תרגיל 4 - אלגברה ליניארית 2 להנדסה ומדעים תשפ"ג 2022-2023

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה), מספר ת.ז וכותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 30/4/2022 בשעה 22:00.

1. יהי $\mathcal{E} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ הבסיס הסדור של $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, כאשר

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

חשבו את המטריצה המייצגת בבסיס $\mathcal{E}$ של ההעתקות הליניאריות הבאות (אין צורך להוכיח שאלו העתקות ליניאריות):

(א) $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\quad T(X) = X^t$

(ב) $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\quad T(X) = AX$, כאשר $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ מטריצה נתונה.

2. נתונים בסיסים סדורים $\mathcal{B} = \left(\vec{b_1}, \vec{b_2}\right)$ ו- $\mathcal{B}' = \left(\vec{b_1'}, \vec{b_2'}, \vec{b_3'}\right)$ של $\mathbb{R}^2$ ו- $\mathbb{R}^3$ בהתאמה:

$$\vec{b_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \vec{b_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad , \qquad \vec{b_1'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \vec{b_2'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \vec{b_3'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

תהי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ העתקה ליניארית. נתון שהמטריצה המיוצגת של T ביחס לבסיסים $\mathcal{B}$ ו- $\mathcal{B}'$ היא $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 7 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$.

כתבו נוסחה מפורשת ל- $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$ (כלומר, כתבו כל רכיב של $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$ כביטוי ב- x, y).

3. נתונים בסיסים $\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$, $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right)$ של $\mathbb{R}^2$ (אין צורך לבדוק כי $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ בסיסים) והעתקה לינארית $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ כך ש- $[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. חשבו את $[T]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}$.

4. נתונים מרחב וקטורי V מעל $\mathbb{R}$, בסיס $\mathcal{B} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ של V וה"ל $T : V \to \mathbb{R}^2$ כך ש

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 4 \\ -1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

כאשר $\mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$ בסיס של $\mathbb{R}^2$. בנוסף, נתון $\vec{v} \in V$ כך ש $[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. מצאו את $T(\vec{v})$.

5. נתבונן ב- $\mathbb{R}^2$ כמרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, בבסיס הסטנדרטי $\mathcal{E}$ של $\mathbb{R}^3$ ובבסיס $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ של $\mathbb{R}^2$. נתונה העתקה לינארית $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ כך ש- $[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$. מצאו מטריצה A כך ש- $A = [T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}_2}$. כאשר $\mathcal{E}_2$ הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^2$.

6. נתונים מרחב וקטורי W מעל $\mathbb{R}$, בסיס $\mathcal{C} = (\vec{w_1}, \vec{w_2})$ של W, וגם העתקה לינארית $T\colon \mathbb{R}^2 \to W$ כך ש-

$$[T]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

כאשר $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ בסיס של $\mathbb{R}^2$. בנוסף נתון $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ כך ש- $[T(\vec{v})]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$. מצאו את $\vec{v}$.