

# احصاء اور تحلیلی علم الہندسہ

خالد حنان یوسفزئی

جامعہ کامیٹ، اسلام آباد

khalidyoufazai@comsats.edu.pk

۱۵ جنوری ۲۰۲۳



# عنوان

ix

دیباچہ

xi

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

۱	۱	ابتدائی معلومات
۱	۱.۱	حقیقی اعداد اور حقیقی خط
۱۳	۱.۲	محدود، خطوط اور بڑھوتری
۲۸	۱.۳	تفاعل
۴۹	۱.۴	ترسیم کی منتقلی
۶۷	۱.۵	نکونیا تفاعل
۸۹	۲	حدود اور استمرار
۸۹	۲.۱	تبدیلی کی شرح اور حد
۱۰۵	۲.۲	حد تلاش کرنے کے قواعد
۱۱۷	۲.۳	مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف
۱۳۶	۲.۴	تصور حد کی توسیع
۱۵۴	۲.۵	استمرار
۱۷۲	۲.۶	مماسی خط
۱۸۷	۳	تفرق
۱۸۷	۳.۱	تفاعل کا تفرق
۲۰۷	۳.۲	قواعد تفرق
۲۲۵	۳.۳	تبدیلی کی شرح
۲۴۲	۳.۴	نکونیا تفاعل کا تفرق
۲۶۱	۳.۵	زنجیری متاعده
۲۷۱	۳.۶	خفی تفرق اور نااطق قوت
۲۹۱	۳.۷	دیگر شرح تبدیلی

۳۰۵	تفریق کا استعمال	۴
۳۰۵	تفاضل کی انتہائی قیمتیں	۴.۱
۳۱۸	مسئلہ اوسط قیمت	۴.۲
۳۳۳	مقامی انتہائی قیمتوں کا ایک رتبی تفریق پرکھ	۴.۳
۳۳۳	۴.۳.۱ پرکھ	
۳۴۳	$\frac{1}{x}$ اور $\frac{1}{x^2}$ کے ساتھ ترسیم	۴.۴
۳۶۶	$\infty \rightarrow x$ پر حد، مقتارب اور غالب اجزاء	۴.۵
۳۹۱	بہترین بنانا	۴.۶
۴۱۴	خط بندی اور تفرقات	۴.۷
۴۳۵	ترکیب نیوٹن	۴.۸
۴۴۷	تکمل	۵
۴۴۷	غیر قطعی تکرارات	۵.۱
۴۵۸	تفریق مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی	۵.۲
۴۷۳	تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری متاخرہ کا الٹ اطلاق	۵.۳
۴۸۴	اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ	۵.۴
۵۰۱	ریمان مجموعے اور قطعی تکرارات	۵.۵
۵۲۶	خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ	۵.۶
۵۴۲	بنیادی مسئلہ	۵.۷
۵۶۱	قطعی تکمل میں بدل	۵.۸
۵۶۶	اعدادی تکمل	۵.۹
۵۶۷	متاخرہ ذوزنقہ	۵.۱۰
۵۸۵	تکمل کا استعمال	۶
۵۸۵	۶.۱ منحنیات کے بیچ رقبہ	
۷۰۷	مبادرائی تفاعل	۷
۷۰۸	۷.۱ الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات	
۷۲۶	۷.۲ متدرج لوگار تھم	
۷۴۲	۷.۳ قوت نمائی تفاعل	
۷۵۵	۷.۴ $\log_a x$ اور $a^x$	
۷۶۵	۷.۵ انفرانش اور تنزل	
۷۷۸	۷.۶ متاخرہ لھو پیٹال	
۷۹۳	۷.۷ اضافی شرح نمو	
۷۹۸	۷.۷.۱ ترتیبی اور شنائی تلاش	
۸۰۳	۷.۸ الٹ تکنیکی تفاعل	
۸۱۸	۷.۹ الٹ تکنیکی تفاعل کے تفرق؛ تکمل	
۸۳۴	۷.۱۰ بذلولی تفاعل	
۸۵۳	۷.۱۱ یک رتبی تفریق مساوات	

۷.۱۲ یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان ۸۷۲

۸۸۳	۸	تکمل کے طریقے
۸۸۳	۸.۱	تکمل کے بنیادی کلیات
۸۹۷	۸.۲	تکمل بالخص
۹۰۱	۸.۲.۱	بار بار استعمال
۹۱۰	۸.۳	جزوی کسر
۹۲۴	۸.۴	تکونیاتی بدل
۹۳۴	۸.۵	جدول تکمل اور کمپیوٹر
۹۵۰	۸.۶	غیر مناسب تکمل

۹۷۳	۹	لامستثنائی تسلسل
۹۷۳	۹.۱	اعداد کی ترتیب کی حد
۹۹۰	۹.۲	ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے
۱۰۰۶	۹.۳	لامستثنائی تسلسل
۱۰۲۳	۹.۴	غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا عملی پرکھ
۱۰۳۳	۹.۵	غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ
۱۰۴۲	۹.۶	غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جزوی پرکھ
۱۰۵۳	۹.۷	بدلت تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز
۱۰۶۶	۹.۸	طابق تسلسل
۱۰۸۲	۹.۹	ٹیلر اور مکلارن تسلسل
۱۰۹۲	۹.۱۰	ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ جنسل کے اندازے
۱۱۰۹	۹.۱۱	طابق تسلسل کے استعمال

۱۱۲۷	۱۰	محسوطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدود
۱۱۲۷	۱۰.۱	محسوطی حصے اور دو قدری مساواتیں
۱۱۵۰	۱۰.۲	نکالے لحاظ سے محسوط حصوں کی جماعت بندی
۱۱۶۰	۱۰.۳	دو درجی مساوات اور گھومنا
۱۱۷۲	۱۰.۴	مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول
۱۱۸۹	۱۰.۵	احصاء اور مقدار معلوم منحنیات
۱۲۰۱	۱۰.۶	قطبی محدود
۱۲۱۲	۱۰.۷	قطبی محدود میں ترسیم
۱۲۲۵	۱۰.۸	محسوط حصوں کے قطبی مساوات
۱۲۲۶	۱۰.۸.۱	دائرے
۱۲۳۹	۱۰.۹	قطبی محدود میں عمل

۱۲۵۱	۱۱	سمتیات اور خلائ میں تحلیلی جیومیٹری
۱۲۵۱	۱۱.۱	مستوی میں سمتیات

۱۲.۲	کار تیلی (مستطیل) محدود اور فضا میں سمتیات	۱۲۶۶
۱۱.۲.۱	کرہ	۱۲۷۴
۱۱.۳	ضرب نقطہ	۱۲۸۲
۱۱.۳.۱	حاج	۱۲۸۳
۱۱.۴	صلیبی ضرب	۱۲۹۶
۱۱.۵	فضا میں خطوط اور مستویات	۱۳۱۰
۱۱.۶	تکلی اور مربع سطحیں	۱۳۲۳
۱۱.۷	تکلی اور کروئی محدود	۱۳۳۹
۱۲	سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت	۱۳۵۱
۱۲.۱	سمتی قیمت تفاعل اور فضا کی مختصات	۱۳۵۱
۱۲.۲	گولائی حرکت کی نمونہ کشی	۱۳۷۳
۱۲.۳	لمبائی توس اور اکائی ماسی سمتیہ $T$	۱۳۸۲
۱۲.۴	انجن، سروژ اور $TNB$ چھو کٹ	۱۳۸۹
۱۲.۵	فنکلی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت	۱۴۱۰
۱۳	کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات	۱۴۲۵
۱۳.۱	کثیر متغیرات کے تفاعل	۱۴۲۵
۱۳.۲	حد اور استمرار	۱۴۳۹
۱۳.۳	جزوی تفرقات	۱۴۵۳
۱۳.۴	تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات	۱۴۶۹
۱۳.۵	زنجیری متاعده	۱۴۸۵
۱۳.۶	پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات	۱۴۹۹
۱۳.۷	رفی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور ماسی سطحیں	۱۵۰۶
۱۳.۸	انتہائی قیمتیں اور نقاط زین	۱۵۲۶
۱۳.۸.۱	نتیجہ	۱۵۳۴
۱۳.۹	لیگرینج مضاربین	۱۵۴۲
۱۳.۱۰	کلیہ ٹیلر	۱۵۵۹
۱۴	تکمل بالکثرت	۱۵۶۷
۱۴.۱	دوہرا تکملات	۱۵۶۷
۱۴.۲	رقبات، معیار اثر، اور مسر اکز کیت	۱۵۸۶
۱۴.۳	دوہرا تکملات کا قطبی روپ	۱۶۰۱
۱۴.۴	کار تیلی محدود میں تہہرا تکمل	۱۶۱۱
۱۴.۵	تعیین بعد میں کیت اور معیار اثر	۱۶۲۵
۱۴.۶	تکلی اور کروئی محدود میں تہہرا تکمل	۱۶۳۴
۱۴.۷	تکملات بالکثرت میں بدل	۱۶۵۳
۱۵	سمتی میدان میں تکمل	۱۶۶۹

۱۶۶۹	لکیری مکمل	۱۵.۱
۱۶۷۱	جمع پذیری	۱۵.۱.۱
۱۶۷۹	سمتی میدان، کام، دائری بہا، اور بہا	۱۵.۲
۱۶۹۴	راہے آزادی، قنصل خفی توانائی، اور بقائی میدان	۱۵.۳
۱۷۰۷	مستوی میں مسئلہ گرین	۱۵.۴
۱۷۱۴	سطحی رقبہ اور سطحی کمالات	۱۵.۵
۱۷۱۴	سطحی رقبہ کی تعریف	۱۵.۵.۱
۱۷۱۵	عملی کلیہ	۱۵.۵.۲

۱۷۱۹	جوابات
۱۷۳۵	۱ ضمیمہ اول
۱۷۳۷	ب ضمیمہ دوم
۱۷۳۹	ج ضمیمہ تین
۱۷۴۱	د ضمیمہ چار
۱۷۴۳	ه ضمیمہ پانچ
۱۷۴۵	و ضمیمہ چھ
۱۷۴۷	ز ضمیمہ سات
۱۷۴۹	ح ضمیمہ آٹھ
۱۷۵۱	ط ضمیمہ آٹھ
۱۷۵۳	ی کمالات کا مختصر جدول

## سوالات

## مسئلہ گرین کی تصدیق

سوال ۱۵.۱۲ تا سوال ۱۵.۱۳۰ میں میدان  $F = Mi + Nj$  کے لیے مساوات 11 اور مساوات 12 کی دونوں اطراف کی قیمتیں تلاش کر کے مسئلہ گرین کی تصدیق کریں۔ دونوں صورتوں میں مکمل کا دائرہ کار فطرص  $R : x^2 + y^2 \leq a^2$  اور محدود کار دائرہ  $C : r = (a \cos t)i + (a \sin t)j, 0 \leq t \leq 2\pi$  لیں۔

سوال ۱۵.۱۲ :  $F = -yi + xj$

سوال ۱۵.۱۲۸ :  $F = yi$

سوال ۱۵.۱۲۹ :  $F = 2xi - 3yj$

سوال ۱۵.۱۳۰ :  $F = -x^2yi + xy^2j$

## حلاف گھڑی دائری ہسا اور باہر رخ ہسا

سوال ۱۵.۱۳۱ تا ۱۵.۱۳۶ میں میدان  $F$  اور مغنی  $C$  کے لیے مسئلہ گرین استعمال کر کے حلاف گھڑی دائری ہسا اور باہر رخ ہسا تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۳۱ :  $F = (x - y)i + (y - x)j$  اور  $C$  کو چوکور  $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$  محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۲ :  $F = (x^2 + 4y)i + (x + y^2)j$  اور  $C$  کو چوکور  $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$  محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۳ :  $F = (y^2 - x^2)i + (x^2 + y^2)j$  اور  $C$  کو مثلث  $y = 0, x = 3, y = x$  محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۴ :  $F = (x + y)i - (x^2 + y^2)j$  اور  $C$  کو مثلث  $y = 0, x = 1, y = x$  محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۵ :  $F = (x + e^x \sin y)i + (x + e^x \cos y)j$  اور  $C$  دو چشم  $r^2 = \cos 2\theta$  کا دایاں ہاتھ گھیر ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۶ :  $F = \left(\tan^{-1} \frac{y}{x}\right)i + \ln(x^2 + y^2)j$  اور  $C$  اس خطے کی سرحد ہے جس کو قطبی محدود عدم مساوات  $0 \leq \theta \leq \pi, 1 \leq r \leq 2$  تعین کرتی ہیں۔



## ۱۵.۵ سطحی رقبہ اور سطحی کھمبات

ہم مستوی میں خطہ پر تفاعل کا مکمل لینا چاہتے ہیں لیکن ایسی صورت میں کیا ہوگا جب تفاعل ایک قوسی سطح پر پایا جاتا ہو؟ ایسی صورت میں مکمل کیسے حاصل ہوگا؟ ایسا مکمل، جو سطحی کھمبات<sup>۱۵</sup> کہلاتا ہے، کی قیمت تلاش کرنے کی خاطر اس کو، سطح کے نیچے محدودی مستوی پر، دہرا مکمل کے روپ میں لکھا جاتا ہے (شکل 14.39)۔ حصہ 14.7 اور حصہ 14.8 میں ہم دیکھیں گے کہ سطحی کھمبات کی مدد سے مسئلہ گرین کو تین ابعاد میں عمومیت دی جاسکتی ہے۔

### ۱۵.۵.۱ سطحی رقبہ کی تعریف

شکل 14.40 میں سطح  $S$  اور نیچے مستوی میں اس کا ”سایہ“ خطہ  $R$  دکھایا گیا ہے۔ سطح کی تعریفی مساوات  $c = f(x, y, z)$  دیتی ہے۔ اگر سطح ہموار<sup>۱۶</sup>  $\nabla f$  استمراری ہے اور  $S$  پر کہیں بھی صفر نہیں ہے، ہم اس کے رقبہ کی تعریف اور قیمت  $R$  پر دہرا مکمل کی صورت میں کر سکتے ہیں۔

ہم خطہ  $R$  کی حناہ بندی چھوٹے چھوٹے مستطیلوں  $\Delta A_k$  میں ہم یوں کرتے ہیں جیسے  $R$  پر مکمل کی تعریف پیش کرنا چاہتے ہوں۔ یہ  $S$  کے رقبہ کی تعریف پیش کرنے کا کاہل قدم ہے۔ ہر ایک  $\Delta A$  کے بالکل اوپر کچھ بلندی پر سطح  $\Delta \sigma_k$  پایا جاتا ہے، جس کو ہم ماسی سطح کے چھوٹے حصہ  $\Delta P_k$  سے تخمینہ دے سکتے ہیں۔ اس کی وضاحت کرتے ہیں۔ رقبہ  $\Delta A_k$  کے پچھلے کونے  $C_k$  کے بالکل اوپر نقطہ  $T_k(x_k, y_k, z_k)$  پر سطح کے ماس کا  $\Delta P_k$  ایک ٹکڑا ہے۔ اگر ماسی سطح  $R$  کا متوازی ہو، تب  $\Delta P_k$  رقبہ  $\Delta A_k$  کا موافق ہوگا۔ بصورت دیگر، یہ ایک مستطیل ہوگا جس کا رقبہ  $\Delta A_k$  کے رقبہ سے کچھ زیادہ ہوگا۔

شکل 14.41 میں  $\Delta \sigma_k$  اور  $\Delta P_k$  بڑھا چڑھا کر پیش کیے گئے ہیں، جہاں  $T_k$  پر ڈھلوان سمتیہ  $\nabla f(x_k, y_k, z_k)$  اور  $R$  کا عمودی اکائی سمتیہ  $p$  بھی دکھائے گئے ہیں۔ اس شکل میں  $\nabla f$  اور  $p$  کے بیچ زاویہ  $\gamma_k$  بھی دکھایا گیا ہے۔ اس شکل میں دیگر سمتیات  $u_k$  اور  $v_k$  ماسی مستوی میں  $\Delta P_k$  کے کناروں پر پائے جاتے ہیں۔ یوں  $u_k \times v_k$  اور  $\nabla f$  دونوں ماسی مستوی کو عمودی ہیں۔

اعلیٰ سمتی ہندسہ سے ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی مستوی پر، جس کا عمود  $p$  ہو، ایسے مستطیل کی تطلیل کا رقبہ  $|u_k \times v_k|$  ہے۔

$$|(u_k \times v_k) \cdot p| = \Delta A_k \quad (15.32)$$

اب سمتی ضرب کی ایک خاصیت (جو صلیبی ضرب کی ایک حقیقت ہے) یہ ہے کہ  $|u_k \times v_k|$

رقبہ  $\Delta P_k$  ہوگا، لہذا مساوات ۱۵.۳۲ ذیل روپ

$$(15.33) \quad \underbrace{|u_k \times v_k|}_{\Delta P_k} \underbrace{|p|}_1 \underbrace{|\cos(\text{کے بیچ زاویہ } u_k \times v_k \text{ اور } p)|}_{\text{چونکہ } \nabla f \text{ اور } u_k \times v_k \text{ دونوں ممتنعی مستوی کو عمودی ہیں لہذا یہ } |\cos \gamma_k| \text{ کے برابر ہوگا}} = \Delta A_k$$

یا

$$\Delta P_k |\cos \gamma_k| = \Delta A_k$$

اختیار کرتی ہے جو  $\cos \gamma_k \neq 0$  کی صورت میں ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$\Delta P_k = \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma_k|}$$

جب تک  $\nabla f$  زمینی مستوی کو متوازی نہ ہو اور  $\nabla f \cdot p \neq 0$  ہو  $\cos \gamma_k \neq 0$  ہوگا۔ چونکہ سطحی ٹکڑے  $\Delta \sigma_k$  جو مل کر رقبہ  $S$  دیتے ہیں کو  $\Delta P_k$  تخمینہ لگ کر ہر کرتا ہے لہذا مجموعہ

$$(15.34) \quad \sum \Delta P_k = \sum \frac{\Delta A_k}{|\cos \gamma_k|}$$

سطحی رقبہ  $S$  کا تخمینہ نظر آتا ہے۔ ہم یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ خطہ  $R$  کو مزید چھوٹے خانوں میں تقسیم کرنے سے یہ تخمینہ بہتر ہوگی۔ درحقیقت مساوات تین کے دائیں ہاتھ مجموعہ دوہرے عمل

$$(15.35) \quad \iint_R \frac{1}{|\cos \gamma|} dA$$

کے تخمینہ مجموعہ ہیں۔ اسی بنا پر جب بھی یہ عمل موجود ہو ہم اسے  $S$  کے رقبہ کی تعریف لیتے ہیں۔

## ۱۵.۵.۲ عملی کلیہ

کسی بھی سطح  $f(x, y, z) = c$  کے لیے  $|\nabla f \cdot p| = |\nabla f| |p| |\cos \gamma|$  ہوگا لہذا  $\frac{1}{|\cos \gamma|} = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot p|}$  ہوگا اس کو مساوات 4 کے ساتھ ملا کر رقبہ کا عملی کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

سطحی رقبہ کا کلیہ بسند اور محدود مستوی میں خطہ  $R$  پر سطح  $f(x, y, z) = c$  کا رقبہ

$$(15.36) \quad \text{Surface area} = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot p|} dA$$

ہوگا۔ جہاں  $p$  خطہ  $R$  کا اکائی عمودی سمتیہ ہے اور  $\nabla f \cdot p \neq 0$  ہے۔ یوں  $\nabla f$  کے فٹر تقسیم  $R$  کو  $\nabla f$  کا غیر مستی عمودی جزو کا  $R$  پر دوہرا مکمل رقبہ ہوگا۔ ہم نے  $\nabla f$  کو استمراری تصور کرتے ہوئے اور پورے  $R$  پر  $\nabla f \cdot p \neq 0$

تصور کرتے ہوئے مساوات 5 حاصل کی اور جب بھی یہ تکبیر موجود ہو اس کی قیمت کو سطح  $c = f(x, y, z)$  کے اس حصے کے رقبہ کی تعریف لی جاتی ہے جو  $R$  کے اوپر پایا جاتا ہو۔

مثال ۱۵.۱۷: قطر مکافی مجسم  $x^2 + y^2 - z = 0$  کے نیچے حصے کو مستوی  $z = 4$  ایک سطح کاٹتا ہے۔ اس کا رقبہ تلاش کریں۔ حل ہم مشتری  $xy$  میں سطح  $S$  اور اس کے نیچے خطہ  $R$  کاٹنا کہہ سکتے ہیں۔ شکل 14.42 سطح  $S$  سطح  $x^2 + y^2 - z = 0$  کا حصہ ہے اور  $R$  مستوی  $xy$  میں مترس  $x^2 + y^2 \leq 4$  ہے۔ مستوی  $R$  کا اکائی عمودی سمتیا  $p = k$  ہے۔ سطح پر کسی نقطہ  $x, y, z$  پر

(۱۵.۳۷)

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z \quad \nabla f = 2xi + 2yj - k \quad |\nabla f| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \quad |\nabla f \cdot p| = 1$$

ہوگا۔ خطہ  $R$  میں  $dA = dx dy$  ہوگا۔ لہذا درج ذیل ہوگا۔

$$(۱۵.۳۸) \quad \text{Surface area} = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot p|} dA$$

$$(۱۵.۳۹) \quad = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} dx dy$$

$$(۱۵.۴۰) \quad = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \sqrt{4r^2 + 1} r dr d\theta$$

$$(۱۵.۴۱) \quad = \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{12} (4r^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 d\theta$$

$$(۱۵.۴۲) \quad = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} (17^{\frac{3}{2}} - 1) d\theta = \frac{\pi}{6} (17\sqrt{17} - 1)$$

□

مثال ۱۵.۱۸: نصف کرہ  $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 0$  سے بسیلن  $x^2 + y^2 = 1$  ایک ٹوپی کاٹتا ہے۔ اس ٹوپی کا رقبہ تلاش کریں۔ شکل 14.43

حل

ٹوپی  $S$  ہم سطح  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 2$  کا ایک حصہ ہے۔ یہ ایک ایک مطابقت کے ساتھ مستوی  $xy$  میں مترس  $x^2 + y^2 \leq 1$  پر تقطیل کرتا ہے۔ سمتیا  $p = k$  کے مستوی کو عمودی ہے۔ سطح میں کسی بھی نقطے پر

$$(۱۵.۴۳) \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

$$(۱۵.۴۴) \quad \nabla f = 2xi + 2yj + 2zk$$

$$(۱۵.۴۵) \quad |\nabla f| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{2}$$

$$(۱۵.۴۶) \quad |\nabla f \cdot p| = |\nabla f \cdot k| = |2z| = 2z$$

ہو گا لہذا درج ذیل ہو گا۔

$$(۱۵.۴۷) \quad \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{p}|} dA = \iint_R \frac{2\sqrt{2}}{2z} dA = \sqrt{2} \iint_R \frac{dA}{z}$$

یہاں  $z$  کا کیا کرنا ہو گا چونکہ کرہ میں کسی بھی نقطے پر  $z$  محدود کو  $z$  ظاہر کرتا ہے لہذا اسے ہم  $x$  اور  $y$  کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$(۱۵.۴۸) \quad z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$$

6 میں اسے پر کرتے ہیں۔

$$(۱۵.۴۹)$$

$$Surface\ area = \sqrt{2} \iint_R \frac{dA}{z} = \sqrt{2} \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dA}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}$$

$$(۱۵.۵۰)$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{r dr d\theta}{\sqrt{2 - r^2}}$$

$$(۱۵.۵۱)$$

$$\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[ - (2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \right]_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$(۱۵.۵۲)$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (\sqrt{2} - 1) d\theta = 2\pi(2 - \sqrt{2})$$

□



جوابات

