Д.З 7

Саммура Халед

Теоретические задания.

1. Существует бесконечно много простых чисел: Предположим, что простых чисел конечное количество. Умножим их все и прибавим 1. Это новое число не делится ни на одно из известных простых чисел, что приводит к противоречию. Следовательно, простых чисел бесконечно много.

2. Когда $\{Z\}/p\{Z\}$ является полем?: $\{Z\}/p\{Z\}$ является полем, если p — простое число. В этом случае каждый ненулевой элемент имеет обратный.

3. 3) Что такое поле Галуа?: Поле Галуа — это конечное поле с p^n элементами, где p — простое число, а n — положительное целое. Обозначается как GF (p^n)

Практические задания

1) Дана система уравнений

$x - 5y + z = 3$, $3x - 2y + 2z = 1$, $2y + 2z = -3$

Найдите ее решение в полях Галуа при p = 2, 3, 5, 7, 11.

In [14]:
```
#1
var ("x,y,z")
S = [x - 5*y + z == 3, 3*x - 2*y + 2*z == 1, 2*y + 2*z == -3]
K = GF(2)[x,y,z]
triangulation([K(s) for s in S])
```

Out[14]: `[x + y + z + 1, y + z, 1]`

Нет решения, система в треугольном виде имеет уравнение 1=0

In [16]:
```
#2
var ("x,y,z")
S = [x - 5*y + z == 3, 3*x - 2*y + 2*z == 1, 2*y + 2*z == -3]
K = GF(3)[x,y,z]
tsolve(triangulation([K(s) for s in S]))
```

Out[16]: `{z: 1, y: -1, x: 0}`

In [17]:
```
#3
var ("x,y,z")
S = [x - 5*y + z == 3, 3*x - 2*y + 2*z == 1, 2*y + 2*z == -3]
K = GF(5)[x,y,z]
tsolve(triangulation([K(s) for s in S]))
```

Out[17]: `{z: -1, y: 2, x: -1}`

In [19]:
```
#4
var ("x,y,z")
S = [x - 5*y + z == 3, 3*x - 2*y + 2*z == 1, 2*y + 2*z == -3]
K = GF(7)[x,y,z]
triangulation([K(s) for s in S])
```

Out[19]: `[x + 2*y + z - 3, 2*y + 2*z + 3, -2]`

Нет решения - система в треугольном виде имеет уравнение -2=0

In [20]:
```
#5
var ("x,y,z")
S = [x - 5*y + z == 3, 3*x - 2*y + 2*z == 1, 2*y + 2*z == -3]
K = GF(11)[x,y,z]
tsolve(triangulation([K(s) for s in S]))
```

Out[20]: `{z: -2, y: -5, x: 2}`

2) Определите ранг системы

а) $x - 5y + z = 3$, $3x - 2y + 2z = 1$, $8y + 2z = -3$

б) $x - 5y + z = 3$, $3x - 2y + 2z = 1$, $-7x - 4y - 4z = 3$

в) $x - 5y + z = 3$, $3x - 2y + 2z = 1$, $-7x - 4y - 4z = 4$

г) $x - 5y + z = 3$, $3x - 2y + 2z = 1$

из GF(3)[x,y,z].

In [22]:
```
#a
var ("x,y,z")
S = [x - 5*y + z == 3, 3*x - 2*y + 2*z == 1, 8*y + 2*z == -3]
K = GF(3)[x,y,z]
triangulation([K(s) for s in S])
```

Out[22]: `[x + y + z, y - z - 1, z - 1]`

Система имеет третий ранг

In [23]:
```
#б
var ("x,y,z")
S = [x - 5*y + z == 3, 3*x - 2*y + 2*z == 1, -7*y - 4*y - 4*z == 3]
K = GF(3)[x,y,z]
triangulation([K(s) for s in S])
```

Out[23]: `[x + y + z, y - z - 1, 1]`

Ранг системы не определен, так как решений нет

In [25]:
```
#в
var ("x,y,z")
S = [x - 5*y + z == 3, 3*x - 2*y + 2*z == 1, -7*y - 4*y - 4*z == 4]
K = GF(3)[x,y,z]
triangulation([K(s) for s in S])
```

Out[25]: `[x + y + z, y - z - 1]`

Система имеет второй ранг

In [26]:
```
#г
var ("x,y,z")
S = [x - 5*y + z == 3, 3*x - 2*y + 2*z == 1]
K = GF(3)[x,y,z]
triangulation([K(s) for s in S])
```

Out[26]: `[x + y + z, y - z - 1]`

Система имеет второй ранг

3)Сколько решений имеет система

$x + y + z = 1$, $x - y + z = 2$, $2x + 2z = 3$

в полях Галуа при p = 2, 3, 5, 7, 11.

In [39]:
```
#1
var ("x,y,z")
S = [x + y + z == 1, x - y + z == 2, 2*x + 2*z == 3]
K = GF(2)[x,y,z]
triangulation([K(s) for s in S])
```

Out[39]:
```
[x + y + z + 1, 1, 1]
```

Система не имеет решений

In [45]:
```
#2
var ("x,y,z")
S = [x + y + z == 1, x - y + z == 2, 2*x + 2*z == 3]
K = GF(3)[x,y,z]
triangulation([K(s) for s in S])
```

Out[45]:
```
[x + y + z - 1, y - 1]
```

Система имеет 3 решения

In [46]:
```
#3
var ("x,y,z")
S = [x + y + z == 1, x - y + z == 2, 2*x + 2*z == 3]
K = GF(5)[x,y,z]
triangulation([K(s) for s in S])
```

Out[46]:
```
[x + y + z - 1, -2*y - 1]
```

Система имеет 5 решений

In [51]:
```
#4
var ("x,y,z")
S = [x + y + z == 1, x - y + z == 2, 2*x + 2*z == 3]
K = GF(7)[x,y,z]
triangulation([K(s) for s in S])
```

Out[51]:
```
[x + y + z - 1, -2*y - 1]
```

Система имеет 7 решений

In [4]:
```
#5
var ("x,y,z")
S = [x + y + z == 1, x - y + z == 2, 2*x + 2*z == 3]
K = GF(11)[x,y,z]
triangulation([K(s) for s in S])
```

Out[4]:
```
[x + y + z - 1, -2*y - 1]
```

Система имеет 11 решений

4) Найдите матрицу, обратную к матрице

1 2 3

3 3 2

3 3 0

над GF(p) при p = 5, 7, 11. Всегда ли матрица обратима?

In [91]:
```
#1
A = matrix(3,3, [1,2,3,3,3,2,3,3,0])
x = var("x11, x12, x13, x21, x22, x23, x31, x32, x33")
X = matrix(3,3,x)
L = A*X - matrix.identity(3)
K = GF(5) [x11, x12, x13, x21, x22, x23, x31, x32, x33]
D = tsolve(triangulation([K(i) for i in L.list()]))
X = matrix(3,3, [K(xx).subs(D) for xx in x])
X
```

Out[91]:
```
[-1 -1  0]
[ 1  1  2]
[ 0 -2  2]
```

In [92]:
```
#2
A = matrix(3,3, [1,2,3,3,3,2,3,3,0])
x = var("x11, x12, x13, x21, x22, x23, x31, x32, x33")
X = matrix(3,3,x)
L = A*X - matrix.identity(3)
K = GF(7) [x11, x12, x13, x21, x22, x23, x31, x32, x33]
D = tsolve(triangulation([K(i) for i in L.list()]))
X = matrix(3,3, [K(xx).subs(D) for xx in x])
X
```

Out[92]:
```
[-1 -2 -2]
[ 1  2  0]
[ 0 -3  3]
```

In [93]:
```
#3
A = matrix(3,3, [1,2,3,3,3,2,3,3,0])
x = var("x11, x12, x13, x21, x22, x23, x31, x32, x33")
X = matrix(3,3,x)
L = A*X - matrix.identity(3)
K = GF(11) [x11, x12, x13, x21, x22, x23, x31, x32, x33]
D = tsolve(triangulation([K(i) for i in L.list()]))
X = matrix(3,3, [K(xx).subs(D) for xx in x])
X
```

Out[93]:
```
[-1 -4  1]
[ 1  4  3]
[ 0 -5  5]
```

Всегда ли матрица обратима?

In [94]:
```
#Задаю необратимую матрицу:
A = matrix([[1,2,3],[2,3,-1],[3,5,2]])
det(A)
```

Out[94]: 0

In [106]:
```
#Проверяю, будет ли она иметь обратную в GF(3), например.
A = matrix([[1,2,3],[2,3,-1],[3,5,2]])
x = var("x11, x12, x13, x21, x22, x23, x31, x32, x33")
X = matrix(3,3,x)
L = A*X - matrix.identity(3)
K = GF(5) [x11, x12, x13, x21, x22, x23, x31, x32, x33]
D = tsolve(triangulation([K(i) for i in L.list()]))
X = matrix(3,3, [K(xx).subs(D) for xx in x])
X
```

```
---------------------------------------------------------------------------
TypeError                                 Traceback (most recent call last)
<ipython-input-106-96550842b6fd> in <module>
      5 L = A*X - matrix.identity(Integer(3))
      6 K = GF(Integer(5)) [x11, x12, x13, x21, x22, x23, x31, x32, x33]
----> 7 D = tsolve(triangulation([K(i) for i in L.list()]))
      8 X = matrix(Integer(3),Integer(3), [K(xx).subs(D) for xx in x])
      9 X

<ipython-input-56-391d196cc049> in tsolve(T)
     24         g=T[Integer(0)]
     25         D[g.lm()] = -(g-g.lt())/g.lc()
---> 26         T=[t.subs(D) for t in T[Integer(1):]]
     27     return D
     28 

<ipython-input-56-391d196cc049> in <listcomp>(.0)
     24         g=T[Integer(0)]
     25         D[g.lm()] = -(g-g.lt())/g.lc()
---> 26         T=[t.subs(D) for t in T[Integer(1):]]
     27     return D
     28 

/opt/sagemath-9.3/local/lib/python3.7/site-packages/sage/rings/polynomial/multi_polynomial_libsingular.pyx in sage.rings.polynomial.multi_polynomial_libsingular.MPolynomial_libsingular.subs (build/cythonized/sage/rings/polynomial/multi_polynomial_libsingular.cpp:29171)()
   3542                         id_Delete(&to_id, _ring)
   3543                         p_Delete(&_p, _ring)
-> 3544                         raise TypeError("key does not match")
   3545                 else:
   3546                     id_Delete(&to_id, _ring)

TypeError: key does not match
```

Вывод - матрица обратима не всегда