Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Кафедра інтелектуальних програмних систем

Чисельні методи в інформатиці

Звіт
з лабораторної роботи №4
«Сплайни»

Виконав:
студент 3-го курсу
групи ПІ-31
Ляшенко Матвій Олексійович

Київ — 2025

1 Постановка задачі

Необхідно виконати інтерполяцію функції $f(x) = \sqrt{x}$ на інтервалі $[0, 10]$ за допомогою **природного кубічного сплайна**.

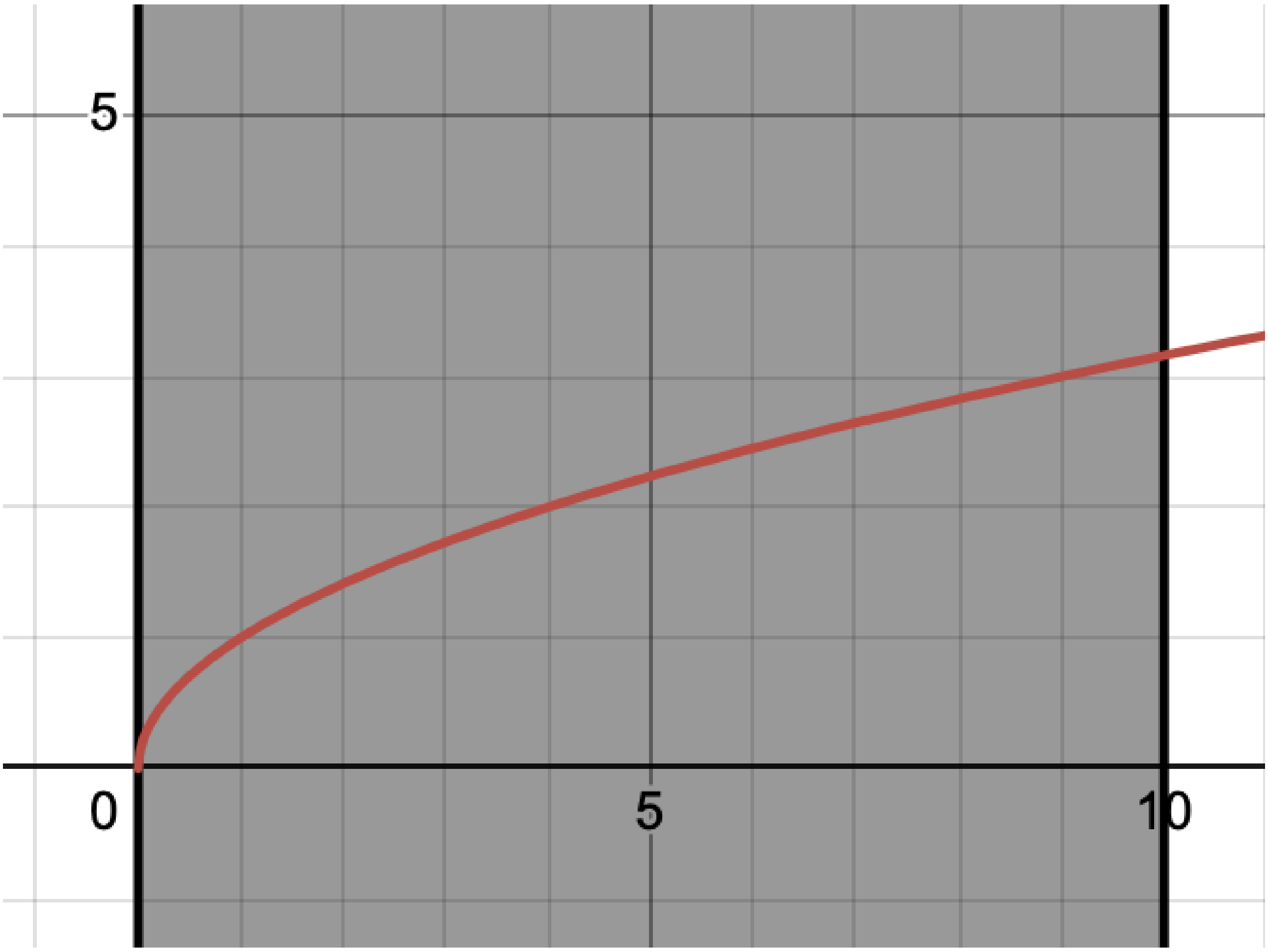

Рис. 1: Функція $\sqrt{x}$

Як вузли інтерполяції використовуються 15 точок (вузли Чебишева, перенесені на заданий інтервал), які були розраховані в попередній лабораторній роботі.

Вимоги до роботи:

- Побудувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) для знаходження коефіцієнтів сплайна.
- Знайти коефіцієнти поліномів третього степеня для кожного підінтервалу.
- Записати аналітичний вигляд сплайнів.
- Побудувати графіки функції, її похідних та графіки похибок інтерполяції.

2 Теоретичні відомості

Інтерполяційним кубічним сплайном називається функція $S(x)$, яка на відрізку $[a, b]$ задовольняє такі умови:

1. На кожному частинному відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ функція $S(x)$ є поліномом третього степеня $S_i(x)$.

2. $S(x) \in C^2[a, b]$, тобто функція неперервна разом зі своїми першою та другою похідними на всьому інтервалі.

3. Виконується умова інтерполяції: $S(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n$.

4. Граничні умови природного сплайна: $S''(a) = S''(b) = 0$.

Шукаємо сплайн на проміжку $[x_i, x_{i+1}]$ у вигляді:

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3 \tag{1}$$

Для знаходження коефіцієнтів використовується умова неперервності другої похідної. Це приводить до системи лінійних рівнянь відносно коефіцієнтів c_i (які пропорційні другій похідній $S''(x_i) = 2c_i$):

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 3\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i}\right) \tag{2}$$

де $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Після знаходження c_i методом прогонки (з урахуванням $c_0 = c_n = 0$), решта коефіцієнтів визначається як:

$$a_i = f_i, \quad b_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{h_i(2c_i + c_{i+1})}{3}, \quad d_i = \frac{c_{i+1} - c_i}{3h_i}.$$

3 Розв'язання

Кількість вузлів $n = 15$. Кроки сітки h_i є змінними. Було сформовано тридіагональну матрицю та розв'язано систему рівнянь. Нижче наведено результати розрахунків.

3.1 Таблиця коефіцієнтів

У таблиці представлено розраховані значення коефіцієнтів a_i, b_i, c_i, d_i для кожного інтервалу i (від 0 до 13).

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	0.16550	1.64340	0.00000	-2.72010
1	0.49470	1.25807	-1.77323	1.42386
2	0.81850	0.52240	0.04305	-0.09664
3	1.13330	0.46586	-0.13508	0.04679
4	1.43560	0.34070	-0.02604	-0.00048
5	1.72230	0.29236	-0.02736	0.00428
6	1.99010	0.25065	-0.01460	0.00107
7	2.23610	0.22376	-0.01127	0.00094
8	2.45760	0.20337	-0.00835	0.00059
9	2.65210	0.18852	-0.00659	0.00035
10	2.81760	0.17743	-0.00565	0.00039
11	2.95220	0.16936	-0.00474	0.00016
12	3.05450	0.16371	-0.00445	-0.00008

i	a_i	b_i	c_i	d_i
13	3.12330	0.15989	-0.00455	0.00698

3.2 Аналітичний вигляд сплайнів

Підставивши знайдені коефіцієнти у загальне рівняння, отримуємо явний вигляд поліномів для кожного відрізка:

- На відрізку $[0.0274; 0.2447]$:
$$S_0(x) = 0.1655 + 1.6434(x - 0.0274) + 0.0000(x - 0.0274)^2 - 2.7201(x - 0.0274)^3$$
- На відрізку $[0.2447; 0.6699]$:
$$S_1(x) = 0.4947 + 1.2581(x - 0.2447) - 1.7732(x - 0.2447)^2 + 1.4239(x - 0.2447)^3$$
- На відрізку $[0.6699; 1.2843]$:
$$S_2(x) = 0.8185 + 0.5224(x - 0.6699) + 0.0430(x - 0.6699)^2 - 0.0966(x - 0.6699)^3$$
- На відрізку $[1.2843; 2.0611]$:
$$S_3(x) = 1.1333 + 0.4659(x - 1.2843) - 0.1351(x - 1.2843)^2 + 0.0468(x - 1.2843)^3$$
- На відрізку $[2.0611; 2.9663]$:
$$S_4(x) = 1.4356 + 0.3407(x - 2.0611) - 0.0260(x - 2.0611)^2 - 0.0005(x - 2.0611)^3$$
- На відрізку $[2.9663; 3.9604]$:
$$S_5(x) = 1.7223 + 0.2924(x - 2.9663) - 0.0274(x - 2.9663)^2 + 0.0043(x - 2.9663)^3$$
- На відрізку $[3.9604; 5.0000]$:
$$S_6(x) = 1.9901 + 0.2506(x - 3.9604) - 0.0146(x - 3.9604)^2 + 0.0011(x - 3.9604)^3$$
- На відрізку $[5.0000; 6.0396]$:
$$S_7(x) = 2.2361 + 0.2238(x - 5.0000) - 0.0113(x - 5.0000)^2 + 0.0009(x - 5.0000)^3$$
- На відрізку $[6.0396; 7.0337]$:
$$S_8(x) = 2.4576 + 0.2034(x - 6.0396) - 0.0083(x - 6.0396)^2 + 0.0006(x - 6.0396)^3$$
- На відрізку $[7.0337; 7.9389]$:
$$S_9(x) = 2.6521 + 0.1885(x - 7.0337) - 0.0066(x - 7.0337)^2 + 0.0003(x - 7.0337)^3$$
- На відрізку $[7.9389; 8.7157]$:
$$S_{10}(x) = 2.8176 + 0.1774(x - 7.9389) - 0.0057(x - 7.9389)^2 + 0.0004(x - 7.9389)^3$$
- На відрізку $[8.7157; 9.3301]$:
$$S_{11}(x) = 2.9522 + 0.1694(x - 8.7157) - 0.0047(x - 8.7157)^2 + 0.0002(x - 8.7157)^3$$
- На відрізку $[9.3301; 9.7553]$:
$$S_{12}(x) = 3.0545 + 0.1637(x - 9.3301) - 0.0044(x - 9.3301)^2 - 0.0001(x - 9.3301)^3$$
- На відрізку $[9.7553; 9.9726]$:
$$S_{13}(x) = 3.1233 + 0.1599(x - 9.7553) - 0.0046(x - 9.7553)^2 + 0.0070(x - 9.7553)^3$$

4 Графічний аналіз результатів

Для перевірки точності інтерполяції було побудовано графіки:

1. Вихідна функція $f(x)$ та сплайн $S(x)$.
2. Перша похідна $f'(x)$ та $S'(x)$.
3. Друга похідна $f''(x)$ та $S''(x)$.
4. Абсолютні похибки для функції та її похідних.

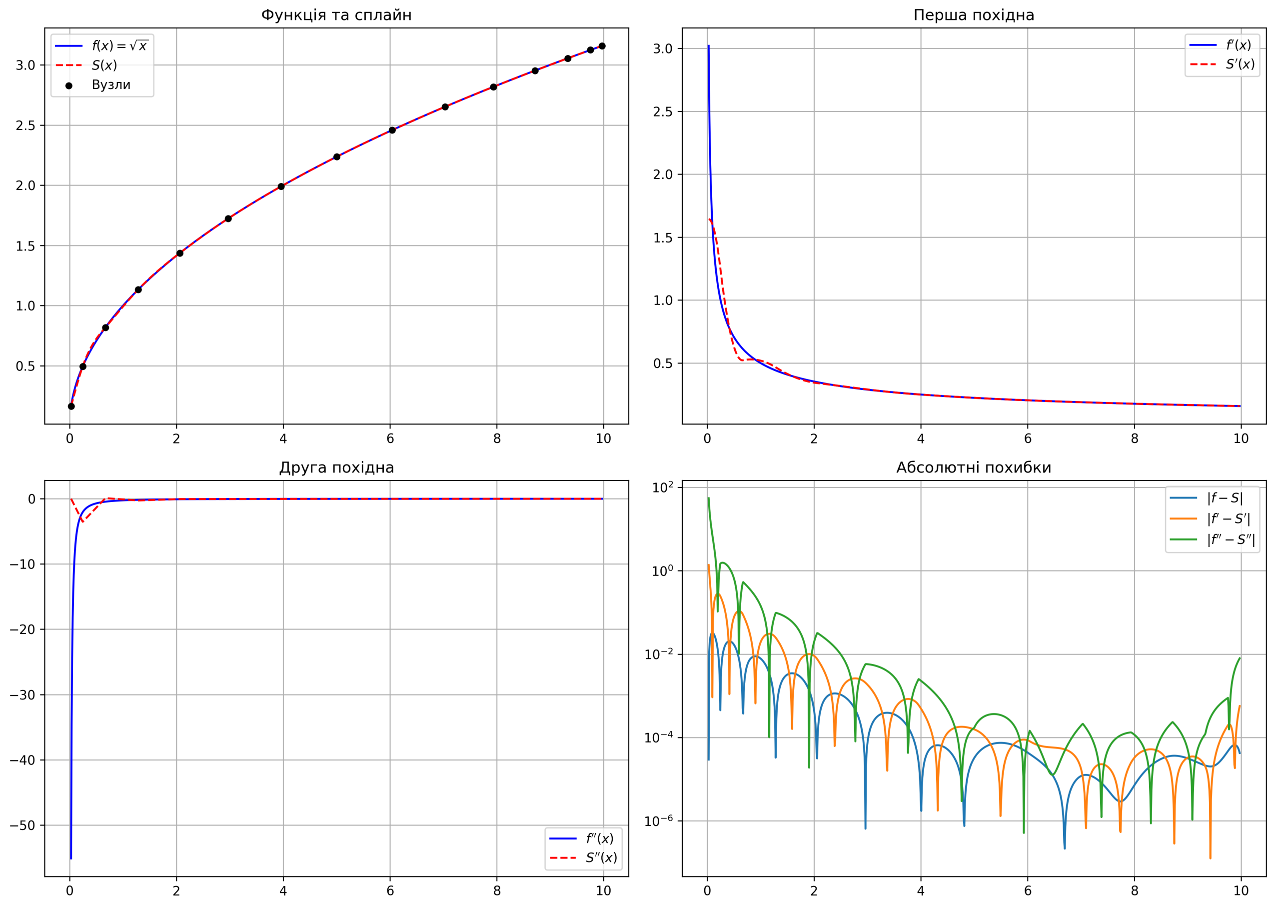

Рис. 2: Результати інтерполяції функції $\sqrt{x}$ кубічним сплайном

5 Висновки

У ході лабораторної роботи було побудовано природний кубічний сплайн для функції $f(x) = \sqrt{x}$ на інтервалі $[0, 10]$ за 15 вузлами Чебишева.

Аналіз графіків та похибок показує:

- **Наближення функції:** Сплайн $S(x)$ накладається на графік $f(x)$ майже ідеально. Максимальна похибка $|f(x) - S(x)|$ є малою (порядку 10^{-4}–10^{-5}) на більшій частині інтервалу.
- **Проблема лівого краю:** Функція $f(x) = \sqrt{x}$ має особливість у точці $x = 0$ (похідна прямує до нескінченності). Сплайн, будучи поліномом, є гладкою функцією з обмеженими похідними. Це призводить до суттєвого зростання похибки поблизу $x = 0$, що добре видно на графіках похибок похідних (де похибка другої похідної сягає 10^2).

- **Природні умови:** Графік другої похідної $S''(x)$ демонструє виконання крайових умов $S''(x_0) = 0$ та $S''(x_n) = 0$. Сама друга похідна є кусково-лінійною функцією.

Отже, метод кубічних сплайнів дає високу точність для гладких ділянок функції, але чутливий до особливостей функції (наприклад, нескінченних похідних) на краях інтервалу.