

**הנחיות:** כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז. יש לציין כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל. סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 9.05.23 בשעה 22:00.

1. (א) יהיו  $n \in \mathbb{N}$  ו-  $a \in \mathbb{R}$  ו-  $0 < a$ . הוכיחו כי  $1 < a^n \Leftrightarrow 1 < a$ .  
 (ב) הוכיחו כי לכל  $0 < r \in \mathbb{Q}$  ולכל  $a \in \mathbb{R}$  מתקיים  $1 < a^r$  (רמז: תחילה הוכיחו ל-  $r = \frac{1}{n}$  והיעזרו בסעיף הקודם).  
 (ג) יהיו  $a \in \mathbb{R}$  ו-  $r, q \in \mathbb{Q}$  כך ש-  $1 < a$  וגם  $r < q$ . הוכיחו כי  $a^r < a^q$  (רמז: הסתכלו על  $a^{q-r}$  והעזרו בסעיף הקודם).
2. נחשו את הגבולות הבאים והוכיחו את תשובותיכם ישירות מההגדרה (בלשון  $\varepsilon, \delta$ ).  
 (א)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x)$   
 (ב)  $\lim_{x \rightarrow 13} \sqrt{x+3}$   
 (ג)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x+1}{2x-5}$   
 (ד)  $\lim_{x \rightarrow -1} (|x+2| + |x|)$
3. תהי  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של  $x_0 \in \mathbb{R}$  ויהי  $L \in \mathbb{R}$ .  
 (א) נניח כי  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ . הוכיחו באמצעות הגדרת הגבול כי  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |L|$ .  
 (ב) תנו דוגמה לפונקציה  $f$  עבורה קיים הגבול  $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)|$  אבל ל-  $f$  עצמה לא קיים גבול ב-  $x_0$ .
4. יהיו  $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$  ויהיו  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ו-  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות המקיימות  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L_1$  ו-  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L_2$ .  
 נגדיר את  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  על ידי 
$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in \mathbb{Q} \\ g(x) & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$
  
 הוכיחו כי ל-  $h$  יש גבול בנקודה 2 אם ורק אם  $L_1 = L_2$ .
5. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה המקיימת:  

$$(*) \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-4| < \varepsilon$$
  
 (א) הוכיחו שקיימת סביבה מנוקבת של 2 כך שכל  $x$  בסביבה זו מקיים  $f(x) = 4$ .  
 (ב) האם קיימת פונקציה  $f$  שמקיימת את הפסוק (\*), אך עבורה לא קיים הגבול  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ?  
 (ג) תנו דוגמה לפונקציה  $f$  עבורה קיים הגבול  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ , אך היא איננה מקיימת את הפסוק (\*).