

80177 + 80155 - סמסטר ב' תשפ"ג - 2022-2023 - תרגול פעיל 5

זכרו לכתוב את כל ההוכחות בצורה מלאה.

שאלה 1

- (i) תהי A תת-קבוצה של \mathbb{R} . הגדירו: A צפופה ב- \mathbb{R} .
(ii) עבור אלו מספרים $a \in \mathbb{R}$ הסמל a^r מוגדר עבור כל $r \in \mathbb{Q}$? ומה הוא מוגדר להיות?

שאלה 2

השבוע ראיתם / תראו בהרצאה שקיים ב- \mathbb{R} מספר חיובי, המסומן $\sqrt{2}$, אשר מקיים $(\sqrt{2})^2 = 2$. כזכור $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

- (א) הסכום של מספר רציונלי ושל מספר אי-רציונלי הוא אי-רציונלי.
(ב) המכפלה של מספר רציונלי ושל מספר אי-רציונלי היא אי-רציונלית.
(ג) יהיו $a, b \in \mathbb{Q}$. נתון ש- $1 + \sqrt{2}$ הוא פתרון של המשוואה $x^2 + ax + b = 0$. מצאו את a ו- b .

שאלה 3

יהי $0 < a \in \mathbb{R}$ מספר ממשי חיובי נתון. נגדיר: $A = \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
היעזרו באי-שוויון ברנולי כדי למצוא ולהוכיח תנאי הכרחי ומספיק לכך ש- A חסומה.

שאלה 4

לכל $x \in \mathbb{R}$ נגדיר את **הערך השברי** של x , המסומן $\{x\}$, על ידי $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ (כרגיל $\lfloor x \rfloor$ מסמן את הערך השלם של x).
תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי $f(x) = \{x\}$ (פונקציית הערך השברי).
(*) כחימום: הראו כי $f(x+1) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. מהו $f(x)$ עבור $x \in [0, 1)$? ציירו את הגרף של f .
ענו על השאלות הבאות על ידי מציאת סביבה מתאימה או הוכחה שלא קיימת כזאת.

- (א) האם קיימת סביבה מנוקבת U של 0 שלכל $x \in U$ מתקיים $f(x) > 0$?
(ב) האם קיימת סביבה מלאה V של 0 שלכל $x \in V$ מתקיים $f(x) > 0$?
(ג) האם קיימת סביבה מלאה W של $1/2$ שלכל $x \in W$ מתקיים $f(x) \neq 0$?
(ד) האם קיימת סביבה מלאה Z של 1 שלכל $x \in Z$ מתקיים $f(x) \in \mathbb{Q}$?