תרגיל 3 - אלגברה ליניארית 2 להנדסה ומדעים תשפ"ג 2022-2023

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה), מספר ת.ז וכותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 19/04/2023 בשעה 22:00.

1. יהיו V ו- W מרחבים וקטוריים ותהי $T: V \to W$ העתקה ליניארית. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:
   (א) אם $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \subseteq V$ קבוצה סופית בת"ל, אז $(T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_n)) \subseteq W$ בת"ל.
   (ב) אם $(T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_n)) \subseteq W$ בת"ל, אז $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \subseteq V$ בת"ל.
   (ג) אם T העתקה ליניארית **חח"ע** ו- $(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \subseteq V$ קבוצה סופית בת"ל, אז $(T(\vec{v}_1), \ldots, T(\vec{v}_n)) \subseteq W$ בת"ל.

2. יהיו U, V, W מרחבים וקטוריים ו- $T: U \to V$ ו- $S: V \to W$ העתקות לינאריות.
   (א) הוכיחו כי $\mathrm{Im}(S \circ T) \subseteq \mathrm{Im}(S)$.
   (ב) הוכיחו כי $\mathrm{Ker}(T) \subseteq \mathrm{Ker}(S \circ T)$.

3. יהי V מרחב וקטורי ו- $T: V \to V$ אופרטור לינארי. נסמן כרגיל T^2 במקום $T \circ T$. הוכיחו או הפריכו:
   (א) אם $T^2 = 0$, אז $T = 0$.
   (ב) אם $T^2 = T$ ו- $T \neq 0$, אז T חח"ע ועל.
   (ג) אם T^2 חח"ע ועל אז T חח"ע ועל.

4. נתונים V, W שני מרחבים וקטורים ממימד סופי ונתונה העתקה לינארית $T: V \to W$.
   (א) הוכיחו שאם T חד-חד ערכית אז $\dim(V) \leqslant \dim(W)$, ואם T "על" אז $\dim(V) \geqslant \dim(W)$.
   (ב) נתונה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$. היעזרו ב- $T_A: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ המוגדרות על-ידי $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$ על-מנת להסיק מסעיף א' כי:
      i. אם $n > m$, אז למערכת המשוואות ההומוגנית $A\vec{x} = \vec{0}$ יש בהכרח פתרון לא טריוויאלי.
      ii. אם $n < m$, אז קיים $\vec{b}$ ב- $\mathbb{F}^m$ עבורו למערכת המשוואות $A\vec{x} = \vec{b}$ אין פתרון.
      iii. אם $n = m$, אז למערכת ההומוגנית $A\vec{x} = \vec{0}$ יש פתרון יחיד אם"ם למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ יש פתרון **לכל** $\vec{b}$ ב- $\mathbb{F}^m$.

5. בכל אחד מהסעיפים הבאים בדקו האם קיימת העתקה ליניארית $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת את האילוצים הנתונים.
   אם לא, הוכיחו! אם כן, מצאו נוסחה מפורשת להעתקה ומטריצה $A \in M_3(\mathbb{R})$ כך ש- $T(\vec{x}) = A\vec{x} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^3$.

(א)
$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\-5\\-3\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}$$

(ב)
$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\-1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\-2\\0\end{bmatrix}$$