразить в радиальной форме следующим соотношением

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\rho u_r\right)}{\partial r} = -\varphi\frac{\partial p}{\partial t} \tag{1.6}$$

Принцип неразрывности показывает, что для определенного объема пласта, масса флюида которое втекла в контрольный объем пласта минус масса которая вытекла равна массе которая накопилась в объеме.

Сохранение импульса или закон Дарси можно выразить соотношением

$$u_r = -\frac{k}{\mu}\frac{d^p}{dr} \tag{1.7}$$

Закон Дарси здесь используется как псевдоустановившаяся аппроксимация обобщенного уравнения сохранения импульса (то есть слагаемым отвечающим за накопление импульса пренебрегаем). Это предположение справедливо если не учитывать возмущения давления в среде двигающиеся со скоростью звука. Все изменения давления описываемые моделью связаны с локальными изменениями градиента давления за счет ламинарного режима потока. Хотя далее в модели будет учтена сжимаемость системы всеми ”звуковыми” эффектами в системе мы пренебрегаем.

Поток предполагается горизонтальным, поэтому давление p может быть использовано в качестве потенциала потока, гравитационными силами пренебрегаем.

Комбинируя уравнения (1.6), (1.7) получим:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\left(\frac{r\rho k}{\mu}\frac{\partial p}{dr}\right)}{\partial r} = \varphi\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{1.8}$$

Уравнение (1.8) – дифференциальное уравнение в частных производных описывающее нестационарный поток однофазного флюида в пористой среде при ламинарном потоке.

Вообще говоря приведенное уравнение является нелинейным, так как плотность $\rho = \rho(p)$ и вязкость $\mu = \mu(p)$ являются функциями давления. Уравнение содержит две зависимые переменные - давление p и плотность ρ. Поэтому для его решения необходимо задать еще одно соотношение, каковым может быть уравнение состояния флюида связывающее плотность флюида и давление $\rho = \rho(p)$.

Флюид постоянной сжимаемости

Нестационарное поведение давления в пласте связано со сжимаемостью системы. При изменении давления в какой то точке, часть флюида сжимается, происходит накопление или отдача флюида, что вызывает задержку в распространении изменения флюида. Несмотря на то, что сжимаемость флюидов и породы малы и во многих случаях ими можно пренебречь, это не верно для пластовых систем для добычи нефти. Большие объемы пласта и флюидов и высокие давления компенсируют малость сжимаемости и требуют ее учета.

Для однофазного флюида разумным является предположение постоянства сжимаемости.

Сжимаемость можно определить как

$$c = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)$$

учтем, что

$$\rho = \frac{m}{V}$$

тогда получим

$$c = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)$$

Для флюида с постоянной сжимаемостью, проинтегрировав приведенное уравнение можно получить

$$\rho = \rho_i e^{c(p-p_i)}$$

где ρ_i плотность флюида при некотором заданном давлении p_i

Продифференцировав выражение для плотность по времени получим

$$c\rho\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Подставив это выражение в ранее полученное уравнение фильтрации получим

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\left(\frac{r\rho k}{\mu}\frac{\partial p}{dr}\right)}{\partial r} = \varphi c\rho\frac{\partial p}{\partial t}$$

Приведенное дифференциальное уравнение в частных производных все еще нелинейно, поскольку зависит от плотности ρ

Общая сжимаемость

Если пористость не является постоянной величиной и меняется с давлением, тогда слагаемое отвечающее за накопление флюида в пласте можно выразить как

$$\frac{\partial \varphi\rho}{\partial t} = \varphi\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \varphi c_l \rho\frac{\partial p}{\partial t} + \rho\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

где c_l сжимаемость жидкости.

Определим сжимаемость породы как

$$c_f = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial p}$$

тогда

$$\frac{\partial \varphi\rho}{\partial t} = \varphi\rho(c_l + c_f)\frac{\partial p}{\partial t}$$

хотя пористость здесь является функцией давления - в первом приближении мы можем считать ее константой равной пористости при некотором среднем давлении в пласте. Это справедливо для маленькой сжимаемости породы, что верно почти всегда.

Уравнение для сжимаемости можно еще уточнить, учтя что в пласте могут находится различные флюиды - вода и нефть с насыщенностями s_w и s_o

тогда

$$c_l = s_o c_o + s_w c_w$$

тогда можно ввести общую сжимаемость системы

$$c_t = c_l + c_f = s_o c_o + s_w c_w + c_f$$

Заметим, что проницаемость k в законе Дарси это не абсолютная проницаемость, но относительная проницаемость по нефти при насыщенности водой соответствующей связанной воде.

$$k = k_o(s_{wc})$$

Линеаризация уравнения фильтрации

Раскрыв производную в левой части уравнения и предположив, что $\dfrac{\partial p}{\partial r}$ мало а следовательно слагаемым $r\rho c_t \left(\dfrac{\partial p}{\partial r}\right)^2$ можно пренебречь, что приведет к линеаризации уравнения фильтрации

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\varphi \mu c_t}{k}\frac{\partial p}{\partial t} \tag{1.9}$$

1.2 Стационарные решения уравнения фильтрации

Широкое распространение на практике получили стационарные решения уравнения фильтрации. Приведем некоторые из них.

1.2.1 Решение для постоянного давления на круговой границе

Рассматривается самая простая модель работы добывающей скважины - радиальная стационарная фильтрация в однородном изотропном пласте круговой формы. Скважина находится в центре пласта (рис. 1.2). На границе пласта поддерживается постоянное давление. Фактически это означает, что через границу пласта идет поток жидкости, уравновешивающий дебит скважины.

Решение можно получить как решения уравнения фильтрации, учитывая стационарность потока

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \tag{1.10}$$

Или можно получить его непосредственно из закона Дарси, который должен быть приведен к радиальной форме и в таком варианте известен как Формула Дюпюи. Для приведенной конфигурации можно записать закон Дарси в форме.

$$u_r = \frac{q}{2\pi r h} = \frac{k}{\mu}\frac{dP}{dr}$$

Проинтегрировав выражение по замкнутому контуру радиуса r_e вокруг скважины получим выражение известное как формула Дюпюи

Дюпюи, Жюль

$$q = \frac{2\pi k h \left(P_e - P_w\right)}{\mu \left(\ln \dfrac{r_e}{r_w}\right)} \tag{1.11}$$

В приведенном выражения использованы единицы СИ.

Здесь

u_r - приведенная скорость фильтрации на расстоянии r от скважины, м/с

q - объемные дебит скважины в рабочих условиях, м^3/с

r - радиус - расстояние от центра скважины, м

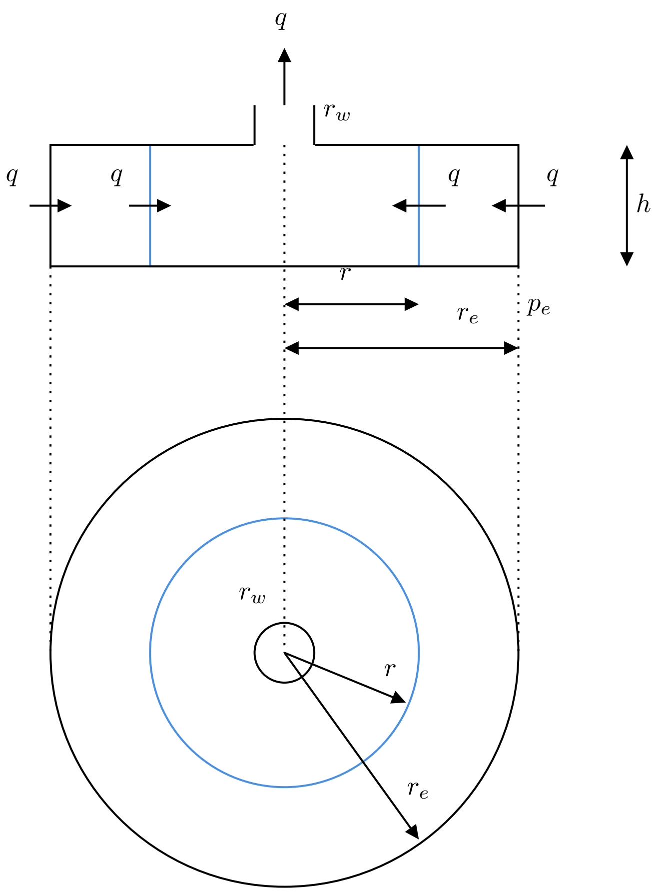

Рис. 1.2: Схема радиального притока к скважине при наличии постоянного давления на границе

r_e - радиус зоны дренирования, на котором поддерживается постоянное давление, м

r_w - радиус скважины, на котором замеряется забойное давление, м

P - давление, Па

P_e - давление на внешнем контуре дренирования, Па

P_w - давление на забое скважины, Па

k - проницаемость, м^2

μ - вязкость нефти в зоне дренирования, Па с

На практике часто бывает удобнее пользоваться значениями в практических метрических единицах измерения.

$$q = \frac{kh\,(P_e - P_w)}{18.41\mu \left(\ln \dfrac{r_e}{r_w}\right)} \tag{1.12}$$

где

q - объемные дебит скважины в рабочих условиях, м^3/сут

r - радиус - расстояние от центра скважины, м

r_e - радиус зоны дренирования, на котором поддерживается постоянное давление, м

r_w - радиус скважины, на котором замеряется забойное давление, м

P - давление, атм

P_e - давление на внешнем контуре дренирования, атм

P_w - давление на забое скважины, атм

k - проницаемость, мД

μ - вязкость нефти в зоне дренирования, сП

Далее если не указано особо будем использовать практические метрические единицы.

1.2.2 Учет скин-фактора

Скин-фактор — гидродинамический параметр, характеризующий дополнительное фильтрационное сопротивление течению флюидов в околоскважинной зоне пласта, приводящее к изменению добычи (дебита) по сравнению с совершенной (идеальной) скважиной. Скин-фактор может приводить как к снижению дебита (например при загрязнении ПЗС), так и увеличению (образование высокопроводящих каналов в ПЗС).

Концепция скин-фактора получила широкое распространение на практике. Все инженеры-нефтяники знают этот параметр и оперируют им на практике.

Изначально скин-фактор был введен как параметр учитывающий изменение проницаемости (загрязнение) призабойной зоны при расчете производительности скважины. Такое загрязнение может быть вызвано различными причинами:

- проникновением бурового раствора в пласт и блокировкой поровых каналов;
- набуханием глин при контакте с фильтратом бурового раствора;
- химическим осаждением элементов бурового раствора, жидкости глушения или пластовых флюидов в призабойной зоне скважины, например осаждением солей или асфальтенов;
- продвижением песчаных частиц к стволу скважины;
- повреждением породы при перфорации;
- другими причинами.

Для модели загрязненной призабойной зоны величину скин-фактора можно выразить формулой Хокинса [1]. Скин-фактор для плоскорадиального установившегося потока несжимаемой жидкости:

$$S = \left(\frac{k}{k_s} - 1\right)\ ln\frac{r_s}{r_w} \tag{1.13}$$

здесь:
k_s - проницаемость в загрязненной ПЗП;
k - однородная проницаемость по всему пласту;
r_s - радиус загрязненной зоны;
r_w - радиус скважины.

Концепция скин-фактора оказалась удобной для описания характеристики соединения скважины и пласта и была распространена на другие случаи, когда производительность скважины могла отличаться от производительности идеальной скважины:

- для горизонтальных скважин;
- для скважин вскрывающих пласт под углом;
- для скважин пересеченных трещиной ГРП;
- для скважин вскрытых перфорацией и учета гидравлического сопротивления потока на перфорационных отверстиях;
- другими причинами.

Для многих подобных случаев предположение о радиальном притоке к скважине не верно, но величину скин-фактора используют, так как она позволяет сравнить производительность скважины со сложным заканчиванием с простой вертикальной скважиной. В таких случая говорят о псевдорадиальном скин-факторе - такой величине скин-фактора S, которая обеспечила бы такую же производительность для вертикальной скважины полностью вскрывающей пласт.

Для стационарной радиальной модели притока учет скин-фактора приведен к следующим соотношениям:

$$(P_e - P_{wf}) = \frac{18.41\mu q}{kh}(\ln\frac{r_e}{r_w} + S) \tag{1.14}$$

$$q = \frac{kh\,(P_e - P_w)}{18.41\mu\left(\ln\dfrac{r_e}{r_w} + S\right)} \tag{1.15}$$

Производительность скважины

Уравнение производительности скважины можно записать в виде

$$Q = T \Delta P J_D \tag{1.16}$$

где

- Q - дебит жидкости скважины на поверхности, приведенный к стандартным условиям, м^3/сут.
$$Q = qB$$
- T - параметр зависящий от гидропроводности пласта
$$T = \frac{18.41 \mu B q}{kh} \tag{1.17}$$
- ΔP - депрессия на пласт, атм
$$\Delta P = (P_e - P_w) \tag{1.18}$$
- J_D - безразмерный коэффициент продуктивности скважины,
$$J_D = \frac{1}{\left(\ln \frac{r_e}{r_w} + S \right)} \tag{1.19}$$

Уравнение (1.16) можно интерпретировать следующим образом. Параметр T отвечает за свойства пласта и флюида на которые трудно повлиять в ходе эксплуатации. Это то, что дала природа в точке где находится скважина. Депрессия ΔP – параметр которым можно управлять в ходе эксплуатации регулируя забойное давление. Например за счет установки насоса и задания параметров его работы. На этом параметре должно быть сосредоточено основное внимание при анализе работы скважины. Параметр J_D – определяет качество соединения скважины с пластом или качество заканчивания. Его мы можем выбирать при строительстве скважины и можем менять в ходе эксплуатации проводя ГТМ, хотя и достаточно большой ценой. Поскольку мы можем влиять на J_D важно понимать, какое оптимальное значение продуктивности можно достичь на конкретной скважине и как его можно изменить.

Задачей гидродинамических исследований является установление величин T и J_D, хотя традиционно речь ведется об определении проницаемости k и скин-фактора S.

1.2.3 Решение для постоянного давления на круговой границе с учетом среднего давления в области дренирования

В приведенное выражение входит значение давления на контуре, которым не всегда бывает удобно пользоваться. В практических случаях значение на контуре трудно оценить, контур зоны дренирования может значительно отличаться

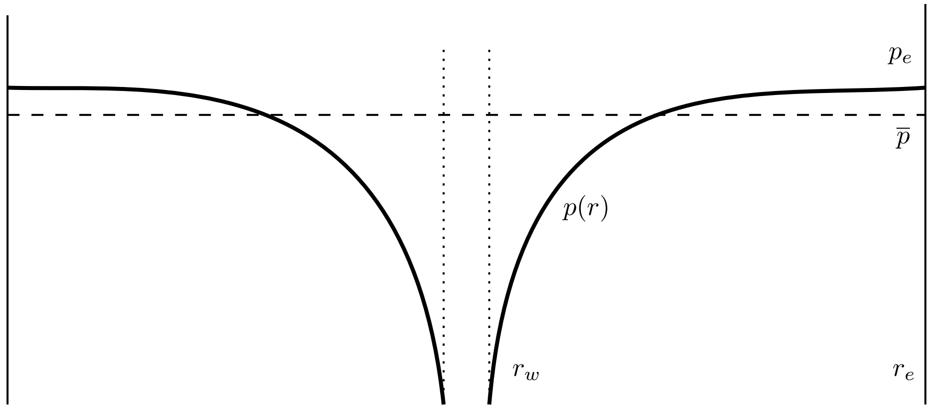

Рис. 1.3: Схема радиального притока к скважине при наличии постоянного давления на границе

от кругового, да и радиус оценить может быть сложно. Удобнее пользоваться средним давлением в зоне дренирования $\bar{P}$, которое может быть оценено по материальному балансу (смотри рисунок 1.3).

В этом случае выражение для дебита примет вид

$$q = \frac{kh\left(\bar{P} - P_w\right)}{18.41\mu\left(\ln\dfrac{r_e}{r_w} - \dfrac{1}{2} + S\right)}$$

1.2.4 Решение для круговой непроницаемой границы

Схема модели радиального притока для условия непротекания на круговой границе приведена на рисунке 1.4.

При условии непротекания давления на границе условия стационарности (неизменности давления) не достигаются. При работе скважины с постоянным дебитом забойное давление будет постоянно снижаться. Однако начиная с некоторого момента, когда влияние скважины достигнет границ - давление в всей области дренирования начнет снижаться равномерно (смотри рисунок 1.5).

Такой режим, при котором забойное давление меняется, но перепад давления $P_e - P_w$ остается постоянным называют псевдо-установившимся режимом работы (pss - pseudo steady state).

Для псевдо-установившегося режима можно записать выражение

$$q = \frac{kh\left(P_e - P_w\right)}{18.41\mu\left(\ln\dfrac{r_e}{r_w} - \dfrac{1}{2} + S\right)}$$

где

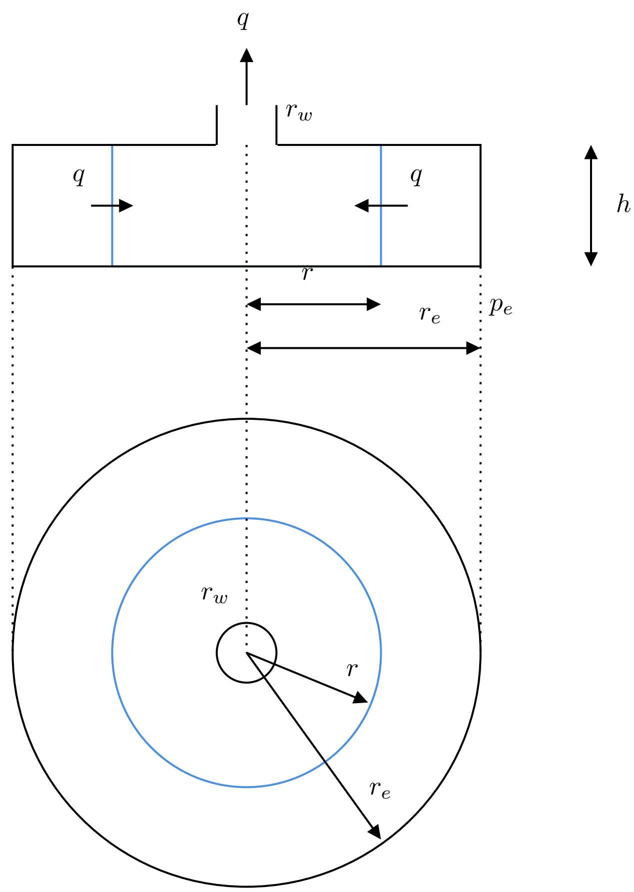

Рис. 1.4: Схема радиального притока к скважине при наличии непроницаемой границы

q - объемные дебит скважины в рабочих условиях, м3/сут;

r - радиус - расстояние от центра скважины, м;

r_e - радиус зоны дренирования, на котором поддерживается постоянное давление, м;

r_w - радиус скважины, на котором замеряется забойное давление, м;

P - давление, атм;

P_e - давление на внешнем контуре дренирования, атм;

P_w - давление на забое скважины, атм;

k - проницаемость, мД;

μ - вязкость нефти в зоне дренирования, сП.

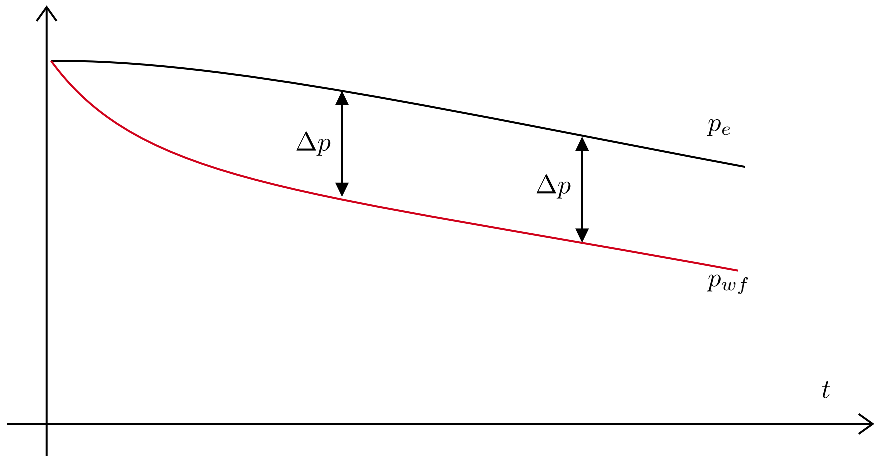

Рис. 1.5: Изменение давления на границе и на забое скважины во времени

1.2.5 Решение для круговой непроницаемой границы с учетом среднего давления в зоне дренирования

Аналогично случаю для постоянного давления на границе можно переписать выражение с использованием среднего давления в области дренирования.

$$q = \frac{kh\left(\bar{P} - P_w\right)}{18.41\mu\left(\ln\dfrac{r_e}{r_w} - \dfrac{3}{4} + S\right)}$$

1.2.6 Стационарные решения для вертикальной скважины в резервуаре произвольной формы

Здесь уравнения и методы расчета для горизонтальных, наклонно направленных скважин, скважин с ГРП, горизонтальных скважин с МГРП.

$$q = \frac{kh\left(\bar{P} - P_w\right)}{18.41\mu\left(\ln\dfrac{2.2458A}{C_A r_w^2} + S\right)} \tag{1.20}$$

q - объемные дебит скважины в рабочих условиях, м3/сут;
A - площадь области дренирования, м^2;
C_A - фактор формы, зависит от формы резервуара и расположения скважины;
r_w - радиус скважины, на котором замеряется забойное давление, м;
$\bar{P}$ - среднее давление в области дренирования, атм;
P_e - давление на внешнем контуре дренирования, атм;
P_w - давление на забое скважины, атм;
k - проницаемость, мД;

μ - вязкость нефти в зоне дренирования, сП.

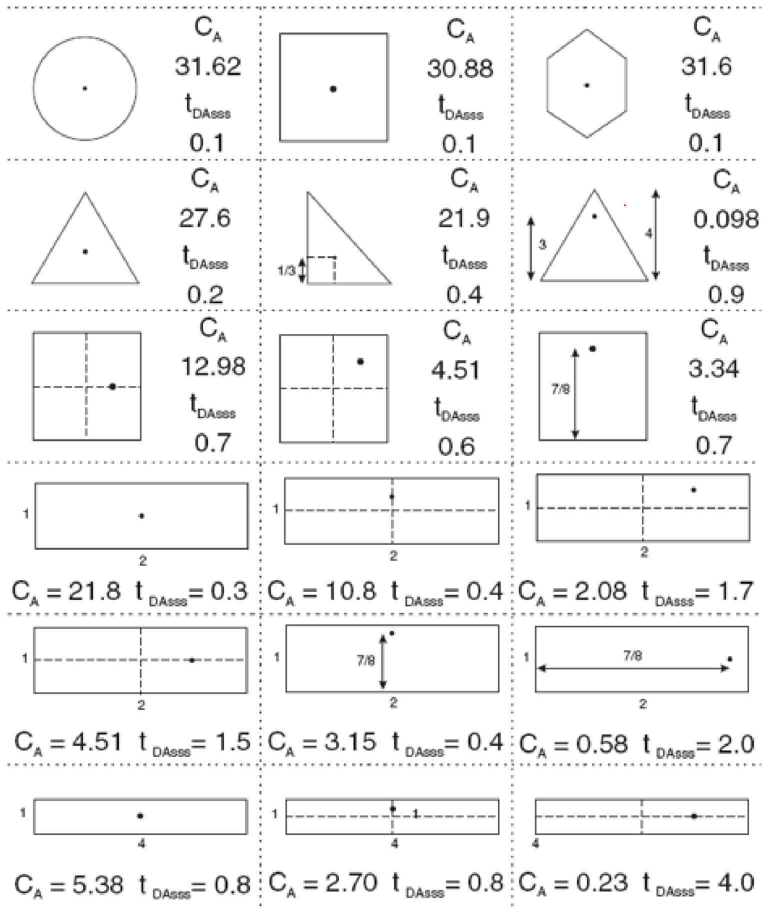

Рис. 1.6: Значения фактора формы

Безразмерное время достижения псевдо-установившегося режима притока, определяемое видом резервуара

$$t_{DApss} = \frac{kt_{pss}}{\varphi\mu c_t A}$$

1.2.7 Стационарные решения для скважины с трещиной ГРП

Для больших времен скважину с трещиной ГРП можно представить как скважину с увеличенным "эффективным радиусом" r_{eff}, или, что эквивалентно, как скважину с отрицательным скин-фактором.

$$r_{eff} = r_w e^{-S} \tag{1.21}$$

Это верно, только если $x_f << r_e$
Для трещины бесконечной проводимости

$$r_{eff} = \frac{x_f}{2} \tag{1.22}$$

тогда

$$S = \frac{2r_w}{x_f} \tag{1.23}$$

1.3 Формула Дюпюи

Простое решение для задачи стационарного притока к вертикальной скважине в однородном изотропном пласте круговой формы с постоянным давлением на границе имеет вид

$$Q = \frac{kh}{18.41\mu B} \frac{P_{res} - P_{wf}}{\ln \frac{r_e}{r_w} + S} \tag{1.24}$$

где:
- Q - дебит скважины на поверхности, приведённый к нормальным условиям, ст. м^3/сут
- μ - вязкость нефти в пласте, сП
- B - объёмный коэффициент нефти, м^3/м^3
- P_{res} - пластовое давление или давление на контуре с радиусом r_e, атма
- P_{wf} - давление забойное, атма
- k - проницаемость, мД
- h - мощность пласта, м
- r_e - внешний контур дренирования скважины, м
- r_w - радиус скважины, м
- S - скин-фактор скважины, м

Это решение известно как закон Дарси https://ru.wikipedia.org/wiki/Закон_Дарси или формула Дюпюи.

Выражение можно переписать в виде

$$P_r = P_{res} - 18.41 \frac{Q\mu B}{kh} \left[\ln \frac{r_e}{r} + S \right] \tag{1.25}$$

который удобен для расчёта распределения давления в пласте P_r на произвольном расстоянии от скважины r. В выражении (2) задано граничное значение давления p_e на контуре r_e. Расчёт позволит найти любое значение внутри контура, в том числе и забойное давление P_{wf} на $r = r_w$

Выражение можно переписать

$$P_r = P_{wf} + 18.41 \frac{Q\mu B}{kh} \left[\ln \frac{r}{r_w} + S \right] \tag{1.26}$$

где по известному дебиту и забойному давлению можно найти давление в пласте. При известном пластовом давлении можно оценить радиус контура на котором оно достигается.

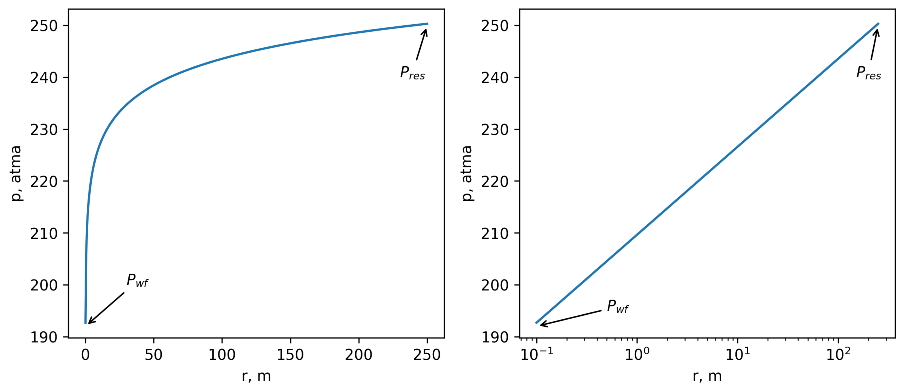

Рис. 1.7: Распределение давления в круговом пласте

1.3.1 Формула Дюпюи в декартовых координатах

Для построения карты распределения давлений в пласте полезно вспомнить, что расстояние от скважины с координатами (x_{well}, y_{well}) до произвольной точки пласта с координатами (x,y) можно найти по формуле

$$r = \sqrt{(x - x_{well})^2 + (y - y_{well})^2}$$

Тогда выражение для расчета давления в любой точке пласта примет вид

$$P_r = P_{res} - 18.41 \frac{Q \mu B}{kh} \left[\ln \frac{r_e}{\sqrt{(x - x_{well})^2 + (y - y_{well})^2}} + S \right] \tag{1.27}$$

Простой вариант расчета - можно создать пустую матрицу со значениями давления по сетке и перебирая все точки на сетке/матрице рассчитать давления

1.3.2 Суперпозиция для нескольких скважин с постоянным дебитом

Для стационарного решения работает принцип суперпозиции - сумма двух решений также будет решением, это позволяет построить карту для нескольких скважин. Давление в любой точке пласта можно найти по формуле

$$P_{res} - P_{x,y} = \sum_i 18.41 \frac{Q_i \mu B}{kh} \left[\ln \frac{r_e}{\sqrt{(x - x_{w.i})^2 + (y - y_{w.i})^2}} + S \right] \tag{1.28}$$

Выражение справедливо только если $\sqrt{(x - x_{w.i})^2 + (y - y_{w.i})^2} < r_e$.

1.3.3 Суперпозиция для нескольких скважин с постоянным забойным давлением

При наличии нескольких скважин можно записать выражение для оценки забойных давлений скважин

$$P_{res} - P_{wf.j} = \sum_i 18.41 \frac{Q_i \mu B}{kh} \left[\ln \frac{r_e}{\sqrt{(x_{w.j} - x_{w.i})^2 + (y_{w.j} - y_{w.i})^2}} + S \right]$$

Если считать забойные давления $P_{wf.j}$ известными а дебиты скважин Q_i не известными, тогда выражение (6) можно рассматривать как систему линейных алгебраических уравнений вида

$$AX = B$$

Где

$$A_{[i,j]} = 18.41 \frac{\mu B}{kh} \left[\ln \frac{r_e}{\sqrt{(x_{w.j} - x_{w.i})^2 + (y_{w.j} - y_{w.i})^2}} + S \right]$$

$$B_{[j]} = P_{res} - P_{wf.j}$$

такую систему можно решить например с использованием пакета ‘scipy.linalg‘

1.3.4 Задания для самостоятельной работы

Для совершенствования навыков работы с python выполните следующие задания:

1. Постройте график распределения давления в пласте для композитного пласта. В композитном пласте на расстоянии $r < r_1$ проницаемость равна $k = k_1$, а для $r >= r_1$, $k = k_2$.

2. Постройте двумерную тепловую или контурную карту распределения давления в пласте для моделей однородного и композитного пласта.

3. Рассчитайте среднюю величину давления в круговой области дренирования для однородного пласта. Насколько среднее давление в круговой области дренирования будет отличаться от давления на контуре. Чему будет равен коэффициент S в выражении $Q = \dfrac{kh}{18.41\mu B} \dfrac{P_{res} - P_{wf}}{ln(\dfrac{r_e}{r_w}) + S}$ при использовании вместо давления на контуре среднего давления? Постройте график, на котором будет отображаться распределение давления в зоне дренирования и величина среднего давления (в виде линии).

4. Для примера с несколькими скважинами имитирующими трещину ГРП рассчитайте дебиты скважин таким образом, чтобы забойное давление на всех скважинах было одинаковым. Постройте графики распределения давления в пласте. Постройте график дебитов вдоль ”скважины”.

1.4 Решение линейного стока

Уравнение фильтрации для радиального потока в линеаризованном виде можно записать в виде

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0.00036 \frac{k}{\varphi \mu c_t} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial p}{\partial r} \right) \right] \tag{1.29}$$

Напомним, здесь

- p - давление, атм
- t - время, час
- k - проницаемость в направлении движения потока, мД
- μ - динамическая вязкость, сП
- φ - пористость, д.е.
- c_t - сжимаемость, 1/атм
- r - расстояние от центра, м

Часто для анализа уравнений неустановившейся фильтрации используются безразмерные переменные. Мы будем использовать переменные в виде:

$$r_D = \frac{r}{r_w}$$

$$t_D = \frac{0.00036 k t}{\varphi \mu c_t r_w^2}$$

$$p_D = \frac{kh}{18.41 q_s B \mu} (p_i - p)$$

Здесь использование единицы измерения СИ. - r_w - радиус скважины, м

- r - расстояние от центра скважины до точки в пласте, м
- q_s - дебит скважины на поверхности, приведенный к нормальным условиям м3/сут
- φ - пористость, доли единиц
- μ - вязкость нефти в пласте, сП
- B - объемный коэффициент нефти, м3/м3
- p_i - начальное давление в пласте, атм
- p - давление на расстоянии r, атм
- c_t - общая сжимаемость системы в пласте, 1/атм

Использование безразмерных переменных позволяет упростить уравнение фильтрации, которое примет вид

$$\frac{\partial p_D}{\partial t_D} = \frac{1}{r_D} \left[\frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} \right) \right]$$

Решение этого уравнения - функция безразмерного давления от безразмерных времени и расстояния $p_D(r_D, t_D)$

1.4.1 Решение линейного стока

Для решения уравнения фильтрации - линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка необходимо задать начальные и граничные условия. Самое простое решение можно получить для случая вертикальной скважины бесконечно малого радиуса запускающейся с постоянным дебитом. Условия соответствующие этому случаю можно выразить следующим образом

* начальное условие. До запуска скважины в момент времени $t_D = 0$ давление в пласте равно начальному во всех точках $p = p_i$

$$t_D < 0, p_D = 0$$

* условие постоянства дебита на скважине - граничное условие на скважине

$$\lim_{r_D \to 0} r_D \frac{\partial p_D}{\partial r_D} = -1$$

* условие на бесконечном расстоянии возмущения от скважине нет

$$r_D = \infty, p_D = 0$$

В этом случае решение может быть выражено через функцию интегральной экспоненты

$$p_D(r_D,t_D) = -\frac{1}{2} Ei \left(-\frac{r_D^2}{4t_d} \right)$$

где -Ei(-x) - интегральная показательная функция.

Решение в размерных переменных можно записать как

$$p\left(r,t\right) = p_i - \frac{18.41 q_s B \mu}{kh} \left(-\frac{1}{2} Ei \left(-\frac{\varphi \mu c_t r^2}{0.00144 kt} \right) \right) \tag{1.30}$$

Решение с интегральной экспонентой может быть заменено приближенным решением с использованием логарифма

$$p_D(r_D,t_D) = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{r_D^2}{4t_d} \right) - \frac{1}{2} \gamma$$

где $\gamma = 0.57721566481$ - константа Эйлера

на графике от времени в полулогарифмических координатах логарифмическое приближение выглядит как кривая с наклоном 0.5

1.4.2 Расчет кривой восстановления давления

Один из самых простых примеров применения суперпозиции. Предполагаем, что добывающая скважина в однородном изотропном пласте запускается в момент времени $t = 0$ и работает t_p часов, после чего останавливается. После остановки скважины забойное давление растет - и мы получим кривую восстановления давления.

Пусть решение задачи запуска скважины (падения давления) будет $P_D(t_D, r_D)$. Тогда решение для изменения давления при запуске и последующей остановки скважины можно представить в виде

$$P_{bu.D}(t_D, t_{prod.D}, r_D) = P_D(t_D) - P_D(t_D - t_{prod.D}, r_D) \cdot \mathcal{H}(t_D - t_{prod.D}) \quad (1.31)$$

где

- t_D - безразмерное время после запуска скважины,

- $t_{prod.D}$ - безразмерное время работы скважины после запуска

- $\mathcal{H}$ - ступенчатая функция Хевисайда https://ru.wikipedia.org/wiki/Функция_Хевисайда (в некоторых книгах обозначается как θ)

- $P_D(t_D, r_D)$ - безразмерное давление - решение задачи запуска скважины (падения давления)

- $P_{bu.D}(t_D, t_{prod.D}, r_D)$ - безразмерное давление- решение задачи запуска и последующей остановки скважины

Для проведения векторных расчетов в python удобно выражение с использованием функции Хевисайда

$$\mathcal{H} = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Применение функции Хевисайда позволяет избежать в расчетных функциях условных операторов в явном виде для отдельных элементов входных массивов. Это потенциально ускоряет расчет.

1.4.3 Решение для произвольной истории дебитов (ступенчатое изменение дебита)

Для расчета изменения давления при переменном дебите введем произвольное референсное значение дебита q_{ref} (например первое не нулевое значение дебита при запуске скважины). Используем это значение для определения безразмерного давления.

$$p_D = \frac{kh}{18.41 q_{ref} B \mu} (p_i - p)$$

и безразмерного дебита

$$q_D = \frac{q}{q_{ref}}$$

Тогда, используя принцип суперпозиции, можем выписать выражение для изменения давления на скважине и вокруг нее для произвольного момента времени

$$P_{mr.D}(t_D, r_D) = \sum_i \left[q_{D(i)} - q_{D(i-1)} \right] \cdot p_D \left(t_D - t_{D(i)}, r_D \right) \cdot \mathcal{H}(t_D - t_{D(i)}) \quad (7)$$

где

- i - индекс значения дебита в таблице изменения дебитов

- $q_{D(i)}$ - безразмерный дебит с номером i, который стартует в момент времени t_i. Для первого момента времени i дебит следующий перед ним считается равным нулю

- $t_{D(i)}$ - безразмерный момент времени - включения дебита с номером i

- t_D - безразмерный момент времени для которого проводится расчет

- $\mathcal{H}$ - ступенчатая функция Хевисайда

- $p_D\left(t\right)$ - зависимость безразмерного давление от времени - решение задачи запуска скважины с постоянным единичным дебитом

- $P_{mr.D}$ - безразмерное давление $P_{mr.D}(t_D, r_D)$ учитывающее историю изменения дебитов скважины

1.4.4 Случай для произвольной истории дебитов (линейное изменение дебита)

для линейно меняющегося дебита $dq_D t_D$ решение можно представить как интеграл

$$p_D = \int_0^{t_D} -\frac{dq_D}{2} Ei\left(-\frac{r_D^2}{4t_d}\right) dt_D$$

Для линейно меняющегося дебита во времени (как и для любой другой зависимости) надо решение проинтегрировать по времени (надо бы подробнее расписать - сделать это позже, например как у Щелкачева в основах нестационарной фильтрации на стр 321).

Для линейной зависимости дебита от времени

$$Q_D = dQ_D \cdot t_D$$

можно получить выражение

$$p_D(r_D,t_D,dQ_D) = -\frac{dQ_D t_D}{2}\left[\left(1+\frac{r_D^2}{4t_D}\right)Ei\left(-\frac{r_D^2}{4t_D}\right) + e^{-\dfrac{r_D^2}{4t_D}}\right]$$

где dQ_D - скорость изменения дебита.

Для таблично заданных дебитов и времен можно оценить

$$dQ_{D(i)} = \frac{Q_{D(i)} - Q_{D(i-1)}}{t_{D(i)} - t_{D(i-1)}}$$

Сравните формулу (11) с формулой (9.68) в книге Щелкачева "Основы неустановившейся фильтрации"

Тогда, используя принцип суперпозиции, можем выписать выражение для изменения давления на скважине и вокруг нее для произвольного момента времени

$$P_{mr.D}(t_D, r_D) = \sum_i p_D \left(t_D - t_{D(i)}, r_D, dQ_{D(i+1)} - dQ_{D(i)} \right) \cdot \mathcal{H}(t_D - t_{D(i)})$$

где

- i - индекс значения дебита в таблице изменения дебитов

- $dQ_{D(i)}$ - изменение безразмерного дебита относительно безразмерного времени (14.4)

- $t_{D(i)}$ - безразмерный момент времени - включения дебита с номером i

- t_D - безразмерный момент времени для которого проводится расчет

- $\mathcal{H}$ - ступенчатая функция Хевисайда

- $p_D\left(t\right)$ - зависимость безразмерного давление от времени - решение задачи запуска скважины с постоянным единичным дебитом

- $P_{mr.D}$ - безразмерное давление $P_{mr.D}(t_D, r_D)$ учитывающее историю изменения дебитов скважины

следует обратить внимание, при суперпозиции скорость изменения дебита вычисляется как $dQ_{D(i+1)} - dQ_{D(i)}$. при реализации расчета необходимо предусмотреть, чтобы для первого и последнего шага расчет прошел корректно. Для этого можно, например, добавить к массивам дебитов и времени дополнительный значения в начале и в конце массивов соответствующие постоянным значениям дебита.

Также надо учитывать, что в приведенном выражении массивы должны начинаться со значений $Q_D = 0$

1.5 Радиус влияния скважины

Нестационарное решение в безразмерных переменных

$$p_D(r_D,t_D) = -\frac{1}{2} Ei \left(-\frac{r_D^2}{4t_d} \right)$$

где безразмерные переменные введены как

$$r_D = \frac{r}{r_w}$$

$$t_D = \frac{0.00036kt}{\varphi \mu c_t r_w^2}$$

$$p_D = \frac{kh}{18.41 q_s B \mu} \left(p_i - p\right)$$

Здесь использование единицы измерения СИ. - r_w - радиус скважины, м

- r - расстояние от центра скважины до точки в пласте, м

- q_s - дебит скважины на поверхности, приведенный к нормальным условиям м3/сут

- φ - пористость, доли единиц

- μ - вязкость нефти в пласте, сП

- B - объемный коэффициент нефти, м3/м3
- p_i - начальное давление в пласте, атм
- p - давление на расстоянии r, атм
- c_t - общая сжимаемость системы в пласте, 1/атм

Для этих же безразмерных переменных, считая начальное давление равным давлению на контуре можно записать стационарное решение для движения в круговом пласте

$$p_D = \ln r_{eD} - \ln r_D$$

сравним это решение с логарифмической аппроксимацией (1)

$$p_D(r_D,t_D) = -\frac{q_D}{2}\left[\ln\left(\frac{r_D^2}{4t_d}\right) + \gamma\right]$$

которое можно преобразовать к виду

$$p_D(r_D,t_D) = -q_D \ln r_D + \frac{q_D}{2}\left[\ln(4t_D) - \gamma\right]$$

сравнивая со стационарным решением можно найти выражение безразмерного радиуса контура в зависимости от безразмерного времени

$$\ln r_{eD} = \frac{1}{2}(\ln(4t_D) - \gamma)$$

$$r_{eD} = \sqrt{4t_D e^{-\gamma}}$$

наконец получим

$$r_{eD} = \sqrt{2.2458 t_D}$$

это значение называют радиусом влияния скважины. Используя это значение для определенного момента времени можно получить стационарное распределение давления в системе хорошо приближающее решение линейного стока работающего в бесконечном пласте. Можно считать это расстояние за расстояние на которое распространяется влияние скважины.

достижение радиуса влияния внешних границ будет обуславливать начало перехода от неустановившегося режима фильтрации к режиму обусловленному влиянием границ - стационарному для границы постоянного давления или псевдоустановившемуся для границы непротекания.

Список литературы

1. *Hawkins M. F.* A Note on the Skin Effect // Journal of Petroleum Technology. — 1956. — DOI: https://doi.org/10.2118/732-G.