אינפי למדעים תשפ"ג 2023-2022 - הרצאה 3

תזכורת

למרות שיש ל- $\mathbb{Q}$ תכונות אלגבריות מאוד רצויות, הבעיה עם המספרים הרציונליים היא שיש בהם `חורים` או `חללים` רבים:
אי-אפשר להתאים מספר רציונלי לכל נקודה על קו ישר!

כדי לקבל מערכת ללא "חורים", **נגדיר באופן אקסיומטי** מערכת מספרים חדשה.

הגדרה

שדה הוא קבוצה לא ריקה $\mathbb{F}$ המצוידת בשני איברים מובחרים $0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}$ עם $0_{\mathbb{F}} \neq 1_{\mathbb{F}}$, ובשתי פעולות $\oplus$ ו- $\otimes$ (לכל $(x,y) \in \mathbb{F}^2$ מתאים איבר יחיד $x \oplus y \in \mathbb{F}$ ואיבר יחיד $x \otimes y \in \mathbb{F}$) כך שהפעולות מקיימות את תשע האקסיומות $A_{\oplus}, N_{\oplus}, I_{\oplus}, C_{\oplus}, A_{\otimes}, N_{\otimes}, I_{\otimes}, C_{\otimes}, D$ הבאות :

$A_{\otimes}: \quad \forall x,y,z \in \mathbb{F} \quad (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$	$A_{\oplus}: \quad \forall x,y,z \in \mathbb{F} \quad (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
$N_{\otimes}: \quad \forall x \in \mathbb{F} \quad x \otimes 1_{\mathbb{F}} = 1_{\mathbb{F}} \otimes x = x$	$N_{\oplus}: \quad \forall x \in \mathbb{F} \quad x \oplus 0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}} \oplus x = x$
$I_{\otimes}: \quad \forall x \in \mathbb{F} \setminus \{0_{\mathbb{F}}\} \quad \exists \hat{x} \in \mathbb{F} \quad x \otimes \hat{x} = \hat{x} \otimes x = 1_{\mathbb{F}}$	$I_{\oplus}: \quad \forall x \in \mathbb{F} \quad \exists x' \in \mathbb{F} \quad x \oplus x' = x' \oplus x = 0_{\mathbb{F}}$
$C_{\otimes}: \quad \forall x,y \in \mathbb{F} \quad x \otimes y = y \otimes x$	$C_{\oplus}: \quad \forall x,y \in \mathbb{F} \quad x \oplus y = y \oplus x$
$D: \quad \forall x,y,z \in \mathbb{F} \quad (x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$	

$A_{\oplus}$ נקרא **חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות)** לפעולה $\oplus$ ו- $A_{\otimes}$ נקרא חוק הקיבוץ (אסוציאטיביות) לפעולה $\otimes$.

$N_{\oplus}$ נקרא **תכונת איבר אדיש (נייטרלי)** לפעולה $\oplus$ ו- $N_{\otimes}$ נקרא תכונת איבר אדיש (נייטרלי) לפעולה $\otimes$.

$I_{\oplus}$ נקרא **קיום איבר נגדי** ו- $I_{\otimes}$ נקרא **קיום איבר הופכי**.

$C_{\oplus}$ נקרא **חוק החילוף (קומוטטיביות)** לפעולה $\oplus$ ו- $C_{\otimes}$ נקרא חוק החילוף (קומוטטיביות) לפעולה $\otimes$.

D נקרא **חוק הפילוג (דיסטריבוטיביות)** של הפעולה $\otimes$ על הפעולה $\oplus$.

הגדרה

לפעולה $\oplus$ נקרא **חיבור** ו- $x \oplus y$ נקרא ה**סכום** של x ו- y . לפעולה $\otimes$ נקרא **כפל** ו- $x \otimes y$ נקרא ה**מכפלה** של x ו- y .

משפט וסימונים (מסקנות מהאקסיומות השדה)

1. בשדה $\mathbb{F}$ יש רק איבר <u>אחד</u> האדיש לחיבור. (כלומר: בהינתן $e \in \mathbb{F}$, אם לכל $x \in \mathbb{F}$ מתקיים $x \oplus e = x$ אז $e = 0_{\mathbb{F}}$).
כלומר $0_{\mathbb{F}}$ הוא **ה**איבר **ה**אדיש לחיבור.
2. בשדה $\mathbb{F}$ יש רק איבר <u>אחד</u> האדיש לכפל. (כלומר: בהינתן $f \in \mathbb{F}$, אם לכל $y \in \mathbb{F}$ מתקיים $y \otimes f = y$ אז $f = 1_{\mathbb{F}}$).
כלומר $1_{\mathbb{F}}$ הוא **ה**איבר **ה**אדיש לחיבור.
3. $\forall x \in \mathbb{F} \quad x \otimes 0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}$.
4. לכל איבר בשדה קיים נגדי <u>יחיד</u>. כלומר :
בהינתן $x \in \mathbb{F}$, אם האיברים $x', x'' \in \mathbb{F}$ מקיימים $x \oplus x' = 0_{\mathbb{F}}$ ו- $x \oplus x'' = 0_{\mathbb{F}}$ אזי $x' = x''$.
הנגדי של x מסומן ב- $-x$.
5. לכל איבר בשדה השונה מ- $0_{\mathbb{F}}$ קיים הופכי <u>יחיד</u>. **ההופכי** של $x \neq 0_{\mathbb{F}}$ מסומן ב- x^{-1} . כלומר :
בהינתן $0_{\mathbb{F}} \neq x \in \mathbb{F}$, אם האיברים $\widehat{x}, \widehat{\widehat{x}} \in \mathbb{F}$ מקיימים $x \otimes \widehat{x} = 1_{\mathbb{F}}$ ו- $x \otimes \widehat{\widehat{x}} = 1_{\mathbb{F}}$ אזי $\widehat{x} = \widehat{\widehat{x}}$.
ההופכי של $x \neq 0_{\mathbb{F}}$ מסומן ב- x^{-1} .

- - - - - - - - - - - - - - - - - - **סוף התזכורת** - - - - - - - - - - - - - - - - - -

שימו לב שהתכונה 3 מיד גוררת שאין ל- $0_{\mathbb{F}}$ הופכי.

כי אילו היה ל- $0_{\mathbb{F}}$ הופכי, נגיד $\widehat{0_{\mathbb{F}}}$, אז היה מתקיים $1_{\mathbb{F}} = \widehat{0_{\mathbb{F}}} \otimes 0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}$, וזו סתירה.

סימון : מכאן ואילך פעולת החיבור תמסומן $+$ (במקום $\oplus$), ופעולת הכפל תמסומן $\cdot$ (במקום $\otimes$) .

הערות ומוסכמות

יהי $\mathbb{F}$ שדה שרירותי ויהיו $x,y,z \in \mathbb{F}$. ננהג לפי המוסכמות הרגילות לקיצור הכתיבה. למשל:

- לסמן xy במקום $x \cdot y$.
- אם לא מצויין אחרת, אז כפל קודם לחיבור. למשל כשרושמים $x+yz$ הכוונה $x+(yz)$ ולעולם לא $(x+y)\,z$.
- הסכום $x+y+z$ של שלושה איברים (או יותר) איננו מוגדר - הוגדרו רק פעולות על זוגות. כאשר נרשום $x+y+z$, נפרש זאת כ־ $(x+y)+z$ או כ־ $x+(y+z)$. לאור חוק הקיבוץ , הביטויים האלה שווים. אותה מוסכמה נכונה למכפלות.
- מעצם ההגדרה של המושג "פעולה" נובע שאם מבצעים את אותה פעולה על איברים שווים, מקבלים תוצאות שוות. נובע, שאם $x,y,z \in \mathbb{F}$ אז

$$x=y \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x+z &= y+z \\ x\cdot z &= y\cdot z \\ -x &= -y \end{cases} \qquad\qquad 0_{\mathbb{F}} \neq x = y \qquad \Longrightarrow \qquad x^{-1}=y^{-1}$$

משמעות הדבר: אפשר לחבר איברים לשוויונות. העובדה שאפשר גם לצמצם איברים משוויונות, נובע מתכונות הנגדי וההפכי:

$$\begin{aligned} x+z=y+z \qquad &\Longrightarrow \qquad (x+z)+(-z)=(y+z)+(-z) \\ &\Longrightarrow \qquad x+(z+(-z))=y+(z+(-z)) \\ &\Longrightarrow \qquad x+0_{\mathbb{F}}=y+0_{\mathbb{F}} \\ &\Longrightarrow \qquad x=y \end{aligned}$$

השתמשנו בתכונת הקיבוץ, הנגדי הנייטרליות ה־ $0_{\mathbb{F}}$. באופן דומה ע"י כפל שני האגפים ב־ z^{-1} מקבלים

$$z\neq 0_{\mathbb{F}} \quad \wedge \quad x\cdot z=y\cdot z \qquad \Longrightarrow \qquad x=y$$

- **כללי סימן:** לכל $x,y\in\mathbb{F}$ מתקיים

$$\begin{aligned} -0_{\mathbb{F}} &= 0_{\mathbb{F}} \\ -(-x) &= x \\ -(x+y) &= (-x)+(-y) \\ -x &= (-1_{\mathbb{F}})\cdot x \\ -(x\cdot y) \;&=\; (-x)\cdot y \;=\; x\cdot(-y) \end{aligned}$$

(בפרט $x=0_{\mathbb{F}}$ אם ורק אם $-x=0_{\mathbb{F}}$).

- **כללי הפכי:** לכל $x,y\in\mathbb{F}$ המקיימים $x\neq 0_{\mathbb{F}}$ ו־ $y\neq 0_{\mathbb{F}}$ מתקיים

$$\begin{aligned} (x^{-1})^{-1} &= x \\ (-x)^{-1} &= -(x^{-1}) \\ (x\cdot y)^{-1} &= (x^{-1})\cdot(y^{-1}) \end{aligned}$$

- מסמנים $x-y=x+(-y)$.

שימו לב שחיסור איננה פעולה נפרדת אלא מוגדרת בעזרת חיבור ונגדי. התכונות שלה נגזרות מהתכונות למעלה למשל,

$$x(y-z)=x(y+(-z))=xy+x(-z)=xy+(-(xz))=xy-xz$$

השתמשנו בהגדרה של חיסור (פעמיים ־ בשלב ראשון ואחרון), בפילוג, ובכללי סימן.

- אם $b\neq 0_{\mathbb{F}}$ מסמנים $\frac{a}{b}=ab^{-1}$ (זה קונסיסטנטי עם הסימון $\frac{1_{\mathbb{F}}}{b}=b^{-1}$ כי $1_{\mathbb{F}}\cdot b^{-1}=b^{-1}$).

שוב, **חילוק איננו פעולה נפרדת אלא מוגדרת בעזרת כפל והופכי.** אפשר להשתמש בתכונות כדי להוכיח את הזהויות המוכרות לטיפול בשברים, למשל

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{w}{z}=(xy^{-1})\cdot(wz^{-1})=(xw)\cdot(y^{-1}z^{-1})=(xw)(yz)^{-1}=\frac{xw}{yz}$$

(ממה נובע כל שוויון?). כך לגבי הנוסחה $\frac{x}{y}+\frac{w}{z}=\frac{xz+yw}{yz}$.

דוגמאות של שדות

1. $\mathbb{Q}$ המצויד בפעולות הרגילות של חיבור וכפל שברים הינו שדה.
2. נתבונן בקבוצה $\mathbb{F}_2=\{a,b\}$, כאשר $a\neq b$. נגדיר שתי פעולות על $\mathbb{F}_2$ על ידי הטבלאות הבאות :

$\oplus$	a	b
a	a	b
b	b	a

$\otimes$	a	b
a	a	a
b	a	b

על ידי בדיקת כל ההצבות האפשריות , מתברר כי כל האקסיומות מתקיימות ולכן $(\mathbb{F}_2,\oplus,\otimes)$ הוא שדה ($a=0_{\mathbb{F}_2}$, $b=1_{\mathbb{F}_2}$) .

קיומם של שדות כגון $\mathbb{F}_2$, שהם מאוד `רחוקים` מהתמונה האינטואיטיבית שיש לנו מקבוצת המספרים הממשיים ($1+1=0$??) , משכנע אותנו שהדרישה לקיום חוקי האלגברה הרגילים והמוכרים לא מספיקה כשלעצמה לאפיין את המספרים הממשיים ולכן יש צורך להטיל אילוצים נוספים.

הגדרה (שדה סדור)

יהי $\mathbb{F}$ שדה . $\mathbb{F}$ נקרא **שדה סדור** אם קיים עליו יחס , שיקרא סדר ויסומן $<$, המקיים את ארבע האקסיומות הבאות:

- O_1 **(טריכוטומיה)** : לכל x ו־ y ב־ $\mathbb{F}$ מתקיימת **בדיוק אחת** משלוש האפשרויות הבאות : $x<y$ או $y<x$ או $x=y$.
- O_2 **(טרנזיטיביות)** : $\forall x,y,z\in\mathbb{F}\quad (x<y\ \wedge\ y<z)\ \Rightarrow\ x<z$
- O_3 **(הלימה עם החיבור)** : $\forall x,y,z\in\mathbb{F}\quad x<y\ \Rightarrow\ (x+z\ <\ y+z)$
- O_4 **(הלימה עם הכפל בחיובי)** : $\forall x,y,z\in\mathbb{F}\quad (x<y\ \wedge\ 0_{\mathbb{F}}<z)\ \Rightarrow\ xz<yz$

(במקום **הלימה** מקובל גם לומר תאימות, קונסיסטנטיות או אינווריאנטיות)

הגדרה : יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור. נאמר ש־ $x\in\mathbb{F}$ **חיובי** אם"ם $0_{\mathbb{F}}<x$ **ושלילי** אם"ם $x<0_{\mathbb{F}}$.

נסמן $\mathbb{F}^+=\{\,x\in\mathbb{F}\mid 0_{\mathbb{F}}<x\,\}$ ו־ $\mathbb{F}^-=\{\,x\in\mathbb{F}\mid x<0_{\mathbb{F}}\,\}$.

האם קיים בכלל שדה סדור? כן, כי $\mathbb{Q}$ המצויד בפעולות הרגילות של חיבור וכפל שברים וביחס הסדר הרגיל הינו שדה סדור.

משפט (מסקנות מאקסיומות הסדר)

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

1. לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$ מתקיים $a<b\ \Leftrightarrow\ a+c<b+c$.
2. לכל $x\in\mathbb{F}$ מתקיים : $0_{\mathbb{F}}<-x\ \Leftrightarrow\ x<0_{\mathbb{F}}$.
3. $0_{\mathbb{F}}<1_{\mathbb{F}}$.
4. לכל $x\in\mathbb{F}$ מתקיים : $x\neq 0_{\mathbb{F}}\ \Leftrightarrow\ 0_{\mathbb{F}}<x^2$.
5. לכל $x\in\mathbb{F}$ מתקיים : $0_{\mathbb{F}}<x\ \Leftrightarrow\ 0_{\mathbb{F}}<x^{-1}$.
6. לכל $a,b,c\in\mathbb{F}$ עם $a<b$ ו־ $c<0_{\mathbb{F}}$ מתקיים $a\cdot c>b\cdot c$ (כלומר $b\cdot c<a\cdot c$) .
7. לכל $a,b,c,d\in\mathbb{F}$ עם $a<b$ ו־ $c<d$ מתקיים $a+c<b+d$. **(חיבור אי־שוויונים)**

<u>הוכחה</u> :

נוכיח כאן את מסקנות 2 ו־ 3 .

2. $(\Leftarrow)$ $\quad 0_{\mathbb{F}}<-x\ \overset{I_+,N_+}{\Rightarrow}\ x+(-x)<0_{\mathbb{F}}+(-x)\ \overset{O_3}{\Rightarrow}\ x<0_{\mathbb{F}}$.

$(\Rightarrow)$ $\quad x<0_{\mathbb{F}}\ \overset{I_+,N_+}{\Rightarrow}\ 0_{\mathbb{F}}+x<(-x)+x\ \overset{O_3}{\Rightarrow}\ 0_{\mathbb{F}}<-x$ ■

3. לפי טריכוטומיה מתקיימת בדיוק אחת מהאפשרויות $0_{\mathbb{F}}<1_{\mathbb{F}}$ או $1_{\mathbb{F}}<0_{\mathbb{F}}$ או $0_{\mathbb{F}}=1_{\mathbb{F}}$.

$0_{\mathbb F}=1_{\mathbb F}$ לא מתקיים בשל אקסיומות השדה.

נניח בשלילה ש־ $1_{\mathbb F}<0_{\mathbb F}$. אזי $0_{\mathbb F}<-1_{\mathbb F}$ (לפי סעיף 2).

נפעיל את האקסיומה O_4 עם $x=0_{\mathbb F}\,,\ y=-1_{\mathbb F}\,,\ z=-1_{\mathbb F}$ (חוקי כי לפי ההנחה $0_{\mathbb F}<z=-1_{\mathbb F}$), ונקבל:

$0_{\mathbb F}\cdot(-1_{\mathbb F})<(-1_{\mathbb F})\cdot(-1_{\mathbb F})$, כלומר $0_{\mathbb F}<1_{\mathbb F}$.

הגענו לתוצאה שסותרת את הטריכוטומיה, ולכן $0_{\mathbb F}<1_{\mathbb F}$. ■

את הסעיפים 4 , 5 ו־ 6 תוכיחו בתרגול ובתרגיל הבית.

הגדרה : $2_{\mathbb F}:=1_{\mathbb F}+1_{\mathbb F}$.

הערה : $0_{\mathbb F}<2_{\mathbb F}$ (מחברים את $0_{\mathbb F}<1_{\mathbb F}$ עם עצמו). בפרט $0_{\mathbb F}\neq 2_{\mathbb F}$, ולכן $2_{\mathbb F}$ הפיך , כלומר $2_{\mathbb F}^{-1}$ קיים. בנוסף $0_{\mathbb F}<2_{\mathbb F}^{-1}$.

טענה : יהי $\mathbb F$ שדה סדור. $x<y \;\Rightarrow\; x<\frac{x+y}{2_{\mathbb F}}<y \qquad \forall x,y\in\mathbb F$

<u>הוכחה</u> :

$$\left.\begin{array}{l} x<y \;\overset{O_3}{\Rightarrow}\; x+x<y+x \\[3ex] x<y \;\overset{O_3}{\Rightarrow}\; x+y<y+y \end{array}\right\} \;\underset{C_+}{\overset{O_2}{\Rightarrow}}\; x+x<x+y<y+y$$

מחוק הפילוג נובע ש־ $x+x=(1_{\mathbb F}+1_{\mathbb F})\,x=2_{\mathbb F}\,x$. באותו אופן $y+y=2_{\mathbb F}\,y$.

כלומר $x+x<x+y<y+y$ שקול ל־ $2_{\mathbb F}\,x<x+y<2_{\mathbb F}\,y$.

כפל של כל האגפים (O_4) באיבר החיובי $2_{\mathbb F}^{-1}$ נותן : $2_{\mathbb F}^{-1}(2_{\mathbb F}x)<2_{\mathbb F}^{-1}(x+y)<2_{\mathbb F}^{-1}(2_{\mathbb F}y)$, כלומר $x<2_{\mathbb F}^{-1}(x+y)<y$.
ההגדרה של פעולת החילוק מסיימת את ההוכחה. ■

מסקנה : בין כל שני איברים שונים של שדה סדור $\mathbb F$ קיים איבר נוסף של $\mathbb F$.

הגדרה : יהי $\mathbb F$ שדה סדור . נגדיר יחס חדש ב־ $\mathbb F$, שיסומן $\leqslant$, על ידי $x\leqslant y \;\Leftrightarrow\; (x<y \;\vee\; x=y) \qquad \forall x,y\in\mathbb F$.

כשלעצמו, המושג "שדה סדור" לא מספק מערכת מספרים המאפשרת לנו להתאים מספר לכל נקודה על קו ישר. אנו יודעים זאת כי $\mathbb Q$ גם הוא שדה סדור. הדרישה שמערכת המספרים המבוקשת תהיה שדה סדור מהווה מן תנאי סף שבלעדיו היא איננה יכולה להציג אפילו מועמדות לתפקיד.

כעת נרצה להטיל תנאי נוסף על שדה סדור כדי שהוא יהיה "בלי חורים".

סימון

יהי $\mathbb F$ שדה סדור . עבור קבוצות $\varnothing\neq L,U\subseteq\mathbb F$ נסמן $L\leq U$ אם"ם מתקיים : $\ell\leqslant u \quad \forall u\in U \quad \forall\ell\in L$.

בנוסף, בהינתן $c\in\mathbb F$, נסמן $L\leq c$ אם"ם מתקיים $\ell\leqslant c \quad \forall\ell\in L$, ונסמן $c\leq U$ אם"ם מתקיים $c\leqslant u \quad \forall u\in U$.

דוגמאות ב־ $\mathbb Q$:

1. $\{1,2,3\}\leq\{4,5\}$.
2. $\mathbb Q^-\leq\mathbb Q^+$, כי לכל $a\in\mathbb Q^-$ ולכל $b\in\mathbb Q^+$ מתקיים (לפי הגדרה) $a<0<b$, ולכן מטרנזיטיביות, $a<b$.
3. אם $A=\{1,3\}$ ו־ $B=\{2,4\}$ אז **לא** מתקיים $A\leq B$ **וגם לא** מתקיים $B\leq A$.
4. $\frac{2}{3}\leq\mathbb N$

הערה :

היחס $L\leq U$ אומר שכשמציירים את L ו־ U ב־`ציר מספרים אופקי מכוון ימינה`, כל הנקודות ב־ L נמצאות משמאל לכל הנקודות ב־ U .

הגדרנו בכך מושג חדש של סדר **בין קבוצות**, ויש להיזהר מלהשליך תכונות של הסדר בין מספרים על המושג החדש הזה.

למשל, כפי שמראה דוגמה 3 לעיל, לא נכון שלכל שתי קבוצות L,U מתקיים $L\leq U$ או $U\leq L$.

הגדרה (!)

שדה סדור $\mathbb{F}$ ייקרא **שלם** אם לכל שתי קבוצות לא ריקות $L,U \subseteq \mathbb{F}$ כך ש־ $L \leq U$, יש $c \in \mathbb{F}$ כך ש־ $L \leq c$ וגם $c \leq U$.

דוגמה

הקבוצות $L = \{\, \ell \in \mathbb{Q}^+ \mid \ell^2 < 2 \,\}$ ו־ $U = \{\, u \in \mathbb{Q}^+ \mid 2 < u^2 \,\}$ אינן ריקות ומקיימות $L \leq U$.

בשבוע הבא נוכיח כי לא קיים $c \in \mathbb{Q}$ כך ש־ $L \leq c \leq U$, ולכן $\mathbb{Q}$ **לא** שלם.

בשלב זה ראוי לשאול שתי שאלות: האם קיים בכלל שדה סדור שלם? ואם כן, האם יש יותר מאחד?

השאלה הראשונה שקולה לשאלה, האם בתוך השילוב של ארבע עשרה התכונות שהצבנו (אקסיומות השדה הסדור והשלמות) מסתתרת סתירה כלשהי. כפוף להנחות העבודה הסטנדרטיות של המתמטיקאים בימינו, ניתן להוכיח את המשפט הבא:

משפט (לא נוכיח בקורס זה) : קיים שדה סדור שלם.

לגבי השאלה השנייה, מסתבר שבאופן מהותי אין יותר ממערכת אחת כזו. אנו אומרים באופן `מהותי` כי ניתן באופן מלאכותי לייצר מערכות שונות: מתחילים מאחת, משכפלים אותה, נותנים לאיברים ולפעולות של המשוכפלת שמות חדשים, וכך מקבלים שני עותקים שונים.

דוגמה

נניח שאתם פוגשים מתמטיקאי שמראה לכם קבוצה $\{$א,ב$\} = \Psi$ עם הפעולות :

∇	א	ב
א	א	א
ב	א	ב

$\triangle$	א	ב
א	א	ב
ב	ב	א

לכל פסוק מתמטי על $\mathbb{F}_2$ יהיה אח תאום על Ψ ולהיפך, כי ניתן להציג מילון המתרגם בין השתיים:

$\mathbb{F}_2$		Ψ
a	$\leftrightarrow$	א
b	$\leftrightarrow$	ב
$\oplus$	$\leftrightarrow$	$\triangle$
$\otimes$	$\leftrightarrow$	∇

שתי מערכות המתקבלות אחת מהשנייה באופן הזה נקראות **איזומורפיות** (ביוונית iso פירושו "שווה" ו־ morphe פירושו "צורה"). המילון עצמו נקרא איזומורפיזם.

אנחנו לא חושבים על $\mathbb{F}_2$ ו־ Ψ כשונים .

משפט (לא נוכיח בקורס זה) : קיים שדה סדור שלם יחיד, עד כדי איזומורפיזם.

כלומר: אם $\mathbb{F}$ ו־ $\mathbb{F}'$ שניהם שדות סדורים ושלמים, אז ניתן למצוא התאמה חד־חד ערכית ו־"על" בין האיברים של $\mathbb{F}$ לאלו של $\mathbb{F}'$, כך שההתאמה מעבירה את לוחות הכפל והחיבור של $\mathbb{F}$ לאלו של $\mathbb{F}'$, וגם שומרת על יחס הסדר.

הגדרה : שדה סדור שלם יסומן $\mathbb{R}$ וייקרא שדה המספרים הממשיים.

כל מה שנוכיח מעתה בקורס הזה יסתמך אך ורק על 14 האקסיומות שמגדירות את מערכת המספרים הממשיים (9 אקסיומות השדה + 4 אקסיומות הסדר + אקסיומת השלמות).

מעתה נסמן $0_{\mathbb{R}} = 0$, $1_{\mathbb{R}} = 1$ ו־ $2_{\mathbb{R}} = 2$. (היות ו־ $\mathbb{R}$ הוא "היקום" שלנו בקורס הזה, לא צפוי בלבול).