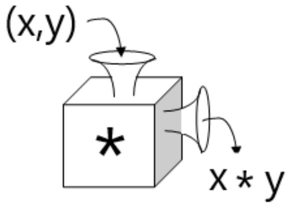
הגדרה

תהי S קבוצה נתונה. פעולה (בינרית) ב־ S היא `מכונה` (למעשה פונקציה) שמתאימה לכל זוג סדור (x,y) של איברים מ־ S איבר ב־ S הנקבע לחלוטין על ידי הזוג הסדור (x,y) .



סימון

אחרי שקובעים שם לפעולה, למשל $\star$, מסמנים את האיבר הספציפי של S שמותאם לזוג הסדור (x,y) על ידי הפעולה $\star$ ב־ $x \star y$.

הערה : דרך שקולה להגיד ש־ $x \star y$ נקבע לחלוטין על ידי (x,y) היא : אם $x = x'$ ו־ $y = y'$ אזי $x \star y = x' \star y'$.

דוגמה

תהי $S = \{a,b\}$ עם $a \neq b$. נגדיר פעולה $\star$ על S באופן הבא:

$$a \star a = b \quad , \quad a \star b = a \quad , \quad b \star a = b \quad , \quad b \star b = a$$

אפשר לכתוב זאת בצורה קומפקטית באמצעות טבלה :

$\Rsh \star$	a	b
a	b	a
b	b	a

. (שימו לב למוסכמה בכיוון הקריאה)

הגדרה : שדה הוא קבוצה $\mathbb{F}$ שיש בה

1. איברים מובחרים $0_{\mathbb{F}}, 1_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}$ <u>שונים זה מזה</u> .
2. פעולות בינאריות $\oplus, \otimes$:

   לפעולה $\oplus$ נקרא **חיבור** ו־ $x \oplus y$ נקרא ה**סכום** של x ו־ y .

   לפעולה $\otimes$ נקרא **כפל** ו־ $x \otimes y$ נקרא ה**מכפלה** של x ו־ y .

כך שמתקיימים התכונות הבאות:

$A_{\oplus}$	$\forall x,y,z \in \mathbb{F} \quad (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$	$A_{\otimes}$	$\forall x,y,z \in \mathbb{F} \quad (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z)$	קיבוץ (אסוציאטיביות)
$N_{\oplus}$	$\forall x \in \mathbb{F} \quad x \oplus 0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}} \oplus x = x$	$N_{\otimes}$	$\forall x \in \mathbb{F} \quad x \otimes 1_{\mathbb{F}} = 1_{\mathbb{F}} \otimes x = x$	איברים נייטרליים
$I_{\oplus}$	$\forall x \in \mathbb{F} \quad \exists x' \in \mathbb{F} \quad x \oplus x' = x' \oplus x = 0_{\mathbb{F}}$	$I_{\otimes}$	$\forall x \in \mathbb{F} \setminus \{0_{\mathbb{F}}\} \quad \exists \hat{x} \in \mathbb{F} \quad x \otimes \hat{x} = \hat{x} \otimes x = 1_{\mathbb{F}}$	איברים נגדיים והפכיים
$C_{\oplus}$	$\forall x,y \in \mathbb{F} \quad x \oplus y = y \oplus x$	$C_{\otimes}$	$\forall x,y \in \mathbb{F} \quad x \otimes y = y \otimes x$	חילוף (קומוטטיביות)
$D: \ \forall x,y,z \in \mathbb{F} \quad (x \oplus y) \otimes z = (x \otimes z) \oplus (y \otimes z)$				פילוג (דיסטריבוטיביות)

משפט וסימונים (מסקנות מאקסיומות השדה)

יהי $\mathbb{F}$ שדה.

1. קיים רק איבר **אחד** האדיש לחיבור, והוא $0_{\mathbb{F}}$.
כלומר: בהינתן $e \in \mathbb{F}$ כך שלכל $x \in \mathbb{F}$ מתקיים $x \oplus e = x$, אז $e = 0_{\mathbb{F}}$.
2. קיים רק איבר **אחד** האדיש לכפל, והוא $1_{\mathbb{F}}$.
כלומר: בהינתן $f \in \mathbb{F}$ כך שלכל $y \in \mathbb{F}$ מתקיים $y \otimes f = y$, אז $f = 1_{\mathbb{F}}$.
3. $x \otimes 0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}} \quad \forall x \in \mathbb{F}$.
4. לכל איבר בשדה קיים נגדי <u>יחיד</u> , כלומר :
בהינתן $x \in \mathbb{F}$, אם האיברים $x', x'' \in \mathbb{F}$ מקיימים $x \oplus x' = 0_{\mathbb{F}}$ ו־ $x \oplus x'' = 0_{\mathbb{F}}$ אזי $x' = x''$.
הנגדי של x מסומן ב־ $-x$.
5. לכל איבר בשדה השונה מ־ $0_{\mathbb{F}}$ קיים הופכי <u>יחיד</u> , כלומר :
בהינתן $0_{\mathbb{F}} \neq x \in \mathbb{F}$, אם האיברים $\widehat{x}, \widehat{\widehat{x}} \in \mathbb{F}$ מקיימים $x \otimes \widehat{x} = 1_{\mathbb{F}}$ ו־ $x \otimes \widehat{\widehat{x}} = 1_{\mathbb{F}}$ אזי $\widehat{x} = \widehat{\widehat{x}}$.
ההופכי של $x \neq 0_{\mathbb{F}}$ מסומן ב־ x^{-1} .

<u>הוכחה</u> :

.1 : יהי e איבר ב־ $\mathbb{F}$ שאדיש לחיבור, כלומר $x \oplus e = e \oplus x = x \quad \forall x \in \mathbb{F}$.

אזי מתקיים : $$0_{\mathbb{F}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{אדיש לחיבור } e}}{=} 0_{\mathbb{F}} \oplus e \underset{\substack{\uparrow \\ \text{אדיש לחיבור } 0_{\mathbb{F}}}}{=} e$$

לכן ב־ $\mathbb{F}$ קיים רק איבר אדיש אחד לחיבור.

.3 : יהי $x \in \mathbb{F}$. נסמן : $u = x \otimes 0_{\mathbb{F}} \in \mathbb{F}$.

מתקיים : $$u = x \otimes 0_{\mathbb{F}} \overset{N_{\oplus}}{=} x \otimes (0_{\mathbb{F}} \oplus 0_{\mathbb{F}}) \overset{D}{=} (x \otimes 0_{\mathbb{F}}) \oplus (x \otimes 0_{\mathbb{F}}) = u \oplus u \quad (*)$$.

יהי u' נגדי של u .

מתקיים : $$0_{\mathbb{F}} \overset{I_{\oplus}}{=} u \oplus u' \overset{(*)}{=} (u \oplus u) \oplus u' \overset{A_{\oplus}}{=} u \oplus (u \oplus u') \overset{I_{\oplus}}{=} u \oplus 0_{\mathbb{F}} \overset{N_{\oplus}}{=} u$$.

כלומר הראינו ש־ $0_{\mathbb{F}} = u = x \otimes 0_{\mathbb{F}}$, כנדרש. ■

שימו לב שהתכונה 3 מיד גוררת שאין ל־ $0_{\mathbb{F}}$ הופכי.

כי אילו היה ל־ $0_{\mathbb{F}}$ הופכי, נגיד $\widehat{0_{\mathbb{F}}}$, אז היה מתקיים $1_{\mathbb{F}} = \widehat{0_{\mathbb{F}}} \otimes 0_{\mathbb{F}} = 0_{\mathbb{F}}$, וזו סתירה.

הגדרה (שדה סדור)

יהי $\mathbb{F}$ שדה . $\mathbb{F}$ נקרא **שדה סדור** אם קיים עליו יחס , שיקרא סדר ויסומן $<$, המקיים את ארבע האקסיומות הבאות:

O_1 **(טריכוטומיה)** : לכל x ו־ y ב־ $\mathbb{F}$ מתקיימת **בדיוק אחת** משלוש האפשרויות הבאות :

$x<y$ או $y<x$ או $x=y$.

O_2 **(טרנזיטיביות)** : $\forall\, x,y,z\in\mathbb{F} \qquad (\,x<y \;\;\wedge\;\; y<z\,) \;\Rightarrow\; x<z$

O_3 **(הלימה לחיבור)** : $\forall\, x,y,z\in\mathbb{F} \qquad x<y \;\Rightarrow\; (\,x+z \;<\; y+z\,)$

O_4 **(הלימה לכפל בחיובי)** : $\forall\, x,y,z\in\mathbb{F} \qquad (\,x<y \;\;\wedge\;\; 0_{\mathbb{F}}<z\,) \;\Rightarrow\; xz<yz$

(במקום **הלימה** אומרים גם **תאימות**, **אינוריאנטיות** או **קונסיסטנטיות**)

משפט (מסקנות מאקסיומות הסדר)

יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור.

1. לכל $a,b,c \in \mathbb{F}$ מתקיים $a<b \;\Leftrightarrow\; a+c<b+c$.
2. לכל $x \in \mathbb{F}$ מתקיים : $0_{\mathbb{F}} < -x \;\Leftrightarrow\; x < 0_{\mathbb{F}}$.
3. $0_{\mathbb{F}} < 1_{\mathbb{F}}$.
4. לכל $x \in \mathbb{F}$ מתקיים : $x \neq 0_{\mathbb{F}} \;\Leftrightarrow\; 0_{\mathbb{F}} < x^2$.
5. לכל $x \in \mathbb{F}$ מתקיים : $0_{\mathbb{F}} < x \;\Leftrightarrow\; 0_{\mathbb{F}} < x^{-1}$.
6. לכל $a,b,c \in \mathbb{F}$ עם $a<b$ ו־ $c<0_{\mathbb{F}}$ מתקיים $a \cdot c > b \cdot c$ (כלומר $b \cdot c < a \cdot c$) .
7. לכל $a,b,c,d \in \mathbb{F}$ עם $a<b$ ו־ $c<d$ מתקיים $a+c<b+d$. **(חיבור אי־שוויונים)**

<u>הוכחה</u> :

נוכיח כאן את מסקנות 2 ו־ 3 .

2. $(\Leftarrow)$ $\quad 0_{\mathbb{F}} < -x \;\overset{I_+,N_+}{\Rightarrow}\; x+(-x) < 0_{\mathbb{F}}+(-x) \;\overset{O_3}{\Rightarrow}\; x < 0_{\mathbb{F}}$.

$(\Rightarrow)$ $\quad x < 0_{\mathbb{F}} \;\overset{I_+,N_+}{\Rightarrow}\; 0_{\mathbb{F}}+x < (-x)+x \;\overset{O_3}{\Rightarrow}\; 0_{\mathbb{F}} < -x$ ■

3. לפי טריכוטומיה מתקיימת בדיוק אחת מהאפשרויות $0_{\mathbb{F}} < 1_{\mathbb{F}}$ או $1_{\mathbb{F}} < 0_{\mathbb{F}}$ או $0_{\mathbb{F}} = 1_{\mathbb{F}}$.

$0_{\mathbb{F}} = 1_{\mathbb{F}}$ לא מתקיים בשל אקסיומות השדה.

נניח בשלילה ש־ $1_{\mathbb{F}} < 0_{\mathbb{F}}$. אזי $0_{\mathbb{F}} < -1_{\mathbb{F}}$ (לפי סעיף 2).

נפעיל את האקסיומה O_4 עם $x = 0_{\mathbb{F}}\,,\ y=-1_{\mathbb{F}}\,,\ z=-1_{\mathbb{F}}$

(חוקי כי לפי ההנחה $0_{\mathbb{F}} < z = -1_{\mathbb{F}}$), ונקבל:

$0_{\mathbb{F}} \cdot (-1_{\mathbb{F}}) < (-1_{\mathbb{F}}) \cdot (-1_{\mathbb{F}})$, כלומר $0_{\mathbb{F}} < 1_{\mathbb{F}}$.

הגענו לתוצאה שסותרת את הטריכוטומיה, ולכן $0_{\mathbb{F}} < 1_{\mathbb{F}}$. ■

הגדרה : $2_{\mathbb{F}} := 1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}}$.

הערה : $0_{\mathbb{F}} < 2_{\mathbb{F}}$ (מחברים את $0_{\mathbb{F}} < 1_{\mathbb{F}}$ עם עצמו).

בפרט $0_{\mathbb{F}} \neq 2_{\mathbb{F}}$, ולכן $2_{\mathbb{F}}$ הפיך , כלומר $2_{\mathbb{F}}^{-1}$ קיים. בנוסף $0_{\mathbb{F}} < 2_{\mathbb{F}}^{-1}$.

טענה : יהי $\mathbb{F}$ שדה סדור. $\forall\, x, y \in \mathbb{F} \qquad x < y \;\Rightarrow\; x < \frac{x+y}{2_{\mathbb{F}}} < y$

<u>הוכחה</u> :

$$\left.\begin{array}{l} x < y \overset{O_3}{\Rightarrow} x + x < y + x \\[2em] x < y \overset{O_3}{\Rightarrow} x + y < y + y \end{array}\right\} \underset{C_+}{\overset{O_2}{\Rightarrow}} x + x < x + y < y + y$$

מחוק הפילוג נובע ש־ $x + x = (1_{\mathbb{F}} + 1_{\mathbb{F}})\, x = 2_{\mathbb{F}}\, x$. באותו אופן $y + y = 2_{\mathbb{F}}\, y$.

כלומר $x + x < x + y < y + y$ שקול ל־ $2_{\mathbb{F}}\, x < x + y < 2_{\mathbb{F}}\, y$.

כפל של כל האגפים (O_4) באיבר החיובי $2_{\mathbb{F}}^{-1}$ נותן : $2_{\mathbb{F}}^{-1}(2_{\mathbb{F}}x) < 2_{\mathbb{F}}^{-1}(x+y) < 2_{\mathbb{F}}^{-1}(2_{\mathbb{F}}y)$,

זאת אומרת $x < 2_{\mathbb{F}}^{-1}(x+y) < y$.

ההגדרה של פעולת החילוק מסיימת את ההוכחה. ■

מסקנה : בין כל שני איברים שונים של שדה סדור $\mathbb{F}$ קיים איבר נוסף של $\mathbb{F}$.