احصاء اور تحلیلی علم الہندسہ

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۱۶ر جنوری ۲۰۲۴

عنوان

سوالات

مسئلہ گرین کی تصدیق

سوال ۱۵.۱۲۷ تا سوال ۱۵.۱۳۰ میں میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کے لیے مساوات 11 اور مساوات 12 کی دونوں اطراف کی قیمتیں تلاش کر کے مسئلہ گرین کی تصدیق کریں۔ دونوں صورتوں میں تکمل کا دائرہ کار قرص $R: x^2 + y^2 \le a^2$ اور محدود کار دائرہ $C: r = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}, 0 \le t \le 2\pi$ لیں۔

سوال ۱۵.۱۲۷: $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۱۲۸: $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i}$

سوال ۱۵.۱۲۹: $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۱۳۰: $\boldsymbol{F} = -x^2y\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j}$

خلاف گھڑی دائری بہاو اور باہر رخ بہاو

سوال ۱۵.۱۳۱ تا ۱۵.۱۳۶ میں میدان $\boldsymbol{F}$ اور منحنی C کے لیے مسئلہ گرین استعمال کر کے خلاف گھڑی دائری بہاو اور باہر رخ بہاو تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۳۱: $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + (y-x)\boldsymbol{j}$ اور C کو چوکور $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۲: $\boldsymbol{F} = (x^2+4y)\boldsymbol{i} + (x+y^2)\boldsymbol{j}$ اور C کو چوکور $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۳: $\boldsymbol{F} = (y^2-x^2)\boldsymbol{i} + (x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ اور C کو مثلث $y = 0$ ، $x = 3$ ، $y = x$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۴: $\boldsymbol{F} = (x+y)\boldsymbol{i} - (x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ اور C کو مثلث $y = 0$ ، $x = 1$ ، $y = x$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۵: $\boldsymbol{F} = (x+e^x\sin y)\boldsymbol{i} + (x+e^x\cos y)\boldsymbol{j}$ اور C دوچشمہ $r^2 = \cos 2\theta$ کا دایاں ہاتھ گھیرے۔

سوال ۱۵.۱۳۶: $\boldsymbol{F} = \left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)\boldsymbol{i} + \ln(x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ اور C اس خطے کی سرحد ہے جس کو قطبی محدد عدم مساوات $1 \le r \le 2$ ، $0 \le \theta \le \pi$ تعین کرتی ہیں۔

۱۵.۵ سطحی رقبہ اور سطحی تکملات

ہم مستوی مـیں خطـہ پر تفـاعـل کا تکمل لینا جـانتے ہیں لیـکن ایسی صورت مـیں کیـا ہو گا جب تفـاعـل ایک قوسی سطح پر پایا جـاتا ہو؟ ایسی صورت مـیں تکمل کیسے حـاصـل ہو گا؟ ایسا تکمل، جو **سطحی تکمل**[۱۵] کہلاتا ہے، کی قیمت تلاش کرنے کی خـاطـر اس کو، سطح کے نیچے محدد دی مستوی پر، دہرا تکمل کے روپ مـیں لکھـا جـاتا ہے (شکل 14.39)۔ حصہ 14.7 اور حصہ 14.8 مـیں ہم دیکھیں گے کہ سطحی تکملات کی مدد سے مسئلہ گرین کو تین ابعاد مـیں عمومیت دی جـا سکتی ہے۔

۱۵.۵.۱ سطحی رقبہ کی تعریف

شکل 14.40 مـیں سطح S اور نیچے مستوی مـیں اس کا "سـایہ" خطہ R دکھـایا گیـا ہے۔ سطح کی تعریفی مساوات $f(x,y,c) = c$ دیتی ہے۔ اگر سطح **ہموار**[۱۶] ہو (∇f استمراری ہے اور S پر کہیں بھی صفر نہیں ہے)، ہم اس کے رقبہ کی تعریف اور قیمت R پر دہرا تکمل کی صورت مـیں کر سکتے ہیں۔

ہم خطہ R کی خـانہ بندی چھوٹے چھوٹے مستطیلوں ΔA_k مـیں ہم یوں کرتے ہیں جیسے R پر تکمل کی تعریف پیش کرنا چاہتے ہوں۔ یہ S کے رقبہ کی تعریف پیش کرنے کا کا پہلا قدم ہے۔ ہر ایک ΔA کے بالکل اوپر کچھ بلندی پر سطح $\Delta\sigma_k$ پایا جـاتا ہے، جس کو ہم مماسی سطح کے چھوٹے حصہ ΔP_k سے تخمین دے سکتے ہیں۔ اس کی وضاحت کرتے ہیں۔ رقبہ ΔA_k کے پچھلے کونے C_k کے بالکل اوپر نقطہ $T_k(x_k,y_k,z_k)$ پر سطح کے مماس کا ΔP_k ایک ٹکڑا ہے۔ اگر مماسی سطح R کا متوازی ہو، تب ΔP_k رقبہ ΔA_k کا موافق ہو گا۔ بصورت دیگر، یہ ایک مستطیل ہو گا جس کا رقبہ ΔA_k کے رقبہ سے کچھ زیادہ ہو گا۔

شکل 14.41 مـیں $\Delta\sigma_k$ اور ΔP_k بڑھا چڑھا کر پیش کیے گئے ہیں، جہاں T_k پر ڈھلوان سمتیہ $\nabla f(x_k,y_k,z_k)$ اور R کا عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{p}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔ اس شکل مـیں ∇f اور $\boldsymbol{p}$ کے بیچ زاویہ γ_k بھی دکھایا گیا ہے۔ اس شکل مـیں دیگر سمتیہت $\boldsymbol{u}_k$ اور $\boldsymbol{v}_k$ مماسی مستوی مـیں ΔP_k کے کناروں پر پائے جـاتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k$ اور ∇f دونوں مماسی مستوی کو عمودی ہیں۔

اعلیٰ سمتی ہندسہ سے ہم جـانتے ہیں کہ کسی بھی مستوی پر، جس کا عمود $\boldsymbol{p}$ ہو، ایسے مستطیل کی تظلیل کا رقبہ $|(\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k)\cdot\boldsymbol{p}|$ ہو گا جس کو $\boldsymbol{u}_k$ اور $\boldsymbol{v}_k$ تعین کرتے ہوں۔ یوں درج ذیل لکھـا جـا سکتا ہے۔

$$|(\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k)\cdot\boldsymbol{p}| = \Delta A_k \tag{۱۵.۳۲}$$

اب سمتی ضرب کی ایک خـاصیت (جو صلیبی ضرب کی ایک حقیقت ہے) یہ ہے کہ $|\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k|$

[۱۵] surfaceintegral
[۱۶] smooth

رقبہ ΔP_k ہو گا، لہٰذا مساوات ۱۵.۳۲ ذیل روپ

$$\underbrace{|\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k|}_{\Delta P_k}\,\underbrace{|\boldsymbol{p}|}_{1}\,\underbrace{|\cos(\text{اور } \boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k \text{ اور } \boldsymbol{p} \text{ کے بیچ زاویہ})|}_{\text{چونکہ } \nabla f \text{ اور } \boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k \text{ دونوں مماسی مستوی کو عمودی ہیں لہٰذا یہ } |\cos\gamma_k| \text{ کے برابر ہو گا}} = \Delta A_k \tag{۱۵.۳۳}$$

یا

$$\Delta P_k |\cos\gamma_k| = \Delta A_k$$

اختیار کرتی ہے جو $\cos\gamma_k \neq 0$ کی صورت میں ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\Delta P_k = \frac{\Delta A_k}{|\cos\gamma_k|}$$

جب تک ∇f زمینی مستوی کو متوازی نہ ہو اور $\nabla f \cdot \boldsymbol{p} \neq 0$ ہو $\cos\gamma_k \neq 0$ ہو گا۔

چونکہ، سطحی ٹکڑے $\Delta\sigma_k$ جو مل کر رقبہ S دیتے ہیں، کو ΔP_k تخمیناً ظاہر کرتے ہیں، لہٰذا مجموعہ

$$\sum \Delta P_k = \sum \frac{\Delta A_k}{|\cos\gamma_k|} \tag{۱۵.۳۴}$$

سطحی رقبے S کا تخمین نظر آتا ہے۔ ہم یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ خطہ R کو مزید چھوٹے خانوں میں تقسیم کرنے سے یہ تخمین بہتر ہو گی۔ در حقیقت، مساوات ۱۵.۳۴ کے دائیں ہاتھ مجموعہ دوہرا تکمل

$$\iint_R \frac{1}{|\cos\gamma|}\,\mathrm{d}A \tag{۱۵.۳۵}$$

کے تخمینی مجموعے ہیں۔ اسی بنا پر جب بھی یہ تکمل موجود ہو ہم اسے S کے **رقبہ**[۱۷] کی تعریف لیتے ہیں۔

عملی کلیہ

کسی بھی سطح $f(x, y, z) = c$ کے لیے $|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}| = |\nabla f||\boldsymbol{p}||\cos\gamma|$ ہو گا، لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے، جہاں اکائی سمتیہ کی مطلق قیمت 1 ہے ($|\boldsymbol{p}| = 1$)۔

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|}$$

اس کو مساوات ۱۵.۳۵ کے ساتھ ملا کر رقبے کا عملی کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

سطحی رقبے کا کلیہ

---

[۱۷] area

بند اور محدود مستوی میں خطہ R پر سطح $f(x,y,z)=c$ کا رقبہ ذیل ہو گا

$$\text{سطحی رقبہ} = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \tag{۱۵.۳۶}$$

جہاں $\boldsymbol{p}$ خطہ R کا اکائی عمودی سمتیہ ہے اور $\nabla f\cdot \boldsymbol{p}\neq 0$ ہے۔

یوں ∇f کی قدر کو ∇f کے اس غیر سمتی عمودی جزو کی قدر سے تقسیم کر کے جو R کو عمودی ہو، خطہ R پر دوہرا تکمل لینے سے رقبہ حاصل ہو گا۔

ہم نے ∇f کو استمراری تصور کر کے اور پورے R پر $\nabla f\cdot \neq 0$ تصور کر کے مساوات ۱۵.۳۶ حاصل کی۔ جب بھی یہ تکمل موجود ہو، اس کی قیمت کو سطح $f(x,y,z)=c$ کے اس حصے کے رقبے کی تعریف لی جاتی ہے جو R کے اوپر (بلندی پر) پایا جاتا ہو۔

مثال ۱۵.۱۷: قطع مکافی مجسم $x^2+y^2-z=0$ کے نچلے حصے سے مستوی $z=4$ ایک سطح کاٹتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم مستوی xy میں سطح S اور اس کے نیچے خطہ R کا خاکہ بناتے ہیں (شکل 14.42)۔ سطح S، ہموار سطح $f(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$ کا حصہ ہے اور R، مستوی xy میں قرص $x^2+y^2\leq 4$ ہے۔ مستوی R کا اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{k}$ ہے۔

سطح پر کسی بھی نقطہ x,y,z پر ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
f(x,y,z)&=x^2+y^2-z\\
\nabla f&=2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}\\
|\nabla f|&=\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(-1)^2}\\
&=\sqrt{4x^2+4y^2+1}\\
|\nabla f\cdot\boldsymbol{p}|&=|\nabla f\cdot\boldsymbol{k}|=|-1|=1
\end{aligned}$$

خطہ R میں $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہوگا، لہٰذا ذیل ہوگا۔

$$
\begin{aligned}
\text{سطحی رقبہ} &= \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A && (\text{مساوات ۱۵.۳۶})\\
&= \iint_{x^2+y^2\le 4} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4r^2+1}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta && (\text{قطبی محدد})\\
&= \int_0^{2\pi}\Big[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^2\,\mathrm{d}\theta\\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1}{12}(17^{\frac{3}{2}}-1)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)
\end{aligned}
$$

□

مثال ۱۵.۱۸: نصف کرہ $x^2+y^2+z^2=2, z\ge 0$ سے بیلن $x^2+y^2=1$ ایک ٹوپی کاٹتا ہے۔ اس ٹوپی کا رقبہ تلاش کریں (شکل 14.43)۔

حل: ٹوپی S، ہم قدر سطح $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 2$ کا حصہ ہے۔ یہ ایک ایک مطابقت کے ساتھ مستوی xy میں قرص $R: x^2+y^2\le 1$ پر تظلیل کرتا ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{k}$ مستوی R کو عمودی ہے۔

سطح میں کسی بھی نقطے پر ذیل ہوگا۔

$$
\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2\\
\nabla f &= 2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}\\
|\nabla f| &= 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2\sqrt{2} \qquad (\text{چونکہ ٹوپی پر ہمیشہ } x^2+y^2+z^2=2 \text{ ہوگا})\\
|\nabla f\cdot\boldsymbol{p}| &= |\nabla f\cdot\boldsymbol{k}| = |2z| = 2z
\end{aligned}
$$

یوں درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$
\text{سطحی رقبہ} = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot\boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A = \iint_R \frac{2\sqrt{2}}{2z}\,\mathrm{d}A = \sqrt{2}\iint_R \frac{\mathrm{d}A}{z} \tag{۱۵.۳۷}
$$

یہاں z کا کیا کیا جائے؟

چونکہ z کرہ کی سطح پر ایک نقطے کا z محدد ہے، لہٰذا اس کو ہم x اور y کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$
z = \sqrt{2-x^2-y^2}
$$

اس کو مساوات ۱۵.۳۷ میں ڈالتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\text{سطحی رقبہ} &= \sqrt{2}\iint_R \frac{\mathrm{d}A}{z} = \sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\leq 1}\frac{\mathrm{d}A}{\sqrt{2-x^2-y^2}} \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2-r^2}} && \text{(قطبی محدد)} \\
&\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\Big[-(2-r^2)^{\frac{1}{2}}\Big]_{r=0}^{r=1}\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\sqrt{2}-1)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi(2-\sqrt{2})
\end{aligned}
$$

□

جوابات