

# احصاء اور تحلیلی ہندسہ

خالد حنان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۲۲ مارچ ۲۰۲۳



# عنوان

ix

دیباچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

۱	۱	ابتدائی معلومات
۱	۱.۱	حقیقی اعداد اور حقیقی خط
۱۳	۱.۲	محدود، خطوط اور بڑھوتری
۲۸	۱.۳	تفاضل
۴۹	۱.۴	ترسیم کی منتقلی
۶۷	۱.۵	تکونیتی تفاضل
۸۹	۲	حدود اور استمرار
۸۹	۲.۱	تبدیلی کی شرح اور حد
۱۰۵	۲.۲	حد تلاش کرنے کے قواعد
۱۱۷	۲.۳	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
۱۳۶	۲.۴	تصور حد کی توسیع
۱۵۴	۲.۵	استمرار
۱۷۲	۲.۶	مماسی خط
۱۸۷	۳	تفرق
۱۸۷	۳.۱	تفاضل کا تفرق
۲۰۷	۳.۲	قواعد تفرق
۲۲۵	۳.۳	تبدیلی کی شرح
۲۴۲	۳.۴	تکونیتی تفاضل کا تفرق
۲۶۱	۳.۵	زنجیری متاعده
۲۷۱	۳.۶	خفی تفرق اور ناظق قوت
۲۹۱	۳.۷	دیگر شرح تبدیلی

۳۰۵	تفریق کا استعمال	۴
۳۰۵	تفاضل کی انتہائی قیمتیں	۴.۱
۳۱۸	مسئلہ اوسط قیمت	۴.۲
۳۳۳	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفریق پرکھ	۴.۳
۳۳۳	۴.۳.۱ پرکھ	
۳۴۳	'۱/۲ اور '۱/۲ کے ساتھ ترسیم	۴.۴
۳۶۶	$\infty \rightarrow x$ پر حد، مقتارب اور غالب اجزاء	۴.۵
۳۹۱	بہترین بنانا	۴.۶
۴۱۴	خط بندی اور تصرفات	۴.۷
۴۳۵	ترکیب نیوٹن	۴.۸
۴۴۷	تکمل	۵
۴۴۷	غیر قطعی کمالات	۵.۱
۴۵۸	تفریق مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی	۵.۲
۴۷۳	تکمل بذریعہ ترکیب بدل رزنجیری متاعدہ کالٹ اطلاق	۵.۳
۴۸۴	اندازہ بذریعہ مستثنائی مجموعہ	۵.۴
۵۰۱	ریبان مجموعہ اور قطعی کمالات	۵.۵
۵۲۷	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ	۵.۶
۵۴۳	بنیادی مسئلہ	۵.۷
۵۶۱	قطعی عمل میں بدل	۵.۸
۵۶۷	اعدادی تکمل	۵.۹
۵۶۷	متاعدہ ڈوز نقص	۵.۱۰
۵۸۵	تکمل کا استعمال	۶
۵۸۵	مخنیات کے بیچ رقبہ	۶.۱
۵۹۰	۶.۱.۱ تبدیل ہونے والی کلمات والا سرحد	
۵۹۹	تکلیاں کاٹ کر حجم کی تلاش	۶.۲
۶۰۶	اجسام طوائف کے حجم - قعرص اور چھلا	۶.۳
۶۲۱	تکلی چھلے	۶.۴
۶۳۳	مستوی مخنیات کی لمبائیاں	۶.۵
۶۴۳	سطح طوائف کا رقبہ	۶.۶
۶۵۴	معیار اثر اور مرکز کمیت	۶.۷
۶۶۶	۶.۷.۱ وسطانی مرکز	
۶۷۲	کام	۶.۸
۶۸۵	فشار سیال اور قوت سیال	۶.۹
۶۹۵	بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال	۶.۱۰
۷۰۹	ماورائی تفاضل	۷
۷۱۰	الٹ تفاضل اور ان کے تصرفات	۷.۱
۷۲۸	تدریجی لوگار تھم	۷.۲

۷۳۴	قوت نمائی تفاعل	۷.۳
۷۵۷	$\log_a x$ اور $a^x$	۷.۴
۷۶۷	افترانش اور تنزل	۷.۵
۷۸۱	فواعدہ لھوپیشال	۷.۶
۷۹۶	اضافی شرح نمو	۷.۷
۸۰۱	۷.۷.۱ ترتیبی اور شنائی تلاش	۷.۷.۱
۸۰۶	الٹ ٹکونیاتی تفاعل	۷.۸
۸۲۱	الٹ ٹکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ مکمل	۷.۹
۸۳۷	ہڈلوی تفاعل	۷.۱۰
۸۵۶	یک رتبی تفرقی مساوات	۷.۱۱
۸۷۵	پولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان	۷.۱۲

۸۸۵	۸ مکمل کے طریقہ	۸.۱
۸۸۵	۸.۱ مکمل کے بنیادی کلیات	۸.۱
۸۹۹	۸.۲ مکمل بالخصص	۸.۲
۹۰۴	۸.۲.۱ بار بار استعمال	۸.۲.۱
۹۱۳	۸.۳ جبزوی کسر	۸.۳
۹۲۷	۸.۴ ٹکونیاتی بدل	۸.۴
۹۳۸	۸.۵ جہدول مکمل اور کمپیوٹر	۸.۵
۹۵۳	۸.۶ غیر متناسب مکمل	۸.۶

۹۷۷	۹ لامستہائی تسلسل	۹.۱
۹۷۷	۹.۱ اعداد کی ترتیب کی حد	۹.۱
۹۹۴	۹.۲ ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے	۹.۲
۱۰۱۰	۹.۳ لامستہائی تسلسل	۹.۳
۱۰۲۷	۹.۴ غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا مکملی پرکھ	۹.۴
۱۰۳۷	۹.۵ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ	۹.۵
۱۰۴۶	۹.۶ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ	۹.۶
۱۰۵۷	۹.۷ بدلت تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز	۹.۷
۱۰۷۰	۹.۸ طامتی تسلسل	۹.۸
۱۰۸۶	۹.۹ ٹیلر اور مکلارن تسلسل	۹.۹
۱۰۹۶	۹.۱۰ ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ جنسل کے اندازے	۹.۱۰
۱۱۱۳	۹.۱۱ طامتی تسلسل کے استعمال	۹.۱۱

۱۱۳۱	۱۰ مخروطی جے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدود	۱۰.۱
۱۱۳۱	۱۰.۱ مخروطی جے اور دو قدری مساواتیں	۱۰.۱
۱۱۵۴	۱۰.۲ سنگل لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی	۱۰.۲
۱۱۶۴	۱۰.۳ دو درجی مساوات اور گھوم	۱۰.۳

۱۰.۴	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول	۱۱۷۶
۱۰.۵	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات	۱۱۹۳
۱۰.۶	قطبی محدود	۱۲۰۵
۱۰.۷	قطبی محدود میں ترسیم	۱۲۱۶
۱۰.۸	محسوس حصوں کے قطبی مساوات	۱۲۲۹
۱۰.۸.۱	دائرے	۱۲۳۰
۱۰.۹	قطبی محدود میں عمل	۱۲۴۳
۱۱	سمتیات اور حلا میں تخلیلی حیومیٹری	۱۲۵۵
۱۱.۱	مستوی میں سمتیات	۱۲۵۵
۱۱.۲	کار تینی (مستطیل) محدود اور فص میں سمتیات	۱۲۷۰
۱۱.۲.۱	کرہ	۱۲۷۸
۱۱.۳	ضرب نقطہ	۱۲۸۶
۱۱.۳.۱	حاج	۱۲۸۷
۱۱.۴	صلیبی ضرب	۱۳۰۰
۱۱.۵	فص میں خطوط اور مستویات	۱۳۱۴
۱۱.۶	تکلی اور مربع سطحیں	۱۳۲۷
۱۱.۷	تکلی اور کروی محدود	۱۳۴۳
۱۲	سمتی قیمت تفاعل اور فص میں حرکت	۱۳۵۵
۱۲.۱	سمتی قیمت تفاعل اور فصائی منحنیات	۱۳۵۵
۱۲.۲	گولا کی حرکت کی نمونہ کشی	۱۳۷۷
۱۲.۳	لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $T$	۱۳۸۶
۱۲.۴	انحناء، سروڈ اور $TNB$ چھو کٹ	۱۳۹۴
۱۲.۵	منکلی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت	۱۴۱۴
۱۳	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفروعات	۱۴۲۹
۱۳.۱	کثیر متغیرات کے تفاعل	۱۴۲۹
۱۳.۲	حد اور استمرار	۱۴۴۳
۱۳.۳	جزوی تفروعات	۱۴۵۷
۱۳.۴	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفروعات	۱۴۷۳
۱۳.۵	زنجیری متاعده	۱۴۸۹
۱۳.۶	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفروعات	۱۵۰۳
۱۳.۷	رخی تفروعات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں	۱۵۱۰
۱۳.۸	انتہائی قیمتیں اور نقاط زیرین	۱۵۳۰
۱۳.۸.۱	نتیجہ	۱۵۳۸
۱۳.۹	لیگرینج ضاربین	۱۵۴۶
۱۳.۱۰	کلیہ ٹیلر	۱۵۶۳

۱۵۷۱	۱۴	تکمل یا لکشرت
۱۵۷۱	۱۴.۱	دوہر انکملاست
۱۵۹۰	۱۴.۲	رقبات، معیار اثر، اور مسر اکز کیت
۱۶۰۶	۱۴.۳	دوہر انکملاست کا قطبی روپ
۱۶۱۶	۱۴.۴	کار تہی محدود میں تہر انکمل
۱۶۲۹	۱۴.۵	تقین بعد میں کیت اور معیار اثر
۱۶۳۹	۱۴.۶	تکلی اور کروی محدود میں تہر انکمل
۱۶۵۸	۱۴.۷	تکملاست یا لکشرت میں بدل

۱۶۷۳	۱۵	سحق میدان میں تکمل
۱۶۷۳	۱۵.۱	لکیری تکمل
۱۶۸۳	۱۵.۲	سحق میدان، کام، دائری ہوا، اور ہوا
۱۶۹۸	۱۵.۳	راہے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان
۱۷۱۱	۱۵.۴	مستوی میں مسئلہ گرین

۱۷۲۹	جوابات
۱۷۴۱	۱ ضمیمہ اول
۱۷۴۳	۲ ضمیمہ دوم
۱۷۴۵	۳ ضمیمہ تین
۱۷۴۷	۴ ضمیمہ چار
۱۷۴۹	۵ ضمیمہ پانچ
۱۷۵۱	۶ ضمیمہ چھ
۱۷۵۳	۷ ضمیمہ سات
۱۷۵۵	۸ ضمیمہ آٹھ
۱۷۵۷	۹ ضمیمہ آٹھ
۱۷۵۹	۱۰ تکملات کا مختصر جدول

## سطحی کمالات

سطحی رقبے کے حساب میں جو تصورات استعمال کیے گئے انہیں بروئے کار لاتے ہوئے سطح پر تفاعل کے مکمل کا حصول سکتے ہیں۔

منحرف کریں، سطح  $c = f(x, y, z)$  پر برقی بار تقسیم کیا گیا ہے (شکل 14.44) اور  $S$  کے ہر نقطہ پر تفاعل  $g(x, y, z)$  فی اکائی رقبہ بار (کثافت بار) دیتا ہے۔ ایسی صورت میں  $S$  پر کل بار کا حساب مکمل کی صورت میں درج ذیل طریقے سے لکھا جاسکتا ہے۔

ہم  $S$  کے نیچے، زمینی مستوی پر سایہ دار خطہ  $R$  کو چھوٹے چھوٹے مستطیلوں میں بالکل اسی طرح تقسیم کرتے ہیں  $g$  سے  $S$  کا سطحی رقبہ تلاش کرنے کے لیے کیا جاتا ہے۔ ہر ایک  $\Delta A_k$  کے بالکل اوپر کچھ بلندی پر سطح  $\Delta \sigma_k$  پایا جاتا ہے، جس کو ہم ماسی مستوی پر مستطیلی حصہ  $\Delta P_k$  سے نمین کرتے ہیں۔

ہم سطحی رقبے کی تعریف کی طرز پر چل رہے ہیں، تاہم یہاں ایک اضافی قدم لیتے ہیں: ہم  $(x_k, y_k, z_k)$  پر  $g$  کی قیمت معلوم کر کے رقبہ  $\Delta \sigma_k$  پر کل بار کو تخمینہ حاصل ضرب  $\Delta P_k g(x_k, y_k, z_k)$  سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس کی وجہ درج ذیل ہے: خطہ  $R$  کو کافی چھوٹے چھوٹے مستطیلوں میں تقسیم کرنے کی صورت میں پورے  $\Delta \sigma_k$  میں  $g$  کی قیمت تقریباً متقل ہوگی، اور  $\Delta P_k$  تقریباً  $\Delta \sigma_k$  کے برابر ہوگا۔ یوں  $S$  پر کل بار تخمینہ درج ذیل مجموعہ کے برابر ہوگا۔

$$(15.43) \quad \sum g(x_k, y_k, z_k) \Delta P_k = \sum g(x_k, y_k, z_k) \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma_k|} \approx \text{کل بار}$$

اگر سطح  $S$  کو ظاہر کرنے والا تفاعل  $F$  اور اس کے یک رتبی جزوی تصرفات استمراری ہوں، اور  $S$  پر  $g$  استمراری ہو، تب  $R$  کی خاصہ بندی ہمیشہ کی طرح نفیس بنانے سے مساوات 15.43 کے دائیں ہاتھ میں پیش مجموعہ درج ذیل حد تک پہنچتے ہیں۔

$$(15.44) \quad \iint_R g(x, y, z) \frac{dA}{|\cos \gamma|} = \iint_R g(x, y, z) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA$$

یہ حد سطح  $S$  پر  $g$  کا مکمل کہلاتا ہے، جس کو  $R$  پر دہرا مکمل لکھا اور حاصل کیا جاتا ہے۔ اس مکمل کی قیمت سطح  $S$  پر کل بار دے گی۔

اگر مساوات 15.43 کا مکمل موجود ہو، تب آپ توقع کر سکتے ہیں کہ مساوات 15.44 کا کلیہ سطح  $S$  پر کسی بھی تفاعل  $g$  کے مکمل کی تعریف ہے۔



## تعریفات

اگر سطح  $S$ ، جس کی تعریف مساوات  $f(x, y, z) = c$  دیتی ہے، کا سایہ  $R$  ہو اور  $S$  کے تمام نقطوں پر  $g$  استمراری تفاعل ہو،  $g$  کا تکامل درج ذیل ہوگا:

$$(۱۵.۴۵) \quad \iint g(x, y, z) \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA$$

جہاں  $\mathbf{p}$  سایہ دار خطہ  $R$  کا کائناتی عمودی سمتیہ ہے اور  $\nabla f \cdot \mathbf{p} \neq 0$  ہے۔ اس عمل کو **سطحی تکامل**<sup>۱۶</sup> کہتے ہیں۔ مختلف عملی استعمال میں مساوات ۱۵.۴۵ کا تکامل مختلف معنی رکھتا ہے۔ اگر  $g$  کی قیمت مستقل طور پر 1 ہو، تکامل  $S$  کا رقبہ دے گا۔ اگر  $g$  ایک باریک خول، جس کی شکل کا نمونہ  $S$  ہو، کی کسی شذائت ہو تب تکامل خول کی قیمت دے گا۔

الجبرائی خواص: سطحی رقبہ کی تفریق

ہم  $(|\nabla f| / |\nabla f \cdot \mathbf{p}|) dA$  کو  $d\sigma$  لکھ کر مساوات ۱۵.۴۵ کا تکامل مختصراً (درج ذیل) لکھ سکتے ہیں۔

$$(۱۵.۴۶) \quad d\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA$$

سطحی رقبہ کی تفریق

$$\iint_S g d\sigma$$

سطحی کمالات کا تفریقی کلیہ

سطحی کمالات دیگر دہرائی کمالات کی طرح رویہ رکھتے ہیں: دو تفاعل کمالات کا تکامل ان تفاعلات کے انفرادی کمالات کا مجموعہ ہو گا وغیرہ وغیرہ۔ دائرہ کار کی جمع پذیری خاصیت درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\iint_S g d\sigma = \iint_{S_1} g d\sigma + \iint_{S_2} g d\sigma + \dots + \iint_{S_n} g d\sigma$$

کلیدی تصویر یہ ہے کہ اگر  $S$  کو ہموار منحنیات، مستحالی تعداد کی غیر منطبق، ہموار قطعات میں حنائہ بند کرتی ہوں (یعنی اگر  $S$  ٹکڑوں میں ہموار<sup>۱۷</sup> ہو) تب قطعات پر کمالات کا مجموعہ  $S$  پر تکامل کے برابر ہو گا۔ مکعب کی سطح پر تفاعل کا تکامل، مکعب کی چھ سطحوں پر کمالات کا مجموعہ ہو گا۔

مثال ۱۵.۲۰: ربع اول سے مستویات  $x = 1$ ،  $y = 1$ ، اور  $z = 1$  ایک مکعب کا قیاسی (شکل 14.45)۔ اس مکعب کی سطح پر  $g(x, y, z) = xyz$  کا تکامل لیں۔

<sup>۱۶</sup> surface integral  
<sup>۱۷</sup> piecewise smooth

ط: ہم باری باری کعب کی چھ سطحوں پر  $xyz$  کا تکمل لے کر تمام نتائج کا مجموعہ لیتے ہیں۔ محدودی مستویات میں پائے جانے والے اطراف میں  $xyz = 0$  ہوگا، لہذا کعب کی سطح پر تکمل گھٹ کر درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے۔

$$\iint_{\text{سطح سببی}} xyz \, d\sigma = \iint_{\text{سطح انف}} xyz \, d\sigma + \iint_{\text{سطح ب}} xyz \, d\sigma + \iint_{\text{سطح ج}} xyz \, d\sigma$$

مستوی  $xy$  میں چونکہ خط  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  پر سطح انف کی مساوات  $f(x, y, z) = z = 1$  ہے۔ اس سطح اور خط کے لیے ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{k}, \quad \nabla f = \mathbf{k}, \quad |\nabla f| = 1, \quad |\nabla f \cdot \mathbf{p}| = |\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}| = 1, \\ d\sigma &= \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA = \frac{1}{1} dx dy = dx dy, \\ xyz &= xy(1) = xy \end{aligned}$$

یوں ذیل ہوگا۔

$$\iint_{\text{سطح انف}} xyz \, d\sigma = \iint_{R_{xy}} xy \, dx dy = \int_0^1 \int_0^1 xy \, dx dy = \int_0^1 \frac{y}{2} dy = \frac{1}{4}$$

تشابہیت کی بنا پر سطح اور ج پر  $xyz$  کے تکمل بھی  $\frac{1}{4}$  دیں گے۔ یوں ذیل ہوگا۔

$$\iint_{\text{سطح سببی}} xyz \, d\sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

□

### سمت بندی

وہ ہموار سطح  $S$ ، جس پر عمودی اکائی سمتیات کا ایسا میدان  $n$  متعارف کیا جاسکتا ہو جو مقام کے ساتھ استمراری تبدیل ہو، قابل سمت بند<sup>۱۸</sup> یا دو طرفہ<sup>۱۹</sup> کہلاتی ہے۔ قابل سمت بند سطح کا ہر ذیلی ٹکڑا قابل سمت بند ہوگا۔ کرہ اور فضا میں دیگر بند سطحیں (ایسی ہموار سطحیں جو ٹھوس اجسام کو احاطہ کرتی ہوں) قابل سمت بند ہوں گی۔ روایتاً  $n$  کا رخ بند سطح سے باہر کی طرف رکھا جاتا ہے۔

میدان  $n$  منتخب کرنے کے بعد ہم کہتے ہیں سطح سمت بند<sup>۲۰</sup> ہوتی گئی ہے اور سطح بشمول عمودی میدان سمت بند سطح<sup>۲۱</sup> کہلاتی ہے۔ کسی بھی نقطے پر سمتیہ  $n$ ، اس نقطے پر مثبت رخ کہلاتا ہے (شکل 14.46)۔

<sup>۱۸</sup>orientable  
<sup>۱۹</sup>two-sided  
<sup>۲۰</sup>oriented  
<sup>۲۱</sup>oriented surface

شکل 14.47 میں **موبیوس پٹھ** <sup>۲۲</sup> دکھائے گئی ہے جو نامتابل سمت بند ہے۔ آپ کسی بھی نقطہ سے آغاز کر کے استمراری اکائی عمودی میدان بنانا شروع کریں۔ اکائی عمودی سمتیہ  $n$  کو سطح پر استمراری حرکت دینے سے آپ ابتدائی نقطے تک یوں پہنچ سکتے ہیں کہ  $n$  کا رخ ابتدائی رخ کا مخالف ہو۔ اس نقطہ پر سمتیہ بیک وقت دو مخالف رخ نہیں ہو سکتا، اگرچہ استمراری میدان کی صورت میں ایسا ہی ہونا چاہیے۔ یوں ہم اخذ کرتے ہیں کہ ایسا میدان موجود نہیں ہوگا۔

### بہاؤ کا سطحی تکمل

منحرف کریں متابل سمت بند سطح  $S$  پر استمراری سمتی میدان  $F$  ہے، اور سطح پر منتخب اکائی عمودی میدان  $n$  ہے۔ ہم  $S$  پر  $F \cdot n$  کے تکمل کو  $S$  پر مثبت رخ کا بہاؤ کہتے ہیں۔ یوں  $n$  کے رخ  $F$  کے غیر سمتی جزو کا  $S$  پر تکمل، سطح سے گزرتا بہاؤ دے گا۔

### تعریف

متابل سمت بند سطح  $S$  کو پار کرتا،  $n$  کے رخ، تین ابعادی سمتی میدان  $F$  کا بہاؤ درج ذیل کلیہ دے گا۔

$$(15.47) \quad \text{بہاؤ} = \iint_S F \cdot n \, d\sigma$$

یہ تعریف سطحی منحنی  $C$  کو پار کرتے، دو ابعادی میدان  $F$  کے بہاؤ کی تعریف کے عین مطابق ہے۔ مستوی میں بہاؤ کو، منحنی  $C$  کو  $F$  کے عمودی غیر سمتی جزو کا تکمل:

$$\int_C F \cdot n \, ds$$

ظاہر کرتا ہے۔

گر  $F$  تین ابعادی سیالی بہاؤ کا سمتی رفتار میدان ہو، تب  $S$  سے (گزرتا)  $F$  کا بہاؤ، منتخب مثبت رخ میں  $S$  سے گزرتے سیال کی خالص شرح دے گا۔ ایسے بہاؤ پر تفصیلاً تبصرہ حصہ 14.7 میں کیا جائے گا۔

اگر  $S$  ہم متد سطح  $g(x, y, z) = c$  کا حصہ ہو، تب  $n$  درج ذیل میں سے، جو پسند کا رخ دیتا ہو، ہوگا۔

$$(15.48) \quad n = \pm \frac{\nabla g}{|\nabla g|}$$

مطلوبتی ہیرو ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}
 (15.47) \quad \text{مساحت} &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma \\
 &= \iint_R \left( \mathbf{F} \cdot \frac{\pm \nabla g}{|\nabla g|} \right) \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \mathbf{p}|} \, dA \\
 (15.49) &= \iint_R \mathbf{F} \cdot \frac{\pm \nabla g}{|\nabla g \cdot \mathbf{p}|} \, dA
 \end{aligned}$$

مثال ۱۵.۲۱: سیلن  $y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$  کے مستویات  $x = 0$  اور  $x = 1$  سطح  $S$  کاٹی ہیں۔ سطح  $S$  سے باہر رخ  $\mathbf{F} = yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$  کا ہیرو تلاش کریں۔

حل: سطح  $S$  پر باہر رو عمووی میدان  $\mathbf{n}$  کو  $g(x, y, z) = y^2 + z^2$  کی ڈیفران (ذیل دیکھیں) سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

$$\mathbf{n} = + \frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} = \frac{2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}}{2\sqrt{1}} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

چونکہ  $\mathbf{p} = \mathbf{k}$  ہے لہذا درج ذیل بھی ہوگا۔

$$d\sigma = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \mathbf{k}|} \, dA = \frac{2}{|2z|} \, dA = \frac{1}{z} \, dA$$

ہم  $z \geq 0$  کے بن مطلق قیمت کی علامت ہٹا سکتے ہیں۔

سطح پر  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$  کی قیمت ذیل کلیہ دیگا، جہاں آخری قدم میں  $z$  پر  $y^2 + z^2 = 1$  ہوگا۔

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} &= (yz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}) \cdot (y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\
 &= y^2z + z^3 = z(y^2 + z^2) \\
 &= z
 \end{aligned}$$

یوں  $S$  سے  $\mathbf{F}$  کا آخری ہیرو ذیل ہوگا۔

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = \iint_S (z) \left( \frac{1}{z} \, dA \right) = \iint_{R_{xy}} dA = \text{کارتب } R_{xy} = 2$$

□

جدول ۱۵.۱: نہایت باریک خول کی کیت اور معیار اثر

$M = \iint_S \delta(x, y, z) d\sigma$	کمیت
(نقطہ $(x, y, z)$ پر $\delta(x, y, z)$ کثافت (کیت فی اکائی رقبہ) ہے	
$M_{yz} = \iint_S x \delta d\sigma, \quad M_{xz} = \iint_S y \delta d\sigma, \quad M_{xy} = \iint_S z \delta d\sigma$	محدودہ مستویات کے لحاظ سے اول معیار اثر
$\bar{x} = M_{yz}/M, \quad \bar{y} = M_{xz}/M, \quad \bar{z} = M_{xy}/M$	مرکز کمیت کے محدود
$I_x = \iint_S (y^2 + z^2) \delta d\sigma, \quad I_y = \iint_S (x^2 + z^2) \delta d\sigma$	جمود معیار اثر
$I_z = \iint_S (x^2 + y^2) \delta d\sigma, \quad I_L = \iint_S r^2 \delta d\sigma$	
نقطہ $(x, y, z)$ سے لکیر $L$ کا فاصلہ $r(x, y, z)$ ہے	
$R_L = \sqrt{I_L/M}$	لکیر $L$ کے لحاظ سے ردایہ دوار

باریک خول کی کیت اور معیار اثر

گھریلو برتن، ڈھول، اور دیگر باریک خول کو سطحوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ ان کی کیت اور معیار اثر جدول ۱۵.۱ میں پیش کلیات سے حاصل کی جاسکتی ہیں۔

مثال ۱۵.۲۲: رداس  $a$  اور متقل کثافت  $\delta$  کے باریک نصف کرہی خول کا مرکز کیت تلاش کریں۔  
حل: ہم خول کو نصف کرہ:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0$$

سے ظاہر کرتے ہیں (مشکل 14.49)۔ محور  $z$  کے لحاظ سے سطح کی تشکلی کی بنا پر  $\bar{y} = \bar{x} = 0$  ہوگا۔ کلیہ  $\bar{z} = M_{xy}/M$  سے تلاش کرنا باقی ہے۔

خول کی کیت درج ذیل ہے۔

$$M = \iint_S \delta d\sigma = \delta \iint_S d\sigma = (\delta)(S, \text{کارقبہ}) = 2\pi a^2 \delta$$

$M_{xy}$  کا مکمل تلاش کرنے کی خاطر  $p = k$  لیتے ہیں۔ یوں،

$$M_{xy} = \iint_S z \delta d\sigma = \delta \iint_R z \frac{a}{z} d\sigma = \delta a \iint_R dA = \delta a (\pi a^2) = \delta \pi a^3$$

لهذا ذیل ہوگا۔

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi a^3 \delta}{2\pi a^2 \delta} = \frac{a}{2}$$

□

خول کا مرکز کیت نقطہ  $(0, 0, a/2)$  پر ہوگا۔

جوابات

