احصاء اور تحلیلی علم الہندسہ

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۱۵ر جنوری ۲۰۲۴

عنوان

سوالات

مسئلہ گرین کی تصدیق

سوال ۱۵.۱۲۷ تا سوال ۱۵.۱۳۰ میں میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کے لیے مساوات 11 اور مساوات 12 کی دونوں اطراف کی قیمتیں تلاش کر کے مسئلہ گرین کی تصدیق کریں۔ دونوں صورتوں میں تکمل کا دائرہ کار قرص $R: x^2 + y^2 \leq a^2$ اور محدود کار دائرہ $C: r = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}, 0 \leq t \leq 2\pi$ لیں۔

سوال ۱۵.۱۲۷: $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۱۲۸: $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i}$

سوال ۱۵.۱۲۹: $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۱۳۰: $\boldsymbol{F} = -x^2y\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j}$

خلاف گھڑی دائری بہاو اور باہر رخ بہاو

سوال ۱۵.۱۳۱ تا ۱۵.۱۳۶ میں میدان $\boldsymbol{F}$ اور منحنی C کے لیے مسئلہ گرین استعمال کر کے خلاف گھڑی دائری بہاو اور باہر رخ بہاو تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۳۱: $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + (y-x)\boldsymbol{j}$ اور C کو چوکور $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۲: $\boldsymbol{F} = (x^2+4y)\boldsymbol{i} + (x+y^2)\boldsymbol{j}$ اور C کو چوکور $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۳: $\boldsymbol{F} = (y^2-x^2)\boldsymbol{i} + (x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ اور C کو مثلث $y = 0$ ، $x = 3$ ، $y = x$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۴: $\boldsymbol{F} = (x+y)\boldsymbol{i} - (x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ اور C کو مثلث $y = 0$ ، $x = 1$ ، $y = x$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۵: $\boldsymbol{F} = (x + e^x\sin y)\boldsymbol{i} + (x + e^x\cos y)\boldsymbol{j}$ اور C دو چشمہ $r^2 = \cos 2\theta$ کا دایاں ہاتھ گھیرے ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۶: $\boldsymbol{F} = \left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)\boldsymbol{i} + \ln(x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ اور C اس خطے کی سرحد ہے جس کو قطبی محدد عدم مساوات $1 \leq r \leq 2$ ، $0 \leq \theta \leq \pi$ تعین کرتی ہیں۔

۱۵.۵ سطحی رقبہ اور سطحی تکملات

ہم مستوی میں خطہ پر تفاعل کا تکمل لینا جانتے ہیں لیکن ایسی صورت میں کیا ہو گا جب تفاعل ایک قوسی سطح پر پایا جاتا ہو؟ ایسی صورت میں تکمل کیسے حاصل ہو گا؟ ایسا تکمل، جو **سطحی تکمل**[۱۵] کہلاتا ہے، کی قیمت تلاش کرنے کی خاطر اس کو، سطح کے نیچے محدودی مستوی پر، دہرا تکمل کے روپ میں لکھا جاتا ہے (شکل 14.39)۔ حصہ 14.7 اور حصہ 14.8 میں ہم دیکھیں گے کہ سطحی تکملات کی مدد سے مسئلہ گرین کو تین ابعاد میں عمومیت دی جا سکتی ہے۔

۱۵.۵.۱ سطحی رقبہ کی تعریف

شکل 14.40 میں سطح S اور نیچے مستوی میں اس کا "سایہ" خطہ R دکھایا گیا ہے۔ سطح کی تعریفی مساوات $f(x,y,c) = c$ دیتی ہے۔ اگر سطح **ہموار**[۱۶] ہو (∇f استمراری ہے اور S پر کہیں بھی صفر نہیں ہے)، ہم اس کے رقبہ کی تعریف اور قیمت R پر دہرا تکمل کی صورت میں کر سکتے ہیں۔

ہم خطہ R کی خانہ بندی چھوٹے چھوٹے مستطیلوں ΔA_k میں ہم یوں کرتے ہیں جیسے R پر تکمل کی تعریف پیش کرنا چاہتے ہوں۔ یہ S کے رقبہ کی تعریف پیش کرنے کا کا پہلا قدم ہے۔ ہر ایک ΔA کے بالکل اوپر کچھ بلندی پر سطح $\Delta\sigma_k$ پایا جاتا ہے، جس کو ہم مماسی سطح کے چھوٹے حصہ ΔP_k سے تخمین دے سکتے ہیں۔ اس کی وضاحت کرتے ہیں۔ رقبہ ΔA_k کے پچھلے کونے C_k کے بالکل اوپر نقطہ $T_k(x_k,y_k,z_k)$ پر سطح کے مماس کا ΔP_k ایک ٹکڑا ہے۔ اگر مماسی سطح R کا متوازی ہو، تب ΔP_k رقبہ ΔA_k کا موافق ہو گا۔ بصورت دیگر، یہ ایک مستطیل ہو گا جس کا رقبہ ΔA_k کے رقبہ سے کچھ زیادہ ہو گا۔

شکل 14.41 میں $\Delta\sigma_k$ اور ΔP_k بڑھا چڑھا کر پیش کیے گئے ہیں، جہاں T_k پر ڈھلوان سمتیہ $\nabla f(x_k,y_k,z_k)$ اور R کا عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{p}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔ اس شکل میں ∇f اور $\boldsymbol{p}$ کے بیچ زاویہ γ_k بھی دکھایا گیا ہے۔ اس شکل میں دیگر سمتیات $\boldsymbol{u}_k$ اور $\boldsymbol{v}_k$ مماسی مستوی میں ΔP_k کے کناروں پر پائے جاتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k$ اور ∇f دونوں مماسی مستوی کو عمودی ہیں۔

اعلیٰ سمتی ہندسہ سے ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی مستوی پر، جس کا عمود $\boldsymbol{p}$ ہو، ایسے مستطیل کی تظلیل کا رقبہ $|(\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k)\cdot\boldsymbol{p}|$ ہو گا جس کو $\boldsymbol{u}_k$ اور $\boldsymbol{v}_k$ تعین کرتے ہوں۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$|(\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k)\cdot\boldsymbol{p}| = \Delta A_k \tag{۱۵.۳۲}$$

اب سمتی ضرب کی ایک خاصیت (جو صلیبی ضرب کی ایک حقیقت ہے) یہ ہے کہ $|\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k|$

---

[۱۵] surfaceintegral
[۱۶] smooth

رقبہ ΔP_k ہو گا، لہٰذا مساوات ۱۵.۳۲ ذیل روپ

$$\underbrace{|\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k|}_{\Delta P_k} \underbrace{|\boldsymbol{p}|}_{1} \underbrace{|\cos(\text{ کے بیچ زاویہ } \boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k \text{ اور } \boldsymbol{p})|}_{\substack{\text{چونکہ } \nabla f \text{ اور } \boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k \text{ دونوں مماسی مستوی کو} \\ \text{عمودی ہیں لہٰذا یہ } |\cos \gamma_k| \text{ کے برابر ہو گا}}} = \Delta A_k \tag{۱۵.۳۳}$$

یا

$$\Delta P_k |\cos \gamma_k| = \Delta A_k$$

اختیار کرتی ہے جو $\cos \gamma_k \neq 0$ کی صورت میں ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\Delta P_k = \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma_k|}$$

جب تک ∇f زمینی مستوی کو متوازی نہ ہو اور $\nabla f \cdot \boldsymbol{p} \neq 0$ ہو $\cos \gamma_k \neq 0$ ہو گا۔

چونکہ سطحی ٹکڑے $\Delta\sigma_k$ جو مل کر رقبہ S دیتے ہیں کو ΔP_k تخمیناً ظاہر کرتا ہے لہٰذا مجموعہ

$$\sum \Delta P_k = \sum \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma_k|} \tag{۱۵.۳۴}$$

سطحی رقبہ S کا تخمین نظر آتا ہے۔ ہم یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ خطہ R کو مزید چھوٹے خانوں میں تقسیم کرنے سے یہ تخمین بہتر ہو گی۔ در حقیقت مساوات تین کے دائیں ہاتھ مجموعے دوہرے تکمل

$$\int\int_R \frac{1}{|\cos \gamma|} \, \mathrm{d}A \tag{۱۵.۳۵}$$

کے تخمینی مجموعے ہیں۔ اسی بنا پر جب بھی یہ تکمل موجود ہو ہم اسے S کے رقبہ کی تعریف لیتے ہیں۔

۱۵.۵.۲ عملی کلیہ

کسی بھی سطح $f(x, y, z) = c$ کے لیے $|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}| = |\nabla f||\boldsymbol{p}||\cos \gamma|$ ہو گا لہٰذا $\frac{1}{|\cos \gamma|} = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|}$ ہو گا اس کو مساوات 4 کے ساتھ ملا کر رقبہ کا عملی کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

سطحی رقبہ کا کلیہ بند اور محدود مستوی میں خطہ R پر سطح $f(x, y, z) = c$ کا رقبہ

$$Surfacearea = \iint_R \frac{|neblaf|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|} \, \mathrm{d}A \tag{۱۵.۳۶}$$

ہو گا۔ جہاں $\boldsymbol{p}$ خطہ R کا اکائی عمودی سمتیہ ہے اور $\nabla f \cdot \boldsymbol{p} \neq 0$ ہے۔ یوں ∇f کے قدر تقسیم R کو ∇f کا غیر سمتی عمودی جزو کا R پر دوہرا تکمل رقبہ ہو گا۔ ہم نے ∇f کو استمراری تصور کرتے ہوئے اور پورے R پر $0 \neq \nabla f \cdot$

تصور کرتے ہوئے مساوات 5 حاصل کی اور جب بھی یہ تکبر موجود ہو اس کی قیمت کو سطح $f(x,y,z) = c$ کہ اس حصے کے رقبہ کی تعریف لی جاتی ہے جو R کے اوپر پایا جاتا ہو۔

مثال ۱۵.۱۷: قطع مکافی مجسم $x^2 + y^2 - z = 0$ کے نچلے حصے کو مستوی $z = 4$ ایک سطح کاٹتا ہے۔ اس کا رقبہ تلاش کریں۔ حل ہم مشتری xy میں سطح S اور اس کے نیچے خطہ R کا خاکہ بناتے ہیں۔ شکل 14.42 سطح S سطح $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$ کا حصہ ہے اور R مستوی xy میں قرص $x^2 + y^2 \leq 4$ ہے۔ مستوی R کا اکائی عمودی سمتیا $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$ ہے۔ سطح پر کسی نقطہ x, y, z پر

(۱۵.۳۷)
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z\nabla f = 2xi + 2yj - k|\nabla f| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}$$

ہوگا۔ خطہ R میں $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہوگا۔ لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$Surfacearea = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \tag{۱۵.۳۸}$$

$$= \iint_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{۱۵.۳۹}$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{۱۵.۴۰}$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12}(4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 \mathrm{d}\theta \tag{۱۵.۴۱}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}(17^{\frac{3}{2}} - 1)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1) \tag{۱۵.۴۲}$$

□

مثال ۱۵.۱۸: نصف کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 0$ سے بیلن $x^2 + y^2 = 1$ ایک ٹوپی کاٹتا ہے۔ اس ٹوپی کا رقبہ تلاش کریں۔ شکل 14.43

حل

ٹوپی S ہم سطح $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 2$ کا ایک حصہ ہے۔ یہ ایک ایک مطابقت کے ساتھ مستوی xy میں قرص $R: x^2 + y^2 \leq 1$ پر تظلیل کرتا ہے۔ سمتیا $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$ R کے مستوی کو عمودی ہے۔ سطح میں کسی بھی نقطے پر

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 \tag{۱۵.۴۳}$$

$$\nabla f = 2xi + 2yj + 2zk \tag{۱۵.۴۴}$$

$$|\nabla f| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{2} \tag{۱۵.۴۵}$$

$$|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}| = |\nabla f \cdot k| = |2z| = 2z \tag{۱۵.۴۶}$$

ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A = \iint_R \frac{2\sqrt{2}}{2z}\,\mathrm{d}A = \sqrt{2}\iint_R \frac{\mathrm{d}A}{z} \tag{۱۵.۴۷}$$

یہاں z کا کیا کرنا ہو گا چونکہ کرہ میں کسی بھی نقطے پر z محدد کو z ظاہر کرتا ہے لہٰذا اسے ہم x اور y کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \tag{۱۵.۴۸}$$

6 میں اسے پر کرتے ہیں۔

(۱۵.۴۹)

$$Surface area = \sqrt{2}\iint_R \frac{\mathrm{d}A}{z} = \sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{\mathrm{d}A}{\sqrt{2-x^2-y^2}}$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2-r^2}} \tag{۱۵.۵۰}$$

$$\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\Big[-(2-r^2)^{\frac{1}{2}}\Big]_{r=0}^{r=1}\mathrm{d}\theta \tag{۱۵.۵۱}$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\sqrt{2}-1)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi(2-\sqrt{2} \tag{۱۵.۵۲}$$

□

جوابات