Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики

Кафедра інтелектуальних програмних систем

Чисельні методи в інформатиці

Звіт

з лабораторної роботи №2

«Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь»

Варіант №2

Виконав:

студент 3-го курсу

групи ПІ-31

Ляшенко Матвій Олексійович

Київ — 2025

ВСТУП

Задача знаходження спектру матриці (її власних значень) є фундаментальною проблемою лінійної алгебри, що має критичне значення для багатьох галузей computer science, зокрема для аналізу стійкості систем, стиснення даних (SVD-розклад), машинного навчання (метод головних компонент) та квантової інформатики.

У цій роботі розглядається метод обертань Якобі — один із найстаріших та найнадійніших ітераційних алгоритмів для пошуку всіх власних значень симетричної матриці. Його ключовою перевагою є гарантована збіжність для симетричних матриць та висока чисельна стійкість.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Мета роботи: Реалізувати чисельний метод для знаходження повного спектру власних значень симетричної матриці та дослідити його збіжність.

Індивідуальне завдання:

1. Сформувати матрицю розміром 5×5, елементами якої є цілі числа. Матриця повинна бути симетричною ($A = A^T$) для коректної роботи методу Якобі.

2. Реалізувати метод обертань Якобі програмно.

3. Знайти власні значення матриці з точністю $\varepsilon = 0.01$.

4. Дослідити зменшення похибки (суми квадратів недіагональних елементів) на кожній ітерації.

Вихідна матриця:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

Метод обертань (Якобі)

Метод Якобі використовують, якщо матриця A є симетричною, тобто $A = A^T$. Тоді за допомогою ортогональних перетворень матриця A зводиться до діагонального вигляду, елементи діагоналі якої будуть відповідати наближеним власним значенням вихідної матриці. Покладемо $A_0 = A$. Ітераційний процес має вигляд:

$$A_{k+1} = U_k A_k U_k^T,$$

де U_k – матриця обертань:

$$U_k = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \cos\varphi_k & \dots & \sin\varphi_k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\sin\varphi_k & \dots & \cos\varphi_k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i_k \\ \\ j_k \\ \\ \\ \end{matrix}$$

φ_k – кут обертань:

$$\varphi_k = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{2a^k_{i_k j_k}}{a^k_{i_k i_k} - a^k_{j_k j_k}},$$

i_k та j_k – номери рядочка та стовпчика в матриці A_k:

$$a^k_{i_k j_k} = \max_{i \neq j} |a^k_{ij}|, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{2+1,n}.$$

Умова припинення:

$$t(A_{k+1}) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij}^2 \leqslant \varepsilon.$$

Після виконання цієї умови діагональні елементи матриці A_{k+1} є наближеними власними значеннями з точністю ε:

$$\lambda_i \approx a_{ii}^{k+1}, \quad i = \overline{1,n},$$

при чому швидкість збіжності:

$$t(A_{k+1}) \leqslant q t(A_k); \quad q = 1 - \frac{2}{n(n-1)}.$$

Власним векторам $\lambda_i, i = \overline{1,n}$, відповідають власні вектори $(u_{1i}, \dots, u_{ii}, \dots, u_{ni})^T$, які є стовпцями матриці U:

$$U = \prod_{k=1}^{n} U_k = \begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{1i} & \dots & u_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{i1} & \dots & u_{ii} & \dots & u_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{n1} & \dots & u_{ni} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Зауваження. Можна використовувати ітераційний процес вигляду: $A_{k+1} = U_k^T A_k U_k$, але тоді матриця обертань буде:

$$U_k = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \cos\varphi_k & \ldots & -\sin\varphi_k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \sin\varphi_k & \ldots & \cos\varphi_k & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

ХІД ВИКОНАННЯ РОБОТИ

Для демонстрації роботи методу Якобі візьмемо симетричну матрицю розмірності 5×5 з цілими елементами:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Точність обчислень покладемо $\varepsilon = 0.01$. Початкове значення критерію (сума квадратів недіагональних елементів):

$$t(A^{(0)}) = 26.00.$$

Ітерація 1

Шукаємо максимальний за модулем недіагональний елемент:

$$a_{02} = 2, \quad (p = 0, q = 2).$$

Обчислюємо кут обертання φ_1:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{2 \cdot 2}{6 - 7} \approx -0.6629.$$

Коефіцієнти обертання:

$$c \approx 0.788, \quad s \approx -0.615.$$

Матриця після першого перетворення $A^{(1)}$:

$$A^{(1)} \approx \begin{pmatrix} 4.44 & 0.17 & 0 & -0.62 & 0.17 \\ 0.17 & 5.00 & 1.40 & 0 & 0 \\ 0 & 1.40 & 8.56 & 0.79 & 1.40 \\ -0.62 & 0 & 0.79 & 4.00 & 2.00 \\ 0.17 & 0 & 1.40 & 2.00 & 3.00 \end{pmatrix}.$$

Значення критерію: $t(A^{(1)}) = 18.00$.

Ітерація 2

Максимальний елемент в новій матриці:

$$a_{34} = 2, \quad (p = 3, q = 4).$$

Обчислюємо кут обертання φ_2:

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{2 \cdot 2}{4 - 3} \approx 0.6629.$$

Матриця після другого перетворення $A^{(2)}$:

$$A^{(2)} \approx \begin{pmatrix} 4.44 & 0.17 & 0 & -0.38 & 0.51 \\ 0.17 & 5.00 & 1.40 & 0 & 0 \\ 0 & 1.40 & 8.56 & 1.49 & 0.62 \\ -0.38 & 0 & 1.49 & 5.56 & 0 \\ 0.51 & 0 & 0.62 & 0 & 1.44 \end{pmatrix}.$$

Значення критерію: $t(A^{(2)}) = 10.00$.

Ітерація 3

Максимальний елемент:

$$a_{23} \approx 1.49, \quad (p = 2, q = 3).$$

Обчислюємо кут обертання φ_3:

$$\varphi_3 = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{2 \cdot 1.485}{8.56 - 5.56} \approx 0.3902.$$

Матриця після третього перетворення $A^{(3)}$:

$$A^{(3)} \approx \begin{pmatrix} 4.44 & 0.17 & -0.14 & -0.35 & 0.51 \\ 0.17 & 5.00 & 1.30 & -0.53 & 0 \\ -0.14 & 1.30 & 9.17 & 0 & 0.57 \\ -0.35 & -0.53 & 0 & 4.95 & -0.24 \\ 0.51 & 0 & 0.57 & -0.24 & 1.44 \end{pmatrix}.$$

Значення критерію: $t(A^{(3)}) \approx 5.59$.

...

Ітерація 13 (Кінцева)

На 13-й ітерації критерій збіжності досяг необхідної точності:

$$t(A^{(13)}) \approx 0.003 < \varepsilon.$$

Результуюча матриця має вигляд (майже діагональна):

$$A^{(13)} \approx \begin{pmatrix} \mathbf{4.40} & 0 & 0 & -0.02 & -0.01 \\ 0 & \mathbf{4.22} & 0.01 & 0.03 & -0.01 \\ 0 & 0.01 & \mathbf{9.59} & 0 & 0 \\ -0.02 & 0.03 & 0 & \mathbf{5.50} & -0.02 \\ -0.01 & -0.01 & 0 & -0.02 & \mathbf{1.29} \end{pmatrix}.$$

Результат: Знайдені власні значення (діагональні елементи):

$$\lambda \approx \{4.40,\ 4.22,\ 9.59,\ 5.50,\ 1.29\}.$$

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ

Нижче наведено повний протокол роботи програми.

```
Jacobi rotation method:
A(0) =
[[6. 1. 2. 0. 1.]
 [1. 5. 1. 0. 0.]
 [2. 1. 7. 1. 1.]
 [0. 0. 1. 4. 2.]
 [1. 0. 1. 2. 3.]]
t(A(0)) = 26.000000000000
--------------------
iteration 1:
p=0 q=2 |a_pq|=2.000000000000
a_pp=6.000000000000 a_qq=7.000000000000
phi=-0.662908831834 c=0.788205438016 s=-0.615412209403
A(1) =
[[ 4.43844719  0.17279323  0.         -0.61541221  0.17279323]
 [ 0.17279323  5.          1.40361765  0.          0.        ]
 [ 0.          1.40361765  8.56155281  0.78820544  1.40361765]
 [-0.61541221  0.          0.78820544  4.          2.        ]
 [ 0.17279323  0.          1.40361765  2.          3.        ]]
t(A(1)) = 18.000000000000

iteration 2:
p=3 q=4 |a_pq|=2.000000000000
a_pp=4.000000000000 a_qq=3.000000000000
phi=0.662908831834 c=0.788205438016 s=0.615412209403
A(2) =
[[ 4.43844719  0.17279323  0.         -0.37873219  0.51492875]
 [ 0.17279323  5.          1.40361765  0.          0.        ]
 [ 0.          1.40361765  8.56155281  1.48507125  0.62126781]
 [-0.37873219  0.          1.48507125  5.56155281  0.        ]
 [ 0.51492875  0.          0.62126781  0.          1.43844719]]
t(A(2)) = 10.000000000000
```

```
iteration 3:
p=2 q=3 |a_pq|=1.485071250073
a_pp=8.561552812809 a_qq=5.561552812809
phi=0.390198534104 c=0.924833561263 s=0.380372033621
A(3) =
[[ 4.43844719  0.17279323 -0.14405913 -0.35026424  0.51492875]
 [ 0.17279323  5.          1.29811271 -0.5338969   0.        ]
 [-0.14405913  1.29811271  9.17234333  0.          0.57456932]
 [-0.35026424 -0.5338969   0.          4.95076229 -0.2363129 ]
 [ 0.51492875  0.          0.57456932 -0.2363129   1.43844719]]
t(A(3)) = 5.589126764415

iteration 4:
p=1 q=2 |a_pq|=1.298112707514
a_pp=5.000000000000 a_qq=9.172343332447
phi=-0.278308356206 c=0.961521558300 s=-0.274729490454
A(4) =
[[ 4.43844719  0.20572171 -0.09104457 -0.35026424  0.51492875]
 [ 0.20572171  4.62909844  0.         -0.51335338 -0.15785114]
 [-0.09104457  0.          9.54324489 -0.14667722  0.55246079]
 [-0.35026424 -0.51335338 -0.14667722  4.95076229 -0.2363129 ]
 [ 0.51492875 -0.15785114  0.55246079 -0.2363129   1.43844719]]
t(A(4)) = 2.218933561595

iteration 5:
p=2 q=4 |a_pq|=0.552460791330
a_pp=9.543244889056 a_qq=1.438447187191
phi=0.067747013373 c=0.997706048662 s=0.067695202662
A(5) =
[[ 4.43844719  0.20572171 -0.05597751 -0.35026424  0.51991081]
 [ 0.20572171  4.62909844 -0.01068576 -0.51335338 -0.15748903]
 [-0.05597751 -0.01068576  9.58072982 -0.162338    0.        ]
 [-0.35026424 -0.51335338 -0.162338    4.95076229 -0.22584147]
 [ 0.51991081 -0.15748903  0.         -0.22584147  1.40096225]]
t(A(5)) = 1.608507709680
```

```
iteration 6:
p=0 q=4 |a_pq|=0.519910808764
a_pp=4.438447187191 a_qq=1.400962253345
phi=0.164912703563 c=0.986432690231 s=0.164166219556
A(6) =
[[ 4.52497290e+00  1.77076237e-01 -5.52180437e-02 -3.82587634e-01
   0.00000000e+00]
 [ 1.77076237e-01  4.62909844e+00 -1.06857647e-02 -5.13353378e-01
  -1.89124887e-01]
 [-5.52180437e-02 -1.06857647e-02  9.58072982e+00 -1.62338002e-01
   9.18961585e-03]
 [-3.82587634e-01 -5.13353378e-01 -1.62338002e-01  4.95076229e+00
  -1.65275850e-01]
 [ 0.00000000e+00 -1.89124887e-01  9.18961585e-03 -1.65275850e-01
   1.31443654e+00]]
t(A(6)) = 1.067893211542

iteration 7:
p=1 q=3 |a_pq|=0.513353378274
a_pp=4.629098443390 a_qq=4.950762293171
phi=0.633592897044 c=0.805905561035 s=0.592044108739
A(7) =
[[ 4.52497290e+00 -8.38020308e-02 -5.52180437e-02 -4.13166445e-01
   0.00000000e+00]
 [-8.38020308e-02  4.25197256e+00 -1.04722975e-01  0.00000000e+00
  -2.50267391e-01]
 [-5.52180437e-02 -1.04722975e-01  9.58072982e+00 -1.24502655e-01
   9.18961585e-03]
 [-4.13166445e-01  0.00000000e+00 -1.24502655e-01  5.32788817e+00
  -2.12264513e-02]
 [ 0.00000000e+00 -2.50267391e-01  9.18961585e-03 -2.12264513e-02
   1.31443654e+00]]
t(A(7)) = 0.540829829571
```

```
iteration 8:
p=0 q=3 |a_pq|=0.413166444760
a_pp=4.524972900326 a_qq=5.327888172434
phi=0.399885219925 c=0.921105685402 s=0.389312620294
A(8) =
[[ 4.35034483e+00 -7.71905270e-02 -9.93321088e-02  0.00000000e+00
  -8.26372536e-03]
 [-7.71905270e-02  4.25197256e+00 -1.04722975e-01  3.26251882e-02
  -2.50267391e-01]
 [-9.93321088e-02 -1.04722975e-01  9.58072982e+00 -9.31830219e-02
   9.18961585e-03]
 [ 0.00000000e+00  3.26251882e-02 -9.31830219e-02  5.50251625e+00
  -1.95518049e-02]
 [-8.26372536e-03 -2.50267391e-01  9.18961585e-03 -1.95518049e-02
   1.31443654e+00]]
t(A(8)) = 0.199416807420

iteration 9:
p=1 q=4 |a_pq|=0.250267391303
a_pp=4.251972564128 a_qq=1.314436540211
phi=-0.084385915635 c=0.996441620970 s=-0.084285799513
A(9) =
[[ 4.35034483e+00 -7.62193392e-02 -9.93321088e-02  0.00000000e+00
  -1.47403852e-02]
 [-7.62193392e-02  4.27314188e+00 -1.05124885e-01  3.41570349e-02
   0.00000000e+00]
 [-9.93321088e-02 -1.05124885e-01  9.58072982e+00 -9.31830219e-02
   3.30256027e-04]
 [ 0.00000000e+00  3.41570349e-02 -9.31830219e-02  5.50251625e+00
  -1.67323921e-02]
 [-1.47403852e-02  0.00000000e+00  3.30256027e-04 -1.67323921e-02
   1.29326722e+00]]
t(A(9)) = 0.074149273121
```

```
iteration 10:
p=1 q=2 |a_pq|=0.105124885221
a_pp=4.273141879744 a_qq=9.580729822903
phi=0.019796176897 c=0.999804062089 s=0.019794883939
A(10) =
[[ 4.35034483e+00 -7.81706725e-02 -9.78038929e-02  0.00000000e+00
  -1.47403852e-02]
 [-7.81706725e-02  4.27106054e+00  0.00000000e+00  3.23057952e-02
   6.53737972e-06]
 [-9.78038929e-02  0.00000000e+00  9.58281117e+00 -9.38408984e-02
   3.30191317e-04]
 [ 0.00000000e+00  3.23057952e-02 -9.38408984e-02  5.50251625e+00
  -1.67323921e-02]
 [-1.47403852e-02  6.53737972e-06  3.30191317e-04 -1.67323921e-02
   1.29326722e+00]]
t(A(10)) = 0.052046790135

iteration 11:
p=0 q=2 |a_pq|=0.097803892859
a_pp=4.350344826939 a_qq=9.582811165619
phi=0.018683038473 c=0.999825477113 s=0.018681951588
A(11) =
[[ 4.34851734e+00 -7.81570299e-02  0.00000000e+00 -1.75313112e-03
  -1.47316440e-02]
 [-7.81570299e-02  4.27106054e+00  1.46038072e-03  3.23057952e-02
   6.53737972e-06]
 [ 0.00000000e+00  1.46038072e-03  9.58463865e+00 -9.38245210e-02
   6.05512853e-04]
 [-1.75313112e-03  3.23057952e-02 -9.38245210e-02  5.50251625e+00
  -1.67323921e-02]
 [-1.47316440e-02  6.53737972e-06  6.05512853e-04 -1.67323921e-02
   1.29326722e+00]]
t(A(11)) = 0.032915587218
```

```
p=2 q=3 |a_pq|=0.093824520967
a_pp=9.584638652148 a_qq=5.502516245820
phi=-0.022968080900 c=0.999736245225 s=-0.022966061551
A(12) =
[[ 4.34851734e+00 -7.81570299e-02  4.02625172e-05 -1.75266872e-03
  -1.47316440e-02]
 [-7.81570299e-02  4.27106054e+00  7.18058656e-04  3.23308135e-02
   6.53737972e-06]
 [ 4.02625172e-05  7.18058656e-04  9.58679400e+00  0.00000000e+00
   9.89630294e-04]
 [-1.75266872e-03  3.23308135e-02  0.00000000e+00  5.50036090e+00
  -1.67140726e-02]
 [-1.47316440e-02  6.53737972e-06  9.89630294e-04 -1.67140726e-02
   1.29326722e+00]]
t(A(12)) = 0.015309505749

iteration 13:
p=0 q=1 |a_pq|=0.078157029895
a_pp=4.348517340409 a_qq=4.271060537028
phi=-0.555369412908 c=0.849705722626 s=-0.527257228434
A(13) =
[[ 4.39701514e+00  0.00000000e+00 -3.44390326e-04 -1.85359078e-02
  -1.25210091e-02]
 [ 0.00000000e+00  4.22256274e+00  6.31367253e-04  2.65475700e-02
  -7.76181095e-03]
 [-3.44390326e-04  6.31367253e-04  9.58679400e+00  0.00000000e+00
   9.89630294e-04]
 [-1.85359078e-02  2.65475700e-02  0.00000000e+00  5.50036090e+00
  -1.67140726e-02]
 [-1.25210091e-02 -7.76181095e-03  9.89630294e-04 -1.67140726e-02
   1.29326722e+00]]
t(A(13)) = 0.003092463105

Done.
Eigenvalues (diag): [4.39701514 4.22256274 9.586794   5.5003609  1.29326722]
```

ВИСНОВКИ

У ході лабораторної роботи було досліджено та програмно реалізовано метод обертань Якобі для знаходження власних значень симетричної матриці.

Результати роботи програми:

- Для досягнення точності $\varepsilon = 0.01$ знадобилося 13 ітерацій.
- Початкове значення критерію (сума квадратів недіагональних елементів) зменшилося з 26.00 до 0.003, що свідчить про коректну збіжність алгоритму.
- Знайдені власні значення матриці:

$$\lambda \approx \{4.40,\ 4.22,\ 9.59,\ 5.50,\ 1.29\}.$$

Метод продемонстрував стійкість та ефективність для заданої матриці невеликої розмірності.