احصاء اور تحلیلی ہندسہ

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۲۲ / مارچ ۲۰۲۴

عنوان

سطحی تکملات

سطحی رقبے کے حساب میں جو تصورات استعمال کیے گئے انہیں بروئے کار لاتے ہوئے سطح پر تفاعل کے تکمل کا حصول سکتے ہیں۔

فرض کریں، سطح $f(x,y,z) = c$ پر برقی بار تقسیم کیا گیا ہے (شکل 14.44) اور S کے ہر نقطہ پر تفاعل $g(x,y,z)$ فی اکائی رقبہ بار (کثافت بار) دیتا ہے۔ ایسی صورت میں S پر کل بار کا حساب تکمل کی صورت میں درج ذیل طریقے سے لکھا جا سکتا ہے۔

ہم S کے نیچے، زمینی مستوی پر سایہ دار خطہ R کو چھوٹے چھوٹے مستطیلوں میں بالکل اسی طرح تقسیم کرتے ہیں جیسے S کا سطحی رقبہ تلاش کرنے کے لیے کیا جاتا ہے۔ ہر ایک ΔA_k کے بالکل اوپر کچھ بلندی پر سطح $\Delta\sigma_k$ پایا جاتا ہے، جس کو ہم مماسی مستوی پر مستطیلی حصہ ΔP_k سے تخمین کرتے ہیں۔

ہم سطحی رقبے کی تعریف کی طرز پر چل رہے ہیں، تاہم یہاں ایک اضافی قدم لیتے ہیں: ہم (x_k, y_k, z_k) پر g کی قیمت معلوم کر کے رقبہ $\Delta\sigma_k$ پر کل بار کو تخمیناً حاصل ضرب $g(x_k, y_k, z_k)\Delta P_k$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس کی وجہ درج ذیل ہے: خطہ R کو کافی چھوٹے چھوٹے مستطیلوں میں تقسیم کرنے کی صورت میں پورے $\Delta\sigma_k$ میں g کی قیمت تقریباً مستقل ہو گی، اور ΔP_k تقریباً $\Delta\sigma_k$ کے کے برابر ہو گا۔ یوں S پر کل بار تخمیناً درج ذیل مجموعہ کے برابر ہو گا۔

$$\text{کل بار} = \approx \sum g(x_k, y_k, z_k)\Delta P_k = \sum g(x_k, y_k, z_k)\frac{\Delta A_k}{|\cos\gamma_k|} \tag{۱۵.۴۳}$$

اگر سطح S کو ظاہر کرنے والا تفاعل $\boldsymbol{F}$ اور اس کے یک رتبی جزوی تفرقات استمراری ہوں، اور S پر g استمراری ہو، تب R کی خانہ بندی ہمیشہ کی طرح نفیس بنانے سے مساوات ۱۵.۴۳ کے دائیں ہاتھ میں پیش مجموعے درج ذیل حد تک پہنچتے ہیں۔

$$\iint_R g(x,y,z)\frac{\mathrm{d}A}{|\cos\gamma|} = \iint g(x,y,z)\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \tag{۱۵.۴۴}$$

یہ حد سطح S پر g کا تکمل کہلاتا ہے، جس کو R پر دہرا تکمل لکھا اور حاصل کیا جاتا ہے۔ اس تکمل کی قیمت سطح S پر کل بار دے گی۔

اگر مساوات ۱۵.۴۴ کا تکمل موجود ہو، تب آپ توقع کر سکتے ہیں کہ مساوات ۱۵.۴۴ کا کلیہ سطح S پر کسی بھی تفاعل g کے تکمل کی تعریف ہے۔

تعریفات

اگر سطح S، جس کی تعریف مساوات $f(x, y, z) = c$ دیتی ہے، کا سایہ R ہو اور S کے تمام نقطوں پر g استمراری تفاعل ہو، S پر g **کا تکمل** درج ذیل ہو گا:

$$\iint g(x, y, z) \frac{\left|\nabla f\right|}{\left|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}\right|} \, \mathrm{d}A \tag{۱۵.۴۵}$$

جہاں $\boldsymbol{p}$ سایہ دار خطہ R کا اکائی عمودی سمتیہ ہے اور $\nabla f \cdot \boldsymbol{p} \neq 0$ ہے۔ اس تکمل کو **سطحی تکمل**[۱۶] کہتے ہیں۔

مختلف عملی استعمال میں مساوات ۱۵.۴۵ کا تکمل مختلف معنی رکھتا ہے۔ اگر g کی قیمت مستقل طور پر 1 ہو، تکمل S کا رقبہ دے گا۔ اگر g ایک باریک خول، جس کی شکل کا نمونہ S ہو، کی کمیتی کثافت ہو تب تکمل خول کی کمیت دے گا۔

الجبرائی خواص: سطحی رقبہ کی تفریق

ہم $\mathrm{d}A \left(\left|\nabla f\right| / \left|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}\right|\right)$ کو $\mathrm{d}\sigma$ لکھ کر مساوات ۱۵.۴۵ کا تکمل مختصراً (درج ذیل) لکھ سکتے ہیں۔

سطحی رقبہ کی تفریق اور سطحی تکملات کا تفریقی روپ

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\left|\nabla f\right|}{\left|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}\right|} \, \mathrm{d}A \qquad \qquad \iint_S g \, \mathrm{d}\sigma \tag{۱۵.۴۶}$$

سطحی رقبے کی تفریق — سطحی تکملات کا تفریقی کلیہ

سطحی تکملات دیگر دہرا تکملات کی طرح رویہ رکھتے ہیں: دو تفاعلات کا تکمل ان تفاعلات کے انفرادی تکملات کا مجموعہ ہو گا وغیرہ وغیرہ۔ دائرہ کار کی جمع پذیری خاصیت درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\iint_S g \, \mathrm{d}\sigma = \iint_{S_1} g \, \mathrm{d}\sigma + \iint_{S_2} g \, \mathrm{d}\sigma + \cdots + \iint_{S_n} g \, \mathrm{d}\sigma$$

کلیدی تصور یہ ہے کہ اگر S کو ہموار منحنیات، متناہی تعداد کی غیر منطبق، ہموار قطعات میں خانہ بند کرتی ہوں (یعنی اگر S **ٹکڑوں میں ہموار**[۱۷] ہو) تب قطعات پر تکملات کا مجموعہ S پر تکمل کے برابر ہو گا۔ یوں، مکعب کی سطح پر تفاعل کا تکمل، مکعب کی چھ سطحوں پر تکملات کا مجموعہ ہو گا۔

مثال ۱۵.۲۰: ربع اول سے مستویات $x = 1$، $y = 1$، اور $z = 1$ ایک مکعب کاٹتی ہیں (شکل 14.45)۔ اس مکعب کی سطح پر $g(x, y, z) = xyz$ کا تکمل لیں۔

---

[۱۶] surfaceintegral

[۱۷] piecewisesmooth

حل: ہم باری باری مکعب کی چھ سطحوں پر xyz کا تکمل لے کر تمام نتائج کا مجموعہ لیتے ہیں۔ محددی مستویات میں پائے جانے والے اطراف میں $xyz = 0$ ہوگا، لہٰذا مکعب کی سطح پر تکمل گھٹ کر درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے۔

$$\iint_{\text{کعبی سطح}} xyz \ \mathrm{d}\sigma = \iint_{\text{سطح الف}} xyz \ \mathrm{d}\sigma + \iint_{\text{سطح ب}} xyz \ \mathrm{d}\sigma + \iint_{\text{سطح ج}} xyz \ \mathrm{d}\sigma$$

مستوی xy میں چوکور خطہ $R_{xy} : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ پر سطح الف کی مساوات $f(x,y,z) = z = 1$ ہے۔ اس سطح اور خطہ کے لیے ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}, \quad \nabla f = \boldsymbol{k}, \quad \left|\nabla f\right| = 1, \quad \left|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}\right| = \left|\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}\right| = 1,\\
&\mathrm{d}\sigma = \frac{\left|\nabla f\right|}{\left|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}\right|}\,\mathrm{d}A = \frac{1}{1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\\
&xyz = xy(1) = xy
\end{aligned}$$

یوں ذیل ہوگا۔

$$\iint_{\text{سطح الف}} xyz \ \mathrm{d}\sigma = \iint_{R_{xy}} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}$$

تشاکلیت کی بنا پر سطح ب اور ج پر xyz کے تکمل بھی $\frac{1}{4}$ دیں گے۔ یوں ذیل ہوگا۔

$$\iint_{\text{کعبی سطح}} xyz\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

□

سمت بندی

وہ ہموار سطح S، جس پر عمودی اکائی سمتیات کا ایسا میدان $\boldsymbol{n}$ متعارف کیا جا سکتا ہو جو مقام کے ساتھ استمراری تبدیل ہو، **قابل سمت بند**[۱۸] یا **دو طرفہ**[۱۹] کہلاتی ہے۔ قابل سمت بند سطح کا ہر ذیلی ٹکڑا قابل سمت بند ہوگا۔ کرہ اور فضا میں دیگر بند سطحیں (ایسی ہموار سطحیں جو ٹھوس اجسام کو احاطہ کرتی ہوں) قابل سمت بند ہوں گی۔ روایتاً $\boldsymbol{n}$ کا رخ بند سطح سے باہر کی طرف رکھا جاتا ہے۔

میدان $\boldsymbol{n}$ منتخب کرنے کے بعد ہم کہتے ہیں سطح **سمت بند**[۲۰] بنائی گئی ہے اور سطح بشمول عمودی میدان **سمت بند سطح**[۲۱] کہلاتی ہے۔ کسی بھی نقطے پر سمتیہ $\boldsymbol{n}$، اس نقطے پر مثبت رخ کہلاتا ہے (شکل 14.46)۔

[۱۸] orientable
[۱۹] two-sided
[۲۰] oriented
[۲۱] orientedsurface

شکل 14.47 میں **موبیوس پٹی** [۲۲] دکھائی گئی ہے جو ناقابل سمت بند ہے۔ آپ کسی بھی نقطہ سے آغاز کر کے استمراری اکائی عمودی میدان بنانا شروع کریں۔ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کو سطح پر استمراری حرکت دینے سے آپ ابتدائی نقطے تک یوں پہنچ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{n}$ کا رخ ابتدائی رخ کا مخولف ہو۔ اس نقطے پر سمتیہ بیک وقت دو مخولف رخ نہیں ہو سکتا، اگرچہ استمراری میدان کی صورت میں ایسا ہی ہونا چاہیے۔ یوں ہم اخذ کرتے ہیں کہ ایسا میدان موجود نہیں ہو گا۔

بہاو کا سطحی تکمل

فرض کریں قابل سمت بند سطح S پر استمراری سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ ہے، اور سطح پر منتخب اکائی عمودی میدان $\boldsymbol{n}$ ہے۔ ہم S پر $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ کے تکمل کو S پر مثبت رخ کا بہاو کہتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{n}$ کے رخ $\boldsymbol{F}$ کے غیر سمتی جزو کا S پر تکمل، سطح سے گزرتا بہاو دے گا۔

تعریف

قابل سمت بند سطح S کو پار کرتا، $\boldsymbol{n}$ کے رخ، تین ابعادی سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کا بہاو درج ذیل کلیہ دے گا۔

$$\text{بہاو} = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \tag{۱۵.۴۷}$$

یہ تعریف مسطح منحنی C کو پار کرتے، دو ابعادی میدان $\boldsymbol{F}$ کے بہاو کی تعریف کے عین مطابق ہے۔ مستوی میں بہاو کو، منحنی C کو $\boldsymbol{F}$ کے عمودی غیر سمتی جزو کا تکمل:

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$$

ظاہر کرتا ہے۔

گر $\boldsymbol{F}$ تین ابعادی سیالی بہاو کا سمتی رفتار میدان ہو، تب S سے (گزرتا) $\boldsymbol{F}$ کا بہاو، منتخب مثبت رخ میں S سے گزرتے سیال کی خولص شرح دے گا۔ ایسے بہاو پر تفصیلاً تبصرہ حصہ 14.7 میں کیا جائے گا۔

اگر $\boldsymbol{S}$ ہموار سطح $g(x,y,z)=c$ کا حصہ ہو، تب $\boldsymbol{n}$ درج ذیل میں سے، جو پسند کا رخ دیتا ہو، ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = \pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|} \tag{۱۵.۴۸}$$

---

[۲۲] Mobiusband

مطابقتی بہاو ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \text{بہاو} &= \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \qquad (\text{مساوات ۱۵.۴۷}) \\ &= \iint_R \Big(\boldsymbol{F}\cdot\frac{\pm\nabla g}{\lvert\nabla g\rvert}\Big)\frac{\lvert\nabla g\rvert}{\lvert\nabla g\cdot\boldsymbol{p}\rvert}\,\mathrm{d}A \\ &= \iint_R \boldsymbol{F}\cdot\frac{\pm\nabla g}{\lvert\nabla g\cdot\boldsymbol{p}\rvert}\,\mathrm{d}A \qquad (۱۵.۴۹) \end{aligned}$$

مثال ۱۵.۲۱: بیلن $y^2+z^2=1, z\geq 0$ سے مستویات $x=0$ اور $x=1$ سطح S کاٹتی ہیں۔ سطح S سے باہر رخ $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ کا بہاو تلاش کریں۔

حل: سطح S پر باہر روح عمودی میدان $\boldsymbol{n}$ کو $g(x,y,z)=y^2+z^2$ کی ڈھلوان (ذیل دیکھیں) سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{n}=+\frac{\nabla g}{\lvert\nabla g\rvert}=\frac{2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}}{\sqrt{4y^2+4z^2}}=\frac{2yaj+2z\boldsymbol{k}}{2\sqrt{1}}=y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

چونکہ $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{k}$ ہے لہٰذا درج ذیل بھی ہوگا۔

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{\lvert\nabla g\rvert}{\lvert\nabla g\cdot\boldsymbol{k}\rvert}\,\mathrm{d}A=\frac{2}{\lvert 2z\rvert}\,\mathrm{d}A=\frac{1}{z}\,\mathrm{d}A$$

ہم $z\geq 0$ کے بنا مطلق قیمت کی علامت ہٹا سکتے ہیں۔

سطح پر $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ کی قیمت ذیل کلیہ دیگا، جہاں آخری قدم میں S پر $y^2+z^2=1$ ہوگا۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} &= (yz\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k})\cdot(y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) \\ &= y^2z+z^3=z(y^2+z^2) \\ &= z \end{aligned}$$

یوں S سے $\boldsymbol{F}$ کا اخراجی بہاو ذیل ہوگا۔

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma=\iint_S (z)\Big(\frac{1}{z}\,\mathrm{d}A\Big)=\iint_{R_{xy}}\mathrm{d}A=\text{رقبہ کا } R_{xy}=2$$

□

جدول ۱۵.۱: نہایت باریک خول کی کمیت اور معیار اثر

کمیت	$M = \iint_S \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$ (نقطہ (x,y,z) پر $\delta(x,y,z)$ کثافت (کمیت فی اکائی رقبہ) ہے
محددی مستویات کے لحاظ سے اول معیار اثر	$M_{yz} = \iint_S x\delta\,\mathrm{d}\sigma, \qquad M_{xz} = \iint_S y\delta\,\mathrm{d}\sigma, \qquad M_{xy} = \iint_S z\delta\,\mathrm{d}\sigma$
مرکز کمیت کے محدد	$\bar{x} = M_{yz}/M, \qquad \bar{y} = M_{xz}/M, \qquad \bar{z} = M_{xy}/M$
جمودی معیار اثر	$I_x = \iint_S (y^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}\sigma, \qquad I_y = \iint_S (x^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}\sigma$ $I_z = \iint_S (x^2+y^2)\delta\,\mathrm{d}\sigma, \qquad I_L = \iint_S r^2\delta\,\mathrm{d}\sigma$ نقطہ (x,y,z) سے لکیر L کا فاصلہ $r(x,y,z)$ ہے
لکیر L کے لحاظ سے رداس دوار	$R_L = \sqrt{I_L/M}$

باریک خول کی کمیت اور معیار اثر

گھریلو برتن، ڈھول، اور دیگر باریک خول کو سطحوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ان کی کمیت اور معیار اثر جدول ۱۵.۱ میں پیش کلیات سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔

مثال ۱۵.۲۲: رداس a اور مستقل کثافت δ کے باریک نصف کروی خول کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

حل: ہم خول کو نصف کرہ:

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = a^2, \quad z \geq 0$$

سے ظاہر کرتے ہیں (شکل 14.49)۔ محور z کے لحاظ سے سطح کی تشاکلی کی بنا پر $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ہو گا۔ کلیہ $\bar{z} = M_{xy}/M$ سے $\bar{z}$ تلاش کرنا باقی ہے۔

خول کی کمیت درج ذیل ہے۔

$$M = \iint_S \delta\,\mathrm{d}\sigma = \delta \iint_S \mathrm{d}\sigma = (\delta)(S\text{کا رقبہ}) = 2\pi a^2\delta$$

M_{xy} کا تکمل تلاش کرنے کی خاطر $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$ لیتے ہیں۔یوں،

$$M_{xy} = \iint_S z\delta\,\mathrm{d}\sigma = \delta \iint_R z\frac{a}{z}\,\mathrm{d}\sigma = \delta a \iint_R \mathrm{d}A = \delta a(\pi a^2) = \delta\pi a^3$$

لہٰذا ذیل ہو گا۔

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi a^3 \delta}{2\pi a^2 \delta} = \frac{a}{2}$$

خول کا مرکز کمیت نقطہ $(0, 0, a/2)$ پر ہو گا۔ $\square$

جوابات