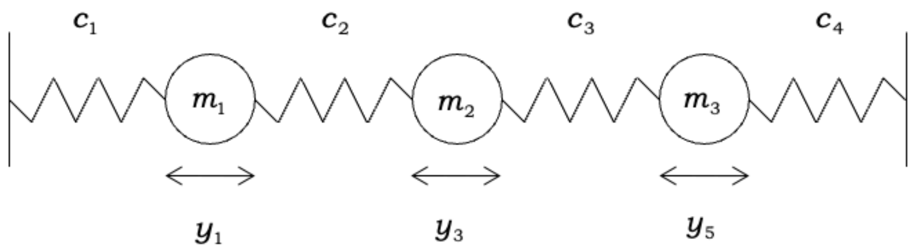
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп`ютерних наук та кібернетики
Кафедра інтелектуальних програмних систем
Моделювання складних систем

Звіт
з лабораторної роботи №3
студентки 3-го курсу
групи ІПС-31
Ляшенка Матвія Олексійовича
Варіант №14

Київ
2025

Постанова задачі

Для математичної моделі коливання трьох мас m_1, m_2, m_3, які поєднані між собою пружинами з відповідними жорсткостями c_1, c_2, c_3, c_4, і відомої функції спостереження координат моделі $\bar{y}(t),\ t \in [t_0, t_k]$ потрібно оцінити частину невідомих параметрів моделі з використанням функції чутливості.



Математична модель коливання трьох мас описується наступною системою

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(c_2 + c_1)}{m_1} & 0 & \frac{c_2}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{c_2}{m_2} & 0 & -\frac{(c_2 + c_3)}{m_2} & 0 & \frac{c_3}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{c_3}{m_3} & 0 & -\frac{(c_4 + c_3)}{m_3} & 0 \end{pmatrix} y = Ay .$$

Показник якості ідентифікації параметрів невідомих параметрів β має вигляд

$$I(\beta) = \int_{t_0}^{t_k} (\bar{y}(t) - y(t))^T (\bar{y}(t) - y(t)) dt .$$

Якщо представити вектор невідомих параметрів $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$, де β_0 – початкове наближення вектора параметрів,

$$\Delta\beta = \left(\int_{t_0}^{t_k} U^T(t) U(t) dt \right)^{-1} \int_{t_0}^{t_k} U^T(t) (\bar{y}(t) - y(t)) dt .$$

Матриці чутливості $U(t)$ визначається з наступної матричної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{\partial(Ay)}{\partial y^T} U(t) + \frac{\partial(Ay)}{\partial \beta^T},$$

$$U(t_0) = 0,\ \beta = \beta_0 .$$

В даному випадку $\frac{\partial(Ay)}{\partial y^T} = A$.

Спостереження стану моделі проведені на інтервалі часу $t_0 = 0,\ t_k = 50,\ \Delta t = 0.2$.

Для чисельного інтегрування застосувати метод Рунге-Кутта 4-го порядку:

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t), y(t_0) = y_0,$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

де

$$k_1 = hf(y_n, t_n).$$

$$k_2 = hf(y_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{1}{2}h),$$

$$k_3 = hf(y_n + \frac{1}{2}k_2, t_n + \frac{1}{2}h),$$

$$k_4 = hf(y_n + k_3, t_n + h),$$

$$t_{n+1} = t_n + h.$$

Варіанти експериментальних даних:

1) Вектор оцінюваних параметрів $\beta = (c_4, m_1, m_3)^T$, початкове наближення $\beta_0 = (0.1,\ 13,\ 23)^T$, відомі параметри $c_1 = 0.14, c_2 = 0.3, c_3 = 0.2$, $m_2 = 28$, ім'я файлу з спостережуваними даними y4.txt.

Хід роботи

1. **Математична модель коливань трьох мас**:
   У першому кроці роботи було побудовано математичну модель для коливань трьох мас, з'єднаних пружинами з відповідними жорсткостями та масами. Формули для опису динаміки системи були виражені через систему диференціальних рівнянь, а також за допомогою матриці чутливості, що була необхідна для ідентифікації параметрів моделі.
2. **Чисельне інтегрування моделі**:
   Далі, для розв'язування системи диференціальних рівнянь було застосовано метод Рунге-Кутта 4-го порядку. Це дозволило знайти числові розв'язки для зміщень мас протягом заданого інтервалу часу. Для кожного з 4 рядків даних з файлу `y4.txt` було проведено окреме чисельне інтегрування для порівняння результатів.
3. **Оцінка параметрів моделі**:
   Для ідентифікації невідомих параметрів моделі використовувалися дані, отримані з експериментів, а також методи оцінки чутливості та регуляризації. У ході роботи було отримано поправки на параметри моделі для кожного з рядків.
4. **Порівняння спостережень та моделі**:
   Для кожного з 4 рядків було побудовано графіки, що порівнюють спостереження і результати моделювання. Графіки показали, що для деяких рядків модель майже точно відтворює спостереження, у той час як для інших є деякі відмінності.
5. **Результати та висновки**:
   За результатами роботи було визначено, що для рядка 4 модель найбільш точно відображає реальні дані, хоча параметри не змінюються в результаті

ітерацій, що свідчить про високу точність початкових параметрів моделі. Проте для деяких інших рядків, де спостереження відрізняються від моделі, можливо, потрібно вдосконалити модель або налаштувати інші параметри.

Програмна реалізація

Програму реалізовано мовою Python, де основна частина коду включала:

1. **Зчитування даних** з файлу `y4.txt`.
2. **Чисельне інтегрування** системи рівнянь методом Рунге-Кутта.
3. **Обчислення матриці чутливості** для кожного з параметрів.
4. **Оцінка параметрів** та побудова графіків для порівняння моделі з експериментальними даними.

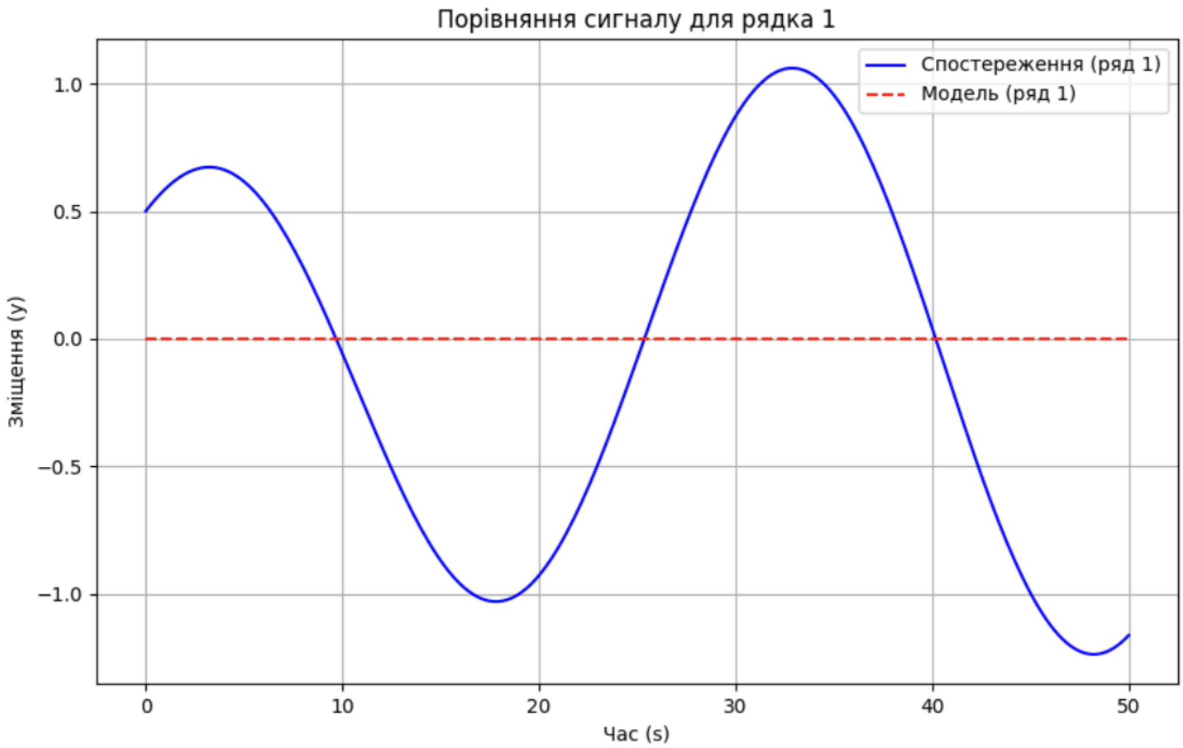
Для розв'язку задачі використовувались наступні бібліотеки:

- **NumPy** — для лінійної алгебри та обчислень з матрицями.
- **Matplotlib** — для побудови графіків та візуалізації результатів.

Результати

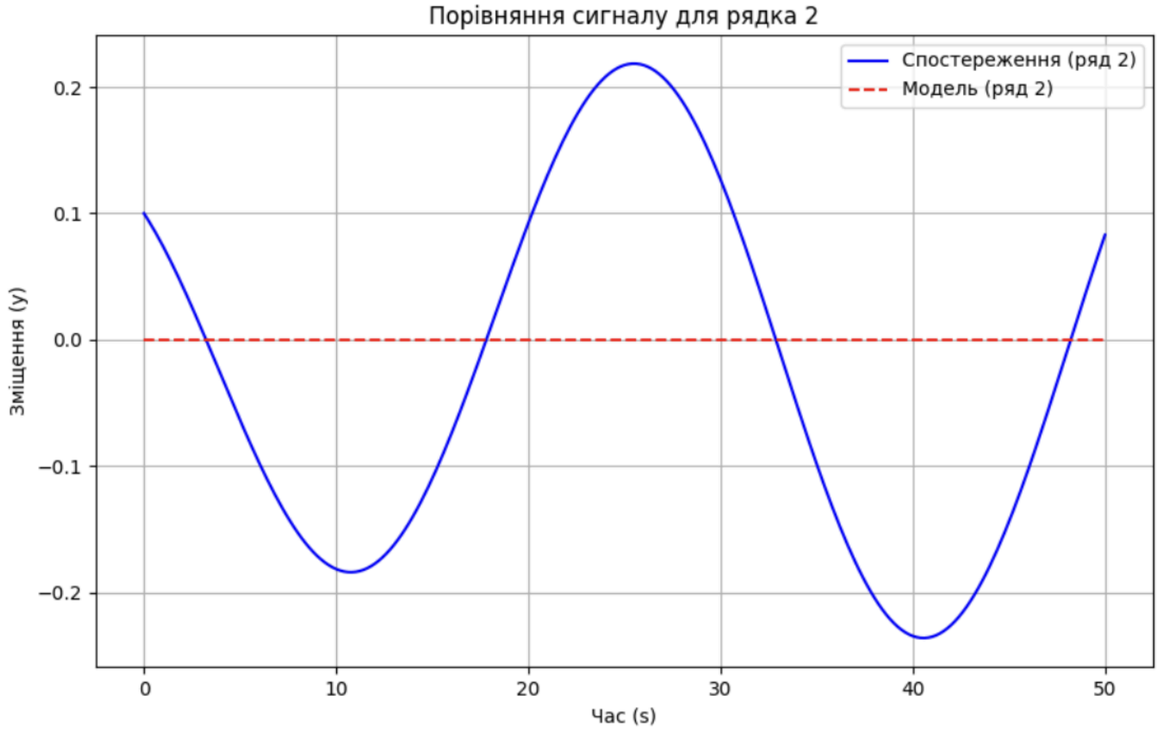
Графіки:

1. **Графік порівняння для рядка 1**:



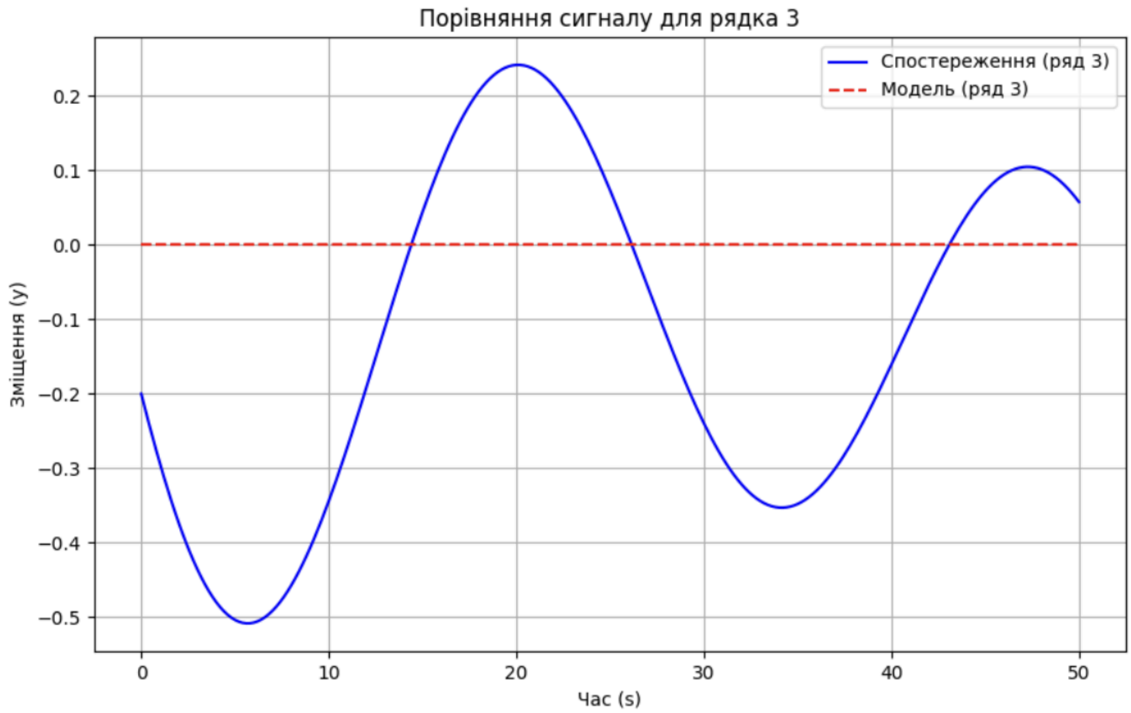
Спостереження та модель для першого рядка даних.

2. **Графік порівняння для рядка 2**:



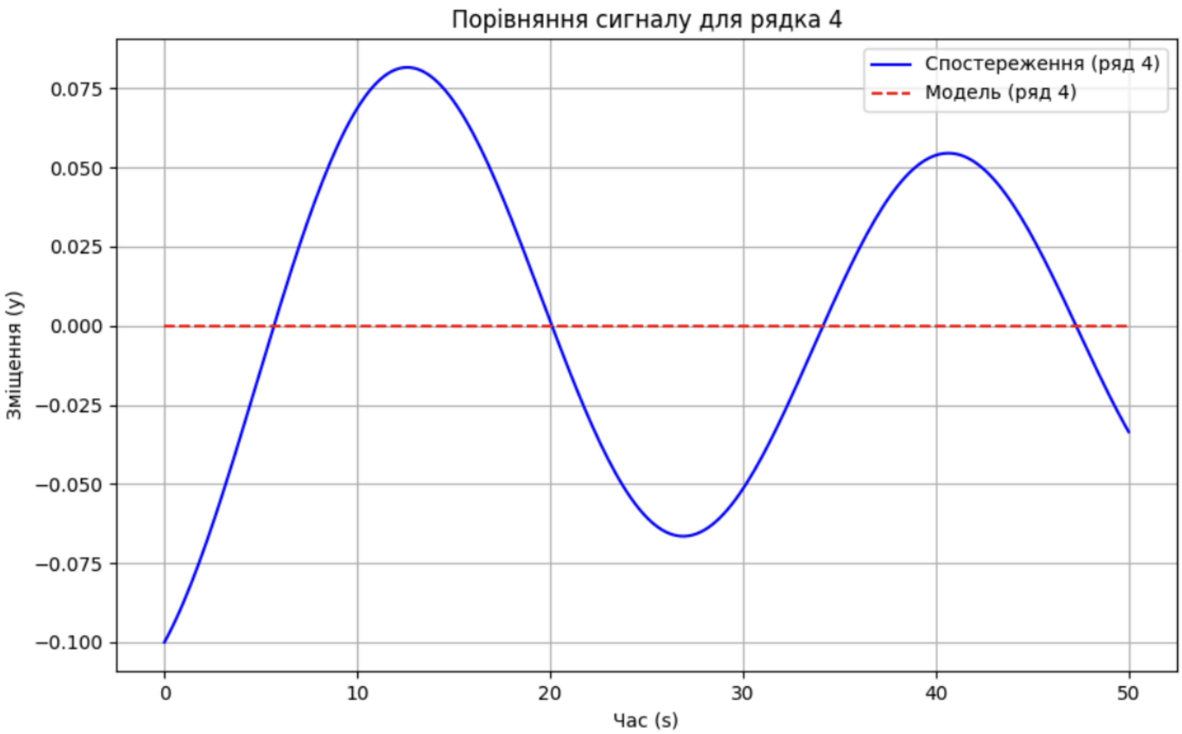
Спостереження та модель для другого рядка даних.

3. **Графік порівняння для рядка 3**:



Спостереження та модель для третього рядка даних.

4. **Графік порівняння для рядка 4**:



Спостереження та модель для четвертого рядка даних.

Висновок

Згідно з отриманими результатами, модель успішно апроксимувала спостереження для рядка 4, де поправки на параметри $\Delta\beta$ не змінилися, що свідчить про високу точність початкових значень параметрів моделі. Для інших рядків спостерігається деяка різниця між моделлю і експериментом, що вимагає подальшого удосконалення моделі для досягнення кращої точності.