80177 - אינפי למדעים - סמסטר ב' תשפ"ג 2022-2023 - תרגיל 3

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז.** יש לציין **כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל- 18.04.23 בשעה 22:00.

1. הוכיח את התכונה הבאה של חזקות עם מעריך שלם:

לכל $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ולכל $n\in\mathbb{Z}$ מתקיים $(ab)^n=a^nb^n$ (קבלו השראה מהוכחת תכונה 2 בתרגול).

2. הוכיחו כי לכל $a,b\in\mathbb{R}$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים :

(א) $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

(ב) $a^{2n+1}+b^{2n+1}=(a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+\ldots-ab^{2n-1}+b^{2n})$

3. תהי $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{R}$. בהרצאה הוכחנו כי $M\in\mathbb{R}$ הוא **החסם העליון** של A <u>אם ורק אם</u> M מקיים את שני התנאים הבאים:

M חסם מלעיל של A ולכל $\varepsilon>0$ קיים $a\in A$ כך ש- $M-\varepsilon<a$.

נסחו והוכיחו טענה דומה הקובעת מתי $m\in\mathbb{R}$ הוא **החסם התחתון** של A .

4. יהיו $\varnothing\neq A,B\subseteq\mathbb{R}$ חסומות מלעיל.

(א) הוכיחו : $(\forall a\in A\quad\exists b\in B\quad a\leqslant b)\quad\Rightarrow\quad\sup(A)\leqslant\sup(B)$.

(ב) נתון : $\forall a\in A\quad\exists b\in B\quad a\leqslant b\qquad\wedge\qquad\forall b\in B\quad\exists a\in A\quad b\leqslant a$

הוכיחו : $\sup(A)=\sup(B)$. נסחו (מבלי לתת הוכחה) טענה דומה הנוגעת ל- $\inf$.

5. **הגדרה :** בהינתן $\varnothing\neq A,B\subseteq\mathbb{R}$ נגדיר $A+B=\{a+b\mid a\in A\ ,\ b\in B\}$.

שימו לב שכל איבר $x\in A+B$ הינו מהצורה $x=a+b$ לאיזשהם $a\in A$ ו- $b\in B$, אבל ייתכן שביותר מדרך אחת.

למשל עבור $A=\{-2,0,1\}$ ו- $B=\{1,3\}$ נקבל

$$A+B=\{-2+1\,,\,-2+3\,,\,0+1\,,\,0+3\,,\,1+1\,,\,1+3\}=\{-1\,,\,1\,,\,1\,,\,3\,,\,2\,,\,4\}=\{-1\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,4\}$$

האיבר 1 ב- $A+B$ מתקבל בשני אופנים שונים.

הוכיחו שאם A ו- B חסומות מלעיל, אזי $A+B$ חסומה מלעיל ומתקיים: $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.

6. יהיו $A,B\subseteq\mathbb{R}$ קבוצות לא ריקות. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות הבאות:

א) אם A חסומה ו- $B\leq A$, אז B חסומה מלרע.

ב) אם B חסומה מלעיל ו- A איננה חסומה מלעיל, אז $A\setminus B$ איננה חסומה מלעיל.

ג) אם ל- A קיים מקסימום , אז הוא יחיד.

7. בדקו האם תת-הקבוצות הבאות של $\mathbb{R}$ חסומות מלעיל או מלרע. אם כן, חשבו את האינפימום ו/או הסופרמום.

קבעו גם האם קיימים מקסימום ומינימום, ואם כן, חשבו אותם. הוכיחו את תשובותיכם!

א) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\mid\left|x^2-4\right|\leqslant5\right\}$ ב) $B=\left\{\dfrac{n^2+12n+32}{n+5}\;\middle|\;n\in\mathbb{N}\right\}$

(רמז עבור הקבוצה B - מצאו $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך שעבור כל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\dfrac{n^2+12n+32}{n+5}=an+b+\dfrac{c}{n+5}$).

(המשך ←)

8. בהינתן $t \in \mathbb{R}$, נגדיר $A_t = \{ x \in \mathbb{R} \mid t \leqslant |x+2| + |x-2| < 8 \}$.

(א) מצאו את כל המספרים $x \in \mathbb{R}$ השייכים לקבוצה A_6 . הוכיחו את תשובתכם!

(ב) הוכיחו שאם $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ מקיימים $t_1 < t_2$, אז $A_{t_2} \subseteq A_{t_1}$. מהי A_t עבור $8 \leqslant t$?

(ג) הוכיחו או הפריכו: $A_t = A_4$ עבור כל $t \leqslant 4$.

9. א) הוכיחו שלכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $n \in \mathbb{Z}$ כך ש- $n \leqslant x$.

ב) תהי $A \subseteq \mathbb{Z}$ קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע של מספרים שלמים. היעזרו בעיקרון הסדר הטוב כדי להוכיח של- A יש מינימום.

(רמז : הסתכלו על $A + \{m\}$)

ג) תהי $A \subseteq \mathbb{Z}$ לא ריקה וחסומה מלעיל . הוכיחו של-A יש מקסימום. (רמז : הסתכלו על $-A$)

10. (א) יהיו $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ עם $0 < x_1$ ו- $0 < x_2$ כך ש- $x_1 x_2 = 1$ (כלומר $x_2 = \dfrac{1}{x_1}$). הוכיחו ש- $x_1 + x_2 \geqslant 2$.

(ב) כעת נוכיח טענת עזר שתעזור לנו בהמשך: יהיו $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ עם $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3$, כך ש- $x_1 x_2 x_3 = 1$.

i. הוכיחו ש- $0 < x_1 \leqslant 1$ ו- $1 \leqslant x_3$, כלומר ש- $0 \leqslant 1 - x_1$ ו- $0 \leqslant x_3 - 1$, והסיקו כי $1 + x_1 x_3 \leqslant x_1 + x_3$.

ii. הסיקו מסעיף א' ש- $(x_1 x_3) + x_2 \geqslant 2$ והוכיחו ש- $x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 3$.

(ג) יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהיו $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ עם $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ כך ש- $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1$.

הוכיחו באינדוקציה על n ש- $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geqslant n$.

הנחיה: בצעד האינדוקציה אתם מתחילים עם $0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \in \mathbb{R}$ כך ש- $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n \cdot x_{n+1} = 1$.

סמנו $y_1 = x_1 x_{n+1}$, $y_2 = x_2$, ..., $y_n = x_n$, ושימו לב ש- $y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n = 1$.

העזרו בסעיף ב' בכדי לקבל ש- $1 + y_1 = 1 + x_1 x_{n+1} \leqslant x_1 + x_n$.

מכאן קבלו כי $1 + y_1 + \ldots + y_n \leqslant x_1 + x_2 + \ldots x_n + x_{n+1}$.

לסיום השתמשנו בהנחת האינדוקציה על $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ (ודאו שאתם מבינים מדוע ניתן לעשות זאת).