

חשמל ומגנטיות – תרגיל 3

1. שימושים ומגבלות של חוק גאוס האינטגרלי והדיפרנציאלי – תרגיל מודרך.

- (א) השדה החשמלי של מטען נקודתי Q הממוקם בראשית הוא $\vec{E} = \frac{kQ}{r^2} \hat{r}$. השתמשו בחוק גאוס הדיפרנציאלי על מנת לנסות לקבל את התפלגות המטען במרחב בהנתן שדה חשמלי זה. האם קיבלתם תשובה הגיונית? הסבירו את תשובתכם.
- (ב) נסתכל כעת על כדור מלא ברדיוס R הטעון במטען כולל Q בהתפלגות מטען אחידה. חשבו את השדה החשמלי בכל המרחב בעזרת חוק גאוס הדיפרנציאלי והשוו לתוצאה מההרצאות.
- (ג) הניחו כעת שנתון במרחב השדה שמצאתם בסעיף ב'. השתמשו בחוק גאוס הדיפרנציאלי כדי לשחזר את התפלגות המטען במרחב. ודאו שקיבלתם תשובה המתאימה לכדור טעון באופן אחיד ברדיוס R .
- (ד) מה צפיפות המטען הנפחית בגבול $R \rightarrow 0$ (כלומר כאשר הכדור מכווץ לנקודה)? מה השדה החשמלי בגבול זה?
- (ה) חזרו לשדה החשמלי של מטען נקודתי, והשתמשו בחוק גאוס האינטגרלי כדי למצוא את המטען בתוך כדור ברדיוס כלשהו סביב הראשית. האם המטען בכדור כזה תלוי ברדיוס שבחרתם? מה ניתן להסיק מכך?

2. הדיברגנץ בקואורדינטות כדוריות.

- (א) הוכיחו כי עבור שדה וקטורי מהצורה $f(r) \hat{r}$ בקואורדינטות כדוריות מתקיים

$$\vec{\nabla} \cdot (f(r) \hat{r}) = f'(r) + \frac{2}{r} f(r)$$

הערה: אין צורך להראות זאת מההגדרה כגבול, ניתן להשתמש בביטויים הסופיים עבור הדיברגנץ ובזהויות ממת"פ.

- (ב) נתון השדה החשמלי הבא, בקואורדינטות קרטזיות

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{5R^5} (x^2 + y^2 + z^2) - \frac{\alpha}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) & r < R \\ -\frac{\alpha}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}) & R < r \end{cases}$$

מה התפלגות המטען המתאימה אליו? (התייחסו לכל ההתפלגויות).

הדרכה: חוק גאוס הדיפרנציאלי מאפשר לחשוף את התפלגות המטען הנפחית באזורים בהם היא לא סינגולרית. אולם, הסינגולריות בהתפלגות המטען מתבטאת גם בהתנהגות של השדה החשמלי:

- במקרים בהם השדה אינו רציף (כלומר כאשר יש "קפיצה" בשדה), נצפה להתפלגות משטחית. ראינו בתרגול ובשיעור כיצד

לחלץ את צפיפות המטען המשטחית במקרה זה.

• במקרים בהם השדה מתבדר, נצפה להתפלגות נקודתית או קווית. כדי לחשוף את עוצמת המטען בהתפלגות ניתן להשתמש בחוק גאוס האינטגרלי. (רמז: נסו לחשוב מה המשמעות של הסימטריה של הבעיה על קיום של התפלגות מטען קווית/נקודתית).

3. נתון השדה החשמלי הבא, בקואורדינטות גליליות

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \left(\frac{b}{r} + \frac{a}{6}r(3R - 2r)\right) \hat{r} & r < R \\ \frac{aR^3}{6r} \hat{r} & R < r \end{cases}$$

(א) מה התפלגות המטען המתאימה אליו? (התייחסו לכל ההתפלגויות).

הדרכה: ראו שאלה 2.

4. נתונה קליפה כדורית דקה בעלת רדיוס R , טעונה באופן אחיד במטען Q .

בתרגול חישבנו את העבודה הנחוצה להרכבת הקליפה בצורה מפורשת במסגרת פרוטוקול בו הבאנו אלמנטי מטען אינפיניטסימאליים.

בשאלה זו נחשב את אותה עבודה במספר דרכים שונות: וודאו כי אתם מקבלים את אותה התשובה שקיבלנו בתרגול.

(א) חשבו את עבודת ההרכבה באופן מפורש באמצעות פרוטוקול הרכבה אלטרנטיבי: בתחילת התהליך המטענים מפולגים על פני

מעטפת כדורית ברדיוס אינסופי. במהלך התהליך המעטפת מכווצת כך שהיא שומרת על צורתה הספרית, והתפלגות המטען עליה

נשמרת אחידה על פני המעטפת (רק צפיפות המטען המשטחית משתנה), עד אשר המעטפת מכווצת לרדיוסה הסופי R .

הדרכה: השתמשו בנוסחה מההרצאות עבור הכוח שמופעל על משטח טעון.

5. מתוך מועד ב' תשע"ט

גז של חלקיקים בעלי מסה m ומטען חשמלי q מוחזק במנוחה בצפיפות אחידה n_0 בכדור שרדיוסו R_0 . הצפיפות n_0 היא מספר

החלקיקים ליחידת נפח. ברגע $t = 0$ משחררים את הגז, והחלקיקים מואצים כתוצאה מהדחייה החשמלית ביניהם. לאחר מספיק זמן

ניתן להניח כי החלקיקים מגיעים למהירות קבועה.

(א) כדור הגז נבנה קליפה אחר קליפה. חשבו את העבודה שצריך להשקיע, בזמן בניית הקליפה שרדיוסה r_0 על מנת להביא חלקיק גז

מהאינסוף למרחק r_0 מהכדור.

(ב) חשבו את המהירות אליה יגיע החלקיק מסעיף א' בזמנים ארוכים. קרי, מצאו את המהירות הסופית של הגז כפונקציה של המיקום

ההתחלתי $v(r_0)$.

הנחייה: מה קורה לקליפות של הכדור במהלך ההתפשטות? מה הכוח שחלקיק על קליפה מסוימת ירגיש במהלך התנועה?

(ג) חשבו את צפיפות המטען של הגז כפונקציה של הרדיוס בזמן t ארוך (כלומר רחוק מ-0). העזרו בקירוב $t \approx v(r_0)$.

6. קליפה כדורית עבה

נתונה קליפה כדורית עבה בתחום $r_1 < r < r_2$ הטעונה בצפיפות מטען אחידה ρ .

(א) חשבו את השדה החשמלי בכל המרחב (רמז: היעזרו בתרגול 2 בשאלה על כדור שרוקן).

(ב) מהי העבודה הנדרשת ליצירת הקליפה?

(ג) מתוך סעיף ב' - מה העבודה הנדרשת ליצירת כדור מלא?

(ד) מה העבודה הדרושה על מנת למלא את קליפת הכדור? (כלומר למלא את הקליפה בין $0 < r < r_1$).

