Première partie

Partie 1 - Transformée de Fourier

LSINC1113 - Compléments de mathématiques

TP1 - Nombres complexes

Rappels théoriques

1. Nombres Complexes

Les nombres complexes sont une extension des nombres réels et sont notés sous la forme :

$$z = a + ib,$$

où a et b sont des nombres réels, et i est l'unité imaginaire, définie par $i^2 = -1$. Dans cette représentation : a est appelé la partie réelle de z (notée $\Re(z)$) et b est la partie imaginaire de z (notée $\Im(z)$).

Le module d'un nombre complexe $z = a + ib$ est la distance entre z et l'origine dans le plan complexe, donnée par :

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

L'argument de z, noté $\arg(z)$, est l'angle (en radians) entre le vecteur représentant z et l'axe des réels. Il peut être calculé avec :

$$\arg(z) = \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

Forme Trigonométrique et Forme Exponentielle
Un nombre complexe $z = a + ib$ peut aussi s'écrire sous forme trigonométrique :

$$z = r\,(\cos\theta + i\sin\theta) = \operatorname{cis}\theta,$$

et on peut retomber sur la forme cartésienne grâce $a = r\cos\theta$ et $b = r\sin\theta$.
En utilisant la formule d'Euler, on peut exprimer z sous forme exponentielle :

$$z = re^{i\theta}.$$

Conjugaison
Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + ib$ est noté $\overline{z}$ et défini par :

$$\overline{z} = a - ib.$$

Le conjugué permet de simplifier les calculs impliquant des divisions de nombres complexes, car on a :

$$z \cdot \overline{z} = r^2.$$

Polynômes et Racines Complexes
Pour un polynôme de degré n à coefficients réels ou complexes,

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

les racines complexes de $P(x) = 0$ peuvent être trouvées en utilisant des méthodes analytiques ou numériques, en fonction du degré et des coefficients du polynôme.

Si les coefficients du polynôme sont réels, alors les racines complexes apparaissent par paires conjuguées. Autrement dit, si $z = a + ib$ est une racine, alors $\overline{z} = a - ib$ est aussi une racine.

2. La matrice compagnon

La matrice compagnon est une représentation matricielle d'un polynôme, souvent utilisée pour étudier les racines d'un polynôme en tant que valeurs propres d'une matrice.

Soit un polynôme univarié de degré n donné par :

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

où $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ sont les coefficients du polynôme.

La matrice compagnon associée à ce polynôme est une matrice carrée de dimension $n \times n$, définie comme suit :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice compagnon C sont les racines du polynôme $P(x)$ dans le corps des complexes. La matrice compagnon permet de réduire la recherche des racines d'un polynôme à un problème de calcul de valeurs propres.

1. Conversion de formes

Exercice 1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des complexes suivants.

(a) $z = 2 + i6$

(b) $z = 45 - i\pi$

(c) $z = \dfrac{4i + 2}{3}$

(d) $z = \dfrac{-12 - 7i}{7}$

(e) $z = 2\,\text{cis}\,(\dfrac{\pi}{4})$

(f) $z = \dfrac{1}{2}\,\text{cis}\,(\dfrac{\pi}{3})$

(g) $z = 5e^{-i\frac{\pi}{3}}$

(h) $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$

2. Opérations sur les complexes

Exercice 2. Effectuer les opérations suivantes pour simplifier le nombre complexe au maximum. La réponse finale doit être dans la forme initiale de l'exercice : si vous effectuez une conversion durant l'exercice, revenez à la forme du début, une fois l'opération terminée.

(a) $z = (2 - i) + (1 + 2i)$

(b) $z = (\sqrt{2}\,\text{cis}\,(45°))(\sqrt{2}\,\text{cis}\,(300°))$

(c) $z = \dfrac{12\,\text{cis}\,(330°)}{4\,\text{cis}\,(210°)}$

(d) $z = (3\,\text{cis}\,(60°))^4$

(e) $z = (2 - i)(1 + 2i)$

(f) $z = (2 + i)^3$

(g) $z = 2\,\text{cis}\,(\dfrac{\pi}{3}) + 4\,\text{cis}\,(\dfrac{5\pi}{3})$

(h) $z = (\sqrt{3} + i)^3$

Exercice 3. Calculer le complexe conjugué des nombres de l'exercice 2.

3. Équations dans les complexes

Exercice 4. Résoudre les équations dans $\mathbb{C}$ Vous pouvez utiliser votre ordinateur mais pas le package Polynomials.jl.

(a) $(1+i)z = -2+5i$

(b) $\frac{1}{z} = \frac{i}{1+i}$

(c) $4 + x^2 = 0$

(d) $3x^2 - 4x + 2 = 0$

(e) $x^2 - 5ix = 6$

(f) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$

(g) $2z^2 + 5iz - 3 = 0$

(h) $x^4 - 6x^3 + 5ix^2 - 8x + 2i = 0$

(i) $2x^5 + 3ix^4 - 4x^3 + 5ix^2 - 6x + 7 = 0$

(j) $z^7 - iz^6 + 2z^5 - 5iz^4 + 6z^3 - 4iz^2 + z - i = 0$

4. Exercices théoriques

Exercice 5. Montrer que la multiplication complexe est *(i)* associative, *(ii)* commutative, *(iii)* distributive et *(iv)* absorbée par l'élément nul.

Exercice 6. Montrer que le conjugué du produit de deux complexes et le produit des conjugués.

5. Exercices supplémentaires

Exercice 7. Convertir les expressions suivantes dans les deux autres formes possibles.

(a) $z = 1 - i$

(b) $z = 1 + i$

(c) $z = \sqrt{3} + i$

(d) $z = 1 - i\sqrt{3}$

(e) $z = i$

(f) $z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(g) $z = 5\,\mathrm{cis}\,(\frac{\pi}{3})$

(h) $z = 2\,\mathrm{cis}\,(\frac{\pi}{6})$

(i) $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$

(j) $z = 4e^{i\frac{5\pi}{3}}$

Exercice 8. Représenter les complexes de l'exercice 7 dans le plan cartésien.

Exercice 9. Simplifier les expressions suivantes

(a) $\frac{1}{1+i}$

(b) $\frac{i}{i-1}$

(c) $\frac{i+1}{2j}$

(d) $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$

Exercice 10. Montrer que $i^3 = \frac{1}{i}$.

LSINC1113 - Compléments de mathématiques

TP2 - La transformée de Fourier

Rappels théoriques

1. Signaux Périodiques

Un signal $x(t)$ est dit périodique s'il existe une constante $T > 0$ telle que :

$$x(t+T) = x(t) \quad \text{pour tout } t.$$

La plus petite valeur positive de T pour laquelle cette relation est vérifiée est appelée la période fondamentale du signal. La fréquence fondamentale f est donnée par :

$$f = \frac{1}{T},$$

et la vitesse angulaire, ou fréquence angulaire, est définie par :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}.$$

Les fonctions sinusoïdales, comme $\cos(\omega t)$ et $\sin(\omega t)$, sont des exemples typiques de signaux périodiques, avec $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

2. Transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'un signal $x(t)$, notée $X(\omega)$, transforme le signal du domaine temporel vers le domaine fréquentiel. Pour un signal temporel $x(t)$, la transformée de Fourier est définie par :

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\, dt.$$

Cette représentation permet de décomposer $x(t)$ en une somme infinie de sinusoïdes complexes de différentes fréquences, et $X(\omega)$ indique les amplitudes et phases de ces composantes fréquentielles.

Transformée de Fourier Inverse
La transformée de Fourier inverse permet de reconstruire le signal $x(t)$ depuis sa transformée $X(\omega)$:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}\, d\omega.$$

3. Transformée de Fourier de Fonctions de Base

Voici quelques transformées de Fourier usuelles qui peuvent être utiles pour les exercices.

Domaine temporel	Domaine fréquentiel
$x(t) = u(t)$	$X(i\omega) = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$
$x(t) = \delta(t)$	$X(i\omega) = 1$
$x(t) = 1$	$X(i\omega) = 2\pi\delta(\omega)$
$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lvert t\rvert < T_0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$X(i\omega) = \frac{2T_0 \sin(\omega T_0)}{\omega T_0}$
$x(t) = \frac{1}{\pi t}\sin(Wt)$	$X(i\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \lvert\omega\rvert \leq W \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
$x(t) = e^{-at}u(t), \mathfrak{Re}(a) > 0$	$X(i\omega) = \frac{1}{i\omega + a}$

4. Propriétés de la Transformée de Fourier

Linéarité
Pour deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ et des constantes a et b,

$$\mathcal{F}\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = aX_1(\omega) + bX_2(\omega).$$

Modulation et Translation en Fréquence
Si $x(t)$ est multiplié par une exponentielle complexe, cela entraîne une translation en fréquence :

$$\mathcal{F}\{x(t)e^{i\omega_0 t}\} = X(\omega - \omega_0).$$

Convolution
La transformée de Fourier de la convolution de deux signaux $x_1(t)$ et $x_2(t)$ est le produit de leurs transformées de Fourier :

$$\mathcal{F}\{x_1 * x_2\} = X_1(\omega)X_2(\omega).$$

Dualité
Il existe une relation de dualité entre le domaine temporel et le domaine fréquentiel :

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(\omega) \implies \mathcal{F}\{X(t)\} = 2\pi x(-\omega).$$

5. Delta de Dirac

Le delta de Dirac est défini comme $\delta(t) = 0$ pour tout $t \neq 0$. En $t = 0$, il s'agit d'une impulsion, de sorte à ce que son intégrale est unitaire :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1.$$

Propriété : $f(t)\delta(t - a) = f(a)\delta(t - a)$, $a \in \mathbb{R}$.

6. Formules d'Euler

Les formules d'Euler sont des séries de Fourier appliquées aux signaux sinusoïdaux :

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

$$\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

1. Signaux de base

Exercice 11. Déterminer si les signaux suivants sont périodiques et donner, le cas échéant, la période fondamentale, la fréquence, ainsi que la vitesse angulaire :

(a) $x(t) = \cos(2t) + \sin(3t)$

(b) $x(t) = \cos(t)u(t)$

(c) $x(t) = v(t) + v(-t)$ avec $v(t) = \sin(t)u(t)$

2. Transformée de Fourier

Exercice 12. Calculer la transformée de Fourier des signaux suivants :

(a) $x(t) = e^{-t}\cos(2\pi t)u(t)$

(b) $x(t) = e^{-t+2}u(t-2)$

(c) $x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$

(d) $x(t) = e^{-a|t|}$

(e) $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| < T_1 \\ 0 & \text{pour } |t| > T_1 \end{cases}$

Exercice 13. Calculer les signaux qui ont comme transformée de Fourier les fonctions suivantes :

(a) $X(i\omega) = e^{-2\omega}u(\omega)$

(b) $X(i\omega) = \begin{cases} \cos(2\omega) & \text{si } |\omega| < \pi/4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(c) $X(i\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |\omega| < W \\ 0 & \text{pour } |\omega| > W \end{cases}$

3. Exercices supplémentaires

Exercice 14. Déterminer si les signaux suivants sont périodiques et donner, le cas échéant, la période fondamentale, la fréquence, ainsi que la vitesse angulaire :

(a) $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\delta(t-2k)$

(b) $x(t) = v(t) + v(-t)$ avec $v(t) = \cos(t)u(t)$

Exercice 15. Calculer la transformée de Fourier des signaux suivants :

(a) $x(t) = e^{-2t}\sin(3\pi t)u(t)$

(b) $x(t) = e^{3t}\cos(5\pi t)u(-t)$

(c) $x(t) = e^{-t^2}$

(d) $x(t) = te^{-t}u(t)$

(e) $x(t) = \delta(t-3)$

(f) $x(t) = \frac{1}{t^2+1}$

(g) $x(t) = e^{-bt}u(t)$, $b > 0$

(h) $x(t) = \sin(\pi t)u(t)$

(i) $x(t) = e^{-t}\cos(2\pi t)u(t-1)$

(j) $x(t) = \delta'(t)$

Exercice 16. Calculer les signaux qui ont comme transformée de Fourier les fonctions suivantes :

(a) $X(i\omega) = \frac{1}{\omega^2+9}$

(b) $X(i\omega) = e^{-\omega^2}$

(c) $X(i\omega) = \frac{1}{i\omega+1}$

(d) $X(i\omega) = \sin(2\omega)u(\omega)$

(e) $X(i\omega) = \delta(\omega-5)$

(f) $X(i\omega) = \frac{1}{\omega^2+a^2}$, $a > 0$

(g) $X(i\omega) = e^{-\omega}u(\omega)$

(h) $X(i\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$

Deuxième partie

Partie 1 - Corrections

TP1 - Nombres complexes

1. Conversion de formes

Solution 1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des complexes suivants.

(a) $\Re(z) = 2 \quad \text{et} \quad \Im(z) = 6$

(b) $\Re(z) = 45 \quad \text{et} \quad \Im(z) = -\pi$

(c) $\Re(z) = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \Im(z) = \frac{4}{3}$

(d) $\Re(z) = \frac{-12}{7} \quad \text{et} \quad \Im(z) = -1$

(e) $\Re(z) = \sqrt{2} \quad \text{et} \quad \Im(z) = \sqrt{2}$

(f) $\Re(z) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \Im(z) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

(g) $\Re(z) = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad \Im(z) = -\frac{5\sqrt{3}}{2}$

(h) $\Re(z) = 0 \quad \text{et} \quad \Im(z) = 1$

2. Opérations sur les complexes

Solution 2. Effectuer les opérations suivantes pour simplifier le nombre complexe au maximum. La réponse finale doit être dans la forme initiale de l'exercice : si vous effectuez une conversion durant l'exercice, revenez à la forme du début, une fois l'opération terminée.

(a) $z = 3 + i$

(b) $z = (\sqrt{2}\sqrt{2})(\operatorname{cis}(45° + 300°))$
$= 2(\operatorname{cis}(345°))$

(c) $z = 3\operatorname{cis}(330° - 210°) = 3\operatorname{cis}(120°)$

(d) $z = (3)^4(\operatorname{cis}(60°))^4$
$= 81\operatorname{cis}(60°)\operatorname{cis}(60°)\operatorname{cis}(60°)\operatorname{cis}(60°)$
$= 81\operatorname{cis}(240°)$

(e) $z = 2 + 4i - i + 2 = 4 + 3i$

(f) $z = (4 + 4i - 1)(2 + i)$
$= (3+4i)(2+i) = 6+3i+8i-4 = 2+11i$

(g) $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}) + 4(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3})$
$= 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) + 4(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 3 - \sqrt{3}i$
$= 2\sqrt{3}\operatorname{cis}\frac{-\pi}{6}$

(h) $z = (2 + 2\sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) = 8i$

Solution 3. Calculer le complexe conjugué des nombres de l'exercice 2.

(a) $\overline{z} = 3 - i$

(b) $\overline{z} = 2\operatorname{cis}(-345°)$

(c) $\overline{z} = 3(\cos 120° - i\sin 120°) = 3(\cos -120° + i\sin -120°) = 3\operatorname{cis}(-120°)$

(d) $\overline{z} = 81\operatorname{cis}(-240°)$

(e) $\overline{z} = 4 - 3i$

(f) $\overline{z} = 2 - 11i$

(g) $\overline{z} = 2\sqrt{3}\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}$

(h) $\overline{z} = -8i$

3. Équations dans les complexes

Solution 4. Résoudre les équations dans $\mathbb{C}$ Vous pouvez utiliser votre ordinateur mais pas le package Polynomials.jl.

(a) $(1 + i)z = -2 + 5i$
$$z = \frac{2 + 5i}{1 + i}\frac{1 - i}{1 - i}$$
$$z = \frac{7 + 3i}{2}$$

(b) $\frac{1}{z} = \frac{i}{1 + i}$

$z = 1 - i$

(c) $4 + x^2 = 0$
$x = \pm\sqrt{-4}$
$x = \pm 2i$

(d) $3x^2 - 4x + 2 = 0$
$x = \dfrac{-(-4) \pm \sqrt{-8}}{2(3)} = \dfrac{4 \pm \sqrt{8}i}{6} = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}i}{3}$

(e) $x^2 - 5ix - 6 = 0$
$x = \dfrac{-(-5i) \pm \sqrt{-1}}{2(1)} = \dfrac{5i \pm i}{2}$
$x = 3i \quad \text{ou} \quad x = 2i$

(f) $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$
$u^2 + 5u + 4 = 0 \quad \text{avec} \quad u = z^2$
$u = \dfrac{-5 \pm \sqrt{9}}{2} = \dfrac{-5 \pm 3}{2}$
$u = -1 \quad \text{et} \quad u = -4$
$z^2 = -1 \quad \text{et} \quad z^2 = -4$
$z = \pm i \quad \text{et} \quad z = \pm 2i$

(g) $2z^2 + 5iz - 3 = 0$
$z = \dfrac{-5i \pm i}{4}$
$z = -i \quad \text{et} \quad z = -\dfrac{3i}{2}$

Pour les trois derniers, on utilise package Polynomials.jl :

(h) $x^4 - 6x^3 + 5ix^2 - 8x + 2i = 0$

```
roots_h, C = ComplexF64[-0.24516834438926072 +
   1.4589624661717018im, -0.04460154641931789 -
   0.9408025929978315im, 0.00028237067868848144 +
   0.22662796784914033im, 6.289487520129891 -
   0.7447878410230104im]
```

(i) $2x^5 + 3ix^4 - 4x^3 + 5ix^2 - 6x + 7 = 0$

```
roots_h, C = ComplexF64[-1.6617801577835343 -
   0.7552099765505914im, -0.4226881817780331 -
   1.1238772595174344im, -0.1996043866118091 +
   1.1714751194360913im, 0.6661203004414142 +
   0.22500303678199204im, 1.6179524257319624 -
   1.0173909201500568im]
```

(j) $z^7 - iz^6 + 2z^5 - 5iz^4 + 6z^3 - 4iz^2 + z - i = 0$

```
roots_h, C = ComplexF64[-1.2122843374555718 +
   1.5515061479247336im, -0.5442538074761938 -
   1.2510385596893394im, -0.23252932993398978 +
   0.46018338432092526im, -5.936445475461463e-16 -
   0.5213019451126377im, 0.23252932993398925 +
   0.46018338432092526im, 0.5442538074761942 -
   1.251038559689337im, 1.2122843374555687 + 1.5515061479247292
   im]
```

4. Exercices théoriques

Solution 5. Montrer que la multiplication complexe est *(i)* associative, *(ii)* commutative, *(iii)* distributive et *(iv)* absorbée par l'élément nul.

Associativité
Soient trois nombres complexes $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$, et $z_3 = a_3 + b_3 i$. Montrons que :

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3).$$

Calculons d'abord $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$:

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = [(a_1a_2 - b_1b_2)a_3 - (a_1b_2 + a_2b_1)b_3 + ((a_1b_2 + a_2b_1)a_3 + (a_1a_2 - b_1b_2)b_3)i]$$

De même, calculons $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$:

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = [(a_2a_3 - b_2b_3)a_1 - (a_2b_3 + a_3b_2)b_1 + ((a_2b_3 + a_3b_2)a_1 + (a_2a_3 - b_2b_3)b_1)i]$$

Les deux résultats sont identiques, donc la multiplication complexe est associative.

Commutativité
Soient deux nombres complexes $z_1 = a_1 + b_1i$ et $z_2 = a_2 + b_2i$. Montrons que :

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1.$$

En développant les produits :

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1i)(a_2 + b_2i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i,$$

$$z_2 \cdot z_1 = (a_2 + b_2i)(a_1 + b_1i) = (a_2a_1 - b_2b_1) + (a_2b_1 + a_1b_2)i.$$

Comme les deux expressions sont égales, la multiplication complexe est commutative.

Distributivité
Soient trois nombres complexes $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$, et $z_3 = a_3 + b_3i$. Montrons que :

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

Calculons les deux côtés :

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (a_1 + b_1i) \cdot [(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i],$$

$$z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3 = [(a_1 + b_1i) \cdot (a_2 + b_2i)] + [(a_1 + b_1i) \cdot (a_3 + b_3i)].$$

En développant et en simplifiant, on trouve que les deux côtés sont égaux, donc la multiplication complexe est distributive.

Absorption par l'élément nul
Montrons que pour tout nombre complexe $z = a + bi$, on a :

$$z \cdot 0 = 0.$$

Calculons :

$$z \cdot 0 = (a + bi) \cdot 0 = 0.$$

Donc, la multiplication complexe est absorbée par l'élément nul.

Solution 6. Montrer que le conjugué du produit de deux complexes et le produit des conjugués.

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.$$

$$z_1 \cdot z_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

Puis :

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = a_1a_2 - b_1b_2 - (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

Le produit des conjugués est donc :

$$\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = (a_1 - b_1i)(a_2 - b_2i) = a_1a_2 - b_1b_2 - (a_1b_2 + a_2b_1)i$$

5. Exercices Supplémentaires

Solution 7. Convertir les expressions suivantes dans les deux autres formes possibles.

(a) $z = 1 - i$

$z = \operatorname{cis}(\frac{-\pi}{4}) = e^{-\frac{\pi i}{4}}$

(b) $z = 1 + i$

$z = \operatorname{cis}(\frac{\pi}{4}) = e^{\frac{\pi i}{4}}$

(c) $z = \sqrt{3} + i$

$z = \sqrt{3}\operatorname{cis}(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}e^{\frac{\pi i}{6}}$

(d) $z = 1 - i\sqrt{3}$

$z = \sqrt{3}\operatorname{cis}(-\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}e^{-\frac{\pi i}{3}}$

(e) $z = i$

$z = \operatorname{cis}(\frac{\pi}{2}) = e^{\frac{\pi i}{2}}$

(f) $z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{cis}(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{\pi i}{3}}$

(g) $z = 5\operatorname{cis}(\frac{\pi}{3})$

$z = 5e^{\frac{\pi i}{3}} = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}i}{2}$

(h) $z = 2\operatorname{cis}(\frac{\pi}{6})$

$z = 2e^{\frac{\pi i}{6}} = \sqrt{3} + i$

(i) $z = e^{i\frac{\pi}{4}}$

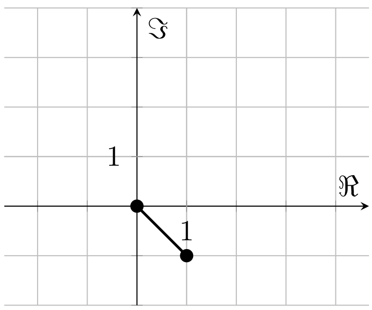
$z = \operatorname{cis}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$

(j) $z = 4e^{i\frac{5\pi}{3}}$

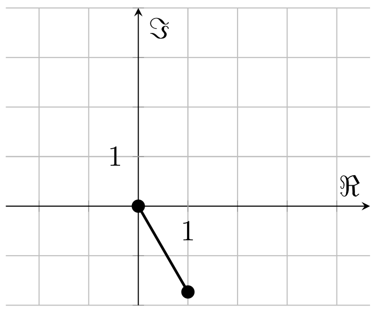
$z = 4\operatorname{cis}(\frac{5\pi}{3}) = 2 - 2\sqrt{3}i$

Solution 8. Représenter les complexes de l'exercice 7 dans le plan cartésien.
Les représentations graphiques des différents nombres complexes sont :

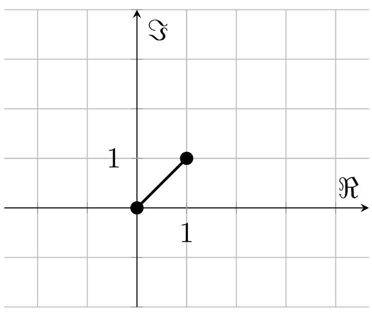
(a)



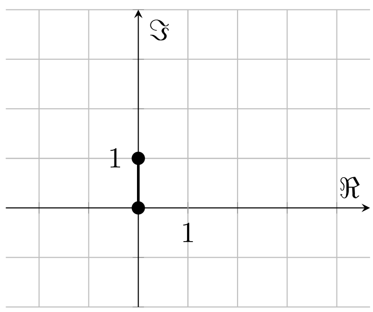
(d)



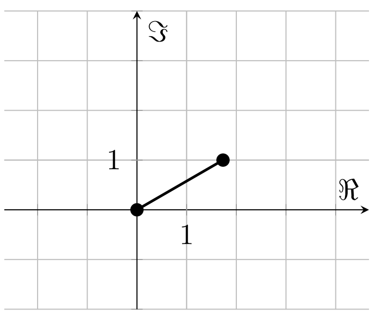
(b)



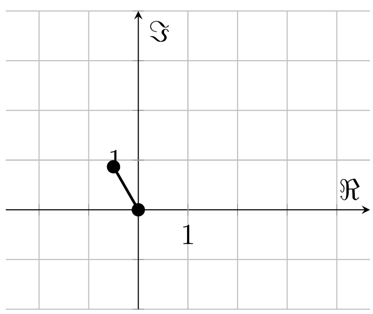
(e)



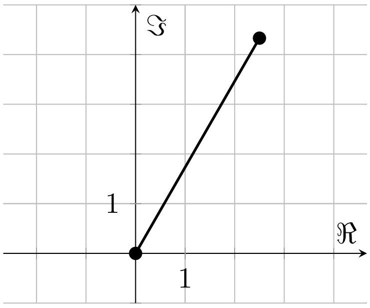
(c)



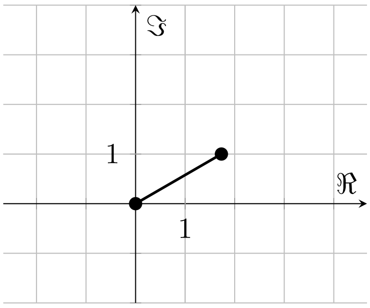
(f)



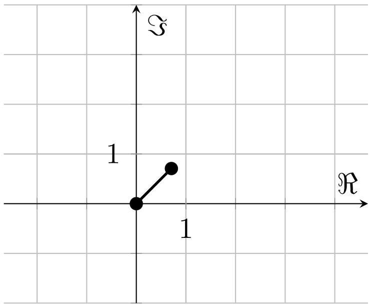
(g)



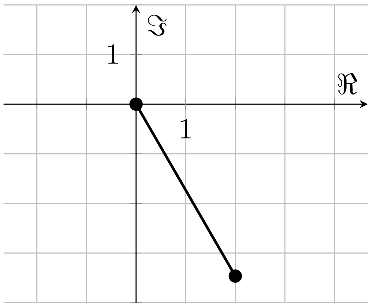
(h)



(i)



(j)



Solution 9. Simplifier les expressions suivantes

(a) $\dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1}{2}(1-i)$

(b) $\dfrac{i}{i-1} = -\dfrac{1}{2}(1-i)$

(c) $\dfrac{i+1}{2j} = \dfrac{1}{2}(1-i)$

(d) $\dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{1-i}{1+i} = 0$

Solution 10. Montrer que $i^3 = \dfrac{1}{i}$.

$i^3 = i^2 i = -i$

$\frac{1}{i} = \frac{1}{i}\frac{-i}{-i} = -i$

LSINC1113 - Compléments de mathématiques

TP2 - La transformée de Fourier

---

1. Signaux de base

Solution 11. Déterminer si les signaux suivants sont périodiques et donner, le cas échéant, la période fondamentale, la fréquence, ainsi que la vitesse angulaire :

(a) $x(t) = \cos(2t) + \sin(3t)$
La période de $cos(2t)$ est $T = \pi$ et la période de $cos(3t)$ est $T = \frac{2\pi}{3}$.
$PPCM(\pi, \frac{2\pi}{3}) = 2\pi$. La période est donc 2π.
La fréquence est $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}$ et la vitesse angulaire est $\omega = 2\pi f = 1$.

(b) $x(t) = \cos(t)u(t)$
$\cos(t)$ a une période $T = 2\pi$ par contre $u(t)$ est la fonction échelon valant 0 avant 0 et 1 après. Cela rend donc $x(t)$ non périodique.

(c) $x(t) = v(t) + v(-t)$ avec $v(t) = \sin(t)u(t)$
$x(t) = \sin(t)u(t) + \sin(-t)u(-t)$
Lorsque $t < 0$, $x(t) = -\sin(t)$ et quand $t > 0$, $x(t) = \sin(t)$. $\sin(t)$ et $-\sin(t)$ ont une période de 2π.
$f = \frac{1}{2\pi}$ et $\omega = 1$.

2. Transformée de Fourier

Solution 12. Calculer la transformée de Fourier des signaux suivants :

(a) $x(t) = e^{-t}\cos(2\pi t)u(t)$

$$\begin{aligned}
X(i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}\cos(2\pi t)u(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi t)u(t)e^{-t(i\omega+1)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\infty} \cos(2\pi t)e^{-t(i\omega+1)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2}(e^{2\pi ti} + e^{-2\pi ti})e^{-t(i\omega+1)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2}(e^{-t(i\omega-2\pi i+1)} + e^{-t(i\omega+2\pi i+1)})\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(i\omega-2\pi i+1)} + \frac{1}{(i\omega+2\pi i+1)}\right)
\end{aligned}$$

(b) $x(t) = e^{-t+2}u(t-2)$

$$\begin{aligned}
X(i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t+2}u(t-2)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= e^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}u(t-2)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\
&= e^2\int_{2}^{\infty} e^{-t(i\omega+1)}\,\mathrm{d}t \\
&= e^2\frac{1}{i\omega+1}e^{-2(i\omega+1)} = \frac{e^2}{i\omega+1}e^{-2i\omega}
\end{aligned}$$

(c) $x(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$

$$\begin{aligned} X(i\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-t(i\omega+a)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{i\omega + a} \end{aligned}$$

(d) $x(t) = e^{-a|t|}$

$$\begin{aligned} \text{Si } t > 0, \quad X(i\omega) &= \int_{-\infty}^{0} e^{-at}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{0} e^{-t(i\omega+a)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a + i\omega} \\ \text{Si } t < 0, \quad X(i\omega) &= \int_{0}^{\infty} e^{at}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{\infty} e^{-t(i\omega-a)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{i\omega - a} \end{aligned}$$

(e) $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |t| < T_1 \\ 0 & \text{pour } |t| > T_1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} X(i\omega) &= \int_{-T_1}^{T_1} e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{-1}{i\omega}\left(e^{-i\omega T_1} - e^{i\omega T_1}\right) \end{aligned}$$

Solution 13. Calculer les signaux qui ont comme transformée de Fourier les fonctions suivantes :

(a) $X(i\omega) = e^{-2\omega}u(\omega)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\omega}u(\omega)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{\omega(-2+it)}\,\mathrm{d}\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{-1}{-2+it} \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{-1}{-2+it}\cdot\frac{-2-it}{-2-it} \\ &= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2+it}{4+t^2} \end{aligned}$$

(b) $X(i\omega) = \begin{cases} \cos(2\omega) & \text{si } |\omega| < \pi/4 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(2\omega) e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (e^{2i\omega} + e^{-2i\omega}) e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \left(e^{(2i+it)\omega} + e^{(-2i+it)\omega}\right)\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{(2+t)i}\left(e^{i(2+t)\frac{\pi}{4}} - e^{-i(2+t)\frac{\pi}{4}}\right) + \frac{1}{(-2+t)i}\left(e^{i(-2+t)\frac{\pi}{4}} - e^{-i(-2+t)\frac{\pi}{4}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{2+t}\sin\left((2+t)\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{-2+t}\sin\left((-2+t)\frac{\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}$$

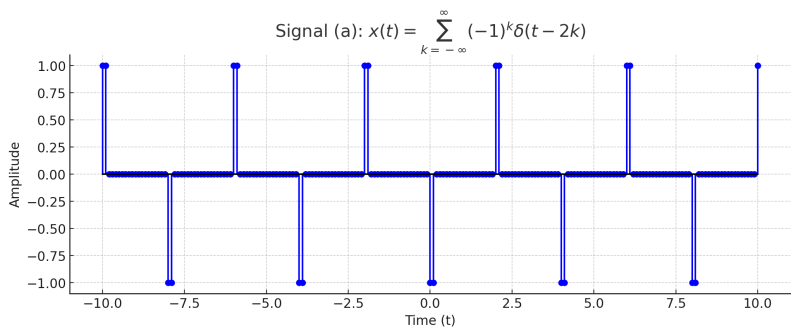
(c) $X(i\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |\omega| < W \\ 0 & \text{pour } |\omega| > W \end{cases}$

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\
&= \frac{1}{2it\pi}\left(e^{itW} - e^{-itW}\right) \\
&= \frac{1}{t\pi}\sin(tW)
\end{aligned}$$

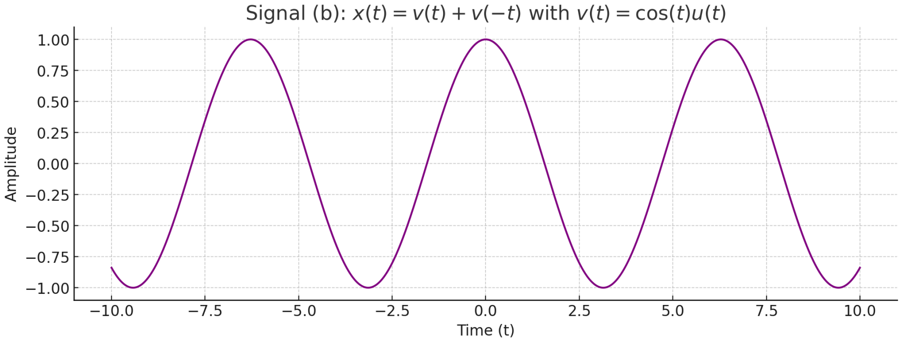
3. Exercices Supplémentaires

Solution 14. Déterminer si les signaux suivants sont périodiques et donner, le cas échéant, la période fondamentale, la fréquence, ainsi que la vitesse angulaire :

(a) Ce signal est une somme de deltas de Dirac espacés de 2, alternant en signe pour chaque impulsion. Ce motif répété confirme donc que le signal est périodique, avec une période fondamentale de 2. La fréquence fondamentale est $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}Hz$. La vitesse angulaire $\omega = 2 * \pi * f = \pi$ rad/s.



(b) $v(t) = \cos(t)u(t)$ est une fonction cosinus pour $t \geq 0$, multipliée par une fonction échelon qui annule $v(t)$ pour $t < 0$. $v(-t) = \cos(-t)u(t) = \cos(t)u(-t)$, qui est la même cosinus mais définie pour $t \leq 0$.
Le signal $x(t) = v(-t) + v(t)$ forme un signal symétrique autour de $t = 0$ qui ressemble à une cosinus complet pour $t \in (-\infty, \infty)$.
Cependant, en raison de la multiplication par la fonction échelon, $x(t)$ n'est pas strictement périodique, car la fonction échelon introduit une discontinuité dans le domaine temporel.



Solution 15. Calculer la transformée de Fourier des signaux suivants :

(a) $X(i\omega) = \frac{3\pi}{(2+i\omega)^2+(3\pi i)^2}$

(b) $X(i\omega) = \frac{3-\omega i}{(3-i\omega)^2+(5\pi)^2}$

(c) $X(i\omega) = \sqrt{\pi}\exp(-\omega^2/4)$

(d) $X(i\omega) = \frac{1}{(1+\omega i)^2}$

(e) $X(i\omega) = \exp(-3\omega i)$

(f) $X(i\omega) = \pi \exp^{(} -|\omega|)$

(g) $X(i\omega) = \frac{1}{2}(\frac{\exp(-(1+i(\omega-2\pi)))}{1+i(\omega-2\pi)} + \frac{\exp(-(1+i(\omega+2\pi)))}{1+i(\omega+2\pi)})$

(h) $X(i\omega) = \frac{\omega}{(\omega-\pi)(\omega+\pi)}$

(i) $X(i\omega) = \frac{1}{b+i\omega}$

(j) $X(i\omega) = i\omega$

Solution 16. Calculer les signaux qui ont comme transformée de Fourier les fonctions suivantes :

(a) $x(t) = \frac{\exp(-3|t|}{3}$

(b) $x(t) = \frac{1}{2\sqrt{(\pi)}}\exp^{(}\frac{t^2}{4})$

(c) $x(t) = \exp(-t)u(t)$

(d) $x(t) = -\frac{1}{\pi} * \frac{1}{t^2-4}$

(e) $x(t) = \frac{1}{2\pi} * \exp(i5t)$

(f) $x(t) = \frac{\exp -a|t|}{2a}$

(g) $x(t) = \frac{1}{2\pi(1-it)}$

(h) $x(t) = \frac{\exp(-|t|)}{2}$

Troisième partie

Partie 1 - Applications

LSINC1113 - Compléments de mathématiques

TP3 - Signaux sonores

1. Effet de la fréquence du signal

1.1. Charger les signaux d'origine et les écouter

```
begin
    chwet_file = joinpath(@__DIR__, "..", "2022", "TP4", "chwet.wav")
    chwet, fs_chwet = wavread(chwet_file)
    chwet = chwet[:, 1]  # On ne prend qu'un canal
    println("Nouvelle fréquence d'échantillonnage : $fs_chwet Hz")
    println("Durée totale du signal : $(length(chwet)/fs_chwet) s")
end
```

```
Nouvelle fréquence d'échantillonnage : 44100.0 Hz
Durée totale du signal : 1.4512472 s
```

64000

```
PortAudioStream() do s
    write(s, chwet)
end
```

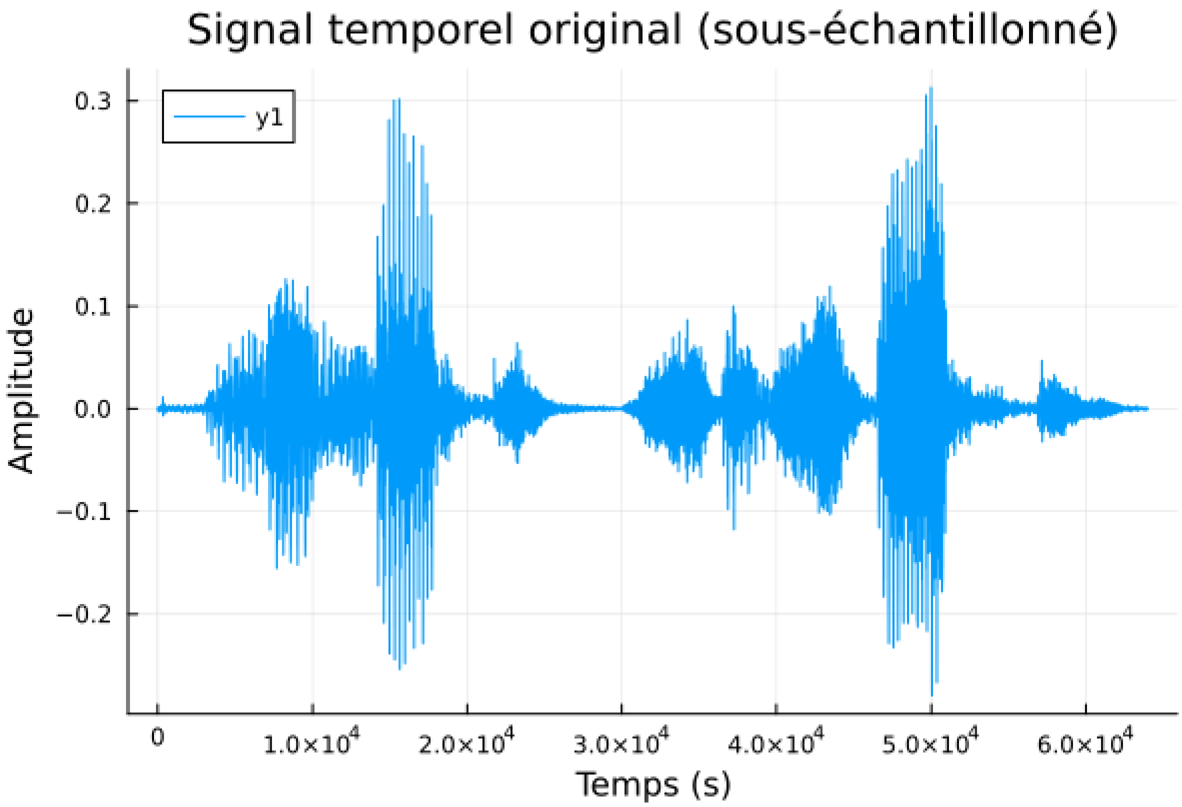
```
begin
    gamme_file = joinpath(@__DIR__, "..", "2022", "TP4", "gamme.wav")
    gamme, fs_gamme = wavread(gamme_file)
    gamme = gamme[:, 1]  # On ne prend qu'un canal
    println("Nouvelle fréquence d'échantillonnage : $fs_gamme Hz")
    println("Durée totale du signal : $(length(gamme)/fs_gamme) s")
end
```

```
Nouvelle fréquence d'échantillonnage : 44100.0 Hz
Durée totale du signal : 5.05034 s
```

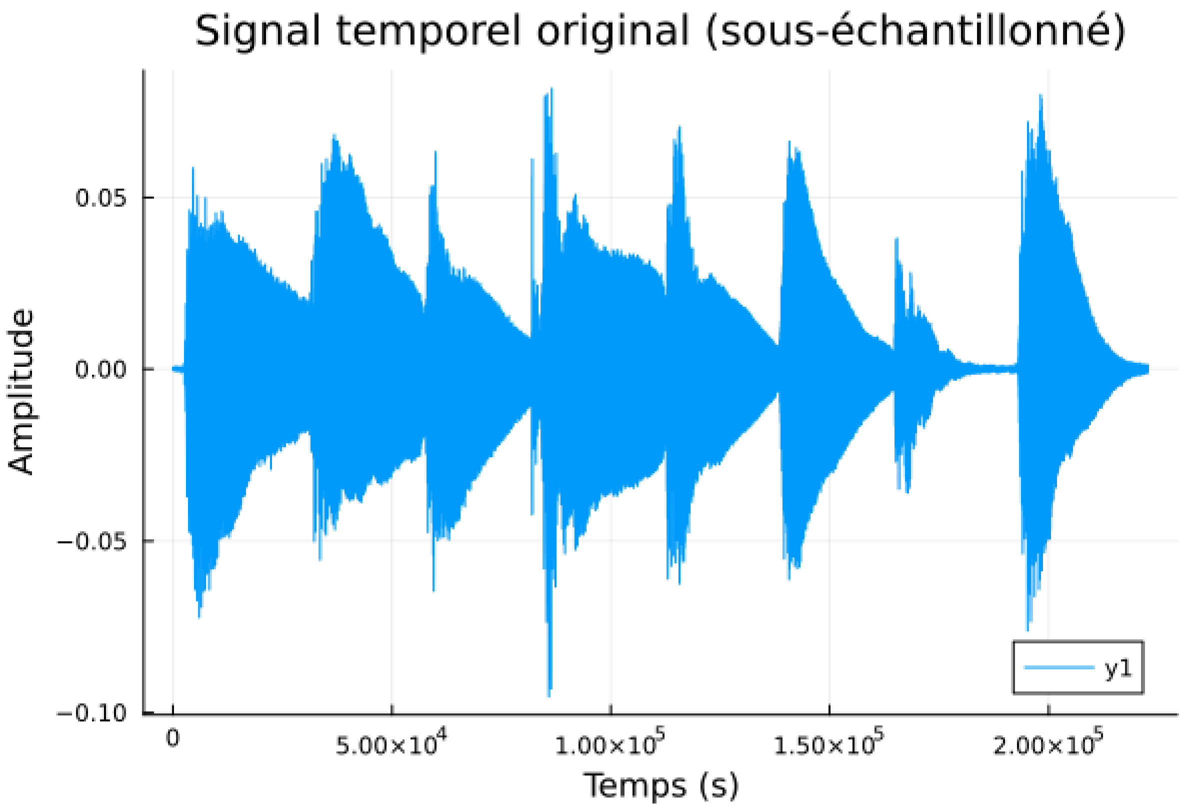
222720

```
PortAudioStream() do s
    write(s, gamme)
end
```

1.2. Afficher les signaux d'origine

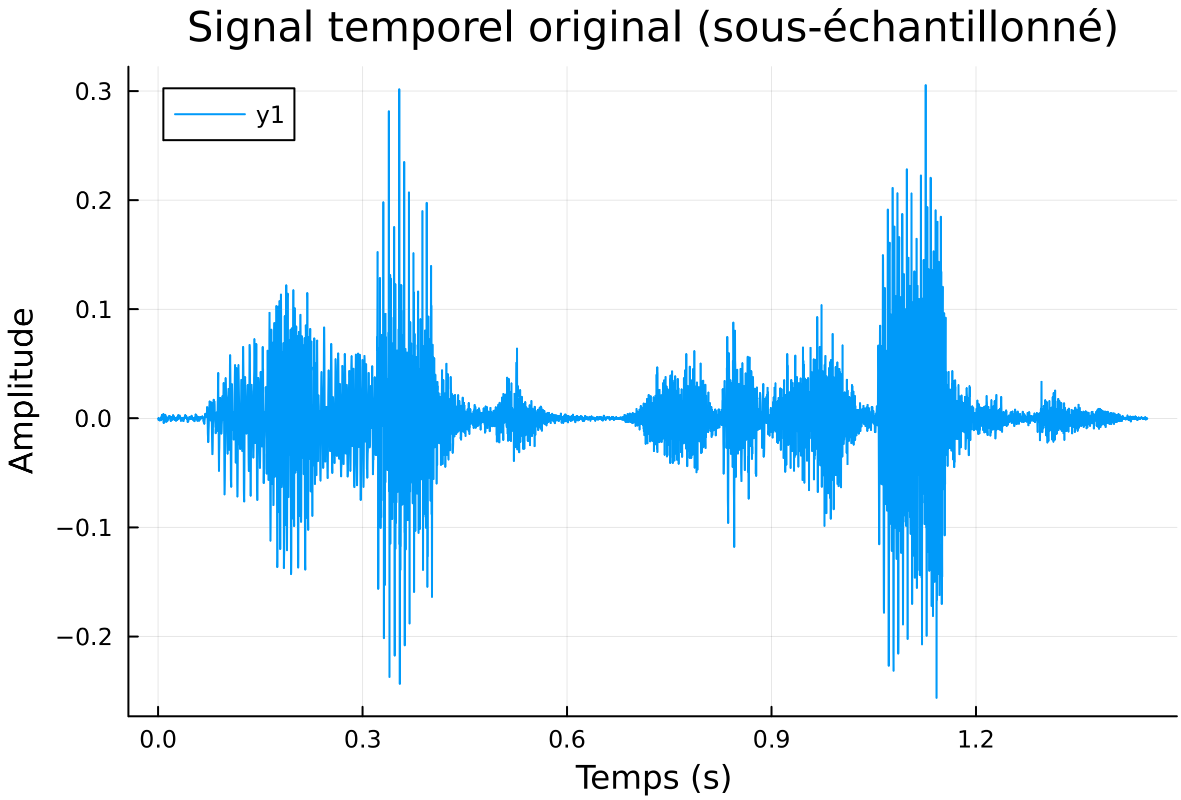



```
begin
    plot(chwet, title="Signal temporel original (sous-échantillonné)",
xlabel="Temps (s)", ylabel="Amplitude")
end
```

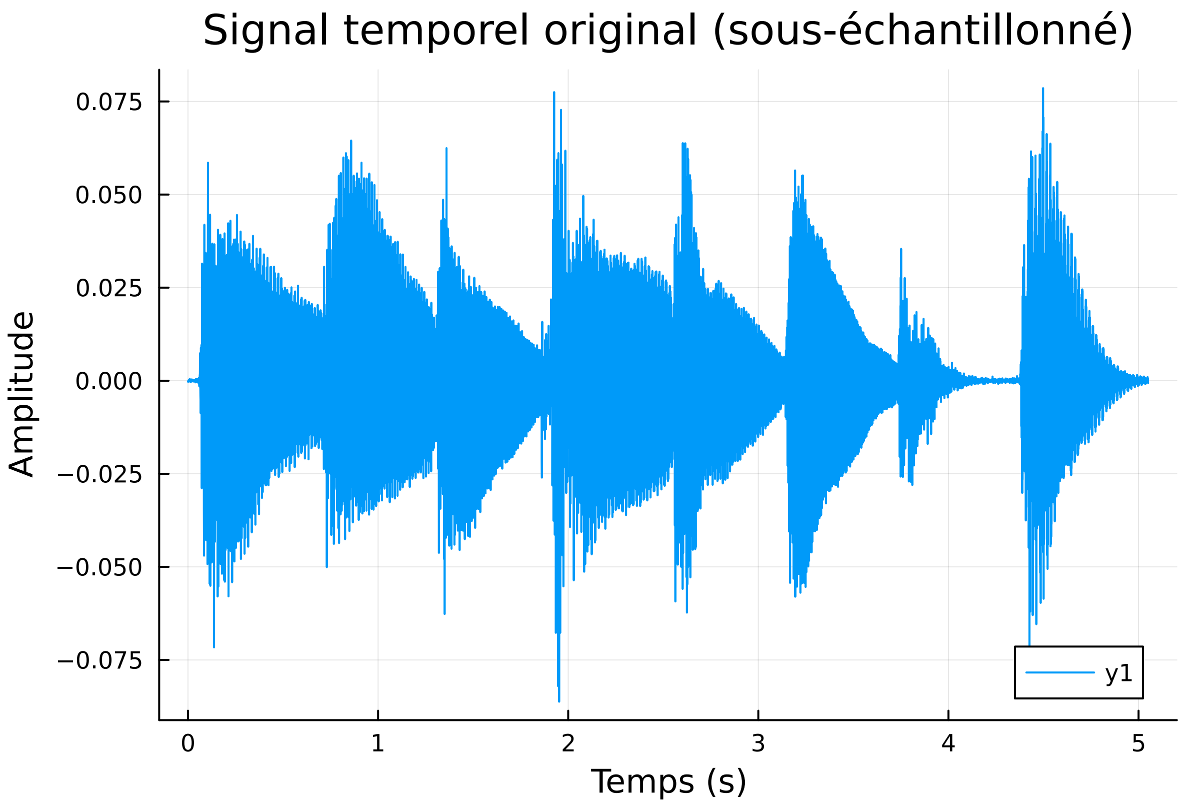


Que remarquez-vous et comment y remédier ? Implémentez la solution ci-dessous

```
md"**Que remarquez-vous et comment y remédier ? Implémentez la solution ci-dessous**"
# To do
```




```
# Echantillonnage : prendre 1 échantillon sur 10
begin
    factor_chwet = 10
    n_chwet = length(chwet)
    chwet_sub = chwet[1:factor_chwet:n_chwet]

    Δt_chwet = 1 / fs_chwet
    duration_chwet = n_chwet * Δt_chwet
    t_chwet_sub = LinRange(0, duration_chwet, length(chwet_sub))

    # Affichage du signal sous-échantillonné
    plot(t_chwet_sub, chwet_sub, title="Signal temporel original (sous-échantillonné)", xlabel="Temps (s)", ylabel="Amplitude")
end
```



Que remarquez vous en modifiant le sous échantillonage ?

```
md"**Que remarquez vous en modifiant le sous échantillonage ?**"
```

1.3. Jouer sur la fréquence des signaux

play_with_modified_frequency (generic function with 1 method)

```
# Fonction pour jouer un signal avec une fréquence modifiée
function play_with_modified_frequency(signal, fs, factor)
    new_fs = fs * factor
    sig = SampleBuf(signal, new_fs)
    println("Ancienne fréquence d'échantillonnage : $fs Hz")
    println("Ancienne durée totale du signal : $(length(signal)/fs) s")
    println("Nouvelle fréquence d'échantillonnage : $new_fs Hz")
    println("Durée totale du signal : $(length(sig)/new_fs) s")
    return sig
end
```

0:00 / 0:00

chwet_double_freq =

```
# Doubler la fréquence
chwet_double_freq = play_with_modified_frequency(chwet, fs_chwet, 2)
```

```
Ancienne fréquence d'échantillonnage : 44100.0 Hz
Ancienne durée totale du signal : 1.4512472 s
Nouvelle fréquence d'échantillonnage : 88200.0 Hz
Durée totale du signal : 0.7256236 s
```

0:00 / 0:02

gamme_double_freq =

```
gamme_double_freq = play_with_modified_frequency(gamme, fs_gamme, 2)
```

```
Ancienne fréquence d'échantillonnage : 44100.0 Hz
Ancienne durée totale du signal : 5.05034 s
Nouvelle fréquence d'échantillonnage : 88200.0 Hz
Durée totale du signal : 2.52517 s
```

0:00 / 0:02

chwet_half_freq =

```
# Diviser la fréquence par deux
chwet_half_freq = play_with_modified_frequency(chwet, fs_chwet, 0.5)
```

```
Ancienne fréquence d'échantillonnage : 44100.0 Hz
Ancienne durée totale du signal : 1.4512472 s
Nouvelle fréquence d'échantillonnage : 22050.0 Hz
Durée totale du signal : 2.9024943310657596 s
```

0:00 / 0:10

gamme_half_freq =

```
gamme_half_freq = play_with_modified_frequency(gamme, fs_gamme, 0.5)
```

```
Ancienne fréquence d'échantillonnage : 44100.0 Hz
Ancienne durée totale du signal : 5.05034 s
Nouvelle fréquence d'échantillonnage : 22050.0 Hz
Durée totale du signal : 10.100680272108843 s
```

Que constatez-vous ?

```
md"**Que constatez-vous ?**"
# ...
```

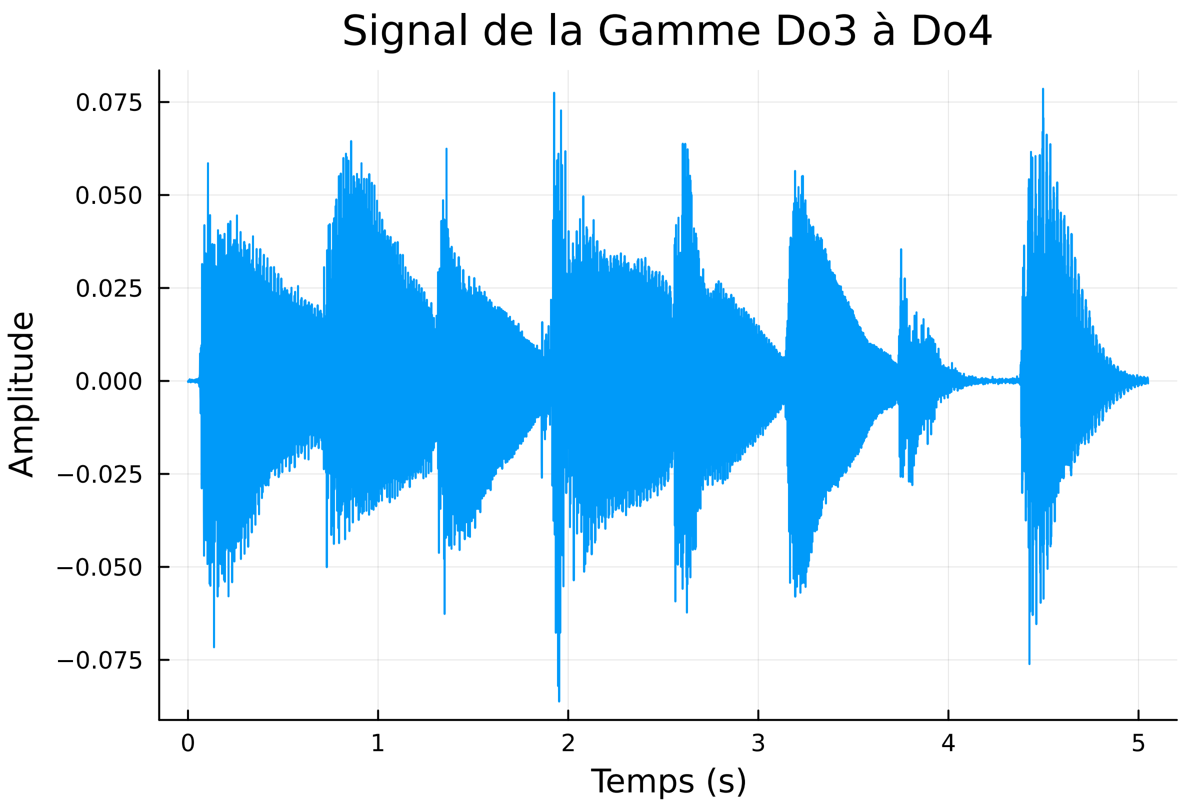
2. Le signal et son spectre

2.1. Afficher le signal

Pour cet exemple, nous allons considérer le signal de la gamme qui va du **Do3** (261,5 Hz) au **Do4** (523 Hz). Pour ce faire, déterminez le vecteur temps nécessaire à afficher le signal complet, puis afficher un graphique (t,y(t)) qui affiche le signal y(t) en fonction du temps.

```
time_vector (generic function with 1 method)
```

```julia
# Calcul du vecteur de temps
function time_vector(signal, signal_sub, fs)
    nb_echantillon = length(signal)   # Nombre total d'échantillons dans le signal
    Δt = 1 / fs
    duration = nb_echantillon * Δt
    temps = LinRange(0, duration, length(signal_sub))
    return temps
end
```



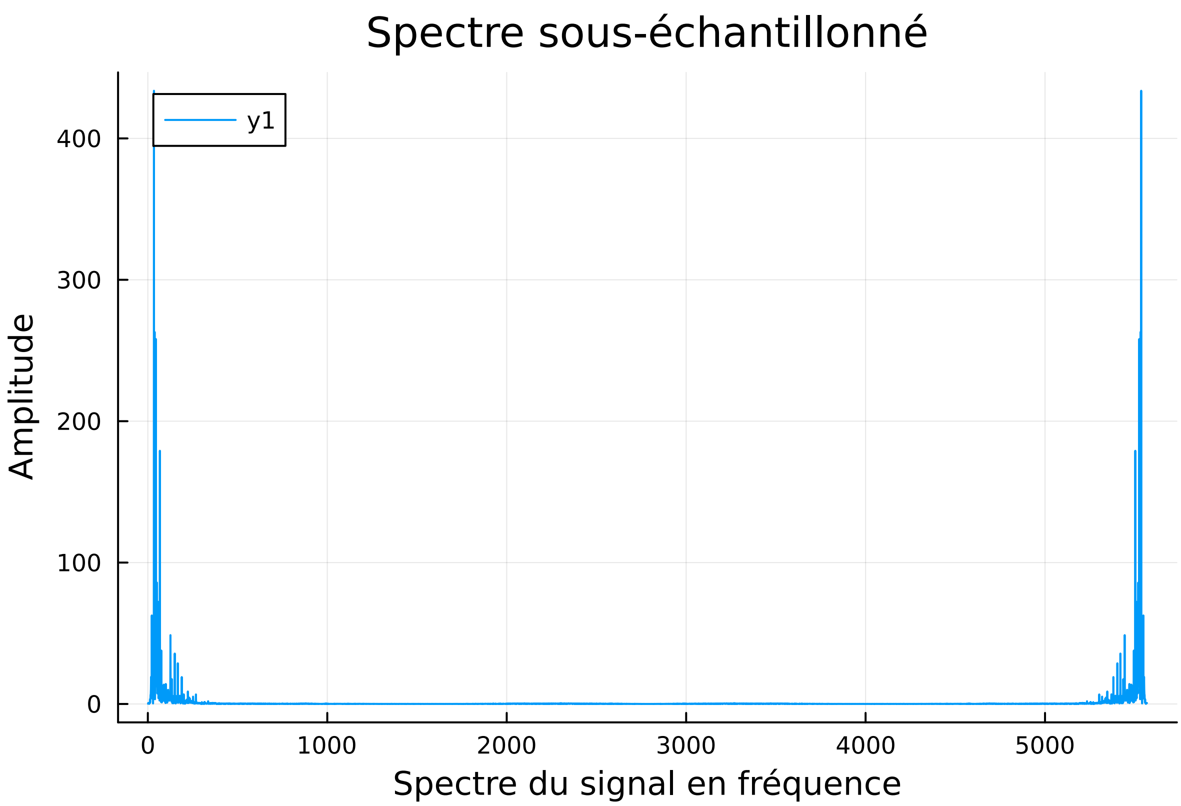

```julia
# Affichage du graphique (t, y(t))
begin
    gamme_compressed = gamme[1:factor_gamme:end]
    t_gamme = time_vector(gamme, gamme_compressed, fs_gamme)
    plot(t_gamme, gamme_compressed, xlabel="Temps (s)", ylabel="Amplitude", title="Signal de la Gamme Do3 à Do4", legend=false)
end
```

2.2. Affichage du spectre du signal

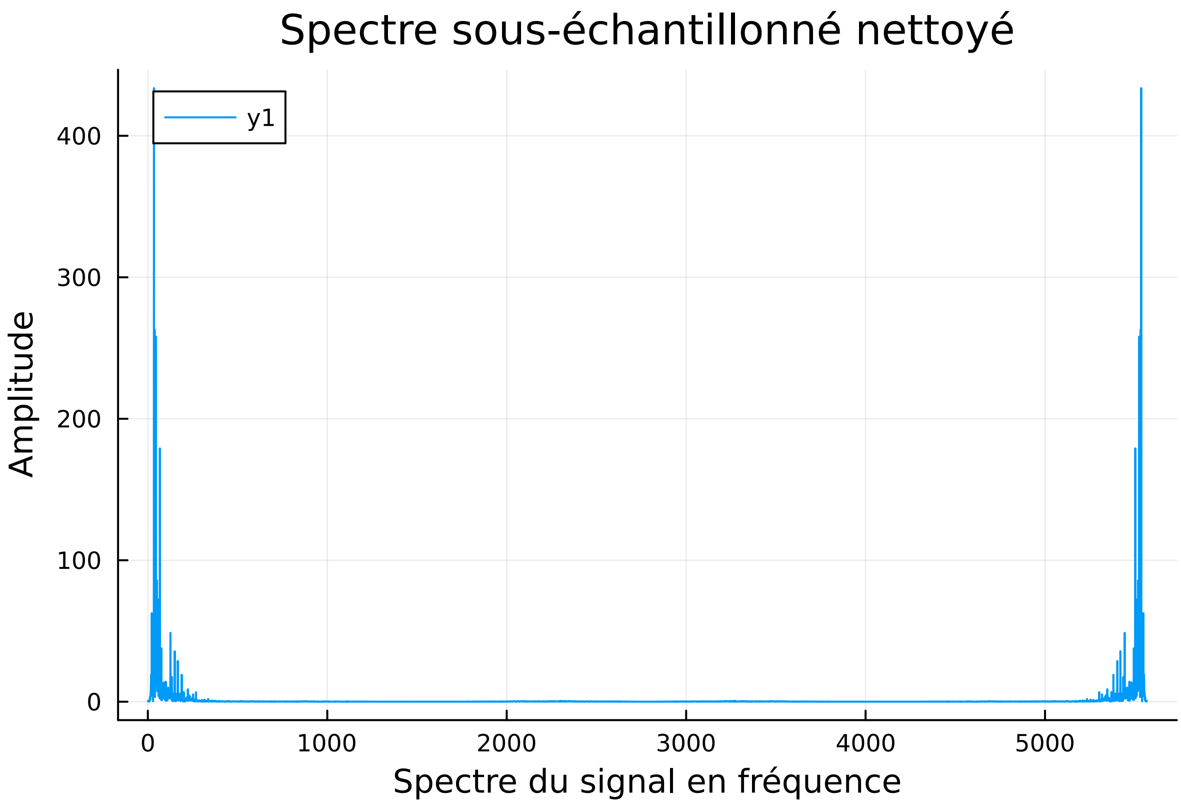
Pour afficher le spectre $Y(i\omega)$ du signal $y(t)$, on utilise la fonction `fft` (**Fast Fourier Transform**) de la bibliothèque `FFTW` en Julia.

Notez que cette fonction renvoie initialement le spectre dans l'intervalle fréquentiel correspondant à la première période du signal, c'est-à-dire entre $[0, 2\pi]$. La fonction `fftshift` permet de recentrer la transformée de Fourier pour qu'elle soit centrée autour de zéro, dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

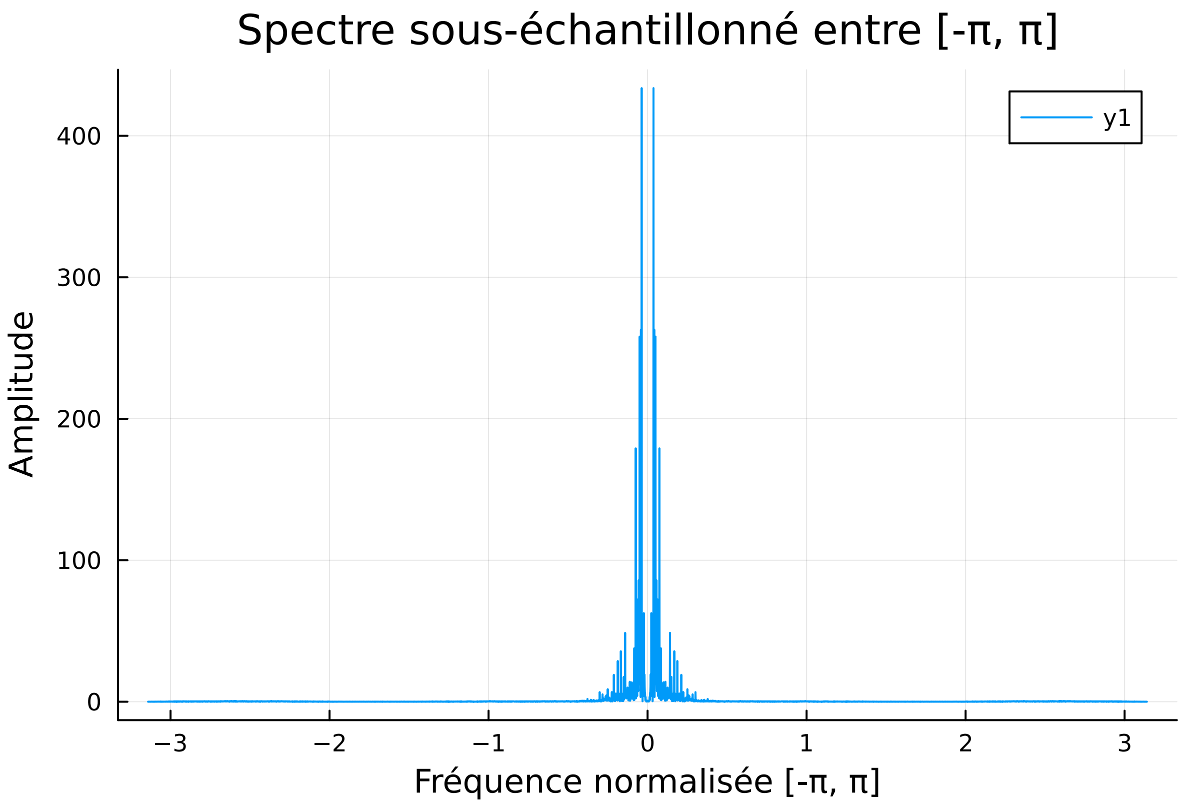
- **1.** Affichez le spectre du signal dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$. N'oubliez pas de calculer le vecteur des fréquences correspondantes, qui doit être de la même taille que le spectre.
- **2.** Affichez le même spectre, mais cette fois dans l'intervalle $[-\frac{f_s}{2}, \frac{f_s}{2}]$, où f_s est la fréquence d'échantillonnage du signal.



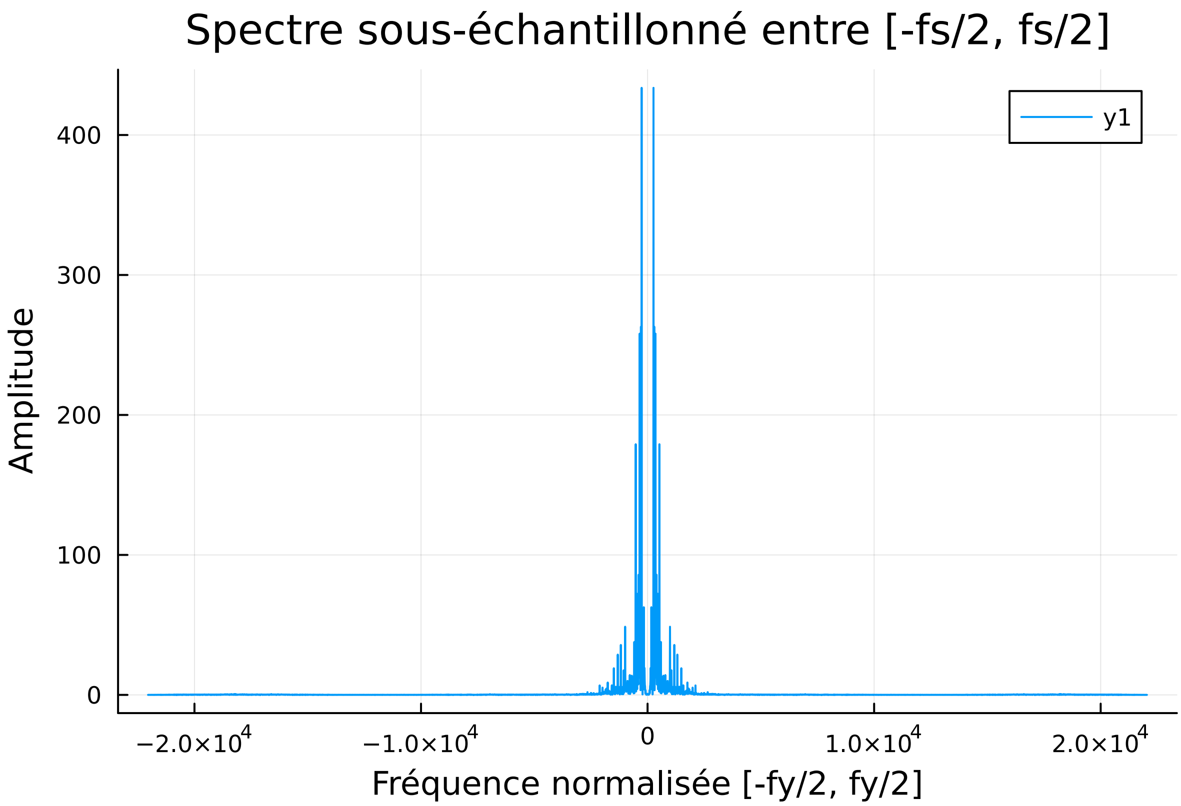

```
begin
    # a. Transformée de Fourier Y(jw) de y(t) :
    Y = fft(gamme)

    plot(abs.(Y[1:factor_gamme:end]), xlabel="Spectre du signal en fréquence",
    ylabel="Amplitude", title="Spectre sous-échantillonné")
end
```




```julia
begin
    # b. Nettoyage du spectre pour supprimer les valeurs du module plus petites que 1e-4 sont mises à zéro

    Y[abs.(Y) .< 1e-4] .= 0.0

    plot(abs.(Y[1:factor_gamme:end]), xlabel="Spectre du signal en fréquence", ylabel="Amplitude", title="Spectre sous-échantillonné nettoyé")
end
```




```julia
begin
    # c. Affichage du spectre entre -pi et pi
    Y_shifted = fftshift(Y)

    # Calcul du vecteur des fréquences normalisées pour [-π, π]
    omega = LinRange(-π, π, n_gamme)

    # Sous-échantillonnage du spectre
    Y_sub = Y_shifted[1:factor_gamme:end]
    omega_sub = omega[1:factor_gamme:end]

    # Affichage du spectre sous-échantillonné

    plot(omega_sub, abs.(Y_sub), xlabel="Fréquence normalisée [-π, π]", ylabel="Amplitude", title="Spectre sous-échantillonné entre [-π, π]")
end
```




```
begin
    # d. Affichage du spectre en -fy/2 et fy/2
    omega2 = LinRange(-fs_gamme/2, fs_gamme/2, n_gamme)

    # Sous-échantillonnage du spectre
    Y_sub2 = Y_shifted[1:factor_gamme:end]
    omega_sub2 = omega2[1:factor_gamme:end]

    # Affichage du spectre sous-échantillonné

    plot(omega_sub2, abs.(Y_sub2), xlabel="Fréquence normalisée [-fy/2, fy/2]",
ylabel="Amplitude", title="Spectre sous-échantillonné entre [-fs/2, fs/2]")
end
```

Y a-t-il une différence entre ces deux représentations du spectre ?

On constate que le spectre est très étendu et que beaucoup de fréquences ne sont pas nécessaires. La fréquence d'échantillonnage de base est donc très rapide : on peut se permettre de la réduire.

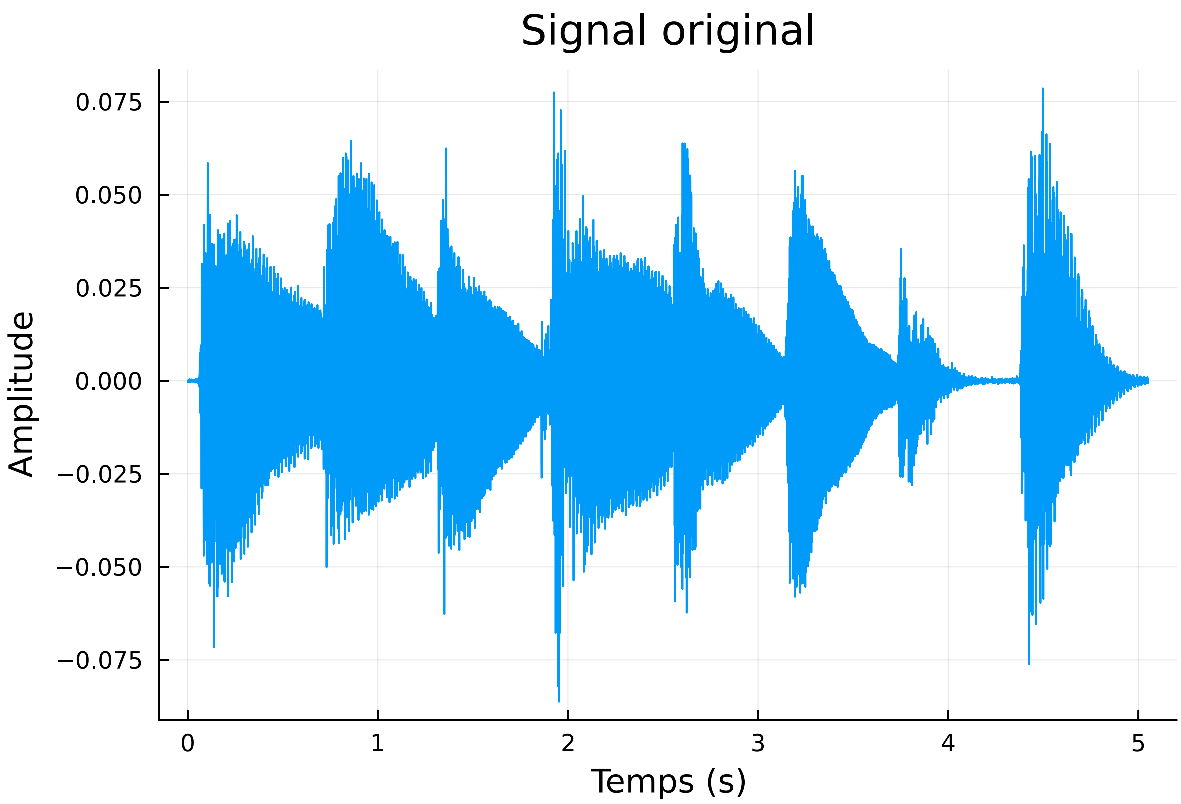
2.3. Retrouver le signal

Admettons qu'on n'ait accès qu'à ce spectre et qu'on souhaite retrouver le signal initial. Pour cela, on va utiliser la transformée de Fourier inverse `ifft` pour **I**nverse **F**ast **F**ourier **T**ransform). Retrouvez le signal $ys(t)$ récupéré depuis le spectre $Y(i\omega)$ du signal initial.

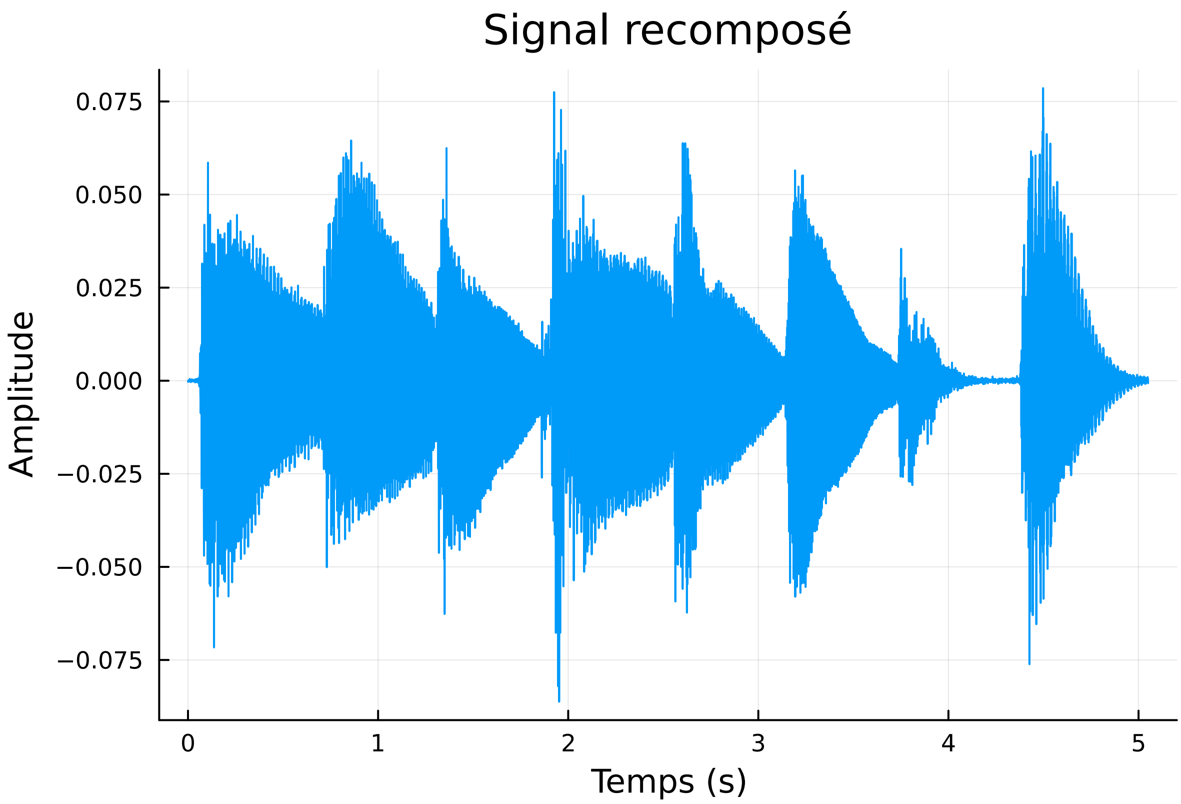
Astuce : attention, votre spectre a été shifté sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Pensez à le ramener à sa bonne place avec `ifftshift`. N'oubliez pas non plus de ne garder que la partie réelle du signal, car des coefficients complexes peuvent traîner à cause des erreurs numériques...

```
[-0.000213623, 0.000366211, -3.05176e-5, -6.10352e-5, 0.000152588, -9.15527e-5, 9.15527e-
```

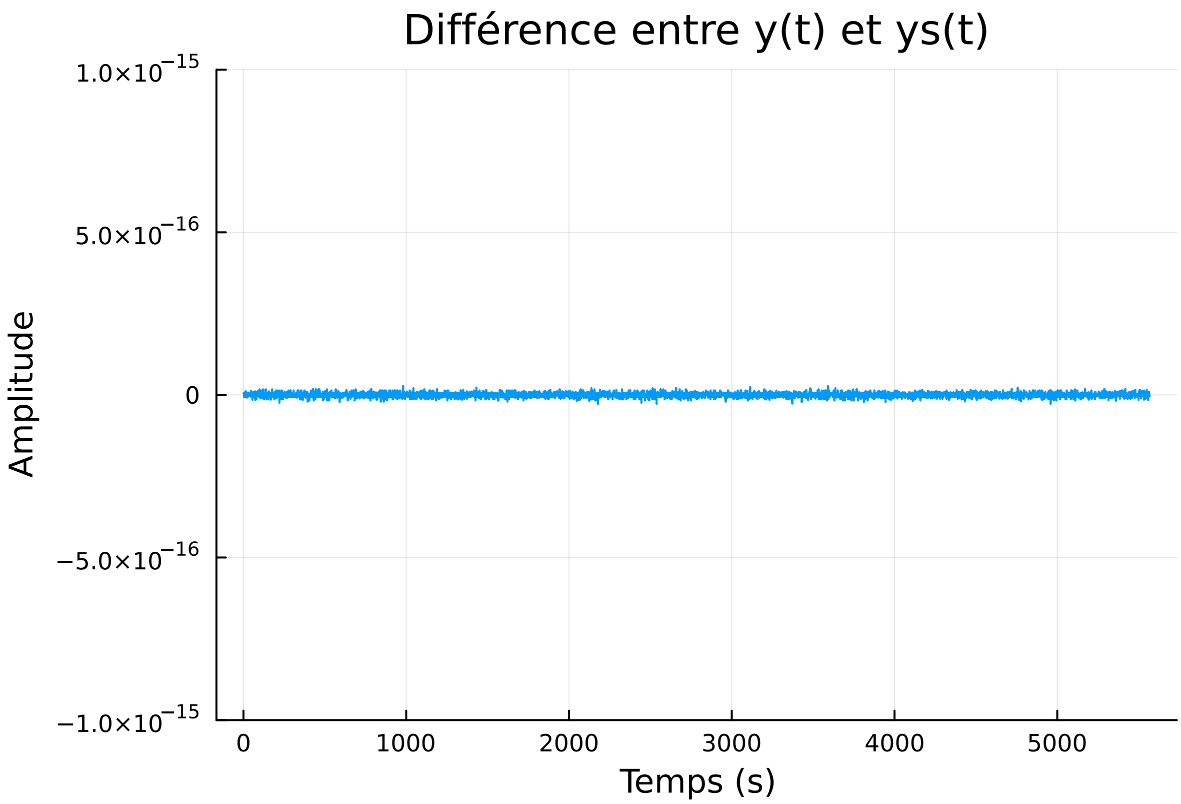
```
# a. Transformée de Fourier Inverse après replacement du spectre en [0, 2pi]
begin
    # Remettre le spectre à sa position originale avec ifftshift
    Y_unshifted = ifftshift(Y_shifted)

    # Appliquer la transformée de Fourier inverse pour récupérer le signal temporel
    ys = real(ifft(Y_unshifted))
end
```




```
# b. Affichage du signal original y
plot(t_gamme, gamme[1:factor_gamme:end], title="Signal original", xlabel="Temps (s)", ylabel="Amplitude", legend=false)
```




```julia
# c. Affichage du signal recomposé ys
plot(t_gamme, ys[1:factor_gamme:end], title="Signal recomposé", xlabel="Temps (s)",
ylabel="Amplitude", legend=false)
```




```
# d. Calcul et affichage de la différence entre le signal original et le signal recomposé
begin
    difference = gamme - ys

    # Affichage de la différence de reconstruction
    plot(difference[1:factor_gamme:end], title="Différence entre y(t) et ys(t)", xlabel="Temps (s)", ylabel="Amplitude", legend=false, ylim=(-1e-15, 1e-15))
end
```

222720

```
#e. Jouez le son du signal recomposé
PortAudioStream() do s
    write(s, ys)
end
```

3. Échantillonnage de signaux

Nous allons sous-échantillonner fortement un signal et observer l'effet sur le signal temporel. Ensuite, nous l'échantillonnerons à une fréquence $f_e = f_{\max}$ qui pourrait paraître suffisante dans le domaine temporel mais qui va mener à du repli spectral lorsqu'on fait un aller-retour dans le domaine de Fourier (par exemple pour filtrer son contenu).

3.1. Création signal

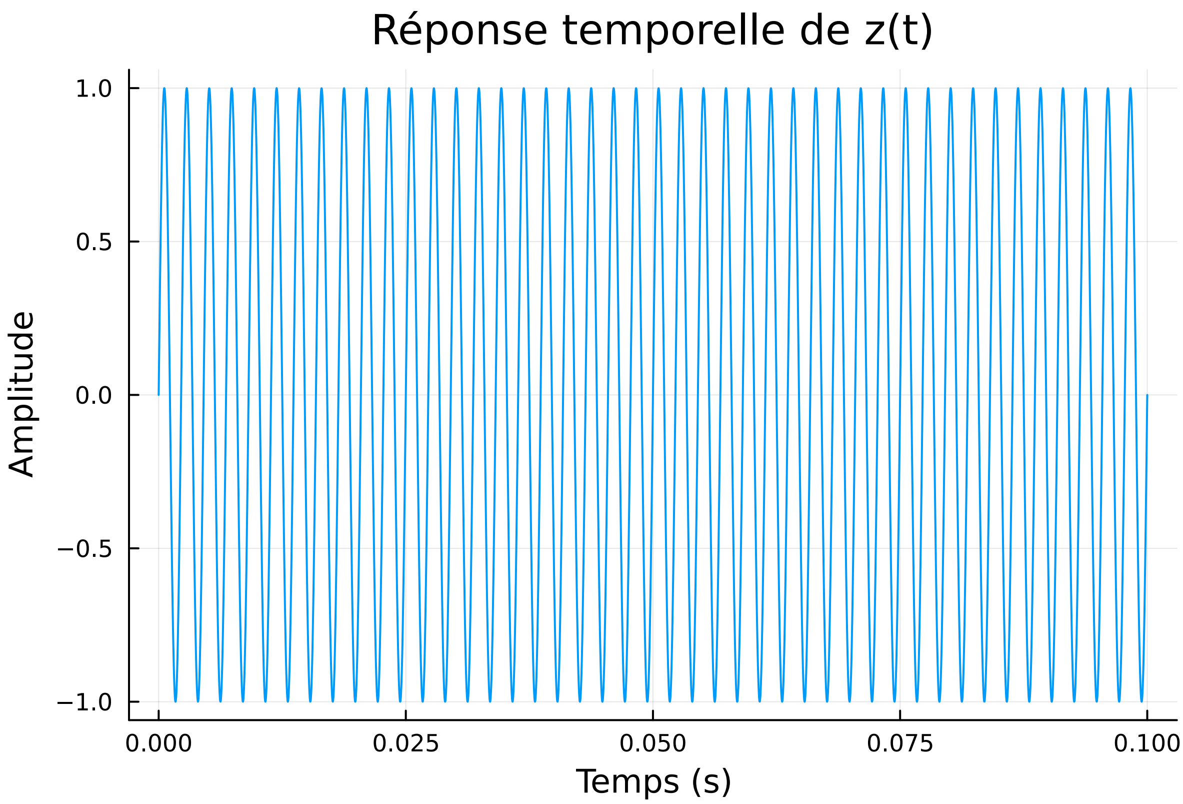
Créer un signal sinusoïdal $z(t) = sin(2\pi ft)$ échantillonné à 44100 Hz, de fréquence $f = 440$ Hz, et durant 0.1 secondes. Écouter le signal et dessiner sa réponse temporelle.

```
[0.0, 0.0626625, 0.125079, 0.187003, 0.248193, 0.308407, 0.367409, 0.424967, 0.480854, 0.5
```

```
begin
    fs = 44100  # Fréquence d'échantillonnage en Hz
    f = 440  # Fréquence de la sinusoïde en Hz
    duration = 0.1  # Durée du signal en secondes

    # Générer le vecteur de temps
    t = LinRange(0, duration, floor(Int, fs * duration))

    # Générer le signal sinusoïdal z(t) = sin(2πft)
    z = sin.(2π * f * t)
end
```

```
4410
```

```
# a. Écouter le signal
PortAudioStream() do stream
    write(stream, z)
end
```




```
# b. Afficher la réponse temporelle
plot(t, z, xlabel="Temps (s)", ylabel="Amplitude", title="Réponse temporelle de z(t)", legend=false)
```

3.2. Echantillonage

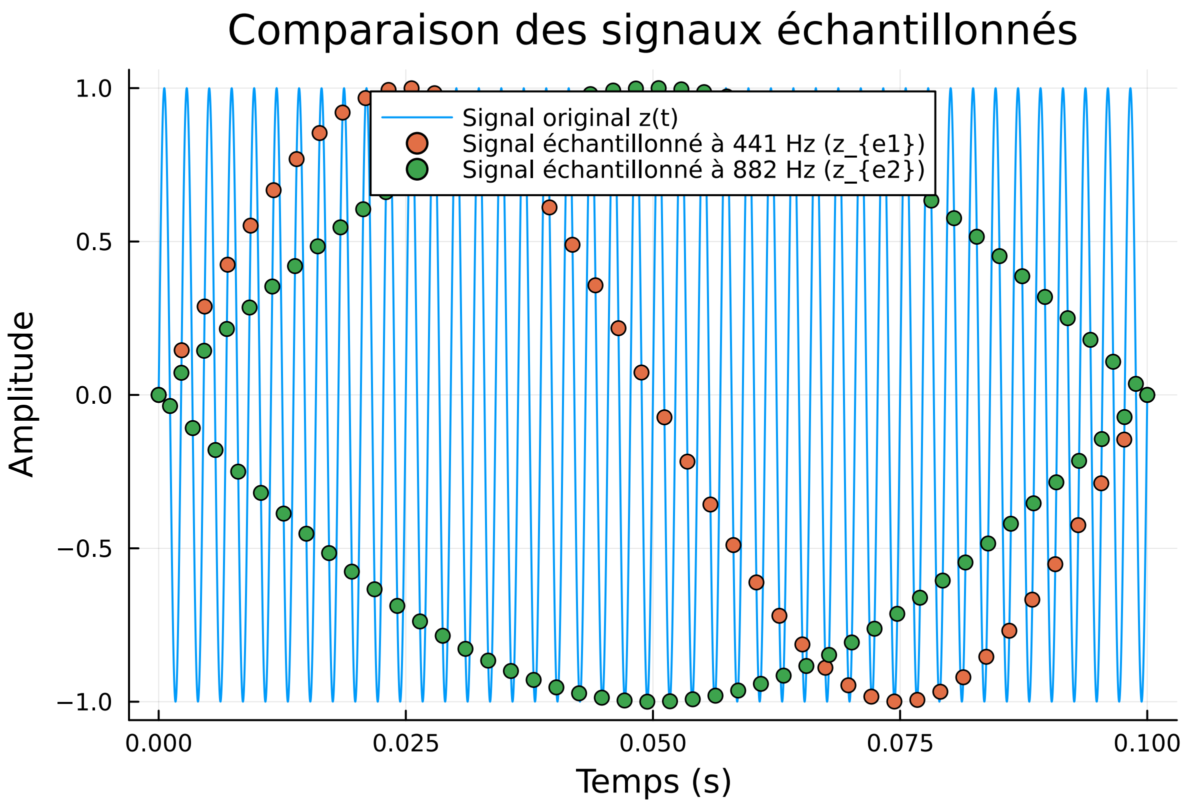
Créer le vecteur z_{e1} et z_{e2} en échantillonnant le sinus à respectivement 441 Hz et 882 Hz. Représenter les échantillons sur un même graphique reprenant $z(t)$, $z_{e1}(t)$ et $z_{e2}(t)$. Que constatez-vous ?

```
[0.0, 0.145601, 0.288099, 0.424457, 0.551768, 0.667319, 0.768647, 0.853593, 0.920346, 0.9
```

```
begin
    # Échantillonnage à 441 Hz
    fs_e1 = 441  # Fréquence d'échantillonnage réduite à 441 Hz
    t_e1 = LinRange(0, duration, floor(Int, fs_e1 * duration))
    z_e1 = sin.(2π * f * t_e1)  # Signal échantillonné à 441 Hz
end
```

```
[0.0, -0.0361024, 0.0721578, -0.108119, 0.143939, -0.179572, 0.21497, -0.250089, 0.284881
```

```
begin
    # Échantillonnage à 882 Hz
    fs_e2 = 882  # Fréquence d'échantillonnage réduite à 882 Hz
    t_e2 = LinRange(0, duration, floor(Int, fs_e2 * duration))
    z_e2 = sin.(2π * f * t_e2)  # Signal échantillonné à 882 Hz
end
```




```julia
begin
    # Représenter les trois signaux sur un même graphique
    plot(t, z, label="Signal original z(t)", xlabel="Temps (s)", ylabel="Amplitude", title="Comparaison des signaux échantillonnés", legend=:top)
    scatter!(t_e1, z_e1, label="Signal échantillonné à 441 Hz (z_{e1})", markersize=4)
    scatter!(t_e2, z_e2, label="Signal échantillonné à 882 Hz (z_{e2})", markersize=4)
end
```

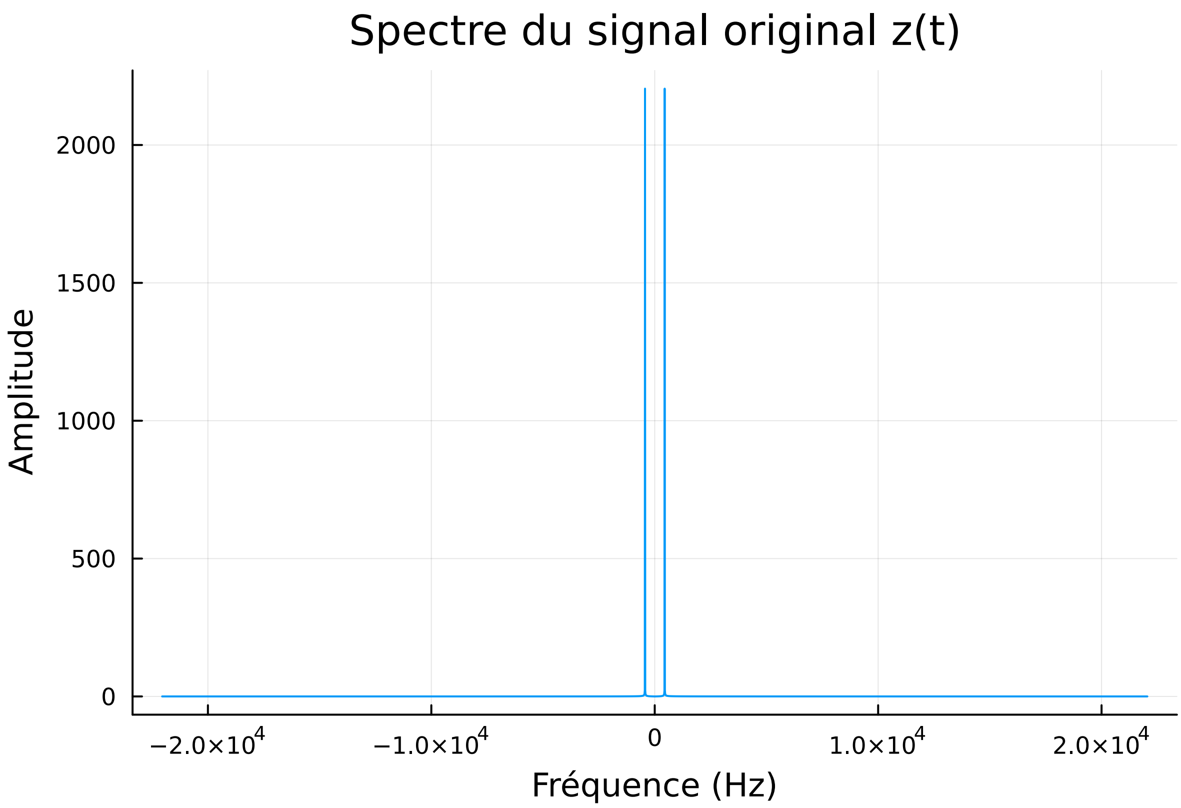
3.3. Spectres

Représentez les trois spectres (module de la T.F.) sur trois subplots en prenant soin de graduer les abscisses en fréquence en Hertz. Que constatez-vous ? Quelles sont les fréquences fondamentales de chaque signal ? Sont-elles cohérentes avec le signal initial joué à 440 Hz ? Laquelle respecte le théorème de Shannon-Nyquist ?

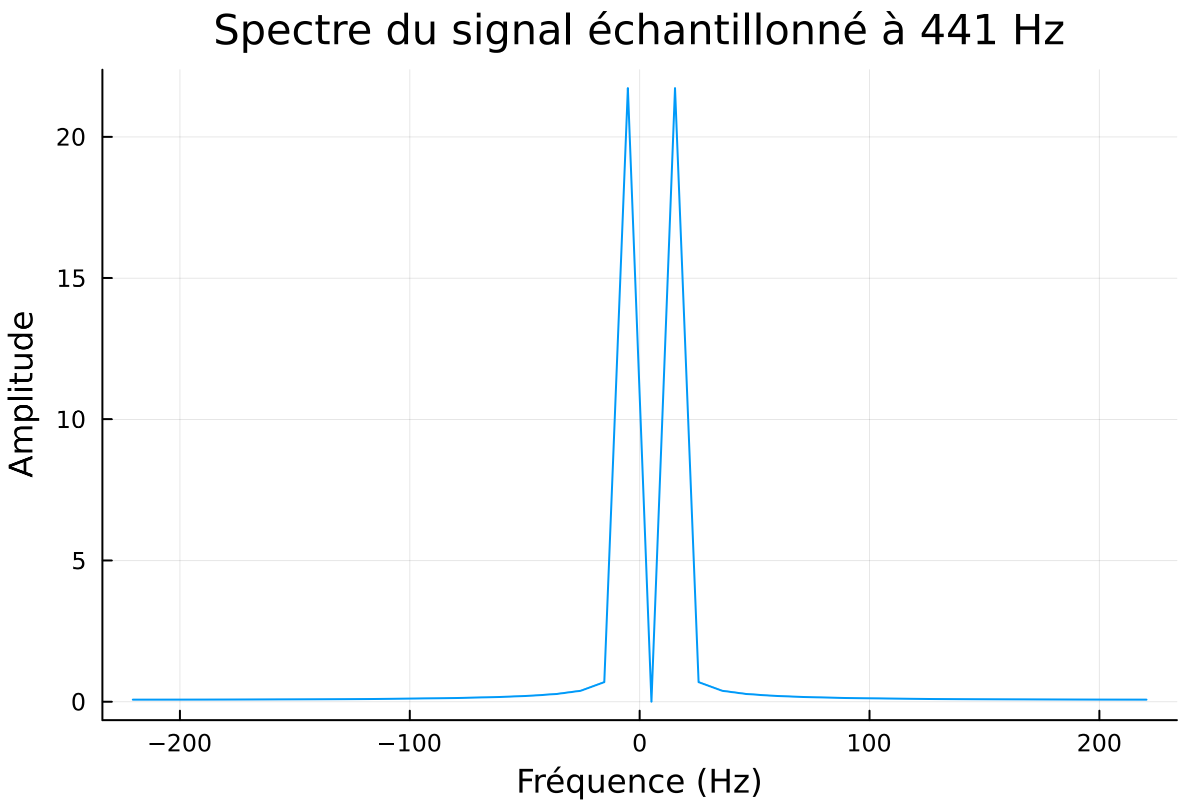
Astuce : n'oubliez pas le `fftshift` !

```
[55.3799, 19.0294, 3.77997, 1.61683, 0.896621, 0.569386, 0.393211, 0.287509, 0.219109, 0.
```

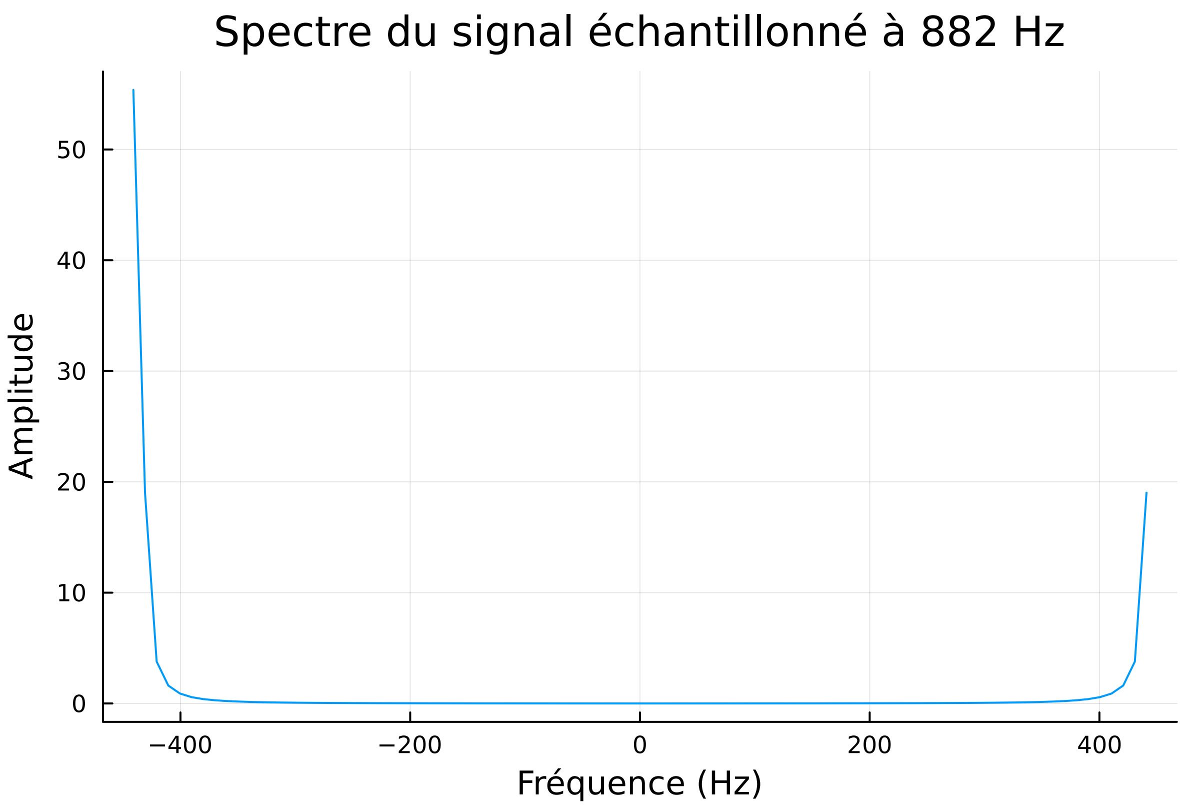
```
begin
    # Calcul de la transformée de Fourier pour chaque signal et application de fftshift
    Y3 = fftshift(fft(z))
    Y_e1 = fftshift(fft(z_e1))
    Y_e2 = fftshift(fft(z_e2))

    # Convertir les fréquences en Hertz
    frequencies = LinRange(-fs/2, fs/2, length(Y3))
    frequencies_e1 = LinRange(-fs_e1/2, fs_e1/2, length(Y_e1))
    frequencies_e2 = LinRange(-fs_e2/2, fs_e2/2, length(Y_e2))

    # Calcul du module de la T.F. (norme)
    Y_abs = abs.(Y3)
    Y_e1_abs = abs.(Y_e1)
    Y_e2_abs = abs.(Y_e2)
end
```




```
plot(frequencies, Y_abs, xlabel="Fréquence (Hz)", ylabel="Amplitude", title="Spectre du signal original z(t)", legend=false)
```




```
plot(frequencies_e1, Y_e1_abs, xlabel="Fréquence (Hz)", ylabel="Amplitude",
title="Spectre du signal échantillonné à 441 Hz", legend=false)
```



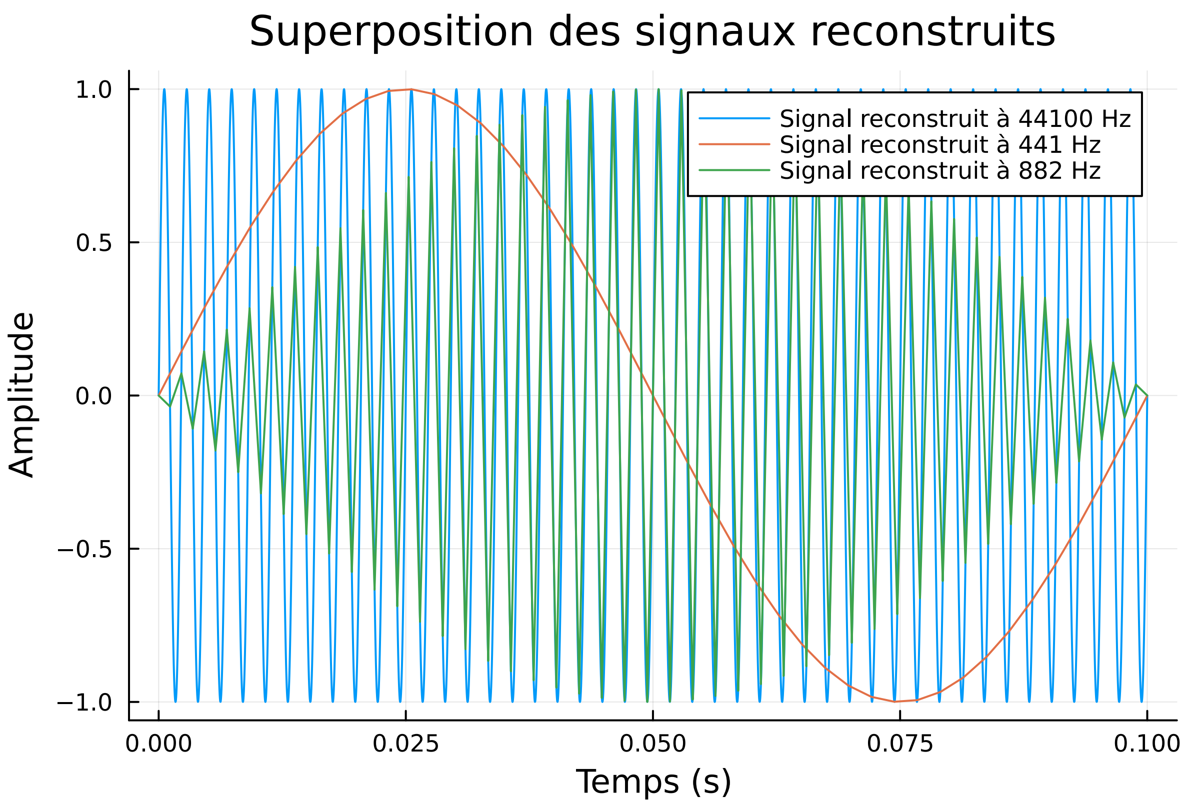

```
plot(frequencies_e2, Y_e2_abs, xlabel="Fréquence (Hz)", ylabel="Amplitude",
title="Spectre du signal échantillonné à 882 Hz", legend=false)
```

3.4. Reconstruction des signaux

Reconstruire les signaux à partir des trois spectres donnés et les superposer sur la même image. Attention : le support n'est pas le même, puisque la fréquence d'échantillonnage est variable.

```
[1.61487e-16, -0.0361024, 0.0721578, -0.108119, 0.143939, -0.179572, 0.21497, -0.250089,
```

```
begin
    # Reconstruction des signaux via la transformée de Fourier inverse
    z_reconstruit = real(ifft(fftshift(Y3)))
    z_e1_reconstruit = real(ifft(fftshift(Y_e1)))
    z_e2_reconstruit = real(ifft(fftshift(Y_e2)))
end
```



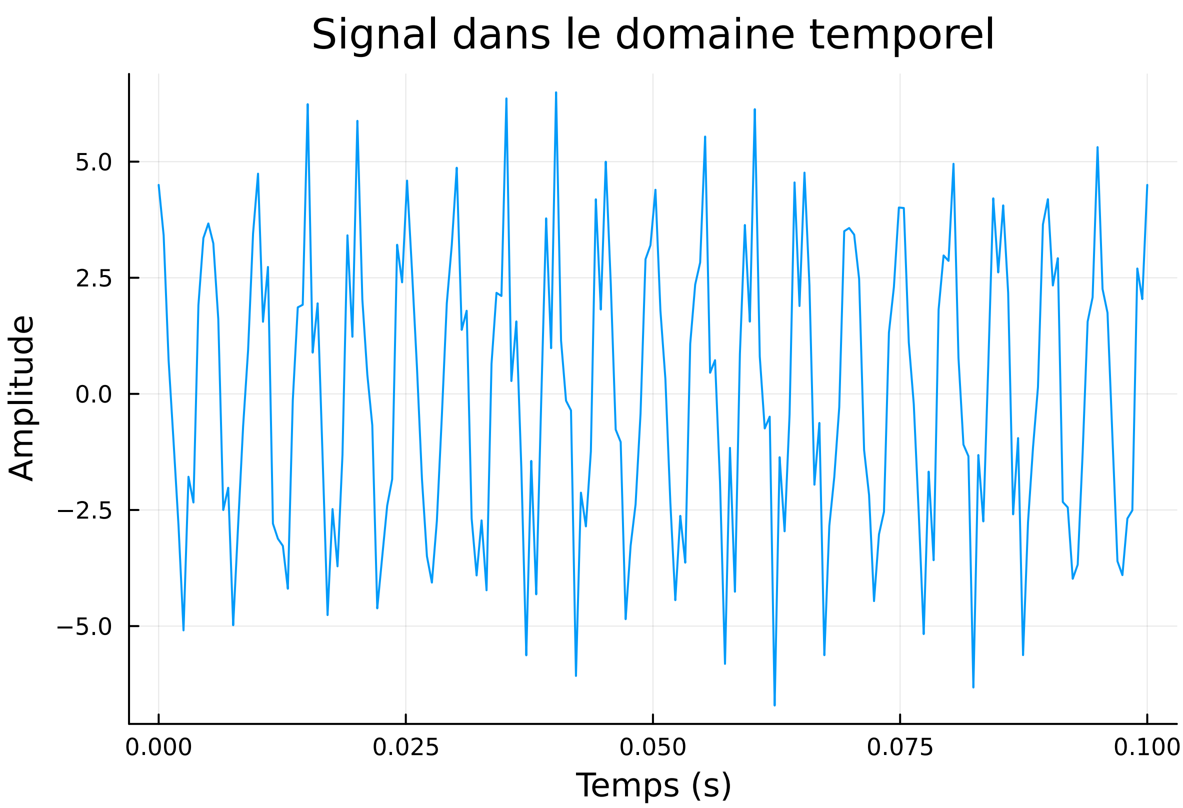

```
begin
    # Superposition des signaux reconstruits sur un même graphique
    plot(t, z_reconstruit, label="Signal reconstruit à 44100 Hz", xlabel="Temps
    (s)", ylabel="Amplitude", title="Superposition des signaux reconstruits")
    plot!(t_e1, z_e1_reconstruit, label="Signal reconstruit à 441 Hz", markersize=4)
    plot!(t_e2, z_e2_reconstruit, label="Signal reconstruit à 882 Hz", markersize=4)
end
```

4. Filtrage d'un sinus bruité par des hautes fréquences

Dans cet exercice, on va tenter de séparer deux sinus mélangés dans le même signal. Considérez un signal $s(t) = 4cos(2pift)$, avec $f = 200$ Hz, d'une durée de 0.1 secondes, échantillonné à 2000 Hz.

```
[4.5, 3.41656, 0.723593, -1.03564, -2.84852, -5.09277, -1.78426, -2.33902, 1.90956, 3.354
```

```
begin
    fs4 = 2000
    f4 = 200
    duration4 = 0.1
    t4 = LinRange(0, duration4, floor(Int, fs4 * duration4))
    s_init = 4 * cos.(2π * f4 * t4)
    z4 = s_init + .5 * cos.(10π * f4 * t4) + 1.1 * sin.(7.5π * f4 * t4) + .8 * sin.
    (8π * f4 * t4) + .9 * sin.(12π * f4 * t4)

end
```



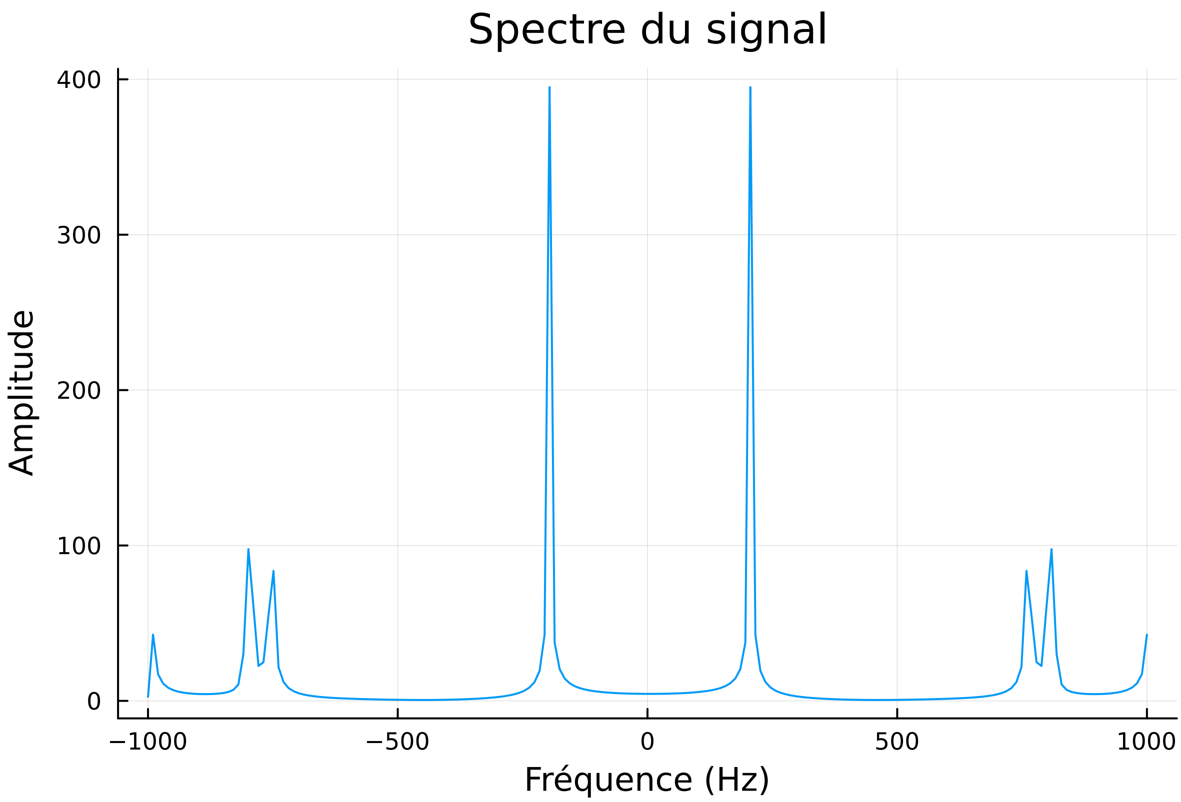

```
plot(t4, z4, xlabel="Temps (s)", ylabel="Amplitude", title="Signal dans le domaine
temporel", label="Signal", legend=false)
```

4.1. Transformée de Fourier

Calculer la transformée de Fourier , puis dessiner le signal et son spectre. Que constatez-vous sur ce spectre ?

```
[2.53368, 42.6532, 17.1674, 11.2002, 8.47517, 6.93217, 5.96224, 5.31894, 4.88416, 4.59553
```

```
begin
    # Calcul de la transformée de Fourier pour chaque signal et application de fftshift
    Y4 = fftshift(fft(z4))

    # Convertir les fréquences en Hertz
    frequencies4 = LinRange(-fs4/2, fs4/2, length(Y4))

    # Calcul du module de la T.F. (norme)
    Y_abs4 = abs.(Y4)
end
```




```
plot(frequencies4, Y_abs4, xlabel="Fréquence (Hz)", ylabel="Amplitude", title="Spectre du signal", legend=false)
```

4.2. Filtres

Réaliser un filtre passe bas limité à 300 Hz, ainsi qu'un filtre passe-bande laissant passer les fréquences entre 500 et 700 Hz. Représenter ces filtres.

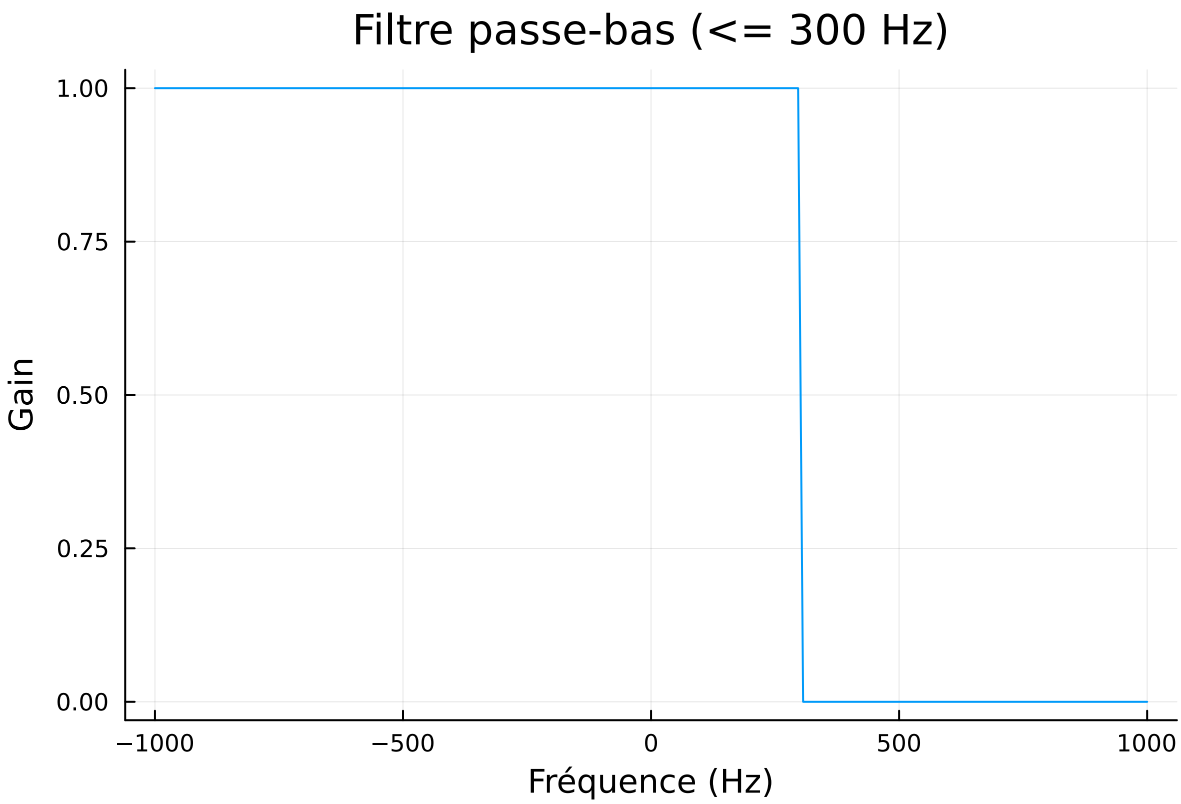
Attention : vérifier que le support de vos filtres soit compatible avec votre spectre !

```
lowpass_filter (generic function with 1 method)
```

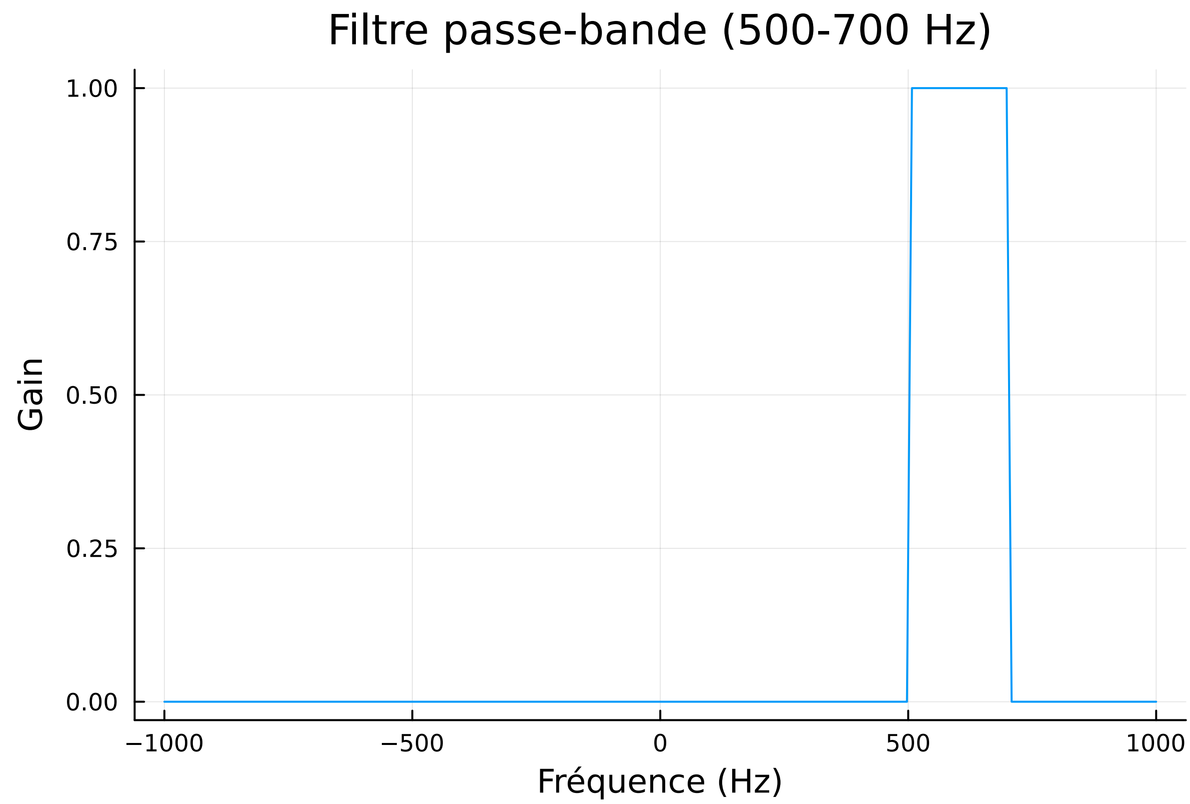
```
# a. Création du filtre passe-bas (limité à 300 Hz)
function lowpass_filter(f_limit, freq)
    lowpass_filter = freq .<= f_limit
    return lowpass_filter
end
```

```
bandpass_filter (generic function with 1 method)
```

```julia
# b. Création du filtre passe-bande (entre 500 et 700 Hz)
function bandpass_filter(f_low, f_high, freq)
    bandpass_filter = (freq .>= f_low) .& (freq .<= f_high)
    return bandpass_filter
end
```




```julia
plot(frequencies4, lowpass_filter(300, frequencies4), label="Filtre passe-bas",
xlabel="Fréquence (Hz)", ylabel="Gain", title="Filtre passe-bas (<= 300 Hz)",
legend=false)
```




```
plot(frequencies4, bandpass_filter(500, 700, frequencies4), label="Filtre passe-bande", xlabel="Fréquence (Hz)", ylabel="Gain", title="Filtre passe-bande (500-700 Hz)", legend=false)
```

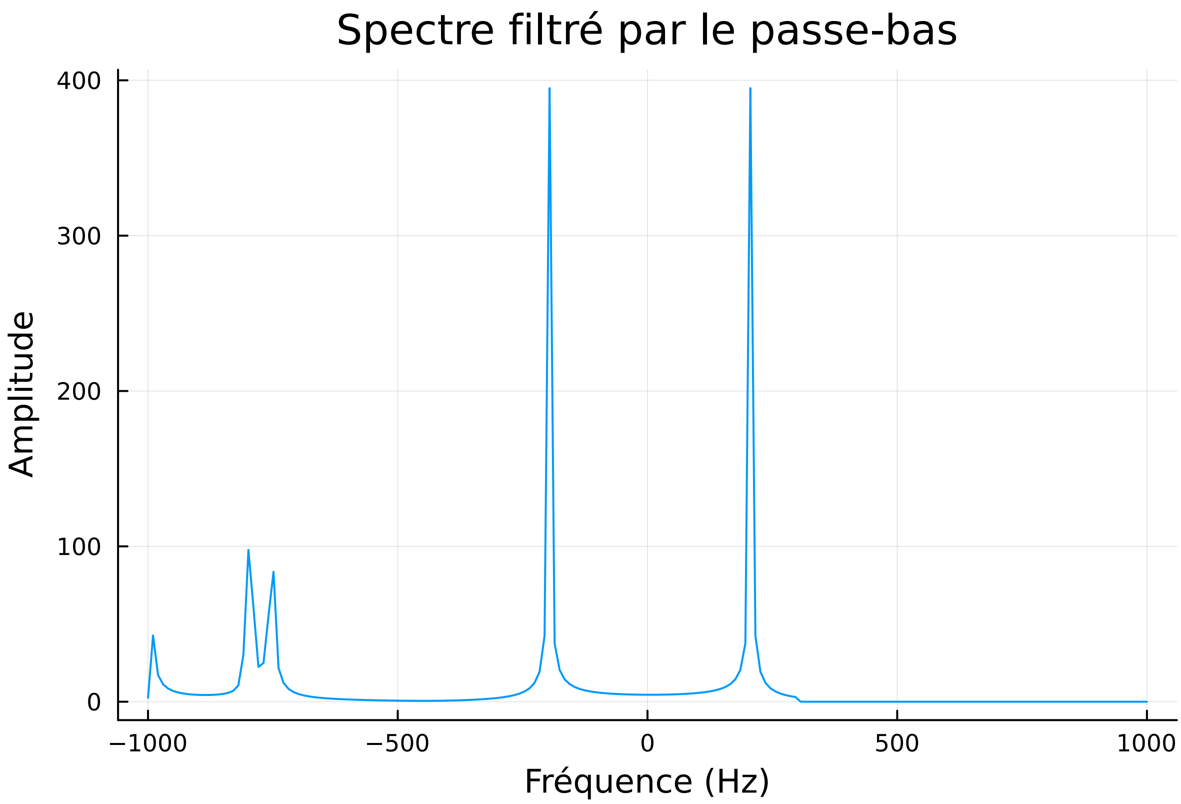
4.3. Ajout des filtres

Multiplier les filtres avec le spectre $S(j\omega)$. Visualiser les spectres filtrés, puis représenter le signal retrouvé par transformée de Fourier inverse.

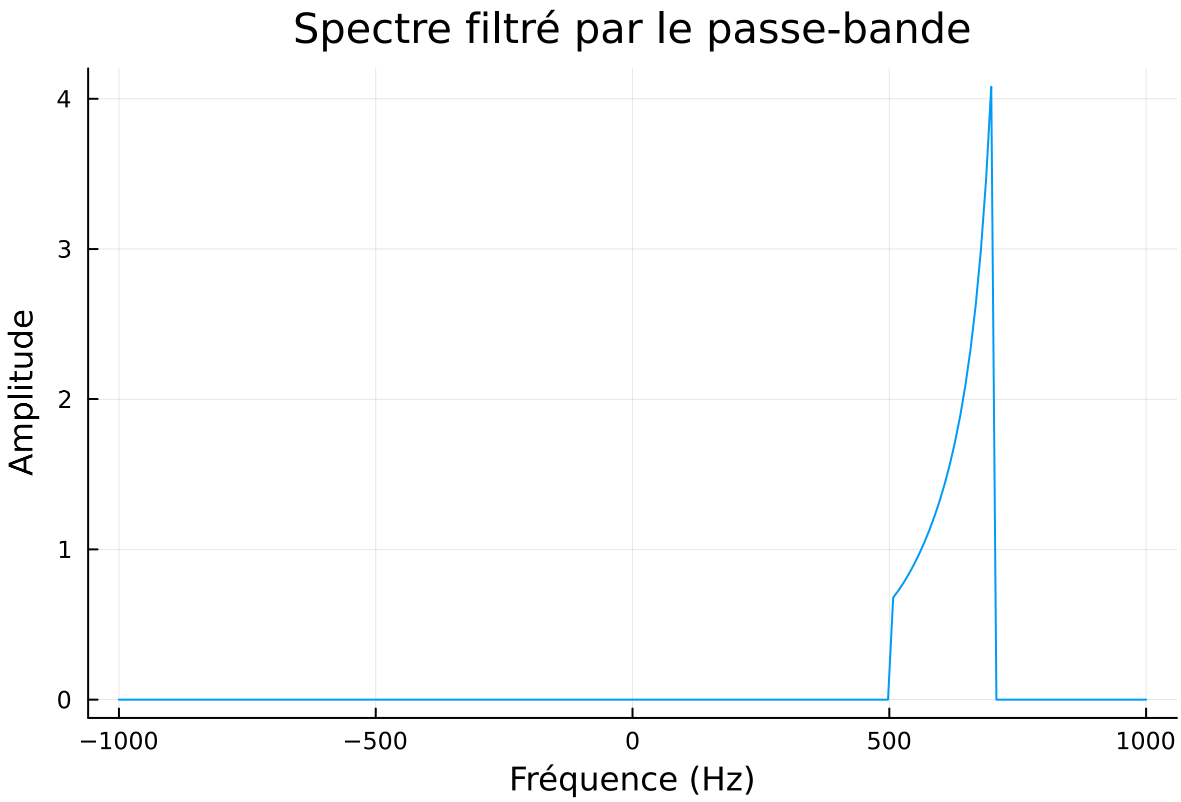
Astuce : ne pas oublier de shifter le spectre avant reconstruction !

```
[-0.0+0.0im, -0.0-0.0im, -0.0-0.0im, -0.0-0.0im, -0.0-0.0im, -0.0-0.0im, -0.0-0.0im, -0.0
```

```
# b. Multiplier les filtres avec le spectre
begin
    S_lowpass = Y4 .* lowpass_filter(300, frequencies4)
    S_bandpass = Y4 .* bandpass_filter(500, 700, frequencies4)
end
```



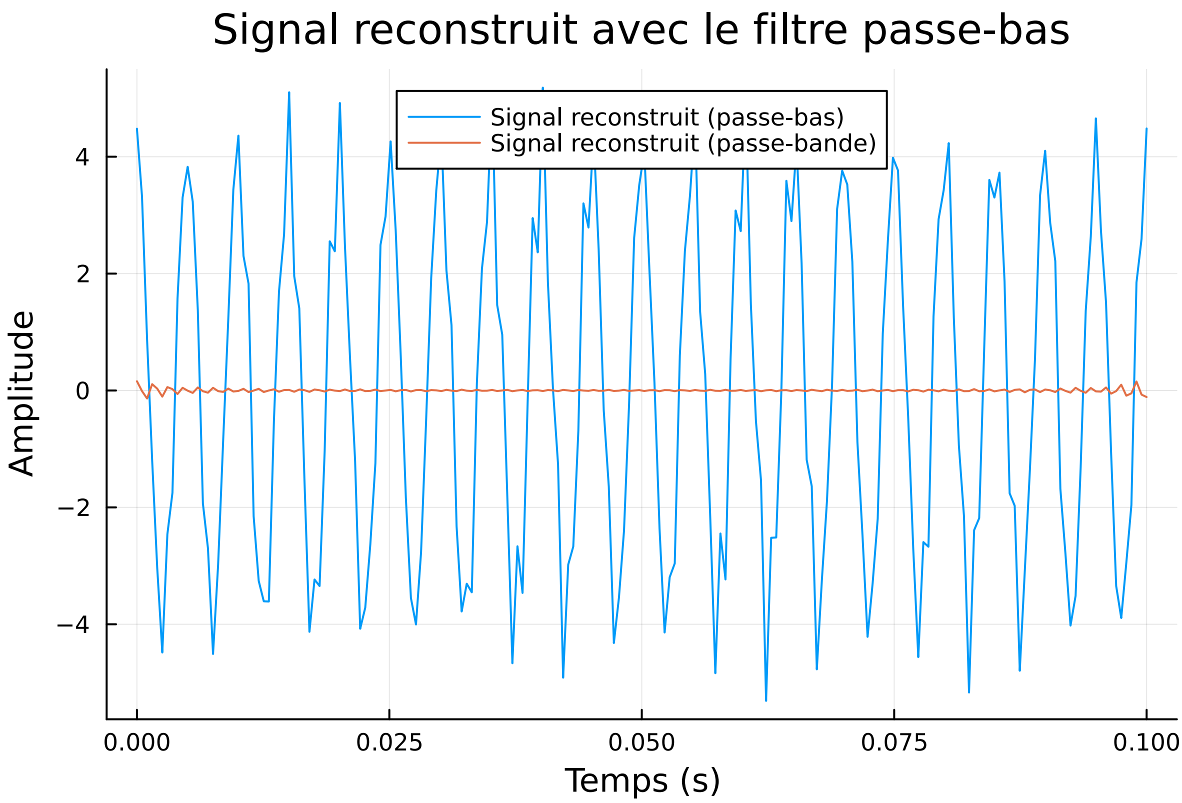

```julia
# c. Visualisation des spectres filtrés
plot(frequencies4, abs.(S_lowpass), xlabel="Fréquence (Hz)", ylabel="Amplitude",
title="Spectre filtré par le passe-bas", legend=false)
```




```julia
plot(frequencies4, abs.(S_bandpass), xlabel="Fréquence (Hz)", ylabel="Amplitude",
title="Spectre filtré par le passe-bande", legend=false)
```

[0.15875, -0.0100587, -0.137368, 0.108462, 0.0316808, -0.105336, 0.0583273, 0.0233729, -0

```
# d. Reconstruction des signaux par transformée de Fourier inverse
begin
    s_lowpass_reconstructed = real(ifft(ifftshift(S_lowpass)))
    s_bandpass_reconstructed = real(ifft(ifftshift(S_bandpass)))
end
```




```
# e. Visualisation des signaux reconstruits dans le domaine temporel
begin
    plot(t4, s_lowpass_reconstructed, label="Signal reconstruit (passe-bas)",
    xlabel="Temps (s)", ylabel="Amplitude", title="Signal reconstruit avec le
    filtre passe-bas", legend=:top)
    plot!(t4, s_bandpass_reconstructed, label="Signal reconstruit (passe-bande)")
end
```

Quatrième partie

Partie 2 - Analyse multivariée

LSINC1113 - Compléments de mathématiques

TP4 - Fonctions à deux variables

Rappels théoriques

Limites de Fonctions de Deux Variables
Pour une fonction $f(x, y)$ de deux variables, la limite en un point (a, b) est définie comme suit :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$$

si, pour toute suite de points (x, y) s'approchant de (a, b), les valeurs de $f(x, y)$ tendent vers L. Il est important de vérifier la limite selon différents chemins pour prouver son existence.

Dérivées Partielles
La dérivée partielle d'une fonction $f(x, y)$ par rapport à x au point (a, b) mesure le taux de variation de f dans la direction x, en gardant y constant. Elle est définie par :

$$f_x(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}.$$

De même, la dérivée partielle par rapport à y est donnée par :

$$f_y(a, b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a, b + k) - f(a, b)}{k}.$$

Les dérivées partielles permettent de déterminer les taux de changement de la fonction dans chaque direction indépendante.

Le Gradient d'une Fonction
Le gradient d'une fonction $f(x, y)$, noté ∇f, est un vecteur qui regroupe les dérivées partielles de f par rapport à x et y :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix}.$$

Le gradient indique la direction de la variation maximale de f et sa norme donne l'intensité de cette variation.

La Matrice Hessienne
La matrice Hessienne d'une fonction $f(x, y)$, notée $H(f)$, est la matrice des dérivées secondes de f par rapport à x et y. Elle est définie comme suit :

$$H(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix},$$

où : - $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ est la dérivée seconde de f par rapport à x, - $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est la dérivée seconde de f par rapport à y, - $f_{xy} = f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ est la dérivée croisée.
La Hessienne est utile pour étudier la courbure de f et pour déterminer la nature des points critiques.

Points Critiques et Nature des Extrémums
Un point critique de $f(x,y)$ est un point où les dérivées partielles de f sont toutes nulles : $f_x = 0$ et $f_y = 0$. Pour déterminer la nature du point critique, on utilise la matrice Hessienne $H(f)$ au point critique (a,b) :

- Si $\det(H(f)(a,b)) > 0$ et $f_{xx}(a,b) > 0$, alors (a,b) est un minimum local.
- Si $\det(H(f)(a,b)) > 0$ et $f_{xx}(a,b) < 0$, alors (a,b) est un maximum local.
- Si $\det(H(f)(a,b)) < 0$, alors (a,b) est un point-selle.
- Si $\det(H(f)(a,b)) = 0$, le test est indéterminé.

1. Limites

Exercice 17. Calculer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$

Exercice 18. Soit $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

(a) Montrer que $f(x,y) \leq x^2 + y^2$ autour de $(0,0)$

2. Dérivation de fonctions à deux variables

Exercice 19. Calculer les dérivées partielles de fonctions ci-dessous aux différents points de leur domaine naturel :

(a) $f(x,y) = \sin(3xy) + e^{-2x^2y} + 2x^3$

(b) $f(x,y) = (x+y)^{-\frac{1}{2}}$

(c) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

(d) $g(x,y) = x\cos(y) + y$

(e) $g(x,y) = \cos^3(5x - y^3) + \ln(3\ln(xy))$

(f) $h(x,y) = \arctan(y\sqrt{x}) + sin^2(3x^2 + xy - 5y^3)$

Exercice 20. Soient $g(x,y) = f(x,y)$ et

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Monter que f est continue à l'origine.

(b) Calculer les dérivées partielles de f à l'origine.

Exercice 21. Calculer la hessienne des fonctions suivantes :

(a) $f(x,y) = x^2 + 5y^2 + 4xy - 2y$

(b) $f(x,y) = 3x^2y + 4x^3y^4 - 7x^9y^4$

(c) $f(x,y) = e^x \sin(y)$

Exercice 22. Calculer le gradient des fonctions suivantes :

(a) $f(x,y) = x + 3y^2$

(b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

(c) $f(x,y) = \dfrac{4y}{(x^2+1)}$

(d) $f(x,y) = 3x^2\sqrt{y}$

Exercice 23. Etudier les points critiques :

(a) $f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4$

(b) $f(x,y) = 3xy - x^2 - y^2$

(c) $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

(d) $f(x,y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

LSINC1113 - Compléments de mathématiques

TP7 - Intégrales multiples

Rappels Théoriques

Intégrales Doubles
L'intégrale double d'une fonction $f(x, y)$ sur une région $D \subset \mathbb{R}^2$ est notée :

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Elle représente la "somme" des valeurs de $f(x, y)$ sur la région D et peut être interprétée comme l'aire sous la surface définie par $f(x, y)$ au-dessus de D.

- Cas des Régions Rectangulaires

Pour une région rectangulaire $R = [a, b] \times [c, d]$, l'intégrale double s'écrit comme :

$$\iint_R f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx.$$

L'ordre d'intégration peut être inversé (en passant de $dx\, dy$ à $dy\, dx$), ce qui peut parfois simplifier le calcul.

- Cas des Régions Délimitées par des Courbes

Si D est une région délimitée par des courbes, les limites d'intégration de y ou de x peuvent dépendre de l'autre variable. Par exemple, pour une région définie par $a \leq x \leq b$ et $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, l'intégrale double est :

$$\iint_D f(x, y)\, dy\, dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dy\, dx.$$

Calcul de l'Aire d'un Domaine
L'aire d'un domaine D peut être calculée en intégrant la fonction constante $f(x, y) = 1$ sur D :

$$\text{Aire}(D) = \iint_D 1\, dx\, dy.$$

Cela revient à calculer l'intégrale double en tenant compte des bornes définissant le domaine.

Changement de Coordonnées en Coordonnées Polaires
Dans certains cas, il est plus simple d'utiliser les coordonnées polaires pour évaluer une intégrale double, en particulier pour les régions circulaires ou ayant une symétrie radiale. En coordonnées polaires, les relations entre (x, y) et (r, θ) sont :

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta,$$

avec $r \geq 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$.
L'élément d'aire en coordonnées polaires est donné par $dx\, dy = r\, dr\, d\theta$. Ainsi, l'intégrale double devient :

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

- Domaine Circulaire ou Annulaire

Pour une région circulaire de rayon R centrée à l'origine, on a $0 \leq r \leq R$ et $0 \leq \theta < 2\pi$. Pour une région annulaire entre les rayons R_1 et R_2, les bornes pour r deviennent $R_1 \leq r \leq R_2$.

- Intégrale de Fonctions Symétriques

Lorsqu'on intègre des fonctions qui dépendent de $x^2 + y^2$, telles que $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$, il est souvent pratique de passer aux coordonnées polaires, car $x^2 + y^2 = r^2$. Cela simplifie les calculs en réduisant les intégrales doubles à des intégrales sur r et θ.

1. Intégration de fonctions à plusieurs variables

Exercice 24. Intégrer la fonction $f(x, y) = 3x^2 - y$ sur la région rectangulaire $R = [0, 2] \times [0, 2]$

Exercice 25. Soit $D = [1, 2] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2$ et $f(x, y) = ye^{xy}$.

(a) Calculer $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(b) Calculer $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

Exercice 26. Soit D le domaine : $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$. Dessiner le domaine d'intégration et calculer $\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ pour les fonctions suivantes :

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

(b) $g(x, y) = xy(x + y)$

Exercice 27. Calculer l'aire du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 4 - x^3\}$,

Exercice 28. Dessiner le domaine d'intégration et calculer l'intégrale double $\iint_D f(x, y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ des fonctions suivantes :

(a) $f(x, y) = x$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0, x - y + 1 \geq 0, x + 2y - 4 \leq 0\}$

(b) $g(x, y) = x + y$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$

(c) $h(x, y) = \cos(xy)$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 2, 0 \leq xy \leq \pi/2\}$

(d) $i(x, y) = \dfrac{1}{(x + y)^3}$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 < x < 3, y > 2, x + y < 5\}$

Exercice 29. En utilisant les coordonnées polaires, calculer les intégrales doubles

(a) $\displaystyle\iint_\Delta \frac{1}{1 + x^2 + y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ avec $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$

(b) $\displaystyle\iint_\Delta \frac{xy}{x^2 + y^2}$ avec $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$

(c) $\displaystyle\iint_\Delta \sqrt{x^2 + y^2}$ avec $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y\}$

Cinquième partie

Partie 2 - Corrections

LSINC1113 - Compléments de mathématiques

TP4 - Fonctions à deux variables

Solution 17. On pose que $u = x^3$: $f(u, y) = \frac{uy}{u^2+y^2}$
On passe ensuite en coordonnées polaires,

$$f(r, \theta) = \frac{r\cos(\theta) r\sin(\theta)}{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} = \frac{\cos(\theta)\sin(\theta)}{1} = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

Si x tend vers zéro, u tend (encore plus vite) vers zéro. $\lim_{\frac{1}{2}} \sin(2\theta)$: quelque soit r, la limite dépend de θ et peut prendre plusieurs valeurs, on a donc pas de valeur unique pour la limite, elle n'existe pas.

Solution 18. On peut passer en polaires : $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$

$$f(r, \theta) = \frac{(r\cos(\theta))^2 (r\sin(\theta))^2}{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} = \frac{r^4 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2}{(r\cos(\theta))^2 + (r\sin(\theta))^2} \leq r^2 \tag{1}$$

$$r^2 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \leq r^2 \tag{2}$$

$$\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2 \leq 1 \tag{3}$$

$\cos(\theta)^2 \sin(\theta)^2$ atteint son maximum en $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ et $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ ce qui donne $\frac{1}{4}$ qui est bien plus petit que 1.

Solution 19. Calculer les dérivées partielles de fonctions ci-dessous aux différents points de leur domaine naturel :

(a)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y\cos(3xy) + (-4xy)\exp(-2x^2 y) + 6x^2,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x\cos(3xy) + (-2x^2)\exp(-2x^2 y)$$

(b)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{3}{2}},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{3}{2}}$$

(c)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x^2+y^2}$$

(d)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x\sin(y) + 1$$

(e)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -15\cos^2(5x-y^3)\sin(5x-y^3) + \frac{1}{x\ln(xy)},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -9y^2\cos^2(5x-y^3)\sin(5x-y^3) + \frac{1}{y\ln(xy)}$$

(f)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{yx^{-\frac{1}{2}}}{2+2(y\sqrt{x})^2} + 2\cos(3x^2+xy-5y^3)(6x+y),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt{x}}{1+(y\sqrt{x})^2} + 2\cos(3x^2+xy-5y^3)(x-15y^2)$$

Solution 20. Soient $g(x,y) = f(x,y)$,

1. Continuité de f à l'origine : Pour montrer que f est continue à l'origine, nous devons vérifier que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

En utilisant les coordonnées polaires, nous avons $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, où $r = \sqrt{x^2+y^2}$ est la distance à l'origine. En remplaçant dans $f(x,y)$, on obtient :

$$f(x,y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)^2}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}.$$

Le numérateur devient :

$$(r\cos\theta)(r\sin\theta)^2 = r^3\cos\theta\sin^2\theta,$$

et le dénominateur devient :

$$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) = r^2.$$

Ainsi, on peut simplifier l'expression de f comme suit :

$$f(x,y) = \frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2} = r\cos\theta\sin^2\theta.$$

Pour montrer que f est continue à l'origine, calculons la limite de $f(x,y)$ lorsque $(x,y)\to(0,0)$, ce qui revient à faire tendre r vers 0 en coordonnées polaires :

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin^2\theta.$$

Comme $\cos\theta$ et $\sin^2\theta$ sont bornés (ils ne dépendent pas de r), on obtient :

$$\lim_{r\to 0} r\cos\theta\sin^2\theta = 0.$$

Donc :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0),$$

ce qui montre que f est continue à l'origine.

2. Calcul des dérivées partielles de f à l'origine :
Pour calculer les dérivées partielles de f en $(0,0)$, nous utilisons la définition des dérivées partielles en coordonnées cartésiennes.
La dérivée partielle de f par rapport à x en $(0,0)$ est donnée par :

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}.$$

En prenant $y = 0$, on a $f(h, 0) = 0$, donc :

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0.$$

La dérivée partielle de f par rapport à y en $(0, 0)$ est donnée par :

$$f_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k}.$$

En prenant $x = 0$, on a également $f(0, k) = 0$, donc :

$$f_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{0-0}{k} = 0.$$

En utilisant les coordonnées polaires, nous obtenons que la fonction f est continue à l'origine, et que les dérivées partielles de f à l'origine sont toutes deux nulles :

$$f_x(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad f_y(0,0) = 0.$$

Solution 21. Les Hessiennes,

1. $f(x, y) = x^2 + 5y^2 + 4xy - 2y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6xy + 12x^2y^4 - 63x^8y^4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 16x^3y^3 - 28x^9y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y + 24xy^4 - 504x^7y^4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 48x^3y^2 - 84x^9y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial yx} = 6x + 48x^2y^3 - 252x^8y^3$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6y + 24xy^4 - 504x^7y^4 & 6x + 48x^2y^3 - 252x^8y^3 \\ 6x + 48x^2y^3 - 252x^8y^3 & 48x^3y^2 - 84x^9y^2 \end{pmatrix}$$

2. $f(x, y) = 3x^2y + 4x^3y^4 - 7x^9y^4$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 10y + 4x - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 10y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial yx} = 4$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

3. $f(x, y) = e^x \sin(y)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \exp(x)\sin(y) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \exp(x)\cos(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \exp(x)\sin(y) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\exp(x)\sin(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial yx} = exp(x)\cos(y)$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Solution 22. Le gradient,

1. $f(x,y) = x + 3y^2$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 6y$$
2. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$
3. $f(x,y) = \frac{4y}{(x^2+1)}$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-8xy}{(x^2+1)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{4}{(x^2+1)}$$
4. $f(x,y) = 3x^2\sqrt{y}$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x\sqrt{y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3x^2}{2\sqrt{y}}$$

Solution 23. Les points critiques,

1. $f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4$
$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4y-4x \\ 4x-4y^3 \end{pmatrix}$$
$$\nabla f = 0 : 4y - 4x = 0 \text{ and } 4x - 4y^3 = 0$$
En résolvant, on a donc :
$$y = xx = 0, 1, -1$$
Les points critiques sont donc : $(0,0), (1,1), (-1,-1)$
Pour connaître leur nature, on calcule la matrice Hessienne :
$$H(f) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{pmatrix}$$
Pour le point $(0,0)$, $\det H = -16$. Le point est donc un point selle.
Pour le point $(1,1)$, $\det H = 48 - 16 = 32$. Le point est donc un maximum local.
Pour le point $(-1,-1)$, $\det H = 48 - 16 = 32$. Le point est donc un maximum local.
2. $f(x,y) = 3xy - x^2 - y^2$
$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3y-2x \\ 3x-2y \end{pmatrix}$$
$$\nabla f = 0 : 3y - 2x = 0 \text{ and } 3x - 2y = 0$$
En résolvant, on a donc :
$$y = \frac{2x}{3}x = 0$$
Les points critiques sont donc : $(0,0)$
Pour connaître leur nature, on calcule la matrice Hessienne :
$$H(f) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$
Pour le point $(0,0)$, $\det H = 4 - 9 = -5$. Le point est donc un point selle.

3. $f(x, y) = 2x^4 + y^4 - x^2 - 2y^2$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 8x^3 - 2x \\ 4y^3 - 4y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = 0 : 8x^3 - 2x = 0 \text{ and } 4y^3 - 4y = 0$$

En résolvant, on a donc :

$$2x = 0 \rightarrow x = 0$$

$$4x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

$$4y = 0 \rightarrow y = 0$$

$$y^2 - 1 = 0 \rightarrow y = \pm 1$$

Les points critiques sont donc : $(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1/2, 0), (-1/2, 0), (1/2, 1), (-1/2, 1), (1/2, -1), (-1/2, -1)$

Pour connaître leur nature, on calcule la matrice Hessienne :

$$H(f) = \begin{pmatrix} 24x^2 - 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

Pour le point $(0, 0)$, $\det H = 8$. Le point est donc un maximum local.
Pour le point $(0, 1)$, $\det H = -16$. Le point est donc un point selle.
Pour le point $(0, -1)$, $\det H = -16$. Le point est donc un point selle.
Pour le point $(-1/2, 0)$, $\det H = -16$. Le point est donc un point selle.
Pour le point $(1/2, 0)$, $\det H = -16$. Le point est donc un point selle.
Pour le point $(1/2, 1)$, $\det H = 32$. Le point est donc un minimum local.
Pour le point $(-1/2, 1)$, $\det H = 32$. Le point est donc un minimum local.
Pour le point $(1/2, -1)$, $\det H = 32$. Le point est donc un minimum local.
Pour le point $(-1/2, -1)$, $\det H = 32$. Le point est donc un minimum local.

4. $f(x, y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 8x - 12y \\ -12x + 18y \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = 0 : 8x - 12y = 0 \text{ and } -12x + 18y = 0$$

En résolvant, on a donc :

$$y = \frac{2x}{3} x = 0$$

Les points critiques sont donc : $(0, 0)$

Pour connaître leur nature, on calcule la matrice Hessienne :

$$H(f) = \begin{pmatrix} 8 & -12 \\ -12 & 18 \end{pmatrix}$$

Pour le point $(0, 0)$, $\det H = 0$. Le point est donc indéterminé.

LSINC1113 - Compléments de mathématiques

TP7 - Intégrales multiples

---

1. Intégration de fonctions à plusieurs variables

Solution 24. Intégrer la fonction $f(x, y) = 3x^2 - y$ sur la région rectangulaire $R = [0, 2] \times [0, 2]$

$$\begin{aligned} I &= \iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_0^2 (3x^2 - y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^2 \left(\int_0^2 (3x^2 - y)\,dx \right) dy \end{aligned}$$

La parenthèse :

$$\begin{aligned} \int_0^2 (3x^2 - y)\,dx &= \int_0^2 3x^2\,dx - \int_0^2 y\,dx \\ &= 3\int_0^2 x^2\,dx - y\int_0^2 1\,dx \\ &= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 - y \cdot [x]_0^2 \\ &= 3 \cdot \frac{8}{3} - y \cdot 2 \\ &= 8 - 2y \end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à intégrer $8 - 2y$ par rapport à y de 0 à 2 :

$$\begin{aligned} I = \int_0^2 (8 - 2y)\,dy &= \int_0^2 8\,dy - \int_0^2 2y\,dy \\ &= 8 \cdot [y]_0^2 - 2 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2 \\ &= 8 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \\ &= 16 - 4 = 12 \end{aligned}$$

L'intégrale de $f(x, y) = 3x^2 - y$ sur la région $R = [0, 2] \times [0, 2]$ est donc :

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = 12.$$

Exercice 30. Soit $D = [1, 2] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2$ et $f(x, y) = ye^{xy}$.

(a) Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(b) Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

Solution 25. Soit $D = [1, 2] \times [0, 2] \subset \mathbb{R}^2$ et $f(x, y) = ye^{xy}$

(a)

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_1^2 (ye^{xy})\,dx\,dy \\ &= \int_0^2 \left(\int_1^2 (ye^{xy})\,dx \right) dy \end{aligned}$$

La parenthèse :

$$\begin{aligned} y\int_1^2 (e^{xy})\,dx &= y\left[\frac{1}{y}e^{xy}\right]_1^2 \\ &= e^{2y} - e^y \end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à intégrer $e^{2y} - e^y$ par rapport à y de 0 à 2 :

$$\begin{aligned} I = \int_0^2 (e^{2y} - e^y)\,dy &= \int_0^2 e^{2y}\,dy - \int_0^2 e^y\,dy \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left[e^{2y}\right]_0^2 - [e^y]_0^2 \\ &= \frac{1}{2}\cdot(e^4 - e^0) - (e^2 - e^0) \\ &= \frac{1}{2}\cdot(e^4 - e^0 - 2e^2 + 2e^0) \\ &= \frac{1}{2}\cdot(e^4 - 2e^2 + 1) \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} I = \iint_D f(x,y)\,dy\,dx &= \int_1^2\int_0^2 (ye^{xy})\,dy\,dx \\ &= \int_1^2 \left(\int_0^2 (ye^{xy})\,dy\right)dx \end{aligned}$$

La parenthèse :
On résout par partie,

$$\begin{aligned} u &= y & v' &= e^{xy} \\ u' &= 1 & v &= \frac{1}{x}e^{xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 (ye^{xy})\,dy &= \left[y\frac{1}{x}e^{xy}\right]_0^2 - \int_0^2 (\frac{1}{x}e^{xy})\,dy \\ &= (\frac{2e^{2x}}{x} - 0) - \left[\frac{e^{xy}}{x^2}\right]_0^2 \\ &= \frac{2e^{2x}}{x} - (\frac{e^{2x}}{x^2} - \frac{1}{x^2}) \\ &= \frac{2e^{2x}}{x} - \frac{e^{2x}}{x^2} + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à intégrer $\frac{2}{xe^{2x}} - \frac{e^{2x}}{x^2} + \frac{1}{x^2}$ par rapport à x de 1 à 2 :

$$I = \int_1^2 (\frac{2e^{2x}}{x} - \frac{e^{2x}}{x^2} + \frac{1}{x^2})\,dx = \int_1^2 \frac{2e^{2x}}{x}\,dx - \int_1^2 \frac{e^{2x}}{x^2}\,dx + \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx$$

On voit que la résolution de ces intégrales est analytiquement compliquée. On va donc procéder à un changement d'ordre dans les intégrales pour se simplifier la vie. On retombe donc sur l'équation du a.

Solution 26. Soit D le domaine : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\}$. Le domaine d'intégration est :

Maintenant, on intègre :

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\begin{aligned} I &= \iint_D f(x,y)\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (x^2+y^2)\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2+y^2)\,dy \right) dx \end{aligned}$$

La parenthèse :

$$\begin{aligned} \int_0^{1-x} (x^2+y^2)\,dy &= \int_0^{1-x} x^2\,dy + \int_0^{1-x} y^2\,dy \\ &= \left[x^2 y\right]_0^{1-x} + \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} \\ &= x^2(1-x) - 0 + \frac{(1-x)^3}{3} - 0 \end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à intégrer $x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3}$ par rapport à x de 0 à 1 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2(1-x) + \frac{(1-x)^3}{3})\,dx &= \int_0^1 x^2(1-x)\,dx + \int_0^1 \frac{(1-x)^3}{3}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 (-4x^3 + 6x^2 - 3x + 1)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\left[-\frac{4x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}\left(-\frac{4}{4} + \frac{6}{3} - \frac{3}{2} + 1\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{6}{3} - \frac{3}{2}\right) \\ &= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(b) $g(x,y) = xy(x+y)$

$$\begin{aligned} I = \iint_D g(x,y)\,dy\,dx &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (xy(x+y))\,dy\,dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (x^2y + xy^2)\,dy \right) dx \end{aligned}$$

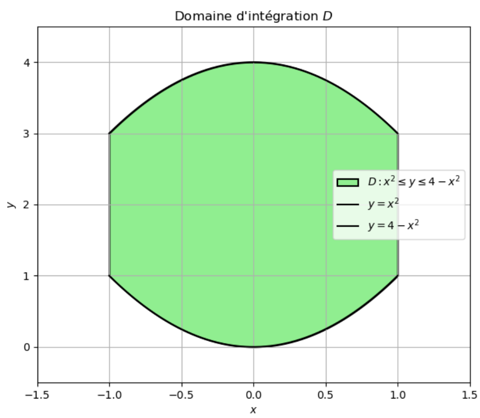
La parenthèse :

$$\begin{aligned} \int_0^{1-x} (x^2y + xy^2)\,dy &= \int_0^{1-x} x^2y\,dy + \int_0^{1-x} xy^2\,dy \\ &= \left[x^2\frac{y^2}{2} \right]_0^{1-x} + \left[\frac{xy^3}{3} \right]_0^{1-x} \\ &= \frac{x^2(1-x)^2}{2} - 0 + \frac{x(1-x)^3}{3} - 0 \end{aligned}$$

Il nous reste maintenant à intégrer $\frac{x^2(1-x)^2}{2} + \frac{x(1-x)^3}{3}$ par rapport à x de 0 à 1 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\frac{x^2(1-x)^2}{2} + \frac{x(1-x)^3}{3}\right) dx &= \int_0^1 \frac{x^2(1-x)^2}{2}\,dx + \int_0^1 \frac{x(1-x)^3}{3}\,dx \\ &= \frac{1}{6}\int_0^1 3x^2(1-x)^2 + 2x(1-x)^3\,dx \\ &= \frac{1}{6}\int_0^1 x^4 - 3x^2 + 2x\,dx \\ &= \frac{1}{6}\left[\frac{x^5}{5} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5} - 1 + 1 \right) \\ &= \frac{1}{30} \end{aligned}$$

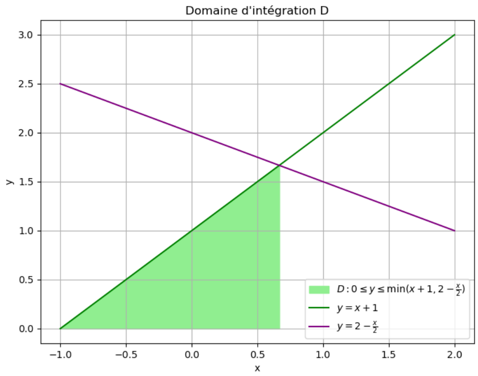
Solution 27. Calculer l'aire du domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 4 - x^3\}$,
Tout d'abord, voici le domaine :



$$\begin{aligned} Aire &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{4-x^2} dy\,dx \\ &= \int_{-1}^1 [y]_{x^2}^{4-x^2}\,dx \\ &= \int_{-1}^1 4 - x^2 - x^2\,dx \\ &= \left[4x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= 4 - \frac{2}{3} - 4\cdot(-1) + \frac{2\cdot(-1)}{3} \\ &= 8 - \frac{4}{3} \\ &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

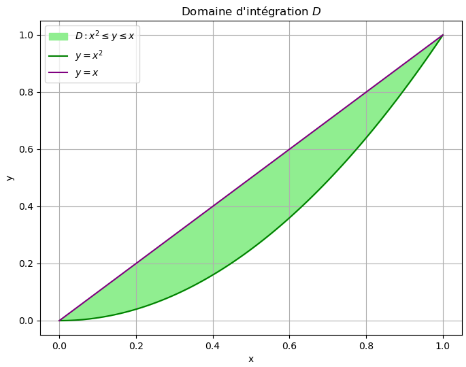
Solution 28. Dessiner le domaine d'intégration et calculer l'intégrale

(a) $f(x, y) = x$



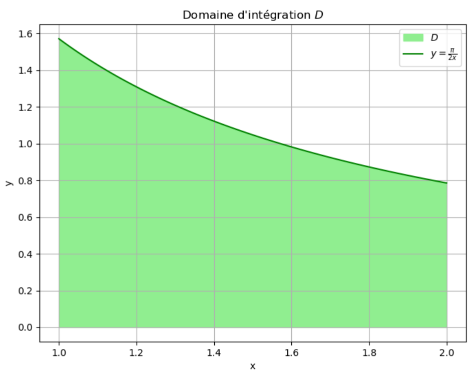
$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{\frac{2}{3}} \int_{0}^{x+1} x \, dy \, dx \\
&= \int_{-1}^{\frac{2}{3}} [xy]_0^{x+1} \, dx \\
&= \int_{-1}^{\frac{2}{3}} x(x+1) \, dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^{\frac{2}{3}} \\
&= \frac{8}{81} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{25}{162}
\end{aligned}
$$

(b) $g(x, y) = x + y$



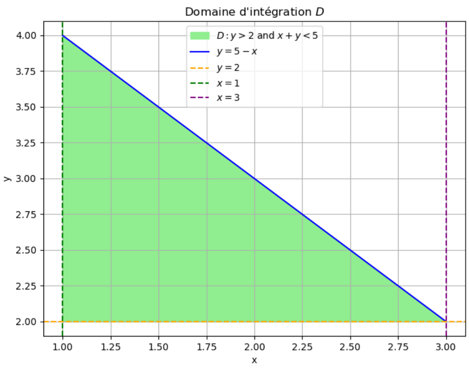
$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_{x^2}^{x} x + y \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^{x} \, dx \\
&= \int_0^1 \left(x \cdot x + \frac{x^2}{2} - x \cdot x^2 - \frac{x^4}{2} \right) \, dx \\
&= \int_0^1 \frac{3x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \, dx \\
&= \left[\frac{3x^3}{6} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right]_0^1 \\
&= \frac{3}{6} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} \\
&= \frac{3}{20}
\end{aligned}
$$

(c) $h(x, y) = \cos(xy)$



$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^2 \int_0^{\frac{\pi}{2x}} \cos(xy) \, dy \, dx \\
&= \int_1^2 \left[\frac{\sin(xy)}{x} \right]_0^{\frac{\pi}{2x}} \, dx \\
&= \int_1^2 \frac{1}{x} (\sin(\frac{\pi}{2}) - 0) \, dx \\
&= \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx \\
&= [\log(x)]_1^2 \\
&= \log(2) - \log(1) \approx 0.6931
\end{aligned}
$$

(d) $i(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^3}$



$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^3 \int_2^{5-x} \frac{1}{(x+y)^3}\, dy\, dx \\
&= \int_1^3 \left[\frac{-1}{2(x+y)^2}\right]_2^{5-x} dx \\
&= \int_1^3 \frac{-1}{2(x+5-x)^2} - \frac{-1}{2(x+2)^2}\, dx \\
&= \int_1^3 \frac{-1}{2(5)^2} - \frac{-1}{2(x+2)^2}\, dx \\
&= \left[\frac{-x}{50} + \frac{-1}{2(x+2)}\right]_1^3 \\
&= \frac{-3}{50} - \frac{-1}{50} + \frac{-1}{2(3+2)} - \frac{-1}{2(1+2)} \\
&= \frac{2}{75}
\end{aligned}
$$

Solution 29. Pour ces intégrales, nous allons utiliser les coordonnées polaires, où $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, avec $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$.

(a) Le domaine Δ est défini par :

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 < x^2 + y^2 \le 1$$

Cela devient en coordonnées polaires :
$0 \le r \le 1$,
$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (car $x \ge 0$ et $y \ge 0$)
L'intégrale devient alors :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{1}{1+r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

En utilisant la substitution $u = 1 + r^2 \Rightarrow du = 2r\,dr$. Les bornes sont aussi modifiées, u varie de 1 à 2 et on obtient :

$$\int_0^1 \frac{1}{1+r^2}\, r\, dr = \int_1^2 \frac{1}{2u}\, du = \frac{1}{2}\ln(u)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln(2)$$

L'intégrale devient :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(2)}{2}\, d\theta = \frac{\ln(2)}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi\ln(2)}{4}$$

(b) Le domaine Δ est défini par :

$$x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 4$$

Cela devient en coordonnées polaires :
$1 \le r \le 2$,
$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (car $x \ge 0$ et $y \ge 0$)

En coordonnées polaires, $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, donc :

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \Rightarrow f(r,\theta) = \frac{r\cos\theta \cdot r\sin\theta}{r^2} = \cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

L'intégrale devient :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^2 \frac{1}{2}\sin(2\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

En intégrant par rapport à r :

$$\int_1^2 \frac{1}{2}\sin(2\theta)\, r\, dr = \frac{1}{2}\sin(2\theta)\cdot \frac{r^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\sin(2\theta)\cdot\frac{4-1}{2} = \frac{3}{4}\sin(2\theta)$$

puis par rapport à θ :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4}\sin(2\theta)\, d\theta = \frac{3}{4}\cdot\left[-\frac{\cos(2\theta)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

(c) Le domaine Δ est défini par :

$$x \geq 0, \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2y.$$

En coordonnées polaires, $x^2 + y^2 = r^2$ et $y = r\sin\theta$, donc $r^2 \leq 2r\sin\theta$ ou $r \leq 2\sin\theta$ pour $\sin\theta \neq 0$.

Ainsi, les bornes deviennent :
$1 \leq r \leq 2\sin\theta$
$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

L'intégrale est :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{2\sin\theta} r \cdot r\, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^{2\sin\theta} r^2\, dr\, d\theta$$

En intégrant par rapport à r :

$$\int_1^{2\sin\theta} r^2\, dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^{2\sin\theta} = \frac{(2\sin\theta)^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{8\sin^3\theta - 1}{3}$$

L'intégrale devient alors :

$$\begin{aligned} I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8\sin^3\theta - 1}{3}\, d\theta &= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8\sin^3\theta - 1)\, d\theta \\ &= \frac{1}{3}(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (8\sin^3\theta)\, d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, d\theta) \\ &= \frac{1}{3}(\frac{16}{3} - \frac{\pi}{2}) \\ &\approx 1.2541 \end{aligned}$$