תרגול 2 - השדה החשמלי

1 הגדרת השדה

בשבוע שעבר דיברנו על הכח שפועל על מטען בוחן q בהשפעת מטען נקודתי אחר או מערכת של מספר מטענים, בדידה או רציפה. הכח הפועל על מטען הבוחן הוא סכום וקטורי של הכח שמפעיל כל מטען נקודתי או אלמנט מטען על מטען הבוחן. מערכת המורכבת מ־ N מטענים נקודתיים Q_i במיקומים $\overrightarrow{r}_i$ מפעילה על מטען q הנמצא במיקום $\overrightarrow{r}$ כח

$$\overrightarrow{F} = \sum_{i=1}^{N} \frac{qQ_i}{4\pi\varepsilon_0|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_i|^3} (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_i)$$

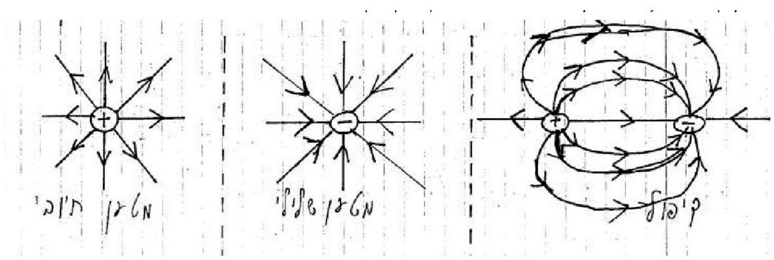
לעתים קרובות, למשל אם מערכת המטענים Q_i היא קבועה ואנו רוצים לדעת את הכח שיפעל בנקודות שונות במרחב, מגדירים שדה חשמלי

$$\overrightarrow{E} = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_i|^3} (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}_i)$$

זו פונקציה וקטורית של המרחב. כעת, הכח שיפעל על מטען q במיקום $\overrightarrow{r}$ הינו

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$$

היחידות של השדה הינן כח חלקי מטען. נוח לתאר את השדה החשמלי באופן ויזואלי ע"י קווי שדה: קוים המקבילים לשדה, מצביעים ממטענים חיוביים ואל מטענים שליליים, כך שניתן לומר שמטענים חיוביים הינם מקורות לשדה (כמו ברז) בעוד מטענים שליליים מהווים ניקוז, כמו פתח הניקוז בכיור. צפיפות הקווים מעידה על עוצמת השדה. על מטען חיובי יפעל כח בכיוון קווי השדה, ועל מטען שלילי יפעל כח בכיוון הפוך לקווי השדה.



1.1 דוגמא לחישוב שדה (מטענים בדידים)

מטען בגודל Q נמצא בראשית, ובנקודות $\pm a\hat{z}$ נמצאים מטענים q.

1. מה השדה החשמלי בכל נקודה במרחב?
2. מה הם שני הסדרים המובילים של השדה רחוק מאוד מהראשית ביחס ל־a?
3. מה קורה אם $Q=-2q$?

פתרון

1. נחשב את השדה בנקודה כללית $\vec{r}$. מספרפוזיציה, השדה הכולל יהיה סכום השדות של המטענים הנקודתיים:

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right)=kQ\frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|^{3}}+kq\frac{\vec{r}-a\hat{z}}{\left|\vec{r}-a\hat{z}\right|^{3}}+kq\frac{\vec{r}+a\hat{z}}{\left|\vec{r}+a\hat{z}\right|^{3}}$$

2. אנחנו מעוניינים בנקודות מאוד רחוקות מהראשית. הגודל האופייני של התפלגות המטען הוא המרחק a ולכן נדרוש כי $a\ll\left|\vec{r}\right|$, והגודל הקטן יהיה $\frac{a}{r}\ll1$ כאשר $\left|\vec{r}\right|=r$ הוא הרדיוס בקואורדינטות ספריות. נכתוב את המכנים בקואורדינטות ספריות ונחשב את שלושת הסדרים המובילים (מדוע? נזכר בדוגמה שראינו בשבוע שעבר של כוח מדיפול. הסיבה תתבהר גם בהמשך):

$$\begin{aligned}\left|\vec{r}\mp a\hat{z}\right|^{-3}&=\left(x^{2}+y^{2}+\left(z\mp a\right)^{2}\right)^{-\frac{3}{2}}=\left(r^{2}\mp2ar\cos\theta+a^{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\\&=r^{-3}\left(1\mp2\frac{a}{r}\cos\theta+\left(\frac{a}{r}\right)^{2}\right)^{-\frac{3}{2}}\\&=r^{-3}\left[1-\frac{3}{2}\left(\mp2\frac{a}{r}\cos\theta+\left(\frac{a}{r}\right)^{2}\right)+\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(\mp2\cos\theta\right)^{2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2}\right]+O\left(\left(\frac{a}{r}\right)^{3}\right)\\&=r^{-3}\left[1\pm3\frac{a}{r}\cos\theta+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2}\left(5\cos^{2}\theta-1\right)\right]+O\left(\left(\frac{a}{r}\right)^{3}\right)\end{aligned}$$

כעת נכפול את המכנים במונים ונקרב שוב:

$$\begin{aligned}\left(\vec{r}\mp a\hat{z}\right)\left|\vec{r}\mp a\hat{z}\right|^{-3}&=r\left(\hat{r}\mp\frac{a}{r}\hat{z}\right)\left|\vec{r}\mp a\hat{z}\right|^{-3}\\&=r\left(\hat{r}\mp\frac{a}{r}\hat{z}\right)r^{-3}\left[1\pm3\frac{a}{r}\cos\theta+\frac{3}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^{2}\left(5\cos^{2}\theta-1\right)\right]+O\left(\left(\frac{a}{r}\right)^{3}\right)\\&=\frac{1}{r^{2}}\left[\hat{r}\pm\frac{a}{r}\left(3\cos\theta\hat{r}-\hat{z}\right)+\left(\frac{a}{r}\right)^{2}\left(\frac{3}{2}\left(5\cos^{2}\theta-1\right)\hat{r}-3\cos\theta\hat{z}\right)\right]+O\left(\left(\frac{a}{r}\right)^{3}\right)\end{aligned}$$

נשים לב שכאשר נחשב את השדה הכולל האיבר מסדר ראשון יתבטל, כך ששני

הסדרים המובילים הם סדר האפס והסדר השני:

$$\begin{aligned}\vec{E}\left(\vec{r}\right) &\approx \frac{k}{r^2}\left[\left(Q+2q\right)\hat{r}+2q\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(\frac{3}{2}\left(5\cos^2\theta-1\right)\hat{r}-3\cos\theta\hat{z}\right)\right]\\ &=\frac{k}{r^2}\left[\left(Q+2q\right)\hat{r}+3q\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(\left(5\cos^2\theta-1\right)\hat{r}-2\cos\theta\hat{z}\right)\right]\\ &=\frac{k}{r^2}\left[\left(Q+2q\right)\hat{r}+3q\left(\frac{a}{r}\right)^2\left(\left(3\cos^2\theta-1\right)\hat{r}-\sin2\theta\hat{\theta}\right)\right]\end{aligned}$$

כאשר במעבר האחרון הצבנו $\hat{z}=\cos\theta\hat{r}-\sin\theta\hat{\theta}$.

3. כאשר $Q=-2q$ סדר האפס מתבטל ואנחנו נשארים עם הסדר השני

$$\vec{E}\left(\vec{r}\right)\approx\frac{kqa^2}{r^4}3\left[\left(3\cos^2\theta-1\right)\hat{r}-\sin2\theta\hat{\theta}\right]$$

נשים לב שהדעיכה של השדה כאן היא בחזקה רביעית: יותר מהר משדה הדיפול שראינו בשבוע שעבר (שדעך כמו r^{-3}). זו היא דוגמה לשדה קוואדרופול: קצב הדעיכה אופייני לקוואדרופולים, וכן ההופעה של פונקציות טריגונומטריות עם תלות ב־2θ.

2 חוק גאוס

הגדרת השטף החשמלי

$$\Phi=\iint\overrightarrow{E}\cdot\overrightarrow{n}\cdot dS=\iint\overrightarrow{E}\cdot d\overrightarrow{S}$$

חוק גאוס האינטגרלי

$$\Phi=\oiint\overrightarrow{E}\cdot d\overrightarrow{S}=\frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}=4\pi KQ_{in}=\iiint\frac{\rho_{in}}{\varepsilon_0}dV$$

האינטגרל הוא על פני משטח סגור כלשהו וכיוון השטח של אלמנט השטח מצביע החוצה מהמשטח.

2.1 תרגיל חימום

כדור מלא בעל רדיוס R טעון בצפיפות מטען אחידה ρ_0 . מצאו את השדה בכל המרחב.

פתרון

נבחר את ראשית הצירים כך שתתלכד עם מרכז הכדור. נעזר בחוק גאוס: עקב הסימטריה הכדורית של הבעיה, אנו מצפים שהשדה יהיה תלוי רק במרחק ממרכז הכדור, וכיוונו יהיה רדיאלי, כלומר

$$\overrightarrow{E}\left(\overrightarrow{r}\right)=\left|E\left(\overrightarrow{r}\right)\right|\hat{r}$$

מכאן, שהשדה אחיד על כל משטח כדורי (ספרי) שמרכזו בראשית. כעת, נחשב את השדה ברדיוס r כלשהו בעזרת חוק גאוס. לשם הבהירות, נחלק לשני מקרים $r < R$ ו־ $r > R$.

עבור $r > R$ נבנה מעטפת גאוסית כדורית ברדיוס r, . לפי חוק גאוס מתקיים שהשטף החשמלי דרך מעטפת זו שווה לסך המטען של הכדור (כל הכדור מוכל במעטפת) חלקי ε_0

$$\Phi = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi R^3 \rho_0}{3\varepsilon_0}$$

מצד שני, השטף שווה לאינטגרל משטחי של השדה על המעטפת. מכיוון שהשדה קבוע ומאונך למעטפת בכל נקודה על המעטפת (כפי שהסברנו מקודם, משיקולי סימטריה), נקבל

$$\Phi = \iint E(\overrightarrow{r})\hat{r} \cdot \hat{r} dS = |E(r)|\, 4\pi r^2$$

השוואה בין שתי התוצאות נותנת

$$\overrightarrow{E}(r > R) = \underbrace{\frac{4\pi \rho_0 R^3}{3}}_{Q_{in}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

כאשר Q הוא המטען הכולל של הכדור. קיבלנו שהשדה מחוץ לכדור זהה לשדה של מטען נקודתי הממוקם במרכז הכדור ובעל מטען זהה למטען הכולל של הכדור.

עבור $r < R$, נפתור באופן דומה. ההבדל היחיד הוא כמות המטען הלכודה בתוך המעטפת. כעת, במעטפת כדורית ברדיוס r מוכל רק המטען עד לרדיוס זה, כלומר

$$\Phi = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3\varepsilon_0}$$

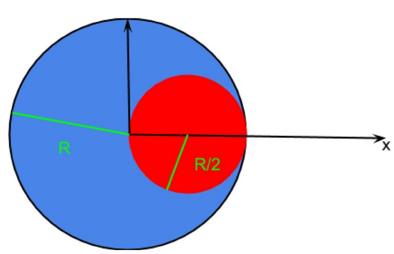
האינטגרל המשטחי מבוצע בדיוק כמו קודם. ההשוואה בין שני הביטויים נותנת:

$$\overrightarrow{E}(r < R) = \frac{r^3 \rho_0}{3\varepsilon_0 r^2}\hat{r} = \frac{r\rho_0}{3\varepsilon_0}\hat{r}$$

נשים לב שכאשר $r = R$, $\overrightarrow{E}(r < R)\Big|_{r=R} = \overrightarrow{E}(r > R)\Big|_{r=R} = \frac{R\rho_0}{3\varepsilon_0}\hat{r}$. זה מתאים לעובדה שכאשר אין צפיפות משטחית, השדה החשמלי רציף.

2.2 דוגמה: שדה של כדור עם חור

מכדור ברדיוס R המלא בצפיפות מטען נפחית הוציאו כדור ברדיוס $\frac{R}{2}$ המשיק לשפת הכדור. מהו השדה החשמלי בכל המרחב?



פתרון

נסמן שמרכז הכדור הגדול הוא בראשית הצירים ומרכז הכדור החסר ב־ $\frac{R}{2}\hat{x}$. ניתן להתייחס לכדור הגדול עם החלק החסר כאל סופרפוזיציה של כדור מלא ברדיוס R בצפיפות מטען ρ (מטען כולל Q) וכדור נוסף (ברדיוס $R/2$) במקום בו חסר חלק אך בצפיפות מטען הפוכה $-\rho$ (מטען כולל $\frac{Q}{8}$) כאשר $Q = \frac{4\pi R^3}{3}\rho$.

כדי לפתור את הבעיה אין צורך בשום חישוב חישוב חדש ־ נשתמש בחישוב שביצענו כחימום. הדבר היחיד שיש לעשות הוא לכתוב את השדה לכדור שמוזז מהראשית, וכן להפריד ל־3 מקרים:

- מחוץ לשני הכדורים

$$\overrightarrow{E}\left(\overrightarrow{r}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{8}\frac{\overrightarrow{r} - \frac{R}{2}\hat{x}}{|\overrightarrow{r} - \frac{R}{2}\hat{x}|^3}$$

- בתוך הכדור הגדול ומחוץ לכדור הקטן

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\overrightarrow{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{8}\frac{\overrightarrow{r} - \frac{R}{2}\hat{x}}{|\overrightarrow{r} - \frac{R}{2}\hat{x}|^3}$$

- בתוך שני הכדורים (בתוך הכדור הקטן)

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\overrightarrow{r} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{8}\frac{\overrightarrow{r} - \frac{R}{2}\hat{x}}{\left(\frac{R}{2}\right)^3} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\hat{x}$$

קיבלנו שהשדה באזור החלול קבוע והינו בכיוון x!

באופן כללי, נוכל להשתמש בעיקרון הסופרפוזיציה כדי לפרק קונפיגורציות מטען מורכבות לסכום של קונפיגורציות פשוטות יותר. כאשר ישנה צפיפות מטען כלשהי במרחב $\rho(\overrightarrow{r})$ אשר אפשר להציגה כסכום של צפיפויות מטען שונות שאנו מכירים את השדה שהן יוצרות במרחב

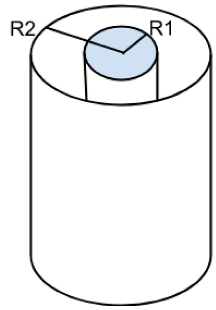
$$\rho(\overrightarrow{r}) = \rho_1(\overrightarrow{r}) + \rho_2(\overrightarrow{r}) + \ldots$$

וכך ניתן לקבל את הפתרון לשדה בבעיה

$$\overrightarrow{E}(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{E}_1(\overrightarrow{r}) + \overrightarrow{E}_2(\overrightarrow{r}) + \ldots$$

2.3 דוגמה: קבל קואקסיאלי

נתון גליל מלא אינסופי ברדיוס R_1 בצפיפות מטען אחידה ρ_0, ומעטפת של גליל ברדיוס $R_2 > R_1$ בצפיפות מטען $\sigma_0 = -\rho_0\frac{R_1^2}{2R_2}$



א. מהו השדה החשמלי במרחב ?
ב. איך ישתנה השדה בנקודה r , רחוק מאוד מהגליל והמעטפת, אם נזיז את המעטפת כך שמרכזה יזוז הצידה למרחק קצר d, $d \ll r$? פתחו עד סדר מוביל לפי הגודל $\delta = \frac{d}{r}$.

פתרון

א. נבחר את ציר z לאורך ציר הסימטריה של הגליל המלא. מהסימטריה של הבעיה, השדה רדיאלי (במובן של קואורדינטות גליליות)

$$\overrightarrow{E}\left(\overrightarrow{r}\right) = |E(\overrightarrow{r})|\,\hat{r}$$

נבנה מעטפת גאוס גלילית באורך h וברדיוס r (שמרכזה מתלכד גם כן עם ציר z) ונקבל מחוק גאוס

$$2\pi r h E(r) = \frac{Q_{in}}{\varepsilon_0}$$

שימו לב שאין תרומה לשטף משני הבסיסים המקבילים של המעטפת הגלילית.
עבור $r > R_2$ סך המטען הכלוא בתוך המעטפת מתאפס

$$Q_{in} = 2\pi R_2 h \sigma_0 + \pi R_1^2 h \rho_0 = 0$$

נחשב בדומה את המטען בתוך המעטפת בשלושת התחומים הרלוונטיים ונקבל

$$Q_{in} = \begin{cases} \pi r^2 h \rho_0 & r \leq R_1 \\ \pi R_1^2 h \rho_0 & R_1 \leq r < R_2 \\ 0 & R_2 < r \end{cases}$$

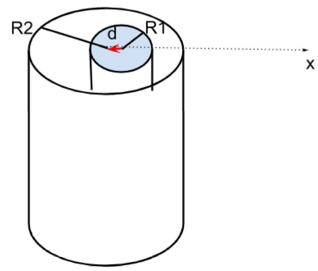
מכאן נקבל שהשדה הינו

$$\overrightarrow{E}\left(\overrightarrow{r}\right) = \begin{cases} \frac{r\rho_0}{2\varepsilon_0}\hat{r} & r \leq R_1 \\ \frac{R_1^2\rho_0}{2r\varepsilon_0}\hat{r} & R_1 \leq r < R_2 \\ 0 & R_2 < r \end{cases}$$

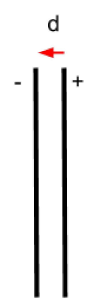
שימו לב שהשדה בתחום האמצעי זהה לשדה של תיל אינסופי בעל צפיפות מטען אורכית $\lambda = \pi R_1^2 \rho_0$, כלומר

$$\vec{E}(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}\hat{r} \quad , \quad R_1 < r < R_2.$$

ב. נבחר את ציר $\hat{x}$ בכיוון הפוך לתזוזת המעטפת d.



ראשית הצירים במרכז הגליל המלא. כפי שראינו המטען על הגליל ועל המעטפת הגלילית שווה אך הפוך בסימנו. באופן כללי, לפי חוק גאוס, השדה מחוץ לגליל אינסופי טעון בצורה אחידה זהה לשדה מתיל אינסופי עם צפיפות אורכית מתאימה. לכן ניתן לפשט את הבעיה ולהתבונן בשדה רחוק מאוד משני תיילים בעלי צפיפות מטען $\pm\lambda_0 = \pm\pi R_1^2 \rho_0$ מרוחקים זה מזה במרחק d



$$\overrightarrow{E}\left(\overrightarrow{r}\right) = \frac{\lambda}{2\pi r \varepsilon_0}\hat{r} + \frac{-\lambda}{2\pi \varepsilon_0}\frac{r\hat{r} + d\hat{x}}{|r\hat{r} + d\hat{x}|^2}$$

אנו מתעניינים בגבול $\delta = \frac{d}{r} \ll 1$ ולכן (תוך שימוש בכך ש-$\hat{x} = \cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}$

$$\frac{1}{|r\hat{r} + d\hat{x}|^2} = \frac{1}{r^2 + 2dr\hat{r}\cdot\left(\cos\theta\hat{r} - \sin\theta\hat{\theta}\right) + d^2} = \frac{1}{r^2}\frac{1}{1 + 2\cos\theta\delta + \delta^2} \simeq \frac{1}{r^2}\left(1 - 2\cos\theta\delta\right)$$

כאשר שמרנו אברים עד לסדר ראשון ב־ δ מציבים זאת בחזרה לשדה ומקבלים

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{E}\left(\overrightarrow{r}\right) &= \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\hat{r} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{r\hat{r}+d\hat{x}}{r^2}\left(1-2\cos\theta\delta\right) \simeq \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\hat{r} - \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{r}+\delta\hat{x}}{r}\left(1-2\cos\theta\delta\right) \\
&= \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\left(\hat{r}-\hat{r}+2\cos\theta\delta\hat{r}-\delta\hat{x}+O\left(\delta^2\right)\right) \\
&= \frac{\lambda\delta}{2\pi r\varepsilon_0}\left[2\cos\theta\hat{r}-\hat{x}\right] = \frac{\lambda d}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\left(2\cos\theta\hat{r}-\hat{x}\right)
\end{aligned}$$

כאשר $\cos\theta = x/r$ (קואורדינטות גליליות) ושוב הקפדנו לשמור אברים עד סדר ראשון ב־ δ בלבד. קיבלנו שהתרומה שגודלה הולך כמו $\frac{1}{r}$ מתבטלת מהשדות של התייל החיובי והשלילי ונשארת תרומה קטנה יותר בסדר גודל של $\frac{1}{r^2}$. לבדיקה, עבור צידו החיובי של ציר ה־ x נקבל שדה חיובי בכיוון $\hat{x}$ בהתאם לכך שהתייל הקרוב יותר טעון חיובית