80177 + 80155 - סמסטר ב' תשפ"ג - 2022-2023 - תרגול פעיל 3

זכרו לכתוב את כל ההוכחות בצורה מלאה.

שאלה 1

יהיו $A,B \subseteq \mathbb{R}$ לא ריקות וחסומות ו- $\alpha \in \mathbb{R}$.

א) כתבו את ההגדרה של $\alpha = \inf(A)$.

ב) הוכיחו או הפריכו :

(i) המספרים $\sup(A)$, $\sup(B)$, $\inf(A)$, $\inf(B)$ קיימים.

(ii) אם נתון ש- $\sup(A) \leqslant \sup(B)$ ו- $\inf(B) \leqslant \inf(A)$, אזי $A \subseteq B$.

שאלה 2

יהיו $A,B \subseteq \mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א) אם A חסומה ו- $B \leq A$, אז B חסומה מלרע.

ב) אם B חסומה מלעיל ו- A איננה חסומה מלעיל, אז $A \setminus B$ איננה חסומה מלעיל.

ג) אם $A \neq B$ וגם $A \setminus B$ ו- $B \setminus A$ חסומות, אז לפחות אחת מבין A ו- B חסומה.

שאלה 3

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ לא ריקה וחסומה מלעיל. הוכיחו או הפריכו: לקבוצה $U = \{\, M \in \mathbb{R} \mid A \leq M \,\}$ יש מינימום.

שאלה 4

תהי $U \subseteq \mathbb{R}$. נתון של- U יש מינימום. הוכיחו או הפריכו : קיימת $A \subseteq \mathbb{R}$ לא ריקה כך ש- $U = \{M \in \mathbb{R} \mid A \leqslant M\}$.

שאלה 5

תהי $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}^{+} = \{\, x \in \mathbb{R} \;\mid\; 0 < x \,\}$. הוכיחו : אם A איננה חסומה מלעיל, אז $\inf \left\{ \frac{1}{a} \;\middle|\; a \in A \right\} = 0$.

שאלות נוספות (אם נשאר זמן)

שאלה 6

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

א) הוכיחו כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(1_{\mathbb{F}})^n = 1_{\mathbb{F}}$.

ב) בתרגיל הבית תוכיחו כי לכל $x,y \in \mathbb{F}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $(xy)^n = x^n y^n \quad (*)$.

הסיקו מ- $(*)$ שאם $y \neq 0_{\mathbb{F}}$ אז $\left(y^{-1}\right)^n = (y^n)^{-1}$.

שאלה 7

הגדרה : בהינתן $\varnothing \neq A,B \subseteq \mathbb{R}$ נגדיר $A + B = \{\, a+b \mid a \in A \,,\, b \in B \,\}$.

שימו לב שכל איבר $x \in A+B$ הינו מהצורה $x = a+b$ לאיזשהם $a \in A$ ו- $b \in B$, אבל ייתכן שביותר מדרך אחת.

למשל עבור $A = \{\,-2,0,1\,\}$ ו- $B = \{\,1,3\,\}$ נקבל

$$A+B = \{\,-2+1\,,\,-2+3\,,\,0+1\,,\,0+3\,,\,1+1\,,\,1+3\,\} = \{\,-1\,,\,1\,,\,1\,,\,3\,,\,2\,,\,4\,\} = \{\,-1\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\,\}$$

האיבר 1 ב- $A+B$ מתקבל בשני אופנים שונים.

עבור הקבוצות $A,B \subseteq \mathbb{R}$ הבאות, מצאו את הקבוצה $A+B$. הוכיחו את תשובתכם!

א) $A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 \leqslant x \leqslant 3 \,\} = [0,3] \quad , \quad B = \{\,1,2\,\}$.

ב) $A = \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1 \,\} \quad , \quad B = \{\,-1,1\,\}$.