第2章　递归与分治策略

学习要点:

理解递归的概念。

掌握设计有效算法的分治策略。

通过下面的范例学习分治策略设计技巧。

（1）二分搜索技术；

（2）大整数乘法；

（3）Strassen矩阵乘法；

（4）棋盘覆盖；

（5）合并排序和快速排序；

（6）线性时间选择；

（7）最接近点对问题；

（8）循环赛日程表。

2.1 递归的概念

- 直接或间接地调用自身的算法称为**递归算法**。用函数自身给出定义的函数称为**递归函数**。
- 由分治法产生的子问题往往是原问题的较小模式，这就为使用递归技术提供了方便。在这种情况下，反复应用分治手段，可以使子问题与原问题类型一致而其规模却不断缩小，最终使子问题缩小到很容易直接求出其解。这自然导致递归过程的产生。
- 分治与递归像一对孪生兄弟，经常同时应用在算法设计之中，并由此产生许多高效算法。

下面来看几个实例。

2.1 递归的概念

例1 阶乘函数

阶乘函数可递归地定义为：

$$n! = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ n(n-1)! & n > 0 \end{cases}$$

边界条件

递归方程

边界条件与递归方程是递归函数的二个要素，递归函数只有具备了这两个要素，才能在有限次计算后得出结果。

例2 Fibonacci数列

无穷数列1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，……，称为Fibonacci数列。它可以递归地定义为：

$$F(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 1 & n=1\\ F(n-1)+F(n-2) & n>1\end{cases}$$

边界条件

递归方程

第n个Fibonacci数可递归地计算,程序如下：

```
int fibonacci(int n)
  {
     if (n <= 1) return 1;
     return fibonacci(n-1)+fibonacci(n-2);
  }
```

例3　Ackerman函数

当一个函数及它的一个变量是由函数自身定义时，称这个函数是**双递归函数**。

Ackerman函数**A(n，m)**定义如下：

$$
\begin{cases}
A(1,0)=2 & \\
A(0,m)=1 & m\geq 0 \\
A(n,0)=n+2 & n\geq 2 \\
A(n,m)=A(A(n-1,m),m-1) & n,m\geq 1
\end{cases}
$$

例3 Ackerman函数

- A(n，m)的自变量m的每一个值都定义了一个单变量函数：
- M=0时，A(n,0)=n+2
- M=1时，A(n,1)=A(A(n-1,1),0)=A(n-1,1)+2，和A(1,1)=2故A(n,1)=2*n
- M=2时，A(n,2)=A(A(n-1,2),1)=2A(n-1,2)，和A(1,2)=A(A(0,2),1)=A(1,1)=2，故A(n,2)= 2^n 。
- M=3时，类似的可以推出

$$\underbrace{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}_{n}$$

- M=4时，A(n,4)的增长速度非常快，以至于没有适当的数学式子来表示这一函数。

单变量Ackerman函数和拟逆函数

- 定义单变量的Ackerman函数A(n)为，A(n)=A(n，n)。
- 定义其拟逆函数α(n)为：α(n)=min{k | A(k)≥n}。即α(n)是使n≤A(k)成立的最小的k值。
- α(n)在复杂度分析中常遇到。对于通常所见到的正整数n，有**α(n)≤4**。但在理论上α(n)没有上界，随着n的增加，它以难以想象的慢速度趋向正无穷大。

递归函数的非递归方式表示

前2例中的函数都可以找到相应的非递归方式定义：

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1) \cdot n$$

$$F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

本例中的Ackerman函数却无法找到非递归的定义。

例4 排列问题

设计一个递归算法生成n个元素$\{r_1,r_2,\ldots,r_n\}$的全排列。

设$R=\{r_1,r_2,\ldots,r_n\}$是要进行排列的n个元素，$R_i=R-\{r_i\}$。集合X中元素的全排列记为perm(X)。

(r_i)perm(X)表示在全排列perm(X)的每一个排列前加上前缀得到的排列。R的全排列可归纳定义如下：

当n=1时，perm(R)=(r)，其中r是集合R中唯一的元素；
当n>1时，perm(R)由(r_1)perm(R_1)，(r_2)perm(R_2)，…，(r_n)perm(R_n)构成。

例5 整数划分问题(之一)

将正整数n表示成一系列正整数之和：$n=n_1+n_2+\ldots+n_k$，*其中*$n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k \geq 1$，$k \geq 1$。
正整数n的这种表示称为正整数n的划分。求正整数n的不同划分个数。

例如正整数6有如下11种不同的划分：

6；
5+1；
4+2，4+1+1；
3+3，3+2+1，3+1+1+1；
2+2+2，2+2+1+1，2+1+1+1+1；
1+1+1+1+1+1。

前面的几个例子中，问题本身都具有比较明显的递归关系，因而容易用递归函数直接求解。

在本例中，如果设p(n)为正整数n的划分数，则难以找到递归关系，因此考虑增加一个自变量：将最大加数n_1不大于m的划分个数记作q(n,m)。可以建立q(n,m)的如下递归关系。

(1) q(n,1)=1,n≥1;

当最大加数n_1不大于1时，任何正整数n只有一种划分形式，即 $n = \overbrace{1+1+\cdots+1}^{n}$

(2) q(n,m)=q(n,n),m≥n;

最大加数n_1实际上不能大于n。因此，q(1,m)=1。

(3) q(n,n)=1+q(n,n-1);

正整数n的划分由n_1=n的划分和n_1≤n-1的划分组成。

(4) q(n,m)=q(n,m-1)+q(n-m,m),n>m>1;

正整数n的最大加数n_1不大于m的划分由n_1=m的划分有q(n-m,m)个,和n_1≤m-1 的划分q(n,m-1)。

例5　整数划分问题(之二)

前面的几个例子中，问题本身都具有比较明显的递归关系，因而容易用递归函数直接求解。

在本例中，如果设p(n)为正整数n的划分数，则难以找到递归关系，因此考虑增加一个自变量：将最大加数n_1不大于m的划分个数记作q(n,m)。可以建立q(n,m)的如下递归关系。

$$q(n,m)=\begin{cases} 1 & n=1, m=1 \\ q(n,n) & n<m \\ 1+q(n,n-1) & n=m \\ q(n,m-1)+q(n-m,m) & n>m>1 \end{cases}$$

正整数n的划分数p(n)=q(n,n)。

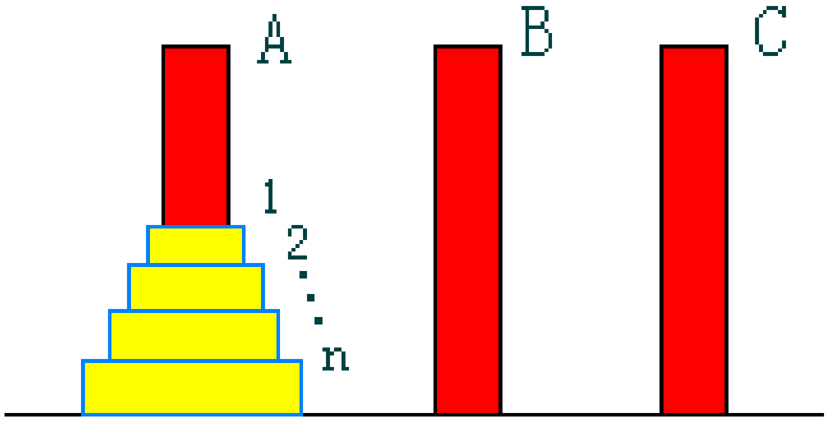
例6 Hanoi塔问题

设a,b,c是3个塔座。开始时，在塔座a上有一叠共n个圆盘，这些圆盘自下而上，由大到小地叠在一起。各圆盘从小到大编号为1,2,…,n,现要求将塔座a上的这一叠圆盘移到塔座b上，并仍按同样顺序叠置。在移动圆盘时应遵守以下移动规则：

规则1：每次只能移动1个圆盘；

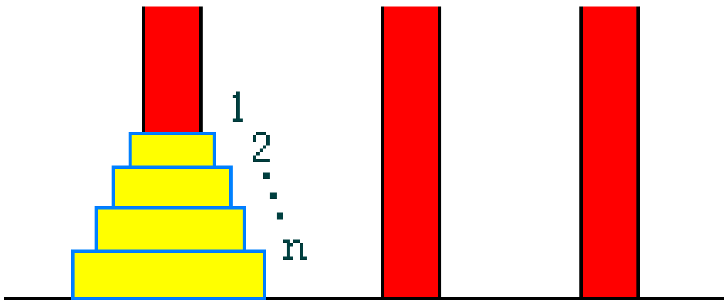
规则2：任何时刻都不允许将较大的圆盘压在较小的圆盘之上；

规则3：在满足移动规则1和2的前提下，可将圆盘移至a,b,c中任一塔座上。



Hanoi塔问题算法描述

```
void hanoi(int n, int a, int b, int c)
  {
     if (n > 0)
     {
       hanoi(n-1, a, c, b);
       move(a,b);
       hanoi(n-1, c, b, a);
     }
  }
```



其它可用递归求解的例子

1. **树相关的问题:**
   树的判断;
   树的遍历;
   树的高度计算;
   树的结点计算;
   两树的结构同构判断;

2. **程序设计语言的表达式语法分析与求值**

3. **命题逻辑合式公式的判断**

……

递归小结

优点： 结构清晰，可读性强，而且容易用数学归纳法来证明算法的正确性，因此它为设计算法、调试程序带来很大方便。

缺点： 递归算法的运行效率较低，无论是耗费的计算时间还是占用的存储空间都比非递归算法要多。

消除递归

在递归算法中消除递归调用，使其转化为非递归算法。

1、采用一个用户定义的栈来模拟系统的递归调用工作栈。该方法通用性强，但本质上还是递归，只不过人工做了本来由编译器做的事情，优化效果不明显。

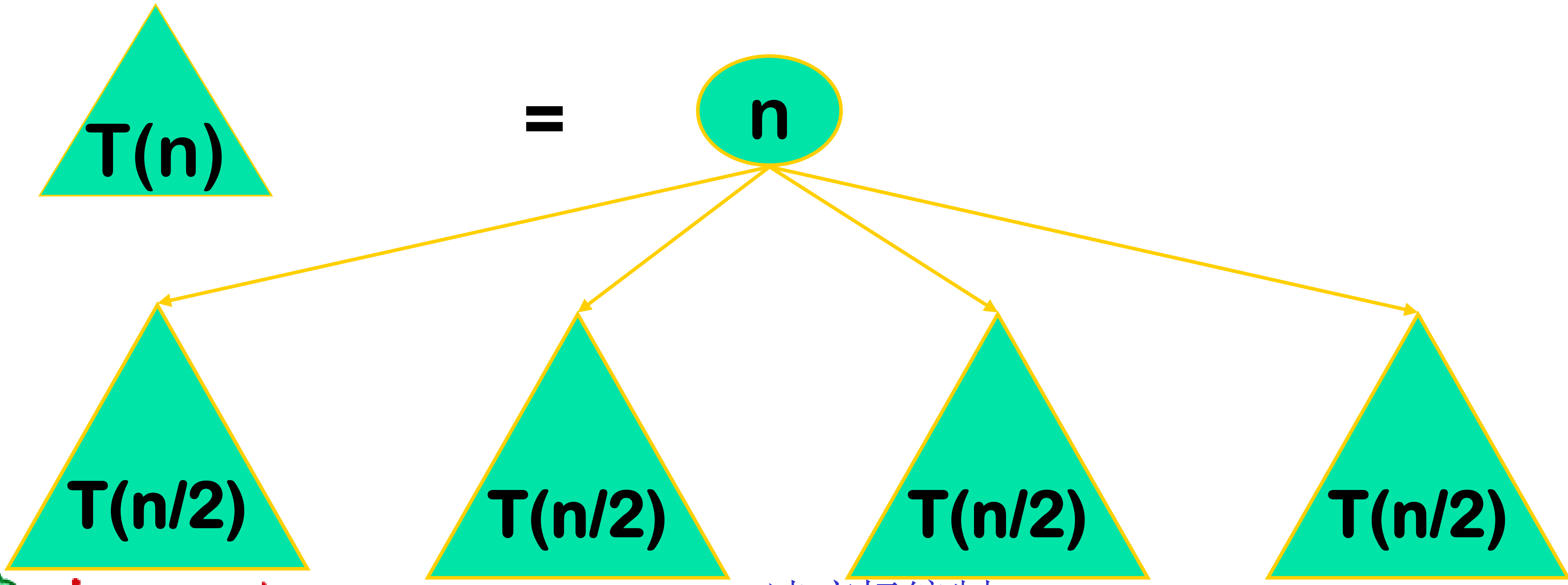
2、用递推来实现递归函数。

3、通过变换能将一些递归转化为尾递归，从而迭代求出结果。

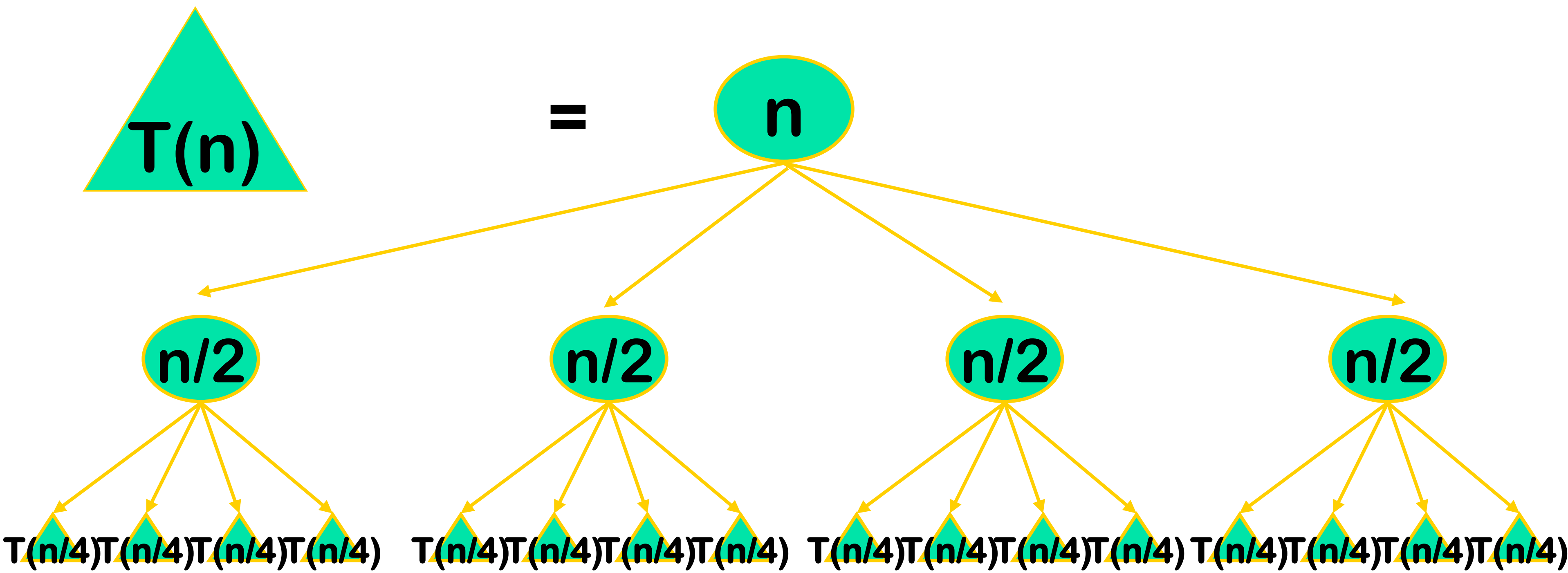
后两种方法在时空复杂度上均有较大改善，但其适用范围有限。

4.2 分治策略

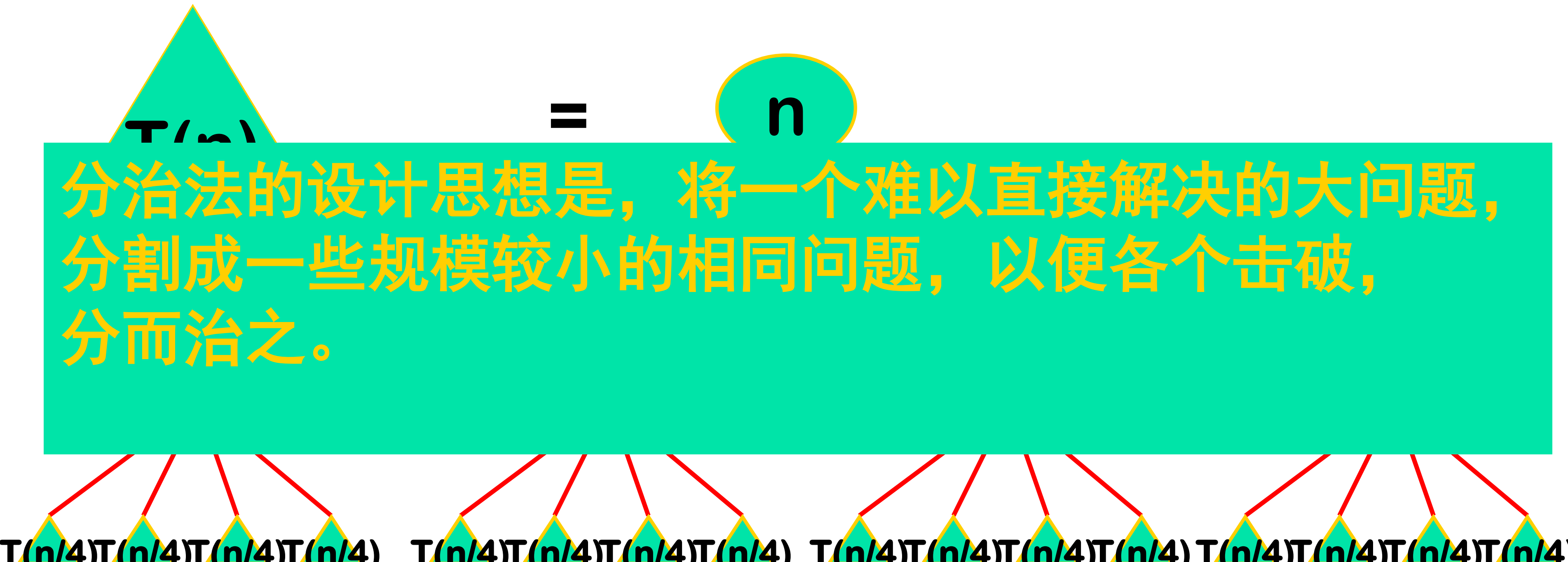
- 将要求解的较大规模的问题分割成k个更小规模的子问题。
- 对这k个子问题分别求解。如果子问题的规模仍然不够小，则再划分为k个子问题，如此递归的进行下去，直到问题规模足够小，很容易求出其解为止。



- 对这k个子问题分别求解。如果子问题的规模仍然不够小，则再划分为k个子问题，如此递归的进行下去，直到问题规模足够小，很容易求出其解为止。



- 将求出的小规模的问题的解合并为一个更大规模的问题的解，自底向上逐步求出原来问题的解。



分治法的设计思想是，将一个难以直接解决的大问题，分割成一些规模较小的相同问题，以便各个击破，分而治之。

分治法的适用条件

分治法所能解决的问题一般具有以下几个特征：

- **该问题的规模缩小到一定的程度就可以容易地解决；**
- **该问题可以分解为若干个规模较小的相同问题，即该问题具有**最优子结构性质
- **利用该问题分解出的子问题的解可以合并为该问题的解；**
- **该问题所分解出的各个子问题是相互独立的，即子问题之间不包含公共的子问题。**

这条特征涉及到分治法的效率，如果各子问题是不独立的，则分治法要做许多不必要的工作，重复地解公共的子问题，此时虽然也可用分治法，但一般用**动态规划**较好。

分治法的基本步骤

```
divide-and-conquer(P)
 {
   if ( | P | <= n0) adhoc(P);   //解决小规模的问题
   divide P into smaller subinstances P1,P2,...,Pk；//分解问题
   for (i=1,i<=k,i++)
     yi=divide-and-conquer(Pi);  //递归的解各子问题
   return merge(y1,...,yk);  //将各子问题的解合并为原问题的解
 }
```

人们从大量实践中发现，在用分治法设计算法时，最好使子问题的规模大致相同。即将一个问题分成大小相等的k个子问题的处理方法是行之有效的。这种使子问题规模大致相等的做法是出自一种**平衡(balancing)子问题**的思想，它几乎总是比子问题规模不等的做法要好。

分治法的复杂性分析之一

一个分治法将规模为n的问题分成k个规模为n／k的子问题去解。设分解阀值n0=1，且adhoc解规模为1的问题耗费1个单位时间。再设将原问题分解为k个子问题以及用merge将k个子问题的解合并为原问题的解需用bn个单位时间,b为正常数。用T(n)表示该分治法解规模为|P|=n的问题所需的计算时间，则有：

$$T(n) = \begin{cases} O(1) & n = 1 \\ kT(n/k) + bn & n > 1 \end{cases}$$

通过迭代法求得方程的解：

$$T(n) = n + bn\log_k n$$

分治法的复杂性分析之二

一个分治法将规模为n的问题分成a个规模为n / c的子问题去解。设分解阀值n0=1，且adhoc解规模为1的问题耗费1个单位时间。再设将原问题分解为a个子问题以及用merge将a个子问题的解合并为原问题的解需用bn^d个单位时间,b,d为正常数。用T(n)表示该分治法解规模为|P|=n的问题所需的计算时间，则有：

$$T(n)=\begin{cases} d & n=1 \\ aT(n/c)+bn^e & n>1 \end{cases}$$

通过迭代法求得方程的解：

$$T(n)=\begin{cases} dn^e+bn^e\log_c n, 若 a=c^e \\ (d+\dfrac{bc^e}{a-c^e})n^{\log_c a}-(\dfrac{bc^e}{a-c^e})n^e, 若 a\neq c^e \end{cases}$$

分治法的复杂性分析之三

一个分治法将规模为n的问题分成两个规模c1和c2的子问题。设分解阀值n0=d，且adhoc解规模为d的问题耗费d个单位时间。再设将解合并为原问题的解需用bn个单位时间,b,d为正常数。用T(n)表示该分治法解规模为|P|=n的问题所需的计算时间，则有：

$$T(n)=\begin{cases} d & n=1 \\ T(\lfloor c_1 n \rfloor)+T(\lfloor c_2 n \rfloor)+dn & n>1 \end{cases}$$

通过迭代法求得方程的解：

$$T(n)=\begin{cases} \Theta(n\log n), 若 c_1+c_2=1 \\ \Theta(n), 若 c_1+c_2<1 \end{cases}$$

二分搜索技术

给定已按升序排好序的n个元素a[0:n-1]，现要在这n个元素中找出一特定元素x。

分析：该问题的规模缩小到一定的程度就可以容易地解决；

- ✓ **该问题可以分解为若干个规模较小的相同问题;**
- ✓ **分解出的子问题的解可以合并为原问题的解；**
- ✓ **分解出的各个子问题是相互独立的。**

分析：很显然此问题分解出的子问题相互独立，即在a[i]的前面或后面查找x是独立的子问题，因此满足分治法的第四个适用条件。

二分搜索技术

给定已按升序排好序的n个元素a[0:n-1]，现要在这n个元素中找出一特定元素x。

据此容易设计出**二分搜索算法**：

```
template<class Type>
int BinarySearch(Type a[], const Type& x, i
{
    while (r >= l){
      int m = (l+r)/2;
      if (x == a[m]) return m;
      if (x < a[m]) r = m-1; else l = m+1;
      }
   return -1;
}
```

算法复杂度分析：
每执行一次算法的while循环，待搜索数组的大小减少一半。因此，在最坏情况下，while循环被执行了O(logn) 次。循环体内运算需要O(1) 时间，因此整个算法在最坏情况下的计算时间复杂性为O(logn) 。

大整数的乘法

请设计一个有效的算法，可以进行两个n位大整数的乘法运算

◆小学的方法：$O(n^2)$ ✘效率太低

◆分治法:

X =

Y =

复杂度分析

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & n=1 \\ 4T(n/2)+O(n) & n>1 \end{cases}$$

$T(n)=O(n^2)$ ✘**没有改进**

$X = a\,2^{n/2} + b \qquad Y = c\,2^{n/2} + d$

$XY = ac\,2^{n} + (ad+bc)\,2^{n/2} + bd$

大整数的乘法

请设计一个有效的算法，可以进行两个n位大整数的乘法运算

◆小学的方法：$O(n^2)$ ✗效率太低

◆分

XY

复杂度分析

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & n=1 \\ 3T(n/2)+O(n) & n>1 \end{cases}$$

$T(n)=O(n^{\log 3}) = O(n^{1.59})$ ✓**较大的改进**

1. $XY = ac\,2^n + ((a-c)(b-d)+ac+bd)\,2^{n/2} + bd$

细节问题：两个XY的复杂度都是$O(n^{\log 3})$，但考虑到a+c,b+d可能得到m+1位的结果，使问题的规模变大，故不选择第2种方案。

大整数的乘法

请设计一个有效的算法，可以进行两个n位大整数的乘法运算

◆小学的方法：$O(n^2)$ ✘效率太低

◆分治法: $O(n^{1.59})$ ✓较大的改进

◆更快的方法??

➢如果将大整数分成更多段，用更复杂的方式把它们组合起来，将有可能得到更优的算法。

Strassen矩阵乘法

- 传统方法：O(n^3)

A和B的乘积矩阵C中的元素C[i,j]定义为: $C[i][j]=\sum_{k=1}^{n}A[i][k]B[k][j]$

若依此定义来计算A和B的乘积矩阵C，则每计算C的一个元素C[i][j]，需要做n次乘法和n-1次加法。因此，算出矩阵C的 个元素所需的计算时间为O(n^3)

Strassen矩阵乘法

◆传统方法：$O(n^3)$

◆分治法:

使用与上例类似的技术，将矩阵A，B和C中每一矩阵都分块成4

个大小

由此

复杂度分析

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & n=2 \\ 8T(n/2)+O(n^2) & n>2 \end{cases}$$

$T(n)=O(n^3)$

$$C_{12}=A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}$$

$$C_{21}=A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}$$

$$C_{22}=A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}$$

Strassen矩阵乘法

◆传统方法：O(n³)

◆分治法:

为了降

复杂度分析

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & n=2 \\ 7T(n/2)+O(n^2) & n>2 \end{cases}$$

T(n)=O($n^{\log 7}$) =O($n^{2.81}$)✓**较大的改进**

$M_1 = A$

$M_2 = (A_{11}+A_{12})B_{22}$

$M_3 = (A_{21}+A_{22})B_{11}$

$M_4 = A_{22}(B_{21}-B_{11})$

$M_5 = (A_{11}+A_{22})(B_{11}+B_{22})$

$M_6 = (A_{12}-A_{22})(B_{21}+B_{22})$

$M_7 = (A_{11}-A_{21})(B_{11}+B_{12})$

$C_{11} = M_5+M_4-M_2+M_6$

$C_{12} = M_1+M_2$

$C_{21} = M_3+M_4$

$C_{22} = M_5+M_1-M_3-M_7$

Strassen矩阵乘法

- ◆传统方法：$O(n^3)$
- ◆分治法: $O(n^{2.81})$
- ◆更快的方法??

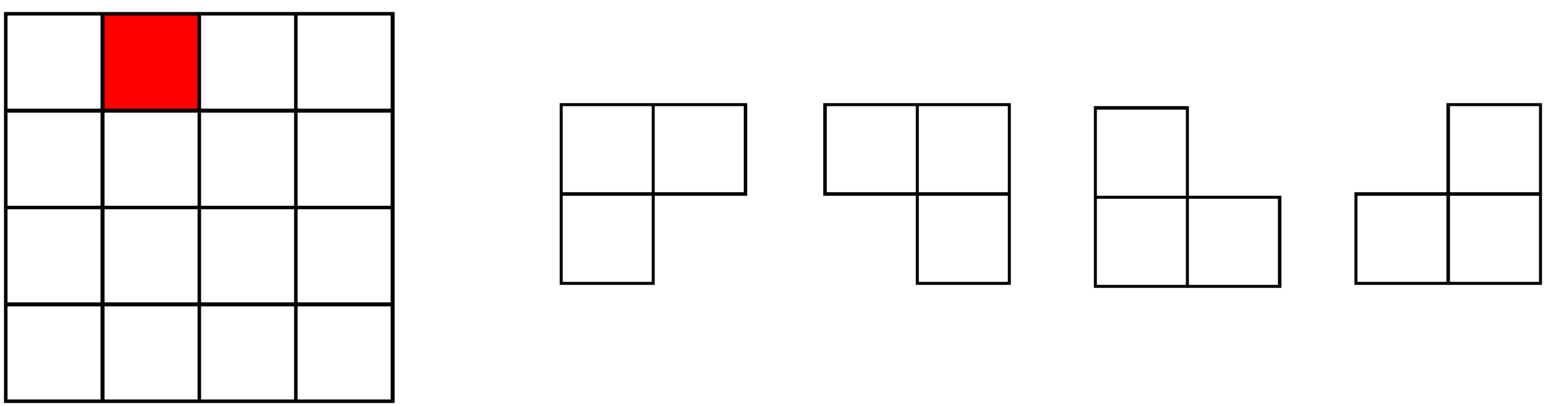
➢Hopcroft和Kerr已经证明(1971)，计算2个 2 × 2 矩阵的乘积，7次乘法是必要的。因此，要想进一步改进矩阵乘法的时间复杂性，就不能再基于计算2×2矩阵的7次乘法这样的方法了。或许应当研究 3 × 3 或 5 × 5 矩阵的更好算法。

➢在Strassen之后又有许多算法改进了矩阵乘法的计算时间复杂性。目前最好的计算时间上界是 **$O(n^{2.376})$**

➢是否能找到$O(n^2)$的算法？

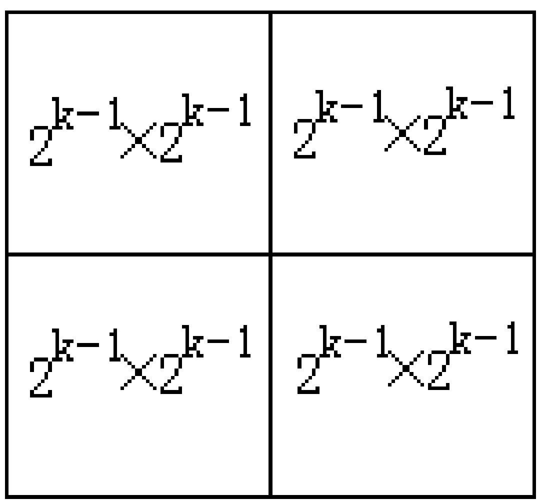
棋盘覆盖

在一个$2^k \times 2^k$ 个方格组成的棋盘中，恰有一个方格与其它方格不同，称该方格为一特殊方格，且称该棋盘为一特殊棋盘。在棋盘覆盖问题中，要用图示的4种不同形态的L型骨牌覆盖给定的特殊棋盘上除特殊方格以外的所有方格，且任何2个L型骨牌不得重叠覆盖。

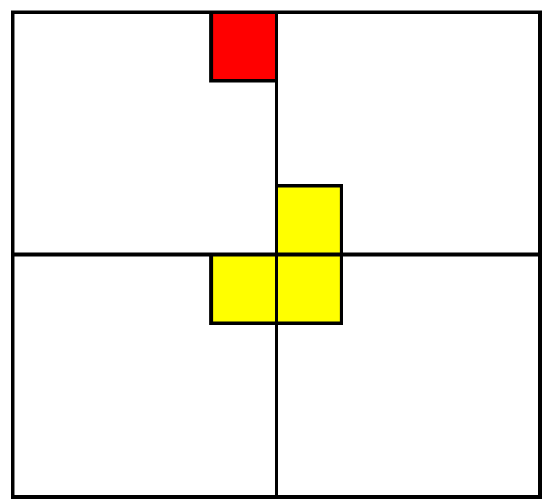


棋盘覆盖

当$k>0$时，将$2^k\times2^k$棋盘分割为4个$2^{k-1}\times2^{k-1}$ 子棋盘(a)所示。特殊方格必位于4个较小子棋盘之一中，其余3个子棋盘中无特殊方格。为了将这3个无特殊方格的子棋盘转化为特殊棋盘，可以用一个L型骨牌覆盖这3个较小棋盘的会合处，如 (b)所示，从而将原问题转化为4个较小规模的棋盘覆盖问题。递归地使用这种分割，直至棋盘简化为棋盘1×1。



(a)


(b)

棋盘覆盖

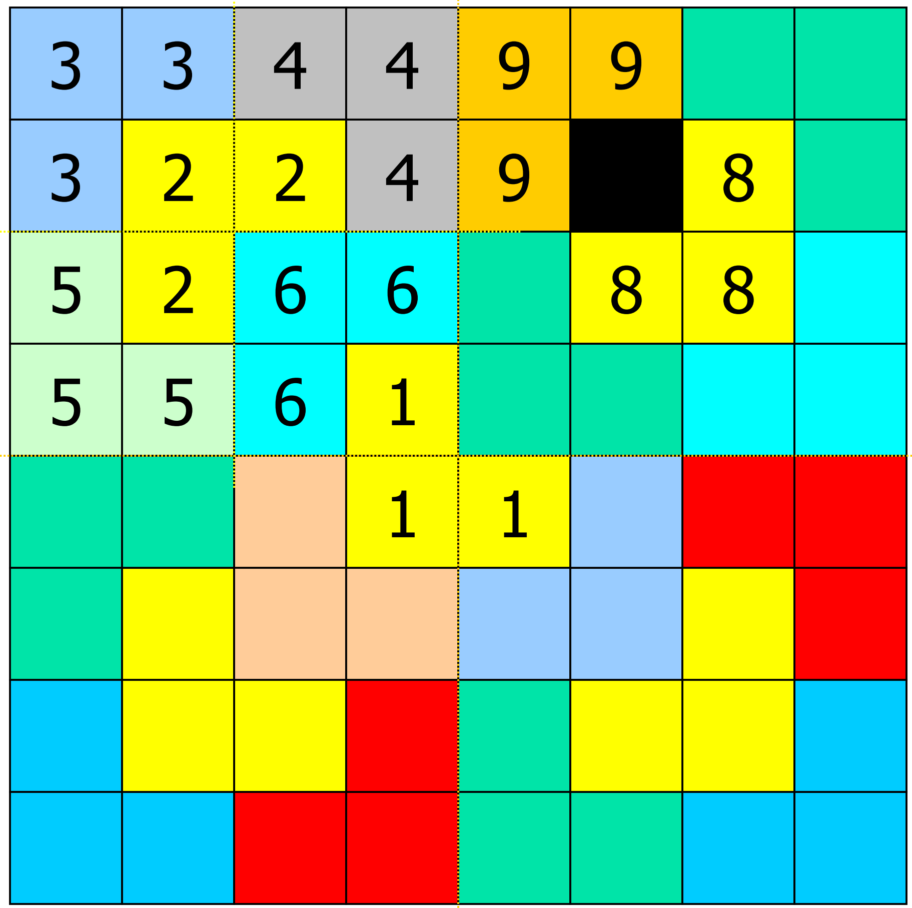
```
void chessBoard(int tr, int tc, int dr, int dc, int size)
  {
    if (size == 1) return;
    int t = tile++,  // L型骨牌号
      s = size/2;  // 分割棋盘
    // 覆盖左
    if (dr < t
      // 特殊
      chess
    else {// L
      // 用 t
      board[
      // 覆盖
      chess
    // 覆盖右上角子棋盘
    if (dr < tr + s && dc >= tc + s)
      // 特殊方格在此棋盘中
      chessBoard(tr, tc+s, dr, dc, s);
    else {// 此棋盘中无特殊方格
      // 用 t 号L型骨牌覆盖左下角
      board[tr + s - 1][tc + s] = t;
      // 覆盖其余方格
      chessBoard(tr, tc+s, tr+s-1, tc+s, s);}
    // 覆盖左下角子棋盘
    ;}
      // 特殊方格在此棋盘中
      chessBoard(tr+s, tc+s, dr, dc, s);
    else {// 用 t 号L型骨牌覆盖左上角
      board[tr + s][tc + s] = t;
      // 覆盖其余方格
      chessBoard(tr+s, tc+s, tr+s, tc+s, s);}
  }
```

复杂度分析

$$T(k)=\begin{cases} O(1) & k=0 \\ 4T(k-1)+O(1) & k>0 \end{cases}$$

$T(n)=O(4^k)$ 渐进意义下的最优算法

- $2^3 \times 2^3$棋盘的部分结果



合并排序

基本思想：将待排序元素分成大小大致相同的2个子集合，分别对2个子集合进行排序，最终将排好序的子集合合并成为所要求的

复杂度分析

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & n\le 1 \\ 2T(n/2)+O(n) & n>1 \end{cases}$$

T(n)=O(nlogn) 渐进意义下的最优算法

```
void Me
  {
    if (
    int
    mergeSort(a, left, i);
    mergeSort(a, i+1, right);
    merge(a, b, left, i, right);  //合并到数组b
    copy(a, b, left, right);    //复制回数组a
    }
  }
```

合并排序

算法**mergeSort**的递归过程可以消去。

初始序列 [49] [38] [65] [97] [76] [13] [27]

第一步 [38 49] [65 97] [13 76] [27]

第二步 [38 49 65 97] [13 27 76]

第三步 [13 27 38 49 65 76 97]

合并排序

- **最坏时间复杂度：O(nlogn)**
- **平均时间复杂度：O(nlogn)**
- **辅助空间：O(n)**

快速排序

在快速排序中，记录的比较和交换是从两端向中间进行的，关键字较大的记录一次就能交换到后面单元，关键字较小的记录一次就能交换到前面单元，记录每次移动的距离较大，因而总的比较和移动次数较少。

```
template<class Type>
void QuickSort (Type a[], int p, int r)
{
      if (p<r) {
        int q=Partition(a,p,r);
        QuickSort (a,p,q-1); //对左半段排序
        QuickSort (a,q+1,r); //对右半段排序
        }
}
```

快速排序

```
template<class Type>
int Partition (Type a[], int p, int r)
{
        int i = p, j = r + 1;
        Type x=a[p];
        // 将< x的元素交换到左边区域
        // 将> x的元素交换到右边区域
        while (true) {
           while (a[++i] <x);
           while (a[- -j] >x);
           if (i >= j) break;
           Swap(a[i], a[j]);
           }
       a[p] = a[j];
       a[j] = x;
       return j;
}
```

$\{6, 7, 5, 2, \bar{5}, 8\}$ 初始序列

$\{6, 7, 5, 2, \bar{5}, 8\}$ **j--;**

$i \qquad j$

$\{\bar{5}, 7, 5, 2, 6, 8\}$ **i++;**

$i \qquad j$

$\{\bar{5}, 6, 5, 2, 7, 8\}$ **j--;**

$i \qquad j$

$\{\bar{5}, 2, 5, 6, 7, 8\}$ **i++;**

$i \qquad j$

$\{\bar{5}, 2, 5\}\ 6\ \{7, 8\}$ 完成

快速排序

快速排序算法的性能取决于划分的对称性。通过修改算法**partition**，可以设计出采用随机选择策略的快速排

最坏时间复杂度：$O(n^2)$

平均时间复杂度：$O(n\log n)$

辅助空间：$O(n)$或$O(\log n)$

```
template<class Type>
int RandomizedPartition (Type a[], int p, int r)
{
        int i = Random(p,r);
        Swap(a[i], a[p]);
        return Partition (a, p, r);
}
```

线性时间选择

给定线性序集中n个元素和一个整数k，1≤k≤n，要求找出这n个元素中第k小的元素

```
template<class Type>
Type RandomizedSelect(Type a[],int low,int
high,int k)
{
    if (low==k) return a[p];
    int i=RandomizedPartition(a,low,high),
    j=i-low+1;
    if (k<=j) return RandomizedSelect(a,low,i,k);
    else return RandomizedSelect(a,i+1,high,k-j);
}
```

在最坏情况下，算法**randomizedSelect**需要$O(n^2)$计算时间但可以证明，算法**randomizedSelect**可以在O(n)平均时间内找出n个输入元素中的第k小元素。

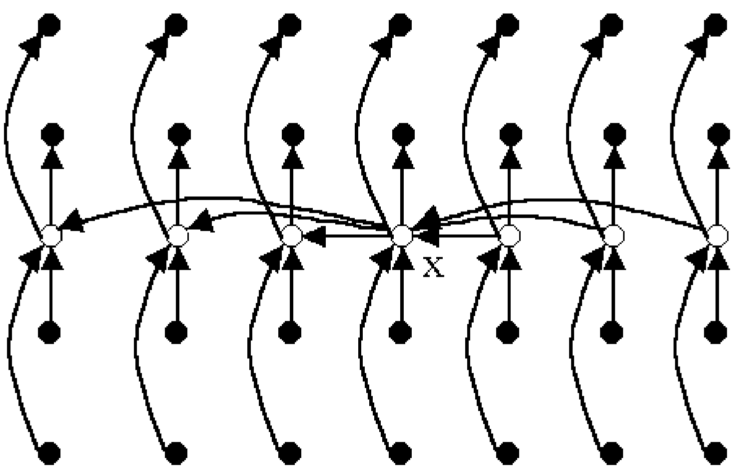
线性时间选择

如果能在线性时间内找到一个划分基准，使得按这个基准所划分出的2个子数组的长度都至少为原数组长度的ε倍(0<ε<1是某个正常数)，那么就可以**在最坏情况下**用O(n)时间完成选择任务。

例如，若ε=9/10，算法递归调用所产生的子数组的长度至少缩短1/10。所以，在最坏情况下，算法所需的计算时间T(n)满足递归式 $T(n) \le T(9n/10)+O(n)$ 。由此可得 $T(n)=O(n)$。

线性时间选择

- 将n个输入元素划分成⌈n/5⌉个组，每组5个元素，只可能有一个组不是5个元素。用任意一种排序算法，将每组中的元素排好序，并取出每组的中位数，共⌈n/5⌉个。
- 递归调用**select**来找出这⌈n/5⌉个元素的中位数。如果⌈n/5⌉是偶数，就找它的2个中位数中较大的一个。以这个元素作为划分基准。



设所有元素互不相同。在这种情况下，找出的基准x至少比3(n-5)/10个元素大，因为在每一组中有2个元素小于本组的中位数，而n/5个中位数中又有(n-5)/10个小于基准x。同理，基准x也至少比3(n-5)/10个元素小。而当n≥75时，3(n-5)/10≥n/4所以按此基准划分所得的2个子数组的长度都至少缩短1/4。

```
Type Select(Type a[], int p, int r, int k)
{
    if (r-p<75) {
      用某
      ret
      };
    for (
       将
       与
```

复杂度分析

$$T(n) \le \begin{cases} C_1 & n < 75 \\ C_2 n + T(n/5) + T(3n/4) & n \ge 75 \end{cases}$$

T(n)=**O(n)**

```
    //找中位数的中位数，r-p-4即上面所说的n-5
```

上述算法将每一组的大小定为5，并选取75作为是否作递归调用的分界点。这2点保证了T(n)的递归式中2个自变量之和n/5+3n/4=19n/20=εn，0<ε<1。这是使T(n)=O(n)的关键之处。当然，除了5和75之外，还有其他选择。

```
}
```

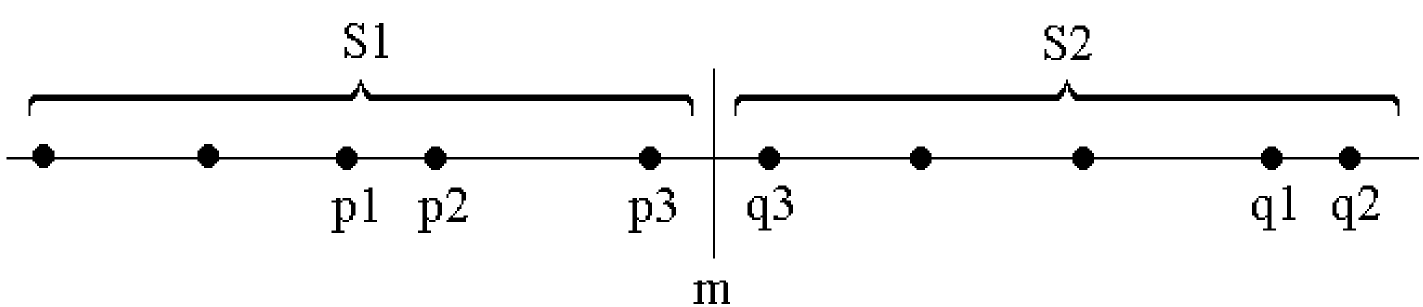
最接近点对问题

- 为了使问题易于理解和分析，先来考虑**一维**的情形。此时，S中的n个点退化为x轴上的n个实数 x1,x2,…,xn。最接近点对即为这n个实数中相差最小的2个实数。

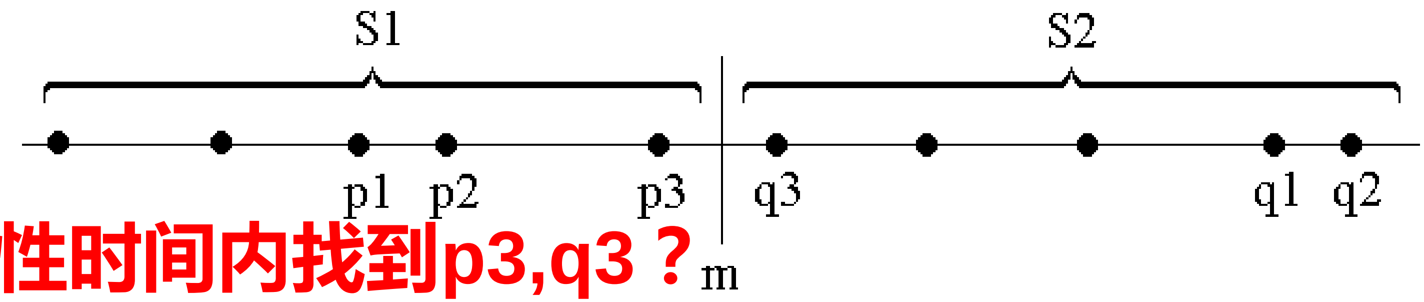
假设我们用x轴上某个点m将S划分为2个子集S1和S2 ，基于**平衡子问题**的思想，用S中各点坐标的中位数来作分割点。

递归地在S1和S2上找出其最接近点对{p1,p2}和{q1,q2}，并设**d=min{|p1-p2|,|q1-q2|}**，S中的最接近点对或者是{p1,p2}，或者是{q1,q2}，或者是某个{p3,q3}，其中p3∈S1且q3∈S2。

能否在线性时间内找到p3,q3？



最接近点对问题



能否在线性时间内找到p3,q3？

如果S的最接近点对是{p3,q3}，即|p3-q3|<d，则p3和q3两者与m的距离不超过d，即**p3∈(m-d,m]，q3∈(m,m+d]**。

由于在S1中，每个长度为d的半闭区间至多包含一个点（否则必有两点距离小于d），并且m是S1和S2的分割点，因此(m-d,m]中至多包含S中的一个点。由图可以看出，**如果(m-d,m]中有S中的点，则此点就是S1中最大点。**

因此，我们用线性时间就能找到区间(m-d,m]和(m,m+d]中所有点，即p3和q3。**从而我们用线性时间就可以将S1的解和S2的解合并成为S的解。**

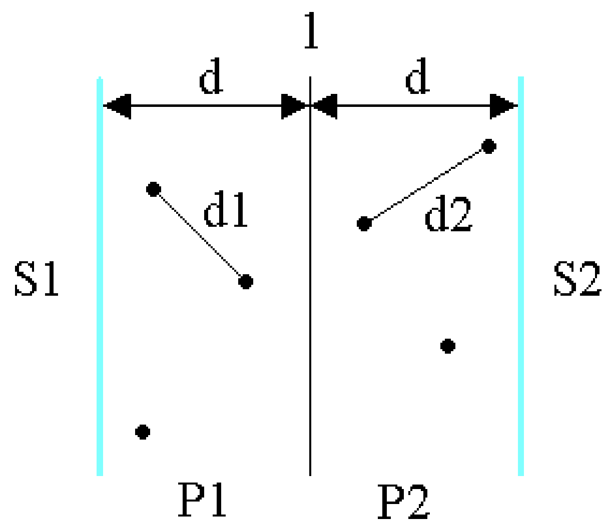
最接近点对问题

- 下面来考虑二维的情形。

选取一垂直线**l:x=m**来作为分割直线。其中m为S中各点x坐标的中位数。由此将S分割为S1和S2。

递归地在S1和S2上找出其最小距离d1和d2，并设**d=min{d1,d2}**，S中的最接近点对或者是d，或者是某个{p,q}，其中p∈P1且q∈P2。

能否在线性时间内找到p,q？



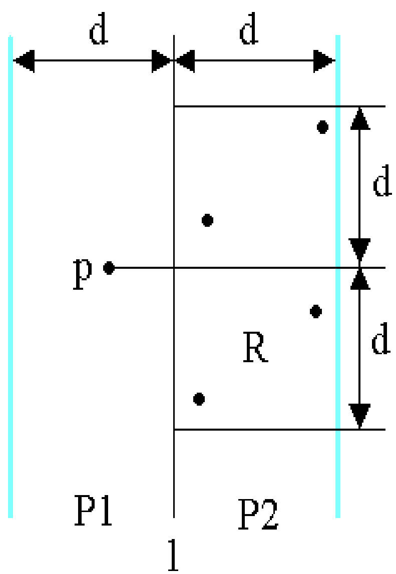
最接近点对问题

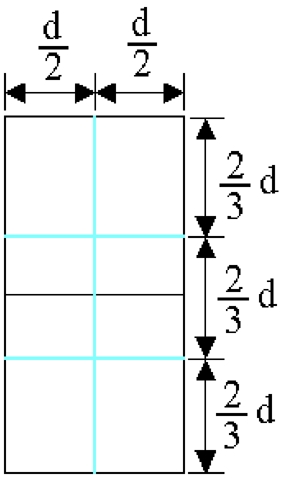
能否在线性时间内找到p3,q3？

考虑P1中任意一点p，它若与P2中的点q构成最接近点对的候选者，则必有distance(p，q) < d。**满足这个条件的P2中的点一定落在一个d×2d的矩形R中**

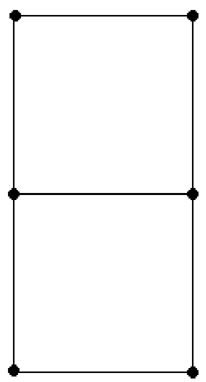
由d的意义可知，P2中任何2个S中的点的距离都不小于d。由此可以推出**矩形R中最多只有6个S中的点。**

因此，在分治法的合并步骤中**最多只需要检查6×n/2=3n个候选者**





(a)


(b)

最接近点对问题

证明:

将矩形R的长为2d的边3等分，将它的长为d的边2等分，由此导出6个(d/2)×(2d/3)的矩形。若矩形R中有多于6个S中的点，则由鸽舍原理易知至少有一个(d/2)×(2d/3)的小矩形中有2个以上S中的点。设u，v是位于同一小矩形中的2个点，则

$$(x(u)-x(v))^2+(y(u)-y(v))^2 \le (d/2)^2+(2d/3)^2=\frac{25}{36}d^2$$

distance(u,v)<d。这与d的意义相矛盾。

最接近点对问题

- 为了确切地知道要检查哪6个点，可以将p和P2中所有S2的点投影到垂直线l上。由于能与p点一起构成最接近点对候选者的S2中点一定在矩形R中，所以它们在直线l上的投影点距p在l上投影点的距离小于d。由上面的分析可知，这种投影点最多只有6个。
- 因此，若将P1和P2中所有S中点按其y坐标排好序，则对P1中所有点，对排好序的点列作一次扫描，就可以找出所有最接近点对的候选者。对P1中每一点最多只要检查P2中排好序的相继6个点。

最接近点对问题

double **cpair2**(S)

{

n=|S|;

if (n <

1、m=S中

构造S

//S1={p∈S|x(p) < m},

S2={p∈S|x(p)>m}

2、d1=**cpair2**(S1);

d2=**cpair2**(S2);

3、dm=**min**(d1,d2);

4、设P1是S1中距垂直分割线l的距离在dm之内的所有点组成的集合；

P2是S2中距分割线l的距离在dm之内所有

中与

完成

复杂度分析

$$T(n)=\begin{cases} O(1) & n<4 \\ 2T(n/2)+O(n) & n\ge 4 \end{cases}$$

T(n)=O(nlogn)

当X中的扫描指针逐次向上移动时，Y中的扫描指针可在宽为2dm的区间内移动；

设dl是按这种扫描方式找到的点对间的最小距离；

6、d=**min**(dm,dl);

return d;

}

循环赛日程表

设计一个满足以下要求的比赛日程表：

(1) 每个选手必须与其他n-1个选手各赛一次；

(2) 每个选手一天只能赛一次；

(3) 循环赛一共进行n-1天。

按分治策略，将所有的选手分为两半，n个选手的比赛日程表就可以通过为n/2个选手设计的比赛日程表来决定。递归地用对选手进行分割，直到只剩下2个选手时，比赛日程表的制定就变得很简单。这时只要让这2个选手进行比赛就可以了。

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	4	3	6	5	8	7
3	4	1	2	7	8	5	6
4	3	2	1	8	7	6	5
5	6	7	8	1	2	3	4
6	5	8	7	2	1	4	3
7	8	5	6	3	4	1	2
8	7	6	5	4	3	2	1