80177 + 80155 - סמסטר ב' תשפ"ג - 2022-2023 - תרגיל 4

הנחיות: כתבו את הפתרון בכתב יד ברור, בצירוף **שם (פרטי ומשפחה) ומספר ת.ז.** יש לציין **כותרת ברורה בראש הדף הכוללת את שם הקורס ומספר התרגיל.** סרקו את הפתרון, כאשר השאלות בסדר עולה, והגישו אלקטרונית באתר הקורס עד ל־ 27.04.23 בשעה 22:00.

1. הוכיחו כי לכל $0 < a, b \in \mathbb{R}$ ולכל $r \in \mathbb{Q}$ מתקיים: $(ab)^r = a^r b^r$.

2. מצאו את הקבוצה של כל המספרים הממשיים x המקיימים $2\sqrt{x-1} + |x-2| = |x-3|$.

3. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :
   (א) הסכום של שני מספרים אי־רציונליים הוא אי־רציונלי.
   (ב) המכפלה של שני מספרים אי־רציונליים היא אי־רציונלית.
   (ג) יהיו c ו־ d ב־ $\mathbb{Q}$ כך ש־ $c \neq 0$ ויהי $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. אזי $cx + d \neq 0$.
   (ד) תהי $A \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ חסומה מלעיל, אזי $\sup(A) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

4. **הגדרה:** קבוצה $A \subset \mathbb{R}$ נקראת **מקטע** (או אינטרוול) אם לכל $x_1, x_2 \in A$ ולכל $z \in \mathbb{R}$ אם $x_1 < z < x_2$ אז $z \in A$.
   (א) יהי A מקטע ב־ $\mathbb{R}$. הוכיחו שאם $\{a_1, a_2\} \subseteq A$, אזי $[a_1, a_2] \subseteq A$.
   (ב) יהיו I ו־ J שני מקטעים ב־ $\mathbb{R}$ כך ש־ $(I \cap \mathbb{Q}) \cap (J \cap \mathbb{Q}) = \varnothing$. הוכיחו : $I \cap J$ מכיל לכל היותר איבר אחד.

5. תהי x_0 נקודה נתונה ב־ $\mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות :
   (א) החיתוך של שתי סביבות מנוקבות של x_0 היא סביבה מנוקבות של x_0 .
   (ב) האיחוד של שתי סביבות מנוקבות של x_0 היא סביבה מנוקבות של x_0 .
   (ג) כל קטע פתוח שמכיל את x_0 מכיל גם סביבה של x_0 .
   (ד) כל קטע סגור שמכיל את x_0 מכיל גם סביבה של x_0 .

6. (א) יהיו $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ עם $0 < y_1 \leqslant y_2 \leqslant \ldots \leqslant y_n$. הוכיחו : $\sqrt[n]{y_1 \cdot \ldots \cdot y_n} \leqslant \dfrac{y_1 + \ldots + y_n}{n}$.
   (רמז: הגדירו $G = \sqrt[n]{y_1 \cdot \ldots \cdot y_n}$ ו־ $x_j = \dfrac{y_j}{G}$ לכל $1 \leqslant j \leqslant n$, והעזרו בשאלה 10 של תרגיל 3).
   (ב) **(לא להגשה)** הסיקו מסעיף א' : יהיו $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{R}$ עם $0 < z_1 \leqslant z_2 \leqslant \ldots \leqslant z_n$. אזי :
   $$\frac{n}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n}} \leqslant \sqrt[n]{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n} .$$

הערה : השרשרת $\dfrac{z_1 + \ldots + z_n}{n} \leqslant \sqrt[n]{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n} \leqslant \dfrac{n}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n}}$ נקראת **`אי־שוויון הממוצעים`.**

$\dfrac{z_1 + \ldots + z_n}{n}$ נקרא **ממוצע חשבוני** (או **אריתמטי**) של $z_1, \ldots, z_n$.

$\sqrt[n]{z_1 \cdot \ldots \cdot z_n}$ נקרא **ממוצע הנדסי** (או **גיאומטרי**) של $z_1, \ldots, z_n$.

$\dfrac{n}{\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n}}$ נקרא **ממוצע הרמוני** של $z_1, \ldots, z_n$.