

احصاء اور تحلیلی علم الہندسہ

خالد حنان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۱۶ جنوری ۲۰۲۳

عنوان

ix

دیباچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

۱	۱	ابتدائی معلومات
۱	۱.۱	حقیقی اعداد اور حقیقی خط
۱۳	۱.۲	محدود، خطوط اور بڑھوتری
۲۸	۱.۳	تفاضل
۴۹	۱.۴	ترسیم کی منتقلی
۶۷	۱.۵	تکونیاتی تفاضل
۸۹	۲	حدود اور استمرار
۸۹	۲.۱	تبدیلی کی شرح اور حد
۱۰۵	۲.۲	حد تلاش کرنے کے قواعد
۱۱۷	۲.۳	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
۱۳۶	۲.۴	تصور حد کی توسیع
۱۵۴	۲.۵	استمرار
۱۷۲	۲.۶	مماسی خط
۱۸۷	۳	تفرق
۱۸۷	۳.۱	تفاضل کا تفرق
۲۰۷	۳.۲	قواعد تفرق
۲۲۵	۳.۳	تبدیلی کی شرح
۲۴۲	۳.۴	تکونیاتی تفاضل کا تفرق
۲۶۱	۳.۵	زنجیری متاعده
۲۷۱	۳.۶	خفی تفرق اور نااطاق قوت
۲۹۱	۳.۷	دیگر شرح تبدیلی

۳۰۵	تفریق کا استعمال	۴
۳۰۵	تفاضل کی انتہائی قیمتیں	۴.۱
۳۱۸	مسئلہ اوسط قیمت	۴.۲
۳۳۳	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفریق پرکھ	۴.۳
۳۳۳	۴.۳.۱ پرکھ	۴.۳.۱
۳۳۳	'/ اور '"/ کے ساتھ ترسیم	۴.۴
۳۶۶	$x \rightarrow \pm\infty$ پر حد، مقتارب اور غالب اجزاء	۴.۵
۳۹۱	بہترین بنانا	۴.۶
۴۱۴	خط بندی اور تفریقات	۴.۷
۴۳۵	ترکیب نیوٹن	۴.۸
۴۴۷	تکمل	۵
۴۴۷	غیر قطعی تکملات	۵.۱
۴۵۸	تفریق مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی	۵.۲
۴۷۳	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری متاعدہ کالٹ اطلاق	۵.۳
۴۸۴	اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ	۵.۴
۵۰۱	ریمان مجموعے اور قطعی تکملات	۵.۵
۵۲۶	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ	۵.۶
۵۴۲	بنیادی مسئلہ	۵.۷
۵۶۱	قطعی تکمل میں بدل	۵.۸
۵۶۶	اعدادی تکمل	۵.۹
۵۶۷	متاعدہ ذوزنقہ	۵.۱۰
۵۸۵	تکمل کا استعمال	۶
۵۸۵	۶.۱ منحنیات کے بیچ رقبہ	۶.۱
۷۰۷	مبادرائی تفاعل	۷
۷۰۸	۷.۱ الٹ تفاعل اور ان کے تفریقات	۷.۱
۷۲۶	۷.۲ متدرج لوگار تھم	۷.۲
۷۴۲	۷.۳ قوت نمائی تفاعل	۷.۳
۷۵۵	۷.۴ $\log_a x$ اور a^x	۷.۴
۷۶۵	۷.۵ انفرانش اور تنزل	۷.۵
۷۷۸	۷.۶ متاعدہ لھو پیٹال	۷.۶
۷۹۳	۷.۷ اضافی شرح نمو	۷.۷
۷۹۸	۷.۷.۱ ترتیبی اور شنائی تلاش	۷.۷.۱
۸۰۳	۷.۸ الٹ تکنیکی تفاعل	۷.۸
۸۱۸	۷.۹ الٹ تکنیکی تفاعل کے تفریق؛ تکمل	۷.۹
۸۳۴	۷.۱۰ بذلولی تفاعل	۷.۱۰
۸۵۳	۷.۱۱ یک رتبی تفریق مساوات	۷.۱۱

۷.۱۲ یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان ۸۷۲

۸۸۳	۸	تکمل کے طریقے
۸۸۳	۸.۱	تکمل کے بنیادی کلیات
۸۹۷	۸.۲	تکمل بالخص
۹۰۱	۸.۲.۱	بار بار استعمال
۹۱۰	۸.۳	جزوی کسر
۹۲۴	۸.۴	تکونیاتی بدل
۹۳۴	۸.۵	جدول تکمل اور کمپیوٹر
۹۵۰	۸.۶	غیر مناسب تکمل

۹۷۳	۹	لامستثنائی تسلسل
۹۷۳	۹.۱	اعداد کی ترتیب کی حد
۹۹۰	۹.۲	ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے
۱۰۰۶	۹.۳	لامستثنائی تسلسل
۱۰۲۳	۹.۴	غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا عملی پرکھ
۱۰۳۳	۹.۵	غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ
۱۰۴۲	۹.۶	غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جزوی پرکھ
۱۰۵۳	۹.۷	بدلت تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز
۱۰۶۶	۹.۸	طابق تسلسل
۱۰۸۲	۹.۹	ٹیلر اور مکلارن تسلسل
۱۰۹۲	۹.۱۰	ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ جنسل کے اندازے
۱۱۰۹	۹.۱۱	طابق تسلسل کے استعمال

۱۱۲۷	۱۰	محسروٹی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدود
۱۱۲۷	۱۰.۱	محسروٹی حصے اور دو قدری مساواتیں
۱۱۵۰	۱۰.۲	نکالے لحاظ سے محسروط حصوں کی جماعت بندی
۱۱۶۰	۱۰.۳	دو درجی مساوات اور گھومنا
۱۱۷۲	۱۰.۴	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
۱۱۸۹	۱۰.۵	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
۱۲۰۱	۱۰.۶	قطبی محدود
۱۲۱۲	۱۰.۷	قطبی محدود میں ترسیم
۱۲۲۵	۱۰.۸	محسروط حصوں کے قطبی مساوات
۱۲۲۶	۱۰.۸.۱	دائرے
۱۲۳۹	۱۰.۹	قطبی محدود میں عمل

۱۲۵۱	۱۱	سمتیات اور خلائ میں تحلیلی جیومیٹری
۱۲۵۱	۱۱.۱	مستوی میں سمتیات

۱۲.۲	کار تیلی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات	۱۲۶۶
۱۱.۲.۱	کرہ	۱۲۷۴
۱۱.۳	ضرب نقطہ	۱۲۸۲
۱۱.۳.۱	حاج	۱۲۸۳
۱۱.۴	صلیبی ضرب	۱۲۹۶
۱۱.۵	فضا میں خطوط اور مستویات	۱۳۱۰
۱۱.۶	تکلی اور مربع سطحیں	۱۳۲۳
۱۱.۷	تکلی اور کروئی محدود	۱۳۳۹
۱۲	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت	۱۳۵۱
۱۲.۱	سمتی قیمت تفاعل اور فضا کی مختصات	۱۳۵۱
۱۲.۲	گولائی حرکت کی نمونہ کشی	۱۳۷۳
۱۲.۳	لمبائی توس اور اکائی ماسی سمتیہ T	۱۳۸۲
۱۲.۴	انجن، سروژ اور TNB چھو کٹ	۱۳۸۹
۱۲.۵	فنکلی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت	۱۴۱۰
۱۳	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات	۱۴۲۵
۱۳.۱	کثیر متغیرات کے تفاعل	۱۴۲۵
۱۳.۲	حد اور استمرار	۱۴۳۹
۱۳.۳	جزوی تفرقات	۱۴۵۳
۱۳.۴	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات	۱۴۶۹
۱۳.۵	زنجیری متاعده	۱۴۸۵
۱۳.۶	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات	۱۴۹۹
۱۳.۷	رفی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور ماسی سطحیں	۱۵۰۶
۱۳.۸	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین	۱۵۲۶
۱۳.۸.۱	نتیجہ	۱۵۳۴
۱۳.۹	لیگرینج مضاربین	۱۵۴۲
۱۳.۱۰	کلیہ ٹیلر	۱۵۵۹
۱۴	تکمل بالکثرت	۱۵۶۷
۱۴.۱	دوہرا تکملات	۱۵۶۷
۱۴.۲	رقبات، معیار اثر، اور مسر اکز کیت	۱۵۸۶
۱۴.۳	دوہرا تکملات کا قطبی روپ	۱۶۰۱
۱۴.۴	کار تیلی محدود میں تہہرا تکمل	۱۶۱۱
۱۴.۵	تعیین بعد میں کیت اور معیار اثر	۱۶۲۵
۱۴.۶	تکلی اور کروئی محدود میں تہہرا تکمل	۱۶۳۴
۱۴.۷	تکملات بالکثرت میں بدل	۱۶۵۳
۱۵	سمتی میدان میں تکمل	۱۶۶۹

۱۶۶۹	لکیری مکمل	۱۵.۱
۱۶۷۱	جمع پذیری	۱۵.۱.۱
۱۶۷۹	سختی میدان، کام، دائری بہا، اور بہا	۱۵.۲
۱۶۹۴	راہے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان	۱۵.۳
۱۷۰۷	مستوی میں مسئلہ گرین	۱۵.۴
۱۷۱۴	سطحی رقبہ اور سطحی کمالات	۱۵.۵
۱۷۱۴	سطحی رقبہ کی تعریف	۱۵.۵.۱

۱۷۱۹	جوابات
۱۷۳۵	۱ ضمیمہ اول
۱۷۳۷	۲ ضمیمہ دوم
۱۷۳۹	۳ ضمیمہ تین
۱۷۴۱	۴ ضمیمہ چار
۱۷۴۳	۵ ضمیمہ پانچ
۱۷۴۵	۶ ضمیمہ چھ
۱۷۴۷	۷ ضمیمہ سات
۱۷۴۹	۸ ضمیمہ آٹھ
۱۷۵۱	۹ ضمیمہ آٹھ
۱۷۵۳	۱۰ کمالات کا مختصر جدول

سوالات

مسئلہ گرین کی تصدیق

سوال ۱۵.۱۲ تا سوال ۱۵.۱۳۰ میں میدان $F = Mi + Nj$ کے لیے مساوات 11 اور مساوات 12 کی دونوں اطراف کی قیمتیں تلاش کر کے مسئلہ گرین کی تصدیق کریں۔ دونوں صورتوں میں مکمل کا دائرہ کار فترص $R : x^2 + y^2 \leq a^2$ اور محدود کار دائرہ $C : r = (a \cos t)i + (a \sin t)j, 0 \leq t \leq 2\pi$ لیں۔

سوال ۱۵.۱۲ : $F = -yi + xj$

سوال ۱۵.۱۲۸ : $F = yi$

سوال ۱۵.۱۲۹ : $F = 2xi - 3yj$

سوال ۱۵.۱۳۰ : $F = -x^2yi + xy^2j$

حلاف گھڑی دائری ہسا اور باہر رخ ہسا

سوال ۱۵.۱۳۱ تا ۱۵.۱۳۶ میں میدان F اور مغنی C کے لیے مسئلہ گرین استعمال کر کے حلاف گھڑی دائری ہسا اور باہر رخ ہسا تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۳۱ : $F = (x - y)i + (y - x)j$ اور C کو چوکور $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۲ : $F = (x^2 + 4y)i + (x + y^2)j$ اور C کو چوکور $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۳ : $F = (y^2 - x^2)i + (x^2 + y^2)j$ اور C کو مثلث $y = 0, x = 3, y = x$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۴ : $F = (x + y)i - (x^2 + y^2)j$ اور C کو مثلث $y = 0, x = 1, y = x$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۵ : $F = (x + e^x \sin y)i + (x + e^x \cos y)j$ اور C دو چشم $r^2 = \cos 2\theta$ کا دایاں ہاتھ گھیر ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۶ : $F = \left(\tan^{-1} \frac{y}{x}\right)i + \ln(x^2 + y^2)j$ اور C اس خطے کی سرحد ہے جس کو قطبی محدود عدم مساوات $0 \leq \theta \leq \pi, 1 \leq r \leq 2$ تعین کرتی ہیں۔

۱۵.۵ سطحی رقبہ اور سطحی کمالات

ہم مستوی میں خطہ پر تفاعل کا مکمل لینا چاہتے ہیں لیکن ایسی صورت میں کیا ہوگا جب تفاعل ایک قوسی سطح پر پایا جاتا ہو؟ ایسی صورت میں مکمل کیسے حاصل ہوگا؟ ایسا مکمل، جو سطحی کمالات^{۱۵} کہلاتا ہے، کی قیمت تلاش کرنے کی خاطر اس کو، سطح کے نیچے محدودی مستوی پر، دہرا مکمل کے روپ میں لکھا جاتا ہے (شکل 14.39)۔ حصہ 14.7 اور حصہ 14.8 میں ہم دیکھیں گے کہ سطحی کمالات کی مدد سے مسئلہ گرین کو تین ابعاد میں عمومیت دی جاسکتی ہے۔

۱۵.۵.۱ سطحی رقبہ کی تعریف

شکل 14.40 میں سطح S اور نیچے مستوی میں اس کا ”سایہ“ خطہ R دکھایا گیا ہے۔ سطح کی تعریفی مساوات $c = f(x, y, z)$ دیتی ہے۔ اگر سطح ہموار^{۱۶} ∇f استمراری ہے اور S پر کہیں بھی منحصر نہیں ہے، ہم اس کے رقبہ کی تعریف اور قیمت R پر دہرا مکمل کی صورت میں کر سکتے ہیں۔

ہم خطہ R کی حسانہ بندی چھوٹے چھوٹے مستطیلوں ΔA_k میں ہم یوں کرتے ہیں جیسے R پر مکمل کی تعریف پیش کرنا چاہتے ہوں۔ یہ S کے رقبہ کی تعریف پیش کرنے کا کاہل قدم ہے۔ ہر ایک ΔA کے بالکل اوپر کچھ بلندی پر سطح $\Delta \sigma_k$ پایا جاتا ہے، جس کو ہم ماسی سطح کے چھوٹے حصہ ΔP_k سے تخمینہ دے سکتے ہیں۔ اس کی وضاحت کرتے ہیں۔ رقبہ ΔA_k کے پچھلے کونے C_k کے بالکل اوپر نقطہ $T_k(x_k, y_k, z_k)$ پر سطح کے ماس کا ΔP_k ایک ٹکڑا ہے۔ اگر ماسی سطح R کا متوازی ہو، تب ΔP_k رقبہ ΔA_k کا موافق ہوگا۔ بصورت دیگر، یہ ایک مستطیل ہوگا جس کا رقبہ ΔA_k کے رقبہ سے کچھ زیادہ ہوگا۔

شکل 14.41 میں $\Delta \sigma_k$ اور ΔP_k بڑھا چڑھا کر پیش کیے گئے ہیں، جہاں T_k پر ڈھلوان سمتیہ $\nabla f(x_k, y_k, z_k)$ اور R کا عمودی اکائی سمتیہ p بھی دکھائے گئے ہیں۔ اس شکل میں ∇f اور p کے بیچ زاویہ γ_k بھی دکھایا گیا ہے۔ اس شکل میں دیگر سمتیہ u_k اور v_k ماسی مستوی میں ΔP_k کے کناروں پر پائے جاتے ہیں۔ یوں $u_k \times v_k$ اور ∇f دونوں ماسی مستوی کو عمودی ہیں۔

اعلیٰ سمتیہ ہندسہ سے ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی مستوی پر، جس کا عمود p ہو، ایسے مستطیل کی تطلیل کا رقبہ $|u_k \times v_k|$ (جو صلیبی ضرب کی ایک حقیقت ہے) یہ ہے کہ $|u_k \times v_k| \cdot p$ ہوگا جس کو u_k اور v_k تقسین کرتے ہوں۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$|(u_k \times v_k) \cdot p| = \Delta A_k \quad (15.32)$$

اب سمتی ضرب کی ایک خاصیت (جو صلیبی ضرب کی ایک حقیقت ہے) یہ ہے کہ $|u_k \times v_k|$

رقبہ ΔP_k ہوگا، لہذا مساوات ۱۵.۳۲ ذیل روپ

$$(۱۵.۳۳) \quad \underbrace{|u_k \times v_k|}_{\Delta P_k} \underbrace{|p|}_1 \underbrace{|\cos(\text{کے } \angle \text{ زاویہ } u_k \times v_k \text{ اور } p)|}_{\substack{\text{چونکہ } \nabla f \text{ اور } u_k \times v_k \text{ دونوں ماسی مستوی کو} \\ \text{عمودی ہیں لہذا یہ } |\cos \gamma_k| \text{ کے برابر ہوگا}}} = \Delta A_k$$

یا

$$\Delta P_k |\cos \gamma_k| = \Delta A_k$$

اختیار کرتی ہے جو $\cos \gamma_k \neq 0$ کی صورت میں ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$\Delta P_k = \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma_k|}$$

جب تک ∇f زمینی مستوی کو متوازی نہ ہو اور $\nabla f \cdot p \neq 0$ ہو $\cos \gamma_k \neq 0$ ہوگا۔

چونکہ، سطحی ٹکڑے $\Delta \sigma_k$ جو مل کر رقبہ S دیتے ہیں، کو ΔP_k تخمینہ ظاہر کرتے ہیں، لہذا مجموعہ

$$(۱۵.۳۴) \quad \sum \Delta P_k = \sum \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma_k|}$$

سطحی رقبہ S کا تخمینہ نظر آتا ہے۔ ہم یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ خط R کو مزید چھوٹے خانوں میں تقسیم کرنے سے یہ تخمینہ بہتر ہوگی۔ درحقیقت، مساوات ۱۵.۳۴ کے دائیں ہاتھ مجموعہ دوہرا مکمل

$$(۱۵.۳۵) \quad \iint_R \frac{1}{|\cos \gamma|} dA$$

کے تخمینہ مجموعے ہیں۔ اسی بنا پر جب بھی مکمل موجود ہو، ہم اسے S کے رقبہ کی تعریف لیتے ہیں۔

عملی کلیہ

کسی بھی سطح $c = f(x, y, z)$ کے لیے $|\nabla f \cdot p| = |\nabla f| |p| |\cos \gamma|$ ہوگا، لہذا درج ذیل لکھ جاسکتا ہے، جہاں اکائی سمتیہ کی مطلق قیمت 1 ہے ($|p| = 1$)۔

$$\frac{1}{|\cos \gamma|} = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot p|}$$

اس کو مساوات ۱۵.۳۵ کے ساتھ ملا کر رقبہ کا عملی کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

سطحی رقبہ کا کلیہ

area^۲

بند اور محدود مستوی میں خط R پر سطح $c = f(x, y, z)$ کا رقبہ ذیل ہوگا

$$(۱۵.۳۶) \quad \text{سطحی رقبہ} = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA$$

جہاں \mathbf{p} خط R کا اکائی عمودی سمتیہ ہے اور $\nabla f \cdot \mathbf{p} \neq 0$ ہے۔

یوں ∇f کی مقدار کو ∇f کے اس غیر سمتی عمودی جزو کی مقدار سے تقسیم کر کے جو R کو عمودی ہو، خط R پر دوہرا مکمل لینے سے رقبہ حاصل ہوگا۔

ہم نے ∇f کو استمراری تصور کر کے اور پورے R پر $\nabla f \cdot \mathbf{p} \neq 0$ تصور کر کے مساوات ۱۵.۳۶ حاصل کی۔ جب بھی یہ مکمل موجود ہو، اس کی قیمت کو سطح $c = f(x, y, z)$ کے اس حصے کے رقبے کی تعریف لی جاتی ہے جو R کے اوپر (بلندی پر) پایا جاتا ہو۔

مثال ۱۵.۱: قطر مکانی مجسم $x^2 + y^2 - z = 0$ کے نچلے حصے سے مستوی $z = 4$ ایک سطح کاٹتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم مستوی xy میں سطح S اور اس کے نیچے خط R کاٹنا کہہ سکتے ہیں (شکل 14.42)۔ سطح S ، ہم متد سطح $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ کا حصہ ہے اور R ، مستوی xy میں متد $x^2 + y^2 \leq 4$ ہے۔ مستوی R کا اکائی عمودی سمتیہ $\mathbf{p} = \mathbf{k}$ ہے۔

سطح پر کسی بھی نقطہ x, y, z پر ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= x^2 + y^2 - z \\ \nabla f &= 2xi + 2yj - k \\ |\nabla f| &= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \\ |\nabla f \cdot \mathbf{p}| &= |\nabla f \cdot \mathbf{k}| = |-1| = 1 \end{aligned}$$

خطہ R میں $dA = dx dy$ ہوگا، لہذا ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}
 \text{سطحی رقبہ} &= \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA && (\text{مساوات ۱۵.۳۶}) \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta && (\text{قطبی مدد}) \\
 &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 d\theta \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} (17^{\frac{3}{2}} - 1) d\theta = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1)
 \end{aligned}$$

□

مثال ۱۵.۱۸: نصف کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 0$ سے بیان $x^2 + y^2 = 1$ ایک ٹوپی کاٹتا ہے۔ اس ٹوپی کا رقبہ تلاش کریں (شکل 14.43)۔

حل: ٹوپی S ، ہمسفحہ $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 2$ کا حصہ ہے۔ یہ ایک ایک مطابقت کے ساتھ مستوی xy میں متروک $R: x^2 + y^2 \leq 1$ پر تخلیل کرتا ہے۔ سمتیہ $\mathbf{p} = k$ مستوی R کو عمودی ہے۔ سطح میں کسی بھی نقطے پر ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 \\
 \nabla f &= 2xi + 2yj + 2zk \\
 |\nabla f| &= 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{2} \quad (\text{چونکہ ٹوپی پر ہمیشہ } x^2 + y^2 + z^2 = 2 \text{ ہوگا}) \\
 |\nabla f \cdot \mathbf{p}| &= |\nabla f \cdot k| = |2z| = 2z
 \end{aligned}$$

یوں اور ج ذیل حاصل ہوگا۔

$$(15.37) \quad \text{سطحی رقبہ} = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA = \iint_R \frac{2\sqrt{2}}{2z} dA = \sqrt{2} \iint_R \frac{dA}{z}$$

یہاں z کا کیا کیا جائے؟

چونکہ z کرہ کی سطح پر ایک نقطے کا z محدود ہے، لہذا اس کو ہم x اور y کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$$

اس کو مساوات ۷.۳۵ میں ڈالتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \text{سطحی رقبہ} &= \sqrt{2} \iint_R \frac{dA}{z} = \sqrt{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dA}{\sqrt{2-x^2-y^2}} \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r \, dr \, d\theta}{\sqrt{2-r^2}} \quad (\text{قطبی محدد}) \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[-(2-r^2)^{\frac{1}{2}} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta \\
 &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\sqrt{2}-1) d\theta = 2\pi(2-\sqrt{2})
 \end{aligned}$$

□

جوابات

