

## Лабораторная работа №1

1. Рассматривается задача отслеживания положения и ориентации мобильного двухколесного робота, движущегося на плоскости. Схема робота представлена на рис. 1

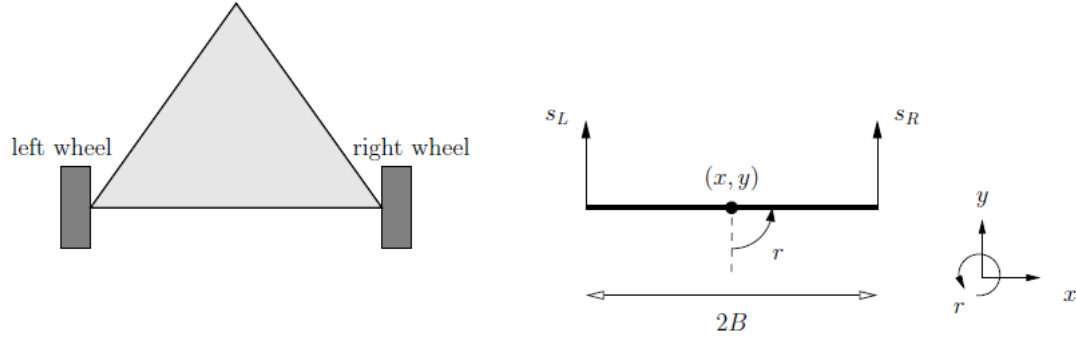


Рис. 1: Вид сверху (слева) и соответствующие физические показатели (справа):  $(x, y)$  – координаты положения (центра) робота,  $r$  – ориентация,  $s_R$  и  $s_L$  – линейные скорости правого и левого колеса.

Управляющим воздействием являются угловые скорости левого и правого колеса  $u_L(t)$  и  $u_R(t)$  (рад/с) соответственно, сообщаемые роботу в дискретные моменты времени  $t_0 = 0, t_1 = T, t_2 = kT, \dots$ , где  $T$  – некоторый шаг дискретизации. Обозначим  $u_R[k] = u_R(kT)$ ,  $u_L[k] = u_L(kT)$ . Тогда скорость передвижения (translational speed) робота определяется следующим уравнением

$$s_t[k] = \frac{s_R[k] + s_L[k]}{2},$$

а линейные скорости колес, в свою очередь, определяются через угловые скорости

$$s_R[k] = W_R u_R[k], \quad s_L[k] = W_L u_L[k],$$

где  $W_R$  и  $W_L$  – радиусы колес. Скорость вращения  $s_r$  (рад/с) также определяется через линейные скорости колес

$$s_r[k] = \frac{s_R[k] - s_L[k]}{2B},$$

где  $B$  – колесная база робота (см. рис. 1).

Предполагается, что робот движется в соответствии со следующим законом:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= s_t(t) \cos(r(t)) \\ \dot{y}(t) &= s_t(t) \sin(r(t)) \\ \dot{r}(t) &= s_r(t). \end{aligned}$$

При этом соответствующие уравнения в дискретном времени

$$\begin{aligned}x[k+1] &= x[k] + T s_t[k] \cos(r[k]) - \frac{1}{2} T^2 s_t[k] s_r[k] \sin(r[k]) \\y[k+1] &= y[k] + T s_t[k] \sin(r[k]) + \frac{1}{2} T^2 s_t[k] s_r[k] \cos(r[k]) \\r[k+1] &= r[k] + T s_r[k].\end{aligned}$$

В дискретные моменты времени робот получает измерения своего положения и ориентации, которые удовлетворяют следующей статистической модели:

$$\begin{aligned}z_x &= x + w_x \\z_y &= y + w_y \\z_r &= r + w_r,\end{aligned}$$

где  $w_x, w_y, w_r$  – независимые нормальные случайные величины с нулевым средним и некоторой (известной) дисперсией.

Требуется с применением расширенного фильтра Калмана (ЕКФ) отслеживать положение и ориентацию мобильного робота. Для проверки работы алгоритма нужно сгенерировать траекторию робота и соответствующие наблюдения.

2. Пусть положение мобильного робота в момент времени  $t$  определяется вектором  $(x_t, y_t, \theta_t)$ , где  $(x_t, y_t)$  – декартовы координаты на плоскости;  $\theta_t$  – ориентация. При этом предполагается, что мобильный робот движется на плоскости в соответствии со следующей моделью (odometry motion model)

$$\begin{aligned}x_t &= x_{t-1} + \delta_t \cos(\theta_{t-1} + \delta_{r1}) + e_{x,t} \\y_t &= y_{t-1} + \delta_t \sin(\theta_{t-1} + \delta_{r1}) + e_{y,t} \\\theta_t &= \theta_{t-1} + \delta_{r1} + \delta_{r2} + e_{\theta,t},\end{aligned}$$

где  $(\delta_{r1}, \delta_t, \delta_{r2})$  – заданные управляющие воздействия (одометрия), значения которых приведены в файле 'sensor\_data\_ekf.dat';  $e_{x,t}, e_{y,t}, e_{\theta,t}$  – независимые нормальные случайные величины с нулевым средним и дисперсией 0.2.

Имеется несколько ориентиров (landmarks), координаты которых записаны в файле 'landmarks.dat'. При движении робот в каждый момент времени регистрирует несколько ориентиров, определяя расстояние до каждого них с помощью лазерного дальномера. Предполагается, что ошибка измерения расстояния распределена нормально с нулевым средним и дисперсией 0.2, при этом измерения расстояния до различных ориентиров предполагаются независимыми. Информация о наблюдаемых ориентирах в различные моменты времени представлена в файле 'sensor\_data\_ekf.dat'.

Требуется реализовать расширенный и сигма-точечный фильтр Калмана для отслеживания положения мобильного робота.

3. Магнитоэнцефалография (МЭГ) является неинвазивным функциональным методом исследования головного мозга, основанным на регистрации и анализе магнитных полей, которые возникают в результате протекания электрических процессов в головном мозге. При анализе данных МЭГ встает проблема решения так называемой обратной задачи, которая состоит в восстановлении распределения активности нейронных источников на поверхности коры головного мозга. Некоторые подходы к решению такой задачи основаны на дипольном моделировании нейронных источников.

Рассматривается упрощенная модель отслеживания диполя [1], перемещающегося в пределах плоскости  $P = \{\mathbf{r} = (r_1, r_2, 0)\}$ . Система сенсоров расположена на некотором удалении  $h$  от плоскости перемещения диполя. Источник магнитного поля характеризуется четырьмя степенями свободы: декартовы координаты положения на плоскости  $p = (p_1, p_2)$ ; две координаты  $q = (q_1, q_2)$ , характеризующие магнитный дипольный момент. Компонента магнитного поля, перпендикулярная плоскости  $P$ , регистрируется датчиком. Введем следующие обозначения:  $x = (p, q) \in \mathbb{R}^4$ ;  $\mathbf{q} = (q, 0) \in \mathbb{R}^3$ ;  $\mathbf{p} = (p, 0) \in \mathbb{R}^3$ . Пусть всего имеется  $L$  сенсоров. Согласно закону Био-Савара-Лапласа, регистрируемая сенсором, находящимся в точке  $\mathbf{r}_j$ , компонента вектора магнитной индукции определяется следующим выражением:

$$b_j(x) = \frac{\mu_0 \mathbf{e} \cdot (\mathbf{q} \times (\mathbf{r}_j - \mathbf{p}))}{4\pi |\mathbf{r}_j - \mathbf{p}|^3}, \quad j = 1, \dots, L,$$

где  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $\mathbf{e}$  – единичный вектор, перпендикулярный плоскости  $P$ . Обозначим вектор наблюдений

$$b(x) = (b_1(x), \dots, b_L(x)).$$

Предполагается, что фазовый вектор меняется в соответствии со следующим разностным уравнением

$$x_{k+1} = x_k + w_{k+1},$$

где  $w_{k+1}$  – центрированный гауссовский случайный вектор (независимый от  $x_k$ ) с матрицей ковариаций

$$C = \text{diag}(\lambda^2, \lambda^2, \delta^2, \delta^2).$$

Предполагается, что модель наблюдения имеет следующий вид

$$y_k = b(x_k) + V_k,$$

где шум  $V_k$  не зависит от  $x_j$ ,  $j \leq k$ , распределен нормально с нулевым средним и некоторой матрицей ковариаций  $\Gamma$ .

Ввиду того, что относительно дипольного момента  $q = (q_1, q_2)$  модель наблюдения является линейной:

$$y_k = g(p)q_k + V_k,$$

можно воспользоваться модификацией фильтра частиц, основанной на теореме Рао-Блэкуэлла (RBPF – Rao-Blackwellized particle filters) [2, 3]. Совместное распределение представимо в следующем виде:

$$\pi(p_k, q_k | y_{1:k}) = \pi(p_k | y_{1:k})\pi(q_k | p_k, y_{1:k}),$$

где первое распределение в правой части аппроксимируется с помощью фильтра частиц, а второе рассчитывается аналитически с помощью фильтра Калмана.

Требуется реализовать процедуру отслеживания состояния диполя с помощью RBPF. Для проверки работы алгоритма нужно сгенерировать синтетические наблюдения.

4. Мобильный объект движется в трехмерном пространстве, его состояние характеризуется положением  $\mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^3$ , вектором скорости  $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^3$ , ориентацией, описываемой единичным кватернионом  $\mathbf{q}_k$ . В каждый момент времени доступны измерения вектора ускорения  $\mathbf{f}_k$  и угловой скорости  $\boldsymbol{\omega}_k$ , регистрируемые инерциальным измерительным модулем (IMU) в системе координат, связанной с движущимся объектом (body frame). Предполагается, что мобильный объект движется в соответствии со следующей моделью:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_k &= \mathbf{p}_{k-1} + \Delta t \mathbf{v}_{k-1} + \frac{\Delta t^2}{2} (\mathbf{R}(\mathbf{q}_{k-1})\mathbf{f}_{k-1} + \mathbf{g}) \\ \mathbf{v}_k &= \mathbf{v}_{k-1} + \Delta t (\mathbf{R}(\mathbf{q}_{k-1})\mathbf{f}_{k-1} + \mathbf{g}) \\ \mathbf{q}_k &= \mathbf{q}_{k-1} \otimes \mathbf{q}(\boldsymbol{\omega}_{k-1}\Delta t),\end{aligned}$$

где  $\Delta t$  – интервал между последовательными измерениями IMU;  $\mathbf{g} = (0, 0, -9.81)^T$ ;  $\mathbf{R}(\mathbf{q})$  – матрица поворота, соответствующая кватерниону  $\mathbf{q}$ :

$$\mathbf{R}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 2q_0^2 - 1 + 2q_1^2 & 2q_1q_2 - 2q_0q_3 & 2q_1q_3 + 2q_0q_2 \\ 2q_1q_2 + 2q_0q_3 & 2q_0^2 - 1 + 2q_2^2 & 2q_2q_3 - 2q_0q_1 \\ 2q_1q_3 - 2q_0q_2 & 2q_2q_3 + 2q_0q_1 & 2q_0^2 - 1 + 2q_3^2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{q}(\boldsymbol{\theta}) = \left( \cos \frac{|\boldsymbol{\theta}|}{2}, \frac{\boldsymbol{\theta}}{|\boldsymbol{\theta}|} \sin \frac{|\boldsymbol{\theta}|}{2} \right).$$

Требуется реализовать расширенный фильтр Калмана, в котором в качестве вектора состояния выступают отклонения (Error State Kalman Filter) [4]

$$\delta \mathbf{x}_k = (\delta \mathbf{p}_k, \delta \mathbf{v}_k, \delta \boldsymbol{\theta}_k),$$

где  $\delta\boldsymbol{\theta}_k \in \mathbb{R}^3$  – отклонение оси вращения, выраженная в фиксированной системе координат (error in global frame). В этом случае скорректированная ориентация определяется соотношением  $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}(\delta\boldsymbol{\theta}) \otimes \mathbf{q}$ . В рамках рассматриваемой модели движения справедливы уравнения [4]:

$$\delta\mathbf{x}_k = \mathbf{F}_{k-1}\delta\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{L}_{k-1}\mathbf{n}_{k-1},$$

где

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{k-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3}\Delta t & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} & -[\mathbf{R}(\mathbf{q}_{k-1}) \cdot \mathbf{f}_{k-1}]_{\times}\Delta t \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{a}]_{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}; \\ \mathbf{L}_{k-1} &= \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{pmatrix}; \\ \mathbf{n}_{k-1} &\sim \mathcal{N}\left(\mathbf{0}_{6 \times 1}, \Delta t^2 \begin{bmatrix} \sigma_{\text{acc}}^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \sigma_{\text{gyro}}^2 \mathbf{I}_{3 \times 3} \end{bmatrix}\right); \end{aligned}$$

$\sigma_{\text{acc}}^2, \sigma_{\text{gyro}}^2$  – заданные параметры.

Мобильный объект оснащен приемником глобальной системы позиционирования (GNSS) и лидаром, которые независимо друг от друга дают измерение текущего положения  $\mathbf{p}_k$  (при наличии данных измерений в текущий момент времени). При этом регистрируемые GNSS и лидаром положения наблюдаются на фоне аддитивных гауссовских шумов с матрицами ковариаций:

$$\mathbf{Q}_{\text{GNSS}} = \sigma_{\text{GNSS}}^2 \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad \mathbf{Q}_{\text{LIDAR}} = \sigma_{\text{LIDAR}}^2 \mathbf{I}_{3 \times 3},$$

где  $\sigma_{\text{GNSS}}^2, \sigma_{\text{LIDAR}}^2$  – заданные параметры. Измерения, полученные от лидара должны быть предварительно преобразованы следующим образом

$$\text{lidar.data} = \mathbf{C} \cdot \text{lidar.data} + \mathbf{t},$$

где

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0.99376 & -0.09722 & 0.05466 \\ 0.09971 & 0.99401 & -0.04475 \\ -0.04998 & 0.04992 & 0.9975 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t} = (0.5, 0.1, 0.5)^T.$$

Все данные, необходимые для реализации алгоритма, записаны в файле 'data/data.pkl'. Для проверки работы алгоритма оценка траектории сравнивается с истинной траекторией (Ground Truth), которая также доступна из данного файла. В качестве начального состояния фильтра Калмана можно использовать начальное значение Ground Truth.

- В верхних четырех углах комнаты размера  $20 \times 20 \times 10$  футов расположены громкоговорители (loudspeakers) так, как показано на рис. 2.

В пределах комнаты передвигается некоторый объект с микрофоном.

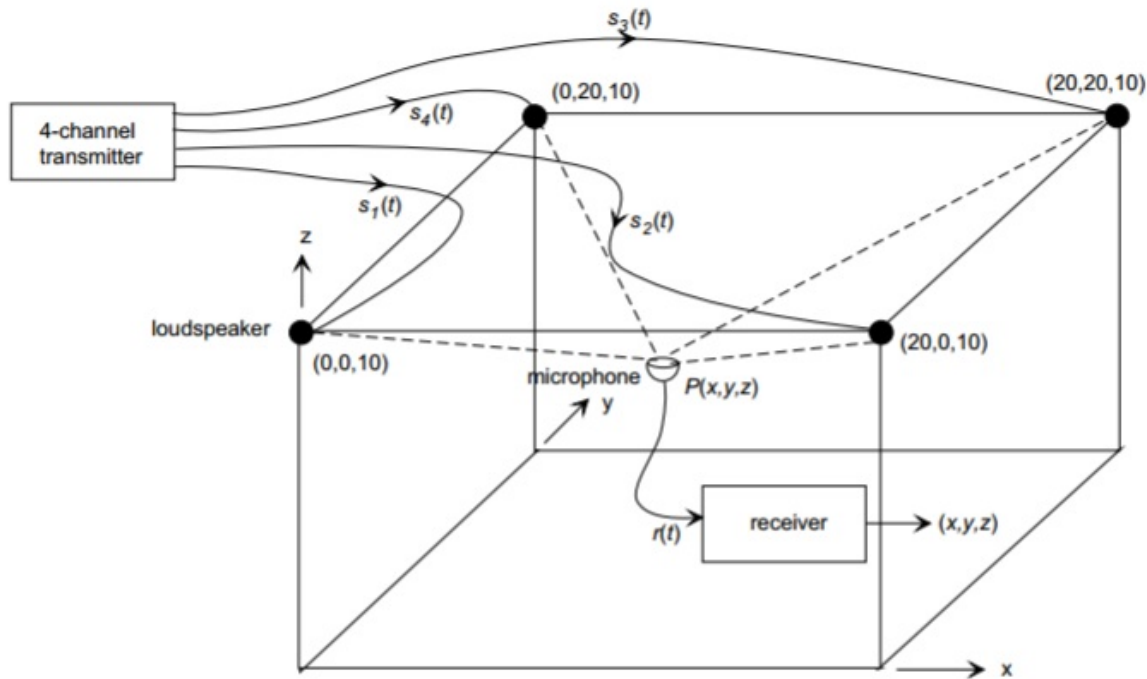


Рис. 2: Схема комнаты.

- Передатчик одновременно передает четыре некоррелированных акустических сигнала  $s_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, 4$  на каждый громкоговоритель (см. рис. 2)
- Частота дискретизации составляет 100000 отсчетов в секунду.
- Сигнал с микрофона  $r(t)$  поступает на принимающее устройство (receiver), в котором вычисляются и хранятся координаты  $x, y, z$  объекта.
- Скорость звука  $c$  в комнате полагается равной 1125 футов в секунду.
- Предполагается следующая модель, связывающая подаваемый на громкоговоритель сигнал  $s(t)$  и сигнал  $r(t)$ , принимаемый микрофоном:

$$r(t) = \alpha s(t - T) + \eta(t), \quad (1)$$

где  $\eta$  – шум, некоррелированный с передаваемым сигналом  $s(t)$ ;  $T = R/c$ ;  $R$  – расстояние от микрофона до громкоговорителя.

В файле «Transmitter.txt» записана матрица, каждая строка которой представляет собой сигнал, подаваемый на соответствующий громкоговоритель. В файле «Receiver.txt» записан сигнал  $r$ , поступающий с микрофона. Требуется определить координаты объекта.

*Указания:*

- Рассмотреть взаимную корреляционную функцию между  $r(t)$  и  $s(t)$ . Далее по имеющимся данным оценить параметр  $T$  в выражении (1).
- Задача является переопределенной (достаточно трех громкоговорителей). Поэтому решение находится с помощью МНК, в результате чего получается задача нелинейной оптимизации, решение которой может быть найдено численно.

### *Литература:*

- [1] *E. Somersalo, A. Voutilainen, J.P. Kaipio.* Non-stationary magnetoencephalography by Bayesian filtering of dipole models. *Inverse Probl.*, 19 (2003) 1047-1063. doi: 10.1088/0266-5611/19/5/304
- [2] *A. Sorrentino.* Particle Filters for Magnetoencephalography. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17 (2010) 213—251. doi: 10.1007/s11831-010-9047-0
- [3] *A. Sorrentino et al.* Particle filters for the magnetoencephalography inverse problem: increasing the efficiency through a semi-analytic approach (Rao–Blackwellization). 2008. *Journal of Physics: Conference Series*, 124 012046. doi: 10.1088/1742-6596/124/1/012046
- [4] Sola, J. (2017). Quaternion kinematics for the error-state Kalman filter. *ArXiv*, abs/1711.02508
- [5] M. Kok, J. D. Hol and T. B. Schön (2017). Using Inertial Sensors for Position and Orientation Estimation. *Foundations and Trends in Signal Processing*: Vol. 11: No. 1-2, pp 1-153. doi: 10.1561/20000000094