

## 1 Методы понижения дисперсии оценок

1. Пусть имеется  $n + m$  клеток некоторой ткани. При этом клетки  $1, \dots, n$  являются злокачественными, а клетки  $n + 1, \dots, n + m$  – здоровыми. В результате проведения терапии клетка  $i = 1, \dots, n + m$  погибает через время  $T_i$ , имеющее показательное распределение с параметром  $\lambda_i$ . Случайные величины  $T_1, \dots, T_{n+m}$  предполагаются независимыми. Пусть в некоторый момент времени все злокачественные клетки погибли, требуется вычислить оценку вероятности того, что число оставшихся здоровых клеток  $N$  превысит некоторое заданное значение  $k$ :

$$\mathbb{P}(N \geq k) = \mathbb{P}\left(\max_{i \leq n} T_i < T^{(k)}\right),$$

где  $T^{(k)}$  –  $k$ -ая по величине из значений  $T_{n+1}, \dots, T_{n+m}$ , т. е.

$$T^{(1)} \geq T^{(2)} \geq \dots \geq T^{(k)} \geq \dots \geq T^{(m)}.$$

Для оценки искомой вероятности воспользоваться условным методом Монте-Карло, предварительно получив выражение для условной вероятности

$$\mathbb{P}(N \geq k | T^{(k)}).$$

2. Рассматриваются случайные блуждания без самопересечений (SAW - Self-Avoiding Walk) на неограниченной двумерной целочисленной решетке, стартующие с начала координат (см. рис. 1). Найти оценку среднего расстояния от начала координат до финальной точки блуждания заданной длины  $n$  с помощью метода существенной выборки.

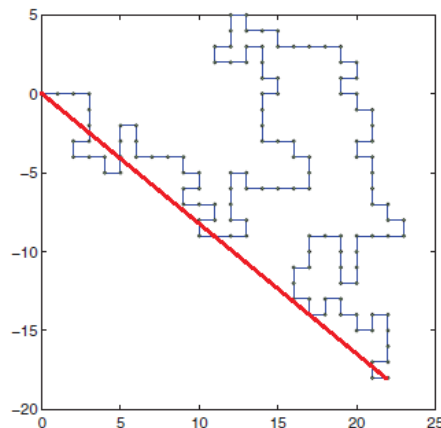


Рис. 1: Случайное блуждание без самопересечений

## 2 Моделирование распространения излучения в многослойных средах

Рассматривается процесс распространения излучения в многослойных биологических тканях с оптическими параметрами, близкими к коже и подкожным тканям. Каждый слой характеризуется своим набором параметров: коэффициентом поглощения  $\mu_a$ , коэффициентом рассеяния  $\mu_s$ , фактором анизотропии  $g$ , толщиной  $d$ . Предполагается, что ткань содержит внутреннюю замкнутую неоднородность в виде шара радиуса  $r$  с центром, расположенным на глубине  $\ell$  от поверхности.

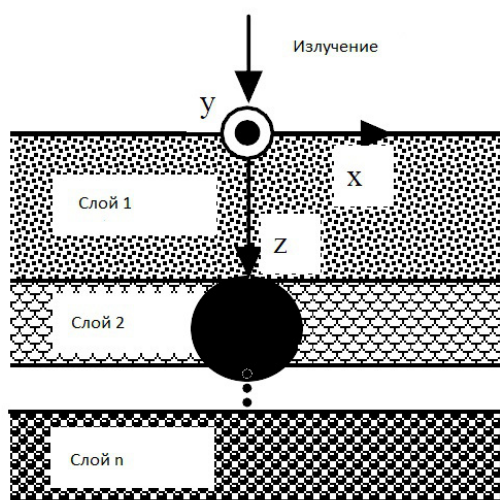


Рис. 2: Фронтальный разрез биоткани с внутренней неоднородностью (черный круг)

На поверхность биоткани падает (перпендикулярно поверхности) бесконечно тонкий световой пучок, так что направление падения пучка проходит через центр внутренней неоднородности (см. рис. 2). Оптические свойства биоткани представлены в таблице 1.

Таблица 1: Оптические параметры модели кожи для длины волны  $\lambda = 337$  нм

№	Слой	$\mu_a$ , $\text{см}^{-1}$	$\mu_s$ , $\text{см}^{-1}$	$g$	$d$ , см
1	Эпидермис	32	165	0,72	0,01
2	Папиллярная дерма	23	227	0,72	0,02
3	Поверхностное сосудистое сплетение	40	246	0,72	0,02
4	Ретикулярная дерма	23	227	0,72	0,09
5	Глубокое сосудистое сплетение	46	253	0,72	0,06
6	Неоднородность	51	186	0,8	—

Моделирование распространения фотонов в многослойных средах проводится по

стандартной схеме [3]. При столкновении со структурными элементами биоткани фотоны могут рассеиваться или поглощаться. Вероятность поглощения равна

$$P_a = \frac{\mu_a}{\mu_a + \mu_s}.$$

Когда фотон рассеивается, его траектория отклоняется на угол  $\theta \in [0, \pi]$ . Плотность распределения с. в.  $\cos \theta$  определяется так называемой фазовой функцией Хени-Гринштейна:

$$p(\cos \theta) = \frac{1 - g^2}{2(1 + g^2 - 2g \cos \theta)^{3/2}},$$

где  $g$  – фактор анизотропии. Также предполагается, что фотон отклоняется аксиально-симметрично относительно первоначального направления на азимутальный угол  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Пробег фотона между взаимодействиями распределен по показательному закону с параметром  $\mu = \mu_a + \mu_s$  (для простоты предположим, что при прохождении через границу разделения слоев разыгрывать новую длину пробега не требуется). Отражения на границах слоев биоткани не учитываются.

Каждому фотону приписывается статистический вес  $W = 1$ . При очередном акте взаимодействия со средой статистический вес уменьшается на величину

$$\Delta W = W \frac{\mu_a}{\mu}.$$

Если статистический вес достиг порогового значения  $W_{\text{п}}$ , то с вероятностью  $1/m$  фотон может продолжить движение с новым весом  $mW$ , в противном случае фотон считается поглощенным. Поглощенная энергия, приходящаяся на некоторый участок биоткани, находится по следующей формуле

$$Q = \frac{Xq}{V},$$

где  $X$  – суммарный статистический вес, поглощенный на данном участке объема  $V$ ;  $q$  – энергия, которой соответствует полный статистический вес пакета фотонов.

Смоделировать траекторию движения  $N$  фотонов и вычислить оценки следующих характеристик:

1. Коэффициенты пропускания (доля фотонов, прошедших через ткань) и отражения (доля отраженных фотонов) среды;
2. Распределение поглощенной энергии в плоскости сечения  $xz$ .

*Литература:*

- [1] Kroese D. P., Taimre T., Botev Z. I. Handbook of Monte Carlo Methods, John Wiley & Sons, 2011.

- [2] *Ross S.* Simulation. 2006.
- [3] *L. V. Wang, S. L. Jacques and L. Zheng.* MCML—Monte Carlo modeling of light transport in multi-layered tissues. *Comput. Meth. Prog. Bio.*, vol. 47, no. 2, pp. 131–146, 1995. doi: 10.1016/0169-2607(95)01640-F
- [4] *V. V. Tuchin, S. R. Utz, I. V. Yaroslavsky.* Tissue optics, light distribution, and spectroscopy. *Optical Engineering* 33(10), 1994. doi: 10.1117/12.178900
- [5] *S. A. Prahl, M. Keijzer, S. L. Jacques, A. J. Welch.* A Monte Carlo Model of Light Propagation in Tissue. *SPIE Proceedings of Dosimetry of Laser Radiation in Medicine and Biology*, IS 5, 102-111 (1989). <https://omlc.org/prahl/pubs/abs/prahl89.html>