

Лабораторная работа №1 (ПМИ, ИСИТ, ПИ)

1. • Задана плотность распределения вероятностей некоторой случайной величины:

$$f(x) = \frac{1}{4\pi}(2 + \cos x)I(0 \leq x \leq 2\pi),$$

где $I(x \in A) = 1$, если $x \in A$ и нуль иначе. Сгенерировать выборку из данного распределения. На основе сгенерированной выборки проверить гипотезу согласия с заданным распределением.

- Пусть случайный вектор $X = (X_1, \dots, X_n)$ имеет многомерное нормальное распределение $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ (вектор средних μ и матрица ковариаций Σ заданы). На основе сгенерированной выборки найти оценку матрицы ковариаций и проверить гипотезу о равенстве коэффициента корреляции $Cor(X_i, X_j)$ (для фиксированных индексов $i, j = 1, \dots, n$) требуемому значению.

2. Заданы координаты вершин двух треугольников (на плоскости). С помощью метода Монте-Карло вычислить площадь их пересечения.
3. Портфель составлен из ценных бумаг m различных видов. Предполагается, что стоимость ценной бумаги вида $i = 1, \dots, m$ изменяется в соответствии с геометрическим броуновским движением:

$$S_T^i = S_0^i e^{(\mu_i - \sigma_i^2/2)T + \sigma_i \sqrt{T} Z_i}, \quad Z_i \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Случайные процессы S^i , $i = 1, \dots, m$ предполагаются независимыми. Общая стоимость портфеля в момент времени t равна

$$V_t = \sum_{i=1}^m n_i S_t^i,$$

где n_i – число ценных бумаг вида i . Обозначим разницу в стоимости портфеля $L_T = V_0 - V_T$. Требуется найти стоимостную меру риска (VaR - Value at Risk)

$$VaR_\alpha = \sup \{u \in \mathbb{R} : \mathbb{P}(L_T \geq u) \geq 1 - \alpha\}, \quad (1)$$

где $1 - \alpha$ – уровень доверия.

4. В области A , представляющей собой бесконечный слой (на плоскости) вакуума толщиной D м, было одновременно испущено $N + 1$ фотонов, где N – случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром $\lambda = 2$. Предполагается, что точки излучения расположены на одной прямой и их распределение по толщине D равномерное, а распределение направлений излучения фотонов – изотропное. С каждой из двух сторон расположен детектор в виде бесконечной полосы. При попадании в детектор фотон поглощается. Детекторы включены в схему совпадений, которая срабатывает в том случае, если промежуток времени между попаданием фотонов в детекторы не превышает $\Delta t = 3 \cdot 10^{-8}$ с. Скорость света в вакууме $C = 3 \cdot 10^8$ м/с. Вычислить вероятность того, что схема сработала.

5. Реализовать алгоритм генерации точек, равномерно распределенных на поверхности геликоида:

$$\begin{cases} x = u \cos v, \\ y = u \sin v, \\ z = v, \end{cases} \quad 0 \leq u, v \leq 2\pi.$$

Литература:

- [1] *Ross S.* Simulation. 2006.
- [2] *Kroese D. P., Taimre T., Botev Z. I.* Handbook of Monte Carlo Methods, John Wiley & Sons, 2011.
- [3] *Kroese D. P., Rubinstein R. Y.* Simulation and The Monte Carlo Method, third edition, John Wiley & Sons, 2017.