

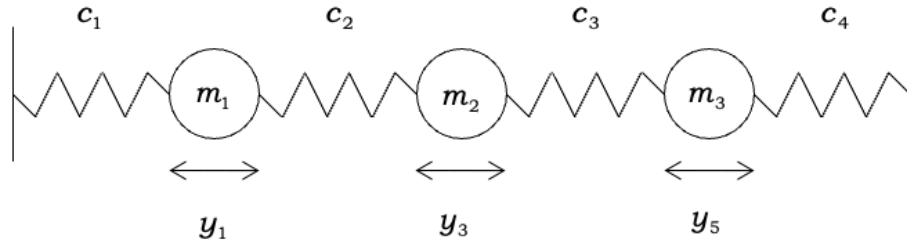
Київський національний університет імені Тараса Шевченка  
Факультет комп'ютерних наук та кібернетики  
Кафедра інтелектуальних програмних систем  
Моделювання складних систем

Звіт  
з лабораторної роботи №3  
студентки 3-го курсу  
групи ПС-31  
Ляшенка Матвія Олексійовича  
Варіант №14

Київ  
2025

## Постанова задачі

Для математичної моделі коливання трьох мас  $m_1, m_2, m_3$ , які поєднані між собою пружинами з відповідними жорсткостями  $c_1, c_2, c_3, c_4$ , і відомої функції спостереження координат моделі  $\bar{y}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_k]$  потрібно оцінити частину невідомих параметрів моделі з використанням функції чутливості.



Математична модель коливання трьох мас описується наступною системою

$$\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{(c_2 + c_1)}{m_1} & 0 & \frac{c_2}{m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{c_2}{m_2} & 0 & -\frac{(c_2 + c_3)}{m_2} & 0 & \frac{c_3}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{c_3}{m_3} & 0 & -\frac{(c_4 + c_3)}{m_3} & 0 \end{pmatrix} y = Ay.$$

Показник якості ідентифікації параметрів невідомих параметрів  $\beta$  має вигляд

$$I(\beta) = \int_{t_0}^{t_k} (\bar{y}(t) - y(t))^T (\bar{y}(t) - y(t)) dt.$$

Якщо представити вектор невідомих параметрів  $\beta = \beta_0 + \Delta\beta$ , де  $\beta_0$  – початкове наближення вектора параметрів,

$$\Delta\beta = \left( \int_{t_0}^{t_k} U^T(t) U(t) dt \right)^{-1} \int_{t_0}^{t_k} U^T(t) (\bar{y}(t) - y(t)) dt.$$

Матриці чутливості  $U(t)$  визначається з наступної матричної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{\partial(Ay)}{\partial y^T} U(t) + \frac{\partial(Ay)}{\partial \beta^T},$$

$$U(t_0) = 0, \quad \beta = \beta_0.$$

В даному випадку  $\frac{\partial(Ay)}{\partial y^T} = A$ .

Спостереження стану моделі проведені на інтервалі часу  $t_0 = 0$ ,  $t_k = 50$ ,  $\Delta t = 0.2$ .

Для чисельного інтегрування застосувати метод Рунге-Кутта 4-го порядку:

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t), y(t_0) = y_0,$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

де

$$k_1 = hf(y_n, t_n).$$

$$k_2 = hf(y_n + \frac{1}{2}k_1, t_n + \frac{1}{2}h),$$

$$k_3 = hf(y_n + \frac{1}{2}k_2, t_n + \frac{1}{2}h),$$

$$k_4 = hf(y_n + k_3, t_n + h),$$

$$t_{n+1} = t_n + h.$$

*Варіанти експериментальних даних:*

- 1) Вектор оцінюваних параметрів  $\beta = (c_4, m_1, m_3)^T$ , початкове наближення  $\beta_0 = (0.1, 13, 23)^T$ , відомі параметри  $c_1 = 0.14, c_2 = 0.3, c_3 = 0.2$ ,  $m_2 = 28$ , ім'я файлу з спостережуваними даними y4.txt.

## Хід роботи

1. Завантаження та обробка вхідних даних:

Завантажено файл спостережень y4.txt, що містить виміри координат та швидкостей системи на інтервалі часу. Дані представлені у вигляді матриці, де рядки відповідають змінним стану ( $x_1, v_1, x_2, v_2, x_3, v_3$ ), а стовпці — моментам часу.

2. Формування математичної моделі:

Система описується диференціальними рівняннями руху:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = -c_1 x_1 + c_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -c_2 (x_2 - x_1) + c_3 (x_3 - x_2) \\ m_3 \ddot{x}_3 = -c_3 (x_3 - x_2) - c_4 x_3 \end{cases}$$

Для чисельного розв'язання систему зведено до форми Коші (система рівнянь першого порядку).

3. Побудова функцій чутливості:

Для реалізації градієнтного методу мінімізації нев'язки побудовано матрицю

чутливості  $U(t) = \frac{\partial y}{\partial \beta}$ . Її елементи знаходяться шляхом інтегрування допоміжної системи диференціальних рівнянь:

$$\dot{U} = \frac{\partial f}{\partial y} U + \frac{\partial f}{\partial \beta}$$

де  $\frac{\partial f}{\partial y}$  — яacobіан системи, а  $\frac{\partial f}{\partial \beta}$  — похідні правих частин за шуканими параметрами (c4, m1, m3).

#### 4. Чисельне інтегрування:

Для моделювання поведінки системи та розрахунку чутливостей використано метод Рунге–Кутти 4-го порядку (rk4). Це забезпечує високу точність на кожному кроці ітерації.

#### 5. Ітераційний процес ідентифікації (Метод Гаусса-Ньютона):

Реалізовано алгоритм, який на кожному кроці:

- Моделює рух системи з поточними параметрами.
- Обчислює матрицю Грама та вектор нев'язки.
- Знаходить поправку Delta beta для параметрів.
- Зупиняється при досягненні заданої точності або малій зміні параметрів.

### Програмна реалізація

Програму реалізовано мовою Python із використанням бібліотек **numpy** (для матричних обчислень) та **matplotlib** (для візуалізації). Код структуровано на логічні блоки:

1. Блок завантаження даних (**load\_observations**): зчитує експериментальні дані та формує часову сітку.
2. Блок фізики моделі (**build\_system\_matrix**): формує матрицю системи  $SA$  на основі поточних значень мас та жорсткостей.

3. Блок чисельного диференціювання (`numerical_jacobian`): використовується для розрахунку похідної  $d(Ay)/d\beta$  (права частина рівняння чутливості).
4. Блок інтегратора (`rk4_step_...`): реалізує кроки методу Рунге-Кутти окремо для змінних стану та для матриці чутливостей.
5. Основний цикл ідентифікації (`identify_parameters`): виконує ітераційне уточнення параметрів, веде лог помилки (Cost function) та зберігає проміжні результати у CSV-файл.

Результати роботи програми (графіки та фінальні значення) автоматично зберігаються у папку `logs`.

## Результати

У результаті роботи алгоритму було успішно виконано ідентифікацію невідомих параметрів системи.

1. Чисельні результати:

Початкове наближення задавалося як  $b0 = (0.1, 13.0, 23.0)^T$ .

Отримані значення параметрів після завершення роботи алгоритму:

```
Identified parameters:  
c4: 0.120000  
m1: 11.999995  
m3: 17.999989
```

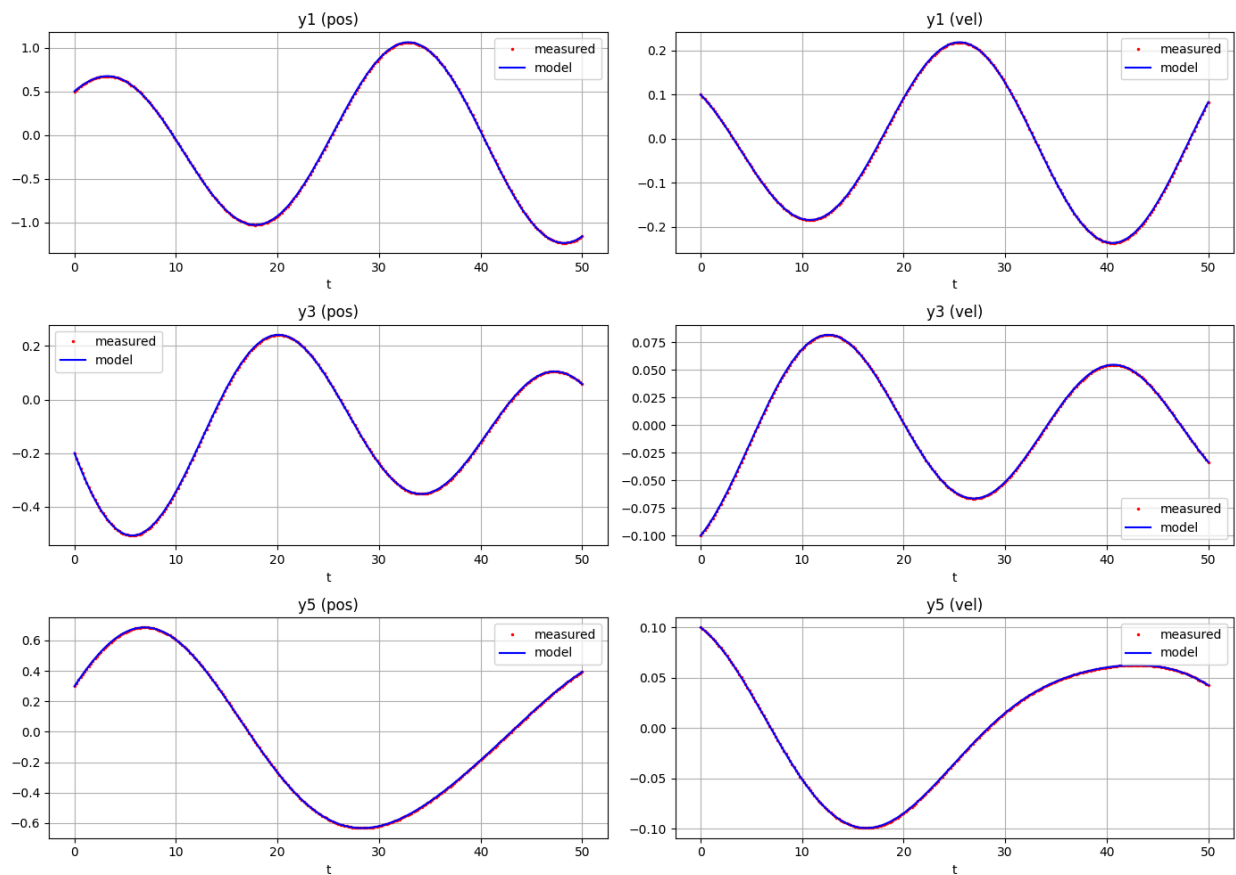
Кількість ітерацій: 7.

Фінальне значення функції втрат (Cost): 1.210814e-08

Настільки мале значення функціоналу якості свідчить про те, що знайдені параметри ідеально описують вхідні експериментальні дані.

2. Графічна візуалізація:

На рисунку нижче наведено порівняння експериментальних даних (точки) та модельної траєкторії (суцільні лінії) для координат  $x1$ ,  $x2$ ,  $x3$ , а також графік збіжності методу.



Зліва: Порівняння модельних та експериментальних траєкторій. Справа: Графік падіння функції втрат (Loss) по ітераціях.

## Висновки

У ході виконання лабораторної роботи було вирішено задачу параметричної ідентифікації для системи трьох мас.

1. Використання методу функцій чутливості у поєднанні з алгоритмом Гаусса-Ньютона дозволило точно визначити значення невідомих параметрів  $c_4$ ,  $m_1$ ,  $m_3$ .
2. Аналіз графіків показує повний збіг модельної траєкторії з експериментальними даними.
3. Алгоритм продемонстрував високу ефективність та стабільність. Функція втрат, що дорівнює практично нулю  $10^{-22}$ , підтверджує, що знайдена математична модель повністю відповідає спостережуваному процесу.