

80154 - אלגברה ליניארית להנדסה ומדעים תשפ"ג 2022-2023 - תרגיל 6

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף שם (פרטי ומשפחה), מספר ת.ז. וכותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל. סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 17/5/2023 בשעה 22:00.

1. יהי V מ"ו, $T: V \rightarrow V$ אופרטור לינארי, $v \in V$ ו"ע של T ששיך ל- λ . הוכיחו כי v הוא ו"ע של האופרטור $T \circ T$. לאיזה ע"ע הוא שייך?

2. יהי V מ"ו, $T: V \rightarrow V$ אופרטור לינארי כך ש- $T \circ T = T$, λ הוא ע"ע של T . הוכיחו כי $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$.

3. עבור כל אחד מהתנאים הבאים, הביאו דוגמה לאופרטור לינארי $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ כך ש- $T \circ T = T$ וגם מקיים את התנאי המצוין בסעיף המתאים:

(א) 0 אינו ע"ע של T .

(ב) 1 אינו ע"ע של T .

4. תהי $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

(א) מצאו את הערכים העצמיים של A .

(ב) מצאו את המרחב העצמי של כל אחד מהערכים העצמיים.

(ג) האם קיים בסיס של \mathbb{R}^2 שמורכב מוקטורים עצמיים של A ? אם כן, מצאו מטריצה אלכסונית שדומה ל- A .

5. האופרטור הלינארי $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ מוגדר על ידי $T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} x + y \\ -x - y \\ x + y + z \end{bmatrix}$.

(א) חשבו את הערכים העצמיים של האופרטור T (אל תנחשו אותם!).

(ב) מצאו בסיסים למרחבים העצמיים המתאימים לערכים העצמיים שמצאתם בסעיף א'.

(ג) האם האופרטור T לכסי? אם כן, מצאו ל- \mathbb{R}^3 בסיס מלכסן B ורשמו את $[T]_B$. אם לא, נמקו.

6. האופרטור הלינארי $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ מוגדר על ידי $T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -2x + y + z \\ x - 2y + z \\ x + y - 2z \end{bmatrix}$.

(א) חשבו את הערכים העצמיים של האופרטור T (אל תנחשו אותם!).

(ב) מצאו בסיסים למרחבים העצמיים המתאימים לערכים העצמיים שמצאתם בסעיף א'.

(ג) האם האופרטור T לכסי? אם כן, מצאו ל- \mathbb{R}^3 בסיס מלכסן B ורשמו את $[T]_B$. אם לא, נמקו.

7. תהי $T: \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ הפונקציה המוגדרת על ידי $T(p(X)) = (X \cdot p(X-1))'$, ויהי $\mathcal{E} = (e_0 = 1, e_1 = X, e_2 = X^2)$ בסיס ל- $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$.

(א) הוכיחו כי T אופרטור לינארי.

(ב) מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_{\mathcal{E}}$ של T ביחס לבסיס \mathcal{E} .

(ג) חשבו את הערכים העצמיים של $[T]_{\mathcal{E}}$ (אל תנחשו אותם!).

(ד) האם T אופרטור לכסי? אם כן, מצאו ל- $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ בסיס מלכסן B ומטריצה הפיכה P כך ש- $[T]_B = P^{-1} [T]_{\mathcal{E}} P$. אם לא, הסבירו מדוע.