

חשמל ומגנטיות – תרגול 3

1 חוק גאוס הדיפרנציאלי

1.1 אופרטור הדיברגנץ

הדיברגנץ מקבל שדה וקטורי (כלומר, פונקציה של המרחב שמחזירה מספר עבור כל נקודה). הדיברגנץ נקרא אופרטור דיפרנציאלי כי הקשר הוא על ידי גזירה.

לדיברגנץ יש הגדרה כללית, שאינה תלויה בקואורדינטות: עבור שדה וקטורי $\vec{E}(\vec{r})$, הדיברגנץ בנקודה \vec{r} , אותו נסמן $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$, הוא השטף של השדה הוקטורי שיוצא מאלמנט נפח אינפיניטסימאלי סביב הנקודה, חלקי גודל אלמנט הנפח:

$$\text{Div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{dv \rightarrow 0} \frac{\vec{E} \cdot d\vec{S}}{dv}$$

כאשר $d\vec{S}$ הוא אלמנט שטח של מעטפת הנפח dv , ופונה החוצה. שימו לב שבהגדרה הזו סכמנו על גודל סקלארי. בהתאמה, הסימון $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ כולל מכפלה סקלארית גם כן¹. ההגדרה הזו מאפשרת לנו לכתוב את הדיברגנץ גם בקואורדינטות: דוגמה לפיתוח שכזה נמצאת בנספח שבסוף התרגול.

הדיברגנץ בקואורדינטות

בקואורדינטות קרטזיות המקור לסימון עם המכפלה הסקלארית מתבהר:

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

בקואורדינטות גליליות וספריות המצב קצת יותר מסובך. בקואורדינטות גליליות*:

$$\vec{E} = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta} + E_z \hat{z}; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

¹יש לכתוב גם סיבה מבחינת ההגדרה: נראה היבט של תופעה זו במקרה של הנוסחה בקואורדינטות קרטזיות, אבל הסבר מלא לא ניתן במסגרת הקורס.

$$\vec{E} = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta} + E_\varphi \hat{\varphi}; \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}$$

1.2 הקשר בין צפיפות מטען לשדה

בהינתן השדה נוכל לחשב את התפלגות המטען הנפחית באמצעות חוק גאוס הדיפרנציאלי

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

התפלגות המטען המשטחית נמצאת רק במקומות בהם יש אי-רציפות בשדה החשמלי (כלומר "קפיצה" בשדה החשמלי). לכן נחשב את צפיפות המטען המשטחית במקומות בהם השדה אינו רציף.

$$\sigma = \epsilon_0 \Delta \vec{E} \cdot \hat{n} = \epsilon_0 (\vec{E}_{a+} - \vec{E}_{a-}) \cdot \hat{n}$$

במקרה בו נקודת האי-רציפות היא a ו \hat{n} הוא הנורמאל למשטח.

במקרים בהם השדה מתבדר, נצפה גם להתפלגות נקודתית או קווית (בנקודת ההתבדרות), על מנת לחשב את המטען בהתבדרות ניתן להשתמש בחוק גאוס האינטגרלי.

1.3 דוגמה 1: צפיפות מטען עם התפלגות גלילית

גליל אינסופי ברדיוס R טעון בצפיפות נפחית $\rho(r) = \alpha r$ (עבור α קבוע כלשהו). מה השדה החשמלי בכל המרחב?

פתרון

אפשר לפתור בעיה זו באמצעות חוק גאוס האינטגרלי, כפי שראינו שבוע שעבר, אבל הפעם נשתמש בחוק גאוס הדיפרנציאלי :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

מסימטריית הבעיה נוכל להסיק כי אם נכתוב את השדה בקואורדינטות גליליות, רק הכיוון הרדיאלי ישאר והוא יהיה תלוי רק ברדיוס : הפתרון יהיה מהצורה $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r) \hat{r}$

נשתמש בדיברגנץ הגלילי ונכתוב את חוק גאוס הדיפרנציאלי :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r(r)) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

זו משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון, אז נצטרך תנאי שפה אחד. במקרה שלנו צפיפות המטען היא נפחית בלבד, ובפרט אין סינגולריות בראשית (מטען או תיל), אז נוכל להסיק שהשדה מתאפס על ציר ה-z. באופן כללי, המשוואה תפתר בצורה הבאה:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r(r)) &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho(r)r \\ \Rightarrow E_r(r) &= \frac{1}{r\epsilon_0}\int_0^r \rho(r')r'dr'\end{aligned}$$

ובמקרה שלנו נקבל

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\alpha r^2}{3\epsilon_0} \hat{r} & r < R \\ \frac{\alpha R^3}{3\epsilon_0 r} \hat{r} & R < r \end{cases}$$

מהשדה לצפיפות המטען

בתור "בדיקת שפיות", נחשב את צפיפות המטען המתקבלת משדה זה דרך חוק גאוס הדיפרנציאלי:

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}) &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \epsilon_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rE_r(r)) + 0 \right) \\ &= \begin{cases} \epsilon_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\alpha r^2}{3\epsilon_0} \right) \right) & r < R \\ \epsilon_0 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\alpha R^3}{3\epsilon_0 r} \right) \right) & R < r \end{cases} = \begin{cases} \epsilon_0 \frac{\alpha}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r^3) \right) & r < R \\ \epsilon_0 \frac{\alpha R^3}{3\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(1) \right) & R < r \end{cases} = \begin{cases} \frac{\alpha}{3} \left(\frac{1}{r} 3r^2 \right) & r < R \\ \frac{\alpha R^3}{3} \left(\frac{1}{r} 0 \right) & R < r \end{cases} \\ &= \begin{cases} \alpha r & r < R \\ 0 & R < r \end{cases}\end{aligned}$$

ואכן חזרנו לנקודת המוצא.

1.4 דוגמה 2: צפיפות מטען עם התפלגות גלילית

נתונה קליפה כדורית ברדיוס R שמרכזו בראשית הצירים והיא טעונה בצפיפות מטען משטחית תלויה מיקום $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$, כאשר $\theta \in [0, \pi]$ היא הזווית הפולארית בקואורדינטות כדוריות.

• חשבו את השדה החשמלי בנקודה שרירותית על ציר ה-z.

• הראו מפורשות שבנקודות $\vec{r} = \pm R\hat{z}$ השדה אינו רציף, ושגודל הקפיצה פרופורציוני לצפיפות המשטחית בנקודות אלו

$$\Delta E_z(\vec{r} = \pm R\hat{z}) = \frac{\pm \sigma(\vec{r} = \pm R\hat{z})}{\epsilon_0}$$

1. ניתן לרשום את השדה כאינטגרל משטחי של תרומות אלמנטיות מטען על הקליפה. אנו ננקוט בדרך קיצור – נחלק את הקליפה להרבה טבעות דקות בעובי אינפיניטסימלי dl שבכל אחת מהן צפיפות המטען קבועה. אלו הטבעות המוגדרות ע"י זווית פולרית בתחום הזוויות $[\theta, \theta + d\theta]$, רדיוסן $R' = R \sin \theta$ ועוביין $dl = R d\theta$. לטבעות אלו צפיפות מטען ליחידת אורך שפרופורציונלית לצפיפות המטען המשטחית כפול עוביין: $\lambda = \sigma(\theta) dl = \sigma(\theta) R d\theta$. את אלמנט השדה הנתרם מכל טבעת כזו ניתן לחשב בעזרת הנוסחה לשדה של טבעת ברדיוס R' בגובה h מעל המרכז שלה, אותה חישובתם בשיעור:

$$\vec{E}(h) = \frac{k\lambda \cdot 2\pi R' \cdot h}{(h^2 + R'^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}$$

נציב את הגדלים הרלוונטיים אלינו כדי לקבל את אלמנט השדה שכל טבעת יוצרת:

$$d\vec{E} = \frac{2\pi k R^2 \sigma(\theta) \sin \theta (z - R \cos \theta) d\theta}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta)^{\frac{3}{2}}}$$

נעבור למשתנה $x = \cos \theta$ ונשתמש בפתרון אינטגרל נתון

$$\int_{-1}^1 \frac{x(a-x)}{(1+a^2-2ax)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{2-|a|^3 + (2+|a|^3) \operatorname{sign}(|a|-1)}{3|a|^3}$$

כדי לקבל

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 2\pi k \sigma_0 \frac{-2}{3} \hat{z} & |z| < R \\ 2\pi k \sigma_0 \frac{4R^3}{3|z|^3} \hat{z} & R < |z| \end{cases}$$

2. השדה סימטרי על ציר ה- z , ולכן מספיק לטפל בנקודה $\vec{r} = R\hat{z}$. בנקודה זו, הקפיצה בשדה היא

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= 2\pi k \sigma_0 \frac{4R^3}{3R^3} \hat{z} - 2\pi k \sigma_0 \frac{-2}{3} \hat{z} \\ &= 2\pi k \sigma_0 \left(\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \right) \hat{z} \\ &= 4\pi k \sigma_0 \hat{z} \\ \Rightarrow \Delta E_z &= \epsilon_0 \sigma_0 \end{aligned}$$

ואכן

$$\begin{aligned} \sigma(\vec{r} = R\hat{z}) &= \sigma(R, \theta = 0) = \sigma_0 \cos 0 = \sigma_0 \\ \sigma(\vec{r} = -R\hat{z}) &= \sigma(R, \theta = \pi) = \sigma_0 \cos \pi = -\sigma_0 \end{aligned}$$

כנדרש.

1.5 צפיפויות מטען סינגולאריות

1.5.1 דוגמה 3: שדה של דיפול

דיפול חשמלי הוא התפלגות מטען של זוג מטענים $\pm q$ שווים בגודלם והפוכים בסימנם, הנמצאים במרחק d זה מזה, בגבול בו הם מאוד קרובים, אבל המכפלה qd קבועה.

1. מה השדה החשמלי בגבול זה?

2. מה הדיברגנץ של שדה זה?

פתרון סעיף 1 – שדה הדיפול

בתרגול 1 פיתחנו את השדה בגבול זה באמצעות קירוב $d \ll r$ וקיבלנו את השדה בסדר מוביל.

$$\vec{E} = \frac{kqd}{r^3} [3 \cos \theta \hat{r} - \hat{z}] + O\left(\left(\frac{d}{r}\right)^2\right)$$

כאשר θ (הזווית בין ציר ה- z לוקטור \vec{r}), וכן r, \hat{r} , כולם מוגדרים כמו בקואורדינטות ספריות. נגדיר את וקטור הדיפול על ידי $\vec{p} = dq\hat{z}$, ונכתוב באמצעותו את שדה הדיפול:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p}}{r^3} \right] + O\left(\left(\frac{d}{r}\right)^2\right)$$

כתיבה באמצעות וקטור הדיפול תאפשר לנו לכתוב בהמשך קירובים של התפלגויות מטענים כלליות יותר, כחלק משיטה שתקרא פיתוח מולטיפולי.

פתרון סעיף 2 – הדיברגנץ של השדה

נשתמש בחוק גאוס הדיפרנציאלי. התפלגות המטען שתקבל מהדיברגנץ של השדה החשמלי. נשתמש בשתי תכונות של הדיברגנץ שראיתם במת"פ, לינאריות וכלל לייבניץ:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r})) = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{E}_2(\vec{r}) \quad (*)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r})) = f(\vec{r}) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) + (\vec{\nabla} f(\vec{r})) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (**)$$

אנחנו מעוניינים להשתמש בתכונות האלה כדי לא להצטרך להמיר את כל הביטוי לקואורדינטות ספריות (האיבר השני מוגדר באמצעות \hat{z}):

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) &= \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{kqd}{r^3} 3 \cos \theta \hat{r} - \frac{kqd}{r^3} \hat{z} \right) \\ &\stackrel{*}{=} \frac{\epsilon_0 qd}{4\pi \epsilon_0} \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{3}{r^3} \cos \theta \hat{r} \right) - \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{r^3} \hat{z} \right) \right] \\ &\stackrel{**}{=} \frac{qd}{4\pi} \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{3}{r^3} \cos \theta \hat{r} \right) - \left(\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{r^3} \right) \cdot \hat{z} + \frac{1}{r^3} \vec{\nabla} \cdot \hat{z} \right) \right] \end{aligned}$$

נוכל כעת להשתמש בנוסחאות הספריות עבור הגרדיאנט והדיברגנץ שנותרו :

$$\begin{aligned}\rho(\vec{r}) &= \frac{qd}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{3r^2}{r^3} \cos \theta \right) - \left(\hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \right) \right) \cdot \hat{z} \right] \\ &= \frac{qd}{4\pi} \left[\frac{-3 \cos \theta}{r^4} + \frac{3}{r^4} \hat{r} \cdot \hat{z} \right] = \frac{qd}{4\pi} \left[\frac{-3 \cos \theta}{r^4} + \frac{3}{r^4} \cos \theta \right] = 0\end{aligned}$$

הערה: נשים לב שלמעט בראשית השדה שלנו רציף לכן לא תהיה צפיפות מטען משטחית.

1.5.2 למה לא קיבלנו מטען בראשית?

השדה שאיתו התחלנו לא היה מוגדר בראשית! הוא התבדר בה, ומכאן בוודאי לא היה גזיר. באופן כללי, התפלגויות מטענים שאינן התפלגות נפחית (כלומר מטענים נקודתיים, צפיפויות אורכיות, וצפיפויות משטחיות) לא יתנו התפלגויות גזירות, ולכן כאשר נשתמש בחוק גאוס הדיפרנציאלי נוכל "לפספס" אותן. לעומת זאת, חוק גאוס האינטגרלי לא דורש מהתפלגות המטען שלא להתבדר, וניתן להשתמש בו כדי לזהות מטענים נקודתיים והתפלגויות משטחיות וקוויות, כפי שנראה בדוגמה הבאה ובתרגיל. באופן יותר כללי, ניתן לחקור התפלגויות מטענים בודדים, דיפולים, התפלגויות קוויות ועוד באמצעות אנליזה זהירה ו"כימות" שיטתי של התפלגויות מתבדרות מסוגים שונים, אבל בינתיים לא נדון בשיטות האלה, הנקראות פונקציות מוכללות.

1.5.3 דוגמה 3: לוח עבה טעון והמעבר ללוח דק

נתבונן בהתפלגות המטען הבאה: משטח עבה, בעובי d , ממורכז על מישור x, y , טעון בצפיפות מטען ρ . מה השדה החשמלי בכל המרחב?

פתרון

נחשב התפלגות זו בעזרת חוק גאוס האינטגרלי. מהסימטריה של הבעיה נסיק (במקרה של ρ חיובי) כי השדה יהיה מכוון במעלה ציר ה- z מעל המישור $z = 0$, ובמורד ציר ה- z מתחת למישור זה, וכן שהשדה יהיה סימטרי להזזות במישור xy . כלומר, הצורה הכללית תהיה

$$\vec{E}(x, y, z) = E(|z|) \operatorname{sign}(z) \hat{z}$$

נבחר בתור מעטפת גאוסית מנסרה בעלת פיאות ניצבות לציר ה- z וצדדים מקבילים אליו הממוקמת באופן סימטרי ביחס למישור $z = 0$. נסמן את שטח הפאות של המנסרה ב- A , ונשתמש בחוק גאוס האינטגרלי.

השטף מתוך המנסרה יהיה רק דרך הפיאות, וערכו יהיה $\Phi = 2AE_z(|z|)$. כעת נקשר שטף זה למטען בתוך המנסרה:

כל עוד $|z| < \frac{d}{2}$, נקבל

$$\begin{aligned}2AE_z(|z|) &= \Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot 2z \cdot A}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow E_z(|z|) &= \frac{\rho z}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

בעוד עבור $|z| < \frac{d}{2}$

$$2AE_z(|z|) = \Phi = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho \cdot d \cdot A}{\epsilon_0}$$
$$\Rightarrow E_z(|z|) = \frac{\rho d}{2\epsilon_0}$$

הגבול ללוח דק

נסמן צפיפות מטען משטחית $\sigma = d\rho$. בגבול זה נקבל כי

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \text{sign}(z) \hat{z}$$

ואם נחשב את הדיברגנץ שוב נקבל 0, ושוב נשים לב שהחישוב לא יכל לתת לנו מידע על $z = 0$: השדה לא רציף שם, ולכן בוודאי לא גזיר. אבל, ההבנה שצפיפות המטען היא המקור להפרש מאפשרת לנו לבודד אותה מתוך הקפיצה בשדה:

$$\Delta \vec{E} = \vec{E}(x, y, z) - \vec{E}(x, y, -z) = 2 \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z}$$

ונשים לב כי \hat{z} הוא וקטור הנורמאל למשטח. נכפול את שני הצדדים בנורמאל למשטח, ונקבל לבסוף

$$\sigma = \epsilon_0 \Delta \vec{E} \cdot \hat{n}$$

כאשר \hat{n} הוא וקטור הנורמאל למשטח.

2 האנרגיה האגורה בהתפלגות מטענים

2.1 דוגמה 4: אנרגיה של קליפה כדורית

נרצה לחשב את העבודה הנדרשת לבניית קליפה כדורית טעונה בצפיפות מטען משטחית אחידה, בעלת רדיוס R ומטען כולל Q .

פתרון

בשאלות מסוג זה חשוב להבין מה היה המצב ההתחלתי של המערכת לפני שהקליפה הורכבה. לרוב, נניח כי המטען היה ב"אינסוף", כלומר אלמנטי המטען המרכיבים את הקליפה היו מרוחקים מרחק אינסופי אחד מהשני, ואז הובאו למרחק סופי ומוקמו בהתפלגות אחידה על פני הקליפה. כיוון שהשדה החשמלי משמר, האופן בו מערכת כזו הורכבה אינו משפיע על סך העבודה הדרושה בהרכבה. נחשוב, אם כך, על "פרוטוקול" הרכבה מסוים שקל לחשב עבורו את העבודה הנדרשת בהרכבה.

נדמיין שאנו מביאים אלמנטי מטען אינפיניטסימאליים בסך dq אל הקליפה, ואז מפזרים אותם על פניה בצפיפות אחידה. שימו לב ששלב הפיזור לא ידרוש עבודה: הזזה של מטען במקביל לקליפה הקיימת לא דורשת עבודה, ואנחנו מניחים שהמטען שהבאנו אינפיניטסימלי, ובכך

טמונה הנחה שהוא לא מפעיל כוחות על עצמו (אנו מניחים כאן שהכוח כזה הוא מסדר גבוה יותר מאשר הכוח בשל הקליפה). על כן, נותר לנו לחשב את העבודה שנדרשה על מנת להביא את האלמנט הקטן dq אל הקליפה. נניח כי בשלב מסויים של הבנייה הקליפה טעונה במטען כולל q . העבודה הנדרשת להבאת אלמנט המטען אל שפת הקליפה שווה לעבודה הנדרשת להבאת מטען dq למרחק R ממטען q בראשית (למה?), לאורך מסלול רדיאלי:

$$dW = - \int_{start}^{end} F d\vec{r} = - \int_R^\infty k \frac{q dq}{r^2} dr = \left[\frac{kq dq}{r} \right]_\infty^R = \frac{kq dq}{R}$$

שימו לב שאלמנט העבודה הנדרש להבאת אלמנט מטען גדל ככל שהמטען הקיים גדול יותר. את העבודה הכוללת נקבל על ידי סכימה של אלמנטי המטען האלה:

$$W = \int dW = \int_0^Q k \frac{q dq}{R} = \frac{1}{2} \frac{kQ^2}{R}$$

בבית תראו כי גם דרכים אחרות לבנות את הקליפה וגם דרכים אחרות לחשב את האנרגיה הפוטנציאלית של התפלגות יתנו לנו את אותה התוצאה.

2.2 דרכים לחישוב אנרגיה של התפלגות מטענים

בדוגמה חישבנו את האנרגיה הפוטנציאלית של חלקיק באמצעות העבודה שנדרשה כדי להביא אותו מהאינסוף למיקום מסויים. באופן כללי, בהנתן התפלגות מטענים $\{q_i\}_{i=1}^n$ בנקודות $\{\vec{r}_i\}_{i=1}^n$ האנרגיה הפוטנציאלית של חלקיק במטען q שנמצא במיקום \vec{r} תהיה

$$U(\vec{r}) = \sum_{i=1}^n \frac{kq_i q}{|\vec{r}_i - \vec{r}|}$$

את התוצאה הזו נוכל להכליל למקרה של התפלגות מטען נפחית $\rho(\vec{r})$:

$$U(\vec{r}) = \iiint \frac{k\rho(\vec{r}') q}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d^3r'$$

נחזור למצב הבדיד. כדי לחשב את האנרגיה של כל אוסף המטענים $\{q_i\}_{i=1}^n$ יחד, נוכל להביא את החלקיקים אחד אחד מהאינסוף למקומם. ניתן להראות שהסדר שבו עושים זאת לא משנה, וזה שקול לכך שנחשב את הסכום של האנרגיות הפוטנציאליות של כל זוגות המטענים במערכת:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{kq_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

צריך לכפול ב- $\frac{1}{2}$ כי אחרת כל זוג מטענים תורם לסכום פעמיים: פעם אחת בתור (i, j) ופעם שניה בתור (j, i) .

גם את התוצאה הזו אפשר להכליל למקרה של התפלגויות רציפות:

$$U = \frac{1}{2} \iiint d^3 r' \iiint d^3 r \left(\frac{k \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)$$

בכיתה ראיתם דרך נוספת לחשב את האנרגיה האגורה בהתפלגות, בהתבסס השדה החשמלי שהיא יוצרת:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \iiint |E(\vec{r})|^2 d^3 r$$

2.3 דוגמה

נתונה קליפה כדורית ברדיוס R טעונה באופן אחיד במטען Q , חשבו את העבודה באמצעות הנוסחה לחישוב אנרגיה של מערכת מטענים כאינטגרל על השדה בריבוע.

נרצה להשתמש בנוסחה

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int |\vec{E}(\vec{r})|^2 d^3 r$$

כאשר האינטגרל הוא על כל המרחב. את השדה החשמלי של קליפה כדורית ברדיוס R הטעונה במטען Q אנחנו מכירים:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \frac{kQ}{r^2} \hat{r} & R < r \end{cases}$$

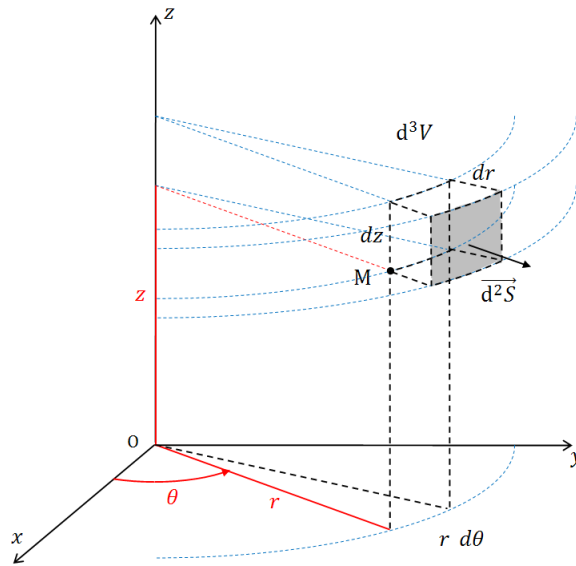
ולכן

$$\begin{aligned} W &= \frac{\epsilon_0}{2} \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{kQ}{r^2} \right)^2 r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{k^2 Q^2}{R} 2\pi \cdot 2 = \frac{kQ^2}{2R} \end{aligned}$$

וקיבלנו תוצאה שקולה לדרך הקודמת.

3 נספח: חישוב הדיברגנץ בקואורדינטות גליליות מההגדרה

חלק זה עוקב אחר פרק 2.9 בחשמל ומגנטיות של פרסל, בו ההסבר מוצג עבור קואורדינטות קרטזיות.



איור 1: הנקודה המסומנת M היא הנקודה (r, θ, z) , והיא במרכז הנפח. אורכי הפאות Δr וכו' מסומנים באיור באמצעות dr וכו'.

את השדה הוקטורי \vec{E} נכתוב בקואורדינטות גליליות:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(\vec{r}) \hat{r} + E_\theta(\vec{r}) \hat{\theta} + E_z(\vec{r}) \hat{z}$$

נבחר נקודה כלשהי, $\vec{r} = (r, \theta, z)$ ונבנה סביבה אלמנט נפח קטן, על ידי הפרשים $\Delta r, \Delta \theta, \Delta z$, כמתואר באיור 1². את השטף היוצא מהנפח נחשב באמצעות קירוב שמניח שהנפח קטן, ואז נחלק את השטף שקיבלנו בגודל הנפח ונשאיר את הנפח לאפס. נתמקד בשתי פאות מנוגדות של הנפח הקטן: הפנימית (ביחס לרדיוס) והחיצונית. הן נמצאות ברדיוסים $r \pm \frac{\Delta r}{2}$, בהתאמה, והוקטורים המתארים את אלמנטי השטח יהיו

$$\vec{S}_{in} = -\hat{r} \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta \theta \Delta z \quad \vec{S}_{out} = \hat{r} \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta \theta \Delta z$$

(שימו לב שהם פונים החוצה מהנפח).

השטף דרך הפאות האלה נובע רק מהרכיב הרדיאלי של השדה \vec{E} , כי יתר הרכיבים מאונכים להן. את השדה הוקטורי דרך כל פאה נקרב בתור השדה שבמרכז הפאה, כלומר בנקודות $(r \pm \frac{\Delta r}{2}, \theta, z)$. את השדה נעריך על ידי קירוב הטיילור של E_r כפונקציה של כמה משתנים:

$$E_r \left(r + \frac{\Delta r}{2}, \theta, z \right) \approx E_r(r, \theta, z) + \frac{\Delta r}{2} \frac{\partial E_r}{\partial r}(r, \theta, z)$$

$$E_r \left(r - \frac{\Delta r}{2}, \theta, z \right) \approx E_r(r, \theta, z) - \frac{\Delta r}{2} \frac{\partial E_r}{\partial r}(r, \theta, z)$$

שימו לב:

²איור זה מבוסס (בשינויים קלים מאוד) על האיור 02.png Coordonnées cylindriques. קרדיט: Alasjourn, CC BY-SA 3.0. <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>, via Wikimedia Commons.

• הרעיון בקירוב הזה הוא לקרב את E_r בתור פונקציה לינארית בנפח שהגדרנו.

• השתמשנו בקירוב לסדר ראשון $f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h \frac{df}{dx}(x_0)$ עבור הכיוון הרדיאלי.

כעת נוכל לפנות לחישוב השטף הכולל:

$$\begin{aligned}\Phi_{radial} &\approx \vec{S}_{out} \cdot \left[\hat{r} E_r \left(r + \frac{\Delta r}{2}, \theta, z \right) \right] + \vec{S}_{in} \cdot \left[\hat{r} E_r \left(r - \frac{\Delta r}{2}, \theta, z \right) \right] \\ &\approx \left(r + \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta \theta \Delta z \left[E_r(r, \theta, z) + \frac{\Delta r}{2} \frac{\partial E_r}{\partial r}(r, \theta, z) \right] - \left(r - \frac{\Delta r}{2} \right) \Delta \theta \Delta z \left[E_r(r, \theta, z) - \frac{\Delta r}{2} \frac{\partial E_r}{\partial r}(r, \theta, z) \right] \\ &\approx \Delta r \Delta \theta \Delta z E_r(r, \theta, z) + r \Delta \theta \Delta z \Delta r \frac{\partial E_r}{\partial r}(r, \theta, z)\end{aligned}$$

בשלב האחרון הזנחנו את כל האיברים שיש בהם הופעה של יותר מאחד מתוך $\Delta r, \Delta \theta, \Delta z$ (סדר שני ומעלה בכל אחד מהגדלים).

באופן דומה, ניתן לחשב גם את התרומות מהפאות האחרות, ולקבל

$$\begin{aligned}\Phi_{tangent} &\approx \Delta \theta \Delta z \Delta r \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, z) \\ \Phi_{vertical} &\approx r \Delta \theta \Delta z \Delta r \frac{\partial E_z}{\partial z}(r, \theta, z)\end{aligned}$$

לסיום, נציב בהגדרת הדיברגנץ:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(r, \theta, z) &= \lim_{dv \rightarrow 0} \frac{\vec{E} \cdot d\vec{S}}{dv} = \lim_{r \Delta \theta \Delta z \Delta r \rightarrow 0} \frac{\Phi_{radial} + \Phi_{tangent} + \Phi_{vertical}}{r \Delta \theta \Delta z \Delta r} \\ &= \lim_{r \Delta \theta \Delta z \Delta r \rightarrow 0} \frac{r \Delta \theta \Delta z \Delta r \left(\frac{1}{r} E_r(r, \theta, z) + \frac{\partial E_r}{\partial r}(r, \theta, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, z) + \frac{\partial E_z}{\partial z}(r, \theta, z) \right)}{r \Delta \theta \Delta z \Delta r} \\ &= \frac{1}{r} E_r(r, \theta, z) + \frac{\partial E_r}{\partial r}(r, \theta, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, z) + \frac{\partial E_z}{\partial z}(r, \theta, z) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r E_r(r, \theta, z)) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, z) + \frac{\partial E_z}{\partial z}(r, \theta, z)\end{aligned}$$