

אלגברה ליניארית 2 לתלמידי הנדסה ומדעים תשפ"ג - תרגיל 2

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף שם פרטי ומשפחה, מספר ת.ז. וכותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל. סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 29.03.23 בשעה 22:00.

1. בדקו אלו מההעסקות הבאות הן לינאריות. נמקו את תשובתכם.

$$(א) \quad T \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ 3y \\ -x \end{bmatrix}, \quad T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(ב) \quad T(X) = X^t, \quad T: \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \quad \text{(קרי, המטריצה המשוכללת)}$$

$$(ג) \quad T(X) = \det(X), \quad T: \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathbb{F}, \quad n > 1 \quad \text{(עבור)}$$

$$(ד) \quad T(X) = AX, \quad T: \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{F}), \quad \text{כאשר } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}) \quad \text{מטריצה קבועה נתונה}$$

$$(ה) \quad T(f) = f(3), \quad T: \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(ו) \quad T(p(X)) = p(X-1), \quad T: \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x] \quad \text{(לדוגמא: } T(X^2) = (X-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \text{)}$$

2. תהי $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ ההעסקה המוגדרת על ידי $T \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = (a - b + c) + (b - c + d)x + (a + d)x^2$.

(א) **(לא להגשה)** ודאו ש- T העסקה לינארית.

(ב) מצאו את $\text{Ker}(T)$. מה מימדו?

(ג) מצאו את $\text{Im}(T)$. תארו אותו כפרוש של וקטורים בלתי-תלויים וחשבו את מימדו. האם T "על"?

3. תהי $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ ותהי $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ ההעסקה המוגדרת על ידי $T(X) = AX$.

(א) **(לא להגשה)** ודאו ש- T העסקה לינארית.

(ב) מצאו את הגרעין של T .

(ג) מצאו את התמונה של T . האם T "על"?

(ד) האם T הפיכה? אם לא, נמקו! אם כן, מצאו את T^{-1} .

4. תהי $T: V \rightarrow W$ העסקה לינארית, ויהי $B = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$ בסיס של V .

(א) הראו ש $(T(\vec{b}_1), \dots, T(\vec{b}_n))$ קבוצה פורשת של $\text{Im}(T)$.

(ב) הסיקו ש $\dim(\text{Im}(T)) \leq \dim(V)$.

(ג) האם $(T(\vec{b}_1), \dots, T(\vec{b}_n))$ בהכרח בסיס של $\text{Im}(T)$?