

## 80177 + 80155 - אינפי למדעים סמסטר ב' תשפ"ג - 2022-2023 - תרגיל 2

**הנחיות:** כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז. יש לציין כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל. סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 28.3.23 בשעה 22:00.

1. תהי  $B = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \text{ אי-זוגי} \right\}$ . נתונים שני הפסוקים הבאים :

$$\forall x \in B \quad \exists y \in B \quad y - x < 1 \quad (i) \qquad \exists y \in B \quad \forall x \in B \quad y - x < 1 \quad (ii)$$

לכל אחד מהפסוקים (i) ו- (ii) כתבו פסוקים השקולים לשלילת הפסוק כך שלא יופיע בהם סימן השלילה הלוגית.

2. טענה ("חוקי חזקות טבעיות"): יהיו  $x, y \in \mathbb{R}$  ויהיו  $n$  ו-  $m$  מספרים טבעיים. מתקיימות הזהויות הבאות :

$$(i) \quad x^n \cdot x^m = x^{m+n} \quad (ii) \quad (xy)^n = x^n y^n \quad (iii) \quad (x^m)^n = x^{mn} \quad (iv) \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (y \neq 0)$$

הערה: זהות (i) הוכחה בתרגול 2.

הוכיחו את הזהויות (ii) – (iv).

(הדרכה ל- (iii) : קבעו את  $m$  והוכיחו באינדוקציה שהדבר מתקיים לכל  $n$ . הדרכה ל- (iv) : העזרו בסעיף (ii).

3. יהיו  $x, y \in \mathbb{R}$  ויהי  $n \in \mathbb{N}$ . הוכיחו כי מתקיים :  $x < y \Leftrightarrow x^n < y^n$ .

(הדרכה: קודם הוכיחו את הגרירה  $x < y \Rightarrow x^n < y^n$  ורק לאחר מכן את הגרירה  $x^n < y^n \Leftarrow x < y$ ).

4. יהיו  $a, b \in \mathbb{R}$ . הוכיחו כי  $a \leq b$  אם ורק אם לכל  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  מתקיים כי  $a < b + \varepsilon$ .

5. תהי  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ . בהרצאה הוכחנו כי  $M \in \mathbb{R}$  הוא החסם העליון של  $A$  אם ורק אם  $M$  מקיים את שני התנאים הבאים:

(א)  $M$  חסם מלעיל של  $A$ .

(ב)  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad M - \varepsilon < a$ .

נסחו והוכיחו טענה דומה הקובעת מתי  $m \in \mathbb{R}$  הוא החסם התחתון של  $A$ .

6. יהיו  $\emptyset \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$  חסומה מלעיל ו-  $\beta \in \mathbb{R}$ . הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :

(א)  $\beta = \max(A)$  אם ורק אם  $\beta = \sup(A)$  וגם  $\beta \in A$ .

(ב) אם  $B \subseteq A$  אז מתקיים  $\sup(B) \leq \sup(A)$ .

(ג) אם  $B \subseteq A$  ומתקיים  $B \neq A$ , אז מתקיים כי  $\sup(B) < \sup(A)$ .

(ד)  $-A = \{-a \mid a \in A\}$  חסומה מלרע ו-  $\inf(-A)$  קיים וכן מתקיים  $\inf(-A) = -\sup(A)$ .

7. עבור כל אחת מהקבוצות הבאות, בדקו אם היא חסומה מלרע ו/או מלעיל.

אם כן, חשבו את האינפימום ו/או הסופרמום. קבעו גם האם קיימים מקסימום ומינימום, ואם כן, חשבו אותם.

הוכיחו את תשובותיכם! (קראו בבקשה את המחשנית בסיכום התרגול 2 לפני פתרון שאלה זו).

$$(i) \quad A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 7x + 10 > 0\} \quad (ii) \quad B = \{x^2 + 7x + 10 \mid x \in \mathbb{R}\}$$