Київський національний університет
імені Тараса Шевченка
Факультет комп’ютерних наук та кібернетики

Лабораторна робота №1
з курсу
«Управління динамічними системами»
на тему:
«Аналітичне розв’язування диференціальних рівнянь
за допомогою комп’ютерних пакетів програм»

Виконав:
студент групи ІПС-21
факультету комп’ютерних наук та кібернетики
Ляшенко Матвій Олексійович

Київ – 2024

Варіант №6

Завдання №1

Умова: Розв’язати рівняння (показати вигляд загального розв’язку), побудувати поле напрямків, побудувати та показати розв’язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

Представлення розв’язку аналітично (в зошиті):

Лабораторна робота №1

№1

$y' = \cos(y-x)$

Заміна $z = y-x$, то

$\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx} - 1$

$\frac{dy}{dx} = \cos z$

$\frac{dz}{dx} = \cos(z) - 1$

$dx = \frac{dz}{\cos(z)-1}$

$\cos(z) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)$

$\int dx = \int \frac{1}{-2\sin^2\left(\frac{z}{2}\right)}$

$x + C = \text{ctg}\left(\frac{z}{2}\right)$

$\text{ctg}\left(\frac{y-x}{2}\right) = x + C$

$\frac{y-x}{2} = \text{ctg}^{-1}(x+C)$

$y = x + 2\,\text{ctg}^{-1}(x+C)$ – заг. розв

Рішення задач Коші

1) $y(1) = 2$

$2 = 1 + 2\,\text{ctg}^{-1}(1+C)$

$1 = 2\,\text{ctg}^{-1}(1+C)$

$\text{ctg}^{-1}(1+C) = \frac{1}{2}$

$1 + C = \text{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$1 + C = 0$

$C = -1$; $y = x + 2\,\text{ctg}^{-1}(x-1)$

2) $y(-1) = 2$

$2 = -1 + 2\,\text{ctg}^{-1}(-1+C)$

$3 = 2\,\text{ctg}^{-1}(-1+C)$

$\text{ctg}^{-1}(-1+C) = \frac{3}{2}$

$-1 + C = \text{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

$C = 1$; $y = x + 2\,\text{ctg}^{-1}(x+1)$

3) $y(-1) = -2$

$-2 = -1 + 2\,\text{ctg}^{-1}(-1+C)$

$-1 = 2\,\text{ctg}^{-1}(-1+C)$

$\text{ctg}^{-1}(-1+C) = -\frac{1}{2}$

$-1 + C = \text{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$C = 1$; $y = x + 2\,\text{ctg}^{-1}(x+1)$

4) $y(1) = -2$

$-2 = 1 + 2\,\text{ctg}^{-1}(1+C)$

$-3 = 2\,\text{ctg}^{-1}(1+C)$

$1 + C = \text{ctg}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

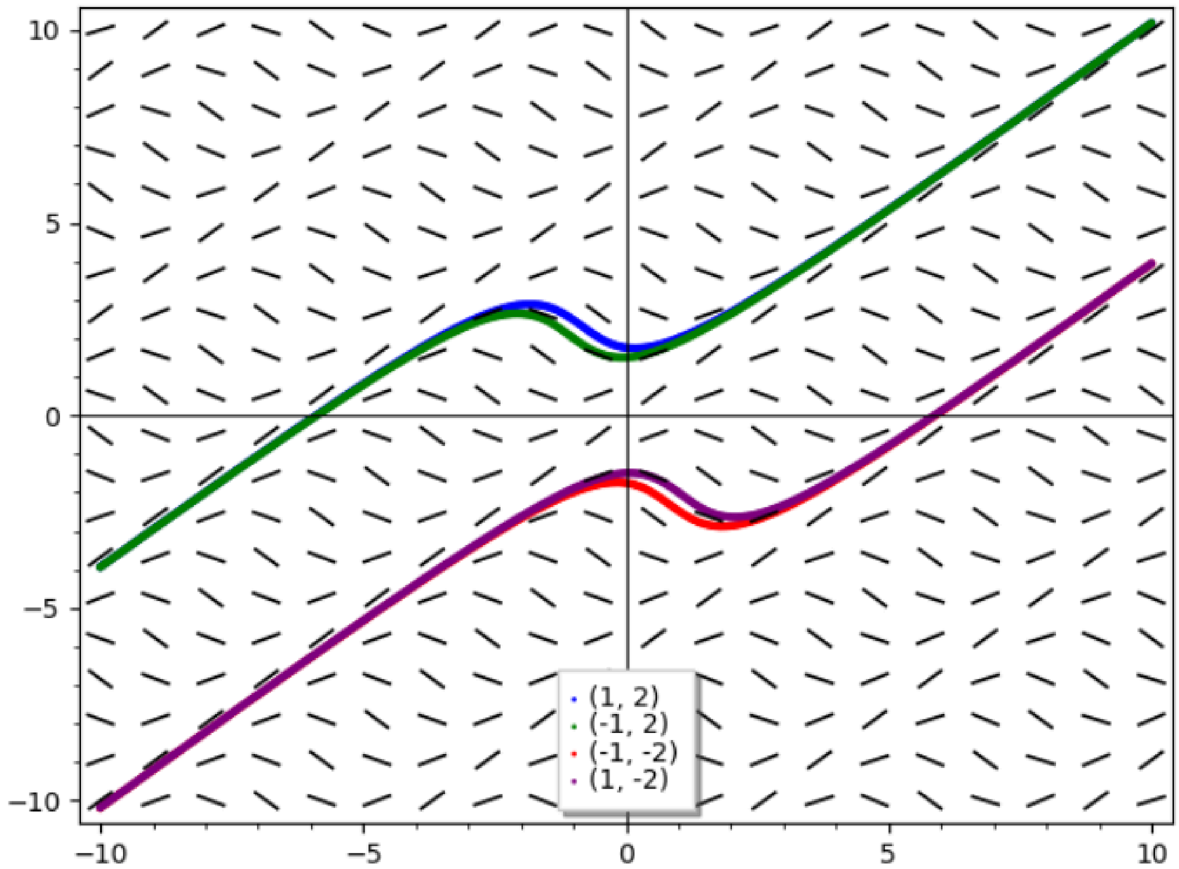
$1 + C = 0$

$C = -1$; $y = x + 2\,\text{ctg}^{-1}(x-1)$

Код програми Sage:

```
# Імпорт бібліотек
var('x y')
# Визначаємо рівняння y' = cos(y - x)
f(x, y) = cos(y - x)

# Побудова поля напрямків з діапазоном по осі x від -10 до 10 і по осі y від -10 до 10
direction_field = plot_slope_field(f(x, y), (x, -10, 10), (y, -10, 10))

# Використовуємо числовий метод для розв'язання задач Коші в обох напрямках з
меншим кроком

# Перше початкове значення (1, 2)
sol1_positive = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[1, 2], ivar=x, step=0.05, end_points=10)
sol1_negative = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[1, 2], ivar=x, step=0.05, end_points=-10)

# Друге початкове значення (-1, 2)
sol2_positive = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[-1, 2], ivar=x, step=0.05, end_points=10)
sol2_negative = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[-1, 2], ivar=x, step=0.05, end_points=-10)

# Третє початкове значення (-1, -2)
sol3_positive = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[-1, -2], ivar=x, step=0.05, end_points=10)
sol3_negative = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[-1, -2], ivar=x, step=0.05, end_points=-10)

# Четверте початкове значення (1, -2)
sol4_positive = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[1, -2], ivar=x, step=0.05, end_points=10)
sol4_negative = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[1, -2], ivar=x, step=0.05, end_points=-10)

# Створюємо графіки для всіх розв'язків задач Коші в обох напрямках
solution_plots = list_plot(sol1_positive, color='blue', legend_label='(1, 2)') + \
              list_plot(sol1_negative, color='blue') + \
              list_plot(sol2_positive, color='green', legend_label='(-1, 2)') + \
              list_plot(sol2_negative, color='green') + \
              list_plot(sol3_positive, color='red', legend_label='(-1, -2)') + \
              list_plot(sol3_negative, color='red') + \
              list_plot(sol4_positive, color='purple', legend_label='(1, -2)') + \
              list_plot(sol4_negative, color='purple')

# Додаємо поле напрямків до графіків розв'язків задач Коші
full_plot = direction_field + solution_plots

# Виводимо остаточний графік
full_plot.show()
```

Результат роботи програми Sage:



Завдання №2

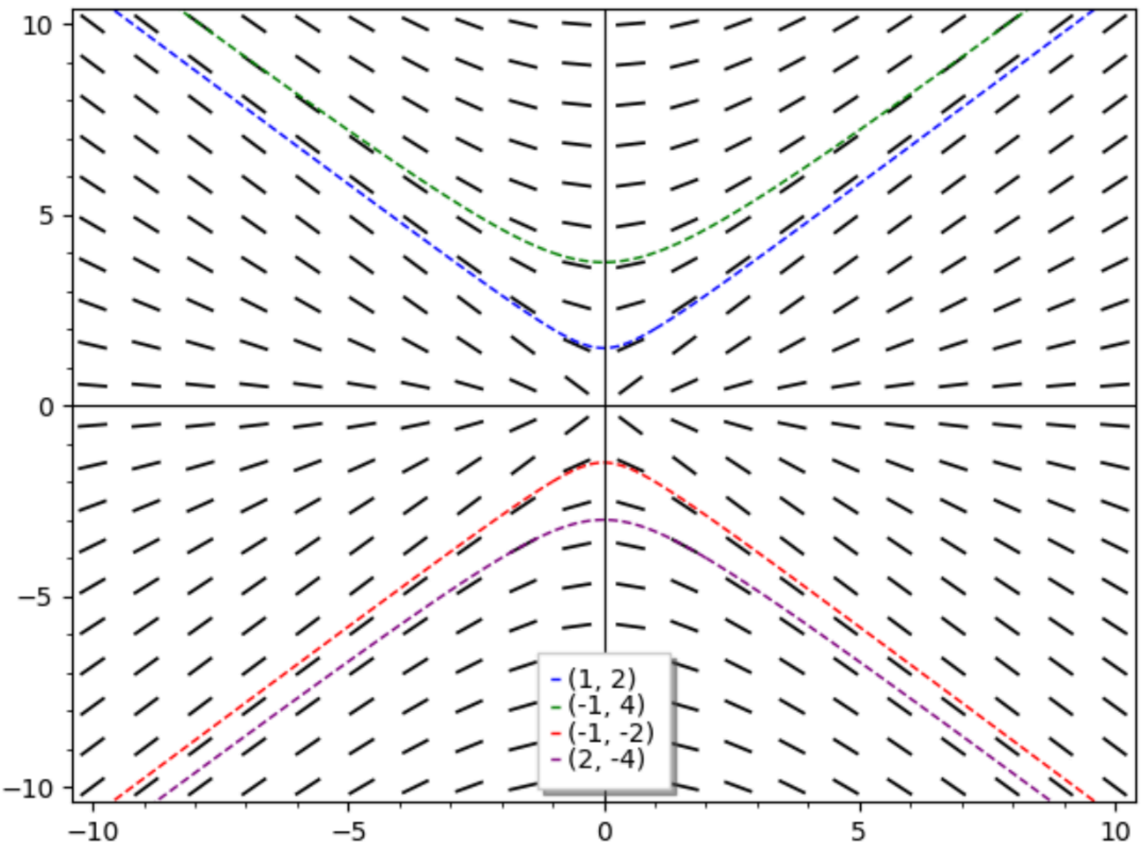
Умова: Побудувати поле напрямків, побудувати та показати розв'язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

Код програми Sage:

```
# Імпорт бібліотек
var('x y')
# Визначаємо рівняння y' = 2xy / (x^2 + y^2)
f(x, y) = 2*x*y / (x^2 + y^2)

# Побудова поля напрямків з діапазоном для x і y від -10 до 10
direction_field = plot_slope_field(f(x, y), (x, -10, 10), (y, -10, 10))

# Використовуємо числовий метод для розв'язання задач Коші в обидва напрямки

# Перше початкове значення (1, 2)
sol1_positive = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[1, 2], ivar=x, step=0.1, end_points=10)
sol1_negative = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[1, 2], ivar=x, step=0.1, end_points=-10)

# Друге початкове значення (-1, 4)
sol2_positive = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[-1, 4], ivar=x, step=0.1, end_points=10)
sol2_negative = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[-1, 4], ivar=x, step=0.1, end_points=-10)
```

```
# Третє початкове значення (-1, -2)
sol3_positive = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[-1, -2], ivar=x, step=0.1, end_points=10)
sol3_negative = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[-1, -2], ivar=x, step=0.1, end_points=-10)

# Четверте початкове значення (2, -4)
sol4_positive = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[2, -4], ivar=x, step=0.1, end_points=10)
sol4_negative = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[2, -4], ivar=x, step=0.1, end_points=-10)

# Створюємо графіки для всіх розв'язків задач Коші з пунктирними лініями
solution_plots = line(sol1_positive, color='blue', legend_label='(1, 2)', linestyle='--') + \
             line(sol1_negative, color='blue', linestyle='--') + \
             line(sol2_positive, color='green', legend_label='(-1, 4)', linestyle='--') + \
             line(sol2_negative, color='green', linestyle='--') + \
             line(sol3_positive, color='red', legend_label='(-1, -2)', linestyle='--') + \
             line(sol3_negative, color='red', linestyle='--') + \
             line(sol4_positive, color='purple', legend_label='(2, -4)', linestyle='--') + \
             line(sol4_negative, color='purple', linestyle='--')

# Додаємо поле напрямків до графіків розв'язків задач Коші
full_plot = direction_field + solution_plots

# Виводимо остаточний графік
full_plot.show(ymin=-10, ymax=10)
```

Результат роботи програми Sage:



Завдання №3

Умова: Розв'язати рівняння (показати вигляд загального розв'язку), побудувати поле напрямків, побудувати та показати розв'язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

Представлення розв'язку аналітично (в зошиті):

Завдання №3

$$y' + y\,tg\,x = \sec x$$

$$\mu(x) = e^{\int tg(x)dx} = e^{-\ln|\cos(x)|} = \frac{1}{\cos x}$$

$$y' + y\,tg\,x = \sec x \quad \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x}\cdot y' + \frac{y}{\cos x}\,tg\,x = \frac{\sec x}{\cos x}$$

$$\frac{1}{\cos x}\cdot y' + \frac{y\cdot\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\int \frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\cos x}\right)dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$\frac{y}{\cos x} = tg(x) + C$$

$y(x) = tg(x) \cdot \cos(x) + C \cdot \cos(x)$

$y(x) = \sin x + C \cdot \cos(x)$ - заг. розв.

Задачі Коші:

1) $y(\frac{\pi}{4}) = 1$

$1 = \sin(\frac{\pi}{4}) + C \cdot \cos(\frac{\pi}{4})$

$1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + C \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sqrt{2} = \sqrt{2} + C \cdot \sqrt{2}$

$0 = C \cdot \sqrt{2}$

$C = 0$; $y(x) = \sin(x)$

2) $y(-\frac{\pi}{4}) = 1$

$1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + C \frac{\sqrt{2}}{2}$

$2\sqrt{2} = C \cdot \sqrt{2}$

$C = 2$; $y(x) = \sin(x) + 2 \cdot \cos(x)$

3) $y(-\frac{\pi}{4}) = -1$

$-1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + C \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$0 = C \cdot \sqrt{2}$

$C = 0$; $y(x) = \sin(x)$

4) $y(\frac{\pi}{4}) = -1$

$-1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + C \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$; $-2\sqrt{2} = C \cdot \sqrt{2}$

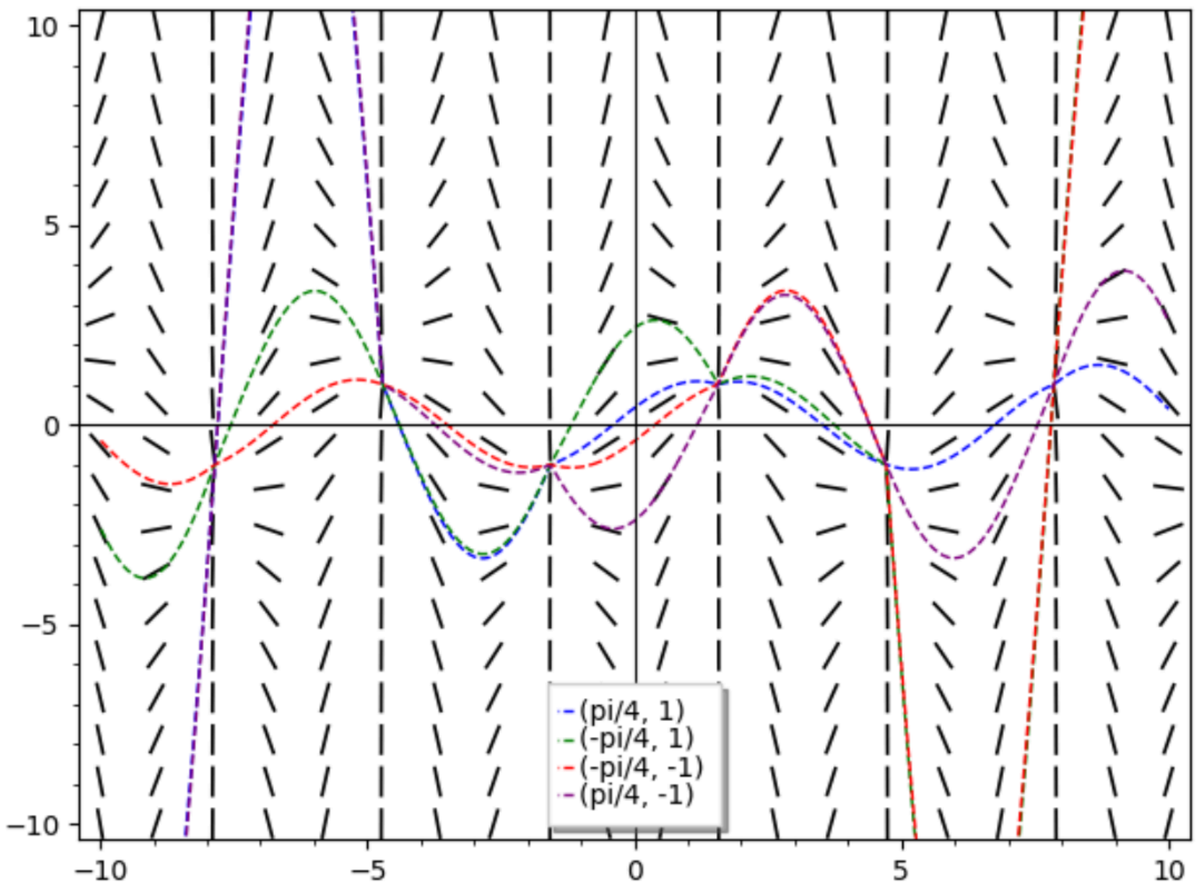
$C = -2$; $y(x) = \sin(x) - 2 \cdot \cos(x)$

Код програми Sage:

```
# Імпорт бібліотек
var('x y')
# Визначаємо рівняння y' = sec(x) - y * tan(x)
f(x, y) = sec(x) - y * tan(x)
```

```
# Побудова поля напрямків з діапазоном для x і y від -10 до 10
direction_field = plot_slope_field(f(x, y), (x, -10, 10), (y, -10, 10))

# Числове значення для pi
pi_val = float(pi)

# Використовуємо числовий метод для розв'язання задач Коші в обидва напрямки

# Перше початкове значення (pi/4, 1)
sol1_positive = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[pi_val/4, 1], ivar=x, step=0.1, end_points=10)
sol1_negative = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[pi_val/4, 1], ivar=x, step=0.1, end_points=-10)

# Друге початкове значення (-pi/4, 1)
sol2_positive = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[-pi_val/4, 1], ivar=x, step=0.1, end_points=10)
sol2_negative = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[-pi_val/4, 1], ivar=x, step=0.1, end_points=-10)

# Третє початкове значення (-pi/4, -1)
sol3_positive = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[-pi_val/4, -1], ivar=x, step=0.1, end_points=10)
sol3_negative = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[-pi_val/4, -1], ivar=x, step=0.1, end_points=-10)

# Четверте початкове значення (pi/4, -1)
sol4_positive = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[pi_val/4, -1], ivar=x, step=0.1, end_points=10)
sol4_negative = desolve_rk4(f(x, y), y, ics=[pi_val/4, -1], ivar=x, step=0.1, end_points=-10)

# Створюємо графіки для всіх розв'язків задач Коші з пунктирними лініями
solution_plots = line(sol1_positive, color='blue', legend_label='(pi/4, 1)', linestyle='--') + \
        line(sol1_negative, color='blue', linestyle='--') + \
        line(sol2_positive, color='green', legend_label='(-pi/4, 1)', linestyle='--') + \
        line(sol2_negative, color='green', linestyle='--') + \
        line(sol3_positive, color='red', legend_label='(-pi/4, -1)', linestyle='--') + \
        line(sol3_negative, color='red', linestyle='--') + \
        line(sol4_positive, color='purple', legend_label='(pi/4, -1)', linestyle='--') + \
        line(sol4_negative, color='purple', linestyle='--')

# Додаємо поле напрямків до графіків розв'язків задач Коші
full_plot = direction_field + solution_plots

# Виводимо остаточний графік
full_plot.show(ymin=-10, ymax=10)
```

Результат роботи програми Sage:



Завдання №4

Умова: Розв’язати рівняння (показати вигляд загального розв’язку), побудувати та показати розв’язки задач Коші (чотири різні ЗК, точки обрати самостійно, але так щоб кожна була в окремому квадранті декартової системи координат)

Код програми Sage:

```
# Імпорт потрібних бібліотек
var('x')
y = function('y')(x)

# Задаємо диференціальне рівняння
de = diff(y, x, 2) - 2*diff(y, x) + 2*y == (x + exp(x)) * sin(x)

# Початкові умови для кожної точки
ics_1 = [0, 1, 2]  # для точки (1, 2)
ics_2 = [0, -1, -4]  # для точки (-1, -4)
ics_3 = [0, -2, -2]  # для точки (-2, -2)
ics_4 = [0, 2, -4]  # для точки (2, -4)

# Розв'язуємо диференціальне рівняння
sol = desolve(de, y)

# Розв'язуємо рівняння для кожної точки
sol1 = desolve(de, y, ics=ics_1)
```

```
sol2 = desolve(de, y, ics=ics_2)
sol3 = desolve(de, y, ics=ics_3)
sol4 = desolve(de, y, ics=ics_4)

# Виводимо результати для кожного розв'язку
show(sol1)
show(sol2)
show(sol3)
show(sol4)
show(sol)

# Побудова графіків для кожного розв'язку на інтервалі від -10 до 10
p1 = plot(sol1, (x, -10, 10), color='blue', legend_label='(1, 2)')
p2 = plot(sol2, (x, -10, 10), color='green', legend_label='(-1, -4)')
p3 = plot(sol3, (x, -10, 10), color='red', legend_label='(-2, -2)')
p4 = plot(sol4, (x, -10, 10), color='purple', legend_label='(2, -4)')

# Виведення графіків на одній системі координат
(p1 + p2 + p3 + p4).show()
```

Результат роботи програми Sage:

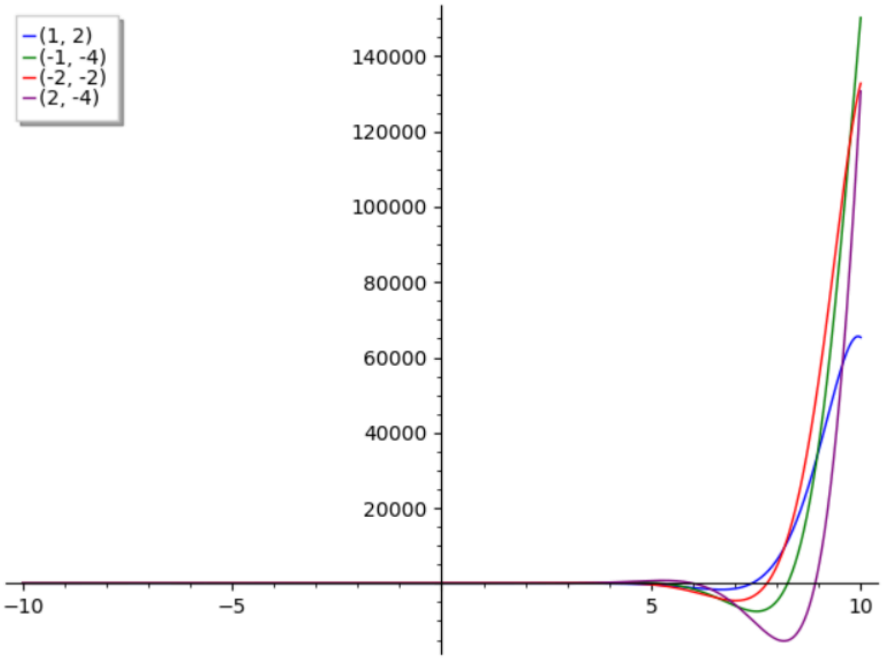
$$-\frac{1}{50}\left(25\,xe^{x}-20\,x-28\right)\cos\left(x\right)+\frac{1}{50}\left(22\,\cos\left(x\right)+79\,\sin\left(x\right)\right)e^{x}+\frac{1}{25}\left(5\,x+2\right)\sin\left(x\right)$$

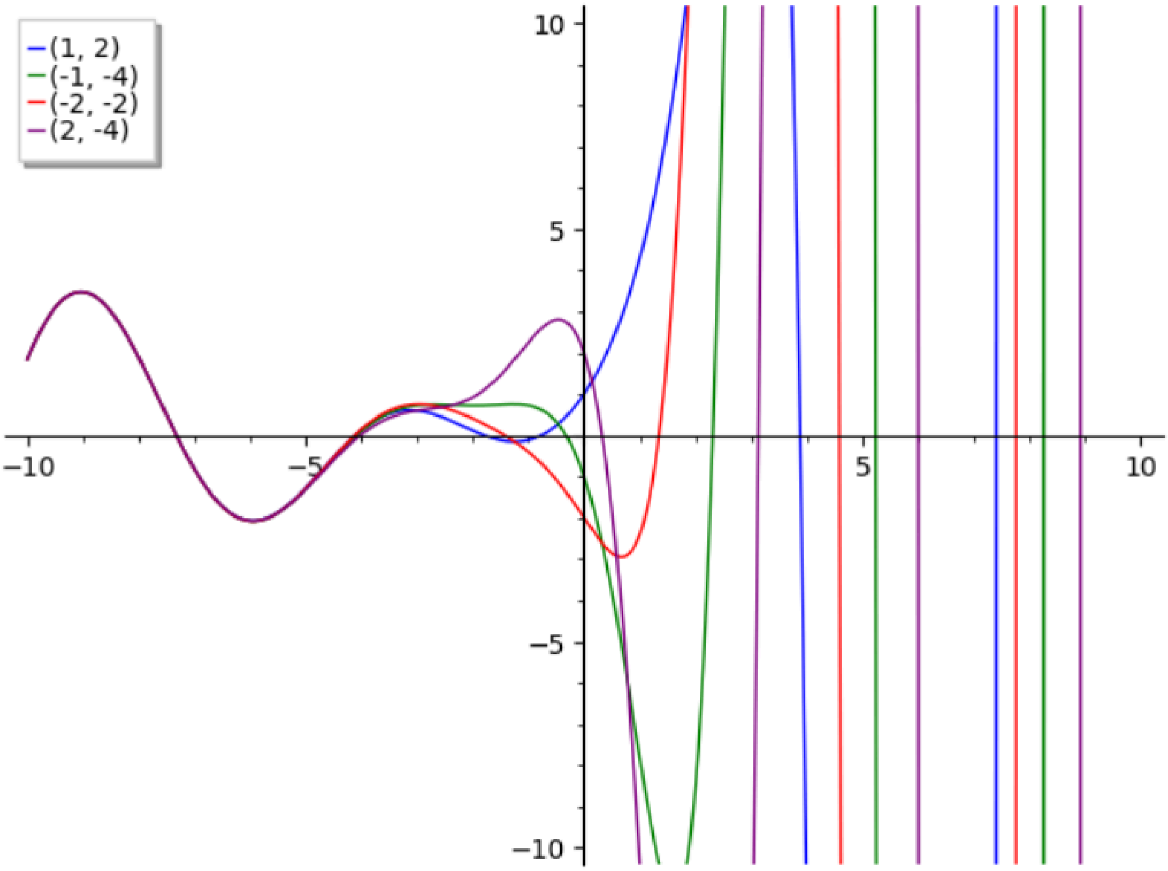
$$-\frac{1}{50}\left(25\,xe^{x}-20\,x-28\right)\cos\left(x\right)-\frac{1}{50}\left(78\,\cos\left(x\right)+121\,\sin\left(x\right)\right)e^{x}+\frac{1}{25}\left(5\,x+2\right)\sin\left(x\right)$$

$$-\frac{1}{50}\left(25\,xe^{x}-20\,x-28\right)\cos\left(x\right)-\frac{1}{50}\left(128\,\cos\left(x\right)-29\,\sin\left(x\right)\right)e^{x}+\frac{1}{25}\left(5\,x+2\right)\sin\left(x\right)$$

$$-\frac{1}{50}\left(25\,xe^{x}-20\,x-28\right)\cos\left(x\right)+\frac{1}{50}\left(72\,\cos\left(x\right)-271\,\sin\left(x\right)\right)e^{x}+\frac{1}{25}\left(5\,x+2\right)\sin\left(x\right)$$

$$-\frac{1}{50}\left(25\,xe^{x}-20\,x-28\right)\cos\left(x\right)+\left(K_{2}\cos\left(x\right)+K_{1}\sin\left(x\right)\right)e^{x}+\frac{1}{25}\left(5\,x+2\right)\sin\left(x\right)$$





(Відображення з обмеженням по y)