Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики
Кафедра інтелектуальних програмних систем

Чисельні методи в інформатиці

Звіт

з лабораторної роботи №1
«Розв’язування нелінійних рівнянь»

Студента 3-го курсу
групи ПІ-31
Ляшенко Матвій Олексійович

Варіант №6

Київ — 2025

Вступ

У багатьох прикладних задачах інформатики та обчислювальної математики виникає потреба розв'язувати нелінійні рівняння вигляду $f(x) = 0$, для яких складно або неможливо отримати аналітичний розв'язок у замкненій формі. У таких ситуаціях застосовують чисельні методи, що дозволяють наближено знаходити корені з наперед заданою точністю.

До важливих ітераційних методів належать *метод релаксації* та *метод Ньютона*. Обидва методи будують послідовність наближень $\{x_n\}$ до кореня рівняння за рекурентною формулою, однак мають різні умови збіжності та різну швидкість зменшення похибки.

Метою даної лабораторної роботи є:

- дослідити властивості заданого нелінійного рівняння;
- побудувати ітераційні процеси методу релаксації та методу Ньютона для знаходження найбільшого додатного кореня;
- виконати апріорну та апостеріорну оцінку кількості кроків;
- порівняти ефективність методів за кількістю ітерацій та точністю отриманих наближень.

У всіх чисельних розрахунках використовується точність $\varepsilon = 10^{-4}$.

Умова задачі

Знайти найбільший додатний корінь нелінійного рівняння

$$x^4 - 5{,}74x^3 + 8{,}18x - 3{,}48 = 0$$

методом релаксації та методом Ньютона з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$. Знайти апріорну та апостеріорну оцінку кількості кроків. Початковий проміжок та початкове наближення обрати однакове для обох методів (якщо це можливо), порівняти результати роботи методів між собою.

Теоретичні відомості

Метод релаксації

Нехай задано нелінійне рівняння

$$f(x) = 0.$$

Метод релаксації можна розглядати як окремий випадок методу простої ітерації, коли ітераційний процес задається формулою

$$x_{n+1} = x_n - \tau f(x_n),$$

де τ — сталий *параметр релаксації*. На відрізку $[a; b]$ припускаємо, що функція $f(x)$ неперервна, диференційовна, а її перша похідна задовольняє оцінки

$$0 < m_1 \le |f'(x)| \le M_1, \qquad x \in [a; b].$$

За умови

$$0 < \tau < \frac{2}{M_1}$$

ітераційний процес збігається до єдиного кореня $x^* \in [a;b]$. Швидкість збіжності є лінійною, а похибка задовольняє оцінку

$$|x_n - x^*| \le q^n |x_0 - x^*|,$$

де q — коефіцієнт стиску, який залежить від параметра τ та меж m_1, M_1.

Оптимальний параметр релаксації обирають з умови мінімізації q. Якщо

$$\tau_0 = \frac{2}{M_1 + m_1},$$

то коефіцієнт стиску набуває вигляду

$$q_0 = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1},$$

а кількість кроків, потрібна для досягнення заданої точності ε, оцінюється нерівністю

$$n_0 \ge \left\lceil \frac{\ln \dfrac{|x_0 - x^*|}{\varepsilon}}{\ln \dfrac{1}{q_0}} \right\rceil + 1.$$

На практиці ітераційний процес припиняють за апостеріорним критерієм

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon,$$

який гарантує досягнення заданої точності за умови збіжності методу.

Метод Ньютона

Метод Ньютона (метод дотичних) базується на наближенні функції $f(x)$ лінійною функцією в околі поточного наближення x_n. Розкладаючи $f(x)$ у ряд Тейлора в околі x_n,

$$f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n),$$

одержуємо лінійне рівняння, розв'язок якого задає наступне наближення:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Нехай на відрізку $[a;b]$ функція $f(x)$ двічі неперервно диференційовна, $f'(x) \neq 0$ для всіх $x \in [a;b]$, а рівняння $f(x) = 0$ має на цьому відрізку єдиний корінь x^*. Якщо початкове наближення x_0 вибране так, що

$$f(x_0) f''(x_0) > 0,$$

то послідовність $\{x_n\}$, побудована за формулою Ньютона, збігається до кореня x^*.

Метод Ньютона має квадратичну швидкість збіжності. Якщо

$$m_1 = \min_{x \in [a;b]} |f'(x)|, \qquad M_2 = \max_{x \in [a;b]} |f''(x)|,$$

то для похибки $e_n = |x_n - x^*|$ виконується оцінка

$$|x_{n+1} - x^*| \le \frac{M_2}{2m_1} |x_n - x^*|^2 = L\, e_n^2,$$

де $L = \dfrac{M_2}{2m_1}$. З цієї нерівності випливає дуже швидке (квадратичне) зменшення похибки при $n \to \infty$.

Апріорну оцінку кількості кроків можна отримати, послідовно оцінюючи

$$E_0 = |x_0 - x^*|, \qquad E_{k+1} \le L E_k^2,$$

доки $E_k \le \varepsilon$. В обчислювальному експерименті зручно використовувати апостеріорний критерій

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon.$$

Розв'язання

Розглянемо рівняння

$$f(x) = x^4 - 5{,}74x^3 + 8{,}18x - 3{,}48 = 0,$$

для якого необхідно знайти найбільший додатний корінь з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ методами релаксації та Ньютона.

Дослідження функції

Перші дві похідні мають вигляд

$$f'(x) = 4x^3 - 17{,}22x^2 + 8{,}18, \qquad f''(x) = 12x^2 - 34{,}44x.$$

Обчислюючи значення функції на відрізку $[5; 6]$, маємо

$$f(5) \approx -55{,}08 < 0, \qquad f(6) \approx 101{,}76 > 0.$$

Отже, на відрізку $(5; 6)$ існує принаймні один корінь.

Аналіз похідної $f'(x)$ показує, що на $[5; 6]$ ця функція додатна і зростає, отже $f(x)$ є строго зростаючою на цьому відрізку. Таким чином, на $[5; 6]$ існує рівно один корінь, і це є найбільший додатний корінь рівняння. Чисельно (з використанням обчислювального експерименту) одержуємо наближене значення

$$x^* \approx 5{,}4895966291.$$

В якості початкового відрізка для обох методів обираємо

$$[a; b] = [5; 6],$$

а початкове наближення беремо у вигляді

$$x_0 = 5{,}5.$$

Для методу Ньютона перевіримо умову збіжності $f(x_0)\,f''(x_0) > 0$:

$$f(5{,}5) \approx 1{,}58 > 0, \qquad f''(5{,}5) \approx 173{,}58 > 0,$$

отже $f(5{,}5) f''(5{,}5) > 0$, і вибране x_0 є коректним стартовим наближенням.

Метод релаксації

Розглянемо ітераційний процес методу релаксації

$$x_{n+1} = x_n - \tau f(x_n),$$

оскільки на відрізку $[5;6]$ маємо $f'(x) > 0$.

На цьому відрізку оцінки для першої похідної мають вигляд

$$m_1 = \min_{x\in[5;6]} |f'(x)| = |f'(5)| \approx 77{,}68,$$

$$M_1 = \max_{x\in[5;6]} |f'(x)| = |f'(6)| \approx 252{,}26.$$

Тоді оптимальний параметр релаксації та коефіцієнт стиску:

$$\tau_0 = \frac{2}{M_1 + m_1} = \frac{2}{252{,}26 + 77{,}68} \approx 0{,}006062,$$

$$q_0 = \frac{M_1 - m_1}{M_1 + m_1} = \frac{252{,}26 - 77{,}68}{252{,}26 + 77{,}68} \approx 0{,}529127.$$

Оскільки $0 < q_0 < 1$, метод релаксації на даному відрізку є збіжним. З теорії маємо оцінку

$$|x_n - x^*| \le q_0^n |x_0 - x^*|.$$

Звідси апріорна оцінка кількості кроків

$$n_{\text{апріор}}^{(\text{рел})} \ge \left\lceil \frac{\ln \dfrac{|x_0 - x^*|}{\varepsilon}}{\ln \dfrac{1}{q_0}} \right\rceil + 1.$$

Для $x_0 = 5{,}5$, $x^* \approx 5{,}4896$ та $\varepsilon = 10^{-4}$:

$$|x_0 - x^*| \approx 0{,}0104, \qquad \frac{|x_0 - x^*|}{\varepsilon} \approx 104,$$

$$n_{\text{апріор}}^{(\text{рел})} \approx 9.$$

Ітераційний процес з параметром $\tau = \tau_0$ та початковим наближенням $x_0 = 5{,}5$ реалізовано програмно (скрипт мовою Python). Як критерій зупинки використано нерівність

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon.$$

Отримано такі значення (табл. 1).

k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	5,5000000000	–
1	5,4904225011	0,0095774989
2	5,4896663367	0,0007561644
3	5,4896025403	0,0000637964

Табл. 1: Ітерації методу релаксації

На третьому кроці

$$|x_3 - x_2| \approx 6{,}38 \cdot 10^{-5} \le 10^{-4},$$

тому ітераційний процес можна зупинити, а наближений корінь дорівнює

$$x_{\text{рел}} \approx 5{,}4896025403,$$

кількість фактичних кроків

$$N_{\text{рел}}^{\text{факт}} = 3.$$

Метод Ньютона

Ітераційна формула методу Ньютона:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

На відрізку $[5; 6]$ маємо оцінки

$$m_1 = \min_{x\in[5;6]} |f'(x)| \approx 77{,}68, \qquad M_2 = \max_{x\in[5;6]} |f''(x)| \approx 225{,}36.$$

Тоді

$$L = \frac{M_2}{2m_1} = \frac{225{,}36}{2\cdot 77{,}68} \approx 1{,}450566.$$

Початкова похибка

$$E_0 = |x_0 - x^*| \approx 0{,}0104.$$

Далі

$$E_1 \le LE_0^2 \approx 1{,}57\cdot 10^{-4}, \qquad E_2 \le LE_1^2 \approx 3{,}6\cdot 10^{-8} < 10^{-4}.$$

Отже, апріорно достатньо двох кроків методу Ньютона, тобто

$$n_{\text{апріор}}^{(\text{Ньютон})} \approx 2.$$

Ітераційний процес з початковим наближенням $x_0 = 5{,}5$ та критерієм зупинки

$$|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$$

дає наступні результати (табл. 2).

k	x_k	$\lvert x_k - x_{k-1}\rvert$
0	5,5000000000	–
1	5,4896579938	0,0103420062
2	5,4895966312	0,0000613626

Табл. 2: Ітерації методу Ньютона

На другому кроці

$$|x_2 - x_1| \approx 6{,}14\cdot 10^{-5} \le 10^{-4},$$

тому отримане наближення

$$x_{\text{Ньютон}} \approx 5{,}4895966312$$

задовольняє вимогу точності, а кількість фактичних кроків

$$N_{\text{Ньютон}}^{\text{факт}} = 2.$$

Висновок

У даній лабораторній роботі було досліджено застосування методу релаксації та методу Ньютона для знаходження найбільшого додатного кореня нелінійного рівняння

$$x^4 - 5{,}74x^3 + 8{,}18x - 3{,}48 = 0.$$

Попередній аналіз функції дозволив виділити відрізок $[5; 6]$, на якому функція є строго зростаючою і має єдиний корінь. В якості спільного початкового наближення для обох методів було обрано $x_0 = 5{,}5$.

Для методу релаксації були обчислені оцінки m_1 і M_1 для першої похідної, оптимальний параметр τ_0 та коефіцієнт стиску q_0. Апріорна оцінка показала, що для досягнення точності $\varepsilon = 10^{-4}$ потрібно близько 9 ітерацій, тоді як фактичний обчислювальний експеримент дав збіжність вже за 3 кроки:

$$x_{\text{рел}} \approx 5{,}4896025403.$$

Метод Ньютона, який має квадратичну збіжність, продемонстрував вищу ефективність. Апріорна оцінка кількості кроків дала значення $n_{\text{апріор}}^{(\text{Ньютон})} \approx 2$, і практична реалізація підтвердила, що для досягнення заданої точності достатньо двох кроків:

$$x_{\text{Ньютон}} \approx 5{,}4895966312.$$

Обидва методи забезпечили наближення до найбільшого додатного кореня, що відрізняється від еталонного значення $x^* \approx 5{,}4895966291$ менш ніж на 10^{-4}. Порівняння результатів показує, що метод Ньютона є більш ефективним за швидкістю збіжності, тоді як метод релаксації є простішим у реалізації та дозволяє гнучко керувати параметром τ. У практичних задачах доцільно використовувати метод Ньютона там, де можливе обчислення похідних і виконуються умови його збіжності, тоді як метод релаксації може бути зручним у випадках обмеженої інформації про похідні функції.