

Analyse des données européennes

FALL

2025-01-02

Contents

Les données analysées dans ce projet concernent différents indicateurs socio-économiques et environnementaux pour un ensemble de pays européens. Ces indicateurs offrent une vision globale de divers aspects comme la démographie, l'économie, l'énergie, l'emploi et l'environnement. Les analyses visent à explorer les structures sous-jacentes et les relations entre ces variables, ainsi qu'à regrouper les pays selon des caractéristiques communes.

Description des variables

Les données contiennent 16 variables descriptives de 30 pays européens, reflétant des dimensions clés :

Population au 1er janvier : Nombre absolu d'habitants.

Population jeune (15-29 ans) : Pourcentage de jeunes dans la population totale.

Premières demandes d'asile : Nombre absolu de demandes.

Écart de rémunération entre les sexes : Pourcentage de différence de salaire horaire brut moyen entre hommes et femmes.

Salaire minimum : Montant en euros par mois.

Décrocheurs scolaires précoces : Pourcentage de la population âgée de 18 à 24 ans quittant prématurément le système scolaire.

Taux d'inflation : Variation en pourcentage par rapport à l'année précédente.

Taux de chômage : Pourcentage de la population active âgée de 15 à 74 ans.

Taux de chômage des jeunes : Pourcentage de la population active de moins de 25 ans.

PIB par habitant : Produit intérieur brut en euros par habitant.

Dette brute du gouvernement : Pourcentage de la dette brute par rapport au PIB.

Émissions de gaz à effet de serre : Quantité moyenne en tonnes par habitant.

Énergies renouvelables : Pourcentage dans la consommation finale brute d'énergie.

Prix de l'électricité : Montant en euros par MWh, incluant les taxes.

Dépendance aux importations d'énergie : Pourcentage de dépendance à l'énergie importée.

Taux de risque de pauvreté ou d'exclusion sociale : Pourcentage de la population à risque de pauvreté ou d'exclusion sociale.

L'objectif de cette analyse est d'explorer et de réduire la dimensionnalité des données grâce à une analyse en composantes principales (ACP), puis de grouper les pays selon leurs caractéristiques à l'aide de méthodes de classification. L'ACP permet de visualiser les similitudes entre pays et d'identifier les variables les plus remarquables. Les méthodes de classification, notamment la classification ascendante hiérarchique (CAH)

et l'algorithme des centres mobiles (k-means), permettent d'interpréter les regroupements obtenus. Les résultats des classifications seront comparés afin de comprendre les proximités entre pays et leur cohérence.

Pour la préparation des données, une normalisation a été appliquée dans certains cas pour rendre les variables comparables. L'analyse inclut la création de matrices de dissimilarité, l'utilisation de la décomposition en valeurs propres pour l'ACP, et l'application des méthodes de classification sur les données normalisées. Les regroupements obtenus seront interprétés à travers l'étude des centres de gravité, des inerties et des plans factoriels. Enfin, une attention particulière sera portée à l'analyse des proximités des pays dans des zones spécifiques de l'espace factoriel, afin de mieux comprendre les similarités entre pays.

```
# Vérification et chargement des bibliothèques nécessaires
if (!require(ggplot2)) install.packages("ggplot2", dependencies = TRUE)
library(ggplot2)

# Chargement de TinyTeX si nécessaire (une seule fois)
if (!tinytex::is_tinytex()) {
  tinytex::install_tinytex()
}
knitr::opts_chunk$set(comment = NA)

euro_data <- read.csv("data/euro.csv", header = TRUE, sep = ";")

# Normalisation des données (Min-Max Scaling)
euro_data_normalized <- as.data.frame(lapply(euro_data[, -1], function(x) {
  (x - min(x, na.rm = TRUE)) / (max(x, na.rm = TRUE) - min(x, na.rm = TRUE))
})))
```

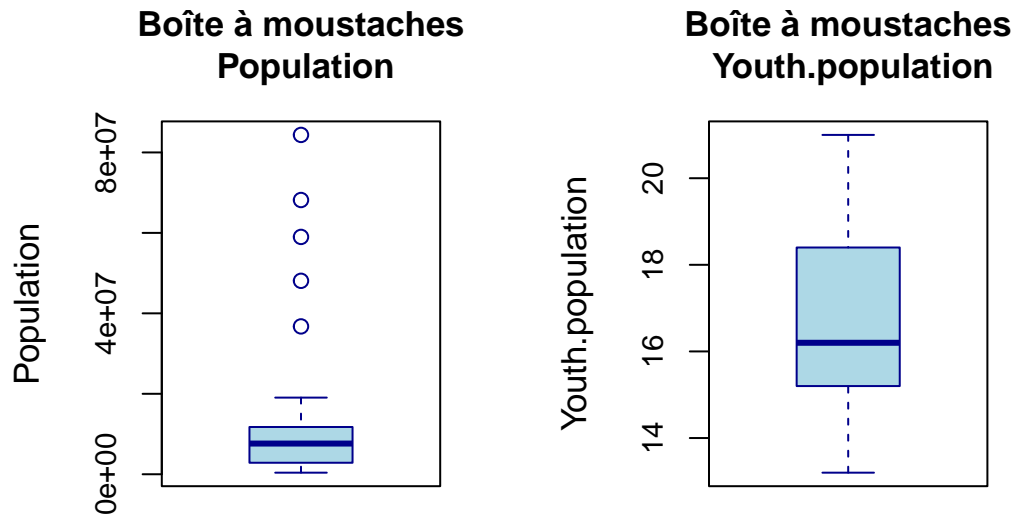
Diagrammes à mmoustache

```
# Supprimer la première colonne contenant les pays.
euro_data <- euro_data[, -1]

selected_columns <- colnames(euro_data)[1:2]

# Ajuster les marges et l'espacement
par(mfrow = c(1, 2), # Deux graphiques côte à côte
    oma = c(2, 2, 2, 2), # Marges extérieures : bas, gauche, haut, droite
    mar = c(5, 5, 4, 2)) # Marges intérieures : bas, gauche, haut, droite

# Boucle pour tracer les boîtes à moustaches
for (col_name in selected_columns) {
  boxplot(euro_data[[col_name]],
          main = paste("Boîte à moustaches\n", col_name), # Titre sur deux lignes
          ylab = col_name,
          col = "lightblue",
          border = "darkblue",
          cex.main = 1.1, # Taille du titre
          cex.lab = 1.1, # Taille des étiquettes
          cex.axis = 0.9) # Taille des axes
}
```



La distribution de la variable Population montre une grande variabilité entre les pays européens. Certains pays, comme l'Allemagne (84,3 millions), la France (68,1 millions) et l'Italie (58,9 millions), présentent des populations nettement supérieures à la majorité. Ces valeurs extrêmes contrastent avec des pays de petite taille comme Malte (0,54 million) et Chypre (0,92 million). La médiane, bien centrée dans la boîte du boxplot, reflète une répartition relativement équilibrée dans l'intervalle interquartile, bien que la présence de valeurs aberrantes, telles que celles de l'Allemagne et de la France, étende la distribution vers des valeurs élevées.

Quant à la variable Youth Population (pourcentage de jeunes âgés de 15 à 29 ans), elle présente une répartition beaucoup plus homogène. Les pourcentages varient de 13,2 % (Bulgarie) à 21,0 % (Islande), sans aucune valeur aberrante. Cependant, la médiane est située dans le quart inférieur de la boîte du boxplot, ce qui indique que les proportions de jeunes pour la majorité des pays se concentrent légèrement au-dessus de la médiane. On observe que les pays nordiques, comme l'Islande (21,0 %) et la Norvège (18,7 %), possèdent des proportions relativement élevées de jeunes, tandis que des pays comme la Bulgarie se situent à l'extrémité inférieure de cette répartition.

```
selected_columns <- colnames(euro_data)[3:4]

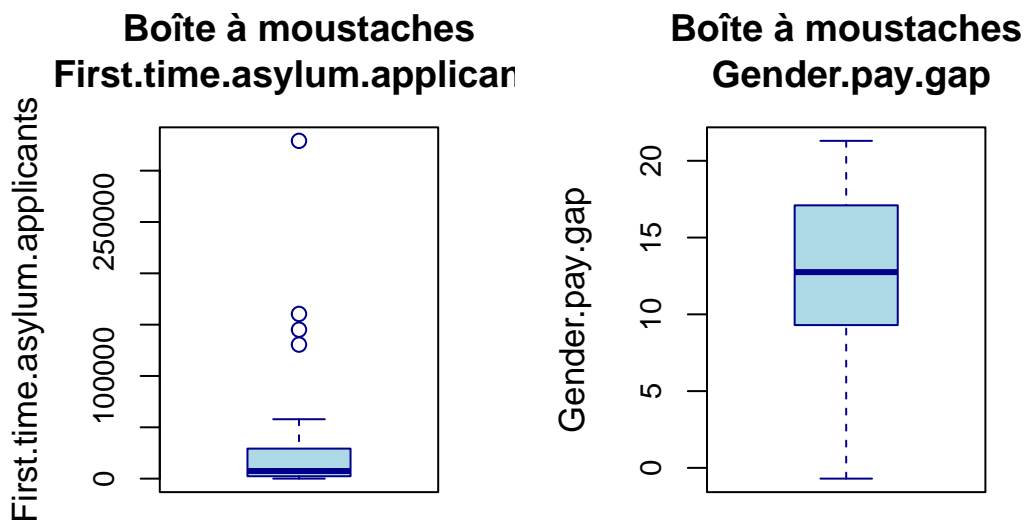
par(mfrow = c(1, 2),
    oma = c(2, 2, 2, 2),
    mar = c(5, 5, 4, 2))

for (col_name in selected_columns) {
  boxplot(euro_data[[col_name]],
    main = paste("Boîte à moustaches\n", col_name),
```

```

ylab = col_name,
col = "lightblue",
border = "darkblue",
cex.main = 1.2,
cex.lab = 1.1,
cex.axis = 0.9)
}

```



La distribution de la variable First Time Asylum Applicants (premières demandes d'asile) montre une forte asymétrie, avec plusieurs valeurs extrêmes très élevées. Ces valeurs, représentées par des points au-dessus des moustaches, indiquent que quelques pays reçoivent un nombre disproportionné de premières demandes d'asile par rapport à la majorité. La médiane basse reflète que la moitié des pays ont un faible nombre de demandes d'asile, tandis que les valeurs élevées sont concentrées dans un petit nombre de pays, ce qui étend la moustache supérieure.

La variable Gender Pay Gap (écart de rémunération entre les sexes) présente une distribution symétrique et homogène. La médiane est bien centrée, et la boîte à moustaches indique que les valeurs sont concentrées dans une plage relativement étroite. Aucun outlier n'est visible, ce qui suggère que les écarts salariaux entre les sexes sont globalement similaires parmi les pays analysés. Interprétation

Les données brutes confirment les observations issues des diagrammes à moustaches. Concernant les First Time Asylum Applicants, on observe de fortes valeurs pour des pays comme l'Allemagne (0,32 million) et la France (0,14 million), qui reçoivent un grand nombre de demandes. À l'inverse, des pays comme la Slovaquie (0,0003 million) et la Hongrie (0,00003 million) présentent des valeurs bien en dessous de la moyenne, reflétant une disparité importante.

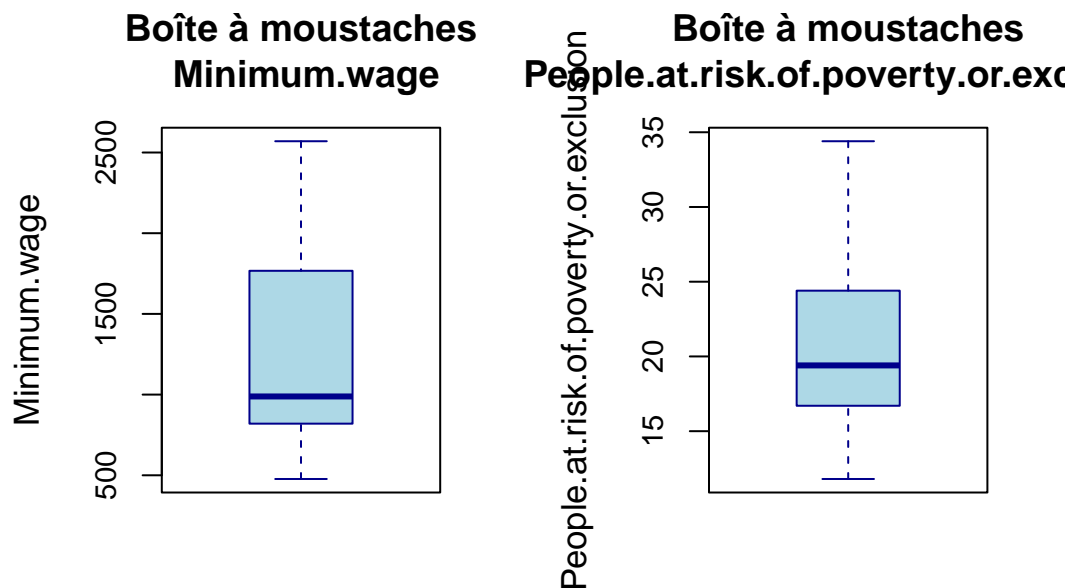
Pour la variable Gender Pay Gap, les données confirment l'homogénéité observée. Toutefois, on peut noter des différences significatives entre certains pays. Par exemple, l'Autriche (18,4) et la Suisse (17,9) affichent

des valeurs élevées, tandis que le Luxembourg présente une valeur négative (-0,7), indiquant une situation inverse inhabituelle.

```
selected_columns <- colnames(euro_data)[5:6]

par(mfrow = c(1, 2),
    oma = c(2, 2, 2, 2),
    mar = c(5, 5, 4, 2))

for (col_name in selected_columns) {
  boxplot(euro_data[[col_name]],
    main = paste("Boîte à moustaches\n", col_name),
    ylab = col_name,
    col = "lightblue",
    border = "darkblue",
    cex.main = 1.2,
    cex.lab = 1.1,
    cex.axis = 0.9)
}
```



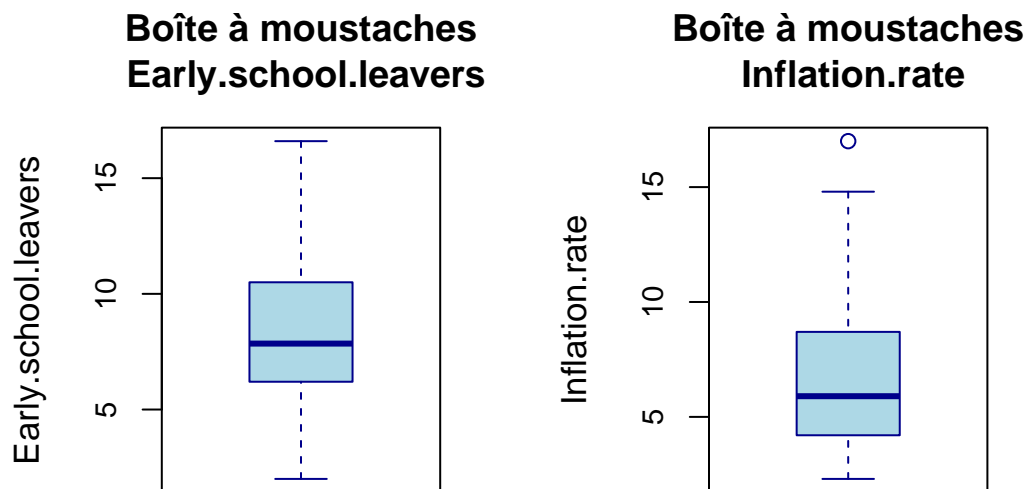
On remarque que les salaires varient de 500 à 2000 . La distribution de la variable Minimum Wage (salaire minimum) montre une dispersion modérée avec quelques valeurs basses qui se démarquent, visibles sous forme de moustaches allongées. La médiane, située dans la moitié inférieure de la boîte, indique que la moitié des pays ont un salaire minimum inférieur à cette valeur médiane. Aucune valeur aberrante significative n'est visible, ce qui reflète une relative homogénéité dans la répartition des salaires minimums parmi les pays étudiés.

La variable People at Risk of Poverty or Exclusion (personnes à risque de pauvreté ou d'exclusion sociale) présente une distribution relativement homogène. La médiane, légèrement orientée vers le bas de la boîte, indique que la moitié des pays ont des valeurs proches mais légèrement inférieures à la médiane. La taille modérée de la boîte et l'absence de valeurs aberrantes suggèrent que les pays étudiés affichent des niveaux de risque relativement similaires pour cet indicateur.

```
selected_columns <- colnames(euro_data)[7:8]

par(mfrow = c(1, 2),
    oma = c(2, 2, 2, 2),
    mar = c(5, 5, 4, 2))

for (col_name in selected_columns) {
  boxplot(euro_data[[col_name]],
    main = paste("Boîte à moustaches\n", col_name),
    ylab = col_name,
    col = "lightblue",
    border = "darkblue",
    cex.main = 1.2,
    cex.lab = 1.1,
    cex.axis = 0.9)
}
```



Early School Leavers (décrocheurs scolaires précoces) : La distribution de cette variable montre une répartition homogène, sans valeurs aberrantes significatives. La médiane, légèrement orientée vers le bas

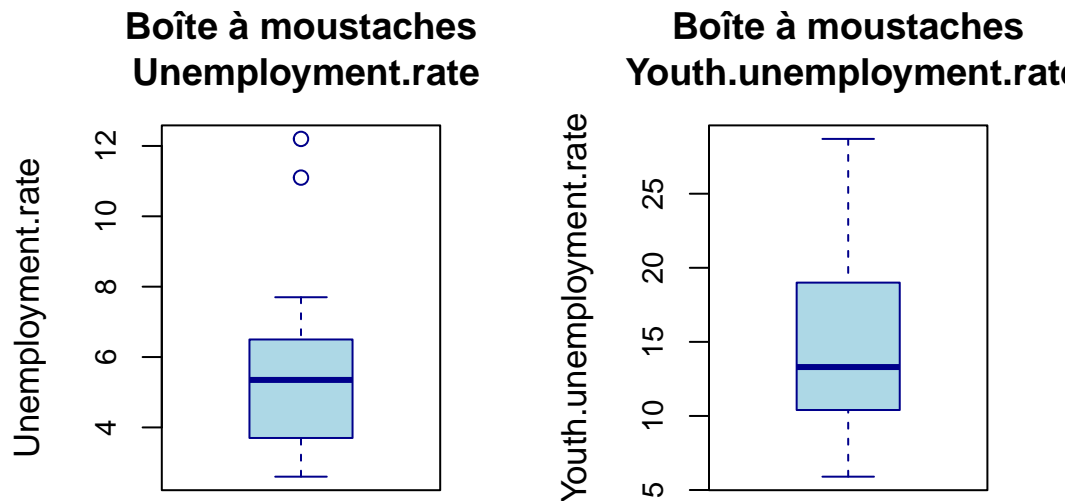
de la boîte, indique que la moitié des pays ont des taux de décrochage scolaire légèrement inférieurs à la médiane. Les moustaches montrent que les taux de décrochage scolaire sont globalement compris dans une plage relativement étroite, reflétant une faible variabilité entre les pays.

Inflation Rate (taux d'inflation) : Cette variable présente une valeur aberrante notable, représentée par un point au-dessus des moustaches, ce qui indique qu'un ou quelques pays ont un taux d'inflation nettement supérieur à celui des autres. La boîte, asymétrique et légèrement orientée vers le bas, suggère que la majorité des pays ont des taux d'inflation relativement faibles, concentrés dans la moitié inférieure de la plage des données.

```
selected_columns <- colnames(euro_data)[9:10]

par(mfrow = c(1, 2),
    oma = c(2, 2, 2, 2),
    mar = c(5, 5, 4, 2))

for (col_name in selected_columns) {
  boxplot(euro_data[[col_name]],
    main = paste("Boîte à moustaches\n", col_name),
    ylab = col_name,
    col = "lightblue",
    border = "darkblue",
    cex.main = 1.2,
    cex.lab = 1.1,
    cex.axis = 0.9)
}
```



Unemployment Rate (taux de chômage) : La distribution de cette variable est globalement homogène, bien que deux valeurs aberrantes soient visibles au-dessus des moustaches. Ces valeurs traduisent des taux de chômage exceptionnellement élevés pour certains pays par rapport à la majorité. La médiane, légèrement au-dessus du centre de la boîte, indique que la moitié des pays ont des taux de chômage supérieurs ou égaux à la médiane, tandis que les 50 % inférieurs sont répartis sur une plage plus large, traduisant une légère asymétrie vers les valeurs supérieures.

Pour la variable Youth Unemployment Rate (taux de chômage des jeunes), la distribution est plus dispersée, sans valeurs aberrantes. La boîte et les moustaches reflètent une variabilité importante entre les pays, traduisant des disparités régionales marquées. La médiane, située un peu en dessous du centre, indique une distribution légèrement asymétrique.

```
selected_columns <- colnames(euro_data)[11:12]

par(mfrow = c(1, 2),
    oma = c(2, 2, 2, 2),
    mar = c(5, 5, 4, 2))

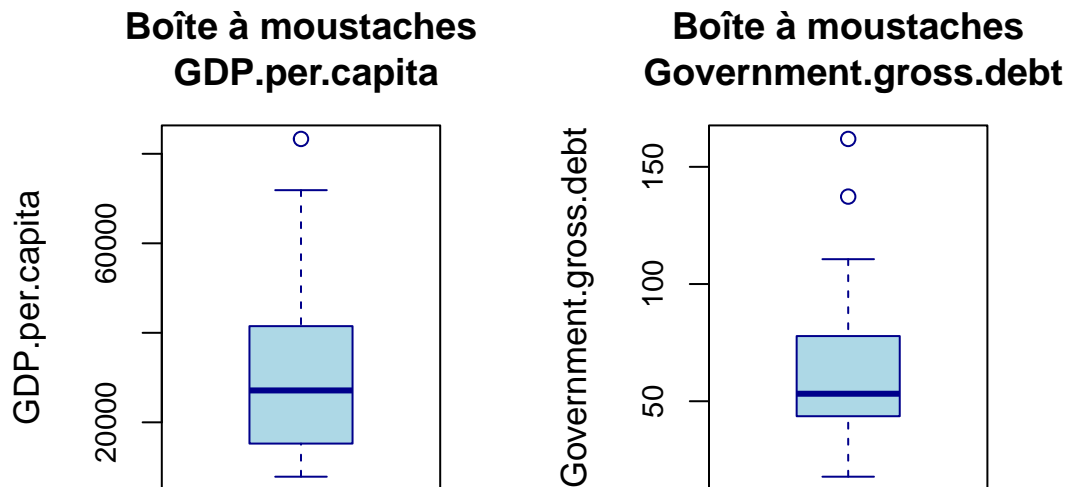
for (col_name in selected_columns) {
  boxplot(euro_data[[col_name]],
    main = paste("Boîte à moustaches\n", col_name),
    ylab = col_name,
    col = "lightblue",
    border = "darkblue",
    cex.main = 1.2,
```



```

    cex.lab = 1.1,
    cex.axis = 0.9)
}

```



GDP per Capita (PIB par habitant) : La variable présente une distribution avec une valeur aberrante notable, correspondant à un pays dont le PIB par habitant est extrêmement élevé par rapport aux autres. La majorité des pays se situent dans une plage relativement restreinte, comme le montre la boîte. La médiane, bien centrée dans la boîte, indique une répartition relativement symétrique des valeurs autour de la médiane.

Government Gross Debt (dette brute du gouvernement en pourcentage du PIB) : La variable montre deux valeurs aberrantes au-dessus des moustaches, suggérant que certains pays ont des niveaux de dette exceptionnellement élevés. La médiane, légèrement en dessous du centre de la boîte, reflète une asymétrie vers les valeurs plus faibles, indiquant que les pays ayant des dettes inférieures ou proches de la médiane sont répartis sur une plage plus restreinte, tandis que ceux ayant des dettes supérieures sont davantage dispersés.

```

selected_columns <- colnames(euro_data)[13:14]

par(mfrow = c(1, 2),
    oma = c(2, 2, 2, 2),
    mar = c(5, 5, 4, 2))

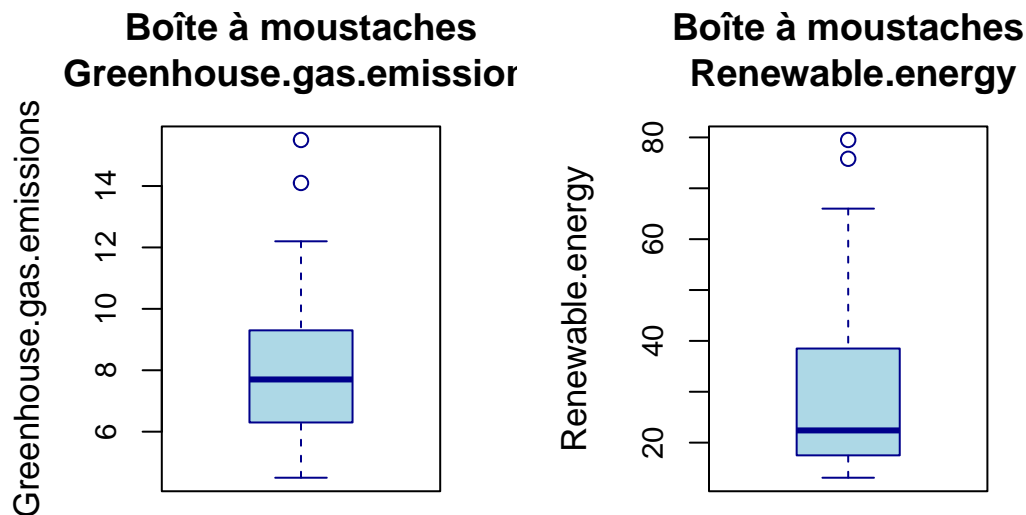
for (col_name in selected_columns) {
  boxplot(euro_data[[col_name]],
    main = paste("Boîte à moustaches\n", col_name),

```

```

    ylab = col_name,
    col = "lightblue",
    border = "darkblue",
    cex.main = 1.2,
    cex.lab = 1.1,
    cex.axis = 0.9)
}

```



Greenhouse Gas Emissions (émissions de gaz à effet de serre) La variable présente deux valeurs aberrantes correspondant à des pays avec des émissions particulièrement élevées. La médiane, située au centre de la boîte, reflète une répartition relativement équilibrée des données. Cela suggère qu'environ la moitié des pays ont des émissions proches ou inférieures à la médiane, tandis que l'autre moitié a des émissions plus élevées.

Renewable Energy (énergies renouvelables) La variable montre également deux valeurs aberrantes pour des pays ayant une part particulièrement élevée d'énergies renouvelables. La médiane, située vers le bas de la boîte, indique qu'une proportion importante de pays a des parts d'énergies renouvelables faibles ou proches de cette valeur, tandis que l'autre moitié des pays a des parts plus élevées.

```

selected_columns <- colnames(euro_data)[15:16]

par(mfrow = c(1, 2),
    oma = c(2, 2, 2, 2),
    mar = c(5, 5, 4, 2))

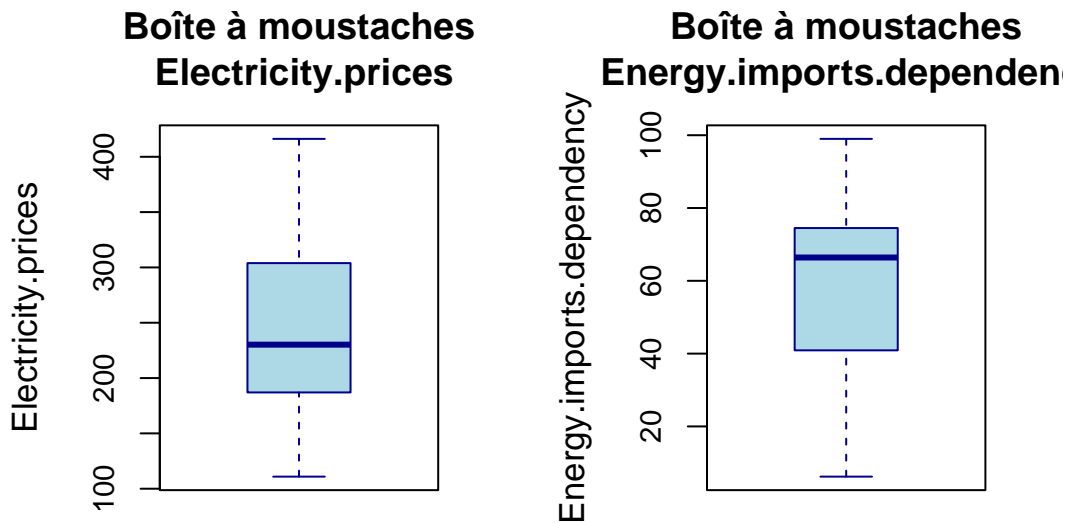
for (col_name in selected_columns) {

```

```

boxplot(euro_data[[col_name]],
        main = paste("Boîte à moustaches", col_name),
        ylab = col_name,
        col = "lightblue",
        border = "darkblue",
        cex.main = 1.2,
        cex.lab = 1.1,
        cex.axis = 0.9)
}

```



Electricity Prices (Prix de l'électricité) : La médiane est située dans le quart inférieur de la boîte, indiquant que la moitié des pays ont des prix de l'électricité inférieurs ou égaux à cette valeur médiane. L'absence de valeurs aberrantes reflète une distribution relativement homogène parmi les pays. La position basse de la médiane montre que les prix inférieurs à la médiane sont davantage concentrés, tandis que les prix supérieurs couvrent une plage plus étendue, traduisant une certaine variabilité.

Energy Imports Dependency (Dépendance aux importations d'énergie) : La médiane est située dans le quart supérieur de la boîte, ce qui signifie que la moitié des pays ont une dépendance énergétique inférieure ou égale à cette valeur. Contrairement à la variable précédente, cette distribution montre également une absence de valeurs aberrantes. La position élevée de la médiane reflète une plus grande dispersion des valeurs inférieures, tandis que les valeurs supérieures à la médiane sont relativement concentrées, indiquant une variabilité marquée dans la dépendance énergétique parmi les pays européens.

Pour appoter plus de visibilité nous allons remplacer les colonnes pour des colonnes numérique en se servant de cette légende Légende des colonnes (à remplir manuellement si besoin) :

Légende des colonnes :

[1]: Population

```

[2]: Youth.population
[3]: First.time.asylum.applicants
[4]: Gender.pay.gap
[5]: Minimum.wage
[6]: People.at.risk.of.poverty.or.exclusion
[7]: Early.school.leavers
[8]: Inflation.rate
[9]: Unemployment.rate
[10]: Youth.unemployment.rate
[11]: GDP.per.capita
[12]: Government.gross.debt
[13]: Greenhouse.gas.emissions
[14]: Renewable.energy
[15]: Electricity.prices
[16]: Energy.imports.dependency

```

La matrice de variance-covariance VV calcule la dispersion des variables ainsi que les relations linéaires entre elles. Les valeurs sur la diagonale principale représentent la variance de chaque variable. Par exemple, la variance de Population est très élevée ($4.653257e+14$), reflétant une grande dispersion entre les pays, comme cela a été observé dans les diagrammes à moustaches. En revanche, la variance de Gender Pay Gap est beaucoup plus faible (25.6190), confirmant l'homogénéité relative notée précédemment, bien qu'elle reste significative.

Une covariance négative entre Renewable Energy et Energy Imports Dependency (-290.3213) reflète une relation inverse plus marquée : les pays avec une part plus élevée d'énergies renouvelables, comme l'Islande et la Norvège, sont généralement moins dépendants des importations d'énergie.

La matrice V enrichit l'analyse exploratoire initiale en fournissant une quantification précise des dispersions et interactions entre variables. Ces résultats constituent une base solide pour des analyses plus avancées, comme l'analyse en composantes principales (ACP), tout en préparant la transition vers l'étude des relations normalisées via la matrice de corrélation.

```

#3
euro_data_centered <- scale(euro_data, center = TRUE, scale = FALSE)

n <- nrow(euro_data)
V <- (t(euro_data_centered) %*% euro_data_centered) / (n - 1)

colnames(V) <- paste0("[", seq_len(ncol(V)), "]")
rownames(V) <- colnames(euro_data)

V <- round(V, 4)

print("Matrice de variance-covariance (indices entre crochets pour les colonnes) :")

```

```
[1] "Matrice de variance-covariance (indices entre crochets pour les colonnes) :"
```

```
cat("\nPartie 1 : Colonnes [1] à [9]\n")
```

```
Partie 1 : Colonnes [1] à [9]
```

```
print(V[, 1:9])
```

	[1]	[2]		
Population	4.653257e+14	-6839267.0638		
Youth.population	-6.839267e+06	3.2609		
First.time.asylum.applicants	1.365717e+12	-15924.8017		
Gender.pay.gap	-6.195038e+06	-2.2307		
Minimum.wage	NA	NA		
People.at.risk.of.poverty.or.exclusion	NA	NA		
Early.school.leavers	1.621818e+07	1.5759		
Inflation.rate	-6.534739e+06	-2.6463		
Unemployment.rate	8.017485e+06	-0.8741		
Youth.unemployment.rate	1.445936e+07	-2.2734		
GDP.per.capita	-2.857962e+10	23946.7345		
Government.gross.debt	2.994623e+08	-2.1453		
Greenhouse.gas.emissions	-8.092486e+06	1.8637		
Renewable.energy	-1.066077e+08	10.1029		
Electricity.prices	7.486738e+08	-0.8086		
Energy.imports.dependency	6.282654e+07	4.0745		
	[3]	[4]	[5]	[6]
Population	1.365717e+12	-6195038.4282	NA	NA
Youth.population	-1.592480e+04	-2.2307	NA	NA
First.time.asylum.applicants	4.950971e+09	23416.4569	NA	NA
Gender.pay.gap	2.341646e+04	25.6190	NA	NA
Minimum.wage	NA	NA	NA	NA
People.at.risk.of.poverty.or.exclusion	NA	NA	NA	NA
Early.school.leavers	6.578850e+04	-1.1510	NA	NA
Inflation.rate	-5.499202e+04	5.9963	NA	NA
Unemployment.rate	3.117897e+04	-0.8288	NA	NA
Youth.unemployment.rate	1.909011e+04	-9.0915	NA	NA
GDP.per.capita	3.054725e+07	-23296.9276	NA	NA
Government.gross.debt	9.319273e+05	-30.4644	NA	NA
Greenhouse.gas.emissions	-1.295407e+04	-3.5834	NA	NA
Renewable.energy	-2.707843e+05	23.8361	NA	NA
Electricity.prices	2.853515e+06	-0.5714	NA	NA
Energy.imports.dependency	3.598142e+05	-34.9379	NA	NA
	[7]	[8]		[9]
Population	16218178.4517	-6534739.2138	8017484.9552	
Youth.population	1.5759	-2.6463	-0.8741	
First.time.asylum.applicants	65788.5000	-54992.0172	31178.9655	
Gender.pay.gap	-1.1510	5.9963	-0.8288	
Minimum.wage	NA	NA	NA	
People.at.risk.of.poverty.or.exclusion	NA	NA	NA	
Early.school.leavers	12.5517	0.7159	0.0483	
Inflation.rate	0.7159	12.1161	-2.5167	
Unemployment.rate	0.0483	-2.5167	5.0494	
Youth.unemployment.rate	0.6197	-3.7521	11.5647	
GDP.per.capita	-1667.7931	-40170.7103	-8682.1103	
Government.gross.debt	6.2831	-21.8946	43.5801	
Greenhouse.gas.emissions	0.1055	-0.4309	-1.9539	
Renewable.energy	19.0807	-9.6309	-0.8711	
Electricity.prices	-44.9041	-99.8614	18.5154	
Energy.imports.dependency	-27.2752	-28.8008	7.1974	

```
cat("\nPartie 2 : Colonnes [10] à [16]\n")
```

Partie 2 : Colonnes [10] à [16]

```
print(V[, 10:16])
```

	[10]	[11]
Population	14459359.1397	-2.857962e+10
Youth.population	-2.2734	2.394673e+04
First.time.asylum.applicants	19090.1121	3.054725e+07
Gender.pay.gap	-9.0915	-2.329693e+04
Minimum.wage	NA	NA
People.at.risk.of.poverty.or.exclusion	NA	NA
Early.school.leavers	0.6197	-1.667793e+03
Inflation.rate	-3.7521	-4.017071e+04
Unemployment.rate	11.5647	-8.682110e+03
Youth.unemployment.rate	34.5511	-2.704445e+04
GDP.per.capita	-27044.4517	3.983704e+08
Government.gross.debt	103.2097	-1.581849e+05
Greenhouse.gas.emissions	-3.9530	2.158401e+04
Renewable.energy	-14.7666	1.228200e+05
Electricity.prices	-30.1509	2.644578e+05
Energy.imports.dependency	15.1315	5.860834e+04
	[12]	[13]
Population	2.994623e+08	-8092485.6885
Youth.population	-2.145300e+00	1.8637
First.time.asylum.applicants	9.319273e+05	-12954.0690
Gender.pay.gap	-3.046440e+01	-3.5834
Minimum.wage	NA	NA
People.at.risk.of.poverty.or.exclusion	NA	NA
Early.school.leavers	6.283100e+00	0.1055
Inflation.rate	-2.189460e+01	-0.4309
Unemployment.rate	4.358010e+01	-1.9539
Youth.unemployment.rate	1.032097e+02	-3.9530
GDP.per.capita	-1.581849e+05	21584.0069
Government.gross.debt	1.240830e+03	-11.3727
Greenhouse.gas.emissions	-1.137270e+01	7.0331
Renewable.energy	-1.327777e+02	-2.7331
Electricity.prices	6.659872e+02	19.0603
Energy.imports.dependency	2.703910e+02	-3.6866
	[14]	[15]
Population	-1.066077e+08	7.486738e+08
Youth.population	1.010290e+01	-8.086000e-01
First.time.asylum.applicants	-2.707843e+05	2.853515e+06
Gender.pay.gap	2.383610e+01	-5.714000e-01
Minimum.wage	NA	NA
People.at.risk.of.poverty.or.exclusion	NA	NA
Early.school.leavers	1.908070e+01	-4.490410e+01
Inflation.rate	-9.630900e+00	-9.986140e+01
Unemployment.rate	-8.711000e-01	1.851540e+01
Youth.unemployment.rate	-1.476660e+01	-3.015090e+01
GDP.per.capita	1.228200e+05	2.644578e+05

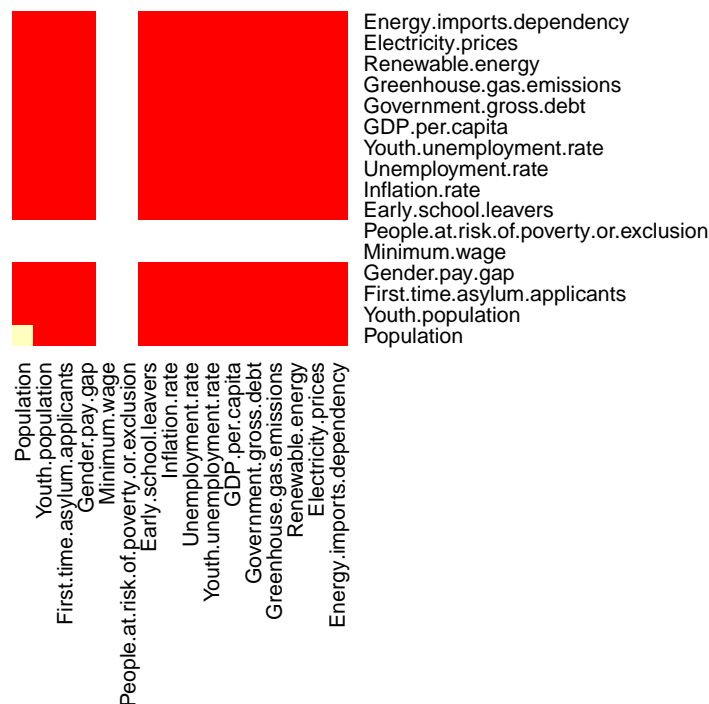
Government.gross.debt	-1.327777e+02	6.659872e+02
Greenhouse.gas.emissions	-2.733100e+00	1.906030e+01
Renewable.energy	3.593812e+02	-4.262927e+02
Electricity.prices	-4.262927e+02	6.935113e+03
Energy.imports.dependency	-2.903213e+02	7.416931e+02
	[16]	
Population	62826536.5937	
Youth.population	4.0745	
First.time.asylum.applicants	359814.2500	
Gender.pay.gap	-34.9379	
Minimum.wage	NA	
People.at.risk.of.poverty.or.exclusion	NA	
Early.school.leavers	-27.2752	
Inflation.rate	-28.8008	
Unemployment.rate	7.1974	
Youth.unemployment.rate	15.1315	
GDP.per.capita	58608.3414	
Government.gross.debt	270.3910	
Greenhouse.gas.emissions	-3.6866	
Renewable.energy	-290.3213	
Electricity.prices	741.6931	
Energy.imports.dependency	592.5486	

La heatmap de la matrice de variance-covariance illustre les relations entre les variables à travers des intensités de couleurs. Les zones rouges traduisent des covariances fortes, tandis que les zones jaunes indiquent des relations plus faibles. Les zones blanches signalent des données manquantes ou nulles.

Par exemple, des relations marquées apparaissent entre Population et Youth Population, ainsi qu'entre Renewable Energy et Energy Imports Dependency, confirmant les observations sur la dépendance énergétique. Cette visualisation synthétique facilite l'identification des interactions clés et des lacunes dans les données.

```
#3
V_rounded <- round(V, 2)
heatmap(as.matrix(V_rounded),
  main = "Heatmap de la matrice de variance-covariance",
  Colv = NA, Rowv = NA, # Désactive le clustering
  scale = "none", # Pas de normalisation supplémentaire
  col = heat.colors(10), # Palette de couleurs
  margins = c(15, 15), # Ajuster les marges
  labCol = colnames(euro_data), # Noms originaux des colonnes
  labRow = rownames(V_rounded), # Noms des lignes
  cexCol = 0.8, # Taille des labels des colonnes
  cexRow = 0.8) # Taille des labels des lignes
```

ap de la matrice de variance–covariance



La matrice de corrélation offre une vision normalisée des relations linéaires entre les variables, avec des coefficients compris entre -1 et 1. Une corrélation positive modérée est observée entre Population et Youth Population ($r=0.87$), indiquant que les pays avec une population élevée tendent à avoir une proportion importante de jeunes.

Une relation négative significative est également visible entre Renewable Energy et Energy Imports Dependency ($r=-0.54$), confirmant que les pays intégrant davantage d'énergies renouvelables sont généralement moins dépendants des importations énergétiques.

De plus, une corrélation très forte ($r=0.87$) entre Youth Unemployment Rate et Unemployment Rate montre une relation directe entre ces deux indicateurs. En revanche, certaines variables comme Gender Pay Gap et Minimum Wage ($r=-0.05$) affichent une corrélation quasi nulle, suggérant une absence de relation linéaire significative. Cette matrice met ainsi en évidence les liens les plus marqués tout en soulignant les variables peu ou pas reliées entre elles.

```
# 4

correlation_matrix <- cor(euro_data, use = "complete.obs")

# Arrondir les valeurs à deux décimales pour une meilleure lisibilité
correlation_matrix_rounded <- round(correlation_matrix, 2)

# Ajouter des indices numériques pour les colonnes et les lignes
colnames(correlation_matrix_rounded) <- paste0("[", seq_len(ncol(correlation_matrix_rounded)), "]")
rownames(correlation_matrix_rounded) <- colnames(correlation_matrix)

# Afficher la matrice avec indices numériques
```



```
print("Matrice de corrélation (indices pour les colonnes) :")
```

```
[1] "Matrice de corrélation (indices pour les colonnes) :"
```

```
print(correlation_matrix_rounded)
```

	[1]	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]
Population	1.00	-0.11	0.90	-0.06	0.25	0.13
Youth.population	-0.11	1.00	-0.07	-0.25	0.63	-0.43
First.time.asylum.applicants	0.90	-0.07	1.00	0.07	0.34	0.16
Gender.pay.gap	-0.06	-0.25	0.07	1.00	-0.30	-0.14
Minimum.wage	0.25	0.63	0.34	-0.30	1.00	-0.35
People.at.risk.of.poverty.or.exclusion	0.13	-0.43	0.16	-0.14	-0.35	1.00
Early.school.leavers	0.32	0.03	0.36	-0.01	-0.10	0.43
Inflation.rate	-0.11	-0.52	-0.25	0.43	-0.63	-0.04
Unemployment.rate	0.14	-0.15	0.19	-0.05	-0.09	0.43
Youth.unemployment.rate	0.08	-0.15	0.03	-0.29	-0.19	0.45
GDP.per.capita	0.01	0.71	0.10	-0.37	0.90	-0.32
Government.gross.debt	0.41	-0.06	0.38	-0.12	0.03	0.04
Greenhouse.gas.emissions	-0.13	0.30	-0.06	-0.24	0.51	-0.28
Renewable.energy	-0.22	-0.18	-0.16	0.43	-0.13	0.09
Electricity.prices	0.40	0.23	0.48	-0.04	0.43	-0.18
Energy.imports.dependency	0.04	0.49	0.16	-0.40	0.37	-0.24
	[7]	[8]	[9]	[10]	[11]	[12]
Population	0.32	-0.11	0.14	0.08	0.01	0.41
Youth.population	0.03	-0.52	-0.15	-0.15	0.71	-0.06
First.time.asylum.applicants	0.36	-0.25	0.19	0.03	0.10	0.38
Gender.pay.gap	-0.01	0.43	-0.05	-0.29	-0.37	-0.12
Minimum.wage	-0.10	-0.63	-0.09	-0.19	0.90	0.03
People.at.risk.of.poverty.or.exclusion	0.43	-0.04	0.43	0.45	-0.32	0.04
Early.school.leavers	1.00	0.01	0.12	0.14	-0.13	-0.02
Inflation.rate	0.01	1.00	-0.38	-0.25	-0.58	-0.29
Unemployment.rate	0.12	-0.38	1.00	0.87	-0.12	0.62
Youth.unemployment.rate	0.14	-0.25	0.87	1.00	-0.15	0.57
GDP.per.capita	-0.13	-0.58	-0.12	-0.15	1.00	-0.12
Government.gross.debt	-0.02	-0.29	0.62	0.57	-0.12	1.00
Greenhouse.gas.emissions	-0.28	-0.16	-0.28	-0.20	0.61	-0.34
Renewable.energy	0.13	-0.07	0.28	0.06	-0.17	-0.11
Electricity.prices	0.02	-0.38	0.05	-0.12	0.36	0.27
Energy.imports.dependency	-0.15	-0.42	0.09	0.09	0.42	0.37
	[13]	[14]	[15]	[16]		
Population	-0.13	-0.22	0.40	0.04		
Youth.population	0.30	-0.18	0.23	0.49		
First.time.asylum.applicants	-0.06	-0.16	0.48	0.16		
Gender.pay.gap	-0.24	0.43	-0.04	-0.40		
Minimum.wage	0.51	-0.13	0.43	0.37		
People.at.risk.of.poverty.or.exclusion	-0.28	0.09	-0.18	-0.24		
Early.school.leavers	-0.28	0.13	0.02	-0.15		
Inflation.rate	-0.16	-0.07	-0.38	-0.42		
Unemployment.rate	-0.28	0.28	0.05	0.09		
Youth.unemployment.rate	-0.20	0.06	-0.12	0.09		
GDP.per.capita	0.61	-0.17	0.36	0.42		

Government.gross.debt	-0.34	-0.11	0.27	0.37
Greenhouse.gas.emissions	1.00	-0.28	0.25	0.08
Renewable.energy	-0.28	1.00	0.00	-0.54
Electricity.prices	0.25	0.00	1.00	0.19
Energy.imports.dependency	0.08	-0.54	0.19	1.00

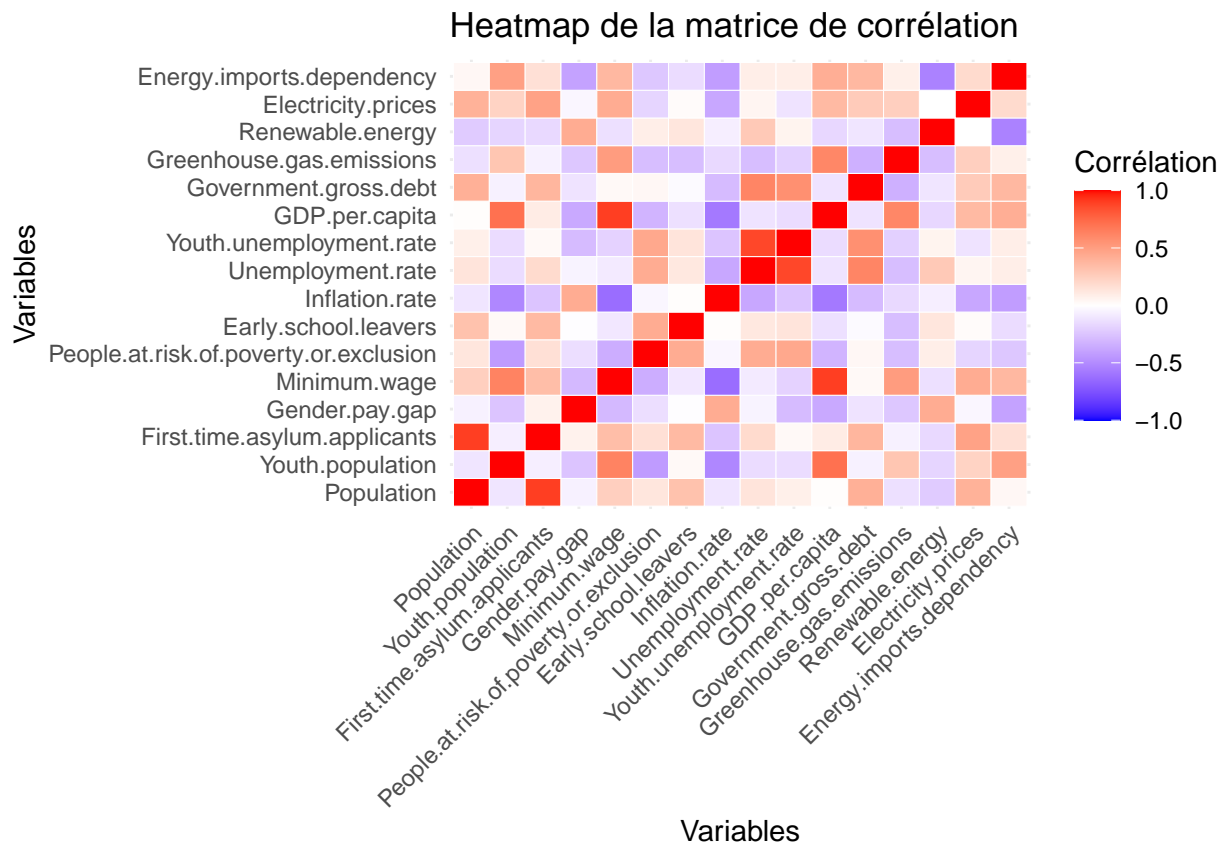
```
# Transformer la matrice de corrélation en format long
correlation_long <- reshape2::melt(round(correlation_matrix, 2))
```

La heatmap de la matrice de corrélation illustre les relations linéaires entre les différentes variables. Les couleurs rouges indiquent des corrélations positives élevées, tandis que les teintes bleues traduisent des corrélations négatives significatives. Les zones blanches ou pâles, quant à elles, reflètent des relations faibles ou inexistantes.

Par exemple, on remarque une forte corrélation positive entre Population et Youth Population, confirmant que les pays avec une population globale importante ont également une proportion significative de jeunes. Une corrélation négative marquée est visible entre Renewable Energy et Energy Imports Dependency, mettant en évidence l'effet des énergies renouvelables sur la réduction de la dépendance énergétique. À l'inverse, des variables comme Gender Pay Gap et Minimum Wage montrent peu ou pas de corrélation, traduisant l'absence de relation linéaire entre elles.

En somme, ce graphique offre une visualisation claire des relations fortes et faibles entre les variables, facilitant l'identification des interactions les plus significatives.

```
# Heatmap de la matrice de corrélation
ggplot(correlation_long, aes(Var1, Var2, fill = value)) +
  geom_tile(color = "white") +
  scale_fill_gradient2(low = "blue", high = "red", mid = "white",
                      midpoint = 0, limit = c(-1, 1),
                      name = "Corrélation") +
  theme_minimal() +
  labs(title = "Heatmap de la matrice de corrélation",
       x = "Variables",
       y = "Variables") +
  theme(axis.text.x = element_text(angle = 45, hjust = 1))
```



Les composantes principales forment une base orthonormée, ce qui est prouvé numériquement. Le produit scalaire des vecteurs propres (matrice de rotation transposée multipliée par elle-même) donne une matrice diagonale avec des valeurs de 1 sur la diagonale et 0 ailleurs, confirmant leur orthogonalité. Les normes des vecteurs propres, calculées comme la racine carrée de la somme des carrés des coefficients, sont toutes égales à 1, prouvant qu'ils sont normalisés.

Le paramètre `center = TRUE` recentre chaque variable en soustrayant sa moyenne, garantissant que les composantes principales sont calculées par rapport à un centre des données égal à zéro. Le paramètre `scale = TRUE` met chaque variable à l'échelle en divisant par son écart type, standardisant ainsi les variables pour qu'elles aient toutes une variance de 1, ce qui est crucial lorsque les variables ont des échelles différentes.

Sans `center`, les composantes principales seraient biaisées par des variables aux moyennes élevées, faussant leur interprétation. Sans `scale`, les variables avec des échelles ou des variances élevées domineraient les calculs, influençant de manière disproportionnée les composantes principales. En combinant `center` et `scale`, chaque variable contribue de manière équitable à la définition des composantes principales.

```
# 5

euro_data_replace_na <- apply(euro_data, 2, function(x) ifelse(is.na(x), mean(x, na.rm = TRUE), x))

# Calculer les composantes principales
res <- prcomp(euro_data_replace_na, scale = TRUE, center = TRUE)

# Créer un fichier PDF pour les résultats
pdf("resultats_prcomp.pdf", width = 10, height = 8)

# Vérification de l'orthogonalité et des normes
```

```
cat("Produit scalaire des vecteurs propres (orthogonalité) :\n")
```

Produit scalaire des vecteurs propres (orthogonalité) :

```
orthogonality_check <- t(res$rotation) %*% res$rotation
print(round(orthogonality_check, 2))
```

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8	PC9	PC10	PC11	PC12	PC13	PC14	PC15	PC16
PC1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
PC2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
PC3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
PC4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
PC5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
PC6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
PC7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
PC8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
PC9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
PC10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
PC11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
PC12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
PC13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
PC14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
PC15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
PC16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

```
cat("Normes des vecteurs propres (1 attendu) :\n")
```

Normes des vecteurs propres (1 attendu) :

```
norms <- apply(res$rotation, 2, function(col) sqrt(sum(col^2)))
print(round(norms, 2))
```

PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8	PC9	PC10	PC11	PC12	PC13	PC14	PC15	PC16
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Afficher les premières coordonnées dans la nouvelle base

```
cat("Premières coordonnées des observations :\n")
```

Premières coordonnées des observations :

```
print(head(res$x, n = 6))
```

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6
[1,]	0.8930784	-0.05981786	-0.97098080	-0.32722747	0.9238143	-0.4927803
[2,]	1.7565034	-2.16393542	-0.07834658	1.31816585	-0.2325251	-0.1199267
[3,]	-2.6417622	1.77214093	-0.25429763	-0.23821400	-1.6690826	1.9269231
[4,]	-1.4323209	0.71295161	-0.13114739	1.72626176	0.5961859	-0.0925010
[5,]	1.2302770	-0.94486199	0.27801253	1.08399558	-0.3331520	-1.0172092
[6,]	-0.2887514	2.35926409	-2.92285398	0.04385271	-0.1945308	-0.9634055

	PC7	PC8	PC9	PC10	PC11	PC12
[1,]	0.1009824	0.651241168	0.6247011	-0.2092549	0.2453571	0.5611628
[2,]	-0.3036975	0.514094776	-1.1343872	-0.1550909	-0.6500718	0.4742277
[3,]	-0.1860566	0.006445367	0.4886804	-1.1327358	-0.1528996	-0.3188954
[4,]	-0.1856331	-0.928931619	0.1125664	-0.3373321	-0.2422261	-0.2552262
[5,]	0.4715290	1.995736250	-0.3374791	0.6185508	-0.1764931	-0.9572414
[6,]	-1.3480963	0.346571689	-0.3554556	0.7335514	0.3869734	-0.1430733

	PC13	PC14	PC15	PC16
[1,]	0.4778485	0.29771859	-0.17539637	-0.14631681
[2,]	0.3592356	-0.10884273	-0.25695322	0.09789929
[3,]	0.1384509	-0.30770441	0.12484341	0.06258464
[4,]	-0.5752980	0.25874542	-0.35628808	0.18537500
[5,]	-0.4161035	-0.02523226	0.02481071	0.02486392
[6,]	0.1021369	-0.16528975	0.15868235	0.08522987

```
# Ajouter le biplot au PDF
```

```
biplot(res, scale = 0, main = "Biplot des composantes principales")
dev.off()
```

pdf

2

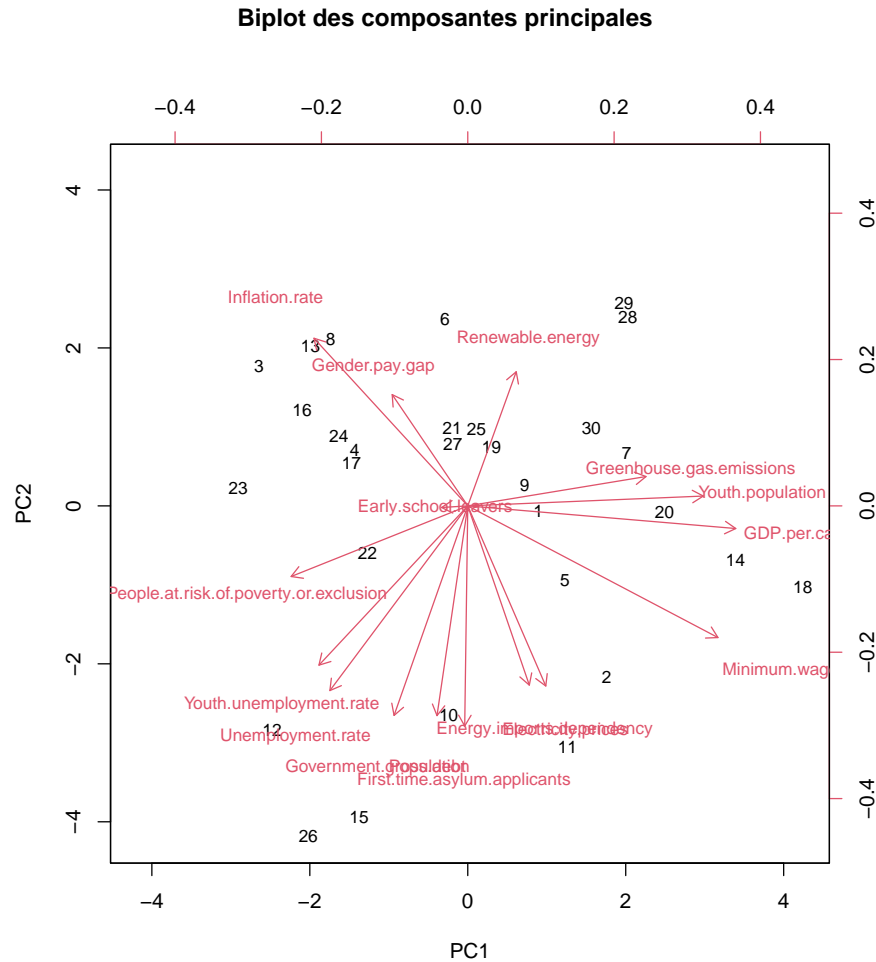
```
# Suite 5
```

```
# Ajuster les dimensions et ajouter un titre pour plus de visibilité
```

```
par(oma = c(0, 0, 2, 0))
```

```
biplot(res, scale = 0, cex = 0.8)
```

```
title("Biplot des composantes principales", outer = TRUE)
```



Les coordonnées des pays dans la nouvelle base sont déterminées par les composantes principales (PC1 et PC2), qui résument la majorité de la variance des données. Ces coordonnées sont affichées sur le premier plan factoriel, permettant une visualisation claire de leur position relative.

Sur le graphique, on observe que certains pays se distinguent par leur éloignement des autres. La Norvège et l'Islande se démarquent nettement dans la partie supérieure droite, ce qui peut s'expliquer par leurs caractéristiques particulières, notamment leur indépendance énergétique et leur forte utilisation des énergies renouvelables. À l'opposé, des pays comme la Grèce, l'Espagne et l'Italie apparaissent isolés dans la partie inférieure gauche, probablement en raison de leurs spécificités économiques ou sociales.

Ce type de visualisation permet d'identifier rapidement les pays qui sortent du lot, comme la Norvège et l'Islande, et, à l'opposé, l'Espagne et l'Italie. Elle aide à mieux comprendre les similarités ou les divergences entre les pays, constituant ainsi une base pour des analyses approfondies.

```
#6
# Étape 1 : Calculer les composantes principales (si non déjà fait)
euro_data_replace_na <- apply(euro_data, 2, function(x) ifelse(is.na(x), mean(x, na.rm = TRUE), x))
res <- prcomp(euro_data_replace_na, scale = TRUE, center = TRUE)
```

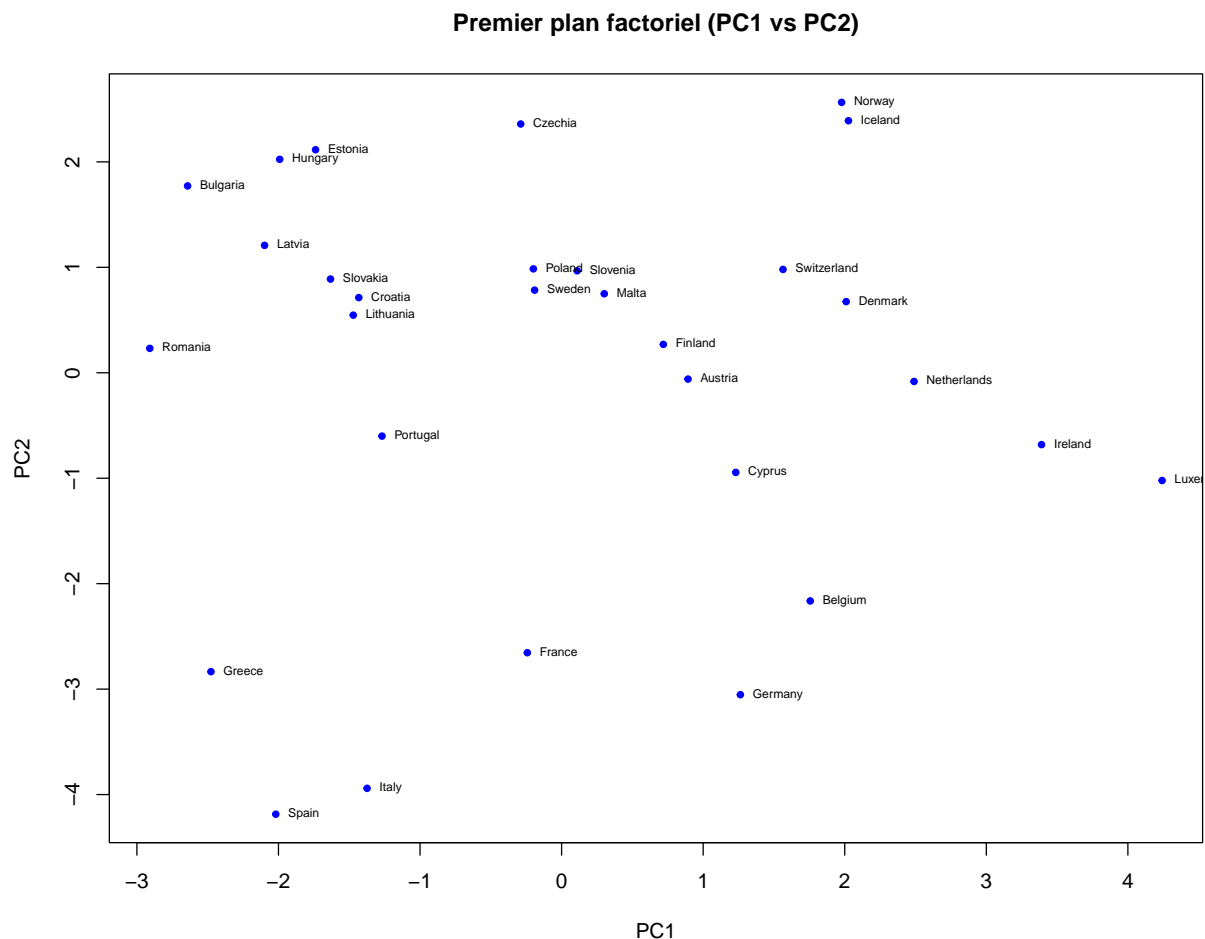
```
#6
coord <- res$x

# Étape 3 : Ajouter les noms des pays comme noms de lignes
```

```
tmp <- read.csv("data/euro.csv", header = TRUE, sep = ";")
rownames(coord) <- tmp[, 1]

# Étape 4 : Créer le graphique du premier plan factoriel
plot(coord[, 1], coord[, 2],
      xlab = "PC1", ylab = "PC2",
      main = "Premier plan factoriel (PC1 vs PC2)",
      pch = 20, col = "blue")

# Étape 5 : Ajouter les noms des pays sur le graphique
text(coord[, 1], coord[, 2], labels = rownames(coord), pos = 4, cex = 0.6)
```



L'ébouli des valeurs propres représente la contribution de chaque composante principale à la variance totale. Dans le graphique, la ligne bleue montre les pourcentages de variances expliquées par chaque composante, tandis que la ligne rouge illustre la variance expliquée cumulée.

En analysant la variance expliquée cumulée, les cinq premières composantes principales expliquent environ 77 % de la variance totale. Cela justifie le choix de retenir les cinq premières composantes pour une analyse approfondie, car elles capturent l'essentiel de l'information tout en réduisant la dimensionnalité des données. Les composantes suivantes apportent une contribution marginale et peuvent être négligées pour simplifier l'interprétation.

Le critère de l'ébouli (coudée visible dans la ligne bleue après la cinquième composante) renforce également

cette décision. Ainsi, la sélection des cinq premières composantes est justifiée à la fois par la proportion de variance expliquée et par la méthode visuelle.

```
#7
variances <- res$sdev^2

# Calculer le pourcentage de variance expliquée
pourcentages <- variances / sum(variances) * 100

# Calculer la variance expliquée cumulée
cumul <- cumsum(pourcentages)

# Afficher les informations pour contrôle
cat("Valeurs propres :\n")
```

Valeurs propres :

```
print(round(variances, 2))
```

```
[1] 3.64 3.52 2.03 1.86 1.28 0.87 0.75 0.56 0.45 0.35 0.21 0.17 0.16 0.09 0.04
[16] 0.03
```

```
cat("\nPourcentages de variances expliquées :\n")
```

Pourcentages de variances expliquées :

```
print(round(pourcentages, 2))
```

```
[1] 22.72 22.02 12.72 11.60 8.02 5.43 4.70 3.50 2.80 2.16 1.28 1.05
[13] 0.99 0.56 0.26 0.19
```

```
cat("\nVariance expliquée cumulée :\n")
```

Variance expliquée cumulée :

```
print(round(cumul, 2))
```

```
[1] 22.72 44.74 57.46 69.06 77.08 82.51 87.21 90.70 93.51 95.66
[11] 96.95 98.00 98.99 99.55 99.81 100.00
```

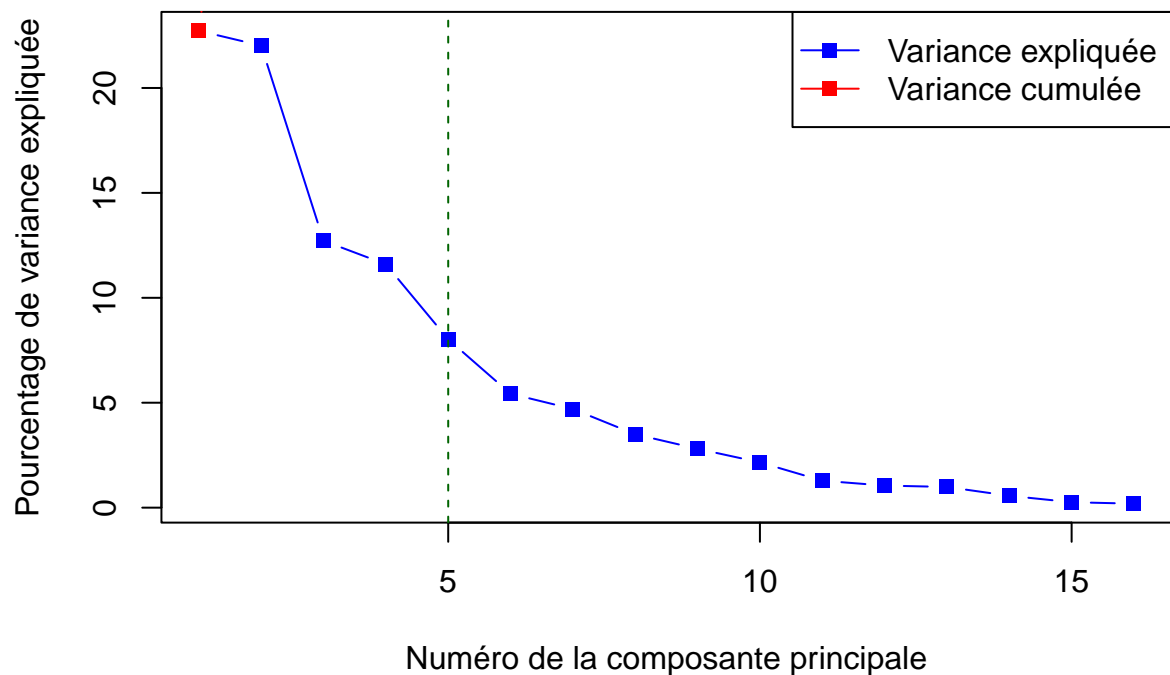
```
# Créer un graphique combiné
plot(pourcentages, type = "b", pch = 15, col = "blue",
     xlab = "Numéro de la composante principale",
     ylab = "Pourcentage de variance expliquée",
     main = "Ébouli des valeurs propres")
lines(cumul, type = "b", pch = 15, col = "red") # Ajouter la variance cumulée
```



```
# Ajouter une légende
legend("topright", legend = c("Variance expliquée", "Variance cumulée"),
      col = c("blue", "red"), pch = 15, lty = 1)

# Ajouter une ligne verticale pour la sélection des composantes (facultatif)
abline(v = 5, col = "darkgreen", lty = 2) # Par exemple, si 5 composantes sont retenues
```

Ébouli des valeurs propres



Le biplot permet d'observer simultanément les projections des pays (points bleus) et des variables initiales (flèches rouges) dans le plan défini par les deux premières composantes principales (PC1 et PC2). Les pays proches sur le graphique partagent des similitudes en termes de variables, tandis que les flèches indiquent les contributions des variables aux composantes principales.

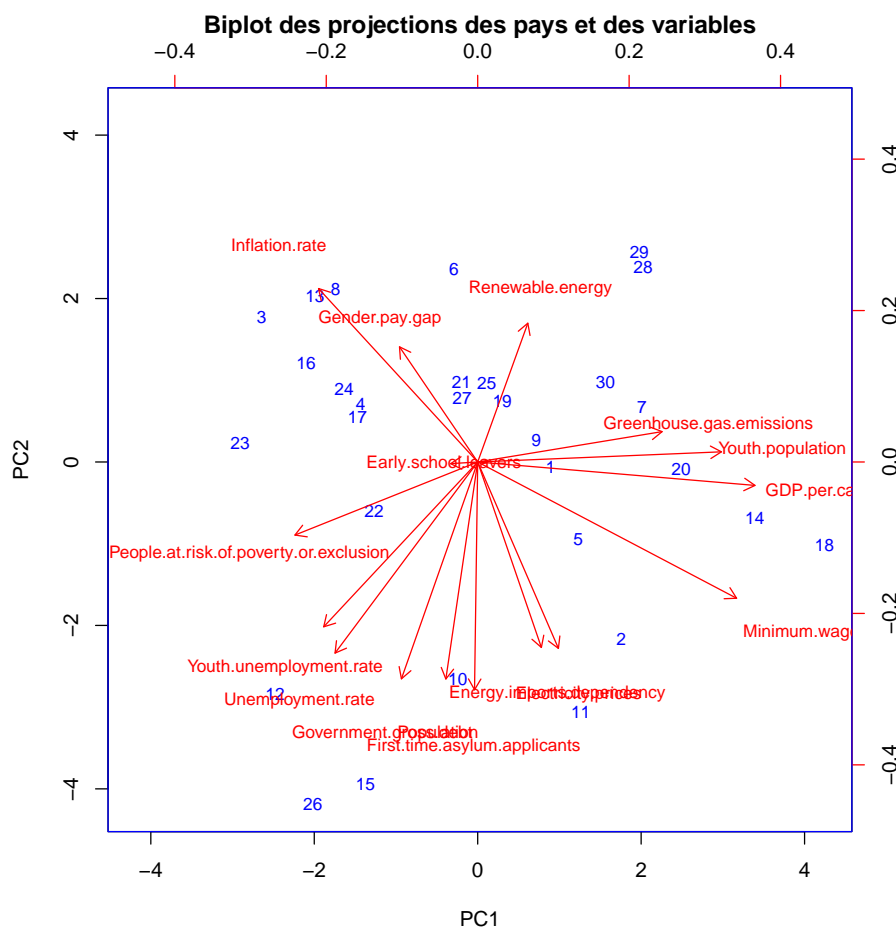
Les flèches rouges montrent la direction et l'intensité des variables. Par exemple, des variables comme Renewable.energy et Greenhouse.gas.emissions influencent fortement le PC1, tandis que People.at.risk.of.poverty.or.exclusion et Youth.unemployment.rate impactent davantage le PC2.

Certains pays, comme la Norvège et l'Islande, se distinguent par leurs projections vers des valeurs élevées de Renewable.energy. À l'opposé, des pays comme la Grèce et l'Italie sont projetés dans des directions qui reflètent d'autres caractéristiques économiques et sociales.

Ce graphique est utile pour identifier les regroupements de pays basés sur des critères communs et pour comprendre les relations entre variables et composantes principales.

```
# 8
# Créer le biplot avec des couleurs et des tailles ajustées
biplot(res, scale = 0,
      main = "Biplot des projections des pays et des variables",
```

```
cex = 0.8, # Taille des points et flèches
col = c("blue", "red"))
```



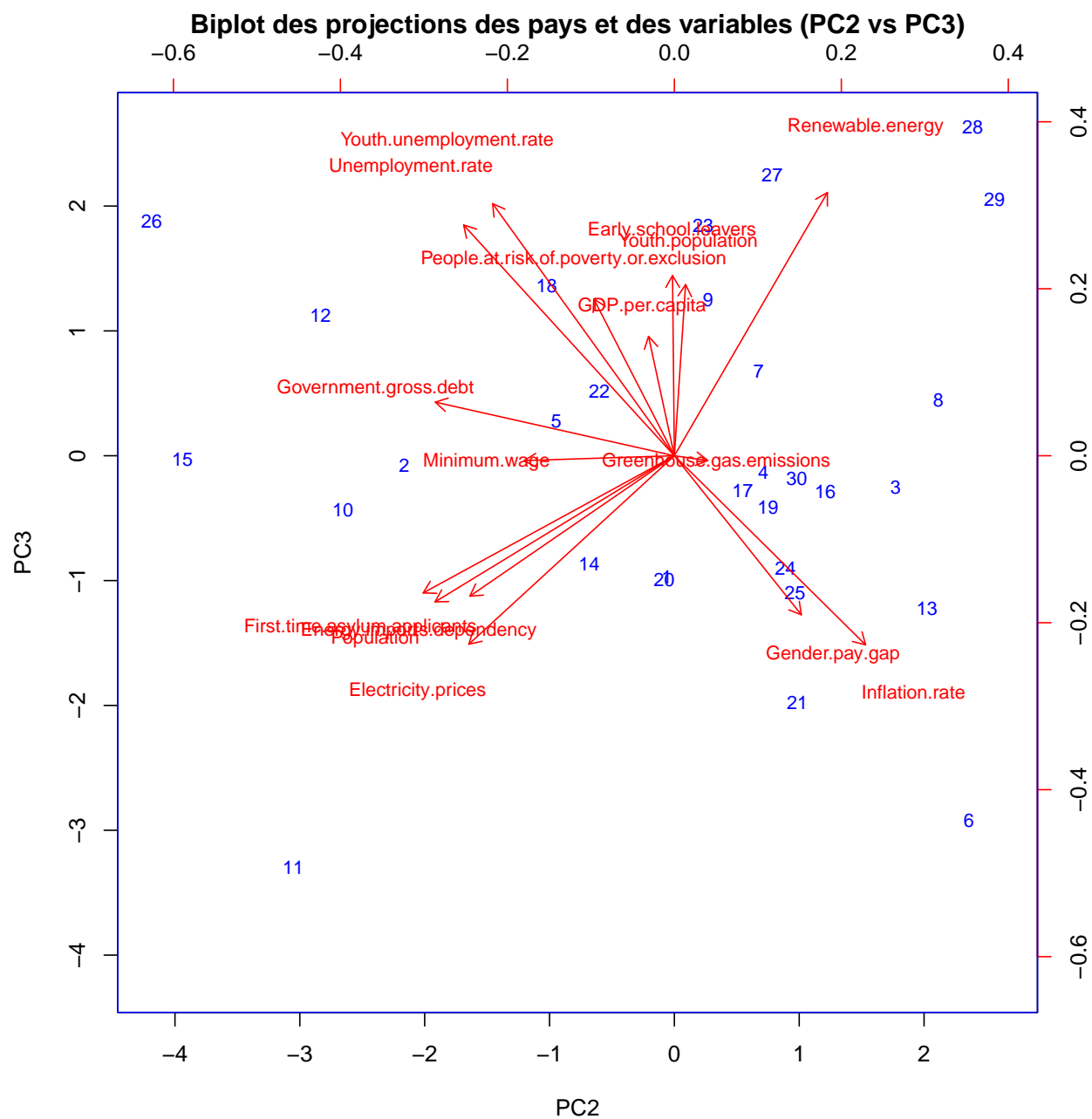
Sur les deux plans factoriels observés, plusieurs éléments significatifs ressortent. Sur le premier plan (PC2 vs PC3), Youth.unemployment.rate et Unemployment.rate se distinguent par leur alignement, reflétant une corrélation positive et leur importance pour la différenciation des pays. Renewable.energy et Inflation.rate se projettent dans des directions opposées, mettant en évidence des dynamiques contrastées entre ces variables. Le pays marqué comme 26 se démarque nettement, tandis que d'autres restent proches du centre, traduisant une certaine homogénéité.

Sur le second plan (PC3 vs PC4), Energy.imports.dependency et Renewable.energy montrent une forte influence, indiquant des relations marquées entre la dépendance énergétique et les efforts en énergies renouvelables. Population et First.time.asylum.applicants se projettent dans des directions opposées, soulignant des contrastes importants. Le pays 11 sort particulièrement du lot sur l'axe PC3, tandis que les autres se regroupent davantage autour du centre.

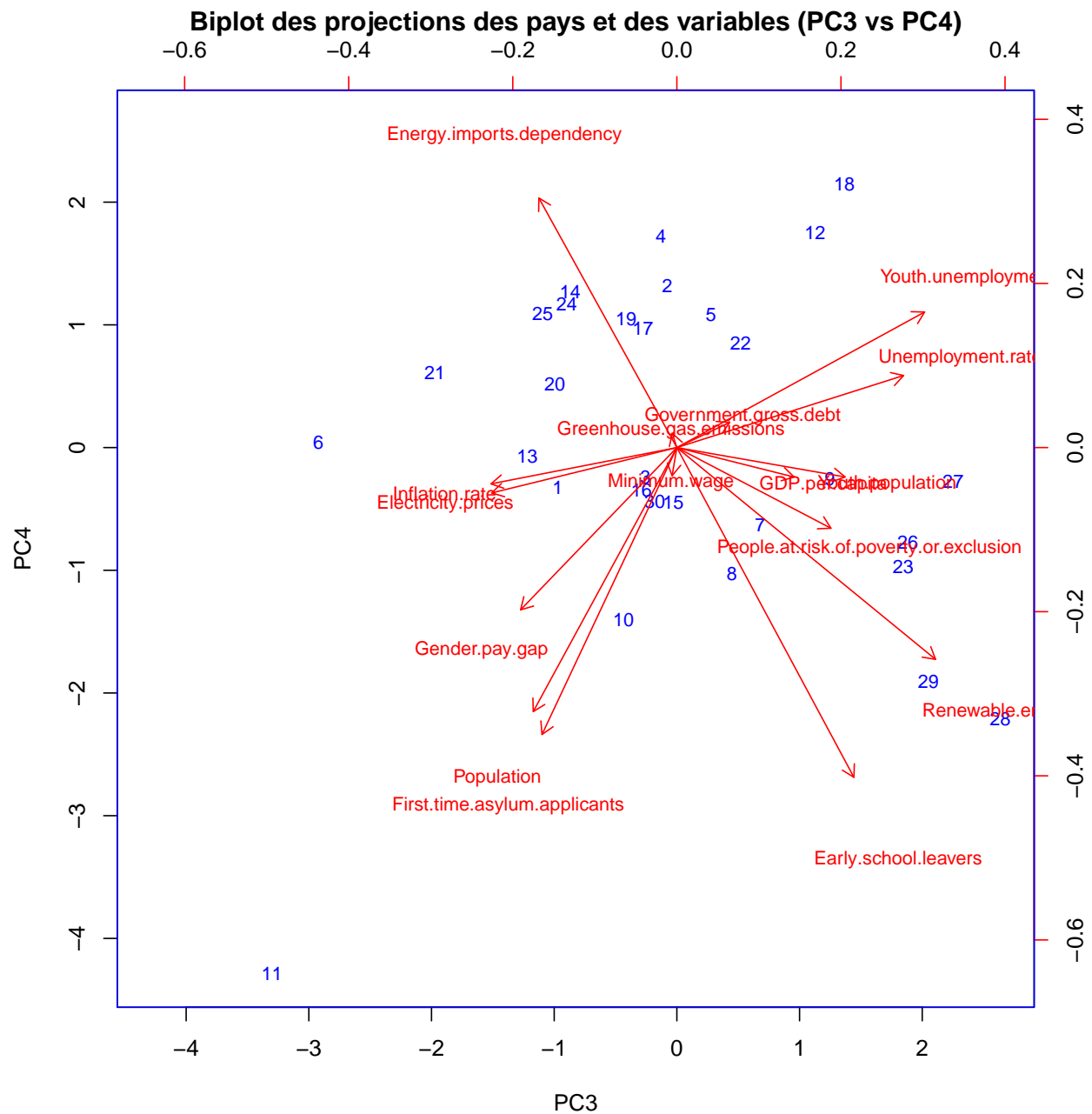
Ces analyses mettent en lumière les relations complexes entre variables et pays, permettant de mieux comprendre les dynamiques sous-jacentes tout en identifiant les facteurs qui différencient certains pays.

```
# 9
# Plan PC2 vs PC3
biplot(res, choices = c(2, 3), scale = 0,
       main = "Biplot des projections des pays et des variables (PC2 vs PC3)",
```

```
cex = 0.8,  
col = c("blue", "red"))
```



```
# Plan PC3 vs PC4
biplot(res, choices = c(3, 4), scale = 0,
       main = "Biplot des projections des pays et des variables (PC3 vs PC4)",
       cex = 0.8, # Taille des points et flèches
       col = c("blue", "red"))
```



Les \cos^2 indiquent la qualité de la représentation des variables sur le premier plan factoriel (PC1-PC2). Plus le \cos^2 est élevé, meilleure est la représentation de la variable sur ce plan. Les variables les mieux représentées incluent Minimum.wage, GDP.per.capita, et Youth.population, avec des \cos^2 respectifs de 0.23, 0.21 et 0.16. Ces variables jouent donc un rôle clé dans la structuration de ce plan factoriel.

En revanche, des variables comme Gender.pay.gap et Early.school.leavers ont des \cos^2 très faibles (0.05 et 0.00), indiquant qu'elles ne sont pas bien représentées sur ce plan. Cela signifie que leur contribution à l'inertie totale du plan PC1-PC2 est limitée, et qu'elles pourraient être mieux représentées sur d'autres plans factoriels.

Ces résultats permettent de se concentrer sur les variables dominantes pour analyser les premières composantes principales et comprendre leur impact sur la structuration des individus et des variables.

```
# 10.
loadings <- res$rotation

# Calculer le cos² pour le plan PC1-PC2
cos2_PC1_PC2 <- rowSums(loadings[, 1:2]^2) # Somme des carrés des charges sur PC1 et PC2

# Afficher les cos²
cat("Cos² des variables sur le plan PC1-PC2 :\n")
```

Cos² des variables sur le plan PC1-PC2 :

```
print(round(cos2_PC1_PC2, 2))
```

Population	Youth.population
0.13	0.16
First.time.asylum.applicants	Gender.pay.gap
0.14	0.05
Minimum.wage	People.at.risk.of.poverty.or.exclusion
0.23	0.11
Early.school.leavers	Inflation.rate
0.00	0.15
Unemployment.rate	Youth.unemployment.rate
0.16	0.14
GDP.per.capita	Government.gross.debt
0.21	0.14
Greenhouse.gas.emissions	Renewable.energy
0.10	0.06
Electricity.prices	Energy.imports.dependency
0.11	0.10

```
# Identifier les variables les mieux représentées
best_variables <- names(sort(cos2_PC1_PC2, decreasing = TRUE))
cat("\nVariables les mieux représentées par PC1-PC2 (par ordre de qualité) :\n")
```

Variables les mieux représentées par PC1-PC2 (par ordre de qualité) :

```
print(best_variables)
```

```
[1] "Minimum.wage"
[2] "GDP.per.capita"
[3] "Youth.population"
[4] "Unemployment.rate"
[5] "Inflation.rate"
```

```

[6] "Government.gross.debt"
[7] "First.time.asylum.applicants"
[8] "Youth.unemployment.rate"
[9] "Population"
[10] "Electricity.prices"
[11] "People.at.risk.of.poverty.or.exclusion"
[12] "Energy.imports.dependency"
[13] "Greenhouse.gas.emissions"
[14] "Renewable.energy"
[15] "Gender.pay.gap"
[16] "Early.school.leavers"

```

Les individus [1] et [27] ont des contributions relativement élevées sur certaines composantes principales, comme PC12, PC9, ou PC8. Par exemple, pour l'individu [27], la contribution sur PC10PC10 est très marquée avec une valeur de 3.21, ce qui explique une part significative de la variance associée à cette composante. La somme des contributions totales confirme que tous les individus participent de manière significative à la construction des composantes principales, car aucun individu ne tombe en dessous du seuil théorique de contribution ($1/n$, où n est le nombre d'individus).

Dans ce cas, aucun individu n'a une contribution faible, ce qui signifie qu'il n'est pas nécessaire d'éliminer des individus de l'analyse. Tous participent de manière adéquate à la variance expliquée par les composantes principales.

```

# 11

# Étape 1 : Extraire les scores des individus
scores <- res$x # Les coordonnées des individus dans le nouvel espace

# Étape 2 : Extraire les variances des composantes principales
variances <- res$sdev^2 # Valeurs propres

# Étape 3 : Calculer les contributions des individus sur chaque composante
# Contribution = (scores^2) / (variance de la composante)
contributions <- sweep(scores^2, 2, variances, "/")

# Étape 4 : Résumé des contributions
cat("Contributions des individus sur chaque composante principale :\n")

```

Contributions des individus sur chaque composante principale :

```

print(round(contributions, 2)) # Contributions arrondies

```

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7	PC8	PC9	PC10	PC11	PC12	PC13	PC14
[1,]	0.22	0.00	0.46	0.06	0.66	0.28	0.01	0.76	0.87	0.13	0.29	1.87	1.45	0.98
[2,]	0.85	1.33	0.00	0.94	0.04	0.02	0.12	0.47	2.87	0.07	2.06	1.34	0.82	0.13
[3,]	1.92	0.89	0.03	0.03	2.17	4.27	0.05	0.00	0.53	3.72	0.11	0.60	0.12	1.05
[4,]	0.56	0.14	0.01	1.61	0.28	0.01	0.05	1.54	0.03	0.33	0.29	0.39	2.10	0.74
[5,]	0.42	0.25	0.04	0.63	0.09	1.19	0.30	7.12	0.25	1.11	0.15	5.45	1.10	0.01
[6,]	0.02	1.58	4.20	0.00	0.03	1.07	2.42	0.21	0.28	1.56	0.73	0.12	0.07	0.30
[7,]	1.11	0.13	0.23	0.21	0.66	0.22	0.26	0.70	0.28	1.96	1.71	0.03	0.01	0.72
[8,]	0.83	1.27	0.10	0.57	0.04	0.93	4.24	1.01	1.45	0.49	1.85	0.45	0.01	0.90
[9,]	0.14	0.02	0.76	0.04	1.05	0.38	0.33	0.04	0.32	0.00	1.20	0.02	5.32	0.07
[10,]	0.02	2.00	0.09	1.06	0.29	0.54	0.00	3.02	0.24	0.01	3.33	1.48	2.41	0.43

```

[11,] 0.44 2.65 5.35 9.89 0.06 0.43 0.01 0.01 0.33 0.12 0.06 0.95 0.03 0.47
[12,] 1.69 2.28 0.62 1.65 1.23 0.62 1.67 0.51 1.02 4.76 0.18 0.16 0.71 0.71
[13,] 1.09 1.16 0.73 0.00 0.60 3.79 1.43 0.07 2.56 0.79 1.29 3.53 0.00 0.01
[14,] 3.16 0.13 0.37 0.87 0.08 1.16 0.85 0.67 0.04 0.17 0.27 4.07 1.54 0.23
[15,] 0.52 4.41 0.00 0.11 0.45 0.15 0.01 0.06 3.52 0.00 3.39 0.12 0.01 0.63
[16,] 1.21 0.41 0.04 0.07 0.78 1.52 0.09 1.56 0.83 0.00 0.01 1.46 0.00 1.69
[17,] 0.60 0.08 0.04 0.51 0.00 1.08 0.10 0.15 0.00 0.02 0.23 0.01 0.02 7.92
[18,] 4.95 0.30 0.92 2.48 3.90 1.30 0.75 1.28 2.35 0.30 1.92 0.15 0.35 0.13
[19,] 0.02 0.16 0.08 0.60 0.35 0.03 11.17 0.11 0.11 0.57 0.29 0.45 0.11 0.18
[20,] 1.70 0.00 0.49 0.14 0.00 0.00 0.81 0.23 1.43 0.36 3.32 0.01 0.01 0.02
[21,] 0.01 0.28 1.91 0.20 0.99 0.10 1.09 2.97 2.49 0.00 0.31 1.05 1.60 0.06
[22,] 0.44 0.10 0.13 0.39 0.49 0.26 0.25 0.03 0.50 0.19 0.13 0.10 0.64 0.76
[23,] 2.33 0.02 1.67 0.51 5.34 1.24 1.12 0.07 0.85 1.12 0.21 2.12 0.00 0.42
[24,] 0.73 0.22 0.40 0.74 0.26 0.57 0.01 0.03 1.18 1.74 0.27 0.52 0.01 0.47
[25,] 0.00 0.27 0.59 0.64 0.00 0.11 0.01 1.65 2.51 0.76 0.07 0.25 7.63 0.03
[26,] 1.12 4.97 1.74 0.32 0.01 0.01 0.01 0.04 1.04 1.37 0.12 2.03 0.94 0.65
[27,] 0.01 0.17 2.49 0.04 2.13 0.21 0.01 3.00 0.49 3.21 0.01 0.00 0.66 1.73
[28,] 1.13 1.62 3.41 2.64 1.77 4.17 0.50 0.66 0.34 3.40 0.01 0.01 0.81 2.98
[29,] 1.08 1.87 2.07 1.96 0.30 0.23 0.00 1.02 0.00 0.15 1.78 0.03 0.00 4.37
[30,] 0.67 0.27 0.02 0.10 4.97 3.10 1.32 0.01 0.30 0.60 3.43 0.23 0.53 0.24
PC15 PC16
[1,] 0.74 0.71
[2,] 1.59 0.32
[3,] 0.37 0.13
[4,] 3.05 1.14
[5,] 0.01 0.02
[6,] 0.61 0.24
[7,] 1.16 0.32
[8,] 0.25 0.18
[9,] 0.22 2.69
[10,] 1.72 0.18
[11,] 3.44 0.80
[12,] 0.01 1.17
[13,] 0.10 0.09
[14,] 0.30 1.16
[15,] 0.24 0.81
[16,] 0.68 0.07
[17,] 1.73 0.26
[18,] 0.18 0.25
[19,] 0.16 0.49
[20,] 0.10 1.09
[21,] 0.81 3.21
[22,] 1.95 4.43
[23,] 1.82 0.17
[24,] 2.12 0.14
[25,] 0.12 4.48
[26,] 3.52 0.52
[27,] 1.56 1.31
[28,] 0.06 0.02
[29,] 0.36 0.89
[30,] 0.02 1.67

```

```

# Étape 5 : Calcul des contributions totales par individu (somme sur toutes les composantes)
contributions_totales <- rowSums(contributions)

```



```
cat("\nContributions totales par individu :\n")
```

Contributions totales par individu :

```
print(round(contributions_totales, 2))
```

```
[1]  9.50 12.96 16.01 12.26 18.13 13.44  9.72 14.57 12.61 16.81 25.03 18.96
[13] 17.24 15.08 14.42 10.42 12.74 21.50 14.88  9.73 17.08 10.81 18.99  9.42
[25] 19.12 18.42 17.04 23.55 16.11 17.47
```

```
# Étape 6 : Identifier les individus avec des contributions faibles
seuil <- 1 / nrow(scores) # Seuil théorique de contribution moyenne
individus_faibles <- names(contributions_totales[contributions_totales < seuil])
cat("\nIndividus ayant une contribution faible (en dessous du seuil) :\n")
```

Individus ayant une contribution faible (en dessous du seuil) :

```
print(individus_faibles)
```

NULL

La projection des individus sur les composantes principales (PC1 et PC2) montre des regroupements qui correspondent globalement aux similarités socio-économiques attendues :

Les pays d'Europe du Nord (Norvège, Islande, Danemark) sont situés dans une région distincte, ce qui reflète des caractéristiques socio-économiques communes comme des niveaux élevés de revenus et de bien-être. Les pays d'Europe du Sud (Espagne, Italie, Grèce) apparaissent dans une région différente, marquant des disparités avec les pays du Nord, notamment en termes de chômage ou de performances économiques. Les pays d'Europe de l'Est (Bulgarie, Roumanie, Lettonie) se regroupent dans une zone particulière, suggérant des similarités dues à des caractéristiques économiques ou sociales spécifiques.

Cette distribution confirme que les projections sur les composantes principales reflètent bien certaines similarités et différences entre les pays, conformément aux attentes. Cela valide également l'utilité de l'analyse en composantes principales pour interpréter les relations complexes entre les variables et les individus (pays dans ce cas).

```
# question 12 12. La projection des individus sur les composantes correspond-elle, d'une manière ou d'une autre, aux attendues
# Étape 1 : Extraire les scores
coord <- res$x # Scores des individus

# Étape 2 : Ajouter les noms des pays
tmp <- read.csv("data/euro.csv", header = TRUE, sep = ";") # Charger les noms
rownames(coord) <- tmp[, 1]

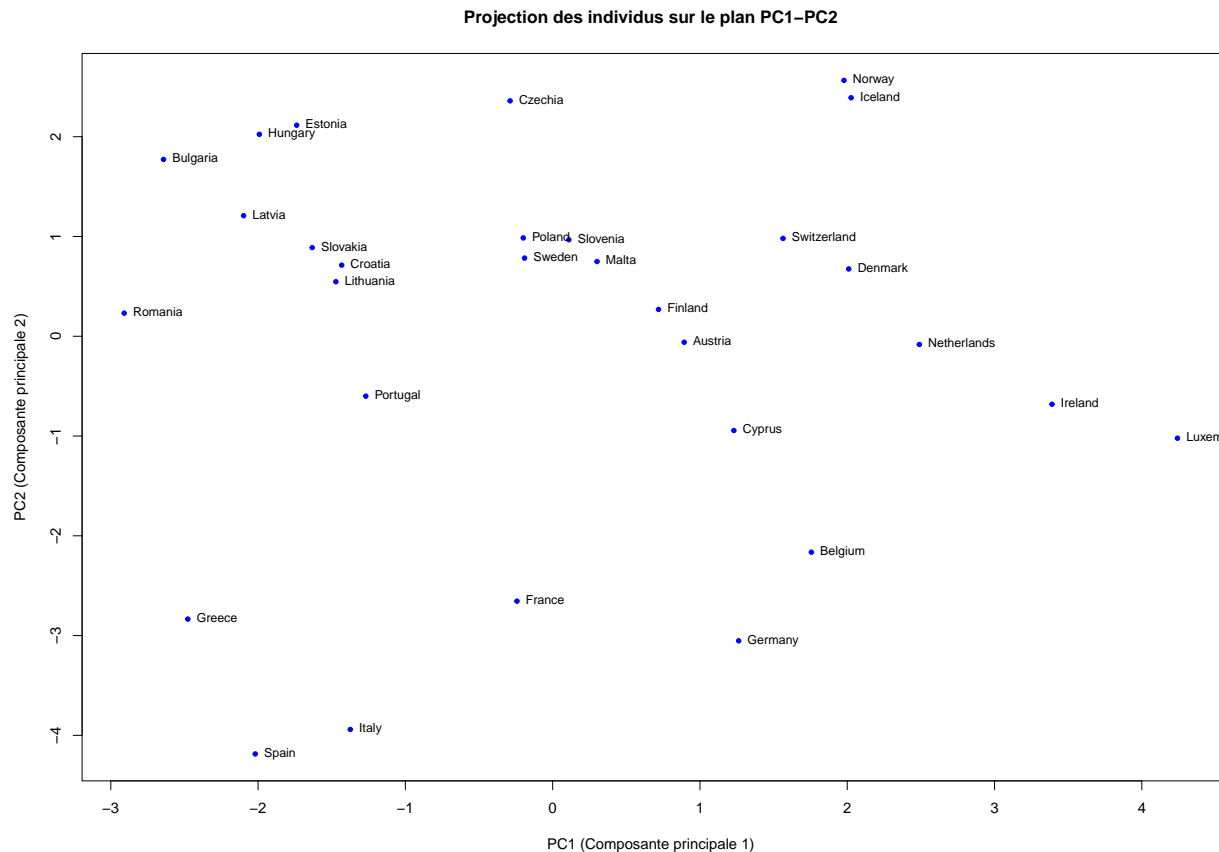
# Étape 3 : Créer le graphique
plot(coord[, 1], coord[, 2],
      xlab = "PC1 (Composante principale 1)",
      ylab = "PC2 (Composante principale 2)",
```

```

main = "Projection des individus sur le plan PC1-PC2",
pch = 20, col = "blue")

# Ajouter les noms des individus
text(coord[, 1], coord[, 2], labels = rownames(coord), pos = 4, cex = 0.8)

```



Conclusion Cette étude en analyse en composantes principales (ACP) a permis de réduire la dimensionnalité des données tout en conservant l'essentiel de l'information. Les résultats obtenus, tels que les projections des pays sur les composantes principales et l'écoulement des valeurs propres, ont révélé des regroupements significatifs et des similarités attendues entre les pays en fonction de leurs caractéristiques socio-économiques. Ces visualisations offrent une vue claire des relations entre les variables et des différences structurelles entre les pays, facilitant ainsi une interprétation plus approfondie. Cette analyse constitue une base solide pour explorer des méthodes complémentaires, telles que le partitionnement, afin de segmenter davantage les pays en groupes homogènes.

```
# TP2 *****
```

```
# Question 1
```

```

# Matrice de dissimilarité Euclidienne (non normalisée)
dissimilarity_euclidean <- as.matrix(dist(euro_data, method = "euclidean"))

# Normaliser les données
euro_data_normalized <- scale(euro_data)

```

```
# Matrice de dissimilarité Euclidienne (normalisée)
dissimilarity_reduced <- as.matrix(dist(euro_data_normalized, method = "euclidean"))

# Afficher les matrices
cat("Matrice de dissimilarité Euclidienne (non normalisée) :\n")
```

Matrice de dissimilarité Euclidienne (non normalisée) :

```
print(round(dissimilarity_euclidean, 2))
```

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.0	2638160.9	2657441.6	5254209.8	8184197.7	1723739.7	3172609.6
2	2638160.9	0.0	5295172.6	7891982.7	10822113.6	915893.4	5810224.2
3	2657441.6	5295172.6	0.0	2596908.1	5527055.2	4379883.5	517377.9
4	5254209.8	7891982.7	2596908.1	0.0	2930238.9	6976636.0	2082102.7
5	8184197.7	10822113.6	5527055.2	2930238.9	0.0	9906837.9	5012023.0
6	1723739.7	915893.4	4379883.5	6976636.0	9906837.9	0.0	4894993.5
7	3172609.6	5810224.2	517377.9	2082102.7	5012023.0	4894993.5	0.0
8	7739095.7	10376966.3	5081864.8	2485011.2	445423.9	9461646.0	4566922.4
9	3541179.2	6178875.8	884403.3	1713222.9	4643283.9	5263592.7	369016.5
10	59068272.1	56430300.0	61725394.4	64322245.8	67252408.7	57345630.8	62240489.5
11	75254567.8	72616667.8	77911743.7	80508619.6	83438748.0	73532049.3	78426873.1
12	1309339.5	1329246.9	3966447.0	6563330.6	9493397.5	417425.3	4481796.4
13	498677.6	2143374.4	3152120.1	5748850.2	8679061.1	1227792.4	3667289.2
14	3833770.1	6471512.3	1178083.5	1421690.0	4350916.7	5556402.2	661626.8
15	49892485.3	47254514.4	52549606.4	55146459.4	58076621.7	48169847.0	53064707.3
16	7222010.5	9859856.2	4564752.4	1967886.6	962468.6	8944522.6	4049836.8
17	6247781.6	8885592.0	3590504.5	993615.7	1936652.9	7970250.9	3075606.3
18	8444257.2	11082114.6	5787427.3	3190822.5	265931.4	10166927.0	5271935.1
19	8562908.8	11200787.2	5905729.2	3308864.2	378816.7	10285481.2	5390666.0
20	8706540.1	6068506.0	11363651.2	13960476.9	16890619.4	6983909.5	11878694.2
21	27649015.7	25010959.5	30306030.3	32902842.6	35833037.6	25926208.1	30821105.6
22	1412975.2	1226591.2	4068976.5	6665728.9	9595927.6	310914.0	4584084.3
23	9949920.8	7311827.9	12606844.4	15203656.9	18133855.5	8227027.8	13121964.2
24	3676462.9	6314104.5	1019192.6	1577899.5	4508119.1	5398737.4	505152.5
25	6987988.3	9625861.3	4330788.3	1733946.6	1196292.5	8710559.9	3815806.0
26	38980730.5	36342803.8	41637883.5	44234753.4	47164894.8	37258173.3	42153012.4
27	1464078.3	1261488.4	4207644.3	6889503.2	9915736.2	317260.5	4739409.5
28	9319046.8	12139076.8	6478490.5	3702359.4	569987.2	11160612.2	5927755.2
29	3734910.3	6459056.0	992533.1	1692844.2	4718327.5	5513902.8	458665.5
30	301607.7	3023539.1	2446003.6	5127617.3	8153693.3	2078822.6	2977400.6
	8	9	10	11	12	13	14
1	7739095.7	3541179.23	59068272	75254568	1309339.5	498677.6	3833770.1
2	10376966.3	6178875.82	56430300	72616668	1329246.9	2143374.4	6471512.3
3	5081864.8	884403.26	61725394	77911744	3966447.0	3152120.1	1178083.5
4	2485011.2	1713222.94	64322246	80508620	6563330.6	5748850.2	1421690.0
5	445423.9	4643283.92	67252409	83438748	9493397.5	8679061.1	4350916.7
6	9461646.0	5263592.70	57345631	73532049	417425.3	1227792.4	5556402.2
7	4566922.4	369016.54	62240490	78426873	4481796.4	3667289.2	661626.8
8	0.0	4198142.43	66807245	82993600	9048259.5	8233861.0	3905930.1
9	4198142.4	0.00	62609165	78795544	4850339.3	4035840.0	294757.5
10	66807244.6	62609165.06	0	16186913	57759062.7	58573415.9	62901731.7
11	82993600.2	78795543.54	16186913	0	73945362.1	74759828.2	79088088.5

12	9048259.5	4850339.35	57759063	73945362	0.0	816305.6	5143049.7
13	8233861.0	4035839.96	58573416	74759828	816305.6	0.0	4328749.0
14	3905930.1	294757.49	62901732	79088088	5143049.7	4328749.0	0.0
15	57631457.5	53433380.51	9175789	25362422	48583274.2	49397631.5	53725951.5
16	517133.4	3681040.00	66290127	82476490	8531161.6	7716736.2	3388911.8
17	1491399.1	2706784.64	65315861	81502231	7556922.1	6742465.0	2414819.3
18	708356.7	4903380.29	67512337	83698686	9753540.9	8939201.5	4610612.9
19	823917.6	5021931.53	67631081	83817438	9872100.7	9057701.2	4729577.0
20	16445468.8	12247370.11	50361800	66548190	7397378.3	8211691.5	12539950.7
21	35387852.2	31189774.11	31419547	47606198	26339802.2	27153993.1	31482393.0
22	9150738.2	4952681.53	57656534	73842947	116587.4	916896.3	5245494.4
23	17688665.7	13490605.64	49118621	65305082	8640704.0	9454810.0	13783290.5
24	4062909.8	136788.50	62744354	78930740	4985522.6	4170952.5	167299.3
25	751126.5	3447031.16	66056150	82242504	8297165.5	7482779.5	3154818.4
26	46719740.1	42521678.83	20087624	36273877	37671519.1	38485952.9	42814244.4
27	9455987.4	5120180.96	59542299	76259541	124863.7	952600.0	5422417.0
28	1046036.9	5533605.49	72465604	89769540	10718665.1	9848070.9	5220936.5
29	4258721.0	85416.58	64739923	81457137	5087099.3	4245993.3	224880.3
30	7694009.0	3358237.98	61304387	78021579	1651970.6	812140.9	3660253.9
	15	16	17	18	19	20	21
1	49892485	7222010.5	6247781.6	8444257.2	8562908.8	8706540	27649016
2	47254514	9859856.2	8885592.0	11082114.6	11200787.2	6068506	25010959
3	52549606	4564752.4	3590504.5	5787427.3	5905729.2	11363651	30306030
4	55146459	1967886.6	993615.7	3190822.5	3308864.2	13960477	32902843
5	58076622	962468.6	1936652.9	265931.4	378816.7	16890619	35833038
6	48169847	8944522.6	7970250.9	10166927.0	10285481.2	6983909	25926208
7	53064707	4049836.8	3075606.3	5271935.1	5390666.0	11878694	30821106
8	57631458	517133.4	1491399.1	708356.7	823917.6	16445469	35387852
9	53433381	3681040.0	2706784.6	4903380.3	5021931.5	12247370	31189774
10	9175789	66290127.4	65315860.8	67512336.5	67631081.0	50361800	31419547
11	25362422	82476490.1	81502231.0	83698685.7	83817438.5	66548190	47606198
12	48583274	8531161.6	7556922.1	9753540.9	9872100.7	7397378	26339802
13	49397632	7716736.2	6742465.0	8939201.5	9057701.2	8211692	27153993
14	53725952	3388911.8	2414819.3	4610612.9	4729577.0	12539951	31482393
15	0	57114340.6	56140074.3	58336558.1	58455294.8	41186016	22243808
16	57114341	0.0	974273.0	1224209.5	1341023.6	15928356	34870729
17	56140074	974273.0	0.0	2197538.9	2315257.5	14954089	33896458
18	58336558	1224209.5	2197538.9	0.0	131665.5	17150563	36092993
19	58455295	1341023.6	2315257.5	131665.5	0.0	17269291	36211688
20	41186016	15928356.0	14954089.2	17150563.2	17269290.8	0	18942493
21	22243808	34870728.6	33896457.8	36092992.5	36211687.6	18942493	0
22	48480750	8633615.5	7659343.8	9856017.3	9974572.6	7294799	26237116
23	39942840	17171542.2	16197272.4	18393885.7	18512506.5	1244054	17699189
24	53568569	3545785.7	2571513.5	4768452.2	4886751.3	12382589	31324945
25	56880363	234200.3	740373.1	1457455.8	1574941.4	15694366	34636765
26	10911881	46202627.6	45228366.0	47424850.3	47543579.1	30274323	11332659
27	50065591	8921916.1	7915695.8	10184216.3	10306809.1	7528867	27092497
28	62656277	1598777.4	2640185.5	295313.7	165765.1	18626576	38876876
29	55263219	3724730.3	2718655.6	4986532.4	5109387.3	12726502	32290151
30	51827680	7159963.7	6153770.5	8422071.9	8544791.2	9290960	28854655
	22	23	24	25	26	27	28
1	1412975.22	9949921	3676462.90	6987988.3	38980731	1464078.30	9319046.8
2	1226591.23	7311828	6314104.51	9625861.3	36342804	1261488.36	12139076.8
3	4068976.47	12606844	1019192.57	4330788.3	41637884	4207644.26	6478490.5

4	6665728.92	15203657	1577899.47	1733946.6	44234753	6889503.25	3702359.4
5	9595927.61	18133856	4508119.13	1196292.5	47164895	9915736.15	569987.2
6	310914.02	8227028	5398737.42	8710559.9	37258173	317260.51	11160612.2
7	4584084.33	13121964	505152.48	3815806.0	42153012	4739409.52	5927755.2
8	9150738.20	17688666	4062909.79	751126.5	46719740	9455987.39	1046036.9
9	4952681.53	13490606	136788.50	3447031.2	42521679	5120180.96	5533605.5
10	57656533.80	49118621	62744354.29	66056150.0	20087624	59542298.67	72465604.4
11	73842947.40	65305082	78930739.77	82242504.0	36273877	76259541.21	89769540.2
12	116587.45	8640704	4985522.60	8297165.5	37671519	124863.68	10718665.1
13	916896.26	9454810	4170952.55	7482779.5	38485953	952599.98	9848070.9
14	5245494.44	13783290	167299.32	3154818.4	42814244	5422416.95	5220936.5
15	48480749.68	39942840	53568568.57	56880363.2	10911881	50065591.20	62656277.5
16	8633615.51	17171542	3545785.73	234200.3	46202628	8921916.12	1598777.4
17	7659343.84	16197272	2571513.54	740373.1	45228366	7915695.76	2640185.5
18	9856017.34	18393886	4768452.21	1457455.8	47424850	10184216.28	295313.7
19	9974572.55	18512507	4886751.32	1574941.4	47543579	10306809.06	165765.1
20	7294799.49	1244054	12382588.81	15694365.8	30274323	7528867.06	18626576.4
21	26237115.97	17699189	31324944.91	34636764.8	11332659	27092496.59	38876876.5
22	0.00	8537935	5087830.52	8399650.6	37569072	27013.79	10828235.2
23	8537935.36	0	13625760.74	16937580.4	29031207	8812907.74	19955666.8
24	5087830.52	13625761	0.00	3311831.9	42656870	5259871.68	5389159.8
25	8399650.60	16937580	3311831.85	0.0	45968645	8680248.27	1848726.3
26	37569072.06	29031207	42656870.30	45968644.6	0	38796051.75	50991159.3
27	27013.79	8812908	5259871.68	8680248.3	38796052	0.00	10833487.5
28	10828235.15	19955667	5389159.79	1848726.3	50991159	10833487.50	0.0
29	5192801.16	14010600	84618.29	3482978.5	43993668	5197695.75	5453536.8
30	1757788.42	10575120	3498101.70	6918252.8	40558111	1762330.42	9009575.6
	29	30					
1	3734910.33	301607.7					
2	6459056.01	3023539.1					
3	992533.11	2446003.6					
4	1692844.17	5127617.3					
5	4718327.55	8153693.3					
6	5513902.84	2078822.6					
7	458665.48	2977400.6					
8	4258721.03	7694009.0					
9	85416.58	3358238.0					
10	64739922.94	61304386.8					
11	81457137.37	78021579.4					
12	5087099.33	1651970.6					
13	4245993.26	812140.9					
14	224880.27	3660253.9					
15	55263218.86	51827680.0					
16	3724730.34	7159963.7					
17	2718655.56	6153770.5					
18	4986532.40	8422071.9					
19	5109387.27	8544791.2					
20	12726501.58	9290960.2					
21	32290151.02	28854655.5					
22	5192801.16	1757788.4					
23	14010599.65	10575119.5					
24	84618.29	3498101.7					
25	3482978.53	6918252.8					
26	43993667.87	40558110.9					

```

27 5197695.75 1762330.4
28 5453536.80 9009575.6
29      0.00 3435576.1
30 3435576.09      0.0

```

```
cat("\nMatrice de dissimilarité Euclidienne (normalisée) :\n")
```

Matrice de dissimilarité Euclidienne (normalisée) :

```
print(round(dissimilarity_reduced, 2))
```

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0.00	3.80	5.55	3.97	3.61	4.15	3.04	4.70	2.71	4.04	5.87	5.60	4.48	3.95	5.40
2	3.80	0.00	6.87	4.91	3.05	6.20	4.09	6.63	4.12	4.43	6.90	5.34	6.83	3.25	4.39
3	5.55	6.87	0.00	4.26	6.58	5.39	6.13	3.53	5.61	6.52	8.25	6.66	4.71	7.13	6.77
4	3.97	4.91	4.26	0.00	4.79	4.65	4.87	4.29	3.81	4.94	8.36	4.59	4.18	5.66	5.74
5	3.61	3.05	6.58	4.79	0.00	5.64	3.65	5.96	4.01	5.21	7.36	5.63	5.87	4.10	5.24
6	4.15	6.20	5.39	4.65	5.64	0.00	5.36	4.59	5.30	6.46	7.50	7.65	4.00	5.79	7.31
7	3.04	4.09	6.13	4.87	3.65	5.36	0.00	4.84	2.67	5.01	6.95	6.94	5.88	3.89	6.41
8	4.70	6.63	3.53	4.29	5.96	4.59	4.84	0.00	4.14	6.11	8.09	6.43	4.87	6.66	7.09
9	2.71	4.12	5.61	3.81	4.01	5.30	2.67	4.14	0.00	4.28	7.33	5.32	5.22	4.86	5.73
10	4.04	4.43	6.52	4.94	5.21	6.46	5.01	6.11	4.28	0.00	5.10	5.01	5.98	5.82	3.58
11	5.87	6.90	8.25	8.36	7.36	7.50	6.95	8.09	7.33	5.10	0.00	8.79	8.22	7.12	6.18
12	5.60	5.34	6.66	4.59	5.63	7.65	6.94	6.43	5.32	5.01	8.79	0.00	6.90	7.16	4.51
13	4.48	6.83	4.71	4.18	5.87	4.00	5.88	4.87	5.22	5.98	8.22	6.90	0.00	7.13	6.86
14	3.95	3.25	7.13	5.66	4.10	5.79	3.89	6.66	4.86	5.82	7.12	7.16	7.13	0.00	6.54
15	5.40	4.39	6.77	5.74	5.24	7.31	6.41	7.09	5.73	3.58	6.18	4.51	6.86	6.54	0.00
16	3.91	5.73	3.58	3.47	5.39	4.51	4.54	2.95	4.15	5.47	7.62	5.60	4.51	6.25	5.94
17	3.49	4.76	3.38	2.26	4.42	4.55	4.40	3.82	3.85	5.04	7.63	4.96	4.08	5.32	5.32
18	6.32	4.96	8.16	6.98	5.60	8.09	5.79	8.15	6.06	7.37	9.10	8.26	8.53	3.86	7.64
19	3.92	4.87	5.17	4.07	4.00	5.59	4.24	6.04	4.63	5.61	7.80	6.71	4.31	5.34	6.34
20	2.79	3.57	6.17	4.55	3.80	5.20	3.15	5.98	3.70	4.62	6.42	6.81	5.62	3.01	6.32
21	4.26	4.89	4.65	3.46	5.12	3.06	5.07	4.96	4.83	5.16	7.14	6.74	4.46	5.11	5.86
22	3.28	3.90	4.84	2.55	3.73	5.30	4.22	4.64	3.02	4.07	7.53	3.70	4.55	5.57	4.18
23	6.37	6.72	3.96	5.49	6.36	7.12	6.26	5.05	5.90	6.23	8.59	6.76	5.37	7.83	5.67
24	3.47	5.31	4.47	2.11	4.54	3.71	4.81	4.00	3.91	5.04	7.90	5.09	2.99	5.85	5.81
25	3.37	4.17	4.78	2.92	4.59	3.75	4.19	5.03	3.65	5.16	7.51	6.13	4.42	4.90	5.82
26	6.17	5.76	7.12	6.23	5.89	8.60	6.76	6.98	5.66	4.18	7.29	4.31	7.44	7.68	3.24
27	4.68	5.57	5.89	3.95	5.55	6.49	3.66	4.65	2.93	5.19	8.63	6.26	5.96	6.14	6.52
28	6.24	7.31	7.09	7.46	6.48	7.17	5.44	6.42	5.21	7.79	9.45	9.25	7.11	7.27	8.84
29	4.96	6.67	6.61	6.09	6.24	6.39	3.65	5.37	3.74	6.63	8.53	8.53	6.30	6.18	8.27
30	3.63	5.44	6.33	5.08	5.48	6.00	3.15	5.72	4.06	5.89	7.31	7.40	6.66	4.76	7.31
	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	3.91	3.49	6.32	3.92	2.79	4.26	3.28	6.37	3.47	3.37	6.17	4.68	6.24	4.96	3.63
2	5.73	4.76	4.96	4.87	3.57	4.89	3.90	6.72	5.31	4.17	5.76	5.57	7.31	6.67	5.44
3	3.58	3.38	8.16	5.17	6.17	4.65	4.84	3.96	4.47	4.78	7.12	5.89	7.09	6.61	6.33
4	3.47	2.26	6.98	4.07	4.55	3.46	2.55	5.49	2.11	2.92	6.23	3.95	7.46	6.09	5.08
5	5.39	4.42	5.60	4.00	3.80	5.12	3.73	6.36	4.54	4.59	5.89	5.55	6.48	6.24	5.48
6	4.51	4.55	8.09	5.59	5.20	3.06	5.30	7.12	3.71	3.75	8.60	6.49	7.17	6.39	6.00
7	4.54	4.40	5.79	4.24	3.15	5.07	4.22	6.26	4.81	4.19	6.76	3.66	5.44	3.65	3.15
8	2.95	3.82	8.15	6.04	5.98	4.96	4.64	5.05	4.00	5.03	6.98	4.65	6.42	5.37	5.72
9	4.15	3.85	6.06	4.63	3.70	4.83	3.02	5.90	3.91	3.65	5.66	2.93	5.21	3.74	4.06

```

10 5.47 5.04 7.37 5.61 4.62 5.16 4.07 6.23 5.04 5.16 4.18 5.19 7.79 6.63 5.89
11 7.62 7.63 9.10 7.80 6.42 7.14 7.53 8.59 7.90 7.51 7.29 8.63 9.45 8.53 7.31
12 5.60 4.96 8.26 6.71 6.81 6.74 3.70 6.76 5.09 6.13 4.31 6.26 9.25 8.53 7.40
13 4.51 4.08 8.53 4.31 5.62 4.46 4.55 5.37 2.99 4.42 7.44 5.96 7.11 6.30 6.66
14 6.25 5.32 3.86 5.34 3.01 5.11 5.57 7.83 5.85 4.90 7.68 6.14 7.27 6.18 4.76
15 5.94 5.32 7.64 6.34 6.32 5.86 4.18 5.67 5.81 5.82 3.24 6.52 8.84 8.27 7.31
16 0.00 2.24 8.37 4.97 5.58 4.56 3.34 4.75 3.38 4.05 6.44 4.25 7.22 5.92 4.51
17 2.24 0.00 6.90 3.66 4.48 3.76 2.59 4.56 2.55 3.18 5.81 4.23 7.28 6.12 4.60
18 8.37 6.90 0.00 6.52 4.82 6.73 6.97 8.30 7.45 6.46 8.06 6.83 7.37 6.70 6.86
19 4.97 3.66 6.52 0.00 3.42 4.71 3.85 5.61 4.00 3.69 6.98 5.47 7.00 5.88 4.88
20 5.58 4.48 4.82 3.42 0.00 4.26 4.53 7.07 4.66 3.66 7.08 5.25 6.42 5.15 3.98
21 4.56 3.76 6.73 4.71 4.26 0.00 4.37 6.02 3.67 2.63 7.40 5.64 7.07 6.26 5.81
22 3.34 2.59 6.97 3.85 4.53 4.37 0.00 4.90 2.73 3.27 4.73 3.82 7.09 5.86 4.75
23 4.75 4.56 8.30 5.61 7.07 6.02 4.90 0.00 5.53 6.04 5.68 5.60 6.66 6.96 7.54
24 3.38 2.55 7.45 4.00 4.66 3.67 2.73 5.53 0.00 3.28 6.25 4.52 7.59 6.17 5.25
25 4.05 3.18 6.46 3.69 3.66 2.63 3.27 6.04 3.28 0.00 7.02 4.79 6.74 5.53 4.71
26 6.44 5.81 8.06 6.98 7.08 7.40 4.73 5.68 6.25 7.02 0.00 6.18 9.12 8.42 7.90
27 4.25 4.23 6.83 5.47 5.25 5.64 3.82 5.60 4.52 4.79 6.18 0.00 6.36 4.17 4.34
28 7.22 7.28 7.37 7.00 6.42 7.07 7.09 6.66 7.59 6.74 9.12 6.36 0.00 3.62 7.28
29 5.92 6.12 6.70 5.88 5.15 6.26 5.86 6.96 6.17 5.53 8.42 4.17 3.62 0.00 4.63
30 4.51 4.60 6.86 4.88 3.98 5.81 4.75 7.54 5.25 4.71 7.90 4.34 7.28 4.63 0.00

```

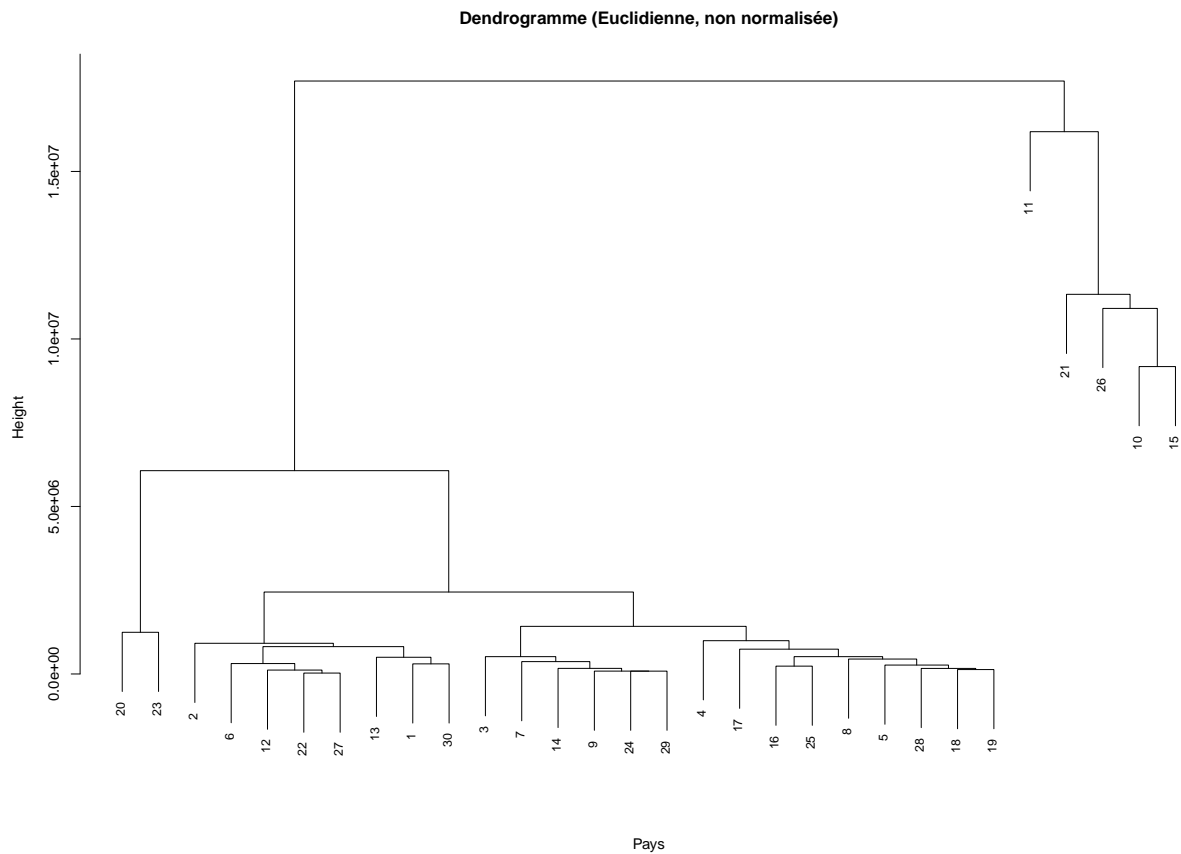
```

# Question 1 suite
# CAH avec la matrice non normalisée
cah_single_euclidean <- hclust(dist(euro_data, method = "euclidean"), method = "single")

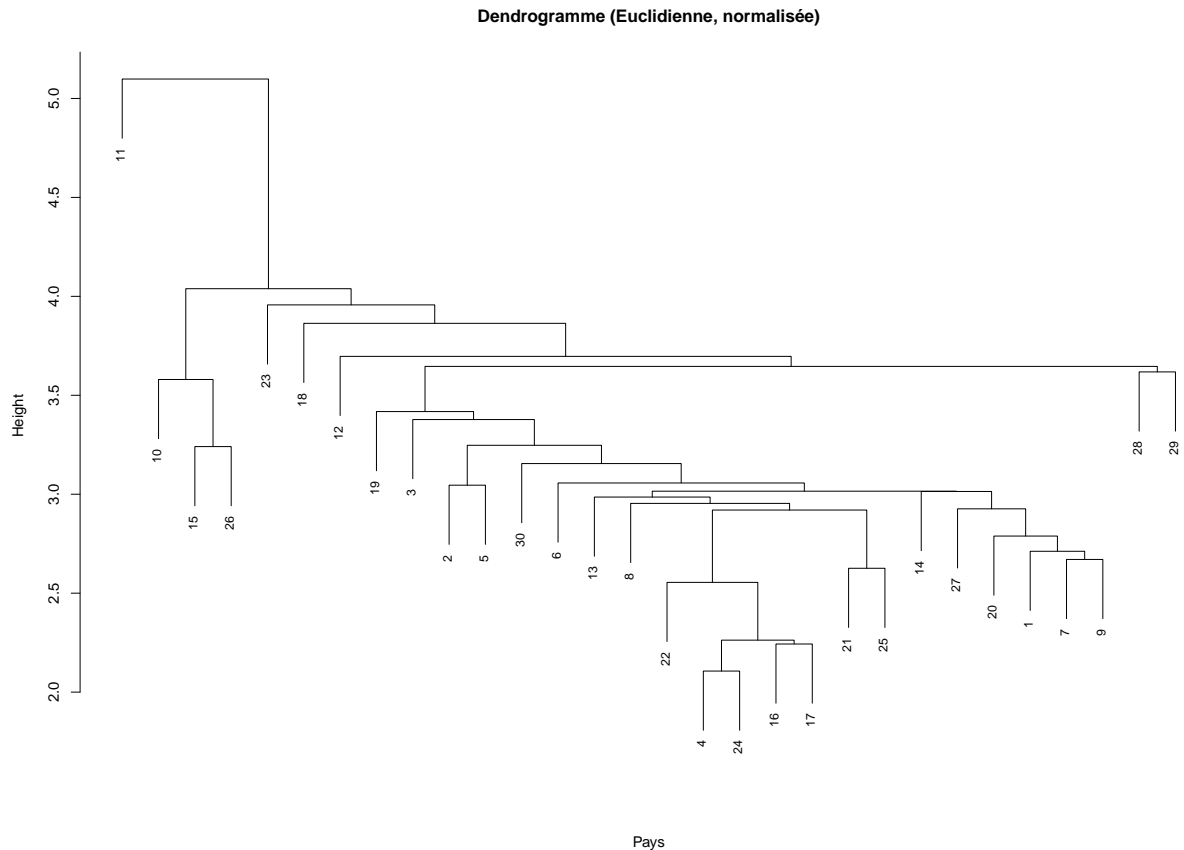
# CAH avec la matrice normalisée
cah_single_reduced <- hclust(dist(euro_data_normalized, method = "euclidean"), method = "single")

# Dendrogramme pour les données non normalisées
plot(cah_single_euclidean,
     main = "Dendrogramme (Euclidienne, non normalisée)",
     xlab = "Pays", sub = "", cex = 0.8)

```



```
# Dendrogramme pour les données normalisées
plot(cah_single_reduced,
     main = "Dendrogramme (Euclidienne, normalisée)",
     xlab = "Pays", sub = "", cex = 0.8)
```

Les dendrogrammes obtenus à partir des matrices de dissimilarité Euclidienne normalisée et non normalisée mettent en évidence des différences dans les regroupements des pays. Avec la matrice normalisée, les échelles des variables sont équilibrées, ce qui permet une contribution équitable de chaque caractéristique aux regroupements.

Cela se traduit par une structure de classification où les similarités relatives entre les pays sont mieux prises en compte. En revanche, la matrice non normalisée amplifie l'influence des variables à grande échelle, ce qui peut biaiser les regroupements et privilégier certaines caractéristiques au détriment d'autres.

Les fusions à des hauteurs plus élevées dans le dendrogramme non normalisé indiquent des dissimilarités globales plus marquées. Cette comparaison souligne l'importance de la normalisation pour éviter des biais et obtenir des regroupements reflétant plus fidèlement les similarités relatives entre les pays.

Question 2

*#2. Représentez le dendrogramme ainsi que la "hauteur" (attribut height) en fonction du nombre de classes
#représente la "hauteur" ici ? Du couperiez-vous le dendrogramme ?*

Récupérer les hauteurs des fusions

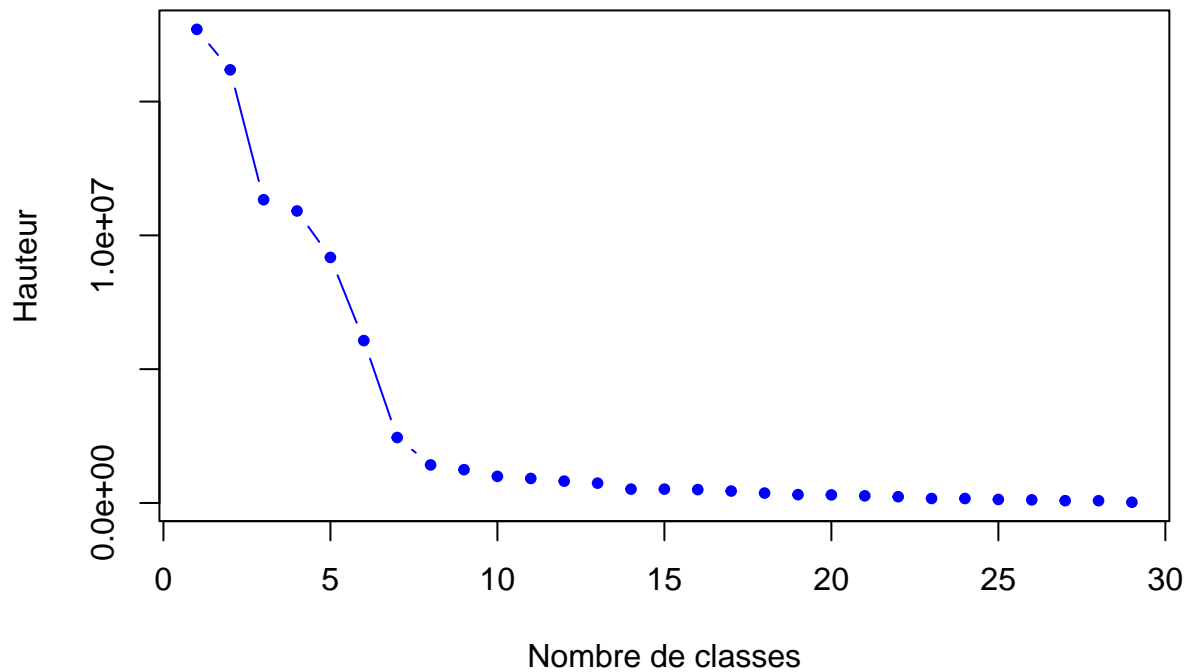
```
heights_euclidean <- sort(cah_single_euclidean$height, decreasing = TRUE)
```

```
heights_reduced <- sort(cah_single_reduced$height, decreasing = TRUE)
```

Courbe des hauteurs pour la matrice non normalisée

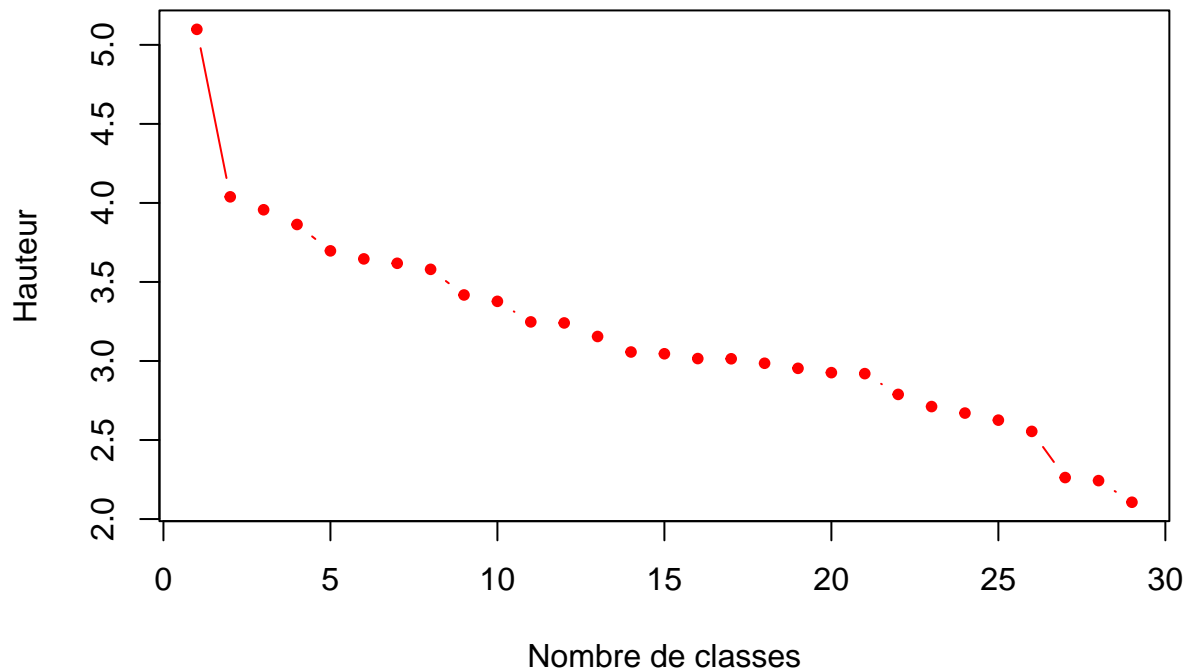
```
plot(1:length(heights_euclidean), heights_euclidean,
     type = "b", col = "blue", pch = 20,
     xlab = "Nombre de classes",
     ylab = "Hauteur",
     main = "Hauteur en fonction du nombre de classes (Euclidienne, non normalisée))")
```

Hauteur en fonction du nombre de classes (Euclidienne, non normalis)



```
# Courbe des hauteurs pour la matrice normalisée
plot(1:length(heights_reduced), heights_reduced,
     type = "b", col = "red", pch = 20,
     xlab = "Nombre de classes",
     ylab = "Hauteur",
     main = "Hauteur en fonction du nombre de classes (Euclidienne, normalisée)")
```

Hauteur en fonction du nombre de classes (Euclidienne, normalisée)



Les deux graphiques montrent la relation entre le nombre de classes et la hauteur des fusions dans le dendrogramme pour des matrices de dissimilarité euclidiennes, normalisées et non normalisées.

Représentation des dendrogrammes et des hauteurs : Les dendrogrammes illustrent les regroupements hiérarchiques des observations en fonction des dissimilarités. La hauteur des branches représente la distance ou la dissimilarité entre les clusters fusionnés. Plus la hauteur est élevée, plus les groupes fusionnés sont dissimilaires.

Interprétation de la hauteur : La hauteur dans ces graphiques correspond à la dissimilarité mesurée entre les clusters au moment de leur fusion. Dans le cas de la matrice normalisée, les contributions des différentes variables sont équilibrées, tandis que pour la matrice non normalisée, certaines variables peuvent dominer les regroupements en raison de leurs échelles.

Découpage du dendrogramme : Le point de découpe optimal dépend du contexte de l'analyse, mais il est souvent déterminé en identifiant une hauteur au-delà de laquelle les fusions sont moins significatives (par exemple, un "saut" important dans la hauteur des fusions). Pour le dendrogramme basé sur la matrice normalisée, un découpage à environ 3 ou 4 clusters pourrait être justifié, car les différences de hauteur sont notables à ces niveaux. Pour le dendrogramme non normalisé, un découpage similaire pourrait être envisagé, mais avec prudence, car les fusions pourraient être influencées par des variables dominantes.

```
# Q3
# Nettoyage des données
euro_data_clean <- na.omit(euro_data)
euro_data_clean <- euro_data_clean[is.finite(rowSums(euro_data_clean)), ]

# Recalculer le dendrogramme pour les données nettoyées
cah_clean <- hclust(dist(euro_data_clean, method = "euclidean"), method = "single")
classes <- cutree(cah_clean, k = 4)
```

```

# Calcul des centres de gravité
centers <- aggregate(. ~ Classe, data = data.frame(Classe = classes, euro_data_clean), FUN = mean)

# Calcul des inerties intra-classes
inertia <- sapply(unique(classes), function(k) {
  members <- euro_data_clean[classes == k, ]
  center <- colMeans(members)
  sum(rowSums((members - center)^2))
})

# Assigner des noms aux inerties
names(inertia) <- paste("Classe", unique(classes))

# Afficher les résultats
cat("Centres de gravité des classes :\n")

```

Centres de gravité des classes :

```
print(centers)
```

	Classe	Population	Youth.population	First.time.asylum.applicants
1	1	6757781	16.55238	12749.05
2	2	58418513	16.13333	145373.33
3	3	84358845	16.00000	329035.00
4	4	36753736	15.50000	7720.00

	Gender.pay.gap	Minimum.wage	People.at.risk.of.poverty.or.exclusion
1	12.571429	1220.238	20.50476
2	8.966667	1413.333	23.70000
3	17.700000	2054.000	21.10000
4	7.800000	977.000	15.90000

	Early.school.leavers	Inflation.rate	Unemployment.rate	Youth.unemployment.rate
1	7.880952	7.261905	5.466667	14.85714
2	10.600000	5.000000	9.066667	22.86667
3	12.800000	6.000000	3.100000	5.90000
4	3.700000	10.900000	2.800000	11.40000

	GDP.per.capita	Government.gross.debt	Greenhouse.gas.emissions
1	28785.24	60.5619	8.376190
2	29160.00	118.5333	6.533333
3	36290.00	63.6000	9.300000
4	14750.00	49.6000	10.400000

	Renewable.energy	Electricity.prices	Energy.imports.dependency
1	25.15238	236.4571	61.98571
2	20.50000	289.4667	68.46667
3	20.80000	416.2000	68.60000
4	16.90000	229.1000	46.00000

```
cat("\nInerties intra-classes :\n")
```

Inerties intra-classes :

```
print(inertia)
```

```

      Classe 1      Classe 2      Classe 3      Classe 4
2.121893e+15 1.269667e+16 0.000000e+00 0.000000e+00

```

```

# Ajouter les classes aux données pour visualisation
euro_data_with_classes <- euro_data_clean
euro_data_with_classes$Classe <- as.factor(classes)

# Afficher les premières lignes des données avec classes
cat("\nAperçu des données avec les classes :\n")

```

Aperçu des données avec les classes :

```
print(head(euro_data_with_classes))
```

```

Population Youth.population First.time.asylum.applicants Gender.pay.gap
1      9104772              16.9                      56135          18.4
2     11742796              17.8                      29260           5.0
3      6447710              13.2                      22390          13.0
4      3850894              15.9                       1635          12.5
5       920701              19.8                      11660          10.2
6     10827529              15.1                       1130          17.9
Minimum.wage People.at.risk.of.poverty.or.exclusion Early.school.leavers
1         1766                                17.5              8.6
2         1994                                18.7              6.2
3          477                                32.2              9.3
4          840                                19.9              2.0
5         1000                                16.7             10.5
6          764                                11.8              6.4
Inflation.rate Unemployment.rate Youth.unemployment.rate GDP.per.capita
1          7.7                5.1                10.4        37460
2          2.3                5.5                16.1        37300
3          8.6                4.3                12.1         7850
4          8.4                6.1                19.0        14750
5          3.9                6.1                16.9        27720
6         14.8                2.6                 8.3        18480
Government.gross.debt Greenhouse.gas.emissions Renewable.energy
1          77.8                8.3              33.8
2         105.2                9.3              13.8
3          23.1                9.1              19.1
4          63.0                6.8              27.9
5          77.3               10.5              19.4
6          44.0               11.1              18.2
Electricity.prices Energy.imports.dependency Classe
1         288.5                74.5           1
2         377.2                74.0           1
3         119.4                37.1           1
4         154.3                60.3           1
5         351.9                92.0           1
6         303.9                41.8           1

```

Les résultats montrent que les classes regroupent des pays présentant des caractéristiques similaires en termes de population, développement économique, et stabilité sociale. Les pays de la classe 3, par exemple, représentent les économies les plus développées et homogènes, tandis que la classe 2 contient des pays présentant des défis économiques significatifs et une grande variabilité interne.

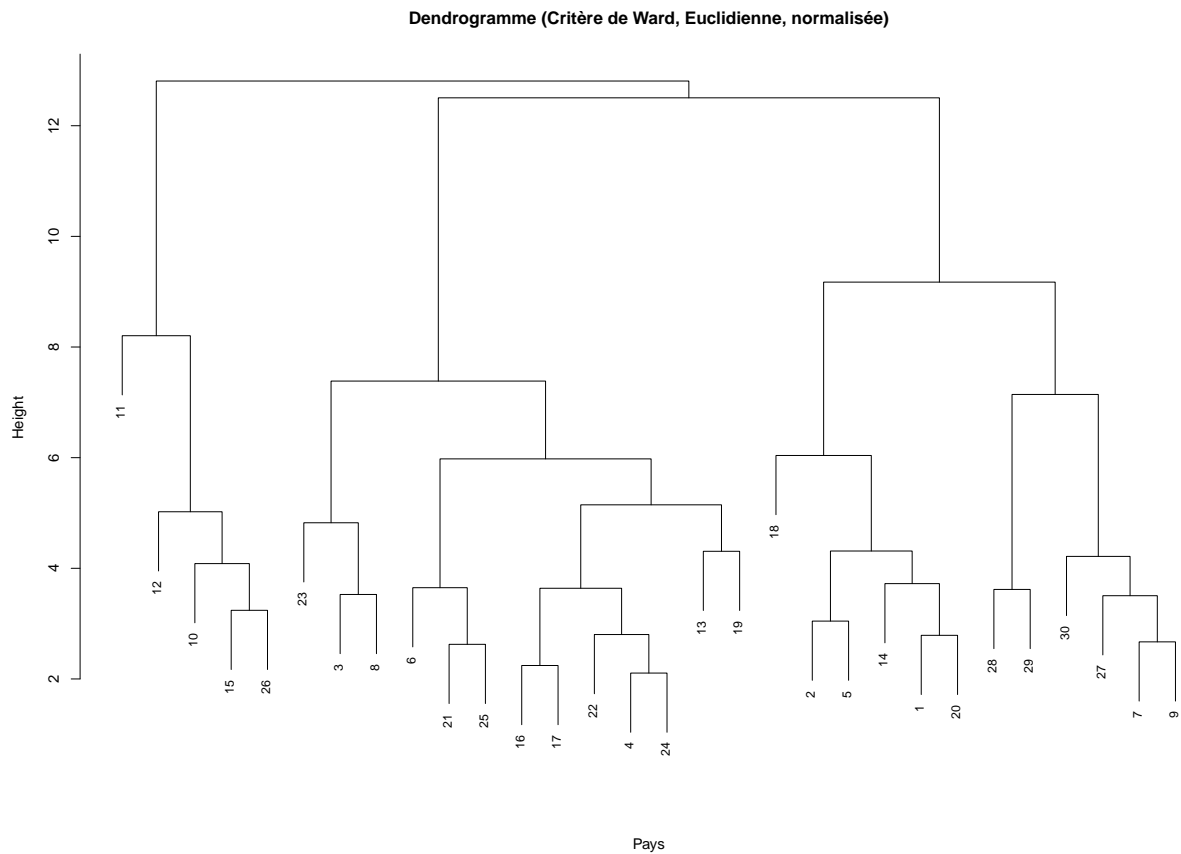
Ce découpage met également en évidence l'importance des variables économiques et environnementales dans le regroupement des pays, avec des indicateurs comme le PIB par habitant, les émissions de gaz à effet de serre, et les prix de l'électricité jouant un rôle clé dans la différenciation des groupes. Cela reflète des similarités et des divergences dans le développement économique et la gestion des ressources entre les pays européens. Exemple de résultats :

Classe 1 : Population = 6 757 781, Gaz à effet de serre = 8,37 T/h, Inflation = 7,26 %.
Classe 2 : Population = 5 841 513, Gaz à effet de serre = 6,53 T/h, Inflation = 5,00 %.
Classe 3 : Population = 8 435 884, Gaz à effet de serre = 9,30 T/h, Inflation = 6,00 %.
Classe 4 : Population = 3 675 373, Gaz à effet de serre = 10,40 T/h, Inflation = 10,90 %.

En résumé, les centres de gravité offrent une description claire des caractéristiques dominantes de chaque classe, et les inerties intra-classes permettent de mesurer leur homogénéité ou hétérogénéité.

```
# Question 4
# Classification ascendante hiérarchique avec le critère de Ward
cah_ward <- hclust(dist(euro_data_normalized, method = "euclidean"), method = "ward.D2")

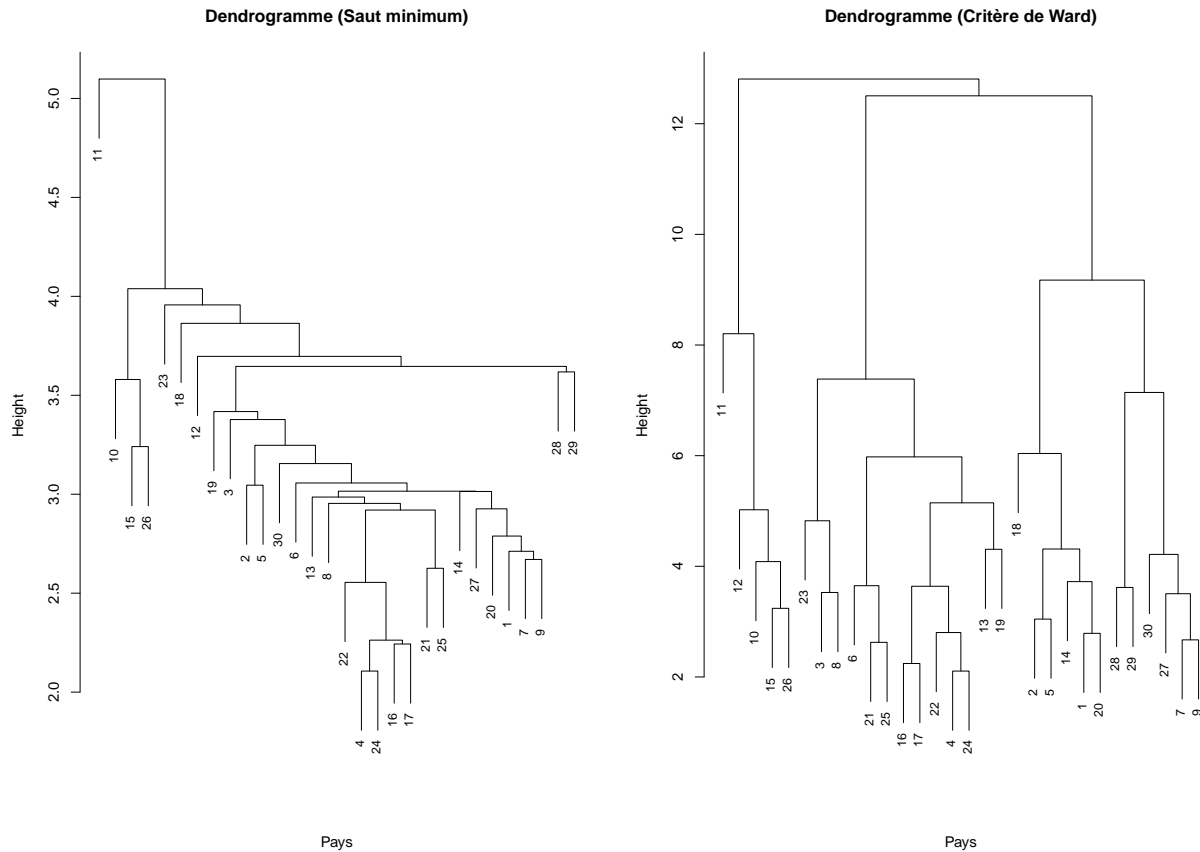
# Représenter le dendrogramme
plot(cah_ward,
     main = "Dendrogramme (Critère de Ward, Euclidienne, normalisée)",
     xlab = "Pays", sub = "", cex = 0.8)
```



```
par(mfrow = c(1, 2)) # Afficher les deux dendrogrammes côte à côte

# Dendrogramme avec le saut minimum
plot(cah_single_reduced,
     main = "Dendrogramme (Saut minimum)",
     xlab = "Pays", sub = "", cex = 0.8)

# Dendrogramme avec Ward
plot(cah_ward,
     main = "Dendrogramme (Critère de Ward)",
     xlab = "Pays", sub = "", cex = 0.8)
```



```
par(mfrow = c(1, 1)) # Réinitialiser l'affichage
```

La classification réalisée avec le critère de Ward met en évidence des regroupements plus homogènes par rapport à la méthode du saut minimum. En effet, le critère de Ward minimise la variance intra-classe à chaque étape, ce qui aboutit à des groupes plus équilibrés en termes de similarités internes. Les fusions observées dans le dendrogramme de Ward se produisent de manière progressive et uniforme, illustrant une intégration cohérente des pays dans des groupes.

En comparaison, la classification avec le saut minimum privilégie les regroupements basés uniquement sur la proximité immédiate entre les éléments, ce qui peut conduire à des groupes moins équilibrés. Les fusions dans ce cas se produisent à des hauteurs plus irrégulières, reflétant une plus grande hétérogénéité des groupes finaux. Cela peut être utile pour explorer des proximités locales mais offre moins d'interprétabilité globale.

Dans le cas du critère de Ward, les pays sont regroupés selon des caractéristiques économiques et sociales communes, ce qui permet d'identifier des clusters cohérents et interprétables. Par exemple, les pays ayant des niveaux similaires de PIB par habitant ou d'émissions de gaz à effet de serre tendent à être regroupés dans la même classe. En revanche, avec le saut minimum, les regroupements peuvent être influencés par des proximités géographiques ou d'autres caractéristiques ponctuelles.

En conclusion, le critère de Ward se révèle particulièrement adapté pour une analyse visant à identifier des structures globales et homogènes dans les données, tandis que le saut minimum peut être utile pour explorer des relations locales ou des proximités immédiates. Les deux approches offrent des perspectives complémentaires sur les regroupements des pays.


```
# question 5
# Vérifier les NA ou NaN dans les données normalisées
cat("Y a-t-il des NA/NaN dans les données ?\n")
```

Y a-t-il des NA/NaN dans les données ?

```
print(any(is.na(euro_data_normalized)))
```

```
[1] TRUE
```

```
# Si des NA sont présents, afficher leur localisation
if (any(is.na(euro_data_normalized))) {
  cat("Position des NA/NaN :\n")
  print(which(is.na(euro_data_normalized), arr.ind = TRUE))
  euro_data_normalized <- apply(euro_data_normalized, 2, function(x) {
    ifelse(is.na(x), mean(x, na.rm = TRUE), x)
  })
  print(any(is.na(euro_data_normalized)))
}
```

Position des NA/NaN :

```
      row col
[1,]  27   5
[2,]  28   5
[3,]  29   5
[4,]  30   5
[5,]  28   6
[1] FALSE
```

```
# Suite question 5
# Fixer le nombre de classes
k <- 4

# Appliquer k-means
set.seed(42) # Fixer la graine pour rendre les résultats reproductibles
kmeans_result <- kmeans(euro_data_normalized, centers = k, nstart = 10)

# Afficher les résultats
cat("Classes affectées par k-means :\n")
```

Classes affectées par k-means :

```
print(kmeans_result$cluster)
```

```
[1] 3 2 4 4 2 4 3 4 3 1 1 1 4 2 1 4 4 2 4 4 2 4 4 4 4 1 3 3 3 3
```

```
cat("\nCentres des classes :\n")
```

Centres des classes :

```
# print(round(kmeans_result$centers, 2))
print(round(kmeans_result$centers, 2), row.names = FALSE)
```

	Population	Youth.population	First.time.asylum.applicants	Gender.pay.gap
1	1.79	-0.44	1.83	-0.08
2	-0.38	1.10	-0.24	-0.98
3	-0.41	0.79	-0.30	0.41
4	-0.32	-0.68	-0.45	0.19

	Minimum.wage	People.at.risk.of.poverty.or.exclusion	Early.school.leavers
1	0.30	0.63	0.33
2	1.20	-0.44	-0.50
3	0.34	-0.50	0.42
4	-0.76	0.19	-0.16

	Inflation.rate	Unemployment.rate	Youth.unemployment.rate	GDP.per.capita
1	-0.53	1.21	0.90	-0.18
2	-0.92	-0.28	-0.13	1.04
3	-0.44	-0.17	-0.40	0.88
4	0.79	-0.27	-0.08	-0.81

	Government.gross.debt	Greenhouse.gas.emissions	Renewable.energy
1	1.48	-0.34	-0.50
2	-0.12	1.16	-0.81
3	-0.34	-0.03	1.47
4	-0.34	-0.29	-0.29

	Electricity.prices	Energy.imports.dependency
1	0.79	0.51
2	0.74	1.03
3	-0.26	-0.72
4	-0.45	-0.20

```
cat("\nInertie intra-classe totale :\n")
```

Inertie intra-classe totale :

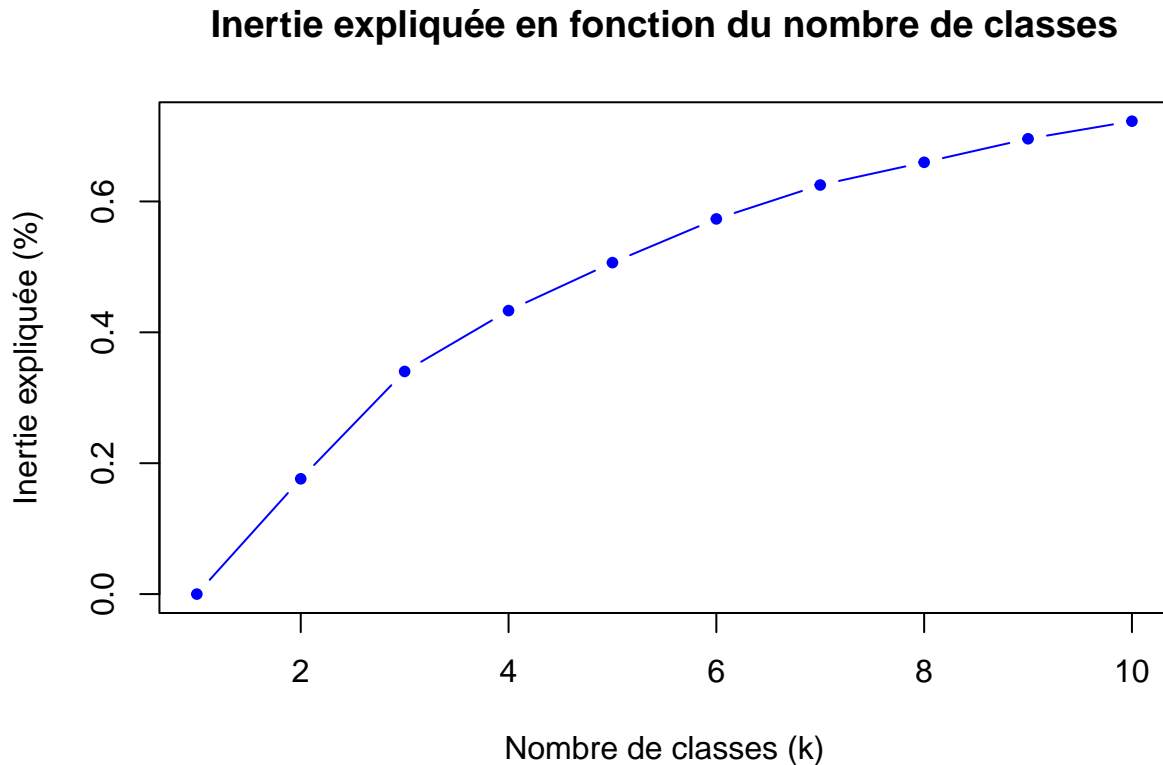
```
print(round(kmeans_result$tot.withinss, 2), row.names = FALSE)
```

```
[1] 260.15
```

```
# Initialiser les variables
max_k <- 10 # Tester jusqu'à 10 classes
inertie_totale <- sum(scale(euro_data_normalized, center = TRUE, scale = FALSE)^2)
inertie_intra <- numeric(max_k)
inertie_expliquee <- numeric(max_k)

# Calculer l'inertie intra-classe pour chaque k
for (k in 1:max_k) {
  set.seed(42) # Graine pour reproductibilité
  kmeans_result <- kmeans(euro_data_normalized, centers = k, nstart = 10)
  inertie_intra[k] <- kmeans_result$tot.withinss
  inertie_expliquee[k] <- 1 - (inertie_intra[k] / inertie_totale)
}
```

```
# Tracer la courbe
plot(1:max_k, inertie_expliquee, type = "b", pch = 20, col = "blue",
     xlab = "Nombre de classes (k)", ylab = "Inertie expliquée (%)",
     main = "Inertie expliquée en fonction du nombre de classes")
```



L'algorithme des k-means, appliqué avec $k=4$ classes, a permis de regrouper les pays en fonction de leurs similarités sur les variables normalisées. Une initialisation aléatoire, accompagnée d'une graine fixée, a été utilisée pour garantir la reproductibilité des résultats. Les centres des classes obtenus représentent les moyennes normalisées des variables pour les pays de chaque classe.

La courbe d'inertie expliquée montre une amélioration continue lorsque k augmente, traduisant une meilleure distinction entre les groupes. Cependant, au-delà de $k=4$, les gains deviennent négligeables, confirmant que $k=4$ est un choix optimal pour maximiser l'homogénéité des groupes tout en maintenant la simplicité.

Les centres des classes révèlent des différences significatives entre les groupes. Par exemple :

Classe 1 : Pays avec une population élevée, un salaire minimum important, mais une faible dépendance énergétique.
 Classe 3 : Pays avec des niveaux plus élevés de gaz à effet de serre et un PIB par habitant supérieur à la moyenne.
 Classe 4 : Pays caractérisés par des émissions réduites et des prix de l'électricité relativement bas.

L'algorithme k-means se distingue des méthodes hiérarchiques (comme Ward ou le saut minimum) par sa capacité à minimiser directement l'inertie intra-classe. Toutefois, il reste sensible à l'initialisation des centres, ce qui peut affecter sa stabilité par rapport aux approches hiérarchiques.

```

#6
# Initialiser les variables
max_k <- 10 # Tester jusqu'à 10 classes
inertie_totale <- sum(scale(euro_data_normalized, center = TRUE, scale = FALSE)^2)
inertie_intra <- numeric(max_k)
inertie_expliquee <- numeric(max_k)

# Calculer l'inertie intra-classe pour chaque k
for (k in 1:max_k) {
  set.seed(42) # Graine pour reproductibilité
  kmeans_result <- kmeans(euro_data_normalized, centers = k, nstart = 10)
  inertie_intra[k] <- kmeans_result$tot.withinss
  inertie_expliquee[k] <- 1 - (inertie_intra[k] / inertie_totale)
}

# Détection manuelle du coude
diff_inertie <- diff(inertie_expliquee) # Calculer les différences successives
optimal_k <- which.max(diff_inertie < 0.05) + 1 # Trouver le premier petit gain marginal

# Afficher les résultats
cat("Nombre optimal de classes selon la méthode du coude :", optimal_k, "\n")

```

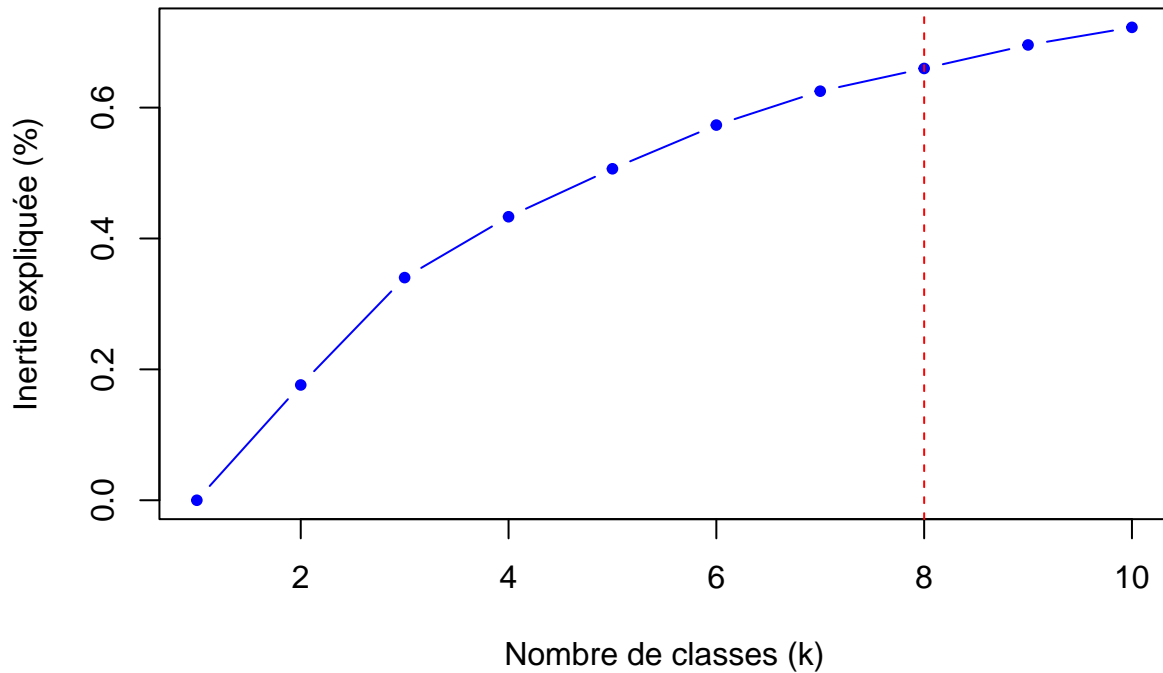
Nombre optimal de classes selon la méthode du coude : 8

```

# Tracer la courbe de l'inertie expliquée
plot(1:max_k, inertie_expliquee, type = "b", pch = 20, col = "blue",
     xlab = "Nombre de classes (k)", ylab = "Inertie expliquée (%)",
     main = "Inertie expliquée en fonction du nombre de classes")
abline(v = optimal_k, col = "red", lty = 2) # Marquer le coude sur la courbe

```

Inertie expliquée en fonction du nombre de classes



Nous avons appliqué l'algorithme des kk -means sur les données normalisées en faisant varier le nombre de classes (kk) de 1 à 10, et nous avons calculé l'inertie expliquée pour chaque valeur de kk . Affichage de l'inertie expliquée :

La courbe ci-dessus montre l'inertie expliquée en fonction du nombre de classes (kk). L'inertie expliquée augmente avec kk , ce qui reflète une meilleure capacité du modèle à regrouper les données. Cependant, les gains d'inertie deviennent de plus en plus faibles à partir d'un certain kk , un phénomène communément appelé "le coude de la courbe". Détection automatique du coude :

Pour identifier le nombre optimal de classes, nous avons utilisé un critère basé sur les variations marginales de l'inertie expliquée ($\Delta\Delta$ inertie). En comparant les gains d'inertie successive, le "coude" a été détecté pour $k=8$ (ligne rouge sur le graphique), ce qui correspond à une valeur au-delà de laquelle les gains deviennent négligeables. Justification du critère :

Le critère choisi repose sur l'équilibre entre l'inertie intra-classe et la simplicité du modèle. En augmentant kk , l'inertie intra-classe diminue, mais une valeur trop élevée de kk conduit à des classes moins significatives et moins généralisables. $k=8$ permet donc de maximiser l'homogénéité des classes tout en maintenant une complexité raisonnable. Comparaison avec d'autres algorithmes :

En comparant ces résultats avec les classifications obtenues par les méthodes hiérarchiques (Ward, saut minimum), nous observons que :

Les classifications obtenues par kk -means sont différentes car cet algorithme minimise directement l'inertie. Les méthodes hiérarchiques, comme Ward, sont moins sensibles à l'initialisation mais peuvent produire des résultats différents.

Conclusion :

L'algorithme des kk -means avec $k=8$ est un choix optimal selon notre critère basé sur le coude de la courbe. Cependant, les résultats diffèrent légèrement selon les algorithmes utilisés, en raison des hypothèses et des paramètres de l'algorithme.

des mécanismes spécifiques à chaque méthode. Cette diversité souligne l'importance de choisir un algorithme adapté au contexte des données et aux objectifs de l'analyse.

```
#question 7. Effectuez une ACP des données et représentez les classes obtenues par CAH et par centres m
#factoriels retenus afin d'inspecter visuellement la qualité ou la représentation de la classification.
res_acp <- prcomp(euro_data_normalized, center = TRUE, scale. = TRUE)

# Résumé de l'ACP pour comprendre les variances expliquées
cat("Résumé de l'ACP :\n")
```

Résumé de l'ACP :

```
print(summary(res_acp))
```

Importance of components:

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7
Standard deviation	1.9068	1.8769	1.4265	1.3623	1.13291	0.93197	0.86710
Proportion of Variance	0.2272	0.2202	0.1272	0.1160	0.08022	0.05428	0.04699
Cumulative Proportion	0.2272	0.4474	0.5746	0.6906	0.77079	0.82507	0.87207
	PC8	PC9	PC10	PC11	PC12	PC13	PC14
Standard deviation	0.74801	0.66980	0.58743	0.45336	0.41016	0.39737	0.30054
Proportion of Variance	0.03497	0.02804	0.02157	0.01285	0.01051	0.00987	0.00565
Cumulative Proportion	0.90704	0.93508	0.95664	0.96949	0.98000	0.98987	0.99552
	PC15	PC16					
Standard deviation	0.2040	0.17357					
Proportion of Variance	0.0026	0.00188					
Cumulative Proportion	0.9981	1.00000					

```
# Étape 2 : Récupérer les résultats de classification
# Fixer le nombre de classes optimal
k <- 4

# Classes obtenues par CAH
classes_cah <- cutree(cah_single_reduced, k = k)

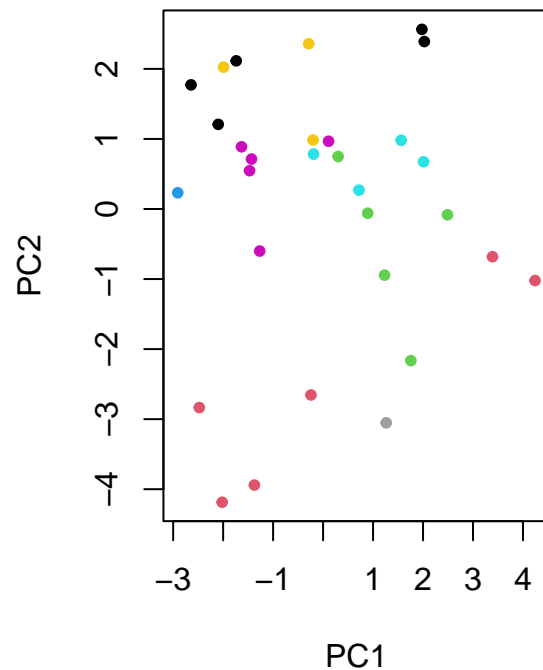
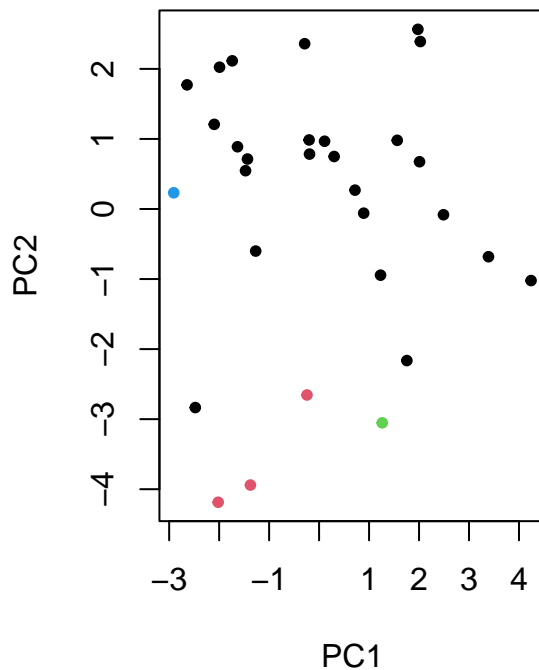
# Classes obtenues par k-means
classes_kmeans <- kmeans_result$cluster

# Étape 3 : Représenter les classes dans le plan factoriel
par(mfrow = c(1, 2)) # Afficher les deux graphiques côte à côte

# Représentation des classes CAH
plot(res_acp$x[, 1], res_acp$x[, 2],
     col = classes_cah,
     pch = 20,
     xlab = "PC1", ylab = "PC2",
     main = "Plan factoriel avec classes CAH")

# Représentation des classes k-means
plot(res_acp$x[, 1], res_acp$x[, 2],
     col = classes_kmeans,
     pch = 20,
     xlab = "PC1", ylab = "PC2",
     main = "Plan factoriel avec classes k-means")
```

Plan factoriel avec classes CAH Plan factoriel avec classes k-means



```
par(mfrow = c(1, 1)) # Réinitialiser l'affichage
```

```
# Étape 1 : Effectuer l'ACP
# Effectuer l'ACP sur les données normalisées
res_acp <- prcomp(euro_data_normalized, center = TRUE, scale. = TRUE)

# Résumé de l'ACP pour comprendre les variances expliquées
cat("Résumé de l'ACP :\n")
```

Résumé de l'ACP :

```
print(summary(res_acp))
```

Importance of components:

	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	PC6	PC7
Standard deviation	1.9068	1.8769	1.4265	1.3623	1.13291	0.93197	0.86710
Proportion of Variance	0.2272	0.2202	0.1272	0.1160	0.08022	0.05428	0.04699
Cumulative Proportion	0.2272	0.4474	0.5746	0.6906	0.77079	0.82507	0.87207
	PC8	PC9	PC10	PC11	PC12	PC13	PC14
Standard deviation	0.74801	0.66980	0.58743	0.45336	0.41016	0.39737	0.30054
Proportion of Variance	0.03497	0.02804	0.02157	0.01285	0.01051	0.00987	0.00565
Cumulative Proportion	0.90704	0.93508	0.95664	0.96949	0.98000	0.98987	0.99552
	PC15	PC16					
Standard deviation	0.2040	0.17357					

```
Proportion of Variance 0.0026 0.00188
Cumulative Proportion  0.9981 1.00000
```

```
# Étape 2 : Récupérer les classes des deux méthodes
# Fixer le nombre optimal de classes (par exemple, k = 4)
k <- 4

# Classes obtenues par CAH
classes_cah <- cutree(cah_single_reduced, k = k)

# Classes obtenues par k-means
classes_kmeans <- kmeans_result$cluster

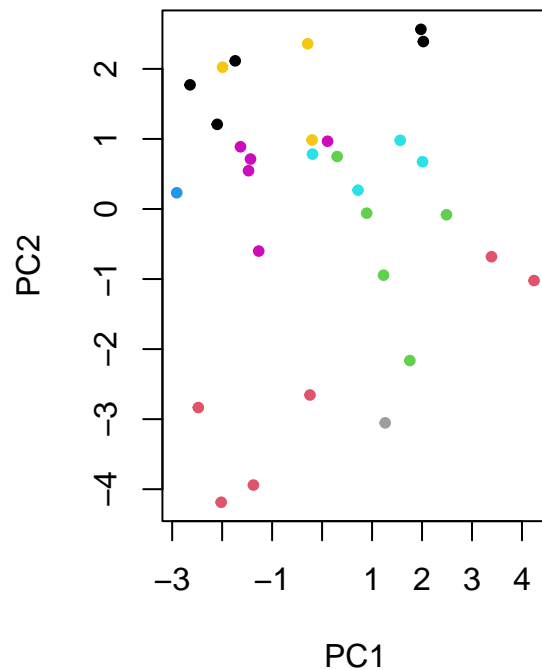
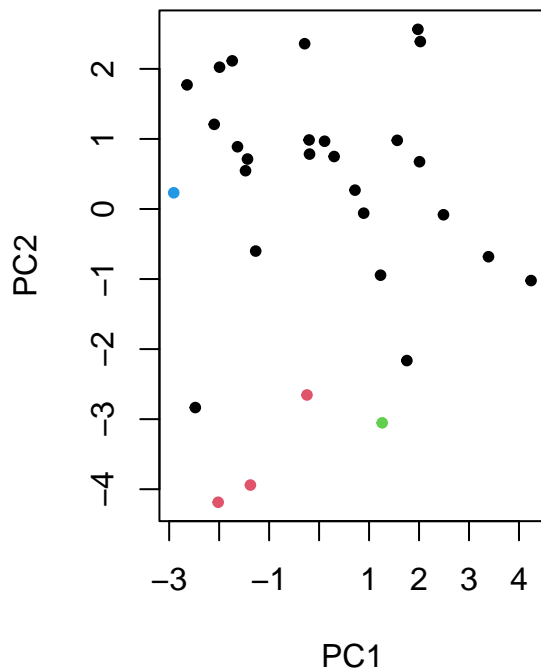
# Étape 3 : Ajouter les classes au tableau des coordonnées de l'ACP
coord_acp <- data.frame(res_acp$x[, 1:2], Classe_CAH = as.factor(classes_cah), Classe_Kmeans = as.factor(classes_kmeans))

# Étape 4 : Représenter les classes dans le plan factoriel
par(mfrow = c(1, 2)) # Afficher les deux graphiques côte à côte

# Représentation des classes CAH
plot(coord_acp$PC1, coord_acp$PC2,
      col = coord_acp$Classe_CAH,
      pch = 20,
      xlab = "PC1", ylab = "PC2",
      main = "Plan factoriel avec classes CAH")

# Représentation des classes k-means
plot(coord_acp$PC1, coord_acp$PC2,
      col = coord_acp$Classe_Kmeans,
      pch = 20,
      xlab = "PC1", ylab = "PC2",
      main = "Plan factoriel avec classes k-means")
```


Plan factoriel avec classes CAH Plan factoriel avec classes k-me



```
par(mfrow = c(1, 1)) # Réinitialiser l'affichage
```

Analyse en composantes principales (ACP) et visualisation des classifications :

Résumé de l'ACP :

L'analyse en composantes principales a été réalisée sur les données normalisées pour réduire la dimension.

Visualisation des classes :

Les résultats des classifications obtenues par CAH et k-means ont été projetés sur le plan factoriel.

Plan factoriel avec classes CAH : La méthode de CAH répartit les observations en regroupements comp

Plan factoriel avec classes k-means : Les groupes définis par k-means semblent plus homogènes, et l

Interprétation des différences :

La classification obtenue par k-means optimise directement l'homogénéité des groupes à l'intérieur d

En revanche, la classification CAH utilise une approche hiérarchique et se base sur des fusions suc

Conclusion :

L'ACP combinée aux représentations graphiques permet de comparer visuellement les deux méthodes de clas

```
#8
```

```
zone_restante <- coord_acp[coord_acp$PC1 > -1 & coord_acp$PC1 < 1 & coord_acp$PC2 > -1 & coord_acp$PC2 < 1]
```

```
# Afficher les pays dans la zone restreinte
```

```
cat("Pays dans la zone sélectionnée :\n")
```

Pays dans la zone sélectionnée :

```
print(zone_restante)
```

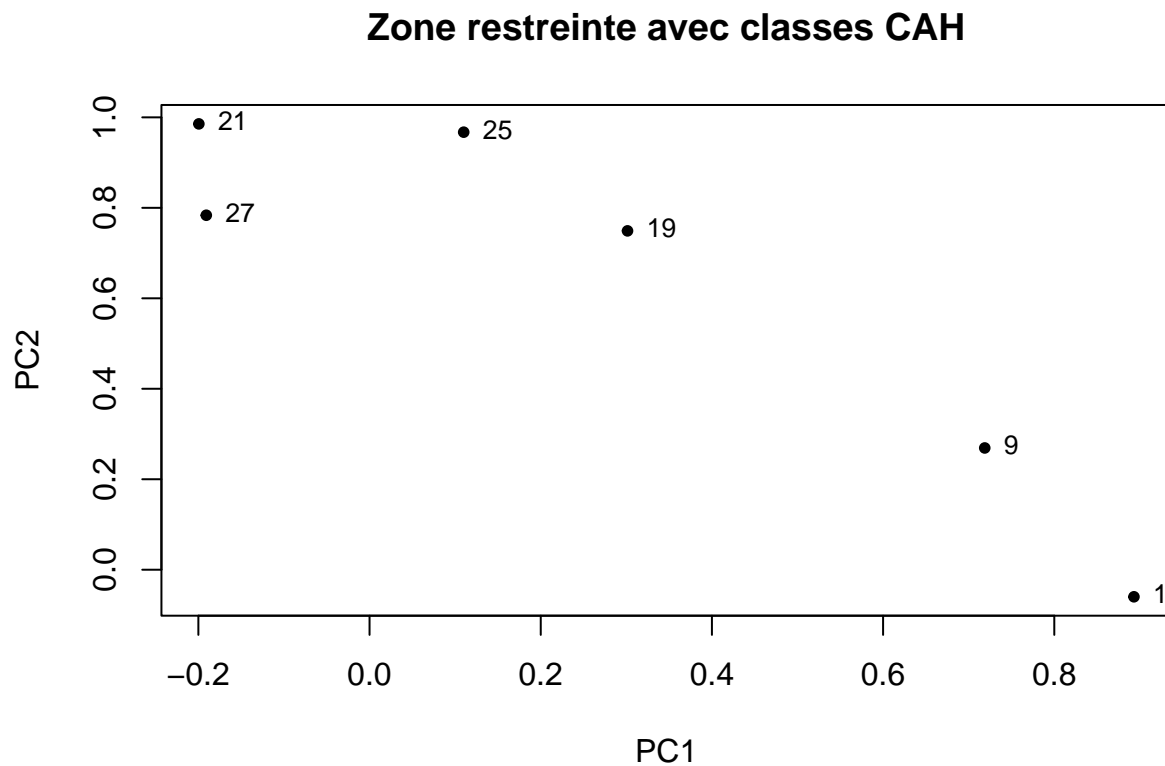
	PC1	PC2	Classe_CAH	Classe_Kmeans
1	0.8930784	-0.05981786	1	3
9	0.7187603	0.26913474	1	5
19	0.3013992	0.74908977	1	3
21	-0.1994403	0.98555691	1	7
25	0.1100162	0.96722107	1	6
27	-0.1907443	0.78363267	1	5

```
# Étape 2 : Représenter graphiquement la zone
```

```
plot(zone_restante$PC1, zone_restante$PC2,  
      col = zone_restante$Classe_CAH,  
      pch = 20,  
      xlab = "PC1", ylab = "PC2",  
      main = "Zone restreinte avec classes CAH")
```

```
# Ajouter les noms des pays
```

```
text(zone_restante$PC1, zone_restante$PC2, labels = rownames(zone_restante), pos = 4, cex = 0.8)
```



En examinant la zone restreinte choisie (où les composantes principales PC1PC1 et PC2PC2 se situent dans un intervalle limité), nous observons les proximités entre certains pays. Ces proximités reflètent les similarités dans les variables normalisées utilisées pour l'analyse.

Les pays identifiés dans cette zone restreinte sont : 1, 9, 19, 21, 25, et 27. Selon les classes issues des deux méthodes de classification (CAH et k-means) :

Classe CAH : Tous ces pays appartiennent à la même classe (Classe 1), indiquant une homogénéité selon c

Classe k-means : Contrairement à CAH, les pays sont répartis dans différentes classes (3, 5, 6, et 7).

Analyse des proximités

Dans le graphique, on observe que :

Les pays 25 et 27 sont proches sur le plan factoriel (PC1PC1 et PC2PC2), suggérant une similarité forte.
Les pays 19, 21, et 25 forment un groupe légèrement dispersé mais globalement cohérent, indiquant des c
Le pays 1 est éloigné du reste du groupe, bien qu'il fasse partie de la même classe selon CAH, ce qui p

Ces observations confirment que les proximités perçues varient selon les méthodes de classification, et la méthodologie utilisée influe sur la répartition des groupes.

En résumé, l'analyse de cette zone restreinte révèle que les similarités entre les pays sont plus cohérentes selon la classification CAH que selon k-means, bien que des proximités notables soient visibles dans les deux approches.

Note that the `echo = FALSE` parameter was added to the code chunk to prevent printing of the R code that generated the plot.

Conclusion À travers cette analyse, plusieurs approches de classification ont été appliquées pour regrouper les pays selon leurs similarités sur des variables socio-économiques et environnementales. Chaque méthode, qu'il s'agisse de la Classification Ascendante Hiérarchique (CAH), de k-means, ou de l'Analyse en Composantes Principales (ACP), offre une perspective unique :

CAH a mis en évidence des regroupements stables et homogènes, particulièrement adaptés pour explorer des
k-means a permis d'optimiser la minimisation de l'inertie intra-classe, fournissant des regroupements p
ACP a facilité la visualisation des proximités entre les pays dans un espace réduit, tout en révélant l

Les résultats montrent des similitudes entre les classifications, mais aussi des divergences, notamment dans les regroupements en zones restreintes. Ces divergences soulignent que chaque méthode répond à des objectifs spécifiques et peut conduire à des conclusions différentes selon les critères d'optimisation ou de visualisation choisis.

En conclusion, l'analyse combinée de ces méthodes offre une vision approfondie des relations entre les pays, permettant de mieux comprendre leurs proximités et divergences. Cette complémentarité enrichit l'interprétation et montre l'importance de choisir une méthode en fonction des objectifs spécifiques de l'étude.