# احصاء اور تحلیلی ہندسہ

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۱۳ جولائی ۲۰۲۶

# عنوان


۱ ابتدائی معلومات ۱
۱.۱ حقیقی اعداد اور حقیقی خط . . . . . ۱
۱.۲ محدد، خطوط اور بڑھوتری . . . . . ۱۳
۱.۳ تفاعل . . . . . ۲۸
۱.۴ ترسیم کی منتقلی . . . . . ۴۸
۱.۵ تکونیاتی تفاعل . . . . . ۶۵

۲ حدود اور استمرار ۸۵
۲.۱ تبدیلی کی شرح اور حد . . . . . ۸۵
۲.۲ حد تلاش کرنے کے قواعد . . . . . ۱۰۰
۲.۳ مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف . . . . . ۱۱۲
۲.۴ تصور حد کی توسیع . . . . . ۱۳۰
۲.۵ استمرار . . . . . ۱۴۸
۲.۶ مماسی خط . . . . . ۱۶۴

۳ تفرق ۱۷۷
۳.۱ تفاعل کا تفرق . . . . . ۱۷۷
۳.۲ قواعد تفرق . . . . . ۱۹۶
۳.۳ تبدیلی کی شرح . . . . . ۲۱۳
۳.۴ تکونیاتی تفاعل کا تفرق . . . . . ۲۲۹
۳.۵ زنجیری قاعدہ . . . . . ۲۴۷
۳.۶ خفی تفرق اور ناطق قوت نما . . . . . ۲۶۲
۳.۷ دیگر شرح تبدیلی . . . . . ۲۷۷

۴ تفرق کا استعمال ۲۸۹
۴.۱ تفاعل کی انتہائی قیمتیں . . . . . ۲۸۹
۴.۲ مسئلہ اوسط قیمت . . . . . ۳۰۲
۴.۳ مقامی انتہائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پرکھ . . . . . ۳۱۵

۴.۳.۱ پرکھ . . . . . ۳۱۶
۴.۴ $y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم . . . . . ۳۲۵
۴.۵ $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء . . . . . ۳۴۷
۴.۶ بہترین بنانا . . . . . ۳۷۱
۴.۷ خط بندی اور تفرقات . . . . . ۳۹۲
۴.۸ ترکیب نیوٹن . . . . . ۴۱۲

۵ تکمل ۴۲۳
۵.۱ غیر قطعی تکملات . . . . . ۴۲۳
۵.۲ تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی . . . . . ۴۳۴
۵.۳ تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق . . . . . ۴۴۸
۵.۴ اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ . . . . . ۴۵۹
۵.۵ ریمان مجموعے اور قطعی تکملات . . . . . ۴۷۵
۵.۶ خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ . . . . . ۵۰۰
۵.۷ بنیادی مسئلہ . . . . . ۵۱۵
۵.۸ قطعی تکمل میں بدل . . . . . ۵۳۳
۵.۹ اعدادی تکمل . . . . . ۵۳۹
۵.۱۰ قاعدہ ذوزنقہ . . . . . ۵۳۹

۶ تکمل کا استعمال ۵۵۷
۶.۱ منحنیات کے بیچ رقبہ . . . . . ۵۵۷
۶.۱.۱ تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد . . . . . ۵۶۱
۶.۲ ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش . . . . . ۵۷۱
۶.۳ اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا . . . . . ۵۷۸
۶.۴ نلکی چھلے . . . . . ۵۹۱
۶.۵ مستوی منحنیات کی لمبائیاں . . . . . ۶۰۳
۶.۶ سطح طواف کا رقبہ . . . . . ۶۱۲
۶.۷ معیار اثر اور مرکز کمیت . . . . . ۶۲۳
۶.۷.۱ وسطانی مرکز . . . . . ۶۳۴
۶.۸ کام . . . . . ۶۳۹
۶.۹ فشار سیال اور قوت سیال . . . . . ۶۵۲
۶.۱۰ بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال . . . . . ۶۶۰

۷ ماورائی تفاعل ۶۷۳
۷.۱ الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات . . . . . ۶۷۴
۷.۲ قدرتی لوگارتھم . . . . . ۶۹۰
۷.۳ قوت نمائی تفاعل . . . . . ۷۰۶
۷.۴ $a^x$ اور $\log_a x$ . . . . . ۷۱۹
۷.۵ افزائش اور تنزل . . . . . ۷۲۸

۷.۶ قاعدہ لھوپیٹال . . . . . ۷۴۰
۷.۷ اضافی شرح نمو . . . . . ۷۵۴
۷.۷.۱ ترتیبی اور ثنائی تلاش . . . . . ۷۵۹
۷.۸ الٹ تکونیاتی تفاعل . . . . . ۷۶۴
۷.۹ الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل . . . . . ۷۷۹
۷.۱۰ ہذلولی تفاعل . . . . . ۷۹۴
۷.۱۱ یک رتبی تفرقی مساوات . . . . . ۸۱۳
۷.۱۲ یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان . . . . . ۸۳۰

۸ تکمل کے طریقے ۸۳۹
۸.۱ تکمل کے بنیادی کلیات . . . . . ۸۳۹
۸.۲ تکمل بالحصص . . . . . ۸۵۳
۸.۲.۱ بار بار استعمال . . . . . ۸۵۷
۸.۳ جزوی کسر . . . . . ۸۶۶
۸.۴ تکونیاتی بدل . . . . . ۸۷۹
۸.۵ جدول تکمل اور کمپیوٹر . . . . . ۸۸۹
۸.۶ غیر مناسب تکمل . . . . . ۹۰۴

۹ لامتناہی تسلسل ۹۲۷
۹.۱ اعداد کی ترتیب کی حد . . . . . ۹۲۷
۹.۲ ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے . . . . . ۹۴۳
۹.۳ لامتناہی تسلسل . . . . . ۹۵۸
۹.۴ غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پرکھ . . . . . ۹۷۵
۹.۵ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ . . . . . ۹۸۵
۹.۶ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ . . . . . ۹۹۴
۹.۷ بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز . . . . . ۱۰۰۴
۹.۸ طاقتی تسلسل . . . . . ۱۰۱۷
۹.۹ ٹیلر اور مکلارن تسلسل . . . . . ۱۰۳۲
۹.۱۰ ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ خلل کے اندازے . . . . . ۱۰۴۱
۹.۱۱ طاقتی تسلسل کے استعمال . . . . . ۱۰۵۸

۱۰ مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد ۱۰۷۵
۱۰.۱ مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں . . . . . ۱۰۷۵
۱۰.۲ سنک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی . . . . . ۱۰۹۸
۱۰.۳ دو درجی مساوات اور گھومنا . . . . . ۱۱۰۶
۱۰.۴ مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول . . . . . ۱۱۱۸
۱۰.۵ احصاء اور مقدار معلوم منحنیات . . . . . ۱۱۳۳
۱۰.۶ قطبی محدد . . . . . ۱۱۴۶

۱۰.۷ قطبی محدد میں ترسیم . . . . . ۱۱۵۶
۱۰.۸ مخروط حصوں کے قطبی مساوات . . . . . ۱۱۶۸
۱۰.۸.۱ دائرے . . . . . ۱۱۶۹
۱۰.۹ قطبی محدد میں تکمل . . . . . ۱۱۸۲

۱۱ سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری ۱۱۹۵
۱۱.۱ مستوی میں سمتیات . . . . . ۱۱۹۵
۱۱.۲ کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات . . . . . ۱۲۱۰
۱۱.۲.۱ کرہ . . . . . ۱۲۱۷
۱۱.۳ ضرب نقطہ . . . . . ۱۲۲۵
۱۱.۳.۱ حساب . . . . . ۱۲۲۶
۱۱.۴ صلیبی ضرب . . . . . ۱۲۳۸
۱۱.۵ فضا میں خطوط اور مستویات . . . . . ۱۲۵۲
۱۱.۶ نلکی اور مربع سطحیں . . . . . ۱۲۶۴
۱۱.۷ نلکی اور کروی محدد . . . . . ۱۲۸۰

۱۲ سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت ۱۲۹۱
۱۲.۱ سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات . . . . . ۱۲۹۱
۱۲.۲ گولا کی حرکت کی نمونہ کشی . . . . . ۱۳۱۲
۱۲.۳ لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ . . . . . ۱۳۲۰
۱۲.۴ انحنا، مروڑ اور $TNB$ چھوکٹ . . . . . ۱۳۲۷
۱۲.۵ فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت . . . . . ۱۳۴۸

۱۳ کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات ۱۳۶۳
۱۳.۱ کثیر متغیرات کے تفاعل . . . . . ۱۳۶۳
۱۳.۲ حد اور استمرار . . . . . ۱۳۷۶
۱۳.۳ جزوی تفرقات . . . . . ۱۳۸۹
۱۳.۴ تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات . . . . . ۱۴۰۵
۱۳.۵ زنجیری قاعدہ . . . . . ۱۴۲۰
۱۳.۶ پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات . . . . . ۱۴۳۳
۱۳.۷ رخی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں . . . . . ۱۴۳۹
۱۳.۸ انتہائی قیمتیں اور نقاط زین . . . . . ۱۴۵۸
۱۳.۸.۱ نتیجہ . . . . . ۱۴۶۶
۱۳.۹ لیگرینج ضاربین . . . . . ۱۴۷۴
۱۳.۱۰ کلیہ ٹیلر . . . . . ۱۴۸۹

۱۴ تکمل بالکثرت ۱۴۹۷
۱۴.۱ دوہرا تکملات . . . . . ۱۴۹۷
۱۴.۲ رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت . . . . . ۱۵۱۵

۱۴.۳ دوہرا تکملات کا قطبی روپ . . . . . ۱۵۲۹
۱۴.۴ کارتیسی محدد میں تہرا تکمل . . . . . ۱۵۳۹
۱۴.۵ تعین بعد میں کمیت اور معیار اثر . . . . . ۱۵۵۲
۱۴.۶ نلکی اور کروی محدد میں تہرا تکمل . . . . . ۱۵۶۱
۱۴.۷ تکملات بالکثرت میں بدل . . . . . ۱۵۷۸

۱۵ سمتی میدان میں تکمل ۱۵۹۳
۱۵.۱ لکیری تکمل . . . . . ۱۵۹۳
۱۵.۲ سمتی میدان، کام، دائری بہاؤ، اور بہاؤ . . . . . ۱۶۰۳
۱۵.۳ راہ سے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان . . . . . ۱۶۱۷
۱۵.۴ مستوی میں مسئلہ گرین . . . . . ۱۶۲۹
۱۵.۵ سطحی رقبہ اور سطحی تکملات . . . . . ۱۶۵۰
۱۵.۶ مقدار معلوم سطحیں . . . . . ۱۶۶۸
۱۵.۷ سوالات . . . . . ۱۶۷۹
۱۵.۸ مسئلہ سٹوکس . . . . . ۱۶۸۵
۱۵.۹ سوالات . . . . . ۱۶۹۷
۱۵.۹.۱ نظریہ اور مثالیں . . . . . ۱۷۰۰
۱۵.۱۰ مسئلہ پھیلاؤ اور ایک مربوط نظریہ . . . . . ۱۷۰۱
۱۵.۱۱ سوالات . . . . . ۱۷۱۴
۱۵.۱۲ مشق . . . . . ۱۷۲۰
۱۵.۱۳ اضافی اور اعلیٰ مشقیں . . . . . ۱۷۲۸

دیباچہ ۱۵۹۳

میری پہلی کتاب کا دیباچہ ۱۵۹۳

جوابات ۱۷۳۵

ا ریاضیاتی ترغیب ۱۷۵۷

ب تحدیدی مسائل کے ثبوت ۱۷۶۳

ج مخلوط اعداد ۱۷۶۹

د سمسن کا ایک تہائی کا قاعدہ ۱۷۸۳

ھ کوشی کا مسئلہ اوسط قیمت اور قاعدہ لھوپیٹال ے کا پائیدار روپ ۱۷۸۵

و کثیر استعمال حدود ۱۷۸۹

ز جزئیتی تقسیم کا قانون برائے سمتی ضرب ۱۷۹۱

ح مقاطع اور کریمر کا قاعدہ ۱۷۹۳

ط مسئلہ یولر اور مسئلہ بڑھوتری ۱۸۰۳

ي تکملات کا مختصر جدول ۱۸۰۹

ضمیمے ۱۸۲۰

# باب ۱۵

# سمتی میدان میں تکمل

**ایک جائزہ** اس باب کا موضوع سمتی میدان میں تکمل ہے۔ اس باب کی ریاضی کو برقناطیسیت کے خواص بیان کرنے کے لئے، تاروں میں حرارت کے بہاؤ پر غور، اور مصنوعی سیارہ کو مدار میں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

## ۱۵.۱ لکیری تکمل

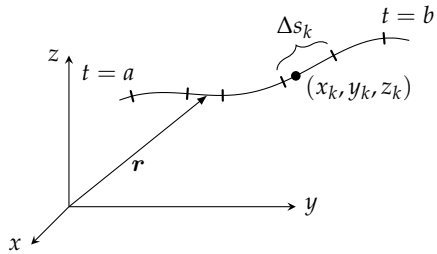
جب فضا میں تفاعل $f(x,y,z)$ کے دائرہ کار سے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k},\ a \leq t \leq b$ گزرے تب اس منحنی کے ساتھ چلتے ہوئے $f$ کی قیمتیں مرکب تفاعل $f(g(t),h(t),k(t))$ دیگا۔ نقطہ $a$ سے $b$ تک لمبائی قوس کے لحاظ سے اس مرکب تفاعل کے تکمل کو قوس کے ساتھ $f$ کا **لکیری تکمل**[1] کہتے ہیں۔ تین بعدی جیومیٹری کے باوجود، لکیری تکمل حقیقی اعداد کے وقفہ پر حقیقی قیمت تفاعل کا سادہ تفاعل ہو گا۔

لکیری تکمل کی اہمیت اس کے استعمال میں ہے۔ ان تکملات کی مدد سے ہم متغیر قوتوں کی فضا میں راہ پر کام اور قوس کے ساتھ یا سرحد پار کرتی سیال کی شرح بہاؤ کا حساب کرتے ہیں۔

### تعریفات اور علامتیت

فرض کریں تفاعل $f(x,y,z)$ کے دائرہ کار میں منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k},\ a \leq t \leq b$ پائی جاتی ہے۔ ہم اس منحنی کی، متناہی تعداد کی قوسچوں میں، خانہ بندی کرتے ہیں (شکل ۱۵.۱)۔ ایک علامتی قوسچہ کی لمبائی $\Delta s_k$ ہو گی۔ ہم ہر قوسچہ پر ایک نقطہ

[1] line integral




شکل ۱۵.۱: منحنی $\boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ کو $t = a$ اور $t = b$ کے بیچ قوسچوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ایک علامتی قوسچہ کی لمبائی $\Delta s_k$ ہے۔

$(x_k, y_k, z_k)$ منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k \tag{۱۵.۱}$$

اگر $f$ استمراری ہو اور $g$ ، $h$ ، اور $k$ کے اول تفرق استمراری ہوں تب جیسے جیسے $n$ بڑھایا جائے، $\Delta s_k$ صفر تک پہنچے گی اور مساوات ۱۵.۱ کا مجموعہ ایک حد کو پہنچے گا۔ ہم اس حد کو **$a$ تا $b$ اس قوس پر $f$ کا تکمل** کہتے ہیں۔ قوس کو $C$ سے ظاہر کرتے ہوئے اس تکمل کو علامتی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s \qquad \text{“}C \text{ پر } f \text{ کا تکمل”} \tag{۱۵.۲}$$

## ہموار منحنیات پر تکمل کی قیمت کا حصول

اگر وقفہ $a \le t \le b$ پر $\boldsymbol{r}(t)$ ہموار ہو ($\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ استمراری ہو اور کبھی بھی $\mathbf{0}$ نہ ہو) تب ہم $\mathrm{d}s$ کو بیان کرنے کے لئے درج ذیل مساوات استعمال کر سکتے ہیں چونکہ اس سے $\mathrm{d}s = \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right|\mathrm{d}t$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$s(t) = \int_a^t \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right|\mathrm{d}\tau \qquad t_0 = a \text{ حصہ ۱۲.۳ کی مساوات ۱۲.۴ میں}$$

اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ایسی صورت میں ہم درج ذیل طریقہ سے $C$ پر $f$ کے تکمل کی قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t))\left|\boldsymbol{v}(t)\right|\mathrm{d}t$$

ہم جس مقدار معلوم روپ کو بھی استعمال کریں، جب تک زیر استعمال مقدار معلوم روپ ہموار ہو، یہ کلیہ ہمیں تکمل کی قیمت دیگا۔

## لکیری تکمل کی قیمت کا حصول

منحنی $C$ پر استمراری تفاعل $f$ کا تکمل لینے کے لئے

ا. $C$ کی مقدار معلوم روپ تلاش کریں:

$$\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b$$

ب. درج ذیل تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(g(t),h(t),k(t))\left|\boldsymbol{v}(t)\right|\mathrm{d}t \tag{۱۵.۳}$$

دھیان رہے کہ مستقل تفاعل $f = 1$ کی صورت میں مذکورہ بالا تکمل $C$ کی لمبائی دیگا۔

مثال ۱۵.۱: مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک قطع پر $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$ تکمل کریں (شکل ۱۵.۲)۔

حل: ہم ذہن میں آنے والا سادہ ترین مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1$$

جس کی اجزاء کے اول تفرق استمراری ہیں اور $\left|\boldsymbol{v}(t)\right| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ کبھی بھی $\mathbf{0}$ نہیں ہو سکتا ہے لہٰذا یہ مقدار معلوم روپ ہموار ہے۔ یوں $C$ پر $f$ کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

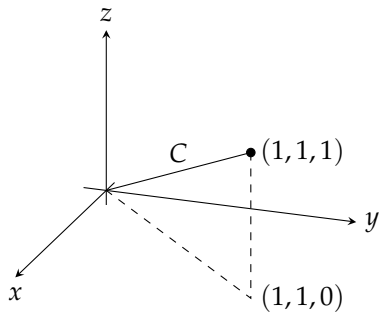
$$\begin{aligned}\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 f(t,t,t)(\sqrt{3})\,\mathrm{d}t \qquad \text{مساوات ۱۵.۳}\\ &= \int_0^1 (t - 3t^2 + t)\sqrt{3}\,\mathrm{d}t\\ &= \sqrt{3}\int_0^1 (2t - 3t^2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\left[t^2 - t^3\right]_0^1 = 0\end{aligned}$$

□

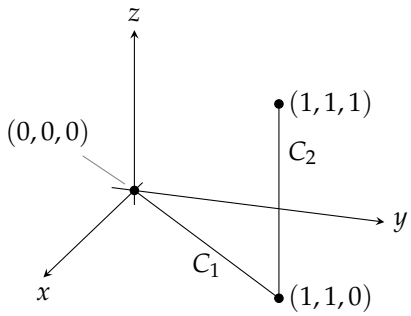
## جمع پذیری

اگر متناہی تعداد کی منحنیات $C_1$ ، $C_2$ ، ۔ ۔ ۔ ، $C_n$ کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر منحنی $C$ حاصل کی جائے تب $C$ پر تفاعل کا تکمل ان منحنیات پر تفاعل کے تکملات کا مجموعہ ہو گا:

$$\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_{C_1} f\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f\,\mathrm{d}s + \cdots + \int_{C_n} f\,\mathrm{d}s \tag{۱۵.۴}$$




شکل ۱۵.۲: تکمل کی راہ (مثال ۱۵.۱)۔




شکل ۱۵.۳: تکمل کی راہ (مثال ۱۵.۲)۔

مثال ۱۵.۲: مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک راہ $C_1$ اور $C_2$ پر چل کر پہنچا جاتا ہے (شکل ۱۵.۳)۔ یوں $C$ ان کا اشتراک $C_1 \cup C_2$ ہو گا۔ تفاعل $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$ کے تکمل کی قیمت $C_1 \cup C_2$ پر تلاش کریں۔

حل: ہم $C_1$ اور $C_2$ کے لئے، ذہن میں آنے والے سادہ ترین، مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} C_1: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 1; |\boldsymbol{v}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ C_2: &\quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1; |\boldsymbol{v}| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = 1 \end{aligned}$$

ان مقدار معلوم روپ کے ساتھ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_{C_1 \cup C_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \int_{C_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 f(t,t,0)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(1,1,t)(1)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2 + 0)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1 - 3 + t)(1)\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}\Big[\frac{t^2}{2} - t^3\Big]_0^1 + \Big[\frac{t^2}{2} - 2t\Big]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} \end{aligned} \qquad \text{مساوات ۱۵.۴}$$

□

یہاں مثال ۱۵.۱ اور مثال ۱۵.۲ کے نتائج پر غور کرتے ہیں۔ اول، دیکھیں کہ موزوں منحنی کے اجزاء $f$ میں پر کرتے ہی $t$ کے لحاظ سے ایک سادہ تکمل حاصل ہوتا ہے۔ دوم، $C_1 \cup C_2$ پر $f$ کا تکمل لینے کے لئے $C_1$ اور $C_2$ پر $f$ کے علیحدہ علیحدہ تکملات لے کر نتائج کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ سوم، مثال ۱۵.۱ میں $C$ اور مثال ۱۵.۲ میں $C_1 \cup C_2$ پر تکمل کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف تھے۔ عموماً تفاعل کے لئے دو نقطوں کے بیچ مختلف راہ پر تکملات کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف ہوں گے۔ البتہ بعض تفاعل کے لئے تکمل کی قیمت پر راہ کا کوئی اثر نہیں ہوتا ہے۔

### کمیت اور معیار اثر کا حساب

ہم اسپرنگ اور تار کو فضا میں ہموار منحنی پر استمراری کمیتی کثافت $\delta(x, y, z)$ کی تقسیم تصور کرتے ہیں۔ یوں اسپرنگ یا تار کی کمیت، مرکز کمیت، اور ان کے معیار اثر اور رداس دوار کا حساب درج ذیل کلیات سے کیا جائے گا۔ یہی کلیات باریک (پتلی) تار کے لئے بھی کارآمد ہوں گے۔

کمیت: $M = \int_S \delta(x, y, z)\, \mathrm{d}s$

محددی مستویات کے لحاظ سے اول معیار اثر:

$$M_{yz} = \int_C x\delta\, \mathrm{d}s, \quad M_{xz} = \int_C y\delta\, \mathrm{d}s, \quad M_{xy} = \int_C z\delta\, \mathrm{d}s$$

مرکز کمیت کے محدد:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

معیار اثر:

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\delta\, \mathrm{d}s \qquad I_y = \int_C (x^2 + z^2)\delta\, \mathrm{d}s$$
$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\delta\, \mathrm{d}s \qquad I_L = \int_C r^2\delta\, \mathrm{d}s$$

جہاں لکیر $L$ سے نقطہ $(x, y, z)$ تک فاصلہ $r(x, y, z)$ ہے۔

لکیر $L$ کے لحاظ سے رداس دور: $R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$

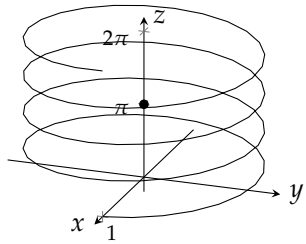
مثال ۱۵.۳: ایک اسپرنگ درج ذیل پیچدار منحنی کے ساتھ ساتھ پایا جاتا ہے (شکل ۱۵.۴)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

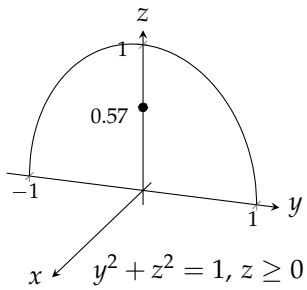
اس اسپرنگ کی کثافت مستقل تفاعل $\delta = 1$ ہے۔ اس اسپرنگ کی کمیت اور مرکز کمیت اور محور $z$ کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

حل: ہم اسپرنگ کا خاکہ بناتے ہیں۔ تشاکلی کی بنا اس کا مرکز کمیت محور $z$ پر نقطہ $(0, 0, \pi)$ پر پایا جائے گا۔ باقی حساب کے لئے ہم $|\boldsymbol{v}(t)|$ تلاش کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{v}(t)| &= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \\ &= \sqrt{(-4\sin 4t)^2 + (4\cos 4t)^2 + 1} = \sqrt{17}\end{aligned}$$




شکل ۱۵.۴: اسپرنگ برائے مثال ۱۵.۳




شکل ۱۵.۵: محراب کا مرکز کمیت (مثال ۱۵.۴)۔

اب مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
M &= \int_{\text{پیچدار}} \delta \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (1)\sqrt{17}\, \mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{17} \\
I_z &= \int_{\text{پیچدار}} (x^2 + y^2)\delta \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (\cos^2 4t + \sin^2 4t)(1)(\sqrt{17})\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{17}\, \mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{17} \\
R_z &= \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{\frac{2\pi\sqrt{17}}{2\pi\sqrt{17}}} = 1
\end{aligned}
$$

دھیان رہے کہ محور $z$ کے لحاظ سے رداس دوار عین اس بیلن کے رداس جتنا ہے جس پر اسپرنگ لپیٹا گیا ہے۔ □

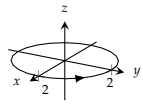
مثال ۱۵.۴: مستوی $yz$ میں نصف دائرہ $y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$ پر ایک دبلا پتلا محراب پایا جاتا ہے (شکل ۱۵.۵)۔ محراب کے نقطہ $(x, y, z)$ پر کثافت $\delta(x, y, z) = 2 - z$ ہے۔ محراب کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

حل: چونکہ یہ محراب مستوی $yz$ میں پایا جاتا ہے اور محور $z$ کے لحاظ سے اس کی کمیتی تقسیم دونوں اطراف یکساں ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ اور $\bar{y} = 0$ ہوں گے۔ ہم دائرہ کی مقدار معلوم روپ

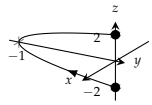
$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{j} + (\sin t)\boldsymbol{k},\ 0 \leq t \leq \pi$$

لکھتے ہوئے $\bar{z}$ دریافت کرتے ہیں۔ اس مقدار معلوم روپ کے لئے

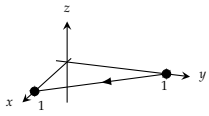
$$|\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$



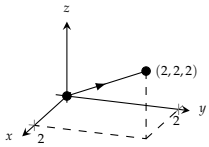

شکل ۱۵.۶



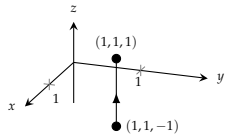

شکل ۱۵.۷



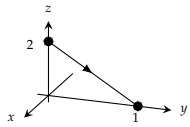

شکل ۱۵.۸



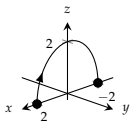

شکل ۱۵.۹



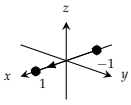

شکل ۱۵.۱۰




شکل ۱۵.۱۱




شکل ۱۵.۱۲




شکل ۱۵.۱۳

ہو گا۔ یوں مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
M &= \int_C \delta \, \mathrm{d}s = \int_C (2-z) \, \mathrm{d}s = \int_0^\pi (2-\sin t) \, \mathrm{d}t = 2\pi - 2 \\
M_{xy} &= \int_0^C z\delta \, \mathrm{d}s = \int_C z(2-z) \, \mathrm{d}s = \int_0^\pi (\sin t)(2-\sin t) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (2\sin t - \sin^2 t) \, \mathrm{d}t = \frac{8-\pi}{2} \\
\bar{z} &= \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8-\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi - 2} \approx 0.57
\end{aligned}
$$

یوں مرکز کمیت تقریباً $(0, 0, 0.57)$ ہو گا۔ □

سوالات

## سمتی مساوات کی ترسیمات

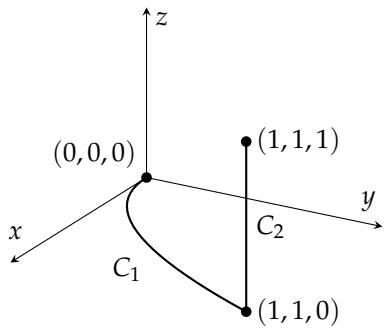
سوال ۱۵.۱ تا سوال ۱۵.۸ میں دی گئی مساوات کی مطابقتی ترسیم شکل ۱۵.۶ تا شکل ۱۵.۱۳ میں تلاش کریں۔ سوال ۱۵.۱: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (1-t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 1$

سوال ۱۵.۲: $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad -1 \le t \le 1$

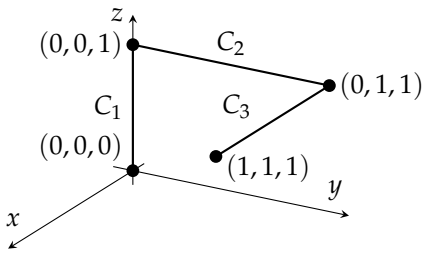
سوال ۱۵.۳: $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t)\boldsymbol{i} + (2\sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۵.۴: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i}, \quad -1 \le t \le 1$

سوال ۱۵.۵: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2$




شکل ۱۵.۱۴: راہ برائے تکمل (سوال ۱۵.۱۵)




شکل ۱۵.۱۵: ٹکڑوں میں خطی راہ برائے سوال ۱۵.۱۶

سوال ۱۵.۶: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{j} + (2-2t)\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1$

سوال ۱۵.۷: $\boldsymbol{r}(t) = (t^2-1)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}, \quad -1 \le t \le 1$

سوال ۱۵.۸: $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t)\boldsymbol{i} + 2\sin t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

## فضائی منحنیات پر تکمل کی قیمت کا حصول

سوال ۱۵.۹: تکمل $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s$ کی قیمت حاصل کریں جہاں $C$ نقطہ $(0,1,0)$ تا $(1,0,0)$ خط مستقیم $x = t$ ، $y = (1-t)$ ، $z = 0$ ہے۔

سوال ۱۵.۱۰: تکمل $\int_C (x-y+z-2)\,\mathrm{d}s$ کی قیمت حاصل کریں جہاں $C$ نقطہ $(0,1,1)$ تا $(1,0,1)$ خط مستقیم $x = t$ ، $y = (1-t)$ ، $z = 1$ ہے۔

سوال ۱۵.۱۱: تکمل $\int_C (xy+y+z)\,\mathrm{d}s$ کی قیمت منحنی $\boldsymbol{r}(t) = 2t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + (2-2t)\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$ پر حاصل کریں۔

سوال ۱۵.۱۲: منحنی $\boldsymbol{r}(t) = 4\cos t\boldsymbol{i} + 4\sin t\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k},\ -2\pi \le t \le 2\pi$ پر تکمل $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$ کی قیمت حاصل کریں۔

سوال ۱۵.۱۳: تفاعل $f(x,y,z) = x+y+z$ کا تکمل $(1,2,3)$ تا $(0,-1,1)$ خط مستقیم قطع پر تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۴: تفاعل $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{3}}{x^2+y^2+z^2}$ کا تکمل منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 1 \le t \le \infty$ پر تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۵: تفاعل $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} - z^2$ کا تکمل $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ درج ذیل راہ پر چلتے ہوئے تلاش کریں (شکل ۱۵.۱۴)۔

$$C_1: \quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 1$$
$$C_2: \quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1$$

سوال۱۵.۱۶: تفاعل $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} - z^2$ کا تکمل $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ درج ذیل راہ پر چلتے ہوئے تلاش کریں (شکل ۱۵.۱۵)۔

$$\begin{aligned} C_1: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1 \\ C_2: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1 \\ C_3: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1 \end{aligned}$$

سوال۱۵.۱۷: تفاعل $f(x,y,z) = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$ کا تکمل راہ $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 < a \le t \le b$ پر تلاش کریں۔

سوال۱۵.۱۸: تفاعل $f(x,y,z) = -\sqrt{x^2+z^2}$ کا تکمل درج ذیل دائری راہ پر تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

## مسطح منحنیات پر لکیری تکملات

سوال۱۵.۱۹ تا سوال ۱۵.۲۲ میں $f$ کا تکمل دی گئی منحنی پر تلاش کریں۔

سوال۱۵.۱۹: $f(x,y) = \frac{x^3}{y}, \quad C: y = \frac{x^2}{2}, \quad 0 \le x \le 2$

سوال۱۵.۲۰: $f(x,y) = \frac{x+y^2}{\sqrt{1+x^2}}, \quad C: y = \frac{x^2}{2},$ $(0,0)$ سے $(1,\frac{1}{2})$ تک

سوال۱۵.۲۱: $f(x,y) = x + y, \quad C: x^2 + y^2 = 4,$ ربع اول میں $(2,0)$ سے $(0,2)$ تک

سوال۱۵.۲۲: $f(x,y) = x^2 - y, \quad C: x^2 + y^2 = 4,$ ربع اول میں $(0,2)$ سے $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ تک

## کمیت اور معیار اثر

سوال۱۵.۲۳: ایک پتلی تار جس کی کثافت $\delta = \frac{3}{2}t$ ہے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (t^2-1)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ اس تار کی کمیت تلاش کریں۔

سوال۱۵.۲۴: ایک پتلی تار جس کی کثافت $\delta(x,y,z) = 15\sqrt{y+2}$ ہے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (t^2-1)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k},\ -1 \le t \le 1$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ اس تار کا مرکز کمیت تلاش کریں۔ اس منحنی کو ترسیم کر کے اس پر مرکز کمیت دکھائیں۔

سوال۱۵.۲۵: منحنی $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{2}t\boldsymbol{j} + (4-t^2)\boldsymbol{k}\ 0 \le t \le 1$ کے ساتھ ساتھ ایک پتلی تار پائی جانے والی تار کی کثافت (ا) $\delta = 3t$، (ب) $\delta = 1$ ہے۔ اس تار کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال۱۵.۲۶: ایک پتلی تار جس کی کثافت $\delta = 3\sqrt{5+t}$ ہے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}t^{3/2}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ اس تار کی کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۷: مستوی $xy$ میں دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ پر مستقل کثافت $\delta$ کی ایک پتلی تار پائی جاتی ہے۔ محور $z$ کے لحاظ سے اس تار کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۸: مستوی $yz$ میں لکیری قطع $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{j} + (2-2t)\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$ پر مستقل کثافت کی ایک پتلی تار پائی جاتی ہے۔ تینوں محددی محوروں کے لحاظ سے اس تار کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۹: مستقل کثافت $\delta$ کی ایک پتلی تار پیچدار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ (ا) $I_z$ اور $R_z$ تلاش کریں۔ (ب) فرض کریں مستقل کثافت $\delta$ کی ایک دوسری پتلی تار، جس کی لمبائی دگنی ہے ($0 \le t \le 4\pi$)، اسی منحنی $\boldsymbol{r}(t)$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ بغیر حل کیے بتلائیں کہ آیا اس تار کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار پہلی تار سے مختلف ہوں گے؟ اب انہیں حل کر کے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال ۱۵.۳۰: منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + (\frac{2\sqrt{2}}{3})t^{3/2}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$ کے ساتھ ساتھ مستقل کثافت $\delta = 1$ کی ایک پتلی تار پائی جاتی ہے۔ اس کی $\bar{z}$ ، $I_z$ اور $R_z$ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۱: $I_z$ اور $R_z$ مثال ۱۵.۴ کی محراب کے لئے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۲: ایک پتلی تار جس کی کثافت $\delta = \frac{1}{t+1}$ ہے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\boldsymbol{j} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ اس تار کا مرکز کمیت اور محددی محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

## کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۱۵.۳۳ تا سوال ۱۵.۳۶ میں کمپیوٹر پر درج ذیل اقدام سے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

ا. راہ $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ کے لئے $\mathrm{d}s = |\boldsymbol{v}(t)|\,\mathrm{d}t$ دریافت کریں۔

ب. متکمل $f(g(t), h(t), k(t))|\boldsymbol{v}(t)|$ کو مقدار معلوم $t$ کا تفاعل لکھیں۔

ج. تکمل $\int_C f\,\mathrm{d}s$ کی قیمت مساوات ۱۵.۳ کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال ۱۵.۳۳: $f(x,y,z) = \sqrt{1 + 30x^2 + 10y};\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k},\quad 0 \le t \le 2$

سوال ۱۵.۳۴: $f(x,y,z) = \sqrt{1 + x^3 + 5y^3};\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}t^2\boldsymbol{j} + \sqrt{t}\boldsymbol{k},\quad 0 \le t \le 2$

سوال ۱۵.۳۵: $f(x,y,z) = x\sqrt{y} - 3z^2;\ \boldsymbol{r}(t) = \cos 2t\boldsymbol{i} + \sin 2t\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k},\quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۵.۳۶: $f(x,y,z) = \left(1 + \frac{9}{4}z^{1/3}\right)^{1/4};\ \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t) = \cos 2t\boldsymbol{i} + \sin 2t\boldsymbol{j} + t^{5/2}\boldsymbol{k},\quad 0 \le t \le 2\pi$

## ۱۵.۲ سمتی میدان، کام، دائری بہاؤ، اور بہاؤ

ان طبیعی مظہر کے مطالعہ کے دوران، جنہیں سمتیات سے ظاہر کیا جاتا ہے، بند راہ پر تکملات کی بجائے سمتی میدان میں راہ پر تکملات استعمال کیے جاتے ہیں۔ متغیر قوت کے خلاف ایک مقام سے دوسری مقام کسی جسم کو منتقل کرنے (جیسا قوت ثقل کے خلاف خلاء میں سواری بھیجنے) یا سمتی میدان میں ایک جسم کو کسی راہ پر حرکت دینے (جیسا مسرع کسی ذرے کی توانائی بڑھاتا ہو) کے لئے درکار کام اس طرح کے تکملات سے حاصل کیے جاتے ہیں۔ منحنیات عبور کرتا ہوا سیال کے بہاؤ کی شرح بھی لکیری تکملات سے حاصل کی جاتی ہے۔

### سمتی میدان

مستوی یا فضا میں دائرہ کار پر **سمتی میدان**[۲] سے مراد ایسا تفاعل ہے جو دائرہ کار کے ہر نقطہ کو ایک سمتیہ مختص کرتا ہو۔ سہ ابعادی سمتیات کے میدان کا ایک کلیہ درج ذیل ہو سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

استمراری جزوی تفاعل $M$ ، $N$ ، $P$ کی صورت میں یہ میدان استمراری ہو گا، قابل تفرق $M$ ، $N$ ، $P$ کی صورت میں یہ میدان قابل تفرق ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ دو ابعادی سمتیات کے میدان کا ایک کلیہ درج ذیل ہو سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{F}(x,y) = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$$

گول انداز کی گزرگاہ کے مستوی میں گزرگاہ کے ہر نقطہ کے ساتھ گول انداز کا سمتی رفتاری سمتیہ منسلک کرنے سے گزرگاہ کی ہمراہ دو ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ غیر سمتی تفاعل کے ہم قد سطح کے ہر نقطہ کے ساتھ تفاعل کا سمتیہ ڈھلوان منسلک کرنے سے سطح پر سہ ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ متحرک سیال کے ہر نقطہ کے ساتھ سمتی رفتاری سمتیہ منسلک کرنے سے فضا میں اس خطہ پر سہ ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ بشمول ان کے چند میدان شکل ۱۵.۱۶ تا شکل ۱۵.۲۰ میں دکھائے گئے ہیں جہاں کچھ میدانوں کے کلیات بھی دیے گئے ہیں۔

وہ میدان ترسیم کرنے کے لئے جن کے کلیات معلوم ہوں، ہم دائرہ کار میں چند نقطے منتخب کر کے ان نقطوں پر نقطوں کے ساتھ منسلک سمتیات کا خاکہ بناتے ہیں۔ دھیان رہے کہ روایتی طور پر اس نقطہ پر، جہاں سمتی تفاعل کی قیمت حاصل کی گئی ہو، سمتیہ ظاہر کرنے والی تیر دار لکیر کی دم رکھی جاتی ہے نا کہ سر۔ تعین گر سمتیات (باب ۱۲) کے لئے ایسا نہیں کیا جاتا ہے بلکہ تعین گر سمتیات کو ظاہر کرنے والی تیر دار لکیر کی دم کو مبدا پر رکھا جاتا ہے جبکہ اس کا سر سیارہ یا گول انداز کے مقام پر رکھا جاتا ہے۔

### میدان ڈھلوان

تعریف: قابل تفرق تفاعل $f(x,y,z)$ کے **میدان ڈھلوان**[۳] سے مراد سمتیات ڈھلوان

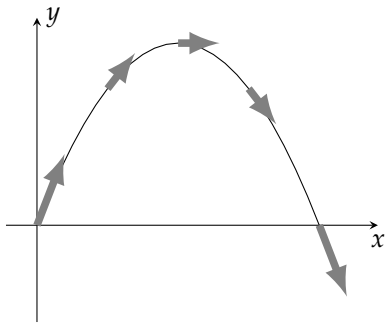
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

کا میدان ہے۔

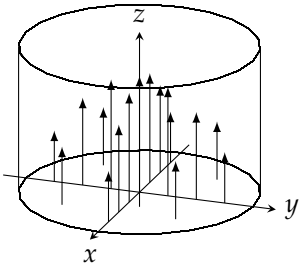
□

---

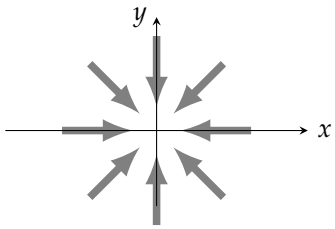
[۲] vector field
[۳] gradient field



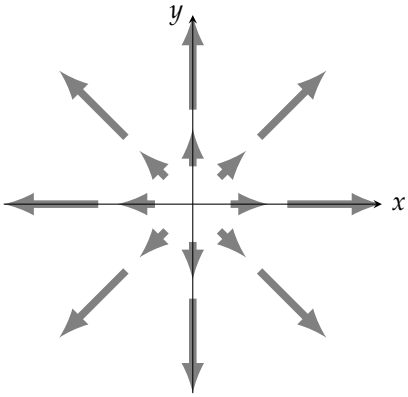

شکل ۱۵.۱۶: گول انداز کے سمتی رفتاری سمتیات $\boldsymbol{v}(t)$ سمتی میدان دیتے ہیں۔



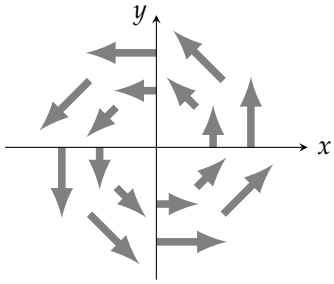

شکل ۱۵.۱۷: لمبی نالی میں سیال کی حرکت۔ سمتیات $\boldsymbol{v} = (a^2 - \rho^2)\boldsymbol{k}$ کی دم مستوی $xy$ میں اور سر قطع مکافی $z = a^2 - \rho^2$ پر پائے جاتے ہیں۔



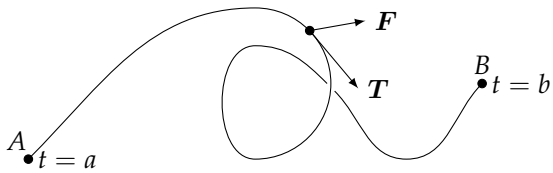

شکل ۱۵.۱۸: ثقلی میدان $\boldsymbol{F} = -\frac{GM(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ میں سمتیات۔




شکل ۱۵.۱۹: مستوی میں مختلف نقاط پر رداسی میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ جہاں تیر دار لکیر کی دم اس نقطہ پر رکھی جاتی ہے جہاں کا سمتیہ درکار ہو۔




شکل ۱۵.۲۰: اکائی سمتیات $\boldsymbol{F} = \frac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ کا چکری میدان۔




شکل ۱۵.۲۱: ہموار راہ $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ پر $A$ سے $B$ تک استمراری قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام $t = a$ تا $t = b$ راہ کی ہمراہ $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ کا تکمل ہوگا۔

مثال ۱۵.۱: تفاعل $f(x, y, z) = xyz$ کا میدان ڈھلوان تلاش کریں۔

حل: تفاعل $f$ کے میدان ڈھلوان سے مراد میدان $\boldsymbol{F} = \nabla f = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ ہے۔ □

ہم دیکھیں گے کہ انجینئری، ریاضیات، طبیعیات، وغیرہ میں میدان ڈھلوان خصوصی اہمیت رکھتے ہیں۔

## فضا میں منحنی کی ہمراہ قوت کا کیا ہوا کام

فرض کریں فضا کے ایک خطہ میں سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M(x, y, z)\boldsymbol{i} + N(x, y, z)\boldsymbol{j} + P(x, y, z)\boldsymbol{k}$ ایک قوت کو ظاہر کرتا ہے (یہ قوت ثقل یا کسی قسم کی برقناطیسی قوت ہو سکتی ہے) جبکہ اس خطہ میں درج ذیل ایک ہموار منحنی ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b$$

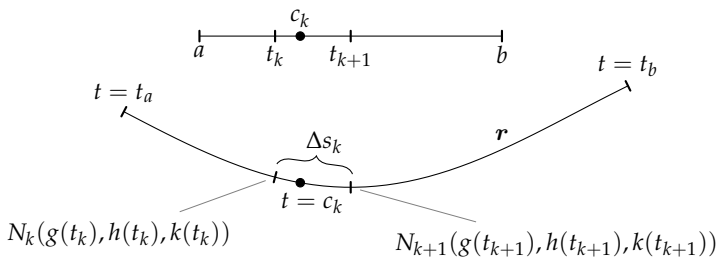
ایسی صورت میں منحنی پر $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$، اکائی مماسی سمتیہ کے رخ $\boldsymbol{F}$ کا غیر سمتی جزو، کے تکمل کو $a$ تا $b$ $\boldsymbol{F}$ کا کیا ہوا کام کہتے ہیں (شکل ۱۵.۲۱)۔

تعریف: ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ پر $a$ تا $b$ قوت $\boldsymbol{F} = M(x, y, z)\boldsymbol{i} + N(x, y, z)\boldsymbol{j} + P(x, y, z)\boldsymbol{k}$ کا کیا ہوا کام $W$ درج ذیل ہوگا۔

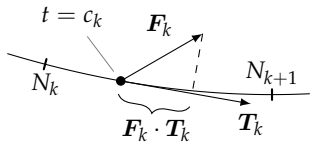
$$W = \int_{t=1}^{t=b} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\, \mathrm{d}s \tag{۱۵.۱}$$

□

مثبت محور $x$ رخ مقدار $F(x)$ کی استمراری قوت کے کام کا کلیہ $W = \int_a^b F(x)\, \mathrm{d}x$ حصہ ۶.۸ میں اخذ کیا گیا۔ مساوات ۱۵.۱ کے حصول کے دلائل وہی ہیں۔ ہم منحنی کو چھوٹے قطعات میں تقسیم کر کے، ہر قطع پر کام کو تخمیناً مستقل قوت ضرب فاصلہ لے کر، نتائج کے مجموعہ کو منحنی پر کام کی تخمینی قیمت حاصل کرتے ہیں، اور قطعات کی تعداد زیادہ سے زیادہ کر کے ہر قطع کی لمبائی کم سے کم کرتے ہوئے، تخمینی مجموعات کی تحدیدی قیمت کو کام کی تعریف لیتے ہیں۔ یہ جاننے کے لئے کہ تحدیدی تکمل کی قیمت کیا ہوگی، ہم قطع $[a, b]$ کی خانہ بندی عمومی طرح کر کے ہر ذیلی قطع $[t_k, t_{k+1}]$ پر نقطہ $c_k$ منتخب کرتے ہیں۔ قطع $I$ کی خانہ بندی منحنی کی خانہ بندی تعین (پیدا) کرتی ہے، جہاں تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کا سر نقطہ $N_k$ پر ہوگا اور ذیلی قطع




شکل ۱۵.۲۲: مقدار معلوم وقفہ $a \leq t \leq b$ کی ہر خانہ بندی منحنی $\boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ کی خانہ بندی پیدا کرتی ہے۔




شکل ۱۵.۲۳: گزشتہ شکل کے قطع $N_kN_{k+1}$ کو بڑا کر کے $t = c_k$ کے مطابق نقطہ پر اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ اور قوت سمتیہ $\boldsymbol{F}$ دکھائے گئے ہیں۔

$N_kN_{k+1}$ کی لمبائی $\Delta s_k$ ہو گی (شکل ۱۵.۲۲)۔ اگر منحنی پر $t = c_k$ کے مطابق نقطہ پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت $\boldsymbol{F}_k$ اور منحنی کا مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}_k$ ہو تب $t = c_k$ پر $\boldsymbol{T}$ کے رخ $\boldsymbol{F}$ کا غیر سمتی جزو $\boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{T}_k$ ہو گا (شکل ۱۵.۲۳)۔ منحنی کے قطع $N_kN_{k+1}$ کی ہمراہ $\boldsymbol{F}$ کا کیا ہوا کام تخمیناً درج ذیل ہو گا۔

$$(\text{حرکت کے رخ قوت کا جزو}) \times (\text{طے فاصلہ}) = \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{T}_k \Delta s_k$$

منحنی کی ہمراہ $t = a$ تا $t = b$ کام تخمیناً درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{T}_k \Delta s_k$$

جیسا جیسا $[a, b]$ کے خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب سے قریب ہوتا ہے، ویسے ویسے منحنی کی پیدا کردہ خانہ بندی کا معیار بھی صفر کے قریب سے قریب ہوتا ہے اور مجموعہ درج ذیل لکیری تکمل کو پہنچتا ہے۔

$$\int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} \, \mathrm{ds}$$

اس تکمل سے حاصل عدد کی علامت، $t$ بڑھانے سے حاصل پر چلنے کے، رخ پر منحصر ہو گی۔ منحنی پر چلنے کا رخ الٹ کرنے سے $\boldsymbol{T}$ کا رخ الٹ ہو گا جس کی بنا $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ اور تکمل کی علامت الٹ ہو گی۔

### علامتیت اور قیمت کا حصول

تکمل کام (مساوات ۱۵.۱) کو لکھنے کے چھ طریقے درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s && \text{تعریف}\\
&= \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} && \text{مختصر تفریقی روپ}\\
&= \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t && \text{پھیلا کر } \mathrm{d}t \text{ شامل کیا گیا ہے}\\
&= \int_{t=a}^{t=b} \left(M\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}+N\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+P\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t && \text{مقدار معلوم } t \text{ اور سمتی رفتار } \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \text{ اجا گر کیے گئے}\\
&= \int_{t=a}^{t=b} \left(M\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+N\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+P\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t && \text{جزوی تفاعل اجا گر کیے گئے}\\
&= \int_{t=a}^{t=b} M\,\mathrm{d}x+N\,\mathrm{d}y+P\,\mathrm{d}z && \mathrm{d}t \text{ منسوخ کر کے عمومی روپ حاصل کی گئی}
\end{aligned}
\tag{۱۵.۲}
$$

مساوات ۱۵.۲ کے کلیات کی قیمتوں کا حصول، بظاہر مختلف روپ کے باوجود، ایک ہی طرح کیا جاتا ہے۔

## تکمل کام کی قیمت کا حصول

تکمل کام کی قیمت حاصل کرنے کے اقدام درج ذیل ہیں۔

۱. منحنی پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت مقدار معلوم $t$ کے تفاعل کی روپ میں لکھیں۔

۲. تفرق $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

۳. $\boldsymbol{F}$ اور $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کا غیر سمتی ضرب لیں۔

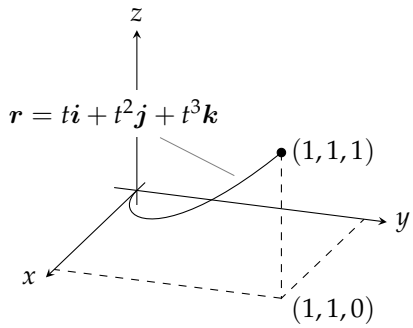
۴. $t=a$ سے $t=b$ تک تکمل کریں۔

مثال ۱۵.۲: منحنی $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k},\ 0\le t\le 1$ کی ہمراہ $(0,0,0)$ سے $(1,1,1)$ تک $\boldsymbol{F}=(y-x^2)\boldsymbol{i}+(z-y^2)\boldsymbol{j}+(x-z^2)\boldsymbol{k}$ کا کام تلاش کریں (شکل ۱۵.۲۴)۔

حل:

پہلا قدم: منحنی پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت کا حصول۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= (y-x^2)\boldsymbol{i}+(z-y^2)\boldsymbol{j}+(x-z^2)\boldsymbol{k}\\
&= (\underbrace{t^2-t^2}_{0})\boldsymbol{i}+(t^3-t^4)\boldsymbol{j}+(t-t^6)\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$




شکل ۱۵.۲۴: منحنی برائے مثال ۱۵.۲

دوسرا قدم: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}$$

تیسرا قدم: $\boldsymbol{F}$ اور $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کا غیر سمتی ضرب۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= [(t^3 - t^4)\boldsymbol{j} + (t - t^6)\boldsymbol{k}] \cdot (\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}) \\ &= (t^3 - t^4)(2t) + (t - t^6)(3t^2) = 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8\end{aligned}$$

چوتھا قدم: $t = 0$ تا $t = 1$ تکمل۔

$$\begin{aligned}\text{کام} = W &= \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{6}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{9}t^9\right]_0^1 = \frac{29}{60}\end{aligned}$$

□

### تکمل ہمراہ بہاؤ اور دائری بہاؤ

فرض کریں $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ میدان قوت کی بجائے فضا کے ایک خطہ (مثلاً پانی سے چلنے والے جنریٹر کا چرخی خانہ یا سمندری طاس) میں بہتا ہوا سیال کے سمتی رفتاری میدان کو ظاہر کرتا ہے۔ ایسی صورت میں منحنی کی ہمراہ $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ کا تکمل، منحنی کی ہمراہ سیال کا بہاؤ دے گا۔

تعریف: استمراری سمتی رفتاری میدان کے دائرہ کار میں ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k},\ a \le t \le b$ پر $a$

سے $b$ تک $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}$ کا تکمل، $t=a$ سے $t=b$ تک منحنی کا ہمراہ بہاؤ دے گا:

$$\text{ہمراہ بہاؤ} = \int_a^b \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s \tag{۱۵.۳}$$

اس تکمل کو **تکمل ہمراہ بہاؤ**[4] کہتے ہیں۔ بند منحنی کی صورت میں اس بہاؤ کو منحنی کے گرد منحنی کی ہمراہ **دائری بہاؤ**[5] کہتے ہیں۔

□

تکمل ہمراہ بہاؤ کی قیمت بھی تکمل کام کی قیمت کی طرح حاصل کی جاتی ہے۔

مثال ۱۵.۳: ایک سیال کا سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ ہے۔ درج ذیل پیچدار منحنی کے ساتھ ساتھ اس کی ہمراہ بہاؤ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le \tfrac{\pi}{2}$$

حل:

پہلا قدم: منحنی پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت تلاش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k} = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{k}$$

دوسرا قدم: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

تیسرا قدم: غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= (\cos t)(-\sin t) + (t)(\cos t) + (\sin t)(1)\\ &= -\sin t\cos t + t\cos t + \sin t\end{aligned}$$

چوتھا قدم: $t=a$ تا $t-b$ تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\text{بہاؤ} &= \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}(-\sin t\cos t + t\cos t + \sin t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{\cos^2 t}{2} + \sin t\right]_0^{\pi/2} = \left(0+\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}+0\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

---

[4] flow integral
[5] circulation

مثال ۱۵.۴: میدان $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ کا دائرہ $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ کی ہمراہ دائرہ کے گرد دائری بہاؤ تلاش کریں۔

حل:

۱. دائرہ پر $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} = (\cos t - \sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}$ ہو گا۔

۲. $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}$

۳. $\boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -\sin t \cos t + \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1}$

۴. دائری بہاؤ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\text{دائری بہاؤ} &= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1 - \sin t \cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t - \frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi\end{aligned}$$

□

## مستوی منحنی کو عبور کرتا ہوا بہاؤ

مستوی $xy$ میں ہموار بند منحنی C میں محیط خطہ سے سیال کے اخراج و دخول کی شرح C پر $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ (منحنی کے بیرونی عمودی اکائی سمتیہ کے رخ رفتاری میدان کے غیر سمتی جزو) کے لکیری تکمل سے حاصل ہو گی۔ اس تکمل کی قیمت کو C عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ (**یا نفاذ**) کہتے ہیں۔ برقی یا مقناطیسی میدان $\boldsymbol{F}$ کی صورت میں بھی اس تکمل کی قیمت کو C عبور کرتا ہوا بہاؤ یا نفاذ کہیں گے اگرچہ ان میں کوئی بہتا ہوا سیال نہیں پایا جاتا ہے۔

تعریف: استمراری سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ کے دائرہ کار میں ہموار مسطح بند منحنی C جس کا بیرونی رخ عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہو کی صورت میں C کو عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کا **بہاؤ**[۶] درج ذیل تکمل دے گا۔

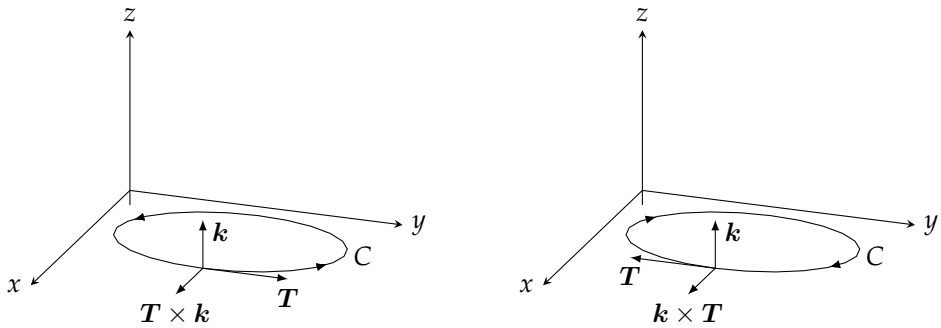
$$\text{C عبور کرتا ہوا } \boldsymbol{F} \text{ کا بہاؤ} = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s \tag{۱۵.۴}$$

□

منحنی کو عبور کرتے ہوئے بہاؤ (نفاذ) اور دائری بہاؤ میں فرق سے واقف ہونا ضروری ہے۔ منحنی C کو عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کے بہاؤ سے مراد منحنی پر $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ (منحنی کے بیرونی عمود کے رخ $\boldsymbol{F}$ کے غیر سمتی جزو) کا تکمل ہے۔ بند منحنی C کے گرد $\boldsymbol{F}$ کے دائری بہاؤ سے مراد منحنی پر $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ (منحنی کے اکائی مماس کے رخ $\boldsymbol{F}$ کے غیر سمتی جزو) کا تکمل ہے۔ منحنی عبور کرتا ہوا بہاؤ سے مراد $\boldsymbol{F}$ کے عمودی جزو کا تکمل جبکہ دائری بہاؤ سے مراد $\boldsymbol{F}$ کے مماسی جزو کا تکمل ہے۔ روزمرہ زندگی میں منحنی کو عبور کرتے ہوئے بہاؤ یعنی نفاذ کو مختصراً **بہاؤ** کہا جاتا ہے۔

---

[۶] flux




(ا) گھڑی وار حرکت کے لئے $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{T}$ باہر رخ ہو گا۔ (ب) خلاف گھڑی حرکت کے لئے $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k}$ باہر رخ ہو گا۔

شکل ۱۵.۲۵: ہموار منحنی $C$، جو بڑھتے $t$ کی صورت میں مستوی $xy$ میں خلاف گھڑی حرکت کرتی ہو، کا باہر رخ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k}$ ہو گا۔

مساوات ۱۵.۴ کے تکمل کی قیمت معلوم کرنے کی خاطر ہم مقدار معلوم روپ

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad a \leq t \leq b$$

سے ابتدا کرتے ہیں۔ یوں $t$ کی قیمت $a$ سے $b$ تک بڑھانے سے منحنی پر ایک سر سے دوسرے سر تک ٹھیک ایک بار چلا جائے گا۔ منحنی کے اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ اور کارتیسی محددی نظام کے اکائی سمتیہ $\boldsymbol{k}$ کا سمتی ضرب منحنی کا بیرونی اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ دے گا۔ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ایسے دو سمتی ضرب $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{T}$ پائے جاتے ہیں۔ ان میں کونسا بیرونی اکائی سمتیہ دے گا؟ مقدار معلوم $t$ بڑھانے سے $C$ پر چلنے کے رخ پر اس کا جواب منحصر ہو گا۔ اگر منحنی پر حرکت گھڑی وار ہو تب $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{T}$ بیرونی اکائی سمتیہ دے گا جبکہ خلاف گھڑی حرکت کی صورت میں $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k}$ بیرونی اکائی سمتیہ دے گا (شکل ۱۵.۲۵)۔ عموماً خلاف گھڑی حرکت کے لئے کلیات اخذ کیے جاتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k}$ ہو گا۔ اگرچہ مساوات ۱۵.۴ میں دیے گئے تکمل کی قیمت منحنی پر چلنے کے رخ پر منحصر نہیں ہے، ہم خلاف گھڑی حرکت تصور کرتے ہوئے مساوات ۱۵.۴ کو حل کرنے کے کلیات اخذ کرتے ہیں۔

ارکان کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}\right) \times \boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}$$

اگر $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ ہو تب

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = M(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - N(x,y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

لہٰذا

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int_C \left(M\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - N\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s$$

ہو گا جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \oint_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x \tag{۱۵.۵}$$

یاد رہے کہ $C$ پر خلاف گھڑی چلتے ہوئے بند تکمل $\oint$ کی قیمت حاصل کی جائے گی۔اس تکمل کے حصول کی خاطر ہم $M$ ، $\mathrm{d}y$ ، $N$ اور $\mathrm{d}x$ کو مقدار معلوم $t$ کی روپ میں لکھ کر $t = a$ تا $t = b$ تکمل لیتے ہیں۔ہمیں بہاؤ(نفاذ) تلاش کرنے کے لئے $\boldsymbol{n}$ یا $\mathrm{d}s$ جاننے کی ضرورت پیش نہیں آتی ہے۔منحنی $C$ پر خلاف گھڑی ٹھیک ایک بار چلتے ہوئے کوئی بھی ہموار مقدار معلوم روپ $x = g(t)$ ، $y = h(t)$ ،جہاں $a \le t \le b$ ہو،استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مثال ۱۵.۵: مستوی $xy$ میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کو پار کرتا ہوا $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ کا بہاؤ(نفاذ) تلاش کریں۔

حل: مقدار معلوم روپ $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ دائرے پر ٹھیک ایک بار چلتا ہے لہٰذا مساوات ۱۵.۵ حل کرنے کی خاطر درج ذیل لیے جا سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} M &= x - y = \cos t - \sin t, & \mathrm{d}y &= \mathrm{d}(\sin t) = \cos t\,\mathrm{d}t \\ N &= x = \cos t, & \mathrm{d}x &= \mathrm{d}(\cos t) = -\sin t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} &= \int_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin t\cos t + \cos t\sin t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{مساوات ۱۵.۵} \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi \end{aligned}$$

دائرہ کو عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ $\pi$ ہے۔چونکہ نتیجہ مثبت ہے لہٰذا دائرے سے کل بہاؤ کا رخ باہر کو ہو گا۔دائرے میں دخول کی صورت میں نتیجہ منفی ہوتا۔ □

## سوالات

### سمتی میدان اور میدان ڈھلوان

سوال ۱.۱۵ تا سوال ۱۵.۴ میں تفاعل کے میدان ڈھلوان تلاش کریں۔

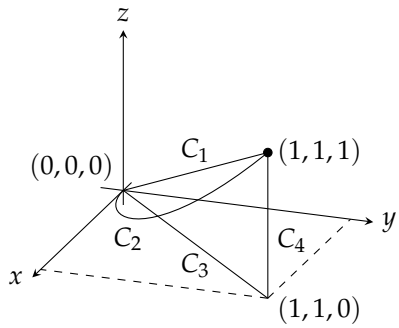
سوال ۱۵.۱: $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

سوال ۱۵.۲: $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

سوال ۱۵.۳: $g(x,y,z) = e^z - \ln\sqrt{x^2+y^2}$

سوال ۱۵.۴: $g(x,y,z) = xy + yz + xz$

سوال ۱۵.۵: مستوی میں سمتی میدان کا ایسا کلیہ $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ پیش کریں کہ $\boldsymbol{F}$ کی مقدار مبدا سے $(x,y)$ تک فاصلہ کے مربع کا بالعکس متناسب ہو اور $\boldsymbol{F}$ کا رخ مبدا کے رخ ہو۔(یہ میدان مبدا پر غیر معین ہے۔)




شکل ۱۵.۲۶

سوال ۱۵.۶: مستوی میں میدان کا ایسا کلیہ $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ پیش کریں کہ $(0,0)$ پر $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ ہو جبکہ کسی دوسرے نقطہ $(a,b)$ پر $|\boldsymbol{F}| = \sqrt{a^2+b^2}$ اور دائرہ $x^2+y^2=a^2+b^2$ کو میدان گھڑی وار مماسی ہو۔

## کام

سوال ۱۵.۷ تا سوال ۱۵.۱۲ میں $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام درج ذیل راہوں پر تلاش کریں (شکل ۱۵.۲۶)۔

ا. سیدھی لکیر $C_1:\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$

ب. قوسی راہ $C_2:\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^4\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$

ج. راہ $C_3 \cup C_4$ جو $(0,0,0)$ تا $(1,1,0)$ اور $(1,1,0)$ تا $(1,1,1)$ خطی قطعات پر مشتمل ہے۔

سوال ۱۵.۷: $\boldsymbol{F} = 3y\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۸: $\boldsymbol{F} = \frac{1}{1+x^2}\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۹: $\boldsymbol{F} = \sqrt{z}\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + \sqrt{y}\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۱۰: $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۱۱: $\boldsymbol{F} = (3x^2 - 3x)\boldsymbol{i} + 3z\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۱۲: $\boldsymbol{F} = (y+z)\boldsymbol{i} + (z+x)\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۱۳ تا سوال ۱۵.۱۶ میں بڑھتے $t$ رخ $\boldsymbol{F}$ کا کام تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۳: $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - yz\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$

سوال ۱۵.۱۴: $\boldsymbol{F} = 2y\boldsymbol{i} + 3x\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k},$
$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + \frac{t}{6}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۵.۱۵: $\boldsymbol{F} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۵.۱۶: $\boldsymbol{F} = 6z\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + 12x\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + \frac{t}{6}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

## لکیری تکمل اور مستوی میں سمتی میدان

سوال ۱۵.۱۷: نقطہ $(-1,1)$ سے $(2,4)$ تک منحنی $y = x^2$ پر $\int_C xy\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۸: ایک مثلث جس کے راس $(0,0)$ ، $(1,0)$ اور $(0,1)$ ہیں پر $\int_C (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$ کی قیمت خلاف گھڑی چلتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۹: نقطہ $(4,2)$ سے $(1,-1)$ تک منحنی $x = y^2$ پر چلتے ہوئے سمتی میدان $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ کے لئے $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۰: نقطہ $(1,0)$ سے $(0,1)$ تک اکائی دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر خلاف گھڑی چلتے ہوئے سمتی میدان $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ کے لئے $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۱: نقطہ $(1,1)$ سے $(2,3)$ تک سیدھی لکیر پر قوت $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + (y-x)\boldsymbol{j}$ کا کام دریافت کریں۔

سوال ۱۵.۲۲: تفاعل $f(x,y) = (x+y)^2$ کی ڈھلوان کا کام دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ پر خلاف گھڑی نقطہ $(2,0)$ سے چلتے ہوئے ایک چکر کے لئے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۳: میدان $\boldsymbol{F}_1 = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{F}_2 = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ کی دائری بہاؤ درج ذیل منحنیات کی ہمراہ تلاش کریں اور ان منحنیات کو عبور کرتا ہوا بہاؤ تلاش کریں۔

ا. دائرہ $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$

ب. ترخیم $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (4\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۵.۲۴: دائرہ $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ کو عبور کرتا ہوا بہاؤ درج ذیل میدان کے لئے حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{F}_1 = 2x\boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{F}_2 = 2x\boldsymbol{i} + (x-y)\boldsymbol{j}$$

سوال ۱۵.۲۵ تا سوال ۱۵.۲۸ میں نصف دائری قوس $\boldsymbol{r}_1(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le \pi$ اور قطع $\boldsymbol{r}_2(t) = t\boldsymbol{i},\ -a \le t \le a$ پر مشتمل نصف دائری راہ کی ہمراہ بہاؤ اور اس کو عبور کرتا ہوا بہاؤ، میدان $\boldsymbol{F}$ کے لئے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۵: $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۲۶: $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۲۷: $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۲۸: $\boldsymbol{F} = -y^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۲۹: سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{F} = (x+y)\boldsymbol{i} - (x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ کے بہاؤ کے تکمل کی قیمت درج ذیل راہ کی ہمراہ مستوی $xy$ میں نقطہ $(1,0)$ سے $(-1,0)$ تک تلاش کریں۔

ا. دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کا بالائی نصف حصہ۔

ب. نقطہ $(1,0)$ تا $(-1,0)$ لکیری قطع۔

ج. نقطہ $(1,0)$ تا $(0,-1)$ اور اس کے بعد $(0,-1)$ سے $(-1,0)$ تک لکیری قطع۔

سوال ۱۵.۳۰: ایک مثلث، جس کے راس $(1,0)$ ، $(0,1)$ اور $(-1,0)$ ہیں، سے خارجی بہاؤ سوال ۱۵.۲۹ کے میدان کے لئے تلاش کریں۔

## مستوی میں میدان کی تلاش اور خاکہ

سوال ۱۵.۳۱: چکری میدان $\boldsymbol{F} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}$ بمع افقی اور انتصابی اجزاء کا خاکہ دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ کے مختلف نقطوں پر بنائیں۔

سوال ۱۵.۳۲: رداسی میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ بمع افقی اور انتصابی اجزاء کا خاکہ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کے مختلف نقطوں پر بنائیں۔

سوال ۱۵.۳۳: (ا) مستوی $xy$ میں میدان $\boldsymbol{G} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ تلاش کریں جس کی قیمت نقطہ $(a,b) \neq (0,0)$ پر $\sqrt{a^2+b^2}$ ، رخ خلاف گھڑی اور دائرہ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ کو مماسی ہو۔ نقطہ $(0,0)$ پر میدان غیر معین ہے۔ (ب) میدان $\boldsymbol{G}$ اور چکری میدان $\boldsymbol{F} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}$ کے بیچ کیا تعلق پایا جاتا ہے؟

سوال ۱۵.۳۴: (ا) مستوی $xy$ میں ایسا میدان $\boldsymbol{G} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ تلاش کریں جو $(a,b) \neq (0,0)$ پر دائرہ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ کو مماسی ہو، اس کی مطلق قیمت اکائی ہو اور اس کا رخ گھڑی وار ہو۔ (ب) میدان $\boldsymbol{G}$ اور چکری میدان $\boldsymbol{F} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}$ کے بیچ کیا تعلق پایا جاتا ہے؟

سوال ۱۵.۳۵: مستوی $xy$ میں ایسا میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ تلاش کریں جو $(x,y) \neq (0,0)$ پر مبدا کے رخ ہو اور اس کی مطلق قیمت اکائی ہو۔ نقطہ $(0,0)$ پر میدان غیر معین ہے۔

سوال ۱۵.۳۶: مستوی $xy$ میں ایسا میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ تلاش کریں جو $(x,y) \neq (0,0)$ پر مبدا کے رخ ہو اور $|\boldsymbol{F}|$ کی قیمت (ا) مبدا سے $(x,y)$ تک فاصلہ کے برابر ہو، (ب) مبدا سے $(x,y)$ تک فاصلہ کے بالعکس متناسب ہو۔ نقطہ $(0,0)$ پر میدان غیر معین ہے۔

## فضا میں راہ کی ہمراہ تکمل بہاؤ

سوال ۱۵.۳۷ تا سوال ۱۵.۴۰ میں فضا کے کسی خطہ میں سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{F}$ سیال کے بہاؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ دی گئی منحنی کی ہمراہ بہاؤ، بڑھتے $t$ کے رخ تلاش کریں۔

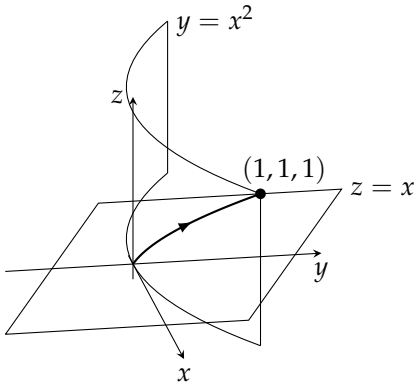
سوال ۱۵.۳۷: $\boldsymbol{F} = -4xy\boldsymbol{i} + 8y\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},\ 0 \leq t \leq 2$

سوال ۱۵.۳۸: $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = 3t\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k},\ 0 \leq t \leq 1$

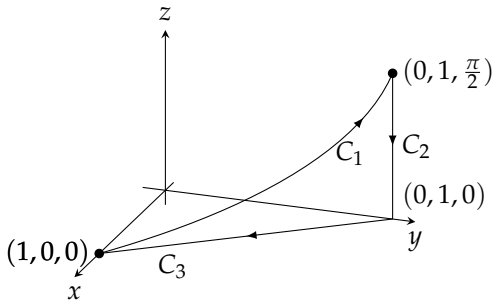
سوال ۱۵.۳۹: $\boldsymbol{F} = (x-z)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{k},\ 0 \leq t \leq \pi$

سوال ۱۵.۴۰: $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},$
$\boldsymbol{r}(t) = (-2\cos t)\boldsymbol{i} + (2\sin t)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k},\ 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال ۱۵.۴۱: بڑھتے $t$ رخ چلتے ہوئے درج ذیل تین عدد بند راہ پر $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{j} + 2y\boldsymbol{k}$ کا دائری بہاؤ تلاش کریں (شکل ۱۵.۲۷)۔




شکل ۱۵.۲۸




شکل ۱۵.۲۷

$$
\begin{aligned}
C_1: &\quad \boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, && 0 \le t \le \tfrac{\pi}{2}\\
C_2: &\quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{j} + \tfrac{\pi}{2}(1-t)\boldsymbol{k}, && 0 \le t \le 1\\
C_3: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (1-t)\boldsymbol{j}, && 0 \le t \le 1
\end{aligned}
$$

سوال ۱۵.۴۲: مستوی $2x + 3y - z = 0$ اور بیلن $x^2 + y^2 = 12$ ایک دوسرے کو ترخیم $C$ پر قطع کرتے ہیں۔ بغیر کوئی تکمل حل کیے دکھائیں کہ میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ کا $C$ پر دونوں رخ چلتے ہوئے دائری بہاؤ صفر کے برابر ہے۔

سوال ۱۵.۴۳: فضا میں ایک سیال کے بہاؤ کا سمتی رفتار کا میدان $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - yz\boldsymbol{k}$ ہے۔ بیلن $y = x^2$ اور مستوی $z = x$ کی تقاطع لکیر کی ہمراہ نقطہ $(0,0,0)$ سے $(1,1,1)$ تک بہاؤ تلاش کریں (شکل ۱۵.۲۸)۔ (اشارہ: $t = x$ کو مقدار معلوم لیں۔)

سوال ۱۵.۴۴: میدان $\boldsymbol{F} = \nabla(xy^2z^3)$ کا بہاؤ درج ذیل کی ہمراہ تلاش کریں۔

ا. اوپر سے دیکھ کر گھڑی وار ایک بار چکر لگاتے ہوئے سوال ۱۵.۴۲ میں دی گئی $C$ کی ہمراہ۔

ب. نقطہ $(1,1,1)$ تا $(2,1,-1)$ لکیری قطع کی ہمراہ۔

## نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۵.۴۵: فرض کریں $a \le t \le b$ کے لئے $f(t)$ قابل تفرق اور مثبت ہے۔ مزید $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i}$ ہے جبکہ راہ $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + f(t)\boldsymbol{j},\ a \le t \le b$ کو $C$ ظاہر کرتی ہے۔ کیا محور $t$، لکیر $t = a$، $t = b$ اور ترسیم $f$ کے بیچ رقبہ اور تکمل کام $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ کا ایک دوسرے کے ساتھ کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۵.۴۶: ایک ذرہ نقطہ $(a, f(a))$ سے $(b, f(b))$ تک ہموار منحنی $y = f(x)$ پر حرکت کرتا ہے۔ محرک قوت ہر نقطہ پر مبدا

سے دوری کے رخ ہے جبکہ اس کی مطلق قیمت مستقل $k$ ہے۔ دکھائیں کہ یہ قوت درج ذیل کام کرتی ہے۔

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s = k\left[\sqrt{b^2+(f(b))^2}-\sqrt{a^2+(f(a))^2}\right]$$

**کمپیوٹر کا استعمال** سوال ۱۵.۴۷ تا سوال ۱۵.۵۲ میں کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کرتے ہوئے دی گئی راہ پر قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام تلاش کریں۔

ا. راہ $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i}+h(t)\boldsymbol{j}+k(t)\boldsymbol{k}$ کے لئے $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ تلاش کریں۔

ب. راہ کی ہمراہ قوت $\boldsymbol{F}$ کی قیمت تلاش کریں۔

ج. تکمل $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۷: $\boldsymbol{F} = xy^6\boldsymbol{i}+3x(xy^5+2)\boldsymbol{j};\ \boldsymbol{r}(t) = 2\cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j},\ 0\le t\le 2\pi$

سوال ۱۵.۴۸: $\boldsymbol{F} = \frac{3}{1+x^2}\boldsymbol{i}+\frac{2}{1+y^2}aj;\ \boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j},\ 0\le t\le \pi$

سوال ۱۵.۴۹: $\boldsymbol{F} = (y+yz\cos xyz)\boldsymbol{i}+(x^2+xz\cos xyz)\boldsymbol{j}+(z+xy\cos xyz)\boldsymbol{k};$
$\boldsymbol{r}(t) = 2\cos t\boldsymbol{i}+3\sin t\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ 0\le t\le 2\pi$

سوال ۱۵.۵۰: $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+ze^x\boldsymbol{k};$
$\boldsymbol{r}(t) = -t\boldsymbol{i}+\sqrt{t}\boldsymbol{j}+3t\boldsymbol{k},\ 0\le t\le 4$

سوال ۱۵.۵۱: $\boldsymbol{F} = (2y+\sin x)\boldsymbol{i}+(z^2+\frac{1}{3}\cos y)\boldsymbol{j}+x^4\boldsymbol{k};$
$\boldsymbol{r}(t) = \sin t\boldsymbol{i}+\cos t\boldsymbol{j}+\sin 2t\boldsymbol{k},\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

سوال ۱۵.۵۲: $\boldsymbol{F} = x^2y\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}x^3\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k};$
$\boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j}+(2\sin^2 t-1)\boldsymbol{k},\ 0\le t\le 2\pi$

## ۱۵.۳ راہ سے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان

ثقلی اور برقی میدان میں کمیت یا بار کو ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ منتقل کرنے کے لئے درکار کام صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر منحصر ہوتا ہے نا کہ منتقلی کی راہ پر۔ اس حصہ میں تکمل کام کی راہ سے آزادی کے تصور پر غور کیا جائے گا اور ایسے میدانوں کی خواص پر غور کیا جائے گا جن میں تکمل کام کی قیمت راہ کے تابع نہیں ہوتا۔

### راہ سے آزادی

فضا میں کھلا خطہ $D$ پر معین میدان $\boldsymbol{F}$ ایک ذرہ کو $D$ میں نقطہ $A$ سے نقطہ $B$ منتقل کرتا ہے۔ عموماً تکمل کام $\int \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت منتقلی کی راہ پر منحصر ہو گی، البتہ ایسے میدان پائے جاتے ہیں جن میں تکمل کام کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر منحصر ہو گی نا کہ منتقلی کی راہ پر۔ اگر $D$ میں تمام $A$ اور $B$ کے لئے ایسا ہو تب یہ میدان بقائی میدان کہلائے گا اور ہم کہیں گے کہ $D$ میں $\int \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ راہ سے آزاد ہے اور $D$ پر $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے۔

تعریف: فضا میں کھلا خطہ $D$ پر $\boldsymbol{F}$ کو ایک معین میدان لیتے ہوئے تصور کریں کہ $D$ میں ہر دو نقطوں $A$ اور $B$ کے بیچ ہر ممکنہ راہ پر تکمل کام $\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت ایک جیسی ہے۔ تب تکمل $\int \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ خطہ $D$ میں **راہ سے آزاد**[۷] ہو گا اور میدان $\boldsymbol{F}$ خطہ $D$ پر **بقائی**[۸] ہو گا۔

□

عملی زندگی میں عموماً میدان $\boldsymbol{F}$ صرف اور صرف اس صورت بقائی ہو گا جب $D$ پر $\boldsymbol{F} = \nabla f$ ہو جہاں $f$ ایک غیر سمتی تفاعل ہے۔ ایسی صورت میں تفاعل $f$ کو $\boldsymbol{F}$ کا مخفی قوہ تفاعل کہتے ہیں۔

تعریف: اگر $D$ پر میدان $\boldsymbol{F}$ معین ہو اور $\boldsymbol{F} = \nabla f$ ہو جہاں $f$ خطہ $D$ پر ایک غیر سمتی تفاعل ہو تب $f$ کو $\boldsymbol{F}$ کا **مخفی قوہ تفاعل**[۹] کہتے ہیں۔

□

برقی مخفی قوہ ایک غیر سمتی تفاعل ہے جس کا میدان ڈھلوان ایک برقی میدان ہوتا ہے۔ ثقلی مخفی قوہ ایک غیر سمتی تفاعل ہے جس کا میدان ڈھلوان ایک ثقلی میدان ہوتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ جیسا ہم اب دیکھیں گے، میدان $\boldsymbol{F}$ کا مخفی قوہ تفاعل $f$ جاننے کے بعد $\boldsymbol{F}$ کی دائرہ کار میں تمام تکملات کام کی قیمتیں درج ذیل سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔

$$\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B \nabla f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(B) - f(A) \tag{۱۵.۱}$$

اگر آپ واحد متغیر کے تفرق $f'$ کی طرح $\nabla f$ کو متعدد متغیرات کے تفاعل کے لئے فرض کریں تب مساوات ۱.۱۵ کو احصاء کے بنیادی کلیہ

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

کا مطابقتی سمتی احصاء کا کلیہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

بقائی میدان کی دیگر قابل ذکر خواص پر، آگے چلتے ہوئے ساتھ ساتھ، غور کیا جائے گا۔ مثلاً، $D$ پر بقائی $\boldsymbol{F}$ کی صورت میں $D$ میں ہر بند راہ پر تکمل کام صفر ہو گا۔ مساوات ۱.۱۵ اور اس کی مضمرات کی درستگی برقرار رکھنے کی خاطر ہمیں اس مساوات میں مستعمل منحنی، میدان، اور دائرہ کار پر شرائط مسلط کرنی ہوں گے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام منحنیات **ٹکڑوں میں ہموار**[۱۰] ہیں، یعنی، انہیں متناہی تعداد کی ہموار منحنیات کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر، حصہ ۱.۱۲ کی طرح، حاصل کیا گیا ہے۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{F}$ کے اجزاء کے یک رتبی استمراری تفرق پائے جاتے ہیں۔ استمرار کی اس شرح کے بعد $\boldsymbol{F} = \nabla f$ کی صورت میں مخفی قوہ تفاعل $f$ کے مدغم تفرق ایک دوسرے کے برابر ہوں گے، جو بقائی میدان $\boldsymbol{F}$ کے خواص پر غور کے دوران آفشاں انگیز ثابت ہو گا۔

---

[۷] path independent
[۸] conservative
[۹] potential function
[۱۰] piecewise smooth

ہم فضا میں $D$ کو ایک کھلا خطہ فرض کرتے ہیں۔ یوں $D$ میں ہر نقطہ ایک ایسے گیند کے مرکز پر پایا جائے گا جو مکمل طور پر $D$ میں پایا جاتا ہو۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ $D$ **تعلق (دار)**[1] خطہ ہے۔ کھلا خطہ میں تعلق دار سے مراد ایسا خطہ ہے، جس میں ہر دو نقطوں کو ایک ایسی مسلسل راہ سے جوڑا جا سکتا ہے جو مکمل طور پر اس خطہ میں پائی جاتی ہو۔

## بقائی میدان میں لکیری تکملات

بقائی میدان میں لکیری تکملات کی قیمتیں درج ذیل نتیجہ کی مدد سے باآسانی حاصل کی جا سکتی ہیں۔ اس نتیجہ کے تحت تکمل کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتام نقطوں پر منحصر ہو گی نا کہ منتقلی کی راہ پر۔

مسئلہ ۱: **لکیری تکملات کا بنیادی مسئلہ**

۱. فرض کریں فضا میں کھلے تعلق دار خطہ $D$ میں سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ کے اجزاء استمراری ہیں۔ تب صرف اور صرف اس صورت جب $D$ میں تمام نقاط $A$ اور $B$ کے لئے تکمل $\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت، $D$ کے اندر رہتے ہوئے $A$ اور $B$ کے بیچ تمام راہ سے آزاد ہو، ایسا قابل تفرق تفاعل $f$ موجود ہو گا جو درج ذیل پر پورا اترتا ہو۔

$$\boldsymbol{F} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

۲. اگر تکمل کی قیمت $A$ اور $B$ کے بیچ راہ سے آزاد ہو تب تکمل کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(B) - f(A)$$

ثبوت: **کہ $\boldsymbol{F} = \nabla f$ سے مراد تکمل کی قیمت کا راہ سے آزاد ہونا ہے**

فرض کریں $D$ میں $A$ اور $B$ دو نقطے ہیں اور $D$ میں $A$ سے $B$ تک ہموار راہ درج ذیل ہے۔

$$C: \quad \boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b$$

منحنی کی ہمراہ $t$ کے لحاظ سے $C$ قابل تفرق ہے اور درج ذیل ہو گا۔

زنجیری قاعدہ

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\ &= \nabla f\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right) = \nabla f\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{۱۵.۲}$$

---

[1] connected''

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{مساوات ۱۵.۲}$$
$$= f(g(t),h(t),k(t))\Big]_a^b = f(B)-f(A)$$

اس طرح تکمل کام کی قیمت $A$ اور $B$ پر $f$ کی قیمتوں پر منحصر ہو گی نا کہ ان کے بیچ راہ پر۔ یوں مسئلہ کے دوسرا جزو کے ساتھ ساتھ پہلا مضمر جزو بھی ثابت ہوتا ہے۔ ہم الٹ مضمر کا زیادہ پیچیدہ ثبوت پیش نہیں کرتے ہیں۔

□

مثال ۱۵.۱: نقاط $(-1,3,9)$ اور $(1,6,-4)$ کے بیچ ہموار منحنی $C$ پر چلتے ہوئے درج ذیل بقائی میدان کا کم تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k} = \nabla(xyz)$$

حل: $f(x,y,z) = xyz$ لیتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B \nabla f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{F} = \nabla f$$
$$= f(B)-f(A) \qquad \text{مسئلہ ۱ کا جزو دوم}$$
$$= xyz\big|_{(1,6,-4)} - xyz\big|_{(-1,3,9)}$$
$$= (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9)$$
$$= -24 + 27 = 3$$

□

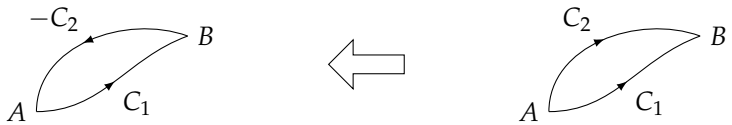
مسئلہ ۲: درج ذیل فقرے معادل ہیں۔

ا. خطہ $D$ میں ہر بند راہ پر $\int \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$ ہے۔

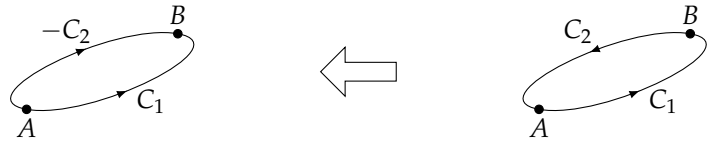
ب. خطہ $D$ پر میدان $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے۔

ثبوت: جزو-ا
ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ $D$ میں کسی بھی دو نقاط $A$ اور $B$ کے بیچ کسی بھی دو راہوں $C_1$ اور $C_2$ پر $\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کے تکملات کی قیمتیں ایک دوسرے جیسی ہوں گی۔ ہم شکل ۱۵.۲۹ میں $C_2$ کا رخ الٹ کر کے $B$ سے $A$ تک راہ کو $-C_2$ لکھتے ہیں۔ راہ $C_1$ اور راہ $-C_2$ مل کر بند راہ $C$ دیتے ہیں۔ اب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_{C_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{-C_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$




شکل ۱۵.۲۹: دو نقطوں کے بیچ دو راہ میں سے ایک راہ کا رخ تبدیل کرتے ہوئے بند راہ حاصل کی جا سکتی ہے۔




شکل ۱۵.۳۰: بند راہ پر نقاط $A$ اور $B$ کی صورت میں ایک طرف راہ کا رخ تبدیل کر کے نقاط کے بیچ دو راہ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

یوں $C_1$ اور $C_2$ پر تکمل کی قیمتیں ایک دوسرے جیسی ہیں۔

□

ثبوت: جزو-ب

ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ ہر بند راہ $C$ پر $\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کا تکمل صفر ہے۔ ہم $C$ پر کسی دو نقطوں $A$ اور $B$ کا انتخاب کر کے $C$ کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں: نقطہ $A$ سے $B$ تک ٹکڑے کو $C_1$ اور نقطہ $B$ سے $A$ تک ٹکڑے کو $C_2$ لیتے ہوئے خلاف گھڑی تکمل درج ذیل ہو گا (شکل ۱۵.۳۰)۔

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_B^A \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

□

مسئلہ ۱ اور مسئلہ ۲ کے نتائج کو یکجا کرتے ہیں۔

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \text{ میں کسی بھی بند راہ پر } D \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{F} \text{ پر } D \text{ بقائی ہے} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{F} = \nabla f \text{ پر } D$$

یہ جانتے ہوئے کہ بقائی میدان میں لکیری تکملات کا حل کتنا آسان ہے، دو سوالات پیدا ہوتے ہیں:

۱. ہمیں کیسے جان سکتے ہیں کہ میدان $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے؟

۲. بقائی میدان $\boldsymbol{F}$ کا مطابقتی مخفی قوہ تفاعل $f$ کیسے دریافت کیا جا سکتا ہے (جہاں $\boldsymbol{F} = \nabla f$ ہو گا)۔

### بقائی میدان کا مخفی قوہ تفاعل کا حصول

بقائی میدان کا پرکھ درج ذیل ہے۔

**بقائی میدان کا اجزائی پرکھ**

میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$ جس کے اجزائی تفاعل کے استمراری یک رتبی جزوی تفرق پائے جاتے ہوں صرف اور صرف اس صورت بقائی ہو گا جب درج ذیل مطمئن ہوں۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \text{اور} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \tag{۱۵.۳}$$

□

ثبوت پرکھ: ہم دکھاتے ہیں کہ بقائی $\boldsymbol{F}$ کے لئے مساوات ۱۵.۳ ہر صورت مطمئن ہو گا۔ ایسا مخفی قوہ تفاعل $f$ پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

$$\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} && \text{استمراری ہونے کی بدولت مدغم جزوی تفرق} \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial z} && \text{ایک دوسرے کے برابر ہوں گے}
\end{aligned}$$

مساوات ۱۵.۳ کے باقی دو اجزاء بھی اسی طرح ثابت کیے جا سکتے ہیں۔

ثبوت کا دوسرا حصہ، جس سے مراد لیا جا سکتا ہے کہ مساوات ۱۵.۳ کہتی ہے کہ $\boldsymbol{F}$ بقائی ہو گا، مسئلہ سٹوکس کا نتیجہ ہے۔

□

یہ جانتے ہوئے کہ $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے، ہم عموماً مخفی قوہ تفاعل $f$ دریافت کرنا چاہیں گے جو مساوات $\nabla f = \boldsymbol{F}$ یعنی

$$\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$$

کو $f$ کے لئے حل کرنے سے حاصل ہو گا۔ ہم درج ذیل تین مساوات کا تکمل لے کر ایسا کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = P$$

مثال ۱۵.۲: دکھائیں کہ $\boldsymbol{F} = (e^x \cos y + yz)\boldsymbol{i} + (xz - e^x \sin y)\boldsymbol{j} + (xy + z)\boldsymbol{k}$ بقائی ہے اور اس کا مخفی قوہ تفاعل $f$ تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات ۱۵.۳ میں دی گئی پرکھ کا اطلاق

$$M = e^x \cos y + yz, \quad N = xz - e^x \sin y, \quad P = xy + z$$

پر کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = z - e^x \sin y = \frac{\partial M}{\partial y}$$

یہ مساوات مل کر ہمیں بتاتے ہیں کہ ایسا $f$ پایا جاتا ہے جو $\nabla f = \boldsymbol{F}$ کو مطمئن کرتا ہے۔

ہم درج ذیل مساواتوں کے تکملات سے $f$ کو تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + z \tag{۱۵.۴}$$

ہم بائیں سے شروع کرتے ہوئے $y$ اور $z$ کو مستقل تصور کر کے پہلی مساوات کا تکمل $x$ کے لحاظ سے لیتے ہیں:

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + g(y, z) \tag{۱۵.۵}$$

ہم نے تکمل کے مستقل کو $g(y, z)$ لکھا ہے چونکہ اس کی قیمت $y$ اور $z$ کے ساتھ تبدیل ہو سکتی ہے۔ اس مساوات سے ہم $\frac{\partial f}{\partial y}$ تلاش کر کے مساوات ۱۵.۴ میں دی گئی $\frac{\partial f}{\partial y}$ کے برابر ٹھہراتے ہیں:

$$-e^x \sin y + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \sin y$$

یوں $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ ہو گا لہٰذا $g$ کی قیمت صرف $z$ پر منحصر ہو گی۔ اس طرح مساوات ۱۵.۵ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + h(z)$$

اس مساوات سے ہم $\frac{\partial f}{\partial z}$ معلوم کر کے مساوات ۱۵.۴ میں دی گئی $\frac{\partial f}{\partial z}$ کے برابر ٹھہراتے ہیں:

$$xy + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} = xy + z$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} = z \quad \text{یعنی}$$

متغیر $z$ کے ساتھ تکمل لیتے ہیں:

$$h(z) == \frac{z^2}{2} + C$$

اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$f(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C$$

یوں مستقل C کی لامتناہی ممکنہ منفرد قیمتیں منتخب کر کے $\boldsymbol{F}$ کے لامتناہی تعداد کے مخفی قوہ تفاعل حاصل ہوں گے۔ □

مثال ۱۵.۳: دکھائیں کہ $\boldsymbol{F} = (2x-3)\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + (\cos z)\boldsymbol{k}$ غیر بقائی ہے۔

حل: ہم مساوات ۱۵.۳ میں دی گئی پرکھ استعمال کر کے

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos z) = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1$$

حاصل کرتے ہیں۔ یہ قیمتیں ایک دوسرے سے مختلف ہیں لہٰذا $\boldsymbol{F}$ غیر بقائی ہو گا۔ پرکھ کے باقی اجزاء کو دیکھنے کی ضرورت نہیں ہے۔ □

## قطعی تفرقی روپ

جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے، تکمل کام اور تکمل دائری بہاؤ کا اظہار "تفرقی" روپ

$$\int_A^B M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z$$

میں کرنا زیادہ مناسب ثابت ہوتا ہے (حصہ ۱۵.۲)۔ جہاں $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z$ تفاعل $f$ کا تفریقی روپ ہو وہاں ان تکملات کا حل نسبتاً آسان ہوتا ہے۔ چونکہ تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int_A^B M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z &= \int_A^B \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_A^B \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&= f(B) - f(A) \qquad \text{مسئلہ ۱}
\end{aligned}$$

یوں واحد متغیر کے قابل تفرق تفاعل کی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\int_A^B \mathrm{d}f = f(B) - f(A)$$

تعریف: روپ $M(x,y,z)\,\mathrm{d}x + N(x,y,z)\,\mathrm{d}y + P(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ کو **تفرقی روپ**[۱۲] کہتے ہیں۔ فضا میں دائرہ کار $D$

[۱۲] differential form

پر تفرقی روپ اس صورت قطعی تفرقی ہو گا جب پورے $D$ میں کسی غیر سمتی تفاعل $f$ درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$$

□

دھیان رہے کہ $D$ میں $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$ کی صورت میں $D$ پر $f$ کا میدان ڈھلوان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ ہو گا۔ اسی طرح اگر $\boldsymbol{F} = \nabla f$ ہو تب روپ $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$ قطعی تفرقی ہو گا۔ یوں $\boldsymbol{F}$ کے بقائی ہونا کا پرکھ ہی اس روپ کے قطعی تفرقی ہونے کا پرکھ ہو گا۔

### قطعی تفرقی پرکھ برائے $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$

تفرقی روپ $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$ صرف اور صرف درج ذیل صورت قطعی تفرقی ہو گا۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \text{اور} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \tag{۱۵.۶}$$

یہ اس بات کا معادل ہے کہ میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ بقائی ہے۔

□

مثال ۱۵.۴: دکھائیں کہ $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرقی ہے اور درج ذیل تکمل کی قیمت قطع $(1,1,1)$ تا $(2,3,-1)$ پر حاصل کریں۔

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}z$$

حل: ہم $M = y$ ، $N = x$ اور $P = 4$ لے کر مساوات ۱۵.۶ میں دیا گیا پرکھ بروئے کار لاتے ہیں۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 = \frac{\partial M}{\partial y}$$

ان مساوات کے تحت $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرقی ہے لہٰذا

$$y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$$

ہو گا جہاں $f$ کوئی غیر سمتی تفاعل ہے اور تکمل کی قیمت $f(2,3,-1) - f(1,1,1)$ ہو گی۔

ہم درج ذیل مساوات کے تکملات لیتے ہوئے تفاعل $f$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4 \tag{۱۵.۷}$$

بائیں ہاتھ سے پہلی مساوات کا تکمل درج ذیل دے گا۔

$$f(x,y,z) = xy + g(y,z) \tag{۱۵.۸}$$

اس کا $y$ تفرق لے کر دوسری مساوات کے برابر ٹھراتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial g}{\partial y} = x$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \text{یعنی}$$

یہاں $g$ صرف متغیر $z$ پر منحصر ہے لہٰذا مساوات ۱۵.۸ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$f(x,y,z) = xy + h(z) \tag{۱۵.۹}$$

مساوات ۱۵.۷ کی تیسرے جزو کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 + \frac{\partial h}{\partial z} = 4$$
$$h(z) = 4z + C \quad \text{یعنی}$$

یوں

$$f(x,y,z) = xy + 4z + C$$

ہو گا اور تکمل کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$f(2,3,-1) - f(1,1,1) = 2 + C - (5 + C) = -3$$

□

سوالات

## بقائی میدان کی پرکھ

سوال ۱۵.۱ تا سوال ۱۵.۶ میں کون سے میدان بقائی اور کون سے غیر بقائی ہیں؟

سوال ۱۵.۱: $\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۲: $\boldsymbol{F} = (y\sin z)\boldsymbol{i} + (x\sin z)\boldsymbol{j} + (xy\cos z)\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۳: $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + (x+z)\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۴: $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۵: $\boldsymbol{F} = (y + z + \boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۶: $\boldsymbol{F} = (e^x \cos y)\boldsymbol{i} - (e^x \sin y)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

## مخفی قوہ تفاعل کی تلاش

سوال ۱۵.۷ تا سوال ۱۵.۱۲ میں میدان $\boldsymbol{F}$ کا مخفی قوہ تفاعل $f$ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۷: $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۸: $\boldsymbol{F} = (y + z)\boldsymbol{i} + (x + z)\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۹: $\boldsymbol{F} = e^{y+2z}(\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 2x\boldsymbol{k})$

سوال ۱۵.۱۰: $\boldsymbol{F} = (y \sin z)\boldsymbol{i} + (x \sin z)\boldsymbol{j} + (xy \cos z)\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۱۱: $\boldsymbol{F} = (\ln x + \sec^2(x + y))\boldsymbol{i} + \left(\sec^2(x + y) + \frac{y}{y^2+z^2}\right)\boldsymbol{j} + \frac{z}{y^2+z^2}\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۱۲: $\boldsymbol{F} = \frac{y}{1+x^2y^2}\boldsymbol{i} + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} + \frac{z}{\sqrt{1-y^2z^2}}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2z^2}} + \frac{1}{z}\right)\boldsymbol{k}$

## لکیری تکملات کی قیمتوں کا حصول

سوال ۱۵.۱۳ تا سوال ۱۵.۲۲ میں دکھائیں کہ متکمل قطعی تفرق ہے۔ اس کے بعد لکیری تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال ۱۵.۱۳: $\int_{(0,0,0)}^{(2,3,-6)} 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2z\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۱۴: $\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۱۵: $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 - z^2)\,\mathrm{d}y - 2yz\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۱۶: $\int_{(0,0,0)}^{(3,3,1)} 2x\,\mathrm{d}x - y^2\,\mathrm{d}y - \frac{4}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۱۷: $\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} \sin y \cos x\,\mathrm{d}x + \cos y \sin x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۱۸: $\int_{(0,2,1)}^{(1,\pi/2,2)} 2\cos y\,\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{y} - 2x \sin y\right)\mathrm{d}y + \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۱۹: $\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} 3x^2\,\mathrm{d}x + \frac{z^2}{y}\,\mathrm{d}y + 2z \ln y\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۲۰: $\int_{(1,2,1)}^{(2,1,1)} (2x \ln y - yz)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x^2}{y} - xz\right)\mathrm{d}y - xy\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۲۱: $\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{\mathrm{d}x}{y} + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y - \frac{y}{z^2}\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۲۲: $\int_{(-1,-1,-1)}^{(2,2,2)} \frac{2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2z\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$

سوال ۱۵.۲۳: نقطہ $(1,1,1)$ سے $(2,3,-1)$ تک قطع کی مقدار معلوم مساواتیں دریافت کر کے اس پر میدان $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ کی لکیری تکمل

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}z$$

کی قیمت تلاش کریں۔ چونکہ $\boldsymbol{F}$ بقائی میدان ہے لہٰذا تکمل کی قیمت راہ سے بے نیاز ہو گی۔ درج ذیل لکیری تکمل مثال ۱۵.۴

سوال ۱۵.۲۴: نقطہ $(0,0,0)$ سے $(0,3,4)$ تک قطع $C$ کی ہمراہ درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_C x^2\,\mathrm{d}x + yz\,\mathrm{d}y + \frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}z$$

## نظریہ، عملی استعمال اور مثالیں

دکھائیں کہ سوال ۱۵.۲۵ اور سوال ۱۵.۲۶ میں تکمل کی قیمت راہ $A$ تا $B$ پر منحصر نہیں ہے۔

سوال ۱۵.۲۵: $\int_A^B z^2\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2xz\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۲۶: $\int_A^B \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

سوال ۱۵.۲۷ اور سوال ۱۵.۲۸ میں $\boldsymbol{F}$ کو $\nabla f$ روپ میں لکھیں۔

سوال ۱۵.۲۷: $\boldsymbol{F} = \frac{2x}{y}\boldsymbol{i} + \left(\frac{1-x^2}{y^2}\right)\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۲۸: $\boldsymbol{F} = (e^x \ln y)\boldsymbol{i} + \left(\frac{e^x}{y} + \sin z\right)\boldsymbol{j} + (y\cos z)\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۲۹: نقطہ $(1,0,0)$ سے $(1,0,1)$ تک درج ذیل راہ کی ہمراہ $\boldsymbol{F} = (x^2+y)\boldsymbol{i} + (y^2+x)\boldsymbol{j} + ze^z\boldsymbol{k}$ کا کام تلاش کریں۔

ا. لکیری قطع $x = 1$ ، $y = 0$ ، $0 \le z \le 1$

ب. پیچدار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + \frac{t}{2\pi}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

ج. محور $x$ پر $(1,0,0)$ سے $(0,0,0)$ کے بعد $(0,0,0)$ سے $(1,0,1)$ تک قطع مکافی $z = x^2,\ y = 0$

سوال ۱۵.۳۰: قوت $\boldsymbol{F} = e^{yz}\boldsymbol{i} + (xze^{yz} + z\cos y)\boldsymbol{j} + (xye^{yz} + \sin y)\boldsymbol{k}$ کا کام نقطہ $(1,0,1)$ تا $(1,\frac{\pi}{2},0)$ درج ذیل راہ کی ہمراہ تلاش کریں۔

ا. لکیری قطع $x = 1$ ، $y = \frac{\pi t}{2}$ ، $z = 1-t$ ، $0 \le t \le 1$

ب. نقطہ $(1,0,1)$ سے مبدا تک قطع اور اس کے بعد مبدا سے $(1,\frac{\pi}{2},0)$ تک قطع۔

ج. نقطہ $(1,0,1)$ تا $(1,0,0)$ قطع کے بعد محور $x$ پر $(1,0,0)$ سے مبدا اور آخر میں قطع مکافی $y = \frac{\pi x^2}{2},\ z = 0$

سوال ۱۵.۳۱: مستوی $xy$ میں $(-1,1)$ تا $(1,1)$ راہ $C$، نقطہ $(-1,1)$ تا $(0,0)$ اور نقطہ $(0,0)$ تا $(1,1)$ قطعات پر مشتمل ہے جبکہ $\boldsymbol{F} = \nabla(x^3y^2)$ ہے۔ تکمل $\int_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت درج ذیل دو طریقوں سے تلاش کریں۔

ا. راہ $C$ کی مقدار معلوم روپ تلاش کریں۔ اس کو استعمال کر کے تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

ب. اس حقیقت کو برائے کار لائیں کہ $\boldsymbol{F}$ کا مخفی قوہ تفاعل $f(x,y) = x^3y^2$ ہے۔

سوال ۱۵.۳۲: مستوی $xy$ میں درج ذیل راہ $C$ کی ہمراہ $\int_C 2x\cos y\,\mathrm{d}x - x^2\sin y\,\mathrm{d}y$ کی قیمت تلاش کریں۔

ا. نقطہ $(1,0)$ تا $(0,1)$ قطع مکافی $y = (x-1)^2$

ب. نقطہ $(-1,\pi)$ تا $(1,0)$ لکیری قطع

ج. ستارہ نما $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{i} + (\sin^3 t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ پر نقطہ $(1,0)$ سے خلاف گھڑی واپس نقطہ $(1,0)$ تک۔

سوال ۱۵.۳۳: ثقلی میدان $\boldsymbol{F} = -GmM\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ کا مخفی قوہ تفاعل تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۴: مبدا سے $s_1$ اور $s_2$ فاصلوں پر بالترتیب نقاط $N_1$ اور $N_2$ پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ سوال ۱۵.۳۳ کے ثقلی میدان میں $N_1$ سے $N_2$ تک ایک ذرہ کو منتقل کرنے کے لئے $GmM\left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}\right)$ کام درکار ہو گا۔

سوال ۱۵.۳۵: (ا) روپ $(ay^2 + 2czx)\,\mathrm{d}x + y(bx+cz)\,\mathrm{d}y + (ay^2+cx^2)\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرقی ہونے کی صورت میں مستقل $a$، $b$ اور $c$ کا تعلق تلاش کریں۔ (ب) $b$ اور $c$ کی کن قیمتوں کے لئے درج ذیل میدان ڈھلوان ہو گا؟

$$\boldsymbol{F} = (y^2+2czx)\boldsymbol{i} + y(bx+cz)\boldsymbol{j} + (y^2+cx^2)\boldsymbol{k}$$

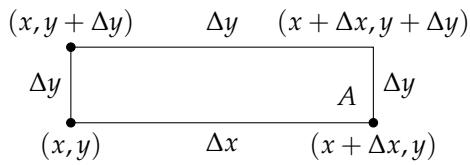
سوال ۱۵.۳۶: فرض کریں $\boldsymbol{F} = \nabla f$ بقائی سمتی میدان ہے اور $g(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ ہے۔ دکھائیں کہ $\nabla g = \boldsymbol{F}$ ہو گا۔

سوال ۱۵.۳۷: آپ کو دو نقطوں کے بیچ وہ راہ تلاش کرنی ہے جس پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{F}$ کم سے کم کام کرے گا۔ آپ جانتے ہیں کہ $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے۔ آپ کا جواب کیا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۵.۳۸: آپ تجرباتی طور جانتے ہیں کہ $A$ سے $B$ تک راہ $C_1$ کی ہمراہ $\boldsymbol{F}$ کا کام راہ $C_2$ کی ہمراہ کام کا نصف ہے۔ آپ $\boldsymbol{F}$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

## ۱۵.۴ مستوی میں مسئلہ گرین

ہم اب ایک ایسا مسئلہ پیش کرتے ہیں جو مستوی خطہ کی سرحد کی ہمراہ یا اس کو عبور کرتے ہوئے داب ناپذیر سیال کی بہاؤ اور خطہ کے اندر اس کی حرکت کے بیچ تعلق پیش کرتا ہے۔ پھیلاو اور گردش کے تصورات سیال کے سرحدی رویہ اور اندرونی رویہ کے بیچ تعلق پیش کرنا ممکن بناتے ہیں۔ سیال کی سمتی رفتار میدان کا پھیلاو کسی نقطہ پر خطہ میں سیال کے دخول یا خروج کی ناپ ہے جبکہ گردش اس نقطہ پر سیال کے گھومنے کی شرح کی ناپ ہے۔




شکل ۱۵.۳۱: نقطہ $(x, y)$ پر سمتی میدان کی کثافت بہاؤ (پھیلاؤ) کی تعریف کے لئے درکار مستطیل۔

مسئلہ گرین کہتا ہے کہ، چند ایسے شرائط مطمئن ہونے کی صورت میں جو عملی استعمال میں عموماً پورے ہوتے ہیں، مستوی خطہ کی سرحد سے خارجی بہاؤ سرحد کے اندر میدان کے پھیلاو کے دوہرا تکمل کے برابر ہو گا۔ اس مسئلے کا دوسرا روپ کہتا ہے کہ خطہ کی سرحد کی ہمراہ خلاف گھڑی دائری بہاؤ اس خطہ میں میدان کی گردش کے دوہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

مسئلہ گرین، علم احصاء کے عظیم مسائل میں سے ایک ہے۔ یہ گہرا اور حیرت کن ہے اور اس کے دور رس نتائج پائے جاتے ہیں۔ خالص ریاضیات میں مسئلہ گرین کی اہمیت، احصاء کے بنیادی مسئلہ کے برابر ہے۔ عملی ریاضیات میں مسئلہ گرین کا تین ابعادی روپ برقی، مقناطیسی، اور سیالی حرکیات کے مسائل کا بنیاد مہیا کرتا ہے۔

ہم سیال کی حرکت کی سمتی رفتار میدان کی بات اس لئے کرتے ہیں کہ سیال کی حرکت کا ذہنی خاکہ بنانا آسان ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ مسئلہ گرین کسی بھی سمتی میدان، جو چند شرائط کو مطمئن کرتا ہو، کے لئے درست ہو گا۔ اس کی درستگی میدان کے کسی خصوصی طبیعی خاصیت کے ہونے پر منحصر نہیں ہے۔

### نقطہ پر کثافت بہاؤ: پھیلاو

مسئلہ گرین کے لئے ہمیں دو نئے تصورات کی ضرورت پیش آتی ہے۔ پہلا تصور، ایک نقطہ پر سمتی میدان کی کثافت بہاؤ ہے جس کو ریاضیات میں سمتی میدان کا پھیلاو کہتے ہیں۔ اس کو حاصل کرنے کا طریقہ درج ذیل ہے۔

فرض کریں مستوی میں سمتی میدانی کا سیالی بہاؤ $\boldsymbol{F}(x,y) = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ ہے اور خطہ $R$ کے ہر نقطہ پر $M$ اور $N$ کے یک رتبی جزوی تفرق استمراری ہیں۔ خطہ $R$ میں $(x, y)$ ایک نقطہ ہے اور $A$ ایک ایسا چھوٹا مستطیل ہے جو مکمل طور پر $R$ میں پایا جاتا ہے اور جس کا ایک راس $(x, y)$ ہے (شکل ۱۵.۳۱)۔ اس مستطیل کے اطراف محددی محور کے متوازی ہیں اور ان کی لمبائیاں $\Delta x$ اور $\Delta y$ ہیں۔ مستطیل کی نچلی سرحد کو عبور کرتا ہوا خارجی سیال کی شرح تخمیناً نقطہ $(x, y)$ پر باہر رخ عمودی سمتی رفتار کے غیر سمتی جزو ضرب لمبائی قطع کے برابر ہو گی:

$$\boldsymbol{F}(x,y)\cdot(-\boldsymbol{j})\Delta x = -N(x,y)\Delta x \tag{۱۵.۱}$$

یوں اگر سمتی رفتار کی اکائی میٹر فی سیکنڈ ہو تب خارجی شرح کی اکائی میٹر فی سیکنڈ ضرب میٹر یعنی مربع میٹر فی سیکنڈ ہو گی۔ باقی تین اطراف کے عمودی باہر رخ خارجی سیال کی شرح بھی اسی طرح حاصل کی جا سکتی ہیں۔ چاروں اطراف کے نتائج کو یہاں پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(x,y+\Delta y)\cdot\boldsymbol{j}\Delta x &= N(x,y+\Delta y)\Delta x && \text{بالا}\\
\boldsymbol{F}(x,y)\cdot(-\boldsymbol{j})\Delta x &= -N(x,y)\Delta x && \text{نچلا}\\
\boldsymbol{F}(x+\Delta x,y)\cdot\boldsymbol{i}\Delta y &= M(x+\Delta x,y)\Delta y && \text{دایاں}\\
\boldsymbol{F}(x,y)\cdot(-\boldsymbol{i})\Delta y &= -M(x,y)\Delta y && \text{بایاں}
\end{aligned} \tag{۱۵.۲}$$

مخالف اضلاع کی شرح کے مجموعات درج ذیل ہوں گے۔

$$[N(x,y+\Delta y)-N(x,y)]\Delta x \approx \left(\frac{\partial N}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \qquad \text{نچلا اور بالا} \tag{۱۵.۳}$$

$$[M(x+\Delta x,y)-M(x,y)]\Delta y \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \qquad \text{دایاں اور بایاں} \tag{۱۵.۴}$$

مساوات ۱۵.۳ اور مساوات ۱۵.۴ کا مجموعہ کل اخراج دیگا:

$$\text{مستطیل کی سرحد کو عبور کرتا ہوا بہاؤ} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y$$

ہم اب $\Delta x\Delta y$ سے تقسیم کر کے بہاؤ فی اکائی رقبہ یعنی بہاؤ کی کثافت حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\text{مستطیل کی سرحد کو عبور کرتا ہوا بہاؤ}}{\text{مستطیل کا رقبہ}} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)$$

آخر میں ہم $\Delta x$ اور $\Delta y$ کو صفر تک پہنچا کر نقطہ $(x,y)$ پر $\boldsymbol{F}$ کے کثافت بہاؤ کی تعریف اخذ کرتے ہیں۔

ریاضیات میں ہم کثافت بہاؤ کو $\boldsymbol{F}$ کا پھیلاو کہتے ہیں۔ میدان $\boldsymbol{F}$ کے پھیلاو کو ہم پھیلاو $\boldsymbol{F}$ لکھتے ہیں۔

تعریف: نقطہ $(x,y)$ پر سمتی میدان $\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}$ کا کثافت بہاؤ یا **پھیلاو**[۱۳] درج ذیل ہو گا۔

$$\text{پھیلاو}\,\boldsymbol{F} = \frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y} \tag{۱۵.۵}$$

□

اگر نقطہ $(x_0,y_0)$ پر باریک سوراخ سے سیال خطہ میں داخل ہو تب اس سوراخ سے خطہ میں سیال پھیلے گا (جس کی بنا اس کو پھیلاؤ نام دیا گیا ہے)۔ چھوٹے مستطیل میں نقطہ $(x_0,y_0)$ پر سوراخ سے خطہ میں سیال داخل ہونے کی صورت میں پھیلاو مثبت ہو گا جبکہ اس نقطہ پر سوراخ کے ذریعہ خطہ سے سیال کے اخراج کی صورت میں پھیلاو کی قیمت منفی ہو گی (شکل ۱۵.۳۲)۔

مثال ۱۵.۱: سمتی میدان $\boldsymbol{F}(x,y)=(x^2-y)\boldsymbol{i}+(xy-y^2)\boldsymbol{j}$ کا پھیلاو تلاش کریں۔

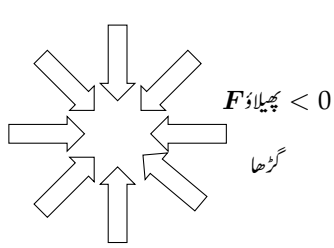
حل: ہم مساوات ۱۵.۵ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\text{پھیلاو}\,\boldsymbol{F} &= \frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2-y)+\frac{\partial}{\partial y}(xy-y^2)\\ &= 2x-x-2y = 3x-2y\end{aligned}$$

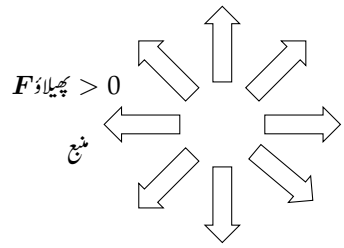
□

---

[۱۳] divergence

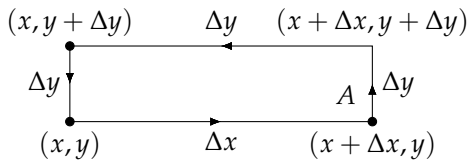



نقطہ $(x_0, y_0)$ پر چھوٹے سوراخ کے ذریعہ خطہ سے سیال کا اخراج۔




نقطہ $(x_0, y_0)$ پر چھوٹے سوراخ کے ذریعہ خطہ میں سیال کا دخول۔

شکل ۱۵.۳۲: داب ناپذیر سیال کے بہاؤ کی صورت میں مستوی خطہ کو پار کرتے ہوئے ''منبع'' پر، جہاں نظام میں سیال داخل ہو گا، پھیلاؤ مثبت ہو گا، جبکہ ''گڑھا'' پر، جہاں نظام سے سیال کا اخراج ہو گا، پھیلاؤ منفی ہو گا۔




شکل ۱۵.۳۳: نقطہ $(x, y)$ پر کثافت دائری بہاؤ (گردش) کی تعریف کے لئے درکار مستطیل۔

## ایک نقطہ پر کثافت دائری بہاؤ: گردش

مسئلہ گرین کے لئے درکار دوسرا نیا تصور ایک نقطہ پر سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کی کثافت دائری بہاؤ ہے جس کو ریاضیات میں $\boldsymbol{F}$ کی گردش کہتے ہیں۔ اس کو حاصل کرنے کی خاطر ہم وہی سمتی میدان

$$\boldsymbol{F}(x, y) = M(x, y)\boldsymbol{i} + N(x, y)\boldsymbol{j}$$

اور نقطہ $(x, y)$ پر چھوٹا مستطیل رقبہ $A$ لیتے ہیں۔ اس مستطیل کو شکل ۱۵.۳۳ میں دوبارہ پیش کیا گیا ہے۔

رقبہ $A$ کے گرد خلاف گھڑی $\boldsymbol{F}$ کا دائری بہاؤ مستطیل $A$ کی اطراف کی ہمراہ بہاؤ کی شرح کا مجموعہ ہو گا۔ اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{i}$ کے رخ سمتی رفتار $\boldsymbol{F}$ کا غیر سمتی جزو ضرب لمبائی قطع تخمیناً نچلے ضلع کی ہمراہ بہاؤ کے برابر ہو گا:

$$\boldsymbol{F}(x, y) \cdot \boldsymbol{i}\Delta x = M(x, y)\Delta x \tag{۱۵.۶}$$

باقی اطراف کی ہمراہ خلاف گھڑی بہاؤ اسی طرح حاصل کی جا سکتی ہیں۔ چاروں اضلاع کے نتائج درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(x, y + \Delta y) \cdot (-\boldsymbol{i})\Delta x &= -M(x, y + \Delta y)\Delta x && \text{بالا} \\
\boldsymbol{F}(x, y) \cdot \boldsymbol{i}\Delta x &= M(x, y)\Delta x && \text{نچلا} \\
\boldsymbol{F}(x + \Delta x, y) \cdot \boldsymbol{j}\Delta y &= N(x + \Delta x, y)\Delta y && \text{دایاں} \\
\boldsymbol{F}(x, y) \cdot (-\boldsymbol{j})\Delta y &= -N(x, y)\Delta y && \text{بایاں}
\end{aligned} \tag{۱۵.۷}$$

$\boldsymbol{F}$ گردش $(x_0, y_0) > 0$
خلاف گھڑی دائری بہاؤ

$\boldsymbol{F}$ گردش $(x_0, y_0) < 0$
گھڑی وار دائری بہاؤ

شکل ۱۵.۳۴: مستوی خطہ پر داب ناپذیر سیال کے بہاؤ میں کسی نقطہ پر سیال کے گھومنے کی شرح کی ناپ کو گردش کہتے ہیں۔ جن نقطوں پر سیال خلاف گھڑی گھومتا ہے ان نقطوں پر گردش مثبت ہو گی جبکہ جن نقطوں پر سیال کا گھماؤ گھڑی وار ہو وہاں گردش منفی ہو گی۔

ہم مخالف اطراف کے اجزاء کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$-[M(x, y+\Delta y) - M(x, y)]\Delta x \approx -\left(\frac{\partial M}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \qquad \text{بالا اور نچلا} \tag{۱۵.۸}$$

$$[N(x+\Delta x, y) - N(x, y)]\Delta y \approx \left(\frac{\partial N}{\partial x}\Delta x\right)\Delta x \qquad \text{دایاں اور بایاں} \tag{۱۵.۹}$$

مساوات ۱۵.۸ اور مساوات ۱۵.۹ کے مجموعہ کو $\delta x \Delta y$ سے تقسیم کر کے مستطیل کی کثافت دائری بہاؤ کی تخمینی قیمت حاصل ہو گی:

$$\frac{\text{مستطیل کے گرد دائری بہاؤ}}{\text{مستطیل کا رقبہ}} \approx \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

آخر میں ہم $\Delta x$ اور $\Delta y$ کو صفر تک پہنچا کر نقطہ $(x, y)$ پر $\boldsymbol{F}$ کی کثافت دائری بہاؤ کی تعریف اخذ کرتے ہیں جس کو ریاضیات میں $\boldsymbol{F}$ کی گردش کہتے ہیں۔

تعریف: نقطہ $(x, y)$ پر سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کی کثافت دائری بہاؤ یا **گردش**[۱۴] درج ذیل ہو گی۔

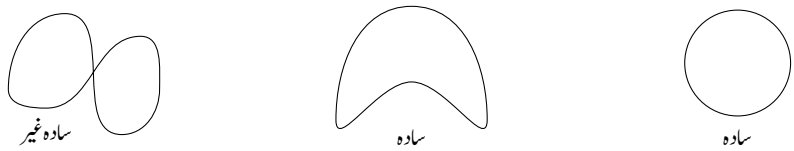
$$\boldsymbol{F} \text{ گردش} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \tag{۱۵.۱۰}$$

□

مستوی $xy$ میں نہایت کم گہرائی کے رواں پانی میں نقطہ $(x_0, y_0)$ پر گردش یا کثافت دائری بہاؤ، اس نقطہ پر نسب چرخی، جس کا محور مستوی کو عمودی ہو، کی حرکت کی رفتار اور رخ کی پیمائش ہو گی (شکل ۱۵.۳۴)۔

---

[۱۴] curl




شکل ۱۵.۳۵: مسئلہ گرین کے ثبوت میں ہم دو قسم کی بند منحنیات، سادہ اور غیر سادہ، میں فرق کرتے ہیں۔ سادہ منحنی اپنے آپ پر نہیں گزرتی۔ یوں دائرہ ایک سادہ منحنی ہے جبکہ "8" شکل کی منحنی غیر سادہ ہے۔

مثال ۱۵.۲: درج ذیل سمتی میدان کی گردش تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (x^2 - y)\boldsymbol{i} + (xy - y^2)\boldsymbol{j}$$

حل: ہم مساوات ۱۵.۱۰ استعمال کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{F}\text{گردش} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xy - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) = y + 1$$

□

## مستوی میں مسئلہ گرین

مسئلہ گرین کا ایک روپ کہتا ہے کہ موزوں حالات میں مستوی میں **سادہ**[۱۵] بند منحنی سے سمتی میدان کا خارجی بہاؤ، اس منحنی میں محیط خطہ پر میدان کے پھیلاو کے دہرا تکمل کے برابر ہو گا۔ مساوات ۱۵.۴ اور مساوات ۱۵.۵ میں بہاؤ کے کلیات پر دوبارہ نظر ڈالیں (شکل ۱۵.۳۵)۔

مسئلہ ۳: **مسئلہ گرین (پھیلاو و بہاؤ یا عمودی روپ)**

سادہ بند منحنی $C$ سے میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کا اخراجی بہاؤ، $C$ میں محیط خطہ $R$ پر $F$ کے پھیلاو کے دہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

$$\underbrace{\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \oint_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x}_{\text{اخراجی بہاؤ}} = \underbrace{\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\text{تکمل پھیلاو}} \tag{۱۵.۱۱}$$

مسئلہ گرین کا دوسرا روپ کہتا ہے کہ ایک سادہ بند منحنی کی ہمراہ، خلاف گھڑی ایک میدان کا دائری بہاؤ، اس منحنی میں محیط خطہ پر میدان کی گردش کے دہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

---

[۱۵] simple

مسئلہ ۴: **مسئلہ گرین (دائری بہاؤ و گردش یا مماسی روپ)**
مستوی میں ایک سادہ بند منحنی $C$ کی ہمراہ خلاف گھڑی، میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کی دائری بہاؤ، منحنی میں محیط خطہ $R$ پر میدان کی گردش کے دہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

$$\underbrace{\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s = \oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y}_{\text{خلاف گھڑی دائری بہاؤ}} = \underbrace{\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\text{تکمل گردش}} \tag{۱۵.۱۲}$$

□

میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کے لئے مساوات ۱۵.۳ میں دائری بہاؤ کے لئے دیا گیا تکمل درج ذیل معادل روپ اختیار کرے گا۔

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s = \oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y$$

مسئلہ گرین کے دو روپ ایک دوسرے کے معادل ہیں۔ میدان $\boldsymbol{G}_1 = N\boldsymbol{i} - M\boldsymbol{j}$ پر مساوات ۱۵.۱۱ کا اطلاق مساوات ۱۵.۱۲ دے گی جبکہ میدان $\boldsymbol{G}_2 = -N\boldsymbol{i} + M\boldsymbol{j}$ پر مساوات ۱۵.۱۲ کا اطلاق مساوات ۱۵.۱۱ دے گی۔

مسئلہ گرین کے لئے ضروری ہے دو مفروضے مطمئن ہوتے ہوں۔ اول ہمیں $M$ اور $N$ پر ایسا شرائط مسلط کرنے ہوں گے کہ مسئلہ گرین میں پائے جانے والے تکملات موجود ہوں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی ایسے کھلا خطہ، جس میں $C$ اور $R$ پائے جاتے ہوں، کے ہر نقطہ پر $M$ اور $N$ اور ان کے یک رتبی تفرق استمراری ہوں گے۔ دوم، ہمیں منحنی $C$ پر ہندسی شرائط مسلط کرنے ہوں گے۔ منحنی سادہ، بند اور ایسے ٹکڑوں پر مشتمل ہونی چاہیے جن کی ہمراہ $M$ اور $N$ قابل تکمل ہوں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ $C$ ٹکڑوں میں ہموار ہے۔ ہم جو ثبوت مسئلہ گرین کے لئے پیش کرتے ہیں اس میں $R$ کی شکل و صورت پر بھی شرائط مسلط کئے گئے ہیں۔ اعلیٰ نصاب کی کتب میں نسبتاً کم شرائط پر مبنی ثبوت موجود ہیں۔ آئیں پہلے چند مثالیں دیکھیں۔

مثال ۱۵.۳: مسئلہ گرین کے دونوں روپ کی تصدیق میدان

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (x-y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$$

کے لئے اکائی دائرہ $C$ میں محدود خطہ $R$ پر کریں۔

$$C: \quad \boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

حل: ہم پہلے تفاعلات، تفرق اور تفریق کو $t$ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$M = \cos t - \sin t, \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}(\cos t) = -\sin t\,\mathrm{d}t$$
$$N = \cos t, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}(\sin t) = \cos t\,\mathrm{d}t$$
$$\frac{\partial M}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 0$$

مساوات ۱۵.۱۱ کے دو اطراف درج ذیل روپ اختیار کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\oint_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x &= \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)(\cos t\,\mathrm{d}t) - (\cos t)(-\sin t\,\mathrm{d}t) \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \pi \\
\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_R (1+0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \text{اکائی دائرے کا رقبہ} = \pi
\end{aligned}$$

مساوات ۱۵.۱۲ کے دو اطراف درج ذیل روپ اختیار کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\oint_c M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y &= \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)(-\sin t\,\mathrm{d}t) + (\cos t)(\cos t\,\mathrm{d}t) \\
&= \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + 1)\,\mathrm{d}t = 2\pi \\
\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_R (1-(-1))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi
\end{aligned}$$

□

## مسئلہ گرین استعمال کرتے ہوئے لکیری تکملات کی قیمت کا تلاش

ہم مختلف منحنی کے سر آپس میں جوڑ کر ایک بند منحنی $C$ حاصل کر سکتے ہیں؛ منحنی $C$ پر لکیری تکمل کی قیمت تلاش کرنے کا عمل لمبا ہو سکتا ہے؛ چونکہ اس میں $C$ کے بہت سارے مختلف تکملات کی قیمت حاصل کرنی ہو گی۔ لیکن، اگر $C$ ایسے خطہ $R$ کی حد بندی کرتی ہو، جس پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہوتا ہو، ہم مسئلہ گرین استعمال کر کے $C$ پر لکیری تکمل کو $R$ پر دوہرا تکمل میں تبدیل کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۵.۴: درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں

$$\oint_C xy\,\mathrm{d}y - y^2\,\mathrm{d}x$$

جہاں ربع اول میں لکیر $x = 1$ اور $y = 1$ چوکور $C$ کاٹتی ہیں۔

حل: ہم مسئلہ گرین کے دو روپ میں سے کوئی ایک استعمال کر کے لکیری تکمل کو چوکور پر دوہرا تکمل میں تبدیل کر سکتے ہیں۔

۱. مساوات ۱۱.۱۵ استعمال کرتے ہیں: $M = xy$ ، $N = y^2$ لے کر، جہاں چوکور کی سرحد $C$ اور اس کا اندرون $R$ ہے، ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\oint_C xy\,\mathrm{d}y - y^2\,\mathrm{d}x &= \iint_R (y+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 3y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 \Big[3xy\Big]_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y = \int_0^1 3y\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}y^2\Big]_0^1 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

۲. مساوات ۱۲.۱۵ استعمال کرتے ہیں: $M = iy^2$ اور $N = xy$ لینے سے یہی نتیجہ حاصل ہو گا۔

$$\oint_C -y^2\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = \iint_R (y-(-2y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}$$

□

مثال ۵.۱۵: میدان $\boldsymbol{F}(x,y) = x\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j}$ کا اس چوکور سے خارجی بہاو تلاش کریں جس کو لکیریں $x = \pm 1$ اور $y = \pm 1$ گھیرتی ہیں۔

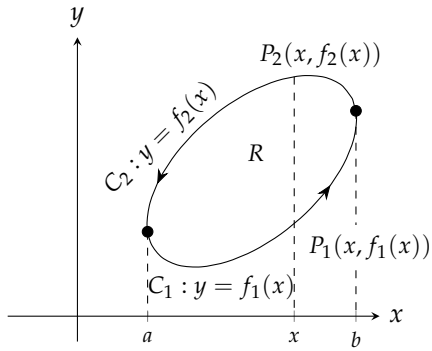
حل: لکیری تکمل سے بہاو حاصل کرنے کے لئے چار تکملات کی ضرورت پیش آئے گی؛ چوکور کے ہر ضلع کے لئے ایک تکمل کرنا ہو گا۔ مسئلہ گرین سے ہم لکیری تکمل کو ایک دہرا تکمل میں تبدیل کر سکتے ہیں۔ ہم $M = x$ ، $N = y^2$ ، چوکور $C$ ، اور چوکور کا اندرون $R$ لیتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\text{بہاو} &= \oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \oint_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x\\ &= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{(مسئلہ گرین)}\\ &= \int_{-1}^1\int_{-1}^1 (1+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \Big[x+2xy\Big]_{x=-1}^{x=1}\mathrm{d}y\\ &= \int_{-1}^1 (2+4y)\,\mathrm{d}y = \Big[2y+2y^2\Big]_{-1}^1 = 4\end{aligned}$$

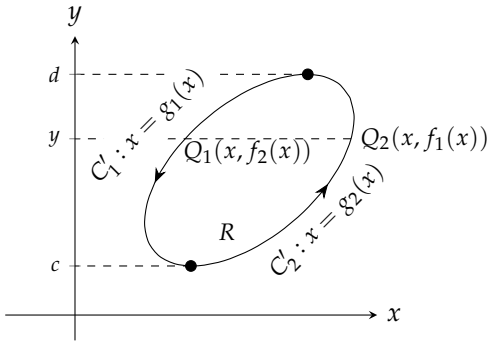
□

## مسئلہ گرین کا ثبوت (خصوصی خطے)

فرض کریں مستوی $xy$ میں $C$ ایسی ہموار، سادہ، منحنی ہے جس کو محور کے متوازی کوئی لکیر دو سے زیادہ نقطوں پر نہیں کاٹتی۔ فرض کریں، منحنی $C$ خطہ $R$ گھیرتی ہے، اور ایسے کھلا خطہ میں جس میں $C$ اور $R$ دونوں پائے جاتے ہوں $M$ ، $N$ ، اور ان کے یک گنّا جزوی تفرق ہر نقطہ پر استمراری ہیں۔ ہم




شکل ۱۵.۳۶: منحنی $C_1$ جو $y = f_1(x)$ کی ترسیم ہے اور $C_2$ جو $y = f_2(x)$ کی ترسیم ہے، مل کر سرحدی منحنی $C$ دیتی ہیں۔




شکل ۱۵.۳۷: منحنی $C_1'$ جو $x = g_1(y)$ کی ترسیم ہے اور $C_2'$ جو $x = g_2(y)$ کی ترسیم ہے، مل کر سرحدی منحنی $C$ دیتی ہیں۔

مسئلہ گرین کا دائری بہاو و گردش روپ:

$$\oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{۱۵.۱۳}$$

==========

ثابت کرنا چاہتے ہیں۔ شکل ۱۵.۳۶ میں $C$ دو سمت بند حصوں کا مجموعہ دکھایا گیا ہے۔

$$C_1 : y = f_1(x), \quad a \le x \le b, \qquad\qquad C_2 : y = f_2(x), \quad b \ge x \ge a$$

نقطہ $a$ اور نقطہ $b$ کے بیچ کسی بھی $x$ کے لئے ہم $\frac{\partial M}{\partial y}$ کا تکمل $y$ کے لحاظ سے $y = f_1(x)$ تا $y = f_2(x)$ لے سکتے ہیں، جو درج ذیل دیگا۔

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,\mathrm{d}y = M(x,y)\Big]_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} = M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x)) \tag{۱۵.۱۴}$$

اس کو ہم $x$ کے لحاظ سے $a$ تا $b$ تکمل کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))]\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_b^a M(x, f_2(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b M(x, f_1(x))\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{C_2} M\,\mathrm{d}x - \int_{C_1} M\,\mathrm{d}x \\ &= -\oint_C M\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C M\,\mathrm{d}x = \iint_R \Big(-\frac{\partial M}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{۱۵.۱۵}$$

مساوات ۱۵.۱۵ ہمیں مساوات ۱۵.۱۳ میں درکار نتائج کا نصف حصہ دیتی ہے۔ جیسا شکل ۱۵.۳۷ عندیہ دیتی ہے، اس کا دوسرا نصف حصہ، $\frac{\partial N}{\partial x}$ کا تکمل، پہلے $x$ اور بعد میں $y$ کے لحاظ سے، لے کر حاصل ہو گا۔ اس میں شکل ۱۵.۳۶ کی منحنی $C$ کو درج ذیل دو سمت بند حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

$$C_1' : x = g_1(y), \quad d \geq y \geq c \qquad \text{اور} \qquad C_2' : x = g_2(y), \quad c \leq y \leq d$$

اس دہرا تکمل کا نتیجہ درج ذیل ہے۔

$$\oint_C N\,\mathrm{d}y = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{۱۵.۱۶}$$

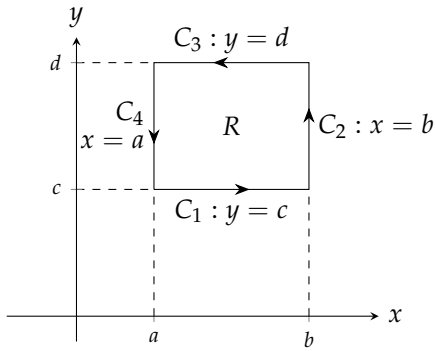
مساوات ۱۵.۱۵ اور مساوات ۱۵.۱۶ ملا کر مساوات ۱۵.۱۳ حاصل ہو گی۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

## دیگر خطوں کو ثبوت کی توسیع

شکل ۱۵.۳۸ میں لکیر $x = a$ ، $x = b$ ، $y = c$ ، اور $y = d$ مستطیل خطہ کی سرحد کو دو سے زیادہ نقطوں پر مس کرتی ہیں لہٰذا مسئلہ گرین کے ثبوت میں پیش دلائل اس مستطیل خطہ کے لئے قابل قبول نہیں۔ البتہ سرحد $C$ کو چار سمت بند لکیری قطعات

$$\begin{aligned} C_1 :&\quad y = c, \quad a \leq x \leq b, \qquad & C_2 :&\quad x = b, \quad c \leq y \leq d, \\ C_3 :&\quad y = d, \quad b \geq x \geq a, \qquad & C_4 :&\quad x = a, \quad d \geq y \geq c, \end{aligned}$$

میں تقسیم کر کے ہم دلائل میں درج ذیل ترمیم کر سکتے ہیں۔




شکل ۱۵.۳۸: مستطیل کے لئے مسئلہ گرین کا ثبوت پیش کرنے کی خاطر ہم سرحد کو چار سمت بند لکیروں میں تقسیم کرتے ہیں۔

مساوات ۱۵.۱۶ کے ثبوت کی طرز پر چلتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_c^d (N(b,y) - N(a,y))\,\mathrm{d}y \\ &= \int_c^d N(b,y)\,\mathrm{d}y + \int_d^c N(a,y))\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{C_2} N\,\mathrm{d}y + \int_{C_4} N\,\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{۱۵.۱۷}$$

اب $C_1$ اور $C_3$ پر $y$ مستقل ہے، لہٰذا $\int_{C_1} N\,\mathrm{d}y = \int_{C_3} N\,\mathrm{d}y = 0$ ہو گا اور ہم مساوات ۱۵.۱۷ چھیڑے بغیر، اس کے کے دائیں ہاتھ $\int_{C_1} N\,\mathrm{d}y + \int_{C_3} N\,\mathrm{d}y$ جمع کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے درج ذیل ہو گا۔

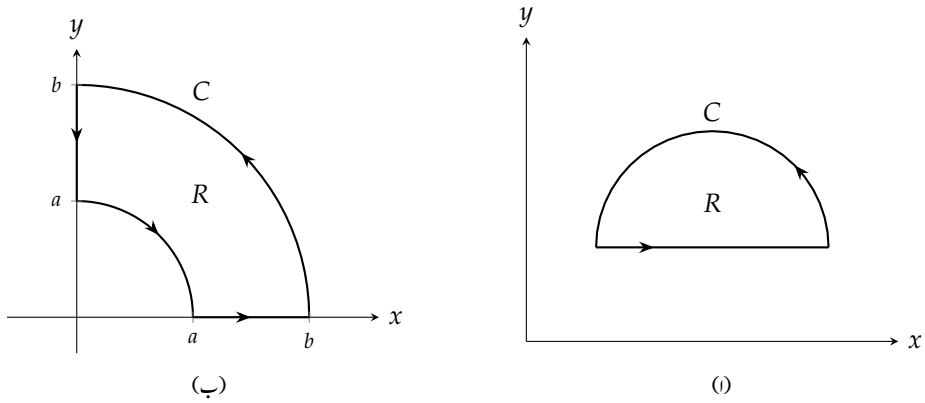
$$\int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_C N\,\mathrm{d}y \tag{۱۵.۱۸}$$

اسی طرح ہم درج ذیل دکھا سکتے ہیں۔

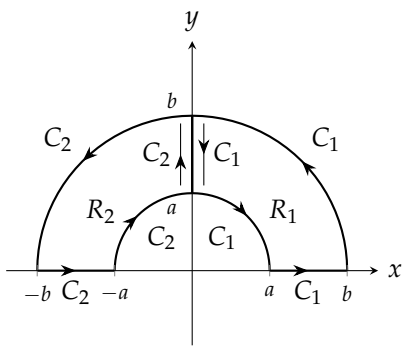
$$\int_a^b \int_c^d \frac{\partial M}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -\oint_C M\,\mathrm{d}x \tag{۱۵.۱۹}$$

مساوات ۱۵.۱۸ سے مساوات ۱۵.۱۹ منفی کر کے درج ذیل نتیجہ دوبارہ حاصل ہو گا۔

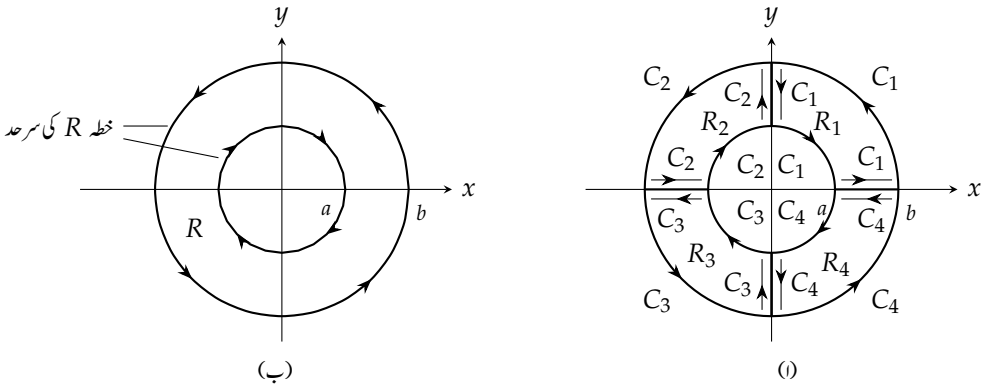
$$\oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$




شکل ۱۵.۳۹: دیگر خطے جن پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہو گا۔




شکل ۱۵.۴۰: خطہ $R_1$ اور $R_2$ کو ملا کر خطہ $R$ حاصل کیا گیا ہے۔




شکل ۱۵.۴۱: خطہ $R$ چار ٹکڑوں پر مشتمل ہے۔ نلکی محدد میں اندرونی دائرے کے لئے $r = a$ اور بیرونی کے لئے $r = b$ ہے جبکہ خطہ کے لئے $a \leq r \leq b$ ہے۔

شکل ۱۵.۳۹ طرز کے خطوں کو بھی اتنی ہی آسانی سے نپٹا جا سکتا ہے۔ مساوات ۱۵.۱۳ کا اطلاق اب بھی ہوگا۔ شکل ۱۵.۴۰ میں گھوڑے کے نعل کی شکل کا خطہ $R$ دکھایا گیا ہے؛ اور ہم دیکھتے ہیں کہ خطہ $R_1$ ، خطہ $R_2$ اور ان کی سرحد اکٹھا کرتے ہوئے مساوات ۱۵.۱۳ کا اطلاق ہوگا۔ مسئلہ گرین کا اطلاق $C_1$ ، $R_1$ اور $C_2$ ، $R_2$ پر ہوگا، جس سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\int_{C_1} M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\int_{C_2} M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_{R_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

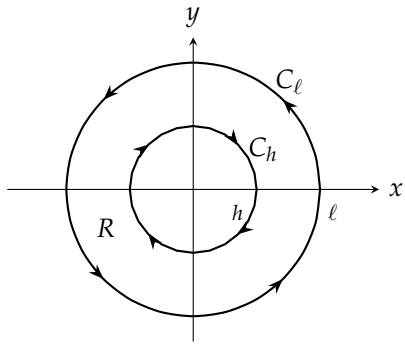
ان مساوات کو آپس میں جمع کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ محور $y$ پر $C_1$ کے لئے $b$ تا $a$ لکیری تکمل کو $C_2$ پر اسی قطع پر لیکن مخالف رخ کا تکمل کاٹتا ہے۔ یوں ذیل ہوگا

$$\oint M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

جہاں $x$ محور کے دو قطعات $-b$ تا $-a$ اور $a$ تا $b$ اور دو نصف دائرے مل کر $C$ دیتے ہیں، اور جہاں خطہ $R$ منحنی $C$ کے اندر پایا جاتا ہے۔

مختلف سرحدوں پر لکیری تکملات جمع کر کے ایک سرحد پر تکمل کے حصول کی ترکیب کو متناہی تعداد کے ذیلی خطوں تک وسعت دی جا سکتی ہے۔ شکل ۱۵.۴۱-ا میں مخالف گھڑی سمت بند سرحد $C_1$ ربع اول میں واقع خطہ $R_1$ کو گھیرتی ہے۔ باقی تین ربعات کے لئے بھی ایسا ہوگا: خطہ $R_i$ کی سرحد $C_i$ ہوگی، جہاں $i = 1, 2, 3, 4$ ہے۔ مسئلہ گرین کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$\oint_{C_i} M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_{R_i} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{۱۵.۲۰}$$




شکل ۱۵.۴۲: دکھائی گئی سرحدوں کی ہمراہ تکمل لیتے ہوئے چھلادار خطہ $R$ پر مسئلہ گرین کا اطلاق کیا جا سکتا ہے (مثال ۱۵.۶)۔

ہم $i = 1, 2, 3, 4$ کے لئے مساوات ۱۵.۲۰ کا مجموعہ لے کر شکل ۱۵.۴۱-ب حاصل کرتے ہیں۔

$$\oint_{r=b} (M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y) + \oint_{r=a} (M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y) = \iint_{a\le r\le b} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{۱۵.۲۱}$$

مساوات ۱۵.۲۱ کہتی ہے، **چھلے دار**[۱۶] خطہ $R$ پر $(\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$ کا دہرا تکمل، $R$ کی مکمل سرحد پر چلتے ہوئے $R$ بائیں ہاتھ رکھ کر $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y$ کے لکیری تکمل کے برابر ہو گا (شکل ۱۵.۴۱-ب)۔

مثال ۱۵.۶: چھلے دار خطہ $R : h^2 \le x^2 + y^2 \le 1,\ 0 < h < 1$ (شکل ۱۵.۴۲) پر مسئلہ گرین (مساوات ۱۵.۱۲) کے دائری بہاو روپ کی تصدیق درج ذیل کے لئے کریں۔

$$M = \frac{-y}{x^2 + y^2} \qquad N = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

حل: خطہ $R$ کی سرحد دائرہ:

$$C_\ell : \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

جس پر $t$ بڑھانے سے ہم خلاف گھڑی گامزن ہوں گے، اور دائرہ:

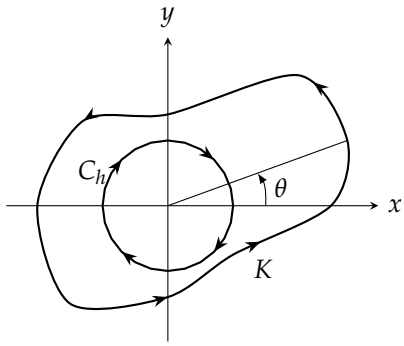
$$C_h : \quad x = h\cos\theta, \quad y = -h\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

جس پر $\theta$ بڑھانے سے ہم گھڑی وار گامزن ہوں گے، پر مشتمل ہے۔ پورے خطہ $R$ میں تفاعلات $M$ ، $N$ اور ان کے جزوی تفرق استمراری ہیں۔ مزید

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{(x^2+y^2)(-1) + y(2y)}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}\end{aligned}$$

---

[۱۶] annular




شکل ۱۵.۴۳: دائرہ $C$ اور منحنی $K$ کے بیچ خطہ۔

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

خطہ $R$ کی سرحد پر $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y$ کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y &= \oint_{C_1} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} + \oint_{C_h} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \frac{h^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{h^2}\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\pi - 2\pi = 0\end{aligned}$$

□

چونکہ مثال ۱۵.۶ میں $(0,0)$ پر تفاعلات $M$ اور $N$ غیر استراری ہیں لہٰذا دائرہ $C_1$ اور اس کے اندر خطہ پر مسئلہ گرین کا اطلاق نہیں ہو گا۔ ہمیں مبدا خارج (غیر شامل) کرنا ہو گا؛ ہم $C_h$ کے اندر نقطے خارج کر کے ایسا کرتے ہیں۔

ہم مثال ۱۵.۶ میں دائرہ $C_1$ کی بجائے ایسی ترخیم یا سادہ بند منحنی $K$ لے سکتے ہیں، جو $C_h$ کو گھیرتی ہو (شکل ۱۵.۴۳)۔ نتیجہ اب بھی

$$\oint_K (M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y) + \oint_{C_h} (M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 0$$

ہو گا، جس سے کسی بھی ایسی منحنی $K$ کے لئے درج ذیل حیرت کن نتیجہ اخذ ہوتا ہے۔

$$\oint_K (M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y) = 2\pi$$

قطبی محدد استعمال کر کے یہ نتیجہ سمجھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$
$$\mathrm{d}x = -r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta + \cos\theta\,\mathrm{d}r \qquad \mathrm{d}y = r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta + \sin\theta\,\mathrm{d}r$$

لکھ کر درج ذیل ہو گا

$$\frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \frac{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta}{r^2} = \mathrm{d}\theta$$

اور ایک مرتبہ $K$ پر خلاف گھڑی چکر کاٹنے سے $\theta$ کی قیمت $2\pi$ بڑھتی ہے۔

---

## سوالات

### مسئلہ گرین کی تصدیق

سوال ۱۵.۱ تا سوال ۱۵.۴ میں میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کے لیے مساوات ۱۵.۱۱ اور مساوات ۱۵.۱۲ کے دونوں اطراف کی قیمتیں تلاش کر کے مسئلہ گرین کی تصدیق کریں۔ دونوں صورتوں میں مکمل کا دائرہ کار قرص $R : x^2 + y^2 \le a^2$ اور محدود کار دائرہ $C : r = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}, 0 \le t \le 2\pi$ لیں۔

سوال ۱۵.۱: $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۲: $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i}$

سوال ۱۵.۳: $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۴: $\boldsymbol{F} = -x^2y\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j}$

### خلاف گھڑی دائری بہاو اور باہر رخ بہاو

سوال ۱۵.۵ تا ۱۵.۱۰ میں میدان $\boldsymbol{F}$ اور منحنی $C$ کے لیے مسئلہ گرین استعمال کر کے خلاف گھڑی دائری بہاو اور باہر رخ بہاو تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۵: $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + (y-x)\boldsymbol{j}$ اور $C$ کو چوکور $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۶: $\boldsymbol{F} = (x^2+4y)\boldsymbol{i} + (x+y^2)\boldsymbol{j}$ اور $C$ کو چوکور $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۷: $\boldsymbol{F} = (y^2-x^2)\boldsymbol{i} + (x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ اور $C$ کو مثلث $y = 0$ ، $x = 3$ ، $y = x$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۸: $\boldsymbol{F} = (x+y)\boldsymbol{i} - (x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ اور $C$ کو مثلث $y = 0$ ، $x = 1$ ، $y = x$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۹: $\boldsymbol{F} = (x+e^x\sin y)\boldsymbol{i} + (x+e^x\cos y)\boldsymbol{j}$ اور $C$ دو چشمہ $r^2 = \cos 2\theta$ کا دایاں ہاتھ گھیرے ہے۔

سوال ۱۵.۱۰: $\boldsymbol{F} = \left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)\boldsymbol{i} + \ln(x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ اور $C$ اس خطے کی سرحد ہے جس کو قطبی محدد عدم مساوات $1 \leq r \leq 2$ ، $0 \leq \theta \leq \pi$ تعین کرتی ہیں۔

سوال ۱۵.۱۱: ربع اول میں منحنیات $y = x^2$ اور $y = x$ کے بیچ خطے کی سرحد پر خلاف گھڑی چلتے ہوئے میدان $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j}$ کا دائری بہاؤ اور خطے سے باہر رخ گزرنے والا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۲: ربع اول سے لکیر $x = \pi/2$ اور $y = \pi/2$ مربع کاٹتی ہیں۔ میدان $\boldsymbol{F} = (-\sin y)\boldsymbol{i} + (x\cos y)\boldsymbol{j}$ کا اس مربع پر خلاف گھڑی دائری بہاؤ اور خطے سے باہر رخ گزرنے والا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۳: قلب نما $r = a(1+\cos\theta)$ $a > 0$ سے درج ذیل میدان کا باہر رخ گزرنے والا بہاؤ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{F} = \left(3xy - \frac{x}{1+y^2}\right)\boldsymbol{i} + (e^x + \tan^{-1} y)\boldsymbol{j}$$

سوال ۱۵.۱۴: جس خطے کو اوپر سے منحنی $y = 3 - x^2$ اور نیچے سے منحنی $y = x^4 + 1$ گھیرتی ہیں اس کی سرحد پر خلاف گھڑی چلتے ہوئے میدان $\boldsymbol{F} = (y + e^x \ln y)\boldsymbol{i} + (e^y/y)\boldsymbol{j}$ کا دائری بہاؤ تلاش کریں۔

## کام

دی گئی منحنی پر خلاف گھڑی ایک مرتبہ چل کر سوال ۱۵.۱۵ اور سوال ۱۵.۱۶ میں $\boldsymbol{F}$ کا کام تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۵: $\boldsymbol{F} = 2xy^3\boldsymbol{i} + 4x^2y^2\boldsymbol{j}$
ربع اول میں محور $x$ ، لکیر $x = 1$ ، اور منحنی $y = x^3$ کے بیچ مثلث نما خطے کی سرحد $C$ ہے۔

سوال ۱۵.۱۶: $\boldsymbol{F} = (4x - 2y)\boldsymbol{i} + (2x - 4y)\boldsymbol{j}$
دائرہ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ راہ $C$ ہے۔

## مستوی میں لکیری تکملات کی قیمت کی تلاش

مسئلہ گرین کا اطلاق سوالات ۱۵.۱۷ تا ۱۵.۲۰ پر کر کے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۷: $\oint_C (y^2\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y)$
مثلث $C$ کو $x = 0$ ، $x + y = 1$ ، اور $y = 0$ گھیرتی ہیں۔

سوال ۱۵.۱۸: $\oint_C (3y\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y)$
خطہ $0 \leq x \leq \pi$ ، $0 \leq y \leq \sin x$ کی سرحد $C$ ہے۔

سوال ۱۵.۱۹: $\oint_C (6y + x)\,\mathrm{d}x + (y + 2x)\,\mathrm{d}y$
دائرہ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ راہ $C$ ہے۔

سوال ۱۵.۲۰: $\oint_C (2x + y^2)\,\mathrm{d}x + (2xy + 3y)\,\mathrm{d}y$
مستوی میں کوئی بھی ایسی بند راہ $C$ جس پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہوتا ہو۔

## مسئلہ گرین استعمال کر کے رقبے کی تلاش

اگر مستوی میں سادہ منحنی $C$ اور اس میں محیط خطہ $R$ مسئلہ گرین پر پورا اترتے ہوں، $R$ کا رقبہ ذیل ہو گا۔

**رقبے کا مسئلہ گرین کلیہ**

$$R \text{ رقبہ } = \frac{1}{2}\oint_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x \tag{۱۵.۲۲}$$

اس کی وجہ جانتے ہیں۔ مساوات ۱۵.۱۱ کو الٹ چلا کر ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} R \text{ رقبہ } &= \iint_R \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \iint_R \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \oint_C \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}y\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

منحنیات میں محیط خطوں کے رقبے، سوال ۱۵.۲۱ تا ۱۵.۲۴ میں، مساوات ۱۵.۲۲ استعمال کر کے حاصل کریں۔

سوال ۱۵.۲۱: دائرہ $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۵.۲۲: ترخیم $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (b\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۵.۲۳: ستارہ نما (صفحہ ۱۱۳۸ پر شکل ۱۰.۸۳) $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{i} + (\sin^3 t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۵.۲۴: منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + ((t^3/3) - t)\boldsymbol{j},\ -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{t}$

## نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۵.۲۵: فرض کریں خطے کی سرحد $C$ پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہوتا ہے۔ مسئلہ گرین استعمال کر کے ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\oint_C f(x)\,\mathrm{d}x + g(y)\,\mathrm{d}y$

ب. $\oint_C ky\,\mathrm{d}x + hx\,\mathrm{d}y$ ($h$ اور $k$ مستقل ہیں)

سوال ۱۵.۲۶: دکھائیں کہ مربع کی سرحد پر درج ذیل تکمل کی قیمت مربع کے رقبے پر منحصر ہے نا کہ مستوی میں مربع کے مقام پر۔

$$\oint_C xy^2\,\mathrm{d}x + (x^2y + 2x)\,\mathrm{d}y$$

سوال ۱۵.۲۷: درج ذیل تکمل میں کیا خاص بات ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

$$\oint_C 4x^3y\,\mathrm{d}x + x^4\,\mathrm{d}y$$

سوال ۱۵.۲۸: درج ذیل تکمل میں کیا خاص بات ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

$$\oint_C -y^3\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y$$

سوال ۱۵.۲۹: دکھائیں کہ اگر مستوی میں خطہ $R$ کو ٹکڑوں میں ہموار سادہ بند منحنی $C$ احاطہ کرتی ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$R \text{ رقبہ } = \oint_C x\,\mathrm{d}y = -\oint_C y\,\mathrm{d}x$$

سوال ۱۵.۳۰: فرض کریں غیر منفی تفاعل $y = f(x)$ کا $[a,b]$ پر یک رتبی تفرق استراری ہے۔ مستوی $xy$ میں خطہ نیچے سے محور $x$، اوپر سے $f$ کی ترسیم، اور اطراف سے لکیر $x = a$ اور لکیر $x = b$ میں گھیرا ہوا ہے اور اس کی سرحد $C$ ہے۔ دکھائیں کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\oint_C y\,\mathrm{d}x$$

سوال ۱۵.۳۱: مستوی $xy$ میں خطہ $R$ جو ٹکڑوں میں ہموار سادہ بند منحنی $C$ میں گھیرا ہوا ہے کا رقبہ $A$ ہے اور خطے کے وسطانی مرکز کا $x$ محدد $\bar{x}$ ہے۔ دکھائیں کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{2}\oint_C x^2\,\mathrm{d}y = -\oint_C xy\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\oint_C x^2\,\mathrm{d}y - xy\,\mathrm{d}x = A\bar{x}$$

سوال ۱۵.۳۲: فرض کریں سوال ۱۵.۳۱ میں محور $y$ کے لحاظ سے خطے کا معیار اثر $I_y$ ہے۔ دکھائیں کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{3}\oint_C x^3\,\mathrm{d}y = -\oint_C x^2y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\oint_C x^3\,\mathrm{d}y - x^2y\,\mathrm{d}x = I_y$$

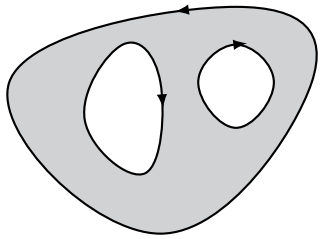
سوال ۱۵.۳۳: مسئلہ گرین اور لاپلاس کی مساوات

فرض کریں تمام لازم تفرق موجود اور استراری ہیں۔ دکھائیں کہ اگر $f(x,y)$ لاپلاس کی مساوات

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

کو مطمئن کرتا ہو تب ان تمام بند منحنیات $C$ پر جن پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہوتا ہو درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x - \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y = 0$$



شکل ۱۵.۴۴: متعدد سوراخ والے خطے پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہوتا ہے (سوال ۱۵.۳۵)۔

(اس کا الٹ بھی درست ہے: اگر مذکورہ بالا لکیری تکمل ہر صورت صفر ہو، تب $f$ لاپلاس کی مساوات کو مطمئن کرے گا۔)

سوال ۱۵.۳۴: مستوی میں ان تمام ہموار سادہ بند منحنیات میں سے، جو خلاف گھڑی سمت بند ہوں، وہ تلاش کریں جس پر چلتے ہوئے درج ذیل کا سرانجام کام زیادہ سے زیادہ ہو گا۔

$$\boldsymbol{F} = \left(\frac{1}{4}x^2y + \frac{1}{3}y^3\right)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$$

(اشارہ: $\boldsymbol{F}$ کی گردش کہاں مثبت ہے؟)

سوال ۱۵.۳۵: خطہ $R$ پر، جس میں متناہی تعداد کے سوراخ ہوں، اور جس کی سرحدی منحنیات ہموار، سادہ، اور بند ہوں پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہو گا بشرطیکہ ہر انفرادی سرحد پر تکمل لیتے ہوئے سرحد پر چلنے کا رخ یوں رکھا جائے کہ قریبی خطہ بائیں ہاتھ ہو۔ (شکل ۱۵.۴۴)۔

ا. اگر $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ ہو اور دائرہ $x^2+y^2=a^2$ منحنی C ہو، درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\oint_C \nabla f \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$$

ب. فرض کریں مستوی میں $K$ ایسی ہموار سادہ بند منحنی ہے جو $(0,0)$ سے نہیں گزرتی۔ مسئلہ گرین استعمال کر کے دکھائیں کہ درج ذیل تکمل کی دو ممکنہ جواب ہیں جس کا انحصار اس حقیقت پر ہے کہ آیا $(0,0)$ منحنی $K$ کے اندر واقع ہے یا اس کے باہر۔

$$\oint_K \nabla f \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$$

سوال ۱۵.۳۶: مستوی سیلان کے انفرادی ذرات کی حرکت کی نمائندگی ہموار منحنیات کرتی ہیں جو **خطوط رو**[۱۷] کہلاتی ہیں۔ سیالی سیلان کے سمتی رفتار سمتیات $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$، خطوط رو کو مماسی ہیں۔ دکھائیں اگر سیلان سادہ تعلق خطے $R$ (جس میں سوراخ یا غیر موجود نقطے نہیں پائے جاتے) میں واقع ہو، اور پورے $R$ میں $M_x + N_y \neq 0$ ہو، تب $R$ میں کوئی ایک خط رو بھی بند نہیں ہو گا۔ دوسرے لفظوں میں، سیال کا کوئی ذرہ $R$ میں بند راہ پر نہیں چلتا۔ شرط $M_x + N_y \neq 0$ کو بند راہ کی عدم موجودگی کا شرط کہتے ہیں۔

سوال ۱۵.۳۷: مسئلہ گرین کے مخصوص صورت کا ثبوت مکمل کرنے کی خاطر مساوات ۱۵.۱۶ کی تصدیق کریں۔

---

[۱۷] streamlines

سوال ۱۵.۳۸: مسئلہ گرین کی وسعت کا دلیل مکمل کرنے کی خاطر مساوات ۱۵.۱۹ کی تصدیق کریں۔

سوال ۱۵.۳۹: کیا بقائی دو ابعادی سمتیہ میدان کی گردش کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

سوال ۱۵.۴۰: کیا بقائی میدان کے دائری بہاؤ کے بارے میں مسئلہ گرین کوئی معلومات دیتا ہے؟ کیا یہ کسی دوسری حقیقت، جو آپ جانتے ہو، کے مطابق ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

### کمپیوٹر کا استعمال

کمپیوٹر اور مسئلہ گرین استعمال کر کے سوال ۱۵.۴۱ تا ۱۵.۴۴ میں میدان $\boldsymbol{F}$ کا خلاف گھڑی دائری بہاؤ سادہ بند منحنی $C$ کے ہمراہ تلاش کریں۔ کمپیوٹر پر درج ذیل اقدام کریں۔

ا. مستوی $xy$ میں $C$ ترسیم کریں۔

ب. مسئلہ گرین کے گردشی روپ کے لئے متکمل $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ تعین کریں۔

ج. دوہرا تکمل کے حد جز والف کی ترسیم سے تعین کریں اور دائری بہاؤ کے گردشی تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال ۱۵.۴۱: $\boldsymbol{F} = (2x - y)\boldsymbol{i} + (x + 3y)\boldsymbol{j}$
ترخیم $x^2 + 4y^2 = 4$ منحنی $C$ ہے۔

سوال ۱۵.۴۲: $\boldsymbol{F} = (2x^3 - y^3)\boldsymbol{i} + (x^3 + y^3)\boldsymbol{j}$
ترخیم $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ منحنی $C$ ہے۔

سوال ۱۵.۴۳: $\boldsymbol{F} = x^{-1}e^y\boldsymbol{i} + (e^y \ln x + 2x)\boldsymbol{j}$
منحنیات $y = 1 + x^4$ اور $y = 2$ کے بیچ خطے کی سرحد $C$ ہے۔

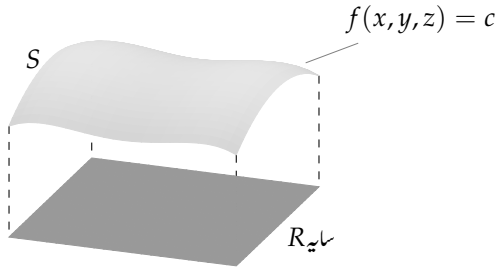
سوال ۱۵.۴۴: $\boldsymbol{F} = xe^y\boldsymbol{i} + 4x^2 \ln y\boldsymbol{j}$
مثلث جس کے راس $(0,0)$ ، $(2,0)$ ، اور $(0,4)$ ہیں منحنی $C$ ہے۔

## ۱۵.۵ سطحی رقبہ اور سطحی تکملات

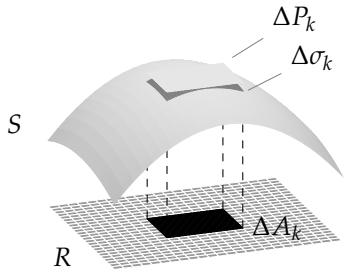
ہم مستوی میں خطہ پر تفاعل کا تکمل لینا جانتے ہیں لیکن ایسی صورت میں کیا ہو گا جب تفاعل ایک قوسی سطح پر پایا جاتا ہو؟ ایسی صورت میں تکمل کیسے حاصل ہو گا؟ ایسا تکمل، جو **سطحی تکمل**[۱۸] کہلاتا ہے، کی قیمت تلاش کرنے کی خاطر اس کو، سطح کے نیچے محددی مستوی پر (شکل ۱۵.۴۵)، دہرا تکمل کے روپ میں لکھا جاتا ہے۔ حصہ ۱۵.۸ اور حصہ ۱۵.۱۰ میں ہم دیکھیں گے کہ سطحی تکملات کی مدد سے مسئلہ گرین کو تین ابعاد میں عمومیت دی جا سکتی ہے۔

---

[۱۸] surface integral




شکل ۱۵.۴۵: سطح $S$ اور اس کے نیچے مستوی پر سطح کی تظلیل قائمہ $R$ ۔آپ $R$ کو مستوی پر $S$ کا سایہ تصور کر سکتے ہو۔




شکل ۱۵.۴۶: مماسی چادر $\Delta P_k$ تخمیناً رقبہ $\Delta A_k$ سے اوپر سطحی رقبہ $\Delta\sigma_k$ کو ظاہر کرتی ہے۔

## سطحی رقبہ کی تعریف

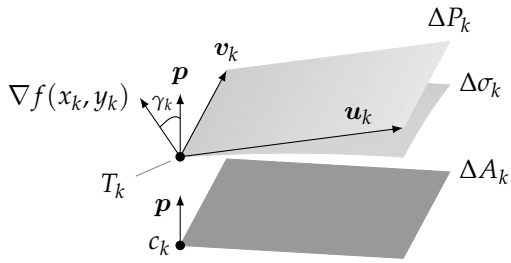
شکل ۱۵.۴۶ میں سطح $S$ اور نیچے محددی مستوی میں اس کا "سایہ" خطہ $R$ دکھایا گیا ہے۔ سطح کی تعریف مساوات $f(x,y,c)=c$ دیتی ہے۔ اگر سطح **ہموار**[۱۹] ہو ( $\nabla f$ استراری ہے اور $S$ پر کہیں بھی صفر نہیں ہے)، ہم اس کے رقبہ کی تعریف اور قیمت $R$ پر دہرا تکمل کی صورت میں کر سکتے ہیں۔

ہم خطہ $R$ کی خانہ بندی چھوٹے چھوٹے مستطیلوں $\Delta A_k$ میں ہم یوں کرتے ہیں جیسے $R$ پر تکمل کی تعریف پیش کرنا چاہتے ہوں۔ یہ $S$ کے رقبہ کی تعریف پیش کرنے کا کا پہلا قدم ہے۔ ہر ایک $\Delta A$ کے بالکل اوپر کچھ بلندی پر سطح $\Delta\sigma_k$ پایا جاتا ہے، جس کو ہم مماسی سطح کے چھوٹے حصہ $\Delta P_k$ سے تخمین دے سکتے ہیں۔ اس کی وضاحت کرتے ہیں۔ رقبہ $\Delta A_k$ کے اگلے بائیں کونے $C_k$ کے بالکل اوپر نقطہ $T_k(x_k,y_k,z_k)$ پر سطح کے مماس کا $\Delta P_k$ ایک ٹکڑا ہے۔ اگر مماسی سطح $R$ کا متوازی ہو، تب $\Delta P_k$ رقبہ $\Delta A_k$ کا موافق ہوگا۔ بصورت دیگر، یہ ایک مستطیل ہوگا جس کا رقبہ $\Delta A_k$ کے رقبہ سے کچھ زیادہ ہوگا۔

شکل ۱۵.۴۷ میں $\Delta\sigma_k$ اور $\Delta P_k$ بڑھا چڑھا کر پیش کیے گئے ہیں، جہاں $T_k$ پر ڈھلوان سمتیہ $\nabla f(x_k,y_k,z_k)$ اور $R$ کا عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{p}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔ اس شکل میں $\nabla f$ اور $\boldsymbol{p}$ کے بیچ زاویہ $\gamma_k$ بھی دکھایا گیا ہے۔ اس شکل میں دیگر سمتیات $\boldsymbol{u}_k$ اور $\boldsymbol{v}_k$ مماسی مستوی میں $\Delta P_k$ کے کناروں پر پائے جاتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{u}_k\times\boldsymbol{v}_k$ اور $\nabla f$ دونوں مماسی مستوی کو عمودی ہیں۔ سمتیہ $\boldsymbol{u}_k$ اور سمتیہ $\boldsymbol{v}_k$ دونوں سمتیہ $\nabla f(x_k,y_k)$ کو عمودی ہوں گے۔

---

[۱۹] smooth




شکل ۱۵.۴۷: گزشتہ شکل کی تفصیل بڑی کر کے دکھائی گئی ہے۔ چونکہ سمتیہ $\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k$ (جو شکل میں نہیں دکھایا گیا) اور سمتیہ $\nabla f$ دونوں سطح $\Delta P_k$ کو عمودی ہیں لہٰذا یہ آپس میں متوازی ہوں گے۔

اعلیٰ سمتی ہندسہ سے ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی مستوی پر، جس کا عمود $\boldsymbol{p}$ ہو، ایسے مستطیل کی تظلیل کا رقبہ $|(\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k) \cdot \boldsymbol{p}|$ ہو گا جس کو $\boldsymbol{u}_k$ اور $\boldsymbol{v}_k$ تعین کرتے ہوں۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$|(\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k) \cdot \boldsymbol{p}| = \Delta A_k \tag{۱۵.۱}$$

اب سمتی ضرب کی ایک خاصیت (جو صلیبی ضرب کی ایک حقیقت ہے) یہ ہے کہ $|\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k|$ رقبہ $\Delta P_k$ ہو گا، لہٰذا مساوات ۱۵.۱ ذیل روپ

$$\underbrace{|\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k|}_{\Delta P_k} \underbrace{|\boldsymbol{p}|}_{1} \underbrace{|\cos(\text{زاویہ کے بیچ } \boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k \text{ اور } \boldsymbol{p})|}_{\substack{\text{چونکہ } \nabla f \text{ اور } \boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k \text{ دونوں مماسی مستوی کو} \\ \text{عمودی ہیں لہٰذا یہ } |\cos\gamma_k| \text{ کے برابر ہو گا}}} = \Delta A_k \tag{۱۵.۲}$$

یا

$$\Delta P_k |\cos\gamma_k| = \Delta A_k$$

اختیار کرتی ہے جو $\cos\gamma_k \neq 0$ کی صورت میں ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\Delta P_k = \frac{\Delta A_k}{|\cos\gamma_k|}$$

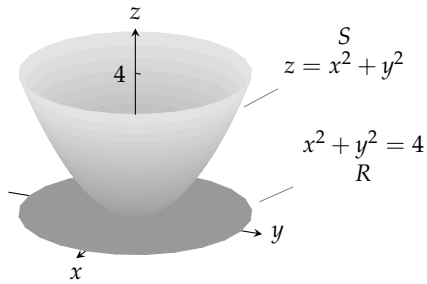
جب تک $\nabla f$ زمینی مستوی کو متوازی نہ ہو اور $\nabla f \cdot \boldsymbol{p} \neq 0$ ہو $\cos\gamma_k \neq 0$ ہو گا۔

چونکہ، سطحی ٹکڑے $\Delta\sigma_k$ جو مل کر رقبہ $S$ دیتے ہیں، کو $\Delta P_k$ تخمیناً ظاہر کرتے ہیں، لہٰذا مجموعہ

$$\sum \Delta P_k = \sum \frac{\Delta A_k}{|\cos\gamma_k|} \tag{۱۵.۳}$$

سطحی رقبے $S$ کا تخمین نظر آتا ہے۔ ہم یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ خطہ $R$ کو مزید چھوٹے خانوں میں تقسیم کرنے سے یہ تخمین بہتر ہو گی۔ درحقیقت، مساوات ۱۵.۳ کے دائیں ہاتھ مجموعہ دوہرا تکمل

$$\iint_R \frac{1}{|\cos\gamma|}\,\mathrm{d}A \tag{۱۵.۴}$$




شکل ۱۵.۴۸: اس قطع مکافی سطح کا رقبہ مثال ۱۵.۱ میں حاصل کیا گیا ہے۔

کے تخمینی مجموعے ہیں۔ اسی بنا پر جب بھی یہ تکمل موجود ہو ہم اسے $S$ کے **رقبہ**[۲۰] کی تعریف لیتے ہیں۔

## عملی کلیہ

کسی بھی سطح $f(x,y,z) = c$ کے لیے $|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}| = |\nabla f||\boldsymbol{p}||\cos\gamma|$ ہو گا، لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے، جہاں اکائی سمتیہ کی مطلق قیمت 1 ہے ( $|\boldsymbol{p}| = 1$ )۔

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|}$$

اس کو مساوات ۱۵.۴ کے ساتھ ملا کر رقبے کا عملی کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

## سطحی رقبے کا کلیہ

بند اور محدود مستوی میں خطہ $R$ پر سطح $f(x,y,z) = c$ کا رقبہ ذیل ہو گا

$$\text{سطحی رقبہ} = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \tag{۱۵.۵}$$

جہاں $\boldsymbol{p}$ خطہ $R$ کا اکائی عمودی سمتیہ ہے اور $\nabla f \cdot \boldsymbol{p} \neq 0$ ہے۔

یوں $\nabla f$ کی قدر کو $\nabla f$ کے اس غیر سمتی عمودی جزو کی قدر سے تقسیم کر کے جو $R$ کو عمودی ہو، خطہ $R$ پر دوہرا تکمل لینے سے رقبہ حاصل ہو گا۔

ہم نے $\nabla f$ کو استراری تصور کر کے اور پورے $R$ پر $\nabla f \cdot \neq 0$ تصور کر کے مساوات ۱۵.۵ حاصل کی۔ جب بھی یہ تکمل موجود ہو، اس کی قیمت کو سطح $f(x,y,z) = c$ کے اس حصہ کے رقبے کی تعریف لی جاتی ہے جو $R$ کے اوپر (بلندی پر) پایا جاتا ہو۔

مثال ۱۵.۱: قطع مکافی $x^2 + y^2 - z = 0$ کے نچلے حصے سے مستوی $z = 4$ ایک سطح کاٹتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

---

[۲۰] area

**حل:** ہم مستوی $xy$ میں سطح $S$ اور اس کے نیچے خطہ $R$ کا خاکہ بناتے ہیں (شکل ۱۵.۴۸)۔ سطح $S$، ہم قد سطح $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$ کا حصہ ہے اور $R$، مستوی $xy$ میں قرص $x^2 + y^2 \leq 4$ ہے۔ مستوی $R$ کا اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$ ہے۔

سطح پر کسی بھی نقطہ $x, y, z$ پر ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x^2 + y^2 - z \\
\nabla f &= 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \\
|\nabla f| &= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2} \\
&= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \\
|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}| &= |\nabla f \cdot \boldsymbol{k}| = |-1| = 1
\end{aligned}$$

خطہ $R$ میں $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہو گا، لہٰذا ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\text{سطحی رقبہ} &= \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A && \text{(مساوات ۱۵.۵)} \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\;\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4r^2+1}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta && \text{(قطبی محدد)} \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}(17^{\frac{3}{2}} - 1)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)
\end{aligned}$$

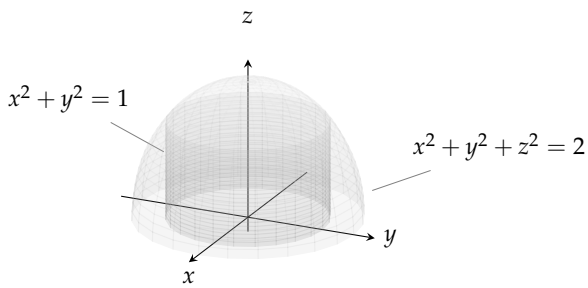
□

مثال ۱۵.۲: نصف کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 0$ سے بیلن $x^2 + y^2 = 1$ ایک ٹوپی کاٹتا ہے (شکل ۱۵.۴۹)۔ اس ٹوپی کا رقبہ تلاش کریں۔

**حل:** ٹوپی $S$، ہم قد سطح $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 2$ کا حصہ ہے۔ یہ ایک ایک مطابقت کے ساتھ مستوی $xy$ میں قرص $R : x^2 + y^2 \leq 1$ پر تظلیل کرتا ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$ مستوی $R$ کو عمودی ہے۔

سطح میں کسی بھی نقطے پر ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 \\
\nabla f &= 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k} \\
|\nabla f| &= 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{2} && \text{(چونکہ ٹوپی پر ہمیشہ } x^2 + y^2 + z^2 = 2 \text{ ہو گا)} \\
|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}| &= |\nabla f \cdot \boldsymbol{k}| = |2z| = 2z
\end{aligned}$$




شکل ۱۵.۴۹: کرہ سے بیلن ٹوپی کاٹتا ہے (مثال ۱۵.۲)۔

یوں ادرج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\text{سطحی رقبہ} = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A = \iint_R \frac{2\sqrt{2}}{2z}\,\mathrm{d}A = \sqrt{2}\iint_R \frac{\mathrm{d}A}{z} \tag{۱۵.۶}$$

یہاں $z$ کا کیا کیا جائے؟

چونکہ $z$ کرہ کی سطح پر ایک نقطے کا $z$ محدد ہے، لہٰذا اس کو ہم $x$ اور $y$ کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$z = \sqrt{2-x^2-y^2}$$

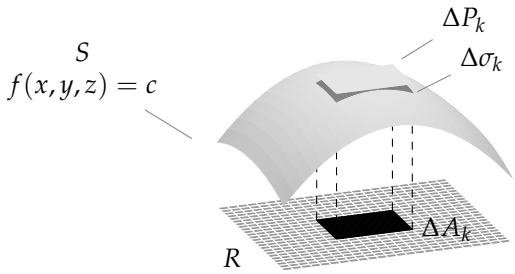
اس کو مساوات ۱۵.۶ میں ڈالتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\text{سطحی رقبہ} &= \sqrt{2}\iint_R \frac{\mathrm{d}A}{z} = \sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{\mathrm{d}A}{\sqrt{2-x^2-y^2}} \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2-r^2}} && \text{(قطبی محدد)} \\
&\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\Big[-(2-r^2)^{\frac{1}{2}}\Big]_{r=0}^{r=1}\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\sqrt{2}-1)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi(2-\sqrt{2})
\end{aligned}$$

□

## سطحی تکملات

سطحی رقبے کے حساب میں مستعمل تصورات بروئے کار لاتے ہوئے سطح پر تفاعل کے تکمل کا حصول سیکھتے ہیں۔




شکل ۱۵.۵۰: سطح پر کثافت بار جانتے ہوئے، سطحی تکمل میں ردوبدل کر کے، سطح پر کل بار دریافت کیا جا سکتا ہے۔

فرض کریں، سطح $f(x,y,z)=c$ پر برقی بار تقسیم ہے (شکل ۱۵.۵۰) اور $S$ کے ہر نقطہ پر تفاعل $g(x,y,z)$ بار فی اکائی رقبہ (کثافت بار) دیتا ہے۔ ایسی صورت میں $S$ پر کل بار کا حساب تکمل کی صورت میں درج ذیل طریقے سے لکھا جا سکتا ہے۔

ہم $S$ کے نیچے، زمینی مستوی پر خطہ $R$ کو چھوٹے چھوٹے مستطیلوں میں بالکل اسی طرح تقسیم کرتے ہیں جیسا $S$ کا سطحی رقبہ تلاش کرنے کے لیے کیا جاتا ہے۔ ہر ایک $\Delta A_k$ کے بالکل اوپر کچھ بلندی پر سطح $\Delta\sigma_k$ پایا جاتا ہے، جس کو ہم مماسی مستوی پر مستطیلی ٹکڑا $\Delta P_k$ سے تخمین کرتے ہیں۔

ہم سطحی رقبے کی تعریف کے طرز پر چل رہے ہیں، تاہم یہاں ایک اضافی قدم لیتے ہیں: ہم $(x_k, y_k, z_k)$ پر $g$ کی قیمت معلوم کر کے رقبہ $\Delta\sigma_k$ پر کل بار کو تخمیناً حاصل ضرب $g(x_k, y_k, z_k)\Delta P_k$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس کی وجہ درج ذیل ہے: خطہ $R$ کو کافی چھوٹے چھوٹے مستطیلوں میں تقسیم کرنے کی صورت میں پورے $\Delta\sigma_k$ پر $g$ کی قیمت تقریباً مستقل ہو گی، اور $\Delta P_k$ تقریباً $\Delta\sigma_k$ کے کے برابر ہو گا۔ یوں $S$ پر کل بار تخمیناً درج ذیل مجموعہ کے برابر ہو گا۔

$$\text{کل بار} = \approx \sum g(x_k, y_k, z_k)\Delta P_k = \sum g(x_k, y_k, z_k)\frac{\Delta A_k}{|\cos\gamma_k|} \tag{۱۵.۷}$$

اگر سطح $S$ کو ظاہر کرنے والا تفاعل $f$ اور اس کے یک رتبی جزوی تفرق استمراری ہوں، اور $S$ پر $g$ استمراری ہو، تب $R$ کی خانہ بندی ہمیشہ کی طرح نفیس بنانے سے مساوات ۱۵.۷ کے دائیں ہاتھ میں پیش مجموعے درج ذیل حد کو پہنچتے ہیں۔

$$\iint_R g(x,y,z)\frac{\mathrm{d}A}{|\cos\gamma|} = \iint g(x,y,z)\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \tag{۱۵.۸}$$

یہ حد سطح $S$ پر $g$ کا تکمل کہلاتا ہے، جس کو $R$ پر دہرا تکمل لکھا اور حاصل کیا جاتا ہے۔ اس تکمل کی قیمت سطح $S$ پر کل بار دے گی۔

اگر مساوات ۱۵.۸ کا تکمل موجود ہو، تب آپ توقع کر سکتے ہیں کہ مساوات ۱۵.۸ کا کلیہ سطح $S$ پر کسی بھی تفاعل $g$ کے تکمل کی تعریف ہے۔

### تعریفات

اگر سطح $S$، جس کی تعریف مساوات $f(x,y,z) = c$ دیتی ہے، کا سایہ $R$ ہو اور $S$ کے تمام نقطوں پر $g$ استمراری تفاعل ہو، $S$ پر $g$ کا **تکمل** درج ذیل ہو گا:

$$\iint g(x,y,z)\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \tag{۱۵.۹}$$

جہاں $\boldsymbol{p}$ سایہ دار خطہ $R$ کا اکائی عمودی سمتیہ ہے اور $\nabla f\cdot \boldsymbol{p} \neq 0$ ہے۔ اس تکمل کو **سطحی تکمل**[۲۱] کہتے ہیں۔

مختلف عملی استعمال میں مساوات ۱۵.۹ کا تکمل مختلف معنی رکھتا ہے۔ اگر $g$ کی قیمت مستقل طور پر $1$ ہو، تکمل $S$ کا رقبہ دے گا۔ اگر $g$ ایک باریک خول، جس کی شکل کا نمونہ $S$ ہو، کی کمیتی کثافت ہو تب تکمل خول کی کمیت دے گا۔

### الجبرائی خواص: سطحی رقبہ کی تفریق

ہم $\left(|\nabla f| \,/\, |\nabla f\cdot \boldsymbol{p}|\right)\mathrm{d}A$ کو $\mathrm{d}\sigma$ لکھ کر مساوات ۱۵.۹ کا تکمل مختصراً (درج ذیل) لکھ سکتے ہیں۔

**سطحی رقبہ کی تفریق اور سطحی تکملات کا تفریقی کلیہ**

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \tag{۱۵.۱۰}$$

سطحی رقبے کی تفریق

$$\iint_S g\,\mathrm{d}\sigma$$

سطحی تکملات کا تفریقی کلیہ

سطحی تکملات دیگر دہرا تکملات کی طرح رویہ رکھتے ہیں: دو تفاعلات کا تکمل ان تفاعلات کے انفرادی تکملات کا مجموعہ ہو گا وغیرہ وغیرہ۔ دائرہ کار کی جمع پذیری خاصیت درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

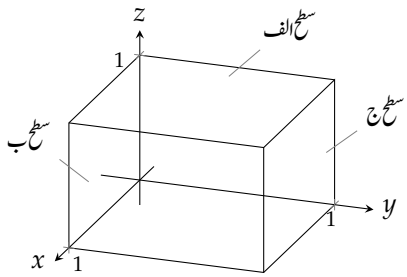
$$\iint_S g\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{S_1} g\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{S_2} g\,\mathrm{d}\sigma + \cdots + \iint_{S_n} g\,\mathrm{d}\sigma$$

کلیدی تصور یہ ہے کہ اگر $S$ کو ہموار منحنیات، متناہی تعداد کی غیر منطبق، ہموار قطعات میں خانہ بند کرتی ہوں (یعنی اگر $S$ **ٹکڑوں میں ہموار**[۲۲] ہو) تب قطعات پر تکملات کا مجموعہ $S$ پر تکمل کے برابر ہو گا۔ یوں، مکعب کی سطح پر تفاعل کا تکمل، مکعب کی چھ سطحوں پر تکملات کا مجموعہ ہو گا۔

مثال ۱۵.۳: ربع اول سے مستویات $x = 1$، $y = 1$، اور $z = 1$ ایک مکعب کاٹتی ہیں (شکل ۱۵.۵۱)۔ اس مکعب کی سطح پر $g(x,y,z) = xyz$ کا تکمل لیں۔

---

[۲۱] surface integral
[۲۲] piecewise smooth




شکل ۱۵.۵۱: مکعب پر تفاعل کا تکمل حاصل کرنے کے لئے مکعب کے چھ اطراف پر تکمل لے کر نتائج جمع کریں (مثال ۱۵.۳)۔

**حل:** ہم باری باری مکعب کی چھ سطحوں پر $xyz$ کا تکمل لے کر تمام نتائج کا مجموعہ لیتے ہیں۔ محددی مستویات میں پائے جانے والے اطراف میں $xyz = 0$ ہو گا، لہٰذا مکعب کی سطح پر تکمل گھٹ کر درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے۔

$$\iint_{\text{مکعبی سطح}} xyz \, \mathrm{d}\sigma = \iint_{\text{سطح الف}} xyz \, \mathrm{d}\sigma + \iint_{\text{سطح ب}} xyz \, \mathrm{d}\sigma + \iint_{\text{سطح ج}} xyz \, \mathrm{d}\sigma$$

مستوی $xy$ میں چوکور خطہ $R_{xy} : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ پر سطح الف کی مساوات $f(x,y,z) = z = 1$ ہے۔ اس سطح اور خطہ کے لیے ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}, \quad \nabla f = \boldsymbol{k}, \quad \left|\nabla f\right| = 1, \quad \left|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}\right| = \left|\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}\right| = 1, \\
&\mathrm{d}\sigma = \frac{\left|\nabla f\right|}{\left|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}\right|} \, \mathrm{d}A = \frac{1}{1} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \\
&xyz = xy(1) = xy
\end{aligned}$$

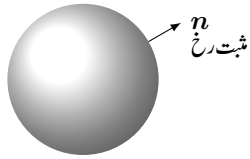
یوں ذیل ہو گا۔

$$\iint_{\text{سطح الف}} xyz \, \mathrm{d}\sigma = \iint_{R_{xy}} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y}{2} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{4}$$

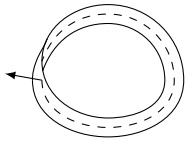
تشاکلیت کی بنا پر سطح ب اور ج پر $xyz$ کے تکمل بھی $\frac{1}{4}$ دیں گے۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$\iint_{\text{مکعبی سطح}} xyz \, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

□




شکل ۱۵.۵۲: ہموار بند سطح ہمیشہ قابل سمت بند ہو گی۔ ہر نقطے پر باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ مثبت رخ دیگا۔



شکل ۱۵.۵۳: موبیوس پٹی ناقابل سمت بند ہے۔

## سمت بندی

وہ ہموار سطح $S$ ، جس پر عمودی اکائی سمتیات کا ایسا میدان $\boldsymbol{n}$ متعارف کیا جا سکتا ہو جو مقام کے ساتھ استمراری تبدیل ہو، **قابل سمت بند**[۲۳] یا **دو طرفہ**[۲۴] کہلاتی ہے۔ قابل سمت بند سطح کا ہر ذیلی ٹکڑا قابل سمت بند ہو گا۔ کرہ اور فضا میں دیگر بند سطحیں (ایسی ہموار سطحیں جو ٹھوس اجسام کو احاطہ کرتی ہوں) قابل سمت بند ہوں گی۔ روایتاً $\boldsymbol{n}$ کا رخ بند سطح سے باہر کی طرف رکھا جاتا ہے۔

میدان $\boldsymbol{n}$ منتخب کرنے کے بعد ہم کہتے ہیں سطح **سمت بند**[۲۵] بنائی گئی ہے اور سطح بشمول عمودی میدان **سمت بند سطح**[۲۶] کہلاتی ہے۔ کسی بھی نقطے پر سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ، اس نقطے پر مثبت رخ کہلاتا ہے (شکل ۱۵.۵۲)۔

شکل ۱۵.۵۳ میں **موبیوس پٹی**[۲۷] دکھائے گئی ہے جو ناقابل سمت بند ہے۔ آپ کسی بھی نقطہ سے آغاز کر کے استمراری اکائی عمودی میدان بنانا شروع کریں۔ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کو سطح پر استمراری حرکت دینے سے آپ ابتدائی نقطے تک یوں پہنچ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{n}$ کا رخ ابتدائی رخ کا مخالف ہو۔ ایک نقطے پر سمتیہ بیک وقت دو مخالف رخ نہیں ہو سکتا، اگرچہ استمراری میدان کی صورت میں موبیوس پٹی پر ایسا ہی ہونا چاہیے۔ یوں ہم اخذ کرتے ہیں کہ ایسا میدان موجود نہیں ہو گا۔

## بہاؤ کا سطحی تکمل

فرض کریں قابل سمت بند سطح $S$ پر استمراری سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ ہے، اور سطح پر منتخب اکائی عمودی میدان $\boldsymbol{n}$ ہے۔ ہم $S$ پر $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ کے تکمل کو $S$ پر مثبت رخ کا بہاؤ کہتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{n}$ کے رخ $\boldsymbol{F}$ کے غیر سمتی جزو کا $S$ پر تکمل، سطح سے گزرتا بہاؤ دے گا۔

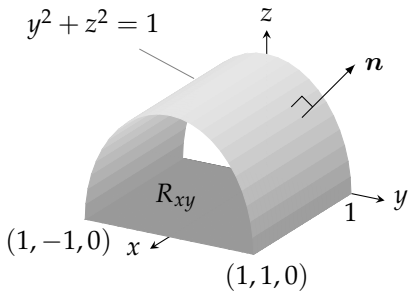
## تعریف

قابل سمت بند سطح $S$ کو پار کرتا، $\boldsymbol{n}$ کے رخ، تین ابعادی سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ درج ذیل کلیہ دے گا۔

$$\text{بہاؤ} = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \tag{۱۵.۱۱}$$

---

[۲۳] orientable
[۲۴] two-sided
[۲۵] oriented
[۲۶] oriented surface
[۲۷] Mobius band




شکل ۱۵.۵۴: سطح سے باہر رخ سمتی میدان کا بہاؤ (مثال ۱۵.۴)۔ زمینی رقبہ $R_{xy}$ دو (2) کے برابر ہے۔

یہ تعریف مسطح منحنی C کو پار کرتے، دو ابعادی میدان $\boldsymbol{F}$ کے بہاؤ کی تعریف کے عین مطابق ہے۔ مستوی میں بہاؤ کو، منحنی C کو $\boldsymbol{F}$ کے عمودی غیر سمتی جزو کا تکمل:

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$$

ظاہر کرتا ہے۔

گر $\boldsymbol{F}$ تین ابعادی سیالی بہاؤ کا سمتی رفتار میدان ہو، تب $S$ سے (گزرتا) $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ، منتخب مثبت رخ میں $S$ سے گزرتے سیال کی خالص شرح دے گا۔ ایسے بہاؤ پر تفصیلاً تبصرہ حصہ ۱۵.۸ میں کیا جائے گا۔

اگر $\boldsymbol{S}$ ہم قد سطح $g(x,y,z)=c$ کا حصہ ہو، تب $\boldsymbol{n}$ درج ذیل میں سے، جو پسند کا رخ دیتا ہو، ہو گا۔

$$\boldsymbol{n}=\pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|} \tag{۱۵.۱۲}$$

مطابقتی بہاؤ ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\text{بہاؤ} &= \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma && \text{مساوات ۱۵.۱۱}\\
&= \iint_R \left(\boldsymbol{F}\cdot\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g|}\right)\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A && \text{مساوات ۱۵.۱۰ اور ۱۵.۱۲}\\
&= \iint_R \boldsymbol{F}\cdot\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g\cdot\boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A && (۱۵.۱۳)
\end{aligned}$$

مثال ۱۵.۴: بیلن $y^2+z^2=1, z\geq 0$ سے مستویات $x=0$ اور $x=1$ سطح $S$ کاٹتی ہیں (شکل ۱۵.۵۴)۔ سطح $S$ سے باہر رخ $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ کا بہاؤ تلاش کریں۔

**حل:** سطح $S$ پر باہر روح عمودی میدان $\boldsymbol{n}$ کو $g(x,y,z) = y^2 + z^2$ کی ڈھلوان (ذیل دیکھیں) سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{n} = +\frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} = \frac{2yaj + 2z\boldsymbol{k}}{2\sqrt{1}} = y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

چونکہ $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$ ہے لہٰذا درج ذیل بھی ہو گا۔

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \boldsymbol{k}|}\,\mathrm{d}A = \frac{2}{|2z|}\,\mathrm{d}A = \frac{1}{z}\,\mathrm{d}A$$

ہم $z \geq 0$ کے بنا مطلق قیمت کی علامت ہٹا سکتے ہیں۔

سطح پر $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ کی قیمت ذیل کلیہ دیگا، جہاں آخری قدم میں $S$ پر $y^2 + z^2 = 1$ ہو گا۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} &= (yz\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}) \cdot (y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) \\ &= y^2 z + z^3 = z(y^2 + z^2) \\ &= z\end{aligned}$$

یوں $S$ سے $\boldsymbol{F}$ کا اخراجی بہاؤ ذیل ہو گا۔

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S (z)\left(\frac{1}{z}\,\mathrm{d}A\right) = \iint_{R_{xy}} \mathrm{d}A = \text{کا رقبہ } R_{xy} = 2$$

□

### باریک خول کی کمیت اور معیار اثر

گھریلو برتن، ڈھول، اور دیگر باریک خول کو سطحوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ان کی کمیت اور معیار اثر جدول ۱۵.۱ میں پیش کلیات سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔

مثال ۱۵.۵: رداس $a$ اور مستقل کثافت $\delta$ کے باریک نصف کروی خول کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

**حل:** ہم خول کو نصف کرہ:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0$$

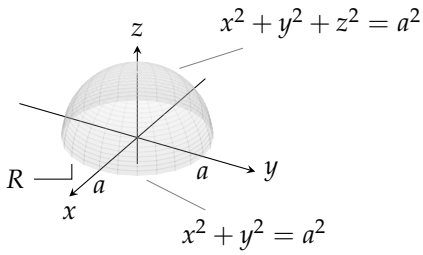
سے ظاہر کرتے ہیں (شکل ۱۵.۵۵)۔ محور $z$ کے لحاظ سے سطح کی تشاکلی کی بنا پر $\overline{x} = \overline{y} = 0$ ہو گا۔ کلیہ $\overline{z} = M_{xy}/M$ سے $\overline{z}$ تلاش کرنا باقی ہے۔

خول کی کمیت درج ذیل ہے۔

$$M = \iint_S \delta\,\mathrm{d}\sigma = \delta \iint_S \mathrm{d}\sigma = (\delta)(\text{کا رقبہ}, S) = 2\pi a^2 \delta$$

جدول ۱۵.۱: نہایت باریک خول کی کمیت اور معیار اثر

| | |
|---|---|
| کمیت | $M = \iint_S \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$<br>نقطہ $(x,y,z)$ پر $\delta(x,y,z)$ کثافت (کمیت فی اکائی رقبہ) ہے |
| محددی مستویات کے لحاظ سے اول معیار اثر | $M_{yz} = \iint_S x\delta\,\mathrm{d}\sigma, \qquad M_{xz} = \iint_S y\delta\,\mathrm{d}\sigma, \qquad M_{xy} = \iint_S z\delta\,\mathrm{d}\sigma$ |
| مرکز کمیت کے محدد | $\overline{x} = M_{yz}/M, \qquad \overline{y} = M_{xz}/M, \qquad \overline{z} = M_{xy}/M$ |
| جمودی معیار اثر | $I_x = \iint_S (y^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}\sigma, \qquad I_y = \iint_S (x^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}\sigma$<br>$I_z = \iint_S (x^2+y^2)\delta\,\mathrm{d}\sigma, \qquad I_L = \iint_S r^2\delta\,\mathrm{d}\sigma$<br>نقطہ $(x,y,z)$ سے لکیر $L$ کا فاصلہ $r(x,y,z)$ ہے |
| لکیر $L$ کے لحاظ سے ردائی دوار | $R_L = \sqrt{I_L/M}$ |




شکل ۱۵.۵۵: مستقل کمیتی کثافت کی باریک چادر کا نصف کروی خول (مثال ۱۵.۵)۔

$M_{xy}$ کا تکمل تلاش کرنے کی خاطر $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$ لیتے ہیں۔ یوں،

$$M_{xy} = \iint_S z\delta \, \mathrm{d}\sigma = \delta \iint_R z\frac{a}{z} \, \mathrm{d}\sigma = \delta a \iint_R \mathrm{d}A = \delta a(\pi a^2) = \delta \pi a^3$$

لہٰذا ذیل ہو گا۔

$$\overline{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi a^3 \delta}{2\pi a^2 \delta} = \frac{a}{2}$$

خول کا مرکز کمیت نقطہ $(0, 0, a/2)$ پر ہو گا۔ □

## سوالات

### سطحی رقبہ

سوال ۱۵.۱: مکافی جسم $x^2 + y^2 - z = 0$ سے مستوی $z = 2$ جو سطح کاٹتی ہے اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲: مکافی جسم $x^2 + y^2 - z = 0$ سے مستویات $z = 2$ اور $z = 6$ جو پٹی کاٹتی ہے اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳: مستوی $x + 2y + 2z = 5$ سے ایک بیلن، جس کی دیواریں $x = y^2$ اور $x = 2 - y^2$ ہیں، جو خطہ کاٹتا ہے اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴: سطح $x^2 - 2z = 0$ کے اس حصے کا رقبہ تلاش کریں جو مستوی $xy$ میں واقع اس مثلث کے اوپر پایا جاتا ہے جس کو لکیر $x = \sqrt{3}$ ، $y = 0$ ، اور $y = x$ گھیرتی ہیں۔

سوال ۱۵.۵: سطح $x^2 - 2y - 2z = 0$ کے اس حصے کا رقبہ تلاش کریں جو مستوی $xy$ میں واقع اس مثلث کے اوپر پایا جاتا ہے جس کو لکیر $x=2$ ، $y = 0$ ، اور $y = 3x$ گھیرتی ہیں۔

سوال ۱۵.۶: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ جو ٹوپی کاٹتا ہے اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۷: مستوی $z = cx$ سے بیلن $x^2 + y^2 = 1$ جو ترخیم کاٹتا ہے اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۸: بیلن $x^2 + z^2 = 1$ کے اس بالائی حصے کا رقبہ تلاش کریں جو مستویات $x = \pm 1/2$ اور $y = \pm 1/2$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔

سوال ۱۵.۹: مستوی $yz$ میں واقع چھلا $1 \leq y^2 + z^2 \leq 4$ کے اوپر مکافی جسم $x = 4 - y^2 - z^2$ کا جو حصہ پایا جاتا ہے اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۰: مکافی سطح $x^2 + y + z^2 = 2$ سے مستوی $y = 0$ جو سطح کاٹتی ہے اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۱: مستوی $xy$ میں واقع مربع $R : 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ کے اوپر سطح $x^2 - 2\ln x + \sqrt{15}y - z = 0$ کا جو حصہ پایا جاتا ہے اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۲: مستوی $xy$ میں واقع مربع $R:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ کے اوپر سطح $2x^{3/2} + 2y^{3/2} - 3z = 0$ کا جو حصہ پایا جاتا ہے اس کا رقبہ تلاش کریں۔

## سطحی تکملات

سوال ۱۵.۱۳: ثمن اول سے مستویات $x = a$ ، $y = a$ ، اور $z = a$ جو مکعب کاٹتی ہیں اس کی سطح پر $g(x, y, z) = x + y + z$ کا تکمل حاصل کریں۔

سوال ۱۵.۱۴: ثمن اول سے محددی مستویات اور مستویات $x = 2$ اور $y + z = 1$ جو پچر کاٹتی ہیں اس کی سطح پر $g(x, y, z) = y + z$ کا تکمل حاصل کریں۔

سوال ۱۵.۱۵: ثمن اول سے مستویات $x = a$ ، $y = b$ ، اور $z = c$ جو مستطیلی ٹھوس جسم کاٹتی ہیں اس کی سطح پر $g(x, y, z) = xyz$ کا تکمل لیں۔

سوال ۱۵.۱۶: مستویات $x = \pm a$ ، $y = \pm b$ ، اور $z = \pm c$ جو مستطیلی ٹھوس جسم گھیرتی ہیں اس کی سطح پر $g(x, y, z) = xyz$ کا تکمل لیں۔

سوال ۱۵.۱۷: تفاعل $g(x, y, z) = x + y + z$ کا تکمل ثمن اول میں واقع مستوی $2x + 2y + z = 2$ کے ٹکڑے پر حاصل کریں۔

سوال ۱۵.۱۸: تفاعل $g(x, y, z) = x\sqrt{y^2 + 4}$ کا تکمل اس سطح پر لیں جو مستویات $x = 0$ ، $x = 1$ ، اور $z = 0$ مکافی بیلن $y^2 + 4z = 16$ سے کاٹتی ہیں۔

## سطح سے گزرنے والا بہاؤ

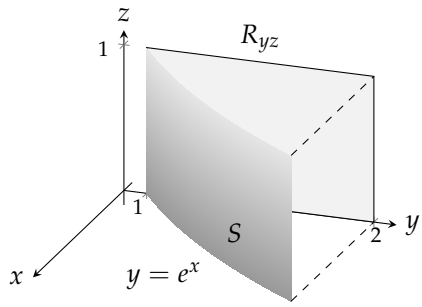
سطح $S$ سے میدان $\boldsymbol{F}$ کا گزرنے والا بہاؤ سوال ۱۵.۱۹ اور سوال ۱۵.۲۰ میں تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۹: $\boldsymbol{F}(x, y, z) = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$
مستطیل سطح $z = 0,\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3$ جس کا رخ $\boldsymbol{k}$ ہے سطح $S$ ہے۔

سوال ۱۵.۲۰: $\boldsymbol{F}(x, y, z) = yx^2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$
مستطیل سطح $y = 0,\ -1 \le x \le 2,\ 2 \le z \le 7$ جس کا رخ $-\boldsymbol{j}$ ہے سطح $S$ ہے۔

ثمن اول میں کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ کے ٹکڑے سے، جس کا رخ مبدا سے دوری کی جانب ہے، میدان $\boldsymbol{F}$ کا گزرنے والا بہاؤ سوال ۱۵.۲۱ تا ۱۵.۲۶ میں تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۱: $\boldsymbol{F}(x, y, z) = z\boldsymbol{k}$




شکل ۱۵.۵۶: سطح اور خطہ برائے سوال ۱۵.۲۹

سوال ۱۵.۲۲: $\boldsymbol{F}(x, y, z) = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۲۳: $\boldsymbol{F}(x, y, z) = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۲۴: $\boldsymbol{F}(x, y, z) = zx\boldsymbol{i} + zy\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۲۵: $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۲۶: $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

سوال ۱۵.۲۷: قطع مکافی بیلن $z = 4 - y^2$ سے مستویات $x = 0$ ، $x = 1$ ،اور $z = 0$ جو سطح کاٹتی ہیں اس سے اوپر رخ گزرتا بہاؤ میدان $\boldsymbol{F}(x, y, z) = z^2\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - 3z\boldsymbol{k}$ کے لئے تلاش کریں۔

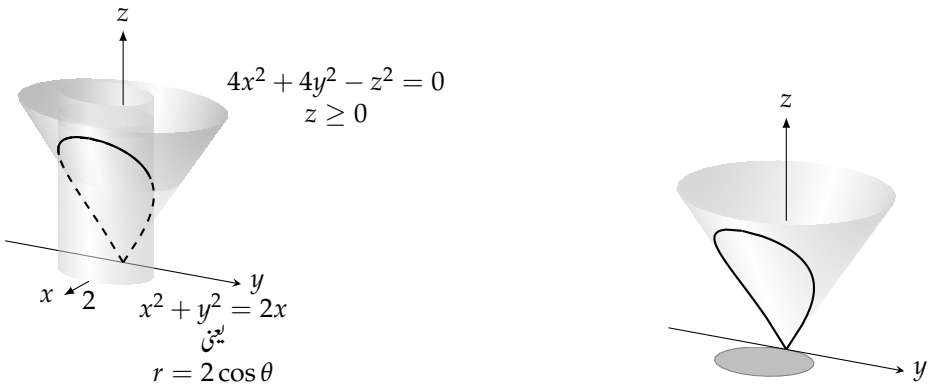
سوال ۱۵.۲۸: مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ کے نچلے حصے سے مستوی $z = 1$ جو سطح کاٹتی ہے اس سے باہر رخ (محور $z$ سے دور جانب) گزرتا بہاؤ میدان $\boldsymbol{F}(x, y, z) = 4x\boldsymbol{i} + 4y\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ کے لئے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۹: فرض کریں ثمن اول میں بیلن $y = e^x$ کا ٹکڑا $S$ مستوی $yz$ میں واقع مستطیل $R_{yz} : 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1$ پر محور $x$ کے متوازی سایہ ڈالتا ہے (شکل ۱۵.۵۶)۔ فرض کریں $S$ کے اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کا رخ مستوی $yz$ سے دور جانب ہے۔ سطح $S$ سے $\boldsymbol{n}$ کے رخ گزرنے والا بہاؤ میدان $\boldsymbol{F}(x, y, z) = -2\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ کے لئے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۰: ثمن اول میں بیلن $y = \ln x$ کا ٹکڑا سطح $S$ ،مستوی $xz$ پر محور $y$ کے متوازی مستطیل سایہ $R_{xz} : 1 \leq x \leq e, 0 \leq z \leq 1$ ڈالتا ہے۔ سطح $S$ کے اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کا رخ مستوی $xz$ سے دور جانب ہے۔ میدان $\boldsymbol{F} = 2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ کا $\boldsymbol{n}$ کے رخ $S$ سے گزرتا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۱: ثمن اول سے مستویات $x = a$ ، $y = a$ ،اور $z = a$ مکعب کاٹتی ہیں۔ مکعب کی سطح سے باہر رخ میدان $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j} + 2xz\boldsymbol{k}$ کا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۲: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ سے مستوی $z = 3$ بالائی ٹوپی کاٹتا ہے۔ میدان $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ کا بہاؤ اس ٹوپی سے باہر رخ تلاش کریں۔




شکل ۱۵.۵۷: سطح برائے سوال ۱۵.۳۵

## معیار اثر اور کمیت

سوال ۱۵.۳۳: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ کے اس حصہ کا، جو ثمن اول میں پایا جاتا ہے، وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۴: بیلن $y^2 + z^2 = 9,\ z \geq 0$ سے مستویات $x = 0$ اور $x = 3$ جو سطح کاٹتی ہیں (یہ مثال ۱۵.۴ کی سطح سے مشابہت رکھتی ہے) اس کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۵: مستقل کثافت $\delta$ کے مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ سے مستویات $z = 1$ اور $z = 2$ جو باریک خول کاٹتی ہیں اس کا مرکز کمیت، اور محور $z$ کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۶: مستقل کثافت $\delta$ کے مخروط $4x^2 + 4y^2 - z^2,\ z \geq 0$ سے دائری بیلن $x^2 + y^2 = 2x$ جو باریک خول (شکل ۱۵.۵۷) کاٹتا ہے اس کا محور $z$ کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۷:

ا. مستقل کثافت $\delta$ اور رداس $a$ کے باریک کروی خول کا جمودی معیار اثر قطر کے لحاظ سے تلاش کریں۔ (نصف کرہ کے لئے نتیجہ حاصل کر کے دگنا کریں۔)

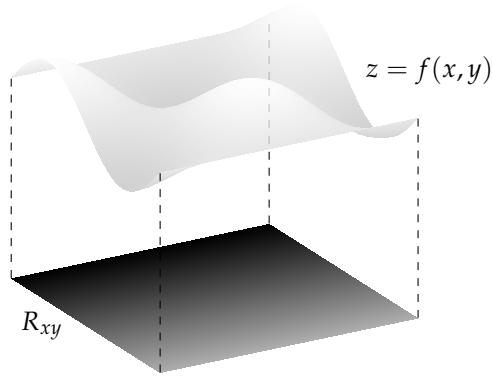
ب. مسئلہ متوازی محور (سوالات ۱۴.۵) اور جزوالف کا نتیجہ استعمال کر کے خول کے مماسی لکیر کے لحاظ سے خول کا جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۸:

ا. ٹھوس مخروط کا قد $h$ اور رداس $a$ ہے۔ مخروط کی جانبی سطح (تل شامل نہیں) کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

ب. کلیہ پاپس (سوالات ۱۴.۵) اور جزوالف کا نتیجہ استعمال کر کے مخروط کی مکمل سطح (جانبی سطح اور تل دونوں شامل) کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

ج. رداس $a$ اور قد $h$ کے مخروط کو رداس $a$ کے نصف کرہ کے ساتھ جوڑنے سے سطح $S$ بنتی ہے جو آئس کریم کے مخروط سے مشابہ ہے۔ کلیہ پاپس اور جزوالف کا نتیجہ استعمال کر کے $S$ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ وسطانی مرکز کو مخروط اور نصف کرہ کے ملاپ کی سطح پر ہونے کے لئے مخروط کا قد کتنا ہونا ہو گا؟




شکل ۱۵.۵۸: سطح $z = f(x, y)$ کے لئے سطح کا رقبہ کلیہ $A = \iint_{R_{xy}} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ دے گا۔

## سطحی رقبوں کے خصوصی کلیے

اگر مستوی $xy$ میں واقع پورے خطہ $R_{xy}$ میں سطح $S$ کو تفاعل $z = f(x, y)$ معین کرتا ہو، جس کے یک رتبی تفرق استمراری ہوں (شکل ۱۵.۵۸)، تب سطح $S$ تفاعل $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ کی ہم قد سطح $F(x, y, z) = 0$ بھی ہو گی۔ خطہ $R_{xy}$ کا عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$ لیتے ہوئے ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
|\nabla F| &= |f_x \boldsymbol{i} + f_y \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}, \\
|\nabla F \cdot \boldsymbol{p}| &= |(f_x \boldsymbol{i} + f_y \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{k}| = |-1| = 1 \\
A &= \iint_{R_{xy}} \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \boldsymbol{p}|}\, \mathrm{d}A = \iint_{R_{xy}} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y
\end{aligned}
\tag{۱۵.۱۴}
$$

اسی طرح مستوی $yz$ میں واقع خطہ $R_{yz}$ پر ہموار سطح $x = f(y, z)$ کا رقبہ ذیل

$$
A = \iint_{R_{yz}} \sqrt{f_y^2 + f_z^2 + 1}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \tag{۱۵.۱۵}
$$

اور مستوی $xz$ میں واقع خطہ $R_{xz}$ پر ہموار سطح $y = f(x, z)$ کا رقبہ ذیل ہو گا۔

$$
A = \iint_{R_{xz}} \sqrt{f_x^2 + f_z^2 + 1}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z \tag{۱۵.۱۶}
$$

مساوات ۱۵.۱۴ تا ۱۵.۱۶ استعمال کر کے سوال ۱۵.۳۹ تا ۱۵.۴۴ میں رقبے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۹: مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ کے زیریں حصے سے مستوی $z = 3$ جو سطح کاٹتا ہے۔

سوال ۱۵.۴۰: مکعفی سطح $x = 1 - y^2 - z^2$ کی نوک سے مستوی $yz$ جو سطح کاٹتا ہے۔

سوال ۱۵.۴۱: مستوی $xy$ میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ اور ترخیم $9x^2 + 4y^2 = 36$ کے بیچ خطے کے اوپر مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کا ٹکڑا۔ (اشارہ: ہندسہ کے کلیات استعمال کر کے خطے کا رقبہ تلاش کریں۔)

سوال ۱۵.۴۲: مستوی $2x + 6y + 3z = 6$ سے ثمن اول کے مستویات جو مثلث کاٹتی ہیں۔ باری باری ایک کلیہ استعمال کر کے رقبہ تین مختلف طریقوں سے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۳: ثمن اول میں بیلن $y = (2/3)z^{3/2}$ سے مستویات $x = 1$ اور $y = 16/3$ جو سطح کاٹتی ہیں۔

سوال ۱۵.۴۴: مستوی $xz$ کے ربع اول سے مکافی $x = 4 - z^2$ جو خطہ کاٹتا ہے اس کے اوپر مستوی $y + z = 4$ کا ٹکڑا۔

## ۱۵.۶ مقدار معلوم سطحیں

ہم مستوی میں منحنیات کو ذیل تین مختلف طریقوں سے بیان کر چکے ہیں۔

| | |
|---|---|
| صریح روپ | $y = f(x)$ |
| خفی روپ | $F(x, y) = 0$ |
| مقدار معلوم سمتیہ روپ | $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}, \qquad a \le t \le b$ |

فضا میں سطوح کی بھی ایسی تعریفیں موجود ہیں۔

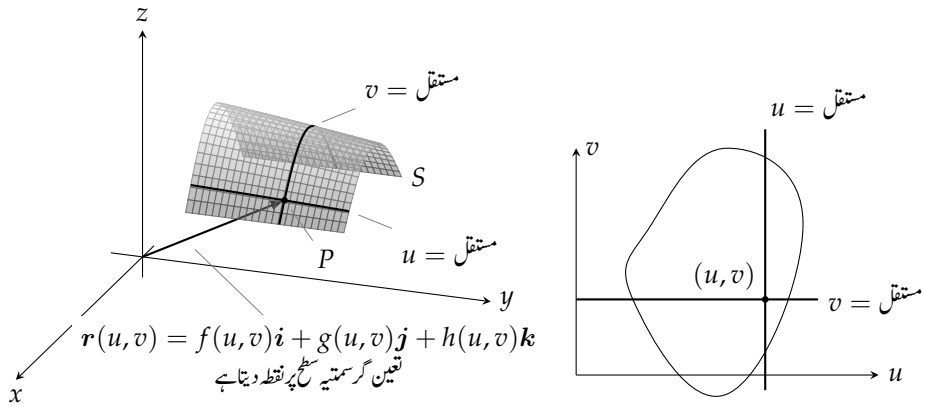
| | |
|---|---|
| صریح روپ | $z = f(x, y)$ |
| خفی روپ | $F(x, y, z) = 0$ |

ایک مقدار معلوم روپ بھی پایا جاتا ہے جس میں سطح پر نقطے کا مقام دو متغیرات کا سمتی تفاعل دیتا ہے۔ اس حصے میں سطحی رقبے اور سطحی تکملات کے مطالعہ کو ان سطحوں تک وسعت دی جائے گی جنہیں مقدار معلوم روپ میں بیان کیا گیا ہو۔

### سطحوں کی مقدار معلوم نمائندگی

فرض کریں استمراری سمتی تفاعل جو مستوی $uv$ کے خطہ $R$ پر معین اور $R$ کے اندرونی حصے میں ایک ایک مطابقت رکھتا ہے (شکل ۱۵.۵۹) کو درج ذیل مساوات ظاہر کرتی ہے۔

$$\boldsymbol{r}(u, v) = f(u, v)\boldsymbol{i} + g(u, v)\boldsymbol{j} + h(u, v)\boldsymbol{k} \tag{۱۵.۱}$$




شکل ۱۵.۵۹: خطہ $R$ پر دو متغیر کا سمتیہ تفاعل سطح $S$ کا مقدار معلوم روپ دیتا ہے۔

ہم $\boldsymbol{r}$ کے دائرہ کار کو **سطح** $S$ کہتے ہیں جس کی تعریف یا نقشہ کشی $\boldsymbol{r}$ کے ذریعہ کی جاتی ہے۔ مساوات ۱۵.۱ اور $R$ کا دائرہ کار مل کر سطح کا **مقدار معلوم روپ**[۲۸] دیتے ہیں۔ متغیرات $u$ اور $v$ **مقدار معلوم**[۲۹] کہلاتے ہیں جبکہ $R$ کو **مقدار معلوم کا دائرہ کار**[۳۰] کہا جاتا ہے۔ مباحثہ سادہ رکھنے کی خاطر ہم فرض کرتے ہیں کہ $R$ مستطیل خطہ ہے جس کو عدم مساوات $a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$ تعین کرتی ہیں۔ یہ شرط مسلط کرنے سے کہ $R$ کے اندرون میں $\boldsymbol{r}$ ایک ایک مطابقت رکھتا ہو، یقینی بناتا ہے کہ سطح $S$ خود کو قطع نہیں کرتی۔ دھیان رہے کہ مساوات ۱۵.۱ درج ذیل تین مقدار معلوم مساوات کی سمتی معادل ہے۔

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = h(u, v)$$

مثال ۱۵.۱: **مخروط کا مقدار معلوم روپ**

درج ذیل مخروط کا مقدار معلوم روپ حاصل کریں۔

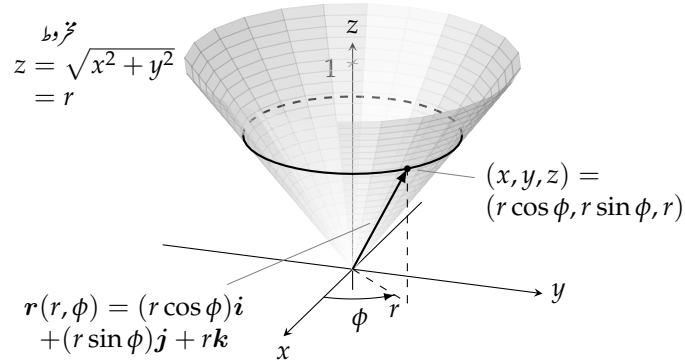
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad 0 \leq z \leq 1$$

**حل:** یہاں نلکی محدد استعمال کرنا بہتر ہے۔ مخروط پر عمومی نقطہ $(x, y, z)$ (شکل ۱۵.۶۰) کے لیے $x = r\cos\phi$ ، $y = r\sin\phi$ ، $z = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ ہوگا جہاں $0 \leq r \leq 1$ اور $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ہوں گے۔ مساوات ۱۵.۱ میں $u = r$ اور $v = \phi$ لینے سے درج ذیل مقدار معلوم روپ حاصل ہوتا ہے۔

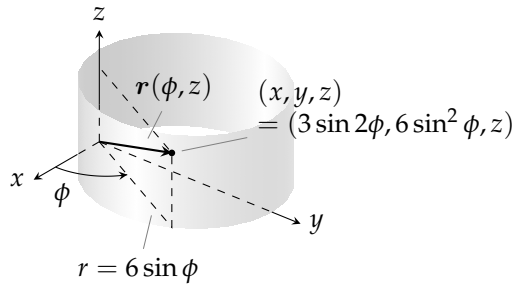
$$\boldsymbol{r}(r, \phi) = (r\cos\phi)\boldsymbol{i} + (r\sin\phi)\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k}, \quad 0 \leq r \leq 1, \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi$$

---

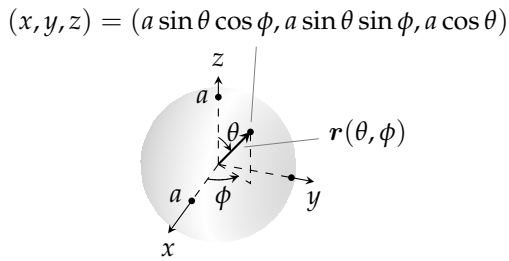
[۲۸] parametric form
[۲۹] parameters
[۳۰] parameter domain




شکل ۱۵.۶۰: نلکی محدد میں مثال ۱۵.۱ کے مخروط کا مقدار معلوم روپ۔




شکل ۱۵.۶۲: نلکی محدد استعمال میں مثال ۱۵.۳ کے بیلن کا مقدار معلوم روپ۔




شکل ۱۵.۶۱: کروی محدد استعمال میں مثال ۱۵.۲ کے کرہ کا مقدار معلوم روپ۔

□

مثال ۱۵.۲: **کرہ کا مقدار معلوم روپ**

کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ کا مقدار معلوم روپ تلاش کریں۔

**حل:** کروی محدد میں عمومی نقطہ $(x, y, z)$ کے لیے $x = a\sin\theta\cos\phi$، جبکہ $y = a\sin\theta\sin\phi$، اور $z = a\cos\theta$ ہوگا جہاں $0 \le \theta \le \pi$ اور $0 \le \phi \le 2\pi$ ہیں (شکل ۱۵.۶۱)۔ مساوات ۱۵.۱ میں $u = \theta$ اور $v = \phi$ لے کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(\theta, \phi) &= (a\sin\theta\cos\phi)\boldsymbol{i} + (a\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{j} + (a\cos\theta)\boldsymbol{k} \\ &0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le \phi \le 2\pi \end{aligned}$$

□

مثال ۱۵.۳: **بیلن کا مقدار معلوم روپ**

درج ذیل بیلن کا مقدار معلوم روپ تلاش کریں۔

$$x^2 + (y-3)^2 = 9, \qquad 0 \le z \le 5$$

**حل:** نلکی محدد میں نقطہ $(x, y, z)$ کے لیے $x=r\cos\phi$ ، $y=r\sin\phi$ ،اور $z=z$ ہو گا۔ بیلن $x^2 + (y-3)^2=9$ (شکل ۱۵.۶۲) پر واقع نقاط کی مساوات وہی ہو گی جو $xy$ مستوی میں بیلن کے تل کی (رداس کو $r$ لکھ کر) نلکی محدد مساوات ہے، یعنی

$$\begin{aligned} x^2 + (y^2 - 6y + 9) &= 9 \\ r^2 - 6r\sin\phi &= 0 \end{aligned}$$

یا درج ذیل۔

$$r = 6\sin\phi, \qquad 0 \le \phi \le \pi$$

پس بیلن پر عمومی نقطے کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi = 6\sin\phi\cos\phi = 3\sin 2\phi \\ y &= r\sin\phi = 6\sin^2\phi \\ z &= z \end{aligned}$$

مساوات ۱۵.۱ میں $u = \phi$ اور $v = z$ لینے سے درج ذیل مقدار معلوم روپ حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{r}(\phi, z) = (3\sin 2\phi)\boldsymbol{i} + (6\sin^2\phi)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \qquad 0 \le \phi \le \pi, \qquad 0 \le z \le 5$$

□

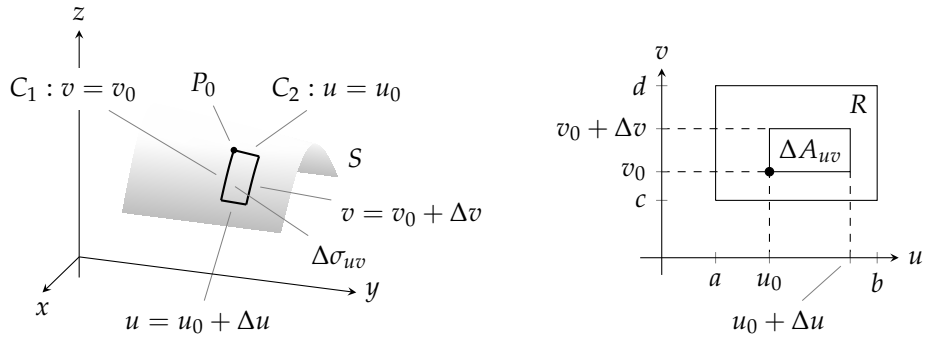
## سطحی رقبہ

ہم ایسا دوہرا تکمل حاصل کرنا چاہتے ہیں جس کے ذریعے خمیدہ سطح $S$ ، جس کا مقدار معلوم روپ درج ذیل ہے، کا رقبہ نکالا جا سکے۔

$$\boldsymbol{r}(u, v) = f(u, v)\boldsymbol{i} + g(u, v)\boldsymbol{j} + h(u, v)\boldsymbol{k}, \qquad a \le u \le b, \qquad c \le v \le d$$

اس کے لیے سطح کا ہموار ہونا ضروری ہے۔ ہمواری کی تعریف سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ کے درج ذیل جزوی تفرق پر مبنی ہے۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_u &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\boldsymbol{j} + \frac{\partial h}{\partial u}\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{r}_v &= \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v}\boldsymbol{i} + \frac{\partial g}{\partial v}\boldsymbol{j} + \frac{\partial h}{\partial v}\boldsymbol{k} \end{aligned}$$




شکل ۱۵.۶۳: مستوی $uv$ میں رقبے کا چھوٹا ٹکڑا $\Delta A_{uv}$ سطح $S$ پر خمیدہ رقبے کا ٹکڑا $\Delta\sigma_{uv}$ دیگا۔

**تعریف: ہموار مقدار معلوم شدہ سطح**

مقدار معلوم سطح $\boldsymbol{r}(u,v) = f(u,v)\boldsymbol{i} + g(u,v)\boldsymbol{j} + h(u,v)\boldsymbol{k}$ اس وقت ہموار کہلاتی ہے جب $\boldsymbol{r}_u$ اور $\boldsymbol{r}_v$ استمراری ہوں اور مقدار معلوم دائرہ کار پر سمتیہ $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ کبھی صفر نہ ہو۔

□

ہمواری کی تعریف میں یہ شرط کہ سمتیہ $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ مقدار معلوم دائرہ کار پر کبھی صفر نہ ہو، اس بات کو یقینی بناتی ہے کہ سمتیات $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ نہ صرف غیر صفر ہوں بلکہ کبھی ایک خط پر بھی نہ ہوں، لہٰذا یہ ہمیشہ سطح کے لیے مماسی سطح تعین کرتے ہیں۔

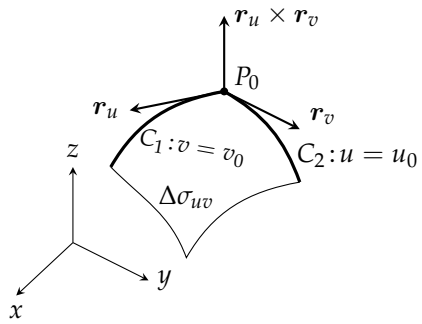
اب $R$ میں ایک چھوٹا مستطیل $\Delta A_{uv}$ لیں جس کے اطراف $u=u_0$ ، $u=u_0+\Delta u$ ، $v=v_0$ ، اور $v=v_0+\Delta v$ ہوں (شکل ۱۵.۶۳)۔ مستطیل $\Delta A_{uv}$ کا ہر پہلو سطح $S$ پر ایک منحنی پر نقش ہو جاتا ہے، اور یہ چار منحنیات مل کر سطح پر ایک "چھوٹا خمیدہ رقبہ" $\Delta S_{uv}$ کے گرد گھیرا بناتی ہیں۔ شکل کے مطابق $v = v_0$ ضلع منحنی $C_1$ پر نقش ہے، $u = u_0$ منحنی $C_2$ پر، اور ان کا مشترک راس $(u_0, v_0)$ نقطہ $P_0$ پر نقش ہے۔

شکل ۱۵.۶۴ میں $\Delta\sigma_{uv}$ بڑا کر کے دکھایا گیا ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ منحنی $C_1$ کو نقطہ $P_0$ کے مقام پر مماس ہے۔ اسی طرح $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$ منحنی $C_2$ کو نقطہ $P_0$ کے مقام پر مماس ہے۔ ان سمتیات کا صلیبی ضرب $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ نقطہ $P_0$ پر سطح کے عمود کا متوازی ہوگا۔ (یہاں ہم یہ مفروضہ استعمال کرتے ہیں کہ سطح $S$ ہموار ہے، تاکہ یہ یقینی بنایا جا سکے کہ $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq \boldsymbol{0}$ ہو۔)

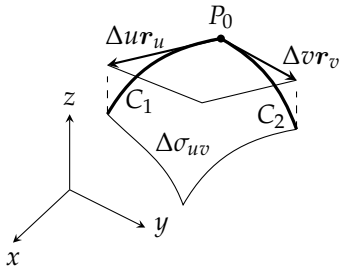
ہم سطحی ٹکڑا $\Delta\sigma_{uv}$ کو مماسی مستوی پر موجود اس متوازی الاضلاع سے تخمین دیتے ہیں جس کے اطراف سمتیات $\Delta u\, \boldsymbol{r}_u$ اور $\Delta v\, \boldsymbol{r}_v$ ہیں (شکل ۱۵.۶۵)۔ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ درج ذیل ہے۔

$$|\Delta u \boldsymbol{r}_u \times \Delta v \boldsymbol{r}_v| = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \Delta u \Delta v \tag{۱۵.۲}$$

مستوی $uv$ میں $R$ کی خانہ بندی چھوٹے مستطیل رقبوں $\Delta A_{uv}$ سے کر کے سطح $S$ کی خانہ بندی کی جا سکتی ہے جو $\Delta\sigma_{uv}$ سطحی ٹکڑوں پر مبنی ہو




شکل ۱۵.۶۴: رقبے کا ٹکڑا $\Delta\sigma_{uv}$ بڑا کر کے دکھایا گیا ہے۔




شکل ۱۵.۶۵: مستطیل جس کے اضلاع $\Delta u\boldsymbol{r}_u$ اور $\Delta v\boldsymbol{r}_v$ ہیں تخمیناً $\Delta\sigma_{uv}$ دیتا ہے۔

گا۔ ہر سطحی ٹکڑے $\Delta\sigma_{uv}$ کے رقبے کو مساوات ۱۵.۲ سے تخمین دے کر تمام رقبے جمع کر کے $S$ کا رقبہ تخمیناً درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sum_u \sum_v |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, \Delta u \Delta v \tag{۱۵.۳}$$

اگر $\Delta u$ اور $\Delta v$ آزادانہ طور پر صفر کو پہنچتے ہو، $\boldsymbol{r}_u$ اور $\boldsymbol{r}_v$ کا استمرار اس بات کی ضمانت دیتا ہے کہ مساوات ۱۵.۳ میں دیا گیا مجموعہ دوہرے تکمل $\int_c^d \int_a^b |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$ کو پہنچے گا۔ یہی دوہرا تکمل سطح $S$ کے رقبے کی تعریف ہے، اور یہ پچھلی تعریفوں کے ساتھ ہم آہنگ ہونے کے ساتھ ساتھ زیادہ عمومی ہے۔

**تعریف: ہموار سطح کا رقبہ**

ہموار سطح جس کی مقدار معلوم مساوات درج ذیل ہو

$$\boldsymbol{r}(u,v) = f(u,v)\boldsymbol{i} + g(u,v)\boldsymbol{j} + h(u,v)\boldsymbol{k}, \qquad a \le u \le b, \quad c \le v \le d$$

کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$A = \int_c^d \int_a^b |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \tag{۱۵.۴}$$

□

ہم حصہ ۱۵.۵ کی طرح $|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$ کی جگہ $\mathrm{d}\sigma$ لکھ کر اس تکمل کو مختصراً درج ذیل لکھتے ہیں۔

## سطحی رقبے کی تفریق اور سطحی رقبے کا تفریقی کلیہ

$$\mathrm{d}\sigma = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \tag{۱۵.۵}$$

سطحی رقبے کی تفریق

$$\iint_S \mathrm{d}\sigma$$

سطحی رقبے کا تفریقی کلیہ

مثال ۱۵.۴: **مخروط کا رقبہ (مخروط)**

مثال ۱۵.۱ میں ہم مخروط (شکل ۱۵.۶۰) کا درج ذیل مقدار معلوم روپ دریافت کر چکے ہیں۔

$$\boldsymbol{r}(r,\phi) = (r\cos\phi)\boldsymbol{i} + (r\sin\phi)\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k}, \qquad 0 \le r \le 1, \qquad 0 \le \phi \le 2\pi$$

مساوات ۱۵.۴ استعمال کرنے کے لیے ہم پہلے $\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\phi$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\phi &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos\phi & \sin\phi & 1 \\ -r\sin\phi & r\cos\phi & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(r\cos\phi)\boldsymbol{i} - (r\sin\phi)\boldsymbol{j} + (\underbrace{r\cos^2\phi + r\sin^2\phi}_{r})\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

یوں $|\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\phi| = \sqrt{r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi + r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r$ اور مخروط کا سطحی رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 |\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\phi|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi \qquad u = r, v = \phi \text{ مساوات ۱۵.۴ میں} \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{d}\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\pi) = \pi\sqrt{2} \quad \text{مربع اکائیاں}\end{aligned}$$

□

مثال ۱۵.۵: **سطحی رقبہ (کرہ)**

اس کرہ کا سطحی رقبہ تلاش کریں جس کا رداس $a$ ہو۔

**حل:** ہم مثال ۱۵.۲ میں حاصل کیا گیا درج ذیل مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(\theta,\phi) =& (a\sin\theta\cos\phi)\boldsymbol{i} + (a\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{j} + (a\cos\theta)\boldsymbol{k} \\ & 0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le \phi \le 2\pi\end{aligned}$$

اب $\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\phi$ نکالتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\phi &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a\cos\theta\cos\phi & a\cos\theta\sin\phi & -a\sin\theta \\ -a\sin\theta\sin\phi & a\sin\theta\cos\phi & 0 \end{vmatrix} \\ &= (a^2\sin^2\theta\cos\phi)\boldsymbol{i} + (a^2\sin^2\theta\sin\phi)\boldsymbol{j} + (a^2\sin\theta\cos\theta)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\left|\boldsymbol{r}_\theta \times \boldsymbol{r}_\phi\right| &= \sqrt{a^4 \sin^4\theta \cos^2\phi + a^4 \sin^4\theta \sin^2\phi + a^4 \sin^2\theta \cos^2\theta} \\ &= \sqrt{a^4 \sin^4\theta + a^2 \sin^2\theta \cos^2\theta} = \sqrt{a^4 \sin^2\theta(\sin^2\theta + \cos^2\theta)} \\ &= a^2\sqrt{\sin^2\theta} = a^2 \sin\theta\end{aligned}$$

چونکہ $0 \le \theta \le \pi$ پر $\sin\theta \ge 0$ ہو گا لہٰذا سطحی رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2 \sin\theta \ \mathrm{d}\theta \ \mathrm{d}\phi \\ &\int_0^{2\pi} \Big[-a^2\cos\theta\Big]_0^{\pi} \ \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} 2a^2 \ \mathrm{d}\phi = 4\pi a^2 \quad \text{مربع اکائیاں}\end{aligned}$$

یہ نتیجہ کرہ کے معلوم کلیہ کے عین مطابق ہے۔ □

## سطحی تکملات

مقدار معلوم سطح کے رقبہ کا کلیہ حاصل کرنے کے بعد اب ہم تفاعل کا تکمل مقدار معلوم سطح پر حل کر سکتے ہیں۔

**تعریف:** **سطحی تکمل برائے مقدار معلوم سطح**

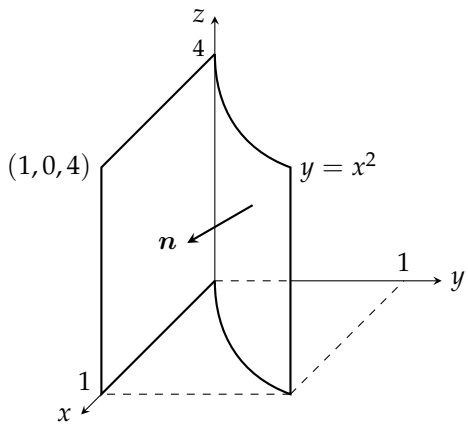
اگر سطح $S$ استمراری ہو جس کا مقدار معلوم روپ $\boldsymbol{r}(u,v) = f(u,v)\boldsymbol{i} + g(u,v)\boldsymbol{j} + h(u,v)\boldsymbol{k}$ ہو جہاں $a \le u \le b$ اور $c \le v \le d$ ہیں، اور $G(x,y,z)$ استمراری تفاعل ہو جو $S$ پر معین ہو، تب $S$ پر $G$ کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_S G(x,y,z) \ \mathrm{d}\sigma = \int_c^d \int_a^b G\Big(f(u,v), g(u,v), h(u,v)\Big) \ |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \ \mathrm{d}u \ \mathrm{d}v$$

□

مثال ۱۵.۶: مقدار معلوم روپ کی سطح پر تکمل

تفاعل $G(x,y,z) = x^2$ کا تکمل مخروطی سطح $z = \sqrt{x^2+y^2},\ 0 \le z \le 1$ پر معلوم کریں۔




شکل ۱۵.۶۶: مکافی نما بیل کی سطح سے گزرنے والے بہاؤ کی تلاش۔

**حل:** مثال ۱۵.۱ اور مثال ۱۵.۴ کا کام آگے بڑھاتے ہوئے $|\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\phi| = \sqrt{2}r$ لے کر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\iint_S x^2 \ \mathrm{d}\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r^2 \cos^2 \phi)(\sqrt{2}\, r) \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\phi \qquad\qquad x = r\cos\phi \\
&= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 \cos^2 \phi \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \ \mathrm{d}\phi = \frac{\sqrt{2}}{4} \left[ \frac{\phi}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\phi \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

□

مثال ۱۵.۷: بہاؤ کی تلاش

قطع مکافی بیلن $y = x^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq 4$ سے $\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k}$ کا باہر رخ گزرتا بہاؤ تلاش کریں (شکل ۱۵.۶۶)۔

**حل:** سطح پر $x = x$ ، $y = x^2$ ، اور $z = z$ ہیں لہٰذا مقدار معلوم روپ $\boldsymbol{r}(x, z) = x\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ ہو گا جہاں $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq 4$ ہے۔ مماسی سمتیات کا صلیبی ضرب درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_z = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$$

سطح پر باہر رخ عمودی سمتیہ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_z}{|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_z|} = \frac{2x\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}}{\sqrt{4x^2+1}}$$

سطح پر $y = x^2$ ہے لہٰذا اس پر سمتیہ میدان درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k} = x^2z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k}$$

یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} &= \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}((x^2z)(2x) + (x)(-1) + (-z^2)(0)) \\ &= \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2+1}}\end{aligned}$$

اور $\boldsymbol{F}$ کا سطح سے باہر رخ گزرتا بہاؤ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma &= \int_0^4\int_0^1 \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2+1}}\,|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_z|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^4\int_0^1 \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2+1}}\sqrt{4x^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^4\int_0^1 (2x^3z - x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z = \int_0^4 \left[\frac{x^4z}{2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \mathrm{d}z \\ &\int_0^4 \frac{z-1}{2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}(z-1)^2\Big]_0^4 \\ &= \frac{1}{4}(9) - \frac{1}{4}(1) = 2\end{aligned}$$

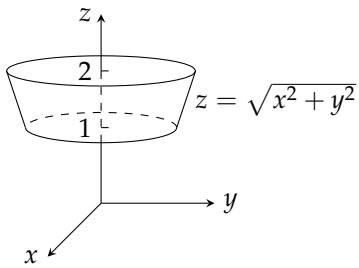
□

مثال ۱۵.۸: مرکز کمیت کی تلاش

مستقل کثافت $\delta$ کا باریک خول مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ سے مستویات $z = 1$ اور $z = 2$ کاٹتی ہیں (شکل ۱۵.۶۷)۔ اس خول کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

حل: محور $z$ کے لحاظ سے سطح تشاکل ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ اور $\bar{y} = 0$ ہو گا۔ ہمیں $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$ تلاش کرنی ہے۔ مثال ۱۵.۱ اور مثال ۱۵.۴ کی طرح چلتے ہوئے

$$\boldsymbol{r}(r,\phi) = r\cos\phi\,\boldsymbol{i} + r\sin\phi\,\boldsymbol{j} + r\,\boldsymbol{k}, \quad 1 \le r \le 2,\ 0 \le \phi \le 2\pi$$




شکل ۱۵.۶۷: سطوح $z = 1$ اور $z = 2$ مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ کو کاٹتی ہیں (برائے مثال ۱۵.۸)۔

اور

$$\left|\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\phi\right| = \sqrt{2}\,r$$

ہو گا۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
M &= \iint\limits_S \delta \ \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \delta\sqrt{2}\,r \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\phi \\
&= \delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 \mathrm{d}\phi = \delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(2-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\phi \\
&= \delta\sqrt{2}\left[\frac{3\phi}{2}\right]_0^{2\pi} = 3\pi\delta\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \iint_S \delta z \ \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \delta r\sqrt{2}\,r \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\phi \\
&= \delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 \mathrm{d}\phi \\
&= \delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\frac{7}{3}\,\mathrm{d}\phi = \frac{14}{3}\pi\delta\sqrt{2} \\
\bar{z} &= \frac{M_{xy}}{M} = \frac{14\pi\delta\sqrt{2}}{3(3\pi\delta\sqrt{2})} = \frac{14}{9}
\end{aligned}$$

خول کا مرکز کمیت نقطہ $\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$ پر پایا جاتا ہے۔ □

## ۱۵.۷ سوالات

### سطح کے مقدار معلوم روپ کی تلاش

سوال ۱۵.۱ تا ۱۵.۱۶ میں دی گئی سطح کا مقدار معلوم روپ تلاش کریں۔ (درست جواب کے مختلف روپ ممکن ہیں لہٰذا آپ کے جواب کتاب میں دیے جواب سے مختلف ہو سکتے ہیں۔)

سوال ۱۵.۱: قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2,\ z \leq 4$

سوال ۱۵.۲: قطع مکافی سطح $z = 9 - x^2 - y^2,\ z \geq 0$

سوال ۱۵.۳: **مخروط مقطوع** ثُمن اول میں $z = 0$ اور $z = 3$ کے بیچ مخروط $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$

سوال ۱۵.۴: **مخروط مقطوع** مستوی $z = 2$ اور مستوی $z = 4$ کے بیچ مخروط $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

سوال ۱۵.۵: **کروی ٹوپی** کروی ٹوپی جو $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کاٹتا ہے۔

سوال ۱۵.۶: **کروی ٹوپی** ثُمن اول میں مستوی $xy$ اور مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کے بیچ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

سوال ۱۵.۷: **کروی پٹی** مستوی $z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ اور مستوی $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ کے بیچ کروی پٹی $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

سوال ۱۵.۸: **کروی ٹوپی** وہ بالائی کروی ٹوپی جو $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ سے مستوی $z = -2$ کاٹتا ہے۔

سوال ۱۵.۹: **مستویات کے بیچ قطع مکافی بیلن** وہ حصہ جو قطع مکافی بیلن $z = 4 - y^2$ سے مستویات $x = 0, x = 2, z = 0$ کاٹتی ہیں۔

سوال ۱۵.۱۰: **مستویات کے بیچ قطع مکافی بیلن** قطع مکافی بیلن $y = x^2$ جو $z = 0, z = 3$ اور $y = 2$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۱: **دائری بیلنی پٹی** مستوی $x = 0$ اور مستوی $x = 3$ کے بیچ بیلن $y^2 + z^2 = 9$

سوال ۱۵.۱۲: **دائری بیلنی پٹی** مستوی $xy$ سے اوپر مستوی $y = -2$ اور مستوی $y = 2$ کے بیچ بیلن $x^2 + z^2 = 4$

سوال ۱۵.۱۳: **بیلن کے اندر ترچھا مستوی** درج ذیل بیلن کے اندر مستوی $x + y + z = 1$ کا ٹکڑا۔ (الف) $x^2 + y^2 = 9$ ، (ب) $y^2 + z^2 = 9$

سوال ۱۵.۱۴: **بیلن کے اندر ترچھا مستوی** درج ذیل بیلن کے اندر مستوی $x - y + 2z = 2$ کا ٹکڑا۔ (الف) $x^2 + z^2 = 3$ ، (ب) $y^2 + z^2 = 2$

سوال ۱۵.۱۵: **دائری بیلنی پٹی** مستویات $y = 0$ اور $y = 3$ کے بیچ بیلن $(x - 2)^2 + z^2 = 4$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۱۶: **دائری بیلنی پٹی** مستویات $x = 0$ اور $x = 10$ کے بیچ بیلن $y^2 + (z-5)^2 = 25$ کا ٹکڑا۔

## مقدار معلوم روپ سطح کا رقبہ

سوال ۱۵.۱۷ تا ۱۵.۲۶ میں مقدار معلوم روپ استعمال کر کے سطح کے رقبے کو دوہرا تکمل لکھیں۔ اس کے بعد تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ (تکمل لکھنے کے کئی درست طریقے ہیں لہٰذا آپ کا لکھا ہوا تکمل کتاب میں دیے جواب سے مختلف ہو سکتا ہے۔ تاہم ان کی قیمت وہی ہونی چاہیے جو کتاب میں دی گئی ہے۔) سوال ۱۵.۱۷: **بیلنی میں ترچھا مستوی** بیلن $x^2 = y^2 = 1$ کے اندر مستوی $y + 2z = 2$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۱۸: **بیلنی کے اندر مستوی** بیلن $x^2 + y^2 = 4$ کے اندر مستوی $z = -x$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۱۹: **مخروط مقطوع** مستویات $z = 2$ اور $z = 6$ کے بیچ مخروط $z = 2\sqrt{2x^2 + y^2}$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۰: **مخروط مقطوع** مستویات $z = 1$ اور $z = 4/3$ کے بیچ مخروط $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۱: **دائری بیلنی پٹی** مستویات $z = 1$ اور $z = 4$ کے بیچ مخروط $x^2 + y^2 = 1$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۲: **دائری بیلنی پٹی** مستویات $y = -1$ اور $y = 1$ کے بیچ مخروط $x^2 + z^2 = 10$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۳: **قطع مکافی ٹوپی** وہ ٹوپی جو قطع مکافی $z = 2 - x^2 - y^2$ سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کاٹتا ہے۔

سوال ۱۵.۲۴: **قطع مکافی پٹی** قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ کا وہ حصہ جو مستویات $z = 1$ اور $z = 4$ کے بیچ ہے۔

سوال ۱۵.۲۵: **کٹا ہوا کرہ** کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ کا وہ نچلا حصہ جو اس کرہ سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کاٹتا ہے۔

سوال ۱۵.۲۶: **کروی پٹی** مستویات $z = -1$ اور $z = \sqrt{3}$ کے بیچ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کا ٹکڑا۔

## مقدار معلوم سطح پر تکمل

سوال ۱۵.۲۷ تا ۱۵.۳۴ میں دیے گئے تفاعل کا تکمل دی گئی سطح پر حاصل کریں۔ سوال ۱۵.۲۷: **قطع مکافی بیلن** قطع مکافی بیلن $y = x^2,\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le z \le 3$ پر تفاعل $G(x, y, z) = x$

سوال ۱۵.۲۸: **دائری بیلنی** بیلنی سطح $y^2 + z^1 = 4,\ z \ge 0,\ 1 \le x \le 4$ پر تفاعل $G(x, y, z) = z$

سوال ۱۵.۲۹: **کرہ** اکائی کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ پر $G(x, y, z) = x^2$

سوال ۱۵.۳۰: **نصف کرہ** نصف کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \ge 0$ پر $G(x, y, z) = z^2$

سوال ۱۵.۳۱: **مستوی کا ٹکڑا** تفاعل $F(x,y,z) = z - x$ مستوی $z = x + y + z = 4$ کے اس حصہ پر جو مستوی $xy$ سے اوپر چکور $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$ پر پایا جاتا ہے۔

سوال ۱۵.۳۲: **مخروط** مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$، $0 \leq z \leq 1$ پر تفاعل $F(x,y,z) = z - x$

سوال ۱۵.۳۳: **قطع مکافی گنبد** قطع مکافی گنبد $z = 1 - x^2 - y^2,\ z \geq 0$ پر تفاعل $H(x,y,z) = x^2\sqrt{5-4z}$

سوال ۱۵.۳۴: **کروی ٹوپی** کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کا وہ حصہ جو مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ سے اوپر پایا جاتا ہو اور تفاعل $H(x,y,z) = yz$

## سطحی مقدار معلوم روپ اور بہاؤ

سوال ۱۵.۳۵ تا ۱۵.۴۴ میں مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہوئے دیے گئے رخ میں بہاؤ $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma$ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۵: **قطع مکافی بیلن** قطع مکافی بیلن $z = 4 - y^2$ سے سطوح $x = 0$ ، $x = 1$ ، اور $z = 0$ جو سطح کاٹتی ہیں اس سے گزرتا باہر رخ (یعنی محور $x$ سے عمودی دور جانب) بہاؤ میدان $\boldsymbol{F} = z^2\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - 3z\boldsymbol{k}$ کے لیے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۶: **قطع مکافی بیلن** قطع مکافی بیلن $y = x^2,\ -1 \leq x \leq 1$ سے سطوح $z = 0$ ، اور $z = 2$ سطح کاٹتی ہیں۔ اس سطح سے باہر رخ گزرتا بہاؤ (یعنی مستوی $yz$ کو قائمہ) میدان $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{j} - xz\boldsymbol{k}$ کے لیے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۷: **کرہ** مبدا سے دوری کی جانب، ثُمن اول میں موجود کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ کے حصہ سے، میدان $\boldsymbol{F} = z\boldsymbol{k}$ کا بہاؤ دریافت کریں۔

سوال ۱۵.۳۸: **کرہ** مبدا سے دوری کی جانب، کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ سے گزرتا بہاؤ، میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ کے لئے دریافت کریں۔

سوال ۱۵.۳۹: **مستوی** میدان $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j} + 2xz\boldsymbol{k}$ کا اوپر کی سمت بہاؤ مستوی $x + y + z = 2a$ کے اس حصے پر تلاش کریں جو مستوی $xy$ میں موجود چکور $0 \leq x \leq a,\ 0 \leq y \leq a$ کے اوپر پایا جاتا ہے۔

سوال ۱۵.۴۰: **بیلن** میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ کا باہر کی سمت گزرتا بہاؤ بیلن $x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq a$ کے اس حصے کے لئے تلاش کریں جسے مستویات $z = 0$ اور $z = a$ گھیرتی ہیں۔

سوال ۱۵.۴۱: **مخروط** میدان $\boldsymbol{f} = xy\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{k}$ کا مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2},\ 0 \leq z \leq 1$ سے باہر کی سمت (محور $z$ سے عمودی دور) گزرتا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۲: **مخروط** میدان $\boldsymbol{F} = y^2\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ کا مخروط $z = 2 - x^2 - y^2, 0 \leq z \leq 2$ سے باہر کی سمت (محور $z$ سے عمودی دور) گزرتا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۳: **مخروطی مقطوع** میدان $\boldsymbol{F} = -x\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$ کا مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ کے اس حصے سے باہر کی سمت (محور $z$ سے عمودی دور) گزرتا بہاؤ تلاش کریں جو مستویات $z = 1$ اور $z = 2$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔

سوال ۱۵.۴۴: **قطع مکافی جسم** میدان $\boldsymbol{F} = 4x\boldsymbol{i} + 4y\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ کا مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ کے اس نچلے حصے سے باہر کی سمت (محور $z$ سے عمودی دور) گزرتا بہاؤ تلاش کریں جو مستوی $z = 1$ کاٹتا ہے۔

## معیار اثر اور کمیت

سوال ۱۵.۴۵: کرہ $x^2+y^2+z^2 = a^2$ کے اس حصے کا وسطانی مرکز تلاش کریں جو ثُمن اول میں موجود ہے۔

سوال ۱۵.۴۶: مستقل کثافت $\delta$ کی باریک موٹائی کا خول مستویات $z = 1$ اور $z = 2$ مخروط $x^2+y^2-z^2 = 0$ سے کاٹتی ہیں۔ اس خول کا مرکز کمیت اور محور $z$ کے گرد جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۷: مستقل کثافت $\delta$ کے باریک کروی خول $x^2+y^2+z^2 = a^2$ کا محور $z$ کے گرد جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۸: مستقل کثافت $\delta$ کے باریک مخروطی خول $z = \sqrt{x^2+y^2},\ 0 \le z \le 1$ کا محور $z$ کے گرد جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

## مقدار معلوم سطوح کے مماسی مستویات

مقدار معلوم سطح $\boldsymbol{r}(u,v) = f(u,v)\boldsymbol{i} + g(u,v)\boldsymbol{a}_y + h(u,v)\boldsymbol{k}$ کے نقطہ $P_0(f(u_0,v_0), g(u_0,v_0), h(u_0,v_0))$ پر مماسی مستوی سے مراد وہ مستوی ہے جو نقطہ $P_0$ پر مماسی سمتیات $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)$ اور $\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$ کے صلیبی ضرب سمتیہ $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0) \times \boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$ کو عمودی ہو۔ سوال ۱۵.۴۹ تا ۱۵.۵۲ میں نقطہ $P_0$ پر سطح کے مماسی مستوی کی مساوات تلاش کریں۔ اس کے بعد سطح کی کارتیسی مساوات دریافت کر کے سطح اور مماسی مستوی دونوں کا خاکہ ایک ساتھ کھینچیں۔

سوال ۱۵.۴۹: **مخروط** مخروط $\boldsymbol{r}(r,\phi) = r\cos\phi\,\boldsymbol{i} + r\sin\phi\,\boldsymbol{j} + r\,\boldsymbol{k},\ r \ge 0,\quad 0 \le \phi \le 2\pi$ پر نقطہ $P_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ کے مقام پر، جو $(r,\phi) = (2, \pi/4)$ کے مطابق ہے۔

سوال ۱۵.۵۰: **نصف کرہ** نصف کرہ $\boldsymbol{r}(\phi,\theta) = 4\sin\phi\cos\theta\,\boldsymbol{i} + 4\sin\phi\sin\theta\,\boldsymbol{j} + 4\cos\phi\,\boldsymbol{k}$، جہاں $0 \le \theta \le \pi/2$ اور $0 \le \phi \le 2\pi$ ہیں اور نقطہ $P_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ ہے، جو $(\theta,\phi) = (\pi/6, \pi/4)$ کے مطابق ہے۔

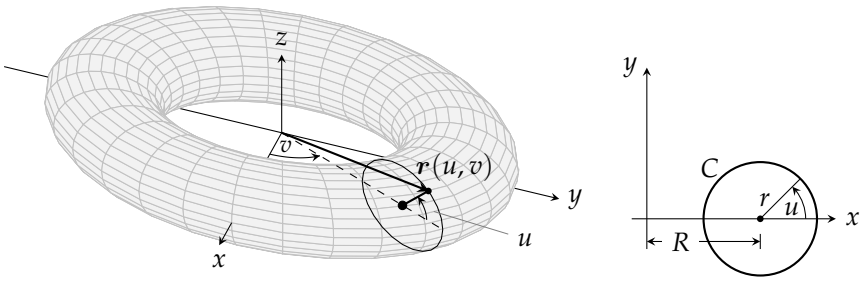
سوال ۱۵.۵۱: **دائروی بیلن** دائروی بیلن $\boldsymbol{r}(\phi,z) = 3\sin(2\phi)\,\boldsymbol{i} + 6\sin^2\phi\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k},\ 0 \le \phi \le \pi$ اور نقطہ $P_0 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)$ ہے، جو $(\phi,z) = (\pi/3, 0)$ کے مطابق ہے (مثال ۱۵.۳ ملاحظہ کریں)۔

سوال ۱۵.۵۲: **قطع مکافی بیلن** قطع مکافی بیلن $\boldsymbol{r}(x,y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - x^2\boldsymbol{k},\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty$ نقطہ $P_0 = (1, 2, -1)$ ہے، جو $(x,y) = (1,2)$ کے مطابق ہے۔

## مقدار معلوم روپ کی مزید مثالیں

سوال ۱۵.۵۳:

(الف) محور $z$ کے گرد مستوی $xz$ میں دائرہ $C$ کو فضا میں گھمانے سے اندرسہ حاصل ہو گا۔ (دکھائے گئے شکل سے رجوع کریں۔) اگر $C$ کا رداس $r > 0$ اور مرکز $(R, 0, 0)$ ہو ثابت کریں کہ اندرسہ کا مقدار معلوم روپ درج ذیل ہے




$$\boldsymbol{r}(u,v) = (R + r\cos u)\cos v\,\boldsymbol{i} + (R + r\cos u)\sin v\,\boldsymbol{j} + r\sin u\,\boldsymbol{k}$$

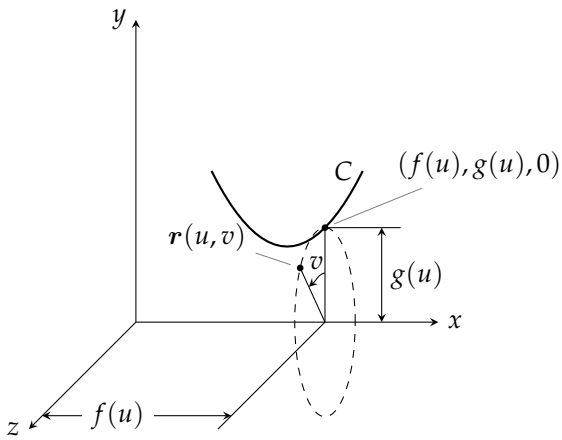
جہاں $0 \le u \le 2\pi$ اور $0 \le v \le 2\pi$ ہیں۔

(ب) ثابت کریں کہ اندرسہ کا رقبہ $A = 4\pi^2 Rr$ ہے۔

سوال ۱۵.۵۴: **سطح طواف کا مقدار معلوم روپ** فرض کریں مقدار معلوم شدہ منحنی $C : (f(u), g(u))$ محور $x$ کے گرد گھمائی جاتی ہے، جہاں $a \le u \le b$ پر $g(u) > 0$ ہے۔

(الف) دکھائیں کہ سطح طواف کا مقدار معلوم روپ درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{r}(u,v) = f(u)\boldsymbol{i} + g(u)\cos v\,\boldsymbol{j} + g(u)\sin v\,\boldsymbol{k}$$




جہاں مستوی $xy$ سے نقطہ $\boldsymbol{r}(u,v)$ تک زاویہ $0 \leq v \leq 2\pi$ ہے۔(دی گئی شکل ملاحظہ کریں۔)دھیان دیں کہ $f(u)$ محور طواف کے ہمراہ فاصلے دیتا ہے اور $g(u)$ محور طواف سے فاصلے دیتا ہے۔

(ب) اس سطح کا مقدار معلوم روپ معلوم کریں جو منحنی $y \geq 0\,,\, x = y^2$ کو محور $x$ کے گرد گھمانے سے حاصل ہو گا۔

سوال ۱۵.۵۵: **ترخیمی سطح کا مقدار معلوم روپ**

(الف) ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (حصہ ۱۰.۴ میں مثال ۱۰.۵) کا مقدار معلوم روپ $x = a\cos\phi$ ، $y = b\sin\phi$ جہاں $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ہے دیا گیا۔ کروی محدد کے زاویات $\theta$ اور $\phi$ استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ کا مقدار معلوم روپ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{r}(\theta,\phi) = a\sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{i} + b\sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{j} + c\cos\theta\,\boldsymbol{k}$$

(ب) ترخیمی سطح کے رقبے کا تکمل لکھیں، لیکن اسے حل نہ کریں۔

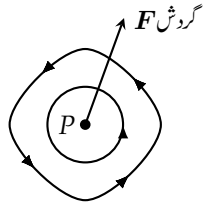
سوال ۱۵.۵۶: **یک ورقی قطع زائد سطح**

(الف) یک ورقی قطع زائد سطح $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ کا مقدار معلوم روپ دائرہ $x^2 + y^2 = r^2$ سے وابسطہ زاویہ $\phi$ اور ہذلولی تفاعل $r^2 - z^2 = 1$ سے وابسطہ ہذلولی مقدار معلوم $u$ استعمال کر کے حاصل کریں۔(حصہ ۱۰.۷ میں سوال ۸۶.۷ سے رجوع کریں۔)

(ب) جزو الف کے نتیجہ کو درج ذیل کے لئے عمومی بنائیں۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

سوال ۱۵.۵۷: **گزشتہ سوال کو آگے بڑھاتے ہیں۔** قطع زائد سطح $x^2 + y^2 - z^2 = 25$ کے مماسی مستوی کی کارتیسی مساوات اس نقطہ $(x_0, y_0, z_0)$ پر تلاش کریں جہاں $x_0^2 + y_0^2 = 25$ ہو۔




شکل ۱۵.۶۸: سیال کے تین ابعادی بہاؤ میں مستوی میں نقطہ $P$ پر دائری بہاؤ سمتیہ۔ دھیان رہے کہ دائری لکیر کے ساتھ اس کا دائیں ہاتھ کا تعلق ہے۔

سوال ۱۵.۵۸: **دو ورقی قطع زائد سطح** دو ورقی قطع زائد سطح $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ کا مقدار معلوم روپ تلاش کریں۔

## ۱۵.۸ مسئلہ سٹوکس

ہم نے حصہ ۱۵.۴ میں دیکھا کہ دو بعدی میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ میں نقطہ $(x, y)$ پر کثافت دائری بہاؤ یعنی گردش کو غیر سمتی مقدار $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$ بیان کرتا ہے۔ تین ابعاد میں مستوی میں نقطہ $P$ کے گرد دائری بہاؤ کو سمتیہ کے ذریعے بیان کیا جاتا ہے۔ یہ سمتیہ دائری بہاؤ کے مستوی کو عمودی ہو گا (شکل ۱۵.۶۸)، اور سمتیہ کا رخ دائری بہاؤ کے خط کے ساتھ دائیں ہاتھ کا تعلق رکھے گا۔ سمتیہ کی لمبائی سیال کے گھومنے کی شرح ظاہر کرتی ہے، جو $P$ کے لحاظ سے دائری بہاؤ کا مستوی جھکانے سے عموماً تبدیل ہو گی۔ ہم کیا دیکھتے ہیں کہ جب دائری بہاؤ کا سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ ہو، زیادہ سے زیادہ دائری بہاؤ کا سمتیہ درج ذیل **گردشی سمتیہ**[۳۱] ہو گا۔

$$\text{گردش}\,\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{۱۵.۱}$$

یہ معلومات ہمیں **مسئلہ سٹوکس**[۳۲] دیتا ہے، جو مسئلہ گرین کی دائری بہاؤ و گردشی روپ کی تین بعدی وسعت ہے۔

دھیان رہے کہ $(\text{گردش}\,\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ اور $\boldsymbol{F} = M(x, y)\boldsymbol{i} + N(x, y)\boldsymbol{j}$ کی صورت میں حصہ ۱۵.۴ میں پیش کی گئی تعریف بلا تضاد ہیں۔ مساوات ۱۵.۱ میں گردش $\boldsymbol{F}$ کا کلیہ عموماً درج ذیل علامتی عامل کے ذریعے لکھا جاتا ہے۔

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{۱۵.۲}$$

---

[۳۱] curl vector
[۳۲] Stokes' Theorem

(علامت $\nabla$ کو ہم ''ڈیل[۳۳]'' پڑھتے ہیں۔) یہ عامل استعمال کر کے گردش $\boldsymbol{F}$ [۳۴] کو ہم $\nabla \times \boldsymbol{F}$ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \\
&= \text{گردش}\,\boldsymbol{F}
\end{aligned}$$

مختصراً درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\text{گردش}\,\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} \tag{۱۵.۳}$$

مثال ۱۵.۱: گردش $\boldsymbol{F}$ کی تلاش

میدان $\boldsymbol{F} = (x^2 - y)\boldsymbol{i} + 4z\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$ کی گردش تلاش کریں۔

**حل:**

$$\begin{aligned}
\text{گردش}\,\boldsymbol{F} &= \nabla \times \boldsymbol{F} \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y & 4z & x^2 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(4z)\right)\boldsymbol{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y)\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(4z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y)\right)\boldsymbol{k} \\
&= (0 - 4)\boldsymbol{i} - (2x - 0)\boldsymbol{j} + (0 + 1)\boldsymbol{k} \\
&= -4\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

□

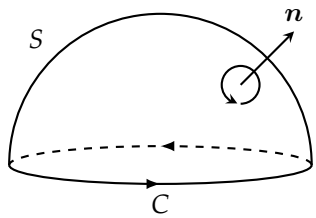
ہم دیکھیں گے کہ عامل $\nabla$ کے دیگر استعمال بھی ہیں۔ مثلاً، غیر سمتی تفاعل $f(x, y, z)$ پر لگانے سے **ڈھلوان**[۳۵] حاصل ہو گا۔

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

اسے ہم ''ڈھلوان $f$ ''، اور[۳۶] یا ''ڈیل $f$ ''، کہیں[۳۷] گے۔

---

[۳۳] del
[۳۴] curl
[۳۵] gradient
[۳۶] grad f
[۳۷] del f




شکل ۱۵.۶۹: تحدیدی منحنی C کی سمت بندی، عمودی میدان $\boldsymbol{n}$ کے ساتھ دائیں ہاتھ کا تعلق رکھتی ہے۔

## مسئلہ سٹوکس

**مسئلہ سٹوکس**[۳۸] کہتا ہے کہ ایسی صورتوں میں جو عملاً عام طور پائی جاتی ہیں، فضا میں سمت بند سطح کی سرحد پر، سطح کے عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کے لحاظ سے خلاف گھڑی رخ چلتے ہوئے (شکل ۱۵.۶۹)، سمتیہ میدان کا دائری بہاؤ اور سطح پر میدان کی گردش کے عمودی جزو کا تکمل برابر ہوں گے۔

مسئلہ ۵: **مسئلہ سٹوکس**
سمت بند سطح $S$ کی سرحد $C$ پر، سطح کے عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کے لحاظ سے خلاف گھڑی چلتے ہوئے سمتیہ میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ کا دائری بہاؤ $S$ پر $\nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ کے تکمل کا برابر ہوگا۔

$$\underbrace{\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}_{\text{خلاف گھڑی دائری بہاؤ}} = \underbrace{\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma}_{\text{تکمل گردش}} \tag{۱۵.۴}$$

ہم مساوات ۱۵.۴ کو دیکھ کر کہہ سکتے ہیں کہ ایسی دو مختلف سمت بند سطحیں $S_1$ اور $S_2$ جن کی سرحد $C$ ایک ہو، کے تکمل گردش برابر ہوں گے۔

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}_1 \, \mathrm{d}\sigma = \iint_{S_2} (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}_2 \, \mathrm{d}\sigma$$

بشرطیکہ اکائی عمودی سمتیات $\boldsymbol{n}_1$ اور $\boldsymbol{n}_2$ سطوح کی درست سمت بندی کرتی ہوں، دونوں تکمل گردش مساوات ۱۵.۴ کے بائیں ہاتھ کے برابر، لہٰذا ایک دوسرے کے برابر ہوں گے۔

مسئلہ سٹوکس میں موجود تکملات کی وجودیت یقینی بنانے کے لئے $\boldsymbol{F}$ ، $C$ ، اور $S$ پر ریاضیاتی شرائط مسلط ہوں گے۔ درکار عمومی شرائط کہتے ہیں کہ تمام تفاعل، سمتیہ میدان، اور ان کے تفرق استمراری ہوں۔

اگر $C$ مستوی $xy$ میں موجود، خلاف گھڑی سمت بند منحنی ہو، اور $R$ مستوی $xy$ میں ایک خطہ ہو جس کو $C$ گھیرتی ہو، تب $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

---

[۳۸] Stokes' Theorem

شکل ۱۵.۷۰: مسئلہ گرین اور مسئلہ سٹوکس کا موازنہ۔

اور درج ذیل ہو گا۔

$$(\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} = (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

ان حالات میں مساوات سٹوکس درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

جو مسئلہ گرین میں موجود مساوات کی دائری بہاؤ و گردشی روپ ہے۔ اسی طرح انہیں قدموں پر الٹ چلتے ہوئے ہم مسئلہ گرین کے دائری بہاؤ و گردشی روپ کو دو بعدی میدان کے لئے درج ذیل "ڈیل" علامتیت میں لکھ سکتے ہیں۔ شکل ۱۵.۷۰ ملاحظہ کریں۔

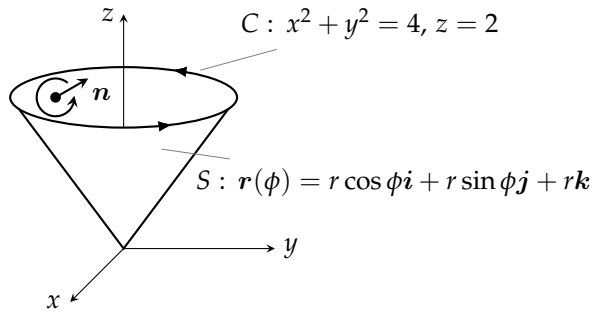
$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_R (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k}\ \mathrm{d}A \tag{۱۵.۵}$$

مثال ۱۵.۲: نصف کرہ کے لئے مساوات سٹوکس کی تصدیق

نصف کرہ $S\ :\ x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ z \geq 0$ کو گھیرنے والے دائرہ $C\ :\ x^2 + y^2 = 9,\ z = 0$ اور میدان $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ کے لئے مساوات ۱۵.۴ کی قیمت تلاش کریں۔

**حل:** مقدار معلوم روپ $\boldsymbol{r}(\phi) = (3\cos\phi)\boldsymbol{i} + (3\sin\phi)\boldsymbol{j},\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$ استعمال کرتے ہوئے اوپر سے نظارہ کرتے ہوئے $C$ کے گرد خلاف گھڑی دائری بہاؤ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= -3\sin\phi\ \mathrm{d}\phi\, \boldsymbol{i} + 3\cos\phi\ \mathrm{d}\phi\, \boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{F} &= y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} = 3\sin\phi\, \boldsymbol{i} - 3\cos\phi\, \boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= -9\sin^2\phi\ \mathrm{d}\phi - 9\cos^2\phi\ \mathrm{d}\phi = -9\,\mathrm{d}\phi \\
\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_0^{2\pi} -9\ \mathrm{d}\phi = -18\pi
\end{aligned}$$




شکل ۱۵.۷۱:۔ منحنی $C$ اور مخروط $S$ برائے مثال ۱۵.۳

اب $\boldsymbol{F}$ کے لئے تکمل گردش تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{F} &= \left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\\
&= (0-0)\boldsymbol{i}+(0-0)\boldsymbol{j}+(-1-1)\boldsymbol{k}=-2\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{n} &= \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{3} && \text{بیرونی اکائی عمودی سمتیہ}\\
\mathrm{d}\sigma &= \frac{3}{z}\,\mathrm{d}A && \text{حصہ ۱۵.۵ کی مثال ۱۵.۵ میں } a=3\\
\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma &= -\frac{2z}{3}\frac{3}{z}\,\mathrm{d}A=-2\,\mathrm{d}A
\end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_S(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{x^2+y^2\le 9}-2\ \mathrm{d}A=-18\pi$$

دائرے کے ہمراہ دائری بہاو اور نصف کرہ پر گردش کا تکمل برابر ہیں، جیسا کہ ہونا چاہیے۔ □

مثال ۱۵.۳: دائری بہاؤ کی تلاش

مستوی $z=2$ مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ سے منحنی $C$ پر ملتا ہے۔ اس منحنی پر، اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی (شکل ۱۵.۷۱)، میدان $\boldsymbol{F}=(x^2-y)\boldsymbol{i}+4z\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$ کا، دائری بہاؤ تلاش کریں۔

**حل:** مسئلہ سٹوکس کے استعمال سے ہم دائری بہاؤ سطح پر تکمل سے حاصل کرتے ہیں۔ اوپر سے دیکھتے ہوئے $C$ پر گھڑی خلاف چلنا اندرونی عمود $\boldsymbol{n}$ لینے

کے مترادف ہے جس کا $z$ جزو مثبت ہو گا۔ ہم مخروط کا مقدار معلوم روپ لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{r}(r,\phi) = r\cos\phi\,\boldsymbol{i} + r\sin\phi\,\boldsymbol{j} + r\,\boldsymbol{k}, \quad 0 \le r \le 2,\ 0 \le \phi \le 2\pi$$

اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= \frac{\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\phi}{|\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\phi|} = \frac{-r\cos\phi\,\boldsymbol{i} - r\sin\phi\,\boldsymbol{j} + r\,\boldsymbol{k}}{r\sqrt{2}} && \text{حصہ ۱۵.۶ مثال ۱۵.۴} \\
&= \frac{-\cos\phi\,\boldsymbol{i} - \sin\phi\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{\sqrt{2}} \\
\mathrm{d}\sigma &= r\sqrt{2}\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi && \text{حصہ ۱۵.۶ مثال ۱۵.۴} \\
\nabla \times \boldsymbol{F} &= -4\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} && \text{مثال ۱۵.۱} \\
&= -4\boldsymbol{i} - 2r\cos\phi\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} && x = r\cos\phi
\end{aligned}$$

یوں

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(4\cos\phi + 2r\cos\phi\sin\phi + 1\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(4\cos\phi + r\sin 2\phi + 1\right)
\end{aligned}$$

اور دائری بہاؤ درج ذیل ہو گا۔

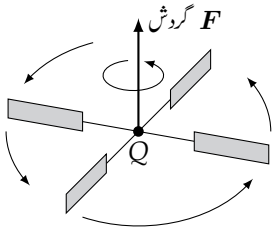
$$\begin{aligned}
\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}\sigma && \text{مسئلہ سٹوکس مساوات ۱۵.۴} \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(4\cos\phi + r\sin 2\phi + 1\right)\left(\sqrt{2}\,r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi\right) = 4\pi
\end{aligned}$$

□

## $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کی چپو چرخی سے تشبیہ

فرض کریں حرکت پذیر سیال کی رفتار $\boldsymbol{v}(x,y,z)$ اور نقطہ $(x,y,z)$ پر اس کی کثافت $\delta(x,y,z)$ ہے۔ مزید فرض کریں $\boldsymbol{F} = \delta\boldsymbol{v}$ ہے۔ ایسی صورت میں بند منحنی $C$ کے ہمراہ سیال کا دائری بہاؤ درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$




شکل ۱۵.۷۲: گردش $\boldsymbol{F}$ کی چپوچرخی سے تشبیہ۔

مسئلہ سٹوکس کے مطابق یہ دائری بہاؤ، C میں محیط سطح S سے گزرتا $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کے بہاؤ کا برابر ہو گا۔

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} \ \mathrm{d}\delta$$

ہم $\boldsymbol{F}$ کے دائرہ کار میں اٹل نقطہ Q ،اور اس نقطہ پر مخصوص سمت $\boldsymbol{u}$ منتخب کرتے ہیں۔ فرض کریں C ایک دائرہ ہے جس کا رداس $\rho$ اور مرکز Q ہے اور جس کا مستوی $\boldsymbol{u}$ کو عمودی ہے۔ اگر Q پر $\nabla \times \boldsymbol{F}$ استمراری ہو، C میں محیط دائری قرص S پر $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کے $\boldsymbol{u}$ ویں جزو کی اوسط قیمت $\rho \to 0$ کی صورت میں Q پر $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کے $\boldsymbol{u}$ ویں جزو کو پہنچے گی۔

$$(\nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u})_Q = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{u} \ \mathrm{d}\sigma$$

آخری مساوات میں سطحی تکمل کی جگہ دائری بہاؤ لکھ کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(\nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u})_Q = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{۱۵.۶}$$

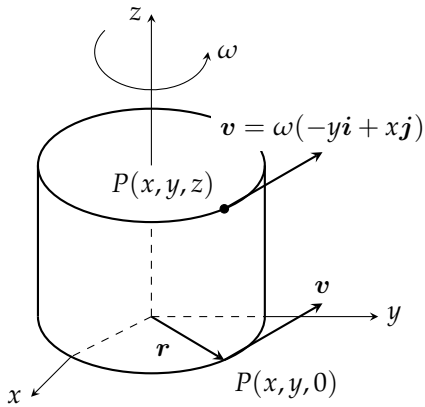
مساوات ۱۵.۶ کے بائیں ہاتھ کی قیمت اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو گی جب $\boldsymbol{u}$ کا رخ، $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کی سمت میں ہو۔ چھوٹے $\rho$ کے لئے مساوات ۱۵.۶ کے دائیں ہاتھ کا حد تخمیناً درج ذیل ہو گا، جو C کے ہمراہ دائری بہاؤ تقسیم رقبہ قرص (دائری بہاؤ کی کثافت) ہے۔

$$\frac{1}{\pi \rho^2} \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

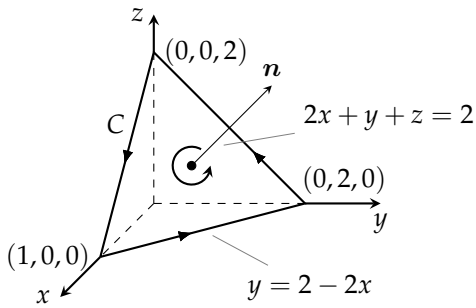
فرض کریں Q پر رداس $\rho$ کی چپوچرخی رکھی جاتی ہے جس کا دھرا $\boldsymbol{u}$ کے ہمراہ ہے۔ سیال کا C کے ہمراہ دائری بہاؤ چپوچرخی کے گھومنے کی رفتار پر اثر انداز ہو گا۔ جب دائری بہاؤ تکمل کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو اس صورت چپوچرخی تیز سے تیز گھومے گی؛ یوں جب دھرا $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کے رخ ہو، چپوچرخی تیز سے تیز گھومے گی (شکل ۱۵.۷۲)۔

مثال ۱۵.۴: کثافت دائری بہاؤ اور $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کا تعلق

اٹل کثافت کا سیال محور $z$ کے گرد $\boldsymbol{v} = \omega(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})$ سمتی رفتار سے گھوم رہا ہے جہاں $\omega$ ایک مثبت مستقل جس کو گھومنے کا **زاویائی رفتار** کہتے ہیں (شکل ۱۵.۷۳)۔ اگر $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{v}$ ہو، $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کیا ہو گا اور کثافت دائری بہاؤ کے ساتھ اس کا تعلق کیا ہو گا؟




شکل ۱۵.۷۳: مستوی $xy$ میں مثبت (خلاف گھڑی) مستقل زاویائی سمتی رفتار $\omega$ کے ساتھ، مستوی $xy$ کے متوازی سیال برقرار گھوم رہا ہے (مثال ۱۵.۴)۔




شکل ۱۵.۷۴: مسطح سطح برائے مثال ۱۵.۵

**حل:** چونکہ $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{v} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$ ہے لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \\ &= (0-0)\boldsymbol{i} + (0-0)\boldsymbol{j} + (\omega - (-\omega))\boldsymbol{k} = 2\omega\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

مسئلہ سٹوکس کے مطابق، رداس $\rho$ کے دائرہ $C$ کے ہمراہ، جو مستوی مثلاً مستوی $xy$ میں قرص $S$ کا احاطہ کرتا ہو، کے ہمراہ $\boldsymbol{F}$ کا دائری بہاؤ درج ذیل ہوگا۔

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}\sigma = \iint_S 2\omega\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (2\omega)(\pi\rho^2)$$

یوں درج ذیل ہوگا جو $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{k}$ لیتے ہوئے مساوات ۱۵.۶ کے عین مطابق ہے۔

$$(\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k} = 2\omega = \frac{1}{\pi\rho^2}\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

□

مثال ۱۵.۵: مسئلہ سٹوکس کا اطلاق

اوپر سے نظارہ کرتے ہوئے ثُمن اول میں واقع مستوی $2x + y + z = 2$ کے ایک ٹکڑے کی سرحد $C$ پر خلاف گھڑی چل کر $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت مسئلہ سٹوکس استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں، جہاں $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + 3xz\boldsymbol{k}$ ہے (شکل ۱۵.۷۴)۔

**حل:** یہ مستوی تفاعل $f(x, y, z) = 2x + y + z$ کی ہم قد سطح $f(x, y, z) = 2$ ہے۔ اس کا اکائی عمودی سمتیہ

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{|2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$

سرحد $C$ پر خلاف گھڑی حرکت کے عین مطابق ہے۔ مسئلہ سٹوکس استعمال کرنے کے لئے درج ذیل حاصل کرنے ہیں۔

$$\boldsymbol{F} \text{ گردش} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & 3xz \end{vmatrix} = (x - 3z)\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$$

مستوی پر $z = 2 - 2x - y$ ہے لہٰذا

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = (x - 3(2 - 2x - y))\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k} = (7x + 3y - 6)\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$$

اور

$$(\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(7x + 3y - 6 + y) = \frac{1}{\sqrt{6}}(7x + 4y - 6)$$

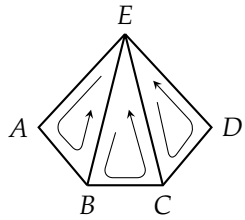
ہو گا۔ سطحی رقبے کا چھوٹا ٹکڑا درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{k}|}\,\mathrm{d}A = \frac{\sqrt{6}}{1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{6}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

دائری بہاؤ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \iint_S \nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{مسئلہ سٹوکس، مساوات ۱۵.۴} \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \frac{1}{\sqrt{6}}(7x + 4y - 6)\sqrt{6}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -1 \end{aligned}$$

□




شکل ۱۵.۷۵: کثیر سطحی کا کچھ حصہ۔

## کثیر سطحی سطح کے لئے مسئلہ سٹوکس کا ثبوت

فرض کریں $S$ کثیر سطحی سطح ہے جو محدود تعداد کے مسطح حصوں پر مشتمل ہے (مثلاً شکل ۱۵.۷۵)۔ ہم $S$ کے علیحدہ علیحدہ تختی حصوں پر مسئلہ گرین کا اطلاق کرتے ہیں۔ تختیوں کی دو قسمیں ہیں۔

۱. وہ جن کو ہر طرف سے دوسرے تختی گھیرتے ہوں۔

۲. وہ جن کا ایک یا ایک سے زیادہ ضلع کسی دوسرے تختی سے متصل نہ ہو۔

سطح $S$ کی سرحد $\Delta$ ، دوسری (۲) قسم کی مستویات کے ان کناروں پر مشتمل ہے جو دوسری مستویات سے متصل نہیں۔ شکل ۱۵.۷۵ میں مثلثات $EAB$ ، $BCE$ ، اور $CDE$ سطح $S$ کے کچھ حصے کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ $ABCD$ سرحد $\Delta$ کے کچھ حصے کو ظاہر کرتا ہے۔ تینوں مثلثات پر بالترتیب مسئلہ گرین کا اطلاق کر کے نتائج جمع کر کے درج ذیل حاصل ہو گا۔

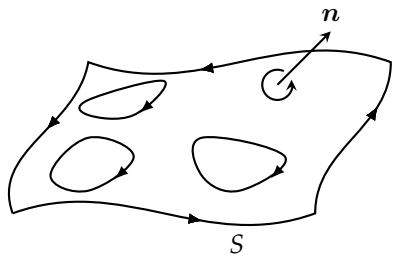
$$\left(\oint_{EAB} + \oint_{BCE} + \oint_{CDE}\right) \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left(\iint_{EAB} + \iint_{BCE} + \iint_{CDE}\right) \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \tag{۱۵.۷}$$

چونکہ مساوات ۱۵.۷ میں بائیں ہاتھ کے تین لکیری تکملات میں اندرونی (متصل مثلثات کے مشترک) اضلاع پر لکیری تکملات کے جوڑے ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں لہٰذا تینوں مل کر کنارہ $ABCDE$ پر واحد ایک تکمل دیتے ہیں۔ مثال کے طور پر مثلث $ABE$ کے ضلع $BE$ پر لکیری تکمل کی علامت $(\pm)$ مثلث $EBC$ کے اسی ضلع پر لکیری تکمل کی علامت $(\mp)$ کی الٹ ہو گی۔ ضلع $CE$ پر بھی ایسا ہو گا۔ یوں مساوات ۱۵.۷ گھٹ کر درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\oint_{ABCDE} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{ABCDE} \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

تمام تختوں پر مسئلہ گرین کا اطلاق کر کے درج ذیل حاصل ہو گا جو درحقیقت کثیر سطحی کی سطح $S$ کا مسئلہ سٹوکس ہے۔ زیادہ عمومی سطوح کے لئے ثبوت آپ کو اعلیٰ نصاب میں ملیں گے۔

$$\oint_{\Delta} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{S} \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$




شکل ۱۵.۷۶: سوراخ دار سمت بند سطوح پر بھی مسئلہ سٹوکس کا اطلاق ہوتا ہے۔

### مسئلہ سٹوکس برائے سوراخ دار سطوح

مسئلہ گرین کو وسعت دینے کے طرز پر، مسئلہ سٹوکس کو ایسی سمت بند سطح $S$ تک وسعت دی جا سکتی ہے جس میں ایک یا ایک سے زیادہ سوراخ ہوں (شکل ۱۵.۷۶)۔ سطح $S$ پر $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کے عمودی جزو کا سطحی تکمل اور تمام سرحدی منحنیات پر $\boldsymbol{F}$ کے مماسی جزو کے لکیری تکملات کا مجموعہ ایک دوسرے کے برابر ہو گا، جہاں $S$ کی سمت بندی کو مد نظر رکھ کر منحنیات پر چلنا ہو گا۔

### ایک اہم تماثل

ریاضیات اور طبیعی سائنس میں درج ذیل تماثل بار بار پیش آتا ہے۔

$$\text{گردش ڈھلوان } f = \mathbf{0} \qquad \nabla \times \nabla f = \mathbf{0} \tag{۱۵.۸}$$

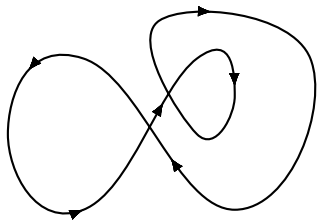
یہ تماثل جو ہر اس تفاعل $f(x, y, z)$ کے لئے کارآمد ہے جس کے دوہرے جزوی تفرق استمراری ہوں، کہتا ہے کہ تفاعل $f(x, y, z)$ کے ڈھلوان کی گردش صفر ہو گی۔ اس کا ثبوت درج ذیل ہے۔

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz})\boldsymbol{i} - (f_{zx} - f_{xz})\boldsymbol{j} + (f_{yx} - f_{xy})\boldsymbol{k}$$

ثانی جزوی تفرق استمراری ہونے کی صورت میں قوسین میں بند مختلف اقسام کے ثانی تفرق برابر ہوں گے (حصہ ۱۳.۳، مسئلہ ۲) لہٰذا سمتیہ صفر ہو گا۔

## بقائی میدان اور مسئلہ سٹوکس

ہم نے حصہ ۱۵.۳ میں دیکھا کہ کھلے خطہ $D$ میں میدان $\boldsymbol{F}$ کا بقائی ہونا اس کے مترادف ہے کہ $D$ میں ہر بند راہ پر $\boldsymbol{F}$ کا لکیری تکمل صفر ہو۔ یہ از خود، سادہ تعلق خطوں میں، اس کے مترادف ہے کہ $\nabla \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ ہو۔



شکل ۱۵.۷۷: فضا میں سادہ تعلق خطہ میں، قابل تفرق منحنیات جو خود کو کاٹتی ہوں کو بند رگھیروں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے جن پر مسئلہ سٹوکس کا اطلاق ہوتا ہے۔

مسئلہ ۶: **$\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ اور بند حلقہ کی خاصیت کا تعلق**

اگر فضا میں سادہ تعلق آزاد خطہ $D$ کے ہر نقطہ پر $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ ہو تب $D$ میں ٹکڑوں میں ہموار و بند راہ $C$ پر درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

ثبوت: **خاکہ** مسئلہ ۶ کا ثبوت عموماً دو مراحل میں کیا جاتا ہے۔ پہلا مرحلہ سادہ بند منحنیات کے لیے ہو گا۔ اعلیٰ ریاضیات کی ایک شاخ **بڑی ہندسہ**[۳۹] کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ سادہ تعلق کھلے خطہ $D$ میں ہر قابل تفرق سادہ بند منحنی $C$ ایک ہموار دو طرفہ سطح $S$، جو $D$ میں پائی جاتی ہو، کی سرحد ہو گی۔ یوں مسئلہ سٹوکس کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = 0$$

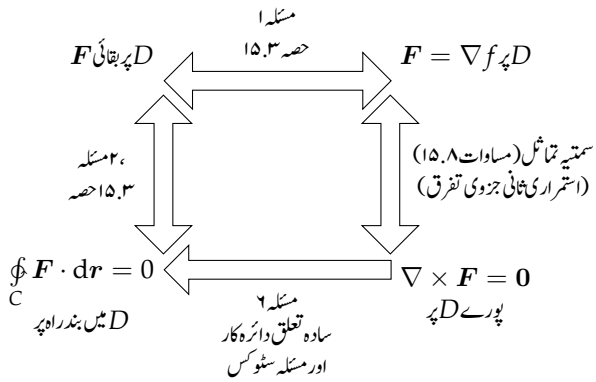
دوسرا مرحلہ اُن منحنیات کے لیے ہے جو خود کو کاٹتی ہیں، جیسے کہ شکل ۱۵.۷۷ میں دکھائی گئی ہے۔ ایسی منحنیات کو سادہ حلقات، جن کا احاطہ قابل سمت بند سطوح کرتی ہوں، میں تقسیم کر کے باری باری ایک ایک حلقہ پر مسئلہ سٹوکس کا اطلاق کر کے نتائج کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔

□

تعلق دار، سادہ تعلق کھلے خطوں پر معین بقائی میدان کے لئے حاصل نتائج کا نچوڑ درج ذیل شکل میں پیش کیا گیا ہے۔

---

[۳۹] topology




## ۱۵.۹ سوالات

### مسئلہ سٹوکس کے ذریعہ دائری بہاؤ کی قیمت کا حصول

سوال ۱۵.۱ تا ۱۵.۶ میں مسئلہ سٹوکس استعمال کرتے ہوئے منحنی $C$ کے ہمراہ دی گئی سمت میں میدان $\boldsymbol{F}$ کے دائری بہاؤ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱: $\boldsymbol{F} = x^2\,\boldsymbol{i} + 2x\,\boldsymbol{j} + z^2\,\boldsymbol{k}$

مستوی $xy$ میں $C$ ترخیم $4x^2 + y^2 = 4$ ہے جو اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی ہے۔

سوال ۱۵.۲: $\boldsymbol{F} = 2y\,\boldsymbol{i} + 3x\,\boldsymbol{j} - z^2\,\boldsymbol{k}$

مستوی $xy$ میں $C$ دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ ہے جو اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی ہے۔

سوال ۱۵.۳: $\boldsymbol{F} = y\,\boldsymbol{i} + xz\,\boldsymbol{j} + x^2\,\boldsymbol{k}$

مستوی $x + y + z = 1$ سے ثُمن اول مثلث کاٹتا ہے جس کی سرحد $C$ ہے جو اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی ہے۔

سوال ۱۵.۴: $\boldsymbol{F} = (y^2 + z^2)\,\boldsymbol{i} + (x^2 + z^2)\,\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\,\boldsymbol{k}$

مستوی $x + y + z = 1$ سے ثُمن اول مثلث کاٹتا ہے جس کی سرحد $C$ ہے جو اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی ہے۔

سوال ۱۵.۵: $\boldsymbol{F} = (y^2 + z^2)\,\boldsymbol{i} + (x^2 + y^2)\,\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\,\boldsymbol{k}$

مستوی $xy$ میں خطوط $x = \pm 1$ اور $y = \pm 1$ ایک مربع $C$ گھیرتے ہیں جو اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی ہے۔

سوال ۱۵.۶: $\boldsymbol{F} = x^2y^3\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$

بیلن $x^2 + y^2 = 4$ اور نصف کرہ $z \geq 0$ $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 16,$ کے تقاطع سے حاصل منحنی $C$ جو اوپر سے دیکھتے ہوئے

خلاف گھڑی ہے۔

## گردش کا بہاؤ

سوال ۱۵.۷: بیضوی خول $S : 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36, z \geq 0$ کا بیرونی اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے۔ میدان $\boldsymbol{F} = y\,\boldsymbol{i} + x^2\,\boldsymbol{j} + \left(x^2 + y^4\right)^{3/2} \sin\left(e^{\sqrt{xyz}}\right) \boldsymbol{k}$ کے لئے تکمل $\iint\limits_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma$ کی قیمت تلاش کریں۔(اشارہ بیضوی خول کے تل پر ایک مقدار معلوم روپ $x = 3\cos t$ ، $y = 2\sin t$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ ہے۔)

سوال ۱۵.۸: قطع مکافی خول $S : 4x^2 + y + z^2 = 4, y \geq 0$ کا بیرونی (مبدا سے دوری کی جانب) اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے۔ درج ذیل میدان

$$\boldsymbol{F} = \left(-z + \frac{1}{2+x}\right)\boldsymbol{i} + (\tan^{-1} y)\boldsymbol{j} + \left(x + \frac{1}{4+z}\right)\boldsymbol{k}$$

کے لئے تکمل $\iint\limits_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۹: فرض کریں سطح $S$ بیلن $x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq h$ اور اس کا بالائی ڈھکن $x^2 + y^2 \leq a^2, z = h$ پر مشتمل ہے۔ میدان $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$ کے لئے سطح $S$ سے $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کا باہر رخ بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۰: درج ذیل تکمل کا حساب کریں جہاں $S$ نصف کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ ہے۔

$$\iint\limits_S \Big(\nabla \times (y\boldsymbol{i})\Big) \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}\sigma$$

سوال ۱۵.۱۱: **گردش $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ**

دکھائیں کہ ان تمام سمت بند سطوح $S$ کے لئے، جو $C$ کا احاطہ ہوں اور جن کا $C$ پر مثبت رخ ایک ہو، درج ذیل تکمل کی قیمتیں برابر ہوں گی۔

$$\iint\limits_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}\sigma$$

سوال ۱۵.۱۲: فرض کریں $\boldsymbol{F}$ قابل سمت بند سمتی میدان ہے جو ایسے خطے پر معین ہے جس میں ایک ہموار بند سمت بند سطح $S$ اور اس کا اندرونی حصہ شامل ہیں۔ سطح $S$ پر اکائی عمودی سمتیہ میدان $\boldsymbol{n}$ ہے۔ مزید فرض کریں کہ $S$، دو سطحوں $S_1$ اور $S_2$ کا مجموعہ ہے جو آپس میں ایک ہموار سادہ بند منحنی $C$ پر جڑی ہوئی ہیں۔ کیا درج ذیل کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟

$$\iint\limits_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}\sigma$$

اپنے جواب کی وجوہات بیان کریں۔

## مقدار معلوم سطوح کے لئے مسئلہ سٹوکس

سوال ۱۵.۱۳ تا ۱۵.۱۸ میں بیرونی سمت اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کے رخ، سطح $S$ سے گزرتا میدان $\boldsymbol{F}$ کی گردش کے بہاؤ کی قیمت مسئلہ سٹوکس کا سطحی تکمل استعمال کر کے تلاش کریں۔ سوال ۱۵.۱۳: $\boldsymbol{F} = 2z\boldsymbol{i} + 3x\boldsymbol{j} + 5y\boldsymbol{k}$

$$S: \quad \boldsymbol{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\boldsymbol{i} + r\sin\theta\,\boldsymbol{j} + (4-r^2)\boldsymbol{k}, \qquad 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

سوال ۱۵.۱۴: $\boldsymbol{F} = (y-z)\boldsymbol{i} + (z-x)\boldsymbol{j} + (x+z)\boldsymbol{k}$

$$S: \quad \boldsymbol{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\boldsymbol{i} + r\sin\theta\,\boldsymbol{j} + (9-r^2)\boldsymbol{k} \qquad 0 \le r \le 3,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

سوال ۱۵.۱۵: $\boldsymbol{F} = x^2y\,\boldsymbol{i} + 2y^3z\,\boldsymbol{j} + 3z\,\boldsymbol{k}$

$$S: \quad \boldsymbol{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\boldsymbol{i} + r\sin\theta\,\boldsymbol{j} + r\,\boldsymbol{k}, \qquad 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

سوال ۱۵.۱۶: $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + (y-z)\boldsymbol{j} + (z-x)\boldsymbol{k}$

$$S: \quad \boldsymbol{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\boldsymbol{i} + r\sin\theta\,\boldsymbol{j} + (5-r)\boldsymbol{k}, \qquad 0 \le r \le 5,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

سوال ۱۵.۱۷: $\boldsymbol{F} = 3y\,\boldsymbol{i} + (5-2x)\boldsymbol{j} + (z^2-2)\boldsymbol{k}$

$$S: \quad \boldsymbol{r}(\phi,\theta) = \sqrt{3}\sin\phi\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sqrt{3}\sin\phi\sin\theta\,\boldsymbol{j} + \sqrt{3}\cos\phi\,\boldsymbol{k}$$

$$0 \le \phi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

سوال ۱۵.۱۸: $\boldsymbol{F} = y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$

$$S: \quad \boldsymbol{r}(\phi,\theta) = 2\sin\phi\cos\theta\,\boldsymbol{i} + 2\sin\phi\sin\theta\,\boldsymbol{j} + 2\cos\phi\,\boldsymbol{k}$$

$$0 \le \phi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

### ۱۵.۹.۱ نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۵.۱۹: **صفر دائری بہاؤ** تماثل $\nabla \times \nabla f$ (مساوات ۱۵.۸) اور مسئلہ سٹوکس استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ فضا میں کسی بھی ہموار قابل سمت بند سطح کی سرحد کے ہمراہ درج ذیل میدان کا دائری بہاؤ صفر ہو گا۔

ا. $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$

ب. $\boldsymbol{F} = \nabla(xy^2z^3)$

ج. $\boldsymbol{F} = \nabla \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$

د. $\boldsymbol{F} = \nabla f$

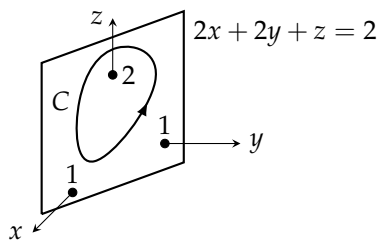
سوال ۱۵.۲۰: **صفر دائری بہاؤ** تفاعل $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ اور میدان $\boldsymbol{F} = \nabla f$ ہیں۔ درج ذیل طریقوں سے دکھائیں کہ مستوی $xy$ میں دائرہ $x^2+y^2=a^2$ پر میدان کا گھڑی وار دائری بہاؤ صفر ہے۔

ا. دائرے پر $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ لیں جہاں $\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\,\boldsymbol{i} + a\sin t\,\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ ہے۔

ب. مسئلہ سٹوکس کا استعمال کریں۔

سوال ۱۵.۲۱: مستوی $2x+2y+z=2$ میں $C$ ایک سادہ بند ہموار منحنی ہے جس کی سمت بندی یہاں دکھائی گئی ہے۔ دکھائیں کہ درج ذیل کی قیمت $C$ میں محیط خطے کے رقبے پر منحصر ہے نا کہ $C$ کی شکل و صورت یا مقام پر۔

$$\oint_C (2y\,dx + 3z\,dy - x\,dz)$$




سوال ۱۵.۲۲: ثابت کریں اگر $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ ہو تب $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$ ہو گا۔

سوال ۱۵.۲۳: ایسا سمتی میدان معلوم کریں جس کے اجزاء دو مرتبہ قابل تفرق ہوں اور جس کی گردش $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ ہو، یا ثابت کریں ایسا کوئی میدان موجود نہیں۔

سوال ۱۵.۲۴: کیا مسئلہ سٹوکس ایسے میدان میں گردش کے بارے میں کوئی خاص نتیجہ دیتا ہے جس کی گردش صفر ہو؟ اپنے جواب کی وجوہات بیان کریں۔

سوال ۱۵.۲۵: مستوی $xy$ میں $R$ ایسا خطہ ہے جس کو ٹکڑوں میں ہموار سادہ بند منحنی $C$ گھیرتی ہے۔ فرض کریں محور $x$ اور محور $y$ کے لحاظ سے $R$ کے جمود بالترتیب $I_x$ اور $I_y$ ہیں۔ درج ذیل تکمل کی قیمت $I_x$ اور $I_y$ کے روپ میں تلاش کریں جہاں $r = \sqrt{x^2+y^2}$ ہے۔

$$\oint_C \nabla(r^4)\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$$

سوال ۱۵.۲۶: **گردش صفر تاہم میدان غیر بقائی** دکھائیں کہ درج ذیل کی گردش صفر ہے

$$\boldsymbol{F} = \frac{-y}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

تاہم مستوی $xy$ میں دائرہ $x^2+y^2=1$ کو $C$ لیتے ہوئے درج ذیل صفر نہیں۔

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

(میدان $\boldsymbol{F}$ کا دائرہ کار یہاں سادہ تعلق خطہ نہیں لہٰذا مسئلہ ۶ کا اطلاق نہیں ہوگا۔ محور $z$ کے ہمراہ میدان $\boldsymbol{F}$ معین نہیں لہٰذا ایسا کوئی طریقہ ممکن نہیں کہ $\boldsymbol{F}$ کے دائرہ کار سے باہر نکلے بغیر ہم $C$ کو ایک نقطے میں سمیٹ لیں۔)

## ۱۵.۱۰ مسئلہ پھیلاؤ اور ایک مربوط نظریہ

مستوی میں مسئلہ گرین کا گردشی روپ کہتا ہے کہ سادہ بند منحنی کو پار کرنے والا، سمتی میدان کا خالص بیرونی بہاؤ، منحنی میں محیط خطے پر میدان کے پھیلاؤ پر تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ تین ابعاد میں متعلقہ مسئلہ، جو مسئلہ پھیلاؤ کہلاتا ہے، کے تحت فضا میں بند سطح سے سمتیہ میدان کا باہر رخ گزرنے والا بہاؤ، سطح میں محیط خطے پر، میدان کے پھیلاؤ کے تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس حصے میں ہم مسئلہ پھیلاؤ ثابت کرتے ہیں، اور دکھاتے ہیں کہ یہ بہاؤ کی قیمت کی تلاش کیسے آسان بناتا ہے۔ ہم برقی میدان میں بہاؤ کا قانون گاؤس اور ماقواحرکیات کی استمراری مساوات بھی اخذ کرتے ہیں۔ آخر میں ہم باب کے سمتی تکملی مسائل کو ایک بنیادی مسئلہ کے روپ میں پیش کرتے ہیں۔

### تین ابعاد میں پھیلاؤ

سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$ کا **پھیلاؤ**[۴۰] درج ذیل غیر سمتی تفاعل ہو گا۔

$$\text{پھیلاؤ}\ \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \tag{۱۵.۱}$$

علامت ''پھیلاؤ $\boldsymbol{F}$'' کو ''$F$ کا پھیلاؤ'' پڑھا جاتا ہے، جبکہ علامت ''$\nabla \cdot \boldsymbol{F}$'' کو ''ڈیل ایف'' پڑھا جاتا ہے۔

تین ابعاد میں پھیلاؤ $\boldsymbol{F}$ کا وہی طبیعی مفہوم ہے جو دو ابعاد میں ہے۔ اگر $\boldsymbol{F}$ سیال کے بہاؤ کا سمتی میدان رفتار ہو، نقطہ $(x,y,z)$ پر بہاؤ $\boldsymbol{F}$ کی قیمت اس نقطے پر سیال کے دخول یا خروج کی شرح دے گی۔ پھیلاؤ سے مراد نقطے پر بہاؤ فی اکائی حجم یعنی کثافت بہاؤ ہے۔

مثال ۱۵.۱: پھیلاؤ کی تلاش
سمتی میدان $\boldsymbol{F} = 2xz\boldsymbol{i} - xy\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$ کا پھیلاو تلاش کریں۔

**حل:** سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کا پھیلاؤ درج ذیل ہے۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-xy) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 2z - x - 1$$

□

### مسئلہ پھیلاؤ

مسئلہ پھیلاؤ کہتا ہے کہ مناسب شرائط کے تحت، (باہر رخ سمت بند) بند سطح سے سمتی میدان کا باہر گزرنے والا بہاؤ، سطح میں محیط خطے پر، میدان کے پھیلاؤ کے تہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

مسئلہ ۷: **مسئلہ پھیلاؤ**
بند، سمت بند سطح $S$ سے سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کا، سطح کے باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ کے رخ، گزرنے والا بہاؤ، سطح میں محیط خطہ $D$ پر $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ کے تکمل کے برابر ہو گا۔

$$\underbrace{\iint\limits_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma}_{\text{باہر رخ بہاؤ}} = \underbrace{\iint\limits_D \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, \mathrm{d}H}_{\text{تکمل پھیلاؤ}} \tag{۱۵.۲}$$

مثال ۱۵.۲: مسئلہ پھیلاؤ کی حمایت میں
کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ پر سمتی میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ کے لئے مساوات ۱۵.۲ کے دونوں اطراف حل کریں۔

---

[۴۰] divergence

**حل:** سطح $S$ کے باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ کو $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ کے ڈھلوان سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})}{\sqrt{4(x^2+y^2+z^2)}} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{a}$$

یوں درج ذیل ہو گا جہاں سطح پر $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ لیا گیا ہے۔

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{x^2+y^2+z^2}{a}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{a^2}{a}\,\mathrm{d}\sigma = a\,\mathrm{d}\sigma$$

لہٰذا مساوات ۱۵.۲ کا ایک ہاتھ ادرج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_S a\,\mathrm{d}\sigma = a \iint\limits_S \mathrm{d}\sigma = 4\pi a^3$$

میدان $\boldsymbol{F}$ کا پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$$

لہٰذا مساوات ۱۵.۲ کا دوسرا ہاتھ ادرج ذیل ہو گا۔

$$\iiint\limits_D \nabla \cdot \boldsymbol{F}\ \mathrm{d}H = \iiint\limits_D 3\,\mathrm{d}H = 3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = 4\pi a^3$$

□

مثال ۱۵.۳: بہاؤ کی تلاش

ثُمن اول سے مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ ، اور $z = 1$ مکعب کاٹتی ہیں۔ سمتی میدان $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$ کا مکعب کی سطح سے باہر رخ گزرتا بہاؤ تلاش کریں۔

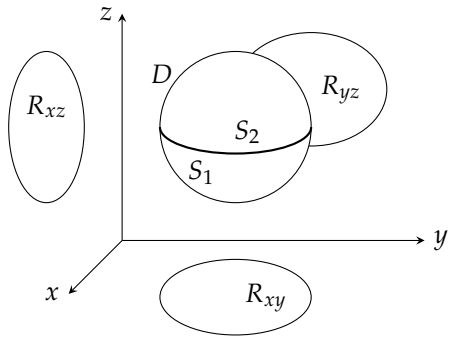
**حل:** مکعب کی چھ سطوح پر تکمل لے کر بہاؤ کی قیمت تلاش کرنے کی بجائے ہم پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = y + z + x$$

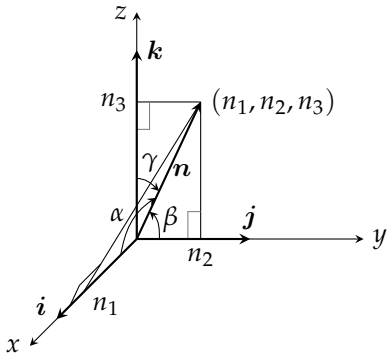
کا تکمل مکعب کے اندرون پر لیتے ہیں۔

$$\text{بہاؤ} = \iint\limits_{\text{مکعبی سطوح}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{\text{مکعبی اندرون}} \nabla \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H \qquad \text{مسئلہ پھیلاو}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{3}{2}$$




شکل ۱۵.۷۸: دکھائی گئی قسم کے تین ابعادی خطے کے لئے مسئلہ پھیلاؤ ثابت کرنے کے بعد مسئلے کو دیگر خطوں تک وسعت دی جائے گی۔




شکل ۱۵.۷۹: اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ ،اور $\boldsymbol{k}$ کے ساتھ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ بالترتیب زاویہ $\alpha$ ، $\beta$ ،اور $\gamma$ بناتا ہے۔ان زاویوں کے کوسائن $\boldsymbol{n}$ کے غیر سمتی اجزاء ہیں۔

□

### مخصوص خطوں کے لئے مسئلہ پھیلاؤ کا ثبوت

ہم فرض کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{F}$ کے اجزاء کے جزوی یک رتبی تفرق استمراری ہیں۔ہم مزید فرض کرتے ہیں کہ خطہ $D$ محدب ہے اور اس میں کوئی سوراخ یا بلبلا نہیں پایا جاتا، مثلاً ٹھوس مکعب، کرہ، یا ترخیمی جسم، اور اس کی سطح $S$ ٹکڑوں میں ہموار ہے۔اس کے ساتھ ساتھ ہم فرض کرتے ہیں کہ مستوی $xy$ پر $D$ کے تظلیل قائمہ $R_{xy}$ کے اندرونی ہر نقطے پر، $xy$ مستوی کو عمودی لکیر، سطح $S$ کو ٹھیک دو نقاط پر قطع کرتی ہے جس سے ہمیں درج ذیل دو سطوح ملتے ہیں

$$S_1: \quad z = f_1(x, y), \quad \text{نقطہ } (x, y) \text{ تظلیل } R_{xy} \text{ میں ہے}$$
$$S_2: \quad z = f_2(x, y), \quad \text{نقطہ } (x, y) \text{ تظلیل } R_{xy} \text{ میں ہے}$$

جہاں $f_1 \leq f_2$ ہے۔ہم اسی طرح کے مفروضے دیگر محددی سطوح پر $D$ کے تظلیل قائمہ کے لئے فرض کرتے ہیں۔شکل ۱۵.۷۸ دیکھیں۔

اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n} = n_1\boldsymbol{i} + n_2\boldsymbol{j} + n_3\boldsymbol{k}$ کے اجزاء، زاویات $\alpha$ ، $\beta$ ،اور $\gamma$ کے کوسائن ہیں، جو $\boldsymbol{n}$ اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ ،اور $\boldsymbol{k}$ کے ساتھ بناتا ہے (شکل ۱۵.۷۹)۔تمام سمتیات اکائی ہونے کی وجہ سے ایسا ہو گا۔یوں

$$\begin{aligned} n_1 &= \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{i} = |\boldsymbol{n}||\boldsymbol{i}| \cos\alpha = \cos\alpha \\ n_2 &= \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{j} = |\boldsymbol{n}||\boldsymbol{j}| \cos\beta = \cos\beta \\ n_3 &= \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k} = |\boldsymbol{n}||\boldsymbol{k}| \cos\gamma = \cos\gamma \end{aligned}$$

لہٰذا

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha)\boldsymbol{i} + (\cos\beta)\boldsymbol{j} + (\cos\gamma)\boldsymbol{k}$$

اور درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma$$

اجزاء کے روپ میں مسئلہ پھیلاؤ کہتا ہے درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_S (M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

ہم درج ذیل تین مساویت ثابت کر کے مسئلہ ثابت کرتے ہیں۔

$$\iint\limits_S M\cos\alpha\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_D \frac{\partial M}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{۱۵.۳}$$

$$\iint\limits_S N\cos\beta\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_D \frac{\partial N}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{۱۵.۴}$$

$$\iint\limits_S P\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_D \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{۱۵.۵}$$

### مساوات ۵-۱۵ کا ثبوت

ہم بائیں ہاتھ کے سطحی تکمل کو $xy$ مستوی پر $D$ کی قائمہ تطلیل پر دوہرے تکمل میں تبدیل کر کے مساوات ۱۵.۵ ثابت کرتے ہیں (شکل ۱۵.۸۰)۔ سطح $S$ دو سطوح $S_2$ اور $S_1$ پر مشتمل ہے جہاں $S_2$ بالا حصہ ہے اور اس کی مساوات $z = f_2(x,y)$ ہے اور $S_1$ نچلا حصہ ہے اور اس کی مساوات $z = f_1(x,y)$ ہے۔ سطح $S_2$ پر باہر رخ عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کا $\boldsymbol{k}$ جزو مثبت علامت رکھتا ہے اور چونکہ

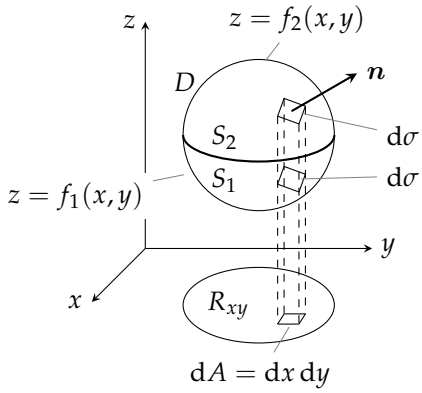
$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}A}{|\cos\gamma|} = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\cos\gamma}$$

ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا (شکل ۱۵.۸۱ پر نظر ڈالیں)۔

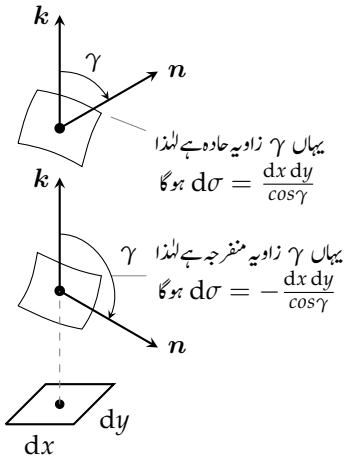
$$\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سطح $S_1$ پر $\boldsymbol{n}$ کا $\boldsymbol{k}$ جزو منفی علامت رکھتا ہے لہٰذا اس سطح پر درج ذیل ہو گا۔

$$\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma = -\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$




شکل ۱۵.۸۰: تین بعدی خطہ $D$ ، جو مستوی $xy$ پر دو ابعادی قائمہ تطلیل $R_{xy}$ ڈالتا ہے، کو سطوح $S_1$ اور $S_2$ گھیرتی ہیں۔




شکل ۱۵.۸۱: گزشتہ شکل میں پیش رقبوں کے ٹکڑے بڑا کر کے دکھائے گئے ہیں۔ تعلق $\mathrm{d}\sigma = \pm\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y/\cos\gamma$ حصہ ۱۵.۵ میں اخذ کیا گیا ہے۔

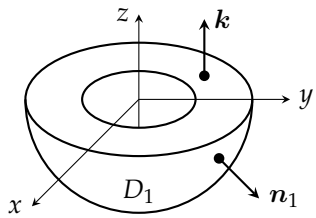
یوں درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{S} P\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma &= \iint\limits_{S_2} P\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{S_1} P\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \iint\limits_{R_{xy}} P(x,y,f_2(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint\limits_{R_{xy}} P(x,y,f_1(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{R_{xy}} [P(x,y,f_2(x,y)) - P(x,y,f_1(x,y))]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{R_{xy}} \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

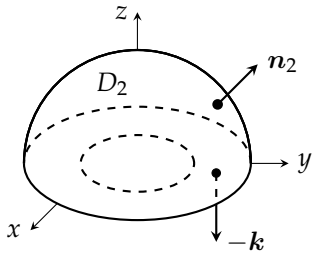
یوں مساوات ۱۵.۵ اثبات ہوا۔

□

مساوات ۱۵.۳ اور مساوات ۱۵.۴ کے ثبوت اسی طرز پر حاصل ہوں گے؛ یا مساوات ۱۵.۵ میں بالترتیب $x$ ، $y$ ، $z$ ؛ $M$ ، $N$ ، $P$ ؛ $\alpha$ ، $\beta$ ، $\gamma$ ایک دوسرے کی جگہ رکھ کر نتائج لکھیں۔




شکل ۱۵.۸۲: دو ہم مرکز کرّات کے بیچ ٹھوس خطے کا نچلا نصف حصہ۔




شکل ۱۵.۸۳: دو ہم مرکز کرّات کے بیچ ٹھوس خطے کا بالائی نصف حصہ۔

## دیگر خطوں کے لئے مسئلہ پھیلاؤ

مسئلہ پھیلاؤ کو ان خطوں تک وسعت دی جا سکتی ہے جنہیں محدود تعداد کے مذکورہ سادہ قسم کے خطوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے یا ایسے خطوں تک جنہیں کسی طرح سادہ خطوں کی حد تصور کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر، فرض کریں دو ہم مرکز کرّات کے بیچ خطہ $D$ ہے جہاں $D$ کے اندر اور اس کے تحدیدی سطوح پر $\boldsymbol{F}$ کے جزوی تفرق استمراری ہیں۔ استوائی مستوی پر $D$ کو دو حصوں میں تقسیم کر کے دونوں نصف حصوں پر مسئلہ پھیلاؤ کا اطلاق کریں۔ نچلا نصف حصہ $D_1$ شکل ۱۵.۸۲ میں پیش کیا گیا ہے جس کی تحدیدی سطح $S_1$ ہے جو بیرونی کرہ، مسطح چھلا، اور اندرونی کرہ پر مشتمل ہے۔ مسئلہ پھیلاؤ درج ذیل کہتا ہے۔

$$\iint\limits_{S_1} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_1\,\mathrm{d}\sigma_1 = \iiint\limits_{D_1} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H_1 \tag{۱۵.۶}$$

اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}_1$ کا رخ نچلے نصف حصہ $D_1$ کے بیرونی سطح پر مبدا سے دور کی جانب ہے، چھلے پر یہ $\boldsymbol{k}$ کے برابر ہے، اور اندرونی سطح پر اس کا رخ مبدا کی جانب ہے۔ اس کے بعد $D_2$ اور اس کی سطح $S_2$ پر مسئلہ پھیلاؤ کا اطلاق کریں (شکل ۱۵.۸۳)۔

$$\iint\limits_{S_2} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_2\,\mathrm{d}\sigma_2 = \iiint\limits_{D_2} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H_2 \tag{۱۵.۷}$$

بالائی نصف حصہ $D_2$ کی سطح $S_2$ پر چلتے ہوئے عمادی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}_2$ پر نظر رکھیں۔ بیرونی کرہ پر اس کا رخ مبدا سے دور جانب ہے، چھلا پر یہ $-\boldsymbol{k}$ کے برابر ہے، جبکہ اندرونی کرہ پر اس کا رخ مبدا کی جانب ہے۔ مساوات ۱۵.۶ اور مساوات ۱۵.۷ جمع کرتے ہوئے، چھلے پر $\boldsymbol{n}_1$ اور $\boldsymbol{n}_2$ کی علامتیں الٹ ہونے کی بنا، اس پر تکمل ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔ یوں درج ذیل نتیجہ حاصل ہو گا

$$\iint\limits_{S} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{D} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H$$

جہاں دو کرّات (اندرونی اور بیرونی) کے بیچ خطہ $D$ ہے، $D$ کی سرحد $S$ دو کرّات (اندرونی اور بیرونی) کی سطوح پر مشتمل ہے، اور $S$ پر $D$ سے باہر رخ عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے۔

مثال ۱۵.۴: باہر رخ بہاؤ کا حصول
خطہ $D:\ 0 < a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2$ کی سرحد سے باہر رخ گزرنے والا صافی بہاؤ درج ذیل میدان کے لئے تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{F} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}}{\rho^3}, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

**حل:** خطہ $D$ پر $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ کا تکمل ہمیں بہاؤ دیگا۔ درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\rho}$$
$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\rho^{-3}) = \rho^{-3} - 3x\rho^{-4}\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3x^2}{\rho^5}$$

اسی طرح درج ذیل بھی ہو گا۔

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3y^2}{\rho^5}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3z^2}{\rho^5}$$

لہٰذا

$$\boldsymbol{F}\text{پھیلاؤ} = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3}{\rho^5}(x^2+y^2+z^2) = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3\rho^2}{\rho^5} = 0$$

اور درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint_D \nabla \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H = 0$$

اس طرح $D$ پر $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ کا تکمل صفر ہے اور $D$ کی سرحد کو باہر رخ عبور کرتا ہوا صافی بہاؤ صفر ہو گا۔ اس مثال سے مزید معلومات بھی حاصل ہوتی ہیں۔ اندرونی کرہ $S_a$ کو پار کرتا ہوا جو بہاؤ $D$ سے خارج ہوتا ہے کی علامت اس بہاؤ کے الٹ ہو گی جو بیرونی کرہ $S_b$ کو عبور کرتا ہوا $D$ سے خارج ہوتا ہے (یاد رہے ان بہاؤ کا مجموعہ صفر ہے)۔ یوں مبدا سے دوری کے رخ $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ جو $S_a$ کو عبور کرتا ہے $\boldsymbol{F}$ کے اس بہاؤ کے برابر ہو گا جو مبدا سے دوری کے رخ $S_b$ کو پار کرتا ہوا $D$ سے خارج ہوتا ہے۔ یوں مبدا پر مرکوز کرہ کو عبور کرتا $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ کرہ کے رداس پر منحصر نہیں۔ یہ بہاؤ کتنا ہو گا؟

اس کی قیمت جاننے کی خاطر ہم بہاؤ کا تکمل حل کرتے ہیں۔ رداس $a$ کے کرہ کا باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{a}$$

یوں کرہ پر

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = \left(\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{a^3}\right)\cdot\left(\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{a}\right) = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^4} = \frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_{S_a} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{a^2}\iint\limits_{S_a} \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{a^2}(4\pi a^2) = 4\pi$$

مبدا پر مرکوز ہر کرہ سے $\boldsymbol{F}$ کا باہر رخ بہاؤ $4\pi$ ہو گا۔ □

## گاوس کا قانون: برقناطیسیت کے چار عظیم قوانین میں سے ایک

ابھی مثال ۱۵.۴ سے بہت کچھ سیکھا جا سکتا ہے۔ برقناطیسی نظریہ میں، مبدا پر موجود نقطی بار $q$ درج ذیل برقی میدان پیدا کرتا ہے

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}|^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\rho^3}$$

جہاں $\epsilon_0$ طبیعی مستقل، $\boldsymbol{r}$ نقطہ $(x,y,z)$ کا تعین گر سمتیہ، اور $\rho = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ہے۔ مثال ۱۵.۴ کی علامتیت میں اس کو لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\boldsymbol{F}$$

مثال ۱۵.۴ سے ہم دیکھتے ہیں کہ مبدا پر مرکوز ہر کرہ سے باہر رخ $\boldsymbol{E}$ کا بہاؤ $q/\epsilon_0$ ہو گا، لیکن یہ نتیجہ صرف کرہ تک محدود نہیں۔ کسی بھی بند سطح $S$ سے، جو مبدا کو گھیرتی ہو (اور جس پر مسئلہ پھیلاؤ کا اطلاق ہوتا ہو)، $\boldsymbol{E}$ کا باہر رخ بہاؤ $q/\epsilon_0$ ہو گا۔ اس کی وجہ جاننے کی خاطر مبدا پر مرکوز اتنے بڑے کرہ $S_a$ کا تصور کریں جو $S$ کو گھیرتا ہو۔ جب $\rho > 0$ ہو درج ذیل ہو گا

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \nabla\cdot\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\boldsymbol{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\nabla\cdot\boldsymbol{F} = 0$$

جس کی وجہ سے $S$ اور $S_a$ کے بیچ خطہ $D$ پر $\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ کا تکمل صفر ہو گا۔ لہٰذا مسئلہ پھیلاؤ کے تحت

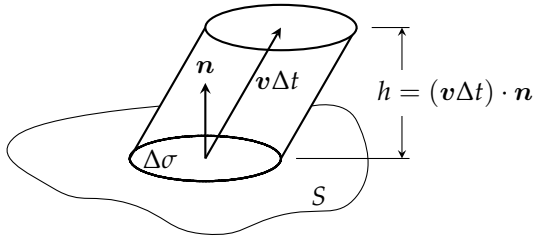
$$\iint\limits_{D\text{ کی سرحد}} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = 0$$

ہو گا، اور مبدا سے دوری کے رخ $S$ کو عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{E}$ کا بہاؤ لازماً مبدا سے دوری کے رخ $S_a$ کو عبور کرتے ہوئے $\boldsymbol{E}$ کے بہاؤ کے برابر ہو گا، جو $q/\epsilon_0$ ہے۔ یہ فقرہ، جو **قانون گاوس**[41] کہلاتا ہے، یہاں فرض کئے گئے بار سے زیادہ عمومی تقسیم بار کے لئے بھی درست ہے، جیسا آپ طبیعیات کے کسی بھی نصابی کتاب میں پڑھ سکتے ہیں۔

$$\iint\limits_{S} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad \text{قانون گاوس}$$

---

[41] Gauss' law




شکل ۱۵.۸۴: قلیل وقت $\Delta t$ کے دوران جو سیال رقبے کے ٹکڑا $\Delta\sigma$ سے اوپر رخ گزرتا ہے اس کا حجم بیلن $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\Delta\sigma\Delta t$ کے برابر ہو گا۔

### ماقواحرکیات کی استمراری مساوات

فرض کریں فضا میں خطہ $D$ بند، سمت بند سطح $S$ میں محدود ہے۔ اگر نقطہ $(x,y,z)$ اور وقت $t$ پر $D$ میں بہتے ہوئے سیال کا سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{v}(x,y,z)$، اور کثافت $\delta = \delta(t,x,y,z)$ ہو، اور $\boldsymbol{F} = \delta\boldsymbol{v}$ ہو، تب ماقواحرکیات کی **استمراری مساوات**[۴۲] درج ذیل کہتی ہے۔

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} + \frac{\partial\delta}{\partial t} = 0$$

اگر ملوث تفاعلات کے یک رتبی جزوی تفرق استمراری ہوں، یہ مساوات مسئلہ پھیلاؤ سے اخذ کی جا سکتی ہے۔ آئیں یہ عمل دیکھیں۔

درج ذیل تکمل، $S$ کو عبور کر کے $D$ سے کمیتی اخراج (اخراج اس لئے کہ $\boldsymbol{n}$ باہر رخ عمودی ہے) کی شرح دیتا ہے۔

$$\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

اس کی وجہ جاننے کی خاطر، سطح پر رقبے کا ٹکڑا $\Delta\sigma$ لیں (شکل ۱۵.۸۴)۔ قلیل زمانی وقفہ $\Delta t$ میں، اس ٹکڑے کو $\Delta H$ حجم عبور کرتا ہے جو تخمیناً اس بیلن کے حجم کے برابر ہو گا جس کا تل $\Delta\sigma$ اور لمبائی $(\boldsymbol{v}\Delta t)\cdot\boldsymbol{n}$ ہو، جہاں اس ٹکڑے کے کسی ایک نقطے پر سمتی رفتاری سمتیہ $\boldsymbol{v}$ ہے۔

$$\Delta H \approx \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\Delta\sigma\Delta t$$

اس حجم کی کمیت تقریباً

$$\Delta m \approx \delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\Delta\sigma\Delta t$$

ہو گی، لہٰذا سے اس ٹکڑے سے گزر کر $D$ سے کمیت کے اخراج کی شرح تخمیناً درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \approx \delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\Delta\sigma$$

---

[۴۲] continuity equation

اس سے درج ذیل تخمین لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{\sum \Delta m}{\Delta t} \approx \sum \delta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \Delta \sigma$$

جو $S$ سے گزرنے والی کمیت کی تخمیناً اوسط شرح ظاہر کرتی ہے۔ آخر میں $\Delta \sigma \to 0$ اور $\Delta t \to 0$ لیتے ہوئے $D$ سے $S$ کے ذریعہ اخراج کی لحاتی شرح:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \iint\limits_S \delta \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

حاصل ہو گی جو اس مخصوص سیال کے لئے درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \iint\limits_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

اب فرض کریں سیال میں نقطہ $Q$ پر مرکوز ٹھوس کرہ $B$ رکھا جاتا ہے۔ کرہ $B$ پر $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{1}{B \text{ کا حجم}} \iiint\limits_B \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}H$$

پھیلاؤ کے استمرار کا ایک پہلو یہ ہے کہ $B$ میں کسی ایک نقطہ $P$ پر $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ کی قیمت یہی ہو گی۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \boldsymbol{F})_P &= \frac{1}{B \text{ کا حجم}} \iiint\limits_B \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}H = \frac{\iint\limits_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma}{B \text{ کا حجم}} \\ &= \frac{\text{سطح } S \text{ کے ذریعہ } B \text{ سے کمیتی اخراج کی شرح}}{B \text{ کا حجم}} \end{aligned} \tag{۱۵.۸}$$

دائیں ہاتھ کسر اکائی حجم میں کمیت کی کمی کی شرح بیان کرتا ہے۔

اب مرکز $Q$ کو ایک ہی مقام پر رکھتے ہوئے $B$ کے رداس کو صفر کے قریب پہنچائیں۔ مساوات ۱۵.۸ کا بایاں ہاتھ $(\nabla \cdot \boldsymbol{F})_Q$ کو، جبکہ اس کا دایاں ہاتھ $(-\partial\delta/\partial t)_Q$ کو مرکوز ہو گا۔ ان دو حدوں کی مساویت ہمیں درج ذیل **استمراری مساوات**[۴۳] دیتی ہے۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = -\frac{\partial \delta}{\partial t}$$

استمراری مساوات ہمیں $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ کا مفہوم دیتی ہے: کسی نقطے پر $\boldsymbol{F}$ کا پھیلاؤ اس نقطے پر سیال کی کثافت میں کمی کی شرح دیتا ہے۔

---

[۴۳] continuity equation

مسئلہ پھیلاؤ

$$\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_D \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H$$

اب کہتا ہے کہ خطہ $D$ میں کثافت کی صافی کمی کی وجہ کمیت کی سطح $S$ سے دوسری جانب منتقلی ہے۔ یوں یہ مسئلہ کمیت کی بقا بیان کرتا ہے (سوال ۱۵.۳۱)۔

## تکملی مسائل کی یکجائی

دو بعدی میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ کو ایسا تین بعدی میدان تصور کر کے جس کا $\boldsymbol{k}$ جزو صفر ہو ہم

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} = (\partial M/\partial x) + (\partial N/\partial y)$$

لکھ سکتے ہیں اور یوں مسئلہ گرین کا عمودی روپ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\oint\limits_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \iint\limits_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_R \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}A$$

اسی طرح $\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k} = (\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$ ہو گا لہٰذا مسئلہ گرین کا مماسی روپ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\oint\limits_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint\limits_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_R \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k}\,\mathrm{d}A$$

مسئلہ گرین کی مساوات ڈیل علامتیت میں لکھ کر ان کا مسئلہ سٹوکس اور مسئلہ پھیلاؤ کے ساتھ تعلق افشا ہوتا ہے۔

مسئلہ گرین کی تین ابعادی تعمیم

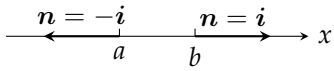
$$\oint\limits_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \iint\limits_R \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}A \qquad \text{مسئلہ گرین کا عمودی روپ}$$

$$\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_D \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H \qquad \text{مسئلہ پھیلاؤ}$$

$$\oint\limits_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint\limits_R \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k}\,\mathrm{d}A \qquad \text{مسئلہ گرین کا مماسی روپ}$$

$$\oint\limits_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint\limits_S \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{مسئلہ سٹوکس}$$

مستوی میں چپٹی سطح پر مسئلہ گرین کے مماسی (گردش) روپ کو مسئلہ سٹوکس تین ابعادی فضا میں سطح پر عمومیت دیتا ہے۔ دنوں میں، سطح کے اندرون پر گردش $\boldsymbol{F}$ کے عمودی جزو کا تکمل اور سرحد کے ہمراہ $\boldsymbol{F}$ کا دائری بہاؤ برابر ہو گا۔




شکل ۱۵.۸۵: یک بعدی فضا میں $[a, b]$ کی سرحد پر باہر رخ اکائی عمودی سمتیات۔

اسی طرح دو ابعادی مستوی میں خطہ پر مسئلہ گرین کے عمودی (بہاؤ) روپ کو مسئلہ پھیلاؤ فضا میں تین ابعادی خطہ پر عمومیت دیتا ہے۔ دونوں میں، خطے کے اندرون پر $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ کا تکمل اور سرحد کو عبور کرتے ہوئے میدان کا کل بہاؤ برابر ہو گا۔

ابھی مزید معلومات حاصل کی جا سکتی ہیں۔ ان تمام نتائج کو ایک بنیادی مسئلے کے مختلف روپ تصور کیا جا سکتا ہے۔ حصہ ۵.۷ میں تکمل کا بنیادی مسئلہ پیش کیا گیا جو کہتا ہے اگر $(a, b)$ پر $f(x)$ قابل تفرق اور $[a, b]$ پر استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

اگر پورے $[a, b]$ پر $\boldsymbol{F} = f(x)\boldsymbol{i}$ ہو تب $(\mathrm{d}f/\,\mathrm{d}x) = \nabla \cdot \boldsymbol{F}$ ہو گا۔ اگر ہم $[a, b]$ کی سرحد پر عمودی اکائی سمتی میدان $\boldsymbol{n}$ کو $b$ پر $\boldsymbol{i}$ اور $a$ پر $-\boldsymbol{i}$ مان لیں (شکل ۱۵.۸۵) تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= f(b)\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + f(a)\boldsymbol{i}\cdot(-\boldsymbol{i}) \\ &= \boldsymbol{F}(b)\cdot\boldsymbol{n} + \boldsymbol{F}(a)\cdot\boldsymbol{n} \\ &= [a, b] \text{ کی سرحد سے باہر رخ } \boldsymbol{F} \text{ کا کل بہاؤ} \end{aligned}$$

تکمل کا بنیادی مسئلہ یوں درج ذیل کہتا ہے۔

$$\boldsymbol{F}(b)\cdot\boldsymbol{n} + \boldsymbol{F}(a)\cdot\boldsymbol{n} = \int_{[a,b]} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x$$

تکمل کا بنیادی مسئلہ، مسئلہ گرین کا عمودی روپ، اور مسئلہ پھیلاؤ تینوں کہتے ہیں کہ تفرقی عامل $\nabla\cdot$ جو کسی خطے میں میدان $\boldsymbol{F}$ پر عمل کرتا ہو اس خطے کی سرحد پر میدان کے عمودی اجزاء کے مجموعے کے برابر ہو گا۔ (یہاں ہم مسئلہ گرین میں موجود لکیری تکمل اور مسئلہ پھیلاؤ میں موجود سطحی تکمل سے مراد سرحد پر ''مجموعہ'' لیتے ہیں۔)

مسئلہ سٹوکس اور مسئلہ گرین کا مماسی روپ دونوں کہتے ہیں کہ درست سمت بندی کر کے، گردش میدان کے عمودی جزو کا تکمل اور سطح کی سرحد پر میدان کے مماسی اجزاء کا مجموعہ برابر ہوں گے۔

مفہوم کو اس طرح سمجھنے سے ایک مربوط اصول ابھرتا ہے جو درج ذیل بیان کیا جا سکتا ہے۔

تفرقی عامل کے زیر اثر میدان کا خطے میں تکمل اور خطے کی سرحد پر، عامل کے لحاظ سے موزوں، میدان کے اجزاء کا مجموعہ برابر ہو گا۔

## ۱۵.۱۱ سوالات

### پھیلاؤ کی قیمت کی تلاش

سوال ۱۵.۱ تا سوال ۱۵.۴ میں میدان کا پھیلاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱: شکل ۱۵.۲۰ میں چکری میدان۔

سوال ۱۵.۲: شکل ۱۵.۱۹ میں رداسی میدان۔

سوال ۱۵.۳: شکل ۱۵.۱۸ میں تجاذبی میدان۔

سوال ۱۵.۴: شکل ۱۵.۱۷ کا سمتی رفتاری میدان۔

### مسئلہ پھیلاؤ کے استعمال سے باہر رخ بہاؤ کی قیمت کی تلاش

سوال ۱۵.۵ تا سوال ۱۵.۱۶ میں مسئلہ پھیلاؤ استعمال کر کے خطہ $D$ کی سرحد سے باہر جانب $\boldsymbol{F}$ کا گزرنے والا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۵: **مکعب** $\boldsymbol{F} = (y-x)\boldsymbol{i} + (z-y)\boldsymbol{j} + (y-x)\boldsymbol{k}$
مکعب $D$ جس کو سطوح $x = \pm 1$ ، $y = \pm 1$ ، اور $z = \pm 1$ گھیرتی ہیں۔

سوال ۱۵.۶: $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z^2\boldsymbol{k}$

ا. **مکعب** مکعب $D$ جسے ثمن اول سے مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ ، $z = 1$ کاٹتی ہیں۔

ب. **مکعب** مکعب $D$ جسے مستویات $x = \pm 1$ ، $y = \pm 1$ ، اور $z = \pm 1$ گھیرتی ہیں۔

ج. **بیلن** خطہ $D$ جس کو مستویات $z = 0$ اور $z = 1$ ٹھوس بیلن $x^2 + y^2 \leq 4$ سے کاٹتی ہیں۔

سوال ۱۵.۷: **بیلن اور مکافی جسم** $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$
ٹھوس بیلن $x^2 + y^2 \leq 4$ کے اندر خطہ $D$ جو مستوی $z = 0$ اور مکافی جسم $z = x^2 + y^2$ کے بیچ ہے۔

سوال ۱۵.۸: **کرہ** $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k}$
ٹھوس کرہ $D:\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

سوال ۱۵.۹: **کرے کا ٹکڑا** $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} - 2xy\boldsymbol{j} + 3xz\boldsymbol{k}$
خطہ $D$ وہ ہے جسے ثمن اول سے کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کاٹتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۰: **بیلن** $\boldsymbol{F} = (6x^2 + 2xy)\boldsymbol{i} + (2y + x^2z)\boldsymbol{j} + 4x^2y^3\boldsymbol{k}$
مستوی $z = 3$ اور بیلن $x^2 + y^2 = 4$ ثمن اول سے خطہ $D$ کاٹتے ہیں۔

سوال ۱۵.۱۱: **پچر** $\boldsymbol{F} = 2xz\boldsymbol{i} - xy\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k}$
مستوی $y + z = 4$ اور بیضوی بیلن $4x^2 = y^2 = 16$ ثمن اول سے پچر $D$ کاٹتے ہیں۔

سوال ۱۵.۱۲: **کرہ** $\boldsymbol{F} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$
خطہ $D$ ٹھوس کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ ہے۔

سوال ۱۵.۱۳: **موٹا کرہ** $\boldsymbol{F} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$
خطہ $D$ جسے $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ ظاہر کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۴: **موٹا کرہ** $\boldsymbol{F} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
خطہ $D$ جسے $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ظاہر کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۵: **موٹا کرہ** $\boldsymbol{F} = (5x^3 + 12xy^2)\boldsymbol{i} + (y^3 + e^y \sin z)\boldsymbol{j} + (5z^3 + e^y \cos z)\boldsymbol{k}$
کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ اور کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ کے بیچ ٹھوس خطہ $D$ ہے۔

سوال ۱۵.۱۶: **موٹا بیلن** $\boldsymbol{F} = \ln(x^2 + y^2)\boldsymbol{i} - (\frac{2z}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x})\boldsymbol{j} + z\sqrt{x^2 + y^2}\boldsymbol{k}$
خطہ $D$ موٹی چادر کا بیلن $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ ، $-1 \leq z \leq 2$ ہے۔

## گردش اور پھیلاؤ کے خواص

سوال ۱۵.۱۷: **گردش $G$ کا پھیلاؤ صفر ہو گا**

ا. دکھائیں اگر میدان $\boldsymbol{G} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ کے مطلوبہ جزوی تفرق استمراری ہوں، تب $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{G} = 0$ ہو گا۔

ب. کیا آپ اس سے، میدان $\nabla \times \boldsymbol{G}$ کا بند سطح سے گزرتے بہاؤ کے بارے میں، کوئی نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۵.۱۸: فرض کریں $\boldsymbol{F}_1$ اور $\boldsymbol{F}_2$ قابل تفرق سمتی میدان ہیں جبکہ $a$ اور $b$ حقیقی اختیاری مستقل ہیں۔ درج ذیل تماثل کی تصدیق کریں۔

ا. $\nabla \cdot (a\boldsymbol{F}_1 + b\boldsymbol{F}_2) = a\nabla \cdot \boldsymbol{F}_1 + b\nabla \cdot \boldsymbol{F}_2$

ب. $\nabla \times (a\boldsymbol{F}_1 + b\boldsymbol{F}_2) = a\nabla \times \boldsymbol{F}_1 + b\nabla \times \boldsymbol{F}_2$

ج. $\nabla \cdot (\boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{F}_2) = \boldsymbol{F}_2 \cdot \nabla \times \boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_1 \cdot \nabla \times \boldsymbol{F}_2$

سوال ۱۵.۱۹: فرض کریں $\boldsymbol{F}$ قابل تفرق سمتی میدان جبکہ $g(x, y, z)$ قابل تفرق غیر سمتی میدان ہے۔ درج ذیل تماثل کی تصدیق کریں۔

ا. $\nabla \cdot (g\boldsymbol{F}) = g\nabla \cdot \boldsymbol{F} + \nabla g \cdot \boldsymbol{F}$

ب. $\nabla \times (g\boldsymbol{F}) = g\nabla \times \boldsymbol{F} + \nabla g \times \boldsymbol{F}$

سوال ۱۵.۲۰: قابل تفرق سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ کے لئے علامتی اظہار $\boldsymbol{F} \cdot \nabla$ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$M\frac{\partial}{\partial x} + N\frac{\partial}{\partial y} + P\frac{\partial}{\partial z}$$

قابل تفرق سمتی میدان $\boldsymbol{F}_1$ اور $\boldsymbol{F}_2$ کے لئے درج ذیل کی تصدیق کریں۔

ا. $\nabla \times (\boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{F}_2) = (\boldsymbol{F}_2 \cdot \nabla)\boldsymbol{F}_1 - (\boldsymbol{F}_1 \cdot \nabla)\boldsymbol{F}_2 + (\nabla \cdot \boldsymbol{F}_2)\boldsymbol{F}_1 - (\nabla \cdot \boldsymbol{F}_1)\boldsymbol{F}_2$

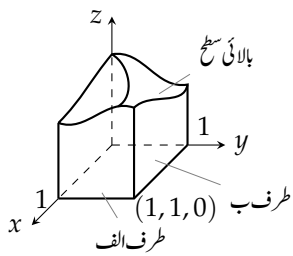
ب. $\nabla(\boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{F}_2) = (\boldsymbol{F}_1 \cdot \nabla)\boldsymbol{F}_2 + (\boldsymbol{F}_2 \cdot \nabla)\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_1 \times (\nabla \times \boldsymbol{F}_2) + \boldsymbol{F}_2 \times (\nabla \times \boldsymbol{F}_1)$

## نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۵.۲۱: سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کے اجزاء کے یک رتبی تفرق فضا کے ایک ایسے حصہ میں استمراری ہیں جس کے اندر ہموار بند سطح $S$ میں محدود خطہ $D$ پایا جاتا ہے۔ اگر $\boldsymbol{F} \leq 1$ ہو کیا درج ذیل کی قیمت کی حد بندی ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\iiint\limits_D \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, \mathrm{d}H$$

سوال ۱۵.۲۲: مستوی $xy$ پر اکائی مربع دکھائے گئے کعبی نما سطح کا تل ہے۔ سطح کے چار اطراف مستویات $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ،اور $y = 1$ میں پائے جاتے ہیں۔ بالائی سطح اختیاری ہموار لیکن نامعلوم ہے۔ فرض کریں $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} + (z+3)\boldsymbol{k}$ ہے اور باہر رخ بہاؤ الف طرف سے $1$ اور ب طرف سے $-3$ ہے۔ کیا آپ بالائی سطح سے باہر رخ بہاؤ کے بارے میں نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔




سوال ۱۵.۲۳:

ا. دکھائیں کہ ہموار بند سطح $S$ سے تعین گر سمتی میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ کا باہر رخ بہاؤ، اس خطے کے حجم کے تین گنّا ہے جس کو سطح $S$ گھیرتی ہے۔

ب. فرض کریں $S$ کا باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے۔ دکھائیں ایسا ممکن نہیں کہ $S$ کے ہر نقطے پر $\boldsymbol{F}$ سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کو قائمہ ہو۔

سوال ۱۵.۲۴: **زیادہ سے زیادہ بہاؤ** ان تمام ٹھوس مستطیل میں سے، جنہیں عدم مساوات $0 \leq x \leq a$ ، $0 \leq y \leq b$ ، اور $0 \leq z \leq 1$ بیان کرتی ہوں، وہ تلاش کریں جس کے چار اطراف سے باہر رخ $\boldsymbol{F} = (-x^2 - 4xy)\boldsymbol{i} - 6yz\boldsymbol{j} + 12z\boldsymbol{k}$ کا بہاؤ زیادہ سے زیادہ ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ بہاؤ کی قیمت کیا ہو گی؟

سوال ۱۵.۲۵: **ٹھوس خطے کا حجم** فرض کریں $S$ اور $D$ مسئلہ پھیلاؤ کی شرائط پر پورا اترتے ہیں، اور $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ ہے۔ دکھائیں کہ $D$ کا حجم درج ذیل دیگا۔

$$D \text{ کا حجم} = \frac{1}{3} \iint\limits_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

سوال ۱۵.۲۶: **مستقل میدان کا بہاؤ** دکھائیں کہ مستقل سمتی میدان $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C}$ کا کسی بھی بند سطح، جس پر مسئلہ پھیلاؤ کا اطلاق ہوتا ہو، سے باہر رخ بہاؤ صفر ہو گا۔

سوال ۱۵.۲۷: **ہارمونی تفاعلات** فضا کے خطہ $D$ میں تفاعل $f(x, y, z)$ اس صورت **ہارمونی**[۴۴] کہلاتا ہے جب وہ پورے $D$ میں درج ذیل لاپلاسی مساوات کو مطمئن کرتا ہو۔

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

ا. فرض کریں ہموار سطح $S$ ، جس کا منتخب اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے، محدود خطہ $D$ کو گھیرتی ہے اور $f$ اس پورے خطے میں ہارمونی ہے۔ دکھائیں کہ $S$ پر $\nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ کا تکمل، یعنی $\boldsymbol{n}$ کے رخ $f$ کا تفرق، صفر ہے۔

ب. دکھائیں اگر $D$ میں $f$ ہارمونی ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_S f \nabla f \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_D |\nabla f|^2 \, \mathrm{d}H$$

سوال ۱۵.۲۸: **ڈھلوان میدان کا بہاؤ** فرض کریں ثمن اول میں موجود کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ کے ٹکڑے کی سطح $S$ ہے اور $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ہے۔ درج ذیل کی قیمت تلاش کریں۔ (سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کے رخ $f$ کا تفرق $\nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ ہے۔)

$$\iint\limits_S \nabla f \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

---

[۴۴] harmonic

سوال ۱۵.۲۹: **گرین کا کلیہ اول** ٹکڑوں میں ہموار بند سطح $S$ میں بند پورے خطے $D$ پر غیر سمتی تفاعلات $f$ اور $g$ کے یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفرق استمراری ہیں۔ دکھائیں کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_S f\nabla g\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_D (f\nabla^2 g + \nabla f\cdot\nabla g)\,\mathrm{d}H \tag{۱۵.۱}$$

مساوات ۱۵.۱ **گرین کا کلیہ اول**[۴۵] ہے۔ (اشارہ: میدان $\boldsymbol{F} = f\nabla g$ پر مسئلہ پھیلاؤ کا اطلاق کریں۔)

سوال ۱۵.۳۰: **گرین کا کلیہ دوم** (سوال ۱۵.۲۹ کو آگے بڑھاتے ہیں۔) مساوات ۱۵.۱ میں $f$ اور $g$ کی جگہیں آپس میں تبدیل کر کے اسی قسم کا دوسرا کلیہ اخذ کریں۔ اس کلیہ کو مساوات ۱۵.۱ سے منفی کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$\iint_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,\mathrm{d}H \tag{۱۵.۲}$$

مساوات ۱۵.۲ **گرین کا کلیہ دوم**[۴۶] ہے۔

سوال ۱۵.۳۱: **کمیت کی بقا** فضا میں خطہ $D$ پر $\boldsymbol{v}(t,x,y,z)$ استمراری قابل تفرق سمتی میدان ہے، جبکہ $p(t,x,y,z)$ استمراری قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہے۔ متغیر $t$ وقت کو ظاہر کرتا ہے۔ **کمیت کی بقا کا قانون**[۴۷] درج ذیل کہتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_D p(t,x,y,z)\,\mathrm{d}H = -\iint_S p\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

جہاں $S$ وہ سطح ہے جو $D$ کو گھیرتی ہے۔

ا. سمتی بہاؤ میدان $\boldsymbol{v}$ اور لمحہ $t$ پر نقطہ $(x,y,z)$ پر سیال کی کثافت $p$ لے کر کمیت کی بقا کے قانون کا طبیعی مفہوم پیش کریں۔

ب. مسئلہ پھیلاؤ اور لیبنٹز کا قاعدہ:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_D p(t,x,y,z)\,\mathrm{d}H = \iiint_D \frac{\partial p}{\partial t}\,\mathrm{d}H$$

استعمال کر کے دکھائیں کہ کمیت کی بقا کا قانون استمراری مساوات:

$$\nabla\cdot p\boldsymbol{v} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

---

[۴۵] Greens's first formula
[۴۶] Green's second formula
[۴۷] Law of Conservation of Mass

کا معادل ہے۔(اول رکن $\nabla \cdot p\boldsymbol{v}$ میں متغیر $t$ اٹل رکھا جاتا ہے، جبکہ دوسرے رکن $\partial p/\partial t$ میں، ہم فرض کرتے ہیں کہ نقطہ $(x, y, z)$ خطہ $D$ میں اٹل رکھا گیا ہے۔)

سوال ۱۵.۳۲: **نفوذ حرکی مساوات** فرض کریں فضا میں خطہ $D$ میں مکین ٹھوس جسم کے نقطہ $(x, y, z)$ کا درجہ حرارت لمحہ $t$ پر تفاعل $T(t, x, y, z)$ دیتا ہو جس کے دوہرے تفرق استمراری ہیں۔ جسم کی حری استعداد $c$ اور کمیتی کثافت $\rho$ ہے۔ مقدار $c\rho T$ جسم کی فی اکائی حجم حری توانائی کہلاتی ہے۔

ا. بتلائیں $-\nabla T$ کیوں حرارت کے بہاؤ کا رخ دیگا۔

ب. **بہاؤ حرکا سمتیہ**[۴۸] $-k\nabla T$ لیں۔(یہاں مستقل $k$ **موصلیت**[۴۹] کہلاتا ہے۔) کمیتی بقا کے قانون (سوال ۱۵.۳۱) میں $-k\nabla T = \boldsymbol{v}$ اور $c\rho T = p$ لے کر مساوات نفوذ (برائے حرارت):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\nabla^2 T$$

اخذ کریں، جہاں $K = k/(c\rho) > 0$ **نفوذیت**[۵۰] کا مستقل کہلاتا ہے۔(دھیان رہے اگر یکساں موصل سلاخ جس کے سرے مکمل غیر موصل رکھے گئے ہوں کے نقطہ $x$ اور لمحہ $t$ پر درجہ حرارت کو $T(t, x)$ ظاہر کرتا ہو، تب $\nabla^2 T = \partial^2 T/\partial x^2$ ہوگا اور مساوات نفوذ، باب ۱۳ کے اضافی سوالات میں دی گئی یک بعدی مساوات حرد یگی۔)

## نظر ثانی کی خاطر چند سوالات

سوال ۱۵.۳۳: لکیری تکملات کیا ہوتے ہیں؟ ان کی قیمتیں کیسے تلاش کی جاتی ہیں؟ مثال دیں۔

سوال ۱۵.۳۴: اسپرنگ کا کمیتی مرکز لکیری تکملات سے کیسے حاصل کیا جا سکتا ہے؟ وضاحت کریں۔

سوال ۱۵.۳۵: سمتی میدان، اور ڈھلوان میدان سے کیا مراد ہے؟ مثال پیش کریں۔

سوال ۱۵.۳۶: منحنی کے ہمراہ ذرے کو حرکت دینے والے قوت کے کام کی قیمت کیسے تلاش کی جائیگی؟ ایک مثال دیں۔

سوال ۱۵.۳۷: بہاؤ، دائری بہاؤ، اور گردش سے کیا مراد ہے؟

سوال ۱۵.۳۸: راہ پر غیر منحصر میدان کی کیا خاصیت ہے؟

سوال ۱۵.۳۹: آپ کیسے جان پاتے ہیں کہ میدان بقائی ہے؟

سوال ۱۵.۴۰: مخفی تفاعل سے کیا مراد ہے؟ مثال سے دکھائیں کہ بقائی میدان کا مخفی تفاعل کیسے تلاش کیا جاتا ہے۔

---

[۴۸] energy flux vector
[۴۹] conductivity
[۵۰] diffusivity

سوال ۱۵.۴۱: تفرقی روپ سے کیا مراد ہے؟ ایسا روپ قطعی ہونے سے کیا مراد ہے؟ قطعی ہونے کی پرکھ کیا ہے؟ مثال پیش کریں۔

سوال ۱۵.۴۲: سمتی میدان کا پھیلاؤ کیا ہوگا؟ اس کا مفہوم بیان کریں۔

سوال ۱۵.۴۳: سمتی میدان کی گردش کیا ہوگی؟ اس کا مفہوم بیان کریں۔

سوال ۱۵.۴۴: مسئلہ گرین کیا ہے؟ اس کا مفہوم بیان کریں

سوال ۱۵.۴۵: فضا میں قوسی سطح کے رقبے کی قیمت کیسے تلاش کی جاتی ہے؟ مثال پیش کریں۔

سوال ۱۵.۴۶: سمت بند سطح سے کیا مراد ہے؟ سمت بند سطح کو عبور کرتے ہوئے، تین بعدی سمتی میدان کے بہاؤ کی قیمت کیسے تلاش کی جاتی ہے؟ مثال دیں۔

سوال ۱۵.۴۷: سطحی تکملات کیا ہوتے ہیں؟ ان کی مدد سے کیا تلاش کیا جا سکتا ہے؟ مثال دیں۔

سوال ۱۵.۴۸: مقدار معلوم سطوح کیا ہوتی ہیں؟ ان سطوح کا رقبہ کیسے تلاش کیا جاتا ہے؟ مثال دیں۔

سوال ۱۵.۴۹: مقدار معلوم سطح پر تفاعل کا تکمل کیسے حاصل کیا جاتا ہے؟ مثال دیں۔

سوال ۱۵.۵۰: مسئلہ سٹوکس کیا ہے؟ اس کا مفہوم بیان کریں۔

سوال ۱۵.۵۱: باب میں پیش، بقائی میدان کے نتائج کا خلاصہ پیش کریں۔

سوال ۱۵.۵۲: مسئلہ پھیلاؤ کیا ہے؟ اس کا مفہوم بیان کریں۔

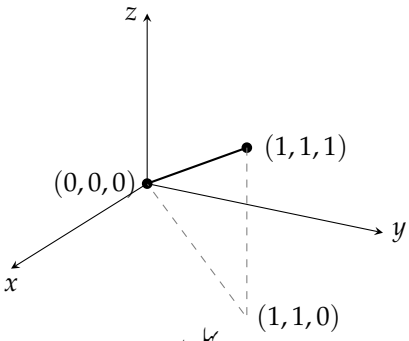
سوال ۱۵.۵۳: مسئلہ گرین کو مسئلہ سٹوکس عمومیت کیسے دیتا ہے؟

سوال ۱۵.۵۴: مسئلہ گرین، مسئلہ سٹوکس، اور مسئلہ پھیلاؤ کو کیسے ایک ہی بنیادی مسئلے کے مختلف روپ تصور کیا جا سکتا ہے؟

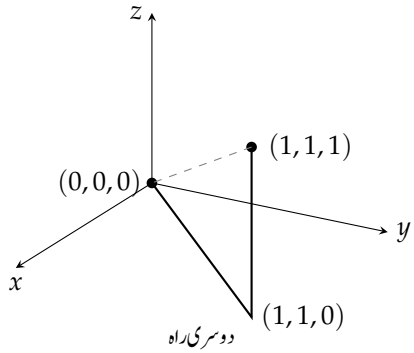
## ۱۵.۱۲ مشق

## لکیری تکمل کی قیمت

سوال ۱۵.۱: مبدا کو نقطہ $(1,1,1)$ سے فضا میں جوڑنے کے دو راستے شکل میں دکھائے گئے ہیں۔ باری باری ان راہ پر $f(x,y,z)=2x$ کا تکمل لیں۔

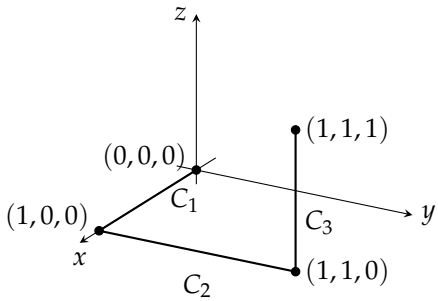


پہلی راہ

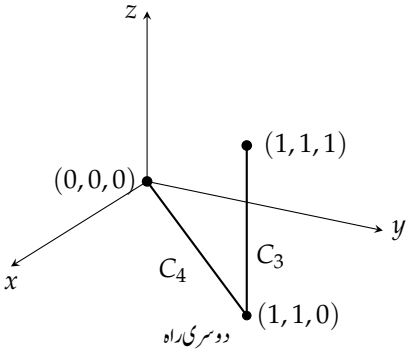


دوسری راہ

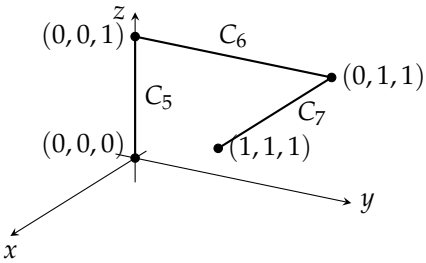
سوال ۱۵.۲: مبدا کو نقطہ $(1,1,1)$ سے فضا میں جوڑنے کے تین راستے شکل میں دکھائے گئے ہیں۔ باری باری ان راہ پر $f(x,y,z)=x^2+y-z$ کا تکمل لیں۔



پہلی راہ



دوسری راہ



تیسری راہ

سوال ۱۵.۳: دائرہ $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{j} + (a\sin t)\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$ پر تفاعل $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+z^2}$ کا تکمل پر لیں۔

سوال ۱۵.۴: **درپیچیدہ**[۵۱] منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le \sqrt{3}$ پر تفاعل $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ تکمل کریں۔

مشق ۱۵.۵ اور ۱۵.۶ میں تکملات کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۵:

$$\int\limits_{(-1,1,1)}^{(4,-3,0)} \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z}{\sqrt{x+y+z}}$$

سوال ۱۵.۶:

$$\int\limits_{(1,1,1)}^{(10,3,3)} \mathrm{d}x - \sqrt{\frac{z}{y}}\,\mathrm{d}y - \sqrt{\frac{y}{z}}\,\mathrm{d}z$$

سوال ۱۵.۷: کرہ $x^2+y^2+z^2 = 5$ سے مستوی $z = -1$ ایک دائرہ کاٹتا ہے۔ اوپر سے دیکھتے ہوئے اس دائرے پر گھڑی وار چلتے ہوئے $\boldsymbol{F} = -(y\sin z)\boldsymbol{i} + (x\sin z)\boldsymbol{j} + (xy\cos z)\boldsymbol{k}$ کا تکمل لیں۔

سوال ۱۵.۸: تفاعل $\boldsymbol{F} = 3x^2y\boldsymbol{i} + (x^3+1)\boldsymbol{j} + 9z^2\boldsymbol{k}$ کا تکمل اس دائرے پر لیں جس کو کرہ $x^2+y^2+z^2 = 9$ سے مستوی $x = 2$ کاٹتا ہے۔

مشق ۱۵.۹ اور ۱۵.۱۰ میں تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۹:

$$\int\limits_{C} 8x\sin y\,\mathrm{d}x - 8y\cos x\,\mathrm{d}y$$

مربع C کو ربع اول سے لکیر $x = \pi/2$ اور $y = \pi/2$ کاٹتی ہیں۔

سوال ۱۵.۱۰:

$$\int\limits_{C} y^2\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$$

C دائرہ $x^2+y^2 = 4$ ہے۔

---

[۵۱] involute

## سطحی تکملات کی قیمت کی تلاش

سوال ۱۵.۱۱: **بیضوی خطے کا رقبہ** اس بیضوی خطے کا رقبہ تلاش کریں جسے بیلن $x^2 + y^2 = 1$ مستوی $x + y + z = 1$ سے کاٹتا ہے۔

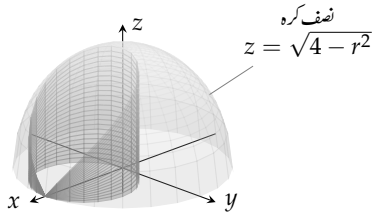
سوال ۱۵.۱۲: **قطع مکافی ٹوپی کا رقبہ** قطع مکافی مجسم $y^2 + z^2 = 3x$ سے مستوی $x = 1$ ایک ٹوپی کاٹتا ہے۔ اس ٹوپی کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۳: **کروی ٹوپی کا رقبہ** کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ کے اوپری حصے سے مستوی $z = \sqrt{2}/2$ ایک ٹوپی کاٹتا ہے۔ اس ٹوپی کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۴:

ا. **نصف کرہ کو بیلن کاٹتا ہے** نصف کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0$ سے بیلن $x^2 + y^2 = 2x$ سطح کاٹتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

ب. نصف کرہ کے اندر موجود بیلن کے ٹکڑے کا رقبہ تلاش کریں۔ (اشارہ: مستوی $xy$ پر قائمہ تظلیل لیں۔ یا تکمل $\int h\,\mathrm{ds}$ تلاش کریں جہاں کرہ کے اندر $h$ بیلن کا قد دیتا ہے اور مستوی $xy$ میں $x^2 + y^2 = 2x$ کا چھوٹا قطع $\mathrm{ds}$ ہے۔)




سوال ۱۵.۱۵: **مثلث کا رقبہ** ثمن اول کو مستوی $x/a + y/b + z/c = 1,\ (a, b, c > 1)$ ایک مثلث میں قطع کرتی ہیں۔ اس مثلث کا رقبہ تلاش کریں۔ نتیجے کی تصدیق سمتیہ حساب کر کے کریں۔

سوال ۱۵.۱۶: **قطع مکافی بیلن کو مستویات کاٹتی ہیں** مستویات $x = 0$ ، $x = 3$ ، اور $z = 0$ قطع مکافی بیلن $y^2 - z = 1$ سے ایک سطح کاٹتی ہیں۔ اس سطح پر درج ذیل کا تکمل لیں۔

ا. $g(x, y, z) = \frac{yz}{\sqrt{4y^2+1}}$

ب. $g(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{4y^2+1}}$

سوال ۱۵.۱۷: **بیلن کو مستویات قطع کرتی ہیں** ثمن اول میں بیلن $x^2 + z^2 = 25$ کے اس حصے پر، جو مستویات $x = 0$ اور $x = 1$ کے بیچ مستوی $z = 3$ سے اوپر پایا جاتا ہے، $g(x, y, z) = x^4 y(y^2 + z^2)$ کا تکمل لیں۔

سوال ۱۵.۱۸: حکومت پاکستان معدنیات کی تلاش کی غرض سے خطوط طول بلد $62°13'0''$ اور $69°13'0''$ کے درمیان اور شمالی خطوط عرض بلد $41°$ اور $45°$ کے بیچ علاقے کا معائنہ کرنا چاہتی ہے۔ زمین کا رداس $R = 6371\ \text{km}$ لیتے ہوئے اس علاقے کا رقبہ تلاش کریں۔

## مقدار معلوم شدہ سطوح

مشق ۱۵.۱۹ تا ۱۵.۲۴ میں سطوح کے مقدار معلوم روپ تلاش کریں۔ (چونکہ ایسا کرنے کے کئی طریقے ہیں لہٰذا آپ کے جواب، کتاب میں دیے گئے جواب سے مختلف ہو سکتے ہیں۔)

سوال ۱۵.۱۹: **کروی پٹی** مستویات $z = -3$ اور $z = 3\sqrt{3}$ کے بیچ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۰: **قطع مکافی ٹوپی** مستوی $z = -2$ سے اوپر قطع مکافی جسم $z = -(x^2 + y^2)/2$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۱: **مخروط** مخروط $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2},\ z \leq 3$

سوال ۱۵.۲۲: **مربع کے اوپر مستوی** ربع اول اور مستوی $xy$ میں مربع $0 \leq x \leq 2$ ، $0 \leq y \leq 2$ کے اوپر موجود مستوی $4x + 2y + 4z = 12$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۳: **قطع مکافی مجسم کا ٹکڑا** مستوی $xy$ سے اوپر موجود قطع مکافی مجسم $y = 2(x^2 + z^2),\ y \leq 2$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۴: **نصف کرے کا ٹکڑا** ثمن اول میں موجود کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 10,\ y \geq 0$ کا ٹکڑا۔

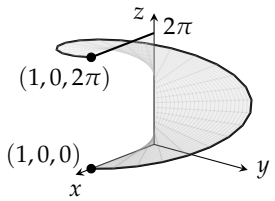
سوال ۱۵.۲۵: **سطحی رقبہ** درج ذیل سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(u, v) = (u + v)\boldsymbol{i} + (u - v)\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$$
$$0 \leq u \leq 1, \qquad 0 \leq v \leq 1$$

سوال ۱۵.۲۶: **سطحی تکمل** مشق ۱۵.۲۵ کی سطح پر $f(x, y, z) = xy - z^2$ کا تکمل لیں۔

سوال ۱۵.۲۷: **چکر دار زینہ کا رقبہ** چکر دار زینہ جس کی مساوات درج ذیل ہے شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا رقبہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(r, \phi) = (r\cos\phi)\boldsymbol{i} + (r\sin\phi)\boldsymbol{j} + \phi\boldsymbol{k},\ 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1$$



سوال ۱۵.۲۸: **سطحی تکمل** تکمل $\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+1}\,\mathrm{d}\sigma$ کو مشق ۱۵.۲۷ میں دی گئی سطح پر حل کریں۔

## بقائی میدان

مشق ۱۵.۲۹ تا ۱۵.۳۲ میں بقائی اور غیر بقائی میدان کی نشاندہی کریں۔

سوال ۱۵.۲۹: $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۳۰: $\boldsymbol{F} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})/(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$

سوال ۱۵.۳۱: $\boldsymbol{F} = xe^y\boldsymbol{i} + ye^z\boldsymbol{j} + ze^x\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۳۲: $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k})/(x+yz)$

مشق ۱۵.۳۳ اور ۱۵.۳۴ میں میدان کے مخفی تفاعل تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۳: $\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{i} + (2y+z)\boldsymbol{j} + (y+1)\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۳۴: $\boldsymbol{F} = (z\cos xz)\boldsymbol{i} + e^y\boldsymbol{j} + (x\cos xz)\boldsymbol{k}$

## کام اور دائری بہاؤ

مشق ۱۵.۱ میں نقطہ $(0,0,0)$ سے $(1,1,1)$ تک راہ کے ہمراہ مشق ۱۵.۳۵ اور ۱۵.۳۶ کے میدان کا کام تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۵: $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۳۶: $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۳۷: **دو طریقوں سے کام کی تلاش** مسطح منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\boldsymbol{i} + (e^t\sin t)\boldsymbol{j}$ پر چلتے ہوئے نقطہ $(1,0)$ سے $(e^{2\pi},0)$ تک درج ذیل قوت $\boldsymbol{F} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})/(x^2+y^2)^{3/2}$ کا کام دو طریقوں سے تلاش کریں۔

ا. منحنی کا مقدار معلوم روپ استعمال کر کے تکمل کام کی قیمت تلاش کریں۔

ب. سمتیہ $\boldsymbol{F}$ کے مخفی تفاعل کی قیمت تلاش کرتے ہوئے۔

سوال ۱۵.۳۸: **مختلف راہ کے ہمراہ سیال کا گزر** میدان $\boldsymbol{F} = \nabla(x^2ze^y)$ کا بہاؤ درج ذیل پر تلاش کریں۔

ا. مثبت محور $y$ سے دیکھتے ہوئے اس ترخیم $C$ پر ایک چکر گھڑی وار چل کر، جس پر مستوی $x+y+z=1$ بیلن $x^2+z^2=25$ کو کاٹتا ہے۔

ب. مشق ۱۵.۲۷ میں چکردار زینہ کی قوسی سرحد کے ہمراہ $(1,0,0)$ سے $(1,0,2\pi)$ تک۔

سوال ۱۵.۳۹: فرض کریں مستوی $xy$ سے گزرنے والے سیال کا سمتی رفتار سمتیہ $\boldsymbol{F}(x,y) = (x+y)\boldsymbol{i} - (x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ ہے۔ درج ذیل راہ کے ہمراہ $(1,0)$ تا $(-1,0)$ بہاؤ تلاش کریں۔

ا. دائرہ $x^2+y^2=1$ کا بالائی حصہ۔

ب. $(1,0)$ تا $-1,0$ قطع۔

ج. $(1,0)$ تا $(0,-1)$ تا $(-1,0)$ لکیر۔

سوال ۱۵.۴۰: پیچ دار لکیر $\boldsymbol{r}_1(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ جہاں $0 \le t \le \pi/2$ ہے اور قطع $\boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{j} + \frac{\pi}{2}(1-t)\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$، اور قطع $\boldsymbol{r}_3(t) = t\boldsymbol{i} + (1-t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 1$ پر مشتمل بند راہ پر $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{j} + 2y\boldsymbol{k}$ کا دائری بہاؤ تلاش کریں۔

مشق ۱۵.۴۱ اور ۱۵.۴۲ میں مسئلہ سٹوکس کا تکمل استعمال کر کے $C$ پر دی گئی سمت چلتے ہوئے میدان $\boldsymbol{F}$ کا دائری بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۱: **ترخیم پر دائری بہاؤ** $\boldsymbol{F} = y^2\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + 3z^2\boldsymbol{k}$

مستوی $2x+6y-3z=6$ بیلن $x^2+y^2=1$ کو ترخیم $C$ پر ملتا ہے۔ اوپر سے دیکھتے ہوئے ترخیم پر خلاف گھڑی چلیں۔

سوال ۱۵.۴۲: **دائرے کے ہمراہ بہاؤ** $\boldsymbol{F} = (x^2+y)\boldsymbol{i} + (x+y)\boldsymbol{j} + (4y^2-z)\boldsymbol{k}$

مستوی $z=-y$ کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ کو دائرہ $C$ پر ملتا ہے۔ اوپر سے دیکھتے ہوئے دائرے پر خلاف گھڑی چلیں۔

## کمیت اور معیار اثر

سوال ۱۵.۴۳: **مختلف کثافت کے تار** منحنی $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{2t}\boldsymbol{i} + \sqrt{2t}\boldsymbol{j} + (4-t^2)\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$ کے ہمراہ باریک تار کی کمیت تلاش کریں اگر $t$ پر تار کی کثافت (ا) $\delta = 3t$ اور (ب) $\delta = 1$ ہو۔

سوال ۱۵.۴۴: **متغیر کثافت کا تار** منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (2/3)t^{3/2}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2$ کے ہمراہ تار کی کثافت $t$ پر $\delta = 3\sqrt{5+t}$ ہے۔ تار کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۵: **متغیر کثافت کا تار** باریک تار جس کی کثافت $t$ پر $\delta = 1/(t+1)$ ہے درج ذیل منحنی کے ہمراہ ہے۔ تار کا مرکز کمیت اور جمودی معیار اثر اور رداس دوار محددی محور کے لحاظ سے تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\boldsymbol{j} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{k}, \qquad 0 \le t \le 2$$

سوال ۱۵.۴۶: **محراب کا مرکز کمیت** مستوی $xy$ میں باریک دھاتی محراب نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2-x^2}$ کے ہمراہ موجود ہے۔ نقطہ $(x,y)$ پر محراب کی کثافت $\delta(x,y) = 2a - y$ ہے۔ محراب کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۷: **مستقل کثافت کا تار** منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\boldsymbol{i} + (e^t\sin t)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le \ln 2$ کے ہمراہ مستقل کثافت $\delta = 1$ کا تار موجود ہے۔ گزارش ہے کہ $\bar{z}$ ، $I_z$ ، اور $R_z$ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۸: **مستقل کثافت پیچ دار تار** پیچ دار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (2\sin t)\boldsymbol{i} + (2\cos t)\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$ کے ہمراہ موجود تار کی مستقل کثافت $\delta$ ہے۔ تار کی کمیت اور اس کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۹: **خول کا جمود، رداس دوار، اور مرکز کمیت** مستوی $z = 3$ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ کے بالا حصہ سے باریک خول کاٹتا ہے جس کی کثافت $\delta(x, y, z) = z$ ہے۔ خول کے $I_z$ ، $R_z$ ، اور مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۵۰: **مکعب کا جمودی معیار اثر** محور $z$ کے لحاظ سے اس مکعب کی سطح کا جمودی معیار اثر معلوم کریں جس کو مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ ، اور $z = 1$ ثمن اول سے کاٹتی ہیں۔ کثافت $\delta = 1$ ہے۔

## مسطح منحنی یا سطح کا بابر بہاؤ

مشق ۱۵.۵۱ اور ۱۵.۵۲ میں دیے گئے میدان $\boldsymbol{F}$ اور منحنیات C کے لئے مسئلہ گرین استعمال کر کے خلاف گھڑی دائری بہاؤ اور باہر رخ بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۵۱: **مربع** $\boldsymbol{F} = (2xy + x)\boldsymbol{i} + (xy - y)\boldsymbol{j}$
منحنیات $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، اور $y = 1$ مربع C دیتی ہیں۔

سوال ۱۵.۵۲: **مثلث** $\boldsymbol{F} = (y - 6x^2)\boldsymbol{i} + (x + y^2)\boldsymbol{j}$
لکیر $y = 0$ ، $y = x$ ، اور $x = 1$ مثلث C دیتی ہیں۔

سوال ۱۵.۵۳: **صفر لکیری تکمل** دکھائیں کہ کسی بھی بند منحنی C کے لئے، جس پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہوتا ہو، درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C \left(\ln x \sin y \, dy - \frac{\cos y}{x} \, dx\right) = 0$$

سوال ۱۵.۵۴:

ا. **باہر رخ بہاؤ اور رقبہ** دکھائیں کہ تعین گر سمتی میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ کا باہر رخ بہاؤ کسی بھی بند منحنی پر، جس پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہوتا ہو، منحنی میں محیط خطے کے رقبے کا دگنا ہو گا۔

ب. فرض کریں $\boldsymbol{n}$ ایسے بند منحنی C کا باہر رخ عمودی اکائی سمتیہ ہے جس پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہوتا ہے۔ دکھائیں یہ ممکن نہیں کہ C کے ہر نقطے پر $\boldsymbol{n}$ تعین گر سمتی میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ کو قائمہ ہو۔

مشق ۱۵.۵۵ تا ۱۵.۵۸ میں سرحد $D$ کو باہر رخ عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۵۵: **مکعب** $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j} + 2xz\boldsymbol{k}$
خطہ $D$ کو ثمن اول سے مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ ، اور $z = 1$ کاٹتی ہیں۔

سوال ۱۵.۵۶: **کروی ٹوپی** $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$
ٹھوس کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ کے اس بالائی ٹوپی کی مکمل سطح جس کو مستوی $z = 3$ کرہ سے کاٹتا ہے $D$ ہے۔

سوال ۱۵.۵۷: **کروی ٹوپی** $\boldsymbol{F} = -2x\boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$
ٹھوس کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ کا وہ بالائی خطہ جس کو قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ کرہ سے کاٹتا ہے $D$ ہے۔

سوال ۱۵.۵۸: **مخروط اور بیلن** $\boldsymbol{F} = (6x + y)\boldsymbol{i} - (x + z)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + 4yz\boldsymbol{k}$
شمن اول میں مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، بیلن $x^2 + y^2 = 1$ ، اور محددی مستویات کے بیچ خطہ $D$ ہے۔

سوال ۱۵.۵۹: **نصف کرہ، بیلن، اور مستوی** $S$ وہ سطح ہے جس کو بائیں سے نصف کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y \leq 0$ ، درمیان میں بیلن $x^2 + z^2 = a^2, 0 \leq y \leq a$ ، اور دائیں سے مستوی $y = a$ محدود کرتے ہیں۔ سطح $S$ سے باہر رخ $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ کا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۶۰: **بیلن اور مستویات** شمن اول میں بیلن $x^2 + 4y^2 = 16$ اور مستویات $y = 2z$ ، $x = 0$ ، اور $z = 0$ کے بیچ خطے کی سرحد سے باہر رخ $\boldsymbol{F} = 3xz^2\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z^3\boldsymbol{k}$ کا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۶۱: **بیلن برتن** بیلن $x^2 + y^2 = 1$ اور مستویات $z = 1$ اور $z = -1$ میں محصور خطہ کی سطح سے باہر رخ $\boldsymbol{F} = xy^2\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ کا بہاؤ، مسئلہ پھیلاؤ استعمال کر کے تلاش کریں۔

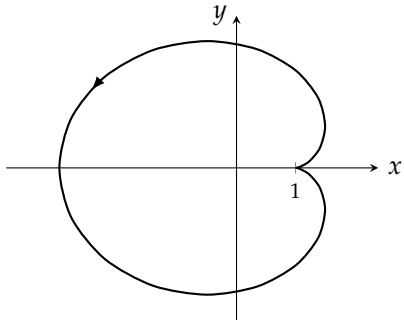
سوال ۱۵.۶۲: **نصف کرہ** نصف کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ سے اوپر رخ $\boldsymbol{F} = (3z + 1)\boldsymbol{k}$ کا بہاؤ (ا) مسئلہ پھیلاؤ استعمال کر کے اور (ب) بہاؤ کا تکمل حل کے تلاش کریں۔

## ۱۵.۱۳ اضافی اور اعلیٰ مشقیں

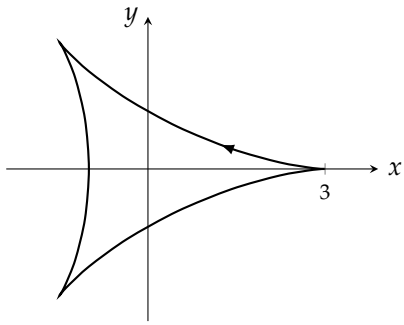
### مسئلہ گرین کے استعمال سے رقبہ کی تلاش

مسئلہ گرین کا کلیہ برائے رقبہ (صفحہ ۱۶۴۷ پر مساوات ۱۵.۲۲) استعمال کر کے سوال ۱۵.۱ تا ۱۵.۴ میں دی منحنیات میں محصور خطوں کے رقبے تلاش کریں۔

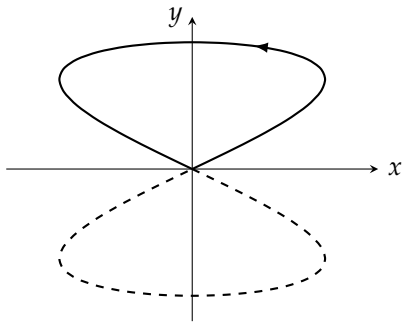
سوال ۱۵.۱: گھونگا $x = 2\cos t - \cos 2t$ ، $y = 2\sin t - \sin 2t$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$



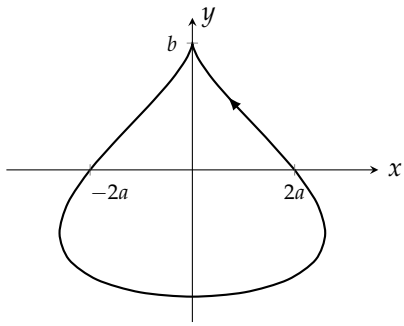

سوال ۱۵.۲: مثلثی $x = 2\cos t + \cos 2t$ ، $y = 2\sin t - \sin 2t$ ، $0 \le t \le 2\pi$




سوال ۱۵.۳: منحنی آٹھ $x = (1/2)\sin 2t$ ، $y = \sin t$ ، $0 \le t \le \pi$ (ایک گھیر)




سوال ۱۵.۴: آنسو کا قطرہ $x = 2a\cos t - a\sin 2t$ ، $y = b\sin t$ ، $0 \le t \le 2\pi$




## نظریہ اور عملی استعمال

سوال ۱۵.۵:

ا. ایسے سمتی میدان $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ کی مثال پیش کریں جو صرف ایک نقطہ پر $\mathbf{0}$ ہو اور جس کا گردش $\boldsymbol{F}$ ہر نقطے پر غیر صفر ہو۔ اس نقطے کی نشاندہی کریں اور گردش کی قیمت تلاش کریں۔

ب. ایسے سمتی میدان $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ کی مثال پیش کریں جو صرف ایک لکیر پر $\mathbf{0}$ ہو اور جس کا گردش $\boldsymbol{F}$ ہر مقام پر غیر صفر ہو۔ اس لکیر کی نشاندہی کریں اور گردش کی قیمت تلاش کریں۔

ج. ایسے سمتی میدان $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ کی مثال پیش کریں جو ایک سطح پر $\mathbf{0}$ ہو اور جس کا گردش $\boldsymbol{F}$ ہر مقام پر غیر صفر ہو۔ اس سطح کی نشاندہی کریں اور گردش کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۶: کرہ $x^2+y^2+z^2=R^2$ کی سطح پر ایسے تمام نقطے $(a,b,c)$ تلاش کریں جہاں $\boldsymbol{F}(a,b,c)\neq\mathbf{0}$ اور سطح کو سمتی میدان $\boldsymbol{F}=yz^2\boldsymbol{i}+xz^2\boldsymbol{j}+2xyz\boldsymbol{k}$ عمودی ہو۔

سوال ۱۵.۷: رداس $R$ کے کروی خول کے نقطہ $(x,y,z)$ پر کمیتی کثافت $\delta(x,y,z)$ سطح پر اٹل نقطہ $(a,b,c)$ سے اس نقطے تک فاصلے کے برابر ہے۔ خول کی کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۸: پیچ دار سطح $\boldsymbol{r}(r,\theta)=(r\cos\theta)\boldsymbol{i}+(r\sin\theta)\boldsymbol{j}+\theta\boldsymbol{k}$ جہاں $0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi$ ہے کی کثافت $\delta(x,y,z)=2\sqrt{x^2+y^2}$ ہے۔ اس کی کمیت تلاش کریں۔ (مشق ۱۵.۲۷ میں پیش شکل پر نظر ڈالیں۔)

سوال ۱۵.۹: ایسے تمام مستطیل خطے $0\leq x\leq a$ ، $0\leq y\leq b$ تلاش کریں جس کے چار اطراف سے $\boldsymbol{F}=(x^2+4xy)\boldsymbol{i}-6y\boldsymbol{j}$ کا کل باہر رخ بہاؤ کم سے کم ہو۔ اس بہاؤ کی قیمت کیا ہو گی؟

سوال ۱۵.۱۰: مبدا سے گزرتا مستوی کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ کو دائرے پر قطع کرتا ہے جس پر میدان $\boldsymbol{F}=z\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$ کا دائری بہاؤ زیادہ سے زیادہ ہونے کی صورت میں مستوی کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۱: ربع اول میں $(2,0)$ تا $(0,2)$ دائرہ $x^2+y^2=4$ پر دھاگا پڑا ہوا ہے جس کی کثافت $\delta(x,y)=xy$ ہے۔

ا. دھاگے کو محدود تعداد کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کر کے دکھائیں کہ دھاگے کو سیدھا نیچے $x$ محور تک کھینچتے ہوئے ثقلی کشش درج ذیل کام سرانجام دیگی جہاں $g$ تجاذبی مستقل ہے۔

$$\text{کام} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g x_k y_k^2 \Delta s_k = \int_C g x y^2 \,\mathrm{d}s$$

ب. جزو(ا) میں تکمل حل کر کے کل کام تلاش کریں۔

ج. دکھائیں کہ یہ کام اس کام کے برابر ہے جو دھاگے کا مرکز کمیت $(\bar{x}, \bar{y})$ سیدھا نیچے محور $x$ محور تک کھینچنے کے لئے درکار ہو گا۔

سوال ۱۳.۱۵: شمن اول میں باریک چادر کا ٹکڑا مستوی $x + y + z = 1$ کے ہمراہ ہے۔ چادر کی کثافت $\delta(x, y, z) = xy$ ہے۔

ا. چادر کو محدود تعداد کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کر کے دکھائیں کہ چادر کو سیدھا نیچے $xy$ مستوی تک کھینچتے ہوئے ثقلی کشش درج ذیل کام سرانجام دیگی جہاں $g$ تجاذبی مستقل ہے۔

$$\text{کام} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g x_k y_k z_k \Delta\sigma_k = \int_S g x y z \,\mathrm{d}\sigma$$

ب. جزو(ا) میں سطحی تکمل حل کر کے کل کام تلاش کریں۔

ج. دکھائیں کہ یہ کام اس کام کے برابر ہے جو چادر کے کا مرکز کمیت $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ سیدھا نیچے محور $xy$ مستوی تک کھینچنے کے لئے درکار ہو گا۔

سوال ۱۳.۱۵: **اصول آرشمیدسی** اگر کوئی جسم مثلاً ایک گیند سیال میں رکھا جائے، یہ یا ڈوب کر تل تک پہنچتا ہے، تیرتا ہے، یا کچھ فاصلے تک ڈوب کر سیال میں آویزاں رہتا ہے۔ فرض کریں سیال کی وزنی کثافت $w$ مستقل ہے اور سیال کی سطح مستوی $z = 4$ پر پائی جاتی ہے۔ سیال میں آویزاں ایک کروی گیند خطہ $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \le 1$ گھیرے ہوئے ہے۔

ا. دکھائیں کہ گیند پر سیال کے دباؤ کی سے پیدا کل قوت درج ذیل سطحی تکمل دیتا ہے۔

$$\text{قوت} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} w(4 - z_k)\Delta\sigma_k = \iint_S w(4 - z)\,\mathrm{d}\sigma$$

ب. چونکہ گیند ساکن ہے، دکھائیں کہ گیند کو درج ذیل قوت اچھال آویزاں رکھتی ہے جہاں $(x, y, z)$ پر $\boldsymbol{n}$ باہر رخ عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

$$\text{قوت اچھال} = \iint_S w(z - 4)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

یہ اصول آرشمیدسی اجگر کرتا ہے جس کے تحت، ٹھوس جسم پر قوت اچھال، اس سیال کے وزن کے برابر ہو گا جو زیر سیال ہو۔

ج. مسئلہ پھیلاؤ استعمال کر کے جزو (ب) میں قوت اچھال کی قدر تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۴: **قوسی سطح پر قوت سیال** ایک مخروط جس کی شکل سطح $z = \sqrt{x^2+y^2},\ 0 \le z \le 2$ دیتی ہے مستقل وزنی کثافت $w$ کے سیال سے بھرا جاتا ہے۔ محددی $xy$ مستوی کو سطح زمین تصور کریں۔ دکھائیں کہ $z = 1$ تا $z = 2$ مخروطی سطح ہر سیال کی کل قوت درج ذیل سطحی تکمل دیتا ہے۔

$$F = \iint\limits_S w(2-z)\,\mathrm{d}\sigma$$

اس تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۵: **قانون فیراڈے** نظریہ برقناطیسیت کے ایک اصول کے تحت اگر نقطہ $(x,y,z)$ اور لمحہ $t$ پر برقی میدان اور مقناطیسی میدان بالترتیب $\boldsymbol{E}(t,x,y,z)$ اور $\boldsymbol{B}(t,x,y,z)$ ہوں تب $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ ہو گا۔ اس میں $\nabla \times \boldsymbol{E}$ کی قیمت تلاش کرتے ہوئے $t$ اٹل رکھا جاتا ہے اور $\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ کی قیمت تلاش کرتے ہوئے $(x,y,z)$ اٹل رکھا جاتا ہے۔ مسئلہ سٹوکس استعمال کرتے ہوئے فیراڈے کا قانون (درج ذیل) اخذ کریں

$$\oint\limits_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_S \boldsymbol{B}\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

جہاں C دائری برقی تار کو ظاہر کرتا ہے جس میں سطح کے عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کے لحاظ سے خلاف گھڑی برقی رو رواں ہے جو C پر درج ذیل برقی دباؤ پیدا ہوتا ہے۔

$$\oint\limits_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

مساوات کے دائیں ہاتھ سطحی تکمل کو **مقناطیسی بہاؤ**[۵۲] کہتے ہیں جہاں $S$ ہر وہ سطح ہو سکتا ہے جس کی سرحد C ہو۔

سوال ۱۵.۱۶: تجاذبی قوت کے میدان $\boldsymbol{F}$ کی تعریف $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ کے لئے درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GmM}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}$$

حصہ ۱۵.۱۰ میں پیش قانون گاؤس استعمال کر کے دکھائیں کہ ایسا کوئی استمراری قابل تفرق سمتی میدان $\boldsymbol{H}$ نہیں پایا جاتا جو $\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{H}$ کو مطمئن کرتا ہو۔

سوال ۱۵.۱۷: ثابت کریں اگر سمت بند سطح $S$، جس کی تحدیدی سرحد C ہو، پر $f(x,y,z)$ اور $g(x,y,z)$ استمراری قابل تفرق غیر سمتی میدان ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_S (\nabla f \times \nabla g)\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \oint\limits_C f\nabla g\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

---

[۵۲] magnetic flux

سوال ۱۵.۱۸: فرض کریں خطہ $D$ میں، جو سمت بند سطح $S$ میں محصور ہے جس کا باہر رخ عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے، $\nabla \cdot \boldsymbol{F}_1 = \nabla \cdot \boldsymbol{F}_2$ اور $\nabla \times \boldsymbol{F}_1 = \nabla \times \boldsymbol{F}_2$ ہیں اور $S$ پر $\boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{F}_2 \cdot \boldsymbol{n}$ ہے۔ ثابت کریں پورے $D$ پر $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2$ ہوگا۔

سوال ۱۵.۱۹: اگر $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$ اور $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ ہوں تب درست یا غلط ثابت کریں کہ $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ ہوگا۔

سوال ۱۵.۲۰: فرض کریں سمت بند سطح کا مقدار معلوم روپ $\boldsymbol{r}(u, v)$ ہے۔ ایسی علاقیت متعارف کریں کہ $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{r}_u \,\mathrm{d}u \times \boldsymbol{r}_v \,\mathrm{d}v$ ہو تاکہ $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ سطح کو عمودی سمتیہ ہو۔ مزید (حصہ ۱۵.۶ میں مساوات ۱۵.۵ کے تحت) مقدار $\mathrm{d}\sigma = |\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}|$ سطح کے چھوٹے ٹکڑے کا رقبہ دیگا۔ درج ذیل تماثل اخذ کریں

$$\mathrm{d}\sigma = (EG - F^2)^{1/2} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v$$

جہاں درج ذیل ہے۔

$$E = |\boldsymbol{r}_u|^2, \quad F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v, \quad G = |\boldsymbol{r}_v|^2$$

سوال ۱۵.۲۱: فضا میں خطہ $D$ سمت بند سطح $S$ جس کا باہر رخ عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے میں محصور ہے۔ دکھائیں کہ خطے کا حجم $H$ درج ذیل تماثل کو مطمئن کرتا ہے

$$H = \frac{1}{3} \iint_S \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} \,\mathrm{d}\sigma$$

جہاں $D$ میں نقطہ $(x, y, z)$ کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہے۔

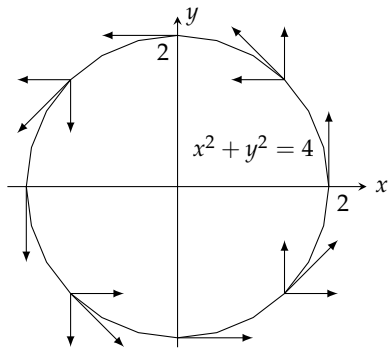
# جوابات

حصہ ۱۵.۱ صفحہ ۱۵۹۹

۱۵.۱) شکل ۱۵.۸
۱۵.۲) شکل ۱۵.۱۰
۱۵.۳) شکل ۱۵.۶
۱۵.۴) شکل ۱۵.۱۳
۱۵.۵) شکل ۱۵.۹
۱۵.۶) شکل ۱۵.۱۱
۱۵.۷) شکل ۱۵.۷
۱۵.۸) شکل ۱۵.۱۲
۱۵.۹) $\sqrt{2}$
۱۵.۱۱) $\frac{13}{2}$
۱۵.۱۳) $3\sqrt{14}$
۱۵.۱۵) $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}+9)$
۱۵.۱۷) $\sqrt{3}\ln\frac{b}{a}$
۱۵.۱۹) $\frac{10\sqrt{5}-2}{3}$
۱۵.۲۱) $8$
۱۵.۲۳) $2\sqrt{2}-1$
۱۵.۲۵) (ا) $4\sqrt{2}-1$ ،(ب) $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$
۱۵.۲۷) $I_z = 2\pi\delta a^3$ ، $R_z = a$
۱۵.۲۹) (ا) $I_z = 2\pi\sqrt{2}\delta$ ، $R_z = 1$ ؛
(ب) $I_z = 4\pi\sqrt{2}\delta$ ، $R_z = 1$
۱۵.۳۱) $I_z = 2\pi - 2$ ، $R_z = 1$

حصہ ۱۵.۲ صفحہ ۱۶۱۲

۱۵.۱) $\nabla f = \frac{-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$
۱۵.۳) $\nabla g = -\frac{2x}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} - \frac{2y}{x^2+y^2}\boldsymbol{j} + e^z\boldsymbol{k}$
۱۵.۵) $\boldsymbol{F} = \frac{-kx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\boldsymbol{i} - \frac{ky}{(x^2+y^2)^{3/2}}\boldsymbol{j}, k > 0$
۱۵.۷) (ا) $\frac{9}{2}$ ،(ب) $\frac{13}{3}$ ،(ج) $\frac{9}{2}$
۱۵.۹) (ا) $\frac{1}{3}$ ،(ب) $-\frac{1}{5}$ ،(ج) $0$
۱۵.۱۱) (ا) $2$ ،(ب) $\frac{3}{2}$ ،(ج) $\frac{1}{2}$
۱۵.۱۳) $\frac{1}{2}$
۱۵.۱۵) $-\pi$
۱۵.۱۷) $\frac{207}{12}$
۱۵.۱۹) $-\frac{39}{2}$
۱۵.۲۱) $\frac{25}{6}$
۱۵.۲۳) (ا)دائری بہاؤ اول $0$ ،دائری بہاؤ دوم $2\pi$ ، بہاؤ اول $2\pi$ ، بہاؤ دوم $0$ ؛(ب)دائری بہاؤ اول $0$ ،دائری بہاؤ دوم $8\pi$ ، بہاؤ اول $8\pi$ ،بہاؤ دوم $0$
۱۵.۲۵) دائری بہاؤ $0$ ،بہاؤ $a^2\pi$
۱۵.۲۷) دائری بہاؤ $a^2\pi$ ،بہاؤ $0$
۱۵.۲۹) (ا) $-\frac{\pi}{2}$ ،(ب) $0$ ،(ج) $1$




۱۵.۳۱)

۱۵.۳۳) (ا) $\boldsymbol{G} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ ،
(ب) $\boldsymbol{G} = \sqrt{x^2+y^2}\boldsymbol{F}$
۱۵.۳۵) $\boldsymbol{F} = \frac{-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$
۱۵.۳۷) $48$
۱۵.۳۹) $\pi$

۱۵.۴۱) $0$

۱۵.۴۳) $\frac{1}{2}$

## حصہ ۱۵.۳ صفحہ ۱۶۲۶

۱۵.۱) بقائی

۱۵.۳) غیر بقائی

۱۵.۵) غیر بقائی

۱۵.۷) $f(x,y,z) = x^2 + \frac{3y^2}{2} + 2z^2 + C$

۱۵.۹) $f(x,y,z) = xe^{y+2z} + C$

۱۵.۱۱) $f(x,y,z) = x\ln x - x + \tan(x+y) + \frac{1}{2}\ln(y^2+z^2) + C$

۱۵.۱۳) $49$

۱۵.۱۵) $-16$

۱۵.۱۷) $1$

۱۵.۱۹) $9\ln 2$

۱۵.۲۱) $0$

۱۵.۲۳) $-3$

۱۵.۲۷) $\boldsymbol{F} = \nabla(\frac{x^2-1}{y})$

۱۵.۲۹) (ا) $1$، (ب) $1$، (ج) $1$

۱۵.۳۱) (ا) $2$، (ب) $2$

۱۵.۳۳) $f(x,y,z) = \frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$

۱۵.۳۵) (ا) $c = b = 2a$، (ب) $c = b = 2$

۱۵.۳۷) چونکہ میدان بقائی ہے لہٰذا کام راہ پر منحصر نہیں ہو گا۔

## حصہ ۱۵.۷ صفحہ ۱۶۷۸

۱۵.۱) $\boldsymbol{r}(r,\phi) = r\cos\phi\boldsymbol{i} + r\sin\phi\boldsymbol{j} + r^2\boldsymbol{k}, \quad 0 \le r \le 2, 0 \le \phi \le 2\pi$

۱۵.۳) $\boldsymbol{r}(r,\phi) = r\cos\phi\boldsymbol{i} + r\sin\phi\boldsymbol{j} + r/2\boldsymbol{k}, \quad 0 \le r \le 6, 0 \le \phi \le \pi/2$

۱۵.۵) $\boldsymbol{r}(r,\phi) = r\cos\phi\boldsymbol{i} + r\sin\phi\boldsymbol{j} + \sqrt{9-r^2}\boldsymbol{k}, 0 \le r \le 3/\sqrt{2}, 0 \le \phi \le 2\pi$

یا

$\boldsymbol{r}(\theta,\phi) = 3\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i} + 3\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j} + 3\cos\theta\boldsymbol{k}, \quad 0 \le \theta \le \pi/4, 0 \le \phi \le 2\pi$

۱۵.۷) $\boldsymbol{r}(\theta,\phi) = \sqrt{3}\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i} + \sqrt{3}\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j} + \sqrt{3}\cos\phi\boldsymbol{k}, \quad \pi/3 \le \theta \le \pi/4, 0 \le \phi \le 2\pi$

۱۵.۹) $\boldsymbol{r}(x,y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + (4-y^2)\boldsymbol{k}, \quad 0 \le x \le 2, -2 \le y \le 2$

۱۵.۱۱) $\boldsymbol{r}(u,v) = u\boldsymbol{i} + 3\cos v\boldsymbol{j} + 3\sin v\boldsymbol{k}, \quad 0 \le u \le 3, 0 \le v \le 2\pi$

۱۵.۱۳) (ا) $\boldsymbol{r}(r,\phi) = r\cos\phi\boldsymbol{i} + r\sin\phi\boldsymbol{j} + (1 - r\cos\phi - r\sin\phi)\boldsymbol{k}, \quad 0 \le r \le 3, 0 \le \phi \le 2\pi$

(ب) $\boldsymbol{r}(u,v) = (1 - u\cos v - u\sin v)\boldsymbol{i} + u\cos v\boldsymbol{j} + u\sin v\boldsymbol{k} \quad 0 \le u \le 3, 0 \le v \le 2\pi$

۱۵.۱۵) $\boldsymbol{r}(u,v) = 4\cos^2 v\boldsymbol{i} + u\boldsymbol{j} + 4\cos v\sin v\boldsymbol{k} \quad 0 \le u \le 3, -\pi/2 \le v \le \pi/2$

دوسرا طریقہ

$\boldsymbol{r}(u,v) = (2 + 2\cos v)\boldsymbol{i} + u\boldsymbol{j} \quad 2\sin v\boldsymbol{k}, 0 \le u \le 3, 0 \le v \le 2\pi$

۱۵.۱۷) $\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi\sqrt{5}}{2}$

۱۵.۱۹) $\int_0^{2\pi}\int_0^3 r\sqrt{5}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = 8\pi\sqrt{5}$

۱۵.۲۱) $\int_0^{2\pi}\int_0^4 1\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 6\pi$

۱۵.۲۳) $\int_0^{2\pi}\int_0^1 u\sqrt{4u^2+1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi$

۱۵.۲۵) $\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi} 2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = (4+2\sqrt{2})\pi$

۱۵.۲۷) $\int_S x\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^3\int_0^2 u\sqrt{4u^2+1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{17\sqrt{17}-1}{4}$

۱۵.۲۹) $\iint_S x^2\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta \cdot \cos^2\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \frac{4\pi}{3}$

۱۵.۳۱) $\iint_S z\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^1\int_0^1 (4-u-v)\sqrt{3}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 3\sqrt{3}$ (جہاں $x = u$ اور $y = v$ ہیں۔)

۱۵.۳۳) $\iint_S x^2\sqrt{5-4z}\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^1\int_0^{2\pi} u^2\cos^2 v \cdot \sqrt{4u^2+1} \cdot u\sqrt{4u^2+1}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_0^1\int_0^{2\pi} u^3(4u^2+1)\cos^2 v\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{11\pi}{12}$

۱۵.۳۵) $-32$

۱۵.۳۷) $\pi a^3/6$

۱۵.۳۹) $13a^4/6$

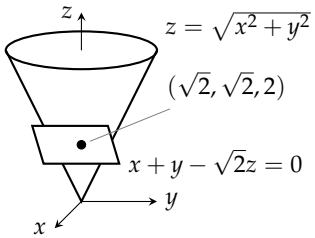
۱۵.۴۱) $2\pi/3$

۱۵.۴۳) $-73\pi/6$

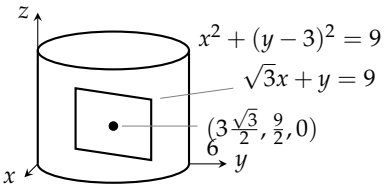
۱۵.۴۵) $(a/2, a/2, a/2)$

۱۵.۴۷) $8\delta\pi a^4/3$

۱۵.۴۹)



۱۵.۵۱)




۱۵.۵۵) $A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[a^2b^2\sin^2\theta\cos^2\theta + b^2c^2\sin^4\theta\cos^2\phi + a^2c^2\sin^2\theta\sin^2\phi]^{1/2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

۱۵.۵۷) $x_0x + y_0y = 25$

## حصہ ۱۵.۹ صفحہ ۱۶۹۷

۱۵.۱) $4\pi$

۱۵.۳) $-5/6$

۱۵.۵) $0$

۱۵.۷) $-6\pi$

۱۵.۹) $2\pi a^2$

۱۵.۱۳) $12\pi$

۱۵.۱۵) $-\pi/4$

۱۵.۱۷) $-15\pi$

۱۵.۲۵) $16I_y + 16I_x$

## حصہ ۱۵.۱۱ صفحہ ۱۷۱۳

۱۵.۱) $0$

۱۵.۳) $0$

۱۵.۵) $-16$

۱۵.۷) $-8\pi$

۱۵.۹) $3\pi$

۱۵.۱۱) $-40/3$

۱۵.۱۳) $12\pi$

۱۵.۱۵) $12\pi(4\sqrt{2}-1)$

۱۵.۲۱) تکمل کی قیمت کسی صورت $S$ کے سطحی رقبے سے زیادہ نہیں ہو گی۔

## مشق برائے باب ۱۵ صفحہ ۱۷۲۰

۱۵.۱) پہلی راہ: $2\sqrt{3}$، دوسری راہ: $1+3\sqrt{2}$

۱۵.۳) $4a^2$

۱۵.۵) $0$

۱۵.۷) $0$

۱۵.۹) $0$

۱۵.۱۱) $\pi\sqrt{3}$

۱۵.۱۳) $2\pi(1-1/\sqrt{2})$

۱۵.۱۵) $\frac{abc}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$

۱۵.۱۷) $50$

۱۵.۱۹) $\boldsymbol{r}(\theta,\phi) = 6\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i} + 6\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j} + 6\cos\theta\boldsymbol{k},\ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{2\pi}{3},\ 0 \le \phi \le 2\pi$

۱۵.۲۱) $\boldsymbol{r}(r,\phi) = r\cos\phi\boldsymbol{i} + r\sin\phi\boldsymbol{j} + (1+r)\boldsymbol{k},\ 0 \le r \le 2, 0 \le \phi \le 2\pi$

۱۵.۲۳) $\boldsymbol{r}(u,v) = u\cos v\boldsymbol{i} + 2u^2\boldsymbol{j} + u\sin v\boldsymbol{k},\ 0 \le u \le 1, 0 \le v \le \pi$

۱۵.۲۵) $\sqrt{6}$

۱۵.۲۷) $\pi[\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})]$

۱۵.۲۹) بقائی

۱۵.۳۱) غیر بقائی

۱۵.۳۳) $f(x,y,z) = y^2 + yz + 2x + z$

۱۵.۳۵) پہلی راہ: $2$، دوسری راہ: $\frac{8}{3}$

۱۵.۳۷) ا) $1-e^{-2\pi}$، ب) $1-e^{-2\pi}$

۱۵.۳۹) ا) $-\pi/2$، ب) $0$، ج) $1$

۱۵.۴۱) $0$

۱۵.۴۳) ا) $4\sqrt{2}-2$، ب) $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$

۱۵.۴۵) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (1, \frac{16}{15}, \frac{2}{3});$ $I_x = \frac{232}{45}, I_y = \frac{64}{15}, I_z = \frac{56}{9};$ $R_x = \sqrt{\frac{116}{45}}, R_y = \sqrt{\frac{32}{15}}, R_z = \sqrt{\frac{28}{9}}$

۱۵.۴۷) $\bar{z} = \frac{3}{2}, I_z = \frac{7\sqrt{3}}{3}, R_z = \sqrt{\frac{7}{3}}$

۱۵.۴۹) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (0,0,\frac{49}{12}), I_z = 640\pi,$ $R_z = 2\sqrt{2}$

۱۵.۵۱) بہاؤ: $3/2$، دائری بہاؤ: $-1/2$

۱۵.۵۵) $3$

۱۵.۵۷) $\frac{2\pi}{3}(7-8\sqrt{2})$

۱۵.۵۹) $0$

۱۵.۶۱) $\pi$

## مشق برائے باب ۱۵ صفحہ ۱۷۲۸

۱۵.۱) $6\pi$

۱۵.۳) $\frac{2}{3}$

۱۵.۵) ا) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ ب) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = z\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{k}$ ج) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = z\boldsymbol{i}$

۱۵.۷) $\frac{16\pi R^3}{3}$

۱۵.۹) $a = 2$، $b = 1$ ہیں اور کم سے کم بہاؤ $-4$ ہے۔

۱۵.۱۱) ب) $\frac{16}{3}g$،

ج) $\bar{y} = g\int_C xy^2\,\mathrm{d}s = (\int_C gxy\,\mathrm{d}s)$ کام

۱۵.۱۳) ج) $\frac{4}{3}\pi w$

۱۵.۱۹) اگر $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ ہو، غلط ہے۔