احصاء اور تحلیلی ہندسہ

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۲۴ اگست ۲۰۲۶

عنوان

دیباچہ viii

میری پہلی کتاب کا دیباچہ x

۱ ابتدائی معلومات ۱
۱.۱ حقیقی اعداد اور حقیقی خط ۱
۱.۲ محدد، خطوط اور بڑھوتری ۱۳
۱.۳ تفاعل ۲۷
۱.۴ ترسیم کی منتقلی ۴۴
۱.۵ تکونیاتی تفاعل ۶۰

۲ حدود اور استمرار ۷۹
۲.۱ تبدیلی کی شرح اور حد ۷۹
۲.۲ حد تلاش کرنے کے قواعد ۹۳
۲.۳ مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف ۱۰۴
۲.۴ تصور حد کی توسیع ۱۲۱
۲.۵ استمرار ۱۳۸
۲.۶ مماسی خط ۱۵۵

۳ تفرق ۱۶۷
۳.۱ تفاعل کا تفرق ۱۶۷
۳.۲ قواعد تفرق ۱۸۵
۳.۳ تبدیلی کی شرح ۲۰۲
۳.۴ تکونیاتی تفاعل کا تفرق ۲۱۷
۳.۵ زنجیری قاعدہ ۲۳۴
۳.۶ خفی تفرق اور ناطق قوت نما ۲۴۸
۳.۷ دیگر شرح تبدیلی ۲۶۲

۴ تفرق کا استعمال ۲۷۵
۴.۱ تفاعل کی انتہائی قیمتیں ۲۷۵
۴.۲ مسئلہ اوسط قیمت ۲۸۷
۴.۳ مقامی انتہائی قیمتوں کی یک رتبی تفرقی پرکھ ۳۰۰
۴.۴ y' اور y'' کے ساتھ ترسیم کرنا ۳۰۸
۴.۵ $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء ۳۲۶
۴.۶ بہترین بنانا ۳۴۸
۴.۷ خط بندی اور تفرقات ۳۶۸
۴.۸ ترکیب نیوٹن ۳۸۸

۵ تکمل ۳۹۹
۵.۱ غیر قطعی تکملات ۳۹۹
۵.۲ تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی ۴۱۰
۵.۳ تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدے کا الٹ اطلاق ۴۲۳
۵.۴ اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ ۴۳۴
۵.۵ ریمان مجموعے اور قطعی تکملات ۴۵۱
۵.۶ خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ ۴۷۴
۵.۷ بنیادی مسئلہ ۴۸۹
۵.۸ قطعی تکمل میں بدل ۵۰۶
۵.۹ اعدادی تکمل ۵۱۲

۶ تکمل کا استعمال ۵۲۹
۶.۱ منحنیات کے بیچ رقبہ ۵۲۹
۶.۲ ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش ۵۴۲
۶.۳ اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا ۵۴۹
۶.۴ نلکی چھلے ۵۶۳
۶.۵ مستوی منحنیات کی لمبائیاں ۵۷۴
۶.۶ سطح طواف کا رقبہ ۵۸۳
۶.۷ معیار اثر اور مرکز کمیت ۵۹۳
۶.۸ کام ۶۰۹
۶.۹ فشار سیال اور قوت سیال ۶۲۲
۶.۱۰ بنیادی نقش اور نمونہ سازی کے اطلاقات ۶۳۰

۷ ماورائی تفاعل ۶۴۳
۷.۱ معکوس تفاعلات اور ان کے تفارق ۶۴۴
۷.۲ قدرتی لوگارتھم ۶۵۹
۷.۳ قوت نمائی تفاعل ۶۷۴
۷.۴ a^x اور $\log_a x$ ۶۸۶
۷.۵ افزائش اور تنزل ۷۰۱

۶۴ ۷.۶ قاعدہ لھوپیٹال ۷۱۴
۶۵ ۷.۷ اضافی شرح نمو ۷۲۷
۶۶ ۷.۸ معکوس تکونیاتی تفاعل ۷۳۷
۶۷ ۷.۹ معکوس تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل ۷۵۱
۶۸ ۷.۱۰ ہذلولی تفاعل ۷۶۵
۶۹ ۷.۱۱ یک رتبی تفرقی مساوات ۷۸۲
۷۰ ۷.۱۲ یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان ۷۹۹

۷۱ ۸ تکمل کے طریقے ۸۰۹
۷۲ ۸.۱ تکمل کے بنیادی کلیات ۸۰۹
۷۳ ۸.۲ تکمل بالحصص ۸۲۱
۷۴ ۸.۳ جزوی کسر ۸۳۴
۷۵ ۸.۴ تکونیاتی بدل ۸۴۷
۷۶ ۸.۵ جدول تکمل اور کمپیوٹر ۸۵۶
۷۷ ۸.۶ غیر مناسب تکمل ۸۷۰

۷۸ ۹ لامتناہی تسلسل ۸۹۳
۷۹ ۹.۱ اعداد کی ترتیب کی حد ۸۹۳
۸۰ ۹.۲ ترتیب کی حدیں تلاش کرنے کے مسئلے ۹۰۹
۸۱ ۹.۳ سوالات ۹۱۷
۸۲ ۹.۴ لامتناہی تسلسل ۹۲۲
۸۳ ۹.۵ غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پرکھ ۹۳۸
۸۴ ۹.۶ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ ۹۴۷
۸۵ ۹.۷ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ ۹۵۶
۸۶ ۹.۸ بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز ۹۶۶
۸۷ ۹.۹ طاقتی تسلسل ۹۷۸
۸۸ ۹.۱۰ ٹیلر اور مکلارن تسلسل ۹۹۲
۸۹ ۹.۱۱ ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ خلل کے اندازے ۱۰۰۱
۹۰ ۹.۱۲ طاقتی تسلسل کے استعمال ۱۰۱۷

۹۱ ۱۰ مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد ۱۰۳۵
۹۲ ۱۰.۱ مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں ۱۰۳۵
۹۳ ۱۰.۲ سنک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی ۱۰۵۵
۹۴ ۱۰.۳ دو درجی مساوات اور گھومنا ۱۰۶۳
۹۵ ۱۰.۴ مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول ۱۰۷۴
۹۶ ۱۰.۵ احصاء اور مقدار معلوم منحنیات ۱۰۸۷
۹۷ ۱۰.۶ قطبی محدد ۱۱۰۰
۹۸ ۱۰.۷ قطبی محدد میں ترسیم ۱۱۰۸

۹۹ ۱۰.۸ مخروط حصوں کے قطبی مساوات ۱۱۱۹
۱۰۰ ۱۰.۹ قطبی محدد میں تکمل ۱۱۳۳

۱۰۱ ۱۱ سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری ۱۱۴۵
۱۰۲ ۱۱.۱ مستوی میں سمتیات ۱۱۴۵
۱۰۳ ۱۱.۲ کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات ۱۱۵۹
۱۰۴ ۱۱.۳ ضرب نقطہ ۱۱۷۳
۱۰۵ ۱۱.۴ صلیبی ضرب ۱۱۸۵
۱۰۶ ۱۱.۵ فضا میں خطوط اور مستویات ۱۱۹۷
۱۰۷ ۱۱.۶ نلکی اور مربع سطحیں ۱۲۱۰
۱۰۸ ۱۱.۷ نلکی اور کروی محدد ۱۲۲۶

۱۰۹ ۱۲ سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت ۱۲۳۷
۱۱۰ ۱۲.۱ سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات ۱۲۳۷
۱۱۱ ۱۲.۲ گولا کی حرکت کی نمونہ کشی ۱۲۵۸
۱۱۲ ۱۲.۳ لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ۱۲۶۶
۱۱۳ ۱۲.۴ انحنا، مروڑ اور TNB چوکھٹ ۱۲۷۴
۱۱۴ ۱۲.۵ فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت ۱۲۹۴

۱۱۵ ۱۳ کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفارق ۱۳۰۷
۱۱۶ ۱۳.۱ کثیر متغیرات کے تفاعل ۱۳۰۷
۱۱۷ ۱۳.۲ حد اور استمرار ۱۳۲۰
۱۱۸ ۱۳.۳ جزوی تفارق ۱۳۳۳
۱۱۹ ۱۳.۴ تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات ۱۳۴۹
۱۲۰ ۱۳.۵ زنجیری قاعدہ ۱۳۶۴
۱۲۱ ۱۳.۶ پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرق ۱۳۷۷
۱۲۲ ۱۳.۷ رخی تفارق، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں ۱۳۸۴
۱۲۳ ۱۳.۸ انتہائی قیمتیں اور نقاط زین ۱۴۰۳
۱۲۴ ۱۳.۹ لیگرینج ضاربین ۱۴۱۸
۱۲۵ ۱۳.۱۰ کلیہ ٹیلر ۱۴۳۴

۱۲۶ ۱۴ تکمل بالکثرت ۱۴۴۱
۱۲۷ ۱۴.۱ دوہرا تکملات ۱۴۴۱
۱۲۸ ۱۴.۲ رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت ۱۴۵۹
۱۲۹ ۱۴.۳ دوہرا تکملات کا قطبی روپ ۱۴۷۳
۱۳۰ ۱۴.۴ کارتیسی محدد میں تہرا تکمل ۱۴۸۳
۱۳۱ ۱۴.۵ تعین بعد میں کمیت اور معیار اثر ۱۴۹۶
۱۳۲ ۱۴.۶ نلکی اور کروی محدد میں تہرا تکمل ۱۵۰۵
۱۳۳ ۱۴.۷ تکملات بالکثرت میں بدل ۱۵۲۳

۱۳۴ ۱۵ سمتی میدان میں تکمل ۱۵۳۷
۱۳۵ ۱۵.۱ لکیری تکمل ۱۵۳۷
۱۳۶ ۱۵.۲ سمتی میدان، کام، دائری بہاؤ، اور بہاؤ ۱۵۴۷
۱۳۷ ۱۵.۳ راہ سے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان ۱۵۶۲
۱۳۸ ۱۵.۴ مستوی میں مسئلہ گرین ۱۵۷۵
۱۳۹ ۱۵.۵ سطحی رقبہ اور سطحی تکملات ۱۵۹۶
۱۴۰ ۱۵.۶ مقدار معلوم سطحیں ۱۶۱۴
۱۴۱ ۱۵.۷ مسئلہ سٹوکس ۱۶۳۱
۱۴۲ ۱۵.۸ مسئلہ پھیلاؤ اور ایک مربوط نظریہ ۱۶۴۸

۱۴۳ ضمیمے ۱۶۸۰

۱۴۴ ا ریاضیاتی ترغیب ۱۶۸۱

۱۴۵ ب تحدیدی مسائل کے ثبوت ۱۶۸۷

۱۴۶ ج مخلوط اعداد ۱۶۹۳

۱۴۷ د سمسن کا ایک تہائی کا قاعدہ ۱۷۰۹

۱۴۸ ھ کوشی کا مسئلہ اوسط قیمت اور قاعدہ لھوپیٹال ے کا پائیدار روپ ۱۷۱۱

۱۴۹ و کثیر استعمال حدود ۱۷۱۵

۱۵۰ ز جزئیتی تقسیم کا قانون برائے سمتی ضرب ۱۷۱۷

۱۵۱ ح مقاطع اور کریمر کا قاعدہ ۱۷۲۱

۱۵۲ ط مسئلہ یولر اور مسئلہ بڑھوتری ۱۷۳۳

۱۵۳ ي تکملات کا مختصر جدول ۱۷۳۹

۱۵۴ جوابات ۱۷۵۱

۱۵۵ اشاریہ ۱۸۳۲

دیباچہ

یہ کتاب اس امید سے لکھی گئی ہے کہ ایک دن اردو زبان میں انجینئری پڑھائی جائے گی۔ اس کتاب کا مکمل ہونا اس سمت میں ایک اہم قدم ہے۔ طبیعیات کے طلبہ کے لئے بھی یہ کتاب مفید ثابت ہو گی۔

اس کتاب کو Ubuntu استعمال کرتے ہوئے Xelatex میں تشکیل دیا گیا ہے۔ اشکال pgfplots اور gnuplots کی مدد سے بنائے گئے ہیں۔

درج ذیل کتاب کو سامنے رکھتے اس کو لکھا گیا ہے

CalculusandAnalyticGeometry
GeorgeB.Thomas,Jr
RossL.Finney

جبکہ اردو اصطلاحات چننے میں درج ذیل لغت سے استفادہ کیا گیا۔

http:/www.urduenglishdictionary.org
http:/www.nlpd.gov.pk/lughat

آپ سے گزارش ہے کہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور کتاب میں غلطیوں کی نشاندہی میرے برقی پتہ پر کریں۔ میری تمام کتابوں کی مکمل Xelatex معلومات

https:/www.github.com/khalidyousafzai

سے حاصل کی جا سکتی ہیں جنہیں آپ مکمل اختیار کے ساتھ استعمال کر سکتے ہیں۔ میں امید کرتا ہوں کہ طلبہ و طالبات اس کتاب سے استفادہ ہوں گے۔

خالد خان یوسفزئی

۳۰ مارچ ۲۰۲۰ء

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کیے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی اصطلاحات کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

یہ کتاب Ubuntu استعمال کرتے ہوئے Xelatex میں تشکیل دی گئی۔ یہ کتاب خطِ جمیل نوری نستعلیق میں لکھی گئی ہے۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری برقیاتی پتہ khalidyousafzai@comsats.edu.pk پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

میں یہاں عائشہ فاروق اور ان کے والد فاروق اعظم کا شکریہ ادا کرنا چاہوں گا جنہوں نے اس کتاب کو بار بار پڑھا اور مجھے مجبور کرتے رہے کہ میں اپنی اردو بہتر کروں۔ میں ڈاکٹر نعمان جعفری کا نہایت مشکور ہوں جنہوں نے کتاب کی تکنیکی اصطلاح کرنے میں مدد کی۔ حرا خان اور ان کی والدہ عزرا برلاس نے مل کے کتاب کو درست کرنے میں مدد کی۔ یہاں میں اپنے شاگرد فیصل خان کا بھی شکریہ ادا کرنا چاہوں گا جنہوں نے تکنیکی اصطلاحات چننے میں میری مدد کی۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی
۲۸ اکتوبر ۲۰۱۱ء

۰۰۰ باب ۱

۰۰۱ ابتدائی معلومات

۰۰۲ اس باب میں ان معلومات کو پیش کیا گیا ہے جنہیں جانتے ہوئے احصاء کو سمجھا جا سکتا ہے۔

۰۰۳ ۱.۱ حقیقی اعداد اور حقیقی خط

۰۰۴ اس حصہ میں حقیقی اعداد، عدم مساوات، وقفہ اور مطلق قیمتوں پر غور کیا جائے گا۔

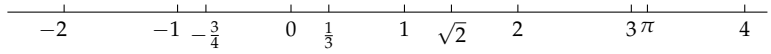
۰۰۵ حقیقی اعداد اور حقیقی خط

۰۰۶ احصاء کا بیشتر حصہ حقیقی عددی نظام کے خواص پر مبنی ہے۔ **حقیقی اعداد**[1] وہ اعداد ہیں جنہیں اعشاری صورت میں لکھنا ممکن ہو، مثلاً:

$$-\frac{3}{4} = -0.75000\cdots$$
$$\frac{1}{3} = 0.33333\cdots$$
$$\sqrt{2} = 1.4142\cdots$$

۰۰۷ جہاں ہندسوں کا ہمیشہ تک چلتے رہنے کو نقطوں $\cdots$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

۰۰۸ حقیقی اعداد کو لکیر پر بطور نقطے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ اس لکیر کو **حقیقی خط**[2] کہتے ہیں۔



۰۰۹

---

[1] realnumbers
[2] realline

$\Re$ کی علامت حقیقی عددی نظام یا، اس کے مترادف، حقیقی خط کو ظاہر کرتی ہے۔

حقیقی اعداد کے خواص

حقیقی اعداد کے خواص تین گروہوں میں تقسیم کیے جا سکتے ہیں: الجبرائی خواص، رتبی خواص، اور کاملیت۔ الجبرائی خواص کہتے ہیں کہ حساب کے عمومی قواعد کے تحت حقیقی اعداد کو جمع، تفریق، ضرب اور (ماسوائے 0 سے) تقسیم کرتے ہوئے مزید حقیقی اعداد پیدا کیے جا سکتے ہیں۔ آپ کبھی بھی 0 سے تقسیم نہیں کر سکتے۔

قواعد برائے عدم مساوات

اگر a ، b ، اور c حقیقی اعداد ہوں، تب درج ذیل ہوں گے۔

۱. $a + c < b + c \impliedby a < b$

۲. $a - c < b - c \impliedby a < b$

۳. $ac < bc \impliedby a < b$ اور $c > 0$

۴. $bc < ac \impliedby a < b$ اور $c < 0$ خصوصی صورت: $-b < -a \impliedby a < b$

۵. $\frac{1}{a} > 0 \impliedby a > 0$

۶. اگر a اور b دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب درج ذیل ہو گا۔ $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} \impliedby a < b$

درج بالا میں $a + c < b + c \impliedby a < b$ کہتا ہے کہ اگر a کی قیمت b کی قیمت سے کم ہو تب اس سے آپ اخذ کر سکتے ہیں کہ $a + c$ کی قیمت $b + c$ کی قیمت سے کم ہو گی۔ دھیان رہے کہ عدم مساوات کو مثبت عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات اپنی صورت برقرار رکھتی ہے جبکہ اس کو منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات کی علامت الٹ ہو جاتی ہے۔

حقیقی عددی نظام کی کاملیت زیادہ گہری خاصیت ہے جس کی درست تعریف مشکل ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ حقیقی اعداد کی تعداد اتنی ہے کہ یہ حقیقی خط کو مکمل کر پاتے ہیں، یعنی، حقیقی خط پر کوئی ''سوراخ'' یا ''درز'' نہیں پایا جاتا۔ احصاء کے کئی مسئلوں کا دارومدار حقیقی عددی نظام کے مکمل ہونے پر ہے۔ کاملیت کا موضوع زیادہ اعلیٰ حساب کا حصہ ہے اور اس پر مزید بحث نہیں کی جائے گی۔

$\Re$ کا ذیلی سلسلہ

ہم حقیقی اعداد کے تین خصوصی ذیلی **سلسلوں**[۳] کی وضاحت کرنا چاہتے ہیں۔

۱. **قدرتی اعداد**[۴]، یعنی $1 ، 2 ، 3 ، 4 ، \cdots$

۲. **عدد صحیح**، یعنی $0 ، \mp 1 ، \mp 2 ، \mp 3 ، \cdots$

---

[۳] sets
[۴] naturalnumbers

۳. **ناطق اعداد**[۵]، یعنی وہ اعداد جنہیں کسر $\frac{m}{n}$ کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جہاں m اور n عدد صحیح ہیں اور n غیر صفر $n \neq 0$ ہے۔ اس کی مثالیں درج ذیل ہیں۔

$$\frac{1}{3}, \quad -\frac{4}{9}, \quad \frac{200}{13}, \quad 57 = \frac{57}{1}$$

ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھتے ہوئے حقیقی اعداد کی دو صورتیں ممکن ہیں۔

(الف) مختتم (جو لامتناہی صفروں پر اختتام ہوتی ہے)، مثلاً

$$\frac{3}{4} = 0.75000\cdots = 0.75$$

(ب) دہراتا (جو ایسے ہندسوں پر اختتام ہوتا ہے جو بار بار دہراتے رہتے ہیں)، مثلاً

$$\frac{23}{11} = 2.090909\cdots = 2.\overline{09}$$

ناطق اعداد کا سلسلہ حقیقی اعداد کے الجبرائی خواص اور رتبی خواص رکھتے ہیں البتہ یہ کاملیت کی خاصیت نہیں رکھتے، مثلاً، ایسا کوئی ناطق عدد نہیں پایا جاتا جس کا مربع 2 ہو۔ یوں ناطق خط میں اس نقطے پر "سوراخ" پایا جاتا ہے جہاں $\sqrt{2}$ کو ہونا چاہیے تھا۔

وہ حقیقی اعداد جو ناطق نہ ہوں **غیر ناطق اعداد**[۶] کہلاتے ہیں۔ غیر ناطق اعداد کو اعشاری روپ میں لکھنے سے نامختتم اور نا ہی دہراتی صورت ملتی ہے۔ ناطق اعداد کی مثالیں π ، $\sqrt{2}$ ، اور $\log_{10} 3$ ہیں۔

وقفہ

حقیقی خط کا ایسا ذیلی سلسلہ جس میں کم سے کم دو اعداد پائے جاتے ہوں اور جس میں ہر دو ارکان کے بیچ تمام حقیقی اعداد بھی شامل ہوں **وقفہ**[۷] کہلاتا ہے۔ مثال کے طور پر تمام حقیقی اعداد x کا سلسلہ جہاں $x > 4$ ہو وقفہ کہلاتا ہے۔ اسی طرح تمام x کا سلسلہ جہاں $-4 \leq x \leq 8$ ہو بھی وقفہ کہلاتا ہے۔ اس کے برعکس تمام غیر صفر حقیقی اعداد کو وقفہ نہیں کہہ سکتے؛ مثال کے طور پر، چونکہ 0 اس کا حصہ نہیں لہٰذا اس سلسلہ میں -1 اور 1 کے بیچ تمام اعداد شامل نہیں۔

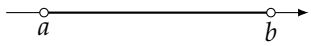
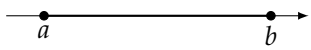
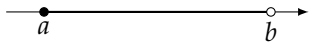
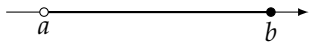
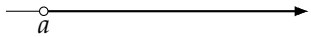
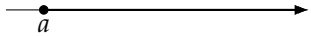
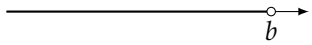
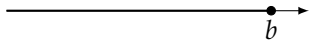
جیومیٹریائی نقطہ نظر سے، حقیقی خط کو یا اس پر قطعہ یا شعاع کو وقفہ ظاہر کرتا ہے۔ خطی قطعہ **متناہی وقفہ**[۸] کہلاتا ہے جبکہ شعاع یا پورا حقیقی خط **لامتناہی وقفہ**[۹] کہلائے گا۔

اگر متناہی وقفے کے دونوں سر بھی وقفے کا حصہ ہوں تب یہ **بند**[۱۰] کہلائے گا، اگر اس کا ایک سر وقفے کا حصہ ہو تب یہ **نصف کھلا**[۱۱] کہلاتا ہے اور اگر دونوں سر وقفے کا حصہ نہ ہوں تب یہ **کھلا**[۱۲] کہلاتا ہے۔ وقفے کے سروں کو **سرحدی نقطے**[۱۳] بھی کہتے ہیں۔ یہ وقفے کی **سرحد**[۱۴] ہیں۔ وقفے کے باقی نقطوں کو **اندرونی**

---

[۵] rationalnumbers
[۶] irrationalnumbers
[۷] interval
[۸] finiteinterval
[۹] infiniteinterval
[۱۰] closed
[۱۱] half-open
[۱۲] open
[۱۳] boundarypoints
[۱۴] boundary

جدول ۱.۱: وقفوں کی قسمیں

	علامت	سلسلہ	ترسیم
متناہی	(a,b)	$\{x \mid a < x < b\}$	
	$[a,b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
	$[a,b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
	$(a,b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
لامتناہی	(a,∞)	$\{x \mid x > a\}$	
	$[a,\infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	
	$(-\infty,b)$	$\{x \mid x < b\}$	
	$(-\infty,b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
	$(-\infty,\infty)$	$\mathbb{R}$	

۲۵۱ **نقطے**[۱۵] کہتے ہیں۔ تمام اندرونی نقطوں کو وقفہ کا **اندرون**[۱۶] کہتے ہیں۔

۲۵۲ وقفوں کی قسموں کو جدول ۱.۱ میں پیش کیا گیا ہے۔

۲۵۳ **عدم مساوات کا حل**

۲۵۴ x پر مبنی عدم مساوات کو حل کرتے ہوئے اعداد کا وقفہ یا وقفے تلاش کرنے کو عدم مساوات کا حل کہتے ہیں۔

۲۵۵ مثال ۱.۱:

۲۵۶ ۱) $2x - 4 < x + 1$ ۲۵۷ ۲) $-\frac{x}{3} < x - 1$ ۲۵۸ ۳) $\frac{2}{x-1} \geq 4$

۲۵۹ **حل**

۲۶۰

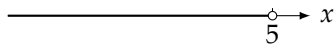
[۱۵] interiorpoints
[۱۶] interior

۱)

$$2x - 4 < x + 1$$

$$2x < x + 5$$ دونوں ہاتھ 4 جمع کریں

$$x < 5$$ دونوں ہاتھ سے x منفی کریں



حل کا سلسلہ (یعنی سلسلہ حل)، وقفہ $(-\infty, 5)$ ہے۔

۲)

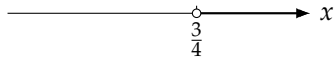
$$-\frac{x}{3} < x - 1$$

$$-x < 3x - 3$$ دونوں ہاتھ کو 3 سے ضرب دیں

$$0 < 4x - 3$$ دونوں ہاتھ کے ساتھ x جمع کریں

$$3 < 4x$$ دونوں ہاتھ کے ساتھ 3 جمع کریں

$$\frac{3}{4} < x$$ دونوں ہاتھ کو 3 سے تقسیم کریں



وقفہ $(\frac{3}{4}, \infty)$، سلسلہ حل ہے۔

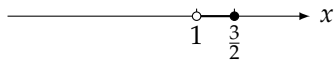
۳) عدم مساوات $\frac{2}{x-1} \geq 4$ صرف $x > 1$ کی صورت میں درست ہو گی چونکہ $x < 1$ کی صورت میں بایاں ہاتھ منفی ہو گا اور $x = 1$ پر بایاں ہاتھ غیر متعین ہے۔ عدم مساوات کے دونوں ہاتھ کو $x - 1$ سے ضرب دیتے ہوئے عدم مساوات برقرار رہتی ہے۔

$$\frac{2}{x-1} \geq 4$$

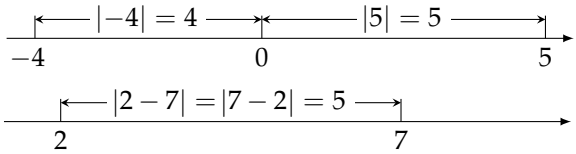
$$2 \geq 4x - 4$$ دونوں ہاتھ کو $x - 1$ سے ضرب دیں

$$6 \geq 4x$$ دونوں ہاتھ کے ساتھ 4 جمع کریں

$$\frac{3}{2} \geq x$$ دونوں ہاتھ کو 4 سے تقسیم کریں



نصف کھلا وقفہ $(1, \frac{3}{2}]$، سلسلہ حل ہے۔



شکل ۱.۱: مطلق قیمت حقیقی خط پر دو نقطوں کے بیچ فاصلہ دیتا ہے۔

□

مطلق قیمت

عدد x کی **مطلق قیمت**[۱۷] جس کو $|x|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال ۱.۲: $|-|a|| = |a|$ $\quad |-13| = -(-13) = 13, \quad |0| = 0, \quad |0.88| = 0.88,$ □

دھیان رہے کہ ہر حقیقی عدد کی مطلق قیمت غیر منفی $|x| \geq$ ہو گی اور صرف $x = 0$ کی صورت میں $|x| = 0$ ہو گا۔ چونکہ a کے غیر منفی جذر کو $\sqrt{a}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے لہٰذا $|x|$ کی متبادل تعریف درج ذیل لی جا سکتی ہے۔

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

آپ $\sqrt{a^2} = |a|$ لکھ سکتے ہیں جبکہ $\sqrt{a^2} = a$ صرف مثبت a کی صورت میں درست ہو گا۔

جیومیٹریائی طور پر حقیقی خط پر مبدا 0 سے x تک فاصلے کو $|x|$ ظاہر کرتی ہے۔ زیادہ عمومی طور پر (شکل ۱.۱)

$$|x - y| = x \text{ اور } y \text{ کے بیچ فاصلہ}$$

ہو گا۔

مطلق قیمت کے خواص درج ذیل ہیں۔

۱. $|-a| = |a|$ کسی بھی عدد اور نفی عدد کی مطلق قیمتیں ایک سی ہوں گی۔

۲. $|ab| = |a||b|$ حاصل ضرب کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل ضرب ہو گا۔

۳. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ حاصل تقسیم کی مطلق قیمت، مطلق قیمتوں کا حاصل تقسیم ہو گا۔

---

[۱۷] absolutevalue

۴. $|a+b| \leq |a|+|b|$ دو اعداد کے مجموعے کی مطلق قیمت دونوں کی مطلق قیمتوں کے مجموعہ سے کم یا اس کے برابر ہو گی۔ اس حقیقت کو **تکونی عدم مساوات** کہتے ہیں۔

اگر a اور b کی علامتیں مختلف ہوں تب $|a+b|$ کی قیمت $|a|+|b|$ کی قیمت سے کم ہو گی۔ اس کے علاوہ ہر صورت $|a+b| = |a|+|b|$ ہو گا۔

مثال ۱.۳:

$$\begin{aligned} |-2+6| &= |4| = 4 < |-2|+|6| = 8 \\ |2+6| &= |8| = |2|+|6| \\ |-2-6| &= |-8| = 8 = |-2|+|-6| \end{aligned}$$

□

مطلق کی علامت قوسین کی طرح کردار ادا کرتی ہے۔ مطلق کی علامت کے اندر جمع، منفی وغیرہ مکمل کرنے کے بعد مطلق قیمت حاصل کی جاتی ہے۔

مثال ۱.۴: مساوات $|2x-1| = 11$ کو حل کریں۔

حل

اس مساوات کے تحت $2x-1 = \mp 11$ ہو سکتا ہے لہٰذا اس کے دو ممکن جوابات ہیں جو مطلق کی علامت کے بغیر دو مساوات سے حاصل کیے جاتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 2x-1 &= 11 & 2x-1 &= -11 \\ 2x &= 12 & 2x &= -10 \\ x &= 6 & x &= -5 \end{aligned}$$

یوں $|2x-1| = 11$ کے درکار حل $x = 6$ اور $x = -5$ ہے۔ □

مطلق قیمت والی عدم مساوات

عدم مساوات $|a| < D$ کہتی ہے کہ مبدا 0 سے a تک فاصلہ D سے کم ہے۔ یوں D اور $-D$ کے بیچ a پایا جائے گا۔

مطلق قیمتیں اور وقفے اگر D کوئی مثبت عدد ہو، تب درج ذیل ہو گا۔

$$|a| < D \iff -D < a < D \tag{۱}$$

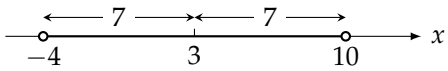
$$|a| \leq D \iff -D \leq a \leq D \tag{۲}$$

مثال ۱.۵: عدم مساوات $|x-3| < 7$ کو حل کریں اور سلسلہ حل کو حقیقی خط پر ترسیم کریں۔

حل

$$
\begin{aligned}
|x-3| &< 7 \\
-7 < x-3 &< 7 && \text{مساوات ۱} \\
-7+3 < x &< 7+3 && \text{دونوں حصوں کے ساتھ 3 جمع کریں} \\
-4 < x &< 10
\end{aligned}
$$

سلسلہ حل، کھلا وقفہ $(-4, 10)$ ہے۔



□

مثال ۱.۶: عدم مساوات $\left|3 - \frac{2}{x}\right| < 1$ حل کریں۔

حل

$$
\begin{aligned}
\left|3 - \frac{2}{x}\right| < 1 \iff -1 < 3 - \frac{2}{x} &< 1 && \text{مساوات ۱} \\
-4 < -\frac{2}{x} &< -2 && \text{3 منفی کریں} \\
2 > \frac{1}{x} &> 1 && -\tfrac{1}{2} \text{ سے ضرب دیں} \\
\frac{1}{2} < x &< 1 && \text{مقلوب لیں}
\end{aligned}
$$

اس مثال میں عدم مساوات پر مختلف حسابی اعمال کا اطلاق کیا گیا۔ آپ نے دیکھا کہ منفی عدد سے ضرب دینے سے عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہے۔ اسی طرح اگر دونوں ہاتھ مثبت ہوں تب مقلوب لینے سے عدم مساوات الٹ ہوتی ہے۔ اصل عدم مساوات اس صورت مطمئن ہو گی جب $\frac{1}{2} < x < 1$ ہو۔ سلسلہ حل، کھلا وقفہ $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ہے۔ □

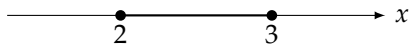
مثال ۱.۷: درج ذیل عدم مساوات حل کریں۔ سلسلہ حل کو ترسیم کریں۔

(الف) $|2x-5| \leq 1$ (ب) $|2x-5| \geq 1$

۳۱۲ **حل** (الف)

$$
\begin{aligned}
|2x-5| &\le 1 \\
-1 \le 2x-5 &\le 1 && \text{مساوات ۲} \\
4 \le 2x &\le 6 && \text{جمع 5} \\
2 \le x &\le 3 && \text{تقسیم 2}
\end{aligned}
$$

۳۱۳ سلسلہ حل، بند وقفہ $[2,3]$ ہے۔



۳۱۴

۳۱۵ (ب)

$$
|2x-5| \ge 1
$$

$2x-5 \ge 1$	$-(2x-5) \ge 1$
$2x \ge 6$	$2x-5 \le -1$
$x \ge 3$	$2x \le 4$
	$x \le 2$

۳۱۶ سلسلہ حل $(-\infty,2] \cup [3,\infty)$ ہے۔

۳۱۷

۳۱۸ □

۳۱۹ درج بالا مثال کے دوسرے سلسلہ حل میں وقفوں کے **اشتراک**[۱۸] کی علامت $\cup$ استعمال کی گئی ہے۔ دو سلسلوں کے اشتراک میں ایک عدد اس صورت پایا جاتا
۳۲۰ ہے جب یہ عدد کسی ایک یا دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔ اسی طرح ہم **تقاطع**[۱۹] کی علامت $\cap$ بھی استعمال کی جاتی ہے۔ دو سلسلوں کے تقاطع میں ایک عدد اس
۳۲۱ صورت پایا جاتا ہے جب یہ عدد دونوں سلسلوں میں پایا جاتا ہو۔ مثال کے طور پر $[1,3) \cap [2,4] = [2,3)$ ہو گا۔

۳۲۲ **سوالات**

۳۲۳ **اعشاری روپ**

۳۲۴ سوال ۱.۱: عدد $\frac{1}{9}$ کو دہراتے ہندسوں کے روپ میں لکھیں جہاں دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچی گئی ہو۔ اسی طرح $\frac{2}{9}$ ، $\frac{3}{9}$ اور $\frac{8}{9}$ کو بھی اعشاری
۳۲۵ روپ میں لکھیں۔

۳۲۶ سوال ۱.۲: $\frac{1}{11}$ کو اعشاری روپ میں لکھیں۔ دہراتے ہندسوں کے اوپر لکیر کھینچیں۔ $\frac{2}{11}$ ، $\frac{3}{11}$ اور $\frac{9}{11}$ کو بھی اعشاری روپ میں لکھیں۔

---

[۱۸] union
[۱۹] intersection

عدم مساوات

سوال ۱.۳: اگر $2 < x < 6$ ہو تب درج ذیل میں کون سے حسابی فقرے x کے لیے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

ا $0 < x < 4$

ب $0 < x - 2 < 4$

ج $1 < \frac{x}{2} < 3$

د $\frac{1}{6} < \frac{1}{x} < \frac{1}{2}$

ہ $1 < \frac{6}{x} < 3$

و $|x - 4| < 2$

ز $-6 < -x < 2$

ح $-6 < -x < -2$

سوال ۱.۴: اگر $-1 < y - 5 < 1$ ہو تب درج ذیل میں سے کون سے حسابی فقرے y کے لیے لازماً درست ہیں اور کون سے ضروری نہیں کہ درست ہوں۔

ا $4 < y < 6$

ب $-6 < y < -4$

ج $y > 4$

د $y < 6$

ہ $0 < y - 4 < 2$

و $2 < \frac{y}{2} < 3$

ز $\frac{1}{6} < \frac{1}{y} < \frac{1}{4}$

ح $|y - 5| < 1$

عدم مساوات حل کرتے ہوئے سلسلہ حل کو ترسیم کریں۔

سوال ۱.۵: $-2x > 4$

سوال ۱.۶: $8 - 3x \geq 5$

سوال ۱.۷: $5x - 3 \leq 7 - 3x$

سوال ۱.۸: $3(2 - x) > 2(3 + x)$

سوال ۱.۹: $2x - \frac{1}{2} \geq 7x + \frac{7}{6}$

سوال ۱.۱۰: $\frac{6-x}{4} < \frac{3x-4}{2}$

سوال ۱.۱۱: $\frac{4}{5}(x - 2) < \frac{1}{3}(x - 6)$

سوال ۱.۱۲: $-\frac{x+5}{2} \leq \frac{12+3x}{4}$

مطلق قیمت

سوال ۱.۱۳ تا سوال ۱.۱۸ میں دیے مساوات حل کریں۔

سوال ۱.۱۳: $|y| = 3$

سوال ۱.۱۴: $|y - 3| = 7$

سوال ۱.۱۵: $|2t + 5| = 4$

سوال ۱.۱۶: $|1-t| = 1$

سوال ۱.۱۷: $|8-3s| = \frac{9}{2}$

سوال ۱.۱۸: $\left|\frac{s}{2}-1\right| = 1$

سوال ۱.۱۹ تا سوال ۱.۳۴ میں دیے عدم مساوات حل کریں۔ سلسلہ حل کو وقفوں یا وقفوں کے اشتراک کی صورت میں لکھیں۔ سلسلہ حل کو ترسیم کریں

سوال ۱.۱۹: $|x| < 2$

سوال ۱.۲۰: $|x| \leq 2$

سوال ۱.۲۱: $|t-1| \leq 3$

سوال ۱.۲۲: $|t+2| < 1$

سوال ۱.۲۳: $|3y-7| < 4$

سوال ۱.۲۴: $|2y+5| < 1$

سوال ۱.۲۵: $\left|\frac{z}{5}-1\right| \leq 1$

سوال ۱.۲۶: $\left|\frac{3}{2}z-1\right| \leq 2$

سوال ۱.۲۷: $\left|3-\frac{1}{x}\right| < \frac{1}{2}$

سوال ۱.۲۸: $\left|\frac{2}{x}-4\right| < 3$

سوال ۱.۲۹: $|2s| \geq 4$

سوال ۱.۳۰: $|s+3| \geq \frac{1}{2}$

سوال ۱.۳۱: $|1-x| > 1$

سوال ۱.۳۲: $|2-3x| > 5$

سوال ۱.۳۳: $\left|\frac{r+1}{2}\right| \geq 1$

سوال ۱.۳۴: $\left|\frac{3}{5}r-1\right| > \frac{2}{5}$

دو درجی عدم مساوات

سوال ۱.۳۵ تا سوال ۱.۴۲ میں دیے دو درجی عدم مساوات حل کرتے ہوئے سلسلہ حل کو ترسیم کریں اور اس کو وقفوں کے اشتراک کی صورت میں لکھیں۔ جہاں ضرورت ہو وہاں $\sqrt{a^2} = |a|$ کا استعمال کریں۔

سوال ۱.۳۵: $x^2 < 2$

سوال ۱.۳۶: $4 \leq x^2$

سوال ۱.۳۷: $4 < x^2 < 9$

سوال ۱.۳۸: $\frac{1}{9} < x^2 < \frac{1}{4}$

سوال ۱.۳۹: $(x-1)^2 < 4$

سوال ۱.۴۰: $(x+3)^2 < 2$

سوال ۱.۴۱: $x^2 - x < 0$

سوال ۱.۴۲: $x^2 - x - 2 \geq 0$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱.۴۳: اس غلط فہمی میں مبتلا نہ ہوں کہ $|-a| = a$ ہو گا۔ کس حقیقی عدد a کے لیے ایسا درست ہے اور کس کے لیے یہ درست نہیں ہے۔

سوال ۱.۴۴: مساوات $|x-1| = 1-x$ کو حل کریں۔

سوال ۱.۴۵: تکونی عدم مساوات کا ثبوت۔ $|a+b| = (a+b)^2$ سے شروع کرتے ہوئے تکونی عدم مساوات کو درج ذیل طریقہ سے ثابت کریں۔

$$\begin{aligned}
|a+b|^2 &= (a+b)^2 \\
&= a^2 + 2ab + b^2 \\
&\leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \\
&\leq |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\
&= (|a| + |b|)^2 \\
|a+b| &\leq |a| + |b|
\end{aligned}$$

سوال ۱.۴۶: ثابت کریں کہ کسی بھی اعداد a اور b کے لیے $|ab| = |a||b|$ ہو گا۔

سوال ۱.۴۷: اگر $|x| \leq 3$ اور $x > -\frac{1}{2}$ ہوں تب x کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

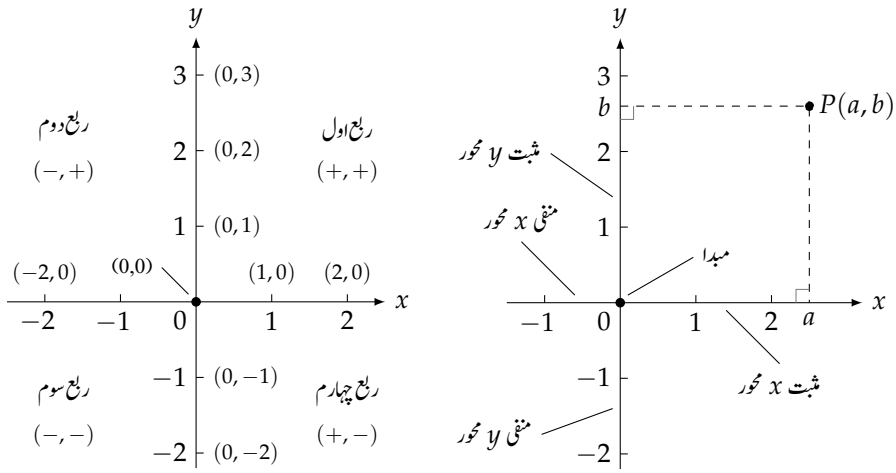
سوال ۱.۴۸: عدم مساوات $|x| + |y| \leq 1$ کو ترسیم کریں۔

سوال ۱.۴۹: (الف) $f(x) = \frac{x}{2}$ اور $g(x) = 1 + \frac{4}{x}$ کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے x کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر $\frac{x}{2} > 1 + \frac{4}{x}$ ہو گا۔

(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تحلیلی طور پر دوبارہ ثابت کریں۔

سوال ۱.۵۰: (الف) تفاعل $f(x) = \frac{3}{x-1}$ اور $g(x) = \frac{2}{x+1}$ کو ایک جگہ ترسیم کرتے ہوئے x کی وہ قیمتیں تلاش کریں جن پر $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{x+1}$ ہو گا۔

(ب) ترسیم سے حاصل نتیجہ کو تحلیلی طور پر ثابت کریں۔



شکل ۱.۲: کارتیسی محدد

۱.۲ محدد، خطوط اور بڑھوتری

اس حصہ میں محدد اور خطوط پر نظر ثانی کی جائے گی اور اضافے کی تصور پر بھی غور کیا جائے گا۔

مستوی میں کارتیسی محدد

مستوی میں دو حقیقی قائمہ خطوط شکل ۱.۲ میں دکھائے گئے ہیں جو ایک دوسرے کو 0 پر قطع کرتے ہیں۔ ان خطوط کو مستوی میں **محددی محور**[20] کہتے ہیں۔ افقی محور x پر اعداد کو x سے ظاہر کیا جاتا ہے جو دائیں رخ بڑھتے ہیں۔ انتصابی محور y پر اعداد کو y سے ظاہر کیا جاتا ہے اور یہ اعداد اوپر رخ (انتصاباً) بڑھتے ہیں۔ وہ نقطہ جس پر x اور y دونوں 0 ہوں محددی نظام کا **مبدا**[21] کہلاتا ہے جس کو عموماً حرف M یا O سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مستوی میں نقطہ P سے دونوں محور پر قائمہ خطوط کھینچے جا سکتے ہیں۔ اگر P سے محور x پر قائمہ خط، محور x کو a پر قطع کرتا ہو تب P کا x **محدد**[22] a ہو گا۔ اسی طرح اگر P سے محور y پر قائمہ خط، محور y کو b پر قطع کرتا ہو تب P کا y **محدد**[23] b ہو گا۔ مرتب جوڑی (a,b) کو نقطے کی **محددی جوڑی**[24] کہتے ہیں۔ محور x پر ہر محددی جوڑی کا y محدد 0 ہو گا جبکہ محور y پر ہر محددی جوڑی کا x محدد 0 ہو گا۔ محددی نظام کا مبدا نقطہ $(0,0)$ ہو گا۔

---

[20] coordinateaxis
[21] origin
[22] x-coordinate
[23] y-coordinate
[24] coordinatepair

محور x کو مبدا دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔ مبدا کے دائیں جانب **مثبت محور** x [۲۵] اور مبدا کے بائیں جانب **منفی محور** x [۲۶] پایا جاتا ہے۔ اسی طرح محور y کو بھی مبدا **مثبت محور** y اور **منفی محور** y میں تقسیم کرتا ہے۔ محدد x اور y مستوی کو چار **ربعات** [۲۷] میں تقسیم کرتے ہیں جو (گھڑی کے الٹ رخ چلتے ہوئے) ربع اول، ربع دوم، ربع سوم اور ربع چہارم کہلاتے ہیں (شکل ۱.۲)۔

پیما

ایسی ترسیم، مثلاً رفتار بالمقابل وقت، جس کے دو متغیرات کی اکائیاں مختلف ہوں میں دونوں محور پر متغیر کی اکائی ایک سی رکھنے کی کوئی ضرورت نہیں۔ یوں رفتار بالمقابل وقت کی ترسیم میں محور وقت پر ایک سنٹی میٹر کا فاصلہ ایک سیکنڈ کو ظاہر کر سکتا ہے جبکہ رفتار کے محور پر ایک سنٹی میٹر کا فاصلہ $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار کو ظاہر کر سکتا ہے۔

اس کے برعکس ایسے متغیرات کی ترسیم جو غیر طبعی پیمائشوں کو ظاہر کرتی ہو یا ایسی ترسیم جن میں اشکال کا معائنہ کرنا مقصد ہو، ہم دونوں محور کا **تناسب پہلو** [۲۸] یکساں رکھتے ہیں لہٰذا دونوں محوروں پر پیمانہ بھی یکساں ہو گا۔

بڑھوتری اور فاصلہ

ایک نقطے سے دوسرے نقطے تک حرکت کرنے سے محدد میں کل تبدیلی کو **بڑھوتری** [۲۹] کہتے ہیں۔ اختتامی محدد سے ابتدائی محدد منفی کرنے سے بڑھوتری حاصل ہو گی۔

مثال ۱.۸: نقطہ $A(4,-3)$ سے نقطہ $B(2,5)$ منتقل ہونے سے بڑھوتری x اور بڑھوتری y درج ذیل ہوں گی (شکل ۱.۳)۔

$$\Delta x = 2 - 4 = 2, \quad \Delta y = 5 - (-3) = 8$$

□

تعریف: اگر متغیر x کی ابتدائی قیمت x_1 اور اختتامی قیمت x_2 ہو تب x کی بڑھوتری درج ذیل ہو گی۔

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

□

مثال ۱.۹: شکل ۱.۳ میں ابتدائی نقطہ $C(5,6)$ اور اختتامی نقطہ $D(5,1)$ ہے۔ بڑھوتری تلاش کریں۔

حل

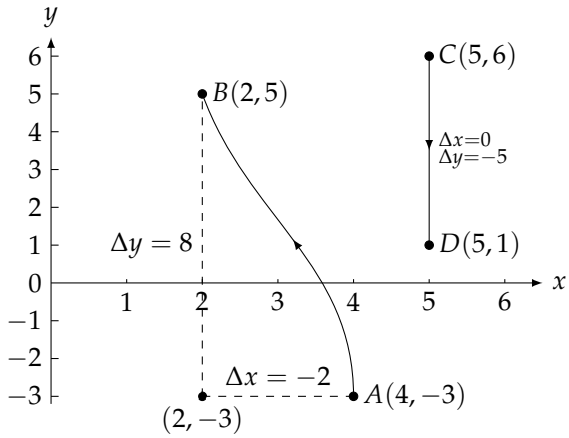
$$\Delta x = 5 - 5 = 0, \quad \Delta y = 1 - 6 = -5$$

□

مستوی میں نقطوں کے بیچ کا فاصلہ، مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔

---

[۲۵] positivex-axis
[۲۶] negativex-axis
[۲۷] quadrants
[۲۸] aspectratio
[۲۹] increments



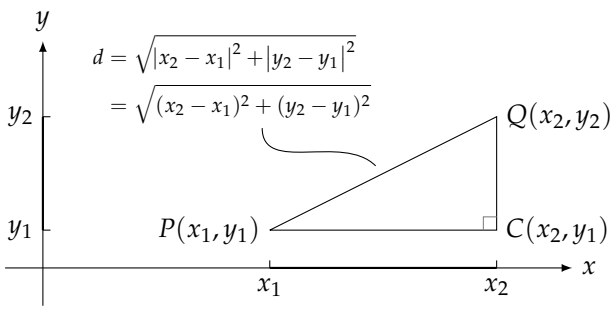
شکل ۱.۳: محددی بڑھوتری مثبت، منفی اور صفر ہو سکتی ہیں

۴۵۴ **مستوی میں نقطوں کے بیچ فاصلے کا کلیہ** نقطہ $P(x_1, y_1)$ اور نقطہ $Q(x_2, y_2)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا (شکل ۱.۴)۔

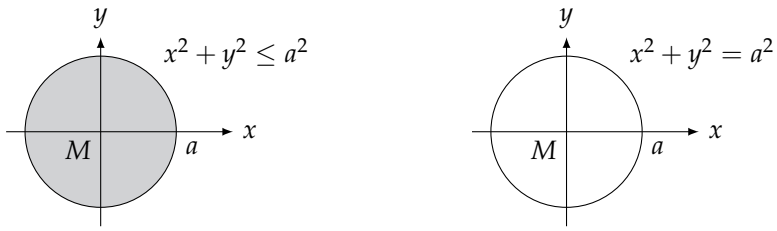
$$d = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

۴۵۵ مثال ۱.۱۰: (الف) $P(-1, 2)$ اور $Q(3, 4)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt{(3-(-1))^2 + (4-2)^2} = \sqrt{(4)^2 + (2)^2}\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$



شکل ۱.۴: دو نقطوں کے بیچ فاصلہ (مسئلہ فیثاغورث)



(ب) عدم مساوات کی ترسیم (ا) مساوات کی ترسیم

شکل ۱.۵: مساوات اور عدم مساوات کی ترسیم (مثال ۱.۱۱)

(ب) مبدا سے $P(x, y)$ تک فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

□

ترسیم

متغیرات x اور y پر مبنی مساوات یا عدم مساوات کی ترسیم سے مراد ان تمام نقطوں $P(x, y)$ کا سلسلہ ہے جو اس مساوات یا عدم مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

مثال ۱.۱۱: دائرے جن کا مرکز مبدا پر ہو

(الف) $a > 0$ کی صورت میں مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ ان تمام نقطوں $P(x, y)$ کو ظاہر کرتی ہے جن کا مبدا سے فاصلہ $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2} = a$ ہو۔ یہ نقطے مبدا کے گرد رداس a کے دائرے پر پائے جاتے ہیں۔ یہ دائرہ مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ کی ترسیم ہے (شکل ۱.۵)۔

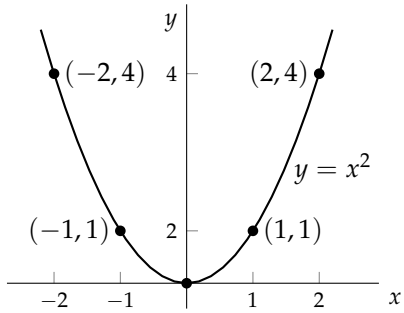
(ب) عدم مساوات $x^2 + y^2 \leq a^2$ کو مطمئن کرتے ہوئے نقطوں (x, y) کا مبدا سے فاصلہ $\leq a$ ہے۔ یوں مبدا کو مرکز ٹھہراتے ہوئے رداس a کا دائرہ اور اس کا اندرون اس عدم مساوات کی ترسیم ہوں گی (شکل ۱.۵)۔ □

اکائی رداس کا دائرہ جس کا مرکز مبدا ہو کو **اکائی دائرہ**[30] کہتے ہیں۔

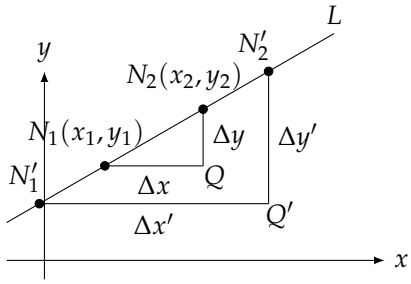
مثال ۱.۱۲: مساوات $y = x^2$ پر غور کریں۔ $(0, 0)$ ، $(1, 1)$ ، $(-1, 1)$ ، $(2, 4)$ اور $(-2, 4)$ ایسے چند نقطے ہیں جن کے محدد اس مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ یہ نقطے (اور ایسے تمام باقی نقطے جو اس مساوات کو مطمئن کرتے ہوں) مل کر ہموار منحنی دیتے ہیں جس کو **قطع مکافی**[31] کہتے ہیں (شکل ۱.۶)۔

□

[30] unitcircle
[31] parabola



شکل ۱.۶: قطع مکافی (مثال ۱.۱۲)



شکل ۱.۷: N_1QN_2 اور $N_1'Q'N_2'$ متشابہ مثلثات ہیں لہٰذا $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y'}{\Delta x'}$ ہو گا

۴۷۲ **سیدھے خطوط**

۴۷۳ مستوی میں دو نقطوں $N_1(x_1, y_1)$ اور $N_2(x_2, y_2)$ سے یکتا سیدھا خط گزرتا ہے جس کو عموماً خط N_1N_2 کہتے ہیں۔

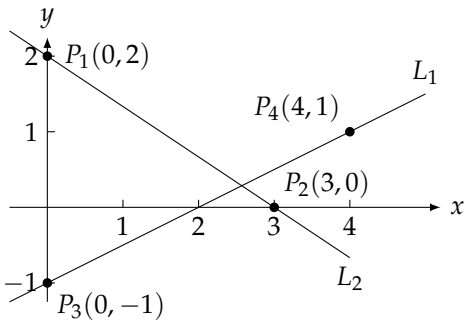
۴۷۴ مستوی میں کسی بھی غیر انتصابی خط پر ہر دو نقطوں $N_1(x_1, y_1)$ اور $N_2(x_2, y_2)$ کے لیے درج ذیل نسبت

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

۴۷۵ کی قیمت ایک سی ہو گی (شکل ۱.۷)۔

۴۷۶ تعریف: درج ذیل شرح

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



شکل ۱.۸: چڑھائی اور اترائی (مثال ۱.۱۳)

۴۷۷ غیر انتصابی خط N_1N_2 کا **ڈھلوان**[۳۲] کہلاتا ہے۔

۴۷۸ □

۴۷۹ ڈھلوان ہمیں خط کی چڑھائی یا اترائی دیتا ہے۔ مثبت ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے چڑھائی نظر آئے گی جبکہ منفی ڈھلوان کے خط پر دائیں رخ چلتے ہوئے
۴۸۰ اترائی نظر آئے گی۔ ڈھلوان کی مطلق قیمت جتنی زیادہ ہو چڑھائی یا اترائی اتنی زیادہ ہو گی۔ انتصابی خط کے ڈھلوان کے لیے $\Delta x = 0$ ہو گا لہٰذا شرح $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
۴۸۱ غیر معین ہو گا (چونکہ 0 سے کسی بھی عدد کو تقسیم کرنا ممکن نہیں)۔ یوں انتصابی خط کا ڈھلوان غیر معین ہے۔ افقی خط کا ڈھلوان 0 ہے۔

۴۸۲ مثال ۱.۱۳: شکل ۱.۸ میں L_1 کا ڈھلوان

$$m_1 = \frac{1-(-1)}{4-0} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۴۸۳ ہے، یعنی، دائیں رخ دو قدم لینے سے ایک قدم چڑھائی چڑھنی پڑتی ہے۔ اسی طرح L_2 کا ڈھلوان

$$m_2 = \frac{0-2}{3-0} = -\frac{2}{3}$$

۴۸۴ ہے، یعنی، دائیں رخ تین قدم چلنے سے دو قدم اترائی اترنی ہو گی۔ □

۴۸۵ خط کی چڑھائی یا اترائی کو **زاویہ میلان**[۳۳] سے بھی ناپا جاتا ہے۔ محور x سے گزرتے خط کا زاویہ میلان مثبت محور x سے گھڑی (کی سوئیوں کے چلنے) کے
۴۸۶ مخالف رخ ناپا جاتا ہے (شکل ۱.۹)۔ افقی خط کا زاویہ میلان 0° اور انتصابی خط کا زاویہ میلان 90° ہو گا۔ اگر زاویہ میلان کو یونانی حرف تہجی ϕ سے ظاہر کیا
۴۸۷ جائے تب $0 \leq \phi \leq 180^\circ$ ہو گا۔

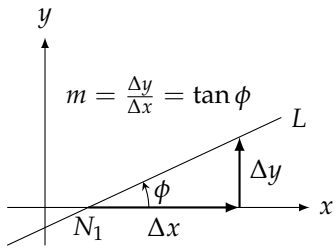
۴۸۸ خط کے ڈھلوان m اور زاویہ میلان ϕ کا تعلق درج ذیل ہے (شکل ۱.۱۰)۔

$$m = \tan\phi$$

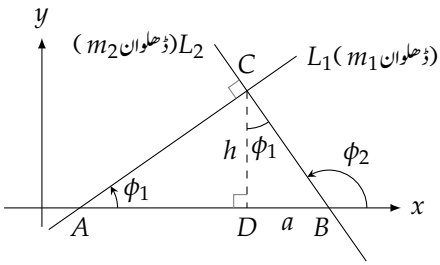
---

[۳۲] slope
[۳۳] angleofinclination

شکل ۱.۹: زاویہ میلان x محور سے گھڑی کی الٹ رخ ناپا جاتا ہے



شکل ۱.۱۰: غیر انتصابی خط کا ڈھلوان اس کے زاویہ میلان کا ٹینجنٹ ہوتا ہے



شکل ۱.۱۱: قائمہ خطوط کے ڈھلوان کا تعلق

متوازی اور قائمہ خطوط

متوازی خطوط کا زاویہ میلان یکساں ہو گا لہٰذا ان کے ڈھلوان بھی یکساں ہوں گے۔ اسی طرح ایک سے ڈھلوان والے خطوط کا زاویہ میلان ایک سا ہو گا لہٰذا یہ متوازی ہوں گے۔

اگر غیر انتصابی خطوط L_1 اور L_2 آپس میں قائمہ ہوں تب ان کے ڈھلوان m_1 اور m_2 مساوات $m_1 m_2 = -1$ کو مطمئن کریں گی۔ یوں ایک خط کے ڈھلوان کا منفی مقلوب دوسرے خط کے ڈھلوان کے برابر ہو گا۔

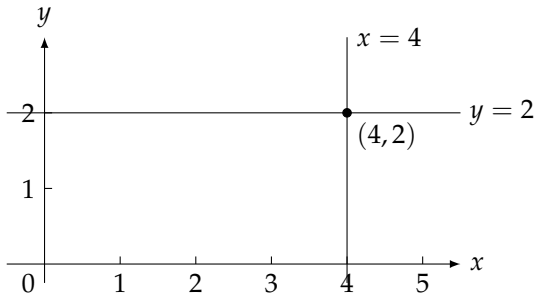
$$m_1 = -\frac{1}{m_2}, \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

شکل ۱.۱۱ میں قائمہ خطوط دکھائے گئے ہیں جہاں $m_1 = \tan\phi_1 = \frac{a}{h}$ اور $m_2 = \tan\phi_2 = -\frac{h}{a}$ ہیں۔ یوں $m_1 m_2 = \left(\frac{a}{h}\right)\left(-\frac{h}{a}\right) = -1$ ہو گا۔

خطوط کی مساوات

سیدھے خطوط کی مساوات نسبتاً سادہ ہوتی ہیں۔ محور x کے نقطہ a سے گزرتے انتصابی خط پر ہر نقطے کی x محدد a ہو گی۔ یوں اس انتصابی خط کی مساوات $x = a$ ہو گی۔ اسی طرح محور y کے نقطہ b سے گزرتے افقی خط کی مساوات $y = b$ ہو گی۔

مثال ۱.۱۴: نقطہ $(4, 2)$ سے گزرتے افقی اور انتصابی خطوط کی مساوات بالترتیب $y = 2$ اور $x = 4$ ہوں گی (شکل ۱.۱۲)۔ □



شکل ۱.۱۲: افقی اور انتصابی خطوط کی مساوات (مثال ۱.۱۴)

اگر ہمیں غیر انتصابی سیدھے خط L کا ڈھلوان معلوم ہو اور اس خط پر کوئی نقطہ $N_1(x_1, y_1)$ معلوم ہو تب ہم اس کی مساوات لکھ سکتے ہیں۔ اگر اس خط پر $N(x, y)$ کوئی دوسرا نقطہ ہو تب

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

ہو گا جس کو

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \Longrightarrow \quad y = y_1 + m(x - x_1)$$

لکھا جا سکتا ہے جو اس خط کی مساوات ہے۔

تعریف: نقطہ (x_1, y_1) سے گزرتے ایسا خط جس کا ڈھلوان m ہو کی مساوات $y = y_1 + m(x - x_1)$ ہو گی، جس کو خط کی **ڈھلوان و نقطوی مساوات**[۳۴] کہتے ہیں۔

□

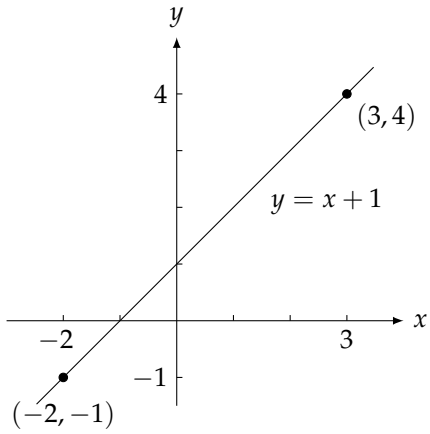
مثال ۱.۱۵: نقطہ $(3, 2)$ سے گزرتا خط جس کا ڈھلوان $-\frac{2}{3}$ ہو کی مساوات تلاش کریں۔

حل

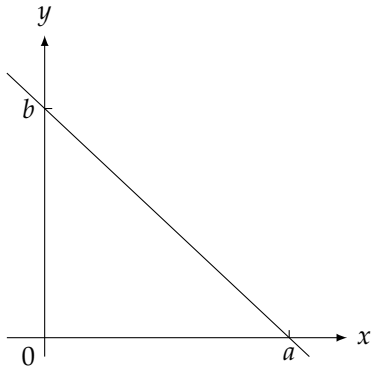
$$y = 2 - \frac{2}{3}(x - 3) \quad \Longrightarrow \quad y = -\frac{2}{3}x + 4$$

□

[۳۴] point-slopeequation



شکل ۱.۱۳: دو نقطوں میں گزرتے خط کی مساوات (مثال ۱.۱۶)



شکل ۱.۱۴: غیر انتصابی اور غیر افقی خط کے محوری قطعات

۵۱۲ **مثال ۱.۱۶:** نقطہ $(-2,-1)$ اور $(3,4)$ سے گزرتے خط کی مساوات تلاش کریں۔

۵۱۳ **حل**

۵۱۴ اس خط کا ڈھلوان

$$m = \frac{-1-4}{-2-3} = \frac{-5}{-5} = 1$$

۵۱۵ ہے۔ ہم دونوں نقطوں میں سے کوئی ایک لیتے ہوئے خط کی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔ طریقہ کار درج ذیل ہے۔

نقطہ $(x_1,y_1)=(3,4)$ لیتے ہیں	نقطہ $(x_1,y_1)=(-2,-1)$ لیتے ہیں
$y = 4 + 1\cdot(x-3)$	$y = -1 + 1\cdot(x - x(-2))$
$y = 4 + x - 3$	$y = -1 + x + 2$
$y = x + 1$	$y = x + 1$

۵۱۶ آپ نے دیکھا کہ دونوں سے ایک سی مساوات حاصل ہوتی ہے (شکل ۱.۱۳)۔ □

۵۱۷ غیر انتصابی خط y محور کو جس نقطہ پر قطع کرتا ہو اس نقطہ کو خط کا y **قطع**[۳۵] کہتے ہیں۔ اسی طرح غیر افقی خط جس نقطہ پر محور x کو قطع کرتا ہو اس نقطہ کو خط کا

۵۱۸ x **قطع**[۳۶] کہتے ہیں (شکل ۱.۱۴)۔

---

[۳۵] y-intercept
[۳۶] x-intercept

۵۱۹ غیر انتصابی خط جو محور y کو $(0, b)$ پر قطع کرتا ہو کی مساوات

$$y = b + m(x - 0) \quad \Longrightarrow \quad y = mx + b$$

۵۲۰ ہو گی۔

۵۲۱ تعریف: درج ذیل مساوات

$$y = b + m(x - 0) \quad \Longrightarrow \quad y = mx + b$$

۵۲۲ کو خط کی **ڈھلوان و قاطع مساوات**[۳۷] کہتے ہیں۔ اس خط کا ڈھلوان m ہے اور خط کا قاطع y نقطہ b پر واقع ہے۔

۵۲۳ □

۵۲۴ مثال ۱.۱۷: خط $y = 3x - 7$ کا ڈھلوان $m = 3$ ہے جبکہ یہ محور y کو -7 پر قطع کرتا ہے۔ □

۵۲۵ درج ذیل مساوات کو **عمومی خطی مساوات**[۳۸] کہتے ہیں۔

$$Ax + By = C \qquad (A \text{ اور } B \text{ دونوں ایک ساتھ صفر نہیں ہیں})$$

۵۲۶ ہر سیدھا خط (بشمول غیر معین ڈھلوان کا خط) عمومی خطی مساوات کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

۵۲۷ مثال ۱.۱۸: خط $8x + 5y = 20$ کا قاطع y تلاش کریں۔

۵۲۸ **حل**

۵۲۹ ہم مساوات کو ڈھلوان و قاطع روپ میں لکھ کر قاطع y مساوات سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 8x + 5y &= 20 \\ 5y &= -8x + 20 \\ y &= -\frac{8}{5}x + 4 \end{aligned}$$

۵۳۰ یوں خط کا ڈھلوان $-\frac{8}{5}$ اور 4 اس کا قاطع y ہے۔ □

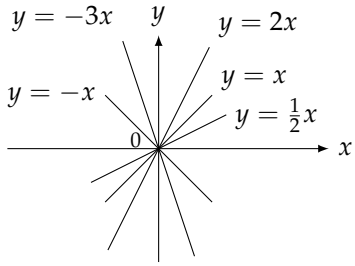
۵۳۱ مثال ۱.۱۹: مبدا سے گزرتے خطوط کی مساواتیں۔

۵۳۲ چونکہ ان خطوط کا y قطع 0 ہو گا لہٰذا ان کی مساوات $y = mx$ ہو گی۔ شکل ۱.۱۵ میں چند مثالیں دکھائی گئی ہیں۔ □

---

[۳۷] slope-interceptequation

[۳۸] generallinearequation



شکل ۱.۱۵: مبدا سے گزرتا خط کی مساوات $y = mx$ ہے جہاں m خط کا ڈھلوان ہے

خطوط اور خط کی اہمیت

شعاع سیدھے خط پر چلتی ہے۔ اسی طرح جب ساکن جسم کو گرنے دیا جائے، کشش ثقل کی وجہ سے یہ جسم سیدھے خط پر حرکت کرتا ہے۔ ہم عموماً خط کی مساوات (جنہیں **خطی مساوات**[۳۹] کہتے ہیں) استعمال کرتے ہوئے اس طرح کے طبعی اعمال پر غور کرتے ہیں۔

بہت سارے اہم مقادیر آپس میں خطی تعلق رکھتے ہیں۔ یہ جانتے ہوئے کہ دو مقادیر آپس میں خطی تعلق رکھتے ہیں، ہم ان کی مطابقتی قیمتوں کی کسی بھی دو جوڑیوں سے یہ تعلق دریافت کر سکتے ہیں۔ ڈھلوان سے ہمیں چڑھائی یا مقادیر کی تبدیلی کی شرح معلوم ہوتی ہے۔ اسی وجہ سے احصاء میں ڈھلوان کلیدی کردار ادا کرتا ہے۔

مثال ۱.۲۰: مزاحمتی برقی دور میں برقی دباو V اور برقی رو I کا تعلق $V = IR$ ہے جو خطی مساوات ہے۔ اس مساوات کا ڈھلوان R ہے جس کو مزاحمت کہتے ہیں۔ □

سوالات

بڑھوتری اور کٹوتی

سوال ۱.۵۱ تا سوال ۱.۵۴ میں ایک ذرہ A سے B منتقل ہوتا ہے۔ اس کی بڑھوتری Δx اور Δy تلاش کریں اور A سے B تک فاصلہ تلاش کریں۔

سوال ۱.۵۱: $A(-3, 2),\ B(-1, -2)$

سوال ۱.۵۲: $A(-1, -2),\ B(-3, 2)$

سوال ۱.۵۳: $A(-3.2, -2),\ B(-8.1, -2)$

سوال ۱.۵۴: $A(\sqrt{2}, 4),\ B(0, 1.5)$

سوال ۱.۵۵ تا سوال ۱.۵۸ میں دی گئی مساوات ترسیم کریں۔ ترسیم پر تبصرہ کریں۔

سوال ۱.۵۵: $x^2 + y^2 = 1$

---

[۳۹] linearequations

سوال ۱.۵۶: $x^2 + y^2 = 2$

سوال ۱.۵۷: $x^2 + y^2 \leq 3$

سوال ۱.۵۸: $x^2 + y^2 = 0$

ڈھلوان، خطوط اور محوری قطعات

سوال ۱.۵۹ تا سوال ۱.۶۲ میں دیے گئے نقطوں کو ترسیم کریں۔ جہاں ممکن ہو، نقطوں کو ملانے والے خط کا ڈھلوان تلاش کریں۔ خط AB کو قائمہ خط کا ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال ۱.۵۹: $A(-1,2),\ B(-2,-1)$

سوال ۱.۶۰: $A(-2,1),\ B(2,-2)$

سوال ۱.۶۱: $A(2,3),\ B(-1,3)$

سوال ۱.۶۲: $A(-2,0),\ B(-2,-2)$

سوال ۱.۶۳ تا سوال ۱.۶۶ میں دیے گئے نقطہ سے گزرتے (الف) انتصابی خط اور (ب) افقی خط کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱.۶۳: $(-1, \frac{4}{3})$

سوال ۱.۶۴: $(\sqrt{2}, -1.3)$

سوال ۱.۶۵: $(0, -\sqrt{2})$

سوال ۱.۶۶: $(-\pi, 0)$

سوال ۱.۶۷ تا سوال ۱.۸۰ میں خط کی مساوات تلاش کریں۔ خط کی تفصیل دی گئی ہے۔

سوال ۱.۶۷: نقطہ $(-1,1)$ سے گزرتا خط جس کا ڈھلوان -1 ہو۔

سوال ۱.۶۸: نقطہ $(2,-3)$ سے گزرتا خط جس کا ڈھلوان $\frac{1}{2}$ ہو۔

سوال ۱.۶۹: نقطہ $(3,4)$ اور $(-2,5)$ سے گزرتا خط۔

سوال ۱.۷۰: نقطہ $(-8,0)$ اور $(-1,3)$ سے گزرتا خط۔

سوال ۱.۷۱: ڈھلوان $-\frac{5}{4}$ اور y قطع 6 ہے۔

سوال ۱.۷۲: ڈھلوان $\frac{1}{2}$ اور y قطع -3 ہے۔

سوال ۱.۷۳: نقطہ $(-12,-9)$ سے گزرتا جس کا ڈھلوان 0 ہو۔

سوال ۱.۷۴: نقطہ $(\frac{1}{3}, 2)$ سے گزرتا جس کا کوئی ڈھلوان نہ ہو۔

سوال ۱.۷۵: جس کا x قطع -1 اور y قطع 4 ہو۔

سوال ۱.۷۶: جس کا x قطع 2 اور y قطع -6 ہو۔

سوال ۱.۷۷: جو نقطہ $(5,-1)$ سے گزرتا ہو اور خط $2x+5y=15$ کے متوازی ہو۔

سوال ۱.۷۸: جو نقطہ $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ سے گزرتا ہو اور خط $\sqrt{2}x+5y=\sqrt{3}$ کے متوازی ہو۔

سوال ۱.۷۹: نقطہ $4,10$ سے گزرتا اور خط $6x-3y=13$ کا قائمہ ہو۔

سوال ۱.۸۰: نقطہ $(0,1)$ سے گزرتا اور خط $8x-13y=13$ کو قائمہ ہو۔

خط کا x قطع اور y قطع تلاش کریں۔ ان معلومات کو استعمال کرتے ہوئے خط ترسیم کریں۔ (سوال ۱.۸۱ تا سوال ۱.۸۴)

سوال ۱.۸۱: $3x+4y=12$

سوال ۱.۸۲: $x+2y=-4$

سوال ۱.۸۳: $\sqrt{2}x-\sqrt{3}y=\sqrt{6}$

سوال ۱.۸۴: $1.5x-y=-3$

سوال ۱.۸۵: کیا $Ax+By=C_1$ اور $Bx-Ay=C_2$ (جہاں $A\neq 0$ اور $B\neq 0$ ہیں) میں کوئی خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ تعلق کی وجہ بیان کریں۔

سوال ۱.۸۶: کیا $Ax+By=C_1$ اور $Ax+By=C_2$ (جہاں $A\neq 0$ اور $B\neq 0$ ہیں) میں کوئی خاص تعلق پایا جاتا ہے۔ تعلق کی وجہ بیان کریں۔

بڑھوتری اور حرکت

سوال ۱.۸۷: ایک ذرے کا ابتدائی مقام $A(-2,3)$ ہے جبکہ اس کی بڑھوتریاں $\Delta x=5$ ، $\Delta y=-6$ ہیں۔ ذرے کا اختتامی مقام تلاش کریں۔

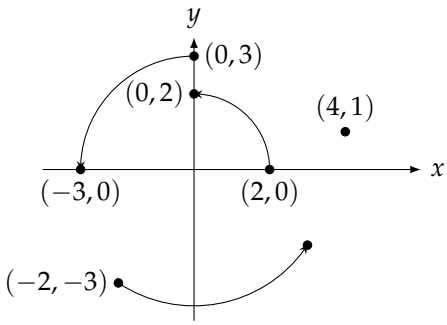
سوال ۱.۸۸: ایک ذرے کا ابتدائی مقام $A(6,0)$ ہے جبکہ اس کی بڑھوتریاں $\Delta x=-6$ ، $\Delta y=0$ ہیں۔ ذرے کا اختتامی مقام تلاش کریں۔

سوال ۱.۸۹: ایک ذرہ $A(x,y)$ سے $B(3,-3)$ منتقل ہوتا ہے۔ اس کی بڑھوتریاں $\Delta x=5$ اور $\Delta y=6$ ہیں۔ ابتدائی نقطہ تلاش کریں۔

سوال ۱.۹۰: ایک ذرہ $A(1,0)$ سے حرکت کرتے ہوئے مبدا کے گرد گھڑی کے مخالف رخ ایک چکر مکمل کرنے کے بعد $A(1,0)$ پر واپس لوٹتا ہے۔ اس کے محدد میں کل تبدیلی کیا ہے؟

عملی استعمال

سوال ۱.۹۱: پانی میں دباو پانی میں d گہرائی پر غوطہ خور p دباو محسوس کرے گا جہاں $p=kd+1$ ہے اور k ایک مستقل ہے۔ پانی کی سطح پر غوطہ خور پر 1 کرہ ہوائی دباو پایا جاتا ہے۔ 100 میٹر گہرائی پر تقریباً 10.94 کرہ ہوائی دباو پایا جاتا ہے۔ 50 میٹر گہرائی پر ہوائی دباو کیا ہو گا؟



شکل ۱.۱۶: گھڑی مخالف $90°$ گھومنا (سوال ۱.۹۸)

سوال ۱.۹۲: انعکاس شعاع ربع دوم سے خط $x + y = 1$ پر آمدی شعاع محور x سے منعکس ہوتی ہے۔ زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس برابر ہوتے ہیں۔ انعکاسی شعاع کس خط پر حرکت کرے گی؟

سوال ۱.۹۳: **سیلسیئس بالمقابل فارن ہائیٹ** سیلسیئس بالمقابل فارن ہائیٹ مستوی FC میں $C = \frac{5}{9}(F - 32)$ ترسیم کریں جو فارن ہائیٹ سے سیلسیئس حاصل کرنے کا کلیہ ہے۔ اسی جگہ $F = C$ ترسیم کریں۔ کیا کوئی ایسا درجہ حرارت پایا جاتا ہے جس پر دونوں پیمانے یکساں اعدادی جواب دیں؟

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱.۹۴: ایک مثلث کے راس $A(1,2)$ ، $B(5,5)$ اور $C(4,-2)$ پر پائے جاتے ہیں۔ مثلث کے تینوں اضلاع کی لمبائیاں تلاش کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ مساوی الساقین مثلث ہے اور متساوی الاضلاع مثلث نہیں ہے۔

سوال ۱.۹۵: ایک مثلث کے راس $A(0,0)$ ، $B(1,\sqrt{3})$ اور $C(2,0)$ ہیں۔ دکھائیں کہ یہ متساوی الاضلاع مثلث ہے۔

سوال ۱.۹۶: دکھائیں کہ $A(2,-1)$ ، $B(1,3)$ اور $C(-3,2)$ چوکور کے راس ہیں۔ چوتھا راس تلاش کریں۔

سوال ۱.۹۷: تین مختلف متوازی الاضلاع کے راس $(-1,1)$ ، $(2,0)$ اور $(2,3)$ ہیں۔ تینوں کا چوتھا راس تلاش کریں۔

سوال ۱.۹۸: مبدا کے گرد گھڑی مخالف $90°$ گھمانے سے نقطہ $(2,0)$ اور $(0,3)$ بالترتیب $(0,2)$ اور $(-3,0)$ منتقل ہوتے ہیں (شکل ۱.۱۶)۔ درج ذیل نقطے کہاں منتقل ہوں گے؟

ا) $(4,1)$

ب) $(-2,-3)$

ج) $(2,-5)$

د) $(x,0)$

ھ) $(0,y)$

و) (x,y)

ز) کونسا نقطہ $(10,3)$ پر منتقل ہوگا؟

سوال ۱.۹۹: k کی کس قیمت کے لیے خط $2x + ky = 3$ اور خط $4x + y = 1$ قائمہ ہوں گے۔ k کی کس قیمت کے لیے یہ خطوط متوازی ہوں گے؟

سوال ۱.۱۰۰: وہ خط تلاش کریں جو نقطہ $(1,2)$ اور خط $x + 2y = 3$ اور $2x - 3y = -1$ کے انقطاعی نقطہ سے گزرتا ہو۔

سوال ۱.۱۰۱: دکھائیں کہ $A(x_1, y_1)$ اور $B(x_2, y_2)$ کو ملانے والے قطعہ کا وسط $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ہو گا۔

سوال ۱.۱۰۲: نقطہ سے خط تک فاصلہ نقطہ $N(x_0, y_0)$ سے خط $L : Ax + By = C$ تک فاصلہ درج ذیل قدم لیتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

- L کی قائمہ اور N سے گزرتے خط Q کی مساوات تلاش کریں۔
- خط Q اور L کا نقطہ تقاطع M تلاش کریں۔
- N سے M تک فاصلہ تلاش کریں۔

اس طریقہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل نقطوں کا دیے گئے خط سے فاصلہ تلاش کریں۔

ا) $N(2,1), L : y = x + 2$

ب) $N(4,6), L : 4x + 3y = 12$

ج) $N(a,b), L : x = -1$

د) $N(x_0, y_0), L : Ax + By = C$

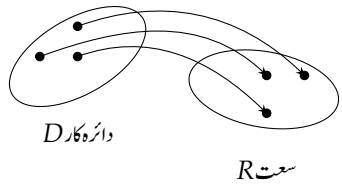
۱.۳ تفاعل

حقیقی دنیا کو ریاضیاتی روپ میں تفاعل کے ذریعہ بیان کیا جاتا ہے۔ اس حصہ میں تفاعل پر غور کیا جائے گا اور ایسے چند تفاعل پر غور کیا جائے گا جو احصاء میں پائے جائیں گے۔

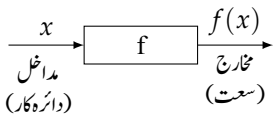
تفاعل

پانی ابلنے کا درجہ حرارت، سطح سمندر سے بلندی پر منحصر ہے۔ زیادہ بلندی پر پانی کم درجہ حرارت پر ابلتا ہے۔ اسی طرح سرمایہ کاری پر منافع سرمایہ کاری کے دورانیے پر منحصر ہے۔ ان دونوں مثالوں میں ایک متغیر، جس کو ہم y کہہ سکتے ہیں، کا دارومدار دوسرے متغیر، جس کو ہم x کہہ سکتے ہیں، پر منحصر ہے۔ چونکہ y کی قیمت مکمل طور پر x تعین کرتا ہے لہٰذا y کو x کا تفاعل کہتے ہیں۔

زیر غور مسئلے کو دیکھ کر متغیرات منتخب کیے جاتے ہیں۔ یوں دائرے کے رقبہ کی بات کرتے ہوئے رقبہ کو A اور رداس کو r سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ چونکہ $A = \pi r^2$ ہے لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ رداس r کا تفاعل رقبہ A ہے۔ مساوات $A = \pi r^2$ وہ قاعدہ ہے جس کی مدد سے r کی ہر قیمت کے لیے A کی یکتا قیمت تلاش کی جا سکتی ہے۔



شکل ۱.۱۷: سلسلہ D سے سلسلہ R پر تفاعل، D کے ہر رکن کو R کا یکتا رکن مختص کرتا ہے۔



شکل ۱.۱۸: تفاعل کی ڈبہ صورت

ردا س کی تمام ممکنہ قیمتوں کے سلسلہ کو تفاعل کا **دائرہ کار**[۴۰] کہتے ہیں جبکہ تفاعل کی تمام قیمتوں کے سلسلہ کو تفاعل کی **سعت**[۴۱] کہتے ہیں۔ چونکہ ردا س کی قیمت منفی نہیں ہو سکتی ہے لہٰذا تفاعل کا دائرہ کار اور سعت دونوں وقفہ $[0, \infty)$ پر مشتمل ہوں گے جو تمام غیر منفی حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔

ریاضیاتی تفاعل کا دائرہ کار اور اس کی سعت چیزوں کا سلسلہ ہو سکتے ہیں؛ ضروری نہیں ہے کہ یہ اعداد ہی ہوں۔ اس کتاب میں زیادہ تر دائرہ کار اور سعت اعدادی ہوں گے۔

احصاء میں ہم عمومی تفاعل کی بات کرتے ہیں۔ ہمارے ذہن میں کوئی مخصوص تفاعل نہیں ہوتا۔ ہم

$$y = f(x) \qquad (f \text{ کا } x \text{ برابر ہے } y)$$

لکھتے ہوئے کہنا چاہتے ہیں کہ متغیر y، متغیر x کا تفاعل ہے۔ یہاں f تفاعل کو ظاہر کرتا ہے جبکہ داخلی قیمت x **غیر تابع متغیر**[۴۲] ہے اور خارجی قیمت y **تابع متغیر**[۴۳] ہے۔ x کی قیمت تفاعل کے دائرہ کار میں سے ہو گی جبکہ y کی قیمت تفاعل کی سعت میں سے ہو گی۔

تعریف: سلسلہ D سے سلسلہ R تک تفاعل $f(x)$ اس قاعدہ کو کہتے ہیں جو D میں ہر رکن x کو R کا یکتا رکن $f(x)$ مختص کرتا ہے۔

□

اس تعریف کے تحت $D = D(f)$ (جس کو D کا f پڑھتے ہیں) تفاعل f کا دائرہ کار ہے اور f کی سعت R کا حصہ ہے (شکل ۱.۱۷)۔

ہم تفاعل کو تصوراتی ڈبہ شکل دے سکتے ہیں (شکل ۱.۱۸)۔ اس ڈبے کو داخلی جانب جب بھی تفاعل کے دائرہ کار میں سے کوئی رکن مہیا کیا جائے یہ فوراً $f(x)$ خارج کرتا ہے۔

اس کتاب میں ہم تفاعل کی تعریف عموماً دو طرح کریں گے۔

۱. تفاعل کی قیمت کو تابع متغیر y سے ظاہر کرتے ہوئے $y = x^2$ طرح کا کلیہ دیں گے اور یا

۲. ہم $f(x) = x^2$ کی طرح کلیہ لکھ کر تفاعل کی قیمت کو f کی علامت سے ظاہر کریں گے۔

---

[۴۰] domain
[۴۱] range
[۴۲] independentvariable
[۴۳] dependentvariable

اگرچہ ہمیں تفاعل کو f ، نا کہ $f(x)$ ، کہنا چاہیے چونکہ $f(x)$ سے مراد نقطہ x پر تفاعل کی قیمت ہے؛ ہم تفاعل کے غیر تابع متغیر کی نشاندہی کرنے کی خاطر تفاعل کو عموماً $f(x)$ لکھیں گے۔

بعض اوقات تفاعل اور تابع متغیر کو ایک ہی علامت سے ظاہر کرنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر رداس r دائرے کے رقبہ کو ہم $A(r) = \pi r^2$ لکھ سکتے ہیں جہاں علامت A سے مراد رقبہ اور تفاعل دونوں ہیں۔

قدر پیمائی

جیسا پہلے بھی ذکر کیا گیا، اس کتاب میں عموماً **حقیقی متغیرات**[۴۴] کے **حقیقی قیمت تفاعل**[۴۵] پر غور کیا جائے گا جن کے دائرہ کار اور سعت حقیقی اعداد کا سلسلہ ہوں گے۔ ہم تفاعل کے دائرہ کار سے مخصوص قیمتوں کو تفاعل کے قاعدہ میں پر کرتے ہوئے سعت کی مطابقتی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

مثال ۱.۲۱: رداس r کے کرہ کا حجم V درج ذیل تفاعل دیتا ہے۔

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$3\,\mathrm{m}$ رداس کے کرہ کا حجم درج ذیل ہوگا۔

$$V = \frac{4}{3}\pi 3^3 = 36\pi\,\mathrm{m}^2$$

□

مثال ۱.۲۲: فرض کریں کہ تمام حقیقی اعداد t کے لیے تفاعل معین ہے اور اس کو درج ذیل کلیہ بیان کرتا ہے۔

$$F(t) = 2(t-1) + 3$$

اس تفاعل کی قیمت 0 ، 2 ، $x+2$ اور $F(2)$ پر حاصل کریں۔

حل

$$\begin{aligned}
F(0) &= 2(0-1)+3 = -2+3 = 1\\
F(2) &= 2(2-1)+3 = 2+3 = 5\\
F(x+2) &= 2(x+2-1)+3 = 2x+5\\
F(F(2)) &= F(5) = 2(5-1)+3 = 11
\end{aligned}$$

□

---

[۴۴] realvariables
[۴۵] realvaluedfunction

روایت دائرہ کار

جب دائرہ کار صریحاً بتائے بغیر تفاعل $y = f(x)$ متعارف کیا جائے تب x کی زیادہ سے زیادہ ایسی قیمتوں کا سلسلہ جس کے لیے یہ کلیہ حقیقی قیمتیں دیتا ہو کو تفاعل کا دائرہ کار تصور کیا جاتا ہے۔ اس کو تفاعل کا **قدرتی دائرہ کار**[۴۶] کہتے ہیں۔ دائرہ کار پر کسی بھی طرح کی پابندی صریحاً بتلائی جاتی ہے۔

تفاعل $y = x^2$ کا قدرتی دائرہ کار تمام حقیقی اعداد کے سلسلہ پر مشتمل ہے۔ اگر ہم اس تفاعل کے دائرہ کار x کو 2 یا 2 سے زیادہ حقیقی اعداد تک پابند کرنا چاہتے ہوں تب ہم "$y = x^2, x \geq 2$" لکھیں گے۔

دائرہ کار تبدیل کرنے سے سعت بھی عموماً تبدیل ہو گی۔ تفاعل $y = x^2$ کی سعت $[0, \infty)$ ہو گی جبکہ تفاعل $y = x^2, x \geq 2$ کی سعت $[4, \infty)$ ہو گی جس کو ہم $\{x^2 | x \geq 2\}$ یا $\{y | y \geq 4\}$ بھی لکھتے ہیں۔

مثال ۱.۲۳:

تفاعل	دائرہ کار (x)	سعت
$y = \sqrt{1 - x^2}$	$[-1, 1]$	$[0, 1]$
$y = \frac{1}{x}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$y = \sqrt{x}$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$
$y = \sqrt{4 - x}$	$(-\infty, 4]$	$[0, \infty)$

تفاعل $y = \sqrt{1 - x^2}$ بند وقفہ -1 تا 1 میں ہر x کے لیے y کی حقیقی قیمتیں دیتا ہے۔ اس دائرہ کار کے باہر $1 - x^2$ منفی ہو گا اور $\sqrt{1 - x^2}$ خیالی یعنی غیر حقیقی ہو گا۔ دیے گئے دائرہ کار کے اندر رہتے ہوئے $\sqrt{1 - x^2}$ کی قیمت 0 تا 1 ہے، جس کو ہم $[0, 1]$ لکھتے ہیں۔

چونکہ کسی بھی عدد کو 0 سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا لہٰذا ماسوائے $x = 0$، کلیہ $y = \frac{1}{x}$ ہر x کے لیے حقیقی y دیتا ہے۔ تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کی سعت تمام غیر صفر حقیقی اعداد کے مقلوبوں کا سلسلہ ہو گی، جو از خود تمام غیر صفر حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔

کلیہ $y = \sqrt{x}$ صرف $x \geq 0$ کی صورت میں حقیقی y دیتا ہے۔ اس کی سعت $[0, \infty)$ ہے۔

حقیقی y کے لیے کلیہ $y = \sqrt{4 - x}$ میں $4 - x$ کی قیمت غیر منفی ہونی لازمی ہے۔ یوں $4 - x \geq 0$ سے دائرہ کار $x \leq 4$ حاصل ہوتا ہے۔ تفاعل کی سعت $[0, \infty)$ ہو گی۔ □

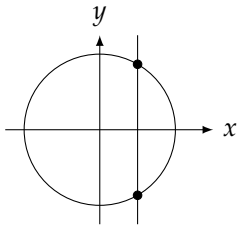
تفاعل کی ترسیم

تفاعل f کی ترسیم سے مراد مساوات $y = f(x)$ کی ترسیم ہے جو کارتیسی مستوی پر وہ نقطے ہیں جن کے محدد تفاعل f کی داخلی و خارجی جوڑیاں (x, y) ہیں۔

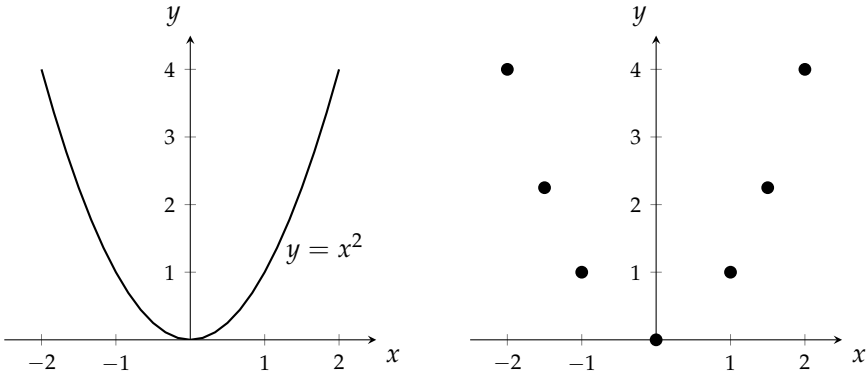
ضروری نہیں کہ ہر منحنی جو آپ ترسیم کریں تفاعل کی منحنی ہو۔ تفاعل ہونے کا بنیادی شرط یہ ہے کہ تفاعل کے دائرہ کار میں ہر x کے لیے تفاعل کی صرف اور صرف ایک (یکتا) قیمت $f(x)$ ہو لہٰذا کوئی بھی انتصابی خط تفاعل کی ترسیم کو ایک سے زیادہ مرتبہ قطع نہیں کر سکتا ہے۔ چونکہ دائرے کو انتصابی خط دو مرتبہ قطع کر سکتا ہے لہٰذا دائرہ تفاعل نہیں ہے (شکل ۱.۱۹)۔ جیسا آپ شکل ۱.۱۹ سے دیکھ سکتے ہیں x کی ایک ہی قیمت پر y کی دو قیمتیں ملتی ہیں۔ اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ a پایا جاتا ہو تب انتصابی خط $x = a$ تفاعل کو صرف ایک نقطہ $(a, f(a))$ پر قطع کرے گا۔

---

[۴۶] naturaldomain



شکل ۱.۱۹: دائرے کو تفاعل تصور کرنا غلط ہے۔



شکل ۱.۲۰: تفاعل $y = x^2$ کی ترسیم (مثال ۱.۲۴)

۷۰۵ **مثال ۱.۲۴:** وقفہ $[-2, 2]$ پر تفاعل $y = x^2$ ترسیم کریں۔

۷۰۶ **حل**

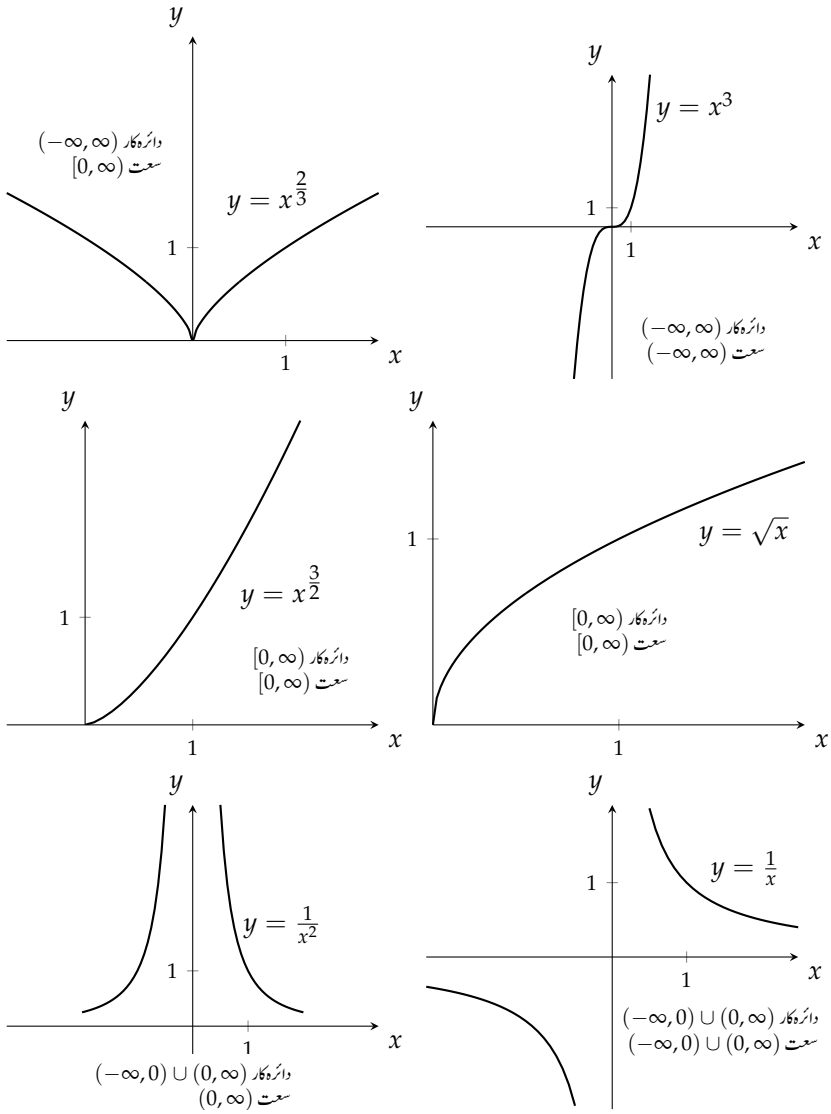
۷۰۷ **پہلا قدم:** پہلے ایسے (x, y) نقطوں کا جدول بناتے ہیں جو تفاعل کی مساوات کو مطمئن کرتے ہوں۔

x	-2.00	-1.50	-1.00	0.00	1.00	1.50	2.00
y	4.00	2.25	1.00	0.00	1.00	2.25	4.00

۷۰۸ **دوسرا قدم:** جدول میں دیے نقطوں کو مستوی xy پر ترسیم کرتے ہیں (شکل ۱.۲۰)۔

۷۰۹ **تیسرا قدم:** ترسیم کردہ نقطوں سے گزرتی ہموار منحنی کھینچتے ہیں۔ منحنی پر سرخی لکھتے ہیں۔ □

۷۱۰ احصاء میں استعمال کئی تفاعل کو شکل ۱.۲۱ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ ان تفاعل کی شکل و صورت جاننا مفید ثابت ہو گا۔



شکل ۱.۲۱: چند اہم تفاعل کی ترسیم

مجموعے، فرق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

اعداد کی طرح تفاعل کا مجموعہ، تفریق، ضرب، اور (ماسوائے جب نسب نما صفر ہو) حاصل تقسیم لے کر نئے تفاعل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ اگر f اور g تفاعل ہوں تب ایسے x کے لیے، جو دونوں تفاعل کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہو، کے لیے تفاعل $f+g$ ، $f-g$ اور fg کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x)\\ (f-g)(x) &= f(x)-g(x)\\ (fg)(x) &= f(x)g(x)\end{aligned}$$

f اور g کے دائرہ کار کے اشتراک $D(f)\cap D(g)$ ، جہاں $g(x)\neq 0$ ہو، ہم تفاعل $\frac{f}{g}$ کی درج ذیل تعریف پیش کر سکتے ہیں۔

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x)\neq 0)$$

تفاعل کو مستقل سے ضرب دیا جا سکتا ہے۔ یوں اگر c حقیقی عدد ہو تب تفاعل cf کی تعریف درج ذیل ہو گی۔

$$(cf)(x)=cf(x)$$

مثال ۱.۲۵:

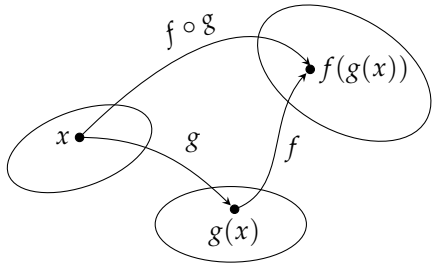
تفاعل	کلیہ	دائرہ کار
f	$f(x)=\sqrt{x}$	$[0,\infty)$
g	$g(x)=\sqrt{1-x}$	$(-\infty,1]$
$3g$	$3g(x)=3\sqrt{1-x}$	$(-\infty,1]$
$f+g$	$(f+g)(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$	$[0,1]=D(f)\cap D(g)$
$f-g$	$(f-g)(x)=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$	$[0,1]$
$g-f$	$(g-f)(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}$	$[0,1]$
$f\cdot g$	$(f\cdot g)(x)=f(x)g(x)=\sqrt{x(1-x)}$	$[0,1]$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f}{g}(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$	$[0,1)$ (ماسوائے $x=1$)
$\frac{g}{f}$	$\frac{g}{f}(x)=\frac{g(x)}{f(x)}=\sqrt{\frac{1-x}{x}}$	$(0,1]$ (ماسوائے $x=0$)

□

مرکب تفاعل

نقطہ در نقطہ x پر ایک تفاعل g کے نتائج $g(x)$ پر دوسرا تفاعل f لاگو کرتے ہوئے تیسرا تفاعل $f(g(x))$ حاصل کیا جا سکتا ہے جس کو **مرکب تفاعل**[47] $f\circ g$ کہتے ہیں۔

[47] compositefunction



شکل ۱.۲۲: مرکب تفاعل

تعریف: اگر f اور g تفاعل ہوں تب مرکب تفاعل $f \circ g$ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$f \circ g$ کا دائرہ کار ان x پر مشتمل ہے جو g کے دائرہ کار میں پائے جاتے ہیں اور جن پر g کی سعت f کے دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔

□

تعریف کی رو سے دو تفاعل کا مرکب اس صورت حاصل کیا جا سکتا ہے جب پہلے تفاعل کی سعت دوسرے تفاعل کے دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔ $f \circ g$ حاصل کرنے کی خاطر ہم $g(x)$ معلوم کر کے $f(g(x))$ حاصل کرتے ہیں (شکل ۱.۲۲)۔

معین $g \circ f$ حاصل کرنے کے لیے ہم پہلے $f(x)$ اور بعد میں $g(f(x))$ حاصل کرتے ہیں۔ $g \circ f$ کا دائرہ کار ان x پر مشتمل ہو گا جن پر f کی سعت g کے دائرہ کار میں پائی جاتی ہو۔

تفاعل $f \circ g$ اور $g \circ f$ عموماً مختلف ہوں گے۔

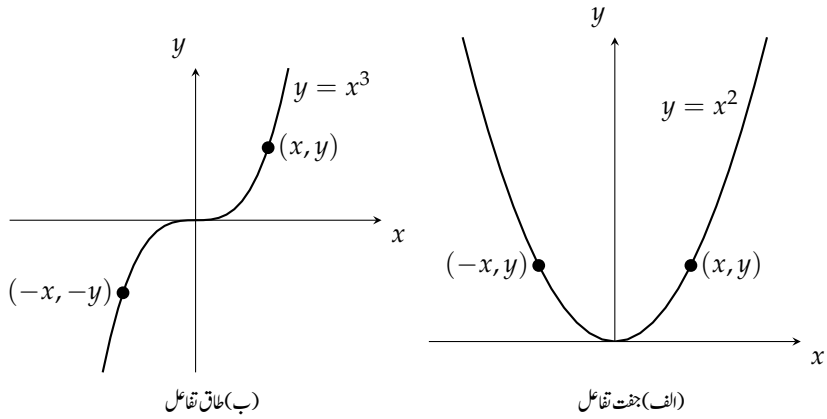
مثال ۱.۲۶: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ اور $g(x) = x + 1$ ہوں، درج ذیل حاصل کریں۔

ا. $(f \circ g)(x)$ ب. $(g \circ f)(x)$ ج. $(f \circ f)(x)$ د. $(g \circ g)(x)$

حل

مرکب	دائرہ کار
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$	$[-1, \infty)$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$	$[0, \infty)$
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}}$	$[0, \infty)$
$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x+1) = (x+1) + 1 = x + 2$	$(-\infty, \infty)$

یہ جاننے کے لیے کہ $f \circ g$ کا دائرہ کار کیوں $[-1, \infty)$ ہے، غور کریں کہ $g(x) = x + 1$ تمام حقیقی x کے لیے معین ہے لیکن یہ f کے دائرہ کار میں صرف $x + 1 \geq 0$ یعنی $x \geq -1$ کی صورت میں شامل ہوتا ہے۔ □



شکل ۱.۲۳: جفت اور طاق تفاعل

جفت تفاعل اور طاق تفاعل۔ تشاکل

f کے دائرہ کار میں ہر x پر $f(-x) = f(x)$ کی صورت میں تفاعل $y = f(x)$ **جفت**[۴۸] کہلاتا ہے۔ دھیان رہے کہ x اور $-x$ دونوں کا f کے دائرہ کار میں ہونا لازمی ہے۔ تفاعل $f(x) = x^2$ جفت ہے چونکہ $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ ہے۔

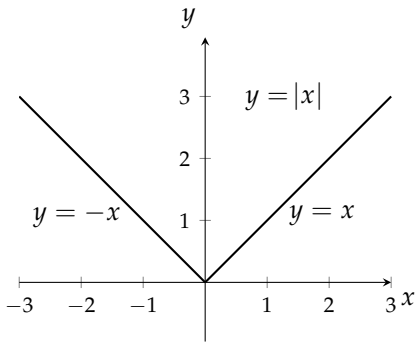
چونکہ $f(-x) = f(x)$ ہے لہٰذا نقطہ (x, y) اس صورت ترسیم پر پایا جائے گا جب نقطہ $(-x, y)$ بھی ترسیم پر پایا جاتا ہو۔ یوں جفت تفاعل کی ترسیم محور y کے لحاظ سے تشاکل ہو گی (شکل ۱.۲۳-الف)۔ محور y کی ایک جانب ترسیم جانتے ہوئے دوسری جانب کی ترسیم جوں کی توں بنائی جا سکتی ہے۔

f کے دائرہ کار میں ہر x پر $f(-x) = -f(x)$ کی صورت میں تفاعل $y = f(x)$ **طاق**[۴۹] کہلاتا ہے۔ دھیان رہے کہ x اور $-x$ دونوں کا f کے دائرہ کار میں ہونا لازمی ہے۔ تفاعل $f(x) = x^3$ طاق ہے چونکہ $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ ہے۔

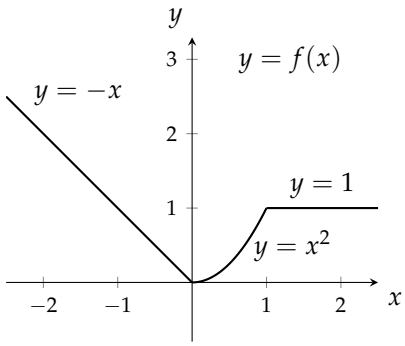
طاق تفاعل کی ترسیم مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہو گی (شکل ۱.۲۳-ب)۔ چونکہ $f(-x) = -f(x)$ ہے لہٰذا نقطہ (x, y) صرف اور صرف اس صورت ترسیم پر پایا جائے گا جب نقطہ $(-x, -y)$ بھی ترسیم پر پایا جاتا ہو۔ یہاں بھی محور y کی ایک جانب ترسیم کو دیکھتے ہوئے محور کی دوسری جانب ترسیم کھینچی جا سکتی ہے۔

---

[۴۸] even
[۴۹] odd



شکل ۱.۲۴: مطلق قیمت تفاعل



شکل ۱.۲۵: ٹکڑوں میں معین تفاعل برائے مثال ۱.۲۷

ٹکڑوں میں معین تفاعل

بعض اوقات ایک تفاعل کو اس کے دائرہ کار کے مختلف حصوں پر مختلف کلیات ظاہر کرتے ہیں۔ اس کی ایک مثال درج ذیل مطلق قیمت تفاعل ہے (شکل ۱.۲۴)۔

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مزید مثالیں درج ذیل ہیں۔

مثال ۱.۲۷: درج ذیل تفاعل مکمل حقیقی خط پر معین ہے لیکن مختلف وقفوں پر مختلف کلیات اس کی قیمت دیتے ہیں (شکل ۱.۲۵)۔

$$f(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

□

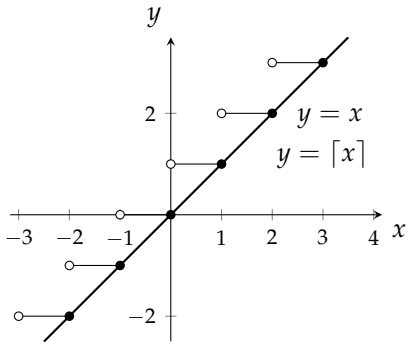
مثال ۱.۲۸: بڑا ترین عدد تفاعل

ایسا تفاعل جس کی قیمت کسی بھی عدد x پر وہ بڑا ترین عدد ہو جو x کے برابر یا اس سے کم ہو **بڑا ترین عدد صحیح تفاعل**[۵۰] یا **عدد صحیح زمینی تفاعل**[۵۱] کہلاتا جس کو $\lfloor x \rfloor$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل ۱.۲۶)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہوں گے۔

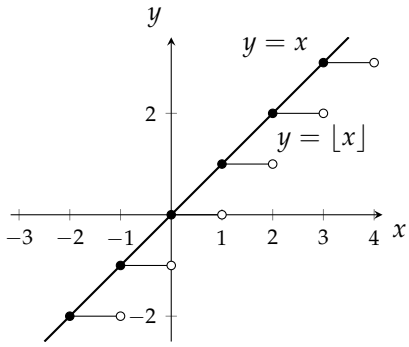
$$\begin{array}{llll} \lfloor 2.4 \rfloor = 2, & \lfloor 1.9 \rfloor = 1, & \lfloor 0 \rfloor = 0, & \lfloor -1.2 \rfloor = -2 \\ \lfloor 2 \rfloor = 2, & \lfloor 0.2 \rfloor = 0, & \lfloor -0.3 \rfloor = -1, & \lfloor -2 \rfloor = -2 \end{array}$$

---

[۵۰] greatestintegerfunction
[۵۱] integerfloorfunction



شکل ۱.۲۷: عدد صحیح چھت تفاعل (مثال ۱.۲۹)



شکل ۱.۲۶: عدد صحیح زمین تفاعل (مثال ۱.۲۸)

□ ۷۶۰

۷۶۱ مثال ۱.۲۹: ایسا تفاعل جس کی قیمت کسی بھی عدد x پر وہ کم ترین عدد ہو جو x کے برابر یا اس سے زیادہ ہو **کم ترین عدد صحیح تفاعل**[۵۲] یا **عدد صحیح**
۷۶۲ **چھت تفاعل**[۵۳] کہلاتا ہے جس کو $\lceil x \rceil$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل ۱.۲۶)۔ اس کی مثال ٹیکسی کا کرایا ہے جو فی کلومیٹر واجب الادا ہوتا ہے۔ اضافی نا
۷۶۳ مکمل کلومیٹر کی صورت میں مکمل کلومیٹر کا کرایا واجب الادا ہوتا ہے۔ یوں 17.2 کلومیٹر فاصلہ طے کرنے کی صورت میں 18 کلومیٹر کا کرایا واجب الادا ہو
۷۶۴ گا۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\lceil 3.2 \rceil = 4, \quad \lceil 2.9 \rceil = 3, \quad \lceil 0 \rceil = 0, \quad \lceil 2 \rceil = 2,$$
$$\lceil -5 \rceil = -5, \quad \lceil -5.6 \rceil = -5, \quad \lceil -0.9 \rceil = 0, \quad \lceil -7.2 \rceil = -7$$

□ ۷۶۵

۷۶۶ **سوالات**

۷۶۷ سوال ۱.۱۰۳ تا سوال ۱.۱۰۸ میں تفاعل کا دائرہ کار اور اس کی سعت تلاش کریں۔

۷۶۸ سوال ۱.۱۰۳: $f(x) = 1 + x^2$

۷۶۹ سوال ۱.۱۰۴: $f(x) = 1 - \sqrt{x}$

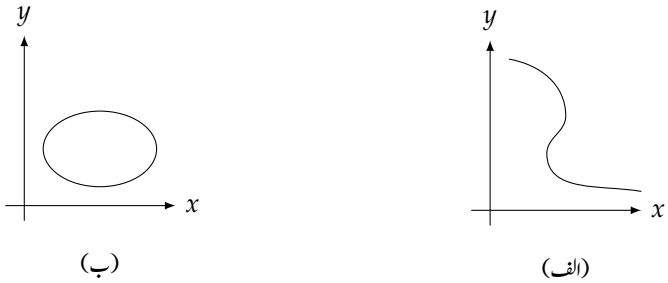
۷۷۰ سوال ۱.۱۰۵: $F(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

۷۷۱ سوال ۱.۱۰۶: $F(t) = \frac{1}{1+\sqrt{t}}$

---

[۵۲] leastintegerfunction
[۵۳] integerceilingfunction

شکل ۱.۲۸: اشکال برائے سوال ۱.۱۰۹



شکل ۱.۲۹: اشکال برائے سوال ۱.۱۱۰

سوال ۱.۱۰۷: $g(z) = \sqrt{4 - z^2}$

سوال ۱.۱۰۸: $g(z) = \frac{1}{\sqrt{4-z^2}}$

سوال ۱.۱۰۹: شکل ۱.۲۸ میں کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم ہے اور کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم نہیں ہے۔ اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱.۱۱۰: شکل ۱.۲۹ میں کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم ہے اور کون سی ترسیم x کے تفاعل کی ترسیم نہیں ہے۔ اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

تفاعل کا کلیہ اخذ کرنا

سوال ۱.۱۱۱: متوازی الاضلاع مثلث کے رقبہ اور محیط کو ضلع کی لمبائی x کا تفاعل لکھیں۔

سوال ۱.۱۱۲: چوکور کے وتر کی لمبائی d کی صورت میں چوکور کے ضلع کی لمبائی لکھیں۔ اب چوکور کے رقبہ کو d کا تفاعل لکھیں۔

سوال ۱.۱۱۳: مکعب کے ضلع کی لمبائی کو مکعب کی وتری لمبائی d کی صورت میں لکھیں۔ مکعب کا سطحی رقبہ اور حجم کو d کا تفاعل لکھیں۔

$$x = \frac{d}{\sqrt{3}}, \quad A = 2d^2, \quad V = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$$

سوال ۱.۱۱۴: ربع اول میں نقطہ N تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ کی ترسیم پر پایا جاتا ہے۔ N کے محدد کو مبدا سے N تک خط کے ڈھلوان کا تفاعل لکھیں۔

تفاعل اور ترسیم

سوال ۱.۱۱۵ تا سوال ۱.۱۲۶ میں دیے تفاعل ترسیم کریں۔ ان میں کونسا تشاکل پایا جاتا ہے (اگر پایا جاتا ہو تب)۔ اشکال ۱.۲۱ میں دی ترسیم کا سہارا لیا جا سکتا ہے۔

سوال ۱.۱۱۵: $y = -x^3$

سوال ۱.۱۱۶: $y = -\frac{1}{x^2}$

سوال ۱.۱۱۷: $y = -\frac{1}{x}$

سوال ۱.۱۱۸: $y = \frac{1}{|x|}$

سوال ۱.۱۱۹: $y = \sqrt{|x|}$

سوال ۱.۱۲۰: $y = \sqrt{-x}$

سوال ۱.۱۲۱: $y = \frac{x^3}{8}$

سوال ۱.۱۲۲: $y = -4\sqrt{x}$

سوال ۱.۱۲۳: $y = -x^{\frac{3}{2}}$

سوال ۱.۱۲۴: $y = (-x)^{\frac{3}{2}}$

سوال ۱.۱۲۵: $y = (-x)^{\frac{2}{3}}$

سوال ۱.۱۲۶: $y = -x^{\frac{2}{3}}$

سوال ۱.۱۲۷: (الف) $|y| = x$ اور (ب) $y^2 = x^2$ ترسیم کریں۔ یہ مساوات x کے تفاعل کو ظاہر نہیں کرتی ہیں۔ تفاعل نہ ہونے کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱.۱۲۸: (الف) $|x| + |y| = 1$ اور (ب) $|x + y| = 1$ ترسیم کریں۔ یہ x کے تفاعل کو ظاہر نہیں کرتی ہیں۔ وجہ پیش کریں۔

جفت اور طاق تفاعل

سوال ۱.۱۲۹ تا سوال ۱.۱۴۰ میں کون سا تفاعل جفت، کون سا طاق اور کون سا نہ طاق اور نہ ہی جفت ہیں؟

سوال ۱.۱۲۹: $f(x) = 3$

۸۰۸ سوال ۱.۱۳۰: $f(x) = x^{-5}$

۸۰۹ سوال ۱.۱۳۱: $f(x) = x^2 + 1$

۸۱۰ سوال ۱.۱۳۲: $f(x) = x^2 + x$

۸۱۱ سوال ۱.۱۳۳: $g(x) = x^3 + x$

۸۱۲ سوال ۱.۱۳۴: $g(x) = x^4 + 3x^2 - 1$

۸۱۳ سوال ۱.۱۳۵: $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$

۸۱۴ سوال ۱.۱۳۶: $g(x) = \frac{x}{x^2-1}$

۸۱۵ سوال ۱.۱۳۷: $h(t) = \frac{1}{t-1}$

۸۱۶ سوال ۱.۱۳۸: $h(t) = \left|t^3\right|$

۸۱۷ سوال ۱.۱۳۹: $h(t) = 2t + 1$

۸۱۸ سوال ۱.۱۴۰: $h(t) = 2|t| + 1$

۸۱۹

۸۲۰ مجموعے، تفریق، حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

۸۲۱ سوال ۱.۱۴۱ تا سوال ۱.۱۴۲ میں f ، g ، $f + g$ اور $f \cdot g$ کے دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

۸۲۲ سوال ۱.۱۴۱: $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

۸۲۳

۸۲۴ سوال ۱.۱۴۲: $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

۸۲۵ سوال ۱.۱۴۳ تا سوال ۱.۱۴۴ میں f ، g ، $\frac{f}{g}$ اور $\frac{g}{f}$ کے دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

۸۲۶ سوال ۱.۱۴۳: $f(x) = 2, \quad g(x) = x^2 + 1$

۸۲۷ سوال ۱.۱۴۴: $f(x) = 1, \quad g(x) = 1 + \sqrt{x}$

۸۲۸

۸۲۹ تفاعل کے مرکب

۸۳۰

۸۳۱ سوال ۱.۱۴۵: اگر $f(x) = x + 5$ اور $g(x) = x^2 - 3$ ہوں تب درج ذیل حاصل کریں۔

۸۳۲ ا. $f(g(0))$ ۸۳۴ ج. $f(g(x))$ ۸۳۶ ھ. $f(f(-5))$ ۸۳۸ ز. $f(f(x))$

۸۳۳ ب. $g(f(0))$ ۸۳۵ د. $g(f(x))$ ۸۳۷ و. $g(g(2))$ ۸۳۹ ح. $g(g(x))$

۸۴۰ سوال ۱.۱۴۶: اگر $f(x) = x - 1$ اور $g(x) = \frac{1}{x+1}$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

۸۴۱ ا. $f(g(\frac{1}{2}))$ ۸۴۳ ج. $f(g(x))$ ۸۴۵ ھ. $f(f(2))$ ۸۴۷ ز. $f(f(x))$

۸۴۲ ب. $g(f(\frac{1}{2}))$ ۸۴۴ د. $g(f(x))$ ۸۴۶ و. $g(g(2))$ ۸۴۸ ح. $g(g(x))$

۸۴۹ سوال ۱.۱۴۷: اگر $u(x) = 4x - 5$ ، $v(x) = x^2$ اور $f(x) = \frac{1}{x}$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

۸۵۰ ا. $u(v(f(x)))$ ۸۵۲ ج. $v(u(f(x)))$ ۸۵۴ ھ. $f(u(v(x)))$

۸۵۱ ب. $u(f(v(x)))$ ۸۵۳ د. $v(f(u(x)))$ ۸۵۵ و. $f(v(u(x)))$

۸۵۶ سوال ۱.۱۴۸: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = \frac{x}{4}$ اور $h(x) = 4x - 8$ ہوں تب درج ذیل تلاش کریں۔

۸۵۷ ا. $h(g(f(x)))$ ۸۵۹ ج. $g(h(f(x)))$ ۸۶۱ ھ. $f(g(h(x)))$

۸۵۸ ب. $h(f(g(x)))$ ۸۶۰ د. $g(f(h(x)))$ ۸۶۲ و. $f(h(g(x)))$

۸۶۳ سوال ۱.۱۴۹ ا اور سوال ۱.۱۴۹ میں $f(x) = x - 3$ ، $g(x) = \sqrt{x}$ ، $h(x) = x^3$ اور $j(x) = 2x$ لیں۔ سوال کے ہر جزو کو
۸۶۴ تفاعل کا مرکب لکھیں۔ مرکب میں f ، g ، h اور j میں سے ایک یا ایک سے زیادہ تفاعل ہو سکتے ہیں۔

۸۶۵ سوال ۱.۱۴۹:

۸۶۶ ا. $y = \sqrt{x} - 3$ ۸۶۸ ج. $y = x^{\frac{1}{4}}$ ۸۶۹ د. $y = 4x$ ۸۷۰ ھ. $y = \sqrt{(x-3)^3}$

۸۶۷ ب. $y = 2\sqrt{x}$ ۸۷۱ و. $y = (2x-6)^3$

۸۷۲ سوال ۱.۱۵۰:

۸۷۳ ا. $y = 2x - 3$ ۸۷۴ ب. $y = x^{\frac{3}{2}}$ ۸۷۵ ج. $y = x^9$ ۸۷۷ ھ. $y = 2\sqrt{x-3}$

۸۷۶ د. $y = x - 6$ ۸۷۸ و. $y = \sqrt{x^3 - 3}$

۸۷۹ سوال ۱.۱۵۱: درج ذیل جدول مکمل کریں۔

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
(الف)	$x - 7$	$\sqrt{x}$	
(ب)	$x + 2$	$3x$	
(ج)		$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
(د)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	
(ہ)	$\frac{1}{x-1}$	$1 + \frac{1}{x}$	
(و)	$\frac{1}{x}$		x

سوال ۱.۱۵۲: کوئی عدد x لیں۔ اس کے ساتھ 5 جمع کریں۔ نتیجہ کو دگنا کر کے اس سے 6 منفی کریں۔ نتیجہ کو 2 سے تقسیم کریں۔ جواب کیا حاصل ہوتا ہے؟

ٹکڑوں میں معین تفاعل

سوال ۱.۱۵۳ تا سوال ۱.۱۵۶ میں تفاعل ترسیم کریں۔

سوال ۱.۱۵۳:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

سوال ۱.۱۵۴:

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

سوال ۱.۱۵۵:

$$F(x) = \begin{cases} 3 - x, & x \leq 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$

سوال ۱.۱۵۶:

$$G(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \end{cases}$$

سوال ۱.۱۵۷: شکل ۱.۳۰ میں دیے تفاعل کی مساوات تلاش کریں۔

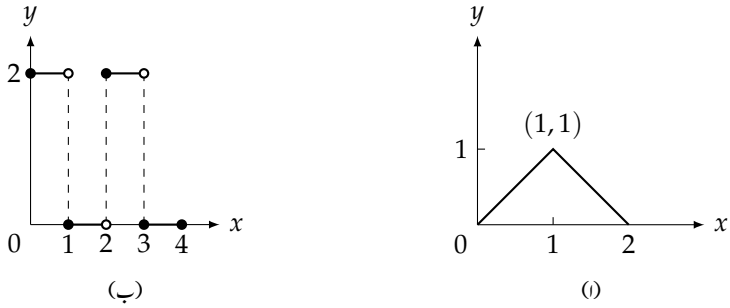
سوال ۱.۱۵۸: شکل ۱.۳۱ میں دیے تفاعل کی مساوات تلاش کریں۔

عدد صحیح چھتے اور زمینے تفاعل

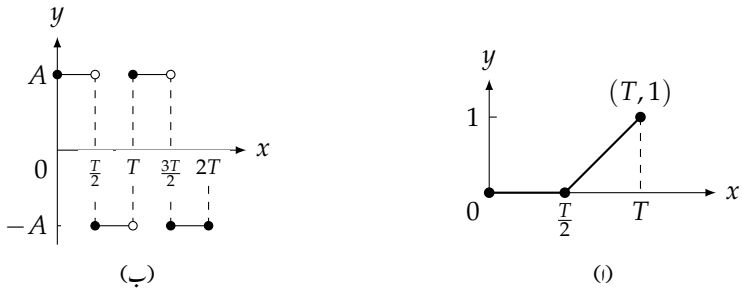
سوال ۱.۱۵۹: x کی کن قیمتوں کے لیے (الف) $\lfloor x \rfloor = 0$ ہوگا؟ (ب) $\lceil x \rceil = 0$ ہوگا؟

سوال ۱.۱۶۰: کون سے عدد صحیح x مساوات $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$ کو مطمئن کرتے ہیں؟

سوال ۱.۱۶۱: کیا تمام x کے لیے $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor$ ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔



شکل ۱.۳۰: اشکال برائے سوال ۱.۱۵۷



شکل ۱.۳۱: اشکال برائے سوال ۱.۱۵۸

سوال ۱.۱۶۲: درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔ $f(x)$ کو x کا عدد صحیح حصہ کیوں کہتے ہیں۔

$$f(x) = \begin{cases} \left|\left|\lfloor x \rfloor\right|\right|, & x \geq 0 \\ \left|\left|\lceil x \rceil\right|\right|, & x < 0 \end{cases}$$

جفت اور طاق تفاعل

سوال ۱.۱۶۳: فرض کریں کہ f جفت تفاعل اور g طاق تفاعل ہیں اور دونوں تفاعل مکمل حقیقی خط $\Re$ پر معین ہیں۔ درج ذیل میں سے کون سے تفاعل (جب معین ہوں تب) جفت ہیں اور کون سے طاق ہیں؟

ا. fg

ب. $\frac{f}{g}$

ج. $\frac{g}{f}$

د. $f^2 = ff$

ھ. $g^2 = gg$

و. $f \circ g$

ز. $g \circ f$

ح. $f \circ f$

ط. $g \circ g$

سوال ۱.۱۶۴: کیا ایک تفاعل جفت اور طاق دونوں ہو سکتا ہے؟ جواب کی وجہ بیان کریں۔

ترسیم

سوال ۱.۱۶۵: تفاعل $f(x) = \sqrt{x}$ اور $g(x) = \sqrt{1-x}$ ترسیم کریں۔ ساتھ ہی ان کا (الف) مجموعہ (ب) حاصل ضرب (پ) دونوں فرق اور (ت) دونوں حاصل تقسیم بھی ترسیم کریں۔

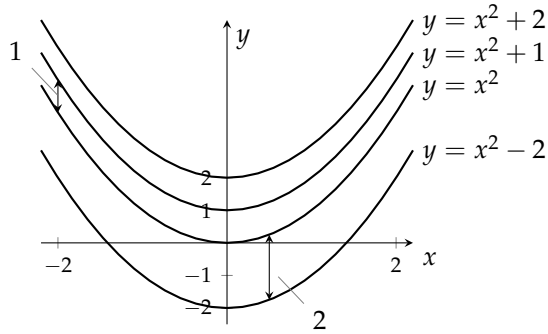
سوال ۱.۱۶۶: فرض کریں کہ $f(x) = x - 7$ اور $g(x) = x^2$ ہیں۔ f اور g کے ساتھ $f \circ g$ اور $g \circ f$ بھی ترسیم کریں۔

۱.۴ ترسیم کی منتقلی

اس حصہ میں مساوات کو یوں تبدیل کرنا سیکھتے ہیں کہ اس کی ترسیم دائیں، بائیں، اوپر یا نیچے منتقل ہو۔ ایسا کرنے سے نئے مقام پر جانی پہچانی ترسیم کو جلد پہچاننے میں مدد ملتی ہے۔ اسی طرح غیر جانی پہچانی مساوات کی ترسیم بنانے میں بھی مدد مل سکتی ہے۔ ہم دائرہ اور قطع مکافی کو مثال بناتے ہوئے اس عمل کو سیکھتے ہیں۔ یہ عمل ہر منحنی پر قابل لاگو ہے۔

ترسیم کیسے منتقل کی جاتی ہے

تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم کو اوپر منتقل کرنے کی خاطر کلیہ $y = f(x)$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ مستقل جمع کیا جاتا ہے۔



شکل ۱.۳۲: تفاعل $f(x) = x^2$ کی منحنی اوپر (نیچے) منتقل کرنے کی خاطر کلیہ کے دائیں ہاتھ مثبت (منفی) مستقل جمع کریں (مثال ۱.۳۰ اور مثال ۱.۳۱)۔

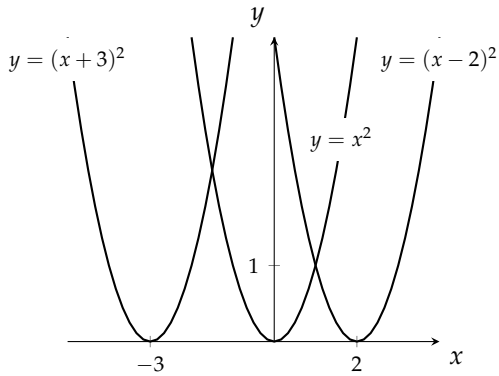
مثال ۱.۳۰: کلیہ $y = x^2$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ 1 جمع کرنے سے $y = x^2 + 1$ حاصل ہوتا ہے جو منحنی کو 1 اکائی اوپر منتقل کرتا ہے (شکل ۱.۳۲)۔ □

مثال ۱.۳۱: مساوات $y = x^2$ کے دائیں ہاتھ کے ساتھ -2 جمع کرنے سے $y = x^2 - 2$ ملتا ہے جو ترسیم کو 2 اکائیاں نیچے منتقل کرتی ہے (شکل ۱.۳۲)۔ □

مثال ۱.۳۲: $y = x^2$ میں x کے ساتھ 3 جمع کرتے ہوئے ترسیم 3 اکائیاں بائیں منتقل ہوتی ہے (شکل ۱.۳۳)۔ □

$y = f(x)$ کی ترسیم کی دائیں منتقلی کے لیے x کے ساتھ منفی مستقل جمع کریں۔

مثال ۱.۳۳: $y = x^2$ میں x کے ساتھ -2 جمع کرنے سے $y = (x-2)^2$ حاصل ہوتا ہے جو ترسیم کو 2 اکائیاں دائیں منتقل کرتا ہے (شکل ۱.۳۳)۔ □



شکل ۱.۳۳: $y = x^2$ کی ترسیم کی دائیں منتقلی کی خاطر x کے ساتھ مثبت مستقل جمع کریں۔ دائیں منتقلی کی خطر منفی مستقل جمع کریں۔ (مثال ۱.۳۲ اور مثال ۱.۳۳)

منتقلی کے کلیات

انتصابی منتقلی
$$y = f(x) + k$$

$k > 0$ کی صورت میں ترسیم k اکائیاں اوپر منتقل ہوتی ہے جبکہ $k < 0$ کی صورت میں ترسیم $|k|$ اکائیاں نیچے منتقل ہوتی ہے۔

افقی منتقلی
$$y = f(x - h)$$

$h > 0$ کی صورت میں ترسیم h اکائیاں دائیں منتقل ہوتی ہے جبکہ $h < 0$ کی صورت میں ترسیم $|h|$ اکائیاں بائیں منتقل ہوتی ہے۔

مثال ۱.۳۴: $y = (x-2)^2 + 3$ تفاعل $y = x^2$ کی ترسیم کو 3 اکائیاں اوپر اور 2 اکائیاں دائیں منتقل کرتی ہے۔ □

مساوات دائرہ

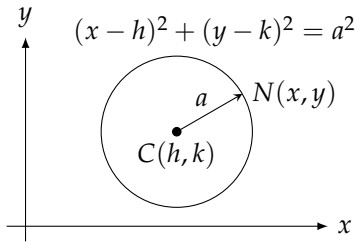
ایک مستوی میں رہتے ہوئے اس مستوی میں کسی مقررہ نقطہ سے مستقل فاصلے پر تمام نقطوں کے سلسلہ کو **دائرہ**[۵۴] کہتے ہیں۔ اس مقررہ نقطہ کو دائرے کا **مرکز**[۵۵] کہتے ہیں جبکہ اس مستقل فاصلہ کو **رداس**[۵۶] کہتے ہیں۔ (شکل ۱.۳۴)۔ ہم نے مثال ۱.۱۱ میں دیکھا کہ مبدا کے گرد رداس a کے دائرے کی مساوات $x^2 + y^2 = a^2$ ہے۔ مرکز کو (h, k) منتقل کرتے ہوئے دائرے کی مساوات $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ حاصل ہوتی ہے۔

رداس a کا دائرہ جس کا مرکز (h, k) ہو، کی معیاری مساوات

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2 \tag{۱}$$

---

[۵۴] circle
[۵۵] center
[۵۶] radius



شکل ۱.۳۴: xy مستوی میں h, k کے گرد رداس a کا دائرہ

مثال ۱.۳۵: دائرہ $x^2+y^2 = 25$ کو 2 اکائیاں بائیں اور 3 اکائیاں اوپر منتقل کیا جاتا ہے۔ نئی مساوات $(x+2)^2+(y-3)^2 = 25$ ہو گی۔ اس کا مرکز $(-2,3)$ ہو گا۔ □

مثال ۱.۳۶: رداس 2 کا دائرہ جس کا مرکز $3, 4$ پر ہو کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$(x-3)^2+(y-4)^2=2^2$$

□

مثال ۱.۳۷: درج ذیل دائرے کی مرکز اور رداس تلاش کریں۔

$$(x-1)^2+(y+5)^2=3$$

حل

اس کا دائرے کی معیاری مساوات کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے رداس $a=\sqrt{3}$ اور مرکز $(h,k)=(1,-5)$ لکھے جا سکتے ہیں۔ □

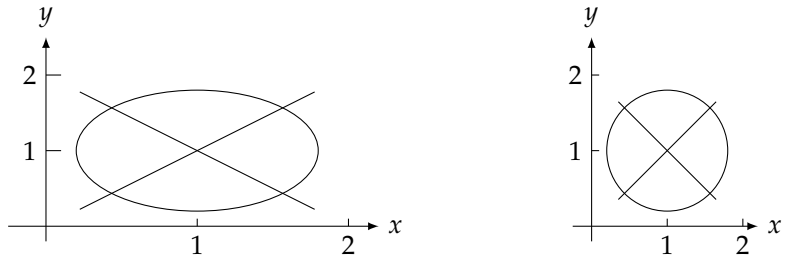
کمپیوٹر چوکور نقش

چوکور نقش سے مراد ایسا نقش ہے جس میں افقی اور انتصابی محدد کی پیمائش ایک سی ہو۔ چوکور نقش میں تفاعل کی اصل صورت نظر آتی ہے۔ غیر چوکور نقش میں ترسیم کی شکل بگڑ جاتی ہے۔ چوکور نقش سے مراد کمپیوٹر کا شیشہ نہیں ہے۔ بعض اوقات مکمل ترسیم یا ترسیم کا بیشتر حصہ دکھانے کی خاطر کمپیوٹر ریاضیاتی پروگرام x اور y محدد کی پیمائش غیر یکساں کرتے ہیں۔ یوں دکھائی گئی ترسیم اصل صورت پیش نہیں کرے گی۔ عموماً کمپیوٹر پروگرام کو بتلایا جا سکتا ہے کہ وہ چوکور ترسیم ہی دکھائے۔ شکل ۱.۳۵ میں چوکور اور غیر چوکور نقش پر دائرہ اور آپس میں قائمہ خطوط دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر چوکور نقش غیر یقینی اشکال پیش کرتا ہے اور اس پر کھڑی نظر رکھنا ضروری ہے۔

اگر دائرے کی مساوات معیاری صورت میں نہ دی گئی ہو تب ہم مربع مکمل کرتے ہوئے معیاری مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال ۱.۳۸: درج ذیل دائرہ کا رداس اور مرکز تلاش کریں۔

$$x^2+y^2+4x-6y-3=0$$



(ا) چوکور نقش میں اصل صورت نظر آتی ہے (ب) غیر چوکور نقش میں اصل صورت نظر نہیں آتی ہے

شکل ۱.۳۵: چوکور اور غیر چوکور نقش

۹۵۶ **حل** ہم مربع مکمل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x^2+y^2+4x-6y-3&=0\\ x^2+4x+y^2-6y&=3\\ x^2+4x+4-4+y^2-6y+9-9&=3\\ (x+2)^2-4+(y-3)^2-9&=3\\ (x+2)^2+(y-3)^2&=16=4^2 \end{aligned}$$

۹۵۷ یوں رداس $a=4$ اور مرکز $(h,k)=(-2,3)$ ہیں۔ □

۹۵۸ **اندرون اور بیرون**

۹۵۹ دائرہ $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$ کے اندر وہ نقطے پائے جاتے ہیں جن کا (h,k) سے فاصلہ a اکائیوں سے کم ہو۔ یہ نقطے درج ذیل
۹۶۰ عدم مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$(x-h)^2+(y-k)^2<a^2$$

۹۶۱ اس خطہ کو دائرے کا **اندرون**[۵۷] کہتے ہیں (شکل ۱.۳۶)۔

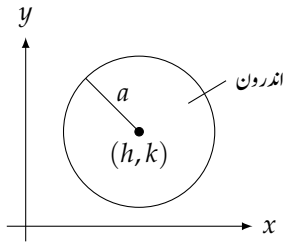
۹۶۲ دائرے کی **بیرون**[۵۸] ان نقطوں پر مشتمل ہو گا جن کا (h,k) سے فاصلہ a اکائیوں سے زیادہ ہو۔ ایسے نقطے درج ذیل مساوات مطمئن کرتے ہیں۔

$$(x-h)^2+(y-k)^2>a^2$$

۹۶۳

---

[۵۷] interior
[۵۸] exterior



شکل ۱.۳۶: دائرے کا اندرون

۹۶۴ مثال ۱.۳۹:

خطہ	عدم مساوات
اکائی دائرے کا اندرون	$x^2 + y^2 < 1$
اکائی دائرہ اور اس کا اندرون	$x^2 + y^2 \leq 1$
اکائی دائرے کی بیرون	$x^2 + y^2 > 1$
اکائی دائرہ اور اس کی بیرون	$x^2 + y^2 \geq 1$

۹۶۵ □

۹۶۶ قطع مکافی ترسیم

۹۶۷ مساوات $y = 3x^2$ یا $y = -5x^2$ جن کی عمومی صورت درج ذیل ہے

$$y = ax^2$$

۹۶۸ کی ترسیم کو **قطع مکافی**[۵۹] کہتے ہیں جس کی **محور**[۶۰] تشاکل محور y ہے۔ اس قطع مکافی کا **راس**[۶۱] (جہاں قطع مکافی اور محور ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں) مبدا
۹۶۹ پر پائی جاتی ہے۔ مثبت a $(a > 0)$ کی صورت میں قطع مکافی اوپر رخ کھلتا ہے جبکہ منفی a $a < 0$ کی صورت میں قطع مکافی نیچے کو کھلتا ہے۔ $|a|$
۹۷۰ کی قیمت جتنی زیادہ ہو قطع مکافی اتنا تنگ ہو گا (شکل ۱.۳۷)۔

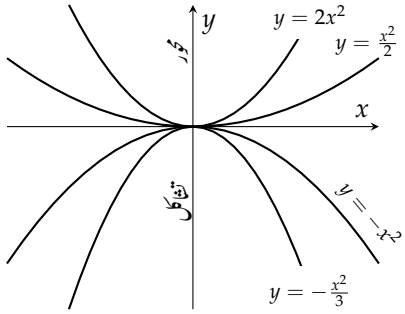
۹۷۱ کلیہ $y = ax^2$ میں x اور y آپس میں ادل بدل کرنے سے درج ذیل کلیہ حاصل ہو گا۔

$$x = ay^2$$

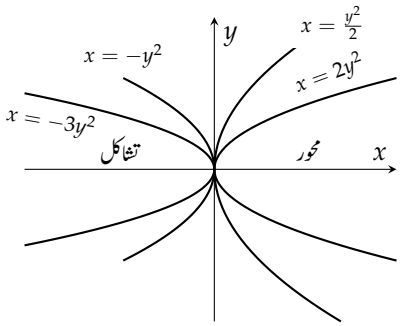
۹۷۲ اس قطع مکافی کی ترسیم کا محور، محور x ہو گا اور اس کا راس مبدا پر پایا جائے گا (شکل ۱.۳۸)۔

---

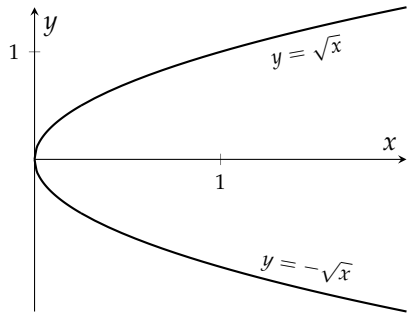
[۵۹] parabola
[۶۰] axis
[۶۱] vertex



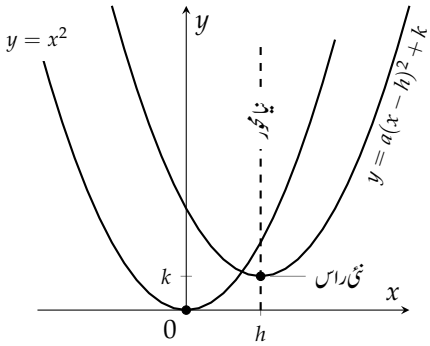
شکل ۱.۳۷: قطع مکافی $y = ax^2$



شکل ۱.۳۸: قطع مکافی $x = ay^2$



شکل ۱.۳۹: تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور $y = -\sqrt{x}$ کی ترسیمات مبدا پر ملتی ہیں اور مساوات $x = y^2$ کی ترسیم دیتی ہیں (مثال ۱.۴۰)



شکل ۱.۴۰: قطع مکافی $y = ax^2,\ a > 0$ کو h اکائیاں دائیں اور k اکائیاں اوپر منتقل کیا گیا ہے

مثال ۱.۴۰: کلیہ $x = y^2$ ہمیں x بطور y کا تفاعل دیتا ہے لیکن یہ ہمیں y بطور x کا تفاعل نہیں دیتا۔ y کے لیے حل کرتے ہوئے $y = \mp\sqrt{x}$ حاصل ہوتا ہے جو ہر مثبت x کے لیے y کی دو قیمتیں دیتا ہے جبکہ تفاعل کی تعریف کی رو سے اس کو صرف ایک قیمت دینی چاہیے۔

ان مساوات کو دو علیحدہ علیحدہ تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور $y = -\sqrt{x}$ تصور کیا جا سکتا ہے چونکہ اب ہر مثبت x کے لیے یہ کلیات y کی ایک قیمت دیتے ہیں۔ $y = \sqrt{x}$ کی ترسیم قطع مکافی کا بالائی حصہ اور $y = -\sqrt{x}$ قطع مکافی کا نچلا حصہ دیتی ہے (شکل ۱.۳۹)۔

□

دو درجی مساوات $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

قطع مکافی $y = ax^2$ کو دائیں یا بائیں منتقل کرنے کی خاطر ہم

$$y = a(x-h)^2 \tag{۲}$$

لکھتے ہیں اور اس کو انتصابی بھی منتقل کرنے کی خاطر ہم

$$y - k = a(x-h)^2 \tag{۳}$$

لکھتے ہیں۔ دونوں منتقلی سے قطع مکافی کا راس (h,k) کو منتقل ہوتا ہے جبکہ اس کا محور $x = k$ ہو گا (شکل ۱.۴۰)۔

مساوات ۳ کے دائیں ہاتھ کو کھول کر لکھنے سے درج ذیل صورت کی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$y = ax^2 + bx + c \tag{۴}$$

جس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ طرز کی ہر مساوات کی ترسیم درحقیقت $y = ax^2$ کی ترسیم ہو گی جو کہیں اور منتقل کی گئی ہے۔ کیوں؟ اس لیے کہ جس طرح مساوات ۳ سے مساوات ۴ حاصل کی گئی اسی طرح مساوات ۴ سے واپس مساوات ۳ بھی حاصل کی جا سکتی ہے۔ منحنی $y = ax^2 + bx + c$ اور $y = ax^2$ کی صورتیں ایک سی اور سمت بندی ایک سی ہیں۔

قطع مکافی $y = ax^2 + bx + c$ کا محور خط $x = -\frac{b}{2a}$ ہو گا۔ اس کا قطع y حاصل کرنے کی خاطر $x = 0$ پُر کیا جائے گا۔

منحنی $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ کی ترسیم مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کی ترسیم قطع مکافی ہے جو $a > 0$ کی صورت میں اوپر رخ اور $a < 0$ کی صورت میں نیچے رخ کھلتی ہے۔ اس کا محور درج ذیل خط ہے۔

$$x = -\frac{b}{2a} \tag{۵}$$

اس کا راس اس نقطے پر ہو گا جہاں قطع مکافی اور محور آپس میں ملتے ہوں۔ راس کا x محدد $x = -\frac{b}{2a}$ ہو گا جس کو قطع مکافی کی مساوات میں پر کرتے ہوئے راس کا y محدد حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال ۱.۴۱: ترسیم قطع مکافی

مساوات $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$ ترسیم کریں۔

حل

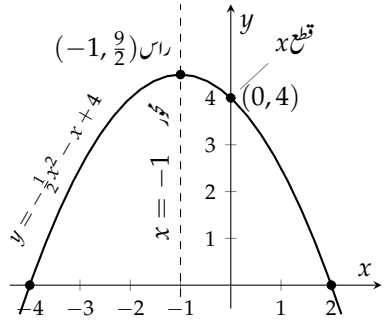
پہلا قدم: مساوات $y = ax^2 + bx + c$ کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -1, \quad c = 4$$

دوسرا قدم: چونکہ $a < 0$ ہے لہٰذا قطع مکافی نیچے کھلا ہے۔

تیسرا قدم: قطع مکافی کا محور اور راس تلاش کرتے ہیں۔ اس کا محور درج ذیل خط ہے۔

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-1)}{2(-\frac{1}{2})} = -1$$



شکل ۱.۴۱: ترسیم قطع مکافی (مثال ۱.۴۱)

۹۹۷ یوں راس کا x محدد -1 ہے جس کو دی گئی مساوات میں پر کرتے ہوئے راس کا y محدد حاصل کرتے ہیں۔

$$y = -\frac{1}{2}(-1)^2 - (-1) = \frac{9}{2}$$

۹۹۸ اس طرح راس $(-1, \frac{9}{2})$ ہوگا۔

۹۹۹ **چوتھا قدم:** قطع x (اگر پایا جاتا ہو) تلاش کرتے ہیں۔

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + 4 = 0$$ قطع مکافی کی مساوات میں $y = 0$ پر کریں

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$ دو درجی مساوات کو کسی بھی طریقہ سے حل کریں $(x-2)(x+4) = 0$

$$x = 2, \quad x = -4$$

۱۰۰۰ **پانچواں قدم:** $y = ax^2$ کا خاکہ بناتے ہوئے منتقلی اور تشاکل کے اصول استعمال کریں۔ xy محور بھی کھینچیں (شکل ۱.۴۱)۔ □

۱۰۰۱ **سوالات**

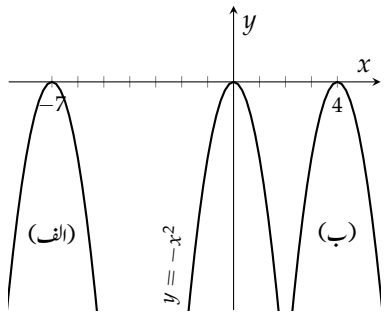
۱۰۰۲ **ترسیم کی منتقلی**

۱۰۰۳ سوال ۱.۱۶۷: شکل ۱.۴۲ میں $y = -x^2$ کی ترسیم اور اس کی منتقل کردہ اشکال دکھائی گئی ہیں۔ منتقل شدہ ترسیم کی مساواتیں لکھیں۔

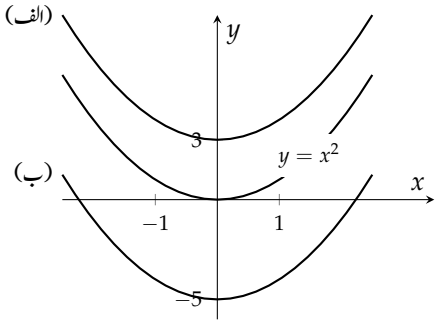
۱۰۰۴ سوال ۱.۱۶۸: شکل ۱.۴۳ میں $y = x^2$ کی ترسیم اور اس کی منتقل شدہ اشکال دکھائی گئی ہیں۔ منتقل کردہ ترسیم کی مساواتیں لکھیں۔

۱۰۰۵ سوال ۱.۱۶۹: شکل ۱.۴۴ میں دکھائی گئی ترسیم کی مساوات کو درج ذیل سے منتخب کریں۔

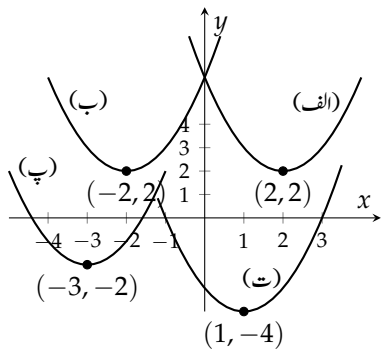
$$y = (x-1)^2 - 4, \quad y = (x-2)^2 + 2, \quad y = (x+2)^2 + 2, \quad y = (x+3)^2 - 2$$



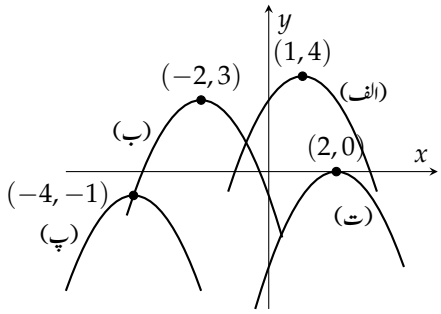
شکل ۱.۴۲: اشکال برائے سوال ۱.۱۶۷



شکل ۱.۴۳: اشکال برائے سوال ۱.۱۶۸



شکل ۱.۴۴: اشکال برائے سوال ۱.۱۶۹



شکل ۱.۴۵: اشکال برائے سوال ۱.۱۷۰

سوال ۱.۱۷۰: شکل ۱.۴۵ میں $y = -x^2$ کو چار جگہ منتقل دکھایا گیا ہے۔ چاروں ترسیم کی مساوات لکھیں۔

سوال ۱.۱۷۱ تا سوال ۱.۱۸۲ میں ترسیم منتقل کریں۔ منتقل شدہ ترسیم کی مساوات حاصل کریں۔ اصل اور منتقل شدہ ترسیمات کھینچیں۔

سوال ۱.۱۷۱: $x^2 + y^2 = 49$ کو 3 نیچے، 2 بائیں منتقل کریں۔

سوال ۱.۱۷۲: $x^2 + y^2 = 25$ کو 3 اوپر، 4 بائیں منتقل کریں۔

سوال ۱.۱۷۳: $y = x^3$ کو 1 نیچے، 1 بائیں منتقل کریں۔

سوال ۱.۱۷۴: $y = x^{\frac{2}{3}}$ کو 1 نیچے، 1 دائیں منتقل کریں۔

سوال ۱.۱۷۵: $y = \sqrt{x}$ کو 0.81 بائیں منتقل کریں۔

سوال ۱.۱۷۶: $y = -\sqrt{x}$ کو 3 دائیں منتقل کریں۔

سوال ۱.۱۷۷: $y = 2x - 7$ کو 7 اوپر منتقل کریں۔

سوال ۱.۱۷۸: $y = \frac{1}{2}(x+1) + 5$ کو 5 نیچے، 1 دائیں منتقل کریں۔

سوال ۱.۱۷۹: $y = x^2$ کو 1 بائیں منتقل کریں۔

سوال ۱.۱۸۰: $x = -3y^2$ کو 2 اوپر، 3 دائیں منتقل کریں۔

سوال ۱.۱۸۱: $y = \frac{1}{x}$ کو 1 اوپر، 1 دائیں منتقل کریں۔

سوال ۱.۱۸۲: $y = \frac{1}{x^2}$ کو 1 نیچے، 2 بائیں منتقل کریں۔

سوال ۱.۱۸۳ تا سوال ۱.۲۰۲ میں تفاعل ترسیم کریں۔ صفحہ ۳۲ پر شکل ۱.۲۱ میں دی گئی ترسیم کا سہارا لیں۔

سوال ۱.۱۸۳: $y = \sqrt{x+4}$

سوال ۱.۱۸۴: $y = \sqrt{9-x}$

سوال ۱.۱۸۵: $y = |x-2|$

سوال ۱.۱۸۶: $y = |1 - x| - 1$

سوال ۱.۱۸۷: $y = 1 + \sqrt{x - 1}$

سوال ۱.۱۸۸: $y = 1 - \sqrt{x}$

سوال ۱.۱۸۹: $y = (x + 1)^{\frac{2}{3}}$

سوال ۱.۱۹۰: $y = (x - 8)^{\frac{2}{3}}$

سوال ۱.۱۹۱: $y = 1 - x^{\frac{2}{3}}$

سوال ۱.۱۹۲: $y + 4 = x^{\frac{2}{3}}$

سوال ۱.۱۹۳: $y = \sqrt[3]{x - 1} - 1$

سوال ۱.۱۹۴: $y = (x + 2)^{\frac{3}{2}} + 1$

سوال ۱.۱۹۵: $y = \frac{1}{x-2}$

سوال ۱.۱۹۶: $y = \frac{1}{x} - 2$

سوال ۱.۱۹۷: $y = \frac{1}{x} + 2$

سوال ۱.۱۹۸: $y = \frac{1}{x+2}$

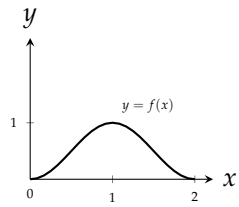
سوال ۱.۱۹۹: $y = \frac{1}{(x-1)^2}$

سوال ۱.۲۰۰: $y = \frac{1}{x^2} - 1$

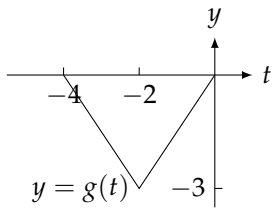
سوال ۱.۲۰۱: $y = \frac{1}{x^2} + 1$

سوال ۱.۲۰۲: $y = \frac{1}{(x+1)^2}$

سوال ۱.۲۰۳: شکل ۱.۴۶ میں دکھائے گئے تفاعل $f(x)$ کا دائرہ کار $[0, 2]$ ہے اور تفاعل کی سعت $[0, 1]$ ہے۔ درج ذیل تفاعل کا دائرہ کار اور تفاعل کی سعت تلاش کرتے ہوئے نئے تفاعل کا خاکہ بنائیں۔



شکل ۱.۴۶: تفاعل برائے سوال ۱.۲۰۳



شکل ۱.۴۷: تفاعل برائے سوال ۱.۲۰۴

۱.۲۰۳ ا. $f(x)+2$ ۱.۲۰۵ ج. $2f(x)$ ۱.۲۰۷ ھ. $f(x+2)$ ۱.۲۰۹ ز. $f(-x)$

۱.۲۰۴ ب. $f(x)-1$ ۱.۲۰۶ د. $-f(x)$ ۱.۲۰۸ و. $f(x-1)$ ۱.۲۱۰ ح. $-f(x+1)+1$

۱.۲۰۵ سوال ۱.۲۰۴: شکل ۱.۴۷ میں دکھائے گئے تفاعل $g(t)$ کا دائرہ کار $[-4,0]$ اور سعت $[-3,0]$ ہے۔ درج ذیل تفاعل کے دائرہ کار اور سعت تلاش کرتے ہوئے نئے تفاعل کا خاکہ بنائیں۔

۱.۲۰۳ ا. $g(-t)$ ۱.۲۰۵ ج. $g(t)+3$ ۱.۲۰۷ ھ. $g(-t+2)$ ۱.۲۰۹ ز. $g(1-t)$

۱.۲۰۴ ب. $-g(t)$ ۱.۲۰۶ د. $1-g(t)$ ۱.۲۰۸ و. $g(t-2)$ ۱.۲۱۰ ح. $-g(t-4)$

دائرے

سوال ۱.۲۰۵ تا سوال ۱.۲۱۰ میں دائرے کا رداس a اور مرکز $C(h,k)$ دیا گیا ہے۔ دائرے کی مساوات لکھیں۔ دائرہ اور دائرے کے مرکز کا مستوی xy میں خاکہ کھینچیں۔ دائرے کا قطع x اور قطع y (اگر پائے جاتے ہوں) کی نشاندہی کریں اور اس کے محدد لکھیں۔

سوال ۱.۲۰۵: $C(0,2), \quad a=2$

سوال ۱.۲۰۶: $C(-3,0), \quad a=3$

سوال ۱.۲۰۷: $C(-1,5), \quad a=\sqrt{10}$

سوال ۱.۲۰۸: $C(1,1), \quad a=\sqrt{2}$

سوال ۱.۲۰۹: $C(-\sqrt{3},-2), \quad a=2$

سوال ۱.۲۱۰: $C(3,\frac{1}{2}), \quad a=5$

سوال ۱.۲۱۱ تا سوال ۱.۲۱۶ میں دیے گئے دائرے ترسیم کریں۔ دائرے کا مرکز اور قطع x، قطع y (اگر پائے جاتے ہوں) کے محدد دکھائیں۔

سوال ۱.۲۱۱: $x^2+y^2+4x-4y+4=0$

سوال ۱.۲۱۲: $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 16 = 0$

سوال ۱.۲۱۳: $x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$

سوال ۱.۲۱۴: $x^2 + y^2 - 4x - \frac{9}{4} = 0$

سوال ۱.۲۱۵: $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$

سوال ۱.۲۱۶: $x^2 + y^2 + 2x = 3$

قطع مکافی

سوال ۱.۲۱۷ تا سوال ۱.۲۲۴ میں دیے گئے قطع مکافی ترسیم کریں۔ راس، محور اور قطع x ، قطع y بھی ظاہر کریں۔

سوال ۱.۲۱۷: $y = x^2 - 2x - 3$

سوال ۱.۲۱۸: $y = x^2 + 4x + 3$

سوال ۱.۲۱۹: $y = -x^2 + 4x$

سوال ۱.۲۲۰: $y = -x^2 + 4x - 5$

سوال ۱.۲۲۱: $y = -x^2 - 6x - 5$

سوال ۱.۲۲۲: $y = 2x^2 - x + 3$

سوال ۱.۲۲۳: $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

سوال ۱.۲۲۴: $y = -\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$

سوال ۱.۲۲۵: قطع مکافی $y = x - x^2$ ترسیم کرتے ہوئے $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال ۱.۲۲۶: قطع مکافی $y = 3 - 2x - x^2$ ترسیم کرتے ہوئے $g(x) = \sqrt{3 - 2x - x^2}$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

عدم مساوات

سوال ۱.۲۲۷ تا سوال ۱.۲۳۴ میں دیے گئے عدم مساوات اور عدم مساوات کی جوڑیوں پر تبصرہ کریں۔

سوال ۱.۲۲۷: $x^2 + y^2 > 7$

سوال ۱.۲۲۸: $x^2 + y^2 < 5$

سوال ۱.۲۲۹: $(x-1)^2 + y^2 \leq 4$

سوال ۱.۲۳۰: $x^2 + (y-2)^2 \geq 4$

سوال ۱.۲۳۱: $x^2 + y^2 > 1, \quad x^2 + y^2 < 4$

سوال ۱.۲۳۲: $x^2 + y^2 \leq 4, \quad (x+2)^2 + y^2 \leq 4$

سوال ۱.۲۳۳: $x^2 + y^2 + 6y < 0, \quad y > -3$

سوال ۱.۲۳۴: $x^2 + y^2 - 4x + 2y > 4, \quad x > 2$

سوال ۱.۲۳۵: ایسی عدم مساوات لکھیں جو رداس $\sqrt{6}$ کے دائرہ جس کا مرکز $(-2, 1)$ ہو کے اندر نقطوں کو ظاہر کرتی ہو۔

سوال ۱.۲۳۶: رداس 4 اور مرکز $(-4, 2)$ والے دائرے کے باہر نقطوں کے لیے عدم مساوات لکھیں۔

سوال ۱.۲۳۷: رداس 2 اور مرکز $(0, 0)$ والے دائرے پر یا اس کے اندر، اور نقطہ $(1, 0)$ سے گزرتا انتصابی خط پر یا اس کے دائیں جانب نقطوں کو عدم مساوات کی جوڑی کی صورت میں لکھیں۔

سوال ۱.۲۳۸: رداس 2 اور مرکز $(0, 0)$ والے دائرے کے باہر اور ایسے دائرہ، جس کا مرکز $(1, 3)$ ہو اور جو مبدا سے گزرتا ہو، کے اندر نقطوں کو عدم مساوات کی جوڑی کی صورت میں لکھیں۔

منتقلی خطوط

سوال ۱.۲۳۹: خط $y = mx$ جو مبدا سے گزرتا ہے کو افقی اور انتصابی منتقل کیا جاتا ہے تاکہ یہ نقطہ (x_0, y_0) سے گزرے۔ نئے خط کی مساوات تلاش کریں (جس کو ڈھلوان و نقطوی مساوات کہتے ہیں)۔

سوال ۱.۲۴۰: خط $y = mx$ کو انتصابی منتقل کیا جاتا ہے تاکہ یہ نقطہ $(0, b)$ سے گزرے۔ نئے خط کی مساوات تلاش کریں۔

خطوط، دائرے اور قطع مکافی کا ایک دوسرے کو قطع کرنا

سوال ۱.۲۴۱ تا سوال ۱.۲۴۸ میں دیے دو مساوات ترسیم کرتے ہوئے ان نقطوں کو تلاش کریں جہاں یہ خطوط ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

سوال ۱.۲۴۱: $y = 2x, \quad x^2 + y^2 = 1$

سوال ۱.۲۴۲: $x + y = 1, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$

سوال ۱.۲۴۳: $y - x = 1, \quad y = x^2$

سوال ۱.۲۴۴: $x + y = 0, \quad y = -(x-1)^2$

سوال ۱.۲۴۵: $y = -x^2, \quad y = 2x^2 - 1$

سوال ۱.۲۴۶: $y = \frac{1}{4}x^2, \quad y = (x-1)^2$

سوال ۱.۲۴۷: $x^2 + y^2 = 1, \quad (x-1)^2 + y^2 = 1$

سوال ۱.۲۴۸: $x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y = 1$

سوال ۱.۲۴۹ تا سوال ۱.۲۵۲ میں مساوات $y = f(ax)$ میں مستقل a کی تبدیلی کے اثرات کو دیکھنے کی خاطر ہم $y = f(ax)$ کو کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کرتے ہیں۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کریں۔

ا. $y = f(x)$ کے ساتھ ساتھ $a = 2, 3, \cdots, 10$ لیتے ہوئے دیے گئے وقفے پر $y = f(ax)$ ترسیم کریں۔ a کی (مثبت) قیمت بڑھانے کے اثرات پر تبصرہ کریں۔

ب. $y = f(x)$ کے ساتھ ساتھ $a = -2, -3, \cdots, -10$ لیتے ہوئے دیے گئے وقفے پر $y = f(ax)$ ترسیم کریں۔ اب ترسیم پر اثرات کیا ہیں؟

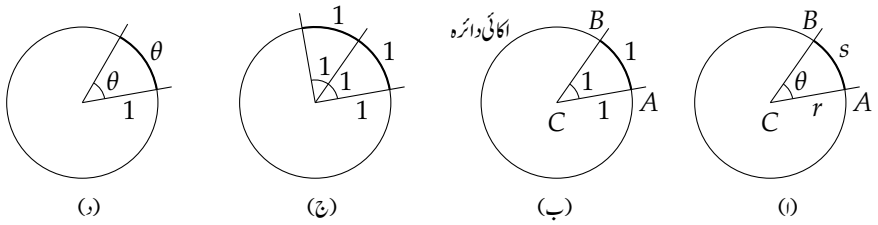
ج. $y = f(x)$ اور $y = f(ax)$ کو $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ کے لیے ترسیم کریں۔ ترسیم پر $|a| < 1$ کا کیا اثر پایا جاتا ہے؟

سوال ۱.۲۴۹: $f(x) = \frac{5x}{x^2+4}, \quad [-10, 10]$

سوال ۱.۲۵۰: $f(x) = \frac{2x(x-1)}{x^2+1}, \quad [-3, -2]$

سوال ۱.۲۵۱: $f(x) = \frac{x+1}{2x^2+1}, \quad [-2, -2]$

سوال ۱.۲۵۲: $f(x) = \frac{x^4-4x^3+10}{x^2+4}, \quad [-1, 4]$



شکل ۱.۴۸: ریڈیئن کی تعریف

۱.۵ تکونیاتی تفاعل

اس حصہ میں ریڈیئن، تکونی تفاعل، دوریت اور بنیادی تکونی مماثل پر غور کیا جائے گا۔

ریڈیئن

چھوٹی جماعتوں میں زاویوں کو درجات میں ناپا جاتا ہے۔ احصاء میں زاویے کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے جہاں 180° کو π ریڈیئن کہتے ہیں۔ ریڈیئن استعمال کرنے سے حساب آسان ہو جاتا ہے۔

شکل ۱.۴۸-ا میں رداس r کا دائرہ دکھایا گیا ہے جس کے مرکز C سے دو شعاعیں نکل رہی ہیں جو مرکز پر وسطی زاویہ θ بناتی ہیں۔ یہ شعاعیں دائرے کو A اور B پر قطع کرتی ہیں۔ قوس AB کی لمبائی s ہے۔ اگر دائرے کا رداس 1 (ایک) ہو، ہم اس دائرے کو **اکائی دائرہ**[۶۲] کہیں گے۔ اکائی دائرے پر اکائی لمبائی کی قوس، دائرے کے مرکز پر، جتنا زاویہ بناتی ہے اس کو ایک ریڈیئن زاویہ کہتے ہیں (یہی ایک ریڈیئن کی تعریف ہے)۔ شکل ۱.۴۸-ب میں ایک ریڈیئن کی اس تعریف کی وضاحت کی گئی ہے۔ شکل ۱.۴۸-ج میں اکائی لمبائی کی دو قوس ساتھ ساتھ رکھی گئی ہیں جو ایک ایک ریڈیئن کا وسطی زاویہ بناتی ہیں۔ یوں کل قوس کی لمبائی 2 ہے اور کل زاویہ 2 ریڈیئن ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اکائی دائرے پر وسطی زاویہ کی ریڈیئن میں ناپ قوس کی لمبائی کے برابر ہو گی۔ شکل ۱.۴۸-د میں یہ حقیقت دکھائی گئی ہے۔

زاویہ ACB کی ریڈیئن ناپ کی تعریف اکائی دائرے کی قوس AB کی لمبائی ہے۔ چونکہ اکائی دائرے کا محیط 2π ہے اور ایک مکمل چکر 360° ہے لہٰذا درج ذیل تعلق لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boxed{\pi \text{ ریڈیئن} = 180^\circ}$$

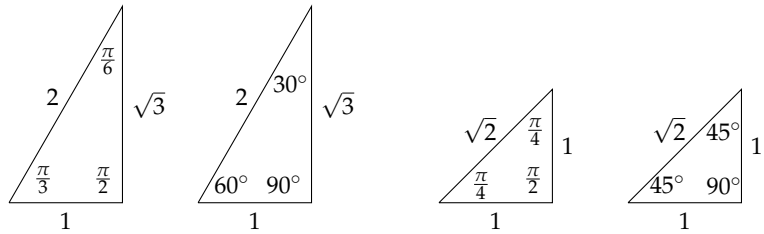
مثال ۱.۴۲: **درجہ سے ریڈیئن میں زاویے کی تبدیلی**

45° کو ریڈیئن میں لکھیں اور $\frac{\pi}{6}$ کو درجات میں لکھیں۔

حل

---

[۶۲] unitcircle



شکل ۱.۴۹: اشکال برائے مثال ۱.۴۲

۱۱۹۸ شکل ۱.۴۹ دیکھیں۔

$$45 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{4} \text{ ریڈیئن}$$
$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 30^\circ$$

۱۱۹۹ □

۱۲۰۰ **ریڈیئن اور درجہ**

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0.02 \text{ ریڈیئن}$$
$$1 \text{ ریڈیئن} = \frac{180}{\pi} \approx 57^\circ$$

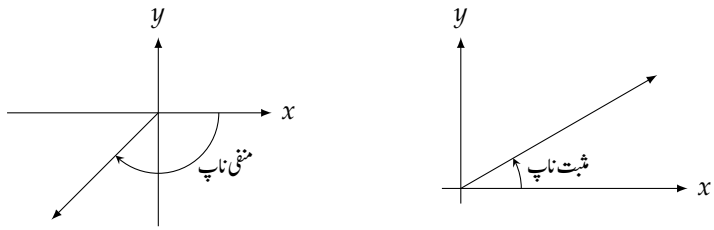
۱۲۰۱ دھیان رہے کہ زاویے کی پیائش درجات میں ہونے کو $^\circ$ کی علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ ریڈیئن کو بغیر علامت لکھا جاتا ہے۔ یوں $\theta = 45^\circ$ سے
۱۲۰۲ مراد پینتالیس درجہ ہو گا جبکہ $\theta = 3$ سے مراد تین ریڈیئن ہو گا۔

۱۲۰۳ مستوی xy میں شعاع کا راس مبدا پر اور شعاع کا ابتدائی مقام مثبت محور x پر ہونے کی صورت میں زاویہ کے مقام کو **معیاری مقام**[۴۳] کہتے ہیں۔ مثبت
۱۲۰۴ محور x سے گھڑی (کی سوئی کی حرکت کے) مخالف رخ زاویے کی ناپ مثبت اور گھڑی وار رخ زاویے کی ناپ منفی تصور کی جاتی ہے (شکل ۱.۵۰)۔ یوں مثبت
۱۲۰۵ محور x کا زاویہ 0 ریڈیئن اور منفی محور x کا زاویہ π ریڈیئن ہو گا۔

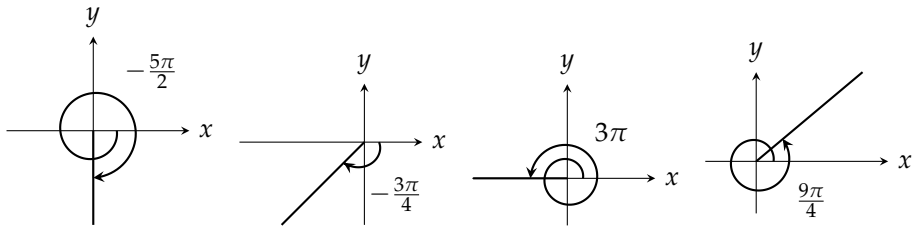
۱۲۰۶ گھڑی مخالف چکر کی بات کرتے ہوئے زاویے کی ناپ 2π یعنی 360° سے زیادہ ہو سکتی ہے۔ اسی طرح گھڑی وار رخ چکر بیان کرتے ہوئے زاویہ کی ناپ
۱۲۰۷ کچھ بھی ممکن ہے (شکل ۱.۵۱)۔

۱۲۰۸ شکل ۱.۵۲-ا میں چند اشکال کو لچکدار مستوی xy پر دکھایا گیا ہے۔ اس مستوی xy کو کھینچ کر x رخ اور y رخ کی لمبائیاں k گنا کرنے سے شکل
۱۲۰۹ ۱.۵۲-ب حاصل ہوتی ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ جسامت k گنا کر دی گئی ہے۔ یوں اگر بائیں شکل کے تکون کی افقی اور انتصابی اطراف کی لمبائیاں بالترتیب a اور
۱۲۱۰ b ہوں تب اس کی وتر کی لمبائی $\sqrt{a^2+b^2}$ ہو گی۔ دائیں شکل میں تکون کی افقی اور انتصابی اطراف کی لمبائیاں بالترتیب ka اور kb ہوں گی لہٰذا اس

[۴۳] standardposition



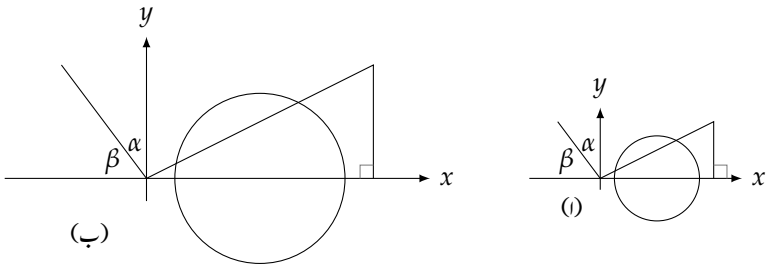
شکل ۱.۵۰: زاویے کی ناپ



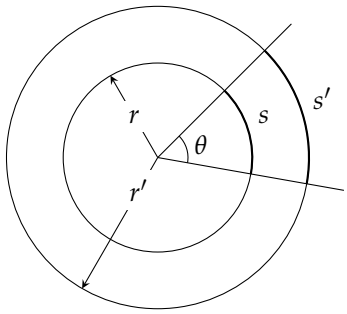
شکل ۱.۵۱: مثبت اور منفی ریڈیئن

کا وتر $\sqrt{(ka)^2+(kb)^2} = k\sqrt{a^2+b^2}$ ہو گا۔ آپ نے دیکھا کہ دائیں مستوی پر نا صرف افقی اور انتصابی خط بلکہ ترچھے خط کی لمبائی بھی k گنا ہو گئی ہے۔ چونکہ ہر ترچھے خط کو کسی تکون کا وتر تصور کیا جا سکتا ہے لہٰذا دائیں مستوی پر (ہر افقی اور ہر انتصابی خط کے ساتھ ساتھ) ہر ترچھے خط کی لمبائی k گنا ہو گی۔ کیا جسامت k گنا کرنے سے لمبائی قوس بھی k گنا ہو گی؟ اس کا جواب ہے "جی ہاں" جس کا ثبوت اب پیش کرتے ہیں۔

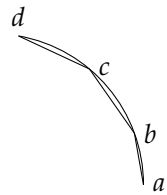
شکل ۱.۵۳ میں قوس کی لمبائی جاننے کی خطر قوس پر مختلف نقطے منتخب کرتے ہوئے ان کے بیچ سیدھے خط کھینچے گئے ہیں۔ ان سیدھے خطوط کی مجموعی لمبائی کو قوس کی تخمینی لمبائی تصور کیا جا سکتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قوس پر نقطوں کی تعداد بڑھا کر اس کو زیادہ ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے قوس کی لمبائی اور سیدھے خطوط کی مجموعی لمبائی میں فرق کو ہم جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں۔ اب اگر اس قوس کی جسامت کو k گنا کیا جائے تب ہر سیدھے خط کی لمبائی k گنا ہو گی لہٰذا ان کی



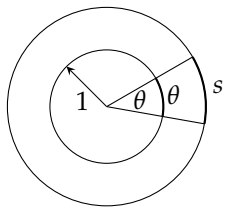
شکل ۱.۵۲: شکل کی جسامت بڑھانے یا گھٹانے کا زاویہ پر کوئی اثر نہیں۔

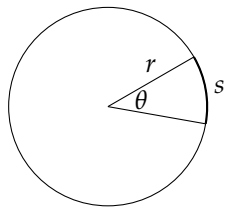


شکل ۱.۵۴: محیط دائرہ



شکل ۱.۵۳: قوس کی لمبائی





شکل ۱.۵۵: قوس، رداس، اور زاویے کا تعلق۔

مجموعی لمبائی (جو قوس کی لمبائی ہے) بھی k گنا ہو گی۔ (ثبوت مکمل ہوا۔)

شکل ۱.۵۵-ا میں رداس r کے دائرے پر قوس s اور وسطی زاویہ θ دکھائے گئے ہیں۔ اس دائرے کے مرکز پر ہم 1 رداس کا دائرہ بناتے ہیں (شکل ۱.۵۵-ب؛ اگر دیے گئے دائرے کا رداس اکائی سے کم ہو تب یہ دائرہ اکائی دائرے کے اندر نظر آئے گا)۔ (جیسا شکل ۱.۵۵-ب میں دکھایا گیا ہے) ریڈیئن کی تعریف کی رو سے اکائی دائرے پر قوس اور زاویہ آپس میں برابر ہوں گے۔ شکل ۱.۵۵-ب میں دونوں دائروں پر قوس کی لمبائیوں کا تناسب $\frac{s}{\theta}$ اور دائروں کے رداس کی لمبائیوں کا تناسب $\frac{r}{1}$ ایک سا ہوں گے، یعنی $\frac{s}{\theta} = \frac{r}{1}$ ہو گا، جس سے درج ذیل اہم ترین کلیہ ملتا ہے۔

قوس، رداس، اور زاویے کا تعلق

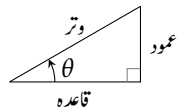
$$s = r\theta$$

زاویہ ناپنے کی روایت: ریڈیئن استعمال کریں

یہاں کے بعد اس کتاب میں زاویے کو ریڈیئن میں ناپا جائے گا۔ جہاں زاویے کو ریڈیئن میں نہیں ناپا گیا ہو وہاں صریحاً بتلایا جائے گا۔ یوں اگر ہم زاویہ $\frac{\pi}{6}$ کی بات کریں تب اس سے مراد $\frac{\pi}{6}$ ریڈیئن کا زاویہ ہو گا نا کہ $\frac{\pi}{6}$ درجے کا زاویہ۔

مثال ۱.۴۳: رداس 8 کے دائرے پر غور کریں۔ (الف) دائرے پر 2π لمبائی کی قوس، دائرے کے مرکز پر کیا وسطی زاویہ بناتی ہے۔ (ب) اس قوس کی لمبائی تلاش کریں جو $\frac{3\pi}{4}$ وسطی زاویہ بناتی ہو۔

حل

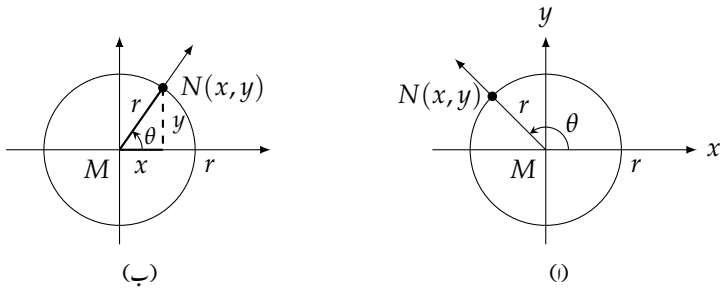


سائن $\sin\theta = \frac{\text{عمود}}{\text{وتر}}$, کوسیکنٹ $\csc = \frac{\text{وتر}}{\text{عمود}}$

کوسائن $\cos\theta = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{وتر}}$, سیکنٹ $\sec = \frac{\text{وتر}}{\text{قاعدہ}}$

ٹینجنٹ $\tan\theta = \frac{\text{عمود}}{\text{قاعدہ}}$, کوٹینجنٹ $\cot = \frac{\text{قاعدہ}}{\text{عمود}}$

شکل ۱.۵۶: قائمہ مثلث اور تکونیاتی تفاعل



شکل ۱.۵۷: تکونیاتی تفاعل

۱۲۲۹

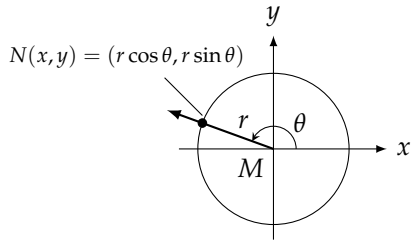
$$s = r\theta = 8(\tfrac{3\pi}{4}) = 6\pi \quad \text{(ب)} \qquad \theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \quad \text{(الف)}$$

۱۲۳۰ □

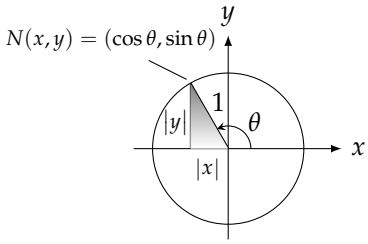
۱۲۳۱ چھ بنیادی تکونیاتی تفاعل

۱۲۳۲ آپ زاویہ حادہ کے تکونیاتی تفاعل سے بخوبی واقف ہوں گے جو قائمہ مثلث کے اطراف کی لمبائیوں کی تناسب سے حاصل ہوتے ہیں (شکل ۱.۵۶)۔ ہم انہیں
۱۲۳۳ تعریف کو وسعت دیتے ہوئے زاویہ منفرجہ اور منفی زاویوں پر بھی لاگو کرتے ہیں جہاں معیاری مقام پر رداس r کے دائرے میں زاویہ پایا جاتا ہے۔ ہم اب
۱۲۳۴ ان تکونیاتی تفاعل کو نقطہ $N(x,y)$ کے محدد کی صورت میں بیان کرتے ہیں جہاں مبدا سے خارج ہوتی ہوئی شعاع دائرے کو $N(x,y)$ پر قطع کرتی
۱۲۳۵ ہے۔

۱۲۳۶ شکل ۱.۵۷-ا کو دیکھتے ہوئے ان تفاعل کو یہاں پیش کرتے ہیں۔



شکل ۱.۵۸: مستوی میں کارتیسی محدد کا r اور θ میں اظہار۔



شکل ۱.۵۹: زاویہ θ کے لیے زاویہ حادہ تکون

۱۳۳۷ چھ تکونیاتی تفاعل

سائن	$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$	کوسیکنٹ	$\csc\theta = \dfrac{r}{y}$
کوسائن	$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$	سیکنٹ	$\sec\theta = \dfrac{r}{x}$
ٹینجنٹ	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$	کوٹینجنٹ	$\cot\theta = \dfrac{x}{y}$

۱۳۳۸ آپ شکل ۱.۵۷-ب سے دیکھ سکتے ہیں کہ زاویہ حادہ کی صورت میں تکونیاتی تفاعل کی توسیعی تعریف اور قائمہ زاویہ کی تکونی تعریف ایک جیسی ہیں۔

۱۳۳۹ جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں $x = 0$ کی صورت میں $\tan\theta$ اور $\sec\theta$ غیر معین ہیں (چونکہ کسی بھی عدد کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے)۔ یوں یہ
۱۳۴۰ $\theta = \mp\frac{\pi}{2}, \mp\frac{3\pi}{2}, \cdots$ کے لیے غیر معین ہیں۔ اسی طرح $y = 0$ یعنی $\theta = 0, \mp\pi, \mp 2\pi, \cdots$ کے لیے $\cot\theta$ اور
۱۳۴۱ $\csc\theta$ غیر معین ہیں۔

۱۳۴۲ درج ذیل تعریف بھی لکھی جا سکتی ہیں۔

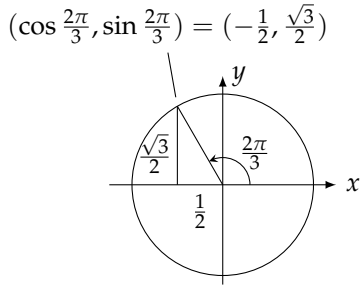
۱۳۴۳ تکونیاتی تفاعل کے باہمی تعلقات

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

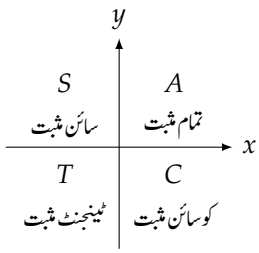
۱۳۴۴ مستوی میں نقطہ $N(x,y)$ کو مبدا سے فاصلہ r اور زاویہ θ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے (شکل ۱.۵۸)۔ چونکہ $\cos\theta = \frac{x}{r}$ اور $\sin\theta =$
۱۳۴۵ $\frac{y}{r}$ ہیں لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

۱۳۴۶



شکل ۱.۶۰: تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں (مثال ۱.۴۴)



شکل ۱.۶۱: قاعدہ $CAST$

۱۳۴۷ **تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں**

۱۳۴۸ شکل ۱.۵۷ کے دائرے میں $r = 1$ ہونے کی صورت میں $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ کی تعارفی مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہیں۔

$$\cos\theta = x, \quad \sin\theta = y$$

۱۳۴۹ یوں ہم سائن اور کوسائن کی قیمتوں کو بالترتیب نقطہ $N(x, y)$ کی x اور y محدد سے پڑھ سکتے ہیں۔ نقطہ N سے محور x پر قائمہ گراتے ہوئے
۱۳۵۰ حاصل حوالہ تکون سے بھی انہیں حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل ۱.۵۹)۔ ہم x اور y کی قیمتیں تکون کے اطراف سے ناپتے ہیں۔ x اور y کی علامتیں اس
۱۳۵۱ ربع سے تعین کی جاتی ہیں جس میں تکون پایا جاتا ہو۔

۱۳۵۲ مثال ۱.۴۴: $\frac{2\pi}{3}$ ریڈیئن کا سائن اور کوسائن تلاش کریں۔

۱۳۵۳ **حل**

۱۳۵۴ **پہلا قدم** زاویے کو معیاری مقام پر اکائی دائرے میں بنائیں۔ حوالہ تکون کے اطراف کی لمبائیاں لکھیں (شکل ۱.۶۰)۔

۱۳۵۵ **دوسرا قدم** جہاں اکائی دائرے کو شعاع قطع کرتی ہے اس نقطے کے محدد دریافت کریں:

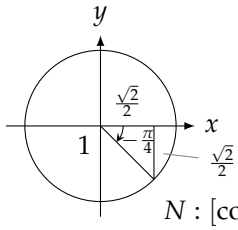
$$\cos\frac{2\pi}{3} = x \text{ کا محدد } N = -\frac{1}{2}$$
$$\sin\frac{2\pi}{3} = y \text{ کا محدد } N = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۳۵۶

۱۳۵۷ تکونیاتی تفاعل کی قیمتوں کی علامت جاننے کے لیے شکل ۱.۶۱ میں دکھایا گیا $CAST$ کا قاعدہ یاد رکھیں۔ □

۱۳۵۸ مثال ۱.۴۵: $-\frac{\pi}{4}$ ریڈیئن کا سائن اور کوسائن تلاش کریں۔

۱۳۵۹ **حل**



$$N : [\cos(-\tfrac{\pi}{4}), \sin(-\tfrac{\pi}{4})] = (\tfrac{\sqrt{2}}{2}, -\tfrac{\sqrt{2}}{2})$$

شکل ۱.۶۲: شکل برائے مثال ۱.۴۵

درجہ	-180°	-135°	-90°	-45°	0°	30°	45°	60°	90°	135°	180°
ریڈیئن	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin\theta$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\cos\theta$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\tan\theta$	0	1		-1	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		-1	0

۱۳۶۰ **پہلا قدم:** معیاری مقام پر اکائی دائرے میں زاویہ کھینچ کر حوالہ تکون کے اطراف کی لمبائیاں لکھیں (شکل ۱.۶۲)۔

۱۳۶۱ **دوسرا قدم:** نقطہ N کے محدد تلاش کریں۔

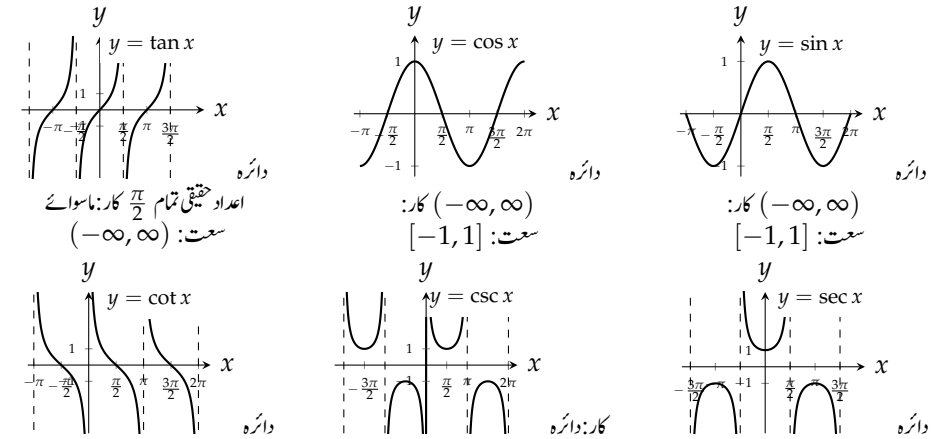
$$\cos(-\tfrac{\pi}{4}) = x \text{ کا محدد } N = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\sin(-\tfrac{\pi}{4}) = y \text{ کا محدد } N = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۱۳۶۲ □

۱۳۶۳ درج بالا دو مثالوں کی طرح حل کرتے ہوئے جدول میں دیے قیمتیں حاصل کی جا سکتی ہیں۔

۱۳۶۴ ترسیم

۱۳۶۵ تکونیاتی تفاعل کو کارتیسی محدد میں ترسیم کرتے ہوئے ہم عموماً غیر تابع متغیر θ کو x سے ظاہر کرتے ہیں (شکل ۱.۶۳)۔



شکل ۶۳.۱: چھ بنیادی تکونیاتی تفاعل کے ترسیم۔ ان تفاعل کی دوریت صاف ظاہر ہے۔

دوریت

معیاری مقام پر زاویہ x اور زاویہ $x + 2\pi$ ہم مکان ہوں گے۔ یوں ان دونوں زاویوں کے تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں ایک جیسی ہوں گی۔ مثال کے طور پر $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ ہوگا۔ ایسے تفاعل جن کی قیمت مقررہ وقفوں سے دہراتی ہو **دوری**[۶۴] کہلاتے ہیں۔

تعریف: اگر کسی مثبت عدد p کے لیے تمام x پر $f(x + p) = f(x)$ ہو تب تفاعل $f(x)$ **دوری** کہلاتا ہے۔ p کی ایسی اقل قیمت کو $f(x)$ کا **دوری عرصہ**[۶۵] کہتے ہیں۔

□

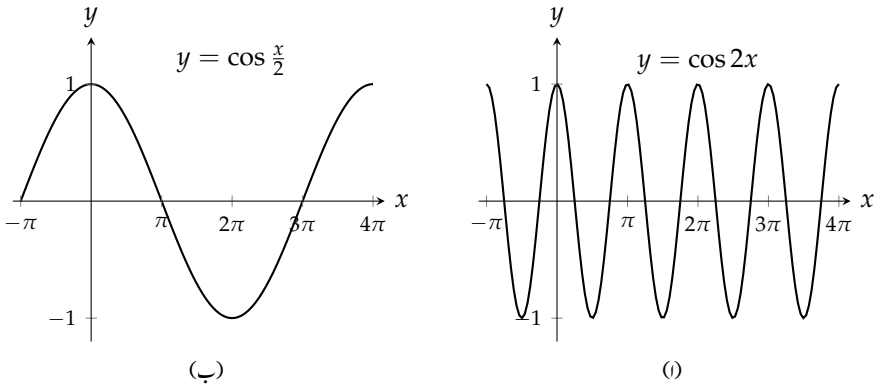
ہم شکل ۶۳.۱ سے دیکھ سکتے ہیں کہ ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ تفاعل کا دوری عرصہ $p = \pi$ ہے جبکہ باقی چار تفاعل کا دوری عرصہ 2π ہے۔

شکل ۶۴.۱ میں $y = \cos 2x$ اور $y = \cos \frac{x}{2}$ ترسیم کیے گئے ہیں۔ تکونیاتی تفاعل میں x کو 1 سے بڑی عدد سے ضرب کرنے سے تفاعل تیز ہو جاتا ہے (اس کی تعدد بڑھ جاتی ہے اور اس کا دوری عرصہ کم ہو جاتا ہے) جبکہ 1 سے کم عدد سے x کو ضرب کرنے سے تفاعل آہستہ ہو جاتا ہے جس سے اس کا دوری عرصہ بڑھ جاتا ہے۔

دوری تفاعل کی اہمیت اس حقیقت کی وجہ سے ہے کہ سائنس میں عموماً طبعی نظام جن پر ہم غور کرتے ہیں کا رویہ دوری ہوتا ہے۔ دل کی دھڑکن، دماغی لہریں اور گھریلو استعمال کی 220 وولٹ کی بجلی دوری ہیں۔ اسی طرح **خرد امواج تندور**[۶۶] میں برقناطیسی امواج، جو خوراک کو گرم کرتی ہیں، دوری ہوتی ہیں۔ موسمی کاروبار میں سرمایہ کی آمد و رفت اور گھومنے والی مشین کا رویہ بھی دوری ہوتا ہے۔ ہمارے پاس پختہ شواہد موجود ہیں جن کے تحت دنیا پر برفانی عہد تقریباً

---

[۶۴] periodic
[۶۵] period
[۶۶] microwaveoven



شکل ۱.۶۴: $\cos 2x$ کا دوری عرصہ کم ہے جبکہ $\cos \frac{x}{2}$ کا دوری عرصہ زیادہ ہے۔

۱۲۷۹ 90 000 تا 100 000 سال کے وقفہ سے دہراتا ہے۔

۱۲۸۰ اگر اتنے زیادہ چیزیں دوری ہیں تب ہم صرف تکونیاتی تفاعل پر کیوں غور کرنا چاہتے ہیں؟ اس کا جواب اعلیٰ احصاء کا ایک حیرت کن مسئلہ دیتا ہے جس کے تحت
۱۲۸۱ ہر دوری تفاعل، جسے ہم ریاضی نمونہ میں استعمال کرنا چاہیں گے، کو ہم سائن اور کوسائن تفاعل کا مجموعہ لکھ سکتے ہیں۔ یوں سائن اور کوسائن تفاعل کا احصاء جانتے
۱۲۸۲ ہوئے ہم کسی بھی دوری تفاعل کا ریاضی نمونہ اخذ کر سکتے ہیں۔

۱۲۸۳ جفت بالمقابل طاق

۱۲۸۴ شکل ۱.۶۳ سے ظاہر ہے کہ کوسائن اور سیکنٹ تفاعل جفت ہیں جبکہ باقی چار تفاعل طاق ہیں۔

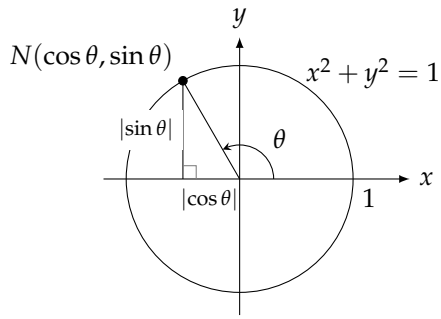
جفت	طاق
$\cos(-x) = \cos x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\sec(-x) = \sec x$	$\tan(-x) = -\tan x$
	$\csc(-x) = -\csc x$
	$\cot(-x) = -\cot x$

۱۲۸۵ مماثل

۱۲۸۶ اکائی دائرے پر نقطہ $N(\cos\theta, \sin\theta)$ سے محور x پر قائمہ گراتے ہوئے حاصل حوالہ تکون پر مسئلہ فیثاغورث کے اطلاق سے درج ذیل ملتا ہے
۱۲۸۷ (شکل ۱.۶۵)۔

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad (ا)$$

۱۲۸۸ یہ مساوات θ کی تمام قیمتوں کے لیے درست ہے اور غالباً یہ اہم ترین تکونیاتی مماثل ہے۔



شکل ۱.۶۵: عمومی زاویہ θ کے لیے حوالہ تکون۔

۱۲۸۹ مساوات ۱ کے دونوں ہاتھ کو ایک بار $\cos^2\theta$ اور ایک بار $\sin^2\theta$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل مماثل حاصل ہوتے ہیں۔

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

۱۲۹۰ آپ درج ذیل مماثل سے بخوبی واقف ہوں گے۔

مجموعہ زاویہ کلیات

$$\begin{aligned}\cos(A+B) &= \cos A\cos B - \sin A\sin B\\ \sin(A+B) &= \sin A\cos B + \cos A\sin B\end{aligned} \tag{۲}$$

۱۲۹۱ اس کتاب میں تمام درکار مماثل کو مساوات ۱ اور مساوات ۲ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مساوات ۲ A اور B کی ہر قیمت کے لیے درست
۱۲۹۲ ہیں۔ $\cos(A-B)$ اور $\sin(A-B)$ کے لیے بھی اسی طرح کے کلیات پائے جاتے ہیں (سوال ۱.۲۸۷ اور سوال ۱.۲۸۸)۔

۱۲۹۳ زاویوں کے مجموعوں کے کلیات میں A اور B دونوں کے لیے θ پُر کرنے سے درج ذیل مماثل حاصل ہوتے ہیں۔

دوہرا زاویہ کلیات

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\\ \sin 2\theta &= 2\sin\theta\cos\theta\end{aligned} \tag{۳}$$

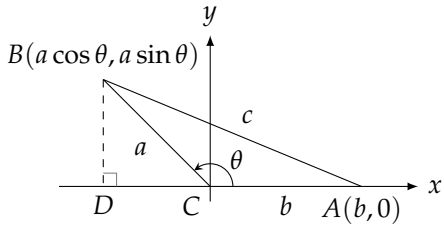
۱۲۹۴ درج ذیل کلیات

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1, \qquad \cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$$

۱۲۹۵ کو آپس میں جمع کرنے سے $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$ اور ایک کو دوسرے سے منفی کرنے سے $2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$ حاصل
۱۲۹۶ ہوتا ہے جن سے دوہرا زاویے کے درج ذیل مزید دو کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \tag{۴}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \tag{۵}$$



شکل ۱.۶۶: قاعدہ کوسائن

۱۲۹۷ درج بالا میں θ کی جگہ $\frac{\theta}{2}$ لکھنے سے **نصف زاویہ کلیات**[67] حاصل ہوتے ہیں۔

۱۲۹۸ **قاعدہ کوسائن**

۱۲۹۹ اگر تکون ABC کے اضلاع a ، b اور c ہوں اور c کے سامنے زاویہ θ ہو تب درج ذیل ہوگا (شکل ۱.۶۶)۔

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \tag{۶}$$

۱۳۰۰ اس مساوات کو **قاعدہ کوسائن**[68] کہتے ہیں۔

۱۳۰۱ اس کلیے کو حاصل کرنے کی خاطر تکون کو کارتیسی محدد پر یوں بنائیں کہ اس کا ایک راس مبدا پر اور ایک ضلع محور x پر ہو (شکل ۱.۶۶)۔ راس B سے محور
۱۳۰۲ x پر قائمہ گرائیں۔ حاصل قائمہ مثلث ABD پر مسئلہ فیثاغورث کا اطلاق کرتے ہیں جہاں A سے D تک فاصلہ $b - a\cos\theta$ لکھا جائے گا
۱۳۰۳ (مثلاً $b = 3$ اور $a\cos\theta = -2$ کی صورت میں $AD = 3 - (-2) = 5$ ہوگا اور $a\cos\theta = 1$ کی صورت میں
۱۳۰۴ $AD = 3 - 1 = 2$ ہوگا)۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} c^2 &= (b - a\cos\theta)^2 + (a\sin\theta)^2 \\ &= a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + b^2 - 2ab\cos\theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta \end{aligned}$$

۱۳۰۵ جہاں آخری قدم پر $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ کا سہارا لیا گیا ہے۔

۱۳۰۶ قاعدہ کوسائن، مسئلہ فیثاغورث کو عمومی بناتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\theta = \frac{\pi}{2}$ کی صورت میں $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ کی وجہ سے قاعدہ کوسائن سے
۱۳۰۷ $c^2 = a^2 + b^2$ یعنی مسئلہ فیثاغورث حاصل ہوتا ہے۔

۱۳۰۸ **سوالات**

۱۳۰۹ **ریڈیئن، درجہ اور دائری قوس**

۱۳۱۰

---

[67] halfangleformulae
[68] lawofcosines

سوال ۱.۲۵۳: رداس 10 cm کے دائرے پر کتنی لمبائی کی قوس (الف) $\frac{4\pi}{5}$ ریڈیئن (ب) 110° کا وسطی زاویہ بنائے گی؟

سوال ۱.۲۵۴: رداس 8 کے دائرے پر 10π لمبائی کی قوس، مرکز پر کتنا وسطی زاویہ بناتی ہے؟ جواب درجات اور ریڈیئن میں تلاش کریں۔

سوال ۱.۲۵۵: **کیلکولیٹر** 80° کا وسطی زاویہ بنانے کی خاطر آپ 30 cm قطر کے قرص پر مرکز سے دو خط کھینچنا چاہتے ہیں۔ محیط پر قرص کی لمبائی 1 mm درستگی تک تلاش کریں۔

سوال ۱.۲۵۶: **کیلکولیٹر** ایک میٹر قطر کے پہیے کو ہموار زمین پر 30 cm چلایا جاتا ہے۔ پہیا کتنا زاویہ گھوما ہو گا؟ جواب (الف) ریڈیئن کے دسواں حصہ اور (ب) درجے کے ایک حصہ درستگی تک تلاش کریں۔

تکونیاتی تفاعل کی قدر پیمائی

سوال ۱.۲۵۷: درج ذیل بایاں جدول مکمل کریں۔ کیلکولیٹر یا جدول سے جوابات پڑھنے کی اجازت نہیں۔

θ	$-\pi$	$-\frac{2\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\csc\theta$					

θ	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{8}$
$\sin\theta$					
$\cos\theta$					
$\tan\theta$					
$\cot\theta$					
$\sec\theta$					
$\csc\theta$					

سوال ۱.۲۵۸: درج بالا دایاں جدول مکمل کریں۔ کیلکولیٹر یا جدول سے جوابات پڑھنے کی اجازت نہیں۔

سوال ۱.۲۵۹ تا سوال ۱.۲۶۴ میں $\sin x$ ، $\cos x$ ، $\tan x$ میں سے ایک دیا گیا ہے۔ باقی دو تفاعل کو دیے گئے وقفے کے اندر تلاش کریں۔

سوال ۱.۲۵۹: $\sin x = \frac{3}{5}$، دائرہ کار: $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

سوال ۱.۲۶۰: $\tan x = 2$، دائرہ کار: $[0, \frac{\pi}{2}]$

سوال ۱.۲۶۱: $\cos x = \frac{1}{3}$، دائرہ کار: $[-\frac{\pi}{2}, 0]$

سوال ۱.۲۶۲: $\cos x = -\frac{5}{13}$، دائرہ کار: $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

سوال ۱.۲۶۳: $\tan x = \frac{1}{2}$، دائرہ کار: $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$

سوال ۱.۲۶۴: $\sin x = -\frac{1}{2}$، دائرہ کار: $[\pi, \frac{3\pi}{2}]$

تکونیاتی تفاعل کی ترسیم

سوال ۱.۲۶۵ تا سوال ۱.۲۷۴ میں دیا گیا تفاعل ترسیم کریں۔ ہر تفاعل کا دوری عرصہ تلاش کریں۔

سوال ۱.۲۶۵: $\sin 2x$

سوال ۱.۲۶۶: $\sin \frac{x}{2}$

سوال ۱.۲۶۷: $\cos \pi x$

سوال ۱.۲۶۸: $\cos \frac{\pi x}{2}$

سوال ۱.۲۶۹: $-\sin \frac{\pi x}{3}$

سوال ۱.۲۷۰: $-\cos 2\pi x$

سوال ۱.۲۷۱: $\cos(x - \frac{\pi}{2})$

سوال ۱.۲۷۲: $\sin(x + \frac{\pi}{2})$

سوال ۱.۲۷۳: $\sin(x - \frac{\pi}{4}) + 1$

سوال ۱.۲۷۴: $\cos(x + \frac{\pi}{4}) - 1$

سوال ۱.۲۷۵ تا سوال ۱.۲۷۸ میں دیے تفاعل کو ts مستوی میں ترسیم کریں جہاں افقی محور t ہے۔ ہر تفاعل کا دوری عرصہ اور تشاکل تلاش کریں۔

سوال ۱.۲۷۵: $s = \cot 2t$

سوال ۱.۲۷۶: $s = -\tan \pi t$

سوال ۱.۲۷۷: $s = \sec \frac{\pi t}{2}$

سوال ۱.۲۷۸: $s = \csc \frac{t}{2}$

سوال ۱.۲۷۹: کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے

(الف) $y = \cos x$ اور $y = \sec x$ کو $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ کے لیے ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\sec x$ کے رویہ پر $\cos x$ کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے تبصرہ کریں۔

(ب) $-pi \leq x \leq 2\pi$ کے لیے $y = \sin x$ اور $y = \csc x$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\csc x$ کے رویہ پر $\sin x$ کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے تبصرہ کریں۔

سوال ۱.۲۸۰: $-7 \leq x7$ کے لیے $y = \tan x$ اور $y = \cot x$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\tan x$ کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے $\cot x$ پر تبصرہ کریں۔

سوال ۱.۲۸۱: $y = \sin x$ اور $y = \lfloor \sin x \rfloor$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\lfloor \sin x \rfloor$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

سوال ۱.۲۸۲: $y = \sin x$ اور $y = \lceil \sin x \rceil$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ $\lceil \sin x \rceil$ کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔

اضافی تکونیاتی مماثل

مجموعہ زاویہ کلیات استعمال کرتے ہوئے سوال ۱.۲۸۳ تا سوال ۱.۲۸۸ میں دیے گئے مماثل حاصل کریں۔

سوال ۱.۲۸۳: $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$

۱۳۶۰ سوال ۱.۲۸۴: $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$

۱۳۶۱ سوال ۱.۲۸۵: $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$

۱۳۶۲ سوال ۱.۲۸۶: $\sin(x - \frac{\pi}{2}) = -\cos x$

۱۳۶۳ سوال ۱.۲۸۷: $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$

۱۳۶۴ سوال ۱.۲۸۸: $\sin(A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$

۱۳۶۵ سوال ۱.۲۸۹: اگر سوال ۱.۲۸۷ میں $B = A$ پُر کیا جائے تب کیا حاصل ہو گا؟ کیا آپ حاصل کردہ مماثل کو پہلے سے جانتے ہیں؟

۱۳۶۶ سوال ۱.۲۹۰: مجموعہ زاویہ کلیات میں $B = 2\pi$ لینے سے کیا حاصل ہو گا؟ کیا آپ نتائج سے مطمئن ہیں؟

۱۳۶۷

۱۳۶۸ **مجموعہ زاویہ کلیات کا استعمال**

۱۳۶۹ سوال ۱.۲۹۱ تا سوال ۱.۲۹۴ میں دی گئی مقدار کو $\sin x$ اور $\cos x$ کی صورت میں لکھیں۔

۱۳۷۰ سوال ۱.۲۹۱: $\cos(\pi + x)$

۱۳۷۱ سوال ۱.۲۹۲: $\sin(2\pi - x)$

۱۳۷۲ سوال ۱.۲۹۳: $\sin(\frac{3\pi}{2} - x)$

۱۳۷۳ سوال ۱.۲۹۴: $\cos(\frac{3\pi}{2} + x)$

۱۳۷۴ سوال ۱.۲۹۵: $\sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3})$ استعمال کرتے ہوئے $\sin \frac{7\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔

۱۳۷۵ سوال ۱.۲۹۶: $\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})$ استعمال کرتے ہوئے $\cos \frac{11\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔

۱۳۷۶ سوال ۱.۲۹۷: $\cos \frac{\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔

۱۳۷۷ سوال ۱.۲۹۸: $\sin \frac{5\pi}{12}$ کی قیمت حاصل کریں۔

۱۳۷۸ **دوہرا زاویہ کلیات کا استعمال**

۱۳۷۹ سوال ۱.۲۹۹ تا سوال ۱.۳۰۲ میں تفاعل کی قیمت تلاش کریں۔

۱۳۸۰ سوال ۱.۲۹۹: $\cos^2 \frac{\pi}{8}$

۱۳۸۱ سوال ۱.۳۰۰: $\cos^2 \frac{\pi}{12}$

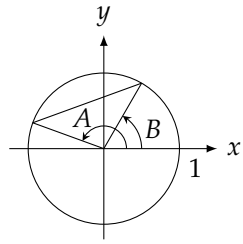
۱۳۸۲ سوال ۱.۳۰۱: $\sin^2 \frac{\pi}{12}$

۱۳۸۳ سوال ۱.۳۰۲: $\sin^2 \frac{\pi}{8}$

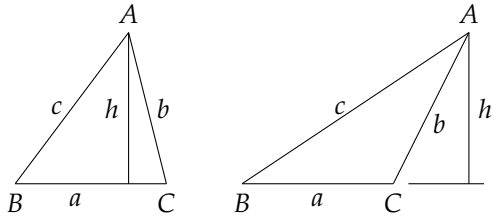
۱۳۸۴ **نظریہ اور مثالیں**

۱۳۸۵

۱۳۸۶ سوال ۱.۳۰۳: ٹینجنٹ مجموعہ زاویہ کا کلیہ $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ ہے۔ یہ کلیہ اخذ کریں۔



شکل ۱.۶۷: شکل برائے سوال ۱.۳۰۵



شکل ۱.۶۸: اشکال برائے سوال ۱.۳۰۹

سوال ۱.۳۰۴: $\tan(A-B)$ کا کلیہ اخذ کریں۔

سوال ۱.۳۰۵: قاعدہ کوسائن کو شکل ۱.۶۷ اپر لاگو کرتے ہوئے $\cos(A-B)$ کا کلیہ حاصل کریں۔

سوال ۱.۳۰۶: قاعدہ کوسائن کو شکل ۱.۶۷ کے طرز کی شکل پر لاگو کرتے ہوئے $\cos(A+B)$ کا کلیہ اخذ کریں۔ یہ شکل کیسا ہو گا۔

سوال ۱.۳۰۷: کیلکولیٹر ایک مثلث کے اضلاع $a=2$ ، $b=3$ اور زاویہ $C=60^\circ$ ہیں۔ ضلع c کی لمبائی تلاش کریں۔

سوال ۱.۳۰۸: کیلکولیٹر ایک مثلث کے اضلاع $a=2$ ، $b=3$ اور زاویہ $C=40^\circ$ ہیں۔ ضلع c کی لمبائی تلاش کریں۔

سوال ۱.۳۰۹: قاعدہ سائن قاعدہ سائن کہتا ہے کہ اگر مثلث کے زاویے A ، B ، C کے سامنے اضلاع بالترتیب a ، b ، c ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

اشکال ۱.۶۸ اور مماثل $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ استعمال کرتے ہوئے اس قاعدہ کو اخذ کریں۔

سوال ۱.۳۱۰: کیلکولیٹر ایک مثلث کے اضلاع $a=2$ ، $b=3$ اور زاویہ $C=60^\circ$ ہیں۔ $\sin B$ کو قاعدہ سائن سے حاصل کریں۔

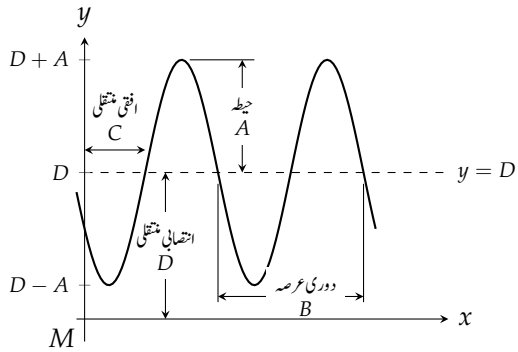
سوال ۱.۳۱۱: کیلکولیٹر ایک مثلث کا ضلع $c=2$ اور زاویے $A=\frac{\pi}{4}$ اور $B=\frac{\pi}{3}$ ہیں۔ زاویہ A کا مخالف ضلع a تلاش کریں۔

سوال ۱.۳۱۲: تخمین $\sin x \approx x$ x کی چھوٹی قیمتوں کے لیے $\sin x \approx x$ ہوتا ہے جہاں x کی ناپ ریڈیئن میں ہے۔ اس کی وجہ حصہ ۱.۴.۷ میں بتلائی جائے گی۔ (اپنی تسلی کے لیے کیلکولیٹر کی مدد سے 0.001 اور اس کے سائن کی قیمتوں کا موازنہ کریں۔) $|x| < 0.1$ کے لیے تخمینی خلل 5000 میں 1 حصہ سے کم ہو گا۔

(الف) کمپیوٹر پر $y=x$ اور $y=\sin x$ کو مبدا کے قریب قیمتوں کے لیے ترسیم کریں جہاں x کی ناپ ریڈیئن میں ہے۔ مبدا کے بالکل قریب کیا صورت حال ہے؟

(ب) کمپیوٹر پر $y=x$ اور $y=\sin x$ کو مبدا کے قریب قیمتوں کے لیے ترسیم کریں جہاں x کی پیمائش درجات میں ہے۔ مبدا کے بالکل قریب کیا صورت حال ہے؟

(پ) کیلکولیٹر استعمال کرتے ہوئے $x=0.1$ کے لیے $\sin x$ حاصل کریں۔ اگر آپ کا کیلکولیٹر ریڈیئن استعمال کر رہا ہو تب جواب تقریباً 0.1 ہی ہو گا۔ اگر کیلکولیٹر درجات استعمال کر رہا ہو تب جواب مختلف ہو گا۔



شکل ۱.۶۹: عمومی سائن تفاعل

عمومی سائن ترسیم

شکل ۱.۶۹ میں درج ذیل تفاعل کی ترسیم یعنی عمومی سائن ترسیم دکھائی گئی ہے جہاں $|A|$ حیطہ، $|B|$ دوری عرصہ، C افقی منتقلی اور D انتصابی منتقلی ہے۔ سوال ۱.۳۱۳ تا سوال ۱.۳۱۶ میں عمومی سائن تفاعل کے A ، B ، C اور D تلاش کریں۔ تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x) = A\sin\left(\tfrac{2\pi}{B}(x-C)\right) + D$$

سوال ۱.۳۱۳: $y = 2\sin(x+\pi) - 1$

سوال ۱.۳۱۴: $y = \frac{1}{2}\sin(\pi x - \pi) + \frac{1}{2}$

سوال ۱.۳۱۵: $y = -\frac{2}{\pi}\sin(-\frac{\pi t}{2}) + \frac{1}{\pi}$

سوال ۱.۳۱۶: $y = \frac{L}{2\pi}\sin\frac{2\pi t}{L}, \quad L > 0$

سوال ۱.۳۱۷ تا سوال ۱.۳۱۷ میں عمومی سائن تفاعل $f(x) = A\sin(\frac{2\pi}{B}(x-C)) + D$ پر ترسیم کی مدد سے غور کیا جائے گا۔ ترسیم کے لیے کمپیوٹر استعمال کریں۔

سوال ۱.۳۱۷: دوری عرصہ $A = 3, C = D = 0$ لیتے ہوئے (الف) $B = 1, 3, 2\pi, 5\pi$ کے لیے وقفہ $-4\pi \leq x \leq 4\pi$ پر تفاعل ترسیم کریں۔ دوری عرصہ بڑھانے سے تفاعل کی صورت پر کیا اثر ہوتا ہے؟ (ب) B کی منفی قیمتوں کے لیے ترسیم پر کیا اثر ہوگا؟ $B = -3$ اور $B = -2\pi$ کے لیے ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں۔

سوال ۱.۳۱۸: افقی منتقلی $A = 3, B = 6, D = 0$ لیتے ہوئے (الف) تفاعل $f(x)$ کو $C = 0, 1, 2$ کے لیے وقفہ $-4\pi \leq x \leq 4\pi$ پر ترسیم کریں۔ C کی بڑھتے مثبت قیمت کی ترسیم پر کیا اثر ہوگا؟ (ب) C کی منفی قیمتوں کے لیے ترسیم کیسی ہوگی۔ (پ) صفر افقی منتقلی کے لیے C کی کم تر مثبت قیمت کیا ہوگی؟ ترسیم کر کے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال ۱.۳۱۹: انضباطی منتقلی $A = 3, B = 6, C = 0$ لیتے ہوئے (الف) تفاعل $f(x)$ کو $D = 0, 1, 3$ کے لیے وقفہ $-4\pi \leq x \leq 4\pi$ پر ترسیم کریں۔ D کی بڑھتی مثبت قیمتوں کے لیے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ (ب) D کی منفی قیمتوں کے لیے ترسیم کیسی ہو گی؟

سوال ۱.۳۲۰: حیطہ $B = 6, C = D = 0$ لیتے ہوئے (الف) A کی مثبت بڑھتی قیمتوں کا ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ $f(x)$ کو $A = 1, 5, 9$ کے لیے ترسیم کرتے ہوئے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔ (ب) A کی منفی قیمتوں کے لیے ترسیم کیسی ہو گی؟

باب ۲

حدود اور استمرار

جائزہ

تفاعل کی حد کا تصور ان بنیادی تصورات میں سے ایک ہے جو احصاء کو الجبرا اور تکونیات سے مختلف بناتا ہے۔

اس باب میں ہم حدود کے تصور کو پہلے وجدانی طور پر اور بعد میں باضابطہ وضع کرتے ہیں۔ ہم حدود کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل f میں تبدیلی پر غور کرتے ہیں۔ کچھ تفاعل مسلسل تبدیل ہوتے ہیں جہاں x میں چھوٹی تبدیلی، $f(x)$ میں چھوٹی تبدیلی ہی پیدا کرتی ہے۔ دیگر تفاعل میں x کی چھوٹی تبدیلی، $f(x)$ میں چھلانگ یا غیر یقینی تبدیلی پیدا کر سکتی ہے۔ ہم حدود کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کے مماثل خطوط متعارف کریں گے۔ اس جیومیٹریائی استعمال کی وجہ سے تفاعل کے تفرق کا تصور پیدا ہو گا۔ تفاعل کا تفرق، جس پر باب ۳ میں تفصیلاً غور کیا جائے گا، تفاعل کی تبدیلی تعین کرتا ہے۔

۲.۱ تبدیلی کی شرح اور حد

اس حصہ میں ہم تبدیلی کی شرح کی دو مثالیں، رفتار اور نمو آبادی متعارف کرتے ہیں جن سے اس باب کا اصل موضوع، حد کا تصور پیدا ہو گا۔

رفتار

کسی بھی دورانیے میں متحرک جسم کی اوسط رفتار سے مراد اس وقت میں طے فاصلہ تقسیم دورانیہ ہے۔

مثال ۲.۱: ایک پتھر 100 m کی بلندی سے گرتا ہے۔ (الف) پہلے دو سیکنڈ میں (ب) پہلے سیکنڈ سے دوسرے سیکنڈ تک کے دورانیے میں پتھر کی اوسط رفتار کیا ہو گی؟

حل

ہم جانتے ہیں کہ سطح زمین کے قریب ساکن حالت سے گرتا ہوا جسم پہلے t سیکنڈوں میں

$$y = 4.9t^2$$

میٹر فاصلہ طے کرتا ہے۔ یوں اولین t سیکنڈ میں اوسط رفتار جاننے کے لیے ہم فاصلے میں تبدیلی Δy کو وقت میں تبدیلی Δt سے تقسیم کرتے ہیں۔

(الف) اولین دو سیکنڈ میں اوسط رفتار $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(2)^2-4.9(0)^2}{2-0} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی۔

(ب) پہلے اور دوسرے سیکنڈ کے دوران اوسط رفتار $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(2)^2-4.9(1)^2}{2-1} = 14.7\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی۔ □

مثال ۲.۲: پتھر کی رفتار $t = 1\,\mathrm{s}$ اور $t = 2\,\mathrm{s}$ پر تلاش کریں۔

حل

ہم وقتی وقفہ $[t_0, t_0 + h]$ پر اوسط رفتار حاصل کرتے ہیں، یعنی درج ذیل۔

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{4.9(t_0 + h)^2 - 4.9t_0^2}{h}$$

چونکہ کسی بھی عدد کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جا سکتا، لہٰذا درج بالا کلیہ میں $h = 0$ پُر کرتے ہوئے "لمحاتی رفتار" حاصل نہیں کی جا سکتی۔ البتہ اس کلیے کو استعمال کرتے ہوئے ہم کم سے کم دورانیے کے لیے اوسط رفتار حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں $t_0 = 1$ اور $t_0 = 2$ کے لیے $h = 0.1, 0.01, \cdots$ لیتے ہوئے درج ذیل اوسط رفتار حاصل کی جا سکتی ہیں۔

h	$t_0 = 1$ پر اوسط رفتار	$t_0 = 2$ پر اوسط رفتار
1	14.7	24.5
0.1	10.29	20.09
0.01	9.84899	19.64899
0.001	9.80489	19.60489
0.0001	9.800489	19.60049

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t_0 = 1$ کے لیے h کی قیمت کم سے کم کرتے ہوئے اوسط رفتار $9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کے قریب ہوتی جاتی ہے جس سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $t_0 = 1$ پر پتھر کی رفتار $9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی۔ اسی طرح $t_0 = 2$ پر پتھر کی رفتار $19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ نظر آئے گی۔ □

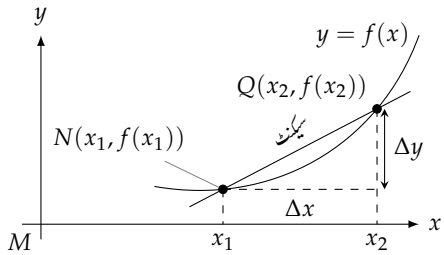
اوسط شرح تبدیلی اور سیکنٹ خطوط

x کے لحاظ سے تفاعل $f(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی کو وقفہ $[x_1, x_2]$ پر حاصل کرنے کی خاطر ہم y کی قیمت میں تبدیلی، $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ کو x کی قیمت میں تبدیلی $\Delta x = x_2 - x_1 = h$ سے تقسیم کرتے ہیں۔

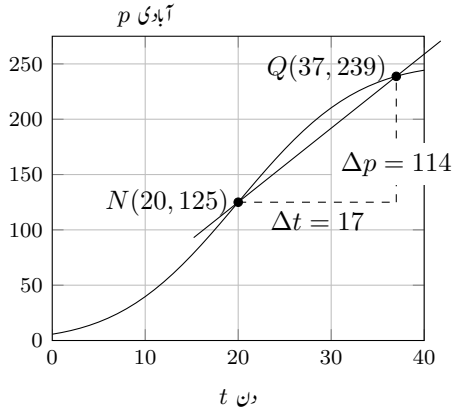
تعریف: x کے لحاظ سے وقفہ $[x_1, x_2]$ پر $y = f(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

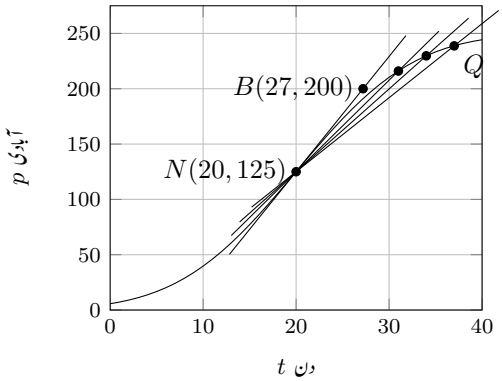
□



شکل ۱.۲: منحنی کی اوسط شرح تبدیلی سیکنٹ کے ڈھلوان کے برابر ہو گی۔



شکل ۲.۲: مکھی کی نمو آبادی



شکل ۳.۲: مکھی کی بیسویں دن نمو آبادی

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقفہ $[x_1, x_2]$ پر f کی اوسط شرح تبدیلی، نقطہ $N(x_1, f(x_1))$ اور نقطہ $Q(x_2, f(x_2))$ سے گزرنے والے خط کے ڈھلوان کی برابر ہے (شکل ۱.۲)۔ جیومیٹری میں ترسیم پر کسی دو نقطوں سے گرتے ہوئے خط کو ترسیم کا سیکنٹ[1] کہتے ہیں۔ یوں x_1 سے x_2 تک اوسط شرح تبدیلی سیکنٹ NQ کے ڈھلوان کے برابر ہے۔

مثال ۳.۲: نمو آبادی کی اوسط شرح

ایک تجربہ میں، قابو ماحول میں، مکھیوں کی تعداد 40 دن کے عرصے پر روزانہ گنی گئی۔ تعداد بالمقابل دنوں کو ترسیم کرتے ہوئے نقطوں کو ہموار منحنی سے جوڑا گیا (شکل ۲.۲)۔ 20 ویں دن سے 37 ویں دن تک آبادی کی اوسط شرح تبدیلی دریافت کریں۔

حل

20 ویں دن آبادی 125 تھی جبکہ 37 ویں دن آبادی 239 تھی۔ یوں $17 = 20 - 37$ دنوں میں آبادی میں $= 125 - 239$

[1] secant

114 تبدیل رونما ہوئی۔ یوں شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{114}{17} = 6.7 \text{(مکھیاں فی دن)}$$

جو شکل ۲.۲ میں سیکنٹ NQ کا ڈھلوان ہے۔ □

درج بالا مثال میں 20 ویں دن سے 37 ویں دن تک کی اوسط شرح تبدیلی حاصل کی گئی جو ہمیں 20 ویں دن کی تبدیلی کی شرح کے بارے میں کوئی معلومات فراہم نہیں کرتی۔ اس کے لیے ہمیں 20 ویں دن کے قریب حساب کرنا ہو گا۔

مثال ۲.۴: مثال ۲.۳ میں 20 ویں دن آبادی میں تبدیلی کی شرح کیا ہے؟

حل

ہمیں نقطہ Q کو نقطہ N کے قریب سے قریب تر کرتے ہوئے شرح حاصل کرنی ہو گی (شکل ۲.۳)۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

Q	$\frac{\Delta p}{\Delta t}$
$(37, 239)$	$\frac{239-125}{37-20} = 6.7$
$(35, 230)$	$\frac{230-125}{35-20} = 7$
$(32, 216)$	$\frac{216-125}{32-20} = 7.6$
$(27, 200)$	$\frac{200-125}{27-20} = 10.7$

جیسے جیسے Q بائیں منتقل کیا جائے، خط NQ نقطہ N کے گرد گھڑی مخالف گھومتا ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ یہ خط آخر کار NB کو مس کرتا ہے۔ اس خط کو دی گئی منحنی کا **مماس**[۲] کہتے ہیں۔ اس طرح ہم توقع کرتے ہیں کہ 20 ویں دن آبادی کی تبدیلی کی شرح 10.7 مکھیاں فی دن ہو گی۔ □

لمحہ $t = 1$ اور لمحہ $t = 2$ پُر کرتے ہوئے پتھر کی رفتار یا 20 ویں دن شرح تبدیلی کو **لحاتی شرح تبدیلی**[۳] کہتے ہیں۔ جیسا آپ نے دیکھا، ہم اوسط شرح تبدیلی کی تحدیدی قیمت سے لحاتی شرح تبدیلی حاصل کرتے ہیں۔ درج بالا مثال میں ہم نے خط مماس کو بطور خط سیکنٹ کی تحدیدی صورت پیش کیا۔ لحاتی شرح اور مماس کا گہرا تعلق ہے جو دیگر موضوعات میں بھی پیش آتا ہے۔ اس تعلق کو مزید سمجھنے کی خاطر ہمیں تحدیدی قیمتوں کا تعین کرنا سیکھنا ہو گا جنہیں ہم **حد**[۴] کہتے ہیں۔

تفاعل کی تحدیدی قیمتیں

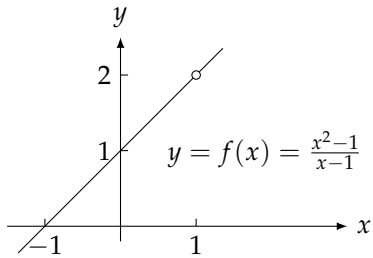
تحدیدی قیمت کی تعریف سے قبل مزید ایک مثال دیکھتے ہیں۔

مثال ۲.۵: تفاعل $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ نقطہ $x = 1$ کے قریب کیسا رویہ رکھتا ہے؟

حل

---

[۲] tangent
[۳] instantaneousratesofchange
[۴] limits



شکل ۲.۴: شکل برائے مثال ۲.۵

۱۳۸۷ چونکہ صفر سے کسی بھی عدد کو تقسیم نہیں کیا جا سکتا لہٰذا ماسوائے $x = 1$ کے، یہ کلیہ تمام حقیقی اعداد کے لیے f تعین کرتا ہے۔ کسی بھی $x \neq 1$ کے
۱۳۸۸ لیے ہم اس کلیے کی سادہ صورت حاصل کر سکتے ہیں:

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 \qquad (x \neq 1)$$

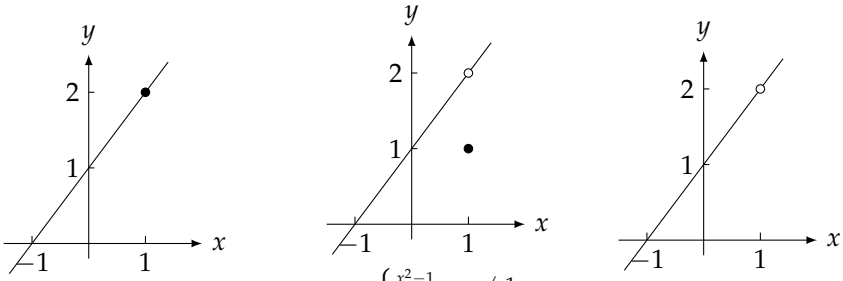
۱۳۸۹ یوں خط $y = x+1$ جس سے نقطہ $x = 1$ یعنی $(1,2)$ خارج کیا گیا ہو اس تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔ اس نقطے کو شکل ۲.۴ میں بطور سوراخ دکھایا
۱۳۹۰ گیا ہے۔ اگرچہ نقطہ $f(1)$ غیر معین ہے، ہم x کی قیمت 1 کے قریب سے قریب لیتے ہوئے $f(x)$ کی قیمت کو 2 کے جتنا قریب چاہیں کر سکتے
۱۳۹۱ ہیں۔

$x(\neq 1)$	$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x+1,\ (x \neq 1)$
0.9	1.9
1.1	2.1
0.99	1.99
1.01	2.01
0.999	1.999
1.001	2.001
0.999999	1.999999
1.000001	2.000001

۱۳۹۲ ہم کہتے ہیں کہ x کی قیمت 1 کے قریب تر پہنچنے پر $f(x)$ کی قیمت 2 کے قریب تر پہنچتی ہے، یا x کے 1 کے قریب تر پہنچنے سے $f(x)$ تحدیدی
۱۳۹۳ قیمت 2 تک پہنچتی ہے یا $f(x)$ کی حد 2 ہے، جسے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

۱۳۹۴ x کی قیمت x_0 کے قریب تر پہنچنے کو $x \to x_0$ لکھا جاتا ہے۔ □



$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ (ا)

$g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ (ب)

$h(x) = x + 1$ (ج)

شکل ۲.۵: $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = 2$

تعریف: **حد کی غیر رسمی تعریف**

فرض کریں کہ x_0 کے پاس پڑوس میں کھلے وقفہ پر تفاعل $f(x)$ معین ہے جبکہ عین نقطہ x_0 پر $f(x)$ غیر معین ہو سکتا ہے۔ اگر x_0 کے کافی قریب x کی تمام قیمتوں کے لیے $f(x)$ کی قیمتیں L کے کافی قریب پائی جاتی ہوں تب ہم کہتے ہیں کہ x کی قیمت x_0 کے قریب تر ہونے پر f کی قیمت **حد** L کے قریب سے قریب تر پہنچتی ہے۔ اس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

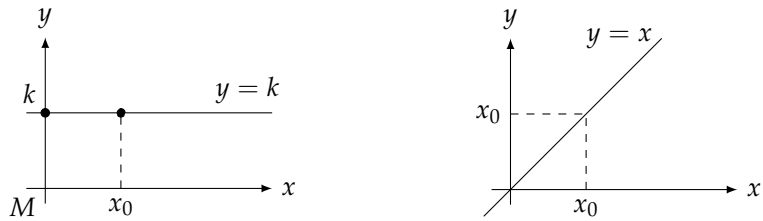
□

اس تعریف کو غیر رسمی اس لیے کہیں گے کہ "کافی قریب" طرز کے فقرے لطیف نہیں؛ ان کا مطلب پس منظر پر منحصر ہو گا۔ خرادپر کام کرنے والے ماہر کے لیے کافی قریب سے مراد $10\ \mu m$ ہو سکتا ہے جبکہ ماہر فلکیات کے لیے اس کا مطلب چند ہزار نوری سال ہو سکتا ہے۔ البتہ یہ تعریف اتنی درست ضرور ہے کہ ہم حد کو پہچان سکیں اور اس کی قیمت حاصل کر سکیں۔ ہم حد کی بالکل ٹھیک تعریف حصہ ۲.۳ میں پیش کریں گے۔

مثال ۲.۶: $x \to x_0$ کی صورت میں f کی حد کی وجودیت x_0 پر f کی تعریف کے تابع نہیں۔ شکل ۲.۵ میں f کی $x \to 1$ پر حد 2 ہے اگرچہ $x = 1$ پر f غیر معین ہے۔ تفاعل g کی $x \to 1$ پر حد 2 ہے اگرچہ $x = 1$ پر $g(1) = 1$ ہے۔ یوں $\lim_{x\to 1} g(x) \neq g(1)$ ہو گا۔ صرف تفاعل h کی $x \to 1$ پر حد اور قیمت دونوں 2 کے برابر ہیں یعنی $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1)$ ہیں۔ حد اور تفاعل کی قیمتوں کی برابری ایک خاص بات ہے جس پر حصہ ۲.۵ میں دوبارہ بات کی جائے گی۔ □

بعض اوقات $\lim_{x\to x_0} f(x)$ کی قیمت $f(x_0)$ سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ اس کی مثال تفاعل $f(x)$ ہے جو کثیر رکنی اور تکونیاتی تفاعل کا الجبرائی مجموعہ ہے اور جہاں x_0 پر $f(x_0)$ معین ہے۔ (اس پر مزید بات حصہ ۲.۲ اور حصہ ۲.۵ میں کی جائے گی۔)

مثال ۲.۷:



(ا) مماثل تفاعل (ب) مستقل تفاعل

شکل ۲.۶: اشکال برائے مثال ۲.۷

۱۵۱۰ ا. $\lim_{x\to 2}(4) = 4$

۱۵۱۱ ب. $\lim_{x\to 13}(4) = 4$

۱۵۱۲ ج. $\lim_{x\to 3} x = 3$

۱۵۱۳ د. $\lim_{x\to 2}(5x-3) = 10-3 = 7$

۱۵۱۴ ھ. $\lim_{x\to -2} \frac{3x+4}{x+5} = \frac{-6+4}{-2+5} = -\frac{2}{3}$

۱۵۱۵ □

۱۵۱۶ مثال ۲.۸:

۱۵۱۷ ا. اگر f مماثلی تفاعل $f(x) = x$ ہو تب x_0 کی کسی بھی قیمت کے لیے درج ذیل ہو گا (شکل ۲.۶-ل)۔

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} x = x_0$$

۱۵۱۸ ب. اگر f مستقل تفاعل $f(x) = k$ ہو (جہاں k مستقل ہے) تب x_0 کی کسی بھی قیمت کے لیے درج ذیل ہو گا (شکل ۲.۶-ب)۔

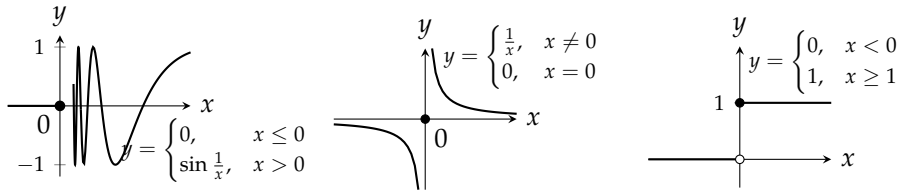
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} k = k$$

۱۵۱۹ □

۱۵۲۰ مثال ۲.۹: عین ممکن ہے کہ تفاعل کے دائرہ کار میں تفاعل کی حد نہ پائی جاتی ہو۔

۱۵۲۱ درج ذیل تفاعل کا $x \to 0$ پر رویہ کیسا ہو گا؟

۱۵۲۲ ا. $$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$



(ا) اکائی سیڑھی تفاعل $U(x)$ (ب) $g(x)$ (ج) $f(x)$

شکل ۲.۷: اشکال برائے مثال ۲.۹

ب. $$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ج. $$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

حل

ا. اکائی سیڑھی تفاعل $U(x)$ کی $x \to 0$ پر کوئی حد نہیں پائی جاتی؛ چونکہ اس نقطے پر تفاعل کی چھلانگ پائی جاتی ہے۔ نقطہ 0 کے کافی قریب x کی منفی قیمتوں کے لیے U کی قیمت 0 ہے جبکہ 0 کے کافی قریب x کی مثبت قیمتوں کے لیے U کی قیمت 1 ہے۔ یوں 0 کے قریب پہنچنے پر U کسی منفرد قیمت کے قریب نہیں پہنچتا۔ (شکل ۲.۷-ا)۔

ب. $x = 0$ کے کافی قریب تفاعل کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے اور کسی ایک منفرد قیمت تک پہنچنے کی کوشش نہیں کرتی (شکل ۲.۷-ب)۔

ج. نقطہ $x = 0$ کے کافی قریب تفاعل بہت زیادہ ارتعاش کرتا ہے۔ اس کی قیمت کسی مخصوص قیمت تک پہنچنے کی کوشش نہیں کرتی (شکل ۲.۷-ج)۔

□

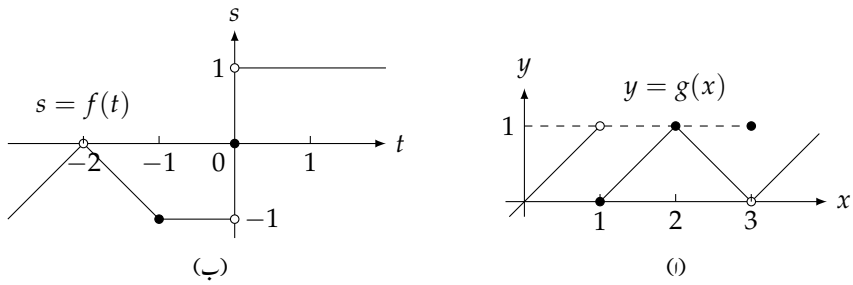
سوالات

۲.۱ ترسیم سے حد

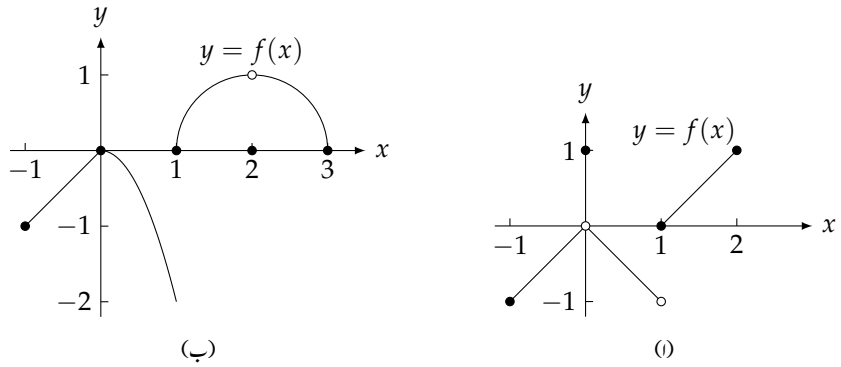
سوال ۲.۱: شکل ۲.۸-ا میں دی گئی ترسیم سے درج ذیل حد تلاش کریں یا حد نہ ہونے کی وجہ بیان کریں۔

ا. $\lim_{x \to 1} g(x)$ ب. $\lim_{x \to 2} g(x)$ ج. $\lim_{x \to 3} g(x)$

سوال ۲.۲: شکل ۲.۸-ب میں دی گئی ترسیم سے درج ذیل حد تلاش کریں یا حد نہ ہونے کی وجہ بیان کریں۔



شکل ۲.۸: اشکال برائے سوال ۲.۱ اور سوال ۲.۲



شکل ۲.۹: اشکال برائے سوال ۲.۳ اور سوال ۲.۴

۱۵۴۰ ا. $\lim_{t\to -2} f(t)$ ۱۵۴۱ ب. $\lim_{t\to -1} f(t)$ ۱۵۴۲ ج. $\lim_{t\to 0} f(t)$

۱۵۴۳ سوال ۲.۳: تفاعل $y = f(x)$ (شکل ۲.۳-ا) کے لیے درج ذیل فقروں میں سے کون سے درست ہیں؟

۱۵۴۴ ا. $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود ہے ۱۵۴۷ ج. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ ۱۵۴۹ ھ. $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

۱۵۴۵

۱۵۴۶ ب. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ۱۵۴۸ د. $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$ ۱۵۵۰ و. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ وقفہ $(-1,1)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔ ۱۵۵۱

۱۵۵۲ سوال ۲.۴: تفاعل $y = f(x)$ (شکل ۲.۳-ب) کے لیے درج ذیل فقروں میں سے کون سے درست ہیں؟

ا. $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجود نہیں ہے

ب. $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

ج. $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود نہیں ہے

د. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ وقفہ $(-1,1)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔

ھ. $\lim_{x\to x_0} f(x)$ وقفہ $(1,3)$ میں ہر نقطہ x_0 پر موجود ہے۔

وجودیت اور حد

سوال ۲.۵ اور سوال ۲.۶ میں حد کی غیر موجودگی کی وجہ بیان کریں۔

سوال ۲.۵: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$

سوال ۲.۶: $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$

سوال ۲.۷: فرض کریں کہ ماسوائے نقطہ $x = x_0$ تفاعل $f(x)$ تمام حقیقی x کے لیے معین ہے۔ کیا $\lim_{x\to x_0} f(x)$ کی وجودیت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال ۲.۸: فرض کریں کہ تفاعل $f(x)$ وقفہ $[-1,1]$ میں تمام x کے لیے معین ہے۔ کیا $\lim_{x\to 0} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال ۲.۹: اگر $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ ہو تب کیا $x = 1$ پر f کا معین ہونا لازم ہے؟ اگر معین ہونا لازم ہو تب کیا $f(1) = 5$ ہونا لازم ہے؟ کیا $x = 1$ پر ہم f کی قیمت کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ وضاحت کریں۔

سوال ۲.۱۰: اگر $f(1) = 5$ ہو تب کیا $\lim_{x\to 1} f(x)$ لازماً موجود ہوگا؟ اگر ایسا ہو تب کیا $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ لازماً ہوگا؟ کیا ہم $\lim_{x\to 1} f(x)$ کے بارے میں کوئی نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟ وضاحت کریں۔

کیلکولیٹر اور کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۲.۱۱: $f(x) = \frac{x^2-9}{x+3}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول نقاط $x = -3.1, -3.01, -3.001, \cdots$ پر وہاں تک تلاش کریں جہاں تک آپ کا کیلکولیٹر جواب حاصل کر سکتا ہو۔ اس جدول سے $\lim_{x\to -3} f(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔ اس کے برعکس نقاط $x = -2.9, -2.99, \cdots$ پر f کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے نتیجہ کیا ہوگا؟

ب. تفاعل کو $x_0 = -3$ کے قریب ترسیم کریں۔ ترسیم پر $x \to -3$ کے لیے y کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to -3} f(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے اخذ کریں۔

سوال ۲.۱۲: $g(x) = \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ لیں۔

ا. $\sqrt{2}$ کی تخمینی قیمتوں $x = 1.4, 1.41, 1.414, \cdots$ پر تفاعل کی قیمتوں کے جدول سے $\lim_{x\to\sqrt{2}} g(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔

ب. نقطہ $x_0 = \sqrt{2}$ کے قریب تفاعل ترسیم کریں۔ $x \to \sqrt{2}$ کے لیے ترسیم سے y کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے جواب کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to\sqrt{2}} g(x)$ کو الجبرائی طور پر حاصل کریں۔

سوال ۲.۱۳: $G(x) = \frac{x+6}{x^2+4x-12}$ لیں۔

ا. نقاط $x = -5.9, -5.99, -5.999, \cdots$ پر G کی قیمتوں کا جدول بنا کر $\lim_{x\to-6} G(x)$ کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔اس کے برعکس $x = -6.1, -6.01, -6.001, \cdots$ پر G کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے کیا نتیجہ حاصل ہو گا؟

ب. G کو $x_0 = 6$ کے قریبی نقطوں پر تقسیم کرتے ہوئے $x \to -6$ کے لیے G کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to-6} G(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال ۲.۱۴: $h(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}$ لیں۔

ا. نقاط $x = 2.9, 2.99, 2.999, \cdots$ پر h کی قیمتوں کے جدول سے $\lim_{x\to3} h(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔اس کے برعکس $x = 3.1, 3.01, 3.001, \cdots$ پر h کی قیمتیں لیتے ہوئے نتیجہ کیا ہو گا؟

ب. $x_0 = 3$ کے قریب h ترسیم کر کے $x \to 3$ کے لیے $h(x)$ کی قیمت دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to3} h(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال ۲.۱۵: $f(x) = \frac{x^2-1}{|x|-1}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لیے بنائیں جو $x_0 = -1$ کے قریب نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔اس جدول سے $\lim_{x\to-1} f(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $x_0 = -1$ کے قریب f ترسیم کریں۔ترسیم سے $x \to -1$ کے لیے y کی قیمتیں دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim_{x\to-1} f(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال ۲.۱۶: $F(x) = \frac{x^2+3x+2}{2-|x|}$ لیں۔

ا. F کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لیے بنائیں جو $x_0 = -2$ کے قریب نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔اس جدول سے $\lim_{x\to-2} F(x)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $x_0 = -2$ کے قریب F ترسیم کریں۔ ترسیم سے $x \to -2$ کے لیے y کی قیمتیں دیکھ کر گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

ج. $\lim\limits_{x\to -2} F(x)$ کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال ۲.۱۷: $g(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ لیں۔

ا. g کی قیمتوں کا جدول θ کی ان قیمتوں کے لیے بنائیں جو $\theta_0 = 0$ کے قریب نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اس جدول سے $\lim\limits_{\theta\to 0} g(\theta)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $\theta_0 = 0$ کے قریب g ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

سوال ۲.۱۸: $G(t) = \frac{1-\cos t}{t^2}$ لیں۔

ا. G کی قیمتوں کا جدول t کی ان قیمتوں کے لیے بنائیں جو $t_0 = 0$ کے قریب نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ اس جدول سے $\lim\limits_{t\to 0} G(t)$ کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

ب. $t_0 = 0$ کے قریب G ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

سوال ۲.۱۹: $f(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لیے بنائیں جو $x_0 = 1$ کے قریب نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ کیا x کی قیمت 1 کے قریب تر پہنچنے پر f کی تحدیدی قیمت پائی جاتی ہے؟ اگر تحدیدی قیمت پائی جاتی ہو، اسے تلاش کریں۔ اگر نہیں پائی جاتی ہو تو وجہ بیان کریں۔

ب. $x_0 = 1$ کے قریب f ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

سوال ۲.۲۰: $f(x) = \frac{3^x-1}{x}$ لیں۔

ا. f کی قیمتوں کا جدول x کی ان قیمتوں کے لیے بنائیں جو $x_0 = 0$ کے قریب تر نیچے سے اور اوپر سے پہنچنے کی کوشش کرتی ہیں۔ کیا x کی قیمت 0 کے قریب تر پہنچنے سے f کی تحدیدی قیمت پائی جاتی ہے؟ اگر تحدیدی قیمت پائی جاتی ہو، اس کو تلاش کریں۔ اگر نہیں پائی جاتا ہو تو وجہ بیان کریں۔

ب. $x_0 = 0$ کے قریب f ترسیم کریں۔ ترسیم سے گزشتہ جزو کے نتائج کی تصدیق کریں۔

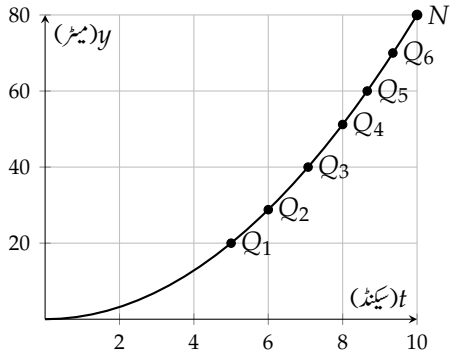
متغیر کی تحدیدی قیمت پُر کرتے ہوئے حد کا تعین

سوال ۲.۲۱ تا سوال ۲.۲۸ میں متغیر x کی تحدیدی قیمت کو تفاعل میں پُر کرتے ہوئے تفاعل کی حد تلاش کریں۔

سوال ۲.۲۱: $\lim\limits_{x\to 2} 2x$

سوال ۲.۲۲: $\lim\limits_{x\to 0} 2x$

سوال ۲.۲۳: $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} (3x-1)$



شکل ۲.۱۰: چاند پر ساکن حالت سے گرنے والی چیز کا فاصلہ بالمقابل وقت کی ترسیم

سوال ۲.۲۴: $\lim\limits_{x\to 1} -\frac{1}{3x-1}$

سوال ۲.۲۵: $\lim\limits_{x\to -1} 3x(2x-1)$

سوال ۲.۲۶: $\lim\limits_{x\to -1} \frac{3x^2}{2x-1}$

سوال ۲.۲۷: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} x\sin x$

سوال ۲.۲۸: $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\cos x}{1-\pi}$

اوسط شرح تبدیلی

سوال ۲.۲۹ تا سوال ۲.۳۴ میں دیے وقفے پر تفاعل کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

سوال ۲.۲۹: $f(x) = x^3 + 1$؛ (الف) $[2,3]$، (ب) $[-1,1]$

سوال ۲.۳۰: $g(x) = x^2$؛ (الف) $[-1,1]$، (ب) $[-2,0]$

سوال ۲.۳۱: $h(t) = \cos t$؛ (الف) $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$، (ب) $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$

سوال ۲.۳۲: $g(t) = 2 + \cos t$؛ (الف) $[0,\pi]$، (ب) $[-\pi,\pi]$

سوال ۲.۳۳: $R(\theta) = \sqrt{4\theta+1}$ ؛ $[0,2]$

سوال ۲.۳۴: $P(\theta) = \theta^3 - 4\theta^2 + 5\theta$ ؛ $[1,2]$

سوال ۲.۳۵: چاند پر ساکن حالت سے گرنے والی چیز کا فاصلہ بالمقابل وقت کی ترسیم شکل ۲.۱۰ میں دکھایا گیا ہے۔ (الف) سیکنٹ NQ_1 ، NQ_2 ، $\cdots$ NQ_6 کا اندازاً ڈھلوان تلاش کر کے جدول میں لکھیں۔ (ب) اس جدول سے $t = 10\,\mathrm{s}$ پر رفتار کی اندازاً قیمت حاصل کریں۔

سوال ۲.۳۶: ایک چھوٹی کمپنی کے پہلے چار سال کا منافع درج ذیل ہے۔(الف) منافع بالمقابل سال کو بطور نقطے ترسیم کرتے ہوئے انہیں ہموار ترین لکیر سے ملائیں۔(ب) ۱۹۹۲ اور ۱۹۹۴ کے بیچ منافع بڑھنے کی اوسط شرح تلاش کریں۔(پ) ترسیم استعمال کرتے ہوئے ۱۹۹۲ کے دوران منافع بڑھنے کی شرح تلاش کریں۔

سال	منافع (لاکھ)
1990	6
1991	27
1992	62
1993	111
1994	174

سوال ۲.۳۷: تفاعل $F(x) = \frac{x+2}{x-2}$ کی قیمتیں نقطہ $x = 2$ ، $\frac{11}{10}$ ، $\frac{101}{100}$ ، $\frac{1001}{1000}$ ، $\frac{10001}{10000}$ اور $x = 1$ پر حاصل کر کے جدول میں لکھیں۔(الف) جدول میں پائے جانے والے ہر $x \neq 1$ کے لیے وقفہ $[1, x]$ پر تفاعل کی اوسط شرح تبدیلی حاصل کریں۔(ب) $x = 1$ پر $F(x)$ کی شرح تبدیلی تلاش کریں۔ اگر جدول بڑھانے کی ضرورت ہو تو جدول بڑھائیں۔

سوال ۲.۳۸: $x \geq 0$ کے لیے $g(x) = \sqrt{x}$ لیں۔

ا. وقفہ $[1, 2]$ ، $[1, 1.5]$ اور $[1, 1+h]$ پر x کے لحاظ سے $g(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ب. صفر کے قریب h کی قیمتوں، مثلاً $h = 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001$ کے لیے x کے لحاظ سے وقفہ $[1, 1+h]$ پر $g(x)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ج. جدول سے $x = 1$ پر $g(x)$ کی تبدیلی کی شرح کیا ہے؟

د. $h \to 0$ کے لیے $g(x)$ کی تبدیلی کی شرح الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال ۲.۳۹: $t \neq 0$ کے لیے $f(t) = \frac{1}{t}$ لیں۔

ا. (الف) وقفہ $t = 2$ تا $t = 3$ اور (ب) وقفہ $t = 2$ تا $t = T$ پر t کے لحاظ سے $g(t)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کریں۔

ب. 2 کے قریب پہنچنے والی T کی قیمتوں، مثلاً $T = 2.1$ ، $T = 2.01$ ، $T = 2.001$ ، $T = 2.0001$ ، $T = 2.00001$ ، اور $T = 2.000001$ ، کے لیے وقفہ $[2, T]$ پر t کے لحاظ سے $f(t)$ کی اوسط شرح تبدیلی تلاش کر کر جدول میں لکھیں۔

ج. اس جدول سے $t = 2$ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی کیا ہے۔

د. وقفہ $[2, T]$ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی کی حد $T \to 2$ کے لیے تلاش کریں۔($T = 2$ پُر کرنے سے پہلے آپ کو کچھ الجبرا کرنا ہو گا۔)

سوال ۲.۴۰ تا سوال ۲.۴۵ کو کمپیوٹر کی مدد سے حل کریں۔(الف) نقطہ x_0 کے قریب تفاعل ترسیم کریں۔(ب) ترسیم کو دیکھ کر تفاعل کی حد کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔(پ) حد کو الجبرائی طور پر حاصل کریں۔

سوال ۲.۴۰: $\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

سوال ۲.۴۱: $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3-x^2-5x-3}{(x+1)^2}$

سوال ۲.۴۲: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$

سوال ۲.۴۳: $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2+7}-4}$

سوال ۲.۴۴: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x}$

سوال ۲.۴۵: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2}{3-3\cos x}$

۲.۲ حد تلاش کرنے کے قواعد

حد تلاش کرنے کے مسئلوں کو اس حصہ میں پیش کیا جائے گا۔ پہلے تین مسئلے مثال ۲.۸ کے نتائج کو لے کر کثیر رکنی، ناطق تفاعل اور طاقتوں کی حد تلاش کرنے میں ہمیں مدد دیتے ہیں۔ چوتھا مسئلہ بعد میں مستعمل حساب کے لیے ہمیں تیار کرتا ہے۔

طاقتوں اور الجبرائی مجموعوں کی حد

مسئلہ ۲.۱: **حد کے خواص**

اگر $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$ اور $\lim\limits_{x\to c} g(x) = M$ ہوں، جہاں L اور M حقیقی اعداد ہیں، تب درج ذیل قواعد مطمئن ہوں گے۔

قاعدہ مجموعہ: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)] = L+M$

قاعدہ فرق: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)-g(x)] = L-M$

قاعدہ ضرب: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)] = L\cdot M$

قاعدہ مستقل مضرب: $\lim\limits_{x\to c} kf(x) = kL$ (k مستقل عدد ہے)

قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ $M \neq 0$

قاعدہ طاقت: اگر m اور n عدد صحیح ہوں تب $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^{\frac{m}{n}} = L^{\frac{m}{n}}$ ہو گا بشرطیکہ $L^{\frac{m}{n}}$ حقیقی عدد ہو۔

الفاظ میں درج بالا مسئلہ درج ذیل کہتا ہے۔

۱. دو تفاعل کے مجموعے کی حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا مجموعہ ہو گی۔

۲. دو تفاعل کے فرق کی حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا فرق ہو گی۔

۳. دو تفاعل کے حاصل ضرب کی حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا حاصل ضرب ہو گی۔

۴. ایک تفاعل ضربِ مستقل کی حد اس تفاعل کی حد ضربِ مستقل ہو گی۔

۵. دو تفاعل کے حاصل تقسیم کی حد ان تفاعل کے انفرادی حدوں کا حاصل تقسیم ہو گی بشرطیکہ نسب نما تفاعل کی حد غیر صفر ہو۔

۶. تفاعل کے ناطق طاقت کی حد اس تفاعل کی حد کی ناطق طاقت ہو گی بشرطیکہ حد کی ناطق طاقت حقیقی عدد ہو۔

قاعدہ مجموعہ کو حصہ ۲.۳ میں جبکہ قاعدہ 2 تا 5 کو ضمیمہ ب میں ثابت کیا گیا ہے۔ قاعدہ 6 کا ثبوت اعلیٰ کتابوں میں پایا جائے گا۔

مثال ۲.۱۰: $\lim\limits_{x\to c} \frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5}$ تلاش کریں۔

حل

مثال ۲.۸ کے نتائج $\lim\limits_{x\to c} x = c$ اور $\lim\limits_{x\to c} k = k$ سے شروع کرتے ہوئے مسئلہ ۲.۱ کی مختلف شق استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

ا. $\lim\limits_{x\to c} x^2 = (\lim\limits_{x\to c} x)(\lim\limits_{x\to c} x) = c \cdot c = c^2$ حاصل ضرب یا طاقت

ب. $\lim\limits_{x\to c}(x^2+5) = \lim\limits_{x\to c} x^2 + \lim\limits_{x\to c} 5 = c^2 + 5$ مجموعہ اور (ا)

ج. $\lim\limits_{x\to c} 4x^2 = 4 \lim\limits_{x\to c} x^2 = 4c^2$ ضرب مستقل اور (ا)

د. $\lim\limits_{x\to c}(4x^2-3) = \lim\limits_{x\to c} 4x^2 - \lim\limits_{x\to c} 3 = 4c^2 - 3$ فرق اور (ج)

ھ. $\lim\limits_{x\to c} x^3 = (\lim\limits_{x\to c} x^2)(\lim\limits_{x\to c} x) = c^2 \cdot c = c^3$ حاصل ضرب اور (ا) یا طاقت

و. $\lim\limits_{x\to c}(x^3+4x-3) = \lim\limits_{x\to c} x^3 + \lim\limits_{x\to c}(4x^2-3) = c^3 + 4c^2 - 3$ مجموعہ، (ج) اور (د)

ز. $\lim\limits_{x\to c} \frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5} = \frac{\lim\limits_{x\to c}(x^3+4x^2-3)}{\lim\limits_{x\to c}(x^2+5)} = \frac{c^3+4c^2-3}{c^2+5}$ حاصل تقسیم، (ہ) اور (ب)

□

مثال ۲.۱۱: $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt{4x^2-3}$ تلاش کریں۔

حل

مثال ۲.۱۰-د اور $n = \frac{1}{2}$ کے ساتھ قاعدہ طاقت

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -2} \sqrt{4x^2-3} &= \sqrt{4(-2)^2-3} \\ &= \sqrt{16-3} = \sqrt{13}\end{aligned}$$

□

مسئلہ ۲.۱ کے دو نتائج کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کی حد تلاش کرنے کو مزید آسان بناتے ہیں۔ $x \to c$ کے لیے کثیر رکنی کی حد تلاش کرنے کی خاطر محض تفاعل کے کلیہ میں x کی جگہ c پُر کریں۔ ناطق تفاعل کی حد $x \to c$ پر تلاش کرنے کی خاطر تفاعل کے کلیہ میں x کی جگہ c پُر کریں بشرطیکہ نسب نما اس نقطہ پر غیر صفر ہو۔

مسئلہ ۲.۲: **کثیر رکنی کی حد، متغیر میں مستقل پُر کرنے سے حاصل ہوگی**

اگر $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_0$$

مسئلہ ۲.۳: **غیر صفر نسب نما کی صورت میں ناطق تفاعل کی حد کلیہ میں متغیر کی جگہ مستقل پُر کرنے سے حاصل ہوگی**

فرض کریں کہ $P(x)$ اور $Q(x)$ کثیر رکنی ہیں اور $Q(c) \neq 0$ ہے تب درج ذیل ہوگا۔

$$\lim_{x\to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}$$

مثال ۲.۱۲:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+4x^2-3}{x^2+5} = \frac{(-1)^3+4(-1)^2-3}{(-1)^2+5} = \frac{0}{6} = 0$$

یہ ایک ہی قدم میں مثال ۲.۱۰ کا حل ہے۔ □

صفر نسب نما کا الجبرائی طریقہ سے اسقاط

مسئلہ ۲.۳ ناطق تفاعل پر صرف اس صورت قابل اطلاق ہے جب تحدیدی نقطہ c پر تفاعل کا نسب نما غیر صفر ہو۔ صفر نسب نما کی صورت میں بعض اوقات نسب نما اور شمار کنندہ کے مشترک اجزاء ضربی کاٹتے ہوئے c پر غیر صفر نسب نما حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اگر ایسا ممکن ہو تب مشترک اجزاء ضربی کاٹ کر x کی جگہ c پُر کرنے سے حد حاصل کی جا سکتی ہے۔ درج ذیل مثال میں نسب نما اور شمار کنندہ دونوں $x = 1$ پر صفر ہیں۔ یوں $(x-1)$ ان کا مشترک جزو ضربی ہے جس کو کاٹا جا سکتا ہے۔

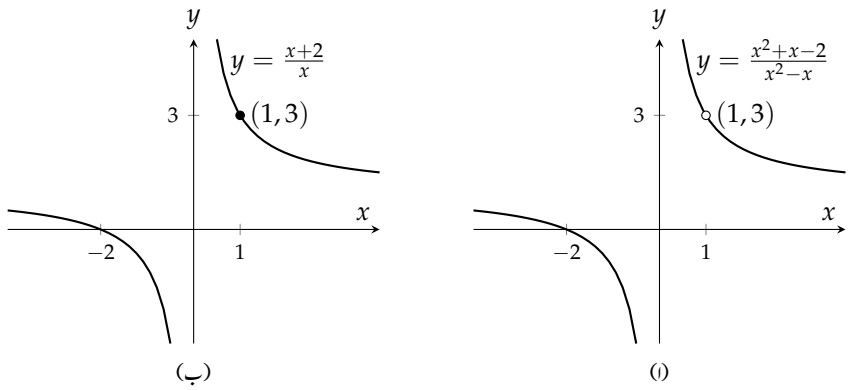
مثال ۲.۱۳: یکساں جزو کی منسوخی

$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ تلاش کریں۔

حل

ہم $x = 1$ پُر نہیں کر سکتے چونکہ ایسا کرنے سے صفر نسب نما حاصل ہوگا اور صفر سے کسی بھی عدد کو تقسیم نہیں کیا جا سکتا ہے۔ البتہ ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو اجزاء ضربی کی صورت میں لکھ کر ان کے مشترک اجزاء ضربی کو آپس میں کاٹ سکتے ہیں۔

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{(x+2)(x-1)}{x(x-1)} = \frac{x+2}{x}$$



شکل ۲.۱۱: ماسوائے نقطہ $(1,3)$ کے دونوں ترسیم یکساں ہیں

اب $x \neq 0$ کی صورت میں درج بالا کو حد تلاش کرنے کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

شکل ۲.۱۱ میں $y = \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ اور $y = \frac{x+2}{x}$ کی ترسیمات دکھائی گئی ہیں۔ یہ ترسیمات صرف نقطہ $(1,3)$ پر ایک دوسرے سے مختلف ہیں۔ البتہ اس نقطے پر دونوں تفاعل کی حد یکساں ہے۔ □

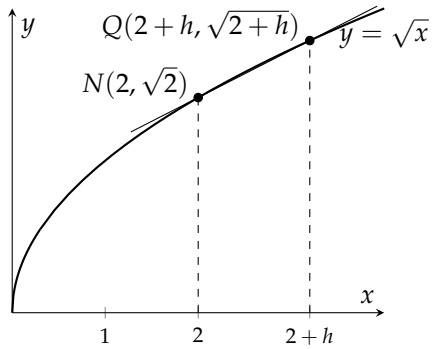
مثال ۲.۱۴: **ایک سے اجزاء پیدا کر کے آپس میں منسوخ کرنا**

$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$ تلاش کریں۔

حل

ہم $h = 0$ پُر کرتے ہوئے حد تلاش نہیں کر سکتے اور نسب نم اور شمار کنندہ کے مشترک جزو ضربی بھی نہیں پائے جاتے۔ البتہ ہم نسب نما (اور شمار کنندہ) کو جوڑی دار تعلق[۵] $\sqrt{2+h} + \sqrt{2}$ سے ضرب دیتے ہوئے مشترک جزو ضربی پیدا کر سکتے ہیں۔ نسب نما میں جذروں کے بیچ علامت تبدیل کرتے

[۵] conjugateexpression



شکل ۲.۱۲: $Q \to N$ کرنے سے سیکنٹ NQ کے ڈھلوان کی حد $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ہے

۱۷۳۹ ہوئے جوڑی دار تعلق حاصل ہوتا ہے۔

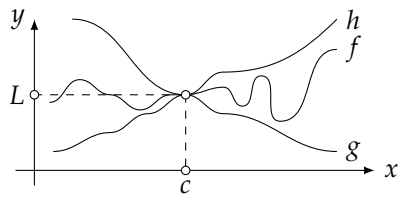
$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} &= \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{2+h-2}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} \\
&= \frac{h}{h(\sqrt{2+h}+\sqrt{2})} && \text{مشترک جزو ضربی پیدا کیا گیا ہے} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} && \text{جس کو ہم کاٹتے ہیں}
\end{aligned}$$

۱۷۴۰ یوں درج ذیل ہو گا۔

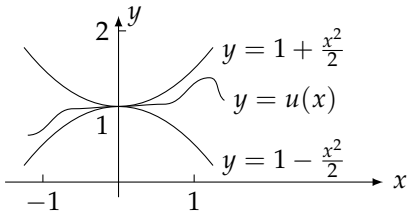
$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{2+h}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2+0}+\sqrt{2}} && \text{نسب نما اب } h=0 \text{ پر صفر نہیں ہے} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

۱۷۴۱

۱۷۴۲ دھیان رہے کہ تفاعل $\frac{\sqrt{2+h}-\sqrt{2}}{h}$ درحقیقت تفاعل $y = \sqrt{x}$ پر نقطہ $N(2, \sqrt{2})$ اور نقطہ $Q(2+h, \sqrt{2+h})$ کے بیچ
۱۷۴۳ سیکنٹ کا ڈھلوان ہے اور $h \to 0$ کرنے سے مراد $Q \to N$ ہے۔ نقطہ Q ترسیم پر N کے بائیں ہاتھ بھی ہو سکتا ہے۔ ہم نے دیکھا کہ اس
۱۷۴۴ سیکنٹ کی تحدیدی قیمت $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ ہے۔ □



شکل ۲.۱۳: f کی ترسیم h اور g کی ترسیم کے بیچ ہے۔



شکل ۲.۱۴: شکل برائے مثال ۲.۱۵

۱۷۴۵ **مسئلہ بیچ**

۱۷۴۶ درج ذیل مسئلہ بعد میں آنے والے ابواب میں کئی قسم کی حد حاصل کرنے میں ہمیں مدد دیگا۔ اس کو **مسئلہ بیچ**[۶] اس لیے کہتے ہیں کہ اس کا تعلق ایسے تفاعل f
۱۷۴۷ سے ہے جس کی قیمتیں تفاعل g اور تفاعل h کی قیمتوں کے بیچ ہو اور جن کا نقطہ c پر ایک ہی حد L ہو۔ ظاہر ہے کہ نقطہ c پر دونوں تفاعل کے بیچ پھنسے
۱۷۴۸ ہوئے تفاعل کی قیمت L ہو گی (شکل ۲.۱۳)۔ اس کا ثبوت ضمیمہ ب میں دیا گیا ہے۔

۱۷۴۹ مسئلہ ۲.۴: **مسئلہ بیچ**

۱۷۵۰ فرض کریں کسی کھلے وقفہ جس میں c پایا جاتا ہو میں، (ممکن ہے کہ) ماسوائے $x = c$ پر، تمام x کے لیے

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

۱۷۵۱ ہے۔ مزید فرض کریں کہ

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$$

۱۷۵۲ ہے۔ تب $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ہو گا۔

۱۷۵۳

۱۷۵۴ مثال ۲.۱۵: اگر تمام $x \neq 0$ کے لیے $1 - \frac{x^2}{4} \leq u(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}$ ہو تب $\lim_{x\to 0} u(x)$ تلاش کریں۔

۱۷۵۵ **حل**

۱۷۵۶ چونکہ

$$\lim_{x\to 0}(1 - \tfrac{x^2}{2}) = 1 \quad \text{اور} \quad \lim_{x\to 0}(1 + \tfrac{x^2}{2}) = 1$$

۱۷۵۷ ہیں لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت $\lim_{x\to 0} u(x) = 1$ ہو گا (شکل ۲.۱۴)۔ □

۱۷۵۸ مثال ۲.۱۶: دکھائیں کہ اگر $\lim_{x\to c}|f(x)| = 0$ ہو تب $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ ہو گا۔

۱۷۵۹ **حل**

---

[۶] sandwichtheorem

چونکہ $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ ہے، اور $-|f(x)|$ اور $|f(x)|$ کی حد 0 ہے لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت $f(x)$ کی حد بھی 0 ہو گی۔ □

سوالات

۲.۲ حد کا حساب

سوال ۲.۴۶ تا سوال ۲.۶۱ میں حد تلاش کریں۔

سوال ۲.۴۶: $\lim_{x\to -7}(2x+5)$

سوال ۲.۴۷: $\lim_{x\to 12}(10-3x)$

سوال ۲.۴۸: $\lim_{x\to 2}(-x^2+5x-2)$

سوال ۲.۴۹: $\lim_{x\to -2}(x^3-2x^2+4x+8)$

سوال ۲.۵۰: $\lim_{t\to 6}8(t-5)(t-7)$

سوال ۲.۵۱: $\lim_{s\to \frac{2}{3}}3s(2s-1)$

سوال ۲.۵۲: $\lim_{x\to 2}\frac{x+3}{x+6}$

سوال ۲.۵۳: $\lim_{x\to 5}\frac{4}{x-7}$

سوال ۲.۵۴: $\lim_{y\to -5}\frac{y^2}{5-y}$

سوال ۲.۵۵: $\lim_{y\to 2}\frac{y+2}{y^2+5y+6}$

سوال ۲.۵۶: $\lim_{x\to -1}3(2x-1)^2$

سوال ۲.۵۷: $\lim_{x\to -4}(x+3)^{1984}$

سوال ۲.۵۸: $\lim_{y\to -3}(5-y)^{\frac{4}{3}}$

سوال ۲.۵۹: $\lim_{z\to 0}(2z-8)^{\frac{1}{3}}$

سوال ۲.۶۰: $\lim_{x\to 0}\frac{3}{\sqrt{3h+1}+1}$

سوال ۲.۶۱: $\lim_{h\to 0} \frac{5}{\sqrt{5h+4}+2}$

سوال ۲.۶۲ تا سوال ۲.۷۵ میں حد تلاش کریں۔

سوال ۲.۶۲: $\lim_{x\to 5} \frac{x-5}{x^2-25}$

سوال ۲.۶۳: $\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^2+4x+3}$

سوال ۲.۶۴: $\lim_{x\to -5} \frac{x^2+3x-10}{x+5}$

سوال ۲.۶۵: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-7x+10}{x-2}$

سوال ۲.۶۶: $\lim_{t\to 1} \frac{t^2+t-2}{t^2-1}$

سوال ۲.۶۷: $\lim_{t\to -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

سوال ۲.۶۸: $\lim_{x\to -2} \frac{-2x-4}{x^3+2x^2}$

سوال ۲.۶۹: $\lim_{y\to 0} \frac{5y^3+8y^2}{3y^4-16y^2}$

سوال ۲.۷۰: $\lim_{u\to 1} \frac{u^4-1}{u^3-1}$

سوال ۲.۷۱: $\lim_{v\to 2} \frac{v^3-8}{v^4-16}$

سوال ۲.۷۲: $\lim_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$

سوال ۲.۷۳: $\lim_{x\to 4} \frac{4x-x^2}{2-\sqrt{x}}$

سوال ۲.۷۴: $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

سوال ۲.۷۵: $\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt{x^2+8}-3}{x+1}$

قواعد حد کا استعمال

سوال ۲.۷۶: فرض کریں کہ $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$ اور $\lim_{x\to 0} g(x) = 5$ ہیں۔ مسئلہ ۲.۱ کے کون سے اجزاء درج ذیل قدم

۱۷۹۹ الف، ب اور پ میں استعمال کیے گئے ہیں؟

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)-g(x)}{(f(x)+7)^{\frac{2}{3}}} &= \frac{\lim_{x\to 0}(2f(x)-g(x))}{\lim_{x\to 0}(f(x)+7)^{\frac{2}{3}}} && \text{(الف)}\\
&= \frac{\lim_{x\to 0}2f(x)-\lim_{x\to 0}g(x)}{(\lim_{x\to 0}(f(x)+7))^{\frac{2}{3}}} && \text{(ب)}\\
&= \frac{2\lim_{x\to 0}f(x)-\lim_{x\to 0}g(x)}{(\lim_{x\to 0}f(x)+\lim_{x\to 0}7)^{\frac{2}{3}}} && \text{(پ)}\\
&= \frac{(2)(1)-(-5)}{(1+7)^{\frac{2}{3}}} = \frac{7}{4}
\end{aligned}$$

۱۸۰۰ سوال ۲.۷۷: فرض کریں کہ $\lim_{x\to 1}h(x)=5$ ، $\lim_{x\to 1}p(x)=1$ اور $\lim_{x\to 1}r(x)=2$ ہیں۔ مسئلہ ۲.۱
۱۸۰۱ کے کون سے اجزاء درج ذیل قدم الف، ب اور پ میں استعمال کیے گئے ہیں؟

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{5h(x)}}{p(x)(4-r(x))} &= \frac{\lim_{x\to 1}\sqrt{5h(x)}}{\lim_{x\to 1}(p(x)(4-r(x)))} && \text{(الف)}\\
&= \frac{\sqrt{\lim_{x\to 1}5h(x)}}{(\lim_{x\to 1}p(x))(\lim_{x\to 1}(4-r(x)))} && \text{(ب)}\\
&= \frac{\sqrt{5\lim_{x\to 1}h(x)}}{(\lim_{x\to 1}p(x))(\lim_{x\to 1}4-\lim_{x\to 1}r(x))} && \text{(پ)}\\
&= \frac{\sqrt{(5)(5)}}{(1)(4-2)} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

۱۸۰۲ سوال ۲.۷۸: $\lim_{x\to c}f(x)=5$ اور $\lim_{x\to c}g(x)=-2$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

۱۸۰۳ ا. $\lim_{x\to c}f(x)g(x)$ ۱۸۰۵ ج. $\lim_{x\to c}(f(x)+3g(x))$

۱۸۰۴ ب. $\lim_{x\to c}2f(x)g(x)$ ۱۸۰۶ د. $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{f(x)-g(x)}$

۱۸۰۷ سوال ۲.۷۹: $\lim_{x\to 4}f(x)=0$ اور $\lim_{x\to 4}g(x)=-3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

۱۸۰۸ ا. $\lim_{x\to 4}(g(x)+3)$ ۱۸۱۰ ج. $\lim_{x\to 4}(g(x))^2$

۱۸۰۹ ب. $\lim_{x\to 4}xf(x)$ ۱۸۱۱ د. $\lim_{x\to 4}\frac{g(x)}{f(x)-1}$

۱۸۱۲ سوال ۲.۸۰: $\lim_{x\to b}f(x)=7$ اور $\lim_{x\to b}g(x)=-3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کریں۔

۱۸۱۳ ا. $\lim_{x\to b}(f(x)+g(x))$

۱۸۱۴ ب. $\lim_{x\to b} f(x)\cdot g(x)$

۱۸۱۵ ج. $\lim_{x\to b} 4g(x)$

۱۸۱۶ د. $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)}$

۱۸۱۷ سوال ۲.۸۱: $\lim_{x\to -2} p(x) = 4$ ، $\lim_{x\to -2} r(x) = 0$ اور $\lim_{x\to -2} s(x) = -3$ لیتے ہوئے درج ذیل
۱۸۱۸ حاصل کریں۔

۱۸۱۹ ا. $\lim_{x\to -2}(p(x)+r(x)+s(x))$

۱۸۲۰ ب. $\lim_{x\to -2} p(x)\cdot r(x)\cdot s(x)$

۱۸۲۱ ج. $\lim_{x\to -2} \frac{-4p(x)+5r(x)}{s(x)}$

۱۸۲۲ **اوسط تبدیلی شرح کی حد**

۱۸۲۳ درج ذیل صورت کی حد کا سیکنٹ خطوط، مماس اور لحاتی شرح کے ساتھ گہرا تعلق ہونے کی وجہ سے یہ احصاء میں عموماً درپیش ہوتی ہے۔

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

۱۸۲۴ سوال ۲.۸۲ تا سوال ۲.۸۷ میں اس حد کو دیے گئے x پر تفاعل $f(x)$ کے لیے تلاش کریں۔

۱۸۲۵ سوال ۲.۸۲: $f(x) = x^2, \quad x = 1$
۱۸۲۶

۱۸۲۷ سوال ۲.۸۳: $f(x) = x^2, \quad x = -2$

۱۸۲۸ سوال ۲.۸۴: $f(x) = 3x-4, \quad x = 2$
۱۸۲۹

۱۸۳۰ سوال ۲.۸۵: $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x = -2$

۱۸۳۱ سوال ۲.۸۶: $f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 7$
۱۸۳۲

۱۸۳۳ سوال ۲.۸۷: $f(x) = \sqrt{3x+1}, \quad x = 0$
۱۸۳۴

۱۸۳۵ **مسئلہ بیچ کا استعمال**

۱۸۳۶ سوال ۲.۸۸: اگر $\sqrt{5-2x} \le f(x) \le \sqrt{5-x^2}$ کے لیے $-1 \le x \le 1$ ہو تب $\lim_{x\to 0} f(x)$ تلاش
۱۸۳۷ کریں۔
۱۸۳۸

۱۸۳۹ سوال ۲.۸۹: اگر تمام x کے لیے $2-x^2 \le g(x) \le 2\cos x$ ہو تب $\lim_{x\to 0} g(x)$ تلاش کریں۔

سوال ۲.۹۰: (الف) یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ 0 کے قریب تمام x کے لیے درج ذیل عدم مساوات مطمئن ہوتی ہے۔

$$1-\frac{x^2}{6}<\frac{x\sin x}{2-2\cos x}<1$$

اس سے درج ذیل کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2-2\cos x}$$

(ب) $-2\leq x\leq 2$ کے لیے $y=1-\frac{x^2}{6}$ ، $y=\frac{x\sin x}{2-2\cos x}$ اور $y=1$ ترسیم کریں۔ $x\to 0$ کرتے ہوئے ان ترسیم کے رویہ پر تبصرہ کریں۔

سوال ۲.۹۱: (الف) درج ذیل عدم مساوات 0 کے قریب تمام x کے لیے مطمئن ہوتی ہے (سوال ۹.۵۳۹)۔

$$\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}<\frac{1-\cos x}{x^2}<\frac{1}{2}$$

اس سے درج ذیل کے بارے میں کیا معلومات فراہم ہوتی ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

(ب) $-2\leq x\leq 2$ کے لیے $y=\frac{1}{2}-\frac{x^2}{24}$ ، $y=\frac{1-\cos x}{x^2}$ اور $y=\frac{1}{2}$ ترسیم کریں۔ ان ترسیم کا رویہ $x\to 0$ کرتے ہوئے کیسا ہے؟

نظریہ اور مثالیں

سوال ۲.۹۲: اگر $[-1,1]$ میں x کے لیے $x^4\leq f(x)\leq x^2$ اور $x<-1$ اور $x>1$ کے لیے $x^2\leq f(x)\leq x^4$ ہو تب کن نقطوں c پر آپ کو $\lim_{x\to c}f(x)$ خود بخود معلوم ہو گی؟ ان نقطوں پر حد کیا ہو گی؟

سوال ۲.۹۳: فرض کریں کہ تمام $x\neq 2$ کے لیے $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ ہے اور مزید فرض کریں کہ $\lim_{x\to 2}g(x)=\lim_{x\to 2}h(x)=-5$ ہے۔ کیا 2 پر f ، g اور h کی قیمتوں کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ کیا $f(2)=0$ ہو سکتا ہے؟ کیا $\lim_{x\to 2}f(2)=0$ ہو سکتی ہے؟ اپنے جوابات کی وجوہات پیش کریں۔

سوال ۲.۹۴: اگر $\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-5}{x-2}=1$ ہو تب $\lim_{x\to 4}f(x)$ کیا ہو گی؟

سوال ۲.۹۵: اگر $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x^2}=1$ ہو تب (الف) $\lim_{x\to -2}f(x)$ (ب) $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{x}$ تلاش کریں۔

سوال ۲.۹۶: (الف) اگر $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2}=3$ ہو تب $\lim_{x\to 2}f(x)$ کیا ہو گی؟

(ب) اگر $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-5}{x-2}=4$ ہو تب $\lim_{x\to 2}f(x)$ کیا ہو گی؟

سوال ۲.۹۷: اگر $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 1$ ہو تب (الف) $\lim_{x\to 0} f(x)$ اور (ب) $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$ کیا ہوں گی؟

کمپیوٹر

سوال ۲.۹۸: (الف) $\lim_{x\to 0} g(x)$ حاصل کرنے کی خاطر $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ترسیم کریں۔ x کے قریب ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے نتیجہ حاصل کریں۔

(ب) جزو (الف) کے جواب کو الجبرائی طریقہ سے حاصل کریں۔

سوال ۲.۹۹: (الف) $h(x) = x^2 \cos \frac{1}{x^3}$ ترسیم کرتے ہوئے x کے قریب ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے $\lim_{x\to 0} h(x)$ تلاش کریں۔

(ب) جزو (الف) کے نتیجہ کو الجبرا سے حاصل کریں۔

۲.۳ مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف

اس حصہ میں ہم حد کی باضابطہ تعریف پیش کرتے ہیں۔ یہ تعریف کسی بھی مثال کے لیے قابل استعمال ہو گی۔ اس سے پہلے ہم تفاعل کی خارجی قیمت کو مقررہ حدود کے اندر رکھنے کی خاطر اس کی داخلی قیمتوں پر غور کرتے ہیں۔

خارجی قیمتوں کو مطلوبہ قیمتوں کے قریب رکھنا

ہم بعض اوقات جاننا چاہتے ہیں کہ x کی کون سی قیمتیں تفاعل $y = f(x)$ کی قیمتوں کو کسی مخصوص مطلوبہ قیمت کے قریب رکھے گی۔ کتنا قریب کا دارومدار درپیش مسئلہ پر ہو گا۔ مثلاً پٹرول پمپ پر ہم آخری قطرہ حاصل کرنا چاہیں گے۔ مرمت کے دوران مستری انجن کے سلنڈر کا قطر $50\ \mu m$ درستگی کے اندر رکھنا چاہے گا اور دوا ساز اجزاء کو قریبی ملی گرام تک ناپے گا۔

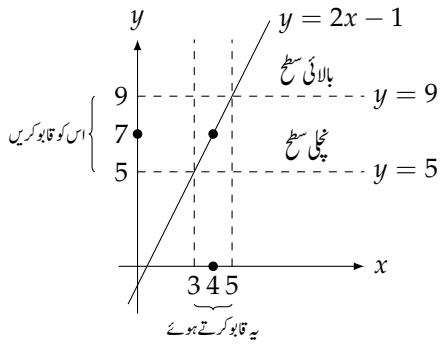
مثال ۲.۱۷: خطی تفاعل قابو کرنا

تفاعل $y = 2x - 1$ کی خارجی قیمت کو $y_0 = 7$ کے 2 اکائی قریب رکھنے کی خاطر x کو $x_0 = 4$ کے کتنا قریب رکھنا ضروری ہے؟

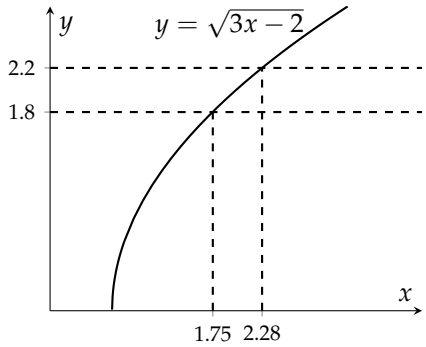
حل

ہم سے پوچھا گیا ہے کہ x کی کن قیمتوں کے لیے $|y - 7| < 2$ ہے۔ جواب حاصل کرنے سے پہلے ہم $|y - 7|$ کو x کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$|y - 7| = |(2x - 1) - 7| = |2x - 8|$$



شکل ۲.۱۵: x کی قیمت قابو کرتے ہوئے y کی قیمت قابو کی جاتی ہے (مثال ۲.۱۷)



شکل ۲.۱۶: y کو 1.8 اور 2.2 کے اندر رکھنے کی خاطر x کو 1.75 اور 2.28 کے اندر رکھنا ہوگا۔

۱۸۸۴ یوں ہم x کی وہ قیمتیں جاننا چاہتے ہیں جو عدم مساوات $|2x-8| < 2$ کو مطمئن کرتی ہیں۔ اس عدم مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} |2x-8| &< 2 \\ -2 < 2x-8 &< 2 \\ 6 < 2x &< 10 \\ 3 < x &< 5 \\ -1 < x-4 &< 1 \end{aligned}$$

۱۸۸۵ x کو $x_0 = 4$ کے 1 اکائی کے اندر رکھتے ہوئے y کی قیمت $y_0 = 7$ کے 2 اکائیوں کے اندر رہے گی (شکل ۲.۱۵)۔ □

۱۸۸۶ **فنیات**

۱۸۸۷ مطلوبہ قیمتیں: کمپیوٹر پر ترسیم کھینچ کر مطلوبہ قیمتوں پر تجربے کیے جا سکتے ہیں۔ درکار تفاعل کی ترسیم پر بالائی اور نچلی مطلوبہ سطحوں کو افقی لکیروں سے ظاہر
۱۸۸۸ کریں۔ ترسیم کو اتنا بڑا کریں کہ مطلوبہ وقفہ صاف نظر آئے۔ یوں مطلوبہ وقفے میں تفاعل کا رویہ دیکھا جا سکتا ہے۔ (سوال ۲.۱۰۶ تا سوال ۲.۱۱۳ اور سوال
۱۸۸۹ ۲.۱۶۰ تا سوال ۲.۱۶۳)

۱۸۹۰ مثال کے طور پر $f(x) = \sqrt{3x-2}$ کی ترسیم پر محور y کے مطلوبہ وقفہ $(1.8, 2.2)$ پر غور کریں۔ یوں $y_1 = f(x)$ ، $y_2 = 1.8$
۱۸۹۱ اور $y_3 = 2.2$ ترسیم کریں (شکل ۲.۱۶)۔ اسی طرح مطلوبہ وقفہ $(1.98, 2.02)$ اور $(1.9998, 2.0002)$ پر بھی تفاعل کا رویہ
۱۸۹۲ دیکھیں۔

۱۸۹۳ مثال ۲.۱۸: 6 cm اندرونی قطر کے ایک لٹر پیمائشی پیالے پر 1 mm وقفہ پر افقی لکیریں کیوں کھینچی گئی ہوتی ہیں۔
۱۸۹۴ پیالے میں مائع کا حجم $H = \pi r^2 h = 36\pi h$ ہوگا جہاں پیالے کا اندرونی رداس r اور مائع کی گہرائی h ہے۔ ایک لٹر $(1000\,\text{cm}^3)$ پانی
۱۸۹۵ ناپنے کی خاطر h کتنا ہوگا؟ ناپ میں خلل $1\,\%$ سے کم ہونا چاہیے۔

حل

ہم h کا ایسا وقفہ تلاش کرنا چاہتے ہیں جو درج ذیل مطمئن کرتا ہو۔

$$|H - 1000| = |36\pi h - 1000| \leq 10$$

ہمیں درج ذیل عدم مساوات حل کرنی ہو گی۔

$$\begin{aligned} |36\pi h - 1000| &\leq 10 \\ -10 \leq 36\pi h - 1000 &\leq 10 \\ 990 \leq 36\pi h &\leq 1010 \\ \frac{990}{36\pi} \leq h &\leq \frac{1010}{36\pi} \\ 8.8 \leq h &\leq 8.9 \end{aligned}$$

یوں $1\,\%$ درستگی کی خاطر درکار وقفہ گہرائی $8.9 - 8.8 = 0.1\,\text{cm}$ یعنی $1\,\text{mm}$ ہے۔ پیالے پر ایک ملی میٹر فاصلے پر افقی لکیریں ہمیں ایک فی صد درستگی تک مائع ناپنے میں مدد دیتی ہیں جو کھانا تیار کرنے کے لیے کافی (درستگی) ہے۔ □

حد کی باضابطہ تعریف

مطلوبہ قیمت مسئلے میں ہم جاننا چاہتے ہیں کہ متغیر x کو کسی مخصوص قیمت x_0 کے کتنے قریب رکھتے ہوئے تفاعل $f(x)$ کی قیمت کو مطلوبہ قیمت y_0 کے قریب مخصوص وقفہ میں رکھنا ممکن ہو گا۔ یہ دکھانے کی خاطر کہ $x \to x_0$ کرنے سے $f(x)$ کی حد L حاصل ہوتی ہے، ہمیں دکھانا ہو گا کہ ہم x کو x_0 کے بہت قریب کرتے ہوئے $f(x)$ اور L میں فرق کو کسی بھی معینہ خلل سے کم کر سکتے ہیں۔

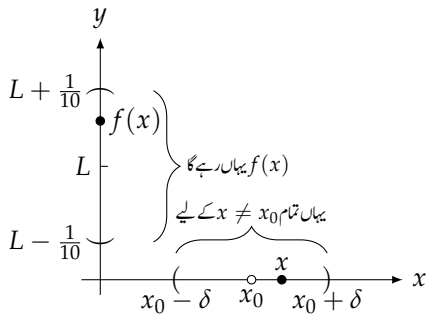
فرض کریں ہم $f(x)$ کی قیمت کو دیکھتے ہوئے x کو x_0 کے قریب لاتے ہیں (تاہم ہم x کی قیمت کو کبھی بھی x_0 کے برابر نہیں کرتے)۔ ہم چاہیں گے کہ ہم کہہ سکیں کہ x_0 سے x کا فاصلہ δ سے کم رکھنے سے $f(x)$ اور L کی قیمت میں فرق L کی اکائی کے دسویں حصے سے کم ہو گی (شکل ۲.۱۷)۔ البتہ اتنا جاننا کافی نہیں چونکہ x کو x_0 کے مزید قریب کرنے سے کیا معلوم کہ وقفہ $L - \frac{1}{10}$ تا $L + \frac{1}{10}$ کے بیچ $f(x)$ کی قیمت L کے مزید قریب ہونے کے بجائے تھرتھراتی (کم اور زیادہ ہوتی) ہو۔

ہم سے کہا جا سکتا ہے کہ خلل میں چھوٹ $\frac{L}{100}$ یا $\frac{L}{1000}$ یا $\frac{L}{100{,}000}$ ہے۔ ہر مرتبہ ہم x_0 کے ارد گرد (آپس پاس) ایسا نیا وقفہ δ تلاش کرتے ہیں جس کے اندر x کو رکھتے ہوئے قابل برداشت چھوٹ کے اندر رہا جا سکتا ہو۔ البتہ ہر مرتبہ اس امکان کو رد نہیں کیا جا سکتا ہے کہ x_0 کے مزید قریب جانے سے $f(x)$ کی قیمت تھرتھراہٹ کا شکار ہوتے ہوئے L کے قریب تر نہ پہنچتی ہو۔

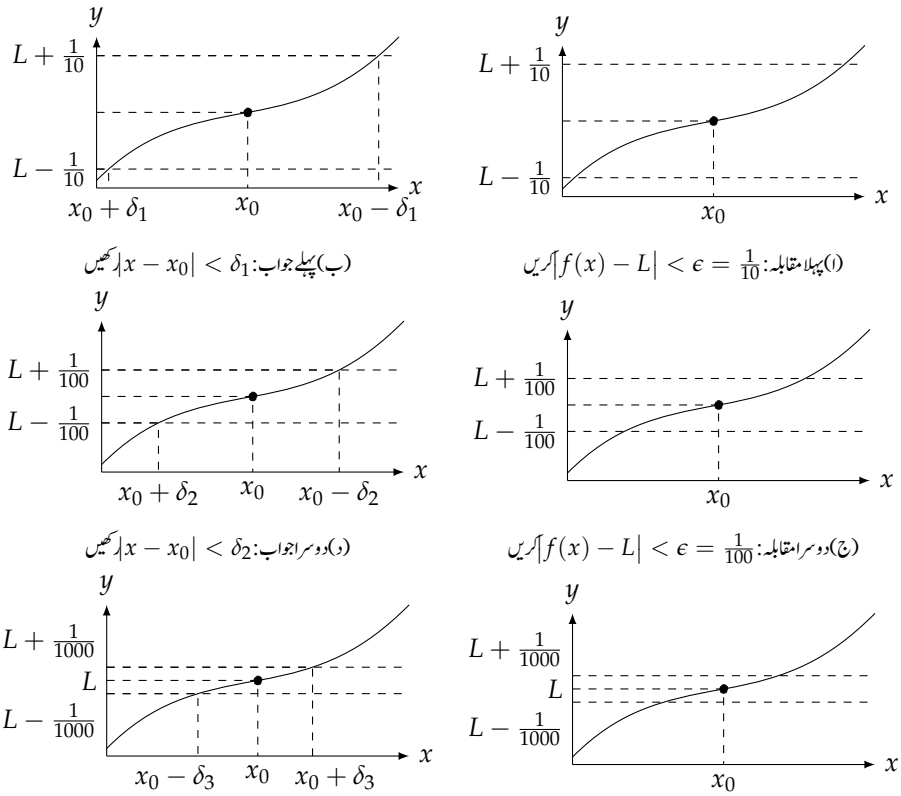
شکل ۲.۱۸ میں اس مسئلے کی وضاحت کی گئی ہے جسے آپ ایک شکی انسان اور ایک عالم کے مابین بحث تصور کر سکتے ہیں۔ شکی انسان قابل قبول چھوٹ ϵ چاہتا ہے جس کے مقابلے میں عالم درکار δ پیش کرتا ہے۔

اس نہ ختم ہونے والی بحث کو ہم یوں ختم کر سکتے ہیں کہ ہم ثابت کریں کہ ہر σ کے لیے ایسا δ تلاش کرنا ممکن ہے جو $f(x)$ کو L کے قریب قابل قبول فاصلہ ϵ کے اندر رکھتا ہو (شکل ۲.۱۹)۔

یوں آخر کار ہم ریاضی کی زبان میں یہ کہہ سکتے ہیں کہ x کو x_0 کے جتنا زیادہ قریب کیا جائے، $f(x)$ کی قیمت L کے اتنی زیادہ قریب ہو گی۔



شکل ۲.۱۷: حد کی تعریف میں ایک قدم



(ا) پہلا مقابلہ: $|f(x)-L| < \epsilon = \frac{1}{10}$ کریں

(ب) پہلے جواب: $|x-x_0| < \delta_1$ رکھیں

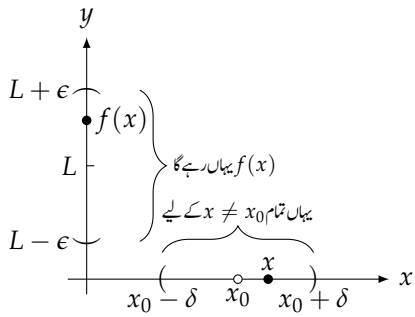
(ج) دوسرا مقابلہ: $|f(x)-L| < \epsilon = \frac{1}{100}$ کریں

(د) دوسرا جواب: $|x-x_0| < \delta_2$ رکھیں

(ہ) تیسرا مقابلہ: $|f(x)-L| < \epsilon = \frac{1}{1000}$ کریں

(و) تیسرا جواب: $|x-x_0| < \delta_3$ رکھیں

شکل ۲.۱۸: شکی شخص اور عالم کا مقابلہ



شکل ۲.۱۹: حد کی تعریف میں δ اور ϵ کا تعلق۔

۱۹۱۷ تعریف: **حد کی باضابطہ تعریف**

۱۹۱۸ فرض کریں کہ x_0 کے ارد گرد ایک کھلے وقفہ میں $f(x)$ معین ہے جبکہ نقطہ x_0 پر عین ممکن ہے کہ $f(x)$ معین نہ ہو۔ اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے
۱۹۱۹ لیے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام x کے لیے درج ذیل مطمئن ہوں

$$0 < |x - x_0| < \delta, \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

۱۹۲۰ تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت حد L کے قریب تر پہنچتی ہے، جس کو الجبرائی طور پر
۱۹۲۱ درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

۱۹۲۲ □

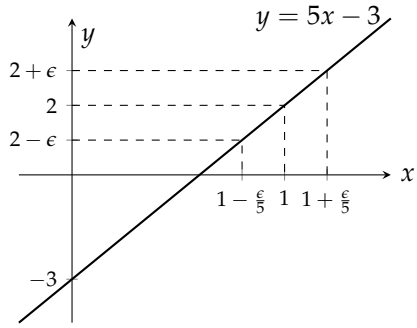
۱۹۲۳ مطلوبہ قیمت کے تصور پر دوبارہ بات کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ آپ خراد کی مشین پر قطر L کا دھرا تیار کرنا چاہتے ہیں۔ اب کوئی بھی مشین مکمل درست نتائج
۱۹۲۴ نہیں دیتی لہٰذا آپ کو $f(x)$ قطر یعنی $L - \epsilon$ اور $L + \epsilon$ کے بیچ قطر کا دھرا قبول کرنا ہو گا۔ دھرے کا اتنا درست قطر حاصل کرنے کے لیے x کو
۱۹۲۵ قابو میں رکھنا ضروری ہو گا لہٰذا x کو $x - \delta$ اور $x + \delta$ کے بیچ رکھنا ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جیسے جیسے قطر کی درستگی میں چھوٹ ϵ کم کی جائے،
۱۹۲۶ آپ کو ویسے ویسے δ کو زیادہ درست کرنا ہو گا۔

۱۹۲۷ تعریف پرکھنے کی مثالیں

۱۹۲۸ حد کی باضابطہ تعریف ہمیں حد تلاش کرنے میں مدد نہیں دیتی البتہ اس سے حد کی درستگی کی تصدیق کی جا سکتی ہے۔ درج ذیل مثالوں میں ہم حد کی تعریف کو
۱۹۲۹ استعمال کرتے ہوئے چند مخصوص تفاعل کی حد کی تصدیق کرتے ہیں۔ حد کی تعریف کا اصل مقصد اس طرح کا حساب کرنا نہیں ہے بلکہ اس تعریف کو استعمال
۱۹۳۰ کرتے ہوئے عمومی مسئلے بیان کرنا مقصد ہے جو ہمیں تفاعل کی حد حاصل کرنے میں مدد دیتے ہیں۔

۱۹۳۱ مثال ۲.۱۹: دکھائیں کہ $\lim_{x \to 1}(5x - 3) = 2$ ہے۔

۱۹۳۲ **حل**



شکل ۲.۲۰: تفاعل $f(x) = 5x - 3$ کے لیے $0 < |x-1| < \frac{\epsilon}{5}$ کی صورت میں $|f(x) - 2| < \epsilon$ ہوگا (مثال ۲.۱۹)۔

حد کی تعریف میں $x_0 = 1$ ، $f(x) = 5x - 3$ اور $L = 2$ لیں۔ کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ہمیں موزوں $\delta > 0$ تلاش کرنا ہوگا تاکہ اگر $x \neq 1$ ہو اور $x_0 = 1$ سے x کا فاصلہ δ سے کم ہو یعنی اگر

$$0 < |x - a| < \delta$$

ہو تب $L = 2$ سے $f(x)$ کا فاصلہ ϵ سے کم ہوگا یعنی:

$$|f(x) - 2| < \epsilon$$

ہم ϵ کی عدم مساوات سے واپس چلتے ہوئے δ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} |(5x-3)-2| = |5x-5| &< \epsilon \\ 5|x-1| &< \epsilon \\ |x-1| &< \frac{\epsilon}{5} \end{aligned}$$

یوں ہم $\delta = \frac{\epsilon}{5}$ لے سکتے ہیں (شکل ۲.۲۰)۔ اب اگر $0 < |x-1| < \delta = \frac{\epsilon}{5}$ ہو تب درج ذیل ہوگا۔

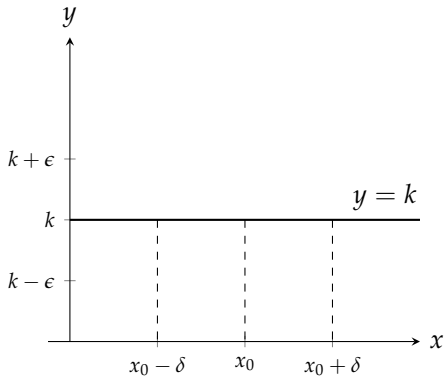
$$|(5x-3)-2| = |5x-5| = 5|x-1| < 5(\tfrac{\epsilon}{5}) = \epsilon$$

اس سے ثابت ہوا کہ $\lim_{x\to 1}(5x-3) = 2$ ہے۔

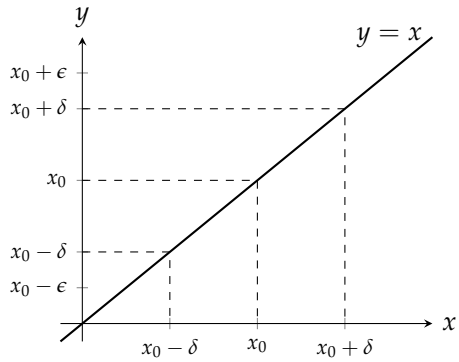
$\delta = \frac{\epsilon}{5}$ وہ واحد قیمت نہیں جس کے لیے $0 < |x-1| < \delta$ سے مراد $|5x-5| < \epsilon$ لی جا سکتی ہے۔ δ کی اس قیمت سے کوئی بھی چھوٹی مثبت قیمت کے لیے بھی $0 < |x-1| < \delta$ سے مراد $|5x-5| < \epsilon$ لی جا سکتی ہے۔ حد کی تعریف بہترین δ کی بات نہیں کرتی بلکہ δ کی کسی بھی قیمت جو ان شرائط کو مطمئن کرتی ہو کی بات کرتی ہے۔ □

مثال ۲.۲۰: دو اہم حد

تصدیق کریں: (ا) $\lim_{x\to x_0} x = x_0$ (ب) $\lim_{x\to x_0} k = k$ جہاں k مستقل ہے۔



(ب) تفاعل $f(x) = k$ کے لیے کسی بھی مثبت δ کی صورت میں $|f(x)-k| < \epsilon$ ہوگا۔



(ا) $0 < |x-x_0| < \delta$ کی صورت میں $f(x) = x$ کے لیے جب بھی $\delta \le \epsilon$ ہو تب $|f(x)-x_0| < \epsilon$ ہوگا۔

شکل ۲.۲۱: اشکال برائے مثال ۲.۲۰

۱۹۴۴ **حل**

۱۹۴۵ (ا) فرض کریں کہ $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا $\delta > 0$ تلاش کرنا ہے کہ تمام x کے لیے

$$0 < |x-x_0| < \delta \quad \text{سے مراد} \quad |x-x_0| < \epsilon \quad \text{ہو۔}$$

۱۹۴۶ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ δ کی قیمت ϵ کے برابر یا اس سے کم مثبت عدد ممکن ہے (شکل ۲.۲۱-ا)۔ یوں ثابت ہوا کہ $\lim_{x\to x_0} = x_0$ ہے۔

۱۹۴۷ (ب) فرض کریں کہ $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا δ تلاش کرنا ہے کہ ہر x کے لیے

$$0 < |x-x_0| < \delta \quad \text{سے مراد} \quad |k-k| < \epsilon \quad \text{ہو۔}$$

۱۹۴۸ چونکہ $k-k=0$ ہے لہٰذا کسی بھی مثبت عدد کو δ لیا جا سکتا ہے (شکل ۲.۲۱-ب)۔ یوں ثابت ہوا کہ $\lim_{x\to x_0} k = k$ ہے۔ □

۱۹۴۹ دیے گئے ϵ کے لیے δ کا الجبرائی حصول

۱۹۵۰ مثال ۲.۱۹ اور مثال ۲.۲۰ میں x_0 کے ارد گرد وہ وقفہ جس پر $|f(x)-L|$ کی قیمت ϵ سے کم تھی x_0 کے لحاظ سے تشاکلی تھا۔ یوں ہم δ کو وقفے
۱۹۵۱ کا نصف لے سکتے تھے۔ جب ایسا تشاکل نہ پایا جاتا ہو، جو عموماً اوقات نہیں پایا جاتا، ہم x_0 سے وقفے کے قریبی سرتک فاصلے کو δ لے سکتے ہیں۔

۱۹۵۲ مثال ۲.۲۱: حد $\lim_{x\to 5}\sqrt{x-1} = 2$ کے لیے $\epsilon = 1$ کے لحاظ سے $\delta > 0$ تلاش کریں۔ یعنی ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ
۱۹۵۳ $0 < |x-5| < \delta$ میں تمام x کے لیے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔ (علامت $\implies$ کو پڑھیں ''سے مراد''۔)

$$0 < |x-5| < \delta \quad \overset{\text{سے مراد}}{\implies} \quad \left|\sqrt{x-1}-2\right| < 1$$

حل

اس کو دو قدموں میں حل کرتے ہیں۔ پہلے قدم میں عدم مساوات $\left|\sqrt{x-1}-2\right| < 1$ کو حل کرتے ہوئے $x_0 = 5$ کے ارد گرد ایسا وقفہ (a,b) تلاش کرتے ہیں جس پر تمام $x \neq x_0$ کے لیے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔ اس کے بعد ایسا عدد $\delta > 0$ حاصل کیا جائے گا کہ وقفہ $5-\delta < x < 5+\delta$ کا وسط نقطہ x_0 ہو اور یہ وقفہ (a,b) کے اندر پایا جاتا ہو۔

پہلا قدم: عدم مساوات $\left|\sqrt{x-1}-2\right| < 1$ کو حل کرتے ہوئے $x_0 = 5$ کے ارد گرد ایسا وقفہ تلاش کرتے ہیں جس پر تمام $x \neq x_0$ کے لیے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{x-1}-2\right| &< 1\\
-1 < \sqrt{x-1}-2 &< 1\\
1 < \sqrt{x-1} &< 3\\
1 < x-1 &< 9\\
2 < x &< 10
\end{aligned}$$

عدم مساوات کھلے وقفہ $(2,10)$ پر تمام نقطوں کے لیے مطمئن ہوتی ہے لہٰذا یہ اس وقفے پر تمام $x \neq 5$ کے لیے بھی مطمئن ہو گی۔

دوسرا قدم: ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں جو وسط کردہ وقفہ $5-\delta < x < 5+\delta$ کو وقفہ $(2,10)$ میں رکھتا ہو۔ 5 سے وقفہ $(2,10)$ کے قریبی سرا کا فاصلہ 3 ہے۔ اس طرح $\delta = 3$ یا اس سے کم کوئی بھی مثبت عدد لینے سے $0 < |x-5| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x وقفہ $(2,10)$ میں پائے جائیں گے جس سے $\left|\sqrt{x-1}-2\right| < 1$ خود بخود مطمئن ہو گا۔

$$0 < |x-5| < 3 \quad \Longrightarrow \quad \left|\sqrt{x-1}-2\right| < 1$$

□

دیے گئے f ، L ، x_0 اور $\epsilon > 0$ کے لیے δ کا الجبرائی حصول

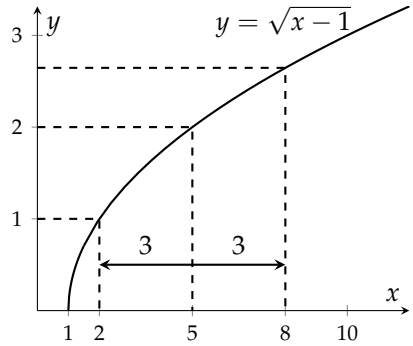
ایسا $\delta > 0$ کہ $0 < |x-x_0| < \delta$ میں تمام x کے لیے درج ذیل ہو

$$0 < |x-x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-L| < \epsilon$$

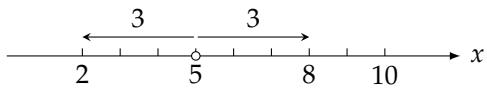
کو دو قدموں میں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

پہلا قدم: عدم مساوات $|f(x)-L| < \epsilon$ کو حل کرتے ہوئے x_0 کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ (a,b) حاصل کریں جس میں تمام $x \neq x_0$ کے لیے یہ عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔

دوسرا قدم: ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں جو کھلے وقفہ $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ ، جس کا وسط x_0 ہے، کو (a,b) کے اندر رکھے۔ اس δ وقفے میں تمام $x \neq x_0$ کے لیے عدم مساوات $|f(x)-L| < \epsilon$ مطمئن ہو گی۔



(ب) تفاعل اور وقفہ



(ا) $x_0 = 5$ کے ارد گرد رداس 3 کا کھلا وقفہ $(2, 10)$ کے اندر پایا جائے گا۔

شکل ۲.۲۲: اشکال برائے مثال ۲.۲۱

۱۹۷۲ **مثال ۲.۲۲:** ثابت کریں کہ درج ذیل تفاعل کے لیے $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2 \\ 1, & x = 2 \end{cases}$$

۱۹۷۳ **حل**

۱۹۷۴ ہم نے ثابت کرنا ہے کہ دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ $0 < |x-2| < \delta$ میں تمام x کے لیے درج ذیل مطمئن
۱۹۷۵ ہوتا ہو۔

$$0 < |x-2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|f(x) - 4\right| < \epsilon$$

۱۹۷۶ **پہلا قدم:** عدم مساوات $\left|f(x) - 4\right| < \epsilon$ کو حل کرتے ہوئے $x_0 = 2$ کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ تلاش کرتے ہیں جس میں تمام $x \neq$
۱۹۷۷ x_0 کے لیے عدم مساوات مطمئن ہوتی ہو۔ اب $x \neq x_0 = 2$ کے لیے $f(x) = x^2$ ہے لہٰذا عدم مساوات کی صورت $\left|x^2 - 4\right| <$
۱۹۷۸ ϵ ہو گی۔

$$\begin{aligned} \left|x^2 - 4\right| &< \epsilon \\ -\epsilon < x^2 - 4 &< \epsilon \\ 4 - \epsilon < x^2 &< 4 + \epsilon \\ \sqrt{4-\epsilon} < |x| &< \sqrt{4+\epsilon} \qquad \text{فرض کریں کہ } \epsilon < 4 \text{ ہے} \\ \sqrt{4-\epsilon} < x &< \sqrt{4+\epsilon} \end{aligned}$$

۱۹۷۹ کھلے وقفہ $(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon})$ میں تمام $x \neq 2$ کے لیے عدم مساوات $\left|f(x) - 4\right| < \epsilon$ مطمئن ہوتی ہے۔

دوسرا قدم: ایسا $\delta > 0$ تلاش کرتے ہیں جو وسط کردہ وقفہ $(2-\delta, 2+\delta)$ کو $(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon})$ کے اندر رکھتا ہو۔ نقطہ $x_0 = 2$ سے کھلے وقفہ $(\sqrt{4-\epsilon}, \sqrt{4+\epsilon})$ کے قریبی سرا کا فاصلہ δ ہو گا۔ یوں $2-\sqrt{4-\epsilon}$ اور $\sqrt{4+\epsilon}-2$ میں سے کم قیمت δ کے برابر ہو گی۔ δ کی اس قیمت یا اس سے کم مثبت قیمت کے لیے درج ذیل خود بخود مطمئن ہو گا۔

$$0 < |x-2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-4| < \epsilon$$

$\square$

درج بالا مثال میں ہم نے $\epsilon < 4$ کیوں فرض کیا؟ اس لیے کہ تمام x کے لیے ایسا δ کہ $0 < |x-2| < \delta$ سے مراد $|f(x)-4| < \epsilon < 4$ ہو میں ہم نے δ کی وہ قیمت دریافت کی جو ϵ کے کسی بھی بڑی قیمت کے لیے بھی کارآمد ہے۔

مسئلوں کا ثبوت بذریعہ تعریف

ہم عام طور پر حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے مخصوص حد تلاش نہیں کرتے۔ اس کے برعکس ہم تعریف سے عمومی مسئلوں (بالخصوص حصہ ۲.۲ کے مسئلوں) کو ثابت کرتے ہیں جنہیں استعمال کرتے ہوئے حد حاصل کی جاتی ہے۔ آئیں قاعدہ مجموعہ ثابت کریں۔

مثال ۲.۲۳: قاعدہ مجموعہ

اگر $\lim_{x\to c} f(x) = L$ اور $\lim_{z\to c} g(x) + M$ ہوں تب درج ذیل ثابت کریں۔

$$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L+M$$

حل

فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہم ایسا مثبت عدد δ تلاش کرنا چاہتے ہیں کہ $0 < |x-c| < \delta$ میں تمام x کے لیے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x-c| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x)+g(x)-(L+M)| < \epsilon$$

ہم ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)-(L+M)| &= |(f(x)-L)+(g(x)-M)| \\ &\le |f(x)-L| + |g(x)-M| \qquad \text{تکونی عدم مساوات} \end{aligned}$$

چونکہ $\lim_{x\to c} f(x) = L$ موجود ہے لہٰذا ایسا عدد $\delta_1 > 0$ پایا جاتا ہے کہ تمام x کے لیے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x-c| < \sigma_1 \quad \Longrightarrow \quad |f(x)-L| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

اسی طرح چونکہ $\lim_{x\to c} g(x) = M$ موجود ہے لہٰذا ایسا عدد $\delta_2 > 0$ پایا جاتا ہے کہ تمام x کے لیے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x-c| < \sigma_2 \quad \Longrightarrow \quad |g(x)-M| < \tfrac{\epsilon}{2}$$

فرض کریں کہ δ_1 اور δ_2 میں سے چھوٹی قیمت δ کے برابر ہے۔ اب اگر $0 < |x-c| < \delta$ ہو تب

$$|f(x)-L| < \tfrac{\epsilon}{2} \quad \text{اور} \quad 0 < |x-c| < \delta_1$$

۱۹۹۷ ہوں گے، اور $|x-c| < \delta_2$ اور $\left|g(x)-M\right| < \frac{\epsilon}{2}$ ہوں گے۔ اس طرح

$$\left|f(x)+g(x)-(L+M)\right| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

۱۹۹۸ ہو گا۔ اس سے ثابت ہوا کہ $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L+M$ ہے۔ □

۱۹۹۹ **سوالات**

۲۰۰۰ **۲.۳ نقطہ x_0 پر وقفے کا وسط رکھنا**

۲۰۰۱ سوال ۲.۱۰۰ تا سوال ۲.۱۰۵ میں محور x پر وقفہ (a,b) ترسیم کریں جس میں نقطہ x_0 پایا جاتا ہے۔ اس کے بعد ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ

۲۰۰۲ $|x-x_0| < \delta$ سے مراد $a < x < b$ ہو۔

۲۰۰۳ سوال ۲.۱۰۰: $a=1, b=7, x_0=5$

۲۰۰۴ سوال ۲.۱۰۱: $a=1, b=7, x_0=2$

۲۰۰۵ سوال ۲.۱۰۲: $a=-\frac{7}{2}, b=-\frac{1}{2}, x_0=-3$

۲۰۰۶ سوال ۲.۱۰۳: $a=-\frac{7}{2}, b=-\frac{1}{2}, x_0=-\frac{3}{2}$

۲۰۰۷ سوال ۲.۱۰۴: $a=\frac{4}{9}, b=\frac{4}{7}, x_0=\frac{1}{2}$

۲۰۰۸ سوال ۲.۱۰۵: $a=2.7591, b=3.2391, x_0=3$

۲۰۰۹

۲۰۱۰ **δ کا حصول بذریعہ ترسیم**

۲۰۱۱ سوال ۲.۱۰۶ تا سوال ۲.۱۱۳ میں ترسیم سے ایسا $\delta > 0$ تلاش کریں کہ تمام x کے لیے درج ذیل ہو۔

$$0<|x-x_0|<\delta \quad \Longrightarrow \quad 0<\left|f(x)-L\right|<\epsilon$$

۲۰۱۲ سوال ۲.۱۰۶: $f(x)=2x-4, x_0=5, L=6, \epsilon=0.2$ شکل ۲.۲۳

۲۰۱۳ سوال ۲.۱۰۷: $f(x)=-\frac{3}{2}x+3, x_0=-3, L=7.5, \epsilon=0.15$ شکل ۲.۲۴

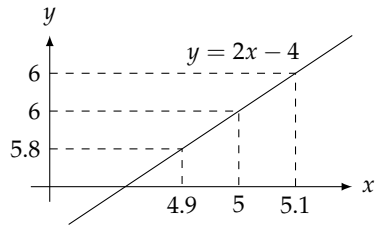
۲۰۱۴ سوال ۲.۱۰۸: $f(x)=\sqrt{x}, x_0=1, L=1, \epsilon=\frac{1}{4}$ شکل ۲.۲۵

۲۰۱۵ سوال ۲.۱۰۹: $f(x)=2\sqrt{x+1}, x_0=3, L=4, \epsilon=0.2$ شکل ۲.۲۶

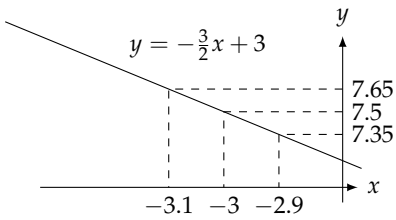
۲۰۱۶

۲۰۱۷ سوال ۲.۱۱۰: $f(x)=x^2, x_0=2, L=4, \epsilon=1$ شکل ۲.۲۷

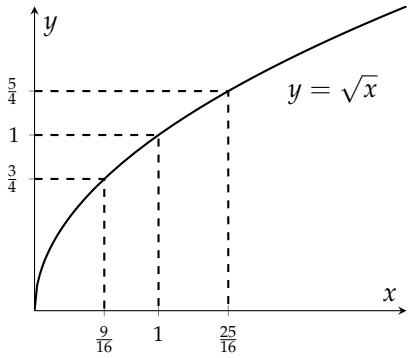
۲۰۱۸ سوال ۲.۱۱۱: $f(x)=4-x^2, x_0=-1, L=3, \epsilon=0.25$ شکل ۲.۲۸



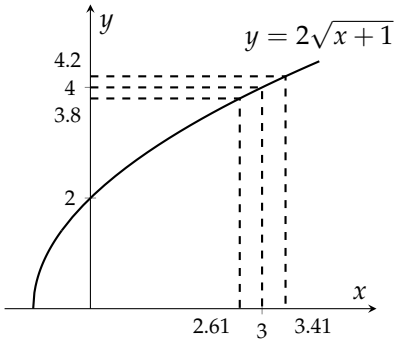
شکل ۲.۲۳: ترسیم برائے سوال ۲.۱۰۶



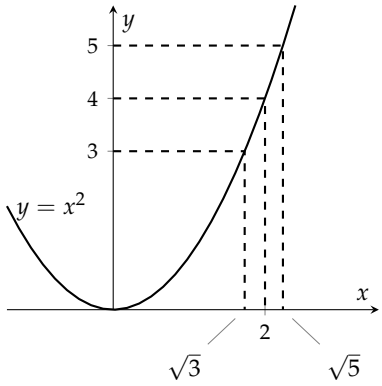
شکل ۲.۲۴: ترسیم برائے سوال ۲.۱۰۷



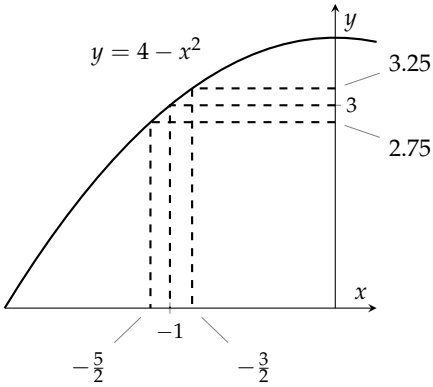
شکل ۲.۲۵: ترسیم برائے سوال ۲.۱۰۸



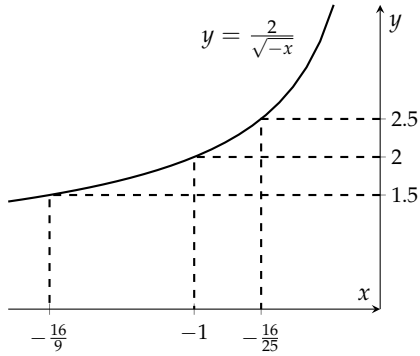
شکل ۲.۲۶: ترسیم برائے سوال ۲.۱۰۹



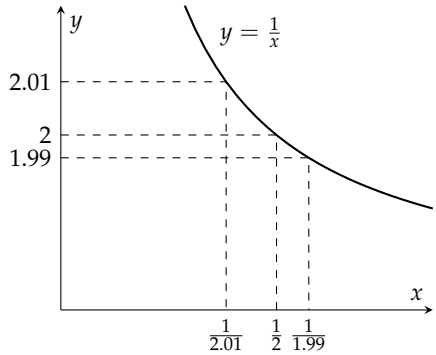
شکل ۲.۲۷: ترسیم برائے سوال ۲.۱۱۰



شکل ۲.۲۸: ترسیم برائے سوال ۲.۱۱۱



شکل ۲.۲۹: ترسیم برائے سوال ۲.۱۱۲



شکل ۲.۳۰: ترسیم برائے سوال ۲.۱۱۳

سوال ۲.۱۱۲: $f(x) = \frac{2}{\sqrt{-x}}, x_0 = -1, L = 2, \epsilon = 0.5$ شکل ۲.۲۹

سوال ۲.۱۱۳: $f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = \frac{1}{2}, L = 2, \epsilon = 0.01$ شکل ۲.۳۰

δ کا الجبرائی حصول

سوال ۲.۱۱۴ تا سوال ۲.۱۲۹ میں $f(x)$ اور اعداد L ، x_0 اور $\epsilon > 0$ دیے گئے ہیں۔ ہر سوال میں x_0 کے ارد گرد ایسا کھلا وقفہ تلاش کریں جس پر عدم مساوات $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ مطمئن ہوتی ہو۔ اس کے بعد $\delta > 0$ کی ایسی قیمت تلاش کریں کہ عدم مساوات $0 < |x - x_0| <$ δ کو مطمئن کرنے والے ہر x کے لیے عدم مساوات $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ مطمئن ہوتی ہے۔

سوال ۲.۱۱۴: $f(x) = x + 1, L = 5, x_0 = 4, \epsilon = 0.01$

سوال ۲.۱۱۵: $f(x) = 2x - 2, L = -6, x_0 = -2, \epsilon = 0.02$

سوال ۲.۱۱۶: $f(x) = \sqrt{x+1}, L = 1, x_0 = 0, \epsilon = 0.1$

سوال ۲.۱۱۷: $f(x) = \sqrt{x}, L = \frac{1}{2}, x_0 = \frac{1}{4}, \epsilon = 0.1$

سوال ۲.۱۱۸: $f(x) = \sqrt{19 - x}, L = 3, x_0 = 10, \epsilon = 1$

سوال ۲.۱۱۹: $f(x) = \sqrt{x - 7}, L = 4, x_0 = 23, \epsilon = 1$

سوال ۲.۱۲۰: $f(x) = \frac{1}{x}, L = \frac{1}{4}, x_0 = 4, \epsilon = 0.05$

سوال ۲.۱۲۱: $f(x) = x^2, L = 3, x_0 = \sqrt{3}, \epsilon = 0.1$

سوال ۲.۱۲۲: $f(x) = x^2, L = 4, x_0 = -2, \epsilon = 0.5$

سوال ۲.۱۲۳: $f(x) = \frac{1}{x}, L = -1, x_0 = -1, \epsilon = 0.1$

سوال ۲.۱۲۴: $f(x) = x^2 - 5, L = 11, x_0 = 4, \epsilon = 1$

۲۰۳۶ سوال ۲.۱۲۵: $f(x) = \frac{120}{x}, L = 5, x_0 = 24, \epsilon = 1$

۲۰۳۷ سوال ۲.۱۲۶: $f(x) = mx, m > 0, L = 2m, x_0 = 2, \epsilon = 0.03$

۲۰۳۸ سوال ۲.۱۲۷: $f(x) = mx, m > 0, L = 3m, x_0 = 3, \epsilon = c > 0$

۲۰۳۹ سوال ۲.۱۲۸: $f(x) = mx + b, m > 0, L = \frac{m}{2} + b, x_0 = \frac{1}{2}, \epsilon = c > 0$

۲۰۴۰ سوال ۲.۱۲۹: $f(x) = mx + b, m > 0, L = m + b, x_0 = 1, \epsilon = 0.05$

۲۰۴۱ **باضابطہ حد پر مزید سوالات**

۲۰۴۲ سوال ۲.۱۳۰ تا سوال ۲.۱۳۵ میں تفاعل $f(x)$، نقطہ x_0، اور مثبت عدد ϵ دیے گئے ہیں۔ $\lim_{x \to x_0} f(x)$ تلاش کریں۔ اس کے بعد ایسا عدد

۲۰۴۳ $\delta > 0$ تلاش کریں کہ تمام x کے لیے درج ذیل ہو۔

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

۲۰۴۴ سوال ۲.۱۳۰: $f(x) = 3 - 2x, x_0 = 3, \epsilon = 0.02$

۲۰۴۵ سوال ۲.۱۳۱: $f(x) = -3x - 2, x_0 = -1, \epsilon = 0.03$

۲۰۴۶ سوال ۲.۱۳۲: $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}, x_0 = 2, \epsilon = 0.05$

۲۰۴۷ سوال ۲.۱۳۳: $f(x) = \frac{x^2+6x+5}{x+5}, x_0 = -5, \epsilon = 0.05$

۲۰۴۸ سوال ۲.۱۳۴: $f(x) = \sqrt{1 - 5x}, x_0 = -3, \epsilon = 0.5$

۲۰۴۹ سوال ۲.۱۳۵: $f(x) = \frac{4}{x}, x_0 = 2, \epsilon = 0.4$

۲۰۵۰

۲۰۵۱ سوال ۲.۱۳۶ تا سوال ۲.۱۴۹ میں دیا گیا فقرہ حد ثابت کریں۔

۲۰۵۲ سوال ۲.۱۳۶: $\lim_{x \to 4} (9 - x) = 5$

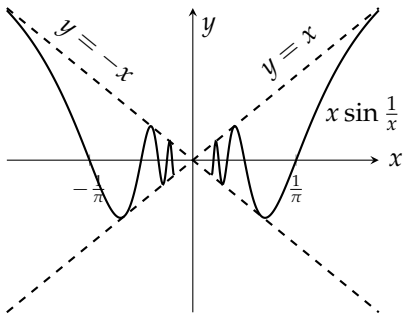
۲۰۵۳ سوال ۲.۱۳۷: $\lim_{x \to 3} (3x - 7) = 2$

۲۰۵۴ سوال ۲.۱۳۸: $\lim_{x \to 9} \sqrt{x - 5} = 2$

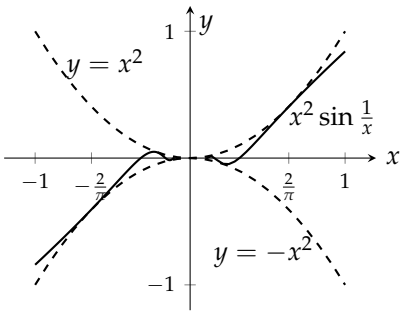
۲۰۵۵ سوال ۲.۱۳۹: $\lim_{x \to 0} \sqrt{4 - x} = 2$

۲۰۵۶ سوال ۲.۱۴۰: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ کے لیے $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

۲۰۵۷ سوال ۲.۱۴۱: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq -2 \\ 1, & x = -2 \end{cases}$ کے لیے $\lim_{x \to -2} f(x) = 4$



شکل ۲.۳۱: ترسیم برائے سوال ۲.۱۴۸



شکل ۲.۳۲: ترسیم برائے سوال ۲.۱۴۹

۲۰۵۸ سوال ۲.۱۴۲: $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$

۲۰۵۹ سوال ۲.۱۴۳: $\lim_{x\to \sqrt{3}} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3}$

۲۰۶۰ سوال ۲.۱۴۴: $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = -6$

۲۰۶۱ سوال ۲.۱۴۵: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$

۲۰۶۲ سوال ۲.۱۴۶: $f(x) = \begin{cases} 4-2x, & x<1 \\ 6x-4, & x \geq 1 \end{cases}$ کے لیے $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$

۲۰۶۳ سوال ۲.۱۴۷: $f(x) = \begin{cases} 2x, & x<0 \\ \frac{x}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$ کے لیے $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

۲۰۶۴ سوال ۲.۱۴۸: $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ شکل ۲.۳۱

۲۰۶۵ سوال ۲.۱۴۹: $\lim_{x\to 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0$ شکل ۲.۳۲

۲۰۶۶

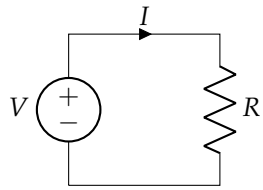
۲۰۶۷ **نظریہ اور مثالیں**

۲۰۶۸

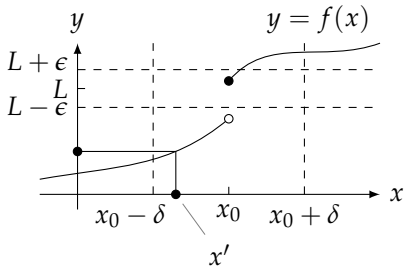
۲۰۶۹ سوال ۲.۱۵۰: $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ سے کیا مراد ہے۔ تبصرہ کریں۔

۲۰۷۰ سوال ۲.۱۵۱: $\lim_{x\to 0} g(x) = k$ سے کیا مراد ہے۔ تبصرہ کریں۔

۲۰۷۱ سوال ۲.۱۵۲: یہ کہنا کہ ”جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت L کے قریب ہوتی جاتی ہے“ سے یہ



شکل ۲.۳۳: قانون اوہم (سوال ۲.۱۵۵)



شکل ۲.۳۴

اخذ نہیں کیا جا سکتا کہ $f(x)$ کی حد L ہے۔ مثال دے کر وضاحت کریں۔

سوال ۲.۱۵۳: یہ کہنا کہ "کسی بھی دیے گئے $\epsilon > 0$ کے لیے ایسا x پایا جاتا ہے جس پر $|f(x) - L| < \epsilon$ ہے" سے یہ مراد نہیں لیا جا سکتا ہے کہ $f(x)$ کی حد L ہے۔ مثال دے کر وضاحت کریں۔

سوال ۲.۱۵۴: انجن کی سلنڈر کی رگڑائی

انجن سلنڈر کا رقبہ عمودی تراش $58\,\text{cm}^2$ حاصل کرنے کے لیے رگڑائی کرنے سے پہلے آپ جاننا چاہیں گے کہ سلنڈر کے رقبہ میں خلل کو $\mp 0.06\,\text{cm}^2$ درستگی کے اندر رکھنے کے لیے درکار $8.593\,\text{cm}$ قطر میں چھوٹ کتنی ہے۔ یہ جاننے کی خاطر آپ $A = \frac{\pi d^2}{4}$ لکھ کر $|A - 58| \leq 0.06$ کو حل کرتے ہوئے قطر d تلاش کرتے ہو۔ قطر کا کیا وقفہ حاصل ہو گا؟

سوال ۲.۱۵۵: اوہم کا قانون کہتا ہے کہ $V = IR$ ہو گا جہاں V برقی دباو، I برقی رو اور R برقی مزاحمت ہیں جن کی اکائیاں بالترتیب وولٹ V، ایمپیئر A اور اوہم Ω ہیں (شکل ۲.۳۳)۔ آپ کے ادارے کو کہا گیا ہے کہ وہ برقی مزاحمت فراہم کرے۔ برقی دباو $220\,\text{V}$ ہو گی جبکہ برقی رو $10\,\text{mA} \mp 0.1\,\text{mA}$ ہونی ضروری ہے۔ مطلوبہ برقی رو $10\,\text{mA}$ میں چھوٹ $0.1\,\text{mA}$ ہے۔ درکار برقی مزاحمت کا وقفہ کیا ہو گا؟

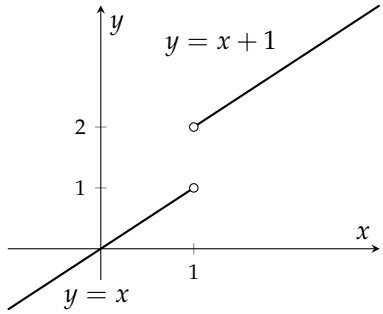
کب $x \to x_0$ کرنے سے عدد L تفاعل $f(x)$ کا حد نہیں ہو گا؟

یہ ثابت کرنے کی خاطر آپ کو ایسا $\epsilon > 0$ تلاش کرنا ہو گا جس کے لیے ایسا کوئی $\delta > 0$ نہیں پایا جاتا ہو کہ عدم مساوات $0 < |x - x_0| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x کے لیے $|f(x) - L| < \epsilon$ ہو۔ یہ ثابت کرنے کی خاطر ہم اس ϵ کے لیے ثابت کریں گے کہ ہر $\delta > 0$ کے لیے ایسا x پایا جاتا ہے کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ اور $|f(x) - L| \geq \epsilon$ ہوں (مثلاً شکل ۲.۳۴ میں نقطہ $x = x'$)۔

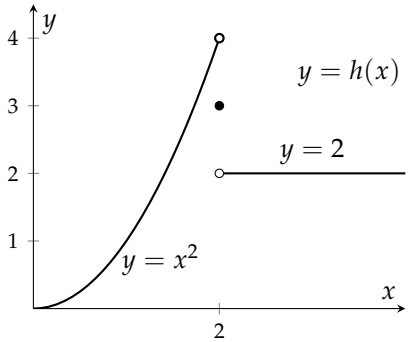
سوال ۲.۱۵۶: فرض کریں $f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$ ہے جس کو شکل ۲.۳۵ میں دکھایا گیا ہے۔ (الف) $\epsilon = \frac{1}{2}$ لیتے ہوئے دکھائیں کہ عدم مساوات $0 < |x - 1| < \delta$ کو مطمئن کرنے والے تمام x کے لیے کوئی بھی $\delta > 0$ عدم مساوات $|f(x) - 2| < \frac{1}{2}$ کو مطمئن نہیں کرتا ہے۔ یعنی ہر δ کے لیے ایسا x پایا جاتا ہے جس پر $0 < |x - 1| < \delta$ اور $|f(x) - 2| \geq \frac{1}{2}$ ہوتے ہیں۔ یوں $\lim_{x\to 1} f(x) \neq 2$ ہو گا۔

(ب) دکھائیں $\lim_{x\to 1} f(x) \neq 1$

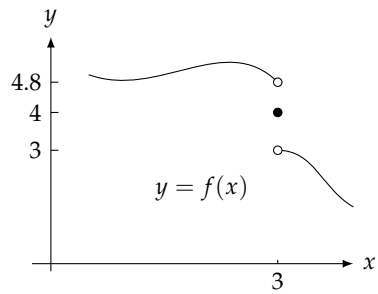
(پ) دکھائیں $\lim_{x\to 1} f(x) \neq 1.5$



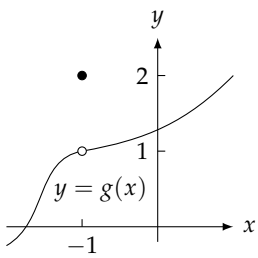
شکل ۲.۳۵: تفاعل کی ترسیم برائے سوال ۲.۱۵۶



شکل ۲.۳۶: تفاعل کی ترسیم برائے سوال ۲.۱۵۷



شکل ۲.۳۷: ترسیم برائے سوال ۲.۱۵۸



شکل ۲.۳۸: ترسیم برائے سوال ۲.۱۵۹

۲۰۹۳ سوال ۲.۱۵۷: تفاعل (شکل ۲.۳۶) $h(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 2, & x > 2 \end{cases}$ کے لیے درج ذیل دکھائیں۔

۲۰۹۴ (الف) $\lim\limits_{x\to 2} h(x) \neq 4$

۲۰۹۵ (ب) $\lim\limits_{x\to 2} h(x) \neq 3$

۲۰۹۶ (پ) $\lim\limits_{x\to 2} h(x) \neq 2$

۲۰۹۷ سوال ۲.۱۵۸: تفاعل کی ترسیم شکل ۲.۳۷ اس کے لیے درج ذیل دکھائیں۔

۲۰۹۸ (الف) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq 4$

۲۰۹۹ (ب) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq 4.2$

۲۱۰۰ (پ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) \neq 3$

سوال ۲.۱۵۹: دکھائیں کہ شکل ۲.۳۸ کی ترسیم کے لیے $\lim_{x\to -1} g(x) \neq 2$ ہے۔ کیا ایسا نظر آتا ہے جیسی حد $\lim_{x\to -1} g(x)$ موجود ہے؟ اگر حد موجود ہو اس کو تلاش کریں اور اگر حد موجود نہیں تب اس کی غیر موجودگی کی وجہ پیش کریں۔

حد بذریعہ ترسیم۔ کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۲.۱۶۰ تا سوال ۲.۱۶۵ میں آپ نے ترسیم کے ذریعہ δ تلاش کرنا ہوگا۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

(الف) تفاعل $y = f(x)$ کو نقطہ x_0 کے قریب ترسیم کریں۔

(ب) ترسیم کو دیکھ کر حد کا اندازہ لگائیں۔ حد کو حساب کے ذریعہ تلاش کرتے ہوئے اپنے اندازے کی تصدیق کریں۔

(پ) $\epsilon = 0.2$ لیتے ہوئے تحدیدی خطوط $y_1 = L - \epsilon$ اور $y_2 = L + \epsilon$ کھینچیں۔ ساتھ ہی x_0 کے قریب تفاعل f ترسیم کریں۔

(ت) جزوپ سے ایسے $\delta > 0$ کا اندازہ لگائیں کہ تمام x کے لیے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

اپنا اندازہ پرکھنے کی خاطر f ، y_1 اور y_2 کو وقفہ $0 < |x - x_0| < \delta$ پر ترسیم کریں۔ اگر تفاعل کی کوئی قیمت وقفہ $[L - \epsilon, L + \epsilon]$ کے باہر پائی جاتی ہو تب منتخب کردہ δ بہت بڑا تھا لہٰذا δ کی چھوٹی قیمت لیتے ہوئے دوبارہ کوشش کریں۔

(ٹ) جزوپ اور جزوت کو $\epsilon = 0.1, 0.05, 0.001$ کے لیے دہرائیں۔

سوال ۲.۱۶۰: $f(x) = \frac{x^4-81}{x-3}, x_0 = 3$

سوال ۲.۱۶۱: $f(x) = \frac{5x^3+9x^2}{2x^5+3x^2}, x_0 = 0$

سوال ۲.۱۶۲: $f(x) = \frac{\sin 2x}{3x}, x_0 = 0$

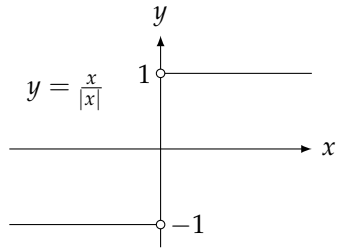
سوال ۲.۱۶۳: $f(x) = \frac{x(1-\cos x)}{x-\sin x}, x_0 = 0$

سوال ۲.۱۶۴: $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}, x_0 = 1$

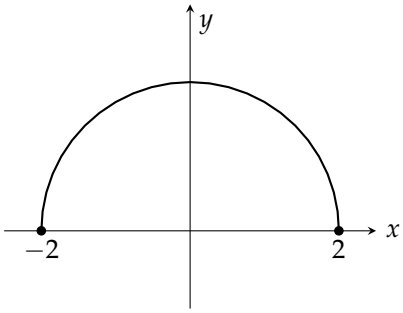
سوال ۲.۱۶۵: $f(x) = \frac{3x^2-(7x+1)\sqrt{x}+5}{x-1}, x_0 = 1$

۲.۴ تصور حد کی توسیع

اس حصے میں ہم حد کے تصور کو وسعت دیتے ہیں۔



شکل ۲.۳۹: مبدا پر دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔



شکل ۲.۴۰: تفاعل کے دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد۔

۱. یک طرفہ حد۔ جب x نقطہ a کے قریب تر دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب **دائیں ہاتھ حد**[۷] حاصل ہو گی۔ اسی طرح جب x نقطہ a کے قریب تر بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب **بائیں ہاتھ حد**[۸] حاصل ہو گی۔

۲. لامتناہی حد۔ اگرچہ یہ حقیقی حد نہیں لیکن یہ ان تفاعل کا رویہ بیان کرنے میں مدد دیتی ہے جن کی قیمت بہت زیادہ مثبت یا بہت زیادہ منفی ہو جاتی ہو۔

یک طرفہ حد

تفاعل f کی نقطہ a پر حد اس صورت L کے برابر ہو گی جب a کے دونوں اطراف f معین ہو اور a کے دونوں اطراف سے نزدیک تر ہونے کی صورت میں f کی قیمت L کے قریب تر پہنچتی ہو۔ اسی لیے عام حد کو بعض اوقات **دو طرفہ حد**[۹] بھی کہتے ہیں۔

عین ممکن ہے کہ صرف دائیں ہاتھ یا صرف بائیں ہاتھ سے a کے نزدیک تر ہونے سے f کی حد پائی جاتی ہو۔ ایسی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ f کی a پر یک طرفہ (دائیں ہاتھ یا دائیں ہاتھ) حد پائی جاتی ہے۔ اگر صفر (مبدا) کے قریب تر x دائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کی حد 1 ہو گی اور اگر صفر کے قریب تر x بائیں ہاتھ سے پہنچنے کی کوشش کرے تب تفاعل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کی حد -1 ہو گی (شکل ۲.۳۹)۔

تعریف: **دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی غیر رسمی تعریف**

فرض کریں وقفہ (a, b)، جہاں $a < b$ ہے، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔ اگر اس وقفہ کے اندر سے a کے قریب تر x کے پہنچنے کی کوشش سے $f(x)$ کی قیمت L کے قریب تر پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کی **دائیں ہاتھ حد** L ہے جسے ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

فرض کریں وقفہ (c, a)، جہاں $c < a$ ہے، پر تفاعل $f(x)$ معین ہے۔ اگر اس وقفہ کے اندر سے a کے قریب تر x کے پہنچنے کی کوشش سے $f(x)$ کی قیمت M کے قریب تر پہنچنے کی کوشش کرتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ a پر $f(x)$ کی **بائیں ہاتھ حد** M ہے جسے ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = M$$

---

[۷] right-handed limit
[۸] left-handed limit
[۹] two-sided limit

شکل ۲.۳۹ میں تفاعل $f(x) = \frac{x}{|x|}$ کے لیے درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = -1$$

□

$x \to a^+$ سے مراد ہے کہ a کے قریب تر پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے بڑی رہتی ہے۔ اسی طرح $x \to a^-$ سے مراد ہے کہ a کے قریب تر پہنچتے ہوئے x کی قیمت a سے چھوٹی رہتی ہے۔

دائرہ کار کے آخری سروں پر تفاعل کی سادہ حد ممکن نہیں البتہ دائرہ کار کے آخری سروں پر تفاعل کی یک طرفہ حد ہو سکتی ہے۔

مثال ۲.۲۴: تفاعل $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ کا دائرہ کار $[-2,2]$ ہے۔ تفاعل کی ترسیم نصف دائرہ ہے جس کو شکل ۲.۴۰ میں دکھایا گیا ہے۔ دائرہ کار کے آخری سروں پر یک طرفہ حد درج ذیل ہیں۔

$$\lim_{x\to -2^+} \sqrt{4-x^2} = 0, \quad \lim_{x\to 2^-} \sqrt{4-x^2} = 0$$

$x = 2$ پر تفاعل کی دائیں ہاتھ حد نہیں پائی جاتی۔ اسی طرح نقطہ $x = -2$ پر تفاعل کی بائیں ہاتھ حد نہیں پائی جاتی۔ $x = 2$ اور $x = -2$ پر تفاعل کی سادہ دو طرفہ حد نہیں پائی جاتیں۔ □

مسئلہ ۲.۱ کے تمام خواص پر یک طرفہ حد پوری اترتی ہے۔ دو تفاعل کے مجموعے کی دائیں ہاتھ حد ان تفاعل کی انفرادی دائیں ہاتھ حد کا مجموعہ ہو گی، وغیرہ وغیرہ۔ کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کی حد کے مسئلوں اور مسئلہ بیچ پر بھی یک طرفہ حد پوری اترتی ہے۔

یک طرفہ اور دو طرفہ حدود کا آپس میں تعلق درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے جس کو اس حصے کے آخر میں ثابت کیا گیا ہے۔

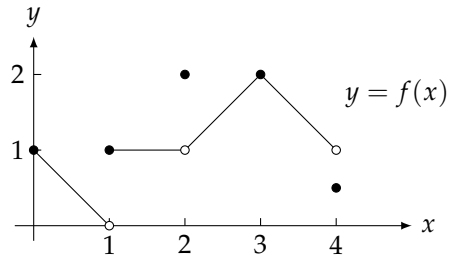
مسئلہ ۲.۵: **یک طرفہ بالمقابل دو طرفہ حد**
متغیر x کی c کے نزدیک تر تفاعل $f(x)$ کی حد اس صورت پائی جاتی ہے جب c پر تفاعل کی دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد پائی جاتی ہوں اور یہ حد ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = L \quad \text{اور} \quad \lim_{x\to c^+} f(x) = L$$

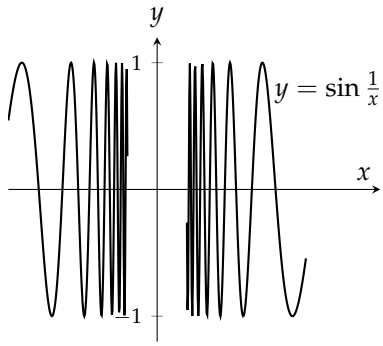
مثال ۲.۲۵: درج ذیل تمام فقرے شکل ۲.۴۱ میں ترسیم شدہ تفاعل کے لیے درست ہیں۔

$x = 0$ پر: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ ہے جبکہ $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ اور $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود نہیں۔ ($x = 0$ کی بائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

$x = 1$ پر: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$ ہے اگرچہ $f(1) = 1$ ہے۔ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ ہے جبکہ $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود نہیں۔ (دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد ایک سے نہیں۔)



شکل ۲.۴۱: ترسیم برائے مثال ۲.۲۵



شکل ۲.۴۲: ترسیم برائے مثال ۲.۲۶

$x = 2$ پر: $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 1$ اور $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 1$ ہیں۔ $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$ ہے اگرچہ $f(2) = 2$ ہے۔

$x = 3$ پر: $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3} f(x) = f(3) = 2$ ہے۔

$x = 4$ پر: $\lim_{x\to 4^-} f(x) = 1$ ہے اگرچہ $f(4) \neq 1$ ہے۔ $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ اور $\lim_{x\to 4} f(x)$ موجود نہیں۔(نقطہ $x = 4$ کی دائیں جانب تفاعل غیر معین ہے۔)

اس کے علاوہ $[0, 4]$ میں ہر نقطہ a پر حد $f(a)$ پائی جاتی ہے۔ □

اب تک کی تمام مثالوں میں جس نقطے پر تفاعل کی حد موجود نہیں تھی وہاں اس کی یک طرفہ حد موجود تھی۔ درج ذیل مثال میں، ماسوائے نقطہ $x = 0$ کے، تفاعل ہر نقطہ پر معین ہے لیکن $x = 0$ پر اس کی نہ دائیں ہاتھ اور نہ ہی بائیں ہاتھ حد پائی جاتی ہے۔

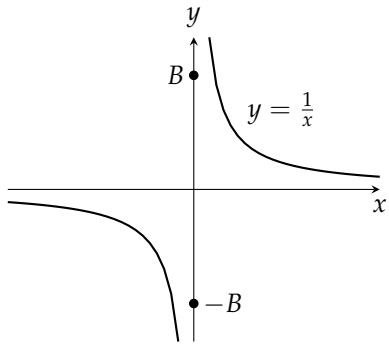
مثال ۲.۲۶: دکھائیں کہ متغیر x کا دونوں اطراف سے صفر کے نزدیک تر ہونے سے تفاعل $y = \sin\frac{1}{x}$ کی یک طرفہ حد حاصل نہیں ہوتی (شکل ۲.۴۲)۔

حل

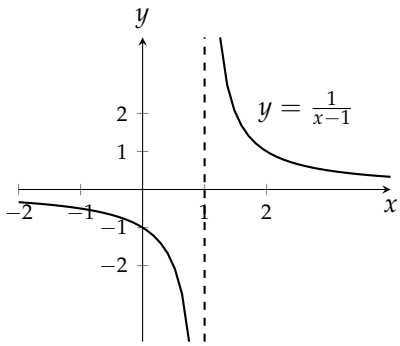
جیسے جیسے x صفر کے قریب تر پہنچتا ہے تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ کی قیمت بے قابو بڑھتی ہے جس کی وجہ سے $\sin\frac{1}{x}$ کی قیمت متواتر -1 اور 1 کے بیچ تبدیل ہوتی ہے۔ جیسے جیسے x کی (مثبت یا منفی) قیمت صفر کے قریب تر ہوتی ہے، ایسا کوئی یکتا عدد L نہیں پایا جاتا جس تک $\sin\frac{1}{x}$ کی قیمت قریب تر ہوتی ہو۔ یوں $x = 0$ پر $\sin\frac{1}{x}$ کی نہ دائیں ہاتھ اور نہ ہی بائیں ہاتھ حد پائی جاتی ہے۔ □

لا متناہی حد

آئیں تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ پر غور کریں جو گزشتہ مثال میں استعمال ہوا۔ جیسے جیسے $x \to 0^+$ ہو ویسے ویسے تفاعل f کی قیمت بڑھتی ہے حتیٰ کہ آخر کار f کی قیمت دیے گئے ہر مثبت حقیقی عدد B سے بڑھ جاتی ہے۔ یوں B جتنا بھی بڑا عدد ہو، f آخر کار اس سے بھی بڑا ہو گا (شکل ۲.۴۳)۔ یوں $x \to 0^+$ پر f کی حد نہیں پائی جاتی۔ اس کے قطع نظر، f کا رویہ بیان کرنے کی خاطر ہم کہتے ہیں کہ $x \to 0^+$ کرنے سے $f(x)$ کی قیمت



شکل ۲.۴۳: تفاعل کی قیمت ہر مثبت یا منفی عدد سے تجاوز کر جاتی ہے۔



شکل ۲.۴۴: ترسیم برائے مثال ۲.۲۷

۲۱۷۷ ∞ کے قریب تر پہنچتی ہے جو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

۲۱۷۸ یہ لکھنے سے ہم ہرگز یہ نہیں کہتے کہ تفاعل کی حد موجود ہے اور نہ ہی ہم کہتے ہیں کہ حقیقی عدد ∞ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا جاتا۔ اس کے برعکس ہم
۲۱۷۹ کہتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$ موجود نہیں چونکہ $x \to 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی مثبت بڑے عدد سے زیادہ بڑی ہو گی۔

۲۱۸۰ $x \to 0^-$ کرنے سے $f(x) = \frac{1}{x}$ کی قیمت کسی بھی منفی بڑے عدد سے زیادہ بڑی منفی ہو گی (یہاں بڑی سے مراد مطلق مقدار ہے)۔ یوں
۲۱۸۱ $f(x)$ کی قیمت کسی بھی دیے گئے منفی حقیقی عدد $-B$ سے آخر کار زیادہ منفی ہو گی (شکل ۲.۴۳)۔ ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

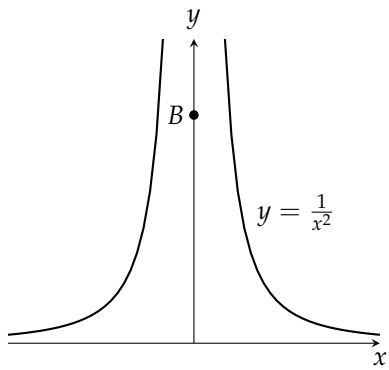
۲۱۸۲ یہاں بھی ہم ہرگز نہیں کہتے کہ حد موجود اور عدد $-\infty$ کے برابر ہے اور نہ ہی کہتے ہیں کہ حقیقی منفی عدد $-\infty$ پایا جاتا ہے چونکہ ایسا کوئی عدد نہیں پایا
۲۱۸۳ جاتا۔ ہم اس تفاعل کا رویہ بیان کرنا چاہتے ہیں جس کی قیمت $x \to 0^-$ کرنے سے کسی بھی بڑی منفی عدد سے زیادہ منفی ہو گی (یہاں بڑی کا لفظ عدد کی
۲۱۸۴ مطلق قیمت کے لیے استعمال کیا گیا ہے)۔

۲۱۸۵ مثال ۲.۲۷: یک طرفہ حد
۲۱۸۶ $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1}$ اور $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1}$ حاصل کریں۔

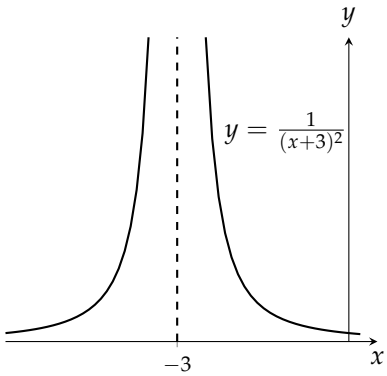
۲۱۸۷ **حل**

۲۱۸۸ **ترسیمی حل:** تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کی ترسیم کو 1 اکائی دائیں منتقل کرنے سے $y = \frac{1}{x-1}$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے (شکل ۲.۴۴)۔ یوں 1 کے قریب
۲۱۸۹ $y = \frac{1}{x-1}$ کا رویہ 0 کے قریب $y = \frac{1}{x}$ کے رویہ کی طرح ہو گا۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty, \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$



شکل ۲.۴۵: تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی ترسیم (مثال ۲.۲۸)



شکل ۲.۴۶: تفاعل $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم (مثال ۲.۲۸)

تحلیلی حل: عدد $x - 1$ اور اس کے بالعکس متناسب پر غور کریں۔ $x \to 1^+$ کرنے سے $(x-1) \to 0^+$ اور $\frac{1}{x-1} \to \infty$ حاصل ہوتے ہیں۔ $x \to 1^-$ کرنے سے $(x-1) \to 0^-$ اور $\frac{1}{x-1} \to -\infty$ حاصل ہوتے ہیں۔ □

مثال ۲.۲۸: دو طرفہ لاتناہی حد

(ا) $x = 0$ کے قریب $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (ب) $x = -3$ کے قریب $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ پر غور کریں۔

حل

(ا) جیسے جیسے x صفر کے قریب تر کسی بھی طرف سے پہنچنے کی کوشش کرتا ہے، $\frac{1}{x^2}$ کی قیمت مثبت رہتی ہے اور کسی بھی دیے گئے بڑے سے بڑے مثبت عدد B سے تجاوز کر جاتی ہے (شکل ۲.۴۵):

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

(ب) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی ترسیم کو 3 اکائیاں بائیں منتقل کرنے سے $g(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$ کی ترسیم حاصل ہوتی ہے (شکل ۲.۴۶)۔ یوں -3 کے قریب $g(x)$ کا رویہ 0 کے قریب $f(x)$ کے رویے کی طرح ہوگا۔

$$\lim_{x\to -3} g(x) = \lim_{x\to -3} \frac{1}{(x+3)^2} = \infty$$

□

$x \to 0$ کرنے سے تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کا رویہ ثابت قدم نہیں رہتا۔ $x \to 0^+$ کرنے سے $\frac{1}{x} \to \infty$ حاصل ہوتا ہے جبکہ $x \to 0^-$ کرنے سے $\frac{1}{x} \to -\infty$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں ہم صرف اتنا کہہ سکتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ موجود نہیں۔ اس کے برعکس تفاعل $y = \frac{1}{x^2}$ کا

رویہ ثابت قدم ہے۔ صفر کے دونوں اطراف سے x کو قریب لانے سے $\frac{1}{x^2} \to \infty$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ ہے۔

مثال ۲.۲۹: جب ناطق تفاعل کا نسب نما 0 کے قریب تر پہنچنے کی کوشش کرے تو تفاعل کے مختلف رویے دیکھنے کو ملتے ہیں

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)^2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x+2} = 0 \qquad (ا)$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4} \qquad (ب)$$

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = -\infty \qquad (ج)$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} = \infty \qquad (د)$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} \text{ موجود نہیں} \qquad (و)$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2-x}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)^3} = \lim_{x\to 2} \frac{-1}{(x-2)^2} = -\infty \qquad (ہ)$$

جزو اور جزوب میں $x = 2$ پر نسب نما کا صفر شمار کنندہ کے صفر کے ساتھ کٹ جاتا ہے لہٰذا غیر متناہی حد پائی جاتی ہے۔ جزوہ میں ایسا نہیں اور کٹنے کے بعد بھی نسب نما میں صفر باقی رہتے ہیں۔ □

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف

دو طرفہ حد کی باضابطہ تعریف کو تبدیل کرتے ہوئے یک طرفہ حد کی تعریف حاصل کی جا سکتی ہے۔

تعریف: **دائیں ہاتھ حد**

اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لیے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لیے

$$x_0 < x < x_0 + \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon \qquad (۱)$$

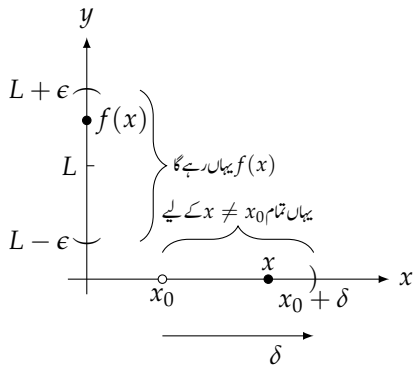
ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کی دائیں ہاتھ حد L ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل ۲.۴۷)۔

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

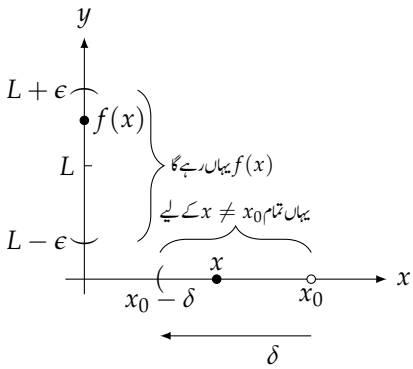
بائیں ہاتھ حد

اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لیے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $x_0 - \delta < x < x_0$ میں تمام x کے لیے

$$x_0 - \delta < x < x_0 \implies |f(x) - L| < \epsilon \qquad (۲)$$



شکل ۲.۴۷: دائیں ہاتھ حد کی تعریف



شکل ۲.۴۸: بائیں ہاتھ حد کی تعریف

۲۲۱۵ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $f(x)$ کی بائیں ہاتھ حد L ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے (شکل ۲.۴۸)۔

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

۲۲۱۶

۲۲۱۷ $\square$

۲۲۱۸ یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق

۲۲۱۹ مساوات ۱ اور مساوات ۲ میں δ والی عدم مساوات سے x_0 منفی کرنے سے یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق حاصل ہوتا ہے۔ دائیں ہاتھ حد کے لیے، x_0
۲۲۲۰ منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$0 < x - x_0 < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon \tag{۳}$$

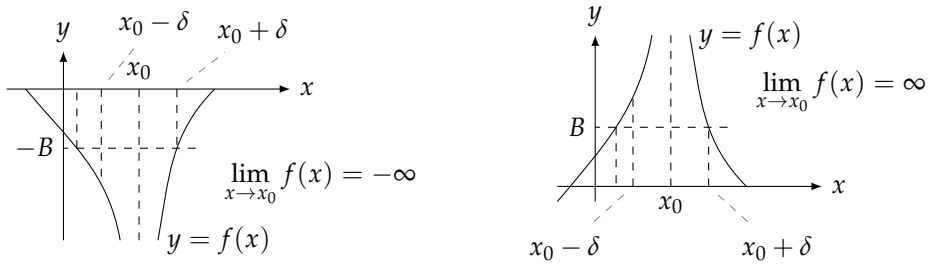
۲۲۲۱ بائیں ہاتھ حد کے لیے x_0 منفی کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$-\delta < x - x_0 < 0 \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon \tag{۴}$$

۲۲۲۲ مساوات ۳ اور مساوات ۴ بھی وہی (درج ذیل) بات کرتی ہیں جو دو طرفہ حد کے لیے درست ہے۔

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon \tag{۵}$$

۲۲۲۳ یوں x_0 پر f کی حد اس صورت L ہو گی جب x_0 پر f کی دائیں ہاتھ حد L ہو اور بائیں ہاتھ حد L ہو۔



شکل ۲.۴۹: لامتناہی حد کی تعریف

لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف

بجائے یہ کہ x_0 کے کافی قریب تمام x کے لیے ہم کہیں کہ $f(x)$ کی قیمت عدد L کے قریب سے قریب تر ہو، لامتناہی حد کی تعریف میں ہم کہتے ہیں کہ مبدا سے $f(x)$ کا فاصلہ کسی بھی دیے عدد سے زیادہ ہو۔ اس کے علاوہ حد کی تعریف میں استعمال ہونے والی زبان میں کوئی فرق نہیں پایا جاتا۔ شکل ۲.۴۹ کو دیکھ کر درج ذیل تعریف پڑھیں۔

تعریف: لامتناہی حد

(ا) اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لیے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لیے $f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

(ب) اگر ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لیے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ $0 < |x - x_0| < \delta$ میں تمام x کے لیے $f(x) < -B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے ویسے ویسے $f(x)$ کی قیمت منفی لامتناہی کے نزدیک تر ہوتی جاتی ہے۔ اس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

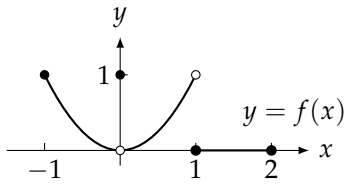
□

یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف بالکل اسی طرح ہے۔ یہ تعریف سوالات میں پیش کی گئی ہے۔

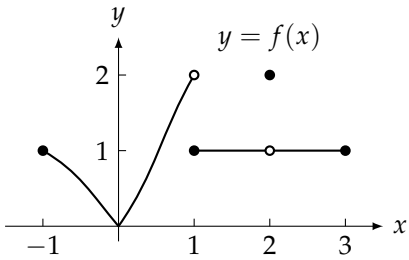
سوالات

حد بذریعہ ترسیم

سوال ۲.۱۶۶: درج ذیل فقروں میں سے کون سے فقرے شکل ۲.۵۰ میں دیے گئے تفاعل $y = f(x)$ کے لیے درست ہیں؟



شکل ۲.۵۰: تفاعل برائے سوال ۲.۱۶۶



شکل ۲.۵۱: تفاعل برائے سوال ۲.۱۶۷

۲۲۴۰ ا. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

۲۲۴۱ ب. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

۲۲۴۲ ج. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$

۲۲۴۳ د. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)$

۲۲۴۴ ھ. $\lim_{x\to 0} f(x)$ موجود ہے۔

۲۲۴۵ و. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

۲۲۴۶ ز. $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

۲۲۴۷ ح. $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$

۲۲۴۸ ط. $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$

۲۲۴۹ ي. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 2$

۲۲۵۰ یا. $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ غیر موجود ہے۔

۲۲۵۱ یب. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = 0$

۲۲۵۲ سوال ۲.۱۶۷: درج ذیل میں سے کون سے فقرے شکل ۲.۵۱ میں دیے تفاعل کے لیے درست اور کون سے غلط ہیں؟

۲۲۵۳ ا. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = 1$

۲۲۵۴ ب. $\lim_{x\to 2} f(x)$ غیر موجود ہے۔

۲۲۵۵ ج. $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$

۲۲۵۶ د. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$

۲۲۵۷ ھ. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

۲۲۵۸ و. $\lim_{x\to 1} f(x)$ غیر موجود ہے۔

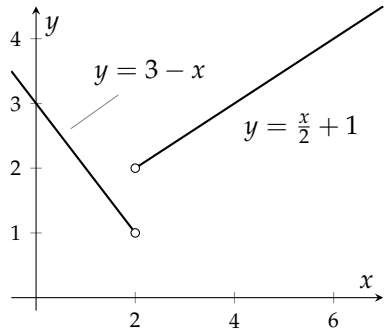
۲۲۵۹ ز. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

۲۲۶۰ ح. کھلے وقفہ $(-1,1)$ میں ہر c پر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے۔

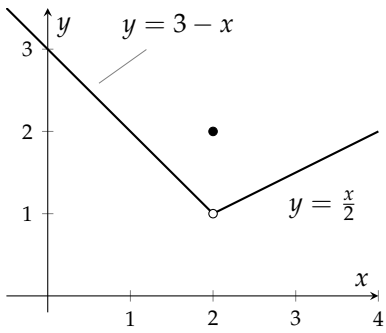
۲۲۶۱ ط. کھلے وقفہ $(1,3)$ میں ہر c پر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے۔

۲۲۶۲ ي. $\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0$

۲۲۶۳ یا. $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ غیر موجود ہے۔



شکل ۲.۵۲: تفاعل برائے سوال ۲.۱۶۸



شکل ۲.۵۳: تفاعل برائے سوال ۲.۱۶۹

۲۲۶۴ سوال ۲.۱۶۸: درج ذیل تفاعل کو شکل ۲.۱۶۸ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ \frac{x}{2} + 1, & x > 2 \end{cases}$$

۲۲۶۵ ا. $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ اور $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ تلاش کریں۔

۲۲۶۶ ب. کیا $\lim_{x\to 2} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نہ ہونے کی وجہ پیش کریں۔

۲۲۶۷ ج. $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ اور $\lim_{x\to 4^+} f(x)$ تلاش کریں۔

۲۲۶۸ د. کیا $\lim_{x\to 4} f(x)$ موجود ہے۔ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نہ ہونے کی وجہ پیش کریں۔

۲۲۶۹ سوال ۲.۱۶۹: درج ذیل کو شکل ۲.۵۳ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

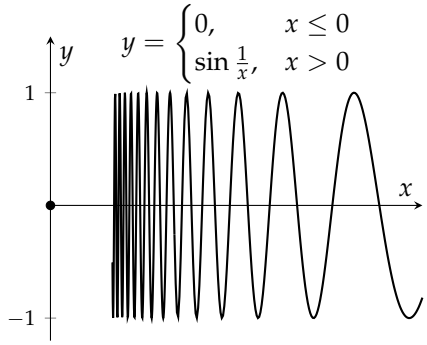
$$f(x) = \begin{cases} 3 - x, & x < 2 \\ 2, & x = 2 \\ \frac{x}{2}, & x > 2 \end{cases}$$

۲۲۷۰ ا. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ اور $f(2)$ تلاش کریں۔

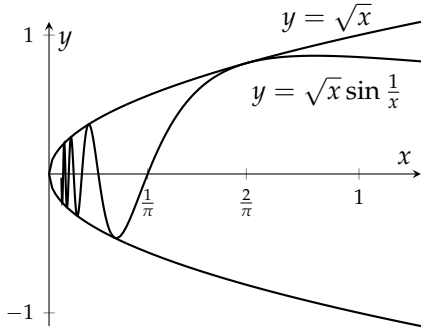
۲۲۷۱ ب. کیا $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔ اگر نہیں ہے تب نہ ہونے کی وجہ پیش کریں۔

۲۲۷۲ ج. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ اور $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

۲۲۷۳ د. کیا $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں۔ اگر نہیں ہے تب نہ ہونے کی وجہ پیش کریں۔



شکل ۲.۵۴: تفاعل برائے سوال ۲.۱۷۰



شکل ۲.۵۵: تفاعل برائے سوال ۲.۱۷۱

۲۲۷۴ سوال ۲.۱۷۰: درج ذیل تفاعل کو شکل ۲.۵۴ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

$$g(x) = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x}$$

۲۲۷۵ ا. کیا $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

۲۲۷۶ ب. کیا $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

۲۲۷۷ ج. کیا $\lim_{x \to 0} f(x)$ موجود ہے؟ اگر موجود ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر غیر موجود ہے تو غیر موجودگی ہونے کی وجہ پیش کریں۔

۲۲۷۸ سوال ۲.۱۷۱: درج ذیل تفاعل کو شکل ۲.۵۵ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

۲۲۷۹ ا. کیا $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نہ ہونے کی وجہ پیش کریں۔

۲۲۸۰ ب. کیا $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نہ ہونے کی وجہ پیش کریں۔

۲۲۸۱ ج. کیا $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تو نہ ہونے کی وجہ پیش کریں۔

۲۲۸۲ سوال ۲.۱۷۲:

۲۲۸۳ ا. تفاعل $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ کو ترسیم کریں۔

۲۲۸۴ ب. $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ اور $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

۲۲۸۵ ج. کیا $\lim_{x \to 1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نہ ہونے کی وجہ پیش کریں۔

۲۲۸۶ سوال ۲.۱۷۳:

۲۲۸۷ ا. تفاعل $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$ کو ترسیم کریں۔

۲۲۸۸ ب. $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ اور $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ تلاش کریں۔

۲۲۸۹ ج. کیا $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود ہے؟ اگر ہے تو اس کو تلاش کریں اور اگر نہیں ہے تب نہ ہونے کی وجہ پیش کریں۔

۲۲۹۰ سوال ۲.۱۷۴ اور سوال ۲.۱۷۵ میں دیے گئے تفاعل کو ترسیم کریں اور درج ذیل کے جوابات دیں۔

۲۲۹۱ ا. تفاعل f کے دائرہ کار اور سعت کیا ہیں؟

۲۲۹۲ ب. اگر کسی نقطہ c پر $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہو تب اس نقطے کو تلاش کریں۔

۲۲۹۳ ج. کس نقطہ پر صرف بائیں ہاتھ حد وجود ہے؟

۲۲۹۴ د. کس نقطہ پر صرف دائیں ہاتھ حد موجود ہے؟

۲۲۹۵ سوال ۲.۱۷۴:
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$
۲۲۹۶

۲۲۹۷ سوال ۲.۱۷۵:
$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0 \text{ یا } 0 < x \leq 1 \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

۲۲۹۸ **حد کا تحلیلی حصول:** سوال ۲.۱۷۶ تا سوال ۲.۱۸۵ میں حد تلاش کریں۔

۲۲۹۹ سوال ۲.۱۷۶: $\lim_{x\to -0.5^-} \sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$
۲۳۰۰

۲۳۰۱ سوال ۲.۱۷۷: $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

۲۳۰۲ سوال ۲.۱۷۸: $\lim_{x\to -2^+} \left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{2x+5}{x^2+x}\right)$
۲۳۰۳

۲۳۰۴ سوال ۲.۱۷۹: $\lim_{x\to 1^-} \left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{x+6}{x}\right)\left(\frac{3-x}{7}\right)$

۲۳۰۵ سوال ۲.۱۸۰: $\lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$
۲۳۰۶

۲۳۰۷ سوال ۲.۱۸۱: $\lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt{6}-\sqrt{5h^2+11h+6}}{h}$

سوال ۲.۱۸۲: (ا) $\lim_{x\to -2^+}(x+3)^{\frac{|x+2|}{x+2}}$ (ب) $\lim_{x\to -2^-}(x+3)^{\frac{|x+2|}{x+2}}$

سوال ۲.۱۸۳: (ا) $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$ (ب) $\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

سوال ۲.۱۸۴: (ا) $\lim_{\theta\to 3^+}\frac{|\theta|}{\theta}$ (ب) $\lim_{\theta\to 3^-}\frac{|\theta|}{\theta}$

سوال ۲.۱۸۵: (ا) $\lim_{t\to 4^+}(t-|t|)$ (ب) $\lim_{t\to 4^-}(t-|t|)$

لامتناہی حد: سوال ۲.۱۸۶ تا سوال ۲.۱۹۷ میں لامتناہی حد تلاش کریں۔

سوال ۲.۱۸۶: $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{3x}$

سوال ۲.۱۸۷: $\lim_{x\to 0^-}\frac{5}{2x}$

سوال ۲.۱۸۸: $\lim_{x\to 2^-}\frac{3}{x-2}$

سوال ۲.۱۸۹: $\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}$

سوال ۲.۱۹۰: $\lim_{x\to -8^+}\frac{2x}{x+8}$

سوال ۲.۱۹۱: $\lim_{x\to -5^-}\frac{3x}{2x+10}$

سوال ۲.۱۹۲: $\lim_{x\to 7}\frac{4}{(x-7)^2}$

سوال ۲.۱۹۳: $\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x^2(x+1)^2}$

سوال ۲.۱۹۴: (ا) $\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{3x^{1/3}}$ (ب) $\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{3x^{1/3}}$

سوال ۲.۱۹۵: (ا) $\lim_{x\to 0^+}\frac{2}{x^{1/5}}$ (ب) $\lim_{x\to 0^-}\frac{2}{x^{1/5}}$

سوال ۲.۱۹۶: $\lim_{x\to 0}\frac{4}{x^{2/5}}$

سوال ۲.۱۹۷: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{2/3}}$

سوال ۲.۱۹۸ تا سوال ۲.۲۰۱ میں حد تلاش کریں۔

۲۳۳۶ سوال ۲.۱۹۸: $\lim_{x\to(\pi/2)^-} \tan x$

۲۳۳۷

۲۳۳۸ سوال ۲.۱۹۹: $\lim_{x\to(-\pi/2)^+} \sec x$

۲۳۳۹ سوال ۲.۲۰۰: $\lim_{\theta\to 0^-} (1+\csc\theta)$

۲۳۴۰

۲۳۴۱ سوال ۲.۲۰۱: $\lim_{\theta\to 0}(2-\cot\theta)$

۲۳۴۲ **مزید حساب:** سوال ۲.۲۰۲ تا سوال ۲.۲۰۷ میں دی گئی صورت میں حد تلاش کریں۔

۲۳۴۳ سوال ۲.۲۰۲: $\lim \frac{1}{x^2-4}$

۲۳۴۴ ا. $x \to 2^+$ ۲۳۴۵ ب. $x \to 2^-$ ۲۳۴۶ ج. $x \to -2^+$ ۲۳۴۷ د. $x \to -2^-$

۲۳۴۸ سوال ۲.۲۰۳: $\lim \frac{x}{x^2-1}$

۲۳۴۹ ا. $x \to 1^+$ ۲۳۵۰ ب. $x \to 1^-$ ۲۳۵۱ ج. $x \to -1^+$ ۲۳۵۲ د. $x \to -1^-$

۲۳۵۳ سوال ۲.۲۰۴: $\lim(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x})$

۲۳۵۴ ا. $x \to 0^+$ ۲۳۵۵ ب. $x \to 0^-$ ۲۳۵۶ ج. $x \to \sqrt[3]{2}$ ۲۳۵۷ د. $x \to -1$

۲۳۵۸ سوال ۲.۲۰۵: $\lim \frac{x^2-1}{2x+4}$

۲۳۵۹ ا. $x \to -2^+$ ۲۳۶۰ ب. $x \to -2^-$ ۲۳۶۱ ج. $x \to 1^+$ ۲۳۶۲ د. $x \to 0^-$

۲۳۶۳ سوال ۲.۲۰۶: $\lim \frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2}$

۲۳۶۴ ا. $x \to 0^+$ ۲۳۶۵ ب. $x \to 2^+$ ۲۳۶۶ ج. $x \to 2^-$ ۲۳۶۷ د. $x \to 2$

۲۳۶۸ سوال ۲.۲۰۷: $\lim \frac{x^2-3x+2}{x^3-4x}$

۲۳۶۹ ا. $x \to 2^+$ ۲۳۷۰ ب. $x \to -2^+$ ۲۳۷۱ ج. $x \to 0^-$ ۲۳۷۲ د. $x \to 1^+$

۲۳۷۳ سوال ۲.۲۰۸ تا سوال ۲.۲۱۱ میں دی گئی صورتوں میں حد تلاش کریں۔

۲۳۷۴ سوال ۲.۲۰۸: $\lim(2 - \frac{3}{t^{1/3}})$

۳۳۷۵ ا. $t \to 0^+$ ۳۳۷۶ ب. $t \to 0^-$

۳۳۷۷ سوال ۲.۲۰۹: $\lim(\frac{1}{t^{3/5}} + 7)$

۳۳۷۸ ا. $t \to 0^+$ ۳۳۷۹ ب. $t \to 0^-$

۳۳۸۰ سوال ۲.۲۱۰: $\lim(\frac{1}{x^{2/3}} + \frac{2}{(x-1)^{2/3}})$

۳۳۸۱ ا. $x \to 0^+$ ۳۳۸۲ ب. $x \to 0^-$ ۳۳۸۳ ج. $x \to 1^+$ ۳۳۸۴ د. $x \to 1^-$

۳۳۸۵ سوال ۲.۲۱۱: $\lim(\frac{1}{x^{1/3}} - \frac{1}{(x-1)^{4/3}})$

۳۳۸۶ ا. $x \to 0^+$ ۳۳۸۷ ب. $x \to 0^-$ ۳۳۸۸ ج. $x \to 1^+$ ۳۳۸۹ د. $x \to 1^-$

۳۳۹۰ **نظریہ اور مثالیں**

۳۳۹۱ سوال ۲.۲۱۲: اگر f کے دائرہ کار کے اندر آپ کو $\lim_{x\to a^+} f(x)$ اور $\lim_{x\to a^-} f(x)$ معلوم ہو تب کیا آپ
۳۳۹۲ $\lim_{x\to a} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۳۳۹۳ سوال ۲.۲۱۳: اگر آپ جانتے ہوں کہ $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے، کیا آپ $\lim_{x\to c^+} f(x)$ تلاش کرتے ہوئے اس حد کو تلاش کر
۳۳۹۴ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۳۳۹۵ سوال ۲.۲۱۴: فرض کریں کہ $f(x)$ متغیر x کا طاق تفاعل ہے۔ کیا یہ جانتے ہوئے کہ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$ ہے، آپ
۳۳۹۶ $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۳۳۹۷ سوال ۲.۲۱۵: فرض کریں کہ $f(x)$ متغیر x کا جفت تفاعل ہے۔ اگر $\lim_{x\to 2^-} f(x) = 7$ ہو تب کیا $\lim_{x\to -2^-} f(x)$ یا
۳۳۹۸ $\lim_{x\to -2^+} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۳۳۹۹ **یک طرفہ حد کی باضابطہ تعریف**

۳۴۰۰ سوال ۲.۲۱۶: اگر $\epsilon > 0$ ہو تب ایسا وقفہ $I = (5, 5+\delta), \delta > 0$ تلاش کریں کہ اگر x وقفہ I میں پایا جاتا ہو تب
۳۴۰۱ $\sqrt{x-5} < \epsilon$ ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جا رہی ہے اور اس کی قیمت کیا ہے؟
۳۴۰۲

۳۴۰۳ سوال ۲.۲۱۷: اگر $\epsilon > 0$ ہو تب ایسا وقفہ $I = (4-\delta, 4), \delta > 0$ تلاش کریں کہ اگر x وقفہ I میں پایا جاتا ہو تب
۳۴۰۴ $\sqrt{4-x} < \epsilon$ ہو۔ کس حد کی تصدیق کی جا رہی ہے اور اس حد کی قیمت کیا ہے؟

۳۴۰۵ دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال ۲.۲۱۸ اور سوال ۲.۲۱۹ میں دیے الجبرائی فقروں کو ثابت کریں۔

۳۴۰۶ سوال ۲.۲۱۸: $\lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$

سوال ۲.۲۱۹: $\lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{|x-2|} = 1$

سوال ۲.۲۲۰: (ا) $\lim_{x\to 400^+} \lfloor x \rfloor$ اور (ب) $\lim_{x\to 400^-} \lfloor x \rfloor$ تلاش کریں۔ اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے اپنے جوابات کی تصدیق کریں۔ (ج) گزشتہ دو اجزاء کے نتائج دیکھ کر کیا $\lim_{x\to 400} \lfloor x \rfloor$ کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

سوال ۲.۲۲۱: فرض کریں کہ $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x < 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$ ہے۔ (ا) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ اور (ب) $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ تلاش کریں۔ اس کے بعد حد کی تعریف استعمال کرتے ہوئے نتائج کی تصدیق کریں۔ کیا ان نتائج کو دیکھ کر $\lim_{x\to 0} f(x)$ کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف: سوال ۲.۲۲۲ تا سوال ۲.۲۲۵ میں دیے گئے فقروں کو حد کی باضابطہ تعریف کے استعمال سے ثابت کریں۔

سوال ۲.۲۲۲: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$

سوال ۲.۲۲۳: $\lim_{x\to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$

سوال ۲.۲۲۴: $\lim_{x\to 3} \frac{-2}{(x+3)^2} = -\infty$

سوال ۲.۲۲۵: $\lim_{x\to -5} \frac{1}{(x+5)^2} = \infty$

یک طرفہ لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف

دائیں ہاتھ لامتناہی حد کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: اگر ہر مثبت حقیقی عدد B کے لیے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہو کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لیے $f(x) > B$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے x دائیں ہاتھ سے x_0 کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے ویسے ویسے $f(x)$ لامتناہی کے نزدیک تر ہوتا جاتا ہے، جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{x\to x_0^+} = \infty$$

□

سوال ۲.۲۲۶: درج بالا تعریف کو تبدیل کر کے درج ذیل صورتوں کے لیے قابل استعمال بنائیں۔

۲۲۲۸ ا. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$

۲۲۲۹ ب. $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$

۲۲۳۰ ج. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$

۲۲۳۱

۲۲۳۲ یک طرفہ لامتناہی حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے سوال ۲.۲۲۷ تا سوال ۲.۲۳۲ میں دیے گئے فقرے ثابت کریں۔

۲۲۳۳ سوال ۲.۲۲۷: $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$

۲۲۳۴ سوال ۲.۲۲۸: $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

۲۲۳۵ سوال ۲.۲۲۹: $\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$

۲۲۳۶ سوال ۲.۲۳۰: $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$

۲۲۳۷ سوال ۲.۲۳۱: $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x^2} = -\infty$

۲۲۳۸ سوال ۲.۲۳۲: $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1-x^2} = \infty$

۲۲۳۹

۲۲۴۰

۲۲۴۱ ۲.۵ استمرار

۲۲۴۲ تجرباتی حاصل معلومات کو ہم عموماً بطور نقطے ترسیم کر کے ہموار خط سے جوڑتے ہیں۔ یوں نقطوں کے بیچ وقت، جہاں کوئی معلومات حاصل نہیں کی گئی، کے
۲۲۴۳ بارے میں بھی کچھ کہنا ممکن ہوتا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ ہم استمراری تفاعل ترسیم کر رہے ہیں جو مسلسل تبدیل ہوتے ہوئے ایک نقطے
۲۲۴۴ سے دوسرے نقطے تک پہنچتا ہے نہ کہ ان کے بیچ قیمتوں کو نظرانداز کرتے ہوئے چھلانگ لگا کر پہنچتا ہے۔

۲۲۴۵ اتنے زیادہ طبعی اعمال استمراری ہیں کہ اٹھارویں اور انیسویں صدی میں شاید ہی کسی نے کسی اور قسم کے عمل کے بارے میں سوچا ہو۔ بیسویں صدی میں ماہر
۲۲۴۶ طبیعیات نے دریافت کیا کہ ہائیڈروجن سالمہ (مالیکیول) میں جوہر (ایٹم) صرف مخصوص سطح توانائی پر ارتعاش کر سکتے ہیں اور روشنی درحقیقت ذراتی ہے اور
۲۲۴۷ گرم مادہ صرف مخصوص انفرادی تعدد کی روشنی خارج کرتا ہے نہ کہ تمام تعدد پر استمراری روشنی خارج کرتا ہے۔ ان غیر متوقع نتائج کے علاوہ شماریات اور کمپیوٹر
۲۲۴۸ میں غیر مسلسل تفاعل کے استعمال نے استمرار کے تصور کو عملاً اور نظریاتی طور پر اہم بنایا۔

۲۲۴۹ اس حصے میں استمرار کی تعریف پیش کی جائے گی اور کسی نقطہ پر تفاعل کا استمراری یا غیر استمراری ہونا دکھایا جائے گا۔ استمراری تفاعل کی متوسط قیمت خاصیت پر
۲۲۵۰ بھی بات کی جائے گی۔

نقطہ پر استمرار

عملاً، حقیقی متغیر کے زیادہ تر تفاعل کے دائرہ کار پائے جاتے ہیں جو وقفوں یا مختلف وقفوں کے اشتراک پر مبنی ہوتے ہیں۔ ہم انہیں پر غور کرتے ہیں۔ یوں ہمیں تین قسم کے نقطوں پر غور کرنا ہوگا، یعنی **اندرونی نقطے**[10] (وہ نقطے جو دائرہ کار میں کھلے وقفہ کے اندر پائے جاتے ہیں)، **دائیں سر نقطے**[11] اور **بائیں سر نقطے**[12]۔

تعریف: اندرونی نقطہ پر استمرار

اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں اندرونی نقطہ $x = c$ پر درج ذیل ہو تب اس نقطے پر f استمراری ہوگا۔

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$$

□

شکل ۲.۵۶ میں $x = 0$ پر (ا) استمراری ہے۔ اس نقطے پر (ب) بھی استمراری ہوتا اگر $f(0) = 1$ ہوتا۔ اگر تفاعل (ج) میں $f(0) = 2$ کے بجائے $f(0) = 1$ ہوتا تب یہ بھی استمراری ہوتا۔ (ب) اور (ج) میں عدم استمرار ہٹانے کے قابل ہیں۔ انہیں **قابل ہٹاو**[13] عدم استمرار کہتے ہیں۔ ان دونوں میں $x \to 0$ کرتے ہوئے حد حاصل ہوتی ہے اور $f(0)$ کو اس حد کے برابر پُر کرنے سے عدم استمرار ہٹایا جا سکتا ہے۔

شکل ۲.۵۶ میں (د) تا (و) میں عدم استمرار زیادہ تشویش ناک ہیں۔ ان میں $\lim_{x \to 0} f(x)$ موجود نہیں لہٰذا $x = 0$ پر f کو تبدیل کرتے ہوئے صورت حال بہتر نہیں بنائی جا سکتی۔ (د) میں **چھلانگ عدم استمرار**[14] پایا جاتا ہے: اس کی یک طرفہ حد پائی جاتی ہیں لیکن ان کی قیمتیں ایک جیسی نہیں۔ (ہ) میں تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کا **لا متناہی عدم استمرار**[15] پایا جاتا ہے۔ ہمیں عموماً چھلانگ اور لا متناہی عدم استمرار سے واسطہ پڑتا ہے لیکن ان کے علاوہ دیگر عدم استمرار بھی پائے جاتے ہیں۔ (و) میں مبدا کے قریب f اس لیے غیر استمراری ہے کہ $x \to 0$ کرنے سے تفاعل بہت زیادہ ارتعاش کرتا ہے اور کسی ایک حد تک نہیں پہنچتا۔ (و) میں **ارتعاشی عدم استمرار**[16] پایا جاتا ہے۔

کمپیوٹر کا استعمال کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے عدم استمرار پر خصوصی نظر رکھنی ضروری ہے۔ کمپیوٹر آپ کو اجازت دیتا ہے کہ تمام نقطوں کو ہموار لکیر سے جوڑا جائے یا انہیں نہ جوڑا جائے۔ عدم استمرار کو واضح رکھنے کے لیے ضروری ہے کہ نقطوں کو ہموار لکیر سے نہ جوڑا جائے۔

آخری سر نقطوں پر استمرار سے مراد ان نقطوں پر یک طرفہ حد کی موجودگی ہے۔

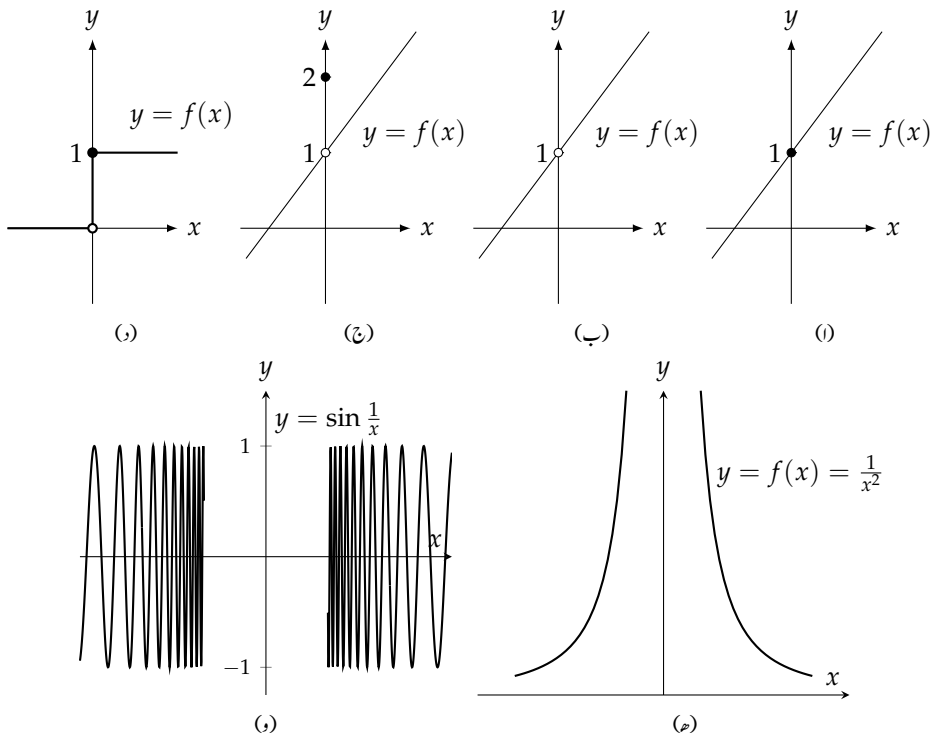
تعریف: دائیں سر نقطہ اور بائیں سر نقطہ پر استمرار

اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = b$ پر

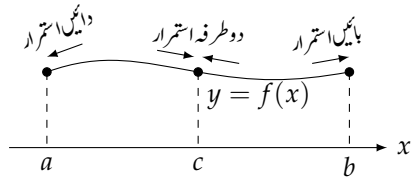
$$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

---

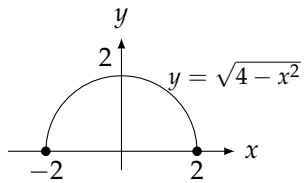
[10] interiorpoints
[11] rightendpoints
[12] leftendpoints
[13] removable
[14] jumpdiscontinuity
[15] infinitediscontinuity
[16] oscillatingdiscontinuity



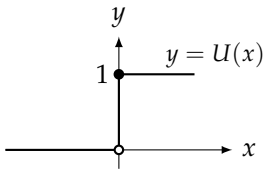
شکل ۲.۵۶: $x = 0$ پر تفاعل (ا) استمراری ہے جبکہ (ب) تا (و) غیر استمراری ہیں۔



شکل ۲.۵۷: نقطہ a ، b ،اور c پر استمرار



شکل ۲.۵۸: پورے دائرہ کار کے ہر نقطہ پر استمراری



شکل ۲.۵۹: تفاعل مبدا پر دائیں استمراری ہے

ہو تب تفاعل دائیں سر نقطہ $x = b$ پر استمراری ہو گا۔ اسی طرح اگر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = a$ پر

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

ہو تب تفاعل بائیں سر نقطہ $x = a$ پر استمراری ہو گا۔

□

عام طور پر تفاعل f کے دائرہ کار میں نقطہ $x = c$ پر $\lim_{x \to c^+} f(x) = f(c)$ ہونے کی صورت میں تفاعل **دائیں استمراری**[۱۷] ہو گا۔ اسی طرح تفاعل f اس صورت **بائیں استمراری**[۱۸] ہو گا جب تفاعل کے دائرہ کار میں نقطہ $x = c$ پر $\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$ ہو۔ یوں f کے دائرہ کار کے بائیں سر نقطہ $x = a$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب یہ $x = a$ پر دائیں استمراری ہو اور دائرہ کار کے دائیں سر نقطہ $x = b$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب یہ $x = a$ پر بائیں استمراری ہو۔ دائرہ کار کے اندرونی نقطہ $x = c$ پر f اس صورت استمراری ہو گا جب اس نقطے پر f دائیں استمراری اور (ساتھ ہی) بائیں استمراری ہو (شکل ۲.۵۷)۔

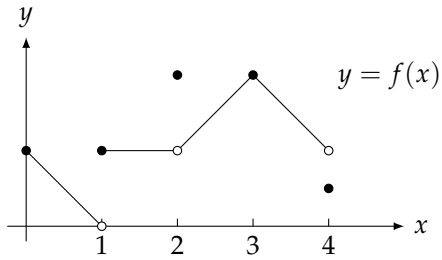
مثال ۲.۳۰: تفاعل $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ اپنے پورے دائرہ کار $[-2, 2]$ میں ہر نقطے پر استمراری ہے۔ اس میں نقطہ $x = -2$ شامل ہے جہاں f دائیں استمراری ہے اور $x = 2$ جہاں f بائیں استمراری ہے (شکل ۲.۵۸)۔

□

مثال ۲.۳۱: شکل ۲.۵۹ میں دکھایا گیا اکائی سیڑھی تفاعل $U(x)$ نقطہ $x = 0$ پر دائیں استمراری ہے جبکہ اس نقطے پر یہ نہ بائیں استمراری اور نہ ہی استمراری ہے۔ □

---

[۱۷] right-continuous
[۱۸] left-continuous



شکل ۲.۶۰: تفاعل f بند وقفہ $[0,4]$ پر معین ہے۔ یہ تفاعل $x = 1, 2, 4$ پر غیر استمراری جبکہ دائرہ کار میں باقی تمام نقطوں پر استمراری ہے۔

۲۴۸۴ ہم نقطے پر استمرار کو پرکھ کی صورت میں بیان کرتے ہیں۔

۲۴۸۵ **پرکھ استمرار**

۲۴۸۶ نقطہ $x = c$ پر تفاعل $f(x)$ صرف اور صرف اس صورت استمراری ہو گا جب یہ درج ذیل تینوں شرائط پر پورا اترتا ہو۔

۲۴۸۷ ۱. $f(c)$ موجود ہے (نقطہ c تفاعل f کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہے)

۲۴۸۸ ۲. $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود ہے ($x \to c$ پر f کی حد پایا جاتا ہے)

۲۴۸۹ ۳. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ (تفاعل کی حد تفاعل کی قیمت کے برابر ہے)

۲۴۹۰ یک طرفہ استمرار اور آخری سر نقطہ پر استمرار کے لیے پرکھ کے جزو 2 اور 3 میں حد کی جگہ مناسب یک طرفہ حد لیں۔

۲۴۹۱ مثال ۲.۳۲: تفاعل $y = f(x)$ جسے شکل ۲.۶۰ میں دکھایا گیا ہے پر غور کریں۔ نقطہ $x = 0, 1, 2, 3, 4$ پر تفاعل کے استمرار پر بحث
۲۴۹۲ کریں۔

۲۴۹۳ **حل**

۲۴۹۴ پرکھ استمرار سے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

۲۴۹۵ ا. $x = 0$ پر f استمراری ہے چونکہ

۲۴۹۶ ۱. $f(0)$ موجود ہے $(f(0) = 1)$

۲۴۹۷ ۲. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ (اس بائیں سر نقطے پر دائیں ہاتھ حد موجود ہے)

۲۴۹۸ ۳. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ (تفاعل کی قیمت اور حد برابر ہیں)

۲۴۹۹ ب. چونکہ $\lim_{x\to 1} f(x)$ غیر موجود ہے لہٰذا $x = 1$ پر f غیر استمراری ہے۔ پرکھ کا جزو 2 مطمئن نہیں ہوتا: اندرونی نقطہ $x = 1$ پر
۲۵۰۰ دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ حد مختلف ہیں۔ البتہ $x = 1$ پر f دائیں استمراری ہے چونکہ

۲۵۰۱ ۱. $f(1)$ موجود ہے $(f(1) = 1)$

۲۵۰۲ ۲. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ (نقطہ $x = 1$ پر دائیں ہاتھ حد موجود ہے)

۳. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ (دائیں ہاتھ حد اور تفاعل کی قیمتیں برابر ہیں۔)

ج. $\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2)$ کی وجہ سے $x = 2$ پر f غیر استمراری ہے۔ پرکھ کا جزو 3 مطمئن نہیں ہوتا۔

د. $x = 3$ پر f استمراری ہے چونکہ

۱. $f(3)$ موجود ہے ($f(3) = 2$)

۲. $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$ (نقطہ $x = 2$ پر حد موجود ہے۔)

۳. $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$ (تفاعل کی قیمت اور حد برابر ہیں۔)

ھ. چونکہ $\lim_{x\to 4^-} f(x) \neq f(4)$ ہے لہٰذا دائیں سر نقطہ $x = 4$ پر f غیر استمراری ہے۔ دائیں سر نقطے والے پرکھ کا جزو 3 مطمئن نہیں ہوتا۔

□

قواعد استمرار

مسئلہ ۲.۱ کے تحت اگر ایک نقطہ پر دو تفاعل استمراری ہوں تب اس نقطے پر ان تفاعلات کے مختلف الجبرائی میل بھی استمراری ہوں گے۔

مسئلہ ۲.۶: **الجبرائی میل کا استمرار**

اگر نقطہ $x = c$ پر تفاعل f اور g استمراری ہوں تب $x = c$ پر درج ذیل تفاعل بھی استمراری ہوں گے۔

۱. $f + g$ اور $f - g$

۲. fg

۳. kf، جہاں k کوئی عدد ہے

۴. $\frac{f}{g}$ (بشرطیکہ $g(c) \neq 0$ ہو)

۵. $(f(x))^{m/n}$ (بشرطیکہ $(f(x))^{m/n}$ اس وقفے پر معین ہو جس پر c پایا جاتا ہے، اور m اور n عدد صحیح ہوں۔)

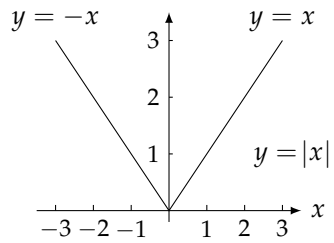
درج بالا مسئلے کے نتیجے میں کثیر رکنی اور ناطق تفاعل ہر اس نقطے پر استمراری ہوں گے جس پر یہ معین ہوں۔

مسئلہ ۲.۷: **کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کا استمرار**

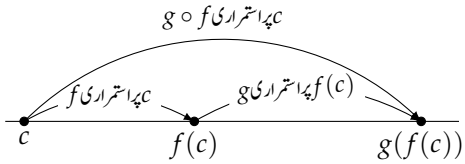
حقیقی خط کے ہر نقطہ پر ہر کثیر رکنی استمراری ہو گی۔ ہر ناطق تفاعل اس نقطے پر استمراری ہو گا جس پر اس کا نسب نما غیر صفر ہو۔

مثال ۲.۳۳: x کی ہر قیمت پر تفاعل $f(x) = x^4 + 20$ اور $g(x) = 5x(x-2)$ استمراری ہیں۔ تفاعل

$$r(x) = \frac{x^2 + 20}{5x(x-2)}$$



شکل ۲.۶۱: تفاعل کا کونا اس کو استمراری ہونے سے نہیں روکتا (مثال ۲.۳۴)۔



شکل ۲.۶۲: مرکب تفاعل کا استمرار۔

۲۵۲۷ ماسوائے $x = 0$ اور $x = 2$ جہاں نسب نما صفر ہے، x کی ہر قیمت پر استمراری ہے۔ □

۲۵۲۸ مثال ۲.۳۴: $f(x) = |x|$ کا استمرار

۲۵۲۹ x کی ہر قیمت پر تفاعل $f(x) = |x|$ استمراری ہے (شکل ۲.۶۱)۔ $x > 0$ کے لیے $f(x) = x$ ہوگا جو کثیر رکنی ہے۔ اسی طرح $x <$

۲۵۳۰ 0 کے لیے $f(x) = -x$ ہوگا جو دوسری کثیر رکنی ہے۔ آخر میں مبدا پر $\lim_{x\to 0}|x| = 0 = |0|$ ہے۔ □

۲۵۳۱ مثال ۲.۳۵: تکونیاتی تفاعل کا استمرار

۲۵۳۲ باب ۳ میں دکھایا جائے گا کہ x کی ہر قیمت پر $\sin x$ اور $\cos x$ استمراری ہیں لہٰذا درج ذیل حاصل تقسیم ان تمام نقطوں پر استمراری ہوں گے جن پر یہ

۲۵۳۳ معین ہوں۔

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

۲۵۳۴ □

۲۵۳۵ مسئلہ ۲.۸: مرکبات کا استمرار

۲۵۳۶ اگر c پر f اور $f(c)$ پر g استمراری ہوں تب c پر $g \circ f$ استمراری ہوگا (شکل ۲.۶۲)۔

۲۵۳۷ مرکب کا استمرار کسی بھی متناہی تعداد کے تفاعل کے لیے درست ہے۔ بس اتنا ضروری ہے کہ ہر تفاعل اس نقطے پر استمراری ہو جہاں اس کو لاگو کیا گیا ہو۔

۲۵۳۸ مثال ۲.۳۶: درج ذیل تفاعل اپنے اپنے دائرہ کار کے ہر نقطے پر استمراری ہیں۔

(ا) $y = \sqrt{x}$ مسئلہ ۲.۶ اور ۲.۷ (کثیر رکنی کی ناطق طاقت)

(ب) $y = \sqrt{x^2 - 2x - 5}$ مسئلہ ۲.۷ اور مسئلہ ۲.۸ (کثیر رکنی کی طاقت یا جذر کے ساتھ مرکب)

(ج) $y = \dfrac{x\cos(x^{2/3})}{1 + x^4}$ مسئلہ ۲.۶، ۲.۷ اور ۲.۸ (طاقت، مرکب، حاصل ضرب، کثیر رکنی)

(د) $y = \left|\dfrac{x-2}{x^2-2}\right|$ مسئلہ ۲.۷ اور ۲.۸ (حتمی قیمت اور ناطق تفاعل کا مرکب)

۲۵۳۹ □

۲۵۴۰ **نقطے تک استمراری توسیع**

۲۵۴۱ ہم نے مثال ۲.۱۳ میں دیکھا کہ ناطق تفاعل کی اس نقطے پر بھی حد موجود ہو سکتی ہے جس پر ناطق تفاعل کا نسب نما صفر کے برابر ہو۔ اگر $f(c)$ غیر معین ہو
۲۵۴۲ لیکن $\lim_{x\to c} f(x) = L$ موجود ہو تب ہم درج ذیل نیا تفاعل $F(x)$ متعارف کر سکتے ہیں۔

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{اگر } x \text{ تفاعل } f \text{ کے دائرہ کار میں پایا جاتا ہو} \\ L & \text{اگر } x = c \text{ ہو} \end{cases}$$

۲۵۴۳ تفاعل F نقطہ $x = c$ پر بھی استمراری ہو گا۔ اس کو f کی نقطہ $x = c$ تک **استمراری توسیع**[۱۹] کہتے ہیں اور توسیع شدہ تفاعل کو **وسیع تفاعل**[۲۰]
۲۵۴۴ کہتے ہیں۔ ناطق تفاعل f کی استمراری توسیع کو عموماً مشترک اجزاء کے اسقاط کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے۔

۲۵۴۵ مثال ۲.۳۷: دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل کی $x = 2$ پر استمراری توسیع ممکن ہے۔

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$$

۲۵۴۶ **حل**

۲۵۴۷ اگرچہ $f(2)$ غیر معین ہے، $x \neq 2$ پر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

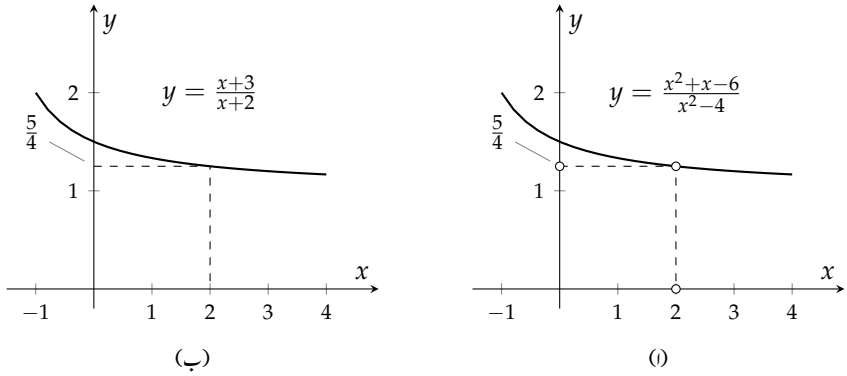
$$f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x+2}$$

۲۵۴۸ درج ذیل تفاعل $x \neq 2$ پر f کے برابر ہے اور $x = 2$ پر استمراری ہے جہاں اس کی قیمت $\frac{5}{4}$ ہے۔

$$F(x) = \frac{x+3}{x+2}$$

---

[۱۹] continuousextension
[۲۰] extendedfunction



شکل ۲.۶۳: تفاعل $f(x)$ اور اس کی استمراری توسیع $F(x)$

یوں f کی نقطہ $x = 2$ تک توسیع، تفاعل $F(x)$ ہے اور اس نقطے پر تفاعل کی حد درج ذیل ہے۔

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} f(x) = \frac{5}{4}$$

تفاعل f کی ترسیم شکل ۲.۶۳ میں دکھائی گئی ہے۔ F کی بھی یہی ترسیم ہے تاہم اس میں $(2, \frac{5}{4})$ پر سوراخ نہیں پایا جاتا۔ f اور F کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$F = \begin{cases} f, & x \neq 2 \\ \frac{5}{4}, & x = 2 \end{cases}$$

□

وقفوں پر استمرار

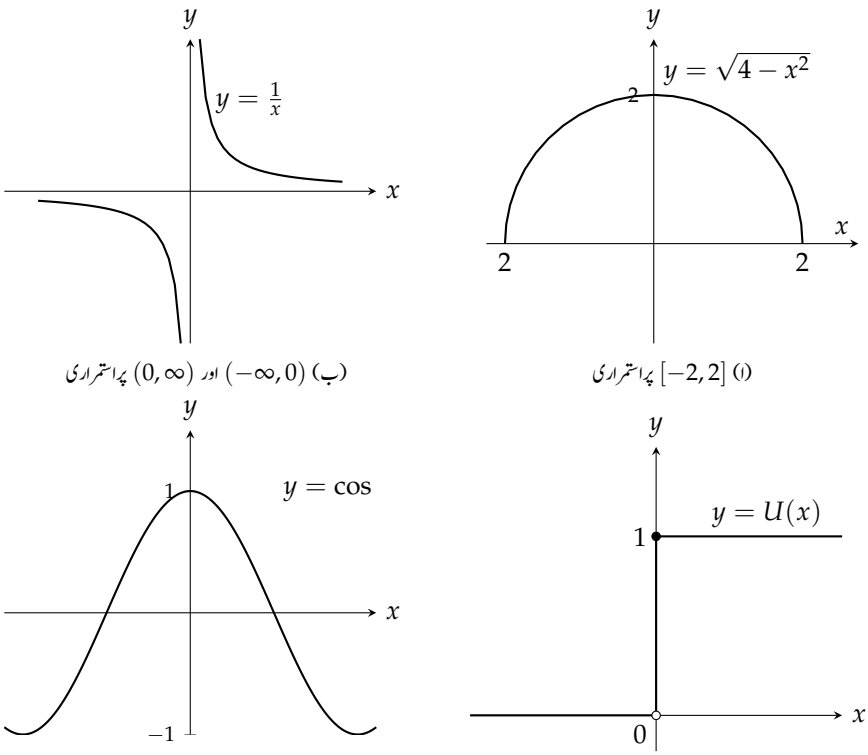
ایک تفاعل اس صورت استمراری کہلاتا ہے جب یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری ہو۔ ایسا تفاعل جو اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری نہ ہو، دائرہ کار کے اندر مخصوص وقفوں میں استمراری ہو سکتا ہے۔

اگر f کے دائرہ کار کے اندر وقفہ I میں ہر اندرونی نقطہ c پر $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ ہو اور ہر آخری سر نقطہ جو I میں پایا جاتا ہو پر مناسب یک طرفہ حد اور تفاعل کی قیمت برابر ہوں تب f **وقفہ پر استمراری**[21] کہلائے گا۔ جو تفاعل I پر استمراری ہو یہ تفاعل I کے اندر ہر وقفے پر استمراری ہو گا۔ کثیر رکنی اور ناطق تفاعل ہر اس وقفے پر استمراری ہوں گے جن پر یہ معین ہوں۔

مثال ۲.۳۸: وقفوں پر استمراری تفاعل

شکل ۲.۶۴ میں وقفوں پر استمراری تفاعل کی مثالیں ترسیم کی گئی ہیں۔ □

[21] continuousoninterval



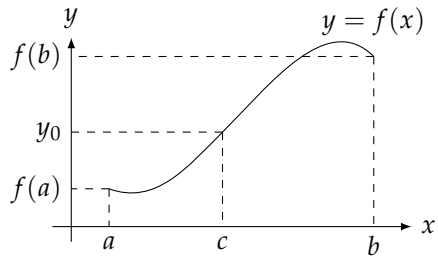
(ا) $[-2,2]$ پر استمراری

(ب) $(-\infty,0)$ اور $(0,\infty)$ پر استمراری

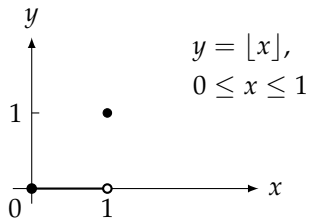
(ج) $(-\infty,0)$ اور $[0,\infty)$ پر استمراری

(د) $(-\infty,\infty)$ پر استمراری

شکل ۲.۶۴: وقفوں پر استمراری تفاعل (مثال ۲.۳۸)



شکل ۲.۶۵: وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تفاعل $f(a)$ اور $f(b)$ کے بیچ ہر قیمت رکھتا ہے



شکل ۲.۶۶: تفاعل $y = \lfloor x \rfloor, 0 \leq x \leq 1$ کوئی بھی قیمت $f(0) = 0$ اور $f(1) = 1$ کے بیچ قبول نہیں کرتا۔

وقفوں پر استمراری تفاعل ایسے خواص رکھتے ہیں جن کی وجہ سے یہ ریاضیات کے لیے نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔ ان میں ایک **متوسط قیمت خاصیت**[۲۲] ہے۔ جب تفاعل کوئی دو قیمتیں صرف اس صورت دیتا ہو جب تفاعل ان دو قیمتوں کے بیچ تمام قیمتیں بھی دیتا ہو تب ہم کہتے ہیں کہ تفاعل **متوسط قیمت خاصیت** رکھتا ہے۔

مسئلہ ۲.۹: **مسئلہ متوسط قیمت**

فرض کریں کہ تفاعل f وقفہ I پر استمراری ہے جبکہ a اور b اس وقفے پر کوئی دو نقطے ہیں۔ اگر $f(a)$ اور $f(b)$ کے بیچ y_0 ایک عدد ہو تب a اور b کے بیچ ایک ایسا عدد c پایا جائے گا جس پر $f(c) = y_0$ ہو گا (شکل ۲.۶۵)۔

متوسط قیمت مسئلے کا ثبوت، جو اعلیٰ کتابوں میں پایا جاتا ہے، حقیقی اعدادی نظام کی کملیت پر منحصر ہے۔

اس مسئلے میں وقفہ I پر تفاعل f کا استمرار ضروری ہے۔ اگر I میں واحد ایک نقطے پر بھی f غیر استمراری ہو تب یہ مسئلہ قابل استعمال نہیں ہو گا۔ اس کی ایک مثال شکل ۲.۶۶ میں دی گئی ہے۔

ترسیم کرنے کا نتیجہ: ربط

مسئلہ ۲.۹ کی وجہ سے وقفہ I پر استمراری تفاعل کی ترسیم مسلسل ہوتی ہے، یعنی اس میں کوئی سوراخ یا خالی جگہ نہیں پائی جاتی۔ اس میں عدد صحیح زمین تفاعل $\lfloor x \rfloor$ کی طرح چھلانگ نہیں پائے جاتے اور نہ ہی اس میں تفاعل $\frac{1}{x}$ کی طرح علیحدہ علیحدہ شاخیں پائی جاتی ہیں۔

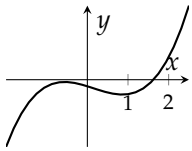
تلاش جذر

مساوات $f(x) = 0$ کے حل کو $f(x)$ کا **صفر**[۲۳] یا **جذر**[۲۴] کہتے ہیں۔ مسئلہ ۲.۹ کے تحت استمراری تفاعل کی صورت میں جس وقفے میں تفاعل کی علامت $(\pm)$ تبدیل ہوتی ہو اس وقفے میں تفاعل کا صفر پایا جائے گا۔

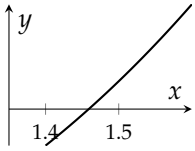
اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم $f(x) = 0$ طرز کی مساوات کا حل بذریعہ کمپیوٹر تلاش کر سکتے ہیں (جہاں f استمراری ہے)۔ مساوات کی

---

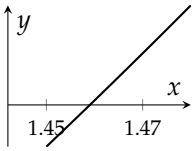
[۲۲] intermediatevalueproperty
[۲۳] zero
[۲۴] root



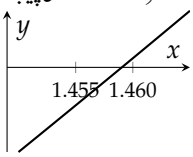
(ا)جذر(صفر) 1 اور 2 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



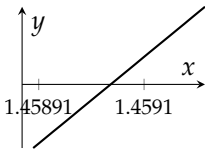
(ب)جذر(صفر) 1.4 اور 1.5 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



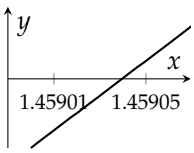
(ج)جذر(صفر) 1.45 اور 1.47 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



(د)جذر(صفر) 1.455 اور 1.460 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



(ھ)جذر(صفر) 1.45891 اور 1.4591 کے بیچ پایا جاتا ہے۔



(و)جذر(صفر) 1.45901 اور 1.45905 کے بیچ پایا جاتا ہے۔

شکل۲.۶۷:ترسیم کے ذریعہ $x^3 - 0.25x^2 - 1.25x - 0.75 = 0$ کے جذر کا قدم باقدم حصول۔

ترسیم محور x کو f کے جذر پر قطع کرتی ہے۔ہم $y = f(x)$ کو کسی بڑے وقفے پر ترسیم کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ ترسیم کہاں محور x کو قطع کرتی ہے۔ہم ان نقطوں کو باری باری قریب سے دیکھ کر جذر کی اندازاً قیمت حاصل کرتے ہیں۔اب ہم جذر کی اس اندازاً قیمت کے گرد چھوٹے وقفے پر مساوات ترسیم کرتے ہوئے جذر کی مزید بہتر قیمت تلاش کرتے ہیں۔اس عمل کو جتنی مرتبہ ضرورت ہو دہراتے ہوئے درکار درستگی تک جذر تلاش کیا جا سکتا ہے۔شکل ۲.۶۷ میں، قدم باقدم، اس عمل سے $x^3 - 0.25x^2 - 1.25x - 0.75 = 0$ کا جذر حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔

ترسیم سے مساوات کو حل کرتے ہوئے تفاعل کے جذر حاصل کرنے میں زیادہ وقت درکار ہوتا ہے۔اس سے کم دورانیے میں جذر کو بذریعہ اعدادی تراکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے جیسے آپ حصہ ۴.۸ میں دیکھیں گے۔

سوالات

استمرار بذریعہ ترسیم

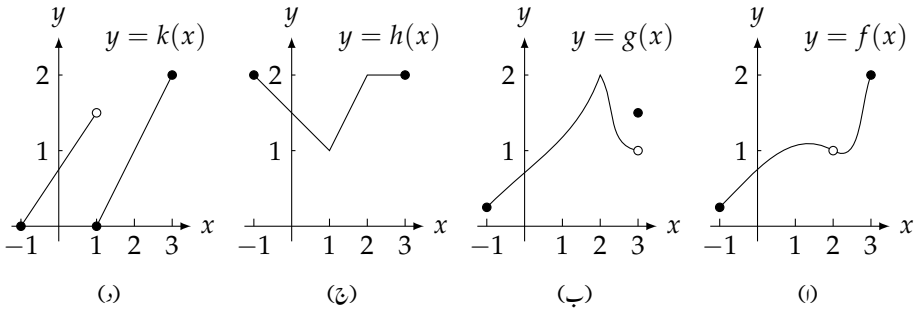
سوال ۲.۲۳۳ تا سوال ۲.۲۳۶ میں دریافت کریں کہ آیا تفاعل وقفہ $[-1, 3]$ پر استمراری ہے۔استمراری نہ ہونے کی صورت میں بتائیں تفاعل کہاں غیر استمراری ہے اور ایسا کیوں ہے؟

سوال ۲.۲۳۳: تفاعل $y = f(x)$ جسے شکل ۲.۶۸-ا میں دکھایا گیا ہے۔

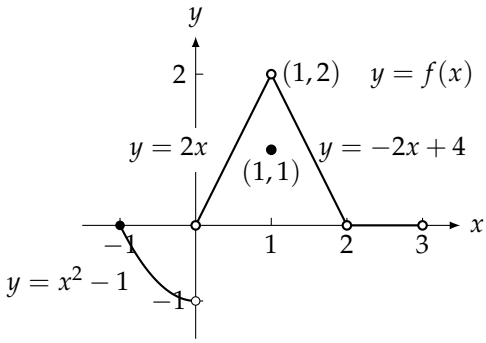
سوال ۲.۲۳۴: تفاعل $y = g(x)$ جسے شکل ۲.۶۸-ب میں دکھایا گیا ہے۔

سوال ۲.۲۳۵: تفاعل $y = h(x)$ جسے شکل ۲.۶۸-ج میں دکھایا گیا ہے۔

سوال ۲.۲۳۶: تفاعل $y = k(x)$ جسے شکل ۲.۶۸-د میں دکھایا گیا ہے۔



شکل ۲.۶۸: اشکال برائے سوال ۲.۲۳۳ تا سوال ۲.۲۳۶



شکل ۲.۶۹: ترسیم برائے سوال ۲.۲۳۷ تا سوال ۲.۲۴۲

۲۵۹۲ سوال ۲.۲۳۷ تا سوال ۲.۲۴۲ درج ذیل تفاعل کے بارے میں ہیں جس کو شکل ۲.۶۹ میں ترسیم کیا گیا ہے

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & -1 \le x < 0 \\ 2x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \\ -2x + 4, & 1 < x < 2 \\ 0, & 2 < x < 3 \end{cases}$$

۲۵۹۳ سوال ۲.۲۳۷: (ا) کیا $f(-1)$ موجود ہے؟

۲۵۹۴ (ب) کیا $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ موجود ہے؟

۲۵۹۵ (ج) کیا $\lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$ ہے؟

۲۵۹۶ (د) کیا $x = -1$ پر $f(x)$ استمراری ہے؟

۲۵۹۷ سوال ۲.۲۳۸: (ا) کیا $f(x)$ موجود ہے؟

۲۵۹۸ (ب) کیا $\lim_{x \to 1} f(x)$ موجود ہے؟

(ج) کیا $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ ہے؟
(د) کیا $x = 1$ پر f استمراری ہے؟

سوال ۲.۲۳۹: (ا) کیا $x = 2$ پر f معین ہے؟
(ب) کیا $2 =$ پر f استمراری ہے؟

سوال ۲.۲۴۰: x کی کس قیمت پر f استمراری ہے؟

سوال ۲.۲۴۱: $x = 2$ پر توسیع کردہ تفاعل کو استمراری بنانے کی خاطر $f(2)$ کی کیا قیمت ہونی چاہیے؟

سوال ۲.۲۴۲: $f(1)$ کی کیا قیمت غیر استمرار کو ختم کرے گی؟

پرکھ استمرار کا استعمال

کن نقطوں پر سوال ۲.۲۴۳ اور سوال ۲.۲۴۴ میں دیے گئے تفاعل غیر استمراری ہیں۔ کن نقطوں پر غیر استمرار ختم کیا جا سکتا ہے؟ کن نقطوں پر غیر استمرار ختم نہیں کیا جا سکتا؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۲.۲۴۳: حصہ ۲.۴ میں سوال ۲.۱۶۶ کے تفاعل۔

سوال ۲.۲۴۴: حصہ ۲.۴ میں سوال ۲.۱۶۷ کے تفاعل۔

سوال ۲.۲۴۵ تا سوال ۲.۲۶۰ میں کن نقطوں پر تفاعل استمراری ہیں۔

سوال ۲.۲۴۵: $y = \frac{1}{x-2} - 3x$

سوال ۲.۲۴۶: $y = \frac{1}{(x+2)^2} + 4$

سوال ۲.۲۴۷: $y = \frac{x+1}{x^2-4x+3}$

سوال ۲.۲۴۸: $y = \frac{x+3}{x^2-3x-10}$

سوال ۲.۲۴۹: $y = |x-1| + \sin x$

سوال ۲.۲۵۰: $y = \frac{1}{|x|+1} - \frac{x^2}{2}$

سوال ۲.۲۵۱: $y = \frac{\cos x}{x}$

سوال ۲.۲۵۲: $y = \frac{x+2}{\cos x}$

سوال ۲.۲۵۳: $y = \csc x$

سوال ۲.۲۵۴: $y = \tan \frac{\pi x}{2}$

سوال ۲.۲۵۵: $y = \frac{x \tan x}{x^2+1}$

سوال ۲.۲۵۶: $y = \frac{\sqrt{x^4+1}}{1+\sin^2 x}$

سوال ۲.۲۵۷: $y = \sqrt{2x+3}$

سوال ۲.۲۵۸: $y = \sqrt[4]{3x-1}$

سوال ۲.۲۵۹: $y = (2x-1)^{1/3}$

سوال ۲.۲۶۰: $y = (2-x)^{1/5}$

مرکب تفاعل کی حد

سوال ۲.۲۶۱ تا سوال ۲.۲۶۶ میں حد تلاش کریں۔

سوال ۲.۲۶۱: $\lim\limits_{x\to\pi} \sin(x - \sin x)$

سوال ۲.۲۶۲: $\lim\limits_{t\to 0} \sin(\frac{\pi}{2}\cos(\tan t))$

سوال ۲.۲۶۳: $\lim\limits_{y\to 1} \sec(y\sec^2 y - \tan^2 y - 1)$

سوال ۲.۲۶۴: $\lim\limits_{x\to 0} \tan(\frac{\pi}{4}\cos(\sin x^{1/3}))$

سوال ۲.۲۶۵: $\lim\limits_{t\to 0} \cos(\frac{\pi}{\sqrt{19-3\sec 2t}})$

سوال ۲.۲۶۶: $\lim\limits_{x\to \pi/6} \sqrt{\csc^2 x + 5\sqrt{3}\tan x}$

استمراری توسیع

سوال ۲.۲۶۷: $g(3)$ کی تعریف یوں کریں کہ $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ کی توسیع ہو اور $x = 3$ پر $g(x)$ استمراری ہو جائے۔

سوال ۲.۲۶۸: $h(2)$ کی تعریف یوں کریں کہ $t = 2$ پر $h(t) = \frac{t^2+3t-10}{t-2}$ کی استمراری توسیع ہو۔

سوال ۲.۲۶۹: $f(1)$ کی تعریف یوں کریں کہ $s = 1$ پر $f(s) = \frac{s^3-1}{s^2-1}$ کی استمراری توسیع ہو۔

سوال ۲.۲۷۰: $g(4)$ کی تعریف یوں کریں کہ $x = 4$ پر $g(x) = \frac{x^2-16}{x^2-3x-4}$ کی استمراری توسیع ہو۔

سوال ۲.۲۷۱: a کی کس قیمت کے لیے ہر x پر $f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$ استمراری ہے؟

سوال ۲.۲۷۲: b کی کس قیمت کے لیے ہر x پر $g(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ bx^2, & x \geq -2 \end{cases}$ استمراری ہے؟

استمراری توسیع۔ کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۲.۲۷۳ تا سوال ۲.۲۷۶ میں تفاعل f کو ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں آیا مبدا پر اس کی استمراری توسیع نظر آتی ہے۔ اگر ایسا ہو تب $x = 0$ پر وسیع

تفاعل کی موزوں قیمت تلاش کریں۔ اگر تفاعل کی استمراری توسیع ممکن نہ ہو، تب کیا اس کو مبدا پر دائیں یا بائیں سے استمراری بنایا جا سکتا ہے اور ایسی صورت میں مبدا پر وسیع تفاعل کی قیمت کیا ہو گی؟

سوال ۲.۲۷۳: $f(x) = \frac{10^x - 1}{x}$

سوال ۲.۲۷۴: $f(x) = \frac{10^{|x|} - 1}{x}$

سوال ۲.۲۷۵: $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$

سوال ۲.۲۷۶: $f(x) = (1 + 2x)^{1/x}$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۲.۲۷۷: ایک استمراری تفاعل کی قیمت $x = 0$ پر منفی اور $x = 1$ پر مثبت ہے۔ $x = 0$ اور $x = 1$ کے بیچ مساوات $f(x) = 0$ کا کم سے کم ایک حل کیوں پایا جائے گا؟ خاکہ کھینچ کر وجہ بیان کریں۔

سوال ۲.۲۷۸: مساوات $\cos x = x$ کا کم سے کم ایک حل کیوں پایا جائے گا؟

سوال ۲.۲۷۹: دکھائیں کہ وقفہ $[-4, 4]$ میں مساوات $x^3 - 15x + 1 = 0$ کے تین حل پائے جاتے ہیں۔

سوال ۲.۲۸۰: دکھائیں کہ کسی x پر تفاعل $F(x) = (x - a)^2(x - b)^2 + x$ کی قیمت $\frac{a+b}{2}$ ہو گی۔

سوال ۲.۲۸۱: دکھائیں کہ c کی ایسی قیمتیں پائی جاتی ہیں جن پر تفاعل $f(x) = x^3 - 8x + 10$ کی قیمتیں (ا) π ؛ (ب) $-\sqrt{3}$ ؛ (ج) $5\,000\,000$ ہوں گی۔

سوال ۲.۲۸۲: سمجھائیں کہ درج ذیل جملے ایک ہی معلومات پوچھتی ہیں۔

(ا) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ کے جذر تلاش کریں۔

(ب) اس نقطے کا x محدد تلاش کریں جہاں منحنی $y = x^3$ اور $y = 3x + 1$ ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔

(ج) وہ تمام قیمتیں تلاش کریں جن پر $x^3 - 3x = 1$ ہو گا۔

(د) ان نقطوں کے x محدد تلاش کریں جہاں منحنی $y = x^3 - 3x$ خط $y = 1$ کو قطع کرتی ہے۔

(ہ) مساوات $x^3 - 3x - 1 = 0$ حل کریں۔

سوال ۲.۲۸۳: ایسے تفاعل $f(x)$ کی مثال دیں جو تمام x پر استمراری ہو ماسوائے $x = 2$ پر جہاں اس کا قابل ہٹاو عدم استمرار پایا جاتا ہو۔ بتلائیں آپ کیسے جانتے ہیں کہ $x = 2$ پر عدم استمرار پایا جاتا ہے اور کہ یہ عدم استمرار قابل ہٹاو ہے۔

سوال ۲.۲۸۴: ایسے تفاعل $g(x)$ کی مثال دیں جو تمام x پر استمراری ہو ماسوائے $x = -1$ پر جہاں اس کا ناقابل ہٹاو عدم استمرار پایا جاتا ہے۔ بتلائیں آپ کیسے جانتے ہیں کہ $x = 1$ پر عدم استمرار پایا جاتا ہے اور کہ یہ عدم استمرار ناقابل ہٹاو ہے۔

سوال ۲.۲۸۵: تمام نقطوں پر غیر استمراری تفاعل

(ا) اس حقیقت کو بروئے کار لاتے ہوئے کہ حقیقی اعداد کا ہر غیر خالی وقفہ ناطق اور غیر ناطق اعداد پر مشتمل ہے، دکھائیں کہ درج ذیل تفاعل ہر نقطے پر عدم

استمراری ہے۔

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ ناطق} \\ 0 & x \text{ غیر ناطق} \end{cases}$$

(ب) کیا کسی نقطے پر f دائیں استمراری یا بائیں استمراری ہے؟

سوال ۲.۲۸۶: اگر $0 \leq x \leq 1$ پر $f(x)$ اور $g(x)$ استمراری ہوں تب کیا $[0,1]$ کے کسی نقطے پر $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ غیر استمراری ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۲.۲۸۷: اگر تفاعل $h(x) = f(h) \cdot g(x)$ نقطہ $x = 0$ پر استمراری ہو تب کیا $f(x)$ اور $g(x)$ ضرور $x = 0$ پر استمراری ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۲.۲۸۸: ایسے تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی مثال دیں جو $x = 0$ پر استمراری ہوں لیکن ان کا مرکب تفاعل $f \circ g$ نقطہ $x = 0$ پر عدم استمراری ہو۔ کیا یہ مسئلہ ۲.۸ کی خلاف ورزی کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۲.۲۸۹: کیا یہ کہنا درست ہو گا کہ جو تفاعل کسی وقفے پر کبھی صفر نہیں ہوتا وہ تفاعل اس وقفے پر کبھی علامت تبدیل نہیں کرتا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۲.۲۹۰: کیا یہ درست ہے کہ ربڑ کی پٹی کو دونوں سروں سے کھینچنے کے باوجود پٹی پر ایک نقطہ ایسا پایا جاتا ہے جو اپنی جگہ برقرار رکھتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۲.۲۹۱: مسئلہ مقررہ نقطہ

فرض کریں کہ وقفہ $0,1$ میں تفاعل f استمراری ہے اور $[0,1]$ میں ہر x کے لیے $0 \leq f(x) \leq 1$ ہے۔ دکھائیں کہ $[0,1]$ میں ایسا نقطہ c پایا جاتا ہے جس پر $f(c) = c$ ہو گا۔ c کو f کا **مقررہ نقطہ**[۲۵] کہتے ہیں۔

سوال ۲.۲۹۲: استمراری تفاعل کی علامت برقرار رکھنے کی خاصیت

فرض کریں وقفہ (a,b) پر تفاعل f معین ہے اور نقطہ c جہاں f استمراری ہے پر $f(c) \neq 0$ ہے۔ دکھائیں کہ c کے ارد گرد وقفہ $c - \delta, c + \delta$ میں f کی علامت وہی ہو گی جو c پر $f(c)$ کی علامت ہے۔ یہ ایک غیر معمولی نتیجہ ہے۔ اگرچہ (a,b) پر f معین ہے، کسی بھی نقطے پر تفاعل کا استمراری ہونا ضروری نہیں ماسوائے نقطہ c پر۔ اس کے ساتھ شرط $f(c) \neq 0$ ملانے سے f غیر صفر حاصل ہوتا ہے یعنی پورے وقفے پر f مثبت یا منفی ہو گا۔

سوال ۲.۲۹۳: دکھائیں کہ حصہ ۲.۲ میں مسئلہ ۲.۱ سے اس حصے کا مسئلہ ۲.۶ کس طرح اخذ کیا جا سکتا ہے۔

سوال ۲.۲۹۴: دکھائیں کہ حصہ ۲.۲ میں مسئلہ ۲.۲ اور مسئلہ ۲.۳ سے موجودہ حصے کا مسئلہ ۲.۷ کس طرح اخذ کیا جا سکتا ہے؟

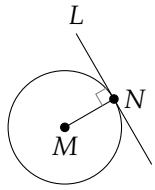
سوال کا حل بذریعہ ترسیم

کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کھینچ کر درج ذیل سوالات حل کریں۔

سوال ۲.۲۹۵: $x^3 - 3x - 1 = 0$

---

[۲۵] fixedpoint



شکل ۲.۷۰: نقطہ N پر مماس اور رداس آپس میں عمودی ہیں۔

سوال ۲.۲۹۶: $2x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$

سوال ۲.۲۹۷: $x(x-1)^2 = 1$

سوال ۲.۲۹۸: $x^x = 2$

سوال ۲.۲۹۹: $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 4$

سوال ۲.۳۰۰: $x^3 - 15x + 1 = 0$ تین جذر تلاش کریں۔

سوال ۲.۳۰۱: $\cos x = x$ ایک جذر تلاش کریں اور ریڈیئن استعمال کرنا مت بھولیں۔

سوال ۲.۳۰۲: $2\sin x = x$ ایک جذر تلاش کریں اور ریڈیئن استعمال کرنا مت بھولیں۔

۲.۶ مماسی خط

حصہ ۲.۱ میں سیکنٹ اور مماس پر بحث کی گئی۔ اس بحث کو اس حصے میں جاری رکھتے ہیں۔ ہم سیکنٹ کے ڈھلوان کی حد تلاش کرتے ہوئے منحنی کا مماس حاصل کریں گے۔

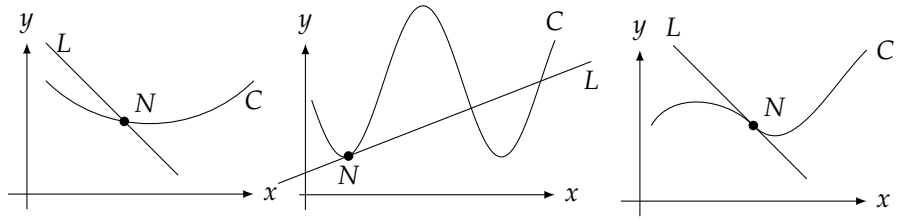
منحنی کے مماس سے کیا مراد ہے؟

دائرے کے مماس کا مطلب سیدھا سادہ ہے۔ نقطہ N پر دائرہ C کے مماس سے مراد خط L ہے جو نقطہ N سے گزرتا ہے اور جو N پر رداس کا عمود ہے (شکل ۲.۷۰)۔ نقطہ N پر کسی دوسری منحنی C کے مماس سے کیا مراد ہے؟ دائرے کی جیومیٹری دیکھ کر ہم کہہ سکتے ہیں کہ مماس کا مطلب درج ذیل میں سے ایک ہو سکتا ہے۔

۱. N سے C کے مرکز تک لکیر کو قائمہ خط L ہے،

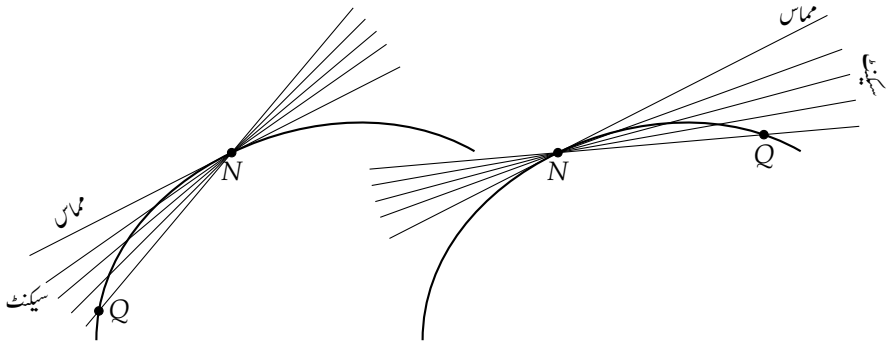
۲. خط L منحنی C کو صرف ایک نقطہ، یعنی N پر مس کرتا ہے،

۳. خط L نقطہ N سے گزرتا ہے اور منحنی C کی ایک جانب رہتا ہے۔



(ا) N پر L منحنی C کا مماس ہے لیکن یہ منحنی کے دونوں اطراف پر پایا جاتا ہے۔ (ب) نقطہ N پر L منحنی C کا مماس ہے لیکن یہ منحنی کو کئی نقطوں پر قطع کرتا ہے۔ (ج) اگرچہ L منحنی C کو ایک نقطہ N پر مس کرتا ہے، یہ منحنی کا مماس نہیں۔

شکل ۲.۷۱: عمومی منحنی کے مماس۔



شکل ۲.۷۲: نقطہ N کی دائیں یا بائیں جانب منحنی C پر نقطہ Q کو N کے قریب تر کرنے سے N پر C کا مماس حاصل ہوگا۔

اگرچہ یہ تینوں جملے دائرے کی صورت میں درست ہیں البتہ یہ ہر منحنی کے لیے بلا تضاد درست نہیں۔ عموماً منحنیات کا مرکز نہیں پایا جاتا، اور نقطہ N پر جس خط کو ہم C کا مماس کہنا چاہتے ہیں وہ C کو کسی دوسرے نقطے پر قطع کر سکتا ہے یا N پر منحنی کی دوسری جانب جا سکتا ہے۔ اس کے علاوہ ضروری نہیں کہ منحنی کو صرف ایک نقطہ پر مس کرتا ہوا سیدھا خط منحنی کا مماس ہو (شکل ۲.۷۱)۔

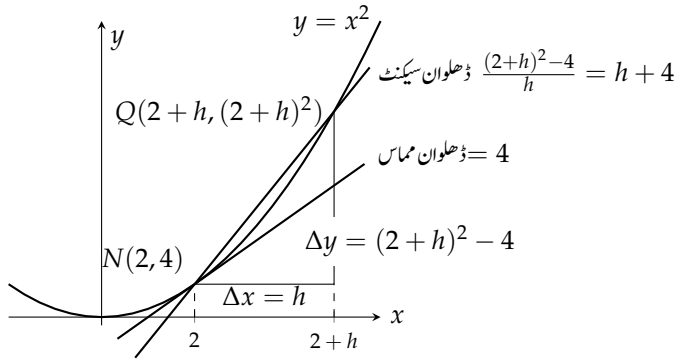
عمومی منحنی کا مماس متعارف کرنے کی خاطر ہمیں متحرک حکمت عملی سے کام لینا ہوگا۔ ہم نقطہ N اور اس کے قریب نقطہ Q سے گزرتے سیکنٹ پر نظر رکھتے ہوئے Q کو منحنی پر رکھ کر N کے نزدیک لاتے ہیں (شکل ۲.۷۲)۔ اس حکمت عملی میں ہم درج ذیل اقدام کرتے ہیں۔

۱. ہم سیکنٹ NQ کے ڈھلوان کا حساب لگاتے ہیں۔

۲. منحنی پر رہتے ہوئے Q کو N کے نزدیک تر کرتے ہوئے سیکنٹ کے ڈھلوان کی حد پر غور کرتے ہیں۔

۳. اگر یہ حد موجود ہو ہم اس کو N پر منحنی کا ڈھلوان تسلیم کرتے ہوئے اس خط کو N پر C کا مماس تسلیم کرتے ہیں جس کا ڈھلوان اس حد کے برابر ہو اور جو N سے گزرتا ہو۔

مثال ۲.۳۹: نقطہ $N(2,4)$ پر قطع مکافی $y = x^2$ کا ڈھلوان تلاش کریں۔ اس نقطے پر قطع مکافی کے مماس کی مساوات حاصل کریں (شکل



شکل ۲.۷۳: قطع مکافی کا مماس (مثال ۲.۳۹)

۲.۷۳)۔

حل

ہم $N(2,4)$ اور $Q(2+h,(2+h)^2)$ سے سیکنٹ گزار کر اس کے ڈھلوان کی مساوات لکھتے ہیں۔

$$\text{سیکنٹ کا ڈھلوان} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2-2^2}{(2+h)-(2)} = \frac{h^2+4h+4-4}{h} = \frac{h^2+4h}{h} = h+4$$

اگر $h > 0$ ہو تب N کی دائیں جانب اور اس سے اوپر نقطہ Q پایا جائے گا۔ اگر $h < 0$ ہو تب N کی بائیں جانب اور اس سے نیچے نقطہ Q پایا جائے گا۔ دونوں صورتوں میں قطع مکافی پر رہتے ہوئے جیسے جیسے نقطہ Q نقطہ N کے قریب تر پہنچتا ہے ویسے ویسے h کی قیمت صفر کے قریب تر پہنچتی ہے، جس سے سیکنٹ کے ڈھلوان کی درج ذیل حد حاصل ہوتی ہے۔

$$\lim_{h\to 0}(h+4) = 4$$

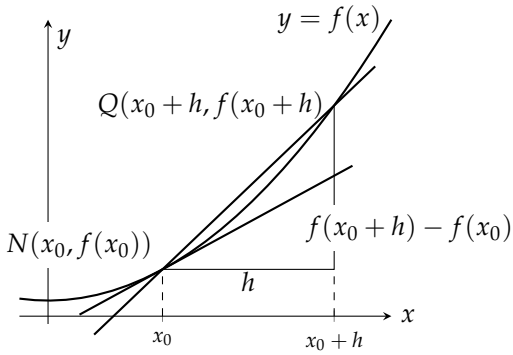
ہم N پر قطع مکافی کا ڈھلوان 4 تسلیم کرتے ہیں۔ نقطہ N پر قطع مکافی کا مماس وہ خط ہے جس کا ڈھلوان 4 ہے اور جو نقطہ $(2,4)$ سے گزرتا ہے۔ اس مماس کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} y &= 4 + 4(x-2) && \text{نقطہ و ڈھلوان مساوات} \\ &= 4x - 4 \end{aligned}$$

□

تفاعل کی ترسیم کا مماس

نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ پر تفاعل $y = f(x)$ کا مماس اسی متحرک حکمت عملی سے حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم N اور $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ سے گزرتا ہوا سیکنٹ بناتے ہیں۔ اس کے بعد $h \to 0$ کرتے ہوئے سیکنٹ کے ڈھلوان کی حد تلاش کرتے ہیں (شکل



شکل ۲.۷۴: مماس کا ڈھلوان $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ہو گا۔

۲.۷۴)۔ اگر یہ حد موجود ہو، اس کو N پر منحنی کے مماس کا ڈھلوان مانتے ہیں اور اتنے ڈھلوان کا سیدھا خط جو N سے گزرتا ہو کو N پر منحنی کا مماس قبول کرتے ہیں۔

تعریف: نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ پر تفاعل $y = f(x)$ کا **ڈھلوان** درج ذیل عدد کو کہتے ہیں۔

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad \text{(بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔)}$$

N پر اتنے ڈھلوان کے خط کو اس نقطے پر منحنی کا **مماس** کہتے ہیں۔

□

نئی تعریف پیش کرنے کے بعد اس کو جانی پہچانی منحنیات پر لاگو کر کے متوقع جوابات حاصل کر کے ہمارا یقین پختہ ہوتا ہے۔ درج ذیل مثال دکھاتی ہے کہ ڈھلوان کی موجودہ تعریف ہمیں غیر انتصابی لکیروں کی صورت میں متوقع جوابات دیتی ہے۔

مثال ۲.۴۰: ڈھلوان کی تعریف کا استعمال
دکھائیں کہ نقطہ $(x_0, mx_0 + b)$ پر خط $y = mx + b$ کا مماس یہی خط ہے۔

حل
ہم $f(x) = mx + b$ لے کر قدم بقدم چلتے ہیں۔
پہلا قدم: $f(x_0)$ اور $f(x_0 = h)$ ڈھونڈتے ہیں۔

$$\begin{aligned} f(x_0) &= mx_0 + b \\ f(x_0 + h) &= m(x_0 + h) + b = mx_0 + mh + b \end{aligned}$$

۲۷۵۳ **دوسرا قدم:** ڈھلوان تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(mx_0+mh+b)-(mx_0+b)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{mh}{h} = m\end{aligned}$$

۲۷۵۴ **تیسرا قدم:** نقطہ وڈھلوان مساوات استعمال کرتے ہوئے مماس کی مساوات لکھتے ہیں۔نقطہ x_0, mx_0+b پر مماس کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}y &= (mx_0+b)+m(x-x_0)\\ &= mx_0+b+mx-mx_0\\ &= mx+b\end{aligned}$$

۲۷۵۵ □

۲۷۵۶ مثال ۲.۴۱: (ا) $x=a$ پر منحنی $y=\frac{1}{x}$ کا ڈھلوان تلاش کریں۔

۲۷۵۷ (ب) کس نقطے پر ڈھلوان $-\frac{1}{4}$ کے برابر ہے؟

۲۷۵۸ (ج) a تبدیل کرنے سے نقطہ $a, \frac{1}{a}$ پر مماس کو کیا ہو گا؟

۲۷۵۹ **حل**

۲۷۶۰ (ا) یہاں $f(x)=\frac{1}{x}$ ہے اور $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ پر ڈھلوان درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{a-(a-h)}{a(a+h)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-h}{ha(a+h)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{a(a+h)} = -\frac{1}{a^2}\end{aligned}$$

۲۷۶۱ دھیان رہے کہ ہمیں اس وقت تک $\lim\limits_{h\to 0}$ بار بار لکھنا پڑا جب تک ہم $h=0$ پُر کرنے کے قابل نہیں ہوئے۔

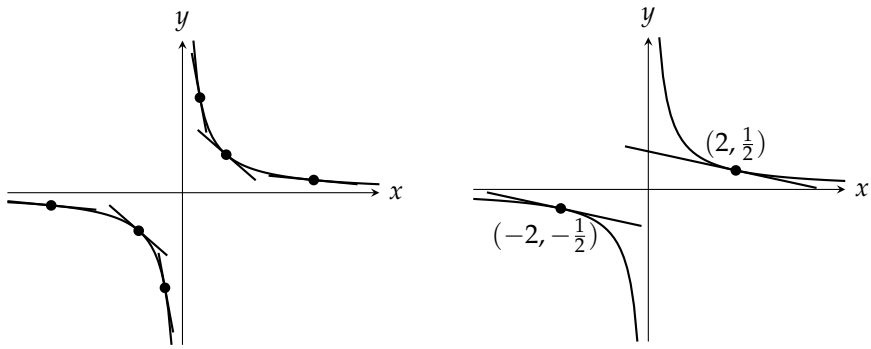
۲۷۶۲ (ب) نقطہ $x=a$ پر $y=\frac{1}{x}$ کا ڈھلوان $-\frac{1}{a^2}$ ہے جس کو $-\frac{1}{4}$ کے برابر پُر کرتے ہیں۔

$$-\frac{1}{a^2} = -\frac{1}{4}$$

۲۷۶۳ اس کے حل $a=2$ اور $a=-2$ ہیں لہٰذا منحنی $y=\frac{1}{x}$ کا دو نقطوں یعنی $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ اور $\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$ پر ڈھلوان $-\frac{1}{4}$ ہے (شکل

۲۷۶۴ ۲.۷۵-ا)۔

۲۷۶۵ (ج) ڈھلوان $-\frac{1}{a^2}$ ہر صورت منفی رہے گا۔یوں $a\to 0^+$ کی صورت میں ڈھلوان $-\infty$ کے قریب تر پہنچنے کی کوشش کرتا ہے اور مماس



(ا) دو نقطوں پر مماس کا ڈھلوان $-\frac{1}{4}$ ہے۔ (ب) مبدا کے قریب ڈھلوان زیادہ ہے۔

شکل ۲.۷۵: اشکال برائے مثال ۲.۴۱

انتصابی صورت اختیار کرنے کی کوشش کرتا ہے۔ یہی کچھ $a \to 0^-$ کرتے ہوئے بھی نظر آتا ہے۔ جیسے جیسے مبدا سے a دور ہٹتا ہے ویسے ویسے مماس افقی صورت اختیار کرتا ہے (شکل ۲.۷۵-ب)۔ □

شرح تبدیلی

درج ذیل الجبرائی فقرے کو x_0 پر f کا **تفریقی حاصل تقسیم**[۲۶] کہتے ہیں۔ اگر h کو صفر کے نزدیک تر کرنے سے تفریقی حاصل تقسیم کی حد پائی جاتی ہو، اس حد کو x_0 پر f کا **تفرق**[۲۷] کہتے ہیں۔ اگر ہم تفریقی حاصل تقسیم کو سیکنٹ کا ڈھلوان تصور کریں تب تفرق نقطہ x_0 پر منحنی اور مماس کا ڈھلوان دیتا ہے۔ اگر ہم تفریقی حاصل تقسیم کو اوسط تبدیلی شرح تصور کریں (جیسا ہم نے حصہ ۲.۱ میں کیا) تب تفرق نقطہ $x = x_0$ پر تفاعل کی شرح تبدیلی دیتا ہے۔ احصاء میں دو اہم ترین ریاضیاتی تصور میں سے ایک تفرق ہے جس پر باب ۳ میں تفصیلاً غور کیا جائے گا۔

مثال ۲.۴۲: لمحاتی رفتار (حصہ ۲.۱ کی مثال ۲.۱ اور مثال ۲.۲)

حصہ ۲.۱ کی مثال ۲.۱ اور مثال ۲.۲ میں سطح زمین کے قریب ساکن حالت سے گرتے ہوئے پتھر پر غور کیا گیا۔ ہم جانتے تھے کہ ابتدائی t سیکنڈوں میں پتھر $y = 4.9t^2$ میٹر فاصلہ طے کرتا ہے اور بتدریج کم دورانیوں کے دوران اوسط رفتار سے ہم نے $t = 1$ پر اس کی لمحاتی رفتار معلوم کی۔ ٹھیک $t = 1$ پر لمحاتی رفتار کیا ہو گی؟

حل

ہم $f(t) = 4.9t^2$ لیتے ہیں۔ یوں $t = 1$ اور $t = 1 + h$ کے دوران اوسط رفتار

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{4.9(t+h)^2 - 4.9t^2}{h} = \frac{4.9(2th + h^2)}{h} = 4.9(2t + h)$$

---

[۲۶] differencequotient
[۲۷] derivative

ہو گی۔ ٹھیک لمحہ $t = 1$ پر پتھر کی رفتار درج ذیل ہو گی جو ہمارے پہلے جواب کی تصدیق کرتا ہے۔

$$\lim_{h\to 0} 4.9(2+h) = 4.9(2+0) = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

□

سوالات

سوال ۲.۳۰۳ تا سوال ۲.۳۰۶ میں نقطہ N_1 اور N_2 پر منحنی کے ڈھلوان کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ نقطے پر فیتہ یا کوئی دوسرا سیدھا کنارہ رکھ کر سیکنٹ کی حد سے ڈھلوان حاصل کریں۔ (ترسیم سے عموماً بالکل ٹھیک جواب حاصل نہیں ہوتا لہٰذا آپ کے جواب میں اور دیے گئے جواب میں فرق ہو سکتا ہے۔)

سوال ۲.۳۰۳: شکل ۲.۷۶

سوال ۲.۳۰۴: شکل ۲.۷۷

سوال ۲.۳۰۵: شکل ۲.۷۸

سوال ۲.۳۰۶: شکل ۲.۷۹

سوال ۲.۳۰۷ تا سوال ۲.۳۱۲ میں دیے گئے نقطے پر تفاعل کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔ تفاعل اور مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال ۲.۳۰۷: $y = 4 - x^2, \quad (-1, 3)$

سوال ۲.۳۰۸: $y = (x-1)^2 + 1, \quad (1, 1)$

سوال ۲.۳۰۹: $y = 2\sqrt{x}, \quad (1, 2)$

سوال ۲.۳۱۰: $y = \frac{1}{x^2}, \quad (-1, 1)$

سوال ۲.۳۱۱: $y = x^3, \quad (-2, -8)$

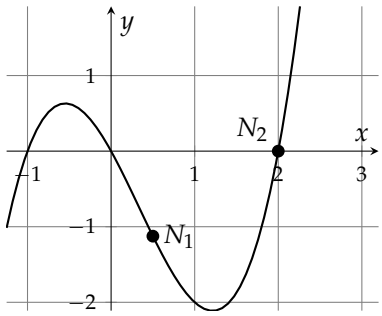
سوال ۲.۳۱۲: $y = \frac{1}{x^3}, \quad (-2, -\frac{1}{8})$

سوال ۲.۳۱۳ تا سوال ۲.۳۲۰ میں دیے نقطے پر تفاعل کا ڈھلوان تلاش کریں۔ اس نقطے پر تفاعل کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔

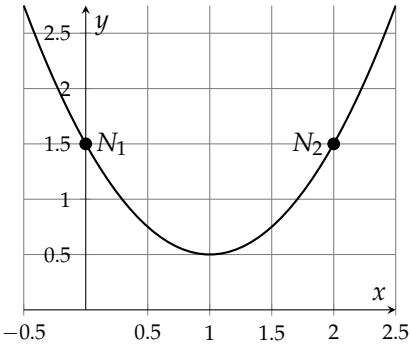
سوال ۲.۳۱۳: $f(x) = x^2 + 1, \quad (2, 5)$

سوال ۲.۳۱۴: $f(x) = x - 2x^2, \quad (1, -1)$

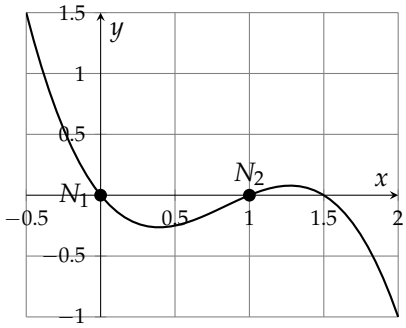
سوال ۲.۳۱۵: $g(x) = \frac{x}{x-2}, \quad (3, 3)$



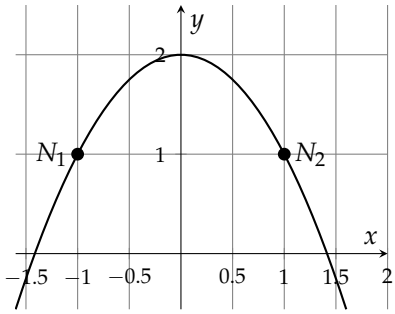
شکل ۲.۷۶: منحنی برائے سوال ۲.۳۰۳



شکل ۲.۷۷: منحنی برائے سوال ۲.۳۰۴



شکل ۲.۷۸: منحنی برائے سوال ۲.۳۰۵



شکل ۲.۷۹: منحنی برائے سوال ۲.۳۰۶

سوال ۲.۳۱۶: $g(x) = \frac{8}{x^2}, \quad (2,2)$

سوال ۲.۳۱۷: $h(t) = t^3, \quad (2,8)$

سوال ۲.۳۱۸: $h(t) = t^3 + 3t, \quad (1,4)$

سوال ۲.۳۱۹: $f(x) = \sqrt{x}, \quad (4,2)$

سوال ۲.۳۲۰: $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad (8,3)$

سوال ۲.۳۲۱ تا سوال ۲.۳۲۴ میں دیے گئے نقطے پر ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال ۲.۳۲۱: $y = 5x^2, \quad x = -1$

سوال ۲.۳۲۲: $y = 1 - x^2, \quad x = 2$

سوال ۲.۳۲۳: $y = \frac{1}{x-1}, \quad x = 3$

سوال ۲.۳۲۴: $y = \frac{x-1}{x+1}, \quad x = 0$

مخصوص ڈھلوان کے مماس

سوال ۲.۳۲۵: کس نقطے پر تفاعل $f(x) = x^2 + 4x - 1$ کا مماس افقی ہے؟

سوال ۲.۳۲۶: کس نقطے پر تفاعل $g(x) = x^3 - 3x$ کا مماس افقی ہے؟

سوال ۲.۳۲۷: ان تمام خطوط کی مساوات حاصل کریں جن کا ڈھلوان -1 ہے اور جو تفاعل $y = \frac{1}{x-1}$ کے مماس ہیں۔

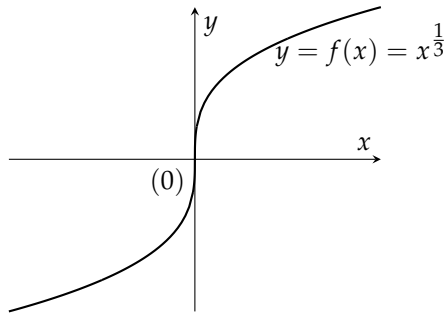
سوال ۲.۳۲۸: اس سیدھے خط کی مساوات تلاش کریں جو تفاعل $y = \sqrt{x}$ کا مماس اور جس کا ڈھلوان $\frac{1}{4}$ ہے۔

شرح تبدیلی

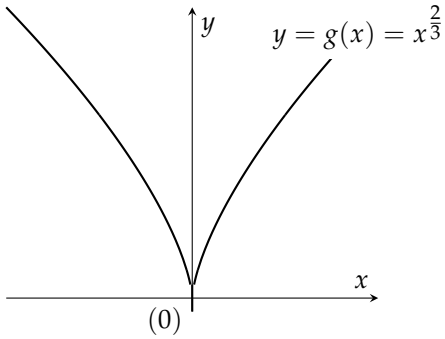
سوال ۲.۳۲۹: ایک جسم کو ساکن حالت سے 100 m بلند عمارت سے گرایا جاتا ہے۔ t سیکنڈ بعد زمین سے اس کا فاصلہ $100 - 4.9t^2$ میٹر ہو گا۔ گرنے کے آغاز سے 2 سیکنڈ بعد اس کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۲.۳۳۰: اڑان کے t سیکنڈ بعد ایک مزائل $3t^2$ میٹر بلندی پر ہے۔ 10 سیکنڈ بعد اس کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۲.۳۳۱: ایک دائرے کے رقبہ $A = \pi r^2$ کی رداس r کے لحاظ سے شرح تبدیل $r = 3$ پر کیا ہو گی؟



(ا) مبدا پر انتصابی مماس پایا جاتا ہے۔



(ب) مبدا پر انتصابی مماس نہیں پایا جاتا ہے۔

شکل ۲.۸۰: انتصابی مماس

۲۸۳۴ سوال ۲.۳۳۲: ایک گیند کے حجم $H = \frac{4}{3}\pi r^3$ کی رداس r کے لحاظ سے شرح تبدیلی $r = 2$ پر کیا ہو گی؟

۲۸۳۵

۲۸۳۶ **مماس کے لیے پرکھ**

۲۸۳۷ سوال ۲.۳۳۳: کیا مبدا پر درج ذیل تفاعل کا مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

۲۸۳۸ سوال ۲.۳۳۴: کیا مبدا پر درج ذیل تفاعل کا مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

۲۸۳۹

۲۸۴۰ **انتصابی مماس**

۲۸۴۱ اگر $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \infty$ یا $-\infty$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ نقطہ $x = x_0$ پر تفاعل $y = f(x)$ کا مماس انتصابی ہے۔

۲۸۴۲ نقطہ $x = 0$ پر تفاعل $y = f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ کا مماس درج ذیل ہو گا (شکل ۲.۸۰-ا)۔

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\frac{2}{3}}} = \infty$$

۲۸۳ آئیں اب مبدا پر تفاعل $y = g(x) = x^{\frac{2}{3}}$ (شکل ۲.۸۰-ب) کا مماس حاصل کرتے ہیں۔

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^{\frac{2}{3}}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^{\frac{1}{3}}}$$

۲۸۴ اب چونکہ مبدا کے قریب تر دائیں سے پہنچنے پر حد ∞ ، جبکہ مبدا کے قریب تر بائیں سے پہنچنے پر حد $-\infty$ حاصل ہوتی ہے، لہٰذا مبدا پر درج بالا حد نہیں پائی
۲۸۵ جاتی۔

۲۸۶ سوال ۲.۳۳۵: کیا درج ذیل تفاعل کا مبدا پر انتصابی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

۲۸۷ سوال ۲.۳۳۶: کیا درج ذیل تفاعل کا نقطہ $(0,1)$ پر انتصابی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

۲۸۸ کمپیوٹر کا استعمال۔ انتصابی مماس

۲۸۹ سوال ۲.۳۳۷ تا سوال ۲.۳۴۶ میں دیا گیا تفاعل کمپیوٹر کی مدد سے ترسیم کریں۔ ترسیم کا مماس کہاں انتصابی نظر آتا ہے؟ حساب سے انتصابی مماس کی تصدیق
۲۹۰ کریں۔

۲۹۱ سوال ۲.۳۳۷: $y = x^{\frac{2}{5}}$

۲۹۲ سوال ۲.۳۳۸: $y = x^{\frac{4}{5}}$

۲۹۳ سوال ۲.۳۳۹: $y = x^{\frac{1}{5}}$

۲۹۴ سوال ۲.۳۴۰: $y = x^{\frac{3}{5}}$

۲۹۵ سوال ۲.۳۴۱: $y = 4x^{\frac{2}{5}} - 2x$

۲۹۶ سوال ۲.۳۴۲: $y = x^{\frac{5}{3}} - 5x^{\frac{2}{3}}$

۲۹۷ سوال ۲.۳۴۳: $y = x^{\frac{2}{3}} - (x-1)^{\frac{1}{3}}$

۲۹۸ سوال ۲.۳۴۴: $y = x^{\frac{1}{3}} + (x-1)^{\frac{1}{3}}$

سوال ۲.۳۴۵: $y = \begin{cases} -\sqrt{|x|}, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

سوال ۲.۳۴۶: $y = \sqrt{|4 - x|}$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۲.۳۴۷ تا سوال ۲.۳۵۰ میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ $x_0 - \frac{1}{2} \le x \le x_0 + 3$ پر تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کریں۔

ب. نقطہ x_0 پر تفریقی حاصل تقسیم q کو قدم h کی صورت میں لکھیں۔

ج. $h \to 0$ کرتے ہوئے q کی حد تلاش کریں۔

د. $h = 3, 2, 1$ کے لیے سیکنٹ خطوط $y = f(x_0) + q(x - x_0)$ متعارف کرتے ہوئے (ا) میں دیے گئے وقفے پر ان سیکنٹ خطوط کو تفاعل f کے ساتھ ترسیم کریں۔

سوال ۲.۳۴۷: $f(x) = x^3 + 2x, \quad x_0 = 0$

سوال ۲.۳۴۸: $f(x) = x + \frac{5}{x}, \quad x_0 = 1$

سوال ۲.۳۴۹: $f(x) = x + \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

سوال ۲.۳۵۰: $f(x) = \cos x + 4 \sin 2x, \quad x_0 = \pi$

باب ۳

تفرق

گزشتہ باب میں ہم نے دیکھا کہ کسی نقطہ پر سیکنٹ کے ڈھلوان کی حد کو اس نقطے پر منحنی کا ڈھلوان کہتے ہیں۔ یہ حد، جو تفرق کہلاتا ہے، تفاعل تبدیل ہونے کی شرح کی ناپ ہے جو احصاء میں اہم ترین تصورات میں سے ایک ہے۔ سائنس، معاشیات اور دیگر شعبوں میں تفرق کثرت سے استعمال ہوتا ہے جہاں سمتی رفتار اور اسراع کے حساب، مشین کی کارکردگی سمجھنے میں، وغیرہ کے لیے اسے بروئے کار لایا جاتا ہے۔ تفرق کو حد سے تلاش کرنا مشکل کام ہے۔ اس باب میں **تفرق کرنے**[1] کے طریقوں پر غور کیا جائے گا۔

۳.۱ تفاعل کا تفرق

گزشتہ باب کے آخر میں ہم نے نقطہ $x = x_0$ پر منحنی $y = f(x)$ کے ڈھلوان m کی درج ذیل تعریف پیش کی۔

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

اس حد کو، بشرطیکہ یہ موجود ہو، x_0 پر f کا تفرق کہتے ہیں۔ اس حصے میں f کے دائرہ کار میں ہر نقطے پر f کے ڈھلوان پر بطور تفاعل غور کیا جائے گا۔

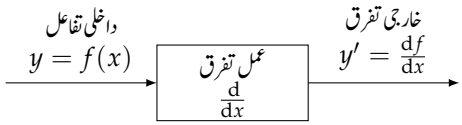
تعریف: متغیر x کے لحاظ سے تفاعل f کا **تفرق**[2] درج ذیل تفاعل f' ہے، بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

□

---

[1] differentiation
[2] derivative



شکل ۳.۱: تفرق کے عمل کی ڈبہ صورت

۲۸۸۵ f' کا دائرہ کار، تفاعل f کے دائرہ کار میں ان نقطوں کا سلسلہ جن پر حد موجود ہو، تفاعل f کے دائرہ کار سے کم ہو سکتا ہے۔ اگر $f'(x)$ موجود ہو، ہم
۲۸۸۶ کہتے ہیں کہ x پر f کا **تفرق** پایا جاتا ہے یا کہ x پر f **قابل تفرق**[۳] ہے۔

۲۸۸۷ **علامتیت**

۲۸۸۸ تفاعل $y = f(x)$ کے تفرق کو ظاہر کرنے کے کئی طریقے رائج ہیں۔ علامت $f'(x)$ کے علاوہ درج ذیل علامتیں کافی مقبول ہیں۔

۲۸۸۹ y' یہ مختصر علامت ہے جو غیر تابع متغیر کی نشاندہی نہیں کرتی۔

۲۸۹۰ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ یہ علامت دونوں متغیرات کی نشاندہی کرتی ہے اور تفرق کو d سے ظاہر کرتی ہے۔

۲۸۹۱ $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ یہ علامت تفاعل کا نام واضح کرتی ہے۔

۲۸۹۲ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ اس علامت سے ظاہر ہوتا ہے کہ تفرق کا عمل f پر لاگو کیا جاتا ہے (شکل ۳.۱)۔

۲۸۹۳ $D_x f$ یہ تفرقی عامل ہے۔

۲۸۹۴ $\dot{y}$ نیوٹن اس علامت کو استعمال کرتے تھے جو اب زمانی تفرق کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

۲۸۹۵ ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو "x کے لحاظ سے y کا تفرق" پڑھتے ہیں۔ اسی طرح $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ اور $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ کو "x کے لحاظ سے f کا تفرق" پڑھا جاتا ہے۔

۲۸۹۶ تفرق کی تعریف سے تفرق کا حصول

۲۸۹۷ تفرق کی تعریف سے تفرق درج ذیل اقدام سے حاصل ہو گا۔

۲۸۹۸ ۱. $f(x)$ اور $f(x+h)$ لکھیں۔

۲۸۹۹ ۲. درج ذیل تفریقی حاصل تقسیم کو پھیلا کر اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

---

[۳] differentiable

۳. سادہ ترین حاصل تقسیم سے $f'(x)$ حاصل کرنے کی خاطر درج ذیل حد تلاش کریں۔

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

حصہ ۲.۶ کی مثال ۲.۴۰ اور مثال ۲.۴۱ میں تفاعل $y = mx + b$ اور $y = \frac{1}{x}$ کے تفرق کو تعریف سے حاصل کرنا دکھایا گیا۔ مثال ۲.۴۰ میں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mx+b) = m$$

حاصل کیا گیا، یعنی

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{3}{7}x - \frac{5}{9}\right) = \frac{3}{7}$$

ہو گا اور مثال ۲.۴۱ میں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \tag{ا}$$

حاصل کیا گیا۔

مزید دو مثال درج ذیل ہیں۔

مثال ۱.۳:

ا. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ کو تفرق کریں۔

ب. تفاعل $y = f(x)$ کا ڈھلوان کس نقطے پر -1 کے برابر ہے؟

حل (ا) ہم مذکورہ بالا تین اقدام استعمال کرتے ہوئے تعریف سے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

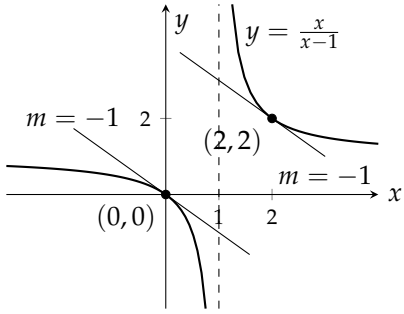
پہلا قدم: یہاں $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ہے جس سے $f(x+h) = \frac{x+h}{(x+h)-1}$ لکھا جا سکتا ہے۔

دوسرا قدم:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{\frac{x+h}{x+h-1} - \frac{x}{x-1}}{h} \\
&= \frac{1}{h} \cdot \frac{(x+h)(x-1) - x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)} \\
&= \frac{1}{h} \cdot \frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}
\end{aligned}$$

تیسرا قدم:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h-1)(x-)} = -\frac{1}{(x-1)^2}$$



شکل ۳.۲: $x = 0$ اور $x = 2$ پر $y' = -1$ ہوگا (مثال ۳.۱)۔

۲۹۱۳ (ب) $y = f(x)$ کا ڈھلوان اس صورت -1 کے برابر ہوگا جب درج ذیل ہو۔

$$-\frac{1}{(x-1)^2} = -1$$

۲۹۱۴ یہ مساوات $(x-1)^2 = 1$ کے مترادف ہے لہٰذا $x = 2$ اور $x = 0$ درکار نتائج ہیں (شکل ۳.۲)۔ □

۲۹۱۵ مثال ۳.۲:

۲۹۱۶ ۱. $x > 0$ کے لیے $y = \sqrt{x}$ کا تفرق حاصل کریں۔

۲۹۱۷ ۲. $x = 4$ پر تفاعل $y = \sqrt{x}$ کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔

۲۹۱۸ **حل**

۲۹۱۹ (۱) **پہلا قدم:**

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f(x+h) = \sqrt{x+h}$$

۲۹۲۰ **دوسرا قدم:**

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(h)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \\ &= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$ سے ضرب دیتے ہیں

تیسرا قدم:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

شکل ۳.۳ دیکھیں۔

(ب) $x = 4$ پر تفاعل کا ڈھلوان درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=4} = \frac{1}{4}$$

نقطہ $(4,2)$ سے گزرتا ہوا خط جس کا ڈھلوان $\frac{1}{4}$ ہو $(4,2)$ پر f کا مماس ہوگا۔ مماس کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x-4) = \frac{1}{4}x + 1$$

□

نقطہ $x = a$ پر تفاعل $y = f(x)$ کے تفرق کی قیمت حاصل کرنے کو

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

کے علاوہ

$$y'\Big|_{x=a} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\Big|_{x=a}$$

سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں علامت $|_{x=a}$ کے بائیں جانب لکھے تفاعل کی قیمت $x = a$ پر حاصل کی جاتی ہے۔

اندازاً حاصل قیمتوں سے f' کی ترسیم

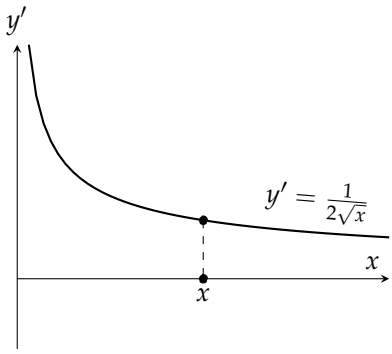
تفاعل $y = f(x)$ کی تجربہ سے حاصل قیمتوں (مثلاً دباو بالمقابل وقت یا آبادی بالمقابل وقت) کو ہم بطور نقطے ترسیم کرنے کے بعد عموماً سیدھے خطوط یا ہموار منحنی سے جوڑتے ہیں تاکہ ہمیں f کی شکل و صورت نظر آئے۔ اس منحنی کی تخمینی ڈھلوان سے ہم عموماً f' کی قابل قبول ترسیم حاصل کر پاتے ہیں۔ درج ذیل مثال میں یہ عمل دکھایا گیا ہے۔

مثال ۳.۳: **دوا**

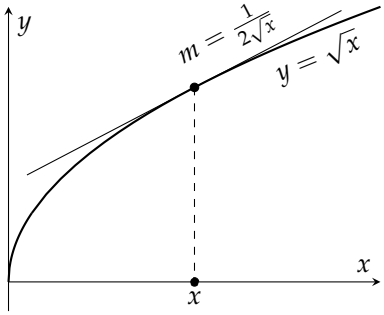
۲۳ اپریل ۱۹۸۸ کو 31 کلو گرام وزنی، ڈیڈلس[۴] نامی جہاز کو انسانی جسمانی طاقت سے یونان کے جنوب مشرق میں جزیرہ کریتی[۵] سے جزیرہ سانٹورینی[۶] تک اڑا کر 115.11 کلو میٹر کا فاصلہ 3 گھنٹوں اور 54 منٹوں میں طے کرتے ہوئے عالمی کارنامہ سرانجام دیا گیا۔ یہ جہاز امریکی یونیورسٹی[۷] کے طلبہ نے تیار کیا۔ اس تاریخی پرواز کی تیاری کے لیے ممکنہ ہوا بازوں کی جسمانی برداشت کو 6 گھنٹوں تک پرکھا جاتا تھا جس دوران ماہرین ہوا بازوں کی کثافت دموی شکر پر نظر رکھتے تھے۔ ان میں سے ایک ہوا باز کی کثافت دموی شکر (ملی گرام فی ڈیسی لٹر) بالمقابل وقت (گھنٹوں) کو شکل ۳.۴-ا میں دکھایا گیا ہے۔

---

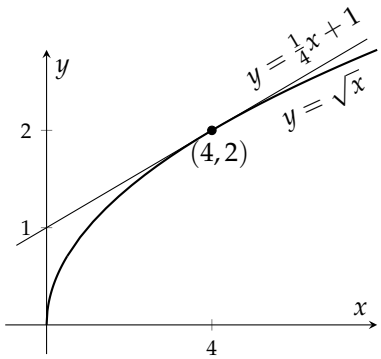
[۴] Daedalus
[۵] Crete
[۶] Santorini
[۷] MIT



(ب) $x > 0$ کے لیے $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

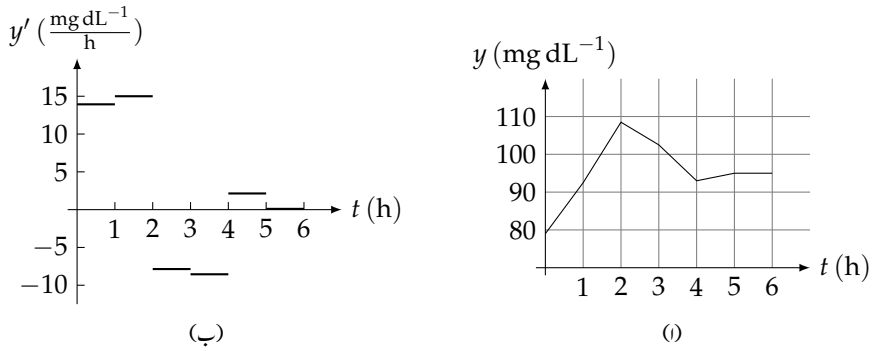


(ا) تفاعل $y = \sqrt{x}$



(ج) تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور نقطہ $(4, 2)$ پر اس کا مماس $y = \frac{1}{4}x + 1$ ۔

شکل ۳.۳: اشکال برائے مثال ۳.۲۔ نقطہ $x = 0$ پر تفاعل معین ہے لیکن اس کا تفرق غیر معین ہے۔



شکل ۳.۴: (ا) قبل پرواز پرکھ برداشت کے دوران دموی شکر (ب) پرکھ کے مختلف حصوں میں دموی شکر کا ڈھلوان نہایت تیزی سے بڑھتا اور گھٹتا ہے۔

مواد ی نقطوں کو لکیری قطعوں سے جوڑ کر ترسیم حاصل کی گئی۔ ہر لکیری قطعہ کے غیر متغیر ڈھلوان سے قطعہ پر کثافت دموی شکر کے تفرق کا اندازہ کیا جا سکتا ہے۔ تمام قطعات پر تفرق حاصل کر کے شکل ۳.۴-ب میں ترسیم کیا گیا ہے۔ مثال کے طور پر پہلے گھنٹہ میں کثافت دموی شکر $79\,\text{mg dL}^{-1}$ سے بڑھ کر $83\,\text{mg dL}^{-1}$ ہو جاتی ہے۔ یوں تبدیلی $\Delta y = 93 - 79 = 14\,\text{mg dL}^{-1}$ ہے جس کو $\Delta x = 1\,\text{h}$ سے تقسیم کر کے پہلے گھنٹہ میں کثافت کی شرح تبدیلی

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{14}{1} = \frac{14\,\text{mg dL}^{-1}}{\text{h}}$$

حاصل ہوتی ہے۔

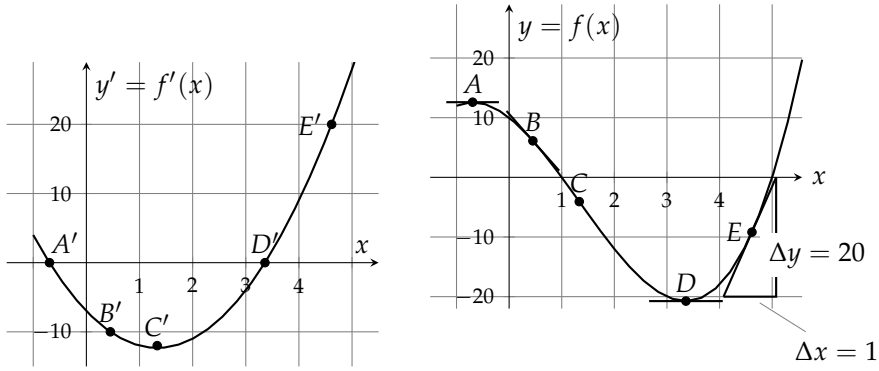
دھیان رہے کہ لمحات $t = 1, 2, \cdots, 5$ پر، جہاں ترسیم کے کونے ہیں لہٰذا ڈھلوان حاصل نہیں کیا جا سکتا، ہم کثافت کی شرح تبدیلی کا اندازہ نہیں لگا سکتے۔ ان نقطوں پر تفرق سیڑھی تفاعل غیر معین ہے۔ □

جہاں ہمارے پاس اتنی زیادہ تعداد میں نقطے ہوں کہ انہیں قطعات سے جوڑ کر ہموار منحنی حاصل ہوتی ہو وہاں ہم تفرق کو بھی ہموار خط سے ظاہر کرنا چاہیں گے۔ اگلی مثال میں یہی کیا گیا ہے۔

مثال ۳.۴: تفاعل $y = f(x)$ کو شکل ۳.۵-ا میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے تفرق $y' = f'(x)$ کو ترسیم کریں۔

حل

شکل ۳.۵-ا کی ترسیم پر مختلف نقطوں مثلاً A, B, C, D, E پر منحنی کے ڈھلوان جیومیٹریائی طریقے سے حاصل کرتے ہیں۔ شکل-ا کو صرف دیکھنے سے ہی وہ خطے نظر آتے ہیں جہاں ڈھلوان مثبت، منفی اور صفر ہے۔ A سے D تک ڈھلوان منفی جبکہ D کی دائیں جانب اور A کی بائیں جانب ڈھلوان مثبت ہے۔ اسی طرح وہ خطے بھی واضح ہیں جہاں ڈھلوان بڑھ یا گھٹ رہا ہے۔ نقطہ A اور D پر سیکنٹ کی حد کے ڈھلوان 0 ہیں جو شکل ۳.۵-ب کے مطابق نقطے A' اور D' دیتے ہیں جہاں $y' = 0$ ہے۔ نقطہ E پر سیکنٹ کا ڈھلوان حاصل کرنے کی خاطر قائمہ مثلث مکمل کیا گیا ہے جہاں سے $\Delta x = 1$ اور $\Delta y = 20$ پڑھے جا سکتے ہیں جن سے $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 20$ حاصل ہوتا ہے۔ شکل-ب میں اس کو نقطہ E' دکھایا گیا ہے۔ آپ شکل-ا



(ا) دیا گیا تفاعل $y = f(x)$ (ب) دیے گئے تفاعل کا تفرق $y' = f'(x)$

شکل ۳.۵: اشکال برائے مثال ۳.۵

میں نقطہ B پر بھی مثلث بنا کر ڈھلوان حاصل کر سکتے ہیں جو -10 ہو گا جس کو شکل-ب میں B' دکھایا گیا ہے۔ شکل-ا میں نقطہ C وہ نقطہ ہے جس پر ڈھلوان کی کم تر قیمت حاصل ہوتی ہے جس سے شکل-ب کا نشیب C' حاصل ہوتا ہے۔ □

وقفے پر قابل تفرق؛ یک طرفہ تفرق

کھلے (متناہی یا لا متناہی) وقفہ پر تفاعل $y = f(x)$ اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس وقفے کے ہر نقطے پر f قابل تفرق ہو۔ یہ بند وقفہ $[a, b]$ پر اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس وقفے کے ہر اندرونی نقطے پر f قابل تفرق ہو اور درج ذیل تفرق موجود ہوں (شکل ۳.۶)۔

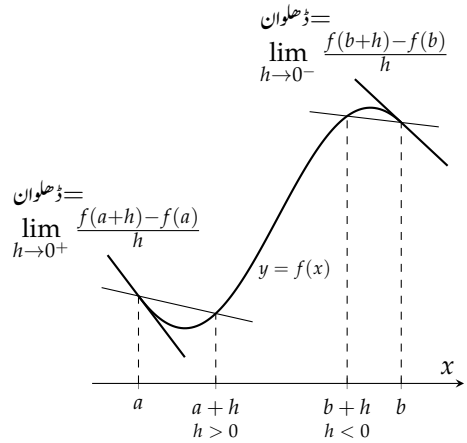
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad a \text{ پر دائیں ہاتھ تفرق}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} \qquad b \text{ پر بائیں ہاتھ تفرق}$$

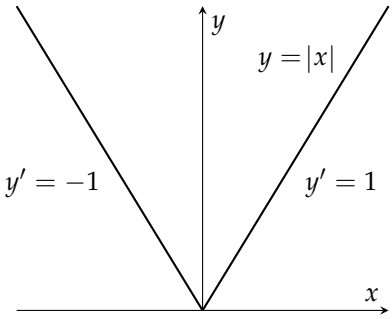
تفاعل کے دائرہ کار میں کہیں پر بھی تفاعل کے دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ تفرق معین ہو سکتے ہیں۔ یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق ان تفرق پر بھی قابل اطلاق ہو گا۔ مسئلہ ۲.۵ کی وجہ سے کسی نقطے پر تفاعل کا تفرق صرف اور صرف اس صورت موجود ہو گا جب اس نقطے پر تفاعل کے بائیں ہاتھ تفرق اور دائیں ہاتھ تفرق موجود اور ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

مثال ۳.۵: تفاعل $y = |x|$ وقفہ $(-\infty, 0)$ اور $(0, \infty)$ پر قابل تفرق ہے لیکن $x = 0$ پر اس کا تفرق موجود نہیں۔ مبدا کی دائیں جانب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 \cdot x) = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mx+b) = m$$



شکل ۳.۶: وقفہ کے آخری سر نقطوں پر تفرق یک طرفہ ہوں گے۔



شکل ۳.۷: چونکہ مبدا پر بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں لہٰذا مبدا پر تفاعل کا تفرق غیر موجود ہے (مثال ۳.۵)۔

۲۹۶۵ جبکہ مبدا کی بائیں جانب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-1\cdot x) = -1$$

۲۹۶۶ ہے (شکل ۳.۷)۔ چونکہ مبدا پر تفاعل کا دائیں ہاتھ تفرق اور بائیں ہاتھ تفرق ایک سے نہیں لہٰذا مبدا پر تفاعل کا تفرق نہیں پایا جاتا۔

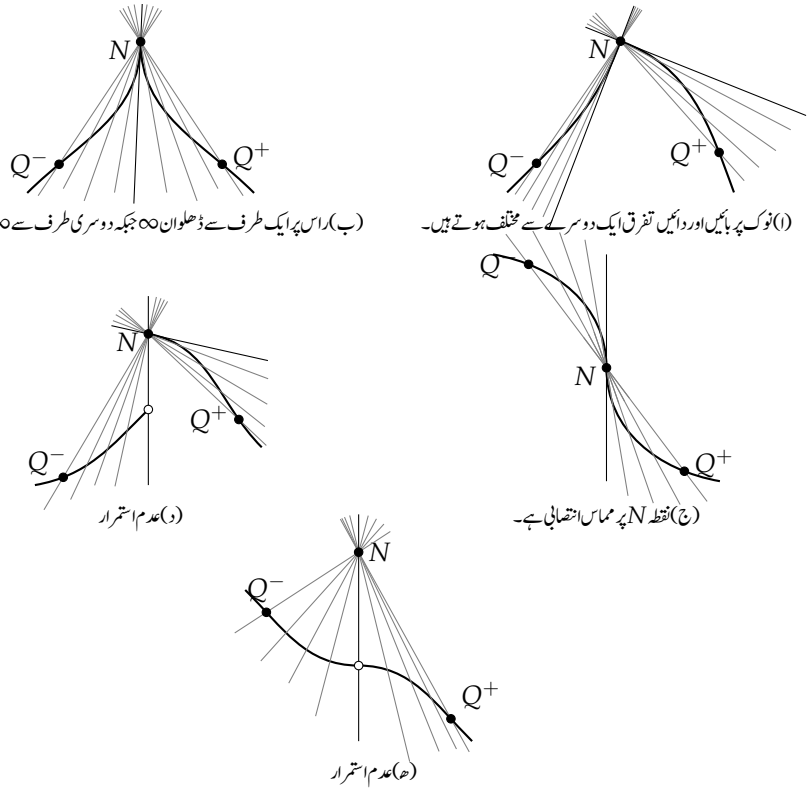
۲۹۶۷ صفر پر $|x|$ کا دائیں ہاتھ تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} &= \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} \qquad \text{اگر } h>0 \text{ تب } |h| = h \text{ ہوگا}\\ &= \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1\end{aligned}$$

۲۹۶۸ صفر پر $|x|$ کا بائیں ہاتھ تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} &= \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} \qquad \text{اگر } h<0 \text{ تب } |h| = -h \text{ ہوگا}\\ &= \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1\end{aligned}$$

۲۹۶۹ □



(ا) نوک پر بائیں اور دائیں تفرق ایک دوسرے سے مختلف ہوتے ہیں۔

(ب) راس پر ایک طرف سے ڈھلوان ∞ جبکہ دوسری طرف سے $-\infty$ ہوتا ہے۔

(ج) نقطہ N پر مماس انتصابی ہے۔

(د) عدم استمرار

(ھ) عدم استمرار

شکل ۸.۳: ان نقطوں کی پہچان جہاں تفاعل ناقابل تفرق ہو گا۔

نقطے پر تفاعل کا تفرق کب نہیں پایا جاتا؟

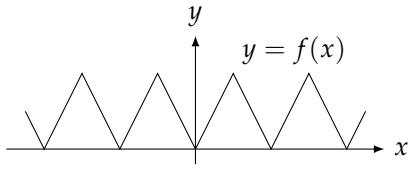
اگر نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ اور اس کے قریب نقطہ Q سے گزرتے ہوئے سیکنٹ کا ڈھلوان، Q کو N کے نزدیک تر کرنے سے، تحدیدی قیمت اختیار کرتا ہو تب تفاعل $f(x)$ نقطہ N پر قابل تفرق ہو گا۔ اگر Q کو N کے نزدیک تر کرنے سے سیکنٹ کا ڈھلوان تحدیدی قیمت اختیار نہ کرتا ہو یا یہ سیکنٹ انتصابی تحدیدی صورت اختیار کرتا ہو، تب اس تفاعل کا N پر تفرق نہیں پایا جائے گا۔ ہموار منحنی والے تفاعل کا درج ذیل صورتوں میں نقطہ N پر تفرق نہیں پایا جائے گا۔

۱. نوکدار منحنی۔ منحنی کی نوک پر بایاں تفرق اور دایاں تفرق ایک سے نہیں ہوتے (شکل ۸.۳-ا)۔

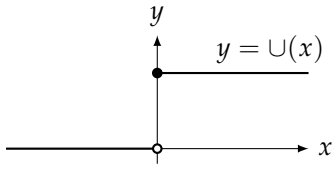
۲. راس، جہاں NQ کا تحدیدی ڈھلوان ایک طرف سے ∞ اور دوسری طرف سے $-\infty$ ہوتا ہے (شکل ۸.۳-ب)۔

۳. انتصابی مماس، جہاں دونوں اطراف سے تحدیدی NQ کا ڈھلوان ∞ یا $-\infty$ ہوتا ہے (شکل ۸.۳-ج)۔

۴. عدم استمرار (شکل ۸.۳-د اور شکل ۸.۳-ہ)۔



شکل ۹.۳: دندان ترسیم استراری لیکن لا متناہی نقطوں پر نا قابل تفرق ہے۔



شکل ۱۰.۳: اکائی سیڑھی تفاعل متوسط قیمت خاصیت نہیں رکھتا لہٰذا حقیقی خط پر یہ کسی دوسرے تفاعل کا تفرق نہیں ہو سکتا۔

۲۹۷۹ **قابل تفرق تفاعل استراری ہوں گے**

۲۹۸۰ جس نقطے پر تفاعل قابل تفرق ہو اس پر تفاعل استراری ہو گا۔

۲۹۸۱ مسئلہ ۱.۳: اگر $x = c$ پر f کا تفرق موجود ہو تب $x = c$ پر f استراری ہو گا۔

۲۹۸۲ ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ $f'(c)$ موجود ہے اور ہم نے دکھانا ہے کہ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ یا اس کا مماثل $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$ درست ہے۔ اگر $h \neq 0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔ ۲۹۸۳

$$\begin{aligned} f(c+h) &= f(c) + (f(c+h) - f(c)) \\ &= f(c) + \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot h \end{aligned}$$

۲۹۸۴ اب $h \to 0$ لیں۔ مسئلہ ۲.۱ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(c+h) &= \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\ &= f(c) \end{aligned}$$

۲۹۸۵ □

۲۹۸۶ اسی قسم کی دلیل سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر $x = c$ پر f کا یک طرفہ (بایاں یا دایاں) تفرق پایا جاتا ہو تب $x = c$ پر f اسی طرف (بائیں یا دائیں)
۲۹۸۷ سے استراری ہو گا۔

۲۹۸۸ **انتباہ:** مسئلہ ۱.۳ کا الٹ درست نہیں یعنی جس نقطے پر تفاعل استراری ہو اس پر تفاعل نا قابل تفرق ہو سکتا ہے جیسا ہم نے مثال ۵.۳ میں دیکھا۔

۲۹۸۹ **استراری تفاعل کی ترسیم کتنی غیر ہموار ہو سکتی ہے؟** ہم نے دیکھا کہ مطلق قیمت تفاعل $y = |x|$ ایک نقطہ پر نا قابل تفرق ہوتا ہے۔ یوں ہم
۲۹۹۰ استراری دندان ترسیم (شکل ۹.۳) بنا سکتے ہیں جو لا متناہی تعداد کے نقطوں پر نا قابل تفرق ہو گی۔

۲۹۹۱ **کیا استراری تفاعل ہر نقطے پر نا قابل تفرق ہو سکتا ہے؟** اس کا جواب ہے "جی ہاں" جیسے کارل وائنسٹراس[۸] نے ۱۸۷۲ء میں درج ذیل کلیہ (اور کئی

[۸] [1815-1897] وائنسٹراس کارل دان ریاضی جرمن

اور) پیش کرتے ہوئے ثابت کیا۔

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos(9^n \pi x)$$

یہ کلیہ f کو بڑھتے تعدد کے کوسائن تفاعل کے مجموعے کی صورت میں پیش کرتا ہے۔ بل کو بل دینے سے ایسا تفاعل حاصل ہوتا ہے جس کا تحدیدی سیکنٹ کسی بھی نقطے پر حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا لہٰذا اس کا مماس کہیں پر بھی نہیں پایا جاتا۔

استمراری تفاعل جن کا کسی بھی نقطے پر مماس نہ پایا جاتا ہو نظریہ ابتری[9] میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ ایسے تفاعل کو متناہی لمبائی مختص کرنی ممکن نہیں ہوتا۔ ہم منحنی کی لمبائی اور تفرق کے تعلق پر بعد میں غور کریں گے۔

تفرق کی متوسط قیمت خاصیت

ضروری نہیں ایک تفاعل دوسرے کا تفرقی تفاعل ہو۔ درج ذیل مسئلہ سے یہ حقیقت اخذ کی جا سکتی ہے۔

مسئلہ ۳.۲: اگر نقطہ a اور b اس وقفہ میں پائے جاتے ہوں جس پر f قابل تفرق ہو تب $f'(a)$ اور $f'(b)$ کے بیچ ہر قیمت کا تفرق f' پایا جائے گا۔

مسئلہ ۳.۲ (جس کا ثبوت ہم پیش نہیں کریں گے) کہتا ہے کہ کسی وقفے پر ایک تفاعل اس صورت تک کسی دوسرے تفاعل کا تفرق نہیں ہو گا جب تک اس وقفے پر یہ متوسط قیمت خاصیت نہ رکھتا ہو (شکل ۳.۱۰)۔ ایک تفاعل کب کسی دوسرے تفاعل کا تفرق ہو گا؟ یہ احصاء کے اہم ترین سوالات میں سے ایک ہے جس کا جواب نیوٹن اور لیبنٹز نے دے کر ریاضیات میں انقلاب برپا کیا۔ ان کے جواب کو ہم باب ۵ میں دیکھیں گے۔

سوالات

تفرقی تفاعل اور قیمتوں کی تلاش

سوال ۳.۱ تا سوال ۳.۶ میں تفرق کی تعریف استعمال کرتے ہوئے دیے گئے تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۳.۱: $f(x) = 4 - x^2; \quad f'(-3), f'(0), f'(1)$

سوال ۳.۲: $F(x) = (x-1)^2 + 1; \quad F'(-1), F'(0), F'(2)$

سوال ۳.۳: $g(t) = \frac{1}{t^2}; \quad g'(-1), g'(2), g'(\sqrt{3})$

سوال ۳.۴: $k(z) = \frac{1-z}{2z}; \quad k'(-1), k'(1), k'(\sqrt{2})$

سوال ۳.۵: $p(\theta) = \sqrt{3\theta}; \quad p'(1), p'(3), p'(\frac{2}{3})$

سوال ۳.۶: $r(s) = \sqrt{2s+1}; \quad r'(0), r'(1), r'(\frac{1}{2})$

سوال ۳.۷ تا سوال ۳.۱۲ میں دیا گیا تفرق حاصل کریں۔

---

[9] chaostheory

۳.۱۵ سوال ۳.۷: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$; $y = 2x^3$

۳.۱۶ سوال ۳.۸: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$; $r = \frac{s^3}{2} + 1$

۳.۱۷ سوال ۳.۹: $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$; $s = \frac{t}{2t+1}$

۳.۱۸ سوال ۳.۱۰: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$; $v = t - \frac{1}{t}$

۳.۱۹ سوال ۳.۱۱: $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$; $p = \frac{1}{\sqrt{q+1}}$

۳.۲۰ سوال ۳.۱۲: $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}$; $z = \frac{1}{\sqrt{3w-2}}$

۳.۲۱ **ڈھلوان اور مماسی خطوط**

۳.۲۲ سوال ۳.۱۳ تا سوال ۳.۱۶ میں تفاعل کا تفرق حاصل کرتے ہوئے دیے گئے غیر تابع متغیر پر مماس کا ڈھلوان تلاش کریں۔

۳.۲۳ سوال ۳.۱۳: $f(x) = x + \frac{9}{x}$; $x = -3$

۳.۲۴ سوال ۳.۱۴: $k(x) = \frac{1}{2+x}$; $x = 2$

۳.۲۵ سوال ۳.۱۵: $s = t^3 - t^2$; $t = -1$

۳.۲۶ سوال ۳.۱۶: $y = (x+1)^3$; $x = -2$

۳.۲۷ سوال ۳.۱۷ تا سوال ۳.۱۸ میں تفاعل کا تفرق حاصل کریں۔ ترسیم پر دیے گئے نقطے پہ تفاعل کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

۳.۲۸ سوال ۳.۱۷: $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x-2}}$; $(x, y) = (6, 4)$

۳.۲۹ سوال ۳.۱۸: $g(z) = 1 + \sqrt{4-z}$; $(z, w) = (3, 2)$

۳.۳۰ سوال ۳.۱۹ تا سوال ۳.۲۲ میں تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

۳.۳۱ سوال ۳.۱۹: $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=-1}$; $s = 1 - 3t^2$

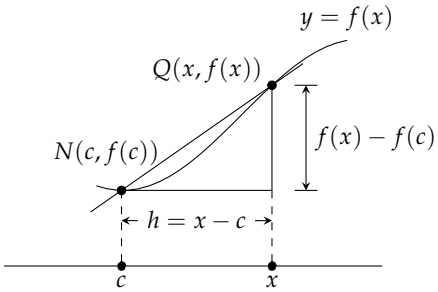
۳.۳۲ سوال ۳.۲۰: $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\sqrt{3}}$; $y = 1 - \frac{1}{x}$

۳.۳۳ سوال ۳.۲۱: $\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}$; $r = \frac{2}{\sqrt{4-\theta}}$

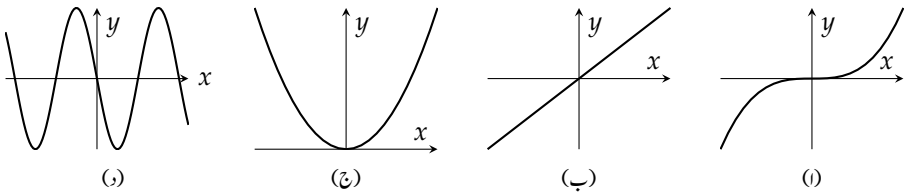
۳.۳۴ سوال ۳.۲۲: $\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=4}$; $w = z + \sqrt{z}$

۳.۳۵ **تفرق کے حصول کا متبادل کلیہ**

۳.۳۶ تحدیدی سیکنٹ سے تفرق کا حاصل کلیہ مستعمل نقطوں کے علامتی اظہار پر منحصر ہوتا ہے۔ شکل ۳.۱۱ میں سیکنٹ کا ڈھلوان $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ہے جس کی N



شکل ۳.۱۱: حصول تفرق کا متبادل کلیہ



شکل ۳.۱۲: تفاعل کے تفرق

۳۰۳۷ پر تحدیدی قیمت (Q کو N کے نزدیک تر کرتے ہوئے) N پر تفاعل کا تفرق دیتی ہے۔

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{۲}$$

۳۰۳۸

۳۰۳۹ اس کلیے کا استعمال چند تفرق کا حصول آسان بناتا ہے۔ سوال ۳.۲۳ تا سوال ۳.۲۶ میں اس کلیہ کی مدد سے c پر تفاعل کا تفرق حاصل کریں۔

۳۰۴۰ سوال ۳.۲۳: $f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad c = -1$

۳۰۴۱ سوال ۳.۲۴: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad c = 2$

۳۰۴۲ سوال ۳.۲۵: $g(t) = \frac{t}{t-1}, \quad c = 3$

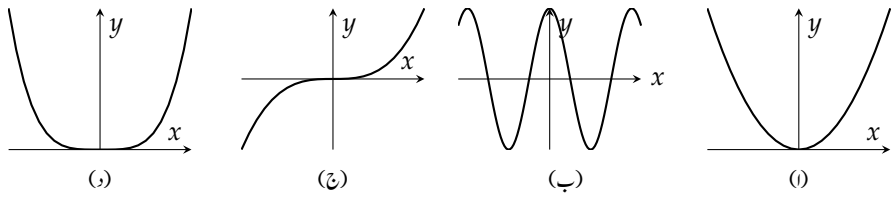
۳۰۴۳ سوال ۳.۲۶: $k(s) = 1 + \sqrt{s}, \quad c = 9$

۳۰۴۴ **ترسیماتے** سوال ۳.۲۷ تا سوال ۳.۳۰ میں دیے گئے تفاعل کا تفرق شکل ۳.۱۲ میں تلاش کریں۔

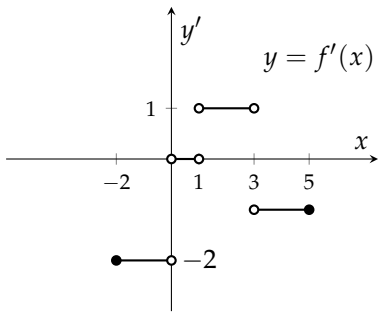
۳۰۴۵ سوال ۳.۲۷: شکل ۳.۱۳-ا

۳۰۴۶ سوال ۳.۲۸: شکل ۳.۱۳-ب

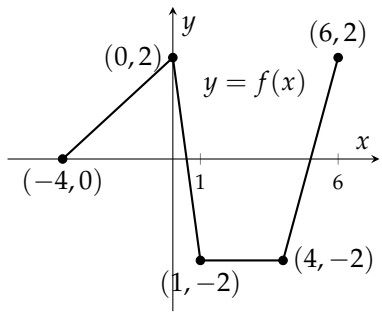
۳۰۴۷ سوال ۳.۲۹: شکل ۳.۱۳-ج



شکل ۱۳.۳: اصل تفاعل



شکل ۱۵.۳: تفاعل کے تفرق کی ترسیم برائے سوال ۳۲.۳



شکل ۱۴.۳: ترسیم برائے سوال ۳۱.۳

۳۰۴۸ سوال ۳۰.۳: شکل ۱۳.۳-د

۳۰۴۹ سوال ۳۱.۳: قطعات جوڑ کر شکل ۱۴.۳ حاصل کی گئی۔ (ا) وقفہ $[-4, 6]$ پر کہاں f' غیر معین ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) انتصابی

۳۰۵۰ محور کو y' کہتے ہوئے f' ترسیم کریں۔ ترسیم سیڑھی نما ہو گی۔

۳۰۵۱ سوال ۳۲.۳: تفاعل کے تفرق سے اصل تفرق کی وصولی

۳۰۵۲ (ا) درج ذیل طریقے سے تفاعل f کو وقفہ $[-2, 5]$ پر ترسیم کریں۔

۳۰۵۳ ۱. بند قطعات کو جوڑ کر ترسیم حاصل کریں۔

۳۰۵۴ ۲. ترسیم کو نقطہ $(-2, 3)$ سے شروع کریں۔

۳۰۵۵ ۳. تفاعل کا تفرق شکل ۱۵.۳ میں دکھایا گیا ہے۔

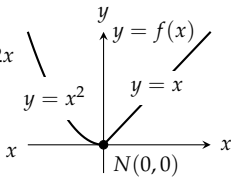
۳۰۵۶ (ب) نقطہ $(-2, 0)$ سے شروع کرتے ہوئے جزو (ا) کی ترسیم دوبارہ حاصل کریں۔

۳۰۵۷ سوال ۳۳.۳ تا سوال ۳۶.۳ میں نقطہ N پر بائیں اور دائیں ہاتھ تفرق کا موازنہ کرتے ہوئے دکھائیں کہ اس نقطے پر تفاعل ناقابل تفرق ہے۔

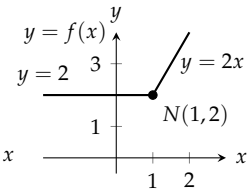
۳۰۵۸ سوال ۳۳.۳: تفاعل کو شکل ۱۶.۳ میں دکھایا گیا ہے۔

۳۰۵۹ سوال ۳۴.۳: تفاعل کو شکل ۱۷.۳ میں دکھایا گیا ہے۔

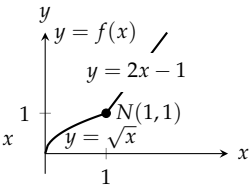
۳۰۶۰ سوال ۳۵.۳: تفاعل کو شکل ۱۸.۳ میں دکھایا گیا ہے۔



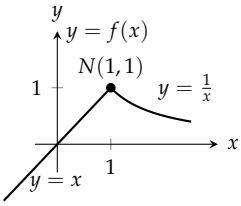
شکل ۳.۱۶



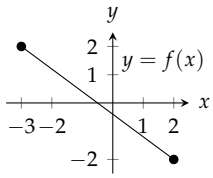
شکل ۳.۱۷



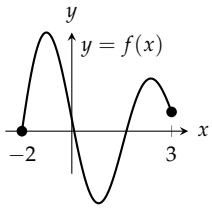
شکل ۳.۱۸



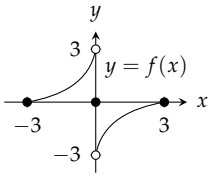
شکل ۳.۱۹



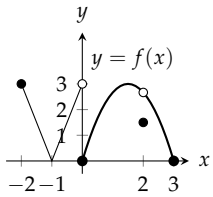
شکل ۳.۲۰



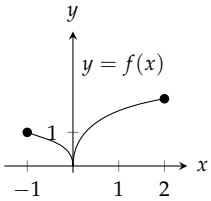
شکل ۳.۲۱



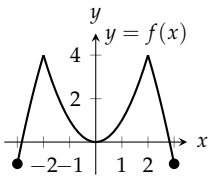
شکل ۳.۲۲



شکل ۳.۲۳



شکل ۳.۲۴



شکل ۳.۲۵

۳۰۶۱ سوال ۳.۳۶: تفاعل کو شکل ۳.۱۹ میں دکھایا گیا ہے۔

۳۰۶۲ سوال ۳.۳۷ تا سوال ۳.۴۲ میں بند دائرہ کار D پر تفاعل کی ترسیم دکھائی گئی ہے۔ کن نقطوں پر تفاعل (ا) قابل تفرق، (ب) استمراری لیکن ناقابل تفرق،
۳۰۶۳ (ج) غیر استمراری اور ناقابل تفرق ہے؟

۳۰۶۴ سوال ۳.۳۷: ترسیم شکل ۳.۲۰ میں دکھائی گئی ہے جبکہ $D : -3 \leq x \leq 2$ ہے۔

۳۰۶۵ سوال ۳.۳۸: ترسیم شکل ۳.۲۱ میں دکھائی گئی ہے جبکہ $D : -2 \leq x \leq 3$ ہے۔

۳۰۶۶ سوال ۳.۳۹: ترسیم شکل ۳.۲۲ میں دکھائی گئی ہے جبکہ $D : -3 \leq x \leq 3$ ہے۔

۳۰۶۷ سوال ۳.۴۰: ترسیم شکل ۳.۲۳ میں دکھائی گئی ہے جبکہ $D : -2 \leq x \leq 3$ ہے۔

۳۰۶۸ سوال ۳.۴۱: ترسیم شکل ۳.۲۴ میں دکھائی گئی ہے جبکہ $D : -1 \leq x \leq 2$ ہے۔

سوال ۳.۴۲: ترسیم شکل ۳.۲۵ میں دکھائی گئی ہے جبکہ $D: -3 \leq x \leq 3$ ہے۔

سوال ۳.۴۳ تا سوال ۳.۴۶ میں درج ذیل کریں۔

ا. تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق $y' = f'(x)$ تلاش کریں۔

ب. $y = f(x)$ اور $y' = f'(x)$ کو علیحدہ محدد پر قریب قریب ترسیم کرتے ہوئے درج ذیل کا جواب دیں۔

ج. x کی کن قیمتوں کے لیے y' کی قیمت مثبت، منفی اور صفر ہے۔

د. x بڑھنے سے x کی قیمتوں کے کن وقفوں پر $y = f(x)$ بڑھتا ہے؟ گھٹتا ہے؟ اس کا جزو (ج) کے جوابات کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ (باب ۴ میں اس تعلق پر غور کیا جائے گا۔)

سوال ۳.۴۳: $y = -x^2$

سوال ۳.۴۴: $y = -\frac{1}{x}$

سوال ۳.۴۵: $y = \frac{x^3}{3}$

سوال ۳.۴۶: $y = \frac{x^4}{4}$

سوال ۳.۴۷: کیا $y = x^3$ کا ڈھلوان کبھی منفی ہو گا؟ اگر ہو گا تو کہاں ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۴۸: کیا $y = 2\sqrt{x}$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر پایا جاتا ہو تو کہاں پایا جاتا ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۴۹: کیا قطع مکافی $y = 2x^2 - 13x + 5$ کے مماس کا ڈھلوان -1 ہو سکتا ہے۔ اگر ممکن ہے تب اس مماس کی مساوات حاصل کریں اور وہ نقطہ تلاش کریں جہاں مماس منحنی کو مس کرتا ہے۔ اگر ممکن نہیں تب اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۵۰: کیا منحنی $y = \sqrt{x}$ کا کوئی مماس محور x کو $x = -1$ پر قطع کرتا ہے؟ ممکن ہونے کی صورت میں نقطہ مماس اور مماس کی مساوات تلاش کریں جبکہ غیر ممکن ہونے کی صورت میں وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۵۱: کیا $(-\infty, \infty)$ پر قابل تفرق تفاعل کا تفرق $y = \lfloor x \rfloor$ ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۵۲: $f(x) = |x|$ کے تفرق کو ترسیم کرنے کے بعد $y = \frac{|x|-0}{x-0} = \frac{|x|}{x}$ ترسیم کریں۔ ان سے آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

سوال ۳.۵۳: یہ جانتے ہوئے کہ $x = x_0$ پر تفاعل $f(x)$ قابل تفرق ہے، آپ $x = x_0$ پر تفاعل $-f$ کے قابل تفرق ہونے کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۵۴: کیا $t = 7$ پر $g(t)$ کا قابل تفرق ہونے سے آپ $t = 7$ پر $3g$ کے قابل تفرق ہونے کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۵۵: فرض کریں کہ t کی تمام قیمتوں کے لیے تفاعل $g(t)$ اور $h(t)$ معین ہیں اور $g(0) = h(0) = 0$ ہے۔ کیا $\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{h(t)}$ موجود ہو گا؟ اگر حد موجود ہو تب کیا یہ حد ضرور صفر کے برابر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۵۶: (ا) فرض کریں کہ $-1 \le x \le 1$ کے لیے تفاعل $f(x)$ شرط $\left|f(x)\right| \le x^2$ کو مطمئن کرتا ہے۔ دکھائیں کہ $x = 0$ پر f قابل تفرق ہے اور $f'(0)$ حاصل کریں۔ (ب) دکھائیں کہ $x = 0$ پر

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

قابل تفرق ہے اور $f'(0)$ تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۳.۵۷: $0 \le x \le 2$ کے لیے $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ کو ترسیم کریں۔ اس کے اوپر پہلے $h = 1, 0.5, 0.1$ لے کر $y = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ ترسیم کریں اور بعد میں $h = -1, -0.5, -0.1$ لے کر ترسیم کریں۔ سمجھائیں کہ کیا ہو رہا ہے۔

سوال ۳.۵۸: $-2 \le x \le 2$ اور $0 \le y \le 3$ لیتے ہوئے $y = 3x^2$ ترسیم کریں۔ اسی کے اوپر پہلے $h = 2, 1, 0.2$ لے کر $y = \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$ ترسیم کریں اور بعد میں $h = -2, -1, -0.2$ لے کر ترسیم کریں۔ سمجھائیں کیا ہو رہا ہے۔

سوال ۳.۵۹: وائنسٹرا اس کا ناقابل تفرق تفاعل وائنسٹرا اس تفاعل $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}()^n \cos(9^n \pi x)$ کے پہلے آٹھ ارکان کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$g(x) = \cos(\pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cos(9\pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cos(9^2 \pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cos(9^3 \pi x) + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cos(9^7 \pi x)$$

اس تفاعل کو ترسیم کریں۔ ترسیم کی جسامت بڑی کرتے ہوئے دیکھیں یہ کتنی بلدار ہے۔

سوال ۳.۶۰ تا سوال ۳.۶۵ میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کریں۔

ا. $y = f(x)$ ترسیم کرتے ہوئے اس کا رویہ دیکھیں۔

ب. عمومی جسامت کا قدم h لیتے ہوئے عمومی نقطہ x پر حاصل تقسیم q متعارف کریں۔

ج. $h \to 0$ کرتے ہوئے حد لینے سے کون سا کلیہ حاصل ہوتا ہے؟

د. $x = x_0$ پُر کرتے ہوئے تفاعل اور اس نقطے پر مماس ترسیم کریں۔

ھ. x_0 سے x کی بڑی اور چھوٹی قیمتیں جزو (ج) میں پُر کریں۔ کیا کلیہ اور ترسیم ایک جیسا مطلب پیش کرتے ہیں؟

و. جزو (ج) میں حاصل کیا گیا کلیہ ترسیم کریں۔ اس کی قیمتیں منفی، مثبت یا صفر ہونے کا کیا مطلب ہے؟ کیا جزو (ا) کی ترسیم کے ساتھ اس کا کوئی مطلب بنتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۶۰: $f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad x_0 = 1$

سوال ۳.۶۱: $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}, \quad x_0 = 1$

سوال ۳.۶۲: $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}, \quad x_0 = 2$

سوال ۳.۶۳: $f(x) = \frac{x-1}{3x^2+1}, \quad x_0 = -1$

سوال ۳.۶۴: $f(x) = \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

سوال ۳.۶۵: $f(x) = x^2 \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

۳.۲ قواعد تفرق

اس حصے میں تفرق کی تعریف استعمال کیے بغیر تفاعل کا تفرق حاصل کرنا سکھایا جائے گا۔

طاقت، مجموعے اور تفریق

تفرق کا پہلا قاعدہ یہ ہے کہ مستقل کا تفرق صفر کے برابر ہے۔

قاعدہ ۳.۱: **مستقل کا تفرق**
اگر c مستقل ہو تب $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} c = 0$ ہو گا۔

مثال ۳.۶: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(8) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{3}) = 0$ □

ثبوت قاعدہ: ہم تفرق کی تعریف استعمال کرتے ہوئے $f(x) = c$ کا تفرق حاصل کرتے ہیں (شکل ۳.۲۶)۔ ہر x پر درج ذیل ہو گا۔

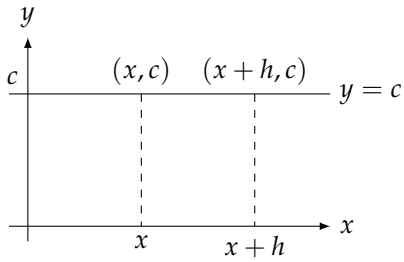
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

□

اگلا قاعدہ ہمیں x^n کا تفرق دیتا ہے جہاں n مثبت عدد صحیح ہے۔

قاعدہ ۳.۲: **قاعدہ طاقت برائے مثبت عدد صحیح**
اگر n مثبت عدد صحیح ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = n x^{n-1}$$



شکل ۳.۲۶: مستقل کا تفرق صفر ہو گا۔

۳۱۳۵

۳۱۳۶ قاعدہ طاقت استعمال کرتے ہوئے ہم طاقت n سے 1 منفی کرتے ہوئے جواب کو n سے ضرب دیتے ہیں۔

۳۱۳۷ مثال ۳.۷:

f	x	x^2	x^3	x^4	$\cdots$
f'	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$\cdots$

۳۱۳۸ □

۳۱۳۹ **ثبوت قاعدہ:** اگر $f(x) = x^n$ ہو تب $f(x+h) = (x+h)^n$ ہو گا۔ چونکہ n مثبت عدد صحیح ہے ہم درج ذیل حقیقت

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1+a^{n-2}b} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

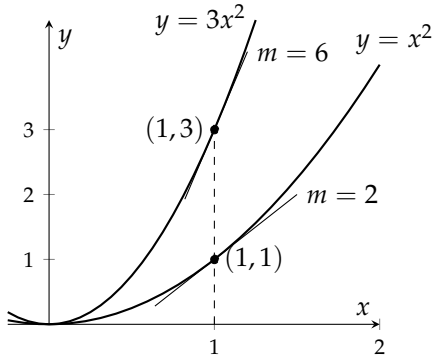
۳۱۴۰ استعمال کرتے ہوئے تفریقی حاصل تقسیم کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔ ہم $a = x + h$ اور $b = x$ لیتے ہیں۔ یوں $h = a - b$ ہو
۳۱۴۱ گا۔ اس طرح

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \frac{(h)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\
&= (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}
\end{aligned}$$

۳۱۴۲ لکھا جا سکتا ہے جو n ارکان پر مشتمل ہے اور $h \to 0$ کرتے ہوئے ہر رکن کی حد x^{n-1} ہے۔ یوں درج ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = nx^{n-1}$$

۳۱۴۳ □



شکل ۳.۲۷: ترسیم برائے مثال ۳.۸

۳۱۴۴ اگلا قاعدہ کہتا ہے کہ قابل تفرق تفاعل کو مستقل سے ضرب دینے سے حاصل تفاعل کا تفرق بھی اس مستقل سے ضرب ہو گا۔

۳۱۴۵ قاعدہ ۳.۳: **قاعدہ مستقل مضرب**

۳۱۴۶ اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور c ایک مستقل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cu) = c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

۳۱۴۷

۳۱۴۸ بالخصوص مثبت عدد صحیح n کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cx^n) = cnx^{n-1}$$

۳۱۴۹ مثال ۳.۸: تفرقی کلیہ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x^2) = 3 \cdot 2x = 6x$ کہتا ہے کہ محور y کو 3 سے ضرب دیتے ہوئے ترسیم $y = x^2$ کی پیمائش

۳۱۵۰ تبدیل کرنے سے ہر نقطے کا ڈھلوان 3 سے ضرب ہو گا (شکل ۳.۲۷)۔ □

۳۱۵۱ مثال ۳.۹: قابل تفرق تفاعل کے منفی کا تفرق اس تفاعل کے تفرق کا منفی ہو گا۔ قاعدہ ۳.۳ میں $c = -1$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-1 \cdot u) = -1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u) = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

۳۱۵۲ □

ثبوت قاعدہ: (قاعدہ ۳.۳)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}cu &= \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h)-cu(x)}{h} && \text{$f(x)=cu(x)$ کے تفرق کی تعریف}\\
&= c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} && \text{تحدیدی خاصیت}\\
&= c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && \text{u قابل تفرق ہے}
\end{aligned}$$

□

اگلا قاعدہ کہتا ہے کہ دو قابل تفرق تفاعل کے مجموعے کا تفرق ان کے انفرادی تفرق کا مجموعہ ہو گا۔

قاعدہ ۳.۴: **قاعدہ مجموعہ**

اگر u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا مجموعہ $u + v$ ہر اس نقطے پر قابل تفرق ہو گا جہاں u اور v دونوں قابل تفرق ہوں۔ ایسے نقطے پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u+v)=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

قاعدہ مجموعہ اور قاعدہ مستقل مضرب کو ملا کر مساوی **تفریقی قاعدہ** حاصل ہو گا جس کے تحت دو قابل تفرق تفاعل کے حاصل تفریق کا تفرق ان کے تفرق کا تفریق ہو گا:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u-v)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u+(-1)v]=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+(-1)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

قاعدہ مجموعہ کو وسعت دے کر دو سے زیادہ تفاعلات کے لیے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے بس اتنا ضروری ہے کہ مجموعے میں ارکان کی تعداد متناہی ہو۔ اگر $u_1, u_2, \cdots, u_n$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب $u_1+u_2+\cdots+u_n$ بھی قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1+u_2+\cdots+u_n)=\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}+\cdots+\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}x}$$

مثال ۳.۱۰:

(ا) $y=x^4+12x$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(12x)\\
&= 4x^3+12
\end{aligned}$$

(ب) $y=x^3+\frac{4}{3}x^2-5x+1$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^3+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{4}{3}x^2\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1)\\
&= 3x^2+\frac{4}{3}\cdot 2x-5+0\\
&= 3x^2+\frac{8}{3}x-5
\end{aligned}$$

۳۱۶۶ □

۳۱۶۷ آپ نے اس مثال میں دیکھا کہ کسی بھی کثیر رکنی کا جزو در جزو تفرق لیا جا سکتا ہے۔

۳۱۶۸ **ثبوت قاعدہ:** (قاعدہ ۳.۴) ہم تفرق کی تعریف کو $f(x) = u(x) + v(x)$ پر لاگو کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u(x)+v(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h)+v(x+h)]-[u(x)+v(x)]}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\\
&= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

۳۱۶۹ □

۳۱۷۰ **دو سے زیادہ تفاعل کے مجموعہ کے لیے ثبوت**

۳۱۷۱ ہم درج ذیل فقرے کو **ریاضی ماخوذ**[۱۰] کی مدد سے ثابت کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1+u_2+\cdots+u_n) = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}+\cdots+\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}x} \tag{۱}$$

۳۱۷۲ جیسا اوپر ثابت کیا گیا درج بالا فقرہ $n = 2$ کے لیے درست ہے۔ یہ ریاضی ماخوذ کا پہلا قدم ہے۔

۳۱۷۳ دوسرے قدم میں ہم نے ثابت کرنا ہو گا کہ اگر یہ فقرہ کسی بھی مثبت عدد صحیح $n = k$ (جہاں $k \geq n_0 = 2$ ہے) کے لیے درست ہو تب یہ

۳۱۷۴ $n = k+1$ کے لیے بھی درست ہو گا۔ فرض کریں کہ

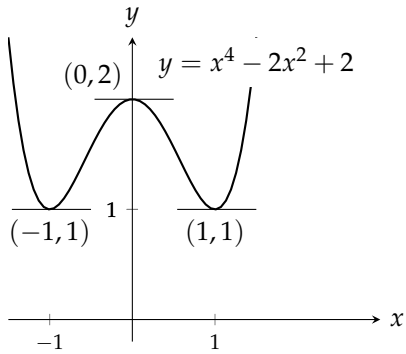
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1+u_2+\cdots+u_k) = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}+\cdots+\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}x}$$

۳۱۷۵ ہے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\underbrace{u_1+u_2+\cdots+u_k}_{\text{اس مجموعہ کو } u \text{ کہیں}}+\underbrace{u_{k+1}}_{\text{اس کو } v \text{ کہیں}})\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1+u_2+\cdots+u_k)+\frac{\mathrm{d}u_{k+1}}{\mathrm{d}x}\\
&= \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}+\cdots+\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}u_{k+1}}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

---

[۱۰] mathematicalinduction



شکل ۳.۲۸: افقی مماس (مثال ۳.۱۱)

۳۱۷۶ اس قدم کی تکمیل ہر عدد صحیح $n \geq 2$ کے لیے قاعدہ ۳.۴ کی درستگی کی تصدیق کرتی ہے۔

۳۱۷۷ مثال ۳.۱۱: کیا منحنی $y = x^4 - 2x^2 + 2$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر پایا جاتا ہو تب کہاں پایا جاتا ہے؟

۳۱۷۸ **حل**

۳۱۷۹ افقی مماس وہاں ہو گا جہاں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ صفر کے برابر ہو۔ ان نقطوں کو حاصل کرنے کے لیے ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ معلوم کرتے ہیں

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4 - 2x^2 + 2) = 4x^3 - 4x$$

۳۱۸۰ اور اس کے بعد مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ کو x کے لیے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 4x^3 - 4x &= 0 \\ 4x(x^2 - 1) &= 0 \\ x &= 0, 1, -1 \end{aligned}$$

۳۱۸۱ منحنی $y = x^4 - 2x^2 + 2$ کا افقی مماس $x = 0, 1, -1$ پر پایا جاتا ہے جہاں منحنی کے مطابق نقطے $(-1,1)$ ، $(1,1)$ ،
۳۱۸۲ $(0,2)$ ہیں (شکل ۳.۲۸)۔ □

۳۱۸۳ **حاصل ضرب اور حاصل تقسیم**

۳۱۸۴ اگرچہ دو تفاعل کے مجموعہ کا تفرق ان تفاعل کے تفرق کا مجموعہ ہے، دو تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق ان تفاعل کے تفرق کا حاصل ضرب نہیں ہو گا۔ مثال
۳۱۸۵ کے طور پر

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \cdot x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x$$ ہے جبکہ $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1 \cdot 1 = 1$$ ہو گا۔

دو تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق دو حاصل ضرب کا مجموعہ ہو گا۔

قاعدہ ۳.۵: **قاعدہ حاصل ضرب**

اگر u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا حاصل ضرب uv بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا جس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

حاصل ضرب uv کا تفرق u ضرب v کا تفرق جمع v ضرب u کا تفرق ہو گا۔ اس کو $(uv)' = uv' + vu'$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

ثبوت قاعدہ: تفرق کی تعریف کے تحت

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

ہو گا جس کو u اور v کے تفریقی حاصل تقسیم کی صورت میں لکھنے کی خاطر ہم شمار کنندہ میں $u(x+h)v(x)$ جمع اور منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left[u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} u(x+h)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}
\end{aligned}$$

چونکہ x پر u قابل تفرق ہے لہٰذا $h \to 0$ کرنے سے $u(x+h) \to u(x)$ ہو گا۔ دو کسر کی تحدیدی قیمتیں x پر $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ اور $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ ہیں۔ مختصراً درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

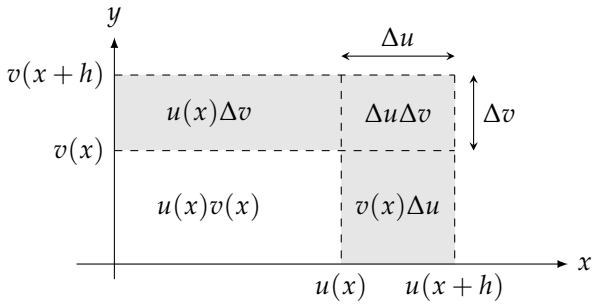
قاعدہ حاصل ضرب کی تصویر کشی

اگر $u(x)$ اور $v(x)$ مثبت ہوں اور x بڑھنے سے بڑھتے ہوں تب $h > 0$ کی صورت میں شکل ۳.۲۹ حاصل ہو گی۔ $u(x)$ اور $v(x)$ بڑھنے سے رقبہ میں اضافہ

$$u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) = u(x+h)\Delta v + v(x+h)\Delta u - \Delta u\Delta v$$

ہو گا جس کو ہلکا سیاہ رنگ دیا گیا ہے۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کو h سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = u(x+h)\frac{\Delta v}{h} + v(x+h)\frac{\Delta u}{h} - \Delta u\frac{\Delta v}{h}$$



شکل ۳.۲۹: قاعدہ حاصل ضرب کی تصویر کشی۔

۳۱۹۹ حاصل ہو گا۔ اب $h \to 0^+$ کرنے سے $\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{h} \to 0 \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0$ ہو گا لہٰذا درج ذیل باقی رہ جاتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

۳۲۰۰

۳۲۰۱ مثال ۳.۱۲: تفاعل $y = (x^2+1)(x^3+3)$ کا تفرق تلاش کریں۔

۳۲۰۲ **حل**

۳۲۰۳ قاعدہ حاصل ضرب میں $u = x^2+1$ اور $v = x^3+3$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^2+1)(x^3+3)] &= (x^2+1)(3x^2) + (x^3+3)(2x)\\ &= 3x^4+3x^2+2x^4+6x\\ &= 5x^4+3x^2+6x\end{aligned}$$

۳۲۰۴ □

۳۲۰۵ اس مثال میں قوسین کھول کر تفرق لینا غالباً زیادہ بہتر ہوتا۔ ایسا کرنے سے

$$\begin{aligned}y &= (x^2+1)(x^3+3) = x^5+x^3+3x^2+3\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 5x^4+3x^2+6x\end{aligned}$$

۳۲۰۶ ملتا ہے جو مثال ۳.۱۲ میں حاصل جواب کی تصدیق کرتا ہے۔

۳۲۰۷ بعض اوقات آپ دیکھیں گے کہ قاعدہ حاصل ضرب استعمال کرنا ضروری ہو گا یا نسبتاً زیادہ آسان ہو گا۔ درج ذیل مثال میں ہمارے پاس صرف اعدادی قیمتیں
۳۲۰۸ ہیں جن سے ہمیں جواب حاصل کرنا ہے۔

مثال ۳.۱۳: فرض کریں کہ $y = uv$ تفاعل u اور v کا حاصل ضرب ہے۔ درج ذیل استعمال کرتے ہوئے $y'(2)$ تلاش کریں۔

$$u(2) = 3, \quad u'(2) = -4, \quad v(2) = 1, \quad v'(2) = 2$$

حل

قاعدہ حاصل ضرب کی درج ذیل صورت

$$y' = (uv)' = uv' + vu'$$

استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y'(2) &= u(2)v'(2) + v(2)u'(2) \\ &= (3)(2) + (1)(-4) = 6 - 4 = 2 \end{aligned}$$

□

حاصل تقسیم

جیسا تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق ان کے تفرق کا حاصل ضرب نہیں اسی طرح تفاعل کے حاصل تقسیم کا تفرق ان کے تفرق کا حاصل تقسیم نہیں۔ درج ذیل قاعدہ اس کا حل دیتا ہے۔

قاعدہ ۳.۶: **قاعدہ حاصل تقسیم**

اگر $u(x)$ اور $v(x)$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا حاصل تقسیم $\frac{u}{v}$ بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہوگا اور یہ تفرق درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{v^2}$$

ثبوت قاعدہ:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)} \end{aligned}$$

آخری کسر کو یوں تبدیل کرتے ہیں کہ اس میں u اور v کے تفریقی حاصل تقسیم پائے جاتے ہوں۔ ایسا کرنے کی خاطر شمار کنندہ میں $v(x)u(x)$ جمع اور منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{v(x)u(x+h) - v(x)u(x) + v(x)u(x) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)} \end{aligned}$$

شمار کنندہ اور نسب نما میں حد لینے سے قاعدہ حاصل تقسیم حاصل ہوتا ہے۔

□

مثال ۳.۱۴: تفاعل $y = \frac{t^2-1}{t^2+1}$ کا تفرق تلاش کریں۔

حل

ہم $u = t^2 - 1$ اور $v = t^2 + 1$ لیتے ہوئے قاعدہ حاصل تقسیم استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{(t^2+1)\cdot 2t - (t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2t,\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 2t\right) \\
&= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2+1)^2} \\
&= \frac{4t}{(t^2+1)^2}
\end{aligned}$$

□

منفی عدد صحیح کے لیے طاقتی قاعدہ

منفی عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ اور مثبت عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ ایک ہیں۔

قاعدہ ۳.۷: **منفی عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ**

اگر n منفی عدد صحیح اور $x \neq 0$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$$

ثبوت قاعدہ: ہم قاعدہ حاصل تقسیم کو استعمال کر کے اس قاعدہ کو ثابت کرتے ہیں۔ اگر n منفی عدد صحیح ہو تب $m = -n$ مثبت عدد صحیح ہو گا۔ یوں $x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^m}\right) \\
&= \frac{x^m \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1) - 1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^m)}{(x^m)^2} && \text{قاعدہ حاصل تقسیم جس میں } u = 1 \text{ اور } v = x^m \text{ ہیں} \\
&= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} && \text{چونکہ } m > 0 \text{ ہے لہٰذا } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^m) = mx^{m-1} \text{ ہو گا} \\
&= -mx^{-m-1} \\
&= nx^{n-1} && \text{چونکہ } -m = n \text{ ہے}
\end{aligned}$$

۳۲۳۴ □

۳۲۳۵ مثال ۳.۱۵:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{4}{x^3}\right) = 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-3}) = 4(-3)x^{-4} = -\frac{12}{x^4}$$

۳۲۳۶ □

۳۲۳۷ مثال ۳.۱۶: منحنی $y = x + \frac{2}{x}$ کا نقطہ $(1,3)$ پر مماس کی مساوات تلاش کریں۔

۳۲۳۸ **حل**

۳۲۳۹ منحنی کے ڈھلوان کی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

۳۲۴۰ ہے جس کی قیمت نقطہ $x = 1$ پر

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = \left[1 - \frac{2}{x^2}\right]_{x=1} = 1 - 2 = -1$$

۳۲۴۱ ہو گی۔ نقطہ $(1,3)$ پر ڈھلوان $m = -1$ کے خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y - 3 = (-1)(x - 1)$$ نقطہ و ڈھلوان مساوات
$$y = -x + 1 + 3$$
$$y = -x + 4$$

۳۲۴۲ □

۳۲۴۳ **قاعدہ کا انتخاب**

۳۲۴۴ تفرق کے حصول میں موزوں قاعدے کا انتخاب حساب آسان بنا سکتا ہے۔ درج ذیل مثال اس کی وضاحت کرتی ہے۔

۳۲۴۵ مثال ۳.۱۷: قاعدہ حاصل تقسیم استعمال کرنے کے بجائے

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$$

۳۲۴۶ کے شمار کنندہ میں قوسین کھول کر x^4 سے تقسیم کرتے ہیں

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3-3x^2+2x}{x^4} = x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-3}$$

اور قاعدہ مجموعہ اور قاعدہ طاقت استعمال کرتے ہوئے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -x^{-2} - 3(-2)x^{-3} + 2(-3)x^{-4}\\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{6}{x^3} - \frac{6}{x^4}\end{aligned}$$

□

دور تبی اور بلند رتبی تفرق

تفرق $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو x کے لحاظ سے y کا رتبہ **اول تفرق**[11] یا **یک رتبی تفرق** یا مختصراً **پہلا تفرق**[12] کہتے ہیں۔ یہ تفرق از خود x کے لحاظ سے قابل تفرق ہو سکتا ہے۔ اگر ایسا ہو تب تفرق

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$$

کو x کے لحاظ سے y کا رتبہ **دوم تفرق**[13] یا **دو رتبی تفرق** یا مختصراً **دوسرا تفرق**[14] کہتے ہیں۔

دور تبی تفرق کی علامت $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ میں شمار کنندہ میں d جبکہ نسب نما میں x کی طاقت 2 لکھی جاتی ہے۔ درج بالا مساوات میں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ سے مراد تفرقی علامتوں کی ضرب نہیں بلکہ یہ تفرق کے تفرق کو ظاہر کرتی ہے۔

اگر y'' قابل تفرق ہو تب اس کے تفرق $y''' = \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$ کو x کے لحاظ سے y کا رتبہ **سوم تفرق** یا **سہ رتبی تفرق** یا **تین رتبی تفرق** یا مختصراً **تیسرا تفرق** کہتے ہیں۔ اسی طرح بڑھتے ہوئے

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y^{(n-1)}$$

کو x کے لحاظ سے y کا رتبہ n **تفرق** یا n **رتبی تفرق** یا n **واں تفرق** کہیں گے جہاں n مثبت عدد صحیح ہے۔ آپ نے دیکھا کہ بلند رتبی تفرق کو قوسین میں بند y کی طاقت لکھا جاتا ہے۔

مثال ۳.۱۸: تفاعل $y = x^3 - 3x^2 + 2$ کے پہلے چار تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}y' &= 3x^2 - 6x\\ y'' &= 6x - 6\\ y''' &= 6\\ y^{(4)} &= 0\end{aligned}$$

---

[11] firstorderderivative
[12] firstderivative
[13] secondorderderivative
[14] secondderivative

چونکہ $y^{(4)} = 0$ ہے اور صفر ایک مستقل ہے لہٰذا اس کا تفرق درحقیقت صفر (یعنی مستقل) کا تفرق ہوگا جو صفر ہی ہے۔ یوں اس تفاعل کا ہر رتبے کا تفرق پایا جاتا ہے۔ اس کا چار رتبی اور اس سے بلند تمام تفرق صفر کے برابر ہیں۔ □

سوالات

تفرق کا حساب

سوال ۳.۶۶ تا سوال ۳.۷۷ میں تفاعل کا رتبہ اول اور رتبہ دوم تفرق حاصل کریں۔

سوال ۳.۶۶: $y = -x^2 + 3$

سوال ۳.۶۷: $y = x^2 + x + 8$

سوال ۳.۶۸: $s = 5t^3 - 3t^5$

سوال ۳.۶۹: $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$

سوال ۳.۷۰: $y = \frac{4x^3}{3} - x$

سوال ۳.۷۱: $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}$

سوال ۳.۷۲: $w = 3z^{-2} - \frac{1}{z}$

سوال ۳.۷۳: $s = -2t^{-1} + \frac{4}{t^2}$

سوال ۳.۷۴: $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$

سوال ۳.۷۵: $y = 4 - 2x - x^{-3}$

سوال ۳.۷۶: $r = \frac{1}{3s^2} - \frac{5}{2s}$

سوال ۳.۷۷: $r = \frac{12}{\theta} - \frac{4}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^4}$

سوال ۳.۷۸ تا سوال ۳.۸۱ میں (ا) y' کو قاعدہ حاصل ضرب کی مدد سے حاصل کریں اور (ب) قوسین کو کھول کر سادہ ارکان حاصل کرتے ہوئے دوبارہ تفرق حاصل کریں۔

سوال ۳.۷۸: $y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$

سوال ۳.۷۹: $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

سوال ۳.۸۰: $y = (x^2 + 1)\left(x + 5 + \frac{1}{x}\right)$

سوال ۳.۸۱: $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x} + 1\right)$

سوال ۳.۸۲ تا سوال ۳.۹۳ میں تفاعل کا تفرق تلاش کریں۔

۳۲۸۵ سوال ۳.۸۲: $y = \frac{2x+5}{3x-2}$

۳۲۸۶ سوال ۳.۸۳: $z = \frac{2x+1}{x^2-1}$

۳۲۸۷ سوال ۳.۸۴: $g(x) = \frac{x^2-4}{x+0.5}$

۳۲۸۸ سوال ۳.۸۵: $f(t) = \frac{t^2-1}{t^2+t-2}$

۳۲۸۹ سوال ۳.۸۶: $v = (1-t)(1+t^2)^{-1}$

۳۲۹۰ سوال ۳.۸۷: $w = (2x-7)^{-1}(x+5)$

۳۲۹۱ سوال ۳.۸۸: $f(s) = \frac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1}$

۳۲۹۲ سوال ۳.۸۹: $u = \frac{5x+1}{2\sqrt{x}}$

۳۲۹۳ سوال ۳.۹۰: $v = \frac{1+x-4\sqrt{x}}{x}$

۳۲۹۴ سوال ۳.۹۱: $r = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$

۳۲۹۵ سوال ۳.۹۲: $y = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$

۳۲۹۶ سوال ۳.۹۳: $y = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$

۳۲۹۷ سوال ۳.۹۴: تفاعل $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$ کے تمام بلند رتبی تفرق تلاش کریں۔

۳۲۹۸ سوال ۳.۹۵: تفاعل $y = \frac{x^5}{120}$ کے تمام بلند رتبی تفرق تلاش کریں۔

۳۲۹۹ سوال ۳.۹۶ تا سوال ۳.۱۰۳ میں یک رتبی اور دو رتبی تفرق تلاش کریں۔

۳۳۰۰ سوال ۳.۹۶: $y = \frac{x^3+7}{x}$

۳۳۰۱ سوال ۳.۹۷: $s = \frac{t^2+5t-1}{t^2}$

۳۳۰۲ سوال ۳.۹۸: $r = \frac{(\theta-1)(\theta^2+\theta+1)}{\theta^3}$

۳۳۰۳ سوال ۳.۹۹: $u = \frac{(x^2+x)(x^2-x+1)}{x^4}$

۳۳۰۴ سوال ۳.۱۰۰: $w = \left(\frac{1+3z}{3z}\right)(3-z)$

۳۳۰۵ سوال ۳.۱۰۱: $w = (z+1)(z-1)(z^2+1)$

۳۳۰۶ سوال ۳.۱۰۲: $p = \left(\frac{q^2+3}{12q}\right)\left(\frac{q^4-1}{q^3}\right)$

سوال ۳.۱۰۳: $p = \frac{q^2+3}{(q-1)^3+(q+1)^3}$

اعدادی قیمتوں کا استعمال

سوال ۳.۱۰۴: فرض کریں u اور v متغیر x کے تفاعل ہیں جو $x = 0$ پر قابل تفرق ہیں۔ مزید ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہیں۔

$$u(0) = 5, \quad u'(0) = -3, \quad v(0) = -1, \quad v'(0) = 2$$

$x = 0$ پر درج ذیل تفرق تلاش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{u}\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7v - 2u)$$

سوال ۳.۱۰۵: فرض کریں u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ مزید ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہیں۔

$$u(1) = 2, \quad u'(1) = 0, \quad v(1) = 5, \quad v'(1) = -1$$

$x = 1$ پر درج ذیل تفرق تلاش کریں۔

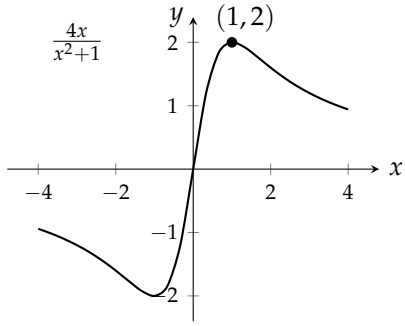
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{u}\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7v - 2u)$$

ڈھلوان اور مماس

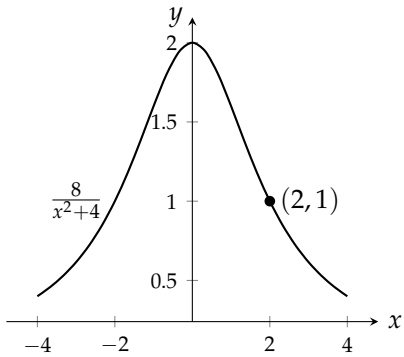
سوال ۳.۱۰۶: (ا) نقطہ $(2,1)$ پر منحنی $y = x^3 - 4x + 1$ کے مماس کے قائمہ کی مساوات تلاش کریں۔ (ب) منحنی کا کم تر ڈھلوان کتنا اور کس نقطے پر ہے؟ (ج) جس نقطے پر منحنی کے مماس کا ڈھلوان 8 ہے وہاں مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۳.۱۰۷: (ا) منحنی $y = x^3 - 3x - 2$ کی افقی مماسات کی مساواتیں تلاش کریں۔ مماسی نقطے پر مماس کے قائمہ کی مساواتیں بھی تلاش کریں۔ (ب) منحنی کا کم تر ڈھلوان کیا ہے اور کس نقطے پر ہے؟ اس نقطے پر مماس کے قائمہ کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۳.۱۰۸: مبدا اور $(1,2)$ پر منحنی $y = \frac{4x}{x^2+1}$ کی مماسات کی مساواتیں تلاش کریں۔



سوال ۳.۱۰۹: نقطہ $(2,1)$ پر $y = \frac{8}{x^2+4}$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔



سوال ۳.۱۱۰: منحنی $y = ax^2 + bx + c$ نقطہ $(1,2)$ سے گزرتی ہے اور مبدا پر خط $y = x$ اس کا مماس ہے۔ a ، b اور c تلاش کریں۔

سوال ۳.۱۱۱: نقطہ $(1,0)$ پر $y = x^2 + ax + b$ اور $y = cx - x^2$ کا مشترک مماس پایا جاتا ہے۔ a ، b اور c تلاش کریں۔

سوال ۳.۱۱۲: (ا) نقطہ $(-1,0)$ پر منحنی $y = x^3 - x$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔ (ب) کمپیوٹر پر منحنی اور مماس کو ترسیم کریں۔ مماس اس منحنی کو دوسرے نقطہ پر قطع کرتا ہے۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے اس نقطے کے محدد کا اندازہ لگائیں۔ (ج) مماس اور منحنی کو اکٹھا حل کرتے ہوئے اس نقطے کی تصدیق کریں۔

سوال ۳.۱۱۳: (ا) مبدا پر منحنی $y = x^3 - 6x^2 + 5x$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔ (ب) منحنی اور مماس کو کمپیوٹر پر ایک ساتھ ترسیم کریں۔ مماس اس منحنی کو دوسرے نقطے پر قطع کرتا ہے۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے اس نقطے کے محدد کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ (ج) مماس اور منحنی کو اکٹھا حل کرتے ہوئے اس نقطے کی تصدیق کریں۔

طبیعی استعمال

سوال ۳.۱۱۴: دباؤ اور حجم بند ڈبہ میں مستقل درجہ حرارت T پر گیس کا حجم H اور دباؤ P درج ذیل کلیہ مطمئن کرتے ہیں جہاں a ، b ، اور c مستقل ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}H}$ تلاش کریں۔

$$P = \frac{nRT}{H - nb} - \frac{an^2}{H^2}$$

سوال ۳.۱۱۵: دوا کو جسم کا رد عمل دوا کو جسم کے رد عمل کو درج ذیل کلیہ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں C مثبت مستقل ہے جبکہ M خون میں جذب دوا کی مقدار ہے۔

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$$

اگر رد عمل فشار خون کی تبدیلی ہو تب R ملی میٹر پارہ میں ناپا جاتا ہے۔ اگر رد عمل درجہ حرارت میں تبدیلی ہو تب R کیلون میں ناپا جاتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}M}$ تلاش کریں۔ یہ تفرق جو M کا تفاعل ہے، دوا کی مقدار میں تبدیلی کو جسم کی **حساسیت**[15] کہلاتا ہے۔ سوال ۳.۳۹۷ میں ہم دوا کی وہ مقدار معلوم کریں گے جس کو جسم زیادہ سے زیادہ حساس ہو۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۳.۱۱۶: فرض کریں قاعدہ حاصل ضرب میں v کی قیمت مستقل c ہو۔ کیا اس سے قاعدہ مضرب مستقل حاصل کیا جا سکتا ہے؟

سوال ۳.۱۱۷: قاعدہ بالعکس متناسب

(ا) **قاعدہ بالعکس متناسب**[16] کہتا ہے جس نقطے پر تفاعل $v(x)$ قابل تفرق ہو اس نقطے پر

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

ہو گا۔ دکھائیں کہ قاعدہ بالعکس متناسب در حقیقت قاعدہ حاصل تقسیم کی ایک مخصوص صورت ہے۔ (ب) دکھائیں کہ قاعدہ بالعکس متناسب اور قاعدہ حاصل ضرب کو ملا کر قاعدہ حاصل تقسیم اخذ کیا جا سکتا ہے۔

سوال ۳.۱۱۸: مثبت عدد صحیح کا دوسرا ثبوت الجبرائی کلیہ

$$cx^n - c^n = (x-c)(x^{n-1} + x^{n-2}c + \cdots + xc^{n-2} + c^{n-1})$$

اور صفحہ ۲ پر دیا گیا کلیہ تفرق (مساوات ۲)

$$f'(c) = \lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

استعمال کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$ حاصل کریں۔

سوال ۳.۱۱۹: قاعدہ حاصل ضرب کی عمومی صورت قاعدہ حاصل ضرب متغیر x کے قابل تفرق تفاعل u اور v کے لیے درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

(ا) متغیر x کے قابل تفرق تین تفاعل کے حاصل ضرب uvw کے لیے کلیہ کیا ہو گا؟ (ب) متغیر x کے قابل تفرق چار تفاعل کے حاصل ضرب $u_1u_2u_3u_4$ کے لیے کلیہ کیا ہو گا؟ (ج) متغیر x کے قابل تفرق متناہی تعداد تفاعلات کے حاصل ضرب $u_1u_2\cdots u_n$ کے لیے کلیہ کیا ہو گا؟

سوال ۳.۱۲۰: $x^{3/2}$ کو $x^{1/2}\cdot x$ لکھ کر قاعدہ حاصل ضرب استعمال کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{3/2})$ حاصل کریں۔ جواب کو ناطق عدد ضرب x کی ناطق طاقت لکھیں۔ جزو (ب) اور (ج) کو بھی اسی طرح حل کریں۔ (ب) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{5/2})$ تلاش کریں۔ (ج) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{7/2})$ تلاش کریں۔ (د) درج بالا تین جزو میں آپ کیا نقش دیکھتے ہیں۔ ناطق طاقتیں حصہ ۳.۶ کا ایک موضوع ہیں۔

---

[15] sensitivity

[16] reciprocalrule

۳.۳ تبدیلی کی شرح

اس حصہ میں ہم تبدیلی کی شرح پر تفرق کی مدد سے غور کریں گے۔ وقت کے لحاظ سے فاصلے میں تبدیلی کی مثالیں سمتی رفتار اور اسراع ہیں۔ ہم وقت کے علاوہ دیگر متغیر کے لحاظ سے بھی تبدیلی پر غور کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر حکیم جاننا چاہے گا کہ دوا میں معمولی تبدیلی سے مریض کی حال پر کیا اثر ہو گا۔ ماہر اقتصادیات جاننا چاہے گا کہ سرمایہ کاری میں معمولی تبدیلی سے اقتصادی ترقی پر کتنا اثر ہو گا۔ ان سوالات کو موزوں متغیر کے لحاظ سے تفرق کی صورت میں ظاہر کیا جائے گا۔

اوسط اور لحاتی شرح تبدیلی

ہم کسی دورانیہ پر اوسط شرح تبدیلی سے شروع کرتے ہیں۔ اس دورانیے کو صفر کے نزدیک تر کرنے سے حاصل شرح تبدیلی کی حد کو تفاعل کا تفرق کہتے ہیں۔

تعریف: x کے لحاظ سے وقفہ x_0 تا $x_0 + h$ پر تفاعل $f(x)$ کی **اوسط شرح تبدیلی** سے مراد

$$\text{اوسط شرح تبدیلی} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

ہے۔ x کے لحاظ سے x_0 پر f کی **(لحاتی) شرح تبدیلی**

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

کو کہتے ہیں بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

□

روایتی طور پر اگر x وقت کو ظاہر نہ کرتا ہو تب بھی لفظ لحاتی استعمال کیا جاتا ہے۔ ''لحاتی شرح تبدیلی'' کو مختصراً ''شرح تبدیلی'' کہتے ہیں۔

مثال ۳.۱۹: دائرے کے رقبہ S اور رداس r کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$S = \pi r^2$$

رقبے کی شرح تبدیلی $r = 0.1\,\text{m}$ پر کیا ہو گی؟

حل

رداس کے لحاظ سے رقبے کی (لحاتی) شرح تبدیلی

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 2\pi r$$

ہے۔ یوں $r = 0.1\,\text{m}$ کی صورت میں r تبدیل کرنے سے رقبہ تبدیل ہونے کی شرح $0.2\pi\,\text{m}^2/\text{m}$ ہو گی۔ اس رداس پر رداس میں Δr میٹر چھوٹی تبدیلی سے رقبے میں $0.2\pi\Delta r$ مربع میٹر تبدیلی رونما ہو گی۔ □

لکیر پر حرکت۔ ہٹاو، سمتی رفتار، رفتار اور اسراع

فرض کریں محوری خط (جس کو ہم s محور کہتے ہیں) پر ایک جسم یوں حرکت کرتا ہے کہ محور پر مقام s اور وقت t کا تعلق

$$s = f(t)$$

ہو۔ دورانیہ t تا $t + \Delta t$ میں جسم کا **ہٹاو**[۱۷]

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

ہو گا (شکل ۳.۳۰) اور اس کی **اوسط سمتی رفتار**[۱۸]

$$v_{\text{اوسط}} = \frac{\text{ہٹاو}}{\text{دورانیہ}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ہو گی۔ ٹھیک لمحہ t پر جسم کی سمتی رفتار جاننے کی خاطر ہم $\Delta t \to 0$ کرتے ہوئے دورانیہ t تا $t + \Delta t$ پر اوسط سمتی رفتار کی حد تلاش کرتے ہیں۔ یہ حد t کے لحاظ سے f کا تفرق ہے۔

تعریف: جسم کی (لحاتی) سمتی رفتار وقت کے لحاظ سے تعین گر تفاعل $s = f(t)$ کا تفرق ہو گا۔ لمحہ t پر سمتی رفتار درج ذیل ہو گی۔

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

□

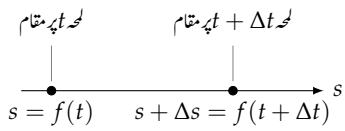
مثال ۳.۲۰: ایک گاڑی کی فاصلہ (میٹر) بالمقابل وقت (سیکنڈ) ترسیم شکل ۳.۳۱ میں دکھائی گئی ہے۔ سیکنٹ NQ کا ڈھلوان دورانیہ $t = 5\,\mathrm{s}$ تا $15\,\mathrm{s}$ کے لیے اوسط سمتی رفتار ہے جو $32.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ یعنی $117\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کے برابر ہے۔ لمحہ $t = 5\,\mathrm{s}$ پر مماس کا ڈھلوان اس لمحے پر لحاتی سمتی رفتار $16.25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ یعنی $58.5\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ دیتا ہے۔ □

مقدار معلوم روپ

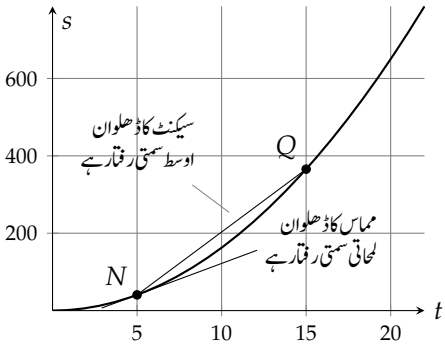
اگر x اور y دونوں متغیر t کے تفاعل ہوں تب $(x(t), y(t))$ کی ترسیم **مقدار معلوم ترسیم**[۱۹] کہلاتی ہے۔ منحنی $y = f(x)$ کا **مقدار معلوم روپ**[۲۰] حاصل کرنے کی خاطر ہم $x = t$ اور $y = f(t)$ لیں گے۔ چند منحنیات کے مقدار معلوم روپ درج ذیل ہے۔

تفاعل	مقدار معلوم روپ
$y = x^2$ (y متغیر x کا تفاعل ہے)	$x(t) = t, y(t) = t^2, -\infty < t < \infty$
$x^2 + y^2 = 4$ (y متغیر x کا تفاعل نہیں ہے)	$x(t) = 2\cos t, y(t) = 2\sin t, 0 \le t \le 2\pi$

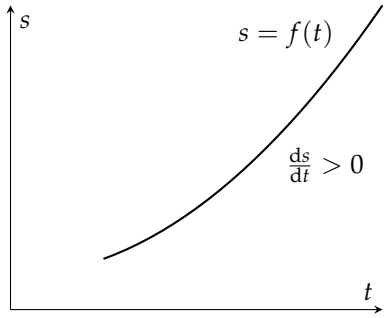
[۱۷] displacement
[۱۸] averagevelocity
[۱۹] parametriccurve
[۲۰] parametricrepresentation



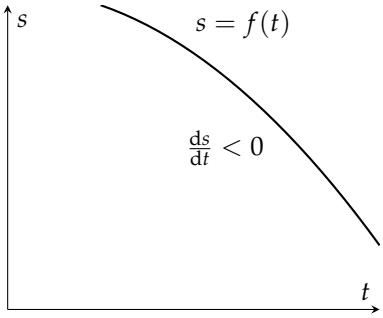
شکل ۳.۳۰: محور پر حرکت کرتے جسم کا t اور $t + \Delta t$ پر مقام



شکل ۳.۳۱: فاصلہ بالمقابل وقت برائے مثال ۳.۲۰



(ا) بڑھتا s مثبت سمتی رفتار $v = \frac{ds}{dt}$ دیگا۔



(ب) گھٹتا s منفی سمتی رفتار $v = \frac{ds}{dt}$ دیگا۔

شکل ۳.۳۲

۳۳۸۸ سمتی رفتار ہمیں فاصلہ طے کرنے کی شرح کے ساتھ ساتھ حرکت کی سمت بھی دیتی ہے۔ اگر جسم آگے (بڑھتے s) کی طرف حرکت کرتا ہو تب سمتی رفتار
۳۳۸۹ مثبت ہو گی؛ اگر جسم پیچھے (گھٹتے s) کی طرف حرکت کرتا ہو تب سمتی رفتار منفی ہو گی (شکل ۳.۳۲)۔

۳۳۹۰ سمتی رفتار کی مطلق قیمت کو **رفتار**[۲۱] کہتے ہیں جو مثبت مقدار ہے۔ اگر آپ اپنے گھر سے دوست کے گھر تک $60\,\mathrm{km}$ کی سمتی رفتار سے گاڑی چلائیں اور واپسی
۳۳۹۱ پر اسی رفتار سے واپس آئیں تو واپسی پر گاڑی کی سمتی رفتار $-60\,\mathrm{km}$ ہو گی لیکن گاڑی کا **رفتار پیما**[۲۲] واپسی پر بھی $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ دکھائے گا چونکہ وہ
۳۳۹۲ رفتار ناپتا ہے نا کہ سمتی رفتار۔

---

[۲۱] speed
[۲۲] speedometer

تعریف: سمتی رفتار کی مطلق قیمت کو **رفتار**[۲۳] کہتے ہیں۔

$$\text{رفتار} = |v(t)| = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$$

□

جس شرح سے ایک جسم کی سمتی رفتار تبدیل ہوتی ہو اس کو جسم کا **اسراع** کہتے ہیں۔

تعریف: وقت کے لحاظ سے سمتی رفتار کا تفرق **اسراع**[۲۴] کہلاتا ہے۔ اگر لمحہ t پر جسم کا مقام $s = f(t)$ ہو تب t پر اس جسم کا اسراع $a(t)$ درج ذیل ہو گا۔

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

□

ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کرتے ہوئے سطح زمین کے قریب ساکن حال سے گرتے ہوئے جسم کو مثال بنا کر اسراع کی وضاحت کی جا سکتی ہے۔ اس جسم پر صرف کشش ثقل عمل کرتی ہے اور جسم کی حرکت کو **آزاد گرنا**[۲۵] یا "آزادانہ گراؤ" کہتے ہیں۔ آزادی سے گرتا ہوا جسم دورانیہ t میں

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

فاصلہ طے کرتا ہے جہاں مستقل $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ سطح زمین کے قریب کشش زمین کی وجہ سے اسراع ہے۔ خلا میں ہوا کی غیر موجودگی کی وجہ سے ہوا کی مزاحمت نہیں پائی جاتی اور جسم اس مساوات کے تحت حرکت کرتا ہے۔ زمین کے قریب ہوا کی موجودگی میں ہر کثیف، بھاری جسم مثلاً اینٹ، پتھر، وغیرہ کی حرکت، ابتدائی چند سیکنڈ کے لیے جب تک ہوا کی مزاحمت قابل نظر انداز ہو، اس مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔

اسراع کی اکائی $\mathrm{m\,s^{-2}}$ میٹر فی مربع سیکنڈ پڑھی جاتی ہے۔

یہ مساوات ہمیں آزاد گرتے ہوئے جسم کی رفتار اور مقام کے بارے میں معلومات فراہم کرتی ہے۔

مثال ۳.۲۱: لمحہ $t = 0$ پر ٹھوس جسم کو ساکن حال سے گرنے دیا جاتا ہے۔
(ا) پہلے 2 سیکنڈوں میں جسم کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟ (ب) اس لمحے پر جسم کی رفتار کتنی اور اسراع کتنا ہو گا؟

حل

(ا) پہلے دو سیکنڈوں میں جسم درج ذیل فاصلہ طے کرتا ہے۔

$$s(2) = \frac{1}{2}(9.8)(2^2) = 19.6\,\mathrm{m}$$

---

[۲۳] speed
[۲۴] acceleration
[۲۵] freefall

(ب) لمحہ t پر رفتار $v(t)$ ہو گی اور اسراع $a(t)$

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 9.8t, \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 9.8$$

ہو گا۔ یوں $t = 2\,\mathrm{s}$ پر رفتار اور اسراع درج ذیل ہوں گے۔

$$v(2) = 9.8(2) = 19.6\,\mathrm{m}, \quad a(2) = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

آپ نے دیکھا اسراع a کی قیمت وقت t کے تابع نہیں۔ □

مثال ۳.۲۲: ایک جسم $49\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ابتدائی رفتار سے سیدھا اوپر پھینکا جاتا ہے۔ لمحہ t پر جسم کی بلندی $s = 49 - \frac{1}{2}gt^2$ ہو گی (شکل ۳.۳۳)۔

ا. جسم کس بلندی تک پہنچ پائے گا؟

ب. اوپر جاتے ہوئے $102.9\,\mathrm{m}$ کی بلندی پر جسم کی سمتی رفتار کیا ہو گی؟ نیچے آتے ہوئے اتنی ہی بلندی پر سمتی رفتار کیا ہو گی؟

ج. حرکت کے دوران کسی بھی لمحہ t پر جسم کا اسراع کتنا ہو گا؟

د. جسم زمین پر کب گرے گا؟

حل

ا. ہم محددی نظام یوں منتخب کرتے ہیں کہ سطح زمین سے فاصلہ مثبت ہو۔ یوں بلندی s مثبت مقدار ہو گی، ابتدائی رفتار مثبت ہو گی جبکہ اسراع جو نیچے رخ عمل کرتا ہے منفی ہو گا۔ اوپر جاتے ہوئے سمتی رفتار مثبت جبکہ نیچے گرتے ہوئے سمتی رفتار منفی ہو گی۔ بلند تر مقام پر سمتی رفتار صفر ہو گی۔ لمحہ t پر سمتی رفتار

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 49 - gt$$

ہو گی۔ رفتار اس لمحے پر صفر ہو گی جب

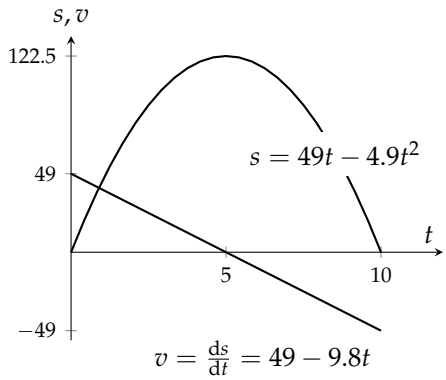
$$49 - 9.8t = 0, \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{49}{9.8} = 5\,\mathrm{s}$$

ہو۔ لمحہ $t = 5\,\mathrm{s}$ پر جسم کی بلندی درج ذیل ہو گی۔

$$s(5) = 49(5) - \frac{1}{2}(9.8)(5^2) = 122.5\,\mathrm{m}$$

ب. جسم کی رفتار $100\,\mathrm{m}$ پر حاصل کرنے کی خاطر ہم اس بلندی پر t تلاش کرتے ہیں۔

$$102.9 = 49t - 4.9t^2, \quad \Longrightarrow \quad t = 3\,\mathrm{s}, 7\,\mathrm{s}$$



شکل ۳.۳۳: بلندی اور سمتی رفتار (برائے مثال ۳.۲۲)

یوں 3 سیکنڈوں میں جسم 102.9 m بلندی تک پہنچتا ہے جبکہ واپس گرتے ہوئے اسی بلندی پر یہ 7 سیکنڈ بعد پہنچے گا۔ ان لمحات پر جسم کی سمتی رفتار حاصل کرتے ہیں۔

$$v(3) = 49 - 9.8(3) = 19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad v(7) = 49 - 9.8(7) = -19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

آپ نے دیکھا کہ دونوں لمحات پر جسم کی رفتار ایک سی ہے۔

ج. جسم کا اسراع تلاش کرتے ہیں۔

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -g = -9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

جسم کا اسراع مسلسل $-9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہو گا، جو جسم کے اوپر رخ حرکت کے دوران جسم کی سمتی رفتار گھٹاتا جبکہ نیچے رخ حرکت کے دوران سمتی رفتار بڑھاتا ہے۔

د. جسم اس لمحہ زمین پر ہو گا جب $s = 0$ ہو یعنی:

$$49t - 4.9t^2 = 0, \quad \Longrightarrow \quad t(49 - 4.9t) = 0, \quad \Longrightarrow \quad t = 0\,\mathrm{s}, 10\,\mathrm{s}$$

یوں ابتدائی لمحے ($t = 0$) پر جسم زمین پر ہو گا اور ٹھیک 10 سیکنڈ بعد جسم واپس زمین پر گرے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اوپر جانے کا دورانیہ اور نیچے گرنے کا دورانیہ برابر ہیں۔

□

فنیات انتصابی لکیر پر حرکت کی نقل

مقدار معلوم مساوات

$$x(t) = c, \quad y(t) = f(t)$$

کو کمپیوٹر پر **نقطوی ترسیم**[۲۶] کریں جو لمحہ t پر نقطہ $(x(t), y(t))$ دکھائے گی۔ نقطوی ترسیم لمحہ بالمحہ صورت حال دکھاتی ہے۔ یوں اگر $f(t)$ جسم کی بلندی کو ظاہر کرتا ہو تب $(x(t), y(t)) = (c, f(t))$ کی لمحاتی ترسیم جسم کی حقیقی حرکت دکھائے گی۔ مثال ۳.۲۲ کے لیے اس لمحاتی ترسیم کو پہلے $0 \le t \le 5$ اور بعد میں $0 \le t \le 10$ وقفے پر دیکھیں۔

دوسرا تجربہ کرنے کی خاطر مقدار معلوم مساوات

$$x(t) = t, \quad y(t) = 49t - 4.9t^2$$

کو نقطوی ترسیم کریں۔

حساسیت

اگر x میں چھوٹی تبدیلی سے تفاعل $f(x)$ میں بڑی تبدیلی رونما ہو ہم کہتے ہیں x میں تبدیلی کے لیے تفاعل نسبتاً زیادہ **حساس**[۲۷] ہے۔ تفرق $f'(x)$ تفاعل $f(x)$ کی **حساسیت**[۲۸] کی ناپ ہے۔

مثال ۳.۲۳: تبدیلی کے لیے حساسیت

آسٹریا کے گریگوریوہان مینڈل (1884-1822) نے مٹر پر تجربہ کرتے ہوئے **جینیات**[۲۹] کے میدان کی بنیاد ڈالی۔ ان کے نتائج کے مطابق اگر ہموار جِلد والے (**غالب**[۳۰]) مٹروں کے **جین**[۳۱] کا تعدد p ہو (جہاں p کی قیمت 0 تا 1 ہو سکتی ہے) اور غیر ہموار جِلد والے (**مغلوب**[۳۲]) مٹروں کے جین کا تعدد $(1-p)$ ہو تب مٹروں کی آبادی میں ہموار جِلد مٹروں کا تناسب درج ذیل ہو گا۔

$$y = 2p(1-p) + p^2 = 2p - p^2$$

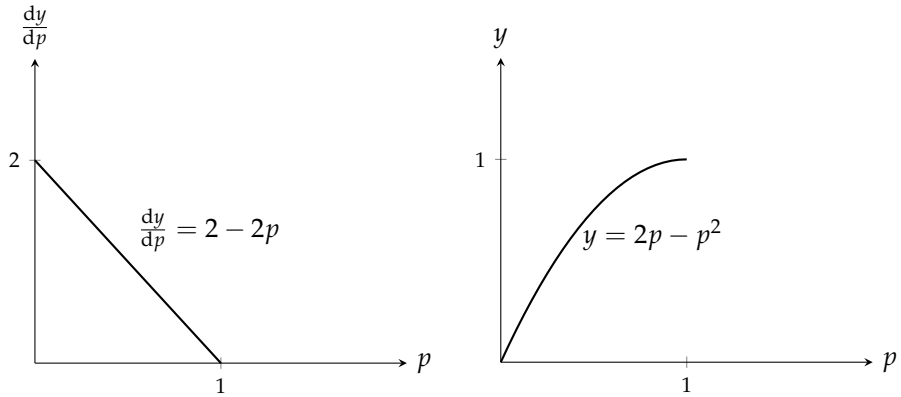
y بالمقابل p کی ترسیم کے مطابق جب p کی قیمت کم ہو تب y زیادہ حساس ہو گا (شکل ۳.۳۴-ا)۔ تفاعل y کے تفرق $\frac{dy}{dp}$ کی ترسیم سے بھی یہی ظاہر ہوتا ہے۔ جب p کی قیمت 0 کے قریب ہو تب $\frac{dy}{dp}$ کی قیمت 2 کے قریب ہے اور جب p کی قیمت 1 کے قریب ہو تب $\frac{dy}{dp}$ کی قیمت 0 کے قریب ہے (شکل ۳.۳۴-ب)۔ □

جیسا تفرق کی بات کرتے ہوئے سمتی رفتار اور اسراع کی اصطلاحات استعمال کی جاتی ہیں، اقتصادیات کے میدان میں ہم **حاشیوں**[۳۳] کی بات کرتے ہیں۔

عمل پیداوار میں اشیاء پیدا کرنے کی لاگت $c(x)$ متغیر x کا تفاعل ہے جہاں پیدا کردہ اشیاء کی تعداد x ہے۔ **حاشیائی لاگت پیداوار**[۳۴] سے مراد پیداوار کے لحاظ سے لاگت کی شرح تبدیلی $\frac{dc}{dx}$ ہے۔

---

[۲۶] dotgraph
[۲۷] sensitive
[۲۸] sensitivity
[۲۹] genetics
[۳۰] dominant
[۳۱] gene
[۳۲] recessive
[۳۳] marginals
[۳۴] marginalcostofproduction



(ب)حساسیت (ا)ہموار جِلد مٹروں کا تناسب $y = 2p - p^2$

شکل ۳.۳۴: مینڈل کے تجربہ نے جینیات کی بنیاد رکھی۔

۳۴۵۷ مثال کے طور پر ایک ہفتہ میں x ٹن[۳۵] فولاد پیدا کرنے پر $c(x)$ روپیہ لاگت آتی ہے۔اب $x + h$ ٹن فولاد پیدا کرنے پر زیادہ لاگت آئے گی اور لاگت
۳۴۵۸ میں اضافہ (تبدیلی) کو h سے تقسیم کرنے سے فی ہفتہ فی ٹن لاگت میں اوسط اضافہ ہو گا۔

$$\frac{c(x+h) - c(x)}{h} = \text{ہفتہ میں } h \text{ ٹن اضافی فولاد پیدا کرنے سے لاگت میں اوسط اضافہ}$$

۳۴۵۹ فی ہفتہ موجودہ پیداوار x ٹن ہونے کی صورت میں $h \to 0$ کرتے ہوئے اس نسبت کی حد اضافی فولاد پیدا کرنے کی حاشیائی لاگت دے گی (شکل ۳.۳۵-
۳۴۶۰ ا)۔

$$\frac{dc}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h} = \text{حاشیائی لاگت پیداوار}$$

۳۴۶۱ بعض اوقات ہم ایک اضافی اکائی پیداوار کی اضافی لاگت

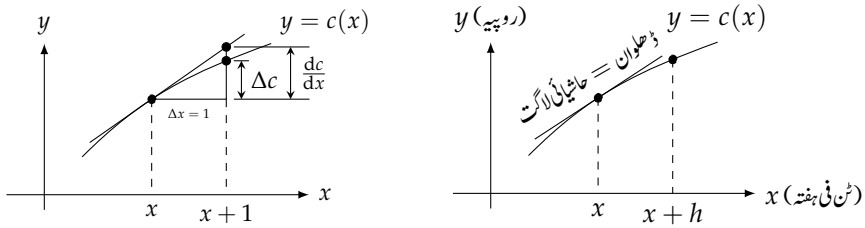
$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x+1) - c(x)}{1}$$

۳۴۶۲ کو ہی حاشیائی لاگت پیداوار کہتے ہیں جو x پر $\frac{dc}{dx}$ کی تخمین ہے۔یہ قابل قبول اس لیے ہے کہ x کے نزدیک c کے ڈھلوان میں تبدیلی زیادہ نہیں ہوتی لہٰذا
۳۴۶۳ یہاں $\Delta x = 1$ لیتے ہوئے حاصل سیکنٹ کے ڈھلوان کی قیمت حد $\frac{dc}{dx}$ کی قیمت کے بہت قریب ہو گی۔عملاً x کی بڑی قیمتوں کے لیے یہ تخمین قابل
۳۴۶۴ قبول ہو گی (شکل ۳.۳۵-ب)۔

۳۴۶۵ مثال ۳.۲۴: حاشیائی لاگت فرض کریں کہ x اشیاء پیدا کرنے پر

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

[۳۵] tonne,1000 kg



(ا) ہفتہ وار پیداوار بالمقابل لاگت

(ب) $\Delta x = 1$ اضافی پیداوار کی اضافی لاگت Δc تقریباً $\frac{dc}{dx}$ کے برابر ہے۔

شکل ۳.۳۵: حاشیائی لاگت پیداوار

روپیہ لاگت آتی ہے جب x کی قیمت 8 تا 30 ہو۔ ابھی آپ روزانہ 10 اشیاء پیدا کرتے ہیں۔ روزانہ ایک اضافی شے پیدا کرنے پر کتنی اضافی لاگت آئے گی؟

حل

دس اشیاء بناتے ہوئے مزید ایک شے پیدا کرنے پر تقریباً $c'(10)$ اضافی لاگت آئے گی

$$c'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 15x) = 3x^2 - 12x + 15$$
$$c'(10) = 3(100) - 12(10) + 15 = 195$$

جو 195 روپیہ کے برابر ہے۔ □

اگرچہ حقیقی اعمال کے کلیات عموماً نہیں پائے جاتے، نظریہ اقتصادیات ہمیں متوقع نتائج جاننے میں مدد کرتا ہے۔ یہ نظریہ جن تفاعل کا ذکر کرتا ہے انہیں عموماً موزوں وقفے پر کم درجے کی کثیر رکنیوں سے ظاہر کرنا ممکن ہوتا ہے۔ کعبی کثیر رکنی عموماً اس قابل ہوتی ہے کہ پیچیدہ مسئلے کو ظاہر کر سکے اور کعبی کثیر رکنی کا استعمال زیادہ مشکل بھی نہیں۔

مثال ۳.۲۵: حاشیائی شرح ٹیکس

اگر آپ کی موجودہ آمدن پر حاشیائی شرح ٹیکس 28 % ہو اور آپ کی آمدنی میں 10000 روپیہ کا اضافہ ہو تب آپ کو اضافی 2800 روپیہ ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ 28 % حاشیائی ٹیکس کا ہر گز یہ مطلب نہیں کہ آپ کو اپنی آمدن کا 28 % بطور ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ اس کا مطلب صرف یہ ہے کہ آپ کی موجودہ آمدنی I پر آمدنی بڑھنے کے لحاظ سے ٹیکس کی شرح $\frac{dT}{dI} = 0.28$ ہے۔ آپ کو ہر اضافی ایک روپیہ کی آمدن پر 0.28 روپیہ ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ اب ظاہر ہے اگر آپ کی آمدن بہت بڑھ جائے تب آپ ٹیکس کے نئے قالب میں شامل ہوں جائیں گے جہاں حاشیائی شرح ٹیکس غالباً زیادہ ہو گی۔ □

مثال ۳.۲۶: حاشیہ اگر x ہزار مٹھائی فروخت کرنے سے

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

آمدنی حاصل ہو جہاں $5 \leq x \leq 20$ ہے تب 10 ہزار مٹھائی فروخت کرتے ہوئے حاشیائی آمدنی

$$r'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3 - 3x^2 + 12x) = 3x^2 - 6x + 12$$

ہو گی۔ حاشیائی لاگت کی طرح ایک اضافی اکائی فروخت کرنے سے آمدنی میں اضافے کو حاشیائی آمدنی پیش کرتی ہے۔ اگر آپ 10 ہزار مٹھائیاں فی ہفتہ فروخت کر رہے ہوں تب فی ہفتہ 11 ہزار مٹھائیاں فروخت کرنے سے آپ کی آمدنی میں درج ذیل روپیہ اضافہ متوقع ہو گا۔

$$r'(10) = 3(100) - 6(10) + 12 = 252$$

□

سوالات

محددی لکیر پر حرکت

سوال ۳.۱۲۱ تا سوال ۳.۱۲۶ میں $a \leq t \leq b$ کے لیے مساوات $s = f(t)$ محددی لکیر پر ایک جسم کا مقام دیتی ہے جہاں t کی اکائی سیکنڈ اور s کی اکائی میٹر ہے۔

ا. دیے گئے وقفے پر جسم کا ہٹاو اور سمتی رفتار حاصل کریں۔

ب. وقفے کے سروں پر جسم کی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔

ج. جسم کب حرکت کی سمت تبدیل کرتا ہے (اگر ایسا کرتا ہو)؟

سوال ۳.۱۲۱: چاند پر آزاد گرنا $s = 0.8t^2, \quad 0 \leq t \leq 10$

سوال ۳.۱۲۲: مریخ پر آزاد گرنا $s = 1.86t^2, \quad 0 \leq t \leq 0.5$

سوال ۳.۱۲۳: $s = -t^3 + 3t^2 - 3t, \quad 0 \leq t \leq 3$

سوال ۳.۱۲۴: $s = \frac{t^4}{4} - t^3 + t^2, \quad 0 \leq t \leq 2$

سوال ۳.۱۲۵: $s = \frac{25}{t^2} - \frac{5}{t}, \quad 1 \leq t \leq 5$

سوال ۳.۱۲۶: $s = \frac{25}{t+5}, \quad -4 \leq t \leq 0$

سوال ۳.۱۲۷: s محور پر لمحہ t پر ایک جسم کا مقام $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ ہے۔ (ا) ان نقطوں پر جسم کا اسراع تلاش کریں جن پر جسم کی سمتی رفتار صفر ہو گی۔ (ب) جب جسم کا اسراع صفر ہو اس لمحے پر جسم کی رفتار کیا ہو گی؟ (ج) لمحہ $t = 0$ تا $t = 2$ کے دوران جسم کل کتنا فاصلہ طے کرتی ہے۔

سوال ۳.۱۲۸: وقت $t \geq 0$ پر s محور پر حرکت کرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار $v = t^2 - 4t + 3$ ہے۔ (ا) جسم کا اسراع وہاں تلاش کریں جہاں جسم کی سمتی رفتار صفر ہے۔ (ب) جسم کب آگے رخ اور کب پیچھے رخ حرکت کرتا ہے؟ (ج) جسم کی سمتی رفتار کب بڑھتی اور کب گھٹتی ہے؟

آزاد گرنا

سوال ۳.۱۲۹: مریخ اور مشتری کی سطوح کے قریب آزاد گرنے کی مساوات بالترتیب $s = 1.86t^2$ اور $s = 11.44t^2$ ہیں جہاں t کی اکائی سیکنڈ اور s کی اکائی میٹر ہے۔ ساکن حال سے گرنے کے بعد کتنے وقت میں (مریخ اور مشتری پر) ایک جسم کی رفتار $27.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ یعنی تقریباً $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہو گی؟

سوال ۳.۱۳۰: سطح چاند سے انتصابی رخ $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکا گیا پتھر t سیکنڈوں میں $s = 24t - 0.8t^2$ میٹر بلندی پر پہنچے گا۔

ا. لمحہ t پر پتھر کا اسراع کیا ہو گا؟ (یہ اسراع چاند پر کشش ثقل کا اسراع ہو گا۔)

ب. پتھر بلند ترین مقام تک کتنے دورانیے میں پہنچے گا؟

ج. پتھر کتنی بلندی تک پہنچ پائے گا؟

د. بلند ترین مقام کے نصف تک پتھر کتنی دیر میں پہنچے گا؟

ھ. پتھر کتنے وقت میں سطح چاند پر واپس گرے گا؟

سوال ۳.۱۳۱: سطح زمین پر ہوا کی غیر موجودگی میں سوال ۳.۱۳۰ کا پتھر t سیکنڈوں میں $s = 24t - 4.9t^2$ بلندی پر ہو گا۔

ا. لمحہ t پر پتھر کا اسراع کیا ہو گا؟ (یہ اسراع چاند پر کشش ثقل کا اسراع ہو گا۔)

ب. پتھر بلند ترین مقام تک کتنے دورانیے میں پہنچے گا؟

ج. پتھر کتنی بلندی تک پہنچ پائے گا؟

د. بلند ترین مقام کے نصف تک پتھر کتنی دیر میں پہنچے گا؟

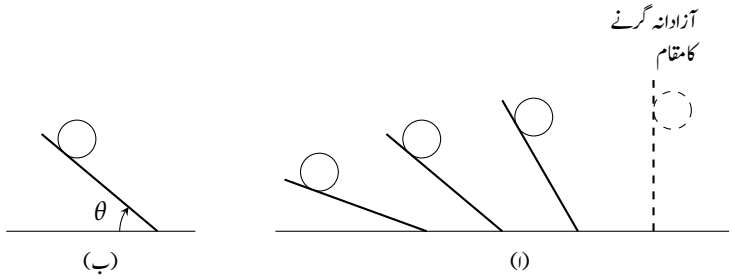
ھ. پتھر کتنے وقت میں سطح چاند پر واپس گرے گا؟

سوال ۳.۱۳۲: ہوا سے خالی ایک دنیا پر ٹھوس جسم کو انتصابی رخ $15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی ابتدائی رفتار سے پھینکا گیا۔ دنیا کی سطح پر ثقلی اسراع $g_s\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہونے کی وجہ سے t سیکنڈوں میں جسم $s = 15t - \frac{1}{2}g_s t^2$ میٹر بلندی تک پہنچے گا۔ جسم بلند ترین مقام تک 20 سیکنڈوں میں پہنچتا ہے۔ اس دنیا میں ثقلی اسراع کتنا ہے؟

سوال ۳.۱۳۳: چاند پر ایک بندوق انتصابی رخ چلائی گئی۔ بندوق کی گولی t سیکنڈوں میں $s = 300t - 4.9t^2$ میٹر بلندی پر ہو گی۔ زمین پر یہی گولی t سیکنڈ بعد $s = 300t - 0.8t^2$ میٹر بلندی پر ہو گی۔ دونوں صورتوں میں گولی کتنی دیر بعد سطح پر گرے گی؟

سوال ۳.۱۳۴: مشتری پر ہوا کی غیر موجودگی میں یہی گولی t سیکنڈ بعد $s = 300t - 11.44t^2$ میٹر کی بلندی پر ہو گی جبکہ مریخ پر یہ $s = 300t - 1.86t^2$ میٹر کی بلندی پر ہو گی۔ دونوں صورتوں میں گولی کتنی بلندی تک پہنچے گی؟

سوال ۳.۱۳۵: گلیلو کا کلیہ برائے آزادانہ گرنا ایک پٹی کو مختلف زاویوں پر رکھتے ہوئے گلیلو نے پٹی پر گیند کی سمتی رفتار ناپتے ہوئے ایک کلیہ اخذ کیا جس کی تحدیدی صورت سے آزاد گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار کا کلیہ حاصل کرنا مقصد تھا (شکل ۳.۳۶)۔ گلیلو نے دیکھا کہ حرکت کے شروع سے t سیکنڈ بعد سمتی رفتار کی قیمت t کے راست متناسب ہے یعنی $v = kt$ لکھا جا سکتا ہے۔ مستقل k کی قیمت کا دارومدار پٹی کے ڈھلوان پر ہے۔



شکل ۳.۳۶: گلیلو کا تجربہ برائے آزادانہ گراؤ (سوال ۳.۱۳۵)

۳۵۲۸ موجودہ علامتیت استعمال کرتے ہوئے (شکل ۳.۳۶-ب) درحقیقت گلیلو نے درج ذیل کلیہ حاصل کیا جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔

$$v = (9.8 \sin\theta)t$$

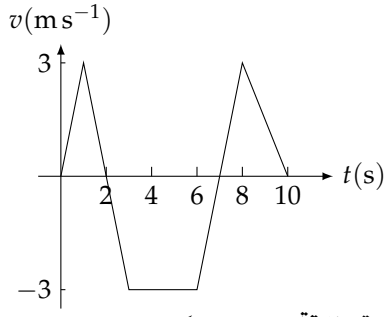
۳۵۲۹ (ا) آزاد گرتے ہوئے گیند کی رفتار کیا ہو گی؟ (ب) سطح زمین کے قریب جسم کا اسراع کیا ہو گا؟

۳۵۳۰ سوال ۳.۱۳۶: پیسا اگر گلیلو پیسا کی مینار سے توپ کی گولی 55 m بلندی سے گرنے دیتا تب t سیکنڈ بعد سطح زمین سے گولی کی بلندی $s = 55 - 4.9t^2$
۳۵۳۱ ہوتی۔ (ا) لمحہ t پر گولی کی سمتی رفتار، رفتار اور اسراع کیا ہوتے؟ (ب) یہ زمین تک کتنی دیر میں پہنچتی؟ (ج) زمین پر پہنچنے کے لمحہ پر اس کی سمتی رفتار
۳۵۳۲ کیا ہوتی؟

۳۵۳۳ ترسیم سے حرکت کے بارے میں معلومات اخذ کرنا

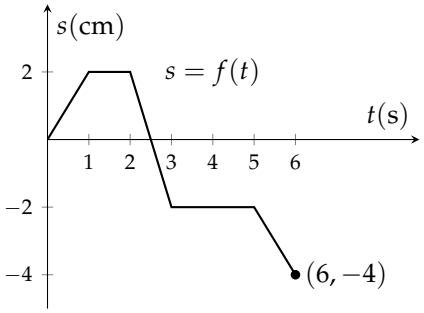
۳۵۳۴ سوال ۳.۱۳۷: محوری لکیر پر جسم کی سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = f(t)$ کو درج ذیل شکل میں ترسیم کیا گیا ہے۔

۳۵۳۵

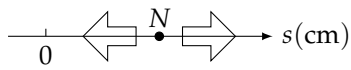


۳۵۳۶ (ا) جسم کب رخ تبدیل کرتا ہے؟ (ب) کب جسم تقریباً مستقل رفتار سے حرکت کرتا ہے؟ (ج) دورانیہ $0 \leq t \leq 10$ کے لیے جسم کی رفتار ترسیم
۳۵۳۷ کریں۔ (د) جسم کا اسراع (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔

۳۵۳۸ سوال ۳.۱۳۸: محوری لکیر پر نقطہ N حرکت کرتا ہے۔ نقطے کا مقام بالمقابل وقت بھی ترسیم کیا گیا ہے (شکل ۳.۳۷)۔ (ا) نقطہ N کب بائیں رخ
۳۵۳۹ حرکت کرتا ہے؟ کب دائیں رخ حرکت کرتا ہے؟ کب ساکن ہے؟ (ب) اس کی سمتی رفتار اور رفتار (جہاں معین ہوں) ترسیم کریں۔

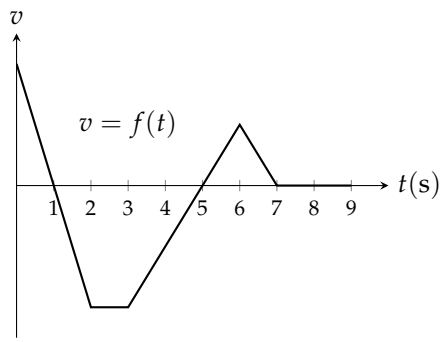


(ب)

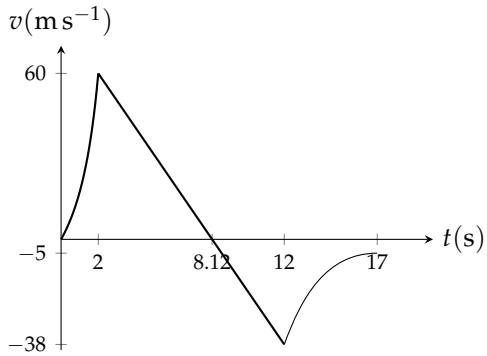


(ا)

شکل ۳.۳۷: محوری لکیر پر حرکت (سوال ۳.۱۳۸)



شکل ۳.۳۹: جسم کی حرکت (سوال ۳.۱۴۰)

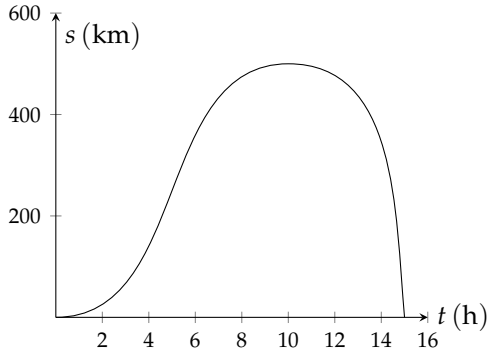


شکل ۳.۳۸: راکٹ کی حرکت (سوال ۳.۱۳۹)

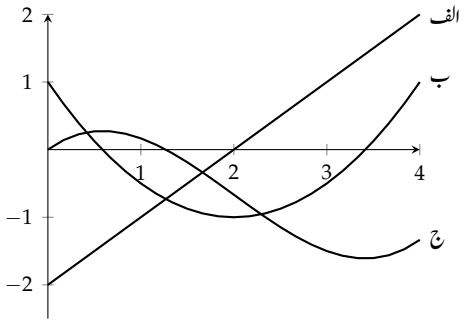
سوال ۳.۱۳۹: راکٹ میں چند سیکنڈ کا ایندھن ہوتا ہے جو راکٹ کو کسی خاص بلندی تک پہنچاتا ہے اور جس کے بعد راکٹ کچھ دیر تک مزید بلند ہو کر واپس زمین کی جانب گرتا ہے۔ گرنے کے چند لمحات بعد خود کار پیراشوٹ کھلتا ہے جو راکٹ کو حفاظت کے ساتھ نہایت آہستہ زمین تک پہنچاتا ہے۔ ایک راکٹ کی حرکت شکل ۳.۳۸ میں ترسیم کی گئی ہے۔ (ا) ایندھن ختم ہونے کے لمحے پر راکٹ کی رفتار کتنی تھی؟ (ب) ایندھن کتنے سیکنڈوں تک کے لیے تھا؟ (ج) راکٹ کب بلند ترین مقام تک پہنچا اور بلند ترین مقام پر اس کی رفتار کتنی تھی؟ (د) پیراشوٹ کب کھلا اور اس لمحے پر راکٹ کی رفتار کتنی تھی؟ (ہ) پیراشوٹ کھلنے سے پہلے راکٹ کتنی دیر تک گرتا رہا؟ (و) راکٹ کا اسراع کب زیادہ سے زیادہ تھا؟ (ز) اسراع کب مستقل تھا اور اس کی قیمت کیا تھی؟

سوال ۳.۱۴۰: محوری لکیر پر جسم کی رفتار $v = f(t)$ شکل ۳.۳۹ ترسیم کی گئی ہے۔ (ا) کب جسم آگے حرکت اور کب پیچھے حرکت کرتا ہے؟ جسم کی رفتار کب تیز؟ کب کم ہوتی ہے؟ (ب) جسم کا اسراع کب مثبت؟ کب منفی؟ اور کب صفر ہے؟ (ج) جسم کی رفتار زیادہ سے زیادہ کب ہوتی ہے؟ (د) کب جسم ایک لمحے سے زیادہ دورانیے کے لیے ساکن رہتا ہے؟

سوال ۳.۱۴۱: ایک ٹرک $t = 0$ پر اڈے سے نکل کر دوسرے شہر مال پہنچا کر 15 گھنٹوں بعد اڈے پر واپس پہنچتا ہے۔ اس کا مقام بالمقابل وقت شکل



شکل ۳.۴۰:ٹرک کی حرکت (سوال ۳.۱۴۱)



شکل ۳.۴۱:اشکال برائے سوال ۳.۱۴۲

۳.۴۰ میں دکھایا گیا ہے۔مثال ۳.۴ کی طرح $0 \leq t \leq 15$ کے لیے ٹرک کی سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ترسیم کریں۔اسی طریقے کو دہراتے ہوئے سمتی رفتار کی ترسیم سے ٹرک کا اسراع $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ ترسیم کریں۔

سوال ۳.۱۴۲: ایک جسم کا فاصلہ s ،رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ اور اسراع $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ بالمقابل وقت t کو شکل ۳.۴۱ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ان میں کون سی ترسیم کون سی ہے؟اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

اقتصادیات

سوال ۳.۱۴۳: حاشیائی لاگت فرض کریں کہ x مشینوں کو بنانے میں $c(x) = 2000 + 100x - 0.1x^2$ روپیہ لاگت آتی ہے۔(ا) پہلے 100 مشینوں کی اوسط لاگت کیا ہو گی؟(ب) اگر 100 بنائے جا رہے ہوں تب حاشیائی لاگت کیا ہو گی؟(ج) دکھائیں کہ 100 مشین بنانے کے بعد ایک اضافی مشین بنانے پر لاگت تقریباً حاشیائی لاگت کے برابر ہے۔

سوال ۳.۱۴۴: حاشیائی آمدنی۔ فرض کریں x کرسیاں فروخت کرنے سے $r(x) = 2000(1 - \frac{1}{x+1})$ روپیہ آمدنی ہوتی ہے۔(ا) x کرسیوں کی فروخت پر حاشیائی آمدنی کیا ہو گی؟(ب) فی ہفتہ 5 کرسیوں کے بجائے 6 کرسیاں فروخت کرنے سے آمدنی میں اضافے کو $r'(x)$ سے حاصل کریں۔(ج) $x \to \infty$ کرتے ہوئے تفاعل $r'(x)$ کی حدوں کی قیمت تلاش کریں۔اس قیمت کا کیا مطلب ہو گا؟

مزید استعمال

سوال ۳.۱۴۵: جرثوموں پر تجربے کے دوران ان کی خوراک میں جرثومہ مار دوا ملائی گئی۔جرثوموں کی تعداد کچھ دیر تک بڑھتی رہی جس کے بعد ان کی تعداد کم ہونا شروع ہوئی۔لمحہ t پر ان کی تعداد $b(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$ تھی جہاں t کی اکائی گھنٹہ ہے۔شرح نمو کو (ا) $t = 0$ ؛ (ب) $t = 5$ ؛اور $t = 10$ پر تلاش کریں۔

سوال ۳.۱۴۶: لمحہ t پر ایک ٹینکی سے پانی کا انخلا $Q(t) = 200(30 - t^2)$ لٹر ہے جہاں t کی اکائی منٹ ہے۔دس منٹ بعد پانی کے انخلا کی شرح کیا ہے؟پہلے دس منٹوں میں اوسط شرح اخراج کتنی ہے؟

سوال ۳.۱۴۷: ٹینکی کو خالی کرنے کے لیے گھر کے نلکے کھولے جاتے ہیں۔نلکے کھولنے کے t منٹ بعد ٹینکی میں پانی کی گہرائی $y = 150(1 - \frac{t}{60})^2$ سنٹی میٹر ہے۔(ا) لمحہ t پر ٹینکی سے پانی کا انخلا $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کیا ہو گا؟(ب) پانی کی گہرائی کب زیادہ سے زیادہ تیزی سے کم ہوتی ہے؟

کب کم سے کم تیزی سے گہرائی گھٹتی ہے؟ان لمحات پر $\frac{dy}{dt}$ کی قیمت کیا ہے؟(ج) y اور $\frac{dy}{dt}$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں اور $\frac{dy}{dt}$ کی علامت اور قیمتوں کے ساتھ y کے تعلق پر تبصرہ کریں۔

سوال ۳.۱۴۸: گول غبارے کا حجم $H = \frac{4}{3}\pi r^3$ رداس r کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔(ا) رداس کے ساتھ حجم کی تبدیلی کی شرح $r = 10\,\text{cm}$ پر کیا ہو گی؟(ب) اگر رداس $10\,\text{cm}$ سے $12\,\text{cm}$ ہو تب حجم میں تبدیلی کتنی ہو گی؟

سوال ۳.۱۴۹: پرواز سے پہلے ہوائی جہاز زمین پر دوڑ کر ایک مخصوص رفتار تک پہنچتا ہے۔زمین پر دوڑ کے دوران جہاز $D = \frac{10}{9}t^2$ فاصلہ طے کرتا ہے جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔اڑنے کے لیے درکار رفتار $200\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$ ہے۔جہاز کتنے وقت میں اڑ پاتا ہے اور اڑنے سے پہلے یہ زمین پر کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟

سوال ۳.۱۵۰: جزیرہ ہوائی کی آتش فشاں پہاڑی ۱۹۵۹ نومبر کے مہینے میں جزیرہ ہوائی کے ایک آتش فشاں پھٹ پڑا اور ہوا میں $580\,\text{m}$ کی بلندی تک **لاوا**[۳۶] اگلنے لگا جو عالمی رکارڈ ہے۔لاوا کی ابتدائی رفتار کتنی تھی؟

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۳.۱۵۱ تا سوال ۳.۱۵۴ میں s محور پر حرکت کرتے ہوئے جسم کا مقام لمحہ t پر تعین گر تفاعل $s = f(t)$ دیتا ہے۔اس تفاعل کو سمتی رفتار تفاعل $v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$ اور تفاعل اسراع $a = \frac{dv}{dt} = f''(t)$ کے ساتھ اکٹھا ترسیم کریں۔ v اور a کی قیمتوں اور علامت کے لحاظ سے s کے رویہ پر بحث کریں۔بحث میں درج ذیل شامل کریں۔

ا. کب جسم لمحاتی ساکن ہے؟

ب. کب جسم بائیں (یا نیچے) اور کب دائیں (یا اوپر) رخ حرکت کرتا ہے؟

ج. یہ سمت کب تبدیل کرتا ہے؟

د. اس کی رفتار کب بڑھتی اور کب گھٹتی ہے؟

ھ. یہ کب تیز تر اور کب آہستہ تر حرکت کرتا ہے؟

و. مبدا سے جسم دور ترین کب ہوتا ہے؟

سوال ۳.۱۵۱: $s = 200t - 16t^2, \quad 0 \le t \le 12.5$

سوال ۳.۱۵۲: $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \le t \le 5$

سوال ۳.۱۵۳: $s = t^3 - 6t^2 + 7t, \quad 0 \le t \le 4$

سوال ۳.۱۵۴: $s = 4 - 7t + 6t^2, \quad 0 \le t \le 4$

---

[۳۶] lava

۳.۴ تکونیاتی تفاعل کا تفرق

بہت سارے طبعی اعمال، مثلاً برقناطیسی امواج، دل کی دھڑکن، موسم، وغیرہ، دوری ہیں۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ہر دوری تفاعل جو حقیقت میں استعمال ہوتا ہو سائن اور کوسائن تفاعل کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں تبدیلی پر غور کرنے میں سائن اور کوسائن تفاعل اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ اس حصے میں چھ تکونیاتی تفاعل کا تفرق کرنا سکھایا جائے گا۔

چند اہم حد

پہلے چند عدم مساوات اور حد پیش کیے جاتے ہیں۔ زاویوں کی پیمائش ریڈیئن میں ہے۔

مسئلہ ۳.۳: اگر θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو تب درج ذیل ہوں گے۔

$$-|\theta| < \sin\theta|\theta| \quad \text{اور} \quad -|\theta| < 1-\cos\theta < |\theta|$$

ثبوت: ان عدم مساوات کو ثابت کرنے کے لیے ہم شکل ۳.۴۲ پر غور کرتے ہیں جہاں θ ربع اول میں واقع ہے لہٰذا اکائی دائرے کی قوس NA کی لمبائی $|\theta|$ ہو گی۔ چونکہ (سیدھے) قطعہ AN کی لمبائی قوس AN کی لمبائی θ سے کم ہے لہٰذا قائمہ مثلث ANQ میں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2 = (AN)^2 < \theta^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مربع کی قیمت مثبت ہوتی ہے لہٰذا بائیں طرف دونوں اجزاء مثبت ہیں۔ دو مثبت قیمتوں کا مجموعہ دونوں کے انفرادی قیمت سے زیادہ ہوتا ہے لہٰذا

$$\sin^2\theta < \theta^2, \quad (1-\cos\theta)^2 < \theta^2$$

لکھے جا سکتے ہیں جن کا جذر لینے سے

$$|\sin\theta| < |\theta|, \quad |1-\cos\theta| < |\theta|$$

یعنی

$$-|\theta| < \sin\theta < |\theta|, \quad -|\theta| < 1-\cos\theta < |\theta|$$

حاصل ہوتے ہیں۔

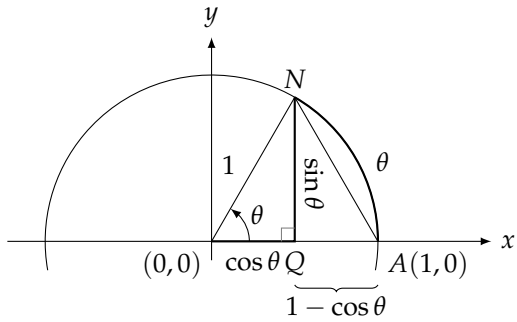
□

مثال ۳.۲۷: دکھائیں کہ $\theta = 0$ پر $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ استمراری ہیں یعنی:

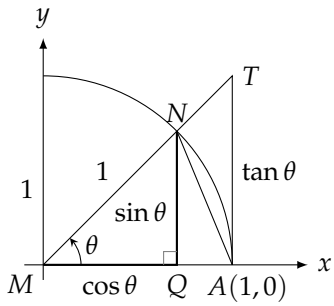
$$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0, \quad \lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$$

حل

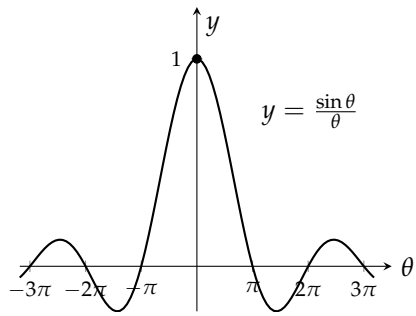
$\theta \to 0$ کرنے سے $|\theta|$ اور $-|\theta|$ دونوں صفر کے نزدیک تر ہوتے ہیں۔ یوں مسئلہ ۳.۳ اور مسئلہ پیچ سے مذکورہ بالا حد ثابت ہوتی ہیں۔ □



شکل ۳.۴۲: اس شکل کی جیومیٹری، جس میں $\theta > 0$ ہے، سے عدم مساوات $\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2 < \theta^2$ لکھی جا سکتی ہے۔



شکل ۳.۴۴: برائے مسئلہ ۳.۴



شکل ۳.۴۳: تفاعل $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ جہاں θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہے۔

۳۶۱۱ تفاعل $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ جہاں θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہے کو شکل ۳.۴۳ میں ترسیم کیا گیا ہے جس کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے $\theta = 0$ پر
۳۶۱۲ قابل ہٹاو عدم استمرار پایا جاتا ہے۔ اس شکل کے مطابق $\lim_{\theta\to 0} f(\theta) = 1$ ہو گا۔

۳۶۱۳ مسئلہ ۳.۴:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \qquad (\theta \text{ کی پیمائش ریڈیئن میں ہے}) \tag{۱}$$

۳۶۱۴ ثبوت: ہم بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرتے ہیں۔ یوں دو طرفہ حد بھی 1 ہو گی۔

۳۶۱۵ دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرنے کی خاطر ہم θ کی قیمت مثبت اور $\frac{\pi}{2}$ سے کم رکھتے ہیں (شکل ۳.۴۴)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\Delta MAN \text{ رقبہ} < MAN \text{ رقبہ خط} < \Delta MAT \text{ رقبہ}$$

ہے۔ان رقبوں کو θ کی صورت

$$\Delta MAN \text{ رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{عمود} = \frac{1}{2}(1)(\sin\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta$$
$$MAN \text{ رقبہ خطہ} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1)^2\theta = \frac{\theta}{2}$$
$$\Delta MAT \text{ رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{عمود} = \frac{1}{2}(1)(\tan\theta) = \frac{1}{2}\tan\theta$$

میں لکھتے ہوئے درج ذیل تعلق حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$$

جس کو $\frac{1}{2}\sin\theta$ سے تقسیم کرنے سے

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

حاصل ہو گا۔اس کا مقلوب لیتے ہیں جس سے عدم مساوات کی علامتیں الٹ ہوتی ہیں۔

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$

چونکہ $\lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta = 1$ ہے لہٰذا مسئلہ پنچ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

آخر میں دھیان رہے کہ $\sin\theta$ اور θ دونوں طاق تفاعل ہیں لہٰذا $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ جفت تفاعل ہو گا جس کی ترسیم محور y کے دونوں اطراف یکساں ہو گا (شکل ۳.۴۳)۔اس تشاکلی کی وجہ سے بائیں ہاتھ حد بھی موجود ہو گی اور اس کی قیمت بھی 1 ہو گی۔

$$\lim_{\theta\to 0^-}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

یوں صفحہ ۱۲۳ پر مسئلہ ۲.۵ کے تحت $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ ہو گا۔

□

مسئلہ ۳.۴ کو قواعد حد اور معلوم تکونیاتی مماثل کے ساتھ ملاتے ہوئے دیگر تکونیاتی حد تلاش کی جا سکتی ہیں۔

مثال ۳.۲۸: دکھائیں کہ $\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} = 0$ ہے۔

حل

۳۲۸ نصف زاویہ کلیہ استعمال کر کے $\cos h = 1 - 2\sin^2 \frac{h}{2}$ لکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} -\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h}\\ &= -\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\sin\theta \qquad (\theta = \frac{h}{2})\\ &= -(1)(0) = 0\end{aligned}$$

۳۲۹ □

۳۳۰ سائن تفاعل کا تفرق

۳۳۱ تفاعل $y = \sin\theta$ کا تفرق جاننے کی خاطر ہم مثال ۳.۲۸ کی حدیں اور مسئلہ ۳.۴ کو کلیہ

$$\sin(x+h) = \sin x\cos h + \cos x\sin h$$

۳۳۲ کے ساتھ ملا کر حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(\sin x\cos h + \cos x\sin h) - \sin x}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h - 1) + \cos x\sin h}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\sin x\cdot\frac{\cos h - 1}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right)\\ &= \sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\ &= \sin x\cdot 0 + \cos x\cdot 1\\ &= \cos x\end{aligned}$$

۳۳۳ یوں سائن تفاعل کا تفرق کوسائن تفاعل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$$

۳۳۴ مثال ۳.۲۹:

۱.

$$\begin{aligned}y = x^2 - \sin x: \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) \quad \text{(قاعدہ فرق)}\\ &= 2x - \cos x\end{aligned}$$

ب.

$$y = x^2 \sin x : \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) + 2x \sin x \quad \text{(قاعدہ حاصل ضرب)}$$
$$= x^2 \cos x + 2x \sin x$$

ج.

$$y = \frac{\sin x}{x} : \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) - \sin x \cdot 1}{x^2} \quad \text{قاعدہ حاصل تقسیم}$$
$$= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

۳۶۳۵ □

۳۶۳۶ آپ نے دیکھا اگر زاویے کی پیمائش ریڈیئن میں ہو $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ ہو گا اور $\sin x$ کا تفرق $\cos x$ ہو گا۔ یہی وجہ ہے کہ احصاء کے
۳۶۳۷ میدان میں زاویہ درجات کے بجائے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔

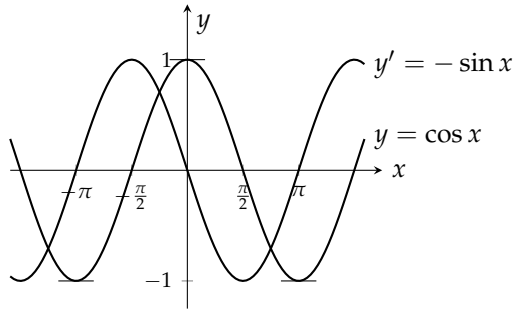
۳۶۳۸ کوسائن کا تفرق

۳۶۳۹ کوسائن کا تفرق حاصل کرنے کی خاطر ہمیں کلیہ

$$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$$

۳۶۴۰ استعمال کرنا ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\cos x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \quad \text{(تفرق کی تعریف)}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(\cos x \cos h - \sin x \sin h) - \cos x}{h}$$
$$= \lim_{g \to 0} \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin x \sin h}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \lim_{h \to 0} \sin x \cdot \frac{\sin h}{h}$$
$$= \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}$$
$$= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 \quad \text{(مثال ۳.۲۸ اور مسئلہ ۳.۴)}$$
$$= -\sin x$$



شکل ۳.۴۵: تفاعل $y = \cos x$ کا ڈھلوان تفاعل $y' = -\sin x$ دیتا ہے۔

۳۶۴۱ یوں کوسائن کا تفرق منفی سائن ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$$

۳۶۴۲ درج بالا تعلق کو شکل ۳.۴۵ میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں جہاں کوسائن تفاعل کا ڈھلوان صفر ہے (یعنی $x = -\pi, 0, \pi$) وہاں اس کے تفرق
۳۶۴۳ یعنی $y' = -\sin x$ کی قیمت صفر ہے۔ اسی طرح جہاں کوسائن تفاعل کا ڈھلوان زیادہ سے زیادہ بڑھتا یا گھٹتا ہے (مثلاً بالترتیب $x = -\frac{\pi}{2}$ اور
۳۶۴۴ $x = \frac{\pi}{2}$ پر) وہاں اس کے تفرق کی (بالترتیب مثبت اور منفی) چوٹی پائی جاتی ہے۔

۳۶۴۵ مثال ۳.۳۰:

ا.

$$\begin{aligned} y &= 5x + \cos x \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) \\ &= 5 - \sin x \end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned} y &= \sin x \cos x \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \sin x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) + \cos x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) \quad \text{(قاعدہ حاصل ضرب)} \\ &= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x) \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

ج.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\cos x}{1-\sin x} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{(1-\sin x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) - \cos x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2} && \text{(قاعدہ حاصل تقسیم)} \\
&= \frac{(1-\sin x)(-\sin x) - \cos x(0-\cos x)}{(1-\sin x)^2} \\
&= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2} && (\sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\
&= \frac{1}{1-\sin x}
\end{aligned}
$$

□

سادہ ہارمونی حرکت

اسپرنگ سے لٹکے جسم کو نیچے کھینچ کر چھوڑنے سے جسم اوپر نیچے دہراتا ہوا حرکت کرتا ہے جو سادہ ہارمونی حرکت کی ایک مثال ہے۔ اگلی مثال میں قوت روک (مثلاً مزاحمت) سے پاک حرکت پر غور کیا گیا ہے۔

مثال ۳.۳۱: اسپرنگ سے لٹکے جسم کو لمحہ $t = 0$ پر ساکن حال سے 5 اکائی نیچے کھینچ کر چھوڑتے ہوئے اوپر نیچے حرکت کرنے دیا جاتا ہے۔ لمحہ t پر جسم کا مقام درج ذیل ہے۔

$$s = 5\cos t$$

جسم کی سمتی رفتار اور جسم کا اسراع تلاش کریں۔

حل

$$
\begin{aligned}
s &= 5\cos t && \text{ہم مقام} \\
v &= \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5\cos t) = 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos t) = -5\sin t && \text{سے سمتی رفتار} \\
a &= \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-5\sin t) = -5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin t) = -5\cos t && \text{اور اسراع حاصل کرتے ہیں}
\end{aligned}
$$

□

درج بالا مثال میں حاصل مساواتوں سے ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

۱. وقت گزرنے کے ساتھ محور s پر جسم $s = 5$ اور $s = -5$ کے بیچ حرکت کرتا ہے۔ حرکت کا حیطہ 5 ہے جبکہ اس کا تعدد 2π ہے جو $\cos t$ کا تعدد ہے۔

۲. تفاعل $\sin t$ کی اعظم قیمت اس لمحہ پر ہو گی جب $\cos t = 0$ ہو۔ یوں جسم کی رفتار $|v| = 5|\sin t|$ اس لمحہ پر اعظم ہو گی جب $\cos t = 0$ ہو یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام سے گزرتا ہے۔

جسم کی رفتار اس لمحے صفر ہوتی ہے جب $\sin t = 0$ ہو جو حرکت کے وقفے کے آخری نقطوں پر ہوتا ہے یعنی جب $\cos t = \mp 1$ ہوتا ہے۔

۳. جسم کا اسراع $a = -5\cos t$ اس لمحہ صفر ہو گا جب $\cos t = 0$ ہو یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام پر ہو۔ کسی دوسرے مقام پر اسپرنگ یا تو جسم کو دھکیل رہا ہو گا اور یا جسم کو روکنے کی کوشش کر رہا ہو گا۔ اسراع کی مطلق قیمت مبدا سے دور تر نقطے پر اعظم ہو گی جہاں $\cos t = \mp 1$ ہو گا۔

جھٹکا

اسراع میں یکدم تبدیلی کو "جھٹکا" کہتے ہیں۔ جھٹکے سے مراد زیادہ اسراع نہیں بلکہ اسراع میں یکدم تبدیلی ہے۔ گاڑی میں سواری کے دوران گلاس سے پانی جھٹکے کی وجہ سے گرتا ہے۔ تفرق $\frac{\mathrm{d}^3 s}{\mathrm{d}t^3}$ جھٹکا پیدا کرتا ہے۔

تعریف: اسراع کے تفرق کو **جھٹکا**[۳۷] کہتے ہیں۔ اگر لمحہ t پر جسم کا مقام $s = f(t)$ ہو تب t پر اس کو درج ذیل جھٹکا محسوس ہو گا۔

$$j = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^3 s}{\mathrm{d}t^3}$$

□

بعض لوگوں کی طبیعت گاڑی میں صفر کرنے سے خراب ہوتی ہے۔ اس کی وجہ اسراع میں غیر متوقع تبدیلیاں ہیں۔ سڑک پر نظر رکھنے سے اسراع میں تبدیلی زیادہ غیر متوقع نہیں ہو گی اور سوار کی طبیعت بھی کم خراب ہو گی۔ آنکھوں اور کانوں سے حاصل معلومات ایک دوسرے کی تصدیق نہیں کرتیں لہٰذا ذہن الجھاؤ کا شکار ہو کر فیصلہ کرتا ہے کہ یہ زہر کا اثر ہو سکتا ہے۔ زہر کو جسم سے خارج کرنے کے لیے پیٹ خالی کیا جاتا ہے۔

مثال ۳.۳۲:

ا. مستقل ثقلی اسراع $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ کا جھٹکا صفر ہو گا:

$$j = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = 0$$

اسی لیے ایک جگہ پر بیٹھنے سے ہماری طبیعت خراب نہیں ہوتی۔

ب. مثال ۳.۳۱ کی سادہ ہارمونی حرکت کا جھٹکا

$$\begin{aligned} j &= \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-5\cos t) \\ &= 5\sin t \end{aligned}$$

ہو گا جس کی اعظم مطلق قیمت اس لمحے پر ہو گی جب $\sin t = \mp 1$ ہو جو مبدا پر ہو گا جہاں اسراع کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔

---

[۳۷] jerk

۳۷۸ □

۳۷۹ **دیگر بنیادی تفاعلات کے تفرق**

۳۸۰ چونکہ $\sin x$ اور $\cos x$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہیں لہٰذا ان سے متعلقہ درج ذیل تفاعل ہر اس x پر قابل تفرق ہوں گے جہاں یہ معین
۳۸۱ ہوں۔

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$
$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

۳۸۲ ان کے تفرق، جو درج ذیل ہیں، کو قاعدہ حاصل تقسیم سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) &= \sec^2 x \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cot x) &= -\csc^2 x \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x) &= \sec x \tan x \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\csc x) &= -\csc x \cot x
\end{aligned} \tag{۲}$$

۳۸۳ درج بالا حاصل کرنے کی ترکیب کو دیکھنے کی خاطر ہم $\tan x$ اور $\sec x$ کے تفرق لینا دکھاتے ہیں۔ سوال ۳.۲۲۱ اور سوال ۳.۲۲۲ میں آپ سے باقی
۳۸۴ تعلق حاصل کرنے کو کہا گیا ہے۔

۳۸۵ مثال ۳.۳۳: $y = \tan x$ کا تفرق تلاش کریں۔

۳۸۶ **حل**

۳۸۷

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) &= \frac{\cos x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) - \sin x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)}{\cos^2 x} \qquad \text{(قاعدہ حاصل تقسیم)} \\
&= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

۳۸۸ □

مثال ۳.۳۴: اگر $y = \sec x$ ہو تب y'' تلاش کریں۔

حل

$$\begin{aligned}
y &= \sec x \\
y' &= \sec x \tan x && \text{(مساوات ۲)} \\
y'' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x \tan x) \\
&= \sec x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) + \tan x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x) && \text{(قاعدہ حاصل ضرب)} \\
&= \sec x(\sec^2 x) + \tan x(\sec x \tan x) \\
&= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x
\end{aligned}$$

□

مثال ۳.۳۵:

ا.

$$\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x + \cot x) = 3 + \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cot x) = 3 - \csc^2 x$$

ب.

$$\begin{aligned}
\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2}{\sin x}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2\csc x) = 2\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\csc x) \\
&= 2(-\csc x \cot x) = -2\csc x \cot x
\end{aligned}$$

□

تکونیاتی تفاعل کا استمرار

چونکہ چھ بنیادی تکونیات تفاعل اپنے پورے دائرہ کار میں قابل تفرق ہیں لہٰذا مسئلہ ۳.۱ کے تحت یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری بھی ہوں گے۔ اس کا مطلب ہے کہ $\sin x$ اور $\cos x$ تمام x کے لیے استمراری ہیں، $\tan x$ اور $\sec x$ تمام x کے لیے استمراری ہیں ماسوائے جب x کی قیمت $\frac{\pi}{2}$ کا عددی صحیح مضرب ہو، $\csc x$ اور $\cot x$ تمام x کے لیے استمراری ہیں ماسوائے جب x کی قیمت π کی عدد صحیح مضرب ہو۔ ہر ان تفاعل کے لیے جہاں $f(c)$ معین ہو وہاں $\lim_{x\to c} f(x) = f(x)$ ہو گا۔ نتیجتاً ہم تکونیاتی تفاعل کے کئی الجبرائی ملاپ کی حدیں بلاواسطہ پُر کرنے سے حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال ۳.۳۶: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+\sec x}}{\cos(\pi-\tan x)} = \frac{\sqrt{2+\sec 0}}{\cos(\pi-\tan 0)} = \frac{\sqrt{2+1}}{\cos(\pi-0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ □

۳۷۰۲ **مسئلہ ۳.۴ کی مدد سے دیگر حد کی تلاش**

۳۷۰۳ θ کو جس طرح بھی ظاہر کیا جائے مساوات $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ مطمئن ہو گی۔ یوں درج ذیل ہوں گے

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \theta=x;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=1,\ \theta=7x;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{2x}{3}}{\frac{2x}{3}}=1,\ \theta=\frac{2x}{3}$$

۳۷۰۴ جہاں $x\to 0$ کرنا $\theta\to 0$ کرنے کے مترادف ہے۔ یہ جانتے ہوئے اور زاویہ کو ریڈیئن میں ناپتے ہوئے ہم متعلقہ حد تلاش کر سکتے ہیں۔

۳۷۰۵ مثال ۳.۳۷:

ا.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(2/5)\cdot\sin 2x}{(2/5)\cdot 5x}\\&=\frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\\&=\frac{2}{5}\cdot 1=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

(تفاعل کو مسئلہ ۳.۴ کی درکار صورت میں لکھا گیا ہے)

ب.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{5x}&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{5x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}\right)\\&=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\right)\\&=\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{\cos 0}\right)=\frac{2}{5}\end{aligned}$$

$(\tan 2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x})$

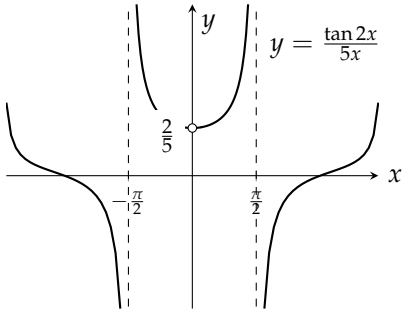
۳۷۰۶ شکل ۳.۴۶ سے رجوع کریں۔ □

۳۷۰۷ مثال ۳.۳۸: درج ذیل میں $\theta=t-\frac{\pi}{2}$ لے کر حل حاصل کیا گیا ہے۔ یوں $t\to\frac{\pi}{2}$ سے مراد $\theta\to 0$ ہو گا۔

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t-\frac{\pi}{2})}{t-\frac{\pi}{2}}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

۳۷۰۸ □

۳۷۰۹ احصاء کے میدان کے علاوہ تفاعل $\frac{\sin x}{x}$ دیگر میدانوں مثلاً کوانٹم میکانیات، برقی انجینئری، وغیرہ میں بھی پایا جاتا ہے۔



شکل ۳.۴۶: ترسیم برائے مثال ۳.۳۷

۳۷۱۰ **سوالات**

۳۷۱۱ سوال ۳.۱۵۵ تا سوال ۳.۱۶۶ میں $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

۳۷۱۲ سوال ۳.۱۵۵: $y = -10x + 3\cos x$

۳۷۱۳ سوال ۳.۱۵۶: $y = \frac{2}{x} + 3\sin x$

۳۷۱۴ سوال ۳.۱۵۷: $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$

۳۷۱۵ سوال ۳.۱۵۸: $y = x^2 \cot x - \frac{1}{x^2}$

۳۷۱۶ سوال ۳.۱۵۹: $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$

۳۷۱۷ سوال ۳.۱۶۰: $y = (\sin x + \cos x)\sec x$

۳۷۱۸ سوال ۳.۱۶۱: $y = \frac{\cot x}{1+\cot x}$

۳۷۱۹ سوال ۳.۱۶۲: $y = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

۳۷۲۰ سوال ۳.۱۶۳: $y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\tan x}$

۳۷۲۱ سوال ۳.۱۶۴: $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\cos x}$

۳۷۲۲ سوال ۳.۱۶۵: $y = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x$

۳۷۲۳ سوال ۳.۱۶۶: $y = x^2 \cos x - 2x\sin x - 2\cos x$

۳۷۲۴ سوال ۳.۱۶۷ تا سوال ۳.۱۷۰ میں $\frac{ds}{dt}$ تلاش کریں۔

۳۷۲۵ سوال ۳.۱۶۷: $s = \tan t - t$

۳۷۲۶ سوال ۳.۱۶۸: $s = t^2 - \sec t + 1$

۳۷۲۷ سوال ۳.۱۶۹: $s = \frac{1+\csc t}{1-\csc t}$

۲۷۲۸ سوال ۳.۱۷۰: $s = \frac{\sin t}{1-\cos t}$

۲۷۲۹ سوال ۳.۱۷۱ تا سوال ۳.۱۷۴ میں $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ تلاش کریں۔

۲۷۳۰ سوال ۳.۱۷۱: $r = 4 - \theta^2 \sin\theta$

۲۷۳۱ سوال ۳.۱۷۲: $r = \theta \sin\theta + \cos\theta$

۲۷۳۲ سوال ۳.۱۷۳: $r = \sec\theta \csc\theta$

۲۷۳۳ سوال ۳.۱۷۴: $r = (1 + \sec\theta)\sin\theta$

۲۷۳۴ سوال ۳.۱۷۵ تا سوال ۳.۱۷۸ میں $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$ تلاش کریں۔

۲۷۳۵ سوال ۳.۱۷۵: $p = 5 + \frac{1}{\cot q}$

۲۷۳۶ سوال ۳.۱۷۶: $p = (1 + \csc q)\cos q$

۲۷۳۷ سوال ۳.۱۷۷: $p = \frac{\sin q + \cos q}{\cos q}$

۲۷۳۸ سوال ۳.۱۷۸: $p = \frac{\tan q}{1+\tan q}$

۲۷۳۹ سوال ۳.۱۷۹: (ا) $y = \csc x$ اور (ب) $y = \sec x$ کے لیے y'' تلاش کریں۔

۲۷۴۰ سوال ۳.۱۸۰: (ا) $y = -2\sin x$ اور (ب) $y = 9\cos x$ کے لیے $y^{(4)} = \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}$ تلاش کریں۔

۲۷۴۱ سوال ۳.۱۸۱ تا سوال ۳.۱۸۶ میں حد تلاش کریں۔

۲۷۴۲ سوال ۳.۱۸۱: $\lim\limits_{x\to 2} \sin(\frac{1}{x} - \frac{1}{2})$

۲۷۴۳ سوال ۳.۱۸۲: $\lim\limits_{x\to \pi/6} \sqrt{1 + \cos(\pi \csc x)}$

۲۷۴۴ سوال ۳.۱۸۳: $\lim\limits_{x\to 0} \sec[\cos x + \pi \tan(\frac{\pi}{4\sec x}) - 1]$

۲۷۴۵ سوال ۳.۱۸۴: $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{\pi + \tan x}{\tan x - 2\sec x}$

۲۷۴۶ سوال ۳.۱۸۵: $\lim\limits_{t\to 0} \tan(1 - \frac{\sin t}{t})$

۲۷۴۷ سوال ۳.۱۸۶: $\lim\limits_{\theta\to 0} \cos(\frac{\pi\theta}{\sin\theta})$

۲۷۴۸ سوال ۳.۱۸۷ تا سوال ۳.۲۰۲ میں حد تلاش کریں۔

۲۷۴۹ سوال ۳.۱۸۷: $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{\sin\sqrt{2}\theta}{\sqrt{2}\theta}$

۲۷۵۰ سوال ۳.۱۸۸: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin kt}{t}, \quad (k = \text{مستقل})$

۳۷۵۱ سوال ۳.۱۸۹: $\lim_{y\to 0} \frac{\sin 3y}{4y}$

۳۷۵۲ سوال ۳.۱۹۰: $\lim_{h\to 0^-} \frac{h}{\sin 3h}$

۳۷۵۳ سوال ۳.۱۹۱: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{x}$

۳۷۵۴ سوال ۳.۱۹۲: $\lim_{t\to 0} \frac{2t}{\tan t}$

۳۷۵۵ سوال ۳.۱۹۳: $\lim_{x\to 0} \frac{x \csc 2x}{\cos 5x}$

۳۷۵۶ سوال ۳.۱۹۴: $\lim_{x\to 0} 6x^2 \cot x \csc 2x$

۳۷۵۷ سوال ۳.۱۹۵: $\lim_{x\to 0} \frac{x+x\cos x}{\sin x \cos x}$

۳۷۵۸ سوال ۳.۱۹۶: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x+\sin x}{2x}$

۳۷۵۹ سوال ۳.۱۹۷: $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(1-\cos t)}{1-\cos t}$

۳۷۶۰ سوال ۳.۱۹۸: $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(\sin h)}{\sin h}$

۳۷۶۱ سوال ۳.۱۹۹: $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\sin 2\theta}$

۳۷۶۲ سوال ۳.۲۰۰: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$

۳۷۶۳ سوال ۳.۲۰۱: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 8x}$

۳۷۶۴ سوال ۳.۲۰۲: $\lim_{y\to 0} \frac{\sin 3y \cot 5y}{y \cot 4y}$

۳۷۶۵ **مماس خطوط**

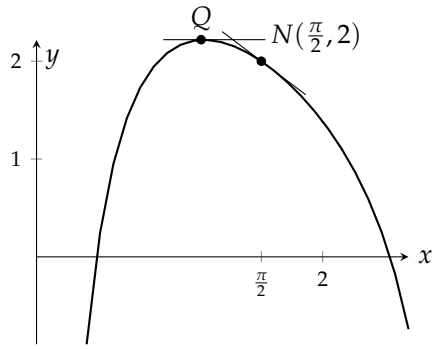
۳۷۶۶ سوال ۳.۲۰۳ تا سوال ۳.۲۰۶ میں دیے گئے دائرہ کار پر تفاعل ترسیم کریں اور دیے گئے نقطوں پر تفاعل کے مماس بھی ساتھ ہی ترسیم کریں۔ تفاعل اور مماس
۳۷۶۷ کی مساواتوں کو اپنی اپنی ترسیم کے قریب لکھیں۔

۳۷۶۸ سوال ۳.۲۰۳: $y = \sin x,\ -3\pi/2 \le x \le 2\pi,\ x = -\pi, 0, 2\pi$

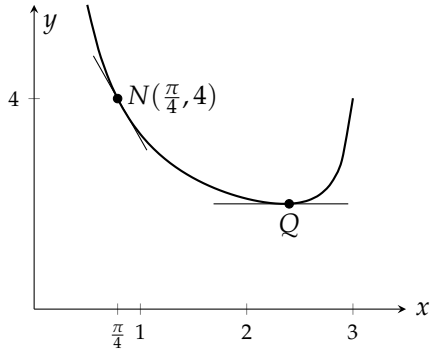
۳۷۶۹ سوال ۳.۲۰۴: $y = \tan x,\ -\pi/2 < x < \pi/2,\ x = -\pi/3, 0, \pi/3$

۳۷۷۰ سوال ۳.۲۰۵: $y = \sec x,\ -\pi/2 < x < \pi/2,\ x = -\pi/3, \pi/4$

۳۷۷۱ سوال ۳.۲۰۶: $y = 1 + \cos x,\ -3\pi/2 \le x \le 2\pi,\ x = -\pi/3, 3\pi/2$



شکل ۳.۴۷: تفاعل $y = 4 + \cot x - 2\csc x$ کی منحنی (سوال ۳.۲۱۳)



شکل ۳.۴۸: تفاعل $y = 1 + \sqrt{2}\csc x + \cot x$ کی منحنی (سوال ۳.۲۱۴)

کیا سوال ۳.۲۰۷ تا سوال ۳.۲۱۰ کے دائرہ کار $0 \le x \le 2\pi$ میں افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر ہاں، تو کہاں؟ اگر نہیں تو کیوں نہیں؟ ہو سکتا ہے کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرنے سے مدد ملے۔

سوال ۳.۲۰۷: $y = x + \sin x$

سوال ۳.۲۰۸: $y = 2x + \sin x$

سوال ۳.۲۰۹: $y = x - \cot x$

سوال ۳.۲۱۰: $y = x + 2\cos x$

سوال ۳.۲۱۱: منحنی $y = \tan x$ پر $-\pi/2 < x < \pi/2$ کے بیچ وہ تمام نقطے تلاش کریں جہاں مماس خط $y = 2x$ کے متوازی ہیں۔ منحنی اور ان مماس ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال ۳.۲۱۲: منحنی $y = \cot x,\ 0 < x < \pi$ پر وہ تمام نقطے تلاش کریں جہاں مماس خط $y = -x$ کے متوازی ہیں۔ منحنی اور مماس ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال ۳.۲۱۳: نقطہ N اور نقطہ Q پر شکل ۳.۴۷ کی منحنی کے مماس کی مساواتیں حاصل کریں۔ Q پر مماس افقی ہے۔

سوال ۳.۲۱۴: نقطہ N اور نقطہ Q پر شکل ۳.۴۸ کی منحنی کے مماس کی مساواتیں حاصل کریں۔ Q پر مماس افقی ہے۔

سادہ ہارمونی حرکت

سوال ۳.۲۱۵ تا سوال ۳.۲۱۵ میں محوری لکیر s پر جسم کا مقام $s = f(t)$ دیا گیا ہے جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔ لمحہ $t = \pi/4$ سیکنڈ پر جسم کی سمتی رفتار، رفتار، اسراع اور جھٹکا تلاش کریں۔

سوال ۳.۲۱۵: $s = 2 - 2\sin t$

سوال ۳.۲۱۶: $s = \sin t + \cos t$

نظریہ اور مزید مثالیں

سوال ۳.۲۱۷: کیا c کی کوئی قیمت درج ذیل تفاعل کو $x = 0$ پر استراری بنا سکتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

سوال ۳.۲۱۸: کیا b کی کوئی قیمت درج ذیل تفاعل کو $x = 0$ پر (ا) استراری (ب) قابل تفرق بنا سکتی ہے؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, x \geq 0 \end{cases}$$

سوال ۳.۲۱۹: $\frac{\mathrm{d}^{999}}{\mathrm{d}x^{999}}(\cos x)$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۲۲۰: $\frac{\mathrm{d}^{725}}{\mathrm{d}x^{725}}(\sin x)$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۲۲۱: x کے لحاظ سے (ا) $\sec x$ اور (ب) $\csc x$ کے تفرق کا کلیہ اخذ کریں۔

سوال ۳.۲۲۲: x کے لحاظ سے $\cot x$ کے تفرق کا کلیہ اخذ کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۳.۲۲۳: $-\pi \leq x \leq 2\pi$ کے لیے $y = \cos x$ ترسیم کریں۔ ساتھ ہی $h = 1, 0.5, 0.3, 0.1$ لیتے ہوئے درج ذیل ترسیم کریں۔

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

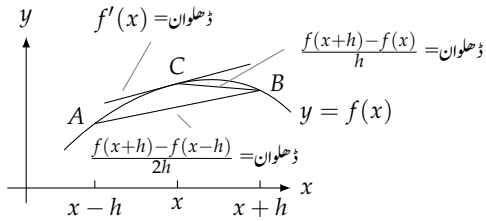
اب $h = -1, -0.5, -0.3$ کے لیے اس کو ترسیم کریں۔ دیکھیں $h \to 0^+$ اور $h \to 0^-$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟ کیا ہو رہا ہے؟

سوال ۳.۲۲۴: وسطی فرق حاصل تقسیم **وسطی تفریقی حاصل تقسیم**[۳۸]

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

کو اعدادی تراکیب میں $f'(x)$ کی تخمین کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ اگر $f'(x)$ موجود ہو تب $h \to 0$ کرتے ہوئے یہ تفاعل کا تفرق دیتا ہے جو h کی کسی بھی قیمت کے لیے عموماً **فرمٹے تفریقی حاصل تقسیم**[۳۹]

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



شکل ۳.۴۹: فرمٹ تفریقی حاصل تقسیم سے وسطی تفریقی حاصل تقسیم بہتر ڈھلوان دیتا ہے۔

۳۸۰۳ سے بہتر ہوتا ہے (شکل ۳.۴۹)۔ (ا) یہ دیکھنے کی خاطر کہ $f(x) = \sin x$ کا وسطی تفریقی حاصل تقسیم کتنا تیزی سے $f'(x) = \cos x$ تک
۳۸۰۴ پہنچتا ہے، $h = 1, 0.5, 0.3$ لیتے ہوئے وقفہ $[-\pi, 2\pi]$ پر $y = \cos x$ اور

$$y = \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{2h}$$

۳۸۰۵ کو اکٹھا ترسیم کریں۔ سوال ۳.۲۲۳ میں h کی انہیں قیمتوں کی ترسیمات کے ساتھ موازنہ کریں۔

۳۸۰۶ (ب) یہ دیکھنے کی خاطر کہ $f(x) = \cos x$ کا وسطی تفریقی حاصل تقسیم کتنا تیزی سے $f'(x) = -\sin x$ تک پہنچتا ہے، $h =$
۳۸۰۷ $1, 0.5, 0.3$ لیتے ہوئے وقفہ $[-\pi, 2\pi]$ پر $y = -\sin x$ اور

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos(x-h)}{2h}$$

۳۸۰۸ کو اکٹھا ترسیم کریں۔ سوال ۳.۲۲۳ میں h کی انہیں قیمتوں کی ترسیمات کے ساتھ موازنہ کریں۔

۳۸۰۹ سوال ۳.۲۲۵: وسطی تفریقی حاصل تقسیم کے لیے انتباہ بعض اوقات x پر ناقابل تفرق $f(x)$ کے لیے بھی وسطی تفریقی حاصل تقسیم

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

۳۸۱۰ کا $h \to 0$ کرتے ہوئے حد موجود ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر $f(x) = |x|$ لیں اور

$$\lim_{h \to 0} \frac{|0+h| - |0-h|}{2h}$$

۳۸۱۱ کا حساب لگائیں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ حد موجود ہے اگرچہ $x = 0$ پر $f(x) = |x|$ کا تفرق غیر موجود ہے۔

۳۸۱۲ سوال ۳.۲۲۶: دائرہ کار $(-\pi/2, \pi/2)$ پر $y = \tan x$ اور اس کا تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کیا ترسیم کا (ا) کم ترین ڈھلوان (ب)
۳۸۱۳ زیادہ سے زیادہ ڈھلوان پایا جاتا ہے؟ کیا ڈھلوان کبھی منفی بھی ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

---

[۳۸] centereddifferencequotient
[۳۹] Fermat'sdifferencequotient

سوال ۳.۲۲۷: دائرہ کار $0 < x < \pi$ پر $y = \cot x$ اور اس کا تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کیا ترسیم کا (ا) کم ترین ڈھلوان (ب) زیادہ سے زیادہ ڈھلوان پایا جاتا ہے؟ کیا ڈھلوان کبھی مثبت بھی ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۲۲۸: وقفہ $-2 \leq x \leq 2$ پر $y = \frac{\sin x}{x}$ ، $y = \frac{\sin 2x}{x}$ اور $y = \frac{\sin 4x}{x}$ کو اکٹھا ترسیم کریں۔ محور y کو ترسیمات کہاں کہاں قطع کرتی نظر آتی ہیں؟ کیا ترسیمات محور کو حقیقتاً قطع کرتی ہیں؟ $x \to 0$ کرتے ہوئے آپ $y = \frac{\sin 5x}{x}$ اور $y = \frac{\sin(-3x)}{x}$ کی ترسیمات سے کیا توقع کرتے ہیں؟ اور کیوں؟ k کی مزید مختلف قیمتوں کے لیے $y = \frac{\sin kx}{x}$ سے کیا توقع کی جا سکتی ہے؟ اپنے جوابات کی وجوہات پیش کریں۔

سوال ۳.۲۲۹: درجات بالمقابل ریڈیئن x کو درجات میں ناپتے ہوئے $\sin x$ اور $\cos x$ کے تفرق پر غور کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کرتے ہیں۔

ا. زاویہ کو درجات میں رکھ کر کمپیوٹر پر

$$f(h) = \frac{\sin h}{h}$$

ترسیم کرتے ہوئے $\lim_{h\to 0} f(h)$ کا اندازہ لگائیں۔ اس اندازے کا $\frac{\pi}{180}$ کے ساتھ موازنہ کریں۔ کیا اس حد کی قیمت $\frac{\pi}{180}$ کے برابر ہونے کی کوئی وجہ پیش کی جا سکتی ہے۔

ب. زاویہ کو درجات میں ہی رکھتے ہوئے درج ذیل کا اندازہ لگائیں۔

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}$$

ج. اب $\sin x$ کے تفرق کو دوبارہ دیکھیں۔ زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے اس عمل سے گزرتے ہوئے $\sin x$ کا تفرق حاصل کریں۔

د. اسی طرح زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے $\cos x$ کے تفرق کا عمل استعمال کرتے ہوئے $\cos x$ کے تفرق کا کلیہ حاصل کریں۔

ھ. بلند رتبی تفرق لیتے ہوئے زاویہ کو درجات میں رکھنے کے مسئلے جلد سامنے آتے ہیں۔ $y = \sin x$ اور $y = \cos x$ کے لیے y'' اور y''' تلاش کریں۔

۳.۵ زنجیری قاعدہ

ہم $\sin x$ اور $x^2 - 4$ کا تفرق لینا جانتے ہیں۔ مرکب تفاعل مثلاً $\sin(x^2 - 4)$ کا تفرق **زنجیری قاعدہ**[۴۰] کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے جس کے تحت قابل تفرق تفاعل کے مرکب کا تفرق ان کے انفرادی تفرق کا حاصل ضرب ہو گا۔ احصاء میں تفرق کے حصول کے لیے زنجیری قاعدہ غالباً سب سے زیادہ استعمال کیا جاتا ہے۔ اس حصے میں زنجیری قاعدہ اور اس کے استعمال پر غور کیا جائے گا۔ شروع چند مثالوں سے کرتے ہیں۔

---

[۴۰] chainrule

مثال ۳.۳۹: تفاعل $y = 6x - 10 = 2(3x - 5)$ حقیقتاً تفاعل $y = 2u$ اور $u = 3x - 5$ کا مرکب ہے۔ ان تینوں تفاعلات کے تفرق کا آپس میں تعلق کیا ہے؟

حل

ان تفاعل کے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = 2, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3$$

چونکہ $6 = 2 \cdot 3$ ہے لہٰذا اس مثال میں درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

کیا تعلق

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

ایک اتفاق ہے؟ تفرق کو شرح تبدیلی تصور کرنے سے یہ تعلق مناسب لگتا ہے۔ تفاعل $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ کے لیے اگر u سے y دگنی تیزی سے تبدیل ہو اور x سے y تین گنا تیز تبدیل ہو تب ہم توقع کریں گے کہ x سے y چھ گنا زیادہ تیزی سے تبدیل ہو گا۔

آئیں دوسرا تفاعل لے کر دیکھیں۔

مثال ۳.۴۰: $y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2 + 1)^2$ کو $y = u^2$ اور $u = 3x^2 + 1$ کا مرکب لکھا جا سکتا ہے۔ تفرق لیتے ہوئے

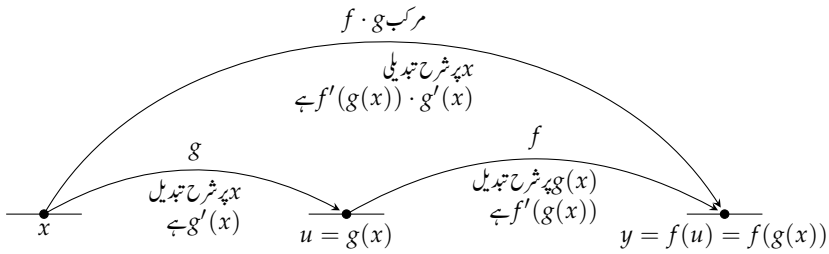
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2 + 1) \cdot 6x \\ &= 36x^3 + 12x\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(9x^4 + 6x^2 + 1) \\ &= 36x^3 + 12x\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں اور دوبارہ درج ذیل لکھنا ممکن ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$



شکل ۳.۵۰: $g(x)$ پر f کے تفرق اور x پر g کے تفرق کا حاصل ضرب x پر مرکب $f \cdot g$ کا تفرق دے گا۔

□

x پر مرکب تفاعل $f(g(x))$ کا تفرق $g(x)$ پر f کے تفرق اور x پر g کے تفرق کا حاصل ضرب ہے۔ اس کو زنجیری قاعدہ کہتے ہیں (شکل ۳.۵۰)۔

مسئلہ ۳.۵: **زنجیری قاعدہ**

اگر $u = g(x)$ پر $f(u)$ قابل تفرق ہو اور x پر $g(x)$ قابل تفرق ہو تب x پر مرکب تفاعل

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

قابل تفرق ہو گا اور

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{۱}$$

ہو گا۔ **لیبنز علامتیت**[۴۱] استعمال کرتے ہوئے، اگر $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ ہوں تب

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{۲}$$

ہو گا جہاں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$ کو $u = g(x)$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔

زنجیری قاعدے کو

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

لکھ کر $\Delta x \to 0$ کر کے حد لینے سے زنجیری قاعدہ ثابت نہیں کیا جا سکتا چونکہ عین ممکن ہے کہ x میں تبدیلی سے u میں تبدیلی Δu صفر ہو۔ زنجیری قاعدہ ثابت کرنے کی خاطر ہمیں حصہ ۴.۷ میں پیش کیے گئے تصورات کی ضرورت ہو گی۔ یہ ثبوت اس وقت پیش کیا جائے گا جب ہم اس کو سمجھنے کے قابل ہوں گے۔

---

[۴۱] Leibniznotation

مثال ۳.۴۱: $y = \sqrt{x^2+1}$ کا تفرق تلاش کریں۔

حل

یہاں $y = f(g(x))$ یعنی $u = x^2+1$ اور $f(u) = \sqrt{u}$ ہیں۔چونکہ f اور g کے تفرق

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad g'(x) = 2x$$

ہیں لہٰذا زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)\\ &= \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (2x)\\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\end{aligned}$$

□

بیرونی و اندرونی قاعدہ

بعض اوقات زنجیری قاعدے کو درج ذیل نقطہ نظر سے دیکھنا مفید ثابت ہوتا ہے۔اگر $y = f(g(x))$ ہو تب مساوات ۲ کہتی ہے

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'[g(x)] \cdot g'(x) \tag{۳}$$

ہوگا۔الفاظ میں مساوات ۳ کہتی ہے $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ حاصل کرنے کی خاطر اندرونی تفاعل "g" کو نظر انداز کر کے "بیرونی تفاعل" f کا تفرق لیں اور اس کو "اندرونی تفاعل" g کے تفرق سے ضرب دیں۔

مثال ۳.۴۲:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \overbrace{\sin}^{\text{بیرونی}} \underbrace{(x^2+x)}_{\text{اندرونی}} = \overbrace{\cos}^{\text{تفرق بیرونی}} \underbrace{(x^2+x)}_{\text{اندرونی نظر انداز}} \cdot \underbrace{(2x+1)}_{\text{تفرق اندرونی}}$$

□

زنجیری قاعدے کا بار بار اطلاق

بعض اوقات ہم زنجیری قاعدے کو دو یا دو سے زیادہ مرتبہ استعمال کرتے ہوئے تفاعل کا تفرق حاصل کرتے ہیں۔درج ذیل مثال میں ایسا کیا گیا ہے۔

۳۸۷۶ مثال ۳.۴۳: $g(t) = \tan(5 - \sin 2t)$ کا تفرق تلاش کریں۔

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan(5 - \sin 2t)) \\
&= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5 - \sin 2t) && \text{$u = 5 - \sin 2t$ لے کر $\tan u$ کا تفرق} \\
&= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (0 - (\cos 2t) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t)) && \text{$u = 2t$ لے کر $5 - \sin u$ کا تفرق} \\
&= \sec^2(5 - \sin 2t) \cdot (-\cos 2t) \cdot 2 \\
&= -2(\cos 2t)\sec^2(5 - \sin 2t)
\end{aligned}$$

۳۸۷۷ □

۳۸۷۸ **زنجیری قاعدہ پر مبنی تفرق کے کلیات**

۳۸۷۹ تفرق کے حصول کے کئی کلیات میں زنجیری قاعدہ در ساختہ موجود ہوتا ہے۔ اگر f متغیر u کا قابل تفرق تفاعل ہو اور u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو

۳۸۸۰ تب $y = f(u)$ کو زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

۳۸۸۱ میں پُر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(u) = f'(u) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

۳۸۸۲ مثال کے طور پر اگر u تغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور $y = u^n$ ہو جہاں n عدد صحیح ہے تب زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u^n) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \\
&= nu^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

۳۸۸۳ قاعدہ ۳.۸: **طاقت کا زنجیری قاعدہ**

۳۸۸۴ اگر $u(x)$ قابل تفرق ہو اور n عدد صحیح ہو تب u^n قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u^n = nu^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{۴}$$

۳۸۸۵

۳۸۸۶ مثال ۳.۴۴:

ا.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^5 x &= 5\sin^4 x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)\\ &= 5\sin^4 x\cos x\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x+1)^{-3} &= -3(2x+1)^{-4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x+1)\\ &= -3(2x+1)^{-4}(2)\\ &= -6(2x+1)^{-4}\end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^3-x^4)^7 &= 7(5x^3-x^4)^6\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^3-x^4)\\ &= 7(5x^3-x^4)^6(5\cdot 3x^2-4x^3)\\ &= 7(5x^3-x^4)^6(15x^2-4x^3)\end{aligned}$$

د.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{3x-2}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x-2)^{-1}\\ &= -1(3x-2)^{-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x-2)\\ &= -1(3x-2)^{-2}(3)\\ &= -\frac{3}{(3x-2)^2}\end{aligned}$$

۳۸۸۷ □

۳۸۸۸ درج بالا مثال میں تفاعل $\sin^5 x$ استعمال کیا گیا جو $(\sin x)^5$ لکھنے کا مختصر طریقہ ہے۔

۳۸۸۹ مثال ۳.۴۵: درجات بالمقابل ریڈیئن

۳۸۹۰ یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ $\sin x$ کا تفرق اس صورت $\cos x$ ہو گا جب زاویہ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو نا کہ درجات میں۔ زنجیری قاعدہ ان دونوں میں

۳۸۹۱ فرق کو سمجھنے میں مدد دیتا ہے۔ چونکہ ریڈیئن $180^\circ = \pi$ ہوتا ہے لہذا ریڈیئن $x^\circ = \frac{\pi x}{180}$ ہو گا اور زنجیری قاعدہ کے تحت

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x^\circ) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(\tfrac{\pi x}{180}) = \tfrac{\pi}{180}\cos(\tfrac{\pi x}{180}) = \tfrac{\pi}{180}\cos(x^\circ)$$

ہو گا۔اسی طرح $\cos(x^\circ)$ کا تفرق $-\frac{\pi}{180}\sin(x^\circ)$ ہو گا۔

زاویہ کی پیمائش درجات میں رکھنے سے سائن اور کوسائن کے ایک مرتبہ تفرق میں تنگ کرنے والا $\frac{\pi}{180}$ کا جزو آن پڑتا ہے جو زیادہ مرتبہ تفرق کی صورت میں مصیبت بن جاتا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زاویے کی ناپ ریڈیئن میں رکھنے سے ہماری زندگی آسان ہو گی۔ □

مثال ۳.۴۶: برف کے مکعب کا پگھلنا برف کا مکعب کتنی دیر میں پگھلے گا؟

حل

پہلے اس مسئلے کا ریاضی نمونہ بناتے ہیں۔ہم فرض کرتے ہیں کہ پگھلنے سے مکعب کی شکل تبدیل نہیں ہوتی۔یوں اگر مکعب کے کنارے کی لمبائی s ہو تب اس کا حجم $H = s^3$ ہو گا۔ہم فرض کرتے ہیں کہ s اور H متغیر t (وقت) کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ مکعب کے حجم میں کمی مکعب کی سطح کی راست متناسب ہے۔یہ مفروضہ اس لیے قابل قبول ہو گا کہ مکعب پگھلنے کی وجہ مکعب میں داخل حراری توانائی ہے جو مکعب کی سطح سے مکعب میں داخلی ہوتی ہے۔یوں سطح کا رقبہ تبدیل کرنے سے حجم میں کمی کی رفتار تبدیل ہو گی۔ریاضی کی زبان میں ہم

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s} = -k(6s^2), \qquad k > 0$$

لکھتے ہیں جہاں منفی کی علامت حجم میں کمی کو ظاہر کرتی ہے۔تناسب کا مستقل k مثبت مقدار ہے (جو حقیقتاً کئی عوامل مثلاً ارد گرد کی ہوا، ہوا کا درجہ حرارت، رطوبت اور سورج کی روشنی وغیرہ پر منحصر ہو گا)۔

آخر میں ہمیں مزید (کم سے کم) ایک معلومات کی ضرورت ہے: کتنی دیر میں مکعب کا کتنا حصہ پگھلتا ہے؟ ہمیں ایک یا ایک سے زیادہ مشاہدہ کر کے یہ معلومات حاصل کرنی ہو گی۔فی الحال ہم فرض کرتے ہیں کہ پہلے ایک گھنٹہ میں ایک چوتھائی حجم پگھل جاتا ہے۔ابتدائی حجم کو H_0 لیتے ہوئے ریاضی کی زبان میں اس کو لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&H = s^3, \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -k(6s^2)\\
&H = H_0 \quad \text{پر} \quad t = 0\\
&H = \frac{3}{4}H_0 \quad \text{پر} \quad t = 1\,\mathrm{h}
\end{aligned}$$

اب ہمیں $H = 0$ پر t تلاش کرنی ہو گی۔

ہم $H = s^3$ کا تفرق زنجیری قاعدہ سے t کے لحاظ سے حاصل کر کے

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 3s^2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

تبدیلی کی شرح $-k(6s^2)$ کے برابر رکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}
3s^2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= -6ks^2\\
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= -2k
\end{aligned}$$

حاصل کرتے ہیں۔اطراف کی لمبائی مستقل شرح $2k$ سے کم ہو رہی ہے۔یوں اگر اطراف کی ابتدائی لمبائی s_0 ہو تب ایک گھنٹہ بعد لمبائی $s_1 = s_0 - 2k$ ہو گی جس سے

$$2k = s_0 - s_1$$

لکھا جا سکتا ہے۔پگھلنے کا دورانیہ $2kt = s_0$ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$t_{\text{پگھلنا}} = \frac{s_0}{2k} = \frac{s_0}{s_0 - s_1} = \frac{1}{1 - \frac{s_1}{s_0}}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{(\frac{3}{4}V_0)^{1/3}}{V_0^{1/3}} = (\tfrac{3}{4})^{1/3} \approx 0.91$$

ہے لہٰذا پگھلنے کے لیے درکار وقت درج ذیل ہو گا۔

$$t_{\text{پگھلنا}} = \frac{1}{1 - 0.91} \approx 11\,\text{h}$$

آپ نے دیکھا کہ اگر $\frac{1}{4}$ حجم پہلے 1 گھنٹہ میں پگھلتا ہو تب باقی حجم کو پگھلنے کے لیے تقریباً 10 گھنٹے درکار ہوں گے۔ □

اگر ہم سائنسدان ہوتے تب ہمارا اگلا قدم اس ریاضی نمونے کی درستگی کی تصدیق ہوتا۔ہم برف کے کئی مکعب لے کر ان کا مشاہدہ کرتے اور دیکھتے کہ ریاضی نمونہ کتنا قریبی نتائج دیتا ہے اور نمونے کو کس طرح مزید بہتر بنایا جا سکتا ہے۔

سوالات

سوال ۳.۲۳۰ تا سوال ۳.۲۳۷ میں $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ دیے گئے ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(g(x))g'(x)$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۲۳۰: $y = 6u - 9, \quad u = \frac{1}{2}x^4$

سوال ۳.۲۳۱: $y = 2u^3, \quad u = 8x - 1$

سوال ۳.۲۳۲: $y = \sin u, \quad u = 3x + 1$

سوال ۳.۲۳۳: $y = \cos u, \quad u = -\frac{x}{3}$

سوال ۳.۲۳۴: $y = \cos u, \quad u = \sin x$

سوال ۳.۲۳۵: $y = \sin u, \quad u = x - \cos x$

سوال ۳.۲۳۶: $y = \tan u, \quad u = 10x - 5$

سوال ۳.۲۳۷: $y = -\sec u, \quad u = x^2 + 7x$

۳۹۲۷ سوال ۳.۲۳۸ تا سوال ۳.۲۴۷ میں تفاعل کو $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ روپ میں لکھ کر $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

۳۹۲۸ سوال ۳.۲۳۸: $y = (2x+1)^{-7}$

۳۹۲۹ سوال ۳.۲۳۹: $y = (4-3x)^{9}$

۳۹۳۰ سوال ۳.۲۴۰: $y = (1-\frac{x}{7})^{-7}$

۳۹۳۱ سوال ۳.۲۴۱: $y = (\frac{x}{2}-1)^{-10}$

۳۹۳۲ سوال ۳.۲۴۲: $y = (\frac{x^2}{8}+x-\frac{1}{x})^{4}$

۳۹۳۳ سوال ۳.۲۴۳: $y = (\frac{x}{5}+\frac{1}{5x})^{5}$

۳۹۳۴ سوال ۳.۲۴۴: $y = \sec(\tan x)$

۳۹۳۵ سوال ۳.۲۴۵: $y = \cos(\pi - \frac{1}{x})$

۳۹۳۶ سوال ۳.۲۴۶: $y = \sin^3 x$

۳۹۳۷ سوال ۳.۲۴۷: $y = 5\cos^{-4} x$

۳۹۳۸ سوال ۳.۲۴۸ تا سوال ۳.۲۶۷ میں تفاعل کا تفرق تلاش کریں۔

۳۹۳۹ سوال ۳.۲۴۸: $p = \sqrt{3-t}$

۳۹۴۰ سوال ۳.۲۴۹: $q = \sqrt{2r-r^2}$

۳۹۴۱ سوال ۳.۲۵۰: $s = \frac{4}{3\pi}\sin 3t + \frac{4}{5\pi}\cos 5t$

۳۹۴۲ سوال ۳.۲۵۱: $s = \sin(\frac{3\pi t}{2}) + \cos(\frac{3\pi t}{2})$

۳۹۴۳ سوال ۳.۲۵۲: $r = (\csc\theta + \cot\theta)^{-1}$

۳۹۴۴ سوال ۳.۲۵۳: $r = -(\sec\theta + \tan\theta)^{-1}$

۳۹۴۵ سوال ۳.۲۵۴: $y = x^2\sin^4 x + x\cos^{-2} x$

۳۹۴۶ سوال ۳.۲۵۵: $y = \frac{1}{x}\sin^{-5} x - \frac{x}{3}\cos^3 x$

۳۹۴۷ سوال ۳.۲۵۶: $y = \frac{1}{21}(3x-2)^7 + (4-\frac{1}{2x^2})^{-1}$

۳۹۴۸ سوال ۳.۲۵۷: $y = (5-2x)^{-3} + \frac{1}{8}(\frac{2}{x}+1)^4$

۳۹۴۹ سوال ۳.۲۵۸: $y = (4x+3)^4(x+1)^{-3}$

۳۹۵۰ سوال ۳.۲۵۹: $y = (2x-5)^{-1}(x^2-5x)^6$

۳۹۵۱ سوال ۳.۲۶۰: $h(x) = x\tan(2\sqrt{x}) + 7$

۳۹۵۲ سوال ۳.۲۶۱: $k(x) = x^2\sec(\frac{1}{x})$

۳۹۵۳ سوال ۳.۲۶۲: $f(\theta) = (\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta})^2$

۳۹۵۴ سوال ۳.۲۶۳: $g(t) = (\frac{1+\cot t}{\sin t})^{-1}$

۳۹۵۵ سوال ۳.۲۶۴: $r = \sin(\theta^2)\cos(2\theta)$

۳۹۵۶ سوال ۳.۲۶۵: $r = \sec\sqrt{\theta}\tan(\frac{1}{\theta})$

۳۹۵۷ سوال ۳.۲۶۶: $q = \sin(\frac{t}{\sqrt{t+1}})$

۳۹۵۸ سوال ۳.۲۶۷: $q = \cot(\frac{\sin t}{t})$

۳۹۵۹ سوال ۳.۲۶۸ تا سوال ۳.۲۷۷ میں $\frac{dy}{dt}$ تلاش کریں۔

۳۹۶۰ سوال ۳.۲۶۸: $y = \sin^2(\pi t - 2)$

۳۹۶۱ سوال ۳.۲۶۹: $y = \sec^2 \pi t$

۳۹۶۲ سوال ۳.۲۷۰: $y = (1+\cos 2t)^{-4}$

۳۹۶۳ سوال ۳.۲۷۱: $y = (1+\cot(\frac{t}{2}))^{-2}$

۳۹۶۴ سوال ۳.۲۷۲: $y = \sin(\cos(2t-5))$

۳۹۶۵ سوال ۳.۲۷۳: $y = \cos(5\sin(\frac{t}{3}))$

۳۹۶۶ سوال ۳.۲۷۴: $y = (1+\tan^4(\frac{t}{12}))^3$

۳۹۶۷ سوال ۳.۲۷۵: $y = \frac{1}{6}(1+\cos^2(7t))^3$

۳۹۶۸ سوال ۳.۲۷۶: $y = \sqrt{1+\cos(t^2)}$

۳۹۶۹ سوال ۳.۲۷۷: $y = 4\sin(\sqrt{1+\sqrt{t}})$

۳۹۷۰ سوال ۳.۲۷۸ تا سوال ۳.۲۸۱ میں y'' تلاش کریں۔

۳۹۷۱ سوال ۳.۲۷۸: $y = (1+\frac{1}{x})^3$

۳۹۷۲ سوال ۳.۲۷۹: $y = (1-\sqrt{x})^{-1}$

۳۹۷۳ سوال ۳.۲۸۰: $y = \frac{1}{9}\cot(3x-1)$

۳۹۷۴ سوال ۳.۲۸۱: $y = 9\tan(\frac{x}{3})$

۳۹۷۵ تفرق کی اعدادی قیمتوں کا حصول

۳۹۷۶ سوال ۳.۲۸۲ تا سوال ۳.۲۸۷ میں x کی دی گئی قیمت پر $(f\circ g)'$ تلاش کریں۔

۳۹۷۷ سوال ۳.۲۸۲: $f(u) = u^5+1, \quad u = g(x) = \sqrt{x}, \quad x = 1$

۳۹۷۸ سوال ۳.۲۸۳: $f(u) = 1 - \frac{1}{u}, \quad u = g(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x = -1$

۳۹۷۹ سوال ۳.۲۸۴: $f(u) = \cot \frac{\pi u}{10}, \quad u = g(x) = 5\sqrt{x}, \quad x = 1$

۳۹۸۰ سوال ۳.۲۸۵: $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}, \quad u = g(x) = \pi x, \quad x = \frac{1}{4}$

۳۹۸۱ سوال ۳.۲۸۶: $f(u) = \frac{2u}{u^2+1}, \quad u = g(x) = 10x^2 + x + 1, \quad x = 0$

۳۹۸۲ سوال ۳.۲۸۷: $f(u) = (\frac{u-1}{u+1})^2, \quad u = g(x) = \frac{1}{x^2} - 1, \quad x = -1$

۳۹۸۳ سوال ۳.۲۸۸: فرض کریں x کے لحاظ سے تفاعل f اور g کے تفرق کی $x = 2$ اور $x = 3$ پر قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	$\frac{1}{3}$	-3
3	3	-4	2π	5

۳۹۸۴ درج ذیل میں دیے گئے x پر تفاعل کے تفرق کی قیمتیں تلاش کریں۔

۳۹۸۵ ا. $2f(x), x = 2$

۳۹۸۶ ب. $f(x) + g(x), x = 3$

۳۹۸۷ ج. $f(x) \cdot g(x), x = 3$

۳۹۸۸ د. $f(x)/g(x), x = 2$

۳۹۸۹ ھ. $f(g(x)), x = 2$

۳۹۹۰ و. $\sqrt{f(x)}, x = 2$

۳۹۹۱ ز. $1/g^2(x), x = 3$

۳۹۹۲ ح. $\sqrt{f^2(x) + g^2(x)}, x = 2$

۳۹۹۳ سوال ۳.۲۸۹: فرض کریں تفاعل f اور g کے x کے لحاظ سے تفرق کی $x = 0$ اور $x = 1$ پر قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	$1/3$
1	3	-4	$-1/3$	$-8/3$

۳۹۹۴ درج ذیل میں دیے گئے x پر تفاعل کے تفرق کی قیمتیں تلاش کریں۔

۳۹۹۵ ا. $5f(x) - g(x), x = 1$

۳۹۹۶ ب. $f(x)g^3(x), x = 0$

۳۹۹۷ ج. $\frac{f(x)}{g(x)+1}, x = 1$

۳۹۹۸ د. $f(g(x)), x = 0$

۳۹۹۹ ھ. x=0 g(f(x)),

۴۰۰۰ و. $(x^{11} + f(x))^{-2}, x = 1$

۴۰۰۱ ز. x=0 f(x+g(x)),

۴۰۰۲ سوال ۳.۲۹۰: اگر $s = \cos\theta$ اور $\frac{d\theta}{dt} = 5$ ہوں تب $\theta = 3\pi/2$ پر $\frac{ds}{dt}$ تلاش کریں۔

۴۰۰۳ سوال ۳.۲۹۱: اگر $y = x^2 + 7x - 5$ اور $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}$ ہوں تب $x = 1$ پر $\frac{dy}{dt}$ تلاش کریں۔

مرکب کی کئی صورتیں

اگر مرکب تفاعل کو مختلف انداز میں لکھنا ممکن ہو تب کیا ہو گا؟ کیا ہر صورت سے ایک جیسا تفرق حاصل ہو گا؟ زنجیری قاعدہ کہتا ہے کہ ایسا ہی ہو گا۔ اگلے دو سوالات میں اس عمل کو دیکھیں۔

سوال ۳.۲۹۲: تفاعل $y = x$ کو درج ذیل کا مرکب لکھتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

ا. $y = \frac{u}{5} + 7, \quad u = 5x - 35$

ب. $y = 1 + \frac{1}{u}, \quad u = \frac{1}{x-1}$

سوال ۳.۲۹۳: تفاعل $y = x^{3/2}$ کو درج ذیل کا مرکب لکھتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

ا. $y = u^3, \quad u = \sqrt{x}$

ب. $y = \sqrt{u}, \quad u = x^3$

مماس اور ڈھلوان

سوال ۳.۲۹۴:

ا. $x = 1$ پر منحنی $y = 2\tan(\pi x/4)$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

ب. وقفہ $-2 < x < 2$ پر منحنی کے ڈھلوان کی اقل قیمت کیا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۲۹۵:

ا. مبدا پر $y = \sin 2x$ اور $y = -\sin\frac{x}{2}$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔ کیا ان مماس کا آپس میں کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا مبدا پر $y = \sin mx$ اور $y = -\sin\frac{x}{m}$ کی مماسات کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے جہاں مستقل $m \neq 0$ ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ج. کسی بھی دیے گئے m کے لیے $y = \sin mx$ اور $y = -\sin\frac{x}{m}$ کا زیادہ سے زیادہ ڈھلوان کیا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

د. وقفہ $[0, 2\pi]$ پر تفاعل $y = \sin x$ ایک چکر پورا کرتا ہے، تفاعل $y = \sin 2x$ دو چکر پورا کرتا ہے، تفاعل $y = \sin\frac{x}{2}$ آدھا چکر پورا کرتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ کیا اس وقفے پر تفاعل $y = \sin mx$ کے مکمل چکر اور مبدا پر تفاعل کے ڈھلوان کا آپس میں کوئی تعلق ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

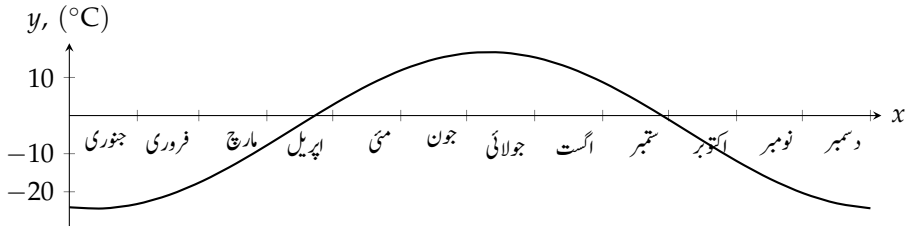
نظریہ، مثالیں اور استعمال

سوال ۳.۲۹۶: مشین کا بہت تیز چلنا ایک گاڑی کے انجن کا **بوکا**[۴۲] (پسٹن) اوپر نیچے دوری حرکت کرتا ہے جو

$$s = A\cos(2\pi bt)$$

---

[۴۲] piston



شکل ۳.۵۱: اوسط درجہ حرارت

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمحہ t پر بوکے کا مقام s ہے جبکہ A اور b مثبت مستقل ہیں۔ حرکت کا حیطہ A اور اس کا تعدد (ایک سیکنڈ میں اوپر نیچے حرکت کی گنتی) b ہے۔ تعدد دگنا کرنے کا بوکے کی سمتی رفتار، اسراع اور جھٹکے پر کیا اثر ہو گا؟ (یہ جاننے کے بعد آپ سمجھ سکتے ہیں کہ مشین تیز چلانے سے کیوں خراب ہوتی ہے۔)

سوال ۳.۲۹۷: قطب شمالی کے نزدیک ایلاسکا کے ایک شہر میں درجہ حرارت ایلاسکا[۴۳] کے ایک شہر میں پورے سال کے ہر دن کا اوسط درجہ حرارت شکل ۳.۵۱ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ یہ ترسیم درج ذیل تفاعل سے ظاہر کی جا سکتی ہے۔

$$y = 20.56 \sin[\tfrac{2\pi}{365}(x - 101)] - 3.89$$

ا. کس دن درجہ حرارت تیز ترین تبدیل ہوتا ہے؟

ب. ایک دن میں درجہ حرارت کی زیادہ سے زیادہ تبدیلی کتنی ہے؟

سوال ۳.۲۹۸: محوری لکیر پر جسم کا مقام $s = \sqrt{1+4t}$ ہے جہاں t کی اکائی سیکنڈ اور s کی اکائی میٹر ہے۔ لمحہ $t = 6\,\mathrm{s}$ پر جسم کی سمتی رفتار اور جسم کا اسراع کیا ہے؟

سوال ۳.۲۹۹: ساکن حال کے t سیکنڈ بعد ایک گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار $v = k\sqrt{s}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے جہاں k مستقل اور ساکن مقام سے فاصلہ s ہے۔ دکھائیں کہ جسم کا اسراع مستقل ہے۔

سوال ۳.۳۰۰: زمین کی فضا میں داخل ہونے والے شہاب ثاقب کی سمتی رفتار $\sqrt{s}$ کے بالعکس متناسب ہے جہاں زمین کے وسط سے شہاب ثاقب کا فاصلہ s ہے۔ دکھائیں کہ شہاب ثاقب کا اسراع s^2 کے بالعکس متناسب ہے۔

سوال ۳.۳۰۱: محور x پر حرکت کرنے والے ایک ذرہ کی سمتی رفتار $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$ ہے۔ دکھائیں کہ ذرے کا اسراع $f(x)f'(x)$ ہے۔

سوال ۳.۳۰۲: لٹکن کا دوری عرصہ بالمقابل درجہ حرارت ایک لٹکن جس کی لمبائی L ہو کا دوری عرصہ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ہو گا جہاں لٹکن کے مقام پر ثقلی اسراع کو g سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یہاں T کی اکائی سیکنڈ اور L کی اکائی میٹر ہے۔ اگر لٹکن کسی دھات سے بنا ہو تب اس کی لمبائی درجہ حرارت کے

---

[۴۳] Alaska

ساتھ درج ذیل کلیہ کے تحت تبدیل ہو گی

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}u} = kL$$

جہاں درجہ حرارت کو u سے ظاہر کیا گیا ہے اور k مستقل ہے۔ دکھائیں کہ حرارت کے ساتھ دوری عرصہ تبدیل ہونے کی شرح $\frac{kT}{2}$ ہو گی۔

سوال ۳.۳۰۳: اگر $f(x) = x^2$ اور $g(x) = |x|$ ہوں تب مرکبات

$$(f \circ g)(x) = |x|^2 = x^2 \quad \text{اور} \quad (g \circ f)(x) = \left|x^2\right| = x^2$$

دونوں $x = 0$ پر قابل تفرق ہیں اگرچہ $x = 0$ پر g از خود قابل تفرق نہیں۔ کیا یہ زنجیری قاعدہ کے مترادف ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۳۰۴: فرض کریں $x = 1$ پر $u = g(x)$ قابل تفرق ہے اور $u = g(1)$ پر $y = f(u)$ قابل تفرق ہے۔ اگر $x = 1$ پر $y = f(g(x))$ کی منحنی کا مماس افقی ہو تب کیا $x = 1$ پر g کے مماس یا $u = g(1)$ پر f کے مماس کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۳۰۵: فرض کریں کہ $x = -5$ پر $u = g(x)$ قابل تفرق ہے اور $u = g(-5)$ پر $y = f(u)$ قابل تفرق ہے اور $(f \circ g)'(-5)$ منفی ہے۔ کیا $g'(-5)$ اور $f'(g(-5))$ کی قیمتوں کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے۔

زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اگلے دو سوالات میں دیے گئے تفاعل x^n کے لیے دکھائیں کہ طاقتی قاعدہ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$ مطمئن ہوتا ہے۔

سوال ۳.۳۰۶: $x^{1/4} = \sqrt{\sqrt{x}}$

سوال ۳.۳۰۷: $x^{3/4} = \sqrt{x\sqrt{x}}$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۳.۳۰۸: $y = \sin 2x$ کا تفرق وقفہ $-2 \leq x \leq 3.5$ کے لیے تفاعل $y = 2\cos 2x$ ترسیم کریں۔ ساتھ ہی $h = 1, 0.5, 0.2$ کے لیے

$$y = \frac{\sin 3(x+h) - \sin 2x}{h}$$

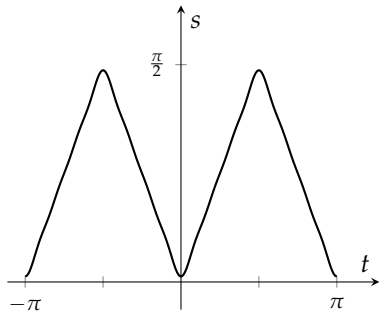
ترسیم کریں۔ h کی دیگر (بشمول منفی) قیمتوں کے لیے بھی اس کو ترسیم کریں۔ $h \to 0$ کرتے ہوئے آپ کیا دیکھتے ہیں؟ اس کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۳۰۹: درج ذیل کثیر رکنی شکل ۳.۵۲ میں دکھائی گئی ہے جو وقفہ $[-\pi, \pi]$ پر تقریباً دندان موج $s = g(t)$ نظر آتی ہے۔

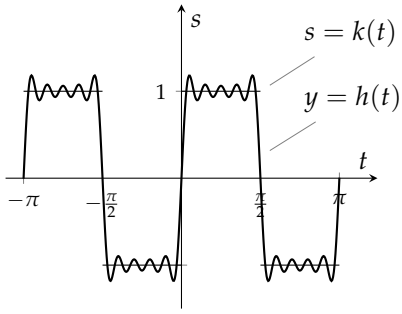
$$s = f(t) = 0.78540 - 0.63662\cos 2t - 0.07074\cos 6t - 0.02546\cos 10t - 0.01299\cos 14t$$

جہاں دندان موج معین ہو وہاں اس کثیر رکنی کا تفرق دندان موج کے تفرق کو کتنا خوش اسلوبی سے ظاہر کرتا ہے؟ یہ معلوم کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

۱. وقفہ $[-\pi, \pi]$ پر $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$ (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔



شکل ۳.۵۲: دندان موج کا کثیر رکنی سے اظہار (سوال ۳.۳۰۹)



شکل ۳.۵۳: سیڑھی تفاعل $s = k(t)$ کا $s = h(t)$ کثیر رکنی سے اظہار (سوال ۳.۳۱۰)

۴۰۶۸ ب. $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ تلاش کر کے ترسیم کریں۔

۴۰۶۹ ج. کہاں پر $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}$ کو $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ بہتر ظاہر کرتا ہے؟ کہاں خراب ترین ظاہر کرتا ہے؟ تکونیاتی تفاعل سے عموماً مختلف تفاعل کو ظاہر کیا جاتا ہے البتہ جیسے اگلے سوال
۴۰۷۰ میں ظاہر ہو گا اصل تفاعل کے تفرق کو عموماً ان کثیر رکنی کے تفرق سے ظاہر نہیں کیا جا سکتا۔

۴۰۷۱ سوال ۳.۳۱۰: گزشتہ سوال میں دندان موج کو کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا جہاں ہم نے دیکھا کہ دندان موج کے تفرق کو کثیر رکنی کا تفرق ظاہر کرتا
۴۰۷۲ ہے۔ آئیں اب ایسا تفاعل دیکھیں جس کو کثیر رکنی سے ظاہر کیا جا سکتا ہے البتہ تفاعل کے تفرق کو کثیر رکنی کا تفرق ظاہر نہیں کرتا۔ شکل ۳.۵۳ میں سیڑھی
۴۰۷۳ تفاعل کو درج ذیل کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$s = h(t) = 1.2732 \sin 2t + 0.4244 \sin 6t + 0.25465 \sin 10t + 0.18186 \sin 14t + 0.14147 \sin 18t$$

۴۰۷۴ آئیں دیکھتے ہیں کہ کثیر رکنی کا تفرق ہر گز سیڑھی تفاعل کا تفرق نہیں دیتا۔ ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

۴۰۷۵ ا. وقفہ $[-\pi, \pi]$ پر $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}$ (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔

۴۰۷۶ ب. $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ ترسیم کریں۔

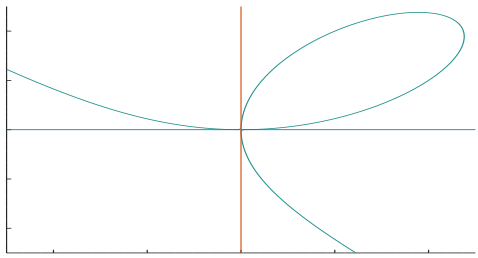
۴۰۷۷ ج. نتائج کو دیکھ کر آپ کیا کہیں گے؟

۴۰۷۸

۴۰۷۹

۴۰۸۰ ۳.۶ خفی تفرق اور ناطق قوت نما

۴۰۸۱ بعض اوقات مساوات $F(x, y) = 0$ کو $y = f(x)$ روپ میں لکھنا ممکن نہیں ہوتا۔ اس کے باوجود ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو خفی تفرق سے حاصل کر سکتے
۴۰۸۲ ہیں۔ اس حصہ میں اس ترکیب پر غور کیا جائے گا اور اس کے ذریعہ طاقتی قاعدہ کو وسعت دے کر تمام ناطق تفاعل شامل کیے جائیں گے۔



شکل ۳.۵۴: خفی منحنی $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ جس کو پتا بھی کہتے ہیں۔

خفی تفرق

چونکہ مساوات $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ درحقیقت تین تفاعلات $y = f_1(x)$ ، $y = f_2(x)$ ،اور $y = f_3(x)$ کا ملاپ ہے جو ماسوائے نقطہ M اور A کے قابل تفرق ہیں لہٰذا اس کی ترسیم کا تقریباً ہر نقطے پر اچھی طرح معین ڈھلوان پایا جاتا ہے (شکل ۳.۵۴)۔ خفی تفاعل کا تفرق لینے کی خاطر y کو x کا تفاعل تصور کرتے ہوئے قواعد برائے قوت نما، طاقت، مجموعہ، تفریق، حاصل ضرب، حاصل تقسیم اور زنجیری قاعدہ زیر استعمال لائے جاتے ہیں۔ اس کے بعد $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کے لیے حل کرتے ہوئے کسی بھی نقطہ (x, y) پر تفرق حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اس ترکیب کو **خفی تفرق**[۴۴] کہتے ہیں۔

مثال ۳.۴۷: $y^2 = x$ ہے۔ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

حل

مساوات $y^2 = x$ درحقیقت دو تفاعل $y_1 = \sqrt{x}$ اور $y_2 = -\sqrt{x}$ کو ظاہر کرتی ہے جہاں جذر کی مثبت قیمت لی جاتی ہے۔ ہم $x > 0$ کے لیے ان دونوں تفاعل کا تفرق لینا جانتے ہیں۔

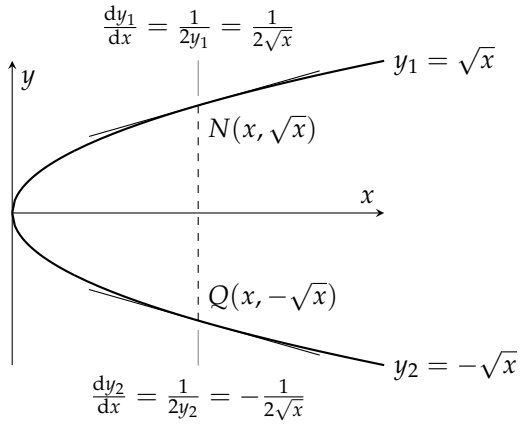
$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

آئیں اب اس مساوات کو دو تفاعل میں تقسیم کیے بغیر مساوات کا تفرق حاصل کریں۔ ہم y کو x کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق زنجیری قاعدہ سے حاصل کرتے ہیں۔ یوں $f(x) = y^2$ لکھ کر $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2y$ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا

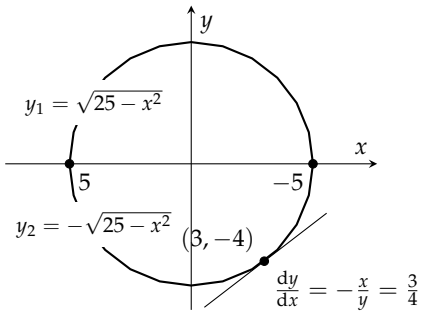
$$\begin{aligned} y^2 &= x \\ 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 1 && \text{زنجیری قاعدہ} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{2y} \end{aligned}$$

---

[۴۴] implicitdifferentiation



شکل ۳.۵۵: ترسیم برائے مثال ۳.۴۷



شکل ۳.۵۶: ترسیم برائے مثال ۳.۴۸

۴۰۹۵ ہوگا۔ یہ کلیہ دونوں صریح تفاعل $y_1 = \sqrt{x}$ اور $y_2 = -\sqrt{x}$ کا تفرق دیتا ہے۔

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

۴۰۹۶ □

۴۰۹۷ مثال ۳.۴۸: نقطہ $(3, -4)$ پر دائرہ $x^2 + y^2 = 25$ کا ڈھلوان تلاش کریں (شکل ۳.۵۶)۔

۴۰۹۸ **حل**

۴۰۹۹ دائرہ در حقیقت دو قابل تفرق تفاعل $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ اور $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ کو ظاہر کرتا ہے۔ نقطہ $(3, -4)$ تفاعل y_2

۴۱۰۰ پر پایا جاتا ہے لہٰذا ہم صریحاً ڈھلوان تلاش کر سکتے ہیں:

$$\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=3} = -\frac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = -\frac{-6}{2\sqrt{25 - 9}} = \frac{3}{4} \tag{1}$$

۴۱۰۱ ہم دائرے کی مساوات کا x کے لحاظ سے خفی تفرق

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(25) \\ 2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

لے کر $(3, -4)$ پر ڈھلوان کی قیمت تلاش کر سکتے ہیں۔

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(3,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

دھیان رہے کہ مساوات اصرف محور x کے نیچے جوابات دیتی ہے جبکہ درج بالا تمام نقطوں پر قابل استعمال ہے۔ خفی تفرق کی قیمت عموماً x اور y دونوں پر منحصر ہوتی ہے جبکہ صریحاً حاصل تفرق کے کلیہ میں صرف x درکار ہوگا۔ □

دیگر خفی تفاعل کا تفرق بھی درج بالا دو مثالوں کی طرح حاصل کیا جاتا ہے۔ ہم y کو x کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف تفرق کے قواعد استعمال کرتے ہیں۔

مثال ۳.۴۹: $2y = x^2 + \sin y$ کے لیے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

حل

$$\begin{aligned}
2y &= x^2 + \sin y \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 + \sin y) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin y) \\
2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x + \cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(2 - \cos y) &= 2x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{2x}{2 - \cos y}
\end{aligned}$$

□

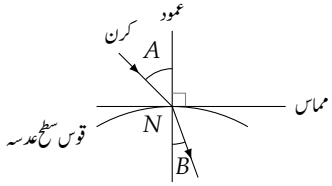
خفی تفرق چار اقدام پر مشتمل ہے۔

۱. y کو x کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کو تفرق کے قواعد کے مطابق تفرق کریں۔

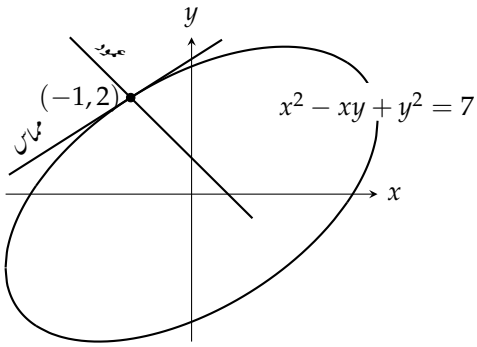
۲. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ والے اجزاء کو ایک طرف اکٹھا کریں۔

۳. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کی تجزی کریں۔

۴. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کے لیے حل کریں۔



شکل ۳.۵۷: عدسہ میں کرن داخل ہو کر عمود کی طرف جھکتی ہے۔



شکل ۳.۵۸: ترسیمات برائے مثال ۳.۵۰

۴۱۱۸ **عدسہ، مماس اور عمودی خطوط**

۴۱۱۹ روشنی کی کرن عدسہ میں نقطہ N پر داخل ہو کر سمت تبدیل کرتی ہے (شکل ۳.۵۷)۔

۴۱۲۰ تعریف: نقطہ N پر منحنی کے مماس کے ساتھ قائمہ خط کو **عمودی**[۴۵] کہتے ہیں۔ اس خط کو N پر منحنی کا **عمود** کہتے ہیں۔

۴۱۲۱ □

۴۱۲۲ عدسہ کی سطح پر تبصرہ عموماً ودرجی منحنیات کی مدد سے کیا جاتا ہے۔ ان منحنیات کے مماس اور عمود کو خفی تفرق سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

۴۱۲۳ مثال ۳.۵۰: نقطہ $(-1,2)$ پر منحنی $x^2 - xy + y^2 = 7$ کا مماس اور عمود تلاش کریں (شکل ۳.۵۸)۔

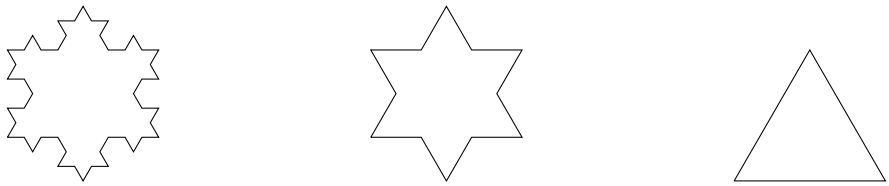
۴۱۲۴ **حل**

۴۱۲۵ ہم خفی تفرق سے $\frac{dy}{dx}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
x^2 - xy + y^2 &= 7 \\
\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(xy) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(7) \\
2x - (x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}) + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\
(2y - x)\frac{dy}{dx} &= y - 2x \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y - 2x}{2y - x}
\end{aligned}
$$

---

[۴۵] normal



(ا) منحنی C_1 (ب) منحنی C_2 (ج) منحنی C_3

شکل ۳.۵۹: برف کی روئی۔

۴۱۲۶ نقطہ $(x, y) = (-1, 2)$ پر ڈھلوان حاصل کرنے کی خاطر نقطے کو درج بالا میں پُر کرتے ہیں۔

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(-1,2)} = \left.\frac{y-2x}{2y-x}\right|_{(-1,2)} = \frac{2-2(-1)}{2(2)-(-1)} = \frac{4}{5}$$

۴۱۲۷ $(-1, 2)$ پر مماس کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y = 2 + \frac{4}{5}(x - (-1))$$
$$y = \frac{4}{5} + \frac{14}{5}$$

۴۱۲۸ اسی طرح منحنی کا عمود نقطہ $(-1, 2)$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$y = 2 - \frac{5}{4}(x - (-1))$$
$$y = -\frac{5}{4} + \frac{3}{4}$$

۴۱۲۹ □

۴۱۳۰ **برف کی روئی**

۴۱۳۱ ہلگے ون کوچ[۴۶] کی منحنیات جنہیں برف کی روئی کہتے ہیں شکل ۳.۵۹ میں دکھائی گئی ہیں۔ شکل-ا میں مساوی الاضلاع مثلث سے شروع کرتے ہیں جس کو ہم
۴۱۳۲ منحنی C_1 کہتے ہیں۔ ہر ضلع کے وسط پر باہر رخ مثلث الاضلاع بنا کر درمیانے $\frac{1}{3}$ ضلع کو مٹائیں۔ یوں منحنی C_2 حاصل ہو گی۔ اسی عمل کو دہراتے ہوئے
۴۱۳۳ لامتناہی منحنیات بنائی جا سکتی ہیں۔ ان منحنیات کی تحدیدی صورت C_n کو **برف کی روئی**[۴۷] کہتے ہیں، جہاں عدد n لامتناہی تک پہنچتا ہے۔

---

[۴۶] کیں۔ پیش منحنیات یہ میں ۱۹۰۴ نے دان ریاضی کے سوئزرلینڈ
[۴۷] snowflake

برف کی روئی بہت زیادہ غیر ہموار ہے لہٰذا کسی بھی نقطہ پر اس کا مماس حاصل کرنا ممکن نہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ تفاعل $F(x,y) = 0$ جو برف کی روئی کو ظاہر کرتا ہے، نہ y کو x کا قابل تفرق تفاعل اور نہ ہی x کو y کا قابل تفرق تفاعل ظاہر کرتا ہے۔ برف کی روئی پر صفحہ ۵۷۸ پر دوبارہ غور کیا جائے گا جہاں لمبائی قوس کی بات کی جائے گی۔

خفی تفرق سے بلند رتبی تفرق کا حصول

خفی تفرق سے بلند رتبی تفرق حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال ۳.۵۱: $2x^3 - 3y^2 = 7$ کے لیے $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ تلاش کریں۔

حل

ہم دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق حاصل کرتے ہوئے پہلے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
2x^3 - 3y^2 &= 7 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x^3) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3y^2) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7) \\
6x62 - 6yy' &= 0 \\
x^2 - yy' &= 0 \\
y' &= \frac{x^2}{y} \qquad (\text{اگر } y \neq 0)
\end{aligned}$$

اب مساوات $x^2 - yy' = 0$ کا تفرق لیتے ہوئے y'' حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(yy') &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(0) \\
2x - y'y' - yy'' &= 0 \\
yy'' &= 2x - (y')^2 \\
y'' &= \frac{2x}{y} - \frac{(y')^2}{y} \qquad (\text{اگر } y \neq 0)
\end{aligned}$$

آخر میں $y' = \frac{x^2}{y}$ پُر کرتے ہوئے x اور y کے روپ میں y'' حاصل کرتے ہیں۔

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{(x^2/y)^2}{y} = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3} \qquad (\text{اگر } y \neq 0)$$

□

۴۱۴۵ **قابل تفرق تفاعل کی ناطق طاقتیں**

۴۱۴۶ ہم جانتے ہیں کہ طاقتی قاعدہ:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$$

۴۱۴۷ عدد صحیح n کے لیے درست ہے۔ ہم اب دکھاتے ہیں کہ یہ قاعدہ ہر ناطق عدد کے لیے درست ہے۔

۴۱۴۸ مسئلہ ۳.۶: **ناطق طاقت کے لیے طاقتی قاعدہ**

۴۱۴۹ اگر n ناطق عدد ہو تب x^{n-1} کے دائرہ کار کے ہر اندرونی نقطہ x پر x^n قابل تفرق ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$$

۴۱۵۰ ثبوت: فرض کریں p اور q عدد صحیح ہیں جہاں $q > 0$ اور

$$y = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$$

۴۱۵۱ ہے۔ تب

$$y^q = x^p$$

۴۱۵۲ ہو گا۔ یہ مساوات x اور y کی طاقتوں کا ملاپ ہے لہٰذا اعلیٰ مسئلے (جس کا ذکر اس حصے کی ابتدا میں کیا گیا) کے تحت y متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا۔

۴۱۵۳ چونکہ p اور q عدد صحیح ہیں (جن کے لیے ہمارے پاس قاعدہ طاقت موجود ہے) ہم خفی مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لے سکتے ہیں:

$$qy^{q-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = px^{p-1}$$

۴۱۵۴ اب اگر $y \neq 0$ ہو تب دونوں اطراف کو qy^{q-1} سے تقسیم کیا جا سکتا ہے:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} \\
&= \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{\left(x^{(p/q)}\right)^{q-1}} \\
&= \frac{p}{q}\cdot\frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} \\
&= \frac{p}{q}\cdot x^{(p-1)-(p-p/q)} \\
&= \frac{p}{q}\cdot x^{(p/q)-1}
\end{aligned}$$

۴۱۵۵ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

۴۱۵۶ □

۴۱۵۷ مثال ۳.۵۲:

ا.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{تفاعل } x \geq 0 \text{ جبکہ تفرق } x > 0 \text{ کے لیے معین ہے}$$

ب.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{1/5}) = \frac{1}{5}x^{-4/5} \qquad \text{تفاعل تمام } x \text{ جبکہ تفرق } x \neq 0 \text{ کے لیے معین ہے}$$

۴۱۵۸ □

۴۱۵۹ طاقتی قاعدے کا ایک روپ جس میں زنجیری قاعدہ ضم ہے کہتا ہے کہ اگر n ناطق عدد ہو اور x پر u قابل تفرق ہو اور $(u(x))^{n-1}$ معین ہو تب
۴۱۶۰ x پر u^n قابل تفرق ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u^n = nu^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{۲}$$

۴۱۶۱ مثال ۳.۵۳:

ا.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)^{1/4} = \frac{1}{4}(1-x^2)^{-3/4}(-2x)$$

۴۱۶۲ تفاعل وقفہ $[-1,1]$ پر جبکہ تفرق وقفہ $(-1,1)$ پر معین ہے۔

ب.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)^{-1/5} &= -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)\\ &= -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}(-\sin x)\\ &= \frac{1}{5}\sin x(\cos x)^{-6/5}\end{aligned}$$

۴۱۶۳ □

سوالات

ناطق طاقتوں کا تفرق

سوال ۳.۳۱۱ تا سوال ۳.۳۲۰ میں $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۳۱۱: $y = x^{9/4}$

سوال ۳.۳۱۲: $y = x^{-3/5}$

سوال ۳.۳۱۳: $y = \sqrt[3]{2x}$

سوال ۳.۳۱۴: $y = \sqrt[4]{5x}$

سوال ۳.۳۱۵: $y = 7\sqrt{x+6}$

سوال ۳.۳۱۶: $y = -2\sqrt{x-1}$

سوال ۳.۳۱۷: $y = (2x+5)^{-1/2}$

سوال ۳.۳۱۸: $y = (1-6x)^{2/3}$

سوال ۳.۳۱۹: $y = x(x^2+1)^{1/2}$

سوال ۳.۳۲۰: $y = x(x^2+1)^{-1/2}$

سوال ۳.۳۲۱ تا سوال ۳.۳۲۸ میں پہلا تفرق تلاش کریں۔

سوال ۳.۳۲۱: $s = \sqrt[7]{t^2}$

سوال ۳.۳۲۲: $r = \sqrt[4]{\theta^{-3}}$

سوال ۳.۳۲۳: $y = \sin[(2t+5)^{-2/3}]$

سوال ۳.۳۲۴: $z = \cos[(1-6t)^{2/3}]$

سوال ۳.۳۲۵: $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$

سوال ۳.۳۲۶: $g(x) = 2(2x^{-1/2}+1)^{-1/3}$

سوال ۳.۳۲۷: $h(\theta) = \sqrt[3]{1+\cos(2\theta)}$

سوال ۳.۳۲۸: $k(\theta) = (\sin(\theta+5))^{5/4}$

خفی تفرق

سوال ۳.۳۲۹ تا سوال ۳.۳۴۲ میں $\frac{dy}{dx}$ خفی تفرق کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال ۳.۳۲۹: $x^2y + xy^2 = 6$

سوال ۳.۳۳۰: $x^3 + y^3 = 18xy$

سوال ۳.۳۳۱: $2xy + y^2 = x + y$

۴۱۹۱ سوال ۳.۳۳۲: $x^3 - xy + y^3 = 1$

۴۱۹۲ سوال ۳.۳۳۳: $x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$

۴۱۹۳ سوال ۳.۳۳۴: $(3xy+7)^2 = 6y$

۴۱۹۴ سوال ۳.۳۳۵: $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

۴۱۹۵ سوال ۳.۳۳۶: $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

۴۱۹۶ سوال ۳.۳۳۷: $x = \tan y$

۴۱۹۷ سوال ۳.۳۳۸: $x = \sin y$

۴۱۹۸ سوال ۳.۳۳۹: $x + \tan(xy) = 0$

۴۱۹۹ سوال ۳.۳۴۰: $x + \sin y = xy$

۴۲۰۰ سوال ۳.۳۴۱: $y\sin(\frac{1}{y}) = 1 - xy$

۴۲۰۱ سوال ۳.۳۴۲: $y^2\cos(\frac{1}{y}) = 2x + 2y$

۴۲۰۲ سوال ۳.۳۴۳ تا سوال ۳.۳۴۶ میں $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ تلاش کریں۔

۴۲۰۳ سوال ۳.۳۴۳: $\theta^{1/2} + r^{1/2} = 1$

۴۲۰۴ سوال ۳.۳۴۴: $r - 2\sqrt{\theta} = \frac{3}{2}\theta^{2/3} + \frac{4}{3}\theta^{3/4}$

۴۲۰۵ سوال ۳.۳۴۵: $\sin(r\theta) = \frac{1}{2}$

۴۲۰۶ سوال ۳.۳۴۶: $\cos r + \cos\theta = r\theta$

۴۲۰۷ **بلند رتبی تفرق**

۴۲۰۸ سوال ۳.۳۴۷ تا سوال ۳.۳۵۲ میں خفی تفرق کی مدد سے پہلے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ اور بعد میں $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ تلاش کریں۔

۴۲۰۹ سوال ۳.۳۴۷: $x^2 + y^2 = 1$

۴۲۱۰ سوال ۳.۳۴۸: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

۴۲۱۱ سوال ۳.۳۴۹: $y^2 = x^2 + 2x$

۴۲۱۲ سوال ۳.۳۵۰: $y^2 - 2x = 1 - 2y$

۴۲۱۳ سوال ۳.۳۵۱: $2\sqrt{y} = x - y$

۴۲۱۴ سوال ۳.۳۵۲: $xy + y^2 = 1$

۴۲۱۵ سوال ۳.۳۵۳: نقطہ $(2,2)$ پر $x^3 + y^3 = 16$ کے لیے $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ کی قیمت تلاش کریں۔

۴۲۱۶ سوال ۳.۳۵۴: نقطہ $(0,-1)$ پر $xy + y^2 = 1$ کے لیے $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ کی قیمت تلاش کریں۔

ڈھلوان، مماس اور عمود

سوال ۳.۳۵۵ تا سوال ۳.۳۵۶ میں دیے گئے نقطوں پر منحنی کا ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال ۳.۳۵۵: $y^2 + x^2 = y^4 - 2x, \quad (-2,1), (-2,-1)$

سوال ۳.۳۵۶: $(x^2+y^2)^2 = (x-y)^2, \quad (1,0), (1,-1)$

سوال ۳.۳۵۷ تا سوال ۳.۳۶۶ میں تصدیق کریں کہ دیا گیا نقطہ منحنی پر پایا جاتا ہے اور اس نقطے پر منحنی کے مماس اور عمود کی مساواتیں تلاش کریں۔

سوال ۳.۳۵۷: $x^2 + xy - y^2 = 1, \quad (2,3)$

سوال ۳.۳۵۸: $x^2 + y^2 = 25, \quad (3,-4)$

سوال ۳.۳۵۹: $x^2y^2 = 9, \quad (-1,3)$

سوال ۳.۳۶۰: $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0, \quad (-2,1)$

سوال ۳.۳۶۱: $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0, \quad (-1,0)$

سوال ۳.۳۶۲: $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 5, \quad (\sqrt{3},2)$

سوال ۳.۳۶۳: $2xy + \pi \sin y = 2\pi, \quad (1,\pi/2)$

سوال ۳.۳۶۴: $x \sin 2y = y \cos 2x, \quad (\pi/4, \pi/2)$

سوال ۳.۳۶۵: $y = 2\sin(\pi x - y), \quad (1,0)$

سوال ۳.۳۶۶: $x^2 \cos^2 y - \sin y = 0, \quad (0,\pi)$

سوال ۳.۳۶۷: محور x کو منحنی $x^2 + xy + y^2 = 7$ دو نقطوں پر قطع کرتی ہے۔ ان نقطوں کو تلاش کریں اور دکھائیں کہ ان نقطوں پر منحنی کے مماس آپس میں متوازی ہیں۔ ان مماس کا ڈھلوان کیا ہو گا؟

سوال ۳.۳۶۸: منحنی $x^2 + y^2 + xy = 7$ پر وہ نقطے تلاش کریں جہاں (ا) مماس محور x کے متوازی ہے، (ب) مماس محور y کے متوازی ہے۔ دوسرے جزو میں $\frac{dy}{dx}$ غیر معین جبکہ $\frac{dx}{dy}$ معین ہے۔ ان نقطوں پر $\frac{dx}{dy}$ کی قیمت کیا ہو گی؟

سوال ۳.۳۶۹: منحنی آٹھ $y^4 = y^2 - x^2$ پر نقطہ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ اور $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ کا ڈھلوان تلاش کریں (شکل ۳.۶۰)۔

سوال ۳.۳۷۰: نقطہ $(1,1)$ پر $y^2(2-x) = x^3$ کے مماس اور عمود کی مساواتیں تلاش کریں (شکل ۳.۶۱)۔

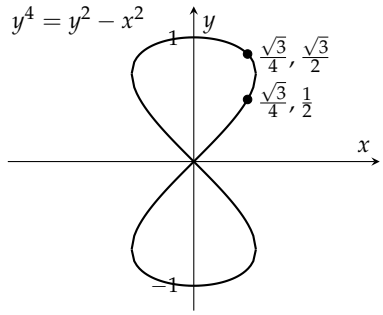
سوال ۳.۳۷۱: چار نقطوں $(-3,2)$ ، $(-3,-2)$ ، $(3,2)$ اور $(3,-2)$ پر $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ کا ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال ۳.۳۷۲:

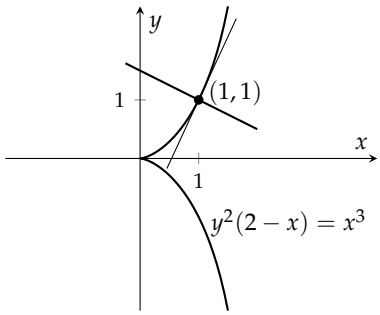
ا. نقطہ $(4,2)$ اور $(2,4)$ پر پتا $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ کا ڈھلوان تلاش کریں (شکل ۳.۵۴)۔

ب. مبدا کے علاوہ پتے کا مماس کس نقطے پر افقی ہے؟

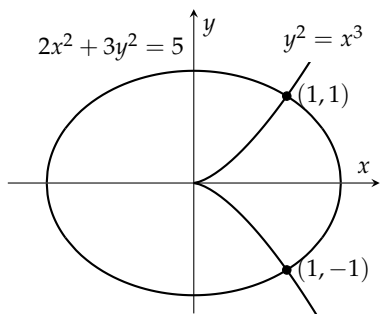
ج. کس نقطے پر پتے کا مماس انتصابی ہے؟



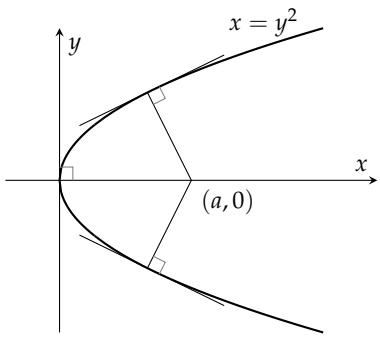
شکل ۳.۶۰: منحنی آٹھ (سوال ۳.۳۶۹)



شکل ۳.۶۱: منحنی برائے سوال ۳.۳۷۰



شکل ۳.۶۲: ترسیم برائے سوال ۳.۳۷۴



شکل ۳.۶۳: منحنی برائے سوال ۳.۳۷۷

۴۴۴ نظریہ اور مثالیں

۴۴۵ سوال ۳.۳۷۳: اگر $f''(x) = x^{-1/3}$ ہو تب درج ذیل میں سے کون سے درست ہوں گے؟

۴۴۶ ا. $f(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} - 3$

۴۴۷ ب. $f(x) = \frac{9}{10}x^{5/3} - 7$

۴۴۸ ج. $f'''(x) = -\frac{1}{3}x^{-4/3}$

۴۴۹ د. $f'(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} + 6$

۴۵۰ سوال ۳.۳۷۴: کیا نقطہ $(1,1)$ اور $(1,-1)$ پر $2x^2 + 3y^2 = 5$ اور $y^2 = x^3$ کے مماس میں کوئی خاصیت پائی جاتی ہے؟
۴۵۱ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں (شکل ۳.۶۲)۔

۴۵۲ سوال ۳.۳۷۵: نقطہ $(1,1)$ پر منحنی $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ کا مماس اس منحنی کو کس دوسرے نقطے پر قطع کرتا ہے؟

۴۵۳ سوال ۳.۳۷۶: منحنی $xy + 2x - y = 0$ کا ایسا عمود تلاش کریں جو $2x + y = 0$ کے متوازی ہو۔

سوال ۳.۳۷۷: دکھائیں کہ اگر نقطہ $(a,0)$ سے قطع مکافی $x = y^2$ تک تین عمود بنانا ممکن ہو تب $a > \frac{1}{2}$ ہو گا۔ تیسرا عمود محور x ہے۔ a کی کس قیمت کے لیے باقی دو عمود آپس میں قائمہ الزاویہ ہیں (شکل ۳.۶۳)؟

سوال ۳.۳۷۸: مثال ۳.۵۲ اور مثال ۳.۵۳-۱ میں کس جیومیٹری کی وجہ سے دائرہ کار کی حدود تعین ہوتی ہیں؟

سوال ۳.۳۷۹ اور سوال ۳.۳۸۰ میں پہلے y کو x کا تفاعل تصور کرتے ہوئے $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں اور اس کے بعد x کو y کا تفاعل تصور کرتے ہوئے $\frac{dx}{dy}$ تلاش کریں۔ کیا $\frac{dy}{dx}$ اور $\frac{dx}{dy}$ کا آپس میں کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ کیا آپ اس تعلق کو منحنی کی ترسیم کی مدد سے جیومیٹری کے ذریعہ سمجھ سکتے ہیں؟

سوال ۳.۳۷۹: $xy^3 + x^2y = 6$

سوال ۳.۳۸۰: $x^3 + y^2 = \sin^2 y$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۳.۳۸۱:

ا. منحنی $x^4 + 4y^2 = 1$ کا $\frac{dy}{dx}$ عمومی طریقے سے اور مخفی طریقے سے حاصل کریں۔ کیا دونوں جوابات ایک جیسے ہیں؟

ب. مساوات $x^4 + 4y^2 = 1$ کو y کے لیے حل کرتے ہوئے تمام حاصل تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے $x^4 + 4y^2 = 1$ کی مکمل ترسیم کھینچیں۔ اب ساتھ ہی ان تفاعل کے یک رتبی تفرق کی ترسیم بھی شامل کریں۔ کیا $x^4 + 4y^2 = 1$ کی ترسیم کو دیکھ کر آپ اس کے تفرق کی صورت کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ کیا مساوات کے تفرق کی تقسیم کو دیکھ کر آپ مساوات کی صورت کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۳۸۲:

ا. $(x-2)^2 + y^2 = 4$ کا تفرق $\frac{dy}{dx}$ دو طریقوں سے تلاش کریں۔ پہلی مرتبہ مساوات کو y کے لیے حل کرتے ہوئے تفرق حاصل کریں جبکہ دوسری مرتبہ مخفی طریقہ استعمال کریں۔ کیا دونوں مرتبہ ایک سے جوابات حاصل ہوتے ہیں؟

ب. $(x-2)^2 + y^2 = 4$ کو y کے لیے حل کریں۔ تمام حاصل تفاعل کی ترسیم کھینچ کر مساوات $(x-2)^2 + y^2 = 4$ کی مکمل ترسیم حاصل کریں۔ اب تفاعل کے یک رتبی تفرق کی ترسیم بھی شامل کریں۔ کیا آپ مساوات کی ترسیم کو دیکھ کر اس کے تفرق کی ترسیم کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ کیا آپ تفرق کی ترسیم کو دیکھ کر مساوات کی ترسیم کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۳۸۳ تا سوال ۳.۳۹۰ میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. کمپیوٹر پر مساوات کو ترسیم کریں۔ تصدیق کریں کہ نقطہ N مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. مخفی طریقہ سے تفرق $\frac{dy}{dx}$ کا کلیہ حاصل کرتے ہوئے نقطہ N پر اس کی قیمت تلاش کریں۔

ج. N پر ڈھلوان کی قیمت استعمال کرتے ہوئے اس نقطے پر مماس کی مساوات حاصل کریں۔ مماس اور مساوات کو اکٹھا ترسیم کریں۔

سوال ۳.۳۸۳: $x^3 - xy + y^3 = 7, \quad N(2,1)$

سوال ۳.۳۸۴: $x^5 + y^3x + yx^2 + y^4 = 4, \quad N(1,1)$

سوال ۳.۳۸۵: $y^2 + y = \frac{2+x}{1-x}, \quad N(0,1)$

سوال ۳.۳۸۶: $y^3 + \cos(xy) = x^2, \quad N(1,0)$

سوال ۳.۳۸۷: $x + \tan(\frac{y}{x}) = 2, \quad N(1, \pi/2)$

سوال ۳.۳۸۸: $xy^3 + \tan(x+y) = 1, \quad N(\pi/4, 0)$

سوال ۳.۳۸۹: $2y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 2, \quad N(1,1)$

سوال ۳.۳۹۰: $x\sqrt{1+2y} + y = x^2, \quad N(1,0)$

۳.۷ دیگر شرح تبدیلی

ٹینکی سے $3000\ \mathrm{L\ min^{-1}}$ پانی کے انعکاس سے ٹینکی میں پانی کی گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟ اس طرح کے سوالات میں ہم اس شرح کو معلوم کرنا چاہتے ہیں جس کو ہم ناپ نہیں سکتے۔ قابل ناپ شرح استعمال کرتے ہوئے یہ معلومات حاصل کی جاتی ہے۔

مثال ۳.۵۴: انعکاس

$3000\ \mathrm{L\ min^{-1}}$ کی شرح سے انعکاس کی صورت میں ٹینکی میں پانی کی گہرائی کم ہونے کی شرح جاننے کی خاطر ہم رداس r کی ٹینکی لیتے ہیں جس میں پانی کی گہرائی h ہے۔ یوں پانی کا حجم $H = \pi r^2 h$ ہو گا جہاں حجم کو H سے ظاہر کیا گیا ہے (شکل ۳.۶۴)۔ اب ہمیں انعکاس

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -3000$$

بتلایا گیا ہے جہاں t وقت کو ظاہر کرتا ہے اور وقت کے ساتھ حجم کم ہونے کو منفی کی علامت سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ہمیں

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

تلاش کرنا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں H اور h کا تعلق مساوات کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ یہ مساوات متغیرات کی اکائیوں پر منحصر ہو گی۔ یوں حجم کو لٹر جبکہ رداس اور گہرائی کو میٹر میں رکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

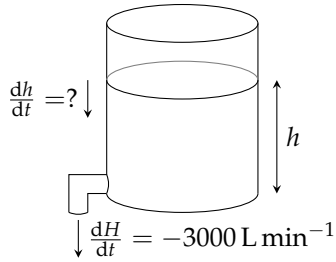
$$H = 1000\pi r^2 h$$

یاد رہے کہ ایک مربع میٹر میں 1000 لٹر ہوتے ہیں۔ دونوں اطراف کا وقت کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

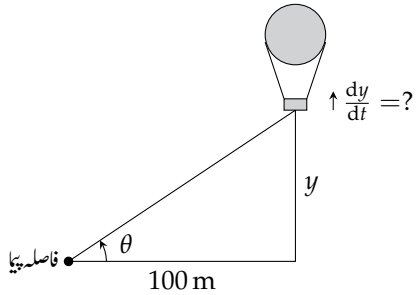
$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 1000\pi r^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$

جہاں دائیں جانب r مستقل ہے۔ اس میں $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ کی معلوم قیمت پُر کرتے ہوئے نامعلوم شرح $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{-3000}{1000\pi r^2} = -\frac{3}{\pi r^2}$$



شکل ۳.۶۴: پانی کی ٹینکی (مثال ۳.۵۴)



شکل ۳.۶۵: غبارہ (مثال ۳.۵۵)

پانی کی گہرائی $\frac{3}{\pi r^2}$ میٹر فی منٹ کی شرح سے کم ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ شرح رداس پر منحصر ہے۔ کم رداس کی صورت میں شرح زیادہ اور زیادہ رداس کی صورت میں شرح کم ہو گی۔ مثلاً $r = 1\,\mathrm{m}$ اور $r = 10\,\mathrm{m}$ کی صورت میں شرحیں درج ذیل ہوں گی۔

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{\pi} \approx -0.95\,\mathrm{m\,min^{-1}} = -95\,\mathrm{cm\,min^{-1}} \qquad (r = 1\,\mathrm{m})$$
$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{100\pi} \approx -0.0095\,\mathrm{m\,min^{-1}} = -0.95\,\mathrm{cm\,min^{-1}} \qquad (r = 10\,\mathrm{m})$$

□

مثال ۳.۵۵: غبارہ کی اڑان گرم ہوا کا غبارہ زمین سے سیدھا آسمان کی طرف اٹھتا ہے (شکل ۳.۶۵)۔ غبارے کے نقطہ اڑان سے 100 m دور واقع فاصلہ پیما[۴۸] سے غبارے پر نظر رکھی جاتی ہے۔ جس لمحہ فاصلہ پیما کا زاویہ صعود $\frac{\pi}{4}$ تھا اس لمحہ زاویہ کی تبدیلی کی شرح $0.14\,\mathrm{rad\,min^{-1}}$ تھی۔ اس لمحہ پر غبارہ کس رفتار سے اوپر جا رہا تھا؟

حل

ہم اس کا جواب چھ قدموں میں دیتے ہیں۔

پہلا قدم: موقع کی تصور کشی کریں اور متغیرات کی نشاندہی کریں۔ تصویر میں متغیرات θ اور y درج ذیل ہیں جو بالترتیب فاصلہ پیما کا زاویہ صعود اور غبارے کی بلندی کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہم وقت کو t سے ظاہر کرتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ θ اور y متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ فاصلہ پیما سے غبارے کے ابتدائی مقام تک فاصلہ 100 m ہے جس کو متغیر سے ظاہر کرنے کی ضرورت نہیں۔

دوسرا قدم: ان معلومات کو الجبرائی روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.14\,\mathrm{rad\,min^{-1}} \qquad (\theta = \tfrac{\pi}{4})$$

تیسرا قدم: جو ہم سے پوچھا گیا ہے اس کو لکھیں۔ ہم سے $\theta = \pi/4$ کی صورت میں $\frac{dy}{dt}$ پوچھا گیا ہے۔

---

[۴۸] rangefinder

چوتھا قدم: متغیرات θ اور y کا آپس میں تعلق لکھیں۔

$$\frac{y}{100} = \tan\theta \quad \Longrightarrow \quad y = 100\tan\theta$$

پانچواں قدم: زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے t کے لحاظ سے تفرق حاصل کریں جو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ (درکار معلومات) اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ (معلوم معلومات) کے بیچ تعلق دیگا۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 100\sec^2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

چھٹا قدم: $\theta = \frac{\pi}{4}$ اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0.14$ پُر کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت تلاش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 100(\sec\tfrac{\pi}{4})^2(0.14) = 28\,\mathrm{m\,min^{-1}}$$

□

اس طرح کے مسائل حل کرنے کا لائحہ عمل

- مسئلے کی تصور کشی کریں۔ وقت کو t سے ظاہر کریں اور تمام متغیرات کو t کے قابل تفرق تفاعل تصور کریں۔
- اعدادی معلومات کو منتخب کردہ متغیرات کے روپ میں لکھیں۔
- مطلوبہ شرح یا متغیر کو لکھیں (جو شرح کی صورت میں عموماً تفرق کے روپ میں ہوگا)۔
- متغیرات کا آپس میں تعلق لکھیں۔ کئی مرتبہ دو یا دو سے زیادہ مساواتوں کو اکٹھے کرتے ہوئے ایک مساوات حاصل کرنی ہوگی۔
- اس کا t کے لحاظ سے تفرق لیں۔ اس کے بعد درکار شرح کو باقی متغیرات (جن کی قیمتیں آپ جانتے ہیں) کی صورت میں لکھیں۔
- معلوم معلومات کو پُر کرتے ہوئے نامعلوم شرح کی قیمت دریافت کریں۔

مثال ۳.۵۶: پولیس ایک گاڑی کا پیچھا کر رہی ہے۔ جب چوک سے پولیس کی گاڑی کا فاصلہ $0.6\,\mathrm{km}$ اور بھاگنے والی گاڑی کا فاصلہ $0.8\,\mathrm{km}$ ہے اس لمحہ پر دونوں گاڑیوں کے بیچ فاصلہ $20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ سے بڑھ رہا ہے۔ پولیس کی گاڑی کی رفتار $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہونے کی صورت میں بھاگنے والی گاڑی کی رفتار کیا ہوگی؟

حل

ہم مذکورہ بالا اقدام پر چلتے ہوئے مسئلہ حل کرتے ہیں۔

پہلا قدم: تصویر کشی اور متغیرات۔ ہم کارتیسی محدد پر تصویر کشی کرتے ہیں۔ چوک کو مبدا پر رکھتے ہوئے بھاگنے والی گاڑی کو محور x جبکہ پولیس کی گاڑی کو محور y پر رکھتے ہیں۔ وقت کو t سے ظاہر کرتے ہوئے لمحہ t پر بھاگنے والی گاڑی کا مقام x، پولیس کی گاڑی کا مقام y۔ اور دونوں گاڑیوں کے بیچ فاصلہ s ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ x، y، اور s متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔

۴۳۳۱ **دوسرا قدم:** اعدادی معلومات۔ لمحہ t پر درج ذیل ہمیں معلوم ہے۔

$$x = 0.8\,\text{km}, \quad y = 0.6\,\text{km}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -60\,\text{km}\,\text{h}^{-1}, \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 20\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$$

۴۳۳۲ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اس لیے منفی ہے کہ پولیس کی گاڑی مبدا کی طرف یعنی گھٹتی y رخ چل رہی ہے۔

۴۳۳۳ **تیسرا قدم:** ہمیں $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرنا ہے۔

۴۳۳۴ **چوتھا قدم:** مسئلہ فیثاغورث کے تحت متغیرات کا تعلق $s^2 = x^2 + y^2$ ہے۔

۴۳۳۵ **پانچواں قدم:** زنجیری قاعدہ کی مدد سے t کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{s}\left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)
\end{aligned}$$

۴۳۳۶ **چھٹا قدم:** $x = 0.8$ ، $y = 0.6$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -60$ ،اور $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 20$ پُر کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت معلوم کریں۔

$$\begin{aligned}
20 &= \frac{1}{\sqrt{0.8^2+0.6^2}}\left(0.8\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 0.6(-60)\right) \\
20 &= 0.8\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 36 \\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{20+36}{0.8} = 70
\end{aligned}$$

۴۳۳۷ اس لمحے پر بھاگنے والی گاڑی کی رفتار $70\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$ ہے۔

۴۳۳۸ □

۴۳۳۹ مثال ۳.۵۷: پانی کی مخروطی ٹینکی $9\,\text{m}^3\,\text{min}^{-1}$ شرح سے بھری جاتی ہے۔ مخروط کے قاعدہ کا رداس $5\,\text{m}$ ،اس کا قد $10\,\text{m}$ ہے اور اس کی
۴۳۴۰ نوک نیچے جانب ہے۔ جس لمحہ پانی کی گہرائی $6\,\text{m}$ ہو اس لمحہ گہرائی کس شرح سے بڑھتی ہے؟

۴۳۴۱ **حل**

۴۳۴۲ ہم مذکورہ بالا اقدام پر چلتے ہوئے اس مسئلے کو حل کرتے ہیں۔

۴۳۴۳ **پہلا قدم:** تصویر کشی اور متغیرات۔ نیم بھری ٹینکی کی شکل بناتے ہیں۔ اس مسئلے کے متغیرات درج ذیل ہیں۔

۴۳۴۴ H : لمحہ t (منٹ) پر ٹینکی میں پانی کا حجم (مربع میٹر)۔

۴۳۴۵ x : لمحہ t (منٹ) پر پانی کی سطح کا رداس (میٹر)۔

۳۳۴۶ y : لمحہ t (منٹ) پر پانی کی گہرائی (میٹر)۔

۳۳۴۷ ہم فرض کرتے ہیں کہ H ، x ،اور y متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ ٹینکی کی جسامت مستقل مقدار ہے۔

۳۳۴۸ **دوسرا قدم:** اعدادی معلومات۔ لمحہ t پر ہمیں درج ذیل معلوم ہے۔

$$y = 6\,\mathrm{m}, \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 9\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{min}^{-1}$$

۳۳۴۹ **تیسرا قدم:** ہمیں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرنا ہے۔

۳۳۵۰ **چوتھا قدم:** متغیرات کا آپس میں تعلق:

$$H = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

۳۳۵۱ چونکہ لمحہ t پر ہمیں x اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کے بارے میں معلومات فراہم نہیں کی گئی لہٰذا ہمیں x سے چھٹکارا حاصل کرنا ہو گا۔ متشابہ مثلثات استعمال کرتے ہوئے

۳۳۵۲ شکل سے

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{y}{2}$$

۳۳۵۳ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$H = \frac{1}{3}\pi(\tfrac{y}{2})^2 y = \frac{\pi}{12}y^3$$

۳۳۵۴ **پانچواں قدم:** t کے لحاظ سے تفرق۔ درج بالا مساوات کا تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{12}\cdot 3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{4}y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

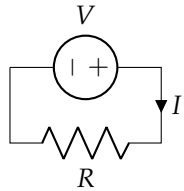
۳۳۵۵ اس کو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کے لیے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{\pi y^2}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$$

۳۳۵۶ **چھٹا قدم:** دی گئی معلومات یعنی $y = 6$ اور $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 9$ پُر کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{\pi(6^2)}\cdot 9 = \frac{1}{\pi} \approx 0.32\,\mathrm{m}\,\mathrm{min}^{-1}$$

۳۳۵۷ اس لمحے پر پانی کی گہرائی $0.32\,\mathrm{m}\,\mathrm{min}^{-1}$ شرح سے بڑھ رہی ہے۔ □



شکل ۳.۶۶: برقی دور برائے سوال ۳.۳۹۵

سوالات

سوال ۳.۳۹۱: فرض کریں کہ دائرے کا رداس r اور رقبہ $S = \pi r^2$ وقت t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق لکھیں۔

سوال ۳.۳۹۲: فرض کریں کرہ کا رداس r اور سطحی رقبہ $S = \frac{4}{3}\pi r^2$ وقت t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق لکھیں۔

سوال ۳.۳۹۳: بیلن کے رداس r، قد h، اور حجم H کا تعلق $H = \pi r^2 h$ ہے۔

ا. r کو مستقل تصور کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں تعلق تلاش کریں۔

ب. h کو مستقل تصور کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں تعلق تلاش کریں۔

ج. اگر نہ r اور نہ h مستقل ہوں تب $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہوگا؟

سوال ۳.۳۹۴: سیدھے کھڑے مخروط جس کا رداس r اور قد h ہوں کا حجم $H = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ہوگا۔

ا. مستقل r کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

ب. مستقل h کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

ج. غیر مستقل h اور r کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$، اور $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

سوال ۳.۳۹۵: مزاحمت R میں برقی رو I اور برقی دباو V کا تعلق $V = IR$ ہے (شکل ۳.۶۶ میں دکھایا گیا برقی دور)۔ فرض کریں کہ برقی دباو $1\,\mathrm{V\,s^{-1}}$ سے بڑھ رہا ہو جبکہ برقی رو $\frac{1}{3}\,\mathrm{A\,s^{-1}}$ سے گھٹ رہی ہے۔

ا. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت کیا ہے؟

ب. $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت کیا ہے؟

ج. $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$، اور $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

د. جب $V = 12$ وولٹ اور $I = 2$ ایمپیئر ہوں تب $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ کیا ہوگا؟ کیا R بڑھ رہا ہوگا یا گھٹ رہا ہوگا؟

سوال ۳.۳۹۶: برقی دور میں طاقت P، مزاحمت R، اور برقی رو i کا تعلق $P = i^2 R$ ہے۔ طاقت، مزاحمت، اور برقی رو کی اکائیاں بالترتیب واٹ (W)، اوہم Ω، اور ایمپیئر (A) ہیں۔

۴۳۷۷ ا. $\frac{dP}{dt}$ ، $\frac{dR}{dt}$ ،اور $\frac{di}{dt}$ کا تعلق کیا ہے جہاں P ، R ،اور i میں سے کوئی بھی مستقل نہیں۔

۴۳۷۸ ب. مستقل P کی صورت میں $\frac{dR}{dt}$ اور $\frac{di}{dt}$ کا کیا تعلق ہے؟

۴۳۷۹ سوال ۳.۳۹۷: کارتیسی محدد میں نقطہ $(x,0)$ اور $(0,y)$ کے بیچ فاصلہ $s=\sqrt{x^2+y^2}$ ہے۔وقت کو t سے ظاہر کریں۔

۴۳۸۰ ا. مستقل y کی صورت میں $\frac{ds}{dt}$ اور $\frac{dx}{dt}$ کا تعلق کیا ہوگا؟

۴۳۸۱ ب. اگر x اور y دونوں متغیر ہوں تب $\frac{ds}{dt}$ کا $\frac{dy}{dt}$ اور $\frac{dx}{dt}$ کے ساتھ کیا تعلق ہوگا؟

۴۳۸۲ ج. مستقل s کی صورت میں $\frac{dy}{dt}$ اور $\frac{dx}{dt}$ کا کیا تعلق ہوگا؟

۴۳۸۳ سوال ۳.۳۹۸: مستطیل ڈبے کے اطراف کی لمبائیاں x ، y ،اور z ہیں۔ڈبے کے وتر کی لمبائی $s=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ہوگی۔

۴۳۸۴ ا. فرض کریں x ، y ،اور z مستقل نہیں ہیں۔ $\frac{ds}{dt}$ ، $\frac{dx}{dt}$ ، $\frac{dy}{dt}$ ،اور $\frac{dz}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہوگا؟

۴۳۸۵ ب. مستقل x کی صورت میں $\frac{ds}{dt}$ ، $\frac{dy}{dt}$ ،اور $\frac{dz}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہوگا؟

۴۳۸۶ ج. مستقل x کی صورت میں $\frac{dx}{dt}$ ، $\frac{dy}{dt}$ ،اور $\frac{dz}{dt}$ کا آپس میں کیا تعلق ہوگا؟

۴۳۸۷ سوال ۳.۳۹۹: ایک مثلث جس کے اضلاع a اور b ہیں جن کے بیچ زاویہ θ ہو کا رقبہ $S=\frac{1}{2}ab\sin\theta$ ہوگا۔

۴۳۸۸ ا. مستقل a اور b کی صورت میں $\frac{dS}{dt}$ اور $\frac{d\theta}{dt}$ کا تعلق کیا ہوگا؟

۴۳۸۹ ب. مستقل b کی صورت میں $\frac{dS}{dt}$ ، $\frac{da}{dt}$ ،اور $\frac{d\theta}{dt}$ کا تعلق کیا ہوگا؟

۴۳۹۰ ج. a ، b اور θ غیر مستقل ہونے کی صورت میں $\frac{dS}{dt}$ ، $\frac{da}{dt}$ ، $\frac{db}{dt}$ ،اور $\frac{d\theta}{dt}$ کا تعلق کیا ہوگا؟

۴۳۹۱ سوال ۳.۴۰۰: دھاتی دائری تختہ جس کا رداس r ہے،کا رداس $0.01\,\mathrm{cm\,min^{-1}}$ شرح سے بڑھتا ہے۔جب رداس $50\,\mathrm{cm}$ ہو تب تختے کا
۴۳۹۲ رقبہ کس شرح سے بڑھتا ہے۔

۴۳۹۳ سوال ۳.۴۰۱: مستطیل کی لمبائی l اور چوڑائی w کی شرح تبدیلی بالترتیب $2\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ اور $2\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$ ہے۔جب $l=12\,\mathrm{cm}$ اور
۴۳۹۴ $w=5\,\mathrm{cm}$ ہو تب شرح تبدیلی (ا) رقبہ ،(ب) محیط ،(ج) وتر کیا ہوں گے؟ان میں سے کون سے بڑھ رہے ہیں اور کون سے گھٹ رہے ہیں؟

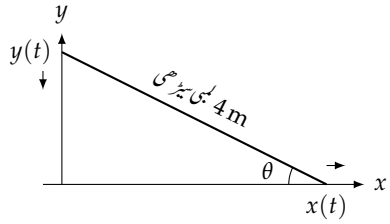
۴۳۹۵ سوال ۳.۴۰۲: مستطیل ڈبے کے اضلاع کی لمبائیاں x ، y اور z ہیں۔ان کی شرح تبدیلی

$$\frac{dx}{dt}=1\,\mathrm{m\,s^{-1}},\quad \frac{dy}{dt}=-2\,\mathrm{m\,s^{-1}},\quad \frac{dz}{dt}=1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

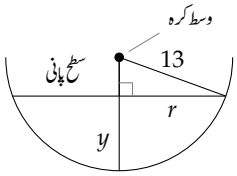
۴۳۹۶ ہیں۔جس لمحہ $x=4$ ، $y=3$ ،اور $z=2$ ہوں اس لمحہ ڈبے کے (ا) حجم ،(ب) سطحی رقبہ ،(ج) وتر $s=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ کی
۴۳۹۷ تبدیلی کی شرح کیا ہوگی؟

۴۳۹۸ سوال ۳.۴۰۳: دیوار کے ساتھ لگی $4\,\mathrm{m}$ لمبی سیڑھی زمین پر پھسلنے لگتی ہے (شکل ۳.۶۷)۔جس لمحہ زمین پر دیوار سے سیڑھی کا فاصلہ $3\,\mathrm{m}$ ہو اس
۴۳۹۹ لمحہ زمین پر سیڑھی کا سر $0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی شرح سے حرکت کر رہا ہے۔

۴۴۰۰ ا. اس لمحے پر سیڑھی کا بالائی سر کس رفتار سے حرکت کرتا ہے؟



شکل ۳.۶۷: دیوار کے ساتھ سیڑھی (سوال ۳.۴۰۳)



شکل ۳.۶۸: نصف کرہ ٹینکی (سوال ۳.۴۰۹)

ب. سیڑھی، زمین، اور دیوار ایک مثلث بناتے ہیں۔ اس لمحے پر اس مثلث کا رقبہ کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟

ج. اس لمحے پر سیڑھی اور زمین کے بیچ زاویہ θ کس شرح سے تبدیل ہو رہا ہے؟

سوال ۳.۴۰۴: دو ہوائی جہاز $7000\ \mathrm{m}$ کی بلند پر آپس میں قائمہ راستوں پر سفر کر رہے ہیں۔ ان کے راستے نقطہ M پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ جہاز الف کی رفتار $1000\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ جبکہ جہاز ب کی رفتار $850\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ ہے۔ جس لمحہ M سے الف کا فاصلہ $50\ \mathrm{km}$ اور ب کا فاصلہ $100\ \mathrm{km}$ ہو، ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال ۳.۴۰۵: ایک لڑکی $300\ \mathrm{m}$ بلند پتنگ اڑا رہی ہے۔ ہوا پتنگ کو افقی رخ $25\ \mathrm{m\,min^{-1}}$ کی رفتار سے حرکت دے رہی ہے۔ اگر لڑکی سے پتنگ کا فاصلہ $500\ \mathrm{m}$ ہو تب لڑکی کس رفتار سے پتنگ کو ڈوری دے رہی ہے؟

سوال ۳.۴۰۶: پرانے انجن کے بیلن کو خراد کی مشین سے کھلا کر کے اس میں نیا بوکا ڈالا جاتا ہے۔ خراد کی مشین، بیلن کا رداس ہر تین منٹ میں $25\ \mu\mathrm{m}$ بڑھاتی ہے۔ جب رداس $9.8\ \mathrm{cm}$ ہو اس لمحہ بیلن کا حجم کس شرح سے بڑھتا ہے؟

سوال ۳.۴۰۷: ریت کو $10\ \mathrm{m^3\,min^{-1}}$ سے ڈھیر پر ڈالا جاتا ہے۔ ڈھیر کی اونچائی ہر وقت قاعدہ کے قطر کی $\frac{3}{8}$ ہوتی ہے۔ جب ڈھیر $4\ \mathrm{m}$ اونچی ہو اس لمحہ ڈھیر کی (ا) اونچائی (ب) رداس کس شرح سے تبدیل ہو رہے ہیں؟ جواب $\mathrm{cm\,s^{-1}}$ میں دیں۔

سوال ۳.۴۰۸: مخروطی شکل کی ٹینکی جس کی اونچائی $6\ \mathrm{m}$ اور رداس $45\ \mathrm{m}$ ہیں سے پانی کو $50\ \mathrm{m^3\,min^{-1}}$ کی شرح سے نکالا جاتا ہے۔ مخروط کی نوک نیچے جانب ہے۔ (ا) جب پانی $5\ \mathrm{m}$ گہرا ہو تب پانی کی گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟ (ب) اس لمحے پر پانی کی سطح کا رداس کس شرح سے تبدیل ہو گا؟ جواب $\mathrm{cm\,s^{-1}}$ میں دیں۔

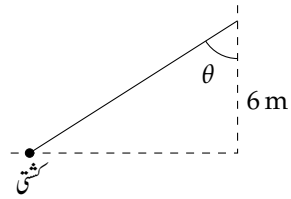
سوال ۳.۴۰۹: نصف کرہ، جس کا رداس $R = 13\ \mathrm{m}$ ہے، سے پانی کا انعکاس $6\ \mathrm{m^3\,min^{-1}}$ شرح سے کیا جاتا ہے (شکل ۳.۶۸)۔ پانی کا حجم $H = \frac{\pi}{3}y^2(3R - y)$ ہے جہاں y پانی کی گہرائی ہے۔

ا. جب پانی کی گہرائی $8\ \mathrm{m}$ ہو تب گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟

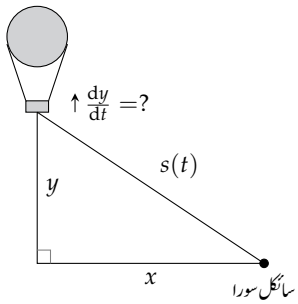
ب. جب پانی کی گہرائی y ہو تب پانی کی سطح کا رداس کیا ہو گا؟

ج. جب پانی $8\ \mathrm{m}$ گہرا ہو تب رداس کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

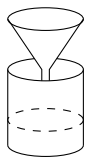
سوال ۳.۴۱۰: ہوا میں پانی کے باریک قطرے ہمیں دھند کی صورت میں نظر آتے ہیں۔ فرض کریں یہ قطرے کرہ نما ہیں اور ان کی سطح پر مزید پانی جمع ہوتا رہتا ہے جس کی مقدار سطحی رقبے کے راست متناسب ہے۔ دکھائیں کہ قطرے کا رداس مستقل شرح سے تبدیل ہوتا ہے۔



شکل ۳.۶۹: کشتی کو بندرگاہ میں کھینچا جاتا ہے (سوال ۳.۴۱۲)



شکل ۳.۷۰: غبارے کے نیچے سے گاڑی گزرتی ہے (سوال ۳.۴۱۳)



شکل ۳.۷۱: مخروط چھلنی (سوال ۳.۴۱۴)

سوال ۳.۴۱۱: ایک غبارے میں $100\pi\ \mathrm{m^3\ min^{-1}}$ کی شرح سے ہیلیم[۴۹] گیس بھری جاتی ہے۔ جب غبارے کا رداس $5\ \mathrm{m}$ ہو تب اس کا رداس کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟ اس لمحے پر غبارے کا حجم کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال ۳.۴۱۲: ایک چھوٹی کشتی کو پانی کی سطح سے $6\ \mathrm{m}$ اونچائی سے بندرگاہ کی طرف کھینچا جاتا ہے (شکل ۳.۶۹)۔ رسّی کو $2\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ کی رفتار سے کھینچا جاتا ہے۔ (ا) جب رسّی کی لمبائی $10\ \mathrm{m}$ ہو تب کشتی کتنی تیز حرکت کرتی ہے۔ (ب) اس لمحے پر زاویہ θ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال ۳.۴۱۳: ایک غبارہ سیدھا اوپر رخ $1\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ سے حرکت کرتا ہے۔ جب یہ $65\ \mathrm{m}$ بلندی پر پہنچتا ہے، ٹھیک اسی لمحہ اس کے بالکل نیچے سڑک پر ایک گاڑی $17\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ کی رفتار سے چلتے ہوئے گزرتی ہے (شکل ۳.۷۰)۔ تین سیکنڈ بعد غبارے اور گاڑی کے بیچ فاصلہ کس شرح سے بڑھتا ہے؟

سوال ۳.۴۱۴: مخروط چھلنی میں بیک وقت چائے ڈالی جاتی ہے جہاں سے چائے گزر کر پیالے میں $10\ \mathrm{cm^3\ min^{-1}}$ کی شرح سے بھری جاتی ہے (شکل ۳.۷۱)۔ (ا) چھلنی میں چائے کی گہرائی $5\ \mathrm{cm}$ ہونے کے لمحے پر پیالے میں چائے کی گہرائی کس شرح سے بڑھتی ہے؟ (ب) اس لمحہ پر مخروط میں چائے کی گہرائی کس شرح سے کم ہوتی ہے؟

سوال ۳.۴۱۵: اخراج قلب جرمنی کے اڈولف فک نے ۱۸۶۰ کی دہائی میں دل سے گزرتے ہوئے خون کی شرح ناپنے کا طریقہ ایجاد کیا جو آج بھی زیر استعمال ہے۔ اس وقت اس جملے کو پڑھتے ہوئے آپ کا دل تقریباً $7\ \mathrm{L\ min^{-1}}$ خون خارج کر رہا ہو گا جبکہ بالکل آرام سے بیٹھ کر $6\ \mathrm{L\ min^{-1}}$ اخراج متوقع ہے۔ بہت لمبی دوڑ لگانے والے کھلاڑی کا قلب $30\ \mathrm{L\ min^{-1}}$ تک خون خارج کر سکتا ہے۔

---

[۴۹] helium

قلب کے اخراج کا حساب

$$y = \frac{Q}{D}$$

سے کیا جا سکتا ہے جہاں سانس سے خارج CO_2 کی ملی لٹر فی منٹ میں مقدار کو Q سے ظاہر کیا گیا ہے جبکہ پھیپھڑوں کو فراہم خون میں CO_2 کی کثافت $\mathrm{mL/L}$ اور پھیپھڑوں سے خارج خون میں CO_2 کی کثافت کے فرق کو D سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یوں $Q = 223\,\mathrm{mL/min}$ اور $D = 97 - 56 = 41\,\mathrm{mL/L}$ کی صورت میں

$$y = \frac{223\,\mathrm{mL/min}}{41\,\mathrm{mL/L}} \approx 5.68\,\mathrm{L/min}$$

ہو گا جو آرام سے بیٹھے شخص کے قلب کے اخراج کے کافی قریب ہے۔

فرض کریں ہم جانتے ہیں کہ جب $Q = 233$ اور $D = 41$ ہوں تب D کی قیمت 2 اکائی فی منٹ سے گھٹ رہی ہے جبکہ Q میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی۔ قلب کے اخراج کو کیا ہو رہا ہے؟

سوال ۳.۴۱۶: لاگت، آمدنی اور منافع۔ ایک ادارہ x اشیاء کو $c(x)$ لاگت، $r(x)$ آمدنی، اور $p(x) = r(x) - c(x)$ منافع کے ساتھ تیار کر سکتا ہے (تمام اعداد و شمار کو 1000 سے ضرب کریں)۔ x اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کی درج ذیل قیمتوں کے لیے $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ ، اور $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ کا حساب کریں۔

ا.

$$r(x) = 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x; \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0.1, \quad x = 2$$

ب.

$$r(x) = 70x, \quad c(x) = x63 - 6x62 + \frac{45}{x}; \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0.05, \quad x = 1.5$$

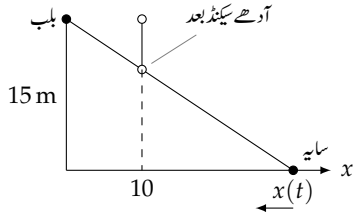
سوال ۳.۴۱۷: قطع مکافی پر حرکت۔ ایک ذرہ قطع مکافی $y = x^2$ پر ربع اول میں یوں حرکت کرتا ہے کہ اس کا x محدد $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی شرح سے بڑھتا جاتا ہے۔ مبدا سے ذرے تک خط، محور x کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے۔ جب $x = 3\,\mathrm{m}$ ہو تب θ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال ۳.۴۱۸: دوسرا قطع مکافی۔ ایک ذرہ دائیں سے بائیں جانب قطع مکافی $y = \sqrt{-x}$ پر یوں حرکت کرتا ہے کہ اس کا x محدد $\frac{8}{\mathrm{m\,s^{-1}}}$ سے گھٹتا ہے۔ مبدا سے ذرے تک خط، محور x کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے۔ جب $x = -4\,\mathrm{m}$ ہو تب θ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

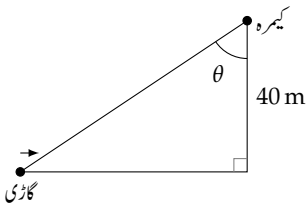
سوال ۳.۴۱۹: مستوی پر حرکت۔ کارتیسی محدد پر حرکت کرتے ہوئے ذرہ کے تعین گر x اور y محدد وقت t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ اگر $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اور $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہوں تب مبدا سے ذرے کا فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال ۳.۴۲۰: حرکت پذیر سایہ۔ $2\,\mathrm{m}$ قد کا ایک شخص گلی میں روشنی کے کھمبے کی طرف $1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے چل رہا ہے۔ کھمبے میں نصب بلب زمین سے $5\,\mathrm{m}$ بلندی پر ہے۔ جب شخص کھمبے سے $4\,\mathrm{m}$ فاصلے پر ہو، اس کا سایہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

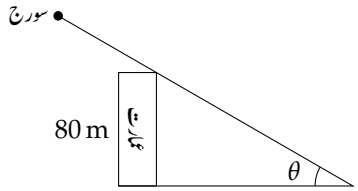
سوال ۳.۴۲۱: دوسرا حرکت کرتا سایہ۔ کھمبے پر بلب $15\,\mathrm{m}$ بلندی پر نصب ہے۔ کھمبے سے $10\,\mathrm{m}$ فاصلے پر اتنی ہی بلندی سے ایک ساکن گیند کو زمین پر گرنے دیا جاتا ہے (شکل ۳.۷۲)۔ آدھے سیکنڈ بعد زمین پر گیند کا سایہ کس رفتار سے حرکت کرے گا؟ ($g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$)



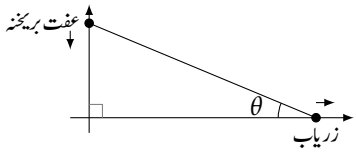
شکل ۳.۷۲: گیند کا سایہ (سوال ۳.۴۲۱)



شکل ۳.۷۳: گاڑی کا ویڈیو (سوال ۳.۴۲۲)



شکل ۳.۷۴: عمارت کا سایہ (سوال ۳.۴۲۵)



شکل ۳.۷۵: عفت اور زریاب کی چال قدمی (سوال ۳.۴۲۶)

سوال ۳.۴۲۲: آپ $80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ رفتار سے چلتی ہوئی گاڑی سے $150\,\mathrm{m}$ کے فاصلے پر $40\,\mathrm{m}$ کی بلندی سے گاڑی کا ویڈیو[50] بنا رہے ہیں۔ گاڑی سیدھی آپ کی طرف آ رہی ہے (شکل ۳.۷۳)۔ اس لمحے پر کیمرے کا زاویہ میلان کس شرح سے تبدیل ہو گا؟ دو سیکنڈ بعد یہ شرح کیا ہو گی؟

سوال ۳.۴۲۳: برف کی پگھلتی تہہ۔ ایک لوہے کا کرہ جس کا رداس $0.1\,\mathrm{m}$ ہے پر برف کی یکساں موٹائی کی تہہ جمائی جاتی ہے جو $10\,\mathrm{cm^3\,s^{-1}}$ کی شرح سے پگھلتی ہے۔ جس لمحے پر تہہ کی موٹائی $2\,\mathrm{cm}$ ہو اس لمحے پر تہہ کی موٹائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟

سوال ۳.۴۲۴: موٹروے پولیس۔ $1\,\mathrm{km}$ بلندی پر ایک جہاز پشاور سے اسلام آباد کی موٹروے کے ٹھیک اوپر $500\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے پرواز کرتے ہوئے موٹروے پر سامنے سے آمد گاڑی کا فاصلہ $5\,\mathrm{km}$ ناپتا ہے جو اس لمحے پر $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی شرح سے گھٹ رہا ہے۔ گاڑی کی رفتار تلاش کریں۔

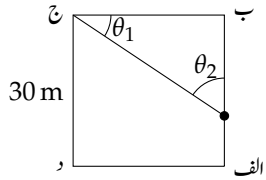
سوال ۳.۴۲۵: عمارت کا سایہ۔ سال کے کسی ایک دن سورج $80\,\mathrm{m}$ بلند عمارت کے ٹھیک اوپر سے گزرتا ہے (شکل ۳.۷۴)۔ جب عمارت کا سایہ ہموار زمین پر $60\,\mathrm{m}$ ہو، سائے کے سر سے سورج تک کا خط زمین کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے جو اس لمحہ $0.27^\circ/\mathrm{min}$ کی شرح سے تبدیل ہوتا ہے۔ سائے کی لمبائی کس شرح سے گھٹتی ہے؟ جواب $\mathrm{cm/min}$ میں دیں اور ریڈیئن کا استعمال کرنا نہ بھولیں۔

سوال ۳.۴۲۶: چال قدمی۔ ایک چوراہے پر دو سڑک 90° زاویے سے آپس میں ملتے ہیں۔ ایک سڑک پر عفت بریخنہ چوراہے کی جانب $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے بڑھتی ہے جبکہ دوسری سڑک پر اس کا چھوٹا بھائی زریاب خان $1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے چوراہے سے دور چلا جاتا ہے (شکل ۳.۷۵)۔ جب عفت بریخنہ اور زریاب خان چوراہے سے بالترتیب $20\,\mathrm{m}$ اور $15\,\mathrm{m}$ کے فاصلے پر ہوں، زاویہ θ کی شرح تبدیلی کیا ہو گی؟

سوال ۳.۴۲۷: بچوں کا کھیل۔ ایک کھیل میں کھلاڑی ابتدائی نقطہ الف سے دوڑ کر گھڑی مخالف رخ چوکور راہ پر $6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے چکر لگاتا ہے۔ چوکور کے اطراف کی لمبائی $30\,\mathrm{m}$ ہے (شکل ۳.۷۶)۔

---

[50] video



شکل ۳.۷۶: بچوں کا کھیل (سوال ۳.۴۲۷)

۴۴۶۸ ا. جب کھلاڑی ابتدائی نقطہ الف سے 10 m فاصلے پر ہو، اس کا نقطہ ج سے فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟

۴۴۶۹ ب. اس لمحے پر زاویہ θ_1 اور θ_2 کس شرح سے تبدیل ہوتے ہیں؟

۴۴۷۰ سوال ۳.۴۲۸: ایک گھڑی کے سیکنڈوں کی سوئی کی لمبائی 20 cm ہے۔ جب سیکنڈ کی سوئی چار بجے پر ہو اس لمحہ بارہ بجے کے نشان سے اس کا فاصلہ کس
۴۴۷۱ شرح سے تبدیل ہو گا؟

۴۴۷۲ سوال ۳.۴۲۹: بحری جہاز۔ نقطہ M سے دو بحری جہاز آپس میں 120° کا زاویہ بناتے ہوئے روانہ ہوتے ہیں۔ جہاز الف کی رفتار
۴۴۷۳ $28\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ جبکہ جہاز ب کی رفتار $20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہے۔ ایک گھنٹہ بعد ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

۴۴۷۴

۴۴۷۵

باب ۴

تفرق کا استعمال

اس باب میں ہم تفرق سے نتائج اخذ کرنا سیکھیں گے۔ تفرق کی مدد سے تفاعل کی انتہائی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے ان کی ترسیم کی اشکال کی پیش گوئی اور ان پر تجزیہ کرتے ہیں، پیچیدہ کلیات کی سادہ صورت اخذ کرتے ہیں، تفاعل کی پیمائشی خلل کو حساسیت پر غور کرتے ہیں اور تفاعل کے صفر کو اعدادی طریقوں سے حاصل کرتے ہیں۔ مسئلہ اوسط قیمت ان تمام کو ممکن بناتا ہے جس کا ایک منطقی نتیجہ تکملی احصاء (باب ۵) کی راہ ہموار کرتا ہے۔

۴.۱ تفاعل کی انتہائی قیمتیں

اس حصہ میں استمراری تفاعل کی انتہائی قیمتوں کا مقام اور اور ان کی پہچان سکھائی جائے گی۔

مسئلہ اقل و اعظم

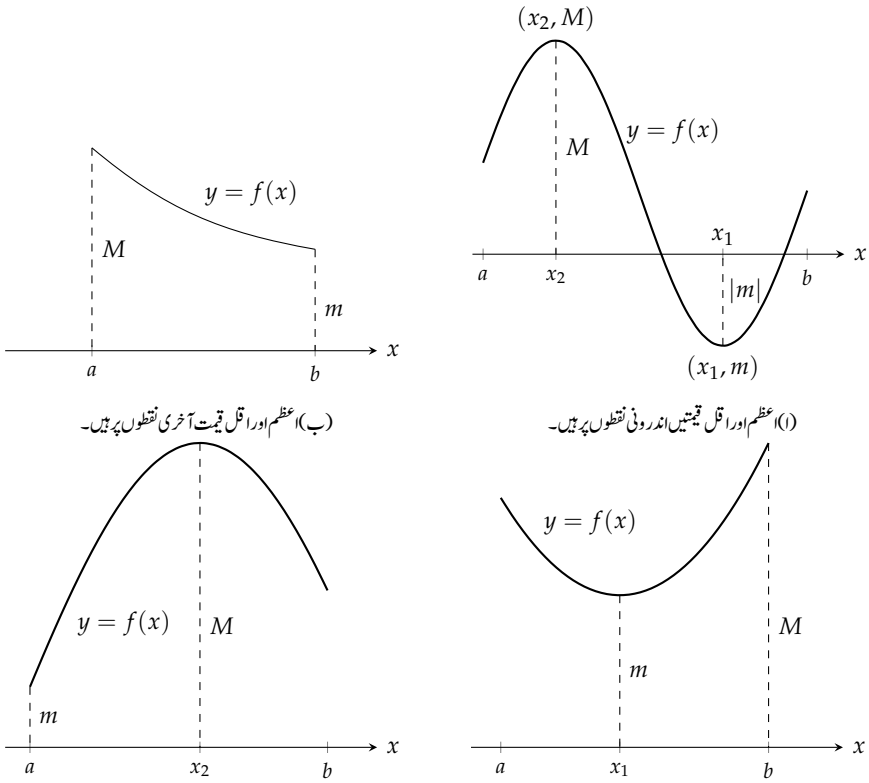
بند دائرہ کار کے ہر نقطہ پر استمراری تفاعل کی دائرہ کار پر مطلق اعظم قیمت اور مطلق اقل قیمت ہو گی جن پر ترسیم کھینچتے وقت نظر رکھا جاتا ہے۔ مسائل کے حل میں انتہائی قیمتوں کے کردار پر اس باب میں جبکہ تکمل احصاء کا نظریہ مرتب کرنے میں ان کے کردار پر اگلے دو ابواب میں غور کیا جائے گا۔

مسئلہ ۴.۱: **استمراری تفاعل کا مسئلہ اقل و اعظم**

بند دائرہ کار I کے ہر نقطہ پر استمراری تفاعل f کی I پر مطلق اعظم قیمت M اور مطلق اقل قیمت m پائی جائے گی۔ یعنی I میں ایسا x_1 اور x_2 پایا جائے گا کہ $f(x_1) = m$ اور $f(x_2) = M$ ہوں اور I میں تمام x کے لیے $m \leq f(x) \leq M$ ہو (شکل ۴.۱)۔

درج بالا مسئلے کے ثبوت کے لیے حقیقی اعدادی نظام کا تفصیلی علم ضروری ہے لہٰذا اس کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا۔

مثال ۴.۱: وقفہ $[-\pi/2, \pi/2]$ پر تفاعل $f(x) = \cos x$ ایک مرتبہ اعظم قیمت 1 اور دو مرتبہ اقل قیمت 0 اختیار کرتا ہے۔ اسی وقفے پر تفاعل $g(x) = \sin x$ ایک مرتبہ اعظم قیمت 1 اور ایک مرتبہ اقل قیمت -1 اختیار کرتا ہے (شکل ۴.۲)۔ □



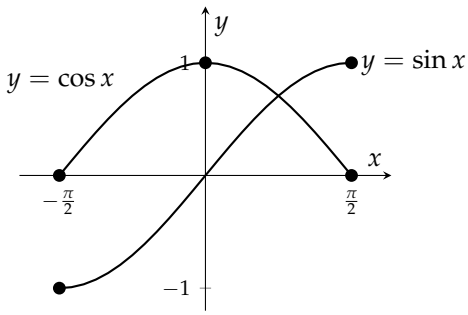
(ا) اعظم اور اقل قیمتیں اندرونی نقطوں پر ہیں۔

(ب) اعظم اور اقل قیمت آخری نقطوں پر ہیں۔

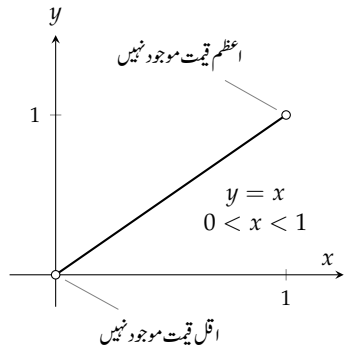
(ج) اقل قیمت اندرونی نقطہ پر جبکہ اعظم قیمت آخری نقطہ پر ہے۔

(د) اعظم قیمت اندرونی نقطہ پر جبکہ اقل قیمت آخری نقطہ پر ہے۔

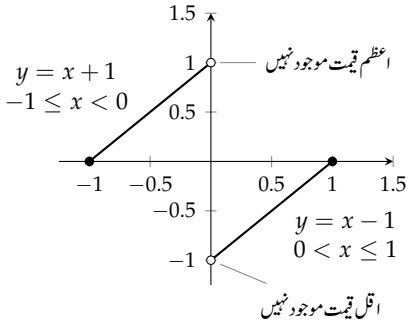
شکل ۱.۴: اعظم اور اقل قیمت کے نقطوں کے چند ممکنہ مقامات۔



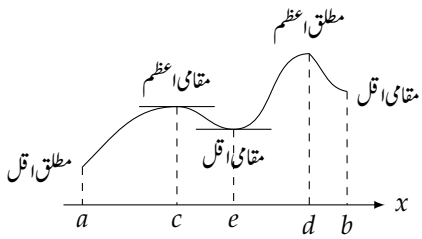
شکل ۲.۴: ترسیم برائے مثال ۱.۴



شکل ۳.۴: کھلے وقفہ پر اعظم اور اقل قیمتوں کا ہونا یقینی نہیں۔



شکل ۴.۴: واحد ایک نقطہ پر عدم استمرار کی وجہ سے اعظم اور اقل قیمتیں غیر یقینی ہو سکتی ہیں۔



شکل ۵.۴: مقامی اور مطلق انتہا۔

۴۴۹۲ جیسا شکل ۳.۴ اور شکل ۴.۴ واضح کرتی ہیں مسئلہ ۱.۴ میں دائرہ کار کا بند ہونا اور تفاعل کا استمراری ہونا لازمی ہے۔ ان کے بغیر مسئلے سے اخذ نتائج غلط ہو سکتے ہیں۔

۴۴۹۳ شکل ۴.۴ میں تفاعل

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

۴۴۹۴ دکھایا گیا ہے جو وقفہ $[-1, 1]$ پر استمراری ہے ماسوائے واحد نقطہ $x = 0$ پر، جس کی وجہ سے تفاعل کی نہ اعظم قیمت اور نہ ہی اقل قیمت پائی جاتی ہے۔

۴۴۹۵ مقامی بالمقابل مطلق (عالمگیر) انتہا

۴۴۹۶ شکل ۵.۴ میں تفاعل کے پانچ انتہائی نقطے دکھائے گئے ہیں تفاعل کی اقل قیمت نقطہ a پر ہے اگرچہ e پر بھی x کی مقامی قیمتوں کے لحاظ سے f کی قیمت کم
۴۴۹۷ ہے۔ نقطہ c پر تفاعل کی مقامی اعظم قیمت پائی جاتی ہے جبکہ d پر اس کی مطلق اعظم قیمت پائی جاتی ہے۔

۴۴۹۸ تعریف: **مطلق انتہائی قیمتیں**

۴۴۹۹ فرض کریں تفاعل f کا دائرہ کار D ہے۔ نقطہ c پر تفاعل f کی مطلق اعظم قیمت تب پائی جائے گی جب D میں تمام x کے لیے درج ذیل ہو

$$f(x) \leq f(c)$$

۴۵۰۰ اور D میں c پر تب f کی مطلق اقل قیمت پائی جائے گی جب D میں تمام x کے لیے درج ذیل ہو۔

$$f(x) \geq f(c)$$

۴۵۰۱ □

۴۵۰۲ مطلق اعظم اور مطلق اقل کو مطلق **انتہا**[1] کہتے ہیں۔ انہیں **عالمگیر**[2] انتہا بھی کہتے ہیں۔

۴۵۰۳ ایک جیسے تفاعل، جنہیں ایک سا تعریفی قاعدہ بیان کرتا ہو، کی انتہا قیمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔ انتہا قیمتیں دائرہ کار پر بھی منحصر ہوں گی۔

۴۵۰۴ مثال ۴.۲:

	تعریفی تفاعل	دائرہ کار D	مطلق انتہا
(ا)	$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	مطلق اعظم نہیں ہے جبکہ $x = 0$ پر مطلق اقل قیمت 0 ہے
(ب)	$y = x^2$	$[0, 2]$	مطلق اعظم قیمت $x = 2$ پر 4 ہے جبکہ $x = 0$ پر مطلق اقل قیمت 0 ہے
(ج)	$y = x^2$	$(0, 2]$	مطلق اعظم قیمت $x = 2$ پر 4 ہے جبکہ مطلق اقل قیمت موجود نہیں
(د)	$y = x^2$	$(0, 2)$	کوئی مطلق قیمت نہیں پایا جاتا ہے

۴۵۰۵ شکل ۴.۶ دیکھیں۔ □

۴۵۰۶ تعریف: **مقامی انتہا قیمتیں**

۴۵۰۷ تفاعل f کا کھلے دائرہ کار D میں اندرونی نقطہ c پر اس صورت مقامی اعظم قیمت پائی جائے گی جب D میں کسی بھی کھلے وقفہ جس میں c پایا جاتا ہو میں
۴۵۰۸ تمام x کے لیے

$$f(x) \leq f(c)$$

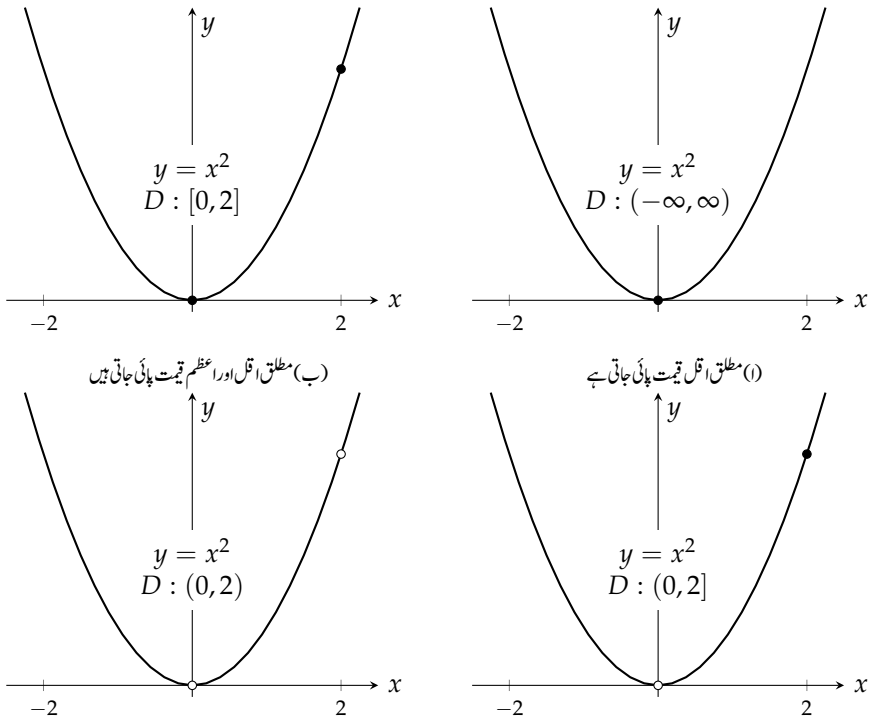
۴۵۰۹ ہو جبکہ (انہیں شرائط کے ساتھ) درج ذیل صورت میں اندرونی نقطہ c پر مقامی اعظم قیمت پائی جائے گی۔

$$f(x) \geq f(c)$$

۴۵۱۰ □

---

[1] extrema
[2] global



(ا) مطلق اقل قیمت پائی جاتی ہے

(ب) مطلق اقل اور اعظم قیمت پائی جاتی ہیں

(ج) مطلق اعظم قیمت پائی جاتی ہے

(د) نہ مطلق اعظم اور نہ مطلق اقل قیمت پائی جاتی ہے

شکل ۶.۴: مطلق قیمت اور دائرہ کار (مثال ۲.۴)۔

ہم مقامی انتہا کی تعریف کو وقفے کے آخری سروں تک وسعت دے سکتے ہیں۔ یوں آخری سر c پر مقامی انتہا سے مراد نصف کھلے وقفہ میں موزوں عدم مساوات کا مطمئن ہونا ہے۔ شکل ۴.۵ میں تفاعل f کی c اور d پر مقامی اعظم قیمتیں جبکہ a ، e ، اور b پر مقامی اقل قیمتیں پائی جاتی ہیں۔

مطلق اعظم قیمت بھی مقامی اعظم قیمت ہو گی۔ مطلق اعظم قیمت اپنے پڑوس میں بھی اعظم قیمت ہو گی۔ یوں تمام مقامی اعظم قیمتوں کے جدول میں مطلق اعظم قیمت (اگر موجود ہو) بھی پائی جائے گی۔ اسی طرح تمام مقامی اقل قیمتوں کے جدول میں مطلق اقل قیمت (اگر موجود ہو) بھی پائی جائے گی۔

انتہا کا حصول

جیسا درج ذیل مسئلہ سمجھاتا ہے تفاعل کی انتہا کے حصول کے لیے چند قیمتوں کی تحقیق ضروری ہو گی۔

مسئلہ ۴.۲: **یک رتبی مسئلہ برائے مقامی انتہا** فرض کریں تفاعل f کے دائرہ کار کے اندرونی نقطہ c پر f کی اقل یا اعظم قیمت پائی جاتی ہو اور c پر f' معین ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$f'(c) = 0$$

ثبوت: یہ دکھانے کی خاطر کہ مقامی انتہا پر $f'(c)$ کی قیمت صفر ہو گی ہم دکھاتے ہیں کہ $f'(c)$ مثبت نہیں ہو سکتا اور ساتھ ہی $f'(c)$ منفی نہیں ہو سکتا۔ صفر وہ واحد عدد ہے جو نہ مثبت اور نہ منفی ہے لہٰذا $f'(c)$ صفر ہو گا۔

فرض کریں c پر f کی مقامی اعظم قیمت پائی جاتی ہے (شکل ۴.۷)۔ یوں c کے قریبی پڑوس میں تمام x پر $f(x) - f(c) \leq 0$ ہو گا۔ چونکہ c اندرونی نقطہ ہے لہٰذا $f'(c)$ کی تعریف درج ذیل دو طرفہ حد ہو گی۔

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

اس کا مطلب ہے کہ $x = c$ پر دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد دونوں موجود اور $f'(c)$ کے برابر ہیں۔ ان حد پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں۔ چونکہ c کی دائیں جانب $x - c > 0$ اور $f(x) \leq f(c)$ ہیں لہٰذا

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \tag{۱}$$

ہو گا۔ اسی طرح c کی بائیں جانب $x - c < 0$ اور $f(x) \leq f(c)$ ہیں لہٰذا

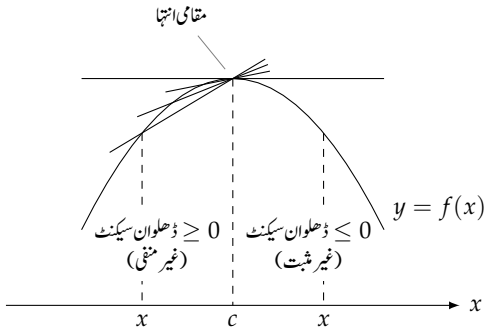
$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \tag{۲}$$

ہو گا۔ مساوات ۱ اور مساوات ۲ کو ملا کر $f'(c) = 0$ ملتا ہے۔

یوں مقامی اعظم قیمت کے لیے مسئلہ ثابت ہوا۔ مقامی اقل قیمت کے لیے مسئلہ ثابت کرنے کے لیے $f(x) \geq f(c)$ استعمال کرنا ہو گا جس سے مساوات ۱ اور مساوات ۲ کی عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہیں۔

□

مسئلہ ۴.۲ کہتا ہے کہ اندرونی انتہا پر اگر تفرق معین ہو تب $f'(c) = 0$ ہو گا۔ یوں تفاعل کی انتہا (مقامی یا عالمگیر) صرف درج ذیل نقطوں پر ہو سکتی ہیں۔



شکل ۷.۴: مقامی اعظم قیمت c پر ہے۔ نقطہ c پر ڈھلوان بیک وقت غیر مثبت اور غیر منفی اعداد کی حد ہونے کی وجہ سے صفر ہو گا۔ (مسئلہ ۲.۴)

۱. اندرونی نقطہ جہاں $f' = 0$ ہو۔

۲. اندرونی نقطہ جہاں f' غیر معین ہو۔

۳. f کے دائرہ کار کے آخری سروں پر۔

درج ذیل تعریف ان نتائج کو مختصراً پیش کرنے میں مدد کرتی ہے۔

تعریف: تفاعل f کے دائرہ کار میں ایسا اندرونی نقطہ جہاں f' غیر معین یا صفر ہو کو **نقطہ فاصل**[۳] کہتے ہیں۔

□

خلاصہ

تفاعل کی انتہا قیمتیں صرف تفاعل کے دائرہ کار میں نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر پائی جا سکتی ہیں۔

عموماً بند دائرہ کار پر تفاعل کی انتہا مطلوب ہو گی۔ مسئلہ ۱.۴ ہمیں یقین دلاتا ہے کہ ایسی قیمتیں موجود ہوں گی؛ مسئلہ ۲.۴ کہتا ہے کہ یہ صرف آخری نقطوں پر اور نقطہ فاصل پر پائی جائیں گی۔ اس قسم کے نقطے عموماً چند ہوں گے جن کی فہرست تیار کر کے دیکھا جا سکتا ہے کہ آیا نقطہ پر اعظم یا اقل قیمت پائی جاتی ہے۔

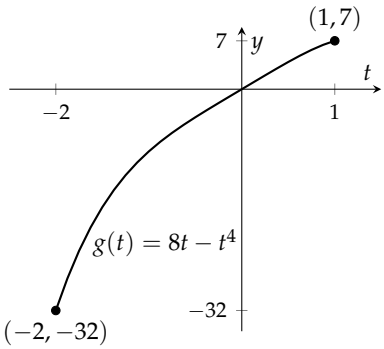
مثال ۳.۴: دائرہ کار $[-2, 1]$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کی مطلق اعظم اور مطلق اقل قیمتیں تلاش کریں۔

حل

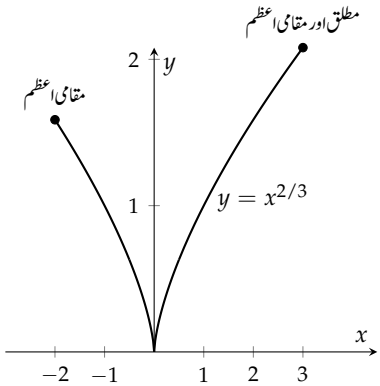
تفاعل پورے دائرہ کار پر قابل تفرق ہے لہٰذا واحد نقطہ فاصل $f'(x) = 2x = 0$ یعنی $x = 0$ پر ہو گا۔ ہمیں تفاعل کی قیمتیں نقطہ فاصل

---

[۳] criticalpoint



شکل ۸.۴: ترسیم برائے مثال ۴.۴



شکل ۹.۴: ترسیم برائے مثال ۵.۴

۴۵۴۶ $x = 0$ اور آخری نقطوں $x = -2$ اور $x = 1$ پر دیکھنی ہوں گی۔

نقطہ فاصل پر قیمت	$f(0) = 0$
آخری نقطہ پر قیمت	$f(-2) = 4$
آخری نقطہ پر قیمت	$f(1) = 1$

۴۵۴۷ تفاعل کی مطلق اعظم قیمت 4 ہے جو نقطہ $x = -2$ پر پائی جاتی ہے جبکہ اس کی مطلق اقل قیمت 0 ہے جو نقطہ $x = 0$ پر پائی جاتی ہے۔ □

۴۵۴۸ مثال ۴.۴: دائرہ کار $[-2, 1]$ پر تفاعل $g(t) = 8t - t^4$ کی مطلق اعظم اور مطلق اقل قیمت تلاش کریں۔

۴۵۴۹ **حل**

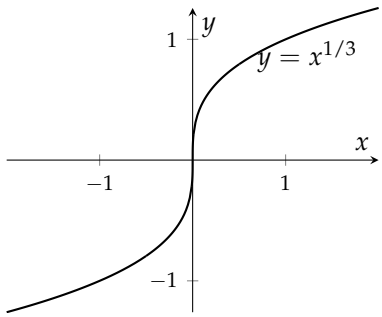
۴۵۵۰ تفرق پورے دائرہ کار پر قابل تفرق ہے لہٰذا نقطہ فاصل صرف وہاں ہوگا جہاں $g'(t) = 0$ ہو۔ اس مساوات کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} g'(t) &= 8 - 4t^3 = 0 \\ t^3 &= 2 \\ t &= 2^{1/3} \end{aligned}$$

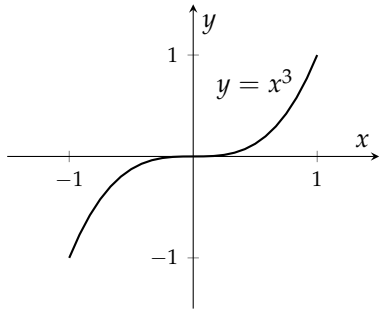
۴۵۵۱ ملتا ہے جو دائرہ کار کے اندر نہیں۔ یوں تفاعل کے مقامی انتہا قیمتیں آخری نقطوں پر پائی جائیں گی (شکل ۸.۴)۔

مطلق اقل قیمت	$g(-2) = -32$
مطلق اعظم قیمت	$g(1) = 7$

۴۵۵۲ □



شکل ۱۰.۴: نقطہ فاصل $x = 0$ پر انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی۔



شکل ۱۱.۴: $x = 0$ پر $y = x^3$ کی انتہا نہیں پائی جاتی اگرچہ اس نقطے پر $y' = 3x^2 = 0$ ہے۔

مثال ۵.۴: تفاعل $h(x) = x^{2/3}$ کی $[-2, -3]$ پر مطلق انتہا تلاش کریں۔

حل

یک رتبی تفرق

$$h'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$

کا صفر نہیں پایا جاتا البتہ $x = 0$ پر یہ غیر معین ہے۔ اس نقطہ پر اور آخری نقطوں $x = -2$ اور $x = 3$ پر تفاعل کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(-2) &= (-2)^{2/3} = 4^{1/3} \\ h(3) &= (3)^{2/3} = 9^{1/3} \end{aligned}$$

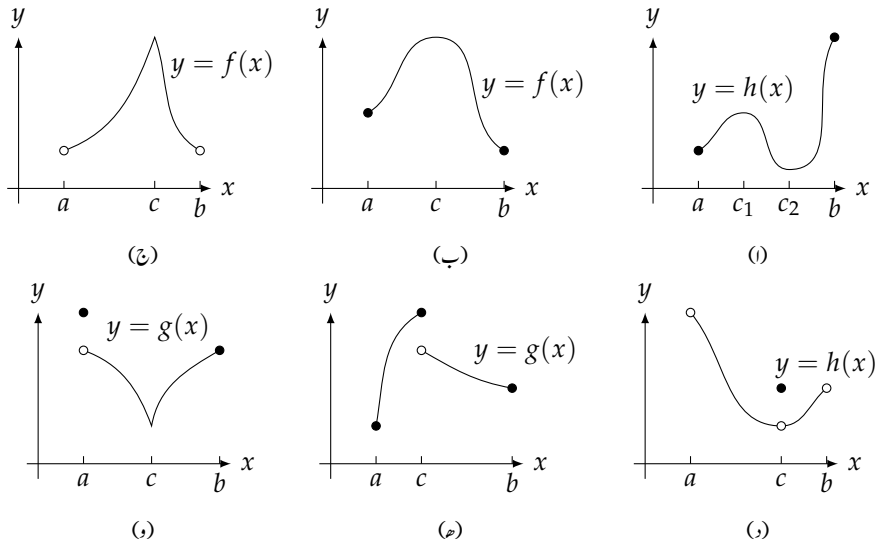
مطلق اعظم قیمت $9^{1/3}$ ہے جو نقطہ $x = 3$ پر پائی جاتی ہے جبکہ مطلق اقل قیمت 0 ہے جو نقطہ $x = 0$ پر پائی جاتی ہے (شکل ۹.۴)۔ □

اگرچہ تفاعل کی انتہا صرف نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر پائی جا سکتی ہیں، ضروری نہیں کہ ہر نقطہ فاصل یا ہر آخری نقطے پر انتہا قیمت پائی جاتی ہو۔ شکل ۱۰.۴ اور شکل ۱۱.۴ اندرونی نقطوں کے لیے اس حقیقت کی وضاحت کرتی ہے اور سوال ۳۴.۴ میں آپ سے ایسا تفاعل پیش کرنے کو کہا گیا ہے جو اپنے دائرہ کار کے آخری نقطوں پر انتہائی قیمت اختیار نہیں کرتا۔

سوالات

ترسیم سے انتہائی نقطوں کا حصول

کیا سوال ۱.۴ تا سوال ۶.۴ میں $[a, b]$ کے بیچ تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں پائی جاتی ہیں؟ بتائیں کہ آپ کے جواب اور مسئلہ ۱.۴ میں کس طرح تضاد نہیں پایا جاتا۔



شکل ۱۲.۴: اشکال برائے سوال ۱.۴ تا سوال ۶.۴

۴۵۶۵ سوال ۱.۴: شکل ۱۲.۴-ا

۴۵۶۶ سوال ۲.۴: شکل ۱۲.۴-ب

۴۵۶۷ سوال ۳.۴: شکل ۱۲.۴-ج

۴۵۶۸ سوال ۴.۴: شکل ۱۲.۴-د

۴۵۶۹ سوال ۵.۴: شکل ۱۲.۴-ھ

۴۵۷۰ سوال ۶.۴: شکل ۱۲.۴-و

۴۵۷۱

۴۵۷۲ **بند وقفہ پر مطلق انتہا**

۴۵۷۳ سوال ۷.۴ تا سوال ۲۲.۴ میں دیے وقفے پر تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔ تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے انتہائی نقطوں کی نشاندہی کریں۔

۴۵۷۴ سوال ۷.۴: $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \quad -2 \leq x \leq 3$

۴۵۷۵ سوال ۸.۴: $f(x) = -x - 4, \quad -4 \leq x \leq 1$

۴۵۷۶ سوال ۹.۴: $f(x) = x^2 - 1, \quad -1 \leq x \leq 2$

۴۵۷۷ سوال ۱۰.۴: $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \leq x \leq 1$

سوال ۴.۱۱: $F(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad 0.5 \le x \le 2$

سوال ۴.۱۲: $F(x) = -\frac{1}{x}, \quad -2 \le x \le -1$

سوال ۴.۱۳: $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \le x \le 8$

سوال ۴.۱۴: $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \le x \le 1$

سوال ۴.۱۵: $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \le x \le 1$

سوال ۴.۱۶: $g(x) = -\sqrt{5 - x^2}, \quad -\sqrt{5} \le x \le 0$

سوال ۴.۱۷: $f(\theta) = \sin\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$

سوال ۴.۱۸: $f(x) = \tan\theta, \quad -\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

سوال ۴.۱۹: $g(x) = \csc x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$

سوال ۴.۲۰: $g(x) = \sec x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{6}$

سوال ۴.۲۱: $f(t) = 2 - |t|, \quad -1 \le t \le 3$

سوال ۴.۲۲: $f(t) = |t - 5|, \quad -4 \le t \le 7$

سوال ۴.۲۳ تا سوال ۴.۲۶ میں تفاعل کی مطلق اقل اور مطلق اعظم قیمتیں تلاش کریں۔ یہ قیمتیں کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟

سوال ۴.۲۳: $f(x) = x^{4/3}, \quad -1 \le x \le 8$

سوال ۴.۲۴: $f(x) = x^{5/3}, \quad -1 \le x \le 8$

سوال ۴.۲۵: $g(\theta) = \theta^{3/5}, \quad -32 \le \theta \le 1$

سوال ۴.۲۶: $h(\theta) = 3\theta^{2/3}, \quad -27 \le \theta \le 8$

دائرہ کار میں مقامی انتہا

سوال ۴.۲۷ تا سوال ۴.۲۷ میں دیے گئے دائرہ کار پر مقامی اعظم یا اقل قیمت تلاش کریں۔ یہ قیمتیں کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟ ان میں سے کون سی مطلق انتہائی قیمتیں ہیں؟

سوال ۴.۲۷:

ا. $f(x) = x^2 - 4, \quad -2 \le x \le 2$

ب. $g(x) = x^2 - 4, \quad -2 \le x < 2$

ج. $h(x) = x^2 - 4, \quad -2 < x < 2$

د. $k(x) = x^2 - 4, \quad -2 \le x < \infty$

ھ. $l(x) = x^2 - 4, \quad 0 < x < \infty$

سوال ۴.۲۸:

۴۶۰۶ ا. $f(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 \le x \le 1$

۴۶۰۷ ب. $g(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 < x \le 1$

۴۶۰۸ ج. $h(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 < x < 1$

۴۶۰۹ د. $k(x) = 2 - 2x^2, \quad -\infty < x \le 1$

۴۶۱۰ ھ. $l(x) = 2 - 2x^2, \quad -\infty < x < 0$

۴۶۱۱

نظریہ اور مثالیں

۴۶۱۲ سوال ۴.۲۹: اگرچہ $f(x) = |x|$ پر $x = 0$ ناقابل تفرق ہے، نقطہ $x = 0$ پر f کی مطلق اقل قیمت پائی جاتی ہے۔ کیا یہ مسئلہ ۴.۲ کے
۴۶۱۳ متضاد ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۴۶۱۴ سوال ۴.۳۰: اگر تفاعل کے دائرہ کار کا آخری نقطہ c ہو تب مسئلہ ۴.۲ کیوں ناقابل استعمال ہو گا؟

۴۶۱۵ سوال ۴.۳۱: اگر جفت تفاعل $f(x)$ کی مقامی اعظم قیمت $x = c$ پر پائی جاتی ہو تب $x = -c$ پر اس کی قیمت کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہو
۴۶۱۶ گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۴۶۱۷ سوال ۴.۳۲: اگر طاق تفاعل $g(x)$ کی مقامی اقل قیمت $x = c$ پر پائی جاتی ہو تب کیا $x = -c$ پر اس کی قیمت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن
۴۶۱۸ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۴۶۱۹ سوال ۴.۳۳: ہم جانتے ہیں کہ نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر تفاعل $f(x)$ کی قیمتوں کی جانچ پڑتال سے تفاعل کی انتہائی قیمتیں حاصل کی جا سکتی ہیں۔
۴۶۲۰ کوئی بھی نقطہ فاصل یا آخری نقطہ نہ ہونے کی صورت میں کیا ہو گا؟ کیا ایسے تفاعل حقیقت میں پائے جاتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۴۶۲۱ سوال ۴.۳۴: وقفہ $[0, 1]$ پر ایسا معین تفاعل پیش کریں جس کا $x = 0$ پر نہ کوئی مقامی اعظم قیمت اور نہ ہی مقامی اقل قیمت پائی جاتی ہو۔

۴۶۲۲

کمپیوٹر کا استعمال

۴۶۲۳ سوال ۴.۳۵ تا سوال ۴.۴۰ میں درج ذیل اقدام سے دیے گئے بند وقفے میں تفاعل کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

۴۶۲۴ ا. وقفہ پر تفاعل تقسیم کرتے ہوئے اس کا رویہ دیکھیں۔

۴۶۲۵ ب. وہ اندرونی نقطے تلاش کریں جہاں $f' = 0$ ہو۔ بعض اوقات f' ترسیم کرنا مددگار ثابت ہو گا۔

۴۶۲۶ ج. وہ اندرونی نقطے تلاش کریں جہاں f' غیر موجود ہے۔

۴۶۲۷ د. جزو (ب) اور (ج) میں حاصل تمام نقطوں کے علاوہ دائرہ کار کے آخری نقطوں پر تفاعل کی قیمتیں حاصل کریں۔

۴۶۲۸ ھ. وقفہ پر تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں اور وہ نقطے تلاش کریں جن پر یہ قیمتیں پائی جاتی ہوں۔

۴۶۲۹ سوال ۴.۳۵: $f(x) = x^4 - 8x62 + 4x + 2, \quad [-\frac{20}{25}, \frac{64}{25}]$

۴۶۳۰ سوال ۴.۳۶: $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1, \quad [-\frac{3}{4}, 3]$

۴۶۳۱ سوال ۴.۳۷: $f(x) = x^{2/3}(3 - x), \quad [-2, 2]$

۴۶۳۲ سوال ۴.۳۸: $f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}, \quad [-1, \frac{10}{3}]$

۴۶۳۳ سوال ۴.۳۹: $f(x) = \sqrt{x} + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

سوال ۴.۴۰: $f(x) = x^{3/4} - \sin x + \frac{1}{2}, \quad [0, 2\pi]$

۴.۲ مسئلہ اوسط قیمت

ہم جانتے ہیں کہ سطح زمین کے قریب ساکن حال (لمحہ $t = 0$) سے گرتا ہوا جسم ابتدائی t سیکنڈوں میں $s = 4.9t^2\,\mathrm{m}$ فاصلہ طے کرے گا۔ اس معلومات کو استعمال کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ لمحہ t پر جسم کی سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی اور اسراع $a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہو گا۔ اب فرض کریں کہ ہمیں جسم کا اسراع معلوم ہے۔ کیا ہم الٹ چلتے ہوئے اس کی سمتی رفتار اور ہٹاو تلاش کر سکتے ہیں؟

ہم حقیقت میں جاننا چاہتے ہیں کہ دیا گیا تفرق کس تفاعل کا تفرق ہو گا۔ زیادہ عمومی سوال یہ ہو گا کہ کس قسم کے تفاعل کا تفرق مخصوص قسم کا ہو گا۔ کس تفاعل کا تفرق مثبت ہو گا، یا منفی ہو گا، یا ہر نقطے پر صفر ہو گا؟ ان سوالات کے جوابات کو مسئلہ اوسط قیمت سے اخذ کردہ ضمنی نتیجہ کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ رول

جن دو نقطوں پر تفاعل $f(x)$ محور x کو قطع کرتا ہے اگر ان کے بیچ تفاعل قابل تفرق ہو تب $f(x)$ کی ترسیم کی جیومیٹری کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ان نقطوں کے بیچ کم سے کم ایک ایسا نقطہ ضرور پایا جائے گا جس پر تفاعل کا مماس افقی ہو۔ مثل رول $(1652 - 1719)$ کا 300 سال پرانا **مسئلہ رول** ہمیں یقین دہانی کراتا ہے کہ حقیقتاً ایسا ہی ہو گا۔

مسئلہ ۴.۳: **مسئلہ رول**[۴]

فرض کریں بند وقفہ $[a, b]$ کے ہر نقطہ پر تفاعل $y = f(x)$ استراری ہے اور وقفہ کے اندرون (a, b) کے ہر نقطہ پر تفاعل قابل تفرق ہے۔ اگر

$$f(a) = f(b) = 0$$

تب (a, b) میں کم سے کم ایسا ایک نقطہ c ہو گا جس پر درج ذیل ہو گا (شکل ۴.۱۳)۔

$$f'(c) = 0$$

ثبوت: چونکہ f استراری ہے لہٰذا $[a, b]$ پر f کی مطلق اعظم اور مطلق اقل قیمتیں ہوں گی۔ یہ صرف درج ذیل نقطوں پر پائی جائیں گی۔

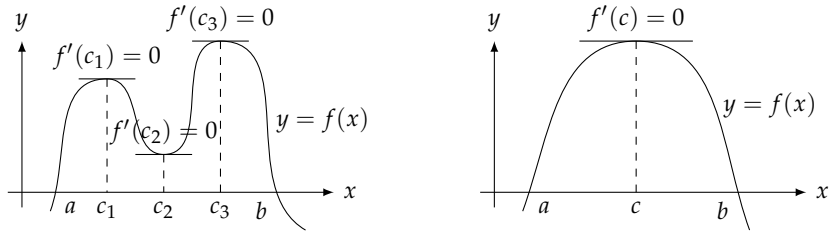
۱. ان اندرونی نقطوں پر جہاں f' ہو۔

۲. ان اندرونی نقطوں پر جہاں f' غیر معین ہو۔

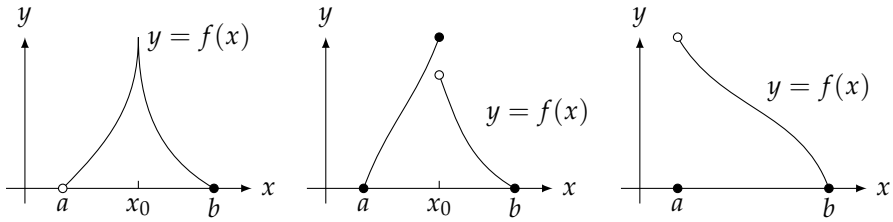
۳. تفاعل کے دائرہ کار کے آخری نقطوں پر جو موجودہ صورت میں a اور b ہیں۔

---

[۴] Rolle'stheorem



شکل ۴.۱۳: مسئلہ رول کہتا ہے کہ جن نقطوں پر تفاعل محور x کو قطع کرتا ہے، ان کے بیچ ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر تفاعل کا تفرق صفر کے برابر ہو گا۔



(ا) ایک آخری نقطہ پر غیر استمراری (ب) اندرونی نقطہ پر غیر استمراری (ج) $[a, b]$ پر استمراری لیکن کسی اندرونی نقطہ پر نا قابل تفرق

شکل ۴.۱۴: کوئی افقی مماس نہیں پایا جاتا ہے۔

۴۶۵۵ قیاس کے تحت ہر اندرونی نقطے پر f کا تفرق پایا جاتا ہے. یوں جزو (2) خارج ہوتا ہے۔

۴۶۵۶ اگر وقفہ کے اندرونی نقطہ c پر تفاعل کی اعظم یا اقل قیمت پائی جاتی ہو تب مسئلہ ۴.۲ کے تحت $f'(c) = 0$ ہو گا جس سے مسئلہ رول کا نقطہ حاصل ہوتا
۴۶۵۷ ہے۔

۴۶۵۸ اگر اعظم قیمت اور اقل قیمت دونوں a یا b پر پائی جاتی ہوں تب f مستقل ہو گا۔ یوں $f' = 0$ ہو گا لہٰذا وقفے کے کسی بھی نقطے کو c لیا جا سکتا
۴۶۵۹ ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

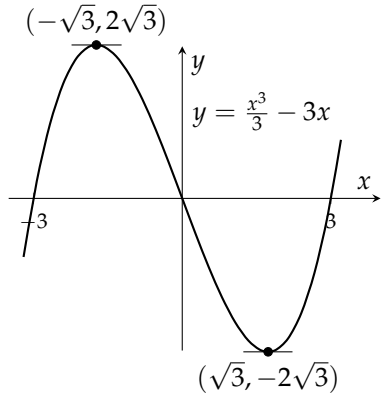
۴۶۶۰ □

۴۶۶۱ مسئلہ ۴.۳ میں دیے شرائط لازمی ہیں۔ اگر صرف ایک نقطے پر بھی یہ شرائط مطمئن نہ ہوتے ہوں تب ضروری نہیں کہ ترسیم کا افقی مماس پایا جاتا ہو (شکل
۴۶۶۲ ۴.۱۴)۔

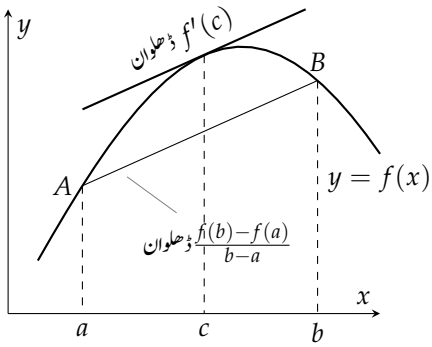
۴۶۶۳ مثال ۴.۶: درج ذیل کثیر رکنی وقفہ $[-3, 3]$ کے ہر نقطہ پر استمراری اور $(-3, 3)$ کے ہر نقطہ پر قابل تفرق ہے۔

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$$

۴۶۶۴ چونکہ $f(-3) = f(3) = 0$ ہے لہٰذا مسئلہ رول کے تحت $a = -3$ اور $b = 3$ کے بیچ کھلے وقفہ میں کم سے کم ایک نقطے پر $f' =$



شکل ۴.۱۵: ترسیم برائے مثال ۴.۶



شکل ۴.۱۶: جیومیٹریائی طور پر مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ A اور B کے بیچ کہیں پر تفاعل کا مماس قطعہ AB کے متوازی ہوگا۔

۴۶۶۵ 0 ہوگا۔ حقیقتاً اس وقفے میں $f'(x) = x^2 - 3$ دو نقطوں $x = \sqrt{3}$ اور $x = -\sqrt{3}$ پر صفر کے برابر ہے (شکل ۴.۱۵)۔ □

۴۶۶۶ **مسئلہ اوسط قیمت**

۴۶۶۷ مسئلہ رول کی ترچھی صورت مسئلہ اوسط قیمت ہے (شکل ۴.۱۶)۔ وتری قطعہ AB کے متوازی نقطہ A اور B کے بیچ کہیں پر تفاعل کا ایسا مماس پایا جاتا ہے
۴۶۶۸ جس کا ڈھلوان وتری قطعہ کے ڈھلوان کا برابر ہوگا۔

۴۶۶۹ مسئلہ ۴.۴: **مسئلہ اوسط قیمت**[۵] فرض کریں بند وقفہ $[a, b]$ کے ہر نقطہ پر $y = f(x)$ استمراری ہے اور اس کے اندرون (a, b) کے ہر
۴۶۷۰ نقطہ پر f قابل تفرق ہے تب (a, b) میں کم سے کم ایک ایسا نقطہ پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \tag{۱}$$

۴۶۷۱ ثبوت: ہم f کی ترسیم پر دو نقطوں $A(a, f(a))$ اور $B(b, f(b))$ کے بیچ سیدھی لکیر کھینچتے ہیں (شکل ۴.۱۷-۱)۔ یہ لکیر درج ذیل تفاعل
۴۶۷۲ کی ترسیم ہوگی۔

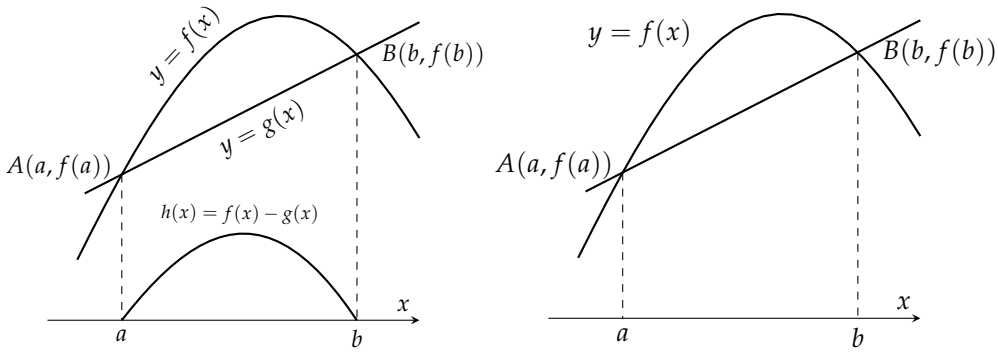
$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad \text{(ڈھلوان و نقطوی روپ)} \tag{۲}$$

۴۶۷۳ نقطہ x پر f اور g کے بیچ انتصابی فاصلہ

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \end{aligned} \tag{۳}$$

---

[۵] meanvaluetheorem



(ب) $f(x)$ اور $g(x)$ کے بیچ افقی فاصلہ $h(x)$ ہے۔

(ا) وقفہ $[a, b]$ پر f اور وتری قطعہ AB کی ترسیم۔

شکل ۴.۱۷: مسئلہ اوسط قیمت۔

ہو گا۔ شکل ۴.۱۷-ب میں f ، g ، اور h دکھائے گئے ہیں۔

تفاعل h وقفہ $[a, b]$ پر مسئلہ رول کو مطمئن کرتا ہے۔ تفاعل h وقفہ $[a, b]$ پر استمراری اور (a, b) پر قابل تفرق ہے (چونکہ اس وقفے پر f اور g استمراری اور قابل تفرق ہیں)۔ مزید چونکہ f اور g دونوں نقطہ A اور B سے گزرتے ہیں لہٰذا $h(a) = h(b) = 0$ ہے۔ یوں (a, b) میں کسی نقطہ c پر $h'(x) = 0$ ہو گا۔ یہ وہ نقطہ ہے جو ہمیں مساوات ۱ میں درکار ہے۔

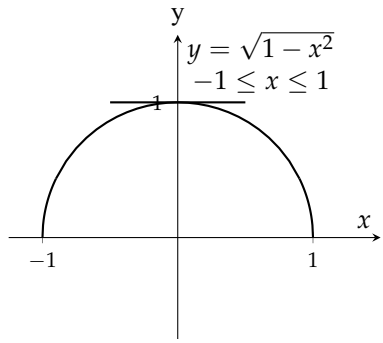
مساوات ۱ کی تصدیق کی خاطر ہم x کے لحاظ سے مساوات ۳ کے دونوں ہاتھ کا تفرق لے کر اس میں $x = c$ پُر کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
h'(x) &= f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} && \text{(تفرق)} \\
h'(c) &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} && (x = c) \\
0 &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} && (h'(c) = 0) \\
f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}
\end{aligned}
$$

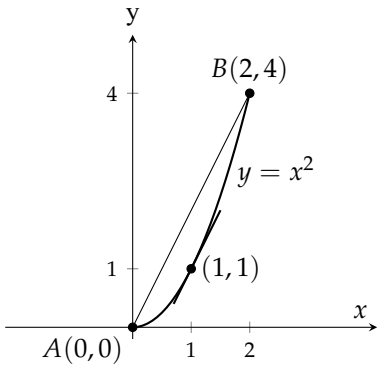
یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

دھیان رہے کہ مسئلہ اوسط قیمت میں نقطہ a یا b پر f کا قابل تفرق ہونا ضروری نہیں البتہ ان نقطوں پر f کا استمراری ہونا کافی ہے (شکل ۴.۱۸)۔ ہم عموماً c کے بارے میں صرف اتنا ہی جانتے ہیں جتنا یہ مسئلہ ہمیں بتاتا ہے، یعنی کہ، c موجود ہے۔ اگلی مثال کی طرح بعض اوقات ہم c کو جان پاتے ہیں لیکن ایسا شاذ و نادر ہو گا۔



شکل۱۸.۴:اگرچہ $y = \sqrt{1-x^2}$ نقطہ -1 اور 1 پر نا قابل تفرق ہے یہ $[-1,1]$ پر مسئلہ اوسط قیمت کو مطمئن کرتا ہے۔



شکل۱۹.۴:نقطہ $c = 1$ پر مماس،وتری قطعہ AB کے متوازی ہے(مثال۷.۴)

مثال۷.۴: وقفہ $0 \le x \le 2$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ استمراری اور $0 < x < 2$ پر قابل تفرق ہے(شکل۱۹.۴)۔چونکہ $f(0) = 0$ اور $f(2) = 4$ ہیں لہٰذا مسئلہ اوسط قیمت کے تحت اس وقفہ میں نقطہ c پر تفرق $f'(x) = 2x$ کی قیمت لازماً $\frac{4-0}{2-0} = 2$ ہو گی۔موجودہ مثال میں ہم $2x = 2$ کو حل کرتے ہوئے $x = c = 1$ حاصل کر پاتے ہیں۔ □

طبعی تشریح

اگر ہم $[a,b]$ پر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ کو f کی اوسط تبدیلی اور $f'(c)$ کو لمحاتی تبدیلی تصور کریں تب مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ کسی اندرونی نقطہ پر لمحاتی تبدیلی ضرور پورے وقفہ پر اوسط تبدیلی کے برابر ہو گی۔

مثال۸.۴: ایک گاڑی ساکن حال سے شروع ہر کر 8 سیکنڈوں میں کل 120 میٹر فاصلہ طے کرتی ہے۔ان 8 سیکنڈوں کے لیے گاڑی کی اوسط رفتار $\frac{120}{8} = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ ان آٹھ سیکنڈوں میں کسی ایک لمحے رفتار پیما ٹھیک یہی رفتار دکھائے گا۔ □

ضمنی نتائج اور چند جوابات

اس حصہ کے شروع میں ہم نے پوچھا، کس تفاعل کا تفرق صفر ہو گا۔مسئلہ اوسط قیمت کا پہلا ضمنی نتیجہ اس کا جواب دیتا ہے۔

ضمنی نتیجہ ۱.۴: **صفر تفرق کے تفاعلات مستقل ہوں گے**
اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر $f'(x) = 0$ ہو تب I میں تمام x پر $f(x) = C$ ہو گا جہاں C مستقل ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر وقفہ I پر تفاعل f کی قیمت مستقل ہو تب I پر f قابل تفرق ہو گا اور I میں تمام x پر $f'(x) = 0$ ہو گا۔ضمنی نتیجہ اس کا

الٹ رخ پیش کرتا ہے۔

ثبوت ضمنی نتیجہ: ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ I پر f کی قیمت مستقل ہے۔ ہم I میں ہر دو نقطوں x_1 اور x_2 پر $f(x_1) = f(x_2)$ دکھاتے ہوئے ایسا کرتے ہیں۔

فرض کریں x_1 اور x_2 وقفہ I میں کوئی بھی دو نقطے ہیں جن کی شمار بندی بائیں سے دائیں رخ ہے لہٰذا $x_1 < x_2$ ہو گا۔ یوں $[x_1, x_2]$ پر f مسئلہ اوسط قیمت کو مطمئن کرے گا۔ یہ $[x_1, x_2]$ کے ہر نقطہ پر قابل تفرق ہو گا لہٰذا یہ ہر اس نقطہ پر استمراری بھی ہو گا۔ یوں x_1 اور x_2 کے بیچ کسی نقطہ c پر

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

ہو گا۔ چونکہ پورے I پر $f' = 0$ ہے لہٰذا یہ مساوات درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad f(x_2) - f(x_1) = 0, \quad f(x_1) = f(x_2)$$

□

اس حصہ کے شروع میں ہم نے یہ بھی پوچھا کہ کیا الٹ چلتے ہوئے ہم اسراع سے رفتار اور ہٹاو تلاش کر سکتے ہیں۔ اس کا جواب اگلا ضمنی نتیجہ پیش کرتا ہے۔

ضمنی نتیجہ ۴.۲: **ایک سے تفرق والے تفاعل میں مستقل کا فرق ہو گا**

اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر $f'(x) = g'(x)$ ہو تب ایسا مستقل C موجود ہو گا کہ I میں تمام x پر $f(x) = g(x) + C$ ہو۔

ثبوت ضمنی نتیجہ: I میں ہر نقطہ پر تفاعل فرق $h = f - g$ کا تفرق

$$h'(x) = f'(x) - h'(x) = 0$$

ہو گا۔ یوں ضمنی نتیجہ ۴.۱ کے تحت I پر $h(x) = C$ ہو گا۔ یوں $f(x) - g(x) = C$ یا $f(x) = g(x) + C$ ہو گا۔

□

ضمنی نتیجہ ۴.۲ کہتا ہے کہ وقفہ پر دو تفاعل کے فرق کا تفرق صرف اس صورت صفر کے برابر ہو گا جب اس وقفہ پر ان تفاعل کا فرق ایک مستقل ہو۔ مثال کے طور پر ہم جانتے ہیں کہ $(-\infty, \infty)$ پر $f(x) = x^2$ کا تفرق $2x$ ہے۔ ایسا دوسرا تفاعل جس کا $(-\infty, \infty)$ پر تفرق $2x$ ہو کا کلیہ لازماً $x^2 + C$ ہو گا (شکل ۴.۲۰)۔

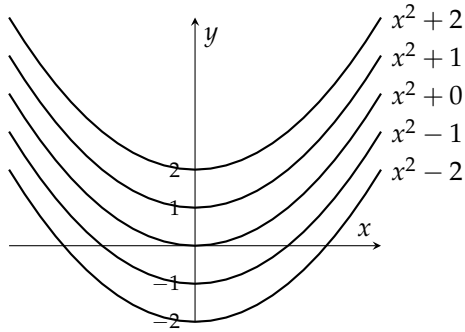
مثال ۴.۹: ایسا تفاعل $f(x)$ تلاش کریں جس کا تفرق $\sin x$ ہو اور جو نقطہ $(0, 2)$ سے گزرتا ہو۔

حل

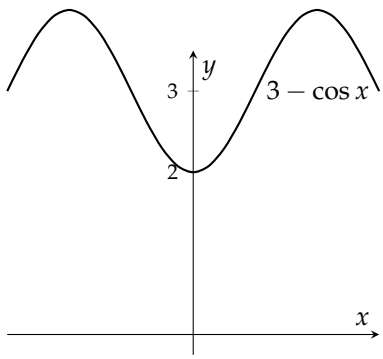
چونکہ $g(x) = -\cos x$ کا تفرق بھی $\sin x$ ہے لہٰذا $f(x) = -\cos x + C$ ہو گا۔ دیا گیا نقطہ اس میں پُر کرتے ہوئے مستقل C حاصل کرتے ہیں۔

$$f(0) = -\cos(0) + C = 2 \quad \Longrightarrow \quad C = 3$$

یوں درکار تفاعل $f(x) = -\cos x + 3$ ہے (شکل ۴.۲۱)۔ □



شکل ۲۰.۴: ضمنی نتیجہ ۲.۴ کہتا ہے کہ ایک سے تفرق والے تفاعل میں صرف انتصابی فرق پایا جاتا ہے۔



شکل ۲۱.۴: ترسیم برائے مثال ۹.۴

۴۷۲۰ **اسراع سے سمتی رفتار اور ہٹاو کا حصول**

۴۷۲۱ سطح زمین کے قریب جہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے ساکن حال سے آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار اور ہٹاو تلاش کرتے ہیں۔

۴۷۲۲ ہم جانتے ہیں کہ سمتی رفتار v ایسا تفاعل ہے جس کا تفرق 9.8 کے برابر ہے۔ ہم یہ جانتے ہیں کہ $g(t) = 9.8t$ کا تفرق 9.8 ہے لہٰذا ضمنی نتیجہ
۴۷۲۳ ۲.۴ کے تحت

$$v(t) = 9.8t + C$$

۴۷۲۴ ہو گا جہاں C مستقل ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر جسم ساکن ہو گا لہٰذا

$$v(0) = 9.8(0) + C \quad \Longrightarrow \quad C = 0$$

۴۷۲۵ ہو گا۔ یوں سمتی رفتار تفاعل $v(t) = 9.8t$ ہو گا۔ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ $h(t) = 4.9t^2$ کا تفرق $9.8t$ ہے لہٰذا ضمنی نتیجہ ۲.۴ کے تحت

$$s(t) = 4.9t^2 + C$$

۴۷۲۶ ہو گا جہاں C ایک مستقل ہے۔ چونکہ لمحہ $t = 0$ پر ہٹاو صفر ہے لہٰذا

$$s(0) = 4.9(0^2) + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = 0$$

۴۷۲۷ یعنی $s(t) = 4.9t^2$ ہو گا۔

۴۷۲۸ کسی تفاعل کی شرح تبدیلی سے تفاعل حاصل کرنے کی صلاحیت، احصاء کی اہم ترین طاقت ہے۔ اس پر مزید بات اگلے باب میں کی جائے گی۔

۴۷۲۹ **بڑھتا تفاعل اور گھٹتا تفاعل**

۴۷۳۰ اس حصہ کے شروع میں ہم نے پوچھا کہ کس قسم کے تفاعل کا تفرق مثبت اور کس کا تفرق منفی ہو گا۔ مسئلہ اوسط قیمت کا تیسرا ضمنی نتیجہ جو اس کا جواب دیتا ہے
۴۷۳۱ کہتا ہے کہ بڑھتے ہوئے تفاعل کا تفرق مثبت اور گھٹتے ہوئے تفاعل کا تفرق منفی ہو گا۔

تعریف: فرض کریں وقفہ I پر تفاعل f معین ہے اور اس وقفہ پر x_1 اور x_2 کوئی دو نقطے ہیں۔

۱. اگر $x_1 < x_2$ کی صورت میں $f(x_1) < f(x_2)$ ہو تب I پر f **بڑھتا**[6] تفاعل کہلاتا ہے۔

۲. اگر $x_1 < x_2$ کی صورت میں $f(x_1) > f(x_2)$ ہو تب I پر f **گھٹتا**[7] تفاعل کہلاتا ہے۔

□

ضمنی نتیجہ ۴.۳: بڑھتے اور گھٹتے تفاعل کی پہلی تفرقی پرکھ

فرض کریں $[a,b]$ پر f استمراری اور (a,b) پر f قابل تفرق ہے۔

- اگر (a,b) کے ہر نقطہ پر $f' > 0$ ہو تب $[a,b]$ پر f بڑھتا ہے۔
- اگر (a,b) کے ہر نقطہ پر $f' < 0$ ہو تب $[a,b]$ پر f گھٹتا ہے۔

ثبوت ضمنی نتیجہ: فرض کریں $[a,b]$ میں x_1 اور x_2 کوئی دو نقطے ہیں جہاں $x_1 < x_2$ ہے۔ وقفہ $[x_1,x_2]$ پر مسئلہ اوسط قیمت تفاعل f کے لیے کہتا ہے کہ

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \tag{۴}$$

ہو گا جہاں x_1 اور x_2 کے بیچ c ایک موزوں نقطہ ہے۔ چونکہ $x_2 - x_1$ مثبت قیمت ہے لہٰذا مساوات ۴ کے دائیں ہاتھ کی علامت وہی ہو گی جو $f'(c)$ کی ہے۔ یوں (a,b) پر مثبت $f'(c)$ کی صورت میں $f(x_2) > f(x_1)$ ہو گا جبکہ (a,b) پر منفی $f'(c)$ کی صورت میں $f(x_1) < f(x_2)$ ہو گا۔

□

مثال ۴.۱۰: وقفہ $(-\infty,0)$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کا تفرق $f'(x) = 2x < 0$ ہے لہٰذا اس وقفے پر f گھٹے گا۔ وقفہ $(0,\infty)$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کا تفرق $f'(x) = 2x > 0$ ہے لہٰذا اس وقفے پر f بڑھے گا (شکل ۴.۲۲)۔ □

سوالات

مسئلہ اوسط قیمت میں c کی تلاش

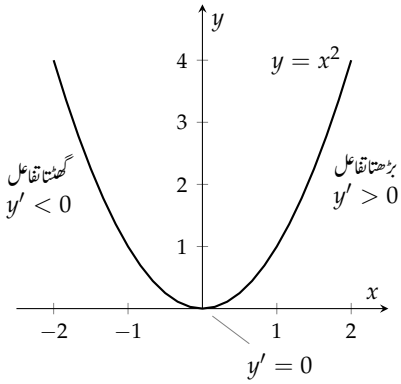
سوال ۴.۴۱ تا سوال ۴.۴۴ میں دیے وقفہ اور تفاعل کے لیے c کی ایسی قیمت تلاش کریں جو مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

کو مطمئن کرتی ہو۔

---

[6] increasing
[7] decreasing



شکل ۲۲.۴: ترسیم برائے مثال ۱۰.۴

سوال ۴۱.۴: $f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad [0,1]$

سوال ۴۲.۴: $f(x) = x^{2/3}, \quad [0,1]$

سوال ۴۳.۴: $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad [\frac{1}{2},2]$

سوال ۴۴.۴: $f(x) = \sqrt{x-1}, \quad [1,3]$

قیاس کی پرکھ اور استعمال

سوال ۴۵.۴ تا سوال ۴۸.۴ میں کون سے تفاعل دیے وقفہ پر مسئلہ اوسط قیمت کے قیاس کو مطمئن کرتے ہیں اور کون سے تفاعل ایسا نہیں کرتے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴۵.۴: $f(x) = x^{2/3}, \quad [-1,8]$

سوال ۴۶.۴: $f(x) = x^{4/5}, \quad [0,1]$

سوال ۴۷.۴: $f(x) = \sqrt{x(1-x)}, \quad [0,1]$

سوال ۴۸.۴:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

سوال ۴۹.۴: درج ذیل تفاعل $x = 0$ اور $x = 1$ پر صفر کے برابر اور $(0,1)$ پر قابل تفرق ہے لیکن (a,b) پر اس کا تفرق کبھی بھی صفر نہیں۔

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

ایسا کیوں ممکن ہے؟ کیا مسئلہ رول نہیں کہتا کہ $(0,1)$ پر کہیں نا کہیں تفرق صفر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۵۰: وقفہ $[0,2]$ پر a ، m ،اور b کی کون سی قیمتوں کے لیے درج ذیل تفاعل مسئلہ اوسط قیمت کے قیاس کو مطمئن کرتا ہے؟

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

جذر (صفر)

سوال ۴.۵۱:

ا. باری باری درج ذیل کثیر رکنیوں کے صفر کو ایک لکیر پر ترسیم کریں۔ ساتھ ہی ان کے یک رتبی تفرق کے صفر بھی ترسیم کریں۔

۱. $y = x^2 - 4$

۲. $y = x^2 + 8x + 15$

۳. $y = x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2$

۴. $y = x^3 - 33x^2 + 216x = x(x-9)(x-24)$

ب. مسئلہ رول کی مدد سے ثابت کریں کہ $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ کے ہر دو صفر کے بیچ $nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$ کا ایک صفر پایا جاتا ہے۔

سوال ۴.۵۲: فرض کریں وقفہ $[a,b]$ میں f''' استمراری ہے اور اس وقفہ پر f کے تین صفر پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ اس وقفہ پر f'' کا کم سے کم ایک صفر پایا جائے گا۔ اس نتیجہ کو عمومی بنائیں۔

سوال ۴.۵۳: دکھائیں کہ اگر پورے $[a,b]$ پر $f'' > 0$ ہو تب $[a,b]$ میں f' کا زیادہ سے زیادہ ایک صفر پایا جائے گا۔ اگر $[a,b]$ پر $f'' < 0$ ہو تب کیا ہو گا؟

سوال ۴.۵۴: دکھائیں کہ کعبی کثیر رکنی کے صفروں کی زیادہ سے زیادہ تعداد تین ممکن ہے۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۴.۵۵: دکھائیں کہ دو گھنٹوں کے سفر میں کسی لمحے پر گاڑی کا رفتار پیما ضرور دو گھنٹوں کی اوسط رفتار دکھائے گا۔

سوال ۴.۵۶: تبدیلی درجہ حرارت برف سے حرارت پیما کو نکال کر ابلتے ہوئے پانی میں رکھنے سے اس کا درجہ حرارت 14 سیکنڈوں میں $-19\,^\circ\mathrm{C}$ سے بڑھ کر $100\,^\circ\mathrm{C}$ ہو جاتا ہے۔ دکھائیں کہ اس دوران درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح کسی ایک لمحے پر ضرور $8.5\,^\circ\mathrm{C\,s^{-1}}$ ہو گی۔

سوال ۴.۵۷: فرض کریں وقفہ $[0,1]$ پر قابل تفرق تفاعل f کا تفرق کبھی صفر نہیں ہوتا۔ دکھائیں کہ $f(0 \neq f(1)$ ہو گا۔

سوال ۴.۵۸: دکھائیں a اور b کی کسی بھی قیمتوں کے لیے $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$ ہو گا۔

سوال ۴.۵۹: فرض کریں $[a,b]$ پر f قابل تفرق ہے اور $f(b) < f(a)$ ہے۔ کیا $[a,b]$ پر f' کی قیمت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟

سوال ۴.۶۰: فرض کریں $[a,b]$ پر f اور g قابل تفرق ہیں اور $f(a)=g(a)$ اور $f(b)=g(b)$ ہیں۔ دکھائیں کہ a اور b کے بیچ کم سے کم ایسا ایک نقطہ پایا جاتا ہے جہاں f اور g کی ترسیمات کے مماس آپس میں متوازی ہیں۔

سوال ۴.۶۱: فرض کریں x کی ہر قیمت کے لیے f قابل تفرق ہے۔ مزید فرض کریں کہ $f(1)=1$ ہے اور $(-\infty,1)$ پر $f'<0$ ہے اور $(1,\infty)$ پر $f'>0$ ہے۔

ا. دکھائیں کہ تمام x پر $f(x)\geq 1$ ہوگا۔

ب. کیا $f'(1)=0$ لازماً ہوگا؟ وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۶۲: فرض کریں $f(x)=px^2+qx+r$ بند وقفہ $[a,b]$ پر معین ہے۔ دکھائیں کہ (a,b) میں ٹھیک ایک نقطہ c پر f مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجے پر پورا اترتا ہے۔

سوال ۴.۶۳: حیرت کن ترسیم درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x)=\sin x\sin(x+2)-\sin^2(x+1)$$

یہ ترسیم کیا کرتی ہے؟ یہ تفاعل اس طرح کا رویہ کیوں رکھتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۶۴: اگر دو تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی ترسیمات مستوی میں ایک ہی نقطہ سے شروع ہوتے ہوں اور ہر نقطہ پر ان کی شرح تبدیلی ایک سی ہو تب کیا یہ تفاعل بالکل ایک سے نہیں ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۶۵:

ا. دکھائیں کہ تفاعل $g(x)=\frac{1}{x}$ اپنے دائرہ کار کے ہر وقفہ میں گھٹتا ہے۔

ب. اگر جزو (ا) کا نتیجہ درست ہو تب $g(1)=1$ کس طرح $g(-1)=-1$ سے بڑا ہو سکتا ہے؟

سوال ۴.۶۶: فرض کریں وقفہ $[a,b]$ میں تفاعل f معین ہے۔ درج ذیل کو مطمئن کرنے کی خاطر f پر کون سے شرائط لاگو کرنے ہوں گے

$$f'\text{ اقل}\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq f'\text{ اعظم}$$

جہاں اقل f' اور اعظم f' سے مراد $[a,b]$ پر بالترتیب f' کی اقل اور اعظم قیمت ہے۔

سوال ۴.۶۷: اگر $f'(x)=1/(1+x^4\cos x)$ پر $0\leq x\leq 0.1$ ہو اور $f(0)=1$ ہو تب سوال ۴.۶۶ کی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے $f(0.1)$ کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۴.۶۸: اگر $f'(x)=1/(1-x^4)$ پر $0\leq x\leq 0.1$ اور $f(0)=2$ ہو تب سوال ۴.۶۶ کی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے $f(0.1)$ کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۴.۶۹: ہندسی اوسط۔ دو مثبت اعداد a اور b کے **ہندسی اوسط**[8] سے مراد عدد $\sqrt{ab}$ ہے۔ دکھائیں کہ مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ میں مثبت اعداد کے وقفہ $[a,b]$ پر تفاعل $f(x)=\frac{1}{x}$ کے لیے c کی قیمت $\sqrt{ab}$ ہے۔

---

[8] geometricmean

سوال ۴.۷۰: حسابی اوسط۔ دو اعداد a اور b کا **حسابی اوسط**[9] $\frac{a+b}{2}$ ہے۔ دکھائیں کہ مسئلہ اوسط قیمت میں وقفہ $[a,b]$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کے لیے c کی قیمت $\frac{a+b}{2}$ ہو گی۔

تفرق سے تفاعل کا حصول

سوال ۴.۷۱: فرض کریں $f(-1) = 3$ اور تمام x کے لیے $f'(x) = 0$ ہے۔ کیا تمام x کے لیے $f(x) = 3$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۷۲: فرض کریں $f(0) = 5$ اور تمام x کے لیے $f'(x) = 2$ ہیں۔ کیا تمام x کے لیے $f(x) = 2x + 5$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۷۳: فرض کریں تمام x کے لیے $f'(0) = 2x$ ہے۔ درج ذیل صورتوں میں $f(2)$ تلاش کریں۔

ا. $f(0) = 0$ ب. $f(1) = 0$ ج. $f(-2) = 3$

سوال ۴.۷۴: جن تفاعل کا تفرق مستقل ہو ان کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۷۵ تا سوال ۴.۸۰ میں وہ تفاعل تلاش کریں جس کا تفرق دیا گیا ہے۔

سوال ۴.۷۵: (ا) $y' = x$، (ب) $y' = x^2$، (ج) $y' = x^3$

سوال ۴.۷۶: (ا) $y' = 2x$، (ب) $y' = 2x - 1$، (ج) $y' = 3x^2 + 2x - 1$

سوال ۴.۷۷: (ا) $y' = -\frac{1}{x^2}$، (ب) $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$، (ج) $y' = 5 + \frac{1}{x^2}$

سوال ۴.۷۸: (ا) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$، (ب) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$، (ج) $y' = 4x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

سوال ۴.۷۹: (ا) $y' = \sin 2t$، (ب) $y' = \cos \frac{t}{2}$، (ج) $y' = \sin 2t + \cos \frac{t}{2}$

سوال ۴.۸۰: (ا) $y' = \sec^2 \theta$، (ب) $y' = \sqrt{\theta}$، (ج) $y' = \sqrt{\theta} - \sec^2 \theta$

سوال ۴.۸۱ تا سوال ۴.۸۴ میں وہ تفاعل تلاش کریں جس کا تفرق دیا گیا ہے اور جو دیے گئے نقطہ سے گزرتا ہے۔

سوال ۴.۸۱: $f'(x) = 2x - 1, \quad N(0,0)$

سوال ۴.۸۲: $g'(x) = \frac{1}{x^2} + 2x, \quad N(-1,1)$

سوال ۴.۸۳: $r'(\theta) = 8 - \csc^2 \theta, \quad N(\frac{\pi}{4}, 0)$

سوال ۴.۸۴: $r'(t) = \sec t \tan t - 1, \quad N(0,0)$

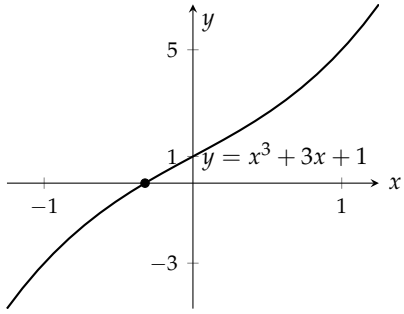
صفروں کی گنتی

مساوات $f(x) = 0$ کو اعدادی طریقہ سے حل کرنے سے پہلے ہم عموماً مطلوبہ وقفہ پر مساوات کے متوقع صفروں کی تعداد جاننا چاہتے ہیں۔ بعض اوقات ضمنی نتیجہ ۴.۳ کی مدد سے ایسا کرنا ممکن ہو گا۔

درج ذیل فرض کریں۔

---

[9] arithmeticmean



شکل ۴.۲۳: کثیر رکنی $y = x^3 + 3x + 1$ کا واحد صفر دکھایا گیا ہے۔

۴۸۴۱ ۱. $[a, b]$ پر f استمراری اور (a, b) پر قابل تفرق ہے۔

۴۸۴۲ ۲. $f(a)$ اور $f(b)$ کی علامتیں ایک دوسرے کی الٹ ہیں۔

۴۸۴۳ ۳. پورے (a, b) پر $f' > 0$ اور یا پورے (a, b) پر $f' < 0$ ہے۔

۴۸۴۴ تب a اور b کے بیچ f کا ٹھیک ایک صفر پایا جائے گا۔ چونکہ یہ پورے $[a, b]$ پر بڑھ رہا ہے اور یا پورے $[a, b]$ پر گھٹ رہا ہے لہٰذا یہ
۴۸۴۵ محور x کو ایک ہی مرتبہ قطع کر سکتا ہے۔ اس کے باوجود مسئلہ ۲.۹ کے تحت اس کا کم سے کم ایک صفر ہو گا۔ مثال کے طور پر $[-1, 1]$ پر
۴۸۴۶ $f(x) = x^3 + 3x + 1$ قابل تفرق ہے، $f(-1) = -3$ اور $f(1) = 5$ کی علامتیں ایک دوسرے کی الٹ ہیں،
۴۸۴۷ اور تمام x کے لیے $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ ہے لہٰذا $[-1, 1]$ پر f کا ٹھیک ایک صفر پایا جاتا ہے (شکل ۴.۲۳)۔

۴۸۴۸ سوال ۴.۸۵ تا سوال ۴.۹۲ میں دکھائیں کہ دیے گئے وقفہ پر تفاعل کا صرف ایک صفر پایا جاتا ہے۔

۴۸۴۹ سوال ۴.۸۵: $f(x) = x^4 + 3x + 1, \quad [-2, -1]$

۴۸۵۰ سوال ۴.۸۶: $f(x) = x^3 + \frac{4}{x^2} + 7, \quad (-\infty, 0)$

۴۸۵۱ سوال ۴.۸۷: $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1+t} - 4, \quad (0, \infty)$

۴۸۵۲ سوال ۴.۸۸: $g(t) = \frac{1}{1-t} + \sqrt{1+t} - 3, \quad (-1, 1)$

۴۸۵۳ سوال ۴.۸۹: $r(\theta) = \theta + \sin^2(\frac{\theta}{3}) - 8, \quad (-\infty, \infty)$

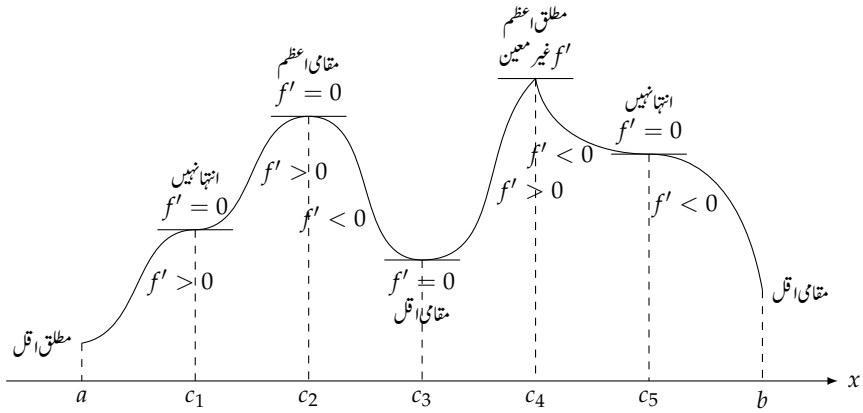
۴۸۵۴ سوال ۴.۹۰: $r(\theta) = 2\theta - \cos^2\theta + \sqrt{2}, \quad (-\infty, \infty)$

۴۸۵۵ سوال ۴.۹۱: $r(\theta) = \sec\theta - \frac{1}{\theta^3} + 5, \quad (0, \frac{\pi}{2})$

۴۸۵۶ سوال ۴.۹۲: $r(\theta) = \tan\theta - \cot\theta - \theta, \quad (0, \frac{\pi}{2})$

۴۸۵۷ **کمپیوٹر کا استعمال**

۴۸۵۸ سوال ۴.۹۳:



شکل ۴.۲۴: بعض نقطہ فاصل پر مقامی انتہا پائی جاتی ہے اور بعض پر نہیں۔

۴۸۵۹ ا. ایسی کثیر رکنی $f(x)$ تشکیل دیں جس کے صفر $x = -2, -1, 0, 1, 2$ پر پائے جاتے ہوں۔

۴۸۶۰ ب. $f(x)$ اور $f'(x)$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ آپ کو کیا خوبی نظر آتی ہے۔

۴۸۶۱ ج. کیا $g(x) = \sin x$ اور اس کا تفرق $g'(x)$ بھی ایسی خوبی رکھتے ہیں؟

۴۸۶۲

۴۸۶۳

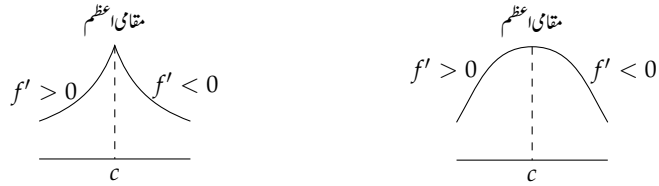
۴۸۶۴ ۴.۳ مقامی انتہائی قیمتوں کی یک رتبی تفرقی پرکھ

۴۸۶۵ اس حصے میں مقامی انتہائی قیمت کی موجودگی کے لیے تفاعل کے نقطہ فاصل کو پرکھنا دکھایا جائے گا۔

۴۸۶۶ پرکھ

۴۸۶۷ جیسا شکل ۴.۲۴ میں دکھایا گیا ہے تفاعل f کے بعض نقطہ فاصل پر تفاعل کی مقامی انتہا پائی جائے گی اور بعض پر نہیں۔ یہ راز نقطہ کے بالکل قریب f' کی
۴۸۶۸ علامت میں پوشیدہ ہے۔ جیسا جیسا x بائیں سے دائیں رخ بڑھتا ہے f کی قیمت وہاں بڑھتی ہے جہاں $f' > 0$ ہو اور f کی قیمت وہاں گھٹتی ہے جہاں
۴۸۶۹ $f' < 0$ ہو۔

۴۸۷۰ آپ (شکل ۴.۲۴ سے) دیکھ سکتے ہیں کہ جن نقطوں پر f کی قیمت اقل ہو، نقطہ کے قریبی بائیں وقفے پر $f' < 0$ جبکہ نقطہ کے قریبی دائیں وقفے پر
۴۸۷۱ $f' > 0$ ہو گا۔ (آخری نقطہ کی صورت میں نقطہ کے صرف ایک طرف پر f' کی قیمت دیکھی جا سکتی ہے۔) یوں مقامی اقل قیمت کے بالکل بائیں تفاعل کی
۴۸۷۲ قیمت گھٹتی ہے (یعنی ترسیم نیچے گرتی ہے) جبکہ اس نقطہ کے بالکل دائیں تفاعل کی قیمت بڑھتی ہے (یعنی ترسیم اوپر اٹھتی ہے)۔ اسی طرح مقامی اعظم نقطہ پر نقطہ
۴۸۷۳ کے قریبی بائیں وقفے پر $f' > 0$ جبکہ نقطہ کے قریبی دائیں وقفے پر $f' < 0$ ہو گا۔ یوں اس نقطہ کے بالکل بائیں تفاعل کی قیمت بڑھتی ہے (یعنی ترسیم



(ب) $f'(c)$ غیر معین

(ا) $f'(c) = 0$

شکل ۴.۲۵: پرکھ برائے مقامی اعظم قیمت۔

اوپر اٹھتی ہے) جبکہ اس نقطہ کے بالکل دائیں تفاعل کی قیمت گھٹتی ہے (یعنی ترسیم نیچے گرتی ہے)۔

اس مشاہدہ سے مقامی انتہائی قیمت کی موجودگی کی پرکھ حاصل ہوتی ہے۔

مسئلہ ۴.۵: **مقامی انتہائی قیمت کی یکـــــ رتبی تفرقی پرکھ**

درج ذیل پرکھ استمراری تفاعل $f(x)$ کے لیے ہیں۔

نقطہ فاصل c پر:

۱. اگر c پر f' کی علامت مثبت سے تبدیل ہو کر منفی ہو جائے ($x < c$ پر $f' > 0$ اور $x > c$ پر $f' < 0$) تب c پر f کی مقامی قیمت اعظم ہو گی (شکل ۴.۲۵)۔

۲. اگر c پر f' کی علامت منفی سے تبدیل ہو کر مثبت ہو جائے ($x < c$ پر $f' < 0$ اور $x > c$ پر $f' > 0$) تب c پر f کی مقامی قیمت اقل ہو گی (شکل ۴.۲۶)۔

۳. اگر c پر f' کی علامت تبدیل نہ ہو (c کے دونوں اطراف f' کی علامت ایک سی ہے) تب c پر f کی انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی (شکل ۴.۲۷)۔

بائیں آخری نقطہ a پر:

اگر $x > a$ پر $f' < 0$ ($f' > 0$) ہو تب a پر f کا مقامی اعظم (مقامی اقل) نقطہ پایا جائے گا (شکل ۴.۲۸-ا،ب)۔

دائیں آخری نقطہ b پر:

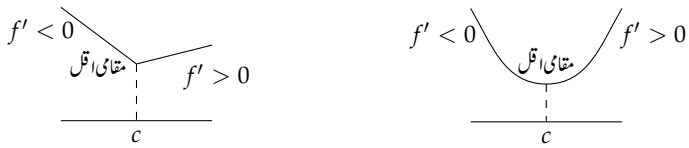
اگر $x < b$ پر $f' < 0$ ($f' > 0$) ہو تب b پر f کا مقامی اقل (مقامی اعظم) نقطہ پایا جائے گا (شکل ۴.۲۸-ج،د)۔

مثال ۴.۱۱: درج ذیل تفاعل کے نقاط فاصل تلاش کریں۔

$$f(x) = x^{1/3}(x-4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$

ان وقفوں کی نشاندہی کریں جن پر f بڑھتا ہے اور جن پر f گھٹتا ہے۔ تفاعل کی مقامی اور مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

حل

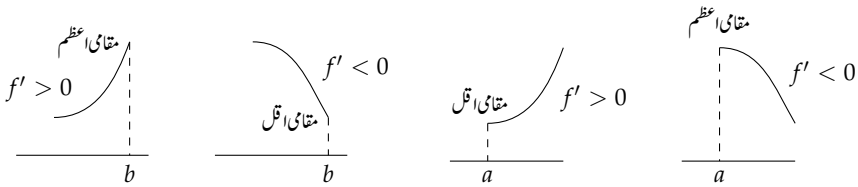


(ب) $f'(c)$ غیر معین　　(ا) $f'(c) = 0$

شکل ۴.۲۶: پرکھ برائے مقامی اقل قیمت۔

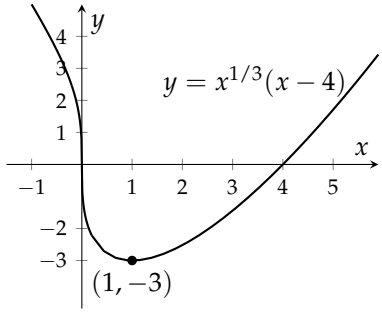
(ب) $f'(c)$ غیر معین　　(ا) $f'(c) = 0$

شکل ۴.۲۷: پرکھ برائے غیر موجودگی انتہا قیمت۔



(د)　　(ج)　　(ب)　　(ا)

شکل ۴.۲۸: پرکھ برائے بائیں اور دائیں نقطوں پر نقطہ انتہا۔



شکل ۴.۲۹: ترسیم برائے مثال ۴.۱۱

علامت $\frac{4}{3x^{2/3}}$	$+$	$+$	$+$
علامت $(x-1)$	$-$	$-$	$+$
علامت $\frac{4}{3x^{2/3}}(x-1)$	$-$	$-$	$+$
$f'(x) =$			
x		0	1
$f(x)$ میں تبدیلی	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$
انتہا کی قسم		انتہا نہیں	مقامی اقل

شکل ۴.۳۰: ترسیم برائے مثال ۴.۱۱

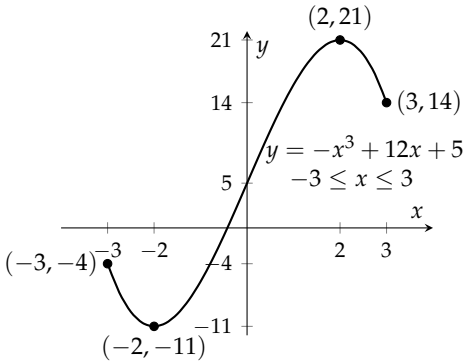
۴۸۹۳ تفاعل تمام حقیقی اعداد کے لیے معین اور استراری ہے ((شکل ۴.۲۹)۔) یک رتبی تفرق

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{4/3} - 4x^{1/3}) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x-1) = \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

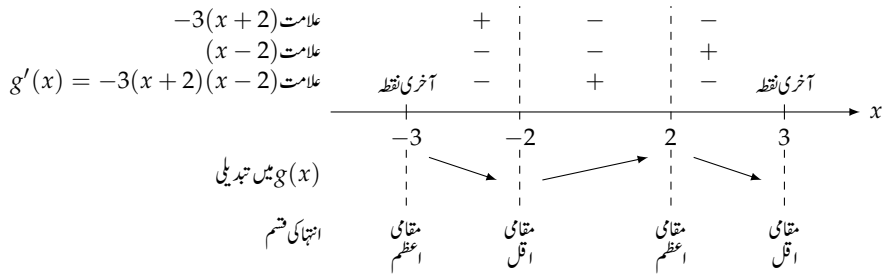
۴۸۹۴ ہے جو $x = 1$ پر صفر اور $x = 0$ پر غیر معین ہے۔ f کے دائرہ کار میں کوئی آخری نقطہ نہیں پایا جاتا لہٰذا نقاط فاصل $x = 0$ اور $x = 1$ وہ
۴۸۹۵ نقطے ہیں جہاں تفاعل کی انتہا قیمتیں ممکن ہیں۔

۴۸۹۶ یہ نقاط فاصل محور x کو ایسے حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جن پر f' مثبت اور یا منفی ہے۔ نقطہ فاصل کے دونوں اطراف f کی علامتوں کو دیکھ کر ہم انتہا نقطہ
۴۸۹۷ کی نوعیت جان سکتے ہیں۔ وقفہ $(-\infty, 0)$ پر f گھٹتا ہے، وقفہ $(0, 1)$ پر گھٹتا اور وقفہ $(1, \infty)$ پر بڑھتا ہے۔ مسئلہ ۴.۵ کے تحت $x = 0$
۴۸۹۸ (جہاں f' کی علامت تبدیل نہیں ہوتی) پر کوئی انتہا نقطہ نہیں پایا جاتا جبکہ $x = 1$ (جہاں f' کی علامت منفی سے مثبت ہوتی ہے) پر مقامی اقل نقطہ پایا
۴۸۹۹ جائے گا (شکل ۴.۳۰)۔

۴۹۰۰ مقامی اقل قیمت $f(1) = 1^{1/3}(1-4) = -3$ ہے جو تفاعل کی مطلق اقل قیمت بھی ہے۔ □



شکل ۴.۳۱: ترسیم برائے مثال ۴.۱۲



شکل ۴.۳۲: تفرق کی علامتوں سے تفاعل کا رویہ (مثال ۴.۱۲)

۴۹۰۱ مثال ۴.۱۲: درج ذیل کے لیے وہ وقفے تلاش کریں جہاں f گھٹتا ہو اور جہاں f بڑھتا ہو۔

$$g(x) = -x^3 + 12x + 5, \quad -3 \le x \le 3$$

۴۹۰۲ تفاعل کی انتہا قیمتیں کیا ہیں اور کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟

۴۹۰۳ **حل**

۴۹۰۴ تفاعل اپنے دائرہ کار $[-3, 3]$ پر استمراری ہے (شکل ۴.۳۱)۔ اس کا یک رتبی تفرق

$$g'(x) = -3x^2 + 12 = -3(x^2 - 4) = -3(x+2)(x-2)$$

۴۹۰۵ وقفہ $[-3, 3]$ کے تمام نقطوں پر معین ہے، اور اس کی قیمت نقطہ $x = -2$ اور $x = 2$ پر صفر ہے۔ نقطہ فاصل دائرہ کار کو ان خطوں میں تقسیم
۴۹۰۶ کرتا ہے جن میں g' کی قیمت منفی یا مثبت ہے (شکل ۴.۳۲)۔ ہم g' کی علامتوں کو دیکھ کر مسئلہ ۴.۵ کی مدد سے تفاعل کا تجزیہ کرتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ
۴۹۰۷ $x = -3$ اور $x = 2$ پر مقامی اعظم قیمتیں پائی جاتی ہیں جبکہ $x = -2$ اور $x = 3$ پر مقامی اقل قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ ان نقطوں پر تفاعل

۴۹۰۸ $g(x) = -x^3 + 12x + 5$ کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

مقامی اعظم	$g(-3) = -4, \quad g(2) = 21$
مقامی اقل	$g(-2) = -11, \quad g(3) = 14$

۴۹۰۹ چونکہ بند وقفہ پر تفاعل معین ہے لہٰذا $g(-2)$ مطلق اقل اور $g(2)$ مطلق اعظم قیمت ہے۔ □

۴۹۱۰ **سوالات**

۴۹۱۱ **f' کی مدد سے f کا تجزیہ**

۴۹۱۲ سوال ۴.۹۴ تا سوال ۴.۱۰۱ میں تفاعل کا تفرق دیا گیا ہے۔ درج ذیل سوالات کے جواب دیں۔

۴۹۱۳ ا. f کے نقاط فاصل کیا ہیں؟

۴۹۱۴ ب. f کس وقفے پر بڑھتا اور کس وقفے پر گھٹتا ہے؟

۴۹۱۵ ج. کن نقطوں پر تفاعل کی مقامی اقل قیمت یا مقامی اعظم قیمت پائی جاتی ہے؟

۴۹۱۶ سوال ۴.۹۴: $f'(x) = x(x-1)$

۴۹۱۷ سوال ۴.۹۵: $f'(x) = (x-1)(x+2)$

۴۹۱۸ سوال ۴.۹۶: $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$

۴۹۱۹ سوال ۴.۹۷: $f'(x) = (x-1)^2(x+2)^2$

۴۹۲۰ سوال ۴.۹۸: $f'(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$

۴۹۲۱ سوال ۴.۹۹: $f'(x) = (x-7)(x+1)(x+5)$

۴۹۲۲ سوال ۴.۱۰۰: $f'(x) = x^{-1/3}(x+2)$

۴۹۲۳ سوال ۴.۱۰۱: $f'(x) = x^{-1/2}(x-3)$

۴۹۲۴ **دیے گئے تفاعل کی انتہا**

۴۹۲۵ سوال ۴.۱۰۲ تا سوال ۴.۱۲۱ میں درج ذیل کریں۔

۴۹۲۶ ا. وہ وقفے تلاش کریں جن پر تفاعل بڑھتا ہو اور وہ جن پر تفاعل گھٹتا ہو۔

۴۹۲۷ ب. تفاعل کے مقامی انتہائی قیمتوں کی نشاندہی کریں اور جن نقطوں پر ایسا ہو ان کی بھی نشاندہی کریں۔

۴۹۲۸ ج. ان میں سے کون سی مطلق انتہائی قیمتیں ہیں (اگر ایسا ہو)؟

۴۹۲۹ سوال ۴.۱۰۲: $g(t) = -t^2 - 3t + 3$

۴۹۳۰ سوال ۴.۱۰۳: $g(t) = -3t^2 + 9t + 5$

۴۹۳۱ سوال ۴.۱۰۴: $h(x) = -x^3 + 2x^2$

۴۹۳۲ سوال ۴.۱۰۵: $h(x) = 2x^3 - 18x$

۴۹۳۳ سوال ۴.۱۰۶: $f(\theta) = 3\theta^2 - 4\theta^3$

۴۹۳۴ سوال ۴.۱۰۷: $f(\theta) = 6\theta - \theta^3$

۴۹۳۵ سوال ۴.۱۰۸: $f(r) = 3r^3 + 16r$

۴۹۳۶ سوال ۴.۱۰۹: $h(r) = (r+7)^3$

۴۹۳۷ سوال ۴.۱۱۰: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

۴۹۳۸ سوال ۴.۱۱۱: $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

۴۹۳۹ سوال ۴.۱۱۲: $H(t) = \frac{3}{2}t^4 - t^6$

۴۹۴۰ سوال ۴.۱۱۳: $K(t) = 15t^3 - t^5$

۴۹۴۱ سوال ۴.۱۱۴: $g(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

۴۹۴۲ سوال ۴.۱۱۵: $g(x) = x^2\sqrt{5 - x}$

۴۹۴۳ سوال ۴.۱۱۶: $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}, \quad x \neq 2$

۴۹۴۴ سوال ۴.۱۱۷: $f(x) = \frac{x^3}{3x^2+1}$

۴۹۴۵ سوال ۴.۱۱۸: $f(x) = x^{1/3}(x+8)$

۴۹۴۶ سوال ۴.۱۱۹: $g(x) = x^{2/3}(x+5)$

۴۹۴۷ سوال ۴.۱۲۰: $h(x) = x^{1/3}(x^2-4)$

۴۹۴۸ سوال ۴.۱۲۱: $k(x) = x^{2/3}(x^2-4)$

۴۹۴۹ **نصف کھلے وقفوں پر تفاعل کی انتہا**

۴۹۵۰ سوال ۴.۱۲۲ تا سوال ۴.۱۲۹ میں درج ذیل کریں۔

۴۹۵۱ ا. دیے گئے وقفہ میں تفاعل کی مقامی انتہا تلاش کریں۔ ان نقطوں کی بھی نشاندہی کریں جہاں انتہا پائی جاتی ہو۔

۴۹۵۲ ب. کون سی انتہا مطلق ہیں (اگر ہوں)۔

۴۹۵۳ ج. کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے اپنے جوابات کی تصدیق کریں۔

۴۹۵۴ سوال ۴.۱۲۲: $f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$

۴۹۵۵ سوال ۴.۱۲۳: $f(x) = (x+1)^2, \quad -\infty < x \leq 0$

۴۹۵۶ سوال ۴.۱۲۴: $g(x) = x^2 - 4x + 4, \quad 1 \leq x < \infty$

۴۹۵۷ سوال ۴.۱۲۵: $g(x) = -x^2 - 6x - 9, \quad -4 \leq x < \infty$

سوال ۴.۱۲۶: $f(t) = 12t - t^3, \quad -3 \le t < \infty$

سوال ۴.۱۲۷: $f(t) = t^3 - 3t^2, \quad -\infty < t \le 3$

سوال ۴.۱۲۸: $h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \le x < \infty$

سوال ۴.۱۲۹: $k(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad -\infty < x \le 0$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۴.۱۳۰ تا سوال ۴.۱۳۳ میں درج ذیل کریں۔

ا. دیے وقفے پر مقامی انتہا تلاش کریں اور اس نقطے کی نشاندہی کریں جس پر انتہا پائی جاتی ہو۔

ب. تفاعل اور تفاعل کے تفرق کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f پر تبصرہ کریں۔

سوال ۴.۱۳۰: $f(x) = \frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}, \quad 0 \le x \le 2\pi$

سوال ۴.۱۳۱: $f(x) = -2\cos x - \cos^2 x, \quad -\pi \le x \le \pi$

سوال ۴.۱۳۲: $f(x) = \csc^2 x - 2\cot x, \quad 0 < x < \pi$

سوال ۴.۱۳۳: $f(x) = \sec^2 x - 2\tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

نظریہ اور مثالیں

دکھائیں کہ سوال ۴.۱۳۴ اور سوال ۴.۱۳۵ میں دیے گئے θ پر مقامی انتہا پائی جاتی ہے۔ انتہا کی قسم دریافت کریں۔

سوال ۴.۱۳۴: $h(\theta) = 3\cos\frac{\theta}{2}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad \theta = 0, 2\pi$

سوال ۴.۱۳۵: $h(\theta) = 5\sin\frac{\theta}{2}, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad \theta = 0, \pi$

سوال ۴.۱۳۶: قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ نقطہ $(1,1)$ سے گزرتا ہے اور $f'(1) = 0$ ہے۔ درج ذیل پر پورا اترتا ہوا اس تفاعل کا خاکہ کھینچیں۔

ا. $x < 1$ کے لیے $f'(x) > 0$ ہے اور $x > 1$ کے لیے $f'(x) < 0$ ہے۔

ب. $x < 1$ کے لیے $f'(x) < 0$ ہے اور $x > 1$ کے لیے $f'(x) > 0$ ہے۔

ج. $x \ne 1$ کے لیے $f'(x) > 0$ ہے۔

د. $x \ne 1$ کے لیے $f'(x) < 0$ ہے

سوال ۴.۱۳۷: قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ جو درج ذیل پر پورا اترتا ہے کا خاکہ بنائیں۔

ا. $(1,1)$ پر مقامی اقل قیمت اور $(3,3)$ پر مقامی اعظم قیمت ہے۔

ب. $(1,1)$ پر مقامی اعظم قیمت اور $(3,3)$ پر مقامی اقل قیمت ہے۔

ج. $(1,1)$ اور $(3,3)$ پر مقامی اعظم قیمتیں ہیں۔

د. $(1,1)$ اور $(3,3)$ پر مقامی اقل قیمتیں ہیں۔

سوال ۴.۱۳۸: درج ذیل استراری تفاعل $y = g(x)$ کا خاکہ بنائیں۔

ا. $g(2) = 2$ ہے، $x < 2$ کے لیے $0 < g' < 1$ ہے، $x \to 2^-$ کے لیے $g'(x) \to 1^-$، $x > 2$ کے لیے $-1 < g' < 0$ اور $x \to 2^+$ کے لیے $g'(x) \to -1^+$ ہے۔

ب. $g(2) = 2$ ہے، $x < 2$ کے لیے $g' < 0$، $x \to 2^-$ کے لیے $g' \to -\infty$، $x > 2$ کے لیے $g' > 0$ اور $x \to 2^+$ کے لیے $g'(x) \to \infty$ ہے۔

سوال ۴.۱۳۹: درج ذیل استراری تفاعل $y = h(x)$ کا خاکہ بنائیں۔

ا. $h(0) = 0$ ہے، تمام x کے لیے $-2 \le h(x) \le 2$، $x \to 0^-$ کے لیے $h'(x) \to \infty$، اور $x \to 0^+$ کے لیے $h'(x) \to -\infty$ ہے۔

ب. $h(0) = 0$ ہے، تمام x کے لیے $-2 \le h(x) \le 0$، $x \to 0^-$ کے لیے $h'(x) \to \infty$، اور $x \to 0^+$ کے لیے $h'(x) \to -\infty$ ہے۔

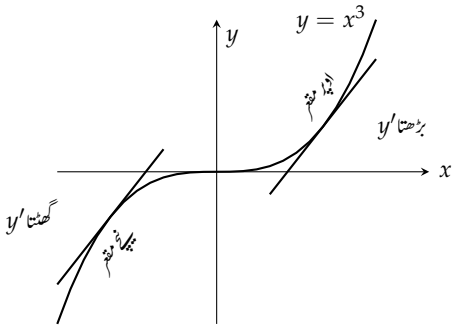
سوال ۴.۱۴۰: جب x بائیں سے دائیں جانب نقطہ $c = 2$ سے گزرے تب $f(x) = x^3 - 3x + 2$ کی ترسیم اوپر اٹھتی ہے یا نیچے گرتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۱۴۱: وہ وقفے تلاش کریں جن پر تفاعل $f(x) = ax^2 + bx + c$، جہاں $a \neq 0$ ہے، بڑھتا ہے اور گھٹتا ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

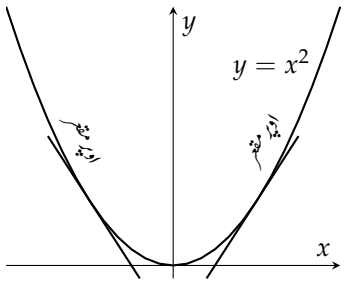
۴.۴ y' اور y'' کے ساتھ ترسیم کرنا

ہم نے حصہ ۴.۱ میں تفاعل کی انتہا قیمتوں کی تلاش میں یک رتبی تفرق کا کردار دیکھا۔ تفاعل کے نقاط انتہا صرف نقطہ فاصل اور تفاعل کے دائرہ کار کے آخری نقطوں پر پائے جاتے ہیں۔ ہم نے یہ بھی دیکھا کہ نقطہ فاصل پر نقطہ انتہا کی موجودگی لازمی نہیں۔ ہم نے حصہ ۴.۲ میں یہ بھی دیکھا کہ قابل تفرق تفاعل کی تقریباً تمام معلومات اس کے تفرق میں سمیٹی گئی ہیں۔ مکمل تفاعل کے حصول کے لیے ہمیں صرف کسی ایک نقطے پر تفاعل کی قیمت درکار ہوتی ہے۔ اگر تفاعل کا تفرق $2x$ ہے اور تفاعل مبدا سے گزرتا ہو تب تفاعل لازماً x^2 ہو گا۔ اگر تفاعل کا تفرق $2x$ ہو اور تفاعل نقطہ $(0,4)$ سے گزرتا ہو تب تفاعل لازماً $x^2 + 4$ ہو گا۔

ہم نے حصہ ۴.۳ میں نقطہ فاصل پر تفاعل کا رویہ جانتے ہوئے تفرق سے مزید معلومات حاصل کرنا سیکھا جس کے بعد ہم یہ جان سکے کہ آیا نقطہ فاصل پر حقیقتاً انتہا موجود ہے یا تفاعل مسلسل گھٹتا یا مسلسل بڑھتا جاتا ہے۔ موجودہ حصہ میں ہم دکھائیں گے کہ تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم کس طرح مڑتی یا واپس پلٹتی ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ یہ معلومات y' کے اندر ضرور پائی جائے گی۔ دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل کی صورت میں y' اور اس کا تفرق y'' مل کر تفاعل کی ترسیم کی صورت کے بارے میں معلومات فراہم کرتے ہیں۔ باب ۵ میں انہیں استعمال کرتے ہوئے تفرقی مساوات اور ابتدائی قیمت مسائل کے حل کو ترسیم کرنا سکھایا جائے گا۔



شکل ۴.۳۳: $(-\infty, 0)$ پر $f(x) = x^3$ کی منحنی دائیں جھکتی ہے (نیچے مقعر ہے) جبکہ $(0, \infty)$ پر منحنی بائیں مڑتی ہے (اوپر مقعر)۔



شکل ۴.۳۴: ترسیم برائے مثال ۴.۱۳

۵۰۱۲ مقعر

۵۰۱۳ x بڑھنے سے تفاعل $y = x^3$ کی ترسیم اوپر اٹھتی ہے لیکن $(-\infty, 0)$ اور $(0, \infty)$ پر اس کے حصے مختلف طریقوں سے مڑتے ہیں (شکل
۵۰۱۴ ۴.۳۳)۔ اگر ہم منحنی پر بائیں سے مبدا کی طرف گامزن ہوں تب منحنی ہمارے دائیں ہاتھ کی طرف جھکتی ہے اور اپنے مماس سے نیچے رہتی ہے۔ اس کے برعکس
۵۰۱۵ اگر ہم منحنی پر دائیں جانب مبدا سے دور چلیں تب منحنی ہمارے بائیں ہاتھ جھکتی ہے اور اپنے مماس کی بالائی طرف رہتی ہے۔

۵۰۱۶ اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ ربع سوم میں بائیں سے مبدا کی طرف چلتے ہوئے مماس کا ڈھلوان گھٹتا ہے جبکہ ربع اول میں مبدا سے دائیں جانب چلتے
۵۰۱۷ ہوئے مماس کا ڈھلوان بڑھتا ہے۔

۵۰۱۸ تعریف: قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم اس وقفے پر **اوپر مقعر**[۱۰] ہو گی جہاں y' بڑھتا ہو اور اس وقفے پر **نیچے مقعر**[۱۱] ہو گی جہاں y'
۵۰۱۹ گھٹتا ہو۔

۵۰۲۰ □

۵۰۲۱ اگر $y = f(x)$ کا دور تبی تفرق موجود ہو تب ہم مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ ۳.۱۴ استعمال کرتے ہوئے اخذ کر سکتے ہیں کہ $y'' > 0$ کی صورت
۵۰۲۲ میں y' کی قیمت بڑھے گی اور $y'' < 0$ کی صورت میں y' کی قیمت گھٹے گی۔

۵۰۲۳ **مقعر کی دور تبی تفرق پرکھ**

۵۰۲۴ فرض کریں وقفہ I پر $y = f(x)$ دو مرتبہ قابل تفرق ہے۔

۵۰۲۵ ا. اگر I پر $y'' > 0$ ہو تب I پر f کی ترسیم اوپر مقعر ہو گی۔

۵۰۲۶ ب. اگر I پر $y'' < 0$ ہو تب I پر f کی ترسیم نیچے مقعر ہو گی۔

---

[۱۰] concaveup
[۱۱] concavedown

مثال ۴.۱۳:

ا. $(-\infty, 0)$ پر تفاعل $y = x^3$ کا دور تبی تفرق $y'' = 6x < 0$ ہے لہٰذا اس کی ترسیم نیچے مقعر ہو گی جبکہ $(0, \infty)$ پر $y'' = 6x > 0$ ہے لہٰذا یہاں ترسیم اوپر مقعر ہو گی (شکل ۴.۳۳)۔

ب. چونکہ قطع مکافی $y = x^2$ کا دور تبی تفرق $y'' = 2 > 0$ ہے لہٰذا یہ تفاعل ہر جگہ اوپر مقعر ہو گا (شکل ۴.۳۴)۔

□

نقطہ تصریف

ایک لکیر پر جسم کی حرکت کا مطالعہ کرنے کی خاطر ہم اس کا مقام بالمقابل وقت ترسیم کرتے ہیں۔ ایسا کرنے سے ہم وہ لمحہ تلاش کر سکتے ہیں جہاں جسم کے اسراع، جو دور تبی تفرق ہے، کی علامت تبدیل ہوتی ہے۔ ترسیم پر یہ وہ نقطہ ہو گا جہاں مقعر تبدیل ہوتا ہے۔

تعریف: وہ نقطہ جس پر تفاعل کا مماس پایا جاتا ہو اور جہاں مقعر کی علامت تبدیل ہوتی ہو **نقطہ تصریف**[۱۲] کہلاتا ہے۔

□

یوں نقطہ تصریف کی ایک طرف y'' مثبت اور دوسری طرف منفی ہو گا۔ عین نقطہ تصریف پر y'' کی قیمت یا (تفرق کی متوسط قیمت خاصیت کی وجہ سے) صفر ہو گی اور یا y'' غیر معین ہو گا۔

دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل کی ترسیم کے نقطہ تصریف پر $y'' = 0$ ہو گا۔

مثال ۴.۱۴: سادہ ہارمونی حرکت

تفاعل $y = 2\cos t$ کی ترسیم کی نقاط $t = \pi/2, 3\pi/2, \cdots$ پر مقعر کی علامت تبدیل ہوتی ہے جہاں اسراع $s'' = -\cos t$ صفر ہے (شکل ۴.۳۵)۔ □

مثال ۴.۱۵: نقطہ تصریف کی معاشیات میں بھی اہمیت ہے۔ فرض کریں کہ کسی چیز کی x اکائیاں پیدا کرنے پر $y = c(x)$ لاگت آتی ہے۔ جہاں حاشیہ لاگت، پیداوار گھٹنے سے، بڑھنا شروع ہوتی ہے یہ نقطہ تصریف N ہو گا (شکل ۴.۳۶)۔ □

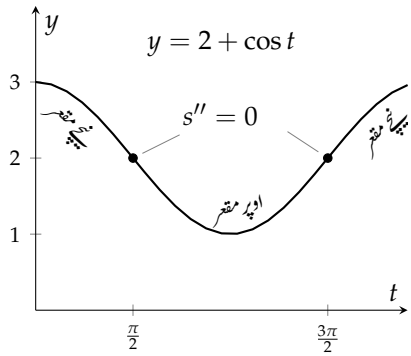
مثال ۴.۱۶: ایسا نقطہ تصریف جہاں y'' غیر موجود ہے۔

تفاعل $y = x^{1/3}$ کا نقطہ تصریف $x = 0$ پر ہے لیکن یہاں y'' غیر معین (لامتناہی) ہے (شکل ۴.۳۷)۔

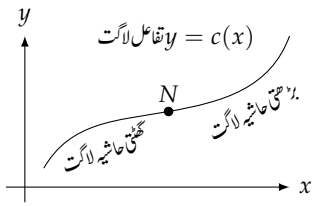
$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^{1/3}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tfrac{1}{3}x^{-2/3}\right) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9x^{5/3}}$$

□

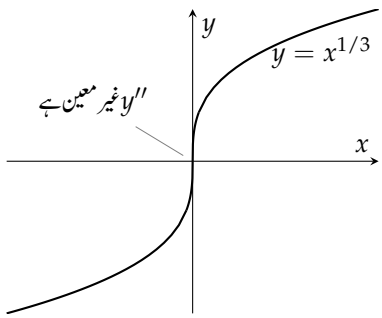
[۱۲] inflectionpoint



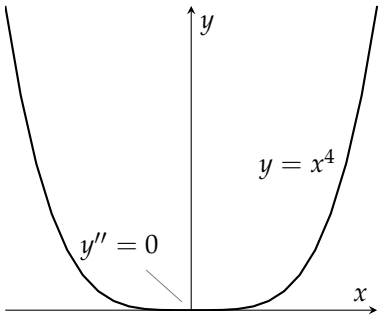
شکل ۴.۳۵: ترسیم برائے مثال ۴.۱۴



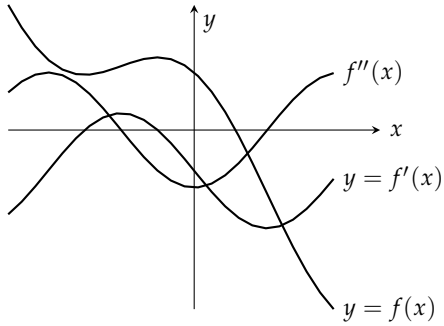
شکل ۴.۳۶: ترسیم برائے مثال ۴.۱۵



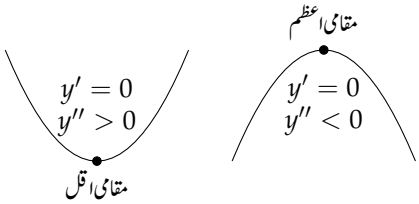
شکل ۴.۳۷: نقطہ تصریف پر y'' غیر معین ہے (مثال ۴.۱۶)



شکل ۴.۳۸: اگرچہ مبدا پر $y'' = 0$ ہے یہاں نقطہ تصریف نہیں پایا جاتا (مثال ۴.۱۷)



شکل ۴.۳۹: تفاعل $y = f(x) = 2\cos x - \sqrt{2}x$ اور اس کے یک رتبی اور دو رتبی تفرق۔



شکل ۴.۴۰: دو رتبی تفرقی پرکھ برائے مقامی انتہا

مثال ۴.۱۷: $y'' = 0$ ہے لیکن نقطہ تصریف نہیں پایا جاتا

تفاعل $y = x^4$ کا $x = 0$ پر $y'' = 12x^2 = 0$ پایا جاتا ہے لیکن یہاں y'' کی علامت تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا یہاں نقطہ تصریف نہیں پایا جاتا۔ □

فنیات تفاعل اور تفاعل کے تفرق کی ترسیم

کبھی کبھار تفاعل کی ترسیم سے نقطہ تصریف کی نشاندہی کرنا مشکل ہوتا ہے۔ $f(x) = 2\cos x - \sqrt{2}x$ کی $-4 \leq x \leq 3$ پر ترسیم کرتے ہوئے کوشش کر کے دیکھیں۔ اس کے ساتھ f' کی ترسیم شامل کرنے سے نقطہ تصریف کی پہچان میں کچھ بہتری آتی ہے۔ f کے ساتھ f'' ترسیم کرنے سے نقطہ تصریف پہچاننے کا بہترین ثبوت ملتا ہے (شکل ۴.۳۹)۔ نقطہ تصریف پر f'' کی علامت تبدیل ہوتی ہے یعنی f'' محور x کو قطع کرتا ہے۔ f ، f' ، اور f'' تینوں کو ایک ساتھ ترسیم کرنا دلچسپ مشغلہ ہے۔

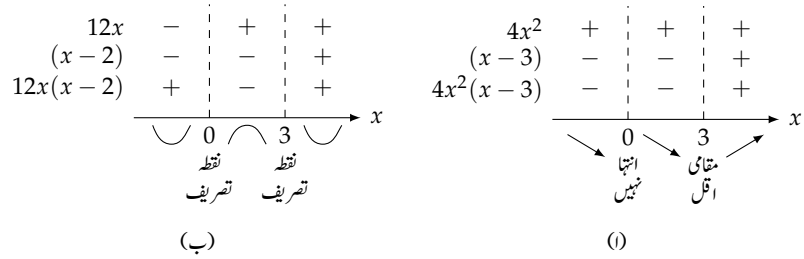
مقامی انتہائی قیمت کی دو رتبی تفرقی پرکھ

مقامی انتہا کا مقام تعین کرنے کی خاطر y' کی علامت کی تبدیلی کے بجائے درج ذیل پرکھ استعمال کی جا سکتی ہے۔

مقامی انتہا کی دو رتبی تفرق پرکھ

- اگر $f'(c) = 0$ اور $f''(c) < 0$ ہوں تب $x = c$ پر مقامی اعظم قیمت پائی جائے گی (شکل ۴.۴۰)۔
- اگر $f'(c) = 0$ اور $f''(c) > 0$ ہوں تب $x = c$ پر مقامی اقل قیمت پائی جائے گی (شکل ۴.۴۰)۔

مذکورہ بالا پرکھ میں ہمیں صرف $x = c$ پر y'' درکار ہے نہ کہ c کے پڑوسی وقفہ پر۔ یوں پرکھ کا استعمال نہایت آسان ہو گا۔ $y'' = 0$ یا غیر معین y'' کی صورت میں پرکھ ہمیں مدد نہیں کر پاتی۔ ایسی صورت میں ہمیں یک رتبی تفرق پرکھ استعمال کرنی ہو گی۔



شکل ۴.۴۱: اشکال برائے مثال ۴.۱۸

y' اور y'' کی ترسیم ایک ساتھ

ہم نے اب تک جو کچھ سیکھا ہے اس کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل ترسیم کرتے ہیں۔

مثال ۴.۱۸: قلم و کاغذ سے تفاعل کی ترسیم

تفاعل $y = x^4 - 4x^3 + 10$ ترسیم کریں۔

حل

پہلا قدم: ہم y' اور y'' ڈھونڈتے ہیں۔

$$y = x^4 - 4x^3 + 10$$

$$y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$ نقطہ فاصل $x = 0$ اور $x = 3$ ہیں

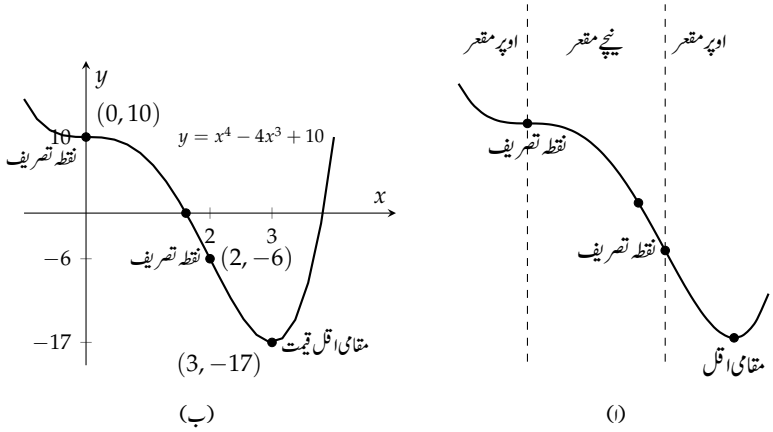
$$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$$ ممکنہ نقاط تصریف $x = 0$ اور $x = 2$ ہیں

دوسرا قدم: اتراؤ اور چڑھاؤ دیکھنے کے لیے y' کی علامتوں کو دیکھ کر y کا رویہ جانتے ہیں۔ $y' = 4x^2(x-3)$ میں $x = 0$ سے معمولی کم قیمت پُر کرنے سے y' کی علامت منفی حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح اس سے معمولی زیادہ قیمت پُر کرنے سے بھی منفی علامت حاصل ہوتی ہے۔ یوں نقطہ $x = 0$ پر y' کی علامت تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا یہاں کوئی مقامی انتہا نہیں پائی جاتی۔ $y' = 4x^2(x-3)$ میں $x = 3$ سے معمولی کم قیمت پُر کرنے سے y' کی منفی علامت جبکہ اس سے معمولی زیادہ قیمت پُر کرنے سے مثبت علامت حاصل ہوتی ہے۔ یوں $x = 3$ پر y' کی علامت منفی سے تبدیل ہو کر مثبت ہوتی ہے۔ یوں $x = 3$ پر مقامی اقل قیمت پائی جاتی ہے (شکل ۴.۴۱-ا)۔

تیسرا قدم: نقطہ $x = 0$ اور $x = 2$ دونوں پر y'' کی علامت تبدیل ہوتی ہے لہٰذا یہ دونوں نقطہ تصریف ہیں (شکل ۴.۴۱-ب)۔

چوتھا قدم: دوسرے اور تیسرے قدم کی معلومات استعمال کرتے ہوئے ہر وقفے پر تفاعل کا عمومی خاکہ کھینچیں۔ ان خاکوں کو اکٹھا کرتے ہوئے مکمل ترسیم کھینچیں (شکل ۴.۴۲-ا)۔

پانچواں قدم: (اگر موزوں ہو تب) ترسیم پر وہ نقطے ظاہر کریں جہاں یہ محور x اور محور y کو قطع کرتی ہے۔ اسی طرح وہ نقطے جہاں y' اور y'' صفر ہیں کی نشاندہی کریں۔ مقامی انتہائی نقطے اور نقطہ تصریف کی نشاندہی کریں۔ چوتھے قدم کی معلومات استعمال کرتے ہوئے مکمل ترسیم کھینچیں (شکل ۴.۴۲-ب)۔ □



شکل ۴.۴۲: اشکال برائے مثال ۴.۱۸

۵۰۸۲ $y = f(x)$ ترسیم کرنے کا لائحہ عمل

۵۰۸۳

۵۰۸۴ ۱. y' اور y'' حاصل کریں۔

۵۰۸۵ ۲. منحنی کے اتراؤ اور چڑھاؤ تعین کریں۔

۵۰۸۶ ۳. منحنی کے مقعر کا تعین کریں۔

۵۰۸۷ ۴. اجمال کرتے ہوئے مختلف خطوں میں ترسیم کا عمومی خاکہ بنائیں۔

۵۰۸۸ ۵. ان اشکال کو ملا کر تفاعل ترسیم کریں۔

۵۰۸۹ مثال ۴.۱۹: تفاعل $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$ ترسیم کریں۔

۵۰۹۰ **حل**

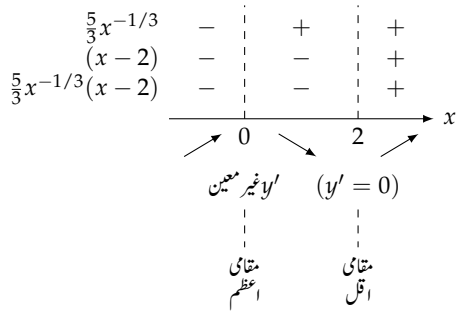
۵۰۹۱ **پہلا قدم:** y' اور y'' حاصل کرتے ہیں۔

$$y = x^{5/3} - 5x^{2/3} = x^{2/3}(x-5) \qquad \text{قاطع محدد } x = 0 \text{ اور } x = 5$$

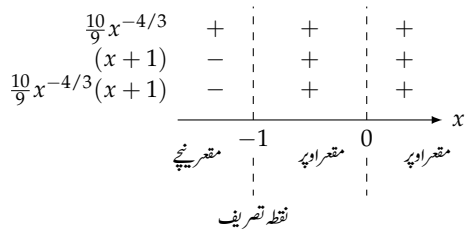
$$y' = \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{10}{3}x^{-1/3} = \frac{5}{3}x^{-1/3}(x-2) \qquad \text{نقطہ فاصل } x = 0 \text{ اور } x = 2$$

$$y'' = \frac{10}{9}x^{-1/3} + \frac{10}{9}x^{-4/3} = \frac{10}{9}x^{-4/3}(x+1) \qquad \text{ممکنہ نقطہ تصریف } x = 0 \text{ اور } x = -1$$

۵۰۹۲ **دوسرا قدم:** اتراؤ اور چڑھاؤ۔ (شکل ۴.۴۳)



شکل ۴.۴۳: اتار اور چڑھاؤ (مثال ۴.۱۹)



شکل ۴.۴۴: مقعر (مثال ۴.۱۹)

۵۰۹۳ **تیسرا قدم:** مقعر (شکل ۴.۴۴)

۵۰۹۴ y'' کی علامت کے نقش سے ہم دیکھتے ہیں کہ $x = -1$ پر نقطہ تصریف پایا جاتا ہے لیکن $x = 0$ پر نہیں پایا جاتا۔ البتہ یہ جانتے ہوئے کہ

۵۰۹۵ ۱. تفاعل $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$ استمراری ہے۔

۵۰۹۶ ۲. $x \to 0^-$ کرنے سے $y' \to \infty$ اور $x \to 0^+$ کرنے سے $y' \to -\infty$ ہوتا ہے (دوسرے قدم میں y' کا کلیہ دیکھیں)۔

۵۰۹۷ ۳. $x = 3$ پر مقعر تبدیل نہ ہونے (تیسرا قدم) سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $x = 0$ پر کنگرہ پایا جاتا ہے۔

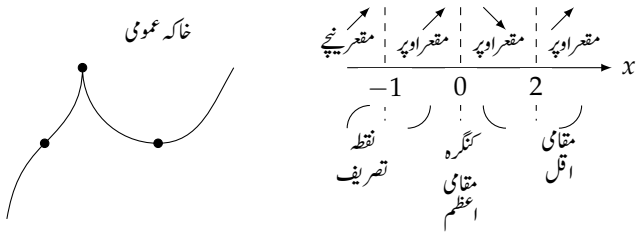
۵۰۹۸ **چوتھا قدم:** اجمال (شکل ۴.۴۵)

۵۰۹۹ **پانچواں قدم:** مخصوص نقطے اور ترسیم (شکل ۴.۴۶) □

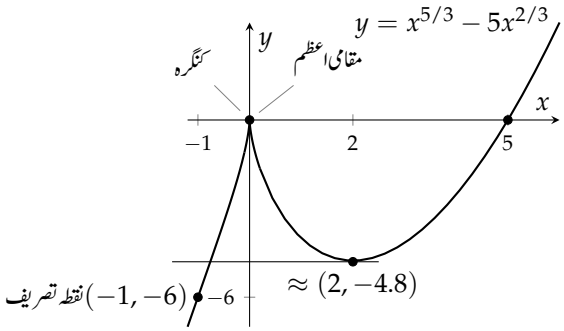
۵۱۰۰ **کنگرہ**

۵۱۰۱ تفاعل $y = f(x)$ کا $x = c$ پر اس صورت کنگرہ پایا جاتا ہے جب x کے دونوں اطراف تفاعل کا مقعر ایک سا ہو اور یا (ا)

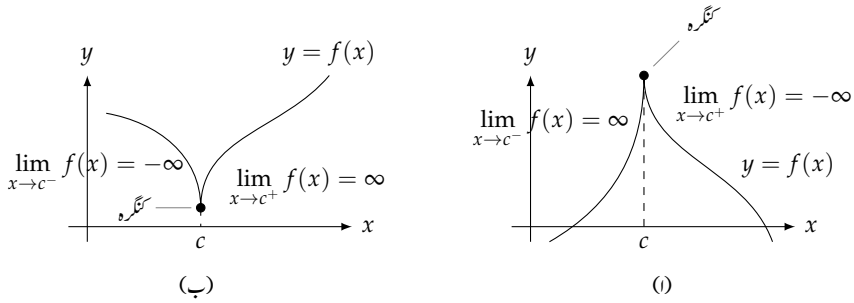
۵۱۰۲ $\lim_{x\to c^-} f'(x) = \infty$ اور $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$ ہوں (شکل ۴.۴۷-ا)، اور یا (ب) $\lim_{x\to c^-} f'(x) =$



شکل ۴.۴۵: اجمال اور خاکے (مثال ۴.۱۹)



شکل ۴.۴۶: تفاعل $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$ کی ترسیم (مثال ۴.۱۹)۔



شکل ۴.۴۷: کنگرہ، مقامی نقطہ اعظم یا مقامی نقطہ اقل ہو سکتا ہے۔

۵۱۰۳ $-\infty$ اور $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$ ہوں (شکل ۴.۴۷-ب)۔

۵۱۰۴ تفرق سے تفاعل کی معلومات کا حصول

۵۱۰۵ آپ نے مثال ۴.۱۸ اور مثال ۴.۱۹ میں دیکھا کہ y' کو دیکھ کر قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کی تقریباً تمام اہم معلومات دریافت کی جا سکتی ہیں۔ ہم
۵۱۰۶ ترسیم کا اتراؤ، چڑھاؤ، اور مقامی انتہا جان سکتے ہیں۔ ہم y' کا تفرق لے کر اتراؤ اور چڑھاؤ کے وقفوں میں تفاعل کا مقعر دریافت کر سکتے ہیں۔ ہم تفاعل کی ترسیم
۵۱۰۷ کی عمومی شکل جان سکتے ہیں۔ ہم صرف مستوی xy میں ترسیم کا مقام نہیں جان سکے۔ یہ معلومات مختلف x پر تفاعل کی مساوات حل کر کے حاصل کی جا
۵۱۰۸ سکتی ہے۔ حقیقت میں جیسا ہم نے حصہ ۴.۲ میں دیکھا، y' کے علاوہ ہمیں f کی قیمت صرف ایک نقطے پر چاہیے۔

۵۱۰۹ شکل ۴.۴۸ میں تفرق اور ترسیم کے تعلق دکھائے گئے ہیں۔

۵۱۱۰ سوالات

۵۱۱۱ ترسیم شدہ تفاعل کا تجزیہ

۵۱۱۲ سوال ۴.۱۴۲ تا سوال ۴.۱۴۹ میں دی ترسیم کا نقطہ تصریف، مقامی نقطہ اقل اور مقامی نقطہ اعظم کی نشاندہی کریں۔ ان وقفوں کی نشاندہی کریں جن پر ترسیم اوپر
۵۱۱۳ مقعر اور جن پر نیچے مقعر ہے۔

۵۱۱۴ سوال ۴.۱۴۲: $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$، شکل ۴.۴۹-ا

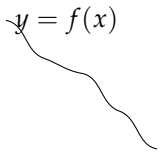
۵۱۱۵ سوال ۴.۱۴۳: $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$، شکل ۴.۴۹-ب

۵۱۱۶ سوال ۴.۱۴۴: $y = \frac{3}{4}(x^2 - 1)^{2/3}$، شکل ۴.۴۹-ج

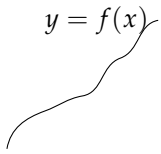
۵۱۱۷ سوال ۴.۱۴۵: $y = \frac{9}{14}x^{1/3}(x^2 - 7)$، شکل ۴.۴۹-د

۵۱۱۸ سوال ۴.۱۴۶: $y = x + \sin 2x,\ -\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$، شکل ۴.۵۰-ا

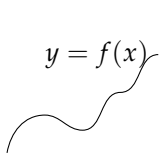
۵۱۱۹ سوال ۴.۱۴۷: $y = \tan x - 4x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$، شکل ۴.۵۰-ب



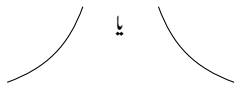
(ا) قابل تفرق: ہموار اور جُڑی۔ اتراؤ، چڑھاؤ پایا جا سکتا ہے۔



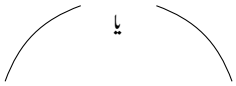
(ب) $y' > 0$: بائیں سے دائیں چلتے ہوئے اوپر اٹھتی ہے۔ لہریں پائی جا سکتی ہیں۔



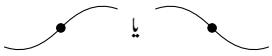
(ج) $y' < 0$: بائیں سے دائیں چلتے ہوئے نیچے اترتی ہے۔ لہریں پائی جا سکتی ہیں۔



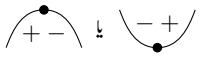
(د) $y'' > 0$: اوپر مقعر۔ لہریں نہیں پائی جاتی ہیں۔ اوپر اٹھ سکتی ہے یا نیچے اتر سکتی ہے۔



(ھ) $y'' < 0$: نیچے مقعر۔ لہریں نہیں پائی جاتی ہیں۔ اوپر اٹھ سکتی ہے یا نیچے اتر سکتی ہے۔



(و) y'' کی علامت تبدیل ہوتی ہے: نقطہ تصریف (اگر f دو مرتبہ قابل تفرق ہو)۔

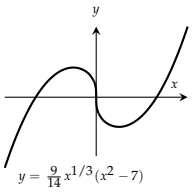


(ز) y' کی علامت تبدیل ہوتی ہے: مقامی اعظم یا مقامی اقل قیمت۔

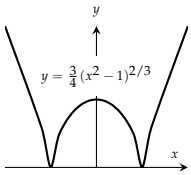
(ح) $y' = 0, y'' < 0$: مقامی اعظم قیمت۔

(ط) $y' = 0, y'' > 0$: مقامی اقل قیمت۔

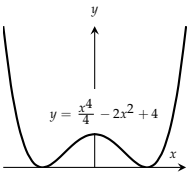
شکل ۴.۴۸: ترسیم کے بارے میں تفرق کیا بتلاتا ہے۔



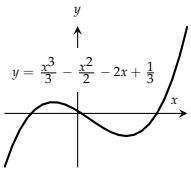
(و)



(ج)

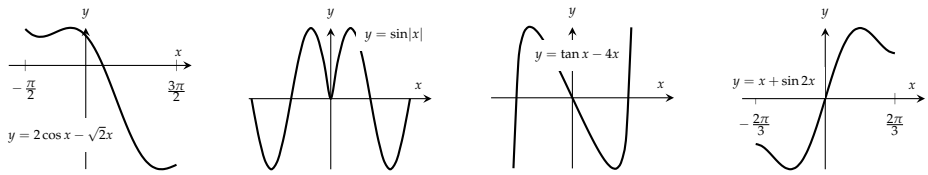


(ب)



(ا)

شکل ۴.۴۹: ترسیمات برائے سوال ۴.۱۴۲ تا سوال ۴.۱۴۵



(ا) (ب) (ج) (د)

شکل ۵۰.۴: ترسیمات برائے سوال ۱۴۶.۴ تا سوال ۱۴۹.۴

سوال ۱۴۸.۴: $y = \sin|x|\,,\ -2\pi \le x \le 2\pi$ ، شکل ۵۰.۴-ج

سوال ۱۴۹.۴: $y = 2\cos x - \sqrt{2}x,\ -\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$ ، شکل ۵۰.۴-د

مساوات کی ترسیم

صفحہ ۳۱۴ پر دیا گیا لائحہ عمل استعمال کرتے ہوئے سوال ۱۵۰.۴ تا سوال ۱۸۱.۴ میں دی گئی مساوات ترسیم کریں۔ مقامی انتہا اور نقطہ تصریف کی نشاندہی کریں۔

سوال ۱۵۰.۴: $y = x^2 - 4x + 3$

سوال ۱۵۱.۴: $y = 6 - 2x - x^2$

سوال ۱۵۲.۴: $y = x^3 - 3x + 3$

سوال ۱۵۳.۴: $y = x(6 - 2x)^2$

سوال ۱۵۴.۴: $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$

سوال ۱۵۵.۴: $y = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$

سوال ۱۵۶.۴: $y = (x - 2)^3 + 1$

سوال ۱۵۷.۴: $y = 1 - (x + 1)^3$

سوال ۱۵۸.۴: $y = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$

سوال ۱۵۹.۴: $y = -x^4 + 6x^2 - 4 = x^2(6 - x^2) - 4$

سوال ۱۶۰.۴: $y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x)$

سوال ۱۶۱.۴: $y = x^4 + 2x^3 = x^3(x + 2)$

سوال ۱۶۲.۴: $y = x^5 - 5x^4 = x^4(x - 5)$

سوال ۱۶۳.۴: $y = x(\frac{x}{2} - 5)^4$

سوال ۱۶۴.۴: $y = x + \sin x,\ 0 \le x \le 2\pi$

سوال ۴.۱۶۵: $y = x - \sin x,\ 0 \le x \le 2\pi$

سوال ۴.۱۶۶: $y = x^{1/5}$

سوال ۴.۱۶۷: $y = x^{3/5}$

سوال ۴.۱۶۸: $y = x^{2/5}$

سوال ۴.۱۶۹: $y = x^{4/5}$

سوال ۴.۱۷۰: $y = 2x - 3x^{2/3}$

سوال ۴.۱۷۱: $y = 5x^{2/5} - 2x$

سوال ۴.۱۷۲: $y = x^{2/3}(\frac{5}{2} - x)$

سوال ۴.۱۷۳: $y = x^{2/3}(x - 5)$

سوال ۴.۱۷۴: $y = x\sqrt{8 - x^2}$

سوال ۴.۱۷۵: $y = (2 - x^2)^{3/2}$

سوال ۴.۱۷۶: $y = \frac{x^2-3}{x-2},\ x \neq 2$

سوال ۴.۱۷۷: $y = \frac{x^3}{3x^2+1}$

سوال ۴.۱۷۸: $y = \left|x^2 - 1\right|$

سوال ۴.۱۷۹: $y = \left|x^2 - 2x\right|$

سوال ۴.۱۸۰: $y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \le 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

سوال ۴.۱۸۱: $y = \sqrt{|x - 4|}$

y' سے تفاعل کی عمومی صورت کا خاکہ

سوال ۴.۱۸۲ تا سوال ۴.۲۰۳ میں استمراری تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق y' دیا گیا ہے۔ y'' تلاش کرتے ہوئے صفحہ ۳۱۴ پر دیا گیا لائحہ عمل استعمال کرتے ہوئے تفاعل کی عمومی صورت کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۴.۱۸۲: $y' = 2 + x - x^2$

سوال ۴.۱۸۳: $y' = x^2 - x - 6$

سوال ۴.۱۸۴: $y' = x(x - 3)^2$

سوال ۴.۱۸۵: $y' = x^2(2 - x)$

سوال ۴.۱۸۶: $y' = x(x^2 - 12)$

سوال ۴.۱۸۷: $y' = (x-1)^2(2x+3)$

سوال ۴.۱۸۸: $y' = (8x - 5x^2)(4-x)^2$

سوال ۴.۱۸۹: $y' = (x^2 - 2x)(x-5)^2$

سوال ۴.۱۹۰: $y' = \sec^2 x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال ۴.۱۹۱: $y' = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال ۴.۱۹۲: $y' = \cot \frac{\theta}{2},\ 0 < \theta < 2\pi$

سوال ۴.۱۹۳: $y' = \csc^2 \frac{\theta}{2},\ 0 < \theta < 2\pi$

سوال ۴.۱۹۴: $y' = \tan^2 \theta - 1,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

سوال ۴.۱۹۵: $y' = 1 - \cot^2 \theta,\ 0 < \theta < \pi$

سوال ۴.۱۹۶: $y' = \cos t,\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۴.۱۹۷: $y' = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۴.۱۹۸: $y' = (x+1)^{-2/3}$

سوال ۴.۱۹۹: $y' = (x-2)^{-1/3}$

سوال ۴.۲۰۰: $y' = x^{-2/3}(x-1)$

سوال ۴.۲۰۱: $y' = x^{-4/5}(x+1)$

سوال ۴.۲۰۲: $y' = 2|x| = \begin{cases} -2x, & x \le 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$

سوال ۴.۲۰۳: $y' = \begin{cases} -x^2, & x \le 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

y' اور y'' سے y کا خاکہ بنانا

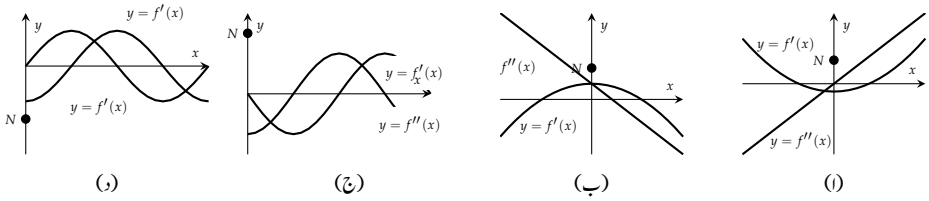
سوال ۴.۲۰۴ تا سوال ۴.۲۰۷ میں نقطہ N سے گزرتے ہوئے تفاعل $y = f(x)$ کے یک رتبی تفرق y' اور دو رتبی تفرق y'' کی ترسیمات دی گئی ہیں۔ ان کی نقل کر کے ان پر y کی تخمینی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۴.۲۰۴: ترسیمات شکل ۴.۵۱-ا میں دی گئی ہیں۔

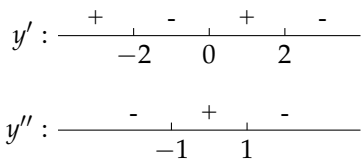
سوال ۴.۲۰۵: ترسیمات شکل ۴.۵۱-ب میں دی گئی ہیں۔

سوال ۴.۲۰۶: ترسیمات شکل ۴.۵۱-ج میں دی گئی ہیں۔

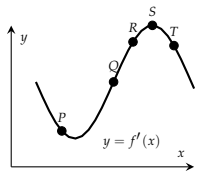
سوال ۴.۲۰۷: ترسیمات شکل ۴.۵۱-د میں دی گئی ہیں۔



شکل ۴.۵۱: ترسیمات برائے سوال ۴.۲۰۴ تا سوال ۴.۲۰۷



شکل ۴.۵۳: ترسیم برائے سوال ۴.۲۱۱



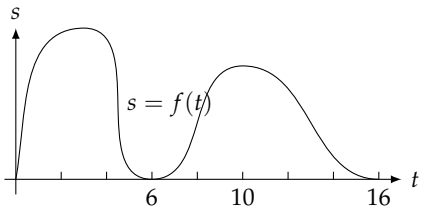
شکل ۴.۵۲: ترسیم برائے سوال ۴.۲۰۸

نظریہ اور مثالیں

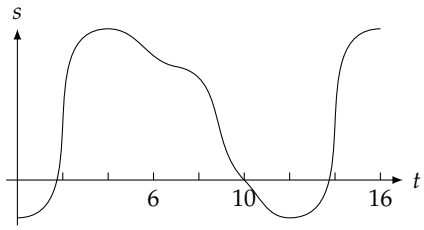
سوال ۴.۲۰۸: دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کو شکل ۴.۵۲ میں دکھایا گیا ہے۔ دیے گئے پانچ نقطوں پر بتائیں کہ y' اور y'' مثبت، منفی یا صفر ہیں۔

سوال ۴.۲۰۹: درج ذیل پر پورا اترتی ہوئی ہموار ترسیم کھینچیں۔

$$f(-2) = 8, \qquad f'(2) = f'(-2) = 0$$
$$f(0) = 4, \qquad f'(x) < 0, |x| < 2$$
$$f(2) = 0, \qquad f''(x) < 0,\ x < 0$$
$$f'(x) > 0, |x| > 2, \qquad f''(x) > 0,\ x > 0$$



شکل ۴.۵۴: ترسیم برائے سوال ۴.۲۱۲



شکل ۴.۵۵: ترسیم برائے سوال ۴.۲۱۳

سوال ۴.۲۱۰: دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو کو ترسیم کریں۔

x	y	تفرق
$x < 2$		$y < 0,\ y'' > 0$
2	1	$y' = 0,\ y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0,\ y'' > 0$
4	4	$y' > 0,\ y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0,\ y'' < 0$
6	7	$y' = 0,\ y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0,\ y'' < 0$

سوال ۴.۲۱۱: دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ جو نقطہ $(-2,2)$ ، $(-1,1)$ ، $(0,0)$ ، $(1,1)$ ،اور $(2,2)$ سے گزرتا ہے اور جس کے یک رتبی تفرق کی علامت کا نقش شکل ۴.۵۳ میں دیا گیا ہے کو ترسیم کریں۔

سوال ۴.۲۱۲: سمتی رفتار اور اسراع

محددی لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے جسم کا مقام بالمقابل وقت شکل ۴.۵۴ میں دکھایا گیا ہے۔(ا) جسم کب مبدا سے دور اور کب مبدا کی طرف حرکت کرتا ہے؟(ب) کب سمتی رفتار صفر ہے؟(ج) کب اسراع صفر ہے؟(د) کب اسراع مثبت اور کب منفی ہے؟

سوال ۴.۲۱۳: سمتی رفتار اور اسراع

محددی لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے جسم کا مقام بالمقابل وقت شکل ۴.۵۵ میں دکھایا گیا ہے۔(ا) جسم مبدا سے کب دور اور کب مبدا کی طرف حرکت کرتا ہے؟(ب) کب سمتی رفتار صفر ہے؟(ج) کب اسراع صفر ہے؟(د) کب اسراع مثبت اور کب منفی ہے؟

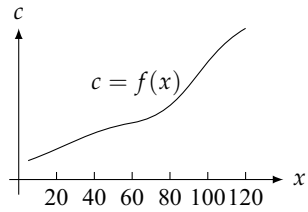
سوال ۴.۲۱۴: حاشیہ لاگت

x اشیاء پیدا کرنے پر لاگت $c = f(x)$ کو شکل ۴.۵۶ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ کتنی پیداوار پر حاشیہ لاگت گھٹنے سے بڑھنا شروع ہوتی ہے؟

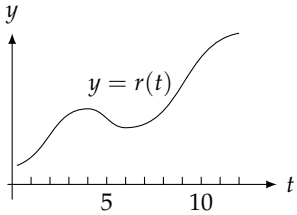
سوال ۴.۲۱۵: ماہوار آمدنی $y = r(t)$ بالمقابل ماہ کو شکل ۴.۵۷ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ کس دوران حاشیہ آمدنی بڑھ رہی ہے اور کب گھٹ رہی ہے؟

سوال ۴.۲۱۶: تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق درج ذیل ہے۔ کہاں مقامی اقل، مقامی اعظم یا نقطہ تصریف پایا جاتا ہے؟(اشارہ: y' کی علامت کا نقش)

$$y' = (x-1)^2(x-2)$$



شکل ۴.۵۶: لاگت بالمقابل پیداوار (سوال ۴.۲۱۴)



شکل ۴.۵۷: آمدن بالمقابل سال (سوال ۴.۲۱۵)

سوال ۴.۲۱۷: تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق درج ذیل ہے۔ کہاں مقامی اقل، مقامی اعظم یا نقطہ تصریف پایا جاتا ہے؟ (اشارہ: y' کی علامت کا نقش)

$$y' = (x-1)^2(x-2)(x-4)$$

سوال ۴.۲۱۸: $x > 0$ کے لیے ایسا تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کریں جس کا $f(1) = 0$ اور $f'(x) = \frac{1}{x}$ ہے۔ کیا تفاعل کے مقعر کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۲۱۹: تفاعل $y = f(x)$ کا دور تبی تفرق استمراری اور غیر صفر ہے۔ کیا اس کی ترسیم کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۲۲۰: مستقل b ، c ، اور d کی صورت میں b کی کس قیمت کے لیے منحنی $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ کا نقطہ تصریف $x = 1$ پر پایا جائے گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۲۲۱: افقی مماس۔ درست یا غلط؟ سمجھائیں

۱. ہر ایسی کثیر رکنی جس میں سب سے زیادہ طاقت جفت ہو کا کم سے کم ایک افقی مماس پایا جاتا ہے۔

۲. ہر ایسی کثیر رکنی جس میں سب سے زیادہ طاقت طاق ہو کا کم سے کم ایک افقی مماس پایا جاتا ہے۔

سوال ۴.۲۲۲: قطع مکافی

۱. قطع مکافی $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ کا کنگرہ تلاش کریں۔

۲. قطع مکافی کب اوپر مقعر اور کب نیچے مقعر ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۲۲۳: کیا یہ درست ہے کہ دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کا مقعر ہر ایسے نقطہ پر تبدیل ہوتا ہے جہاں $f''(x) = 0$ ہو؟ اپنے جواب کہ وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۲۲۴: دو درجی منحنی۔ آپ دو درجی منحنی $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ کے نقطہ تصریف کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۲۲۵: کعبی منحنی۔ آپ کعبی منحنی $y = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$ کے نقطہ تصریف کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۴.۲۲۶ تا سوال ۴.۲۳۶ میں تفاعل کی ترسیم پر نقطہ تصریف (اگر موجود ہو)، مقامی نقطہ اقل اور مقامی نقطہ اعظم تلاش کریں۔ تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے ان نقطوں کی نشاندہی کریں۔ ساتھ ہی تفاعل کا یک رتبی تفرق اور دو رتبی تفرق بھی ترسیم کریں۔ جن نقطوں پر یہ ترسیمات x محدد کو قطع کرتی ہیں، ان نقطوں کا تفاعل کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ اس کے علاوہ ان نقطوں کا تفرق کے تفاعل کی ترسیم کے ساتھ کیا تعلقات ہیں؟

سوال ۴.۲۲۶: $y = x^5 - 5x^4 - 240$

سوال ۴.۲۲۷: $y = x^3 - 12x^2$

سوال ۴.۲۲۸: $y = \frac{4}{5}x^5 + 16x^2 - 25$

سوال ۴.۲۲۹: $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 20$

سوال ۴.۲۳۰: تفاعل $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ اور اس کے پہلے دو تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' اور f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ پر بحث کریں۔

سوال ۴.۲۳۱: تفاعل $f(x) = x\cos x$ اور اس کے پہلے دو تفرق کو $0 \leq x \leq 2\pi$ کے لیے ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ پر بحث کریں۔

سوال ۴.۲۳۲:

۱. $k = 0$ اور اس کی قریبی مثبت اور منفی قیمتوں کے لیے $f(x) = x^3 + kx$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ k کی قیمت کا ترسیم کی شکل و صورت پر کیا اثر پایا جاتا ہے؟

۲. $f''(x)$ تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $f''(x)$ دو درجی مساوات ہے۔ $f''(x)$ کا ممیز تلاش کریں ($ax^2 + bx + c$ کا ممیز $b^2 - 4ac$ ہے)۔ k کی کن قیمتوں کے لیے ممیز مثبت ہے؟ صفر ہے؟ منفی ہے؟ k کی کن قیمتوں کے لیے $f'(x)$ کے صفروں کی تعداد دو ہے؟ ایک ہے؟ صفر ہے؟ اب بتائیں کہ k کی قیمت کا $f(x)$ کی ترسیم کی شکل و صورت کے ساتھ کیا تعلق ہے۔

۳. k کی دیگر قیمتوں کے ساتھ تجربہ کر کے دیکھیں۔ $k \to \infty$ اور $k \to -\infty$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟

سوال ۴.۲۳۳:

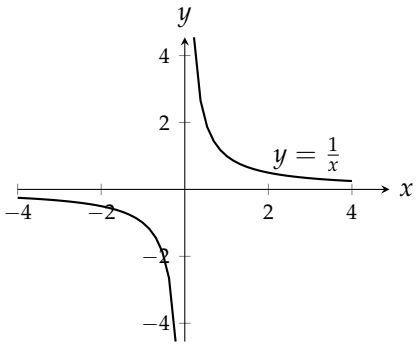
ا. $k = -4$ اور اس کی قریبی قیمتوں کے لیے ایک ساتھ $-1 \leq x \leq 4$ پر $f(x) = x^4 + kx^3 + 6x^2$ ترسیم کریں۔ k کی قیمت ترسیم کی شکل و صورت پر کس طرح اثر انداز ہوتی ہے؟

ب. $f''(x)$ تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $f''(x)$ دو درجی مساوات ہے۔ $f''(x)$ کا ممیز تلاش کریں ($ax^2 + bx + c$ کا ممیز $b^2 - 4ac$ ہے)۔ k کی کن قیمتوں کے لیے ممیز مثبت ہے؟ صفر ہے؟ منفی ہے؟ k کی کن قیمتوں کے لیے $f'(x)$ کے صفروں کی تعداد دو ہے؟ ایک ہے؟ صفر ہے؟ اب بتائیں کہ k کی قیمت کا $f(x)$ کی ترسیم کی شکل و صورت کے ساتھ کیا تعلق ہے۔

سوال ۴.۲۳۴:

ا. $-3 \leq x \leq 3$ کے لیے $y = x^{2/3}(x^2 - 2)$ ترسیم کریں۔ اس کے بعد احصاء کے استعمال سے مقعر، اٹھان اور نیچے گرنے کی تصدیق کریں۔ (ہو سکتا ہے کہ آپ کو کمپیوٹر میں $x^{2/3}$ کو $(x^2)^{1/3}$ لکھنا پڑے۔)

ب. کیا $x = 0$ پر منحنی کا کنگرہ پایا جاتا ہے یا صرف ایک کونا جس کے بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں؟



شکل ۴.۵۸: تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کی ترسیم۔

سوال ۴.۲۳۵:

ا. $-0.5 \leq x \leq 1.5$ پر $y = 9x^{2/3}(x-1)$ ترسیم کریں۔ اس کے بعد احصاء کی مدد سے مقعر، مقامی اقل اور مقامی اعظم نقطوں کی تصدیق کریں۔ مبدا کی بائیں جانب کونسا مقعر ہے؟ (ہو سکتا ہے کہ آپ کو کمپیوٹر میں $x^{2/3}$ کو $(x^2)^{1/3}$ لکھنا پڑے۔)

ب. کیا $x = 0$ پر ترسیم کا کنگرہ پایا جاتا ہے یا صرف ایک کونا جس کے بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں؟

سوال ۴.۲۳۶: کیا $x = -3$ کے قریب $y = x^2 + 3\sin 2x$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۴.۵ $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء

اس حصہ میں ناطق تفاعل (دو کثیر رکنیوں کا حاصل تقسیم) کے علاوہ دیگر تفاعل، جن کی $x \to \mp\infty$ پر دلچسپ حد ہوں، کی ترسیمات پر متقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے غور کیا جائے گا۔

$x \to \mp\infty$ پر حد

تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ تمام $x \neq 0$ کے لیے معین ہے۔ مثبت اور بتدریج بڑھتی x کے لیے $\frac{1}{x}$ کی قیمت بتدریج گھٹے گی۔ منفی x جس کی مقدار بتدریج بڑھتی ہو کے لیے $\frac{1}{x}$ کی مقدار بتدریج گھٹے گی۔ ہم مختصراً کہتے ہیں کہ $x \to \mp\infty$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ کی حد 0 ہے۔

تعریف:

ا. اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لیے ایسا مطابقتی عدد M موجود ہو کہ تمام $x > M$ کے لیے $|f(x) - L| < \epsilon$ ہو یعنی

$$x > M \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \epsilon$$

۵۲۷۵ تب ہم کہتے ہیں کہ x لامتناہی تک پہنچنے پر $f(x)$ کی حد L ہے جس کو ہم

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

۵۲۷۶ لکھتے ہیں۔

۵۲۷۷ ۲. اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لیے ایسا مطابقتی عدد N موجود ہو کہ تمام $x < N$ کے لیے $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ ہو یعنی

$$x < N \quad \Longrightarrow \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

۵۲۷۸ تب ہم کہتے ہیں کہ x منفی لامتناہی تک پہنچنے پر $f(x)$ کی حد L ہے جس کو ہم

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

۵۲۷۹ لکھتے ہیں۔

۵۲۸۰ □

۵۲۸۱ لامتناہی کو ∞ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو حقیقی عدد نہیں لہٰذا اس کو حساب میں عام اعداد کی طرح استعمال نہیں کیا جا سکتا۔

۵۲۸۲ $x \to \mp\infty$ پر تفاعل کی حد تلاش کرنے کی حکمت عملی وہی ہے جو حصہ ۲.۲ میں استعمال کی گئی۔ وہاں ہم نے مستقل تفاعل $y = k$ اور مماثل تفاعل
۵۲۸۳ $y = x$ کی حدیں حاصل کیں۔ اس کے بعد الجبرائی ملاپ کا ایک مسئلہ استعمال کرتے ہوئے ان نتائج سے دیگر تفاعل کی حدیں حاصل کی گئیں۔ یہاں ابتدائی
۵۲۸۴ تفاعل کو $y = k$ اور $y = x$ کے بجائے $y = k$ اور $y = \frac{1}{x}$ لیتے ہوئے ہم یہی کچھ دوبارہ کرتے ہیں۔

۵۲۸۵ باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے ہمیں درج ذیل ثابت کرنا ہو گا۔

$$\lim_{x\to\mp\infty} k = k, \quad \lim_{x\to\mp\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{۱}$$

۵۲۸۶ ہم مستقل تفاعل کی حد سوال ۴.۳۲۳ اور سوال ۴.۳۲۴ کے لیے رکھتے ہیں جبکہ دوسرے تفاعل کو یہاں ثابت کرتے ہیں۔

۵۲۸۷ مثال ۴.۲۰: درج ذیل دکھائیں۔

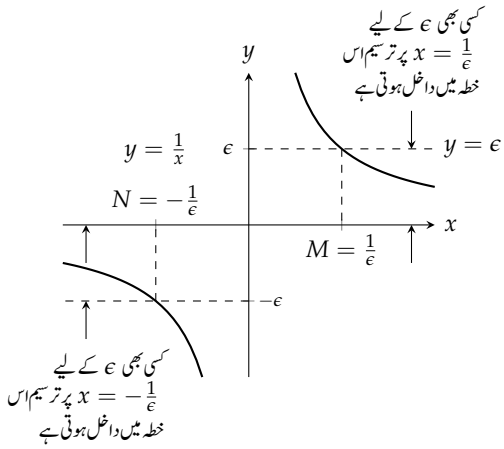
۵۲۸۸ ا. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ ۵۲۸۹ ب. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

۵۲۹۰ **حل**

۵۲۹۱ ا. فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا عدد M تلاش کرنا ہے کہ تمام x کے لیے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$x > M, \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

۵۲۹۲ $M = \frac{1}{\epsilon}$ یا اس سے بڑا مثبت عدد منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ ثابت ہوتا ہے (شکل ۴.۵۹)۔



شکل ۴.۵۹: حد کی تلاش میں جیومیٹری (مثال ۴.۲۰)

۵۲۹۳ ب. فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا عدد N تلاش کرنا ہے کہ تمام x کے لیے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$x < N, \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

۵۲۹۴ $N = -\frac{1}{\epsilon}$ یا $-\frac{1}{\epsilon}$ سے کم منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ ثابت ہوتا ہے (شکل ۴.۵۹)۔

۵۲۹۵ □

۵۲۹۶ مساوات ۱ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ سے ہم دیگر حل تلاش کر سکتے ہیں۔

۵۲۹۷ مسئلہ ۴.۶: $x \to \mp\infty$ پر حل کے خواص

۵۲۹۸ اگر $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = L$ اور $\lim_{x\to\mp\infty} g(x) = M$ ہوں تب درج ذیل درست ہوں گے۔ (L اور M حقیقی اعداد
۵۲۹۹ ہیں۔)

۵۳۰۰ قاعدہ مجموعہ: $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x) + g(x)] = L + M$

۵۳۰۱ قاعدہ فرق: $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x) - g(x)] = L - M$

۵۳۰۲ قاعدہ ضرب: $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$

۵۳۰۳ قاعدہ ضرب مستقل: $\lim_{x\to\mp\infty} kf(x) = kL$

۵۳۰۴ قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

۵۳۰۵ قاعدہ طاقت: اگر m اور n عدد صحیح ہوں تب $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)]^{m/n} = L^{m/n}$

۵۳۰۶

۵۳۰۷ یہ خواص بالکل مسئلہ ۲.۱ (صفحہ ۹۳) میں دیے گئے خواص کی طرح ہیں اور انہیں ہم بالکل اسی طرح استعمال کرتے ہیں۔

۵۳۰۸ مثال ۴.۲۱:

ا.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(5+\tfrac{1}{x}) &= \lim_{x\to\infty}5+\lim_{x\to\infty}\tfrac{1}{x} && \text{قاعدہ مجموعہ}\\ &= 5+0=5 && \text{معلوم قیمتیں}\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} &= \lim_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\pi\sqrt{3}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} && \text{قاعدہ ضرب}\\ &= \pi\sqrt{3}\cdot 0\cdot 0=0 && \text{معلوم قیمتیں}\end{aligned}$$

۵۳۰۹ □

۵۳۱۰ $x \to \pm\infty$ کرتے ہوئے ناطق تفاعل کی حد

۵۳۱۱ ناطق تفاعل کی حد، $x \to \pm\infty$ کرتے ہوئے، حاصل کرنے کی خاطر نسب نما میں x کی بلند تر طاقت سے شمار کنندہ اور نسب نما کو تقسیم کریں۔ اس کے
۵۳۱۲ بعد کیا ہوگا، یہ ملوث کثیر رکنیوں کے درجات پر منحصر ہے۔

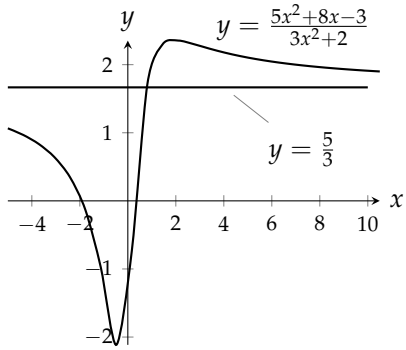
۵۳۱۳ مثال ۴.۲۲: شمار کنندہ اور نسب نما کا درجہ ایک سا ہے (شکل ۴.۶۰)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} &= \lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}} && \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^2 \text{ سے تقسیم کریں}\\ &= \frac{5+0-0}{3+0}=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

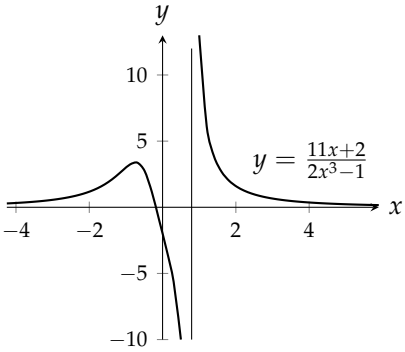
۵۳۱۴ □

۵۳۱۵ مثال ۴.۲۳: شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجے سے کم ہے (شکل ۴.۶۱)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{11x+2}{2x^3-1} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} && \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^3 \text{ سے تقسیم کریں}\\ &= \frac{0+0}{2-0}=0\end{aligned}$$



شکل ۴.۶۰: تفاعل کی ترسیم اور حد (مثال ۴.۲۲)



شکل ۴.۶۱: تفاعل کی ترسیم اور حد (مثال ۴.۲۳)

۵۳۱۶ □

۵۳۱۷ مثال ۴.۲۴: شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجے سے زیادہ ہے۔ شکل ۴.۶۲

ا.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3}{7x+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-\frac{3}{x}}{7+\frac{4}{x}} \qquad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x \text{ سے تقسیم کریں}$$
$$= -\infty$$

ب.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x+\frac{7}{x}}{2-\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}} \qquad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^2 \text{ سے تقسیم کریں}$$
$$= \frac{\infty}{2} = \infty$$

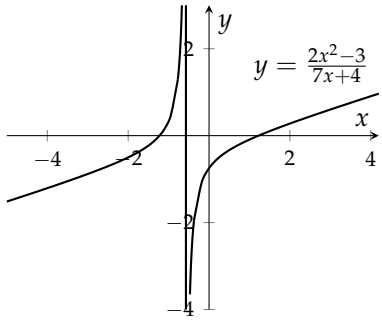
۵۳۱۸ □

۵۳۱۹ مثال ۴.۲۲ تا مثال ۴.۲۴ سے $x \to \mp\infty$ پر ناطق تفاعل کی حد حاصل کرنے کا ایک نقش ملتا ہے۔

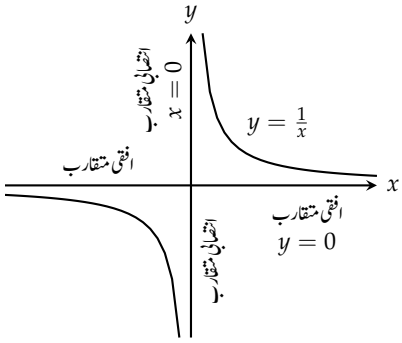
۵۳۲۰ ا. اگر شمار کنندہ اور نسب نما کی بلند تر طاقت ایک سی ہوں تب تفاعل کی حد بلند تر ارکان کے عددی سر کا حاصل تقسیم ہو گی۔

۵۳۲۱ ب. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے کم ہو تب تفاعل کی حد صفر ہو گی۔

۵۳۲۲ ج. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے زیادہ ہو تب تفاعل کی حد ∞ یا $-\infty$ ہو گی۔ حد کی علامت نسب نما اور شمار کنندہ کی علامتوں
۵۳۲۳ سے حاصل ہو گی۔



شکل ۴.۶۲: ترسیم برائے مثال ۴.۲۴



شکل ۴.۶۳: محددی محور قطع زائد $y = \frac{1}{x}$ کے دونوں شاخوں کے متقارب ہیں۔

ناطق تفاعل کے لیے خلاصہ

ا. اگر f کا درجہ اور g کے درجے کے برابر ہوں تب $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_n}$ یعنی f اور g کے اول عددی سروں کی نسبت کے برابر ہو گا۔

ب. اگر f کا درجہ g کے درجے سے کم ہو تب $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ہو گا۔

ج. اگر f کا درجہ g کے درجے سے زیادہ ہو تب $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \mp\infty$ ہو گا جہاں شمار کنندہ اور نسب نما کی علامتوں سے حد کی علامت تعین ہو گی۔

کثیر رکنی $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$ کا اول عددی سر a_n ہے جو بلند تر طاقتی جزو کا عددی سر ہے۔

افقی اور انتصابی متقارب

اگر مبدا سے دور چلتے ہوئے ایک تفاعل اور کسی مقررہ لکیر کے درمیان فاصل صفر تک پہنچتا ہو تب ہم کہتے ہیں کہ ترسیم اس لکیر تک متقاربی پہنچتی ہے اور اس لکیر کو ترسیم کا **متقارب**[۱۳] کہتے ہیں۔

مثال ۴.۲۵: محددی محور تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کے متقارب ہیں (شکل ۴.۶۳)۔ ترسیم کے دائیں حصے پر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

اور ترسیم کے بائیں حصے پر

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

---

[۱۳] asymptote

۵۳۳۵ ہیں لہٰذا محور x منحنی $y = \frac{1}{x}$ کا متقارب ہے۔ اسی طرح اوپر اور نیچے

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

۵۳۳۶ ہیں لہٰذا محور y بھی $y = \frac{1}{x}$ کا متقارب ہے۔

۵۳۳۷ یاد رہے کہ $x = 0$ پر نسب نما صفر ہے لہٰذا تفاعل غیر معین ہے۔ □

۵۳۳۸ تعریف: خط $y = b$ اس صورت تفاعل $y = f(x)$ کا افقی متقارب ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = b \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to \infty} f(x) = b$$

۵۳۳۹ خط $x = a$ اس صورت تفاعل $y = f(x)$ کا انتصابی متقارب ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \mp\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \mp\infty$$

۵۳۴۰ □

۵۳۴۱ مثال ۴.۲۶: $\frac{\pi}{2}$ کے طاق عدد صحیح مضرب پر، جہاں $\cos x = 0$ ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتصابی متقارب پائے جاتے ہیں (شکل
۵۳۴۲ ۴.۶۴)۔

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

۵۳۴۳ π کے عدد صحیح مضرب پر، جہاں $\sin x = 0$ ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتصابی متقارب پائے جاتے ہیں (شکل ۴.۶۵)۔

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

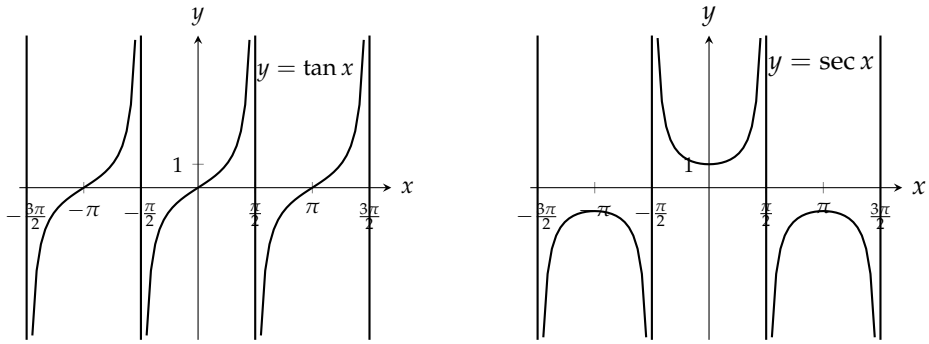
۵۳۴۴ □

۵۳۴۵ مثال ۴.۲۷: درج ذیل ترسیم کے متقارب تلاش کریں۔

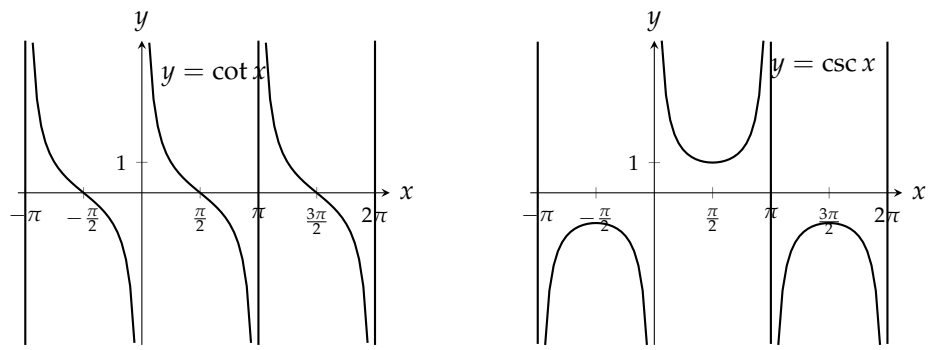
$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

۵۳۴۶ **حل**

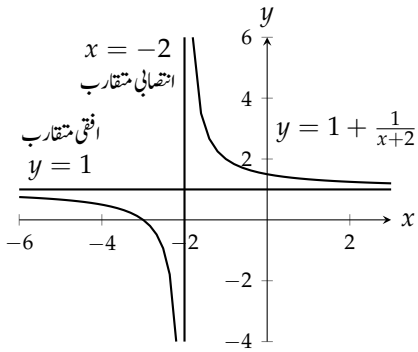
۵۳۴۷ ہم $x \to \mp\infty$ پر اور $x \to -2$، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کا رویہ دیکھنا چاہتے ہیں۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ہم $x + 3$ کو $x +$
۵۳۴۸ 2 سے تقسیم کرتے ہیں۔



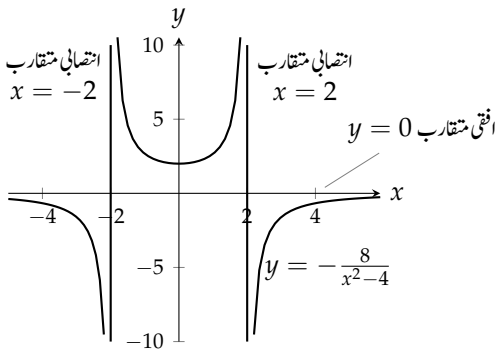
شکل ۴.۶۴: انتصابی متقارب (مثال ۴.۲۶)



شکل ۴.۶۵: انتصابی متقارب (مثال ۴.۲۶)



شکل ۴.۶۶: انتصابی متقارب (مثال ۴.۲۷)



شکل ۴.۶۷: انتصابی متقارب (مثال ۴.۲۸)

۵۳۴۹

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x+2 & x+3 \\ & -x-2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

۵۳۵۰ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y = \frac{x+3}{x+2} = \frac{x+2+1}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$$

۵۳۵۱ ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{x}$ کی منحنی کو 1 اکائی اوپر اور 2 اکائیاں بائیں منتقل کرتے ہوئے درج بالا منحنی حاصل ہو گی۔ یوں محددی محور کے بجائے خط $y = 1$ اور
۵۳۵۲ خط $x = -2$ متقارب خط ہوں گے۔

۵۳۵۳ □

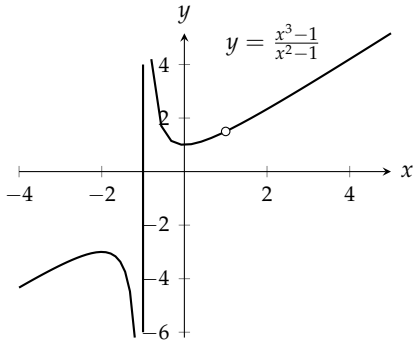
۵۳۵۴ مثال ۴.۲۸: درج ذیل ترسیم کا متقارب تلاش کریں۔

$$y = -\frac{8}{x^2-4}$$

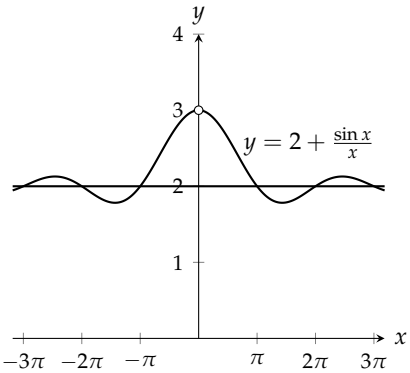
۵۳۵۵ **حل**

۵۳۵۶ ہم $x \to \mp\infty$ اور $x - \mp 2$، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

۵۳۵۷ چونکہ $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0$ ہے لہٰذا افقی متقارب خط $y = 0$ ہے (شکل ۴.۶۷)۔ چونکہ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$ اور
۵۳۵۸ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ سے $x = 2$ متقاربی خط حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $x = -2$ بھی متقاربی خط حاصل ہو گا۔ □



شکل ۴.۶۸: منحنی $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$ کا $x = 1$ پر عدم استمرار ہٹایا جا سکتا ہے لہٰذا اس کا صرف $x = -1$ پر متقاربی خط پایا جائے گا۔



شکل ۴.۶۹: منحنی اپنے متقاربی خط کو لامتناہی مرتبہ قطع کر سکتی ہے (مثال ۴.۳۰)۔

۵۳۵۹ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ جہاں ناطق تفاعل کا نسب نما صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی متقارب پایا جائے گا۔ یہ تقریباً درست ہے لیکن پورا درست نہیں۔ حقیقت میں کم
۵۳۶۰ تر جزو تک تخفیف شدہ ناطق تفاعل میں جہاں نسب نما کا صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی متقارب پایا جائے گا۔

۵۳۶۱ **مثال ۴.۲۹:** نسب نما میں صفر پر موجود عدم استمرار ہٹایا جا سکتا ہے

۵۳۶۲ درج ذیل کی ترسیم

$$f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$$

۵۳۶۳ کا $x = -1$ پر انتصابی متقارب پایا جاتا ہے لیکن $x = 1$ پر نہیں پایا جاتا۔ چونکہ

$$\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1}$$

۵۳۶۴ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا عدم استمرار ہٹایا جا سکتا ہے اور $x \to 1$ پر تفاعل کی حد $\frac{3}{2}$ ہے (شکل ۴.۶۸)۔ □

۵۳۶۵ مسئلہ ۲.۴ (صفحہ ۹۸ مسئلہ پنچ) بھی $x \to \mp\infty$ پر حد کے لیے قابل لاگو ہے۔ اس کی ایک مثال پیش کرتے ہیں۔

۵۳۶۶ **مثال ۴.۳۰:** مسئلہ پنچ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنی کے متقارب تلاش کریں۔

$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

۵۳۶۷ **حل**

۵۳۶۸ ہم $x \to 0$ جہاں نسب نما صفر ہو گا اور $x \to \mp\infty$ پر منحنی کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

۵۳۶۹ ہم جانتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ہے لہٰذا مبدا پر کوئی متقارب نہیں پایا جاتا۔ چونکہ

$$0 \leq \left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right|$$

۵۳۷۰ اور $\lim_{x\to\mp\infty} \left|\frac{1}{x}\right| = 0$ ہے لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ہو گا۔ یوں

$$\lim_{x\to\mp\infty} (2 + \frac{\sin x}{x}) = 2 + 0 = 2$$

۵۳۷۱ ہو گا لہٰذا خط $y = 2$ منحنی کا، بائیں اور دائیں ہاتھ، متقارب ہو گا (شکل ۴.۶۹)۔ □

۵۳۷۲ ترچھے متقارب

۵۳۷۳ اگر شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجے سے ایک زیادہ ہو تب ترسیم کا ایک ترچھا متقارب پایا جائے گا جو نہ افقی اور نہ انتصابی ہو گا۔

۵۳۷۴ مثال ۴.۳۱: درج ذیل کے متقارب تلاش کریں۔

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

۵۳۷۵ **حل**

۵۳۷۶ ہم $x \to \mp\infty$ اور $x \to 2$، جہاں نسب نما صفر ہو گا، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ ہم $x^2 - 3$ کو $2x - 4$ سے تقسیم کرتے
۵۳۷۷ ہیں۔

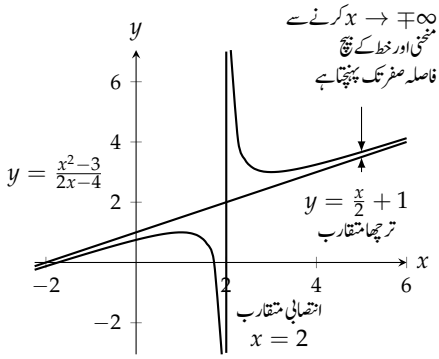
۵۳۷۸

$$\begin{array}{r|l} & \frac{1}{2}x + 1 \\ \hline 2x - 4 & x^2 \qquad - 3 \\ & -x^2 + 2x \\ \hline & 2x - 3 \\ & -2x + 4 \\ \hline & 1 \end{array}$$

۵۳۷۹ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

۵۳۸۰ چونکہ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$ اور $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ ہیں لہٰذا $x = 2$ دو طرفہ متقارب ہے۔ $x \to \mp\infty$ پر
۵۳۸۱ حاصل تقسیم صفر تک پہنچتی اور $f(x) \to \frac{x}{2} + 1$ تک پہنچتا ہے۔ یوں $y = \frac{x}{2} + 1$ دونوں اطراف متقاربی خط ہے (شکل ۴.۷۰)۔ □



شکل ۴.۷۰: ترچھا متقارب (مثال ۴.۳۱)

۵۳۸۲ **متقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے ترسیم**

۵۳۸۳ درج ذیل تفاعل کے تمام مشاہدوں

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

۵۳۸۴ میں غالباً سب سے اہم مشاہدہ

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x - 4}$$

۵۳۸۵ ہے جس سے درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1 \qquad x \text{ کی بڑی قیمتوں کے لیے}$$

$$f(x) = \frac{1}{2x - 4} \qquad 2 \text{ کے قریب } x \text{ کی قیمتوں کے لیے}$$

۵۳۸۶ بڑی x پر f کا رویہ $y = \frac{x}{2} + 1$ ہو گا جہاں $\frac{1}{2x-4}$ قابل نظر انداز ہو گا۔ $x = 2$ کے قریب $\frac{1}{2x-4}$ تفاعل f کا غالب جزو ہو گا لہٰذا

۵۳۸۷ $x = 2$ کے قریب f کا رویہ $\frac{1}{2x-4}$ کے رویے کی طرح ہو گا۔

۵۳۸۸ ہم کہتے ہیں کہ x کی بڑی مطلق مقدار پر $\frac{x}{2} + 1$ کا **غلبہ**[۱۴] ہے جبکہ $x = 2$ کے قریب $\frac{1}{2x-4}$ **غالب**[۱۵] ہے۔ تفاعل کا رویہ جاننے میں غالب

۵۳۸۹ اجزاء کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

---

[۱۴] dominates
[۱۵] dominant

۵۳۹۰ مثال ۴.۳۲: درج ذیل ترسیم کریں۔

$$y = \frac{x^3+1}{x}$$

۵۳۹۱ **حل**

۵۳۹۲ ہم تشاکل، غالب اجزاء، متقارب، اتراؤ، چڑھاؤ، انتہا نقطے، اور مقعر پر غور کرتے ہیں۔

۵۳۹۳ **پہلا قدم:** تشاکل۔ نہیں پایا جاتا ہے۔

۵۳۹۴ **دوسرا قدم:** غالب اجزاء اور متقارب۔ ہم ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$y = x^2 + \frac{1}{x} \tag{۲}$$

۵۳۹۵ $|x|$ کی بڑی قیمت کے لیے $y \approx x^2$ اور $x = 0$ کے قریب $y \approx \frac{1}{x}$ ہو گا۔ مساوات ۲ میں $x = 0$ پر انتصابی متقارب نظر آتا ہے جہاں
۵۳۹۶ نسب نما صفر ہو گا۔

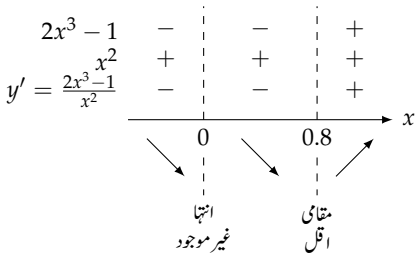
۵۳۹۷ **تیسرا قدم:** انتہا، اتراؤ، اور چڑھاؤ۔ یک رتبی تفرق

$$y' = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2}$$

۵۳۹۸ نقطہ $x = 0$ پر غیر معین ہے جبکہ درج ذیل پر صفر ہے۔

۵۳۹۹

$$\begin{aligned} 2x - \frac{1}{x^2} &= 0 \\ 2x^3 - 1 &= 0 \\ x^3 &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.8 \end{aligned}$$



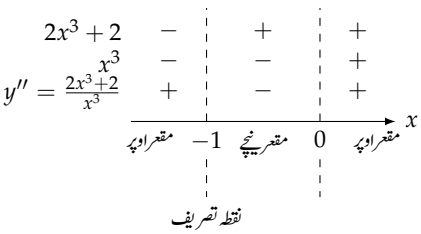
۵۴۰۰ **چوتھا قدم:** مقعر۔ دو رتبی تفرق

$$y'' = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^3+2}{x^3}$$

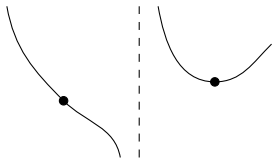
۵۴۰۱ نقطہ $x = 0$ پر غیر معین ہے اور درج ذیل پر صفر ہے:

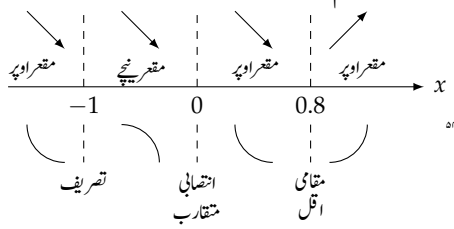
۵۴۰۲

$$\begin{aligned} 2 + \frac{2}{x^3} &= 0 \\ 2x^3 + 2 &= 0 \\ x^3 &= -1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$



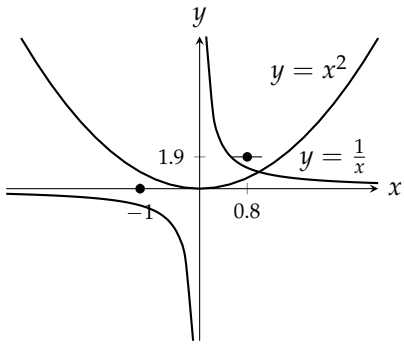
۵۳۰۳ **پانچواں قدم:** درج بالا معلومات اکٹھی کر کے ترسیم کا خاکہ بناتے ہیں۔





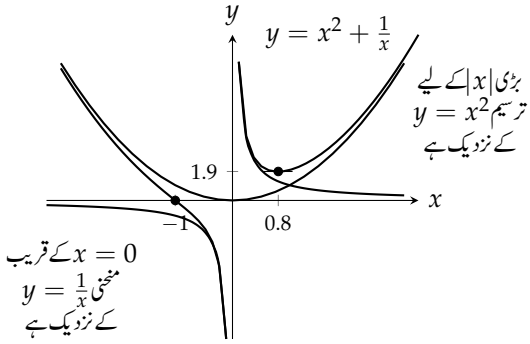
۵۳۰۴

۵۳۰۵ **چھٹا قدم:** غالب اجزاء، قاطع، اور افقی مماس۔ اس سے منحنی کی ترسیم کھینچنے میں مدد ملتی ہے۔



۵۳۰۶

۵۳۰۷ **ساتواں قدم:** ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کھینچتے ہیں۔



۵۳۰۸

۵۳۰۹ □

۵۳۱۰ **تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کرنے کا لائحہ عمل**

۵۳۱۱

۵۳۱۲ ۱. تشاکل کی نشاندہی کریں۔

کیا تفاعل طاق یا جفت ہے؟

۲. کیا معلوم تفاعل کو منتقل کرنے سے موجودہ تفاعل حاصل ہو گا؟

۳. غالب اجزاء تلاش کریں۔
ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھیں۔

۴. متقارب خطوط اور ہٹانے کے قابل و عدم استمرار تلاش کریں۔
کیا کسی نقطے پر نسب نما صفر ہے؟
$x \to \mp\infty$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟

۵. f' حاصل کرتے ہوئے $f' = 0$ کو حل کریں۔ نقطہ فاصل اور وقفہ اتراؤ اور وقفہ چڑھاؤ دریافت کریں۔

۶. f'' سے مقعر اور نقطہ تصریف معلوم کریں۔

۷. ترسیم کی عمومی صورت کا خاکہ بنائیں۔

۸. مخصوص نقطوں، مثلاً آخری نقطے، نقطہ فاصل، قاطع محدد، پر f کی قیمت تلاش کریں۔

۹. ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل ترسیم کریں۔

سوالات

$x \to \mp\infty$ پر حد کا حساب

سوال ۴.۲۳۷ تا سوال ۴.۲۴۲ میں (ا) $x \to \infty$ پر (ب) $x \to -\infty$ پر حد تلاش کریں۔ (کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے حد کی ذہنی تصویر بنانے میں مدد ملتی ہے۔)

سوال ۴.۲۳۷: $f(x) = \frac{2}{x} - 3$

سوال ۴.۲۳۸: $f(x) = \pi - \frac{2}{x^2}$

سوال ۴.۲۳۹: $g(x) = \frac{1}{2+\frac{1}{x}}$

سوال ۴.۲۴۰: $g(x) = \frac{1}{8-\frac{5}{x^2}}$

سوال ۴.۲۴۱: $h(x) = \frac{-5+\frac{7}{x}}{3-\frac{1}{x^2}}$

سوال ۴.۲۴۲: $h(x) = \frac{3-\frac{2}{x}}{4+\frac{\sqrt{2}}{x^2}}$

سوال ۴.۲۴۳ تا سوال ۴.۲۴۶ میں حد تلاش کریں۔

سوال ۴.۲۴۳: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin 2x}{x}$

سوال ۴.۲۴۴: $\lim_{\theta\to\infty} \frac{\cos\theta}{3\theta}$

سوال ۴.۲۴۵: $\lim_{t\to-\infty} \frac{2-t+\sin t}{t+\cos t}$

سوال ۴.۲۴۶: $\lim_{r\to\infty} \frac{r+\sin r}{2r+7-5\sin r}$

ناطق تفاعل کی حد

سوال ۴.۲۴۷ تا سوال ۴.۲۶۰ میں دیے ناطق تفاعل کی (ا) $x \to \infty$ اور (ب) $x \to -\infty$ پر حد تلاش کریں۔

سوال ۴.۲۴۷: $f(x) = \frac{2x+3}{5x+7}$

سوال ۴.۲۴۸: $f(x) = \frac{2x^3+7}{x^3-x^2+x+7}$

سوال ۴.۲۴۹: $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$

سوال ۴.۲۵۰: $f(x) = \frac{3x+7}{x^2-2}$

سوال ۴.۲۵۱: $f(x) = \frac{1-12x^3}{4x^2+12}$

سوال ۴.۲۵۲: $g(x) = \frac{1}{x^3-4x+1}$

سوال ۴.۲۵۳: $h(x) = \frac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$

سوال ۴.۲۵۴: $g(x) = \frac{3x^2-6x}{4x-8}$

سوال ۴.۲۵۵: $f(x) = \frac{2x^5+3}{-x^2+x}$

سوال ۴.۲۵۶: $g(x) = \frac{10x^5+x^4+31}{x^6}$

سوال ۴.۲۵۷: $g(x) = \frac{x^4}{x^3+1}$

سوال ۴.۲۵۸: $h(x) = \frac{9x^4+x}{2x^4+5x^2-x+6}$

سوال ۴.۲۵۹: $h(x) = \frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$

سوال ۴.۲۶۰: $h(x) = \frac{-x^4}{x^4-7x^3+7x^2+9}$

حد برائے غیر عدد صحیح طاقت یا منفی طاقت

ایسی نسبت جس کے نسب نما اور شمار کنندہ میں غیر عدد صحیح یا منفی طاقت پائی جاتی ہوں کی حد بالکل ناطق تفاعل کی حد کی طرح تلاش کی جاتی ہے۔ نسب نما میں x کی بلند تر طاقت سے نسب نما اور شمار کنندہ کو تقسیم کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔ سوال ۴.۲۶۱ تا سوال ۴.۲۶۶ میں حد تلاش کریں۔

سوال ۴.۲۶۱: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x-7}$

سوال ۴.۲۶۲: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$

سوال ۴.۲۶۳: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}$

سوال ۴.۲۶۴: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{-1}+x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}}$

سوال ۴.۲۶۵: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^{5/3}-x^{1/3}+7}{x^{8/5}+3x+\sqrt{x}}$

سوال ۴.۲۶۶: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-5x+3}{2x+x^{2/3}-4}$

قیمتوں اور حد سے ترسیم کا حصول

سوال ۴.۲۶۷ تا سوال ۴.۲۷۰ میں دیے شرائط پر پورا اترتی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔ ترسیم کا کلیہ درکار نہیں لہٰذا کار تیسی محدد پر ایسی ترسیم کھینچیں جو دیے شرائط پر پورا اترتی ہو۔ (ان شرائط کو کئی ترسیمات مطمئن کر سکتی ہیں لہٰذا آپ کی ترسیمات دی گئی جوابی ترسیمات سے مختلف ہو سکتی ہیں۔)

سوال ۴.۲۶۷: $f(0)=0, f(1)=2, f(-1)=-2, \lim\limits_{x\to-\infty}=-1, \lim\limits_{x\to\infty}=1$

سوال ۴.۲۶۸: $f(0)=0, \lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)=0, \lim\limits_{x\to0^+}=2, \lim\limits_{x\to0^-}=-2$

سوال ۴.۲۶۹: $f(0)=0, \lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)=0, \lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\infty,$
$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$

سوال ۴.۲۷۰: $f(2)=1, f(-1)=0, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0, \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\infty,$
$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

تفاعل کی ایجاد

سوال ۴.۲۷۱ تا سوال ۴.۲۷۴ میں ایسا تفاعل تلاش کریں جو دی گئی شرائط کو مطمئن کرتا ہو اور تفاعل کو ترسیم کریں۔ (چونکہ کئی تفاعل ان شرائط کو مطمئن کر سکتے ہیں لہٰذا آپ کے جوابات دیے گئے جوابات سے مختلف ہو سکتے ہیں۔ آپ ٹکڑوں میں تفاعل کے کلیات استعمال کر سکتے ہیں۔)

سوال ۴.۲۷۱: $\lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x)=0, \lim\limits_{x\to2^-} f(x)=\infty, \lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\infty$

سوال ۴.۲۷۲: $\lim\limits_{x\to\mp\infty} g(x)=0, \lim\limits_{x\to3^-} g(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to3^+} g(x)=\infty$

سوال ۴.۲۷۳: $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-1, \lim\limits_{x\to\infty} h(x)=1, \lim\limits_{x\to0^-} h(x)=-1, \lim\limits_{x\to0^+} h(x)=1$

۵۴۸۳ سوال ۴.۲۷۴: $\lim_{x\to\mp\infty} k(x) = 1, \lim_{x\to 1^-} k(x) = \infty, \lim_{x\to 1^+} (x) = -\infty$

۵۴۸۴

۵۴۸۵ **ناطق تفاعل کی ترسیم**

۵۴۸۶ سوال ۴.۲۷۵ تا سوال ۴.۳۰۲ میں دیے گئے ناطق تفاعل ترسیم کریں۔ متقارب اور غالب اجزاء کی ترسیمات بھی شامل کریں۔

۵۴۸۷ سوال ۴.۲۷۵: $y = \frac{1}{x-1}$

۵۴۸۸ سوال ۴.۲۷۶: $y = \frac{1}{x+1}$

۵۴۸۹ سوال ۴.۲۷۷: $y = \frac{1}{2x+4}$

۵۴۹۰ سوال ۴.۲۷۸: $y = \frac{-3}{x-3}$

۵۴۹۱ سوال ۴.۲۷۹: $y = \frac{x+3}{x+2}$

۵۴۹۲ سوال ۴.۲۸۰: $y = \frac{2x}{x+1}$

۵۴۹۳ سوال ۴.۲۸۱: $y = \frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$

۵۴۹۴ سوال ۴.۲۸۲: $y = \frac{x^2-49}{x^2+5x-14}$

۵۴۹۵ سوال ۴.۲۸۳: $y = \frac{x^2-1}{x}$

۵۴۹۶ سوال ۴.۲۸۴: $y = \frac{x^2+4}{2x}$

۵۴۹۷ سوال ۴.۲۸۵: $y = \frac{x^4+1}{x^2}$

۵۴۹۸ سوال ۴.۲۸۶: $y = \frac{x^3+1}{x^2}$

۵۴۹۹ سوال ۴.۲۸۷: $y = \frac{1}{x^2-1}$

۵۵۰۰ سوال ۴.۲۸۸: $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

۵۵۰۱ سوال ۴.۲۸۹: $y = -\frac{x^2-2}{x^2-1}$

۵۵۰۲ سوال ۴.۲۹۰: $y = \frac{x^2-4}{x^2-2}$

۵۵۰۳ سوال ۴.۲۹۱: $y = \frac{x^2}{x-1}$

۵۵۰۴ سوال ۴.۲۹۲: $y = -\frac{x^2}{x+1}$

۵۵۰۵ سوال ۴.۲۹۳: $y = \frac{x^2-4}{x-1}$

۵۵۰۶ سوال ۴.۲۹۴: $y = -\frac{x^2-4}{x+1}$

۵۵۰۷ سوال ۴.۲۹۵: $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$

۵۵۰۸ سوال ۴.۲۹۶: $y = -\frac{x^2-x+1}{x-1}$

۵۵۰۹ سوال ۴.۲۹۷: $y = \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+x-2}$

۵۵۱۰ سوال ۴.۲۹۸: $y = \frac{x^3+x-2}{x-x^2}$

۵۵۱۱ سوال ۴.۲۹۹: $y = \frac{x}{x^2-1}$

۵۵۱۲ سوال ۴.۳۰۰: $y = \frac{x-1}{x^2(x-2)}$

۵۵۱۳ سوال ۴.۳۰۱: $y = \frac{8}{x^2+4}$

۵۵۱۴ سوال ۴.۳۰۲: $y = \frac{4x}{x^2+4}$

۵۵۱۵ **کمپیوٹر کا استعمال**

۵۵۱۶ سوال ۴.۳۰۳ تا سوال ۴.۳۰۸ کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ تفاعل کے کلیہ اور ترسیم کا تعلق سمجھائیں۔

۵۵۱۷ سوال ۴.۳۰۳: $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

۵۵۱۸ سوال ۴.۳۰۴: $y = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$

۵۵۱۹ سوال ۴.۳۰۵: $y = x^{2/3} + \frac{1}{x^{1/3}}$

۵۵۲۰ سوال ۴.۳۰۶: $y = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3$

۵۵۲۱ سوال ۴.۳۰۷: $y = \sin(\frac{\pi}{x^2+1})$

۵۵۲۲ سوال ۴.۳۰۸: $y = -\cos(\frac{\pi}{x^2+1})$

۵۵۲۳ **اجزاء کی ترسیمات**

۵۵۲۴ سوال ۴.۳۰۹ تا سوال ۴.۳۱۲ میں تفاعل کو دو اجزاء کا حاصل جمع یا حاصل فرق لکھا گیا ہے۔ اجزاء کو انفرادی ایک ساتھ ترسیم کریں۔ ان ترسیمات کو دیکھتے ہوئے

۵۵۲۵ تفاعل کا خاکہ کھینچیں۔

۵۵۲۶ سوال ۴.۳۰۹: $y = \sec x + \frac{1}{x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

۵۵۲۷ سوال ۴.۳۱۰: $y = \sec x - \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

۵۵۲۸ سوال ۴.۳۱۱: $y = \tan x + \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

۵۵۲۹ سوال ۴.۳۱۲: $y = \frac{1}{x} - \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

۵۵۳۰ نظریہ اور مثالیں

۵۵۳۱ سوال ۴.۳۱۳: $f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2+1}$ لیں۔ دکھائیں کہ ایسا c پایا جاتا ہے جس پر $f(c)$ کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

۵۵۳۲ ا. -2 ۵۵۳۳ ب. $\cos 3$ ۵۵۳۴ ج. $5\,000\,000$

۵۵۳۵ سوال ۴.۳۱۴: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x})$ تلاش کریں۔

۵۵۳۶ سوال ۴.۳۱۵: تشاکلی۔ فرض کریں وقفہ $x > 0$ پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔ وقفہ $x < 0$ پر تفاعل کا رویہ کیا ہو گا؟

۵۵۳۷ سوال ۴.۳۱۶: تشاکلی۔ فرض کریں وقفہ $x < 0$ پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔ وقفہ $x > 0$ پر تفاعل کا رویہ کیا ہو گا؟

۵۵۳۸ سوال ۴.۳۱۷: فرض کریں $f(x)$ اور $g(x)$ کثیر رکنی ہیں اور $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 2$ ہے۔ کیا $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ کے بارے
۵۵۳۹ میں کچھ اخذ کرنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

۵۵۴۰ سوال ۴.۳۱۸: فرض کریں $f(x)$ اور $g(x)$ کثیر رکنی ہیں۔ اگر $g(x)$ کبھی بھی صفر نہیں ہو تب کیا $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی ترسیم کا متقارب ہو گا؟ اپنے
۵۵۴۱ جواب کی وجہ پیش کریں۔

۵۵۴۲ سوال ۴.۳۱۹: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے افقی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۵۵۴۳ سوال ۴.۳۲۰: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے انتصابی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۵۵۴۴ سوال ۴.۳۲۱:

۵۵۴۵ ا. ایک ترسیم اپنے متقاربی خط کو قطع کر سکتی ہے۔ منحنی $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$ (مثال ۴.۳۰) متقاربی خط کو لا متناہی مرتبہ قطع کرتی ہے۔ دکھائیں کہ
۵۵۴۶ $x \to \infty$ پر اس ترسیم کا ڈھلوان متقاربی خط کے ڈھلوان تک پہنچتا ہے۔

۵۵۴۷ ب. درج ذیل خواص رکھنے والے تفاعل $f(x)$ کی مثال پیش کریں۔

۵۵۴۸ ۱) $x > 0$ پر f قابل تفرق ہے۔

۵۵۴۹ ۲) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$

۵۵۵۰ ۳) $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ غیر موجود ہے۔

۵۵۵۱ سوال ۴.۳۲۲: ہم درج ذیل تفاعل کا متقاربی خط تلاش کرنا چاہتے ہیں۔

$$y = \frac{x^2+3x+7}{x+2}$$

۵۵۵۲ ایسا کرنے کی خاطر ہم اس تفاعل کو کثیر رکنی اور حاصل تقسیم کا مجموعہ لکھتے ہیں

$$\frac{x^2+3x+7}{x+2} = x+1+\frac{5}{x+2}$$

۵۵۵۳ جس کا ترچھا متقارب $y = x + 1$ ہے۔

۵۵۵۴ اگر ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو x سے تقسیم کریں تب

$$\frac{x^2+3x+7}{x+2} = \frac{x+3+\frac{7}{x}}{1+\frac{2}{x}}$$

۵۵۵۵ ملتا ہے جس کا متقارب $y = x + 3$ ہے۔

۵۵۵۶ ان میں سے کونسا خط متقارب ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۵۵۵۷ سوال ۴.۳۲۳ اور سوال ۴.۳۲۴ میں حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے $x \to \mp\infty$ پر دی گئی حد کی تصدیق کریں۔

۵۵۵۸ سوال ۴.۳۲۳: اگر f کی قیمت مستقل ہو $f(x) = k$ تب $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ ہوگا۔

۵۵۵۹ سوال ۴.۳۲۴: اگر f کی قیمت مستقل ہو $f(x) = k$ تب $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$ ہوگا۔

۵۵۶۰ کمپیوٹر ترسیمات کے مزید مشاہدے

۵۵۶۱ سوال ۴.۳۲۵ تا سوال ۴.۳۲۸ میں تفاعل ترسیم کریں۔ ان تفاعل کے متقاربی خط تلاش کریں۔ متقاربی خط جہاں ہیں، اس کی وجہ پیش کریں۔

۵۵۶۲ سوال ۴.۳۲۵: $y = -\frac{x^2-4}{x+1}$

۵۵۶۳ سوال ۴.۳۲۶: $y = \frac{x^2+x-6}{2x-2}$

۵۵۶۴ سوال ۴.۳۲۷: $y = \frac{x^3-x^2-1}{x^2-1}$

۵۵۶۵ سوال ۴.۳۲۸: $y = \frac{x^3-2x^2+x+1}{x-x^2}$

۵۵۶۶ سوال ۴.۳۲۹ تا سوال ۴.۳۳۴ میں تفاعل کی ترسیم کے ساتھ غالب اجزاء بھی ترسیم کریں۔ تفاعل کی ترسیم اور غالب اجزاء کی ترسیمات کا تعلق بیان کریں۔

۵۵۶۷ سوال ۴.۳۲۹: $y = x^3 + \frac{3}{x}$

۵۵۶۸ سوال ۴.۳۳۰: $y = x^3 - \frac{3}{x}$

۵۵۶۹ سوال ۴.۳۳۱: $y = 2\sin x + \frac{1}{x}$

۵۵۷۰ سوال ۴.۳۳۲: $y = 2\cos x - \frac{1}{x}$

۵۵۷۱ سوال ۴.۳۳۳: $y = \frac{x^2}{2} + 3\sin 2x$

۵۵۷۲ سوال ۴.۳۳۴: $y = (x-1)^{11} + 2\sin 2\pi x$

۵۵۷۳ سوال ۴.۳۳۵ اور سوال ۴.۳۳۶ کا تفاعل ترسیم کریں۔ اس کے بعد درج ذیل کے جوابات دیں۔

۵۵۷۴ ا. $x \to 0^+$ اور $x \to 0^-$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

۵۵۷۵ ب. $x \to \mp\infty$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

ج. $x \to 1$ اور $x \to -1$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۳۳۵: $y = \frac{3}{2}(x - \frac{1}{x})^{2/3}$

سوال ۴.۳۳۶: $y = \frac{3}{2}(\frac{x}{x-1})^{2/3}$

سوال ۴.۳۳۷: تفاعل $y = -\frac{x^3-2}{x^2+1}$ کو درج ذیل وقفوں پر ترسیم کریں۔

ا. $-9 \le x \le 9$ ب. $-90 \le x \le 90$ ج. $-900 \le x \le 900$

جزو-1 کی ترسیم بہترین ہو گی۔ جزو-ب میں مبدا کے قریب کچھ ہو گا جو بہتر نظر نہیں آئے گا جبکہ جزو-ج کی ترسیم عین $y = -x$ کی ترسیم نظر آئے گی۔ ایسا کیوں ہے؟

سوال ۴.۳۳۸: تفاعل $y = \frac{x^{2/3}}{x^2-1}$ کو وقفہ $-2 \le x \le 2$ پر ترسیم کریں۔ $x = -1$ اور $x = 1$ کے بیچ ترسیم نیچے مقعر نظر آئے گی اور مبدا پر کوئی کنگرہ نظر نہیں آئے گا۔ مبدا کے بالکل قریب وقفہ پر ترسیم کرتے ہوئے مبدا پر کنگرہ نمودار ہوتا ہے۔ پہلی ترسیم میں کنگرہ کیوں نظر نہیں آیا؟

لامتناہی پر حد واضح کرنا

بعض اوقات متغیرات کی تبدیلی سے ایسا تفاعل حاصل ہوتا ہے جس کی حد تلاش کرنا ہمیں آتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل دیکھیں۔

$$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = \lim_{\theta\to 0^+} \sin\theta \qquad (\theta = \frac{1}{x})$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لامتناہی پر حد یوں کمپیوٹر پر دیکھی جا سکتی ہے۔ سوال ۴.۳۳۹ تا سوال ۴.۳۴۴ میں اس طرح کا طریقہ بیان کریں تاکہ ترسیم پر حد دیکھی جا سکے۔ یہ حدود تلاش کریں۔

سوال ۴.۳۳۹: $\lim_{x\to\mp\infty} x \sin\frac{1}{x}$

سوال ۴.۳۴۰: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

سوال ۴.۳۴۱: $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{3x+4}{2x-5}$

سوال ۴.۳۴۲: $\lim_{x\to\infty} (\frac{1}{x})^{1/x}$

سوال ۴.۳۴۳: $\lim_{x\to\mp\infty} (3 + \frac{2}{x})(\cos\frac{1}{x})$

سوال ۴.۳۴۴: $\lim_{x\to\infty} (\frac{3}{x^2} - \cos\frac{1}{x})(1 + \sin\frac{1}{x})$

۴.۶ بہترین بنانا

کسی چیز کو بہترین بنانے سے مراد اس چیز کی کسی خاصیت کو اقل یا اعظم کرنا ہے۔ تیل کے ڈبے کی کون سی شکل بنانے پر کم تر لاگت آتی ہے؟ 30 cm قطر لکڑ سے کتنا مضبوط شہتیر حاصل کیا جا سکتا ہے؟ حسابی نمونہ استعمال کرتے ہوئے اس طرز کے سوالات کے جواب حاصل کرنے کی خاطر ہم تفاعل کی اقل یا اعظم قیمت تلاش کرتے ہیں۔

کاروبار اور صنعتی مثالیں

مثال ۴.۳۳: دھاتی چادر کا استعمال

ایک چوکور چادر جس کا ضلع 30 cm ہے کے کونوں سے چھوٹے چوکور کاٹ کر، اطراف کو اوپر موڑتے ہوئے کھلا ڈبہ بنایا جاتا ہے۔ کونوں سے کس جسامت کے چوکور کاٹ کر زیادہ سے زیادہ حجم کا ڈبہ حاصل ہو گا؟

حل

شکل ۴.۷۱ میں کٹی ہوئی چادر دکھائی گئی ہے۔ کٹے ہوئے چوکور کا ضلع x سنٹی میٹر ہے۔ یوں ڈبے کا حجم H مربع سنٹی میٹر

$$H(x) = x(30-2x)^2 = 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

ہو گا۔ چونکہ چادر کے ضلع 30 cm ہیں لہٰذا $0 \le x \le 15$ ہو گا جو تفاعل H کا دائرہ کار ہے۔

شکل ۴.۷۲ میں حجم بالمقابل x دکھایا گیا ہے جس کے تحت $x = 0$ اور $x = 15$ پر حجم صفر ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ حجم تلاش کرنے کی خطر x کے لحاظ سے H کے تفرق کو صفر کے برابر رکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = 12x^2 - 240x + 900 = 12(x-15)(x-5) = 0,$$

یوں $x = 5$ اور $x = 15$ ملتا ہے جن میں سے صرف $x = 5$ دائرہ کار کے اندر پایا جاتا ہے۔ اس نقطہ فاصل اور دائرہ کار کے دو آخری نقطوں پر H کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

نقطہ فاصل	$H(5) = 2000,$
آخری نقطے	$H(0) = 0, \quad H(15) = 0$

یوں اعظم حجم $2000\,\mathrm{cm}^3$ ہے جو 5 cm ضلع کے چوکور کاٹنے سے ملے گا۔ □

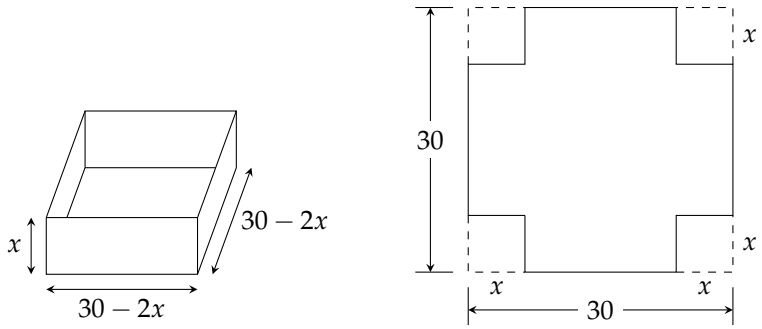
مثال ۴.۳۴: بیلن

آپ کو ایک لٹر تیل کا بیلنی ڈبہ بنانے کو کہا گیا ہے۔ کم سے کم ٹین کی چادر استعمال کرتے ہوئے ڈبہ بنائیں۔

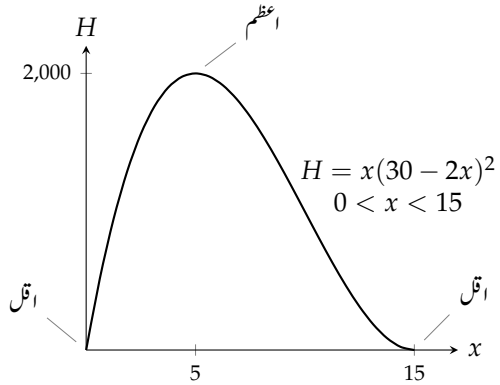
حل

ٹین ڈبے کی لمبائی h اور اس کا رداس r لیتے ہیں (شکل ۴.۷۳)۔ اگر h اور r کی ناپ سنٹی میٹر میں ہو تب

$$H = \pi r^2 * h = 1000 \qquad (\text{ایک لٹر} = 1000\,\mathrm{cm}^3) \tag{۱}$$



شکل ۴.۷۱: چادر سے ڈبہ بنانا (مثال ۴.۳۳)۔



شکل ۴.۷۲: حجم بالمقابل x (مثال ۴.۳۳)۔

درکار ہے۔ کم سے کم ٹین استعمال کرنے سے کیا مراد ہے؟ اس سے ایک مطلب ٹین کی موٹائی اور ڈبے کی تیاری میں ٹین کا ضیاع نظرانداز کرتے ہوئے کم سے کم چادر کا استعمال ہو سکتا ہے۔ (سوال ۴.۳۶۲ میں ٹین کا ضیاع شامل کیا گیا ہے۔) ہم یہی مطلب لیتے ہوئے حل کرتے ہیں۔ بیلن میں استعمال چادر کا سطحی رقبہ

$$S = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{بیلن کے دو سر}} + \underbrace{2\pi rh}_{\text{بیلنی دیوار}} \tag{۲}$$

ہے جس کو کم سے کم بنانا مقصود ہے اور ساتھ ہی ساتھ $\pi r^2 h = 1000$ کی شرط کو مطمئن کرنا ضروری ہے۔

مساوات ۲ میں دو آزاد متغیر ہیں۔ نقطہ فاصل معلوم کرنے کی خاطر ہمیں ایسا تفاعل چاہیے جس میں ایک آزاد متغیر ہو۔ ہم مساوات ۱ اور مساوات ۲ کو ملا کر ایک متغیر خارج کر سکتے ہیں۔

مساوات ۱ کو h کے لیے حل کرتے ہوئے:

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

h کو مساوات ۲ میں ڈال کر h سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں۔

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + 2\pi r\frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

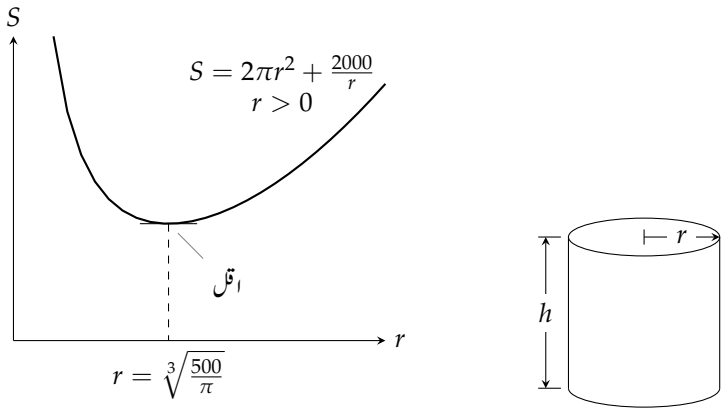
r کی چھوٹی قیمت کے لیے $\frac{2000}{r}$ جزو غالب ہو گا جس کی وجہ سے S کی قیمت بڑی ہو گی۔ ٹین کا ڈبہ نلکی یا پائپ نما ہو گا۔ r کی بڑی قیمت کے لیے $2\pi r^2$ جزو غالب ہو گا جس کی وجہ سے S کی قیمت بڑی ہو گی۔ ٹین کا ڈبہ چپٹی صورت کا ہو گا۔ r کی مذکورہ بالا قیمتوں کے بیچ کہیں سطحی رقبہ اقل ہو گا۔

S اپنے پورے دائرہ کار $(0, r)$ میں قابل تفرق ہے لہٰذا S کی اقل قیمت تلاش کرنے کی خاطر اس کے تفرق کو صفر کے برابر پُر کرتے ہوئے نقطہ فاصل r کے لیے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} \\
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} &= 4\pi r - \frac{2000}{r^2} && \text{تفرق} \\
4\pi r - \frac{2000}{r^2} &= 0 && \text{تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہیں} \\
4\pi r^3 &= 2000 && r \text{ کے لیے حل کریں} \\
r &= \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} && \text{نقطہ فاصل}
\end{aligned}$$

اگر دائرہ کار کے آخری سر پائے جاتے تب ہم نقطہ فاصل اور آخری سروں پر تفاعل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ S کی اقل قیمت کتنی اور کہاں پائی جاتی ہے۔ چونکہ دائرہ کار بند وقفہ نہیں لہٰذا اس کے آخری سر نہیں پائے جاتے لہٰذا ہمیں $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ کے قریب تفاعل کا رویہ دیکھنا ہو گا۔ ہم تفاعل کے دور تبی تفرق

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} &= 4\pi r - \frac{2000}{r} \\
\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}r^2} &= 4\pi + \frac{4000}{r^2}
\end{aligned}$$



شکل ۴.۷۳: ٹین کا ڈبہ (مثال ۴.۳۴)

پر غور کرتے ہیں جو S کے پورے دائرہ کار پر مثبت ہے (شکل ۴.۷۳)۔ یوں پورے دائرہ کار پر S کی ترسیم اوپر مقعر ہو گی اور $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ پر S کی قیمت اقل ہو گی۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$
$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

اس کے تحت ٹین کی کم سے کم چادر استعمال کرتے ہوئے ڈبہ بنانے کی خاطر ڈبے کی لمبائی اور قطر ایک دوسرے کے برابر ہونا ضروری ہے۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$r \approx 5.42\,\text{cm}, \quad h \approx 10.84\,\text{cm}$$

□

اقل اور اعظم قیمت مسائل حل کرنے کا لائحہ عمل

۱. مسئلہ پڑھیں۔ مسئلہ پڑھ کر دیکھیں کہ کون سی معلومات دی گئی ہے؟ کون سی معلومات نہیں دی گئی؟ کیا مطلوب ہے؟

۲. تصویر بنائیں اور اہم حصوں کی نشاندہی کریں۔

۳. متغیرات متعارف کریں۔ تصویر اور مسئلے کا ہر تعلق مساوات کی صورت میں لکھیں۔

۴. نامعلوم متغیر کی نشاندہی کریں اور اس کی مساوات لکھیں۔ کوشش کریں کہ نامعلوم کو صرف ایک متغیر یا دو متغیرات کی صورت میں لکھیں۔ ایسا کرنے میں آپ کو کئی مساوات سے باقی متغیرات خارج کرنے ہوں گے۔

۵. نقطہ فاصل اور آخری نقطوں کی جانچ۔ یک رتبی اور دو رتبی تفرق سے نقطہ فاصل (جہاں $f' = 0$ یا غیر معین ہو گا) تلاش کریں اور تفاعل کا مقعر دریافت کریں۔

ریاضیات سے چند مثالیں

مثال ۴.۳۵: اعداد کا حاصل ضرب

ایسے دو مثبت اعداد تلاش کریں جن کا مجموعہ 20 اور حاصل ضرب زیادہ سے زیادہ ہو۔

حل

اگر پہلا عدد x ہو تب دوسرا عدد $20 - x$ ہو گا اور ان کا حاصل ضرب

$$f(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

ہو گا جو زیادہ سے زیادہ مطلوب ہے۔ f کا دائرہ کار بند وقفہ $0 \leq x \leq 20$ ہے۔

ہم نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر f کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ یک رتبی تفرق

$$f'(x) = 20 - 2x$$

پورے وقفہ $0 \leq x \leq 20$ پر معین ہے اور صرف $x = 10$ پر صفر ہے۔ اس نقطہ فاصل اور آخری سروں پر تفاعل کی قیمتیں

$$f(10) = 10(20 - 10) = 100$$
$$f(0) = 0, \quad f(20) = 0$$

ہیں۔ یوں $f(10) = 100$ اعظم قیمت ہو گی اور درکار اعداد 10 اور $(20 - 10) = 10$ ہیں (شکل ۴.۷۴)۔ □

مثال ۴.۳۶: جیومیٹری

رداس 2 کے نصف دائرے میں ایسا مستطیل بنانا ہے جس کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو۔ مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کیا ہو گا اور اس کے اضلاع کیا ہوں گے؟

حل

نصف دائرے کو کارتیسی محدد کے مبدا پر رکھتے ہوئے اس کے اندر مستطیل کو شکل ۴.۷۵ میں دکھایا گیا ہے۔ مستطیل کا نچلا دایاں کونا x پر ہے۔ ہم مستطیل کے اضلاع اور رقبہ S کو x کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\text{لمبائی} : 2x, \quad \text{چوڑائی} : \sqrt{4 - x^2}, \quad \text{رقبہ} : 2x\sqrt{4 - x^2}$$

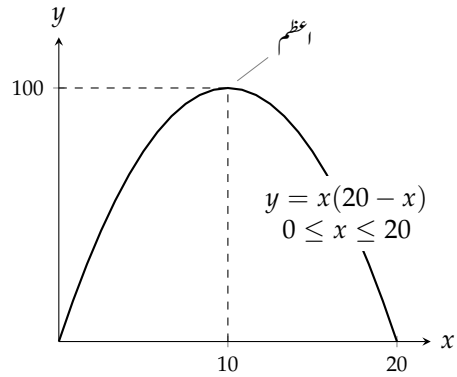
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x (مستطیل کا منتخب کونا) کی قیمت وقفہ $0 \leq x \leq 2$ میں پائی جاتی ہے۔

ہمیں استمراری تفاعل

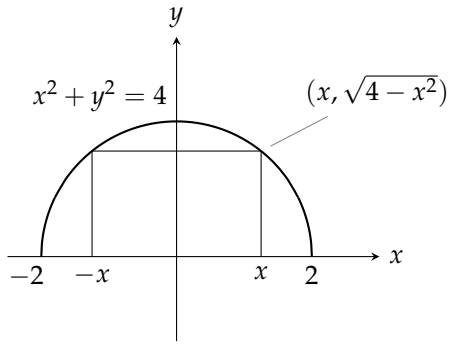
$$S = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

کی مطلق اعظم قیمت وقفہ $[0, 2]$ پر تلاش کرنی ہے۔ ہم نقطہ فاصل اور دائرہ کار کے آخری نقطوں پر S کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔ تفاعل S کا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2}$$



شکل ۴.۷۴: x اور $(20 - x)$ کے حاصل ضرب کی اعظم قیمت 100 ہے (مثال ۴.۳۵)۔



شکل ۴.۷۵: نصف دائرہ اور مستطیل (مثال ۴.۳۶)۔

۵۶۶۵ نقطہ $x = 2$ پر غیر معین اور درج ذیل نقطوں پر صفر ہے۔

$$\frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2} = 0$$

دونوں اطراف کو $\sqrt{4 - x^2}$ سے ضرب دیں

$$-2x^2 + 2(4 - x^2) = 0$$
$$8 - 4x^2 = 0$$
$$x^2 = 2$$
$$x = \mp\sqrt{2}$$

۵۶۶۶ $x = -\sqrt{2}$ اور $x = \sqrt{2}$ میں سے صرف $x = \sqrt{2}$ تفاعل کے دائرہ کار کے اندر پایا جاتا ہے لہٰذا یہ صفر نقطہ فاصل ہے۔ دائرہ کار کے آخری نقطوں اور اس اکلوتے نقطہ فاصل پر تفاعل کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔ ۵۶۶۷

$$S(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}\sqrt{4 - 2} = 4$$ نقطہ فاصل پر قیمت

$$S(0) = 0, \quad S(2) = 0$$ آخری نقطوں پر قیمت

۵۶۶۸ یوں مستطیل کا اعظم رقبہ 4، لمبائی $2x = 2\sqrt{2}$، اور چوڑائی $\sqrt{4 - x^2} = \sqrt{2}$ ہو گی۔ □

۵۶۶۹ پیغ دفغما اور قانون ابن سھل

۵۶۷۰ خلا میں روشنی کی رفتار $3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ ہوا میں روشنی کی رفتار اس سے معمولی کم ہے جبکہ کثیف ذریعہ مثلاً شیشہ میں اس کی رفتار مزید کم ہے ۵۶۷۱ (تقریباً اس کے $\frac{2}{3}$ تیز)۔

بصریات میں **اصول فرما**[16] کہتا ہے کہ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک روشنی تیز ترین راستے سے پہنچتی ہے۔ اس مشاہدے کی مدد سے ہم ایک ذریعہ (مثلاً ہوا) میں موجود نقطہ سے دوسرے ذریعہ (مثلاً پانی) میں موجود نقطے تک روشنی کی راہ کی پیش گوئی کر سکتے ہیں۔

مثال ۴.۳۷: ہوا میں روشنی کی رفتار c_1 اور پانی میں روشنی کی رفتار c_2 لیتے ہوئے ہوا میں نقطہ A سے پانی میں نقطہ B تک روشنی کی راہ کی پیش گوئی کریں۔ ہوا اور پانی کی سرحد سیدھی سطح ہے۔

حل

ہم دونوں ذریعوں کے بیچ سرحد کو محور x پر رکھتے ہوئے A تا B وہ راہ تلاش کرتے ہیں جس پر چلتے ہوئے روشنی کو کم سے کم وقت درکار ہو گا (شکل ۴.۷۶)۔ ایک یکساں ذریعہ میں شعاع کی رفتار تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا اس میں کم سے کم وقت سے مراد کم سے کم فاصلہ ہے اور شعاع دو نقطوں کے بیچ سیدھے خط پر حرکت کرتی ہے۔ یوں A تا B راہ دو سیدھے خطوط پر مشتمل ہو گی۔ پہلا خط A سے N تک ہو گا اور دوسرا خط N سے B تک ہو گا۔ N وہ نقطہ ہے جہاں شعاع ایک ذریعہ سے دوسرے ذریعہ میں داخل ہوتی ہے۔ فاصلہ اور وقت کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\text{وقت} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}}$$

یوں A سے N تک درکار وقت

$$t_1 = \frac{AN}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1}$$

اور N سے B تک درکار وقت

$$t_2 = \frac{NB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c_2}$$

ہو گا۔ A سے B تک پہنچنے کے لیے درکار کل وقت دونوں کا مجموعہ ہو گا۔

$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c_2} \tag{۳}$$

اس مساوات میں t متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے اور تفاعل کا دائرہ کار $[0, d]$ ہے۔ ہم اس بند دائرہ کار پر اقل وقت معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ ہم تفرق

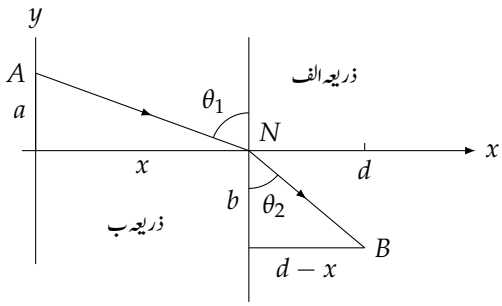
$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{(d-x)}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \tag{۴}$$

لیتے ہیں جس کو شکل ۴.۷۶ کی مدد سے θ_1 اور θ_2 کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin\theta_1}{c_1} - \frac{\sin\theta_2}{c_2} \tag{۵}$$

---

[16] Fermat'sprinciple



شکل ۶.۴: ایک ذریعہ سے دوسرے ذریعہ میں داخل ہونے والی شعاع کی راہ (مثال ۷.۴)

۵۶۸۶ مساوات ۴ سے ظاہر ہے کہ $x=0$ پر $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}<0$ اور $x=d$ پر $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}>0$ ہو گا۔ یوں ان نقطوں کے درمیان کسی نقطہ x_0 پر $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0$
۵۶۸۷ ہو گا۔ چونکہ $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$ مسلسل بڑھتا تفاعل ہے (سوال ۴.۳۹۶) لہٰذا صرف ایک ایسا نقطہ پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1}=\frac{\sin\theta_2}{c_2} \tag{۶}$$

۵۶۸۸ مساوات ۶ کو **ابن سہل کا قانون انعطاف**[۱۷] کہتے ہیں[۱۸]۔ □

۵۶۸۹ **معاشیات میں لاگت اور آمدنی**

۵۶۹۰ نظریہ معاشیات میں احصاء کا اہم کردار ہے۔ اس کی دو مثالیں پیش کرتے ہیں۔ پہلی مثال لاگت، آمدنی، اور منافع کے تعلق کے بارے میں ہے۔

۵۶۹۱ فرض کریں کہ

۵۶۹۲ x ارکان فروخت کرنے سے آمدنی $r(x)$ ہے۔

۵۶۹۳ x ارکان کی لاگت پیداوار $c(x)$ ہے۔

۵۶۹۴ x ارکان فروخت کرنے سے منافع $p(x)=r(x)-c(x)$ ہے۔

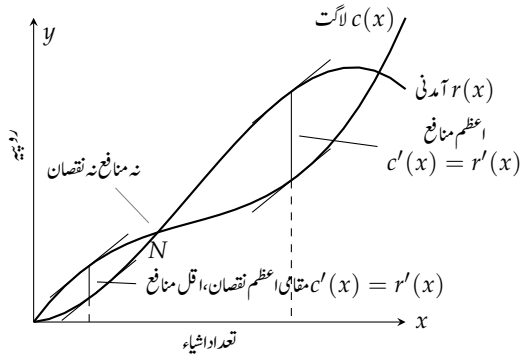
۵۶۹۵ حاشیہ آمدنی اور حاشیہ لاگت پیداوار درج ذیل ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x}=\text{حاشیہ آمدنی}$$
$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}=\text{حاشیہ لاگت}$$

---

[۱۷] IbnSahl'slawofreflection

[۱۸] مغربی دنیا میں اس کو Snell'slaw کہتے ہیں۔



شکل ۴.۷۷: عموماً تفاعل لاگت کا مقعر پہلے نیچے اور بعد میں اوپر ہوتا ہے۔ تفاعل لاگت تفاعل آمدنی کو نہ منافع نہ نقصان کے نقطہ N پر قطع کرتا ہے۔ N کے بائیں جانب خسارہ اور دائیں جانب منافع ہو گا۔

ان تفرق کا آمدنی کے ساتھ تعلق درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے۔

مسئلہ ۴.۷: زیادہ سے زیادہ منافع (اگر پایا جاتا ہو) اس صورت ہو گا جب حاشیہ لاگت پیداوار اور حاشیہ آمدنی ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

ثبوت: ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام $x > 0$ پر $r(x)$ اور $c(x)$ قابل تفرق ہیں لہٰذا $p(x) = r(x) - c(x)$ کی اعظم قیمت (اگر پائی جاتی ہو) $p'(x) = 0$ پر پائی جائے گی۔ چونکہ $p'(x) = r'(x) - c'(x)$ ہے لہٰذا $p'(x) = 0$ سے مراد

$$r'(x) - c'(x) = 0, \quad \overset{\text{یعنی}}{\Longrightarrow} \quad r'(x) = c'(x)$$

ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے (شکل ۴.۷۷)۔

□

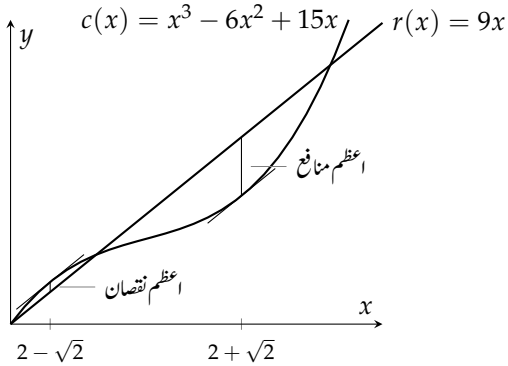
ہمیں مسئلہ ۴.۷ سے کیا ہدایت ملتی ہے؟ ایسی سطح پیداوار جہاں $p'(x) = 0$ ہو، پر اعظم منافع یا اعظم نقصان ہو گا۔ لیکن معاشی پیشگوئی کرتے ہوئے پیداوار کی ان سطحوں پر نظر رکھیں جہاں حاشیہ لاگت اور حاشیہ آمدنی ایک دوسرے کے برابر ہوں۔ اگر اعظم منافع پایا جاتا ہو، وہ ان سطح پیداوار میں سے ایک پر ہو گا۔

مثال ۴.۳۸: لاگت اور آمدنی تفاعل درج ذیل ہیں

$$r(x) = 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

جہاں تعداد پیداوار x ہے (x کی اکائی 1000 اشیاء ہے)۔ کیا ایسی سطح پیداوار پائی جاتی ہے جس پر منافع زیادہ سے زیادہ ہو؟ اگر ایسا ہو تب زیادہ سے زیادہ منافع کس سطح پیداوار پر ہو گا؟

حل



شکل ۷.۴: لاگت بالمقابل منافع (مثال ۳۸.۴)

۵۷۰۹

$$r(x) = 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

r' اور c' تلاش کریں

$$r'(x) = 9, \quad c'(x) = 3x^2 - 12x + 15$$

ایک دوسرے کے برابر رکھیں

$$3x^2 - 12x + 15 = 9$$

ترتیب دیں

$$3x^2 - 12x + 6 = 0$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

دو درجی مساوات حل کریں

$$\begin{aligned} x &= \frac{4 \mp \sqrt{16 - 4 \cdot 2}}{2} \\ &= \frac{4 \mp \sqrt{2}}{2} \\ &= 2 \mp \sqrt{2} \end{aligned}$$

۵۷۱۰ اعظم منافع کا امکان $2 + \sqrt{2}$ یا $2 - \sqrt{2}$ سطح پیداوار پر حاصل ہو گا (شکل ۷.۴)۔ آپ دونوں نقطوں پر آمدنی کا حساب کر کے دیکھیں گے کہ

۵۷۱۱ $x = 2 + \sqrt{2}$ پر اعظم منافع حاصل ہو گا جبکہ $x = 2 - \sqrt{2}$ پر اعظم نقصان ہو گا۔ □

۵۷۱۲ بہترین سطح پیداوار کو اقل اوسط لاگت والی سطح پیداوار تصور کیا جا سکتا ہے۔ اگلے مسئلہ میں یہی سطح پیداوار حاصل کی گئی ہے۔

۵۷۱۳ مسئلہ ۸.۴: اوسط اقل لاگت پیداوار (اگر پائی جاتی ہو) اس سطح پیداوار پر ہو گی جس پر اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

۵۷۱۴ ثبوت: ہم فرض کرتے ہیں کہ

۵۷۱۵ $x > 0$ اشیاء کی لاگت پیداوار $c(x)$

x اشیاء کی اوسط لاگت پیداوار $\frac{c(x)}{x}$

قابل تفرق ہیں۔

اگر لاگت کو کم سے کم کرنا ممکن ہو، یہ اس صورت ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{c(x)}{x}\right) &= 0 \\
\frac{xc'(x)-c(x)}{x^2} &= 0 && \text{قاعدہ حاصل تقسیم} \\
xc'(x)-c(x) &= 0 && x^2 \text{ سے ضرب دیں} \\
\underbrace{c'(x)}_{\text{حاشیہ لاگت}} &= \underbrace{\frac{c(x)}{x}}_{\text{اوسط لاگت}}
\end{aligned}$$

□

ہمیں دھیان سے مسئلہ ۴.۸ استعمال کرنا ہو گا جو یہ نہیں کہتا ہے کہ اقل اوسط لاگت کی سطح پیداوار موجود ہے بلکہ کہتا ہے کہ اگر ایسی سطح موجود ہو تب اس کو کہاں تلاش کرنا چاہیے۔ جہاں اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں وہاں دیکھیں آیا اقل اوسط لاگت پائی جاتی ہے۔

مثال ۴.۳۹: تفاعل لاگت $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ ہے (x کی اکائی 1000 اشیاء ہے)۔ کیا ایسی سطح پیداوار ممکن ہے جس پر اوسط لاگت کم سے کم ہو؟ اگر ایسا ہو تب سطح پیداوار تلاش کریں۔

حل

ہم جہاں اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں، وہاں دیکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
c(x) &= x^3 - 6x^2 + 15x && \text{لاگت} \\
c'(x) &= 3x^2 - 12x + 15 && \text{حاشیہ لاگت} \\
\frac{c(x)}{x} &= x^2 - 6x + 15 && \text{اوسط لاگت} \\
3x^2 - 12x + 15 &= x^2 - 6x + 15 \\
2x^2 - 6x &= 0 \\
2x(x-3) &= 0 \\
x = 0, &\quad x = 3
\end{aligned}$$

چونکہ $x > 0$ ہے لہٰذا اقل اوسط لاگت صرف $x = 3$ ہزار کی پیداوار پر ممکن ہے۔

۵۷۲۷ ہم تفرق کو دیکھتے ہیں۔

$$\frac{c(x)}{x} = x^2 - 6x + 15 \qquad \text{اوسط لاگت}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{c(x)}{x}\right) = 2x - 6$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{c(x)}{x}\right) = 2 > 0$$

۵۷۲۸ دور تبی تفرق مثبت ہے لہٰذا $x = 3$ پر مطلق اقل ہو گا۔ □

۵۷۲۹ غیر مسلسل مظہر کا نمونہ بذریعہ تفرقی تفاعل

۵۷۳۰ اگر آپ سوچ رہے ہوں کہ جب x عدد صحیح ہے (چونکہ مکمل اشیاء پیدا کیے جاتے ہیں) تب ہم لاگت اور آمدنی کو ظاہر کرنے کے لیے قابل تفرق تفاعل
۵۷۳۱ $c(x)$ اور $r(x)$ کس طرح استعمال کر سکتے ہیں۔ اس پر غور کرتے ہیں۔

۵۷۳۲ جب x کی قیمت بڑی ہو تب ہم لاگت اور آمدنی کو ہموار منحنیات $c(x)$ اور $r(x)$ سے ظاہر کر سکتے ہیں جو نا صرف x کی عدد صحیح قیمتوں بلکہ ان کے بیچ
۵۷۳۳ تمام قیمتوں پر قابل تفرق ہیں۔ ان قابل تفرق تفاعل، جو x کی عدد صحیح قیمتوں کے لیے لاگت اور آمدنی ظاہر کرتے ہیں، کی قیمتوں پر ہم احصاء کی مدد سے غور
۵۷۳۴ کر سکتے ہیں۔ یوں حاصل نتائج کو ہم حقیقی دنیا میں منتقل کرتے ہوئے امید کرتے ہیں کہ ہم اس سے فائدہ اٹھا سکیں۔ جب ہم ایسا کرتے ہوں، جیسا نظریہ معاشیات
۵۷۳۵ میں ہم نے کیا، ہم کہتے ہیں کہ یہ تفاعل حقیقت کا اچھا نمونہ ہے۔

۵۷۳۶ ایسی صورتوں میں جب احصاء کہتا ہو کہ بہترین پیداوار، x کی غیر عدد صحیح قیمت پر ہو گی، جیسا مثال ۴.۳۸ میں $x = 2 + \sqrt{2}$ ہزار کا جواب حاصل
۵۷۳۷ ہوا، تب ہم اس کا قریب ترین موزوں عدد صحیح لیتے ہیں۔ اگر ہم 20 اشیاء کو ڈبوں میں بند کرتے ہوں تب $x = 2 + \sqrt{2}$ ہزار کی صورت میں ہم
۵۷۳۸ 3410 یا 3420 لے سکتے ہیں۔

۵۷۳۹ سوالات

۵۷۴۰ ہر سوال کو حل کرنے سے پہلے بہتر ہو گا کہ موزوں دائرہ کار لیتے ہوئے تفاعل کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔

۵۷۴۱ جیومیٹری کے مسائل

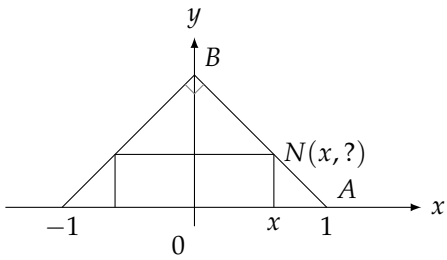
۵۷۴۲ سوال ۴.۳۴۵: رداس r دائرہ کے محیط پر دو نقطوں سے دائرے کے مرکز تک سیدھی لکیریں کھینچی جاتی ہیں۔ ان نقطوں کے بیچ قوسچہ کی لمبائی s
۵۷۴۳ ہے۔ اس خطہ کے محیط کی لمبائی $(2r + s)$ ہے جو $100\,\mathrm{m}$ کے برابر ہے۔ r اور s کی کن قیمتوں سے خطے کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو گا؟

۵۷۴۴ سوال ۴.۳۴۶: ایک قائمہ مثلث کا وتر $5\,\mathrm{cm}$ ہے۔ اس کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ممکن ہے؟

۵۷۴۵ سوال ۴.۳۴۷: ایک مستطیل جس کا رقبہ $16\,\mathrm{cm}^2$ ہے، کا کم سے کم محیط کتنا ہو گا؟

۵۷۴۶ سوال ۴.۳۴۸: دکھائیں کہ ایک جتنے محیط کے تمام مستطیل میں اس کا رقبہ سب سے زیادہ ہو گا جو چوکور ہو۔

۵۷۴۷ سوال ۴.۳۴۹: ایک قائمہ مساوی الساقین مثلث کا وتر 2 اکائیاں لمبا ہے۔ اس میں محصور مستطیل کو شکل ۴.۷۹ میں دکھایا گیا ہے۔



شکل ۴.۷۹: مثلث میں محصور مستطیل (سوال ۴.۳۴۹)

۵۷۴۸ ا. N کے محدد کو x کی صورت میں لکھیں۔ (خط AB کی مساوات لکھ کر آپ ایسا کر سکتے ہیں۔)

۵۷۴۹ ب. مستطیل کا رقبہ x کی صورت میں لکھیں۔

۵۷۵۰ ج. مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ہو سکتا ہے؟

۵۷۵۱

۵۷۵۲ سوال ۴.۳۵۰: ایک مستطیل کا تلا محور x پر ہے جبکہ اس کے بالائی دور اس قطع مکافی $y = 12 - x^2$ پر ہیں۔ اس مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ
۵۷۵۳ کتنا ممکن ہے؟

۵۷۵۴ سوال ۴.۳۵۱: آپ $15\,\text{cm} \times 8\,\text{cm}$ چادر کے کونوں سے چوکور چادر کاٹ کر کھلا مستطیل ڈبہ بنانا چاہتے ہیں۔ اس ڈبے کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو
۵۷۵۵ سکتا ہے؟

۵۷۵۶ سوال ۴.۳۵۲: آپ $(a, 0)$ سے $(0, b)$ تک لکیر کھینچ کر ربع اول میں بند خطہ بناتے ہیں۔ دکھائیں کہ اس خطے کا رقبہ اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو
۵۷۵۷ گا جب $a = b$ ہو۔

۵۷۵۸ سوال ۴.۳۵۳: ایک دریا کے کنارے مستطیل رقبے کو تین اطراف سے $800\,\text{m}$ کل لمبائی کی دیوار سے گھیرا جاتا ہے۔ زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ہو سکتا
۵۷۵۹ ہے؟

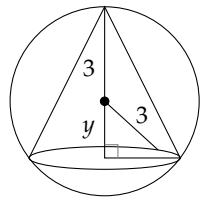
۵۷۶۰ سوال ۴.۳۵۴: $216\,\text{m}^2$ مستطیل رقبے کو دھاتی تار سے گھیرا جاتا ہے۔ کسی ایک ضلع کے متوازی تار سے اس خطے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کیا جاتا
۵۷۶۱ ہے۔ کم سے کم تار استعمال کرنا مقصود ہے۔ مستطیل کی جسامت کیا ہونی چاہیے؟ تار کی کم سے کم لمبائی کیا ہو گی؟

۵۷۶۲ سوال ۴.۳۵۵: کم ترین وزنی فولادی ٹینکی

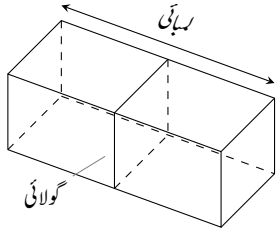
۵۷۶۳ بغیر ڈھکن ٹینکی جس کا تلا چوکور اور حجم $256\,\text{m}^3$ ہو درکار ہے۔ یہ ٹینکی $1\,\text{cm}$ موٹی فولادی چادر سے بنائی جائے گی۔ بطور انجنیئر آپ کا کام ہے کہ ہلکی
۵۷۶۴ ترین ٹینکی بنانے کے لیے ٹینکی کے اضلاع تلاش کریں۔ اضلاع کیا ہوں گے؟

۵۷۶۵ سوال ۴.۳۵۶: بارش کا پانی

۵۷۶۶ بارانی علاقے میں بارش کا پانی ذخیرہ کرنے کے لیے زمین کی کھدائی کر کے بغیر ڈھکن $1125\,\text{m}^3$ حجم کی ٹینکی بنائی جاتی ہے جس کا تلا چوکور ہے۔ ٹینکی کی
۵۷۶۷ گہرائی y میٹر جبکہ تلا کے ضلع کی لمبائی x میٹر ہے۔ ٹینکی کا تلا اور اطراف پر لاگت کے ساتھ ساتھ کھدائی کی لاگت بھی ہے جو حاصل ضرب xy کے
۵۷۶۸ راست متناسب ہے۔ اگر کل لاگت $c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy$ ہو تب لاگت کو کم سے کم رکھنے کی خاطر x اور y کیا ہوں گے؟



شکل ۴.۸۰: کرہ میں مخروط (سوال ۴.۳۵۸)



شکل ۴.۸۱: ڈبہ برائے سوال ۴.۳۶۳

سوال ۴.۳۵۷: ایک مستطیل اشتہار میں $50\ \text{cm}^2$ رقبے پر لکھائی ہو گی۔ بالائی اور نچلی جانب $4\ \text{cm}$ اور اطراف پر $2\ \text{cm}$ خالی جگہ ہو گی۔ کم سے کم کاغذ استعمال کرنے کے لیے مستطیل اشتہار کے اضلاع کیا ہوں گے؟

سوال ۴.۳۵۸: رداس $r = 3$ کے کرہ میں محصور دائری مخروط کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتا ہے (شکل ۴.۳۵۸)؟

سوال ۴.۳۵۹: ایک مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں a اور b ہیں جن کے بیچ زاویہ θ ہے۔ θ کی کون سے قیمت مثلث کا زیادہ سے زیادہ رقبہ دے گی۔ (اشارہ: $S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$)

سوال ۴.۳۶۰: ایک قائمہ مثلث کا وتر $\sqrt{5}$ ہے جبکہ اس کے باقی اضلاع x اور y ہیں۔ تفاعل $s = 2x + y$ کی اعظم قیمت تلاش کریں۔

سوال ۴.۳۶۱: $1000\ \text{cm}$ حجم کا بغیر ڈھکن قائمہ دائری بیلن بنایا جاتا ہے۔ بیلن کی کم سے کم جسامت تلاش کریں۔

سوال ۴.۳۶۲: $1000\ \text{cm}$ حجم کا قائمہ دائری بیلنی ڈبہ بنایا جاتا ہے۔ چادر سے بیلن کے اطراف کاٹتے ہوئے کوئی مال ضائع نہیں ہوتا البتہ بالائی اور نچلے دائری حصے کو $2r \times 2r$ چوکور سے کاٹتے ہوئے مال ضائع ہوتا ہے۔ یوں ایک ڈبہ بنانے کے لیے $S = 8r^2 + 2\pi rh$ رقبے کی چادر درکار ہو گی نا کہ $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ (مثال ۴.۳۴)۔ مثال ۴.۳۴ میں کم سے کم لاگت کے لیے h اور r کا تعلق $h = 2r$ تھا۔ اب ان کا تعلق کیا ہو گا؟

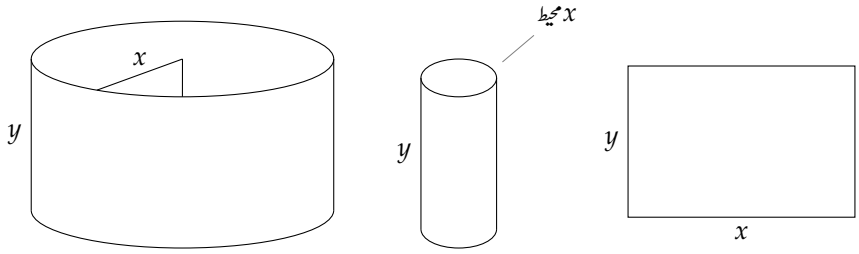
سوال ۴.۳۶۳: (ا) ایک مستطیل ڈبے کی لمبائی اور گولائی کا مجموعہ $108\ \text{cm}$ ہے (شکل ۴.۸۱)۔ اس ڈبے کے سر چوکور ہیں۔ ڈبے کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتا ہے؟ (ب) ڈبے کی لمبائی بالمقابل حجم ترسیم کریں اور جزو-الف کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۴.۳۶۴: گزشتہ سوال میں چوکور سروں کے بجائے چوکور اطراف تصور کریں۔ یوں ڈبے کا حجم $h \times h \times w$ اور گولائی $2h + 2w$ ہو گی۔ اب ڈبے کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو گا؟

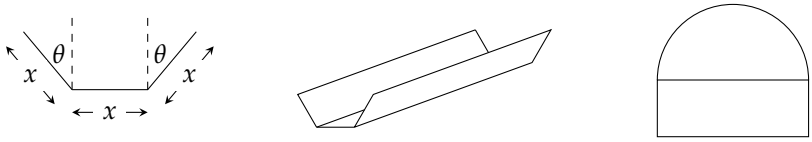
سوال ۴.۳۶۵: (ا) ایک مستطیل چادر جس کا محیط $36\ \text{cm}$ اور اضلاع x اور y ہیں کو گول کرتے ہوئے بیلن بنایا جاتا ہے جس کے دونوں سر کھلے ہیں۔ بیلن کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتا ہے؟ (ب) مستطیل چادر کے ایک کنارے کو محور تصور کرتے ہوئے، چادر کو اس محور کے گرد گھمایا جاتا ہے جو خیالی بیلنی صورت بناتا ہے۔ بیلن کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو گا؟ (شکل ۴.۸۲)

سوال ۴.۳۶۶: ایک قائمہ مثلث کا وتر $\sqrt{3}$ ہے۔ اس کو ایک ضلع کے گرد گھما کر فرضی مخروط بنایا جاتا ہے۔ مخروط کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ممکن ہے اور اس کے رداس اور قد کیا ہوں گے؟

سوال ۴.۳۶۷: دائرہ بالمقابل چوکور



شکل ۴.۸۲: چادر اور بیلن (سوال ۴.۳۶۵)



شکل ۴.۸۴: پانی کی نالی (سوال ۴.۳۷۱)

شکل ۴.۸۳: کھڑکی (سوال ۴.۳۶۹)

ا. 4 m لمبی تار کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ایک چوکور اور ایک دائرہ بنایا جاتا ہے۔ دائرے اور چوکور کا مجموعی رقبہ زیادہ سے زیادہ ہونے کی صورت میں ان ٹکڑوں کی لمبائیاں کیا ہوں گی؟

ب. چوکور اور دائرے کے مجموعی رقبے کو دائرے کے رداس کا تفاعل لکھ کر ترسیم کریں۔ جزوالف میں حاصل جواب کے ساتھ ہم آہنگی دیکھیں۔

ج. کل رقبے کو چوکور کے ضلع کی لمبائی کا تفاعل لکھ کر ترسیم کریں اور جزوالف میں حاصل جواب کے ساتھ ہم آہنگی دیکھیں۔

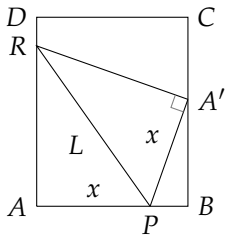
سوال ۴.۳۶۸: مکعب اور کرہ کے سطحی رقبوں کے مجموعے کو مستقل رکھیں۔ مکعب کے ضلع اور کرہ کے رداس کی کون سی نسبت (ا) کم سے کم، (ب) زیادہ سے زیادہ مجموعی حجم دے گی؟

سوال ۴.۳۶۹: ایک مستطیل شیشہ کے اوپر نصف دائری شیشہ مل کر کھڑکی بناتے ہیں (شکل ۴.۸۳)۔ مستطیل شیشہ شفاف جبکہ نصف دائری شیشہ ہلکا سیاہ ہے اور فی مربع رقبہ نصف روشنی کو گزرنے دیتا ہے۔ کھڑکی کا محیط مستقل ہے۔ زیادہ سے زیادہ روشنی کے لیے کھڑکی کی جسامت تلاش کریں۔

سوال ۴.۳۷۰: ایک بیلنی گودام تعمیر کرنی ہے جس کی چھت نصف کروی ہو گی۔ فی مربع سطحی رقبہ نصف کرہ پر لاگت بیلنی دیوار کی فی مربع سطحی رقبہ کی لاگت سے دگنی ہے۔ مستقل حجم کی صورت میں کم سے کم کل لاگت کے لیے گودام کی جسامت تلاش کریں۔ تعمیر میں نچلی سطح (زمین) پر لاگت اور ضیاع کو نظر انداز کریں۔

سوال ۴.۳۷۱: پانی کی نالی تعمیر کرنی ہے جس کی جسامت شکل ۴.۸۴ میں دکھائی گئی ہے۔ صرف زاویہ θ متغیر ہے۔ زیادہ سے زیادہ حجم کے لیے θ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۴.۳۷۲: مستطیل $8.5\text{ cm} \times 11\text{ cm}$ کاغذ مستوی پر رکھا جاتا ہے (شکل ۴.۸۵)۔ کونا A کو مخالف لمبے ضلع پر رکھ کر کاغذ کو چپٹا کیا جاتا ہے۔ لمبائی RP کو کم سے کم کرنا مقصود ہے۔



شکل ۴.۸۵: کاغذ برائے سوال ۴.۳۷۲

۵۸۰۵ ا. کاغذ استعمال کرتے ہوئے اس لمبائی کو کم سے کم کریں۔

۵۸۰۶ ب. دکھائیں $L^2 = \frac{2x^3}{2x-8.5}$ ہوگا۔

۵۸۰۷ ج. x کی کون سی قیمت L^2 کو اقل بناتی ہے؟

۵۸۰۸ د. x کی اقل قیمت کیا ہے؟

۵۸۰۹ ھ. x بالمقابل L ترسیم کریں اور جزو-ب کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

۵۸۱۰ **طبعی استعمال**

۵۸۱۱ سوال ۴.۳۷۳: انتصابی حرکت کرتے ہوئے جسم کی بلندی $s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0,\ g > 0$ ہے جہاں t سیکنڈوں اور s میٹروں
۵۸۱۲ میں ہے۔ جسم کی زیادہ سے زیادہ بلندی کیا ہوگی؟

۵۸۱۳ سوال ۴.۳۷۴: عمارت سے 9 m فاصلے پر 2.5 m اونچی دیوار ہے۔ دیوار کی دوسری طرف سے عمارت تک سیڑھی لگائی جاتی ہے۔ سیڑھی کی کم
۵۸۱۴ سے کم لمبائی کیا ہوگی؟

۵۸۱۵ سوال ۴.۳۷۵: شہتیر کی مضبوطی لکڑی کے شہتیر کی مضبوطی M اس کی چوڑائی w ضرب مربع گہرائی d کے راست تناسب ہوتی ہے یعنی
۵۸۱۶ $M = kwd^2$، جہاں k تناسبی مستقل ہے۔

۵۸۱۷ ا. 30 cm قطر کے لکڑے سے کس جسامت کا مضبوط سے مضبوط شہتیر حاصل کیا جا سکتا ہے؟

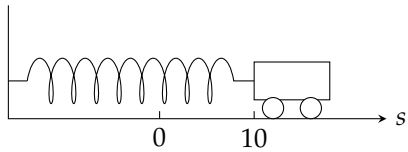
۵۸۱۸ ب. تناسبی مستقل کو $k = 1$ لیتے ہوئے M بالمقابل w ترسیم کریں۔ جزو-الف کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

۵۸۱۹ ج. تناسبی مستقل کو $k = 1$ لیتے ہوئے M بالمقابل d ترسیم کریں۔ جزو-الف کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ k تبدیل کرنے سے جواب پر کیا
۵۸۲۰ اثر ہوگا؟

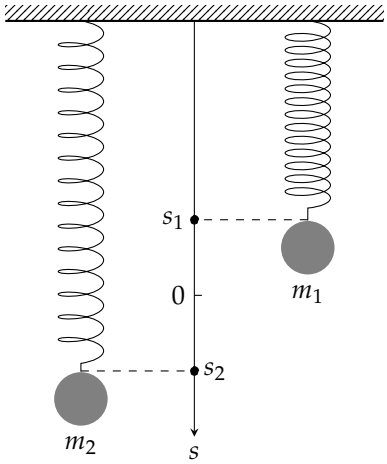
۵۸۲۱ سوال ۴.۳۷۶: شہتیر کی سختی شہتیر کی سختی S شہتیر کی چوڑائی w ضرب مکعب گہرائی d کے راست تناسب ہوتی ہے یعنی $S = kwd^3$،
۵۸۲۲ جہاں k تناسبی مستقل ہے۔

۵۸۲۳ ا. 30 cm قطر کے لکڑے سے سخت سے سخت شہتیر حاصل کریں۔ شہتیر کی جسامت کیا ہوگی؟

۵۸۲۴ ب. $k = 1$ لیتے ہوئے S بالمقابل w ترسیم کریں۔ جزو-الف میں حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔



شکل ۴.۸۶: افقی سطح پر ریڑھی کو دیوار کے ساتھ باندھا گیا ہے (سوال ۴.۳۷۸)



شکل ۴.۸۷: چھت سے آویزاں دو اسپرنگ (سوال ۴.۳۷۹)

ج. $k = 1$ لیتے ہوئے S بالمقابل d ترسیم کریں۔ جزو-الف میں حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ k تبدیل کرنے سے جواب پر کیا اثر ہو گا؟

سوال ۴.۳۷۷: لمحہ t پر بلب میں برقی رو $i = 2\cos t + 2\sin t$ ہے۔ برقی رو کی زیادہ سے زیادہ لمحاتی قیمت کیا ہو گی؟

سوال ۴.۳۷۸: بے رگڑ ریڑھی افقی مستوی پر رکھ کر اسپرنگ کے ذریعہ قریبی دیوار کے ساتھ باندھی جاتی ہے (شکل ۴.۸۶)۔ لمحہ $t = 0$ پر ریڑھی کو ساکن مقام سے $10\,\text{cm}$ دور کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے تاکہ یہ 4 سیکنڈوں کے لیے مستوی پر آگے پیچھے حرکت کر سکے۔ لمحہ t پر اس کا مقام $s = 10\cos \pi t$ ہے۔

ا. ریڑھی کی زیادہ سے زیادہ رفتار کب اور کتنی ہو گی؟ تب ریڑھی کا مقام اور اس کا اسراع کیا ہوں گے؟

ب. جس لمحہ ریڑھی کا اسراع زیادہ سے زیادہ ہو اس لمحے ریڑھی کا مقام کیا ہو گا؟ اس کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۴.۳۷۹: علیحدہ علیحدہ اسپرنگ کے ذریعہ چھت سے دو کمیتوں کو قریب قریب لٹکایا جاتا ہے (شکل ۴.۸۷)۔ ان کے مقام بالترتیب $s_1 = 2\sin t$ اور $s_2 = \sin 2t$ ہیں۔

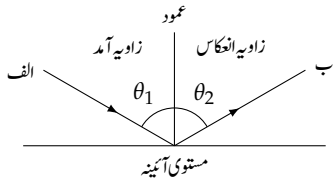
ا. کس لمحے کمیت ایک دوسرے کے قریب سے گزرتے ہیں؟ (اشارہ: $\sin 2t = 2\sin t\cos t$)

ب. وقفہ $0 \le t \le 2\pi$ کے دوران ان کے درمیان انتصابی فاصلہ زیادہ سے زیادہ کب اور کتنا ہو گا؟ (اشارہ: $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$)

سوال ۴.۳۸۰: s محور پر دو ذرات کے مقام $s_1 = \sin t$ اور $s_2 = \sin(t + \frac{\pi}{3})$ ہیں۔

ا. وقفہ $0 \le t \le 2\pi$ میں دونوں ذرات ایک دوسرے سے کب ملتے ہیں؟

ب. ذرات ایک دوسرے سے کب دور ترین ہوتے ہیں؟



شکل ۴.۸۸: زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس ایک دوسرے کے برابر ہوں گے (سوال ۴.۳۸۳)

ج. وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ میں ان کے بیچ فاصلے کی تبدیلی کب تیز ترین ہو گی؟

سوال ۴.۳۸۱: لمحہ t پر محور x پر ایک ذرے کا مقام $x = (t-1)(t-4)^4$ ہے۔

ا. ذرہ ساکن کب ہو گا؟

ب. کس وقفے کے دوران ذرہ بائیں رخ حرکت کرتا ہے؟

ج. بائیں رخ حرکت کرتے ہوئے ذرے کی تیز سے تیز رفتار کیا ہو گی؟

د. وقفہ $0 \leq t \leq 6$ کے لیے x بالمقابل t ترسیم کریں۔ اسی وقفہ کے لیے $\frac{dx}{dt}$ بالمقابل t کو بھی ترسیم کریں۔ ترسیمات کا آپس میں اور حاصل جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۴.۳۸۲: دوپہر کے وقت $t = 0$ بحری جہاز ب کے عین شمال میں بحری جہاز الف موجود ہے۔ بحری جہاز الف $24\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے جنوب کی طرف رواں جبکہ بحری جہاز ب مشرق کی طرف $16\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے رواں ہے۔

ا. ان کے بیچ فاصلہ s کو t کی صورت میں لکھیں جہاں s کلومیٹر اور t گھنٹوں میں ہے۔

ب. دوپہر کے وقت ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟ ایک گھنٹہ بعد یہ شرح کیا ہو گی؟

ج. اس دن حد نظر $10\,\mathrm{km}$ تھی۔ کیا ان بحری جہازوں نے ایک دوسرے کو دیکھا ہو گا؟

د. $0 \leq t \leq 3$ کے لیے s بالمقابل t اور $\frac{ds}{dt}$ بالمقابل t ترسیم کریں۔ ترسیمات کا حاصل جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

ھ. ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ربع اول میں $\frac{ds}{dt}$ کی ترسیم کا افقی متقارب پایا جاتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ $t \to \infty$ کرنے سے $\frac{ds}{dt}$ کی تحدیدی قیمت پائی جائے گی۔ یہ حد تلاش کریں۔ اس حد کی انفرادی رفتاروں کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

سوال ۴.۳۸۳: بصریات میں **اصول فغما** کہتا ہے کہ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک روشنی اس راستے سے پہنچتی ہے جس پر کم سے کم وقت درکار ہو۔ شکل ۴.۸۸ میں نقطہ الف سے شعاع خارج ہو کر آئینہ سے انعکاس کرتے ہوئے نقطہ ب تک پہنچتی ہے۔ دکھائیں کہ اگر شعاع اصول فغما مطمئن کرتی ہو تب زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس ایک دوسرے کے برابر ہوں گے۔ (یہ نتیجہ بغیر احصاء کے خالصتاً جیومیٹری کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔)

سوال ۴.۳۸۴: عمل انگیز: **عمل انگیز**[۱۹] اس مادّہ کو کہتے ہیں جس کی موجودگی کیمیائی تعامل کی شرح پر اثر انداز ہوتی ہے اور جو خود جوں کا توں رہتا ہے۔ **خود عمل انگیز**[۲۰] کیمیائی تعامل اس کو کہتے ہیں جس میں حاصل کیمیا خود اس تعامل کے عمل انگیز ہوں۔ خود عمل انگیز کیمیائی تعامل کی ایک مثال $13\,^\circ\mathrm{C}$ سے

---

[۱۹] catalyst
[۲۰] autocatalyst

کم درجہ پر پڑے ہوئے دھاتی ٹین کا کچھ عرصہ میں سفید برادہ میں تبدیل ہونا ہے۔ یہ برادہ خود اس کیمیائی تعامل کا عمل انگیز ہے۔ اس قسم کے تعامل کی شرح شروع میں کم ہوتی ہے جو عمل انگیز پیدا ہونے کے بعد رفتار پکڑتی ہے اور آخر میں ابتدائی کیمیا کم ہونے کی وجہ سے دوبارہ آہستہ ہو جاتی ہے۔

اس قسم کے تعامل کی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ابتدائی مواد اور پیدا مواد کے حاصل ضرب کی راست متناسب ہو گی، یعنی

$$v = kx(a - x) = kax - kx^2$$

جہاں a مواد کی ابتدائی مقدار، x پیدا مواد کی مقدار اور k تناسبی مستقل ہے۔ x کی وہ قیمت تلاش کریں جو زیادہ سے زیادہ v دیگی؟ v کی اعظم قیمت کیا ہو گی؟

ریاضیاتی استعمال

سوال ۴.۳۸۵: کیا تفاعل $f(x) = x^2 - x + 1$ کبھی منفی بھی ہوتا ہے؟ تفصیل پیش کریں۔

سوال ۴.۳۸۶: آپ سے پوچھا گیا ہے کہ آیا تفاعل $f(x) = 3 + 4\cos x + \cos 2x$ کبھی منفی بھی ہوتا ہے۔

ا. سمجھائیں کہ آپ کو کیوں وقفہ $[0, 2\pi]$ میں x کی قیمتوں کے لیے تفاعل پر غور کرنا ہو گا۔

ب. کیا f کبھی منفی ہو گا؟ سمجھائیں۔

سوال ۴.۳۸۷: منحنی $y = \sqrt{x}$ پر نقطہ $(c, 0)$ کو قریب ترین نقطہ تلاش کریں۔ (ا) $c \geq \frac{1}{2}$ ہے، (ب) $c < \frac{1}{2}$ ہے۔

سوال ۴.۳۸۸: a کی کس قیمت کے لیے $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ (ا) کی $x = 2$ پر مقامی اقل قیمت ہو گی، (ب) $x = 1$ پر نقطہ تصریف ہو گا۔

سوال ۴.۳۸۹: a اور b کی کون سی قیمتوں کے لیے $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ (ا) کی $x = -1$ پر مقامی اعظم اور $x = 3$ پر مقامی اقل قیمت ہو گی، (ب) کا $x = 4$ پر مقامی اقل اور $x = 1$ پر نقطہ تصریف ہو گا۔

سوال ۴.۳۹۰: دکھائیں کہ a کی کسی بھی قیمت کے لیے $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ کی مقامی اقل قیمت نہیں پائی جاتی۔

سوال ۴.۳۹۱:

ا. وقفہ $0 < x < \pi$ پر تفاعل $y = \cos x - \sqrt{2}\csc x$ کی مطلق اعظم قیمت پائی جاتی ہے۔ اس کو تلاش کریں۔

ب. تفاعل کو ترسیم کر کے حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

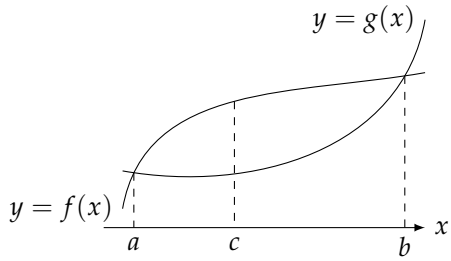
سوال ۴.۳۹۲:

ا. وقفہ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ پر تفاعل $y = \tan x + 3\cot x$ کی مطلق اقل قیمت پائی جاتی ہے۔ اس کو تلاش کریں۔

ب. تفاعل کو ترسیم کر کے حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۴.۳۹۳: منحنی $y = \sqrt{x}$ نقطہ $(\frac{1}{2}, 16)$ کے کتنا نزدیک آتی ہے؟

سوال ۴.۳۹۴: فرض کریں $f(x)$ اور $g(x)$ قابل تفرق ہیں جنہیں شکل ۴.۸۹ میں دکھایا گیا ہے۔ ان کے بیچ زیادہ سے زیادہ فاصلہ نقطہ $x = c$ پر پایا جاتا ہے۔ کیا اس نقطے پر ان تفاعل کے مماس میں کوئی خاص بات پائی جاتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔



شکل ۴.۸۹: ترسیمات برائے سوال ۴.۳۹۴

سوال ۴.۳۹۵: دکھائیں کہ مثبت عدد صحیح a ، b ، c ،اور d کی صورت میں $\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \geq 16$ ہو گا۔

سوال ۴.۳۹۶: (مثال ۴.۳۷ کا $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$)

ا. دکھائیں کہ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ متغیر x کا بڑھتا تفاعل ہے۔

ب. دکھائیں کہ $g(x) = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$ متغیر x کا گھٹتا تفاعل ہے۔

ج. دکھائیں کہ $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$ متغیر x کا بڑھتا تفاعل ہے۔

دوا

سوال ۴.۳۹۷: حساسیت دوا۔ (سوال ۳.۱۱۵ دیکھیں)

دوا کی وہ مقدار جس کو جسم زیادہ سے زیادہ حساس ہو معلوم کرنے کی خاطر M کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر تفرق $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}M}$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو، جہاں $R = M^2(\frac{C}{2} - \frac{M}{3})$ اور C مستقل ہے۔

سوال ۴.۳۹۸: کھانسی

ا. کھانسی کے دوران سانس کی نالی سکڑ کر ہوا کی رفتار کو تیز کرتی ہے۔ کیا سانس کی نالی اتنی سکڑتی ہے کہ ہوا کی رفتار زیادہ سے زیادہ ہو؟

سانس کی نالی کی لچک اور اس کی دیوار کی ہوا کے بہاؤ کو مزاحمت کی مناسب قیمتیں لیتے ہوئے ہوا کی اوسط رفتار v درج ذیل مساوات سے ظاہر کی جا سکتی ہے

$$v = c(r_0 - r)r^2 \,\mathrm{cm\,s^{-1}}, \quad \frac{r_0}{2} \leq r \leq r_0$$

جہاں آرام کی صورت میں سانس کی نالی کا رداس r_0 سنٹی میٹر ہے اور c مثبت مستقل جس کی قیمت سانس کی لمبائی پر (بھی) منحصر ہے۔

دکھائیں کہ v کی اعظم قیمت $r = \frac{2}{3}r_0$ پر حاصل ہو گی یعنی جب سانس کی نالی $33\,\%$ سکڑے۔ کھانسی کے دوران سانس کی نالی کی ایکس رے ثابت کرتی ہے کہ کھانسی کے دوران سانس کی نالی اتنی ہی سکڑتی ہے۔

ب. $r_0 = 0.5$ اور $c = 1$ لیتے ہوئے وقفہ $0 \leq r \leq 0.5$ پر v ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ آیا زیادہ سے زیادہ رفتار $r = \frac{2}{3}r_0$ پر نظر آتی ہے۔

اقتصادیات اور کاروبار

سوال ۴.۳۹۹: ایک قمیض تیار کرنے پر c روپیہ لاگت آتی ہے اور اس کی قیمت فروخت x روپیہ ہے۔ فروخت قمیضوں کی تعداد $n = \frac{a}{x-c} + \frac{b}{100-x}$ ہے جہاں a اور b مثبت مستقل ہیں۔ زیادہ سے زیادہ منافع کس قیمت فروخت پر ہو گا؟

سوال ۴.۴۰۰: آپ سیر و سیاحت کا کاروبار کرتے ہیں۔ آپ کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

ا. اگر 50 افراد (جو اقل تعداد ہے) سیر و سیاحت پر جائیں تب ہر فرد 200 روپیہ ادا کرے گا۔

ب. 80 افراد کی حد تک ہر اضافی فرد کی صورت میں تمام افراد کو 2 روپیہ کم ادا کرنے ہوں گے۔

کل لاگت 6000 روپیہ کی مستقل مقدار اور فی فرد 32 روپیہ ہے۔ زیادہ سے زیادہ منافع کے لیے کتنے افراد درکار ہیں؟

سوال ۴.۴۰۱: انتظام تجارت مال کا ایک کلیہ کہتا ہے کہ مال کی فرمائش، ادائیگی، اور رکھوالی پر فی ہفتے $A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$ لاگت آتی ہے جہاں q کھیپ میں اشیاء کی تعداد ہے، k لمحہ فرمائش پر ادائیگی ہے (جو ہر فرمائش پر ادا کرنی ہو گی)، c فی رکن قیمت ہے، m ایک ہفتہ میں فروخت اشیاء کی تعداد ہے، اور h فی رکن ہفتہ وار رکھوالی کا خرچ ہے جس میں کرایہ وغیرہ شامل ہے۔ q کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $A(q)$ کی قیمت کم سے کم ہو گی۔

سوال ۴.۴۰۲: (تسلسل سوال ۴.۴۰۱)
خرچ ترسیل بعض اوقات کھیپ کی تعداد پر منحصر ہوتی ہے۔ جب ایسا ہو تب k کی جگہ $k + bq$ استعمال کیا جاتا ہے جہاں b مستقل ہے۔ اب کھیپ کی بہترین جسامت کیا ہو گی؟

سوال ۴.۴۰۳: اگر تفاعل لاگت $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ اور تفاعل آمدنی $r(x) = 6x$ ہو تب دکھائیں کہ آپ نہ منافع نہ نقصان سے زیادہ بہتر صورت حاصل نہیں کر سکتے۔

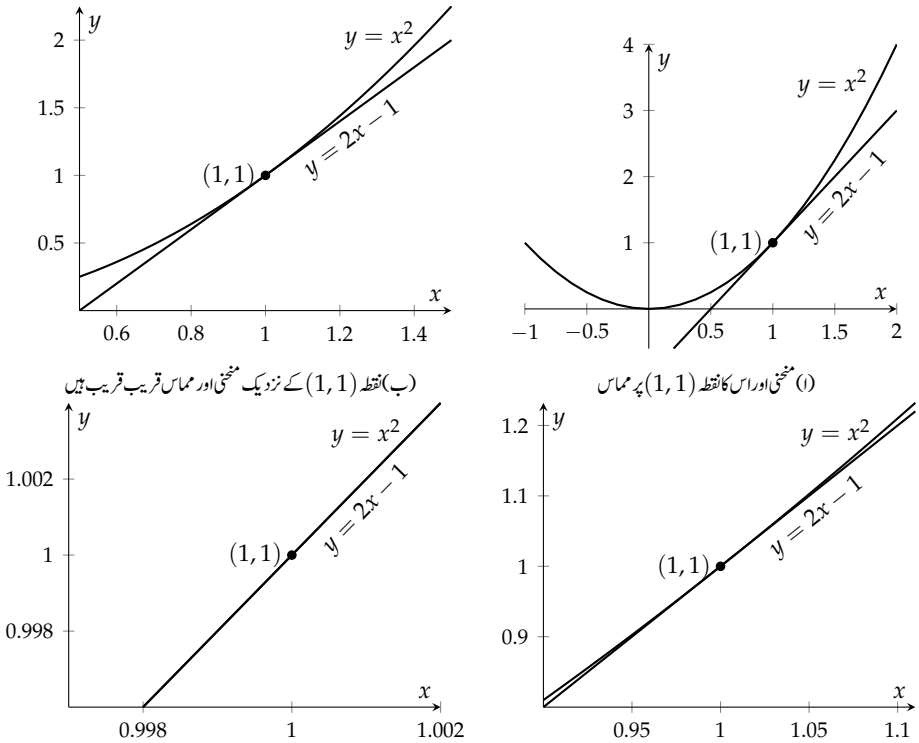
سوال ۴.۴۰۴: فرض کریں x اشیاء کی پیداوار میں لاگت $c(x) = x^3 - 20x^2 + 20000x$ ہے۔ کتنی پیداوار اوسط لاگت پیداوار کم سے کم کرے گی؟

۴.۷ خط بندی اور تفرقات

بعض اوقات پیچیدہ تفاعل کو سادہ تخمینی تفاعل سے ظاہر کرتے ہوئے مخصوص موقعوں پر قابل قبول نتائج حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ ان سادہ تفاعل کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ اس حصہ میں مماس پر مبنی **خط بندی**[۲۱] پر غور کیا گیا ہے۔

ہم نئے متغیرات $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ متعارف کرتے ہیں جو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو نئی معنی دیں گے۔ ہم تجرباتی پیمائش میں خلل اور حساسیت کو $\mathrm{d}y$ سے ظاہر کریں گے۔

[۲۱] linearization



(ا) منحنی اور اس کا نقطہ $(1, 1)$ پر مماس

(ب) نقطہ $(1, 1)$ کے نزدیک منحنی اور مماس قریب قریب ہیں

(ج) دکھائے گئے وقفہ پر مماس اور منحنی بہت قریب ہیں

(د) دکھائے گئے وقفے پر منحنی اور مماس میں فرق کرنا مشکل ہے۔

شکل ۴.۹۰: قابل تفرق منحنی کو نقطہ مماس کے قریب تخمینی طور پر اس نقطے کے مماس سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

خطی تخمین

آپ شکل ۴.۹۰ میں دیکھ سکتے ہیں کہ منحنی $y = f(x)$ کا مماس نقطہ مماس کے نزدیک منحنی کے قریب رہتا ہے۔ نقطہ مماس کے دونوں اطراف چھوٹے وقفہ پر مماس کی y قیمت کو منحنی کی y تخمینی قیمت تصور کیا جا سکتا ہے۔

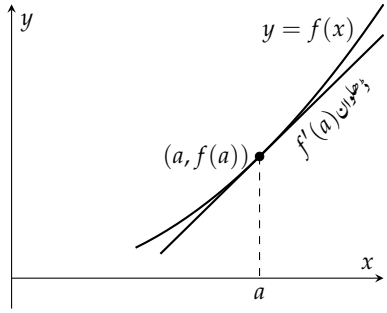
شکل ۴.۹۱ کی علامتیت استعمال کرتے ہوئے، نقطہ $(a, f(a))$ سے گزرتے ہوئے مماس کی ڈھلوان و نقطوی مساوات درج ذیل ہے۔

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

یوں مماس درج ذیل تفاعل کی ترسیم ہے۔

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

جب تک یہ خط منحنی کے نزدیک رہے اس کو $f(x)$ کی تخمین تصور کیا جا سکتا ہے۔



شکل ۴.۹۱: نقطہ a پر تفاعل $f(x)$ کا مماس $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ ہو گا

۵۹۳۴ تعریف:

۵۹۳۵ اگر $x = a$ پر f قابل تفرق ہو تب تخمینی تفاعل

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \tag{1}$$

۵۹۳۶ نقطہ a پر f کی **خط بندی**[۲۲] ہو گی۔ f کی درج ذیل تخمین L

$$f(x) \approx L(x)$$

۵۹۳۷ نقطہ a پر تفاعل f کی **معیاری خطی تخمین**[۲۳] ہے۔ نقطہ $x = a$ اس تخمین کا **وسط**[۲۴] ہے۔

۵۹۳۸ □

۵۹۳۹ مثال ۴.۴۰: $x = 0$ پر $f(x) = \sqrt{1+x}$ کی خط بندی تلاش کریں۔

۵۹۴۰ **حل**

۵۹۴۱ ہم $a = 0$ پر مساوات ۱ کی درکار صورت حاصل کرتے ہیں جہاں

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

۵۹۴۲ لیتے ہوئے $f(0) = 1$ اور $f'(0) = \frac{1}{2}$ ہوں گے لہٰذا

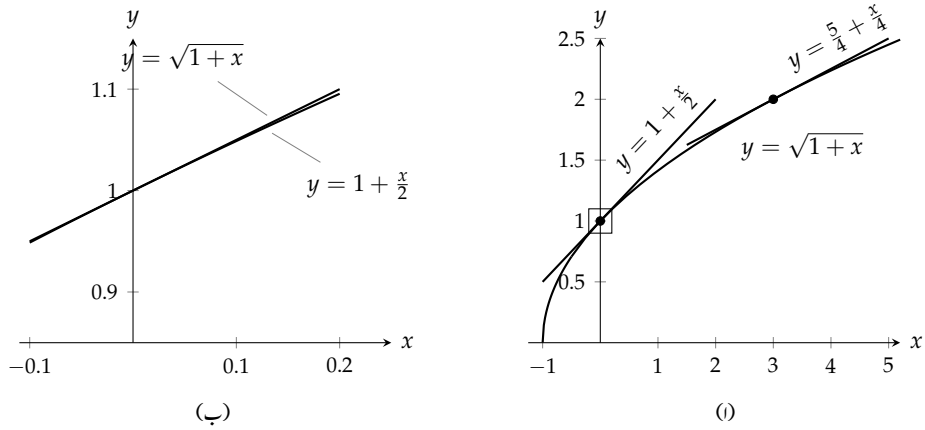
$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = 1 + \frac{1}{2}(x-0) = 1 + \frac{x}{2}$$

۵۹۴۳ ہو گا۔ شکل ۴.۹۲-الف میں منحنی اور مماس دکھائے گئے ہیں۔ شکل-ا میں مماسی نقطہ کو ڈبہ میں دکھایا گیا ہے۔ اس ڈبے کو شکل-ب میں بڑا کر کے دکھایا گیا

۵۹۴۴ ہے۔ □

---

[۲۲] linearization
[۲۳] standardlinearapproximation
[۲۴] center



شکل ۴.۹۲: نقطہ $x = 0$ پر $y = \sqrt{1+x}$ اور اس کی خط بندی۔

۵۹۳۵ تخمین $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ (شکل ۴.۹۲-ب) سے درج ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10$$ 2 اعشاریہ مقامات تک درست

$$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$$ 3 اعشاریہ مقامات تک درست

$$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250$$ 5 اعشاریہ مقامات تک درست

۵۹۳۶ ان حساب سے اس غلط فہمی میں مبتلا مت ہونا کہ خط بندی استعمال کرتے ہوئے جو بھی کرنا ہو کیلکولیٹر استعمال کر کے بہتر سے بہتر بنایا جا سکتا ہے۔ حقیقت میں ہم
۵۹۳۷ کبھی بھی خط بندی سے جذر تلاش نہیں کریں گے۔ خط بندی کی افادیت اس حقیقت میں ہے کہ وقفہ دلچسپی پر ہم پیچیدہ کلیہ کی جگہ سادہ کلیہ استعمال کر پاتے ہیں۔
۵۹۳۸ اگر ہمیں 0 کے قریب x کی قیمتوں کے لیے $\sqrt{1+x}$ کے ساتھ کام کرنا ہو اور ہم معمولی خلل برداشت کر سکتے ہوں تب بہتر ہو گا کہ اس کے بجائے
۵۹۳۹ ہم $1 + \frac{x}{2}$ کے ساتھ کام کریں۔ ظاہر ہے ایسی صورت میں ہم جاننا چاہیں گے کہ ایسا کرنے سے کتنا خلل پیدا ہو گا۔ ایسے خلل پر باب ۹ میں غور کیا جائے گا۔

۵۹۵۰ خط بندی میں خلل، خط بندی کے وسط سے دور، ناقابل نظر انداز ہو گا۔ یوں $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$ کو $x = 3$ کے نزدیک استعمال نہیں کیا جا سکتا۔
۵۹۵۱ آپ کو $x = 3$ پر نئی خط بندی حاصل کرنی ہو گی۔

۵۹۵۲ مثال ۴.۴۱: $x = 3$ پر تفاعل $f(x) = \sqrt{1+x}$ کی خط بندی حاصل کریں۔

۵۹۵۳ **حل**

۵۹۵۴ ہم $a = 3$ پر مساوات ۱ کی درکار صورت حاصل کرتے ہیں جہاں

$$f(3) = 2, \quad f'(3) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=3} = \frac{1}{4}$$

۵۹۵۵ ہے لہٰذا

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}$$

۵۹۵۶ ہو گا (شکل ۴.۹۲-۱)۔ اس خط بندی سے $x = 3.2$ پر

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3.2}{4} = 1.250 + 0.800 = 2.050$$

۵۹۵۷ حاصل ہوتا ہے جو بالکل درست جواب $\sqrt{4.2} \approx 2.04939$ سے 0.000 61 ہٹ کر ہے۔

۵۹۵۸ اگر ہم مثال ۴.۴۰ میں حاصل خط بندی استعمال کریں تب

$$\sqrt{+x} = \sqrt{1+3.2} \approx 1 + \frac{3.2}{2} = 1 + 1.6 = 2.6$$

۵۹۵۹ حاصل ہو گا جس میں 25 % خلل پایا جاتا ہے۔ □

۵۹۶۰ مثال ۴.۴۲: جذروں اور طاقتوں کے لیے اہم ترین خط بندی درج ذیل ہے (سوال ۴.۴۲۴)۔

$$(1+x)^k \approx 1 + kx \qquad x \approx 0; k \text{ کوئی عدد ہے} \tag{۲}$$

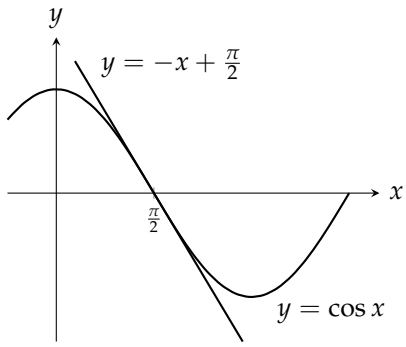
۵۹۶۱ $x = 0$ کے نزدیک یہ قابل قبول نتائج دیتا اور وسیع طور استعمال ہوتا ہے۔ □

۵۹۶۲ مساوات ۲ سے درج ذیل کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں جن کا وسط $x = 0$ ہے۔

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2} & k &= \frac{1}{2} \\
\frac{1}{1-x} &= (1-x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1 + x & k &= -1 \\
\sqrt[3]{1+5x^4} &= (1+5x^4)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4 & k &= \frac{1}{3} \\
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + (-\tfrac{1}{2})(-x^2) = 1 + \frac{x^2}{2} & k &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

۵۹۶۳ دیگر اہم خط بندی درج ذیل ہیں (اس حصہ کے آخر میں دیے سوالات میں آپ انہیں اخذ کریں گے) جن کا وسط $x = 0$ ہے۔

$$\begin{aligned}
\sin x &\approx x \\
\cos x &\approx 1 \\
\tan x &\approx x
\end{aligned}$$



شکل ۹۳.۴: کوسائن اور نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر اس کی خط بندی۔

۵۹۶۴ مثال ۴۳.۴: $x = \frac{\pi}{2}$ پر $f(x) = \cos x$ کی خط بندی حاصل کریں۔

۵۹۶۵ **حل**

۵۹۶۶ درج ذیل

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = \cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad f'(\tfrac{\pi}{2}) = -\sin(\tfrac{\pi}{2}) = -1$$

۵۹۶۷ لیتے ہوئے خط بندی درج ذیل ہو گی (شکل ۹۳.۴)۔

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = 0 + (-1)(x - \tfrac{\pi}{2}) = -x + \tfrac{\pi}{2}$$

۵۹۶۸ □

۵۹۶۹ **تفرقات**

۵۹۷۰ تعریف:

۵۹۷۱ فرض کریں $y = f(x)$ قابل تفرق تفاعل ہے۔ **تفرقہ**[۲۵] $\mathrm{d}x$ غیر تابع متغیر ہے۔ **تفرقہ** $\mathrm{d}y$ درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

۵۹۷۲ □

۵۹۷۳ تفرقہ $\mathrm{d}x$ غیر تابع متغیر ہو گا۔ تفرقہ $\mathrm{d}y$ ہر صورت تابع ہو گا اور اس کی قیمت x اور $\mathrm{d}x$ پر منحصر ہو گی۔

۵۹۷۴ مثال ۴۴.۴: $y = x^5 + 37x$ اور $y = \sin 3x$ کے لیے $\mathrm{d}y$ تلاش کریں۔

۵۹۷۵ **حل**

$$\mathrm{d}y = (5x^4 + 37)\,\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}y = (3\cos 3x)\,\mathrm{d}x$$

---

[۲۵] differential

۵۹۷۶ □

۵۹۷۷ اگر $\mathrm{d}x \neq 0$ ہو تب ہم مساوات $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ کے دونوں اطراف کو $\mathrm{d}x$ سے تقسیم کر کے جانی پہچانی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

۵۹۷۸ حاصل کرتے ہیں۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ $\mathrm{d}x \neq 0$ کی صورت میں $f'(x)$ **تفرقات**[۲۶] $\mathrm{d}y$ اور $\mathrm{d}x$ کا حاصل تقسیم ہو گا۔

۵۹۷۹ بعض اوقات ہم $\mathrm{d}f'(x)\,\mathrm{d}x$ کے بجائے

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

۵۹۸۰ لکھتے ہیں اور $\mathrm{d}f$ کو f کا **تفرقہ** کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر $f(x) = 3x^2 - 6$ کی صورت میں

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}(3x^2 - 6) = 6x\,\mathrm{d}x$$

۵۹۸۱ ہو گا۔

۵۹۸۲ تفرق کے ہر کلیہ مثلاً

$$\frac{\mathrm{d}(u+v)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

۵۹۸۳ کے دونوں اطراف کو تفرقہ $\mathrm{d}x$ سے ضرب دے کر مطابقتی تفرقی روپ

$$\mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$$

۵۹۸۴ حاصل ہو گا۔ چند تفرقی کلیات پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{d}c = 0, & \mathrm{d}(cu) = c\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v, \\
\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\frac{u}{v}) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}, & \mathrm{d}(u^n) = nu^{n-1}\,\mathrm{d}u, \\
\mathrm{d}(\sin u) = \cos u\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\cos u) = -\sin u\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\tan u) = \sec^2 u\,\mathrm{d}u, \\
\mathrm{d}(\cot u) = -\csc^2 u\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\sec u) = \sec u \tan u\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\csc u) = -\csc u \cot u\,\mathrm{d}u
\end{array}$$

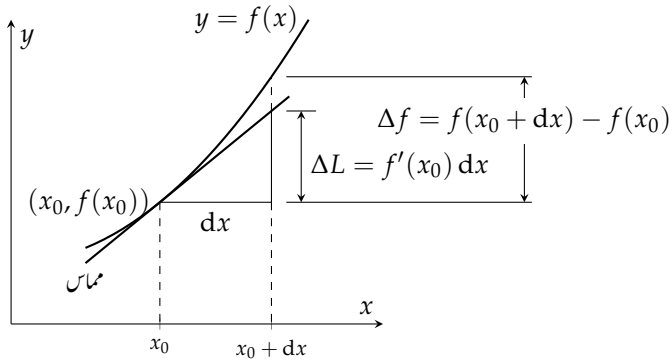
۵۹۸۵ مثال ۴.۴۵:

$$\mathrm{d}(\tan 2x) = \sec^2(2x)\,\mathrm{d}(2x) = 2\sec^2 2x\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}(\tfrac{x}{x+1}) = \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}$$

۵۹۸۶ □

---

[۲۶] differentials



شکل ۹۴.۴: چھوٹے $\mathrm{d}x$ کی صورت میں f کی خط بندی تقریباً f میں تبدیلی کے برابر ہو گی۔

۵۹۸۷ تفرقات کی مدد سے تبدیلی کی اندازاً قیمت

۵۹۸۸ فرض کریں نقطہ x_0 پر قابل تفرق تفاعل $f(x)$ کی قیمت ہم جانتے ہیں۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ کسی نزدیک نقطہ $x_0 + \mathrm{d}x$ پر جانے سے تفاعل کی
۵۹۸۹ قیمت میں تبدیلی کتنی ہو گی۔ اگر $\mathrm{d}x$ نہایت کم ہو تب f اور x_0 پر اس کی خط بندی L ایک سا تبدیل ہوں گے۔ چونکہ L کا حساب زیادہ آسان ہے لہٰذا
۵۹۹۰ اس کی مدد لینا سود مند ثابت ہو گا۔

۵۹۹۱ شکل ۹۴.۴ میں دی علامتوں کو استعمال کرتے ہوئے f میں تبدیلی لکھتے ہیں۔

$$\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$$

۵۹۹۲ L میں مطابقتی تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0 + \mathrm{d}x) - L(x_0)\\ &= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)[(x_0 + \mathrm{d}x) - x_0]}_{L(x_0+\mathrm{d}x)} - \underbrace{f(x_0)}_{L(x_0)=f(x_0)}\\ &= f'(x_0)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

۵۹۹۳ تفرق $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ کے جیومیٹریائی مطلب پر غور کریں۔ جب $x = x_0$ پر $\mathrm{d}f$ کی قیمت حاصل کی جائے تب $\mathrm{d}f = \Delta L$ ہو گا
۵۹۹۴ یعنی خط بندی میں تبدیل $\mathrm{d}f$ کے برابر ہو گی۔ **تفرقی تبدیلی کی اندازاً قیمت**
۵۹۹۵ فرض کریں $x = x_0$ پر $f(x)$ قابل تفرق ہے۔ x کی قیمت x_0 سے $x_0 + \mathrm{d}x$ کرنے سے f میں تبدیلی تخمیناً درج ذیل ہو گی۔

$$\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$$

۵۹۹۶ مثال ۴۶.۴: ایک دائرے کا رداس $r_0 = 10\,\mathrm{cm}$ سے $10.1\,\mathrm{cm}$ کیا جاتا ہے۔ $\mathrm{d}S$ کا حساب کرتے ہوئے اس کے رقبہ S میں
۵۹۹۷ تبدیلی حاصل کریں۔ اس کا موازنہ حقیقی تبدیلی ΔS کے ساتھ کریں۔

جدول ۱.۴: تبدیلی کے اظہار کے تین طریقے

	اصل	اندازاً
حتمی تبدیلی	$\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$	$\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$
اضافی تبدیلی	$\frac{\Delta f}{f(x_0)}$	$\frac{\mathrm{d}f}{f(x_0)}$
فی صد تبدیلی	$\frac{\Delta f}{f(x_0)} \times 100$	$\frac{\mathrm{d}f}{f(x_0)} \times 100$

۵۹۹۸ **حل**

۵۹۹۹ چونکہ $S = \pi r^2$ ہے لہٰذا اندازاً تبدیلی

$$\mathrm{d}S = S'(r_0)\,\mathrm{d}r = 2\pi r_0\,\mathrm{d}r = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi\,\mathrm{m}^2$$

۶۰۰۰ ہو گی۔ حقیقی تبدیل درج ذیل ہے۔

$$\Delta S = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = (102.01 - 100)\pi = \underbrace{2\pi}_{\mathrm{d}S} + \underbrace{0.01\pi}_{\text{خلل}}$$

۶۰۰۱ □

۶۰۰۲ **مطلق، اضافی، اور فی صد تبدیلی**

۶۰۰۳ x_0 کے قریب نقطہ $x_0 + \mathrm{d}x$ پر منتقلی سے f میں پیدا تبدیلی تین طریقوں سے ظاہر کی جا سکتی ہے جنہیں جدول ۱.۴ میں پیش کیا گیا ہے۔

۶۰۰۴ مثال ۴۷.۴: گزشتہ مثال میں اندازاً فی صد تبدیلی درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}S}{S(r_0)} \times 100 = \frac{2\pi}{100\pi} \times 100 = 2\,\%$$

۶۰۰۵ □

۶۰۰۶ مثال ۴۸.۴: زمین کا سطحی رقبہ

۶۰۰۷ زمین کو کرہ تصور کریں جس کا رداس $6371 \mp 0.1\,\mathrm{km}$ ہے۔ زمین کے رقبہ میں خلل کتنا ہو گا؟

۶۰۰۸ **حل**

۶۰۰۹ رداس r کے کرہ کا سطحی رقبہ $S = 4\pi r^2$ ہوتا ہے۔ r میں خلل کی وجہ سے S میں خلل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r = 8\pi r\,\mathrm{d}r = 8\pi(6371)(0.1) = 16\,012\,\mathrm{km}^2$$

□

مثال ۴.۴۹: رداس r کے کرہ کا رقبہ $1\,\%$ درست حاصل کرنے کی خاطر اس کا رداس کتنا درست ناپنا ہوگا؟

حل

ہم چاہتے ہیں کہ رداس میں تبدیلی اتنی کم ہو کہ درج ذیل مطمئن ہو۔

$$|\Delta S| \leq \frac{S}{100} = \frac{4\pi r^2}{100}$$

ہم عدم مساوات میں Δs کی جگہ

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r = 8\pi r\,\mathrm{d}r$$

پُر کرتے ہیں۔ یوں

$$|8\pi r\,\mathrm{d}r| \leq \frac{4\pi r^2}{100} \quad \Longrightarrow \quad |\mathrm{d}r| \leq \frac{1}{8\pi r}\cdot\frac{4\pi r^2}{100} = \frac{1}{2}\frac{r}{100}$$

حاصل ہوتا ہے۔ رداس میں خلل، اصل رداس کے $0.5\,\%$ سے کم ہونا ضروری ہے۔ □

مثال ۴.۵۰: بند شریانوں کا کھولنا (انجیوپلاسٹی[۲۷])

جزوی طور پر بند شریانوں کا رداس بڑا کرتے ہوئے خون کی عمومی بہاو حاصل کی جا سکتی ہے۔ ۱۸۳۰ کے لگ بھگ فرانس کے جین پوزوئے نے درج ذیل کلیہ اخذ کیا

$$H = kr^4 \qquad (k \text{ مستقل})$$

جو مستقل دباو پر فی اکائی وقت میں چھوٹی نالی میں حجم بہاو H دیتا ہے۔ نالی کا رداس r ہے۔ رداس $10\,\%$ بڑھانے سے بہاو پر کیا اثر ہوگا؟

حل

r اور H کے تفرقات کا تعلق لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{d}H = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = 4kr^3\,\mathrm{d}r$$

یوں

$$\frac{\mathrm{d}H}{H} = \frac{4kr^3\,\mathrm{d}r}{kr^4} = 4\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

ہوگا یعنی H میں اضافی تبدیل r کی اضافی تبدیلی کے 4 گنا ہے۔ یوں r میں $10\,\%$ تبدیلی سے H میں $40\,\%$ تبدیلی پیدا ہوگی۔ □

---

[۲۷] angioplasty

حساسیت

مختلف x پر مساوات $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ ہمیں f کی حساسیت دیتی ہے۔ x پر f' کی قیمت جتنی زیادہ ہو، کسی بھی تبدیلی $\mathrm{d}x$ کے لیے f میں تبدیلی اتنی زیادہ ہو گی۔

مثال ۴.۵۱: پُل کی بلندی ناپنے کی خاطر آپ پتھر پانی میں گرا کر چھینٹوں کی آواز آنے تک وقت ناپتے ہیں۔ آپ کلیہ $s = 4.9t^2$ استعمال کرتے ہیں۔ 0.1 سیکنڈ خلل کے لحاظ سے آپ کے جواب کی حساسیت کیا ہو گی؟

حل

مساوات $\mathrm{d}s = 9.8t\,\mathrm{d}t$ میں s کی قیمت کا دارومدار t پر ہے۔ اگر $t = 2$ ہو تب

$$\mathrm{d}s = 9.8(2)(0.1) = 1.96\,\mathrm{m}$$

ہو گا جبکہ تین سیکنڈ بعد $t = 5\,\mathrm{s}$ پر خلل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}s = 9.8(5)(0.1) = 4.9\,\mathrm{m}$$

□

تخمین $\Delta f \approx \mathrm{d}f$ میں خلل

فرض کریں $x = x_0$ پر $f(x)$ قابل تفرق ہے اور x میں تبدیلی Δx ہے۔ ہم $f(x)$ کی مطابقتی تبدیلی کو دو طریقوں سے بیان کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) && \text{اصل تبدیلی} \\ \mathrm{d} &= f'(x_0)\Delta x && \text{تفرقی اندازہ} \end{aligned}$$

$\mathrm{d}f$ اصل تبدیلی Δf کی کتنی قریبی تخمین ہے؟

ہم خلل تخمین حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \text{خلل تخمین} &= \Delta f - \mathrm{d}f \\ &= \Delta f - f'(x_0)\Delta x \\ &= \underbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}_{\Delta f} - f'(x_0)\Delta x \\ &= \underbrace{\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)\right)}_{\text{اس حصہ کو } \epsilon \text{ کہیں}} \Delta x \\ &= \epsilon \cdot \Delta x \end{aligned}$$

$\Delta x \to 0$ کرنے سے $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ کی قیمت $f'(x_0)$ تک پہنچتی ہے($f'(x_0)$ کی تعریف دوبارہ دیکھیں)۔یوں قوسین میں بند قیمت نہایت چھوٹی ہو گی اور اسی لیے ہم اس کو ϵ لکھتے ہیں۔درحقیقت $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon \to 0$ ہو گا۔جب Δx چھوٹا ہو تخمینی خلل $\epsilon\Delta x$ مزید چھوٹا ہو گا۔

$$\underbrace{\Delta f}_{\text{اصل تبدیلی}} = \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{\text{اندازاً تبدیلی}} + \underbrace{\epsilon\Delta x}_{\text{خلل}}$$

اگرچہ ہمیں یہاں معلوم نہیں خلل کتنا چھوٹا ہو گا(جسے جاننے کے لیے ہمیں باب ۹ کا انتظار کرنا ہو گا) یہ ضروری ہے کہ اس مساوات کی صورت پر ہم غور کریں۔

اگر $x = x_0$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہو اور x کی قیمت x_0 سے تبدیل ہو کر $x_0 + \Delta x$ ہو جائے تب f میں تبدیلی Δy کی مساوات کی صورت

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon\Delta x \tag{۳}$$

ہو گی جہاں $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon \to 0$ ہو گا۔

خلل کی مساوات(مساوات ۳) کی صورت جانتے ہوئے ہم زنجیری تفرق کا قاعدہ ثابت کر سکتے ہیں۔

زنجیری تفرق کا ثبوت

زنجیری قاعدے کے بارے میں حصہ ۳.۵ میں بات کی گئی جہاں اس کا ثبوت پیش نہیں کیا گیا۔آئیں مساوات ۳ کی مدد سے زنجیری قاعدے کا ثبوت پیش کریں۔

فرض کریں $f(u)$ متغیر u کا قابل تفرق تفاعل ہے اور $u = g(x)$ متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے۔ہم ثابت کرنا چاہیں گے کہ اگر x_0 پر g قابل تفرق ہو اور $g(x_0)$ پر f قابل تفرق ہو تب مرکب تفاعل x_0 پر قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

فرض کریں x میں اضافہ Δx ہے اور فرض کریں کہ u اور y میں مطابقتی اضافے بالترتیب Δu اور Δy ہیں۔جیسا آپ شکل ۴.۹۵ میں دیکھ سکتے ہیں

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

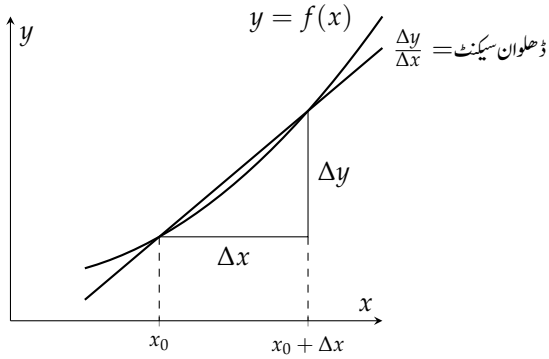
ہو گا لہٰذا ہم ثابت کرنا چاہیں گے کہ یہ حد $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ کے برابر ہو گی۔

مساوات ۳ کے تحت

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \epsilon_1\Delta x = (g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

ہو گا جہاں $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1 \to 0$ ہو گا۔اسی طرح

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \epsilon_2\Delta u = (f'(u_0) + \epsilon_2)\Delta u$$



شکل ۴.۹۵: $x = x_0$ پر y کے تفرق سے مراد $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ہے۔

۶۰۵۵ ہو گا جہاں $\Delta u \to 0$ کرنے سے $\epsilon_2 \to 0$ ہو گا۔ Δu اور Δy کی مساواتوں کو ملا کر

$$\Delta y = (f'(u_0) + \epsilon_2)(g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

۶۰۵۶ حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \epsilon_2 g'(x_0) + f'(u_0)\epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_1$$

۶۰۵۷ ہو گا۔ چونکہ $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1 \to 0$ اور $\epsilon_2 \to 0$ ہوں گے لہٰذا دائیں ہاتھ تین اجزاء قابل نظر انداز ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

۶۰۵۸ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

۶۰۵۹ **کمیت کا توانائی میں تبادل**

۶۰۶۰ نیوٹن کا دوسرا قانون

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mv) = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ma$$

۶۰۶۱ کمیت کے اٹل ہونے پر مبنی ہے۔ جیسا آپ جانتے ہیں حقیقت میں کمیت کی قیمت سمتی رفتار پر منحصر ہے یعنی

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

جہاں ساکن کمیت m_0 ہے اور روشنی کی رفتار $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ اگر کمیت کی سمتی رفتار v روشنی کی رفتار سے بہت کم ہو تب ہم تخمینی طور پر

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں

$$m = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

یعنی

$$m = m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2\left(\frac{1}{c^2}\right) \tag{۴}$$

ہو گا۔ مساوات ۴ رفتار کی وجہ سے کمیت میں اضافہ بیان کرتی ہے۔

طبیعیات نیوٹن میں $\frac{1}{2}m_0 v^2$ کو جسم کی حرکی توانائی کہتے ہیں اور اگر ہم مساوات ۴ کو

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0 v^2$$

لکھیں تب

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0 v^2 = \frac{1}{2}m_0 v^2 - \frac{1}{2}m_0(0)^2 = \Delta(\text{حرکی توانائی})$$

یعنی

$$(\Delta m)c^2 \approx \Delta(\text{حرکی توانائی}) \tag{۵}$$

ہو گا۔ یوں صفر سمتی رفتار سے v سمتی رفتار تک پہنچنے سے حرکی توانائی میں تبدیلی تقریباً $(\Delta m)c^2$ ہو گی۔

مساوات ۵ میں $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ پُر کرتے ہوئے

$$\Delta(\text{حرکی توانائی}) \approx 90\,000\,000\,000\,000\,000\,\Delta m$$

حاصل ہو گی جہاں کمیت کی اکائی kg اور توانائی کی اکائی جاول J ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کمیت میں معمولی تبدیلی سے توانائی میں بہت بڑی تبدیلی آتی ہے۔ 20 کلو ٹن ایٹم بم چلانے سے ایک گرام سے کم کمیت توانائی میں تبدیل ہوتی ہے۔ 20 کلو ٹن ایٹم بم سے مراد وہ ایٹم بم ہے جو 20 000 ٹن یعنی $2 \times 10^7\,\mathrm{kg}$ بارودی مواد (ٹی این ٹی[۲۸]) کے دھماکہ کے برابر توانائی خارج کرتا ہو۔

[۲۸] TNT, trinitrotoluene

سوالات

خط بندی کی تلاش

سوال ۴.۴۰۵ تا سوال ۴.۴۱۰ میں $x = a$ پر $f(x)$ کی خط بندی $L(x)$ تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۰۵: $f(x) = x^4, \quad x = 1$

سوال ۴.۴۰۶: $f(x) = x^{-1}, \quad x = 2$

سوال ۴.۴۰۷: $f(x) = x^3 - x, \quad x = 1$

سوال ۴.۴۰۸: $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad x = 2$

سوال ۴.۴۰۹: $f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 4$

سوال ۴.۴۱۰: $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad x = -4$

آپ سوال ۴.۴۱۱ تا سوال ۴.۴۱۶ میں دیے تفاعل کی خط بندی استعمال کرنا چاہتے ہیں۔ بعد کا کام آسان بنانے کی خاطر آپ خط بندی کے وقفے کا وسط دیے گئے نقطہ x_0 کے نزدیک عدد صحیح پر رکھنا چاہیں گے جہاں تفاعل اور تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کرنا زیادہ آسان ہو گی۔ خط بندی تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۱۱: $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 0.1$

سوال ۴.۴۱۲: $f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0.6$

سوال ۴.۴۱۳: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -0.9$

سوال ۴.۴۱۴: $f(x) = 1 + x, \quad x_0 = 8.1$

سوال ۴.۴۱۵: $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 8.5$

سوال ۴.۴۱۶: $f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x_0 = 1.3$

تکونیاتی تفاعل کی خط بندی

سوال ۴.۴۱۷ تا سوال ۴.۴۲۰ میں $x = a$ پر تفاعل f کی خط بندی تلاش کریں۔ دو مختلف نقطوں پر دو مختلف حد بندی درکار ہیں۔ تفاعل اور تفاعل کی خط بندی ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال ۴.۴۱۷: $f(x) = \sin x, \quad x = 0,\ x = \pi$

سوال ۴.۴۱۸: $f(x) = \cos x, \quad x = 0,\ x = -\frac{\pi}{2}$

سوال ۴.۴۱۹: $f(x) = \sec x, \quad x = 0,\ x = -\frac{\pi}{3}$

سوال ۴.۴۲۰: $f(x) = \tan x, \quad x = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$

تخمین $(1+x)^k \approx 1 + kx$

سوال ۴.۴۲۱: x کی قیمت صفر کے قریب لیتے ہوئے درج ذیل تفاعل کی خطی تخمین تلاش کریں۔ کلیہ $(1+x)^k \approx 1 + kx$ استعمال کریں۔

ا. $f(x) = (1+x)^2$ ج. $g(x) = \frac{2}{1-x}$ ھ. $h(x) = 3(1+x)^{\frac{1}{3}}$

ب. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^5}$ د. $g(x) = (1-x)^6$ و. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

سوال ۴.۴۲۲: کیلکولیٹر سے تیز تخمین $(1+x)^k \approx 1 + kx$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قیمتیں حاصل کریں۔

ا. $(1.0002)^{50}$ ب. $\sqrt[3]{1.009}$

سوال ۴.۴۲۳: $x = 0$ پر $f(x) = \sqrt{x+1} + \sin x$ کی خط بندی تلاش کریں۔ اس کا $\sqrt{1+x}$ اور $\sin x$ کی انفرادی خط بندی کے ساتھ کیا رشتہ ہے؟

سوال ۴.۴۲۴: ہم طاقتی قاعدہ سے جانتے ہیں کہ تمام ناطق اعداد k کے لیے مساوات

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x)^k = k(1+x)^{k-1}$$

مطمئن ہوتی ہے۔ ہم باب ۷ میں دیکھیں گے کہ یہ مساوات غیر ناطق اعداد کے لیے بھی مطمئن ہوتی ہے۔ یہی یہاں فرض کرتے ہوئے دکھائیں کہ $x = 0$ پر $f(x) = (1+k)^k$ کی خط بندی $L(x) = 1 + kx$ ہے۔

تفرقات

سوال ۴.۴۲۵ تا سوال ۴.۴۳۶ میں $\mathrm{d}y$ تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۲۵: $y = x^3 - 3\sqrt{x}$

سوال ۴.۴۲۶: $y = x\sqrt{1-x^2}$

سوال ۴.۴۲۷: $y = \frac{2x}{1+x^2}$

سوال ۴.۴۲۸: $y = \frac{2\sqrt{x}}{3(1+\sqrt{x})}$

سوال ۴.۴۲۹: $2y^{\frac{3}{2}} + xy - x = 0$

سوال ۴.۴۳۰: $xy^2 - 4x^{\frac{3}{2}} - y = 0$

سوال ۴.۴۳۱: $y = \sin(5\sqrt{x})$

سوال ۴.۴۳۲: $y = \cos(x^2)$

سوال ۴.۴۳۳: $y = 4\tan(\frac{x^3}{3})$

سوال ۴.۴۳۴: $y = \sec(x^2 - 1)$

سوال ۴.۴۳۵: $y = 3\csc(1 - 2\sqrt{x})$

سوال ۴.۴۳۶: $y = 2\cot(\frac{1}{\sqrt{x}})$

خلل تخمین

سوال ۴.۴۳۷ تا سوال ۴.۴۴۲ میں x کی قیمت x_0 سے $x_0 + \mathrm{d}x$ ہونے کی وجہ سے تفاعل $f(x)$ کی قیمت تبدیل ہوتی ہے۔ درج ذیل تلاش کریں (شکل ۴.۹۴)۔

ا. تبدیلی $\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$

ب. اندازاً تبدیلی $\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$

ج. خلل تخمین $\left|\Delta f - \mathrm{d}f\right|$

سوال ۴.۴۳۷: $f(x) = x^2 + 2x,\ x_0 = 0,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال ۴.۴۳۸: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3,\ x_0 = -1,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال ۴.۴۳۹: $f(x) = x^3 - x,\ x_0 = 1,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال ۴.۴۴۰: $f(x) = x^4,\ x_0 = 1,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال ۴.۴۴۱: $f(x) = x^{-1},\ x_0 = 0.5,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال ۴.۴۴۲: $f(x) = x^3 - 2x + 3,\ x_0 = 2,\ \mathrm{d}x = 0.1$

تبدیلی کا تفرقی اندازہ

سوال ۴.۴۴۳ تا سوال ۴.۴۴۸ میں رقبے یا حجم میں تبدیلی کی تفرقی صورت لکھیں۔

سوال ۴.۴۴۳: رداس r کے کرہ کے حجم $H = \frac{4}{3}\pi r^3$ میں تبدیلی جب رداس r_0 سے $r_0 + \mathrm{d}r$ ہوتا ہے۔

سوال ۴.۴۴۴: مکعب کے حجم $H = x^3$ میں تبدیلی جب اس کے ضلع کی لمبائی x_0 سے تبدیل ہو کر $x_0 + \mathrm{d}x$ ہوتی ہے۔

سوال ۴.۴۴۵: مکعب کے سطحی رقبہ $S = 6x^2$ میں تبدیلی جب اس کا ضلع x_0 سے $x_0 + \mathrm{d}x$ ہوتا ہے۔

سوال ۴.۴۴۶: قائمہ مخروط کا رقبہ پہلو $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ جب رداس r_0 سے $r_0 + \mathrm{d}r$ ہوتا ہے جبکہ اس کی اونچائی h تبدیل نہیں ہوتی۔

سوال ۴.۴۴۷: قائمہ بیلن کا حجم $H = \pi r^2 h$ جب اس کا رداس r_0 سے تبدیل ہو کر $r_0 + \mathrm{d}r$ ہو جبکہ اس کی لمبائی h تبدیل نہ ہو۔

سوال ۴.۴۴۸: قائمہ بیلن کا رقبہ پہلو $S = 2\pi rh$ جب اس کی لمبائی h_0 سے $h_0 + \mathrm{d}h$ ہو جائے جبکہ اس کا رداس تبدیل نہ ہو۔

استعمال

سوال ۴.۴۴۹: ایک دائرے کا رداس $2\,\mathrm{m}$ سے بڑھ کر $2.02\,\mathrm{m}$ ہو جاتا ہے۔

ا. رقبے میں تبدیلی تلاش کریں۔

ب. رقبہ میں تبدیلی کو ابتدائی رقبہ کا فی صد لکھیں۔

سوال ۴.۴۵۰: ایک درخت کا قطر 30 cm تھا۔ اگلے سال اس کا محیط 2 cm بڑھ گیا۔ درخت کا قطر کتنا بڑھا؟ درخت کا رقبہ عمودی تراش کتنا بڑھا؟

سوال ۴.۴۵۱: ایک مکعب کے اضلاع کی لمبائی 10 cm ہے جس میں 1 % خلل متوقع ہے۔ اس کے حجم میں کتنا فی صد خلل ہو گا؟

سوال ۴.۴۵۲: ایک چوکور کے رقبہ میں 2 % سے کم خلل قابل قبول ہے۔ اس کے ضلع کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا؟

سوال ۴.۴۵۳: ایک کرہ کا قطر 100 ∓ 1 cm ناپا جاتا ہے۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے کرہ کا حجم حاصل کیا جاتا ہے۔ حجم میں کتنا خلل متوقع ہے؟

سوال ۴.۴۵۴: ایک کرہ کے حجم میں 3 % تک خلل قابل قبول ہے۔ اس کے قطر کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا؟

سوال ۴.۴۵۵: قائمہ بیلن کا رداس اور اس کی لمبائی ایک دوسرے کے برابر ہیں۔ یوں اس کا حجم πh^3 ہو گا۔ اس کے حجم میں 1 % خلل قابل قبول ہے۔ لمبائی کی پیمائش میں قابل قبول خلل کتنا ہو گا؟

سوال ۴.۴۵۶: قائمہ ٹینکی کا قد 10 m ہے۔ اس کی پیمائش حجم اور اصل حجم میں 1 % کا فرق قابل قبول ہے۔ اس کے اندرونی قطر کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا۔

سوال ۴.۴۵۷: دائری قرص کے رداس میں کتنا فرق $\mathrm{d}r$ قابل قبول ہو گا تاکہ اس کی کمیت میں فرق اصل کمیت کے $\frac{1}{1000}$ سے کم ہو۔ قرص کی موٹائی میں خلل کو نظر انداز کریں۔

سوال ۴.۴۵۸: خون کے بہاو میں 50 % اضافہ حاصل کرنے کی خاطر مثال ۴.۵۰ میں r کو کتنا فی صد بڑھانا ہو گا؟

سوال ۴.۴۵۹: دکھائیں کہ مثال ۴.۵۱ میں t میں 5 % خلل کی وجہ سے s میں 10 % خلل پیدا ہو گا۔

سوال ۴.۴۶۰: دل پر خلائی مشق کے اثرات

اکائی وقت میں دل درج ذیل

$$W = PV + \frac{V\delta v^2}{2g}$$

کام کرتا ہے جہاں W اکائی وقت میں کام ہے، P دباو خون ہے، V دل سے اکائی وقت میں خارج خون کا حجم ہے، δ خون کی کثافت ہے، v دل سے اخراج کے وقت خون کی اوسط رفتار ہے، اور g ثقلی اسراع ہے۔

مستقل P ، V ، δ ، اور v کی صورت میں W صرف g کا تفاعل ہو گا۔ ایسی صورت میں یہ مساوات درج ذیل سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔

$$W = a + \frac{b}{g} \qquad (a, b \text{ مستقل}) \tag{۶}$$

آپ چاند پر g میں تبدیلی $\mathrm{d}g$ اور زمین پر g میں اتنی ہی تبدیلی $\mathrm{d}g$ کا W پر اثر دیکھنا چاہتے ہیں۔ چاند پر $g = 1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ اور زمین پر $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ مساوات ۶ سے چاند $\mathrm{d}W$ اور زمین $\mathrm{d}W$ کی نسبت حاصل کریں۔ نتیجے دیکھنے کے بعد آپ کیا کہیں گے؟

سوال ۴.۴۶۱: مکعب کا حجم $H = x^3$ ہے۔ اس کے کنارے کی لمبائی میں Δx اضافے سے حجم میں ΔH اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ اضافی حجم ΔH کا خاکہ بنا کر اس کو درج ذیل کا مجموعہ ظاہر کریں۔

ا. تین تختے جن کے اطراف x ، x ،اور Δx ہیں۔

ب. تین ڈنڈے جن کے اطراف x ، Δx اور Δx ہیں۔

ج. ایک مکعب جس کے اطراف Δ ، Δx اور Δx ہیں۔

تفرقی کلیہ $\mathrm{d}H = 3x^2\,\mathrm{d}x$ حجم میں تبدیلی کو تین تختوں کے حجم (جزو-ا) سے حاصل کرتا ہے۔

سوال ۴.۴۶۲: گھڑیال کے لٹکن کی لمبائی اٹل رکھنے کی خاطر اس کا درجہ حرارت اٹل رکھا جاتا ہے۔ لٹکن کا دوری عرصہ T لٹکن کی لمبائی L اور زمینی اسراع g پر منحصر ہے۔ یوں سطح زمین پر گھڑیال کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے سے g کی مقامی قیمت میں معمولی تبدیلی کی وجہ سے T میں معمولی تبدیلی پیدا ہو گی۔ ΔT پر نظر رکھنے سے g میں تبدیلی $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

ا. L کو اٹل اور g کو متغیر تصور کرتے ہوئے $\mathrm{d}T$ کی مساوات حاصل کر کے جزو-ب اور جزو-ج کے جوابات دیں۔

ب. g بڑھنے سے T بڑھتا کہ گھٹتا ہے؟ کیا گھڑیال آہستہ یا تیز ہو گا؟

ج. $100\,\mathrm{cm}$ لٹکن والے گھڑیال کو ایک مقام جہاں $g = 980\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$ ہو سے دوسرے مقام پر منتقل کیا جاتا ہے جس کی وجہ سے دوری عرصہ $\Delta T = 0.001\,\mathrm{s}$ بڑھ جاتا ہے۔ $\mathrm{d}g$ حاصل کرتے ہوئے نئے مقام پر g کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۴.۴۶۳: درج ذیل دکھاتے ہوئے دکھائیں کہ مبدا پر $\sqrt{1+x}$ کی خط بندی $x \to 0$ کرنے سے بہتر ہو گی۔

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{1+\frac{x}{2}} = 1$$

سوال ۴.۴۶۴: درج ذیل دکھاتے ہوئے دکھائیں کہ مبدا پر $x \to 0$ کرنے سے $\tan x$ کی خط بندی بہتر ہو گی۔

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

سوال ۴.۴۶۵: فرض کریں تفاعل $f(x)$ کی ترسیم کا $x = a$ پر افقی مماس پایا جاتا ہے۔ کیا $x = a$ پر $f(x)$ کی خط بندی کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۴۶۶: ڈھلوان سے تفرق کا حصول۔ قابل تفرق منحنی کو بڑا کرنے سے مقامی نقطے پر منحنی سیدھا خط نظر آتا ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی نقطے پر منحنی کا تفرق ترسیم کا ڈھلوان ناپ کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

ا. یہ عمل دیکھنے کی خاطر $y = x^2$ کی ترسیم کو کمپیوٹر کے شیشے پر اتنا بڑا کریں کہ $x = 1$ پر ترسیم سیدھا خط نظر آتا ہو۔ $x = 1$ پر سیدھے خط کا ڈھلوان 2 ہو گا جو اس نقطے پر ترسیم کا تفرق ہو گا۔

ب. اب $y = e^x$ کی ترسیم کو باری باری $x = 0$ ، $x = 1$ ،اور $x = -1$ پر بڑا کر کے دیکھیں۔ ہر نقطے پر ترسیم کے ڈھلوان کا موازنہ اس نقطے پر e^x کی قیمت کے ساتھ کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟

سوال ۴.۴۶۷: نقاط تصریف پر خط بندی۔ جیسا شکل ۴.۹۳ سے واضح ہے، نقاط تصریف پر خط بندی بالخصوص بہتر بیٹھتی ہے۔اس کی وضاحت سوال ۹.۵۴۹ میں کی جائے گی۔ترسیم سے $x = 0$ اور $x = \sqrt{3}$ پر $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ کا ڈھلوان حاصل کریں۔

سوال ۴.۴۶۸: خط بندی بہترین خطی تخمین ہے۔(خط بندی استعمال کرنے کی وجہ۔) فرض کریں $x = a$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہے اور $g(x) = m(x-a) + c$ ایک خطی تفاعل ہے جہاں m اور c مستقل ہیں۔اگر $x = a$ کے نزدیک خلل $E(x) = f(x) - g(x)$ بہت کم ہو تب ہم خط بندی $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ کے بجائے g کو بطور خطی تخمین استعمال کر سکتے ہیں۔دکھائیں کہ g پر درج ذیل شرائط لاگو کرنے سے $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ حاصل ہو گا۔

ا. $E(a) = 0$ $x = a$ پر تخمینی خلل صفر ہے

ب. $\lim_{x\to a} \frac{E(x)}{x-a} = 0$ $x - a$ کے لحاظ سے خلل قابل نظر انداز ہے۔

یوں خط بندی $L(x)$ وہ واحد خطی تخمین ہے جو $x = a$ پر صفر خلل دیتا ہے اور جس کا خلل $x - a$ کے لحاظ سے قابل نظر انداز ہے۔

سوال ۴.۴۶۹: کیلکولیٹر میں 2 کا ہندسہ لکھ کر بار بار جذر لیں۔آپ کیا ترتیب دیکھتے ہیں؟ بار بار $\sqrt[10]{\ }$ لینے سے کیا ترتیب دیکھنے کو ملتی ہے؟

سوال ۴.۴۷۰: گزشتہ سوال کو 2 کے بجائے 0.5 کے لیے دہرائیں۔اب کیا دیکھنے کو ملتا ہے؟ کیا 2 کی جگہ کوئی بھی مثبت عدد x استعمال کیا جا سکتا ہے؟ وجہ بیان کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۴.۴۷۱ تا سوال ۴.۴۷۴ میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے وقفہ I پر تفاعل کے بجائے خط بندی استعمال کرتے ہوئے خلل کی مقدار کا اندازہ لگانا ہو گا۔درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ I پر تفاعل f ترسیم کریں۔

ب. نقطہ $x = a$ پر تفاعل کی خط بندی L تلاش کریں۔

ج. f اور L کو ساتھ ساتھ ترسیم کریں۔

د. وقفہ I پر مطلق خلل $|f(x) - L(x)|$ ترسیم کر کے اس کی اعظم قیمت حاصل کریں۔

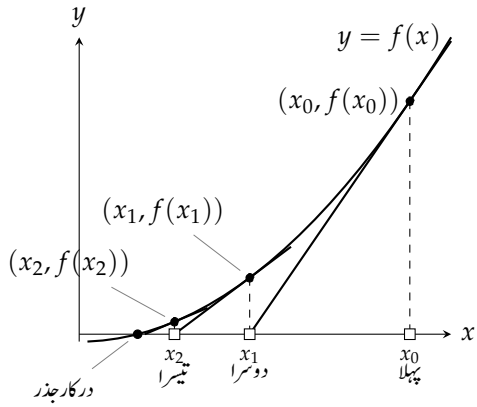
ھ. جزو-د کی ترسیم سے $\delta > 0$ کی اعظم قیمت تلاش کریں جو $|x - a| < \delta \implies |f(x) - L(x)| < \epsilon$ کو مطمئن کرتی ہو جہاں $\epsilon = 0.5, 0.1, 0.01$ لیں۔ترسیم کو دیکھ کر بتائیں آیا آپ کی تخمینی δ کی قیمتیں درست ہیں؟

سوال ۴.۴۷۱: $f(x) = x^3 + x^2 - 2x, \quad [-1, 2], \quad a = 1$

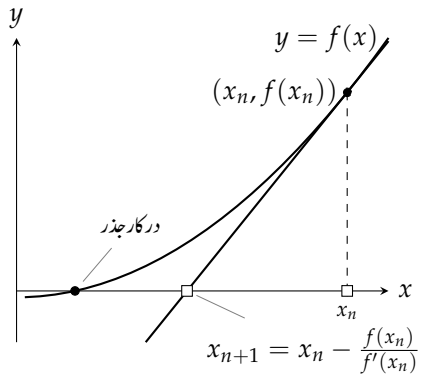
سوال ۴.۴۷۲: $f(x) = \frac{x-1}{4x^2+1}, \quad [-\frac{3}{4}, 1], \quad a = \frac{1}{2}$

سوال ۴.۴۷۳: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-2), \quad [-2, 3], \quad a = 2$

سوال ۴.۴۷۴: $f(x) = \sqrt{x} - \sin x, \quad [0, 2\pi], \quad a = 2$



شکل ۴.۹۶: ترکیب نیوٹن ابتدائی قیاس x_0 سے شروع ہو کر (موزوں صورت میں) بتدریج بہتر جواب دیتی ہے۔



شکل ۴.۹۷: x_n سے منحنی تک جا کر مماس کے ساتھ ساتھ چلتے ہوئے x_{n+1} تک پہنچتے ہیں۔

۴.۸ ترکیب نیوٹن

ہم خطی اور دو درجی مساوات حل کرنے کے سادہ کلیات جانتے ہیں۔ تین درجی اور چار درجی مساوات حل کرنے کے نسبتاً مشکل کلیات بھی پائے جاتے ہیں۔ ناروے کے ریاضی دان نیلز ہنری ایبل (1829 – 1802) نے ثابت کیا کہ چار سے زیادہ درجے کی مساوات حل کرنے کا کوئی کلیہ نہیں پایا جاتا۔

جب $f(x) = 0$ طرز کی مساوات کا بالکل درست حل حاصل کرنا ممکن نہ ہو تب ہم احصاء کے اعدادی طریقے استعمال کر کے حل کی تخمین حاصل کرتے ہیں۔ ترکیب نیوٹن ایسی ایک ترکیب ہے۔ اس ترکیب میں، جن نقطوں پر $f(x)$ صفر ہو ان نقطوں کے نزدیک $y = f(x)$ کو مماس سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہاں بھی خط بندی کے ذریعہ مسائل حل کیے جاتے ہیں۔

نظریہ

ترکیب نیوٹن مساوات $f(x) = 0$ کے حل کی تخمینی قیمتوں کی ترتیب حاصل کرتی ہے جو اصل حل تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے۔ ہم اس ترتیب کا پہلا عدد x_0 منتخب کرتے ہیں۔ موزوں صورتوں میں یہ ترتیب قدم باقدم آگے بڑھتے ہوئے دیگر نقطے دیتی ہے۔ x_0 پر f کا مماس محور x کو ترتیب کے اگلے نقطہ x_1 پر قطع کرتا ہے (شکل ۴.۹۶)۔

ابتدائی نقطہ x_0 کو ترسیم دیکھ کر یا قیاساً منتخب کیا جا سکتا ہے۔ یہ ترکیب نقطہ $(x_0, f(x_0))$ پر تفاعل کے مماس کو تفاعل کا تخمین لیتے ہوئے مماس اور محور x کے مقطع کو x_1 کہتا ہے جو ترتیب کا دوسرا عدد ہو گا۔ x_1 عموماً x_0 سے بہتر حل ہو گا۔ اسی طرح نقطہ $(x_1, f(x_1))$ پر تفاعل کا مماس محور x کو x_2 پر قطع کرے گا جو ترتیب کا تیسرا عدد ہو گا۔ x_2 عموماً x_1 سے بہتر حل ہو گا۔ اسی طرح قدم باقدم چلتے ہوئے بہتر سے بہتر حل کی ترتیب حاصل کی جاتی ہے۔ یہ ترتیب اصل حل کے نزدیک سے نزدیک ہوتی چلی جاتی ہے۔ قابل قبول حل تک پہنچ کر ہم رک جاتے ہیں۔

۲۴۴ ہم یکے بعد دیگرے تخمینی قیمتوں کے حصول کا کلیہ اخذ کر سکتے ہیں۔ دیے گئے تخمین x_n پر تفاعل کے مماس کی مساوات درج ذیل ہو گی

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \tag{۱}$$

۲۴۵ جو x محور کو اس نقطے پر قطع کرے گی جہاں $y = 0$ ہو۔ مساوات ۱ میں $y = 0$ پُر کرتے ہوئے نقطہ تقاطع یعنی اگلا نقطہ x_{n+1} حاصل کرتے ہیں

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \quad \Longrightarrow \; x = x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

۲۴۶ جہاں $f'(x_n) \neq 0$ فرض کیا گیا ہے (شکل ۴.۹۷)۔

۲۴۷ **ترکیب نیوٹن کا لائحہ عمل**

۲۴۸

۲۴۹ ا. مساوات $f(x) = 0$ کے جذر کی قیمت قیاساً حاصل کریں۔ مساوات $y = f(x)$ کی ترسیم مددگار ثابت ہو گی۔

۲۵۰ ب. درج ذیل کلیہ استعمال کرتے ہوئے پہلی تخمین سے دوسری تخمین، دوسری تخمین سے تیسری تخمین، وغیرہ، حاصل کریں

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (f'(x_n) \neq 0) \tag{۲}$$

۲۵۱ جہاں نقطہ x_n پر تفاعل کا تفرق $f'(x_n)$ ہے۔

۲۵۲ ہم اپنی پہلی مثال میں $\sqrt{2}$ کا مثبت جذر مساوات $f(x) = x^2 - 2 = 0$ حل کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

۲۵۳ مثال ۴.۵۲: مساوات $f(x) = x^2 - 2 = 0$ کا مثبت جذر تلاش کریں۔

۲۵۴ **حل**

۲۵۵ $f(x) = x^2 - 2$ اور $f'(x) = 2x$ لیتے ہوئے مساوات ۲ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

۲۵۶ کم سے کم حساب و کتاب کی خاطر ہم اس مساوات کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \\ &= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \end{aligned}$$

۲۵۷ ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے مساوات

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

جدول ۴.۲: ابتدائی قیمت $x_0 = 1$ لیتے ہوئے $f(x) = x^3 - x - 1$ پر ترکیب نیوٹن کے اطلاق کے نتائج۔

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	-1	2	1.5
1	1.5	0.875	5.75	1.347 826 087
2	1.347 826 087	0.100 682 173	4.449 905 482	1.325 200 399
3	1.325 200 399	0.002 058 362	4.268 468 293	1.324 718 174
4	1.324 718 174	0.000 000 924	4.264 634 722	1.324 717 957
5	1.324 717 957	-1.0437×10^{-9}	4.264 632 997	1.324 717 957

سے درج ذیل بتدریج بہتر تخمینی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

	خلل	درست ہندسوں کی تعداد
$x_0 = 1$	-0.41421	1
$x_1 = 1.5$	0.08579	1
$x_2 = 1.41667$	0.00246	3
$x_3 = 1.41422$	0.00001	5

□

چونکہ ترکیب نیوٹن کی مرکوزیت بہت تیز ہے (جس پر جلد بات کی جائے گی) زیادہ تر کیلکولیٹر جذر کو ترکیب نیوٹن سے تلاش کرتے ہیں۔ اگر درج بالا جدول میں 5 کے بجائے 13 اعشاریہ مقامات تک درست ہندسے لیے جاتے تب اگلے قدم میں $\sqrt{2}$ کی قیمت 10 اعشاریہ مقامات تک درست حاصل ہوتی۔

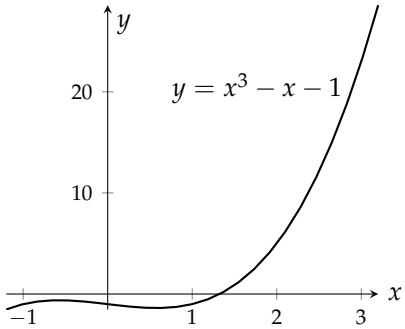
مثال ۴.۵۳: اس نقطے کا x محدد تلاش کریں جس پر منحنی $y = x^3 - x$ افقی خط $y = 1$ کو قطع کرتی ہے۔

حل

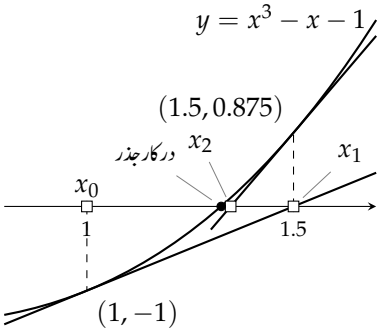
منحنی اخط کو اس نقطے پر قطع کرتی ہے جہاں $x^3 - x = 1$ یعنی $x^3 - x - 1 = 0$ ہو۔ کہاں $f(x) = x^3 - x - 1$ صفر ہو گا؟ شکل ۴.۹۸ میں ترسیم کا ایک جذر $x = 1$ اور $x = 2$ کے بیچ دیکھا جا سکتا ہے۔ ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن کو f پر لاگو کرتے ہیں۔ نتائج جدول ۴.۲ اور شکل ۴.۹۹ میں دیے گئے ہیں۔ □

جیسا شکل ۴.۱۰۰ میں دکھایا گیا ہے ہم $B_0(3, 23)$ کو ابتدائی نقطہ منتخب کر سکتے تھے جہاں $x_0 = 3$ ہو گا۔ اگرچہ B_0 افقی محور سے بہت دور ہے لیکن $x_0 = 3$ پر منحنی کا مماس افقی محور کو $x_1 = 2.11$ پر قطع کرتا ہے جو x_0 سے بہتر نقطہ ہے۔ اب $f(x) = x^3 - x - 1$ اور $f'(x) = 3x^2 - 1$ لیتے ہوئے پہلے کی طرح مساوات ۲ کے بار بار استعمال سے چھٹے قدم پر 9 اعشاریہ جواب $x_6 = x_5 = 1.324\,717\,957$ حاصل ہو گا۔

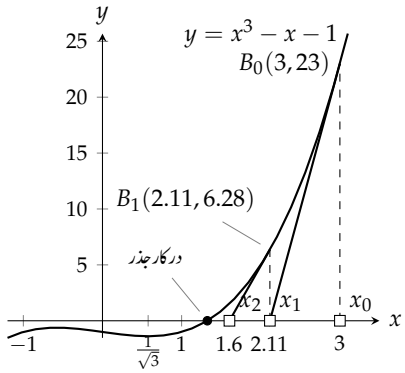
شکل ۴.۱۰۰ میں منحنی کا مقامی اعظم $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ اور مقامی اقل $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ پر پایا جاتا ہے۔ اگر ہم ان نقطوں کے بیچ ابتدائی نقطہ منتخب کرتے ہوئے



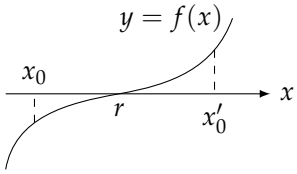
شکل ۴.۹۸: منحنی $f(x) = x^3 - x - 1$ محور x کو $x = 1$ اور $x = 2$ کے بیچ قطع کرتی ہے۔



شکل ۴.۹۹: جدول ۴.۲ کی پہلی تین قیمتیں۔



شکل ۴.۱۰۰: جذر حاصل کرنے کی خاطر $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ کی دائیں جانب کسی بھی نقطہ x_0 سے شروع کیا جا سکتا ہے۔



شکل ۴.۱۰۱: جذر r کے دونوں اطراف ابتدائی نقطہ لیتے ہوئے ترکیب نیوٹن r پر مرکوز ہو گا۔

ترکیب نیوٹن استعمال کریں تب ہمیں اچھے نتائج حاصل نہیں ہوں گے۔ البتہ ہم $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ کی دائیں جانب کسی بھی نقطہ سے شروع کر سکتے ہیں۔ اگرچہ ایسا کرنا بہتر نہیں ہو گا لیکن ہم B_0 سے بھی زیادہ دور، مثلاً $x_0 = 10$ کو، ابتدائی نقطہ منتخب کر سکتے ہیں۔ یوں زیادہ قدموں کے بعد اصل جواب حاصل ہو گا۔

ارتکاز عموماً یقینی ہو گا

ترکیب نیوٹن بہت تیزی سے مرکوز ہوتا ہے، لیکن چونکہ مرکوزیت لازمی نہیں لہٰذا یہ دیکھنا لازم ہو گا کہ آیا ترکیب مرتکز ہے یا نہیں۔ مرکوزیت یقینی بنانے کی خاطر ہم تفاعل ترسیم کر کے موزوں ابتدائی نقطہ x_0 منتخب کر سکتے ہیں۔ صفر کے قریب ہونے کو $|f(x_n)|$ کی قیمت سے دیکھا جا سکتا ہے جبکہ مرکوزیت کو $|x_n - x_{n+1}|$ سے پرکھا جا سکتا ہے۔

اس زمرے میں نظریہ بھی کچھ مدد مہیا کرتا ہے۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ جذر r پر وقفہ (جس میں r پایا جاتا ہو) میں تمام x کے لیے

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1 \tag{۳}$$

کی صورت میں وقفہ کے اندر کسی بھی ابتدائی نقطہ x_0 کے لیے ترکیب مرتکز ہو گی۔ حقیقت میں اس مسئلے کا اطلاق مشکل ثابت ہوتا ہے لہٰذا $f(x_n)$ اور $|x_n - x_{n+1}|$ کی قیمتوں سے مرکوزیت دیکھی جاتی ہے۔

عدم مساوات ۳ مرکوزیت کے لیے **کافی** نا کہ لازمی شرط ہے۔ ایسی مثالیں پائی جاتی ہیں جہاں جذر r پر ایسا کوئی وقفہ نہیں پایا جاتا جس پر عدم مساوات ۳ مطمئن ہوتی ہو لیکن ترکیب نیوٹن مرتکز ہوتی ہے۔ ایسے تمام وقفے پر ترکیب نیوٹن مرتکز ہو گی جس میں x_0 اور درکار جذر کے بیچ وقفے پر منحنی $y = f(x)$ محور x کی طرف محدب (جھکا) ہو (شکل ۴.۱۰۱)۔

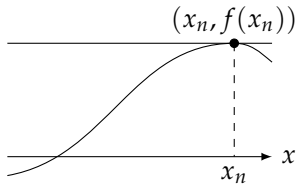
سازگار حالات میں ترکیب نیوٹن کی جذر r پر ارتکاز کی رفتار اعلیٰ احصاء کا درج ذیل کلیہ دیتا ہے

$$\underbrace{|x_{n+1} - r|}_{\text{خلل } e_{n+1}} \leq \frac{\text{اعظم } |f''|}{\text{اقل } |f'|}|x_n - r|^2 = c \cdot \underbrace{|x_n - r|^2}_{\text{خلل } e_n} \tag{۴}$$

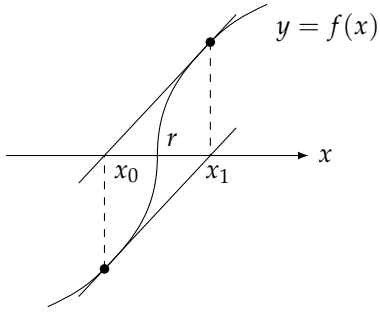
جہاں c مستقل ہے، اور اعظم قیمت اور اقل قیمت r پر وقفہ میں پائی جاتی اعظم اور اقل قیمتیں ہیں۔ درج بالا کلیہ کہتا ہے کہ قدم $n + 1$ میں خلل کی قیمت قدم n میں خلل کی قیمت کے مربع ضرب مستقل سے زیادہ نہیں ہو گی۔ اس بات کی گہرائی سمجھنے کی خاطر فرض کریں کہ $c \leq 1$ ہے اور $|x_n - r| < 10^{-3}$ ہے تب $|x_{n+1} - r| < 10^{-6}$ ہو گا۔ یوں ایک ہی قدم میں درستگی 3 اعشاریہ سے 6 اعشاریہ ہو گئی۔ عدم مساوات ۳ اور عدم مساوات ۴ میں ہم فرض کرتے ہیں کہ f "اچھا" تفاعل ہے۔ عدم مساوات ۴ میں اس سے مراد ایسا تفاعل ہے جس کا r پر واحد ایک جذر پایا جاتا ہو لہٰذا $f'(r) \neq 0$ ہو گا۔ اگر r پر ایک سے زیادہ جذر پائے جاتے ہوں تب ارتکاز کی رفتار کم ہو سکتی ہے۔

تاہم چیزیں غلطی کی طرف جا سکتی ہیں

اگر $f'(x_n) = 0$ ہو تب x_n پر منحنی کا مماس محور x کو قطع نہیں کرے گا لہٰذا x_{n+1} ناقابل معلوم ہو گا اور ترکیب نیوٹن رک جائے گا (شکل ۴.۱۰۲)۔ ایسی صورت میں نئے ابتدائی نقطہ سے شروع کریں۔ اب عین ممکن ہے کہ f اور f' دونوں کا مشترک جذر پایا جاتا ہو۔ یہ جاننے کے لیے کہ آیا ایسا ہے آپ $f'(x) = 0$ کا حل تلاش کر کے ان قیمتوں پر f کی قیمتیں دیکھ سکتے ہیں یا f اور f' کو ایک ساتھ ترسیم کر سکتے ہیں۔



شکل ۴.۱۰۲: اگر $f'(x_n) = 0$ ہو تب نقطہ تقاطع نہیں پایا جاتا لہٰذا ترکیب نیوٹن رک جاتی ہے اور x_{n+1} ناقابل معلوم ہو گا۔



شکل ۴.۱۰۳: ترکیب نیوٹن کی عدم مرکوزیت۔

۴۹۵ ترکیب نیوٹن بعض اوقات غیر مرتکز ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{r-x}, & x < r \\ \sqrt{x-r}, & x \geq r \end{cases}$$

۴۹۶ جس کو شکل ۴.۱۰۳ میں دکھایا گیا ہے لیتے ہیں۔ اگر ہم $x_0 = r - h$ سے شروع کریں تب $x_1 = r + h$ ہو گا اور ہر قدم پر یہی دو قیمتیں دہرائی
۴۹۷ جاتی ہیں۔ ہم جتنے قدم بھی لیں، حاصل تخمین ابتدائی قیاس سے زیادہ بہتر نہیں ہو گا۔

۴۹۸ اگر ترکیب نیوٹن مرتکز ہو تب ہم توقع کرتے ہیں کہ یہ جذر پر مرکوز ہو گا۔ حقیقت میں عموماً ایسا ہی ہو گا البتہ بعض اوقات یہ کسی ایسے نقطے پر مرکوز ہو گا جہاں
۴۹۹ جذر موجود نہیں ہو گا۔ خوش قسمتی سے ایسے مواقع بہت کم پائے جاتے ہیں۔

۵۰۰ بعض اوقات آپ ایک جذر کو تلاش کرنا چاہیں گے جبکہ ترکیب نیوٹن کسی دوسرے جذر پر مرکوز ہو گا۔ شکل ۴.۱۰۴ میں ایسی دو مثالیں دی گئی ہیں۔

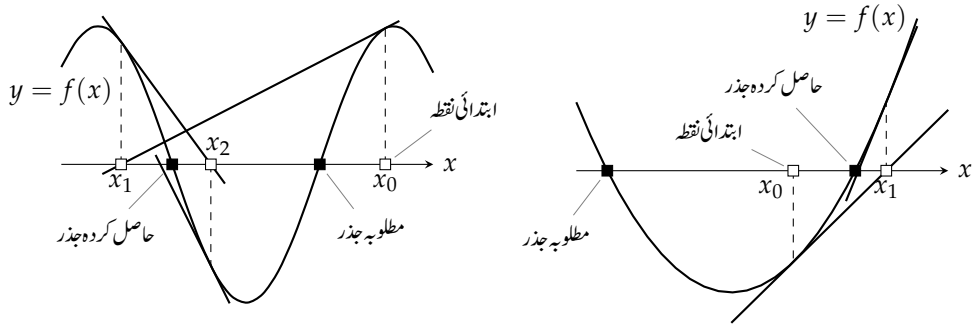
۵۰۱ ایسی صورت میں، کمپیوٹر پر تفاعل کی ترسیم یا احصاء کی تراکیب استعمال کرتے ہوئے درکار جذر کے قریب ابتدائی نقطہ تلاش کرتے ہوئے حل کریں۔ امید کی جاتی
۵۰۲ ہے کہ اس سے مسئلہ حل ہو جائے گا۔

۵۰۳ ترکیب نیوٹن میں ابتری

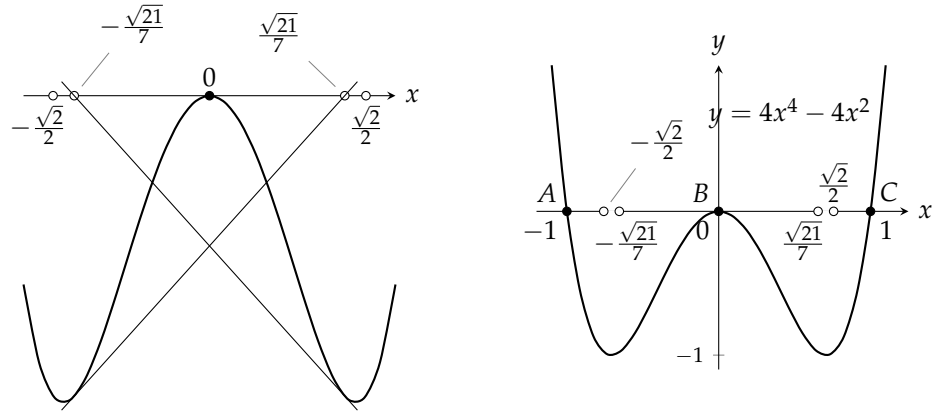
۵۰۴ ترکیب نیوٹن سے جذر کا حصول ابتری کا شکار ہو سکتا ہے یعنی مساوات کے لیے حاصل جذر کی قیمت ابتدائی نقطے کے مقام کو بہت حساس ہو گی۔

۵۰۵ مساوات $4x^4 - 4x^2 = 0$ ایسی ایک مثال ہے جس کو شکل ۴.۱۰۵ میں دکھایا گیا ہے۔ وقفہ $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ، $(-\frac{\sqrt{21}}{7}, \frac{\sqrt{21}}{7})$ ،
۵۰۶ اور $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$ میں ابتدائی نقطہ منتخب کرنے سے بالترتیب جذر A ، B ، اور C ملتا ہے۔ نقطے $x = \mp\frac{\sqrt{21}}{7}$ دہراتے ہیں۔ نقطہ $\frac{\sqrt{21}}{7}$ اور
۵۰۷ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ کے بیچ نقطوں کے ایسے لامتناہی کھلے وقفے پائے جاتے ہیں جو جذر A کو کھینچے جاتے ہیں۔ ان وقفوں کے بیچ، نقطوں کے ایسے کھلے وقفے پائے جاتے ہیں
۵۰۸ جو جذر C کو کھینچے جاتے ہیں۔ ان کھلے وقفوں کے آخری سر (جن کی تعداد لامتناہی ہے) کوئی جذر نہیں دیتے بلکہ یہ ایک دوسرے کو دہراتے ہیں۔ یہی عمل
۵۰۹ وقفہ $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{21}}{7})$ میں بھی پایا جاتا ہے۔

۵۱۰ $\frac{\sqrt{21}}{7}$ اور $\frac{\sqrt{2}}{2}$ کے بیچ (یا $-\frac{\sqrt{21}}{7}$ اور $-\frac{\sqrt{2}}{2}$) کے بیچ ابتری کی بہترین مثال دیکھنے کو ملتی ہے۔ نقطہ $\frac{\sqrt{21}}{7}$ تک دائیں سے پہنچتے ہوئے ان نقطوں



شکل ۴.۱۰۴: ترکیب نیوٹن کسی دوسرے جذر پر مرکوز ہو سکتا ہے۔



شکل ۴.۱۰۵: ترکیب نیوٹن ابتری کا شکار ہے۔

کے بیچ فرق کرنا مشکل ہو جاتا ہے جو جذر A اور جذر C دیتے ہیں۔ نقطہ $\frac{\sqrt{21}}{7}$ کے ایک ہی طرف رہتے ہوئے انتہائی قریب قریب ایسے نقطے پائے جاتے ہیں جن سے حاصل جذر ایک دوسرے سے بہت دور پائے جاتے ہیں۔

سوالات

حصول جذر

سوال ۴.۴۷۵: $x_0 = -1$ لیتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے مساوات $x^2 + x - 1 = 0$ کا حل حاصل کریں۔ اب $x_0 = 1$ لیتے ہوئے دوسرا حل تلاش کریں۔ دونوں صورتوں میں x_2 تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۷۶: $x_0 = 0$ لیتے ہوئے $x^3 + 3x + 1 = 0$ کا ایک حقیقی حل ترکیب نیوٹن سے تلاش کریں۔ اس کے بعد x_2 تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۷۷: $x_0 = -1$ لیتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے تفاعل $f(x) = x^4 + x - 3$ کا بایاں صفر اور $x_0 = 1$ لیتے ہوئے دایاں صفر تلاش کریں۔ دونوں صورتوں میں x_2 تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۷۸: تفاعل $f(x) = 2x - x^2 + 1$ کے دونوں جذر ترکیب نیوٹن سے تلاش کریں۔ $x_0 = 0$ سے شروع کرتے ہوئے بائیں ہاتھ صفر اور $x_0 = 2$ سے شروع کرتے ہوئے دائیں ہاتھ صفر حاصل کریں۔ دونوں صورتوں میں x_2 تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۷۹: مساوات $x^4 - 2 = 0$ کو ترکیب نیوٹن سے حل کرتے ہوئے 2 کا مثبت چوتھا جذر تلاش کریں۔ ابتدائی نقطہ $x_0 = 1$ لیں۔ x_2 کیا ہو گا؟

سوال ۴.۴۸۰: مساوات $x^4 - 2 = 0$ کو حل کرتے ہوئے 2 کا منفی چوتھا جذر ترکیب نیوٹن سے تلاش کریں۔ ابتدائی نقطہ $x_0 = -1$ لیں۔ x_2 کیا ہو گا؟

سوال ۴.۴۸۱: x کی کس قیمت پر $\cos x = 2x$ ہو گا؟ کیلکولیٹر استعمال کریں۔

سوال ۴.۴۸۲: x کی کس قیمت پر $\cos x = -x$ ہو گا؟ کیلکولیٹر استعمال کریں۔

سوال ۴.۴۸۳: متوسط قیمت مسئلہ (صفحہ ۱۴۸) استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $f(x) = x^3 + 2x - 4$ کا ایک جذر $x = 1$ اور $x = 2$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ یہ جذر ترکیب نیوٹن کی مدد سے 5 اعشاریہ مقامات تک درستگی تک تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۸۴: π کی قیمت کی تخمین مساوات $\tan x = 0$ کے حل سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ نقطہ $x_0 = 3$ سے شروع کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے، کیلکولیٹر کے استعمال کے ساتھ، π کی قیمت جتنے اعشاریہ مقامات تک درستگی تک ممکن ہو حاصل کریں۔

نظریہ، مثالیں، اور استعمال

سوال ۴.۴۸۵: فرض کریں آپ کا منتخب کردہ ابتدائی نقطہ مساوات $f(x) = 0$ کا حل ہے۔ مزید فرض کریں کہ $f'(x_0)$ معین اور غیر صفر ہے۔ ایسی صورت میں x_1 اور دیگر تخمین کیا حاصل ہوں گی؟

سوال ۴.۴۸۶: آپ $\frac{\pi}{2}$ کی قیمت 5 اعشاریہ مقامات تک درست ترکیب نیوٹن سے $\cos x = 0$ حل کرتے ہوئے حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ کیا ابتدائی نقطے کی کوئی اہمیت ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۴۸۷: ارتعاش۔ اگر $h > 0$ ہو تب ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $x_0 = h$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل تفاعل کے لیے $x_1 = -h$ حاصل ہو گا

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

اور $x_0 = -h$ منتخب کرنے سے $x_1 = h$ حاصل ہو گا۔ اس مسئلے کی ترسیم کھینچ کر اس عمل کی وضاحت کریں۔

سوال ۴.۴۸۸: بگڑتی ہوئی تخمین تفاعل $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ کو ترکیب نیوٹن سے حل کریں۔ ابتدائی نقطہ $x_0 = 1$ لیتے ہوئے x_1 ، x_2 ، x_3 اور x_4 تلاش کریں۔ $|x_n|$ کا کلیہ کیا ہو گا؟ $n \to \infty$ کرنے سے $|x_n|$ کو کیا ہو گا؟ تصویر کشی کر کے وضاحت کریں۔

سوال ۴.۴۸۹: سمجھائیں کہ درج ذیل چار فقرے ایک ہی معلومات پوچھ رہی ہیں۔

ا. تفاعل $f(x) = x^3 - 3x - 1$ کا جذر تلاش کریں۔

ب. منحنی $y = x^3$ اور خط $y = 3x + 1$ کے نقطہ تقاطع کا x محدد تلاش کریں۔

ج. منحنی $y = x^3 - 3x$ جہاں $y = 1$ کو قطع کرتی ہے اس نقطے کا x محدد تلاش کریں۔

د. x کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x + 5$ کا تفرق صفر ہو۔

سوال ۴.۴۹۰: ایک سیارے کا مقام تلاش کرنے کی خاطر ہمیں $x = 1 + 0.5 \sin x$ حل کرنا ہو گا۔ تفاعل $f(x) = x - 1 - 0.5 \sin x$ کو ترسیم کرتے ہوئے ایک جذر $x = 1.5$ کے قریب حاصل ہوتا ہے۔ اس نقطہ سے شروع کرتے ہوئے بہتر حل x_1 تلاش کریں۔ (5 اعشاریہ مقامات تک درست حل $x = 1.49870$ ہے۔)

سوال ۴.۴۹۱:

ا. ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے $f(x) = x^3 - 3x - 1$ کے دو منفی جذر 5 اعشاریہ مقامات تک درست تلاش کریں۔

ب. وقفہ $-2 \leq x \leq -2.5$ پر $f(x) = x^3 - 3x - 1$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ ترسیم کو جذر کے قریب بڑا کرتے ہوئے جذر کو 5 اعشاریہ مقامات تک درستگی تک تلاش کریں۔

ج. تفاعل $g(x) = 0.25x^4 - 1.5x^2 - x + 5$ کو ترسیم کریں۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے x کی 5 اعشاریہ مقامات تک درست وہ قیمت تلاش کریں جہاں ترسیم کا مماس افقی ہو۔

سوال ۴.۴۹۲: ترسیم $y = \tan x$ خط $y = 2x$ کو $x = 0$ اور $x = \frac{\pi}{2}$ کے بیچ قطع کرتی ہے۔ ترکیب نیوٹن سے نقطہ تقاطع تلاش کریں۔

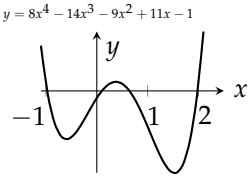
سوال ۴.۴۹۳: ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$ کے دو حقیقی جذر تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۹۴: $\sin 3x = 0.99 - x^2$ کے کتنے حل ہوں گے؟ ترکیب نیوٹن سے حل تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۹۵: کیا $\cos 3x$ کبھی x کو قطع کرتا ہے؟ اپنے جواب جی وجہ پیش کریں۔ ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے نقطہ تقاطع تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۹۶: تفاعل $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ کے چار حقیقی صفر تلاش کریں۔

سوال۷.۴.۴۹: تجزی $8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 8(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)$ میں



r_1 ، r_2 ، r_3 ،اور r_4 تلاش کریں۔

باب ۵

تکمل

اس باب میں دو اعمال اور ان کے بیچ تعلق پر غور کیا جائے گا۔ پہلے عمل میں ہم تفرق سے تفاعل حاصل کرتے ہیں۔ دوسرے عمل میں ہم حجم، رقبہ، وغیرہ کے بالکل ٹھیک کلیات یکے بعد دیگرے بہتر سے بہتر تخمین سے دریافت کرتے ہیں۔ دونوں اعمال تکمل کہلاتے ہیں۔

تکمل اور تفرق کا گہرا تعلق ہے۔ یہ تعلق ریاضیات کے اہم ترین حقائق میں سے ایک ہے جو لیبنز اور نیوٹن نے علیحدہ علیحدہ دریافت کیا اور جس کی دریافت جدید دور کی عظیم ترین فنی ترقی تصور کی جاتی ہے۔

۵.۱ غیر قطعی تکملات

جسم کے موجودہ مقام اور سمتی رفتار سے جسم کے مستقبل مقام کی پیش گوئی کرنا احصاء کی اولین کامیابیوں میں سے ایک تھی۔ آج کل تفاعل کی کسی ایک معلوم قیمت اور شرح تبدیلی سے تفاعل کی دیگر قیمتوں کا حصول معمول کی بات ہے۔ احصاء کی مدد سے کشش زمین سے نکلنے کے لیے درکار رفتار یا تابکار پولونیم ۲۱۰ کی موجودہ عملیت اور شرح تحلیل سے اس کی قابل استعمال زندگی کا حساب لگایا جا سکتا ہے۔

تفاعل کی معلوم قیمتوں میں سے کسی ایک قیمت اور تفاعل کے تفرق $f(x)$ سے تفاعل کا حصول دو قدموں میں ممکن ہے۔ پہلے قدم میں وہ تمام تفاعلات حاصل کیے جاتے ہیں جن کا تفرق f ہے۔ یہ تفاعلات f کے ضد تفارق کہلاتے ہیں اور جس کلیہ سے انہیں اخذ کیا جاتا ہے وہ f کا غیر قطعی تکمل کہلاتا ہے۔ دوسرے قدم میں تفاعل کی معلوم قیمت استعمال کرتے ہوئے ضد تفارق میں سے مخصوص تفاعل منتخب کیا جاتا ہے۔ اس حصہ میں پہلے قدم پر غور کیا جائے گا جبکہ دوسرے قدم پر اگلے حصہ میں غور کیا جائے گا۔

اگرچہ تفاعل کے تمام ضد تفارق حاصل کرنے والا کلیہ دریافت کرنا ناممکن نظر آتا ہے، حقیقت میں ایسا نہیں۔ مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ ۴.۴) کے پہلے دو ضمنی نتائج کی مدد سے تفاعل کے ایک ضد تفرق سے اس کے تمام ضد تفارق حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

۳۸۴ ضد تفرق کا حصول۔ غیر قطعی تکمل

۳۸۵ تعریف: تفاعل $f(x)$ کا ضد تفرق تب $F(x)$ ہو گا جب f کے دائرہ کار میں تمام x کے لیے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$F'(x) = f(x)$$

۳۸۶ f کے تمام ضد تفارق کا سلسلہ x کے لحاظ سے f کا **غیر قطعی تکمل**[1] ہو گا جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

۳۸۷ علامت $\int$ کو **علامت تکمل** کہتے ہیں۔ تفاعل f کو **متکمل**[2] اور x کو **تکمل کا متغیر**[3] کہتے ہیں۔

۳۸۸ □

۳۸۹ مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ ۴.۴) کے دوسرے ضمنی نتیجے کے تحت تفاعل f کے حاصل کردہ ضد تفرق F اور اس کے کسی دوسرے ضد تفرق میں صرف
۳۹۰ مستقل کا فرق پایا جائے گا۔ اس حقیقت کو تکملی علامتیت میں ظاہر کرتے ہیں:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \mathrm{C} \tag{۱}$$

۳۹۱ مستقل C کو **تکمل کا مستقل**[4] یا **اختیاری مستقل**[5] کہتے ہیں۔ ہم مساوات ۱ کو یوں پڑھتے ہیں: "x کے لحاظ سے تفاعل f کا غیر قطعی تکمل
۳۹۲ $F(x) + \mathrm{C}$ ہے۔" $F(x) + \mathrm{C}$ کے حصول کو f کے **تکمل** کا حصول کہتے ہیں۔

۳۹۳ مثال ۵.۱: $\int 2x\,\mathrm{d}x$ تلاش کریں۔

۳۹۴

۳۹۵ **حل**

$$\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + \mathrm{C}$$

۳۹۶ $2x$ کا ضد تفرق x^2 ہے اور C تکمل کا مستقل ہے۔ کلیہ $x^2 + \mathrm{C}$ تفاعل $2x$ کے تمام تفارق دیتا ہے۔ یوں $x^2 + 1$ ، $x^2 - \pi$ ، اور
۳۹۷ $x^2 + \sqrt{2}$ تفاعل $2x$ کے ممکنہ ضد تفرق ہیں۔ آپ ان کا تفرق باری باری لے کر تصدیق کر سکتے ہیں۔ □

۳۹۸ ہم عموماً تفرق کے کلیات سے ضد تفارق کے کلیات اخذ کرتے ہیں۔ جدول ۵.۱ میں غیر قطعی تکملات کے سامنے موزوں تفرقی کلیات کو ضد لکھا گیا ہے۔

۳۹۹ مثال ۵.۲:

---

[1] indefiniteintegral
[2] integrand
[3] variableofintegration
[4] constantofintegration
[5] arbitraryconstant

جدول ۱.۵: تکمل کے کلیات

تفرقی کلیات کو ضد لکھا گیا ہے	غیر قطعی تکمل	
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$	$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1,\ n$ ناطق	1.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1$	$\int \mathrm{d}x = \int 1 \,\mathrm{d}x = x + C$ (خصوصی صورت)	
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\frac{\cos kx}{k}) = \sin kx$	$\int \sin kx \,\mathrm{d}x = -\frac{\cos kx}{k} + C$	2.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\sin kx}{k}) = \cos kx$	$\int \cos kx \,\mathrm{d}x = \frac{\sin kx}{k} + C$	3.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan x = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \tan x + C$	4.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\cot x) = \csc^2 x$	$\int \csc^2 x \,\mathrm{d}x = -\cot x + C$	5.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sec x = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x \,\mathrm{d}x = \sec x + C$	6.
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\csc x) = \csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x \,\mathrm{d}x = -\csc x + C$	7.

۶۳۰۰ ا. جدول ۵.۱ کے کلیہ ۱ میں $n = 5$ لیتے ہوئے ذیل ہو گا۔

$$\int x^5 \, \mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} + C$$

۶۳۰۱ ب. کلیہ ۱ میں $n = -\frac{1}{2}$ لیتے ہوئے ذیل ہو گا۔

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x = 2x^{\frac{1}{2}} + C$$

۶۳۰۲ ج. کلیہ ۲ میں $k = 2$ لیتے ہوئے ذیل ہو گا۔

$$\int \sin 2x \, \mathrm{d}x = -\frac{\cos 2x}{2} + C$$

۶۳۰۳ د. کلیہ ۳ میں $k = \frac{1}{2}$ لیتے ہوئے ذیل ہو گا۔

$$\int \cos \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2} x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin \frac{1}{2} x}{\frac{1}{2}} + C = 2 \sin \frac{x}{2} + C$$

۶۳۰۴ □

۶۳۰۵ بعض اوقات کلیہ تکمل کا حصول مشکل ثابت ہوتا ہے البتہ اخذ کردہ کلیہ کو پرکھنا مشکل نہیں۔ کلیے کا تفرق، متکمل ہو گا۔

۶۳۰۶ مثال ۵.۳: درج ذیل کی وجہ سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \sin x + \cos x + C) = x \cos x + \sin x - \sin x + 0 = x \cos x$$

۶۳۰۷ درج ذیل ہو گا۔

$$\int x \cos x \, \mathrm{d}x = x \sin x + \cos x + C$$

۶۳۰۸ □

۶۳۰۹ اس مثال میں مستعمل تکمل کا کلیہ اخذ کرنا باب ۸ میں سکھایا جائے گا۔

جدول ۵.۲: غیر قطعی تکمل کے قواعد

1. مستقل مضرب قاعدہ: (k کی قیمت x کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی)	$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x$
2. منفی کے لیے قاعدہ: (قاعدہ 1 میں $k=-1$ لیا گیا ہے۔)	$\int -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int f(x)\,\mathrm{d}x$
3. مجموعہ اور فرق کا قاعدہ:	$\int [f(x)\mp g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$

۶۴۱۰ **ضد تفارق کے قواعد**

۶۴۱۱ ہم ضد تفارق کے بارے میں درج ذیل جانتے ہیں۔

۶۴۱۲ ا. ایک تفاعل اس صورت مستقل مضرب kf کا ضد تفرق ہو گا جب یہ f کے ضد تفرق ضرب k کے برابر ہو۔

۶۴۱۳ ب. بالخصوص ایک تفاعل اس صورت $-f$ کا ضد تفرق ہو گا جب یہ f کے ضد تفرق کا نفی ہو۔

۶۴۱۴ ج. ایک تفاعل اس صورت مجموعہ یا فرق $f\mp g$ کا ضد تفرق ہو گا جب یہ f کے ضد تفرق اور g کے ضد تفرق کا مجموعہ یا فرق ہو۔

۶۴۱۵ ان حقائق کو تکملی علامتیت میں لکھنے سے غیر قطعی تکمل کے معیاری ریاضیاتی قواعد حاصل ہوتے ہیں (جدول ۵.۲)۔

۶۴۱۶ مثال ۵.۴: تکمل کا مستقل

۶۴۱۷

$$\begin{aligned}
\int 5\sec x\tan x\,\mathrm{d}x &= 5\int \sec x\tan x\,\mathrm{d}x && \text{جدول ۵.۲، قاعدہ 1}\\
&= 5(\sec x + C) && \text{جدول ۵.۱، کلیہ 6}\\
&= 5\sec x + 5C && \text{غیر قطعی ضد تفرق کی پہلی صورت}\\
&= 5\sec x + C' && \text{مستقل } 5C \text{ کو مستقل } C' \text{ لکھا گیا ہے}\\
&= 5\sec x + C && C' \text{ ایک مستقل ہے جس کو ہم اب } C \text{ سے ظاہر کرتے ہیں}
\end{aligned}$$

۶۴۱۸ □

۶۴۱۹ اس مثال کے آخری قدم پر مستقل C' کو بغیر علامت (') لکھا گیا ہے۔

۶۴۲۰ مثال ۵.۴ میں حاصل چاروں جوابات صحیح ہیں البتہ آخری لکیر پر غیر قطعی ضد تفرق کی سادہ ترین اور پسندیدہ صورت لکھی گئی ہے لہٰذا عموماً درج ذیل لکھا جاتا

ہے۔

$$\int 5\sec x \tan x \,\mathrm{d}x = 5\sec x + C$$

جیسا مجموعہ اور فرق کے تفرقی قواعد ہمیں تفاعل کا ہر رکن علیحدہ علیحدہ تفرق کرنے کی اجازت دیتے ہیں، اسی طرح مجموعہ اور فرق کے تکملی قواعد ہمیں تفاعل کا ہر رکن علیحدہ علیحدہ تکمل کرنے کی اجازت دیتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے ہم ارکان کے انفرادی تکملات کے مستقلات کے مجموعہ کو آخر میں یک مستقل سے ظاہر کرتے ہیں۔

مثال ۵.۵: جزو در جزو تکمل۔

درج ذیل حاصل کریں۔

$$\int (x^2 - 2x + 5)\,\mathrm{d}x$$

اگر ہم دیکھ کر بتلا سکیں کہ $x^2 - 2x + 5$ کا ضد تفرق $\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x$ ہے تب ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\int (x^2 - 2x + 5)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x}_{\text{ضد تفرق}} + \underbrace{C}_{\text{اختیاری مستقل}}$$

اگر ہم ضد تفرق پہچان نہ سکیں تب ہم مجموعہ اور فرق کے قواعد سے جزو در جزو تکمل لے کر درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5)\,\mathrm{d}x &= \int x^2\,\mathrm{d}x - \int 2x\,\mathrm{d}x + \int 5\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3} + C_1 - x^2 + C_2 + 5x + C_3\end{aligned}$$

اس کلیہ میں تین مستقلات کا مجموعہ از خود ایک مستقل ہو گا جو C لکھا جا سکتا ہے یعنی $C_1 + C_2 + C_3 = C$ جس سے کلیہ کی درج ذیل سادہ صورت حاصل ہوتی ہے۔

$$\frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C$$

جزو در جزو تکمل لیتے ہوئے ہم علیحدہ علیحدہ مستقل لکھ کر آخر میں انہیں جمع کر کے C لکھنے کے بجائے پہلے قدم پر ہی صرف ایک مستقل C لکھتے ہیں یعنی:

$$\begin{aligned}\int (x^2 - 2x + 5)\,\mathrm{d}x &= \int x^2\,\mathrm{d}x - \int 2x\,\mathrm{d}x + \int 5\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^3}{3} - x^2 + 5x + C\end{aligned}$$

□

$\sin^2 x$ اور $\cos^2 x$ کے تکملات

بعض اوقات وہ تکملات جن کا حصول ہم نہیں جانتے، تکونیاتی تماثل کی مدد سے ان تکملات میں تبدیل کرنا ممکن ہوتا ہے جن کا حصول ہم جانتے ہیں۔ $\sin^2 x$ اور $\cos^2 x$ کے تکمل عموماً استعمال میں در پیش آتے ہیں۔ آئیں تماثل کی مدد سے انہیں حل کرتے ہیں۔

مثال ۵.۶:

ا.

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x &= \int \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\\ &= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{2} + C\\ &= \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \,\mathrm{d}x &= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\\ &= \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C\end{aligned}$$

□

سوالات

ضد تفرق کا حصول

سوال ۵.۱ تا سوال ۵.۱۸ میں دیے ہر تفاعل کا ضد تفرق زبانی (بغیر کسی جدول کی مدد لیے) لکھیں۔ جواب کی تصدیق کی خاطر جواب کا تفرق لیں۔

سوال ۵.۱: (ا) $2x$، (ب) x^2، (ج) $x^2 - 2x + 1$

سوال ۵.۲: (ا) $6x$، (ب) x^7، (ج) $x^7 - 6x + 8$

سوال ۵.۳: (ا) $-3x^{-4}$، (ب) x^{-4}، (ج) $x^{-4} + 2x + 3$

سوال ۵.۴: (ا) $2x^{-3}$، (ب) $\frac{x^{-3}}{2} + x^2$، (ج) $-x^{-3} + x - 1$

سوال ۵.۵: (ا) $\frac{1}{x^2}$، (ب) $\frac{5}{x^2}$، (ج) $2 - \frac{5}{x^2}$

۲۳۴۶ سوال ۵.۶: (ا) $-\frac{2}{x^3}$، (ب) $\frac{1}{2x^3}$، (ج) $x^3 - \frac{1}{x^3}$

۲۳۴۷ سوال ۵.۷: (ا) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$، (ب) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$، (ج) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

۲۳۴۸ سوال ۵.۸: (ا) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$، (ب) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x}}$، (ج) $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

۲۳۴۹ سوال ۵.۹: (ا) $\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$، (ب) $\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$، (ج) $-\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$

۲۳۵۰ سوال ۵.۱۰: (ا) $\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$، (ب) $-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$، (ج) $-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

۲۳۵۱ سوال ۵.۱۱: (ا) $-\pi \sin \pi x$، (ب) $3 \sin x$، (ج) $\sin \pi x - 3 \sin 3x$

۲۳۵۲ سوال ۵.۱۲: (ا) $\pi \cos \pi x$، (ب) $\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi x}{2}$، (ج) $\cos \frac{\pi x}{2} + \pi \cos x$

۲۳۵۳ سوال ۵.۱۳: (ا) $\sec^2 x$، (ب) $\frac{2}{3} \sec^2 \frac{x}{3}$، (ج) $-\sec^2 \frac{3x}{2}$

۲۳۵۴ سوال ۵.۱۴: (ا) $\csc^2 x$، (ب) $-\frac{3}{2} \csc^2 \frac{3x}{2}$، (ج) $1 - 8 \csc^2 2x$

۲۳۵۵ سوال ۵.۱۵: (ا) $\csc x \cot x$، (ب) $-\csc 5x \cot 5x$، (ج) $-\pi \csc \frac{\pi x}{2} \cot \frac{\pi x}{2}$

۲۳۵۶ سوال ۵.۱۶: (ا) $\sec x \tan x$، (ب) $4 \sec 3x \tan 3x$، (ج) $\sec \frac{\pi x}{2} \tan \frac{\pi x}{2}$

۲۳۵۷ سوال ۵.۱۷: $(\sin x - \cos x)^2$

۲۳۵۸ سوال ۵.۱۸: $(1 + 2 \cos x)^2$

۲۳۵۹ **تکمل کا حصول**

۲۳۶۰ سوال ۵.۱۹ تا سوال ۵.۵۸ میں تکمل حاصل کریں۔ تکمل کا تفرق لے کر جواب کی تصدیق کریں۔

۲۳۶۱ سوال ۵.۱۹: $\int (x + 1)\, \mathrm{d}x$

۲۳۶۲ سوال ۵.۲۰: $\int (5 - 6x)\, \mathrm{d}x$

۲۳۶۳ سوال ۵.۲۱: $\int (3t^2 + \frac{t}{2})\, \mathrm{d}t$

۲۳۶۴ سوال ۵.۲۲: $(\frac{t^2}{2} + 4t^3)\, \mathrm{d}t$

۲۳۶۵ سوال ۵.۲۳: $(2x^3 - 5x + 7)\, \mathrm{d}x$

۲۳۶۶ سوال ۵.۲۴: $\int (1 - x^2 - 3x^5)\, \mathrm{d}x$

۲۳۶۷ سوال ۵.۲۵: $\int (\frac{1}{x^2} - x^2 - \frac{1}{3})\, \mathrm{d}x$

۲۳۶۸ سوال ۵.۲۶: $\int (\frac{1}{5} - \frac{2}{x^3} + 2x)\, \mathrm{d}x$

۲۳۶۹ سوال ۵.۲۷: $\int x^{-\frac{1}{3}}\, \mathrm{d}x$

۲۳۷۰ سوال ۵.۲۸: $\int x^{-\frac{5}{4}}\, \mathrm{d}x$

۶۴۷۱ سوال ۵.۲۹: $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})\,\mathrm{d}x$

۶۴۷۲ سوال ۵.۳۰: $\int (\frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x$

۶۴۷۳ سوال ۵.۳۱: $\int (8y - \frac{2}{y^{1/4}})\,\mathrm{d}y$

۶۴۷۴ سوال ۵.۳۲: $\int (\frac{1}{7} - \frac{1}{y^{5/4}})\,\mathrm{d}y$

۶۴۷۵ سوال ۵.۳۳: $\int 2x(1 - x^{-3})\,\mathrm{d}x$

۶۴۷۶ سوال ۵.۳۴: $\int x^{-3}(x + 1)\,\mathrm{d}x$

۶۴۷۷ سوال ۵.۳۵: $\int \frac{t\sqrt{t}+\sqrt{t}}{t^2}\,\mathrm{d}t$

۶۴۷۸ سوال ۵.۳۶: $\int \frac{4+\sqrt{t}}{t^3}\,\mathrm{d}t$

۶۴۷۹ سوال ۵.۳۷: $\int (-2\cos t)\,\mathrm{d}t$

۶۴۸۰ سوال ۵.۳۸: $\int (-5\sin t)\,\mathrm{d}t$

۶۴۸۱ سوال ۵.۳۹: $7\sin\frac{\theta}{3}\,\mathrm{d}\theta$

۶۴۸۲ سوال ۵.۴۰: $\int 3\cos 5\theta\,\mathrm{d}\theta$

۶۴۸۳ سوال ۵.۴۱: $\int (-3\csc^2 x)\,\mathrm{d}x$

۶۴۸۴ سوال ۵.۴۲: $\int (-\frac{\sec^2 x}{3})\,\mathrm{d}x$

۶۴۸۵ سوال ۵.۴۳: $\int \frac{\csc\theta\cot\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$

۶۴۸۶ سوال ۵.۴۴: $\frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta$

۶۴۸۷ سوال ۵.۴۵: $\int (4\sec x\tan x - 2\sec^2 x)\,\mathrm{d}x$

۶۴۸۸ سوال ۵.۴۶: $\int \frac{1}{2}(\csc^2 x - \csc x\cot x)\,\mathrm{d}x$

۶۴۸۹ سوال ۵.۴۷: $\int (\sin 2x - \csc^2 x)\,\mathrm{d}x$

۶۴۹۰ سوال ۵.۴۸: $\int (2\cos 2x - 3\sin 3x)\,\mathrm{d}x$

۶۴۹۱ سوال ۵.۴۹: $\int 4\sin^2 y\,\mathrm{d}y$

۶۴۹۲ سوال ۵.۵۰: $\int \frac{\cos^2 y}{7}\,\mathrm{d}y$

۶۴۹۳ سوال ۵.۵۱: $\int \frac{1+\cos 4t}{2}\,\mathrm{d}t$

۶۴۹۴ سوال ۵.۵۲: $\int \frac{1-\cos 6t}{2}\,\mathrm{d}t$

۶۴۹۵ سوال ۵.۵۳: $\int (1 + \tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$ اشارہ: $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

۲۴۹۶ سوال ۵.۵۴: $\int (2+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$

۲۴۹۷ سوال ۵.۵۵: $\int \cot^2 x\,\mathrm{d}x$

۲۴۹۸ سوال ۵.۵۶: $\int (1-\cot^2 x)\,\mathrm{d}x$

۲۴۹۹ سوال ۵.۵۷: $\int \cos\theta(\tan\theta+\sec\theta)\,\mathrm{d}\theta$

۲۵۰۰ سوال ۵.۵۸: $\int \frac{\csc\theta}{\csc\theta-\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta$

۲۵۰۱ تکمل کلیہ کی تصدیق

۲۵۰۲ سوال ۵.۵۹ تا سوال ۵.۶۴ میں دیے تکملی کلیات کی تصدیق بذریعہ تفرق کریں۔ ہم حصہ ۵.۳ میں دیکھیں گے کہ ایسے کلیات کہاں سے آتے ہیں۔

۲۵۰۳ سوال ۵.۵۹: $\int (7x-2)^3\,\mathrm{d}x = \frac{(7x-2)^4}{28}+C$

۲۵۰۴ سوال ۵.۶۰: $\int (3x+5)^{-2}\,\mathrm{d}x = -\frac{(3x+5)^{-1}}{3}+C$

۲۵۰۵ سوال ۵.۶۱: $\int \sec^2(5x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\tan(5x-1)+C$

۲۵۰۶ سوال ۵.۶۲: $\int \csc^2(\frac{x-1}{3})\,\mathrm{d}x = -3\cot(\frac{x-1}{3})+C$

۲۵۰۷ سوال ۵.۶۳: $\int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x+1}+C$

۲۵۰۸ سوال ۵.۶۴: $\int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{x+1}+C$

۲۵۰۹ سوال ۵.۶۵: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $\int x\sin x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\sin x + C$

ب۔ $\int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + C$

ج۔ $\int x\sin x\,\mathrm{d}x = -x\cos x + \sin x + C$

۲۵۱۰ سوال ۵.۶۶: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $\int \tan\theta\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\sec^3\theta}{3}+C$

ب۔ $\int \tan\theta\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta+C$

ج۔ $\int \tan\theta\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\sec^2\theta$

۶۵۱۱ سوال ۵.۶۷: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $$\int (2x+1)^2\,\mathrm{d}x = \frac{(2x+1)^3}{3} + C$$

ب۔ $$\int 3(2x+1)^2\,\mathrm{d}x = (2x+1)^3 + C$$

ج۔ $$\int 6(2x+1)^2\,\mathrm{d}x = (2x+1)^3 + C$$

۶۵۱۲ سوال ۵.۶۸: درج ذیل کلیات میں سے درست اور غلط کی نشاندہی کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا۔ $$\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x+C}$$

ب۔ $$\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+x}+C$$

ج۔ $$\int \sqrt{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(\sqrt{2x+1})^3 + C$$

۶۵۱۳ **نظریہ اور مثالیں**

۶۵۱۴ سوال ۵.۶۹: درج ذیل فرض کرتے ہوئے

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-\sqrt{x}), \quad g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+2)$$

۶۵۱۵ درج ذیل تلاش کریں۔

ا۔ $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

ب۔ $\int g(x)\,\mathrm{d}x$

ج۔ $\int [-f(x)]\,\mathrm{d}x$

د۔ $\int [-g(x)]\,\mathrm{d}x$

ہ۔ $\int [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x$

و۔ $\int [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x$

ز۔ $\int [x+f(x)]\,\mathrm{d}x$

ح۔ $\int [g(x)-4]\,\mathrm{d}x$

۶۵۱۶ سوال ۵.۷۰: درج ذیل فرض کرتے ہوئے سوال ۵.۶۹ دوبارہ حل کریں۔

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x, \quad g(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\sin x)$$

۶۵۱۷

۶۵۱۸

۵.۲ تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی

تفاعل کی معلوم قیمت استعمال کرتے ہوئے تفاعل کے غیر قطعی تکمل میں سے مخصوص ضد تفرق منتخب کرنا اس حصے میں سکھایا جائے گا۔ ریاضیاتی نمونہ کشی، جو تحقیق میں مدد دیتی ہے، کے لیے یہ عمل ضروری ہے۔

ابتدائی قیمت مسائل

درج ذیل روپ کی مساوات جس میں تفرق پایا جاتا ہو **تفرقی مساوات**[۶] کہلاتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

اس مساوات میں x آزاد متغیر جبکہ y تابع متغیر یا درکار تفاعل ہے۔ ہم x کا ایسا تفاعل y جاننا چاہتے ہیں جس کی نقطہ x_0 پر قیمت y_0 ہو۔ اس کو **ابتدائی قیمت مسئلہ**[۷] کہتے ہیں۔ جیسا مثال ۵.۷ میں دکھایا گیا ہے، اس مسئلے کو دو قدم میں حل کیا جاتا ہے۔

مثال ۵.۷: جسم کی ابتدائی رفتار اور اسراع سے جسم کی سمتی رفتار کا حصول

سطح زمین کے نزدیک ثقلی اسراع کی قیمت $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ سطح زمین کے قریب خلا میں آزاد گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار کی تبدیلی کی شرح درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

اگر جسم ساکن حالت سے گرنے دیا جائے تب t سیکنڈ بعد اس کی سمتی رفتار کتنی ہو گی؟

حل

ریاضیاتی طور پر ہم درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 9.8 \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$v(0)0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

ابتدائی معلومات سے مراد لمحہ $t = 0$ پر ساکن جسم کی سمتی رفتار $v = 0$ ہے جسے ہم مختصراً $v(0) = 0$ لکھتے ہیں۔ پہلے قدم میں ہم تفرقی

---

[۶] differentialequation
[۷] initialvalueproblem

۶۵۳۳ مساوات کو حل کرنے کی خاطر دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= 9.8 && \text{تفرقی مساوات}\\
\int \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t &= \int 9.8\,\mathrm{d}t && t\text{ کے لحاظ سے تکمل}\\
v + C_1 &= 9.8t + C_2 && \text{تکمل کا نتیجہ}\\
v &= 9.8t + C && \text{مستقل یکجا کیے گئے ہیں}
\end{aligned}$$

۶۵۳۴ آخری مساوات کے تحت لمحہ t پر جسم کی رفتار $9.8t + C$ ہو گی جہاں C نامعلوم مستقل ہے جس کی قیمت ابتدائی معلومات سے حاصل کی جاتی ہے۔

$$\begin{aligned}
v &= 9.8t + C\\
0 &= 9.8(0) + C && v(0) = 0\\
C &= 0
\end{aligned}$$

۶۵۳۵ یوں لمحہ t پر جسم کی رفتار درج ذیل ہو گی۔

$$v = 9.8t + 0 = 9.8t\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

۶۵۳۶ □

۶۵۳۷ تفاعل $f(x)$ کا غیر قطعی تکمل $F(x) + C$، تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$ کا **عمومی حل**[۸] $y = F(x) + C$ دیتا ہے۔ عمومی
۶۵۳۸ حل میں تفرقی مساوات کے تمام حل (جن کی تعداد لا متناہی ہے) شامل ہیں۔ تفرقی مساوات کو حل کرتے ہوئے ہم عمومی حل حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد
۶۵۳۹ ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے ابتدائی قیمت مسئلے کا **مخصوص حل**[۹] تلاش کرتے ہیں جو ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ کو مطمئن کرتا ہے۔
۶۵۴۰ ابتدائی معلومات سے مراد نقطہ x_0 پر y کی قیمت y_0 ہے جس کو ہم مختصراً $y(x_0) = y_0$ لکھتے ہیں۔

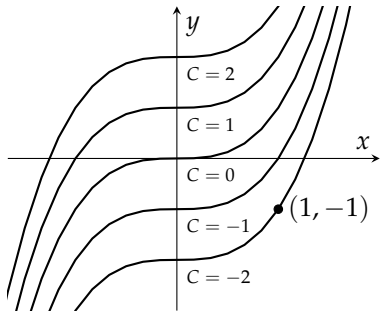
۶۵۴۱ مثال ۵.۸: ڈھلوان اور ایک نقطہ سے منحنی کا حصول
۶۵۴۲ ایک منحنی جو نقطہ $(1, -1)$ سے گزرتی ہے کا نقطہ (x, y) پر ڈھلوان $3x^2$ ہے۔ اس منحنی کو تلاش کریں۔

۶۵۴۳ **حل**
۶۵۴۴ ریاضی کی زبان میں ہمیں درج ذیل ابتدائی مسئلہ حل کرنے کو کہا گیا ہے۔

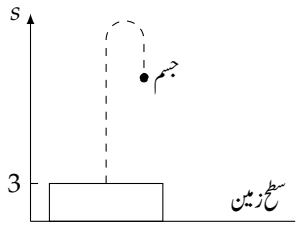
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 3x^2 && \text{منحنی کا ڈھلوان}\\
y(1) &= -1 && \text{ابتدائی معلومات}
\end{aligned}$$

---

[۸] generalsolution
[۹] particularsolution



شکل ۵.۱: عمومی اور مخصوص حل برائے مثال ۵.۸



شکل ۵.۲: تصویر کشی برائے مثال ۵.۹

۶۵۴۵ ہم پہلے تفرقی مساوات سے عمومی حل تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2$$
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int 3x^2\,\mathrm{d}x$$
$$y = x^3 + C \qquad \text{تکمل کے مستقلوں کی یکجا کیا گیا ہے}$$

۶۵۴۶ عمومی حل $y = x^3 + C$ ہے جس کو C کی مختلف قیمتوں کے لیے شکل ۵.۱ میں دکھایا گیا ہے۔ عمومی حل میں ابتدائی معلومات پُر کر کے نامعلوم
۶۵۴۷ مستقل C حاصل کرتے ہیں۔

$$y = x^3 + C$$
$$-1 = (1)^3 + C$$
$$C = -2$$

۶۵۴۸ عمومی حل میں C پُر کرتے ہوئے درج ذیل مخصوص حل ملتا ہے جس کو شکل ۵.۱ میں موٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$y = x^3 - 2$$

۶۵۴۹ □

۶۵۵۰ اگلی مثال میں ہمیں درکار تفاعل حاصل کرنے کی خاطر دو مرتبہ تکمل لینا ہوگا۔ پہلا تکمل

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + C$$

۶۵۵۱ تفاعل کا پہلا تفرق دیتا ہے۔ دوسرا تکمل ہمیں تفاعل دے گا۔

مثال ۵.۹: ابتدائی مقام، ابتدائی سمتی رفتار، اور اسراع سے جسم کی بلندی کا حصول

سطح زمین سے $3\,\mathrm{m}$ کی بلندی سے ایک بھاری جسم کو لمحہ $t = 0$ پر سیدھا اوپر $160\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ فرض کریں جسم پر صرف ثقلی قوت زیر اثر ہے جو نیچے رخ $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ اسراع پیدا کرتی ہے۔ زمین سے جسم کی بلندی کو t کا تفاعل لکھیں۔ 3 سیکنڈ بعد زمین سے جسم کی بلندی کتنی ہو گی؟

حل

اس مسئلے کا ریاضی نمونہ اخذ کرنے کی خاطر ہم اس کی تصویر کشی کرتے ہیں (شکل ۵.۲) جہاں لمحہ t پر زمین سے جسم کی بلندی کو s سے ظاہر کیا جائے گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ s متغیر t کا دوگنا قابل تفرق تفاعل ہے لہٰذا جسم کی رفتار اور اسراع درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}, \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

چونکہ ریاضی نمونہ میں اسراع، s کے گھٹتے رخ عمل کرتا ہے لہٰذا ابتدائی قیمت مسئلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -9.8 \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 160, \quad s(0) = 3 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

تفرقی مساوات کا t کے لحاظ سے تکمل لے کر $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\,\mathrm{d}t = \int (-9.8)\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -9.8t + C_1$$

پہلی ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مستقل C_1 تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 160$$

$$160 = -9.8(0) + C_1$$

$$C_1 = 160$$

یوں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کا کلیہ مکمل ہوتا ہے؛ ذیل دیکھیں۔

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -9.8t + 160$$

ہم t کے لحاظ سے $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کا تکمل لیتے ہوئے s تلاش کرتے ہیں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int (-9.8t + 160)\,\mathrm{d}t$$

$$s = -4.9t^2 + 160t + C_2$$

دوسری ابتدائی معلومات پُر کرتے ہوئے C_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 3 &= -4.9(0)^2 + 160(0) + C_2 \\ C_2 &= 3 \end{aligned}$$

یوں مخصوص حل s کا کلیہ اخذ ہوتا ہے جس کا آزاد متغیر t ہے۔

$$s = -4.9t^2 + 160t + 3$$

لمحہ $t = 3$ پر زمین سے جسم کی بلندی تلاش کرنے کی خاطر ہم اس کلیہ میں $t = 3$ پُر کرتے ہیں۔

$$s = -4.9(3)^2 + 160(3) + 3 = 438.9\,\mathrm{m}$$

□

یک رتبی تفرق سے تفاعل حاصل کرتے ہوئے ایک اختیاری مستقل حاصل ہوتا ہے، جیسا مثال ۵.۷ اور مثال ۵.۸ میں دیکھا گیا، جبکہ دو رتبی تفرق سے تفاعل کے حصول میں دو اختیاری مستقل حاصل ہوتے ہیں جیسا مثال ۵.۹ میں دیکھا گیا؛ دو ضد تفرق سے دو علیحدہ علیحدہ مستقل حاصل ہوں گے۔ اسی طرح تین رتبی تفرق سے حاصل تفاعل میں تین اختیاری مستقل پائے جائیں گے، وغیرہ وغیرہ۔ اختیاری مستقل کی قیمت ابتدائی معلومات سے حاصل ہو گی۔ ہر ضد تفرق حاصل کرتے ہوئے ہمیں مستقل C کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ابتدائی قیمت درکار ہو گی۔

منحنی حل کا خاکہ

تفرقی مساوات کے حل کی ترسیم کو **منحنی حل**[10] یا **منحنی تکمل**[11] کہتے ہیں۔ تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3x^2$ کے حل $y = x^3 + C$ کو شکل ۵.۱ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ بعض اوقات ہم مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)$ کا صریح حل تلاش کرنے سے قاصر ہوتے ہیں (یعنی ہم $f(x)$ کا ضد تفرق تلاش کرنے میں ناکام ہوتے ہیں) لیکن اس کے باوجود ہم منحنی حل کی عمومی صورت تفرقی مساوات سے اخذ کر پاتے ہیں۔

مثال ۵.۱۰: درج ذیل تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ کھینچیں۔

$$y' = \frac{1}{x^2+1}$$

حل

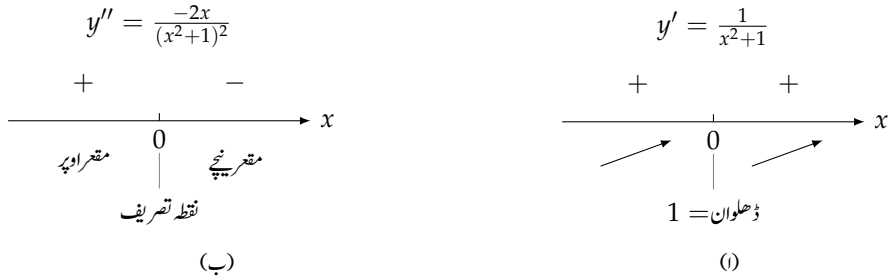
پہلا قدم: y' اور y'' : منحنی کی عمومی صورت y' اور y'' پر منحصر ہوتی ہے (حصہ ۴.۴)۔ ہم $y' = \frac{1}{x^2+1}$ پہلے سے جانتے ہیں جس کا تفرق درج ذیل y'' دیتا ہے۔

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^2+1}\right) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

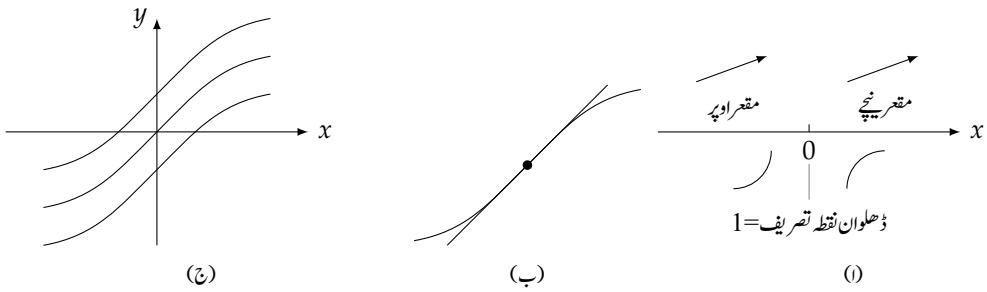
دوسرا قدم: اتار چڑھاؤ۔ y' کا دائرہ کار $(-\infty, \infty)$ ہے۔ نقطہ فاصل نہیں پایا جاتا لہٰذا منحنی حل میں کنگرہ اور نقاط انتہا نہیں پائے جائیں گے۔ چونکہ $y' > 0$ ہے لہٰذا منحنی بائیں سے دائیں جاتے ہوئے چڑھتی رہے گی۔ نقطہ $x = 0$ پر منحنی کا ڈھلوان 1 ہے (شکل ۵.۳-ا)۔

---

[10] solutioncurve
[11] integralcurve



شکل ۵.۳: منحنی کا اتار چڑھاؤ اور مقعر (مثال ۵.۱۰)



شکل ۵.۴: منحنی کی عمومی صورت (مثال ۵.۱۰)

۶۵۸۲ تیسرا قدم: مقعر۔ دوگنا تفرق $x = 0$ پر $(+)$ سے تبدیل ہو کر $(-)$ ہوتا ہے۔ یوں تمام منحنیات کا $x = 0$ پر نقطہ تصریف پایا جائے
۶۵۸۳ گا (شکل ۵.۳-ب)۔

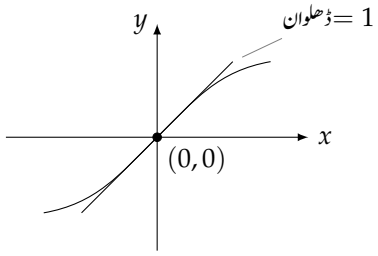
۶۵۸۴ چوتھا قدم: خلاصہ: ترسیم حل کا جھکاؤ شکل ۵.۴-ا میں اور اس کی عمومی صورت شکل ۵.۴-ب میں دکھائی گئی ہے۔

۶۵۸۵ پہلا تفرق مزید معلومات فراہم کرتا ہے:

$$\lim_{x\to\mp\infty} y' = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

۶۵۸۶ یوں $x \to \mp\infty$ پر منحنی افقی ہو گی۔

۶۵۸۷ پانچواں قدم: مخصوص نقطے اور منحنی حل۔ ہم جانتے ہیں کہ $x = 0$ پر منحنی کا ڈھلوان 1 ہے لہٰذا محور y کے کئی مقامات پر اکائی ڈھلوان کی (آپس
۶۵۸۸ میں متوازی) منحنیات کھینچتے ہیں شکل ۵.۴-ج۔ □



شکل ۵.۵: ابتدائی قیمت مسئلے کے مخصوص حل کا خاکہ (مثال ۵.۱۱)

مثال ۵.۱۱: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کا خاکہ کھینچیں۔

$$y' = \frac{1}{x^2+1} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$y(0) = 0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

حل

ہم نے مثال ۵.۱۰ میں عمومی حل کا خاکہ کھینچا جس کو شکل ۵.۴-ج میں دکھایا گیا ہے۔ ان ترسیمات میں سے وہ ترسیم جو نقطہ $(0,0)$ سے گزرتی ہے ابتدائی قیمت مسئلے کا درکار مخصوص حل ہے، جس کو شکل ۵.۵ میں دکھایا گیا ہے۔ □

یہ ترکیب بالخصوص اس موقع پر بہت مددگار ثابت ہوتی ہے جب مساوات $\frac{dy}{dx} = f(x)$ میں تفاعل $f(x)$ کے ضد تفرق کا بنیادی کلیہ نہیں پایا جاتا ہو۔ تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ کا ضد تفرق پایا جاتا ہے، جیسا کہ آپ باب ۷ میں دیکھیں گے، جبکہ تفاعل $g(x) = \sqrt{1+x^4}$ کا ضد تفرق نہیں پایا جاتا۔ یوں تفرقی مساوات $\frac{dy}{dx} = \sqrt{1+x^4}$ کو ہم ترسیمی یا اعدادی طریقہ سے حل کریں گے۔

ریاضیاتی نمونہ کشی

ریاضیاتی نمونہ کشی عموماً چار اقدام پر مبنی ہے۔ ہم پہلے حقیقی دنیا میں کسی عمل (مثلاً گیند کے گرنے یا کھانسی کے دوران سانس کی نالی کے سکڑنے) کا مشاہدہ کرتے ہوئے اہم خصوصیات ظاہر کرنے والے ریاضی متغیرات کا نظام بناتے ہیں اور معلومات کا ریاضی استعارہ کرتے ہیں۔ اس کے بعد متغیرات کے تعلقات کو (عموماً) موجودہ ریاضی کی زبان میں لکھتے ہوئے نتائج اخذ کرتے ہیں۔ اس کے بعد ریاضیاتی حاصل نتائج کو زیر غور نظام پر لاگو کرتے ہیں۔ آخر میں ہم ریاضی نمونہ سے حاصل نتائج کا مشاہدے سے حاصل نتائج کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے دیکھتے ہیں آیا نمونہ پیش گوئی کر سکتا ہے۔ ہم یہ بھی دیکھتے ہیں آیا نمونہ دیگر نظام پر قابل اطلاق ہو گا۔ بہترین نمونہ وہ ہے جس کے نتائج مشاہدے کے عین مطابق ہوں، جو پیش گوئی کر سکے، جس کا استعمال وسیع اور آسان ہو۔

گیند کے گرنے کو مثال بناتے ہوئے مذکورہ بالا اقدام وضع کرتے ہیں۔ پہلے قدم پر ہم درج ذیل متغیرات اور مشاہدے اکٹھا کرتے ہیں۔

متغیرات:

فاصلہ: s

وقت: t

ابتدائی قیمتیں:

لمحہ $t = 0$ پر $s = 0$ اور $v = 0$ ہیں۔

فرض کیا گیا تعلق: $s = 4.9t^2$

دوسرے قدم پر احصاء استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ریاضی نتائج اخذ کرتے ہیں۔

$$v = 9.8t$$
$$a = 9.8$$

تیسرے قدم پر نتائج کی تشریح کرتے ہوئے حقیقی دنیا کے لحاظ سے مفہوم بیان کرتے ہیں۔ یوں لمحہ t پر رفتار $9.8t$ میٹر فی سیکنڈ ہو گی جبکہ کسی بھی گرتے ہوئے جسم کا اسراع $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہو گا۔

آخری قدم پر ہم آزاد گرنے والے جسم کی لمحاتی رفتار اور اسراع ناپ کر تصدیق کرتے ہیں کہ ریاضی نمونہ درست نتائج کی پیش گوئی کر سکتا ہے۔

نقل اتار نا بذریعہ کمپیوٹر

کسی بھی نظام کو سمجھنے کی خاطر ہم مختلف حالات میں اس کا مشاہدہ کرتے ہیں۔ بعض پیچیدہ نظام کا مشاہدہ کرنا ممکن نہیں ہوتا۔ (مثلاً جب مشاہدہ بہت مہنگا یا خطرناک ہو یا اس کے لیے بہت وقت درکار ہو۔) ایٹم بم یا سیلابی تباہی یا کہکشاں کا مشاہدہ اس زمرے میں آتے ہیں۔ ان نظام پر غور کرنے کے لیے ہم ریاضی نمونے کا سہارا لیتے ہیں۔ جہاں نظام کا حساب پیچیدہ یا بہت لمبا ہو وہاں کمپیوٹر کا استعمال سود مند ثابت ہوتا ہے۔ بلند عمارت، دریا پر پُل، یا برقیاتی ادوار بنانے سے پہلے ان کے نمونوں پر کمپیوٹر کی مدد سے غور کیا جاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ ہم کمپیوٹر پر عمل کی **نقل اتارتے**[۱۲] ہیں۔

سوالات

ابتدائی قیمت مسائل

سوال ۵.۷۱: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل شکل ۵.۶ میں کون سی ترسیم پیش کرتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

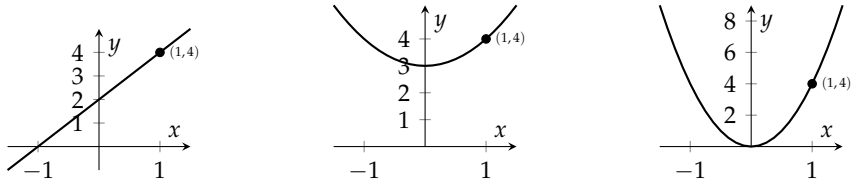
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$$
$$y(1) = 4$$

سوال ۵.۷۲: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل شکل ۵.۷ میں کون سی ترسیم پیش کرتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x$$
$$y(-1) = 1$$

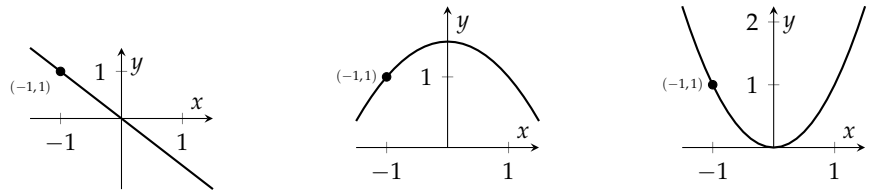
---

[۱۲] simulation



(ا) (ب) (ج)

شکل ۵.۶: ترسیمات برائے سوال ۵.۷۱



(ا) (ب) (ج)

شکل ۵.۷: ترسیمات برائے سوال ۵.۷۲

۶۲۴ سوال ۵.۷۳ تا سوال ۵.۹۲ میں دیے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

۶۲۵ سوال ۵.۷۳: $\frac{dy}{dx} = 2x - 7, \quad y(2) = 0$

۶۲۶

۶۲۷ سوال ۵.۷۴: $\frac{dy}{dx} = 10 - x, \quad y(0) = -1$

۶۲۸ سوال ۵.۷۵: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} + x, \ x > 0, \quad y(2) = 1$

۶۲۹

۶۳۰ سوال ۵.۷۶: $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 4x + 5, \quad y(-1) = 0$

۶۳۱ سوال ۵.۷۷: $\frac{dy}{dx} = 3x^{-2/3}, \quad y(-1) = -5$

۶۳۲

۶۳۳ سوال ۵.۷۸: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y(4) = 0$

۶۳۴ سوال ۵.۷۹: $\frac{ds}{dt} = 1 + \cos t, \quad s(0) = 4$

۶۳۵

۶۳۶ سوال ۵.۸۰: $\frac{ds}{dt} = \cos t + \sin t, \quad s(\pi) = 1$

۶۳۷ سوال ۵.۸۱: $\frac{dr}{d\theta} = -\pi \sin \pi\theta, \quad r(0) = 0$

سوال ۵.۸۲: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \cos \pi\theta, \quad r(0) = 1$

سوال ۵.۸۳: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2} \sec t \tan t, \quad v(0) = 1$

سوال ۵.۸۴: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 8t + \csc^2 t, \quad v(\frac{\pi}{2}) = -7$

سوال ۵.۸۵: $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 2 - 6x, \quad y'(0) = 4, y(0) = 1$

سوال ۵.۸۶: $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 0, \quad y'(0) = 2, y(0) = 0$

سوال ۵.۸۷: $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{2}{t^3}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} = 1, \ r(1) = 1$

سوال ۵.۸۸: $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{3t}{8}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=4} = 3, \ s(4) = 4$

سوال ۵.۸۹: $\frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3} = 6, \ y''(0) = -8, \ y'(0) = 0, \ y(0) = 5$

سوال ۵.۹۰: $\frac{\mathrm{d}^3 \theta}{\mathrm{d}t^3} = 0, \ \theta''(0) = -2, \ \theta'(0) = -\frac{1}{2}, \ \theta(0) = \sqrt{2}$

سوال ۵.۹۱: $y^{(4)} = -\sin t + \cos t, \ y'''(0) = 7, \ y''(0) = y'(0) = -1, \ y(0) = 0$

سوال ۵.۹۲: $y^{(4)} = -\cos x + 8 \sin 2x, \ y'''(0) = 0, \ y''(0) = y'(0) = 1, \ y(0) = 3$

رفتار سے مقام معلوم کرنا

سوال ۵.۹۳ تا سوال ۵.۹۶ میں رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ اور ابتدائی مقام s دیے گئے ہیں۔ لمحہ t پر جسم کا مقام تلاش کریں۔

سوال ۵.۹۳: $v = 9.8t + 5, \quad s(0) = 10$

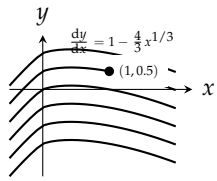
سوال ۵.۹۴: $v = 32t - 2, \quad s(1/2) = 4$

سوال ۵.۹۵: $v = \sin \pi t, \quad s(0) = 0$

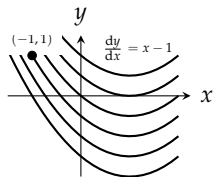
سوال ۵.۹۶: $v = \frac{2}{\pi} \cos \frac{2t}{\pi}, \quad s(\pi^2) = 1$

اسراع سے مقام کی تلاش

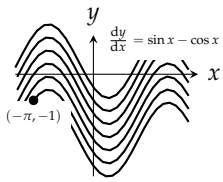
سوال ۵.۹۷ تا سوال ۵.۱۰۰ میں اسراع $a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$، ابتدائی رفتار، اور ابتدائی مقام دیے گئے ہیں۔ لمحہ t پر جسم کا مقام تلاش کریں۔



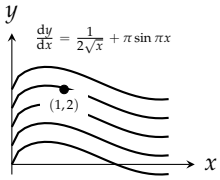
شکل ۵.۸: منحنیات برائے سوال ۵.۱۰۳



شکل ۵.۹: منحنیات برائے سوال ۵.۱۰۴



شکل ۵.۱۰: منحنیات برائے سوال ۵.۱۰۵



شکل ۵.۱۱: منحنیات برائے سوال ۵.۱۰۶

سوال ۵.۹۷: $a = 32, \quad v(0) = 20, \quad s(0) = 5$

سوال ۵.۹۸: $a = 9.8, \quad v(0) = -3, \quad s(0) = 0$

سوال ۵.۹۹: $a = -4 \sin 2t, \quad v(0) = 2, \quad s(0) = -3$

سوال ۵.۱۰۰: $a = \frac{9}{\pi^2} \cos \frac{3t}{\pi}, \quad v(0) = 0, \quad s(0) = -1$

ترسیم کا حصول

سوال ۵.۱۰۱: ایسی ترسیم $y = f(x)$ تلاش کریں جو نقطہ $(9, 4)$ سے گزرتی ہو اور جس کا ڈھلوان $3\sqrt{x}$ ہو۔

سوال ۵.۱۰۲: منحنی $y = f(x)$ نقطہ $(0, 1)$ سے گزرتی ہے جہاں اس کا مماس افقی ہے۔ یہ ترسیم $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ کو مطمئن کرتی ہے۔ ترسیم تلاش کریں۔

منحنیات حل (تکمل منحنیات)

سوال ۵.۱۰۳ تا سوال ۵.۱۰۶ میں منحنی حل دکھائی گئی ہیں۔ دیے نقطے پر منحنی کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۵.۱۰۳: ترسیمات کو شکل ۵.۱۰۳ میں دکھایا گیا ہے۔

سوال ۵.۱۰۴: ترسیمات کو شکل ۵.۱۰۴ میں دکھایا گیا ہے۔

سوال ۵.۱۰۵: ترسیمات کو شکل ۵.۱۰۵ میں دکھایا گیا ہے۔

سوال ۵.۱۰۶: ترسیمات کو شکل ۵.۱۰۶ میں دکھایا گیا ہے۔

تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ کھینچنا مثال ۵.۱۰ میں سکھایا گیا۔ اس ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے سوال ۵.۱۰۷ تا سوال ۵.۱۱۰ میں دیے گئے تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۵.۱۰۷: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x$

سوال ۵.۱۰۸: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2x + 2$

سوال ۵.۱۰۹: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - 3x^2$

سوال ۵.۱۱۰: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2$

سوال ۵.۱۱۱ تا سوال ۵.۱۱۴ میں دیے گئے تفرقی مساوات کے حل کا خاکہ مثال ۵.۱۰ اور مثال ۵.۱۱ کی طرح بنائیں۔

سوال ۵.۱۱۱: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1; \quad y(0) = 0$

سوال ۵.۱۱۲: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1+x^4}, \quad y(0) = 1$

سوال ۵.۱۱۳: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2+1} - 1, \quad y(0) = 1$

سوال ۵.۱۱۴: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{x^2+1}, \quad y(0) = 0$

عملی استعمال

سوال ۵.۱۱۵: چاند پر ثقلی اسراع $1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ ایک پتھر کو چاند پر گہرے شگاف میں گرایا جاتا ہے۔ شگاف کی تہہ پر 30 سیکنڈ بعد پہنچنے سے عین قبل پتھر کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۵.۱۱۶: ایک راکٹ سطح زمین سے سیدھا اوپر رخ $20\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ کے اسراع سے اڑتا ہے۔ ایک منٹ بعد اس کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۵.۱۱۷: آپ 10 m بلندی سے پانی میں کودتے ہیں۔ پانی میں داخل ہوتے ہوئے لمحے پر آپ کی رفتار کیا ہو گی؟ $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ لیں۔

سوال ۵.۱۱۸: مریخ پر سطح کے نزدیک ثقلی اسراع $3.72\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ ایک راکٹ جس کو مریخ کی سطح سے $93\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی ابتدائی رفتار سے سیدھا اوپر پھینکا جائے کس بلندی تک پہنچے گا؟

سوال ۵.۱۱۹: آپ اسلام آباد تا لاہور موٹروے پر $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے صفر کر رہے ہیں جب آپ کو سامنے ایک حادثہ نظر آتا ہے۔ آپ یکدم گاڑی روکنے کی کوشش کرتے ہیں۔ گاڑی 75 m میں مکمل رک جاتی ہے۔ رکنے کا اسراع تلاش کریں۔ اس کا جواب حاصل کرنے کی خاطر درج ذیل کرنا ہو گا۔

پہلا قدم: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -k \qquad k \text{ مستقل}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 100, \quad s(0) = 0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

دوسرا قدم: t کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0$ حاصل ہوگا۔(آپ کے جواب میں k پایا جائے گا۔)

تیسرا قدم: k کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $s = 75$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال ۵.۱۲۰: موٹر سائکل پر باحفاظت صفر کے لیے لازمی ہے کہ آپ $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے $14\,\mathrm{m}$ میں رک سکیں۔ایسا کرنے کے لیے کتنا اسراع درکار ہوگا؟

سوال ۵.۱۲۱: ایک ذرہ محوری لکیر پر $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 15\sqrt{t} - \frac{3}{\sqrt{t}}$ اسراع سے حرکت کرتا ہے۔لمحہ $t = 1$ پر $s = 0$ اور $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 4$ ہیں۔لمحہ t پر $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ اور s تلاش کریں۔

سوال ۵.۱۲۲: چاند پر اپالو ۱۵ پرواز کے داؤد سکاٹ نے پَر اور ہتھوڑے کو تقریباً $1.25\,\mathrm{m}$ بلندی سے ایک ساتھ گرنے دیا۔چاند پر ہوا کی غیر موجودگی کی وجہ سے دونوں کے گرنے کی رفتار یکساں تھی۔بتائیں گرنے کا دورانیہ کتنا تھا؟ گرنے کا دورانیہ دریافت کرنے کے لیے درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے تفاعل s تلاش کریں جس کا آزاد متغیر t ہو۔اس کے بعد t کی وہ قیمت تلاش کریں جو $s = 0$ دے۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 0, \; s(0) = 1.25 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

سوال ۵.۱۲۳: محددی لکیر پر مستقل اسراع a سے حرکت کرتے ہوئے جسم کے مقام s کی معیاری مساوات درج ذیل ہے

$$s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \tag{۱}$$

جہاں لمحہ $t = 0$ پر جسم کی رفتار v_0 اور مقام s_0 ہیں۔درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے مذکورہ بالا معیاری مساوات اخذ کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = a \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = v_0, \; s(0) = s_0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

سوال ۵.۱۲۴: سیارے کی سطح کے نزدیک آزاد گرتے ہوئے جسم کا مقام درج ذیل مساوات دیتی ہے

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 \tag{۲}$$

جہاں ثقلی اسراع a ، سطح سیارہ سے جسم کی ابتدائی بلندی s_0 ، اور جسم کی ابتدائی رفتار v_0 ہے۔ چونکہ اسراع نیچے رخ (بلندی s کے الٹ) ہے لہٰذا مساوات میں منفی کی علامت پائی جاتی ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر جسم کی رفتار اوپر رخ ہو تب v_0 مثبت ہو گا اور اگر اس کا رخ نیچے کو ہو تب v_0 منفی ہو گا۔

مساوات ۱ استعمال کیے بغیر آپ ایک ابتدائی قیمت مسئلہ حل کر کے مساوات ۲ حاصل کر سکتے ہیں۔ یہ ابتدائی قیمت مسئلہ کیا ہو گا؟ ابتدائی قیمت مسئلہ حل کر کے مساوات ۲ حاصل کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۵.۱۲۵: رفتار کے ضد تفرق سے ہٹاو کا تعین۔

ا. فرض کریں محور s پر ایک جسم کی رفتار $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v = 9.8t - 3$ ہے۔

۱. اگر $t = 0$ پر $s = 5$ ہو تب $t = 1$ تا $t = 3$ جسم کا ہٹاو تلاش کریں۔

۲. اگر $t = 0$ پر $s = -2$ ہو تب $t = 1$ تا $t = 3$ جسم کا ہٹاو تلاش کریں۔

۳. اگر $t = 0$ پر $s = s_0$ ہو تب $t = 1$ تا $t = 3$ جسم کا ہٹاو تلاش کریں۔

ب. فرض کریں محدد کی لکیر پر ایک جسم کا مقام s متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے۔ کیا یہ درست ہے کہ $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کا ضد تفرق جانتے ہوئے دورانیہ $t = a$ تا $t = b$ کے لیے آپ جسم کا ہٹاو جان سکتے ہیں اگرچہ ان دونوں لمحات پر آپ کو جسم کا ہٹاو معلوم نہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۵.۱۲۶: یکتائی حل

اگر قابل تفرق تفاعل $y = F(x)$ اور $y = G(x)$ وقفہ I پر درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ کے حل ہوں تب کیا I میں ہر x کے لیے $F(x) = G(x)$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۵.۳ تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدے کا الٹ اطلاق

بعض اوقات متکمل میں متغیرات کی تبدیلی سے جانا پہچانا تکمل حاصل ہوتا ہے۔ تکمل کے اس طریقہ کو ترکیب بدل کہتے ہیں۔ تکمل کے حصول کا یہ ایک اہم طریقہ ہے۔ آئیں ترکیب بدل سمجھیں۔

عمومی طاقتی قاعدہ کی تکملی صورت

جب u ، متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور n ناطق عدد ہو جس کی قیمت -1 نہ ہو تب زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

۶۷۵۱ اس مساوات کو دوسرے نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ تفاعل $u^n \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ کا ایک ضد تفرق $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int \left(u^n \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right) \mathrm{d}x = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

۶۷۵۲ اس مساوات کے بائیں ہاتھ کو عموماً درج ذیل سادہ "تفرقی" روپ میں لکھا جاتا ہے

$$\int u^n \, \mathrm{d}u$$

۶۷۵۳ جہاں دونوں اطراف $\mathrm{d}x$ کو تفرقہ مانتے ہوئے منسوخ کیا گیا۔ درج بالا دو مساوات کو ملا کر درج ذیل ملتا ہے

$$\int u^n \, \mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \qquad (n \neq -1,\ \text{ناطق}\ n) \tag{۱}$$

۶۷۵۴ جہاں u قابل تفرق تفاعل ہے اور $\mathrm{d}u$ اس کا تفرقہ ہے۔

۶۷۵۵ مساوات ۱ حاصل کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے، اگرچہ یہ متغیر اس کلیہ میں نہیں پایا جاتا اور اس کی علامت اہم
۶۷۵۶ نہیں۔ ہم اس متغیر کو کسی بھی علامت مثلاً θ ، t ، y ، وغیرہ سے ظاہر کر سکتے تھے۔ مساوات ۱ کہتی ہے کہ جب بھی ہم کسی تکمل کو درج ذیل روپ میں لکھ
۶۷۵۷ سکیں

$$\int u^n \, \mathrm{d}u, \qquad (n \neq -1)$$

۶۷۵۸ جہاں u قابل تفرق تفاعل ہو اور $\mathrm{d}u$ اس کا تفرقہ ہو، اس کا حل $\frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ ہو گا۔

۶۷۵۹ مثال ۵.۱۲: درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int (x+2)^5 \, \mathrm{d}x$$

۶۷۶۰ **حل**

۶۷۶۱ ہم تکمل کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\int u^n \, \mathrm{d}u$$

۶۷۶۲ ایسا کرنے کی خاطر ہم $u = x + 2$ لیتے ہیں لہٰذا $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int (x+2)^5 \, \mathrm{d}x &= \int u^5 \, \mathrm{d}u && u = x+2,\ \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\
&= \frac{u^6}{6} + C && \text{مساوات ۱ میں}\ n = 5 \\
&= \frac{(x+2)^6}{6} + C && \text{واپس}\ u = x+2\ \text{پر کریں}
\end{aligned}$$

۶۷۳ □

۶۷۴ مثال ۵.۱۳: $u = x^2 + 2x - 3$ لیتے ہوئے $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x + 2\,\mathrm{d} = 2(x+1)\,\mathrm{d}x$ اور $\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u = (x +$
۶۷۵ $1)\,\mathrm{d}x$ ہو گا۔ یوں تکمل

$$\int (x^2 + 2x - 3)^2 (x+1)\,\mathrm{d}x$$

۶۷۶ کو ترکیب بدل سے حل کیا جا سکتا ہے:

$$\begin{aligned}
\int (x^2 + 2x - 3)^2 (x+1)\,\mathrm{d}x &= \int u^2 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int u^2\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\frac{u^3}{3} + C = \frac{1}{6}u^3 + C && u \text{ کے لحاظ سے تکمل} \\
&= \frac{1}{6}(x^2 + 2x - 3) + C && u \text{ بدلیں}
\end{aligned}$$

۶۷۷ جہاں آخری قدم پر u کی قیمت واپس پُر کی گئی۔ □

۶۷۸ مثال ۵.۱۴:

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 t \cos t\,\mathrm{d}t &= \int u^4\,\mathrm{d}u && u = \sin t,\ \mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{u^5}{5} + C && u \text{ کے لحاظ سے تکمل} \\
&= \frac{\sin^5 t}{5} + C && u \text{ بدلیں}
\end{aligned}$$

۶۷۹ □

۶۷۰ ترکیب بدل کی کامیابی اس بات پر منحصر ہے کہ ہم ایسا بدل تلاش کر سکیں جو مشکل تکمل کو جانے پہچانے تکمل میں تبدیل کرتا ہو۔ بعض اوقات پہلے بدل کے بعد
۶۷۱ دوسرا اور تیسرا بدل بھی درکار ہوتا ہے (سوال ۵.۱۷۳ اور سوال ۵.۱۷۴ کرنے کے بعد آپ کو اس بات کی سمجھ آ جائے گی) یا ہم کوئی دوسرا بدل استعمال کرنے
۶۷۲ کی کوشش کر سکتے ہیں۔ بعض اوقات کئی مختلف بدل قابل استعمال ہوں گے (اگلی مثال دیکھیں)۔

۶۷۳ مثال ۵.۱۵: درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int \frac{2z\,\mathrm{d}z}{\sqrt[3]{z^2+1}}$$

۶۷۷۴ **حل**

۶۷۷۵ ہم متکمل کے مشکل ترین حصے کی سادہ صورت تلاش کرنے کی غرض سے $u = z^2 + 1$ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int \frac{2z\,\mathrm{d}z}{\sqrt[3]{z^2+1}} &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u^{1/3}} && u = z^2+1,\ \mathrm{d}u = 2z\,\mathrm{d}z \\
&= \int u^{-1/3}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{u^{2/3}}{2/3} + C && u \text{ کے لحاظ سے تکمل} \\
&= \frac{3}{2}u^{2/3} + C \\
&= \frac{3}{2}(z^2+1)^{3/2} + C && u \text{ کا بدل } z^2+1 \text{ پُر کریں}
\end{aligned}$$

۶۷۷۶ □

۶۷۷۷ مثال ۵.۱۶:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+y^2}\cdot 2y\,\mathrm{d}y &= \int u^{1/2}\,\mathrm{d}u && u = 1+y^2,\ \mathrm{d}u = 2y\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{u^{3/2}}{3/2} + C && u \text{ کے لحاظ سے تکمل} \\
&= \frac{2}{3}(1+y^2)^{3/2} + C && u \text{ کی جگہ } 1+y^2 \text{ پُر کریں}
\end{aligned}$$

۶۷۷۸ □

۶۷۷۹ مثال ۵.۱۷:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{4t-1}\,\mathrm{d}t &= \int u^{1/2}\cdot\frac{1}{4}\,\mathrm{d}u && u = 4t-1,\ \mathrm{d}u = 4\,\mathrm{d}t,\ \frac{1}{4}\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\int u^{1/2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\cdot\frac{u^{3/2}}{3/2} + C && u \text{ کے لحاظ سے تکمل} \\
&= \frac{1}{6}u^{3/2} + C \\
&= \frac{1}{6}(4t-1)^{3/2} + C && u \text{ کی جگہ } 4t-1 \text{ پُر کریں}
\end{aligned}$$

۶۷۸۰ □

۶۷۸۱ **تکونیاتی تفاعل**

۶۷۸۲ اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو تب $\sin u$ بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا۔ زنجیری قاعدہ ہمیں $\sin u$ کا تفرق دیتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin u = \cos u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

۶۷۸۳ اسی مساوات کو دوسرے نقطہ نظر سے دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\sin u$ مضرب $\cos u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ کا ضد تفرق ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int \left(\cos u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x = \sin u + \mathrm{C}$$

۶۷۸۴ بائیں ہاتھ دونوں $\mathrm{d}x$ باضابطہ منسوخ کر کے درج ذیل قاعدہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\int \cos u\,\mathrm{d}u = \sin u + \mathrm{C} \tag{۲}$$

۶۷۸۵ مساوات ۲ کہتی ہے کہ جب بھی ہم کسی تکمل کو $\int \cos u\,\mathrm{d}u$ روپ میں لکھ سکیں، ہم u کے لحاظ سے اس کا تکمل لیتے ہوئے $\sin u + \mathrm{C}$ حاصل
۶۷۸۶ کریں گے۔

۶۷۸۷ مثال ۵.۱۸:

$$\begin{aligned}
\int \cos(7\theta+5)\,\mathrm{d}\theta &= \int \cos u \cdot \frac{1}{7}\,\mathrm{d}u && u = 7\theta+5, \mathrm{d}u = 7\,\mathrm{d}\theta, \frac{1}{7}\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{7}\int \cos u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{7}\sin u + \mathrm{C} && u \text{ کے لحاظ سے تکمل} \\
&= \frac{1}{7}\sin(7\theta+5) + \mathrm{C} && u \text{ کی جگہ } 7\theta+5 \text{ پُر کریں}
\end{aligned}$$

۶۷۸۸ □

۶۷۸۹ مساوات ۲ کی جوڑی مساوات درج ذیل ہے جہاں u قابل تفرق تفاعل ہے۔

$$\int \sin u\,\mathrm{d}u = -\cos u + \mathrm{C} \tag{۳}$$

۶۷۹۰ مثال ۵.۱۹:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \sin(x^3)\,\mathrm{d}x &= \int \sin(x^3)\cdot x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int \sin u \cdot \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u && u = x^3, \mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x, \frac{1}{3}\,\mathrm{d}u = x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3}\int \sin u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{3}(-\cos u + C') && u \text{ کے لحاظ سے تکمل} \\
&= -\frac{1}{3}\cos(x^3) + C && u = x^3 \text{ اور } \frac{C'}{3} = C \text{ پُر کریں}
\end{aligned}$$

۶۷۹۱ □

۶۷۹۲ قابل تفرق تفاعل u کے لیے زنجیری قاعدہ کی مدد سے درج ذیل کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

$$\int \sec^2 u\,\mathrm{d}u = \tan u + C \tag{۴}$$

$$\int \csc^2 u\,\mathrm{d}u = -\cot u + C \tag{۵}$$

$$\int \sec u \tan u\,\mathrm{d}u = \sec u + C \tag{۶}$$

$$\int \csc u \cot u\,\mathrm{d}u = -\csc u + C \tag{۷}$$

۶۷۹۳ ہر کلیہ میں u حقیقی متغیر کا قابل تفرق تفاعل ہے۔ کلیہ کو پرکھنے کے لیے دائیں ہاتھ کا u کے لحاظ سے تفرق حاصل کریں۔ ایسا کرنے سے بائیں ہاتھ کا متکمل
۶۷۹۴ حاصل ہو گا۔

۶۷۹۵ مثال ۵.۲۰:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos^2 2\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \int \sec^2 2\theta\,\mathrm{d}\theta && \sec 2\theta = \frac{1}{\cos 2\theta} \\
&= \int \sec^2 u \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u && u = 2\theta, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\int \sec^2 u\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2}\tan u + C && \text{مساوات ۴} \\
&= \frac{1}{2}\tan 2\theta + C && u \text{ کی جگہ } 2\theta \text{ پُر کریں}
\end{aligned}$$

□

تکمل کا ترکیب بدل

مذکورہ بالا تمام مثالیں درج ذیل عمومی کلیہ کی انفرادی مثالیں ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x &= \int f(u)\,\mathrm{d}u && u = g(x),\ \mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= F(u) + C && F(u) \text{ کا ضد تفرق } f(u) \\
&= F(g(x)) + C && u \text{ کی جگہ } g(x) \text{ پُر کریں}
\end{aligned}$$

یہ تین اقدام تکمل کی ترکیب بدل کے اقدام ہیں۔ یہ ترکیب اس لیے کام کرتی ہے کہ $f(g(x)) \cdot g'(x)$ کا ضد تفرق $F(g(x))$ ہے جہاں f کا ضد تفرق F ہے (ذیل دیکھیں)۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(g(x)) &= F'(g(x)) \cdot g'(x) && \text{زنجیری قاعدہ} \\
&= f(g(x)) \cdot g'(x) && \text{چونکہ } F' = f \text{ ہے}
\end{aligned}$$

ترکیب بدل اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ ہم x کی جگہ u کا تفاعل لیتے ہیں۔ یوں بدل $u = g(x)$ کا قابل حل ہونا لازم ہے تاکہ اس کو x کے لیے حل کرتے ہوئے x کی قیمت $x = g^{-1}(u)$ (u کا الٹ g) حاصل کی جا سکے۔ بعض اوقات، یہ ممکن بنانے کی خاطر، ہمیں x اور u کے دائرہ کار پر پابندی عائد کرنی ہو گی۔ آپ کو یہاں اس سے غرض نہیں ہونی چاہیے۔ ہم الٹ تفاعل پر حصہ ۱.۷ میں بحث کریں گے اور بدل کی ترکیب پر زیادہ تفصیل سے حصہ ۸.۴ اور حصہ ۱۴.۷ میں غور کریں گے۔

سوالات

سوال ۵.۱۲۷ تا سوال ۵.۱۳۸ میں دیا گیا بدل استعمال کرتے ہوئے غیر قطعی تکمل کو معیاری روپ میں لاتے ہوئے حل کریں۔

سوال ۵.۱۲۷: $\int \sin 3x\,\mathrm{d}x, \quad u = 3x$

سوال ۵.۱۲۸: $\int x \sin(2x^2)\,\mathrm{d}x, \quad u = 2x^2$

سوال ۵.۱۲۹: $\int \sec 2t \tan 2t\,\mathrm{d}t, \quad u = 2t$

سوال ۵.۱۳۰: $\int (1 - \cos \frac{t}{2})^2 \sin \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t, \quad u = 1 - \cos \frac{t}{2}$

سوال ۵.۱۳۱: $\int 28(7x - 2)^{-5}\,\mathrm{d}x, \quad u = 7x - 2$

سوال ۵.۱۳۲: $\int x^3(x^4 - 1)^2\,\mathrm{d}x, \quad u = x^4 - 1$

۶۸۱۶ سوال ۵.۱۳۳: $\int \frac{9r^2}{\sqrt{1-r^3}}\,\mathrm{d}r, \quad u = 1 - r^3$

۶۸۱۷

۶۸۱۸ سوال ۵.۱۳۴: $\int 12(y^4 + 4y^2 + 1)^2(y^3 + 2y)\,\mathrm{d}y, \quad u = y^4 + 4y^2 + 1$

۶۸۱۹ سوال ۵.۱۳۵: $\int \sqrt{x}\sin^2(x^{3/2} - 1)\,\mathrm{d}x, \quad u = x^{3/2} - 1$

۶۸۲۰

۶۸۲۱ سوال ۵.۱۳۶: $\int \frac{1}{x^2}\cos^2(\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x, \quad u = -\frac{1}{x}$

۶۸۲۲ سوال ۵.۱۳۷: $\int \csc^2 2\theta \cot 2\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad u = \cot 2\theta, \quad u = \csc 2\theta$

۶۸۲۳

۶۸۲۴ سوال ۵.۱۳۸: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5x+8}}, \quad u = 5x + 8, \quad u = \sqrt{5x + 8}$

۶۸۲۵ سوال ۵.۱۳۹تا سوال ۵.۱۷۲ میں تکمل حل کریں۔

۶۸۲۶ سوال ۵.۱۳۹: $\int \sqrt{3 - 2s}\,\mathrm{d}s$

۶۸۲۷

۶۸۲۸ سوال ۵.۱۴۰: $\int (2x + 1)^3\,\mathrm{d}x$

۶۸۲۹ سوال ۵.۱۴۱: $\int \frac{1}{\sqrt{5s+4}}\,\mathrm{d}s$

۶۸۳۰

۶۸۳۱ سوال ۵.۱۴۲: $\int \frac{3\,\mathrm{d}x}{(2-x)^2}$

۶۸۳۲ سوال ۵.۱۴۳: $\int \theta\sqrt[4]{1 - \theta^2}\,\mathrm{d}\theta$

۶۸۳۳

۶۸۳۴ سوال ۵.۱۴۴: $\int 8\theta\sqrt[3]{\theta^2 - 1}\,\mathrm{d}\theta$

۶۸۳۵ سوال ۵.۱۴۵: $\int 3y\sqrt{7 - 3y^2}\,\mathrm{d}y$

۶۸۳۶

۶۸۳۷ سوال ۵.۱۴۶: $\int \frac{4y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{2y^2+1}}$

۶۸۳۸ سوال ۵.۱۴۷: $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\,\mathrm{d}x$

۶۸۳۹

۶۸۴۰ سوال ۵.۱۴۸: $\int \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

۶۸۴۱ سوال ۵.۱۴۹: $\int \cos(3z + 4)\,\mathrm{d}z$

۶۸۴۲

۶۸۴۳ سوال ۵.۱۵۰: $\int \sin(8z - 5)\,\mathrm{d}z$

۶۸۳۴ سوال ۵.۱۵۱: $\int \sec^2(3x+2)\,\mathrm{d}x$

۶۸۳۵

۶۸۳۶ سوال ۵.۱۵۲: $\int \tan^2 x \sec^2 x\,\mathrm{d}x$

۶۸۳۷ سوال ۵.۱۵۳: $\int \sin^5 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}\,\mathrm{d}x$

۶۸۳۸

۶۸۳۹ سوال ۵.۱۵۴: $\int \tan^7 \frac{x}{2} \sec^2 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

۶۸۵۰ سوال ۵.۱۵۵: $\int r^2(\frac{r^3}{18}-1)^5\,\mathrm{d}r$

۶۸۵۱

۶۸۵۲ سوال ۵.۱۵۶: $\int r^4(7-\frac{r^5}{10})^3\,\mathrm{d}r$

۶۸۵۳ سوال ۵.۱۵۷: $\int x^{1/2}\sin(x^{3/2}+1)\,\mathrm{d}x$

۶۸۵۴

۶۸۵۵ سوال ۵.۱۵۸: $\int x^{1/3}\sin(x^{4/3}-8)\,\mathrm{d}x$

۶۸۵۶ سوال ۵.۱۵۹: $\int \sec(v+\frac{\pi}{2})\tan(v+\frac{\pi}{2})\,\mathrm{d}v$

۶۸۵۷

۶۸۵۸ سوال ۵.۱۶۰: $\int \csc(\frac{v-\pi}{2})\cot(\frac{v-\pi}{2})\,\mathrm{d}v$

۶۸۵۹ سوال ۵.۱۶۱: $\int \frac{\sin(2t+1)}{\cos^2(2t+1)}\,\mathrm{d}t$

۶۸۶۰

۶۸۶۱ سوال ۵.۱۶۲: $\int \frac{6\cos t}{(2+\sin t)^3}\,\mathrm{d}t$

۶۸۶۲ سوال ۵.۱۶۳: $\int \sqrt{\cot y}\csc^2 y\,\mathrm{d}y$

۶۸۶۳

۶۸۶۴ سوال ۵.۱۶۴: $\int \frac{\sec z \tan z}{\sqrt{\sec z}}\,\mathrm{d}z$

۶۸۶۵ سوال ۵.۱۶۵: $\int \frac{1}{t^2}\cos(\frac{1}{t}-1)\,\mathrm{d}t$

۶۸۶۶

۶۸۶۷ سوال ۵.۱۶۶: $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\cos(\sqrt{t}+3)\,\mathrm{d}t$

۶۸۶۸ سوال ۵.۱۶۷: $\int \frac{1}{\theta^2}\sin\frac{1}{\theta}\cos\frac{1}{\theta}\,\mathrm{d}\theta$

۶۸۶۹

۶۸۷۰ سوال ۵.۱۶۸: $\int \frac{\cos\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}\sin^2\sqrt{\theta}}\,\mathrm{d}\theta$

۶۸۷۱ سوال ۵.۱۶۹: $\int (s^3+2s^2-5s+5)(3s^2+4s-5)\,\mathrm{d}s$

۶۸۷۲

سوال ۵.۱۷۰: $\int (\theta^4 - 2\theta^2 + 8\theta - 2)(\theta^3 - \theta + 2)\,\mathrm{d}\theta$

سوال ۵.۱۷۱: $\int t^3(1+t^4)^3\,\mathrm{d}t$

سوال ۵.۱۷۲: $\int \sqrt{\frac{x-1}{x^5}}\,\mathrm{d}x$

قدم باقدم تکمل کے سادہ روپ کا حصول

اگر آپ تکمل کے سادہ روپ کے لیے درکار بدل نہ جانتے ہوں تب تکمل کا سادہ روپ قدم باقدم تلاش کرنے کی کوشش کریں۔ متکمل کو دیکھ کر اندازے سے بدل منتخب کرتے ہوئے متکمل کو کچھ سادہ بنائیں۔ اگلے قدم میں اس کو مزید سادہ بنانے کی کوشش کریں۔ بدل منتخب کرنے کی صلاحیت اس طرز کے سوالات حل کرنے سے بڑھتی ہے۔ اگلے دو سوالات حل کرنے سے آپ اس طریقے کو سمجھ پائیں گے۔

سوال ۵.۱۷۳:

$$\int \frac{18\tan^2 x \sec^2 x}{(2+\tan^3 x)^2}\,\mathrm{d}x$$

ا. $u = \tan x$ پُر کرکے $v = u^3$ اور اس کے بعد $w = 2 + v$ پُر کریں۔

ب. $u = \tan^3 x$ کے بعد $v = 2 + u$ پُر کریں۔

ج. $u = 2 + \tan^3 x$ پُر کریں۔

سوال ۵.۱۷۴:

$$\int \sqrt{1+\sin^2(x-1)}\,\sin(x-1)\cos(x-1)\,\mathrm{d}x$$

ا. $u = x - 1$ پُر کرنے کے بعد $v = \sin u$ اور اس کے بعد $w = 1 + v^2$ پُر کریں۔

ب. $u = \sin(x-1)$ کے بعد $v = 1 + u^2$ پُر کریں۔

ج. $u = 1 + \sin^2(x-1)$ پُر کریں۔

اگلے دو تکملات حل کریں۔

سوال ۵.۱۷۵: $\int \frac{(2r-1)\cos\sqrt{3(2r-1)^2+6}}{\sqrt{3(2r-1)^2+6}}\,\mathrm{d}r$

سوال ۵.۱۷۶: $\int \frac{\sin\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta\cos^3\sqrt{\theta}}}\,\mathrm{d}\theta$

ابتدائی قیمت مسائل

سوال ۵.۱۷۷ تا سوال ۵.۱۸۴ میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

سوال ۵.۱۷۷: $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 12t(3t^2-1)^3, \quad s(1) = 3$

سوال ۵.۱۷۸: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x(x^2+8)^{-1/3}, \quad y(0) = 0$

سوال ۵.۱۷۹: $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 8\sin^2(t + \frac{\pi}{12}), \quad s(0) = 8$

سوال ۵.۱۸۰: $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 3\cos^2(\frac{\pi}{4} - \theta), \quad r(0) = \frac{\pi}{8}$

سوال ۵.۱۸۱: $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -4\sin(2t - \frac{\pi}{2}), \quad s'(0) = 100,\ s(0) = 0$

سوال ۵.۱۸۲: $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 4\sec^2 2x \tan 2x, \quad y'(0) = 4,\ y(0) = -1$

سوال ۵.۱۸۳: ایک لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے ذرے کی رفتار تمام t کے لیے $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 6\sin 2t\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر $s = 0$ ہو تب $t = \frac{\pi}{2}$ سیکنڈ پر s کیا ہوگا؟

سوال ۵.۱۸۴: ایک لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے ذرے کا اسراع تمام t کے لیے $a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \pi^2 \cos \pi t\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر $s = 0$ اور $v = 8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہوں تب $t = 1$ سیکنڈ پر s کیا ہوگا؟

نظریہ اور مثالیں

سوال ۵.۱۸۵: ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ہم $2\sin x \cos x$ کا تکمل تین مختلف طریقوں سے حاصل کر سکتے ہیں۔

ا.

$$\int 2\sin x \cos x\,\mathrm{d}x = \int 2u\,\mathrm{d}u \qquad u = \sin x$$
$$= u^2 + C_1 = \sin^2 x + C_1$$

ب.

$$\int 2\sin x \cos x\,\mathrm{d}x = \int -2u\,\mathrm{d}u \qquad u = \cos x$$
$$= -u^2 + C_2 = -\cos^2 x + C_2$$

ج.

$$\int 2\sin x \cos x\,\mathrm{d}x = \int \sin 2x\,\mathrm{d}x \qquad 2\sin x \cos x = \sin 2x$$
$$= -\frac{\cos 2x}{2} + C_3$$

کیا تینوں طریقے درست ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۵.۱۸۶: $u = \tan x$ پُر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$\int \sec^2 x \tan x \, \mathrm{d}x = \int u \, \mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\tan^2 x}{2} + C$$

جبکہ $u = \sec x$ پُر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int \sec^2 x \tan x \, \mathrm{d}x = \int u \, \mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\sec^2 x}{2} + C$$

کیا دونوں تکمل درست ہو سکتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۵.۴ اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ

اس حصہ میں ہم دیکھتے ہیں کہ کس طرح عملی سوالات ہمیں **متناہی مجموعہ**[۱۳] سے تخمین کے حصول تک پہنچاتے ہیں۔

رقبہ اور اخراج قلب

فی منٹ جتنے لٹر خون آپ کا قلب خارج کرتا ہے اس کو اخراج قلب کہتے ہیں۔ سکون کی حالت میں کسی شخص کا اخراج قلب 5 یا 6 لٹر فی منٹ ہو سکتا ہے۔ سخت ورزش کے دوران یہ شرح 30 لٹر فی منٹ ہو سکتی ہے۔ بیماری بھی اس شرح کو بہت زیادہ متاثر کر سکتی ہے۔

اخراج قلب کی پیمائش کے لیے طبیب صفحہ ۲۷۰ پر سوال ۳.۴۱۵ میں دیا گیا طریقہ اختیار کرنے کے بجائے رقت رنگ کی ترکیب استعمال کر سکتا ہے۔ رقت رنگ کی ترکیب میں قلب کے قریب مرکزی داخلی رگ میں 5 mg سے 10 mg رنگ کا ٹیکہ لگایا جاتا ہے جو قلب کے دائیں حصے میں داخل ہو کر کلیجا سے ہوتے ہوئے قلب کے بائیں حصہ سے مرکزی شریان میں خارج ہو گا، جہاں ہر چند سیکنڈ بعد گزرتے ہوئے خون میں رنگ کی کثافت ناپی جا سکتی ہے۔ جدول ۵.۳ اور شکل ۵.۱۲ میں ایک تندرست شخص جو آرام کر رہا ہو کے نتائج دکھائے گئے ہیں جس کو 5.6 mg رنگ کا ٹیکہ لگایا گیا ہے۔ جسم میں ایک چکر مکمل کرنے کے بعد خون کی دوبارہ گردش کو مد نظر رکھتے ہوئے نتائج پیش کیے گئے ہیں۔

مریض کے قلب کا اخراج معلوم کرنے کی خاطر ہم رنگ کی مقدار کو شکل ۵.۱۲ میں دی گئی کثافت رنگ کی منحنی کے نیچے رقبہ سے تقسیم کر کے 60 سے ضرب دیتے ہیں۔

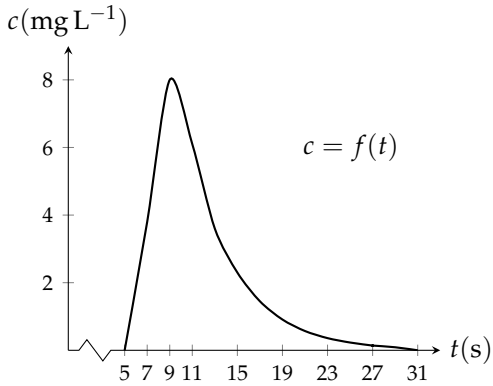
$$\text{اخراج قلب} = \frac{\text{رنگ کی مقدار}}{\text{منحنی کے نیچے رقبہ}} \times 60 \qquad (۱)$$

---

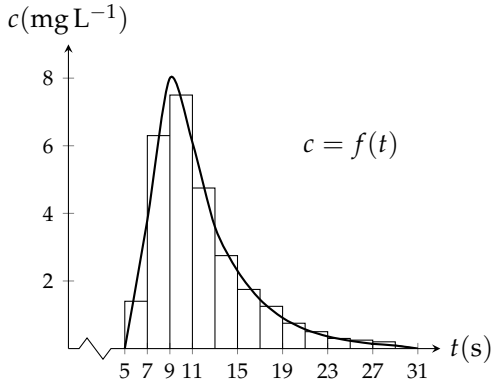
[۱۳] finitesum

جدول ۵.۳: رقت رنگ کی ترکیب کے نتائج۔

لمحہ	کثافت رنگ	لمحہ	کثافت رنگ
5	0.0	19	0.91
7	3.8	21	0.57
9	8.0	23	0.36
11	6.1	25	0.23
13	3.6	27	0.14
15	2.3	29	0.09
17	1.45	31	0.00



شکل ۵.۱۲: جدول میں رنگ کی کثافت بالمقابل وقت کو ترسیم کیا گیا ہے۔



شکل ۵.۱۳: منحنی کے نیچے رقبے کو مستطیل رقبوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

اس مساوات میں مختلف مقداروں کی اکائیوں پر نظر ڈال کر آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات درست جواب دے گی۔ رنگ کی مقدار mg میں ہے جبکہ منحنی کے نیچے رقبہ کی اکائی $\mathrm{mg\,L^{-1}} \times \mathrm{s}$ ہو گی لہٰذا درج بالا مساوات خون کا اخراج لٹر فی منٹ میں دے گی۔

$$\frac{\mathrm{mg}}{\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{L}} \cdot \mathrm{s}} \cdot \frac{\text{سیکنڈ}}{\text{منٹ}} = \frac{\text{لٹر}}{\text{منٹ}}$$

درج ذیل مثال میں ہم شکل ۵.۱۲ میں دی گئی منحنی کے نیچے رقبے کی تخمینی قیمت تلاش کرتے ہوئے مریض کا اخراج قلب معلوم کرتے ہیں۔

مثال ۵.۲۱: جدول ۵.۳ اور شکل ۵.۱۲ میں ایک مریض کی ترکیب رقت رنگ کے نتائج دیے گئے ہیں۔ مریض کا اخراج قلب تلاش کریں۔

حل

رنگ کی مقدار 5.6 mg ہے لہٰذا ہمیں صرف منحنی کے نیچے رقبہ چاہیے۔ ہم رقبہ تلاش کرنے کا ایسا کوئی کلیہ نہیں جانتے جو اس قسم کی ناہموار منحنی کے لیے قابل استعمال ہو۔ البتہ ہم منحنی کے نیچے رقبے کو مستطیلی حصوں میں تقسیم کر کے تمام مستطیلوں کے رقبے جمع کرتے ہوئے رقبے کی تخمینی قیمت تلاش کر سکتے ہیں (شکل ۵.۱۳)۔ ہر مستطیل کا کچھ حصہ اصل رقبے سے کم رقبہ گھیرتا ہے جبکہ اس کا باقی حصہ اصل رقبے سے زیادہ رقبہ گھیرتا ہے۔ ہم نے تمام مستطیلوں کی چوڑائی 2 منتخب کی ہے۔ ایسا کرنا ضروری نہیں ہے بلکہ ہر مستطیل کی چوڑائی مختلف منتخب کی جا سکتی ہے۔ ہر مستطیل کا قد مستطیل کی چوڑائی پر تفاعل کی تقریباً اوسط قیمت ہو گی۔ ہم تمام مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\text{منحنی کے نیچے رقبہ} &\approx f(6)\cdot 2 + f(8)\cdot 2 + f(10)\cdot 2 + \cdots + f(28)\cdot 2 + f(30)\cdot 2 \\
&\approx (1.4)(2) + (6.3)(2) + (7.5)(2) + \cdots + (0.1)(2) + (0.045)(2) \\
&\approx (28.8)(2) = 57.6\,\mathrm{mg\,s\,L^{-1}}
\end{aligned}$$

رنگ کی مقدار کو اس رقبہ سے تقسیم کرتے ہوئے 60 سے ضرب دینے سے اخراج قلب حاصل ہو گا۔

$$\text{اخراج قلب} \approx \frac{\text{رنگ کی مقدار}}{\text{رقبہ}} \times 60 = \frac{5.6}{57.6} \times 60 \approx 5.8\,\mathrm{L\,min^{-1}}$$

مریض کا اخراج قلب تقریباً $5.8\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ ہے۔ □

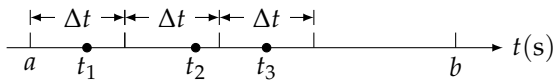
طے شدہ فاصلہ

فرض کریں ہمیں ایک گاڑی کی رفتار (کا) تفاعل $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = f(t)\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ معلوم ہے۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ وقفہ $a \le t \le b$ کے دوران گاڑی کتنا فاصلہ طے کرتی ہے۔ اگر ہمیں f کا ضد تفرق F معلوم ہو ہم گاڑی کا مقام تفاعل $s = F(t) + C$ تلاش کر سکتے ہیں جس کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی دورانیے میں طے شدہ فاصل تلاش کیا جا سکتا ہے (سوال ۵.۱۲۵)۔

تفاعل رفتار $v = f(t)$ کا ضد تفرق نہ جانتے ہوئے طے شدہ فاصلہ مجموعہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے، جس پر اب غور کرتے ہیں۔ ہم $[a, b]$ کو چھوٹے چھوٹے ذیلی وقفوں میں یوں تقسیم کرتے ہیں کہ ہر ذیلی وقفے میں رفتار کی قیمت تقریباً غیر متغیر ہو۔ ہم ہر ذیلی وقفے کے دوران فاصلہ درج ذیل کلیہ سے اخذ کرتے ہوئے

$$\text{فاصلہ} = \text{رفتار} \times \text{وقت} = f(t) \cdot \Delta t$$

وقفہ $[a, b]$ کے تمام ذیلی وقفوں میں طے شدہ فاصلوں کا مجموعہ لے کر کل فاصلہ دریافت کرتے ہیں۔ فرض کریں اس وقفے کو درج ذیل ذیلی وقفوں میں تقسیم کیا جاتا ہے جہاں ہر ذیلی وقفہ Δt کے برابر ہے۔



پہلے ذیلی وقفے پر t_1 ایک نقطہ ہے۔ اگر یہ ذیلی وقفہ نہایت چھوٹا ہو تب اس دوران رفتار میں تبدیلی قابل نظر انداز ہو گی۔ یوں اس دوران گاڑی تقریباً $f(t_1)\Delta t$ فاصلہ طے کرے گی۔ اگر t_2 دوسرے ذیلی وقفے میں ایک نقطہ ہو تب اس دوران گاڑی $f(t_2)\Delta t$ فاصل طے کرے گی۔ اسی طرح باقی تمام ذیلی وقفوں کے دوران طے شدہ فاصلے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ تمام ذیلی وقفوں کے دوران طے شدہ فاصلوں کا مجموعہ تخمیناً $[a, b]$ کے دوران کل طے فاصل D ہو گا۔ اگر ذیلی وقفوں کی تعداد n ہو تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$D \approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t \tag{۲}$$

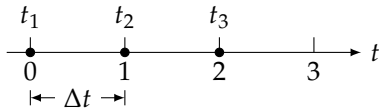
آئیں مثال ۵.۹ کے نتائج پر یہ کلیہ استعمال کریں۔ ایک گولا سیدھا اوپر پھینکا گیا۔ لمحہ t پر اس کی رفتار $v = f(t) = -9.8t + 160$ تھی۔ ابتدائی 3 سیکنڈوں میں گولا 3 m کی ابتدائی بلندی سے 438.9 m کی بلندی تک پہنچا۔ یوں ابتدائی تین سیکنڈوں میں گولے نے 438.9 m فاصلہ طے کیا۔

مثال ۵.۲۲: سیدھا اوپر پھینکے گئے گولے کی رفتار $v = f(t) = -9.8t + 160$ ہے۔ مجموعے کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے ابتدائی 3 سیکنڈوں میں طے شدہ فاصلے کا تخمینہ لگائیں۔ بالکل ٹھیک جواب 435.9 m ہے۔

حل

ہم ذیلی وقفوں کی مختلف تعداد اور ذیلی وقفوں میں مختلف نقطوں کا انتخاب کر کے مسئلہ حل کرتے ہیں۔

ہم کل 3 ذیلی وقفے لیتے ہیں اور f کی قیمت ہر ذیلی وقفہ کے بائیں ہاتھ سر پر لیتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی 1 ہو گی۔

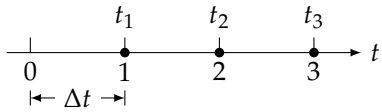


۶۹۶۳

۶۹۶۴ f کی قیمت 0 ، 1 ،اور 2 پر لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t \qquad \text{(مساوات ۲)} \\ &\approx [160 - 9.8(0)](1) + [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) \\ &\approx 450.6 \end{aligned}$$

۶۹۶۵ ہم کل 3 ذیلی وقفے لیتے ہیں اور f کی قیمت ہر ذیلی وقفے کے بائیں ہاتھ سر پر لیتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی 1 ہو گی۔



۶۹۶۶

۶۹۶۷ f کی قیمت 1 ، 2 ،اور 3 پر لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} D &\approx f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + f(t_3)\Delta t \qquad \text{(مساوات ۲)} \\ &\approx [160 - 9.8(1)](1) + [160 - 9.8(2)](1) + [160 - 9.8(3)](1) \\ &\approx 421.2 \end{aligned}$$

۶۹۶۸ کل 6 ذیلی وقفے لیتے ہیں اور f کی قیمت ہر ذیلی وقفے کے پہلے بائیں اور بعد میں دائیں ہاتھ سر پر لیتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی $\frac{1}{2}$ ہو گی۔ نتائج درج ذیل ہیں۔

بائیں ہاتھ سروں پر قیمتیں	$D \approx 443.25$
دائیں ہاتھ سروں پر قیمتیں	$D \approx 428.55$

۶۹۶۹ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ 6 ذیلی وقفے لیتے ہوئے بہتر جواب حاصل ہوتے ہیں۔ مزید زیادہ ذیلی وقفے لینے سے جواب میں مزید بہتری پیدا ہوتی ہے۔ جدول ۵.۴
۶۹۷۰ میں چند نتائج دکھائے گئے ہیں۔

۶۹۷۱ جدول ۵.۴ سے ہم دیکھتے ہیں کہ بائیں سر نقاط کا مجموعہ اصل جواب تک اوپر سے پہنچتا ہے جبکہ دائیں سر نقاط کا مجموعہ اصل جواب تک نیچے سے پہنچتا ہے۔ حقیقت
۶۹۷۲ میں جواب ان دونوں کے بیچ پایا جاتا ہے۔ جدول میں دیا آخری مجموعہ اور اصل جواب میں فرق درج ذیل ہے۔

$$\text{فی صد خلل} = \frac{435.9 - 435.67}{435.9} \times 100 = 0.05\,\%$$

۶۹۷۳ جدول کے آخری نتیجہ سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ پرواز کے ابتدائی تین سیکنڈوں میں 436 m فاصلہ طے کیا گیا۔ □

۶۹۷۴ آپ مثال ۵.۲۱ اور مثال ۵.۲۲ میں مشابہت دیکھ سکتے ہیں۔ دونوں میں تفاعل f ایک بند وقفہ میں معین ہے جس کی ذیلی وقفوں پر قیمت کو وقفہ کی لمبائی سے
۶۹۷۵ ضرب دے کر تمام کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ ہم اسی ترکیب کو حجم کی تلاش کے لیے بھی استعمال کر سکتے ہیں۔

جدول ۵.۴: ذیلی وقفوں کی تعداد بڑھانے سے مزید بہتر جواب حاصل ہوتا ہے (مثال ۵.۲۲)۔

ذیلی وقفوں کی تعداد	ذیلی وقفہ کی لمبائی	بائیں نقاط پر مجموعہ	دائیں نقاط پر مجموعہ
3	1	450.6	421.2
6	0.5	443.25	428.55
12	0.25	439.58	432.23
24	0.125	437.74	434.06
48	0.0625	436.82	434.98
96	0.03125	436.36	435.44
192	0.015625	436.13	435.67

حجم

درج ذیل دو مثالوں میں ہم متناہی مجموعہ استعمال کرتے ہوئے حجم تلاش کرتے ہیں۔

مثال ۵.۲۳: ایک ٹھوس جسم $x = \mp 2$ ، $y = \mp\sqrt{9-x^2}$ ،اور $z = \mp\sqrt{9-x^2}$ سطوح کے بیچ پایا جاتا ہیں۔ جسم کے حجم کی اندازاً قیمت تلاش کریں (شکل ۵.۱۴-الف)۔

حل

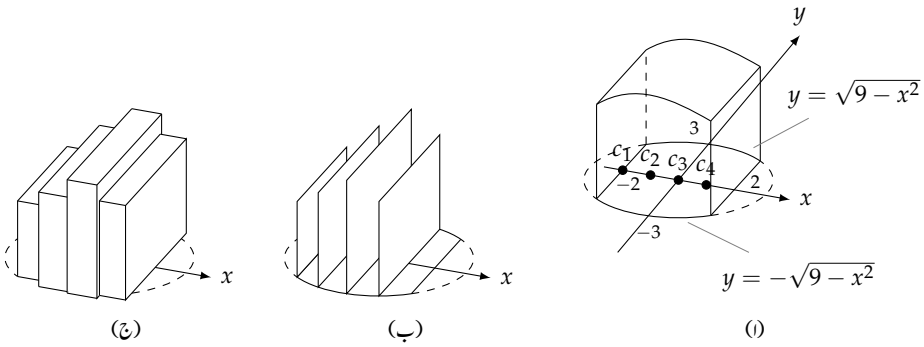
ہم محور x پر وقفہ $[-2, 2]$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x = 1$ ہو گی۔ ہر ذیلی وقفہ کے بائیں سر نقطے پر جسم کا رقبہ عمودی تراش ایک چوکور ہو گا (شکل ۵.۱۴-ب) جہاں ذیلی وقفوں کے بائیں سر $x = -2, -1, 0, 1$ پر پائے جاتے ہیں۔ ہم ہر چوکور پر دائیں جانب قائمہ بیلن (چوکور تختہ) بناتے ہیں جس کا قد 1 ہے (شکل ۵.۱۴-ج)۔ تمام تختوں کے حجم کا مجموعہ اندازاً جسم کے حجم کے برابر ہو گا۔

ایک تختے کا حجم ہم $H = Sh$ سے اخذ کر سکتے ہیں جہاں H ، S ،اور h بالترتیب تختے کا حجم، رقبہ عمودی تراش، اور موٹائی کو ظاہر کرتے ہیں۔ نقطہ x پر تختے کا رقبہ عمودی تراش $S(x) = (2\sqrt{9-x^2})^2 = 4(9-x^2)$ ہے جبکہ تختے کا قد 1 ہے لہٰذا چار تختوں کے حجم کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

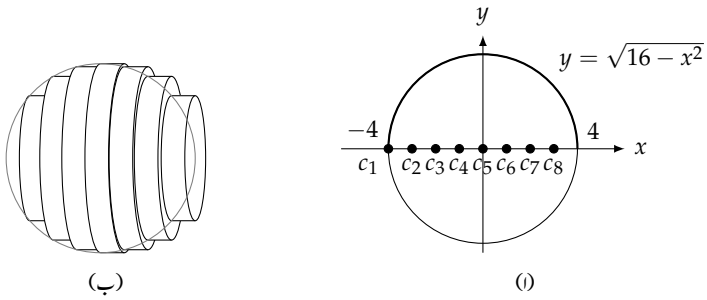
$$\begin{aligned}
H_4 &= S(x_1)\Delta x + S(x_2)\Delta x + S(x_3)\Delta x + S(x_4)\Delta x \\
&= 4(9-x_1^2)(1) + 4(9-x_2^2)(1) + 4(9-x_3^2)(1) + 4(9-x_4^2)(1) \\
&= 4[(9-(-2)^2]) + (9-(-1)^2) + (9-(0)^2) + (9-(1)^2)] \\
&= 4[(9-4) + (9-1) + (9-0) + (9-1)] \\
&= 4[36-6] = 120
\end{aligned}$$

یہ جواب جسم کے اصل حجم $H = \frac{368}{3} \approx 122.67$ کے بہت قریب ہے (سوال ۵.۴۳۱)۔ جواب میں فی صد خلل درج ذیل ہے۔

$$\text{فی صد خلل} = \frac{|H - H_4|}{H} = \frac{\left|\frac{368}{3} - 120\right|}{\frac{368}{3}} \approx 2.2\,\%$$



شکل ۵.۱۴: ٹھوس جسم برائے مثال ۵.۲۳



شکل ۵.۱۵: نصف دائرہ $y = \sqrt{16 - x^2}$ کو محور x کے گرد گما کر کرہ حاصل کیا جاتا ہے (مثال ۵.۲۴)۔

۶۹۸۸ وقفہ $[-2, 2]$ پر ذیلی وقفوں کی تعداد بڑھانے سے تختوں کا قد کم ہو گا جبکہ حاصل حجم زیادہ درست ہو گا۔ □

۶۹۸۹ مثال ۵.۲۴: ایک کرہ کا رداس 4 ہے (شکل ۵.۱۵-ا)۔ کرہ کا حجم تلاش کریں۔

۶۹۹۰ **حل**

۶۹۹۱ ہم تفاعل $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ کو محور x کے گرد گما کر کرہ کی سطح حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم وقفہ $-4 \leq x \leq 4$ کو آٹھ برابر
۶۹۹۲ ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی $\Delta x = 1$ ہو گی۔ ان ذیلی وقفوں کے بائیں سر نقطے c_1 تا c_7 پر پائے جاتے ہیں (شکل
۶۹۹۳ ۵.۱۵-ا)۔ ہم ہر ذیلی وقفہ کے بائیں سر پر کرہ کے رقبہ عمودی تراش کے برابر رقبے کا بیلن جس کی لمبائی 1 ہو لیتے ہیں (شکل ۵.۲۴-ب)۔ ان تمام بیلنوں کے
۶۹۹۴ حجم کا مجموعہ تقریباً کرہ کے حجم کے برابر ہو گا۔ ہر ایک بیلن کا حجم $H = \pi r^2 h$ ہو گا جہاں بیلن کا رداس r اور اس کی لمبائی h ہے۔ آٹھوں بیلنوں کے

۶۹۹۵ حجم کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
H_8 &= \pi[f(x_1)]^2\Delta x + \pi[f(x_2)]^2\Delta x + \pi[f(x_3)]^2\Delta x + \cdots + \pi[f(x_8)]^2\Delta x \\
&= \pi\left[\sqrt{16-x_1^2}\right]^2\Delta x + \pi\left[\sqrt{16-x_2^2}\right]^2\Delta x + \pi\left[\sqrt{16-x_3^2}\right]^2\Delta x + \\
&\qquad \cdots + \pi\left[\sqrt{16-x_8^2}\right]^2\Delta x \\
&= \pi[(16-(-4)^2) + (16-(-3)^2) + (16-(-2)^2) + \cdots + (16-(3)^2)] \\
&= \pi[0+7+12+15+16+15+12+7] \\
&= 84\pi
\end{aligned}
$$

۶۹۹۶ کرہ کا اصل حجم درج ذیل ہے (سوال ۵.۴۳۲)۔

$$H = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(4)^3 = \frac{256\pi}{3}$$

۶۹۹۷ متناہی مجموعہ سے حاصل حجم میں فی صد خلل درج ذیل ہے۔

$$
\begin{aligned}
\text{فی صد خلل} &= \frac{|H-H_8|}{H}\times 100 = \frac{\frac{256\pi}{3}-84\pi}{\frac{256\pi}{3}}\times 100 \\
&= \frac{256-252}{256} = \frac{1}{64} \approx 1.6\,\%
\end{aligned}
$$

۶۹۹۸ □

۶۹۹۹ **غیر منفی تفاعل کی اوسط قیمت**

۷۰۰۰ متناہی تعداد قیمتوں کی اوسط حاصل کرنے کی خاطر ہم تمام قیمتوں کا مجموعہ لے کر قیمتوں کی تعداد سے تقسیم کرتے ہیں۔ اب لا متناہی تعداد کی قیمتوں کی اوسط سے
۷۰۰۱ کیا مراد ہو گا؟ مثال کے طور پر وقفہ $[-1,1]$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کی اوسط قیمت سے کیا مراد ہے؟ ایسی "استمراری" اوسط کا مطلب سمجھنے کی خاطر
۷۰۰۲ فرض کریں ہم $x = -1$ تا $x = 1$ کے بیچ بلا منصوبہ x کی مختلف قیمتوں پر تفاعل کی نمونی قیمتوں کے مربع لے کر ان مربعوں کی اوسط حاصل
۷۰۰۳ کرتے ہیں۔ x کی مختلف قیمتوں کی تعداد بڑھانے سے ہم توقع کرتے ہیں کہ یہ اوسط کسی مخصوص قیمت کے قریب تر پہنچنے کی کوشش کرے گی۔ اس قیمت کو
۷۰۰۴ ہم وقفہ $[-1,1]$ پر تفاعل کی **اوسط**[۱۴] کہتے ہیں۔

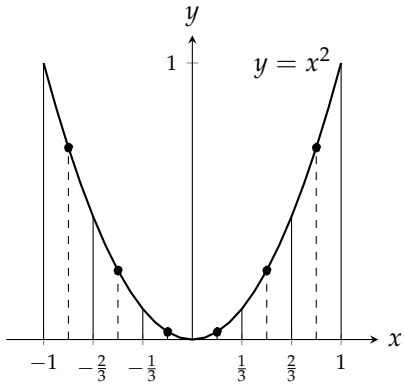
۷۰۰۵ مثال ۵.۲۵: وقفہ $[-1,1]$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

۷۰۰۶ **حل**

۷۰۰۷ ہم وقفہ $[-1,1]$ کو 6 برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل ۵.۱۶)۔ یوں ایک ذیلی وقفہ کی لمبائی $\Delta x = \frac{1}{3}$ ہو گی۔

---

[۱۴] average



شکل ۵.۱۶: تفاعل کی اوسط (مثال ۵.۲۵)۔

۷۰۰۸ اب تک کی مثالوں میں متناہی مجموعہ حاصل کرتے ہوئے ہم ہر ذیلی وقفہ کے سر پر تفاعل کی قیمت لیتے رہے ہیں۔ اس سے بہتر نتائج اس صورت حاصل ہوتے
۷۰۰۹ ہیں جب تفاعل کی قیمت ہر ذیلی وقفہ کے وسط میں لی جائے۔ چھ ذیلی وقفوں کے وسط میں تفاعل کی قیمتوں کی اوسط کی اندازاً قیمت تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\text{اوسط قیمت} &\approx \frac{(-\frac{5}{6})^2+(-\frac{3}{6})^2+(-\frac{1}{6})^2+(\frac{1}{6})^2+(\frac{3}{6})^2+(\frac{5}{6})^2}{6}\\ &\approx \frac{1}{6}\cdot\frac{25+9+1+1+9+25}{36}=\frac{70}{216}\approx 0.324\end{aligned}$$

۷۰۱۰ اس تفاعل کی اصل اوسط $\frac{1}{3}$ ہے۔

۷۰۱۱ درج ذیل پر غور کریں۔

$$\begin{aligned}&\frac{(-\frac{5}{6})^2+(-\frac{3}{6})^2+(-\frac{1}{6})^2+(\frac{1}{6})^2+(\frac{3}{6})^2+(\frac{5}{6})^2}{6}\\ &=\frac{1}{2}\left[\left(-\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\left(-\frac{3}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{3}\right]\\ &=\frac{1}{\text{لمبائی}\ [-1,1]}\cdot\left[f\left(-\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{3}+f\left(-\frac{3}{6}\right)\cdot\frac{1}{3}+\cdots+f\left(\frac{5}{6}\right)\cdot\frac{1}{3}\right]\\ &=\frac{1}{\text{لمبائی}\ [-1,1]}\cdot[\text{تفاعل کی قیمتیں ضرب ذیلی وقفہ کی لمبائی کا مجموعہ}]\end{aligned}$$

۷۰۱۲ اس مرتبہ بھی اندازاً قیمت حاصل کرنے کی خاطر تفاعل کی قیمت کو ذیلی وقفہ کی لمبائی سے ضرب دیتے ہوئے مجموعہ حاصل کیا گیا۔ □

جدول ۵.۵: وقت بالمقابل کثافت رنگ برائے سوال ۵.۱۸۸۔

کثافت رنگ c	لمحہ t	کثافت رنگ c	لمحہ t
7.9	16	0	0
7.8	18	0	2
6.1	20	0.1	4
4.7	22	0.6	6
3.5	24	2.0	8
2.1	26	4.2	10
0.7	28	6.3	12
0	30	7.5	14

حاصل بحث

اس حصہ میں پیش مثالوں میں تفاعل کی قیمتوں کے مجموعہ کو ذیلی وقفوں کی لمبائی سے ضرب دے کر عملی سوالات کے قابل قبول جواب حاصل کیے گئے۔ مشق میں مزید ایسی مثالیں ملیں گی۔

ہم نے مثال ۵.۲۲ میں دیکھا کہ ذیلی وقفوں کی لمبائی کم کرنے سے اصل جواب، جس کو ہم ضد تفرق سے حاصل کر چکے تھے، کے زیادہ قریب نتائج حاصل ہوتے ہیں۔ کیا ذیلی وقفوں کی لمبائی مزید کم کرنے سے حاصل نتیجہ کی تحدیدی قیمت اصل جواب تک پہنچتی؟ کیا اس مثال میں مجموعہ اور ضد تفرق کا تعلق اتفاقی ہے؟ کیا ہم مثال ۵.۲۱ میں رقبہ، مثال ۵.۲۳ اور مثال ۵.۲۴ میں حجم، اور مثال ۵.۲۵ میں اوسط قیمت کو ضد تفرق سے حاصل کر سکتے ہیں؟ جیسا ہم دیکھیں گے، ان سوالات کے جوابات ہیں ''جی ہاں ایسا کیا جا سکتا ہے''، ''نہیں یہ اتفاق نہیں ہے'' اور ''جی ہاں ہم ایسا کر سکتے ہیں۔''

سوالات

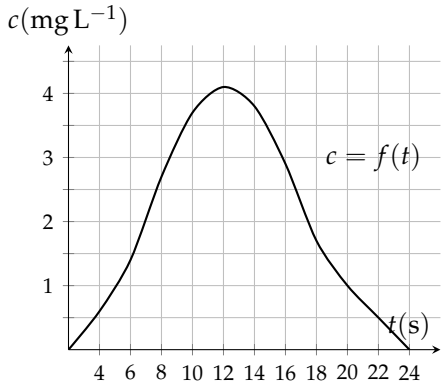
اخراج قلب

سوال ۵.۱۸۷: ایک مریض کے اخراج قلب کو رنگ کی ترکیب سے ناپا گیا۔ پیمائش کے نتائج شکل ۵.۱۷ میں دیے گئے ہیں جہاں خون کی دوبارہ گردش کے اثرات کو مد نظر رکھا گیا ہے۔ ٹیکہ میں رنگ کی مقدار 5 mg تھی۔ کثافت رنگ کی منحنی کے نیچے رقبہ کو مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لے کر حاصل کریں۔ اخراج قلب کتنا ہے؟ (مثال ۵.۲۱ دیکھیں۔)

سوال ۵.۱۸۸: ایک مریض کا اخراج قلب جاننے کی خاطر ترکیب رنگ استعمال کی جاتی ہے۔ کی گئی پیمائش جدول ۵.۵ میں پیش کی گئی ہے جہاں خون کی دوبارہ گردش کے اثرات کو مد نظر رکھا گیا ہے۔ ٹیکہ میں رنگ کی مقدار 10 mg ہے۔ پیمائش کو ہموار منحنی سے ترسیم کریں۔ رقبے کا اندازہ مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لے کر تلاش کریں۔ اخراج قلب دریافت کریں۔

فاصلہ

سوال ۵.۱۸۹: ایک ریل گاڑی کی رفتار بالمقابل وقت شکل ۵.۱۸-ا میں دی گئی ہے۔ دس سیکنڈ وقفے کو 10 برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر



کثافت رنگ c	لمحہ t
0	2
0.6	4
1.4	6
2.7	8
3.7	10
4.1	12
3.8	14
2.9	16
1.7	18
1.0	20
0.5	22
0	24

شکل ۵.۱۷: اخراج قلب جاننے کے لیے کثافت رنگ بالمقابل وقت کی پیمائش (سوال ۵.۱۸۷)۔

لمحہ $t(\mathrm{s})$	رفتار $v(\mathrm{m\,s^{-1}})$	لمحہ $t(\mathrm{s})$	رفتار $v(\mathrm{m\,s^{-1}})$
0	0	6	11
1	12	7	6
2	22	8	2
3	10	9	6
4	5	10	0
5	13		

(ا) رفتار بالمقابل وقت برائے سوال ۵.۱۸۹

لمحہ $t(\mathrm{min})$	رفتار $v(\mathrm{m\,s^{-1}})$	لمحہ $t(\mathrm{min})$	رفتار $v(\mathrm{m\,s^{-1}})$
0	1	35	1.2
5	1.2	40	1.0
10	1.7	45	1.8
15	2.0	50	1.5
20	1.8	55	1.2
25	1.6	60	0
30	1.4		

(ب) رفتار بالمقابل وقت برائے سوال ۵.۱۹۰

شکل ۵.۱۸: رفتار بالمقابل وقت کی پیمائشی قیمتیں۔

ذیلی وقفہ کے (ا) بائیں سر، (ب) دائیں سر پر قیمتیں لیتے ہوئے طے فاصل تلاش کریں۔

سوال ۵.۱۹۰: نہر کے پانی میں ایک بوتل کی رفتار بالمقابل وقت کو شکل ۵.۱۸-ب میں دکھایا گیا ہے۔ ایک گھنٹہ کے وقفہ کو 12 برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کریں۔ ان ذیلی وقفوں کے (ا) بائیں سر قیمتیں، (ب) دائیں سر قیمتیں استعمال کرتے ہوئے وہ فاصلہ تلاش کریں جو بوتل اس گھنٹہ میں طے کرتا ہے۔

سوال ۵.۱۹۱: ایک گاڑی، جس کا رفتار پیما کارآمد لیکن مسافت پیما غیر کارآمد ہے، میں آپ سفر کر رہے ہیں۔ آپ ہر 10 سیکنڈ اس کی رفتار قلم بند کرتے ہیں۔ ان نتائج کو شکل ۵.۱۹-ا میں دکھایا گیا ہے۔ سڑک کی لمبائی کی اندازاً قیمت کو (ا) بائیں سر نقاط کی قیمتیں، (ب) دائیں سر نقاط کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال ۵.۱۹۲: ساکن حالت سے 36 سیکنڈ میں ایک گاڑی $142\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار تک پہنچتی ہے۔ اس کی رفتار بالمقابل وقت کو شکل ۵.۱۹-ب میں دکھایا گیا ہے۔ (ا) مستطیل استعمال کرتے ہوئے ان 36 سیکنڈوں میں طے شدہ فاصلہ تلاش کریں۔ (ب) گاڑی تقریباً کتنی دیر میں آدھے فاصلہ تک پہنچی؟ اس لمحے پر گاڑی کی رفتار کتنی تھی؟

سوال ۵.۱۹۳: فرض کریں ہم مثال ۵.۲۳ میں حجم کا اندازہ صرف 2 چوکور بیلنوں سے کرتے ہیں (شکل ۵.۲۰-ا)۔ (ا) حجم H_2 تلاش کریں۔ (ب) خلل $|H - H_2|$ کی H کے لحاظ سے فی صد قیمت حاصل کریں۔

سوال ۵.۱۹۴: فرض کریں ہم مثال ۵.۲۳ میں حجم کا اندازہ صرف 6 چوکور بیلنوں سے کرتے ہیں (شکل ۵.۲۰-ب)۔ (ا) حجم H_6 تلاش کریں۔ (ب) خلل $|H - H_6|$ کو H کے فی صد کی صورت میں حاصل کریں۔

سوال ۵.۱۹۵: فرض کریں ہم مثال ۵.۲۴ میں کرہ کا حجم حاصل کرنے کے لیے وقفہ $-4 \leq x \leq 4$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ہم ہر ذیلی وقفہ کے بائیں سر نقطہ پر رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلن لیتے ہیں۔ (بائیں ترین بیلن کا رقبہ عمودی تراش صفر ہوگا۔) (ا) ان بیلنوں کا مجموعی حجم H_4 تلاش کریں۔ (ب) خلل $|H - H_4|$ کو H کا فی صد لکھیں؟

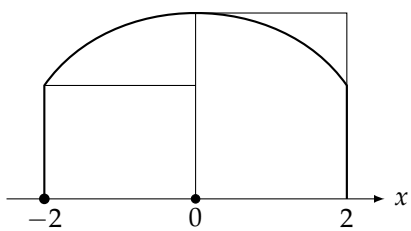
رفتار $\mathrm{km\,h^{-1}}$	لمحہ سیکنڈ	رفتار $\mathrm{km\,h^{-1}}$	لمحہ سیکنڈ
15	70	0	0
22	80	44	10
35	90	15	20
44	100	35	30
30	110	30	40
35	120	44	50
		35	60

(ا) برائے سوال ۵.۱۹۱

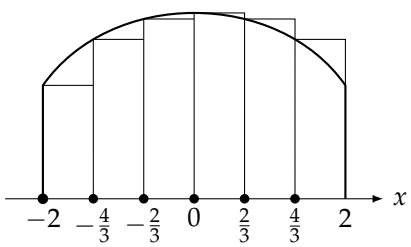
رفتار $\mathrm{km\,h^{-1}}$	لمحہ گھنٹے	رفتار $\mathrm{km\,h^{-1}}$	لمحہ گھنٹے
116	0.006	0	0
125	0.007	40	0.001
132	0.008	62	0.002
137	0.009	82	0.003
142	0.010	96	0.004
		108	0.005

(ب) برائے سوال ۵.۱۹۲

شکل ۵.۱۹: گاڑی کی رفتار بالمقابل وقت۔

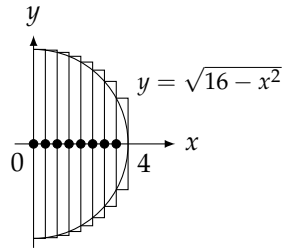


(ا) جسم کے حجم کو 2 چوکور بیلنوں کے حجم کے مجموعہ سے حاصل کیا گیا ہے۔

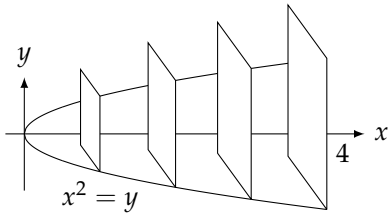


(ب) جسم کے حجم کو 6 چوکور بیلنوں کے حجم کے مجموعہ سے حاصل کیا گیا ہے۔

شکل ۵.۲۰: حجم کے ذیلی وقفے (سوال ۵.۱۹۳ اور سوال ۵.۱۹۴)



شکل ۵.۲۱: نصف کرہ (سوال ۵.۱۹۷)



شکل ۵.۲۲: برائے سوال ۵.۱۹۹

سوال ۵.۱۹۶: ایک کرہ جس کا رداس 5 ہے کا حجم درکار ہے۔ آپ اس کے قطر کو پانچ برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفہ 2 کے برابر ہو گا۔ آپ ان ذیلی وقفوں کے بائیں سر نقطوں پر قطر کے عمودی کرہ کو کاٹ کر رقبہ عمودی تراش حاصل کرتے ہیں۔ آپ اتنی ہی رقبہ عمودی تراش والے ایسے بیلن لیتے ہیں جن کی موٹائی 2 ہو۔ ان بیلنوں کے مجموعی حجم سے آپ کرہ کے حجم کی اندازاً قیمت تلاش کرتے ہیں۔ (ا) بیلنوں کا مجموعی حجم H_5 کیا ہو گا؟ (ب) خلل $|H - H_5|$ کو H کا فی صد لکھیں۔

سوال ۵.۱۹۷: رداس 4 کے کرہ کا حجم درکار ہے۔ اس کا محور تشاکل محور x پر وقفہ $[0, 4]$ ہے۔ آپ اس وقفہ کو 8 برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ہر ذیلی وقفہ کے بائیں سر نقطہ پر، کرہ کے رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلن، جس کی موٹائی ذیلی وقفہ کی لمبائی جتنی ہو، استعمال کرتے ہوئے کرہ کا حجم تلاش کیا جاتا ہے (شکل ۵.۲۱)۔ (ا) مجموعی حجم H_8 تلاش کریں (جو نصف کرہ کا حجم ہو گا)۔ (ب) کیا H_8 نصف کرہ کے حجم H سے کم یا زیادہ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) خلل $|H - H_8|$ کو H کا فی صد لکھیں۔

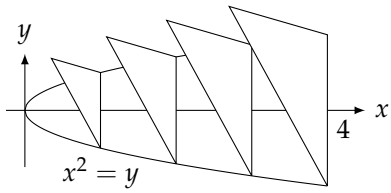
سوال ۵.۱۹۸: گزشتہ سوال (سوال ۵.۱۹۷) میں ہر ذیلی وقفہ کے دائیں سر نقطے پر رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلن لیتے ہوئے دوبارہ جوابات حاصل کریں۔

سوال ۵.۱۹۹: اندازاً حجم میں بہت زیادہ خلل

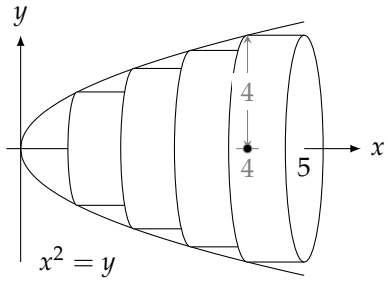
نقطہ $x = 0$ اور $x = 4$ پر محور x کی عمودی سطحوں کے بیچ ایک ٹھوس جسم پایا جاتا ہے۔ اس محور کو قائمہ، جسم کا رقبہ عمودی تراش چوکور ہے، جس کے کنارے قطع مکافی $y = -\sqrt{x}$ اور $y = \sqrt{x}$ کو مس کرتے ہیں (شکل ۵.۲۲)۔ (ا) وقفہ $0 \le x \le 4$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے دائیں سر نقاط پر رقبہ عمودی تراش لیتے ہوئے حجم H_4 تلاش کریں۔ اصل حجم $H = 32$ ہے۔ خلل $|H - H_4|$ کو H کے لحاظ سے فی صد کی صورت میں لکھیں۔ (ج) یہی مسئلہ H_8 کے لیے حل کریں۔

سوال ۵.۲۰۰: اندازاً حجم میں بہت زیادہ خلل

نقطہ $x = 0$ اور $x = 4$ پر محور x کی عمودی سطحوں کے بیچ ایک ٹھوس جسم پایا جاتا ہے۔ اس محور کو عمودی، جسم کا رقبہ عمودی تراش متساوی الاضلاع شکل کا ہے جس کا قاعدہ قطع مکافی $y = -\sqrt{x}$ اور $y = \sqrt{x}$ کو مس کرتا ہے (شکل ۵.۲۳)۔ (ا) وقفہ $0 \le x \le 4$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے بائیں سر نقاط پر رقبہ عمودی تراش لیتے ہوئے حجم H_4 تلاش کریں۔ اصل حجم $H = 8\sqrt{3}$ ہے۔ H کے لحاظ سے



شکل ۵.۲۳: برائے سوال ۵.۲۰۰



شکل ۵.۲۴: راکٹ کی نوک (سوال ۵.۲۰۳)

جدول ۵.۶: تالاب میں پانی کی گہرائی (سوال ۵.۲۰۲)

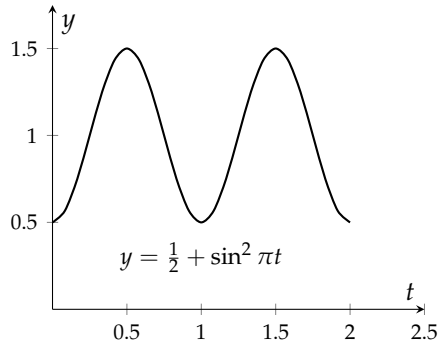
گہرائی h	مقام x	گہرائی h	مقام x
3.83	6	2.0	0
3.97	7	2.73	1
4.1	8	3.03	2
4.23	9	3.3	3
4.33	10	3.5	4
		3.67	5

خلل $|H - H_4|$ کی فی صد قیمت کتنی ہے؟ (ج) سوال کو دوبارہ H_8 کے لیے حل کریں۔

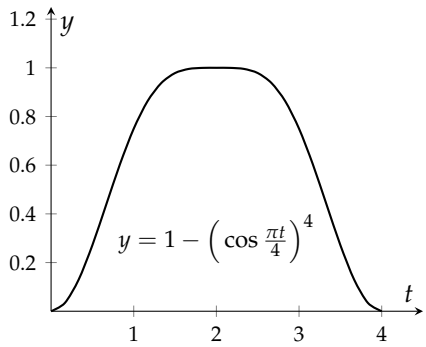
سوال ۵.۲۰۱: پانی کی ٹینکی نصف کروی پیالے کی مانند ہے جس کا رداس $8\,\mathrm{m}$ ہے۔ ٹینکی میں پانی کی گہرائی $4\,\mathrm{m}$ ہے۔ (ا) پانی کی گہرائی کو آٹھ ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کی نچلی سطح کے رقبہ عمودی تراش والے بیلن استعمال کرتے ہوئے H_8 تلاش کریں۔ (ب) اصل حجم جو آپ سوال ۵.۴۳۳ میں تلاش کریں گے $H = \frac{320\pi}{3}\,\mathrm{m}^3$ ہے۔ H کے لحاظ سے خلل $|H - H_8|$ کی فی صد قیمت تلاش کریں۔

سوال ۵.۲۰۲: تیراکی کے مستطیل تالاب کی لمبائی $10\,\mathrm{m}$ اور چوڑائی $6\,\mathrm{m}$ ہے۔ تالاب کے ایک سرے سے دوسرے سر تک $1\,\mathrm{m}$ وقفوں پر پانی کی گہرائی (میٹر) جدول ۵.۶ میں دی گئی ہے۔ (ا) h کے بائیں سر نقاط پر قیمتیں استعمال کرتے ہوئے تالاب میں پانی کا حجم تلاش کریں۔ (ب) دائیں سر نقاط پر قیمت استعمال کرتے ہوئے حجم تلاش کریں۔

سوال ۵.۲۰۳: منحنی $y = \sqrt{x},\ 0 \le x \le 5$ کو محور y کے گرد گمانے سے راکٹ کی قطع مکافی مجسم نوک حاصل ہوتی ہے جہاں x کی پیمائش میٹر میں ہے (شکل ۵.۲۴)۔ اس نوک کا حجم معلوم کرنے کی خاطر ہم $[0, 5]$ کو پانچ برابر حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ہر حصے کی لمبائی 1 ہو گی۔ ہر حصہ کے بائیں سر نقطہ پر، محور x کو قائمہ، جسم کو کاٹا جاتا ہے اور ان نقطوں پر جسم کے رقبہ عمودی تراش کے برابر بیلن استعمال کرتے ہوئے نوک کا حجم دریافت کیا جاتا ہے۔ بیلنوں کی لمبائی 1 ہو گی۔ (ا) مجموعہ H_5 تلاش کریں۔ کیا H_5 کی قیمت H سے کم یا زیادہ ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔



شکل ۵.۲۵: ترسیم برائے سوال ۵.۲۰۷



شکل ۵.۲۶: ترسیم برائے سوال ۵.۲۰۸

(ب) نوک کا اصل حجم جو آپ سوال ۵.۴۳۴ میں تلاش کریں گے $H = 2\pi\,\mathrm{m}^3$ ہے۔ خلل $|H - H_5|$ کو H کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔

سوال ۵.۲۰۴: ہر ذیلی وقفے کے دائیں سر نقطے پر رقبہ عمودی تراش استعمال کرتے ہوئے سوال ۵.۲۰۳ دوبارہ حل کریں۔

تفاعل کی اوسط قیمت

سوال ۵.۲۰۵ تا سوال ۵.۲۰۸ میں تفاعل f کی اوسط قیمت درکار ہے۔ دیے گئے وقفہ کو چار ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کے وسط میں تفاعل کی قیمت لے کر متناہی مجموعہ استعمال کرتے ہوئے اوسط حاصل کریں۔

سوال ۵.۲۰۵: $f(x) = x^3, \quad [0,1]$

سوال ۵.۲۰۶: $f(x) = \frac{1}{x}, \quad [1,9]$

سوال ۵.۲۰۷: $f(t) = \frac{1}{2}\sin^2 \pi t, \quad [0,2]$ شکل ۵.۲۵

سوال ۵.۲۰۸: $f(t) = 1 - (\cos \frac{\pi t}{4})^4, \quad [0,4]$ شکل ۵.۲۶

رفتار اور فاصلہ

سوال ۵.۲۰۹: ایک جسم کو جہاز سے گرنے دیا جاتا ہے۔ جسم کی رفتار مسلسل بڑھتی ہے لیکن ہوائی رگڑ کی وجہ سے گرنے کا اسراع بتدریج کم ہوتا جاتا ہے۔ وقت بالمقابل جسم کا اسراع درج ذیل جدول میں پیش کیا گیا ہے۔

$t(\mathrm{s})$	0	1	2	3	4	5
$a(\mathrm{m\,s^{-2}})$	9.8	5.92	3.59	2.18	1.32	0.80

(ا) لمحہ $t = 5$ پر رفتار کی بالائی حد تلاش کریں۔(ب) لمحہ $t = 5$ پر رفتار کی نچلی حد تلاش کریں۔(ج) لمحہ $t = 3$ میں گرنے والے فاصلہ کی بالائی حد تلاش کریں۔

سوال ۵.۲۱۰: ایک جسم کو سمندری سطح سے سیدھا اوپر $125\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ فرض کریں کہ اس جسم پر صفر ثقلی قوت اثر انداز ہوتی ہے۔(ا) پانچ سیکنڈ بعد اس کی رفتار کی بالائی حد تلاش کریں۔(ب) پانچ سیکنڈ بعد اس کی رفتار کی نچلی حد تلاش کریں۔ ثقلی اسراع $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ لیں۔

آلودگی پر قابو پانا

سوال ۵.۲۱۱: تیل کے جہاز سے سمندر میں تیل رس رہا ہے۔ رستا تیل کی مقدار (لٹر فی گھنٹہ) بالمقابل وقت (گھنٹہ) نیچے جدول میں پیش کی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ صورت حال بتدریج خراب ہو رہی ہے۔

گھنٹہ	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathrm{L\,h^{-1}}$	50	70	97	136	190	265	369	516	720

(ا) ان پانچ گھنٹوں میں خارج تیل کی مقدار کی بالائی اور نچلی حد تلاش کریں۔(ب) آٹھ گھنٹوں میں خارج تیل کی بالائی اور نچلی حد تلاش کریں۔(ج) ابتدائی آٹھ گھنٹوں بعد تیل مسلسل $720\,\mathrm{L\,h^{-1}}$ سے رستا ہے۔ اگر جہاز میں ابتدائی طور پر کل $25\,000\,\mathrm{L}$ تیل ہو تب تمام تیل خارج ہونے کے لیے زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم کتنا مزید وقت درکار ہو گا۔

سوال ۵.۲۱۲: ایک بجلی گھر تیل کو جلا کر برقی طاقت پیدا کرتا ہے۔ تیل جلنے سے پیدا آلودگی کو کم کرنے کی خاطر دھویں کو دھواں کش میں چھلنی سے گزارا جاتا ہے جو نجاست کو روک دیتی ہے۔ وقت کے ساتھ ساتھ چھلنی کی کارگزاری کم پڑ جاتی ہے اور اس کو تبدیل کرنا لازمی ہو جاتا ہے۔ ہر مہینے کے آخر میں ہوا میں خارج نجاست کی شرح ناپی جاتی ہے، اگر یہ مقدار سرکاری حد سے زیادہ ہو، چھلنی تبدیل کی جاتی ہے۔ اس پیائش کی ایک مثال نچلے جدول میں دکھائی گئی ہے جہاں یومیہ خارج نجاست کی مقدار کی اکائی ٹن (1000 kg) ہے۔

مہینہ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
نجاست	0.2	0.25	0.27	0.34	0.45	0.52	0.63	0.70	0.81	0.85	0.89	0.95

(ا) تمام مہینوں کو 30 دنوں کا تصور کریں۔ فرض کریں نئی چھلنی سے یومیہ 0.05 ٹن نجاست نکل پاتی ہے۔ جون کے مہینے کے آخر تک ہوا میں کل خارج نجاست کی مقدار کی بالائی حد کیا ہو گی؟ اس کی نچلی حد کیا ہو گی؟ (ب) بہترین حالات میں کل 125 ٹن نجاست کتنے عرصہ میں ہوا میں خارج ہو گی؟

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۵.۲۱۳ تا سوال ۵.۲۱۶ میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے (ا) دیے گئے وقفے پر تفاعل ترسیم کریں۔ (ب) وقفہ کو $n = 100$، $n = 200$، اور $n = 1000$ برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کے وسط میں تفاعل کی قیمت تلاش کریں۔ (ج) جزو-ب میں حاصل قیمتوں سے تفاعل کی اوسط $\bar{f}$ تلاش کریں۔ (د) $n = 1000$ کے لیے حاصل اوسط $\bar{f}$ استعمال کرتے ہوئے مساوات $f(x) = \bar{f}$ حل کریں۔

سوال ۵.۲۱۳: $f(x) = \sin x, \quad [0, \pi]$

سوال ۵.۲۱۴: $f(x) = \sin^2 x, \quad [0, \pi]$

سوال ۵.۲۱۵: $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad [\frac{\pi}{4}, \pi]$

سوال ۵.۲۱۶: $f(x) = x \sin^2 \frac{1}{x}, \quad [\frac{\pi}{4}, \pi]$

۵.۵ ریمان مجموعے اور قطعی تکملات

گزشتہ حصے میں ہم نے فاصلے، رقبے، حجم، اور اوسط قیمتوں کو متناہی مجموعوں کی مدد سے حاصل کیا۔ منتخب تفاعل کی قیمتوں کو وقفوں کی لمبائیوں کے ساتھ ضرب دیتے ہوئے یہ مجموعے حاصل کیے گئے۔ اس حصہ میں ان وقفوں کی لمبائیوں کو بہت کم اور تعداد کو بہت زیادہ کرتے ہوئے مجموعہ کی تحدیدی قیمت کے مطلب پر غور کیا جائے گا۔ متعدد ارکان پر مشتمل مجموعے کو ظاہر کرنے کی علامت پہلے متعارف کرتے ہیں۔

متناہی مجموعہ کی علامت

درج ذیل مجموعہ کو

$$f(t_1)\Delta t + f(t_2)\Delta t + \cdots + f(t_n)\Delta t$$

یونانی حروف تہجی کا بڑا حرف Σ (''سگما'') استعمال کرتے ہوئے $\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\Delta t$ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو k کی 1 تا n قیمتوں کے لیے Δt ضرب t_k پر f کی قیمتوں کا مجموعہ ہے۔ مجموعہ کے یوں اظہار کو **سگما علامتی اظہار** کہتے ہیں۔

تعریف: **متناہی مجموعہ کا سگما علامتی اظہار**

علامت $\sum_{k=1}^{n} a_k$ سے مراد مجموعہ $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ہے۔ مجموعہ کے **ارکان**[۱۵] a_1 تا a_n ہیں جہاں a_1 مجموعے کا پہلا اور a_n مجموعے کا آخری رکن ہے۔ متغیر k **مجموعی سلسلہ کا اشاری**[۱۶] کہلاتا ہے۔ k کی قیمتیں 1 تا n عدد صحیح ہیں۔ **مجموعی سلسلہ کی زیریں حد**[۱۷] 1 جبکہ **مجموعی سلسلہ کی بالائی حد**[۱۸] n ہے۔ زیریں اور بالائی حدود کوئی بھی دو عدد صحیح ممکن ہیں۔

□

مثال ۵.۲۶:

مجموعہ کی سگما صورت	ارکان کی صورت میں مجموعہ	مجموعہ کی قیمت
$\sum_{k=1}^{5} k$	$1+2+3+4+5$	15
$\sum_{k=1}^{3} (-1)^k k$	$(-1)^1(1) + (-1)^2(2) + (-1)^3(3)$	$-1+2-3=-2$
$\sum_{k=1}^{2} \frac{k}{k+1}$	$\frac{1}{1+1} + \frac{2}{2+1}$	$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$

[۱۵] terms
[۱۶] indexofsummation
[۱۷] lowerlimitofsummation
[۱۸] upperlimitofsummation

□

مجموعی سلسلہ کی زیریں حد 1 سے ہٹ کر ہو سکتی ہے۔

مثال ۵.۲۷: مجموعہ $1+3+5+7+9$ کو سگما علامتی روپ میں لکھیں۔

حل

$$\sum_{k=0}^{4}(2k+1) \qquad k=0 \text{ سے شروع کیا گیا ہے}$$

$$\sum_{k=1}^{5}(2k-1) \qquad k=1 \text{ سے شروع کیا گیا ہے}$$

□

متناہی مجموعہ کا الجبرا

متناہی مجموعوں کے ساتھ کام کرتے ہوئے درج ذیل قواعد بروئے کار لائے جا سکتے ہیں۔

قاعدہ مجموعہ: $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

قاعدہ فرق: $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

قاعدہ ضرب مستقل: $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$ جہاں c کوئی عدد ہے۔

قاعدہ مستقل قیمت: $\sum_{k=1}^{n}c=n\cdot c$ جہاں c کوئی مستقل قیمت ہے۔

اس فہرست میں کوئی حیران کن حقیقت پیش نہیں کی گئی ہے۔ ان کے باضابطہ ثبوت (الکراجی) الجبرائی ماخوذ سے حاصل کیے جا سکتے ہیں جنہیں ضمیمہ ا میں پیش کیا گیا ہے۔

مثال ۵.۲۸:

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-k^2) = 3\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}k^2 \qquad \text{قاعدہ فرق اور قاعدہ ضرب مستقل}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(-a_k) = \sum_{k=1}^{n}(-1)\cdot a_k = -1\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k = -\sum_{k=1}^{n}a_k \qquad \text{قاعدہ ضرب مستقل}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}(k+4) &= \sum_{k=1}^{3}k + \sum_{k=1}^{3}4 \\ &= (1+2+3)+(3\cdot 4) \qquad \text{قاعدہ مستقل قیمت} \\ &= 6+12 = 18\end{aligned}$$

□

مثبت عدد صحیح کے کلیات مجموعہ

متناہی مجموعوں کے کئی کلیات پائے جاتے ہیں جن میں سے مشہور ترین کلیات شروع کے n عدد صحیح کا مجموعہ ہے (جو گاوس نے 5 سال کی عمر میں اخذ کیا) اور شروع کے n عدد صحیح کے مربع اور مکعب کے مجموعوں کے کلیات ہیں۔

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k &= \frac{n(n+1)}{2} && \text{ابتدائی } n \text{ عدد صحیح} \\ \sum_{k=1}^{n}k^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{ابتدائی } n \text{ عدد صحیح کے مربع} \\ \sum_{k=1}^{n}k^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 && \text{ابتدائی } n \text{ عدد صحیح کے مکعب}\end{aligned} \tag{۱}$$

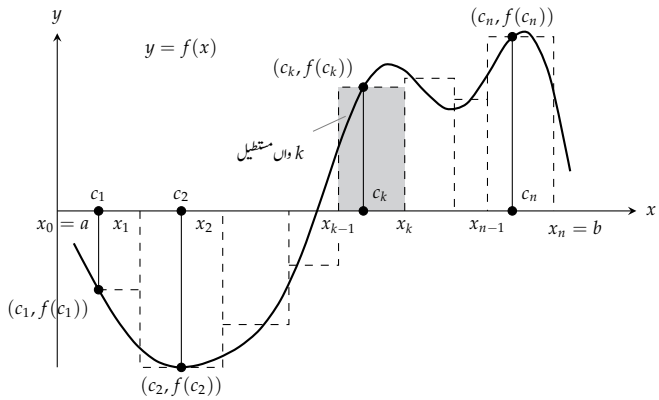
مثال ۵.۲۹: $\sum_{k=1}^{4}(k^2-3k)$ تلاش کریں۔

حل

ہم مجموعہ کو مجموعی سلسلہ کے روپ میں لکھے بغیر الجبرائی قواعد استعمال کرتے ہوئے جواب حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4}(k^2-3k) &= \sum_{k=1}^{4}k^2 - 3\sum_{k=1}^{4}k \qquad \text{قاعدہ فرق اور قاعدہ ضرب مستقل} \\ &= \frac{4(4+1)(8+1)}{6} - 3\left(\frac{4(4+1)}{2}\right) \qquad n=4 \text{ لیتے ہوئے مساوات ۱} \\ &= 30-30 = 0\end{aligned}$$

□



شکل ۵.۲۷: بند وقفہ $[a, b]$ پر عمومی تفاعل $y = f(x)$۔ تفاعل اور محور x کے بیچ رقبہ کو تخمینی طور پر مستطیلوں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ نقطہ c_1 کو عین x_0 پر منتخب کیا ہوا دکھایا گیا ہے۔

ریمان مجموعے

ہم نے حصہ ۵.۴ میں تخمینی مجموعوں پر غور کیا جو زیادہ عمومی **ریمان مجموعہ** کی مخصوص مثالیں تھیں۔ ان مثالوں میں تفاعل کی قیمتیں غیر منفی تھیں جبکہ ریمان مجموعہ میں ایسی پابندی نہیں پائی جاتی۔ وقفہ $[a, b]$ پر دیے گئے اختیاری استمراری تفاعل $y = f(x)$ کو a اور b کے بیچ نقاط $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ پر n ذیلی وقفوں میں تقسیم کیا جاتا ہے (شکل ۵.۲۷)۔ یہ نقطے صرف درج ذیل شرط کے تحت منتخب کیے جاتے ہیں۔

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b$$

اس علامتی روپ میں مطابقت پیدا کرنے کی خاطر a کو x_0 اور b کو x_n سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ درج ذیل سلسلہ

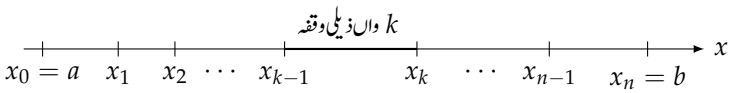
$$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$$

کو $[a, b]$ کی **خانہ بندی**[19] کہتے ہیں۔

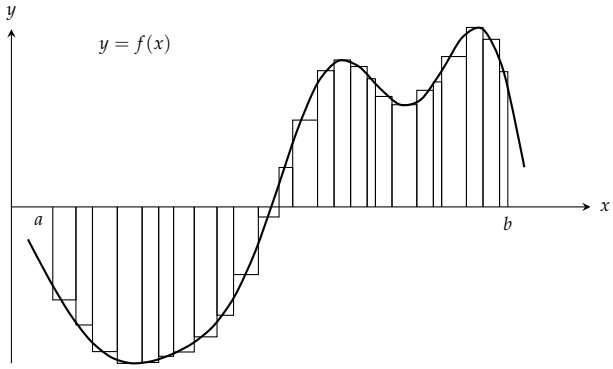
P کی خانہ بندی درج ذیل n عدد بند **ذیلی وقفوں**[20] کو ظاہر کرتی ہے۔

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$$

بند ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ کو "P کا k واں ذیلی وقفہ" کہتے ہیں۔

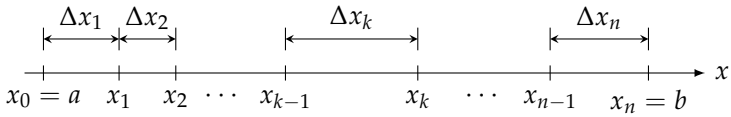


[19] partition
[20] subintervals



شکل ۵.۲۸: وقفہ $[a, b]$ کی زیادہ باریک خانہ بندی سے مستطیلوں کی تعداد بڑھتی ہے اور ان کے قاعدے نسبتاً چھوٹے ہوتے ہیں۔

k واں ذیلی وقفے کی لمبائی $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ہے۔



ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں ہم کوئی نقطہ c_k منتخب کرتے ہوئے ذیلی وقفہ میں تفاعل $y = f(x)$ پر نقطہ $(c_k, f(c_k))$ تک مستطیل بناتے ہیں۔ جب تک نقطہ c_k ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں پایا جاتا ہو اس کا مقام غیر اہم ہے (شکل ۵.۲۷)۔

اگر $f(c_k)$ مثبت ہو تب عدد $f(c_k)\Delta x_k$ مستطیل کے قد ضرب قاعدہ یعنی مستطیل کے رقبہ کے برابر ہو گا۔ اگر $f(c_k)$ منفی عدد ہو تب $f(c_k)\Delta x_k$ مستطیل کے رقبہ کی نفی کے برابر ہو گا۔ ہم ان تمام $f(c_k)\Delta x_k$ حاصل ضرب جن کی تعداد n ہے کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

یہ مجموعہ، جو P اور c_k کے انتخاب پر منحصر ہے، وقفہ $[a, b]$ پر f کا **ریمان مجموعہ**[۲۱] کہلاتا[۲۲] ہے۔

$[a, b]$ کے خانوں کی چوڑائی جتنی کم ہو، خانہ بندی سے حاصل مستطیل تفاعل f کی ترسیم اور محور x کے بیچ خطہ کو بہتر سے بہتر ظاہر کرتے ہیں (شکل ۵.۲۸ کا شکل ۵.۲۷ کے ساتھ موازنہ کریں)۔ یوں ہم توقع کرتے ہیں کہ ریمان مجموعہ کی تحدیدی قیمت پائی جائے گی۔ ہماری اس توقع کو پرکھنے کی خاطر ہمیں خانوں کی چوڑائی کم سے کم کرنے کو ریاضیاتی صورت میں لکھنا ہو گا اور جاننا ہو گا کہ آیا مطابقتی مجموعہ کی کوئی تحدیدی قیمت پائی جاتی ہے۔ ہم درج ذیل تعریف کی مدد سے ایسا کر پائیں گے۔

---

[۲۱] Riemannsum

[۲۲] جرمنی کے ریاضی دان برنہارڈ ریمان [1826-1866] نے ایسے مجموعوں کی تحدیدی قیمتوں پر کام کیا۔

خانہ بندی P کے **معیار**[۲۳] سے مراد سب سے لمبے خانے کی لمبائی ہے جس کو درج ذیل علامت سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\|P\| \qquad \text{(اس کو ''}P\text{'' کا معیار'' پڑھیں)}$$

خانوں کی چوڑائی بتدریج کم کرنے کے بجائے اب ہم کہتے ہیں کہ خانوں کا معیار صفر کے قریب تر پہنچایا جاتا ہے۔ جیسے جیسے معیار کو صفر کے قریب تر پہنچایا جاتا ہے ویسے ویسے ذیلی وقفوں کی لمبائی کم سے کم ہوتی جاتی ہے اور ذیلی وقفوں کی تعداد لا متناہی کے قریب تر پہنچتی ہے۔ خانوں کی چوڑائی کم کرنے سے باریک مستطیل پیدا ہوں گے۔

مثال ۵.۳۰: وقفہ $[0,2]$ کی خانہ بندی سلسلہ $P=\{0,0.2,0.6,1,1.5,2\}$ ہے۔ P کے پانچ ذیلی وقفے درج ذیل ہیں۔

$$[0,0.2],\ [0.2,0.6],\ [0.6,1],\ [1,1.5],\ [1.5,2]$$

ان ذیلی وقفوں کی لمبائیاں $\Delta x_1=0.2$ ، $\Delta x_2=0.4$ ، $\Delta x_3=0.4$ ، $\Delta x_4=0.5$ ، اور $\Delta x_5=0.5$ ہیں۔ ان میں سب سے لمبے ذیلی وقفہ کی لمبائی 0.5 ہے لہٰذا خانہ بندی P کا معیار $\|P\|=0.5$ ہے۔ اس مثال میں دو ذیلی وقفوں کی لمبائی 0.5 ہے۔ □

تعریف: **قطعی تکمل بطور ریمان مجموعوں کی حد**

فرض کریں وقفہ $[a,b]$ پر $f(x)$ معین تفاعل ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ $\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے وقفہ $[a,b]$ پر ریمان مجموعہ $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ کی حد اس صورت عدد I ہو گی جب درج ذیل شرط پوری ہوتی ہو۔

کسی بھی دیے گئے عدد $\epsilon>0$ کے لیے ایسا مطابقتی عدد $\delta>0$ موجود ہے کہ ذیلی وقفہ $[x_{k-1},x_k]$ میں کسی بھی منتخب عدد c_k کے لیے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$\|P\|<\delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k\right|<\epsilon$$

□

اگر یہ حد موجود ہو تب ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = I$$

وقفہ $[a,b]$ پر عدد I تفاعل f کا **قطعی تکمل**[۲۴] کہلاتا ہے، اور ہم کہتے ہیں کہ $[a,b]$ پر f **قابل تکمل**[۲۵] ہے اور $[a,b]$ پر f کا ریمان مجموعہ عدد I پر **مرکوز**[۲۶] ہے۔

---

[۲۳] norm
[۲۴] definiteintegral
[۲۵] integrable
[۲۶] converges

ہم عموماً I کو $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ لکھتے ہیں جو "a تا b تفاعل f کا تکمل" پڑھا جاتا ہے۔ یوں اگر حد موجود ہو تب درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

دلچسپ حقیقت یہ ہے کہ خانہ بندی تبدیل کرتے ہوئے اور ہر خانے میں c_k کا مقام تبدیل کرنے کے باوجود استمراری f کی صورت میں $\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے ریمان مجموعوں $\sum f(c_k)\Delta x_k$ کی تحدیدی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔ ریمان نے ۱۸۵۴ میں درج ذیل مسئلہ ثابت کرتے ہوئے اس حقیقت کی تصدیق کر دی تھی۔ ریمان کے ثبوت کی جدید صورت احصاء کی تقریباً تمام اعلیٰ کتابوں میں پائی جاتی ہے۔

مسئلہ ۵.۱: **قطعی تکمل کی موجودگی**

تمام استمراری تفاعل قابل تکمل ہیں۔ یعنی وقفہ $[a,b]$ پر استمراری تفاعل f کا $[a,b]$ پر قطعی تکمل موجود ہو گا۔

ہم کیوں یقین کریں کہ یہ مسئلہ کار آمد ہو گا؟ وقفہ $[a,b]$ کی عمومی خانہ بندی P فرض کریں۔ چونکہ تفاعل f استمراری ہے لہٰذا ہر ذیلی وقفہ پر اس کی کوئی اقل قیمت k_L اور کوئی اعظم قیمت k_H ہو گی۔ اقل قیمتوں (شکل ۵.۲۹-ا) سے حاصل ضرب $k_L\Delta x_k$ کا درج ذیل مجموعہ P پر f کا **زیریں مجموعہ**[۲۷] L کہلاتا ہے۔

$$L = k_{L1}\Delta x_1 + k_{L2}\Delta x_2 + \cdots + k_{Ln}\Delta x_n$$

اسی طرح اعظم قیمتوں (شکل ۵.۲۹-ب) سے حاصل ضرب $k_H\Delta x_k$ کا درج ذیل مجموعہ P پر f کا **بالائی مجموعہ**[۲۸] H کہلاتا ہے۔

$$H = k_{H1}\Delta x_1 + k_{H2}\Delta x_2 + \cdots + k_{Hn}\Delta x_n$$

ان کا فرق $H - L$ شکل ۵.۲۹-ج میں دکھائے گئے سیاہ ڈبوں کے رقبہ کے برابر ہو گا۔ جیسا جیسا $\|P\| \to 0$ کیا جائے ان ڈبوں کی تعداد بڑھتی جائے گی جبکہ ان کی چوڑائیاں اور لمبائیاں کم ہوتی جائیں گی۔ ہم $\|P\|$ کو صفر کے کافی نزدیک کرتے ہوئے غیر منفی عدد $H - L$ کو کسی بھی چھوٹے مثبت عدد ϵ سے کم کر سکتے ہیں، یعنی

$$\lim_{\|P\|\to 0}(H - L) = 0 \qquad (۲)$$

اور جیسا اعلیٰ نصاب میں دکھایا گیا ہے درج بالا سے مراد درج ذیل ہے۔

$$\lim_{\|P\|\to 0} L = \lim_{\|P\|\to 0} H \qquad (۳)$$

بند وقفوں پر استمراری تفاعل کی ایک خاصیت جس کو **یکساں استمرار**[۲۹] کہتے ہیں کی بدولت مساوات ۲ اور مساوات ۳ کار آمد ہیں۔ یہ خاصیت ممکن بناتی ہے کہ $\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے ان ڈبوں، جو H اور L کے فرق کو ظاہر کرتے ہیں، کی چوڑائی کو کم کرتے ہوئے ان کا قد کم بنایا جا سکتا ہے اور ہم ان کی چوڑائی

---

[۲۷] lowersum
[۲۸] uppersum
[۲۹] uniformcontinuity

کم کرتے ہوئے ان کے قد کو جتنا چاہیں کم کر سکتے ہیں۔ چونکہ یکساں استمرار سے منسلک ϵ بالمقابل δ کی دلیل ہم نے یہاں پیش نہیں کی لہٰذا ہم مساوات ۳ کو ثبوت نہیں مان سکتے البتہ مذکورہ بالا دلائل اصل ثبوت کی روح پیش کرتے ہیں۔

ہم وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تفاعل f کے لیے مساوات ۳ کو درست تصور کرتے ہوئے P کے ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ پر نقطہ c_k منتخب کرتے ہوئے ریمان مجموعہ $\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ لکھتے ہیں۔ اب ہر k کے لیے $k_L \leq f(c_k) \leq k_H$ ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$L \leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \leq H$$

f کا ریمان مجموعہ H اور L کے بیچ پایا جاتا ہے۔ مسئلہ بیچ (مسئلہ ۲.۴) کے ترمیم شدہ روپ سے ہم اخذ کرتے ہیں کہ $\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے ریمان مجموعہ کی حد موجود ہو گی اور یہ L اور H کی مشترکہ تحدیدی قیمت ہو گی۔ (درج ذیل دیکھیں۔)

$$\lim_{\|P\|\to 0} L = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \lim_{\|P\|\to 0} H$$

ایک لمحہ رک کر اس نتیجہ پر غور کریں۔ اس نتیجہ کے تحت ہم c_k کو جس طرح بھی منتخب کریں، $\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے ریمان مجموعہ کی تحدیدی قیمت ایک سی حاصل ہو گی۔ ہر $f(c_k)$ کو $[x_{k-1}, x_k]$ پر f کی اقل قیمت منتخب کر کے بھی وہی حد حاصل ہو گی۔ اسی طرح ہر $f(c_k)$ کو $[x_{k-1}, x_k]$ پر f کی اعظم قیمت منتخب کر کے بھی وہی حد حاصل ہو گی۔ c_k کو بلا منصوبہ منتخب کر کے بھی یہی حد حاصل ہو گی۔

اگرچہ ہم نے قطعی تکمل کی موجودگی کا مسئلہ بالخصوص استمراری تفاعل کے لیے پیش کیا، حقیقت میں کئی غیر استمراری تفاعل بھی قابل تکمل ہیں۔ غیر محدود تفاعل کے تکمل پر حصہ ۸.۶ میں غور کیا جائے گا۔

تفاعل جن کا ریمان تکمل موجود نہیں

بعض غیر استمراری تفاعل قابل تکمل اور بعض ناقابل تکمل ہیں۔ مثلاً درج ذیل تفاعل کا $[0, 1]$ پر کوئی ریمان تکمل نہیں پایا جاتا۔

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ناطق} \\ 0, & \text{غیر ناطق} \end{cases}$$

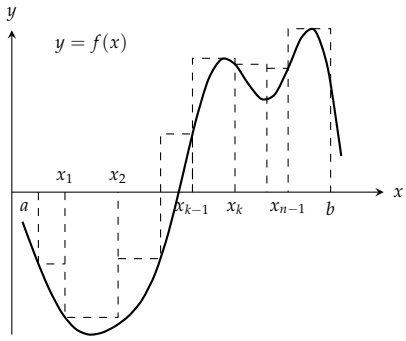
وقفہ $[0, 1]$ کی کسی بھی خانہ بندی P کے لیے بالائی مجموعہ اور زیریں مجموعہ درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} H &= \sum k_H \Delta x_k = \sum 1 \cdot \Delta x_k = \sum \Delta x_k = 1, \\ L &= \sum k_L \Delta x_k = \sum 0 \cdot \Delta x_k = 0 \end{aligned}$$

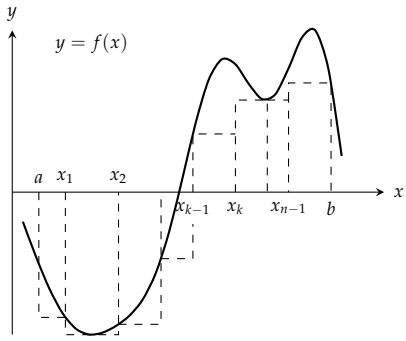
وقفہ $[0, 1]$ پر f کے تکمل کی موجودگی کے لیے ضروری ہے کہ $\|P\| \to 0$ سے H اور L کی ایک سی تحدیدی قیمتیں حاصل ہوں۔ لیکن ایسا نہیں۔ (ذیل دیکھیں۔)

$$\lim_{\|P\|\to 0} L = 0, \quad \lim_{\|P\|\to 0} H = 1$$

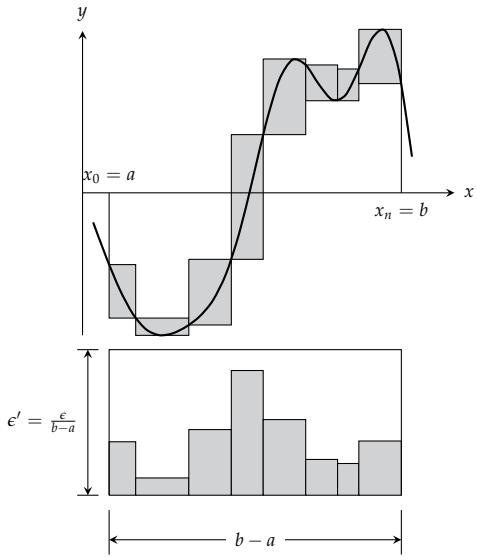
یوں $[0, 1]$ پر f کا تکمل نہیں پایا جاتا۔ مستقل مضرب kf کا بھی تکمل نہیں پایا جاتا ماسوائے جب k صفر ہو۔



(ب) بالائی مجموعہ $H = \sum_{k=1}^{n} k_H \Delta x_k$



(ا) زیریں مجموعہ $L = \sum_{k=1}^{n} k_L \Delta x_k$

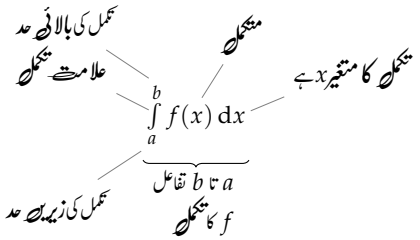


(ج) فرق $H - L$ کو $\epsilon' \cdot (b-a)$ یعنی ϵ سے کم بنایا جا سکتا ہے۔

شکل ۵.۲۹: بالائی اور زیریں مجموعوں میں فرق۔

اصطلاحات

علامت $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کے ساتھ بہت ساری اصطلاحات وابستہ ہیں۔ یوں $\int$ کو **علامت تکمل** کہتے ہیں، a تکمل کی **زیریں حد** جبکہ b تکمل کی **بالائی حد** ہے، f **متکمل** ہے، x تکمل کا **متغیر** ہے، جبکہ $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ سے مراد a تا b تفاعل f کا **تکمل** ہے۔ تکمل حل کرنے سے مراد تکمل کی قیمت کی تلاش ہے۔



کسی بھی مخصوص وقفہ پر قطعی تکمل کی قیمت تفاعل پر منحصر ہوتی ہے نا کہ غیر تابع متغیر کی علامت پر۔ یوں تکمل میں غیر تابع متغیر کو x کے بجائے u یا t سے ظاہر کرتے ہوئے

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{کے بجائے} \quad \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u \quad \text{یا} \quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{لکھا جائے گا۔}$$

ان تینوں تکمل سے مراد ریمان مجموعہ ہے لہٰذا غیر تابع متغیر کا تکمل کی قیمت پر کوئی اثر نہیں ہوگا اور تینوں تکمل کی قیمتیں ایک سی ہوں گی۔ اسی لیے تکمل کے متغیر کو **نقلی متغیر**[۳۰] کہتے ہیں۔

مثال ۵.۳۱: درج ذیل ریمان مجموعوں کی تحدیدی قیمت کو تکمل کی صورت میں لکھیں جہاں P وقفہ $[-1,3]$ کی خانہ بندی ہے۔

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}(3c_k^2-2c_k+5)\Delta x_k$$

حل

نقطہ c_k پر تفاعل $f(x)=3x^2-2x+5$ کی قیمت تلاش کی جا رہی ہے اور وقفہ $[-1,3]$ کی خانہ بندی کی جا رہی ہے۔ یوں ہمیں -1 تا 3 تفاعل f کا تکمل درکار ہے۔

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}(3c_k^2-2c_k+5)\Delta x_k=\int_{-1}^{3}(3x^2-2x+5)\,\mathrm{d}x$$

□

[۳۰] dummyvariable

تفاعلات مستقل

ہمیں مسئلہ ۵.۱ قطعی تکمل کی قیمت کے حصول کے بارے میں کچھ نہیں کہتا، ماسوائے چند مخصوص صورتوں میں جہاں دوسرا مسئلہ (حصہ ۵.۷) زیر استعمال ہو گا۔ تفاعل مستقل ان مخصوص صورتوں میں سے ایک ہے۔ اگر ہم فرض کریں کہ وقفہ $[a,b]$ پر f تفاعل مستقل $f(x) = c$ ہو تب c_k کے کسی بھی انتخاب کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k &= \sum_{k=1}^{n} c \cdot \Delta x_k && \text{ہر نقطہ پر } c \text{ کے برابر ہے } f(c_k) \\
&= c \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k && \text{مجموعہ کا قاعدہ برائے مستقل مضرب} \\
&= c(b-a) && \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k \text{ وقفہ } [a,b] \text{ کی لمبائی } b-a \text{ ہے}
\end{aligned}$$

چونکہ تمام مجموعوں کی قیمت ان کی تحدیدی قیمت $c(b-a)$ کے برابر ہے لہٰذا تکمل کی قیمت بھی یہی ہو گی۔ یوں درج ذیل درست ہو گا۔

وقفہ $[a,b]$ جس پر تفاعل $f(x)$ کی قیمت مستقل c ہے کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a)$$

مثال ۵.۳۲:

ا. $\int\limits_{-1}^{4} 3\,\mathrm{d}x = 3(4-(-1)) = (3)(5) = 15$

ب. $\int\limits_{-1}^{4} (-3)\,\mathrm{d}x = -3(4-(-1)) = (-3)(5) = -15$

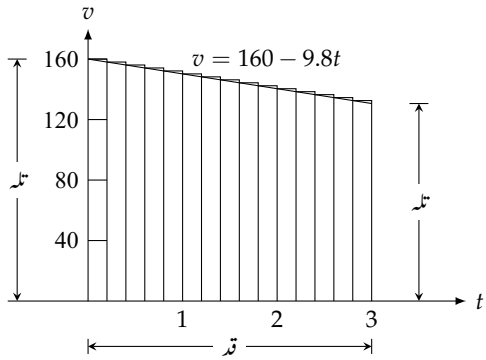
□

غیر منفی تفاعل کی ترسیم کے نیچے رقبہ

گولا کی بلندی کا اندازہ لگانے کی خاطر مثال ۵.۲۲ میں مجموعہ کی ترکیب استعمال کی گئی جو وقفہ $[0,3]$ پر گولا کے تفاعل رفتار

$$v = f(t) = 160 - 9.8t$$

کے ریمان مجموعے تھے۔ شکل ۵.۳۰ میں t محور اور تفاعل $v = 160 - 9.8t$ کے بیچ رقبہ کو مستطیلوں سے ظاہر کرنا دکھایا گیا ہے۔ اس ذو زنقہ رقبے کا قد 3، زیریں تلا 160 اور بالائی تلا 130.6 ہے۔ جیسے جیسے خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر پہنچتا ہے، اتنا باریک مستطیل اصل رقبے پر بہتر



شکل ۵.۳۰: وقفہ $[0,3]$ پر تفاعل رفتار $v = 160 - 9.8t$ کے ریمان رقبہ کے لیے مستطیل۔

۷۶۹ بیٹھتے ہیں۔ ذوزنقہ کا اصل رقبہ درج ذیل ہے۔

$$\text{رقبہ} = \text{قد} \cdot \frac{\text{زیریں تلا} + \text{بالائی تلا}}{2} = 3 \cdot \frac{130.6 + 160}{2} = 435.9$$

۷۷۰ آپ کو یاد ہو گا مثال ۵.۲۲ میں مجموعوں کی تحدیدی قیمت 435.6 تھی۔ یوں ہم تکمل کی قیمت بھی دریافت کر سکتے ہیں۔ (ذیل دیکھیں۔)

$$\int_0^3 (160 - 9.8t)\,\mathrm{d}t = \text{رقبہ ذوزنقہ} = 435.9$$

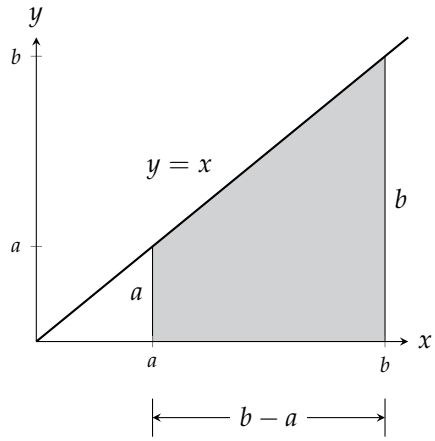
۷۷۱ ہم تکمل اور رقبہ کے تعلق کو دو طرح استعمال کر سکتے ہیں۔ جب ہمیں محور x اور استراری غیر منفی تفاعل $y = f(x)$ کے بیچ رقبے کا کلیہ معلوم ہو تب
۷۷۲ ہم تکمل کی قیمت اس رقبہ سے حاصل کر سکتے ہیں۔ جب ہمیں رقبہ معلوم نہ ہو تب ہم تفاعل کے تکمل سے رقبہ تلاش کر سکتے ہیں۔

۷۷۳ تعریف: فرض کریں وقفہ $[a,b]$ پر $f(x) \geq 0$ استراری ہے۔ تفاعل f کی ترسیم اور محور x کے بیچ رقبہ درج ذیل ہو گا۔

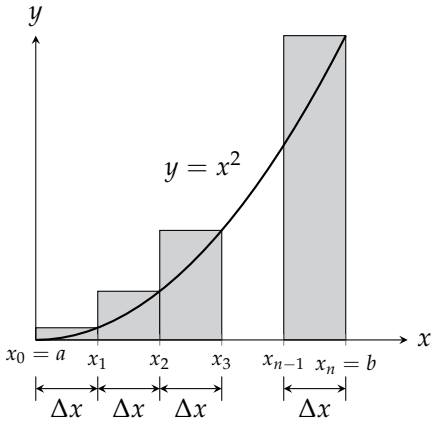
$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

۷۷۴ □

۷۷۵ ہم نے درج بالا تعریف غیر معیاری اشکال کے لیے پیش کی۔ کیا یہ تعریف معیاری اشکال کے لیے بھی کارآمد ہو گی؟ اس کا جواب ہے، ''جی ہاں''، البتہ یہ ثابت
۷۷۶ کرنا اتنا آسان نہیں اور اس پر مزید بات نہیں کی جائے گی۔



شکل ۵.۳۱: خطہ برائے مثال ۵.۳۳



شکل ۵.۳۲: ریمان مجموعوں کے مستطیل (مثال ۵.۳۴)

۷۲۷۷ مثال ۵.۳۳: رقبہ استعمال کرتے ہوئے تکمل کی قیمت کی تلاش

۷۲۷۸ درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x, \quad 0 < a < b$$

۷۲۷۹ **حل**

۷۲۸۰ ہم خطہ $a < x < b$ کے لیے $y = x$ ترسیم کرتے ہیں جس سے ذوزنقہ حاصل ہوتا ہے (شکل ۵.۳۱)۔ تکمل کی قیمت ذوزنقہ کی قیمت سے تلاش

۷۲۸۱ کرتے ہیں۔

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = (b-a)\cdot\frac{a+b}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

۷۲۸۲ یوں $a = 1$ اور $b = \sqrt{5}$ کی صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$\int_1^{\sqrt{5}} x\,\mathrm{d}x = \frac{(\sqrt{5})^2}{2} - \frac{1^2}{2} = 2$$

۷۲۸۳ دھیان رہے کہ x کا ضد تفرق $\frac{x^2}{2}$ ہے جو تکمل اور رقبہ کے تعلق کی طرف اشارہ ہے۔ □

۷۲۸۴ مثال ۵.۳۴: قطعی تکمل سے رقبے کا حصول

۷۲۸۵ قطع مکافی $y = x^2$ اور محور x کے بیچ وقفہ $[0, b]$ پر رقبہ تلاش کریں (شکل ۵.۳۲)۔

۲۸۶ **حل**

۲۸۷ ہم تکمل کی قیمت ریمان رقبوں کی حد سے حاصل کرتے ہیں۔ ہم (غیر معیاری) تفاعل کو ترسیم کر کے وقفہ $[0, b]$ کو n یکساں ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے
۲۸۸ ہیں۔ یوں ہر ذیلی وقفے کی لمبائی $\Delta x = \frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}$ ہو گی۔ خانہ بندی کے نقطے درج ذیل ہوں گے۔

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \Delta x, \quad x_2 = 2\Delta x, \quad \cdots, \quad x_{n-1} = (n-1)\Delta x, \quad x_n = n\Delta x = b$$

۲۸۹ ہم جس طرح چاہیں c_k نقطے منتخب کر سکتے ہیں۔ ہم ہر ذیلی وقفہ کے دائیں سر نقطہ کو c_k منتخب کرتے ہیں۔ یوں $c_1 = x_1$ ، $c_2 = x_2$ ، وغیرہ ہو
۲۹۰ گا۔ منتخب کردہ نقطوں سے حاصل مستطیلوں کے رقبے درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
f(c_1)\Delta x &= f(\Delta x)\Delta x = (\Delta x)^2\Delta x = (1^2)(\Delta x)^3 \\
f(c_2)\Delta x &= f(2\Delta x)\Delta x = (2\Delta x)^2\Delta x = (2^2)(\Delta x)^3 \\
&\vdots \\
f(c_n)\Delta x &= f(n\Delta x)\Delta x = (n\Delta x)^2\Delta x = (n^2)(\Delta x)^3
\end{aligned}$$

۲۹۱ ان رقبوں کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2(\Delta x)^3 \\
&= (\Delta x)^3 \sum_{k=1}^{n} k^2 && (\Delta x)^3 \text{ مستقل ہے} \\
&= \frac{b^3}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} && \text{مساوات ا میں } \Delta x = \frac{b}{n} \\
&= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} \\
&= \frac{b^3}{6} \cdot \frac{2n^2+3n+1}{n^2} \\
&= \frac{b^3}{6} \cdot \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

۲۹۲ اب قطعی تکمل کی تعریف

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x$$

۷۲۹۳ استعمال کرتے ہوئے $x = 0$ تا $x = b$ قطع مکافی کے نیچے رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int_0^b x^2\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} S_n && \text{یہاں } \|P\| \to 0 \text{ سے مراد } n \to \infty \text{ ہے} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b^3}{6}\cdot\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right) && \text{مذکورہ بالا مساوات} \\
&= \frac{b^3}{6}\cdot(2+0+0) = \frac{b^3}{3}
\end{aligned}$$

۷۲۹۴ یوں $b = 1$ اور $b = 1.5$ کی صورت میں درج ذیل جوابات حاصل ہوں گے۔

$$\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}, \quad \int_0^{1.5} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{(1.5)^3}{3} = \frac{3.375}{3} = 1.125$$

۷۲۹۵ یہاں بھی دھیان رہے کہ x^2 کا ضد تفرق $\frac{x^3}{3}$ ہے۔ □

۷۲۹۶ **سوالات**

۷۲۹۷ **سگمارو پ**

۷۲۹۸ سوال ۵.۲۱۷ تا سوال ۵.۲۲۲ میں مجموعہ کو سگمارو پ میں لکھنے کے بعد مجموعے کی قیمت تلاش کریں۔

۷۲۹۹ سوال ۵.۲۱۷: $\sum_{k=1}^{2} \frac{6k}{k+1}$

۷۳۰۰

۷۳۰۱ سوال ۵.۲۱۸: $\sum_{k=1}^{3} \frac{k-1}{k}$

۷۳۰۲ سوال ۵.۲۱۹: $\sum_{k=1}^{4} \cos k\pi$

۷۳۰۳

۷۳۰۴ سوال ۵.۲۲۰: $\sum_{k=1}^{5} \sin k\pi$

۷۳۰۵ سوال ۵.۲۲۱: $\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \sin \frac{\pi}{k}$

۷۳۰۶

۷۳۰۷ سوال ۵.۲۲۲: $\sum_{k=1}^{4} (-1)^{k} \cos k\pi$

۷۳۰۸ سوال ۵.۲۲۳: درج ذیل میں سے کونسی $1+2+4+8+16+32$ کا سگما علامتی روپ ہے۔

۳۰۹ ا. $\sum_{k=1}^{6} 2^{k-1}$ ۳۱۰ ب. $\sum_{k=0}^{5} 2^{k}$ ۳۱۱ ج. $\sum_{k=-1}^{4} 2^{k+1}$

۳۱۲ سوال ۵.۲۲۴: درج ذیل میں سے کونسا $1-2+4-8+16-32$ کا سگما علامتی روپ ہے۔

۳۱۳ ا. $\sum_{k=1}^{6} (-2)^{k-1}$ ۳۱۵ ب. $\sum_{k=0}^{5} (-1)^{k}2^{k}$ ۳۱۶ ج. $\sum_{k=-2}^{3} (-1)^{k+1}2^{k+2}$

۳۱۴

۳۱۷ سوال ۵.۲۲۵: درج ذیل میں سے کونسا کلیہ باقی دو کلیات سے مختلف ہے؟

۳۱۸ ا. $\sum_{k=2}^{4} \frac{(-1)^{k-1}}{k-1}$ ۳۱۹ ب. $\sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^{k}}{k+1}$ ۳۲۰ ج. $\sum_{k=-1}^{1} \frac{(-1)^{k}}{k+2}$

۳۲۱ سوال ۵.۲۲۶: درج ذیل میں سے کونسا کلیہ باقی دو کلیات سے مختلف ہے؟

۳۲۲ ا. $\sum_{k=1}^{4} (k-1)^2$ ۳۲۳ ب. $\sum_{k=-1}^{3} (k+1)^2$ ۳۲۴ ج. $\sum_{k=-3}^{-1} k^2$

۳۲۵ سوال ۵.۲۲۷ تا سوال ۵.۲۳۲ میں دیے مجموعوں کو سگما روپ میں لکھیں۔ آپ کے جواب کی صورت مجموعی سلسلے کی زیریں حد پر منحصر ہو گی۔

۳۲۶ سوال ۵.۲۲۷: $1+2+3+4+5+6$

۳۲۷

۳۲۸ سوال ۵.۲۲۸: $1+4+9+16$

۳۲۹ سوال ۵.۲۲۹: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

۳۳۰

۳۳۱ سوال ۵.۲۳۰: $2+4+6+8+10$

۳۳۲ سوال ۵.۲۳۱: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

۳۳۳

۳۳۴ سوال ۵.۲۳۲: $-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}-\frac{5}{5}$

۳۳۵ **متناہی مجموعہ کی قیمت**

۳۳۶ سوال ۵.۲۳۳: فرض کریں کہ $\sum_{k=1}^{n} a_k = -5$ اور $\sum_{k=1}^{n} b_k = 6$ ہیں۔ درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

۳۳۷ ا. $\sum_{k=1}^{n} 3a_k$ ۳۳۹ ج. $\sum_{k=1}^{n} (a_k+b_k)$ ۳۴۱ ھ. $\sum_{k=1}^{n} (b_k-2a_k)$

۳۳۸ ب. $\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{6}$ ۳۴۰ د. $\sum_{k=1}^{n} (a_k-b_k)$

سوال ۵.۲۳۴: فرض کریں کہ $\sum_{k=1}^{n} a_k = 0$ اور $\sum_{k=1}^{n} b_k = 1$ ہیں۔ درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\sum_{k=1}^{n} 8a_k$ ب. $\sum_{k=1}^{n} 250b_k$ ج. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + 1)$ د. $\sum_{k=1}^{n} (b_k - 1)$

سوال ۵.۲۳۵ تا سوال ۵.۲۴۴ میں دیے گئے الجبرائی فقروں کی قیمتوں کو صفحہ ۴۵۲ پر دیے گئے متناہی مجموعہ کے الجبرائی قواعد اور مساوات ا میں دیے کلیات کی مدد سے تلاش کریں۔

سوال ۵.۲۳۵:

ا. $\sum_{k=1}^{10} k$ ب. $\sum_{k=1}^{10} k^2$ ج. $\sum_{k=1}^{10} k^3$

سوال ۵.۲۳۶:

ا. $\sum_{k=1}^{13} k$ ب. $\sum_{k=1}^{13} k^2$ ج. $\sum_{k=1}^{13} k^3$

سوال ۵.۲۳۷: $\sum_{k=1}^{7} (-2k)$

سوال ۵.۲۳۸: $\sum_{k=1}^{5} \frac{\pi k}{15}$

سوال ۵.۲۳۹: $\sum_{k=1}^{6} (3 - k^2)$

سوال ۵.۲۴۰: $\sum_{k=1}^{6} (k^2 - 5)$

سوال ۵.۲۴۱: $\sum_{k=1}^{5} k(3k + 5)$

سوال ۵.۲۴۲: $\sum_{k=1}^{7} k(2k + 1)$

سوال ۵.۲۴۳: $\sum_{k=1}^{5} \frac{k^3}{225} + \left(\sum_{k=1}^{5} k\right)^3$

سوال ۵.۲۴۴: $\left(\sum_{k=1}^{7} k\right)^2 - \sum_{k=1}^{7} \frac{k^3}{4}$

ریمان مجموعوں کے لیے مستطیلیں

سوال ۵.۲۴۵ تا سوال ۵.۲۴۸ میں تفاعل $f(x)$ کو دیے گئے وقفے پر ترسیم کریں۔ وقفے کے ایک جتنے لمبے چار ذیلی وقفوں میں خانہ بندی کریں۔ ترسیم پر ریمان مجموعہ $\sum_{k=1}^{4} f(c_k)\Delta x_k$ کے ساتھ وابستہ مستطیل دکھائیں جہاں k واں ذیلی وقفے کا (ا) بایاں سر نقطہ، (ب) دایاں سر نقطہ، (ج) وسطی نقطہ c_k ہے۔ (بائیں، دائیں، اور وسطی نقطوں کے لیے علیحدہ علیحدہ ترسیم کھینچیں۔)

سوال ۵.۲۴۵: $f(x) = x^2 - 1, \quad [0,2]$

سوال ۵.۲۴۶: $f(x) = -x^2, \quad [0,1]$

سوال ۵.۲۴۷: $f(x) = \sin x, \quad [-\pi,\pi]$

سوال ۵.۲۴۸: $f(x) = \sin x + 1, \quad [-\pi,\pi]$

سوال ۵.۲۴۹: خانہ بندی $P = \{0, 1.2, 1.5, 2.3, 2.6, 3\}$ کا معیار تلاش کریں۔

سوال ۵.۲۵۰: خانہ بندی $P = \{-2, -1.6, -0.5, 0, 0.8, 1\}$ کا معیار تلاش کریں۔

حد کا بطور تکمل اظہار

سوال ۵.۲۵۱ تا سوال ۵.۲۵۸ میں دی گئی حد کو بطور قطعی تکمل ظاہر کریں۔

سوال ۵.۲۵۱: $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} c_k^2 \Delta x_k$ جہاں $[0,2]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال ۵.۲۵۲: $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} 2c_k^3 \Delta x_k$ جہاں $[-1,0]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال ۵.۲۵۳: $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} (c_k^2 - 3c_k) \Delta x_k$ جہاں $[-7,5]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال ۵.۲۵۴: $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{c_k} \Delta x_k$ جہاں $[1,4]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال ۵.۲۵۵: $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{1-c_k} \Delta x_k$ جہاں $[2,3]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال ۵.۲۵۶: $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{4 - c_k^2} \Delta x_k$ جہاں $[0,1]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال ۵.۲۵۷: $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} (\sec c_k) \Delta x_k$ جہاں $[-\pi/4, 0]$ کی خانہ بندی P ہے۔

سوال ۵.۲۵۸: $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} (\tan c_k) \Delta x_k$ جہاں $[0, \pi/4]$ کی خانہ بندی P ہے۔

تفاعل مستقل

سوال ۵.۲۵۹ تا سوال ۵.۲۶۴ میں تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۵.۲۵۹: $\int_{-2}^{1} 5\,\mathrm{d}x$

سوال ۵.۲۶۰: $\int_{3}^{7} (-20)\,\mathrm{d}x$

سوال ۵.۲۶۱: $\int_{0}^{3} (-160)\,\mathrm{d}t$

سوال ۵.۲۶۲: $\int_{-4}^{-1} \frac{\pi}{2}\,\mathrm{d}\theta$

سوال ۵.۲۶۳: $\int_{-2.1}^{3.4} 0.5\,\mathrm{d}s$

سوال ۵.۲۶۴: $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\,\mathrm{d}r$

رقبہ سے تکمل کی قیمت کا حصول

سوال ۵.۲۶۵ تا سوال ۵.۲۷۲ میں متکمل کو ترسیم کرتے ہوئے رقبے سے تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال ۵.۲۶۵: $\int_{-2}^{4} \left(\frac{x}{2}+3\right)\mathrm{d}x$

سوال ۵.۲۶۶: $\int_{1/2}^{3/2} (-2x+4)\,\mathrm{d}x$

سوال ۵.۲۶۷: $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال ۵.۲۶۸: $\int_{-4}^{0} \sqrt{16-x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال ۵.۲۶۹: $\int_{-2}^{1} |x|\,\mathrm{d}x$

سوال ۵.۲۷۰: $\int_{-1}^{1} (1-|x|)\,\mathrm{d}x$

سوال ۵.۲۷۱: $\int_{-1}^{1} (2-|x|)\,\mathrm{d}x$

سوال ۵.۲۷۲: $\int_{-1}^{1} (1+\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x$

سوال ۵.۲۷۳ تا سوال ۵.۲۷۶ میں تکمل کی قیمت رقبہ سے حاصل کریں۔

سوال ۵.۲۷۳: $\int_{0}^{b} x\,\mathrm{d}x, \quad b>0$

۷۳۲۵ سوال ۵.۲۷۴: $\int_0^b 4x\,\mathrm{d}x, \quad b > 0$

۷۳۲۶ سوال ۵.۲۷۵: $\int_a^b 2s\,\mathrm{d}s, \quad 0 < a < b$

۷۳۲۷

۷۳۲۸ سوال ۵.۲۷۶: $\int_a^b 3t\,\mathrm{d}t, \quad 0 < a < b$

۷۳۲۹ **قیمت کی تلاش**

۷۳۳۰ سوال ۵.۲۷۷ تا سوال ۵.۲۸۸ میں دیے تکمل کی قیمت کو مثال ۵.۳۳ اور مثال ۵.۳۴ کے نتائج استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

۷۳۳۱ سوال ۵.۲۷۷: $\int_1^{\sqrt{2}} x\,\mathrm{d}x$

۷۳۳۲

۷۳۳۳ سوال ۵.۲۷۸: $\int_{0.5}^{2.5} x\,\mathrm{d}x$

۷۳۳۴ سوال ۵.۲۷۹: $\int_{\pi}^{2\pi} \theta\,\mathrm{d}\theta$

۷۳۳۵

۷۳۳۶ سوال ۵.۲۸۰: $\int_{\sqrt{2}}^{5\sqrt{2}} r\,\mathrm{d}r$

۷۳۳۷ سوال ۵.۲۸۱: $\int_0^{\sqrt[3]{7}} x^2\,\mathrm{d}x$

۷۳۳۸

۷۳۳۹ سوال ۵.۲۸۲: $\int_0^{0.3} s^2\,\mathrm{d}s$

۷۳۴۰ سوال ۵.۲۸۳: $\int_0^{1/2} t^2\,\mathrm{d}t$

۷۳۴۱

۷۳۴۲ سوال ۵.۲۸۴: $\int_0^{\pi/2} \theta^2\,\mathrm{d}\theta$

۷۳۴۳ سوال ۵.۲۸۵: $\int_0^{2a} x\,\mathrm{d}x$

۷۳۴۴

۷۳۴۵ سوال ۵.۲۸۶: $\int_a^{\sqrt{3}a} x\,\mathrm{d}x$

۷۳۴۶ سوال ۵.۲۸۷: $\int_0^{\sqrt[3]{b}} x^2\,\mathrm{d}x$

۷۳۴۷

۷۳۴۸ سوال ۵.۲۸۸: $\int_0^{3b} x^2\,\mathrm{d}x$

۷۳۴۹ **رقبے کی تلاش**

۷۳۵۰ سوال ۵.۲۸۹ تا سوال ۵.۲۹۲ میں وقفہ $[0, b]$ پر محور x اور دیے گئے تفاعل کے بیچ رقبہ کو قطعی تکمل کی مدد سے حاصل کریں۔

۷۳۵۱ سوال ۵.۲۸۹: $y = 3x^2$

۷۳۵۲

سوال ۵.۲۹۰: $y = \pi x^2$

سوال ۵.۲۹۱: $y = 2x$

سوال ۵.۲۹۲: $y = \frac{x}{2} + 1$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۵.۲۹۳: درج ذیل تکمل کی قیمت اعظم کرنے کی خاطر درکار a اور b تلاش کریں۔(اشارہ: متکمل کہاں مثبت ہے؟)

$$\int_a^b (x - x^2)\,\mathrm{d}x$$

سوال ۵.۲۹۴: درج ذیل تکمل کی قیمت اقل کرنے کی خاطر درکار a اور b تلاش کریں۔

$$\int_a^b (x^4 - 2x^2)\,\mathrm{d}x$$

سوال ۵.۲۹۵: بڑھتے تفاعل کے بالائی اور زیریں مجموعے

(ا) فرض کریں کہ جیسے جیسے x وقفہ $[a, b]$ پر بائیں سے دائیں چلتا ہے، تفاعل $f(x)$ کی ترسیم بتدریج اوپر اٹھتی ہے۔ فرض کریں وقفہ $[a, b]$ کی n عددیکساں لمبائیوں کے ذیلی وقفوں میں خانہ بندی P ہے جہاں ایک خانے کی لمبائی $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ہے۔ شکل ۵.۳۳ کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اس خانہ بندی پر f کے بالائی اور زیریں مجموعوں میں فرق کو ترسیمی طور پر مستطیل R سے ظاہر کیا جاسکتا ہے جس کی جسامت $[f(b) - f(a)]$ ضرب Δx ہے۔(اشارہ: فرق $H - L$ ان رقبوں کا مجموعہ ہے جن کے وتر $Q_0Q_1, Q_1Q_2, \cdots, Q_{n-1}Q_n$ اس ترسیم پر پائے جاتے ہیں۔ انہیں افقی مستطیل R پر منتقل کیا جاسکتا ہے۔)

(ب) فرض کریں ذیلی وقفوں کی لمبائیاں ایک سی نہیں ہیں بلکہ خانہ بندی $[a, b]$ پر مختلف ذیلی وقفوں کی لمبائی Δx_k مختلف ہے۔ اگر Δx_H خانہ بندی P کا معیار ہو تب دکھائیں کہ

$$H - L \leq \left|f(b) - f(a)\Delta x_H\right|$$

ہوگا لہٰذا $\lim_{\|P\| \to 0}(H - L) = 0$ ہوگا۔

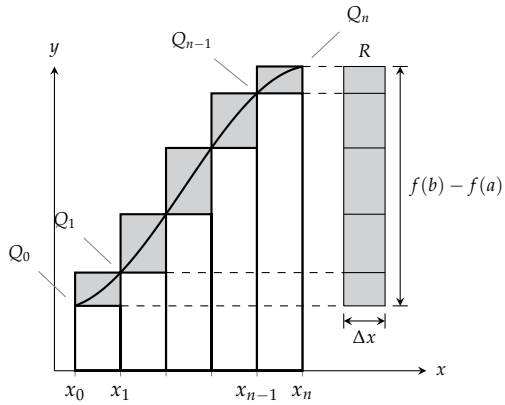
سوال ۵.۲۹۶: گھٹتے تفاعل کے بالائی اور زیریں مجموعے

(ا) فرض کریں کہ جیسے جیسے x وقفہ $[a, b]$ پر بائیں سے دائیں چلتا ہے، تفاعل $f(x)$ کی ترسیم بتدریج نیچے گرتی ہے۔ سوال ۵.۲۹۵ کی طرح اس کا خاکہ بنائیں۔ فرض کریں وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی P ہے جہاں تمام خانوں کی لمبائیاں ایک سی ہیں۔ سوال ۵.۲۹۵ کی طرح فرق $H - L$ تلاش کریں۔

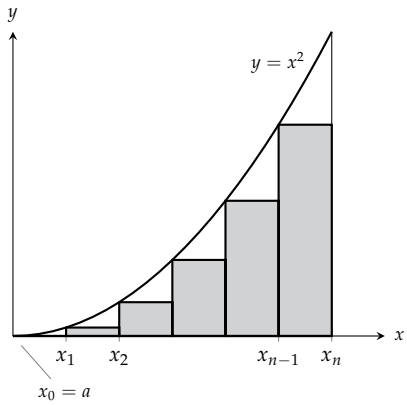
(ب) فرض کریں خانوں کی لمبائیاں ایک سی نہیں بلکہ ہر Δx_k مختلف ہے۔ دکھائیں کہ سوال ۵.۲۹۵ کی عدم مساوات

$$H - L \leq \left|f(b) - f(a)\right| \Delta x_H$$

اب بھی کارآمد ہے لہٰذا $\lim_{\|P\| \to 0}(H - L) = 0$ ہوگا۔



شکل ۵.۳۳: بالائی اور زیریں مجموعوں میں فرق $[f(b)-f(a)]\Delta x$ ہوگا۔



شکل ۵.۳۴: ریمان مستطیل برائے سوال ۵.۲۹۷

سوال ۵.۲۹۷: تکمل $\int_0^b x^2\,\mathrm{d}x,\ b > 0$ کی قیمت مثال ۵.۳۴ کے طرز پر حاصل کریں البتہ اب ہر خانے کے بائیں سر نقطے پر قیمت استعمال کریں (شکل ۵.۳۴)۔

سوال ۵.۲۹۸: دکھائیں کہ مجموعہ

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right]$$

درحقیقت $\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$ کا تخمینی رقبہ دیتا ہے۔ یوں حد $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔ (اشارہ: وقفہ $[0,1]$ کی یکساں n ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفے کے بائیں سر نقطے پر قیمت استعمال کرتے ہوئے مطابقتی مستطیلوں کے رقبہ کا مجموعہ لکھیں۔)

سوال ۵.۲۹۹: درج ذیل

$$S_n = \frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{(n-1)^2}{n^3}$$

کو

$$S_n = \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\right]$$

روپ میں لکھیں جس کو $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ کی تخمینی قیمت تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں حد $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔ (اشارہ: وقفہ $[0,1]$ کو n برابر لمبائیوں کے ذیلی وقفوں میں تقسیم کریں اور ہر خانے کے بائیں سر نقطے پر قیمت استعمال کرتے ہوئے مطابقتی مستطیلوں کے رقبوں کا مجموعہ لیں۔)

۷۴۸۷ سوال ۵.۳۰۰: درج ذیل کلیہ استعمال

$$\sin h + \sin 2h + \sin 3h + \cdots + \sin mh = \frac{\cos(h/2) - \cos(m+1/2)h}{2\sin(h/2)}$$

۷۴۸۸ کرتے ہوئے $y = \sin x$ کے نیچے $x = 0$ تا $x = \pi/2$ رقبہ درج ذیل دو اقدام سے تلاش کریں۔

۷۴۸۹ ا. وقفہ $[0, \pi/2]$ کو n برابر لمبائیوں کے ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے مطابقتی بالائی مجموعہ H تلاش کریں۔

۷۴۹۰ ب. $\Delta x = \frac{b-a}{n} \to 0$ اور $n \to \infty$ کرتے ہوئے H کی حد تلاش کریں۔

۷۴۹۱ کمپیوٹر کا استعمال

۷۴۹۲ سوال ۵.۳۰۱ تا سوال ۵.۳۰۶ میں دیے گئے تکمل پر مرکوز ریمان مجموعوں کے ساتھ منسلک مستطیلوں کو کمپیوٹر پر بنائیں۔ ذیلی وقفوں کی تعداد
۷۴۹۳ $n = 4, 10, 20, 50$ لیں اور ان کی لمبائیاں ایک سی لیں۔

۷۴۹۴ سوال ۵.۳۰۱: $\int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$

۷۴۹۵ سوال ۵.۳۰۲: $\int_0^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$

۷۴۹۶ سوال ۵.۳۰۳: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = 0$

۷۴۹۷ سوال ۵.۳۰۴: $\int_0^{\pi/4} \sec^2 x\,\mathrm{d}x = 1$

۷۴۹۸ سوال ۵.۳۰۵: $\int_{-1}^{1} |x|\,\mathrm{d}x = 1$

۷۴۹۹ سوال ۵.۳۰۶: $\int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln 2$

۷۵۰۰ سوال ۵.۳۰۷: (ا) مجموعہ S_n جو سوال ۵.۲۹۸ میں پیش کیا گیا ہے کو سگما علامتی روپ میں لکھ کر کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے $\lim_{n\to\infty} S_n$
۷۵۰۱ تلاش کریں۔ (ب) سوال ۵.۲۹۹ میں دیے گئے S_n کے لیے دوبارہ حل کریں۔

۷۵۰۲ سوال ۵.۳۰۸: مجموعہ $\sin h + \sin 2h + \cdots \sin mh$ جسے سوال ۵.۳۰۰ میں پیش کیا گیا ہے کو سگما علامتی روپ میں لکھ کر کمپیوٹر کی
۷۵۰۳ مدد سے $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔

۷۵۰۴ سوال ۵.۳۰۹: بائیں نقطی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے مثال ۵.۲۳ کے مجموعہ کا سگما علامتی روپ درج ذیل ہے۔

$$S_4 = \sum_{k=1}^{4} 4[9 - (-2 + (k-1))^2]$$

۷۵۰۵ ا. سگما علامتی روپ استعمال کرتے ہوئے بائیں نقطی مجموعہ S_8 اور S_{25} لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی بالترتیب $\frac{4}{8}$ اور $\frac{4}{25}$ ہو گی۔

۷۵۰۶ ب. سگما علامتی روپ استعمال کرتے ہوئے بائیں نقطی مجموعہ S_n لکھیں جو n خانوں پر مشتمل ہے اور جہاں ہر خانے کی لمبائی $\frac{4}{n}$ ہے۔

۷۵۰۷ ج. حد $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔ اس حد کا ٹھوس جسم کے حجم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

سوال ۵.۳۱۰: بائیں سر نقطی قیمت مجموعہ برائے مثال ۵.۲۴ درج ذیل ہے۔

$$S_8 = \sum_{k=1}^{8} \pi[16 - (-1 + (k-1))^2]$$

ا. بائیں سر نقطی مجموعہ S_{16} اور S_{80} کو سگما علامتی روپ میں لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{10}$ ہو گی۔

ب. بائیں سر نقطی مجموعہ S_n کو سگما علامتی روپ میں لکھیں جہاں ہر خانے کی لمبائی $\frac{8}{n}$ اور خانوں کی تعداد n ہو گی۔

ج. حد $\lim_{n\to\infty} S_n$ تلاش کریں۔ اس حد کا ٹھوس جسم کے حجم کے ساتھ کیا تعلق ہو گا؟

۵.۶ خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ

اس حصہ میں تکمل کے قواعد اور تکمل کے رقبہ کے ساتھ تعلق پر غور کیا جائے گا۔ اس کے علاوہ اوسط قیمت پر دوبارہ غور کیا جائے گا۔

قطعی تکمل کے خواص

ہم عموماً قطعی تکملات کا مجموعہ اور فرق حاصل کرنا چاہتے ہیں، یا متکمل کو مستقل سے ضرب دینا چاہتے ہیں، یا ان کا موازنہ دیگر قطعی تکمل کے ساتھ کرنا چاہتے ہیں۔ ہم ایسا درج ذیل قواعد کے تحت کرتے ہیں۔

قواعد برائے قطعی تکمل

ا. صفر: $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ (تعریف)

۲. تکمل کی ترتیب: $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (تعریف)

۳. مستقل مضرب: $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (k کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے)

$\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ $(k=-1)$

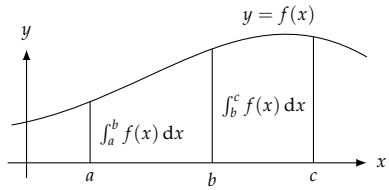
۴. مجموعہ اور فرق: $\int_a^b (f(x) \mp g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \mp \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

۵. جمع پذیری: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$

۶. اقل و اعظم عدم مساوات: اگر وقفہ $[a,b]$ پر f کی اعظم قیمت f_H اور اقل قیمت f_L ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$f_L \cdot (b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le f_H \cdot (b-a)$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



شکل ۵.۳۵: قطعی تکمل کی جمع پذیری

۷. غلبہ: اگر $[a,b]$ پر $f(x) \geq g(x)$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

اگر $[a,b]$ پر $f(x) \geq 0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

ماسوائے پہلے دو قواعد کے تمام کو قطعی تکمل کی تعریف بذریعہ ریمان مجموعہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ آپ کا خیال ہو گا کہ ان قواعد کے ثبوت نہایت آسان ہوں گے۔ چونکہ ریمان مجموعہ یہ خواص رکھتا ہے لہذا آپ سوچتے ہوں گے کہ مجموعے کی حد بھی یہی خواص رکھتی ہو گی۔ حقیقت میں ثبوت پیش کرتے ہوئے ذیلی وقفوں کے معیار کے ϵ بالمقابل δ کے پیچیدہ دلائل درکار ہوں گے۔ یقیناً ان قواعد کے ثبوت اتنے آسان نہیں۔ ہم صرف دو قواعد کے ثبوت پیش کرتے ہیں۔ باقی قواعد کے ثبوت اعلیٰ کتابوں میں پائے جاتے ہیں۔

دھیان رہے کہ قاعدہ 1 درحقیقت ایک تعریف ہے۔ ہم چاہیں گے کہ صفر لمبائی پر حاصل تمام تکملات کی قیمت صفر ہو۔ پہلا قاعدہ قطعی تکمل کی تعریف کو وسعت دیتے ہوئے $a = b$ کو بھی ممکن بناتا ہے۔ قاعدہ 2 بھی تعریف ہے جو قطعی تکمل کی تعریف کو وسعت دیتے ہوئے $b < a$ کو بھی ممکن بناتا ہے۔ قاعدہ 3 اور قاعدہ 4 حد اور غیر قطعی تکمل کے مماثل قواعد کی طرح ہیں۔ دو تفاعلات کے تکمل جانتے ہوئے ہم ان کے تمام مستقل مضرب، مجموعہ، اور فرق کے تکمل جانتے ہیں۔ ہم قاعدہ 3 اور 4 کو بار بار استعمال کرتے ہوئے اختیاری قابل تکمل تفاعل کے کسی بھی متناہی خطی میل کا جزو در جزو تکمل حاصل کر سکتے ہیں۔ کسی بھی مستقل $c_1, \cdot c_n$ جن کی علامتیں کچھ بھی ہو سکتی ہیں، اور وقفہ $[a,b]$ پر قابل تکمل تفاعل $f_1(x), \cdots, f_n(x)$ کے لیے درج ذیل ہو گا

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x))\,\mathrm{d}x = c_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + c_n \int_a^n f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

جس کا ثبوت، جو ریاضی ماخوذ سے حاصل کیا جا سکتا ہے، یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

شکل ۵.۳۵ میں مثبت تفاعل کے لیے قاعدہ 5 دکھایا گیا ہے جو کسی بھی تفاعل کے لیے درست ہے۔

۷۵۴۱ ثبوت: **قاعدہ** 3

۷۵۴۲ قاعدہ 3 کے تحت تفاعل ضرب k کا تکمل، تفاعل کا تکمل ضرب k ہو گا۔ یہ درج ذیل وجہ کے تحت درست ہے۔

$$\begin{aligned}\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^n kf(c_i)\Delta x_i\\ &= \lim_{\|P\|\to 0} k\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i\\ &= k\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i\\ &= k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

۷۵۴۳ □

۷۵۴۴ ثبوت: قاعدہ 6

۷۵۴۵ قاعدہ 6 کہتا ہے کہ $[a,b]$ پر تکمل کی قیمت کبھی بھی f کی اقل قیمت ضرب لمبائی وقفہ سے کم نہیں ہو گی اور نا ہی یہ کبھی f کی اعظم قیمت ضرب لمبائی

۷۵۴۶ وقفہ سے زیادہ ہو گی۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ $[a,b]$ کی کسی بھی خانہ بندی اور c_k کے کسی بھی انتخاب کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}f_L\cdot(b-a) &= f_L\cdot\sum_{k=1}^n \Delta x_k\\ &= \sum_{k=1}^n f_L\cdot\Delta x_k\\ &\le \sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k\\ &\le f_H\cdot\Delta x_k\\ &= f_H\cdot\sum_{k=1}^n\Delta x_k\\ &= f_H\cdot(b-a)\end{aligned}$$

۷۵۴۷ مختصراً وقفہ $[a,b]$ پر f کے تمام ریمان مجموعے درج ذیل کو مطمئن کرتے ہیں

$$f_L\cdot(b-a)\le\sum_{k=1}^n f(c_k)\Delta x_k\le f_H\cdot(b-a)$$

۷۵۴۸ لہٰذا ان کی حد، یعنی تکمل، بھی اس شرط کو مطمئن کرتی ہو گی۔

۷۵۴۹ □

۷۵۵۰ مثال ۵.۳۵: درج ذیل فرض کرتے ہوئے

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 5, \quad \int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = -2, \quad \int_{-1}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x = 7$$

۷۵۵۱ درج ذیل ہوں گا۔

۱.

$$\int_{4}^{1} = -\int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = -(-2) = 2 \qquad \text{قاعدہ 2}$$

۲.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} [2f(x) + 3h(x)]\,\mathrm{d}x &= 2\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + 3\int_{-1}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2(5) + 3(7) = 31 \qquad \text{قاعدہ 3 اور قاعدہ 4}\end{aligned}$$

۳.

$$\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = 5 + (-2) = 3 \qquad \text{قاعدہ 5}$$

۷۵۵۲ □

۷۵۵۳ ہم نے حصہ ۵.۵ میں درج ذیل تین عمومی تکملات کا حصول سیکھا۔

$$\int_{a}^{b} c\,\mathrm{d}x = c(b-a) \qquad (c\ \text{مستقل}) \tag{۱}$$

$$\int_{a}^{b} x\,\mathrm{d}x = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \qquad (0 < a < b) \tag{۲}$$

$$\int_{0}^{b} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{b^3}{3} \qquad (b < 0) \tag{۳}$$

۷۵۵۴ صفحہ ۴۷۴ پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج بالا نتائج کو وسعت دی جا سکتی ہے۔

۷۵۵۵ مثال ۵.۳۶: قیمت تلاش کریں: $\int_0^2 (\frac{t^2}{4} - 7t + 5)\,\mathrm{d}t$

۷۵۵۶ **حل**

۷۵۵۷

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(\frac{t^2}{4} - 7t + 5\right) \mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\int_0^2 t^2\,\mathrm{d}t - 7\int_0^2 t\,\mathrm{d}t + \int_0^2 5\,\mathrm{d}t && \text{قاعدہ 3 اور قاعدہ 4}\\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{2^3}{3}\right) - 7\left(\frac{2^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) + 5(2-0) && \text{مساوات ۱ تا مساوات ۳}\\ &= \frac{2}{3} - 14 + 10 = -\frac{10}{3}\end{aligned}$$

۷۵۵۸ □

۷۵۵۹ مثال ۵.۳۷: قیمت تلاش کریں: $\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x$

۷۵۶۰ **حل**

۷۵۶۱

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x + \int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x && \text{قاعدہ 5}\\ \int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x - \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x && \text{درج بالا حل کریں}\\ &= \frac{3^2}{3} - \frac{2^3}{3} && \text{مساوات ۳}\\ &= \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}\end{aligned}$$

۷۵۶۲ □

۷۵۶۳ ہم $\int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x$ کے حل پر مزید غور حصہ ۵.۷ میں کریں گے۔

۷۵۶۴ قطعی تکمل کی اقل و اعظم عدم مساوات (اقل ع اعظم عدم مساوات، قاعدہ 6) کہتی ہے کہ $\int_a^b f\,\mathrm{d}x$ کی $f_L \cdot (b-a)$ زیریں حد بندی جبکہ

۷۵۶۵ $f_H \cdot (b-a)$ بالائی حد بندی ہے۔

۷۵۶۶ مثال ۵.۳۸: دکھائیں کہ $\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$ کی قیمت 2 نہیں ہو سکتی۔

۷۵۶۷ **حل**

۷۵۶۸ وقفہ $[0,1]$ پر $\sqrt{1+\cos x}$ کی اعظم قیمت $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ ہے لہٰذا

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x &\le \sqrt{1+\cos x}_{\text{اعظم}} \cdot (1-0) && \text{قاعدہ 6}\\ &\le \sqrt{2}\cdot 1 = \sqrt{2}\end{aligned}$$

تکمل کی قیمت $\sqrt{2}$ سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہے لہٰذا تکمل کی قیمت 2 نہیں ہو سکتی۔ □

مثال ۵.۳۹: عدم مساوات $\cos x \geq (1 - x^2/2)$ تمام x کے لیے درست ہے۔ تکمل $\int_0^1 \cos x \, \mathrm{d}x$ اقل قیمت تلاش کریں۔

حل

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos x \, \mathrm{d}x &\geq \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x && \text{قاعدہ 7} \\
&\geq \int_0^1 1 \, \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x && \text{قاعدہ 3، قاعدہ 4} \\
&\geq 1 \cdot (1 - 0) - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1)^3}{3} = \frac{5}{6} \approx 0.83
\end{aligned}$$

تکمل کی قیمت کم از کم $\frac{5}{6}$ کے برابر ہے۔ □

تکمل اور کل رقبہ

اگر وقفہ $[a, b]$ پر $y = f(x)$ قابل تکمل تفاعل ہو جس کی قیمت کہیں مثبت اور کہیں منفی ہو تب $[a, b]$ پر f کا ریمان مجموعہ محور x کے بالائی جانب مستطیلوں کے رقبوں کی مثبت قیمتوں اور محور x کے نیچے جانب مستطیلوں کے رقبوں کی منفی قیمتوں کا مجموعہ ہو گا (شکل ۵.۳۶)۔ چونکہ مثبت اور منفی مقداریں ایک دوسرے کو منسوخ کرتی ہیں لہٰذا اس مجموعے کی تحدیدی قیمت تفاعل اور محور x کے بیچ کل رقبے سے کم ہو گی۔ تکمل کی قیمت محور کے اوپر جانب رقبہ سے محور کے نیچے جانب رقبہ منفی کرنے سے حاصل ہو گی۔

اس کا مطلب ہے کہ رقبے کو تکمل سے حاصل کرتے ہوئے دھیان رکھنا ہو گا۔

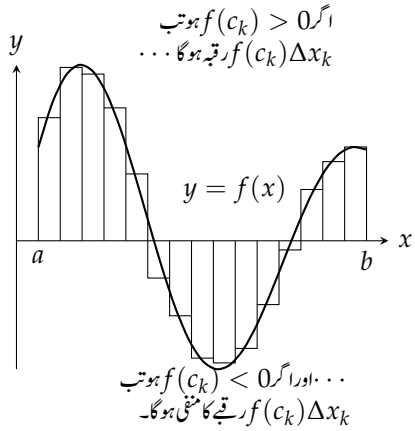
مثال ۵.۴۰: وقفہ $0 \leq x \leq 3$ پر منحنی $y = 4 - x^2$ اور محور x کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

حل

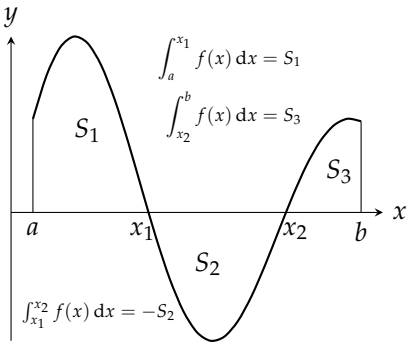
منحنی کا قاطع x وقفہ $[0, 3]$ کو دو خانوں میں تقسیم کرتا ہے۔ ایک خانے میں $f(x) = 4 - x^2$ کی قیمت مثبت اور دوسرے خانے میں منفی ہے (شکل ۵.۳۷)۔ منحنی اور محور x کے بیچ رقبہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ان خانوں پر تکمل لے کر جوابات کی مطلق قیمتوں کو جمع کرتے ہیں۔

وقفہ $[0, 2]$ پر تکمل:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 (4 - x^2) \, \mathrm{d}x &= \int_0^2 4 \, \mathrm{d}x - \int_0^2 x^2 \, \mathrm{d}x \\
&= 4(2 - 0) - \frac{(2)^3}{3} && \text{مساوات ۱ اور مساوات ۳} \\
&= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}
\end{aligned}$$



(ا) ریمان مجموعہ رقبوں کا الجبرائی مجموعہ ہے اور دونوں کی تحدیدی قیمت تکمل ہے۔



(ب) a تا b تفاعل f کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b = \int_a^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^{b} = S_1 - S_2 + S_3$$

شکل ۵.۳۶: تکمل اور کل رقبے کا تعلق۔

۷۵۸۵ وقفہ $[2,3]$ پر تکمل:

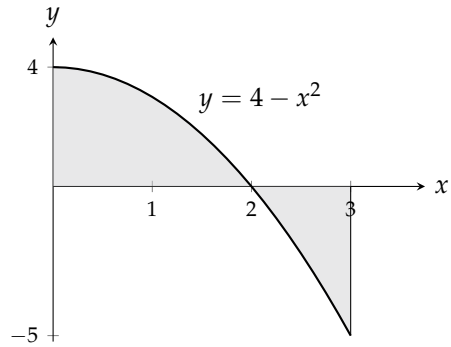
$$\begin{aligned}\int_2^3 (4-x^2)\,\mathrm{d}x &= \int_2^3 4\,\mathrm{d}x - \int_2^3 x^2\,\mathrm{d}x \\ &= 4(3-2) - \left(\frac{(3)^2}{3} - \frac{(2)^3}{3}\right) && \text{مساوات ۱ اور مثال ۵.۳۷} \\ &= 4 - \frac{19}{3} = -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

۷۵۸۶ کل رقبہ $\frac{16}{3} + \left|-\frac{7}{3}\right| = \frac{23}{3}$ ہو گا۔ □

۷۵۸۷ اختیاری استمراری تفاعل کی اوسط قیمت

۷۵۸۸ ہم نے مثال ۵.۲۵ میں غیر منفی استمراری تفاعل کی اوسط قیمت پر تبصرہ کیا۔ ہم اب f غیر منفی ہونے کی شرط ختم کر کے تفاعل کی اوسط قیمت کی تعریف پیش
۷۵۸۹ کرنے کے قابل ہیں۔ ہم دیکھیں گے کہ ہر استمراری تفاعل کم از کم ایک مرتبہ اپنی اوسط قیمت اختیار کرتا ہے۔

۷۵۹۰ ہم دوبارہ ریاضیات سے اوسط قیمت کا تصور لیتے ہیں جہاں n اعداد کی انفرادی قیمتوں کے مجموعہ کو n سے تقسیم کرنے سے اعداد کی اوسط قیمت حاصل ہوتی
۷۵۹۱ ہے۔ بند وقفہ $[a,b]$ پر استمراری تفاعل f کے لامتناہی تعداد کے اعداد لیے جا سکتے ہیں لیکن ہم یکساں وقفوں پر تفاعل سے نمونہ حاصل کرتے ہیں۔ ہم
۷۵۹۲ $[a,b]$ کو برابر لمبائیوں کے n ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک ذیلی وقفے کی لمبائی $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ہو گی۔ ہم ہر ذیلی وقفے پر f کی قیمت



شکل ۵.۳۷: کچھ رقبہ x محور سے اوپر اور کچھ اس سے نیچے پایا جاتا ہے (مثال ۵.۴۰)۔

نقطہ c_k پر حاصل کرتے ہیں (شکل ۵.۳۸)۔ ان n نمونوں کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
\frac{f(c_1)+f(c_2)+\cdots+f(c_n)}{n} &= \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f(c_k) && \text{مجموعہ کا سگمارو پ}\\
&= \frac{\Delta x}{b-a}\cdot\sum_{k=1}^{n} f(c_k) && \Delta x = \frac{b-a}{n}\\
&= \frac{1}{b-a}\cdot\underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x}_{[a,b]\text{ پر } f \text{ کا ریمان مجموعہ}}
\end{aligned}$$

یوں نمونی قیمتوں کی اوسط قیمت ہر صورت $[a,b]$ پر f کا ریمان مجموعہ ضرب $\frac{1}{b-1}$ ہو گی۔ ہم جیسے جیسے نمونے کی جسامت (تعداد) بڑھاتے جائیں اور خانہ بندی کے معیار کو صفر کے قریب تر کریں، اوسط قیمت لازماً $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کے قریب تر پہنچے گی۔ اس نتیجہ سے ہمیں درج ذیل تعریف ملتی ہے۔

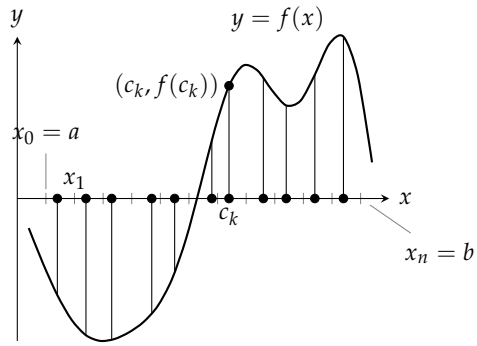
تعریف: اگر $[a,b]$ پر f قابل تکمل تفاعل ہو تب $[a,b]$ پر f کی **اوسط قیمت**[۳۱] درج ذیل ہو گی۔

$$f_{\text{اوسط}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

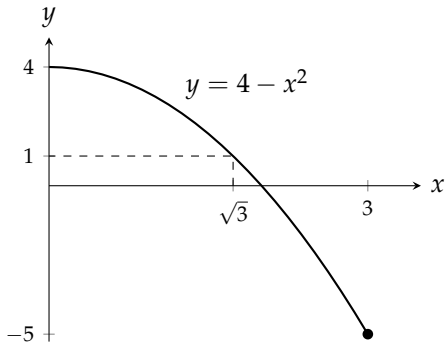
□

مثال ۵.۴۱: وقفہ $[0,3]$ پر $f(x) = 4 - x^2$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ کیا دیے گئے وقفے میں کسی نقطے پر f کی قیمت اس اوسط جتنی ہو گی؟

[۳۱] average(mean)value



شکل ۵.۳۸: وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل کی نمونی قیمتیں۔



شکل ۵.۳۹: وقفہ $[0, 3]$ پر تفاعل $f = 4 - x^2$ کی اوسط قیمت 1 کو تفاعل $x = \sqrt{3}$ پر اختیار کرتا ہے (مثال ۵.۴۱)۔

۷۶۰۱ **حل**

۷۶۰۲

$$
\begin{aligned}
f_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3-0}\int_0^3 (4-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\Big(\int_0^3 4\,\mathrm{d}x - \int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x\Big) \\
&= \frac{1}{3}\Big(4(3-0) - \frac{(3)^3}{3}\Big) = \frac{1}{3}(12-9) = 1
\end{aligned}
$$

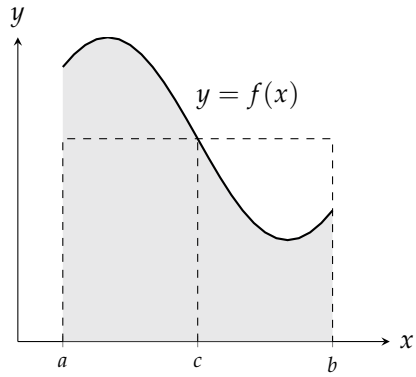
۷۶۰۳ وقفہ $[0, 3]$ پر f کی اوسط قیمت 1 ہے۔ تفاعل کی قیمت یہی تب ہو گی جب $4 - x^2 = 1$ ہو گا جس سے $x = \mp\sqrt{3}$ ملتے ہیں۔ چونکہ ان
۷۶۰۴ دو نقطوں میں سے صرف $x = \sqrt{3}$ وقفہ $[0, 3]$ پر پایا جاتا ہے لہٰذا دیے گئے وقفے میں $x = \sqrt{3}$ پر f کی قیمت اوسط قیمت 1 کے برابر ہو گی
۷۶۰۵ (شکل ۵.۳۹)۔ □

۷۶۰۶ **مسئلہ اوسط قیمت برائے قطعی تکملات**

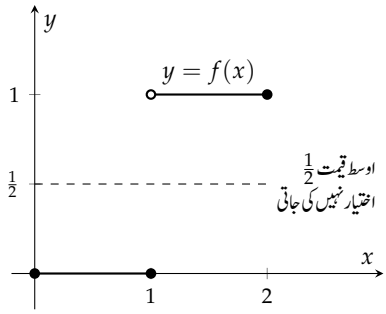
۷۶۰۷ بند وقفہ پر استمراری تفاعل کی قیمت، بند وقفہ پر کم از کم ایک مرتبہ، تفاعل کی اوسط قیمت کے برابر ہو گی۔ اس فقرے کو قطعی تکملات کا **مسئلہ اوسط قیمت**[۳۲]
۷۶۰۸ کہتے ہیں۔

۷۶۰۹ مسئلہ ۵.۲: **مسئلہ اوسط قیمت برائے قطعی تکملات**

[۳۲] MeanValueTheorem



شکل ۵.۴۰: وقفہ $[a, b]$ کے کسی نقطہ c پر $f(c) \cdot (b-1) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ ہوگا۔



شکل ۵.۴۱: غیر استمراری تفاعل ضروری نہیں کہ اوسط قیمت اختیار کرے۔

اگر $[a, b]$ پر f قابل تکمل ہو تب $[a, b]$ میں کسی نقطہ c پر درج ذیل ہوگا (شکل ۵.۴۰)۔

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

ہم نے مثال ۵.۴۱ میں f کو حاصل اوسط قیمت کے برابر پُر کرتے ہوئے x کی وہ قیمت تلاش کی جہاں تفاعل اپنی اوسط قیمت اختیار کرتا ہے۔ البتہ اس سے یہ حقیقت ثابت نہیں ہوتی کہ ایسا نقطہ موجود ہونا لازمی ہے۔ اس سے صرف اتنا ثابت ہوتا ہے کہ مثال ۵.۴۱ میں ایسا نقطہ موجود تھا۔ مسئلہ ۵.۲ ثابت کرنے کی خاطر ہمیں زیادہ عمومی دلیل درکار ہوگی۔

ثبوت: **برائے مسئلہ ۵.۲**

اگر ہم قاعدہ 6 (اقل و اعظم عدم مساوات) میں دونوں اطراف کو $(b-a)$ سے تقسیم کریں تب درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$f_L \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq f_H$$

چونکہ f استمراری ہے لہٰذا استمراری تفاعل کے مسئلہ ۲.۹ کے تحت یہ تفاعل f_L اور f_H کے بیچ تمام قیمتیں اختیار کرے گا۔ اس طرح f ہر صورت وقفہ $[a, b]$ میں کسی نقطہ c پر $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ قیمت بھی اختیار کرے گا۔

□

تفاعل کا استمراری ہونا یہاں ضروری ہے۔ غیر استمراری تفاعل اپنی اوسط قیمت کے اوپر سے چھلانگ لگا کر گزر سکتا ہے (شکل ۵.۴۱)۔

ہم مسئلہ ۵.۲ سے مزید کیا جان سکتے ہیں؟ ایک مثال دیکھتے ہیں۔

۷۲۲ مثال ۵.۴۲: اگر $[a,b]$ پر f قابل تکمل ہو جہاں $a \neq b$ ہے اور اگر

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

۷۲۳ ہو تب $[a,b]$ میں کم از کم ایک مرتبہ $f(x) = 0$ ہو گا۔

۷۲۴ **حل**

۷۲۵ وقفہ $[a,b]$ پر f کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$f_{\text{اوسط}} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\cdot 0 = 0$$

۷۲۶ مسئلہ ۵.۲ کے تحت $[a,b]$ میں کسی نقطہ c پر f یہی اوسط قیمت اختیار کرے گا۔ □

۷۲۷ **سوالات**

۷۲۸ **معلوم خواص اور قیمتوں سے دیگر تکملات کی قیمتوں کا حصول**

۷۲۹ سوال ۵.۳۱۱: فرض کریں f اور g استمراری ہیں اور درج ذیل تکملات دیے گئے ہیں۔

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -4, \quad \int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = 6, \quad \int_1^5 g(x)\,\mathrm{d}x = 8$$

۷۳۰ صفحہ ۴۷۴ پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تلاش کریں۔

۷۳۱ ا. $\int_2^2 g(x)\,\mathrm{d}x$

۷۳۲ ب. $\int_5^1 g(x)\,\mathrm{d}x$

۷۳۳ ج. $\int_1^2 3f(x)\,\mathrm{d}x$

۷۳۴ د. $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$

۷۳۵ ھ. $\int_1^5 [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$

۷۳۶ و. $\int_1^5 [4f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$

۷۳۷ سوال ۵.۳۱۲: فرض کریں f اور f استمراری ہیں اور درج ذیل دیے گئے ہیں۔

$$\int_1^9 f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_7^9 f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int_7^9 h(x)\,\mathrm{d}x = 4$$

۷۳۸ صفحہ ۴۷۴ پر دیے گئے قواعد استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تلاش کریں۔

۷۳۹ ا. $\int_1^9 -2f(x)\,\mathrm{d}x$ ۷۴۱ ج. $\int_7^9 [2f(x) - 3h(x)]\,\mathrm{d}x$ ۷۴۳ ھ. $\int_1^7 f(x)\,\mathrm{d}x$

۷۴۰ ب. $\int_7^9 [f(x) + h(x)]\,\mathrm{d}x$ ۷۴۲ د. $\int_9^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ ۷۴۴ و. $\int_9^7 [h(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$

۷۴۵ سوال ۵.۳۱۳: فرض کریں $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 5$ دیا گیا ہے۔ درج ذیل تلاش کریں۔

۷۴۶ ا. $\int_1^2 f(u)\,\mathrm{d}u$ ۷۴۸ ج. $\int_2^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ ۷۴۹ د. $\int_1^2 [-f(x)]\,\mathrm{d}x$

۷۴۷ ب. $\int_1^2 \sqrt{3}f(z)\,\mathrm{d}z$

۷۵۰ سوال ۵.۳۱۴: فرض کریں $\int_{-3}^0 g(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}$ دیا گیا ہے۔ درج ذیل تلاش کریں۔

۷۵۱ ا. $\int_0^{-3} g(t)\,\mathrm{d}t$ ۷۵۲ ب. $\int_{-3}^0 g(u)\,\mathrm{d}u$ ۷۵۳ ج. $\int_{-3}^0 [-g(x)]\,\mathrm{d}x$ ۷۵۵ د. $\int_{-3}^0 \frac{g(r)}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}r$

۷۵۵ سوال ۵.۳۱۵: فرض کریں f استمراری ہے جبکہ $\int_0^3 f(z)\,\mathrm{d}z = 3$ اور $\int_0^4 f(z)\,\mathrm{d}z = 7$ دیے گئے ہیں۔ درج ذیل تلاش کریں۔

۷۵۶ ا. $\int_3^4 f(z)\,\mathrm{d}z$ ۷۵۷ ب. $\int_4^3 f(t)\,\mathrm{d}t$

۷۵۸ سوال ۵.۳۱۶: فرض کریں h استمراری ہے جبکہ $\int_{-1}^1 h(r)\,\mathrm{d}r = 0$ اور $\int_{-1}^3 h(r)\,\mathrm{d}r = 6$ دیے گئے ہیں۔ درج ذیل تلاش
۷۵۹ کریں۔

۷۶۰ ا. $\int_1^3 h(r)\,\mathrm{d}r$ ۷۶۱ ب. $-\int_3^1 h(u)\,\mathrm{d}u$

۷۶۲ سوال ۵.۳۱۷ تا سوال ۵.۳۲۸ میں دیے گئے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

۷۶۳ سوال ۵.۳۱۷: $\int_3^1 7\,\mathrm{d}x$
۷۶۴

۷۶۵ سوال ۵.۳۱۸: $\int_0^{-2} \sqrt{2}\,\mathrm{d}x$

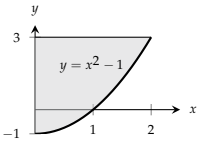
۷۶۶ سوال ۵.۳۱۹: $\int_0^2 5x\,\mathrm{d}x$
۷۶۷

۷۶۸ سوال ۵.۳۲۰: $\int_3^5 \frac{x}{8}\,\mathrm{d}x$

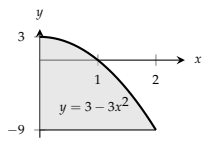
۷۶۹ سوال ۵.۳۲۱: $\int_0^2 (2t - 3)\,\mathrm{d}t$
۷۷۰

۷۷۱ سوال ۵.۳۲۲: $\int_0^{\sqrt{2}} (t - \sqrt{2})\,\mathrm{d}t$

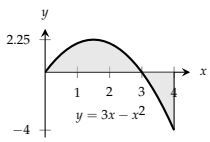
۷۷۲ سوال ۵.۳۲۳: $\int_2^1 (1 + \frac{z}{2})\,\mathrm{d}z$
۷۷۳



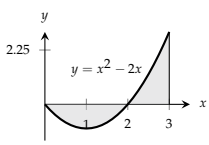
شکل ۵.۴۲: رقبہ سوال ۵.۳۲۹



شکل ۵.۴۳: رقبہ سوال ۵.۳۳۰



شکل ۵.۴۴: رقبہ سوال ۵.۳۳۱



شکل ۵.۴۵: رقبہ سوال ۵.۳۳۲

سوال ۵.۳۲۴: $\int_3^0 (2z - 3)\,\mathrm{d}z$

سوال ۵.۳۲۵: $\int_1^2 3u^2\,\mathrm{d}u$

سوال ۵.۳۲۶: $\int_{1/2}^1 24u^2\,\mathrm{d}u$

سوال ۵.۳۲۷: $\int_0^2 (3x^2 + x - 5)\,\mathrm{d}x$

سوال ۵.۳۲۸: $\int_1^0 (3x^2 + x - 5)\,\mathrm{d}x$

رقبے

سوال ۵.۳۲۹ تا سوال ۵.۳۳۲ میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۵.۳۲۹: $x = 0$ تا $x = 2$ کے مابین منحنی $y = x^2 - 1$ اور محور y کے بیچ رقبہ (شکل ۵.۴۲)۔

سوال ۵.۳۳۰: رقبہ شکل ۵.۴۳ میں دکھایا گیا ہے۔

سوال ۵.۳۳۱: رقبہ شکل ۵.۴۴ میں دکھایا گیا ہے۔

سوال ۵.۳۳۲: رقبہ شکل ۵.۴۵ میں دکھایا گیا ہے۔

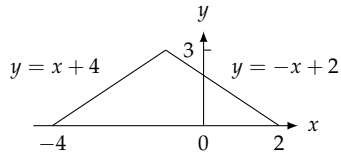
سوال ۵.۳۳۳ تا سوال ۵.۳۳۶ میں دیے گئے وقفہ پر تفاعل ترسیم کریں۔ اس کے بعد (ا) دیے وقفے پر تفاعل تکمل کریں، اور (ب) تفاعل اور محور x کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۵.۳۳۳: $y = x^2 - 6x + 8, \quad [0, 3]$

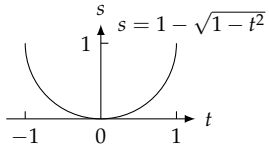
سوال ۵.۳۳۴: $y = -x^2 + 5x - 4, \quad [0, 2]$

سوال ۵.۳۳۵: $y = 2x - x^2, \quad [0, 3]$

سوال ۵.۳۳۶: $y = x^2 - 4x, \quad [0, 5]$



شکل ۵.۴۶



شکل ۵.۴۷

اوسط قیمت

سوال ۵.۳۳۷ تا سوال ۵.۳۴۴ میں دیے گئے وقفے پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے وقفے پر تفاعل کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ وقفہ میں کس نقطہ یا نقطوں پر تفاعل کی قیمت اس کی اوسط قیمت کے برابر ہو گی؟

سوال ۵.۳۳۷: $f(x) = x^2 - 1, \quad [0, \sqrt{3}]$

سوال ۵.۳۳۸: $f(x) = -\frac{x^2}{2}, \quad [0, 3]$

سوال ۵.۳۳۹: $f(x) = -3x^2 - 1, \quad [0, 1]$

سوال ۵.۳۴۰: $f(x) = 3x^2 - 3, \quad [0, 1]$

سوال ۵.۳۴۱: $f(t) = (t-1)^2, \quad [0, 3]$

سوال ۵.۳۴۲: $f(t) = t^2 - t, \quad [-2, 1]$

سوال ۵.۳۴۳: (ا) $[0, 3]$، (ب) $[1, 3]$، (ج) $[-1, 3]$، $g(x) = |x| - 1$

سوال ۵.۳۴۴: (ا) $[-1, 0]$، (ب) $[0, 1]$، (ج) $[-1, 1]$، $h(x) = -|x|$،

سوال ۵.۳۴۵ تا سوال ۵.۳۴۸ میں دیے گئے وقفہ پر تفاعل کی اوسط قیمت (بغیر تکمل) تلاش کریں۔

سوال ۵.۳۴۵:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & -4 \le x \le -1 \\ -x + 2, & -1 < x \le 2 \end{cases} \qquad [-4, 2]$$

شکل ۵.۴۶

سوال ۵.۳۴۶: وقفہ $[-1, 1]$ پر تفاعل $f(t) = 1 - \sqrt{1 - t^2}$ جس کو شکل ۵.۴۷ میں دکھایا گیا ہے۔

سوال ۵.۳۴۷: وقفہ $[0, 2\pi]$ پر تفاعل $f(t) = \sin t$ دیا گیا ہے۔

سوال ۵.۳۴۸: وقفہ $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ پر تفاعل $f(\theta) = \tan\theta$ دیا گیا ہے۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۵.۳۴۹: اقل و اعظم عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کی بالائی اور زیریں حد تلاش کریں۔ $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال ۵.۳۵۰: اقل و اعظم عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کی بالائی اور زیریں حد تلاش کریں۔

$$\int_0^{0.5} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_{0.5}^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

انہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی قیمت کا بہتر اندازہ حاصل کریں۔

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

سوال ۵.۳۵۱: دکھائیں کہ $\int_0^1 \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ کی قیمت کسی صورت 2 نہیں ہو سکتی۔

سوال ۵.۳۵۲: دکھائیں کہ $\int_0^1 \sqrt{x+8}\,\mathrm{d}x$ کی قیمت $2\sqrt{2}$ اور 3 کے بیچ پائی جاتی ہے۔

سوال ۵.۳۵۳: فرض کریں f استراری ہے اور $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 4$ دیا گیا ہے۔ دکھائیں کہ $[1,2]$ پر کم از کم ایک مرتبہ $f(x) = 4$ ہو گا۔

سوال ۵.۳۵۴: فرض کریں $[a,b]$ پر f اور g استراری ہیں جہاں $a \neq b$ ہے۔ مزید $\int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x = 0$ دیا گیا ہے۔ دکھائیں کہ $[a,b]$ میں کم از کم ایک مرتبہ $f(x) = g(x)$ ہو گا۔

سوال ۵.۳۵۵: غیر منفی تفاعل کا تکمل

اقل و اعظم عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں جہاں f قابل تکمل ہے۔

$$f(x) \geq 0, \quad [a,b] \quad \overset{\text{سے مراد}}{\Longrightarrow} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

سوال ۵.۳۵۶: غیر مثبت تفاعل کا تکمل

درج ذیل دکھائیں جہاں f قابل تکمل ہے۔

$$f(x) \leq 0, \quad [a,b] \quad \overset{\text{سے مراد}}{\Longrightarrow} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq 0$$

سوال ۵.۳۵۷: عدم مساوات $\sin x \leq x$ ہر $x \geq 0$ کے لیے درست ہے۔ تکمل $\int_0^1 \sin x\,\mathrm{d}x$ کی قیمت کی بالائی حد تلاش کریں۔

سوال ۵.۳۵۸: وقفہ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ پر عدم مساوات $\sec x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$ درست ہے۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے $\int_0^1 \sec x \, \mathrm{d}x$ کی قیمت کی زیریں حد تلاش کریں۔

سوال ۵.۳۵۹: اگر $[a, b]$ پر قابل تکمل f کی عمومی قیمت اوسطf ہو تب $[a, b]$ پر عدد اوسطf اور f کے تکمل کی قیمتیں ایک سی ہوں گی۔ کیا ایسا ہوتا ہے؟ کیا درج ذیل درست ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int_a^b f_{\text{اوسط}} \, \mathrm{d}x = \int_a^b f \, \mathrm{d}x$$

سوال ۵.۳۶۰: کیا اچھا ہوتا کہ وقفہ $[a, b]$ پر قابل تکمل تفاعل کی اوسط قیمت درج ذیل قواعد پر پورا اترتی۔

ا. $(f + g)_{\text{اوسط}} = f_{\text{اوسط}} + g_{\text{اوسط}}$

ب. $(kf)_{\text{اوسط}} = k(f_{\text{اوسط}})$

ج. $f(x) \leq g(x)$ اگر $f_{\text{اوسط}} \leq g_{\text{اوسط}}$

سوال ۵.۳۶۱: اگر $150\,\mathrm{km}$ فاصلہ طے کرتے ہوئے آپ کی اوسط رفتار $30\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ اور واپسی اسی راہ کو طے کرتے ہوئے آپ کی اوسط رفتار $50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہو تب دونوں اطراف کو ملا کر آپ کی اوسط رفتار کتنی ہو گی؟

سوال ۵.۳۶۲: ایک ڈیم سے $10\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ کی شرح سے $1000\,\mathrm{m^3}$ پانی خارج کیا گیا اور اس کے بعد $20\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ کی شرح سے مزید $1000\,\mathrm{m^3}$ پانی خارج کیا گیا۔ پانی خارج کرنے کی اوسط شرح دریافت کریں۔

۵.۷ بنیادی مسئلہ

اُس حصہ میں **بنیادی مسئلہ تکملی احصاء**[۳۳] پیش کیا جائے گا جو تکمل اور تفرق کا تعلق پیش کرتا ہے۔ اس مسئلہ نے ریاضیات میں ترقی کی وہ راہ ہموار کی جس نے اگلی دو صدیوں کا سائنسی انقلاب برپا کیا۔ انسانی تاریخ میں یہ مسئلہ حساب کی اہم ترین دریافت تصور کیا جاتا ہے۔ لبنٹز اور نیوٹن نے علیحدہ علیحدہ اس مسئلہ کو دریافت کیا۔

بنیادی مسئلہ، جزو اول

قابل تکمل تفاعل $f(t)$ کا مقررہ عدد a سے عدد x تک تکمل از خود ایک تفاعل F ہو گا جس کی x پر قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$F(x) = \int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t \tag{۱}$$

[۳۳] TheFundamentalTheoremofIntegralCalculus

مثال کے طور پر اگر f غیر منفی ہو اور a کی دائیں جانب x پایا جاتا ہو تب a تا x ترسیم کے نیچے رقبہ $F(x)$ ہو گا۔ تکمل کی بالائی حد x ہے اور F کسی بھی حقیقی متغیر کے حقیقی قیمت تفاعل کی طرح ایک تفاعل ہے۔ یوں متغیر x کی ہر قیمت کے لیے $F(x)$ ایک مخصوص قیمت دیگا جو a تا x تفاعل f کا تکمل ہو گا۔

نئے تفاعل متعارف کرنے کی ایک اہم ترکیب مساوات ادیتی ہے جو تفرقی مساوات کا حل بھی دیتی ہے (جس پر کچھ دیر میں غور کیا جائے گا)۔ مساوات ا کا یہاں ذکر کرنا اس لیے ضروری ہے کہ یہ تکمل اور تفرق کے بیچ تعلق بیان کرتی ہے۔ یوں اگر f کوئی بھی استمراری تفاعل ہو تب F متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا جس کا تفرق f ہو گا۔ اس طرح ہر x پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

یہ تصور اتنا اہم ہے کہ یہ احصاء کے بنیادی مسئلے کا پہلا جزو ہے۔

مسئلہ ۵.۳: **بنیادی مسئلہ احصاء، جزو اول**

اگر $[a,b]$ پر f استمراری ہو تب $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ کے ہر نقطہ پر $[a,b]$ کا درج ذیل تفرق پایا جائے گا۔

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x), \quad a \le x \le b \tag{۲}$$

یہ نتیجہ خوبصورت، طاقتور، اور حیران کن ہے اور عین ممکن ہے کہ مساوات ۲ پوری ریاضیات میں اہم ترین مساوات ہو۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ ہر استمراری تفاعل f کے لیے تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f$ کا حل موجود ہے۔ یہ کہتی ہے کہ ہر استمراری تفاعل f کسی دوسرے تفاعل، یعنی $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$، کا تفرق ہے۔ یہ کہتی ہے کہ ہر استمراری تفاعل کا ضد تفرق پایا جاتا ہے، اور یہ کہتی ہے کہ تکمل اور تفرق کے عمل ایک دوسرے کے ضد ہیں۔

ثبوت: **برائے مسئلہ ۳۔۵**

ہم تفرق کی تعریف کو تفاعل $F(x)$ پر لاگو کرتے ہوئے یہ مسئلہ ثابت کرتے ہیں۔ یوں ہم درج ذیل حاصل تقسیم

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \tag{۳}$$

لکھ کر دکھاتے ہیں کہ $h \to 0$ کرتے ہوئے اس کی حد $f(x)$ حاصل ہو گی۔

مساوات ۳ میں $F(x+h)$ اور $F(x)$ کے تکملی روپ پُر کرنے سے شمار کنندہ درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے۔

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

صفحہ ۴۷ پر جمع پذیری کا قاعدہ برائے تکملات، دائیں ہاتھ کا درج ذیل سادہ روپ دیتا ہے

$$\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

لہٰذا مساوات ۳ درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}[F(x+h)-F(x)]\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{۴}$$

مسئلہ اوسط قیمت برائے قطعی تکملات (مسئلہ ۵.۲) کے تحت مساوات ۴ میں دیے گئے آخری تعلق کی قیمت، وقفہ x تا $x+h$ پر f کی کسی ایک قیمت کے برابر ہو گی۔ یوں اس وقفہ میں کسی عدد c پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t = f(c) \tag{۵}$$

یوں $h \to 0$ کرتے ہوئے $\frac{1}{h}$ ضرب تکمل $\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ کی قیمت جاننے کی لیے ہم $h \to 0$ کرتے ہوئے $f(c)$ کی قیمت پر نظر رکھتے ہیں۔

جیسے جیسے $h \to 0$ ہوتا ہے ویسے ویسے وقفے کا سر $x+h$ اس کے سر x کے قریب سے قریب ہوتا جاتا ہے جس کی وجہ سے c بھی x کے قریب سے قریب تر ہوتا جاتا ہے۔ چونکہ x پر f استمراری ہے لہٰذا $f(c)$ کی قیمت $f(x)$ کے قریب تر پہنچتی ہے۔ (ذیل دیکھیں۔)

$$\lim_{h\to 0} f(c) = f(x) \tag{۶}$$

دوبارہ شروع سے بات کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} && \text{تفرق کی تعریف}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t && \text{مساوات ۴}\\ &= \lim_{h\to 0} f(c) && \text{مساوات ۵}\\ &= f(x) && \text{مساوات ۶}\end{aligned}$$

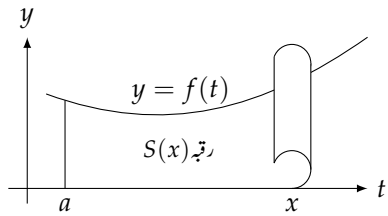
یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

اگر f کی قیمتیں مثبت ہوں تب درج ذیل مساوات

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x)$$

کا ایک خوبصورت جیومیٹریائی معنی اخذ کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ ایسی صورت میں a سے x تک تفاعل f کا تکمل، a سے x تک محور x اور f کی ترسیم کے بیچ رقبہ ہو گا۔ فرض کریں آپ اس رقبہ پر بائیں سے دائیں رخ چلتے ہوئے قالین بچھاتے ہیں جس کی متغیر چوڑائی $f(t)$ ہو۔ جب قالین نقطہ x سے گزرتا ہے اس لمحے پر زمین ڈھانپنے کی شرح $f(x)$ ہو گی (شکل ۵.۴۸)۔



شکل ۵.۴۸: نقطہ x پر زمین کو قالین شرح $\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} = f(x)$ سے ڈھانپتا ہے۔

۷۷۹۱ مثال ۵.۴۳:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\pi}^{x} \cos t\,\mathrm{d}t = \cos x \qquad \text{مساوات ۲ میں } f(t) = \cos t$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{0}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{مساوات ۲ میں } f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$

۷۷۹۲ □

۷۷۹۳ مثال ۵.۴۴: اگر $y = \int_1^{x^2} \cos t\,\mathrm{d}t$ ہو تب $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کیا ہو گا؟

۷۷۹۴ **حل**

۷۷۹۵ دھیان رہے کہ تکمل کی بالائی حد x^2 ہے نا کہ x لہٰذا $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرتے ہوئے y کو

$$y = \int_1^{u} \cos t\,\mathrm{d}t \quad \text{اور} \quad u = x^2$$

۷۷۹۶ کا مرکب تصور کر کے زنجیری قاعدہ استعمال کرنا ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && \text{زنجیری قاعدہ}\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_1^{u} \cos t\,\mathrm{d}t \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && y \text{ کا کلیہ پُر کیا گیا ہے}\\
&= \cos u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && \text{مساوات ۲ میں } f(t) = \cos t \text{ ہے}\\
&= \cos x^2 \cdot 2x && u = x^2\\
&= 2x\cos x^2 && \text{جواب کی عمومی صورت}
\end{aligned}$$

۷۷۹۷ □

۷۷۹۸ مثال ۵.۴۵: درج ذیل ابتدائی قیمت کے مسئلے کو تکمل کی صورت میں لکھیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan x \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$y(1) = 5 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

۷۷۹۹ **حل**

۷۸۰۰ درج ذیل تفاعل

$$F(x) = \int_1^x \tan t \,\mathrm{d}t$$

۷۸۰۱ $\tan t$ کا ضد تفرق ہے۔ یوں مساوات کا عمومی حل

$$y = \int_1^x \tan u \,\mathrm{d}t + C$$

۷۸۰۲ ہو گا جہاں مستقل C کی قیمت ابتدائی معلومات سے اخذ ہو گی۔

$$\begin{aligned} 5 &= \int_1^1 \tan t \,\mathrm{d}t + C \quad y(1) = 5 \\ 5 &= 0 + C \\ C &= 5 \end{aligned} \tag{۷}$$

۷۸۰۳ ابتدائی قیمت کے مسئلے کا حل درج ذیل ہو گا۔

$$y = \int_1^x \tan t \,\mathrm{d}t + 5$$

۷۸۰۴ تفاعل $F(x)$ لکھتے ہوئے ہم نے تکمل کی زیریں حد 1 کیوں منتخب کی؟ درحقیقت ہم کسی بھی عدد کو زیریں حد منتخب کر سکتے ہیں لیکن ابتدائی معلومات میں
۷۸۰۵ دی گئی x کی ابتدائی قیمت $x = 1$ بہترین انتخاب ہے جس کو استعمال کر کے ابتدائی شرط لاگو کرتے ہوئے تکمل کی قیمت صفر حاصل ہوتی ہے (جیسے
۷۸۰۶ مساوات ۷ میں ہوا) اور C خود بخود y کی ابتدائی قیمت کے برابر حاصل ہو گی۔ □

۷۸۰۷ قطعی تکمل کی قیمت کا حصول

۷۸۰۸ ہم اب احصاء کے بنیادی مسئلے کے جزو دوم کی بات کرتے ہیں جو قطعی تکمل کی قیمت حاصل کرنے کے بارے میں ہے۔

۷۸۰۹ مسئلہ ۵.۴: **بنیادی مسئلہ احصاء، جزو دوم**

۷۸۱۰ اگر $[a, b]$ کے ہر نقطہ پر f استمراری ہو اور $[a, b]$ پر f کا ضد تفرق F ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{۸}$$

درج بالا مسئلہ کہتا ہے کہ a تا b استمراری تفاعل f کے تکمل کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر ہمیں f کا ضد تفرق F چاہیے جس سے قطعی تکمل کی قیمت $F(b) - F(a)$ حاصل ہو گی۔ ضد تفرق کی موجودگی کو بنیادی مسئلے کا جزو اول یقینی بناتا ہے۔

ثبوت: **برائے مسئلہ ۴۔۵**

ہم جانتے ہیں ایک سے تفرق رکھنے والے تفاعل میں صرف مستقل کا فرق ممکن ہے۔ ہم درج ذیل ایسا ایک تفاعل جانتے ہیں جس کا تفرق f ہے۔

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

یوں اگر F ایسا دوسرا تفاعل ہو جس کا تفرق f ہو تب پورے $[a, b]$ پر درج ذیل ہو گا جہاں C مستقل ہے۔

$$F(x) = G(x) + C \tag{۹}$$

آئیں مساوات ۹ سے $F(b) - F(a)$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\
&= G(b) - G(a) \\
&= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - 0 = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

یوں مساوات ۸ حاصل ہوتا ہے اور ساتھ ہی ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال ۵.۴۶:

ا. $\int\limits_0^{\pi} \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x|_0^{\pi} = \sin\pi - \sin 0 = 0 - 0 = 0$

ب. $\int\limits_{-\pi/4}^{0} \sec x \tan x\,\mathrm{d}x = \sec x|_{-\pi/4}^{0} = \sec 0 - \sec(-\frac{\pi}{4}) = 1 - \sqrt{2}$

ج.

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2}\right)\mathrm{d}x &= \left[x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{x}\right]_1^4 \\
&= \left[(4)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{4}\right] - \left[(1)^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{1}\right] \\
&= [8 + 1] - [5] = 4
\end{aligned}$$

۷۸۲۳ □

۷۸۲۴ ہم نے حصہ ۵.۵ میں x اور x^2 کے تکمل کے کلیات دریافت کیے جن کی وضاحت مسئلہ ۵.۴ کرتا ہے۔ ہم اب دیکھ سکتے ہیں کہ a اور b کی علامتوں پر کسی
۷۸۲۵ پابندی کے بغیر درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b x\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \qquad \text{چونکہ } x \text{ کا ضد تفرق } \frac{x^2}{2} \text{ ہے}$$

$$\int_a^b x^2\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3} \qquad \text{چونکہ } x^2 \text{ کا ضد تفرق } \frac{x^3}{3} \text{ ہے}$$

۷۸۲۶ مثال ۵.۴۷: تفاعل $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ کی ترسیم اور محور x کے بیچ $x = -1$ تا $x = 2$ رقبہ تلاش کریں۔

۷۸۲۷ **حل**

۷۸۲۸ پہلے f کے صفر تلاش کرتے ہیں۔ چونکہ f درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)$$

۷۸۲۹ لہٰذا اس کے صفر $x = 0$ ، $x = -1$ ، اور $x = 2$ ہوں گے جو $[-1,2]$ کو دو خانوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل ۵.۴۹)۔ خانہ
۷۸۳۰ $[-1,0]$ میں $f \geq 0$ اور خانہ $[0,2]$ میں $f \leq 0$ ہے۔ ہم f کا تکمل دونوں ذیلی وقفوں پر علیحدہ علیحدہ حاصل کر کے ان کی مطلق قیمتوں
۷۸۳۱ کو جمع کرتے ہیں۔

$$\int_{-1}^0 (x^3 - x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^0 \qquad \text{ذیلی وقفہ } [-1,0] \text{ پر تکمل}$$

$$= 0 - \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right] = \frac{5}{12}$$

$$\int_0^2 (x^3 - x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 \qquad \text{ذیلی وقفہ } [0,2] \text{ پر تکمل}$$

$$= \left[4 - \frac{8}{3} - 4\right] - 0 = -\frac{8}{3}$$

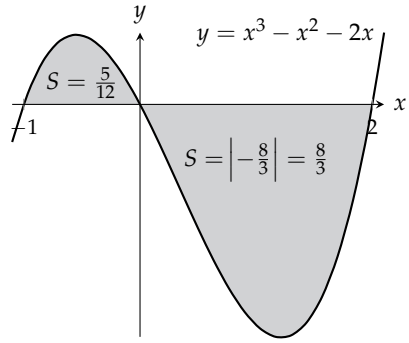
$$\text{کل رقبہ} = \frac{5}{12} + \left|-\frac{8}{3}\right| = \frac{37}{12}$$

۷۸۳۲ □

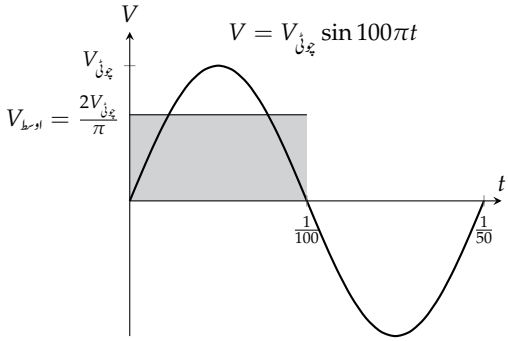
۷۸۳۳ مثال ۵.۴۸: گھریلو برق

۷۸۳۴ گھریلو صارفین کو بدلتا رو برقی دباو فراہم کیا جاتا ہے جس کی نمونہ کشی درج ذیل سائن تفاعل کرتا ہے

$$V = V_{\text{چوٹی}} \sin 100\pi t$$



شکل ۵.۴۹: تفاعل $y = x^3 - x^2 - 2x$ اور محور x کے بیچ رقبہ (مثال ۵.۴۷)۔



شکل ۵.۵۰: گھریلو برقی دباؤ کی ترسیم۔ نصف چکر کی اوسط $\frac{2V_{\text{چوٹی}}}{\pi}$ جبکہ مکمل چکر کی اوسط صفر ہے۔

۷۸۳۵ جہاں V اور t کی اکائیاں بالترتیب وولٹ اور سیکنڈ ہیں۔ اس تفاعل کا تعدد 50 Hz یعنی پچاس چکر فی سیکنڈ ہے۔ مثبت مستقل $V_{\text{چوٹی}}$ کو **دباؤ کی چوٹی**[۳۴]

۷۸۳۶ کہتے ہیں۔

۷۸۳۷ نصف چکر ($\frac{1}{100}$ دورانیہ) پر V کی اوسط قیمت حاصل کرتے ہیں (شکل ۵.۵۰)۔

$$
\begin{aligned}
V_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{\left(\frac{1}{100}\right) - 0} \int_0^{1/100} V_{\text{چوٹی}} \sin 100\pi t \, \mathrm{d}t \\
&= 100 V_{\text{چوٹی}} \left[-\frac{1}{100\pi} \cos 100\pi t \right]_0^{1/100} \\
&= \frac{V_{\text{چوٹی}}}{\pi} \left[-\cos \pi + \cos 0 \right] \\
&= \frac{2V_{\text{چوٹی}}}{\pi}
\end{aligned}
$$

۷۸۳۸ □

۷۸۳۹ مکمل چکر پر گھریلو برقی دباو کی اوسط صفر ہے جو شکل ۵.۵۰ کو دیکھ کر ظاہر ہے (سوال ۵.۴۲۶ بھی دیکھیں)۔ اوسط برقی دباو پیما گھریلو برقی دباو کو صفر ناپے گا۔

۷۸۴۰ برقی دباو کی پیمائش موثر طریقے سے کرنے کی خاطر ہم ایسا **دباو پیما**[۳۵] استعمال کرتے ہیں جو برقی دباؤ کے مربع کی اوسط کے جذر ($V_{\text{موثر}}$) کی پیمائش کرتا ہو۔

$$V_{\text{موثر}} = \sqrt{(V^2)_{\text{اوسط}}}$$

---

[۳۴] peakvoltage
[۳۵] voltmeter

۷۸۴۱ چونکہ $V^2 = (V_{\text{چوٹی}})^2 \sin^2 100\pi t$ کی ایک چکر پر اوسط قیمت درج ذیل ہے

$$(V^2)_{\text{اوسط}} = \frac{1}{(1/50)-0}\int_0^{1/50} (V_{\text{چوٹی}})^2 \sin^2 100\pi t \,\mathrm{d}t = \frac{(V_{\text{چوٹی}})^2}{2} \tag{۱۰}$$

۷۸۴۲ لہٰذا موثر برقی دباو درج ذیل ہو گی (سوال ۵.۴۲۶-ج)۔

$$V_{\text{موثر}} = \sqrt{\frac{(V_{\text{چوٹی}})^2}{2}} = \frac{V_{\text{چوٹی}}}{\sqrt{2}} \tag{۱۱}$$

۷۸۴۳ گھریلو برقی دباؤ اور برقی رو کی قیمتوں کا ذکر کرتے ہوئے ان کی موثر قیمتیں بتائی جاتی ہیں۔ یوں 230 وولٹ بدلتا برقی دباو سے مراد برقی دباو کی موثر قیمت ہے
۷۸۴۴ جس کی چوٹی درج ذیل ہو گی جو موثر قیمت سے کافی زیادہ ہے۔

$$V_{\text{چوٹی}} = \sqrt{2}V_{\text{موثر}} = \sqrt{2}\cdot 230 = 325 \quad \text{(وولٹ)}$$

۷۸۴۵ **سوالات**

۷۸۴۶ **تکمل کی قیمت کا حصول**

۷۸۴۷ سوال ۵.۳۶۳ تا سوال ۵.۳۸۸ میں تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

۷۸۴۸ سوال ۵.۳۶۳: $\int_{-2}^{0} (2x+5)\,\mathrm{d}x$
۷۸۴۹

۷۸۵۰ سوال ۵.۳۶۴: $\int_{-3}^{4} (5-\frac{x}{2})\,\mathrm{d}x$

۷۸۵۱ سوال ۵.۳۶۵: $\int_{0}^{4} (3x-\frac{x^3}{4})\,\mathrm{d}x$
۷۸۵۲

۷۸۵۳ سوال ۵.۳۶۶: $\int_{-2}^{2} (x^3-2x+3)\,\mathrm{d}x$

۷۸۵۴ سوال ۵.۳۶۷: $\int_{0}^{1} (x^2+\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$
۷۸۵۵

۷۸۵۶ سوال ۵.۳۶۸: $\int_{0}^{5} x^{3/2}\,\mathrm{d}x$

۷۸۵۷ سوال ۵.۳۶۹: $\int_{1}^{32} x^{-6/5}\,\mathrm{d}x$
۷۸۵۸

۷۸۵۹ سوال ۵.۳۷۰: $\int_{-2}^{-1} \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x$

۷۸۶۰ سوال ۵.۳۷۱: $\int_{0}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x$
۷۸۶۱

۷۸۶۲ سوال ۵.۳۷۲: $\int_0^{\pi} (1+\cos x)\,\mathrm{d}x$

۷۸۶۳ سوال ۵.۳۷۳: $\int_0^{\pi/3} 2\sec^2 x\,\mathrm{d}x$

۷۸۶۴

۷۸۶۵ سوال ۵.۳۷۴: $\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \csc^2 x\,\mathrm{d}x$

۷۸۶۶ سوال ۵.۳۷۵: $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc\theta\cot\theta\,\mathrm{d}\theta$

۷۸۶۷

۷۸۶۸ سوال ۵.۳۷۶: $\int_0^{\pi/3} 3\sec u\tan u\,\mathrm{d}u$

۷۸۶۹ سوال ۵.۳۷۷: $\int_{\pi/2}^{0} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t$

۷۸۷۰

۷۸۷۱ سوال ۵.۳۷۸: $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t$

۷۸۷۲ سوال ۵.۳۷۹: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (8y^2+\sin y)\,\mathrm{d}y$

۷۸۷۳

۷۸۷۴ سوال ۵.۳۸۰: $\int_{-\pi/3}^{-\pi/4} (4\sec^2 t+\frac{\pi}{t^2})\,\mathrm{d}t$

۷۸۷۵ سوال ۵.۳۸۱: $\int_1^{-1} (r+1)^2\,\mathrm{d}r$

۷۸۷۶

۷۸۷۷ سوال ۵.۳۸۲: $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (t+1)(t^2+4)\,\mathrm{d}t$

۷۸۷۸ سوال ۵.۳۸۳: $\int_{\sqrt{2}}^{1} (\frac{u^7}{2}-\frac{1}{u^5})\,\mathrm{d}u$

۷۸۷۹

۷۸۸۰ سوال ۵.۳۸۴: $\int_{1/2}^{1} (\frac{1}{v^3}-\frac{1}{v^4})\,\mathrm{d}v$

۷۸۸۱ سوال ۵.۳۸۵: $\int_1^{\sqrt{2}} \frac{s^2+\sqrt{s}}{s^2}\,\mathrm{d}s$

۷۸۸۲

۷۸۸۳ سوال ۵.۳۸۶: $\int_9^4 \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$

۷۸۸۴ سوال ۵.۳۸۷: $\int_{-4}^{4} |x|\,\mathrm{d}x$

۷۸۸۵

۷۸۸۶ سوال ۵.۳۸۸: $\int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\cos x+|\cos x|)\,\mathrm{d}x$

۷۸۸۷ **تکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ بدل**

۷۸۸۸ سوال ۵.۳۸۹ تا سوال ۵.۳۹۶ میں بدل کے استعمال سے ضد تفرق حاصل کرتے ہوئے بنیادی مسئلے کی مدد سے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۵.۳۸۹: $\int_0^1 (1-2x)^3\,\mathrm{d}x$

سوال ۵.۳۹۰: $\int_1^2 \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x$

سوال ۵.۳۹۱: $\int_0^1 t\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t$

سوال ۵.۳۹۲: $\int_{-1}^2 \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{2t^2+8}}$

سوال ۵.۳۹۳: $\int_0^\pi \sin^2(1+\frac{\theta}{2})\,\mathrm{d}\theta$

سوال ۵.۳۹۴: $\int_{3\pi/8}^{\pi/2} \sec^2(\pi-2\theta)\,\mathrm{d}\theta$

سوال ۵.۳۹۵: $\int_0^\pi \sin^2\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\,\mathrm{d}x$

سوال ۵.۳۹۶: $\int_{2\pi/3}^{\pi} \tan^3\frac{x}{4}\sec^2\frac{x}{4}\,\mathrm{d}x$

رقبہ

سوال ۵.۳۹۷ تا سوال ۵.۴۰۲ میں دیے وقفے پر تفاعل کی ترسیم اور محور x کے بیچ کل رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۵.۳۹۷: $y=-x^2-2x,\quad -3\le x\le 2$

سوال ۵.۳۹۸: $y=3x^2-3,\quad -2\le x\le 2$

سوال ۵.۳۹۹: $y=x^3-3x^2+2x,\quad 0\le x\le 2$

سوال ۵.۴۰۰: $y=x^3-4x,\quad -2\le x\le 2$

سوال ۵.۴۰۱: $y=x^{1/3},\quad -1\le x\le 8$

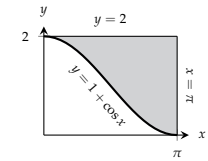
سوال ۵.۴۰۲: $y=x^{1/3}-x,\quad -1\le x\le 8$

سوال ۵.۴۰۳ تا سوال ۵.۴۰۶ میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

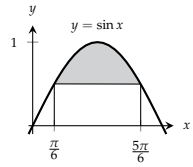
سوال ۵.۴۰۳: وقفہ $0\le x\le\pi$ پر تفاعل $y=1+\cos x$ اور $y=2$ کے بیچ رقبہ (شکل ۵.۵۱)۔

سوال ۵.۴۰۴: وقفہ $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5\pi}{6}$ پر $y=\sin x$ اور $y=\frac{1}{2}$ کے بیچ رقبہ (شکل ۵.۵۲)۔

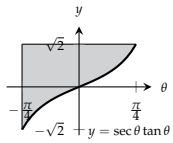
سوال ۵.۴۰۵: وقفہ $-\frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}$ پر $y=\sec\theta\tan\theta$ اور $y=\sqrt{2}$ کے بیچ رقبہ (شکل ۵.۵۳)۔



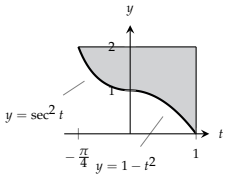
شکل ۵.۵۱



شکل ۵.۵۲



شکل ۵.۵۳



شکل ۵.۵۴

سوال ۵.۴۰۶: وقفہ $-\frac{\pi}{4} \le x \le 0$ پر $y = \sec^2 t$ اور وقفہ $0 \le x \le 1$ پر $y = 1 - t^2$ ہے۔ ان تفاعل اور $y = 2$ کے بیچ رقبہ (شکل ۵.۵۴)۔

تکمل کا تفرق

سوال ۵.۴۰۷ تا سوال ۵.۴۱۰ میں (ا) تکمل حل کر کے جواب کا تفرق لیں، (ب) تکمل حل کیے بغیر تفرق حاصل کریں۔

سوال ۵.۴۰۷: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^{\sqrt{x}} \cos t \, \mathrm{d}t$

سوال ۵.۴۰۸: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_1^{\sin x} 3t^2 \, \mathrm{d}t$

سوال ۵.۴۰۹: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_0^{t^4} \sqrt{u} \, \mathrm{d}u$

سوال ۵.۴۱۰: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \int_0^{\tan\theta} \sec^2 y \, \mathrm{d}y$

سوال ۵.۴۱۱ تا سوال ۵.۴۱۶ میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

سوال ۵.۴۱۱: $y = \int_0^x \sqrt{1+t^2} \, \mathrm{d}t$

سوال ۵.۴۱۲: $y = \int_1^x \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t, \quad x > 0$

سوال ۵.۴۱۳: $y = \int_0^{\sqrt{x}} \sin(t^2) \, \mathrm{d}t$

سوال ۵.۴۱۴: $y = \int_0^{x^2} \cos\sqrt{t} \, \mathrm{d}t$

سوال ۵.۴۱۵: $y = \int_0^{\sin x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad |x| < \frac{\pi}{2}$

سوال ۵.۴۱۶: $y = \int_0^{\tan x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$

ابتدائی قیمت مسائل

درج ذیل تفاعل سوال ۵.۴۱۷ تا سوال ۵.۴۲۰ میں کسی ایک ابتدائی قیمت مسئلہ کو حل کرتے ہیں۔ کون سا تفاعل کس مسئلے کو حل کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

ا. $y = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - 3$

ب. $y = \int_0^x \sec t\,\mathrm{d}t + 4$

ج. $y = \int_{-1}^x \sec t\,\mathrm{d}t + 4$

د. $y = \int_\pi^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - 3$

سوال ۵.۴۱۷: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}, \quad y(\pi) = -3$

سوال ۵.۴۱۸: $y' = \sec x, \quad y(-1) = 4$

سوال ۵.۴۱۹: $y' = \sec x, \quad y(0) = 4$

سوال ۵.۴۲۰: $y' = \frac{1}{x}, \quad y(1) = -3$

سوال ۵.۴۲۱ تا سوال ۵.۴۲۴ میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلوں کے حل کو تکمل کی صورت میں لکھیں۔

سوال ۵.۴۲۱: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sec x, \quad y(2) = 3$

سوال ۵.۴۲۲: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{1+x^2}, \quad y(1) = -2$

سوال ۵.۴۲۳: $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = f(t), \quad s(t_0) = s_0$

سوال ۵.۴۲۴: $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g(t), \quad v(t_0) = v_0$

عملی استعمال

سوال ۵.۴۲۵: قطع مکافی کے رقبے کا آرشمیدسی کلیہ

آرشمیدس (212-287 قبل مسیح) نے قطع مکافی کے نیچے رقبے کا کلیہ دریافت کیا جس کے تحت قد ضرب قاعدہ کا دو تہائی رقبہ ہو گا۔

ا. تکمل کی مدد سے درج محراب $y = 6 - x - x^2, -3 \le x \le 2$ کے نیچے رقبہ تلاش کریں۔

ب. محراب کا قد تلاش کریں۔

ج. دکھائیں کہ قاعدہ b ضرب قد h کا دو تہائی اس رقبہ کے برابر ہو گا۔

د. b اور h کو مثبت تصور کرتے ہوئے $-\frac{b}{2} \le x \le \frac{b}{2}$ پر قطع مکافی محراب $y = h - (\frac{4h}{b^2})x^2$ ترسیم کریں۔ احصاء کی مدد سے محراب اور محور x کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۵.۴۲۶: تسلسل (مثال ۵.۴۸)

ا. درج ذیل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے دکھائیں کہ ایک پورے چکر پر $V = V_{\text{چوٹی}} \sin 100\pi t$ کی اوسط قیمت صفر ہو گی۔

$$\frac{1}{(1/50) - 0} \int_0^{1/50} V_{\text{چوٹی}} \sin 100\pi t\,\mathrm{d}t$$

۷۹۶۸ ب. کئی ممالک میں گھریلو صارفین کو موثر $110V$ فراہم کی جاتی ہے۔ان کے ہاں برقی دباو کی چوٹی کتنی ہو گی؟

۷۹۶۹ ج. درج ذیل دکھائیں۔

$$\int_0^{1/50} (V_{\text{چوٹی}})^2 \sin^2 100\pi t \, \mathrm{d}t = \frac{(V_{\text{چوٹی}})^2}{100}$$

۷۹۷۰ سوال ۵.۴۲۷: حاشیہ لاگت سے لاگت

۷۹۷۱ اشتہار چھاپنے کی حاشیہ لاگت $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ہے جہاں x تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔(ا) اشتہار 2 تا 100 چھاپنے کی لاگت $c(100) - c(1)$

۷۹۷۲ تلاش کریں۔(ب) اشتہار 101 تا 400 چھاپنے کی لاگت تلاش کریں۔

۷۹۷۳

۷۹۷۴ سوال ۵.۴۲۸: حاشیہ آمدنی سے آمدنی

۷۹۷۵ فرض کریں ایک ادارہ مرغی کے انڈے مارنے والی مشین بناتی ہے جس کی پیداوار اور فروخت سے ادارے کو $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = 2 - \frac{2}{(x+1)^2}$ حاشیہ آمدنی

۷۹۷۶ حاصل ہوتی ہے جہاں r کی اکائی ہزار روپیہ اور x کی اکائی ہزار مشین ہے۔اگر انڈے مار مشینوں کی پیداوار $x = 3$ ہزار ہو تب کتنی آمدنی متوقع ہو گی؟

۷۹۷۷ یہ معلوم کرنے کی خاطر حاشیہ آمدنی کا تکمل $x = 0$ تا $x = 3$ لیں۔

۷۹۷۸ ترسیم سے حرکت کے بارے میں نتائج اخذ کرنا

۷۹۷۹ سوال ۵.۴۲۹: فرض کریں کہ f جسے شکل ۵.۵۵ میں دکھایا گیا ہے قابل تفرق تفاعل ہے اور محور پر حرکت کرتے ہوئے ذرے کا لمحہ t پر مقام $s = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$

۷۹۸۰ میٹر ہے۔شکل کی مدد سے درج ذیل کا جواب دیں اور اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۷۹۸۱ ا. لمحہ $t = 5$ پر ذرے کی رفتار کتنی ہے؟

۷۹۸۲ ب. لمحہ $t = 5$ پر ذرے کا اسراع مثبت ہے کہ منفی؟

۷۹۸۳ ج. لمحہ $t = 3$ پر ذرے کا مقام کیا ہے۔

۷۹۸۴ د. ابتدائی 9 سیکنڈوں میں s کی سب سے بڑی قیمت کیا ہے؟

۷۹۸۵ ھ. کس لمحے پر اسراع تقریباً صفر ہے؟

۷۹۸۶ و. ذرہ کب مبدا کی طرف اور کب مبدا سے دور حرکت کرتا ہے؟

۷۹۸۷ ز. لمحہ $t = 9$ پر مبدا کے کس جانب ذرہ پایا جائے گا؟

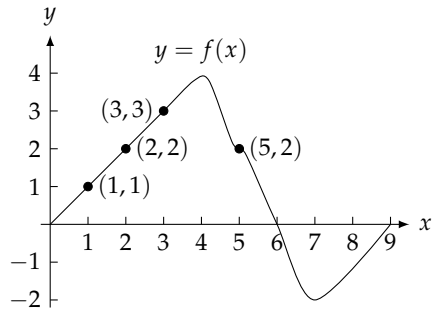
۷۹۸۸ سوال ۵.۴۳۰: فرض کریں g قابل تفرق تفاعل ہے (شکل ۵.۵۶) اور محور پر حرکت کرتے ہوئے ذرے کا لمحہ t پر مقام $s = \int_0^t g(x)\,\mathrm{d}x$

۷۹۸۹ میٹر ہے۔ترسیم سے درج ذیل کے جوابات دیں۔اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

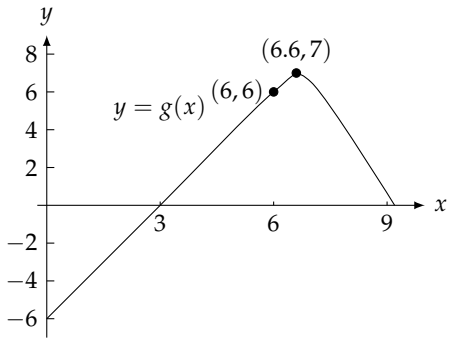
۷۹۹۰ ا. لمحہ $t = 3$ پر ذرے کی رفتار کتنی ہو گی؟

۷۹۹۱ ب. کیا لمحہ $t = 3$ پر ذرے کا اسراع مثبت ہے کہ منفی؟

۷۹۹۲ ج. لمحہ $t = 3$ پر ذرے کا مقام کیا ہے؟



شکل ۵.۵۵: تفاعل کی ترسیم برائے سوال ۵.۴۲۹



شکل ۵.۵۶: تفاعل کی ترسیم برائے سوال ۵.۴۳۰

د. ذرہ کس لمحے پر مبدا سے گزرتا ہے؟

ھ. اسراع کب صفر ہے؟

و. ذرہ کب مبدا سے دور اور کب مبدا کی جانب حرکت کرتا ہے؟

ز. لمحہ $t = 9$ پر ذرہ مبدا کے کس جانب ہو گا؟

حجم برائے حصہ ۵.۴

سوال ۵.۴۳۱: برائے حصہ ۵.۴ کی مثال ۵.۲۳

حصہ ۵.۴ کی مثال ۵.۲۳ میں جسم کے حجم کا تخمینی مجموعہ درحقیقت تکمل کا ریمان مجموعہ تھا۔ یہ کون سے تکمل کا ریمان مجموعہ تھا؟ اس تکمل کو حل کرتے ہوئے حجم تلاش کریں۔

سوال ۵.۴۳۲: برائے حصہ ۵.۴ کی مثال ۵.۲۴

حصہ ۵.۴ کی مثال ۵.۲۴ میں کرہ کے حجم کا تخمینی مجموعہ تکمل کا ریمان مجموعہ تھا۔ یہ کون سے تکمل کا ریمان مجموعہ تھا؟ اس تکمل کو حل کرتے ہوئے حجم تلاش کریں۔

سوال ۵.۴۳۳: برائے حصہ ۵.۴ کا سوال ۵.۲۰۱

حصہ ۵.۴ کے سوال ۵.۲۰۱ میں پانی کے حجم کا تخمینی مجموعہ تکمل کا ریمان مجموعہ تھا۔ یہ کون سے تکمل کا ریمان مجموعہ تھا؟ اس تکمل کو حل کرتے ہوئے حجم تلاش کریں۔

سوال ۵.۴۳۴: برائے حصہ ۵.۴ کا سوال ۵.۲۰۳

حصہ ۵.۴ کے سوال ۵.۲۰۳ میں راکٹ کی نوک کے حجم کا تخمینی مجموعہ تکمل کا ریمان مجموعہ تھا۔ یہ کون سے تکمل کا ریمان مجموعہ تھا؟ اس تکمل کو حل کرتے ہوئے حجم تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۵.۴۳۵: دکھائیں کہ مثبت k کی صورت میں محور x اور محراب $y = \sin kx$ کے بیچ رقبہ $\frac{2}{k}$ ہے۔

سوال ۵.۴۳۶: درج ذیل تلاش کریں۔

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3} \int_0^x \frac{t^2}{t^4+1}\,\mathrm{d}t$$

سوال ۵.۴۳۷: فرض کریں $\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t = x^2 - 2x + 1$ ہے تب $f(x)$ تلاش کریں۔

سوال ۵.۴۳۸: اگر $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x\cos \pi x$ ہو تب $f(4)$ کتنا ہوگا؟

سوال ۵.۴۳۹: نقطہ $x = 1$ پر $f(x) = 2 - \int_2^{x+1} \frac{9}{1+t}\,\mathrm{d}t$ کی خط بندی تلاش کریں۔

سوال ۵.۴۴۰: نقطہ $x = -1$ پر $g(x) = 3 + \int_1^{x^2} \sec(t-1)\,\mathrm{d}t$ کی خط بندی تلاش کریں۔

سوال ۵.۴۴۱: فرض کریں تمام x پر f کا تفرق مثبت ہے اور $f(1) = 0$ ہے۔ تفاعل $g(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ کے لیے درج ذیل میں سے کون سے فقرے درست ہوں گے؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

ا. g متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے۔

ب. g متغیر x کا استمراری تفرق تفاعل ہے۔

ج. g کی ترسیم کا $x = 1$ پر افقی مماس پایا جاتا ہے۔

د. $x = 1$ پر g کا مقامی اعظم پایا جاتا ہے۔

ھ. $x = -1$ پر g کا مقامی اقل پایا جاتا ہے۔

و. $x = 1$ پر g کی ترسیم پر نقطہ تصریف پایا جاتا ہے۔

ز. $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}$ کی ترسیم محور x کو $x = 1$ پر قطع کرتی ہے۔

سوال ۵.۴۴۲: فرض کریں تمام x پر f کا تفرق منفی ہے اور $f(1) = 0$ ہے۔ تفاعل $h(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ کے لیے درج ذیل میں سے کون سے فقرے درست ہوں گے؟

ا. h متغیر x کا دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل ہے۔

ب. h اور $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$ دونوں استمراری ہیں۔

ج. h کی ترسیم کا $x = 1$ پر افقی مماس پایا جاتا ہے۔

د. h کا مقامی اعظم $x = 1$ ہے۔

ھ. h کا مقامی اقل $x = 1$ ہے۔

و. h کی ترسیم کا نقطہ تصریف $x = 1$ پر ہے۔

ز. $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}$ کی ترسیم محور x کو $x = 1$ پر قطع کرتی ہے۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۵.۴۴۳: بنیادی مسئلہ

اگر f استراری ہو تب ہم توقع کرتے ہیں کہ $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t$ کی قیمت بنیادی مسئلے کے جزو اول کی طرح $f(x)$ ہو گی۔ مثال کے طور پر اگر $f(t) = \cos t$ ہو تب

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \tag{۱۲}$$

ہو گا۔ مساوات ۱۲ کا دایاں ہاتھ $\sin x$ کے تفرق کا تفریقی حاصل تقسیم ہے، جو ہم توقع کرتے ہیں کہ $h \to 0$ کی صورت میں $\cos x$ کے برابر ہو گا۔

تفاعل $\cos x$ کو $-\pi \le x \le 2\pi$ پر ترسیم کریں۔ اب باری باری $h = 2$ ، $h = 1$ ، $h = 0.5$ ، اور $h = 0.1$ لیتے ہوئے مساوات ۱۲ کے دائیں ہاتھ کو بھی x کے لحاظ سے (مختلف رنگوں میں) ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ $h \to 0$ کرنے سے یہ ترسیم کیسے $\cos x$ کی ترسیم پر بیٹھتی ہے۔

سوال ۵.۴۴۴: تفاعل $f(t) = 3t^2$ کے لیے سوال ۵.۴۴۳ دوبارہ حل کریں۔ درج ذیل کیا ہو گا؟

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} 3t^2\,\mathrm{d}t = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

تفاعل $f(x) = 3x^2$ کو وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر ترسیم کریں۔ اب باری باری $h = 1$ ، $h = 0.5$ ، $h = 0.2$ ، اور $h = 0.1$ لیتے ہوئے $\frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ کو بھی ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ $h \to 0$ کرنے سے یہ ترسیم کیسے $3x^2$ کی ترسیم پر بیٹھتی ہے۔

سوال ۵.۴۴۵ تا سوال ۵.۴۴۸ میں وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل f کے لیے $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ لیں۔ کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کرتے ہوئے سوالات کے جوابات دیں۔

ا. وقفہ $[a, b]$ پر f اور F کو اکٹھے ترسیم کریں۔

ب. مساوات $F(x) = 0$ کو حل کریں۔ جس نقطہ پر $F(x) = 0$ ہے اس نقطہ پر f اور F کی ترسیمات کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ کیا آپ کے مشاہدے کی تصدیق ایک گنا تفرق سے حاصل معلومات اور بنیادی مسئلے کا جزو اول کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

ج. کس (تخمینی) وقفہ پر تفاعل F بڑھتا ہے اور کس پر گھٹتا ہے؟ ان وقفوں پر f کے بارے میں کیا درست ہو گا؟

د. F اور تفرق f' کو اکٹھے ترسیم کریں۔ جس نقطہ پر $f'(x) = 0$ ہے اس نقطے پر F کی ترسیم کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہے؟ کیا آپ کا مشاہدہ بنیادی مسئلے کے جزو اول کو مطمئن کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال ۵.۴۴۵: $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x, \quad [0, 4]$

سوال ۵.۴۴۶: $f(x) = 2x^4 - 17x^3 + 46x^2 - 43x + 12, \quad [0, \frac{9}{2}]$

سوال ۵.۴۴۷: $f(x) = \sin 2x \cos \frac{x}{3}, \quad [0, 2\pi]$

سوال ۵.۴۴۸: $f(x) = x \cos \pi x, \quad [0, 2\pi]$

سوال ۵.۴۴۹ تا سوال ۵.۴۵۲ میں دیے گئے a ، u ، اور f کے لیے $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ لیں۔ کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کرتے ہوئے درج ذیل کے جواب دیں۔

ا. F کا دائرہ کار تلاش کریں۔

ب. $F'(x)$ تلاش کرتے ہوئے اس کے صفر حاصل کریں۔ اپنے دائرہ کار میں کہاں F بڑھتا اور کہاں گھٹتا ہے؟

ج. F'' تلاش کرتے ہوئے اس کے صفر حاصل کریں۔ F کی مقامی انتہا اور نقطہ تصریف حاصل کریں۔

د. جزو-ا تا جزو-ج کے نتائج استعمال کرتے ہوئے $y = F(x)$ کا اپنے دائرہ پر خاکہ کھینچیں۔ اب کمپیوٹر پر $F(x)$ کی ترسیم کھینچ کر خاکے کی تصدیق کریں۔

سوال ۵.۴۴۹: $a = 1, \quad u(x) = x^2, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

سوال ۵.۴۵۰: $a = 0, \quad u(x) = x^2, \quad f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

سوال ۵.۴۵۱: $a = 0, \quad u(x) = 1 - x, \quad f(x) = x^2 - 2x - 3$

سوال ۵.۴۵۲: $a = 0, \quad u(x) = 1 - x^2, \quad f(x) = x^2 - 2x - 3$

سوال ۵.۴۵۳: تفاعل $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ کا حساب کرتے ہوئے کمپیوٹر کی مدد سے نتیجے کی تصدیق کریں۔

سوال ۵.۴۵۴: تفاعل $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \int_a^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ کا حساب کرتے ہوئے کمپیوٹر کی مدد سے نتیجے کی تصدیق کریں۔

۵.۸ قطعی تکمل میں بدل

قطعی تکمل کو بدل کی مدد سے حل کرنے کے دو طریقے پائے جاتے ہیں اور دونوں بہترین کام کرتے ہیں۔ ایک طریقہ میں بدل کے ذریعہ مطابقتی غیر قطعی تکمل حاصل کر کے اس کا کوئی ایک ضد تفرق استعمال کرتے ہوئے قطعی تکمل کو بنیادی مسئلہ سے حل کیا جاتا ہے۔ دوسری ترکیب میں درج ذیل کلیہ استعمال کیا جاتا ہے۔

قطعی تکمل میں بدل کا کلیہ

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,\mathrm{d}u \tag{1}$$

اس کلیہ میں $u = g(x)$ پُر کرتے ہوئے $\mathrm{d}u = g'(x)\,\mathrm{d}x$ لکھ کر $g(a)$ تا $g(b)$ تکمل لیں۔

۸۰۸۴ قطعی تکمل حل کرنے کی خاطر وہی u تفاعل پُر کریں جو آپ غیر قطعی تکمل کے حل میں استعمال کریں گے۔ اس کے بعد $x = a$ پر u کی قیمت سے
۸۰۸۵ $x = b$ پر u کی قیمت تک تکمل لیں۔

۸۰۸۶ مثال ۵.۴۹: قطعی تکمل $\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3-1}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

۸۰۸۷ **حل**

۸۰۸۸ ہمارے پاس دو راستے ہیں۔

۸۰۸۹ **پہلی ترکیب:** دیے گئے تکمل کو غیر قطعی تکمل میں بدلیں جس کو حل کرنے کے بعد متغیر کو واپس x صورت میں لکھیں اور x کی بالائی اور زیریں حدود
۸۰۹۰ استعمال کریں۔

$$\begin{aligned}
\int 3x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x &= \int \sqrt{u}\,\mathrm{d}u && u = x^3+1,\ \mathrm{d}y = 3x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}u^{3/2} + C && u \text{ کے لحاظ سے تکمل لیں} \\
&= \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2} + C && \text{واپس } u = x^3+1 \text{ پُر کریں} \\
\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{2}{3}(x^3+1)^{3/2}\Big|_{-1}^{1} && \text{حاصل تکمل استعمال کریں} \\
&= \frac{2}{3}[((1)^3+1)^{3/2} - ((-1)^3+1)^{3/2}] \\
&= \frac{2}{3}[2^{3/2} - 0^{3/2}] = \frac{2}{3}[2\sqrt{2}] = \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

۸۰۹۱ **دوسری ترکیب:** تکمل کو بدل کر مساوات ا میں دی گئی نئی حدود استعمال کریں۔ ہم $u = x^3+1$ لیتے ہیں۔ یوں $\mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x$ ہو گا
۸۰۹۲ جبکہ حدود $u(x=-1) = 0$ اور $u(x=1) = 2$ ہوں گی۔

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} 3x^2\sqrt{x^3+1}\,\mathrm{d}x &= \int_{0}^{1} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u && u = x^3+1,\ \mathrm{d}u = 3x^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_{0}^{2} && \text{نئے قطعی تکمل کی قیمت حاصل کریں} \\
&= \frac{2}{3}[2^{2/3} - 0^{2/3}] = \frac{2}{3}[2\sqrt{2}] = \frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

۸۰۹۳ □

۸۰۹۴ اس مثال میں دوسری ترکیب زیادہ آسان معلوم تھی اگرچہ ایسا ہر مرتبہ نہیں ہو گا۔ آپ کو دونوں تراکیب آنی چاہیے۔

۸۰۹۵ آئیں دوسرا مثال دیکھیں۔

مثال ۵.۵۰:

$$\begin{aligned}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot\theta \csc^2\theta \,\mathrm{d}\theta &= \int_1^0 u \cdot (-\,\mathrm{d}u) \qquad\qquad u = \cot\theta,\ \mathrm{d}u = -\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\int_1^0 u\,\mathrm{d}u \\ &= -\left[\frac{u^2}{2}\right]_1^0 \\ &= -\left[\frac{(0)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2}\right] = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

کمپیوٹر کا استعمال

بعض اوقات ضد تفرق کا حصول مشکل ہوتا ہے۔ بہت سارے قابل تکمل تفاعل مثلاً

$$f(x) = e^{-x^2}$$

جو نظریہ احتمال میں اہم کردار ادا کرتا ہے کے ضد تفرق کو بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا، اگرچہ بنیادی مسئلہ کے جزو اول سے ہم جانتے ہیں کہ f کا ضد تفرق موجود ہے۔ کمپیوٹر پر درج ذیل تکملی تفاعل

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

ترسیم کریں۔ آپ $F(x)$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ یہ کہاں بڑھتا اور کہاں گھٹتا ہے؟ اس کی انتہا (اگر ہوں) کہاں پائی جاتی ہیں؟ اس کی ترسیم کے مقعر کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

سوالات

قطعی تکمل کی قیمت کا حصول

سوال ۵.۴۵۵ تا سوال ۵.۴۷۸ کو حل کریں۔

سوال ۵.۴۵۵: (ا) $\int_0^3 \sqrt{y+1}\,\mathrm{d}yy$ (ب) $\int_{-1}^0 \sqrt{y+1}\,\mathrm{d}y$

سوال ۵.۴۵۶: (ا) $\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r$ (ب) $\int_{-1}^1 r\sqrt{1-r^2}\,\mathrm{d}r$

سوال ۵.۴۵۷: (ا) $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x\,\mathrm{d}x$ (ب) $\int_{-\pi/4}^0 \tan x \sec^2 x\,\mathrm{d}x$

۸۱۱۲ سوال ۵.۴۵۸: (ا) $\int_0^{\pi} 3\cos^2 x \sin x \, dx$ (ب) $\int_{2\pi}^{3\pi} 3\cos^2 x \sin x \, dx$

۸۱۱۳ سوال ۵.۴۵۹: (ا) $\int_0^1 t^3(1+t^4)^3 \, dt$ (ب) $\int_{-1}^1 t^3(1+t^4)^3 \, dt$

۸۱۱۴

۸۱۱۵ سوال ۵.۴۶۰: (ا) $\int_0^{\sqrt{7}} t(t^2+1)^{1/3} \, dt$ (ب) $\int_{-\sqrt{7}}^0 t(t^2+1)^{1/3} \, dt$

۸۱۱۶ سوال ۵.۴۶۱: (ا) $\int_{-1}^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2} \, dr$ (ب) $\int_0^1 \frac{5r}{(4+r^2)^2} \, dr$

۸۱۱۷

۸۱۱۸ سوال ۵.۴۶۲: (ا) $\int_0^1 \frac{10\sqrt{v}}{(1+v^{3/2})^2} \, dv$ (ب) $\int_1^4 \frac{10\sqrt{v}}{1+v^{3/2}} \, dv$

۸۱۱۹ سوال ۵.۴۶۳: (ا) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$ (ب) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4x}{\sqrt{x^2+1}} \, dx$

۸۱۲۰

۸۱۲۱ سوال ۵.۴۶۴: (ا) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}} \, dx$ (ب) $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{\sqrt{x^4+9}} \, dx$

۸۱۲۲ سوال ۵.۴۶۵: (ا) $\int_0^{\pi/6} (1-\cos 3t)\sin 3t \, dt$ (ب) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1-\cos 3t)\sin 3t \, dt$

۸۱۲۳

۸۱۲۴ سوال ۵.۴۶۶: (ا) $\int_{-\pi/2}^0 (2+\tan\frac{t}{2})\sec^2\frac{t}{2} \, dt$ (ب) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2+\tan\frac{t}{2})\sec^2\frac{t}{2} \, dt$

۸۱۲۵ سوال ۵.۴۶۷: (ا) $\int_0^{2\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\sin z}} \, dz$ (ب) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos z}{\sqrt{4+3\sin z}} \, dz$

۸۱۲۶

۸۱۲۷ سوال ۵.۴۶۸: (ا) $\int_{-\pi/2}^0 \frac{\sin w}{(3+2\cos w)^2} \, dw$ (ب) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin w}{3+2\cos w} \, dw$

۸۱۲۸ سوال ۵.۴۶۹: $\int_0^1 \sqrt{t^5+2t}(5t^4+2) \, dt$

۸۱۲۹ سوال ۵.۴۷۰: $\int_1^4 \frac{dy}{2\sqrt{y}(1+\sqrt{y})^2}$

۸۱۳۰ سوال ۵.۴۷۱: $\int_0^{\pi/6} \cos^{-3} 2\theta \sin 2\theta \, d\theta$

۸۱۳۱ سوال ۵.۴۷۲: $\int_{\pi}^{3\pi/2} \cot^5\frac{\theta}{6}\sec^2\frac{\theta}{6} \, d\theta$

۸۱۳۲ سوال ۵.۴۷۳: $\int_0^{\pi} 5(5-4\cot t)^{1/4}\sin t \, dt$

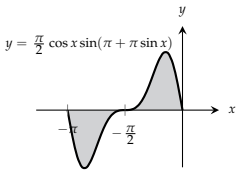
۸۱۳۳ سوال ۵.۴۷۴: $\int_0^{\pi/4} (1-\sin 2t)^{3/2}\cos 2t \, dt$

۸۱۳۴ سوال ۵.۴۷۵: $\int_0^1 (4y-y^2+4y^3+1)^{-2/3}(12y^2-2y+4) \, dy$

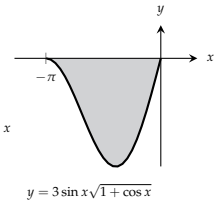
۸۱۳۵ سوال ۵.۴۷۶: $\int_0^1 (y^3+6y^2-12y+9)^{-1/2}(y^2+4y-4) \, dy$

۸۱۳۶ سوال ۵.۴۷۷: $\int_0^{\sqrt[3]{\pi^2}} \sqrt{\theta}\cos^2(\theta^{3/2}) \, d\theta$

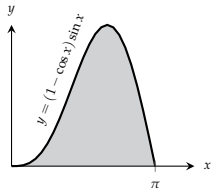
۸۱۳۷ سوال ۵.۴۷۸: $\int_{-1}^{-1/2} t^{-2}\sin^2(1+\frac{1}{t}) \, dt$



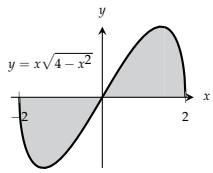
شکل ۵.۶۰



شکل ۵.۵۹



شکل ۵.۵۸



شکل ۵.۵۷

رقبہ

سوال ۵.۴۷۹ تا سوال ۵.۴۸۲ میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۵.۴۷۹: ترسیم شکل ۵.۵۷ میں دی گئی ہے۔

سوال ۵.۴۸۰: ترسیم شکل ۵.۵۸ میں دی گئی ہے۔

سوال ۵.۴۸۱: ترسیم شکل ۵.۵۹ میں دی گئی ہے۔

سوال ۵.۴۸۲: ترسیم شکل ۵.۶۰ میں دی گئی ہے۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۵.۴۸۳: اگر $f(x) = \frac{\sin x}{x},\ x > 0$ کا ضد تفرق $F(x)$ ہو تب $\int_1^3 \frac{\sin 2x}{x}\,\mathrm{d}x$ کو F کے روپ میں لکھیں۔

سوال ۵.۴۸۴: دکھائیں کہ استمراری f کی صورت میں $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f(1-x)\,\mathrm{d}x$ ہوگا۔

سوال ۵.۴۸۵: اگر $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$ ہو تب (ا) طاق f، (ب) جفت f کی صورت میں $\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$ کتنا ہوگا؟

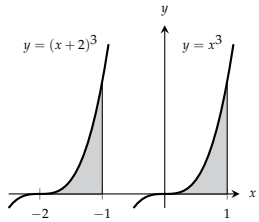
سوال ۵.۴۸۶: (ا) درج ذیل دکھائیں۔

$$\int_{-a}^{a} h(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{طاق } h \\ 2\int_0^a h(x)\,\mathrm{d}x, & \text{جفت } h \end{cases}$$

(ب) $a = \frac{\pi}{2}$ لیتے ہوئے $h(x) = \sin x$ اور $h(x) = \cos x$ کے لیے جزو-ا کی تصدیق کریں۔

سوال ۵.۴۸۷: استمراری f کے لیے درج ذیل تکمل حل کرنے کی خاطر بدل $u = a - x$ پُر کر کے حاصل تکمل کے نتیجہ کو I کے ساتھ جمع کریں۔

$$I = \int_0^a \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{f(x) + f(a-x)}$$



شکل ۵.۶۱: قطعی تکمل کی عدم تبدیلی بصورت خطی انتقال۔

۸۱۵۲ سوال ۵.۴۸۸: موزوں بدل استعمال کر کے تمام مثبت x اور y اعداد کے لیے درج ذیل ثابت کریں۔

$$\int_x^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^y \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

۸۱۵۳

۸۱۵۴ قطعی تکمل کی خاصیت انتقال

۸۱۵۵ خطی انتقال کی صورت میں قطعی تکمل کی عدم تبدیلی جسے درج ذیل مساوات پیش کرتی ہے قطعی تکمل کی بنیادی خاصیت ہے۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a-c}^{b-c} f(x+c)\,\mathrm{d}x \tag{۲}$$

۸۱۵۶ یہ مساوات درکار x پر معین اور قابل تکمل f کے لیے مطمئن ہوتی ہے، مثلاً (شکل ۵.۶۱):

$$\int_{-2}^{-1} (x+2)^3\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x \tag{۳}$$

۸۱۵۷ سوال ۵.۴۸۹: کوئی بدل استعمال کرتے ہوئے مساوات ۲ کی تصدیق کریں۔

۸۱۵۸ سوال ۵.۴۹۰: درج ذیل تمام تفاعل کے لیے $[a,b]$ پر $f(x)$ اور $[a-c, b-c]$ پر $f(x+c)$ کو ترسیم کرتے ہوئے اطمینان کر
۸۱۵۹ لیں کہ مساوات ۲ معقول ہے۔

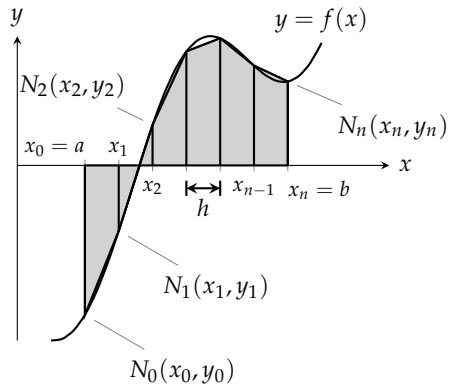
(ا) $f(x) = x^2,\ a = 0,\ b = 1,\ c = 1$

(ب) $f(x) = \sin x,\ a = 0,\ b = \pi,\ c = \frac{\pi}{2}$

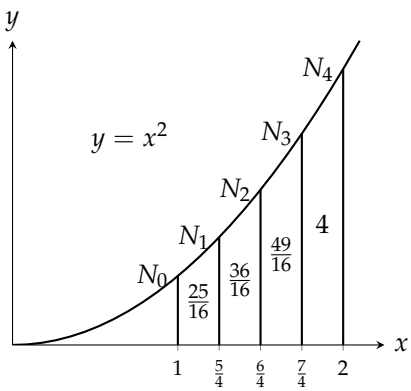
(ج) $f(x) = \sqrt{x-4},\ a = 4,\ b = 8,\ c = 5$

۸۱۶۰

۸۱۶۱



شکل ۵.۶۲: ذوزنقہ قاعدہ برائے اعدادی تکمل۔



شکل ۵.۶۳: ذوزنقہ قاعدہ تفاعل $y = x^2$ کا رقبہ کچھ زیادہ دیتا ہے۔

۵.۹ اعدادی تکمل

ہم نے دیکھا کہ $f(x)$ کے ضد تفرق $F(x)$ کے کلیہ سے قطعی تکمل $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کی قیمت $F(b) - F(a)$ حاصل کی جا سکتی ہے۔ بعض اوقات ضد تفرق معلوم کرنا مشکل ہوتا ہے بلکہ بعض تفاعل، مثلاً $\frac{\sin x}{x}$ اور $\sqrt{1+x^4}$، کے ضد تفرق کو بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہیں ہوتا۔ ہم یہ نہیں کہہ رہے کہ $\frac{\sin x}{x}$ اور $\sqrt{1+x^4}$ کے ضد تفرق کے کلیات اب تک کوئی حاصل کرنے میں کامیاب نہیں ہوا بلکہ ہم کہہ رہے ہیں کہ یہ ثابت کیا گیا ہے کہ ان تفاعل کے ضد تفرق کو بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا۔

ہم جب بھی قطعی تکمل کی قیمت کو ضد تفرق سے حاصل کرنے میں ناکام ہوں، ہم اعدادی تراکیب، مثلاً قاعدہ ذوزنقہ یا قاعدہ سمسن بروئے کار لاتے ہیں، جن پر اس حصہ میں غور کیا جائے گا۔

قاعدہ ذوزنقہ

جب کسی تفاعل جس کے قطعی تکمل کی قیمت درکار ہو کے متکمل f کا ضد تفرق ہم دریافت نہ کر سکیں تب ہم تکمل کے وقفہ کی خانہ بندی کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفہ پر f کو تخمیناً موزوں کثیر رکنی سے ظاہر کر کے ان کثیر رکنیوں کا تکمل لے کر تمام جوابات کا مجموعہ لیتے ہیں، جو تکمل کی تخمینی قیمت کے برابر ہو گا۔ کسی بھی خانہ بندی کے لیے جتنی زیادہ درجات کی کثیر رکنیاں منتخب کی جائیں، حاصل جواب اتنا زیادہ درست ہو گا۔ کسی بھی درجے کی کثیر رکنی کے لیے جتنی باریک خانہ بندی کی جائے، حاصل جواب اتنا زیادہ درست ہو گا، تاہم آخر کار ایسی حد آن پہنچتی ہے کہ خانہ بندی مزید باریک بنانے سے پور و پور خلل یا حذفی خلل اتنا بڑھ جاتا ہے کہ مزید باریک خانہ بندی سے حاصل جواب کی درستگی کم ہونا شروع ہو جاتی ہے۔

کم درجے کی کثیر رکنی سے بھی اچھے نتائج حاصل ہوتے ہیں بلکہ مستقیم قطعات (درجہ 1 کثیر رکنی) بھی بہترین تخمین دیتے ہیں پس ان کی تعداد کافی ہونی چاہیے۔ اس کی وجہ سمجھنے کے لیے فرض کریں ہم f کے وقفہ $[a, b]$ کو $\Delta x = h = \frac{b-a}{n}$ لمبائی کے n قطعات میں تقسیم کر کے منحنی پر مطابق نقطوں کو سیدھے قطعات سے جوڑتے ہیں (شکل ۵.۶۲)۔ لمبائی $\Delta x = h = \frac{b-a}{n}$ کو **لمبائی قدم**[۳۶] کہتے ہیں جس کو یہاں Δx

[۳۶] stepsize

کے بجائے h سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ n **قدموں**[۳۷] کی تعداد ہے۔ ذیلی وقفوں کے آخری نقطوں سے تقسیمی نقطوں تک انتصابی لکیریں کھینچنے سے متعدد ذوزنقے حاصل ہوتے ہیں جو منحنی اور محور x کے بیچ خطہ کی تخمین ہوں گے۔ ہم ان ذوزنقوں کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں جہاں محور x سے اوپر رقبے کو مثبت جبکہ اس سے نیچے رقبے کو منفی تصور کیا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}(y_0+y_1)h + \frac{1}{2}(y_1+y_2)h + \cdots + \frac{1}{2}(y_{n-2}+y_{n-1})h + \frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)h \\
&= h(\frac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{1}{2}y_n) \\
&= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)
\end{aligned}$$

یہاں $y_0 = f(a)$ ، $y_1 = f(x_1)$ ، $\cdots$ ، $y_{n-1} = f(x_{n-1})$ ، اور $y_n = f(x_n)$ ہیں۔

قاعدہ ۵.۱: قاعدہ ذوزنقہ

تکمل $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کو تخمیناً درج ذیل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے (جہاں n ذیلی وقفوں کی لمبائی قدم $h = \frac{b-a}{n}$ ہے اور $y_k = f(x_k)$ ہے)۔

$$T = \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) \tag{۱}$$

مثال ۵.۵۱: تکمل $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$ کو $n = 4$ لے کر قاعدہ ذوزنقہ سے حل کریں۔ اصل رقبے کے ساتھ موازنہ کریں۔

حل

ہم وقفہ $[1, 2]$ کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں ایک وقفے کی لمبائی $h = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$ ہو گی۔ ان ذیلی وقفوں کے آخری نقطوں پر تفاعل $y = x^2$ کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	$y = x^2$
1	1
$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$
$\frac{6}{4}$	$\frac{36}{16}$
$\frac{7}{4}$	$\frac{49}{16}$
2	4

اب $n = 4$ اور $h = \frac{1}{4}$ لیتے ہوئے مساوات ۱ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
T &= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4) \\
&= \frac{1}{8}(1 + 2(\tfrac{25}{16}) + 2(\tfrac{36}{16}) + 2(\tfrac{49}{16}) + 4) = \frac{75}{32} \\
&= 2.343\,75
\end{aligned}$$

---

[۳۷] steps

۸۱۹۱ تکمل کی اصل قیمت درج ذیل ہے۔

$$\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2.\bar{3}$$

۸۱۹۲ یہاں تخمینی قیمت اصل قیمت سے زیادہ ہے۔ درحقیقت تمام ذوزنقے مطابقتی خطہ میں کچھ زیادہ رقبہ گھیرتے ہیں (شکل ۵.۶۳)۔ □

۸۱۹۳ تخمین ذوزنقہ میں خلل قابو کرنا

۸۱۹۴ مختلف تفاعلات کی ترسیمات دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے لمبائی قدم h کم کرنے سے، چونکہ ذوزنقہ تفاعل پر بہتر بیٹھتا ہے لہٰذا، تخمین ذوزنقہ میں خلل

$$E_T = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T \tag{۲}$$

۸۱۹۵ کم ہوگا۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ اگر f کا دہرا تفرق استمراری ہو تب یقینی طور پر ایسا ہی ہوگا۔

۸۱۹۶ **قاعدہ ذوزنقہ میں اندازہ خلل**

۸۱۹۷ اگر f'' استمراری ہو اور $[a,b]$ پر $|f''|$ کی قیمت کی بالائی حد بندی M ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$|E_T| \leq \frac{b-a}{12}h^2 M \tag{۳}$$

۸۱۹۸ اگرچہ نظریہ کہتا ہے کہ ہر صورت M کی کم تر قیمت پائی جائے گی، حقیقت میں عموماً یہ قیمت جاننا ممکن نہیں ہوتا۔ ہم عام طور پر M کی بہتر سے بہتر اندازاً
۸۱۹۹ قیمت معلوم کر کے اسی سے $|E_T M|$ حاصل کرتے ہیں۔ اگرچہ ایسا کرنا ٹھیک نظر نہیں آتا، حقیقت میں یہ طریقہ کام کرتا ہے۔ کسی بھی M کے لیے
۸۲۰۰ $|E_T|$ کی قیمت کم کرنے کی خاطر ہم h کو چھوٹا کرتے ہیں۔

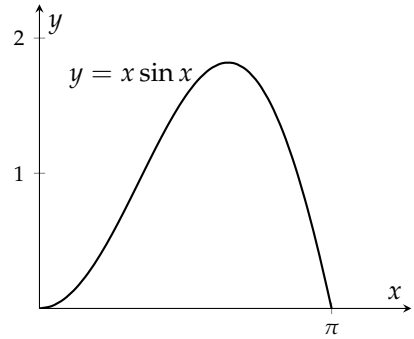
۸۲۰۱ مثال ۵.۵۲: تکمل $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$ کی تخمینی قیمت مثال ۵.۵۱ میں حاصل کی گئی۔ اس تخمینی قیمت میں خلل کی بالائی حد بندی تلاش کریں۔

۸۲۰۲ **حل**

۸۲۰۳ وقفہ $1 \leq x \leq 2$ پر $f(x) = x^2$ کا دہرا تفرق $f''(x) = 2$ ہے جس کی قیمت اٹل ہے لہٰذا ہم $M = 2$ لے سکتے ہیں۔ اب
۸۲۰۴ $b - a = 1$ اور $h = \frac{1}{4}$ سے مساوات ۳ درج ذیل دیتی ہے۔

$$|E_T| \leq \frac{b-a}{12}h^2 M = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^2(2) = \frac{1}{96}$$

۸۲۰۵ ہم $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{7}{3}$ سے $T = \frac{75}{32}$ منفی کر کے یہی خلل $\left|\frac{7}{3} - \frac{75}{32}\right| = \left|-\frac{1}{96}\right|$ حاصل کرتے ہیں۔ یہاں ہم خلل کی بالکل درست
۸۲۰۶ مطلق قیمت حاصل کرنے میں کامیاب ہوئے۔ ایسا ہر مرتبہ نہیں ہوگا۔ □



شکل ۵.۶۴: متکمل برائے مثال ۵.۵۳

۸۲۰۷ مثال ۵.۵۳: قاعدہ ذوزنقہ میں $n = 10$ قدم لیتے ہوئے درج ذیل تکمل کی تخمینی قیمت تلاش کریں (شکل ۵.۶۴)۔

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x$$

۸۲۰۸ **حل**

۸۲۰۹ $a = 0$ ، $b = \pi$ ، اور $h = \frac{\pi - 0}{10}$ سے

$$|E_T| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M = \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 M = \frac{\pi^3}{1200} M$$

۸۲۱۰ ملتا ہے جہاں $[0, \pi]$ پر $f(x) = x \sin x$ کے دہرا تفرق کی کوئی بھی بالائی حد بندی ہو سکتی ہے۔ چونکہ

$$f''(x) = 2\cos x - x \sin x$$

۸۲۱۱ کے برابر ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\left|f''(x)\right| &= |2\cos x - x\sin x| \\
&\leq 2|\cos x| + |x||\sin x| && |a+b| \leq |a| + |b| \text{ تکونی عدم مساوات} \\
&\leq 2 \cdot 1 + \pi \cdot 1 = 2 + \pi && |\sin x| \text{ اور } |\cos x| \text{ ایک سے بڑھ نہیں سکتے ہیں}
\end{aligned}$$

۸۲۱۲ ہم $M = 2 + \pi$ لیتے ہیں۔ یوں

$$|E_T| \leq \frac{\pi^3}{1200} M = \frac{\pi^3(2+\pi)}{1200} < 0.133 \qquad \text{بطور حفاظت اوپر کو پورا کیا گیا ہے}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا خلل کسی صورت بھی 0.133 سے زیادہ نہیں ہو گا۔ زیادہ درست جواب حاصل کرنے کی خاطر ہم M کی بہتر قیمت تلاش کرنے کے بجائے زیادہ قدم لیں گے، مثلاً $n = 100$ قدم لیتے ہوئے $h = \frac{1\pi}{100}$ ہو گا جس سے خلل کم ہو کر درج ذیل رہ جاتا ہے۔

$$|E_T| \leq \frac{\pi}{12}\left(\frac{\pi}{100}\right)^2 M = \frac{\pi^3(2+\pi)}{120\,000} < 0.001\,33 = 1.33 \times 10^{-3}$$

□

مثال ۵.۵۴: جیسا ہم باب ۷ میں دیکھیں گے $\ln 2$ کی قیمت درج ذیل تکمل سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

قاعدہ ذوزنقہ سے تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے خلل کی مقدار 10^{-4} سے کم رکھنے کی خاطر ہمیں کتنے قدم منتخب کرنے ہوں گے۔

حل

قدموں کی تعداد n یعنی ذیلی وقفوں کی تعداد منتخب کرنے کی خاطر ہم مساوات ۳ بروئے کار لاتے ہیں۔ یوں

$$b - a = 2 - 1 = 1, \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{n}, \quad f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^{-1}) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

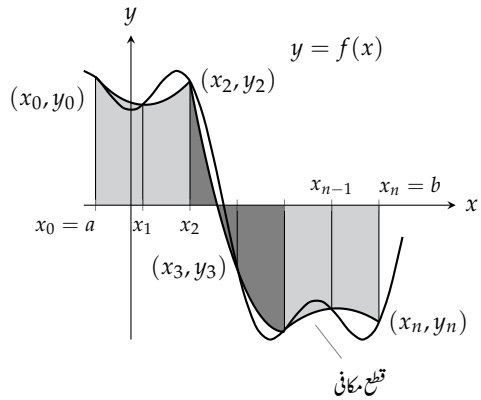
سے

$$|E_T| \leq \frac{b-a}{12}h^2\left|f''(x)\right|_{\text{اعظم}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^2\left|\frac{2}{x^3}\right|_{\text{اعظم}}$$

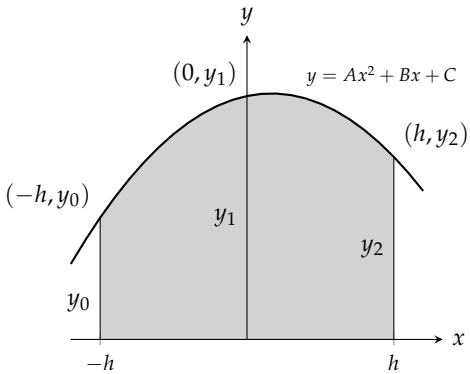
لکھا جا سکتا ہے جہاں وقفہ $[1,2]$ پر $\left|f''\right|_{\text{اعظم}}$ درکار ہے۔

یہ وہ شاذ و نادر موقع ہے جب ہم $\left|f''\right|_{\text{اعظم}}$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ وقفہ $[1,2]$ پر $y = \frac{2}{x^3}$ اعظم قیمت $y = 2$ سے بتدریج گھٹ کر اقل قیمت $y = \frac{1}{4}$ کے قریب تر پہنچتی ہے۔ یوں

$$|E_T| \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^2 \cdot 2 = \frac{1}{6n^2}$$



شکل ۵.۶۵: قاعدہ سمسن میں ذیلی وقفوں کی جوڑی کو انفرادی قطع مکافی سے ظاہر کیا جاتا ہے۔



شکل ۵.۶۶: سایہ دار رقبہ $\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ ہے۔

۸۲۲۴ ہو گا لہٰذا خلل کی مطلق قیمت 10^{-3} سے تب کم ہو گی جب $\frac{1}{6n^2} < 10^{-4}$ ہو جس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{1}{6n^2} < 10^{-4}$$

$$\frac{10^4}{6} < n^2 \qquad \text{دونوں اطراف کو } 10^4 n^2 \text{ سے ضرب کریں}$$

$$\frac{100}{\sqrt{6}} < |n| \qquad \text{جذر لیں}$$

$$\frac{100}{\sqrt{6}} < n \qquad n \text{ مثبت ہے}$$

$$40.83 < n \qquad \text{حفاظتی طور پر اوپر کو پورا کیا گیا ہے۔}$$

۸۲۲۵ عدد 40.83 سے بڑا پہلا عدد صحیح 41 ہے۔ یوں $n = 41$ یا اس سے بھی زیادہ ذیلی وقفے لیتے ہوئے ترکیب ذوزنقہ سے $\ln 2$ کی قیمت میں خلل کو

۸۲۲۶ یقینی طور پر 10^{-4} سے کم رکھا جا سکتا ہے۔ □

۸۲۲۷ **قاعدہ سمسن**

۸۲۲۸ قاعدہ سمسن میں $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کے حصول میں f کو مستقیم خطوط کے بجائے دور تبی کثیر رکنی (قطع مکافی) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہم ترسیم کو سیدھی

۸۲۲۹ لکیروں کے بجائے قطع مکافی قوسین سے ظاہر کرتے ہیں (شکل ۵.۶۵)۔ دور تبی کثیر رکنی $y = Ax^2 + Bx + C$ کا $x = -h$ تا

۸۳۰. $x = h$ تکمل درج ذیل ہو گا (شکل ۵.۶۶)۔

$$\begin{aligned}\int_{-h}^{h}(Ax^2+Bx+C)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{Ax^3}{3}+\frac{Bx^2}{2}+Cx\right]_{-h}^{h}\\ &= \frac{2Ah^3}{3}+2Ch\\ &= \frac{h}{3}(2Ah^2+6C)\end{aligned}$$

۸۳۱. کثیر رکنی کی مساوات سے

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C, \quad y_1 = C, \quad y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

۸۳۲. لکھے جا سکتے ہیں جن سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}C &= y_1\\ Ah^2 - Bh &= y_0 - y_1\\ Ah^2 + Bh &= y_2 - y_1\\ 2Ah^2 &= y_0 + y_2 - 2y_1\end{aligned}$$

۸۳۳. یوں حاصل تکمل میں C اور $2Ah^2$ کی قیمتیں پُر کرتے ہوئے

$$\frac{h}{3}(2Ah^2+6C) = \frac{h}{3}[(y_0+y_2-2y_1)+6y_1] = \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2)$$

۸۳۴. یعنی

$$\int_{-h}^{h} f(Ax^2+Bx+C)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}(y_0+4y_1+y_2) \tag{۴}$$

۸۳۵. ملتا ہے۔ وقفہ $[a, b]$ کو برابر لمبائی کے جفت تعداد کے ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے مساوات ۴ کو یکے بعد دیگرے ذیلی وقفوں کی جوڑیوں پر لاگو کر
۸۳۶. کے ان کا مجموعہ لینے سے قاعدہ سمسن حاصل ہو گا۔

۸۳۷. **قاعدہ سمسن**

۸۳۸. تکمل $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کا تخمین حاصل کرنے کے لیے درج ذیل استعمال کریں جو **قاعدہ سمسن**[۳۸] کہلاتا ہے۔

$$S = \frac{h}{3}(y_0+4y_1+2y_2+4y_3+\cdots+2y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n) \tag{۵}$$

۸۳۹. y کی قیمتیں خانہ بندی کے نقطوں

$$x_0 = a,\ x_1 = a+h,\ x_2 = a+2h, \cdots,\ x_{n-1} = a+(n-1)h,\ x_n = b$$

۸۴۰. پر لیے جاتے ہیں جہاں n جفت اور $h = \frac{b-a}{n}$ ہے۔

---

[۳۸] Simpson'srule

۸۴۴۱ قاعدہ سمسن میں قابو خلل

۸۴۴۲ قاعدہ سمسن میں خلل کی مقدار

$$E_S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S \tag{۶}$$

۸۴۴۳ لمبائی قدم گھٹانے سے کم ہوتی ہے (جیسا قاعدہ ذوزنقہ میں بھی ہوتا ہے) البتہ قاعدہ سمسن میں خلل قابو کرنے کے لیے درکار عدم مساوات میں f کے چار گنا
۸۴۴۴ تفرق کا استراری ہونا ضروری ہے۔ اس مرتبہ بھی قابو خلل کا درج ذیل کلیہ اعلیٰ احصاء دیتا ہے۔

۸۴۴۵ **قاعدہ سمسن میں اندازاً خلل**

۸۴۴۶ اگر $[a,b]$ میں $f^{(4)}$ استراری ہو اور $\left|f^{(4)}\right|$ کی بالائی حد بندی کی کوئی ایک قیمت M ہو تب مطلق خلل درج ذیل ہو گا۔

$$|E_S| \leq \frac{b-a}{180} h^4 M \tag{۷}$$

۸۴۴۷ قاعدہ ذوزنقہ کی طرح ہم یہاں بھی عموماً M کی کم سے کم ممکنہ قیمت دریافت نہیں کر پائیں گے۔ ہم M کی کوئی موزوں قیمت تلاش کر کے اسی کو استعمال
۸۴۴۸ کرتے ہوئے $|E_S|$ کی تخمینی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

۸۴۴۹ مثال ۵.۵۵: درج ذیل تکمل کو قاعدہ سمسن سے حل کرتے ہوئے $n = 4$ لیں۔

$$\int_0^1 5x^4\,\mathrm{d}x$$

۸۴۵۰ اس تخمین میں مساوات ۷ کے تحت خلل اندازاً کتنا ہو گا؟

۸۴۵۱ **حل**

۸۴۵۲ ہم وقفہ تکمل کو چار برابر ذیلی وقفوں میں تقسیم کر کے تقسیمی نقطوں پر متکمل $f(x) = 5x^4$ کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x)$	0	$\frac{5}{256}$	$\frac{80}{256}$	$\frac{405}{256}$	5

۸۴۵۳ ہم $n = 4$ اور $h = \frac{1}{4}$ لیتے ہوئے مساوات ۱۵ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) \\ &= \frac{1}{12}\left[0 + 4\left(\frac{5}{256}\right) + 2\left(\frac{80}{256}\right) + 4\left(\frac{405}{256}\right) + 5\right] \approx 1.002\,60 \end{aligned}$$

۸۴۵۴ خلل جاننے سے پہلے ہمیں وقفہ $0 \leq x \leq 1$ پر $f(x) = 5x^4$ کے چار رتبی تفرق $f^{(4)}$ کی بالائی حد بندی کی ایک قیمت M چاہیے۔
۸۴۵۵ چونکہ $f^{(4)}(x) = 120$ مستقل ہے لہٰذا ہم بلا خطر $M = 120$ لے سکتے ہیں۔ یوں $b - a = 1$ اور $h = \frac{1}{4}$ استعمال کرتے ہوئے

مساوات ۷ سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$|E_S| \leq \frac{b-1}{180}h^4 M = \frac{1}{180}\left(\frac{1}{4}\right)^4(120) = \frac{1}{384} < 0.002\,61$$

□

کونسا قاعدہ بہتر نتائج دیتا ہے؟

قابو خلل کے کلیات

$$|E_T| \leq \frac{b-1}{12}h^2 M, \quad |E_S| \leq \frac{b-a}{180}h^4 M$$

سے یہ جانا جا سکتا ہے کہ کونسا کلیہ بہتر نتیجہ دیگا جہاں بائیں ہاتھ کلیہ میں M سے مراد $|f''|$ کی بالائی حد بندی ہے جبکہ دائیں ہاتھ کلیہ میں M سے مراد $|f^{(4)}|$ کی بالائی حد بندی ہے۔اس کے علاوہ قاعدہ سمسن میں جزو $\frac{b-a}{180}$ قاعدہ ذوزنقہ میں جزو $\frac{b-a}{12}$ سے 15 گنا کم ہے۔مزید قاعدہ سمسن میں h^4 جبکہ قاعدہ ذوزنقہ میں h^2 استعمال ہوتا ہے۔یوں اگر $h = \frac{1}{10}$ ہو تب $h^2 = \frac{1}{100}$ جبکہ $h^4 = \frac{1}{10000}$ ہو گا۔اس طرح اگر دونوں M کی قیمت 1 اور $b - a = 1$ ہو تب $h = \frac{1}{10}$ کی صورت میں درج ذیل ہوں گے۔

$$|E_T| \leq \frac{1}{12}\left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot 1 = \frac{1}{1200}$$
$$|E_S| \leq \frac{1}{180}\left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot 1 = \frac{1}{1\,800\,000} = \frac{1}{1500} \cdot \frac{1}{1200}$$

ایک جتنی حسابی کوشش سے اس مثال میں قاعدہ سمسن بہت بہتر نتیجہ دیتا ہے۔

h^4 بالمقابل h^2 وہ اجزاء ہیں جن پر نظر رکھنی چاہیے۔اگر h کی قیمت 1 سے کم ہو تب h^4 کی قیمت h^2 سے بہت کم ہو گی۔اگر h کی قیمت 1 ہو تب $h^4 = h^2$ ہو گا۔اگر h کی قیمت 1 سے زیادہ ہو تب h^4 کی قیمت h^2 سے بہت زیادہ ہو گی۔ان آخری دو صورتوں میں قابو خلل کلیات ہمیں زیادہ مدد فراہم نہیں کر سکتے اور ہمیں $y = f(x)$ کی منحنی کو دیکھ کر فیصلہ کرنا ہو گا کہ قاعدہ سمسن اور قاعدہ ذوزنقہ میں سے کونسا قاعدہ بہتر نتیجہ (اگر دیتا ہو) دیگا۔

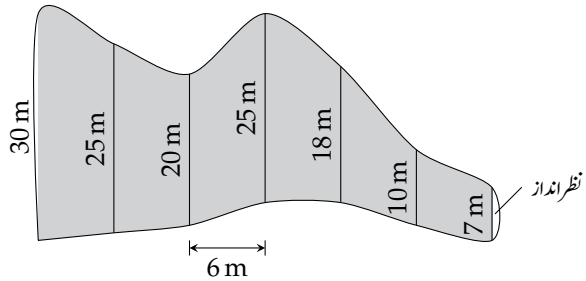
اعدادی مواد کے ساتھ کام

تجربہ گاہ میں پیمائش سے حاصل قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے قاعدہ سمسن کے ذریعہ ایسے تفاعل کے تکمل کی قیمت اگلی مثال میں حاصل کی جائے گی جس کا کلیہ ہم نہیں جانتے۔ہم قاعدہ ذوزنقہ کو بھی اسی طرح استعمال کر سکتے ہیں۔

مثال ۵.۵۶: ایک شہر میں گندے پانی کا تالاب پایا جاتا ہے جس کو بھرنا مقصود ہے۔یہ تالاب 2.5 m گہرا ہے (شکل ۵.۶۷)۔تالاب سے پانی کی نکاسی کے بعد اس کو مٹی سے بھرا جائے گا۔کتنی مٹی درکار ہو گی؟

حل

تالاب کا حجم جاننے کے لیے ہم اس کے سطحی رقبے کو 2.5 سے ضرب دیں گے۔سطحی رقبے کو قاعدہ سمسن سے حاصل کرتے ہیں جہاں $h = 6\,\text{m}$ ہے



شکل ۵.۶۷: گندے پانی کا تالاب۔ افقی فاصلے 6 m ہیں (مثال ۵.۵۶)۔

۸۲۷۶ جبکہ y کی قیمتیں تالاب پر ناپی گئی ہیں (شکل ۵.۶۷)۔

$$\begin{aligned} S &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + y_6) \\ &= \frac{6}{3}(30 + 100 + 40 + 100 + 36 + 40 + 7) = 706 \end{aligned}$$

۸۲۷۷ سطحی رقبے کو 2.5 سے ضرب دیتے ہوئے تقریباً $1765\,\mathrm{m}^3$ حجم حاصل ہوتا ہے۔ □

۸۲۷۸ پورو پور خلل

۸۲۷۹ اگرچہ لمبائی قدم h کم کرنے سے ہم توقع کرتے ہیں کہ قاعدہ ذوزنقہ اور قاعدہ سمسن میں خلل کی مقدار کم ہو گی، حقیقت میں بعض اوقات اس کے برعکس
۸۲۸۰ بھی ہوتا ہے۔ جب h کی قیمت بہت کم ہو، مثلاً $h = 10^{-5}$، تب S اور T کے حساب میں پورو پور خلل اتنا بڑھ سکتا ہے کہ نتائج میں بہتری کے
۸۲۸۱ بجائے خرابی پیدا ہو سکتی ہے۔ ایسی صورت میں آپ کلیات خلل، جو پورو پور خلل کو جاننے سے قاصر ہیں، پر بھروسہ نہیں کر سکتے۔ لمبائی قدم h کو کسی خاص
۸۲۸۲ قیمت سے کم کرنے سے حقیقتاً نتائج خراب ہو سکتے ہیں۔ اس کتاب میں ایسی صورت حال پیدا نہیں ہو گی۔ اگر آپ کو ایسی صورت حال کا سامنا ہو، بہتر ہو گا کہ
۸۲۸۳ آپ اعدادی تراکیب پر لکھی گئی کسی کتاب کا سہارا لیں۔

۸۲۸۴ **سوالات**

۸۲۸۵ **تکمل کی قیمت کا اندازہ**

۸۲۸۶ سوال ۵.۴۹۱ تا سوال ۵.۵۰۰ میں دو جزو پائے جاتے ہیں۔ ایک جزو قاعدہ ذوزنقہ اور دوسرا جزو قاعدہ سمسن کے لیے ہے۔

۸۲۸۷ ا. قاعدہ ذوزنقہ

۸۲۸۸ ا. چار قدم $n = 4$ لے کر تکمل کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔ مساوات ۳ سے خلل $|E_T|$ کی بالائی حدود بندی کی قیمت دریافت کریں۔

۸۲۸۹ ب. تکمل کو حل کرتے ہوئے مساوات ۲ سے $|E_T|$ تلاش کریں۔

ج. خلل $|E_T|$ کو اصل تکمل کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔

۲. قاعدہ سمسن

ا. چار قدم $n = 4$ لے کر تکمل کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔ مساوات ۷ سے خلل $|E_S|$ کی بالائی حدود بندی کی قیمت دریافت کریں۔

ب. تکمل کو حل کرتے ہوئے مساوات ۶ سے $|E_S|$ تلاش کریں۔

ج. خلل $|E_S|$ کو اصل تکمل کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔

سوال ۵.۴۹۱: $\int_1^2 x \, \mathrm{d}x$

سوال ۵.۴۹۲: $\int_1^3 (2x-1) \, \mathrm{d}x$

سوال ۵.۴۹۳: $\int_{-1}^1 (x^2+1) \, \mathrm{d}x$

سوال ۵.۴۹۴: $\int_{-2}^0 (x^2-1) \, \mathrm{d}x$

سوال ۵.۴۹۵: $\int_0^2 (t^3+t) \, \mathrm{d}t$

سوال ۵.۴۹۶: $\int_{-1}^1 (t^3+1) \, \mathrm{d}t$

سوال ۵.۴۹۷: $\int_1^2 \frac{1}{s^2} \, \mathrm{d}s$

سوال ۵.۴۹۸: $\int_2^4 \frac{1}{(s-1)^2} \, \mathrm{d}s$

سوال ۵.۴۹۹: $\int_0^\pi \sin t \, \mathrm{d}t$

سوال ۵.۵۰۰: $\int_0^1 \sin \pi t \, \mathrm{d}t$

سوال ۵.۵۰۱ تا سوال ۵.۵۰۴ میں (ا) قاعدہ ذوزنقہ، (ب) قاعدہ سمسن استعمال کرتے ہوئے دی گئی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے آٹھ قدم $n = 8$ کے لیے تکمل حل کریں۔ اپنے جواب کو 5 اعشاریہ مقامات تک درستگی تک پورے پورے کریں۔ (ج) اس کے بعد تکمل کی اصل قیمت حاصل کریں اور خلل $|E_T|$ کو مساوات ۲ اور خلل $|E_S|$ کو مساوات ۶ سے حاصل کریں۔

سوال ۵.۵۰۱: $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x$

x	0	0.125	0.25	0.375	0.5	0.625	0.75	0.875	1.0
$x\sqrt{1-x^2}$	0.0	0.12402	0.24206	0.34763	0.43301	0.48789	0.49608	0.42361	0

سوال ۵.۵۰۲: $\int_0^3 \frac{\theta}{\sqrt{16+\theta^2}} \, \mathrm{d}\theta$

θ	0	0.375	0.75	1.125	1.5	1.875	2.25	2.625	3.0
$\frac{\theta}{\sqrt{16+\theta^2}}$	0.0	0.09334	0.18429	0.27075	0.35112	0.42443	0.49026	0.58466	0.6

۸۳۱۰ سوال ۵.۵۰۳: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{3\cos t}{(2+\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$

t	-1.5708	-1.1781	-0.7854	-0.3927	0	0.3927	0.7854	1.1781	1.5708
$\frac{3\cos t}{(2+\sin t)^2}$	0.0	0.99138	1.26906	1.05961	0.75	0.48821	0.28946	0.13429	0

۸۳۱۱ سوال ۵.۵۰۴: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (\csc^2 y)\sqrt{\cot y}\,\mathrm{d}y$

y	0.78540	0.88357	0.98175	1.07992	1.17810	1.27627	1.37445	1.47262	1.57080
$(\csc^2 y)\sqrt{\cot y}$	2.0	1.51606	1.18237	0.93998	0.75402	0.60145	0.46364	0.31688	0

۸۳۱۲ ## ذیلی وقفوں کی اقل تعداد

۸۳۱۳ سوال ۵.۵۰۵ تا سوال ۵.۵۱۶ میں خلل کی مقدار 10^{-4} سے کم مطلوب ہے۔ (ا) قاعدہ ذوزنقہ اور (ب) قاعدہ سمسن استعمال کریں۔ مساوات ۱۳ اور

۸۳۱۴ مساوات ۷ کی مدد سے ذیلی وقفوں کی درکار تعداد تلاش کریں۔ (سوال ۵.۵۰۵ تا سوال ۵.۵۱۲ درحقیقت سوال ۵.۴۹۱ تا سوال ۵.۴۹۸ ہیں۔)

۸۳۱۵ سوال ۵.۵۰۵: $\int_1^2 x\,\mathrm{d}x$

۸۳۱۶ سوال ۵.۵۰۶: $\int_1^3 (2x-1)\,\mathrm{d}x$

۸۳۱۷ سوال ۵.۵۰۷: $\int_{-1}^1 (x^2+1)\,\mathrm{d}x$

۸۳۱۸ سوال ۵.۵۰۸: $\int_{-2}^0 (x^2-1)\,\mathrm{d}x$

۸۳۱۹ سوال ۵.۵۰۹: $\int_0^2 (t^3+t)\,\mathrm{d}t$

۸۳۲۰ سوال ۵.۵۱۰: $\int_{-1}^1 (t^3+1)\,\mathrm{d}t$

۸۳۲۱ سوال ۵.۵۱۱: $\int_1^2 \frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s$

۸۳۲۲ سوال ۵.۵۱۲: $\int_2^4 \frac{1}{(s-1)^2}\,\mathrm{d}s$

۸۳۲۳ سوال ۵.۵۱۳: $\int_0^3 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$

۸۳۲۴ سوال ۵.۵۱۴: $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x$

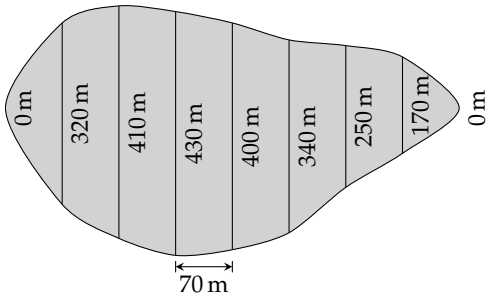
۸۳۲۵ سوال ۵.۵۱۵: $\int_0^2 \sin(x+1)\,\mathrm{d}x$

۸۳۲۶ سوال ۵.۵۱۶: $\int_{-1}^1 \cos(x+\pi)\,\mathrm{d}x$

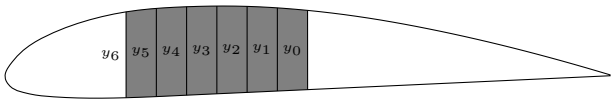
۸۳۲۷ ## عملی استعمال

۸۳۲۸ سوال ۵.۵۱۷: آپ کے شہر میں ایک جھیل ہے جس کی اوسط گہرائی $7\ \mathrm{m}$ ہے جبکہ اس کا سطحی رقبہ شکل ۵.۶۸ میں دکھایا گیا ہے۔ ماہی گیری کے موسم

۸۳۲۹ کے آغاز میں اوسطاً فی $9\ \mathrm{m}^3$ ایک مچھلی پائی جاتی ہے۔ ماہی گیری کے ایک اجازت نامہ پر اوسطاً فی موسم 20 مچھلیاں شکار کی جاتی ہیں۔ موسم کے اختتام پر



شکل ۵.۶۸: جھیل برائے سوال ۵.۵۱۷



شکل ۵.۶۹: ہوائی پترا

۸۳۳۰ جھیل میں (ماہی گیری کے موسم کے) پہلے دن کے لحاظ سے 25 % مچھلی باقی رہنا ضروری ہے۔ ماہی گیری کے موسم میں کتنے اجازت نامے منظور کیے جا سکتے
۸۳۳۱ ہیں؟ ترکیب سمسن استعمال کریں۔

۸۳۳۲ سوال ۵.۵۱۸: جہاز کا **ہوائی پترا**[۳۹] شکل ۵.۶۹ میں دکھایا گیا ہے جس میں 25 000 L تیل کی ٹینکی واضح ہے۔ تیل کی کثافت
۸۳۳۳ $0.708\ \mathrm{kg\,L^{-1}}$ ہے۔ درج ذیل معلومات دی گئی ہیں جن کے بیچ افقی فاصلہ 30 cm ہے۔ تیل کی ٹینکی کی لمبائی تلاش کریں۔

$$y_0 = 45\,\mathrm{cm},\ y_1 = 48\,\mathrm{cm},\ y_2 = 54\,\mathrm{cm},\ y_3 = 57\,\mathrm{cm},\ y_4 = 60\,\mathrm{cm},\ y_5 = y_6 = 63\,\mathrm{cm}$$

۸۳۳۴

۸۳۳۵ سوال ۵.۵۱۹: **شمسی چادر**[۴۰] سے حاصل برقی طاقت سے چلنے والی گاڑی کا رقبہ عمودی تراش شکل ۵.۷۰ میں دکھایا گیا ہے۔ ہوائی مزاحمت کا کچھ حصہ
۸۳۳۶ رقبہ عمودی تراش پر منحصر ہوتا ہے لہٰذا کوشش کی جاتی ہے کہ رقبہ عمودی تراش کم سے کم رکھا جائے۔ اس گاڑی کا رقبہ عمودی تراش قاعدہ سمسن سے دریافت
۸۳۳۷ کریں۔

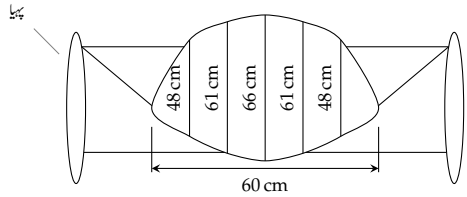
۸۳۳۸ سوال ۵.۵۲۰: ایک گاڑی ساکن حالت سے روانہ ہو کر $130\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ تک 37.1 s میں پہنچ پاتی ہے۔ اس کی رفتار بالمقابل وقت درج ذیل
۸۳۳۹ ہے۔

$\mathrm{km\,h^{-1}}$	0	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
s	0	2.2	3.2	4.5	5.9	7.8	10.2	12.7	16	20.6	26.2	37.1

۸۳۴۰ اس رفتار تک پہنچتے ہوئے گاڑی کتنا فاصلہ طے کرتی ہے؟

---

[۳۹] aerofoil
[۴۰] solarpanel



شکل ۵.۷۰: شمسی گاڑی برائے سوال ۵.۵۱۹

نظریہ اور مثالیں

سوال ۵.۵۲۱: کم درجی کثیر رکنیاں

تکمل $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ میں خلل

$$|E_T| = \frac{b-a}{12}h^2\left|f''(c)\right|$$

ہے جہاں وقفہ $[a,b]$ میں c (عموماً نامعلوم) نقطہ ہے۔ اگر f متغیر x کا خطی تفاعل ہو تب $f''(c) = 0$ لہٰذا $E_T = 0$ ہو گا اور کسی بھی h کے لیے تکمل کی اصل قیمت T ہو گی۔ یہ تعجب کی بات نہیں ہے چونکہ خطی تفاعل کی صورت میں ترسیم کو تخمینی طور پر ظاہر کرنے والے قطعات ترسیم پر ٹھیک بیٹھیں گے۔ تعجب کی بات سمسن خلل

$$|E_S| = \frac{b-a}{180}h^4\left|f^{(4)}(c)\right|$$

ہے جو درجہ چار سے کم کثیر رکنی f کی صورت میں ہر c کے لیے $f^{(4)}(c) = 0$ کے تحت $E_S = 0$ ہو گا اور یوں اگر ہم صرف دو قدم بھی استعمال کریں تب بھی S تکمل کی اصل قیمت ہو گی۔ یہ دیکھنے کی خاطر $n = 2$ لیتے ہوئے درج ذیل کی اندازاً قیمت قاعدہ سمسن سے تلاش کر کے تکمل کی اصل قیمت کے ساتھ موازنہ کریں۔

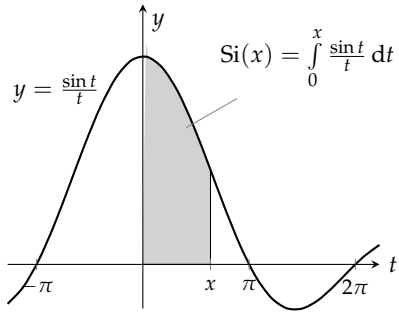
$$\int_0^2 x^3\,\mathrm{d}x$$

سوال ۵.۵۲۲: تفاعل تکمل سائن کی قابل استعمال قیمتیں

تفاعل تکمل سائن

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \qquad x \text{ کا تکمل سائن}$$

ان تفاعلات میں سے ایک ہے جنہیں بنیادی تفاعل کی صورت میں لکھنا ممکن نہیں۔ تفاعل $\frac{\sin t}{t}$ کے ضد تفرق کا کلیہ نہیں پایا جاتا البتہ اعدادی تراکیب سے $\mathrm{Si}(x)$ کی قیمتیں باآسانی حاصل کی جا سکتی ہیں۔



شکل ۵.۷۱: تفاعل تکمل سائن (سوال ۵.۵۲۲)

۸۳۵۴ اگرچہ تکمل سائن لکھتے ہوئے یہ حقیقت بظاہر نظر نہیں آتی، درحقیقت ہم درج ذیل تفاعل کا تکمل حاصل کرنا چاہتے ہیں

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

۸۳۵۵ جو $\frac{\sin t}{t}$ کی وقفہ $[0, x]$ تک استمراری توسیع ہے۔ اس تفاعل کے دائرہ کار کے ہر نقطہ پر تفاعل کے ہر رتبہ کے تفرق پائے جاتے ہیں۔ اس کی ترسیم ہموار
۸۳۵۶ ہے (شکل ۵.۷۱) اور ہم قاعدہ سمسن سے بہترین نتائج کی توقع کرتے ہیں۔

۸۳۵۷ ا. وقفہ $[0, \pi/2]$ پر $\left|f^{(4)}\right| \leq 1$ ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے $n = 4$ لے کر درج ذیل کو قاعدہ سمسن سے حاصل کرتے
۸۳۵۸ ہوئے خلل کی بالائی حد بندی تلاش کریں۔

$$\mathrm{Si}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

۸۳۵۹ ب. $n = 4$ لیتے ہوئے قاعدہ سمسن سے $\mathrm{Si}(\pi/2)$ حاصل کریں۔

۸۳۶۰ ج. جزو-ا میں خلل کو جزو-ب میں قیمت کا فی صد لکھیں۔

۸۳۶۱ سوال ۵.۵۲۳: خلل کی حد بندی مساوات ۳ اور مساوات ۷ دیتی ہیں۔ حقیقت میں قاعدہ ذوزنقہ اور قاعدہ سمسن کے نتائج اس سے بہتر ہوں گے۔ مثال
۸۳۶۲ ۵.۵۳ میں $\int_0^{\pi} x \sin x\,\mathrm{d}x$ کی اندازاً قیمت کو قاعدہ ذوزنقہ سے حاصل کیا گیا۔

۸۳۶۳ ا. قاعدہ ذوزنقہ میں $n = 10$ لیتے ہوئے تکمل کو دوبارہ حل کریں۔

۸۳۶۴ ب. تکمل کی اصل قیمت π اور آپ کے حاصل کردہ جواب میں فرق دریافت کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ مثال ۵.۵۳ میں $n = 10$ کے لیے حاصل
۸۳۶۵ خلل 0.133 سے موجودہ خلل بہت کم ہے۔

۸۳۶۶ ج. ہم $[0, \pi]$ پر $\left|f''(x)\right| = \left|2\cos x - x\sin x\right|$ کی بہتر حد بندی معلوم کر کے مثال ۵.۵۳ میں $|E_T|$ کی بالائی حد بندی کو
۸۳۶۷ 0.133 سے بہتر بنا سکتے ہیں۔ $\left|f''(x)\right|$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کر کے مطلوبہ خطے کو بڑا کرتے ہوئے بہتر بالائی حد بندی دریافت کر کے اس کو بطور M
۸۳۶۸ لے کر $|E_T|$ کی بہتر قیمت تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ جزو-ا میں حاصل نتیجہ اس سے بھی بہتر ہے۔

سوال ۵.۵۲۴:

ا. دکھائیں کہ $f(x) = x \sin x$ کا چار رتبی تفرق $f^{(4)} = -4\cos x + x \sin x$ ہے۔ کمپیوٹر پر اس کو وقفہ $[0, \pi]$ پر ترسیم کر کے مطلوبہ خطے کو بڑا کر کے اس کی بالائی حد بندی دیکھ کر دریافت کریں۔

ب. جزو-ا میں حاصل قیمت کو M لے کر قاعدہ سمسن میں $n = 10$ لیتے ہوئے درج ذیل تکمل حاصل کرنے میں خلل کی بالائی حد بندی کو مساوات ۷ سے حاصل کریں۔

$$\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x$$

ج. قاعدہ سمسن میں $n = 10$ لے کر $\int_0^{\pi} x \sin x \, \mathrm{d}x$ کی قیمت حاصل کریں۔

د. تکمل کی اصل قیمت π اور جزو-ج میں حاصل جواب میں فرق کو 6 اعشاریہ مقامات تک درستگی تک لکھیں۔ آپ دیکھیں گے کہ جزو-ب میں حاصل خلل کافی درست ہے۔

آپ سوال ۵.۵۲۵ اور سوال ۵.۵۲۶ کو قاعدہ سمسن سے حل کرنے سے پہلے درکار درستگی حاصل کرنے کی خاطر لمبائی قدم h کو مساوات ۷ سے جاننا چاہتے ہیں۔ کیا ہوتا ہے؟ کیا قاعدہ ذوزنقہ اور مساوات ۱۳ استعمال کرنے سے مسئلہ حل ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۵.۵۲۵: $\int_0^4 x^{3/2} \, \mathrm{d}x$

سوال ۵.۵۲۶: $\int_0^1 x^{5/2} \, \mathrm{d}x$

اعدادی تکمل بذریعہ کمپیوٹر

جیسا پہلے بھی ذکر کیا گیا، بعض متکمل کے ضد تفرق کا کلیہ نہیں پایا جاتا یا بہت مشکل سے حاصل ہوتا ہے۔ اس طرز کے قطعی تکمل کی قیمت کو اعدادی تراکیب سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ سوال ۵.۵۲۷ تا سوال ۵.۵۳۰ کو کمپیوٹر کے ذریعہ اعدادی ترکیب سے حل کریں۔

سوال ۵.۵۲۷: $\int_0^1 \sqrt{1 + x^4} \, \mathrm{d}x$

سوال ۵.۵۲۸: $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$ تقسیم صفر سے بچنے کی خاطر آپ تکمل کو 0 کے بجائے بہت چھوٹے مثبت عدد مثلاً 10^{-6} سے شروع کریں گے۔

سوال ۵.۵۲۹: $\int_0^{\pi/2} \sin(x^2) \, \mathrm{d}x$ انکسار شعاع سے منسلک تکمل۔

سوال ۵.۵۳۰: $\int_0^{\pi/2} 40\sqrt{1 - 0.64 \cos^2 t} \, \mathrm{d}t$ ترخیم $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ کی لمبائی۔

باب ۶

تکمل کا استعمال

مجموعی جائزہ ہم بہت سی معلومات کو تکمل کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں: منحنیات کے بیچ رقبہ، ٹھوس اجسام کے حجم اور سطحی رقبے، منحنیات کی لمبائیاں، زیر زمین موجود پانی کی نکاسی کے لیے درکار کام، سیلاب روک دروازوں پر اثر انداز قوتیں، ٹھوس اجسام کے نقطہ توازن کے محدد۔ ان تمام کو ہم بند وقفوں پر استمراری تفاعل کے ریمان مجموعوں کی حدوں یعنی تکمل سے ظاہر کر کے ان حدوں کو احصاء سے حل کرتے ہیں۔

عملی استعمال میں ان قطعی تکملات کو ایک مخصوص طرز سے لکھا جاتا ہے جس کو سیکھ کر بوقت ضرورت نئے تکمل لکھے جا سکتے ہیں۔ مخصوص عملی استعمال پر پہلے غور کیا جائے گا۔ اس کے بعد تکمل لکھنے کے طرز پر اور نئے تکمل لکھنے پر غور کیا جائے گا۔

۶.۱ منحنیات کے بیچ رقبہ

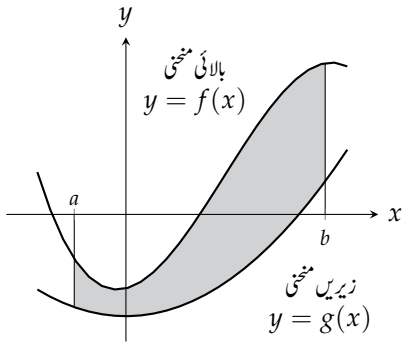
محددی مستوی میں خطے کی سرحدوں کو ظاہر کرنے والے تفاعل کے تکمل سے خطے کے رقبہ کا حصول اس حصے میں دکھایا جائے گا۔

بنیادی کلیہ بطور ریمان مجموعوں کی حد

فرض کریں ایک خطہ کی بالائی سرحد منحنی $y = f(x)$ اور زیریں سرحد منحنی $y = g(x)$ ہے جبکہ اس کی بائیں اور دائیں سرحد بالترتیب خط $x = a$ اور $x = b$ ہیں (شکل ۶.۱)۔ عین ممکن ہے کہ اس خطے کا رقبہ جیومیٹری سے حاصل کرنا ممکن ہو البتہ اختیاری استمراری f اور g کی صورت میں ہم عموماً رقبے کو تکمل سے حاصل کرتے ہیں۔

تکمل کی صورت دیکھنے کی خاطر ہم وقفہ $[a, b]$ پر خانہ بندی $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ کے تحت خطہ کو n انتصابی مستطیلوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل ۶.۲) جہاں k واں مستطیل کا رقبہ درج ذیل ہو گا (شکل ۶.۳)۔

$$\Delta S_k = \text{قد} \times \text{چوڑائی} = [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k$$



شکل ۶.۱: منحنیات $y = f(x)$، $y = g(x)$ اور لکیر $x = a$، $x = b$ کے بیچ خطہ۔

۸۳۰۶ اس کے بعد ہم خطہ کے رقبے کو تخمیناً ان n مستطیل رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k \qquad \text{ریمان مجموعہ}$$

۸۳۰۷ چونکہ f اور g استمراری ہیں لہٰذا $\|P\| \to 0$ کرنے سے دائیں ہاتھ مجموعے کی حد $\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$ ہو گی۔(ذیل دیکھیں۔)

$$S = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

۸۳۰۸ تعریف: اگر پورے $[a, b]$ پر f اور g استمراری ہوں اور $f(x) \geq g(x)$ ہو تب a تا b منحنیات $f(x)$ اور $g(x)$ کے بیچ رقبہ
۸۳۰۹ a تا b متکمل $[f - g]$ کا (درج ذیل) تکمل ہو گا۔

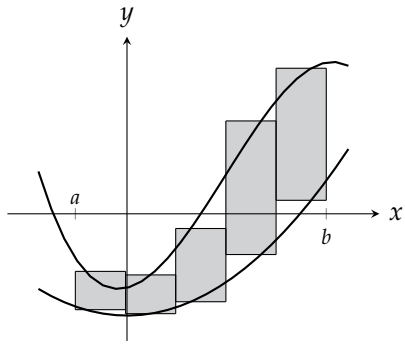
$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x \tag{۱}$$

۸۳۱۰ □

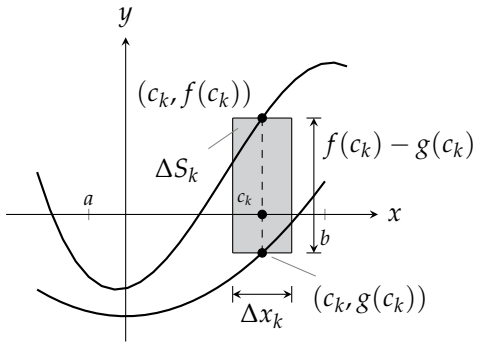
۸۳۱۱ مساوات ۱ کو استعمال کرنے کے لیے ہم درج ذیل اقدام اٹھاتے ہیں۔

۸۳۱۲ دو منحنیات کے بیچ رقبے کی تلاش

۸۳۱۳ ۱. منحنیات ترسیم کر کے ایک نمائندہ مستطیل بنائیں۔اس سے معلوم ہو گا کہ کونسی منحنی بالائی f اور کونسی زیریں g ہے۔اس سے تکمل کی حد تعین کرنے میں
۸۳۱۴ بھی مدد ملتی ہے۔



شکل ۶.۲: ہم خطہ کو تخمیناً محور x پر عمودی مستطیلوں کے برابر لیتے ہیں۔



شکل ۶.۳: k واں مستطیل کا قد $f(c_k) - g(c_k)$ اور اس کی چوڑائی Δx_k ہے لہٰذا اس کا رقبہ $\Delta S_k = (f(c_k) - g(c_k))\Delta x_k$ ہوگا۔

۲. تکمل کی حد تلاش کریں۔

۳. متکمل $f(x) - g(x)$ کا کلیہ لکھیں۔ اگر ممکن ہو اس کی سادہ صورت حاصل کریں۔

۴. متکمل $[f(x) - g(x)]$ کا تکمل a تا b حاصل کریں۔ قطعی تکمل سے حاصل عدد درکار رقبہ ہوگا۔

مثال ۶.۱: منحنیات $y = \sec^2 x$ اور $y = \sin x$ کے بیچ 0 تا $\frac{\pi}{4}$ رقبہ تلاش کریں۔

حل

پہلا قدم: ہم منحنیات ترسیم کر کے ایک نمائندہ مستطیل بناتے ہیں (شکل ۶.۴)۔ بالائی قوس $f(x) = \sec^2 x$ کی منحنی ہے جبکہ زیریں قوس $g(x) = \sin x$ کی منحنی ہے۔

دوسرا قدم: تکمل کی حدیں $a = 0$ اور $b = \frac{\pi}{4}$ دی گئی ہیں۔

تیسرا قدم: $f(x) - g(x) = \sec^x - \sin x$

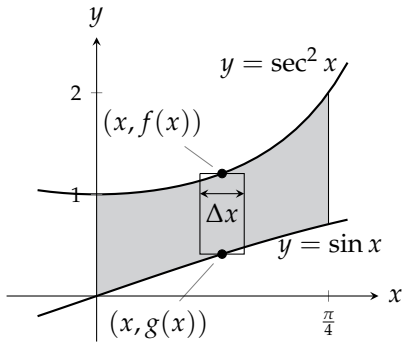
چوتھا قدم:

$$S = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - \sin x)\,\mathrm{d}x = [\tan x + \cos x]_0^{\pi/4} = \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] - [0 + 1] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

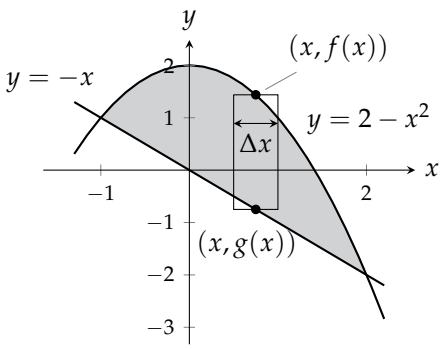
□

باہمی متقاطع منحنیات

جب ایک دوسرے کو قطع کرنے والی منحنیات کے بیچ خطہ واقع ہو تب نقاط تقاطع سے تکمل کی حدیں حاصل ہوں گی۔



شکل ۶.۴: خطہ برائے مثال ۶.۱



شکل ۶.۵: خطہ برائے مثال ۶.۲

۸۳۲۸ مثال ۶.۲: قطع مکافی $y = 2 - x^2$ اور لکیر $y = -x$ کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

۸۳۲۹ **حل**

۸۳۳۰ **پہلا قدم:** منحنیات ترسیم کرتے ہوئے نمائندہ مستطیل بنائیں (شکل ۶.۵)۔ بالائی اور زیریں منحنیات کی نشاندہی کریں۔ ہم $f(x) = 2 - x^2$

۸۳۳۱ اور $g(x) = -x$ لیتے ہیں۔ نقاط تقاطع کے x محدد تکمل کی حدیں ہوں گی۔

۸۳۳۲ **دوسرا قدم:** تکمل کی حدیں جاننے کے لیے ہم $y = 2 - x^2$ اور $y = -x$ کو ایک ساتھ x کے لیے حل کرتے ہیں۔

$f(x)$ اور $g(x)$ کو برابر ٹھہرائیں	$2 - x^2 = -x$
ایک جانب منتقلی	$x^2 - x - 2 = 0$
تجزی	$(x+1)(x-2) = 0$
حل	$x = -1, \quad x = 2$

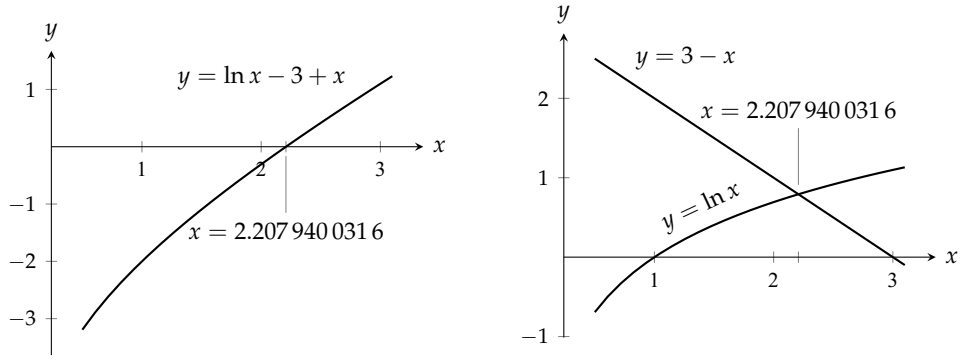
۸۳۳۳ خطہ $x = -1$ اور $x = 2$ کے بیچ واقع ہے۔

۸۳۳۴ **تیسرا قدم:** $f(x) - g(x) = (2 - x^2) - (-x) = 2 + x - x^2$

۸۳۳۵ **چوتھا قدم:**

$$\begin{aligned} S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\,\mathrm{d}x &= \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\ &= \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \\ &= 6 + \frac{3}{2} - \frac{9}{3} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

۸۳۳۶ □



(ا) نقطہ تقاطع (ب) جذر

شکل ۶.۶: تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کے حل کی تلاش۔

فنیات دو ترسیمات کا تقاطع

تکمل کے حصول میں بعض اوقات تکمل کی حد کی تلاش سب سے زیادہ تنگ کرنے والا عمل ثابت ہوتا ہے۔ انہیں معلوم کرنے کے لیے ہمیں یا تو ایک تفاعل کے جذر تلاش کرنے ہوتے ہیں اور یا دو منحنیات کے نقاط تقاطع۔

مساوات $f(x) = g(x)$ حل کرنے کے لیے ہم $y = f(x)$ اور $y = g(x)$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کرتے ہوئے نقاط تقاطع دیکھ کر معلوم کر سکتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہم مساوات $f(x) - g(x) = 0$ کا جذر بھی کمپیوٹر کی مدد سے تلاش کر سکتے ہیں۔ ان دونوں تراکیب کو درج ذیل پر لاگو کر کے دیکھیں (شکل ۶.۶)۔

$$f(x) = \ln x, \quad g(x) = 3 - x$$

ایسی سرحدیں جن کے کلیات تبدیل ہوتے ہوں

اگر سرحد کا کلیہ ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر تبدیل ہوتا ہو تب ہم خطہ کو مطابقتی ذیلی خطوں میں تقسیم کر کے ہر ذیلی خطے پر انفرادی طور مساوات اکا اطلاق کرتے ہیں۔

مثال ۶.۳: ربع اول میں $y = \sqrt{x}$ کے نیچے اور $y = x - 2$ کے اوپر خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

حل

پہلا قدم: ترسیم (شکل ۶.۷) سے ہم دیکھتے ہیں کہ خطے کی بالائی سرحد $f(x) = \sqrt{x}$ ہے جبکہ $0 \leq x \leq 2$ پر اس کی نچلی سرحد $g(x) = 0$ اور $2 \leq x \leq 4$ پر نچلی سرحد $g(x) = x - 2$ ہے (نقطہ $x = 2$ پر $g(x)$ کے دونوں کلیات ایک سے ہیں)۔ ہم $x = 2$ پر خطہ کو دو ذیلی حصوں A اور B میں تقسیم کر کے دونوں ذیلی خطوں کے لیے نمائندہ مستطیل بناتے ہیں۔

۸۳۵۲ **دوسرا قدم:** خطہ A میں تکمل کی حدیں $a = 0$ اور $b = 2$ ہیں۔ خطہ B کی بائیں حد $a = 2$ ہے۔ اس کی دائیں حد جاننے کے لیے ہم
۸۳۵۳ مساوات $y = \sqrt{x}$ اور $y = x - 2$ کو ایک ساتھ حل کرتے ہیں۔

$\sqrt{x} = x - 2$	$f(x)$ اور $g(x)$ کو برابر ٹھہرائیں
$x = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$	مربع لیں
$x^2 - 5x + 4 = 0$	ایک جانب منتقلی
$(x-1)(x-4) = 0$	تجزی
$x = 1, \quad x = 4$	حل

۸۳۵۴ صرف $x = 4$ مساوات $\sqrt{x} = x - 2$ کو مطمئن کرتا ہے جبکہ مربع لینے کی وجہ سے اضافی حل $x = 1$ پیدا ہوا ہے جس کو رد کیا جاتا ہے۔
۸۳۵۵ یوں دائیں حد $b = 4$ ہے۔
۸۳۵۶ **تیسرا قدم:**

$$
\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}, & 0 \le x \le 2 \\
f(x) - g(x) &= \sqrt{x} - (x-2) = \sqrt{x} - x + 2, & 2 \le x \le 4
\end{aligned}
$$

۸۳۵۷ **چوتھا قدم:** ہم خطہ A اور B کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4 \\
&= \frac{2}{3}(2)^{3/2} - 0 + \left(\frac{2}{3}(4)^{3/2} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3}(2)^{3/2} - 2 + 4\right) \\
&= \frac{2}{3}(8) - 2 = \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

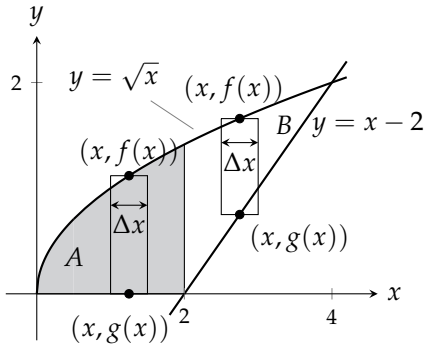
۸۳۵۸ □

۸۳۵۹ ## تکمل بلحاظ y

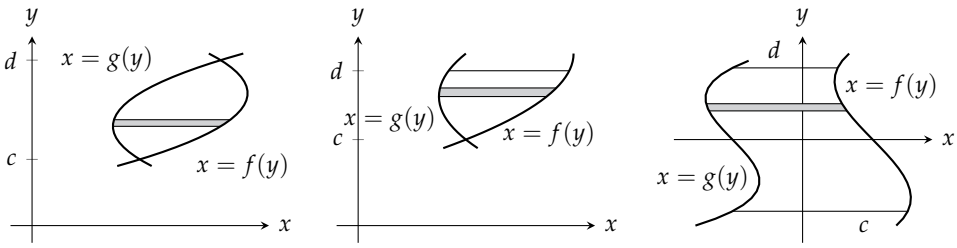
۸۳۶۰ اگر سرحد کی مساواتیں y کے تفاعل ہوں تب تخمینی مستطیل کو انتصابی کے بجائے افقی بنایا جاتا ہے اور (ذیل دیکھیں) بنیادی کلیہ میں x کی جگہ y پایا جائے گا
۸۳۶۱ (شکل ۶.۸)۔

$$
S = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,\mathrm{d}y \tag{۲}
$$

۸۳۶۲



شکل ۶.۷: خطہ برائے مثال ۶.۳



شکل ۶.۸: ان اشکال میں دائیں سرحد f اور بائیں سرحد g ہو گی لہٰذا $f(y) - g(y)$ غیر منفی ہو گا۔

۸۳۶۳ مثال ۶.۴: درج بالا مثال ۶.۳ کو اس مرتبہ مساوات ۲ کی مدد سے حل کریں۔

۸۳۶۴ **حل**

۸۳۶۵ **پہلا قدم:** ہم خطہ ترسیم کر کے نمائندہ افقی مستطیل بناتے ہیں (شکل ۶.۸)۔ خطے کی دائیں سرحد لکیر $x = y + 2$ ہے لہٰذا $f(y) = y + 2$ ہو گا۔ خطے کی بائیں سرحد $x = y^2$ ہے لہٰذا $g(y) = y^2$ ہو گا۔

۸۳۶۷ **دوسرا قدم:** تکمل کی زیریں حد $y = 0$ ہے۔ تکمل کی بالائی حد جاننے کے لیے ہم $x = y + 2$ اور $x = y^2$ کو y کے لیے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y + 2 &= y^2 && f \text{ کو } g \text{ کے برابر ٹھہرائیں} \\ y^2 - y - 2 &= 0 && \text{ایک ہاتھ منتقلی} \\ (y+1)(y-2) &= 0 && \text{تجزی} \\ y = -1, \quad y &= 2 && \text{حل} \end{aligned}$$

۸۳۶۹ تکمل کی بالائی حد $y = 2$ ہے (چونکہ $y = -1$ افقی محور سے نیچے تفاعل کا نقطہ تقاطع دیتا ہے)۔

۸۳۷۰ **تیسرا قدم:**

$$f(y) - g(y) = y + 2 - y^2 = 2 + y - y^2$$

۸۳۷۱ **چوتھا قدم:**

$$\begin{aligned} S = \int_a^b [f(y) - g(y)]\,\mathrm{d}y &= \int_0^2 [2 + y - y^2]\,\mathrm{d}y \\ &= \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 \\ &= 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

۸۳۷۲ یہ وہی جواب ہے جو مثال ۶.۳ میں حاصل کیا گیا۔ مثال ۶.۳ میں دو تکمل حل کرنے کی ضرورت پیش آئی جبکہ یہاں ایک تکمل سے رقبہ تلاش کرنا ممکن تھا۔ □

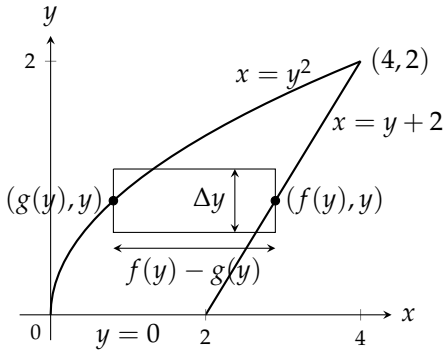
۸۳۷۳ **تکمل کے ساتھ جیومیٹریائی کلیات کا استعمال**

۸۳۷۴ تکمل اور جیومیٹریائی کلیات کو ملا کر رقبہ نسبتاً زیادہ جلد حاصل ہوتا ہے۔

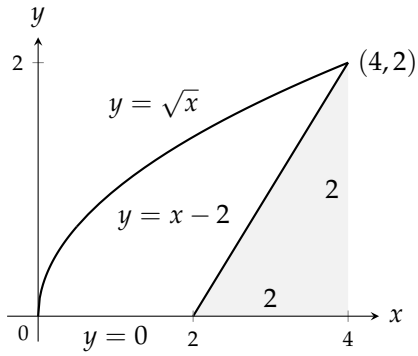
۸۳۷۵ مثال ۶.۵: مزید ایک مرتبہ مثال ۶.۳ میں دیے گئے خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

۸۳۷۶ **حل**

۸۳۷۷ ہم محور x اور $y = \sqrt{x},\ 0 \le x \le 4$ کے بیچ رقبہ سے قاعدہ 2 اور قد 2 کے تکون کا رقبہ منفی کرتے ہوئے درکار خطے کا رقبہ تلاش کر سکتے



شکل ۶.۹: خطہ برائے مثال ۶.۴



شکل ۶.۱۰: بالائی منحنی کے نیچے خطہ سے تکون منفی کرنے سے رقبہ حاصل ہوگا۔

۸۴۷۸ ہیں۔

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(2)(2) \\
&= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^4 - 2 \\
&= \frac{2}{3}(8) - 0 - 2 = \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

۸۴۷۹ □

۸۴۸۰ گزشتہ تین مثالوں میں آپ نے دیکھا کہ دو منحنیات کے بیچ رقبہ بعض اوقات x کے بجائے y کے ساتھ تکمل لے کر نسبتاً آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ اسی
۸۴۸۱ طرح بعض اوقات تکمل اور جیومیٹری کے کلیات کو ملا کر جلد جواب حاصل ہوتا ہے۔ یوں تکمل لکھنے سے پہلے مسئلے پر غور کرنا بہتر ہوگا۔

۸۴۸۲ سوالات

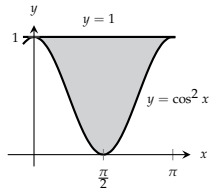
۸۴۸۳ سوال ۶.۱ تا سوال ۶.۸ میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

۸۴۸۴ سوال ۶.۱: سایہ دار خطہ شکل ۶.۱۱ جہاں سرحد $y = 1$ اور $y = \cos^2 x$ ہیں۔

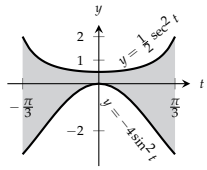
۸۴۸۵ سوال ۶.۲: سایہ دار خطہ شکل ۶.۱۲ جہاں سرحد $y = \frac{1}{2}\sec^2 t$ ، $y = -4\sin^2 t$ ، $y = -\frac{\pi}{3}$ اور $y = \frac{\pi}{3}$ ہیں۔

۸۴۸۶ سوال ۶.۳: سایہ دار خطہ شکل ۶.۱۳ جہاں سرحد $x = y^3$ اور $x = y^2$ ہیں۔

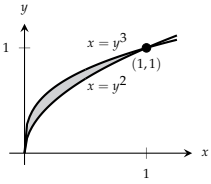
۸۴۸۷ سوال ۶.۴: سایہ دار خطہ شکل ۶.۱۴ جہاں سرحد $x = 12y^2 - 12y^3$ اور $x = 2y^2 - 2y$ ہیں۔



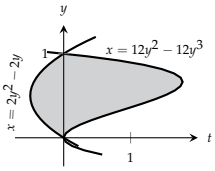
شکل ۶.۱۱



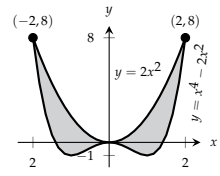
شکل ۶.۱۲



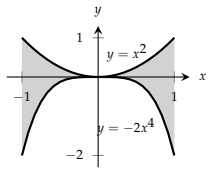
شکل ۶.۱۳



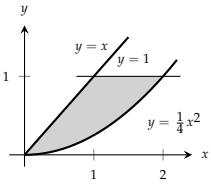
شکل ۶.۱۴



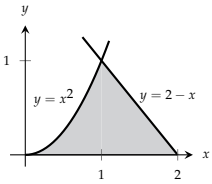
شکل ۶.۱۵



شکل ۶.۱۶



شکل ۶.۱۷



شکل ۶.۱۸

۸۳۸۸ سوال ۶.۵: سایہ دار خطہ شکل ۶.۱۵ جہاں سرحد $y = 2x^2$ اور $y = x^4 - 2x^2$ ہیں۔

۸۳۸۹ سوال ۶.۶: سایہ دار خطہ شکل ۶.۱۶ جہاں سرحد $y = x^2$ ، $y = -2x^4$ ، $x = -1$ اور $x = 1$ ہیں۔

۸۳۹۰ سوال ۶.۷: سایہ دار خطہ شکل ۶.۱۷ جہاں سرحد $y = 1$ ، $y = x$ اور $y = \frac{x^2}{4}$ ہیں۔

۸۳۹۱ سوال ۶.۸: سایہ دار خطہ شکل ۶.۱۸ جہاں سرحد $y = x^2$ ، $y = 2 - x$ اور $y = 0$ ہیں۔

۸۳۹۲

۸۳۹۳ سوال ۶.۹ تا سوال ۶.۱۲ میں کل سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

۸۳۹۴ سوال ۶.۹: سایہ دار رقبہ شکل ۶.۱۹ جہاں سرحد $y = x^2 - 4$ ، $y = -x^2 - 2x$ اور $x = -3$ ہیں۔

۸۳۹۵ سوال ۶.۱۰: سایہ دار رقبہ شکل ۶.۲۰ جہاں سرحد $y = -x^2 + 3x$ اور $y = 2x^3 - x^2 - 5x$ ہیں۔

۸۳۹۶ سوال ۶.۱۱: سایہ دار رقبہ شکل ۶.۲۱ جہاں سرحد $y = 4 - x^2$ ، $y = 2 - x$ ، $x = -2$ اور $x = 3$ ہیں۔

۸۳۹۷ سوال ۶.۱۲: سایہ دار رقبہ شکل ۶.۲۲ جہاں سرحد $y = \frac{x^3}{3} - x$ ، $y = \frac{x}{3}$ اور $x = 3$ ہیں۔

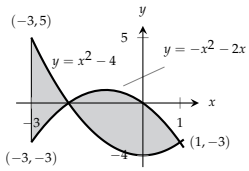
۸۳۹۸

۸۳۹۹ سوال ۶.۱۳ تا سوال ۶.۲۲ میں محیط خطے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔ خطے کا رقبہ دریافت کریں۔

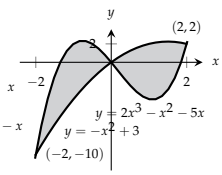
۸۵۰۰ سوال ۶.۱۳: $y = x^2 - 2, \quad y = 2$

۸۵۰۱ سوال ۶.۱۴: $y = 2x - x^2, \quad y = -3$

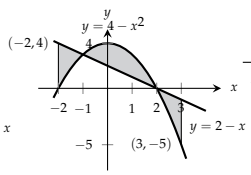
۸۵۰۲ سوال ۶.۱۵: $y = x^4, \quad y = 8x$



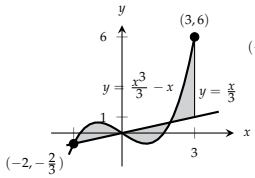
شکل ۶.۱۹



شکل ۶.۲۰



شکل ۶.۲۱



شکل ۶.۲۲

۸۵۰۳ سوال ۶.۱۶: $y = x^2 - 2x, \quad y = x$

۸۵۰۴ سوال ۶.۱۷: $y = x^2, \quad y = -x^2 + 4x$

۸۵۰۵ سوال ۶.۱۸: $y = 7 - 2x^2, \quad y = x^2 + 4$

۸۵۰۶ سوال ۶.۱۹: $y = x^4 - 4x^2 + 4, \quad y = x^2$

۸۵۰۷ سوال ۶.۲۰: $y = x\sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0, \quad y = 0$

۸۵۰۸ سوال ۶.۲۱: $y = \sqrt{|x|}, \quad 5y = x + 6$ کتنے نقاط تقاطع پائے جاتے ہیں؟

۸۵۰۹ سوال ۶.۲۲: $y = \left|x^2 - 4\right|, \quad y = \frac{x^2}{2} + 4$

۸۵۱۰

۸۵۱۱ سوال ۶.۲۳ تا سوال ۶.۳۰ میں دی گئی منحنیات اور لکیروں کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

۸۵۱۲ سوال ۶.۲۳: $x = 2y^2, \quad x = 0, \quad y = 3$

۸۵۱۳ سوال ۶.۲۴: $x = y^2, \quad x = y + 2$

۸۵۱۴ سوال ۶.۲۵: $y^2 - 4x = 4, \quad 4x - y = 16$

۸۵۱۵ سوال ۶.۲۶: $x - y^2 = 0, \quad x + 2y^2 = 3$

۸۵۱۶ سوال ۶.۲۷: $x + y^2 = 0, \quad x + 3y^2 = 2$

۸۵۱۷ سوال ۶.۲۸: $x - y^{2/3} = 0, \quad x + y^4 = 2$

۸۵۱۸ سوال ۶.۲۹: $x = y^2 - 1, \quad x = |y|\sqrt{1 - y^2}$

۸۵۱۹ سوال ۶.۳۰: $x = y^3 - y^2, \quad x = 2y$

۸۵۲۰

۸۵۲۱ سوال ۶.۳۱ تا سوال ۶.۳۴ میں محیط رقبہ تلاش کریں۔ رقبے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔

۸۵۲۲ سوال ۶.۳۱: $4x^2 + y = 4, \quad x^4 - y = 1$

۸۵۲۳ سوال ۶.۳۲: $x^3 - y = 0, \quad 3x^2 - y = 4$

۸۵۲۴ سوال ۶.۳۳: $x + 4y^2 = 4 \quad x + y^4 = 1, \quad x \geq 0$

۸۵۲۵ سوال ۶.۳۴: $x + y^2 = 3, \quad 4x + y^2 = 0$

۸۵۲۶

۸۵۲۷ سوال ۶.۳۵ تا سوال ۶.۴۲ میں محیط رقبے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔ رقبہ معلوم کریں۔

۸۵۲۸ سوال ۶.۳۵: $y = 2\sin x, \quad y = \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

۸۵۲۹ سوال ۶.۳۶: $y = 8\cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

۸۵۳۰ سوال ۶.۳۷: $y = \cos(\frac{\pi x}{2}), \quad y = 1 - x^2$

۸۵۳۱ سوال ۶.۳۸: $y = \sin(\frac{\pi x}{2}), \quad y = x$

۸۵۳۲ سوال ۶.۳۹: $y = \sec^2 x, \quad y = \tan^2 x, \quad x = -\frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{\pi}{4}$

۸۵۳۳ سوال ۶.۴۰: $x = \tan^2 y, \quad x = -\tan^2 y, \quad -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$

۸۵۳۴ سوال ۶.۴۱: $x = 3\sin y\sqrt{\cos y}, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

۸۵۳۵ سوال ۶.۴۲: $y = \sec^2(\frac{\pi x}{3}), \quad y = x^{1/3}, \quad -1 \leq x \leq 1$

۸۵۳۶

۸۵۳۷ سوال ۶.۴۳: ہوائی جہاز کے پنکھے کی طرح کا خطہ منحنیات $x - y^3 = 0$ اور $x - y = 0$ گھیرتی ہیں۔ اس خطے کا رقبہ دریافت کریں۔

۸۵۳۸ سوال ۶.۴۴: پنکھا نما خطہ $x - y^{1/3} = 0$ اور $x - y^{1/5} = 0$ کے بیچ واقع ہے۔ اس خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

۸۵۳۹ سوال ۶.۴۵: ربع اول میں لکیر $y = x$، لکیر $x = 2$، منحنی $y = \frac{1}{x^2}$، اور محور x کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

۸۵۴۰ سوال ۶.۴۶: ربع اول میں بائیں جانب محور y اور دائیں جانب منحنیات $y = \sin x$ اور $y = \cos x$ تکون نما خطہ گھیرتے ہیں۔ اس کا رقبہ
۸۵۴۱ معلوم کریں۔

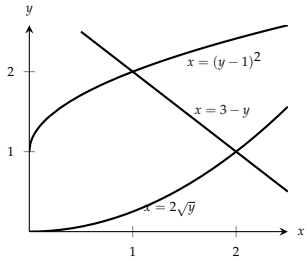
۸۵۴۲ سوال ۶.۴۷: بالائی جانب لکیر $y = 4$ اور نیچے سے قطع مکافی $y = x^2$ میں محیط رقبہ کو افقی خط $y = c$ دو برابر ذیلی خطوں میں تقسیم کرتا
۸۵۴۳ ہے۔

۸۵۴۴ ا. خطے کا خاکہ کھینچیں اور اس پر افقی لکیر $y = c$ اندازاً درست مقام پر بنائیں۔ قطع مکافی اور افقی لکیر جن نقطوں پر متقاطع ہیں، ان نقطوں کو c کے روپ
۸۵۴۵ میں دریافت کر کے خاکے پر دکھائیں۔

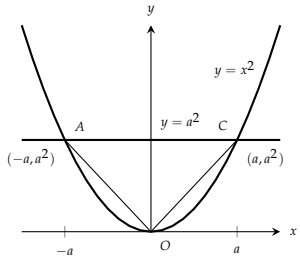
۸۵۴۶ ب. y کے لحاظ سے تکمل لے کر c کی قیمت معلوم کریں۔ (تکمل کی حد میں c پایا جائے گا۔)

۸۵۴۷ ج. x کے لحاظ سے تکمل لے کر c کی قیمت معلوم کریں۔ (اس مرتبہ c متکمل میں بھی پایا جائے گا۔)

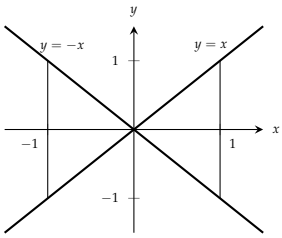
۸۵۴۸ سوال ۶.۴۸: منحنی $y = 3 - x^2$ اور لکیر $y = -1$ کے بیچ رقبہ (ا) x کے لحاظ سے، (ب) y کے لحاظ سے تکمل لے کر معلوم کریں۔



شکل ۶.۲۳: خطہ برائے سوال ۶.۵۰



شکل ۶.۲۴: خطہ برائے سوال ۶.۵۱



شکل ۶.۲۵: خطہ برائے سوال ۶.۵۳

۸۵۴۹ سوال ۶.۴۹: ربع اول میں بائیں جانب محور y، نیچے لکیر $y = \frac{x}{4}$، بالائی بائیں منحنی $y = 1 + \sqrt{x}$، اور بالائی دائیں منحنی $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$

۸۵۵۰ ایک رقبہ گھیرتے ہیں۔ رقبہ کو تلاش کریں۔

۸۵۵۱ سوال ۶.۵۰: ربع اول میں بائیں جانب محور y، نیچے لکیر $x = 2\sqrt{y}$، بالائی بائیں منحنی $x = (y-1)^2$، اور بالائی دائیں منحنی $x = 3 - y$

۸۵۵۲ ایک رقبہ گھیرتے ہیں۔ اس رقبہ کو تلاش کریں (شکل ۶.۲۳)۔

۸۵۵۳ سوال ۶.۵۱: قطع مکافی $y = x^2$ میں محصور تکون AOB شکل ۶.۲۴ میں دکھایا گیا ہے۔ تکون کا بالائی ضلع لکیر $y = a^2$ ہے۔ تکون اور

۸۵۵۴ قطع مکافی کے رقبوں کی نسبت کی حد $a \to 0$ کر کے تلاش کریں۔

۸۵۵۵ سوال ۶.۵۲: مثبت استمراری تفاعل f اور $a \leq x \leq b$ پر محور x کے بیچ رقبہ 4 ہے۔ منحنی $y = f(x)$ اور $y = 2f(x)$ کے

۸۵۵۶ بیچ $x = a$ تا $x = b$ رقبہ تلاش کریں۔

۸۵۵۷ سوال ۶.۵۳: درج ذیل میں سے کونسا تکمل شکل ۶.۲۵ میں دکھایا گیا رقبہ دیتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۸۵۵۸ ا. $\int_{-1}^{1}(x - (-x))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 2x\,\mathrm{d}x$

۸۵۵۹ ب. $\int_{-1}^{1}(-x - (x))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} -2x\,\mathrm{d}x$

۸۵۶۰ سوال ۶.۵۴: کیا استمراری تفاعل $y = f(x)$ اور $y = g(x)$ اور انتصابی لکیروں $x = a$ اور $x = b$ جہاں $a < b$ ہے کے بیچ

۸۵۶۱ رقبہ درج ذیل دیتا ہے؟ درست، کبھی کبھار درست، یا کبھی نہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$

۸۵۶۲ کمپیوٹر کا استعمال

۸۵۶۳ سوال ۶.۵۵ تا سوال ۶.۵۸ میں مستوی میں منحنیات کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔ جہاں منحنیات کے نقاط تقاطع تلاش کرنا دشوار ہو وہاں کمپیوٹر کا سہارا لیتے ہوئے

۸۵۶۴ درج ذیل اقدام سرانجام دیں۔

۸۵۶۵ ا. منحنیات کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے خطہ کی عمومی صورت دیکھیں اور نقاط تقاطع کی تعداد جانیں۔

ب. نقاط تقاطع کو اعدادی تراکیب سے تلاش کریں۔

ج. یکے بعد دیگرے نقاط تقاطع کی جوڑیوں کے درمیان $\left|f(x)-g(x)\right|$ کا تکمل حل کریں۔

د. جزو-ج میں تکمل کی حاصل قیمتوں کا مجموعہ لیں۔

سوال ۶.۵۵: $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{3},\quad g(x)=x-1$

سوال ۶.۵۶: $f(x)=\frac{x^4}{2}-3x^3+10,\quad g(x)=8-12x$

سوال ۶.۵۷: $f(x)=x+\sin(2x),\quad g(x)=x^3$

سوال ۶.۵۸: $f(x)=x^2\cos x,\quad g(x)=x^3-x$

۶.۲ ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش

قوسی سرحد کے خطوں کے رقبہ عمودی تراش سے بیلنی حجم معلوم کرنے کے لیے رقبہ عمودی تراش کو بیلن کے قد سے ضرب دیا جاتا ہے۔ اس طرز کے بیلنی حجم سے دیگر اشکال کے خطوں کا حجم تلاش کیا جا سکتا ہے۔

ٹکیاں

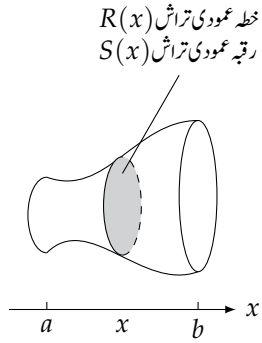
فرض کریں ہم شکل ۶.۲۶ میں دکھائے گئے ٹھوس جسم کا حجم دریافت کرنا چاہتے ہیں۔ بند وقفہ $[a,b]$ کے ہر نقطہ x پر جسم کی عمودی تراش خطہ $R(x)$ ہے جس کا رقبہ $S(x)$ ہے۔ یوں S متغیر x کا حقیقی قیمت تفاعل ہو گا۔ یہ x کا استراری تفاعل بھی ہو گا جس کو استعمال کرتے ہوئے ٹھوس جسم کے حجم کی تعریف پیش کی جا سکتی ہے، جو تکمل سے درج ذیل طریقے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

ہم محور x کے لحاظ سے وقفہ $[a,b]$ کی خانہ بندی کر کے جسم کو خانہ بندی کے نقاط پر محور x کے عمودی مستویات سے کتلوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں نقطہ x_{k-1} اور x_k پر مستویات کے بیچ k واں کتلے کا حجم تقریباً اس بیلن جتنا ہو گا جو ان مستویات کے بیچ واقع ہے اور جس کی عمودی تراش خطہ $R(x_k)$ ہے (شکل ۶.۲۷)۔ اس بیلن کا حجم درج ذیل ہو گا۔

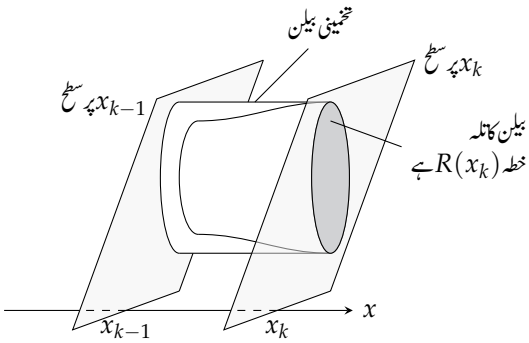
$$\begin{aligned} H_k &= \text{قد} \times \text{رقبہ تلہ} \\ &= S(x_k) \times (\text{فاصلہ بیچ } x_{k-1} \text{ اور } x_k \text{ کے}) \\ &= S(x_k)\Delta x_k \end{aligned}$$

اس طرح تمام چھوٹے بیلنوں کے حجم کا مجموعہ تخمیناً ٹھوس جسم کا حجم ہو گا۔ (ذیل دیکھیں۔)

$$\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x_k$$



شکل ۶.۲۶: عمودی تراش $R(x)$ کا رقبہ $S(x)$ متغیر x کا استمراری تفاعل ہونے کی صورت میں ہم ٹھوس جسم کا حجم $x = a$ تا $x = b$ تفاعل $S(x)$ کا تکمل لے کر حاصل کر سکتے ہیں۔



شکل ۶.۲۷: سطح x_{k-1} اور x_k کے بیچ تلا کو بڑا کر کے دکھایا گیا ہے اور ساتھ ہی تخمینی بیلن بھی دکھایا گیا ہے۔

۸۵۸۶ یہ وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل $S(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ جیسے جیسے $[a, b]$ کی خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب ہوتا جائے، ویسے
۸۵۸۷ ویسے یہ مجموعے اصل حجم کی بہتر سے بہتر عکاسی کریں گے۔ یوں ٹھوس جسم کے حجم کی تعریف ان مجموعوں کا تحدیدی تکمل ہو گا۔

۸۵۸۸ تعریف: ایسا ٹھوس جسم جس کا رقبہ عمودی تراش $S(x)$ قابل تکمل تفاعل ہو، اس کا $x = a$ سے $x = b$ تک حجم، تفاعل S کے $x = a$
۸۵۸۹ تا $x = b$ کے (درج ذیل) تکمل کے برابر ہو گا۔

$$H = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x \tag{۱}$$

۸۵۹۰ □

۸۵۹۱ مساوات ۱ استعمال کرنے کے لیے درج ذیل تین اقدامات کرنے ہوں گے۔

۸۵۹۲ ٹکیوں سے ٹھوس جسم کے حجم کی تلاش

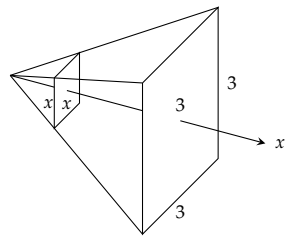
۸۵۹۳

۸۵۹۴ ۱. ٹھوس جسم اور اس کی نمائندہ عمودی تراش کا خاکہ کھینچیں۔

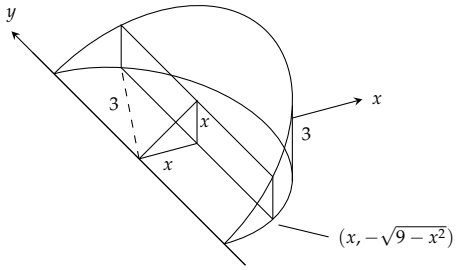
۸۵۹۵ ۲. رقبہ عمودی تراش $S(x)$ کا کلیہ اخذ کریں۔

۸۵۹۶ ۳. تکمل کی زیریں اور بالائی حد تلاش کریں۔

۸۵۹۷ ۴. حجم معلوم کرنے کی خاطر $S(x)$ کا تکمل حل کریں۔



شکل ۶.۲۸: ہرم (مثال ۶.۶)



شکل ۶.۲۹: قوسی پچر (مثال ۶.۷)

۸۵۹۸ **مثال ۶.۶:** ایک ہرم کا قد $3\,\mathrm{m}$ اور اس کے چوکور بنیاد کا ضلع $3\,\mathrm{m}$ ہے۔ ہرم کی چوٹی سے x میٹر نیچے ہرم کا رقبہ عمودی تراش چوکور ہو گا جس کا ضلع
۸۵۹۹ x میٹر ہو گا۔ اس ہرم کا حجم تلاش کریں۔

۸۶۰۰ **حل**

۸۶۰۱ **پہلا قدم:** خاکہ۔ ہم ہرم کی چوٹی کو مبدا پر رکھ کر ہرم کو محور x پر لیٹا ہوا بنا کر نمائندہ رقبہ عمودی تراش بناتے ہیں (شکل ۶.۲۸)۔

۸۶۰۲ **دوسرا قدم:** کلیہ برائے $S(x)$ ۔ چونکہ چوکور رقبہ عمودی تراش کا ضلع x میٹر ہے لہٰذا اس کا رقبہ عمودی تراش $S(x) = x^2$ ہو گا۔

۸۶۰۳ **تیسرا قدم:** تکمل کی حدیں۔ چوکور $x = 0$ تا $x = 3$ پائے جاتے ہیں لہٰذا $a = 0$ اور $b = 3$ ہوں گے۔

۸۶۰۴ **چوتھا قدم:** حجم۔

$$H = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = 9$$

۸۶۰۵ یوں ہرم کا حجم $9\,\mathrm{m}^3$ ہو گا۔ □

۸۶۰۶ **مثال ۶.۷:** رداس 3 کے بیلن کو دو مستوی سے کاٹ کر قوسی پچر بنایا جاتا ہے۔ ایک مستوی بیلن کے محور پر عمودی ہے جبکہ دوسرا مستوی پہلے مستوی کو
۸۶۰۷ بیلن کے وسط پر 45° کے زاویے پر قطع کرتا ہے۔ پچر کا حجم تلاش کریں۔

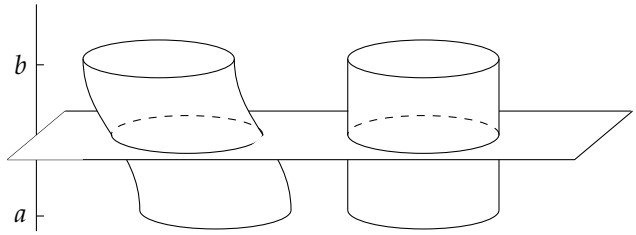
۸۶۰۸ **حل**

۸۶۰۹ **پہلا قدم:** خاکہ۔ ہم پچر اور نمائندہ عمودی تراش کا خاکہ بناتے ہیں (شکل ۶.۲۹)۔ عمودی تراش محور x کے عمودی ہے۔

۸۶۱۰ **دوسرا قدم:** کلیہ برائے $S(x)$ ۔ نقطہ x پر مستطیل عمودی تراش کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S(x) = (\text{قد})(\text{چوڑائی}) = (x)(2\sqrt{9-x^2}) = 2x\sqrt{9-x^2}$$

۸۶۱۱ **تیسرا قدم:** تکمل کی حدیں۔ مستطیل $x = 0$ تا $x = 3$ پائے جاتے ہیں۔



شکل ۶.۳۰: ان اجسام کے حجم برابر ہیں۔ آپ سکوں کو ایک دوسرے کے اوپر رکھ کر اس کو ثابت کر سکتے ہیں۔

۸۶۱۲ **چوتھا قدم:** حجم۔ درج ذیل میں $u = 9 - x^2$ لہٰذا $\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$ لے کر تکمل حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} H = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big|_0^3 \\ &= 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2} \\ &= 18 \end{aligned}$$

۸۶۱۳ □

۸۶۱۴ مثال ۶.۸: مسئلہ کوالیئرے[1]

۸۶۱۵ محور x پر واقع یکساں قد کے ایسے دو اجسام جن کے ہر x پر عمودی تراش کے رقبے برابر ہوں، ان کے حجم بھی برابر ہوں گے۔ یہ حقیقت مساوات اسے

۸۶۱۶ صاف ظاہر ہے چونکہ دونوں اجسام کے رقبہ عمودی تراش تفاعل $S(x)$ برابر ہیں (شکل ۶.۳۰)۔ □

۸۶۱۷ **سوالات**

۸۶۱۸ **رقبہ عمودی تراش**

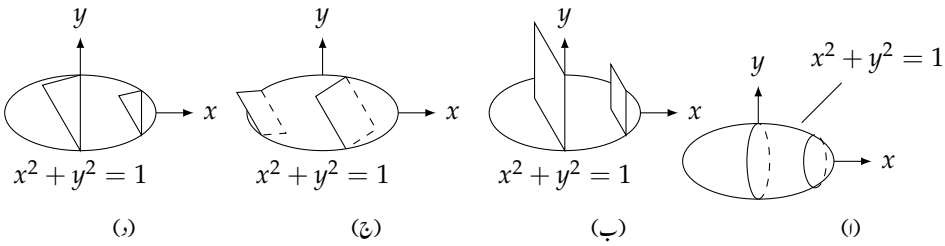
۸۶۱۹ سوال ۶.۵۹ اور سوال ۶.۶۰ میں محور x کے عمودی، ٹھوس جسم کے رقبہ عمودی تراش $S(x)$ کا کلیہ اخذ کریں۔

۸۶۲۰ سوال ۶.۵۹: ایک ٹھوس جسم $x = -1$ اور $x = 1$ پر محور x کے عمودی مستویات کے بیچ واقع ہے۔ محور x کے عمودی، جسم کے عمودی

۸۶۲۱ تراش رقبے، نصف دائرہ $y = -\sqrt{1-x^2}$ اور نصف دائرہ $y = \sqrt{1-x^2}$ کے بیچ واقع ہیں۔

۸۶۲۲ ا. عمودی تراش دائری اقراص ہیں جن کے قطر مستوی xy میں ہیں (شکل ۶.۳۱-ا)۔

[1] اطالوی ریاضی دان بوناونتورا کوالیئرے [1598-1647]



شکل ۶.۳۱: عمودی تراش برائے سوال ۶.۵۹

شکل ۶.۳۲: عمودی تراش برائے سوال ۶.۶۰

۸۲۲۳ ب. عمودی تراش چوکور ہیں جن کے قاعدے مستوی xy میں ہیں (شکل ۶.۳۱-ب)۔

۸۲۲۴ ج. عمودی تراش چوکور ہیں جن کے وتر مستوی xy میں ہیں۔ چوکور کے وتر کی لمبائی چوکور کے ضلع کے $\sqrt{2}$ گنا ہوتی ہے (شکل ۶.۳۱-ج)۔

۸۲۲۵ د. عمودی تراش مساوی الاضلاع مثلث ہیں جن کے قاعدے مستوی xy میں ہیں (شکل ۶.۳۱-د)۔

۸۲۲۶

۸۲۲۷ سوال ۶.۶۰: ایک ٹھوس جسم $x = 0$ اور $x = 4$ پر محور x کے عمودی مستویات کے بیچ واقع ہے۔ جسم کے رقبہ عمودی تراش محور x کے
۸۲۲۸ عمودی، قطع مکافی $y = -\sqrt{x}$ اور قطع مکافی $y = \sqrt{x}$ کے بیچ واقع ہیں۔

۸۲۲۹ ا. عمودی تراش دائری اقراص ہیں جن کے قطر مستوی xy میں ہیں (شکل ۶.۳۲-ا)۔

۸۲۳۰ ب. عمودی تراش چوکور ہیں جن کے قاعدے مستوی xy میں ہیں (شکل ۶.۶۰-ب)۔

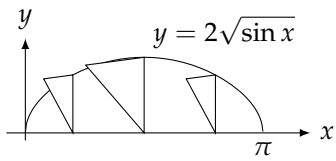
۸۲۳۱ ج. عمودی تراش چوکور ہیں جن کے وتر مستوی xy میں ہیں۔

۸۲۳۲ د. عمودی تراش مساوی الاضلاع مثلث ہیں جن کے قاعدے مستوی xy میں ہیں۔

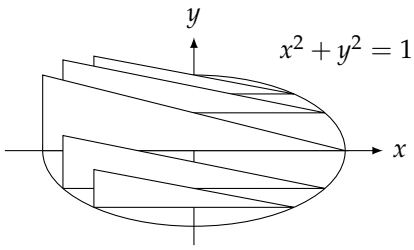
۸۲۳۳ ٹکیوں سے حجم کی تلاش

۸۲۳۴ سوال ۶.۶۱ تا سوال ۶.۷۰ میں دیے گئے ٹھوس اجسام کے حجم تلاش کریں۔

۸۲۳۵ سوال ۶.۶۱: ایک ٹھوس جسم $x = 0$ اور $x = 4$ پر محور x کے عمودی مستویات کے بیچ واقع ہے۔ جسم کی عمودی تراش کی صورت چوکور ہے جو



شکل ۶.۳۳: عمودی تراش (سوال ۶.۶۵)



شکل ۶.۳۴: عمودی تراش (سوال ۶.۶۸)

محور x کے عمودی ہیں اور جن کے وتر قطع مکافی $y = -\sqrt{x}$ سے قطع مکافی $y = \sqrt{x}$ تک ہیں۔

سوال ۶.۶۲: ایک ٹھوس جسم $x = -1$ اور $x = 1$ پر محور x کے عمودی مستویات کے بیچ واقع ہے۔ جسم کی عمودی تراش محور x کے عمودی ہیں جن کے قطر دائری اقراص ہیں جو قطع مکافی $y = x^2$ سے قطع مکافی $y = 2 - x^2$ تک ہیں۔

سوال ۶.۶۳: ایک ٹھوس جسم $x = -1$ اور $x = 1$ پر محور x کے عمودی مستویات کے بیچ واقع ہے۔ جسم کی چوکور عمودی تراش محور x کے عمودی ہیں جن کے قاعدوں کے کنارے نصف دائرہ $y = -\sqrt{1 - x^2}$ سے نصف دائرہ $y = \sqrt{1 - x^2}$ تک ہیں۔

سوال ۶.۶۴: ایک ٹھوس جسم $x = -1$ اور $x = 1$ پر محور x کے عمودی مستویات کے بیچ واقع ہے۔ جسم کی چوکور عمودی تراش محور x کے عمودی ہیں جن کے وتر نصف دائرہ $y = -\sqrt{1 - x^2}$ سے نصف دائرہ $y = \sqrt{1 - x^2}$ تک ہیں۔ چوکور کے وتر کی لمبائی چوکور کے ضلع کے $\sqrt{2}$ گنا ہوتی ہے۔

سوال ۶.۶۵: ایک ٹھوس جسم کا قاعدہ منحنی $y = 2\sqrt{\sin x}$ اور محور x پر وقفہ $[0, \pi]$ کے بیچ واقع ہے۔ درج ذیل عمودی تراش محور x کے عمودی ہیں۔

ا. مساوی الاضلاع مثلث جن کے قاعدے محور x سے منحنی تک ہیں (شکل ۶.۳۳)۔

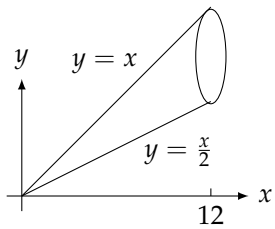
ب. انتصابی چوکور جن کے قاعدے محور x سے منحنی تک ہیں۔

سوال ۶.۶۶: ایک ٹھوس جسم $x = -\frac{\pi}{3}$ اور $x = \frac{\pi}{3}$ پر محور x کے عمودی مستویات کے بیچ واقع ہے۔ جسم کی عمودی تراش محور x کے عمودی ہیں جن کے خواص درج ذیل ہیں۔

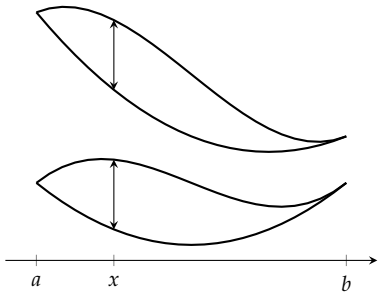
ا. دائری اقراص جن کے قطر $y = \tan x$ سے $y = \sec x$ تک ہیں۔

ب. انتصابی چوکور جن کے قاعدے $y = \tan x$ سے $y = \sec x$ تک ہیں۔

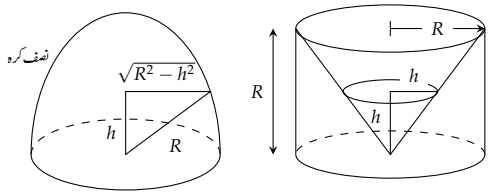
سوال ۶.۶۷: ایک ٹھوس جسم $y = 0$ اور $y = 2$ پر محور y کے عمودی مستویات کے بیچ واقع ہے۔ جسم کی دائری عمودی تراش محور y کے عمودی ہیں جن کے قطر محور y سے قطع مکافی $x = \sqrt{5}y^2$ تک ہیں۔



شکل ۶.۳۵: عمودی تراش (سوال ۶.۷۰)



شکل ۶.۳۶: وقفہ $[a, b]$ پر کسی بھی x پر دونوں خطوں کی چوڑائی ایک دوسرے جتنی ہے (مسئلہ کوالیئرے)۔



شکل ۶.۳۷: کرہ اور بیلن دونوں میں سے مخروط منفی کر کے دونوں صورتوں میں برابر حجم حاصل ہوتا ہے (سوال ۶.۷۲)۔

سوال ۶.۶۸: ایک ٹھوس جسم کا قاعدہ قرص $x^2 + y^2 \leq 1$ ہے۔ عمودی تراش $y = -1$ اور $y = 1$ کے بیچ محور y کے عمودی ہیں جو مساوی الساقین مثلث ہیں جن کا ایک ضلع قرص میں واقع ہے (شکل ۶.۳۴)۔

مسئلہ کوالیئرے

سوال ۶.۶۹: بلدار ٹھوس جسم

ایک چوکور جس کا ضلع s ہے لکیر L کے عمودی مستوی میں واقع ہے۔ چوکور کا ایک راس L پر واقع ہے۔ یہ چوکور L پر h فاصلہ طے کرنے کے دوران L کے گرد ایک چکر کاٹ کر پیچ دار ستون پیدا کرتا ہے جس کا رقبہ عمودی تراش چوکور ہو گا۔

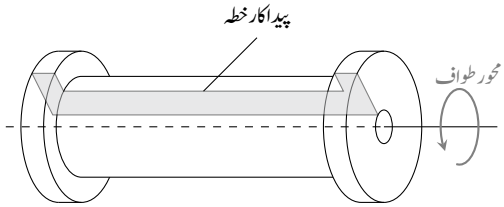
ا. پیچ دار ستون کا حجم تلاش کریں۔

ب. اگر چوکور ایک کے بجائے دو چکر کاٹتا تب حجم کتنا ہوتا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۶.۷۰: ایک ٹھوس جسم $x = 01$ اور $x = 12$ پر محور x کے عمودی مستویات کے بیچ واقع ہے۔ جسم کی عمودی تراش محور x کے عمودی ہیں جن کے قطر لکیر $y = \frac{x}{2}$ سے لکیر $y = x$ تک ہیں (شکل ۶.۳۵)۔ اس جسم کا حجم کیوں اس قائمہ مخروط جتنا ہو گا جس کا قد 12 اور جس کے قاعدے کا رداس 3 ہو؟

سوال ۶.۷۱: مسئلہ کوالیئرے کی ابتدائی صورت

کوالیئرے نے طالب علمی کے دوران دریافت کیا کہ اگر دو مستوی خطوں کو محور x کے یکساں وقفہ پر یوں رکھنا ممکن ہو کہ کسی بھی x پر دونوں خطوں کی



شکل ۶.۳۸: مستوی خطہ کو کسی محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔

چوڑائی یکساں ہو تب دونوں خطوں کا رقبہ یکساں ہو گا (شکل ۶.۳۶)۔ ٹھوس اجسام کے لیے کوالیئرے نے یہی مسئلہ کبھی ثابت نہیں کیا۔ اگر شکل ۶.۷۱ میں بالائی اور زیریں سرحدیں استراری تفاعل ہوں تب اس مسئلے کو ثابت کریں۔

سوال ۶.۷۲: نصف کرہ کا حجم بذریعہ مسئلہ کوالیئرے

نصف کرہ کا حجم $H = \frac{2}{3}\pi R^3$ ہے جہاں R رداس ہے۔ رداس R اور قد R کے قائمہ بیلن سے رداس R اور قد R کا قائمہ مخروط ہٹانے پر نصف کرہ کی عمودی تراش حاصل ہوتی ہے۔ مخروط کو نوک کے بل رکھا تصور کریں (شکل ۶.۳۷)۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے نصف کرہ کا حجم تلاش کریں۔

۶.۳ اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا

مستوی خطے کو کسی محور کے گرد گھمانے سے جسم **طواف**[۲] پیدا کیا جاتا ہے (شکل ۶.۳۸)۔ جسم طواف پیدا کرنے کے لیے گھمائے جانے والے مستوی خطے کو **پیدا کار خطہ**[۳] کہتے ہیں۔ جسم طواف کا حجم ٹکیوں کی ترکیب سے نہایت خوش اسلوبی سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر ہم مستوی خطہ کو استراری تفاعل $y = R(x),\ a \leq x \leq b$ اور x کے بیچ خطہ سے ظاہر کر سکیں اور اگر محور x گھومنے کا محور (**محور طواف**[۴]) بھی ہو تب ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل طریقے سے حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل ۶.۳۹)۔

محور طواف کے لحاظ سے عمودی تراش کا رداس $R(x)$ اور رقبہ درج ذیل ہو گا۔

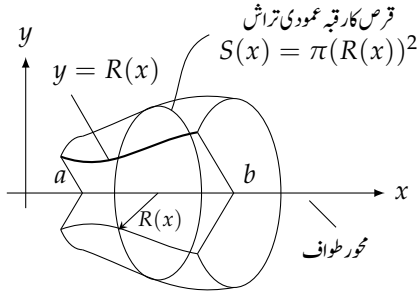
$$S(x) = \pi(\text{رداس})^2 = \pi[R(x)]^2$$

جسم کا حجم، $x = a$ تا $x = b$، تفاعل S کا تکمل ہو گا۔

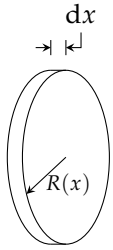
جسم طواف کا حجم (محور طواف محور x ہے)

---

[۲] solidofrevolution
[۳] generatingregion
[۴] axisofrevolution



(ا) استمراری تفاعل $y = R(x)$ کو $x = a$ تا $x = b$ محور x کے گرد گھمایا گیا ہے۔



(ب) قرص کا حجم $\mathrm{d}H = \pi(R(x))^2$ ہے۔

شکل ۶.۳۹: جسم طواف کے حجم کا حصول بذریعہ ترکیب قرص۔

۸۶۸۶ استمراری تفاعل $y = R(x),\ a \le x \le b$ کو محور x کے گرد گھمانے سے پیدا ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = \int_a^b \pi[\text{رداس}]^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b \pi[R(x)]^2\,\mathrm{d}x \qquad (۱)$$

۸۶۸۷ مثال ۶.۹: منحنی $y = \sqrt{x},\ 0 \le x \le 4$ کو محور x کے گرد گھمانے سے ٹھوس جسم پیدا ہوتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

۸۶۸۸ **حل**

۸۶۸۹ ہم منحنی ترسیم کر کے ٹھوس جسم کا خاکہ بنا کر نمائندہ رداس بناتے ہیں (شکل ۶.۴۰)۔ حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} H &= \int_a^b \pi[R(x)]^2\,\mathrm{d}x && \text{مساوات ا} \\ &= \int_0^4 \pi[\sqrt{x}]^2\,\mathrm{d}x && R(x) = \sqrt{x} \\ &= \pi\int_0^4 x\,\mathrm{d}x = \pi\frac{x^2}{2}\bigg|_0^4 = \pi\frac{(4)^2}{2} = 8\pi \end{aligned}$$

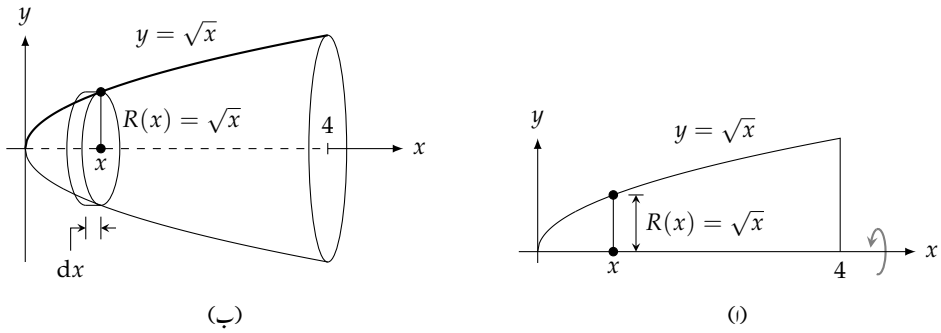
۸۶۹۰ □

۸۶۹۱ **مساوات ا سے حجم حاصل کرنے کا طریقہ**

۸۶۹۲

۸۶۹۳ ا. خطے کا خاکہ بنائیں اور رداس $R(x)$ کی نشاندہی کریں۔

۸۶۹۴ ب. یوں رقبہ عمودی تراش $\pi[R(x)]^2$ ہو گا۔



شکل ۶.۴۰: مستوی خطہ اور جسم طواف (مثال ۶.۹)

۸۶۹۵ ج. رقبہ عمودی تراش کا مکمل حجم دیگا۔

۸۶۹۶ اگلی مثال میں محور طواف محور x نہیں ہے، لیکن حجم حاصل کرنے کا اصول تبدیل نہیں ہوتا: مکمل کی موزوں حد استعمال کریں۔

۸۶۹۷ مثال ۶.۱۰: تفاعل $y = \sqrt{x}$، لکیر $y = 1$، اور لکیر $x = 4$ کے بیچ خطہ کو لکیر $y = 1$ کے گرد گھما کر ٹھوس جسم پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم
۸۶۹۸ کا حجم تلاش کریں۔

۸۶۹۹ **حل**

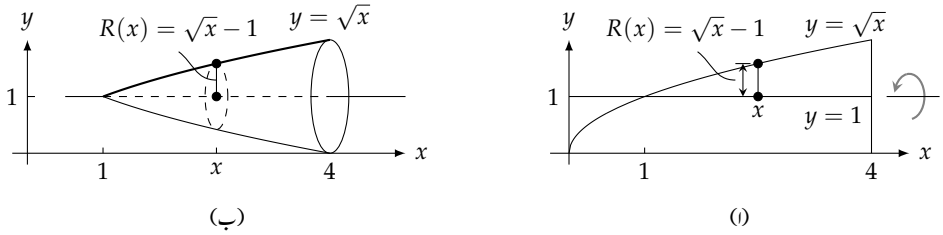
۸۷۰۰ ہم خطہ اور نمائندہ رداس بنا کر ٹھوس جسم کا خاکہ بناتے ہیں (شکل ۶.۴۱)۔ جسم کا حجم درج ذیل ہوگا۔

$$
\begin{aligned}
H &= \int_1^4 \pi [R(x)]^2 \, \mathrm{d}x && \text{مساوات ا} \\
&= \int_1^4 \pi [\sqrt{x} - 1]^2 \, \mathrm{d}x && R(x) = \sqrt{x} - 1 \\
&= \pi \int_1^4 [x - 2\sqrt{x} + 1] \, \mathrm{d}x \\
&= \pi \left[\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + x \right]_1^4 = \frac{7\pi}{6}
\end{aligned}
$$

۸۷۰۱ □

۸۷۰۲ منحنی $x = R(y),\ c \le y \le d$ کو محور y کے گرد گھما کر ٹھوس جسم پیدا ہوتا ہے جس کا حجم تلاش کرتے ہوئے مساوات ا میں x کی جگہ y
۸۷۰۳ لکھا جاتا ہے۔

۸۷۰۴ **جسم طواف کا حجم (محور طواف محور y ہے)**



شکل ۶.۴۱: مستوی خطہ اور جسم طواف (مثال ۶.۱۰)

۸۷۰۵ استمراری تفاعل $x = R(y),\ c \le y \le d$ کو محور y کے گرد گھمانے سے پیدا ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = \int_c^d \pi[\text{رداس}]^2\,\mathrm{d}x = \int_c^d \pi[R(y)]^2\,\mathrm{d}y \tag{۲}$$

۸۷۰۶ مثال ۶.۱۱: منحنی $x = \frac{2}{y},\ 1 \le y \le 4$ کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم دریافت کریں۔

۸۷۰۷ **حل**

۸۷۰۸ ہم منحنی ترسیم کر کے ٹھوس جسم کا خاکہ بنا کر نمائندہ قرص اور رداس کا نقش بناتے ہیں (شکل ۶.۴۲)۔ جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

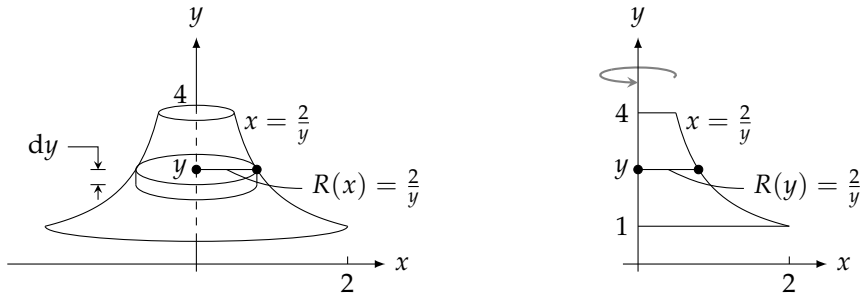
$$\begin{aligned} H &= \int_1^4 \pi[R(y)]^2\,\mathrm{d}y && \text{مساوات ۲} \\ &= \int_1^4 \pi\left(\frac{2}{y}\right)^2 \mathrm{d}y && R(y) = \frac{2}{y} \\ &= \pi\int_1^4 \frac{4}{y^2}\,\mathrm{d}y = 4\pi\Big[-\frac{1}{y}\Big]_1^4 = 4\pi\left[\frac{3}{4}\right] = 3\pi \end{aligned}$$

۸۷۰۹ □

۸۷۱۰ مثال ۶.۱۲: قطع مکافی $x = y^2 + 1$ اور لکیر $x = 3$ کے بیچ خطہ کو لکیر $x = 3$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم
۸۷۱۱ معلوم کریں۔

۸۷۱۲ **حل**

۸۷۱۳ ہم منحنی اور لکیر کے بیچ خطے کا خاکہ بنا کر جسم طواف کا خاکہ بناتے ہیں اور عمودی تراش کے نمائندہ رداس کی نشاندہی کرتے ہیں (شکل ۶.۴۳)۔ جسم کا حجم درج



شکل ۶.۴۲: مستوی خطہ، جسم طواف اور قرص (مثال ۶.۱۱)

۸۷۱۴ ذیل ہو گا۔

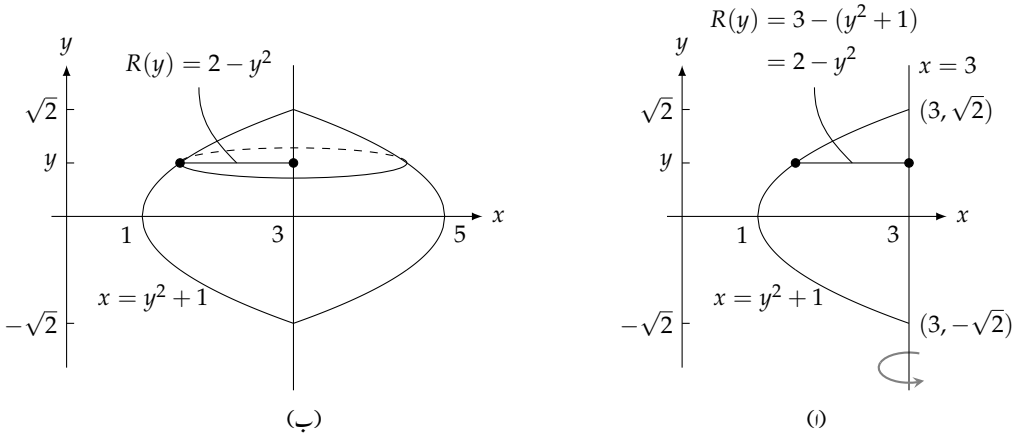
$$
\begin{aligned}
H &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[R(y)]^2 \,\mathrm{d}y && \text{مساوات ۲} \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi[2-y^2]^2 \,\mathrm{d}y && R(y) = 3-(y^2+1) \\
&= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4-4y^2+y^4] \,\mathrm{d}y \\
&= \pi \left[4y - \frac{4}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}
$$

۸۷۱۵ □

۸۷۱۶ **ترکیب چھلا**

۸۷۱۷ اگر گھمایا جانے والا خطہ محور طواف کو قطع نہ کرتا ہو اور نہ ہی محور طواف کو مس کرتا ہو تب جسم طواف میں سوراخ پایا جائے گا (شکل ۶.۴۴)۔ ایسے جسم کا بیرونی
۸۷۱۸ رداس $R(x)$ اور اندرونی رداس $r(x)$ ہو گا۔ یوں اس کا رقبہ عمودی تراش درج ذیل ہو گا۔

$$S(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)$$



شکل ۶.۴۳: مستوی خطہ اور جسم طواف (مثال ۶.۱۲)

حجم تلاش کرنے کا کلیہ

۸۷۱۹
۸۷۲۰

$$H = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,\mathrm{d}x \qquad (۳)$$

۸۷۲۱ دھیان رہے کہ مساوات ۳ میں تفاعل $\pi(R^2 - r^2)$ کا تکمل لیا جاتا ہے نہ کہ تفاعل $\pi(R - r)^2$ کا۔ اگر پورے وقفہ $[a, b]$ پر اندرونی رداس
۸۷۲۲ صفر ہو تب درج بالا سے مساوات احاصل ہوتی ہے۔ یوں ترکیب ٹکیا در حقیقت ترکیب چھلا کی مخصوص صورت ہے۔

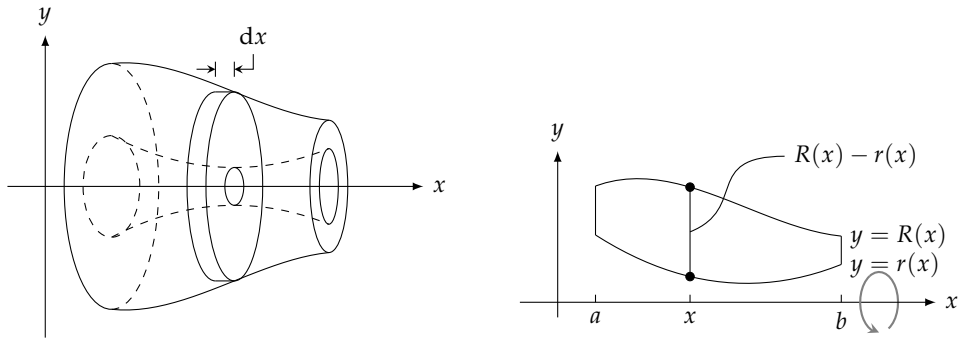
۸۷۲۳ **مثال ۶.۱۳:** منحنی $y = x^2 + 1$ اور لکیر $y = -x + 3$ کے بیچ خطہ کو محور x کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ ٹھوس
۸۷۲۴ جسم کا حجم تلاش کریں۔

۸۷۲۵ **حل**

۸۷۲۶ **پہلا قدم:** منحنی اور لکیر ترسیم کر کے خطے کا خاکہ بنا کر خطے پر محور طواف کے عمودی لکیر کھینچیں (شکل ۶.۴۵)۔

۸۷۲۷ **دوسرا قدم:** نقاط تقاطع سے تکمل کی حدیں تلاش کریں۔

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= -x + 3 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x + 2)(x - 1) &= 0 \\ x = -2, \quad x &= 1 \end{aligned}$$



(ب) (ا)

شکل ۶.۴۴: یہاں جسم طواف قرص کے بجائے چھلا نما ہے جس میں سوراخ پایا جاتا ہے لہٰذا تکمل $\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$ قدرے مختلف صورت اختیار کرتا ہے۔

۸۷۲۸ **تیسرا قدم:** بیرونی اور اندرونی رداس کی نشاندہی کریں۔

$$R(x) = -x + 3 \qquad \text{بیرونی رداس}$$
$$r(x) = x^2 + 1 \qquad \text{اندرونی رداس}$$

۸۷۲۹ **چوتھا قدم:** تکمل سے حجم حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} H &= \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^1 \pi([-x+3]^2 - [x^2+1]^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^1 \pi(8 - 6x - x^2 - x^4)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^1 = \frac{117\pi}{5} \end{aligned}$$

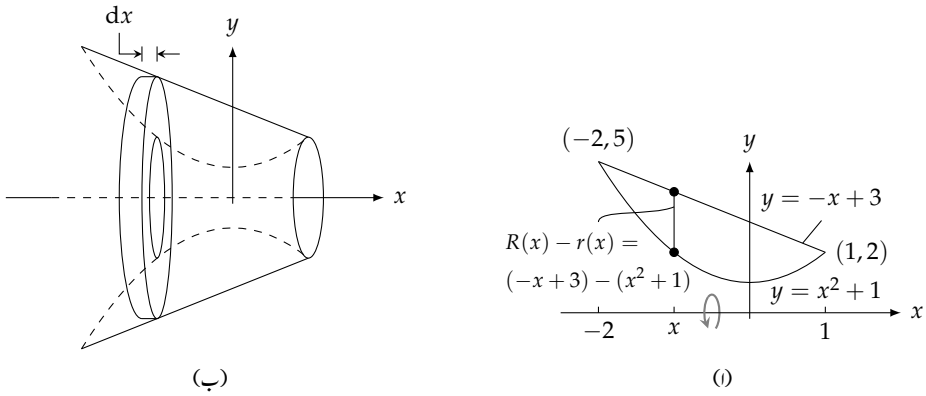
۸۷۳۰ □

۸۷۳۱ ## ترکیب چھلا سے حجم کی تلاش

۸۷۳۲

۸۷۳۳ ا. خطے کا خاکہ بنا کر اس پر محور طواف کے عمودی لکیری قطعہ کھینچیں۔ خطہ کو محور طواف کے گرد گھمانے سے یہ قطعہ نمائندہ عمودی تراش دے گا۔

۸۷۳۴ ب. تکمل کی حدیں دریافت کریں۔



(ب) (ا)

شکل ۶.۴۵: مستوی خطہ اور چھلا نما جسم طواف (مثال ۶.۱۳)

۸۷۳۵ ج. عمودی تراش کے بیرونی اور اندرونی رداس کو لکیری قطعہ سے حاصل کریں۔

۸۷۳۶ د. تکمل کے ذریعہ حجم حاصل کریں۔

۸۷۳۷ اگر خطے کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جائے تب درج بالا اقدام استعمال کرتے ہوئے x کے بجائے y کے ساتھ تکمل لیں۔

۸۷۳۸ مثال ۶.۱۴: ربع اول میں قطع مکافی $y = x^2$ اور لکیر $y = 2x$ کے بیچ خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم
۸۷۳۹ معلوم کریں۔

۸۷۴۰ **حل**

۸۷۴۱ **پہلا قدم:** خطے کا خاکہ کھینچ کر خطہ پر محور طواف کے عمودی لکیری قطعہ بنائیں (شکل ۶.۴۶)۔ یہاں محور طواف محور y ہے۔

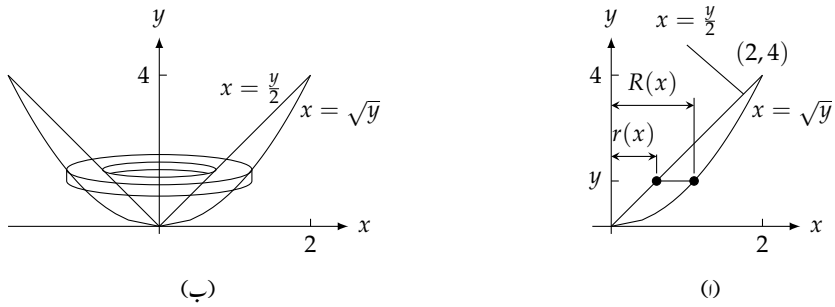
۸۷۴۲ **دوسرا قدم:** قطع مکافی اور لکیر ایک دوسرے کو $y = 0$ اور $y = 4$ پر قطع کرتے ہیں لہذا تکمل کی حدیں $c = 0$ اور $d = 4$ ہوں گی۔

۸۷۴۳ **تیسرا قدم:** رقبہ عمودی تراش کا بیرونی رداس $R(y) = \sqrt{y}$ اور اندرونی رداس $r(y) = \frac{y}{2}$ ہے۔

۸۷۴۴ **چوتھا قدم:** تکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
H &= \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 \pi\left([\sqrt{y}]^2 - [\tfrac{y}{2}]^2\right)\mathrm{d}y \\
&= \pi\int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right)\mathrm{d}y = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8\pi}{3}
\end{aligned}
$$

۸۷۴۵ □



شکل ۶.۴۶: جسم طواف اور نمائندہ چھلا (مثال ۶.۱۴)

۸۵۴۶ مثال ۶.۱۵: ربع اول میں قطع مکافی $y = x^2$، لکیر $y = 1$، اور محور y کے بیچ خطہ کو لکیر $x = \frac{3}{2}$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا
۸۵۴۷ ہے۔ اس جسم کا حجم دریافت کریں۔

۸۵۴۸ **حل**

۸۵۴۹ **پہلا قدم:** خطہ کے خاکہ پر محور طواف $x = \frac{3}{2}$ کے عمودی، لکیری قطعہ بنائیں (شکل ۶.۴۷)۔

۸۵۵۰ **دوسرا قدم:** تکمل کی حدیں $y = 0$ اور $y = 1$ ہیں۔

۸۵۵۱ **تیسرا قدم:** عمودی تراش کا بیرونی رداس $R(y) = \frac{3}{2}$ اور اندرونی رداس $r(y) = \frac{3}{2} - \sqrt{y}$ ہے۔

۸۵۵۲ **چوتھا قدم:** تکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

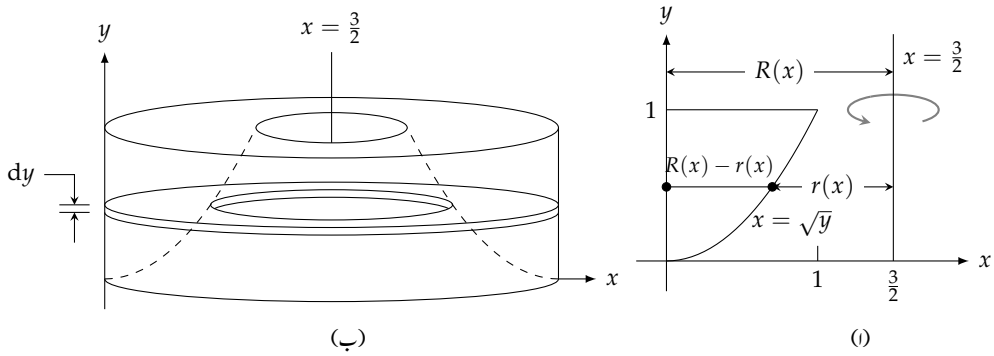
$$\begin{aligned} H &= \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \pi([\tfrac{3}{2}]^2 - [\tfrac{3}{2} - \sqrt{y}]^2)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^1 (3\sqrt{y} - y)\,\mathrm{d}y = \pi\left[2y^{3/2} - \tfrac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

۸۵۵۳ □

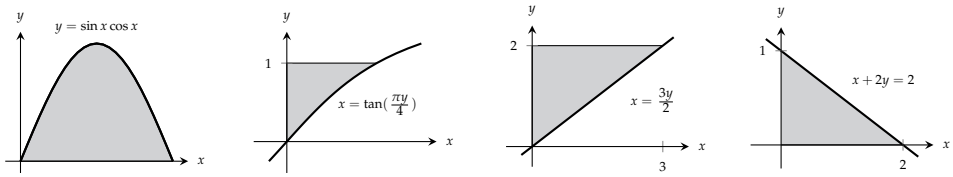
۸۵۵۴ **سوالات**

۸۵۵۵ **حجم بذریعہ ترکیب ٹکیا**

۸۵۵۶ سوال ۶.۷۳ تا سوال ۶.۷۶ میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم دریافت کریں۔



شکل ۶.۴۷: جسم طواف اور نمائندہ چھلا (مثال ۶.۱۵)



شکل ۶.۵۱ شکل ۶.۵۰ شکل ۶.۴۹ شکل ۶.۴۸

۸۵۷ سوال ۶.۷۳: سایہ دار خطہ شکل ۶.۴۸ میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $x + 2y = 2$ ہے۔

۸۵۸ سوال ۶.۷۴: سایہ دار خطہ شکل ۶.۴۹ میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $x = \frac{3y}{2}$ ہے۔

۸۵۹ سوال ۶.۷۵: سایہ دار خطہ شکل ۶.۵۰ میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $x = \tan(\frac{\pi y}{4})$ ہے۔

۸۶۰ سوال ۶.۷۶: سایہ دار خطہ شکل ۶.۵۱ میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $y = \sin x \cos x$ ہے۔

۸۶۱ سوال ۶.۷۷ تا سوال ۶.۸۲ میں منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم تلاش کریں۔

۸۶۲ سوال ۶.۷۷: $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 2$

۸۶۳ سوال ۶.۷۸: $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 2$

۸۶۴ سوال ۶.۷۹: $y = \sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0$

۸۶۵ سوال ۶.۸۰: $y = x - x^2, \quad y = 0$

۸۶۶ سوال ۶.۸۱: $y = \sqrt{\cos x}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad x = 0, \quad y = 0$

۸۶۷ سوال ۶.۸۲: $y = \sec x, \quad y = 0, \quad x = -\frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{\pi}{4}$

۸۶۸ سوال ۶.۸۳ اور سوال ۶.۸۴ میں خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ حاصل جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔

۸۶۹ سوال ۶.۸۳: ربع اول میں خطے کا بالائی سرحد لکیر $y = \sqrt{2}$، زیریں سرحد منحنی $y = \sec x \tan x$ اور بایاں سرحد محور y ہیں۔ خطے کو
۸۷۰ لکیر $y = \sqrt{2}$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

۸۷۱ سوال ۶.۸۴: ربع اول میں خطے کی بالائی سرحد لکیر $y = 2$، زیریں سرحد منحنی $y = \sec x \tan x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$، اور بائیں سرحد
۸۷۲ محور y ہے۔ خطے کو لکیر $y = 2$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

۸۷۳ سوال ۶.۸۵ تا سوال ۶.۹۰ میں منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کو محور y کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم دریافت کریں۔

۸۷۴ سوال ۶.۸۵: $x = \sqrt{5}y^2, \quad x = 0, \quad y = -1, \quad y = 1$

۸۷۵ سوال ۶.۸۶: $x = y^{3/2}, \quad x = 0, \quad y = 2$

۸۷۶ سوال ۶.۸۷: $x = \sqrt{2 \sin 2y}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad x = 0$

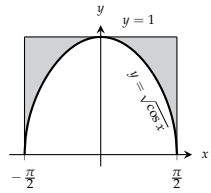
۸۷۷ سوال ۶.۸۸: $x = \sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}}, \quad -2 \leq y \leq 0, \quad x = 0$

۸۷۸ سوال ۶.۸۹: $x = \frac{2}{y+1}, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 3$

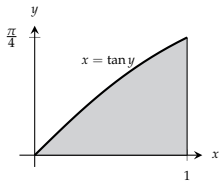
۸۷۹ سوال ۶.۹۰: $x = \frac{\sqrt{2y}}{y^2+1}, \quad x = 0, \quad y = 1$

۸۸۰ **حجم بذریعہ ترکیب چھلا**

۸۸۱ سوال ۶.۹۱ اور سوال ۶.۹۱ میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔



شکل ۶.۵۲



شکل ۶.۵۳

۸۷۸۲ سوال ۶.۹۱: خطہ شکل ۶.۵۲ میں دکھایا گیا ہے۔

۸۷۸۳ سوال ۶.۹۲: خطہ شکل ۶.۵۳ میں دکھایا گیا ہے۔

۸۷۸۴

۸۷۸۵ سوال ۶.۹۳ تا سوال ۶.۱۰۰ میں دی گئی منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کو محور x گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم تلاش کریں۔

۸۷۸۶ سوال ۶.۹۳: $y = x, \quad y = 1, \quad x = 0$

۸۷۸۷ سوال ۶.۹۴: $y = 2x, \quad y = x, \quad x = 1$

۸۷۸۸ سوال ۶.۹۵: $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 2, \quad x = 0$

۸۷۸۹ سوال ۶.۹۶: $y = -\sqrt{x}, \quad y = -2, \quad x = 0$

۸۷۹۰ سوال ۶.۹۷: $y = x^2 + 1, \quad y = x + 3$

۸۷۹۱ سوال ۶.۹۸: $y = 4 - x^2, \quad y = 2 - x$

۸۷۹۲ سوال ۶.۹۹: $y = \sec x, \quad y = \sqrt{2}, \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$

۸۷۹۳ سوال ۶.۱۰۰: $y = \sec x, \quad y = \tan x, \quad x = 0, \quad x = 1$

۸۷۹۴

۸۷۹۵ سوال ۶.۱۰۱ تا سوال ۶.۱۰۶ میں خطے کو محور y کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔

۸۷۹۶ سوال ۶.۱۰۱: مثلث میں محیط خطہ جہاں مثلث کے راس $(1,0)$ ، $(2,1)$ ،اور $(1,1)$ ہیں۔

۸۷۹۷ سوال ۶.۱۰۲: مثلث جس کے راس $(0,1)$ ، $(1,0)$ ،اور $(1,1)$ ہیں میں محیط خطہ۔

۸۷۹۸ سوال ۶.۱۰۳: ربع اول میں خطہ جس کی بالائی سرحد قطع مکافی $y = x^2$ ،زیریں سرحد محور x ،اور دائیں سرحد لکیر $x = 2$ ہے۔

۸۷۹۹ سوال ۶.۱۰۴: خطہ کی بالائی سرحد منحنی $y = \sqrt{x}$ اور زیریں سرحد لکیر $y = x$ ہے۔

۸۸۰۰ سوال ۶.۱۰۵: ربع اول میں خطہ جس کی بائیں سرحد دائرہ $x^2 + y^2 = 3$ ،دائیں سرحد لکیر $x = \sqrt{3}$ ،اور بالائی سرحد لکیر $y = \sqrt{3}$
۸۸۰۱ ہے۔

۸۸۰۲ سوال ۶.۱۰۶: خطے کی بائیں سرحد لکیر $x = 4$ اور دائیں سرحد دائرہ $x^2 + y^2 = 25$ ہے۔

سوال ۶.۱۰۷ اور سوال ۶.۱۰۸ میں خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم معلوم کریں۔

سوال ۶.۱۰۷: ربع اول میں خطہ جس کی بالائی سرحد منحنی $y = x^2$ ، زیریں سرحد محور x ، اور دائیں سرحد لکیر $x = 1$ ہے۔ خطے کو لکیر $x = -1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

سوال ۶.۱۰۸: ربع دوم میں خطہ جس کی بالائی سرحد منحنی $y = -x^3$ ، زیریں سرحد محور x ، اور بائیں سرحد لکیر $x = -1$ ہے۔ خطے کو لکیر $x = -2$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

جسم طواف کے حجم

سوال ۶.۱۰۹: ایک خطہ جس کی سرحدیں $y = \sqrt{x}$ ، $y = 2$ ، اور $x = 0$ ہیں کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ ٹھوس جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔

ا. محور x ؛

ب. محور y ؛

ج. لکیر $y = 2$ ؛

د. لکیر $x = 4$

سوال ۶.۱۱۰: ایک تکونی خطہ جس کی سرحدیں $y = 2x$ ، $y = 0$ ، اور $x = 1$ ہیں کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

ا. لکیر $x = 1$ ؛

ب. لکیر $x = 2$

سوال ۶.۱۱۱: ایک خطہ جس کی سرحدیں قطع مکافی $y = x^2$ اور $y = 1$ ہیں کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

ا. لکیر $y = 1$ ؛

ب. لکیر $y = 2$ ؛

ج. لکیر $y = -1$

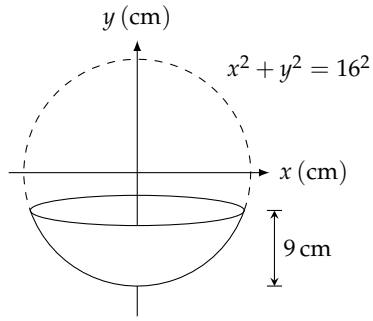
سوال ۶.۱۱۲: ایک مثلث جس کے راس $(0,0)$ ، $(b,0)$ ، اور $(0,h)$ ہیں میں محیط خطے کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم تکمل کی مدد سے حاصل کریں۔

ا. محور x ؛

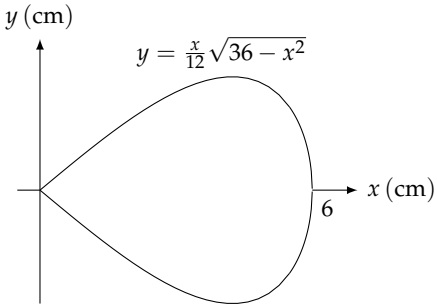
ب. محور y

سوال ۶.۱۱۳: ایک برتن کو رداس 16 cm کے کرہ کا حصہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ برتن کی گہرائی 9 cm ہے۔ برتن کا حجم تکمل کی مدد سے دریافت کریں (شکل ۶.۵۴)۔

سوال ۶.۱۱۴: منحنی $y = \frac{x}{12}\sqrt{36 - x^2},\ 0 \le x \le 6\,\text{cm}$ کو محور x کے گرد گھما کر ناشپاتی نما پیتل کا گولہ بنایا جاتا ہے (شکل ۶.۵۵)۔ پیتل کی کثافت $8.5\,\text{g cm}^{-3}$ لیں۔ گولے کی کمیت کتنی ہو گی؟



شکل ۶.۵۴: کروی برتن (سوال ۶.۱۱۳)



شکل ۶.۵۵: ناشپاتی نما گولہ (سوال ۶.۱۱۴)

سوال ۶.۱۱۵: منحنی $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi x$ کو لکیر $y = c$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے جہاں $0 \le c \le 1$ ہے۔

ا. ٹھوس جسم کی اقل حجم c کی کتنی قیمت پر حاصل ہو گی؟ اس اقل حجم کو تلاش کریں۔

ب. وقفہ $[0, 1]$ میں c کی کونسی قیمت اعظم حجم دے گی؟

ج. ٹھوس جسم کا حجم بالمقابل c کو پہلے $0 \le c \le 1$ کے لیے اور بعد میں بڑی قیمتوں کے لیے ترسیم کریں۔ جیسے جیسے c کی قیمت وقفہ $[0, 1]$ سے دور ہوتی جاتی ہے، جسم کے حجم کو کیا ہوتا ہے؟ کیا اس کا طبعی مطلب بنتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۶.۱۱۶: ہیلی کاپٹر کی پہنچ بڑھانے کی خاطر اس کے نیچے تیل کا اضافی حوض نصب کرنا مطلوب ہے۔ منحنی $y = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{3},\ -1 \le x \le 1$ کو محور x کے گرد گھما کر حوض بنایا جاتا ہے۔ اس حوض میں کتنے لٹر تیل آئے گا؟

سوال ۶.۱۱۷: اندرسہ کا حجم

دائری قرص $x^2 + y^2 \le a^2$ کو لکیر $y = b\ (b > a)$ کے گرد گھما کر **اندرسہ**[۵] پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کا حجم تلاش کریں۔ (اشارہ۔ $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi a^2}{2}$ ہو گا چونکہ یہ رداس a کے نصف دائرے کا رقبہ ہے۔)

سوال ۶.۱۱۸: (ا) نصف کروی برتن جس کا رداس a ہے میں پانی کی گہرائی h ہے۔ پانی کی مقدار معلوم کریں۔ (ب) نصف کروی حوض جس کا رداس $5\,\mathrm{m}$ ہے میں پانی داخل ہونے کی شرح $0.2\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-1}$ ہے۔ جس لمحہ پانی کی گہرائی $4\,\mathrm{m}$ ہو، اس لمحے پر گہرائی بڑھنے کی شرح کیا ہو گی؟

سوال ۶.۱۱۹: اس حصہ میں حجم کے تمام تعریف جیومیٹریائی تعریف کے عین مطابق ہیں۔

ا. نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کو محور x کے گرد گھما کر کرہ حاصل ہوتا ہے۔ قرص کے حجم کا کلیہ مساوات ۱ استعمال کرتے ہوئے کرہ کے حجم کا کلیہ $H = \frac{4}{3}\pi a^3$ حاصل کریں۔

ب. رداس r اور قد h کے قائمہ مخروط کا حجم احصاء کی مدد سے حاصل کریں۔

---

[۵] torus

(ا) (ب)

شکل ۶.۵۶: نلکی جسم طواف

۶.۴ نلکی چھلے

اجسام طواف کا حجم تلاش کرتے ہوئے بعض اوقات چھلا کے بجائے نلکی خول استعمال کرنا زیادہ بہتر ثابت ہوتا ہے (شکل ۶.۵۶)۔

نلکی کلیہ

فرض کریں ہم محور x اور وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل $y = f(x)$ کے بیچ خطے کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کرتے ہیں۔ ہمیں جسم طواف کا حجم درکار ہے۔ ہم وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی P پر منحصر مستطیلوں کو خطے کا تخمینی رقبہ لے سکتے ہیں۔ ایک نمائندہ مستطیل کی چوڑائی Δx_k اور قد $f(c_k)$ ہو گا، جہاں نمائندہ مستطیل کے قاعدے کا وسط c_k ہے (شکل ۶.۵۷)۔ ہم جیومیٹری سے جانتے ہیں کہ ایسے مستطیل کو محور y کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم

$$\Delta H_k = 2\pi \times \text{اوسط رداس کا خول} \times \text{خول کا قد} \times \text{موٹائی}$$

ہو گا جو موجودہ صورت میں درج ذیل ہو گا۔

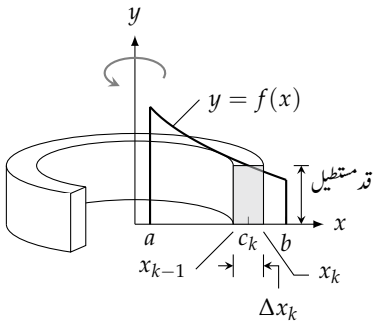
$$\Delta H_k = 2\pi c_k f(c_k) \Delta x_k$$

ہم P پر منحصر n مستطیلوں کو محور y کے گرد گھمانے سے حاصل حجم کے مجموعہ کو تخمیناً جسم طواف کا حجم لیتے ہیں۔

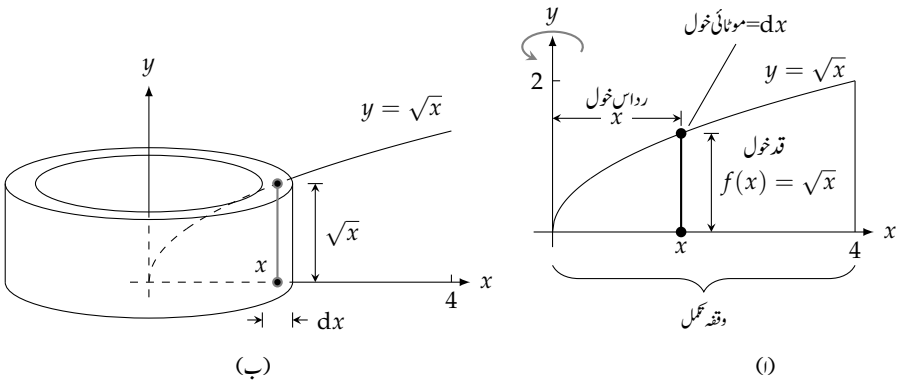
$$H \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta H_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi c_k f(c_k) \Delta x_k \qquad \text{ریمان مجموعہ}$$

$\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے اس مجموعے کی حد ٹھوس جسم کا حجم ہو گی۔ (ذیل دیکھیں۔)

$$H = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi c_k f(c_k) \Delta x_k = \int_a^b 2\pi x f(x)\, \mathrm{d}x$$



شکل ۶.۵۷: kویں مستطیل کو گھمانے سے حاصل نلکی خول۔



شکل ۶.۵۸: نلکی خول (مثال ۶.۱۶)

۸۸۵۹

۸۸۶۰ **کلیہ خول برائے y محور کے گرد طواف**

۸۸۶۱ استمراری تفاعل $y = f(x),\ 0 \le a \le x \le b$ اور محور x کے بیچ خطے کو محور y کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم درج ذیل ہو
۸۸۶۲ گا۔

$$H = \int_a^b 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}x = \int_a^b 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (ا)$$

۸۸۶۳ مثال ۶.۱۶: لکیر $x = 4$ اور محور x کے بیچ منحنی $y = \sqrt{x}$ کے قطعہ کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم
۸۸۶۴ تلاش کریں۔

۸۸۶۵ **حل**

۸۸۶۶ **پہلا قدم:** خطے کا خاکہ بنا کر محور گردش کے متوازی اس پر قطعہ دکھائیں۔ قطعہ کا قد (خول کا قد) اور محور گردش سے قطعہ کے فاصلہ (رداس خول) کی
۸۸۶۷ نشاندہی کریں۔ قطعہ کی چوڑائی $\mathrm{d}x$ خول کی چوڑائی ہو گی۔ ہم نے شکل ۶.۵۸ میں خول دکھایا ہے۔ آپ کو ایسا کرنے کی ضرورت نہیں۔
۸۸۶۸ **دوسرا قدم:** تکمل کی حدیں معلوم کریں۔ خطہ میں x کی قیمت a تا b تبدیل ہوتی ہے لہٰذا تکمل کی حدیں a اور b ہوں گی۔

$$\begin{aligned} H &= \int_a^b 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}x && \text{مساوات ۱} \\ &= \int_0^4 2\pi(x)(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x && \text{جزو-۱ اور جزو-ب میں حاصل قیمتیں} \\ &= 2\pi\int_0^4 x^{3/2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{5} \end{aligned}$$

۸۸۶۹ □

۸۸۷۰ محور y کے گرد خطہ گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم مساوات ۱ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اگر ہم خطے کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کریں
۸۸۷۱ تب حجم تلاش کرنے کی خاطر مساوات ۱ میں x کی جگہ y استعمال کیا جائے گا۔

۸۸۷۲ **کلیہ خول برائے محور x کے گرد طواف**
۸۸۷۳

$$H = \int_c^d 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}y = \int_c^d 2\pi y f(y)\,\mathrm{d}y \qquad (۲)$$

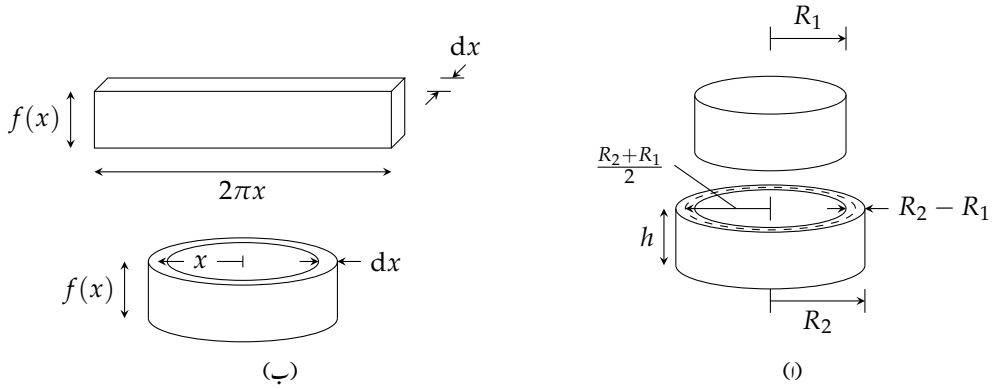
۸۸۷۴ درج بالا مساوات میں $f(y) > 0$ اور $0 \le c \le y \le d$ ہیں۔

۸۸۷۵ **خول کا جیومیٹریائی حجم**

۸۸۷۶ ایک ٹھوس بیلن جس کا رداس R_2 اور قد h ہو کا حجم $\pi R_2^2 h$ ہو گا۔ اگر اس جسم سے رداس R_1 کا ٹھوس بیلن کاٹا جائے تب حاصل خول کا حجم
۸۸۷۷ $\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h$ ہو گا (شکل ۶.۵۹-ا) جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} \text{حجم خول} &= \pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h \\ &= \pi(R_2^2 - R_1^2)h \\ &= \pi(R_2 + R_1)(R_2 - R_1)h && R_2^2 - R_1^2 = (R_2 - R_1)(R_2 + R_1) \\ &= 2\pi\left(\tfrac{R_2+R_1}{2}\right)(R_2 - R_1)h && \text{2 سے ضرب اور تقسیم} \\ &= 2\pi(\text{رداس خول})(\text{موٹائی خول})(\text{قد خول}) \end{aligned}$$

۸۸۷۸ جہاں خول کا اوسط رداس $\frac{R_2+R_1}{2}$، خول کی موٹائی $R_2 - R_1 r$، اور خول کا قد h ہے۔



شکل ۶.۵۹: خول کا حجم۔

۸۸۷۹ ایک خول جس کا اوسط رداس x ، موٹائی $\mathrm{d}x$ ، اور قد $f(x)$ ہو کو شکل ۶.۵۹-ب میں کھول کر پٹی کی شکل دی گئی ہے۔ اس پٹی کا حجم درج ذیل ہو گا جو
۸۸۸۰ خول کے حجم کا کلیہ ہے (مساوات ۱ اور مساوات ۲ کو یاد رکھنے کا یہ بہترین طریقہ ہے)۔

$$\begin{aligned} H &= (\text{لمبائی}) \times (\text{چوڑائی}) \times (\text{موٹائی}) \\ &= 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

۸۸۸۱ مثال ۶.۱۷: منحنی $y = \sqrt{x}$ ، لکیر $x = 4$ ، اور محور x کے بیچ خطے کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم
۸۸۸۲ تلاش کریں۔

۸۸۸۳ **حل**

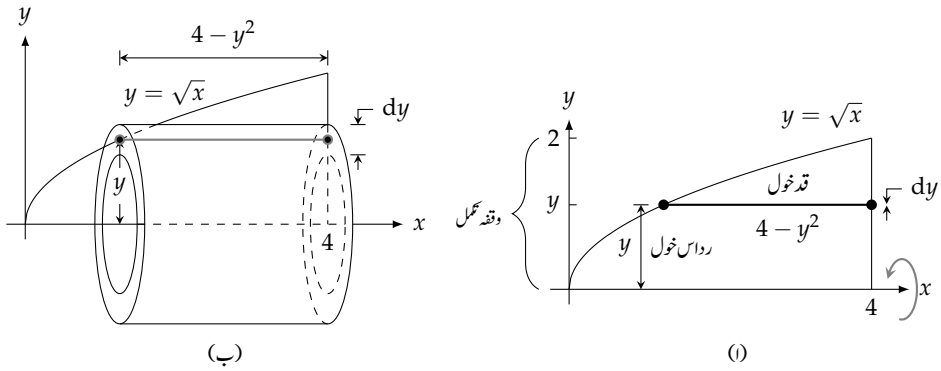
۸۸۸۴ **پہلا قدم:** خطے کا خاکہ بنائیں اور اس پر محور گردش کے متوازی قطعہ دکھائیں۔ قطعہ کی لمبائی (قد خول) اور محور طواف سے اس کے فاصلہ (رداس خول) کی
۸۸۸۵ نشاندہی کریں۔ قطعہ کی موٹائی، خول کی چوڑائی $\mathrm{d}y$ ہو گی۔ ہم نے شکل ۶.۶۰ میں محور y کے گرد بیلن دکھایا ہے۔ آپ کو ایسا بنانے کی ضرورت نہیں۔

۸۸۸۶ **دوسرا قدم:** تکمل کی حدیں معلوم کریں۔ چونکہ خطہ میں y کی قیمت $c = 0$ تا $d = 2$ ہو سکتی ہے لہٰذا یہی اس کی حدیں ہیں۔

۸۸۸۷ **تیسرا قدم:**

$$\begin{aligned} H &= \int_c^d 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}y && \text{مساوات ۲} \\ &= \int_0^2 2\pi(y)(4-y^2)\,\mathrm{d}y && \text{جزو-ا اور جزو-ب میں حاصل قیمتیں} \\ &= 2\pi\left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi \end{aligned}$$

۸۸۸۸ یہ نتیجہ مثال ۶.۹ میں ترکیب قرص سے حاصل جواب کے عین مطابق ہے۔ □



شکل ۶.۶۰: محور x کے گرد طواف (مثال ۶.۱۷)

۸۸۸۹ **ترکیب خول کا استعمال**

۸۸۹۰ محور طواف (افقی یا انتصابی) جیسا بھی ہو ترکیب خول کے اقدام درج ذیل ہوں گے۔

۸۸۹۱ ا. خطے کا خاکہ بنا کر اس میں محور طواف کے متوازی قطعہ بنائیں۔ قطعہ کے قد یا لمبائی (قد خول)، محور طواف سے قطعہ کے فاصلہ (رداس خول) اور قطعہ کی
۸۸۹۲ موٹائی (چوڑائی خول) کی نشاندہی کریں۔

۸۸۹۳ ب. تکمل کی حدیں معلوم کریں

۸۸۹۴ ج. متکمل (2π) (رداس خول) (قد خول) کا موزوں متغیر (x یا y) کے ساتھ تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے حجم دریافت کریں۔

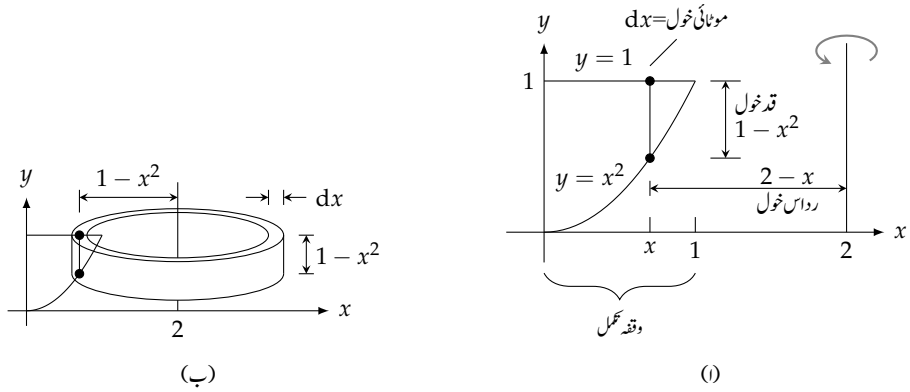
۸۸۹۵ اگلی مثال میں محور طواف افقی لکیر $x=2$ ہے۔

۸۸۹۶ مثال ۶.۱۸: ربع اول میں قطع مکافی $y=x^2$ ، لکیر $y=1$ ، اور محور y کے بیچ خطے کو محور طواف $x=2$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا
۸۸۹۷ جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

۸۸۹۸ **حل**

۸۸۹۹ **پہلا قدم:** خطے پر محور طواف کے متوازی قطعہ بنائیں۔ قطعہ کے قد (قد خول)، محور طواف سے قطعہ کے فاصلہ (رداس خول) اور قطعہ کی موٹائی (چوڑائی
۸۹۰۰ خول dx) کی نشاندہی کریں (شکل ۶.۶۱)۔ ہم نے خول بھی بنایا ہے۔ آپ کو ایسا کرنے کی ضرورت نہیں۔

۸۹۰۱ **دوسرا قدم:** تکمل کی حدیں $a=0$ اور $b=1$ ہیں۔



شکل ۶.۶۱: خطہ اور خول (مثال ۶.۱۸)

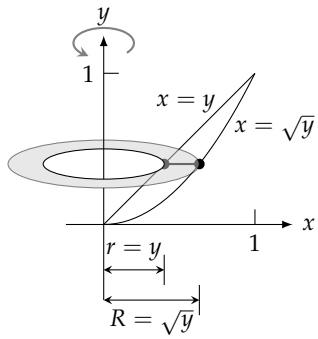
۸۹۰۲ **تیسرا قدم:**

$$
\begin{aligned}
H &= \int_a^b 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}x && \text{مساوات ا}\\
&= \int_0^1 2\pi(2-x)(1-x^2)\,\mathrm{d}x && \text{جزو-ا اور جزو-ب میں حاصل قیمتیں}\\
&= 2\pi\int_0^1 (2-x-2x^2+x^3)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{13\pi}{6}
\end{aligned}
$$

۸۹۰۳ □

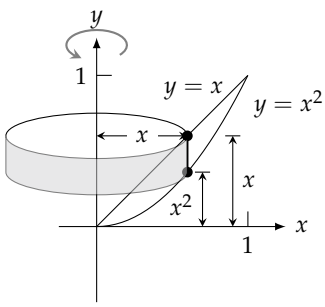
۸۹۰۴ تفاعل $y = x^2$ اور لکیر $y = x$ کے بیچ خطہ کو مثال بناتے ہوئے شکل ۶.۶۲ میں ترکیب چھلا اور ترکیب خول دونوں دکھائی گئی ہیں۔ شکل ۶.۶۲-ا اور
۸۹۰۵ ب میں محور y کے گرد خطہ گھمایا گیا ہے جبکہ شکل-ج اور د میں محور x کے گرد خطہ گھمایا گیا ہے۔ دونوں صورتوں میں حجم کو ترکیب چھلا اور ترکیب خول سے
۸۹۰۶ حل کیا گیا ہے۔ اس مخصوص خطے کے لیے دونوں محور طواف کے لیے دونوں تراکیب کارآمد ہیں لیکن ایسا ہر مرتبہ نہیں ہو گا۔ مثال کے طور پر محور y کے گرد
۸۹۰۷ گھماتے ہوئے ترکیب چھلا میں ہمیں y کے لحاظ سے تکمل حل کرنا ہو گا۔ البتہ عین ممکن ہے کہ متکمل کو y کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو۔ ایسی صورت میں
۸۹۰۸ ہمیں ترکیب خول استعمال کرنی ہو گی جو ہمیں x کے لحاظ سے تکمل لینے کی اجازت دیگی۔

۸۹۰۹ ترکیب چھلا اور ترکیب خول سے ہر صورت یکساں حجم حاصل ہوں گے۔ ہم حصہ ۷.۱ کے سوال ۷.۵۲ میں ان کی برابری کو ثابت کر پائیں گے۔



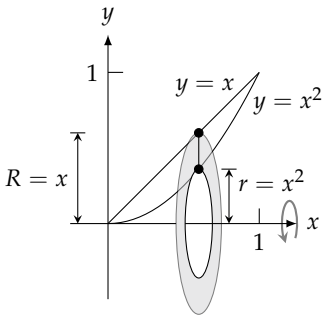
$$H = \int_{y=0}^{y=1} \pi[(\sqrt{y})^2 - (y)^2]\,\mathrm{d}y = \tfrac{\pi}{6}$$

(ا)



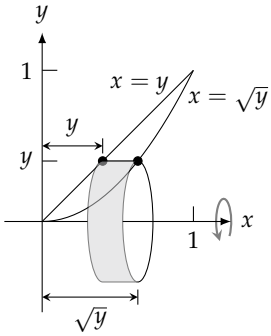
$$H = \int_{x=0}^{x=1} 2\pi(x)(x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}$$

(ب)



$$H = \int_{x=0}^{x=1} \pi[(x)^2 - (x^2)^2]\,\mathrm{d}x = \tfrac{2\pi}{15}$$

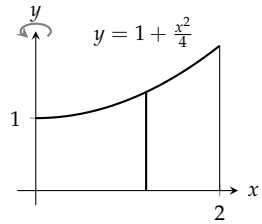
(ج)



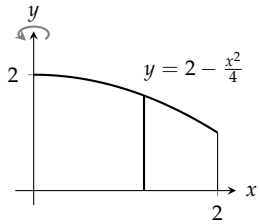
$$H = \int_{y=0}^{y=1} 2\pi(y)(\sqrt{y} - y)\,\mathrm{d}y = \tfrac{2\pi}{15}$$

(د)

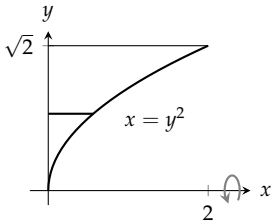
شکل ۶.۶۲



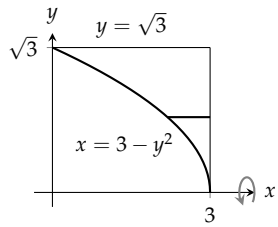
شکل ۶.۶۳



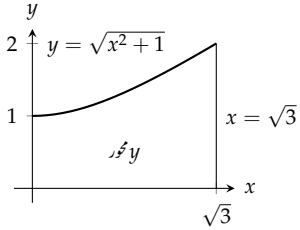
شکل ۶.۶۴



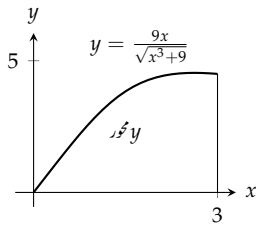
شکل ۶.۶۵



شکل ۶.۶۶



شکل ۶.۶۷



شکل ۶.۶۸

۸۹۱۰ **سوالات**

۸۹۱۱ سوال ۶.۱۲۰ تا سوال ۶.۱۲۵ میں خطے کو دکھائے گئے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ حاصل جسم طواف کا حجم ترکیب خول سے دریافت کریں۔

۸۹۱۲ سوال ۶.۱۲۰: خطہ شکل ۶.۶۳ میں دکھایا گیا ہے۔

۸۹۱۳ سوال ۶.۱۲۱: خطہ شکل ۶.۶۴ میں دکھایا گیا ہے۔

۸۹۱۴ سوال ۶.۱۲۲: خطہ شکل ۶.۶۵ میں دکھایا گیا ہے۔

۸۹۱۵ سوال ۶.۱۲۳: خطہ شکل ۶.۶۶ میں دکھایا گیا ہے۔

۸۹۱۶ سوال ۶.۱۲۴: خطہ شکل ۶.۶۷ میں دکھایا گیا ہے۔

۸۹۱۷ سوال ۶.۱۲۵: خطہ شکل ۶.۶۸ میں دکھایا گیا ہے۔

۸۹۱۸

۸۹۱۹ سوال ۶.۱۲۶ تا سوال ۶.۱۳۳ میں دی گئی منحنیات اور لکیروں میں محیط خطے کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم ترکیب خول
۸۹۲۰ سے تلاش کریں۔

۸۹۲۱ سوال ۶.۱۲۶: $y = x, \quad y = -\frac{x}{2}, \quad x = 2$

۸۹۲۲ سوال ۶.۱۲۷: $y = 2x, \quad y = \frac{x}{2}, \quad x = 1$

۸۹۲۳ سوال ۶.۱۲۸: $y = x^2, \quad y = 2 - x, \quad x = 0, (x \geq 0)$

۸۹۲۴ سوال ۶.۱۲۹: $y = 2 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = 0$

۸۹۲۵ سوال ۶.۱۳۰: $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 4$

۸۹۲۶ سوال ۶.۱۳۱: $y = 2x - 1, \quad y = \sqrt{x}, \quad x = 0$

۸۹۲۷ سوال ۶.۱۳۲: $y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 2$

۸۹۲۸ سوال ۶.۱۳۳: $y = \frac{3}{2\sqrt{x}}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$

۸۹۲۹ سوال ۶.۱۳۴ تا سوال ۶.۱۴۱ میں طواف جسم کا حجم ترکیب خول سے معلوم کریں۔ منحنیات اور لکیروں میں محیط رقبے کو محور y کے گرد گھمایا گیا ہے۔

۸۹۳۰ سوال ۶.۱۳۴: $x = \sqrt{y}, \quad x = -y, \quad y = 2$

۸۹۳۱ سوال ۶.۱۳۵: $x = y^2, \quad x = -y, \quad y = 2$

۸۹۳۲ سوال ۶.۱۳۶: $x = 2y - y^2, \quad x = 0$

۸۹۳۳ سوال ۶.۱۳۷: $x = 2y - y^2, \quad x = y$

۸۹۳۴ سوال ۶.۱۳۸: $y = |x|, \quad y = 1$

۸۹۳۵ سوال ۶.۱۳۹: $y = x, \quad y = 2x, \quad y = 2$

۸۹۳۶ سوال ۶.۱۴۰: $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad y = x - 2$

۸۹۳۷ سوال ۶.۱۴۱: $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad y = 2 - x$

۸۹۳۸

۸۹۳۹ سوال ۶.۱۴۲ اور سوال ۶.۱۴۳ میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم ترکیب خول سے معلوم کریں۔

۸۹۴۰ سوال ۶.۱۴۲: خطے کو شکل ۶.۶۹ میں دکھایا گیا ہے۔

۸۹۴۱ ا. محور x کے گرد،

۸۹۴۲ ب. محور طواف لکیر $y = 1$ ہے،

۸۹۴۳ ج. محور طواف لکیر $y = \frac{8}{5}$ ہے،

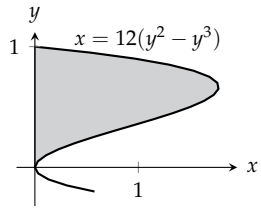
۸۹۴۴ د. لکیر $y = -\frac{2}{5}$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

۸۹۴۵ سوال ۶.۱۴۳: خطے کو شکل ۶.۷۰ میں دکھایا گیا ہے۔

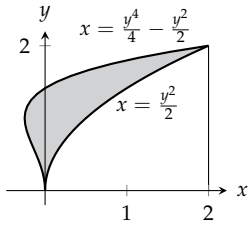
۸۹۴۶ ا. محور x کے گرد،

۸۹۴۷ ب. محور طواف لکیر $y = 2$ ہے،

۸۹۴۸ ج. محور طواف لکیر $y = 5$ ہے،



شکل ۶.۶۹



شکل ۶.۷۰

۸۹۴۹ د. لکیر $y = -\frac{5}{8}$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

۸۹۵۰

۸۹۵۱ سوال ۶.۱۴۴ تا سوال ۶.۱۴۴ میں خطوں کو محور طواف کے گرد گھما کر حاصل جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔ آپ ترکیب چھلا یا ترکیب خول استعمال کر سکتے
۸۹۵۲ ہیں۔

۸۹۵۳ سوال ۶.۱۴۴: تکون جس کے راس $(1,1)$ ، $(1,2)$ ، اور $(2,2)$ ہیں۔ (ا) محور x کے گرد، (ب) محور y کے گرد، (ج) لکیر $x = \frac{10}{3}$
۸۹۵۴ کے گرد، اور (د) لکیر $y = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

۸۹۵۵ سوال ۶.۱۴۵: ربع اول میں منحنی $x = y - y^3$ اور محور y میں محیط خطہ کو (ا) محور x ، (ب) لکیر $y = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

۸۹۵۶ سوال ۶.۱۴۶: ربع اول میں $x = y - y^3$ ، $x = 1$ ، اور $y = 1$ میں محیط خطہ کو (ا) محور x ، (ب) محور y ، (ج) لکیر $x = 1$ ،
۸۹۵۷ اور (د) لکیر $y = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

۸۹۵۸ سوال ۶.۱۴۷: تکونی خطہ جس کی سرحد لکیر $2y = x + 4$ ، $y = x$ ، اور $x = 0$ ہیں کو (ا) محور x ، (ب) محور y ، (ج) لکیر $x = 4$
۸۹۵۹ ، اور (د) لکیر $y = 8$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

۸۹۶۰ سوال ۶.۱۴۸: ربع اول میں $y = x^3$ ، $y = 4x$ کے بیچ خطہ کو (ا) محور x ، اور (ب) لکیر $y = 8$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

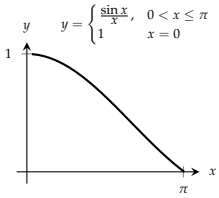
۸۹۶۱ سوال ۶.۱۴۹: سرحد $y = \sqrt{x}$ اور $y = \frac{x^2}{8}$ میں محیط خطہ کو (ا) محور x اور (ب) محور y کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

۸۹۶۲ سوال ۶.۱۵۰: سرحد $y = 2x - x^2$ اور $y = x$ میں محیط خطہ کو (ا) محور y اور (ب) لکیر $x = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

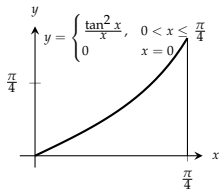
۸۹۶۳ سوال ۶.۱۵۱: منحنی $y = \sqrt{x}$ ، لکیر $y = 2$ ، اور $x = 0$ کے بیچ خطہ کو (ا) محور x ، (ب) محور y ، (ج) لکیر $x = 4$ ، (د) لکیر
۸۹۶۴ $y = 2$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

۸۹۶۵ سوال ۶.۱۵۲: ربع اول میں بالائی جانب منحنی $y = x^{-1/4}$ ، بائیں جانب لکیر $x = \frac{1}{16}$ ، اور نچلی جانب لکیر $y = 1$ سے گھیرے گئے خطے
۸۹۶۶ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم (ا) ترکیب چھلا، (ب) ترکیب خول سے معلوم کریں۔

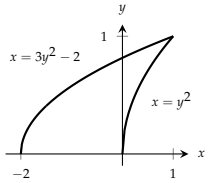
۸۹۶۷ سوال ۶.۱۵۳: ربع اول میں بالائی جانب منحنی $y = \sqrt{x}$ ، بائیں جانب لکیر $x = \frac{1}{4}$ ، اور نچلی جانب لکیر $y = 1$ سے گھیرے گئے خطے کو محور
۸۹۶۸ y کے گرد گھما کو جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم (ا) ترکیب چھلا، (ب) ترکیب خول سے معلوم کریں۔



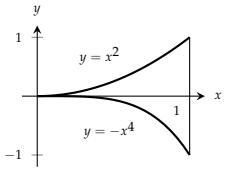
شکل ۶.۷۱



شکل ۶.۷۲



شکل ۶.۷۳



شکل ۶.۷۴

۸۹۶۹ سوال ۶.۱۵۴: درج ذیل تفاعل فرض کریں (شکل ۶.۷۱)۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \le \pi \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

۸۹۷۰ ا. دکھائیں کہ $xf(x) = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$ ہوگا۔

۸۹۷۱ ب. اس تفاعل کو محور y کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

۸۹۷۲ سوال ۶.۱۵۵: درج ذیل تفاعل فرض کریں (شکل ۶.۷۲)۔

$$G(x) = \begin{cases} \frac{\tan^2 x}{x}, & 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

۸۹۷۳ ا. دکھائیں کہ $xf(x) = \tan x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ ہوگا۔

۸۹۷۴ ب. اس تفاعل کو محور y کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

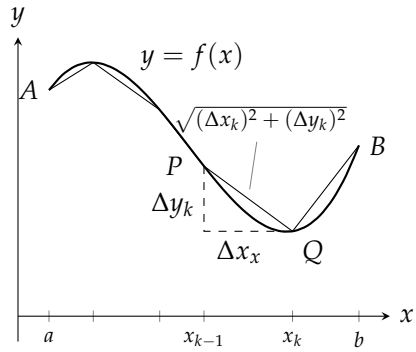
۸۹۷۵ سوال ۶.۱۵۶: محور x کے گرد شکل ۶.۷۳ میں دکھایا گیا خطہ گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ کس ترکیب (قرص، چھلا، خول) کو استعمال کرتے ہوئے
۸۹۷۶ جسم طواف کا حجم تلاش کیا جا سکتا ہے؟ ہر ترکیب میں کتنے تکمل حل کرنے ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۸۹۷۷ سوال ۶.۱۵۷: محور y کے گرد شکل ۶.۷۴ میں دکھایا گیا خطہ گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ کس ترکیب (قرص، چھلا، خول) کو استعمال کرتے ہوئے
۸۹۷۸ جسم طواف کا حجم تلاش کیا جا سکتا ہے؟ ہر ترکیب میں کتنے تکمل حل کرنے ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

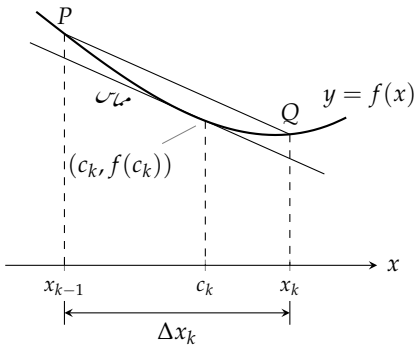
۸۹۷۹ سوال ۶.۱۵۸: فرض کریں وقفہ $x \ge 0$ پر تفاعل $f(x)$ غیر منفی اور استراری ہے۔ منحنی f، لکیر $x = b$، اور کارتیسی محدد کے بیچ خطہ کو
۸۹۸۰ محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے جہاں b کوئی مثبت عدد ہے۔ اس جسم طواف کا حجم $2\pi b^3$ ہے۔ تفاعل $f(x)$ دریافت کریں۔

۸۹۸۱

۸۹۸۲



شکل ۶.۷۵: منحنی AB کے قطعہ PQ کی لمبائی $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ہو گی۔



شکل ۶.۷۶: نقطہ $(c_k, f(c_k))$ پر مماس اور قطعہ متوازی ہیں۔

۶.۵ مستوی منحنیات کی لمبائیاں

نقشہ پر سڑک کی لمبائی جاننے کی خاطر ہم فیتہ استعمال کرتے ہوئے نقشے پر سڑک کی منحنی پر قریب قریب نقطوں کے مابین قطعات کو سیدھا تصور کرتے ہوئے ان کی لمبائیوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔ اس طرح اندازاً لمبائی کی درستگی کی حد قطعات کی تعداد اور ناپنے کی درستگی پر منحصر ہو گی۔

احصاء کو استعمال کرتے ہوئے ہم نقطوں کو قریب سے قریب رکھ کر بہتر نتائج حاصل کرتے ہیں۔ ان نقطوں کو سیدھے قطعات سے جوڑ کر کثیر الاضلاع حاصل ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ قطعات لینے سے کثیر الاضلاع کی لمبائی، اصل منحنی کی لمبائی کے زیادہ قریب ہو گی۔ کثیر الاضلاع کی لمبائی کی حد کو تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

بنیادی کلیہ

فرض کریں ہم $x = a$ سے $x = b$ تک منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی جاننا چاہتے ہیں۔ ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی عمومی طریقہ سے کر کے منحنی پر مطابقتی نقطوں کو سیدھے قطعات سے جوڑ کر کثیر الاضلاع بناتے ہیں جو اصل منحنی کو تخمیناً ظاہر کرتا ہے (شکل ۶.۷۵)۔ اگر ہم کثیر الاضلاع کی لمبائی کا کلیہ تلاش کر سکیں ہم اسی کلیہ کو منحنی کی لمبائی کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔

قطعہ PQ کی لمبائی $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ ہو گی (شکل ۶.۷۵)۔ یوں منحنی کی لمبائی تخمیناً درج ذیل مجموعہ ہو گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \tag{1}$$

وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی باریک کرنے سے حاصل مجموعہ تخمیناً زیادہ بہتر ہو گا۔ ہم دکھانا چاہیں گے کہ خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے مساوات ۱ کا مجموعہ قابل معلوم حد دیگا۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم مساوات ۱ کو ایسے روپ میں لکھتے ہیں کہ اس پر مسئلہ ۵.۱ (صفحہ ۴۵۷) کا اطلاق ہو۔ ہم تفرق کے مسئلہ اوسط قیمت سے شروع کرتے ہیں۔

۸۹۹۷ تعریف: ایسا تفاعل جس کا یک رتبی تفرق استمراری ہو **ہموار**[۶] کہلاتا ہے اور اس کی منحنی کو **ہموار منحنی**[۷] کہتے ہیں۔

۸۹۹۸ □

۸۹۹۹ اگر f ہموار ہو تب مسئلہ اوسط قیمت کے تحت P اور Q کے بیچ منحنی پر ایک ایسا نقطہ $(c_k, f(c_k))$ پایا جائے گا جہاں منحنی کا مماس قطعہ PQ کے
۹۰۰۰ متوازی ہو گا (شکل ۶.۷۶)۔ اس نقطہ پر درج ذیل ہو گا۔

$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}, \quad \Longrightarrow \Delta y_k = f'(c_k)\Delta x_k$$

۹۰۰۱ مساوات ۱ میں Δy_k کی اس قیمت کو پُر کرنے سے درج ذیل روپ ملتا ہے۔

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\Delta x_k \qquad \text{ریمان مجموعہ}$$

۹۰۰۲ چونکہ $[a, b]$ پر $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ استمراری ہے لہٰذا خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے دائیں ہاتھ مجموعے کی حد
۹۰۰۳ $\int_a^b \sqrt{a + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$ ہو گی۔ ہم اس تکمل کی قیمت کو منحنی کی لمبائی کی تعریف مانتے ہیں۔

۹۰۰۴ تعریف: اگر $[a, b]$ پر f ہموار ہو تب a سے b تک منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \tag{۲}$$

۹۰۰۵ □

۹۰۰۶ مثال ۶.۱۹: درج ذیل منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1, \quad 0 \le x \le 1$$

۹۰۰۷ **حل**

۹۰۰۸ ہم $a = 0$ ، $b = 1$، اور

$$\begin{aligned} y &= \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{2}x^{1/2} \\ \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 &= \left(2\sqrt{2}x^{1/2}\right)^2 = 8x \end{aligned}$$

---

[۶] smooth
[۷] smoothcurve

۹۰۰۹ لیتے ہوئے مساوات ۲ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \int_0^1 \sqrt{1+8x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}(1+8x)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

۹۰۱۰ □

۹۰۱۱ تفرق $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ میں عدم استمرار

۹۰۱۲ کبھی کبھار منحنی پر $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ غیر موجود لیکن $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ موجود ہو گا اور ہم x کو y کا تفاعل لکھ کر منحنی کی لمبائی مساوات ۲ کے درج ذیل مشابہ سے حاصل کر پاتے
۹۰۱۳ ہیں۔

۹۰۱۴ **منحنی $x = g(y),\ c \le y \le d$ کی لمبائی کا کلیہ**

$$L = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_c^d \sqrt{1+(g'(y))^2}\,\mathrm{d}y \tag{۳}$$

۹۰۱۵ مثال ۶.۲۰: منحنی $y = (\frac{x}{2})^{2/3}$ کی لمبائی $x = 0$ تا $x = 2$ معلوم کریں۔

۹۰۱۶ **حل**

۹۰۱۷ منحنی کا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$$

۹۰۱۸ نقطہ $x = 0$ پر غیر معین یعنی غیر موجود ہے لہٰذا منحنی کی لمبائی حاصل کرنے کے لیے مساوات ۲ ناقابل استعمال ہے۔

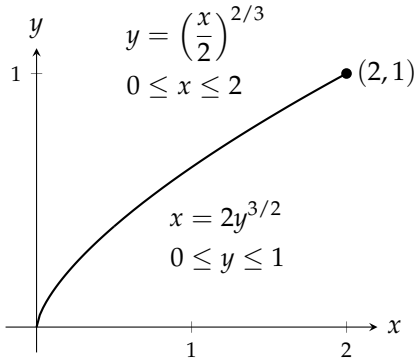
۹۰۱۹ ہمیں x کو y کی صورت میں لکھنا ہو گا (شکل ۶.۷۷):

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} \\ y^{3/2} &= \frac{x}{2} \\ x &= 2y^{3/2} \end{aligned}$$

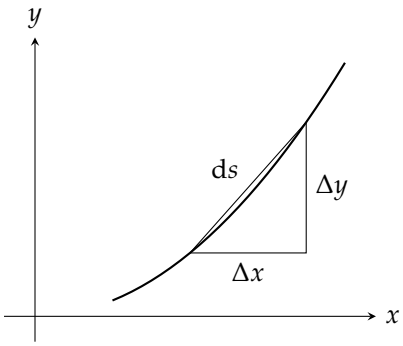
۹۰۲۰ یوں ہم دیکھتے ہیں کہ درکار منحنی کو تفاعل $x = 2y^{3/2}$ سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں منحنی کے سر $y = 0$ اور $y = 1$ پر ہوں گے۔

۹۰۲۱ اس کا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 2\left(\frac{3}{2}\right)y^{1/2} = 3y^{1/2}$$



شکل ۶.۷۷: منحنی برائے مثال ۶.۲۰



شکل ۶.۷۸: تعلق $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کا حصول۔

۹۰۲۲ وقفہ $[0, 1]$ پر استمراری ہے لہٰذا منحنی کی لمبائی کی خاطر مساوات ۳ قابل استعمال ہے۔

$$\begin{aligned} L &= \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \sqrt{1+9y}\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{3}(1+9y)^{3/2}\Big]_0^1 \\ &= \frac{2}{27}(10\sqrt{10}-1) \approx 2.27 \end{aligned}$$

۹۰۲۳ □

۹۰۲۴ **مختصر تفرقی کلیہ**

۹۰۲۵ لمبائی معلوم کرنے کی مساوات

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x, \quad L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y \tag{۴}$$

۹۰۲۶ عموماً تفارق کے بجائے تفرقات میں لکھی جاتی ہے۔ ایسا باضابطہ طور پر کرنے کے لیے تفارق کو تفرقات کا حاصل تقسیم تصور کریں۔ یوں پہلے تکمل میں درج
۹۰۲۷ ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$$

۹۰۲۸ دوسرے تکمل میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y=\sqrt{1+\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}y^2}}\,\mathrm{d}y=\sqrt{\mathrm{d}y^2+\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}y^2}\,\mathrm{d}y^2}=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$$

۹۰۲۹ اس طرح مساوات ۴ میں دیے گئے دونوں تکمل درج ذیل (یک) تفرقی کلیہ کی صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$L=\int_a^b \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} \tag{۵}$$

۹۰۳۰ ظاہر ہے کہ $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ کو ایک ہی متغیر کے لحاظ سے لکھنا ضروری ہے اور مساوات ۵ میں دیا گیا تکمل حل کرنے کے لیے تکمل کی موزوں حدیں جاننا
۹۰۳۱ ضروری ہیں۔

۹۰۳۲ ہم مساوات ۵ کو مزید چھوٹا کر سکتے ہیں۔ $\mathrm{d}x^2$ اور $\mathrm{d}y^2$ کو ایک چھوٹے مثلث کے اضلاع تصور کریں۔ مسئلہ فیثا غورث کے تحت اس مثلث کا وتر
۹۰۳۳ $\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$ ہو گا (شکل ۶.۷۸)۔ تفرقہ $\mathrm{d}s$ کو اب قوس کی تفرقی لمبائی تصور کیا جا سکتا ہے جس کی موزوں حدود کے درمیان تکمل
۹۰۳۴ لے کر قوس کی لمبائی دریافت کی جا سکتی ہے۔ مساوات ۵ میں $\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$ کو $\mathrm{d}s$ لکھنے سے مساوات کو $\mathrm{d}s$ کا تکمل لکھا جا سکتا ہے۔

۹۰۳۵ تعریف: لمبائی قوس کا تفرقہ اور قوس کی لمبائی کا تفرقی کلیہ درج ذیل ہیں۔

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} \qquad \text{لمبائی قوس کا تفرقہ}$$

$$L=\int \mathrm{d}s \qquad \text{قوس کی لمبائی کا تفرقی کلیہ}$$

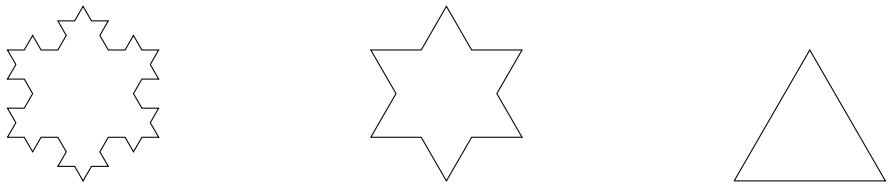
۹۰۳۶ □

۹۰۳۷ **لا متناہی لمبائی کی منحنیات**

۹۰۳۸ برف کی روئی پر صفحہ ۲۵۳ پر غور کیا گیا۔ لا متناہی تکونی کثیر الاضلاع کی ترتیب $C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots$ کی تحدیدی صورت کو برف کی روئی K
۹۰۳۹ کہتے ہیں۔ شکل ۶.۷۹ میں اس ترتیب کی پہلی تین صورتیں دکھائی گئی ہیں۔ بناوٹ کے دوران ہر نیا متعارف کردہ راس بعد کے تمام منحنیات میں بطور راس پایا
۹۰۴۰ جاتا ہے اور تحدیدی منحنی K میں بطور نقطہ نظر آتا ہے۔ یوں ہر منحنی C از خود منحنی K کی تخمینی صورت ہو گی۔ یوں K کی لمبائی منحنیات C_n کی
۹۰۴۱ تحدیدی لمبائی کے برابر ہو گی۔ کم از کم، ہموار منحنیات کی لمبائی کی تعریف کے تحت، ایسا ہی ہونا چاہیے۔

۹۰۴۲ آئیں C_n کی تحدیدی لمبائی تلاش کریں۔ اگر ابتدائی مثلث الاضلاع کے ضلع کی لمبائی 1 ہو تب C_1 کی کل لمبائی 3 ہو گی۔ C_1 سے C_2
۹۰۴۳ حاصل کرتے ہوئے ہم C_1 کے ہر ضلع کی جگہ چار اضلاع بناتے ہیں جہاں ہر ضلع ابتدائی ضلعے کا $\frac{1}{3}$ واں حصہ ہے۔ یوں C_2 کی کل لمبائی
۹۰۴۴ $3\times 4\times\frac{1}{3}=3(\frac{4}{3})$ ہو گی۔ اسی طرح C_3 کی لمبائی حاصل کرنے کی خاطر ہمیں C_2 کی لمبائی کو $\frac{4}{3}$ سے ضرب دینا ہو گا۔ یہی عمل
۹۰۴۵ دہراتے ہوئے C_n کی کل لمبائی $3(\frac{4}{3})^{n-1}$ حاصل ہوتی ہے۔ ان نتائج کو یہاں پیش کرتے ہیں۔

شمار منحنی	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
کل لمبائی	3	$3(\frac{4}{3})$	$3(\frac{4}{3})^2$	$\cdots$	$3(\frac{4}{3})^{n-1}$	$\cdots$



(ا) منحنی C_1 (ب) منحنی C_2 (ج) منحنی C_3

شکل ۶.۷۹: برف کی روئی۔

منحنی C_{10} کی لمبائی تقریباً 40 ہے جبکہ C_{100} کی لمبائی 7 000 000 000 000 سے زیادہ ہے۔ لمبائی اتنی تیزی سے بڑھتی ہے کہ اس کی تحدیدی قیمت متناہی نہیں ہو سکتی۔ یوں برف کی روئی کی لمبائی نہیں پائی جاتی، یعنی، اس کی لمبائی لامتناہی ہے۔

لمبائی کی تعریف ہموار منحنیات کے لیے پیش کی گئی تھی جن کا ہر نقطے پر مماس استمراری مڑتا ہے۔ برف کی روئی اتنی ناہموار ہے کہ لمبائی کے کلیہ کا اس پر اطلاق کرنا ممکن نہیں۔

بنوامنڈلبرا کا نظریہ **گنج غیر ہموار منحنیات**[8] ایسی متعدد منحنیات پیش کرتا ہے جن کی لمبائی لامتناہی ہے۔ ایسی منحنیات کو بڑا کر کے دیکھنے سے یہ اتنی ہی غیر ہموار نظر آتی ہیں جتنی بغیر بڑا کیے نظر آتی ہیں۔ سمندر کے ساحل کی طرح ان منحنیات کو بھی بڑا کر کے ہموار نہیں بنایا جا سکتا۔

سوالات

قوس کی لمبائی کے تکمل کا حصول

سوال ۶.۱۵۹ تا سوال ۶.۱۶۶ میں

ا. لمبائی قوس کا تکمل لکھیں۔

ب. منحنی ترسیم کر کے دیکھیں کیسی لگتی ہے۔

ج. کمپیوٹر کی مدد سے تکمل کو اعدادی طریقہ سے حل کریں۔

سوال ۶.۱۵۹: $y = x^2, \quad -1 \le x \le 2$

سوال ۶.۱۶۰: $y = \tan x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le 0$

سوال ۶.۱۶۱: $x = \sin y, \quad 0 \le y \le \pi$

سوال ۶.۱۶۲: $x = \sqrt{1-y^2}, \quad -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$

سوال ۶.۱۶۳: $y^2 + 2y = 2x + 1$ نقطہ $(-1,-1)$ سے $(7,3)$ تک۔

سوال ۶.۱۶۴: $y = \sin x - x\cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

---

[8] fractals

۶۰۶۴ سوال ۶.۱۶۵: $y = \int_0^x \tan t \, \mathrm{d}t, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$

۶۰۶۵ سوال ۶.۱۶۶: $x = \int_0^y \sqrt{\sec^2 t - 1} \, \mathrm{d}t, \quad -\frac{\pi}{3} \le y \le \frac{\pi}{4}$

۶۰۶۶ **لمبائی قوس کا حصول**

۶۰۶۷ سوال ۶.۱۶۷ تا سوال ۶.۱۷۶ میں قوس کی لمبائی تلاش کریں۔ بہتر ہو گا کہ منحنیات کو ترسیم کر کے دیکھیں۔

۶۰۶۸ سوال ۶.۱۶۷: $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$ ، $x = 0$ سے $x = 3$ تک

۶۰۶۹ سوال ۶.۱۶۸: $y = x^{3/2}$ ، $x = 0$ سے $x = 4$ تک

۶۰۷۰ سوال ۶.۱۶۹: $x = \frac{y^3}{3} + \frac{1}{4y}$ ، $y = 1$ سے $y = 3$ تک (اشارہ۔ $1 + (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2$ مکمل مربع ہے۔)

۶۰۷۱ سوال ۶.۱۷۰: $x = \frac{y^{3/2}}{3} - y^{1/2}$ ، $y = 1$ سے $y = 9$ تک (اشارہ۔ $1 + (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2$ مکمل مربع ہے۔)

۶۰۷۲ سوال ۶.۱۷۱: $x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}$ ، $y = 1$ سے $y = 2$ تک (اشارہ۔ $1 + (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2$ مکمل مربع ہے۔)

۶۰۷۳ سوال ۶.۱۷۲: $x = \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y}$ ، $y = 2$ سے $y = 3$ تک (اشارہ۔ $1 + (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2$ مکمل مربع ہے۔)

۶۰۷۴ سوال ۶.۱۷۳: $y = \frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{3}{8}x^{2/3} + 5, \quad 1 \le x \le 8$

۶۰۷۵ سوال ۶.۱۷۴: $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + \frac{1}{4x+4}, \quad 0 \le x \le 2$

۶۰۷۶ سوال ۶.۱۷۵: $x = \int_0^y \sqrt{\sec^4 t - 1} \, \mathrm{d}t, \quad -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}$

۶۰۷۷ سوال ۶.۱۷۶: $y = \int_{-2}^x \sqrt{3t^4 - 1} \, \mathrm{d}t, \quad -2 \le x \le -1$

۶۰۷۸ سوال ۶.۱۷۷: (ا) نقطہ $(1,1)$ سے گزرتی ہوئی ایسی منحنی تلاش کریں جس کی لمبائی درج ذیل ہو (مساوات ۲)۔

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} \, \mathrm{d}x$$

۶۰۷۹ (ب) ایسی کتنی منحنیات ہوں گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

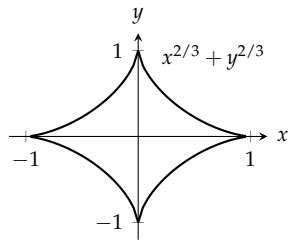
۶۰۸۰ سوال ۶.۱۷۸: (ا) نقطہ $(0,1)$ سے گزرتی ہوئی ایسی منحنی تلاش کریں جس کی لمبائی درج ذیل ہو (مساوات ۳)۔

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{y^4}} \, \mathrm{d}y$$

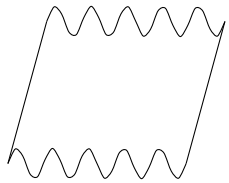
۶۰۸۱ (ب) ایسی کتنی منحنیات ہوں گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۶۰۸۲ سوال ۶.۱۷۹: $x = 0$ سے $x = \frac{\pi}{4}$ تک درج ذیل منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

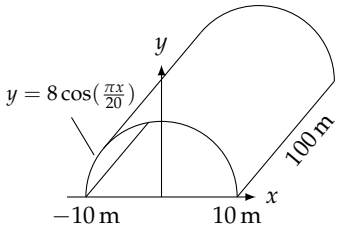
$$y = \int_0^x \sqrt{\cos 2t} \, \mathrm{d}t$$



شکل ۶.۸۰: ستارہ نما۔



شکل ۶.۸۱: نالیدار چادر۔



شکل ۶.۸۲: سرنگ۔

سوال ۶.۱۸۰: ستارہ نما کی لمبائی

مساوات $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ خطوط کی ایک ایسی نسل کو ظاہر کرتی ہے جس کو ستارہ نما کہتے ہیں (شکل ۶.۸۰)۔ نصف ربع اول میں قوس کی لمبائی حاصل کر کے 8 سے ضرب دے کر کل لمبائی حاصل ہو گی۔ یوں $\frac{\sqrt{2}}{4} \leq x \leq 1$ پر منحنی $y=(1-x^{2/3})^{3/2}$ کی لمبائی حاصل کر کے 8 سے ضرب دیں۔

اعدادی تکمل

آپ سوچ رہے ہوں گے کہ اب تک لمبائی قوس میں زیادہ تر منحنیات کی مساواتیں کیوں پیچیدہ تھیں۔ اس کی وجہ لمبائی قوس کے تکمل میں $\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$ ہے جو عموماً مکمل مربع نہیں ہوتا اور جس کی وجہ سے متکمل کا ضد تفرق ہم حاصل نہیں کر پاتے۔ حقیقت میں عموماً یہی جذر غیر بنیادی تکمل کا باعث بنتا ہے۔ اسی لیے، سوال ۶.۱۸۱ اور سوال ۶.۱۸۲ کی طرح، لمبائی قوس اور سطحی رقبہ کے تکمل عموماً اعدادی طریقوں سے حل کیے جاتے ہیں۔

سوال ۶.۱۸۱: آپ کا ادارہ چھتوں کے لیے لوہے کی نالیدار چادریں بناتا ہے۔ نالیدار چادروں کی عمودی تراش درج ذیل کے مطابق درکار ہے (شکل ۶.۸۱)۔

$$y=\sin\frac{3\pi}{50}x, \quad 0 \leq x \leq 50\,\text{cm}$$

مستوی چادر سے نالیدار چادر بناتے ہوئے چادر کی چوڑائی یا لمبائی تبدیل نہیں ہوتی۔ درکار مستوی چادر کی چوڑائی معلوم کریں۔ اعدادی تراکیب استعمال کرتے ہوئے سائن نما چادر کی لمبائی تین اعشاریہ تک تلاش کریں۔

سوال ۶.۱۸۲: آپ کے انجینئری ادارے کو سرنگ بنانے کا کام ملا ہے۔ سرنگ کی لمبائی 100 m جبکہ اس کی چوڑائی 20 m ہے (شکل ۶.۸۲)۔ سرنگ کی عمودی تراش $y=8\cos(\frac{\pi x}{20})$ کے مطابق ہے۔ مکمل ہونے کے بعد سرنگ کو اندر سے پانی روک مسالہ کیا جائے گا جس پر 2000 روپیہ فی مربع میٹر لاگت متوقع ہے۔ مسالہ کرنے پر کل کتنی لاگت آئے گی؟ (اشارہ۔ اعدادی طریقہ سے کو سائن تفاعل کی لمبائی دریافت کریں۔)

نظریہ اور مثالیں

سوال ۶.۱۸۳: کیا ایسی ہموار منحنی $y=f(x)$ ہو سکتی ہے جس کی وقفہ $0 \leq x \leq a$ پر لمبائی $\sqrt{2}a$ ہو۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۶.۱۸۴: مماسی تیلیوں سے لمبائی قوس کے کلیہ کا حصول۔

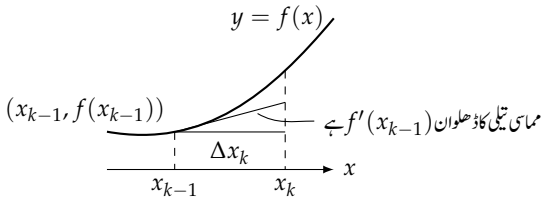
فرض کریں $[a,b]$ پر f ہموار ہے۔ وقفہ $[a,b]$ کی خانہ بندی کریں۔ ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1},x_k]$ میں نقطہ $(x_{k-1},f(x_{k-1}))$ پر مماسی

تیلی بنائیں (نیچے شکل دیکھیں)۔

ا. دکھائیں کہ ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ پر k ویں مماسی تیلی کی لمبائی $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(x_{k-1})\Delta x_k)^2}$ ہے۔

ب. دکھائیں کہ a تا b منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی L درج ذیل ہے۔

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\text{ویں تیلی کی لمبائی } k) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x$$



کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۶.۱۸۵ تا سوال ۶.۱۹۰ میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدامات کریں۔

ا. منحنی ترسیم کریں۔ خانہ بندی کے نقطے $n = 2, 4, 8$ لیتے ہوتے تخمینی کثیر الاضلاع ترسیم کریں۔

ب. مطابقتی قطعات کی لمبائیوں کا مجموعہ لے کر قوس کی تخمینی لمبائی معلوم کریں۔

ج. تکمل سے قوس کی اصل لمبائی تلاش کریں۔ اصل لمبائی اور $n = 2, 4, 8$ لے کر حاصل تخمینی لمبائیوں کا موازنہ کریں۔ n بڑھانے سے تخمینی لمبائی اور اصل لمبائی کا مقابلہ کریں۔ اپنے جواب کی وضاحت کریں۔

سوال ۶.۱۸۵: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \le x \le 1$

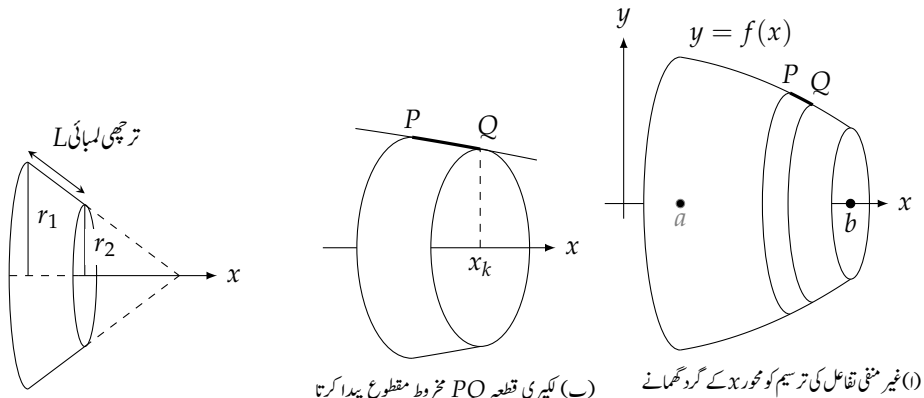
سوال ۶.۱۸۶: $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad 0 \le x \le 2$

سوال ۶.۱۸۷: $f(x) = \sin(\pi x^2), \quad 0 \le x \le \sqrt{2}$

سوال ۶.۱۸۸: $f(x) = x^2 \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

سوال ۶.۱۸۹: $f(x) = \frac{x-1}{4x^2+1}, \quad -\frac{1}{2} \le x \le 1$

سوال ۶.۱۹۰: $f(x) = x^3 - x^2, \quad -1 \le x \le 1$



(ا) غیر منفی تفاعل کی ترسیم کو محور x کے گرد گھمانے سے سطح طواف پیدا کیا گیا ہے۔

(ب) لکیری قطعہ PQ مخروط مقطوع پیدا کرتا ہے۔

(ج) مخروط مقطوع کے اہم متغیرات۔

شکل ۶.۸۳: سطح طواف کو قوس PQ سے پیدا پٹیوں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

۶.۶ سطح طواف کا رقبہ

بچپن میں آپ نے دوستوں کے ساتھ مل کر رسّی گھماتے ہوئے رسّی کے اوپر سے چھلانگیں ضرور لگائی ہوں گی۔ یہ رسّی فضا میں پھیر کر ایک سطح بناتی ہے جس کو **سطح طواف**[9] کہتے ہیں۔ سطح طواف کا رقبہ رسّی کی لمبائی اور رسّی کے ہر حصے کے جھول پر منحصر ہو گا۔ اس حصہ میں سطح طواف کے رقبے اور سطح کو پیدا کرنے والی منحنی کی لمبائی اور جھول کے تعلق پر غور کیا جائے گا۔ زیادہ پیچیدہ سطحوں پر باب ۱۵ میں غور کیا جائے گا۔

بنیادی کلیہ

فرض کریں ہم غیر منفی تفاعل $y = f(x), a \leq x \leq b$ کو x محور کے گرد گھما کر پیدا ہونے والی سطح طواف کا سطحی رقبہ جاننا چاہتے ہیں۔ ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی کر کے نقاط خانہ بندی استعمال کرتے ہوئے ترسیم کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ شکل ۶.۸۳-ا میں نمائندہ حصہ PQ اور اس کی پیدا کردہ پٹی دکھائی گئی ہے۔

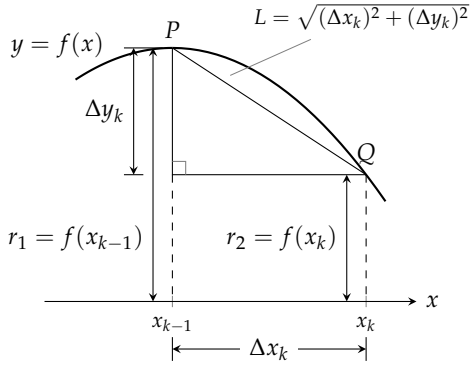
قوس PQ محور x کے گرد گھومتے ہوئے مخروط سطح پیدا کرتی ہے جس کو بڑا کر کے شکل ۶.۸۳-ب میں دکھایا گیا ہے۔ محور x اس مخروط سطح کا محور ہو گا۔ مخروط کے ایسے حصے کو **مخروط مقطوع**[10] کہتے ہیں۔ مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ، PQ کی پیدا کردہ پٹی کے رقبے کا تخمین ہو گا۔

مخروط مقطوع (شکل ۶.۸۳-ج) کا سطحی رقبہ 2π ضرب دونوں سروں کے رداس کی اوسط ضرب ترچھا قد کے برابر ہو گا۔

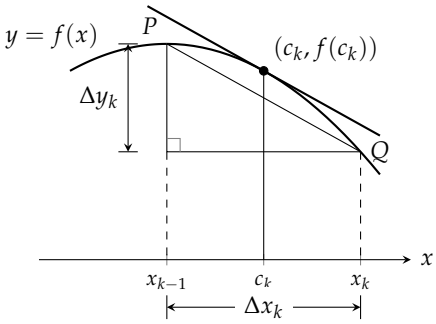
$$\text{مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ} = 2\pi \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot L = \pi(r_1 + r_2)L$$

---

[9] surfaceofrevolution
[10] frustum



شکل ۶.۸۴: لکیر اور قوس PQ کے ساتھ وابستہ متغیرات۔



شکل ۶.۸۵: خط مستقیم PQ اور نقطہ c_k پر مماس متوازی ہیں۔

۹۱۳۳ قطعہ PQ کے پیدا کردہ مخروط مقطوع (شکل ۶.۸۴) کے لیے اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ} = \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

۹۱۳۴ پوری سطح طواف کا رقبہ تخمیناً ایسے تمام چھوٹے قطعات کے پیدا کردہ مخروط مقطوع کے سطحی رقبوں کا مجموعہ کے ہو گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \tag{۱}$$

۹۱۳۵ ہم توقع کرتے ہیں کہ $[a, b]$ کی زیادہ باریک خانہ بندی سے تخمین بہتر ہو گی۔ ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے مساوات ۱
۹۱۳۶ میں دیا گیا مجموعہ قابل حل حد دیگا۔

۹۱۳۷ یہ دکھانے کی خاطر ہم مساوات ۱ کو وقفہ $[a, b]$ پر کسی تفاعل کا ریمان مجموعہ لکھتے ہیں۔ لمبائی قوس کے حصول کی طرح ہم تفارق کے مسئلہ اوسط قیمت کی
۹۱۳۸ طرف دیکھتے ہیں۔

۹۱۳۹ اگر f ہموار ہو تب مسئلہ اوسط قیمت کے تحت P اور Q کے بیچ ایسا نقطہ $(c_k, f(c_k))$ ضرور پایا جائے گا جہاں مماس قطعہ PQ کے متوازی ہو گا
۹۱۴۰ (شکل ۶.۸۵)۔ اس نقطے پر درج ذیل ہو گا۔

$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}$$
$$\Delta y_k = f'(c_k)\Delta x_k$$

۹۱۴۱ مساوات ۱ میں درج بالا Δy_k پُر کرتے ہیں۔

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \tag{۲}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\Delta x_k$$

اب یہاں ایک بُری خبر اور ایک اچھی خبر ہے۔

بُری خبر یہ ہے کہ مساوات ۲ میں x_{k-1} ، x_k ،اور c_k ایک دوسرے سے مختلف ہیں اور انہیں ایک جیسا کسی صورت نہیں بنایا جا سکتا لہٰذا مساوات ۲ میں دیا گیا مجموعہ ریمان مجموعہ نہیں ہے۔ اچھی خبر یہ ہے کہ اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا۔ اعلیٰ احصاء کا **مسئلہ بلس**[11] کہتا ہے کہ وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے مساوات ۲ میں دیا گیا مجموعہ درج ذیل پر مرکوز ہو گا

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

جو ہم چاہتے ہیں۔ یوں a تا b تفاعل f کی ترسیم کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کے رقبہ کی تعریف ہم اسی تکمل کو لیتے ہیں۔

تعریف: **محور x کے گرد سطح طواف کے رقبے کا کلیہ**
اگر $[a, b]$ پر تفاعل $f(x) \geq 0$ ہموار ہو تب تفاعل $y = f(x)$ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \tag{۳}$$

□

مساوات ۳ میں جذر وہی ہے جو پیدا کار منحنی کی لمبائی قوس کے کلیے میں پایا جاتا ہے۔

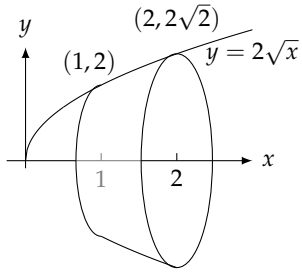
مثال ۶.۲۱: محور x کے گرد منحنی $y = 2\sqrt{x},\ 1 \leq x \leq 2$ گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل ۶.۸۶)۔ سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔

حل
ہم درج ذیل لیتے ہوئے

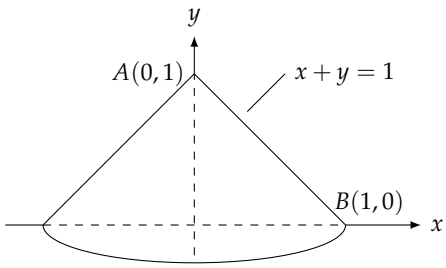
$$a = 1,\ b = 2,\ y = 2\sqrt{x},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

---

[11] Bliss'stheorem



شکل ۶.۸۶: سطح طواف برائے مثال ۶.۲۱



شکل ۶.۸۷: سطح طواف برائے مثال ۶.۲۲

۹۱۵۵ مساوات ۱۳ استعمال کرتے ہیں۔

$$S = \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4\pi\int_1^2 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= 4\pi \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{8\pi}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$$

۹۱۵۶ □

۹۱۵۷ **محور y کے گرد سطح طواف**

۹۱۵۸ محور y کے گرد سطح طواف کے لیے ہم مساوات ۳ میں x اور y کی جگہیں آپس میں تبدیل کرتے ہیں۔

۹۱۵۹ **محور y کے گرد سطح طواف کے رقبے کا کلیہ**

۹۱۶۰ اگر $[c, d]$ پر $x = g(y) \geq 0$ ہموار ہو تب منحنی $x = g(y)$ کو محور y کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}\,\mathrm{d}y \tag{۴}$$

۹۱۶۱ مثال ۶.۲۲: لکیری قطعہ $x = 1 - y,\ 0 \leq y \leq 1$ کو محور y کے گرد گھما کر مخروط حاصل کیا جاتا ہے (شکل ۶.۸۷)۔ اس کا رقبہ پہلو
۹۱۶۲ تلاش کریں۔

۹۱۶۳ **حل**

۹۱۶۴ یہ رقبہ جیومیٹری سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{رقبہ پہلو} = \frac{\text{قاعدے کا محیط}}{2} \times \text{ترچھا قد} = \pi\sqrt{2}$$

۹۱۶۵ آئیں درج ذیل لے کر

$$c = 0,\ d = 1,\ x = 1 - y,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -1$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2} = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

۹۱۶۶ مساوات ۴ سے رقبہ حاصل کریں۔

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 2\pi(1-y)\sqrt{2}\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \pi\sqrt{2}$$

۹۱۶۷ دونوں نتائج یکساں ہیں، جیسا کہ ہونا چاہیے۔ □

۹۱۶۸ **مختصر تفرقی روپ**

۹۱۶۹ درج ذیل مساواتوں

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{اور} \quad S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y$$

۹۱۷۰ کو عموماً قوس کی تفرقی لمبائی $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$S = \int_a^b 2\pi y\,\mathrm{d}s \quad \text{اور} \quad S = \int_c^d 2\pi x\,\mathrm{d}s$$

۹۱۷۱ بائیں مساوات میں محور x سے قطعہ $\mathrm{d}s$ تک فاصلہ y ہے۔ دائیں مساوات میں محور y سے قطعہ $\mathrm{d}s$ کا فاصلہ x ہے۔ ان دونوں کلیوں کو

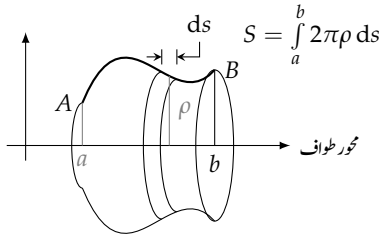
$$S = \int 2\pi(\text{رداس})(\text{چوڑائی پٹی}) = \int 2\pi\rho\,\mathrm{d}s$$

۹۱۷۲ لکھا جا سکتا ہے جہاں تفرقی لمبائی $\mathrm{d}s$ تک محور طواف سے فاصلہ ρ ہے (شکل ۶.۸۸)۔

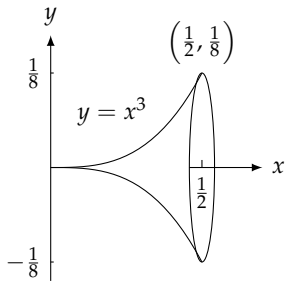
۹۱۷۳ **مختصر تفرقی روپ**

۹۱۷۴

$$S = \int 2\pi\rho\,\mathrm{d}s$$



شکل ۶.۸۸: قوس AB کو محور طواف کے گرد گھما کر حاصل سطح طواف کا رقبہ $\int_a^b 2\pi\rho \, ds$ ہو گا۔



شکل ۶.۸۹: قوس $y = x^3$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا گیا ہے۔

کسی مخصوص مسئلے میں آپ قوسچہ کی تفرقی لمبائی ds اور رداس ρ کو کسی مشترکہ متغیر کی صورت میں لکھ کر تکمل کی حدود بھی اسی متغیر کے روپ میں مہیا کریں گے۔

مثال ۶.۲۳: منحنی $y = x^3, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل ۶.۸۹)۔ اس کا سطحی رقبہ معلوم کریں۔

حل

ہم مختصر تفرقی روپ سے شروع کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S &= \int 2\pi\rho \, ds \\ &= \int 2\pi y \, ds \\ &= \int 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} \qquad\qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \end{aligned}$$

ہم نے فیصلہ کرنا ہو گا کہ آیا ds کو dx یا dy کے روپ میں لکھیں۔ منحنی کی مساوات $y = x^3$ سے dy کو dx کی صورت میں لکھنا زیادہ آسان ہے لہٰذا ہم درج ذیل استعمال کریں گے۔

$$y = x^3, \, dy = 3x^2 \, dx, \, \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (3x^2 \, dx)^2} = \sqrt{1 + 9x^4} \, dx$$

۹۱۸۳ انہیں استعمال کرتے ہوئے تکمل کا متغیر x ہو گا۔

$$\begin{aligned}
S &= \int_{x=0}^{x=1/2} 2\pi y\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}\\
&= \int_0^{1/2} 2\pi x^3\sqrt{1+9x^4}\,\mathrm{d}x\\
&= 2\pi(\tfrac{1}{36})(\tfrac{2}{3})(1+9x^4)^{3/2}\Big]_0^{1/2}\\
&= \tfrac{\pi}{27}[(1+\tfrac{9}{16})^{3/2}-1]\\
&= \tfrac{\pi}{27}[(\tfrac{25}{16})^{3/2}-1]\\
&= \tfrac{\pi}{27}(\tfrac{125}{64}-1)\\
&= \tfrac{61\pi}{1728}
\end{aligned}$$

۹۱۸۴ □

۹۱۸۵ **سوالات**

۹۱۸۶ **سطحی رقبہ کے تکمل**

۹۱۸۷ سوال ۶.۱۹۱ تا سوال ۶.۱۹۸ میں درج ذیل اقدامات کریں۔

۹۱۸۸ ا. دی گئی منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس کے سطحی رقبے کا تکمل لکھیں۔

۹۱۸۹ ب. منحنی کو ترسیم کر کے اس کی صورت دیکھیں۔ سطحی رقبہ بھی ترسیم کریں۔

۹۱۹۰ ج. کمپیوٹر کی مدد سے اس تکمل کو اعدادی طریقہ سے حل کریں۔

۹۱۹۱ سوال ۶.۱۹۱: محور x $\quad y=\tan x,\quad 0\le x\le \frac{\pi}{4};$

۹۱۹۲ سوال ۶.۱۹۲: محور x $\quad y=x^2,\quad 0\le x\le 2;$

۹۱۹۳ سوال ۶.۱۹۳: محور y $\quad xy=1,\quad 1\le y\le 2;$

۹۱۹۴ سوال ۶.۱۹۴: محور y $\quad x=\sin y,\quad 0\le y\le \pi;$

۹۱۹۵ سوال ۶.۱۹۵: محور x $\quad x^{1/2}+y^{1/2}=3,$ نقطہ $(4,1)$ سے $(1,4)$ تک;

۹۱۹۶ سوال ۶.۱۹۶: محور y $\quad y+2\sqrt{y}=x,\quad 1\le y\le 2;$

۹۱۹۷ سوال ۶.۱۹۷: محور y $\quad x=\int_0^y \tan t\,\mathrm{d}t,\quad 0\le y\le \frac{\pi}{3};$

۹۱۹۸ سوال ۶.۱۹۸: محور x $\quad y=\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t,\quad 1\le x\le \sqrt{5};$

سطحی رقبہ کا حصول

سوال ۶.۱۹۹: لکیری قطعہ $y = \frac{x}{2},\ 0 \le x \le 4$ کو محور x کے گرد گھما کر مخروط پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (پہلو کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ (محیط تلہ)(ترچھا قد)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال ۶.۲۰۰: لکیری قطعہ $y = \frac{x}{2},\ 0 \le x \le 4$ کو محور y کے گرد گھما کر مخروط پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال ۶.۲۰۱: لکیری قطعہ $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2},\ 1 \le x \le 3$ کو محور x کے گرد گھما کر مخروط مقطوع پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (رقبہ مخروط مقطوع = $\pi\,(r_1 + r_2)$ (ترچھا قد)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال ۶.۲۰۲: لکیری قطعہ $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2},\ 1 \le x \le 3$ کو محور y کے گرد گھما کر مخروط مقطوع پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (رقبہ مخروط مقطوع = $\pi\,(r_1 + r_2)$ (ترچھا قد)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال ۶.۲۰۳ تا سوال ۶.۲۱۲ میں منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ سطح کا رقبہ معلوم کریں۔ بہتر ہو گا کہ آپ دیے گئے منحنی کو کمپیوٹر پر ترسیم کر کے منحنی کی صورت سیکھیں۔

سوال ۶.۲۰۳: محور x $\quad y = \frac{x^3}{9},\quad 0 \le x \le 2,$

سوال ۶.۲۰۴: محور x $\quad y = \sqrt{x},\quad \frac{3}{4} \le x \le \frac{15}{4},$

سوال ۶.۲۰۵: محور x $\quad y = \sqrt{2x - x^2},\quad 0.5 \le x \le 1.5,$

سوال ۶.۲۰۶: محور x $\quad y = \sqrt{x+1},\quad 1 \le x \le 5,$

سوال ۶.۲۰۷: محور y $\quad x = \frac{y^3}{3},\quad 0 \le y \le 1,$

سوال ۶.۲۰۸: محور y $\quad x = \frac{1}{3}y^{3/2} - y^{1/2},\quad 1 \le y \le 3,$

سوال ۶.۲۰۹: محور y $\quad x = 2\sqrt{4-y},\quad 0 \le y \le \frac{15}{4},$ (شکل ۶.۹۰)

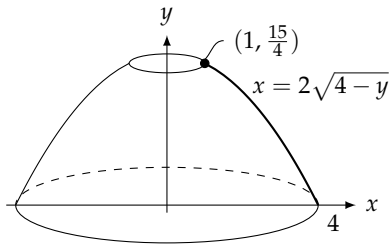
سوال ۶.۲۱۰: محور y $\quad x = \sqrt{2y-1},\quad \frac{5}{8} \le y \le 1,$ (شکل ۶.۹۱)

سوال ۶.۲۱۱: محور x $\quad x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2},\quad 1 \le y \le 2,$ (اشارہ۔ تکمل میں $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کو $\mathrm{d}y$ کی صورت میں لکھ کر $S = \int 2\pi y\,\mathrm{d}s$ میں موزوں حد لیتے ہوئے حل کریں۔)

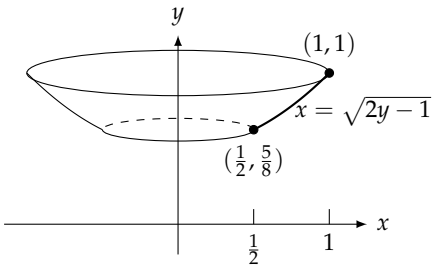
سوال ۶.۲۱۲: محور y $\quad y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2},\quad 0 \le x \le \sqrt{2},$ (اشارہ۔ تکمل میں $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کو $\mathrm{d}x$ کی صورت میں لکھ کر $S = \int 2\pi x\,\mathrm{d}s$ میں موزوں حد لیتے ہوئے حل کریں۔)

سوال ۶.۲۱۳: نئی تعریف کی پرکھ

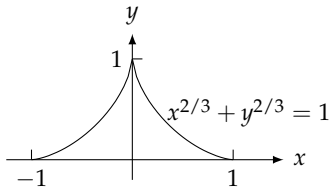
تفاعل $y = \sqrt{a^2 - x^2},\ -a \le x \le x$ کو محور x کے گرد گھمانے سے کروی سطح حاصل ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ مساوات ۳ سے بھی رداس a کے کرہ کا سطحی رقبہ $4\pi a^2$ حاصل ہوتا ہے۔



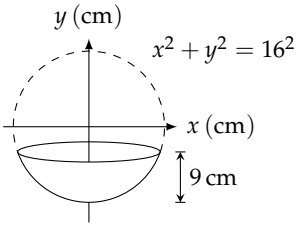
شکل ۶.۹۰



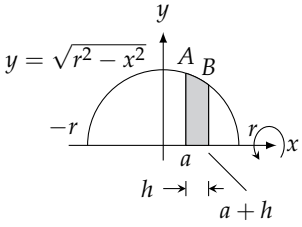
شکل ۶.۹۱



شکل ۶.۹۲



شکل ۶.۹۳



شکل ۶.۹۴

سوال ۶.۲۱۴: نئی تعریف کی پرکھ

لکیری قطعہ $y = \frac{r}{h}x,\ 0 \le x \le h$ کو محور x کے گرد گھمانے سے مخروط پیدا ہوتا ہے جس کے پہلو کا رقبہ $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ ہوتا ہے جہاں مخروط کا قد h اور اس کے قاعدے کا رداس r ہے لہٰذا اس کا ترچھا قد $\sqrt{r^2+h^2}$ ہو گا۔ مکمل سے مخروط کے پہلو کا رقبہ دریافت کر کے اس کلیے کی تصدیق کریں۔

سوال ۶.۲۱۵: (ا) منحنی $y = \cos x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا ہوتا ہے۔ اس سطح طواف کے رقبہ کا تکمل لکھیں جس کو حل کرنا حصہ ۸.۴ میں سکھایا جائے گا۔ (ب) سطحی رقبے کو اعدادی طریقہ سے دریافت کریں۔

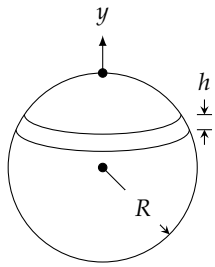
سوال ۶.۲۱۶: ستارہ نما کا سطحی رقبہ

ستارہ نما $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ کا وہ حصہ جو محور x سے اوپر واقع ہے کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل ۶.۹۲)۔ سطح طواف کا رقبہ معلوم کریں۔ (اشارہ۔ ربع اول میں منحنی کے حصہ $y = (1 - x^{2/3})^{3/2},\ 0 \le x \le 1$ کو محور x کے گرد گھما کر نتیجہ کو دگنا کریں۔)

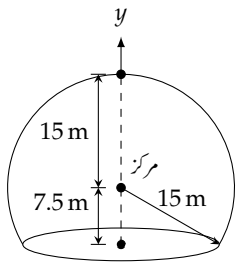
سوال ۶.۲۱۷: رنگ

ایک برتن کو رداس 16 cm کے کرہ کا حصہ تصور کیا جا سکتا ہے (شکل ۶.۹۳)۔ برتن کی گہرائی 9 cm ہے۔ برتن کو اندر اور باہر سے رنگ کرنا مطلوب ہے۔ کچے رنگ کی 0.5 mm موٹی تہہ برتن پر چھڑک کر پکائی جاتی ہے۔ پانچ ہزار برتن کے لیے درکار کچے رنگ کا حجم معلوم کریں۔ رنگ کے ضیاع کو نظر انداز کریں۔

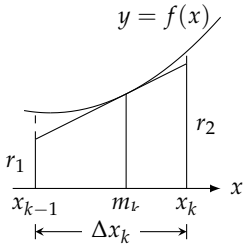
سوال ۶.۲۱۸: ڈبل روٹی کا کرارا حصہ



شکل ۶.۹۵



شکل ۶.۹۶



شکل ۶.۹۷

ڈبل روٹی اندر سے نرم اور باہر سے کرارا ہوتی ہے۔ کیا آپ جانتے ہیں کہ کروی ڈبل روٹی کے یکساں موٹے کتلوں میں ایک جتنا کرارا حصہ پایا جاتا ہے (شکل ۶.۹۴)؟ یہ دیکھنے کی خاطر نصف دائرہ $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ کو محور x کے گرد گھما کر کرہ بنائیں۔ فرض کریں محور x پر وقفہ h کے اوپر نصف دائرے کی قوس AB ہے۔ دکھائیں کہ نصف دائرے کو محور x کے گرد گھمانے سے AB سے حاصل رقبے کی قیمت h کے مقام پر منحصر نہیں۔ (کرارا رقبے کی قیمت h پر منحصر ہو گی۔)

سوال ۶.۲۱۹: دو متوازی سطحیں جن کے مابین فاصلہ h ہے، رداس R کے کروی سطح سے ایک پٹی کاٹتی ہیں (شکل ۶.۹۵)۔ دکھائیں کہ اس پٹی کا رقبہ $2\pi Rh$ ہو گا۔

سوال ۶.۲۲۰: موسمیاتی ریڈار کو شکل ۶.۹۶ میں دکھائے گئے گنبد میں رکھا گیا ہے۔ گنبد کا بیرونی رقبہ کتنا ہو گا؟ (قاعدہ کو شامل نہ کریں۔)

سوال ۶.۲۲۱: محور طواف کو قطع کرنے والی منحنیات سے حاصل سطح طواف

وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل f کو غیر منفی تصور کرتے ہوئے مساوات ۱۳ اخذ کی گئی۔ جہاں تفاعل محور طواف کو قطع کرتا ہو وہاں ہم مساوات ۳ کی جگہ درج ذیل مطلق قیمت کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$S = \int 2\pi\rho \, \mathrm{ds} = \int 2\pi \left| f(x) \right| \mathrm{ds} \qquad (۵)$$

تفاعل $y = \frac{x^3}{9} - \sqrt{3}, -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل دوہرے مخروط کا سطحی رقبہ مساوات ۵ استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں۔

سوال ۶.۲۲۲: قوس $y = \frac{x^3}{9} - \sqrt{3}, -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ مساوات ۵ میں مطلق کی علامت ہٹا کر سطحی رقبہ تلاش کرنے سے کیا ہو گا؟

اعدادی تکمل

سوال ۶.۲۲۳ تا سوال ۶.۲۲۳ میں محور x کے گرد دی گئی منحنیات گھمانے سے سطح طواف پیدا ہوں گی۔ ان سطح طواف کے رقبے اعدادی تراکیب سے 2 اعشاریہ مقامات تک درستگی تک معلوم کریں۔

سوال ۶.۲۲۳: $y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi$

سوال ۶.۲۲۴: $y = \frac{x^2}{4}, \quad 0 \le x \le 2$

سوال ۶.۲۲۵: $y = x + \sin 2x, \quad -\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$

سوال ۶.۲۲۶: $y = \frac{x}{12}\sqrt{36 - x^2}, \quad 0 \le x \le 6$

سوال ۶.۲۲۷: سطحی رقبہ کا متبادل کلیہ

فرض کریں $[a, b]$ پر f ہموار ہے۔ وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کریں اور k واں ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ کے وسطی نقطہ $= m_k$ ($\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$) پر منحنی کا مماس خط کھینچیں (شکل ۶.۹۷)۔

ا. درج ذیل دکھائیں۔

$$r_1 = f(m_k) - f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2}, \quad r_2 = f(m_k) + f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2}$$

ب. دکھائیں کہ k واں ذیلی وقفہ میں مماسی قطعہ کی لمبائی $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(m_k)\Delta x_k)^2}$ ہے۔

ج. دکھائیں کہ مماسی قطعہ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ پہلو $2\pi f(m_k)\sqrt{1 + (f'(m_k))^2}\Delta x_k$ ہو گا۔

د. دکھائیں کہ وقفہ $[a, b]$ پر $y = f(x)$ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\text{ویں مخروط مقطوع کا رقبہ پہلو } k) = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

۶.۷ معیار اثر اور مرکز کمیت

بہت سے ڈھانچے اور میکانی نظام ایسا برتاؤ کرتے ہیں جیسے ان کی کمیت ایک نقطے میں سموئی ہو، جس کو مرکز کمیت کہتے ہیں۔ اس نقطے کا مقام جاننا اہم ہے، جسے ریاضی کی مدد سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس باب میں یک بُعدی اور دو بُعدی اجسام پر توجہ دی جائے گی۔ تین بُعدی چیزوں پر باب ۱۴ میں غور کیا جائے گا۔

لکیر پر کمیت

ہم اپنا ریاضیاتی نمونہ مرحلہ وار تیار کرتے ہیں۔ ابتدائی مرحلے میں ہم استوار محور x پر کمیت m_1 ، m_2 ، اور m_3 تصور کرتے ہیں اور مبدا کو اس محور کا چول تصور کرتے ہیں۔ یہ نظام متوازن یا غیر متوازن ہو گا۔ توازن کا دارومدار کمیتوں کی مقدار اور ان کے مقامات پر ہے۔

ہر کمیت m_k پر نیچے رخ قوت $m_k g$ عمل کرتی ہے، جہاں g ثقلی اسراع ہے (قوت $m_k g$ کو کمیت m_k کا وزن کہتے ہیں)۔ ہر ایسی قوت محور کو مبدا کے گرد گھمانے کی کوشش کرتی ہے۔ گھومنے کے اس اثر کو **قوت مروڑ**[۱۲] کہتے ہیں۔ قوت $m_k g$ کو مبدا سے فاصلہ x_k سے ضرب دینے سے قوت مروڑ کی مقدار حاصل ہوتی ہے، جہاں فاصلہ مثبت یا منفی ممکن ہے۔ مبدا سے بائیں جانب کمیت منفی (گھڑی مخالف) قوت مروڑ پیدا کرتی ہے، جبکہ مبدا سے دائیں جانب کمیت مثبت (گھڑی رخ) قوت مروڑ پیدا کرتی ہے۔

قوت مروڑ کا مجموعہ، مبدا کے گرد نظام کے گھومنے کے رجحان کی ناپ ہے۔ اس مجموعے کو **نظام کی قوت مروڑ**[۱۳] کہتے ہیں۔

$$\text{نظام کی قوت مروڑ} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 \qquad (۱)$$

نظام صرف اور صرف اس صورت متوازن ہو گا جب نظام کی قوت مروڑ صفر ہو۔

نظام کی قوت مروڑ کو

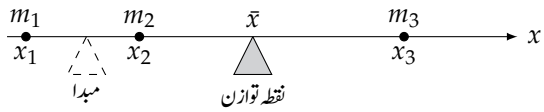
$$\underbrace{g}_{\text{خاصیت ماحول}} \underbrace{(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)}_{\text{خاصیت نظام}}$$

لکھا جا سکتا ہے، جہاں g اس ماحول کی خاصیت ہے جس میں نظام پایا جاتا ہے، جبکہ عدد $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$ نظام کی خاصیت ہے، جو ایک مستقل ہے اور نظام کو ایک ماحول سے دوسرے ماحول میں منتقل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتا۔

عدد $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$ کو **مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر** کہتے ہیں جو انفرادی کمیت کے **معیارات اثر**[۱۴] $m_1 x_1$ ، $m_2 x_2$ ، اور $m_3 x_3$ کا مجموعہ ہے۔

$$M_0 = \text{مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر} = \sum m_k x_k$$

ہم نظام کو متوازن بنانے کی خاطر نظام کے چول کا مقام جاننا چاہتے ہیں، یعنی چول کو کس نقطہ $\bar{x}$ پر رکھنے سے نظام کی قوت مروڑ صفر ہو گی۔



اس مخصوص مقام پر چول رکھنے سے، چول کے لحاظ سے ہر ایک کمیت کی قوت مروڑ درج ذیل لکھی جا سکتی ہے، جہاں فاصلہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\text{m_k کا معیار اثر $\bar{x}$ کے لحاظ سے} &= (\text{m_k سے $\bar{x}$ کا فاصلہ})(\text{نیچے رخ قوت}) \\ &= (x_k - \bar{x}) m_k g\end{aligned}$$

---

[۱۲] torque
[۱۳] systemtorque
[۱۴] moments

۹۲۹۱ ان معیارات اثر کے مجموعے کو صفر کے برابر پُر کرنے سے ہمیں ایسی مساوات ملتی ہے جسے ہم $\bar{x}$ کے لیے حل کر سکتے ہیں۔(ذیل دیکھیں۔)

معیار اثر کا مجموعہ صفر ہے	$\sum(x_k - \bar{x})m_k g = 0$
مجموعہ کا قاعدہ مستقل مضرب	$g\sum(x_k - \bar{x})m_k = 0$
g سے تقسیم اور m_k پھیلایا گیا ہے	$\sum(m_k x_k - \bar{x}m_k) = 0$
مجموعہ کا قاعدہ فرق	$\sum m_k x_k - \sum \bar{x}m_k = 0$
مستقل مضرب قاعدہ اور منتقلی	$\sum m_k x_k = \bar{x}\sum m_k$
$\bar{x}$ کے لیے حل	$\bar{x} = \dfrac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}$

۹۲۹۲ یہاں آخری مساوات کہتی ہے کہ $\bar{x}$ معلوم کرنے کے لیے مبدا کے لحاظ سے نظام کے معیار اثر کو نظام کی کل کمیت سے تقسیم کریں۔

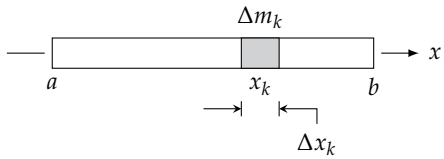
$$\bar{x} = \frac{\sum x_k m_k}{\sum m_k} = \frac{\text{مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کمیت}}$$

۹۲۹۳ نقطہ $\bar{x}$ کو نظام کا **مرکز کمیت**[۱۵] کہتے ہیں۔

۹۲۹۴ تار اور پتلی سلاخ

۹۲۹۵ بہت سے مواقع پر ہمیں سلاخ یا پتلی پٹی کا مرکز کمیت جاننے کی ضرورت ہوتی ہے۔ایسی صورتوں میں اگر ہم کمیت کی تقسیم کو استمراری تفاعل کی صورت میں لکھ
۹۲۹۶ سکیں تب ہمارے کلیات میں جمع کے بجائے تکمل ہو گا۔اس پر اب بات کرتے ہیں۔

۹۲۹۷ فرض کریں ایک لمبی پٹی $x = a$ تا $x = b$ محور x پر واقع ہے۔ہم وقفہ $[a, b]$ پر پٹی کی خانہ بندی کر کے پٹی کو Δm_k کمیت کے چھوٹے
۹۲۹۸ چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ k واں ٹکڑے کی لمبائی Δx_k ہے اور یہ مبدا سے تقریباً x_k فاصلے پر واقع ہے۔اب تین چیزوں کا مشاہدہ کریں۔



۹۲۹۹

۹۳۰۰ اول، ہر کمیت Δm_k کو نقطہ x_k پر رکھنے سے پیدا نقطوی کمیتی نظام کا تقریباً وہی (درج ذیل) مرکز کمیت حاصل ہو گا جو پٹی کا مرکز کمیت $\bar{x}$ ہے۔

$$\bar{x} \approx \frac{\text{نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کمیت}}$$

---

[۱۵] centerofmass

دوم، مبدا کے لحاظ سے ہر ٹکڑے کا معیار اثر تخمیناً $x_k \Delta m_k$ ہو گا لہٰذا نظام کا معیار اثر تخمیناً تمام $x_k \Delta m_m$ کا مجموعہ ہو گا۔

$$\text{نظام کا معیار اثر} \approx \sum x_k \Delta m_k$$

سوم، اگر x_k پر پٹی کی کثافت $\delta(x_k)$ ہو، جہاں δ استراری ہے، (اور کثافت کی پیمائش کمیت فی لمبائی ہے) تب Δm_k تخمیناً $\delta(x_k)\Delta x_k$ ہو گا۔

$$\Delta m_k \approx \delta(x_k)\Delta x_k$$

ان تینوں مشاہدوں کو ملا کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\bar{x} \approx \frac{\text{نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کمیت}} \approx \frac{\sum x_k \Delta m_k}{\sum \Delta m_k} \approx \frac{\sum x_k \delta(x_k)\Delta x_k}{\sum \delta(x_k)\Delta x_k} \tag{۲}$$

مساوات ۲ کا آخری شمار کنندہ بند وقفہ $[a, b]$ پر استراری تفاعل $x\delta(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے جبکہ نسب نما اس وقفے پر تفاعل $\delta(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ زیادہ باریک خانہ بندی سے مساوات ۲ میں تخمین بہتر ہوں گے لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\delta(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \delta(x)\,\mathrm{d}x}$$

ہم $\bar{x}$ کو درج بالا کلیہ سے معلوم کرتے ہیں۔

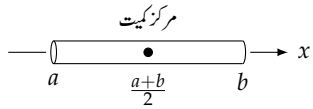
معیار اثر، کمیت، اور محور x پر کثافتی تفاعل $\delta(x)$ کی سلاخ یا پٹی کا مرکز کمیت

$$\begin{aligned}
M_0 &= \int_a^b x\delta(x)\,\mathrm{d}x && \text{مبدا کے لحاظ سے معیار اثر}\\
M &= \int_a^b \delta(x)\,\mathrm{d}x && \text{کمیت}\\
\bar{x} &= \frac{M_0}{M} && \text{مرکز کمیت}
\end{aligned} \tag{۳}$$

مساوات ۳ کے حصول میں کثافت کی بات کی گئی۔ عام طور پر کثافت سے مراد کمیت فی اکائی حجم ہوتا ہے البتہ بعض اوقات ہم وہ اکائیاں استعمال کرتے ہیں جن کی پیمائش نسبتاً زیادہ آسان ہو۔ یوں تار، سلاخ، اور پٹی کے لیے ہم کمیت فی اکائی لمبائی کو کثافت کہتے ہیں، جبکہ مستوی سطحوں کے لیے کمیت فی اکائی رقبہ کو کثافت کہتے ہیں۔

مثال ۶.۲۴: مستقل کثافت کی سلاخ یا پٹی

مستقل کثافت رکھنے والی سلاخ یا پٹی کا مرکز کمیت تلاش کریں۔



شکل ۶.۹۸: مستقل کثافت کی پتلی سیدھی سلاخ کا مرکز کمیت دونوں سروں کے وسطی نقطے پر ہو گا۔

شکل ۶.۹۹: متغیر موٹائی کی سیدھی سلاخ کو متغیر کثافت کی سیدھی سلاخ تصور کیا جا سکتا ہے۔

۹۳۱۵ **حل**

۹۳۱۶ ہم محور x پر $x = a$ سے $x = b$ کو سلاخ تصور کرتے ہیں (شکل ۶.۹۸)۔ چونکہ کثافت مستقل ہے لہٰذا اس کو تکمل کے باہر منتقل کیا جا سکتا
۹۳۱۷ ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$M_0 = \int_a^b \delta x \,\mathrm{d}x = \delta \int_a^b x \,\mathrm{d}x = \delta[\frac{x^2}{2}]_a^b = \frac{\delta}{2}(b^2 - a^2)$$
$$M = \int_a^b \delta \,\mathrm{d}x = \delta \int_a^b \mathrm{d}x = \delta[x]_a^b = \delta(b-a)$$
$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{\frac{\delta}{2}(b^2-a^2)}{\delta(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

۹۳۱۸ مستقل کثافت کی صورت میں مرکز کمیت سلاخ یا پٹی کے عین وسطی نقطے پر ہو گا۔ □

۹۳۱۹ مثال ۶.۲۵: متغیر کثافت

۹۳۲۰ ایک سلاخ جس کی لمبائی $10\,\mathrm{m}$ ہے بائیں سے دائیں چلتے ہوئے موٹی ہوتی جاتی ہے (شکل ۶.۹۹) لہٰذا اس کی کثافت مستقل ہونے کے بجائے $\delta(x) =$
۹۳۲۱ $1 + \frac{x}{10}\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ ہے۔ سلاخ کا مرکز کمیت معلوم کریں۔

۹۳۲۲ **حل**

۹۳۲۳ ہم مساوات ۱۳ استعمال کریں گے۔ مبدا کے لحاظ سے سلاخ کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

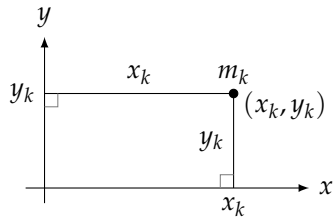
$$M_0 = \int_0^{10} x\delta(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} x\left(1+\frac{x}{10}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{10}\left(x+\frac{x^2}{10}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{30}\right]_0^{10} = 50 + \frac{100}{3} = \frac{250}{3}\,\mathrm{kg\,m}$$

۹۳۲۴ آپ نے دیکھا کہ معیار اثر کی اکائی $\mathrm{kg\,m}$ ہے۔ سلاخ کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

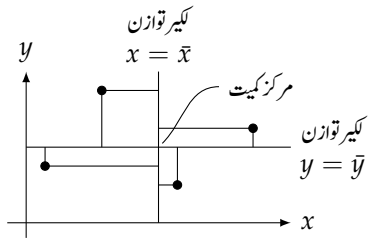
$$M = \int_0^{10} \delta(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10}\left(1+\frac{x}{10}\right)\mathrm{d}x = \left[x+\frac{x^2}{20}\right]_0^{10} 10 + 5 = 15\,\mathrm{kg}$$

۹۳۲۵ مرکز کمیت درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{250}{3}\cdot\frac{1}{15} = \frac{50}{9} \approx 5.56\,\mathrm{m}$$



شکل ۶.۱۰۰: ہر کمیت m_k کا ہر محور کے لحاظ سے معیار اثر ہو گا۔



شکل ۶.۱۰۱: دو بُعدی کمیتوں کا جھرمٹ اپنے مرکز کمیت پر متوازن ہو گا۔

۹۳۲۶ □

۹۳۲۷ مستوی پر کمیت کی تقسیم

۹۳۲۸ فرض کریں ایک مستوی پر متناہی تعداد کی کمیتیں پائی جاتی ہیں۔ یوں نقطہ (x_k, y_k) پر کمیت m_k ہو گی (شکل ۶.۱۰۰)۔ اس نظام کی کمیت درج ذیل ہو
۹۳۲۹ گی۔

$$M = \sum m_k \qquad \text{نظام کی کمیت}$$

۹۳۳۰ ہر کمیت m_k کا دونوں محور کے لحاظ سے معیار اثر ہو گا۔ محور x کے لحاظ سے اس کا معیار اثر $m_k y_k$ ، جبکہ محور y کے لحاظ سے اس کا معیار اثر $m_k x_k$
۹۳۳۱ ہو گا۔ دونوں محور کے لحاظ سے پورے نظام کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_x = \sum m_k y_k \qquad \text{محور } x \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}$$
$$M_y = \sum m_k x_k \qquad \text{محور } y \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}$$

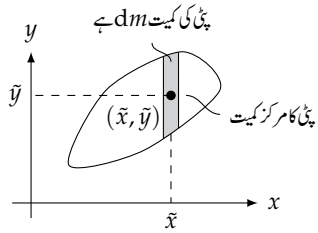
۹۳۳۲ نظام کے مرکز کمیت کا x محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \tag{۴}$$

۹۳۳۳ یک بُعدی صورت کی طرح $\bar{x}$ کی اس قیمت کے لیے نظام لکیر $x = \bar{x}$ پر توازن میں ہو گا (شکل ۶.۱۰۱)۔

۹۳۳۴ نظام کے مرکز کمیت کا y محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} \tag{۵}$$



شکل ۶.۱۰۲: چادر کو انتصابی پتلی پٹیوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ نمائندہ پٹی کا کسی ایک انفرادی محور کے لحاظ سے معیار اثر وہی ہو گا جو پٹی کی کمیت $\mathrm{d}m$ کو پٹی کے مرکز کمیت پر منجمد کرنے سے حاصل ہو گا۔

یک بُعدی صورت کی طرح $\bar{y}$ کی اس قیمت کے لیے نظام لکیر $y = \bar{y}$ پر توازن میں ہو گا۔ لکیر $y = \bar{y}$ کے لحاظ سے تمام قوت مروڑ ایک دوسرے کو منسوخ کر کے صفر قوت مروڑ پیدا کرتی ہیں۔ توازن کے اعتبار سے یوں معلوم ہوتا ہے جیسے نظام کی پوری کمیت نقطہ $(\bar{x}, \bar{y})$ میں سموئی ہوئی ہے۔ اس نقطے کو نظام کا **مرکز کمیت**[۱۶] کہتے ہیں۔

پتلی مسطح چادر

کئی مرتبہ ہمیں پتلی مسطح چادر کا مرکز کمیت درکار ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں ہم فرض کرتے ہیں کہ کمیت کی تقسیم استمراری ہے لہٰذا $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے کلیات میں متناہی مجموعوں کے بجائے تکمل پائے جاتے ہیں۔ آئیں اس پر غور کرتے ہیں۔ فرض کریں مستوی xy میں ایک پتلی چادر واقع ہے۔ چادر کو کسی ایک محور کے متوازی باریک پٹیوں میں تقسیم کریں (شکل ۶.۱۰۲ میں پٹیاں محور y کے متوازی ہیں)۔ کسی ایک نمائندہ پٹی کی کمیت کا مرکز $(\tilde{x}, \tilde{y})$ ہو گا۔ ہم پٹی کی کمیت Δm کو نقطہ $(\tilde{x}, \tilde{y})$ پر منجمد تصور کرتے ہیں۔ یوں محور y کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر $\tilde{x}\Delta m$ ہو گا، جبکہ محور x کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر $\tilde{y}\Delta m$ ہو گا۔ اس طرح مساوات ۴ اور مساوات ۵ درج ذیل صورت اختیار کرتی ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \tilde{x}\Delta m}{\sum \Delta m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \tilde{y}\Delta m}{\sum \Delta m}$$

یک بُعدی صورت کی طرح یہاں بھی ریمان مجموعے پائے جاتے ہیں، جن کی قیمتیں، پٹی کی چوڑائی کو کم سے کم کرنے سے، قطعی تکملات کی قیمتیں ہوں گی۔ ان تکملات کو علامتی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}, \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

---

[۱۶] centerofmass

مستوی xy میں باریک چادر کے معیار اثر، کمیت اور مرکز کمیت

$$
\begin{aligned}
M_x &= \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m && \text{محور } x \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}\\
M_y &= \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m && \text{محور } y \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}\\
M &= \int \mathrm{d}m && \text{کمیت}\\
\bar{x} &= \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} && \text{مرکز کمیت}
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

ان تکملات کے حصول کے لیے ہم چادر کو محددی مستوی میں رکھ کر کسی ایک محدد کے متوازی ایک نمائندہ پٹی کا خاکہ بناتے ہیں۔ اس پٹی کی کمیت اور مرکز کمیت کے محدد $(\tilde{x}, \tilde{y})$ کو x اور y کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ اس کے بعد ہم محددی مستوی میں چادر کے مقام کے اعتبار سے موزوں حدود کے بیچ $\tilde{y}\,\mathrm{d}m$ ، $\tilde{x}\,\mathrm{d}m$ ، اور $\mathrm{d}m$ کے تکملات لیتے ہیں۔

مثال ۶.۲۶: ایک تکونی چادر جس کو شکل ۶.۱۰۳-ا میں دکھایا گیا ہے کی مستقل کثافت $\delta = 3\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ ہے۔ (ا) محور y کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر M_y معلوم کریں۔ (ب) چادر کی کمیت M معلوم کریں۔ (ج) چادر کی کمیت کے مرکز کا $\bar{x}$ محدد معلوم کریں۔

حل

پہلی ترکیب: انتصابی پٹیاں (شکل ۶.۱۰۳-ب)

(ا) نمائندہ پٹی کے لیے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

مرکز کمیت: $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y)$

چوڑائی: $\mathrm{d}x$

لمبائی: $2x$

کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}A = 3 \cdot 2x\,\mathrm{d}x = 6x\,\mathrm{d}x$

رقبہ: $\mathrm{d}S = 2x\,\mathrm{d}x$

مرکز کمیت کا محور y سے فاصلہ: $\tilde{x} = x$

یوں محور y کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\tilde{x}\,\mathrm{d}m = x \cdot 6x\,\mathrm{d}x = 6x^2\,\mathrm{d}x$$

ہو گا، لہٰذا پوری چادر کا محور y کے لحاظ سے معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_y = \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m = \int_0^1 6x^2\,\mathrm{d}x = 2x^3\Big]_0^1 = 2\,\mathrm{g\,cm}$$

(ب) چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_0^1 6x\,\mathrm{d}x = 3x^2\Big]_0^1 = 3\,\mathrm{g}$$

۳۶۵ (ج) چادر کے مرکز کمیت کا x محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\,\mathrm{g\,cm}}{3\,\mathrm{g}} = \frac{2}{3}, \mathrm{cm}$$

۳۶۶ **دوسری ترکیب:** افقی پٹیاں (شکل ۶.۱۰۳-ج)

۳۶۷ (ا) نمائندہ انتصابی پٹی کے مرکز کمیت کا y محدد y ہو گا:

$$\tilde{y} = y$$

۳۶۸ پٹی کے دائیں اور بائیں سروں کے وسط میں x محدد پایا جائے گا:

$$\tilde{x} = \frac{\frac{y}{2}+1}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} = \frac{y+2}{4}$$

۳۶۹ اس کے علاوہ درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

۳۷۰ لمبائی: $1 - \frac{y}{2} = \frac{2-y}{2}$

۳۷۱ چوڑائی: $\mathrm{d}y$

۳۷۲ رقبہ: $\mathrm{d}S = \frac{2-y}{2}\,\mathrm{d}y$

۳۷۳ کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}S = 3 \cdot \frac{2-y}{2}\,\mathrm{d}y$

۳۷۴ مرکز کمیت کا محور y سے فاصلہ: $\tilde{x} = \frac{y+2}{4}$

۳۷۵ یوں محور y کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\tilde{x}\,\mathrm{d}m = \frac{y+2}{4} \cdot 3 \cdot \frac{2-y}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{3}{8}(4-y^2)\,\mathrm{d}y$$

۳۷۶ ہو گا اور محور y کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

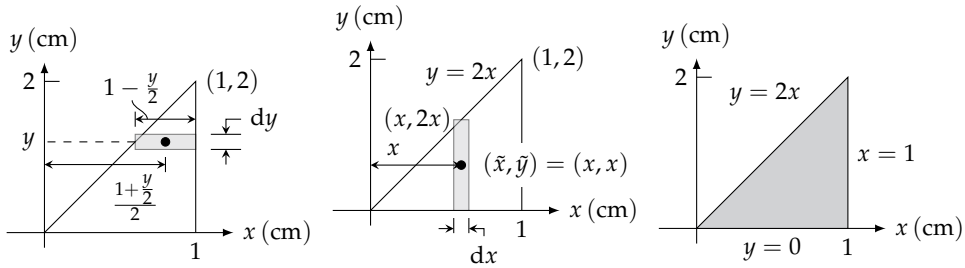
$$M_y = \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m = \int_0^2 \frac{3}{8}(4-y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{8}\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{8}\left(\frac{16}{3}\right) = 2\,\mathrm{g\,cm}$$

۳۷۷ (ب) چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_0^2 \frac{3}{2}(2-y)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}(4-2) = 3\,\mathrm{g}$$

۳۷۸ (ج) چادر کے مرکز کمیت کا x محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\,\mathrm{g\,cm}}{3\,\mathrm{g}} = \frac{2}{3}\,\mathrm{cm}$$



(ا) تکونی چادر۔ (ب) انتصابی پٹیاں۔ (ج) افقی پٹیاں۔

شکل ۶.۱۰۳: چادر برائے مثال ۶.۲۶

۹۳۷۹ ہم اسی طرح M_x اور $\bar{y}$ بھی تلاش کر سکتے ہیں۔ □

۹۳۸۰ اگر پتلی چادر میں کمیت کی تقسیم تشاکلی ہو تب کمیت کا مرکز محور تشاکل پر پایا جائے گا۔ اگر تشاکل کے دو محور پائے جاتے ہوں تب مرکز کمیت دونوں محور کے نقطہ
۹۳۸۱ تقاطع پر پایا جائے گا۔ یہ دو حقائق عموماً مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

۹۳۸۲ مثال ۶.۲۷: مستقل کثافت ایک پتلی چادر، جس کی کثافت مستقل δ ہے، کو بالائی طرف سے قطع مکافی $y = 4 - x^2$ اور زیریں طرف سے محور
۹۳۸۳ x گھیرتا ہے (شکل ۶.۱۰۴)۔ اس چادر کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

۹۳۸۴ **حل**

۹۳۸۵ چونکہ چادر کی کثافت مستقل ہے اور کمیت کی تقسیم محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے، لہٰذا مرکز کمیت محور y پر پایا جائے گا۔ یوں $\bar{x} = 0$ ہو گا۔ ہمیں صرف
۹۳۸۶ $\bar{y} = \frac{M_x}{M}$ معلوم کرنا ہے۔

۹۳۸۷ افقی پٹیاں لینے سے درج ذیل مشکل تکمل پیدا ہوتا ہے

$$M_x = \int_0^4 2\delta y\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y$$

۹۳۸۸ لہٰذا ہم انتصابی پٹیاں لے کر آگے بڑھتے ہیں۔ نمائندہ انتصابی پٹی کے لیے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

۹۳۸۹ مرکز کمیت: $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \frac{4-x^2}{2}\right)$

۹۳۹۰ لمبائی: $4 - x^2$

۹۳۹۱ چوڑائی: $\mathrm{d}x$

۹۳۹۲ رقبہ: $\mathrm{d}S = (4 - x^2)\,\mathrm{d}x$

۹۳۹۳ کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}S = \delta(4 - x^2)\,\mathrm{d}x$

۹۳۹۴ مرکز کمیت کا محور x سے فاصلہ: $\tilde{y} = \frac{4-x^2}{2}$

۹۳۹۵ محور x کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر درج ذیل ہو گا

$$\tilde{y}\,\mathrm{d}m = \frac{4-x^2}{2}\cdot\delta(4-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\delta}{2}(4-x^2)^2\,\mathrm{d}x$$

۹۳۹۶ لہٰذا محور y کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_x = \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m = \int_{-2}^{2}\frac{\delta}{2}(4-x^2)\,\mathrm{d}x \tag{۷}$$

$$= \frac{\delta}{2}\int_{-2}^{2}(16-8x^2+x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{256}{15}\delta \tag{۸}$$

۹۳۹۷ چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_{-2}^{2}\delta(4-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{32}{3}\delta \tag{۹}$$

۹۳۹۸ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{256}{15}\delta}{\frac{32}{3}\delta} = \frac{8}{5}$$

۹۳۹۹ چادر کی کمیت کا مرکز درج ذیل نقطہ ہو گا۔

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(0,\frac{8}{5}\right)$$

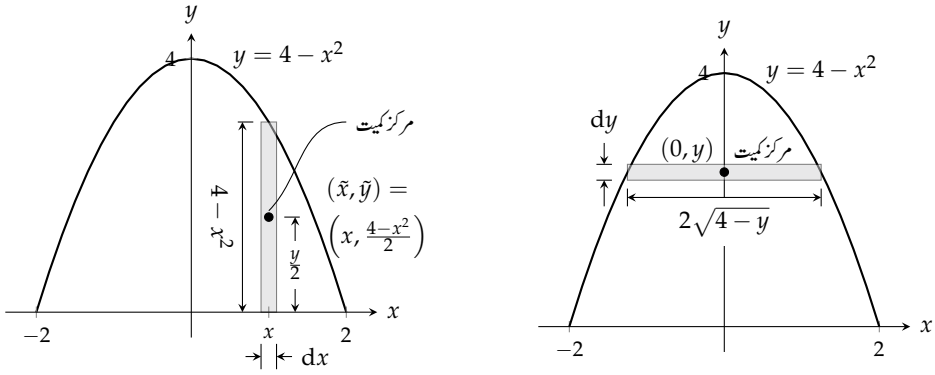
۹۴۰۰ □

۹۴۰۱ مثال ۶.۲۸: متغیر کثافت نقطہ (x,y) پر مثال ۶.۲۷ کی چادر کی کثافت $\delta = 2x^2$ لیتے ہوئے چادر کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔

۹۴۰۲ **حل**

۹۴۰۳ کمیت اب بھی محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ ہو گا۔ یوں $\delta = 2x^2$ کے لیے مساوات ۷ اور مساوات ۹ درج ذیل صورت اختیار کریں
۹۴۰۴ گے۔

$$\begin{aligned}
M_x &= \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m = \int_{-2}^{2}\frac{\delta}{2}(4-x^2)^2\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}x^2(4-x^2)^2\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{-2}^{2}(16x^2-8x^4+x^6)\,\mathrm{d}x = \frac{2048}{105}\\
M &= \int \mathrm{d}m = \int_{-2}^{2}\delta(4-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}2x^2(4-x^2)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{-2}^{2}(8x^2-2x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{256}{15}
\end{aligned}$$



(ب) انتصابی پٹیاں۔ (ا) افقی پٹیوں سے حاصل تکمل مشکل ثابت ہوتا ہے۔

شکل ۶.۱۰۴: چادر برائے مثال ۶.۲۷

۹۳۰۵ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2048}{105} \cdot \frac{15}{256} = \frac{8}{7}$$

۹۳۰۶ چادر کی کمیت کا نیا مرکز درج ذیل ہو گا۔

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{7}\right)$$

۹۳۰۷ □

۹۳۰۸ مثال ۶.۲۹: ایک تار، جس کی کثافت δ مستقل ہے، سے رداس a کا نصف دائرہ بنایا جاتا ہے۔ اس کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔

۹۳۰۹ **حل**

۹۳۱۰ ہم نصف دائرے کو تفاعل $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ سے ظاہر کرتے ہیں (شکل ۶.۱۰۵)۔ کمیت کی تقسیم محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ ہو

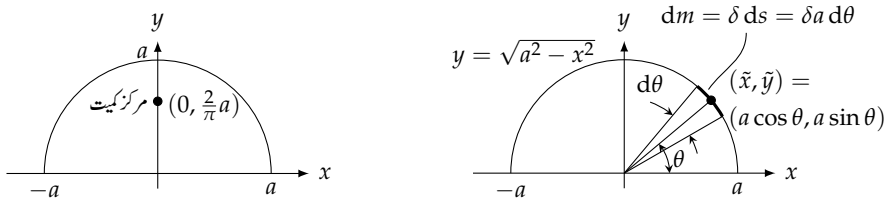
۹۳۱۱ گا۔ ہم تصور میں تار کو چھوٹے قطعات میں تقسیم کر کے $\bar{y}$ تلاش کرتے ہیں۔ نمائندہ قطعہ کے لیے درج ذیل ہو گا۔

۹۳۱۲ لمبائی: $\mathrm{d}s = a\,\mathrm{d}\theta$ ۹۳۱۴ مرکز کمیت کا محور x سے فاصلہ: $\tilde{y} = a \sin\theta$

۹۳۱۳ کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}s = \delta a\,\mathrm{d}\theta$

۹۳۱۵ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int_0^\pi a \sin\theta \cdot \delta a\,\mathrm{d}\theta}{\int_0^\pi \delta a\,\mathrm{d}\theta} = \frac{\delta a^2 [-\cos\theta]_0^\pi}{\delta a \pi} = \frac{2}{\pi} a$$



(ب) مرکز کمیت تار پر نہیں پایا جاتا۔ (ا) مرکز کمیت کے حصول میں مستعمل متغیرات۔

شکل ۶.۱۰۵: نصف دائری تار (مثال ۶.۲۹)

مرکز کمیت $(0, 2a/\pi)$ ہوگا، جو مبدا سے تقریباً $\frac{2}{3}$ اوپر ہے۔ □

وسطانی مرکز

مستقل کثافت کی صورت میں $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے کلیات میں نسب نما اور شمار کنندہ میں پائے جانے والے δ ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں۔ یوں $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے نقطہ نظر سے δ کو شروع سے اکائی (1) تصور کیا جا سکتا ہے۔ مستقل کثافت کی صورت میں کسی چیز کی کمیت کا مرکز اس چیز کی شکل و صورت پر منحصر ہو گا نہ کہ اس مادّے پر جس سے یہ چیز بنی ہو۔ ایسی صورت میں مرکز کمیت کو عموماً **وسطانی مرکز**[۱۷] کہتے ہیں۔ یوں اگر آپ سے کہا جائے کہ تکون، مخروط، یا کرہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ آپ $\delta = 1$ لے کر معیار اثر کو کمیت سے تقسیم کر کے $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ معلوم کریں۔

سوالات

پتلی سلاخ

سوال ۶.۲۲۸: ایک بچہ، جس کی کمیت 40 kg ہے، اور دوسرا بچہ، جس کی کمیت 50 kg ہے، ہنڈولا پر جھول رہے ہیں۔ اگر 40 kg بچہ چول سے 2 m فاصلے پر ہو، تب ہنڈولا کو متوازن رکھنے کی خاطر دوسرا بچہ چول سے دوسری جانب کتنے فاصلے پر ہو گا؟

سوال ۶.۲۲۹: ایک شہتیر کے سروں کو دو ترازوؤں پر رکھا جاتا ہے جو 100 kg اور 20 kg کی پیمائش دیتی ہیں۔ شہتیر کی کمیت کا مرکز کہاں ہو گا؟

سوال ۶.۲۳۰: لوہے کی ایک پتلی سلاخ کو وسط سے $90°$ زاویہ پر موڑ پر ڈھانچہ بنایا جاتا ہے (شکل ۶.۱۰۶)۔ ڈھانچے کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔ (اشارہ۔ انفرادی بازوؤں کے مراکز کمیت کہاں ہوں گے؟)

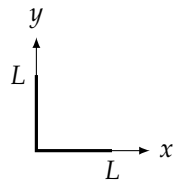
سوال ۶.۲۳۱: لوہے کی ایک پتلی سلاخ کو $90°$ پر موڑ کر ڈھانچہ بنایا جاتا ہے، جہاں ایک بازو کی لمبائی دوسرے بازو کی لمبائی سے دگنی ہے (شکل ۶.۱۰۷)۔ ڈھانچے کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔ (اشارہ۔ انفرادی بازوؤں کی کمیت کے مراکز کہاں ہوں گے؟)

سوال ۶.۲۳۲ تا سوال ۶.۲۳۹ میں محور x کے مختلف وقفوں پر واقع پتلی سلاخوں کے کثافتی تفاعل دیے گئے ہیں۔ مساوات ۱۳ استعمال کرتے ہوئے مبدا کے لحاظ سے سلاخ کا معیار اثر، کمیت، اور مرکز کمیت تلاش کریں۔

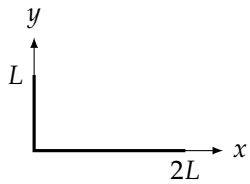
سوال ۶.۲۳۲: $\delta(x) = 4, \quad 0 \le x \le 2$

---

[۱۷] centroid



شکل ۶.۱۰۶: لوہے کا ڈھانچہ برائے سوال ۶.۲۳۰



شکل ۶.۱۰۷: ڈھانچہ برائے سوال ۶.۲۳۱

سوال ۶.۲۳۳: $\delta(x) = 4, \quad 1 \le x \le 3$

سوال ۶.۲۳۴: $\delta(x) = 1 + \frac{x}{3}, \quad 0 \le x \le 3$

سوال ۶.۲۳۵: $\delta(x) = 2 - \frac{x}{4}, \quad 0 \le x \le 4$

سوال ۶.۲۳۶: $\delta(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 1 \le x \le 4$

سوال ۶.۲۳۷: $\delta(x) = 3(x^{-3/2} + x^{-5/2}), \quad 0.25 \le x \le 1$

سوال ۶.۲۳۸: $\delta(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 \le x \le 1 \\ x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

سوال ۶.۲۳۹: $\delta(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \le x \le 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

مستقل کثافت والے پتلی چادریں

سوال ۶.۲۴۰ تا سوال ۶.۲۵۱ میں وہ خطہ دیا گیا ہے جہاں مستقل کثافت δ کی پتلی چادر واقع ہے۔ چادر کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔

سوال ۶.۲۴۰: قطع مکافی $y = x^2$ اور لکیر $y = 4$ میں محیط خطہ۔

سوال ۶.۲۴۱: قطع مکافی $y = 25 - x^2$ اور محور x میں محیط خطہ۔

سوال ۶.۲۴۲: قطع مکافی $y = x - x^2$ اور لکیر $y = -x$ میں محیط خطہ۔

سوال ۶.۲۴۳: قطع مکافی $y = x^2 - 3$ اور $y = -2x^2$ میں محیط خطہ۔

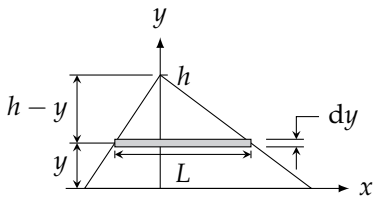
سوال ۶.۲۴۴: محور y اور قطع مکافی $x = y - y^3, 0 \le y \le 1$ کے بیچ خطہ۔

سوال ۶.۲۴۵: قطع مکافی $x = y^2 - y$ اور لکیر $y = x$ میں محیط خطہ۔

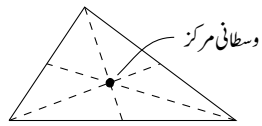
سوال ۶.۲۴۶: محور x اور منحنی $y = \cos x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ کے بیچ خطہ۔

سوال ۶.۲۴۷: محور x اور منحنی $y = \sec^2 x, -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ کے بیچ خطہ۔

سوال ۶.۲۴۸: قطع مکافی $y = 2x^2 - 4x$ اور $y = 2x - x^2$ میں محیط خطہ۔



(ب) مرکز کمیت معلوم کرنے میں مستعمل متغیرات۔



(ا) تکون کا وسطانی مرکز۔

شکل ۶.۱۰۸: تکون برائے سوال ۶.۲۵۶

سوال ۶.۲۴۹: (ا) ربع اول میں دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ کے اندر خطہ۔ (ب) محور x اور نصف دائرہ $y = \sqrt{9 - x^2}$ کے بیچ خطہ۔ جزو-ا کے نتیجہ کے ساتھ جواب کا موازنہ کریں۔

سوال ۶.۲۵۰: (ا) ربع اول میں لکیر $x = 3$، لکیر $y = 3$، اور دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ کے بیچ تکونی خطہ۔ (اشارہ۔ رقبے کو جیومیٹری کی مدد سے حاصل کریں۔)

سوال ۶.۲۵۱: وہ خطہ جس کی بالائی سرحد $y = \frac{1}{x^3}$، زیریں سرحد $y = -\frac{1}{x^3}$، بائیں سرحد $x = 1$، اور دائیں سرحد $x = a > 1$ ہیں۔ اس کے علاوہ $\bar{x}$ $\lim_{a\to\infty}$ بھی معلوم کریں۔

متغیر کثافت کی پتلی چادریں

سوال ۶.۲۵۲: محور x اور منحنی $y = \frac{2}{x^2}$, $1 \le x \le 2$ کے بیچ چادر، جس کی نقطہ (x, y) پر کثافت $\delta(x) = x^2$ ہے، کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال ۶.۲۵۳: لکیر $y = x$ سے نیچے اور قطع مکافی $y = x^2$ سے اوپر پتلی چادر، جس کی نقطہ (x, y) پر کثافت $\delta(x) = 12x$ ہے، کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

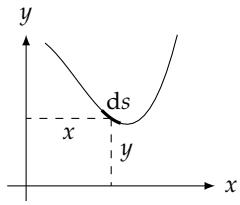
سوال ۶.۲۵۴: لکیر $x = 1$، لکیر $x = 4$، اور منحنی $y = \mp\frac{4}{\sqrt{x}}$ کے بیچ چادر کو محور y کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ (ا) اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) اگر نقطہ (x, y) پر چادر کی کثافت $\delta(x) = \frac{1}{x}$ ہو، تب چادر کی کمیت کتنی ہو گی؟ (ج) چادر کا خاکہ بنا کر اس پر چادر کی کمیت کا مرکز دکھائیں۔

سوال ۶.۲۵۵: منحنی $y = \frac{2}{x}$ اور محور x پر $x = 1$ تا $x = 4$ کے بیچ چادر کو محور x کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ (ا) اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) اگر نقطہ (x, y) پر چادر کی کثافت $\delta(x) = \sqrt{x}$ ہو، تب چادر کی کمیت کتنی ہو گی؟ (ج) چادر کا خاکہ بنا کر اس پر چادر کی کمیت کا مرکز دکھائیں۔

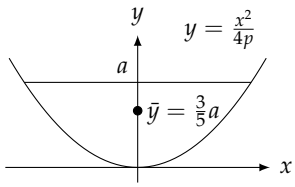
تکون کے وسطانی مراکز

سوال ۶.۲۵۶: تکون کے تین وسطانیوں کا نقطہ تقاطع تکون کا وسطانی مرکز ہو گا۔

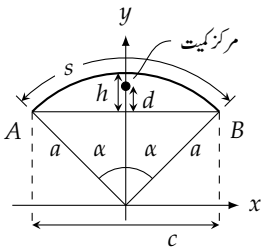
تکون کے راس سے، راس کے مخالف ضلع کے وسط تک، قطعہ کو وسطانیہ کہتے ہیں۔ آپ کو یاد ہو گا کہ ضلع سے $\frac{1}{3}$ فاصلے پر وسطانیے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں (شکل ۶.۱۰۸)۔ دکھائیں کہ تکون کا وسطانی مرکز بھی اسی نقطہ پر واقع ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل اقدامات کریں۔



شکل ۶.۱۰۹: برائے سوال ۶.۲۶۶



شکل ۶.۱۱۰: برائے سوال ۶.۲۶۷



شکل ۶.۱۱۱: برائے سوال ۶.۲۶۸

۹۳۷۳ ا. تکون کے کسی ایک ضلع کو محور x پر رکھ کر اس میں نمائندہ افقی پٹی L لیں۔ کمیت $\mathrm{d}m$ کو L اور $\mathrm{d}y$ کی صورت میں لکھیں۔

۹۳۷۴ ب. تشابہ مثلثات کی مدد سے $L = \frac{b}{h}(h-y)$ لکھ کر $\mathrm{d}m$ کے کلیہ میں ڈالیں۔

۹۳۷۵ ج. دکھائیں کہ $\bar{y} = \frac{h}{3}$ ہوگا۔

۹۳۷۶ د. اسی دلیل کو باقی دو وسطانیوں پر بھی لاگو کریں۔

۹۳۷۷ سوال ۶.۲۵۷ تا سوال ۶.۲۶۱ میں مثلث کے راس دیے گئے ہیں۔ سوال ۶.۲۵۶ کا نتیجہ استعمال کر کر مثلث کا وسطانی مرکز دریافت کریں۔

۹۳۷۸ سوال ۶.۲۵۷: $(-1,0),\ (1,0),\ (0,3)$

۹۳۷۹ سوال ۶.۲۵۸: $(0,0),\ (1,0),\ (0,1)$

۹۳۸۰ سوال ۶.۲۵۹: $(0,0),\ (a,0),\ (0,a)$

۹۳۸۱ سوال ۶.۲۶۰: $(0,0),\ (a,0),\ (0,b)$

۹۳۸۲ سوال ۶.۲۶۱: $(0,0),\ (a,0),\ (\frac{a}{2},b)$

۹۳۸۳ **پتلا تار**

۹۳۸۴ سوال ۶.۲۶۲: مستقل کثافت کا تار منحنی $y = \sqrt{x}$ پر $x = 0$ سے $x = 2$ تک واقع ہے۔ محور x کے لحاظ سے اس تار کا معیار اثر تلاش
۹۳۸۵ کریں۔

۹۳۸۶ سوال ۶.۲۶۳: مستقل کثافت کا تار منحنی $y = x^3$ پر $x = 0$ سے $x = 1$ تک واقع ہے۔ محور x کے لحاظ سے اس تار کا معیار اثر تلاش
۹۳۸۷ کریں۔

۹۳۸۸ سوال ۶.۲۶۴: کثافت کو $\delta = k\sin\theta$ لیتے ہوئے، جہاں k مستقل ہے، مثال ۶.۲۹ کو دوبارہ حل کریں۔

۹۳۸۹ سوال ۶.۲۶۵: کثافت کو $\delta = 1 + k|\cos\theta|$ لیتے ہوئے، جہاں k مستقل ہے، مثال ۶.۲۹ کو دوبارہ حل کریں۔

۹۳۹۰ **کلیات انجینئری**

۹۳۹۱ سوال ۶.۲۶۶ تا سوال ۶.۲۶۹ میں دیے گئے فقروں اور کلیات کی تصدیق کریں۔

سوال ۶.۲۶۶: قابل تفرق مسطح منحنی کے وسطانی مراکز کے محدد درج ذیل ہوں گے (شکل ۶.۱۰۹)۔

$$\bar{x} = \frac{\int x\,\mathrm{d}s}{\text{لمبائی}}, \quad \bar{y} = \frac{\int y\,\mathrm{d}s}{\text{لمبائی}}$$

سوال ۶.۲۶۷: قوس $y = \frac{x^2}{4p}$ میں $p > 0$ کی قیمت جو بھی ہو، شکل ۶.۱۱۰ میں دکھائے گئے قطع مکافی خطہ کے وسطانی مرکز کا y محدد $\bar{y} = \frac{3}{5}a$ ہو گا۔

سوال ۶.۲۶۸: مستقل کثافت کے باریک تار سے، محور y کے لحاظ سے تشاکلی، دائری قوس بنائی جاتی ہے، جس کا مرکز مبدا پر ہے (شکل ۶.۱۱۱)۔ اس کے وسطانی مرکز کا y محدد $\bar{y} = \frac{a\sin\alpha}{\alpha} = \frac{ac}{s}$ ہو گا۔

سوال ۶.۲۶۹: گزشتہ سوال کو جاری رکھا گیا ہے

دکھائیں کہ جب α کی قیمت کم ہو تب وسطانی مرکز سے قطعہ AB تک فاصلہ d تقریباً $\frac{2h}{3}$ ہو گا۔ ایسا درج ذیل اقدامات سے ہو گا۔

ا. ا. درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{d}{h} = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \alpha\cos\alpha} \tag{۱۰}$$

۲. درج ذیل تفاعل کو

$$f(\alpha) = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \alpha\cos\alpha}$$

کمپیوٹر پر ترسیم کر کے بڑا کر کے دکھائیں کہ $\lim_{\alpha\to 0^+} f(\alpha) \approx \frac{2}{3}$ ہو گا۔ (حصہ ۷.۶ میں سوال ۷.۴۲۳ میں آپ اس کی تصدیق کر پائیں گے۔)

ب. آپ $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ لے کر مساوات ۱۰ کا دایاں ہاتھ حل کر کے دیکھیں کہ 45° سے بڑے زاویوں کے لیے بھی خلل (یعنی d اور $\frac{2}{3}$ میں فرق) بہت کم ہے۔

۶.۸ کام

روزمرہ زندگی میں کام سے مراد وہ عمل ہے جو جسمانی یا ذہنی قوت سے سرانجام دیا جائے۔ سائنس میں کام کی تعریف اس سے مختلف ہے۔ اس حصہ میں کام کی سائنسی تعریف پیش کی جائے گی اور کام کی قیمت کا حصول سکھایا جائے گا۔

مستقل قوت اور کام

جب کوئی جسم، جس پر مستقل قوت F عمل کرتی ہو، قوت کی سمت میں سیدھی لکیر پر فاصلہ d طے کرے، تب ہم (سائنسی طور پر) کہتے ہیں کہ قوت F اس جسم پر (ذیل) کام W کرتی ہے۔

$$W = Fd \tag{۱}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سائنس میں لفظ "کام" کا معنی روزمرہ زندگی میں استعمال معنی سے مختلف ہے۔ اگر آپ کسی گاڑی کو سڑک پر دھکا لگا کر ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کریں تب آپ کی روزمرہ خیال کے مطابق آپ نے کام کیا اور مساوات ۱ کے تحت بھی آپ نے کام کیا۔ اس کے برعکس، اگر آپ پورا دن گاڑی کو دھکا لگاتے رہیں لیکن گاڑی اپنی جگہ سے حرکت نہ کرے، تب اگرچہ آپ کا خیال ہو گا کہ آپ نے بہت کام کیا لیکن مساوات ۱ کے تحت آپ نے کوئی کام نہیں کیا۔

مساوات ۱ سے واضح ہے کہ قوت کی اکائی کو فاصلے کی اکائی سے ضرب دینے سے کام کی اکائی حاصل ہو گی۔ بین الاقوامی نظام اکائی میں قوت کی اکائی نیوٹن N اور فاصلے کی اکائی میٹر m ہے، لہٰذا اس نظام میں کام کی اکائی نیوٹن میٹر $\mathrm{N \cdot m}$ ہو گی، جس کو خصوصی نام **جاول**[۱۸] دیا گیا ہے اور جس کو J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال ۶.۳۰: فرض کریں آپ $80\,\mathrm{kg}$ کمیت کو $30\,\mathrm{cm}$ بلندی تک اٹھاتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے آپ درج ذیل کام کرتے ہیں۔

$$W = Fd = (80)(9.8)(0.3) = 235.2\,\mathrm{J}$$

□

متغیر قوت اور کام

اگر آپ پانی کی ایسی بالٹی اٹھائیں جس سے پانی ٹپکتا ہو، تب لاگو قوت کی قیمت بلندی کے ساتھ تبدیل ہو گی۔ ایسی صورت میں قوت کا کلیہ $W = Fd$ تبدیل کرتے ہوئے تکمل کا استعمال ضروری ہو گا جو قوت کی تبدیلی کا حساب رکھ سکے۔

فرض کریں کہ محور x سے اس لکیر کو ظاہر کرنا ممکن ہے جس پر قوت عمل کرتی ہے اور قوت کی مقدار F کو فاصلہ x کا استمراری تفاعل تصور کیا جا سکتا ہے۔ ہم وقفہ $x = a$ تا $x = b$ پر قوت کا کام معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ ہم وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں کوئی نقطہ c_k منتخب کرتے ہیں۔ اگر ذیلی وقفہ چھوٹا ہو، تب x_{k-1} سے x_k تک کے فاصلے میں استمراری قوت F کی تبدیلی (استمراری ہونے کی وجہ سے) بہت کم ہو گی، جسے رد کیا جا سکتا ہے۔ یوں x_{k-1} سے x_k تک حرکت کے دوران کام کی قیمت تخمیناً $F(c_k)\Delta x_k$ ہو گی۔ یوں درج ذیل ریمان مجموعہ $x = a$ سے $x = b$ تک قوت F کا کام دے گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} F(c_k)\Delta x_k \tag{۲}$$

ہم توقع کرتے ہیں کہ جیسے جیسے خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر پہنچتا ہو، ویسے ویسے یہ تخمین بہتر سے بہتر ہو گی، لہٰذا ہم $x = a$ سے $x = b$ تک F کے تکمل کو a سے b تک قوت F کے کام کی تعریف لیتے ہیں۔

---

[۱۸] joule

تعریف: محور x پر $x = a$ سے $x = b$ تک لاگو متغیر قوت $F(x)$ درج ذیل **کام** کرتی ہے۔

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \tag{۳}$$

□

کام کی اکائی **جاول** J ہے۔

مثال ۶.۳۱: قوت $F(x) = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{N}$ محور x پر $x = 1\,\mathrm{m}$ تا $x = 10\,\mathrm{m}$ عمل کرتی ہے۔ یہ قوت درج ذیل کام کرتی ہے۔

$$W = \int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\Big]_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0.9\,\mathrm{J}$$

□

مثال ۶.۳۲: گاؤں میں کنویں سے پانی نکالنے کے لیے بوکا استعمال کیا جاتا ہے۔ کنویں کی گہرائی $20\,\mathrm{m}$، خالی بوکے کی کمیت $2\,\mathrm{kg}$، اور رسّی کی کمیت $0.1\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ ہے۔ بوکے میں ابتدائی طور پر $10\,\mathrm{L}$ پانی ہوتا ہے۔ چونکہ بوکے سے پانی رستا ہے، لہٰذا جتنی دیر میں بوکے کو نیچے سے اوپر کھینچا جاتا ہے اتنی دیر میں بوکا خالی ہو جاتا ہے۔ بوکا سے پانی کے اخراج کو مستقل تصور کریں۔ درج ذیل کام معلوم کریں۔

ا. صرف پانی بلند کرنے کا کام۔

ب. پانی اور بوکا بلند کرنے کا کام۔

ج. پانی، بوکا، اور رسّی بلند کرنا کا کام۔

حل

ا. صرف پانی: پانی اٹھانے کے لیے درکار قوت پانی کے وزن کے برابر ہو گی، جو ابتدا میں $(10)(9.8) = 98\,\mathrm{N}$ اور آخر میں صفر ہے۔ یوں مبدا کو کنویں کی تہہ میں رکھتے ہوئے قوت کو

$$F(x) = \underbrace{98}_{\text{ابتدائی وزن}}\underbrace{\left(\frac{20-x}{20}\right)}_{\text{اونچائی } x \text{ پر باقی تناسب}} = 98\left(1 - \frac{x}{20}\right) = 98 - 4.9x\,\mathrm{N}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا کام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{20} (98 - 4.9x)\,\mathrm{d}x = \left[98x - \frac{4.9x^2}{2}\right]_0^{20} = 1960 - 980 = 980\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

ب. صرف بوکا: صرف بوکا اٹھانے کے لیے درکار کام مساوات ۱ کے تحت $(2)(9.8)(20) = 392\,\mathrm{J}$ ہو گا۔ یوں پانی اور بوکا دونوں اٹھانے کے لیے درکار کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = 980 + 392 = 1372\,\mathrm{J}$$

ج. پانی، بوکا، اور رسّی: مبدا سے x بلندی پر پانی، بوکا، اور رسّی کی کمیت کو $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ سے ضرب دینے سے درج ذیل درکار قوت حاصل ہوتی ہے۔

$$F(x) = \underbrace{(98 - 4.9x)}_{\text{پانی کا متغیر وزن}} + \underbrace{(19.6)}_{\text{بوکا کا مستقل وزن}} + \underbrace{(0.1)(9.8)(20 - x)}_{\text{رسّی کا متغیر وزن}}$$

صرف رسّی کو اوپر کھینچنے کا کام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{20} (0.1)(9.8)(20 - x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{20} (19.6 - 0.98x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[19.6x - \frac{0.98x^2}{2}\right]_0^{20} = 392 - 196 = 196\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

یوں پانی، بوکا، اور رسّی تینوں کو کھینچنے کے لیے درکار کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = 980 + 392 + 196 = 1568\,\mathrm{J}$$

□

قانون ہک برائے اسپرنگ

قانون ہک[19] کے تحت کسی بھی اسپرنگ کی قدرتی لمبائی کو تان کر یا دبا کر x اکائیاں تبدیل کرنے کے لیے درکار قوت F لمبائی x کے راست متناسب ہو گی۔

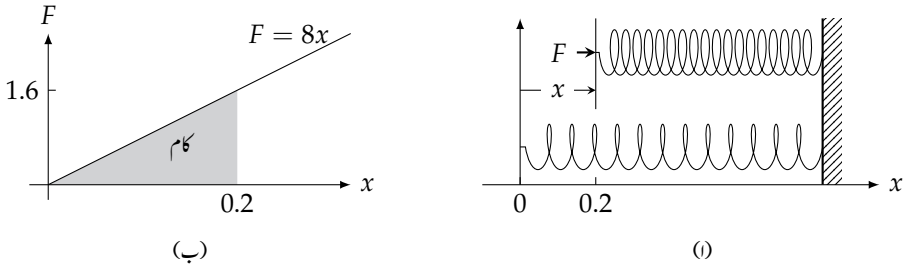
$$F = kx \qquad \text{قانون ہک} \qquad (۴)$$

مستقلہ اسپرنگ k جو اسپرنگ کی خاصیت ہے کو **مقیاس لچک**[20] کہتے ہیں۔ مقیاس لچک کو قوت فی اکائی لمبائی میں ناپا جاتا ہے۔ جب تک لاگو قوت اسپرنگ کے دھاتی تار کو بگاڑ نہ دے قانون ہک (مساوات ۴) بہترین نتائج دیتا ہے۔ اس حصہ میں ہم فرض کرتے ہیں کہ لاگو قوت اسپرنگ کو خراب نہیں کرتی۔

مثال ۶.۳۳: ایک اسپرنگ، جس کا مقیاس لچک $k = 8\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ ہے، کی لمبائی $1\,\mathrm{m}$ سے تبدیل کر کے $0.8\,\mathrm{m}$ کی جاتی ہے۔ درکار کام تلاش کریں۔

---

[19] Hooke'slaw
[20] springconstant



شکل ۶.۱۱۲: اسپرنگ کی لمبائی میں تبدیلی اور قوت کے درمیان راست تناسب ہے۔

حل

ہم اسپرنگ کو محور x پر پڑا ہوا تصور کرتے ہیں (شکل ۶.۱۱۲)۔ اسپرنگ کا ایک سرا مبدا پر ہے، جبکہ اس کا دوسرا سرا $x = 1$ پر باندھا گیا ہے۔ یوں ہم قوت کو $F = 8x$ لکھ سکتے ہیں، جہاں x کی قیمت 0 تا 0.2 m ہو گی۔ درکار کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = \int_0^{0.2} 8x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{8x^2}{2}\right]_0^{0.2} = 0.16\,\mathrm{J}$$

□

مثال ۶.۳۴: ایک اسپرنگ، جس کی قدرتی لمبائی 1 m ہے، کو 24 N قوت سے تان کر اس کی لمبائی 1.8 m کی جاتی ہے۔

ا. مقیاس لچک k تلاش کریں۔

ب. اسپرنگ کی لمبائی کو قدرتی لمبائی سے 2 m بڑھانے کے لیے درکار کام تلاش کریں۔

ج. اسپرنگ کی لمبائی میں 45 N کی قوت کتنی تبدیلی پیدا کرے گی؟

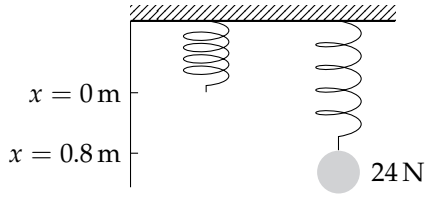
حل

ا. مقیاس لچک: قیاس لچک کو مساوات ۴ سے حاصل کرتے ہیں۔ اسپرنگ کی لمبائی میں تبدیلی 0.8 m ہے۔

$$24 = k(0.8) \qquad \Longrightarrow \; k = \frac{24}{0.8} = 30\,\mathrm{N\,m^{-1}}$$

ب. کام: ہم اسپرنگ کو چھت سے یوں آویزاں تصور کرتے ہیں کہ اس کا آزاد سرا $x = 0$ پر ہو (۶.۱۱۳)۔ اسپرنگ کی لمبائی کو اس کی قدرتی لمبائی سے x میٹر زیادہ کرنے کے لیے درکار قوت $F = kx$ ہو گی، جو اسپرنگ کو نیچے رخ کھینچے گی۔ یوں $x = 0$ سے $x = 2\,\mathrm{m}$ تک کھینچنے کے لیے کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = \int_0^2 30x\,\mathrm{d}x = \left.\frac{30x^2}{2}\right]_0^2 = 60\,\mathrm{J}$$



شکل ۶.۱۱۳: قوت نے اسپرنگ کی لمبائی کو بڑھایا ہے۔

ج. لمبائی میں تبدیلی: ہم مساوات $F = 30x$ میں $F = 45$ ڈال کر x تلاش کرتے ہیں۔

$$45 = 30x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{45}{30} = 1.5\,\mathrm{m}$$

یوں اسپرنگ کی کل لمبائی $1 + 1.5 = 2.5\,\mathrm{m}$ ہو گی۔

□

پانی کی نکاسی

کسی برتن یا حوض سے پانی کی نکاسی کے لیے کتنا کام درکار ہو گا؟ ہم پانی کو افقی تہوں میں تقسیم کرتے ہوئے ایک ایک تہہ کو برتن سے باہر نکالتے ہیں۔ یوں، اگر تہہ کی موٹائی $\mathrm{d}y$ اور اس کا سطحی رقبہ S ہو، تب اس کی کمیت $\rho S\,\mathrm{d}y$ اور وزن $\rho Sg\,\mathrm{d}y$ ہو گا، جہاں پانی کی کثافت کو ρ اور کشش ثقل کو g سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس تہہ کو بلندی h تک منتقل کرنے کے لیے $\mathrm{d}W = Fh = \rho Sgh\,\mathrm{d}y$ کام درکار ہو گا۔ یوں تمام تہوں کو نکالنے کے لیے درکار کام جاننے کے لیے تکمل حل کرنا ہو گا۔ اگلی مثال میں ایک ٹھوس مثال پیش کی گئی ہے۔

مثال ۶.۳۵: پانی سے بھرے ہوئے ایک بیلنی حوض کا رداس $5\,\mathrm{m}$ اور قد $h = 10\,\mathrm{m}$ ہے۔ پانی کو $14\,\mathrm{m}$ بلندی تک منتقل کرنے کے لیے کتنا کام کرنا ہو گا؟

حل

ہم حوض کو کار تیسی محدد پر تصور کرتے ہوئے وقفہ $[0, 10]$ کی خانہ بندی کر کے پانی کو تہہ در تہہ تقسیم کرتے ہیں (شکل ۶.۱۱۴)۔ سطح y اور سطح $y + \mathrm{d}y$ کے بیچ پانی کا حجم

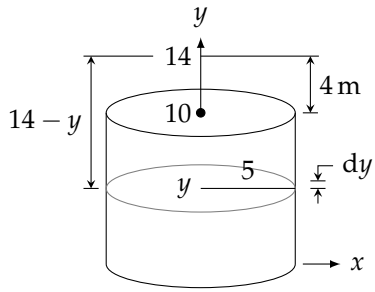
$$\Delta H = \pi(\text{رداس})^2(\text{موٹائی}) = \pi(5)^2\Delta y = 25\pi\Delta y\,\mathrm{m}^3$$

اور کمیت

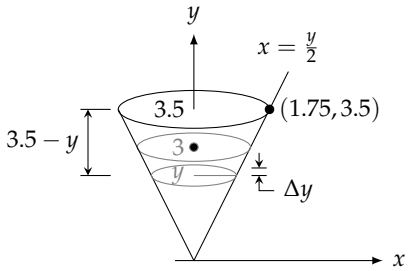
$$\mathrm{d}M = (\rho)(\Delta H) = (1000)(25\pi\Delta y) = 25\,000\pi\Delta y\,\mathrm{kg}$$

ہو گی، جہاں پانی کی کثافت $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔ اس تہہ پر کشش ثقل کی وجہ سے نیچے رخ قوت عمل کرے گی، لہٰذا اس تہہ کو اٹھانے کی خاطر تہہ کے وزن کے برابر (درج ذیل) قوت F درکار ہو گی۔

$$F = (g)(\mathrm{d}M) = (9.8)(25\,000\pi\Delta y) = 245\,000\pi\Delta y\,\mathrm{N}$$



شکل ۶.۱۱۴: بیلنی حوض (مثال ۶.۳۵)



شکل ۶.۱۱۵: زیتون تیل کا مخروط حوض (مثال ۶.۳۶)

۹۵۹۳ یوں اس تہہ کو y بلندی سے $14\,\mathrm{m}$ بلندی تک اٹھانے کے لیے درج ذیل کام کرنا ہو گا۔

$$\mathrm{d}W = (\text{قوت})(\text{فاصلہ}) = (245\,000\pi)(14-y)\Delta y\,\mathrm{J}$$

۹۵۹۴ تمام پانی کو اس بلندی تک اٹھانے کے لیے تخمیناً

$$W \approx \sum_0^{10} \Delta W = \sum_0^{10} \Delta y\,\mathrm{J}$$

۹۵۹۵ کام کرنا ہو گا، جو وقفہ $0 \leq y \leq 10$ پر تفاعل $245\,000\pi(14-y)$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ حوض خالی کرنے کے لیے درکار کام
۹۵۹۶ $\|P\| \to 0$ کی صورت میں اس ریمان مجموعے کی حد ہو گی۔

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{10} 245\,000\pi(14-y)\,\mathrm{d}y = 245\,000\pi \int_0^{10} (14-y)\,\mathrm{d}y \\ &= 245\,000\pi\left[14y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{10} = 245\,000\pi[90] \approx 69.3 \times 10^6\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

۹۵۹۷ ایک کلوواٹ طاقت کے بجلی کا پمپ ایک سیکنڈ میں $1000\,\mathrm{J}$ کام کرتا ہے۔ اس پمپ کو یہ حوض خالی کرنے کے لیے تقریباً 19 گھنٹے اور 15 منٹ کا وقت
۹۵۹۸ درکار ہو گا۔ □

۹۵۹۹ مثال ۶.۳۶: ایک مخروط حوض، جس کو شکل ۶.۱۱۵ میں دکھایا گیا ہے، کنارے سے $0.5\,\mathrm{m}$ نیچے تک زیتون کے تیل سے بھرا ہوا ہے۔ زیتون کے تیل
۹۶۰۰ کی کثافت $\rho = 930\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔ تیل کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لیے کتنا کام درکار ہو گا؟

۹۶۰۱ **حل**

۹۶۰۲ ہم وقفہ $[0, 3]$ کی خانہ بندی کرتے ہوئے، خانہ بندی کے نقطوں پر افقی سطحیں تصور کرتے ہوئے، تیل کو باریک تہوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ سطح y اور
۹۶۰۳ سطح $y + \Delta y$ کے بیچ تہہ کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta H = \pi(\text{رداس})^2(\text{موٹائی}) = \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 \Delta y = \frac{\pi}{4} y^2 \Delta y\,\mathrm{m}^3$$

اس تہہ کو اٹھانے کے لیے اس تہہ کے وزن کے برابر قوت $F(y)$ درکار ہو گی۔

$$F(y) = \rho g \Delta H = (930)(9.8)\left(\frac{\pi}{4}y^2\Delta y\right) = \frac{9114\pi}{4}y^2\Delta y\,\mathrm{N}$$

حوض کے کنارے سے اس تہہ تک کا فاصلہ $3.5 - y$ ہے، لہٰذا اس تہہ کو حوض کے کنارے تک اٹھانے کے لیے درج ذیل کام درکار ہو گا۔

$$\Delta W = \frac{9114\pi}{4}(3.5 - y)y^2\Delta y\,\mathrm{J}$$

$y = 0$ سے $y = 3$ تک تمام تہوں کو حوض کے کنارے تک اٹھانے کے لیے تخمیناً

$$W \approx \sum_{0}^{3} \frac{9114\pi}{4}(3.5 - y)y^2\Delta y\,\mathrm{J}$$

کام درکار ہو گا، جو وقفہ $[0, 3]$ پر تفاعل $\frac{9114\pi}{4}(3.5 - y)y^2$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ تیل کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لیے درکار کام، خانہ بندی کا معیار صفر تک کرنے سے حاصل، ریمان مجموعے کی حد ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= \int_0^3 \frac{9114\pi}{4}(3.5 - y)y^2\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{9114\pi}{4}\int_0^3 (3.5y^2 - y^3)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{9114\pi}{4}\left[\frac{3.5y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^3 \approx 80\,529\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

□

سوالات

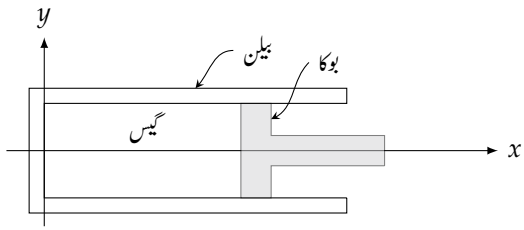
متغیر قوت کا کام

سوال ۶.۲۷۰: اگر مثال ۶.۳۲ میں بوکے کا حجم 20 L ہو لیکن اس میں سوراخ بھی بڑا ہو تا کہ اب بھی بوکے کو کنواں سے نکالتے ہوئے بوکا خالی ہو جاتا ہو۔ بوکے اور رسّی کی کمیت کو شامل نہ کرتے ہوئے بوکا نکالنے کے لیے درکار کام دریافت کریں۔ بوکے سے پانی کے اخراج کی شرح کو مستقل تصور کریں۔

سوال ۶.۲۷۱: فرض کریں مثال ۶.۳۲ میں بوکے کو اس رفتار سے اوپر کھینچا جاتا ہے کہ آخر میں بوکے میں 4 L پانی ہوتا ہے۔ پانی نکالنے میں کتنا کام درکار ہو گا؟ بوکا اور رسّی کی کمیت کو شامل نہ کریں اور بوکے سے پانی کے اخراج کی شرح کو مستقل تصور کریں۔

سوال ۶.۲۷۲: ایک کوہ پیما چٹان سے لٹکی ہوئی 50 m رسّی کو اوپر کھینچتا ہے۔ رسّی کا وزن $0.624\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ ہے۔ کتنا کام درکار ہو گا؟

سوال ۶.۲۷۳: ریت کو تھیلے میں ڈال کر 6 m بلند چھت تک برقرار رفتار سے کھینچ کر پہنچایا جاتا ہے۔ تھیلے میں سوراخ سے ریت کا اخراج ہوتا ہے جس کی شرح کو مستقل تصور کیا جا سکتا ہے۔ ابتدائی طور پر تھیلے میں 50 kg ریت ہوتی ہے جو آخر میں آدھی رہ جاتی ہے۔ رسّی اور تھیلے کی کمیت کو نظر انداز کرتے ہوئے درکار کام معلوم کریں۔



شکل ۶.۱۱۶: گاڑی کا انجن ایک بیلن پر مشتمل ہوتا ہے، جس میں بوکا چلتا ہے۔ بوکے کی حرکت سے گیس کا حجم اور دباو تبدیل ہوتے ہیں (سوال ۶.۲۷۶)۔

سوال ۶.۲۷۴: آج کل، بالخصوص بلند عمارتوں میں، سیڑھیوں کے ساتھ ساتھ **مصعد**[۲۱] بھی پائے جاتے ہیں۔ مصعد کو چھت پر رکھی ہوئی موٹر کی طاقت سے چلایا جاتا ہے۔ کئی لڑیوں پر مشتمل رسّی کی کثافت $6\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ ہونے کی صورت میں صرف رسّی کو زمین سے $60\,\mathrm{m}$ بلند عمارت کی چھت تک اٹھانے میں موٹر کتنا کام کرے گی؟

سوال ۶.۲۷۵: نقطہ $(x, 0)$ پر واقع ذرہ، جس کی کمیت m ہے، پر قوت $F = \frac{k}{x^2}$ عمل کرتی ہے، جہاں k مستقل ہے۔ یہ ذرہ سکون سے شروع کر کے نقطہ b سے نقطہ a پہنچتا ہے، جہاں $0 < a < b$ ہیں۔ اس ذرے پر کتنا کام ہوا؟

سوال ۶.۲۷۶: ایک بیلن، جس کا رقبہ عمودی تراش S ہے، میں موجود گیس پر میکانی دباو ڈالا جاتا ہے (شکل ۶.۱۱۶)۔ اگر گیس کا حجم V اور اس کا دباو p ہو، تب دکھائیں کہ گیس کو (p_1, V_1) حال سے (p_2, V_2) حال تک پہنچانے میں درج ذیل کام درکار ہو گا؟

$$W = \int_{(p_1,V_1)}^{(p_2,V_2)} p\,\mathrm{d}V$$

(اشارہ: شکل ۶.۱۱۶ کو دیکھ کر بوکے پر قوت کو $F = pS$ اور چھوٹے حجم کو $\mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}x$ لکھا جا سکتا ہے۔)

سوال ۶.۲۷۷: اگر گیس کا ابتدائی حجم $V_1 = 1500\,\mathrm{cm^3}$، ابتدائی دباو $103\,360\,\mathrm{N\,m^{-2}}$، اور اختتامی حجم $200\,\mathrm{cm^3}$ ہو، تب سوال ۶.۲۷۶ کے تکمل سے کام دریافت کریں۔ یہاں آپ فرض کریں کہ گیس کا دباو ایک **حرارت ناگزر عمل**[۲۲] ہے، جس میں نظام اور ماحول کے درمیان حرارت کا تبادلہ نہیں ہوتا۔ حرارت ناگزر عمل کے قانون کے تحت $pV^{1.4} = c$ ہو گا، جہاں c مستقل ہے۔

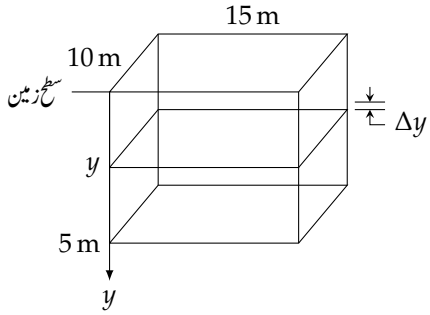
اسپرنگ

سوال ۶.۲۷۸: ایک اسپرنگ، جس کی قدرتی لمبائی $2\,\mathrm{m}$ ہے، کی لمبائی کو $5\,\mathrm{m}$ بنانے کے لیے درکار کام $1800\,\mathrm{J}$ ہے۔ اس اسپرنگ کا مقیاس لچک تلاش کریں۔

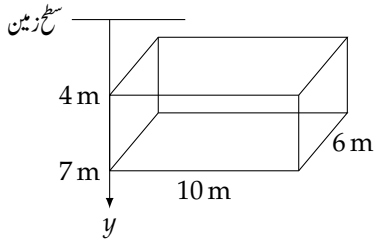
سوال ۶.۲۷۹: ایک اسپرنگ، جس کی قدرتی لمبائی $30\,\mathrm{cm}$ ہے، پر $400\,\mathrm{N}$ قوت لاگو کرتے ہوئے اس کو کھینچ کر $45\,\mathrm{cm}$ لمبائی تک پہنچایا جاتا ہے۔ (ا) مقیاس لچک تلاش کریں۔ (ب) اسپرنگ کی لمبائی کو $35\,\mathrm{cm}$ کرنے کے لیے کتنی قوت درکار ہو گی؟ (ج) قدرتی لمبائی سے $600\,\mathrm{N}$ قوت اسپرنگ کی لمبائی کو کتنا زیادہ کرتی ہے؟

---

[۲۱] lift
[۲۲] adiabaticprocess



شکل ۶.۱۱۷: زیر زمین حوض (سوال ۶.۲۸۴)



شکل ۶.۱۱۸: زیر زمین حوض (سوال ۶.۲۸۵)

سوال ۶.۲۸۰: ایک ربڑی پٹی کی لمبائی کو 2 N کی قوت 2 cm بڑھاتی ہے۔ ربڑی پٹی پر قانون ہک کا اطلاق ہوتا ہے۔ ربڑی پٹی کی لمبائی کو 4 N کی قوت کتنا بڑھائے گی اور یہ قوت کتنا کام کرے گی؟

سوال ۶.۲۸۱: اگر 90 N کی قوت اسپرنگ کی لمبائی کو قدرتی لمبائی سے 1 m زیادہ کرتی ہو، تب اسپرنگ کی قدرتی لمبائی سے اس کی لمبائی کو 5 m زیادہ کرنے کے لیے کتنا کام درکار ہو گا؟

سوال ۶.۲۸۲: ریل گاڑی کے ڈبوں پر نصب اسپرنگ ان ڈبوں کو ایک دوسرے سے دور رکھتے ہیں اور ان کے ٹکراؤ کو محفوظ بناتے ہیں۔ ایسا ایک اسپرنگ، جس کی قدرتی لمبائی 20 cm ہے، پر 100 000 N کی قوت لاگو کرنے سے اسپرنگ کی لمبائی 12 cm ہو جاتی ہے۔ (ا) اسپرنگ کا مقیاس لچک تلاش کریں۔ (ب) اسپرنگ کو پہلا cm دبانے کے لیے کتنا کام درکار ہو گا۔ اسے دوسرا سنٹی میٹر دبانے کے لیے کتنا کام درکار ہو گا؟

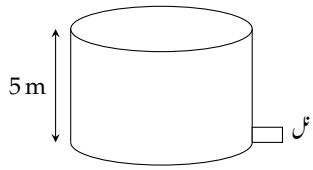
سوال ۶.۲۸۳: گھریلو استعمال کی ترازو پر 74 kg کا شخص کھڑا ہونے سے ترازو 1.5 mm دبتی ہے۔ فرض کریں کہ یہ ترازو قانون ہک کے تحت کام کرتی ہے۔ ایک شخص، جس کے ترازو پر کھڑا ہونے سے ترازو 3 mm دبتی ہو، کا وزن کتنا ہو گا؟

پانی کے نکاسی

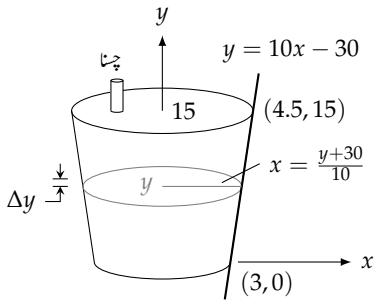
ثقلی اسراع کی قیمت عموماً $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ لی جاتی ہے۔ حقیقت میں سطح سمندر پر اس کی قیمت قطبین پر $9.832\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ اور عرضی خط استوا پر $9.780\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ ان دو قیمتوں میں فرق تقریباً 0.5 % ہے۔

سوال ۶.۲۸۴: بارانی علاقوں میں بارش کے پانی کو زیر زمین حوض میں ذخیرہ کیا جاتا ہے۔ زیر زمین حوض، جس کو شکل ۶.۱۱۷ میں دکھایا گیا ہے، پانی سے بھرا ہوا ہے۔ حوض کو خالی کرتے ہوئے پانی کو سطح زمین پر لایا جاتا ہے۔ (ا) حوض کو خالی کرنے کے لیے کتنا کام کرنا ہو گا؟ (ب) 0.25 kW کا پمپ حوض کو کتنی دیر میں خالی کرے گا؟ (ج) دکھائیں کہ ابتدائی 5 گھنٹوں میں تقریباً آدھا حوض خالی ہو جائے گا۔ (د) خط استوا پر جزو-ب کا جواب کیا ہو گا؟ قطبین پر یہ جواب کیا ہو گا؟

سوال ۶.۲۸۵: زیر زمین حوض، جس کو شکل ۶.۱۱۸ میں دکھایا گیا ہے، پانی سے بھرا ہوا ہے۔ حوض کا کنارہ سطح زمین سے 4 m نیچے ہے۔ حوض کو خالی کرتے ہوئے پانی کو سطح زمین پر لایا جاتا ہے۔ (ا) حوض کو خالی کرنے کے لیے کتنا کام کرنا ہو گا؟ (ب) 0.25 kW کا پمپ حوض کو کتنی دیر میں خالی کرے گا؟ (ج) آدھا حوض کتنی دیر میں خالی ہو گا؟ (پورا حوض خالی کرنے کے نصف دورانیہ سے کم وقت درکار ہو گا)۔ (د) خط استوا پر جزو-ب کا جواب کیا ہو گا؟ قطبین پر یہ جواب کیا ہو گا؟



شکل ۶.۱۱۹: بیلنی حوض (سوال ۶.۲۸۹)



شکل ۶.۱۲۰: مخروط مقطوع ڈبیا (پیمائش سنٹی میٹروں میں ہے۔)

سوال ۶.۲۸۶: اگر حوض کے کنارے سے 4 m بلند کے بجائے حوض کے کنارے تک پانی کو اٹھایا جائے تب مثال ۶.۳۵ میں کتنا کام درکار ہو گا؟

سوال ۶.۲۸۷: اگر مثال ۶.۳۵ میں حوض آدھا بھرا ہو، تب حوض کے کنارے سے 4 m بلندی تک پانی کو پہنچانے کے لیے کتنا کام کرنا ہو گا؟

سوال ۶.۲۸۸: ایک بیلنی حوض، جس کا رداس 4 m اور قد 10 m ہے، مٹی کے تیل سے بھرا ہوا ہے۔ مٹی کے تیل کی کثافت $0.81\ \mathrm{g\,cm^{-1}}$ ہے۔ تمام تیل کو حوض کے بالائی کنارے تک پمپ کرنے کے لیے کتنا کام کرنا ہو گا؟

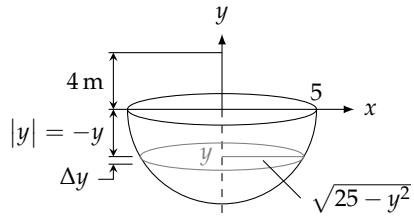
سوال ۶.۲۸۹: ایک حوض، جس کا قد 5 m ہے، سطح زمین پر پڑا ہوا ہے (شکل ۶.۱۱۹)۔ قدرتی پانی سطح زمین سے 7 m نیچے ہے۔ حوض کو اس پانی سے دو طرح بھرا جا سکتا ہے۔ (ا) پمپ کے خارجی پائپ کو حوض کے کنارے پر رکھ کر حوض کو بھرا جا سکتا ہے۔ (ب) حوض کے نچلے سر پر موجود نل کے ذریعے پانی کو حوض تک منتقل کیا جا سکتا ہے۔ دونوں تراکیب میں کون سی بہتر ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۶.۲۹۰: ایک مشروب، جس کی کثافت $0.769\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$ ہے، سے مخروط مقطوع ڈبیا بھری ہوئی ہے (۶.۱۲۰)۔ اس ڈبیا کا بالائی رداس 4.5 cm، زیریں رداس 3 cm، اور گہرائی 15 cm ہے۔ مشروب کو چنا کے ذریعہ پیا جاتا ہے جو ڈبیا کی بالائی سطح سے 2.5 cm باہر نکلا ہوا ہے۔ پورا مشروب پینے کے لیے کتنا کام کرنا ہو گا؟

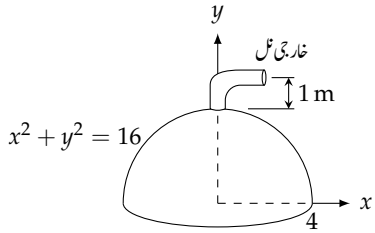
سوال ۶.۲۹۱: فرض کریں مثال ۶.۳۶ میں مخروط حوض دودھ سے بھرا ہوا ہے، جس کی کثافت $1032\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔ (ا) دودھ کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لیے کتنا کام درکار ہو گا؟ (ب) دودھ کو حوض کے کنارے سے 1 m بلندی تک پمپ کرنے کے لیے کتنا کام درکار ہو گا؟

سوال ۶.۲۹۲: **زنگ مزاحم فولاد**[۲۳] کا بڑا حوض بنانے کے لیے آپ منحنی $y = x^2, 0 \le x \le 4\ \mathrm{m}$ کو محور y کے گرد گھماتے ہیں۔ یہ حوض سمندری پانی سے بھرا ہوا ہے، جس کی کثافت تقریباً $10\,000\ \mathrm{N\,m^{-3}}$ ہے۔ حوض کو خالی کرنے کی خاطر پانی کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لیے کتنا کام کرنا ہو گا؟

سوال ۶.۲۹۳: نصف کروی حوض، جس کا رداس 5 m ہے، پانی سے بھرا ہوا ہے (شکل ۶.۱۲۱)۔ پانی کو حوض کے بالائی کنارے سے 4 m بلندی تک پمپ کرنے کے لیے کتنا کام درکار ہو گا؟ پانی کی کثافت کو $9800\ \mathrm{N\,m^{-3}}$ لیں۔



شکل ۶.۱۲۱: نصف کروی حوض (سوال ۶.۲۹۳)



شکل ۶.۱۲۲: نصف کروی حوض (سوال ۶.۲۹۴)

سوال ۶.۲۹۴: **بنزین**[۲۴] سے بھرا ہوا نصف کروی حوض، جس کا رداس $4\,\mathrm{m}$ ہے، کو شکل ۶.۱۲۲ میں دکھایا گیا ہے۔ بنزین کی کثافت $876\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔ حوض کو خارجی نل، جو حوض کے بالائی سطح سے $1\,\mathrm{m}$ بلندی پر ہے، کے ذریعے خالی کرنے کے لیے کتنا کام کرنا ہوگا؟

سوال ۶.۲۹۵: آپ کے گاؤں میں پانی کی فراہمی کے لیے $8\,\mathrm{m}$ قد کا حوض تعمیر کیا جاتا ہے، جس کا تلا زمین سے $20\,\mathrm{m}$ بلندی پر ہے۔ زیر زمین پانی کی سطح $100\,\mathrm{m}$ نیچے ہے۔ پانی کو $10\,\mathrm{cm}$ رداس کے پائپ سے $3\,\mathrm{kW}$ پمپ کی مدد سے حوض کے تلے میں نل کے ذریعے بھرا جاتا ہے۔ خالی حوض کتنی دیر میں بھرے گا؟ (پائپ کو پانی سے بھرنے کے لیے درکار وقت کو نظر انداز کریں۔)

دیگر استعمال

سوال ۶.۲۹۶: مصنوعی سیارے کا خلائی مدار میں بھیجنا

کشش ثقل کی قیمت زمین کے مرکز سے فاصلہ r پر منحصر ہوتی ہے۔ کمیت m کے مصنوعی سیارے پر کشش ثقل درج ذیل ہوگی

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

جہاں زمین کی کمیت $M = 5.975 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ ہے، جبکہ تجاذبی مستقل $G = 6.6720 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ ہے۔ زمین کا رداس $6\,370\,000\,\mathrm{m}$ ہے۔ یوں سطح زمین سے $29\,410\,\mathrm{km}$ بلندی پر مدار تک $1000\,\mathrm{kg}$ مصنوعی سیارے کو منتقل کرنے کے لیے درج ذیل کام درکار ہوگا۔

$$W = \int_{6\,370\,000}^{35\,780\,000} \frac{1000MG}{r^2}\,\mathrm{d}r$$

حقیقت میں مصنوعی سیارہ ایک راکٹ پر نصب ہوگا، جس کو یہاں نظر انداز کیا گیا ہے۔ اس تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ تکمل کی زیریں حد سطح زمین کو ظاہر کرتی ہے، جہاں سے سیارہ روانہ ہوگا۔

---

[۲۳] stainlessssteel
[۲۴] benzene

سوال ۶.۲۹۷: برقیوں (الیکٹرانوں) کو ایک دوسرے کے قریب لانا۔ دو برقیے، جن کے بیچ فاصلہ r ہو، کے مابین درج ذیل قوت دفع پائی جاتی ہے، جہاں $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$ برقی مستقل ہے اور $e = -1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ **برقیہ**[۲۵] **کا بار**[۲۶] ہے۔

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

ا. فرض کریں کہ ایک برقیہ نقطہ $(1,0)$ پر واقع ہے، جبکہ دوسرے برقیے کو محور x پر نقطہ $(-1,0)$ سے مبدا تک منتقل کیا جاتا ہے۔ ایسا کرنے کے لیے کتنا کام کرنا ہو گا؟

ب. فرض کریں ایک برقیہ $(1,0)$ اور دوسرا $(-1,0)$ پر واقع ہے۔ تیسرے برقیے کو $(5,0)$ سے $(3,0)$ تک منتقل کرنے کے لیے کتنی توانائی درکار ہو گی؟

کام اور حرکی توانائی

سوال ۶.۲۹۸: متغیر قوت $F(x)$ ایک جسم، جس کی کمیت m ہے، کو محور x پر x_1 سے x_2 تک منتقل کرتی ہے۔ جسم کی سمتی رفتار v کو $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ لکھا جا سکتا ہے۔ قانون نیوٹن $F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ اور زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ جسم کو x_1 سے x_2 منتقل کرنے میں درج ذیل کام درکار ہو گا

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

جہاں x_1 پر جسم کی رفتار v_1 اور x_2 پر اس کی رفتار v_2 ہے۔ طبیعیات میں $\frac{1}{2}mv^2$ کو رفتار v سے چلنے والے جسم کی **حرکی توانائی**[۲۷] کہتے ہیں۔ یوں کسی جسم کی حرکی توانائی میں تبدیلی اس جسم پر کیے گئے کام کے برابر ہو گی۔

سوال ۶.۲۹۹ تا سوال ۶.۳۰۵ میں سوال ۶.۲۹۸ کا نتیجہ استعمال کریں۔

سوال ۶.۲۹۹: ٹینس کا کھیل
ایک کھلاڑی 58 g کمیت کی گیند کو زور سے مار کر $175\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار تک پہنچاتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟

سوال ۶.۳۰۰: ایک گیند، جس کی کمیت 145 g ہو، کو کھلاڑی $145\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟

سوال ۶.۳۰۱: ایک سائیکل سوار بمع سائیکل کی کمیت 80 kg ہے۔ ساکن حالت سے $40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار تک پہنچنے کے لیے کتنی توانائی درکار ہو گی؟

---

[۲۵] electron
[۲۶] charge
[۲۷] kineticenergy

سوال ۶.۳۰۲: ایک گاڑی، جس کی کمیت 880 kg ہے، کی رفتار $40\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ سے بڑھ کر $60\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ کرنے کے لیے کتنی توانائی درکار ہو گی؟

سوال ۶.۳۰۳: فٹ بال
ایک فٹ بال، جس کی کمیت 430 g ہے، کو لات سے مار کر $95\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار تک پہنچایا جاتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟

سوال ۶.۳۰۴: ایک کھلاڑی بازو کے زور سے 180 g کمیت کی گیند کو $90\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟

سوال ۶.۳۰۵: ایک اینٹ، جس کی کمیت 3.5 kg ہے، 4 m بلند چھت سے گرتی ہے۔ زمین پر پہنچنے کے لمحے پر اس کی حرکی توانائی کتنی ہو گی؟

۶.۹ فشار سیال اور قوت سیال

فشار p سے مراد وہ قوت ہے جو اکائی رقبہ پر عمل کرتی ہے۔ یوں اگر رقبہ S پر قوت F عمل کرتی ہو تب فشار p درج ذیل ہو گا۔

$$p = \frac{F}{S} \tag{۱}$$

مستقل گہرائی پر قوت سیال اور فشار سیال

شکل ۶.۱۲۳ میں ساکن سیال کو ایک برتن میں دکھایا گیا ہے، جہاں تل کا رقبہ S، سیال کی گہرائی h اور سیال کی کثافت ρ ہے۔ یوں سیال کا حجم Sh، کمیت ρSh، اور وزن $g\rho Sh$ ہو گا۔ سیال کے وزن کے برابر قوت $F = g\rho Sh$ رقبہ S پر عمل کرے گی۔ یوں اکائی رقبے پر قوت $g\rho h$ ہو گی، جس کو **فشار**[۲۸] p یا "دباو" کہتے ہیں۔

$$p = \rho g h \tag{۲}$$

فشار کی اکائی نیوٹن فی مربع میٹر $\mathrm{N\,m^{-2}}$ ہے۔ آپ نے دیکھا کہ فشار کی قیمت پر برتن کی صورت کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔

مستقل گہرائی کے رقبے S پر درج ذیل قوت پائی جائے گی۔

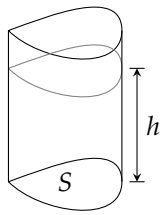
$$F = pS \tag{۳}$$

سیال میں h گہرائی پر کسی بھی رخ فشار کی قیمت مساوات ۲ دیتی ہے۔ یوں کسی بھی گہرائی پر افقی اور انتصابی دیواروں پر فشار کی قیمت ایک جیسی ہو گی۔

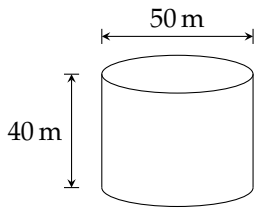
مثال ۶.۳۷: ایک بیلنی حوض میں پانی کی گہرائی 40 m ہے، جبکہ حوض کا رداس 25 m ہے (شکل ۶.۱۲۴)۔ حوض کے اطراف کی دیوار کی نچلی 1 m پٹی پر فشار سیال اور قوت سیال کتنا ہو گا؟ (پانی کی کثافت کو $\rho = 1000\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ لیں۔)

---

[۲۸] pressure



شکل ۶.۱۲۳: فشار سیال۔



شکل ۶.۱۲۴: بیلنی حوض برائے مثال ۶.۳۷

حل

اس ایک میٹر چوڑی پٹی کے نچلے کنارے پر فشار درج ذیل ہو گا۔

$$p = \rho g h = (1000)(9.8)(40) = 392\,000\ \mathrm{N\,m^{-2}}$$

ایک میٹر پٹی کا رقبہ

$$S = 2\pi r h = 2\pi(25)(1) = 50\pi\ \mathrm{m^2}$$

ہے لہٰذا اس پر کل قوت درج ذیل ہو گی۔

$$F = pS = (392000)(50\pi) = 61\,575\,216.01\ \mathrm{N}$$

□

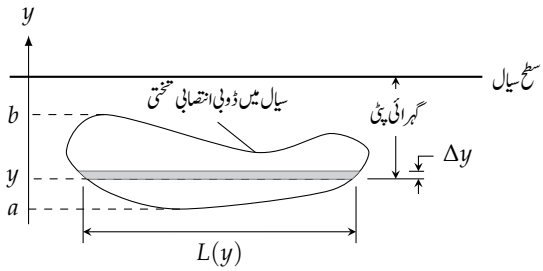
اس مثال میں پٹی کے نچلے حصے کی گہرائی 40 m اور بالائی حصے کی گہرائی 39 m تھی، لہٰذا ان پر فشار مختلف ہو گا۔ ہم نے اس حقیقت کو نظر انداز کیا۔ آئیں متغیر گہرائی کی صورت میں فشار پر غور کریں۔

متغیر گہرائی پر فشار

فرض کریں ہم کثافت ρ کے سیال میں ڈوبی ہوئی انتصابی تختی کی ایک طرف پر قوت سیال جاننا چاہتے ہیں۔ ہم تختی کو مستوی xy میں خطہ $y = a$ تا $y = b$ تصور کرتے ہیں (شکل ۶.۱۲۵)۔ ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی کرتے ہیں۔ ہم اس خطہ کو نقاط خانہ بندی پر محور y کے عمودی فرضی سطحوں سے باریک افقی پٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ایک نمائندہ پٹی، جو y سے $y + \Delta y$ تک ہو، کی چوڑائی Δy ہو گی، جبکہ اس پٹی کے نچلے ضلع کی لمبائی $L(y)$ ہو گی۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ $L(y)$ متغیر y کا استمراری تفاعل ہے۔

نیچے سے اوپر چلتے ہوئے گہرائی کی تبدیلی سے پٹی پر فشار تبدیل ہوتا ہے۔ اب اگر پٹی کی چوڑائی بہت کم ہو، تب فشار کی اس تبدیلی کو رد کیا جا سکتا ہے اور ہم کہہ سکتے ہیں کہ پٹی پر ہر جگہ فشار وہی ہو گا جو پٹی کے نچلے کنارے پر ہے۔ یوں پٹی کی ایک طرف پر قوت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\Delta F &= (\text{رقبہ پٹی})(\text{پٹی کے نچلے کنارے پر فشار})\\ &= \rho g(\text{گہرائی پٹی})L(y)\Delta y\end{aligned}$$



شکل ۶.۱۲۵: ایک پتلی پٹی پر قوت سیال۔

پوری تختی پر قوت تخمیناً

$$\sum_a^b \Delta F = \sum_a^b \rho g(\text{گہرائی پٹی}) L(y) \Delta y \tag{۴}$$

ہو گی، جو $[a, b]$ پر استمراری تفاعل کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے یہ مجموعہ بہتر سے بہتر نتیجہ دے گا۔ ہم ان مجموعوں کی تحدیدی قیمت کو تختی پر قوت کی تعریف لیتے ہیں۔

تعریف: **تکمل برائے قوت سیال**

فرض کریں محور y پر $y = a$ سے $y = b$ تک کا خطہ، سیال میں ڈوبی ہوئی ایک تختی کو ظاہر کرتا ہے۔ مزید فرض کریں کہ y پر اس تختی کی سطح پر افقی پٹی کی بائیں سے دائیں لمبائی $L(y)$ ہے۔ اس تختی کی ایک طرف پر قوت سیال درج ذیل ہو گی۔

$$F = \int_a^b \rho g \cdot (\text{گہرائی پٹی}) \cdot L(y)\, \mathrm{d}y \tag{۵}$$

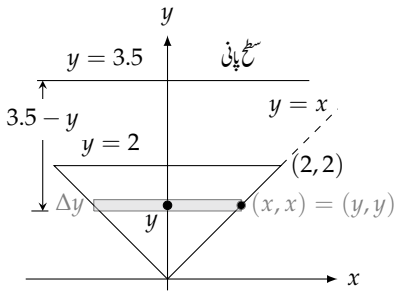
□

مثال ۶.۳۸: ایک مساوی الساقین مثلث تختی، جس کا قاعدہ $4\,\mathrm{m}$ اور قد $2\,\mathrm{m}$ ہے، پانی کے تالاب میں یوں ڈوبی ہوئی ہے کہ اس کا قاعدہ اوپر ہو۔ قاعدے پر پانی کی گہرائی $1.5\,\mathrm{m}$ ہے۔ تختی کی ایک طرف پر قوت تلاش کریں۔ (پانی کی کثافت کو $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ لیں۔)

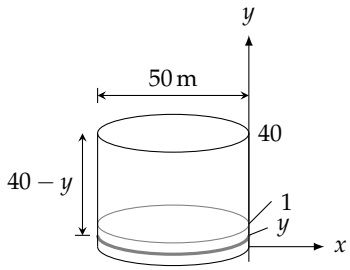
حل

ہم تختی کے نچلے راس کو محدد کے مبدا پر تصور کرتے ہیں (شکل ۶.۱۲۶)۔ یوں سطح پانی $y = 3.5$ پر ہو گی، جبکہ تختی کا بالائی کنارہ $y = 2$ پر ہو گا۔ تختی کا دایاں کنارہ $y = x$ اور بایاں کنارہ $y = -x$ ہو گا۔ یوں y پر پٹی کی لمبائی

$$L(y) = 2x = 2y$$



شکل ۶.۱۲۶: تختی پر قوت پانی (مثال ۶.۳۸)



شکل ۶.۱۲۷: بیلنی حوض برائے مثال ۶.۳۹

۹۵۵ اور پانی کی گہرائی $(3.5 - y)$ ہو گی۔ تختی کی ایک طرف پر پانی کی قوت درج ذیل ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
F &= \int_a^b \rho g(\text{گہرائی پٹی}) L(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 9800(3.5 - y)2y\,\mathrm{d}y \\
&= 9800 \int_0^2 (7y - 2y^2)\,\mathrm{d}y \\
&= 9800 \left[\frac{7y^2}{2} - \frac{2y^3}{3}\right]_0^2 = 84\,933\,\mathrm{N}
\end{aligned}
$$

۹۵۶ □

۹۵۷ قوت سیال کا حصول

۹۵۸ کسی بھی محددی نظام میں سیال میں ڈوبی ہوئی انتصابی تختی کی ایک طرف پر قوت سیال حاصل کرنے کے لیے درج ذیل اقدامات کریں۔

۹۵۹ ا. نمائندہ افقی پٹی کی لمبائی اور گہرائی کے عمومی کلیے تلاش کریں۔

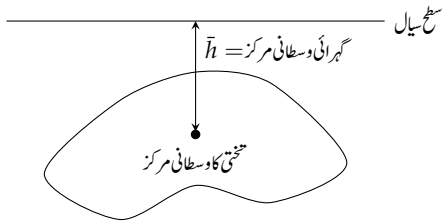
۹۶۰ ب. انہیں آپس میں ضرب دے کر سیال کی کثافت اور ثقلی مستقل $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ سے ضرب دے کر مکمل کو موزوں حدود کے بیچ حل کریں۔

۹۶۱ مثال ۶.۳۹: ہم اب مثال ۶.۳۷ میں بیلنی حوض کی نچلی ایک میٹر چوڑی پٹی پر قوت سیال کی بالکل درست قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

۹۶۲ ہم حوض کے تل کو $y = 0$ پر رکھتے ہیں (شکل ۶.۱۲۷)، جبکہ محدد y کو اوپر کے رخ رکھتے ہیں۔ ہم y پر نمائندہ افقی پٹی کے لیے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

۹۶۳ ا. گہرائی پٹی: $40 - y$

۹۶۴ ب. لمبائی پٹی: 50π



شکل ۶.۱۲۸: قوت سیال اور وسطانی مرکز۔

۹۷۶۵ یوں ایک میٹر چوڑی پٹی پر قوت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} F &= \int_0^1 \rho g(\text{گہرائی})(\text{لمبائی})\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \rho g(40-y)(50\pi)\,\mathrm{d}y \\ &= 9800(50\pi)\int_0^1 (40-y)\,\mathrm{d}y = 60\,805\,525.81\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

۹۷۶۶ □

۹۷۶۷ اس مثال میں حاصل قوت مثال ۶.۳۷ سے کچھ کم ہے، جو متوقع تھا۔

۹۷۶۸ **قوت سیال اور وسطانی مرکز**

۹۷۶۹ اگر ہمیں سیال میں ڈوبی ہوئی انتصابی تختی کا وسطانی مرکز معلوم ہو، تب ہم اس تختی کی ایک طرف پر قوت سیال باآسانی معلوم کر سکتے ہیں (شکل ۶.۱۲۸)۔
۹۷۷۰ مساوات ۵ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b \rho g \times (\text{گہرائی پٹی}) \times L(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \rho g \int_a^b (\text{گہرائی پٹی}) \times L(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \rho g \times (\text{تختی کے خطے کا سطح سیال پر لکیر کے لحاظ سے معیار اثر}) \\ &= \rho g \times (\text{تختی کے وسطانی مرکز کی گہرائی}) \times (\text{تختی کا رقبہ}) \end{aligned}$$

۹۷۷۱ **قوت سیال اور وسطانی مرکز**

۹۷۷۲ سیال میں ڈوبی ہوئی انتصابی تختی کی ایک طرف پر قوت سیال F معلوم کرنے کے لیے ρg ، تختی کے وسطانی مرکز کی گہرائی $\bar{h}$ ، اور تختی کے رقبہ S کا
۹۷۷۳ حاصل ضرب لیں۔

$$F = \rho g \bar{h} S \tag{۶}$$

مثال ۶.۴۰: ایک مثلث تختی پر قوت سیال کو مثال ۶.۳۸ میں تلاش کیا گیا۔ مساوات ۶ استعمال کرتے ہوئے اس کو دوبارہ تلاش کریں۔

حل

مثلث کا وسطانی مرکز محدد y پر تلا سے راس کی جانب ایک تہائی فاصلے پر واقع ہے (شکل ۶.۱۲۶)، لہٰذا $\bar{h} = 1.5 + 2/3 = \frac{13}{6}$ ہو گا۔ مثلث کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔

$$S = \frac{1}{2}(\text{قاعدہ})(\text{قد}) = \frac{1}{2}(4)(2) = 4$$

یوں تختی کی ایک طرف پر قوت درج ذیل ہو گی۔

$$F = \rho g \bar{h} S = (1000 \times 9.8)\left(\frac{13}{6}\right)(4) = 84\,933\,\text{N}$$

□

مساوات ۶ کہتی ہے کہ سیال میں ڈوبی ہوئی انتصابی تختی پر قوت سیال وہی ہو گی جو تختی کے پورے رقبے کو تختی کے وسطانی مرکز، جو $\bar{h}$ گہرائی پر ہے، منتقل کرنے سے حاصل ہو گی۔ عموماً اشکال کا وسطانی مرکز جدول سے دیکھا جا سکتا ہے اور یوں مساوات ۶ قوت سیال معلوم کرنے کا ایک آسان ذریعہ بنتا ہے۔ ظاہر ہے کہ وسطانی مرکز حاصل کرتے ہوئے کسی نے مساوات ۵ کے تکمل کی طرح کا تکمل حل کرتے ہوئے وسطانی مرکز حاصل کیا ہو گا۔ چونکہ اس وقت آپ سیکھ رہے ہیں، لہٰذا فی الحال قوت سیال دریافت کرنے کے لیے مسئلے کا خاکہ بنائیں اور مساوات ۵ استعمال کریں۔

سوالات

سوال ۶.۳۰۶: حوض کی اندرونی سطح پر مثال ۶.۳۷ میں کل قوت سیال کتنی ہو گی؟

سوال ۶.۳۰۷: اگر مثال ۶.۳۷ میں حوض نصف بھرا ہو، تب نچلی ایک میٹر پٹی پر قوت سیال کتنی ہو گی؟

سوال ۶.۳۰۸: مثلث تختی کی ایک طرف پر مثال ۶.۳۸ میں قوت سیال دریافت کی گئی۔ اس تختی پر شکل ۶.۱۲۹ کے محدد استعمال کرتے ہوئے قوت سیال دوبارہ معلوم کریں۔

سوال ۶.۳۰۹: مثلث تختی کی ایک طرف پر مثال ۶.۳۸ میں قوت سیال دریافت کیا گیا۔ اس تختی پر شکل ۶.۱۳۰ کے محدد استعمال کرتے ہوئے قوت سیال دوبارہ معلوم کریں۔

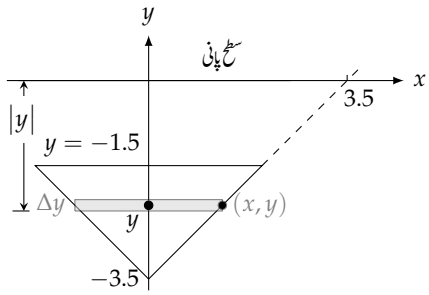
سوال ۶.۳۱۰: اگر مثال ۶.۳۸ میں تختی کو مزید دو میٹر نیچے منتقل کیا جائے، تب اس کی ایک طرف پر قوت سیال کتنی ہو گی؟

سوال ۶.۳۱۱: اگر مثال ۶.۳۸ میں تختی کو اتنا اوپر منتقل کیا جائے کہ اس کا تلا سطح پانی پر ہو، تب اس کی ایک طرف پر قوت سیال کتنی ہو گی؟

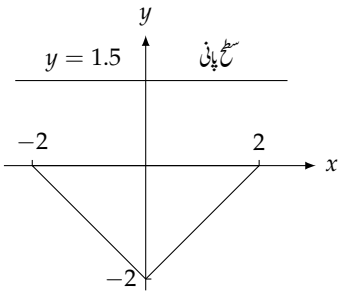
سوال ۶.۳۱۲: مساوی الساقین مثلث تختی کو شکل ۶.۱۳۱ میں دکھایا گیا ہے، جس کا قاعدہ سطح پانی سے 1 m نیچے ہے۔

ا. تختی کی ایک طرف پر قوت سیال تلاش کریں۔

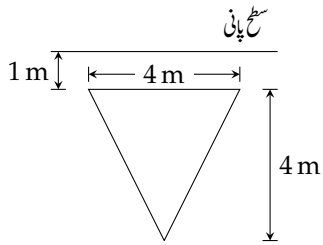
ب. اگر صاف پانی کے بجائے سمندری پانی ہو، تب قوت سیال کتنی ہو گی؟ سمندری پانی کی کثافت $1029\ \text{kg m}^{-3}$ ہے۔



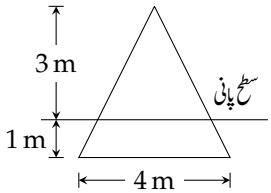
شکل ۶.۱۲۹: مثلث تختی (سوال ۶.۳۰۸)



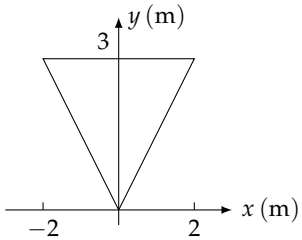
شکل ۶.۱۳۰: مثلث تختی (سوال ۶.۳۰۹)



شکل ۶.۱۳۱: مثلث الساقین (سوال ۶.۳۱۲)



شکل ۶.۱۳۲: مثلث الساقین (سوال ۶.۳۱۳)



شکل ۶.۱۳۳: مثلث الساقین (سوال ۶.۳۱۴)

سوال ۶.۳۱۳: اگر گزشتہ سوال میں تختی کو قاعدے کے گرد آدھا چکر گھمایا جائے، تب اس کا کچھ حصہ پانی سے باہر ہو گا (شکل ۶.۱۳۲)۔ اب تختی کی ایک طرف پر قوت سیال کتنی ہو گی؟

سوال ۶.۳۱۴: ایک حوض کی آمنے سامنے انتصابی دیواریں مساوی الساقین مثلث کی شکل کی ہیں (شکل ۶.۱۳۳)۔

ا. پانی سے بھرے ہوئے حوض کی ایک انتصابی دیوار پر قوت سیال تلاش کریں۔

ب. حوض کی انتصابی دیوار پر قوت کو آدھا کرنے کے لیے پانی کی سطح کو کتنا کم کرنا ہو گا؟

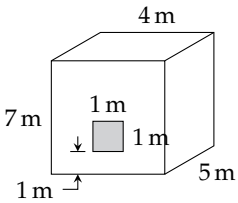
ج. کیا حوض کی لمبائی کا حوض کی انتصابی دیوار پر قوت سیال کا اثر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۶.۳۱۵: پانی کے حوض کی آمنے سامنے انتصابی دیواریں چوکور ہیں، جہاں چوکور کا ضلع 2 m ہے۔

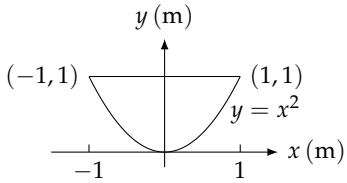
ا. پانی سے بھرے ہوئے حوض کی ایک انتصابی دیوار پر قوت سیال تلاش کریں۔

ب. حوض کی انتصابی دیوار پر قوت کو آدھا کرنے کے لیے پانی کی سطح کو کتنا کم کرنا ہو گا؟

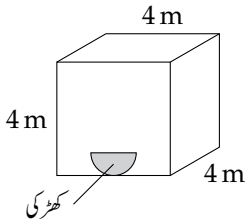
ج. کیا حوض کی لمبائی کا حوض کی انتصابی دیوار پر قوت سیال کا اثر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔



شکل ۶.۱۳۵: حوض میں چوکور کھڑکی (سوال ۶.۳۲۳)۔



(ب) قطع مکافی کھڑکی کی تفصیل۔



(ا) حوض میں کھڑکی۔

شکل ۶.۱۳۴: حوض میں قطع مکافی کھڑکی (سوال ۶.۳۲۲)

سوال ۶.۳۱۶: مچھلیاں دیکھنے کے لیے ایک مچھلی گھر کی دیوار میں 2 m چوڑا اور 1 m اونچا شیشہ نصب ہے۔ شیشے کا تل سطح پانی سے 1.25 m نیچے ہے۔ شیشے پر قوت پانی کتنی ہو گی۔ (سمندری پانی کی کثافت $1029\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔)

سوال ۶.۳۱۷: مچھلیوں کے حوض کا تل $1.5 \times 0.5\ \mathrm{m}$ اور اس کی گہرائی 0.75 m ہے۔ پانی کی سطح بالائی کنارے سے 5 cm نیچے ہے۔

ا. حوض کے اطراف پر قوت سیال دریافت کریں۔

ب. حوض کے تل پر قوت سیال دریافت کریں۔

سوال ۶.۳۱۸: دودھ کے ڈبے کا تل $10\ \mathrm{cm} \times 10$ اور اس کا قد 20 cm ہے۔ دودھ سے بھرے ہوئے ڈبے کی ایک طرف پر قوت سیال معلوم کریں۔ کثافت دودھ کو $1032\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ لیں۔

سوال ۶.۳۱۹: زیتون کے تیل کے ڈبے کا تل $14 \times 12\ \mathrm{cm}$ اور قد 26.5 cm ہے۔ بھرے ہوئے ڈبے کے تل اور ایک طرف پر قوت سیال تلاش کریں۔ زیتون کے تیل کی کثافت $930\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ لیں۔

سوال ۶.۳۲۰: ایک دائری تختی کا آدھا حصہ پانی میں انتصابی ڈوبا ہوا ہے۔ تختی کا رداس 0.25 m ہے۔ تختی کی ایک طرف پر قوت سیال تلاش کریں۔

سوال ۶.۳۲۱: دودھ کی فراہمی کے لیے ٹرک پر نصب 2 m قطر کا قائمہ بیلنی حوض افقی رکھ کر استعمال کیا جاتا ہے۔ آدھے بھرے حوض کے ایک دائری سرے پر قوت سیال تلاش کریں۔

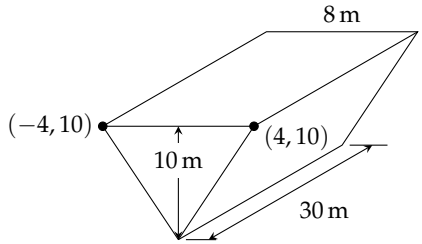
سوال ۶.۳۲۲: ایک مکعب حوض کی دیوار میں قطع مکافی کھڑکی دی گئی ہے، جو 150 000 N کی قوت برداشت کر سکتی ہے (شکل ۶.۱۳۴)۔ حوض میں $25\,000\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ کثافت کا سیال بھرا جائے گا۔

ا. جب حوض میں سیال کی گہرائی 1.25 m ہو، تب کھڑکی پر قوت سیال کتنی ہو گی؟

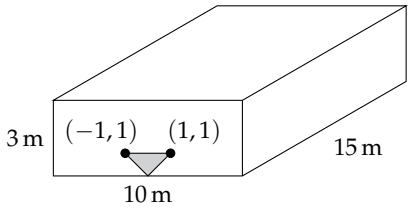
ب. حوض میں سیال کی کتنی گہرائی تک کھڑکی محفوظ ہو گی؟

سوال ۶.۳۲۳: پانی کے مکعب حوض کی دیوار میں $1\ \mathrm{m} \times 1$ چوکور کھڑکی دی گئی ہے، جو 40 000 N کی قوت برداشت کر سکتی ہے (شکل ۶.۱۳۵)۔

ا. اگر حوض میں پانی کی گہرائی 3 m ہو، تب کھڑکی پر قوت سیال کتنی ہو گی؟



شکل ۶.۱۳۶: حوض کے آخری سرے تکونی ہیں (سوال ۶.۳۲۴)۔



شکل ۶.۱۳۷: پانی کا مستطیل تالاب (سوال ۶.۳۲۵)

ب. حوض میں سیال کی کتنی گہرائی تک کھڑ کی محفوظ ہو گی؟

سوال ۶.۳۲۴: پانی کا حوض شکل ۶.۱۳۶ میں دکھایا گیا ہے۔ حوض کے آخری تکونی سرے $1\,200\,000\ \mathrm{N}$ قوت برداشت کر سکتے ہیں۔ حوض میں پانی کا وہ حجم تلاش کریں جس پر حوض کے تکونی سرے اپنی برداشت کی حد پر ہوں گے۔

سوال ۶.۳۲۵: ایک مستطیل تالاب شکل ۶.۱۳۷ میں دکھایا گیا ہے، جس کی ایک طرف میں تکونی کھڑ کی دی گئی ہے، جو $62\,000\ \mathrm{N}$ کی قوت برداشت کر سکتی ہے۔ خالی تالاب میں $10\ \mathrm{m^3\ h^{-1}}$ کی شرح سے پانی بھرا جا رہا ہے۔ تکونی کھڑ کی کتنی دیر میں اپنی برداشت کی حد پر ہو گی؟

سوال ۶.۳۲۶: ایک انتصابی تختی، جس کا قد a اور چوڑائی b ہے، کو کثافت ρ کے سیال میں ڈبویا جاتا ہے۔ تختی کا بالائی کنارہ سطح سیال پر ہے۔ تختی کے لمبے کنارے پر اوسط فشار سیال کتنا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۶.۳۲۷: دکھائیں کہ سوال ۶.۳۲۶ میں تختی کی ایک طرف پر قوت کی مقدار سوال ۶.۳۲۶ میں حاصل اوسط فشار اور تختی کے رقبے کا حاصل ضرب ہو گی۔

۶.۱۰ بنیادی نقش اور نمونہ سازی کے اطلاقات

اس باب میں ریمان مجموعے کے استعمال سے ہم نے مقداروں کا حساب کرنا سیکھا۔ یہ عمل درج ذیل تین اقدامات پر مشتمل ہے۔

ا. مطلوبہ مقدار کو ایک یا ایک سے زائد تفاعل سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو بند وقفہ $[a, b]$ پر استمراری ہوں۔

ب. وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کر کے ہر ذیلی وقفے میں ایک نقطہ c_k منتخب کیا جاتا ہے۔ k ویں ذیلی وقفے کی لمبائی Δx_k ہو گی۔

مطلوبہ مقدار کی تخمینی قیمت کو مجموعے کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔

اس مجموعے کو وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تفاعل کا ریمان مجموعہ کہا جاتا ہے۔

ج. خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے ریمان مجموعہ بہتر سے بہتر نتیجہ دے گا۔

ریمان مجموعے کی حد قطعی تکمل ہو گی۔

قطعی تکمل استعمال کرتے ہوئے مطلوبہ مقدار کا حساب لگایا جاتا ہے۔

درج بالا اقدام سے لکیر کی لمبائی، خطے کا رقبہ، اجسام کا حجم، کام، وغیرہ کا حساب ممکن ہے۔

حقیقت میں انجینئری، حیاتیات، علم کیمیا، اقتصادیات، ارضیات، طب، اور دیگر شعبوں میں ہزاروں کی تعداد میں مسائل کو ان اقدامات سے حل کیا جا سکتا ہے۔

اس حصے میں ان اقدامات پر دوبارہ غور کیا جائے گا اور کئی نئے تکمل متعارف کیے جائیں گے، جو ان اقدامات سے پیدا ہوتے ہیں۔

فاصلہ بالمقابل ہٹاؤ

اگر کسی محددی لکیر پر ایک جسم کا مقام تفاعل $s(t)$ دیتا ہو اور یہ جسم ایک ہی سمت میں حرکت کرتا ہو، تب $t = a$ سے $t = b$ تک جسم کے سمتی رفتار تفاعل $v(t)$ کا تکمل اس دورانیے میں طے شدہ فاصلہ دے گا۔ اگر جسم اس دورانیے میں سمت تبدیل کرتا ہو، تب طے شدہ فاصلہ حاصل کرنے کے لیے ہمیں جسم کی رفتار $|v(t)|$ کا تکمل لینا ہو گا۔ جسم کی سمتی رفتار کا تکمل جسم کا **ہٹاؤ**[29] $s(b) - s(a)$ دے گا، جو اس کے ابتدائی اور اختتامی مقامات کے بیچ فاصلہ ہے۔

یہ دیکھنے کے لیے ہم وقتی وقفہ $a \leq t \leq b$ کی خانہ بندی کرتے ہیں، جہاں k ویں ذیلی وقفے کی لمبائی Δt_k ہے۔ اگر Δt_k بہت کم ہو، تب دورانیہ t_{k-1} تا t_k میں جسم کی سمتی رفتار $v(t)$ میں تبدیلی قابل نظر انداز ہو گی، لہٰذا اس ذیلی وقفے کے دائیں سرے پر جسم کی سمتی رفتار $v(t_k)$ کو ذیلی وقفہ پر جسم کی سمتی رفتار تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں k ویں ذیلی وقفے کے دوران جسم کے مقام میں تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$v(t_k)\Delta t_k$$

اگر $v(t_k)$ مثبت ہو، تب یہ تبدیلی مثبت ہو گی، اور اگر $v(t_k)$ منفی ہو تب، یہ تبدیلی منفی ہو گی۔ دونوں صورتوں میں k ویں ذیلی وقفے میں جسم

$$|v(t_k)|\,\Delta t_k$$

فاصلہ طے کرے گا۔ یوں پورے وقفے میں جسم کل درج ذیل فاصلہ طے کرے گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} |v(t_k)|\,\Delta t_k \tag{۱}$$

مساوات ۱ میں مجموعہ، وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل رفتار $|v(t)|$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے یہ تخمینی مجموعہ بہتر سے بہتر نتیجہ دے گا۔ یوں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ وقفہ $[a, b]$ میں جسم کا طے شدہ فاصلہ حاصل کرنے کے لیے درج ذیل تکمل استعمال کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{طے شدہ فاصلہ} = \int_a^b |v(t)|\,\mathrm{d}t \tag{۲}$$

یہ ریاضیاتی نمونہ ہر موقع پر بالکل درست فاصلہ دیتا ہے۔

اگر ہم جاننا چاہتے ہیں کہ وقتی دورانیے کے اختتام پر ابتدائی مقام سے جسم کتنا دور ہو گا، تب ہم $v(t)$ کا تکمل، نہ کہ $|v(t)|$ کا تکمل لیں گے۔

---

[29] displacement

آئیں دیکھیں ایسا کیوں ہو گا۔ فرض کریں کہ تفاعل $s(t)$ جسم کا مقام دیتا ہے اور F تفاعل v کا ضد تفرق ہے۔ تب

$$s(t) = F(t) + C$$

ہو گا، جہاں C مستقل ہے۔ یوں لمحہ $t = a$ سے $t = b$ تک جسم کا ہٹاؤ

$$s(b) - s(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$$

ہو گا یعنی:

$$\text{ہٹاؤ} = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t \qquad (۳)$$

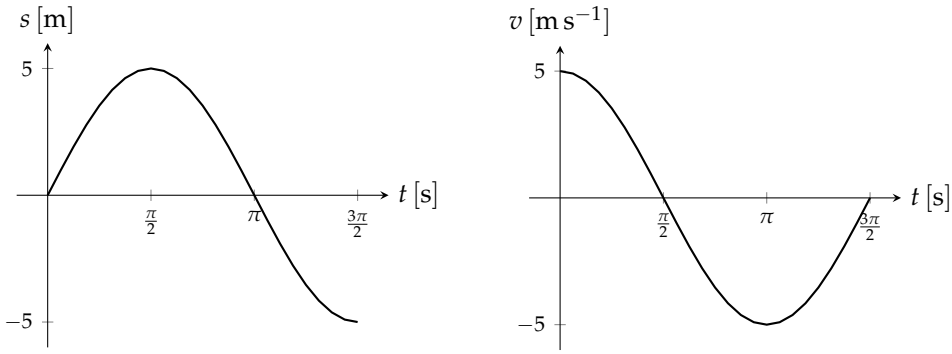
مثال ۶.۴۱: ایک لکیر پر لمحہ $t = 0$ سے لمحہ $t = \frac{3\pi}{2}\,\mathrm{s}$ تک ایک جسم کی سمتی رفتار $v(t) = 5\cos t\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ یہ جسم کل کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟ اس کا کل ہٹاؤ کتنا ہو گا؟

حل

$$\begin{aligned}
\text{طے شدہ فاصلہ} &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |5\cos t|\,\mathrm{d}t \qquad \text{رفتار کا تکمل فاصلہ ہو گا}\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\cos t\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-5\cos t)\,\mathrm{d}t\\
&= 5\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 5\sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\\
&= 5(1-0) - 5(-1-1) = 5 + 10 = 15\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ہٹاؤ} &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 5\cos t\,\mathrm{d}t \qquad \text{سمتی رفتار کا تکمل ہٹاؤ ہو گا}\\
&= 5\sin t\Big]_0^{\frac{3\pi}{2}} = 5(-1) - 5(0) = -5\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

اس دورانیے میں جسم $5\,\mathrm{m}$ آگے اور $10\,\mathrm{m}$ پیچھے سفر کرتا ہے۔ یوں یہ $15\,\mathrm{m}$ فاصلہ طے کرتا ہے، جبکہ اس کا ہٹاؤ $-5\,\mathrm{m}$ ہو گا (شکل ۶.۱۳۸)۔ □



(ب) ابتدائی نقطہ $s(0)$ سے جسم کا ہٹاؤ۔ (ا) سمتی رفتار تفاعل۔

شکل ۶.۱۳۸: سمتی رفتار تفاعل اور ہٹاؤ (مثال ۶.۴۱)

قاعدہ دو لس

آپ جانتے ہیں کہ چھلنے کے بعد سیب کا ذائقہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ سیب میں شکر وقت کے ساتھ نشاستے میں تبدیل ہوتی ہے۔ سیب میں نشاستے کی مقدار معلوم کرنے کے لیے ہم سیب کے ایک باریک کتلے کو خوردبین میں دیکھتے ہیں۔ نشاستہ کے ہر دانے کی سطح عمودی تراش میں خوردبین سے صاف نظر آتی ہے، لہٰذا کتلے کی سطح میں نشاستے کے رقبے اور عمودی تراش کے رقبے کا تناسب معلوم کیا جا سکتا ہے۔ یہ دو بُعدی تناسب سیب میں نشاستہ کے تین بُعدی تناسب کے برابر ہو گا۔ دو بُعدی اور تین بُعدی تناسب کی یکسانیت اوسط کی قیمت کے تصور پر مبنی ہے۔

فرض کریں ہم کسی ٹھوس جسم میں دانہ دار مادّہ کی تناسب جاننا چاہتے ہیں۔ ہم ٹھوس جسم سے موزوں نمونہ حاصل کرتے ہیں جس کو کاٹ کر ایک مکعب حاصل کیا جاتا ہے۔ اس مکعب کا ضلع L ہے۔ اس مکعب کو شکل ۶.۱۳۹ میں دکھایا گیا ہے جہاں مکعب کا ضلع محور x پر ہے۔ ہم وقفہ $[0, L]$ کے عمودی سطحوں سے اس مکعب کو کتلوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ فرض کریں x پر دانہ دار مادے کے رقبے کا تناسب $r(x)$ ہے۔ فرض کریں کہ $r(x)$ متغیر x کا استمراری تفاعل ہے۔

اب وقفہ $[0, L]$ کی خانہ بندی کریں۔ نقاط خانہ بندی پر محور x کے عمودی سطحوں سے مکعب کو کتلوں میں تقسیم کریں۔ k ویں ذیلی وقفے کی لمبائی Δx_k ہو گی، جو نقطہ x_{k-1} اور نقطہ x_k پر موجود سطحوں کے بیچ فاصلہ ہے۔ اگر یہ سطحیں کافی قریب قریب ہوں، تب یہ دانوں کو بیلنی شکل میں کاٹیں گی۔ ان بیلنوں کا قاعدہ x_k پر ہو گا۔ ان سطحوں کے بیچ دانہ دار مادّہ کا حجمی تناسب وہی ہو گا جو x_k پر سطح میں دانہ دار مادّہ کا سطحی تناسب ہے، جو ان بیلنوں کے قاعدے کے برابر ہے، جو از خود تقریباً $r(x)$ ہو گا۔ یوں دو قریبی سطحوں کے بیچ دانہ دار مادّہ کی مقدار درج ذیل ہو گی۔

$$(\text{تناسب}) \times (\text{کتلے کا حجم}) = r(x)L^2\Delta x_k$$

پورے مکعب میں دانہ دار مادّے کی مقدار

$$\sum_{k=1}^{n} r(x)L^2\Delta x_k$$

ہو گی، جو وقفہ $[0, L]$ پر تفاعل $r(x)L^2$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے یہ مجموعہ بہتر سے بہتر نتیجہ دے گا، لہٰذا درج ذیل تکمل، جو ریمان مجموعہ کی حد کو ظاہر کرتا ہے، مکعب میں دانہ دار مادّہ کی مقدار دے گا۔

$$\int_0^L r(x)L^2\,\mathrm{d}x$$

اس مقدار کو مکعب کے حجم L^3 سے تقسیم کرنے سے مکعب میں دانہ دار مادّہ کا تناسب حاصل ہو گا۔ اگر ہم نے موزوں نمونی مکعب منتخب کیا ہو تب پورے ٹھوس جس میں دانہ دار مادّہ کا تناسب وہی ہو گا جو اس نمونی مکعب میں ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\text{ٹھوس جسم میں دانہ دار مادّے کا تناسب} &= \text{مکعب میں دانہ دار مادّے کا تناسب}\\
&= \frac{\int_0^L r(x)L^2\,\mathrm{d}x}{L^3}\\
&= \frac{1}{L}\int_0^L r(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \text{قیمت } r \text{ پر } [0, L] \text{ کی اوسط قیمت}\\
&= \text{نمائندہ سطح عمودی تراش میں دانہ دار مادے کا سطحی تناسب}
\end{aligned}$$

یہ **قاعدہ دولس**[۳۰] ہے، جسے فرانسیسی ماہر ارضیات اشیلہ ارنسٹ دولس $[1817 - 1881]$ نے دریافت کیا۔ یوں وقفہ $[0, L]$ پر $r(x)$ کی اوسط قیمت $\bar{r}$ سے ٹھوس جسم میں دانہ دار مادے کا تناسب حاصل ہو گا۔ حقیقت میں کئی رقبہ عمودی تراش پر $\bar{r}$ حاصل کر کے ان کی اوسط لی جاتی ہے۔

جناب دولس پتھر میں دانہ دار مادّے کے تناسب میں دلچسپی رکھتے تھے۔ وہ نمونی پتھر کی ایک سطح کو اچھی طرح چمکدار بنا کر سطح کے برابر مومی کاغذ کو چمکیلی سطح پر رکھ کر دانہ دار خطوں کی نشاندہی کرتے۔ کاغذ کا وزن کرنے کے بعد، دانہ دار خطوں کو کاغذ سے کاٹ کر کاغذ کا وزن دوبارہ کرتے۔ یوں دانہ دار خطوں کے رقبے کا تناسب حاصل کیا جاتا۔ یہ ترکیب آج بھی پٹرول کے تیل کی تلاش میں استعمال کی جاتی ہے۔

ناکارہ تکمل، ناکارہ نمونہ کشی

بعض اوقات ریمان مجموعے سے حاصل تکمل ہمارے کام آتا ہے اور بعض اوقات کسی کام کا نہیں ہوتا۔ اس کا دارومدار مسئلے کی نمونہ کشی پر ہوتا ہے۔ بعض طریقہ کار موزوں اور بعض غیر موزوں ہوتے ہیں۔ آئیں ایک غیر موزوں ریمان مجموعے کی مثال دیکھیں۔

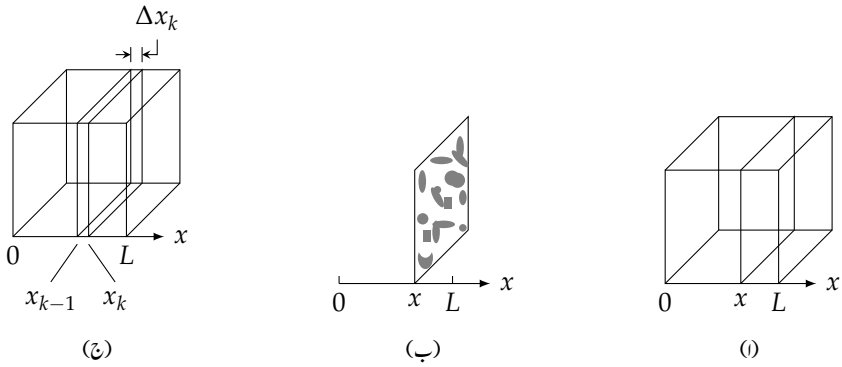
ہم شکل ۶.۱۴۰ میں سطحی رقبہ تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ مخروطی ٹکیاں لینے سے شکل ۶.۱۴۰-ا حاصل ہوتا ہے جس سے سطحی رقبے کا کلیہ

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \tag{۴}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ کلیہ ہر مرتبہ بالکل درست نتیجہ دیتا ہے، جو دیگر ذرائع سے حاصل معلومات کے عین مطابق ہوتا ہے۔

---

[۳۰] Delesse'srule



شکل ۶.۱۳۹: قاعدہ دولس کے مراحل۔

(ا) سطحی رقبہ مخروطی پٹیوں سے حاصل ہوتا ہے۔ (ب) سطحی رقبہ بیلنی پٹیوں سے حاصل نہیں ہوتا۔

شکل ۶.۱۴۰: مخروط پٹی لینے سے کارآمد تکمل جبکہ بیلنی پٹی سے غیر کارآمد تکمل حاصل ہو گا۔

۹۹۰۳ آئیں شکل ۶.۱۴۰-ب کی طرح بیلنی پٹیاں لے کر ریمان مجموعہ حاصل کر کے دیکھیں۔ یہ ریمان مجموعہ بھی مرتکز ہے جو درج ذیل نسبتاً آسان تکمل دیتا ہے۔

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\,\mathrm{d}x \tag{۵}$$

۹۹۰۴ ہم کہہ سکتے ہیں کہ حجم کی تلاش میں ہم نے بیلنی پٹیاں استعمال کیں، لہٰذا یہاں بھی ان کا استعمال درست ہو گا۔ حقیقت میں مساوات ۵ کوئی پیش گوئی نہیں کرتی
۹۹۰۵ اور نہ ہی اس سے کبھی درست نتائج حاصل ہوتے ہیں، جو دیگر تراکیب سے حاصل جوابات کے ساتھ مشابہت رکھتے ہوں۔ نمونہ کشی کے دوران موازنے کے
۹۹۰۶ قدم پر یہ کلیہ ناکام ثابت ہوتا ہے۔

۹۹۰۷ یاد رہے، اگر آپ ایک بہت اچھا نظر آنے والا تکمل حاصل کرنے میں کامیاب ہوں، تو اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں کہ حاصل تکمل درست نتائج بھی دے گا۔ آپ
۹۹۰۸ کو تکمل کے نتائج کو پرکھنا بھی ہو گا۔

مسئلہ پاپس

سطح طواف کے رقبے اور جسم طواف کے حجم کا وسطانی مراکز کے ساتھ تعلق **مسئلہ پاپس**[۳۱] پیش کرتا ہے[۳۲]۔

مسئلہ ۶.۱: **مسئلہ پاپس برائے حجم** اگر مستوی خطے کو سطح مستوی میں موجود لکیر کے گرد گھمایا جائے، جہاں خطے کو لکیر قطع نہ کرتی ہو، تب جسم طواف کا حجم خطے کے رقبے اور ایک چکر کے دوران وسطانی نقطے کے طے کردہ فاصلے کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا۔ اگر خطے کا رقبہ S اور وسطانی نقطے کا محور سے فاصلہ ρ ہو، تب جسم طواف کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = 2\pi\rho S \tag{۶}$$

ثبوت: ہم محور طواف کو محور x اور خطہ R کو ربع اول میں لیتے ہیں۔ ہم y پر، محور y کے عمودی، خطے کی عمودی تراش کی لمبائی کو $L(y)$ سے ظاہر کرتے ہیں (شکل ۶.۱۴۱)۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ $L(y)$ استراری ہے۔ اس خطے کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔

ہم نلکی خول کی ترکیب سے اس جسم طواف کا حجم تلاش کرتے ہیں۔

$$H = \int_c^d 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}y = 2\pi\int_c^d yL(y)\,\mathrm{d}y \tag{۷}$$

خطہ R کے وسطانی مرکز کا y محدد $\bar{y}$ درج ذیل ہو گا

$$\bar{y} = \frac{1}{S}\int_c^d yL(y)\,\mathrm{d}y$$

جس کو مساوات ۷ کے آخری تکمل میں پُر کرنے سے $H = 2\pi\bar{y}S$ ملتا ہے۔ اس میں رداس $\bar{y}$ کو ρ سے ظاہر کرتے ہوئے $H = 2\pi\rho S$ حاصل ہوتا ہے۔

□

مثال ۶.۴۲: رداس a کے دائری قرص کو محور کے گرد گھما کر اندرسہ[۳۳] پیدا کیا جاتا ہے (شکل ۶.۱۴۲)۔ قرص کے مرکز اور محور کے بیچ فاصلہ $b \geq a$ ہے۔ اس اندرسے کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = 2\pi(b)(\pi a^2) = 2\pi^2 ba^2$$

□

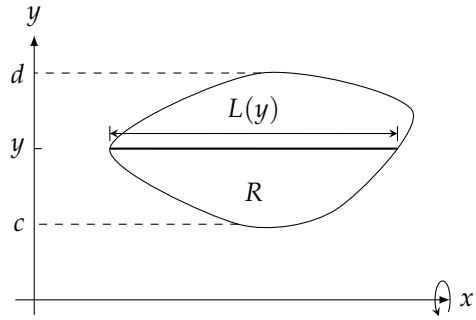
مثال ۶.۴۳: نصف کرہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

---

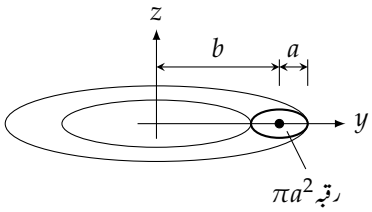
[۳۱] Pappus'stheorem

[۳۲] اسکندریا کا رہائشی قدیم یونانی ریاضی دان۔ مسائل پاپس تقریباً 1700 سال قدیم ہیں۔

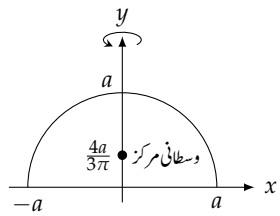
[۳۳] torus



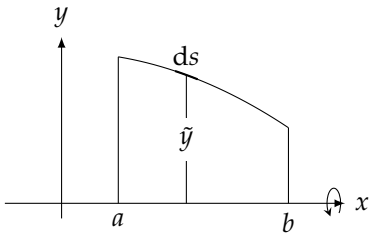
شکل ۶.۱۴۱: خطہ R کو ایک بار محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔



شکل ۶.۱۴۲: اندرسہ (مثال ۶.۴۲)



شکل ۶.۱۴۳: نصف کرہ کا وسطانی مرکز (مثال ۶.۴۳)



شکل ۶.۱۴۴: مسئلہ پاپس برائے سطحی رقبہ (مسئلہ ۶.۲)

۹۹۲۵ **حل**

۹۹۲۶ ربع اول میں محور x اور نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کے بیچ خطے کو محور y کے گرد گھمانے سے نصف کرہ حاصل ہوتا ہے (شکل ۶.۱۴۳)۔ تشاکل
۹۹۲۷ کی وجہ سے وسطانی مرکز کا $\bar{x} = 0$ ہو گا۔ مساوات ۶ میں ρ کی جگہ $\bar{y}$ لکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{H}{2\pi S} = \frac{\frac{2}{3}\pi a^3}{2\pi(\frac{1}{4}\pi a^2)} = \frac{4a}{3\pi}$$

۹۹۲۸ □

۹۹۲۹ مسئلہ ۶.۲: **مسئلہ پاپس برائے سطحی رقبہ**

۹۹۳۰ اگر ایک ہموار مستوی منحنی کی قوس کو ایسی لکیر کے گرد ایک بار گھمایا جائے، جو اس قوس کو قطع نہ کرتی ہو، تب قوس کی لمبائی اور ایک چکر کے دوران قوس کے
۹۹۳۱ وسطانی مرکز کے طے شدہ فاصلے کے حاصل ضرب کو طواف قوس سے پیدا ہونے والے سطحے کا رقبہ کہیں گے۔ اگر محور طواف سے وسطانی مرکز کا فاصلہ ρ اور
۹۹۳۲ قوس کی لمبائی L ہو تب درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$S = 2\pi\rho L \tag{۸}$$

اس مسئلے کے ثبوت میں ہم فرض کرتے ہیں کہ محور طواف کو محور x سے ظاہر کیا جاسکتا ہے اور قوس کو متغیر x کا استمراری تفاعل تصور کیا جاسکتا ہے۔

ثبوت: ہم محور x کو محور طواف لیتے ہیں اور ربع اول میں $x = a$ تا $x = b$ تک قوس واقع ہے۔ اس قوس کے طواف سے درج ذیل رقبہ حاصل ہو گا۔

$$S = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi y \, \mathrm{ds} = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y \, \mathrm{ds} \tag{۹}$$

قوس کے وسطانی مرکز کا y محدد

$$\bar{y} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} \tilde{y} \, \mathrm{ds}}{\int_{x=a}^{x=b} \mathrm{ds}} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} y \, \mathrm{ds}}{L}$$

ہو گا، جس کو مساوات ۹ کے آخری تکمل میں پُر کرنے سے $S = 2\pi\bar{y}L$ ملتا ہے۔ رداس $\bar{y}$ کو ρ سے ظاہر کرتے ہوئے $S = 2\pi\rho L$ حاصل ہوتا ہے۔

□

مثال ۶.۴۴: اندر سے کا سطحی رقبہ (مثال ۶.۴۲ میں) درج ذیل ہو گا۔

$$S = 2\pi(b)(2\pi a) = 4\pi^2 ba$$

□

سوالات

فاصلہ اور ہٹاؤ

سوال ۶.۳۲۸ تا سوال ۶.۳۳۵ میں ایک جسم محددی لکیر پر سمتی رفتار $v(t)$ سے حرکت کرتا ہے۔ (ا) سمتی رفتار کو ترسیم کر کے دیکھیں کہ یہ کہاں مثبت اور کہاں منفی ہے۔ (ب) اس کے بعد دیے گئے دورانیے میں طے شدہ فاصلہ تلاش کریں۔ (ج) جسم کا ہٹاؤ بھی تلاش کریں۔

سوال ۶.۳۲۸: $v(t) = 5\cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۶.۳۲۹: $v(t) = \sin \pi t, \quad 0 \le t \le 2$

سوال ۶.۳۳۰: $v(t) = 6\sin 3t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

سوال ۶.۳۳۱: $v(t) = 4\cos 2t, \quad 0 \le t \le \pi$

سوال ۶.۳۳۲: $v(t) = 49 - 9.8t, \quad 0 \le t \le 10$

سوال ۶.۳۳۳: $v(t) = 8 - 1.6t, \quad 0 \leq t \leq 10$

سوال ۶.۳۳۴: $v(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t-1)(t-2), \quad 0 \leq t \leq 2$

سوال ۶.۳۳۵: $v(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t-1)(t-2), \quad 0 \leq t \leq 3$

سوال ۶.۳۳۶: تفاعل $s = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 8t$ محور s پر ایک جسم کا مقام دیتا ہے، جہاں $t \geq 0$ ہے۔ (t کی اکائی سیکنڈ s اور s کی اکائی میٹر m ہے۔)

ا. دکھائیں کہ $t = 0$ پر جسم دائیں رخ حرکت کرتا ہے۔

ب. کب جسم بائیں رخ حرکت کرتا ہے۔

ج. لمحہ $t = 3$ پر جسم کا مقام معلوم کریں۔

د. لمحہ $t = 3$ تک جسم نے کل کتنا فاصلہ طے کیا ہو گا؟

ھ. تفاعل s بالمقابل t ترسیم کریں اور جسم کے مقام کی ترسیم کے ساتھ اس کے تعلق پر تبصرہ کریں۔

سوال ۶.۳۳۷: تفاعل $s = -t^3 + 6t^2 - 9t$ محور s پر ایک جسم کا مقام دیتا ہے، جہاں $t \geq 0$ ہے۔ (t کی اکائی سیکنڈ s اور s کی اکائی میٹر m ہے۔)

ا. دکھائیں کہ $t = 0$ پر جسم بائیں رخ حرکت کرتا ہے۔

ب. کب جسم دائیں رخ حرکت کرتا ہے۔

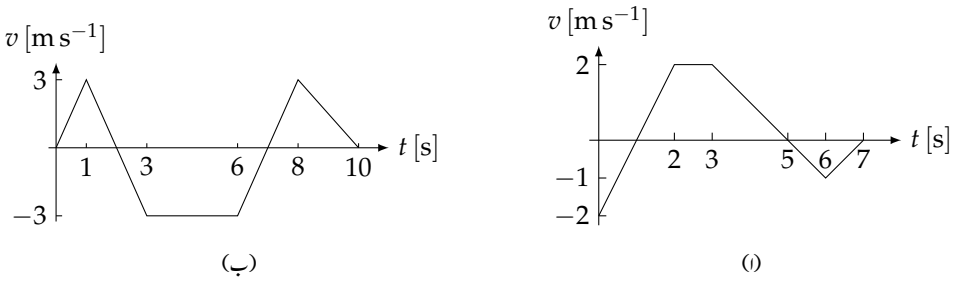
ج. کیا جسم کبھی مبدا کے دائیں جانب بھی ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

د. لمحہ $t = 3$ پر جسم کا مقام تلاش کریں۔

ھ. لمحہ $t = 3$ تک جسم نے کل کتنا فاصلہ طے کیا ہو گا؟

و. تفاعل s بالمقابل t ترسیم کریں اور جسم کے مقام کی ترسیم کے ساتھ اس کے تعلق پر تبصرہ کریں۔

سوال ۶.۳۳۸: دو اجسام محددی لکیر پر حرکت کرتے ہیں۔ ان اجسام کی سمتی رفتاروں کو شکل ۶.۱۴۵ میں دکھایا گیا ہے۔ دیے گئے وقفے کے لیے اجسام کتنا فاصلہ طے کرتے ہیں اور ان کا ہٹاؤ کتنا ہو گا؟



شکل ۶.۱۴۵: سمتی رفتار (سوال ۶.۳۳۸)

۹۹۷۷ سوال ۶.۳۳۹: ایک نمونی ریل گاڑی کی 10 سیکنڈوں کے دوران پٹڑی پر آگے پیچھے حرکت درج ذیل ہے۔ قاعدہ سمسن سے کل فاصلہ اور ہٹاؤ تلاش
۹۹۷۸ کریں۔

وقت	سمتی رفتار	وقت	سمتی رفتار
0	0	6	−11
1	12	7	−6
2	22	8	2
3	10	9	6
4	−5	10	0
5	−13		

۹۹۷۹ **سطحی رقبے کی نمونہ کشی**

۹۹۸۰ سوال ۶.۳۴۰: لکیر $y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ 0 \le x \le \sqrt{3}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے جس کا رقبہ

$$\text{سطح طواف} = \frac{1}{2}(\text{تلا کا محیط})(\text{ترچھا قد}) = \frac{1}{2}(2\pi)(2) = 2\pi$$

۹۹۸۱ ہونا چاہیے۔ مساوات ۵ میں $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}}$ پُر کرنے سے کیا حاصل ہوتا ہے؟
۹۹۸۲

۹۹۸۳ سوال ۶.۳۴۱: بیلن وہ واحد شکل ہے جس کے لیے مساوات ۵ درست نتائج دیتی ہے۔ لکیر $y = r,\ 0 \le x \le h$ کو محور x کر گرد گھما کر سطح
۹۹۸۴ طواف پیدا کریں۔ دکھائیں کہ مساوات ۵ سے اس سطح طواف کا رقبہ $S = 2\pi rh$ حاصل ہوتا ہے۔

۹۹۸۵ سوال ۶.۳۴۲: ہر وہ جسم جو مائع میں تیرتا ہو اپنی کمیت کے برابر مائع کی جگہ لیتا ہے (اصول آرشمیدسی)۔ یوں ہٹائے گئے مائع کی کمیت معلوم کر کے اس جسم
۹۹۸۶ کی کمیت معلوم کی جا سکتی ہے۔ ایک کشتی کی کمیت جاننے کی خاطر ہم خط آب[۳۴] کو 10 برابر حصوں میں تقسیم کر کے نقاط خانہ بندی پر کشتی کے ڈوبے ہوئے

[۳۴] waterline

حصے کا رقبہ عمودی تراش $S(x)$ معلوم کرتے ہیں۔اس کے بعد قاعدہ سمسن استعمال کر کے $S(x)$ کے تکمل کی تخمین تلاش کرتے ہیں۔ نقاط خانہ بندی پر ڈوبے ہوئے رقبے $S(x)$ درج ذیل ہیں، جہاں نقطوں کے بیچ فاصلہ $1\,\mathrm{m}$ ہے اور رقبے کی اکائی m^2 ہے۔

نقطہ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
رقبہ	0	1.07	3.84	7.82	12.20	15.18	16.14	14.00	9.21	3.24	0

ا. ہٹائے گئے پانی کا حجم تلاش کریں۔

ب. یہ کشتی کتنی کمیت کا پانی ہٹاتی ہے؟ سمندری پانی کی کثافت $1029\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔

مسئلہ پاپس

سوال ۶.۳۴۳: ایک چوکور خطے کے راس $(0,2)$ ، $(2,0)$ ، $(4,2)$ ،اور $(2,4)$ ہیں۔اس خطہ کو محور x کے گرد گھما کر ایک ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔اس جسم کا حجم اور سطحی رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۶.۳۴۴: لکیر $2x + y = 6$ اور محددی لکیروں کے بیچ تکونی خطے کو لکیر $x = 5$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم مسئلہ پاپس کی مدد سے معلوم کریں۔(جیسا آپ صفحہ ۶۰۷ پر سوال ۶.۲۵۶ میں دیکھ چکے ہیں، تکون کے تین وسطانیوں کا نقطہ تقاطع تکون کا وسطانی مرکز ہوگا اور یہ قاعدے کے وسطی نقطے سے مخالف راس کی جانب لکیر پر ایک تہائی فاصلے پر ہوگا۔)

سوال ۶.۳۴۵: دائرہ $(x-2)^2 + y^2 = 1$ کو محور y کے گرد گھما کر اندر سہ پیدا کیا جاتا ہے۔اس اندر سے کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۶.۳۴۶: مسئلہ پاپس سے قائمہ دائری مخروط کا سطحی رقبہ پہلو تلاش کریں۔

سوال ۶.۳۴۷: رداس a کے کرہ کا سطحی رقبہ $4\pi a^2$ ہوتا ہے۔اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے مسئلہ پاپس سے نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کا وسطانی مرکز معلوم کریں۔

سوال ۶.۳۴۸: آپ نے سوال ۶.۳۴۷ میں دریافت کیا کہ نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کا وسطانی مرکز $(0, \frac{2a}{\pi})$ ہے۔اس نصف دائرے کو لکیر $y = a$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔حاصل سطح طواف کا سطحی رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۶.۳۴۹: محور x اور $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ کے بیچ خطہ R کا رقبہ $\frac{1}{2}\pi ab$ ہے۔خطہ R کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم $\frac{4}{3}\pi ab^2$ ہے۔خطہ R کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔آپ دیکھیں گے کہ یہ a پر منحصر نہیں ہوگا۔

سوال ۶.۳۵۰: محور x اور نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کے بیچ خطے کا وسطانی مرکز $(0, \frac{4a}{3\pi})$ ہے (مثال ۶.۴۳)۔اس خطے کو لکیر $y = -a$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔اس جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۶.۳۵۱: لکیر $y = x - a$ کے گرد سوال ۶.۳۵۰ کا خطہ گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۶.۳۵۲: نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کا وسطانی مرکز $(0, \frac{2a}{\pi})$ ہے۔اس نصف دائرے کو لکیر $y = x - a$ کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔اس سطح طواف کا سطحی رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۶.۳۵۳: محور x کے لحاظ سے مثال ۶.۴۳ کے نصف دائری خطے کا معیار اثر تلاش کریں۔ اگر آپ پہلے سے جانتے ہوئے معلومات استعمال کریں، تب آپ کو تکمل لینے کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔

باب ۷

ماورائی تفاعل

وہ تفاعل $y = f(x)$ جو درج ذیل روپ کی مساوات کو مطمئن کرتا ہو **الجبرائی**[1] کہلاتا ہے۔

$$P_n y^n + \cdots + P_1 y + P_0 = 0$$

اس مساوات میں تمام P متغیر x کے کثیر رکنی ہیں، جہاں کثیر رکنیوں کے عددی سر ناطق ہیں۔ یوں $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ایک الجبرائی تفاعل ہے، کیونکہ یہ مساوات $(x+1)y^2 - 1 = 0$ کو مطمئن کرتا ہے، جہاں $P_2 = x+1$ ، $P_1 = 0$ اور $P_0 = -1$ ہیں۔ کثیر رکنیوں اور ناطق عددی سروں والے ناطق تفاعل الجبرائی ہوں گے۔ اسی طرح الجبرائی تفاعلات کے مجموعے، حاصل ضرب، حاصل تقسیم، ناطق طاقتیں اور ناطق جذر بھی الجبرائی ہوں گے۔

وہ تفاعل جو الجبرائی نہیں ہوں **ماورائی**[2] کہلاتے ہیں۔ چھ بنیادی تکونیاتی تفاعل $\sin$ ، $\cos$ ، $\tan$ ، $\csc$ ، $\sec$ ، $\cot$ اور ان کے معکوس تفاعل ماورائی ہیں۔ اسی طرح قوت نمائی تفاعل اور لوگارتھمی تفاعل بھی ماورائی تفاعل ہیں۔

وہ اعداد جو ناطق عددی سر والے کثیر رکنی مساوات کو مطمئن کرتے ہوں **الجبرائی** کہلاتے ہیں۔ چونکہ $x + 2 = 0$ مساوات -2 کو مطمئن کرتا ہے، لہٰذا -2 الجبرائی عدد ہے۔ اسی طرح $\sqrt{3}$ مساوات $x^2 - 3 = 0$ کو مطمئن کرتا ہے، لہٰذا $\sqrt{3}$ بھی الجبرائی عدد ہے۔ وہ اعداد جو الجبرائی نہ ہوں، **ماورائی** کہلاتے ہیں۔ یوں e اور π ماورائی اعداد ہیں۔

ریاضیات میں بہت سے تفاعل ایک دوسرے کے معکوس ہوتے ہیں۔ غالباً سب سے زیادہ جانی پہچانی معکوس تفاعل کی جوڑی $\ln x$ اور e^x ہے۔ موزوں وقفہ پر پابند تکونیاتی تفاعل کے اہم معکوس پائے جاتے ہیں۔ پابند وقفہ پر تفاعل کو پابند شدہ تفاعل کہتے ہیں۔ اسی طرح لوگارتھمی اور قوت نمائی تفاعل کی دیگر معکوس جوڑیاں پائی جاتی ہیں۔ ہذلولی تفاعل اور ان کے معکوس تفاعل کا استعمال آویزاں رسّی، حرکی توانائی کی منتقلی، اور ہوا میں گرتے ہوئے جسم پر قوت رگڑ کے مسائل میں کام آتا ہے۔ اس باب میں ان تمام تفاعلات پر غور کیا جائے گا۔ ان مسائل کا بھی ذکر کیا جائے گا جنہیں حل کرنے میں یہ تفاعل مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

---

[1] algebraic
[2] transcendental

۷.۱ معکوس تفاعلات اور ان کے تفارق

اس حصہ میں ہم معکوس تفاعل کی تعریف پیش کرتے ہیں اور ان کے کلیات، ترسیمات، اور معکوس جوڑیوں کے تفرق پر غور کرتے ہیں۔

یک بہ یک تفاعل

تفاعل سے مراد وہ قاعدہ ہے جو اپنی دائرہ کار کے ہر نقطہ کو اپنی سعت میں ایک قیمت مختص کرتا ہو۔ بعض تفاعل ایک ہی قیمت کو ایک سے زیادہ نقطوں کے لیے مختص کرتے ہیں۔ یوں -1 کا مربع اور 1 کا مربع 1 ہے؛ اسی طرح $\frac{\pi}{3}$ اور $\frac{2\pi}{3}$ کا سائن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہے۔ اس کے برعکس دیگر تفاعل کسی ایک قیمت کو کبھی بھی دو مرتبہ مختص نہیں کرتے ہیں۔ مختلف اعداد کے مربع جذر اور اسی طرح مختلف اعداد کے مکعب بھی ہر صورت ایک دوسرے سے مختلف ہوتے ہیں۔ ایسا تفاعل جس کے انفرادی نقطوں پر منفرد قیمت ہو کو **یک بہ یک تفاعل**[۳] کہتے ہیں۔

تعریف: دائرہ کار D پر تفاعل $f(x)$ تب **یک بہ یک** ہو گا جب $x_1 \neq x_2$ کی صورت میں $f(x_1) \neq f(x_2)$ ہو۔

□

مثال ۷.۱: چونکہ کسی بھی غیر منفی اعداد کے لیے $x_1 \neq x_2$ کی صورت میں $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$ ہے لہٰذا $f(x) = \sqrt{x}$ غیر منفی اعداد کے کسی بھی دائرہ کار پر یک بہ یک تفاعل ہے۔ □

مثال ۷.۲: چونکہ $\sin(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{5\pi}{6})$ ہے لہٰذا وقفہ $[0, \pi]$ پر $g(x) = \sin x$ یک بہ یک تفاعل نہیں۔ اس کے برعکس، ربع اول میں تمام زاویوں کے سائن مختلف ہیں لہٰذا وقفہ $[0, \frac{\pi}{2}]$ پر $g(x) = \sin x$ یک بہ یک تفاعل ہے۔ □

یک بہ یک تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم کسی بھی افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ قطع کرتی ہے۔ اگر کسی تفاعل کی ترسیم کسی افقی لکیر کو ایک سے زیادہ مرتبہ قطع کرتی ہو تب یہ تفاعل y کی اس قیمت کو ایک سے زیادہ مرتبہ اختیار کرتا ہے لہٰذا یہ یک بہ یک تفاعل نہیں ہو گا (شکل ۷.۱)۔

افقی لکیر کی پرکھ

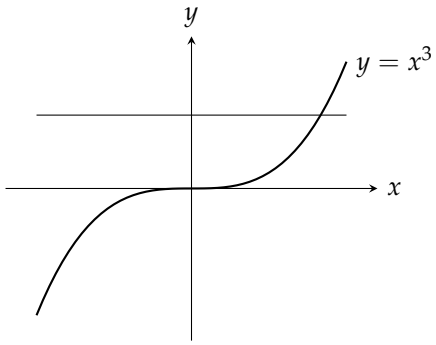
کوئی بھی تفاعل $y = f(x)$ صرف اور صرف اس صورت یک بہ یک تفاعل ہو گا جب اس کی ترسیم ہر افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ قطع کرتی ہو۔

معکوس

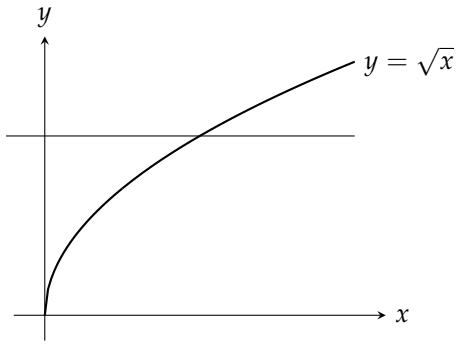
چونکہ یک بہ یک تفاعل کا ہر مخارج ایک انفرادی مداخل سے آتا ہے لہٰذا یک بہ یک تفاعل کو معکوس کرتے ہوئے ہر مخارج کو واپس اس مداخل پر بھیجا جا سکتا ہے جس سے یہ مخارج حاصل ہوتا ہے (شکل ۷.۲)۔ یک بہ یک تفاعل f کو معکوس کر کے جو تفاعل حاصل ہوتا ہے اس کو f کا **معکوس**[۴] کہتے ہیں، جس کو f^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے، جہاں f^{-1} میں -1 کو طاقت نہ سمجھا جائے: یعنی $f(x)^{-1}$ سے مراد $\frac{1}{f(x)}$ نہیں۔ ہم f^{-1} کو "f کا معکوس" پڑھتے ہیں۔

---

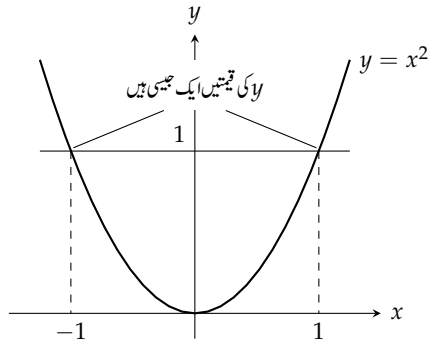
[۳] onetoonefunction
[۴] inverse



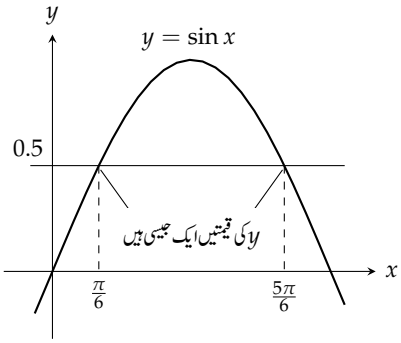
(ا) یک بہ یک تفاعل۔



(ب) یک بہ یک تفاعل۔

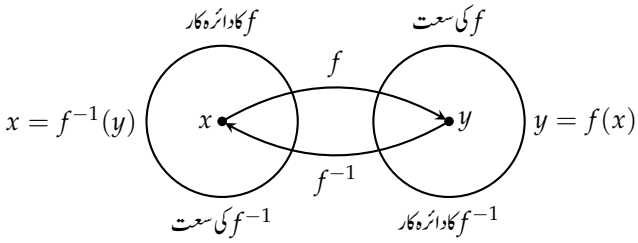


(ج) غیر یک بہ یک تفاعل۔



(د) غیر یک بہ یک تفاعل۔

شکل ۱.۷: یک بہ یک تفاعل کی ترسیم کسی بھی افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ قطع کرتی ہے جبکہ غیر یک بہ یک تفاعل کی ترسیم، ایک یا ایک سے زیادہ افقی لکیروں کو ایک سے زیادہ مرتبہ قطع کرتی ہے۔



شکل ۲.۷: تفاعل f کا معکوس ہر مخارج کو واپس اس انفرادی مداخل پر بھیجتا ہے جہاں سے وہ آیا ہو۔

جیسا شکل ۷.۲ سے ظاہر ہے، f سے f^{-1} یا f^{-1} سے f حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں کسی بھی x کے لیے $f(x)$ حاصل کر کے اس $f(x)$ کا معکوس $f^{-1}(f(x))$ حاصل کیا جا سکتا ہے جو x ہو گا۔ تفاعل $f^{-1}(f(x))$ یا تفاعل $f(f^{-1}(x))$ میں x پُر کرنے سے واپس x ملتا ہے۔ ایسا تفاعل جو ہر عدد کو اسی عدد کے لیے مختص کرتا ہو **شناختی تفاعل**[5] کہلاتا ہے۔ یوں تفاعل f اور g کو ایک دوسرے کا معکوس تفاعل ہونے کے لیے پرکھا جا سکتا ہے۔ اگر $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ ہو تب f اور g ایک دوسرے کے معکوس تفاعل ہوں گے ورنہ یہ ایک دوسرے کے معکوس تفاعل نہیں ہوں گے۔ اگر f اپنے دائرہ کار کا مکعب لیتا ہو تب g اس صورت f کا معکوس ہو گا جب g ہر قیمت کا مکعب جذر لیتا ہو، ورنہ یہ f کا معکوس نہیں ہو گا۔

تفاعل f اور g ایک دوسرے کے معکوس صرف اور صرف اس صورت ہوں گے جب

$$f(g(x)) = x \quad \text{اور} \quad g(f(x)) = x$$

ہوں۔ ایسی صورت میں $g = f^{-1}$ اور $f = g^{-1}$ ہوں گے۔

ایک تفاعل کا معکوس صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب یہ یک بہ یک تفاعل ہو۔ یوں بڑھتے تفاعل کا معکوس تفاعل ہو گا اور گھٹتے تفاعل کا بھی معکوس تفاعل ہو گا۔ جن تفاعل کا تفرق مثبت ہو وہ اپنے دائرہ کار میں بڑھتے ہیں لہٰذا ان کا معکوس ہو گا (صفحہ ۲۹۴ پر مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ ۴.۳)۔ اسی طرح جن تفاعل کا تفرق منفی ہو وہ اپنے دائرہ کار میں گھٹتے ہیں لہٰذا ان کا بھی معکوس ہو گا۔

معکوس کی تلاش

تفاعل کے معکوس کی ترسیم کا تفاعل کی ترسیم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ فرض کریں ایک تفاعل کی ترسیم شکل ۷.۳-الف کی طرح بڑھتی ہو، یعنی یہ بائیں سے دائیں اوپر اٹھتی ہو۔ کسی بھی x کے لیے ترسیم سے قیمت پڑھنے کے لیے ہم محور x پر نقطہ x سے شروع ہو کر محور y کے متوازی چل کر ترسیم تک پہنچتے ہیں اور یہاں سے محور x کے متوازی چل کر محور y تک پہنچ کر تفاعل کی قیمت y پڑھتے ہیں۔ ہم اس عمل کو معکوس کرتے ہوئے y سے شروع کرتے ہوئے x پڑھ سکتے ہیں (شکل ۷.۳-ب دیکھیں)۔

تفاعل f کی ترسیم حاصل کرنے کی خاطر ہم f^{-1} کی ترسیم میں مداخل مخارج جوڑیوں کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔ اس ترسیم کو عمومی طرز پر دکھانے کی خاطر ہمیں ان جوڑیوں کا 45° کی لکیر $y = x$ میں عکس لینا ہو گا اور ساتھ ہی حرف x اور حرف y کا ایک دوسرے کے ساتھ تبادلہ کرنا ہو گا۔ یوں غیر تابع متغیر، جس کو اب x کہتے ہیں، افقی محور پر دکھایا جائے گا اور تابع متغیر، جس کو اب y کہتے ہیں، کو انتصابی محور پر دکھایا جائے گا۔ تفاعل $f(x)$ اور $f^{-1}(x)$ کی ترسیمات لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہیں۔

شکل ۷.۳ میں f^{-1} کو متغیر x کا تفاعل لکھنا دکھایا گیا ہے جس کو درج ذیل بیان کیا جا سکتا ہے۔

ا. مساوات $y = f(x)$ کو x کے لیے حل کریں۔ یوں x کو y کی صورت میں لکھا جائے گا۔

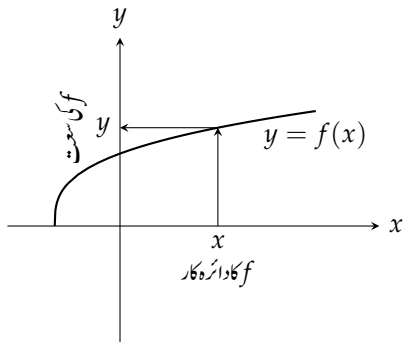
ب. جزو-ا میں حاصل مساوات میں x اور y کا آپس میں تبادلہ کریں۔ یوں حاصل کلیہ $y = f^{-1}(x)$ ہو گا۔

مثال ۷.۳: تفاعل $y = \frac{x}{2} + 1$ کا معکوس حاصل کریں جہاں غیر تابع متغیر x ہو۔

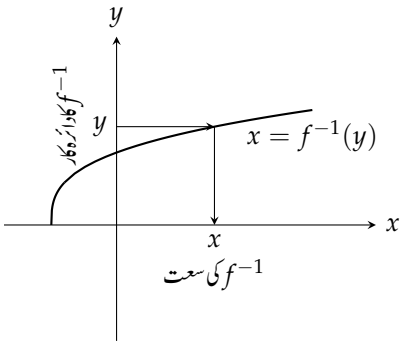
حل

---

[5] identityfunction

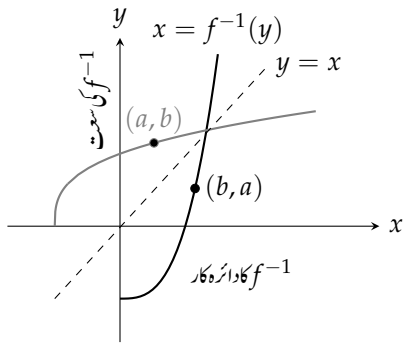


(ا) نقطہ x پر f کی قیمت جاننے کے لیے ہم x سے انتصابی رخ چلتے ہوئے ترسیم تک پہنچ کر افقی سمت محور y تک پہنچ کر درکار قیمت پڑھتے ہیں۔

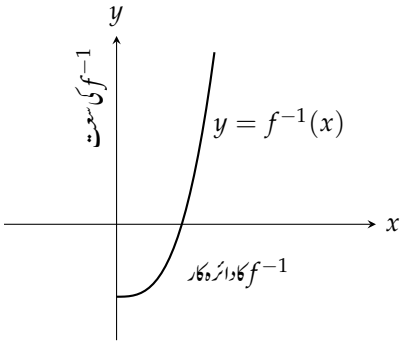


(ب)

تفاعل f کی ترسیم کو f^{-1} کی ترسیم تصور کیا جا سکتا ہے۔ وہ x جو y دیتا ہو کو تلاش کرنے کی خاطر، ہم y سے افقی رخ ترسیم تک اور یہاں سے انتصابی رخ محور x تک پہنچ کر درکار x پڑھتے ہیں۔ f کا دائرہ کار f^{-1} کی سعت ہو گا جبکہ f کی سعت f^{-1} کا دائرہ کار ہو گا۔



(ج) تفاعل f^{-1} کو ترسیم کرنے کی خاطر ہم f کا لکیر $y = x$ میں عکس لیتے ہیں۔



(د) آخر میں ہم حرف x اور حرف y کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔ یوں متغیر x کے تفاعل f^{-1} کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔

شکل ۷.۳: تفاعل f کے معکوس f^{-1} کی ترسیم۔

۱۰۰۸۴ قدم ۱: x کے لیے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{2} + 1 \\ 2y &= x + 2 \\ x &= 2y - 2 \end{aligned}$$

۱۰۰۸۵ قدم ۲: حاصل مساوات میں x اور y کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔

$$y = 2x - 2$$

۱۰۰۸۶ یوں تفاعل $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ کا معکوس تفاعل $f^{-1}(x) = 2x - 2$ ہوگا۔

۱۰۰۸۷ اس کی تصدیق کرنے کی خاطر ہم دیکھتے ہیں کہ آیا دونوں مرکب تفاعل شناختی تفاعل دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= 2\left(\frac{x}{2} + 1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x \\ f(f^{-1}(x)) &= \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x - 1 + 1 = x \end{aligned}$$

۱۰۰۸۸ □

۱۰۰۸۹ مثال ۷.۴: تفاعل $y = x^2,\ x \geq 0$ کا معکوس تلاش کریں جہاں غیر تابع متغیر x ہو۔

۱۰۰۹۰ **حل**

۱۰۰۹۱ قدم ۱: دیے گئے مساوات کو حل کر کے x کو y کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ \sqrt{y} &= \sqrt{x^2} = |x| = x \qquad \text{ہوگا } |x| = x \text{ سے } x \geq 0 \text{ کی وجہ سے} \end{aligned}$$

۱۰۰۹۲ قدم ۲: حاصل نتیجہ میں x اور y کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔

$$y = \sqrt{x}$$

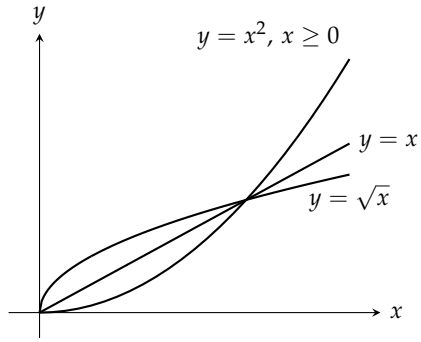
۱۰۰۹۳ یوں تفاعل $y = x^2,\ x \geq 0$ کا معکوس $y = \sqrt{x}$ ہوگا (شکل ۷.۴)۔

۱۰۰۹۴ دھیان رہے کہ پابند تفاعل $y = \sqrt{x},\ x \geq 0$ یک بہ یک تفاعل ہے لہٰذا اس کا معکوس پایا جاتا ہے، جبکہ تفاعل $y = x^2$ ایک غیر پابند تفاعل
۱۰۰۹۵ ہے جو یک بہ یک تفاعل نہیں، لہٰذا اس کا معکوس نہیں پایا جاتا۔ □

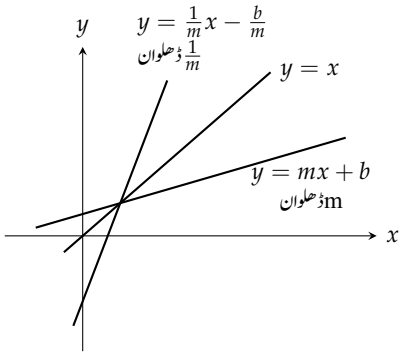
۱۰۰۹۶ **کمپیوٹر کا استعمال**

۱۰۰۹۷ تفاعل $y = f(x)$ کا معکوس تفاعل نہایت آسانی سے درج ذیل مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہوئے ترسیم کیا جا سکتا ہے۔

$$x(t) = f(t), \quad y(t) = t$$



شکل ۷.۴: تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور $y = x^2,\ x \geq 0$ ایک دوسرے کے معکوس ہیں (مثال ۷.۴)۔



شکل ۷.۵: لکیر $y = x$ میں منعکس غیر انتصابی لکیروں کے ڈھلوان ایک دوسرے کے مقلوب ہوتے ہیں۔

۱۰۰۹۸ آپ درج ذیل استعمال کر کے تفاعل اور تفاعل کے معکوس کو ساتھ ساتھ ترسیم کر سکتے ہیں۔

$$x_1(t) = t, \quad y_1(t) = f(t) \qquad \text{تفاعل}$$
$$x_2(t) = f(t), \quad y_2(t) = t \qquad \text{تفاعل کا معکوس}$$

۱۰۰۹۹ اس سے بھی زیادہ بہتر ہو گا کہ تفاعل، تفاعل کا معکوس اور شناختی تفاعل $y = x$ کو ساتھ ساتھ ترسیم کریں جہاں شناختی تفاعل درج ذیل ہو گا۔

$$x_3(t) = t, \quad y_3(t) = t \qquad \text{شناختی تفاعل}$$

۱۰۱۰۰ تفاعل $y = \frac{x^5}{x^2+1}$ اور $y = x + \cos x$ کے ساتھ ان کے معکوس تفاعل اور شناختی تفاعل ایک ساتھ ترسیم کر کے دیکھیں۔ ترسیم میں محور x
۱۰۱۰۱ اور محور y کے اکائی فاصلے برابر نظر آنے چاہیے تاکہ لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تفاعل اور اس کا معکوس تشاکلی نظر آئے۔

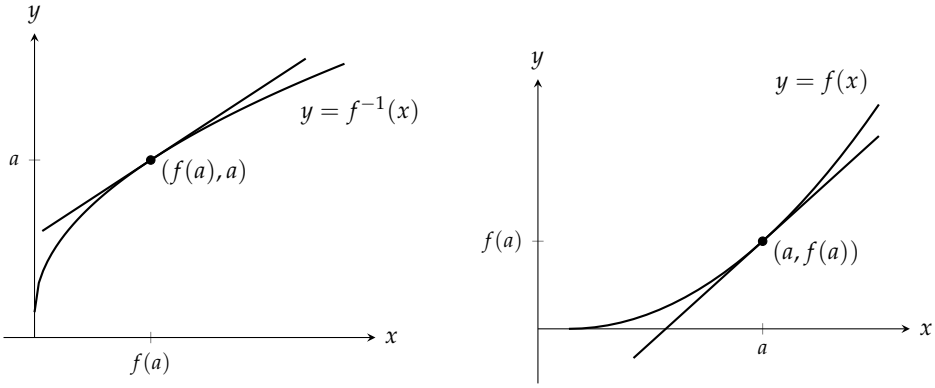
۱۰۱۰۲ قابل تفرق تفاعل کے معکوس کے تفرق

۱۰۱۰۳ تفاعل $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ اور اس کے معکوس $f^{-1}(x) = 2x - 2$ (مثال ۷.۳) کے تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x - 2) = 2$$

۱۰۱۰۴ یہ تفارق ایک دوسرے کے مقلوب ہیں۔ تفاعل f کی ترسیم لکیر $y = \frac{x}{2} + 1$ اور f^{-1} کی ترسیم لکیر $y = 2x - 2$ ہے۔ ان لکیروں کے
۱۰۱۰۵ ڈھلوان ایک دوسرے کے مقلوب ہیں (شکل ۷.۵)۔

۱۰۱۰۶ یہ نتیجہ کسی مخصوص تفاعل کے لیے نہیں۔ لکیر $y = x$ میں کسی بھی غیر افقی یا غیر انتصابی لکیر کے عکس کا ڈھلوان اس لکیر کے ڈھلوان کا مقلوب ہو گا۔ یوں
۱۰۱۰۷ اگر دی گئی لکیر کا ڈھلوان $m \neq 0$ (شکل ۷.۵) ہو تب منعکس لکیر کا ڈھلوان $\frac{1}{m}$ ہو گا (سوال ۷.۳۶)۔



شکل ۷.۶: معکوس تفاعل کے مطابقتی نقطوں پر ڈھلوان ایک دوسرے کے مقلوب $\left.\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}\right|_{f(a)} = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_a}$ ہوں گے۔

تفاعل اور اس کے معکوس کے ڈھلوانوں کا مقلوبی تعلق دیگر تفاعلات کو بھی مطمئن کرتا ہے۔ اگر نقطہ $(a, f(a))$ پر $y = f(x)$ کا ڈھلوان $f'(a) \neq 0$ ہو تب مطابقتی نقطہ $(f(a), a)$ پر $y = f^{-1}(x)$ کا ڈھلوان $\frac{1}{f'(a)}$ ہو گا (شکل ۷.۶)۔ یوں نقطہ $f(a)$ پر f^{-1} کا تفرق، نقطہ a پر f کے تفرق کا مقلوب ہو گا۔ یہ تعلق اس صورت درست ہو گا جب f درج ذیل مسئلہ میں پیش شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔ یہ شرائط اعلیٰ احصاء سے حاصل ہوتی ہیں۔

مسئلہ ۷.۱: **معکوس تفاعل کے تفرق کا قاعدہ**

اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر f قابل تفرق ہو اور I پر $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ کبھی بھی صفر نہ ہو، تب وقفہ $f(I)$ کے ہر نقطہ پر f^{-1} قابل تفرق ہو گا۔ کسی ایک مخصوص نقطہ $f(a)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کا تفرق نقطہ a پر تفرق $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ کا مقلوب ہو گا۔

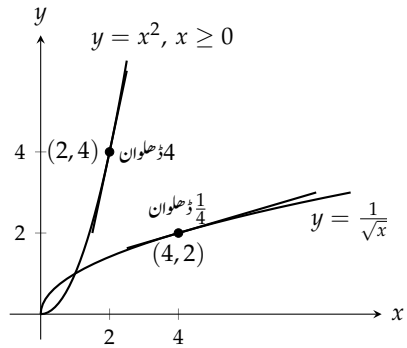
$$\left(\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}\right)_{x=f(a)} = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=a}} \tag{۱}$$

اس کو مختصراً درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

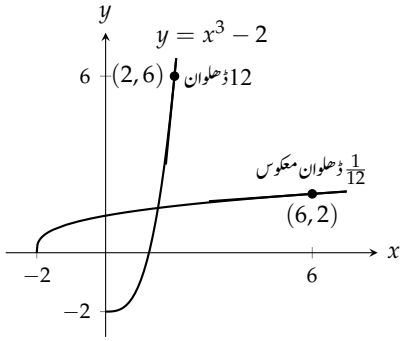
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'} \tag{۲}$$

مثال ۷.۵: تفاعل $f(x) = x^2,\ x \geq 0$ اور اس کے معکوس $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ کے لیے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x, \quad \frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x > 0$$



شکل ۷.۷: نقطہ $(4,2)$ پر $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ کا تفرق نقطہ $(2,4)$ پر $f(x) = x^2$ کے تفرق کا مقلوب ہو گا (مثال ۷.۵)۔



شکل ۷.۸: نقطہ $x = 2$ پر $f(x) = x^3 - 2$ کا تفرق ہمیں نقطہ $x = 6$ پر f^{-1} کا تفرق دیتا ہے (مثال ۷.۶)۔

۱۰۱۱۸ نقطہ $(4,2)$ لکیر $y = x$ کی دوسری طرف نقطہ $(2,4)$ کا عکس ہے (شکل ۷.۷)۔ ان نقطوں پر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2x = 2(2) = 4 \qquad \text{نقطہ } (2,4) \text{ پر}$$

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} = \frac{1}{\mathrm{d}f/\,\mathrm{d}x} \qquad \text{نقطہ } (4,2) \text{ پر}$$

۱۰۱۱۹ □

۱۰۱۲۰ بعض اوقات f^{-1} کا کلیہ نہ جانتے ہوئے بھی مساوات ۱ کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی مخصوص قیمتیں تلاش کی جا سکتی ہیں۔

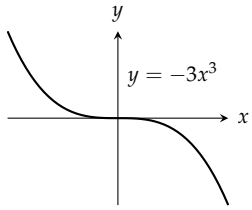
۱۰۱۲۱ مثال ۷.۶: مان لیں $f(x) = x^3 - 2$ ہے۔ $f^{-1}(x)$ کا کلیہ دریافت کیے بغیر نقطہ $x = 6 = f(2)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت تلاش
۱۰۱۲۲ کریں۔

۱۰۱۲۳ **حل** (شکل ۷.۸)

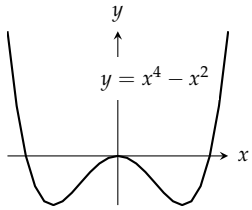
$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2} = \left.3x^2\right|_{x=2} = 12$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=f(2)} = \frac{1}{12} \qquad \text{مساوات ۱}$$

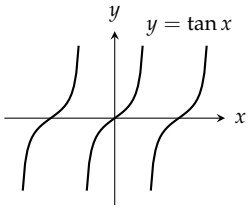
۱۰۱۲۴ □



شکل ۷.۹: ترسیم سوال ۷.۱



شکل ۷.۱۰: ترسیم سوال ۷.۲



شکل ۷.۱۱: ترسیم سوال ۷.۳

مسئلہ ۷.۱ کو ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھا جا سکتا ہے۔ اگر $x = a$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہو اور ہم x کی قیمت میں معمولی تبدیلی $\mathrm{d}x$ لائیں تب y میں مطابقتی تبدیلی تخمیناً

$$\mathrm{d}y = f'(a)\,\mathrm{d}x$$

ہو گی۔ اس کا مطلب ہے کہ y کی تبدیلی، x کی تبدیلی کے تقریباً $f'(a)$ گنا ہو گی اور x کی تبدیلی، y کی تبدیلی کے تقریباً $\frac{1}{f'(a)}$ گنا ہو گی۔

سوالات

یک بہ یک تفاعل کی نشاندہی

سوال ۷.۱ تا سوال ۷.۶ میں تفاعل کی ترسیمات دی گئی ہیں۔ ان میں یک بہ یک تفاعل کی نشاندہی کریں۔

سوال ۷.۱: ترسیم شکل ۷.۹ میں دی گئی ہے۔

سوال ۷.۲: ترسیم شکل ۷.۱۰ میں دی گئی ہے۔

سوال ۷.۳: ترسیم شکل ۷.۱۱ میں دی گئی ہے۔

سوال ۷.۴: ترسیم شکل ۷.۱۲ میں دی گئی ہے۔

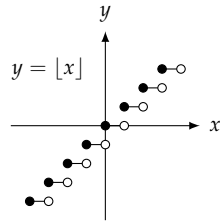
سوال ۷.۵: ترسیم شکل ۷.۱۳ میں دی گئی ہے۔

سوال ۷.۶: ترسیم شکل ۷.۱۴ میں دی گئی ہے۔

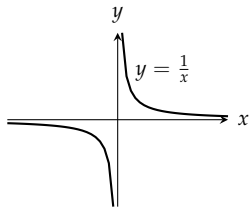
معکوس تفاعل کی ترسیم

سوال ۷.۷ تا سوال ۷.۱۰ میں $y = f(x)$ کی ترسیم دی گئی ہے۔ اس کو نقل کر کے لکیر $y = x$ بھی کھینچیں۔ لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکل استعمال کرتے ہوئے $y = f^{-1}(x)$ ترسیم کریں۔ (f^{-1} کا کلیہ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں۔) f^{-1} کے دائرہ کار اور سعت کی نشاندہی کریں۔

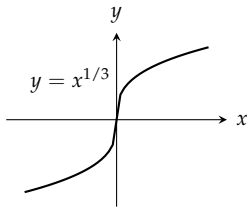
سوال ۷.۷: تفاعل کی ترسیم شکل ۷.۱۵ میں دی گئی ہے۔



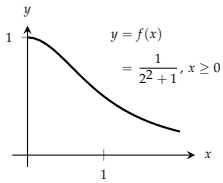
شکل ۷.۱۲: ترسیم سوال ۷.۴



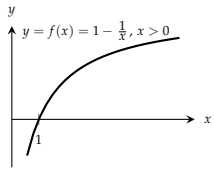
شکل ۷.۱۳: ترسیم سوال ۷.۵



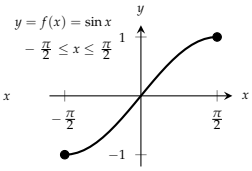
شکل ۷.۱۴: ترسیم سوال ۷.۶



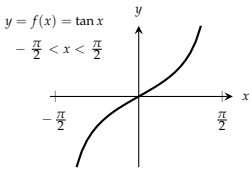
شکل ۷.۱۵: ترسیم سوال ۷.۷



شکل ۷.۱۶: ترسیم سوال ۷.۸



شکل ۷.۱۷: ترسیم سوال ۷.۹



شکل ۷.۱۸: ترسیم سوال ۷.۱۰

۱۰۱۴۳ سوال ۷.۸: تفاعل کی ترسیم شکل ۷.۱۶ میں دی گئی ہے۔

۱۰۱۴۴ سوال ۷.۹: تفاعل کی ترسیم شکل ۷.۱۷ میں دی گئی ہے۔

۱۰۱۴۵ سوال ۷.۱۰: تفاعل کی ترسیم شکل ۷.۱۸ میں دی گئی ہے۔

۱۰۱۴۶

۱۰۱۴۷ سوال ۷.۱۱: (ا) تفاعل $f(x) = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$ ترسیم کریں۔ اس ترسیم میں کون سا تشاکل پایا جاتا ہے؟ (ب) دکھائیں کہ
۱۰۱۴۸ f اپنا ہی معکوس ہے۔ (یاد رہے کہ $x \geq 0$ کی صورت میں $\sqrt{x^2} = x$ ہوتا ہے۔)

۱۰۱۴۹ سوال ۷.۱۲: (ا) تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ ترسیم کریں۔ اس ترسیم میں کون سا تشاکل پایا جاتا ہے؟ (ب) دکھائیں کہ f اپنا ہی معکوس ہے۔

۱۰۱۵۰ معکوس تفاعل کے کلیات

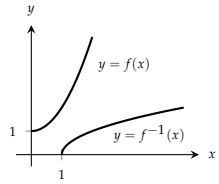
۱۰۱۵۱ سوال ۷.۱۳ تا سوال ۷.۱۸ میں تفاعل $y = f(x)$ کا کلیہ دیا گیا ہے۔ f اور f^{-1} کی ترسیمات بھی دکھائی گئی ہیں۔ f^{-1} کا کلیہ تلاش کریں۔

۱۰۱۵۲ سوال ۷.۱۳: $f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$ ترسیم شکل ۷.۱۹ میں دی گئی ہے۔

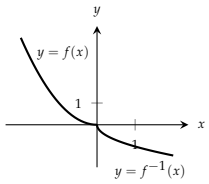
۱۰۱۵۳ سوال ۷.۱۴: $f(x) = x^2, \quad x \leq 0$ ترسیم شکل ۷.۲۰ میں دی گئی ہے۔

۱۰۱۵۴ سوال ۷.۱۵: $f(x) = x^3 - 1$ ترسیم شکل ۷.۲۱ میں دی گئی ہے۔

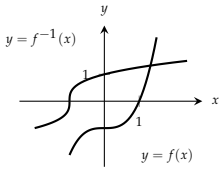
۱۰۱۵۵ سوال ۷.۱۶: $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad x \geq 1$ ترسیم شکل ۷.۲۲ میں دی گئی ہے۔



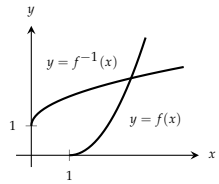
شکل ۷.۱۹: ترسیم سوال ۷.۱۳



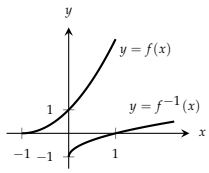
شکل ۷.۲۰: ترسیم سوال ۷.۱۴



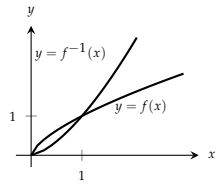
شکل ۷.۲۱: ترسیم سوال ۷.۱۵



شکل ۷.۲۲: ترسیم سوال ۷.۱۶



شکل ۷.۲۳: ترسیم سوال ۷.۱۷



شکل ۷.۲۴: ترسیم سوال ۷.۱۸

سوال ۷.۱۷: $f(x) = (x+1)^2, \quad x \geq -1$ ترسیم شکل ۷.۲۳ میں دی گئی ہے۔

سوال ۷.۱۸: $f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$ ترسیم شکل ۷.۲۴ میں دی گئی ہے۔

سوال ۷.۱۹ تا سوال ۷.۲۴ میں تفاعل $y = f(x)$ کا کلیہ دیا گیا ہے۔ f^{-1} دریافت کریں اور اس کے دائرہ کار اور سعت کی نشاندہی کریں۔ تصدیق کی خاطر دکھائیں کہ $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ ہے۔

سوال ۷.۱۹: $f(x) = x^5$

سوال ۷.۲۰: $f(x) = x^4, \quad x \geq 0$

سوال ۷.۲۱: $f(x) = x^3 + 1$

سوال ۷.۲۲: $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{7}{2}$

سوال ۷.۲۳: $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$

سوال ۷.۲۴: $f(x) = \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$

معکوس تفاعل کے تفرق

سوال ۷.۲۵ تا سوال ۷.۲۸ میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. $f^{-1}(x)$ تلاش کریں۔

ب. f اور f^{-1} کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

ج. نقطہ $x = a$ پر $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ اور نقطہ $x = f(a)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت حاصل کریں۔ تصدیق کریں کہ ان نقطوں پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)}$ ہو گا۔

سوال ۷.۲۵: $f(x) = 2x + 3, \quad a = -1$

سوال ۷.۲۶: $f(x) = \frac{x}{5} + 7, \quad a = -1$

سوال ۷.۲۷: $f(x) = 5 - 4x, \quad a = \frac{1}{2}$

سوال ۷.۲۸: $f(x) = 2x^2, \quad x \geq 0, \quad a = 5$

سوال ۷.۲۹:

۱. دکھائیں کہ $f(x) = x^3$ اور $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ایک دوسرے کے معکوس ہیں۔

۲. f اور g ترسیم کریں جس میں ان کے نقاط تقاطع $(1,1)$ اور $(-1,-1)$ نظر آئیں۔ آپ کو لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکل نظر آنا چاہیے۔

۳. نقاط $(1,1)$ اور $(-1,-1)$ پر f اور g کی ترسیمات کے مماس کا ڈھلوان تلاش کریں۔ (کل چار مماس۔)

۴. مبدا پر ان منحنیات کے مماس تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۰:

۱. دکھائیں کہ $h(x) = \frac{x^3}{4}$ اور $k(x) = (4x)^{1/3}$ ایک دوسرے کے معکوس ہیں۔

۲. h اور k ترسیم کریں جس میں ان کے نقاط تقاطع $(2,2)$ اور $(-2,-2)$ نظر آئیں۔ آپ کو لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکل نظر آنا چاہیے۔

۳. نقاط $(2,2)$ اور $(-2,-2)$ پر h اور k کی ترسیمات کے مماس کا ڈھلوان تلاش کریں۔ (کل چار مماس۔)

۴. مبدا پر ان منحنیات کے مماس تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۱: مان لیں $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1,\ x \geq 2$ ہے۔ نقطہ $x = -1 = f(3)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۲: مان لیں $f(x) = x^2 - 4x - 5,\ x > 2$ ہے۔ نقطہ $x = 0 = f(5)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۳: فرض کریں قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کا معکوس پایا جاتا ہے اور f کی ترسیم نقطہ $(2,4)$ سے گزرتی ہے، جہاں اس کا ڈھلوان $\frac{1}{3}$ ہے۔ نقطہ $x = 4$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۴: فرض کریں قابل تفرق تفاعل $y = g(x)$ کا معکوس پایا جاتا ہے اور g کی ترسیم مبدا سے گزرتی ہے، جہاں اس کا ڈھلوان 2 ہے۔ مبدا پر g^{-1} کی ترسیم کا ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۵:

ا. تفاعل $f(x) = mx$ کا معکوس تلاش کریں، جہاں m غیر صفر مستقل ہے۔

ب. تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم مبدا سے گزرتی لکیر ہے، جس کا ڈھلوان m غیر صفر ہے۔ اس تفاعل کے معکوس کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

سوال ۷.۳۶: دکھائیں کہ $f(x) = mx + b$، جہاں m اور b مستقل ہیں اور $m \neq 0$ ہے، کا معکوس ایک لکیر ہے جس کا ڈھلوان $\frac{1}{m}$ ہے اور جو محور y کو $-\frac{b}{m}$ پر قطع کرتی ہے۔

سوال ۷.۳۷:

ا. تفاعل $f(x) = x + 1$ کا معکوس تلاش کریں۔ f اور اس کا معکوس ایک ساتھ ترسیم کریں۔ لکیر $y = x$ کو بھی شامل کریں۔

ب. تفاعل $f(x) = x + b$ کا معکوس تلاش کریں جہاں b مستقل ہے۔ f^{-1} کی ترسیم کا f کی ترسیم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

ج. لکیر $y = x$ کے متوازی تفاعل کے معکوس کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہو گا؟

سوال ۷.۳۸:

ا. تفاعل $f(x) = -x + 1$ کا معکوس معلوم کریں۔ لکیر $y = -x + 1$ اور لکیر $y = x$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ ان لکیروں کے بیچ زاویہ کتنا ہے؟

ب. تفاعل $f(x) = -x + b$ کا معکوس معلوم کریں جہاں b مستقل ہے۔ لکیر $y = -x + b$ اور لکیر $y = x$ کے مابین زاویہ کتنا ہے؟

ج. لکیر $y = x$ کے عمودی تفاعل کے معکوس کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

بڑھتا ہوا اور گھٹتا ہوا تفاعل

سوال ۷.۳۹: اگر وقفہ I میں کسی دو نقطوں x_1 اور x_2 پر

$$x_2 > x_1 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) > f(x_1)$$

ہو تب I پر تفاعل $f(x)$ بڑھتا ہو گا (حصہ ۴.۲)۔ اسی طرح درج ذیل صورت میں I پر $f(x)$ گھٹتا ہو گا۔

$$x_2 > x_1 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) < f(x_1)$$

دکھائیں کہ بڑھتے تفاعل اور گھٹتے تفاعل یک بہ یک تفاعل ہیں یعنی دکھائیں کہ I میں کسی بھی دو نقطوں x_1 اور x_2 کے لیے $x_2 \neq x_1$ سے مراد $f(x_2) \neq f(x_1)$ ہو گا۔

سوال ۷.۴۰ تا سوال ۷.۴۴ میں سوال ۷.۳۹ کے نتائج استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ دیے گئے تفاعل کا اپنے وقفہ پر معکوس پایا جاتا ہے۔ مسئلہ ۷.۱ کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کا کلیہ تلاش کریں۔

سوال ۷.۴۰: $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{5}{6}$

سوال ۷.۴۱: $f(x) = 27x^3$

سوال ۷.۴۲: $f(x) = 1 - 8x^3$

سوال ۷.۴۳: $f(x) = (1 - x)^3$

سوال ۷.۴۴: $f(x) = x^{5/3}$

نظریہ اور استعمال

سوال ۷.۴۵: اگر $f(x)$ یک بہ یک ہو تب $g(x) = -f(x)$ کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۷.۴۶: اگر $f(x)$ یک بہ یک اور غیر صفر ہو تب $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۷.۴۷: فرض کریں کہ g کی سعت، f کے دائرہ کار میں پائی جاتی ہے، لہٰذا مرکب تفاعل $f \circ g$ معین ہے۔ اگر f اور g یک بہ یک ہوں تب $f \circ g$ کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۷.۴۸: اگر مرکب تفاعل $f \circ g$ یک بہ یک ہو تب کیا g لازماً یک بہ یک ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۷.۴۹: فرض کریں وقفہ $[a, b]$ پر $f(x)$ مثبت، استمراری اور بڑھتا تفاعل ہے۔ ترسیم کی تاویل کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}\,\mathrm{d}x = bf(b) - af(a)$$

سوال ۷.۵۰: مستقل a ، b ، c ، اور d پر مسلط وہ شرائط تلاش کریں جو ناطق تفاعل

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

کا معکوس ممکن بناتی ہیں۔

سوال ۷.۵۱: اگر ہم $f^{-1}(x)$ کی جگہ $g(x)$ لکھیں تب مساوات ۱ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \qquad \Longrightarrow g'(f(a)) \cdot f'(a) = 1$$

اس میں a کی جگہ x پُر کرنے سے

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

ملتا ہے جو زنجیری قاعدہ یاد دلاتی ہے۔ یقیناً درج بالا اور زنجیری قاعدہ کے بیچ تعلق پایا جاتا ہے۔

فرض کریں f اور g قابل تفرق اور ایک دوسرے کے معکوس ہیں لہٰذا $(f \circ g)(x) = x$ ہو گا۔ زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لے کر $(f \circ g)'(x)$ کو f اور g کے تفرق کی صورت میں لکھ کر دیکھیں کیا حاصل ہوتا ہے؟ (مسئلہ ۷.۱ کو دیکھنے کا یہ بھی ایک طریقہ ہے۔)

سوال ۷.۵۲: ترکیب چھلا اور ترکیب خول کی مساوات

فرض کریں وقفہ $a \leq x \leq b$ پر f قابل تفرق ہے جہاں $a > 0$ ہے اور f کا قابل تفرق معکوس f^{-1} پایا جاتا ہے۔ تفاعل f ، لکیر

$x = a$ اور لکیر $y = f(b)$ کے بیچ خطہ، کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کے حجم کے تکمل، جو ترکیب چھلا اور ترکیب خول دیتی ہیں، کی قیمتیں یکساں ہیں۔

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \left((f^{-1}(y))^2 - a^2\right) \mathrm{d}y = \int_a^b 2\pi x(f(b) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

اس مساوات کو ثابت کرنے کی خاطر درج ذیل متعارف کریں۔

$$C(t) = \int_{f(a)}^{f(t)} \pi\left((f^{-1}(y))^2 - a^2\right) \mathrm{d}y$$
$$K(t) = \int_a^t 2\pi x(f(t) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

اس کے بعد دکھائیں کہ $[a, b]$ کے کسی نقطے پر $C(t)$ اور $K(t)$ کی قیمتیں ایک جیسی ہیں اور $[a, b]$ پر ان کے تفرق بھی ایک جیسے ہیں۔ صفحہ ۴۲۳ پر سوال ۵.۱۲۶ کے نتیجہ کے مطابق $[a, b]$ میں تمام t کے لیے $C(t) = K(t)$ ہوگا۔ بالخصوص $C(b) = K(b)$ ہوگا۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۷.۵۳ تا سوال ۷.۶۰ میں آپ چند تفاعل اور ان کے معکوس پر غور کریں گے۔ اس کے علاوہ دیے گئے نقطہ پر ان کے تفرق اور خطی تخمینی تفاعل پر غور کریں گے۔ ان سوالات میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دیے گئے وقفہ پر تفاعل $y = f(x)$ اور اس کا تفرق ترسیم کریں۔ آپ کیسے جانتے ہیں کہ اس وقفہ پر f یک بہ یک ہے؟

ب. مساوات $y = f(x)$ کو x کے لیے حل کر کے حاصل معکوس تفاعل کو g سے ظاہر کریں۔

ج. دیے گئے نقطہ $(x_0, f(x_0))$ پر f کے مماس کی مساوات دریافت کریں۔

د. لکیر $y = x$ کی دوسری جانب تشاکلی نقطہ $(f(x_0), x_0)$ پر g کے مماس کی مساوات دریافت کریں۔ مسئلہ ۷.۱ کی مدد سے اس مماسی لکیر کا ڈھلوان معلوم کریں۔

ھ. تفاعل f ، g ، لکیر $y = x$ ، دونوں مماسی خطوط، اور نقطہ $(x_0, f(x_0))$ اور $(f(x_0), x_0)$ کو جوڑنے والا سیدھا خط ترسیم کریں۔ آپ کو جو تشاکلی نظر آتی ہے اس پر تبصرہ کریں؟

سوال ۷.۵۳: $y = \sqrt{3x - 2}, \quad \frac{2}{3} \le x \le 4, \quad x_0 = 3$

سوال ۷.۵۴: $y = \frac{3x+2}{2x-11}, \quad -2 \le x \le 2, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

سوال ۷.۵۵: $y = \frac{4x}{x^2+1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

سوال ۷.۵۶: $y = \frac{x^3}{x^2+1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

سوال ۷.۵۷: $y = x^3 - 3x^2 - 1, \quad 2 \le x \le 5, \quad x_0 = \frac{27}{10}$

سوال ۷.۵۸: $y = 2 - x - x^3, \quad -2 \le x \le 2, \quad x_0 = \frac{3}{2}$

سوال ۷.۵۹: $y = e^x, \quad -3 \le x \le 5, \quad x_0 = 1$

سوال ۷.۶۰: $y = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad x_0 = 1$

سوال ۷.۶۱ اور سوال ۷.۶۲ میں درج بالا تمام اقدام بروئے کار لاتے ہوئے دیے گئے وقفہ پر خفی تفاعل کو حل کر کے $y = f(x)$ اور $x = f^{-1}(y)$ حاصل کریں۔

سوال ۷.۶۱: $y^{1/3} - 1 = (x+2)^3, \quad -5 \le x \le 5, \quad x_0 = -\frac{3}{2}$

سوال ۷.۶۲: $\cos y = x^{1/5}, \quad 0 \le x \le 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

۷.۲ قدرتی لوگارتھم

ریاضیات اور سائنس میں تفاعل اور معکوس کی اہم ترین جوڑی قدرتی لوگارتھم $\ln x$ اور قوت نما تفاعل e^x کی جوڑی ہے۔ تفاعل e^x کی وضاحت $\ln x$ سے ہوتی ہے لہٰذا ہم پہلے $\ln x$ متعارف کرتے ہیں۔ شروع میں لوگارتھم کی اہمیت حساب میں آسانی پیدا کرنے کی وجہ سے سامنے آئی۔ سترھویں صدی میں لوگارتھم کی خوبیوں نے فلکی میکانیات کا حساب اور ساحل سے دور جہاز رانی ممکن بنایا۔ اگرچہ آج کل پیچیدہ حساب کمپیوٹر کی مدد سے کیا جاتا ہے، بہر حال لوگارتھم کی خوبیاں آج بھی اتنی ہی اہمیت رکھتی ہیں۔

قدرتی لوگارتھمی تفاعل

مثبت عدد x کے قدرتی لوگارتھم کو $\ln x$ لکھا جاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل تکمل دیتا ہے۔

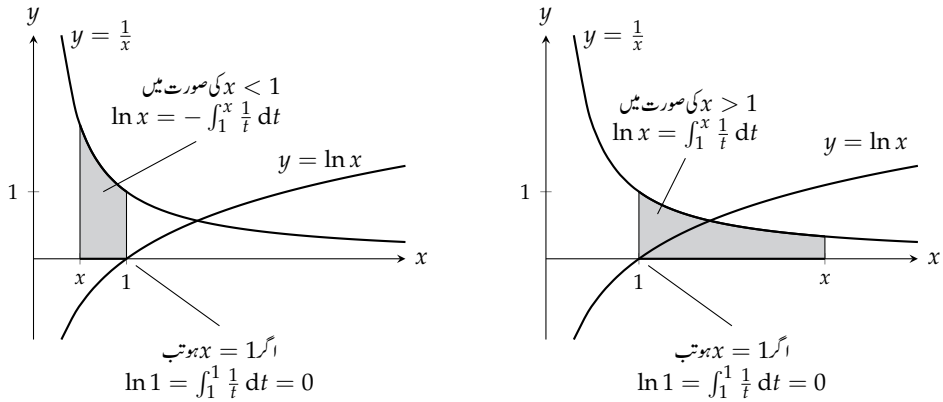
$$\ln x = \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0 \qquad \text{قدرتی لوگارتھمی تفاعل کی تعریف}$$

اگر $x > 1$ ہو تب $t = 1$ سے $t = x$ تک منحنی $y = \frac{1}{t}$ کے نیچے رقبہ $\ln x$ ہو گا (شکل ۷.۲۵)۔ اگر $0 < x < 1$ ہو تب x سے 1 تک منحنی $y = \frac{1}{t}$ کے نیچے رقبے کا منفی $\ln x$ ہو گا۔ قدرتی لوگارتھمی تفاعل وقفہ $x \le 0$ کے لیے غیر معین ہے۔ لوگارتھمی تفاعل کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{بالائی اور زیریں حد یکساں ہیں}$$

دھیان رہے کہ ہم شکل ۷.۲۵ میں $y = \frac{1}{x}$ ترسیم کرتے ہیں لیکن تکمل میں $y = \frac{1}{t}$ استعمال کرتے ہیں۔ ہر متغیر کو x لکھنے سے

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$



شکل ۷.۲۵: تفاعل $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$ اور قدرتی لوگارتھمی تفاعل $y = \ln x$ کا تعلق۔ قدرتی لوگارتھمی تفاعل $x > 1$ کے لیے مثبت اور $x < 1$ کے لیے منفی ہے۔

۱۰۲۸۲ لکھا جائے گا جہاں x کے دو مختلف معنی ہیں۔ اسی لیے ہم تکمل میں متغیر کو تبدیل کرتے ہوئے t لکھتے ہیں۔

۱۰۲۸۳ x کی مختلف قیمتوں کے لیے تین اعشاریہ مقامات تک درست قدرتی لوگارتھمی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	0	0.05	0.5	1	2	3	4	10
$\ln x$	غیر معین	-3.00	-0.69	0	0.69	1.10	1.39	2.30

۱۰۲۸۴ قدرتی لوگارتھمی تفاعل کا تفرق

۱۰۲۸۵ احصاء کے بنیادی مسئلہ کے جزو اول (مسئلہ ۵.۳) سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

۱۰۲۸۶ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا x کی ہر مثبت قیمت کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x}$$

۱۰۲۸۷ اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور u کی قیمتیں مثبت ہوں، تاکہ $\ln u$ معین ہو، تب تفاعل $y = \ln u$ پر زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

کے اطلاق سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

ملتا ہے، لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad u > 0 \tag{۱}$$

مثال ۷.۷:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln 2x = \frac{1}{2x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x) = \frac{1}{2x}(2) = \frac{1}{x}$$

□

آپ نے مثال ۷.۷ میں دیکھا کہ تفاعل $y = \ln 2x$ کا تفرق وہی ہے جو تفاعل $y = \ln x$ کا ہے۔ درحقیقت کسی بھی تفاعل $y = \ln ax$ کے لیے درست ہے جہاں a کوئی عدد ہے:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln ax = \frac{1}{ax}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax) = \frac{1}{ax}(a) = \frac{1}{x} \tag{۲}$$

مثال ۷.۸: اگر مساوات ۱ میں $u = x^2 + 3$ پُر کیا جائے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+3}$$

□

خواص لوگارتھم

کمپیوٹر کی ایجاد سے پہلے ریاضیات میں سب سے زیادہ آسانی لوگارتھم کی وجہ سے ہوئی[۶]۔ لوگارتھم کی وہ خوبیاں جن کی بدولت حساب میں آسانی پیدا ہوئی، جدول ۷.۱ میں دی گئی ہیں۔ ان خواص کی وجہ سے مثبت اعداد کے ضرب کی جگہ جمع اور مثبت اعداد کی تقسیم کی جگہ تفریق استعمال ہونے لگا۔ اس کے علاوہ طاقت کی جگہ ضرب استعمال کیا جانے لگا۔ وقتی طور پر ہم جزود میں طاقت n کو ناطق عدد تصور کرتے ہیں۔ اس کی وضاحت جزود کے ثبوت کے دوران ہو گی۔

[۶] اسکاچی ریاضی دان جان نیپر نے سولھویں صدی میں لوگارتھم ایجاد کیا۔ انہوں نے اپنی زندگی کے آخری بیس برس لوگارتھمی جدول مکمل کرنے میں صرف کیے

جدول ۷.۱: خواص قدرتی لوگارتھم

کسی بھی اعداد $a > 0$ اور $x > 0$ کے لیے۔		
ا)	قاعدہ ضرب	$\ln ax = \ln a + \ln x$
ب)	قاعدہ حاصل تقسیم	$\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$
ج)	قاعدہ مقلوب	$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
د)	قاعدہ طاقت	$\ln x^n = n \ln x$

۱۰۳۰۰ مثال ۷.۹:

$$\ln 6 = \ln(2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 3 \qquad \text{ضرب}$$

$$\ln 4 - \ln 5 = \ln \frac{4}{5} = \ln 0.8 \qquad \text{حاصل تقسیم}$$

$$\ln \frac{1}{8} = -\ln 8 \qquad \text{مقلوب}$$

$$= -\ln 2^3 = -3 \ln 2 \qquad \text{طاقت}$$

۱۰۳۰۱ □

۱۰۳۰۲ مثال ۷.۱۰:

$$\ln 4 + \ln \sin x = \ln(4 \sin x) \qquad \text{ضرب}$$

$$\ln \frac{x+1}{2x-3} = \ln(x+1) - \ln(2x-3) \qquad \text{حاصل تقسیم}$$

$$\ln \sec x = \ln \frac{1}{\cos x} = -\ln \cos x \qquad \text{مقلوب}$$

$$\ln \sqrt[3]{x+1} = \ln(x+1)^{1/3} = \frac{1}{3} \ln(x+1) \qquad \text{طاقت}$$

۱۰۳۰۳ □

۱۰۳۰۴ ثبوت: برائے $\ln ax = \ln a + \ln x$

۱۰۳۰۵ اس کی دلیل عجیب اور عمدہ ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $\ln ax$ کا تفرق اور $\ln x$ کا تفرق یکساں ہیں (مساوات ۲)۔ مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ دوم (صفحہ

۱۰۳۰۶ ۲.۴) کہتا ہے کہ ان تفاعلات میں مستقل کا فرق ہو گا۔

$$\ln ax = \ln x + C \qquad C \text{ مستقل} \tag{۳}$$

۱۰۳۰۷ اب صرف یہ دکھانا باقی ہے کہ C اور $\ln a$ برابر ہیں۔

۱۰۳۰۸ مساوات ۳ x کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے درست ہے لہٰذا یہ $x = 1$ کے لیے بھی درست ہو گا۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \ln(a \cdot 1) &= \ln 1 + C \\ \ln a &= 0 + C && \ln 1 = 0 \\ C &= \ln a && \text{ترتیب دی گئی ہے} \end{aligned}$$

۱۰۳۰۹ مساوات ۳ میں $C = \ln a$ پُر کرنے سے ہمیں درکار تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\ln ax = \ln a + \ln x \tag{۴}$$

۱۰۳۱۰ □

۱۰۳۱۱ ثبوت: برائے $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$

۱۰۳۱۲ ہم مساوات ۴ کو دو مرتبہ استعمال کر کے ثبوت پیش کرتے ہیں۔ مساوات ۴ میں a کی جگہ $\frac{1}{x}$ پُر کرنے سے

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{x} + \ln x &= \ln \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) \\ &= \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

۱۰۳۱۳ ملتا ہے لہٰذا

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

۱۰۳۱۴ ہو گا۔ مساوات ۴ میں x کی جگہ $\frac{1}{x}$ پُر کرنے سے

$$\begin{aligned} \ln \frac{a}{x} &= \ln \left(a \cdot \frac{1}{x}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{x} \\ &= \ln a - \ln x \end{aligned}$$

۱۰۳۱۵ ملتا ہے۔

۱۰۳۱۶ □

۱۰۳۱۷ ثبوت: برائے $\ln x^n = n \ln x$ جہاں n ناطق ہے

۱۰۳۱۸ تمام مثبت x قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔ (درج ذیل میں یاد رہے کہ ہم نے طاقتی قاعدہ صرف ناطق اعداد کے لیے ثابت کیا ہے۔)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x^n &= \frac{1}{x^n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) && \text{مساوات ا میں } u = x^n\\ &= \frac{1}{x^n}nx^{n-1} && \text{یہاں } n \text{ کا ناطق ہونا ضروری ہے}\\ &= n\cdot\frac{1}{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(n\ln x)\end{aligned}$$

۱۰۳۱۹ چونکہ $\ln x^n$ اور $n \ln x$ کے تفرق برابر ہیں لہٰذا

$$\ln x^n = n\ln x + C \qquad C \text{ مستقل}$$

۱۰۳۲۰ ہوگا جس میں $x = 1$ پُر کرنے سے $C = 0$ ملتا ہے۔

۱۰۳۲۱ □

۱۰۳۲۲ اگرچہ ہم نے غیر ناطق n کے لیے قاعدہ $\ln x^n = n \ln x$ ثابت نہیں کیا، یہ قاعدہ غیر ناطق اعداد کے لیے بھی درست ہے، لہٰذا اس کو بغیر فقر
۱۰۳۲۳ استعمال کریں۔

۱۰۳۲۴ $\ln x$ کی ترسیم اور سعت

۱۰۳۲۵ چونکہ $x > 0$ کے لیے $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$ ہے لہٰذا $\ln x$ متغیر x کا بڑھتا تفاعل ہے۔ اس کا دور تبی تفرق، $-\frac{1}{x^2}$، منفی ہے لہٰذا $\ln x$
۱۰۳۲۶ کی ترسیم نیچے مقعر ہے۔

۱۰۳۲۷ اعدادی تراکیب سے $\ln 2$ کی قیمت تقریباً 0.69 حاصل ہوتی ہے۔ یوں

$$\ln 2^n = n\ln 2 > n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}$$

۱۰۳۲۸ اور

$$\ln 2^{-n} = -n\ln 2 < -n\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{n}{2}$$

۱۰۳۲۹ ہوں گے۔ ان سے درج ذیل اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

$$\lim_{x\to\infty}\ln x = \infty \quad \text{اور} \quad \lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$$

۱۰۳۳۰ $\ln x$ کا دائرہ کار مثبت حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے، جبکہ $\ln x$ کی سعت پوری حقیقی لکیر ہے۔

لوگارتھمی تفرق

حاصل ضرب، حاصل تقسیم، اور طاقت پر مبنی مثبت تقاعل کا تفرق لینے سے پہلے تقاعل کا لوگارتھم لینا سود مند ثابت ہوتا ہے۔ لوگارتھم لیتے ہوئے ہم جدول ۷.۱ کے قواعد استعمال کرتے ہوئے تقاعل کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں، جس کا تفرق نسبتاً آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ اس عمل کو **لوگارتھمی تفرق**[۷] کہتے ہیں۔

مثال ۷.۱۱: تقاعل $y = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}$, $x > 1$ کے لیے $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ تلاش کریں۔

حل

ہم دونوں اطراف کا قدرتی لوگارتھم لے کر جدول ۷.۱ کے قواعد سے سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1} \\
&= \ln\left((x^2+1)(x+3)^{1/2}\right) - \ln(x-1) && \text{قاعدہ حاصل تقسیم} \\
&= \ln(x^2+1) + \ln(x+3)^{1/2} - \ln(x-1) && \text{قاعدہ ضرب} \\
&= \ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x+3) - \ln(x-1) && \text{قاعدہ طاقت}
\end{aligned}$$

اب ہم دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔ (بائیں ہاتھ مساوات ۱ استعمال کرتے ہیں۔)

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1}$$

اس کو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کے لیے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1}\right)$$

آخر میں ہم y کی قیمت پُر کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1}\right)$$

□

[۷] logarithmicdifferentiation

۱۰۳۴۲ تفاعل $y = f(x) > 0$ کا لوگارتھمی تفرق

۱۰۳۴۳ کسی بھی تفاعل کا لوگارتھمی تفرق درج ذیل اقدام سے حاصل ہو گا۔

$$\ln y = \ln f(x)$$ دونوں اطراف لوگارتھم لیں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x))$$ دونوں اطراف تفرق لیں

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x))$$ بائیں ہاتھ مساوات ۱

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x))$$ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کے لیے حل کریں

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x))$$ $y = f(x)$ پُر کریں

۱۰۳۴۴ تکمل $\int \frac{\mathrm{d}u}{u}$

۱۰۳۴۵ مساوات ۱ سے تکمل کا کلیہ

$$\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln u + C \qquad (۵)$$

C مستقل

۱۰۳۴۶ ملتا ہے، جہاں u مثبت قابل تفرق تفاعل ہے۔ منفی u کی صورت میں کیا ہو گا؟ اگر u منفی ہو تب $-u$ مثبت ہو گا لہٰذا

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{1}{(-u)}\,\mathrm{d}(-u)\\ &= \ln(-u) + C \qquad (۶)\end{aligned}$$

مساوات ۵ میں u کی جگہ $-u$

۱۰۳۴۷ لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات ۵ اور مساوات ۶ میں دائیں ہاتھ کو $\ln|x| + C$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں دونوں مساوات کو

$$\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C \qquad (۷)$$

۱۰۳۴۸ میں ضم کیا جا سکتا ہے، جہاں u غیر صفر قابل تفرق تفاعل ہے۔

۱۰۳۴۹ ہم درج ذیل جانتے ہیں

$$\int u^n\,\mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

۱۰۳۵۰ اور $n = -1$ کے لیے مساوات ۷ کی طرف دیکھ سکتے ہیں۔

۱۰۳۵۱ مساوات ۷ کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|f(x)\right| + C$$

۱۰۳۵۲ جہاں $f(x)$ قابل تفرق تفاعل ہے، جس کی علامت پورے دائرہ کار پر تبدیل نہیں ہوتی۔

۱۰۳۵۳ مثال ۷.۱۲:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{2x}{x^2-5}\,\mathrm{d}x &= \int_{-5}^{-1} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|\Big|_{-5}^{-1} && u = x^2-5\\ &= \ln|-1| - \ln|-5| = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5\end{aligned}$$

۱۰۳۵۴ □

۱۰۳۵۵ مثال ۷.۱۳:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4\cos\theta}{3+2\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \int_1^5 \frac{2}{u}\,\mathrm{d}u && u = 3+2\sin\theta\\ &= 2\ln|u|\Big|_1^5\\ &= 2\ln|5| - 2\ln|1| = 2\ln 5\end{aligned}$$

۱۰۳۵۶ □

۱۰۳۵۷ $\tan x$ اور $\cot x$ کے تکمل

۱۰۳۵۸ ہمیں مساوات ۷ کی مدد سے $\tan x$ اور $\cot x$ کے تکمل لے سکتے ہیں۔ ٹینجنٹ کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \tan x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-\mathrm{d}u}{u} && u = \cos x\\ &= -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln|u| + C && \text{مساوات ۷}\\ &= -\ln|\cos x| + C = \ln\frac{1}{|\cos x|} + C && \text{قاعدہ مقلوب}\\ &= \ln|\sec x| + C\end{aligned}$$

۱۰۳۵۹ کوٹینجنٹ کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \cot x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} && u = \sin x\\ &= \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C = -\ln|\csc x| + C\end{aligned}$$

۱۰۳۶۰ اس طرح درج ذیل کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\int \tan u \, \mathrm{d}u = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C$$
$$\int \cot u \, \mathrm{d}u = \ln|\sin u| + C = -\ln|\csc x| + C$$

۱۰۳۶۱ مثال ۷.۱۴:

$$\int_0^{\pi/6} \tan 2x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/3} \tan u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \tan u \, \mathrm{d}u \qquad u = 2x$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\sec u|\Big|_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$$

۱۰۳۶۲ □

۱۰۳۶۳ **سوالات**

۱۰۳۶۴ **لوگارتھم کے خواص**

۱۰۳۶۵ سوال ۷.۶۳: مندرجہ ذیل کو $\ln 2$ اور $\ln 3$ کی صورت میں لکھیں۔

۱۰۳۶۶ ا. $\ln 0.75$ ۱۰۳۶۸ ج. $\ln(1/2)$ ۱۰۳۷۰ ھ. $\ln 3\sqrt{2}$

۱۰۳۶۷ ب. $\ln(4/9)$ ۱۰۳۶۹ د. $\ln \sqrt[3]{9}$ ۱۰۳۷۱ و. $\ln \sqrt{13.5}$

۱۰۳۷۲ سوال ۷.۶۴: مندرجہ ذیل کو $\ln 5$ اور $\ln 7$ کی صورت میں لکھیں۔

۱۰۳۷۳ ا. $\ln(1/125)$ ۱۰۳۷۵ ج. $\ln 7\sqrt{7}$ ۱۰۳۷۷ ھ. $\ln 0.056$

۱۰۳۷۴ ب. $\ln 9.8$ ۱۰۳۷۶ د. $\ln 1225$ ۱۰۳۷۸ و. $\frac{\ln 35 + \ln(1/7)}{\ln 25}$

۱۰۳۷۹ سوال ۷.۶۵ اور سوال ۷.۶۶ میں خواص لوگارتھم کی مدد سے دیے گئے ریاضی فقرے کی سادہ صورت تلاش کریں۔

۱۰۳۸۰ سوال ۷.۶۵:

۱۰۳۸۱ ا. $\ln \sin\theta - \ln\left(\frac{\sin\theta}{5}\right)$ ۱۰۳۸۲ ب. $\ln(3x^2 - 9x) + \ln\left(\frac{1}{3x}\right)$ ج. $\frac{1}{2}\ln(4t^4) - \ln 2$

۱۰۳۸۳ سوال ۷.۶۶:

۱۰۳۸۵ ا. $\ln \sec\theta + \ln\cos\theta$

۱۰۳۸۶ ب. $\ln(8x+4) - 2\ln 2$

۱۰۳۸۷ ج. $3\ln\sqrt[3]{t^2-1} - \ln(t+1)$

۱۰۳۸۸ **لوگارتھم کے تفرق**

۱۰۳۸۹ سوال ۷.۶۷ تا سوال ۷.۹۸ میں x ، t ، یا θ کے لحاظ سے y کا تفرق لیں۔

۱۰۳۹۰ سوال ۷.۶۷: $y = \ln 3x$

۱۰۳۹۱ سوال ۷.۶۸: $y = \ln kx,$ k مستقل

۱۰۳۹۲ سوال ۷.۶۹: $y = \ln(t^2)$

۱۰۳۹۳ سوال ۷.۷۰: $y = \ln(t^{3/2})$

۱۰۳۹۴ سوال ۷.۷۱: $y = \ln\frac{3}{x}$

۱۰۳۹۵ سوال ۷.۷۲: $y = \ln\frac{10}{x}$

۱۰۳۹۶ سوال ۷.۷۳: $y = \ln(\theta+1)$

۱۰۳۹۷ سوال ۷.۷۴: $y = \ln(2\theta+2)$

۱۰۳۹۸ سوال ۷.۷۵: $y = \ln x^3$

۱۰۳۹۹ سوال ۷.۷۶: $y = (\ln x)^3$

۱۰۴۰۰ سوال ۷.۷۷: $y = t(\ln t)^2$

۱۰۴۰۱ سوال ۷.۷۸: $y = t\sqrt{\ln t}$

۱۰۴۰۲ سوال ۷.۷۹: $y = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}$

۱۰۴۰۳ سوال ۷.۸۰: $y = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$

۱۰۴۰۴ سوال ۷.۸۱: $y = \frac{\ln t}{t}$

۱۰۴۰۵ سوال ۷.۸۲: $y = \frac{1+\ln t}{t}$

۱۰۴۰۶ سوال ۷.۸۳: $y = \frac{\ln x}{1+\ln x}$

۱۰۴۰۷ سوال ۷.۸۴: $y = \frac{x\ln x}{1+\ln x}$

۱۰۴۰۸ سوال ۷.۸۵: $y = \ln(\ln x)$

۱۰۴۰۹ سوال ۷.۸۶: $y = \ln(\ln(\ln x))$

۱۰۴۱۰ سوال ۷.۸۷: $y = \theta(\sin(\ln\theta)) + \cos(\ln\theta)$

۱۰۴۱۱ سوال ۷.۸۸: $y = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$

۱۰۴۱۲ سوال ۷.۸۹: $y = \ln \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$

۱۰۴۱۳ سوال ۷.۹۰: $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

۱۰۴۱۴ سوال ۷.۹۱: $y = \frac{1+\ln t}{1-\ln t}$

۱۰۴۱۵ سوال ۷.۹۲: $y = \sqrt{\ln \sqrt{t}}$

۱۰۴۱۶ سوال ۷.۹۳: $y = \ln(\sec(\ln \theta))$

۱۰۴۱۷ سوال ۷.۹۴: $y = \ln \left(\frac{\sqrt{\sin \theta \cos \theta}}{1+2\ln \theta} \right)$

۱۰۴۱۸ سوال ۷.۹۵: $y = \ln \left(\frac{(x^2+1)^5}{\sqrt{1-x}} \right)$

۱۰۴۱۹ سوال ۷.۹۶: $y = \ln \sqrt{\frac{(x+1)^5}{(x+2)^{20}}}$

۱۰۴۲۰ سوال ۷.۹۷: $y = \int_{x^2/2}^{x^2} \ln \sqrt{t}\, \mathrm{d}t$

۱۰۴۲۱ سوال ۷.۹۸: $y = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \ln t\, \mathrm{d}t$

۱۰۴۲۲

۱۰۴۲۳ **لوگارتھمی تفرق**

۱۰۴۲۴ سوال ۷.۹۹ تا سوال ۷.۱۱۲ میں لوگارتھمی تفرق استعمال کرتے ہوئے y کا، دیے گئے آزاد متغیر کے لحاظ سے، تفرق لیں۔

۱۰۴۲۵ سوال ۷.۹۹: $y = \sqrt{x(x+1)}$

۱۰۴۲۶ سوال ۷.۱۰۰: $y = \sqrt{(x^2+1)(x-1)^2}$

۱۰۴۲۷ سوال ۷.۱۰۱: $y = \sqrt{\frac{t}{t+1}}$

۱۰۴۲۸ سوال ۷.۱۰۲: $y = \sqrt{\frac{1}{t(t+1)}}$

۱۰۴۲۹ سوال ۷.۱۰۳: $y = \sqrt{\theta+3} \sin \theta$

۱۰۴۳۰ سوال ۷.۱۰۴: $y = (\tan \theta)\sqrt{2\theta+1}$

۱۰۴۳۱ سوال ۷.۱۰۵: $y = t(t+1)(t+2)$

۱۰۴۳۲ سوال ۷.۱۰۶: $y = \frac{1}{t(t+1)(t+2)}$

۱۰۴۳۳ سوال ۷.۱۰۷: $y = \frac{\theta+5}{\theta \cos \theta}$

۱۰۴۳۴ سوال ۷.۱۰۸: $y = \frac{\theta \sin \theta}{\sqrt{\sec \theta}}$

۱۰۳۳۵ سوال ۷.۱۰۹: $y = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}}$

۱۰۳۳۶ سوال ۷.۱۱۰: $y = \sqrt{\frac{(x+1)^{10}}{(2x+1)^5}}$

۱۰۳۳۷ سوال ۷.۱۱۱: $y = \sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}}$

۱۰۳۳۸ سوال ۷.۱۱۲: $y = \sqrt[3]{\frac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}}$

۱۰۳۳۹

تکملہ

۱۰۳۴۰ سوال ۷.۱۱۳ تا سوال ۷.۱۳۰ میں تکمل حل کریں۔

۱۰۳۴۱ سوال ۷.۱۱۳: $\int_{-3}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{x}$

۱۰۳۴۲ سوال ۷.۱۱۴: $\int_{-1}^{0} \frac{3\,\mathrm{d}x}{3x-2}$

۱۰۳۴۳ سوال ۷.۱۱۵: $\int \frac{2y\,\mathrm{d}y}{y^2-25}$

۱۰۳۴۴ سوال ۷.۱۱۶: $\int \frac{8r\,\mathrm{d}r}{4r^2-5}$

۱۰۳۴۵ سوال ۷.۱۱۷: $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2-\cos t}\,\mathrm{d}t$

۱۰۳۴۶ سوال ۷.۱۱۸: $\int_0^{\pi/3} \frac{4\sin\theta}{1-4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$

۱۰۳۴۷ سوال ۷.۱۱۹: $\int_1^{2} \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۰۳۴۸ سوال ۷.۱۲۰: $\int_2^{4} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

۱۰۳۴۹ سوال ۷.۱۲۱: $\int_2^{4} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$

۱۰۳۵۰ سوال ۷.۱۲۲: $\int_2^{16} \frac{\mathrm{d}x}{2x\sqrt{\ln x}}$

۱۰۳۵۱ سوال ۷.۱۲۳: $\int \frac{3\sec^2 t}{6+3\tan t}\,\mathrm{d}t$

۱۰۳۵۲ سوال ۷.۱۲۴: $\int \frac{\sec y\tan y}{2+\sec y}\,\mathrm{d}y$

۱۰۳۵۳ سوال ۷.۱۲۵: $\int_0^{\pi/2} \tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

۱۰۳۵۴ سوال ۷.۱۲۶: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot t\,\mathrm{d}t$

۱۰۳۵۵ سوال ۷.۱۲۷: $\int_{\pi/2}^{\pi} 2\cot\frac{\theta}{3}\,\mathrm{d}\theta$

۱۰۳۵۶ سوال ۷.۱۲۸: $\int_0^{\pi/12} 6\tan 3x\,\mathrm{d}x$

سوال ۷.۱۲۹: $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}+2x}$

سوال ۷.۱۳۰: $\int \frac{\sec x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\ln(\sec x+\tan x)}}$

نظریہ اور استعمال

سوال ۷.۱۳۱: درج ذیل کی مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\ln(\cos x), \quad [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ ب. $\cos(\ln x), \quad [\frac{1}{2}, 2]$

سوال ۷.۱۳۲: (ا) ثابت کریں کہ $x > 1$ کے لیے $f(x) = x - \ln x$ بڑھتا ہے۔ (ب) $x > 1$ کی صورت میں جزو-ا استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $\ln x < x$ ہو گا۔

سوال ۷.۱۳۳: منحنی $y = \ln x$ اور $y = \ln 2x$ کے بیچ $x = 1$ تا $x = 5$ رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۷.۱۳۴: منحنی $y = \tan x$ اور محور x کے بیچ $x = -\frac{\pi}{4}$ تا $x = \frac{\pi}{3}$ رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۷.۱۳۵: ربع اول میں محددی لکیروں، منحنی $x = \frac{2}{\sqrt{y+1}}$، اور لکیر $y = 3$ کے بیچ موجود خطے کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۷.۱۳۶: منحنی $y = \sqrt{\cot x}$ اور محور x پر $x = \frac{\pi}{6}$ تا $x = \frac{\pi}{2}$ کے بیچ خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۷.۱۳۷: منحنی $y = \frac{1}{x^2}$ اور محور x پر $x = \frac{1}{2}$ تا $x = 2$ کے بیچ خطہ کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۷.۱۳۸: منحنی $y = \frac{9x}{\sqrt{x^3+9}}$ اور محور x پر $x = 0$ تا $x = 3$ کے بیچ خطہ کو صفحہ ۵۷۰ پر سوال ۶.۱۲۵ میں محور y کے گرد گھما کر 36π حجم کا جسم طواف پیدا کیا گیا۔ اگر اس خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جائے تب اس جسم کا حجم کتنا ہو گا؟

سوال ۷.۱۳۹: درج ذیل منحنیات کی لمبائیاں تلاش کریں۔

ا. $y = \frac{x^2}{8} - \ln x, \quad 4 \le x \le 8$ ب. $x = (\frac{y}{4})^2 - 2\ln(\frac{y}{4}), \quad 4 \le y \le 12$

سوال ۷.۱۴۰: ایک منحنی کی $x = 1$ تا $x = 2$ لمبائی درج ذیل ہے۔ اس منحنی کو تلاش کریں۔

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

سوال ۷.۱۴۱: (ا) منحنی $y = \frac{1}{x}$ اور محور x پر $x = 1$ تا $x = 2$ کے بیچ خطے کا وسطانی مرکز دو اعشاریہ مقامات تک تلاش کریں۔ (ب) خطے کا خاکہ بنا کر وسطانی مرکز دکھائیں۔

سوال ۷.۱۴۲: (ا) ایک پتلی چادر جس کی کثافت مستقل ہے منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ اور محور x پر $x = 1$ تا $= 16$ کے بیچ پائی جاتی ہے۔ اس چادر کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔ (ب) اگر چادر کی کثافت $\delta(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ ہو تب اس کی کمیت کا مرکز کیا ہو گا؟

سوال ۷.۱۴۳ اور سوال ۷.۱۴۴ میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسائل کو حل کریں۔

سوال ۷.۱۴۳: $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x}, \quad y(1) = 3$

سوال ۷.۱۴۴: $\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

سوال ۷.۱۴۵: نقطہ $x = 0$ پر $\ln(1+x)$ کی خط بندی کی خاطر $x = 1$ کے قریب x کی تخمین کے بجائے ہم $x = 0$ کے قریب $\ln(1+x)$ کی تخمین لیتے ہیں۔ اس طرح نسبتاً سادہ کلیہ حاصل ہوتا ہے۔ (ا) نقطہ $x = 0$ کے قریب $\ln(1+x) \approx x$ کی خط بندی کریں۔ (ب) وقفہ $[0, 0.1]$ پر $\ln(1+x)$ کے بجائے x استعمال کرنے سے پیدا خلل کو 5 اعشاریہ مقامات تک تلاش کریں۔ (ج) منحنی $y = \ln(1+x)$ اور $y = x$ کو ایک ساتھ وقفہ $[0, 0.5]$ پر ترسیم کریں۔ کس نقطہ پر خط بندی بہترین ہے؟ کمترین بہتر ہے؟ ترسیم سے خلل کی بالائی حد پڑھ کر تلاش کریں۔

سوال ۷.۱۴۶: اگرچہ چھوٹے وقفوں پر خط بندی، لوگارتھمی تفاعل کے لئے، بہترین نتائج دیتی ہے، مخصوص لوگارتھمی قیمتیں قاعدہ سمسن زیادہ بہتر دیتا ہے۔

یہ دیکھنے کی خاطر $\ln(1.2)$ اور $\ln(0.8)$ کی 5 اعشاریہ مقامات تک قیمتیں بالترتیب 0.18232 اور -0.22314 ہیں۔ ان قیمتوں کہ پہلے کلیہ $\ln(1+x) \approx x$ اور اور بعد میں $n = 2$ لیتے ہوئے قاعدہ سمسن سے حاصل کریں۔ (نتائج حیرت کن حد تک درست ہیں!)

سوال ۷.۱۴۷: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln x}$ کی قیمت تلاش کریں۔ اس نتیجہ کو عمومی بنائیں۔

سوال ۷.۱۴۸: کیا ہر نقطہ پر $y = \ln 3x$ اور $y = \ln 3x$ کے تفرق برابر ہو سکتے ہیں (تفرق لے کر دیکھیں)؟ تفاعل $y = \ln kx$ جہاں k مثبت مستقل ہے کے لیے کیا کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۷.۱۴۹: تفاعل $\ln x$ ، $\ln 2x$ ، $\ln 4x$ ، $\ln 8x$ ، اور $\ln 16x$ کو $0 < x \leq 10$ کے لیے ترسیم کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟ وجہ بیان کریں۔

سوال ۷.۱۵۰: تفاعل $y = \ln|\sin x|$ کو ترسیم کر کے کمپیوٹر کے شیشہ پر $0 \leq x \leq 22$ اور $-2 \leq y \leq 0$ کے بیچ نتائج دیکھیں۔ آپ کو کیا نظر آتا ہے؟ وجہ بیان کریں۔ ترسیم میں محاریب الٹی کرنے کے لیے تفاعل میں کیا تبدیلی کرنی ہو گی؟

سوال ۷.۱۵۱: (ا) تفاعل $y = \sin x$ اور $y = \ln(a + \sin x)$ کو $a = 2, 4, 8, 20, 50$ کے لیے ایک ساتھ $0 \leq x \leq 23$ پر ترسیم کریں۔ (ب) a کی قیمت بڑھنے سے ترسیمات افقی صورت کیوں اختیار کرتی ہیں؟ (اشارہ۔ a کے لحاظ سے $|y'|$ کی بالائی حد تلاش کریں۔)

سوال ۷.۱۵۲: کیا $y = \sqrt{x} - \ln x,\ x > 0$ کا نقطہ تصریف پایا جاتا ہے؟ اس کا جواب (ا) ترسیم اور (ب) احصاء سے دیں۔

۷.۳ قوت نمائی تفاعل

جب مقدار y کی زمانی شرح تبدیلی مقدار کی موجودہ قدر y کے راست متناسب ہو، ہمارے پاس ایسا تفاعل ہے جو درج ذیل تفرقی مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky \qquad k \text{ مستقل}$$

اگر لمحہ $t = 0$ پر $y = y_0$ ہو، یہ تفاعل قوت نمائی تفاعل $y = y_0 e^{kt}$ ہو گا۔ اس حصہ میں قوت نمائی تفاعل کی تعریف (یہ $\ln x$ کا معکوس ہے) پیش کی جائے گی اور اس کی خصوصیات پر غور کیا جائے گا، جن کی بدولت قوت نمائی تفاعل ریاضیات اور اس کے اطلاق میں کثرت سے پایا جاتا ہے (حصہ ۷.۵)۔

$\ln x$ کا معکوس اور عدد e

تفاعل $\ln x$ متغیر x کا بڑھتا تفاعل ہے۔ $\ln x$ کا دائرہ کار $(0, \infty)$ اور سعت $(-\infty, \infty)$ ہے، جبکہ اس کا معکوس $\ln^{-1} x$ ہے، جس کا دائرہ کار $(-\infty, \infty)$ اور سعت $(0, \infty)$ ہے۔ لکیر $y = x$ میں $\ln x$ کا عکس تفاعل $\ln^{-1} x$ کی ترسیم دیتا ہے۔ آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ تفاعل $\ln^{-1} x$ کے لیے

$$\lim_{x\to\infty} \ln^{-1} x = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \ln^{-1} x = 0$$

ہو گا۔ عدد $\ln^{-1} 1$ کو حرف e سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل ۷.۲۶)۔

تعریف:

$$e = \ln^{-1} 1$$

□

اگرچہ e ناطق عدد نہیں، ہم باب ۹ میں دیکھیں گے کہ درج ذیل کلیہ سے، کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے، ہم جتنے اعشاریہ تک اس کی قیمت چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

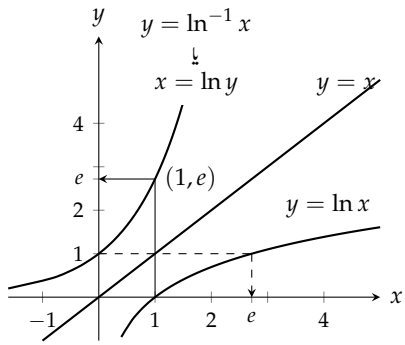
15 اعشاریہ تک e کی قیمت درج ذیل ہے۔

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045$$

تفاعل $y = e^x$

ہم معمول کی طرح e کو x کی ناطق طاقت (ذیل دیکھیں) تک لے جا سکتا ہیں۔

$$e^2 = e \cdot e, \quad e^{-2} = \frac{1}{e^2}, \quad e^{1/2} = \sqrt{e}$$



شکل ۷.۲۶: تفاعل $y \ln x$ اور تفاعل $y = \ln^{-1} x$۔ عدد e سے مراد $\ln^{-1} 1$ ہے۔

۱۰۵۲۷ چونکہ e مثبت ہے، لہٰذا e^x بھی مثبت ہو گا اور یوں e^x کا لوگارتھم بھی پایا جائے گا۔

$$\ln e^x = x \ln e = x \cdot 1 = x \tag{۱}$$

۱۰۵۲۸ چونکہ $\ln x$ یک بہ یک ہے اور $\ln(\ln^{-1} x) = x$ ہے لہٰذا مساوات ۱ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$e^x = \ln^{-1} x \qquad \text{ناطق } x \tag{۲}$$

۱۰۵۲۹ مساوات ۲ کی مدد سے e^x کی تعریف کو وسعت دے کر غیر ناطق x کو بھی شامل کیا جا سکتا ہے۔ x کی تمام قیمتوں کے لیے تفاعل $\ln^{-1} x$ معین
۱۰۵۳۰ ہے، لہٰذا ہم اس کو استعمال کرتے ہوئے e^x کو ان نقطوں پر بھی قیمت مختص کر سکتے ہیں جہاں پہلے e^x کی کوئی قیمت نہیں پائی جاتی تھی۔ اس طرح قوت نمائی
۱۰۵۳۱ تفاعل کی عالمگیر تعریف درج ذیل ہو گی۔

۱۰۵۳۲ تعریف: e^x
۱۰۵۳۳ ہر حقیقی عدد x کے لئے $e^x = \ln^{-1} x$ ہو گا۔

۱۰۵۳۴ □

۱۰۵۳۵ ایسی مساواتیں جن میں $\ln x$ اور e^x موجود ہوں

۱۰۵۳۶ چونکہ $\ln x$ اور e^x ایک دوسرے کے معکوس ہیں لہٰذا ان کی معکوس مساواتیں درج ذیل ہوں گی۔

$$e^{\ln x} = x \qquad \text{تمام } x > 0 \tag{۳}$$

$$\ln(e^x) = x, \qquad \text{تمام } x \tag{۴}$$

۱۰۵۳۷ اگلی مثال کے کچھ حصوں کو کیلکولیٹر سے حل کریں۔

۱۰۵۳۸ مثال ۷.۱۵:

۱۰۵۳۹ ا. $\ln e^2 = 2$,

۱۰۵۴۰ ب. $\ln e^{-1} = -1$,

۱۰۵۴۱ ج. $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$,

۱۰۵۴۲ د. $\ln e^{\sin x} = \sin x$,

۱۰۵۴۳ ھ. $e^{\ln 2} = 2$,

۱۰۵۴۴ و. $e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1$,

۱۰۵۴۵ ز. $e^{3\ln 2} = e^{\ln 2^3} = e^{\ln 8} = 8$ ایک طریقہ

۱۰۵۴۶ ح. $e^{3\ln 2} = (e^{\ln 2})^3 = 2^3 = 8$ دوسرا طریقہ

۱۰۵۴۷ □

۱۰۵۴۸ مثال ۷.۱۶: مساوات $\ln y = 3t + 5$ میں y تلاش کریں۔

۱۰۵۴۹ **حل**

۱۰۵۵۰ دونوں اطراف کا قوت نما لیتے ہیں۔

$$e^{\ln y} = e^{3t+5}$$

$$y = e^{3t+5} \qquad \text{مساوات ۳}$$

۱۰۵۵۱ □

۱۰۵۵۲ مثال ۷.۱۷: اگر $e^{2k} = 10$ ہو، k کتنا ہو گا؟

۱۰۵۵۳ **حل**

۱۰۵۵۴ دونوں اطراف کا قدرتی لوگارتھم لیتے ہیں۔

$$e^{2k} = 10$$

$$\ln e^{2k} = \ln 10$$

$$2k = \ln 10 \qquad \text{مساوات ۴}$$

$$k = \frac{1}{2}\ln 10$$

۱۰۵۵۵ □

۱۰۵۵۶ **قواعد قوت نما**

۱۰۵۵۷ اگرچہ e^x کی پیش کردہ تعریف $\ln^{-1} x$ گول مول سی ہے، یہ قوت نما کے الجبرائی قواعد (جدول ۷.۲) کو مطمئن کرتا ہے۔

۱۰۵۵۸ ثبوت: **برائے قاعدہ-ا** اگر درج ذیل ہوں

$$y_1 = e^{x_1}, \quad y_2 = e^{x_2}$$

جدول ۷.۲: قواعد برائے e^x کے قوت نما

تمام x ، x_1 ،اور x_2 کے لئے	
ا)	$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$
ب)	$e^{-1} = \frac{1}{e^x}$
ج)	$\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$
د)	$\left(e^{x_1}\right)^{x_2} = e^{x_1 x_2} = \left(e^{x_2}\right)^{x_1}$

۱۰۵۵۹ تب مساوات کے دونوں اطراف کے لوگارتھم لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} x_1 &= \ln y_1 \\ x_2 &= \ln y_2 \end{aligned}$$

۱۰۵۶۰ ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \ln y_1 + \ln y_2 \\ &= \ln y_1 y_2 && \text{قاعدہ ضرب} \\ e^{x_1+x_2} &= e^{\ln y_1 y_2} && \text{قوت نما} \\ &= y_1 y_2 && e^{\ln u} = u \\ &= e^{x_1} e^{x_2} \end{aligned}$$

۱۰۵۶۱ □

۱۰۵۶۲ قاعدہ-د کا ثبوت بھی اس سے ملتا جلتا ہے۔ قواعد-ب اور ج کو قاعدہ-ا سے حاصل کیا جا سکتا ہے (سوال ۷.۲۳۰)۔

۱۰۵۶۳ مثال ۷.۱۸:

$$\begin{aligned} e^{x+\ln 2} &= e^x \cdot e^{\ln 2} = 2e^x && \text{قاعدہ-ا} \\ e^{-\ln x} &= \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} && \text{قاعدہ-ب} \\ \frac{e^{2x}}{e} &= e^{2x-1} && \text{قاعدہ-ج} \\ \left(e^3\right)^x &= e^{3x} = \left(e^x\right)^3 && \text{قاعدہ-د} \end{aligned}$$

۱۰۵۶۴ □

۱۰۵۶۵ e^x کا تفرق اور تکمل

۱۰۵۶۶ قوت نمائی تفاعل ایک ایسے قابل تفرق تفاعل کا معکوس ہے جس کا تفرق کبھی بھی صفر نہیں ہوتا، لہٰذا قوت نمائی تفاعل بھی قابل تفرق ہو گا۔ $y = e^x$
۱۰۵۶۷ سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y = e^x$$

$$\ln y = x \qquad \text{دونوں اطراف لوگارتھم}$$

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \qquad \text{دونوں اطراف } x \text{ کے لحاظ سے تفرق}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^x \qquad y \text{ کی جگہ } e^x$$

۱۰۵۶۸ یوں ثابت ہوتا ہے کہ e^x کا تفرق از خود e^x ہے۔

۱۰۵۶۹ ہم حصہ ۷.۵ میں دیکھیں گے کہ یہ خاصیت صرف e^x کا مستقل مضرب تفاعل رکھتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x \tag{۵}$$

۱۰۵۷۰ مثال ۷.۱۹:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5e^x) = 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = 5e^x$$

۱۰۵۷۱ □

۱۰۵۷۲ زنجیری قاعدہ مساوات ۵ کو وسعت دے کر عمومی روپ دیتا ہے۔ اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^u = e^u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{۶}$$

۱۰۵۷۳ مثال ۷.۲۰:

(ا) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-x} = e^{-x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x) = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$ مساوات ۶ میں $u = -x$

(ب) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{\sin x} = e^{\sin x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = e^{\sin x}\cdot\cos x$ مساوات ۶ میں $u = \sin x$

۱۰۵۷۴ □

۱۰۵۷۵ مساوات ۶ کا تکملی مساوی درج ذیل ہے جہاں C مستقل ہے۔

$$\int e^u \, \mathrm{d}u = e^u + C$$

۱۰۵۷۶ مثال ۷.۲۱:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} e^{3x} \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\ln 8} e^u \cdot \frac{1}{3} \, \mathrm{d}u \qquad\qquad u = 3x \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{\ln 8} e^u \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{3} e^u \Big|_0^{\ln 8} \\
&= \frac{1}{3}[8-1] = \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

۱۰۵۷۷ □

۱۰۵۷۸ مثال ۷.۲۲:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x \, \mathrm{d}x &= e^{\sin x} \Big|_0^{\pi/2} \qquad\qquad \text{مثال ۷.۲۰} \\
&= e^1 - e^0 = e - 1
\end{aligned}$$

۱۰۵۷۹ □

۱۰۵۸۰ مثال ۷.۲۳: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$e^y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x, \quad x > \sqrt{3}, \quad y(2) = 0$$

۱۰۵۸۱ **حل**

۱۰۵۸۲ ہم دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔

$$e^y = x^2 + C$$

۱۰۵۸۳ ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مستقل C دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
C &= e^0 - (2)^2 \\
&= 1 - 4 = -3
\end{aligned}$$

۱۰۵۸۴ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$e^y = x^2 - 3 \tag{۷}$$

۱۰۵۸۵ y تلاش کرنے کی خاطر ہم دونوں اطراف کا لوگارتھم لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \ln e^y &= \ln(x^2 - 3) \\ y &= \ln(x^2 - 3) \end{aligned} \tag{۸}$$

۱۰۵۸۶ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $x > \sqrt{3}$ کے لیے حل درست ہے۔

۱۰۵۸۷ تفرقی مساوات میں حل کو پُر کر کے تصدیق کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ مساوات ۷ اور مساوات ۸ کو تفرقی مساوات میں پُر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} e^y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= e^y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 - 3) \\ &= e^y \frac{2x}{x^2 - 3} \\ &= (x^2 - 3)\frac{2x}{x^2 - 3} \\ &= 2x \end{aligned}$$

۱۰۵۸۸ یوں تفرقی مساوات کو حاصل کیا گیا حل مطمئن کرتا ہے۔ □

۱۰۵۸۹ **سوالات**

۱۰۵۹۰ **قوت نما اور لوگارتھم کے ساتھ الجبرائی حساب**

۱۰۵۹۱ سوال ۷.۱۵۳ تا سوال ۷.۱۵۶ میں سادہ صورت دریافت کریں۔

۱۰۵۹۲ سوال ۷.۱۵۳: (ا) $e^{\ln 7.2}$، (ب) $e^{-\ln x^2}$، (ج) $e^{\ln x - \ln y}$

۱۰۵۹۳ سوال ۷.۱۵۴: (ا) $e^{\ln(x^2+y^2)}$، (ب) $e^{-\ln 0.3}$، (ج) $e^{\ln \pi x - \ln 2}$

۱۰۵۹۴ سوال ۷.۱۵۵: (ا) $2\ln\sqrt{e}$، (ب) $\ln(\ln e^e)$، (ج) $\ln(e^{-x^2-y^2})$

۱۰۵۹۵ سوال ۷.۱۵۶: (ا) $\ln(e^{\sec\theta})$، (ب) $\ln(e^{(e^x)})$، (ج) $\ln(e^{2\ln x})$

۱۰۵۹۶ **لوگارتھم یا قوت نمائی اجزاء والے مساوات کا حل**

۱۰۵۹۷ سوال ۷.۱۵۷ تا سوال ۷.۱۶۲ میں t یا x (جیسا موزوں ہو) کے لحاظ سے y کے لیے حل کریں۔

۱۰۵۹۸ سوال ۷.۱۵۷: $\ln y = 2t + 4$

۱۰۵۹۹ سوال ۷.۱۵۸: $\ln y = -t + 5$

۱۰۶۰۰ سوال ۷.۱۵۹: $\ln(y-40)=5t$

۱۰۶۰۱ سوال ۷.۱۶۰: $\ln(1-2y)=t$

۱۰۶۰۲ سوال ۷.۱۶۱: $\ln(y-1)-\ln 2=x+\ln x$

۱۰۶۰۳ سوال ۷.۱۶۲: $\ln(y^2-1)-\ln(y+1)=\ln(\sin x)$

۱۰۶۰۴ سوال ۷.۱۶۳ اور سوال ۷.۱۶۴ کو k کے لیے حل کریں۔

۱۰۶۰۵ سوال ۷.۱۶۳: (ا) $e^{2k}=4$، (ب) $100e^{10k}=200$، (ج) $e^{k/1000}=a$

۱۰۶۰۶ سوال ۷.۱۶۴: (ا) $e^{5k}=\frac{1}{4}$، (ب) $80e^{k}=1$،

۱۰۶۰۷ (ج) $e^{(\ln 0.8)k}=0.8$

۱۰۶۰۸ سوال ۷.۱۶۵ تا سوال ۷.۱۶۸ کو t کے لیے حل کریں۔

۱۰۶۰۹ سوال ۷.۱۶۵: (ا) $e^{-0.3t}=27$، (ب) $e^{kt}=\frac{1}{2}$، (ج) $e^{(\ln 0.2)t}=0.4$

۱۰۶۱۰ سوال ۷.۱۶۶: (ا) $e^{-0.01t}=1000$، (ب) $e^{kt}=\frac{1}{10}$، (ج) $e^{(\ln 2)t}=\frac{1}{2}$

۱۰۶۱۱ سوال ۷.۱۶۷: $e^{\sqrt{t}}=x^2$

۱۰۶۱۲ سوال ۷.۱۶۸: $e^{(x^2)}e(2x+1)=e^t$

۱۰۶۱۳ **تفارق**

۱۰۶۱۴ سوال ۷.۱۶۹ تا سوال ۷.۱۸۸ میں x ، t ، یا θ (جیسا موزوں ہو) کے لحاظ سے y کا تفرق تلاش کریں۔

۱۰۶۱۵ سوال ۷.۱۶۹: $y=e^{-5x}$

۱۰۶۱۶ سوال ۷.۱۷۰: $y=e^{2x/3}$

۱۰۶۱۷ سوال ۷.۱۷۱: $y=e^{5-7x}$

۱۰۶۱۸ سوال ۷.۱۷۲: $y=e^{4\sqrt{x}+x^2}$

۱۰۶۱۹ سوال ۷.۱۷۳: $y=xe^x-e^x$

۱۰۶۲۰ سوال ۷.۱۷۴: $y=(1+2x)e^{-2x}$

۱۰۶۲۱ سوال ۷.۱۷۵: $y=(x^2-2x+2)e^x$

۱۰۶۲۲ سوال ۷.۱۷۶: $y=(9x^2-6x+2)e^{3x}$

۱۰۶۲۳ سوال ۷.۱۷۷: $y=e^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)$

۱۰۶۲۴ سوال ۷.۱۷۸: $y=\ln(3\theta e^{-\theta})$

۱۰۶۲۵ سوال ۷.۱۷۹: $y=\cos(e^{-\theta^2})$

۱۰۶۲۶ سوال ۷.۱۸۰: $y=\theta^3e^{-2\theta}\cos 5\theta$

۱۰۶۲۷ سوال ۷.۱۸۱: $y=\ln(3te^{-t})$

۱۰۲۸ سوال ۷.۱۸۲: $y = \ln(2e^{-t}\sin t)$

۱۰۲۹ سوال ۷.۱۸۳: $y = \ln\left(\frac{e^{\theta}}{1+e^{\theta}}\right)$

۱۰۳۰ سوال ۷.۱۸۴: $y = \ln\left(\frac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}}\right)$

۱۰۳۱ سوال ۷.۱۸۵: $y = e^{(\cos t + \ln t)}$

۱۰۳۲ سوال ۷.۱۸۶: $y = e^{\sin t}(\ln t^2 + 1)$

۱۰۳۳ سوال ۷.۱۸۷: $y = \int_0^{\ln x} \sin e^t \, \mathrm{d}t$

۱۰۳۴ سوال ۷.۱۸۸: $y = \int_{e^4\sqrt{x}}^{e^{2x}} \ln t \, \mathrm{d}t$

۱۰۳۵ سوال ۷.۱۸۹ تا سوال ۷.۱۹۲ میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

۱۰۳۶ سوال ۷.۱۸۹: $\ln y = e^y \sin x$

۱۰۳۷ سوال ۷.۱۹۰: $\ln xy = e^{x+y}$

۱۰۳۸ سوال ۷.۱۹۱: $e^{2x} = \sin(x+3y)$

۱۰۳۹ سوال ۷.۱۹۲: $\tan y = e^x + \ln x$

۱۰۴۰ **تکملات**

۱۰۴۱ سوال ۷.۱۹۳ تا سوال ۷.۲۱۴ میں تکمل حل کریں۔

۱۰۴۲ سوال ۷.۱۹۳: $\int (e^{ex} + 5e^{-x}) \, \mathrm{d}x$

۱۰۴۳ سوال ۷.۱۹۴: $\int (2e^x - 3e^{-2x}) \, \mathrm{d}x$

۱۰۴۴ سوال ۷.۱۹۵: $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x \, \mathrm{d}x$

۱۰۴۵ سوال ۷.۱۹۶: $\int_{-\ln 2}^{0} e^{-x} \, \mathrm{d}x$

۱۰۴۶ سوال ۷.۱۹۷: $\int 8e^{(x+1)} \, \mathrm{d}x$

۱۰۴۷ سوال ۷.۱۹۸: $\int 2e^{2x-1} \, \mathrm{d}x$

۱۰۴۸ سوال ۷.۱۹۹: $\int_{\ln 4}^{\ln 9} e^{x/2} \, \mathrm{d}x$

۱۰۴۹ سوال ۷.۲۰۰: $\int_0^{\ln 16} e^{x/4} \, \mathrm{d}x$

۱۰۵۰ سوال ۷.۲۰۱: $\int \frac{e^{\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} \, \mathrm{d}r$

۱۰۵۱ سوال ۷.۲۰۲: $\int \frac{e^{-\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} \, \mathrm{d}r$

۱۰۵۲ سوال ۷.۲۰۳: $\int 2te^{-t^2} \, \mathrm{d}t$

۱۰۶۵۳ سوال ۷.۲۰۴: $\int t^3 e^{t^4}\,\mathrm{d}t$

۱۰۶۵۴ سوال ۷.۲۰۵: $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

۱۰۶۵۵ سوال ۷.۲۰۶: $\int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\,\mathrm{d}x$

۱۰۶۵۶ سوال ۷.۲۰۷: $\int_0^{\pi/4} (1+e^{\tan\theta})\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$

۱۰۶۵۷ سوال ۷.۲۰۸: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1+e^{\cot\theta})\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta$

۱۰۶۵۸ سوال ۷.۲۰۹: $\int e^{\sec\pi t}\sec\pi t\tan\pi t\,\mathrm{d}t$

۱۰۶۵۹ سوال ۷.۲۱۰: $\int e^{\csc(\pi+t)}\csc(\pi+t)\cot(\pi+t)\,\mathrm{d}t$

۱۰۶۶۰ سوال ۷.۲۱۱: $\int_{\ln(\pi/6)}^{\ln(\pi/2)} 2e^y\cos e^y\,\mathrm{d}y$

۱۰۶۶۱ سوال ۷.۲۱۲: $\int_0^{\sqrt{\ln\pi}} 2xe^{x^2}\cos(e^{x^2})\,\mathrm{d}x$

۱۰۶۶۲ سوال ۷.۲۱۳: $\int \frac{e^r}{1+e^r}\,\mathrm{d}r$

۱۰۶۶۳ سوال ۷.۲۱۴: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$

۱۰۶۶۴ **ابتدائی قیمت مسائل**

۱۰۶۶۵ سوال ۷.۲۱۵ تا سوال ۷.۲۱۸ میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

۱۰۶۶۶ سوال ۷.۲۱۵: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^t\sin(e^t-2), \quad y(\ln 2)=0$

۱۰۶۶۷ سوال ۷.۲۱۶: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = e^{-t}\sec^2(\pi e^{-t}), \quad y(\ln 4)=\frac{2}{\pi}$

۱۰۶۶۸ سوال ۷.۲۱۷: $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} = 2e^{-x}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0$

۱۰۶۶۹ سوال ۷.۲۱۸: $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = 1-e^{2t}, \quad y(1)=-1, \quad y'(1)=0$

۱۰۶۷۰ **نظریہ اور استعمال**

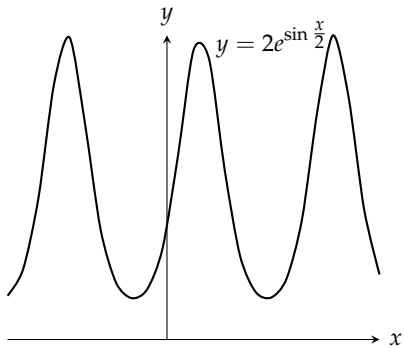
۱۰۶۷۱ سوال ۷.۲۱۹: وقفہ $[0,1]$ پر $f(x)=e^x-2x$ کی مطلق اعظم قیمت اور مطلق اقل قیمت تلاش کریں۔

۱۰۶۷۲ سوال ۷.۲۲۰: تفاعل $f(x)=2e^{\sin\frac{x}{2}}$ کی مطلق انتہا قیمتیں کیا اور کہاں ہیں (شکل ۷.۲۷)۔

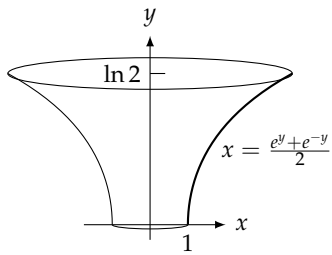
۱۰۶۷۳ سوال ۷.۲۲۱: تفاعل $f(x)=x^2\ln\frac{1}{x}$ کی مطلق اعظم قیمت تلاش کریں۔ یہ قیمت کہاں پائی جاتی ہے۔

۱۰۶۷۴ سوال ۷.۲۲۲: تفاعل $f(x)=(x-3)^2e^x$ اور اس کا یک رتبی تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے f

۱۰۶۷۵ کے رویے پر تبصرہ کریں۔ احصاء کی مدد سے ترسیم پر نمایاں نقطوں کی نشاندہی کریں۔



شکل ۷.۲۷: ترسیم برائے سوال ۷.۲۲۰



شکل ۷.۲۸: برائے سوال ۷.۲۲۶

سوال ۷.۲۲۳: ربع اول میں بالائی جانب قوس $y = e^{2x}$، نچلی جانب قوس $y = e^x$، اور دائیں جانب لکیر $x = \ln 3$ میں محیط تکونی رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۷.۲۲۴: ربع اول میں بالائی جانب قوس $y = e^{x/2}$، نچلی جانب قوس $y = e^{-x/2}$، اور دائیں جانب لکیر $x = 2\ln 2$ میں محیط تکونی رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۷.۲۲۵: مستوی xy میں مبدا سے گزرتی وہ قوس تلاش کریں جس کی لمبائی $x = 0$ سے $x = 1$ تک $L =$ $\int_0^1 \sqrt{1+\frac{e^x}{4}}\,\mathrm{d}x$ ہے۔

سوال ۷.۲۲۶: منحنی $x = \frac{e^y+e^{-y}}{2}, 0 \le y \le \ln 2$ کو محور y کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کی جاتی ہے (شکل ۷.۲۸)۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۷.۲۲۷: (ا) دکھائیں $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$ ہوگا۔ (ب) وقفہ $[1,e]$ پر $\ln x$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال ۷.۲۲۸: وقفہ $[1,2]$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال ۷.۲۲۹: نقطہ $x = 0$ پر e^x کی خط بندی

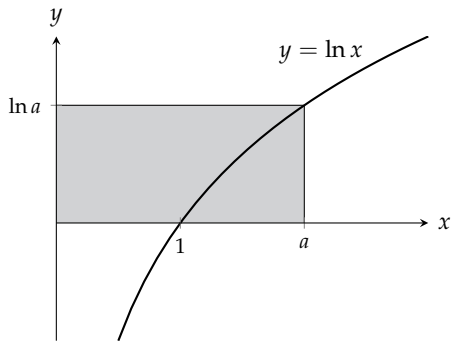
ا. نقطہ $x = 0$ پر خط بندی $e^x \approx 1 + x$ حاصل کریں۔

ب. وقفہ $[0, 0.2]$ پر e^x کی جگہ $1 + x$ استعمال کرنے سے پیدا خلل کو 5 اعشاریہ مقامات تک تلاش کریں۔

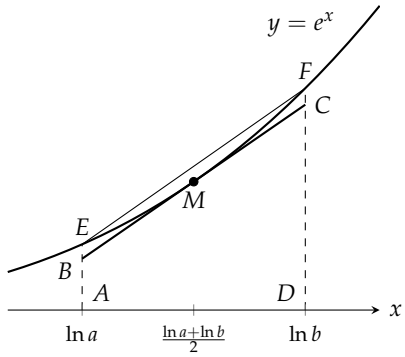
ج. وقفہ $-2 \le x \le 2$ پر e^x اور $1 + x$ کو ایک ساتھ کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ کس وقفہ پر تخمین زیادہ قیمت دیتی ہے؟ کم قیمت دیتی ہے؟

سوال ۷.۲۳۰: قواعد قوت نما

ا. مساوات $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ جس کو اس حصہ میں حاصل کیا گیا، سے شروع کر کے دکھائیں کہ کسی بھی حقیقی عدد x کے لیے $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ہوگا۔ اس کے بعد کسی بھی دو اعداد x_1 اور x_2 کے لیے دکھائیں کہ $\frac{e_{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$ ہوگا۔



شکل ۷.۲۹: ترسیم برائے سوال ۷.۲۳۳



شکل ۷.۳۰: ترسیم برائے سوال ۷.۲۳۴

۱۰۶۹۵ ب. کسی بھی دو اعداد x_1 اور x_2 کے لیے دکھائیں کہ $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$ ہوگا۔

۱۰۶۹۶ سوال ۷.۲۳۱: e کا اعشاری اظہار

۱۰۶۹۷ مساوات $\ln x = 1$ کو حل کرتے ہوئے e کی قیمت اتنے اعشاریہ مقامات تک تلاش کریں جتنے تک آپ کا کیلکولیٹر استعمال کرتے ہوئے ممکن ہو۔

۱۰۶۹۸ سوال ۷.۲۳۲: $\ln x$ اور e^x کے مابین معکوس تعلق

۱۰۶۹۹ کیلکولیٹر استعمال کرتے ہوئے مرکبات $e^{\ln x}$ اور $\ln(e^x)$ کی قیمت تلاش کریں۔

۱۰۷۰۰ سوال ۷.۲۳۳: دکھائیں کہ کسی بھی عدد $a > 1$ کے لیے درج ذیل ہوگا (شکل ۷.۲۹)۔

$$\int_1 6a \ln x \, \mathrm{d}x + \int_0^{\ln a} e^y \, \mathrm{d}y = a \ln a$$

۱۰۷۰۱ سوال ۷.۲۳۴: تکونیاتی، لوگارتھمی، اور حسابی اوسط عدم مساوات

۱۰۷۰۲

۱۰۷۰۳ ا. دکھائیں کہ x کے ہر وقفہ پر e^x کی ترسیم اوپر کو مقعر ہے۔

۱۰۷۰۴ ب. اگر $0 < a < b$ ہو تب دکھائیں کہ درج ذیل ہوگا (شکل ۷.۳۰)۔

$$e^{(\ln a + \ln b)/2} \cdot (\ln b - \ln a) < \int_{\ln a}^{\ln b} e^x \, \mathrm{d}x < \frac{e^{\ln a} + e^{\ln b}}{2} \cdot (\ln b - \ln a)$$

۱۰۷۰۵ ج. جزو-ب کی عدم مساوات کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی تصدیق کریں۔

$$\sqrt{ab} < \frac{b-1}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$$

۱۰۷۰۶ یہ عدم مساوات کہتی ہے کہ دو مثبت اعداد کی ہندسی اوسط ان کی لوگارتھمی اوسط سے کم ہوگی جو از خود ان کی حسابی اوسط سے کم ہوگی۔

۷.۴ a^x اور $\log_a x$

اب تک، ماسوائے e کے، ہم نے مثبت اعداد کو غیر ناطق طاقت دینا نہیں سیکھا۔ قوت نمائی تفاعل کی تعریف $e^x = \ln^{-1} x$، متغیر x کی تمام حقیقی قیمتوں، ناطق اور غیر ناطق، کے لیے درست ہے۔ اس حصہ میں ہم اس تعریف کو استعمال کر کے کسی بھی مثبت عدد کو کسی بھی ناطق یا غیر ناطق کی طاقت دینا سیکھ کر مثبت عدد a کے لیے قوت نمائی تفاعل $y = a^x$ کی تعریف پیش کریں گے۔ اس کے ساتھ ساتھ ہم تفرق کے طاقتی قاعدہ کو حتمی شکل دیں گے (جو تمام قوت نما کے لیے درست ہو گا) اور ایک تفاعل کو دوسرے تفاعل کی طاقت دیں گے مثلاً x^x اور $(\sin x)^{\tan x}$، وغیرہ۔

جیسا کہ e^x بہت سارے قوت نما تفاعل میں سے ایک ہے، اسی طرح $\ln x$ بھی بہت سارے لوگارتھمی تفاعل، جو تفاعل a^x کے معکوس ہیں، میں سے ایک ہے۔

تفاعل a^x

چونکہ کسی بھی مثبت عدد a کے لیے $a = e^{\ln a}$ ہوتا ہے، لہٰذا ہم a^x کو $(e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$ تصور کر سکتے ہیں۔ یوں ہم درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں۔

تعریف: کسی بھی عدد $a > 0$ اور عدد x کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$a^x = e^{x \ln a} \tag{۱}$$

□

مثال ۷.۲۴:

$$\text{(ا)} \quad 2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 2}$$
$$\text{(ب)} \quad 2^{\pi} = e^{\pi \ln 2}$$

□

تفاعل a^x قوت نما کے عمومی قواعد، جنہیں جدول ۷.۳ میں پیش کیا گیا ہے، کو مطمئن کرتا ہے۔ ہم ان قواعد کے ثبوت پیش نہیں کریں گے۔

جدول ۷.۳: قواعد برائے قوت نما

$a > 0$ ہے جبکہ x اور y کوئی بھی اعداد ہو سکتے ہیں	
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	ا)
$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	ب)
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	ج)
$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$	د)

۱۰۷۲۴ **قاعدہ طاقت (حتمی روپ)**

۱۰۷۲۵ ہم اب کسی بھی $x > 0$ اور حقیقی عدد n کے لئے x^n کی تعریف $x^n = e^{n \ln x}$ لے سکتے ہیں۔ یوں مساوات $\ln x^n = n \ln x$ میں
۱۰۷۲۶ n کا ناطق ہونا ضروری نہیں؛ جب تک $x > 0$ ہو یہ کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔ ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \ln x^n &= \ln(e^{n \ln x}) = n \ln x \cdot \ln e && \text{چونکہ } \ln e^u = u \\ &= n \ln x \end{aligned}$$

۱۰۷۲۷ قاعدہ $a^x/a^y = a^{x-y}$ اور تعریف $x^n = e^{n \ln x}$ مل کر ہمیں قاعدہ طاقت کے تفرق کا حتمی روپ طے کرنے کے قابل بناتے ہیں۔ ہم x^n
۱۰۷۲۸ کا x کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{n \ln x} && x^n,\ x > 0 \text{ کی تعریف} \\ &= e^{n \ln x} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \ln x) && e^u \text{ کے لئے زنجیری قاعدہ} \\ &= x^n \cdot \frac{n}{x} && \text{دوبارہ تعریف} \\ &= n x^{n-1} && \text{جدول ۷.۳ قاعدہ-ج} \end{aligned}$$

۱۰۷۲۹ مختصراً، جب تک $x > 0$ ہو درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = n x^{n-1}$$

۱۰۷۳۰ زنجیری قاعدہ اس مساوات کو وسعت دے کر طاقتی قاعدے کا حتمی روپ دیتا ہے۔

۱۰۷۳۱ **طاقتی قاعدہ (حتمی روپ)**

۱۰۷۳۲ اگر n حقیقی عدد ہو اور u متغیر x کا مثبت قابل تفرق تفاعل ہو، تب u^n متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u^n = nu^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

۱۰۷۳۳ مثال ۷.۲۵:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1} \quad (x > 0) \qquad \text{ا)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)^{\pi} = \pi(\sin x)^{\pi-1}\cos x \quad (\sin x > 0) \qquad \text{ب)}$$

۱۰۷۳۴ □

۱۰۷۳۵ a^x کا تفرق

۱۰۷۳۶ ہم تعریف $a^x = e^{x\ln a}$ سے آغاز کر کے تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x\ln a} = e^{x\ln a}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ln a) \qquad \text{زنجیری قاعدہ}\\ &= a^x\ln a\end{aligned}$$

۱۰۷۳۷ اگر $a > 0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = a^x\ln a$$

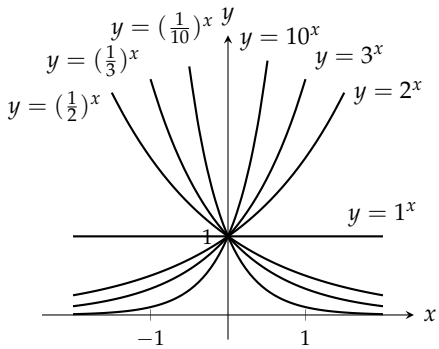
۱۰۷۳۸ زنجیری قاعدہ سے درج ذیل زیادہ عمومی روپ حاصل ہو گا۔

۱۰۷۳۹ اگر $a > 0$ ہو اور u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو، تب a^u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^u = a^u\ln a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \qquad (۲)$$

۱۰۷۴۰ مساوات ۲ دکھاتی ہے کیوں e^x احصاء میں پسندیدہ قوت نمائی تفاعل ہے۔ اگر $a = e$ ہو تب $\ln a = 1$ ہو گا اور مساوات ۲ درج ذیل سادہ صورت
۱۰۷۴۱ اختیار کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x\ln e = e^x$$



شکل ۷.۳۱: قوت نمائی تفاعل کی ترسیم اوپر کو مقعر ہو گی۔

۱۰۷۴۲ مثال ۷.۲۶:

ا) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}3^x = 3^x \ln 3$$

ب) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}3^{-x} = 3^{-x} \ln 3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x) = -3^{-x} \ln 3$$

ج) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}3^{3\sin x} = 3^{\sin x} \ln 3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = 3^{\sin x}(\ln 3)\cos x$$

۱۰۷۴۳ □

۱۰۷۴۴ ہم مساوات ۲ سے دیکھتے ہیں کہ $\ln a > 0$ یعنی $a > 1$ کی صورت میں a^x کا تفرق مثبت ہو گا جبکہ $\ln a < 0$ یعنی $0 < a < 1$ کی
۱۰۷۴۵ صورت میں a^x کا تفرق منفی ہو گا۔ دونوں میں a^x یک بہ یک ہے۔ دہرا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(a^x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x \ln a) = (\ln a)^2 a^x$$

۱۰۷۴۶ تمام x کے لئے مثبت ہے، لہٰذا حقیقی اعداد کی لکیر پر a^x کی ترسیم اوپر کی طرف مقعر ہو گی (شکل ۷.۳۱)۔

۱۰۷۴۷ دیگر طاقتی تفاعل

۱۰۷۴۸ مثبت اعداد کو من مانی حقیقی طاقت تک اٹھانے کی صلاحیت ہمیں $x > 0$ کے لئے x^x اور $x^{\ln x}$ جیسے تفاعلات کی تعریف پیش کرنے کے قابل بناتی
۱۰۷۴۹ ہے۔ ایسے تفاعلات کا تفرق حاصل کرنے کے لئے ہم تفاعل کو e کی طاقت لکھتے ہیں۔

۱۰۷۵۰ مثال ۷.۲۷: اگر $y = x^x,\ x > 0$ ہو، $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ تلاش کریں۔

۱۰۷۵۱ **حل**

۱۰۷۵۲ تفاعل x^x کو e کی طاقت لکھیں۔

$$y = x^x = e^{x \ln x}$$ مساوات ۱ میں $a = x$ ہے

۱۰۷۵۳ اب سادہ تفرق لیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}c} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x \ln x} \\ &= e^{x \ln x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \ln x) \\ &= x^x \left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x\right) \\ &= x^x (1 + \ln x)\end{aligned}$$

۱۰۷۵۴ □

۱۰۷۵۵ a^u کا تکمل

۱۰۷۵۶ اگر $a \neq 1$ ہو، $\ln a \neq 0$ ہو گا، اور ہم مساوات ۲ کے دونوں اطراف $\ln a$ سے تقسیم کر سکتے ہیں۔ ایسا کر کے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$a^u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\ln a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^u)$$

۱۰۷۵۷ متغیر x کے لحاظ سے تکمل کرتے ہیں۔

$$\int a^u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^u)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^u)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} a^u + C$$

۱۰۷۵۸ بائیں ہاتھ پہلے تکمل کو تفرقی روپ میں لکھ کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

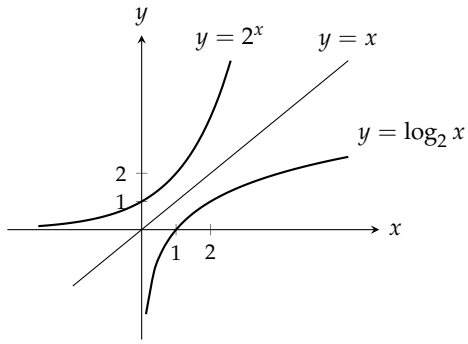
$$\int a^u\,\mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln a} + C \tag{۳}$$

۱۰۷۵۹ مثال ۷.۲۸:

$$\int 2^x\,\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$ مساوات ۳ میں $a = 2,\ u = x$ ہیں

$$\begin{aligned}\int 2^{\sin x} \cos x\,\mathrm{d}x &= \int 2^u\,\mathrm{d}u = \frac{2^u}{\ln u} + C \\ &= \frac{2^{\sin x}}{\ln 2} + C\end{aligned}$$ مساوات ۳ میں $u = \sin x$ ہے

۱۰۷۶۰ □



شکل ۷.۳۲: تفاعل 2^x اور اس کے معکوس $\log_2 x$ کی ترسیمات۔

۱۰۷۶۱ **اساس a کا لوگارتھم**

۱۰۷۶۲ جیسا ہم دیکھ چکے ہیں، اگر a ماسوائے 1 کوئی مثبت عدد ہو، تب تفاعل a^x یک بہ یک ہو گا، اور ہر نقطے پر اس کا تفرق غیر صفر ہو گا۔ یوں اس کا قابل تفرق

۱۰۷۶۳ معکوس بھی ہو گا۔ ہم x کے اساس a لوگارتھم کو $\log_a x$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

۱۰۷۶۴ تعریف: کسی بھی مثبت عدد $a \neq 1$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\log_a x = \text{معکوس } a^x$$

۱۰۷۶۵ □

۱۰۷۶۶ تفاعل $y = a^x$ کی ترسیم کا لکیر $y = x$ کی دوسری طرف عکس سے $y = \log_a x$ کی ترسیم حاصل کی جا سکتی ہے (شکل ۷.۳۲)۔

۱۰۷۶۷ چونکہ $\log_a x$ اور a^x ایک دوسرے کے معکوس ہیں لہٰذا درج ذیل مماثل تفاعل ہوں گے۔

۱۰۷۶۸ **a^x اور $\log_a x$ کی معکوس مساواتیں**

$$a^{\log_a x} = x \quad (x > 0) \tag{۴}$$

$$\log_a(a^x) = x \quad (\text{تمام } x) \tag{۵}$$

۱۰۷۶۹ مثال ۷.۲۹:

ا) $\log_2(2^5) = 5$

ب) $2^{\log_2(3)} = 3$

ج) $\log_{10}(10^{-7}) = -7$

د) $10^{\log_{10}(4)} = 4$

جدول ۷.۴: اساس a لوگارتھم کے خواص

		کسی بھی اعداد $x > 0$ اور $y > 0$ کے لئے
ا)	قاعدہ ضرب	$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
ب)	قاعدہ حاصل تقسیم	$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
ج)	قاعدہ مقلوب	$\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$
د)	قاعدہ طاقت	$\log_a x^y = y \log_a x$

۱۰۷۷۰ □

۱۰۷۷۱ $\log_a x$ کی قیمت کا حصول

۱۰۷۷۲ تفاعل $\log_a x$ کی قیمت تلاش کرتے وقت یاد رکھیں یہ تفاعل $\ln x$ کا مضرب ہے۔

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\ln a} \tag{۶}$$

۱۰۷۷۳ ہم مساوات ۶ کو مساوات ۴ سے اخذ کر سکتے ہیں۔

مساوات ۴	$a^{\log_a(x)} = x$
دونوں اطراف قدرتی لوگارتھم لیں	$\ln a^{\log_a(x)} = \ln x$
جدول ۷.۱ میں قاعدہ طاقت	$\log_a(x) \cdot \ln a = \ln x$
$\log_a x$ کے لئے حل کریں	$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

۱۰۷۷۴ مثال ۷.۳۰:

$$\log_{10} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10} \approx \frac{0.69315}{2.30259} \approx 0.30103$$

۱۰۷۷۵ □

۱۰۷۷۶ تفاعل $\log_a x$ کے ریاضیاتی خواص (جدول ۷.۴) وہی ہیں جو $\ln x$ کے ہیں۔ قدرتی لوگارتھم کے مطابق خواص کو $\ln a$ سے تقسیم کر کے انہیں اخذ
۱۰۷۷۷ کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل ہو گا۔

$$\ln xy = \ln x + \ln y \qquad \text{قدرتی لوگارتھم کا قاعدہ طاقت}$$

$$\frac{\ln xy}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} \qquad \ln a \text{ سے تقسیم}$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad \text{اساس } a \text{ کے لوگارتھم کا قاعدہ طاقت}$$

۱۰۷۷۸ $\log_a u$ کا تفرق

۱۰۷۷۹ اساس a کے لوگارتھم کا تفرق حاصل کرنے کی خاطر ہم اس کو پہلے قدرتی لوگارتھم کی صورت میں لکھتے ہیں۔ اگر u متغیر x کا مثبت قابل تفرق تفاعل ہو
۱۰۷۸۰ تب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log_a u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

۱۰۷۸۱ یعنی

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log_a u) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{۷}$$

۱۰۷۸۲ ہو گا۔

۱۰۷۸۳ مثال ۷.۳۱:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_{10}(3x+1) = \frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{3x+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x+1) = \frac{3}{(\ln 10)(3x+1)}$$

۱۰۷۸۴ □

۱۰۷۸۵ تکمل جہاں $\log_a x$ پایا جاتا ہو

۱۰۷۸۶ جب اساس a کا لوگارتھم پایا جاتا ہو تب تکمل لیتے ہوئے ہم اس کو پہلے قدرتی لوگارتھم کی صورت میں بدلتے ہیں۔

۱۰۷۸۷ مثال ۷.۳۲:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\log_2 x}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x && \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}\\
&= \frac{1}{\ln 2}\int u\,\mathrm{d}u && u = \ln x\\
&= \frac{1}{\ln 2}\frac{u^2}{2} + C\\
&= \frac{1}{\ln 2}\frac{(\ln x)^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2\ln 2} + C
\end{aligned}$$

□

اساس 10 کا لوگارتھم

اساس 10 کا لوگارتھم جس کو **عام لوگارتھم**[8] کہتے ہیں کئی سائنسی کلیات میں پایا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر زلزلہ کی شدت کو عموماً اساس 10 کے لوگارتھمی[9] **رکٹر پیمائش**[10] میں پیش جاتا ہے۔ رکٹر پیما کا کلیہ

$$\text{شدت } R = \log_{10}\left(\frac{a}{T}\right) + B$$

ہے جہاں زلزلہ پیما کے مقام پر زمینی لرزش کا حیطہ a ہے جس کو مائیکرو میٹر میں ناپا جاتا ہے، زلزلہ کی موج کا دوری عرصہ T ہے جس کو سیکنڈ میں ناپا جاتا ہے جبکہ B ایک تجربی جزو ہے جو مرکز زلزلہ اور زلزلہ پیما کے بیچ شدت کی کمی کو ظاہر کرتا ہے۔

جاپان کے شہر ناگاساکی پر گرائے گئے ایٹمی بم میں 1.34×10^{14} J توانائی تھی جو رکٹر پیما پر 5 کے برابر ہے۔ آج تک سب سے بڑا ایٹمی دھماکہ 7.1 شدت کا تھا جس میں 2.09×10^{17} J توانائی تھی۔ اکتوبر 8 ۲۰۰۵ کو آزاد کشمیر میں 7.6 شدت کا زلزلہ آیا جس میں 1.585×10^{16} J توانائی تھی۔

مثال ۷.۳۳: مرکز زلزلہ سے زلزلہ پیما تک فاصلہ 10 000 km ہے جس کے لیے $B = 6.8$ ہو گا۔ مقام زلزلہ پیما پر زمین کی انتصابی حرکت 10 μm اور دوری عرصہ 1 s ہیں۔ زلزلہ کی شدت تلاش کریں۔

حل

$$R = \log_{10}\left(\frac{10}{1}\right) + 6.8 = 1 + 6.8 = 7.8$$

□

محلول کی تیزابیت کو pH (**طاقت ہائیڈروجن**) میں ناپا جاتا ہے جو اساس 10 کا لوگارتھمی پیمانہ[11] ہے۔ محلول میں ہائیڈرونیم برق پارہ $[H_3O^+]$ کے گھناپن کے بالعکس کا عام لوگارتھم اس محلول کی pH قیمت ہو گی:

$$\text{pH} = \log_{10}\frac{1}{[H_3O^+]} = -\log_{10}[H_3O^+]$$

ہائیڈرونیم برق پارہ کے گھناپن کو مول فی لٹر (mol L^{-1}) میں ناپا جاتا ہے۔ تیزاب کی pH قیمت 7 سے کم جبکہ القلی کی 7 سے زیادہ ہوتی ہے۔ سرکہ کی pH قیمت 3 جبکہ مقطر پانی کی pH قیمت 7 ہوتی ہے۔ pH کا پیمانہ 0 سے 14 تک ہوتا ہے۔ جدول ۷.۵ میں کئی اجزاء کی pH دی گئی ہے۔

---

[8] commonlogarithm

[9] رکٹر پیمائش میں اکائی کا اضافہ حیطہ میں تقریباً 10 گنا اور توانائی میں تقریباً 31.623 گنا کا اضافہ ظاہر کرتا ہے۔

[10] Richterscale

[11] pH کی جدید تعریف کے تحت اس کو "منفی قوہ ہائیڈروجن" کہنا زیادہ بہتر ہو گا۔

جدول ۷.۵: عمومی خوراک کی $\mathrm{pH} < 7$ ہے۔

خوراک	pH
کیلا	$4.5 - 4.7$
چکوترہ	$3.0 - 3.3$
سنترا	$3.0 - 4.0$
لیموں	$1.8 - 2.0$
دودھ	$6.3 - 6.6$
مرچ	$5.1 - 5.7$

۱۰۸۰۷ لوگارتھم کی ایک اور مثال ڈیسی بیل dB پیمانہ ہے جو صدا کی بلندی کو ناپنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ اگر صدا کی شدت I واٹ فی مربع میٹر ہو تب

$$\text{سطح صدا} = 10\log_{10}(I \times 10^{12})\ \mathrm{dB} \tag{۸}$$

۱۰۸۰۸ ہو گا۔ جیسا اگلا مثال دکھاتا ہے، شدت صدا کو دگنا کرنے سے سطح صدا میں تقریباً 3 dB کا اضافہ ہوتا ہے۔

۱۰۸۰۹ مثال ۷.۳۴: صدا کی شدت کو دگنا کرنے سے سطح صدا میں کتنا اضافہ ہو گا؟

۱۰۸۱۰ **حل**

۱۰۸۱۱ مساوات ۸ کے تحت $2I$ شدت صدا کے لیے

$$\begin{aligned}
\text{دگنی شدت کی سطح صدا} &= 10\log_{10}(2I \times 10^{12}) && \text{مساوات ۸ میں } 2I \\
&= 10\log_{10} 2 + 10\log_{10}(I \times 10^{12}) \\
&= \text{اصل شدت کی سطح صدا} + 10\log_{10} 2 \\
&\approx \text{اصل شدت کی سطح صدا} + 3 && \log_{10} \approx 0.3
\end{aligned}$$

۱۰۸۱۲ ہو گا۔ □

۱۰۸۱۳ سطح صدا کی چند قیمتیں جدول ۷.۶ میں دی گئی ہیں۔

۱۰۸۱۴ **سوالات**

۱۰۸۱۵ **الجبرائی حساب**

۱۰۸۱۶ سوال ۷.۲۳۵ تا سوال ۷.۲۳۸ میں ریاضی فقرے کی سادہ صورت تلاش کریں۔

۱۰۸۱۷ سوال ۷.۲۳۵:

جدول ۷.۶: سطح صدا کی چند قیمتیں۔

سماعت کی کمتر سطح	0 dB
پتوں کا سرسرانا	10 dB
سرگوشی	20 dB
خاموش گاڑی	50 dB
عام بات چیت	65 dB
تین میٹر دور ہوائی برما	90 dB
کانوں میں درد	120 dB

۱۰۸۱۸ ا. $5^{\log_5 7}$

۱۰۸۱۹ ب. $8^{\log_8 \sqrt{2}}$

۱۰۸۲۰ ج. $1.3^{\log_{1.3} 75}$

۱۰۸۲۱ د. $\log_4 16$

۱۰۸۲۲ ھ. $\log_3 \sqrt{3}$

۱۰۸۲۳ و. $\log_4 \left(\frac{1}{4}\right)$

۱۰۸۲۴ سوال ۷.۲۳۶:

۱۰۸۲۵ ا. $2^{\log_2 3}$

۱۰۸۲۶ ب. $10^{\log_{10}(1/2)}$

۱۰۸۲۷ ج. $\pi^{\log_\pi 7}$

۱۰۸۲۸ د. $\log_{11} 121$

۱۰۸۲۹ ھ. $\log_{121} 11$

۱۰۸۳۰ و. $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right)$

۱۰۸۳۱ سوال ۷.۲۳۷:

۱۰۸۳۲ ا. $2^{\log_4 x}$

۱۰۸۳۳ ب. $9^{\log 3x}$

۱۰۸۳۴ ج. $\log_2(e^{(\ln 2)(\sin x)})$

۱۰۸۳۵ سوال ۷.۲۳۸:

۱۰۸۳۶ ا. $25^{\log_5(3x^2)}$

۱۰۸۳۷ ب. $\log_e(e^x)$

۱۰۸۳۸ ج. $\log_4(2^{e^x \sin x})$

۱۰۸۳۹ سوال ۷.۲۳۹ اور سوال ۷.۲۴۰ میں نسبت کو قدرتی لوگارتھمی صورت میں لکھ کر سادہ صورت حاصل کریں۔

۱۰۸۴۰ سوال ۷.۲۳۹:

۱۰۸۴۱ ا. $\frac{\log_2 x}{\log_3 x}$

۱۰۸۴۲ ب. $\frac{\log_2 x}{\log_8 x}$

۱۰۸۴۳ ج. $\frac{\log_x a}{\log_{x^2} a}$

۱۰۸۴۴ سوال ۷.۲۴۰:

۱۰۸۳۵ ا. $\frac{\log_9 x}{\log_3 x}$ ۱۰۸۳۶ ب. $\frac{\log_{\sqrt{10}} x}{\log_{\sqrt{2}} x}$ ۱۰۸۳۷ ج. $\frac{\log_a b}{\log_b a}$

۱۰۸۳۸ سوال ۷.۲۴۱ تا سوال ۷.۲۴۴ میں دی گئی مساوات حل کریں۔

۱۰۸۳۹ سوال ۷.۲۴۱: $3^{\log_3(7)+2^{\log_2(5)}} = 5^{\log_5(x)}$

۱۰۸۵۰ سوال ۷.۲۴۲: $8^{\log_8(3)} - e^{\ln 5} = x^2 - 7^{\log_7(3x)}$

۱۰۸۵۱ سوال ۷.۲۴۳: $3^{\log_3(x^2)=5e^{\ln x}} - 3 \cdot 10^{\log_{10}(2)}$

۱۰۸۵۲ سوال ۷.۲۴۴: $\ln e + 4^{-2\log_4(x)} = \frac{1}{x}\log_{10}(100)$

۱۰۸۵۳ سوال ۷.۲۴۵ تا سوال ۷.۲۷۲ میں دیے گئے غیر تابع متغیر کے لحاظ سے y کا تفرق تلاش کریں۔

۱۰۸۵۴ سوال ۷.۲۴۵: $y = 2^x$

۱۰۸۵۵ سوال ۷.۲۴۶: $y = 3^{-x}$

۱۰۸۵۶ سوال ۷.۲۴۷: $y = 5^{\sqrt{s}}$

۱۰۸۵۷ سوال ۷.۲۴۸: $y = 2^{s^2}$

۱۰۸۵۸ سوال ۷.۲۴۹: $y = x^{\pi}$

۱۰۸۵۹ سوال ۷.۲۵۰: $y = t^{1-e}$

۱۰۸۶۰ سوال ۷.۲۵۱: $y = (\cos\theta)^{\sqrt{2}}$

۱۰۸۶۱ سوال ۷.۲۵۲: $y = (\ln\theta)^{\pi}$

۱۰۸۶۲ سوال ۷.۲۵۳: $y = 7\sec\theta\ln 7$

۱۰۸۶۳ سوال ۷.۲۵۴: $y = 3^{\tan\theta}\ln 3$

۱۰۸۶۴ سوال ۷.۲۵۵: $y = 2^{\sin 3t}$

۱۰۸۶۵ سوال ۷.۲۵۶: $y = 5^{-\cos 2t}$

۱۰۸۶۶ سوال ۷.۲۵۷: $y = \log_2 5\theta$

۱۰۸۶۷ سوال ۷.۲۵۸: $y = \log_3(1 + \theta\ln 3)$

۱۰۸۶۸ سوال ۷.۲۵۹: $y = \log_4 x + \log_4 x^2$

۱۰۸۶۹ سوال ۷.۲۶۰: $y = \log_{25} e^x - \log_5 \sqrt{x}$

۱۰۸۷۰ سوال ۷.۲۶۱: $y = \log_2 r \cdot \log_4 r$

۱۰۸۷۱ سوال ۷.۲۶۲: $y = \log_3 r \cdot \log_9 r$

۱۰۸۷۲ سوال ۷.۲۶۳: $y = \log_3\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\ln 3}\right)$

۱۰۸۷۳ سوال ۷.۲۶۴: $y = \log_5 \sqrt{(\frac{7x}{3x+2})^{\ln 5}}$

۱۰۸۷۴ سوال ۷.۲۶۵: $y = \theta \sin(\log_7 \theta)$

۱۰۸۷۵ سوال ۷.۲۶۶: $y = \log_7(\frac{\sin\theta\cos\theta}{e^\theta 2^\theta})$

۱۰۸۷۶ سوال ۷.۲۶۷: $y = \log_5 e^x$

۱۰۸۷۷ سوال ۷.۲۶۸: $y = \log_2(\frac{x^2e^2}{2\sqrt{x+1}})$

۱۰۸۷۸ سوال ۷.۲۶۹: $y = 3^{\log_2 t}$

۱۰۸۷۹ سوال ۷.۲۷۰: $y = 3\log_8(\log_2 t)$

۱۰۸۸۰ سوال ۷.۲۷۱: $y = \log_2(8t^{\ln 2})$

۱۰۸۸۱ سوال ۷.۲۷۲: $y = t\log_3(e^{(\sin t)(\ln 3)})$

۱۰۸۸۲ لوگارتھمی تفرق

۱۰۸۸۳ سوال ۷.۲۷۳ تا سوال ۷.۲۸۰ میں y کا لوگارتھمی تفرق دیے گئے غیر تابع متغیر کے لحاظ سے معلوم کریں۔

۱۰۸۸۴ سوال ۷.۲۷۳: $y = (x+1)^x$

۱۰۸۸۵ سوال ۷.۲۷۴: $y = x^{(x+1)}$

۱۰۸۸۶ سوال ۷.۲۷۵: $y = (\sqrt{t})^t$

۱۰۸۸۷ سوال ۷.۲۷۶: $y = t^{\sqrt{t}}$

۱۰۸۸۸ سوال ۷.۲۷۷: $y = (\sin x)^x$

۱۰۸۸۹ سوال ۷.۲۷۸: $y = x^{\sin x}$

۱۰۸۹۰ سوال ۷.۲۷۹: $y = x^{\ln x}$

۱۰۸۹۱ سوال ۷.۲۸۰: $y = (\ln x)^{\ln x}$

۱۰۸۹۲ تکمل

۱۰۸۹۳ سوال ۷.۲۸۱ تا سوال ۷.۲۹۰ میں تکمل تلاش کریں۔

۱۰۸۹۴ سوال ۷.۲۸۱: $\int 5^x \, dx$

۱۰۸۹۵ سوال ۷.۲۸۲: $\int (1.3)^x \, dx$

۱۰۸۹۶ سوال ۷.۲۸۳: $\int_0^1 2^{-\theta} \, d\theta$

۱۰۸۹۷ سوال ۷.۲۸۴: $\int_{-2}^0 5^{-\theta} \, d\theta$

۱۰۸۹۸ سوال ۷.۲۸۵: $\int_1^{\sqrt{2}} x2^{(x^2)}\,\mathrm{d}x$

۱۰۸۹۹ سوال ۷.۲۸۶: $\int_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۰۰ سوال ۷.۲۸۷: $\int_0^{\pi/2} 7^{\cos t}\sin t\,\mathrm{d}t$

۱۰۹۰۱ سوال ۷.۲۸۸: $\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{3}\right)^{\tan t}\sec^2 t\,\mathrm{d}t$

۱۰۹۰۲ سوال ۷.۲۸۹: $\int_2^4 x^{2x}(1+\ln x)\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۰۳ سوال ۷.۲۹۰: $\int_1^2 \frac{2^{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۰۴ سوال ۷.۲۹۱ تا سوال ۷.۲۹۴ میں دیے گئے تکمل حل کریں۔

۱۰۹۰۵ سوال ۷.۲۹۱: $\int 3x^{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۰۶ سوال ۷.۲۹۲: $\int x^{\sqrt{2}-1}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۰۷ سوال ۷.۲۹۳: $\int_0^3 (\sqrt{2}+1)x^{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۰۸ سوال ۷.۲۹۴: $\int_1^e x^{(\ln 2)-1}$

۱۰۹۰۹ سوال ۷.۲۹۵ تا سوال ۷.۳۰۴ میں دیے تکمل کو حل کریں۔

۱۰۹۱۰ سوال ۷.۲۹۵: $\int \frac{\log_{10} x}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۱۱ سوال ۷.۲۹۶: $\int_1^4 \frac{\log_2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۱۲ سوال ۷.۲۹۷: $\int_1^4 \frac{\ln 2\log_2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۱۳ سوال ۷.۲۹۸: $\int_1^e \frac{2\ln 10\log_{10} x}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۱۴ سوال ۷.۲۹۹: $\int_0^2 \frac{\log_2(x+2)}{x+2}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۱۵ سوال ۷.۳۰۰: $\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(10x)}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۱۶ سوال ۷.۳۰۱: $\int_0^9 \frac{2\log_{10}(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۱۷ سوال ۷.۳۰۲: $\int_2^3 \frac{2\log_2(x-1)}{x-1}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۱۸ سوال ۷.۳۰۳: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\log_{10} x}$

۱۰۹۱۹ سوال ۷.۳۰۴: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\log_8 x)^2}$

سوال ۷.۳۰۵ تا سوال ۷.۳۰۸ میں تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۰۵: $\int_1^{\ln x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad x > 1$

سوال ۷.۳۰۶: $\int_1^{e^x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

سوال ۷.۳۰۷: $\int_1^{1/x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0$

سوال ۷.۳۰۸: $\frac{1}{\ln a}\int_1^{x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0$

نظریہ اور استعمال

سوال ۷.۳۰۹: منحنی $y = \frac{2x}{1+x^2}$ اور محور x پر $-2 \le x \le 2$ کے بیچ خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال ۷.۳۱۰: منحنی $y = 2^{1-x}$ اور محور x پر $-1 \le x \le 1$ کے بیچ خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال ۷.۳۱۱: انسانی خون کا pH

انسانی خون کے pH کی قیمت 7.37 سے 7.44 تک ہوتی ہے۔ انسانی خون میں برق پارہ $[\mathrm{H_3O^+}]$ کے مطابق حدود تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۱۲: دماغی سیال کا pH

دماغی سیال میں $[\mathrm{H_3O^+}]$ کا گاڑھاپن تقریباً $4.8 \times 10^{-8}\ \mathrm{mol\,L^{-1}}$ ہے۔ اس سیال کا pH تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۱۳: افزائش کار (ایمپلی فائر) سے حاصل صدا کو جزو k سے ضرب دے کر سطح صدا 10 dB مزید بلند کی جاتی ہے۔ جزو k کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۱۴: ایک افزائش کار صدا کی شدت کو 10 سے ضرب دیتا ہے۔ صدا میں کتنے dB کا اضافہ پیدا ہو گا؟

سوال ۷.۳۱۵: کسی بھی محلول میں $[\mathrm{H_3O^+}]$ اور $[OH^-]$ کے گاڑھاپن کا حاصل ضرب 10^{-14} ہوتا ہے۔

ا. $[\mathrm{H_3O^+}]$ کی کیا قیمت گاڑھاپن کا مجموعہ $S = [\mathrm{H_3O^+}] + [\mathrm{OH^-}]$ کو اقل کرتی ہے؟

ب. اس محلول کی pH تلاش کریں جس میں S کی قیمت اقل ہو۔

ج. $[\mathrm{H_3O^+}]$ اور $[OH^-]$ کی کون سی نسبت S کو اقل بناتی ہے؟

سوال ۷.۳۱۶: کیا $\log_a b$ کی قیمت $\frac{1}{\log_b a}$ کے برابر ہو سکتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۷.۳۱۷: مساوات $x^2 = 2^x$ کے دو حل $x = 2$ اور $x = 4$ ہیں جبکہ اس کا تیسرا حل بھی پایا جاتا ہے۔ ترسیم کی مدد سے تیسرا حل تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۱۸: کیا $x > 0$ کے لیے $x^{\ln 2}$ اور $2^{\ln x}$ ایک دوسرے کے برابر ہو سکتے ہیں؟ دونوں تفاعل ترسیم کرتے ہوئے بتائیں کیا ہوتا ہے۔

سوال ۷.۳۱۹: 2^x کی خط بندی

(ا) نقطہ $x = 0$ پر $f(x) = 2^x$ کی خط بندی دریافت کریں۔ اس کے بعد عددی سروں کو 2 اعشاریہ پورو پور کریں۔ (ب) وقفہ $-3 \le x \le 3$ اور وقفہ $-1 \le x \le 1$ کے لیے تفاعل اور خط بندی کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال ۷.۳۲۰: $f(x) = \log_3 x$ کی خط بندی

(ا) نقطہ $x = 3$ پر $f(x) = \log_3 x$ کی خط بندی تلاش کریں۔ اس کے بعد عددی سروں کو 2 اعشاریہ تک پورو پور کریں۔ (ب) وقفہ $0 \leq x \leq 8$ اور $2 \leq x \leq 8$ کے لیے تفاعل اور خط بندی کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

دیگر اساس کے ساتھ حساب کتاب

سوال ۷.۳۲۱: عموماً کیلکولیٹروں میں $\log_{10} x$ اور $\ln x$ پائے جاتے ہیں۔ دیگر اساس کے لوگارتھم تلاش کرنے کی خاطر ہم درج ذیل مساوات استعمال کرتے ہیں۔

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.3219$$

کیلکولیٹر استعمال کرتے ہوئے 5 اعشاریہ مقامات تک درستگی تک (ا) $\log_3 8$، (ب) $\log_7 0.5$، (ج) $\log_{2_} 17$، (د) $\log_{0.5} 7$

تلاش کریں۔ درج ذیل معلومات استعمال کرتے ہوئے $\ln x$ تلاش کریں۔ (ہ) $\log_{10} x = 2.3$، (و) $\log_2 x = 1.4$، (ز) $\log_{10} x = -0.7$ (ح)، $\log_2 x = -1.5$

سوال ۷.۳۲۲: تبدیلی پیمانہ

(ا) دکھائیں کہ اساس 10 لوگارتھم کو اساس 2 لوگارتھم میں تبدیل کرنے کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\log_2 x = \frac{\ln 10}{\ln 2} \log_{10} x$$

(ب) دکھائیں کہ اساس a لوگارتھم کو اساس b لوگارتھم میں تبدیل کرنے کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\log_b x = \frac{\ln a}{\ln b} \log_a x$$

۷.۵ افزائش اور تنزل

اس حصہ میں ہم قوت نما تبدیلی کے قاعدہ کو حاصل کریں گے۔ اس کے علاوہ ان عملی استعمال پر غور کیا جائے گا جن کی وجہ سے لوگارتھمی اور قوت نمائی تفاعل اہمیت کے حامل ہیں۔

قوت نما تبدیلی کا قاعدہ

فرض کریں ہم کسی مقدار y (جو سمتی رفتار، درجہ حرارت، برقی رو، یا کچھ اور ہو سکتا ہے) میں دلچسپی رکھتے ہیں جس میں کسی بھی لمحہ t پر اضافہ یا کمی اس لمحہ موجود مقدار کے راست متناسب ہے۔ اگر ہمیں لمحہ $t = 0$ پر مقدار کی قیمت y_0 بھی معلوم ہو تب ہم متغیر t کے تفاعل y کو درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کر کے حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= ky && \text{تفرقی مساوات} \\ y &= y_0, \quad t = 0 && \text{ابتدائی معلومات} \end{aligned} \tag{۱}$$

اگر y مثبت ہو اور بڑھ رہا ہو تب k مثبت ہو گا اور مساوات ۱ کہتی ہے کہ اضافہ کی شرح جمع کیے گئے مقدار کے راست متناسب ہے۔ اگر y منفی ہو اور گھٹ رہا ہو تب k منفی ہو گا اور مساوات ۱ کہتی ہے کہ تنزل کی شرح، رہ گئی مقدار کے راست متناسب ہے۔

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات ۱ کا ایک حل $y = 0$ ہے۔ غیر صفر حل حاصل کرنے کے لیے ہم مساوات ۱ کے دونوں اطراف کو y سے تقسیم کر کے حل کرتے ہیں:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k$$

$$\begin{aligned} \ln|y| &= kt + C && t \text{ کے لحاظ سے تکمل} \\ |y| &= e^{kt+C} && \text{قوت نما صورت} \\ |y| &= e^C \cdot e^{kt} && e^{a+b} = e^a \cdot e^b \\ y &= \mp e^C e^{kt} && \text{اگر } |y| = r \text{ ہو تب } y = \mp r \text{ ہو گا} \\ y &= Ae^{kt} && \text{مستقل } \mp e^C \text{ کو سادہ علامت } A \text{ سے ظاہر کرتے ہیں} \end{aligned}$$

ہم $\mp e^C$ کی تمام ممکنہ قیمتوں کے علاوہ 0 کو بھی A کی قیمت لے کر حل $y = 0$ کو بھی اس کلیہ میں شامل کرتے ہیں۔

ہم ابتدائی قیمت مسئلہ کے لیے A کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر $t = 0$ پر $y = y_0$ کو پر کرتے ہیں۔

$$y_0 = Ae^{k \cdot 0} = A$$

یوں اس ابتدائی قیمت مسئلے کا حل $y = y_0 e^{kt}$ ہو گا۔

درج ذیل **قوت نما تبدیلی کا قاعدہ** ہے جس میں k کو **شرح کا مستقل**[۱۲] کہتے ہیں۔

$$y = y_0 e^{kt}, \quad k > 0 \text{ اضافہ}, \quad k < 0 \text{ تنزل} \qquad \text{قوت نما تبدیلی کا قاعدہ} \tag{۲}$$

مساوات ۲ کا حصول ہمیں دکھاتا ہے کہ صرف قوت نما تفاعل کا مستقل مضرب اپنے آپ کا تفرق ہو سکتا ہے۔

---

[۱۲] rateconstant

نمو آبادی

کوئی بھی آبادی (انسانی، نباتاتی، جراثیمی، وغیرہ) غیر استمراری تفاعل ہو گا چونکہ یہ صرف غیر مسلسل قیمتیں اختیار کرتی ہے۔ اس کے باوجود جب آبادی میں فردی تعداد بہت زیادہ ہو تب اس آبادی کو نا صرف استمراری بلکہ قابل تفرق تفاعل سے ظاہر کرنا ممکن ہوتا ہے۔ اگر ہم فرض کریں کہ آبادی میں بچے پیدا کرنے والوں کی تناسب برقرار رہتی ہے تب کسی بھی لمحہ t پر بچوں کی پیدائشی شرح اس لمحے پر افراد کی تعداد $y(t)$ کے راست تناسب ہو گی۔ اگر ہم باہر سے آنے اور جانے والوں کو رد کریں اور ساتھ ہی مرنے والوں کی تعداد کو بھی رد کریں تب نمو آبادی کی شرح $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ پیدائشی شرح ky کے برابر ہو گی۔ یوں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky$ لہٰذا $y = y_0 e^{kt}$ ہو گا۔ حقیقت میں کسی بھی آبادی پر دیگر عوامل بھی اثر انداز ہوں گے جن پر یہاں غور نہیں کیا جائے گا۔

مثال ۷.۳۵: بیماری پھیلنے کا ایک نمونہ فرض کرتا ہے کہ بیمار ہونے والوں کی شرح $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اس وقت کی تعداد y کے راست تناسب ہے۔ یوں جتنے زیادہ افراد کو بیماری لاحق ہو، بیماری اتنی زیادہ تیزی سے پھیلے گی۔

فرض کریں کہ ایک سال کے عرصہ میں کسی بیماری میں مبتلا افراد کی تعداد میں $20\,\%$ کمی رونما ہوتی ہے۔ اگر آج $10\,000$ افراد بیمار ہوں تب کتنے سالوں میں بیمار افراد کی تعداد 1000 ہو گی؟

حل

ہم مساوات $y = y_0 e^{kt}$ استعمال کرتے ہیں۔ ہمیں تین چیزیں معلوم کرنی ہیں۔

ا. y_0 کی قیمت،

ب. k کی قیمت،

ج. $y = 1000$ کرنے کے لیے درکار t کی قیمت۔

پہلا قدم: y_0 کی قیمت: ہم آج کو لمحہ $t = 0$ لیتے ہیں۔ یوں $t = 0$ پر $y = 10\,000$ ہے۔ یوں ہماری مساوات درج ذیل ہے۔

$$y = 10\,000 e^{kt}$$

دوسرا قدم: k کی قیمت: ایک سال کے بعد بیماروں کی تعداد، آج کی تعداد کے $80\,\%$ یعنی 8000 ہو گی۔ آئیں k حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} 8000 &= 10\,000 e^{k(1)} \\ e^k &= 0.8 \\ \ln(e^k) &= \ln 0.8 \\ k &= \ln 0.8 \end{aligned}$$

یوں لمحہ t پر درج ذیل ہو گا۔

$$y = 10\,000 e^{(\ln 0.8)T} \tag{۳}$$

۱۰۹۹۶ **تیسرا قدم:** t کی وہ قیمت جو $y = 1000$ دیتی ہے: ہم مساوات ۳ میں $y = 1000$ پر کر کے t حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 1000 &= 10\,000e^{(\ln 0.8)t} \\ e^{(\ln 0.8)t} &= 0.1 \\ (\ln 0.8)t &= \ln 0.1 \\ t &= \frac{\ln 0.1}{\ln 0.8} \approx 10.32 \end{aligned}$$

۱۰۹۹۷ یوں بیماروں کی تعداد 1000 کرنے کے لیے ہمیں دس سال سے کچھ زیادہ انتظار کرنا ہو گا۔ □

۱۰۹۹۸ **مسلسل سود در سود**

۱۰۹۹۹ اگر آپ A_0 روپیہ کاروبار میں ڈالیں اور ایک سال میں اس سے r' روپیہ کمانے کی امید رکھتے ہوں، جہاں $r' = r \times A_0$ ہے، تب ایک سال کے
۱۱۰۰۰ آخر میں آپ کے پاس $A_0 + r' = A_0(1+r)$ روپیہ ہوں گے۔

۱۱۰۰۱ ربا پر کاروبار کرنے والا بنک ایک شخص کو A_0 روپیہ سود پر دیتا ہے۔ ایک سال بعد اس شخص پر $A_0 \times r$ کا سود واجب الادا ہو گا لہٰذا ایک سال بعد اس
۱۱۰۰۲ شخص پر کل $A_0 + rA_0 = A_0(1+r)$ قرضہ ہو گا۔ ہم کہتے ہیں کہ سالانہ سود کی شرح r ہے۔ فرض کریں کہ یہ شخص سالانہ سود ادا نہیں
۱۱۰۰۳ کرتا ہے۔ یوں دوسرے سال کی ابتدا میں اس شخص پر $A_0(1+r)$ قرضہ ہو گا اور بنک اگلے سال اس مقدار پر سود حاصل کرے گا۔ چونکہ سود کی شرح r
۱۱۰۰۴ ہے لہٰذا دوسرے سال اس شخص پر سود $r \times A_0(1+r)$ ہو گا اور دوسرے سال کے آخر میں اس پر کل قرضہ

$$A_0(1+r) + rA_0(1+r) = A_0(1+r)(1+r) = A_0(1+r)^2$$

۱۱۰۰۵ ہو گا۔ اسی طرح تین سال بعد قرضہ $A_0(1+r)^2 + rA_0(1+r)^2 = A_0(1+r)^3$ اور t سال بعد قرضہ

$$A_0(1+r)^t$$

۱۱۰۰۶ ہو گا۔

۱۱۰۰۷ اب بنک کہہ سکتا ہے کہ سال میں ایک بار کے بجائے وہ ماہوار $\frac{r}{12}$ شرح سے سود وصول کرے گا (جو ظاہری طور پر ربا کی وہی شرح معلوم ہوتی ہے)۔ یوں پہلے
۱۱۰۰۸ مہینے کی آخر میں واجب الادا ربا کی مقدار $\frac{r}{12}A_0$ اور قرضہ $A_t = A_0(1+\frac{r}{12})$ ہو گا۔ اسی طرح دوسرے مہینے کی آخر میں قرضہ $A_t =$
۱۱۰۰۹ $A_0(1+\frac{r}{12})^2$ ہو گا۔ ایک سال بعد قرضہ $A_t = A_0(1+\frac{r}{12})^{12}$ اور t سال بعد قرضہ $A_t = A_0(1+\frac{r}{12})^{12t}$ ہو گا
۱۱۰۱۰ جس کو $A_t = A_0(1+\frac{r}{k})^{kt}$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $k = 12$ ہو گا۔

۱۱۰۱۱ یہ بنک ماہوار کے بجائے ہفتہ وار سود بھی وصول کر سکتا ہے۔ چونکہ سال میں 52 ہفتے ہوتے ہیں لہٰذا ایسی صورت میں $k = 52$ ہو گا اور t سال بعد قرضہ
۱۱۰۱۲ درج ذیل ہو گا۔

$$A_t = A_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}$$

سود پر چلنے والا بنک زیادہ سے زیادہ رہا حاصل کرنے کی خاطر، سال میں زیادہ سے زیادہ مرتبہ رہا حاصل کرنا چاہے گا۔ آئیں دیکھیں کہ $k \to \infty$ کرنے سے t سال بعد قرضہ کتنا ہو گا؟

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} A_t &= \lim_{k\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}\\ &= A_0 e^{rt}\end{aligned}$$

درج بالا حد کے حصول میں ناقابل معلوم روپ 1^∞ حاصل ہوتی ہے۔ ایسے حد کی تلاش حصہ ۷.۶ میں سکھائی جائے گی۔ یوں t سال بعد اس شخص پر قرضہ درج ذیل ہو گا۔

$$A(t) = A_0 e^{rt} \tag{۴}$$

اس کلیہ کے تحت رہا کو **مسلسل سود در سود**[۱۳] کہتے ہیں۔

مثال ۷.۳۶: آپ آج بنک سے مسلسل سود در سود کی سالانہ $15\,\%$ شرح پر $100\,000$ روپیہ حاصل کرتے ہیں۔ پانچ سال بعد آپ کو کتنی مقدار واپس کرنی ہو گی؟ اگر بنک سالانہ سود وصول کرتا ہو تب پانچ سال بعد قرضہ کتنا ہو گا؟

حل

ہم $A_0 = 100\,000$ ، $r = 0.15$ اور $t = 5$ لیتے ہوئے مساوات ۴ استعمال کرتے ہیں۔

$$A(5) = 100\,000e^{(0.15)(5)} = 211\,700$$

اگر بنک سال میں ایک بار رہا وصول کرے تب پانچ سال بعد آپ کو درج ذیل قرضہ دینا ہو گا۔

$$A(5) = 100\,000(1+0.15)^5 = 201\,136$$

□

مثال ۷.۳۷: سالانہ **افراط زر**[۱۴] سے مراد ایک سال میں روپیہ کی قدر میں کمی ہے۔ یوں $10\,\%$ افراط زر کا مطلب ہے کہ ایک سال بعد روپیہ کی قیمت $90\,\%$ ہو گی۔

ایک شخص $5\,000\,000$ روپیہ بنک میں پانچ سال کے لیے جمع کرتا ہے۔ بنک ہر مہینہ اس شخص کو $40\,000$ روپیہ دیگا اور پانچ سال کے آخر میں اس کو پورے 5000000 روپیہ واپس کرے گا۔ اگر سالانہ افراط زر $12\,\%$ ہو تب اس شخص نے کیا پایا اور کیا کھویا؟

حل

پانچ سالوں میں بنک اس شخص کو

$$40\,000 \times 12 \times 5 = 2\,400\,000$$

---

[۱۳] compoundcontinuousinterest
[۱۴] inflation

روپیہ دیتا ہے۔ پانچ سال بعد شخص کو 5000000 روپیہ دیے جاتے ہیں جن کی اصل قدر

$$5\,000\,000 \times 0.88^5 = 2\,638\,660$$

ہو گی۔ یاد رہے کہ ہر مہینہ روپیہ کا قدر کم ہو گا لہٰذا پہلے مہینہ کے 40000 اور آخری مہینہ کے 40000 روپیہ کے قدر ایک سے نہیں ہوں گے۔ ہم حساب کو آسان بنانے کی خاطر تصور کرتے ہیں کہ اس شخص کو ماہوار کے بجائے ہر سال $40\,000 \times 12 = 480\,000$ روپیہ ملتے ہیں جن کی اصل قدر

$$\begin{aligned}
480\,000 \times 0.88^1 &= 422\,400\\
480\,000 \times 0.88^2 &= 371\,712\\
480\,000 \times 0.88^3 &= 327\,107\\
480\,000 \times 0.88^4 &= 287\,854\\
480\,000 \times 0.88^5 &= 253\,311
\end{aligned}$$

ہو گی لہٰذا پانچ سال میں اس کو ماہوار دیے گئے رقم کی اصل قدر درج بالا کا مجموعہ $1\,434\,404$ ہو گا۔

اس شخص کو کل $2\,638\,660 + 1\,434\,404 = 4\,073\,064$ قدر کے روپیہ واپس ہوتے ہیں۔ □

تابکاری

ایک ایٹم اپنی کمیت کا کچھ حصہ خارج کر کے دوسرے ایٹم میں تبدیل ہوتا ہے۔ اس عمل کو **تابکاری تحلیل**[۱۵] کہتے ہیں اور جس ایٹم نے مادہ خارج کیا ہو اس کو **تابکار**[۱۶] کہتے ہیں۔ تابکار کاربن 14 مادہ خارج کر کے نائٹروجن میں تبدیل ہوتا ہے، ریڈیم کئی درمیانی عمل تابکاری سے گزر کر آخر کار سیسہ میں تبدیل ہوتا ہے۔

تجربہ سے دیکھا گیا ہے کہ اکائی وقت میں خارج ذرات کی تعداد، اس وقت تابکار ایٹموں کی تعداد کے تقریباً راست تناسب ہوتا ہے۔ یوں تابکار تحلیل کو مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky,\ k > 0$ ظاہر کرتی ہے (یہاں $k\ (< 0)$ کی جگہ $-k\ (k > 0)$ استعمال کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے چونکہ اس طرح آپ دیکھ سکتے ہیں کہ y گھٹ رہا ہے)۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر تابکار ایٹموں کی تعداد y_0 ہو تب لمحہ t پر درج ذیل ہو گا۔

$$y = y_0 e^{-kt}, \quad k > 0 \qquad \text{مساوات تابکاری} \tag{۵}$$

مثال ۷.۳۸: نصف حیات

کسی عنصر کے آدھے ایٹموں کو تابکاری کے ذریعہ تبدیل ہونے کے لیے درکار وقت کو اس عنصر کی **نصف حیات**[۱۷] کہتے ہیں۔ کسی بھی عنصر کی نصف حیات، ابتدائی ایٹموں کی تعداد پر نہیں بلکہ عنصر پر منحصر ہوتی ہے۔

---

[۱۵] radioactivedecay
[۱۶] radioactive
[۱۷] halflife

یہ دیکھنے کی خاطر کہ ایسا کیوں ہوتا ہے ہم ایک عنصر کو لیتے ہیں جس میں لمحہ $t = 0$ پر y_0 ایٹم پائے جاتے ہوں۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ کتنے وقت کے بعد اس میں نصف یعنی $\frac{y_0}{2}$ ایٹم پائے جائیں گے۔ ہم مساوات ۱۵ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y\frac{y_0}{2} &= y_0 e^{-kt} \\ e^{-kt} &= \frac{1}{2} \\ -kt &= \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \\ t &= \frac{\ln 2}{k} \end{aligned}$$

اس قیمت $\left(t = \frac{\ln 2}{k}\right)$ کو نصف حیات کہتے ہیں جو صرف k پر منحصر ہے نا کہ ابتدائی ایٹموں کی تعداد پر۔ □

$$\text{نصف حیات} = \frac{\ln 2}{k} \tag{۶}$$

ریڈان 222 گیس کے لیے $k = 0.18$ دن ہے لہٰذا اس کی نصف حیات 3.8 دن ہو گی جبکہ رات کی تاریکی میں نظر آنے کی خاطر گھڑیوں میں استعمال ہونے والے ریڈیم 226 کا $k = 4.3 \times 10^{-4}$ سال ہے لہٰذا اس کی نصف حیات 1600 سال ہو گی۔

مثال ۷.۳۹: پولونیم 210

پولونیم 210 کی نصف حیات کو دنوں میں ناپا جاتا ہے۔ اگر $t = 0$ پر پولونیم 210 کے ایٹم پائے جاتے ہوں تب t دنوں بعد اس کے $y = y_0 e^{-5\times10^{-3}t}$ ایٹم ہوں گے۔ اس عنصر کی نصف حیات تلاش کریں۔

حل

$$\begin{aligned} \text{نصف حیات} &= \frac{\ln 2}{k} \\ &= \frac{\ln 2}{5 \times 10^{-3}} \\ &\approx 139\text{دن} \end{aligned}$$

□

مثال ۷.۴۰: کاربن 14 تعین زمان

کاربن 14 جس کی نصف حیات 5700 سال ہے، کو عموماً قدیم چیزوں کی عمر معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ ایک نمونہ میں 10 % تابکار کاربن کے ایٹم تبدیل تبدیل ہو چکے ہیں۔ اس نمونے کی عمر تلاش کریں۔

حل

ہمیں پہلے k تلاش کرنا ہے۔اس کے بعد ہم درکار وقت معلوم کریں گے۔ہم مساوات ۱۵ استعمال کرتے ہیں۔**پہلا قدم:** k کی تلاش۔

$$k = \frac{\ln 2}{} = \frac{\ln 2}{5700} \approx 1.2 \times 10^{-4}$$

دوسرا قدم: درکار وقت جس میں 90% ایٹم باقی رہ جائے۔

$$\begin{aligned} 0.9y_0 &= y_0 e^{-\frac{\ln 2}{5700}t} \\ -\frac{\ln 2}{5700}t &= \ln 0.9 \\ t &= -\frac{5700(\ln 0.9)}{\ln 2} \approx 866 \text{سال} \end{aligned}$$

نمونہ 866 سال پرانا ہے۔ □

کاربن 14 کے علاوہ دیگر تابکار عناصر کو بھی تعین زمان کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔یورینیم (جس کی نصف حیات 4.5 ارب سال ہے) کو 2 ارب سال پرانے چٹانوں کے عمر تلاش کرنے کے لیے استعمال کیا گیا ہے۔

منتقلی حرارت: نیوٹن کا قانون ٹھنڈک

کوئی بھی گرم جسم کچھ دیر میں ٹھنڈا ہو کر ارد گرد ماحول کے درجہ حرارت پر آن پہنچتا ہے۔جسم کے درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح، جسم اور ماحول کے درجہ حرارت میں فرق کے راست متناسب ہوتا ہے۔اس حقیقت کو **نیوٹن کا قانون ٹھنڈک** کہتے ہیں۔

گر لمحہ t پر جسم کا درجہ حرارت متغیر T ہو اور ارد گرد ماحول کا درجہ حرارت مستقل T_S ہو تب

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_S) \tag{۷}$$

ہو گا۔اگر ہم $(T - T_S)$ کی جگہ y پر کریں تب

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T - T_S) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}T_S}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - 0 && T_S \text{مستقل} \\ &= \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

ہو گا۔یوں y کے لحاظ سے مساوات ۷ درج ذیل ہو گا

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky$$

۱۱۰۷۱ جس کا حل $y = y_0 e^{-kt}$ ہے۔ یوں **نیوٹن کا قانون ٹھنڈک**[۱۸]

$$T - T_S = (T_0 - T_S)e^{-kt} \qquad \text{نیوٹن کا قانون ٹھنڈک} \qquad (۸)$$

۱۱۰۷۲ ہو گا جہاں لمحہ $t = 0$ پر جسم کا درجہ حرارت T_S ہے۔

۱۱۰۷۳ مثال ۷.۴۱: ایک انڈے کو $98\,^\circ\mathrm{C}$ پر ابالنے کے بعد $18\,^\circ\mathrm{C}$ گرم پانی سے بھرے ہوئے بالٹی میں ڈالا جاتا ہے۔ پانچ منٹ گزرنے کے بعد انڈے
۱۱۰۷۴ کا درجہ حرارت $38\,^\circ\mathrm{C}$ ہوتا ہے۔ بالٹی میں پانی کے درجہ حرارت میں تبدیلی کو رد کریں۔ انڈا کتنی دیر میں $20\,^\circ\mathrm{C}$ تک پہنچے گا؟

۱۱۰۷۵ **حل**

۱۱۰۷۶ ہم پانچ منٹ بعد کی معلومات استعمال کرتے ہوئے پہلے k تلاش کرتے ہیں۔ مساوات ۸ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$T = 18 + (98 - 18)e^{-kt} = 18 + 80e^{-kt}$$

۱۱۰۷۷ پانچ منٹ بعد $T = 38$ ہو گا جس سے

$$\begin{aligned}
38 &= 18 + 80e^{-5k} \\
e^{-5k} &= \frac{1}{4} \\
-5k &= \ln\frac{1}{4} = -\ln 4 \\
k &= \frac{\ln 4}{5} = 0.2\ln 4 \approx 0.28
\end{aligned}$$

۱۱۰۷۸ یوں لمحہ t پر $T = 18 + 80^{-(0.2\ln 4)t}$ ہو گا۔ ہمیں وہ t درکار ہے جس پر $T = 20$ ہو گا۔

$$\begin{aligned}
20 = 18 &= 80e^{-(0.2\ln 4)t} \\
80e^{-(0.2\ln 4)t} &= 2 \\
e^{-(0.2\ln 4)t} &= \frac{1}{40} \\
-(0.2\ln 4)t &= \ln\frac{1}{40} = -\ln 40 \\
t &= \frac{\ln 40}{0.2\ln 4} \approx 13\text{منٹ}
\end{aligned}$$

۱۱۰۷۹ بالٹی میں ڈالنے کے تقریباً 13 منٹ بعد انڈے کا درجہ حرارت $20\,^\circ\mathrm{C}$ ہو گا۔ □

---

[۱۸] newton'slawofcooling

سوالات

سوال ۷.۳۲۳: دانت کی جسامت
انسانی دانت کی جسامت گھٹ رہی ہے۔ شمالی یورپ کے لوگوں کے دانتوں کی جسامت 1000 سال میں 1 % گھٹتی ہے۔

ا. دانت کی جسامت کو y اور وقت کو t سے ظاہر کرتے ہوئے $t = 0$ پر y_0 اور $t = 1000$ پر $y = 0.99y_0$ لیتے ہوئے مساوات $y = y_0e^{kt}$ میں k تلاش کریں۔ k کی اس قیمت کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا جواب دیں۔

ب. کتنے سالوں میں دانت کی جسامت موجودہ جسامت کے 90 % ہو گی؟

ج. آج سے 20 000 سال بعد انسان کے دانت کی جسامت موجودہ جسامت کے لحاظ سے کتنی ہو گی؟

سوال ۷.۳۲۴: فضائی دباو
سطح سمندر سے h بلندی پر فضائی دباو p کی تبدیلی کی شرح $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h}$ عموماً p کی راست متناسب تصور کی جاتی ہے۔ سطح سمندر پر فضائی دباو $101\,293\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ اور $20\,\mathrm{km}$ بلند پر $9000\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ لیں۔

ا. درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں اور دی گئی معلومات سے k دریافت کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = kp, \quad k \text{ مستقل} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$p = p_0, \quad h = 0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

ب. $h = 50\,\mathrm{km}$ پر فضائی دباو کتنا ہو گا؟

ج. کتنی بلندی پر $p = 90\,000\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ ہو گا؟

سوال ۷.۳۲۵: کیمیائی عمل
بعض کیمیائی اعمال میں اجزاء کی تبدیلی کی شرح اس لمحے پر موجود مواد کی مقدار پر منحصر ہوتی ہے۔ ایسی ایک کیمیائی عمل کو

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -0.6y$$

سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں مقدار y کو گرام اور وقت t کو گھنٹوں میں ناپا گیا ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر کیمیائی مواد کی مقدار $100\,\mathrm{g}$ ہو تب ایک گھنٹہ بعد اس کی کتنی مقدار پائی جائے گی؟

سوال ۷.۳۲۶: خام شکر کو ایک مرحلہ سے گزارا جاتا ہے جس میں شکر کے مالیکیول کی ساخت تبدیل ہوتی ہے۔ اس عمل کے شروع ہونے کے بعد کسی بھی لمحہ پر تبدیلی کی شرح، خام مال کی باقی مقدار کے راست تناسب ہوتی ہے۔ اگر $1000\,\mathrm{kg}$ خام مال سے شروع کرتے ہوئے ابتدائی 10 گھنٹوں بعد باقی خام مال کی مقدار $800\,\mathrm{kg}$ ہو تب مزید 14 گھنٹوں بعد خام مال کی مقدار کتنی ہو گی؟

سوال ۷.۳۲۷: زیر آب کام
سمندری پانی کی سطح سے x میٹر نیچے روشنی $L(x)$ درج ذیل تفرقی مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = -kL$$

آپ تجربہ سے جانتے ہیں کہ سطح سے $6\,\mathrm{m}$ نیچے روشنی کی شدت آدھی ہے۔ آپ سطحی روشنی کے $\frac{1}{10}$ حصہ میں کام کر سکتے ہیں۔ یوں کتنی گہرائی تک آپ کام کر سکیں گے؟

سوال ۷.۳۲۸: برق گیر میں برقی دباو

برق گیر سے برقی نکاسی کی شرح اس پر موجود برقی دباو کے راست تناسب ہے۔ یوں t سیکنڈ بعد اس پر دباو V درج ذیل کلیہ کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{40}V$$

کتنی دیر میں برقی دباو کی قیمت ابتدائی قیمت کے $10\,\%$ ہو گی؟

سوال ۷.۳۲۹: ہیضہ کے جراثیم

فرض کریں ہیضہ کے جراثیم بغیر رکاوٹ قوت نمائی طور پر بڑھ سکتے ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر ایک جرثومہ ہوتا ہے۔ جرثومہ آدھا گھنٹہ میں ٹوٹ کر دو جرثوموں میں تبدیل ہوتا ہے۔ 24 گھنٹوں بعد کتنے جرثومے پائے جائیں گے؟ (اگرچہ بیمار شخص کی جسم میں ہر گھنٹہ متعدد جرثومے مارے جاتے ہیں۔ اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ صبح ظاہری طور پر بالکل تندرست شخص، شام کو یک دم کیوں بہت سخت بیمار ہو سکتا ہے۔)

سوال ۷.۳۳۰: جراثیم کی نموآبادی

تجربہ گاہ میں ایک قسم کی جرثوموں کو افزائش کے لیے بہترین ماحول مہیا کیا جاتا ہے تاکہ ان کی تعداد قوت نمائی بڑھ سکے۔ 3 گھنٹوں بعد جرثوموں کی تعداد 10 000 اور 5 گھنٹوں بعد ان کی تعداد 40 000 ہوتی ہے۔ ابتدائی جرثوموں کی تعداد دریافت کریں۔

سوال ۷.۳۳۱: بیماری کا پھیلانا (مثال ۷.۳۵)

فرض کریں کہ مثال ۷.۳۵ میں کسی بھی ایک سال میں بیمار افراد کی تعداد میں $25\,\%$ کمی رونما ہوتی ہے۔

ا. کتنے سالوں میں بیماروں کی تعداد 1000 ہو گی؟

ب. کتنے عرصہ میں بیماری کا خاتمہ ہو گا۔ (بیماروں کی تعداد ایک سے کم ہونے کو خاتمہ تصور کیا جاتا ہے۔)

سوال ۷.۳۳۲: پاکستان کی آبادی

پاکستان کی آبادی میں ۲۰۱۷ء میں ہر 8 سیکنڈوں میں ایک بچے کا اضافہ ہوا۔

ا. قوت نمائی اضافہ $y = y_0 e^{kt}$ تصور کریں جہاں t وقت کو اور y تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔ وقت کو سالوں میں لیتے ہوئے k کی قیمت تلاش کریں۔

ب. 5 سال بعد پاکستان کی آبادی کتنی ہو گی؟

سوال ۷.۳۳۳: تیل میں کمی

فرض کریں تیل کی کنواں سے حاصل تیل میں ہر سال $10\,\%$ کمی رونما ہوتی ہے۔ کتنے سالوں میں حاصل تیل کی مقدار $20\,\%$ رہ جائے گی؟

سوال ۷.۳۳۴: قیمت میں چھوٹ

فروخت میں اضافہ پیدا کرنے کی خاطر آپ کا ادارہ قیمت میں چھوٹ کو خریداری کے ساتھ یوں منسلک کرتا ہے کہ ایک شے کی قیمت $p(x)$ خریدی گئی اشیاء کی تعداد کا تفاعل ہو۔ ہر اضافی ایک عدد خریداری پر مزید $1\,\%$ چھوٹ دی جاتی ہے۔ 100 عدد کی خریداری پر فی اکائی قیمت $p(100) = 20.09$ روپیہ ہے۔

ا. درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کر کے $p(x)$ تلاش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{100}p \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$p(100) = 20.09 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

ب. دس عدد اشیاء کی خریداری پر فی اکائی قیمت $p(10)$ تلاش کریں۔ اسی طرح 100 کی خریداری پر فی اکائی قیمت $p(100)$ تلاش کریں۔

ج. کیا 100 کی خریداری پر آمدنی $r(x) = x \cdot p(x)$ درحقیقت 90 کی خریداری پر آمدنی سے کم ہو گی؟ دکھائیں کہ حقیقت میں 100 کی خریداری پر آمدنی زیادہ سے زیادہ ہو گی۔

د. آمدنی $r(x) = x \cdot p(x)$ کو $0 \leq x \leq 200$ کے لیے ترسیم کریں۔

سوال ۷.۳۳۵: مسلسل سود در سود

آپ بنک سے A_0 روپیہ کا قرضہ لیتے ہیں جس پر آپ کو $4\,\%$ مسلسل سود در سود ادا کرنا ہو گا۔

ا. آپ کو 5 سال بعد کتنی رقم ادا کرنی ہو گی؟

ب. آپ کو کتنے سالوں میں دگنی رقم ادا کرنی ہو گی؟ کتنے سالوں میں تگنی رقم ادا کرنی ہو گا؟

سوال ۷.۳۳۶: اگر کسی رقم پر $100\,\%$ مسلسل سود در سود دیا جائے تب کتنے عرصہ میں رقم دگنی ہو گی؟ ایک سال میں سود کتنا ہو گا؟

سوال ۷.۳۳۷: ایک شخص نے بنک میں رقم کو 100 سال کے لیے جمع کیا۔ سو سال بعد اس کے خاندان کو 90 گنا رقم حاصل ہوتی ہے۔ مسلسل سود در سود کی شرح تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۳۸: ایک شخص نے بنک میں رقم کو 100 سال کے لیے جمع کیا۔ سو سال بعد اس کے خاندان کو 131 گنا رقم حاصل ہوتی ہے۔ مسلسل سود در سود کی شرح تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۳۹: ریڈان 222

ریڈان 222 گیس کی تابکاری تحلیل کا کلیہ $y = y_0 e^{-0.18t}$ ہے جہاں وقت t کو دنوں میں ناپا جاتا ہے۔ کتنے عرصہ میں ریڈان 222 کے کسی بھی نمونہ میں $90\,\%$ مواد باقی ہو گا؟

سوال ۷.۳۴۰: پولونیم 210

پولونیم 210 کی نصف حیات 139 دن ہے۔ اگر آپ کے پاس پولونیم 210 کے نمونہ میں $95\,\%$ مواد تابکاری کی وجہ سے تبدیل ہو جائے تب یہ نمونہ آپ کے کسی کام کا نہیں ہو گا۔ یہ نمونہ کتنے دنوں تک آپ کے کام کا ہو گا؟

سوال ۷.۳۴۱: تابکار مادہ کی اوسط حیات

تابکاری تحلیل کی مساوات $y = y_0 e^{-kt}$ میں $\frac{1}{k}$ کو تابکار مرکزہ کی **اوسط حیات**[19] کہتے ہیں۔ ریڈان مرکزہ کی اوسط حیات تقریباً $\frac{1}{0.18} = 5.6$ دن ہے۔ کاربن 12 کی اوسط حیات تقریباً 8000 سال ہے۔ دکھائیں کہ کسی بھی تابکار مادہ کی تین اوسط حیات کے برابر وقت میں $95\,\%$ مادہ تبدیل ہو جائے گا۔ یوں نصف حیات سے آپ باآسانی معلوم کر سکتے ہیں کہ مادہ کتنے عرصہ میں ختم ہو گا۔

[19] meanlife

سوال ۷.۳۴۲: کیلی فورنیم 252

کیلی فورنیم 252 کو ۱۹۵۰ء میں ایجاد کیا گیا۔ اب تک مغربی دنیا میں اس عنصر کے صرف 8 g جمع کیے گئے ہیں۔ اس کی قیمت سونے سے 654 گنا زیادہ ہے۔ اس کی نصف حیات 2.645 سال ہے اور 1 μg کیلی فورنیم فی سیکنڈ 170×10^6 تعدیلی برقیہ خارج کرتا ہے۔

ا. تابکاری تحلیل کی مساوات میں اس عنصر کا k کتنا ہو گا؟

ب. اس عنصر کی اوسط حیات کتنی ہو گی؟ (سوال ۷.۳۴۱ سے رجوع کریں۔)

ج. کتنے عرصہ میں 95 % عنصر تابکاری تحلیل کی وجہ سے تبدیل ہو جائے گا؟

سوال ۷.۳۴۳: یخنی

ایک کمرہ جس کا درجہ حرارت 20 °C ہے میں ایک پیالی یخنی کا درجہ حرارت دس منٹ میں 90 °C سے گر کر 60 °C ہوتا ہے۔ نیوٹن کا قانون ٹھنڈک استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا جواب دیں۔

ا. مزید کتنے وقت میں یخنی کا درجہ حرارت 35 °C ہو گا؟

ب. اگر 90 °C گرم یخنی کے پیالہ کو −15 °C کے ٹھنڈی فریج میں رکھا جائے تب اس کو 35 °C تک ٹھنڈا ہونے میں کتنا وقت درکار ہو گا؟

سوال ۷.۳۴۴: نامعلوم درجہ حرارت والا شہتیر

المونیم کے شہتیر کو باہر سے اندر لایا جاتا ہے۔ اندر درجہ حرارت 20 °C ہے جبکہ باہر موسم ٹھنڈا ہے۔ دس منٹ بعد شہتیر کا درجہ حرارت 2 °C ہے جبکہ مزید دس منٹ بعد اس کا درجہ حرارت 10 °C ہے۔ نیوٹن کا قانون ٹھنڈک استعمال کرتے ہوئے شہتیر کا ابتدائی درجی حرارت تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۴۵: ارد گرد ماحول کا درجہ حرارت نامعلوم

ایک جگ جو 46 °C درجہ حرارت پانی سے بھرا ہوا ہے کو فریج میں رکھا جاتا ہے۔ دس منٹ بعد اس کا درجہ حرارت 39 °C ہوتا ہے۔ مزید دس منٹ بعد اس کا درجہ حرارت 33 °C ہوتا ہے۔ نیوٹن کا قانون ٹھنڈک استعمال کرتے ہوئے فریج کا درجہ حرارت تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۴۶: فضا میں کسی چیز کو ٹھنڈا کرنا

چاندی کے سلاخ کا موجودہ درجہ حرارت، کمرے کے درجہ حرارت سے 60 °C زیادہ ہے۔ بیس منٹ پہلے اس کا درجہ حرارت، کمرے کے درجہ حرارت سے 70 °C زیادہ تھا۔ (ا) پندرہ منٹ کے بعد اس کا درجہ حرارت، کمرے سے کتنا زیادہ ہو گا؟ (ب) دو گھنٹوں بعد کتنا ہو گا؟ (ج) کتنی دیر بعد کمرے سے سلاخ کا درجہ حرارت 10 °C زیادہ ہو گا؟

سوال ۷.۳۴۷: آتش فشاں

زمانہ قدیم میں ایک آتش فشاں کے پھٹنے سے قریبی درخت جل جاتے ہیں اور آتش فشاں میں ایک جھیل بن جاتا ہے۔ اس جھیل میں موجود کوئلہ میں زندہ درختوں کے لحاظ سے 44.5 % کاربن 14 پایا جاتا ہے۔ یہ جھیل کتنا قدیم ہے؟

سوال ۷.۳۴۸: کاربنی تعین زمان کی حساسیت

آئیں دیکھیں کہ نمونہ میں پائے جانے والے کاربن کی مقدار میں معمولی خلل، نتائج میں کس قدر فرق پیدا کرتا ہے۔

ا. ایک متحجر ہڈی[۲۰] ۲۰۰۰ء میں دریافت کی گئی۔ اس میں ابتدائی کاربن 14 کا 17 % حصہ باقی تھا۔ یہ جانور کب زندہ تھا؟

---

[۲۰] fossilbone

ب. اگر جزو-امیں $17\,\%$ کے بجائے $18\,\%$ حصہ باقی ہو تب کیا جواب ہو گا؟

ج. اگر جزو-امیں $17\,\%$ کے بجائے $16\,\%$ حصہ باقی ہو تب کیا جواب ہو گا؟

سوال ۷.۳۴۹: جعلی تصویر

ایک تصویر جو ۱۶۳۲ء اور ۱۶۷۵ء کے درمیان بنائی گئی کی نقل میں کاربن 14 کی ابتدائی قیمت کا $99.5\,\%$ حصہ باقی ہے۔ یہ نقلی تصویر کتنی پرانی ہے؟

۷.۶ قاعدہ لھوپیٹال

ایسا کسر جس کا نسب نما اور شمار کنندہ دونوں تحدیدی نقطہ پر صفر کو پہنچتے ہوں، کی حد تلاش کرنے کا قاعدہ یعقوب برنولی نے دریافت کیا جس کو **قاعدہ لھوپیٹال** کہتے ہیں۔

غیر معین حاصل تقسیم

اگر نقطہ $x = a$ پر تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی قیمتیں صفر ہوں تب $x = a$ پر کرتے ہوئے $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ کا حصول ممکن نہیں ہو گا چونکہ ایسا کرنے سے $\frac{0}{0}$ ملتا ہے جو بے معنی ہے اور جس کو **غیر معین روپ**[۲۱] کہتے ہیں۔ اب تک ہم دیکھ چکے ہیں کہ جو حد غیر معین روپ دیں ان کی حد تلاش کرنی کبھی آسان اور کبھی مشکل ہوتی ہے۔ ہم نے حصہ ۳.۴ میں کافی محنت کے بعد $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$ کی قیمت حاصل کی۔ اس کے برعکس تفرق کے حصول میں استعمال ہونے والا درج ذیل حد تلاش کرنے میں ہمیں کوئی دشواری پیش نہیں ہوئی،

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

اگرچہ اس حد میں $x = a$ پر کرنے سے ہر صورت $\frac{0}{0}$ حاصل ہوتا ہے۔ قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے ہم تفرق کے حصول میں حد کے استعمال سے استفادہ کرتے ہوئے ان حد کو تلاش کرتے ہیں جو غیر معین روپ کو جنم دیتے ہیں۔

مسئلہ ۷.۲: **قاعدہ لھوپیٹال (پہلی صورت)**

فرض کریں کہ $f(a) = g(a) = 0$ ہے جبکہ $f'(a)$ اور $g'(a)$ موجود ہیں جہاں $g'(a) \neq 0$ ہے۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \tag{۱}$$

---

[۲۱] intermediateform

۱۱۲۰۸ ثبوت: ہم $f'(a)$ اور $g'(a)$، جو از خود حد کو ظاہر کرتے ہیں، سے شروع کرتے ہوئے واپس چلتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{f'(a)}{g'(a)} &= \frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-0}{g(x)-0}\\ &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$$

۱۱۲۰۹ □

۱۱۲۱۰ قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہوئے f کے تفرق f' کو g کے تفرق g' سے تقسیم کریں۔ یاد رہے کہ $\frac{f}{g}$ کا تفرق $\left(\frac{f}{g}\right)'$ درست نتیجہ نہیں دیگا۔

۱۱۲۱۱ مثال ۷.۴۲:

$$\text{(ا)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x} = \left.\frac{3-\cos x}{a}\right|_{x=0} = 2$$

$$\text{(ب)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \left.\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1}\right|_{x=0} = \frac{1}{2}$$

$$\text{(ج)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = \left.\frac{1-\cos x}{3x^2}\right|_{x\to 0} = ?$$ اب بھی $\frac{0}{0}$ ملتا ہے

۱۱۲۱۲ □

۱۱۲۱۳ ہم دیکھتے ہیں کہ مثال ۷.۴۲ کے جزو-ج میں قاعدہ لھوپیٹال کے استعمال کے باوجود $\frac{0}{0}$ حاصل ہوتا ہے۔ قاعدہ لھوپیٹال کی بہتر روپ کہتی ہے کہ جب تک ہمیں
۱۱۲۱۴ $\frac{0}{0}$ حاصل ہو ہم اس قاعدہ کو بار بار استعمال کر سکتے ہیں۔ یوں اس مثال کو حل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} && \text{اب بھی } \tfrac{0}{0} \text{ ملتا ہے}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} && \text{اب بھی } \tfrac{0}{0} \text{ ملتا ہے}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} && \text{اس بار } \tfrac{0}{0} \text{ نہیں ملا}\end{aligned}$$

۱۱۲۱۵ مسئلہ ۷.۳: **قاعدہ لھوپیٹال (بہتر روپ)**

۱۱۲۱۶ فرض کریں کہ $f(a) = g(a) = 0$ ہے جبکہ f اور g کھلے وقفہ I پر قابل تفرق ہیں۔ اس وقفہ پر نقطہ a پایا جاتا ہے۔ مزید فرض کریں کہ

۱۱۲۱۷ $x \neq a$ کی صورت میں I پر $g'(x) \neq 0$ ہے۔ تب درج ذیل ہو گا

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{۲}$$

۱۱۲۱۸ اگر دائیں ہاتھ حد موجود ہو یا یہ ∞ اور یا $-\infty$ ہو۔

۱۱۲۱۹

۱۱۲۲۰ اس مسئلے کا ثبوت کتاب کے آخر میں ضمیمہ میں پیش کیا گیا ہے۔

۱۱۲۲۱ مثال ۷.۴۳:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \frac{x}{2}}{x^2} && \frac{0}{0} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2} - \frac{1}{2}}{2x} && \frac{0}{0} \\
&= \lim_{x\to a} \frac{-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}}{2} = -\frac{1}{8} && \frac{0}{0} \text{ نہیں ہے}
\end{aligned}$$

۱۱۲۲۲ □

۱۱۲۲۳ قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہوئے جیسے $\frac{0}{0}$ سے کچھ ہٹ کر ملتا ہے آپ حد تلاش کر پائیں گے۔

۱۱۲۲۴ مثال ۷.۴۴:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x+x^2} && \frac{0}{0} \text{ ملتا ہے} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+2x} = \frac{0}{1} = 0 && \frac{0}{0} \text{ نہیں ہے}
\end{aligned}$$

۱۱۲۲۵ اگر $\frac{0}{0}$ ملنے کے بعد رکنے کے بجائے ہم مزید ایک بار قاعدہ لھوپیٹال استعمال کریں تب ہمیں درج ذیل **غلط** نتیجہ حاصل ہو گا۔

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

۱۱۲۲۶ □

۱۱۲۲۷ مثال ۷.۴۵:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^2} && \frac{0}{0} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{2x} = \infty && \frac{0}{0} \text{ نہیں ملا}
\end{aligned}$$

۱۱۲۲۸ □

۱۱۲۲۹ قاعدہ لھوپیٹال وہاں بھی قابل استعمال ہو گا جہاں غیر معین روپ $\frac{\infty}{\infty}$ ہو۔ اگر $x \to a$ کرنے سے $f(x)$ اور $g(x)$ دونوں لا متناہی تک پہنچتے ہوں
۱۱۲۳۰ تب اگر درج ذیل میں دایاں حد موجود ہو تب

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

۱۱۲۳۱ ہو گا۔ یہاں a از خود متناہی یا لا متناہی ہو سکتا ہے۔

۱۱۲۳۲ مثال ۷.۴۶:

$$\text{(ا)} \quad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sec x}{1+\tan x} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$= \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \frac{\sec x \tan x}{\sec^2 x} = \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \sin x = 1$$

$$\text{(ب)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

۱۱۲۳۳ □

۱۱۲۳۴ غیر معین حاصل ضرب اور فرق

۱۱۲۳۵ بعض اوقات ہم غیر معین روپ $0 \cdot \infty$ اور $\infty - \infty$ کو الجبرا کی مدد سے $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ لکھ سکتے ہیں۔ یاد رہے کہ ہم یہ نہیں کہتے ہیں کہ عدد $0 \cdot \infty$ یا
۱۱۲۳۶ $\infty - \infty$ موجود ہے اور نا ہی ہم کہتے ہیں کہ عدد $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ موجود ہے۔ یہ روپ کسی بھی عدد کو ظاہر نہیں کرتے ہیں بلکہ محض تفاعل کے رویہ کو بیان کرتے
۱۱۲۳۷ ہیں۔

۱۱۲۳۸ مثال ۷.۴۷:

$$\lim_{x\to 0^+} x\cot x \qquad \text{$0 \cdot \infty$ کی وجہ سے $x \cot x$ کو مختلف روپ میں لکھیں}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} x \cdot \frac{1}{\tan x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\tan x} \qquad \text{اب $\frac{0}{0}$ ملتا ہے}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1} = 1$$

۱۱۲۳۹ □

مثال ۷.۴۸: تلاش کریں: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

حل

اگر $x \to 0^+$ ہو تب $\sin x \to 0^+$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x} \to \infty - \infty$$

اسی طرح اگر $x \to 0^-$ ہو تب $\sin x \to 0^-$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x} = -\infty - (\infty) = -\infty + \infty$$

دونوں صورتوں میں ہم حد جاننا ممکن نہیں ہے۔ ہمیں تفاعل کو نئی صورت

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x} = \frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

میں لکھ کر قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} && \frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} && \text{اب بھی } \frac{0}{0} \text{ ملتا ہے}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x - x\sin x} = \frac{0}{2} = 0
\end{aligned}$$

□

ناقابل معلوم طاقت

بعض اوقات ایسے حد جو ناقابل معلوم روپ 1^∞ ، 0^0 یا ∞^0 دیتے ہوں کا لوگارتھم پہلے لینے سے حد تلاش کرنا ممکن ہو جاتا ہے۔ ہم قاعدہ لھوپیٹال سے لوگارتھم کی حد حاصل کر کے قوت نما سے اصل تفاعل کا رویہ جانتے ہیں۔

اگر $\lim_{x\to a}\ln f(x) = L$ ہو تب

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)} = e^L$$

ہو گا جہاں a متناہی یا لا متناہی ہو سکتا ہے۔

مثال ۷.۴۹: دکھائیں $\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x} = e$

حل

حد تلاش کرنے سے ناقابل معلوم روپ 1^∞ حاصل ہوتا ہے لہٰذا ہم $f(x) = (1+x)^{1/x}$ لیتے ہوئے $\lim_{x\to 0^+} \ln f(x)$ تلاش کرتے ہیں۔ چونکہ

$$\ln f(x) = \ln(1+x)^{1/x} = \frac{1}{x}\ln(1+x)$$

ہے لہٰذا قاعدہ لھوپیٹال

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} && \frac{0}{0}\\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1}\\ &= \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

دیگا۔ یوں اصل تفاعل کی حد درج ذیل ہو گی۔

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln f(x)} = e^1 = e$$

□

مثال ۷.۵۰: حد $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ تلاش کریں۔

حل

حد کی تلاش ناقابل معلوم روپ ∞^0 دیتا ہے۔ ہم $f(x) = x^{1/x}$ لے کر $\lim_{x\to\infty} \ln f(x)$ تلاش کرتے ہیں۔ چونکہ

$$\ln f(x) = \ln x^{1/x} = \frac{\ln x}{x}$$

ہے لہٰذا قاعدہ لھوپیٹال

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \ln f(z) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} && \frac{\infty}{\infty}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1}\\ &= \frac{0}{1} = 0\end{aligned}$$

دیگا۔ یوں اصل حد درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim x \to \infty f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\ln f(x)} = e^0 = 1$$

□

سوالات

قاعدہ لھوپیٹال کا استعمال

سوال ۷.۳۵۰ تا سوال ۷.۳۹۱ میں قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہوئے حد تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۵۰: $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

سوال ۷.۳۵۱: $\lim_{x\to -5} \frac{x^2-25}{x+5}$

سوال ۷.۳۵۲: $\lim_{t\to -3} \frac{t^3-4t+15}{t^2-t-12}$

سوال ۷.۳۵۳: $\lim_{t\to 1} \frac{t^3-1}{4t^3-t-3}$

سوال ۷.۳۵۴: $\lim_{x\to \infty} \frac{5x^2-3x}{7x^2+1}$

سوال ۷.۳۵۵: $\lim_{x\to \infty} \frac{x-8x^2}{12x^2+5x}$

سوال ۷.۳۵۶: $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t^2}{t}$

سوال ۷.۳۵۷: $\lim_{t\to 0} \frac{\sin 5t}{t}$

سوال ۷.۳۵۸: $\lim_{x\to 0} \frac{8x^2}{\cos x-1}$

سوال ۷.۳۵۹: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x-x}{x^3}$

سوال ۷.۳۶۰: $\lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}} \frac{2\theta-\pi}{\cos(2\pi-\theta)}$

سوال ۷.۳۶۱: $\lim_{\theta\to \frac{\pi}{3}} \frac{3\theta+\pi}{\sin(\theta+\frac{\pi}{3})}$

سوال ۷.۳۶۲: $\lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin\theta}{1+\cos 2\theta}$

سوال ۷.۳۶۳: $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x-\sin \pi x}$

سوال ۷.۳۶۴: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(\sec x)}$

سوال ۷.۳۶۵: $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\csc x)}{(x-\frac{\pi}{2})^2}$

سوال ۷.۳۶۶: $\lim_{t\to 0} \frac{t(1-\cos t)}{t-\sin t}$

۱۱۲۸۵ سوال ۷.۳۶۷: $\lim_{t\to 0} \frac{t\sin t}{1-\cos t}$

۱۱۲۸۶ سوال ۷.۳۶۸: $\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sec x$

۱۱۲۸۷ سوال ۷.۳۶۹: $\lim_{x\to(\frac{x}{2})^-} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x$

۱۱۲۸۸ سوال ۷.۳۷۰: $\lim_{\theta\to 0} \frac{3^{\sin\theta}-1}{\theta}$

۱۱۲۸۹ سوال ۷.۳۷۱: $\lim_{\theta\to 0} \frac{(\frac{1}{2})^{\theta}-1}{\theta}$

۱۱۲۹۰ سوال ۷.۳۷۲: $\lim_{x\to 0} \frac{x2^x}{2^x-1}$

۱۱۲۹۱ سوال ۷.۳۷۳: $\lim_{x\to 0} \frac{3^x-1}{2^x-1}$

۱۱۲۹۲ سوال ۷.۳۷۴: $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\log_2 x}$

۱۱۲۹۳ سوال ۷.۳۷۵: $\lim_{x\to\infty} \frac{\log_2 x}{\log_3(x+3)}$

۱۱۲۹۴ سوال ۷.۳۷۶: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+2x)}{\ln x}$

۱۱۲۹۵ سوال ۷.۳۷۷: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(e^x-1)}{\ln x}$

۱۱۲۹۶ سوال ۷.۳۷۸: $\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{5y+25}-5}{y}$

۱۱۲۹۷ سوال ۷.۳۷۹: $\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{ay+a^2}-a}{y}, \quad a>0$

۱۱۲۹۸ سوال ۷.۳۸۰: $\lim_{x\to\infty} (\ln 2x - \ln(x+1))$

۱۱۲۹۹ سوال ۷.۳۸۱: $\lim_{x\to 0^+} (\ln x - \ln\sin x)$

۱۱۳۰۰ سوال ۷.۳۸۲: $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

۱۱۳۰۱ سوال ۷.۳۸۳: $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3x+1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

۱۱۳۰۲ سوال ۷.۳۸۴: $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

۱۱۳۰۳ سوال ۷.۳۸۵: $\lim_{x\to 0^+} (\csc x - \cot x + \cos x)$

۱۱۳۰۴ سوال ۷.۳۸۶: $\lim_{x\to\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{t}\, dt$

۱۱۳۰۵ سوال ۷.۳۸۷: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\ln x} \int_1^x \ln t\, dt$

۱۱۳۰۶ سوال ۷.۳۸۸: $\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{e^\theta - \theta - 1}$

۱۱۳۰۷ سوال ۷.۳۸۹: $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - (1+h)}{h^2}$

۱۱۳۰۸ سوال ۷.۳۹۰: $\lim_{t\to\infty} \frac{e^t + t^2}{e^t - t}$

۱۱۳۰۹ سوال ۷.۳۹۱: $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

۱۱۳۱۰ **حد جن میں اسار اور قوت نما پائے جاتے ہوں**

۱۱۳۱۱ سوال ۷.۳۹۲ تا سوال ۷.۴۰۱ میں حد تلاش کریں۔

۱۱۳۱۲ سوال ۷.۳۹۲: $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$

۱۱۳۱۳ سوال ۷.۳۹۳: $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(x-1)}$

۱۱۳۱۴ سوال ۷.۳۹۴: $\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{1/x}$

۱۱۳۱۵ سوال ۷.۳۹۵: $\lim_{x\to e^+} (\ln x)^{1/(x-e)}$

۱۱۳۱۶ سوال ۷.۳۹۶: $\lim_{x\to 0^+} x^{-1/\ln x}$

۱۱۳۱۷ سوال ۷.۳۹۷: $\lim_{x\to\infty} x^{1/\ln x}$

۱۱۳۱۸ سوال ۷.۳۹۸: $\lim_{x\to\infty} (1+2x)^{1/(2\ln x)}$

۱۱۳۱۹ سوال ۷.۳۹۹: $\lim_{x\to 0} (e^x + x)^{1/x}$

۱۱۳۲۰ سوال ۷.۴۰۰: $\lim_{x\to 0^+} x^x$

۱۱۳۲۱ سوال ۷.۴۰۱: $\lim_{x\to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

۱۱۳۲۲ **نظریہ اور استعمال**

۱۱۳۲۳ سوال ۷.۴۰۲ تا سوال ۷.۴۰۵ میں قاعدہ لھوپیٹال سے حد تلاش کرنا ممکن نہیں ہو گا۔ آپ گول دائرے میں گھومتے رہیں گے۔ کسی دوسرے طریقہ سے حد
۱۱۳۲۴ تلاش کریں۔

۱۳۲۵ سوال ۷.۴۰۲: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$

۱۳۲۶ سوال ۷.۴۰۳: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}$

۱۳۲۷ سوال ۷.۴۰۴: $\lim\limits_{x\to (\pi/2)^-} \frac{\sec x}{\tan x}$

۱۳۲۸ سوال ۷.۴۰۵: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{\csc x}$

۱۳۲۹ سوال ۷.۴۰۶: درج ذیل میں کون سا درست اور کون سا غلط ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۳۳۰ ا. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-3} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{2x} = \frac{1}{6}$

۱۳۳۱ ب. $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-3} = \frac{0}{6} = 0$

۱۳۳۲ سوال ۷.۴۰۷: درج ذیل میں کون سا درست اور کون سا غلط ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۳۳۳ ا. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{x^2-\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x-2}{2x-\cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2}{2+\sin x} = \frac{2}{2+0} = 1$

۱۳۳۴ ب. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{x^2-\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x-2}{2x-\cos x} = \frac{-2}{0-1} = 2$

۱۳۳۵ سوال ۷.۴۰۸: درج ذیل میں صرف ایک درست ہے۔ اس کو تلاش کریں۔ باقی دو کیوں غلط ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

۱۳۳۶ ا. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0\cdot(-\infty) = 0$

۱۳۳۷ ب. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0\cdot(-\infty) = -\infty$

۱۳۳۸ ج. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{(1/x)} = \frac{-\infty}{\infty} = -1$

۱۳۳۹ د. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{(1/x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{(1/x)}{(-1/x^2)} = \lim\limits_{x\to 0^+} (-x) = 0$

۱۳۴۰ سوال ۷.۴۰۹: درج ذیل فرض کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

۱۳۴۱ دکھائیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$ مگر $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ ہے۔ کیا یہ قاعدہ لھوپیٹال کی تردید کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۱۳۴۲ سوال ۷.۴۱۰: درج ذیل تفاعل کو $x = 0$ پر استمراری بنانے کے لیے درکار c کی قیمت تلاش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9x - 3\sin 3x}{5x^3}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

۱۱۳۴۳ آپ کی منتخب کردہ c کی قیمت کیوں درست ہے؟

۱۱۳۴۴ سوال ۷.۴۱۱: درج ذیل تفاعل کو $\theta = 0$ پر دائیں سے استمراری بنانے کے لیے درکار c کی قیمت تلاش کریں۔

$$g(\theta) = \begin{cases} \frac{(\tan\theta)^2}{\sin(4\theta^2/\pi)}, & \theta \neq 0 \\ c, & \theta = 0 \end{cases}$$

۱۱۳۴۵ آپ کی منتخب کردہ c کی قیمت کیوں درست ہے؟

۱۱۳۴۶ سوال ۷.۴۱۲: مسلسل سود در سود کا کلیہ

۱۱۳۴۷ ہم نے حصہ ۷.۵ میں مسلسل سود در سود کا کلیہ $A(t) = A_0 e^{rt}$ اخذ کرتے ہوئے درج ذیل دعویٰ کیا تھا۔

$$\lim_{k\to\infty} A_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} = A_0 e^{rt}$$

۱۱۳۴۸ یہ دعویٰ تب درست ہو گا جب درج ذیل درست ہو

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} = e^{rt}$$

۱۱۳۴۹ اور یہ اس صورت درست ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k} = e^{r}$$

۱۱۳۵۰ جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں، حد سے ناقابل معلوم روپ 1^∞ حاصل ہوتی ہے۔ قاعدہ لھوپیٹال سے حد کی تصدیق کریں۔

۱۱۳۵۱ سوال ۷.۴۱۳: اگر $x > 0$ ہو تب درج ذیل کی اعظم قیمت (اگر پائی جاتی ہو تب) تلاش کریں۔

۱۱۳۵۲ ا. $x^{1/x}$

۱۱۳۵۳ ب. x^{1/x^2}

۱۱۳۵۴ ج. x^{1/x^n}, n مثبت عدد صحیح ہے

۱۱۳۵۵ د. دکھائیں کہ ہر مثبت عدد صحیح n کے لیے $\lim_{x\to\infty} x^{1/x^n} = 1$ ہو گا۔

۱۱۳۵۶ **کمپیوٹر کا استعمال**

۱۱۳۵۷ سوال ۷.۴۱۴: مستقل e کی قیمت کا تلاش

۱۱۳۵۸

ا. قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

ب. تفاعل $f(x) = (1+1/x)^x$ کی قیمت $x = 10, 10^2, 10^3, \cdots$ کے لیے کیلکولیٹر کی مدد سے تلاش کرتے ہوئے دیکھیں کہ آپ اصل قیمت $e = 2.718\,281\,828\,459\,045\cdots$ کے کتنے قریب پہنچتے ہیں۔ اگرچہ ہم توقع کرتے ہیں کہ x کی قیمت بڑھانے سے زیادہ بہتر جواب حاصل ہو گا، بعض کیلکولیٹروں میں پورو پور خلل کی وجہ سے کسی مخصوص حد سے x کی قیمت بڑھنے کے بعد نتائج کم درست ہوں گے۔

ج. تفاعل $f(x) = (1+1/x)^x$ کو ترسیم کریں۔ یہاں بھی x کی زیادہ بڑی قیمت پر پورو پور خلل کی وجہ سے نتیجہ کم درست ہو گا۔

سوال ۷.۴۱۵: آئیں درج ذیل دو حد میں فرق پر غور کریں۔

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

ا. وقفہ $x \geq 0$ کے لیے درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x, \quad g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

تفاعل f کا رویہ اور g کا رویہ کیسا ہے؟ $\lim_{x\to\infty} f(x)$ کی قیمت کا اندازہ لگائیں۔

ب. قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے $\lim_{x\to\infty} f(x)$ کی حاصل کردہ قیمت کی تصدیق کریں۔

سوال ۷.۴۱۶: (ا) متغیر x کے کسی موزوں وسیع وقفہ پر $f(x) = x - \sqrt{x^2+x}$ ترسیم کرتے ہوئے درج ذیل حد کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+x})$$

(ب) قاعدہ لھوپیٹال سے اس حد کی تصدیق کریں۔ ایسا کرنے کے لیے پہلے $f(x)$ کو $\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x+\sqrt{x^2+x}}$ سے ضرب دے کر شمار کنندہ کی سادہ صورت حاصل کریں۔

سوال ۷.۴۱۷: درج ذیل کی اندازاً قیمت ترسیم کی مدد سے تلاش کریں۔ اس کی تصدیق قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے کریں۔

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}-3}$$

سوال ۷.۴۱۸: درج ذیل کی اندازاً قیمت ترسیم کی مدد سے تلاش کریں۔ اس کی تصدیق قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے کریں۔

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$$

سوال ۷.۴۱۹: (ا) تفاعل $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x\ln x - x - \cos \pi x}$ کو $x = 1$ کے نزدیک ترسیم کرتے ہوئے درج ذیل کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ اس کی تصدیق قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے کریں۔

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x\ln x - x - \cos \pi x}$$

(ب) تفاعل $f(x)$ کو $0 < x \leq 11$ کے لیے ترسیم کریں۔

سوال ۷.۴۲۰: $(\sin x)^x$ کی $[0, \pi]$ تک استمراری توسیع

ا. وقفہ $0 \leq x \leq \pi$ پر $f(x) = (\sin x)^x$ ترسیم کریں۔ تفاعل f کو $x = 0$ پر استمراری بنانے کی خاطر آپ f کی کیا قیمت مقرر کریں گے؟

ب. جزو-ا میں اپنے جواب کی تصدیق کرنے کی خاطر قاعدہ لھوپیٹال سے $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ج. وقفہ $[0, \pi]$ پر f کی اعظم قیمت ترسیم سے معلوم کریں۔ یہ قیمت کس نقطہ پر پائی جاتی ہے؟

د. جزو-ج میں اپنے جواب کو مزید بہتر بنانے کی خاطر f' کو ترسیم کر کے دیکھیں کہ یہ محور x کو کہاں قطع کرتا ہے۔ اپنے کام کو آسان بنانے کی خاطر آپ f' میں قوم نما حصہ کو رد کرتے ہوئے صرف اس حصہ کو ترسیم کر سکتے ہیں جس کا صفر پایا جاتا ہو۔

ھ. کی مزید بہتر اعظم قیمت جاننے کی خاطر مساوات $f' = 0$ کو اعدادی طریقہ سے حل کریں۔

و. جزو-ج، د اور ہ میں حاصل نقطوں پر f کی اعظم قیمت حاصل کریں۔ کون سی قیمت بہترین جواب ہے؟

سوال ۷.۴۲۱: تفاعل $f(x) = (\sin x)^{\tan x}$

ا. وقفہ $-7 \leq x \leq 7$ پر $f(x) = (\sin x)^{\tan x}$ ترسیم کریں۔ ترسیم میں درز کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ یہ درز کتنے چوڑے ہیں؟

ب. اب وقفہ $0 \leq x \leq \pi$ پر f ترسیم کریں۔ اگرچہ نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر f ناقابل معلوم ہے اس کے باوجود ترسیم میں اس نقطہ پر درز نہیں پایا جاتا ہے۔ ایسا کیوں ہے؟ نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر ترسیم f کی کیا قیمت دیتا ہے؟ (اشارہ۔ قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہوئے $x \to (\pi/2)^-$ اور $x = (\pi/2)^+$ کے لیے f کی حدیں تلاش کریں۔)

ج. جزو-ب کی ترسیم سے f کی اعظم اور اقل قیمت تلاش کریں اور وہ نقطے بھی تلاش کریں جہاں یہ قیمتیں پائی جاتی ہیں۔

سوال ۷.۴۲۲: x کی طاقتوں میں $\ln x$ کا مقام

درج ذیل کلیات کے سلسلہ میں درزوں

$$\int t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \frac{t^k}{k} + C, \quad k \neq 0 \tag{۳}$$

کو قدرتی لوگارتھم

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

بھرتا ہے لیکن ان کلیات کو دیکھ کر یہ کہنا ممکن نہیں ہو گا کہ قدرتی لوگارتھم ان میں صحیح بیٹھتا ہے۔ ہم مساوات ۳ میں سے ضد تفرق

$$\int_1^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \frac{x^k - 1}{k}, \quad x > 0$$

کی ترسیم کا $\ln x$ کی ترسیم کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے اس عمل کو دیکھ سکتے ہیں۔

ا. وقفہ $0 \leq x \leq 50$ پر $k = \mp 1, \mp 0.5, \mp 0.1, \mp 0.05$ کے لیے $f(x) = \frac{x^k - 1}{k}$ ترسیم کریں۔ ان کے ساتھ $\ln x$ بھی ترسیم کریں۔

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$\lim_{k \to 0} \frac{x^k - 1}{k} = \ln x$$

سوال ۷.۴۲۳: تصدیق برائے سوال ۶.۲۶۹، حصہ ۶.۷

درج ذیل کی بہتر سے بہتر قیمت ترسیم کی مدد سے حاصل کریں۔

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \alpha\cos\alpha}$$

قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

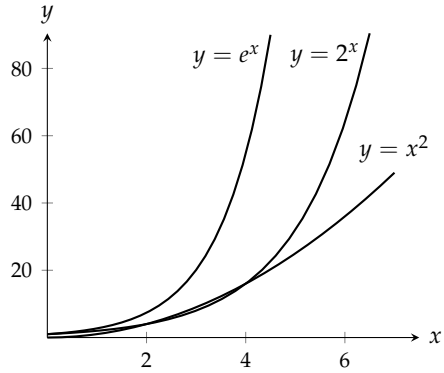
۷.۷ اضافی شرح نمو

اس حصہ میں x کی بڑھتی قیمت پر x کے تفاعل کی شرح تبدیلی پر غور کیا جائے گا۔ ہم ان تفاعل پر غور کریں گے جو $x \to \infty$ کرنے سے آخر کار مثبت ہو کر مثبت ہی رہتے ہیں۔

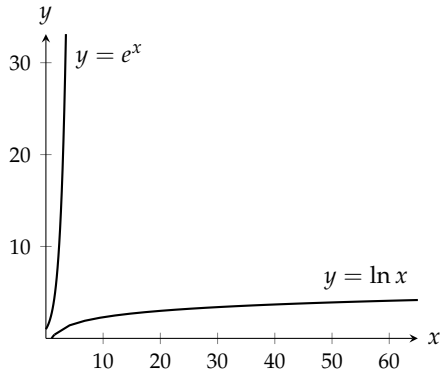
اضافی شرح نمو

آپ نے دیکھا ہو گا کہ متغیر x بڑھانے سے کثیر رکنی اور ناطق تفاعل (جنہیں ہم نے باب ۴ میں ترسیم کیا تھا) کے لحاظ سے قوت نما تفاعل، مثلاً 2^x اور e^x، زیادہ تیزی سے بڑھتے ہیں۔ قوت نما تفاعل یقیناً x کے لحاظ سے زیادہ تیزی سے بڑھتے ہیں۔ آپ شکل ۷.۳۳ میں دیکھ سکتے ہیں کہ x بڑھانے سے x^2 کے لحاظ سے 2^x زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔ درحقیقت $x \to \infty$ کرنے سے تفاعل 2^x اور e^x کے بڑھنے کی شرح، x کے کسی بھی طاقت (مثلاً $x^{1\,000\,000}$) کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی (سوال ۷.۴۴۲)۔

متغیر x بڑھاتے ہوئے تفاعل $y = e^x$ کے بڑھنے کی شرح کو سمجھنے کی خاطر تصور کریں کہ آپ اس تفاعل کو ترسیم کرتے ہیں جہاں محور کا پیمانہ 1 cm ہے۔ یوں $x = 1\,\mathrm{cm}$ پر $y = e^1 \approx 3\,\mathrm{cm}$ ہو گا۔ یوں $x = 6\,\mathrm{cm}$ پر $y = e^6 \approx 403\,\mathrm{cm}$ یعنی تقریباً 4 میٹر ہو گا جو کمرے کی چھت کے برابر ہو گا۔ اسی طرح $x = 10\,\mathrm{cm}$ پر $y = e^{10} \approx 22\,026\,\mathrm{cm}$ یعنی 220 m ہو گا جو شہر کے عموماً عمارتوں



شکل ۷.۳۳: تفاعل $y = e^x$ ، $y = 2^x$ اور تفاعل $y = x^2$



شکل ۷.۳۴: تفاعل $y = e^x$ اور $y = \ln x$ کا موازنہ

سے زیادہ بلند ہو گا۔ اگر $x = 24\,\text{cm}$ ہو تب y چاند تک آدھے فاصلہ سے زیادہ طے کر چکا ہو گا اور $x = 24\,\text{cm}$ پر y سورج کے قریب ترین ستارہ سے زیادہ دور ہو گا:

$$\begin{aligned} e^{43} &\approx 4.73 \times 10^{18}\,\text{cm} \\ &= 4.73 \times 10^{13}\,\text{km} \\ &\approx 5\text{نوری سال} \end{aligned}$$

اس کے باوجود محور x پر آپ مبدا سے صرف $43\,\text{cm}$ فاصلہ پر ہوں گے۔

اس کے برعکس $x \to \infty$ کرنے سے لوگارتھمی تفاعل $y = \log_2 x$ اور $y = \ln x$ کے بڑھنے کی شرح x کے کسی بھی مثبت طاقت کے بڑھنے کی شرح سے کم ہو گی (سوال ۷.۴۴۴)۔ یوں محور کا پیمانہ $1\,\text{cm}$ لیتے ہوئے مبدا سے صرف $43\,\text{cm}$ بلندی تک پہنچنے کی خاطر آپ کو محور x پر 5 نوری سال دور جانا ہو گا (شکل ۷.۳۴)۔

قوت نما، کثیر رکنی اور لوگارتھمی تفاعل کا ایک دوسرے کے ساتھ مذکورہ بالا موازنہ کو زیادہ درستگی سے بیان کرنے کی خاطر ہم ایک تعریف پیش کرتے ہیں۔ جب ہم کہتے ہیں کہ $x \to \infty$ کرنے سے کسی بھی تفاعل $g(x)$ کے بڑھنے کی شرح سے تفاعل $f(x)$ کے بڑھنے کی شرح زیادہ ہے تب اس سے مراد درج ذیل ہو گا۔

تعریف: $x \to \infty$ کرتے ہوئے بڑھنے کی شرح

فرض کریں کافی بڑے x کے لیے $f(x)$ اور $g(x)$ مثبت ہیں۔

۱. اگر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

یا، اس کا مماثل

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

ہو تب $x \to \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح، g کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی۔ ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے g کے بڑھنے کی شرح، f کے بڑھنے کی شرح سے کم ہو گی۔

ب. اگر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0 \qquad L \text{ غیر صفر اور متناہی ہے}$$

ہو تب $x \to \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح، g کے بڑھنے کی شرح کے برابر ہو گی۔

□

ان تعریف کے تحت تفاعل $y = 2x$ تفاعل $y = x$ سے زیادہ تیزی سے نہیں بڑھتا ہے۔ اس کی وجہ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2$$

ہے جو غیر صفر اور متناہی حد ہے۔ زیادہ تیزی سے بڑھنے کے عمومی مطلب کو ہم اس لیے نظر انداز کرتے ہیں کہ جب ہم کہیں کہ x کی بڑی قیمتوں کے لیے f کے بڑھنے کی شرح g کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہے تب اس سے مراد "x کی بڑی قیمتوں کے لیے f کے لحاظ سے g کی قیمت قابل نظر انداز ہے،" لینا چاہیے۔

مثال ۷.۵۱: $x \to \infty$ کرتے ہوئے x^2 کے لحاظ سے e^x درج ذیل کی وجہ سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty \qquad \text{قاعدہ لھوپیٹال دو مرتبہ استعمال کیا گیا}$$

□

مثال ۷.۵۲: (ا) $x \to \infty$ کرتے ہوئے 2^x کے لحاظ سے 3^x زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے چونکہ:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty$$

(ب) $x \to \infty$ کرتے ہوئے مختلف اساس کے قوت نما تفاعل کبھی بھی ایک شرح سے نہیں بڑھتے۔ اگر $a > b > 0$ ہو تب a^x کے بڑھنے کی شرح b^x کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی۔

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \infty$$

۱۱۴۴۷ □

۱۱۴۴۸ مثال ۷.۵۳: $x \to \infty$ کرتے ہوئے x^2 کے بڑھنے کی شرح $\ln x$ کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x\to\infty} 2x^2 = \infty$$

۱۱۴۴۹ □

۱۱۴۵۰ مثال ۷.۵۴: $x \to \infty$ کرنے سے $\ln x$ کے بڑھنے کی شرح x کے بڑھنے کی شرح سے کم ہو گی:

$$\lim x \to \infty \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

۱۱۴۵۱ □

۱۱۴۵۲ مثال ۷.۵۵: قوت نما تفاعل کے برعکس $x \to \infty$ کرتے ہوئے مختلف اساس کے لوگارتھمی تفاعل ایک سی شرح سے بڑھتے ہیں:

$$\lim x \to \infty \frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x/\ln a}{\ln x/\ln b} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

۱۱۴۵۳ یہ حد غیر صفر اور متناہی ہے۔ □

۱۱۴۵۴ اگر $x \to \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح اور g کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے کے برابر ہو، اور $x \to \infty$ کرتے ہوئے gf کے
۱۱۴۵۵ بڑھنے کی شرح اور h کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے کے برابر ہو، تب $x \to \infty$ کرتے ہوئے f اور h کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے کے
۱۱۴۵۶ برابر ہو گی۔ اس کی وجہ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = L_1 \quad \text{اور} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{g}{h} = L_2$$

۱۱۴۵۷ یعنی

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{h} = \lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{h} = L_1 L_2$$

۱۱۴۵۸ ہے۔ اگر L_1 اور L_2 غیر صفر اور متناہی ہوں تب $L_1 L_2$ بھی غیر صفر اور متناہی ہو گا۔

۱۱۴۵۹ مثال ۷.۵۶: دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\sqrt{x^2+5}$ اور $(2\sqrt{x}-1)^2$ کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے جتنی ہے۔

۱۱۴۶۰ **حل**

۱۱۴۶۱ ہم دکھاتے ہیں کہ دونوں تفاعل کے بڑھنے کی شرح رہی ہے جو تفاعل x کی ہے:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{5}{x^2}} = 1$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim_{x\to\infty} \left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4$$

۱۱۴۶۲ یوں دونوں تفاعل کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے جتنے ہو گی۔ □

۱۱۴۶۳ **رتبہ اور ''o'' علامتیت**

۱۱۴۶۴ بڑے O اور چھوٹے o کی علامت کمپیوٹر سائنس میں عام استعمال ہوتی ہے۔ انہیں یہاں متعارف کیا جاتا ہے۔

۱۱۴۶۵ تعریف: اگر $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ f کا رتبہ g سے کم ہے جس کو $f = o(g)$
۱۱۴۶۶ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس کو ''f ، g کا چھوٹا عددی o ہے'' پڑھا جاتا ہے۔

۱۱۴۶۷ □

۱۱۴۶۸ یوں $x \to \infty$ کرتے ہوئے $f = o(g)$ سے مراد $x \to \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح g سے کم ہے۔

۱۱۴۶۹ مثال ۷.۵۷:

$$\ln x = o(x) \quad \text{پر} \quad x \to \infty \quad \text{لہٰذا} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{چونکہ}$$
$$x^2 = o(x^3+1) \quad \text{پر} \quad x \to \infty \quad \text{لہٰذا} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3+1} = 0 \quad \text{چونکہ}$$

۱۱۴۷۰ □

۱۱۴۷۱ تعریف: فرض کریں کافی بڑے x پر $f(x)$ اور $g(x)$ مثبت ہیں۔ تب کافی بڑے x پر اگر کسی مثبت عدد صحیح M کے لیے

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq M$$

۱۱۴۷۲ ہو تب $x \to \infty$ پر f کا رتبہ زیادہ سے زیادہ g کے رتبے جتنا ہو گا۔ اس کو ہم $f = O(g)$ سے ظاہر کرتے ہیں جس کو ''f ، g کا بڑا O
۱۱۴۷۳ ہے'' پڑھا جاتا ہے۔

۱۱۴۷۴ □

۱۱۴۷۵ مثال ۷.۵۸: چونکہ کافی بڑے x کے لیے $\frac{x+\sin x}{x} \leq 2$ ہے لہٰذا $x \to \infty$ پر $x + \sin x = O(x)$ ہو گا۔ □

مثال ۷.۵۹: $x \to \infty$ پر $\frac{e^x+x^2}{e^x} \to 1$ کی وجہ سے $x \to \infty$ پر $e^x + x^2 = O(e^x)$ ہوگا۔ اسی طرح $x \to \infty$ پر $\frac{x}{e^x} \to 0$ کی وجہ سے $x \to \infty$ پر $x = O(e^x)$ ہوگا۔ □

تعریف پر دوبارہ نظر دوڑاتے ہوئے آپ دیکھیں گے کہ کافی بڑے x پر مثبت تفاعل کے لیے $f = o(g)$ سے مراد $f = O(g)$ ہے۔ اس کے علاوہ اگر f اور g کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے جتنی ہو تب $f = O(g)$ اور $g = O(f)$ ہوں گے (سوال ۷.۴۳۴)۔

ترتیبی اور ثنائی تلاش

کمپیوٹر کسی لائحہ کار کے تحت قدم باقدم چل کر کوئی کام سرانجام دیتا ہے۔ اس لائحہ کار کو **کمپیوٹر الخوارزم**[۲۲] کہتے ہیں۔ اس لائحہ کار کی کارگزاری جاننے کی خاطر ماہرین عموماً اس کام کو سرانجام کرنے کے لیے درکار قدموں کی گنتی کرتے ہیں۔ ایک ہی کام سرانجام دینے کے دو مختلف لائحہ کار کی کارگزاری میں بہت زیادہ فرق ہو سکتا ہے جنہیں بڑے O علامتی روپ میں پیش کیا جاتا ہے۔ آئیں ایک مثال دیکھتے ہیں۔

ایک لغت میں کسی ایک حرف سے شروع ہونے والے الفاظ کی تعداد 26 000 ہے۔ آپ اس حرف سے شروع ہونے والے ایک لفظ کو دو طریقوں سے تلاش کر سکتے ہیں۔ پہلی ترکیب میں آپ پہلے لفظ سے شروع کرتے ہوئے یک بہ یک لفظ پڑھ کر درکار لفظ تک پہنچتے ہیں۔ اس ترکیب کو **ترتیبی تلاش**[۲۳] کہتے ہیں جو لغت میں ترتیب سے الفاظ لکھے گئے ہونے سے استفادہ نہیں کرتا ہے۔ اس ترتیب میں آپ ہر صورت لفظ تلاش کر پائیں گے (یا جان جائیں گے کہ یہ لفظ لغت میں موجود نہیں ہے) لیکن عین ممکن ہے کہ آپ کو 26 000 قدم چلنا پڑے۔

اس سے بہتر ترکیب میں آپ لغت کے عین وسط (ایک دو الفاظ آگے پیچھے ہو سکتے ہیں) میں ایک لفظ کو دیکھتے ہیں۔ چونکہ لغت میں الفاظ ترتیب سے ہیں لہٰذا آپ معلوم کر پائیں گے کہ آیا درکار لفظ پہلی نصف یا دوسری نصف حصہ میں ہے۔ لغت کی اس نصف حصہ کو رد کریں جس میں لفظ موجود نہیں ہے۔ یوں پہلی قدم میں 13 000 الفاظ سے چھٹکارا حاصل ہوتا ہے۔ اب منتخب حصہ کے نصف میں جا کر دیکھیں کہ درکار لفظ کس جانب پایا جاتا ہے۔ یوں دوسرے قدم میں 6500 الفاظ سے چھٹکارا حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح ہر قدم پر آدھے حصے کو رد کرتے ہوئے چلتے جائیں جب تک آپ درکار لفظ تلاش نہیں کر پاتے یا الفاظ ختم نہیں ہو جاتے۔ چونکہ

$$\frac{26000}{2^{15}} < 1$$

ہوتا ہے لہٰذا آپ کو زیادہ سے زیادہ 15 قدم چل کر درکار لفظ مل جائے گا یا آپ جان جائیں گے کہ یہ لفظ لغت میں موجود نہیں ہے۔ اس ترتیب کو **ثنائی تلاش**[۲۴] کہتے ہیں۔

ایک سلسلہ جس کی لمبائی n ہو میں کسی جزو کی تلاش کے لیے ترتیبی تلاش کو n قدم درکار ہو سکتے ہیں۔ اس کے برعکس ثنائی تلاش استعمال کرتے ہوئے اگر $2^{m-1} < n < 2^m$ ہو تب $m - 1 < \log_2 n \leq m$ ہوگا اور ایک لفظ تک پہنچنے کی خاطر زیادہ سے زیادہ $m = \lceil \log_2 n \rceil$ ($\log_2 n$ کا عدد صحیح چھت تفاعل) بار دو حصوں میں تقسیم کی ضرورت پیش آئے گی۔ یوں ثنائی تلاش میں $\log_2 n$ کے لگ بھگ قدم درکار ہوں گے۔

---

[۲۲] computeralgorithm
[۲۳] sequentialsearch
[۲۴] binarysearch

بڑے O روپ میں اس تمام کو نہایت خوش اسلوبی سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ترتیبی سلسلہ میں ترتیبی تلاش کو $O(n)$ کے لگ بھگ قدم درکار ہوں گے جبکہ ثنائی تلاش کو $O(\log_2 n)$ کے لگ بھگ قدم درکار ہوں گے۔ ہماری مثال میں ان دو میں بہت زیادہ فرق پایا جاتا ہے (26 000 بالمقابل 15)اور چونکہ $n \to \infty$ کرتے ہوئے $\log_2 n$ کے لحاظ سے n زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے لہٰذا n بڑھانے سے یہ فرق زیادہ بڑھے گا۔

سوالات

قوت نما e^x کے ساتھ موازنہ

سوال ۷.۴۲۴: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل e^x سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

ا. $x+3$ ج. $\sqrt{x}$ ھ. $(\frac{3}{2})^x$ ز. $\frac{e^x}{2}$

ب. $x^3+\sin^2 x$ د. 4^x و. $e^{x/2}$ ح. $\log_{10} x$

سوال ۷.۴۲۵: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل e^x سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

ا. $10x^4+30x+1$ ج. $\sqrt{1+x^4}$ ھ. e^{-x} ز. $e^{\cos x}$

ب. $x\ln x - x$ د. $(\frac{5}{2})^x$ و. xe^x ح. e^{x-1}

طاقت x^2 کے ساتھ موازنہ

سوال ۷.۴۲۶: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل x^2 سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

ا. x^2+4x ج. $\sqrt{x^4+x^3}$ ھ. $x\ln x$ ز. x^3e^{-x}

ب. x^5-x^2 د. $(x+3)^2$ و. 2^x ح. $8x^2$

سوال ۷.۴۲۷: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل x^2 سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

ا. $x^2+\sqrt{x}$ ج. x^2e^{-x} ھ. x^3-x^2 ز. $(1.1)^x$

ب. $10x^2$ د. $\log_{10}(x^2)$ و. $(\frac{1}{10})^x$ ح. x^2+100x

لوگارتھم $\ln x$ کے ساتھ موازنہ

سوال ۷.۴۲۸: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل $\ln x$ سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا $\ln x$ کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا $\ln x$ سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

۱۱۵۴۸ ا. $\log_3 x$ ۱۱۵۵۰ ج. $\ln \sqrt{x}$ ۱۱۵۵۲ ھ. x ۱۱۵۵۴ ز. $\frac{1}{x}$

۱۱۵۴۹ ب. $\ln 2x$ ۱۱۵۵۱ د. $\sqrt{x}$ ۱۱۵۵۳ و. $5 \ln x$ ۱۱۵۵۵ ح. e^x

۱۱۵۵۶ سوال ۷.۴۲۹: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل $\ln x$ سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا $\ln x$ کی شرح سے بڑھتا
۱۱۵۵۷ ہے؟ کونسا $\ln x$ سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

۱۱۵۵۸ ا. $\log_2(x^2)$ ۱۱۵۶۰ ج. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ۱۱۵۶۲ ھ. $x - 2\ln x$ ۱۱۵۶۴ ز. $\ln(\ln x)$

۱۱۵۵۹ ب. $\log_{10} 10x$ ۱۱۵۶۱ د. $\frac{1}{x^2}$ ۱۱۵۶۳ و. e^{-x} ۱۱۵۶۵ ح. $\ln(2x+5)$

۱۱۵۶۶ شرح نمو کے لحاظ سے منظم کرنا

۱۱۵۶۷ سوال ۷.۴۳۰: $x \to \infty$ کرتے ہوئے شرح نمو کے لحاظ سے منظم کریں۔ کم تر شرح والے تفاعل کو پہلے لکھیں۔

۱۱۵۶۸ ا. e^x ۱۱۵۶۹ ب. x^x ۱۱۵۷۰ ج. $(\ln x)^x$ ۱۱۵۷۱ د. $e^{x/2}$

۱۱۵۷۲ سوال ۷.۴۳۱: $x \to \infty$ کرتے ہوئے شرح نمو کے لحاظ سے ترتیب دیں۔ کم تر شرح والے تفاعل کو پہلے لکھیں۔

۱۱۵۷۳ ا. 2^x ۱۱۵۷۴ ب. x^2 ۱۱۵۷۵ ج. $(\ln 2)^x$ ۱۱۵۷۶ د. e^x

۱۱۵۷۷ **بڑا O اور چھوٹا o ، رتبہ**

۱۱۵۷۸ سوال ۷.۴۳۲: $x \to \infty$ کرتے ہوئے کونسا درست اور کونسا غلط ہے؟

۱۱۵۷۹ ا. $x = o(x)$ ۱۱۵۸۲ د. $x = O(2x)$ ۱۱۵۸۵ ز. $\ln x = o(\ln 2x)$

۱۱۵۸۰ ب. $x = o(x+5)$ ۱۱۵۸۳ ھ. $e^x = o(e^{2x})$

۱۱۵۸۱ ج. $x = O(x+5)$ ۱۱۵۸۴ و. $x + \ln x = O(x)$ ۱۱۵۸۶ ح. $\sqrt{x^2+5} = O(x)$

۱۱۵۸۷ سوال ۷.۴۳۳: $x \to \infty$ کرتے ہوئے کونسا درست اور کونسا غلط ہے؟

۱۱۵۸۸ ا. $\frac{1}{x+3} = O(\frac{1}{x})$ ۱۱۵۹۰ ج. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = o(\frac{1}{x})$ ۱۱۵۹۳ و. $x \ln x = o(x^2)$

۱۱۵۹۱ د. $2 + \cos x = O(2)$ ۱۱۵۹۴ ز. $\ln(\ln x) = O(\ln x)$

۱۱۵۸۹ ب. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = O(\frac{1}{x})$ ۱۱۵۹۲ ھ. $e^x + x = O(e^x)$ ۱۱۵۹۵ ح. $\ln x = o(\ln(x^2+1))$

۱۱۵۹۶ سوال ۷.۴۳۴: دکھائیں کہ اگر $x \to \infty$ کرنے سے $f(x)$ اور $g(x)$ کے بڑھنے کی شرح برابر ہو تب $f = O(g)$ اور $g =$
۱۱۵۹۷ $O(f)$ ہوں گے۔

سوال ۷.۴۳۵: $x \to \infty$ کرتے ہوئے کب کثیر رکنی $f(x)$ کا رتبہ کثیر رکنی $g(x)$ کے رتبہ سے کم ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۷.۴۳۶: $x \to \infty$ کرتے ہوئے کب کثیر رکنی $f(x)$ کا رتبہ زیادہ سے زیادہ کثیر رکنی $g(x)$ کے رتبہ کے برابر ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۷.۴۳۷: قاعدہ سمسن اور قاعدہ ذوزنقہ

موجودہ حصہ میں پیش کی گئی تعریف کو زیادہ عمومی بنانے کی خاطر ہم اس میں $x \to \infty$ کی پابندی ختم کر کے اس کے بجائے $x \to a$ پر حد لیتے ہیں جہاں a حقیقی عدد ہے۔ دکھائیں کہ قاعدہ سمسن سے حاصل قطعی تکمل کی تخمین میں $h \to 0$ کرتے ہوئے خلل $O(h^4)$ ہوگا جبکہ قاعدہ ذوزنقہ سے حاصل تخمین میں خلل $O(h^2)$ ہوگا۔ یوں ان دو تراکیب کے نتائج کی درستگی کو اس طرح بھی بیان کیا جا سکتا ہے۔

دیگر موازنے

سوال ۷.۴۳۸: ناطق تفاعل کی حدوں کے بارے میں حصہ ۴.۵ میں حاصل نتیجہ ہمیں $x \to \infty$ کی صورت میں کثیر رکنی کی اضافی شرح نمو کے بارے میں کیا بتاتا ہے؟

سوال ۷.۴۳۹: کمپیوٹر ترسیم

(ا) درج ذیل پر تحقیق کریں۔ اس کے بعد قاعدہ لھوپیٹال سے اس تحقیق سے حاصل معلومات کی وجہ بیان کریں۔

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+999)}{\ln x}$$

(ب) دکھائیں کہ درج ذیل کی قیمت، مستقل a کی قیمت پر منحصر نہیں ہے۔ اس سے تفاعل $f(x) = \ln(x+a)$ اور $g(x) = \ln x$ کے اضافی شرح نمو کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+a)}{\ln x}$$

سوال ۷.۴۴۰: دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\sqrt{10x+1}$ اور $\sqrt{x+1}$ کی شرح نمو ایک دوسرے کے برابر ہیں۔ یہ دکھانے کی خاطر دکھائیں کہ دونوں تفاعل کی شرح نمو تفاعل $\sqrt{x}$ کے شرح نمو کے برابر ہے۔

سوال ۷.۴۴۱: دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\sqrt{x^4+x}$ اور $\sqrt{x^4-x^3}$ کی شرح نمو ایک دوسرے کے برابر ہیں۔ یہ دکھانے کی خاطر دکھائیں کہ دونوں تفاعل کی شرح نمو تفاعل x^2 کے شرح نمو کے برابر ہے۔

سوال ۷.۴۴۲: دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے e^x کی شرح نمو کسی بھی x^n کے شرح نمو سے زیادہ ہوگی، جہاں n کوئی بھی مثبت عدد صحیح ہو سکتا ہے، مثلاً $x^{1\,000\,000}$۔ (اشارہ۔ x^n کا n واں تفرق کیا ہے؟)

سوال ۷.۴۴۳: تفاعل e^x ہر کثیر رکنی سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے

دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے e^x کسی بھی کثیر رکنی $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔

سوال ۷.۴۴۴:

ا. دکھائیں کہ کسی بھی مثبت عدد صحیح n کی صورت میں $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\ln x$ کی شرح نمو تفاعل $x^{1/n}$ (مثلاً $x^{1/1\,000\,000}$) کی شرح نمو سے کم ہو گی۔

ب. اگرچہ $x^{1/1\,000\,000}$ کی قیمت آخر کار $\ln x$ کی قیمت سے زیادہ ہو گی، وہاں تک پہنچنے کے لیے آپ کو محور x پر بہت دور جانا ہو گا۔ ایسا $x > 1$ تلاش کریں جس پر $x^{1/1\,000\,000} > \ln x$ ہو۔ دھیان رہے کہ $x > 1$ کی صورت میں مساوات $\ln x = x^{1/1\,000\,000}$ کو $\ln(\ln x) = \frac{\ln x}{1\,000\,000}$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

ج. تفاعل $x^{1/10}$ کو بھی $\ln x$ سے بڑھنے کے لیے بہت وقت درکار ہو گا۔ کیلکولیٹر استعمال کرتے ہوئے x کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $x^{1/10}$ کی ترسیم $\ln x$ کی ترسیم کو کٹ کرتی ہو یا جہاں $\ln x = 10\ln(\ln x)$ ہو۔

د. وہ نقطہ جس پر $\ln x = 10\ln(\ln x)$ ہو کے قریب اس مساوات کو کمپیوٹر پر ترسیم کر کے x تلاش کریں۔

سوال ۷.۴۴۵: تفاعل $\ln x$ کی شرح نمو ہر کثیر رکنی سے کم ہے
دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\ln x$ کی شرح نمو کسی بھی غیر مستقل کثیر رکنی سے کم ہو گی۔

الخوارزم اور تلاش

سوال ۷.۴۴۶: (ا) آپ کمپیوٹر کی مدد سے ایک کام سرانجام دینا چاہتے ہیں۔ آپ کے پاس تین الخوارزم موجود ہیں جن کے لیے کمپیوٹر کو درکار قدموں کی تعداد درج ذیل تفاعل دیتے ہیں۔ n کی بڑی قیمت کی صورت میں ان میں سے کونسا الخوارزم بہترین ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$n\log_2 n, \quad n^{3/2}, \quad n(\log_2 n)^2$$

(ب) جزو-الف میں دیے گئے تفاعل کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں کونسا زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔

سوال ۷.۴۴۷: درج ذیل تفاعل کے لیے سوال ۷.۴۴۶ کو دہرائیں۔

$$n, \quad \sqrt{n}\log_2 n, \quad (\log_2 n)^n$$

سوال ۷.۴۴۸: ایک مرتب سلسلہ جس میں دس لاکھ اجزاء پائے جاتے ہیں میں سے آپ کو ایک جزو تلاش کرنا ہے۔ ترتیبی تلاش کے لیے کتنے قدم درکار ہوں گے؟ ثنائی تلاش کے لیے کتنے قدم درکار ہوں گے؟

سوال ۷.۴۴۹: ایک مرتب سلسلہ میں 450 000 اجزاء پائے جاتے ہیں جن میں سے آپ کو ایک جزو کی تلاش ہے۔ ترتیبی تلاش اور ثنائی تلاش کرتے ہوئے کتنے قدم درکار ہوں گے؟

جدول ۷.۷: تکونیاتی تفاعل کو یک بہ یک بنانے کی خاطر دائرہ کار کو پابند کیا گیا ہے۔

تفاعل	دائرہ کار	سعت
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[-1, 1]$
$\cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
$\tan x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(-\infty, \infty)$
$\cot x$	$(0, \pi)$	$(-\infty, \infty)$
$\sec x$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\csc x$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

۷.۸ معکوس تکونیاتی تفاعل

معکوس تکونی تفاعل کی ضرورت اس وقت پیش آتی ہے جب ہم مثلث کے ضلع کو ناپ کر زاویہ تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ یہ تفاعل اہم ضد تفرق بھی مہیا کرتے ہیں اور تفرقی مساوات کے حل میں عموماً پائے جاتے ہیں۔ اس حصہ میں ان تفاعل کی تعریف پیش کی جائے گی، ان کو ترسیم کرنا سکھایا جائے گا اور ان کی قیمت حاصل کرنا سکھایا جائے گا۔

معکوس تکونیاتی کی تعریف

چھ بنیادی تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں دہراتی ہیں لہٰذا یہ یک بہ یک تفاعل نہیں ہیں البتہ ان کے دائرہ کار کو ایسے وقفوں پر پابند کیا جا سکتا ہے جہاں یہ یک بہ یک ہوں (جدول ۷.۷)۔

چونکہ پابند دائرہ کار والے تکونیاتی تفاعل یک بہ یک ہیں لہٰذا ان کے معکوس پائے جاتے ہیں جنہیں ظاہر کرنے کا طریقہ درج ذیل ہے۔

$$y = \sin^{-1} x$$
$$y = \cos^{-1} x$$
$$y = \tan^{-1} x$$
$$y = \cot^{-1} x$$
$$y = \sec^{-1} x$$
$$y = \csc^{-1} x$$

ہم کہیں گے "x کا معکوس سائن y کے برابر ہے"، وغیرہ۔ یاد رہے کہ ان معکوس تفاعل میں -1 سے مراد معکوس تفاعل ہے اور لہٰذا اس کو ہر گز

مقلوب تصور نہیں کیا جائے۔ مثال کے طور پر $\sin x$ کا مقلوب $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x} = \csc x$ ہو گا۔

معکوس تکونیاتی تفاعل کے دائرہ کاریوں منتخب کیے جاتے ہیں کہ درج ذیل مطمئن ہوں۔

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\tfrac{1}{x}\right) \tag{۱}$$

$$\csc^{-1} x = \sin^{-1}\left(\tfrac{1}{x}\right) \tag{۲}$$

$$\cot^{-1} x = \tfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \tag{۳}$$

ان تعلقات کو استعمال کر کے $\cos^{-1} x$ ، $\sin^{-1} x$ اور $\tan^{-1} x$ کی قیمتیں جانتے ہوئے ہم بالترتیب $\sec^{-1} x$ ، $\csc^{-1} x$ اور $\cot^{-1} x$ کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں۔

معکوس سائن اور معکوس کوسائن

متغیر x کے معکوس سائن یعنی $\sin^{-1} x$ سے مراد وہ زاویہ ہے جس کا سائن x کے برابر ہو۔ اسی طرح $\cos^{-1} x$ سے مراد وہ زاویہ ہے جس کے کوسائن کی قیمت x ہو۔

تعریف: $y = \sin^{-1} x$ سے مراد وقفہ $[-\pi/2, \pi/2]$ میں وہ عدد y ہے جس کے لیے $\sin y = x$ ہو۔ اسی طرح $y = \cos^{-1} x$ سے مراد وقفہ $[0, \pi]$ میں وہ عدد y ہے جس کے لیے $\cos y = x$ ہو۔

□

تفاعل $y = \sin^{-1} x$ (شکل ۷.۳۵) کی ترسیم مبدا کے لحاظ سے تشاکلی ہے (اور عین $x = \sin y$ کی ترسیم پر پائی جاتی ہے)۔ یوں معکوس سائن طاق تفاعل ہے:

$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x \tag{۴}$$

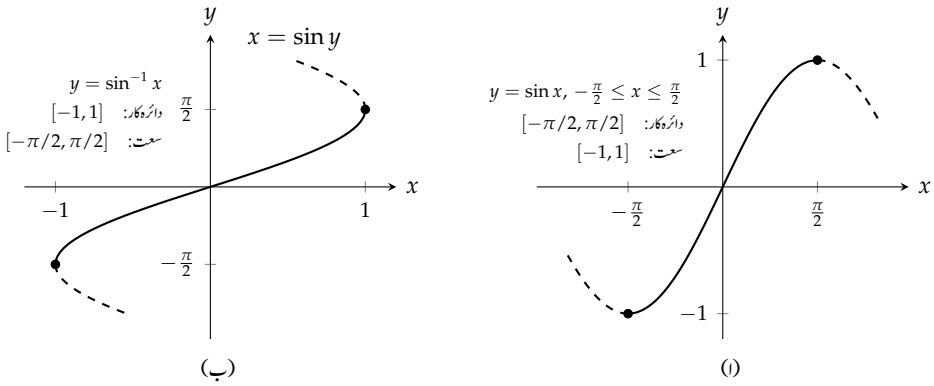
تفاعل $y = \cos^{-1} x$ (شکل ۷.۳۶) کی ترسیم میں ایسی کوئی تشاکلی نہیں پائی جاتی ہے۔

مثال ۷.۶۰: تفاعل $\sin^{-1} x$ کی مخصوص قیمتیں

معکوس سائن کی مخصوص قیمتوں کو قائمہ مثلث سے شکل ۷.۶۰ میں حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔ اس طرح درج ذیل دیگر قیمتیں بھی حاصل کی جا سکتی ہیں۔ یاد رہے کہ $\sin^{-1} x$ کا سعت $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ہے لہٰذا زاویے ربع اول اور ربع چہارم میں پائے جائیں گے۔

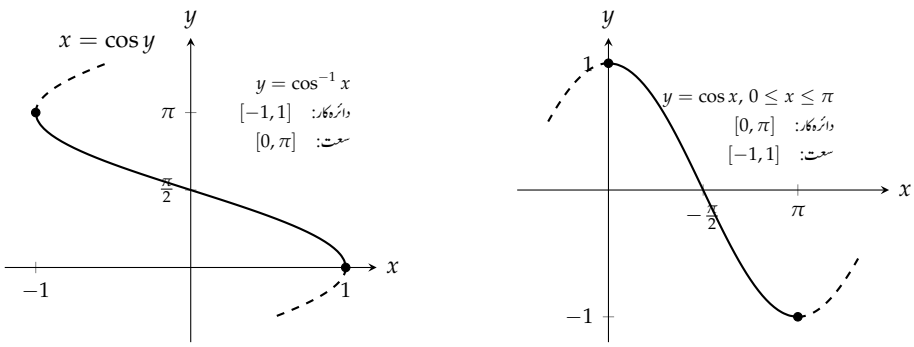
x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin^{-1} x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$

□



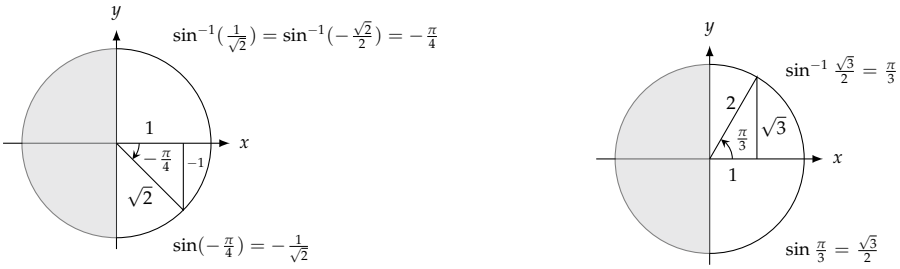
(ا) (ب)

شکل ۷.۳۵: ترسیمات برائے (ا) $y = \sin x,\ -\pi/2 \le x \le \pi/2$ اور (ب) معکوس سائن تفاعل $y = \sin^{-1} x$؛ لکیر $y = x$ میں عکس $\sin^{-1} x$ درحقیقت قوس $x = \sin y$ کا کچھ حصہ ہے۔

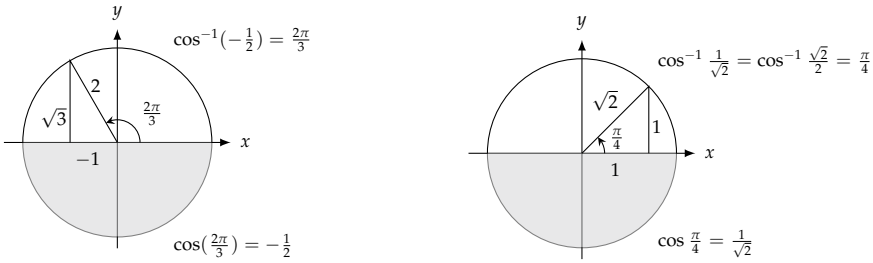


(ا) (ب)

شکل ۷.۳۶: ترسیمات برائے (ا) $y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi$ اور (ب) معکوس کوسائن تفاعل $y = \cos^{-1} x$؛ لکیر $y = x$ میں عکس $\cos^{-1} x$ درحقیقت قوس $x = \cos y$ کا کچھ حصہ ہے۔



شکل ۷.۳۷: سائن اور معکوس سائن کی مخصوص قیمتیں (مثال ۷.۶۰)۔



شکل ۷.۳۸: کوسائن اور معکوس سائن کی مخصوص قیمتیں (مثال ۷.۶۱)۔

مثال ۷.۶۱: تفاعل $\cos^{-1} x$ کی مخصوص قیمتیں

معکوس کوسائن کی مخصوص قیمتوں کو قائمہ مثلث سے شکل ۷.۶۱ میں حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔ اس طرح درج ذیل دیگر قیمتیں بھی حاصل کی جا سکتی ہیں۔ یاد رہے کہ $\cos^{-1} x$ کا سعت $[0, \pi]$ ہے لہٰذا زاویے ربع اول اور ربع دوم میں پائے جائیں گے۔

x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos^{-1} x$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

□

تماثل جن میں معکوس سائن اور معکوس کوسائن پائے جاتے ہوں

ہم شکل ۷.۳۹ میں دیکھتے ہیں کہ x کا معکوس کوسائن تماثل

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi \tag{۵}$$

کو مطمئن کرتا ہے جس کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x \tag{۶}$$

اسی طرح شکل ۷.۴۰ میں مثلث کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \tag{۷}$$

اگرچہ شکل ۷.۴۰ میں دی گئی مثلث سے یہ ثابت نہیں کیا جا سکتا ہے لیکن مساوات ۷ وقفہ $[-1, 1]$ میں دیگر x کے لیے بھی درست ہے۔ یہ حقیقت مساوات ۴ اور مساوات ۶ کا نتیجہ ہے (سوال ۷.۵۰۴)۔

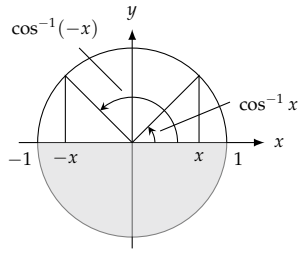
$\tan x$ ، $\cot x$ ، $\sec x$ اور $\csc x$ کے معکوس

متغیر x کا معکوس ٹینجنٹ وہ زاویہ ہو گا جس کا ٹینجنٹ x ہو۔ اسی طرح x کا معکوس کوٹینجنٹ وہ زاویہ ہو گا جس کا کوٹینجنٹ x ہو۔

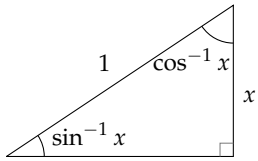
تعریف: وقفہ $(-\pi/2, \pi/2)$ میں وہ عدد جس کا $\tan y = x$ ہو عدد $y = \tan^{-1} x$ ہو گا۔ اسی طرح وقفہ $(0, \pi)$ میں وہ عدد جس کا $\cot y = x$ ہو عدد $y = \cot^{-1} x$ ہو گا۔

□

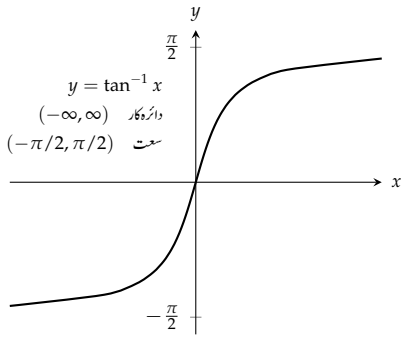
ہم کھلا وقفہ لیتے ہیں تاکہ ان نقطوں سے نجات حاصل کر سکیں جن پر ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ غیر معین ہیں۔



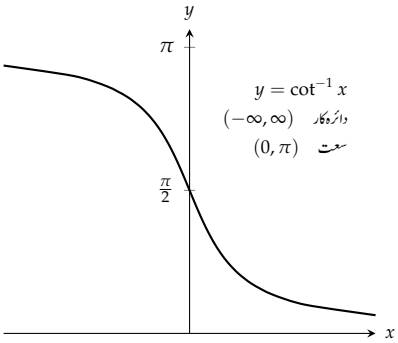
شکل ۷.۳۹: $\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi$



شکل ۷.۴۰: $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$



شکل ۷.۴۱: ترسیم $y = \tan^{-1} x$



شکل ۷.۴۲: ترسیم $y = \cot^{-1} x$

۱۱۶۹۲ تفاعل $y = \tan^{-1} x$ کی ترسیم تفاعل $x = \tan y$ کی ترسیم، جو مبدا کے لحاظ سے تشاکلی ہے، کا کچھ حصہ ہے لہٰذا یہ بھی مبدا کے لحاظ سے تشاکلی
۱۱۶۹۳ ہوگا (شکل ۷.۴۱)۔ الجبرائی طور پر اس سے مراد

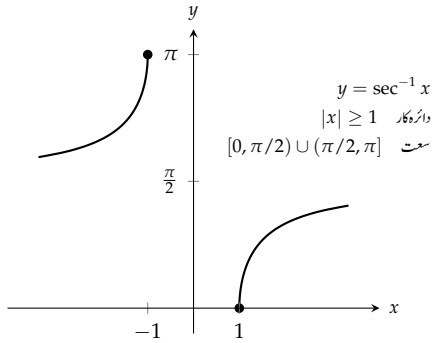
$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x \tag{۸}$$

۱۱۶۹۴ ہے، یعنی، معکوس ٹینجنٹ طاق تفاعل ہے۔ تفاعل $y = \cot^{-1} x$ کی ترسیم میں ایسی کوئی تشاکلی نہیں پائی جاتی ہے (شکل ۷.۴۲)۔

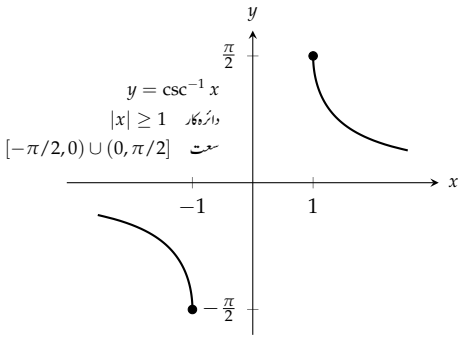
۱۱۶۹۵ تفاعل $\sec x$ اور $\csc x$ کے پابند شدہ روپ کے معکوس کی ترسیمات کو بالترتیب شکل ۷.۴۳ اور شکل ۷.۴۴ میں دکھایا گیا ہے۔

۱۱۶۹۶ انتباہ: متغیر x کی منفی قیمتوں کے لیے $\sec^{-1} x$ کی تعریف پر اتفاق نہیں پایا جاتا ہے۔ ہم ربع دوم میں $\frac{\pi}{2}$ اور π کے بیچ زاویہ لیں گے۔ اس
۱۱۶۹۷ انتخاب کی وجہ سے $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$ ہوگا اور $\sec^{-1} x$ کے دائرہ کار کے ہر حصہ پر $\sec^{-1} x$ بڑھتا ہوا تفاعل ہوگا۔

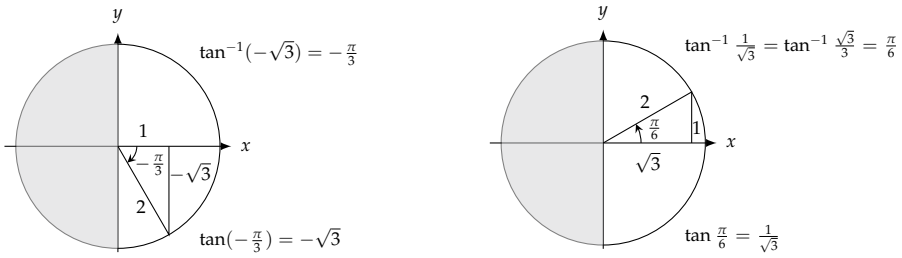
۱۱۶۹۸ مثال ۷.۶۲: معکوس کوٹینجنٹ $\tan^{-1} x$ کی مخصوص قیمتیں



شکل ۷.۴۳: ترسیم $y = \sec^{-1} x$



شکل ۷.۴۴: ترسیم $y = \csc^{-1} x$



شکل ۷.۴۵: معکوس کو ٹینجنٹ کی مخصوص قیمتیں (مثال ۷.۶۲)۔

۱۱۶۹۹ معکوس کو ٹینجنٹ کی مخصوص قیمتوں کا حصول شکل ۷.۴۵ میں دکھایا گیا ہے۔ درج ذیل دیگر قیمتیں بھی اسی طرح حاصل کی جا سکتی ہیں۔

x	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$

۱۱۷۰۰ □

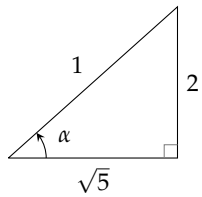
۱۱۷۰۱ مثال ۷.۶۳: اگر $\alpha = \sin^{-1} \frac{2}{3}$ ہو تب $\cos \alpha$ ، $\tan \alpha$ ، $\sec \alpha$ ، $\csc \alpha$ اور $\cot \alpha$ کیا ہوں گے؟

۱۱۷۰۲ **حل**

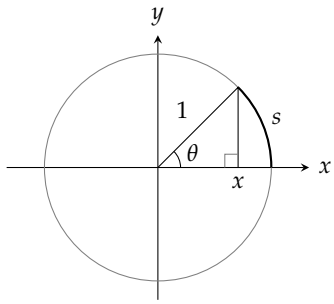
۱۱۷۰۳ چونکہ $\alpha = \sin^{-1} \frac{2}{3}$ ہے لہٰذا ہم α کو قائمہ مثلث کا ایک زاویہ تصور کرتے ہیں جس کا مخالف ضلع 2 اور وتر 3 ہیں۔ مثلث کا تیسرا ضلع (قاعدہ)

۱۱۷۰۴ درج ذیل ہو گا (شکل ۷.۴۶)۔

$$\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$ مسئلہ فیثاغورث



شکل ۷.۴۶: مثلث کی مدد سے زاویوں کا حصول (مثال ۷.۶۳)



شکل ۷.۴۷: اکائی دائرہ میں زاویہ $\theta = \cos^{-1} x$ مخالف قوس کی لمبائی s کے برابر ہو گا۔

۱۱۷۰۵ ہم مثلث پر قاعدہ کی لمبائی لکھ کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3},\ \tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \sec\alpha = \frac{3}{\sqrt{5}},\ \csc\alpha = \frac{3}{2},\ \cot\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

۱۱۷۰۶ □

۱۱۷۰۷ رداس r کے دائرہ میں مرکز پر زاویہ θ اور قوس کی لمبائی s کا تعلق $s = r\theta$ ہے لہٰذا اکائی دائرہ میں $s = \theta$ ہو گا (شکل ۷.۴۷)۔ یوں متغیر x کا

۱۱۷۰۸ معکوس کوسائن $\cos^{-1} x$ زاویہ θ دیگا جس کی قیمت مخالف قوس کی لمبائی s کے برابر ہو گی۔ معکوس سائن کے لیے بھی اس قسم کا تعلق پایا جاتا ہے۔

۱۱۷۰۹ مثال ۷.۶۴: $\cot\left(\sec^{-1}(-\frac{2}{\sqrt{3}}) + \csc^{-1}(-2)\right)$ کی قیمت تلاش کریں۔

۱۱۷۱۰ **حل**

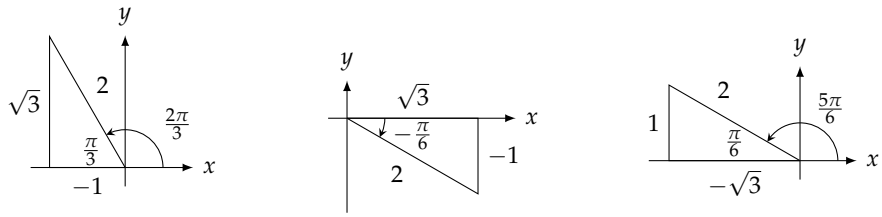
۱۱۷۱۱ ہم اندر سے باہر کی جانب چلتے ہوئے زاویوں اور نسبتوں کو مثلثوں کی مدد سے ظاہر کریں گے۔

۱۱۷۱۲ **پہلا قدم:** سیکنٹ کی منفی قیمتیں ربع دوم کے زاویوں سے حاصل ہوں گی (شکل ۷.۴۸-ا):

$$\sec^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{2}{-\sqrt{3}}\right) = \frac{5\pi}{6}$$

۱۱۷۱۳ **دوسرا قدم:** کوسیکنٹ کی منفی قیمتیں ربع چہارم کے زاویوں سے حاصل ہوں گی (شکل ۷.۴۸-ب):

$$\csc^{-1}(-2) = \csc^{-1}\left(\frac{2}{-1}\right) = -\frac{\pi}{6}$$



(ا) $\sec(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ (ب) $\csc(-\frac{\pi}{6}) = -2$ (ج) $\cot(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

شکل ۷.۴۸: مثلث برائے مثال ۷.۶۴

(ا) (ب)

شکل ۷.۴۹: مثلث برائے مثال ۷.۶۵

۱۱۷۴ **تیسرا قدم:** کوٹینجنٹ کی قیمتیں ربع چہارم سے حاصل ہو گی (شکل ۷.۶۴-ج):

$$\begin{aligned}\cot\left(\sec^{-1}(-\tfrac{2}{\sqrt{3}}) + \csc^{-1}(-2)\right) &= \cot\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)\\ &= \cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

۱۱۷۵ □

۱۱۷۶ مثال ۷.۶۵: $\sec\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\right)$ تلاش کریں۔

۱۱۷۷ **حل**

۱۱۷۸ ہم $\theta = \tan^{-1}(x/3)$ لے کر زاویہ θ کو قائمہ مثلث میں تصور کرتے ہیں (شکل ۷.۴۹-ا)۔ یوں

$$\tan\theta = \frac{\text{مخالف}}{\text{قریبی}} = \frac{x}{3}$$

۱۱۷۱۹ ہو گا۔ مثلث کا وتر

$$\sqrt{x^2+3^2} = \sqrt{x^2+9}$$

۱۱۷۲۰ ہو گا لہٰذا سیکنٹ کی قیمت درج ذیل ہو گی (شکل ۷.۴۹-ب)۔

$$\sec\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\right) = \sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$$

۱۱۷۲۱ □

۱۱۷۲۲ **سوالات**

۱۱۷۲۳ **معکوس تکونیاتی تفاعل کی مخصوص قیمتیں**

۱۱۷۲۴ سوال ۷.۴۵۰ تا سوال ۷.۴۶۱ میں مثال ۷.۶۰ تا مثال ۷.۶۲ کی طرح حوالہ مثلث استعمال کرتے ہوئے زاویے تلاش کریں۔

۱۱۷۲۵ سوال ۷.۴۵۰: (ا) $\tan^{-1} 1$، (ب) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$، (ج) $\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$

۱۱۷۲۶ سوال ۷.۴۵۱: (ا) $\tan^{-1}(-1)$، (ب) $\tan^{-1}\sqrt{3}$، (ج) $\tan^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{3}})$

۱۱۷۲۷ سوال ۷.۴۵۲: (ا) $\sin^{-1}(\frac{-1}{2})$، (ب) $\sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$، (ج) $\sin^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2})$

۱۱۷۲۸ سوال ۷.۴۵۳: (ا) $\sin^{-1}(\frac{1}{2})$، (ب) $\sin^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{2}})$، (ج) $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$

۱۱۷۲۹ سوال ۷.۴۵۴: (ا) $\cos^{-1}(\frac{1}{2})$، (ب) $\cos^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{2}})$، (ج) $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$

۱۱۷۳۰ سوال ۷.۴۵۵: (ا) $\cos^{-1}(\frac{-1}{2})$، (ب) $\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$، (ج) $\cos^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2})$

۱۱۷۳۱ سوال ۷.۴۵۶: (ا) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$، (ب) $\sec^{-1}(\frac{2}{\sqrt{3}})$، (ج) $\sec^{-1}(-2)$

۱۱۷۳۲ سوال ۷.۴۵۷: (ا) $\sec^{-1}(\sqrt{2})$، (ب) $\sec^{-1}(\frac{-2}{\sqrt{3}})$، (ج) $\sec^{-1}(2)$

۱۱۷۳۳ سوال ۷.۴۵۸: (ا) $\csc^{-1}(\sqrt{2})$، (ب) $\csc^{-1}(\frac{-2}{\sqrt{3}})$، (ج) $\csc^{-1}(2)$

۱۱۷۳۴ سوال ۷.۴۵۹: (ا) $\csc^{-1}(-\sqrt{2})$، (ب) $\csc^{-1}(\frac{2}{\sqrt{3}})$، (ج) $\csc^{-1}(-2)$

۱۱۷۳۵ سوال ۷.۴۶۰: (ا) $\cot^{-1}(-1)$، (ب) $\cot^{-1}\sqrt{3}$، (ج) $\cot^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{3}})$

۱۱۷۳۶ سوال ۷.۴۶۱: (ا) $\cot^{-1}(1)$، (ب) $\cot^{-1}\sqrt{-3}$، (ج) $\cot^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$

۱۱۷۳۷ **تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں**

سوال ۷.۴۶۲: اگر $\alpha = \sin^{-1}(\frac{5}{13})$ ہو تب $\cos\alpha$ ، $\tan\alpha$ ، $\sec\alpha$ ، $\csc\alpha$ اور $\cot\alpha$ کیا ہوں گے؟

سوال ۷.۴۶۳: اگر $\alpha = \tan^{-1}(\frac{4}{3})$ ہو تب $\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$ ، $\sec\alpha$ ، $\csc\alpha$ اور $\cot\alpha$ کیا ہوں گے؟

سوال ۷.۴۶۴: اگر $\alpha = \sec^{-1}(-\sqrt{5})$ ہو تب $\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$ ، $\tan\alpha$ ، $\csc\alpha$ اور $\cot\alpha$ کیا ہوں گے؟

سوال ۷.۴۶۵: اگر $\alpha = \sec^{-1}(\frac{-\sqrt{13}}{2})$ ہو تب $\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$ ، $\tan\alpha$ ، $\csc\alpha$ اور $\cot\alpha$ کیا ہوں گے؟

تکونیاتی اور معکوس تکونیاتی اجزاء کی قیمتوں کا حصول

سوال ۷.۴۶۶ تا سوال ۷.۴۷۷ میں درکار قیمت معلوم کریں۔

سوال ۷.۴۶۶: $\sin\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

سوال ۷.۴۶۷: $\sec\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$

سوال ۷.۴۶۸: $\tan\left(\sin^{-1}(-\frac{1}{2})\right)$

سوال ۷.۴۶۹: $\cot\left(\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})\right)$

سوال ۷.۴۷۰: $\csc(\sec^{-1}2) + \cos(\tan^{-1}(-\sqrt{3}))$

سوال ۷.۴۷۱: $\tan(\sec^{-1}1) + \sin(\csc^{-1}(-2))$

سوال ۷.۴۷۲: $\sin\left(\sin^{-1}(-\frac{1}{2}) + \cos^{-1}(-\frac{1}{2})\right)$

سوال ۷.۴۷۳: $\cot\left(\sin^{-1}(-\frac{1}{2}) - \sec^{-1}2\right)$

سوال ۷.۴۷۴: $\sec(\tan^{-1}1 + \csc^{-1}1)$

سوال ۷.۴۷۵: $\sec(\cot^{-1}\sqrt{3} + \csc^{-1}(-1))$

سوال ۷.۴۷۶: $\sec^{-1}(\sec(-\frac{\pi}{6}))$ (جواب $-\frac{\pi}{6}$ نہیں ہے۔)

سوال ۷.۴۷۷: $\cot^{-1}(\cot(-\frac{\pi}{4}))$

تکونیاتی فقرے

سوال ۷.۴۷۸ تا سوال ۷.۴۸۹ میں تکونیاتی فقروں کو حل کریں۔

سوال ۷.۴۷۸: $\sec(\tan^{-1}\frac{x}{2})$

سوال ۷.۴۷۹: $\sec(\tan^{-1}2x)$

سوال ۷.۴۸۰: $\tan(\sec^{-1}3y)$

سوال ۷.۴۸۱: $\tan(\sec^{-1}\frac{y}{5})$

سوال ۷.۴۸۲: $\cos(\sin^{-1}x)$

سوال ۷.۴۸۳: $\tan(\cos^{-1}x)$

سوال ۷.۴۸۴: $\sin(\tan^{-1}\sqrt{x^2-2x}),\quad x\geq 2$

سوال ۷.۴۸۵: $\sin(\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$

سوال ۷.۴۸۶: $\cos(\sin^{-1}\frac{2y}{3})$

سوال ۷.۴۸۷: $\cos(\sin^{-1}\frac{y}{5})$

سوال ۷.۴۸۸: $\sin(\sec^{-1}\frac{x}{4})$

سوال ۷.۴۸۹: $\sin(\sec^{-1}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x})$

حد

سوال ۷.۴۹۰ تا سوال ۷.۴۹۷ میں حد تلاش کریں۔ جہاں شبہ ہو وہاں تفاعل کی ترسیم پر نظر ڈالیں۔

سوال ۷.۴۹۰: $\lim\limits_{x\to 1^-}\sin^{-1}x$

سوال ۷.۴۹۱: $\lim\limits_{x\to -1^+}\cos^{-1}x$

سوال ۷.۴۹۲: $\lim\limits_{x\to\infty}\tan^{-1}x$

سوال ۷.۴۹۳: $\lim\limits_{x\to -\infty}\tan^{-1}x$

سوال ۷.۴۹۴: $\lim\limits_{x\to\infty}\sec^{-1}x$

سوال ۷.۴۹۵: $\lim\limits_{x\to -\infty}\sec^{-1}x$

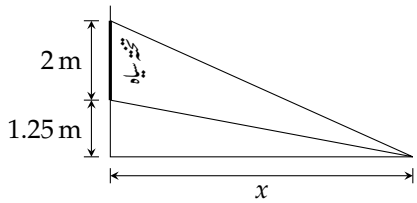
سوال ۷.۴۹۶: $\lim\limits_{x\to\infty}\csc^{-1}x$

سوال ۷.۴۹۷: $\lim\limits_{x\to -\infty}\csc^{-1}x$

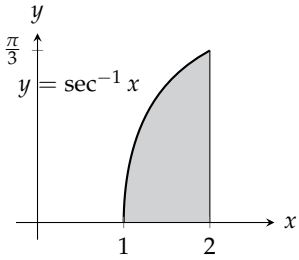
نظریہ اور استعمال

سوال ۷.۴۹۸: آپ کے اسکول کے تدریسی کمروں میں لکھائی کا تختہ سیاہ[۲۵] زمین سے 1.25 m کی اونچائی سے شروع ہوتا ہے جبکہ اس کا قد 2 m میٹر ہے۔ آپ تختہ سیاہ سے x میٹر کے فاصلہ پر ہیں۔ دکھائیں کہ آپ کا دیکھنے کا زاویہ $\alpha = \cot^{-1}\frac{x}{3.25} - \cot^{-1}\frac{x}{1.25}$ ہے (شکل

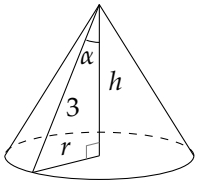
[۲۵] blackboard



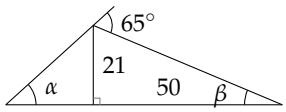
شکل ۷.۵۰: تدریسی کمرہ میں تختہ سیاہ (سوال ۷.۴۹۸)



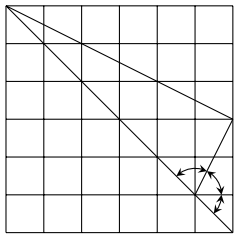
شکل ۷.۵۱: جسم طواف (سوال ۷.۴۹۹)



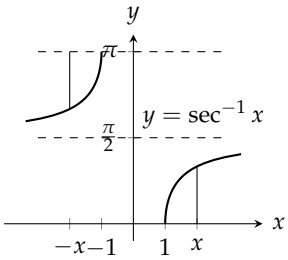
شکل ۷.۵۲: مخروط برائے سوال ۷.۵۰۰



شکل ۷.۵۳: برائے سوال ۷.۵۰۱



شکل ۷.۵۴: برائے سوال ۷.۵۰۲



شکل ۷.۵۵: ترسیم برائے سوال ۷.۵۰۳

۷.۵۰)۔

سوال ۷.۴۹۹: منحنی $y = \sec^{-1} x$ اور محور x پر $x = 1$ تا $x = 2$ کے بیچ خطہ کو محور y کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل ۷.۵۱)۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۷.۵۰۰: ایک مخروط کا ترچھا قد $3\,\mathrm{m}$ ہے (شکل ۷.۵۲)۔ مخروط کا اعظم حجم کس زاویہ α پر حاصل ہو گا۔

سوال ۷.۵۰۱: زاویہ α کو شکل ۷.۵۳ میں دریافت کریں۔

سوال ۷.۵۰۲: آپ $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \pi$ کی تصدیق شکل ۷.۵۴ کی مدد سے کر سکتے ہیں۔ ایسا کر کے دیکھیں۔

سوال ۷.۵۰۳: (ا) تماثل $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$ کو شکل ۷.۵۵ کی مدد سے جیومیٹریائی طور پر اخذ کریں۔ (ب) اسی تماثل کو درج ذیل دو مساوات کی مدد سے تحلیلی طور پر اخذ کریں۔

مساوات ۶ $$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$$

مساوات ۱ $$\sec^{-1} x = \cos^{-1}\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

سوال ۷.۵۰۴: تماثل $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ کو $0 < x < 1$ کے لیے شکل ۷.۴۰ سے اخذ کیا گیا۔ اس کی تصدیق وقفہ $[-1,1]$ کے باقی حصہ کے لیے کرنے کی خاطر $x = 1$ ، $x = 0$ اور $x = -1$ اس تماثل میں پر کر کے دیکھیں۔ اس کے بعد وقفہ $(-1,0)$ میں x کے لیے اس کی تصدیق کی خاطر $x = -a,\ a > 0$ لیتے ہوئے مساوات ۴ اور مساوات ۶ کا اطلاق مجموعہ $\sin^{-1}(-a) + \cos^{-1}(-a)$ پر کریں۔

سوال ۷.۵۰۵: دکھائیں کہ مجموعہ $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(\frac{1}{x})$ مستقل ہے۔

سوال ۷.۵۰۶ تا سوال ۷.۵۰۹ میں کون سے فقرے معین اور کون سے غیر معین ہیں؟

سوال ۷.۵۰۶: (ا) $\tan^{-1} 2$ ، (ب) $\cos^{-1} 2$

سوال ۷.۵۰۷: (ا) $\csc^{-1} \frac{1}{2}$ ، (ب) $\csc^{-1} 2$

سوال ۷.۵۰۸: (ا) $\sec^{-1} 0$ ، (ب) $\sin^{-1} \sqrt{2}$

سوال ۷.۵۰۹: (ا) $\cot^{-1}(-\frac{1}{2})$ ، (ب) $\cos^{-1}(-5)$

کیلکولیٹر استعمال کریں

سوال ۷.۵۱۰: درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\sec^{-1} 1.5$ ب. $\csc^{-1}(-1.5)$ ج. $\cot^{-1} 2$

سوال ۷.۵۱۱: درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\sec^{-1}(-3)$ ب. $\csc^{-1} 1.7$ ج. $\cot^{-1}(-2)$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۷.۵۱۲ تا سوال ۷.۵۱۴ میں ہر ایک مرکب تفاعل کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔ ان مرکب تفاعل کو علیحدہ علیحدہ ترسیم کریں۔ کیا انفرادی ترسیمات معنی رکھتی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ اگر کوئی فرق نظر آئے، اس پر تبصرہ کریں۔

سوال ۷.۵۱۲: (ا) $y = \tan^{-1}(\tan x)$ ، (ب) $y = \tan(\tan^{-1} x)$

سوال ۷.۵۱۳: (ا) $y = \sin^{-1}(\sin x)$ ، (ب) $y = \sin(\sin^{-1} x)$

سوال ۷.۵۱۴: (ا) $y = \cos^{-1}(\cos x)$ ، (ب) $y = \cos(\cos^{-1} x)$

سوال ۷.۵۱۵: تفاعل $y = \sec(\sec^{-1} x) = \sec(\cos^{-1}(\frac{1}{x}))$ ترسیم کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟

سوال ۷.۵۱۶: تفاعل $y = \frac{4x}{x^2+1}$ ترسیم کریں۔ اس کے ساتھ $y = 2\sin(2\tan^{-1} x)$ بھی ترسیم کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟

سوال ۷.۵۱۷: ناطق تفاعل $y = \frac{2-x^2}{x^2}$ ترسیم کریں۔ اس کے ساتھ $y = \cos(2\sec^{-1} x)$ ترسیم کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟

۷.۹ معکوس تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل

معکوس تکونیاتی تفاعل مختلف اقسام کے تفاعل، جو انجینئری، طبیعیات اور ریاضیات میں رونما ہوتے ہیں، کے ضد تفرق مہیا کرتے ہیں۔ اس حصہ میں ہم معکوس تکونیاتی تفاعل کے تفرق حاصل کرتے ہیں اور متعلقہ تکملات پر غور کرتے ہیں۔

مثال ۷.۶۶:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}(x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{(ا)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}\sqrt{x+1} &= \frac{1}{1+(\sqrt{x+1})^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x+1}) \qquad \text{(ب)}\\ &= \frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(x+2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^{-1}(-3x) &= \frac{1}{|-3x|\sqrt{(-3x)^2-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-3x) \qquad \text{(ج)}\\ &= \frac{-3}{|3x|\sqrt{9x^2-1}} = \frac{-1}{|x|\sqrt{9x^2-1}}\end{aligned}$$

□

مثال ۷.۶۷:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{e^{\tan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} e^u\,\mathrm{d}u \qquad u = \tan^{-1} u\\ &= e^u\Big]_0^{\pi/4} = e^{\pi/4}-1\end{aligned}$$

□

۱۱۸۳۴ معکوس تکونیاتی تفاعل کے تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}(\sin^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1 \tag{۱}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\cos^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1 \tag{۲}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\tan^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{1+u^2} \tag{۳}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\cot^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{1+u^2} \tag{۴}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\sec^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1 \tag{۵}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\csc^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1 \tag{۶}$$

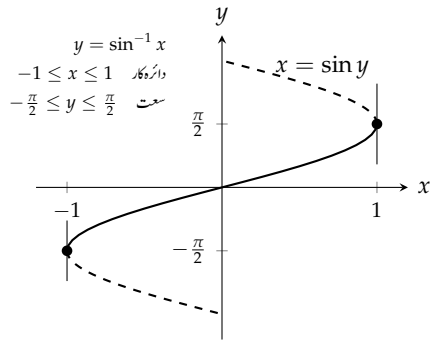
۱۱۸۳۵ آئیں مساوات ۱ اور مساوات ۵ کو حاصل کرتے ہیں۔ مساوات ۳ کو بھی اسی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مساوات ۲، مساوات ۴ اور مساوات ۶ کو موزوں تماثل
۱۱۸۳۶ تفرق کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے (سوال ۷.۵۹۸ تا سوال ۷.۶۰۰)۔

۱۱۸۳۷ تفاعل $y = \sin^{-1} u$ کا تفرق

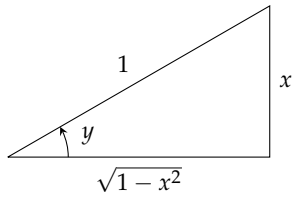
۱۱۸۳۸ ہم جانتے ہیں کہ وقفہ $-\frac{y}{2} < y < \frac{y}{2}$ میں تفاعل $x = \sin y$ قابل تفرق ہے اور اس کا تفرق، یعنی کوسائن، اس وقفہ پر مثبت ہے۔ یوں مسئلہ
۱۱۸۳۹ ۷.۱ ہمیں یقین دہانی کراتا ہے کہ پورے وقفہ $-1 < x < 1$ پر معکوس تفاعل $y = \sin^{-1} x$ قابل تفرق ہو گا۔ چونکہ نقطہ $x = 1$
۱۱۸۴۰ اور $x = -1$ پر اس کی ترسیم کے مماس انتصابی ہیں (شکل ۷.۵۶) لہٰذا ان نقطوں پر ہم معکوس تفاعل $y = \sin^{-1} x$ کو قابل تفرق تصور نہیں کر
۱۱۸۴۱ سکتے ہیں۔

۱۱۸۴۲ ہم $y = \sin^{-1} x$ کا تفرق درج ذیل طریقہ سے حاصل کرتے ہیں:

$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow \sin y = x$	$\sin y = x$
دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin y) = 1$
زنجیری قاعدہ	$\cos y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$
وقفہ پر $\cos y > 0$ ہے لہٰذا تقسیم کیا جا سکتا ہے	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos y}$
شکل ۷.۵۷	$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



شکل ۷.۵۶: تفاعل $y = \sin^{-1} x$ کی ترسیم کے مماس نقطہ $x = -1$ اور $x = 1$ پر انتصابی ہیں۔



شکل ۷.۵۷: اس حوالہ مثلث میں $\sin y = \frac{x}{1} = x$ اور $\cos y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$ ہوگا۔

۱۱۸۴۳ یوں x کے لحاظ سے $y = \sin^{-1} x$ کو تفرق درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

۱۱۸۴۴ اگر x کے لحاظ سے u قابل تفرق تفاعل ہو تب $y = \sin^{-1} u$ کو زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

۱۱۸۴۵ کے اطلاق سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \qquad |u| < 1$$

۱۱۸۴۶ تفاعل $y = \sec^{-1} u$ کا تفرق

۱۱۸۴۷ ہم $y = \sec^{-1} x, |x| > 1$ کا تفرق بھی اسی طرح حاصل کرتے ہیں۔

$$y = \sec^{-1} x \Leftrightarrow \sec y = x$$

$$\sec y = x$$

x کے لحاظ سے دونوں اطراف کا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec y) = 1$$

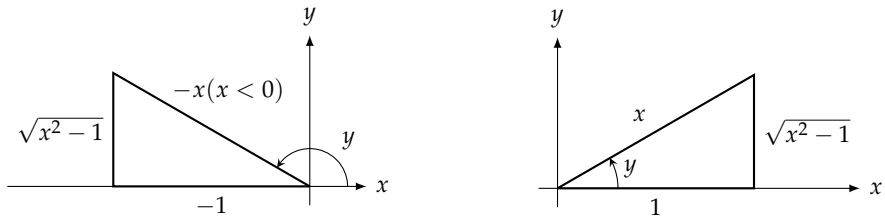
زنجیری قاعدہ

$$\sec y \tan y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sec y \tan y}$$

شکل ۷.۵۸

$$= \mp\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$



شکل ۷.۵۸: دونوں ربع میں $\sin y = x$ ہے۔ ربع اول میں $\tan y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{1} = \sqrt{x^2-1}$ ہے جبکہ ربع دوم میں $\tan y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{(-1)} = -\sqrt{x^2-1}$ ہے۔

۱۱۸۴۸ درج بالا میں تیسرے قدم پر چونکہ $|x| > 1$ ہے لہٰذا y وقفہ $(0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$ میں پایا جائے گا جس کی وجہ سے

۱۱۸۴۹ $\sec y \tan y \neq 0$ ہو گا لہٰذا دونوں اطراف کو غیر صفر $\sec y \tan y$ سے تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

۱۱۸۵۰ علامت کے بارے میں ہم کیا کر سکتے ہیں؟ ہم دیکھتے ہیں (شکل ۷.۵۹) کہ $|x| > 1$ کے لیے $y = \sec^{-1} x$ کی ترسیم کا ڈھلوان مثبت رہتا ہے

۱۱۸۵۱ لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec^{-1} x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & x > 1 \\ -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & x < -1 \end{cases} \tag{۷}$$

۱۱۸۵۲ مطلق قیمت استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات ۷ کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad |x| > 1$$

۱۱۸۵۳ اگر $|u| > 1$ ہو اور x کا u قابل تفرق تفاعل ہو تب زنجیری قاعدہ کے استعمال سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \qquad |u| > 1$$

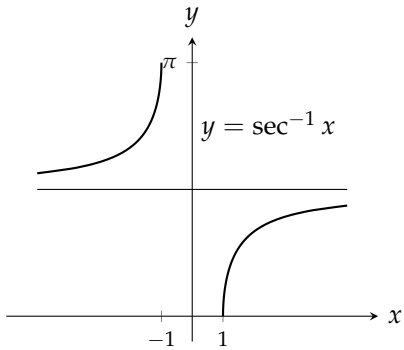
۱۱۸۵۴ کلیات تکمل

۱۱۸۵۵ ہم مساوات ۱، مساوات ۳ اور مساوات ۵ جہاں $a = 1$ ہے، سے تکمل کے درج ذیل تین اہم کلیات حاصل ہوتے ہیں جہاں $a \neq 0$ مستقل ہے۔

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\tfrac{u}{a}\right) + C \qquad u^2 < a^2 \text{ کے لیے درست ہے} \tag{۸}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\tfrac{u}{a}\right) + C \qquad \text{تمام } u \text{ کے لیے درست ہے} \tag{۹}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\tfrac{u}{a}\right| + C \qquad u^2 > a^2 \text{ کے لیے درست ہے} \tag{۱۰}$$



شکل ۷.۵۹: قوس $y = \sec^{-1} x$ کا ڈھلوان $x < -1$ اور $x > 1$ دونوں کے لیے مثبت ہے۔

۱۱۸۵۶ تکمل کے درج بالا کلیات کے دائیں ہاتھ کا تفرق لے کر ان کی تصدیق کی جا سکتی ہے۔

۱۱۸۵۷ مثال ۷.۶۸:

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x)\Big]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2}$$

$$= \sin^{-1}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}) - \sin^{-1}(\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \qquad \text{(ا)}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \tan^{-1}(x)\Big]_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \qquad \text{(ب)}$$

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}(x)\Big]_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \qquad \text{(ج)}$$

۱۱۸۵۸ □

۱۱۸۵۹ مثال ۷.۶۹:

(ا) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(3)^2-x^2}} = \sin^{-1}(\tfrac{x}{3}) + C \qquad a = 3 \text{ اور } u = x \text{ مساوات ۸ میں}$$

(ب) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} \qquad a = \sqrt{3},\ u = 2x$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}(\tfrac{u}{a}) + C \qquad \text{مساوات ۸}$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}(\tfrac{2x}{\sqrt{3}}) + C$$

۱۱۸۶۰ □

۱۱۸۶۱ مثال ۷.۷۰: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-x^2}}$ کو حل کریں۔

۱۱۸۶۲ **حل**

۱۱۸۶۳ یہاں ریاضی فقرہ $\sqrt{4x-x^2}$ مساوات ۸ تا مساوات ۱۰ میں سے کسی بھی تکمل میں پائے جانے والے ریاضی فقرے کی طرح نہیں ہے لہٰذا ہم اس کا
۱۱۸۶۴ مربع مکمل کرتے ہیں:

$$4x-x^2=-(x^2-4x)=-(x^2-4x+4)+4=3-(x-2)^2 \qquad \text{تکمیل مربع}$$

۱۱۸۶۵ اس کے بعد $a=2$ ، $u=x-2$ اور $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-x^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(x-2)^2}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^-u^2}} && a=2,\ u=x-2 \\
&= \sin^{-1}(\tfrac{u}{a})+C && \text{مساوات ۸} \\
&= \sin^{-1}(\tfrac{x-2}{2})+C
\end{aligned}$$

۱۱۸۶۶ □

۱۱۸۶۷ مثال ۷.۷۱:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{10+x^2} &= \frac{1}{\sqrt{10}}\tan^{-1}(\tfrac{x}{\sqrt{10}})+C && a=\sqrt{10},\ u=x,\ \text{مساوات ۹} \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{7+3x^2} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} && a=\sqrt{7},\ u=\sqrt{3}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{a}\tan^{-1}(\tfrac{u}{a})+C && \text{مساوات ۹} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\tan^{-1}(\tfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{7}})+C \\
&= \frac{1}{\sqrt{21}}\tan^{-1}(\tfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{7}})+C
\end{aligned}$$

۱۱۸۶۸ □

۱۱۸۶۹ مثال ۷.۷۲: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+2}$ حل کریں۔

۱۱۸۷۰ **حل**

۱۱۸۷۱ ہم ثنائی $4x^2 + 4x$ کا مربع مکمل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x + 2 &= 4(x^2 + x) + 2 = 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + 2 - \frac{4}{4} \\ &= 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 = (2x+1)^2 + 1 \end{aligned}$$

۱۱۸۷۲ اب $a = 1$ ، $u = 2x + 1$ ،اور $\frac{\mathrm{d}u}{2} = \mathrm{d}x$ پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2 + 4x + 2} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2 + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + a^2} && a = 1, u = 2x + 1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\tfrac{u}{a}\right) + C && \text{مساوات ۹} \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1}(2x+1) && a = 1,\ u = 2x + 1 \end{aligned}$$

۱۱۸۷۳ □

۱۱۸۷۴ مثال ۷.۷۳: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2 - 5}}$ حل کریں۔

۱۱۸۷۵ **حل**

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2 - 5}} &= \int \frac{\frac{\mathrm{d}u}{2}}{\frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2}} && u = 2x,\ a = \sqrt{5} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2 - a^2}} \\ &= \frac{1}{a} \sec^{-1}\left|\tfrac{u}{a}\right| + C && \text{مساوات ۱۰} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sec^{-1}\left(\frac{2|x|}{\sqrt{5}}\right) + C && a = \sqrt{5},\ u = 2x \end{aligned}$$

۱۱۸۷۶ □

۱۱۸۷۷ مثال ۷.۷۴: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x} - 6}}$ حل کریں۔

۱۱۸۷۸ **حل**

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}-6}} &= \int \frac{\frac{\mathrm{d}u}{u}}{\sqrt{u^2-a^2}} && u = e^x,\ a = \sqrt{6} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} \\
&= \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C && \text{مساوات ۱۰} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\sec^{-1}\left(\frac{e^x}{\sqrt{6}}\right) + C
\end{aligned}$$

۱۱۸۷۹ □

۱۱۸۸۰ **سوالات**

۱۱۸۸۱ **تفرق کی تلاش**

۱۱۸۸۲ سوال ۷.۵۱۸ تا سوال ۷.۵۳۹ میں y کا تفرق موزوں متغیر کے لحاظ سے دریافت کریں۔

۱۱۸۸۳ سوال ۷.۵۱۸: $y = \cos^{-1}(x^2)$

۱۱۸۸۴ سوال ۷.۵۱۹: $y = \cos^{-1}(\frac{1}{x})$

۱۱۸۸۵ سوال ۷.۵۲۰: $y = \sin^{-1}\sqrt{2}t$

۱۱۸۸۶ سوال ۷.۵۲۱: $y = \sin^{-1}(1-t)$

۱۱۸۸۷ سوال ۷.۵۲۲: $y = \sec^{-1}(2s+1)$

۱۱۸۸۸ سوال ۷.۵۲۳: $y = \sec^{-1} 5s$

۱۱۸۸۹ سوال ۷.۵۲۴: $y = \csc^{-1}(x^2+1), \quad x > 0$

۱۱۸۹۰ سوال ۷.۵۲۵: $y = \csc^{-1}\frac{x}{2}$

۱۱۸۹۱ سوال ۷.۵۲۶: $y = \sec^{-1}\frac{1}{t}, \quad 0 < t < 1$

۱۱۸۹۲ سوال ۷.۵۲۷: $y = \sin^{-1}\frac{3}{t^2}$

۱۱۸۹۳ سوال ۷.۵۲۸: $y = \cot^{-1}\sqrt{t}$

۱۱۸۹۴ سوال ۷.۵۲۹: $y = \cot^{-1}\sqrt{t-1}$

۱۱۸۹۵ سوال ۷.۵۳۰: $y = \ln(\tan^{-1} x)$

۱۱۸۹۶ سوال ۷.۵۳۱: $y = \tan^{-1}(\ln x)$

سوال ۷.۵۳۲: $y = \csc^{-1}(e^t)$

سوال ۷.۵۳۳: $y = \cos^{-1}(e^{-t})$

سوال ۷.۵۳۴: $y = s\sqrt{1-s^2} + \cos^{-1} s$

سوال ۷.۵۳۵: $y = \sqrt{s^2-1} - \sec^{-1} s$

سوال ۷.۵۳۶: $y = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1} + \csc^{-1} x, \quad x > 1$

سوال ۷.۵۳۷: $y = \cot^{-1}\frac{1}{x} - \tan^{-1} x$

سوال ۷.۵۳۸: $y = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$

سوال ۷.۵۳۹: $y = \ln(x^2+4) - x\tan^{-1}(\frac{x}{2})$

تکمل کا حل

سوال ۷.۵۴۰ تا سوال ۷.۵۶۳ میں تکمل حل کریں۔

سوال ۷.۵۴۰: $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

سوال ۷.۵۴۱: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

سوال ۷.۵۴۲: $\int \frac{dx}{17+x^2}$

سوال ۷.۵۴۳: $\int \frac{dx}{9+3x^2}$

سوال ۷.۵۴۴: $\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2-2}}$

سوال ۷.۵۴۵: $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-4}}$

سوال ۷.۵۴۶: $\int_0^1 \frac{4\,ds}{\sqrt{4-s^2}}$

سوال ۷.۵۴۷: $\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{4}} \frac{ds}{\sqrt{9-4s^2}}$

سوال ۷.۵۴۸: $\int_0^2 \frac{dt}{8+2t^2}$

سوال ۷.۵۴۹: $\int_{-2}^2 \frac{dt}{4+3t^2}$

سوال ۷.۵۵۰: $\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dy}{y\sqrt{4y^2-1}}$

۱۱۹۱۹ سوال ۷.۵۵۱: $\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{\sqrt{2}}{3}} \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{9y^2-1}}$

۱۱۹۲۰ سوال ۷.۵۵۲: $\int \frac{3\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-4(r-1)^2}}$

۱۱۹۲۱ سوال ۷.۵۵۳: $\int \frac{6\,\mathrm{d}r}{\sqrt{4-(r+1)^2}}$

۱۱۹۲۲ سوال ۷.۵۵۴: $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+(x-1)^2}$

۱۱۹۲۳ سوال ۷.۵۵۵: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+(3x+1)^2}$

۱۱۹۲۴ سوال ۷.۵۵۶: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2-4}}$

۱۱۹۲۵ سوال ۷.۵۵۷: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)\sqrt{(x+3)^2-25}}$

۱۱۹۲۶ سوال ۷.۵۵۸: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{1+(\sin\theta)^2}$

۱۱۹۲۷ سوال ۷.۵۵۹: $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\csc^2 x\,\mathrm{d}x}{1+(\cot x)^2}$

۱۱۹۲۸ سوال ۷.۵۶۰: $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{1+e^{2x}}$

۱۱۹۲۹ سوال ۷.۵۶۱: $\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{4\,\mathrm{d}t}{t(1+\ln^2 t)}$

۱۱۹۳۰ سوال ۷.۵۶۲: $\int \frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^4}}$

۱۱۹۳۱ سوال ۷.۵۶۳: $\int \frac{\sec^2 y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\tan^2 y}}$

۱۱۹۳۲ **تکمل کا حل**

۱۱۹۳۳ سوال ۷.۵۶۴ تا سوال ۷.۵۷۳ حل کریں۔

۱۱۹۳۴ سوال ۷.۵۶۴: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$

۱۱۹۳۵ سوال ۷.۵۶۵: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}}$

۱۱۹۳۶ سوال ۷.۵۶۶: $\int_{-1}^{0} \frac{6\,\mathrm{d}t}{\sqrt{3-2t-t^2}}$

۱۱۹۳۷ سوال ۷.۵۶۷: $\int_{1/2}^{1} \frac{6\,\mathrm{d}t}{\sqrt{3+4t-4t^2}}$

۱۱۹۳۸ سوال ۷.۵۶۸: $\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2-2y+5}$

۱۱۹۴۹ سوال ۷.۵۶۹: $\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+6y+10}$

۱۱۹۵۰ سوال ۷.۵۷۰: $\int_1^2 \frac{8\,\mathrm{d}x}{x^2-2x+2}$

۱۱۹۵۱ سوال ۷.۵۷۱: $\int_2^4 \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2-6x+10}$

۱۱۹۵۲ سوال ۷.۵۷۲: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

۱۱۹۵۳ سوال ۷.۵۷۳: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

۱۱۹۵۴ سوال ۷.۵۷۴ تا سوال ۷.۵۸۱ میں دیے گئے تکمل حل کریں۔

۱۱۹۵۵ سوال ۷.۵۷۴: $\int \frac{e^{\sin^{-1} x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

۱۱۹۵۶ سوال ۷.۵۷۵: $\int \frac{e^{\cos^{-1} x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

۱۱۹۵۷ سوال ۷.۵۷۶: $\int \frac{(\sin^{-1} x)^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

۱۱۹۵۸ سوال ۷.۵۷۷: $\int \frac{\sqrt{\tan^{-1} x}\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$

۱۱۹۵۹ سوال ۷.۵۷۸: $\int \frac{\mathrm{d}y}{(\tan^{-1} y)(1+y^2)}$

۱۱۹۶۰ سوال ۷.۵۷۹: $\int \frac{\mathrm{d}y}{(\sin^{-1} y)\sqrt{1-y^2}}$

۱۱۹۶۱ سوال ۷.۵۸۰: $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sec^2(\sec^{-1} x)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

۱۱۹۶۲ سوال ۷.۵۸۱: $\int \frac{\cos(\sec^{-1} x)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

۱۱۹۶۳ **حد**

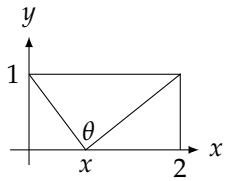
۱۱۹۶۴ سوال ۷.۵۸۲ تا سوال ۷.۵۸۵ میں حد تلاش کریں۔

۱۱۹۶۵ سوال ۷.۵۸۲: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} 5x}{x}$

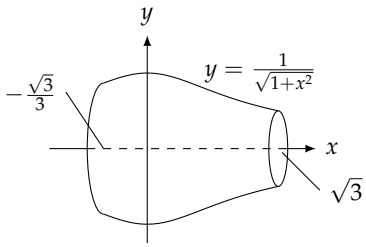
۱۱۹۶۶ سوال ۷.۵۸۳: $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sec^{-1} x}$

۱۱۹۶۷ سوال ۷.۵۸۴: $\lim\limits_{x\to \infty} x\tan^{-1} \frac{2}{x}$

۱۱۹۶۸ سوال ۷.۵۸۵: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2\tan^{-1} 3x^2}{7x^2}$



شکل ۷.۶۰: برائے سوال ۷.۵۹۵



شکل ۷.۶۱: برائے سوال ۷.۶۰۶

کلیات تکمل

سوال ۷.۵۸۶ تا سوال ۷.۵۸۹ میں دیے گئے تکمل کے کلیات کی تصدیق کریں۔

سوال ۷.۵۸۶: $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\tan^{-1} x}{x} + C$

سوال ۷.۵۸۷: $\int x^3 \cos^{-1} 5x\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\cos^{-1} 5x + \frac{5}{4}\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-25x^2}}$

سوال ۷.۵۸۸: $\int (\sin^{-1} x)^2\,\mathrm{d}x = x(\sin^{-1} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1} x + C$

سوال ۷.۵۸۹: $\int \ln(a^2+x^2)\,\mathrm{d}x = x\ln(a^2+x^2) - 2x + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

ابتدائی قیمت مسائل

سوال ۷.۵۹۰ تا سوال ۷.۵۹۳ میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں

سوال ۷.۵۹۰: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = 0$

سوال ۷.۵۹۱: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2+1} - 1, \quad y(0) = 1$

سوال ۷.۵۹۲: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1, y(2) = \pi$

سوال ۷.۵۹۳: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = 2$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۷.۵۹۴: تدریسی کمرہ (سوال ۷.۴۹۸)

آپ اپنی کرسی کو تختہ سیاہ سے اتنی دور رکھنا چاہتے ہو کہ آپ کا دیکھنے کا زاویہ α اعظم ہو۔ آپ کی کرسی تختہ سیاہ سے کتنی دور ہونی چاہیے؟

سوال ۷.۵۹۵: متغیر x کو کونسی قیمت شکل ۷.۶۰ میں θ کو بڑے سے بڑا بناتی ہے؟ θ کی بڑی سے بڑی قیمت تلاش کریں۔ شروع اس سے کریں کہ $\theta = \pi - \cot^{-1} x - \cot^{-1}(2-x)$ ہوگا۔

۱۱۹۷۶ سوال ۷.۵۹۶: کیا درج ذیل تکمل-ا اور تکمل-ب دونوں درست ہو سکتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C \qquad \text{(ا)}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\int -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C \qquad \text{(ب)}$$

۱۱۹۷۷ سوال ۷.۵۹۷: کیا درج ذیل دونوں تکمل درست ہو سکتے ہیں؟ اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\int -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1-(-u)^2}} \qquad x = -u \\
&= \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= \cos^{-1} u + C \\
&= \cos^{-1}(-x) + C
\end{aligned}$$

۱۱۹۷۸ سوال ۷.۵۹۸: درج ذیل تماثل استعمال کرتے ہوئے مساوات ۱ سے مساوات ۲ اخذ کریں۔

$$\cos^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} u$$

۱۱۹۷۹ سوال ۷.۵۹۹: درج ذیل تماثل استعمال کرتے ہوئے مساوات ۴ سے مساوات ۳ اخذ کریں۔

$$\cot^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} u$$

۱۱۹۸۰ سوال ۷.۶۰۰: درج ذیل تماثل استعمال کرتے ہوئے مساوات ۵ سے مساوات ۶ اخذ کریں۔

$$\csc^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} u$$

۱۱۹۸۱ سوال ۷.۶۰۱: تفاعل $y = \tan^{-1} x$ کا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}$$

۱۱۹۸۲ حاصل کرنے کی خاطر x کے لحاظ سے اس کے مساوی $\tan y = x$ کے دونوں اطراف کا تفرق لیں۔

۱۱۹۸۳ سوال ۷.۶۰۲: درج ذیل تفرق کو مسئلہ ۷.۱ کی مدد سے اخذ کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

۱۱۹۸۴ سوال ۷.۶۰۳: درج ذیل تفرق کو مسئلہ ۷.۱ کی مدد سے اخذ کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

۱۱۹۸۵ سوال ۷.۶۰۴: درج ذیل دو تفاعل میں کیا خاصیت پائی جاتی ہے؟ اس پر تبصرہ کریں۔

$$f(x) = \sin^{-1}\frac{x-1}{x+1},\ x \geq 0 \quad \text{اور} \quad g(x) = 2\tan^{-1}\sqrt{x}$$

۱۱۹۸۶ سوال ۷.۶۰۵: درج ذیل دو تفاعل میں کیا خاصیت پائی جاتی ہے؟ اس پر تبصرہ کریں۔

$$f(x) = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{اور} \quad g(x) = \tan^{-1}\frac{1}{x}$$

۱۱۹۸۷ سوال ۷.۶۰۶: محور x پر $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ تا $x = \sqrt{3}$ کے بیچ تفاعل $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ کو محور x کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا
۱۱۹۸۸ جاتا ہے (شکل ۷.۶۱)۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

۱۱۹۸۹ سوال ۷.۶۰۷: قوس $y = \sqrt{1-x^2},\ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ کی لمبائی دریافت کریں۔

۱۱۹۹۰ کتلا سے حجم کی تلاش

۱۱۹۹۱ سوال ۷.۶۰۸ اور سوال ۷.۶۰۹ میں اجسام کی حجم تلاش کریں۔

۱۱۹۹۲ سوال ۷.۶۰۸: نقطہ $x = -1$ اور $x = 1$ پر محور x کے عمودی چادروں کے بیچ ٹھوس جسم پایا جاتا ہے۔ محور x کے عمودی جسم کا رقبہ عمودی
۱۱۹۹۳ تراش درج ذیل ہے۔

۱۱۹۹۴ ا. دائری رقبہ عمودی تراش کے قطر، منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ سے منحنی $y = -\frac{1}{1+x^2}$ تک ہیں۔

۱۱۹۹۵ ب. رقبہ عمودی تراش مربع شکل کا ہے جس کے کونے $y = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ اور $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ کو مس کرتے ہیں۔

۱۱۹۹۶ سوال ۷.۶۰۹: نقطہ $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ اور $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ پر محور x کے عمودی چادروں کے بیچ ٹھوس جسم پایا جاتا ہے۔ محور x کے عمودی جسم کا رقبہ
۱۱۹۹۷ عمودی تراش درج ذیل ہے۔

۱۱۹۹۸ ا. دائری رقبہ عمودی تراش کے قطر، محور x سے منحنی $y = \frac{2}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ تک ہیں۔

۱۱۹۹۹ ب. رقبہ عمودی تراش مربع شکل کا ہے جس کے وتر محور x سے منحنی $y = \frac{2}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ تک ہیں۔

کیلکولیٹر اور کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۷.۶۱۰: کیلکولیٹر

اعدادی تراکیب سے درج ذیل قیمت تلاش کریں۔ حوالہ کے لیے 5 مقامات تک درست قیمت $\sin^{-1} 0.6 = 0.643\,50$ ہے۔

$$\sin^{-1} 0.6 = \int_0^{0.6} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

سوال ۷.۶۱۱: اعدادی تراکیب سے درج ذیل قیمت تلاش کریں۔

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

سوال ۷.۶۱۲: تفاعل $f(x) = \sin^{-1} x$ اور اس کے ابتدائی دو تفرق کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' اور f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ اور اس کی ترسیم کی صورت پر تبصرہ کریں۔

سوال ۷.۶۱۳: تفاعل $f(x) = \tan^{-1} x$ اور اس کے ابتدائی دو تفرق کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' اور f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ اور اس کی ترسیم کی صورت پر تبصرہ کریں۔

۷.۱۰ ہذلولی تفاعل

ہر ایسا تفاعل f جس کے دائرہ کار کا وسط مبدا پر واقع ہو کو ایک جفت اور ایک طاق تفاعل کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{جفت حصہ}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{طاق حصہ}}$$

یوں قوت نمائی تفاعل e^x کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}_{\text{جفت حصہ}} + \underbrace{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}_{\text{طاق حصہ}}$$

قوت نمائی تفاعل e^x کا جفت اور طاق حصہ، جنہیں بالترتیب x کا ہذلولی کوسائن اور ہذلولی سائن کہتے ہیں، از خود اہمیت کے حامل ہیں۔ یہ لچکدار ٹھوس مادہ میں لہروں کی حرکت، کھمبوں کے بیچ برقی تاروں کا روپ، اور دھاتی **سرد کار**[۲۶] میں حرارتی کی تقسیم کو بیان کرتے ہیں۔

---

[۲۶] heatsink

جدول ۷.۸: چھ بنیادی ہذلولی تفاعل

$\cosh = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	x کا ہذلولی کوسائن
$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	x کا ہذلولی سائن
$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	x کا ہذلولی ٹینجنٹ
$\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	x کا ہذلولی کوٹینجنٹ
$\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$	x کا ہذلولی سیکنٹ
$\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$	x کا ہذلولی کوسیکنٹ

تعریف اور تماثل

ہذلولی کوسائن اور ہذلولی سائن کی تعریف جدول ۷.۸ کی پہلی دو مساواتیں پیش کرتی ہیں۔ اس جدول میں ہذلولی ٹینجنٹ، ہذلولی کوٹینجنٹ، ہذلولی سیکنٹ، اور ہذلولی کوسیکنٹ کی تعریف بھی پیش کی گئی ہیں۔ جیسا کہ ہم دیکھیں گے، ہذلولی تفاعل ان تکونیاتی تفاعل کے ساتھ کافی ملتے جلتے ہیں جن کے توسط سے ان کے نام رکھے گئے ہیں (سوال ۷.۶۹۹)۔ ہذلولی تفاعل کو شکل ۷.۶۲ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

تماثل

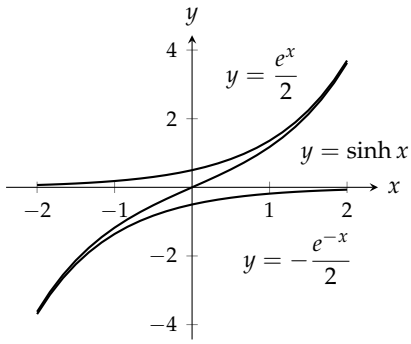
ہذلولی تفاعل جدول ۷.۹ میں دی گئی تماثل کو مطمئن کرتے ہیں۔ ماسوائے علامت، ہم ان تماثل کو تکونیاتی تفاعل سے جانتے ہیں۔

تفرق اور تکمل

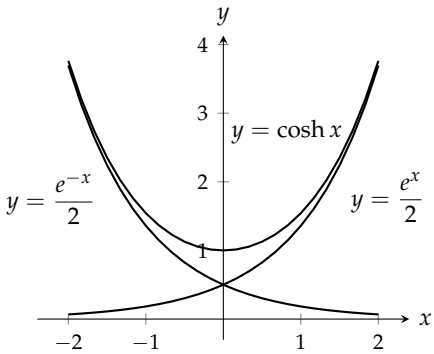
چھ بنیادی ہذلولی تفاعل، قابل تفرق تفاعل e^x اور e^{-x} کے ناطق مجموعے ہیں، لہٰذا یہ ہر اس نقطہ پر قابل تفرق ہوں گے جس پر یہ معین ہوں۔ یہاں بھی تکونیاتی تفاعل کے ساتھ مشابہت نظر آتی ہے۔ جدول ۷.۱۰-ا کے کلیات تفرق سے جدول ۷.۱۰-ب کے کلیات تکمل حاصل ہوتے ہیں۔ تکونیاتی تفاعل کی طرح ہذلولی تفاعل کی قیمتوں کو بھی کیلکولیٹر سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال ۷.۷۵:

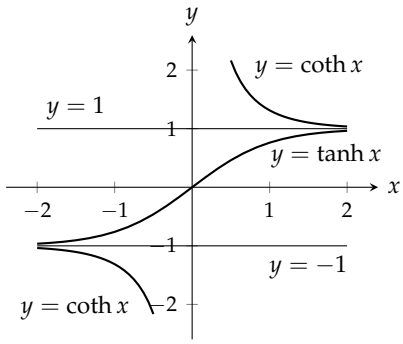
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tanh\sqrt{1+t^2}) &= \operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{1+t^2})\\ &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}\end{aligned}$$



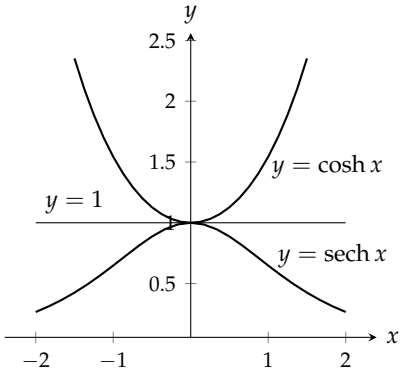
(ا) ہذلولی سائن اور اس کے قوت نما اجزاء۔



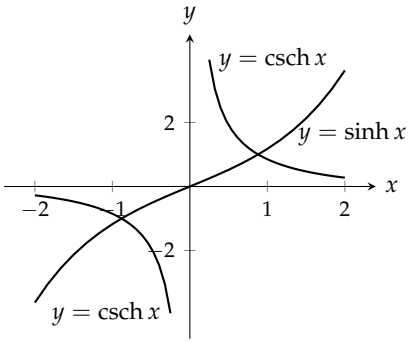
(ب) ہذلولی کوسائن اور اس کے قوت نما اجزاء۔



(ج) ہذلولی ٹینجنٹ اور ہذلولی کوٹینجنٹ۔



(د) ہذلولی کوسائن اور ہذلولی سیکنٹ۔



(ھ) ہذلولی سائن اور ہذلولی کوسیکنٹ۔

شکل ۷.۶۲: چھ بنیادی ہذلولی تفاعل۔

جدول ۷.۹: ہذلولی تفاعل کے تماثل۔

$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$
$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
$\cosh^2 x = \dfrac{\cosh 2x + 1}{2}$
$\sinh^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{2}$
$\cosh^2 x - \sinh^2 = 1$
$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$
$\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$

جدول ۷.۱۰: ہذلولی تفاعل کے کلیات تفرق اور کلیات تکمل۔

(ا) ہذلولی تفاعل کے تفرق۔	(ب) ہذلولی تفاعل کے تکمل۔
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sinh u) = \cosh u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sinh u) = \cosh u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh u) = \sinh u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh u) = \sinh u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

۱۲۰۲۶ □

۱۲۰۲۷ مثال ۷.۷۶:

$$\int \coth 5x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\cosh 5x}{\sinh 5x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} \qquad u = \sinh 5x$$
$$= \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|\sinh 5x| + C$$

۱۲۰۲۸ □

۱۲۰۲۹ مثال ۷.۷۷:

جدول ۷.۹

$$\int_0^1 \sinh^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\cosh 2x - 1}{2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (\cosh 2x - 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\sinh 2x}{2} - x\right]_0^1$$
$$= \frac{\sinh 2}{4} - \frac{1}{2} \approx 0.406\,72$$

۱۲۰۳۰ □

۱۲۰۳۱ مثال ۷.۷۸:

$$\int_0^{\ln 2} 4e^x \sinh x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} 4e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} (2e^{2x} - 2)\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[e^{2x} - 2x\right]_0^{\ln 2} = (e^{2\ln 2} - 2\ln 2) - (1 - 0)$$
$$= 4 - 2\ln 2 - 1$$
$$\approx 1.6137$$

۱۲۰۳۲ □

۱۲۰۳۳ **معکوس ہذلولی تفاعل**

۱۲۰۳۴ ہم چھ بنیادی ہذلولی تفاعل کو تکمل میں استعمال کرتے ہیں۔ چونکہ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sinh x) = \cosh x > 0$ لہٰذا x کے لحاظ سے ہذلولی سائن بڑھتا
۱۲۰۳۵ تفاعل ہے۔ ہم اس کے معکوس کو درج ذیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$y = \sinh^{-1} x$$

جدول ۷.۱۱: معکوس ہذلولی تفاعل کے چند کارآمد تماثل

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \tfrac{1}{x}$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1} \tfrac{1}{x}$$

$$\coth^{-1} x = \tanh^{-1} \tfrac{1}{x}$$

۱۲۰۳۶ وقفہ $-\infty < x < \infty$ میں ہر x کے لیے $y = \sinh^{-1} x$ کی قیمت وہ ہو گی جس کے ہذلولی سائن کی قیمت x ہو۔ تفاعل $y = \sinh x$
۱۲۰۳۷ اور $y = \sinh^{-1} x$ کے ترسیمات کو شکل ۷.۶۳-ا میں پیش کیا گیا ہے۔

۱۲۰۳۸ جیسا آپ شکل ۷.۶۲-ب میں دیکھ سکتے ہیں، تفاعل $y = \cosh x$ یک بہ یک نہیں ہے۔ البتہ اس کی پابند شدہ روپ $y = \cosh x,\ x \geq$
۱۲۰۳۹ 0 یک بہ یک ہے لہٰذا اس کا معکوس پایا جائے گا جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$y = \cosh^{-1} x$$

۱۲۰۴۰ متغیر $x \geq 1$ کے ہر قیمت کے لیے وقفہ $0 \leq y \leq \infty$ میں $y = \cosh^{-1} x$ ایک ایسا عدد ہو گا جس کے ہذلولی کوسائن کی قیمت x ہو
۱۲۰۴۱ گی۔ تفاعل $y = \cosh x,\ x \geq 0$ اور $y = \cosh^{-1} x$ کی ترسیمات کو شکل ۷.۶۳-ب میں دکھایا گیا ہے۔

۱۲۰۴۲ تفاعل $y = \cosh x$ کی طرح $y = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$ بھی یک بہ یک نہیں ہے، البتہ x کو غیر منفی قیمتوں پر پابند کرنے سے $y =$
۱۲۰۴۳ $\operatorname{sech} x$ یک بہ یک ہوتا ہے جس کا معکوس پایا جائے گا۔ اس معکوس کو

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x$$

۱۲۰۴۴ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ وقفہ $(0, 1]$ میں x کی ہر قیمت کے لیے $y = \operatorname{sech}^{-1} x$ وہ عدد ہو گا جس کا معکوس ہذلولی سیکنٹ x ہو گا۔

۱۲۰۴۵ ہذلولی کوسیکنٹ، ہذلولی ٹینجنٹ اور ہذلولی کوٹینجنٹ اپنے اپنے پابند دائرہ کار پر یک بہ یک ہیں، لہٰذا ان کے معکوس پائے جائیں گے، جنہیں

$$y = \operatorname{csch}^{-1} x, \quad y = \tanh^{-1} x, \quad y = \coth^{-1} x$$

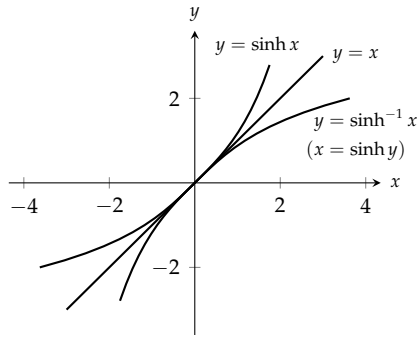
۱۲۰۴۶ سے ظاہر کیا گیا ہے اور جنہیں شکل ۷.۶۳-د، ہ، و میں ترسیم کیا گیا ہے۔

۱۲۰۴۷ کارآمد تماثل

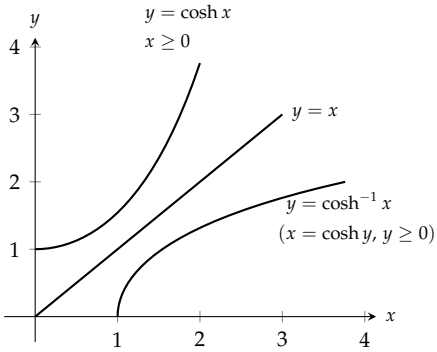
۱۲۰۴۸ چند کارآمد تماثل کو جدول ۷.۱۱ میں پیش کیا گیا ہے۔ تفاعل $\cosh^{-1} x$ ، $\sinh^{-1} x$ اور $\tanh^{-1} x$ کی قیمتیں جانتے ہوئے ان تماثل کے
۱۲۰۴۹ استعمال سے $\operatorname{sech}^{-1} x$ ، $\operatorname{csch}^{-1} x$ اور $\coth^{-1} x$ کی قیمتیں حاصل کی جا سکتی ہیں۔

۱۲۰۵۰ معکوس ہذلولی تفاعل کے تفرق اور تکمل

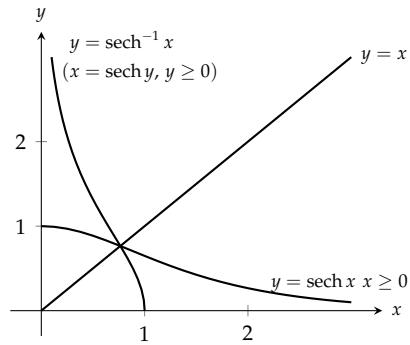
۱۲۰۵۱ معکوس ہذلولی تفاعل کا اہم ترین استعمال، تکمل کے ذریعہ جدول ۷.۱۲ میں کلیات تفرق سے کلیات تکمل کا حصول ہے۔



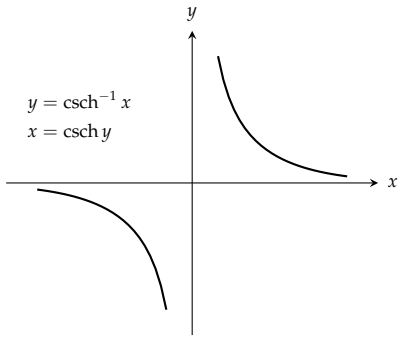
(ا) ہذلولی سائن اور معکوس ہذلولی سائن کے ترسیمات۔ یہ دونوں لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہیں۔



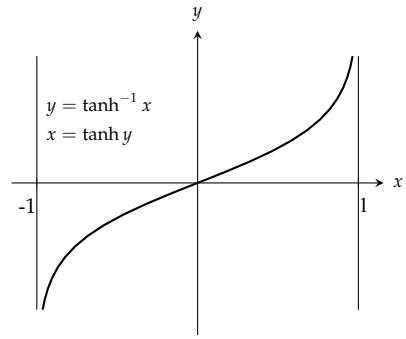
(ب) ہذلولی کوسائن اور معکوس ہذلولی کوسائن کے ترسیمات۔ یہ دونوں لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہیں۔



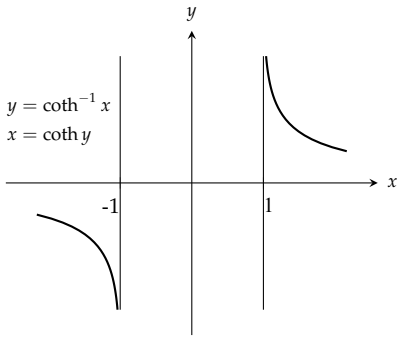
(ج) ہذلولی سیکنٹ اور معکوس ہذلولی سیکنٹ کے ترسیمات۔ یہ دونوں لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہیں۔



(د) معکوس ہذلولی کوسیکنٹ کی ترسیم۔



(ھ) معکوس ہذلولی ٹینجنٹ کی ترسیم۔



(و) معکوس ہذلولی کوٹینجنٹ کی ترسیم۔

شکل ۷.۶۳: چھ بنیادی ہذلولی تفاعل کے معکوس۔

جدول ۷.۱۲: معکوس ہذلولی تفاعل کے تفرق۔

$\frac{\mathrm{d}(\sinh^{-1} u)}{\mathrm{d}x}$	$= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
$\frac{\mathrm{d}(\cosh^{-1} u)}{\mathrm{d}x}$	$= \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad u > 1$
$\frac{\mathrm{d}(\tanh^{-1} u)}{\mathrm{d}x}$	$= \frac{1}{1-u^2} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad \lvert u\rvert < 1$
$\frac{\mathrm{d}(\coth^{-1} u)}{\mathrm{d}x}$	$= \frac{1}{1-u^2} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad \lvert u\rvert > 1$
$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{sech}^{-1} u)}{\mathrm{d}x}$	$= \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad 0 < u < 1$
$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{csch}^{-1} u)}{\mathrm{d}x}$	$= \frac{-1}{\lvert u\rvert\sqrt{1+u^2}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad u \neq 0$

۱۲۰۵۲ تفاعل $\tanh^{-1} u$ اور $\coth^{-1} u$ کے تفرق پر $\lvert u\rvert < a$ اور $\lvert u\rvert > 1$ کی پابندی، ان تفاعل پر پابندی کی وجہ سے ہے (شکل ۷.۶۳-ہ،
۱۲۰۵۳ و دیکھیں)۔ کلیات تفرق کو کلیات تکمل میں تبدیل کرتے وقت $\lvert u\rvert < 1$ اور $\lvert u\rvert > 1$ میں امتیاز اہمیت حاصل کرتا ہے۔ اگر $\lvert u\rvert < 1$ ہو تب
۱۲۰۵۴ $\frac{1}{1-u^2}$ کا تکمل $\tanh^{-1} u + C$ ہوگا۔ اس کے برعکس $\lvert u\rvert > 1$ کی صورت میں تکمل $\coth^{-1} u + C$ ہوگا۔

۱۲۰۵۵ مثال ۷.۷۹: دکھائیں کہ اگر متغیر x کا u قابل تفرق تفاعل ہو اور جس کی قیمتیں 1 سے زیادہ ہوں تب درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

۱۲۰۵۶ **حل**

۱۲۰۵۷ ہم پہلے عددی x>1 کی صورت میں $y = \cosh^{-1} x$ کا تفرق معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
y &= \cosh^{-1} x \\
x &= \cosh y && \text{اس کا مساوی} \\
1 &= \sinh y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} && x \text{ کے لحاظ سے تفرق} \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{1}{\sin y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} && x > 0,\ y > 0,\ \sinh y > 0 \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} && \cosh y = x
\end{aligned}$$

۱۲۰۵۸ یوں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ہوگا۔ زنجیری قاعدہ سے درکار نتیجہ ملتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

جدول ۷.۱۳: وہ تکمل جو معکوس ہذلولی تفاعل دیتے ہیں۔

$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2+u^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right), \quad a > 0$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right), \quad u > a > 0$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2-u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\tanh^{-1}(\frac{u}{a}) + C & u^2 < a^2 \\ \frac{1}{a}\coth^{-1}(\frac{u}{a}) + C & u^2 > a^2 \end{cases}$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \quad 0 < u < a$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\left\lvert\frac{u}{a}\right\rvert + C, \quad u \neq 0$

۱۳۰۵۹ □

۱۳۰۶۰ موزوں بدل استعمال کرتے ہوئے جدول ۷.۱۲ میں دیے گئے کلیات تفرق سے جدول ۷.۱۳ کے کلیات تکمل اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

۱۳۰۶۱ مثال ۷.۸۰: تکمل $\int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3+4x^2}}$ کی قیمت دریافت کریں۔

۱۳۰۶۲ **حل**

۱۳۰۶۳ قطعی تکمل درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3+4x^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2+u^2}} \qquad\qquad u = 2x \\ &= \sinh^{-1}(\tfrac{u}{a}) + C \\ &= \sinh^{-1}(\tfrac{2x}{\sqrt{3}}) + C \end{aligned}$$

۱۳۰۶۴ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3+4x^2}} &= \sinh^{-1}(\tfrac{2x}{\sqrt{3}})\Big]_0^1 = \sinh^{-1}(\tfrac{2}{\sqrt{3}}) - \sinh^{-1}(0) \\ &= \sinh^{-1}(\tfrac{2}{\sqrt{3}}) - 0 \approx 0.986\,65 \end{aligned}$$

۱۳۰۶۵ □

۱۲۰۶۶ سوالات

۱۲۰۶۷ **ہذلولی تفاعل کی قیمتیں اور تماثل**

۱۲۰۶۸ سوال ۷.۶۱۴ تا سوال ۷.۶۱۷ میں $\sinh x$ یا $\cosh x$ کی ایک قیمت دی گئی ہے۔ تماثل $\cosh^2 x - \sinh^2 = 1$ اور ہذلولی تفاعل کی
۱۲۰۶۹ تعریف استعمال کرتے ہوئے باقی پانچ ہذلولی تفاعل کی قیمتیں تلاش کریں۔

۱۲۰۷۰ سوال ۷.۶۱۴: $\sinh x = -\frac{3}{4}$

۱۲۰۷۱ سوال ۷.۶۱۵: $\sinh x = \frac{4}{3}$

۱۲۰۷۲ سوال ۷.۶۱۶: $\cosh x = \frac{17}{15}, \quad x > 0$

۱۲۰۷۳ سوال ۷.۶۱۷: $\cosh x = \frac{13}{5}, \quad x > 0$

۱۲۰۷۴ سوال ۷.۶۱۸ تا سوال ۷.۶۲۳ میں فقروں کو قوت نما کی روپ میں لکھ کر ان کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

۱۲۰۷۵ سوال ۷.۶۱۸: $2\cosh(\ln x)$

۱۲۰۷۶ سوال ۷.۶۱۹: $\sinh(2\ln x)$

۱۲۰۷۷ سوال ۷.۶۲۰: $\cosh 5x + \sinh 5x$

۱۲۰۷۸ سوال ۷.۶۲۱: $\cosh 3x - \sinh 3x$

۱۲۰۷۹ سوال ۷.۶۲۲: $(\sinh x + \cosh x)^4$

۱۲۰۸۰ سوال ۷.۶۲۳: $\ln(\cosh x + \sinh x) + \ln(\cosh x - \sinh x)$

۱۲۰۸۱ سوال ۷.۶۲۴: درج ذیل تماثل

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

۱۲۰۸۲ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

۱۲۰۸۳ ا. $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

۱۲۰۸۴ ب. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

۱۲۰۸۵ سوال ۷.۶۲۵: $\cosh x$ اور $\sinh x$ کی تعریف سے درج ذیل کی تصدیق کریں۔

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

۱۲۰۸۶ **تفرق**

۱۲۰۸۷ سوال ۷.۶۲۶ تا سوال ۷.۶۳۷ میں y کا تفرق موزوں متغیر کے لحاظ سے تلاش کریں۔

۱۲۰۸۸ سوال ۷.۶۲۶: $y = 6\sinh\frac{x}{3}$

۱۲۰۸۹ سوال ۷.۶۲۷: $y = \frac{1}{2}\sinh(2x+1)$

۱۲۰۹۰ سوال ۷.۶۲۸: $y = 2\sqrt{t}\tanh\sqrt{t}$

۱۲۰۹۱ سوال ۷.۶۲۹: $y = t^2\tanh\frac{1}{t}$

۱۲۰۹۲ سوال ۷.۶۳۰: $y = \ln(\operatorname{sech} z)$

۱۲۰۹۳ سوال ۷.۶۳۱: $y = \ln(\cosh z)$

۱۲۰۹۴ سوال ۷.۶۳۲: $y = \operatorname{sech}\theta(1 - \ln\operatorname{sech}\theta)$

۱۲۰۹۵ سوال ۷.۶۳۳: $y = \operatorname{csch}\theta(1 - \ln\operatorname{csch}\theta)$

۱۲۰۹۶ سوال ۷.۶۳۴: $y = \ln\cosh v - \frac{1}{2}\tanh^2 v$

۱۲۰۹۷ سوال ۷.۶۳۵: $y = \ln\sinh v - \frac{1}{2}\coth v$

۱۲۰۹۸ سوال ۷.۶۳۶: $y = (x^2+1)\operatorname{sech}(\ln x)$ اشارہ: تفرق سے پہلے قوت نما روپ میں لکھ کر سادہ صورت حاصل کریں۔

۱۲۰۹۹ سوال ۷.۶۳۷: $y = (4x^2-1)\operatorname{csch}(\ln 2x)$

۱۲۱۰۰ سوال ۷.۶۳۸ تا سوال ۷.۶۴۹ میں y کا تفرق موزوں متغیر کے لحاظ سے حاصل کریں۔

۱۲۱۰۱ سوال ۷.۶۳۸: $y = \sinh^{-1}\sqrt{x}$

۱۲۱۰۲ سوال ۷.۶۳۹: $y = \cosh^{-1} 2\sqrt{x+1}$

۱۲۱۰۳ سوال ۷.۶۴۰: $y = (1-\theta)\tanh^{-1}\theta$

۱۲۱۰۴ سوال ۷.۶۴۱: $y = (\theta^2+2\theta)\tanh^{-1}(\theta+1)$

۱۲۱۰۵ سوال ۷.۶۴۲: $y = (1-t)\coth^{-1}\sqrt{t}$

۱۲۱۰۶ سوال ۷.۶۴۳: $y = (1-t^2)\coth^{-1} t$

۱۲۱۰۷ سوال ۷.۶۴۴: $y = \cos^{-1} x - x\operatorname{sech}^{-1} x$

۱۲۱۰۸ سوال ۷.۶۴۵: $y = \ln x + \sqrt{1-x^2}\operatorname{sech}^{-1} x$

۱۲۱۰۹ سوال ۷.۶۴۶: $y = \operatorname{csch}^{-1}(\frac{1}{2})^\theta$

۱۲۱۱۰ سوال ۷.۶۴۷: $y = \operatorname{csch}^{-1} 2^\theta$

۱۲۱۱۱ سوال ۷.۶۴۸: $y = \sinh^{-1}(\tan x)$

۱۲۱۱۲ سوال ۷.۶۴۹: $y = \cosh^{-1}(\sec x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

۱۲۱۱۳

۱۲۱۱۴ **کلیات تکمل**

۱۲۱۱۵ سوال ۷.۶۵۰ تا سوال ۷.۶۵۳ میں دیے کلیات تکمل کی تصدیق کریں۔

۱۲۱۱۶ سوال ۷.۶۵۰:

$$\int \operatorname{sech} x \, \mathrm{d}x = \tan^{-1}(\sinh x) + C$$

$$\int \operatorname{sech} x \, \mathrm{d}x = \sin^{-1}(\tanh x) + C$$

۱۲۱۱۷ سوال ۷.۶۵۱: $\int x \operatorname{sech}^{-1} x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \operatorname{sech}^{-1} x - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$

۱۲۱۱۸ سوال ۷.۶۵۲: $\int x \coth^{-1} x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2-1}{2} \coth^{-1} x + \frac{x}{2} + C$

۱۲۱۱۹ سوال ۷.۶۵۳: $\int \tanh^{-1} x \, \mathrm{d}x = x \tanh^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C$

۱۲۱۲۰

۱۲۱۲۱ **غیر قطعی تکمل**

۱۲۱۲۲ سوال ۷.۶۵۴ تا سوال ۷.۶۶۳ میں تکمل حل کریں۔

۱۲۱۲۳ سوال ۷.۶۵۴: $\int \sinh 2x \, \mathrm{d}x$

۱۲۱۲۴ سوال ۷.۶۵۵: $\int \sinh \frac{x}{5} \, \mathrm{d}x$

۱۲۱۲۵ سوال ۷.۶۵۶: $\int 6 \cosh(\frac{x}{2} - \ln 3) \, \mathrm{d}x$

۱۲۱۲۶ سوال ۷.۶۵۷: $\int 4 \cosh(3x - \ln 2) \, \mathrm{d}x$

۱۲۱۲۷ سوال ۷.۶۵۸: $\int \tanh \frac{x}{7} \, \mathrm{d}x$

۱۲۱۲۸ سوال ۷.۶۵۹: $\int \coth \frac{\theta}{\sqrt{3}} \, \mathrm{d}\theta$

۱۲۱۲۹ سوال ۷.۶۶۰: $\int \operatorname{sech}^2(x - \frac{1}{2}) \, \mathrm{d}x$

۱۲۱۳۰ سوال ۷.۶۶۱: $\int \operatorname{csch}^2(5 - x) \, \mathrm{d}x$

۱۲۱۳۱ سوال ۷.۶۶۲: $\int \frac{\operatorname{sech} \sqrt{t} \tanh \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$

۱۲۱۳۲ سوال ۷.۶۶۳: $\int \frac{\operatorname{csch}(\ln t) \coth(\ln t)}{t} \, \mathrm{d}t$

۱۲۱۳۳ **قطعی تکمل**

۱۲۱۳۴ سوال ۷.۶۶۴ تا سوال ۷.۶۷۳ میں تکمل حل کریں۔

۱۲۱۳۵ سوال ۷.۶۶۴: $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \coth x \, \mathrm{d}x$

۱۳۱۳۶ سوال ۷.۶۶۵: $\int_0^{\ln 2} \tanh 2x \, dx$

۱۳۱۳۷ سوال ۷.۶۶۶: $\int_{-\ln 4}^{-\ln 2} 2e^{\theta} \cosh \theta \, d\theta$

۱۳۱۳۸ سوال ۷.۶۶۷: $\int_0^{\ln 2} 4e^{-\theta} \sinh \theta \, d\theta$

۱۳۱۳۹ سوال ۷.۶۶۸: $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cosh(\tan \theta) \sec^2 \theta \, d\theta$

۱۳۱۴۰ سوال ۷.۶۶۹: $\int_0^{\pi/2} 2 \sinh(\sin \theta) \cos \theta \, d\theta$

۱۳۱۴۱ سوال ۷.۶۷۰: $\int_1^2 \frac{\cosh(\ln t)}{t} \, dt$

۱۳۱۴۲ سوال ۷.۶۷۱: $\int_1^4 \frac{8 \cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

۱۳۱۴۳ سوال ۷.۶۷۲: $\int_{-\ln 2}^{0} \cosh^2(\frac{x}{2}) \, dx$

۱۳۱۴۴ سوال ۷.۶۷۳: $\int_0^{\ln 10} 4 \sinh^2(\frac{x}{2}) \, dx$

۱۳۱۴۵ **معکوس ہذلولی تفاعل اور متعلقہ تکمل کی قیمت کا حصول**

۱۳۱۴۶ ہذلولی تفاعل کو درج ذیل لوگارتھمی روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad -\infty < x < \infty$$
$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \geq 1$$
$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1$$
$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}), \quad 0 < x \leq 1$$
$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}), \quad x \neq 0$$
$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1$$

۱۳۱۴۷ درج بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے سوال ۷.۶۷۴ تا سوال ۷.۶۷۹ میں دیے اعداد کو لوگارتھمی روپ میں لکھیں۔

۱۳۱۴۸ سوال ۷.۶۷۴: $\sinh^{-1}(-\frac{5}{12})$

۱۳۱۴۹ سوال ۷.۶۷۵: $\cosh^{-1}(\frac{5}{3})$

۱۳۱۵۰ سوال ۷.۶۷۶: $\tanh^{-1}(-\frac{1}{2})$

۱۳۱۵۱ سوال ۷.۶۷۷: $\coth^{-1}(\frac{5}{4})$

سوال ۷.۶۷۸: $\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

سوال ۷.۶۷۹: $\operatorname{csch}^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

سوال ۷.۶۸۰ تا سوال ۷.۶۸۷ کو (ا) معکوس ہذلولی تفاعل (ب) قدرتی لوگارتھم کے روپ میں حل کریں۔

سوال ۷.۶۸۰: $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^2}}$

سوال ۷.۶۸۱: $\int_0^{1/3} \frac{6\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+9x^2}}$

سوال ۷.۶۸۲: $\int_{5/4}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$

سوال ۷.۶۸۳: $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$

سوال ۷.۶۸۴: $\int_{1/5}^{3/13} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-16x^2}}$

سوال ۷.۶۸۵: $\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4+x^2}}$

سوال ۷.۶۸۶: $\int_0^{\pi} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

سوال ۷.۶۸۷: $\int_1^{e} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$

نظریہ اور استعمال

سوال ۷.۶۸۸: (ا) مبدا کے لحاظ سے تشاکلی وقفہ پر معین تفاعل f (یعنی ایسا تفاعل جو x پر معین ہونے کی صورت میں $-x$ پر بھی معین ہو) کے لیے درج ذیل دکھائیں۔

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} \qquad (ا)$$

اس کے بعد دکھائیں کہ $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ جفت اور $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ طاق ہو گا۔ (ب) اگر f از خود جفت یا طاق ہو تح مساوات اکافی سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔ ان نئی مساواتوں کو تلاش کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۷.۶۸۹: کلیہ $\sinh^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1}),\ -\infty < x < \infty$ اخذ کریں۔ اس کلیہ میں جذر کے ساتھ منفی کے بجائے مثبت علامت کیوں استعمال ہوتا ہے؟

سوال ۷.۶۹۰: ایک جسم پر، جس کی کمیت m ہے، ساکن حال سے ثقلی کشش کی وجہ سے زمین کی طرف گرتے ہوئے سمتی رفتار v کے مربع کے متناسب ہوائی مزاحمت عمل کرتی ہے۔ یوں t سیکنڈ بعد اس جسم کی سمتی رفتار درج ذیل تفرقی مساوات کو مطمئن کرے گی،

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv^2$$

جہاں k ایک ایسا مستقل ہے جس کی قیمت کا دارومدار جسم کے **ہوائی حرکیات**[۲۷] کے خواص اور ہوا کی کثافت پر منحصر ہو گی۔ (ہم فرض کرتے ہیں کہ جسم زیادہ بلندی سے نہیں گرتا ہے۔ یوں ہوائی کثافت میں تبدیلی کو رد کیا جا سکتا ہے۔)

ا. دکھائیں کہ درج ذیل مساوات تفرقی مساوات اور ابتدائی معلومات ($t = 0$ پر $v = 0$) کو مطمئن کرتی ہے۔

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}} t\right)$$

ب. جسم کی تحدیدی سمتی رفتار $\lim_{t\to\infty} v$ تلاش کریں۔

ج. ایک **فضائی غوطہ باز**[۲۸] جس کی کمیت $70\,\mathrm{kg}$ ہو کے لیے $k = 0.23$ ہو گا۔ اس فضائی غوطہ باز کی تحدیدی سمتی رفتار کتنی ہو گی؟

سوال ۷.۶۹۱: فرض کریں ایک جسم محددی لکیر پر حرکت کرتی ہے۔ لمحہ t پر اس کا مقام

$$s = a\cos kt + b\sin kt \qquad (ا)$$
$$s = a\cosh kt + b\sinh kt \qquad (ب)$$

ہے۔ دکھائیں کہ دونوں صورتوں میں اس جسم کی اسراع $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ فاصلہ s کے راست متناسب ہو گی، البتہ پہلی صورت میں یہ مبدا کی جانب اور دوسری صورت میں مبدا سے دوری کے جانب ہو گی۔

سوال ۷.۶۹۲: ایک ٹریکٹر ٹرالی محور x پر چلتے ہوئے مبدا تک پہنچ کر محور y کے رخ مڑتی ہے۔ ٹرالی کے پہیوں سے ٹریکٹر تک فاصلہ کو اکائی تصور کریں۔ یوں جب ٹریکٹر کے پہیے $(1,0)$ پر ہوں تب ٹریکٹر مبدا پر ہو گا۔ جب ٹریکٹر مبدا سے محور y پر چلتا ہے، ٹرالی قوسی راہ $y = f(x)$ اختیار کرتی ہے۔ یہ قوس درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$y = 0, \quad x = 1 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

اس ابتدائی قیمت مسئلہ کو حل کریں۔ (آپ کو معکوس بذلولی تفاعل درکار ہوں گے۔)

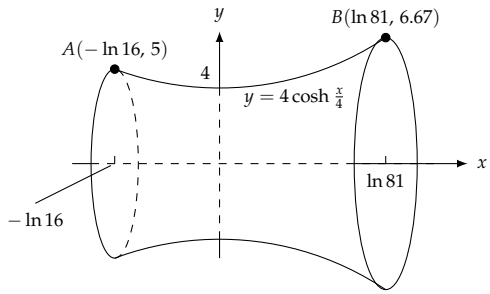
سوال ۷.۶۹۳: دکھائیں کہ ربع اول میں قوس $y = \frac{1}{a}\cosh ax$ اور محددی لکیروں اور لکیر $x = b$ کے بیچ رقبہ اس مستطیل کے رقبہ جتنا ہو گا جس کی چوڑائی $\frac{1}{a}$ اور لمبائی s ہو جہاں $x = 0$ سے $x = b$ تک قوس کی لمبائی s ہے۔

سوال ۷.۶۹۴: ربع اول میں بالائی طرف سے قوس $y = \cosh x$، زیریں طرف سے قوس $y = \sinh x$، بائیں سے محور y اور دائیں سے لکیر $x = 2$ کے بیچ خطے کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

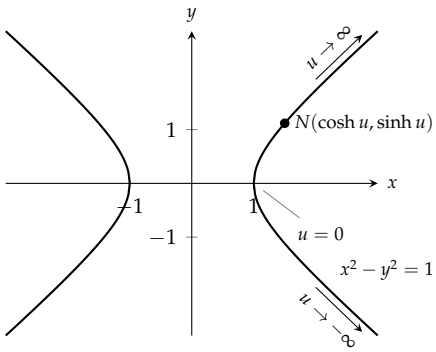
سوال ۷.۶۹۵: قوس $y = \operatorname{sech} x$، محور x اور لکیر $x = \mp \ln\sqrt{3}$ کے بیچ خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

---

[۲۷] aerodynamics
[۲۸] skydiver



شکل ۷.۶۴: کمتر سطح (سوال ۷.۶۹۷)



شکل ۷.۶۵: قطع زائد تفاعل کے نام کی وجہ (سوال ۷.۶۹۹)

سوال ۷.۶۹۶: (ا) قوس $y = \frac{1}{2}\cosh 2x$ کی لمبائی $x = 0$ سے $x = \ln\sqrt{5}$ تک تلاش کریں۔ (ب) قوس $y = \frac{1}{a}\cosh ax$ کی لمبائی $x = 0$ سے $x = b > 0$ تک تلاش کریں۔

سوال ۷.۶۹۷: کمتر سطح

قوس $y = 4\cosh(\frac{x}{4}),\ -\ln 16 \le x \le \ln 81$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل ۷.۶۴)۔ سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔

یہ ثابت کیا جا سکتا ہے نقطہ A اور B کے بیچ تمام قابل تفرق قوسین میں سب سے کم سطح طواف پیدا کرنے والی قوس $y = 4\cosh\frac{x}{4}$ ہے۔ یوں A اور b پر واقع سخت دائری تاروں کے بیچ صابن کے جھاگ کی سطح یہی قوسی صورت اپنائے گی۔

سوال ۷.۶۹۸: (ا) قوس $y = \cosh x,\ -\ln 2 \le x \le \ln 2$ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ (ب) وسطانی مرکز کو 2 اعشاریہ مقامات تک درستگی تک تلاش کریں۔ اس منحنی کو ترسیم کرتے ہوئے وسطانی مرکز کی نشاندہی کریں۔

سوال ۷.۶۹۹: ہذلولی تفاعل کا نام

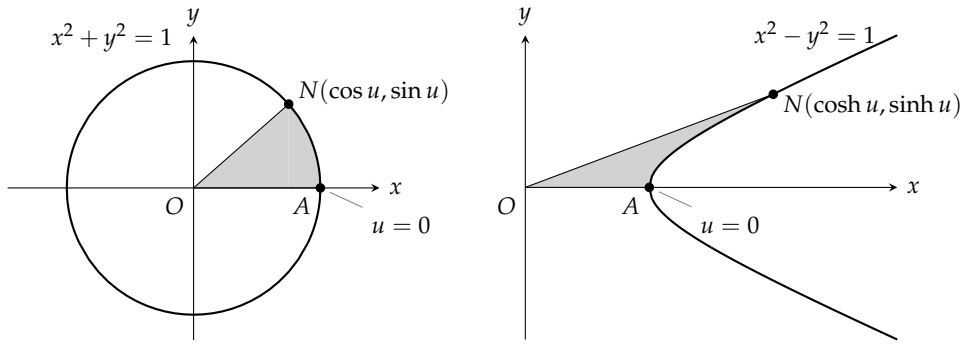
اکائی دائرہ پر نقطہ (x, y) کو تفاعل $x = \cos u$ اور $y = \sin u$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح اکائی قطع زائد (جس کو ہذلولی تفاعل بھی کہتے ہیں) کے دائیں حصہ پر نقطہ (x, y) کو تفاعل $x = \cosh u$ اور $y = \sinh u$ سے حاصل کرنا ممکن ہے (شکل ۷.۶۵)۔ اسی لیے ان تفاعل کو قطع زائد تفاعل یا **ہذلولی تفاعل** کہتے ہیں۔

دائری تفاعل اور قطع زائد تفاعل کے بیچ دوسری مشابہت یہ ہے کہ قطع زائد $x^2 - y^2 = 1$ کے دائیں حصہ میں نقطہ $(\cosh u, \sinh u)$ کے متغیر u کی قیمت خطہ AON کے رقبے کی دگنا ہو گی (شکل ۷.۶۶)۔ اس کی تصدیق کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دکھائیں کہ خطہ AON کا رقبہ $S(u) = \frac{1}{2}\cosh u \sinh u - \int_1^{\cosh u} \sqrt{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x$ ہو گا۔

ب. دکھائیں کہ جزو-امیں دی گئی مساوات کا u کے لحاظ سے تفرق $S'(u) = \frac{1}{2}$ ہو گا۔

ج. اس آخری مساوات کو $S(u)$ کے لیے حل کریں۔ $S(0)$ کی قیمت کتنی ہے؟ تکمل کے مستقل C کی قیمت کتنی ہو گی؟ مستقل C جانتے ہوئے حل $S(u)$ اور u کا تعلق بیان کریں۔



(ا) u کی قیمت سیاہ رقبے کی دگنی ہے۔ (ب) u کی قیمت سیاہ رقبے کی دگنی ہے۔

شکل ۷.۶۶: دائری تفاعل اور قطع زائد تفاعل کا ایک تعلق (سوال ۷.۶۹۹)۔

۱۳۲۰۹

لٹکی ہوئی تار

۱۳۲۱۰

۱۳۲۱۱ سوال ۷.۷۰۰: فرض کریں دو کھمبوں کے بیچ بجلی کی تار لٹکی ہوئی ہے (شکل ۷.۶۷)۔ اس تار کی فی اکائی لمبائی کمیت m ہے اور تار کی سب سے کم اونچائی
۱۳۲۱۲ والے نقطہ پر افقی تناؤ H ہے۔ ہم محددیوں منتخب کرتے ہیں کہ قوسی تار کا نچلا حصہ مبدا سے $\frac{H}{mg}$ بلند ہو جہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ ایسی
۱۳۲۱۳ صورت میں ہم دکھا سکتے ہیں کہ تار کی صورت ہذلولی کوسائن $y = \frac{H}{mg}\cosh\frac{mgx}{H}$ ہو گی۔ ایسی قوس کو **لیزم**[۲۹] کہتے ہیں۔

۱۳۲۱۴ ا. تار کے کسی عمومی نقطہ $N(x, y)$ پر تناؤ T ہو گا جو قوس کو مماسی ہو گا۔ دکھائیں کہ اس نقطہ پر درج ذیل ہو گا۔

$$\tan\phi = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sinh\frac{mgx}{H}$$

۱۳۲۱۵ ب. چونکہ تار ساکن ہے لہٰذا کسی بھی نقطہ پر افقی قوتوں کا مجموعہ صفر ہو گا اور اسی طرح انتصابی قوتوں کا مجموعہ بھی صفر ہو گا۔ یوں دکھائیں کہ $T = H$ اور
۱۳۲۱۶ $T = mgy$ ہو گا۔ یوں N پر تناؤ y لمبائی کی تار کا وزن ہو گا۔

۱۳۲۱۷ سوال ۷.۷۰۱: لیزم (سوال ۷.۷۰۰ جاری)

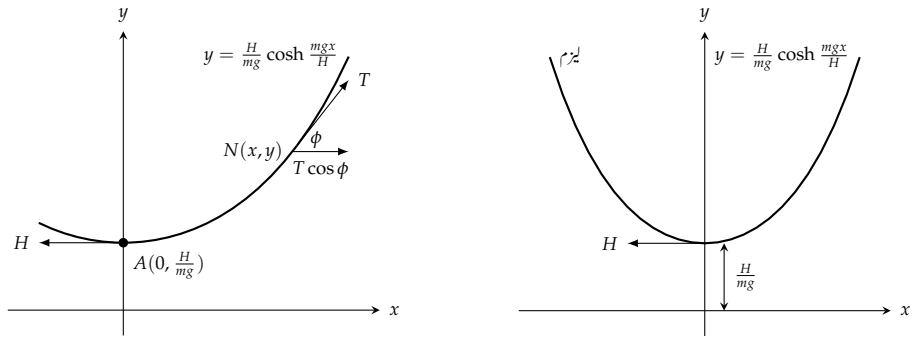
۱۳۲۱۸ تار کی لمبائی $s = \frac{1}{a}\sinh x$ ہو گی (شکل ۷.۶۷) جہاں $a = \frac{mg}{H}$ ہو گا۔ دکھائیں کہ N کے محدد کو s کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے:

$$x = \frac{1}{a}\sinh^{-1} as, \quad y = \sqrt{s^2 + \frac{1}{a^2}}$$

۱۳۲۱۹ سوال ۷.۷۰۲: جھول اور افقی تناؤ ایک تار جس کی لمبائی $10\,\mathrm{m}$ اور کمیت $0.6\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ ہے کو ایک جتنے بلند کھمبوں کے سروں سے باندھا گیا ہے۔
۱۳۲۲۰ کھمبوں کے بیچ فاصلہ $9\,\mathrm{m}$ ہے۔

---

[۲۹] catenary



(ب) عمومی نقطہ پر قوتیں۔ (ا) لیزم

شکل ۷.۶۷: لیزم برائے سوال ۷.۷۰۰ اور سوال ۷.۷۰۱

۱۲۲۲۱ ا. تار کو درج ذیل مساوات سے ظاہر کریں۔

$$y = \frac{1}{a}\cosh ax, \quad -5 \le x \le 5$$

۱۲۲۲۲ دکھائیں کہ a درج ذیل کو مطمئن کرتا ہے (سوال ۷.۷۰۱ کے نتائج استعمال کریں۔)

$$5a = \sinh 4.5a \tag{۲}$$

۱۲۲۲۳ ب. ترسیمات $y = 5a$ اور $y = \sinh 4.5a$ کا نقطہ تقاطع تلاش کرتے ہوئے جزو-اکا ترسیمی حل تلاش کریں۔

۱۲۲۲۴ ج. مساوات ۲ کا اعدادی حل تلاش کریں۔ اعدادی حل کا ترسیمی حل کے ساتھ موازنہ کریں۔

۱۲۲۲۵ د. تار کے کم تر بلند نقطہ پر افقی تناو معلوم کریں۔

۱۲۲۲۶ ھ. لیزم $y = \frac{1}{a}\cosh ax$ کو وقفہ $-5 \le x \le 5$ پر ترسیم کریں۔ تار میں جھول کا اندازہ لگائیں۔

۱۲۲۲۷

۱۲۲۲۸

۱۲۲۲۹ ۷.۱۱ یک رتبی تفرقی مساوات

۱۲۲۳۰ ہم نے ابتدائی قیمت مسئلہ $\frac{dy}{dt} = ky,\ y(0) = y_0$ کو حل کرتے ہوئے قوت نمائی تبدیلی $y = y_0 e^{kt}$ کا قاعدہ حصہ ۷.۵ میں دریافت
۱۲۲۳۱ کیا۔ جیسا کہ ہم نے دیکھا یہ مسئلہ نمو آبادی، تابکار تحلیل، انتقال حرارت اور دیگر اعمال کی نمونہ کشی کرتا ہے۔ اس حصہ میں ہم ابتدائی قیمت مسئلہ $\frac{dy}{dx} =$
۱۲۲۳۲ $f(x,y)$ پر غور کریں گے جہاں تفاعل f غیر تابع متغیر x اور تابع متغیر y کا تفاعل ہو گا۔ اس مساوات کے استعمال مزید زیادہ ہیں۔

یک رتبی تفرقی مساوات

درج ذیل مساوات جس میں $f(x,y)$ مستوی xy کے متغیرات x اور y پر مبنی تفاعل $f(x,y)$ ہے کو **یک رتبی**[30] تفرقی مساوات کہتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \tag{1}$$

اس مساوات کو ہم $y' = f(x,y)$ بھی لکھتے ہیں۔ متغیر x کے کسی وقفہ (جو لا متناہی ہو سکتا ہے) پر معین قابل تفرق تفاعل $y = y(x)$ جس کے لیے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = f(x,y(x))$$

ہو، مساوات کا **حل**[31] کہلاتا ہے۔ ابتدائی شرط $y(x_0) = y_0$ کا مطلب ہو گا کہ منحنی حل $y = y(x)$ نقطہ (x_0,y_0) سے گزرتی ہے۔

دھیان رہے کہ اس تفرقی مساوات میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کا جزو ضربی 1 ہے۔

مثال ۷.۸۱: درج ذیل تفرقی مساوات میں $f(x,y) = 1 - \frac{y}{x}$ ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{y}{x}$$

□

مثال ۷.۸۲: دکھائیں کہ ابتدائی قیمت مسئلہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{y}{x}, \quad y(2) = \frac{3}{2}$$

کا حل درج ذیل تفاعل ہے۔

$$y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$$

حل

دیا گیا تفاعل ابتدائی شرط کو مطمئن کرتا ہے، یعنی:

$$y(2) = \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right)_{x=2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$$

---

[30] firstorder
[31] solution

۱۲۲۴۵ یہ دکھانے کی خاطر کہ دیا گیا تفاعل تفرقی مساوات کو بھی مطمئن کرتا ہے، ہم y کی جگہ $\frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ پر کر کے تصدیق کرتے ہیں کہ تفرقی مساوات کے دونوں
۱۲۲۴۶ اطراف یکساں ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} && \text{بایاں ہاتھ} \\
1 - \frac{y}{x} &= 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right) && \text{دایاں ہاتھ} \\
&= 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

۱۲۲۴۷ تفاعل $y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ ابتدائی شرط اور تفرقی مساوات کو مطمئن کرتا ہے لہٰذا یہ تفرقی مساوات کا حل ہو گا۔ □

۱۲۲۴۸ قابل علیحدگی مساوات

۱۲۲۴۹ اگر $f(x, y)$ کو x کے تفاعل اور y کے تفاعل کا حاصل ضرب لکھنا ممکن ہو تب تفرقی مساوات $y' = f(x, y)$ **قابل علیحدگی**[۳۲] کہلاتی
۱۲۲۵۰ ہے۔ ایسی صورت میں ہم تفرقی مساوات کو درج ذیل روپ میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y)$$

۱۲۲۵۱ اگر $h(y) \neq 0$ ہو تب ہم دونوں اطراف کو h سے تقسیم اور $\mathrm{d}x$ سے ضرب کرتے ہوئے متغیرات کو علیحدہ کر سکتے ہیں:

$$\frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$$

۱۲۲۵۲ یوں y اجزاء اور $\mathrm{d}y$ بائیں ہاتھ جبکہ x اجزاء اور $\mathrm{d}x$ دائیں ہاتھ منتقل ہوتے ہیں۔ ہم دونوں اطراف کا تکمل لے کر

$$\int \frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

۱۲۲۵۳ حاصل کرتے ہیں۔ تکمل سے درکار حل حاصل ہوتا ہے جس میں y، متغیر x کا صریح تفاعل یا خفی تفاعل جمع مستقل ہو گا۔

۱۲۲۵۴ مثال ۷.۸۳: درج ذیل تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1 + y^2)e^x$$

۱۲۲۵۵ **حل**

---

[۳۲] separable

۱۳۲۵۶ چونکہ $1 + y^2$ کبھی بھی صفر نہیں ہو سکتا ہے لہٰذا ہم متغیرات کی علیحدگی سے اس تفرقی مساوات کو حل کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= (1+x^2)e^x \\
\mathrm{d}y &= (1+y^2)e^x\,\mathrm{d}x && \text{دونوں اطراف کو } \mathrm{d}x \text{ سے ضرب دیں} \\
\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} &= e^x\,\mathrm{d}x && \text{دونوں اطراف کو } 1+y^2 \text{ سے تقسیم کریں} \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} &= \int e^x\,\mathrm{d}x && \text{تکمل} \\
\tan^{-1} y &= e^x + C && \text{دونوں اطراف کے مستقل کو } C \text{ ظاہر کرتا ہے}
\end{aligned}$$

۱۳۲۵۷ مساوات $\tan^{-1} y = e^x + C$ میں y متغیر x کا خفی تفاعل ہے۔ ہم اس مساوات کو حل کر کے y کو x کے صریح تفاعل کی صورت میں لکھ
۱۳۲۵۸ سکتے ہیں۔ دونوں اطراف کا ٹینجنٹ لیتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\tan(\tan^{-1} y) &= \tan(e^x + C) \\
y &= \tan(e^x + C)
\end{aligned}$$

۱۳۲۵۹ □

۱۳۲۶۰ **خطی یک رتبی مساوات**

۱۳۲۶۱ درج ذیل یک رتبی تفرق مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x) \tag{۲}$$

۱۳۲۶۲ جس میں P اور Q متغیر x کے تفاعل ہوں **خطی**[۳۳] یک رتبی مساوات کہلاتی ہے۔ مساوات ۲ اس کی **معیاری روپ**[۳۴] ہے۔ دھیان رہے کہ اس
۱۳۲۶۳ تفرقی مساوات میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کا جزو ضربی 1 ہے۔

۱۳۲۶۴ مثال ۷.۸۴: درج ذیل کو معیاری روپ میں لکھیں۔

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + 3y, \quad x > 0$$

---

[۳۳] linear
[۳۴] standardform

۱۲۲۶۵ **حل**

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + 3y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + \frac{3}{x}y \qquad x \text{ سے تقسیم}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{3}{x}y = x \qquad \text{معیاری روپ؛ } P(x) = -\frac{3}{x} \text{ اور } Q(x) = x \text{ ہیں۔}$$

۱۲۲۶۶ □

۱۲۲۶۷ مثال ۷.۸۵: ہم نے حصہ ۷.۵ میں درج ذیل مساوات سے جرثوموں کی نمو، تابکار تحلیل اور تبدیلی حرارت کو ظاہر کیا۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ky$$

۱۲۲۶۸ اس خطی یک رتبی تفرقی مساوات کی معیاری روپ درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - ky = 0 \qquad P(h) = -k,\ Q(x) = 0$$

۱۲۲۶۹ □

۱۲۲۷۰ ہم معیاری مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x) \tag{۳}$$

۱۲۲۷۱ کے دونوں اطراف کو اس مثبت تفاعل $v(x)$ سے ضرب دیتے ہیں جو بائیں ہاتھ کو حاصل ضرب $y \cdot v(x)$ کے تفرق میں تبدیل کرتا ہو۔ تفاعل
۱۲۲۷۲ $v(x)$ کو مساوات ۳ کا جزو **تکمل**[۳۵] کہتے ہیں۔ ہم بہت جلد $v(x)$ معلوم کرنا سکھائیں گے۔ پہلے $v(x)$ جانتے ہوئے تفرقی مساوات کے حل پر بات
۱۲۲۷۳ کرتے ہیں۔

[۳۵] integratingfactor

۱۳۲۷۴ آئیں دیکھتے ہیں کہ v سے ضرب دینا کیوں کارآمد ثابت ہوتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x) \qquad \text{دی گئی معیاری مساوات}$$

$$v(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)v(x)y = v(x)Q(x) \qquad v(x)\text{ سے ضرب دیں}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v(x)\cdot y) = v(x)Q(x) \tag{۴}$$

$$v(x)\cdot y = \int v(x)Q(x)\,\mathrm{d}x \qquad x\text{ کے لحاظ سے تکمل}$$

$$y = \frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)\,\mathrm{d}x \qquad y\text{ کے لیے حل کریں}$$

۱۳۲۷۵ یاد رہے کہ $v(x)$ کا انتخاب یوں کیا جاتا ہے کہ $v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + Pvy = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v\cdot y)$ ہو۔ درج بالا میں تیسرے قدم پر اسی حقیقت کو استعمال کیا گیا
۱۳۲۷۶ ہے۔ مساوات ۳ کا حل تفاعل $v(x)$ اور $Q(x)$ کی صورت میں مساوات ۴ دیتی ہے۔

۱۳۲۷۷ کیا $P(x)$ مساوات کے حل میں نہیں پایا جاتا ہے؟ درحقیقت $P(x)$ بالواسطہ طور پر حل میں پایا جاتا ہے۔ یہ $v(x)$ کے انتخاب میں شامل ہوتا ہے۔
۱۳۲۷۸ ہم $v(x)$ پر مسلط شرط سے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(vy) = v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + Pvy \qquad v\text{ پر مسلط شرط}$$

$$v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + Pvy \qquad \text{زنجیری قاعدہ}$$

$$y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = Pvy \qquad v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\text{ جزو کٹ جاتے ہیں}$$

۱۳۲۷۹ اس آخری مساوات کے دونوں اطراف کو y سے تقسیم کرتے ہوئے سے درج ذیل حاصل ہو گا جہاں تیسرے قدم پر $v > 0$ کی وجہ سے $\ln v$ میں
۱۳۲۸۰ مطلق قیمت کی علامت کی ضرورت پیش نہیں آتی۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = Pv$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = P\,\mathrm{d}x \qquad \text{علیحدگی متغیرات}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{v} = \int P\,\mathrm{d}x \qquad \text{تکمل} \tag{۵}$$

$$\ln v = \int P\,\mathrm{d}x$$

$$e^{\ln v} = e^{\int P\,\mathrm{d}x} \qquad \text{قوت نما}$$

$$v = e^{\int P\,\mathrm{d}x}$$

۱۳۲۸۱ یوں ایسا $v(x)$ جو مساوات ۵ کو مطمئن کرتا ہو ہمیں مساوات ۴ کے ذریعہ مساوات ۳ کا حل دیگا۔ ہمیں v کی عمومی ترین صورت کی ضرورت نہیں ہے بلکہ
۱۳۲۸۲ اس کی کوئی بھی صورت کافی ہے۔ یوں P کے تکمل $\int P\,\mathrm{d}x$ کی سادہ ترین صورت لینا زیادہ بہتر ہو گا۔

۱۲۲۸۳ مسئلہ ۷.۴: خطی یک رتبی تفرقی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x) \tag{۶}$$

۱۲۲۸۴ کا حل

$$y = \frac{1}{v(x)} \int v(x)Q(x)\,\mathrm{d}x \tag{۷}$$

۱۲۲۸۵ ہو گا جہاں

$$v(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} \tag{۸}$$

۱۲۲۸۶ ہے۔ تفاعل $v(x)$ کے کلیہ میں $P(x)$ کے ضد تفرق کی عمومی صورت کی ضرورت نہیں ہو گی بلکہ اس کا کوئی بھی ضد تفرق کارآمد ہو گا۔

۱۲۲۸۷

۱۲۲۸۸ **خطی یک رتبی تفرقی مساوات کو حل کرنے کے اقدام:**

۱۲۲۸۹ ا. مساوات کو معیاری روپ میں لکھ کر $P(x)$ اور $Q(x)$ معلوم کریں۔

۱۲۲۹۰ ب. $P(x)$ کا ضد تفرق معلوم کریں۔

۱۲۲۹۱ ج. جزو تکمل $v(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

۱۲۲۹۲ د. مساوات ۷ کی مدد سے حل تلاش کریں۔

۱۲۲۹۳ مثال ۷.۸۶: درج ذیل مساوات کو حل کریں۔

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + 3y, \quad x > 0$$

۱۲۲۹۴ **حل**

۱۲۲۹۵ ہم اس مساوات کو چار قدموں میں حل کرتے ہیں۔

۱۲۲۹۶ **قدم اول:** مساوات کو معیاری روپ میں لکھ کر P اور Q کی نشاندہی کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{3}{x}y = x, \quad P(x) = -\frac{3}{x}, \quad Q(x) = x \qquad \text{مثال ۷.۸۴}$$

۱۲۲۹۷ **قدم دوم:** $P(x)$ کا (کوئی بھی) ضد تفرق تلاش کرتے ہیں۔

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x = \int -\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x = -3\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -3\ln|x| = -3\ln x \qquad x > 0$$

۱۳۲۹۸ **قدم سوم:** جزو تکمل $v(x)$ کی تلاش۔

$$v(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} = e^{-3\ln x} = e^{\ln x^{-3}} = \frac{1}{x^3} \qquad \text{مساوات ۸}$$

۱۳۲۹۹ **قدم چہارم:** حل کی تلاش۔

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{v(x)} \int v(x)Q(x)\,\mathrm{d}x && \text{مساوات ۷} \\
&= \frac{1}{(1/x^3)} \int \left(\frac{1}{x^3}\right)(x)\,\mathrm{d}x && \text{جزو-اتاج کی معلومات} \\
&= x^3 \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \\
&= x^3\left(-\frac{1}{x} + \mathrm{C}\right) && \text{مستقل C مت بھولیں} \\
&= -x^2 + \mathrm{C}x^3
\end{aligned}$$

۱۳۳۰۰ یوں حل $y = -x^2 + \mathrm{C}x^3,\ x > 0$ ہو گا۔ □

۱۳۳۰۱ مثال ۷.۸۷: درج ذیل مساوات کو حل کریں

$$xy' = x^2 + 3y, \quad x > 0$$

۱۳۳۰۲ جہاں ابتدائی معلومات $y(1) = 2$ دی گئی ہے۔

۱۳۳۰۳ **حل**

۱۳۳۰۴ ہم مثال ۷.۸۶ میں اس کا درج ذیل حل تلاش کر چکے ہیں۔

$$y = -x^2 + \mathrm{C}x^3, \quad x > 0$$

۱۳۳۰۵ ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مستقل C کی قیمت دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
y &= -x^2 + \mathrm{C}x^3 \\
2 &= -(1)^2 + \mathrm{C}(1)^3 \\
\mathrm{C} &= 2 + (1)^2 = 3
\end{aligned}$$

۱۳۳۰۶ یوں ابتدائی قیمت مسئلے کا حل تفاعل $y = -x^2 + 3x^3$ ہو گا۔ □

۷.۱۲ سمتی رفتار کے متناسب مزاحمت

بعض اوقات جب باقی قوتوں کو رد کرنا ممکن ہو، یہ کہنا درست ہو گا کہ حرکت کرتے ہوئے جسم پر لاگو مزاحمت اس کی سمتی رفتار کے راست متناسب ہو گی۔ ایک گاڑی جس کا انجن بند ہو اور یہ رک رہی ہو، ایسی ایک مثال ہے۔ ایسا جسم جتنا آہستہ چل رہا ہو، اس پر ہوائی مزاحمت اتنی کم ہو گی۔ اس عمل کو ریاضی کا جامہ پہنانے کی خاطر ہم جسم کو کمیت m سے ظاہر کرتے ہیں جو محددی لکیر پر حرکت کرتا ہے۔ لمحہ t پر اس جسم کی رفتار v اور مقام s ہوں گے۔ مزاحمتی قوت جسم کی سمتی رفتار کے معکوس رخ ہو گا لہٰذا ہم

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv \qquad\qquad k > 0$$

لکھ سکتے ہیں جس کی معیاری روپ

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}v = 0$$

ہو گی۔ فرض کریں لمحہ $t = 0$ پر جسم کی سمتی رفتار v_0 ہو تب ہم مسئلہ ۷.۴ کی مدد سے درج ذیل حل حاصل ہو گا (سوال ۷.۷۴۴)۔

$$v = v_0 e^{-(k/m)t} \tag{۹}$$

ہم مساوات ۹ سے کیا سیکھ سکتے ہیں؟ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر m بہت زیادہ ہو، مثلاً ریت سے بھرا ہوا ٹرک، تب اس جسم کو رکنے کے لیے بہت زیادہ وقت درکار ہو گا۔ اس کے علاوہ ہم اس مساوات کا تکمل لے کر طے شدہ فاصلہ s معلوم کر سکتے ہیں۔

فرض کریں ایک جسم صرف ہوائی مزاحمت کی موجودگی میں رک رہا ہے اور یہ قوت جسم کی رفتار کے راست متناسب ہے۔ یہ جسم کتنا فاصلہ طے کرے گا؟ یہ جاننے کی خاطر ہم مساوات ۹ سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0 e^{-(k/m)t} \qquad\qquad s(0) = 0$$

t کے لحاظ سے تکمل لے کر

$$s = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + C$$

ملتا ہے جس میں $t = 0$ پر $s = 0$ پر کرتے ہوئے مستقل C کی قیمت جانتے ہیں۔

$$0 = -\frac{v_0 m}{k} + C \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{v_0 m}{k}$$

اس جسم کا مقام لمحہ t پر

$$s(t) = -\frac{v_0 m}{k} e^{-(k/m)t} + \frac{v_0 m}{k} = \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-(k/m)t})$$

ہو گا۔ یہ جانے کے لیے کہ یہ جسم کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد رکے گا ہم $t \to \infty$ پر $s(t)$ کی حد تلاش کرتے ہیں۔ چونکہ $-\frac{k}{m} < 0$ ہے لہٰذا $t \to \infty$ کرنے سے $e^{-(k/m)t} \to 0$ ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} s(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-(k/m)t}) \\ &= \frac{v_0 m}{k}(1-0) = \frac{v_0 m}{k}\end{aligned}$$

یوں یہ جسم کو رکنے کے لیے درج ذیل فاصلہ درکار ہو گا۔

$$\text{طے فاصلہ} = \frac{v_0 m}{k} \tag{۱۰}$$

چونکہ صرف ریاضیات میں ہم وقت کو لامتناہی تک بڑھا سکتے ہیں لہٰذا یہ ایک فرضی فاصلہ ہے۔ حقیقی فاصل اس سے کم ہو گا۔ ہاں یہ درست ہو گا کہ بھاری جسم کو رکنے کے لیے زیادہ وقت درکار ہو گا اور یہ زیادہ دور تک چل کر رکے گا۔

مثال ۷.۸۸: برف پھسلن پر پھسلنے والے $80\,\mathrm{kg}$ شخص کے لیے مساوات ۹ میں $k = 4.4\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ ہو گا۔ یہ شخص $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے آہستہ ہو کر $0.25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار تک کتنی دیر میں پہنچے گا؟ اس دورانیے میں یہ شخص کتنا فاصلہ طے کرے گا؟

حل

ہم مساوات ۹ کو t کے لیے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}3e^{-4.4t/80} &= 0.25 \\ e^{-4.4t/80} &= \frac{1}{12} \\ -\frac{4.4t}{80} &= \ln(\frac{1}{12}) \\ t &= \frac{80}{4.4}\ln 12 \approx 45\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

اس عرصہ میں طے فاصلہ کو مساوات ۱۰ سے حاصل کرتے ہیں۔

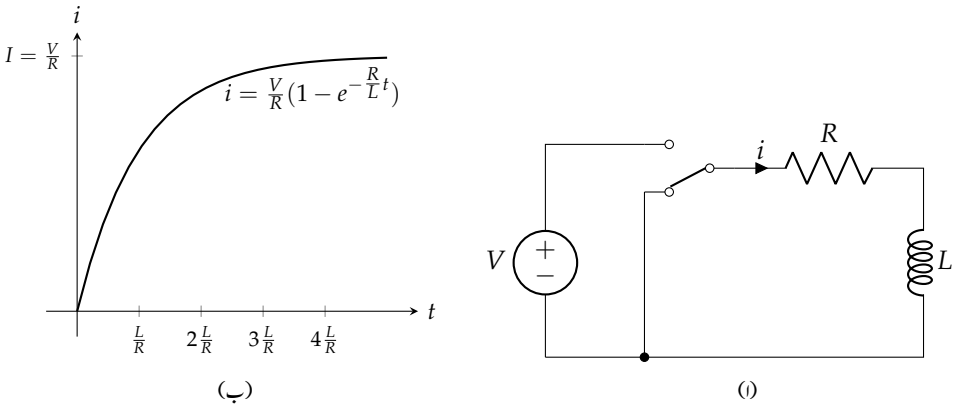
$$= \frac{v_0 m}{k} = \frac{(3)(80)}{4.4} \approx 55\,\mathrm{m}$$

□

RL ادوار

منبع دباو کے ساتھ لمحہ $t = 0$ پر مزاحمت R اور امالہ L کو سلسلہ وار جوڑا جاتا ہے (شکل ۷.۶۸)۔ امالہ کی اکائی ہینری H اور مزاحمت کی اکائی اہم Ω ہے۔ اس دور کو درج ذیل مساوات ظاہر کرتی ہے

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = V \tag{۱۱}$$



شکل ۷.۶۸: سلسلہ وار مزاحمت، امالہ برقی دور (مثال ۷.۸۹)

۱۲۳۳۵ جہاں t وقت کو، i برقی رو کو اور V لاگو برقی دباو کو ظاہر کرتی ہے۔ اس مساوات کو حل کرتے ہوئے لمحہ t پر برقی رو $i(t)$ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

۱۲۳۳۶ مثال ۷.۸۹: سلسلہ وار جڑے RL دور کو مساوات ۱۱ ظاہر کرتی ہے۔ اس کو حل کریں۔

۱۲۳۳۷ **حل**

۱۲۳۳۸ ہم اس مساوات کو معیاری روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L} \tag{۱۲}$$

۱۲۳۳۹ یوں مسئلہ ۷.۴ کے تحت حل درج ذیل ہو گا (سوال ۷.۷۵۶)۔

$$i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \tag{۱۳}$$

۱۲۳۴۰ چونکہ $-\frac{R}{L}$ نفی ہے لہٰذا $t \to \infty$ کرنے سے $e^{-(R/L)t} \to 0$ ہو گا۔ یوں

$$\lim_{t\to\infty} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t}\right) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}\cdot 0 = \frac{V}{R}$$

۱۲۳۴۱ ہو گا۔ یوں کسی بھی لمحہ پر برقی رو $\frac{V}{T}$ سے کم ہو گی لیکن جیسے جیسے وقت گزرتا ہے برقی رو برقرار حال قیمت $\frac{V}{R}$ تک پہنچتی ہے۔ درج ذیل مساوات کے تحت

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = V$$

۱۲۳۴۲ اگر $L = 0$ (امالہ کی غیر موجودگی) یا $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$ (برقرار حال) ہو تب اس دور میں $i = \frac{V}{R}$ ہو گا (شکل ۷.۶۸)۔

۱۲۳۴۳ مساوات ۱۳ در حقیقت دو مختلف حل کا مجموعہ ہے۔ اس کا پہلا جزو $\frac{V}{R}$ **برقرار حال حل** ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو $-\frac{V}{R}e^{-(R/L)t}$ **عارضی حال حل** ہے جو $t \to \infty$ کرنے سے صفر ہو گا۔ □

۱۳۳۴۵ **سوالات**

۱۳۳۴۶ **حل کی تصدیق**

۱۳۳۴۷ سوال ۷.۷۰۳ اور سوال ۷.۷۰۴ میں تصدیق کریں کہ ہر $y = f(x)$ دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہے۔

۱۳۳۴۸ سوال ۷.۷۰۳: $2y' + 3y = e^{-x}$

۱۳۳۴۹ (ا) $y = e^{-x}$، (ب) $y = e^{-x} + e^{-(3/2)x}$، (ج) $y = e^{-x} + Ce^{-(3/2)x}$

۱۳۳۵۰ سوال ۷.۷۰۴: $y' = y^2$؛

۱۳۳۵۱ (ا) $y = -\frac{1}{x}$، (ب) $y = -\frac{1}{x+3}$، (ج) $y = -\frac{1}{x+C}$

۱۳۳۵۲ سوال ۷.۷۰۵ اور سوال ۷.۷۰۶ میں تصدیق کریں کہ $y = f(x)$ دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہے۔

۱۳۳۵۳ سوال ۷.۷۰۵: $x^2y' + xy = e^x$ ، $y = \frac{1}{x}\int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$

۱۳۳۵۴ سوال ۷.۷۰۶: $y' + \frac{2x^3}{1+x^4}y = 1$ ، $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\int_1^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$

۱۳۳۵۵ سوال ۷.۷۰۷ تا سوال ۷.۷۱۰ میں ابتدائی قیمت مسئلے کے دیے گئے حل کی تصدیق کریں۔

۱۳۳۵۶ سوال ۷.۷۰۷: $y' + y = \frac{2}{1+4e^{2x}}, \quad y(-\ln 2) = \frac{\pi}{2}; \quad y = e^{-x}\tan^{-1}(2e^x)$

۱۳۳۵۷ سوال ۷.۷۰۸: $y' = e^{-x^2} - 2xy, \quad y(2) = 0; \quad y = (x-2)e^{-x^2}$

۱۳۳۵۸ سوال ۷.۷۰۹: $xy' + y = -\sin x, \quad x > 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0; \quad y = \frac{\cos x}{x}$

۱۳۳۵۹ سوال ۷.۷۱۰: $x^2y' = xy - y^2, \quad x > 1, \quad y(e) = e; \quad y = \frac{x}{\ln x}$

۱۳۳۶۰ **قابل علیحدگی مساوات**

۱۳۳۶۱ سوال ۷.۷۱۱ تا سوال ۷.۷۱۶ میں دیے گئے تفرقی مساوات کو حل کریں۔

۱۳۳۶۲ سوال ۷.۷۱۱: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2(x + y^2x)$

۱۳۳۶۳ سوال ۷.۷۱۲: $(y+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(x-1)$

۱۳۳۶۴ سوال ۷.۷۱۳: $2\sqrt{xy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1, \quad x, y > 0$

۱۳۳۶۵ سوال ۷.۷۱۴: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2\sqrt{y}, \quad y > 0$

۱۳۳۶۶ سوال ۷.۷۱۵: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{x-y}$

۱۳۳۶۷ سوال ۷.۷۱۶: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x^2+1}{xe^y}, \quad x > 0$

۱۳۳۶۸ **خطی یک رتبی مساوات**

۱۳۳۶۹ سوال ۷.۷۱۷ تا سوال ۷.۷۲۲ میں تفرقی مساوات حل کریں۔

۱۲۳۷۰ سوال ۷.۷۱۷: $x\frac{dy}{dx} + y = e^x, \quad x > 0$

۱۲۳۷۱ سوال ۷.۷۱۸: $e^x\frac{dy}{dx} + 2e^x y = 1$

۱۲۳۷۲ سوال ۷.۷۱۹: $xy' + 3y = \frac{\sin x}{x^2}, \quad x > 0$

۱۲۳۷۳ سوال ۷.۷۲۰: $y' + (\tan x)y = \cos^2 x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

۱۲۳۷۴ سوال ۷.۷۲۱: $x\frac{dy}{dx} + 2y = 1 - \frac{1}{x}, \quad x > 0$

۱۲۳۷۵ سوال ۷.۷۲۲: $(1+x)y' + y = \sqrt{x}$

۱۲۳۷۶ **یک رتبی مساوات**

۱۲۳۷۷ سوال ۷.۷۲۳ تا سوال ۷.۷۳۶ میں تفرقی مساوات حل کریں۔

۱۲۳۷۸ سوال ۷.۷۲۳: $2y' = e^{x/2} + y$

۱۲۳۷۹ سوال ۷.۷۲۴: $\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = e^{y+\sqrt{x}}, \quad x > 0$

۱۲۳۸۰ سوال ۷.۷۲۵: $e^{2x}y' + 2e^{2x}y = 2x$

۱۲۳۸۱ سوال ۷.۷۲۶: $xy' - y = 2x\ln x$

۱۲۳۸۲ سوال ۷.۷۲۷: $\sec x\frac{dy}{dx} = e^{y+\sin x}$

۱۲۳۸۳ سوال ۷.۷۲۸: $x\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{x} - 2y, \quad x > 0$

۱۲۳۸۴ سوال ۷.۷۲۹: $(t-1)^3\frac{ds}{dt} + 4(t-1)^2 s = t+1, \quad t > 1$

۱۲۳۸۵ سوال ۷.۷۳۰: $(t+1)\frac{ds}{dt} + 2s = 3(t+1) + \frac{1}{(t+1)^2}, \quad t > -1$

۱۲۳۸۶ سوال ۷.۷۳۱: $(\sec^2\sqrt{x})\frac{dx}{dt} = \sqrt{x}$

۱۲۳۸۷ سوال ۷.۷۳۲: $\sin t - (x\cos^2 t)\frac{dx}{dt} = 0, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

۱۲۳۸۸ سوال ۷.۷۳۳: $\sin\theta\frac{dr}{d\theta} + (\cos\theta)r = \tan\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

۱۲۳۸۹ سوال ۷.۷۳۴: $\tan\theta\frac{dr}{d\theta} + r = \sin^2\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

۱۲۳۹۰ سوال ۷.۷۳۵: $\cosh x\frac{dy}{dx} + (\sinh x)y = e^{-x}$

۱۲۳۹۱ سوال ۷.۷۳۶: $\sinh x\frac{dy}{dx} + 3(\cosh x)y = \cosh x\sinh x$

۱۲۳۹۲ **ابتدائی قیمت مسائل کا حل**

۱۲۳۹۳ سوال ۷.۷۳۷ تا سوال ۷.۷۴۲ میں ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

۱۲۳۹۴ سوال ۷.۷۳۷: $\frac{dy}{dt} + 2y = 3; \quad y(0) = 1$

سوال ۷.۷۳۸: $t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = t^3, \quad t > 0; \quad y(2) = 1$

سوال ۷.۷۳۹: $\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} + y = \sin\theta, \quad \theta > 0; \quad y(\pi/2) = 1$

سوال ۷.۷۴۰: $\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - 2y = \theta^3\sec\theta\tan\theta, \quad \theta > 0; \quad y(\pi/3) = 2$

سوال ۷.۷۴۱: $(x+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2(x^2+x)y = \frac{e^{x^2}}{x+1}, \quad x > -1; \quad y(0) = 5$

سوال ۷.۷۴۲: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy = x, \quad y(0) = -6$

سوال ۷.۷۴۳: درج ذیل ابتدائی قیمت مساوات کو مسئلہ ۷.۴ سے حل کرتے ہوئے کیا حاصل ہوتا ہے۔ یہاں y متغیر t کا تفاعل ہے۔

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky, \quad$ مستقل $k; \quad y(0) = y_0$

سوال ۷.۷۴۴: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو مسئلہ ۷.۴ کی مدد سے حل کریں جہاں v متغیر t کا تفاعل ہے۔

$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}v, \quad$ m اور k مستقل ہیں $; \quad v(0) = v_0$

نظریہ اور استعمال

سوال ۷.۷۴۵: کیا درج ذیل میں سے کوئی مساوات درست ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

(الف) $$x\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln|x| + C$$

(ب) $$x\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln|x| + Cx$$

سوال ۷.۷۴۶: کیا درج ذیل میں سے کوئی مساوات درست ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

(الف) $$\frac{1}{\cos x}\int\cos x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$$

(ب) $$\frac{1}{\cos x}\int\cos x\,\mathrm{d}x = \tan x + \frac{C}{\cos x}$$

سوال ۷.۷۴۷: شکر خون

ایک مریض کو مستقل شرح سے گلوکوز کی خوراک درون وریدی کھلائی جاتی ہے۔ وقت کے لحاظ سے خون میں گلوکوز کی ارتکاز $c(t)$ کو درج ذیل تفرقی مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں G ، V اور k مثبت مستقل ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = \frac{G}{100V} - kc$$

فی منٹ ملی گرام میں گلوکوز کی شرح G ہے جبکہ بدن میں خون کا حجم V لٹر ہے جو بالغ شخص کے لیے تقریباً 5 L ہو گا۔ ارتکاز $c(t)$ کو ملی گرام فی دس مربع سنٹی میٹر ناپا جاتا ہے۔ جزو $-kc$ کو اس لیے شامل کیا گیا ہے کہ گلوکوز مسلسل دیگر اجزاء میں تبدیل ہو گا اور اس تبدیلی کی شرح اس وقت پائے جانے

والی گلوکوز کے راست متناسب ہو گی۔(ا) $c(0)$ کو c_0 سے ظاہر کرتے ہوئے اس مساوات کو حل کریں۔(ب) برقرار حال ارتکاز $\lim_{t\to\infty} c(t)$ تلاش کریں۔

سوال ۷.۷۴۸: مسلسل سود در سود

آپ بنک سے 1000 روپیہ قرضہ لیتے ہیں اور ہر سال مزید 1000 روپیہ بنک سے قرض کرتے ہیں۔ آپ کو 10 % سالانہ مسلسل سود در سود دینا ہو گا۔ t سال بعد آپ کی واجب الادار قم x درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ دیتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1000 + 0.1x, \quad x(0) = 1000$$

(ا) اس مساوات کو حل کریں۔(ب) آپ کی واجب الادار قم کتنے سالوں میں 100 000 ہو گی؟

سوال ۷.۷۴۹: حوض خالی کرنے کے لیے درکار وقت

ایک پانی سے بھرے ہوئے انتصابی بیلنی حوض کی تہہ میں نصب نلکی کو کھول کر حوض خالی کا جاتا ہے۔ شروع میں پانی کی نکاسی تیز ہوتی ہے لیکن جیسے جیسے پانی کی سطح گرتی ہے، پانی کی نکاسی بھی آہستہ ہوتی جاتی ہے۔ ایسی صورت میں پانی کی گہرائی کی شرح تبدیلی، گہرائی y کے جذر کے راست متناسب ہوتی ہے:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k\sqrt{y}$$

مستقل k کی قیمت ثقلی اسراع، نلکی کے سوراخ کی شکل اور حوض کے رقبہ عمودی تراش پر منحصر ہوتی ہے۔

فرض کریں t کو منٹوں میں ناپا جاتا ہے اور $k = \frac{1}{10}$ ہو۔ اگر پانی کی گہرائی 4 m ہو تب حوض کتنی دیر میں خالی ہو گا؟

سوال ۷.۷۵۰: گریزی رفتار

ہوا سے خالی چاند پر کمیت m کے جسم پر ثقلی قوت $F = -\frac{GMm}{s^2} = -\frac{GMm}{R^2}\frac{R^2}{s^2} = -\frac{mgR^2}{s^2}$ عمل کرتی ہے جہاں چاند کے مرکز سے جسم تک فاصلہ s اور چاند کا رداس R ہے (شکل ۷.۶۹)۔ چونکہ قوت F نیچے رخ عمل کرتا ہے لہٰذا اس کو منفی لکھا گیا ہے۔(ا) ایک جسم کو $t = 0$ پر سطح چاند سے v_0 رفتار کے ساتھ اوپر پھینکا جاتا ہے۔ قانون نیوٹن $F = ma$ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ مقام s پر جسم کی رفتار درج ذیل ہو گی۔

$$v^2 = \frac{2gR^2}{s} + v_0^2 - 2gR$$

یوں جب تک $v_0 \geq \sqrt{2gR}$ ہو، رفتار مثبت رہے گی۔ رفتار $v_0 = \sqrt{2gR}$ چاند کی **گریزی رفتار**[۳۶] کہلاتی ہے۔ جس جسم کو اس رفتار یا اس سے زیادہ رفتار سے سطح چاند سے اوپر پھینکا جائے، وہ جسم چاند پر واپس نہیں گرے گا۔(ب) دکھائیں کہ اگر $v_0 = \sqrt{2gR}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

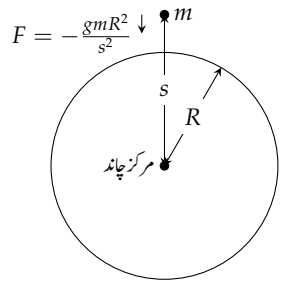
$$s = R\left(1 + \frac{3v_0}{2R}t\right)^{2/3}$$

سمتی رفتار کے راست مزاحمت

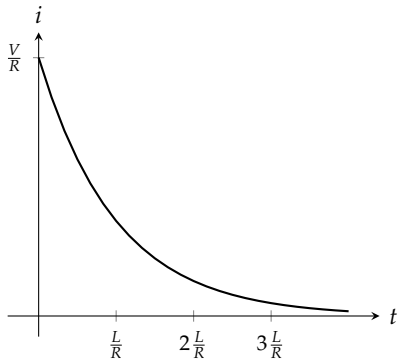
سوال ۷.۷۵۱: ایک سائکل سوار $21.6\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ رفتار سے چلتے ہوئے پیڈل گھمانا بند کرتا ہے۔ مساوات ۹ میں $k = \frac{20}{7}\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ لیں اور سائکل سوار کی کمیت 80 kg ہے۔(ا) سائکل سوار کتنا فاصلہ طے کر کے رکے گا۔(ب) کتنی دیر بعد سائکل سوار کی رفتار $0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی؟

---

escapevelocity[۳۶]



شکل ۷.۶۹: چاند پر قوت کشش



شکل ۷.۷۰: تنزل برقی رو (سوال ۷.۷۵۴)

سوال ۷.۷۵۲: ایک بحری جہاز جس کی کمیت $2.5 \times 10^7\,\mathrm{kg}$ ہے کے لیے مساوات ۹ میں $k = 44\,000\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ ہے۔ اس بحری جہاز کی رفتار $24\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہوتی ہے جب اس کا انجن کام کرنا چھوڑ دیتا ہے۔ (ا) یہ بحری جہاز کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد رکے گا؟ (ب) اس کی رفتار کتنی دیر میں $0.25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ تک ہو گی؟

RL ادوار

سوال ۷.۷۵۳: سلسلہ وار RL دور میں برقی رو

ایک سلسلہ وار RL دور پر لمحہ $t = 0$ پر برقی دباولا گو کیا جاتا ہے۔ کتنی دیر میں برقرار حال برقی رو کی نصف قیمت تک دور میں برقی رو پہنچے گا؟ آپ دیکھیں گے کہ جواب کا دارومدار R اور L کی قیمتوں پر ہو گا نا کہ لاگو برقی دباو کی قیمت پر۔

سوال ۷.۷۵۴: تنزل برقی رو

سلسلہ وار RL دور میں ابتدائی طور پر I_0 برقی رو پائی جاتی ہے جو درج ذیل مساوات کے تحت وقت کے ساتھ گھٹتی ہے (شکل ۷.۷۰)۔

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0$$

(ا) اس مساوات کو برقی رو i کے لیے حل کریں۔ (ب) برقی رو کتنی دیر میں $\frac{I_0}{2}$ ہو گی؟ (ج) لمحہ $t = \frac{L}{R}$ پر i کتنا ہو گا۔

سوال ۷.۷۵۵: وقتی مستقل

مستقل $\frac{L}{R}$ کو مہندس RL دور کا **وقتی مستقل**[۳۷] کہتے ہیں۔ تقریباً 3 وقتی مستقل دورانیہ میں برقی رو برقرار حال قیمت کے 95 % قیمت تک پہنچ پاتا ہے۔ یوں وقتی مستقل سے ہم معلوم کر سکتے ہیں کہ دور کتنا جلدی برقرار حاصل اختیار کرے گا۔ (ا) مساوات ۱۳ میں لمحہ $t = 3\frac{L}{R}$ پر i تلاش کریں۔ یہ برقرار حال برقی رو کی 95 % قیمت ہو گی۔ (ب) لمحہ $t = 2\frac{L}{R}$ پر مساوات ۱۳ کتنی برقی رو دیتی ہے؟

---

[۳۷] timeconstant

سوال ۷.۷۵۶: آئیں مساوات ۱۳ حاصل کرتے ہیں۔

ا. مسئلہ ۷.۴ کی مدد سے دکھائیں کہ

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

کا حل درج ذیل ہے۔

$$i = \frac{V}{R} + Ce^{-(R/L)t}$$

ب. ابتدائی معلومات $i(0) = 0$ استعمال کرتے ہوئے مستقل C کی قیمت دریافت کریں۔ یوں مساوات ۱۳ حاصل ہوتی ہے۔

ج. دکھائیں کہ $i = \frac{V}{R}$ مساوات ۱۲ کا حل ہے اور درج ذیل $i = Ce^{-(R/L)t}$ کو مطمئن کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = 0$$

مرکب کے مسائل

ایک کیمیا جو مائع (یا گیس) کی صورت میں ہے کو ایک برتن میں ڈالا جاتا ہے جس میں پہلے سے کوئی مائع (یا گیس) موجود ہے اور عین ممکن ہے کہ اسی کیمیا کی مخصوص مقدار بھی اس برتن میں پہلے سے موجود ہو۔ مرکب کو مسلسل ہلا کر یکساں رکھتے ہوئے برتن سے اس کی نکاسی مستقل شرح سے کی جاتی ہے۔ ہم چاہتے ہیں کہ ہمیں برتن میں کیمیا کی لحاتی مقدار معلوم ہو۔ درج ذیل مساوات پر مبنی تفرقی مساوات اس عمل کو بیان کرتی ہے۔

$$\text{برتن میں کیمیا کی مقدار کی شرح تبدیلی} = (\text{کیمیا کی شرح آمد}) - (\text{کیمیا کی شرح اخراج}) \tag{۱۴}$$

گر لمحہ t پر برتن میں کیمیا کی مقدار $y(t)$ اور برتن میں مواد کا کل حجم $V(t)$ ہو تب کیمیا کے اخراج کی شرح درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \text{انعکاس کیمیا} &= \frac{y(t)}{V(t)} \cdot (\text{شرح انعکاس مائع}) \\ &= (\text{شرح انعکاس مائع}) \cdot (\text{لمحہ } t \text{ پر برتن میں ارتکاز}) \end{aligned} \tag{۱۵}$$

یوں مساوات ۱۴ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (\text{شرح آمد کیمیا}) - \frac{y(t)}{V(t)} \cdot (\text{شرح انعکاس مائع}) \tag{۱۶}$$

سوال ۷.۷۵۷: ایک حوض میں ابتدائی طور پر 500 لٹر نمکین پانی پایا جاتا ہے جس میں 25 kg نمک حل ہے۔ اس حوض میں $5\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ شرح سے نمکین پانی داخلی ہوتا ہے جس میں $0.4\,\mathrm{kg\,L^{-1}}$ نمک ملا ہوا ہے جبکہ حوض سے نمکین پانی کا انخلا $4\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ ہے۔ حوض میں نمکین پانی کو مسلسل ہلا کر یکساں رکھا جات ہے۔

ا. حوض میں نمک داخل ہونے کی شرح ($\mathrm{kg\,min^{-1}}$) کیا ہے؟

ب. لمحہ t پر حوض میں نمکین پانی کا حجم کتنا ہے؟

ج. لمحہ t پر نمک کس شرح ($\mathrm{kg\,min^{-1}}$) سے حوض سے خارج ہوتا ہے؟

د. مرکب بنانے کے اس عمل کا ابتدائی قیمت مسئلہ لکھیں اور اس کو حل کریں۔

ھ. عمل شروع ہونے کے 25 منٹ بعد حوض میں نمک کا ارتکاز کتنا ہو گا؟

سوال ۷.۷۵۸: تیل صاف سازی کے کارخانہ میں ایک حوض میں $10\,000\ \mathrm{L}$ تیل پایا جاتا ہے جس میں ابتدائی طور پر $50\ \mathrm{kg}$ اضافی مادہ شامل ہے۔ سردی کے موسم کی وجہ سے اس میں $0.4\ \mathrm{kg}$ فی لٹر اضافی مواد کو $200\ \mathrm{L\,min^{-1}}$ شامل کیا جاتا ہے۔ حوض میں تیل کو اچھی طرح ہلا کر یکساں رکھا جاتا ہے۔ حوض سے مرکب کے انعکاس کی شرح $225\ \mathrm{L\,min^{-1}}$ ہے۔ اس عمل کے شروع ہونے کے 20 منٹ بعد حوض میں اضافی مواد کی مقدار معلوم کریں۔

سوال ۷.۷۵۹: ایک حوض میں $500\ \mathrm{L}$ خالص پانی پایا جاتا ہے۔ ایک محلول جس میں $0.1\ \mathrm{kg\,L^{-1}}$ پایا کھاد پایا جاتا ہے کو $5\ \mathrm{L\,min^{-1}}$ شرح سے حوض میں شامل کیا جاتا ہے۔ حوض سے محلول کا انعکاس $15\ \mathrm{L\,min^{-1}}$ ہے۔ حوض میں کھاد کی اعظم مقدار معلوم کریں اور اس مقدار تک پہنچنے کے لیے درکار وقت معلوم کریں۔

سوال ۷.۷۶۰: دفتر کے ایک کمرے میں ابتدائی طور پر $150\ \mathrm{m^3}$ صاف ہوا پائی جاتی ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر قریبی کمرے میں موجود افسران سگریٹ نوشی شروع کرتے ہیں جس کی وجہ سے $4\ \%$ زہریلی کاربن مونو اکسائڈ $0.01\ \mathrm{m^3\,min^{-1}}$ شرح سے اس کمرے میں داخل ہوتی ہے جہاں ایک پنکھا پوری ہوا کو یکساں رکھتا ہے۔ اس کمرے سے ہوا کا انخلا $0.01\ \mathrm{m^3\,min^{-1}}$ ہے۔ اس کمرے میں کب زہریلی گیس $0.01\ \%$ ہو گی؟

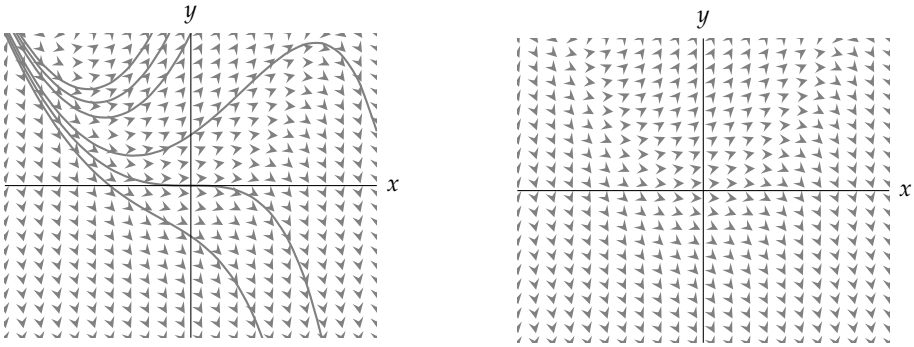
۷.۱۲ یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان

بعض اوقات ہم ابتدائی قیمت مسئلہ $y = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ کا بالکل درست حل معلوم نہیں کر سکتے ہیں یا نہیں کرنا چاہتے ہیں۔ ایسی صورت میں ہم عموماً کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے موزوں وقفہ پر ہر x کے لیے y کی تخمینی قیمت تلاش کر سکتے ہیں۔ ایسے حل کو ہم **اعدادی حل**[۳۸] کہتے ہیں اور اس حل کو حاصل کرنے کے طریقہ کو **اعدادی ترکیب**[۳۹] کہتے ہیں۔ اعدادی تراکیب عموماً بہت کم وقت میں درست نتائج دیتے ہیں اور جہاں بھی تحلیلی حل ناممکن، غیر ضروری یا پیچیدہ ہو، وہاں اعدادی تراکیب کو ترجیح دی جاتی ہے۔ اس حصہ میں ہم ایسے ایک ترکیب پر غور کرتے ہیں جس کو **ترکیب یولر**[۴۰] کہتے ہیں۔

میدان ڈھلوان

ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ تفرقی مساوات $y' = f(x, y)$ پر یہ شرط مسلط کرتی ہے کہ تفرقی مساوات کا حل نقطہ (x_0, y_0) سے گزرے گا اور اس نقطہ ہر حل کا ڈھلوان $f(x_0, y_0)$ ہو گا۔ ہم f کے دائرہ کار میں منتخب نقطوں (x, y) پر $f(x, y)$ ڈھلوان والے قلیل

[۳۸] numericalsolution
[۳۹] numericalmethod
[۴۰] Euler'method



(ا) میدان ڈھلوان (ب) میدان ڈھلوان پر مخصوص منحنی حل۔

شکل ۷.۷۱: تفرقی مساوات $y' = y - x^2$ کے میدان ڈھلوان پر منحنی حل ترسیم کی گئی ہیں۔ کمپیوٹر پر میدان ڈھلوان کو عموماً سمتیات سے ظاہر کیا جاتا ہے اگرچہ ڈھلوان سمتیہ نہیں ہے۔

سیدھے خطوط بنا کر اس ڈھلوان کو تصویری جامہ پہنا سکتے ہیں۔ نقطہ (x, y) سے گزرتے ہوئے حل کا ڈھلوان اس نقطہ پر بنائے گئے قلیل خط کے ڈھلوان کا برابر ہو گا لہٰذا یہ خط اس نقطہ پر حل کا مماس ہو گا۔ ہم ان مماس پر نظر دوڑا کر حل کے رویہ کو جان سکتے ہیں (شکل ۷.۷۱)۔

قلم و کاغذ کے ساتھ میدان ڈھلوان بنانا تھکا دینے والا کام ہے۔ اس کتاب میں تمام مثالوں میں میدان ڈھلوان کمپیوٹر کی مدد سے بنائے گئے۔ آئیں کمپیوٹر کی مدد سے منحنی حل کے حصول پر غور کریں۔

خط بندی کا استعمال

دیے گئے تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ سے ہم منحنی حل $y = y(x)$ کی تخمین درج ذیل خط بندی

$$L(x) = y(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

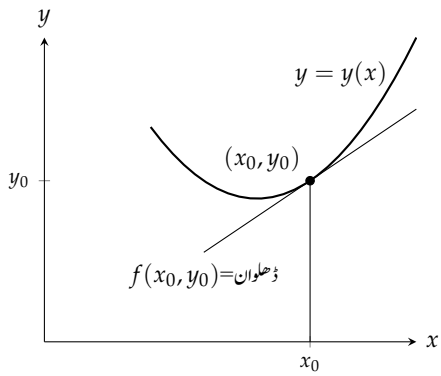
یا

$$L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

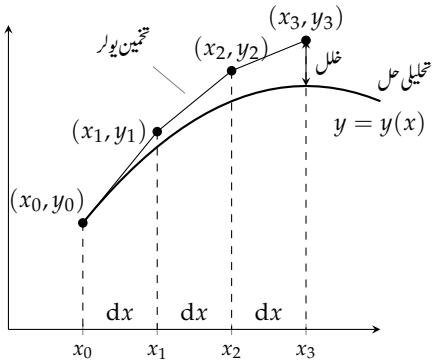
سے کر سکتے ہیں۔ x_0 کی بالکل پڑوس میں تفاعل $L(x)$ اصل حل $y(x)$ کا اچھا تخمین ہو گا (شکل ۷.۷۲)۔ ترکیب یولر میں اس طرح کے خط بندیوں کو آپس میں جوڑ کر زیادہ لمبے فاصلہ کے لیے حل تلاش کیا جاتا ہے۔ اب اس ترکیب پر غور کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ نقطہ (x_0, y_0) منحنی حل پر پایا جاتا ہے۔ فرض کریں ہم غیر تابع متغیر کی ایک نئی قیمت $x_0 = x_0 + \mathrm{d}x$ منتخب کرتے ہیں۔ اگر بڑھوتری $\mathrm{d}x$ بہت کم ہو تب

$$y_1 = L(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x$$



شکل ۷.۷۲: خط مماس کی مساوات $y = L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$ ہے۔



شکل ۷.۷۳: ترکیب یولر کی مدد سے ابتدائی قیمت مسئلہ $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ کے ابتدائی تین نقطوں کا حصول۔ ہر قدم پر مجموعی خلل بڑھتا ہے۔

اصل حل $y = y(x_1)$ کا اچھا تخمین ہوگا۔ یوں نقطہ (x_0, y_0) سے، جو ٹھیک منحنی حل پر پایا جاتا ہے، ہم نقطہ (x_1, y_1) حاصل کر پائیں ہیں جو منحنی حل پر نقطہ $(x_1, y(x_1))$ کے بہت قریب ہوگا۔

نقطہ (x_1, y_1) اور ڈھلوان $f(x_1, y_1)$ لیتے ہوئے ہم دوسرا قدم لیتے ہیں۔ ہم $x_2 = x_1 + \mathrm{d}x$ لے کر

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\,\mathrm{d}x$$

سے، منحنی حل $y = y(x)$ کے ساتھ، دوسرا تخمینی نقطہ (x_2, y_2) حاصل کرتے ہیں (شکل ۷.۷۳)۔ اسی طرح چلتے ہوئے تیسرے قدم پر ہم نقطہ (x_2, y_2) اور ڈھلوان $f(x_2, y_2)$ سے

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\,\mathrm{d}x$$

حاصل کرتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔

مثال ۷.۹۰: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے لیے ترکیب یولر کی مدد سے ابتدائی تین تخمین y_1 ، y_2 اور y_3 حاصل کریں۔

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

ابتدا $x_0 = 0$ سے کریں اور $\mathrm{d}x = 0.1$ لیں۔

حل

قدم اول:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x \\ &= y_0 + (1 + y_0)\,\mathrm{d}x \\ &= 1 + (1 + 1)(0.1) = 1.2 \end{aligned}$$

۱۳۵۱۰ **قدم دوم:**

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\,\mathrm{d}x \\ &= y_1 + (1 + y_1)\,\mathrm{d}x \\ &= 1.2 + (1 + 1.2)(0.1) = 1.42 \end{aligned}$$

۱۳۵۱۱ **قدم سوم:**

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)\,\mathrm{d}x \\ &= y_2 + (1 + y_2)\,\mathrm{d}x \\ &= 1.42 + (1 + 1.42)(0.1) = 1.662 \end{aligned}$$

۱۳۵۱۲ □

۱۳۵۱۳ **ترکیب یولر**

۱۳۵۱۴ ترکیب یولر سے ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

۱۳۵۱۵ کے حل کی تخمینی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اگر ہم غیر تابع متغیر کے منتخب کردہ قیمتوں کے بیچ یکساں فاصلہ رکھیں اور n عدد ایسے نقطے منتخب کریں تب درج ذیل
۱۳۵۱۶ ہوں گے۔

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \mathrm{d}x \\ x_2 &= x_1 + \mathrm{d}x \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{۱}$$

۱۳۵۱۷ اس کے بعد ہم متواتر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x \\ y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\,\mathrm{d}x \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{۲}$$

۱۳۵۱۸ ہم قدموں کی تعداد n جتنی چاہیں رکھ سکتے ہیں، البتہ، n کو بہت بڑا رکھنے سے نتائج میں خلل جمع ہو گا۔

جدول ۷.۱۴: تحلیل حل اور ترکیب یولر سے حاصل تخمینی حل کا موازنہ (مثال ۷.۹۱)

x	تخمینی y	تحلیلی y	خلل = تخمینی y − تحلیلی y
0.0	1.0000	1.0000	0.0000
0.1	1.2000	1.2103	0.0103
0.2	1.4200	1.4428	0.0228
0.3	1.6620	1.6997	0.0377
0.4	1.9282	1.9836	0.0554
0.5	2.2210	2.2974	0.0764
0.6	2.5431	2.6442	0.1011
0.7	2.8974	3.0275	0.1301
0.8	3.2872	3.4511	0.1639
0.9	3.7159	3.9192	0.2033
1.0	4.1875	4.4366	0.2491

مثال ۷.۹۱: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ کے لیے وقفہ $0 \leq x \leq 1$ پر ترکیب یولر کی درستگی پر غور کریں۔

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

$x_0 = 0$ سے شروع کریں اور $\mathrm{d}x = 0.1$ لیں۔

حل

اس مسئلے کا بالکل درست تحلیلی حل $y = 2e^x - 1$ ہے۔ جدول ۷.۱۴ میں، مساوات ۱۱ اور مساوات ۱۲ استعمال کرتے ہوئے، ترکیب یولر سے حاصل 4 اعشاریہ مقامات تک درست تخمینی نتائج کا تحلیل حل کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔ دس قدم بعد $x = 1$ تک پہنچ کر ترکیب یولر سے حاصل تخمینی حل میں 5.6 % خلل پایا جاتا ہے۔ □

مثال ۷.۹۲: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ کے لیے وقفہ $0 \leq x \leq 1$ پر ترکیب یولر کی درستگی پر غور کریں۔

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

شروع $x_0 = 0$ سے کریں اور $\mathrm{d}x = 0.05$ لیں۔

حل

جدول ۷.۱۵ میں نتائج اور تحلیلی بالکل ٹھیک حل کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قدموں کی تعداد 10 سے 20 کرنے سے خلل کم ہوتا ہے۔ اس مرتبہ $x = 1$ پر صرف 2.9 % خلل پایا جاتا ہے۔ □

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ترکیب یولر میں قدموں کی تعداد مزید بڑھا کر اس سے بھی بہتر نتیجہ حاصل ہو گا۔ حقیقت میں ایسا کرنے سے نا صرف کمپیوٹر کو حل حاصل کرنے میں زیادہ وقت درکار ہو گا بلکہ کمپیوٹر میں ہندسوں کی تعداد پر پابندی کی وجہ سے پیداپور وپور خلل بڑھتا ہے۔

جدول ۷.۱۵: ترکیب یولر میں قدموں کی تعداد بڑھانے سے خلل میں کمی پیدا ہوتی ہے (مثال ۷.۹۲)۔

x	y تخمینی	y تحلیلی	خلل = y تخمینی − y تحلیلی
0.00	1.0000	1.0000	0.0000
0.05	1.1000	1.1025	0.0025
0.10	1.2050	1.2103	0.0053
0.15	1.3153	1.3237	0.0084
0.20	1.4310	1.4428	0.0118
0.25	1.5526	1.5681	0.0155
0.30	1.6802	1.6997	0.0195
0.35	1.8142	1.8381	0.0239
0.40	1.9549	1.9836	0.0287
0.45	2.1027	2.1366	0.0339
0.50	2.2578	2.2974	0.0396
0.55	2.4207	2.4665	0.0458
0.60	2.5917	2.6442	0.0525
0.65	2.7713	2.8311	0.0598
0.70	2.9599	3.0275	0.0676
0.75	3.1579	3.2340	0.0761
0.80	3.3657	3.4511	0.0854
0.85	3.5840	3.6793	0.0953
0.90	3.8132	3.9192	0.1060
0.95	4.0539	4.1714	0.1175
1.00	4.3066	4.4366	0.1300

خلل اور اس کو کم کرنے کے طریقوں پر یہاں غور نہیں کیا جائے گا۔ انہیں سمجھنے کے لیے مزید اعلیٰ درجے کی نصاب درکار ہو گی۔ ترکیب یولر سے زیادہ بہتر اعدادی تراکیب پائے جاتے ہیں جنہیں تفرقی مساوات پڑھنے کے دوران سیکھیں گے۔ اعدادی ترکیب میں قدموں کی تعداد اور خلل کے تعلق پر غور کرنے کے لیے آپ کو سوالات میں موقع ملے گا۔

سوالات

تخمین یولر

سوال ۷.۷۶۱ تا سوال ۷.۷۶۶ میں ترکیب یولر سے دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلہ کے اولین تین تخمینی قیمتیں تلاش کریں۔ دیا گیا قدم استعمال کریں۔ مسئلے کا تحلیلی حل تلاش کریں اور اپنے تخمین کی درستگی پر غور کریں۔ اپنے نتائج کو 4 اعشاریہ مقامات تک درست رکھیں۔

سوال ۷.۷۶۱: $y' = 1 - \frac{y}{x}, \quad y(2) = -1, \quad \mathrm{d}x = 0.5$

سوال ۷.۷۶۲: $y' = x(1-y), \quad y(1) = 0, \quad \mathrm{d}x = 0.2$

سوال ۷.۷۶۳: $y' = 2xy + 2y, \quad y(0) = 3, \quad \mathrm{d}x = 0.2$

سوال ۷.۷۶۴: $y' = y^2(1+2x), \quad y(-1) = 1, \quad \mathrm{d}x = 0.5$

سوال ۷.۷۶۵: $y' = 2xe^{x^2}, \quad y(0) = 2, \quad \mathrm{d}x = 0.1$

سوال ۷.۷۶۶: $y' = y + e^x - 2, \quad y(0) = 2, \quad \mathrm{d}x = 0.5$

سوال ۷.۷۶۷: ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے $\mathrm{d}x = 0.2$ لے کر $y' = y,\ y(0) = 1$ کے لیے $y(1)$ تلاش کریں۔ $y(1)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت کتنی ہے؟

سوال ۷.۷۶۸: ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے $\mathrm{d}x = 0.2$ لے کر $y' = \frac{y}{x},\ y(1) = 2$ کے لیے $y(2)$ تلاش کریں۔ $y(2)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت کتنی ہے؟

سوال ۷.۷۶۹: ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے $\mathrm{d}x = 0.5$ لے کر $y' = \frac{y^2}{\sqrt{x}},\ y(1) = -1$ کے لیے $y(5)$ تلاش کریں۔ $y(5)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت کتنی ہے؟

سوال ۷.۷۷۰: ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ لے کر $y' = y - e^{2x},\ y(0) = 1$ کے لیے $y(2)$ تلاش کریں۔ $y(2)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت کتنی ہے؟

میدان ڈھلوان

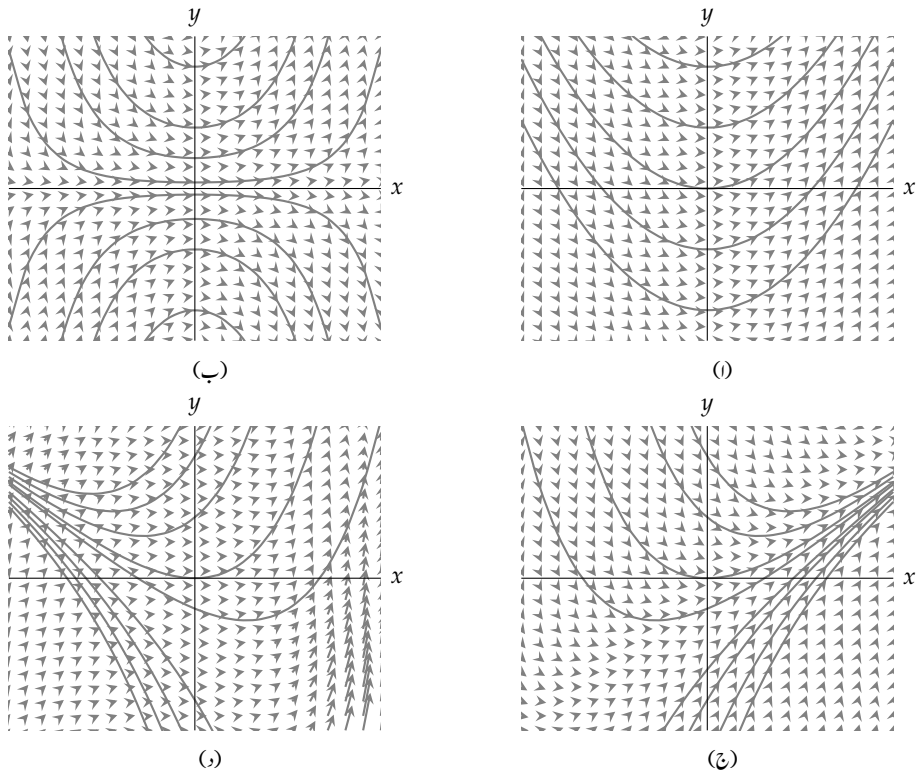
سوال ۷.۷۷۱ تا سوال ۷.۷۷۴ میں دیے گئے تفرقی مساوات کے منحنی حل اور میدان ڈھلوان کی نشاندہی شکل ۷.۷۴ میں کریں۔

سوال ۷.۷۷۱: $y' = xy$

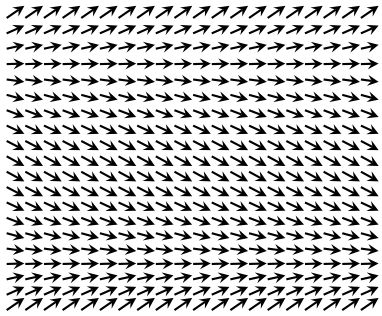
سوال ۷.۷۷۲: $y' = x + y$

سوال ۷.۷۷۳: $y' = x$

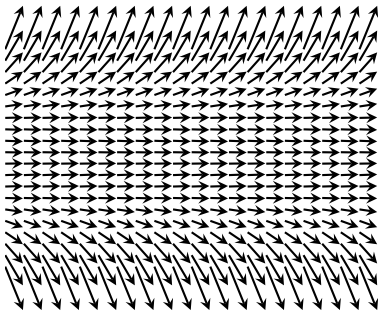
سوال ۷.۷۷۴: $y' = x - y$



شکل ۷.۷۴: میدان ڈھلوان برائے سوال ۷.۷۷۱ تا سوال ۷.۷۷۴



(ا)



(ب)

شکل ۷.۷۵: میدان ڈھلوان برائے سوال ۷.۷۷۵ اور سوال ۷.۷۷۶

۱۳۵۵۹ سوال ۷.۷۷۵ میں شکل ۷.۷۵-ا اور سوال ۷.۷۷۶ میں شکل ۷.۷۵-ب کے میدان ڈھلوان کی نقل اتار کر اس پر منحنی حل کا خاکہ بنائیں۔

۱۳۵۶۰ سوال ۷.۷۷۵: $y' = (y+2)(y-2)$

۱۳۵۶۱ سوال ۷.۷۷۶: $y' = y(y+1)(y-1)$

۱۳۵۶۲

۱۳۵۶۳ سوال ۷.۷۷۷ تا سوال ۷.۷۸۰ میں میدان ڈھلوان کا کچھ حصہ کھینچ کر دیے گئے نقطہ سے گزرتی ہوئی منحنی حل کا خاکہ بنائیں۔

۱۳۵۶۴ سوال ۷.۷۷۷: $y' = y$ اور نقاط (ا) $(0,1)$، (ب) $(0,2)$، (ج) $(0,-1)$

۱۳۵۶۵ سوال ۷.۷۷۸: $y' = 2(y-4)$ اور نقاط (ا) $(0,1)$، (ب) $(0,4)$، (ج) $(0,5)$

۱۳۵۶۶ سوال ۷.۷۷۹: $y' = y(2-y)$ اور نقاط (ا) $(0,1/2)$، (ب) $(0,3/2)$، (ج) $(0,2)$، (د) $(0,3)$

۱۳۵۶۷ سوال ۷.۷۸۰: $y' = y^2$ اور نقاط (ا) $(0,1)$، (ب) $(0,2)$، (ج) $(0,-1)$، (د) $(0,0)$

۱۳۵۶۸ **کمپیوٹر کا استعمال**

۱۳۵۶۹ سوال ۷.۷۸۱ تا سوال ۷.۷۸۴ میں دیے گئے تفرقی مساوات پر درج ذیل اقدام کرتے ہوئے ترسیمی غور کریں۔

۱۳۵۷۰ ا. دیے گئے تفرقی مساوات کا میدان ڈھلوان مستوی xy میں کھینچیں۔

۱۳۵۷۱ ب. تفرقی مساوات کا عمومی حل کمپیوٹر کے کسی ریاضی کے پروگرام کی مدد سے حاصل کریں۔

۱۳۵۷۲ ج. اختیاری مستقل $C = -2, -1, 0, 1, 2$ لیتے ہوئے منحنی حل کو میدان ڈھلوان کے اوپر ترسیم کریں۔

۱۳۵۷۳ د. دیے گئے مسئلے کا تحلیلی حل وقفہ $[0, b]$ پر تلاش کر کے ترسیم کریں۔

۱۳۵۷۴ ھ. دیے گئے وقفہ کو 4 ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے یولر تخمین کو بھی میدان ڈھلوان کے اوپر ترسیم کریں۔

۱۳۵۷۵ و. جزو-ہ کو 8 ، 16 اور 32 ذیلی وقفوں کے لیے دوبارہ حل کر کے جزو-ہ کے نتائج کے اوپر ترسیم کریں۔

ز. نقطہ $x = b$ پر چاروں یولر تخمین میں خلل تلاش کریں۔ نتائج کی بہتری پر تبصرہ کریں۔

سوال ۷.۷۸۱: $y' = x + y,\ y(0) = -\frac{7}{10};\ -4 \le x \le 4,\ -4 \le y \le 4;\ b = 1$

سوال ۷.۷۸۲: $y' = -\frac{x}{y},\ y(0) = 2;\ -3 \le x \le 3,\ -3 \le y \le 3;\ b = 2$

سوال ۷.۷۸۳: $y' = y(2 - y),\ y(0) = \frac{1}{2};\ 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 3;\ b = 3$

سوال ۷.۷۸۴: $y' = (\sin x)(\sin y),\ y(0) = 2;\ -6 \le x \le 6,\ -6 \le y \le 6;\ b = \frac{3\pi}{2}$

سوال ۷.۷۸۵ اور سوال ۷.۷۸۶ کا بنیادی تفاعل کی صورت میں صریح حل نہیں پایا جاتا ہے۔ ان تفرقی مساوات پر ترسیمی غور کریں۔ مذکورہ بالا جزو-الف تا جزو-ز میں اعظم کرنے کی کوشش کریں۔

سوال ۷.۷۸۵: $y' = \cos(2x - y),\ y(0) = 2;\ 0 \le x \le 5,\ 0 \le y \le 5;\ y(2)$

سوال ۷.۷۸۶: $y' = y(\frac{1}{2} - \ln y),\ y(0) = \frac{1}{3},\ 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 3;\ y(3)$

سوال ۷.۷۸۷: ابتدائی قیمت مسئلہ $y' + y = f(x),\ y(0) = 0$ کا حل کمپیوٹر کی مدد سے حاصل کریں جہاں $f(x)$ درج ذیل ہے۔

(ا) $2x$، (ب) $\sin 2x$، (ج) $3e^{x/2}$، (د) $2e^{-x/2}\cos 2x$

تمام حل کا ایک دوسرے کے ساتھ موازنہ کرنے کی خاطر انہیں وقفہ $-2 \le x \le 6$ پر ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال ۷.۷۸۸: (ا) درج ذیل تفرقی مساوات کے میدان ڈھلوان کا خاکہ وقفہ $-3 \le x \le 3,\ -3 \le y \le 3$ کے لیے کھینچیں۔

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$$

(ب) متغیرات کی علیحدگی کے بعد کمپیوٹر کے ریاضی پروگرام کی مدد سے مکمل کرتے ہوئے خفی حل تلاش کریں۔ (ج) جزو-ب کے نتیجہ کو مستقل $C = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$ کے لیے ترسیم کریں۔ (د) اس حل کو ترسیم کریں جو ابتدائی شرط $y(0) = -1$ کو مطمئن کرتا ہو۔

باب ۸

تکمل کے طریقے

ہم نے دیکھا کہ چیزوں کی ناپ اور روزمرہ زندگی کے اعمال کی نمونہ کشی تکمل کو جنم دیتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ ضد تفرق سے تکمل کو حل کیا جا سکتا ہے۔ کسی عمل کی نمونہ کشی میں زیادہ گہرائی تک جانے سے زیادہ پیچیدہ تکمل حاصل ہوتا ہے۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ اس طرح کے پیچیدہ تکمل کو کس طرح سادہ صورت دی جا سکتی ہے جن کے ساتھ کام کرنا آسان ہو۔ اس باب میں ہم انجانے تکمل سے جانے پہچانے تکمل کا حصول سیکھیں گے جنہیں جدول سے دیکھا جا سکتا ہے یا جس کو کمپیوٹر سے حل کیا جا سکتا ہے۔

۸.۱ تکمل کے بنیادی کلیات

ہم نے حصہ ۵.۱ میں دیکھا کہ غیر قطعی تکمل کو حل کرنے کے لیے اس کے ضد تفرق کے ساتھ مستقل جمع کرنا ہو گا۔ جدول ۸.۱ میں ان تکمل کی بنیادی روپ درج کی گئی ہے جنہیں اب تک ہم حل کرتے آرہے ہیں۔ زیادہ تکملات کا جدول کتاب کی آخر میں پیش کیا گیا ہے جس پر حصہ ۸.۵ میں غور کیا جائے گا۔

الجبرائی طریقہ

ہمیں عموماً تکمل کو جانی پہچانی معیاری روپ میں لکھنا ہو گا۔

مثال ۸.۱: سادہ روپ حاصل کرنے کا بدل

تکمل $\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

جدول ۸.۱: تکمل کے بنیادی کلیات

شمار	کلیہ
1	$\int \mathrm{d}u = u + C$
2	$\int k\,\mathrm{d}u = ku + C \quad (k$ عدد ہے$)$
3	$\int (\mathrm{d}u + \mathrm{d}v) = \int \mathrm{d}u + \int \mathrm{d}v$
4	$\int u^n\,\mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$
5	$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$
6	$\int \sin u\,\mathrm{d}u = -\cos u + C$
7	$\int \cos u\,\mathrm{d}u = \sin u + C$
8	$\int \sec^2 u\,\mathrm{d}u = \tan u + C$
9	$\int \csc^2 u\,\mathrm{d}u = -\cot u + C$
10	$\int \sec u \tan u\,\mathrm{d}u = \sec u + C$
11	$\int \csc u \cot u\,\mathrm{d}u = -\csc u + C$
12	$\int \tan u\,\mathrm{d}u = -\ln\lvert\cos u\rvert + C = \ln\lvert\sec u\rvert + C$
13	$\int \cot u\,\mathrm{d}u = \ln\lvert\sin u\rvert + C = -\ln\lvert\csc u\rvert + C$
14	$\int e^u\,\mathrm{d}u = e^u + C$
15	$\int a^u\,\mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$
16	$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
17	$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C$
18	$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left\lvert\frac{u}{a}\right\rvert + C$

۱۳۶۰۶ **حل**

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} && u = x^2-9x+1\\
&= \int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u\\
&= \frac{u^{(-1/2)+1}}{(-1/2)+1} + C && n = -1/2 \text{ جدول ۸.۱ کلیہ 4 میں}\\
&= 2u^{1/2} + C\\
&= 2\sqrt{x^2-9x+1} + C
\end{aligned}$$

۱۳۶۰۷ □

۱۳۶۰۸ مثال ۸.۲: تکمیل مربع

۱۳۶۰۹ تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8x-x^2}}$ حل کریں۔

۱۳۶۱۰ **حل**

۱۳۶۱۱ ہم مربع مکمل کرتے ہوئے زیر جذر کو لکھتے ہیں:

$$\begin{aligned}
8x - x^2 &= -(x^2-8x) = -(x^2-8x+16-16)\\
&= -(x^2-8x+16)+16 = 16-(x-4)^2
\end{aligned}$$

۱۳۶۱۲

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{8x-x^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{16-(x-4)^2}}\\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} && a=4, u=(x-4)\\
&= \sin^{-1}\left(\tfrac{u}{a}\right) + C && \text{جدول ۸.۱ کلیہ 16}\\
&= \sin^{-1}\left(\tfrac{x-4}{4}\right) + C
\end{aligned}$$

۱۳۶۱۳ □

۱۳۶۱۴ مثال ۸.۳: طاقت پھیلا کر تماثل کا استعمال

۱۳۶۱۵ تکمل $\int (\sec x \tan x)^2\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

۱۳۶۱۶ **حل**

۱۳۶۱۷ ہم متکمل کو پھیلاتے ہیں۔

$$(\sec x + \tan x)^2 = \sec^2 x + 2\sec x \tan x + \tan^2 x$$

۱۲۳۱۸ بائیں ہاتھ پہلے دو اجزاء کا تکمل ہم جانتے ہیں البتہ $\tan^2 x$ کا کچھ کرنا ہوگا۔ ہم درج ذیل تماثل کے ذریعہ اس کو جانے پہچانے روپ میں تبدیل کرتے ہیں۔

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \Longrightarrow \quad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

۱۲۳۱۹ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}\int (\sec x + \tan x)^2 \,\mathrm{d}x &= \int (\sec^2 x + 2\sec x \tan x + \sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int \sec^2 \mathrm{d}x + 2\int \sec x \tan x \,\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x \\ &= 2\tan x + 2\sec x - x + C\end{aligned}$$

۱۲۳۲۰ □

۱۲۳۲۱ مثال ۸.۴: جذر سے چھٹکارا

۱۲۳۲۲ تکمل $\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 4x}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

۱۲۳۲۳ **حل**

۱۲۳۲۴ ہم تماثل

$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \quad \Longrightarrow \; 1+\cos 2\theta = 2\cos^2\theta$$

۱۲۳۲۵ میں $\theta = 2x$ پر کر کے

$$1+\cos 4x = 2\cos^2 2x$$

۱۲۳۲۶ لکھتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہوگا جہاں تیسرے قدم پر وقفہ $[0, \frac{\pi}{4}]$ پر $\cos 2x \geq 0$ کی وجہ سے $|\cos 2x| = \cos 2x$ ہوگا۔

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/4} \sqrt{1+\cos 4x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/4} \sqrt{2}\sqrt{\cos^2 2x}\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} |\cos 2x|\,\mathrm{d}x \qquad\qquad \sqrt{u^2} = |u| \\ &= \sqrt{2}\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{2}\,\frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi/4} \\ &= \sqrt{2}\Big[\frac{1}{2} - 0\Big] = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

۱۲۳۲۷ □

مثال ۸.۵: غیر مناسب کسر کی مناسب کسر میں تبدیلی

تکمل $\int \frac{3x^2-7x}{3x+2}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل

متکمل غیر مناسب کسر (نسب نما کی طاقت، شمار کنندہ کی طاقت سے زیادہ یا اس کے برابر ہے) ہے۔ اس کا تکمل لینے سے پہلے ہم پہلے تقسیم کر کے حاصل تقسیم اور باقی حاصل کرتے ہیں جو مناسب کسر ہو گا:

$$\begin{array}{r|l} & \quad x-3 \\ \hline 3x+2 & 3x^2-7x \\ & -3x^2-2x \\ \hline & \quad -9x \\ & \quad\quad 9x+6 \\ \hline & \quad\quad\quad 6 \end{array}$$

یوں

$$\frac{3x^2-7x}{3x+2} = x-3+\frac{6}{3x+2}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\int \frac{3x^2-7x}{3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \left(x-3+\frac{6}{3x+2}\right)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}-3x+2\ln|3x+2|+C$$

□

یہ ضروری نہیں ہے کہ غیر مناسب کسر کو بذریعہ تقسیم مناسب کسر میں تبدیل کرنے سے ہمیں ایسا تکمل حاصل ہو جسے ہم سیدھا تکمل کر سکیں۔ ایسی صورت پر حصہ ۸.۳ میں غور کیا جائے گا۔

مثال ۸.۶: ایک کسر کی علیحدگی

تکمل $\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل

ہم متکمل کو دو علیحدہ کسر لکھتے ہیں۔

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 3\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} + 2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

۱۲۶۴۳ بائیں ہاتھ پہلے نئے تکمل میں ہم $u = 1 - x^2$ ، $\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$ اور $x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{d}u$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
3\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= 3\int \frac{(-1/2)\,\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = -\frac{3}{2}\int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u \\
&= -\frac{3}{2}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + C_1 = -3\sqrt{1-x^2} + C_1
\end{aligned}$$

۱۲۶۴۴ دوسرا نیا تکمل معیاری روپ میں ہے لہٰذا

$$2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sin^{-1} x + C_2$$

۱۲۶۴۵ ہوگا۔ یوں پورا تکمل درج ذیل ہوگا جہاں $C_1 + C_2 = C$ لکھا گیا ہے۔

$$\int \frac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = -3\sqrt{1-x^2} + 2\sin^{-1} x + C$$

۱۲۶۴۶ □

۱۲۶۴۷ مثال ۸.۷: اکائی (1) کی ایک روپ سے ضرب

۱۲۶۴۸ تکمل $\int \sec x\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

۱۲۶۴۹ **حل**

$$\begin{aligned}
\int \sec x\,\mathrm{d}x &= \int (\sec x)(1)\,\mathrm{d}x \\
&= \int \sec x \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{u} \qquad\qquad u = \tan x + \sec x \\
&= \ln|u| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C
\end{aligned}$$

۱۲۶۵۰ □

۱۲۶۵۱ ہم مثال ۸.۷ کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے سیکنٹ اور ٹینجنٹ کی جگہ کوسیکنٹ اور کوٹینجنٹ لیتے ہوئے کوسیکنٹ کے تکمل کا کلیہ معلوم کر سکتے ہیں (سوال

۱۲۶۵۲ ۸.۹۵)۔

جدول ۸.۲: سیکنٹ اور کوسیکنٹ کے کلیات تکمل

کلیہ	شمار
$\int \sec u \, \mathrm{d}u = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$	1
$\int \csc u \, \mathrm{d}u = -\ln\lvert\csc u + \cot u\rvert + C$	2

۱۲۶۵۳ تکمل کو بنیادی کلیہ کی روپ میں لکھنے کا طریقے

طریقہ	مثال
سادہ روپ بذریعہ بدل	$\dfrac{2x-9}{\sqrt{x^2-9x+1}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$
تکمیل مربع	$\sqrt{8x-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{16-(x-4)^2}$
تکونیاتی تماثل	$(\sec x+\tan x)^2 = \sec^2 x + 2\sec x\tan x + \tan^2 x$
	$= \sec^2 x + 2\sec x\tan x + (\sec^2 x - 1)$
	$= 2\sec^2 x + 2\sec x\tan x - 1$
جذر سے چھٹکارا	$\sqrt{1+\cos 4x} = \sqrt{2\cos^2 2x} = \sqrt{2}\lvert\cos 2x\rvert$
غیر مناسب سے مناسب کسر کا حصول	$\dfrac{3x^2-7x}{3x+2} = x-3+\dfrac{6}{3x+2}$
کسر کی علیحدگی	$\dfrac{3x+2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{3x}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$
اکائی (1) کی ایک روپ سے ضرب	$\sec x = \sec x \cdot \dfrac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}$
	$= \dfrac{\sec^2 x + \sec x\tan x}{\sec x+\tan x}$

۱۲۶۵۴ سوالات

۱۲۶۵۵ بنیادی بدل

۱۲۶۵۶ سوال ۸.۱ تا سوال ۸.۳۶ میں بدل کے استعمال سے معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

۱۲۶۵۷ سوال ۸.۱: $\int \frac{16x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{8x^2+1}}$

۱۲۶۵۸ سوال ۸.۲: $\int \frac{3\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+3\sin x}}$

۱۲۶۵۹ سوال ۸.۳: $\int 3\sqrt{\sin v}\cos v\,\mathrm{d}v$

۱۲۶۶۰ سوال ۸.۴: $\int \cot^3 y \csc^2 y\,\mathrm{d}y$

۱۲۶۶۱ سوال ۸.۵: $\int_0^1 \frac{16x\,\mathrm{d}x}{8x^2+2}$

۱۲۶۶۲ سوال ۸.۶: $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec^2 z}{\tan z}\,\mathrm{d}z$

۱۲۶۶۳ سوال ۸.۷: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$

۱۲۶۶۴ سوال ۸.۸: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\sqrt{x}}$

۱۲۶۶۵ سوال ۸.۹: $\int \cot(3-7x)\,\mathrm{d}x$

۱۲۶۶۶ سوال ۸.۱۰: $\int \csc(\pi x-1)\,\mathrm{d}x$

۱۲۶۶۷ سوال ۸.۱۱: $\int e^\theta \csc(e^\theta+1)\,\mathrm{d}\theta$

۱۲۶۶۸ سوال ۸.۱۲: $\int \frac{\cot(3+\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۲۶۶۹ سوال ۸.۱۳: $\int \sec\frac{t}{3}\,\mathrm{d}t$

۱۲۶۷۰ سوال ۸.۱۴: $\int x\sec(x^2-5)\,\mathrm{d}x$

۱۲۶۷۱ سوال ۸.۱۵: $\int \csc(s-\pi)\,\mathrm{d}s$

۱۲۶۷۲ سوال ۸.۱۶: $\int \frac{1}{\theta^2}\csc\frac{1}{\theta}\,\mathrm{d}\theta$

۱۲۶۷۳ سوال ۸.۱۷: $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$

۱۲۶۷۴ سوال ۸.۱۸: $\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(y)e^{\cos y}\,\mathrm{d}y$

۱۲۶۷۵ سوال ۸.۱۹: $\int e^{\tan v}\sec^2 v\,\mathrm{d}v$

۱۲۶۷۶ سوال ۸.۲۰: $\int \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

۱۲۶۷۷ سوال ۸.۲۱: $\int 3^{x+1}\,\mathrm{d}x$

۱۲۶۷۸ سوال ۸.۲۲: $\int \frac{2^{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۲۶۷۹ سوال ۸.۲۳: $\int \frac{2^{\sqrt{w}}}{2\sqrt{w}}\,\mathrm{d}w$

۱۲۶۸۰ سوال ۸.۲۴: $\int 10^{2\theta}\,\mathrm{d}\theta$

۱۲۶۸۱ سوال ۸.۲۵: $\int \frac{9\,\mathrm{d}u}{1+9u^2}$

۱۲۶۸۲ سوال ۸.۲۶: $\int \frac{4\,\mathrm{d}x}{1+(2x+1)^2}$

۱۲۶۸۳ سوال ۸.۲۷: $\int_0^{1/6} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-9x^2}}$

۱۲۶۸۴ سوال ۸.۲۸: $\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4-t^2}}$

۱۲۶۸۵ سوال ۸.۲۹: $\int \frac{2s\,\mathrm{d}s}{\sqrt{1-s^4}}$

۱۲۶۸۶ سوال ۸.۳۰: $\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{1-4\ln^2 x}}$

۱۲۶۸۷ سوال ۸.۳۱: $\int \frac{6\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{25x^2-1}}$

۱۲۶۸۸ سوال ۸.۳۲: $\int \frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{r^2-9}}$

۱۲۶۸۹ سوال ۸.۳۳: $\int \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$

۱۲۶۹۰ سوال ۸.۳۴: $\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{e^{2y}-1}}$

۱۲۶۹۱ سوال ۸.۳۵: $\int_1^{e^{\pi/3}} \frac{\mathrm{d}x}{x\cos(\ln x)}$

۱۲۶۹۲ سوال ۸.۳۶: $\int \frac{\ln x\,\mathrm{d}x}{x+4x\ln^2 x}$

۱۲۶۹۳ **تکمیل مربع**

۱۲۶۹۴ سوال ۸.۳۷ تا سوال ۸.۴۲ میں مربع مکمل کر کے اور بدل استعمال کرتے ہوئے معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

۱۲۶۹۵ سوال ۸.۳۷: $\int_1^{2} \frac{8\,\mathrm{d}x}{x^2-2x+2}$

۱۲۶۹۶ سوال ۸.۳۸: $\int_2^{4} \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2-6x+10}$

۱۲۶۹۷ سوال ۸.۳۹: $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{-t^2+4t-3}}$

۱۲۶۹۸ سوال ۸.۴۰: $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2\theta-\theta^2}}$

۱۲۶۹۹ سوال ۸.۴۱: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

۱۲۷۰۰ سوال ۸.۴۲: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

۱۲۷۰۱ **تکونیاتی تماثل**

۱۲۷۰۲ سوال ۸.۴۳ تا سوال ۸.۴۶ میں تکونیاتی تماثل اور بدل استعمال کرتے ہوئے معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

۱۲۷۰۳ سوال ۸.۴۳: $\int (\sec x + \cot x)^2\,\mathrm{d}x$

۱۲۷۰۴ سوال ۸.۴۴: $\int (\csc x - \tan x)^2\,\mathrm{d}x$

۱۲۷۰۵ سوال ۸.۴۵: $\int \csc x \sin 3x \, dx$

۱۲۷۰۶ سوال ۸.۴۶: $\int (\sin 3x \cos 2x - \cos 3x \sin 2x) \, dx$

۱۲۷۰۷ **غیر مناسب کسر**

۱۲۷۰۸ سوال ۸.۴۷ تا سوال ۸.۵۲ میں غیر مناسب کسر سے مناسب کسر کے حصول اور بدل کے ذریعہ معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

۱۲۷۰۹ سوال ۸.۴۷: $\int \frac{x}{x+1} \, dx$

۱۲۷۱۰ سوال ۸.۴۸: $\int \frac{x^2}{x^2+1} \, dx$

۱۲۷۱۱ سوال ۸.۴۹: $\int_{\sqrt{2}}^{3} \frac{2x^3}{x^2-1} \, dx$

۱۲۷۱۲ سوال ۸.۵۰: $\int_{-1}^{3} \frac{4x^2-7}{2x+3} \, dx$

۱۲۷۱۳ سوال ۸.۵۱: $\int \frac{4t^3-t^2+16t}{t^2+4} \, dt$

۱۲۷۱۴ سوال ۸.۵۲: $\int \frac{2\theta^3-7\theta^2+7\theta}{2\theta-5} \, d\theta$

۱۲۷۱۵ **کسر کی علیحدگی**

۱۲۷۱۶ سوال ۸.۵۳ تا سوال ۸.۵۶ میں کسر علیحدہ کر کے بدل کے ذریعہ معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

۱۲۷۱۷ سوال ۸.۵۳: $\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

۱۲۷۱۸ سوال ۸.۵۴: $\int \frac{x+2\sqrt{x-1}}{2x\sqrt{x-1}} \, dx$

۱۲۷۱۹ سوال ۸.۵۵: $\int_{0}^{\pi/4} \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} \, dx$

۱۲۷۲۰ سوال ۸.۵۶: $\int_{0}^{1/2} \frac{2-8x}{1+4x^2} \, dx$

۱۲۷۲۱ **اکائی (1) کی ایک روپ سے ضرب**

۱۲۷۲۲ سوال ۸.۵۷ تا سوال ۸.۶۲ میں اکائی کی ایک روپ سے ضرب اور بدل کے ذریعہ معیاری روپ حاصل کر کے تکمل حل کریں۔

۱۲۷۲۳ سوال ۸.۵۷: $\int \frac{1}{1+\sin x} \, dx$

۱۲۷۲۴ سوال ۸.۵۸: $\int \frac{1}{1+\cos x} \, dx$

۱۲۷۲۵ سوال ۸.۵۹: $\int \frac{1}{\sec\theta+\tan\theta} \, d\theta$

۱۲۷۲۶ سوال ۸.۶۰: $\int \frac{1}{\csc\theta+\cot\theta} \, d\theta$

۱۲۷۲۷ سوال ۸.۶۱: $\int \frac{1}{1-\sec x} \, dx$

۱۲۷۲۸ سوال ۸.۶۲: $\int \frac{1}{1-\csc x} \, dx$

۱۲۷۲۹ **جذر سے چھٹکارا**

۱۲۷۳۰ سوال ۸.۶۳ تا سوال ۸.۷۰ میں جذر سے چھٹکارے کے بعد تکمل حل کریں۔

۱۲۷۳۱ سوال ۸.۶۳: $\int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}\,\mathrm{d}x$

۱۲۷۳۲ سوال ۸.۶۴: $\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$

۱۲۷۳۳ سوال ۸.۶۵: $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1+\cos 2t}\,\mathrm{d}t$

۱۲۷۳۴ سوال ۸.۶۶: $\int_{-\pi}^{0} \sqrt{1+\cos t}\,\mathrm{d}t$

۱۲۷۳۵ سوال ۸.۶۷: $\int_{-\pi}^{0} \sqrt{1-\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$

۱۲۷۳۶ سوال ۸.۶۸: $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1-\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$

۱۲۷۳۷ سوال ۸.۶۹: $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{1+\tan^2 y}\,\mathrm{d}y$

۱۲۷۳۸ سوال ۸.۷۰: $\int_{-\pi/4}^{0} \sqrt{\sec^2 y-1}\,\mathrm{d}y$

۱۲۷۳۹ **مختلف قسم کے تکمل**

۱۲۷۴۰ سوال ۸.۷۱ تا سوال ۸.۸۲ میں کوئی بھی موزوں طریقہ استعمال کرتے ہوئے تکمل حل کریں۔

۱۲۷۴۱ سوال ۸.۷۱: $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} (\csc x-\cot x)^2\,\mathrm{d}x$

۱۲۷۴۲ سوال ۸.۷۲: $\int_0^{\pi/4} (\sec x+4\cos x)^2\,\mathrm{d}x$

۱۲۷۴۳ سوال ۸.۷۳: $\int \cos\theta\csc(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$

۱۲۷۴۴ سوال ۸.۷۴: $\int (1+\frac{1}{x})\cot(x+\ln x)\,\mathrm{d}x$

۱۲۷۴۵ سوال ۸.۷۵: $\int (\csc x-\sec x)(\sin x+\cos x)\,\mathrm{d}x$

۱۲۷۴۶ سوال ۸.۷۶: $\int (\csc x+\sec x)(\tan x+\cot x)\,\mathrm{d}x$

۱۲۷۴۷ سوال ۸.۷۷: $\int \frac{6\,\mathrm{d}y}{\sqrt{y}(1+y)}$

۱۲۷۴۸ سوال ۸.۷۸: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2-1}}$

۱۲۷۴۹ سوال ۸.۷۹: $\int \frac{7\,\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-2x-48}}$

۱۲۷۵۰ سوال ۸.۸۰: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)\sqrt{4x^2+4x}}$

۱۲۷۵۱ سوال ۸.۸۱: $\int \sec^2 t\tan(\tan t)\,\mathrm{d}t$

۱۲۷۵۲ سوال ۸.۸۲: $\int \frac{\tan\theta}{2\sec\theta+1}$

تکونیاتی طاقت

سوال ۸.۸۳:

ا. حل کریں: $\int \cos^3\theta \, d\theta$ (اشارہ: $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$)

ب. حل کریں: $\int \cos^5\theta \, d\theta$

ج. بغیر حل کیے بتائیں کہ آپ $\int \cos^9\theta \, d\theta$ کو کس طرح حل کریں گے۔

سوال ۸.۸۴:

ا. حل کریں: $\int \sin^3\theta \, d\theta$ (اشارہ: $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$)

ب. حل کریں $\int \sin^5\theta \, d\theta$

ج. حل کریں: $\int \sin^7\theta \, d\theta$

د. بغیر حل کیے بتائیں آپ $\int \sin^{13}\theta \, d\theta$ کو کس طرح حل کریں گے۔

سوال ۸.۸۵:

ا. $\int \tan^3\theta \, d\theta$ کو $\int \tan\theta \, d\theta$ کی صورت میں لکھ کر حل کریں۔(اشارہ: $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$)

ب. $\int \tan^5\theta \, d\theta$ کو $\int \tan\theta^3 \, d\theta$ کی صورت میں لکھیں۔

ج. $\int \tan^7\theta \, d\theta$ کو $\int \tan\theta^5 \, d\theta$ کی صورت میں لکھیں۔

د. $\int \tan^{2k+1}\theta \, d\theta$ کو $\int \tan^{2k-1}\theta \, d\theta$ کی صورت میں لکھیں جہاں k مثبت عدد صحیح ہے

سوال ۸.۸۶:

ا. $\int \cot^3\theta \, d\theta$ کو $\int \cot\theta \, d\theta$ کی صورت میں لکھ کر حل کریں۔(اشارہ: $\cot^2\theta = \sec^2\theta - 1$)

ب. $\int \cot^5\theta \, d\theta$ کو $\int \cot\theta^3 \, d\theta$ کی صورت میں لکھیں۔

ج. $\int \cot^7\theta \, d\theta$ کو $\int \cot\theta^5 \, d\theta$ کی صورت میں لکھیں۔

د. $\int \cot^{2k+1}\theta \, d\theta$ کو $\int \cot^{2k-1}\theta \, d\theta$ کی صورت میں لکھیں جہاں k مثبت عدد صحیح ہے

نظریہ اور استعمال

سوال ۸.۸۷: بالائی جانب $y = 2\cos x$ اور زیریں جانب $y = \sec x, -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ میں گھیرے ہوئے خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۸.۸۸: ایک تکونی خطہ کا بالائی سرحد $y = \csc x$، نچلا سرحد $y = \sin x, \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ اور بایاں سرحد $x = \frac{\pi}{6}$ ہیں۔ اس خطہ کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال ۸.۸۹: محور x کے گرد سوال ۸.۸۷ کا خطہ گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

۱۲۷۷۹ سوال ۸.۹۰: محور x کے گرد سوال ۸.۸۸ کا خطہ گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

۱۲۷۸۰ سوال ۸.۹۱: منحنی $y = \ln(\cos x),\ 0 \le x \le \frac{\pi}{3}$ کی لمبائی معلوم کریں۔

۱۲۷۸۱ سوال ۸.۹۲: منحنی $y = \ln(\sec x),\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ کی لمبائی معلوم کریں۔

۱۲۷۸۲ سوال ۸.۹۳: محور x، قوس $y = \sec x$، لکیر $x = -\frac{\pi}{4}$ اور $x = \frac{\pi}{4}$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

۱۲۷۸۳ سوال ۸.۹۴: محور x، قوس $y = \csc x$، لکیر $x = \frac{\pi}{6}$ اور $x = \frac{5\pi}{6}$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

۱۲۷۸۴ سوال ۸.۹۵: تفاعل $\csc x$ کا تکمل

۱۲۷۸۵ سیکنٹ اور ٹینجنٹ کی جگہ کوسیکنٹ اور کوٹینجنٹ استعمال کرتے ہوئے مثال ۸.۷ کی طرز پر درج ذیل حاصل کریں۔

$$\int \csc x \, \mathrm{d}x = -\ln|\csc x + \cot x| + C$$

۱۲۷۸۶ سوال ۸.۹۶: دکھائیں کہ تکمل

$$\int ((x^2-1)(x+1))^{-2/3} \, \mathrm{d}x$$

۱۲۷۸۷ کو درج ذیل تمام طریقوں سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

۱۲۷۸۸ ا. $u = \frac{1}{x+1}$

۱۲۷۸۹ ب. $u = \tan^{-1} x$

۱۲۷۹۰ ج. $u = \tan^{-1} \sqrt{x}$

۱۲۷۹۱ د. $u = \tan^{-1}(\frac{x-1}{2})$

۱۲۷۹۲ ھ. $u = \cos^{-1} x$

۱۲۷۹۳ و. $u = \cosh^{-1} x$

۱۲۷۹۴ ز. $u = (\frac{x-1}{x+1})^k$

۱۲۷۹۵ جہاں جزو-ز میں $k = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -1$ ہو سکتا ہے۔

۱۲۷۹۶

۱۲۷۹۷

۱۲۷۹۸ ۸.۲ تکمل بالحصص

۱۲۷۹۹ تکمل بالحصص کی ترکیب سے تکمل

$$\int f(x)g(x) \, \mathrm{d}x \tag{۱}$$

۱۲۸۰۰ جس میں f بار بار قابل تفرق اور g بار بار قابل تکمل ہو کو کی سادہ روپ حاصل کی جا سکتی ہے۔ درج ذیل تکمل

$$\int xe^x \, \mathrm{d}x$$

۱۲۸۰۱ اس قسم کا ایک تکمل ہے جہاں $f(x) = x$ دو بار تفرق کے بعد صفر ہو جاتا ہے جبکہ $g(x) = e^x$ کا تکمل بار بار لیا جا سکتا ہے۔ تکمل بالحصص کی
۱۲۸۰۲ ترکیب درج ذیل قسم کے تکمل پر بھی قابل اطلاق ہے

$$\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x$$

۱۲۸۰۳ جس میں ہر دو بار تفرق اور ہر دو بار تکمل کے بعد وہی f اور g دوبارہ حاصل ہوتے ہیں۔

۱۲۸۰۴ اس حصہ میں تکمل بالحصص پر غور کیا جائے گا اور اس کا استعمال سکھایا جائے گا۔

۱۲۸۰۵ تکمل بالحصص کا کلیہ

۱۲۸۰۶ **تکمل بالحصص** کا کلیہ قاعدہ ضرب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

۱۲۸۰۷ سے حاصل ہوتا ہے جس کو تفریقی روپ

$$\mathrm{d}(uv) = u \, \mathrm{d}v + v \, \mathrm{d}u$$

۱۲۸۰۸ یا

$$u \, \mathrm{d}v = \mathrm{d}(uv) - v \, \mathrm{d}u$$

۱۲۸۰۹ میں لکھ کر تکمل لینے سے درج ذیل کلیہ اخذ ہوتا ہے۔

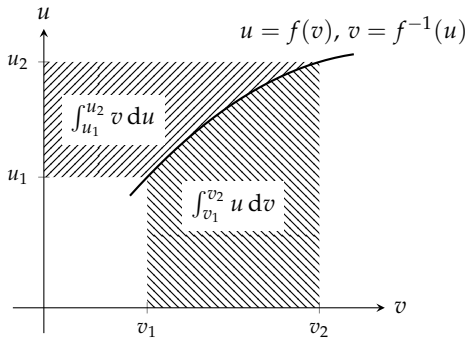
کلیہ تکمل بالحصص

$$\int u \, \mathrm{d}v = uv - \int v \, \mathrm{d}u \tag{۲}$$

۱۲۸۱۰ تکمل بالحصص کا کلیہ ایک تکمل، $\int u \, \mathrm{d}v$ کو دوسرے تکمل، $\int v \, \mathrm{d}u$، کی صورت میں بیان ہے۔ u اور v کی صحیح انتخاب سے دوسرا تکمل حل کرنا
۱۲۸۱۱ زیادہ آسان ہو گا۔ یہی اس کلیہ کی اہمیت کا سبب ہے۔ جب ہمیں کسی تکمل کو حل کرنے میں ناکامی ہو، ہم اس کو دوسرے تکمل میں تبدیل کر کے توقع کرتے ہیں
۱۲۸۱۲ کہ ہم اس نئے تکمل کو حل کر پائیں گے۔

۱۲۸۱۳ قطعی تکمل کے لیے مساوی کلیہ درج ذیل ہے جس کو شکل ۸.۱ میں دکھایا گیا ہے۔

$$\int_{v_1}^{v_2} u \, \mathrm{d}v = (u_2v_2 - u_1v_1) - \int_{u_1}^{u_2} v \, \mathrm{d}u \tag{۳}$$



شکل ۸.۱: بڑے مستطیل سے چھوٹا مستطیل منفی کرنے سے $u_2v_2 - u_1v_1$ حاصل ہوتا ہے جس سے $\int v\,\mathrm{d}u$ منفی کرنے سے $\int u\,\mathrm{d}v$ حاصل ہو گا۔

تکمل بالحصص کب اور کیسا استعمال ہو گا

کب: اگر بدل سے مسئلہ حل نہ ہو تب تکمل بالحصص سے مسئلہ حل کرنے کی کوشش کریں۔

کیسے: دیے گئے تکمل $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ کو تکمل $\int u\,\mathrm{d}v$ کی صورت میں لکھیں جہاں $\mathrm{d}x$ بشمول متکمل کا کچھ حصہ $\mathrm{d}v$ ہو۔

u اور $\mathrm{d}v$ کا انتخاب: کلیہ $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$ دائیں ہاتھ ایک نیا تکمل دیتا ہے۔ اگر یہ نیا تکمل بائیں ہاتھ تکمل سے زیادہ پیچیدہ ہو تب u اور $\mathrm{d}v$ کا از سر نو انتخاب کریں۔

مثال ۸.۸: تکمل $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل

ہم تکمل بالحصص کے کلیہ $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$ میں

$$\begin{aligned} u &= x, \quad \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x, \\ \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x, \quad v = \sin x \end{aligned}$$

$cosx$ کا سادہ ترین ضد تفرق

لیتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int x\cos x\,\mathrm{d}x = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{d}x = x\sin x + \cos x + C$$

□

آئیں مثال ۸.۸ میں u اور $\mathrm{d}v$ کے مختلف انتخابات پر غور کرتے ہیں۔

---

[1] integrationbyparts

۱۲۸۲۵ مثال ۸.۹: دوبارہ مثال ۸.۸ پر غور کرتے ہیں درج ذیل تکمل

$$\int x \cos x \, \mathrm{d}x$$

۱۲۸۲۶ میں ہم انتخاب درج ذیل چار ممکنہ طریقوں سے کر سکتے ہیں۔

۱۲۸۲۷ ا. $u = 1, \quad \mathrm{d}v = x \cos x \, \mathrm{d}x$

۱۲۸۲۸ ب. $u = x, \quad \mathrm{d}v = \cos x \, \mathrm{d}x$

۱۲۸۲۹ ج. $u = x \cos x, \quad \mathrm{d}v = \mathrm{d}x$

۱۲۸۳۰ د. $u = \cos x, \quad \mathrm{d}v = x \, \mathrm{d}x$

۱۲۸۳۱ آئیں ان پر باری باری غور کریں۔

۱۲۸۳۲ چونکہ ہمیں $\mathrm{d}v = x \cos x \, \mathrm{d}x$ کا تکمل معلوم نہیں ہے لہٰذا انتخاب-اکار آمد نہیں ہو گا۔

۱۲۸۳۳ جیسا ہم نے مثال ۸.۸ میں دیکھا، انتخاب-ب کار آمد ہے۔

۱۲۸۳۴ انتخاب-ج درج ذیل دیتا ہے

$$\begin{aligned} u &= x \cos x, & \mathrm{d}v &= \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= (\cos x - x \sin x) \, \mathrm{d}x, & v &= x \end{aligned}$$

۱۲۸۳۵ لہٰذا نیا تکمل

$$\int v \, \mathrm{d}u = \int (x \cos x - x^2 \sin x) \, \mathrm{d}x$$

۱۲۸۳۶ ہو گا جو دیے گئے تکمل سے زیادہ مشکل ہے۔

۱۲۸۳۷ انتخاب-د درج ذیل دے گا

$$\begin{aligned} u &= \cos x, & \mathrm{d}v &= x \, \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= -\sin x \, \mathrm{d}x, & v &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

۱۲۸۳۸ لہٰذا نیا تکمل

$$\int v \, \mathrm{d}u = -\int \frac{x^2}{2} \sin x \, \mathrm{d}x$$

۱۲۸۳۹ ہو گا۔ یہ تکمل بھی دیے گئے تکمل سے زیادہ پیچیدہ ہے۔

۱۲۸۴۰ خلاصہ: یاد رہے کہ ہمارا مقصد $\int u \, \mathrm{d}v$ سے تکمل بالحصص کے ذریعہ نیا نسبتاً سادہ تکمل کا حصول ہے۔ بعض اوقات تکمل بالحصص ایسا کرنے میں ناکام ہو گا۔

۱۲۸۴۱ □

۱۲۸۴۲ مثال ۸.۱۰: ربع اول میں منحنی $y = e^x$، لکیر $x = \ln 2$ اور محددی محوروں کے بیچ خطہ کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔
۱۲۸۴۳ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

۱۲۸۴۴ **حل**

۱۲۸۴۵ ہم بیلنی خول کی ترکیب استعمال کرتے ہیں جو درج ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned} H &= \int_a^b 2\pi f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi \int_0^{\ln 2} xe^x\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

۱۲۸۴۶ ہم درج ذیل لیتے ہوئے اس تکمل کو کلیہ $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$ سے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} u &= x, \quad \mathrm{d}v = e^x\,\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= \mathrm{d}x, \quad v = e^x \end{aligned}$$

e^x کا سادہ ترین ضد تفرق

۱۲۸۴۷ یوں

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x$$

۱۲۸۴۸ ہو گا لہٰذا

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln 2} xe^x\,\mathrm{d}x &= xe^x\Big|_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2} e^x\,\mathrm{d}x \\ &= [\ln 2 e^{\ln 2} - 0] - [e^x]_0^{\ln 2} \\ &= 2\ln 2 - [2-1] \\ &= 2\ln 2 - 1 \end{aligned}$$

۱۲۸۴۹ حاصل ہو گا۔ اس طرح جسم طواف کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} H &= 2\pi \int_0^{\ln 2} xe^x\,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi(2\ln 2 - 1) \end{aligned}$$

۱۲۸۵۰ □

۱۲۸۵۱ تکمل بالحصص وہاں بھی کارآمد ہو سکتا ہے جہاں متکمل صرف ایک جزو پر مبنی ہو۔ مثال کے طور پر ہم $\int \ln x\,\mathrm{d}x$ (اگلی مثال) یا $\int \cos^{-1} x\,\mathrm{d}x$
۱۲۸۵۲ (سوال ۸.۱۴۳) کو تکمل بالحصص سے حل کر سکتے ہیں۔

۱۲۸۵۳ مثال ۸.۱۱: تکمل $\int \ln x \, \mathrm{d}x$ حل کریں۔

۱۲۸۵۴ **حل**

۱۲۸۵۵ ہم اس کو $\int \ln x \cdot 1 \, \mathrm{d}x$ لکھ کر $\int u \, \mathrm{d}v = uv - \int v \, \mathrm{d}u$ استعمال کرتے ہیں جس میں

$$u = \ln x, \qquad \text{اس کا تفرق سادہ ہے}$$

$$\mathrm{d}v \, \mathrm{d}x, \qquad \text{اس کا تکمل آسان ہے}$$

$$\mathrm{d}u = \frac{1}{x} \, \mathrm{d},$$

$$v = u, \qquad \text{سادہ ترین ضد تفرق}$$

۱۲۸۵۶ ہوں گے۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int \ln x \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = x \ln x - \int \mathrm{d}x = x \ln x - x + C$$

۱۲۸۵۷ □

۱۲۸۵۸ **بار بار استعمال**

۱۲۸۵۹ بعض اوقات ایک سے زیادہ مرتبہ تکمل بالحصص استعمال کرتے ہوئے مسئلہ حل ہو گا۔

۱۲۸۶۰ مثال ۸.۱۲: تکمل $\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x$ حل کریں۔

۱۲۸۶۱ **حل**

۱۲۸۶۲ ہم کلیہ $\int u \, \mathrm{d}v = uv - \int v \, \mathrm{d}u$ میں

$$u = x^2, \quad \mathrm{d}v = e^x \, \mathrm{d}x, \quad v = e^x, \quad \mathrm{d}u = 2x \, \mathrm{d}x$$

۱۲۸۶۳ لیتے ہیں جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, \mathrm{d}x$$

۱۲۸۶۴ ہمیں دائیں ہاتھ نیا تکمل حل کرنے کے لیے مزید ایک بار تکمل بالحصص استعمال کرنا ہو گا۔ ہم مثال ۸.۱۰ میں دیکھ چکے ہیں کہ اس کی قیمت $xe^x - e^x +$
۱۲۸۶۵ C ہے۔ یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int x^2 e^x \, \mathrm{d}x = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

۱۲۸۶۶ □

نامعلوم تکمل کے لیے حل

برقی انجینئری میں درج ذیل قسم کے تکمل پائے جاتے ہیں جن کے حل میں تکمل بالحصص دوبار استعمال کرنے کے بعد نامعلوم تکمل کے لیے حل درکار ہوتا ہے۔ آئیں اس عمل کو ایک مثال کی مدد سے سمجھیں۔

مثال ۸.۱۳: تکمل $\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل

ہم کلیہ $\int u \, \mathrm{d}v = uv - \int v \, \mathrm{d}u$ میں درج ذیل لیتے ہیں۔

$$u = e^x, \quad \mathrm{d}v = \cos x \, \mathrm{d}x, \quad v = \sin x, \quad \mathrm{d}u = e^x \, \mathrm{d}x$$

یوں

$$\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, \mathrm{d}x$$

ہو گا جہاں نیا تکمل، دیے گئے تکمل کی طرح ہے۔ ان میں فرق صرف اتنا ہے کہ نئے تکمل میں $\cos x$ کے بجائے $\sin x$ ہے۔ ہم درج ذیل لیتے ہوئے اس نئے تکمل کو بھی تکمل بالحصص حل کرتے ہیں۔

$$u = e^x, \quad \mathrm{d}v = \sin x \, \mathrm{d}x, \quad v = -\cos x, \quad \mathrm{d}v = e^x \, \mathrm{d}x$$

یوں

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x &= e^x \sin x - \left(-e^x \cos x - \int (-\cos x)(e^x \, \mathrm{d}x)\right)\\ &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

ہو گا جہاں نامعلوم تکمل دوبار پایا جاتا ہے۔ ہم نامعلوم تکمل کو ایک طرف منتقل کر کے

$$2\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = e^x \sin x + e^x \cos x + C$$

دونوں اطراف کو 2 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = \frac{e^x \sin x + e^x \cos x}{2} + C'$$

اگرچہ دوسرے تکمل میں $u = e^x$ اور $\mathrm{d}v = \sin x \, \mathrm{d}x$ کا انتخاب اختیاری معلوم ہوتا ہے، حقیقت میں ایسا نہیں ہے۔ اگر ہم $u = \sin x$ اور $\mathrm{d}v = e^x \, \mathrm{d}x$ منتخب کریں تب

$$\begin{aligned}\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x &= e^x \sin x - \left(e^x \sin x - \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x\right)\\ &= \int e^x \cos x \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

۱۲۸۸۱ حاصل ہو گا، یعنی ہم وہیں ہیں جہاں سے شروع کیا تھا۔ اس طرز کے تکمل میں تفرق اور تکمل کے اجزاء منتخب کرنے کے بعد انہیں تبدیل نہ کریں۔ تفاعل
۱۲۸۸۲ $e^{ax}\cos bx$ اور اس سے ملتا جلتا تفاعل $e^{ax}\sin bx$ کے تکمل آپ کو کتاب کے آخر میں تکمل کے جدول میں ملیں گے۔ □

۱۲۸۸۳ جدولی تکمل

۱۲۸۸۴ ہم نے دیکھا اگر f کا تفرق بار بار لینے سے صفر ملتا ہو اور g کا تکمل بار بار با آسانی لینا ممکن ہو تب $\int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ کو تکمل بالحصص سے حل کرنا
۱۲۸۸۵ ممکن ہو گا۔ بعض اوقات بار بات تکمل لینے کی تعداد اتنی زیادہ ہوتی ہے کہ اجزاء پر نظر رکھنا دشوار ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں حساب کو ایسی ترتیب دی جا سکتی ہے
۱۲۸۸۶ جس سے کام میں کافی کمی پیدا ہوتی ہے۔ اس کو **جدولی تکمل**[۲] کہتے ہیں جس کی وضاحت درج ذیل مثال میں کی گئی ہے۔

۱۲۸۸۷ مثال ۸.۱۴: جدولی تکمل سے $\int x^2e^x\,\mathrm{d}x$ کو حل کریں۔

۱۲۸۸۸ **حل**

۱۲۸۸۹ ہم $f(x)=x^2$ اور $g(x)=e^x$ لے کر اجزاء کو جدول میں درج کرتے ہیں۔

$f(x)$ اور اس کے تفرق		$g(x)$ اور اس کے تکمل
x^2	$(+)$	e^x
$2x$	$(-)$	e^x
2	$(+)$	e^x
0		e^x

۱۲۸۹۰ ہم تیر کے نشان سے جڑے ہوئے اجزاء کا مجموعہ لیتے ہوئے تیر کے وسط پر علامت استعمال کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int x^2e^x\,\mathrm{d}x = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

۱۲۸۹۱ □

۱۲۸۹۲ مثال ۸.۱۵: جدولی تکمل سے $\int x^3\sin x\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

۱۲۸۹۳ **حل**

[۲] tabularintegration

۱۳۸۹۴ ہم $f(x) = x^3$ اور $g(x) = \sin x$ لیتے ہیں۔

$f(x)$ اور اس کے تفرق		$g(x)$ اور اس کے تکمل
x^3	$(+)$	$\sin x$
$3x^2$	$(-)$	$-\cos x$
$6x$	$(+)$	$-\sin x$
6	$(-)$	$\cos x$
0		$\sin x$

۱۳۸۹۵ ہم تیر کے نشان سے جوڑے گئے اجزاء کا مجموعہ لیتے ہوئے تیر کی نشان پر علامت استعمال کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل ملتا ہے۔

$$\int x^3 \sin x \, \mathrm{d}x = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$$

۱۳۸۹۶ □

۱۳۸۹۷ **سوالات**

۱۳۸۹۸ **تکمل بالحصص**

۱۳۸۹۹ سوال ۸.۹۷ تا سوال ۸.۱۲۰ کو حل کریں۔

۱۳۹۰۰ سوال ۸.۹۷: $\int x \sin \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x$

۱۳۹۰۱ سوال ۸.۹۸: $\int \theta \cos \pi\theta \, \mathrm{d}\theta$

۱۳۹۰۲ سوال ۸.۹۹: $\int t^2 \cos t \, \mathrm{d}t$

۱۳۹۰۳ سوال ۸.۱۰۰: $\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}x$

۱۳۹۰۴ سوال ۸.۱۰۱: $\int_1^2 x \ln x \, \mathrm{d}x$

۱۳۹۰۵ سوال ۸.۱۰۲: $\int_1^e x^3 \ln x \, \mathrm{d}x$

۱۳۹۰۶ سوال ۸.۱۰۳: $\int \tan^{-1} y \, \mathrm{d}y$

۱۳۹۰۷ سوال ۸.۱۰۴: $\int \sin^{-1} y \, \mathrm{d}y$

۱۳۹۰۸ سوال ۸.۱۰۵: $\int x \sec^2 x \, \mathrm{d}x$

۱۳۹۰۹ سوال ۸.۱۰۶: $\int 4x \sec^2 2x \, \mathrm{d}x$

۱۳۹۱۰ سوال ۸.۱۰۷: $\int x^3 e^x \, \mathrm{d}x$

۱۳۹۱۱ سوال ۸.۱۰۸: $\int p^4 e^{-p} \, \mathrm{d}p$

۱۲۹۱۲ سوال ۸.۱۰۹: $\int (x^2 - 5x)e^x \, dx$

۱۲۹۱۳ سوال ۸.۱۱۰: $\int (r^2 + r + 1)e^r \, dr$

۱۲۹۱۴ سوال ۸.۱۱۱: $\int x^5 e^x \, dx$

۱۲۹۱۵ سوال ۸.۱۱۲: $\int t^2 e^{4t} \, dt$

۱۲۹۱۶ سوال ۸.۱۱۳: $\int_0^{\pi/2} \theta^2 \sin 2\theta \, d\theta$

۱۲۹۱۷ سوال ۸.۱۱۴: $\int_0^{\pi/2} x^3 \cos 2x \, dx$

۱۲۹۱۸ سوال ۸.۱۱۵: $\int_{2/\sqrt{3}}^{2} t \sec^{-1} t \, dt$

۱۲۹۱۹ سوال ۸.۱۱۶: $\int_0^{1/\sqrt{2}} 2x \sin^{-1}(x^2) \, dx$

۱۲۹۲۰ سوال ۸.۱۱۷: $\int e^\theta \sin\theta \, d\theta$

۱۲۹۲۱ سوال ۸.۱۱۸: $\int e^{-y} \cos y \, dy$

۱۲۹۲۲ سوال ۸.۱۱۹: $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$

۱۲۹۲۳ سوال ۸.۱۲۰: $\int e^{-2x} \sin 2x \, dx$

۱۲۹۲۴ **بدل اور تکمل بالحصص**

۱۲۹۲۵ سوال ۸.۱۲۱ تا سوال ۸.۱۲۶ میں تکمل بالحصص سے پہلے بدل استعمال کریں۔

۱۲۹۲۶ سوال ۸.۱۲۱: $\int e^{\sqrt{3s+9}} \, ds$

۱۲۹۲۷ سوال ۸.۱۲۲: $\int_0^1 x\sqrt{1-x} \, dx$

۱۲۹۲۸ سوال ۸.۱۲۳: $\int_0^{\pi/3} x \tan^2 x \, dx$

۱۲۹۲۹ سوال ۸.۱۲۴: $\int \ln(x + x^2) \, dx$

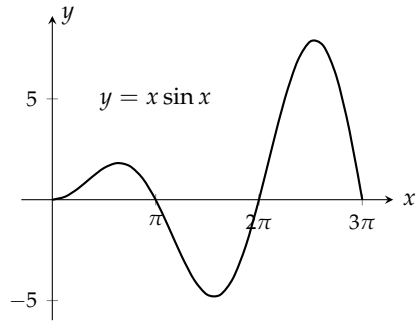
۱۲۹۳۰ سوال ۸.۱۲۵: $\int \sin(\ln x) \, dx$

۱۲۹۳۱ سوال ۸.۱۲۶: $\int z(\ln z)^2 \, dz$

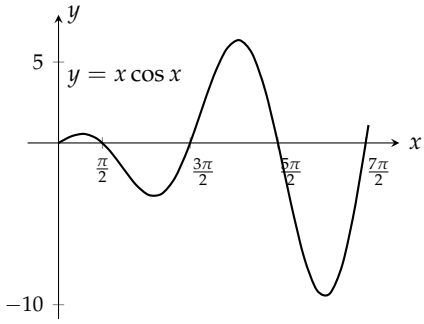
۱۲۹۳۲ **نظریہ اور مثالیں**

۱۲۹۳۳ سوال ۸.۱۲۷: محور x اور منحنی $y = x \sin x$ کے بیچ (شکل ۸.۲) وقفہ (ا) $0 \le x \le \pi$، (ب) $\pi \le x \le 2\pi$، اور (ج)
۱۲۹۳۴ $2\pi \le x \le 3\pi$ پر رقبہ تلاش کریں۔ (د) آپ کو کیا نقش نظر آتا ہے؟ وقفہ $n\pi \le x \le (n+1)\pi$، جہاں n غیر منفی عدد صحیح ہے،
۱۲۹۳۵ پر یہ رقبہ کتنا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۲۹۳۶ سوال ۸.۱۲۸: منحنی $y = x \cos x$ اور محور x کے بیچ (شکل ۸.۳) وقفہ (ا) $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$، (ب) $\frac{3\pi}{2} \le x \le \frac{5\pi}{2}$، اور
۱۲۹۳۷ (ج) $\frac{5\pi}{2} \le x \le \frac{7\pi}{2}$ پر رقبہ معلوم کریں۔ (د) آپ کو کیا نقش نظر آتا ہے؟ وقفہ $\left(\frac{2n-1}{2}\right)\pi \le x \le \left(\frac{2n+1}{2}\right)\pi$ پر یہ رقبہ کتنا ہو



شکل ۸.۲: ترسیم برائے سوال ۸.۱۲۷



شکل ۸.۳: ترسیم برائے سوال ۸.۱۲۸

گا، جہاں n اختیاری عدد صحیح ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۸.۱۲۹: ربع اول میں محددی محور، منحنی $y = e^x$ اور لکیر $x = \ln 2$ کے بیچ خطہ کو لکیر $x = \ln 2$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۸.۱۳۰: ربع اول میں محددی محور، منحنی $y = e^{-x}$ اور لکیر $x = 1$ کے بیچ خطہ کو (ا) محور y، (ب) لکیر $x = 1$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ ان اجسام کے حجم تلاش کریں۔

سوال ۸.۱۳۱: ربع اول میں محددی محور، منحنی $y = \cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ اور لکیر $x = \frac{\pi}{2}$ کے بیچ خطہ کو (ا) محور y، (ب) لکیر $x = \frac{\pi}{2}$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ ان اجسام کے حجم تلاش کریں۔

سوال ۸.۱۳۲: محور x اور منحنی $y = x \sin x,\ 0 \le x \le \pi$ کے بیچ خطہ کو (ا) محور y، (ب) لکیر $x = \pi$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے (منحنی کے لیے شکل ۸.۲ دیکھیں)۔ ان اجسام کے حجم تلاش کریں۔

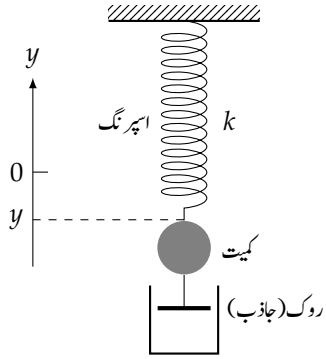
سوال ۸.۱۳۳: (ا) ربع اول میں محور x، منحنی $y = x^2 e^x$ اور لکیر $x = 1$ کے بیچ یکساں کثافت کی چادر پائی جاتی ہے۔ اس چادر کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ (ب) وسطانی مرکز کو 2 اعشاریہ تک تلاش کریں اور اس کی نشاندہی خطہ کے خاکہ پر کریں۔

سوال ۸.۱۳۴: (ا) محور x، منحنی $y = \ln x$ اور لکیر $x = e$ کے بیچ یکساں کثافت کی چادر پائی جاتی ہے۔ اس چادر کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ (ب) وسطانی مرکز کو 2 اعشاریہ تک تلاش کریں اور اس کی نشاندہی خطہ کے خاکہ پر کریں۔

سوال ۸.۱۳۵: ایک چادر کی کثافت $\delta = 1 + x$ ہے۔ یہ چادر محور x اور منحنی $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$ کے بیچ پائی جاتی ہے۔ محور y کے لحاظ سے اس چادر کا معیار اثر تلاش کریں۔

سوال ۸.۱۳۶: اگرچہ ہم $\int \mathrm{d}v$ کو تکمل بالحصص سے حل کر کے v کی تلاش میں تکمل کے مستقل کو صفر تصور کر کے رد کرتے ہیں۔ بعض اوقات اس مستقل کو غیر صفر تصور کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$\int x \tan^{-1} x \, \mathrm{d}x$$



شکل ۸.۴: اسپرنگ، کمیت اور جاذب کا قصری نظام (سوال ۸.۱۳۷ اور سوال ۸.۱۳۸)۔

میں $u = \tan^{-1} x$ اور $v = \frac{x^2}{2} + C$ لے کر C کی ایسی قیمت منتخب کریں جس سے حاصل کلیہ کی سادہ صورت ملتی ہو۔

سوال ۸.۱۳۷: چھت سے جڑے ہوئے اسپرنگ کے نچلے سرے سے ایک کمیت آویزاں ہے جس کی حرکت میں رکاوٹ پیدا کرنے کی خاطر اسپرنگ کے نچلے سر کو بند بیلن میں چلنے والے ایک بوکا کے ساتھ جوڑا گیا ہے۔ حرکت میں رکاوٹ پیدا کرنے والے اس نظام کو اصطلاحاً دَکُو[3] یا **جاذب** کہتے ہیں (شکل ۸.۴)۔ یوں لمحہ t پر کمیت کا مقام

$$y = 2e^{-t} \cos t, \quad t \geq 0$$

ہو گا۔ (ا) وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ پر y کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ (ب) وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ پر y ترسیم کر کے محور y پر y کی اوسط قیمت کی نشاندہی کریں۔

سوال ۸.۱۳۸: اسپرنگ، کمیت اور روک کا نظام شکل ۸.۴ میں دکھایا گیا ہے۔ لمحہ t پر کمیت کا مقام درج ذیل ہے۔

$$y = 4e^{-t}(\sin t - \cos t), \quad t \geq 0$$

(ا) وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ پر y کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ (ب) وقفہ $0 \leq t \leq 2\pi$ پر y ترسیم کر کے محور y پر y کی اوسط قیمت کی نشاندہی کریں۔

الٹے تفاعل کے تکمل

تکمل بالحصص کے استعمال سے الٹ تفاعل کا تکمل حاصل کرنے سے ایک قاعدہ اخذ ہوتا ہے جو عموماً اچھے نتائج دیا ہے:

$$\begin{aligned}
\int f^{-1}(x)\,\mathrm{d}x &= \int y f'(y)\,\mathrm{d}y && y = f^{-1}(x),\ x = f(y),\ \mathrm{d}x = f'(y)\,\mathrm{d}y \\
&= y f(y) - \int f(y)\,\mathrm{d}y && \text{لے کر تکمل بالحصص } \mathrm{d}v = f'(y)\,\mathrm{d}y \text{ اور } u = y \\
&= x f^{-1}(x) - \int f(y)\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

[3] dashpot

۱۲۹۶۶ ہمارا غرض پہلے متکمل کے پیچیدہ ترین حصہ، جو یہاں $f^{-1}(x)$ ہے، کی سادہ صورت کا حصول ہے۔ یوں $\ln x$ کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \ln x \,\mathrm{d}x &= \int y e^y \,\mathrm{d}y \qquad\qquad y = \ln x,\ x = e^y,\ \mathrm{d}x = e^y \,\mathrm{d}y\\ &= y e^y - e^y + C\\ &= x \ln x - x + C\end{aligned}$$

۱۲۹۶۷ تفاعل $\cos^{-1} x$ کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \cos^{-1} x \,\mathrm{d}x &= x \cos^{-1} x - \int \cos y \,\mathrm{d}y \qquad\qquad y = \cos^{-1} x\\ &= x \cos^{-1} x - \sin y + C\\ &= x \cos x^{-1} x - \sin(\cos^{-1} x) + C\end{aligned}$$

۱۲۹۶۸ سوال ۸.۱۳۹ تا سوال ۸.۱۴۲ میں درج ذیل کلیہ استعمال کرتے ہوئے تکمل حل کریں۔ جواب کو x کی صورت میں لکھیں۔

$$\int f^{-1}(x) \,\mathrm{d}x = x f^{-1}(x) - \int f(y) \,\mathrm{d}y \qquad\qquad y = f^{-1}(x) \tag{۴}$$

۱۲۹۶۹ سوال ۸.۱۳۹: $\int \sin^{-1} x \,\mathrm{d}x$

۱۲۹۷۰ سوال ۸.۱۴۰: $\int \tan^{-1} x \,\mathrm{d}x$

۱۲۹۷۱ سوال ۸.۱۴۱: $\int \sec^{-1} x \,\mathrm{d}x$

۱۲۹۷۲ سوال ۸.۱۴۲: $\int \log_2 x \,\mathrm{d}x$

۱۲۹۷۳ قابل تکمل تفاعل $f^{-1}(x)$ کو تکمل بالحصص سے دوسرے طریقہ سے بھی حل کیا جا سکتا ہے جس میں $u = f^{-1}(x)$ اور $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$ لیتے
۱۲۹۷۴ ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int f^{-1}(x) \,\mathrm{d}x = x f^{-1}(x) - \int x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x)\right) \mathrm{d}x \tag{۵}$$

۱۲۹۷۵ سوال ۸.۱۴۳ اور سوال ۸.۱۴۴ میں مساوات ۴ اور مساوات ۵ سے حاصل نتائج کا موازنہ کیا گیا ہے۔

۱۲۹۷۶ سوال ۸.۱۴۳: تفاعل $\cos^{-1}(x)$ کو مساوات ۴ اور مساوات ۵ سے حل کرتے ہوئے درج ذیل، ایک دوسرے سے مختلف، نتائج حاصل ہوتے
۱۲۹۷۷ ہیں۔

$$\begin{aligned}\int \cos^{-1} x \,\mathrm{d}x &= x \cos^{-1} x - \sin(\cos^{-1} x) + C\\ \int \cos^{-1} x \,\mathrm{d}x &= x \cos^{-1} x - \sqrt{1 - x^2} + C\end{aligned} \tag{۶}$$

کیا دونوں نتائج درست ہو سکتے ہیں؟ وجہ پیش کریں۔

سوال ۸.۱۴۴: تفاعل $\tan^{-1}(x)$ کو مساوات ۴ اور مساوات ۵ سے حل کرتے ہوئے درج ذیل، ایک دوسرے سے مختلف، نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int \tan^{-1} x \, \mathrm{d}x &= x \tan^{-1} x - \ln \sec(\tan^{-1} x) + C \\ \int \tan^{-1} x \, \mathrm{d}x &= x \tan^{-1} x - \ln \sqrt{1+x^2} + C \end{aligned} \tag{۷}$$

کیا دونوں نتائج درست ہو سکتے ہیں؟ وجہ پیش کریں۔

سوال ۸.۱۴۵ اور سوال ۸.۱۴۶ کو مساوات ۴ اور مساوات ۵ سے حل کریں۔ ہر بار حاصل نتیجہ کا تفرق لے کر اس کی درستگی کی تصدیق کریں۔

سوال ۸.۱۴۵: $\int \sin^{-1} x \, \mathrm{d}x$

سوال ۸.۱۴۶: $\int \tan^{-1} x \, \mathrm{d}x$

۸.۳ جزوی کسر

اعلیٰ الجبرا کا ایک مسئلہ (جس کو زیادہ تفصیل سے بعد میں پیش کیا جائے گا) کہتا ہے کہ کوئی بھی ناطق تفاعل، جو جتنا بھی پیچیدہ کیوں نہ ہو، کو سادہ کسور کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے جنہیں ہم اب تک جانتے ہوئے تراکیب سے تکمل کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3} \tag{۱}$$

ہو گا لہٰذا بائیں ہاتھ ناطق تفاعل کا تکمل حاصل کرنے کی خاطر ہم دائیں ہاتھ سادہ کسور کا تکمل لیں گے۔

ناطق تفاعل کو اس طرح سادہ کسور کی صورت میں لکھنے کو **جزوی کسری ترکیب**[۴] کہتے ہیں۔ اس ترکیب میں مستقل A اور B کی وہ قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں جو

$$\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} \tag{۲}$$

کو مطمئن کرتے ہوں۔ فرض کریں ہمیں A اور B کی قیمتیں معلوم نہیں ہیں۔ ہم $\frac{A}{x+1}$ اور $\frac{B}{x-3}$ کو **جزوی کسر**[۵] کہتے ہیں جبکہ A اور B کی قیمتیں حاصل نہ کر دی جائیں انہیں نامعلوم مستقل کہتے ہیں۔

---

[۴] methodofpartialfractions
[۵] partialfractions

۱۲۹۹۵ نامعلوم مستقل اور دریافت کرنے سے پہلے ہم مساوات ۲ میں نسب نما سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں۔

$$5x - 3 = A(x-3) + B(x+1) = (A+B)x - 3A + B$$

۱۲۹۹۶ یہ مساوات تب درست ہو گی جب دونوں اطراف x کے یکساں طاقت کے جزو ضربی برابر ہوں:

$$A + B = 5, \quad -3A + B = -3$$

۱۲۹۹۷ انہیں بیک وقت حل کرتے ہوئے $A = 2$ اور $B = 3$ حاصل ہوتے ہیں۔

۱۲۹۹۸ مثال ۸.۱۶: نسب نما میں دو علیحدہ علیحدہ خطی اجزائے ضربی

۱۲۹۹۹ درج ذیل حل کریں۔

$$\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}\,\mathrm{d}x$$

۱۳۰۰۰ **حل**

۱۳۰۰۱ مذکورہ بالا تبصرہ سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{3}{x-3}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + C\end{aligned}$$

۱۳۰۰۲ □

۱۳۰۰۳ مثال ۸.۱۷: نسب نما میں جزو ضربی کا تکرار

۱۳۰۰۴ درج ذیل کو جزوی کسور کا مجموعہ لکھیں۔

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2}$$

۱۳۰۰۵ **حل**

۱۳۰۰۶ چونکہ نسب نما میں $x + 2$ ایک سے زیادہ مرتبہ پایا جاتا ہے لہٰذا جزوی کسر کو درج ذیل صورت میں لکھنا لازمی ہے۔

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} \tag{۳}$$

۱۳۰۰۷ مساوات ۳ کے نسب نما سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں:

$$6x + 7 = A(x+2) + B = Ax + (2A + B)$$

۱۳۰۰۸ دونوں اطراف ایک سی طاقتوں کے جزو ضربی کو آپس میں برابر پر کرتے ہوئے $A = 6$ اور

$$7 = 2A + B = 12 + B, \quad \Longrightarrow \quad B = -5$$

۱۳۰۰۹ ملتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{6}{x+2} - \frac{5}{(x+2)^2}$$

۱۳۰۱۰ □

۱۳۰۱۱ نامعلوم مستقل کی قیمت کی تلاش

۱۳۰۱۲ ا. دیے گئے مساوات میں نسب نما کو ختم کریں۔

۱۳۰۱۳ ب. دونوں اطراف x کے یکساں طاقتوں کے اجزائے ضربی کو برابر پُر کریں۔

۱۳۰۱۴ ج. حاصل مساوات کو بیک وقت حل کے نامعلوم مستقل کی قیمتیں دریافت کریں۔

۱۳۰۱۵ مثال ۸.۱۸: ایک غیر مناسب کسر

۱۳۰۱۶ درج ذیل کو جزوی کسور کے مجموعہ کی صورت میں لکھیں۔

$$\frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3}$$

۱۳۰۱۷ **حل**

۱۳۰۱۸ ہم شمار کنندہ کو نسب نما سے تقسیم کرتے ہیں۔

۱۳۰۱۹

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x \\ \hline x^2-2x-3 & 2x^3-4x^2-x-3 \\ & -2x^3+4x^2+6x \\ \hline & \qquad\qquad 5x-3 \end{array}$$

۱۳۰۲۰ یوں ایک کثیر رکنی اور ایک مناسب کسر حاصل ہوتا ہے۔ اس کے بعد مناسب کسر کو جزوی کسور کا مجموعہ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{2x^3-4x^2-x-3}{x^2-2x-3} &= 2x + \frac{5x-3}{x^2-2x-3} && \text{تقسیم کا نتیجہ} \\ &= 2x + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3} && \text{مناسب کسر کا جزوی کسری مجموعہ} \end{aligned}$$

۱۳۰۲۱ □

۱۳۰۲۲ مثال ۸.۱۹: نسب نما میں ناقابل تخفیف دو درجی جزو

۱۳۰۲۳ درج ذیل کو جزوی کسور کا مجموعہ لکھیں۔

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}$$

۱۳۰۲۴ ایسا دو درجی کثیر رکنی جس کو حقیقی عددی سر والے خطی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب لکھنا ممکن نہ ہو **ناقابل تخفیف**[۶] کہلاتا ہے۔

۱۳۰۲۵ **حل**

۱۳۰۲۶ نسب نما میں ناقابل تخفیف جزو کے علاوہ دہرایا گیا جزو بھی پایا جاتا ہے۔ یوں ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} \qquad (۴)$$

۱۳۰۲۷ دو درجی جزو ضربی کے لیے ہم یک درجی شمار کنندہ استعمال کرتے ہیں نا کہ مستقل شمار کنندہ، لہٰذا x^2+1 کا شمار کنندہ $Ax+B$ لکھا گیا ہے۔ نسب نما

۱۳۰۲۸ سے چھٹکارا حاصل کر کے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}-2x+4 &= (Ax+B)(x-1)^2 + C(x-1)(x^2+1) + D(x^2+1)\\ &= (A+C)x^3 + (-2A+B-C+D)x^2 + (A-2B+C)x + (B-C+D)\end{aligned}$$

۱۳۰۲۹ یکساں اجزاء (جن میں x کے طاقت یکساں ہوں) کے ضربی کو برابر پُر کرتے ہیں:

$0 = A + C$	x^3 کا ضربیہ
$0 = -2A + B - C + D$	x^2 کا ضربیہ
$-2 = A - 2B + C$	x^1 کا ضربیہ
$4 = B - C + D$	x^0 کا ضربیہ

۱۳۰۳۰ ان مساوات کو بیک وقت حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$-4 = -2A, \quad A = 2$	چوتھی مساوات کو پہلی سے منفی کریں
$C = -A = -2$	پہلی مساوات سے
$B = 1$	تیسری میں $A = 2$ اور $C = -2$
$D = 4 - B + C = 1$	چھوتی مساوات سے

۱۳۰۳۱ ان مستقل کو مساوات ۴ میں پر کر کے نتیجہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

۱۳۰۳۲ □

۱۳۰۳۳ مثال ۸.۲۰: تکمل $\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

---

[۶] irreducible

۱۳۰۳۴ **حل**

۱۳۰۳۵ ہم مثال ۸.۱۹ کی طرح متکمل کو جزوی کسری روپ میں لکھ کر جزو در جزو تکمل لیتے ہیں۔

مثال ۸.۱۹

$$\begin{aligned}\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{2x+1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \int \left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \ln(x^2+1) + \tan^{-1}x - 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C\end{aligned}$$

۱۳۰۳۶ □

۱۳۰۳۷ **ترکیب پر عمومی تبصرہ**

۱۳۰۳۸ ناطق تفاعل $\frac{f(x)}{g(x)}$ کو جزوی کسری مجموعہ کی صورت میں لکھنا دو چیزوں پر منحصر ہے:

۱۳۰۳۹ ا. $f(x)$ کا درجہ $g(x)$ کے درجہ سے کم ہونا ضروری ہے۔ ایسا نہ ہونے کی صورت میں f کو g سے تقسیم کر کے باقی کے ساتھ کام کریں۔

۱۳۰۴۰ ب. $g(x)$ کے اجزائے ضربی معلوم ہونا ضروری ہے۔ کثیر رکنی کا نظریہ کہتا ہے کہ حقیقی عددی سر والے ہر کثیر رکنی کو حقیقی خطی اجزائے ضربی کا حاصل
۱۳۰۴۱ ضرب لکھا جا سکتا ہے۔ حقیقت میں ان اجزائے ضربی کو معلوم کرنا نہایت مشکل ہو سکتا ہے۔

۱۳۰۴۲ اعلیٰ الجبرا کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ جب یہ شرائط پورے ہوں تب $\frac{f(x)}{g(x)}$ کو درج ذیل اقدام سے جزوی کسری مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔

۱۳۰۴۳ **ترکیب جزوی کسری مجموعہ (مناسب $\frac{f(x)}{g(x)}$)**

۱۳۰۴۴ ا. فرض کریں $g(x)$ کا ایک خطی جزو ضربی $x-r$ ہے اور $x-r$ کا بلند تر طاقت جو $g(x)$ کو تقسیم کر سکتا ہو $(x-r)^m$ ہے۔ تب اس
۱۳۰۴۵ جزو ضربی کو درج ذیل اجزاء مختص کریں۔

$$\frac{A_1}{x-r} + \frac{A_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-r)^m}$$

۱۳۰۴۶ $g(x)$ کے ہر منفرد جزو ضربی کے لیے یہی کریں۔

۱۳۰۴۷ ب. فرض کریں $g(x)$ کا ایک ناقابل تخفیف دو درجی جزو ضربی x^2+px+q ہے اور $(x^2+px+q)^n$ اس جزو کا بلند تر طاقت ہے جو
۱۳۰۴۸ $g(x)$ کو تقسیم کر سکتا ہو۔ تب اس جزو ضربی کو درج ذیل اجزاء مختص کریں:

$$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{B_nx+C_n}{(x^2+px+q)^n}$$

۱۳۰۴۹ $g(x)$ کے ہر منفرد دو درجی جزو ضربی، جس کو حقیقی عددی سر والے خطی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب لکھنا ممکن نہ ہو، کے لیے یہی کریں۔

۱۳۰۵۰ ج. اصل کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ کو ان تمام کے مجموعہ کے برابر لکھیں۔ حاصل مساوات کے نسب نما سے چھٹکارا حاصل کر کے اجزاء کو x کے گھٹتے طاقت کے لحاظ سے
۱۳۰۵۱ ترتیب دیں۔

۱۳۰۵۲ د. x کے یکساں طاقت کے عددی سر کو برابر پر کر کے حاصل مساوات کو بیک وقت حل کر کے تمام نامعلوم مستقل کی قیمتیں تلاش کریں۔

۱۳۰۵۳ خطی جزو ضربی کے ''ڈھانپنے'' کی ترکیب ہیوی سائیڈ

۱۳۰۵۴ جب کثیر رکنی $f(x)$ کا درجہ $g(x)$ کے درجہ سے کم ہو، اور

$$g(x) = (x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n)$$

۱۳۰۵۵ n عدد منفرد خطی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہو جہاں ہر جزو کا طاقت ایک ہو، تب $\frac{f(x)}{g(x)}$ کا جزوی کسری مجموعہ باآسانی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

۱۳۰۵۶ مثال ۸.۲۱: درج ذیل کسری جزوی مجموعہ میں A ، B اور C تلاش کریں۔

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \tag{۵}$$

۱۳۰۵۷ **حل**

۱۳۰۵۸ دونوں اطراف کو $(x-1)$ سے ضرب دے کر

$$\frac{x^2+1}{(x-2)(x-3)} = A + \frac{B(x-1)}{x-2} + \frac{C(x-1)}{x-3}$$

۱۳۰۵۹ ملتا ہے جس میں $x = 1$ پر کرنے سے A حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{(1)^2+1}{(1-2)(1-3)} = A + 0 + 0, \quad \Longrightarrow \quad A = 1$$

۱۳۰۶۰ ہم اصل کسر

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

۱۳۰۶۱ کے نسب نما میں $(x-1)$ کو ڈھانپ کر پوشیدہ کر کے باقی حصہ میں $x = 1$ پر کر کے A کی یہی قیمت حاصل کر سکتے ہیں:

$$A = \frac{(1)^2+1}{\underbrace{\boxed{(x-1)}}_{\text{پوشیدہ}}(1-2)(1-3)} = \frac{2}{(-1)(-2)} = 1$$

۱۳۰۶۲ اسی طرح مساوات ۵ میں $(x-2)$ کو ڈھانپ کر باقی حصہ میں $x=2$ پر کر کے B حاصل ہو گا۔

$$B = \frac{(2)^2+1}{(2-1)\underbrace{\boxed{(x-2)}}_{\text{پوشیدہ}}(2-3)} = \frac{5}{(1)(-1)} = -5$$

۱۳۰۶۳ اور آخر میں مساوات ۵ میں $(x-3)$ کو ڈھانپ کر باقی حصہ میں $x=3$ پر کر کے C حاصل ہو گا۔

$$C = \frac{(3)^2+1}{(3-1)(3-2)\underbrace{\boxed{(x-3)}}_{\text{پوشیدہ}}} = \frac{10}{(2)(1)} = 5$$

۱۳۰۶۴ □

۱۳۰۶۵ ڈھانپنے کی ترکیب کے اقدام درج ذیل ہیں۔

۱۳۰۶۶ ا. کسر میں $g(x)$ کو اجزائے ضربی کا حاصل ضرب لکھیں:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-r_1)(x-r_2)\cdots(x-r_n)} \tag{۶}$$

۱۳۰۶۷ ب. مساوات ۶ میں باری باری جزو $(x-r_i)$ کو ڈھانپ کر باقی حصہ میں $x=r_i$ پر کرتے ہوئے مستقل A_i تلاش کریں:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{f(r_1)}{(r_1-r_2)\cdots(r_1-r_n)}\\
A_2 &= \frac{f(r_2)}{(r_2-r_1)(r_2-r_3)\cdots(r_2-r_n)}\\
&\vdots\\
A_n &= \frac{f(r_n)}{(r_n-r_1)(r_n-r_2)\cdots(r_n-r_{n-1})}
\end{aligned}$$

۱۳۰۶۸ ج. دیے گئے کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ کو درج ذیل جزوی کسری مجموعہ کی صورت میں لکھیں۔

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A_1}{x-r_1} + \frac{A_2}{x-r_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-r_n}$$

۱۳۰۶۹ مثال ۸.۲۲: تکمل $\int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

۱۳۰۷۰ **حل**

۱۳۰۷۱ شمار کنندہ $f(x) = x+4$ کا درجہ نسب نما $g(x) = x^3 - 3x^2 - 10x$ کے درجہ سے کم ہے۔ ہم $g(x)$ کو اجزائے ضربی کی
۱۳۰۷۲ صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} = \frac{x+4}{x(x-2)(x+5)}$$

۱۳۰۷۳ $g(x)$ کے جذر $r_1 = 0$ ، $r_2 = 2$ اور $r_3 = -5$ ہیں۔ ہم نامعلوم مستقل کو ڈھانپنے کی ترکیب سے معلوم کرتے ہیں۔

$$A_1 = \frac{0+4}{\underbrace{\boxed{x}}_{\text{پوشیدہ}}(0-2)(0+5)} = \frac{4}{(-2)(5)} = -\frac{2}{5}$$

$$A_2 = \frac{2+4}{2\underbrace{\boxed{(x-2)}}_{\text{پوشیدہ}}(2+5)} = \frac{6}{(2)(7)} = \frac{3}{7}$$

$$A_3 = \frac{-5+4}{(-5)(-5-2)\underbrace{\boxed{(x+5)}}_{\text{پوشیدہ}}} = \frac{-1}{(-5)(-7)} = -\frac{1}{35}$$

۱۳۰۷۴ یوں

$$\frac{x+4}{x(x-2)(x+5)} = -\frac{2}{5x} + \frac{3}{7(x-2)} - \frac{1}{35(x+5)}$$

۱۳۰۷۵ ہو گا لہٰذا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int \frac{x+4}{x(x-2)(x+5)}\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{5}\ln|x| + \frac{3}{7}\ln|x-2| - \frac{1}{35}\ln|x+5| + C$$

۱۳۰۷۶ □

۱۳۰۷۷ **نامعلوم مستقل تلاش کرنے کے دیگر تراکیب**

۱۳۰۷۸ نامعلوم مستقل کو تفرق سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس ترکیب کو اگلے مثال میں استعمال کیا گیا ہے۔ اس کے علاوہ مختلف قیمتیں پر کرتے ہوئے بھی ان مستقل کو
۱۳۰۷۹ تلاش کیا جا سکتا ہے۔

۱۳۰۸۰ **مثال ۸.۲۳:** درج ذیل مساوات میں مستقل A ، B اور C تلاش کریں۔

$$\frac{x-1}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3}$$

۱۳۰۸۱ **حل**

۱۳۰۸۲ ہم پہلے نسب نما سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں:

$$x-1=A(x+1)^2+B(x+1)+C$$

۱۳۰۸۳ اس میں $x=-1$ پر کرنے سے $C=-2$ حاصل ہوتا ہے۔ اس کے بعد ہم دونوں اطراف کا تفرق لیتے ہیں:

$$1=2A(x+1)+B$$

۱۳۰۸۴ اس میں $x=-1$ پر کرنے سے $B=1$ ملتا ہے۔ مزید ایک مرتبہ تفرق لینے سے $0=2A$ یعنی $A=0$ ملتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{x-1}{(x+1)^3}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{2}{(x+1)^3}$$

۱۳۰۸۵ □

۱۳۰۸۶ بعض اوقات x کو چھوٹی قیمتیں، مثلاً $x=0,\mp 1,\mp 2,\cdots$، مختص کرنے سے A، B، C کے مساوات حاصل کر کے، باقی تراکیب سے
۱۳۰۸۷ زیادہ جلدی، مستقل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

۱۳۰۸۸ مثال ۸.۲۴: درج ذیل میں مستقل A، B اور C تلاش کریں۔

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}$$

۱۳۰۸۹ **حل**

۱۳۰۹۰ ہم نسب نما سے چھٹکارا حاصل کرتے ہیں۔

$$x^2+1=A(x-2)(x-3)+B(x-1)(x-3)+C(x-1)(x-2)$$

۱۳۰۹۱ اب باری باری $x=1,2,3$ پر کرتے ہوئے A,B,C تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
(1)^1+1&=A(-1)(-2)+B(0)+C(0) && x=1\\
2&=2A\\
A&=1\\
(2)^2+1&=A(0)+B(1)(-1)+C(0) && x=2\\
5&=-B\\
B&=-5\\
(3)^2+1&=A(0)+B(0)+C(2)(1) && x=3\\
10&=2C\\
C&=5
\end{aligned}$$

۱۳۰۹۲ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{x^2+1}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{1}{x-1} - \frac{5}{x-2} + \frac{5}{x-3}$$

۱۳۰۹۳ □

۱۳۰۹۴ **سوالات**

۱۳۰۹۵ **جزوی کسری مجموعہ**

۱۳۰۹۶ سوال ۸.۱۴۷ تا سوال ۸.۱۵۴ میں حاصل تقسیم کا جزوی کسری مجموعہ دریافت کریں۔

۱۳۰۹۷ سوال ۸.۱۴۷: $\frac{5x-13}{(x-3)(x-2)}$

۱۳۰۹۸ سوال ۸.۱۴۸: $\frac{5x-7}{x^2-3x+2}$

۱۳۰۹۹ سوال ۸.۱۴۹: $\frac{x+4}{(x+1)^2}$

۱۳۱۰۰ سوال ۸.۱۵۰: $\frac{2x+2}{x^2-2x+1}$

۱۳۱۰۱ سوال ۸.۱۵۱: $\frac{z+1}{z^2(z-1)}$

۱۳۱۰۲ سوال ۸.۱۵۲: $\frac{z}{z^3-z^2-6z}$

۱۳۱۰۳ سوال ۸.۱۵۳: $\frac{t^2+8}{t^2-5t+6}$

۱۳۱۰۴ سوال ۸.۱۵۴: $\frac{t^4+9}{t^4+9t^2}$

۱۳۱۰۵ **غیر دہراتے خطی جزو ضربی**

۱۳۱۰۶ سوال ۸.۱۵۵ تا سوال ۸.۱۶۲ میں متکمل کو جزوی کسری مجموعہ کی صورت میں لکھ کر تکمل حل کریں۔

۱۳۱۰۷ سوال ۸.۱۵۵: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$

۱۳۱۰۸ سوال ۸.۱۵۶: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x}$

۱۳۱۰۹ سوال ۸.۱۵۷: $\int \frac{x+4}{x^2+5x-6}\,\mathrm{d}x$

۱۳۱۱۰ سوال ۸.۱۵۸: $\int \frac{2x+1}{x^2-7x+12}\,\mathrm{d}x$

۱۳۱۱۱ سوال ۸.۱۵۹: $\int_4^8 \frac{y}{y^2-2y-3}\,\mathrm{d}y$

۱۳۱۱۲ سوال ۸.۱۶۰: $\int_{1/2}^1 \frac{y+4}{y^2+y}\,\mathrm{d}y$

۱۳۱۳ سوال ۸.۱۶۱: $\int \frac{\mathrm{d}t}{t^3+t^2-2t}$

۱۳۱۴ سوال ۸.۱۶۲: $\int \frac{x+3}{2x^3-8x}\,\mathrm{d}x$

۱۳۱۵ **دہراتے خطی جزو ضربی**

۱۳۱۶ سوال ۸.۱۶۳ تا سوال ۸.۱۶۶ میں متکمل کو جزوی کسی مجموعہ لکھ کر تکمل حل کریں۔

۱۳۱۷ سوال ۸.۱۶۳: $\int_0^1 \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^2+2x+1}$

۱۳۱۸ سوال ۸.۱۶۴: $\int_{-1}^0 \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^2-2x+1}$

۱۳۱۹ سوال ۸.۱۶۵: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^2}$

۱۳۲۰ سوال ۸.۱۶۶: $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+2x+1)}$

۱۳۲۱ **ناقابل تخفیف دو درجی جزو ضربی**

۱۳۲۲ سوال ۸.۱۶۷ تا سوال ۸.۱۷۴ میں متکمل کو جزوی کسری مجموعہ لکھ کر تکمل حل کریں۔

۱۳۲۳ سوال ۸.۱۶۷: $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$

۱۳۲۴ سوال ۸.۱۶۸: $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3t^2+t+4}{t^3+t}\,\mathrm{d}t$

۱۳۲۵ سوال ۸.۱۶۹: $\int \frac{y^2+2y+1}{(y^2+1)^2}\,\mathrm{d}y$

۱۳۲۶ سوال ۸.۱۷۰: $\int \frac{8x^2+8x+2}{(4x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

۱۳۲۷ سوال ۸.۱۷۱: $\int \frac{2s+2}{(s^2+1)(s-1)^3}\,\mathrm{d}s$

۱۳۲۸ سوال ۸.۱۷۲: $\int \frac{s^4+81}{s(s^2+9)^2}\,\mathrm{d}s$

۱۳۲۹ سوال ۸.۱۷۳: $\int \frac{2\theta^3+5\theta^2+8\theta+4}{(\theta^2+2\theta+2)^2}\,\mathrm{d}\theta$

۱۳۳۰ سوال ۸.۱۷۴: $\int \frac{\theta^4-4\theta^3+2\theta^2-3\theta+1}{(\theta^2+1)^3}\,\mathrm{d}\theta$

۱۳۳۱ **غیر مناسب کسر**

۱۳۳۲ سوال ۸.۱۷۵ تا سوال ۸.۱۸۰ میں قلم و کاغذ سے متکمل کو تقسیم کر کے مناسب کسر کو جزوی کسری مجموعہ لکھ کر تکمل حل کریں۔

۱۳۳۳ سوال ۸.۱۷۵: $\int \frac{2x^3-2x^2+1}{x^2-x}\,\mathrm{d}x$

۱۳۳۴ سوال ۸.۱۷۶: $\int \frac{x^4}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

۱۳۱۳۵ سوال ۸.۱۷۷: $\int \frac{9x^2-3x+1}{x^3-x^2}\,\mathrm{d}x$

۱۳۱۳۶ سوال ۸.۱۷۸: $\int \frac{16x^3}{4x^2-4x+1}\,\mathrm{d}x$

۱۳۱۳۷ سوال ۸.۱۷۹: $\int \frac{y^4+y^2-1}{y^3+y}\,\mathrm{d}y$

۱۳۱۳۸ سوال ۸.۱۸۰: $\int \frac{2y^4}{y^3-y^2+y-1}\,\mathrm{d}y$

۱۳۱۳۹ **تکمل کا حل**

۱۳۱۴۰ سوال ۸.۱۸۱ تا سوال ۸.۱۸۶ میں دیے گئے تکمل حل کریں۔

۱۳۱۴۱ سوال ۸.۱۸۱: $\int \frac{e^t\,\mathrm{d}t}{e^{2t}+3e^t+2}$

۱۳۱۴۲ سوال ۸.۱۸۲: $\int \frac{e^{4t}+2e^{2t}-e^t}{e^{2t}+1}\,\mathrm{d}t$

۱۳۱۴۳ سوال ۸.۱۸۳: $\int \frac{\cos y\,\mathrm{d}y}{\sin^2 y+\sin y-6}$

۱۳۱۴۴ سوال ۸.۱۸۴: $\int \frac{\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\cos^2\theta+\cos\theta-2}$

۱۳۱۴۵ سوال ۸.۱۸۵: $\int \frac{(x-2)^2\tan^{-1}(2x)-12x^3-3x}{(4x^2+1)(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$

۱۳۱۴۶ سوال ۸.۱۸۶: $\int \frac{(x+1)^2\tan^{-1}(3x)+9x^3+x}{(9x^2+1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

۱۳۱۴۷ **ابتدائی قیمت مسئلہ**

۱۳۱۴۸ سوال ۸.۱۸۷ تا سوال ۸.۱۹۰ میں ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہوئے t کے لحاظ سے x تلاش کریں۔

۱۳۱۴۹ سوال ۸.۱۸۷: $(t^2-3t+2)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1,\quad (t>2),\quad x(3)=0$

۱۳۱۵۰ سوال ۸.۱۸۸: $(3t^4+4t^2+1)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2\sqrt{3},\quad x(1)=-\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$

۱۳۱۵۱ سوال ۸.۱۸۹: $(t^2+2t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2x+2,\quad (t,x>0),\quad x(1)=1$

۱۳۱۵۲ سوال ۸.۱۹۰: $(t+1)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x^2+1,\quad (t>-1),\quad x(0)=\frac{\pi}{4}$

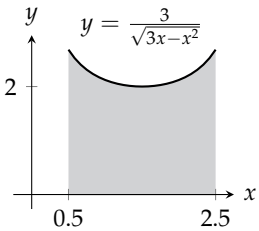
۱۳۱۵۳ **استعمال اور مثالیں**

۱۳۱۵۴ سوال ۸.۱۹۱ اور سوال ۸.۱۹۱ میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا گیا ہے۔

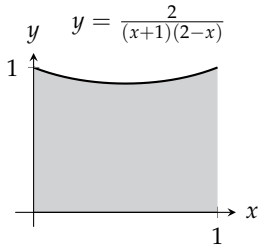
۱۳۱۵۵ سوال ۸.۱۹۱: سایہ دار خطہ شکل ۸.۵ میں دیا گیا ہے جس کو محور x کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

۱۳۱۵۶

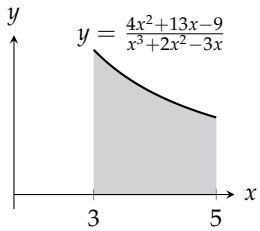
۱۳۱۵۷ سوال ۸.۱۹۲: سایہ دار خطہ شکل ۸.۶ میں دیا گیا ہے جس کو محور y کے گرد گھمایا جاتا ہے۔



شکل ۸.۵: سایہ دار خطہ برائے سوال ۸.۱۹۱



شکل ۸.۶: سایہ دار خطہ برائے سوال ۸.۱۹۲



شکل ۸.۷: سایہ دار خطہ برائے سوال ۸.۱۹۴

سوال ۸.۱۹۳: ربع اول میں منحنی $y = \tan^{-1} x$، محور x اور لکیر $x = \sqrt{3}$ کے بیچ خطہ کے وسطانی مرکز کا x محدد 2 اعشاریہ مقامات تک درستگی تک تلاش کریں۔

سوال ۸.۱۹۴: سایہ دار خطے (شکل ۸.۷) کے وسطانی مرکز کا 2 اعشاریہ مقامات تک درست x محدد تلاش کریں۔

سوال ۸.۱۹۵: افواہ

کسی بھی بڑی آبادی N میں اگر x افراد نے ایک افواہ سنی ہو تب شرح تبدیلی x اور ان افراد کی تعداد جنہوں نے افواہ نہ سنی ہو کے حاصل ضرب کا راست متناسب ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = kx(N-x)$$

فرض کریں t دنوں میں ہے، $N = 1000$ اور $k = \frac{1}{250}$ ہے۔ دو افراد ایک افواہ اڑاتے ہیں۔ (ا) متغیر t کے لحاظ سے تفاعل x تلاش کریں۔ (ب) کب آدھی آبادی افواہ سن چکی ہو گی؟ (یہ وہ وقت ہو گا جب افواہ زیادہ سے زیادہ تیزی سے پھیلے گی۔)

سوال ۸.۱۹۶: دور تبی کیمیائی عمل

بہت سارے کیمیائی اعمال میں دو مختلف قسم کے **سالمہ**[۷] ایک تبدیلی سے گزر کر ایک نیا مادہ پیدا کرتے ہیں۔ کیمیائی عمل کی رفتار کا دارومدار ان سالمہ کی ارتکاز پر ہوتا ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر مادہ A کا ارتکاز a اور مادہ B کا ارتکاز b ہو اور لمحہ t پر حاصل مادہ کی مقدار x ہو تب تفرقی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x)(b-x) \qquad k \text{ مستقل}$$

اس عمل کو ظاہر کرتی ہے جس کو

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k$$

لکھا جا سکتا ہے۔ دونوں اطراف کا تکمل لیتے ہوئے $t = 0$ پر $x = 0$، اور (ا) $a = b$، (ب) $a \neq b$ تصور کرتے ہوئے متغیر t کا تفاعل x دریافت کریں۔

---

[۷] molecule

سوال ۸.۱۹۷: ایک تکمل جو π اور $\frac{22}{7}$ کا تعلق دیتا ہے

(ا) تکمل $\int_0^1 \frac{x^4(x-1)^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔ (ب) تخمین $\pi \approx \frac{22}{7}$ کتنا درست ہے؟ $\pi - \frac{22}{7}$ کو π کا فی صد لکھیں۔ (ج) تفاعل $y = \frac{x^4(x-1)^4}{x^2+1}$ کو وقفہ $0 \le x \le 1$ کے لیے ترسیم کریں۔ محور y پر سعت پہلے 0 تا 1 لیں، بعد میں صفر تا 0.5 اور اس کے بعد مزید کم کریں حتٰی کہ ترسیم نظر آئے۔ آپ ترسیم کے نیچے رقبہ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

سوال ۸.۱۹۸: ایک ایسی دو درجی کثیر رکنی $P(x)$ جو $P(0) = 1$ اور $P'(0) = 0$ دیتی ہو اور جس کا تکمل

$$\int \frac{P(x)}{x^3(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

ناطق تفاعل ہو تلاش کریں۔

۸.۴ تکونیاتی بدل

ہم $a^2 + x^2$ ، $a^2 - x^2$ اور $x^2 - a^2$ میں تکونیاتی بدل پر کر کے ایک مربع جزو حاصل کرتے ہیں جو ایسے تکمل، جن میں ان کا جذر پایا جاتا ہو، کو سادہ صورت میں بدل دیتا ہے۔ ان سادہ تکمل کا حل نسبتاً آسان ہوتا ہے۔

تین بنیادی بدل

تین عمومی بدل $x = a\tan\theta$ ، $x = a\sin\theta$ اور $x = a\sec\theta$ ہیں جو شکل ۸.۸ میں قائمہ مثلثوں سے حاصل ہوتے ہیں۔

$x = a\tan\theta$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$a^2 + x^2 = a^2 + a^2\tan^2\theta = a^2(1+\tan^2\theta) = a^2\sec^2\theta \tag{ا}$$

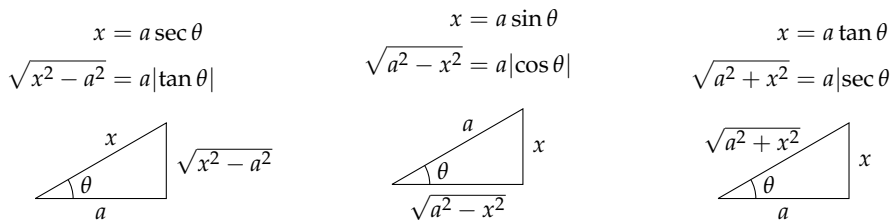
$x = a\sin\theta$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$a^2 - x^2 = a^2 - a^2\sin^2\theta = a^2(1-\sin^2\theta) = a^2\cos^2\theta \tag{۲}$$

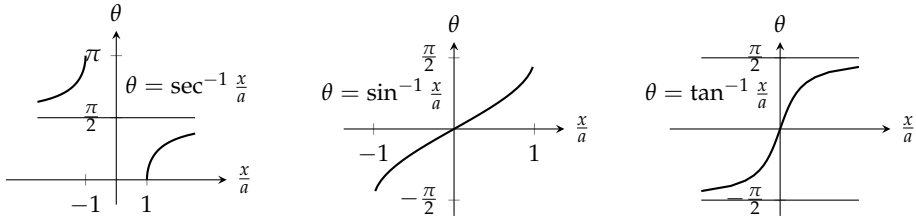
$x = a\sec\theta$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$x^2 - a^2 = a^2\sec^2\theta - a^2 = a^2(\sec^2\theta - 1) = a^2\tan^2\theta \tag{۳}$$

تکونیاتی بدل



شکل ۸.۸: تکونیاتی بدل کو حوالہ مثلث۔



شکل ۸.۹: الٹ تکونیاتی تفاعل کے ترسیمات۔

۱۳۱۹۰ ا. $x = a\tan\theta$ لے کر a^2+x^2 کی جگہ $a^2\sec^2\theta$ پر کریں۔

۱۳۱۹۱ ب. $x = a\sin\theta$ لے کر a^2-x^2 کی جگہ $a^2\cos^2\theta$ پر کریں۔

۱۳۱۹۲ ج. $x = a\sec\theta$ لے کر x^2-a^2 کی جگہ $a^2\tan^2\theta$ پر کریں۔

۱۳۱۹۳ ہم ایسا بدل استعمال کرنا چاہیں گے جو قابل واپسی ہو تاکہ آخری قدم پر اس کو واپس کرتے ہوئے اصل متغیرات میں نتیجہ لکھ سکیں۔ مثال کے طور پر اگر $x = a\tan\theta$ کی صورت میں ہم چاہیں گے کہ تکمل لینے کے بعد آخری قدم پر $\theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$ لکھنا ممکن ہو۔ اسی طرح $x = a\sin\theta$ کی
۱۳۱۹۴
۱۳۱۹۵ صورت میں ہم تکمل کے بعد $\theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ اور $x = a\sec\theta$ کے لیے $\theta = \sec^{-1}\frac{x}{a}$ پر کرنا چاہیں گے۔

۱۳۱۹۶ جیسا ہم حصہ ۸.۷ سے جانتے ہیں ان تفاعل کے الٹ صرف مخصوص وقفہ پر پائے جاتے ہیں (شکل ۸.۹)۔ الٹ کے لیے درج ذیل ضروری ہے۔

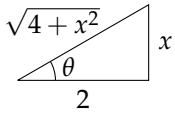
۱۳۱۹۷ ا. $x = a\tan\theta$ کا الٹ $\theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$ وقفہ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ پر ہوگا۔

۱۳۱۹۸ ب. $x = a\sin\theta$ کا الٹ $\theta = \sin^{-1}\frac{x}{a}$ وقفہ $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ پر ہوگا۔

۱۳۱۹۹ ج. $x = a\sec\theta$ کا الٹ $\theta = \sec^{-1}\frac{x}{a}$ وقفہ $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ پر $\frac{x}{a} \ge 1$ کی صورت میں اور وقفہ $\frac{\pi}{2} < \theta \le \pi$ پر
۱۳۲۰۰ $\frac{x}{a} \le -1$ کی صورت میں ہوگا۔

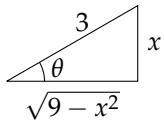
۱۳۲۰۱ حساب کتاب آسان بنانے کی خاطر ہم بدل $x = a\sec\theta$ کے استعمال کو ان تکمل تک پابند کرتے ہیں جن میں $\frac{x}{a} \ge 1$ ہو۔ اس طرح θ وقفہ

$\tan\theta = \frac{x}{2}$



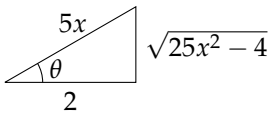
شکل ۸.۱۰: حوالہ مثلث برائے مثال ۸.۲۵

$\tan\sin = \frac{x}{3}$



شکل ۸.۱۱: حوالہ مثلث برائے مثال ۸.۲۶

$\sec\theta = \frac{5x}{2}$



شکل ۸.۱۲: حوالہ مثلث برائے مثال ۸.۲۷

۱۳۲۰۲ $[0, \frac{\pi}{2})$ میں ہوگا جہاں $\tan\theta \geq 0$ ہوگا۔ یوں $a > 0$ کی صورت میں

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = |a\tan\theta| = a\tan\theta$$

۱۳۲۰۳ ہوگا جو مطلق کی علامت سے آزاد ہے۔

۱۳۲۰۴ مثال ۸.۲۵: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^2}}$ حل کریں۔

۱۳۲۰۵ **حل**

۱۳۲۰۶ ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$x = 2\tan\theta, \quad \mathrm{d}x = 2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$
$$4 + x^2 = 4 + 4\tan^2\theta = 4(1+\tan^2\theta) = 4\sec^2\theta$$

۱۳۲۰۷ یوں

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^2}} &= \int \frac{2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{|\sec\theta|} && \sqrt{\sec^2\theta} = |\sec\theta| \\
&= \int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \\
&= \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C && \text{شکل ۸.۱۰} \\
&= \ln\left|\sqrt{4+x^2} + x\right| + C' && C' = C - \ln 2
\end{aligned}$$

۱۳۲۰۸ ہوگا۔ آپ اس پر دوبارہ نظر ڈالیں کہ ہم نے $\ln|\sec\theta + \tan\theta|$ کو x کی صورت میں کس طرح لکھا۔ ہم نے ابتدائی بدل $x = 2\tan\theta$

۱۳۲۰۹ کے لیے حوالہ مثلث (شکل ۸.۱۰) کا خاکہ بنایا اور اسی سے نسبتیں $\tan\theta = \frac{x}{2}$ اور $\sec\theta = \frac{\sqrt{4+x^2}}{2}$ پڑھیں۔ □

۱۳۲۱۰ مثال ۸.۲۶: تکمل $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$ حل کریں۔

۱۳۲۱۱ **حل**

۱۳۲۱۲ جزو $9 - x^2$ کی جگہ ایک مربع جزو پر کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$x = 3\sin\theta, \quad \mathrm{d}x = 3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$
$$9 - x^2 = 9(1 - \sin^2\theta) = 9\cos^2\theta$$

۱۳۲۱۳ یوں

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}} &= \int \frac{9\sin^2\theta \cdot 3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{|3\cos\theta|} \\
&= 9\int \sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta \\
&= 9\int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{9}{2}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) + C \\
&= \frac{9}{2}(\theta - \sin\theta\cos\theta) + C \\
&= \frac{9}{2}\left(\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{3}\cdot\frac{\sqrt{9-x^2}}{3}\right) + C \qquad \text{شکل ۸.۱۱} \\
&= \frac{9}{2}\sin^{-1}\frac{x}{3} - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C
\end{aligned}$$

۱۳۲۱۴ ہوگا۔ ہم نے بدل $\sin\theta = \frac{x}{3}$ کے حوالہ مثلث (شکل ۸.۱۱) سے نسبتیں $\sin\theta = \frac{x}{3}$ اور $\cos\theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$ پڑھیں۔ □

۱۳۲۱۵ مثال ۸.۲۷: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{25x^2-4}}$, $x > \frac{2}{5}$ حل کریں۔

۱۳۲۱۶ **حل**

۱۳۲۱۷ ہم جذر کو

$$\sqrt{25x^2-4} = \sqrt{25\left(x^2 - \frac{4}{25}\right)} = 5\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2}$$

۱۳۲۱۸ صورت میں لکھتے ہیں تاکہ یہ $x^2 - a^2$ روپ میں ہو۔ اس کے بعد درج ذیل بدل استعمال کرتے ہیں۔

$$x = \frac{2}{5}\sec\theta, \quad \mathrm{d}x = \frac{2}{5}\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$
$$x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}\sec^2\theta - \frac{4}{25} = \frac{4}{25}(\sec^2\theta - 1) = \frac{4}{25}\tan^2\theta$$
$$\sqrt{x^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2}{5}|\tan\theta| = \frac{2}{5}\tan\theta \qquad \tan\theta > 0,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

۱۳۲۱۹ یوں

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{25x^2-4}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{5\sqrt{x^2-(4/25)}} = \int \frac{(2/5)\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta}{5\cdot(2/5)\tan\theta}\\ &= \frac{1}{5}\int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{5}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C\\ &= \frac{1}{5}\ln\left|\frac{5x}{2}+\frac{\sqrt{25x^2-4}}{2}\right| + C\end{aligned}$$

۱۳۲۲۰ ہو گا۔ ہم نے بدل $\sec\theta = \frac{5x}{2}$ کے حوالہ مثلث (شکل ۸.۲۷) سے تکونیاتی نسبتیں پڑھیں۔ □

۱۳۲۲۱ بعض اوقات دو درجی جزو کے طاقت کا تکمل تکونیاتی بدل سے ممکن ہوتا ہے۔ آئیں اگلی مثال میں اس عمل کو دیکھیں۔

۱۳۲۲۲ مثال ۸.۲۸: منحنی $y = \frac{4}{x^2+4}$، محور x، لکیر $x = 0$ اور $x = 2$ کے بیچ خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل
۱۳۲۲۳ ۸.۱۳)۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

۱۳۲۲۴ **حل**

۱۳۲۲۵ ہم اس خطہ کو ترسیم کر کے ترکیب قرص (حصہ ۶.۳) سے حجم تلاش کرتے ہیں۔

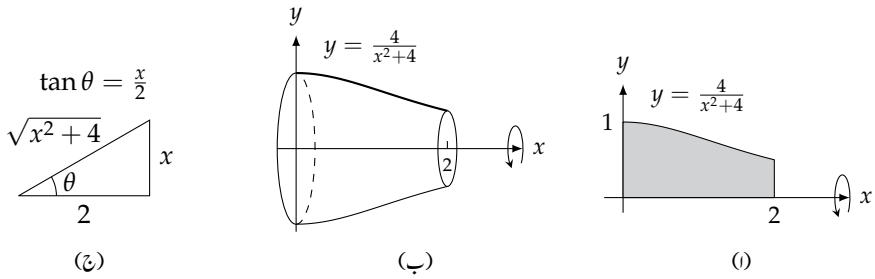
$$H = \int_0^2 \pi[R(x)]^2\,\mathrm{d}x = 16\pi\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2} \qquad R(x) = \frac{4}{x^2+4}$$

۱۳۲۲۶ اس تکمل کو حل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

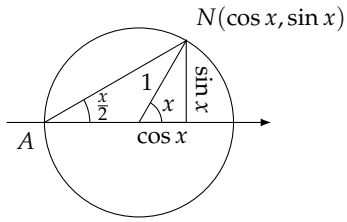
$$\begin{aligned} x = 2\tan\theta,\quad \mathrm{d}x = 2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta,\quad \theta = \tan^{-1}\frac{x}{2}\\ x^2+4 = 4\tan^2\theta+4,\quad 4(\tan^2\theta+1) = 4\sec^2\theta\end{aligned}$$

۱۳۲۲۷ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} H &= 16\pi\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4)^2}\\ &= 16\pi\int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{(4\sec^2\theta)^2}\\ &= 16\pi\int_0^{\pi/4} \frac{2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{16\sec^4\theta} = \pi\int_0^{\pi/4} 2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= \pi\int_0^{\pi/4}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \pi\left[\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/4}\\ &= \pi\left[\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right] \approx 4.04\end{aligned}$$



شکل ۸.۱۳: خطہ، جسم طواف اور حوالہ مثلث برائے مثال ۸.۲۸



شکل ۸.۱۴: ہم شکل سے $\tan\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ پڑھ سکتے ہیں۔

۱۳۲۲۸ □

۱۳۲۲۹ **بدل** $z = \tan(\frac{x}{2})$

۱۳۲۳۰ $\sin x$ اور $\cos x$ کے ناطق تفاعل کے تکمل کو درج ذیل بدل

$$z = \tan\frac{x}{2} \tag{۴}$$

۱۳۲۳۱ متغیر z کے ناطق تفاعل کے تکمل میں بدلتا ہے جس کو جزوی کسری مجموعہ لکھ کر حل کیا جا سکتا ہے۔ یوں مساوات ۴ کا بدل انتہائی طاقتور ثابت ہوتا ہے اگرچہ اس
۱۳۲۳۲ کا استعمال زیادہ آسان نہیں ہے اور صرف وہاں استعمال کیا جاتا ہے جب باقی تراکیب مددگار ثابت نہ ہوں۔

۱۳۲۳۳ $\sin x$ اور $\cos x$ کے ناطق تفاعل کو $\tan\frac{x}{2}$ کی صورت میں لکھنا شکل ۸.۱۴ میں دکھایا گیا ہے۔ درج ذیل کی مدد سے ہم بدل کے اثر کو دیکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{\sec^2\frac{x}{2}} - 1 \\
&= \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{2}{1+z^2} - 1 \\
\cos x &= \frac{1-z^2}{1+z^2}
\end{aligned} \tag{۵}$$

۱۳۲۳۴ اور

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}\\ &= 2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\sec^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \qquad (۶)\\ \sin x &= \frac{2z}{1+z^2}\end{aligned}$$

۱۳۲۳۵ اور

$$\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}z}{1+z^2} \qquad (۷)$$

۱۳۲۳۶ مثال ۸.۲۹:

(الف)
$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x} &= \int\frac{1+z^2}{2}\frac{2\,\mathrm{d}z}{1+z^2}\\ &= \int\mathrm{d}z = z+C\\ &= \tan\frac{x}{2}+C\end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x} &= \int\frac{1+z^2}{2+2z+2z^2}\frac{2\,\mathrm{d}z}{1+z^2}\\ &= \int\frac{\mathrm{d}z}{z^2+z+1} = \int\frac{\mathrm{d}z}{(z+1/2)^2+3/4}\\ &= \int\frac{\mathrm{d}u}{u^2+a^2}\\ &= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a}+C\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}+C\\ &= \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{1+2\tan(x/2)}{\sqrt{3}}+C\end{aligned}$$

۱۳۲۳۷ □

۱۳۲۳۸ **سوالات**

۱۳۲۳۹ **بنیادی تکونیاتی بدل**

۱۳۲۴۰ سوال ۸.۱۹۹ تا سوال ۸.۲۲۶ میں تکمل حل کریں۔

۱۳۲۲۱ سوال ۸.۱۹۹: $\int \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{9+y^2}}$

۱۳۲۲۲ سوال ۸.۲۰۰: $\int \frac{3\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1+9y^2}}$

۱۳۲۲۳ سوال ۸.۲۰۱: $\int_{-2}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{4+x^2}$

۱۳۲۲۴ سوال ۸.۲۰۲: $\int_{0}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{8+2x^2}$

۱۳۲۲۵ سوال ۸.۲۰۳: $\int_{0}^{3/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}}$

۱۳۲۲۶ سوال ۸.۲۰۴: $\int_{0}^{1/2\sqrt{2}} \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-4x^2}}$

۱۳۲۲۷ سوال ۸.۲۰۵: $\int \sqrt{25-t^2}\,\mathrm{d}t$

۱۳۲۲۸ سوال ۸.۲۰۶: $\int \sqrt{1-9t^2}\,\mathrm{d}t$

۱۳۲۲۹ سوال ۸.۲۰۷: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x^2-49}}, \quad x > \frac{7}{2}$

۱۳۲۵۰ سوال ۸.۲۰۸: $\int \frac{5\,\mathrm{d}x}{\sqrt{25x^2-9}}, \quad x > \frac{3}{5}$

۱۳۲۵۱ سوال ۸.۲۰۹: $\int \frac{\sqrt{y^2-49}}{y}\,\mathrm{d}y, \quad y > 7$

۱۳۲۵۲ سوال ۸.۲۱۰: $\int \frac{\sqrt{y^2-25}}{y^3}\,\mathrm{d}y, \quad y > 5$

۱۳۲۵۳ سوال ۸.۲۱۱: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$

۱۳۲۵۴ سوال ۸.۲۱۲: $\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^3\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1$

۱۳۲۵۵ سوال ۸.۲۱۳: $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+4}}$

۱۳۲۵۶ سوال ۸.۲۱۴: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

۱۳۲۵۷ سوال ۸.۲۱۵: $\int \frac{8\,\mathrm{d}w}{w^2\sqrt{4-w^2}}$

۱۳۲۵۸ سوال ۸.۲۱۶: $\int \frac{\sqrt{9-w^2}}{w^2}\,\mathrm{d}w$

۱۳۲۵۹ سوال ۸.۲۱۷: $\int_{0}^{\sqrt{3}/2} \frac{4x^2\,\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{3/2}}$

۱۳۲۶۰ سوال ۸.۲۱۸: $\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(4-x^2)^{3/2}}$

۱۳۲۶۱ سوال ۸.۲۱۹: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-1)^{3/2}}, \quad x > 1$

۱۳۲۶۲ سوال ۸.۲۲۰: $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2-1)^{5/2}}, \quad x > 1$

۱۳۲۶۳ سوال ۸.۲۲۱: $\int \frac{(1-x^2)^{3/2}}{x^6}\,\mathrm{d}x$

۱۳۲۶۴ سوال ۸.۲۲۲: $\int \frac{(1-x^2)^{1/2}}{x^4}\,\mathrm{d}x$

۱۳۲۶۵ سوال ۸.۲۲۳: $\int \frac{8\,\mathrm{d}x}{(4x^2+1)^2}$

۱۳۲۶۶ سوال ۸.۲۲۴: $\int \frac{6\,\mathrm{d}t}{(9t^2+1)^2}$

۱۳۲۶۷ سوال ۸.۲۲۵: $\int \frac{v^2\,\mathrm{d}v}{(1-v^2)^{5/2}}$

۱۳۲۶۸ سوال ۸.۲۲۶: $\int \frac{(1-r^2)^{5/2}}{r^8}\,\mathrm{d}r$

۱۳۲۶۹ موزوں بدل کے بعد تکونیاتی بدل استعمال کرتے ہوئے سوال ۸.۲۲۷ تا سوال ۸.۲۳۴ میں تکمل حل کریں۔

۱۳۲۷۰ سوال ۸.۲۲۷: $\int_0^{\ln 4} \frac{e^t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{e^{2t}+9}}$

۱۳۲۷۱ سوال ۸.۲۲۸: $\int_{\ln(3/4)}^{\ln(4/3)} \frac{e^t\,\mathrm{d}t}{(1+e^{2t})^{3/2}}$

۱۳۲۷۲ سوال ۸.۲۲۹: $\int_{1/12}^{1/4} \frac{2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t}+4t\sqrt{t}}$

۱۳۲۷۳ سوال ۸.۲۳۰: $\int_1^e \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{1+(\ln y)^2}}$

۱۳۲۷۴ سوال ۸.۲۳۱: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

۱۳۲۷۵ سوال ۸.۲۳۲: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$

۱۳۲۷۶ سوال ۸.۲۳۳: $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$

۱۳۲۷۷ سوال ۸.۲۳۴: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

۱۳۲۷۸ ابتدائی قیمت مسائل

۱۳۲۷۹ سوال ۸.۲۳۵ تا سوال ۸.۲۳۸ کے ابتدائی قیمت مسائل حل کرتے ہوئے y حاصل کریں۔

۱۳۲۸۰ سوال ۸.۲۳۵: $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{x^2-4}, \quad x \geq 2, \quad y(2) = 0$

۱۳۲۸۱ سوال ۸.۲۳۶: $\sqrt{x^2-9}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1, \quad x > 3, \quad y(5) = \ln 3$

۱۳۲۸۲ سوال ۸.۲۳۷: $(x^2+4)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3, \quad y(2) = 0$

۱۳۲۸۳ سوال ۸.۲۳۸: $(x^2+1)^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{x^2+1}, \quad y(0) = 1$

استعمال

سوال ۸.۲۳۹: ربع اول میں محددی محور اور منحنی $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$ کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۸.۲۴۰: ربع اول میں محددی محور، لکیر $x = 1$ اور منحنی $y = \frac{2}{1+x^2}$ کے بیچ خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

بدل $z = \tan(x/2)$

سوال ۸.۲۴۱ تا سوال ۸.۲۴۸ کو مساوات ۵ تا مساوات ۷ کی مدد سے حل کریں۔

سوال ۸.۲۴۱: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}$

سوال ۸.۲۴۲: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$

سوال ۸.۲۴۳: $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$

سوال ۸.۲۴۴: $\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-\cos x}$

سوال ۸.۲۴۵: $\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{2+\cos\theta}$

سوال ۸.۲۴۶: $\int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sin\theta\cos\theta+\sin\theta}$

سوال ۸.۲۴۷: $\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t-\cos t}$

سوال ۸.۲۴۸: $\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{1-\cos t}$

درج ذیل دو سوالات میں $z = \tan(\theta/2)$ پر کر کے حل کریں۔

سوال ۸.۲۴۹: $\int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta$

سوال ۸.۲۵۰: $\int \csc\theta\,\mathrm{d}\theta$

۸.۵ جدول تکمل اور کمپیوٹر

جیسا آپ جانتے ہیں تکمل کے بنیادی طریقے بدل اور تکمل بالحصص ہیں۔ ان طریقوں سے ہم انجانے تکمل کو جانے پہچانے تکمل میں بدلتے ہیں جس کو ہم حل کرنا جانتے ہیں یا جس کو جدول سے دیکھا جا سکتا ہے۔ ان جدول میں تکمل کہاں سے آتے ہیں؟ جدول میں تکمل بھی بدل یا تکمل بالحصص سے حاصل کیے گئے ہوتے ہیں۔ ہم ان تمام کو خود حاصل کر سکتے ہیں لیکن جدول ہمیں بار بار ایک ہی طرز کے تکمل حاصل کرنے سے چھٹکارا دیتا ہے۔ جب کوئی تکمل جدول میں پایا جاتا ہو یا الجبرا، تکونیات، بدل اور احصاء کے استعمال سے اس کو جدول میں درج کسی تکمل کی صورت میں لانا ممکن ہو، تب ہم تکمل کا حل جدول سے پڑھ سکتے ہیں۔ اس حصہ کی مثالوں اور سوالات میں کتاب کی آخر میں صفحہ ۷۳۹ پر تکملات کی جدول میں درج کلیات کو اخذ کرنا اور ان کا استعمال سکھایا جائے گا۔ یہاں استعمال پر زور دیا جائے گا۔ کتاب کے آخر میں کلیات کو مستقل a, b, c, m, n وغیرہ کی صورت میں لکھا گیا ہے۔ یہ مستقل عموماً حقیقی اعداد ہوں گے جو غیر عدد

صحیح ہو سکتے ہیں۔ جہاں ان مستقل پر شرائط مسلط ہو، وہاں اس کا ذکر کیا گیا ہے۔ مثال کے طور پر کلیہ ۵ میں $n \neq -1$ ہونا ضروری ہے جبکہ کلیہ ۱۱ میں $n \neq -2$ ہونا ضروری ہے۔

ان کلیات میں مستقل وہ قیمت اختیار نہیں کر سکتے ہیں جن کی وجہ سے صفر سے تقسیم کرنا پڑے یا منفی اعداد کا جفت جذر لینا پڑے۔ مثال کے طور پر کلیہ ۸ میں $a \neq 0$ ہو گا جبکہ کلیہ ۱۳-الف صرف اس صورت قابل استعمال ہو گا جب b منفی ہو۔

بہت سارے غیر قطعی تکمل کو کمپیوٹر کی مدد سے بھی حل کیا جا سکتا ہے جہاں تکمل کو کسی خاص صورت میں لکھنے کی ضرورت پیش نہیں آتی ہے۔ کمپیوٹر الجبرا پر اس حصہ کے آخر میں غور کیا جائے گا۔

جدول کی مدد سے تکمل

مثال ۸.۳۰: تکمل $\int x(2x+5)^{-1}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

حل

ہم کلیہ ۸ استعمال کرتے ہیں (نا کہ کلیہ ۷ جہاں $n \neq -1$ ہونا ضروری ہے۔)

$$\int x(ax+b)^{-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C$$

یوں $a = 2$ اور $b = 5$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\int x(2x+5)^{-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{5}{4}\ln|2x+5| + C$$

□

مثال ۸.۳۱: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x+4}}$ حل کریں۔

حل

ہم کلیہ ۱۳-ب استعمال کرتے ہیں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C \qquad \text{اگر } b > 0 \text{ ہو}$$

یوں $a = 2$ اور $b = 4$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x+4}} &= \frac{1}{\sqrt{4}}\ln\left|\frac{\sqrt{2x+4}-\sqrt{4}}{\sqrt{2x+4}+\sqrt{4}}\right| + C\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2x+4}-2}{\sqrt{2x+4}+2}\right| + C\end{aligned}$$

۱۳۳۲۶ کلیہ ۱۳-الف یہاں قابل استعمال نہیں ہوگا چونکہ اس میں $b < 0$ ضروری ہے، البتہ اگلی مثال میں یہ کارآمد ہوگا۔ □

۱۳۳۲۷ مثال ۸.۳۲: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x-4}}$ حل کریں۔

۱۳۳۲۸ **حل**

۱۳۳۲۹ ہم کلیہ ۱۳-الف استعمال کرتے ہیں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax-b}} = \frac{2}{\sqrt{b}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{ax-b}{b}} + C$$

۱۳۳۳۰ یوں $a = 2$ اور $b = 4$ لیتے ہوئے درج ذیل ہوگا۔

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x-4}} = \frac{2}{\sqrt{4}} \tan^{-1} \sqrt{\frac{2x-4}{4}} + C = \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$$

۱۳۳۳۱ □

۱۳۳۳۲ مثال ۸.۳۳: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{2x-4}}$ حل کریں۔

۱۳۳۳۳ **حل**

۱۳۳۳۴ ہم کلیہ ۱۵ سے شروع کرتے ہیں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b} \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} + C$$

۱۳۳۳۵ یوں $a = 2$ اور $b = -4$ لیتے ہوئے

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{2x-4}} = -\frac{\sqrt{2x-4}}{-4x} + \frac{2}{2\cdot 4} \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2x-4}} + C$$

۱۳۳۳۶ ملتا ہے۔ اب ہم کلیہ ۱۳-الف استعمال کرتے ہوئے دائیں ہاتھ تکمل حل کرتے ہیں (مثال ۸.۳۲ سے رجوع کریں):

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{2x-4}} = \frac{\sqrt{2x-4}}{4x} + \frac{1}{4} \tan^{-1} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C$$

۱۳۳۳۷ □

۱۳۳۳۸ مثال ۸.۳۴: تکمل $\int x \sin^{-1} x \, \mathrm{d}x$ حل کریں۔

۱۳۳۳۹ **حل**

۱۳۳۴۰ ہم کلیہ ۱۹۹ استعمال کرتے ہیں۔

$$\int x^n \sin^{-1} ax \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \sin^{-1} ax - \frac{a}{n+1} \int \frac{x^{n+1} \, dx}{\sqrt{1-a^2x^2}}, \quad n \neq -1$$

۱۳۳۴۱ یوں $n = 1$ اور $a = 1$ لے کر

$$\int x \sin^{-1} x \, dx = \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

۱۳۳۴۲ ہو گا۔ دائیں ہاتھ تکمل جدول میں کلیہ ۳۳ ہے:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx = \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} - \frac{1}{2} x \sqrt{a^2-x^2} + C$$

۱۳۳۴۳ اب $a = 1$ کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \frac{1}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$$

۱۳۳۴۴ یوں مجموعی حل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int x \sin^{-1} x \, dx &= \frac{x^2}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin^{-1} x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \right) + C' \\ &= \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} \right) \sin^{-1} x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} + C' \end{aligned}$$

۱۳۳۴۵ □

۱۳۳۴۶ **کلیات تخفیف**

۱۳۳۴۷ دہراتے ہوئے تکمل بالحصص میں درج ذیل صورت کے کلیات مددگار ثابت ہوتے ہیں جنہیں **کلیات تخفیف**[۸] کہتے ہیں۔

$$\int \tan^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x \, dx \tag{۱}$$

$$\int (\ln x)^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \tag{۲}$$

$$\begin{aligned} \int \sin^n x \cos^m x \, dx = &- \frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} \, dx \\ &+ \frac{n-1}{m+n} \int \sin^{n-2} x \cos^m x \, dx, \quad (n \neq -m) \end{aligned} \tag{۳}$$

---

[۸] reductionformulae

کلیات تخفیف کسی تفاعل کے طاقت کے تکمل کو اسی طرز کے تکمل جس میں تفاعل کی طاقت کم ہو سے تبدیل کرتا ہے۔ طاقت کی تخفیف کی وجہ سے انہیں کلیات تخفیف کہتے ہیں۔ کلیات تخفیف بار بار استعمال کرتے ہوئے آخر کار تکمل میں تفاعل کی طاقت اتنی کم ہو جاتی ہے کہ تکمل باآسانی حل ہوتا ہے۔

مثال ۸.۳۵: تکمل $\int \tan^5 x \, dx$ حل کریں۔

حل

ہم $n = 5$ لیتے ہوئے مساوات ۱ استعمال کرتے ہیں۔

$$\int \tan^5 x \, dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \int \tan^3 x \, dx$$

ہم $n = 3$ لیتے ہوئے مساوات ۱ دوبارہ استعمال کرتے ہیں۔

$$\int \tan^3 x \, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x - \int \tan x \, dx = \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln|\cos x| + C$$

یوں مکمل نتیجہ درج ذیل ہو گا۔

$$\int^5 x \, dx = \frac{1}{4} \tan^4 x - \frac{1}{2} \tan^2 x - \ln|\cos x| + C$$

□

کلیات تخفیف کو تکمل بالحصص سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مثال ۸.۳۶: کلیات تخفیف کا حصول

کسی بھی مثبت عدد صحیح n کے لیے درج ذیل کی تصدیق کریں۔

$$\int (\ln x)^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx$$

حل

ہم تکمل بالحصص کے کلیہ

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

میں

$$u = (\ln x)^n, \quad du = n(\ln x)^{n-1} \frac{dx}{x}, \quad dv = dx, \quad v = x$$

لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\int (\ln x)^n \, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} \, dx$$

۱۳۳۶۳ □

۱۳۳۶۴ بعض اوقات دو کلیات تخفیف کا استعمال ضروری ہو گا۔

۱۳۳۶۵ مثال ۸.۳۷: تکمل $\int \sin^2 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x$ حل کریں۔

۱۳۳۶۶ حل الف: ہم مساوات ۳ میں $n = 2$ اور $m = 3$ لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x &= -\frac{\sin x \cos^4 x}{2+3} + \frac{1}{2+3} \int \sin^0 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x \\ &= -\frac{\sin x \cos^4 x}{5} + \frac{1}{5} \int \cos^3 x \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

۱۳۳۶۷ ہم باقی تکمل کو کلیہ ۶۱ سے حل کر سکتے ہیں۔

$$\int \cos^n ax \, \mathrm{d}x = \frac{\cos^{n-1} ax \sin ax}{na} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax \, \mathrm{d}x$$

۱۳۳۶۸ یوں $n = 3$ اور $a = 1$ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \, \mathrm{d}x &= \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3} \int \cos x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3} \sin x + C\end{aligned}$$

۱۳۳۶۹ حاصل ہو گا۔ مجموعی نتیجہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x &= -\frac{\sin x \cos^4 x}{5} + \frac{1}{5}\left(\frac{\cos^2 x \sin x}{3} + \frac{2}{3} \sin x + C\right) \\ &= -\frac{\sin x \cos^4 x}{5} + \frac{\cos^2 x \sin x}{15} + \frac{2}{15} \sin x + C'\end{aligned}$$

۱۳۳۷۰ حل ب: مساوات ۳ جدول میں کلیہ ۶۸ ہے، مگر ہم کلیات تکمل کے جدول کا کلیہ ۶۹ بھی استعمال کر سکتے ہیں جس میں $a = 1$ لیتے ہوئے

$$\int \sin^n x \cos^m x \, \mathrm{d}x = \frac{\sin^{n+1} x \cos^{m-1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin^n x \cos^{m-2} x \, \mathrm{d}x$$

۱۳۳۷۱ لکھا جائے گا۔ اب $n = 2$ اور $m = 3$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x &= \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{5}\int \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{\sin^3 x}{3}\right) + C \\ &= \frac{\sin^3 x \cos^2 x}{5} + \frac{2}{15}\sin^3 x + C\end{aligned}$$

۱۳۳۷۲ آپ نے دیکھا کہ کلیہ ۶۹ زیادہ جلدی نتیجہ فراہم کرتا ہے۔ عموماً قبل از وقت یہ جاننا ممکن نہیں ہوتا ہے کہ کونسا کلیہ زیادہ جلدی نتیجہ دیگا۔ اس پر وقت ضائع نہ
۱۳۳۷۳ کریں۔ جو بھی کلیہ قابل استعمال نظر آئے، اس کو فوراً استعمال کریں۔

۱۳۳۷۴ آپ نے یہ بھی دیکھا ہو گا کہ کلیہ ۶۸ اور کلیہ ۶۹ کے نتائج مختلف نظر آتے ہیں۔ تکونیاتی تکمل میں عموماً ایسا ہی ہو گا۔ آپ فکر نہ کریں چونکہ ایسے نتائج در حقیقت
۱۳۳۷۵ بالکل ایک دوسرے جیسے ہوں گے۔ □

۱۳۳۷۶ غیر بنیادی تکمل

۱۳۳۷۷ وہ ضد تفرق جنہیں بنیادی تفاعل (وہ تفاعل جن پر اب تک غور کیا گیا) کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو **غیر بنیادی**[۹] تکمل کہلاتے ہیں۔ غیر بنیادی تکمل کا حل
۱۳۳۷۸ لا متناہی سلسلہ یا اعدادی تراکیب سے حاصل ہو گا۔ اعدادی تراکیب سے حل ہونے والے تکمل میں تفاعل خلل

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x e^{-t^2} \, \mathrm{d}t$$

۱۳۳۷۹ اور درج ذیل قسم کے تکمل شامل ہیں جو انجینئری اور طبیعیات میں پائے جاتے ہیں۔

$$\int \sin x^2 \, \mathrm{d}x, \quad \int \sqrt{1+x^4} \, \mathrm{d}x$$

۱۳۳۸۰ ان کے علاوہ

$$\int \frac{e^x}{x} \, \mathrm{d}x, \quad \int e^{(e^x)} \, \mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\ln x} \, \mathrm{d}x, \quad \int \ln(\ln x) \, \mathrm{d}x, \quad \int \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$$
$$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x} \, \mathrm{d}x, \quad 0 < k < 1$$

۱۳۳۸۱ بھی غیر بنیادی تکمل ہیں جو بظاہر سادہ نظر آتے ہیں۔ انہیں حل کرنے کی کشش کر کے دیکھیں۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ مختلف بنیادی تفاعل کو کسی طرح بھی
۱۳۳۸۲ آپس میں جوڑ کر غیر بنیادی تکمل کا حل نہیں لکھا جا سکتا ہے۔ وہ تکمل جن میں بدل پر کر کے غیر بنیادی تکمل میں تبدیل کرنا ممکن ہو کے لیے بھی یہی کچھ درست
۱۳۳۸۳ ہو گا۔ چونکہ یہ تمام مستکمل استراری ہیں لہٰذا ان کا ضد تفرق ضرور پایا جائے گا، لیکن یہ ضد تفرق غیر بنیادی ہوں گے۔

۱۳۳۸۴ اس باب میں آپ کو کہیں پر بھی غیر بنیادی تکمل حل کرنے کو نہیں کہا جائے گا البتہ حقیقی دنیا میں آپ کو ان سے واسطہ ضرور پڑے گا۔

---

[۹] nonelementary

۱۳۳۸۵ **سوالات**

۱۳۳۸۶ **جدول تکمل کا استعمال**

۱۳۳۸۷ کتاب کے آخر میں دیا گیا جدول تکمل استعمال کرتے ہوئے سوال ۸.۲۵۱ تا سوال ۸.۲۸۸ حل کریں۔

۱۳۳۸۸ سوال ۸.۲۵۱: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x-3}}$

۱۳۳۸۹ سوال ۸.۲۵۲: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+4}}$

۱۳۳۹۰ سوال ۸.۲۵۳: $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x-2}}$

۱۳۳۹۱ سوال ۸.۲۵۴: $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(2x+3)^{3/2}}$

۱۳۳۹۲ سوال ۸.۲۵۵: $\int x\sqrt{2x-3}\,\mathrm{d}x$

۱۳۳۹۳ سوال ۸.۲۵۶: $\int x(7x+5)^{3/2}\,\mathrm{d}x$

۱۳۳۹۴ سوال ۸.۲۵۷: $\int \frac{\sqrt{9-4x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

۱۳۳۹۵ سوال ۸.۲۵۸: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{4x-9}}$

۱۳۳۹۶ سوال ۸.۲۵۹: $\int x\sqrt{4x-x^2}\,\mathrm{d}x$

۱۳۳۹۷ سوال ۸.۲۶۰: $\int \frac{\sqrt{x-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۳۳۹۸ سوال ۸.۲۶۱: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{7+x^2}}$

۱۳۳۹۹ سوال ۸.۲۶۲: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{7-x^2}}$

۱۳۴۰۰ سوال ۸.۲۶۳: $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۰۱ سوال ۸.۲۶۴: $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۰۲ سوال ۸.۲۶۵: $\int \sqrt{25-p^2}\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۰۳ سوال ۸.۲۶۶: $\int q^2\sqrt{25-q^2}\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۰۴ سوال ۸.۲۶۷: $\int \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}}\,\mathrm{d}r$

۱۳۴۰۵ سوال ۸.۲۶۸: $\int \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{s^2-2}}$

۱۳۴۰۶ سوال ۸.۲۶۹: $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{5+4\sin 2\theta}$

۱۳۴۰۷ سوال ۸.۲۷۰: $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{4+5\sin 2\theta}$

۱۳۴۰۸ سوال ۸.۲۷۱: $\int e^{2t} \cos 3t \, \mathrm{d}t$

۱۳۴۰۹ سوال ۸.۲۷۲: $\int e^{-3t} \sin 4t \, \mathrm{d}t$

۱۳۴۱۰ سوال ۸.۲۷۳: $\int x \cos^{-1} x \, \mathrm{d}x$

۱۳۴۱۱ سوال ۸.۲۷۴: $\int x \sin^{-1} x \, \mathrm{d}x$

۱۳۴۱۲ سوال ۸.۲۷۵: $\int \frac{\mathrm{d}s}{(9-s^2)^2}$

۱۳۴۱۳ سوال ۸.۲۷۶: $\int \frac{\mathrm{d}\theta}{(2-\theta^2)^2}$

۱۳۴۱۴ سوال ۸.۲۷۷: $\int \frac{\sqrt{4x+9}}{x^2} \, \mathrm{d}x$

۱۳۴۱۵ سوال ۸.۲۷۸: $\int \frac{\sqrt{9x-4}}{x^2} \, \mathrm{d}x$

۱۳۴۱۶ سوال ۸.۲۷۹: $\int \frac{\sqrt{3t-4}}{t} \, \mathrm{d}t$

۱۳۴۱۷ سوال ۸.۲۸۰: $\int \frac{\sqrt{3t+9}}{t} \, \mathrm{d}t$

۱۳۴۱۸ سوال ۸.۲۸۱: $\int x^2 \tan^{-1} x \, \mathrm{d}x$

۱۳۴۱۹ سوال ۸.۲۸۲: $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2} \, \mathrm{d}x$

۱۳۴۲۰ سوال ۸.۲۸۳: $\int \sin 3x \cos 2x \, \mathrm{d}x$

۱۳۴۲۱ سوال ۸.۲۸۴: $\int \sin 2x \cos 3x \, \mathrm{d}x$

۱۳۴۲۲ سوال ۸.۲۸۵: $\int 8 \sin 4t \sin \frac{t}{2} \, \mathrm{d}t$

۱۳۴۲۳ سوال ۸.۲۸۶: $\int \sin \frac{t}{3} \sin \frac{t}{6} \, \mathrm{d}t$

۱۳۴۲۴ سوال ۸.۲۸۷: $\int \cos \frac{\theta}{3} \cos \frac{\theta}{4} \, \mathrm{d}\theta$

۱۳۴۲۵ سوال ۸.۲۸۸: $\int \cos \frac{\theta}{2} \cos 7\theta \, \mathrm{d}\theta$

۱۳۴۲۶

۱۳۴۲۷ **بدل اور جدول**

۱۳۴۲۸ سوال ۸.۲۸۹ تا سوال ۸.۳۰۲ میں بدل استعمال کر کے ایسا تکمل حاصل کریں جو جدول میں پایا جاتا ہو۔ اس نئے تکمل کو جدول کی مدد سے حل کریں۔

۱۳۴۲۹ سوال ۸.۲۸۹: $\int \frac{x^3+x+1}{(x^2+1)^2} \, \mathrm{d}x$

۱۳۴۳۰ سوال ۸.۲۹۰: $\int \frac{x^2+6x}{(x^2+3)^2} \, \mathrm{d}x$

۱۳۴۳۱ سوال ۸.۲۹۱: $\int \sin^{-1} \sqrt{x} \, \mathrm{d}x$

۱۳۴۳۲ سوال ۸.۲۹۲: $\int \frac{\cos^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

۱۳۴۳ سوال ۸.۲۹۳: $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۴ سوال ۸.۲۹۴: $\int \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۵ سوال ۸.۲۹۵: $\int \cot t\sqrt{1-\sin^2 t}\,\mathrm{d}t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$

۱۳۴۶ سوال ۸.۲۹۶: $\int \frac{\mathrm{d}t}{\tan t\sqrt{4-\sin^2 t}}$

۱۳۴۷ سوال ۸.۲۹۷: $\int \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{3+(\ln y)^2}}$

۱۳۴۸ سوال ۸.۲۹۸: $\int \frac{\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{5+\sin^2\theta}}$

۱۳۴۹ سوال ۸.۲۹۹: $\int \frac{3\,\mathrm{d}r}{\sqrt{9r^2-1}}$

۱۳۵۰ سوال ۸.۳۰۰: $\int \frac{3\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1+9y^2}}$

۱۳۵۱ سوال ۸.۳۰۱: $\int \cos^{-1}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

۱۳۵۲ سوال ۸.۳۰۲: $\int \tan^{-1}\sqrt{y}\,\mathrm{d}y$

۱۳۵۳

۱۳۵۴ **کلیات تخفیف کا استعمال**

۱۳۵۵ سوال ۸.۳۰۳ تا سوال ۸.۳۲۲ کو کلیات تخفیف کی مدد سے حل کریں۔

۱۳۵۶ سوال ۸.۳۰۳: $\int \sin^5 2x\,\mathrm{d}x$

۱۳۵۷ سوال ۸.۳۰۴: $\int \sin^5 \frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta$

۱۳۵۸ سوال ۸.۳۰۵: $\int 8\cos^4 2\pi t\,\mathrm{d}t$

۱۳۵۹ سوال ۸.۳۰۶: $\int 3\cos^5 3y\,\mathrm{d}y$

۱۳۶۰ سوال ۸.۳۰۷: $\int \sin^2 2\theta\cos^3 2\theta\,\mathrm{d}\theta$

۱۳۶۱ سوال ۸.۳۰۸: $\int 9\sin^3\theta\cos^{3/2}\theta\,\mathrm{d}\theta$

۱۳۶۲ سوال ۸.۳۰۹: $\int 2\sin^2 t\sec^4 t\,\mathrm{d}t$

۱۳۶۳ سوال ۸.۳۱۰: $\int \csc^2 y\cos^5 y\,\mathrm{d}y$

۱۳۶۴ سوال ۸.۳۱۱: $\int 4\tan^3 2x\,\mathrm{d}x$

۱۳۶۵ سوال ۸.۳۱۲: $\int \tan^4(x/2)\,\mathrm{d}x$

۱۳۶۶ سوال ۸.۳۱۳: $\int 8\cot^4 t\,\mathrm{d}t$

۱۳۴۵۷ سوال ۸.۳۱۴: $\int 4\cot^3 2t\,\mathrm{d}t$

۱۳۴۵۸ سوال ۸.۳۱۵: $\int 2\sec^3 \pi x\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۵۹ سوال ۸.۳۱۶: $\int \frac{1}{2}\csc^3 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۶۰ سوال ۸.۳۱۷: $\int 3\sec^4 3x\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۶۱ سوال ۸.۳۱۸: $\csc^4 \frac{\theta}{3}\,\mathrm{d}\theta$

۱۳۴۶۲ سوال ۸.۳۱۹: $\int \csc^5 x\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۶۳ سوال ۸.۳۲۰: $\int \sec^5 x\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۶۴ سوال ۸.۳۲۱: $\int 16x^3(\ln x)^2\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۶۵ سوال ۸.۳۲۲: $\int (\ln x)^3\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۶۶

۱۳۴۶۷ **قوت نما ضرب x کے طاقت**

۱۳۴۶۸ سوال ۸.۳۲۳ تا سوال ۸.۳۳۰ کو جدول کے کلیات 103 تا 106 کی مدد سے حل کریں۔

۱۳۴۶۹ سوال ۸.۳۲۳: $\int xe^{3x}\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۷۰ سوال ۸.۳۲۴: $\int xe^{-2x}\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۷۱ سوال ۸.۳۲۵: $\int x^3e^{x/2}\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۷۲ سوال ۸.۳۲۶: $\int x^2e^{\pi x}\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۷۳ سوال ۸.۳۲۷: $\int x^2 2^x\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۷۴ سوال ۸.۳۲۸: $\int x^2 2^{-x}\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۷۵ سوال ۸.۳۲۹: $\int x\pi^x\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۷۶ سوال ۸.۳۳۰: $\int x2^{\sqrt{2}x}\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۷۷ **بدل اور کلیات تخفیف**

۱۳۴۷۸ سوال ۸.۳۳۱ تا سوال ۸.۳۳۶ میں بدل (ممکنہ تکونیاتی) کے بعد کلیات تخفیف استعمال کرتے ہوئے تکمل حل کریں۔

۱۳۴۷۹ سوال ۸.۳۳۱: $\int e^t\sec^3(e^t-1)\,\mathrm{d}t$

۱۳۴۸۰ سوال ۸.۳۳۲: $\int \frac{\csc^3\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}}\,\mathrm{d}\theta$

۱۳۴۸۱ سوال ۸.۳۳۳: $\int_0^1 2\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۸۲ سوال ۸.۳۳۴: $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\mathrm{d}y}{(1-y^2)^{5/2}}$

۱۳۴۸۳ سوال ۸.۳۳۵: $\int_1^2 \frac{(r^2-1)^{3/2}}{r}\,\mathrm{d}r$

۱۳۴۸۴ سوال ۸.۳۳۶: $\int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^{7/2}}$

۱۳۴۸۵ **ہذلولی تفاعل**

۱۳۴۸۶ سوال ۸.۳۳۷ تا سوال ۸.۳۴۲ کو جدول تکمل کی مدد سے حل کریں۔

۱۳۴۸۷ سوال ۸.۳۳۷: $\int \frac{1}{8}\sinh^5 3x\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۸۸ سوال ۸.۳۳۸: $\int \frac{\cosh^4\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۸۹ سوال ۸.۳۳۹: $\int x^2\cosh 3x\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۹۰ سوال ۸.۳۴۰: $\int x\sinh 5x\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۹۱ سوال ۸.۳۴۱: $\int \operatorname{sech}^7 x\tanh x\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۹۲ سوال ۸.۳۴۲: $\int \operatorname{csch}^3 2x\coth 2x\,\mathrm{d}x$

۱۳۴۹۳ **نظریہ اور مثالیں**

۱۳۴۹۴ سوال ۸.۳۴۳ تا سوال ۸.۳۵۰ میں کتاب کے آخر میں جدول تکمل کے کلیات اخذ کرنے کو کہا گیا ہے۔

۱۳۴۹۵ سوال ۸.۳۴۳: بدل $u = ax + b$ پر کرتے ہوئے کلیہ 9 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int \frac{x}{(ax+b)^2}\,\mathrm{d}x$$

۱۳۴۹۶ سوال ۸.۳۴۴: تکونیاتی بدل پر کرتے ہوئے کلیہ 17 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2}$$

۱۳۴۹۷ سوال ۸.۳۴۵: تکونیاتی بدل پر کرتے ہوئے کلیہ 29 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$$

۱۳۴۹۸ سوال ۸.۳۴۶: تکونیاتی بدل پر کرتے ہوئے کلیہ 46 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$$

۱۳۴۹۹ سوال ۸.۳۴۷: درج ذیل کو تکمل بالحصص کی مدد سے حل کرتے ہوئے کلیہ 80 اخذ کریں۔

$$\int x^n \sin ax \, \mathrm{d}x$$

۱۳۵۰۰ سوال ۸.۳۴۸: تکونیاتی بدل پر کرتے ہوئے کلیہ 110 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int x^n (\ln ax)^m \, \mathrm{d}x$$

۱۳۵۰۱ سوال ۸.۳۴۹: تکونیاتی بدل پر کرتے ہوئے کلیہ 99 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int x^n \sin^{-1} ax \, \mathrm{d}x$$

۱۳۵۰۲ سوال ۸.۳۵۰: تکونیاتی بدل پر کرتے ہوئے کلیہ 101 اخذ کرتے ہوئے درج ذیل تکمل حل کریں۔

$$\int x^n \tan^{-1} ax \, \mathrm{d}x$$

۱۳۵۰۳ سوال ۸.۳۵۱: منحنی $y = \sqrt{x^2+2},\ 0 \leq x \leq \sqrt{2}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش
۱۳۵۰۴ کریں۔

۱۳۵۰۵ سوال ۸.۳۵۲: منحنی $y = x^2,\ 0 \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ کی لمبائی تلاش کریں۔

۱۳۵۰۶ سوال ۸.۳۵۳: ربع اول میں لکیر $x = 3$ اور منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ایک خطہ گھیرتے ہیں۔ اس خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

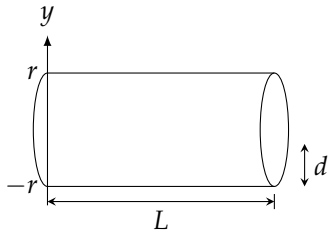
۱۳۵۰۷ سوال ۸.۳۵۴: ربع اول میں لکیر $x = 3$ اور منحنی $y = \frac{36}{2x+3}$ کے بیچ مستقل کثافت $\delta = 1$ کی چادر پائی جاتی ہے۔ محور y کے لحاظ سے
۱۳۵۰۸ اس خطے کا معیار اثر تلاش کریں۔

۱۳۵۰۹ سوال ۸.۳۵۵: محور x کے گرد منحنی $y = x^2,\ -1 \leq x \leq 1$ گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جدول تکمل اور کیلکولیٹر کی مدد سے اس کا
۱۳۵۱۰ رقبہ 2 اعشاریہ مقامات تک درستگی تک تلاش کریں۔

۱۳۵۱۱ سوال ۸.۳۵۶: ایک افقی دائری حوض کا رداس r سنٹی میٹر اور لمبائی L سنٹی میٹر ہے۔ اس میں تیل کی گہرائی d سنٹی میٹر ہے (شکل ۸.۱۵)۔ (ا)
۱۳۵۱۲ دکھائیں کہ تیل کا حجم درج ذیل ہے۔

$$H = 2L \int_{-r}^{-r+d} \sqrt{r^2 - y^2} \, \mathrm{d}y$$

۱۳۵۱۳ (ب) اس تکمل کو حل کریں۔



شکل ۸.۱۵: تیل کا حوض (سوال ۸.۳۵۶)

سوال ۸.۳۵۷: کسی بھی a اور b کے لیے $\int_a^b \sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۸.۳۵۸: کسی بھی a اور b کے لیے $\int_a^b x\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر الجبرائی نظام

کمپیوٹر میں الجبرا کے کئی پروگرام پائے جاتے ہیں۔ ان میں سے ایک پروگرام **میکسما**[10] کہلاتا ہے جو نہایت طاقتور پروگرام ہے۔ متغیر x کے تفاعل $f(x)$ کا غیر قطعی تکمل حاصل کرنے کے لیے میکسما میں $integrate(f,x)$ لکھنا ہو گا۔ اسی طرح a تا b قطعی تکمل کے لیے $integrate(f,x,a,b)$ لکھنا ہو گا۔ میکسما یا الجبرا کے کسی دوسرے پروگرام کو سیکھ کر اس کی مدد سوال ۸.۳۵۹ اور سوال ۸.۳۶۰ کو حل کریں۔

سوال ۸.۳۵۹:

ا. $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$

ب. $\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x$

ج. $\int x^3\ln x\,\mathrm{d}x$

د. آپ کو کیا نقش نظر آتا ہے؟ تکمل $\int x^4\ln x\,\mathrm{d}x$ کے کلیہ کی پیش گوئی کریں۔ کمپیوٹر سے اس کی تصدیق کریں۔

ھ. تکمل $\int x^n\ln x\,\mathrm{d}x,\ n\geq 1$ کا کلیہ کیا ہو گا؟ کمپیوٹر سے اس کی تصدیق کریں۔

سوال ۸.۳۶۰:

ا. $\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

ب. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,\mathrm{d}x$

ج. $\int \frac{\ln x}{x^4}\,\mathrm{d}x$

د. آپ کو کیا نقش نظر آتا ہے؟ تکمل $\int \frac{\ln x}{x^5}\,\mathrm{d}x$ کے کلیہ کی پیش گوئی کریں۔ کمپیوٹر سے اس کی تصدیق کریں۔

ھ. تکمل $\int \frac{\ln x}{x^n}\,\mathrm{d}x,\ n\geq 2$ کا کلیہ کیا ہو گا؟ کمپیوٹر سے اس کی تصدیق کریں۔

---

[10] maxima

سوال ۸.۳۶۱: (ا) درج ذیل تکمل کو کمپیوٹر کی مدد سے حل کریں، جہاں n اختیاری مستقل ہے۔

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\,\mathrm{d}x$$

کیا آپ کا کمپیوٹر پروگرام اس کو حل کر پاتا ہے؟ (ب) اختیاری مستقل $n = 1, 2, 3, 5, 7$ لیتے ہوئے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ نتائج کی پیچیدگی پر تبصرہ کریں۔ (ج) اب $x = \frac{\pi}{2} - u$ پر کر کے نئے اور پرانے تکمل کا مجموعہ لیں۔ اب درج ذیل تکمل کی قیمت کیا ہے؟

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}\,\mathrm{d}x$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ معمولی سی ریاضیاتی عمل سے تکمل کتنا آسان ہو سکتا ہے۔

۸.۶ غیر مناسب تکمل

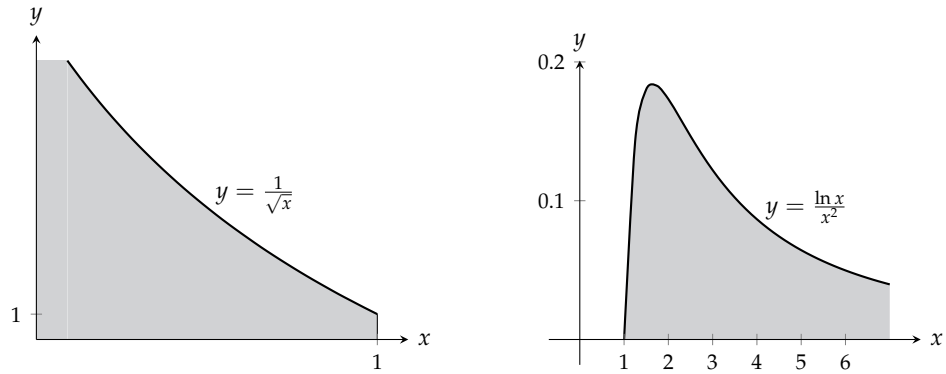
اب تک قطعی تکمل پر ہم دو شرائط لاگو کرتے آ رہے ہیں۔ پہلی شرط میں تکمل کا دائرہ کار a تا b کا متناہی ہونا لازمی تھا۔ دوسری شرط میں متکمل کا سعت متناہی ہونا ضروری تھا۔ حقیقت میں ہمیں عموماً ایسی صورت سے واسطہ پڑتا ہے جہاں ان میں سے ایک شرط یا دونوں شرائط مطمئن نہ ہوتے ہوں۔ زیر منحنی $y = \frac{\ln x}{x^2}$ وقفہ $x = 1$ تا $x = \infty$ رقبہ، لا متناہی دائرہ کار کی مثال ہے (شکل ۸.۱۶-الف)۔ اسی طرح زیر منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ وقفہ $x = 0$ تا $x = 1$ رقبہ، لا متناہی سعت کی مثال ہے (شکل ۸.۱۶-ب)۔ ہم دونوں مثالوں پر ایک ہی طرح غور کرتے ہیں۔ ہم پوچھتے ہیں کہ دائرہ کار ذرہ کم کرنے سے تکمل کتنا ہو گا اور اس کے بعد دائرہ کار کو لا متناہی تک پہنچاتے ہوئے تکمل کی حد تلاش کرتے ہیں۔ اسی طرح ہم متکمل کو متناہی رکھتے ہوئے تکمل دریافت کر کے متکمل کو لا متناہی تک پہنچاتے ہوئے تکمل کی حد تلاش کرتے ہیں۔

مثال ۸.۳۸: کیا $x = 1$ تا $x = \infty$ منحنی $y = \frac{\ln x}{x^2}$ کے نیچے رقبہ متناہی ہے؟ ایسا ہونے کی صورت میں اس کی قیمت تلاش کریں۔

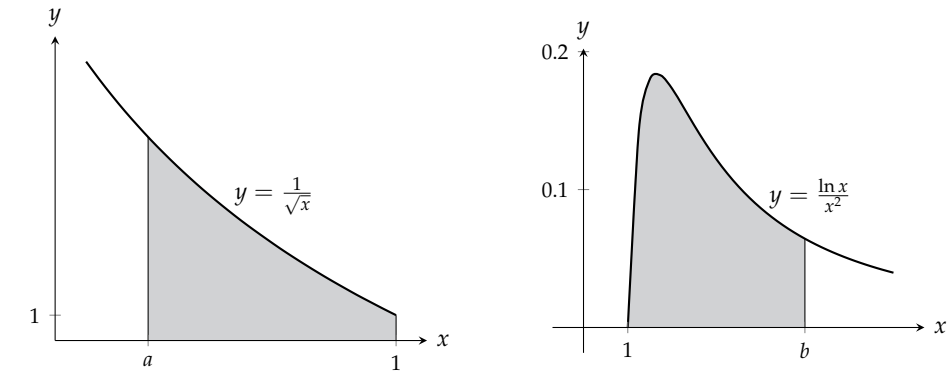
حل

ہم $x = 1$ تا $x = b$ اس منحنی کے نیچے رقبہ تلاش کر کے $b \to \infty$ کی صورت میں رقبے کی حد تلاش کرتے ہیں۔ اگر حد متناہی ہو، ہم اس کو لا متناہی منحنی کے نیچے رقبہ تصور کرتے ہیں (شکل ۸.۱۷)۔ آئیں $x = 1$ تا $x = b$ رقبہ تلاش کریں۔

$$\begin{aligned}
\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \left[(\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)\right]_1^b - \int_1^b \left(-\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\ln b}{b} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^b \\
&= -\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1
\end{aligned}$$



شکل ۸.۱۶: کیا ان منحنیات کے نیچے رقبے متناہی ہیں؟



شکل ۸.۱۷: زیر منحنی رقبہ (مثال ۸.۳۸)

شکل ۸.۱۸: زیر منحنی رقبہ (مثال ۸.۳۹)

۱۳۵۵۸ بالائی حد $b \to \infty$ کرتے ہوئے رقبے کی حد تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{\ln b}{b}-\frac{1}{b}+1\right] &= -\left[\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b}\right]-0+1\\ &= -\left[\lim_{b\to\infty}\frac{1/b}{1}\right]+1=0+1=1 \qquad \text{قاعدہ لھوپیٹال}\end{aligned}$$

۱۳۵۵۹ یوں تکملی اظہار میں $x=1$ تا $x=\infty$ زیر منحنی رقبہ درج ذیل ہوگا۔

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$$

۱۳۵۶۰ □

۱۳۵۶۱ مثال ۸.۳۹: کیا $x=0$ تا $x=1$ زیر منحنی $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ رقبہ متناہی ہے؟ اگر ایسا ہو تب رقبہ کتنا ہوگا؟

۱۳۵۶۲ **حل**

۱۳۵۶۳ ہم $x=a$ تا $x=1$ رقبہ تلاش کرکے $a\to 0^+$ کی صورت میں رقبے کی حد پر نظر ڈالتے ہیں۔ اگر یہ حد متناہی ہو تب ہم اس کو 0 تا 1 زیر
۱۳۵۶۴ منحنی رقبہ مانتے ہیں (شکل ۸.۱۸)۔

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = 2-2\sqrt{a}$$

۱۳۵۶۵ اب $a\to 0^+$ کرتے ہوئے رقبے کی حد تلاش کرتے ہیں۔

$$\lim_{a\to 0^+}(2-2\sqrt{a}) = 2-0=2$$

۱۳۵۶۶ یوں تکملی اظہار میں 0 تا 1 زیر منحنی رقبہ درج ذیل ہوگا۔

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2$$

۱۳۵۶۷ □

۱۳۵۶۸ **غیر مناسب تکمل**

۱۳۵۶۹ مثال ۸.۳۸ اور مثال ۸.۳۹ میں تکمل غیر مناسب ہیں۔

۱۳۵۷۰ تعریف: وہ تکمل جن کی حدیں لا متناہی ہوں اور وہ تکمل جن کے متکمل وقفہ تکمل کے کسی نقطہ پر لا متناہی قیمت رکھتا ہو **غیر مناسب تکمل** کہلاتے ہیں۔
۱۳۵۷۱ اگر تکمل کی حد موجود ہو تب اس حد کو درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جاتا ہے۔

۱۳۵۷۲ ا. اگر وقفہ $[a,\infty)$ پر f استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{۱}$$

۱۳۵۷۳ ب. اگر وقفہ $(-\infty,b]$ پر f استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{۲}$$

۱۳۵۷۴ ج. اگر وقفہ $(a,b]$ پر f استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{۳}$$

۱۳۵۷۵ د. اگر وقفہ $[a,b)$ پر f استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \tag{۴}$$

۱۳۵۷۶ اگر تکمل کی حد متناہی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ یہ غیر مناسب تکمل **مرتکز** ہے اور تکمل کی حدوں کو اس غیر مناسب تکمل کی قیمت تصور کرتے ہیں۔ اگر تکمل کی حد
۱۳۵۷۷ غیر موجود ہو تب ہم کہتے ہیں کہ یہ غیر مناسب تکمل **منفرج** ہے۔

۱۳۵۷۸ □

۱۳۵۷۹ تعریف کی پہلی شق مثال ۸.۳۸ میں نظر آتی ہے:

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 \qquad \text{بالائی حد لا متناہی ہے}$$

۱۳۵۸۰ تعریف کی تیسری شق مثال ۸.۳۹ میں نظر آتی ہے:

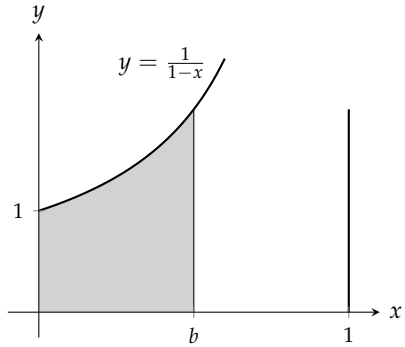
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2 \qquad \text{تکمل کے زیریں حد پر متکمل لا متناہی ہے}$$

۱۳۵۸۱ مذکورہ بالا دونوں صورتوں میں تکمل کی حد متناہی ہے۔ اگلی مثال میں تکمل منفرج ہے۔

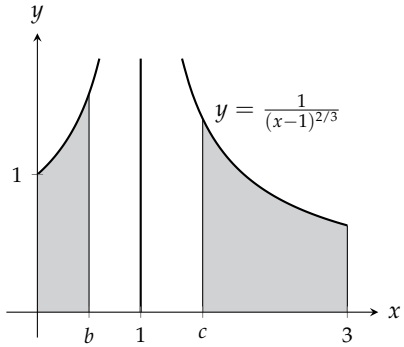
۱۳۵۸۲ مثال ۸.۴۰: منفرج غیر مناسب تکمل

۱۳۵۸۳ درج ذیل تکمل کی مرکوزیت پر غور کریں۔

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$$



شکل ۸.۱۹: غیر مناسب منفرج تکمل (مثال ۸.۴۰)



شکل ۸.۲۰: اندرون نقطہ پر لامتناہی متکمل (مثال ۸.۴۱)

۱۳۵۸۴ **حل**

۱۳۵۸۵ وقفہ $[0,1)$ پر متکمل $f(x) = \frac{1}{1-x}$ استمراری ہے لیکن $a \to 1^-$ کرنے سے یہ لامتناہی ہوتا ہے (شکل ۸.۱۹)۔ ہم تکمل کی قیمت حاصل
۱۳۵۸۶ کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to 1^-}\Big[-\ln|1-x|\Big]_0^b\\ &= \lim_{b\to 1^-}[-\ln(1-b)+0] = \infty\end{aligned}$$

۱۳۵۸۷ تکمل کی حد لامتناہی ہے لہٰذا یہ منفرج تکمل ہے۔ □

۱۳۵۸۸ مذکورہ بالا تعریف کو وسعت دیتے ہوئے ان تکمل جن کے زیریں اور بالائی حدود دونوں لامتناہی ہوں پر لاگو کیا جاتا ہے۔ ہم ان پر اسی حصے میں بعد میں غور کریں
۱۳۵۸۹ گے۔ وقفہ تکمل کے اندر نقطہ d پر لامتناہی متکمل کی صورت پر بھی یہ تعریف لاگو کی جاتی ہے۔ ہم ایسے تکمل کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے a تا b
۱۳۵۹۰ تکمل کو a تا d تکمل اور d تا b تکمل کا مجموعہ لیتے ہیں۔

۱۳۵۹۱ تعریف: اگر وقفہ $[a,b]$ کے اندرون کسی نقطہ d پر متکمل f کی قیمت لامتناہی ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^d f(x)\,\mathrm{d}x + \int_d^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{۵}$$

۱۳۵۹۲ اگر a تا d اور d تا b تکمل مرتکز ہوں تب a تا b تکمل **مرتکز** ہوگا ورنہ a تا b تکمل **منفرج** ہوگا۔

۱۳۵۹۳ □

مثال ۸.۴۱: اندرونی نقطہ پر لاتناہی

درج ذیل تکمل کی مرکوزیت پر غور کریں۔

$$\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}}$$

حل

متکمل $f(x) = \frac{1}{(x-1)^{2/3}}$ نقطہ $x = 1$ پر لاتناہی ہے جبکہ وقفہ $[0,1)$ اور $(1,3]$ پر یہ استمراری ہے (شکل ۸.۲۰)۔ وقفہ $[0,3]$ پر تکمل کی مرکوزیت وقفہ 0 تا 1 اور وقفہ 1 تا 3 پر تکمل کی مرکوزیت پر منحصر ہے۔ وقفہ $[0,1]$ پر

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}} \\ &= \lim_{b\to 1^-} [3(b-1)^{1/3} - 3(0-1)^{1/3}] = 3\end{aligned}$$

اور وقفہ $[1,3]$ پر

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}} &= \lim_{c\to 1^+} \int_c^3 \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^{2/3}} \\ &= \lim_{c\to 1^+} [3(3-1)^{1/3} - 3(c-1)^{1/3}] = 3\sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

ہوگا۔ دونوں حد متناہی ہیں لہٰذا وقفہ 0 تا 3 تفاعل f کا تکمل مرتکز ہوگا اور اس کی قیمت $3 + 3\sqrt[3]{2}$ ہوگی۔ □

مثال ۸.۴۲: محور x کے عمودی ایک بگل کا رقبہ عمودی تراش دائری قرص ہیں جن کے قطر وقفہ $-\infty < x \leq \ln 2$ پر محور x سے منحنی $y = e^x$ تک ہیں (شکل ۸.۲۱)۔ اس بگل کا حجم تلاش کریں۔

حل

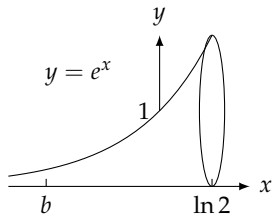
ایک علامتی رقبہ عمودی تراش کا رقبہ

$$S(x) = \pi(\text{رداس})^2 = \pi\left(\frac{1}{2}y\right)^2 = \frac{\pi}{4}e^{2x}$$

ہوگا۔ ہم $b \to -\infty$ کرتے ہوئے b تا $\ln 2$ تک حجم کی حد کو بگل کا حجم مانتے ہیں۔ ہم حصہ ۶.۲ کی طرح ٹکیاں کاٹ کر حجم تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}H &= \int_b^{\ln 2} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_b^{\ln 2} \frac{\pi}{4}e^{2x}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{\pi}{8}e^{2x}\right|_b^{\ln 2} \\ &= \frac{\pi}{8}(e^{\ln 4} - e^{2b}) = \frac{\pi}{8}(4 - e^{2b})\end{aligned}$$

اب $b \to -\infty$ کرنے سے $e^{2b} \to 0$ لہٰذا $H \to \frac{\pi}{8}(4-0) = \frac{\pi}{2}$ ہوتا ہے۔ یوں بگل کا حجم $\frac{\pi}{2}$ ہوگا۔ □



شکل ۸.۲۱: ٹھوس بگل کا حجم (مثال ۸.۴۲)

۱۳۶۰۷ مثال ۸.۴۳: تکمل $\int_2^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$ حل کریں۔

۱۳۶۰۸ **حل**

$$\begin{aligned}
\int_2^\infty \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{x+3}{(x-1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{b\to\infty}\int_2^b \left(\frac{2}{x-1} - \frac{2x+1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x && \text{جزوی کسر} \\
&= \lim_{b\to\infty}\Big[2\ln(x-1) - \ln(x^2+1) - \tan^{-1}x\Big]_2^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1} - \tan^{-1}x\right]_2^b && \text{لوگارتھمی اجزاء یکجا} \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{(b-1)^2}{b^2+1} - \tan^{-1}b\right] - \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \tan^{-1}2 \\
&= 0 - \frac{\pi}{2} + \ln 5 + \tan^{-1}2 \approx 1.1458
\end{aligned}$$

۱۳۶۰۹ □

۱۳۶۱۰ آپ نے دیکھا کہ $b \to \infty$ کر کے حد کی تلاش سے پہلے ہم نے لوگارتھمی اجزاء کو یکجا کیا۔ اگر ہم ایسا نہ کرتے تب ہمیں درج ذیل ناقابل معلوم مقدار ملتی۔

$$\lim_{b\to\infty}\left[(2\ln(b-1)) - \ln(b^2+1)\right] = \infty - \infty$$

۱۳۶۱۱ **$-\infty$ سے ∞ تک تکمل**

۱۳۶۱۲ روشنی، بجلی اور صدا پر غور کرنے سے ایسے تکمل حاصل ہوتے ہیں جن کے دونوں حد لا متناہی ہوتے ہیں۔ اگلا تعریف ان کی مرکوزیت پر ہے۔

تعریف: اگر وقفہ $(-\infty, \infty)$ پر f استمراری ہو اور اگر $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ اور $\int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ دونوں مرتکز ہوں تب ہم کہتے ہیں کہ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ مرتکز ہے اور اس کی قیمت

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{۶}$$

مانتے ہیں۔ اگر دائیں ہاتھ ایک بھی تکمل منفرج ہو تب $-\infty$ سے ∞ تک f کا تکمل منفرج ہو گا۔

□

ہم یہ دکھا سکتے ہیں کہ مساوات ۶ میں a کی قیمت اہمیت نہیں رکھتی ہے۔ ہم a کی کوئی بھی موزوں قیمت لے کر $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ کی مرکوزیت دریافت کر سکتے ہیں۔

تفاعل f کا $-\infty$ سے ∞ تک تکمل $\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ سے مختلف ہو سکتا ہے، جو $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ کی عدم مرکوزیت کی صورت میں بھی موجود ہو سکتا ہے (سوال ۸.۴۳۶)۔

مثال ۸.۴۴:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \qquad a=0 \text{ مساوات ۶ میں} \\
&= \lim_{b\to-\infty} [\tan^{-1} x]_b^0 + \lim_{c\to\infty} [\tan^{-1} x]_0^c \\
&= \lim_{b\to-\infty} [\tan^{-1} 0 - \tan^{-1} b] + \lim_{c\to\infty} [\tan^{-1} c - \tan^{-1} 0] \\
&= 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi
\end{aligned}$$

ہم محور x اور منحنی $y = \frac{1}{1+x^2}$ کے نیچے لا متناہی خطے کے رقبہ کو تکمل کی قیمت مانتے ہیں (شکل ۸.۲۲)۔ □

تکمل $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$

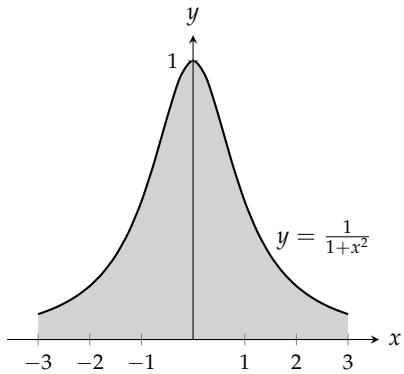
تکمل $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ کی مرکوزیت p پر منحصر ہے۔ اگلی مثال میں $p = 1$ اور $p = 2$ کے لیے اس حقیقت کو دیکھتے ہیں۔

مثال ۸.۴۵: درج ذیل کی مرکوزیت پر غور کریں۔

$$\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2} \quad \text{اور} \quad \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

حل

وقفہ $[1, \infty)$ پر دونوں تفاعل استمراری ہیں اور $x \to \infty$ کرنے سے دونوں کی ترسیمات محور x کے قریب آتی ہیں (شکل ۸.۲۳) لہٰذا کیا ہم کہہ



شکل ۸.۲۲: دونوں اطراف لامتناہی منحنی کے نیچے رقبہ متناہی ہے۔

۱۳۲۸ سکتے ہیں کہ دونوں منحنیات کے نیچے رقبے متناہی ہوں گے؟ پہلے تکمل کی صورت میں

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty$$

۱۳۲۹ ہے لہٰذا تکمل منفرج ہوگا۔ دوسری تکمل کی صورت میں

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{b}+1\right) = 1$$

۱۳۳۰ ہے لہٰذا تکمل مرتکز ہے اور اس کی قیمت 1 ہے۔

۱۳۳۱ عمومی طور $p > 1$ کے لیے $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ مرکوز جبکہ $p \leq 1$ کے لیے منفرج ہوگا (سوال ۸.۴۲۸)۔ □

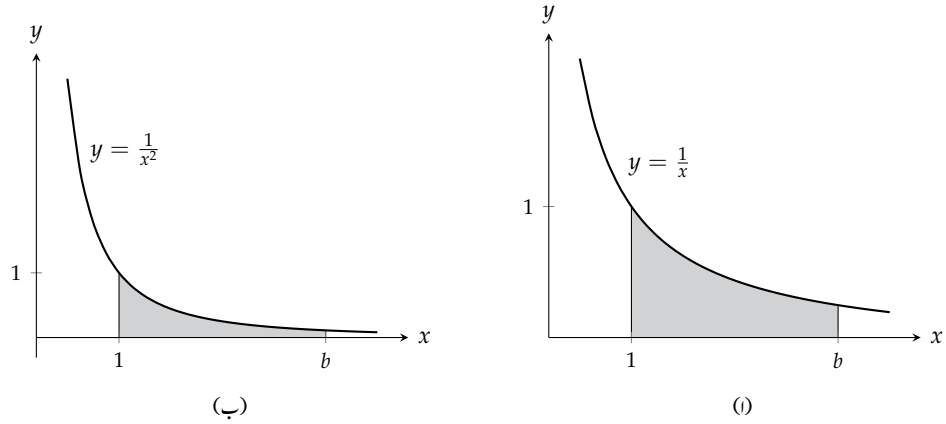
۱۳۳۲ عموماً $p > 1$ کی صورت میں $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ مرتکز اور $p \leq 1$ کی صورت میں منفرج ہوگا۔

۱۳۳۳ **ارتکاز اور انفراج کے پرکھ**

۱۳۳۴ جب کسی غیر مناسب تکمل کی قیمت بلاواسطہ قابل حل نہ ہو (جیسا عموماً ہوگا) تب ہم دو اقدام طریقہ استعمال کرتے ہوئے پہلے ارتکاز ثابت کرتے ہیں اور اس کے
۱۳۳۵ بعد اعدادی تراکیب سے تکمل کی قیمت دریافت کرتے ہیں۔ ارتکاز کے بنیادی پرکھ دو ہیں: بلاواسطہ تقابلی پرکھ اور تقابل حد پرکھ ہیں۔

۱۳۳۶ مثال ۸.۴۶: تکمل $\int_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ کے ارتکاز پر غور کریں۔

۱۳۳۷ **حل**



شکل ۸.۲۳: ایک منحنی کے نیچے رقبہ لامتناہی اور دوسرے کے نیچے متناہی ہے (مثال ۸.۴۵)۔

۱۳۶۳۸ تعریف کی رو سے

$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

۱۳۶۳۹ ہو گا۔ چونکہ یہ تکمل غیر بنیادی ہے لہٰذا اس کو ہم بلاواسطہ حل نہیں کر سکتے ہیں۔ البتہ ہم دکھا سکتے ہیں کہ $b \to \infty$ کرتے ہوئے اس کی حد متناہی ہے۔ ہم
۱۳۶۴۰ جانتے ہیں کہ $\int_1^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ متغیر b کا بڑھتا تفاعل ہے لہٰذا $b \to \infty$ کرنے سے یا یہ لامتناہی ہو گا اور یا $b \to \infty$ کرنے سے اس کی حد متناہی
۱۳۶۴۱ ہو گا۔ اب ہر $x \geq 1$ کے لیے $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ ہے (شکل ۸.۲۴) لہٰذا

$$\int_1^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leq \int_1^b e^{-x}\,\mathrm{d}x = e^{-b} + e^{-1} < e^{-1} \approx 0.36788$$

۱۳۶۴۲ ہو گا اور یوں تکمل لامتناہی نہیں ہے۔ یوں

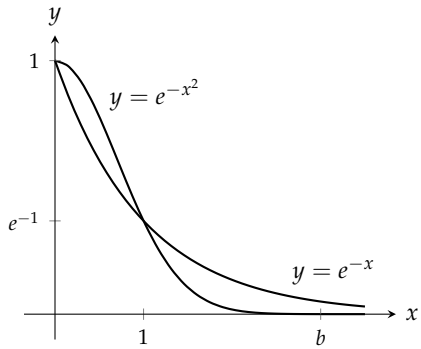
$$\int_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

۱۳۶۴۳ کسی مخصوص قیمت کو مرتکز ہو گا۔ ہم اس تکمل کی قیمت نہیں جانتے ہیں البتہ اتنا ضرور جانتے ہیں کہ تکمل کی قیمت 0.37 سے کم ہے۔ □

۱۳۶۴۴ تفاعل e^{-x^2} اور e^{-x} کا پرکھ مثال ۸.۴۶ میں کیا گیا جو درج ذیل کی ایک مخصوص صورت ہے۔

۱۳۶۴۵ مسئلہ ۸.۱: **بلا واسطہ تقابلی پرکھ**

۱۳۶۴۶ فرض کریں وقفہ $[a, \infty)$ پر f اور g استمراری ہیں اور تمام $x \geq a$ پر $0 \leq f(x) \leq g(x)$ ہے۔ تب درج ذیل ہوں گے۔



شکل ۸.۲۴: وقفہ $x > 1$ پر ترسیم e^{-x^2} ترسیم e^{-x} کے نیچے ہے۔

۱۳۶۴۷ ا. اگر $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ مرتکز ہو تب $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ مرتکز ہو گا۔

۱۳۶۴۸ ب. اگر $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ منفرج ہو تب $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ منفرج ہو گا۔

۱۳۶۴۹

۱۳۶۵۰ مثال ۸.۴۷: (ا) چونکہ $[1,\infty)$ پر $0 \le \frac{\sin^2 x}{x^2} \le \frac{1}{x^2}$ اور $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ مرتکز ہے لہٰذا $\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$ مرتکز ہو گا۔

۱۳۶۵۱ (ب) چونکہ $[1,\infty)$ پر $\frac{1}{\sqrt{x^2-0.1}} \ge \frac{1}{x}$ اور $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x}$ منفرج ہے لہٰذا $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-0.1}}$ منفرج ہو گا۔ □

۱۳۶۵۲ مسئلہ ۸.۲: **تقابل حد پرکھ**

۱۳۶۵۳ اگر $[a,\infty)$ پر مثبت تفاعل f اور g استمراری ہوں اور اگر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \qquad\qquad (0 < L < \infty)$$

۱۳۶۵۴ ہو تب $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ اور $\int_a^\infty g(x)\,\mathrm{d}x$ دونوں یا مرتکز ہوں گے اور یا دونوں منفرج ہوں گے۔

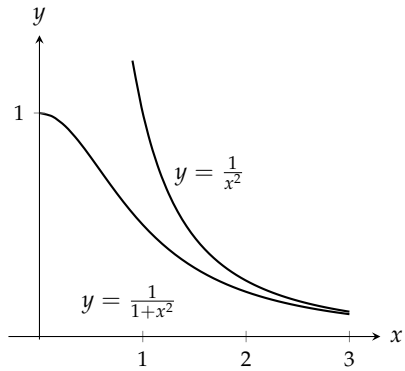
۱۳۶۵۵

۱۳۶۵۶ حصہ ۷.۷ کی زبان میں مسئلہ ۸.۲ کہتا ہے کہ اگر $x \to \infty$ پر دو تفاعل ایک ہی شرح سے بڑھتے ہوں تب a سے ∞ تک ان دونوں کے تکمل کا رویہ

۱۳۶۵۷ ایک دوسرے جیسا ہو گا۔ دونوں مرتکز یا دونوں منفرج ہوں گے۔ اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں ہے کہ ان دو تکمل کی قیمت ایک دوسرے جیسی ہو گی۔

۱۳۶۵۸ مثال ۸.۴۸: درج ذیل کا آپس میں تقابل حد پرکھ کی مدد سے موازنہ کریں۔

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}, \quad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$



شکل ۸.۲۵: تفاعل برائے مثال ۸.۴۸

۱۳۶۵۹ **حل**

۱۳۶۶۰ ہم $f(x) = \frac{1}{x^2}$ اور $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ لیتے ہیں۔یوں

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{1/x^2}{1/(1+x^2)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = 0+1 = 1\end{aligned}$$

۱۳۶۶۱ متناہی مثبت حد ہے (شکل ۸.۲۵)۔اب چونکہ $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ مرتکز ہے لہٰذا $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ بھی مرتکز ہو گا۔

۱۳۶۶۲ دونوں تکمل کی قیمتیں البتہ مختلف ہیں۔

مثال ۸.۴۵

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1$$

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\\ &= \lim_{b\to\infty}[\tan^{-1} b - \tan^{-1} 1] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

۱۳۶۶۳ □

۱۳۶۶۴ مثال ۸.۴۹: چونکہ $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{e^x}$ مرتکز ہے اور

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{1/e^x}{3/(e^x+5)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{e^x+5}{3e^x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{3e^x}\right)=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

۱۳۶۶۵ مثبت متناہی حد ہے لہٰذا $\int_1^\infty \frac{3}{e^x+5}\,\mathrm{d}x$ مرتکز ہو گا۔ جہاں تک غیر متناسب تکمل کی ارتکاز کی بات ہے $\frac{3}{e^x+5}$ اور $\frac{1}{e^x}$ کا رویہ ایک دوسرے جیسا
۱۳۶۶۶ ہے۔ □

۱۳۶۶۷ **سوالات**

۱۳۶۶۸ **غیر مناسب تکمل**

۱۳۶۶۹ سوال ۸.۳۶۲ تا سوال ۸.۳۹۵ کو جدول کلیات تکمل کی مدد کے بغیر حل کریں۔

۱۳۶۷۰ سوال ۸.۳۶۲: $\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$

۱۳۶۷۱ سوال ۸.۳۶۳: $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{1.001}}$

۱۳۶۷۲ سوال ۸.۳۶۴: $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$

۱۳۶۷۳ سوال ۸.۳۶۵: $\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x}}$

۱۳۶۷۴ سوال ۸.۳۶۶: $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{2/3}}$

۱۳۶۷۵ سوال ۸.۳۶۷: $\int_{-8}^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{1/3}}$

۱۳۶۷۶ سوال ۸.۳۶۸: $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

۱۳۶۷۷ سوال ۸.۳۶۹: $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}r}{r^{0.999}}$

۱۳۶۷۸ سوال ۸.۳۷۰: $\int_{-\infty}^{-2} \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2-1}$

۱۳۶۷۹ سوال ۸.۳۷۱: $\int_{-\infty}^{2} \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2+4}$

۱۳۶۸۰ سوال ۸.۳۷۲: $\int_2^\infty \frac{2\,\mathrm{d}v}{v^2-v}$

۱۳۶۸۱ سوال ۸.۳۷۳: $\int_2^\infty \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^2-1}$

۱۳۶۸۲ سوال ۸.۳۷۴: $\int_{-\infty}^\infty \frac{2x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$

۱۳۶۸۳ سوال ۸.۳۷۵: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+4)^{3/2}}$

۱۳۶۸۴ سوال ۸.۳۷۶: $\int_0^1 \frac{\theta+1}{\sqrt{\theta^2+2\theta}}\,\mathrm{d}\theta$

۱۳۶۸۵ سوال ۸.۳۷۷: $\int_0^2 \frac{s+1}{\sqrt{4-s^2}}\,\mathrm{d}s$

۱۳۶۸۶ سوال ۸.۳۷۸: $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)\sqrt{x}}$

۱۳۶۸۷ سوال ۸.۳۷۹: $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

۱۳۶۸۸ سوال ۸.۳۸۰: $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}v}{(1+v^2)(1+\tan^{-1} v)}$

۱۳۶۸۹ سوال ۸.۳۸۱: $\int_0^{\infty} \frac{16\tan^{-1} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

۱۳۶۹۰ سوال ۸.۳۸۲: $\int_{-\infty}^{0} \theta e^{\theta}\,\mathrm{d}\theta$

۱۳۶۹۱ سوال ۸.۳۸۳: $\int_0^{\infty} 2e^{-\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$

۱۳۶۹۲ سوال ۸.۳۸۴: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$

۱۳۶۹۳ سوال ۸.۳۸۵: $\int_{-\infty}^{\infty} 2xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

۱۳۶۹۴ سوال ۸.۳۸۶: $\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x$

۱۳۶۹۵ سوال ۸.۳۸۷: $\int_0^1 (-\ln x)\,\mathrm{d}x$

۱۳۶۹۶ سوال ۸.۳۸۸: $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{4-s^2}}$

۱۳۶۹۷ سوال ۸.۳۸۹: $\int_0^1 \frac{4r\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-r^4}}$

۱۳۶۹۸ سوال ۸.۳۹۰: $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}s}{s\sqrt{s^2-1}}$

۱۳۶۹۹ سوال ۸.۳۹۱: $\int_2^4 \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-4}}$

۱۳۷۰۰ سوال ۸.۳۹۲: $\int_{-1}^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x|}}$

۱۳۷۰۱ سوال ۸.۳۹۳: $\int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-1|}}$

۱۳۷۰۲ سوال ۸.۳۹۴: $\int_{-1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta^2+5\theta+6}$

۱۳۷۰۳ سوال ۸.۳۹۵: $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+1)}$

پرکھ ارتکاز

سوال ۸.۳۹۶ تا سوال ۸.۴۲۵ میں تکمل، بلاواسطہ تقابلی پرکھ یا تقابل حد پرکھ کی مدد سے تکمل کو ارتکاز کے لیے پرکھیں۔ اگر ایک سے زیادہ طریقے قابل استعمال ہوں، وہاں اپنی مرضی سے کسی ایک طریقہ کو استعمال کریں۔

سوال ۸.۳۹۶: $\int_0^{\pi/2} \tan\theta \, \mathrm{d}\theta$

سوال ۸.۳۹۷: $\int_0^{\pi/2} \cot\theta \, \mathrm{d}\theta$

سوال ۸.۳۹۸: $\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \, \mathrm{d}\theta}{\sqrt{\pi-\theta}}$

سوال ۸.۳۹۹: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta \, \mathrm{d}\theta}{(\pi-2\theta)^{1/3}}$

سوال ۸.۴۰۰: $\int_0^{\ln 2} x^{-2} e^{-1/x} \, \mathrm{d}x$

سوال ۸.۴۰۱: $\int_0^{1} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$

سوال ۸.۴۰۲: $\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+\sin t}}$

سوال ۸.۴۰۳: $\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t-\sin t}$ اشارہ: $t \geq 0$ کے لیے $t \geq \sin t$ ہوگا۔

سوال ۸.۴۰۴: $\int_0^{2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$

سوال ۸.۴۰۵: $\int_0^{2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x}$

سوال ۸.۴۰۶: $\int_{-1}^{1} \ln|x| \, \mathrm{d}x$

سوال ۸.۴۰۷: $\int_{-1}^{1} -x\ln|x| \, \mathrm{d}x$

سوال ۸.۴۰۸: $\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$

سوال ۸.۴۰۹: $\int_4^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}-1}$

سوال ۸.۴۱۰: $\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{v-1}}$

سوال ۸.۴۱۱: $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+e^{\theta}}$

سوال ۸.۴۱۲: $\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^6+1}}$

سوال ۸.۴۱۳: $\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}$

سوال ۸.۴۱۴: $\int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x^2} \, \mathrm{d}x$

سوال ۸.۴۱۵: $\int_2^{\infty} \frac{x \, \mathrm{d}x}{\sqrt{x^4-1}}$

سوال ۸.۴۱۶: $\int_{\pi}^{\infty} \frac{2+\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$

سوال ۸.۴۱۷: $\int_{\pi}^{\infty} \frac{1+\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

سوال ۸.۴۱۸: $\int_{4}^{\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^{3/2}-1}$

سوال ۸.۴۱۹: $\int_{2}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$

سوال ۸.۴۲۰: $\int_{1}^{\infty} \frac{e^x}{x}\,\mathrm{d}x$

سوال ۸.۴۲۱: $\int_{e^e}^{\infty} \ln(\ln x)\,\mathrm{d}x$

سوال ۸.۴۲۲: $\int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x-x}}$

سوال ۸.۴۲۳: $\int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x-2^x}$

سوال ۸.۴۲۴: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+1}}$

سوال ۸.۴۲۵: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۸.۴۲۶: لا متناہی دائرہ کار کے غیر مناسب تکمل کی قیمت کا اندازہ

(ا) درج ذیل دکھائیں

$$\int_{3}^{\infty} e^{-3x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}e^{-9} < 0.000\,042$$

جس کی وجہ سے $\int_{3}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \quad < \quad 0.000042$ ہو گا۔ آپ وجہ پیش کریں کہ کیوں $\int_{3}^{\infty} e^{-3x}\,\mathrm{d}x$ کی جگہ $\int_{3}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ پر کرنے سے پیدا اخلل $0.000\,042$ سے زیادہ نہیں ہو سکتا ہے۔

(ب) تکمل $\int_{0}^{3} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ کی قیمت اعدادی تراکیب سے حاصل کریں۔

سوال ۸.۴۲۷: لا متناہی بگل یا رنگ کا لا متناہی ڈبہ

ہم مثال ۸.۴۵ میں دیکھ چکے ہیں کہ $\int_{1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ منفرج ہے۔ یوں منحنی $y = \frac{1}{x},\ 1 \le x$ کو محور x کے گرد گھما کر حاصل سطح طواف کا سطح

$$\int_{1}^{\infty} 2\pi\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,\mathrm{d}x$$

منفرج ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ہر متناہی قیمت $b > 1$ کے لیے

$$\int_{1}^{b} 2\pi\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\,\mathrm{d}x > 2\pi\int_{1}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

۱۳۷۴۶ ہو گا جبکہ ٹھوس جسم کا حجم

$$\int_1^\infty \pi\left(\frac{1}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$$

۱۳۷۴۷ مرتکز ہے۔(ا) اس حجم کی قیمت تلاش کریں۔(ب) بعض اوقات اس جسم طواف کو وہ ڈبہ کہتے ہیں جس میں اتنا رنگ نہیں بھرا جا سکتا ہے جو اسی ڈبے کا اندرون
۱۳۷۴۸ کو رنگ کر سکے۔ اس پر ایک لمحہ کے لیے غور کریں۔ متناہی مقدار کا رنگ کسی صورت لامتناہی سطح کو رنگ نہیں کر سکتا ہے۔ البتہ اگر ہم اس ڈبے کو رنگ سے
۱۳۷۴۹ بھریں (جو متناہی مقدار ہو گی) تب ڈبے کی اندرونی سطح (جو لامتناہی ہے) کے ہر نقطہ کو رنگ مس کرتا ہے۔ اس ظاہری تضاد کی وجہ پیش کریں۔

۱۳۷۵۰ سوال ۸.۴۲۸: (ا) دکھائیں کہ $p > 1$ کے لیے

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{p-1}$$

۱۳۷۵۱ جبکہ $p < 1$ کے لیے تکمل لامتناہی ہے۔ ہے۔ مثال ۸.۴۵ میں $p = 1$ کے لیے تکمل کی قیمت دیکھی گئی۔
۱۳۷۵۲ (ب) دکھائیں کہ $p < 1$ کے لیے

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \frac{1}{1-p}$$

۱۳۷۵۳ جبکہ $p \geq 1$ کے لیے تکمل منفرج ہے۔

۱۳۷۵۴ سوال ۸.۴۲۹: درج ذیل ہر ایک تکمل کے لیے p کی وہ قیمت تلاش کریں جس کے لیے تکمل مرتکز ہو۔

$$\int_2^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} \quad \text{(ب)} \qquad \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p} \quad \text{(الف)}$$

۱۳۷۵۵

۱۳۷۵۶ سوال ۸.۴۳۰ تا سوال ۸.۴۳۳ ربع اول میں منحنی $y = e^{-x}$ اور محور x کے بیچ لامتناہی خطے کے بارے میں ہیں۔

۱۳۷۵۷ سوال ۸.۴۳۰: اس خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

۱۳۷۵۸ سوال ۸.۴۳۱: اس خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

۱۳۷۵۹ سوال ۸.۴۳۲: اس خطے کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

۱۳۷۶۰ سوال ۸.۴۳۳: اس خطے کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کو حجم تلاش کریں۔

۱۳۷۶۱ سوال ۸.۴۳۴: منحنی $y = \sec x$ اور $y = \tan x$ کے بیچ $x = 0$ تا $x = \frac{\pi}{2}$ خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

۱۳۷۶۲ سوال ۸.۴۳۵: منحنی $y = \sec x$ اور $y = \tan x$ کے بیچ $x = 0$ تا $x = \frac{\pi}{2}$ خطے کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا
۱۳۷۶۳ ہے۔ (ا) اس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) دکھائیں کہ اس جسم کے اندرونی اور بیرونی سطحوں کے رقبے لامتناہی ہیں۔

۱۳۷۶۴ سوال ۸.۴۳۶: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ اور $\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ کی قیمت مختلف ہو سکتی ہے۔ دکھائیں کہ

$$\int_{0}^{\infty} \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

۱۳۷۶۵ منفرج ہے لہٰذا

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$$

۱۳۷۶۶ بھی منفرج ہو گا۔ اس کے بعد درج ذیل دکھائیں۔

$$\lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b} \frac{2x\,\mathrm{d}x}{x^2+1} = 0$$

۱۳۷۶۷ سوال ۸.۴۳۷: درج ذیل دلیل پر غور کریں جس کے تحت $\ln 3 = \infty - \infty$ ہو گا۔ اس دلیل میں غلطی تلاش کریں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش
۱۳۷۶۸ کریں۔

$$\begin{aligned}
\ln 3 = \ln 1 + \ln 3 &= \ln 1 - \ln\frac{1}{3}\\
&= \lim_{b\to\infty} \ln\left(\frac{b-2}{b}\right) - \ln\frac{1}{3}\\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\ln\frac{x-2}{x}\right]_3^b\\
&= \lim_{b\to\infty}[\ln(x-2) - \ln x]_3^b\\
&= \lim_{b\to\infty}\int_3^b \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_3^{\infty} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\\
&= \int_3^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x-2} - \int_3^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}\\
&= \lim_{b\to\infty}\Big[\ln(x-2)\Big]_3^b - \lim_{b\to\infty}\Big[\ln x\Big]_3^b\\
&= \infty - \infty
\end{aligned}$$

۱۳۷۶۹ سوال ۸.۴۳۸: اگر حقیقی اعداد کے ہر وقفہ پر $f(x)$ قابل تکمل ہو اور a اور b حقیقی اعداد ہوں جہاں $a < b$ ہے تب درج ذیل دکھائیں۔

۱۳۷۷۰ ا. $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$ اور $\int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہوں گے جب $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ اور
۱۳۷۷۱ $\int_{b}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ دونوں مرتکز ہوں۔

۳۷۷۲ ب. اگر مستعمل تکمل مرتکز ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{b}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

۳۷۷۳ سوال ۸.۴۳۹: (ا) دکھائیں کہ اگر f جفت ہو اور تکمل موجود ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

۳۷۷۴ (ب) دکھائیں کہ اگر f طاق ہو اور تکمل موجود ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

۳۷۷۵

۳۷۷۶ سوال ۸.۴۴۰ تا سوال ۸.۴۴۷ میں بلا واسطہ حل، تقابلی پرکھ اور سوال ۸.۴۳۹ کے نتائج بروئے کار لاتے ہوئے تکمل کی مرکوزیت یا انفراج معلوم کریں۔ اگر
۳۷۷۷ ایک سے زائد طریقہ قابل استعمال ہوں تب اپنی پسند کا طریقہ استعمال کریں۔

۳۷۷۸ سوال ۸.۴۴۰: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}$

۳۷۷۹ سوال ۸.۴۴۱: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^6+1}}$

۳۷۸۰ سوال ۸.۴۴۲: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{-x}}$

۳۷۸۱ سوال ۸.۴۴۳: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$

۳۷۸۲ سوال ۸.۴۴۴: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$

۳۷۸۳ سوال ۸.۴۴۵: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}$

۳۷۸۴ سوال ۸.۴۴۶: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\sin x|+|\cos x|}{|x|+1}\,\mathrm{d}x$ اشارہ: $|\sin\theta|+|\cos\theta| \geq \sin^2\theta+\cos^2\theta$

۳۷۸۵ سوال ۸.۴۴۷: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+2)}$

۳۷۸۶ **کمپیوٹر اور استعمال**

۳۷۸۷ سوال ۸.۴۴۸ تا سوال ۸.۴۵۱ میں کمپیوٹر استعمال کر کے p کی مختلف قیمتوں (بشمول غیر عدد صحیح) کے لیے تکمل پر غور کریں۔ p کی کن قیمتوں کے لیے
۳۷۸۸ تکمل مرتکز ہے؟ جب تکمل مرتکز ہو تب اس کی قیمت کتنی ہے؟ p کی مختلف قیمتوں کے لیے تکمل کو ترسیم کریں۔

۳۷۸۹ سوال ۸.۴۴۸: $\int_{0}^{e} x^p \ln x\,\mathrm{d}x$

۳۷۹۰ سوال ۸.۴۴۹: $\int_{e}^{\infty} x^p \ln x\,\mathrm{d}x$

سوال ۸.۴۵۰: $\int_0^\infty x^p \ln x \, \mathrm{d}x$

سوال ۸.۴۵۱: $\int_{-\infty}^\infty x^p \ln|x| \, \mathrm{d}x$

سوال ۸.۴۵۲: درج ذیل جسے **سائن تکمل تفاعل**[11] کہتے ہیں بصریات میں اہم کردار ادا کرتا ہے۔

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$$

ا. متکمل $\frac{\sin t}{t}$ کو $t > 0$ کے لیے ترسیم کریں۔ Si ہر نقطہ پر بڑھتا کہ گھٹتا تفاعل ہے؟ کیا $x > 0$ کے لیے آپ کے خیال میں $\mathrm{Si}(x) = 0$ ہو سکتا ہے؟ وقفہ $0 \leq x \leq 25$ پر $\mathrm{Si}(x)$ ترسیم کر کے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

ب. درج ذیل کی مرکوزیت پر غور کریں۔

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$$

ارتکاز کی صورت میں اس کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۸.۴۵۳: درج ذیل کو **تفاعل خلل**[12] کہتے ہیں۔

$$\mathrm{erf}(x) = \int_0^x \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} \, \mathrm{d}t$$

نظریہ احتمال اور شماریات میں یہ اہم کردار ادا کرتا ہے۔

ا. وقفہ $0 \leq x \leq 25$ کے لیے تفاعل خلل کو ترسیم کریں۔

ب. درج ذیل کی مرکوزیت پر غور کریں۔

$$\int_0^\infty \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} \, \mathrm{d}t$$

مرکوزیت کی صورت میں اس کی قیمت کیا نظر آتی ہے؟ آپ اپنی (اندازاً) قیمت کی تصدیق حصہ کے سوال ۱۴.۱۶۳ میں کر پائیں گے۔

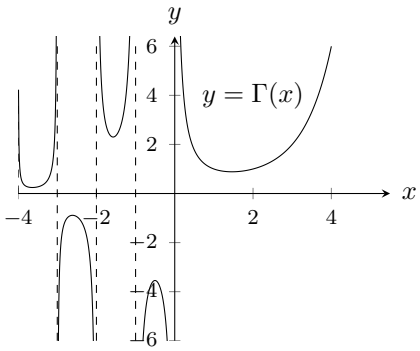
گیما تفاعل اور کلیہ سٹرلنگ

یولر کا **گیما تفاعل**[13] $\Gamma(x)$ (جس کو x کا گیما کہتے ہیں) تکمل استعمال کرتے ہوئے عدد ضربیہ تفاعل[14] کو منفی اعداد اور غیر عدد صحیح اعداد تک وسعت دیتا ہے۔ گیما تفاعل کا کلیہ درج ذیل ہے۔

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-1} \, \mathrm{d}t, \quad x > 0$$

---

[11] sineintegralfunction
[12] errorfunction
[13] Gammafunction
[14] factorialfunction



شکل ۸.۲۶: $\Gamma(x)$ متغیر x کا استراری تفاعل ہے جس کی قیمت ہر مثبت عدد صحیح $n+1$ پر $n!$ ہے۔ Γ کا تعریفی تکمل صرف $x > 0$ کے لیے درست ہے لیکن ہم $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}$ (سوال ۸.۴۵۴ دیکھیں) کے استعمال سے منفی x کے لیے Γ کو وسعت دے سکتے ہیں۔

۱۳۸۰۶ ہر مثبت عدد صحیح x کے لیے $t^{x-1}e^{-t}$ کا t کے لحاظ سے 0 تا ∞ تکمل عدد $\Gamma(x)$ ہوگا۔ شکل ۸.۲۶ میں مبدا کے قریب Γ کی ترسیم دکھائی گئی
۱۳۸۰۷ ہے۔

۱۳۸۰۸ سوال ۸.۴۵۴: غیر منفی عدد صحیح کے لیے $\Gamma(n+1) = n!$ ہوگا
۱۳۸۰۹

۱۳۸۱۰ ا. دکھائیں $\Gamma(1) = 1$

۱۳۸۱۱ ب. اس کے بعد تکمل بالحصص استعمال کرتے ہوئے $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ ثابت کریں۔ یوں درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= 1\Gamma(1) = 1\\
\Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2\\
\Gamma(3) &= 3\Gamma(3) = 6\\
&\vdots\\
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n!
\end{aligned}$$

۱۳۸۱۲ ج. الکراجی ماخوذ استعمال کرتے ہوئے ہر غیر منفی عدد صحیح n کے لیے $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n!$ کی تصدیق کریں۔

۱۳۸۱۳ سوال ۸.۴۵۵: کلیہ سٹرلنگ
۱۳۸۱۴ اسکاچی ریاضی دان جیمس سٹرلنگ [1692-1770] نے درج ذیل کلیہ اخذ کیا

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{e}{x}\right)^x \sqrt{\frac{x}{2\pi}}\Gamma(x) = 1$$

۱۳۸۱۵ لہٰذا x کی بڑی قیمتوں کے لیے

$$\Gamma(x) = (\tfrac{x}{e})^x \sqrt{\tfrac{2\pi}{x}}(1+\epsilon(x)), \qquad \begin{array}{c} x \to \infty \\ \epsilon(x) \to 0 \end{array} \tag{۷}$$

۱۳۸۱۶ ہوگا۔اس میں $\epsilon(x)$ رد کرنے سے درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\Gamma(x) \approx (\tfrac{x}{e})^x \sqrt{\tfrac{2\pi}{x}} \qquad \text{کلیہ سٹرلنگ} \tag{۸}$$

۱۳۸۱۷ ا. مساوات ۸ اور $n! = n\Gamma(n)$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی تصدیق کریں۔

$$n! \approx (\tfrac{n}{e})^n \sqrt{2\pi n} \qquad \text{تخمین سٹرلنگ} \tag{۹}$$

۱۳۸۱۸ جیسا آپ حصہ ۹.۲ کے سوال ۹.۱۳۶ میں دیکھیں گے مساوات ۹ سے درج ذیل تخمین حاصل ہوتی ہے۔

$$\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e} \tag{۱۰}$$

۱۳۸۱۹ ب. $n = 10, 20, 30, \cdots$ لیتے ہوئے $n!$ کے لیے تخمین سٹرلنگ کے نتائج کا کیلکولیٹر سے حاصل نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔

۱۳۸۲۰ ج. مساوات ۷ کی بہتر صورت

$$\Gamma(x) = (\tfrac{x}{e})^x \sqrt{\tfrac{2\pi}{x}} e^{1/(12x)}(1+\epsilon(x))$$

۱۳۸۲۱ یا

$$\Gamma(x) = (\tfrac{n}{e})^n \sqrt{2n\pi} e^{1/(12n)} \tag{۱۱}$$

۱۳۸۲۲ ہے۔کیلکولیٹر، کلیہ سٹرلنگ اور مساوات ۱۱ سے $10!$ کے نتائج کا ایک دوسرے کے ساتھ موازنہ کریں۔

۱۳۸۲۳

۱۳۸۲۴

باب ۹

لامتناہی تسلسل

اس باب میں ہم ایک حیران کن کلیہ اخذ کرتے ہیں جس کی مدد سے بہت سارے تفاعل کو ''لامتناہی کثیر رکنی'' کی صورت میں لکھنا ممکن ہو گا اور ساتھ ہی کثیر رکنی کے ارکان حذف کر کے کثیر رکنی کو متناہی بنانے سے پیدا خلل بھی جان پائیں گے۔ ان تسلسل کو طاقتی تسلسل کہتے ہیں۔ قابل تفرق تفاعل کو تخمینی طور پر کثیر رکنی سے ظاہر کرنے میں مدد دینے کے علاوہ طاقتی تسلسل دیگر مواقع پر بھی کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔ غیر بنیادی تکمل کی قیمت کے حصول کے علاوہ حراری توانائی کی منتقلی، ارتعاش، کیمیائی نفوذ اور ترسیل اشارات کے تفرقی مساوات کے حل میں یہ موثر کردار ادا کرتے ہیں۔ آپ یہاں وہ ان تفاعل کے بارے میں سیکھ پائیں گے جو سائن اور انجینئری میں بہت زیادہ استعمال ہوتے ہیں۔

۹.۱ اعداد کی ترتیب کی حد

غیر رسمی طور پر ترتیب سے مراد مرتب چیزوں کا سلسلہ ہے۔ اس باب میں ہمیں اعداد کی ترتیب سے غرض ہو گا۔ ترکیب نیوٹن سے حاصل اعداد کی ترتیب $x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$ یا (ہلکے ون کوچ کے) برفانی روئی کے کثیر الاضلاع کی ترتیب $c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$ ہم دیکھ چکے ہیں۔ ان ترتیبات کی حد پائی جاتی ہے، البتہ بہت سارے اہم ترتیبات کی حد نہیں پائی جاتی۔

تعریف اور علامتیت

ہم 3 کے ہر عدد صحیح مضرب کو ایک مقام مختص کر کے ایک فہرست بنا سکتے ہیں:

دائرہ کار	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
سعت	3	6	9		$3n$	

پہلا عدد 3، دوسرا 6، تیسرا 9، وغیرہ، وغیرہ ہیں۔ مختص کرنے کا عمل ایک تفاعل ہے جو n ویں مقام کو $3n$ مختص کرتا ہے۔ ترتیب کی بناوٹ کا بنیادی تصور یہی ہے۔ ایک تفاعل ہمیں بتاتا ہے کہ کس مقام پر کونسا عدد ہو گا۔

۱۳۸۴۰ تعریف: ایک تفاعل جس کا دائرہ کار کسی عدد صحیح n_0 کے برابر یا اس سے بڑے عدد صحیح پر مشتمل اعداد کا سلسلہ ہو **لامتناہی ترتیب**[1] (یا **ترتیب**[2])
۱۳۸۴۱ کہلاتا ہے۔

۱۳۸۴۲ □

۱۳۸۴۳ عموماً $n_0 = 1$ ہوتا ہے اور ترتیب کا دائرہ کار مثبت اعداد صحیح پر مشتمل ہو گا۔ البتہ بعض اوقات ہم تسلسل کو کسی دوسرے عدد صحیح سے شروع کرنا چاہتے
۱۳۸۴۴ ہیں۔ ترکیب نیوٹن میں ہم $n_0 = 0$ لیتے ہیں۔ اگر ہم n اضلاع پر مشتمل کثیر الاضلاع کی ترتیب کی بات کریں تب ہم $n_0 = 3$ منتخب کرنا چاہیں
۱۳۸۴۵ گے۔

۱۳۸۴۶ ترتیب کی تعریف کسی بھی تفاعل کی طرح کی جاتی ہے (مثال ۹.۱ اور شکل ۹.۱ تا شکل ۹.۶)، مثلاً:

$$a(n) = \sqrt{n}, \quad a(n) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \quad a(n) = \frac{n-1}{n}$$

۱۳۸۴۷ یہ ظاہر کرنے کی خاطر کہ دائرہ کار عدد صحیح ہے، ہم حرف n استعمال کرتے ہیں نا کہ دیگر غیر تابع متغیر کے لیے مستعمل حروف x ، y ، z ، t ، وغیرہ۔
۱۳۸۴۸ مذکورہ بالا کی طرح تعریفی قاعدہ میں کلیات عموماً مثبت عدد صحیح سے زیادہ بڑے دائرہ کار کے لیے درست ہوتے ہیں۔ جیسا ہم دیکھیں گے یہ بعض اوقات سود مند
۱۳۸۴۹ ثابت ہوتا ہے۔

۱۳۸۵۰ عدد $a(n)$ ترتیب کا n **واں جزو** یا اشاریہ n والا جزو ہو گا۔ اگر $a(n) = \frac{n-1}{n}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

پہلا جزو	دوسرا جزو	تیسرا جزو		nواں جزو
$a(1) = 0$	$a(2) = \frac{1}{2}$	$a(3) = \frac{2}{3}$	$\cdots$	$a(n) = \frac{n-1}{n}$

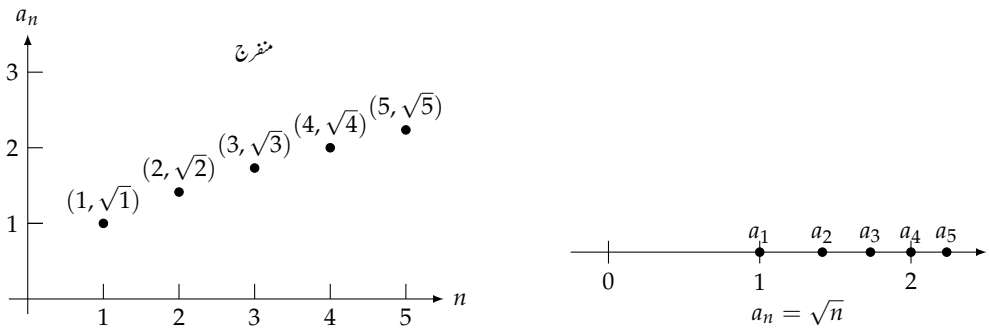
۱۳۸۵۱ اشاریہ علامت استعمال کرتے ہوئے ہم $a(n)$ کو a_n لکھتے ہیں۔ اشاریہ علامتی روپ میں یہی ترتیب درج ذیل لکھی جائے گی۔

پہلا جزو	دوسرا جزو	تیسرا جزو		nواں جزو
$a_1 = 0$	$a_2 = \frac{1}{2}$	$a_3 = \frac{2}{3}$	$\cdots$	$a_n = \frac{n-1}{n}$

۱۳۸۵۲ ترتیب پر تبصرہ کرتے ہوئے ہم عموماً n ویں جزو کے کلیہ کے ساتھ ساتھ چند ابتدائی اجزاء لکھتے ہیں۔

---

[1] infinite sequence
[2] sequence



شکل ۹.۱: جزو a_n آخر کار ہر عدد صحیح سے بڑھتا ہے لہٰذا ترتیب $\{a_n\}$ منفرج ہے۔

۱۳۸۵۳ **مثال ۹.۱:**

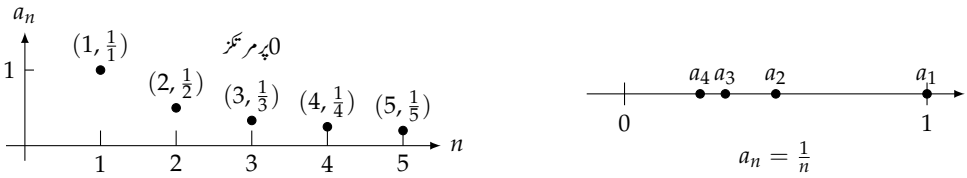
جس ترتیب کا تعریفی کلیہ درج ذیل ہو	اس کے لیے ہم درج ذیل لکھتے ہیں
$a_n = \sqrt{n}$	$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \cdots, \sqrt{n}, \cdots$
$a_n = \frac{1}{n}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$
$a_n = (-1)^{n+1}\frac{1}{n}$	$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \cdots$
$a_n = \frac{n-1}{n}$	$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n-1}{n}, \cdots$
$a_n = (-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right)$	$0, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \cdots, (-1)^{n+1}\left(\frac{n-1}{n}\right), \cdots$
$a_n = 3$	$3, 3, 3, \cdots, 3, \cdots$

۱۳۸۵۴ ان تمام ترتیبات کو دو مختلف انداز میں شکل ۹.۱ تا شکل ۹.۶ میں دکھایا گیا ہے۔ □

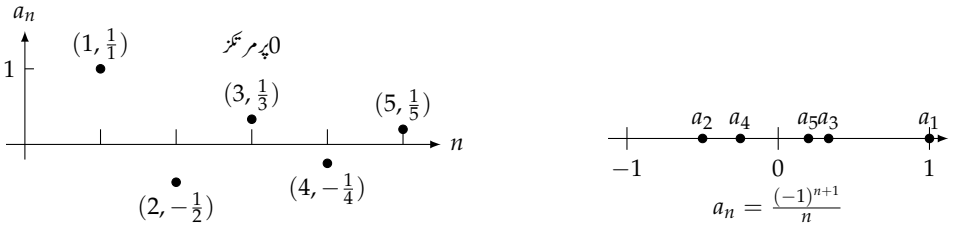
۱۳۸۵۵ **علامتیت**

۱۳۸۵۶ جس ترتیب کا n واں جزو a_n ہو اس ترتیب کو ہم $\{a_n\}$ سے ظاہر کرتے ہیں جو ترتیب a اشاریہ n پڑھا جاتا ہے۔ مثال ۹.۱ میں دوسری ترتیب

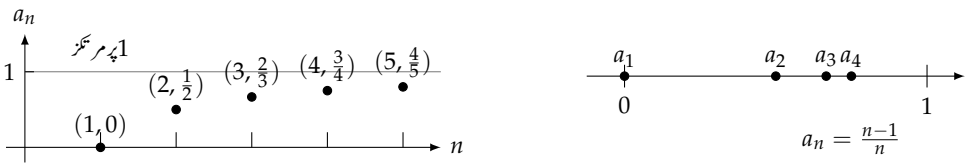
۱۳۸۵۷ $\{\frac{1}{n}\}$ ہے جو ترتیب ایک بٹہ تین پڑھا جاتا ہے۔ آخری ترتیب $\{3\}$ ہے جو مستقل ترتیب 3 کہلائے گی۔



شکل ۹.۲: جزو $a_n = \frac{1}{n}$ بتدریج n بڑھنے سے گھٹتے ہوئے 0 کے قریب پہنچتے ہیں لہٰذا ترتیب $\{a_n\}$ صفر کو مرتکز ہے۔

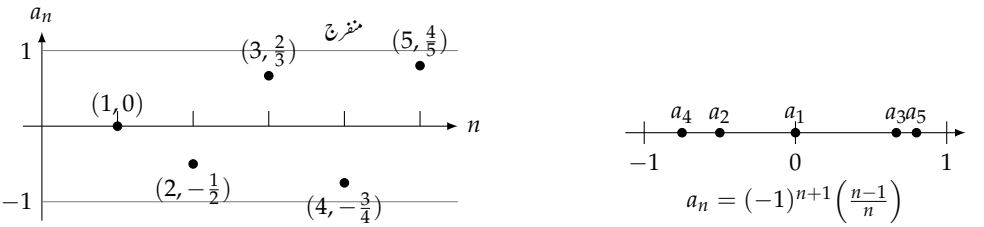


شکل ۹.۳: جزو $\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ کی علامت ہر مرتبہ تبدیل ہوتی ہے لیکن اس کی قیمت 0 پر مرتکز ہے۔

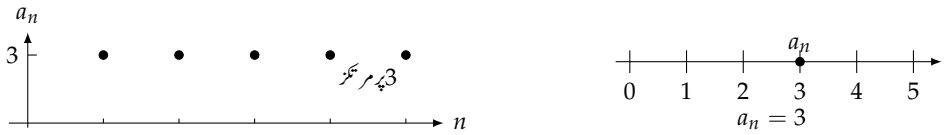


شکل ۹.۴: جیسے جیسے n بڑھتا ہے جزو $a_n = \frac{n-1}{n}$ بتدریج 1 تک پہنچتا ہے لہٰذا ترتیب $\{a_n\}$ مرتکز ہے 1 پر۔

3 -



شکل ۹.۵: جزو $a_n = (-1)^{n+1}[\frac{n-1}{n}]$ کی علامت ہر قدم پر تبدیل ہوتی ہے۔ مثبت اجزاء 1 کو پہنچتے ہیں جبکہ منفی اجزاء -1 کو پہنچتے ہیں لہٰذا ترتیب $\{a_n\}$ منفرج ہے۔



شکل ۹.۶: مستقل اجزاء $a_n = 3$ کی قیمت 3 ہی رہتی ہے لہٰذا ترتیب $\{a_n\}$ کی قیمت 3 پر مرتکز ہے۔

۱۳۸۵۸ ارتکاز اور انفراج

۱۳۸۵۹ آپ نے شکل ۹.۱ تا شکل ۹.۶ میں دیکھا کہ مثال ۹.۱ میں دیے گئے ترتیبات ایک سا رویہ نہیں رکھتے ہیں۔ متغیر n کی قیمت بڑھانے سے ترتیبات $\{\frac{1}{n}\}$ ،
۱۳۸۶۰ $\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\}$ اور $\{\frac{n-1}{n}\}$ میں ہر ایک کی قیمت کسی ایک منفرد تحدیدی قیمت تک پہنچتی ہے جبکہ ترتیب $\{3\}$ ابتدا سے تحدیدی قیمت پر ہے۔ اس
۱۳۸۶۱ کے برعکس $\{(-1)^{n+1}\frac{(n-1)}{n}\}$ کے اجزاء دو مختلف قیمتوں، -1 اور 1 ، پر جمع ہوتے ہیں جبکہ $\{\sqrt{n}\}$ کے اجزاء بتدریج بڑھتے جاتے
۱۳۸۶۲ ہیں۔

۱۳۸۶۳ ان ترتیبات میں امتیاز کرنے کی خاطر جو n بڑھانے سے کسی ایک منفرد قیمت L تک پہنچتی ہیں اور جو کسی منفرد قیمت تک نہیں پہنچتی ہیں، ہم ان ترتیبات کو جو
۱۳۸۶۴ n بڑھانے سے کسی ایک منفرد قیمت L تک پہنچتی ہو کو مرتکز کہتے ہیں۔ ارتکاز کی باضابطہ تعریف درج ذیل ہے۔

۱۳۸۶۵ **تعریف:** اگر ہر مثبت عدد ϵ کے لیے ایسا مطابقتی عدد صحیح N پایا جاتا ہو کہ ہر n کے لیے

$$n > N, \quad \Longrightarrow \quad |a_n - L| < \epsilon$$

۱۳۸۶۶ ہو تب ترتیب $\{a_n\}$ عدد L پر **مرتکز**[3] ہو گی۔ اگر ایسا کوئی عدد L موجود نہ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $\{a_n\}$ **منفرج**[4] ہے۔

۱۳۸۶۷ اگر $\{a_n\}$ عدد L پر مرتکز ہو تب ہم $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ یا مختصراً $a_n \to L$ لکھتے ہیں اور L کو اس ترتیب کا **حد**[5] کہتے ہیں (شکل ۹.۷)۔

۱۳۸۶۸ □

۱۳۸۶۹ **مثال ۹.۲:** تعریف کی پرکھ
۱۳۸۷۰ درج ذیل دکھائیں۔

$$\text{(الف)} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{(ب)} \quad \lim_{n\to\infty} k = k \qquad (k \text{ مستقل})$$

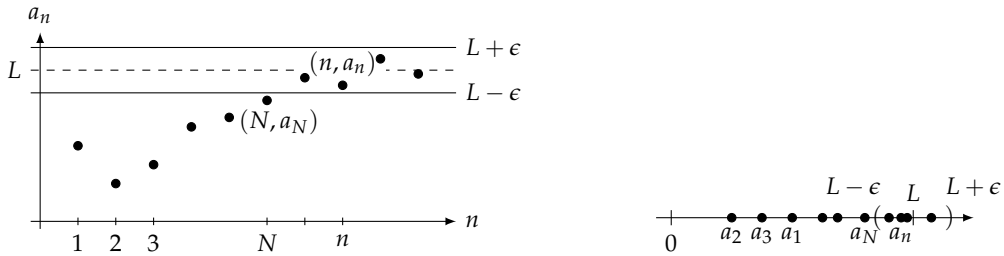
۱۳۸۷۱ **حل**

۱۳۸۷۲ (الف) فرض کریں ہمیں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہم نے دکھانا ہو گا کہ ایک ایسا عدد صحیح N پایا جاتا ہے کہ ہر n کے لیے

$$n > N \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$$

---

[3] convergent
[4] divergent
[5] limit



شکل ۹.۷: اگر نقاط (n, a_n) کی لکیر $y = L$ افقی متقارب ہو تب $a_n \to L$ ہوگا۔ اس شکل میں a_N کے بعد تمام a_n کا خط L سے فاصلہ ϵ سے کم ہے۔

ہوگا۔ یہ اس صورت ممکن ہوگا اگر $\frac{1}{n} < \epsilon$ یا $n > \frac{1}{\epsilon}$ ہو۔ اگر $\frac{1}{\epsilon}$ سے N کوئی بھی بڑا عدد صحیح ہو تب کسی بھی $n > N$ کے لیے درج بالا درست ہوگا۔ یوں ثابت ہوا کہ $\lim_{n\to\infty}(1/n) = 0$ ہے۔

(ب) فرض کریں ہمیں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہم نے دکھانا ہوگا کہ ایک ایسا عدد صحیح N پایا جاتا ہے کہ ہر n کے لیے

$$n > N \quad \Longrightarrow \quad |k - k| < \epsilon$$

ہوگا۔ چونکہ $k - k = 0$ ہوتا ہے لہٰذا درج بالا کسی بھی مثبت عدد صحیح N کے لیے درست ہوگا۔ یوں ثابت ہوا کہ کسی بھی مستقل k کے لیے $\lim_{n\to\infty} k = k$ ہوگا۔ □

مثال ۹.۳: دکھائیں کہ $\{(-1)^{n+1}[\frac{n-1}{n}]\}$ ہے۔

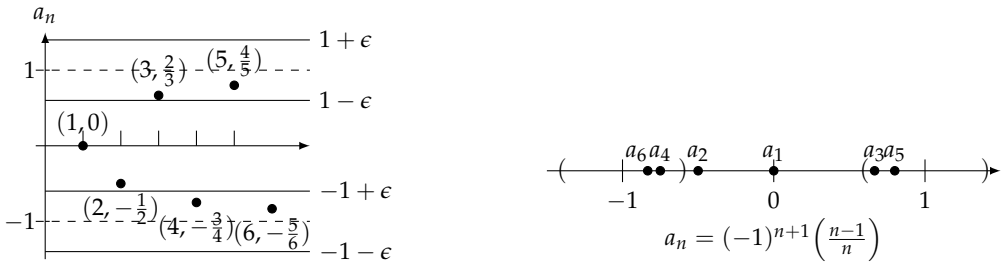
حل

ہم مثبت عدد ϵ کو 1 سے کم چنتے ہیں تاکہ شکل ۹.۸ میں $y = -1$ اور $y = 1$ پر پٹیاں ایک دوسرے کو نہ ڈھانپیں۔ اگر کسی مخصوص N سے کسی بھی بڑے n کے لیے شکل ۹.۸ میں نقطے بالائی پٹی میں پائے جاتے ہوں تب یہ ترتیب 1 پر مرتکز ہوگی۔ حقیقت میں جیسا ہی کوئی پہلا نقطہ (n, a_n) بالائی پٹی کے اندر آتا ہے، اس کے بعد $(n+1, a_{n+1})$ سے شروع کرتے ہوئے ہر متبادل نقطہ نچلی پٹی میں پایا جاتا ہے۔ یوں ترتیب کسی صورت 1 پر مرتکز نہیں ہو سکتی ہے۔ اسی طرح یہ ترتیب -1 پر بھی مرتکز نہیں ہو سکتی ہے۔ ساتھ ہی ساتھ چونکہ ترتیب کے اجزاء -1 یا 1 کے قریب تر ہوتے جاتے ہیں لہٰذا یہ کسی دوسرے نقطے کے قریب نہیں ہو سکتے ہیں لہٰذا یہ ترتیب منفرج ہے۔ □

ترتیب $\{(-1)^{n+1}[\frac{n-1}{n}]\}$ کا رویہ $\{\sqrt{n}\}$ کے رویے سے مختلف ہے۔ ترتیب $\{\sqrt{n}\}$ کے منفرج ہونے کی وجہ یہ ہے کہ یہ ہر حقیقی عدد L سے تجاوز کرتا ہے۔ اس رویے کو ہم

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$$

لکھتے ہیں۔ لامتناہی حد سے یہاں ہمارا ہرگز یہ مطلب نہیں ہے کہ n بڑھانے سے a_n اور لامتناہی کے بیچ فرق کم ہوتا ہے۔ کہنے کا مطلب صرف اتنا ہے کہ n بڑھانے سے a_n بہت بڑا ہو جاتا ہے۔



شکل ۹.۸: تسلسل $\{(-1)^{n+1}[\frac{n-1}{n}]\}$ منفرج ہے (مثال ۹.۳)

تکراری تعریف

اب تک ہم n سے بلاواسطہ a_n تلاش کرتے آرہے ہیں اگرچہ ترتیب کی عموماً تکراری تعریف پیش کی جاتی ہے جہاں

ا. ابتدائی جزو یا اجزاء کی قیمتیں دی جاتی ہیں اور

ب. **کلیہ توالی**[۶] سے ہر جزو کو گزشتہ اجزاء کی قیمتوں سے حاصل کیا جاتا ہے۔

کمپیوٹر پروگرام اور تفرقی مساوات کے اعدادی حل کے طریقوں میں توالی کلیات عموماً پائے جاتے ہیں۔

مثال ۹.۴: تواتر سے ترتیب کی بناوٹ

ا. $a_1=1$ اور $a_n=a_{n-1}+1$ کا فقرہ مثبت اعداد کی ترتیب $1,2,3,\cdots,n,\cdots$ کی تعریف پیش کرتا ہے۔ یوں $a_1=1$ لیتے ہوئے $a_2=a_1+1=1+1=2$ ، $a_3=a_2+1=2+1=3$ ، وغیرہ، ہوگا۔

ب. a_1 اور $a_n=n\cdot a_{n-1}$ کا فقرہ **اعداد ضربیہ**[۷] کی ترتیب $1,2,6,24,\cdots,n!,\cdots$ کی تعریف پیش کرتا ہے۔ یوں $a_1=1$ لیتے ہوئے $a_2=2\cdot a_1=2$ ، $a_3=3\cdot a_2=6$ ، $a_4=4\cdot a_3=24$ وغیرہ، ہوگا۔

ج. $a_1=1$ ، $a_2=1$ اور $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ کا فقرہ **فبونیکی اعداد**[۸] کی ترتیب $1,1,2,3,5,\cdots$ کی تعریف پیش کرتا ہے۔ یوں $a_1=1$ اور $a_2=1$ لیتے ہوئے $a_3=a_2+a_1=1+1=2$ ، $a_4=a_3+a_2=2+1=3$ ، $a_5=a_4+a_3=3+2=5$ ، وغیرہ، ہوگا۔

د. جیسا ہم ترکیب نیوٹن کے اطلاق سے جانتے ہیں کہ $x_0=1$ اور $x_{n+1}=x_n-\left[\frac{\sin x_n-x_n^2}{\cos x_n-2x_n}\right]$ کا فقرہ ایسی ترتیب کی تعریف پیش کرتا ہے جو مساوات $\sin x-x^2=0$ کے حل پر مرتکز ہوتی ہے۔

□

---

[۶] recursionformula
[۷] factorials
[۸] Fibonaccinumbers

جدول ۹.۱: قوت نما سے فبونیکی اعداد زیادہ تیزی سے بڑھتے ہیں۔

n	e^n	$n!$
1	3	1
5	148	120
10	22 026	3 628 800
20	4.9×10^8	2.4×10^{18}

۱۳۹۰۶ علامت $n!$ (جس کو n کا **ضربیہ عدد** کہتے ہیں) سے مراد 1 سے n تک اعداد صحیح کا حاصل ضرب $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ
۱۳۹۰۷ $(n+1)! = (n+1) \cdot n!$ ہو گا لہٰذا

$$4! = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$$
$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5 \cdot 4! = 120$$

۱۳۹۰۸ ہوں گے۔ ہم $0!$ کی تعریف 1 لیتے ہیں۔

۱۳۹۰۹ جیسا جدول ۹.۱ میں دکھایا گیا ہے قوت نما سے بھی زیادہ تیزی سے فبونیکی اعداد بڑھتے ہیں۔

۱۳۹۱۰ ذیلی ترتیبات

۱۳۹۱۱ اگر ایک ترتیب کے اجزاء اسی ترتیب سے دوسری ترتیب میں پائے جاتے ہوں تب ہم پہلی ترتیب کو دوسری ترتیب کی **ذیلی ترتیب**[9] کہتے ہیں۔

۱۳۹۱۲ مثال ۹.۵: مثبت اعداد صحیح کی ترتیب کی ذیلی ترتیبات
۱۳۹۱۳

۱۳۹۱۴ ا. جفت اعداد صحیح کی ذیلی ترتیب $2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots$

۱۳۹۱۵ ب. طاق اعداد صحیح کی ذیلی ترتیب $1, 3, 5, \cdots 2n-1, \cdots$

۱۳۹۱۶ ج. اعداد مفرد کی ذیلی ترتیب $2, 3, 5, 7, 11, \cdots$

۱۳۹۱۷ □

۱۳۹۱۸ ذیلی ترتیبات کی اہمیت کے دو وجوہات ہیں۔

۱۳۹۱۹ ا. اگر تسلسل $\{a_n\}$ مستقل L کو مرتکز ہو تب اس کے تمام ذیلی ترتیبات بھی L پر مرکوز ہوں گی۔ اگر ہم جانتے ہوں کہ ایک تسلسل مرتکز ہے تب
۱۳۹۲۰ اس کے کسی مخصوص ذیلی تسلسل سے حد کی تلاش یا اس کا تخمینہ لگانا زیادہ آسان ثابت ہو سکتا ہے۔

[9] subsequence

ب. اگر $\{a_n\}$ کا کوئی بھی ذیلی تسلسل منفرج ہو یا اس کے کسی دو ذیلی ترتیبات کی حدیں ایک دوسرے سے مختلف ہوں تب $\{a_n\}$ منفرج ہو گا۔ مثال کے طور پر تسلسل $\{(-1)^n\}$ منفرج ہو گا چونکہ طاق اجزاء کی ذیلی تسلسل $-1, -1, -1, \cdots$ کی حد -1 ہے جبکہ جفت اجزاء کی ذیلی تسلسل $1, 1, 1, \cdots$ کی حد 1 ہے جو ایک مختلف حد ہے۔

ذیلی تسلسل کی مدد سے ارتکاز کو ایک نئی نظر سے دیکھا جا سکتا ہے۔ کسی اشاریہ N سے آگے تمام اجزاء کو تسلسل کی **دُم**[10] کہتے ہیں جو ایک ذیلی تسلسل ہو گی۔ یوں سلسلہ $\{a_n | n \geq N\}$ میں سے کسی ایک کو دُم کہا جا سکتا ہے۔ یوں $a_n \to L$ کی جگہ ہم کہہ سکتے ہیں کہ L کے ارد گرد ϵ وقفہ میں تسلسل کی دُم پائی جائے گی۔

کسی بھی تسلسل کی ارتکاز یا انفراج کا تسلسل کی ابتدا کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے۔ تسلسل کی ارتکاز یا انفراج صرف تسلسل کی دُم پر منحصر ہو گی۔

محدود غیر گھٹتا تسلسل

تعریف: ایسا تسلسل جو تمام n کے لیے $a_n \leq a_{n+1}$ خاصیت رکھتا ہو **غیر گھٹتا تسلسل**[11] کہلاتا ہے۔

□

مثال ۹.۶: غیر گھٹتا تسلسل

ا. قدرتی اعداد کا تسلسل $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$

ب. تسلسل $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$

ج. مستقل تسلسل $\{3\}$

□

غیر گھٹتا تسلسل کی دو قسمیں ہیں۔ پہلی قسم کے اجزاء آخر کار ہر متناہی حد بندی سے بڑھ جاتے ہیں جبکہ دوسری قسم کے اجزاء کسی مخصوص حد بندی سے تجاوز نہیں کرتے ہیں۔

تعریف: اگر ایک ایسا عدد M موجود ہو کہ تمام n کے لیے $a_n \leq M$ ہوں تب تسلسل $\{a_n\}$ کی **بالائی حد بندی**[12] M ہو گی۔ ہم کہتے ہیں کہ تسلسل $\{a_n\}$ **اوپر سے محدود**[13] ہے۔ اگر M سے کم کوئی بھی عدد، $\{a_n\}$ کی بالائی حد بندی نہ ہو، تب M کو $\{a_n\}$ کی **کم سے کم بالائی حد بندی**[14] کہتے ہیں۔

---

[10] tail
[11] nondecreasingsequence
[12] upperbound
[13] boundedfromabove
[14] leastupperbound

□

مثال ۹.۷:

ا. تسلسل $1, 2, 3, \cdots, n, \cdots$ کی کوئی بالائی حد بندی نہیں پائی جاتی ہے۔

ب. تسلسل $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$ اوپر سے محدود ہے اور اس کی بالائی حد بندی $M = 1$ ہے۔ کوئی بھی عدد جو 1 سے چھوٹا ہو اس تسلسل کی بالائی حد بندی نہیں ہو سکتی ہے لہٰذا اس تسلسل کی کم سے کم بالائی حد بندی 1 ہے (سوال ۹.۴۷)۔

□

ایسے غیر گھٹتا تسلسل کی کم سے کم بالائی حد بندی ضرور پایا جائے گا جو اوپر سے محدود ہو۔ یہ حقیقت، جس کو ہم یہاں ثابت نہیں کریں گے، حقیقی اعداد کی کملیت کی خاصیت کی وجہ سے ہے۔ البتہ ہم یہ ثابت کرتے ہیں کہ اگر L کم سے کم بالائی حد بندی ہو تب تسلسل L پر مرتکز ہو گا۔

فرض کریں ہم $(1, s_1), (2, s_2), \cdots, (n, s_n), \cdots$ نقطوں کو مستوی xy میں ترسیم کرتے ہیں۔ اگر اس تسلسل کی بالائی حد بندی M ہو تب یہ تمام نقطے لکیر $y = M$ کے نیچے پائے جائیں گے (شکل ۹.۹)۔ لکیر $y = L$ سب سے نچلی ایسی لکیر ہو گی۔ نقاط (n, s_n) میں سے کوئی بھی اس لکیر سے اوپر نہیں ہو گا اگرچہ اس سے نیچے لکیر $y = L - \epsilon$ سے چند نقطے ضرور اوپر ہوں گے، جہاں ϵ مثبت عدد ہے۔ یہ ترتیب درج ذیل وجوہات کی وجہ سے L پر مرتکز ہو گی:

ا. تمام n کے لیے $s_n \leq L$ ہو گا اور

ب. کسی بھی دیے گئے عدد $\epsilon > 0$ کے لیے کم سے کم ایک ایسا عدد N موجود ہو گا جس کے لیے $s - N > L - \epsilon$ ہو گا۔

مزید $\{s_n\}$ غیر گھٹتا ہے لہٰذا

$$s_n \geq s_N > L - \epsilon \qquad \text{تمام } n \geq N \text{ کے لیے}$$

ہو گا۔ یوں N کے بعد تمام اعداد s_n کا L سے فاصلہ ϵ سے کم ہو گا۔ یہی وہ شرط ہے جس کی وجہ سے تسلسل s_n کی حد L ہو گی۔

غیر گھٹتے ترتیبات کے حقائق کو درج ذیل مسئلہ یکجا کرتا ہے۔ غیر بڑھتے ترتیبات کے لیے بھی اسی طرح کا نتیجہ کارآمد ہے (سوال ۹.۴۱)۔

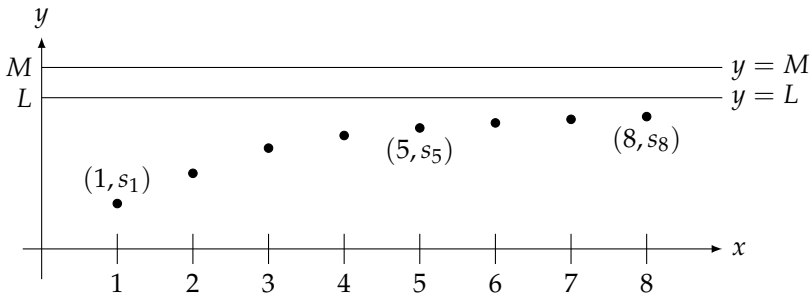
مسئلہ ۹.۱: غیر گھٹتا تسلسل کا مسئلہ

حقیقی اعداد کا ایک غیر گھٹتا تسلسل صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گا جب یہ تسلسل اوپر سے محدود ہو۔ اگر ایک غیر گھٹتا تسلسل مرتکز ہو، یہ اپنے کم سے کم بالائی حد بندی پر مرتکز ہو گا۔

سوالات

ترتیب کے اجزاء کی تلاش

سوال ۹.۱ تا سوال ۹.۶ میں ترتیب کی n ویں جزو کا کلیہ دیا گیا ہے۔ اس کے ابتدائی اجزاء a_1 ، a_2 ، a_3 اور a_4 تلاش کریں۔



شکل ۹.۹: اگر غیر گھٹتے تسلسل کی بالائی حد بندی M ہو تب اس کی حدیں $L \leq M$ بھی ہوں گی۔

۱۳۹۶۶ سوال ۹.۱: $a_n = \frac{1-n}{n^2}$

۱۳۹۶۷ سوال ۹.۲: $a_n = \frac{1}{n!}$

۱۳۹۶۸ سوال ۹.۳: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

۱۳۹۶۹ سوال ۹.۴: $a_n = 2 + (-1)^n$

۱۳۹۷۰ سوال ۹.۵: $a_n = \frac{2^n}{2^{n+1}}$

۱۳۹۷۱ سوال ۹.۶: $a_n = \frac{2^n-1}{2^n}$

۱۳۹۷۲ سوال ۹.۷ تا سوال ۹.۱۲ میں ابتدائی ایک یا دو اجزاء اور کلیہ توالی دی گئی ہے۔ ابتدائی دس اجزاء تلاش کریں۔

۱۳۹۷۳ سوال ۹.۷: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2^n}$

۱۳۹۷۴ سوال ۹.۸: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{n+1}$

۱۳۹۷۵ سوال ۹.۹: $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = (-1)^{n+1}\frac{a_n}{2}$

۱۳۹۷۶ سوال ۹.۱۰: $a_1 = -2, \quad a_{n+1} = \frac{na_n}{n+1}$

۱۳۹۷۷ سوال ۹.۱۱: $a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

۱۳۹۷۸ سوال ۹.۱۲: $a_1 = 2, \quad a_2 = -1, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

۱۳۹۷۹ **ترتیب کے کلیہ کی تلاش**

۱۳۹۸۰ سوال ۹.۱۳ تا سوال ۹.۲۲ میں دیے گئے ترتیب کے n ویں جزو کا کلیہ تلاش کریں۔

۱۳۹۸۱ سوال ۹.۱۳: $1, -1, 1, -1, 1, \cdots$ ہر بار 1 کی علامت تبدیل ہوتی ہے۔

۱۳۹۸۲ سوال ۹.۱۴: $-1, 1, -1, 1, -1, \cdots$ ہر بار 1 کی علامت تبدیل ہوتی ہے۔

سوال ۹.۱۵: $1, -4, 9, -16, 25, \cdots$ مثبت عدد صحیح کا مربع جس کی علامت ہر بار تبدیل ہوتی ہے۔

سوال ۹.۱۶: $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \cdots$ مثبت عدد صحیح کے مربع کا بالعکس متناسب جس کی علامت ہر بار تبدیل ہوتی ہے۔

سوال ۹.۱۷: $0, 3, 8, 15, 24, \cdots$ مثبت عدد صحیح کے مربع سے 1 کم۔

سوال ۹.۱۸: $-3, -2, -1, 0, 1, \cdots$ عدد صحیح -3 سے شروع کرتے ہوئے۔

سوال ۹.۱۹: $1, 5, 9, 13, 17, \cdots$ ہر دوسرا طاق مثبت عدد صحیح۔

سوال ۹.۲۰: $2, 6, 10, 14, 18, \cdots$ ہر دوسرا جفت مثبت عدد صحیح۔

سوال ۹.۲۱: $1, 0, 1, 0, 1, \cdots$ باری باری 1 اور 0

سوال ۹.۲۲: $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, \cdots$ ہر مثبت عدد صحیح دو بار۔

کیلکولیٹر کی مدد سے حد کی تلاش

سوال ۹.۲۳ تا سوال ۹.۲۶ میں کیلکولیٹر کے ساتھ تجربات کرتے ہوئے N کی وہ قیمت تلاش کریں جو دی گئی عدم مساوات کو تمام $n > N$ کے لیے مطمئن کرتا ہو۔ دی گئی عدم مساوات، تسلسل کی حد کی باضابطہ تعریف کے تحت ہے۔ تسلسل کی تفصیل پیش کریں اور اس کی حد تلاش کریں۔

سوال ۹.۲۳: $\left|\sqrt[n]{0.5} - 1\right| < 10^{-3}$

سوال ۹.۲۴: $\left|\sqrt[n]{n} - 1\right| < 10^{-3}$

سوال ۹.۲۵: $(0.9)^n < 10^{-3}$

سوال ۹.۲۶: $\frac{2^n}{n!} < 10^{-7}$

سوال ۹.۲۷: ترکیب نیوٹن سے حاصل ترتیبات

ترکیب نیوٹن کی قابل تفرق تفاعل $f(x)$ پر اطلاق سے ابتدائی قیمت x_0 اور اس کے بعد اعداد کی ترتیب $\{x_n\}$ حاصل ہوتی ہے جو موزوں صورت میں f کے صفر پر مرتکز ہو گی۔ اس ترتیب کا کلیہ توالی درج ذیل ہے۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

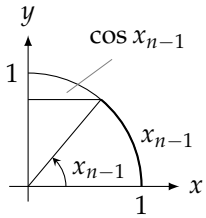
ا. دکھائیں کہ $f(x) = x^2 - a^2,\ a > 0$ کا کلیہ توالی $x_{n+1} = \frac{x_n + a/x_n}{2}$ ہے۔

ب. ابتدائی قیمت $x_0 = 1$ اور $a = 3$ لیتے ہوئے وہاں تک یکے بعد دیگرے اجزاء تلاش کریں جب اجزاء دہرانے شروع ہو جاتے ہیں۔ کون سے عدد کی تخمین حاصل ہوتی ہے؟ وجہ پیش کریں۔

سوال ۹.۲۸: گزشتہ سوال (سوال ۹.۲۷) میں $a = 3$ کے بجائے $a = 2$ لیتے ہوئے جزو-ب دوبارہ حل کریں۔

سوال ۹.۲۹: $\frac{\pi}{2}$ کی تعریف توالی

اگر آپ $x_1 = 1$ سے شروع کر کے $\{x_n\}$ کے باقی اجزاء کو قاعدہ $x_n = x_{n-1} + \cos x_{n-1}$ سے حاصل کریں تب ایک ایسی ترتیب حاصل ہو گی جو بہت تیزی سے $\frac{\pi}{2}$ پر مرتکز ہو گی۔ (ا) ایسا کر کے دیکھیں۔ (ب) اتنی تیز ارتکاز کی وجہ شکل ۹.۱۰ کی مدد سے پیش کریں۔



شکل ۹.۱۰: اکائی دائرہ برائے سوال ۹.۱۰

۱۴۰۰۸ سوال ۹.۳۰: گاڑیاں بنانے والا ایک کارخانہ دھاتی چادر کو دبا کر ایک گاڑی کا ڈھانچہ اوسطاً 7.25 گھنٹوں میں تیار کرتا ہے۔ اگر ڈھانچہ تیار کرنے کے لیے
۱۴۰۰۹ درکار وقت میں سالانہ 6 % کمی رونما ہو تب n سالوں بعد

$$S_n = 7.25(0.94)^n$$

۱۴۰۱۰ وقت درکار ہو گا۔ کتنے سالوں بعد تقریباً 3.5 گھنٹے درکار ہوں گے؟ جواب کو دو مختلف طریقوں سے تلاش کریں:

۱۴۰۱۱ ا. تسلسل S_n کا وہ پہلا جزو تلاش کریں جو 3.5 کے برابر یا اس سے کم ہو۔

۱۴۰۱۲ ب. تفاعل $f(x) = 7.25(0.94)^x$ ترسیم کر کے دیکھیں یہ کہاں لکیر $y = 3.5$ کو مس کرتی ہے۔

۱۴۰۱۳ **نظریہ اور مثالیں**

۱۴۰۱۴ سوال ۹.۳۱ تا سوال ۹.۳۴ میں معلوم کریں کہ آیا تسلسل غیر گھٹتی ہے اور کیا یہ اوپر سے محدود ہے۔

۱۴۰۱۵ سوال ۹.۳۱: $a_n = \frac{3n+1}{n+1}$

۱۴۰۱۶ سوال ۹.۳۲: $a_n = \frac{(2n+3)!}{(n+1)!}$

۱۴۰۱۷ سوال ۹.۳۳: $a_n = \frac{2^n 3^n}{n!}$

۱۴۰۱۸ سوال ۹.۳۴: $a_n = 2 - \frac{2}{n} - \frac{1}{2^n}$

۱۴۰۱۹ سوال ۹.۳۵ تا سوال ۹.۴۰ میں کون سی ترتیب مرتکز ہے اور کون سی منفرج؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۴۰۲۰ سوال ۹.۳۵: $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

۱۴۰۲۱ سوال ۹.۳۶: $a_n = n - \frac{1}{n}$

۱۴۰۲۲ سوال ۹.۳۷: $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$

۱۴۰۲۳ سوال ۹.۳۸: $a_n = \frac{2^n - 1}{3^n}$

۱۴۰۲۴ سوال ۹.۳۹: $a_n = [(-1)^n + 1]\left(\frac{n+1}{n}\right)$

سوال ۹.۴۰: ایک ترتیب کا پہلا جزو $x_1 = \cos(1)$، اگلا جزو $x_2 = x_1$ یا $\cos(2)$ میں سے جو بھی بڑا ہے، اس سے اگلا جزو $x_3 = x_2$ یا $\cos(3)$ میں سے جو بھی بڑا (دائیں جانب زیادہ دور) ہے۔ یوں عمومی جزو درج ذیل ہو گا۔

$$x_{n+1} = \{x_n, \cos(n+1)\}_{\text{زیادہ بڑا}}$$

سوال ۹.۴۱: غیر بڑھتے ترتیبات

ایک ترتیب جس میں تمام n کے لیے $a_n > a_{n+1}$ ہو **غیر بڑھتا ترتیب**[۱۵] کہلاتا ہے۔ اگر ہر n کے لیے $M \leq a_n$ ہو جہاں M کوئی عدد ہو تب M کو ترتیب $\{a_n\}$ کی **زیریں حد بندی**[۱۶] کہتے ہیں اور ہم کہتے ہیں کہ یہ ترتیب **نیچے سے محدود**[۱۷] ہے۔ مسئلہ ۹.۱ سے اخذ کریں کہ ایسا غیر بڑھتا تسلسل جو نیچے سے محدود ہو مرتکز ہو گا جبکہ غیر بڑھتا تسلسل جو نیچے سے محدود نہ ہو منفرج ہو گا۔

سوال ۹.۴۲ تا سوال ۹.۴۶ میں سوال ۹.۴۱ کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں کہ کونسی ترتیب مرتکز اور کونسی منفرج ہے۔

سوال ۹.۴۲: $a_n = \frac{n+1}{n}$

سوال ۹.۴۳: $a_n = \frac{1+\sqrt{2n}}{\sqrt{n}}$

سوال ۹.۴۴: $a_n = \frac{1-4^n}{2^n}$

سوال ۹.۴۵: $a_n = \frac{4^{n+1}+3^n}{4^n}$

سوال ۹.۴۶: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n - 3$

سوال ۹.۴۷: ترتیب $\{\frac{n}{n+1}\}$ کی کم سے کم بالائی حد بندی 1 ہے۔ دکھائیں کہ اگر عدد M ایک سے کم ہو تب $\{\frac{n}{n+1}\}$ کے اجزاء آخر کار M سے تجاوز کر جائیں گے۔ یعنی $M < 1$ کی صورت میں ایسا عدد صحیح N موجود ہو گا کہ جب $n > N$ ہو تب $\frac{n}{n+1} > M$ ہو گا۔ چونکہ ہر n کے لیے $\frac{n}{n+1} < 1$ ہے لہٰذا یوں ثابت ہوتا ہے کہ $\{\frac{n}{n+1}\}$ کی بالائی حد بندی 1 ہو گی۔

سوال ۹.۴۸: کم سے کم بالائی حد بندی کی یکتائی

دکھائیں کہ اگر M_1 اور M_2 ترتیب $\{a_n\}$ کے کم سے کم بالائی حد بندی ہوں تب $M_1 = M_2$ ہو گا، یعنی، کسی بھی ترتیب کے دو مختلف کم سے کم بالائی حد بندی نہیں ہو سکتی ہیں۔

سوال ۹.۴۹: کیا ضروری ہے کہ اوپر سے محدود، مثبت اعداد کی ترتیب $\{a_n\}$ لازماً مرتکز ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۹.۵۰: اگر $\{a_n\}$ مرتکز ترتیب ہو تب دکھائیں کہ ہر مثبت عدد ϵ کے لیے ایسا مطابقتی عدد صحیح N ہو گا کہ تمام m اور n کے لیے درج ذیل ہو۔

$$m > N \quad \text{اور} \quad n > N \quad \Longrightarrow \quad |a_m - a_n| < \epsilon$$

سوال ۹.۵۱: حد کی یکتائی

ثابت کریں کہ ہر ترتیب کی حد یکتا ہو گی، یعنی، دکھائیں کہ اگر L_1 اور L_2 ایسے اعداد ہوں کہ $a_n \to L_1$ اور $a_m \to L_2$ ہوں تب $L_1 = L_2$ ہو گا۔

---

[۱۵] nonincreasingsequence
[۱۶] lowerbound
[۱۷] boundedfrombelow

سوال ۹.۵۲: ترتیبات اور حد

دکھائیں کہ اگر ترتیب $\{a_n\}$ کے دو ذیلی ترتیبات کی حدیں مختلف ہوں، $L_1 \neq L_2$ تب $\{a_n\}$ منفرج ترتیب ہو گی۔

سوال ۹.۵۳: ترتیب $\{a_n\}$ کے جفت اشاریہ کے اجزاء کو a_{2k} اور طاق اشاریہ کے اجزاء کو a_{2k+1} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ثابت کریں کہ $a_{2k} \to L$ اور $a_{2k+1} \to L$ کی صورت میں $a_n \to L$ ہو گا۔

سوال ۹.۵۴: دکھائیں کہ ترتیب $\{a_n\}$ اس صورت 0 کو مرتکز ہو گا جب مطلق قیمتیں $\{|a_n|\}$ صفر کو مرتکز ہوں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۹.۵۵ تا سوال ۹.۶۶ میں کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. ابتدائی 25 اجزاء کا حساب لگا کر انہیں ترسیم کریں۔ کیا ترتیب اوپر یا نیچے سے محدود نظر آتی ہے؟ کیا یہ منفرج یا مرتکز نظر آتی ہے؟ ارتکاز کی صورت میں حد L کتنا ہے؟

ب. اگر تسلسل مرتکز ہو تب ایسا عدد صحیح N تلاش کریں کہ $n \geq N$ کے لیے $|a_n - L| \leq 0.01$ ہو۔ ترتیب میں کتنا آگے جا کر L اور اجزاء کے بیچ فاصلہ 0.0001 سے کم ہو گا؟

سوال ۹.۵۵: $a_n = \sqrt[n]{n}$

سوال ۹.۵۶: $a_n = \left(1 + \frac{0.5}{n}\right)^n$

سوال ۹.۵۷: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{5^n}$

سوال ۹.۵۸: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + (-2)^n$

سوال ۹.۵۹: $a_n = \sin n$

سوال ۹.۶۰: $a_n = n \sin \frac{1}{n}$

سوال ۹.۶۱: $a_n = \frac{\sin n}{n}$

سوال ۹.۶۲: $a_n = \frac{\ln n}{n}$

سوال ۹.۶۳: $a_n = (0.9999)^n$

سوال ۹.۶۴: $a_n = 123456^{1/n}$

سوال ۹.۶۵: $a_n = \frac{8^n}{n!}$

سوال ۹.۶۶: $a_n = \frac{n^{41}}{19^n}$

سوال ۹.۶۷: سود در سود

آپ ایک بنک میں مستقل رقم A_0 جمع کرتے ہیں جو سالانہ r فی صد سود کا ایک سال میں m مرتبہ حساب لگا کر آپ کے رقم میں جمع کرتی ہے۔ مزید آپ ہر سال b رقم بھی بنک میں جمع کرتے ہیں یا $b < 0$ کی صورت میں بنک سے نکالتے ہیں۔ یوں $n+1$ سال بعد کل رقم درج ذیل ہو گی۔

$$A_{n+1} = \left(1 + \frac{r}{m}\right) A_n + b \tag{ا}$$

ا. اگر $A_0 = 1000$ ، $r = 0.02015$ ، $m = 12$ اور $b = 50$ ہوں تب ابتدائی 100 نقطوں (n, A_n) کو ترسیم کریں۔ پانچ سال کے آخر میں آپ کی رقم کتنی ہوگی؟ کیا $\{A_n\}$ مرتکز ہے؟ کیا $\{A_n\}$ محدود ہے۔

ب. اگر $A_0 = 5000$ ، $r = 00589$ ، $m = 12$ اور $b = -50$ ہوں تب ابتدائی 100 نقطوں (n, A_n) کو ترسیم کریں۔

ج. اگر آپ بنک میں 5000 رقم مستقل طور پر جمع کریں جس پر سالانہ $4.5\,\%$ سود ہو جس کا ایک سال میں چار مرتبہ حساب کیا جاتا ہو تب کتنے سالوں بعد آپ کی رقم 20000 ہوگی۔ اگر سود $6.25\,\%$ ہو؟

د. سود در سود کا تعلق مساوات ۱ میں پیش کیا گیا ہے جو $k \geq 0$ کے لیے درج ذیل تعلق کو مطمئن کرتی ہے

$$A_k = (1 + r/m)^k (A_0 + mb/r) - \frac{mb}{r} \qquad (۲)$$

جس کی تصدیق کی خاطر مساوات ۱ اور مساوات ۲ کی ابتدائی 50 اجزاء کا آپس میں موازنہ کریں۔ اس کے بعد مساوات ۲ سے مساوات ۱ اخذ کریں۔

سوال ۹.۶۸: اگر ابتدائی قیمت a_0 دیا گیا ہو تب کلیہ توالی $a_{n+1} = ra_n(1 - a_n)$ ترتیب $\{a_n\}$ دیتا ہے۔ ہم $0 < a_0 < 1$ لیں گے۔

ا. $a_0 = \frac{3}{4}$ منتخب کریں۔ ترتیب کے ابتدائی 100 نقطے (n, a_n) ترسیم کریں۔ کیا ترتیب مرتکز معلوم ہوتا ہے؟ آپ کے خیال میں ترتیب کی حد کیا ہے؟ کیا حد کی قیمت a_0 کے انتخاب پر منحصر ہے؟

ب. وقفہ $1 < r < 3$ میں r کی کئی قیمتیں منتخب کر کے جزو-الف دہرائیں۔ اس وقفہ کے سروں کے قریب ضرور نقطے منتخب کریں۔ ترسیم کے رویہ پر تبصرہ کریں۔

ج. اب وقفہ $3 < r < 3.45$ کے آخری سروں کے قریب ترتیب کے رویہ پر غور کریں۔ عبوری نقطہ $r = 3$ کو **دو لختی قیمت**[۱۸] کہتے ہیں۔ نئے وقفہ میں ترتیب کے رویہ کو 2 **چکر کشی** کہتے ہیں۔ آپ سمجھائیں کہ یہ فقرہ کیوں ترتیب کے رویہ کو درست بیان کرتا ہے۔

د. وقفہ $3.45 < r < 3.54$ اور وقفہ $3.54 < r < 3.55$ کے آخری سروں کے قریب r کی قیمتوں کے لیے ترتیب کے رویہ پر غور کریں۔ ترتیب کی ابتدائی 200 قیمتیں ترسیم کریں۔ ہر ایک وقفہ میں ترتیب کے رویوں پر تبصرہ کریں۔ ہر ایک وقفہ میں کتنی قیمتوں کے بیچ ترتیب ارتعاش کرتی ہے؟ چونکہ $r = 3.45$ اور $r = 3.54$ کو عبور کرنے سے ترتیب کا رویہ تبدیل ہوتا ہے لہٰذا ان نقطوں کو بھی دو لختی قیمتیں کہتے ہیں۔

ھ. حقیقت میں دو لختی قیمتوں کی ترتیب $3 < 3.45 < 3.54 < \cdots < c_n < c_{n+1} \cdots$ پائی جاتی ہے جس میں $c_n < r < c_{n+1}$ ہوگا۔ یوں یہ ترتیب 2^n قیمتوں، جنہیں 2^n **چکر کشی** کہتے ہیں، کے بیچ برقرار ارتعاش کرتی ہے۔ مزید دو لختی ترتیب $\{c_n\}$ اوپر سے 3.57 تک محدود ہے لہٰذا یہ مرتکز ہوگی۔ اگر آپ $r < 3.57$ منتخب کریں، آپ کو 2^n چکر کی کوئی قسم نظر آئے گی۔ آپ $r = 3.5695$ منتخب کر کے ابتدائی 300 نقطے ترسیم کریں۔

و. آئیں $r > 3.57$ کر کے ترتیب کے رویہ پر غور کریں۔ یوں $r = 3.65$ منتخب کر کے $\{a_n\}$ کے ابتدائی 300 نقطے ترسیم کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ ترتیب کے اجزاء میں کوئی ترتیب نہیں پائی جائے گی۔ آپ a_n کی قیمت سے a_{n+1} کی قیمت کی پیش گوئی نہیں کر سکتے ہیں۔

---

[۱۸] bifurcationvalue

ز. $r = 3.65$ لے کر a_0 کی دو قریبی ابتدائی قیمتیں، مثلاً $a_0 = 0.3$ اور $a_0 = 0.301$، منتخب کریں۔ ان ابتدائی قیمتوں سے حاصل دونوں ترتیب کی ابتدائی 300 قیمتیں ترسیم کریں۔ دونوں کے رویہ پر غور کریں۔ کتنے اجزاء بعد دونوں ترتیبات کے اجزاء میں فرق بڑھتا ہوا نظر آتا ہے؟ آپ $r = 3.75$ کے لیے یہی کچھ کریں۔ کیا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ a_0 کی انتخاب سے ترسیم کتنے مختلف نظر آتے ہیں؟ ہم کہتے ہیں کہ یہ ترتیب ابتدائی قیمت کو *حساس*[19] ہے۔

۹.۲ ترتیب کی حدیں تلاش کرنے کے مسئلے

حد پر غور کرتے وقت ہر مرتبہ ارتکاز کو تعریف سے ثابت کرنا مشکل کام ہے۔ خوش قسمتی سے تین مسائل اس عمل سے، کم و بیش ہر زیادہ تر، چھٹکارا دیتے ہیں۔ پہلا مسئلہ درج ذیل ہے جو حصہ ۲.۲ میں مسئلہ ۲.۱ کی ایک قسم ہے۔

مسئلہ ۹.۲: فرض کریں $\{a_n\}$ اور $\{b_n\}$ حقیقی اعداد کے ترتیب ہیں اور A اور B حقیقی اعداد ہیں۔ اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ اور $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ ہوں تب درج ذیل قواعد درست ہوں گے۔

قاعدہ مجموعہ: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = A + B$

قاعدہ فرق: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = A - B$

قاعدہ ضرب: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = A \cdot B$

قاعدہ ضرب مستقل: $\lim\limits_{n\to\infty}(k \cdot b_n) = k \cdot B$ (جہاں k عدد ہے)

قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ اگر $B \neq 0$ ہو۔

مثال ۹.۸: ہم مسئلہ ۹.۲ کے ساتھ گزشتہ حصے کی مثال ۹.۲ ملا کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\right) = 1 \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = -1 \cdot 0 = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 1 - 0 = 1$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{5}{n^2} = 5 \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 5 \cdot 0 \cdot 0 = 0$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{4 - 7n^6}{n^6 + 3} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n^6} - 7}{1 + \frac{3}{n^6}} = \frac{0 - 7}{1 + 0} = -7$$

□

[19] sensitive

مسئلہ ۹.۲ کے تحت منفرج ترتیب $\{a_n\}$ کو ہر غیر صفر عدد سے ضرب دینے سے منفرج ترتیب ہی حاصل ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر اگر اس کے برعکس کسی عدد $c \neq 0$ کے لیے $\{ca_n\}$ مرتکز ہو تب مسئلہ ۹.۲ میں قاعدہ ضرب مستقل میں $k = \frac{1}{c}$ لیتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں درج ذیل ترتیب مرتکز ہو گی۔

$$\left\{\frac{1}{c} \cdot ca_n\right\} = \{a_n\}$$

یوں $\{ca_n\}$ صرف اس صورت مرتکز ہو گی جب a_n مرتکز ہو۔ اگر $\{a_n\}$ مرتکز نہ ہو تب $\{ca_n\}$ مرتکز نہیں ہو سکتی ہے۔

اگلا مسئلہ حصہ ۲.۲ میں مسئلہ بیچ (مسئلہ ۲.۴) کی ترتیب پر قابل لاگو قسم ہے۔

مسئلہ ۹.۳: **ترتیب کے لیے مسئلہ بیچ**

فرض کریں $\{a_n\}$ ، $\{b_n\}$ اور $\{c_n\}$ حقیقی اعداد کی ترتیبات ہیں۔ اگر کسی اشاریہ N کے بعد تمام n کے لیے

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

ہو اور اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ ہو تب $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ ہو گا۔

اگر $|b_n| \leq c_n$ ہو اور $c_n \to 0$ ہو تب چونکہ $-c_n \leq b_n \leq c_n$ ہو گا لہٰذا مسئلہ ۹.۳ کے تحت $b_n \to 0$ ہو گا۔ اس حقیقت کو اگلی مثال میں استعمال کیا جائے گا۔

مثال ۹.۹: چونکہ $\frac{1}{n} \to 0$ ہوتا ہے لہٰذا ہم جانتے ہیں کہ درج ذیل ہوں گے۔

(الف) $\frac{\cos n}{n} \to 0$ $\qquad \left(\left|\frac{\cos n}{n}\right| = \frac{|\cos n|}{n} \leq \frac{1}{n}\right)$

(ب) $\frac{1}{2^n} \to 0$ $\qquad \left(\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{n}\right)$

(ج) $(-1)^n \frac{1}{n} \to 0$ $\qquad \left(\left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{n}\right)$

□

ایک مسئلہ جو کہتا ہے کہ استمراری تفاعل کی مرتکز ترتیب پر اطلاق سے مرتکز ترتیب ملتی ہے مسئلہ ۹.۲ اور مسئلہ ۹.۳ کو وسعت دیتا ہے۔ ہم اس مسئلے کو بغیر ثبوت کے پیش کرتے ہیں۔

مسئلہ ۹.۴: **استمراری تفاعل مسئلہ برائے ترتیبات**

فرض کریں $\{a_n\}$ حقیقی اعداد کی ترتیب ہے۔ اگر $a_n \to L$ ہو اور f ایسا تفاعل ہو جو L پر استمراری اور تمام a_n پر معین ہو تب $f(a_n) \to f(L)$ ہو گا۔

مثال ۹.۱۰: دکھائیں کہ $\sqrt{\frac{n+1}{n}} \to 1$ ہوگا۔

حل

ہم جانتے ہیں کہ $\frac{n+1}{n} \to 1$ ہے۔ مسئلہ ۹.۴ میں $f(x) = \sqrt{x}$ اور $L = 1$ لینے سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\sqrt{\frac{n+1}{n}} \to \sqrt{1} = 1$$

□

فنیات

ترتیب $\{2^{1/n}\}$: کیلکولیٹر میں 2 لکھ کر بار بار جذر لینے سے کیا حاصل ہوگا؟ آپ دیکھیں گے کہ جوابات ایسی ترتیب دیتے ہیں جو 1 کو مرتکز ہے۔ یہ ترتیب درج ذیل ہے۔ کیلکولیٹر استعمال کر کے اس ترتیب کو خود حاصل کریں۔

n	$2^{1/n}$
2	1.414 213 562
4	1.189 207 115
8	1.090 507 733
64	1.010 889 286
256	1.002 711 275
1024	1.000 677 131
16384	1.000 042 307

درج بالا جدول میں کیا ہو رہا ہے؟ ترتیب $\{\frac{1}{n}\}$ عدد 0 کو مرتکز ہے۔ مسئلہ ۹.۴ میں $a_n = \frac{1}{n}$ ، $f(x) = 2^x$ اور $L = 0$ لینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ $2^{1/n} = f(\frac{1}{n}) \to f(L) = 2^0 = 1$ ہوگا۔ چونکہ 2 کے یکے بعد دیگرے جذر، ترتیب $\{2^{1/n}\}$ کی ذیلی ترتیب $2^{1/2}, 2^{1/4}, 2^{1/8}, \ldots$ دیتے ہیں لہٰذا یہ جذر بھی 1 کو مرتکز ہوگا (شکل ۹.۱۱)۔

قاعدہ لھوپیٹال کا استعمال

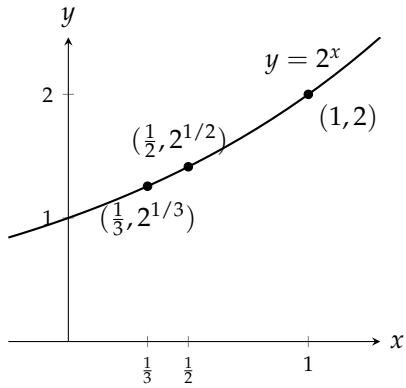
اگلا مسئلہ ہمیں قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے چند ترتیبات کی حدیں تلاش کرنے کے قابل بناتا ہے۔

مسئلہ ۹.۵: فرض کریں کہ تفاعل $f(x)$ تمام $x \geq n_0$ کے لیے معین ہے اور $\{a_n\}$ حقیقی اعداد کی ایک ایسی ترتیب ہے کہ تمام $n \geq n_0$ کے لیے $a_n = f(n)$ ہے۔ ایسی صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L$$

ثبوت: فرض کریں کہ $\lim x \to \infty f(x) = L$ ہے۔ تب ہر مثبت عدد ϵ کے لیے ایسا عدد M پاتا ہے کہ تمام x کے لیے درج ذیل ہو۔

$$x > M \quad \Longrightarrow \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$



شکل ۹.۱۱: جیسے جیسے $n \to \infty$ ہوتا ہے ویسے ویسے $\frac{1}{n} \to 0$ اور $2^{1/n} \to 2^0$ ہوتے ہیں۔

۱۴۱۵۵ فرض کریں عدد صحیح N عدد M سے بڑا جبکہ n_0 کے برابر یا اس سے بڑا ہے۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} n > N \quad &\Longrightarrow \quad a_n = f(n) \\ |a_n - L| = &\left|f(n) - L\right| < \epsilon \end{aligned}$$

۱۴۱۵۶ □

۱۴۱۵۷ مثال ۹.۱۱: دکھائیں $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$

۱۴۱۵۸ **حل**

۱۴۱۵۹ تفاعل $\frac{\ln x}{x}$ تمام $x \geq 1$ کے لیے معین ہے اور مثبت عدد صحیح کے لیے اس ترتیب سے اتفاق کرتا ہے۔ یوں $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}$ مسئلہ ۹.۵ کے تحت
۱۴۱۶۰ $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$ (اگر موجود ہو) کے ساتھ اتفاق کرے گا۔ قاعدہ لھوپیٹال کی ایک استعمال سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

۱۴۱۶۱ یوں $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ ہو گا۔ □

۱۴۱۶۲ قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے ترتیب کی حد تلاش کرتے ہوئے ہم n کو استمراری حقیقی متغیر تصور کر کے اس کو n کے لحاظ سے تفرق کرتے ہیں۔ اس طرح ہمیں
۱۴۱۶۳ $\{a_n\}$ کا کلیہ دوبارہ لکھنے کی ضرورت پیش نہیں آتی ہے، جیسا ہمیں مثال ۹.۱۱ میں کرنا پڑا۔

۱۴۱۶۴ مثال ۹.۱۲: حد $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n}$ تلاش کریں۔

۱۴۱۶۵ **حل**

جدول ۹.۲: عموماً پائے جانے والے حد

شمار	حد
1	$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$
2	$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3	$\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad (x > 0)$
4	$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (\lvert x\rvert < 1)$
5	$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$
6	$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

۱۴۱۶۶ قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہیں۔

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{5n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot \ln 2}{5} = \infty$$

۱۴۱۶۷ □

۱۴۱۶۸ **عموماً پائے جانے والے حد**

۱۴۱۶۹ جدول ۹.۲ میں عموماً پائے جانے والے حد دیے گئے ہیں جہاں کلیہ ۶۱۳ میں $n \to \infty$ کرتے ہوئے x مستقل رہتا ہے۔ پہلا حد مثال ۹.۱۱ سے ہے۔ اگلے
۱۴۱۷۰ دو حد تلاش کرنے کے لیے لوگارتھم لے کر مسئلہ ۹.۴ استعمال کریں (سوال ۹.۱۳۹ اور سوال ۹.۱۴۰)۔ باقی ثبوت ضمیمہ و میں دیے گئے ہیں۔

۱۴۱۷۱ مثال ۹.۱۳: ایک ترتیب کا n واں جزو $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ ہے۔ کیا یہ ترتیب مرتکز ہے؟ اگر ترتیب مرتکز ہو تب اس کی حد تلاش کریں۔

۱۴۱۷۲ **حل**

۱۴۱۷۳ حد کی تلاش ناقابل معلوم قیمت 1^∞ دیتی ہے۔ ہم a_n کا قدرتی لوگارتھم لے کر $0 \cdot \infty$ حاصل کرتے ہیں لہٰذا قاعدہ لھوپیٹال استعمال کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\ln a_n &= \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \\ &= n \ln \left(\frac{n+1}{n-1}\right)\end{aligned}$$

۱۴۱۷۴ یوں

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \ln a_n &= \lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right) && \infty \cdot 0 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{1/n} && \frac{0}{0} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-2/(n^2-1)}{-1/n^2} && \text{قاعدہ لھوپیٹال} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2-1} = 2
\end{aligned}$$

۱۴۱۷۵ ہو گا۔ چونکہ $\ln a_n \to 2$ ہے اور $f(x) = e^x$ استمراری ہے لہٰذا مسئلہ ۹.۴ کے تحت $a_n = e^{\ln a_n} \to e^2$ ہو گا۔ ترتیب $\{a_n\}$
۱۴۱۷۶ عدد e^2 پر مرتکز ہے۔ □

۱۴۱۷۷ **جذر تلاش کرنے کی ترکیب پکاغ**

۱۴۱۷۸ درج ذیل مساوات

$$f(x) = 0 \tag{۱}$$

۱۴۱۷۹ سے مراد

$$g(x) = f(x) + x = x \tag{۲}$$

۱۴۱۸۰ کا حل لیا جا سکتا ہے جہاں دونوں اطراف x جمع کیا گیا ہے۔ اس معمولی تبدیلی کی وجہ سے اس مساوات کو کمپیوٹر پر **ترکیب پکاغ**[۲۰] سے حل[۲۱] کرنا ممکن ہو جاتا
۱۴۱۸۱ ہے۔

۱۴۱۸۲ اگر g کے دائرہ کار میں g کا سعت بھی شامل ہو تب ہم دائرہ کار میں نقطہ x_0 سے شروع کر کے g سے یکے بعد دیگرے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$x_1 = g(x_0), \quad x_2 = g(x_1), \quad x_3 = g(x_2), \quad \cdots \tag{۳}$$

۱۴۱۸۳ سادہ پابندیاں، جنہیں جلد پیش کیا جائے گا، لاگو کرتے ہوئے کلیہ توالی $x_{n+1} = g(x_n)$ سے حاصل ترتیب ایک ایسے نقطہ x پر مرکوز ہو گی جس پر
۱۴۱۸۴ $g(x) = x$ ہو گا۔ چونکہ اس نقطہ پر

$$f(x) = g(x) - x = x - x = 0 \tag{۴}$$

۱۴۱۸۵ ہو گا لہٰذا یہ نقطہ مساوات $f(x) = 0$ کا حل ہو گا۔

۱۴۱۸۶ وہ نقطہ جس پر $g(x) = x$ ہو g کا **مقررہ نقطہ**[۲۲] کہلاتا ہے۔ ہم مساوات ۴ سے دیکھتے ہیں کہ g کے مقررہ نقطے f کے جذر ہیں۔

---

[۲۰] Picard'smethod
[۲۱] فرانسیسی ریاضی دان شاغل مل پکاغ
[۲۲] fixedpoint

جدول ۹.۳: ابتدائی نقطہ $x_0 = 1$ لیتے ہوئے $g(x) = (1/4)x + 3$ کے یکے بعد دیگرے نتائج۔

$x_{n+1} = g(x_n) = \frac{x_n}{4} + 3$	x_n
$x_1 = g(x_0) = (1/4)(1) + 3 = 3.25$	$x_0 = 1$
$x_2 = g(x_1) = (1/4)(3.25) + 3 = 3.8125$	$x_1 = 3.25$
$x_3 = g(x_2) = (1/4)(3.8125) + 3 = 3.953\,125$	$x_2 = 3.8125$
$x_4 = 3.988\,281\,25$	$x_3 = 3.953125$
$x_5 = 3.997\,070\,313$	$\vdots$
$x_6 = 3.999\,267\,578$	
$x_7 = 3.999\,816\,895$	
$x_8 = 3.999\,954\,224$	
$x_9 = 3.999\,988\,556$	
$x_{10} = 3.999\,997\,139$	
$\vdots$	

۱۴۱۸۷ مثال ۹.۱۴: **ترکیب کی پرکھ** درج ذیل مساوات حل کریں۔

$$\frac{x}{4} + 3 = x$$

۱۴۱۸۸ **حل**

۱۴۱۸۹ الجبرا سے ہم جانتے ہیں کہ اس مساوات کا حل $x = 4$ ہے۔ ترکیب پکاغ استعمال کرتے ہوئے ہم

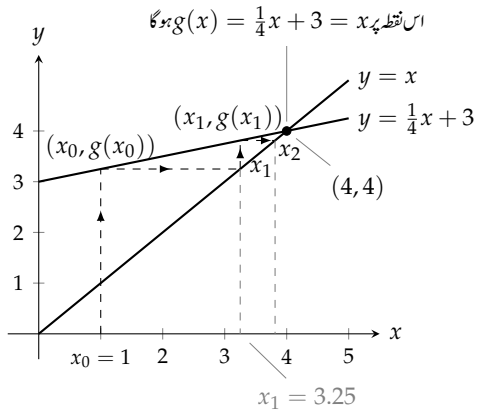
$$g(x) = \frac{x}{4} + 3$$

۱۴۱۹۰ لے کر ابتدائی نقطہ، مثلاً $x_0 = 1$ منتخب کر کے ترتیب $x_{n+1} = g(x_n)$ کے اجزاء حاصل کرتے ہیں۔ نتائج جدول ۹.۳ میں دیے گئے ہیں۔ دس
۱۴۱۹۱ قدموں میں حاصل جواب میں خلل 3×10^{-6} سے کم ہے۔

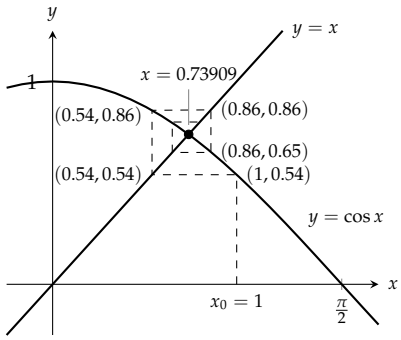
۱۴۱۹۲ شکل ۹.۱۲ میں ترکیب کی جیومیٹری دکھائی گئی ہے۔ ہم ابتدائی نقطہ $x_0 = 1$ سے شروع کر کے پہلی قیمت $g(x_0)$ حاصل کرتے ہیں جو x کی دوسری
۱۴۱۹۳ قیمت x_1 ہو گی۔ y کی دوسری قیمت $g(x_1)$ کو x کی تیسری قیمت x_2 لیں گے، وغیرہ، وغیرہ۔ شکل ۹.۱۲ میں اس عمل کو نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا
۱۴۱۹۴ ہے جس کو **راہ توالی**[۲۳] کہتے ہیں۔ راہ توالی ابتدائی نقطہ x_0 سے شروع ہو کر انتصابی رخ $(x_0, x_1) = (x_0, g(x_0))$ پہنچ کر افقی رخ
۱۴۱۹۵ (x_1, x_1) اور یہاں سے دوبارہ انتصابی رخ $(x_1, g(x_1))$ جاتی ہے، وغیرہ، وغیرہ۔ یہ راہ اس نقطہ پر مرتکز ہو گی جس پر لکیر $y = x$ اور
۱۴۱۹۶ $g(x)$ ایک دوسرے سے ملتے ہیں۔ یہ وہ نقطہ ہے جہاں $g(x) = x$ ہو گا۔ □

۱۴۱۹۷ مثال ۹.۱۵: $\cos x = x$ کو حل کریں۔

[۲۳] iterationpath



(ا) ترکیب پکاغ سے مساوات $g(x) = \frac{1}{4}x + 3 = x$ کا حل (مثال ۹.۱۴)۔



(ب) ابتدائی نقطہ $x_0 = 1$ لے کر ترکیب پکاغ سے $\cos x = x$ کا حل (مثال ۹.۱۵)۔

۱۴۱۹۸ **حل**

۱۴۱۹۹ ہم $g(x) = \cos x$ لے کر ابتدائی نقطہ $x_0 = 1$ منتخب کر کے کلیہ توالی $x_{n+1} = g(x_n)$ استعمال کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل
۱۴۲۰۰ ہوں گے۔

$$x_0 = 1, \quad x_1 = \cos(1), \quad x_2 = \cos(x_1), \quad \cdots$$

۱۴۲۰۱ ہم کیلکولیٹر کو ریڈیئن طرز کار کردگی میں رکھ کر ابتدائی 50 اجزاء حاصل کرتے ہیں۔ کیلکولیٹر میں 1 داخل کر کے بار بار کوسائن لینے سے یہ اجزاء حاصل
۱۴۲۰۲ ہوں گے۔ کیلکولیٹر پر دکھایا گیا عدد اس وقت تک تبدیل ہوگا جب تک $\cos x = x$ نہ ہو۔

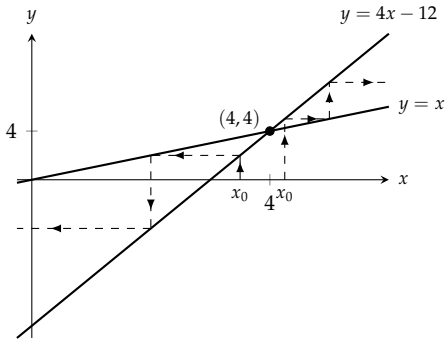
۱۴۲۰۳ یہ عمل خود کر کے دیکھیں۔ آپ دیکھیں گے کہ یکے بعد دیگرے جوابات مستقل نقطہ $x = 0.739085133\cdots$ سے اوپر اور نیچے پائے جائیں گے۔

۱۴۲۰۴ شکل ۹.۱۲ب میں اس ارتعاش کی وجہ نظر آتی ہے جہاں راہ توالی درکار نقطہ کے گرد گھومتی ہے۔ □

۱۴۲۰۵ مثال ۹.۱۶: ترکیب پکاغ سے $g(x) = 4x - 12 = x$ حل نہیں ہوگا۔

۱۴۲۰۶ جیسا شکل ۹.۱۳ میں دکھایا گیا ہے، ماسوائے $x_0 = 4$ کے کسی بھی ابتدائی x_0 کی انتخاب منفرج ترتیب دیتی ہے جو کبھی بھی $g(x)$ کے مقررہ نقطہ پر
۱۴۲۰۷ نہیں پہنچ پاتی ہے۔ مساوات $g(x) = 4x - 12$ کا مقررہ نقطہ $x = 4$ ہے۔ □

۱۴۲۰۸ مثال ۹.۱۶ میں ترکیب پکاغ کی ناکامی لکیر $y = 4x - 12$ کی ڈھلوان کی وجہ سے ہے جو لکیر $y = x$ کی ڈھلوان 1 سے زیادہ ہے۔ مثال ۹.۱۴
۱۴۲۰۹ میں لکیر $y = \frac{1}{4}x + 3$ کی ڈھلوان $\frac{1}{4}$ ہے جو 1 سے کم ہے لہٰذا ترکیب پکاغ کارآمد ثابت ہوتی ہے۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ اگر بند وقفہ
۱۴۲۱۰ I پر مساوات $g(x) = x$ کا حل پایا جاتا ہو اور اس وقفہ پر $g'(x)$ استمراری اور $\left|g'(x)\right| < 1$ ہو، تب I کے اندرون پر کسی بھی نقطہ x_0
۱۴۲۱۱ سے شروع کرتے ہوئے ترکیب پکاغ مساوات کا حل دے گی۔ (سوال ۹.۱۵۱ اور سوال ۹.۱۵۲ سے پہلے دیکھیں جہاں $\left|g'(x)\right| > 1$ کی صورت میں درکار
۱۴۲۱۲ اقدام بتائے گئے ہیں۔)



شکل ۹.۱۳: ترکیب پکاغ سے $g(x) = 4x - 12$ حل نہیں ہوگا سوائے جب ابتدائی نقطہ 4 منتخب کیا جائے (مثال ۹.۱۶)۔

۹.۳ سوالات

حد کی تلاش

سوال ۹.۶۹ تا سوال ۹.۱۳۰ میں کون سی ترتیب $\{a_n\}$ مرتکز اور کون سی منفرج ہے؟ ہر مرتکز ترتیب کی حد تلاش کریں۔

سوال ۹.۶۹: $a_n = 2 + (0.1)^n$

سوال ۹.۷۰: $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n}$

سوال ۹.۷۱: $a_n = \frac{1-2n}{1+2n}$

سوال ۹.۷۲: $a_n = \frac{2n+1}{1-3\sqrt{n}}$

سوال ۹.۷۳: $a_n = \frac{1-5n^4}{n^4+8n^3}$

سوال ۹.۷۴: $a_n = \frac{n+3}{n^2+5n+6}$

سوال ۹.۷۵: $a_n = \frac{n^2-2n+1}{n-1}$

سوال ۹.۷۶: $a_n = \frac{1-n^3}{70-4n^2}$

سوال ۹.۷۷: $a_n = 1 + (-1)^n$

سوال ۹.۷۸: $a_n = (-1)^n(1 - \frac{1}{n})$

سوال ۹.۷۹: $a_n = (\frac{n+1}{2n})(1 - \frac{1}{n})$

سوال ۹.۸۰: $a_n = (2 - \frac{1}{2^n})(3 + \frac{1}{2^n})$

سوال ۹.۸۱: $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$

۱۳۲۲۹ سوال ۹.۸۲: $a_n = (-\frac{1}{2})^n$

۱۳۲۳۰ سوال ۹.۸۳: $a_n = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$

۱۳۲۳۱ سوال ۹.۸۴: $a_n = \frac{1}{(0.9)^n}$

۱۳۲۳۲ سوال ۹.۸۵: $a_n = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n})$

۱۳۲۳۳ سوال ۹.۸۶: $a_n = n\pi\cos(n\pi)$

۱۳۲۳۴ سوال ۹.۸۷: $a_n = \frac{\sin n}{n}$

۱۳۲۳۵ سوال ۹.۸۸: $a_n = \frac{\sin^2 n}{2^n}$

۱۳۲۳۶ سوال ۹.۸۹: $a_n = \frac{n}{2^n}$

۱۳۲۳۷ سوال ۹.۹۰: $a_n = \frac{3^n}{n^3}$

۱۳۲۳۸ سوال ۹.۹۱: $a_n = \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}}$

۱۳۲۳۹ سوال ۹.۹۲: $a_n = \frac{\ln n}{\ln 2n}$

۱۳۲۴۰ سوال ۹.۹۳: $a_n = 8^{1/n}$

۱۳۲۴۱ سوال ۹.۹۴: $a_n = (0.03)^{1/n}$

۱۳۲۴۲ سوال ۹.۹۵: $a_n = (1 + \frac{7}{n})^n$

۱۳۲۴۳ سوال ۹.۹۶: $a_n = (1 - \frac{1}{n})^n$

۱۳۲۴۴ سوال ۹.۹۷: $a_n = \sqrt[n]{10n}$

۱۳۲۴۵ سوال ۹.۹۸: $a_n = \sqrt[n]{n^2}$

۱۳۲۴۶ سوال ۹.۹۹: $a_n = (\frac{3}{n})^{1/n}$

۱۳۲۴۷ سوال ۹.۱۰۰: $a_n = (n+4)^{1/(n+4)}$

۱۳۲۴۸ سوال ۹.۱۰۱: $a_n = \frac{\ln n}{n^{1/n}}$

۱۳۲۴۹ سوال ۹.۱۰۲: $a_n = \ln n - \ln(n+1)$

۱۳۲۵۰ سوال ۹.۱۰۳: $a_n = \sqrt[n]{4^n n}$

۱۳۲۵۱ سوال ۹.۱۰۴: $a_n = \sqrt[n]{3^{2n+1}}$

۱۳۲۵۲ سوال ۹.۱۰۵: $a_n = \frac{n!}{n^n}$ (اشارہ: $\frac{1}{n}$ کے ساتھ موازنہ کریں)

۱۳۲۵۳ سوال ۹.۱۰۶: $a_n = \frac{(-4)^n}{n!}$

۱۴۲۵۴ سوال ۹.۱۰۷: $a_n = \frac{n!}{10^{6n}}$

۱۴۲۵۵ سوال ۹.۱۰۸: $a_n = \frac{n!}{2^n \cdot 3^n}$

۱۴۲۵۶ سوال ۹.۱۰۹: $a_n = (\frac{1}{n})^{1/(\ln n)}$

۱۴۲۵۷ سوال ۹.۱۱۰: $a_n = \ln(1 + \frac{1}{n})^n$

۱۴۲۵۸ سوال ۹.۱۱۱: $a_n = (\frac{3n+1}{3n-1})^n$

۱۴۲۵۹ سوال ۹.۱۱۲: $a_n = (\frac{n}{n+1})^n$

۱۴۲۶۰ سوال ۹.۱۱۳: $a_n = (\frac{x^n}{2n+1})^{1/n}, \quad x > 0$

۱۴۲۶۱ سوال ۹.۱۱۴: $a_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n$

۱۴۲۶۲ سوال ۹.۱۱۵: $a_n = \frac{3^n \cdot 6^n}{2^{-n} \cdot n!}$

۱۴۲۶۳ سوال ۹.۱۱۶: $a_n = \frac{(10/11)^n}{(9/10)^n + (11/12)^n}$

۱۴۲۶۴ سوال ۹.۱۱۷: $a_n = \tanh n$

۱۴۲۶۵ سوال ۹.۱۱۸: $a_n = \sinh(\ln n)$

۱۴۲۶۶ سوال ۹.۱۱۹: $a_n = \frac{n^2}{2n-1} \sin \frac{1}{n}$

۱۴۲۶۷ سوال ۹.۱۲۰: $a_n = n(1 - \cos \frac{1}{n})$

۱۴۲۶۸ سوال ۹.۱۲۱: $a_n = \tan^{-1} n$

۱۴۲۶۹ سوال ۹.۱۲۲: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \tan^{-1} n$

۱۴۲۷۰ سوال ۹.۱۲۳: $a_n = (\frac{1}{3})^n + \frac{1}{\sqrt{2^n}}$

۱۴۲۷۱ سوال ۹.۱۲۴: $a_n = \sqrt[n]{n^2 + n}$

۱۴۲۷۲ سوال ۹.۱۲۵: $a_n = \frac{(\ln n)^{200}}{n}$

۱۴۲۷۳ سوال ۹.۱۲۶: $a_n = \frac{(\ln n)^5}{\sqrt{n}}$

۱۴۲۷۴ سوال ۹.۱۲۷: $a_n = n - \sqrt{n^2 - n}$

۱۴۲۷۵ سوال ۹.۱۲۸: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-1} - \sqrt{n^2+n}}$

۱۴۲۷۶ سوال ۹.۱۲۹: $a_n = \frac{1}{n} \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x}$

۱۴۲۷۷ سوال ۹.۱۳۰: $a_n = \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^p}, \quad p > 1$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۹.۱۳۱: ایک ترتیب کا پہلی جزو $x_1 = 1$ ہے۔ ہر اگلا جزو گزشتہ تمام اجزاء کا مجموعہ ہے:

$$x_{n+1} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

ابتدائی چند اجزاء لکھ کر عمومی جزو x_n کا کلیہ $n \geq 2$ کے لیے تلاش کریں۔

سوال ۹.۱۳۲: ناطق اعداد کی درج ذیل ترتیب میں نسب نما ایک ترتیب، شمار کنندہ دوسری ترتیب اور ان کی نسبت تیسری ترتیب ہے۔

$$\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \ldots, \frac{a}{b}, \frac{a+2b}{a+b}, \ldots$$

x_n اور y_n کو بالترتیب n ویں نسبت $r_n = \frac{x_n}{y_n}$ کا نسب نما اور شمار کنندہ تصور کریں۔

ا. $x_1^2 - 2y_1^2 = -1$ اور $x_2^2 - 2y_2^2 = +1$ کی تصدیق کریں۔ ساتھ ہی $a^2 - 2b^2 = \mp 1$ کی صورت میں $(a + 2b)^2 - 2(a+b)^2 = \pm 1$ کی تصدیق کریں۔

ب. n بڑھانے سے کسر $r_n = \frac{x_n}{y_n}$ ایک حد تک پہنچتا ہے۔ یہ حد کیا ہے؟ (اشارہ: جزو-ا استعمال کرتے ہوئے $r_n^2 - 2 = \pm(\frac{1}{y_n})^2$ دکھائیں اور دکھائیں کہ $y_n \geq n$ ہے۔)

سوال ۹.۱۳۳: **ترکیب نیوٹن**

ترکیب نیوٹن درج ذیل کلیہ توالی دیتا ہے۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

کیا یہ ترتیب مرتکز ہے؟ اگر مرتکز ہے تب کس حد کو مرتکز ہے؟ تفاعل f پہچانیں جو درج ذیل ترتیب دیتا ہے۔

(الف) $$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

(ب) $$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = x_n - \frac{\tan x_n - 1}{\sec^2 x_n}$$

(ج) $$x_0 = 1, \qquad x_{n+1} = x_n - 1$$

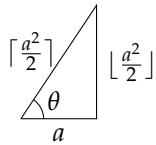
سوال ۹.۱۳۴: (الف) فرض کریں وقفہ $[0,1]$ میں تمام x پر $f(x)$ قابل تفرق ہے اور $f(0) = 0$ ہے۔ ترتیب $\{a_n\}$ کی تعریف $a_n = nf(\frac{1}{n})$ ہے۔ دکھائیں کہ $\lim_{n\to\infty} a_n = f'(0)$ ہو گا۔

جزو-الف کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے جزو-ب تا جزو-د میں دیے ترتیبات کی حدیں تلاش کریں۔ (ب) $a_n = n\tan^{-1}\frac{1}{n}$، (ج) $a_n = n(e^{1/n} - 1)$، (د) $a_n = n\ln(1 + \frac{2}{n})$

سوال ۹.۱۳۵: تین کی فیثاغوری جوڑی

اگر $a^2 + b^2 = c^2$ ہو تب a، b اور c کو تین کی فیثاغوری جوڑی کہتے ہیں۔ فرض کریں a ایک طاق مثبت عدد صحیح جبکہ

$$c = \lceil \tfrac{a^2}{2} \rceil \quad \text{اور} \quad b = \lfloor \tfrac{a^2}{2} \rfloor^2$$



شکل ۹.۱۴: فیثاغوری تین کی جوڑی (سوال ۹.۱۳۵)

بالترتیب $\frac{a^2}{2}$ کے عدد صحیح زمین اور عدد صحیح چھت تفاعل ہیں۔

ا. دکھائیں $a^2 + b^2 = c^2$ (اشارہ: $a = 2n + 1$ لے کر b اور c کو n کی صورت میں لکھیں۔)

ب. بلاواسطہ حساب سے یا شکل ۹.۱۴ کی مدد سے $\lim_{a\to\infty} \frac{\lfloor a^2/2 \rfloor}{\lceil a^2/2 \rceil}$ تلاش کریں۔

سوال ۹.۱۳۶: $n!$ کا n واں جذر

ا. دکھائیں کہ $\lim_{a\to\infty} (2n\pi)^{1/(2n)} = 1$ ہے اور تخمین سٹرلنگ (مساوات ۹) استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ n کی بڑی قیمتوں کے لیے $\sqrt[n]{n!} \approx \frac{n}{e}$ ہوگا۔

ب. جہاں تک آپ کا کیلکولیٹر نتائج دے سکتا ہے وہاں تک $n = 40, 50, 60, \cdots$ کے لیے کیلکولیٹر سے حاصل $\sqrt[n]{n!}$ کے نتائج کا جزو-الف کے کلیہ سے حاصل نتائج کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۹.۱۳۷: (ا) فرض کریں کسی بھی مثبت مستقل c کے لیے $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^c}\right) = 0$ ہے۔ دکھائیں $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^c} = 0$ ہوگا۔
(ب) کسی بھی مثبت مستقل c کے لیے ثابت کریں کہ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^c}\right) = 0$ ہوگا۔ (اشارہ: اگر $\epsilon = 0.001$ اور $c = 0.04$ ہوں تب $n > N$ کی صورت میں $\left|\frac{1}{n^c} - 0\right| < \epsilon$ کے لیے N کتنا بڑا ہونا چاہیے؟)

سوال ۹.۱۳۸: اگر $\{a_n\}$ اور $\{b_n\}$ دونوں L پر مرتکز ہوں تب دکھائیں کہ ترتیب $a_1, b_1, a_2, b_2, \cdots, a_n, b_n, \cdots$ بھی L پر مرتکز ہوگی۔

سوال ۹.۱۳۹: ثابت کریں $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

سوال ۹.۱۴۰: ثابت کریں $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1$ جہاں $x > 0$ ہے۔

سوال ۹.۱۴۱: ثابت کریں مسئلہ ۹.۳

سوال ۹.۱۴۲: ثابت کریں مسئلہ ۹.۴

ترکیب پکاغ

سوال ۹.۱۴۳ تا سوال ۹.۱۴۸ میں دیے گئے مساوات کو ترکیب پکاغ سے حل کریں۔

سوال ۹.۱۴۳: $\sqrt{x} = x$

سوال ۹.۱۴۴: $x^2 = x$

سوال ۹.۱۴۵: $\cos x + x = 0$

سوال ۹.۱۴۶: $\cos x = x + 1$

سوال ۹.۱۴۷: $x - \sin x = 0.1$

سوال ۹.۱۴۸: $\sqrt{x} = 4 - \sqrt{1+x}$ (اشارہ: پہلے دونوں اطراف کا مربع لیں۔)

سوال ۹.۱۴۹: ترکیب پکاغ سے $\sqrt{x} = x$ کا حل $x = 1$ تلاش کریں جبکہ اس کے حل $x = 0$ اس ترکیب سے تلاش مت کریں۔ کیوں؟ (اشارہ: $y = x$ اور $y = \sqrt{x}$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔)

سوال ۹.۱۵۰: ترکیب پکاغ میں $|x_0| \neq 1$ لے کر $x^2 = x$ کا حل $x = 0$ تلاش کیا جاسکتا ہے جبکہ اس کے حل $x = 1$ اس ترکیب سے تلاش نہیں کیا جاسکتا ہے۔ کیوں؟ (اشارہ: $y = x$ اور $y = x^2$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔)

اکائی سے زیادہ ڈھلوان

ہم نے مثال ۹.۱۶ میں دیکھا کہ $g(x) = 4x - 12$ کے مقررہ نقطہ کو ترکیب پکاغ سے حاصل نہیں کیا جاسکتا ہے جبکہ $g^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + 3$ کا مقررہ نقطہ ترکیب پکاغ سے حاصل کیا جاسکتا ہے چونکہ کسی بھی وقفہ پر g^{-1} کے تفرق کی مطلق مقدار $\frac{1}{4}$ ہے جو 1 سے کم ہے۔ مثال ۹.۱۴ میں ہم نے دیکھا کہ g^{-1} کا مقررہ نقطہ $x = 4$ ہے جو $g(4) = 4(4) - 12 = 4$ کی وجہ سے g کا بھی مقررہ نقطہ ہے۔ یوں g^{-1} کا مقررہ نقطہ تلاش کرتے ہوئے ہم نے g کا مقررہ نقطہ بھی تلاش کیا۔

ایک تفاعل اور اس کے الٹ کے مقررہ نقطے ایک دوسرے جیسے ہوں گے۔ ایک تفاعل اور اس کے الٹ کی ترسیمات لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہوتے ہیں لہٰذا اس لکیر کو ایک ہی نقطہ پر مس کرتے ہیں۔

ہم اب دیکھتے ہیں کہ ترکیب پکاغ کا استعمال وسیع ہے۔ اب فرض کریں g یک بہ یک ہے اور اس کا پہلا تفرق استمراری ہے جس کی قیمت کسی ایسے بند وقفہ I پر 1 سے زیادہ ہے جس پر g کا مقررہ نقطہ پایا جاتا ہے۔ یوں g^{-1} کا تفرق جو g' کا بالعکس متناسب ہوگا، کی مقدار I پر 1 سے کم ہوگی۔ ترکیب پکاغ سے I پر g^{-1} کا مقررہ نقطہ تلاش کیا جاسکتا ہے جو g کا بھی مقررہ نقطہ ہوگا۔ اس عمل کو سمجھنے کی خاطر ترکیب پکاغ سے سوال ۹.۱۵۱ اور سوال ۹.۱۵۲ میں مقررہ نقطے تلاش کریں۔

سوال ۹.۱۵۱: $g(x) = 2x + 3$

سوال ۹.۱۵۲: $g(x) = 1 - 4x$

۹.۴ لامتناہی تسلسل

سائنس اور ریاضیات میں تفاعل کو عموماً درج ذیل صورت کی لامتناہی کثیر رکنی کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots, \quad |x| < 1$$

جدول ۹.۴: تفاعل کے جزوی مجموعے۔

جزوی مجموعہ		قیمت
پہلا:	$s_1 = 1$	$2 - 1$
دوسرا:	$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$	$2 - \frac{1}{2}$
تیسرا:	$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	$2 - \frac{1}{4}$
$\vdots$		
nواں:	$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$	$2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

x کی کسی بھی جائز قیمت کے لیے ہم لامتناہی تعداد کے مستقلات کا مجموعہ، جس کو لامتناہی تسلسل کہا جاتا ہے، لے کر کثیر رکنی کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ اس حصہ اور اگلے چار حصوں میں ہم لامتناہی تسلسل سے واقف ہونے کی کوشش کرتے ہیں۔

تسلسل اور جزوی مجموعے

ہم پوچھتے ہیں کہ درج ذیل فقرے کا کیا مطلب ہے؟

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

چونکہ ہم لامتناہی مستقلات کو کبھی بھی جمع نہیں کر سکتے ہیں لہٰذا ہم پہلی جزو سے شروع کر کے بتدریج ایک ایک جزو ساتھ جمع کر کے جزوی مجموعہ میں کسی نقش کو پہچاننے کی کوشش کرتے ہیں۔ انہیں جدول ۹.۴ میں دکھایا گیا ہے جن میں یقیناً ایک نقش پایا جاتا ہے۔ جزوی مجموعوں کی ترتیب کا n واں جزو درج ذیل ہے۔

$$a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$$

چونکہ $\lim_{n\to\infty}(1/2^n) = 0$ ہے لہٰذا اس ترتیب کی حد 2 ہے۔ یوں درج ذیل لامتناہی تسلسل کا مجموعہ 2 ہوگا۔

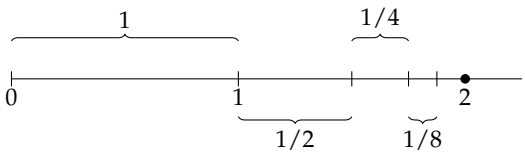
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

کیا اس تسلسل کے کسی بھی متناہی تعداد کے اجزاء کا مجموعہ 2 ہوگا؟ نہیں۔ کیا ہم لامتناہی تعداد کے مستقل کو ایک ایک کر کے جمع کر سکتے ہیں؟ نہیں۔ اس کے باوجود ہم تسلسل کی حدوں کی تعریف کو $n \to \infty$ پر تسلسل کے جزوی مجموعے کی حد لے سکتے ہیں جو مذکورہ بالا تسلسل کے لیے 2 ہوگی (شکل ۹.۱۵)۔ ترتیب اور تسلسل کا علم ہمیں متناہی مجموعوں کی قید سے آزاد کرتا ہے۔

تعریف: دیے گئے اعداد کی ترتیب $\{a_n\}$ کی صورت میں درج ذیل صورت کا فقرہ **لامتناہی تسلسل**[۲۴] کہلاتا ہے۔

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

[۲۴] infiniteseries



شکل ۹.۱۵: جیسے جیسے لمبائیاں 1 ، 1/2 ، 1/4 ، 1/8 ، . . . جمع کی جائیں، مجموعہ 2 کے قریب تر ہوتا جاتا ہے۔

۱۳۳۵۶ عدد a_n کو اس تسلسل کا n **واں جزو**[۲۵] کہتے ہیں۔ ترتیب $\{s_n\}$ جس کی تعریف درج ذیل ہے

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

۱۳۳۵۷ کو اس تسلسل کے **جزوی مجموعوں کی ترتیب** کہتے ہیں اور s_n کو n واں جزوی مجموعہ کہتے ہیں۔ اگر جزوی مجموعوں کی ترتیب L پر مرتکز ہو تب ہم کہتے
۱۳۳۵۸ ہیں کہ یہ تسلسل **مرتکز** ہے اور اس کا مجموعہ L ہے۔ ایسی صورت میں ہم درج ذیل بھی لکھتے ہیں۔

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_n = L$$

۱۳۳۵۹ اگر تسلسل کے جزوی مجموعوں کی ترتیب مرتکز نہ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ تسلسل **منفرج** ہے۔

۱۳۳۶۰ □

۱۳۳۶۱ تسلسل $a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$ پر غور کرنے سے پہلے ضروری نہیں کہ ہمیں معلوم ہو کہ آیا یہ تسلسل مرتکز یا منفرج ہے۔ بہر حال اس
۱۳۳۶۲ تسلسل کو درج ذیل صورت میں لکھنا مفید ہوتا ہے۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \sum a_n \text{ (مجموعہ 1 تا } \infty \text{ ہوگا)}$$

---

[۲۵] nthterm

۱۴۳۴۳ ہندسی تسلسل

۱۴۳۴۴ درج ذیل صورت کے تسلسل کو **ہندسی تسلسل**[۲۶] کہتے ہیں جہاں a اور r مقررہ حقیقی اعداد ہیں اور $a \neq 0$ ہے۔

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} \tag{۱}$$

۱۴۳۴۵ درج ذیل میں نسبت r مثبت ہے

$$a + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$$

۱۴۳۴۶ جبکہ درج ذیل میں r منفی ہے۔

$$a - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \cdots$$

۱۴۳۴۷ اگر $r = 1$ ہو تب مساوات ۱ کا n واں جزوی مجموعہ

$$s_n = a + a(1) + a(1)^2 + \cdots + a(1)^{n-1} = na$$

۱۴۳۴۸ ہو گا جو $\lim_{n\to\infty} s_n = \mp\infty$ کی وجہ سے منفرج ہے جہاں علامت، a کی علامت پر منحصر ہو گی۔ اگر $r = -1$ ہو تب تسلسل کے جزوی
۱۴۳۴۹ مجموعے یکے بعد دیگرے a اور 0 ہوں گے لہٰذا تسلسل منفرج ہو گا۔ اگر $|r| \neq 1$ تب تسلسل کا ارتکاز یا انفراج درج ذیل طریقہ سے جاننا ممکن ہو گا۔

$$\begin{aligned}
s_n &= a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-2} + ar^{n-1} && \\
rs_n &= ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n && s_n \text{ کو } r \text{ سے ضرب دیں} \\
s_n - rs_n &= a - ar^n && s_n \text{ سے } rs_n \text{ منفی کریں} \\
s_n(1-r) &= a(1-r^n) && \text{تجزی} \\
s_n &= \frac{a(1-r^n)}{1-r}, \quad (r \neq 1) && r \neq 1 \text{ کی صورت میں } s_n \text{ کا حل}
\end{aligned}$$

۱۴۳۵۰ اگر $|r| < 1$ ہو تب $r^n \to 0$ $n \to \infty$ سے (حصہ ۹.۲) لہٰذا $s_n = \frac{a}{1-r}$ ہوں گے۔ اس کے برعکس $|r| > 1$ کی صورت میں
۱۴۳۵۱ $|r^n| \to \infty$ کی وجہ سے تسلسل منفرج ہو گا۔

۱۴۳۵۲ یوں $|r| < 1$ کی صورت میں ہندسی تسلسل $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$ عدد $\frac{a}{1-r}$ پر مرتکز ہو گا:

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1 \tag{۲}$$

---

[۲۶] geometricseries

$|r| > 1$ کی صورت میں تسلسل منفرج ہوگا۔ مساوات ۲ صرف اس صورت درست ہوگا جب مجموعہ $n = 1$ سے شروع ہو۔

مثال ۹.۱۷: درج ذیل ہندسی تسلسل میں $a = \frac{1}{9}$ اور $r = \frac{1}{3}$ ہیں۔

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1/9}{1-(1/3)} = \frac{1}{6}$$

□

مثال ۹.۱۸: درج ذیل ہندسی تسلسل میں $a = -\frac{5}{4}$ اور $r = -\frac{1}{4}$ ہیں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n} = -\frac{5}{4} + \frac{5}{16} - \frac{5}{64} + \cdots$$

یہ ہندسی تسلسل -1 پر مرتکز ہے۔

$$\frac{a}{1-r} = \frac{-5/4}{1+(1/4)} = -1$$

□

مثال ۹.۱۹: آپ ایک گیند کو افقی سطح پر a میٹر بلندی سے گراتے ہیں۔ یہ گیند h بلندی سے گر کر rh بلندی تک اچھلتا ہے جہاں r مثبت اور 1 سے کم ہے۔ یہ گیند اوپر اور نیچے سفر کرتے ہوئے کل کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟

حل

کل فاصلہ درج ذیل ہوگا۔

$$s = a + \underbrace{2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \cdots}_{2ar/(1-r)} = a + \frac{2ar}{1-r} = a\,\frac{1+r}{1-r}$$

یوں $a = 6\,\mathrm{m}$ اور $r = \frac{2}{3}$ کی صورت میں طے شدہ فاصل درج ذیل ہوگا۔

$$s = 6\,\frac{1+(2/3)}{1-(2/3)} = 6\left(\frac{5/3}{1/3}\right) = 30\,\mathrm{m}$$

□

مثال ۹.۲۰: دہراتے اعشاری

دہراتے اعشاری $5.23\,23\,23\cdots$ کو دو عدد صحیح کا نسبت لکھیں۔

۱۴۳۸۷ **حل**

۱۴۳۸۸

$$
\begin{aligned}
5.23\,23\,23\cdots &= 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \cdots \\
&= 5 + \frac{23}{100}\underbrace{\left(1 + \frac{1}{100} + \left(\frac{1}{100}\right)^2 + \cdots\right)}_{1/(1-0.01)} \qquad a = 1,\ r = \tfrac{1}{100} \\
&= 5 + \frac{23}{100}\left(\frac{1}{0.99}\right) = 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99}
\end{aligned}
$$

۱۴۳۸۹ □

۱۴۳۹۰ **دوربینی تسلسل**

۱۴۳۹۱ مرتکز ہندسی تسلسل کے مجموعہ کے کلیہ کی طرح تسلسل کے مجموعوں کے کلیات بہت کم پائے جاتے ہیں لہٰذا ہمیں تسلسل کے مجموعہ کی اندازاً قیمت پر گزارا کرنا
۱۴۳۹۲ ہوگا۔ البتہ اگلی مثال میں بھی ایسا تسلسل دیا گیا ہے جس کا بالکل ٹھیک مجموعہ تلاش کیا جا سکتا ہے۔

۱۴۳۹۳ مثال ۹.۲۱: تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ کا مجموعہ تلاش کریں۔

۱۴۳۹۴ **حل**

۱۴۳۹۵ جزوی مجموعوں کی ترتیب میں ایسا نقش دیکھنے کی کوشش کرتے ہیں جس سے s_n کا کلیہ اخذ کیا جا سکتا ہو۔ ہم جزوی کسر

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \tag{۳}$$

۱۴۳۹۶ استعمال کر کے جزوی مجموعہ

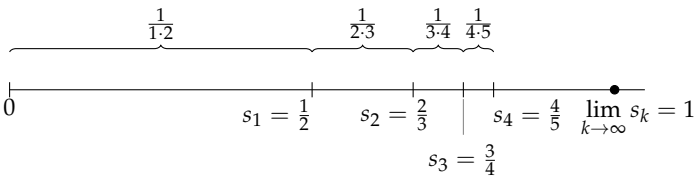
$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{k\cdot(k+1)}$$

۱۴۳۹۷ کو

$$s_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \tag{۴}$$

۱۴۳۹۸ لکھتے ہیں۔ قوسین کھول کر یکساں اجزاء کاٹ کر درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$s_n = 1 - \frac{1}{k+1} \tag{۵}$$



شکل ۹.۱۶: جزوی مجموعے (مثال ۹.۲۱)

اب $k \to \infty$ سے $s_k \to 1$ حاصل ہوگا۔ یہ تسلسل منفرج ہے اور اس کا مجموعہ 1 ہے (شکل ۹.۱۶)۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

□

منفرج تسلسل

وہ ہندسی تسلسل جن میں $|r| \geq 1$ ہو کے علاوہ دیگر منفرج تسلسل بھی پائے جاتے ہیں۔

مثال ۹.۲۲: درج ذیل تسلسل اس لیے منفرج ہے کہ اس کے جزوی مجموعے کسی بھی عدد L سے بڑھ جاتے ہیں۔ جزوی مجموعہ $s_n = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2$ کی قیمت $n = 1$ کے بعد n^2 سے بڑی ہوتی ہے۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 = 1 + 4 + 9 + \cdots + n^2 + \cdots$$

□

مثال ۹.۲۳: درج ذیل تسلسل کے جزوی مجموعے آخر کار ہر منتخب عدد سے بڑھ جاتے ہیں لہٰذا یہ تسلسل منفرج ہے۔ چونکہ ہر جزو 1 سے بڑا ہے لہٰذا n اجزاء کا مجموعہ n سے بڑا ہوگا۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{1} + \cdots$$

□

انفراج کا n واں جزو پرکھ

تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ صرف اس صورت مرتکز ہو سکتا ہے جب $\lim_{n\to\infty} a_n$ صفر کے برابر ہو۔ اس حقیقت کو سمجھنے کی خاطر فرض کریں تسلسل کا مجموعہ S ہے اور اس کا n واں جزوی مجموعہ $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ہے۔ جب n بڑا ہو تب s_n اور s_{n-1} دونوں S کے

بہت قریب ہوں گے لہٰذا ان کا فرق a_n بھی صفر کے قریب ہو گا۔ باضابطہ طور اس کو درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$a_n = s_n - s_{n-1} \quad \rightarrow \quad S - S = 0$$

قاعدہ فرق برائے ترتیبات

مسئلہ ۹.۶: اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مرتکز ہو تب $a_n \rightarrow 0$ ہو گا۔

دھیان رہے کہ مسئلہ ۹.۶ یہ نہیں کہتا ہے کہ $a_n \rightarrow 0$ کی صورت میں $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ہو گا۔ عین ممکن ہے کہ $n \rightarrow 0$ ہو اور تسلسل تب بھی منفرج ہو۔

n واں جزو پرکھ انفراج

اگر $\lim_{n\to\infty} a_n$ غیر موجود ہو یا صفر سے ہٹ کر ہو تب $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ منفرج ہو گا۔

□

مثال ۹.۲۴: n ویں جزو کا پرکھ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

ا. $n^2 \rightarrow \infty$ کی وجہ سے $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ منفرج ہو گا۔

ب. $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1$ کی وجہ سے $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ منفرج ہو گا۔

ج. چونکہ $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ غیر موجود ہے لہٰذا $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ منفرج ہو گا۔

د. چونکہ $\lim_{n\to\infty} \frac{-n}{2n+5} = -\frac{1}{2} \neq 0$ (صفر نہیں ہے) لہٰذا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-n}{2n+5}$ منفرج ہو گا۔

□

مثال ۹.۲۵: اگرچہ $a_n \rightarrow 0$ ہے لیکن درج ذیل تسلسل منفرج ہے۔ اس تسلسل کے اجزاء ایسی ترتیب دیتے ہیں جو 0 پر منفرج ہے لیکن تسلسل منفرج ہے۔

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{\text{2 اجزاء}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{\text{4 اجزاء}} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{\text{}2^n \text{ اجزاء}} + \cdots$$

□

تسلسل کا ملاپ

ہم دو منفرج تسلسل کو جزو در جزو جمع کر کے یا جزو در جزو ایک دوسرے سے منفی کر کے یا انہیں مستقل سے ضرب کرتے ہوئے نئے منفرج تسلسل حاصل کر سکتے ہیں۔

مسئلہ ۹.۷: اگر $\sum a_n = A$ اور $\sum b_n = B$ منفرج تسلسل ہوں تب درج ذیل ہوں گے۔

قاعدہ مجموعہ: $\sum(a_n + b_n) = \sum a_n + \sum b_n = A + B$

قاعدہ فرق: $\sum(a_n - b_n) = \sum a_n - \sum b_n = A - B$

قاعدہ ضرب مستقل: $\sum ka_n = k\sum a_n = kA$ (کوئی بھی عدد k)

ثبوت: یہ تین قواعد حصہ ۹.۲ میں مسئلہ ۹.۲ میں دیے گئے ترتیبات کے مماثل قواعد سے حاصل ہوتے ہیں۔ تسلسل کے لیے قاعدہ مجموعہ ثابت کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

اب $\sum(a_n + b_n)$ کے جزوی مجموعے درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} S_n &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \\ &= A_n + B_n \end{aligned}$$

چونکہ $A_n \to A$ اور $B_n \to B$ ہیں لہٰذا قاعدہ مجموعہ برائے ترتیبات کے تحت $S_n \to A + B$ ہوگا۔ قاعدہ فرق کا ثبوت بھی اسی طرح کا ہے۔

تسلسل کے لیے قاعدہ ضرب مستقل ثابت کرنے کی خاطر ہم دیکھتے ہیں کہ $\sum ka_n$ کے جزوی مجموعے درج ذیل ترتیب دیتے ہیں

$$S_n = ka_1 + ka_2 + \cdots + ka_n = k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = kA_n$$

جو قاعدہ مستقل مضرب برائے ترتیبات کے تحت kA کو مرتکز ہوگا۔

□

مسئلہ ۹.۷ کے دو ضمنی نتائج درج ذیل ہیں۔

ا. منفرج تسلسل کو کسی بھی غیر صفر مستقل سے ضرب دینے سے منفرج تسلسل حاصل ہوگا۔

ب. اگر $\sum a_n$ مرتکز اور $\sum b_n$ منفرج ہوں تب $\sum(a_n + b_n)$ اور $\sum(a_n - b_n)$ دونوں منفرج ہوں گے۔

ہم ان کے ثبوت پیش نہیں کریں گے۔

۱۴۴۴۸ مثال ۹.۲۶:

(الف)
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}-1}{6^{n-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{6^{n-1}}\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^{n-1}} && \text{قاعدہ فرق}\\ &= \frac{1}{1-(1/2)}-\frac{1}{1-(1/6)} && \text{ہندسی تسلسل میں } a=1 \text{ اور } r=\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{6} \text{ ہیں}\\ &= 2-\frac{6}{5}\\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$

(ب)
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{2^{n-1}} &= 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}} && \text{قاعدہ ضرب مستقل}\\ &= 4\left(\frac{1}{1-(1/2)}\right) && \text{ہندسی تسلسل میں } a=1 \text{ اور } r=\tfrac{1}{2} \text{ ہیں}\\ &= 8\end{aligned}$$

۱۴۴۴۹ □

۱۴۴۵۰ اجزاء کی شمولیت یا کٹوتی

۱۴۴۵۱ تسلسل میں متناہی تعداد کے اجزاء شامل کرنے سے یا تسلسل سے متناہی تعداد کے اجزاء کی کٹوتی کرنے سے تسلسل کی ارتکاز یا انفراج پر کوئی اثر نہیں ہوتا ہے البتہ
۱۴۴۵۲ منفرج تسلسل کی قیمت عموماً تبدیل ہو گی۔ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مرتکز ہو تب کسی بھی $k > 1$ کے لیے $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ بھی مرتکز ہو گا۔ مزید درج ذیل
۱۴۴۵۳ ہو گا۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} a_n \tag{۶}$$

۱۴۴۵۴ سی طرح اگر کسی بھی k کے لیے $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ مرتکز ہو تب $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ بھی مرتکز ہو گا۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n} = \frac{1}{5}+\frac{1}{25}+\frac{1}{125}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{5^n} \tag{۷}$$

$$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{5^n} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}\right)-\frac{1}{5}-\frac{1}{25}-\frac{1}{125} \tag{۸}$$

اشاریہ کی ترتیب نو

جب تک کسی تسلسل کے اجزاء کا نظم تبدیل نہ کیا جائے ہم ارتکاز تبدیل کیے بغیر تسلسل کے اشاریہ کی ترتیب نو کر سکتے ہیں۔ اشاریہ کی ابتدائی قیمت کو h اکائیاں بلند کرنے کے لیے ہم a_n میں n کی جگہ $n-h$ لکھیں گے:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

اشاریہ کی ابتدائی قیمت کو h اکائیاں نیچے کرنے کے لیے ہم a_n میں n کی جگہ $n+h$ لکھیں گے:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$

یہ افقی منتقل کے مترادف ہے۔

مثال ۹.۲۷: ہم ہندسی تسلسل

$$a + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}}, \quad \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}$$

تسلسل کی قیمت پر اشاریہ کے انتخاب کا کوئی اثر نہیں ہو گا۔ □

ہم اس اشاریہ کو ترجیح دیتے ہیں جو سادہ فقرے دیتا ہو۔

سوالات

n ویں جزوی مجموعہ کی تلاش

سوال ۹.۱۵۳ تا سوال ۹.۱۵۸ میں دیے تسلسل کے n ویں جزوی مجموعہ کا کلیہ تلاش کریں۔ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے تسلسل (اگر مرتکز ہو) کا مجموعہ حاصل کریں۔

سوال ۹.۱۵۳: $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots + \frac{2}{3^{n-1}} + \cdots$

سوال ۹.۱۵۴: $\frac{9}{100} + \frac{9}{100^2} + \frac{9}{100^3} + \cdots + \frac{9}{100^n} + \cdots$

سوال ۹.۱۵۵: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$

۱۴۴۷۱ سوال ۹.۱۵۶: $1-2+4-8+\cdots+(-1)^{n-1}2^{n-1}+\cdots$

۱۴۴۷۲ سوال ۹.۱۵۷: $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$

۱۴۴۷۳ سوال ۹.۱۵۸: $\frac{5}{1\cdot 2}+\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{5}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{5}{n(n+1)}+\cdots$

۱۴۴۷۴ ہندسی اجزاء والے تسلسل

۱۴۴۷۵ سوال ۹.۱۵۹ تا سوال ۹.۱۶۶ میں تسلسل کے ابتدائی چند اجزاء لکھنے کے بعد تسلسل کا مجموعہ تلاش کریں۔

۱۴۴۷۶ سوال ۹.۱۵۹: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n}$

۱۴۴۷۷ سوال ۹.۱۶۰: $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4^n}$

۱۴۴۷۸ سوال ۹.۱۶۱: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7}{4^n}$

۱۴۴۷۹ سوال ۹.۱۶۲: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{5}{4^n}$

۱۴۴۸۰ سوال ۹.۱۶۳: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$

۱۴۴۸۱ سوال ۹.۱۶۴: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$

۱۴۴۸۲ سوال ۹.۱۶۵: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{5^n}\right)$

۱۴۴۸۳ سوال ۹.۱۶۶: $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{5^n}\right)$

۱۴۴۸۴ دوربینی تسلسل

۱۴۴۸۵ سوال ۹.۱۶۷ تا سوال ۹.۱۷۴ میں جزوی کسر استعمال کرتے ہوئے تسلسل کا مجموعہ تلاش کریں۔

۱۴۴۸۶ سوال ۹.۱۶۷: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(4n-3)(4n+1)}$

۱۴۴۸۷ سوال ۹.۱۶۸: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(2n-1)(2n+1)}$

۱۴۴۸۸ سوال ۹.۱۶۹: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{40n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

۱۳۴۸۹ سوال ۹.۱۷۰: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

۱۳۴۹۰ سوال ۹.۱۷۱: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

۱۳۴۹۱ سوال ۹.۱۷۲: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{1/n}} - \frac{1}{2^{1/(n+1)}}\right)$

۱۳۴۹۲ سوال ۹.۱۷۳: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\ln(n+2)} - \frac{1}{\ln(n+1)}\right)$

۱۳۴۹۳ سوال ۹.۱۷۴: $\sum_{n=1}^{\infty} (\tan^{-1}(n) - \tan^{-1}(n+1))$

۱۳۴۹۴ **ارتکاز اور انفراج**

۱۳۴۹۵ سوال ۹.۱۷۵ تا سوال ۹.۱۹۲ میں سے کون سے تسلسل مرتکز اور کون سے منفرج ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ مرتکز تسلسل کے مجموعے تلاش کریں۔

۱۳۴۹۶ سوال ۹.۱۷۵: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

۱۳۴۹۷ سوال ۹.۱۷۶: $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^n$

۱۳۴۹۸ سوال ۹.۱۷۷: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3}{2^n}$

۱۳۴۹۹ سوال ۹.۱۷۸: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n$

۱۳۵۰۰ سوال ۹.۱۷۹: $\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\pi$

۱۳۵۰۱ سوال ۹.۱۸۰: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{5^n}$

۱۳۵۰۲ سوال ۹.۱۸۱: $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n}$

۱۳۵۰۳ سوال ۹.۱۸۲: $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{1}{n}$

۱۳۵۰۴ سوال ۹.۱۸۳: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{10^n}$

۱۳۵۰۵ سوال ۹.۱۸۴: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x^n}, \quad |x| > 1$

سوال ۹.۱۸۵: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-1}{3^n}$

سوال ۹.۱۸۶: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

سوال ۹.۱۸۷: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{1000^n}$

سوال ۹.۱۸۸: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

سوال ۹.۱۸۹: $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

سوال ۹.۱۹۰: $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{2n+1}\right)$

سوال ۹.۱۹۱: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$

سوال ۹.۱۹۲: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{n\pi}}{\pi^{ne}}$

ہندسی تسلسل

سوال ۹.۱۹۳ تا سوال ۹.۱۹۶ میں ہندسی تسلسل دیے گئے ہیں۔ تسلسل کے چند ابتدائی اجزاء لکھ کر a اور r تلاش کر کے تسلسل کو مجموعہ معلوم کریں۔ اس کے بعد عدم مساوات $|r| < 1$ کو x کی صورت میں لکھ کر x کی وہ قیمت دریافت کریں جو عدم مساوات کو مطمئن کرتی ہو اور جس کے لیے تسلسل مرتکز ہو۔

سوال ۹.۱۹۳: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

سوال ۹.۱۹۴: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$

سوال ۹.۱۹۵: $\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$

سوال ۹.۱۹۶: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{1}{3+\sin x}\right)^n$

سوال ۹.۱۹۷ تا سوال ۹.۲۰۲ میں x کی وہ قیمتیں معلوم کریں جن کے لیے دیا گیا ہندسی تسلسل مرتکز ہو۔ x کی ان قیمتوں کے لیے تسلسل کے مجموعہ کو x کی صورت میں لکھیں۔

سوال ۹.۱۹۷: $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$

۱۳۵۲۵ سوال ۹.۱۹۸: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{-2n}$

۱۳۵۲۶ سوال ۹.۱۹۹: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n$

۱۳۵۲۷ سوال ۹.۲۰۰: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-3)^n$

۱۳۵۲۸ سوال ۹.۲۰۱: $\sum_{n=0}^{\infty} \sin^n x$

۱۳۵۲۹ سوال ۹.۲۰۲: $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

۱۳۵۳۰ سوال ۹.۲۰۳ تا سوال ۹.۲۱۰ میں دیے عدد کو دو عدد صحیح کا نسبت لکھیں۔

۱۳۵۳۱ سوال ۹.۲۰۳: $0.\overline{23} = 0.23\ 23\ 23\ \cdots$

۱۳۵۳۲ سوال ۹.۲۰۴: $0.\overline{234} = 0.234\ 234\ 234\ \cdots$

۱۳۵۳۳ سوال ۹.۲۰۵: $0.\overline{7} = 0.7777\cdots$

۱۳۵۳۴ سوال ۹.۲۰۶: $0.\overline{d} = 0.dddd\cdots$ جہاں d ایک ہندسہ ہے۔

۱۳۵۳۵ سوال ۹.۲۰۷: $0.0\overline{6} = 0.06666\cdots$

۱۳۵۳۶ سوال ۹.۲۰۸: $1.\overline{414} = 1.414\ 414\ 414\ \cdots$

۱۳۵۳۷ سوال ۹.۲۰۹: $1.24\overline{123}\ 123\ 123\ \cdots$

۱۳۵۳۸ سوال ۹.۲۱۰: $3.\overline{142857} = 3.142857\ 142857\ 142857\ \cdots$

۱۳۵۳۹ **نظریہ اور مثالیں**

۱۳۵۴۰ سوال ۹.۲۱۱: ہم سوال ۹.۱۵۷ کے تسلسل کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{اور} \quad \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

۱۳۵۴۱ اس تسلسل کو یوں لکھیں کہ اس کا پہلا جزو (الف) $n = -2$، (ب) $n = 0$، (ج) $n = 5$ سے شروع ہوتا ہو۔

۱۳۵۴۲ سوال ۹.۲۱۲: ہم سوال ۹.۱۵۸ کے تسلسل کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)} \quad \text{اور} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{(n+1)(n+2)}$$

۱۳۵۴۳ اس تسلسل کو یوں لکھیں کہ اس کا پہلا جزو (الف) $n = -1$، (ب) $n = 3$، (ج) $n = 20$ سے شروع ہوتا ہو۔

سوال ۹.۲۱۳: غیر صفر اجزاء کا ایسا لامتناہی تسلسل لکھیں جس کے مجموعہ (الف) 1، (ب) -3، (ج) 0 ہو۔ کیا آپ غیر صفر اجزاء پر مبنی کسی بھی عدد پر مرتکز تسلسل لکھ سکتے ہیں؟ تفصیل پیش کریں۔

سوال ۹.۲۱۴: دو ایسے لامتناہی منفرج تسلسل بنائیں جن کا جزو در جزو مجموعہ مرتکز ہو۔

سوال ۹.۲۱۵: ایسی مثال پیش کریں جہاں $\sum \frac{a_n}{b_n}$ منفرج ہو اگرچہ $\sum a_n$ اور $\sum b_n$ دونوں مرتکز ہوں جہاں کوئی b_n بھی صفر نہیں ہے۔

سوال ۹.۲۱۶: ایسے ہندسی تسلسل $A = \sum a_n$ اور $B = \sum b_n$ تلاش کریں کہ $\sum a_n b_n$ منفرج ہو لیکن AB کے برابر نہ ہو۔

سوال ۹.۲۱۷: ایسی مثال دیں جہاں $\sum \frac{a_n}{b_n}$ کسی عدد، جو $\frac{A}{B}$ نہیں ہو، پر مرتکز ہو اگرچہ $A = \sum a_n$ ، $B = \sum b_n \neq 0$ ہوں اور کوئی b_n بھی 0 نہ ہو۔

سوال ۹.۲۱۸: اگر $\sum a_n$ مرتکز ہو اور تمام n کے لیے $a_n > 0$ ہو تب کیا $\sum \frac{1}{a_n}$ کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۹.۲۱۹: ایک منفرج تسلسل کے ساتھ متناہی تعداد کے اجزاء شامل کرنے یا کٹوتی کرنے سے کیا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۹.۲۲۰: اگر $\sum a_n$ مرتکز اور $\sum b_n$ منفرج ہو تب ان کے جزو در جزو مجموعہ $\sum(a_n + b_n)$ کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۹.۲۲۱: ایسا ہندسی تسلسل $\sum ar^{n-1}$ بنائیں جو 5 پر مرتکز ہو اور جہاں (الف) $a = 2$، (ب) $a = \frac{13}{2}$ ہو۔

سوال ۹.۲۲۲: b کی وہ قیمت دریافت کریں جو درج ذیل کو مطمئن کرتی ہو۔

$$1 + e^b + e^{2b} + e^{3b} + \cdots = 9$$

سوال ۹.۲۲۳: r کی کس قیمت کے لیے درج ذیل لامتناہی تسلسل مرتکز ہے؟ مرتکز تسلسل کا مجموعہ تلاش کریں۔

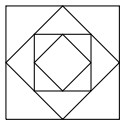
$$1 + 2r + r^2 + 2r^3 + r^4 + 2r^5 + r^6 + \cdots$$

سوال ۹.۲۲۴: دکھائیں کہ ایک مرتکز ہندسی تسلسل کی جگہ اس کا جزوی مجموعہ s_n استعمال کرنے سے پیدا خلل $L - s_n$ کی قیمت $\frac{ar^n}{1-r}$ ہو گی۔

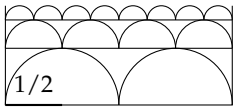
سوال ۹.۲۲۵: ایک گیند کو $4\,\mathrm{m}$ بلندی سے گرایا جاتا ہے۔ ہر بار h کی بلندی سے گر کر یہ گیند اچھل کر $0.75h$ بلند تک واپس پہنچتا ہے۔ یہ گیند کل کتنا فاصل طے کرتا ہے؟

سوال ۹.۲۲۶: ایک گیند کو $4\,\mathrm{m}$ بلندی سے گرایا جاتا ہے (سوال ۹.۲۲۵)۔ یہ گیند کتنی دیر کے لیے حرکت میں رہتا ہے۔ (اشارہ: کلیہ $s = 4.9t^2$ سے $t = \sqrt{\frac{s}{4.9}}$ حاصل ہوتا ہے۔)

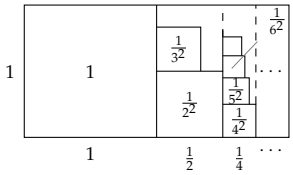
سوال ۹.۲۲۷: ایک چوکور جس کا رقبہ $4\,\mathrm{m}^2$ ہے کے اندر تین چوکور شکل ۹.۲۲۷ میں دکھائے گئے ہیں۔ ہر چوکور کے اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملا کر اس کے اندر چوکور حاصل کیا جاتا ہے۔ اس طرح یکے بعد دیگرے ہر چوکور کے اندر دوسرا چوکور بناتے ہوئے لامتناہی چوکور حاصل کیے جاتے ہیں۔ ان تمام چوکوروں کے رقبوں کا مجموعہ تلاش کریں۔



شکل ۹.۱۷: چوکور کے اندر چوکور (سوال ۹.۲۲۷)



شکل ۹.۱۸: نصف دائروں کی قطاریں (سوال ۹.۲۲۸)



شکل ۹.۱۹: رقبوں کا مجموعہ 2 سے کم ہے (سوال ۹.۲۳۰)

سوال ۹.۲۲۸: نصف دائروں کی صفوں کو شکل ۹.۱۸ میں دکھایا گیا ہے جہاں نچلی صف میں رداس $\frac{1}{2}$ ہے۔ n ویں صف میں نصف دائروں کی تعداد 2^n اور رداس $1/2^n$ ہو گا۔ تمام نصف دائروں کے رقبوں کا مجموعہ تلاش کریں۔

سوال ۹.۲۲۹: متناہی رقبہ گھیرنے والی ہلگے ون کوچ برفانی روئی (صفحہ ۲۵۳) کی لمبائی لامتناہی ہوتی ہے۔ اس حقیقت کو سمجھنے کی خاطر فرض کریں ہم ضلع 1 کی مساوی الاضلاع مثلث سے شروع کرتے ہیں۔

ا. n ویں منحنی C_n کی لمبائی L_n تلاش کر کے دکھائیں کہ $\lim_{n\to\infty} L_n = \infty$ ہو گا۔

ب. C_n کا رقبہ S_n تلاش کر کے $\lim_{n\to\infty} S_n$ معلوم کریں۔

سوال ۹.۲۳۰: ہم اس حقیقت کی غیر رسمی ثبوت کہ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ کی قیمت 2 سے کم ہے شکل ۹.۱۹ کی مدد سے پیش کرتے ہیں۔ آپ کو کیا نظر آتا ہے؟

۹.۵ غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پرکھ

ہم تسلسل $\sum a_n$ کے بارے میں دو سوالات کرتے ہیں:

ا. کیا یہ تسلسل مرتکز ہے؟

ب. اگر تسلسل مرتکز ہو تب اس کا مجموعہ کیا ہے؟

اس باب کا باقی بیشتر حصہ پہلے سوال کا جواب دے گا۔ حقیقتاً دوسرا سوال بھی اتنا ہی اہم ہے اور ہم اس پر بعد میں غور کریں گے۔

اس حصہ میں اور اگلے دو حصوں میں ایسے تسلسل پر غور کیا جائے گا جن میں منفی اجزاء نہیں پائے جاتے ہوں۔ اس شرط کی وجہ سے ان تسلسل کے جزوی مجموعے غیر گھٹتے ترتیبات دیتے ہیں اور وہ غیر گھٹتے ترتیبات جو اوپر سے محدود ہوں ہر صورت مرتکز ہوتے ہیں (مسئلہ ۹.۱)۔ یہ دکھانے کی خاطر کہ ایک غیر منفی اجزاء والا تسلسل مرتکز ہے، ہمیں صرف اتنا دکھانا ہو گا کہ اس تسلسل کے جزوی مجموعے اوپر سے محدود ہیں۔

ابتدا میں یوں معلوم ہوتا ہے جیسے اس ترکیب سے ارتکاز کی تصدیق کرنے کے باوجود تسلسل کا مجموعہ نہ جاننا ایک عیب ہے۔ کیا بہتر ہوتا کہ ہم جزوی مجموعوں کے کلیات سے تسلسل کا مجموعہ بلا واسطہ تلاش کرتے۔ حقیقت میں ہمیں عموماً جزوی مجموعوں کے کلیات معلوم نہیں ہوں گے اور اسی وجہ سے ہمیں دو قدمی طریقہ

کا استعمال کرنا ہوگا جہاں پہلے قدم میں تسلسل کا ارتکاز جانا جاتا ہے اور دوسرے قدم میں مجموعے کی تخمینی قیمت تلاش کی جاتی ہے۔

غیر گھٹتے جزوی مجموعے

فرض کریں کہ تمام n کے لیے $a_n \geq 0$ ہو اور $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ لا متناہی تسلسل ہو۔ تب چونکہ $s_{n+1} = s_n + a_n$ ہے لہٰذا ہر جزوی مجموعہ گزشتہ جزوی مجموعے سے بڑا یا اس کے برابر ہوگا:

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \cdots$$

اب جزوی مجموعے غیر گھٹتا ترتیب بناتے ہیں اور مسئلہ ۹.۱ کے تحت یہ تسلسل صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہوگا جب اس کے جزوی مجموعات اوپر سے محدود ہوں۔

ضمنی نتیجہ ۹.۱: برائے مسئلہ ۹.۱ غیر منفی اجزاء کا تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہوگا جب اس کے جزوی مجموعات اوپر سے محدود ہوں۔

مثال ۹.۲۸: ہارمونی تسلسل

درج ذیل تسلسل کو **ہارمونی تسلسل**[۲۷] کہتے ہیں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

اس کے جزوی مجموعوں کی کوئی بالائی حد بندی نہیں پائی جاتی ہے لہٰذا یہ مرتکز تسلسل ہے۔ اس حقیقت کو جاننے کی خاطر ہم اجزاء کے گروہ بناتے ہیں۔

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{>\frac{8}{16}=\frac{1}{2}} + \cdots$$

پہلے دو اجزاء کا مجموعہ 1.5 ہے۔ اگلے دو اجزاء کا مجموعہ $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ ہے جو $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ سے بڑا ہے۔ اگلے چار اجزاء کا مجموعہ $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$ ہے جو $\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ سے بڑا ہے۔ اگلے آٹھ اجزاء کا مجموعہ $\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}$ ہے جو $\frac{1}{2} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$ سے بڑا ہے۔ اسی طرح اگلے سولہ اجزاء کا مجموعہ بھی $\frac{1}{2}$ سے بڑا ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ یوں جزو $\frac{1}{2^{n+1}}$ پر اختتام پذیر 2^n اجزاء کا مجموعہ $\frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$ سے بڑا ہو گا۔ جزوی مجموعات کی ترتیب اوپر سے محدود نہیں ہے: اگر $n = 2^k$ ہو تب جزوی مجموعہ s_n کی قیمت $\frac{k}{2}$ سے بڑی ہو گی۔ ہارمونی تسلسل منفرج ہے۔ □

دھیان رہے کہ ہارمونی تسلسل کا n واں جزو $\frac{1}{n}$ ہے جو 0 پر مرتکز ہے لیکن ہارمونی تسلسل منفرج ہے۔ یوں ہارمونی تسلسل کے انفراج کو دریافت کرنے میں انفراج کا n ویں جزو پرکھنا ناکام ہوتا ہے۔

---

[۲۷] harmonicseries

تکملی پرکھ

ہم ہارمونی تسلسل سے تعلق رکھنے والے ایک تسلسل، جس کا n واں جزو $\frac{1}{n^2}$ ہے، کو استعمال کرتے ہوئے تکملی پرکھ کو متعارف کرتے ہیں۔

مثال ۹.۲۹: کیا درج ذیل تسلسل مرتکز ہے؟

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots$$

حل

ہم $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ کی ارتکاز دریافت کرتے ہیں۔ موازنہ کرنے کی خاطر ہم تسلسل کے اجزاء کو تفاعل $f(x) = \frac{1}{x^2}$ کی قیمتیں تصور کرتے ہیں اور ان قیمتوں کو منحنی $y = \frac{1}{x^2}$ کے نیچے مستطیل رقبے تصور کرتے ہیں۔

جیسا شکل ۹.۲۰ میں دکھایا گیا ہے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\
&= f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n) \\
&< f(1) + \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&< 1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \\
&< 1 + 1 = 2 \qquad \text{(مثال ۸.۴۵)}
\end{aligned}$$

یوں $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ کے جزوی مجموعات اوپر سے (2 تک) محدود ہیں لہٰذا یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔ اس تسلسل کا مجموعہ درحقیقت $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.64493$ ہے۔ □

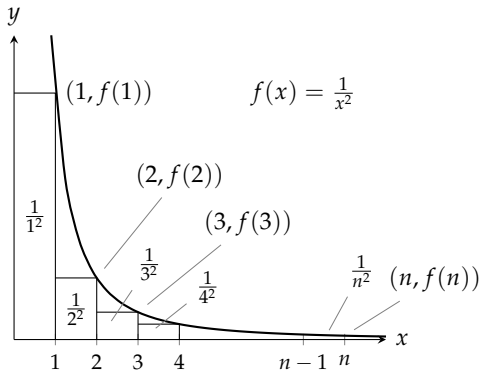
تکملی پرکھ

فرض کریں $\{a_n\}$ مثبت اجزاء کی ترتیب ہے۔ مزید فرض کریں کہ $a_n = f(n)$ ہے جہاں تمام $x \geq N$ کے لیے (N مثبت عدد صحیح ہے) متغیر x کا f استمراری، مثبت اور گھٹتا تفاعل ہے۔ تب تسلسل $\sum_{n=N}^\infty a_n$ اور تکمل $\int_N^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ دونوں مرتکز یا دونوں منفرج ہوں گے۔

□

ثبوت پرکھ: ہم $N = 1$ کے لیے پہلے اس پرکھ کو ثابت کرتے ہیں۔ عمومی N کے لیے ثبوت اسی طرح کا ہے۔

ہم اس مفروضہ سے شروع کرتے ہیں کہ تمام n کے لیے f گھٹتا تفاعل اور $f(n) = a_n$ ہیں۔ یوں شکل ۹.۲۱-الف میں وہ مستطیل جن کے رقبے



شکل ۹.۲۰: رقبہ کا موازنہ (مثال ۹.۲۹)

۱۴۶۲۱ $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ہیں کا مجموعی رقبہ، $x = 1$ تا $x = n+1$ ترسیم $y = f(x)$ کے نیچے رقبہ سے زیادہ ہے یعنی:

$$\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

۱۴۶۲۲ شکل ۹.۲۱-ب میں مستطیلوں کو ہر نقطہ کے بائیں جانب بنایا گیا ہے۔ اگر ہم وقتی طور پر پہلی مستطیل، جس کا رقبہ a_1 ہے، کو نظر انداز کریں تب درج ذیل ہو
۱۴۶۲۳ گا۔

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

۱۴۶۲۴ اگر ہم a_1 کو بھی شامل کریں تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

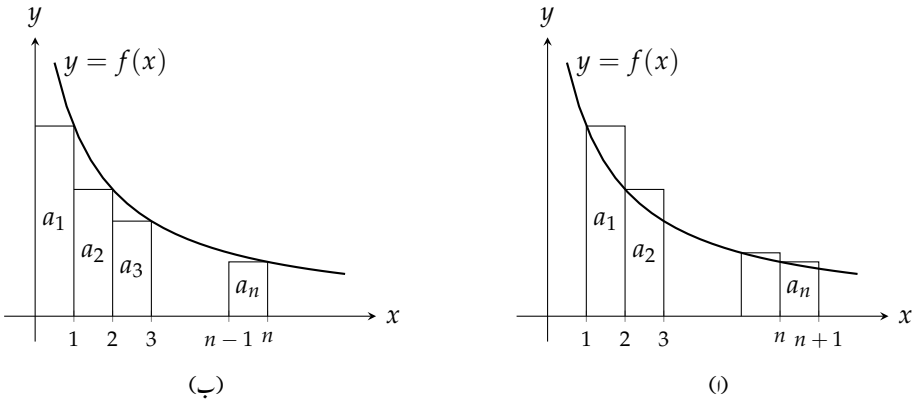
۱۴۶۲۵ ان نتائج سے

$$\int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq a_1 + \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \tag{۱}$$

۱۴۶۲۶ حاصل ہوتا ہے۔ اگر $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ متناہی ہو تب دائیں عدم مساوات کے تحت $\sum a_n$ متناہی ہو گا۔ اگر $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ لامتناہی ہو تب بائیں
۱۴۶۲۷ عدم مساوات کے تحت $\sum a_n$ لامتناہی ہو گا۔

۱۴۶۲۸ یوں تسلسل اور تکمل دونوں مرتکز یا دونوں منفرج ہوں گے۔

۱۴۶۲۹ □



شکل ۹.۲۱: تکملی پرکھ کے تحت تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ اور تکمل $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ دونوں مرتکز یا دونوں منفرج ہوں گے۔

۱۴۳۰ دھیان رہے کہ ارتکاز کی صورت میں تکمل اور تسلسل کی قیمتیں مختلف ہو سکتی ہیں جیسا مثال ۹.۲۹ میں دیکھا گیا جہاں $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ اور
۱۴۳۱ $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1$ تھے۔

۱۴۳۲ **مثال ۹.۳۰:** دکھائیں کہ p تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots \tag{۲}$$

۱۴۳۳ جہاں p حقیقی مستقل ہے، $p > 1$ کی صورت میں مرتکز جبکہ $p \leq 1$ کی صورت میں منفرج ہو گا۔

۱۴۳۴ **حل**

۱۴۳۵ اگر $p > 1$ ہو تب $f(x) = \frac{1}{x^p}$ متغیر x کا مثبت گھٹتا تفاعل ہو گا۔ اب چونکہ

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} x^{-p}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b \\
&= \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1\right) \\
&= \frac{1}{1-p}(0-1) = \frac{1}{p-1}
\end{aligned}$$

۱۴۳۶ ہے لہٰذا تکملی پرکھ کے تحت یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔

۱۴۳۷ اگر $p < 1$ ہو تب $1 - p > 0$ ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} (b^{1-p} - 1) = \infty$$

۱۴۳۸ تکملی پرکھ کے تحت یہ تسلسل منفرج ہو گا۔

۱۴۳۹ اگر $p = 1$ ہو تب درج ذیل منفرج (ہارمونی) تسلسل پایا جائے گا۔

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

۱۴۴۰ یوں $p > 1$ لے ارتکاز لیکن $p < 1$ اور $p = 0$ کے لیے انفراج پایا جاتا ہے۔ □

۱۴۴۱ **سوالات**

۱۴۴۲ **ارتکاز اور انفراج کی معلومات**

۱۴۴۳ سوال ۹.۲۳۱ تا سوال ۹.۲۶۰ میں کون سا تسلسل مرتکز اور کان سا تسلسل منفرج ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (جوابات دیکھتے ہوئے یاد رہے کہ تسلسل
۱۴۴۴ کی ارتکاز یا انفراج جاننے کے کئی طریقے ہو سکتے ہیں)

۱۴۴۵ سوال ۹.۲۳۱: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$

۱۴۴۶ سوال ۹.۲۳۲: $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$

۱۴۴۷ سوال ۹.۲۳۳: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

۱۴۴۸ سوال ۹.۲۳۴: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+1}$

۱۴۴۹ سوال ۹.۲۳۵: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$

۱۴۵۰ سوال ۹.۲۳۶: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n\sqrt{n}}$

۱۴۵۱ سوال ۹.۲۳۷: $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{8^n}$

۱۴۵۲ سوال ۹.۲۳۸: $\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{8}{n}$

۱۴۵۳ سوال ۹.۲۳۹: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

۱۴۵۴ سوال ۹.۲۴۰: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

۱۳۶۵۵ سوال ۹.۲۴۱: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n}$

۱۳۶۵۶ سوال ۹.۲۴۲: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{4^n+3}$

۱۳۶۵۷ سوال ۹.۲۴۳: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2}{n+1}$

۱۳۶۵۸ سوال ۹.۲۴۴: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$

۱۳۶۵۹ سوال ۹.۲۴۵: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n+1}$

۱۳۶۶۰ سوال ۹.۲۴۶: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)}$

۱۳۶۶۱ سوال ۹.۲۴۷: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$

۱۳۶۶۲ سوال ۹.۲۴۸: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

۱۳۶۶۳ سوال ۹.۲۴۹: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 2)^n}$

۱۳۶۶۴ سوال ۹.۲۵۰: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 3)^n}$

۱۳۶۶۵ سوال ۹.۲۵۱: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1/n}{(\ln n)\sqrt{\ln^2 n-1}}$

۱۳۶۶۶ سوال ۹.۲۵۲: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$

۱۳۶۶۷ سوال ۹.۲۵۳: $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$

۱۳۶۶۸ سوال ۹.۲۵۴: $\sum_{n=1}^{\infty} n \tan \frac{1}{n}$

۱۳۶۶۹ سوال ۹.۲۵۵: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{1+e^{2n}}$

۱۳۶۷۰ سوال ۹.۲۵۶: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{1+e^n}$

۱۴۶۷۱ سوال ۹.۲۵۷: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\tan^{-1} n}{1+n^2}$

۱۴۶۷۲ سوال ۹.۲۵۸: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

۱۴۶۷۳ سوال ۹.۲۵۹: $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n$

۱۴۶۷۴ سوال ۹.۲۶۰: $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech}^2 n$

۱۴۶۷۵ **نظریہ اور مثالیں**

۱۴۶۷۶ سوال ۹.۲۶۱ اور سوال ۹.۲۶۲ میں اگر کسی a کے لیے تسلسل مرتکز ہو تب a تلاش کریں۔

۱۴۶۷۷ سوال ۹.۲۶۱: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n+2} - \frac{1}{n+4}\right)$

۱۴۶۷۸ سوال ۹.۲۶۲: $\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{2a}{n+1}\right)$

۱۴۶۷۹ سوال ۹.۲۶۳:

۱۴۶۸۰ ا. شکل ۹.۲۰ اور شکل ۹.۲۱ کی طرز کے اشکال بنا کر دکھائیں کہ ہارمونی تسلسل کے جزوی مجموعات درج ذیل عدم مساواتوں کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\ln(n+1) &= \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &\le 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 1 + \ln n\end{aligned}$$

۱۴۶۸۱ ب. ہارمونی تسلسل کی انفراج تجرباتی طور نظر نہیں آتی ہے اگرچہ ہم جانتے ہیں کہ یہ تسلسل منفرج ہے۔ بس اس کے جزوی مجموعات بہت آہستہ بڑھتے
۱۴۶۸۲ ہیں۔ یہ دیکھنے کی خاطر فرض کریں ہم $s_1 = 1$ سے شروع کر کے ہر سیکنڈ ہارمونی تسلسل میں ایک جزو شامل کرتے ہیں۔ کائنات کی ابتدا سے شروع
۱۴۶۸۳ کرتے ہوئے اب تک (تقریباً 13 ارب سال بعد) شامل اجزاء کا جزوی مجموعہ کیا ہو گا؟ (ایک سال میں 365 دن لیں۔)

۱۴۶۸۴ سوال ۹.۲۶۴: کیا x کی کسی قیمت کے لیے $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx}$ مرتکز ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۴۶۸۵ سوال ۹.۲۶۵: کیا یہ درست ہے کہ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مثبت اعداد کا منفرج تسلسل ہو تب تمام n کے لیے $b_n < a_n$ کی صورت میں مثبت اعداد
۱۴۶۸۶ کا ایک تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ بھی منفرج ہو گا؟ کیا مثبت اعداد کا ''چھوٹے سے چھوٹا'' منفرج تسلسل پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۴۶۸۷ سوال ۹.۲۶۶: کیا مثبت اعداد کا ''بڑے سے بڑا'' منفرج تسلسل پایا جاتا ہے (سوال ۹.۲۶۵)؟

۱۴۶۸۸ سوال ۹.۲۶۷: کوشی پرکھ جمود

۱۴۶۸۹ کوشی پرکھ جمود کہتا ہے: فرض کریں $\{a_n\}$ مثبت اجزاء کی غیر گھٹتی ترتیب ہے (تمام n کے لیے $a_n \ge a_{n+1}$) جو 0 پر مرتکز ہے۔ تب $\sum a_n$

صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گا جب $\sum 2^n a_{2^n}$ مرتکز ہو۔ مثال کے طور پر $\sum \frac{1}{n}$ اس لیے منفرج ہے کہ $\sum 2^n \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right) = \sum 1$ منفرج ہے۔ دکھائیں کہ یہ پرکھ کیوں کام کرتا ہے۔

سوال ۹.۲۶۸: کوشی پرکھ جمود (سوال ۹.۲۶۷) استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ

ا. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ منفرج ہے۔

ب. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ مرتکز اور $p > 1$ کے لیے منفرج ہے۔

سوال ۹.۲۶۹: لوگارتھمی p تسلسل

ا. دکھائیں کہ صرف اور صرف $p > 1$ کے لیے $\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}$ مرتکز ہو گا۔

ب. تسلسل $\sum_2^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ کی ارتکاز پر جزو-الف کا کیا اثر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۹.۲۷۰: درج ذیل میں کون سے تسلسل مرتکز اور کون سے منفرج ہیں۔ سوال ۹.۲۶۹ کے نتائج بروئے کار لائیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ب. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1.01}}$ ج. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n^3)}$ د. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3}$

سوال ۹.۲۷۱: یولر مستقل

ہم شکل ۹.۲۱ کی طرح اشکال کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ n بڑھانے سے مجموعہ

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

اور تکمل

$$\ln n = \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

کے فرق میں کمی کم ہوتی ہے۔ اس خیال پر غور کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

ا. عدم مساوات ا میں $f(x) = \frac{1}{x}$ لے کر

$$\ln(n+1) \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \le 1 + \ln n$$

یا

$$0 < \ln(n+1) - \ln n \le 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \le 1$$

دکھائیں۔ یوں درج ذیل ترتیب اوپر سے اور نیچے سے محدود ہو گی۔

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

ب. درج ذیل دکھا کر دکھائیں کہ جز-الف میں ترتیب $\{a_n\}$ گھٹتی ترتیب ہے۔

$$\frac{1}{n+1} < \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln(n+1) - \ln n$$

چونکہ اوپر اور نیچے سے محدود گھٹتی ترتیب مرتکز ہوتی ہے (سوال ۹.۴۱) لہٰذا جزو-الف میں اعداد a_n بھی مرتکز ہوں گے:

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \to \gamma$$

عدد γ جس کو **یولر مستقل**[۲۸] کہتے ہیں کی قیمت $0.5772\cdots$ ہے۔ دیگر مخصوص اعداد مثلاً π اور e کے برعکس γ کو ظاہر کرنے کا کوئی دوسرا سادہ کلیہ اب تک دریافت نہیں کیا گیا ہے۔

سوال ۹.۲۷۲: تکملی پرکھ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}$ مرتکز ہے۔

۹.۶ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ

گزشتہ حصہ کے ضمنی نتیجہ ۹.۱ کے استعمال میں اصل سوال یہ معلوم کرنا ہے کہ s_n اوپر سے محدود ہے۔ بعض اوقات ہم دکھا پاتے ہیں کہ چونکہ دیے گئے تسلسل کا ہر جزوی مجموعہ s_n کسی مرتکز تسلسل کے مطابقتی جزوی مجموعہ سے کم ہے لہٰذا دیا گیا تسلسل مرتکز ہے۔

مثال ۹.۳۱: درج ذیل تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

اس لیے مرتکز ہے کہ اس کے تمام اجزاء مثبت اور درج ذیل تسلسل کے مطابقتی اجزاء سے کم ہیں۔

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots$$

---

[۲۸] Euler'sconstant

۱۳۷۲۳ آئیں دیکھتے ہیں کہ یہ تعلق $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ کے جزوی مجموعات کو کیسے اوپر سے محدود بناتا ہے۔ درج ذیل فرض کر کے

$$s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

۱۳۷۲۴ ہم دیکھتے ہیں کہ ہر n کے لیے

$$s_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{1-(1/2)} = 3$$

۱۳۷۲۵ ہو گا۔ یوں $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ کے تمام جزوی مجموعات 3 سے کم ہیں لہٰذا $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ مرتکز ہو گا۔

۱۳۷۲۶ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ کے جزوی مجموعات کی بالائی حد بندی 3 ہونے کا یہ مطلب نہیں کہ یہ تسلسل 3 پر مرتکز ہو گا۔ ہم حصہ ۹.۱۱ میں دیکھیں گے کہ یہ تسلسل
۱۳۷۲۷ e پر مرتکز ہے۔ □

۱۳۷۲۸ **بلاواسطہ تقابلی پرکھ**

۱۳۷۲۹ ہم نے مثال ۹.۳۱ میں ارتکاز کو تقابلی پرکھ سے ثابت کیا۔ ہم نے دیے گئے تسلسل کے اجزاء کا ایک مرتکز تسلسل کے مطابقتی اجزاء کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے
۱۳۷۳۰ ایسا کیا۔ اس طریقہ کار سے کئی تراکیب حاصل کیے جا سکتے ہیں جنہیں **تقابلی پرکھ**[۲۹] کہتے ہیں۔

۱۳۷۳۱ **غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا بلاواسطہ تقابلی پرکھ**

۱۳۷۳۲ فرض کریں $\sum a_n$ ایک ایسا تسلسل ہے جس میں کوئی منفی جزو نہیں پایا جاتا ہے۔

۱۳۷۳۳ ا. اگر ایسا مرتکز تسلسل $\sum c_n$ پایا جاتا ہو کہ تمام $n > N$، جہاں N کوئی عدد صحیح ہے، کے لیے $a_n \leq c_n$ ہو تب تسلسل $\sum a_n$ مرتکز
۱۳۷۳۴ ہو گا۔

۱۳۷۳۵ ب. اگر غیر منفی اجزاء کا ایسا منفرج تسلسل $\sum d_n$ پایا جاتا ہو کہ تمام $n > N$، جہاں N کوئی عدد صحیح ہے، کے لیے $a_n \geq d_n$ ہو تب تسلسل
۱۳۷۳۶ $\sum a_n$ منفرج ہو گا۔

۱۳۷۳۷ □

۱۳۷۳۸ ثبوت پرکھ: جزو-الف میں جزوی مجموعات $\sum a_n$ کو درج ذیل اوپر سے محدود کرتا ہے

$$M = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n$$

۱۳۷۳۹ لہٰذا یہ غیر گھٹتا ترتیب دیتے ہیں جس کی حد $L \leq M$ ہے۔

---

[۲۹] comparisontests

۱۴۷۴۰ جزو-ب میں جزوی مجموعات $\sum a_n$ اوپر سے محدود نہیں ہیں۔ اگر یہ اوپر سے محدود ہوتے تب جزوی مجموعہ $\sum d_n$ کو درج ذیل اوپر سے محدود کرتا

$$M' = d_1 + d_2 + \cdots + d_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n$$

۱۴۷۴۱ اور $\sum d_n$ کو انفراج کے بجائے مرتکز ہونا ہوتا۔

۱۴۷۴۲ □

۱۴۷۴۳ بلاواسطہ تقابلی پرکھ کو تسلسل پر لاگو کرنے کے لیے ہمیں تسلسل کے ابتدائی اجزاء شامل کرنے ہوں گے۔ ہم کسی بھی اشاریہ N سے پرکھ شروع کر سکتے ہیں
۱۴۷۴۴ جب تک ہم اس کے بعد کے تمام اجزاء شامل کریں۔

۱۴۷۴۵ مثال ۹.۳۲: کیا درج ذیل تسلسل مرتکز ہے؟

$$5 + \frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \cdots$$

۱۴۷۴۶ **حل**

۱۴۷۴۷ ہم ابتدائی چار اجزاء نظر انداز کر کے باقی اجزاء کا مرتکز ہندسی تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ کے اجزاء کے ساتھ موازنہ کرتے ہیں۔ ہم درج ذیل دیکھتے ہیں۔

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

۱۴۷۴۸ یوں دیا گیا تسلسل بلاواسطہ تقابلی پرکھ کے تحت مرتکز ہو گا۔ □

۱۴۷۴۹ بلاواسطہ تقابلی پرکھ استعمال کرنے کی خاطر ہمارے پاس مرتکز اور منفرج تسلسل کی فہرست ہونی چاہیے۔ اب تک ہم درج ذیل جانتے ہیں:

مرتکز تسلسل	منفرج تسلسل
ہندسی تسلسل جس میں $\lvert r\rvert < 1$ ہو	ہندسی تسلسل جس میں $\lvert r\rvert \geq 1$ ہو
دوربینی تسلسل مثلاً $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$	ہارمونی تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$	کوئی بھی تسلسل $\sum a_n$ جس کے لیے $\lim_{n\to\infty} a_n$ غیر موجود ہو یا $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ہو
p تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ جہاں $p > 1$ ہو	p تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ جہاں $p \leq 1$ ہو

۱۴۷۵۰

پرکھ تقابل حد

ہم اب ایسے تقابلی پرکھ پر غور کرتے ہیں جس کا استعمال ان تسلسل میں بالخصوص آسان ثابت ہوتا ہے جن میں a_n اشاریہ n کا ناطق تفاعل ہو۔

فرض کریں ہم درج ذیل تسلسل کے ارتکاز پر غور کرنا چاہتے ہیں۔

$$\text{(الف)}\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^2-n+1} \qquad \text{(ب)}\quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{8n^3+100n^2+1000}{2n^6-n+5}$$

ارتکاز یا انفراج جاننے میں صرف دُم کارآمد ہوتی ہے۔ جب n بہت بڑا ہو تب نسب نما اور شمار کنندہ میں n کی بلند ترین طاقت سب سے زیادہ اہم ہوں گی۔

یوں (الف) میں بڑے n کے لیے

$$a_n = \frac{2n}{n^2-n+1}$$

کا رویہ $\frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$ کی طرح کا ہو گا۔ چونکہ $\sum \frac{1}{n}$ منفرج ہے لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ $\sum a_n$ بھی منفرج ہو گا۔

اسی طرح (ب) میں بڑے n کے لیے

$$\frac{8n^3+100n^2+1000}{2n^6-n+5}$$

کا رویہ $\frac{8n^3}{2n^6} = \frac{4}{n^3}$ کی طرح کا ہو گا۔ چونکہ $\sum \frac{4}{n^3}$ مرتکز ہے (یہ مرتکز p تسلسل کا چار گنا ہے) لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ تسلسل $\sum a_n$ بھی مرتکز ہو گا۔

درج ذیل پرکھ کے تحت ہماری $\sum a_n$ کے بارے میں توقعات دونوں صورتوں میں درست ہیں۔

تقابل حد پرکھ

فرض کریں تمام $n \geq N$ کے لیے $a_n > 0$ اور $b_n > 0$ ہیں جہاں N عدد صحیح ہے۔

ا. اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ ہو تب $\sum a_n$ اور $\sum b_n$ دونوں مرتکز یا دونوں منفرج ہوں گے۔

ب. اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ ہو اور $\sum b_n$ مرتکز ہو تب $\sum a_n$ بھی مرتکز ہو گا۔

ج. اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ہو اور $\sum b_n$ منفرج ہو تب $\sum a_n$ بھی منفرج ہو گا۔

□

ثبوت پرکھ: ہم جزو-الف ثابت کریں گے جبکہ جزو-ب اور جزو-ج آپ کو ثابت کرنے ہوں گے (سوال ۹.۳۰۹)۔

چونکہ $\frac{c}{2} > 0$ ہے لہٰذا ایک ایسا عدد صحیح N پایا جائے گا کہ تمام n کے لیے درج مطمئن ہو گا۔

$$n > N \implies \left|\frac{a_n}{b_n} - c\right| < \frac{c}{2}$$

حد کی تعریف جہاں $\epsilon = \frac{c}{2}$ ، $L = c$ اور a_n کی جگہ $\frac{a_n}{b_n}$ ہیں۔

یوں $n > N$ کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$-\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} - c < \frac{c}{2},$$
$$\frac{c}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3c}{2},$$
$$\left(\frac{c}{2}\right) b_n < a_n < \left(\frac{3c}{2}\right) b_n$$

اگر $\sum b_n$ مرتکز ہو، تب $\sum (3c/2) b_n$ مرتکز ہو گا اور بلا واسطہ تقابل کے تحت $\sum a_n$ مرتکز ہو گا۔ اگر $\sum b_n$ منفرج ہو، تب $\sum (3c/2) b_n$ منفرج ہو گا اور بلاواسطہ تقابل کے تحت $\sum a_n$ منفرج ہو گا۔

□

مثال ۹.۳۳: درج ذیل تسلسل میں کون سے مرتکز اور کون سے منفرج ہیں؟

(الف)
$$\frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$$

(ب)
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{15} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$$

(ج)
$$\frac{1+2\ln 2}{9} + \frac{1+3\ln 3}{14} + \frac{1+4\ln 4}{21} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$$

حل

ا. ہم $a_n = \frac{2n+1}{n^2+2n+1}$ لیتے ہیں۔ بڑے n کے لیے ہم توقع کرتے ہیں کہ a_n کا رویہ $\frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$ کی طرح ہو گا لہٰذا ہم $b_n = \frac{1}{n}$ لیتے ہیں (ہم $b_n = \frac{2}{n}$ بھی لے سکتے تھے لیکن $\frac{1}{n}$ زیادہ سادہ ہے۔)۔ چونکہ

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

منفرج ہے اور

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n}{n^2+2n+1} = 2$$

ہے لہٰذا تقابل حد پرکھ کے جزو-ا کے تحت $\sum a_n$ منفرج ہو گا۔

ب. $a_n = \frac{1}{2^n-1}$ لیں۔ بڑے n کے لیے ہم توقع کرتے ہیں کہ a_n کا رویہ $\frac{1}{2^n}$ کی طرح ہو گا لہٰذا ہم $b_n = \frac{1}{2^n}$ لیتے ہیں۔ چونکہ

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

۱۳۷۸۱ مرتکز ہے اور

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n-1}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-(1/2^n)}\\ &= 1\end{aligned}$$

۱۳۷۸۲ ہے لہٰذا قابل حد پرکھ کے جزو-ا کے تحت $\sum a_n$ مرتکز ہوگا۔

۱۳۷۸۳ ج. $a_n = \frac{1+n\ln n}{n^2+5}$ لیں۔ بڑے n کے لیے ہم توقع کرتے ہیں کہ a_n کا رویہ $\frac{n\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n}$ کی طرح ہوگا جو $n \geq 3$ کے لیے $\frac{1}{n}$

۱۳۷۸۴ سے بڑا ہے لہٰذا ہم $b_n = \frac{1}{n}$ لیتے ہیں۔ چونکہ

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$$

۱۳۷۸۵ منفرج ہے اور

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n+n^2\ln n}{n^2+5}\\ &= \infty\end{aligned}$$

۱۳۷۸۶ ہے لہٰذا قابل حد پرکھ کے جزو-ج کے تحت $\sum a_n$ منفرج ہوگا۔

۱۳۷۸۷ □

۱۳۷۸۸ مثال ۹.۳۴: کیا $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{3/2}}$ مرتکز ہے؟

۱۳۷۸۹ **حل**

۱۳۷۹۰ چونکہ کسی بھی مثبت مستقل c کے لیے $\ln n$ سے n^c کی بڑھنے کی شرح زیادہ ہوگی (سوال ۹.۱۳۷) لہٰذا ہم توقع کرتے ہیں کہ کافی بڑے n کے لیے

$$\frac{\ln n}{n^{3/2}} < \frac{n^{1/4}}{n^{3/2}} = \frac{1}{n^{5/4}}$$

۱۳۷۹۱ ہوگا۔ یقیناً $a_n = \frac{\ln n}{n^{3/2}}$ اور $b_n = \frac{1}{n^{5/4}}$ لے کر

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{1/4}}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1/n}{(1/4)n^{-3/4}} && \text{قاعدہ لھوپیٹال}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^{1/4}} = 0\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ $\sum b_n = \sum \frac{1}{n^{5/4}}$ (p تسلسل جہاں $p > 1$ ہے) مرتکز ہے لہٰذا تقابل حد پرکھ کے جزو-ب کے تحت $\sum a_n$ مرتکز ہو گا۔ □

سوالات

ارتکاز اور انفراج کی دریافت

سوال ۹.۲۷۳ تا سوال ۹.۳۰۸ میں کون سا تسلسل مرتکز اور کون سا تسلسل منفرج ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۹.۲۷۳: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}$

سوال ۹.۲۷۴: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n+\sqrt{n}}$

سوال ۹.۲۷۵: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{2^n}$

سوال ۹.۲۷۶: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}$

سوال ۹.۲۷۷: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3n-1}$

سوال ۹.۲۷۸: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2\sqrt{n}}$

سوال ۹.۲۷۹: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^n$

سوال ۹.۲۸۰: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+2}}$

سوال ۹.۲۸۱: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\ln(\ln n)}$

سوال ۹.۲۸۲: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2}$

سوال ۹.۲۸۳: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$

سوال ۹.۲۸۴: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^3}{n^3}$

۱۳۸۰۹ سوال ۹.۲۸۵: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$

۱۳۸۱۰ سوال ۹.۲۸۶: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{3/2}}$

۱۳۸۱۱ سوال ۹.۲۸۷: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln n}$

۱۳۸۱۲ سوال ۹.۲۸۸: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+\ln n)^2}$

۱۳۸۱۳ سوال ۹.۲۸۹: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$

۱۳۸۱۴ سوال ۹.۲۹۰: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\ln^2 n}$

۱۳۸۱۵ سوال ۹.۲۹۱: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2-1}}$

۱۳۸۱۶ سوال ۹.۲۹۲: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$

۱۳۸۱۷ سوال ۹.۲۹۳: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n2^n}$

۱۳۸۱۸ سوال ۹.۲۹۴: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n}{n^2 2^n}$

۱۳۸۱۹ سوال ۹.۲۹۵: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}+1}$

۱۳۸۲۰ سوال ۹.۲۹۶: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}+1}{3^n}$

۱۳۸۲۱ سوال ۹.۲۹۷: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$

۱۳۸۲۲ سوال ۹.۲۹۸: $\sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{1}{n}$

۱۳۸۲۳ سوال ۹.۲۹۹: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10n+1}{n(n+1)(n+2)}$

۱۳۸۲۴ سوال ۹.۳۰۰: $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5n^3-3n}{n^2(n-2)(n^2+5)}$

سوال ۹.۳۰۱: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}}$

سوال ۹.۳۰۲: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sec^{-1} n}{n^{1.3}}$

سوال ۹.۳۰۳: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\coth n}{n^{2}}$

سوال ۹.۳۰۴: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{n^{2}}$

سوال ۹.۳۰۵: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

سوال ۹.۳۰۶: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^{2}}$

سوال ۹.۳۰۷: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

سوال ۹.۳۰۸: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۹.۳۰۹: تقابل حد پرکھ کا جزو-ب اور جزو-ج ثابت کریں۔

سوال ۹.۳۱۰: اگر غیر منفی اجزاء کا تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مرتکز ہو تب کیا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ وجہ پیش کریں۔

سوال ۹.۳۱۱: فرض کریں $n \geq N$ کے لیے $a_n > 0$ اور $b_n > 0$ ہیں جہاں N عدد صحیح ہے۔ اگر $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ ہو اور $\sum a_n$ مرتکز ہو تب کیا $\sum b_n$ کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ وجہ پیش کریں۔

سوال ۹.۳۱۲: ثابت کریں کہ اگر غیر مثبت اجزاء کا تسلسل $\sum a_n$ مرتکز ہو تب $\sum a_n^2$ بھی مرتکز ہو گا۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۹.۳۱۳: ہم نہیں جانتے ہیں کہ آیا تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$ مرتکز کہ منفرج ہے۔ کمپیوٹر کی مدد سے اس تسلسل کا رویہ درج ذیل اقدام سے دیکھیں۔

ا. جزوی مجموعات $s_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$ کی ترتیب لیں۔ اس ترتیب کی حد کا رویہ $k \to \infty$ کیسا ہے۔ کیا آپ کا کمپیوٹر پروگرام اس ترتیب کی حدوں کا کلیہ تلاش کر سکتا ہے؟

ب. جزوی مجموعات کے ابتدائی 100 نقطے $(k, s-k)$ ترسیم کریں۔ کیا یہ مرتکز نظر آتے ہیں؟ آپ اس کی حدوں کی اندازاً کتنی قیمت لگائیں گے؟

ج. اب ابتدائی 200 نقطے (k, s_k) ترسیم کریں۔ اس کے رویہ پر تبصرہ کریں۔

د. ابتدائی 400 نقطے (k, s_k) ترسیم کریں۔ $k = 355$ پر کیا ہوتا ہے؟ عدد $\frac{355}{113}$ کا حساب لگائیں۔ اس حساب کی رو سے $k = 355$ پر جزوی مجموعہ کے رویہ پر تبصرہ کریں۔ آپ k کی کن قیمتوں پر اسی رویہ کی توقع کرتے ہیں۔

۹.۷ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ

وہ پرکھ ارتکاز جو دوسرے تسلسل یا تکمل کے ساتھ موازنہ پر منحصر ہو **بیرونی پرکھ**[۳۰] کہلاتا ہے۔ ایسے پرکھ کار آمد ہوتے ہیں لیکن چند وجوہات کی وجہ سے ہمیں ایسے پرکھ درکار ہیں جو کسی موازنہ پر منحصر نہ ہوں۔ حقیقت میں عین ممکن ہے کہ ہمیں ایسا کوئی تسلسل یا تکمل معلوم نہ ہو جس کے ساتھ موازنہ کرنا ممکن ہو۔ اس کے علاوہ کسی بھی تسلسل کی تمام معلومات اسی کے اجزاء میں پائی جانی چاہیے۔ اسی لیے ہم اپنی توجہ **اندرونی پرکھ**[۳۱] کی طرف کرتے ہیں۔ اندرونی پرکھ صرف دیے گئے تسلسل پر منحصر ہوتا ہے۔

تناسبی پرکھ

تناسبی پرکھ ہمارا پہلا اندرونی پرکھ ہے جو تسلسل کے بڑھنے (یا گھٹنے) کی شرح کو نسبت $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ سے حاصل کرتا ہے۔ ہندسی تسلسل $\sum ar^n$ کے لیے یہ شرح مستقل ($\frac{ar^{n+1}}{ar^n} = r$) ہے اور تسلسل صرف اور صرف اس صورت مرتکز ہو گا جب اس کے نسبت کی مطلق قیمت 1 سے کم ہو۔ اگر نسبت مستقل نہ ہو تب بھی (اگلی مثال کی طرح) ایسا ہندسی تسلسل معلوم کیا جا سکتا ہے جس کے ساتھ موازنہ کیا جا سکے۔

مثال ۹.۳۵: $a_1 = 1$ اور تمام n کے لیے $a_{n+1} = \frac{n}{2n+1} a_n$ لیں۔ کیا تسلسل $\sum a_n$ مرتکز ہے؟

حل

ہم تسلسل کے چند ابتدائی اجزاء لکھتے ہیں:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{3}a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{2}{5}a_2 = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5}, \quad a_4 = \frac{3}{7}a_3 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 7}$$

چونکہ $\frac{n}{2n+1}$ کی قیمت $\frac{1}{2}$ سے کم ہے لہٰذا ہر جزو گزشتہ جزو کے $\frac{1}{2}$ سے بھی کم ہو گا۔ یوں اس تسلسل کے اجزاء درج ذیل ہندسی تسلسل کے اجزاء سے کم یا برابر ہوں گے

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \cdots$$

اور یہ ہندسی تسلسل 2 پر مرتکز ہے۔ یوں ہمارا تسلسل بھی مرتکز ہو گا اور اس کا مجموعہ 2 سے کم ہو گا۔ درج ذیل جدول میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تسلسل

---

[۳۰] extrinsictest
[۳۱] intrinsictest

۱۴۸۶۵ اپنے حد $\frac{\pi}{2}$ تک کتنا جلدی پہنچتا ہے۔

n	s_n
5	1.549 206 349
10	1.570 289 085
15	1.570 783 080
20	1.570 795 964
25	1.570 796 317
30	1.570 796 327
35	1.570 796 327

۱۴۸۶۶ □

۱۴۸۶۷ **تناسبی پرکھ**

۱۴۸۶۸ فرض کریں $\sum a_n$ مثبت اجزاء کا تسلسل ہے اور درج ذیل فرض کریں۔

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n+1}{a_n} = \rho$$

۱۴۸۶۹ تب درج ذیل ہو گا۔

۱۴۸۷۰ ا. $\rho < 1$ کی صورت میں تسلسل مرتکز ہو گا۔

۱۴۸۷۱ ب. $\rho > 1$ یا لا متناہی کے برابر ہونے کی صورت میں تسلسل منفرج ہو گا۔

۱۴۸۷۲ ج. $\rho = 1$ کی صورت میں یہ پرکھ غیر فیصلہ کن ہو گا۔

۱۴۸۷۳ □

۱۴۸۷۴ ثبوت پرکھ: تناسبی پرکھ کی ثبوت میں (مثال ۹.۳۵ کی طرح) موزوں ہندسی تسلسل کے ساتھ موازنہ کیا جائے گا۔ البتہ تناسبی پرکھ استعمال کرتے ہوئے ایسے
۱۴۸۷۵ کسی موازنہ کی ضرورت نہیں ہو گی۔

۱۴۸۷۶ ا. $[\rho < 1]$ فرض کریں ρ اور 1 کے بیچ r ایک عدد ہے۔ یوں $\epsilon = r - \rho$ مثبت ہو گا۔ چونکہ

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \rho$$

۱۴۸۷۷ ہے لہٰذا بڑے n، مثلاً $n \geq N$، کی صورت میں ρ اور $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ کے بیچ فرق ϵ یا اس سے کم ہو گا۔ بالخصوص درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \rho + \epsilon = r \qquad \text{جب } n \geq N$$

۱۳۸۷۸ اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
a_{N+1} &< ra_N, \\
a_{N+2} &< ra_{N+1} < r^2 a_N, \\
a_{N+3} &< ra_{N+2} < r^3 a_N, \\
&\vdots \\
a_{N+m} &< ra_{N+m-1} < r^m a_n
\end{aligned}$$

۱۳۸۷۹ ان عدم مساوات سے ظاہر ہے کہ N جزو کے بعد ہمارے تسلسل کے اجزاء صفر تک اس ہندسی تسلسل سے زیادہ تیزی سے پہنچتے ہیں جس میں $r < 1$

۱۳۸۸۰ ہو۔ بلکہ تسلسل $\sum c_n$ پر غور کریں جہاں $n = 1, 2, \cdots, N$ کے لیے $c_n = a_n$ اور

$$c_{N+1} = ra_N,\ c_{N+2} = r^2 a_N, \cdots, c_{N+m} = r^m a_N, \cdots$$

۱۳۸۸۱ ہوں۔ اب تمام n کے لیے $a_n \leq c_n$ اور

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} c_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N + ra_N + r^2 a_N + \cdots \\
&= a_1 + a_2 + \cdots + a_{N-1} + a_N(1 + r + r^2 + \cdots)
\end{aligned}$$

۱۳۸۸۲ ہے۔ چونکہ $|r| < 1$ ہے لہٰذا ہندسی تسلسل $1 + r + r^2 + \cdots$ مرتکز ہو گا لہٰذا $\sum c_n$ بھی مرتکز ہو گا۔ چونکہ $a_n \leq c_n$ ہے

۱۳۸۸۳ لہٰذا $\sum a_n$ بھی مرتکز ہو گا۔

۱۳۸۸۴ ب. $[1 < \rho \leq \infty]$ کسی اشاریہ M سے آگے

$$a_M < a_{M+1} < a_{M+2} < \cdots \quad \text{اور} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

۱۳۸۸۵ ہو گا۔ تسلسل کے اجزاء n لامتناہی کرنے سے صفر تک نہیں پہنچتے ہیں لہٰذا n ویں جزو پرکھ کے تحت یہ تسلسل منفرج ہو گا۔

۱۳۸۸۶ ج. $[\rho = 1]$ درج ذیل دو تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

۱۳۸۸۷ دکھاتے ہیں کہ $\rho =$ کی صورت میں کسی دوسرے پرکھ کی ضرورت پیش آئے گی۔

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)}{1/n} = \frac{n}{n+1} \to 1 \qquad \text{کے لیے } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1^2 = 1 \qquad \text{کے لیے } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

باوجود اس کے کہ دونوں صورتوں میں $\rho = 1$ ہے، پہلا تسلسل منفرج اور دوسرا تسلسل مرتکز ہے۔

□

تناسبی پرکھ عموماً اس صورت موثر ہوتا ہے جب اجزاء میں n پر مبنی فقروں کے عدد ضربیہ یا n طاقت کے فقرے پائے جاتے ہوں۔

مثال ۹.۳۶: درج ذیل تسلسل کی ارتکاز پر غور کریں۔

ا. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$ ب. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ ج. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n!n!}{(2n)!}$

حل

ا. تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$ کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2^{n+1}+5)/3^{n+1}}{(2^n+5)/3^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^{n+1}+5}{2^n+5} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2+5\cdot 2^{-n}}{1+5\cdot 2^{-n}}\right) \to \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{2}{3}$$

چونکہ $p = \frac{2}{3}$ ہے جو 1 سے کم ہے لہٰذا یہ تسلسل مرتکز ہوگا۔ اس کا یہ مطلب نہیں کہ تسلسل کا مجموعہ $\frac{2}{3}$ ہے۔ درحقیقت اس کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n} = \frac{1}{1-(2/3)} + \frac{5}{1-(1/3)} = \frac{21}{2}$$

ب. اگر $a_n = \frac{(2n)!}{n!n!}$ ہو تب $a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}$ اور

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{n!n!(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)!(n+1)!(2n)!} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n+2}{n+1} \to 4\end{aligned}$$

ہوں گے۔ چونکہ $p = 4$ ہے جو 1 سے بڑا ہے لہٰذا یہ تسلسل منفرج ہوگا۔

ج. اگر $a_n = \frac{4^n n!n!}{(2n)!}$ ہو تب

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{4^{n+1}(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \cdot \frac{(2n)!}{4^n n!n!} \\ &= \frac{4(n+1)(n+1)}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{2(n+1)}{2n+1} \to 1\end{aligned}$$

ہو گا۔ چونکہ حد $p = 1$ ہے تناسبی پرکھ ہمیں تسلسل کی ارتکاز یا انفراج کے بارے میں معلومات فراہم نہیں کر سکتا ہے۔ البتہ چونکہ $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+2}{2n+1}$ ہر صورت 1 سے بڑا ہو گا لہٰذا a_{n+1} ہر صورت a_n سے بڑا ہو گا۔ یوں تمام اجزاء $a_1 = 2$ سے بڑے یا اس کے برابر ہوں گے اور $n \to \infty$ کرنے سے n جزو صفر تک نہیں پہنچتا ہے۔ یوں یہ تسلسل منفرج ہو گا۔

□

n واں جذر پرکھ

اب تک $\sum a_n$ کے لیے جن پرکھ پر غور کیا گیا ان کی بہترین کارکردگی سادہ کلیات کے a_n میں نظر آتی ہے۔ اب درج ذیل پر غور کریں۔

مثال ۹.۳۷: اگر $a_n = \begin{cases} n/2^n & \text{طاق n} \\ 1/2^n & \text{جفت n} \end{cases}$ ہو تب کیا $\sum a_n$ مرتکز ہو گا؟

حل

ہم اس تسلسل کے ابتدائی چند اجزاء لکھتے ہیں:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{7}{2^7} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{5}{32} + \frac{1}{64} + \frac{7}{128} + \cdots\end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ ہندسی تسلسل نہیں ہے۔ $n \to \infty$ کرنے سے n واں جزو 0 تک پہنچتا ہے لہٰذا ہم نہیں جانتے کہ یہ تسلسل منفرج ہو گا۔ یہاں تکملی پرکھ ہماری مدد نہیں کر پاتا۔ تناسبی پرکھ درج ذیل دیتا ہے۔

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2n} & \text{طاق } n \\ \frac{n+1}{2} & \text{جفت } n \end{cases}$$

$n \to \infty$ کرنے سے نسبت کم اور زیادہ ہوتی ہے اور کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔

یہاں ہمیں n واں جذر پرکھ کی ضرورت ہے۔ □

n واں جذر پرکھ

فرض کریں تسلسل $\sum a_n$ میں تمام $n \geq N$ کے لیے $a_n \geq 0$ ہیں۔ مزید درج ذیل فرض کریں۔

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho$$

تب

۱. $\rho < 1$ کی صورت میں یہ تسلسل مرتکز ہو گا،

ب. $\rho > 1$ اور لامتناہی ρ کی صورت میں یہ تسلسل منفرج ہوگا،

ج. $\rho = 1$ کی صورت میں پرکھ غیر فیصلہ کن ہوگا۔

□

ثبوت پرکھ:

ا. $[\rho < 1]$ ہم ϵ اتنا چھوٹا لیتے ہیں کہ $\rho + \epsilon < 1$ ہو۔ چونکہ $\sqrt[n]{a_n} \to \rho$ ہے لہٰذا آخر کار ρ اور اجزاء $\sqrt[n]{a_n}$ کے بیچ فاصلہ ϵ سے کم ہوگا۔ دوسرے لفظوں میں ایک ایسا اشاریہ $M \geq N$ پایا جاتا ہے جس کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$\sqrt[n]{a_n} < \rho + \epsilon \qquad\qquad (n \geq M)$$

تب درج ذیل بھی درست ہوگا۔

$$a_n < (\rho + \epsilon)^n \qquad\qquad (n \geq M)$$

اب ہندسی تسلسل $\sum_{n=M}^{\infty} (\rho + \epsilon)^n$ جس کی نسبت $(\rho + \epsilon) < 1$ ہو مرتکز ہوتا ہے۔ یوں موازنہ کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ $\sum_{n=M}^{\infty} a_n$ بھی مرتکز ہوگا۔ یوں درج ذیل مرتکز ہوگا۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{M-1} + \sum_{n=M}^{\infty} a_n$$

ب. $[1 < \rho \leq \infty]$ کسی عدد صحیح M سے آگے تمام اشاریہ کے لیے $\sqrt[n]{a_n} > 1$ ہوگا لہٰذا تمام $n > M$ کے لیے $a_n > 1$ ہوگا۔ اس تسلسل کے اجزاء صفر پر مرکوز نہیں ہیں۔ یوں n ویں جزو پرکھ کے تحت یہ تسلسل منفرج ہوگا۔

ج. $[\rho = 1]$ تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ اور $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ سے ظاہر ہے کہ $\rho = 1$ کے لیے یہ پرکھ غیر فیصلہ کن ہے۔ اگرچہ ان دونوں تسلسل میں $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ ہے، پہلا تسلسل منفرج جبکہ دوسرا تسلسل مرتکز ہے۔

□

مثال ۹.۳۸: **(مثال ۹.۳۷ جاری)**

اگر $a_n = \begin{cases} n/2^n & \text{n طاق} \\ 1/2^n & \text{n جفت} \end{cases}$ ہو تب کیا $\sum a_n$ مرتکز ہوگا؟

حل

ہم n واں جذر پرکھ زیر استعمال لاتے ہیں جو

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} & n \text{ طاق} \\ \frac{1}{2} & n \text{ جفت} \end{cases}$$

دیتا ہے لہٰذا

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

ہو گا۔ چونکہ $\sqrt[n]{n} \to 1$ ہے (جدول ۹.۲) لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ ہو گا۔ یہ حد 1 سے کم ہے لہٰذا n ویں جذر پر کھ کے تحت دیا گیا تسلسل مرتکز ہو گا۔ □

مثال ۹.۳۹: درج ذیل میں کونسا تسلسل مرتکز اور کونسا منفرج ہے؟

ا. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

ب. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$

حل

ا. چونکہ

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} \to \frac{1}{2} < 1$$

ہے لہٰذا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ مرتکز ہو گا۔

ب. چونکہ

$$\sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^2} \to \frac{2}{1} > 1$$

ہے لہٰذا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ منفرج ہو گا۔

□

سوالات

ارتکاز اور انفراج معلوم کرنا

سوال ۹.۳۱۴ تا سوال ۹.۳۳۹ میں کون سا تسلسل مرتکز اور کون سا منفرج ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (جواب حاصل کرنے کے ایک سے زیادہ طریقے ہو سکتے ہیں۔)

سوال ۹.۳۱۴: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{2}}}{2^n}$

۱۴۹۵۷ سوال ۹.۳۱۵: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n}$

۱۴۹۵۸ سوال ۹.۳۱۶: $\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n}$

۱۴۹۵۹ سوال ۹.۳۱۷: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$

۱۴۹۶۰ سوال ۹.۳۱۸: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{10^n}$

۱۴۹۶۱ سوال ۹.۳۱۹: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$

۱۴۹۶۲ سوال ۹.۳۲۰: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{1.25^n}$

۱۴۹۶۳ سوال ۹.۳۲۱: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$

۱۴۹۶۴ سوال ۹.۳۲۲: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^n$

۱۴۹۶۵ سوال ۹.۳۲۳: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{3n}\right)^n$

۱۴۹۶۶ سوال ۹.۳۲۴: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$

۱۴۹۶۷ سوال ۹.۳۲۵: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^n}{n^n}$

۱۴۹۶۸ سوال ۹.۳۲۶: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)$

۱۴۹۶۹ سوال ۹.۳۲۷: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^n$

۱۴۹۷۰ سوال ۹.۳۲۸: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

۱۴۹۷۱ سوال ۹.۳۲۹: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{2^n}$

۱۴۹۷۲ سوال ۹.۳۳۰: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$

۱۳۹۷۳ سوال ۹.۳۳۱: $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}(n^3)$

۱۳۹۷۴ سوال ۹.۳۳۲: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{3!n!3^n}$

۱۳۹۷۵ سوال ۹.۳۳۳: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n2^n(n+1)!}{3^n n!}$

۱۳۹۷۶ سوال ۹.۳۳۴: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!}$

۱۳۹۷۷ سوال ۹.۳۳۵: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

۱۳۹۷۸ سوال ۹.۳۳۶: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}$

۱۳۹۷۹ سوال ۹.۳۳۷: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^{(n/2)}}$

۱۳۹۸۰ سوال ۹.۳۳۸: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \ln n}{n(n+2)!}$

۱۳۹۸۱ سوال ۹.۳۳۹: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3 2^n}$

۱۳۹۸۲ سوال ۹.۳۴۰ تا سوال ۹.۳۵۱ میں کون سے تسلسل مرتکز اور کون سے منفرج ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۳۹۸۳ سوال ۹.۳۴۰: $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1+\sin n}{n} a_n$

۱۳۹۸۴ سوال ۹.۳۴۱: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1+\tan^{-1} n}{n} a_n$

۱۳۹۸۵ سوال ۹.۳۴۲: $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \frac{3n-1}{2n+5} a_n$

۱۳۹۸۶ سوال ۹.۳۴۳: $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1} a_n$

۱۳۹۸۷ سوال ۹.۳۴۴: $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{2}{n} a_n$

۱۳۹۸۸ سوال ۹.۳۴۵: $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2} a_n$

۱۳۹۸۹ سوال ۹.۳۴۶: $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1+\ln n}{n} a_n$

۱۳۹۹۰ سوال ۹.۳۴۷: $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{n+\ln n}{n+10} a_n$

۱۳۹۹۱ سوال ۹.۳۴۸: $a_1 = \frac{1}{3}, \quad a_{n+1} = \sqrt[n]{a_n}$

۱۳۹۹۲ سوال ۹.۳۴۹: $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = (a_n)^{n+1}$

سوال ۹.۳۵۰: $a_n = \frac{2^n n! n!}{(2n)!}$

سوال ۹.۳۵۱: $a_n = \frac{(3n)!}{n!(n+1)!(n+2)!}$

سوال ۹.۳۵۲ تا سوال ۹.۳۵۷ میں مرتکز اور منفرج تسلسل کی نشاندہی کریں۔ وجہ بھی پیش کریں۔

سوال ۹.۳۵۲: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}$

سوال ۹.۳۵۳: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{(n^2)}}$

سوال ۹.۳۵۴: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{(n^2)}}$

سوال ۹.۳۵۵: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2^n)^2}$

سوال ۹.۳۵۶: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{4^n 2^n n!}$

سوال ۹.۳۵۷: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{[2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)](3^n+1)}$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۹.۳۵۸: p تسلسل کے ساتھ یا تناسبی پرکھ اور ناہی n واں جذر پرکھ کارآمد ثابت ہوتا ہے۔ انہیں درج ذیل پر لاگو کر کے دکھائیں کہ دونوں پرکھ اس کی ارتکاز یا انفراج دریافت کرنے سے قاصر ہیں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

سوال ۹.۳۵۹: دکھائیں کہ تناسبی پرکھ اور n واں جذر پرکھ درج ذیل کی ارتکاز یا انفراج معلوم نہیں کر سکتے ہیں۔

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p} \qquad p \text{ مستقل}$$

سوال ۹.۳۶۰: فرض کریں $a_n = \begin{cases} n/2^n & n \text{ عدد مفرد} \\ 1/2^n & \text{دیگر صورت} \end{cases}$ ہے۔ کیا $\sum a_n$ مرتکز ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۹.۸ بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز

جس تسلسل کے اجزاء یکے بعد دیگرے مثبت اور منفی ہوں کو **بدلتا تسلسل**[۳۲] کہتے ہیں جس کی تین مثالیں درج ذیل ہیں۔

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots \tag{۱}$$

$$-2+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{(-1)^n 4}{2^n}+\cdots \tag{۲}$$

$$1-2+3-4+5-6+\cdots+(-1)^{n+1}n+\cdots \tag{۳}$$

ہم جلد دیکھیں گے کہ مساوات ۱ میں دیا گیا تسلسل، جس کو **بدلتا ہارمونی تسلسل**[۳۳] کہتے ہیں، مرتکز ہے۔ مساوات ۲ میں نسبت $r = -\frac{1}{2}$ کا ہندسی تسلسل دیا گیا ہے جو $-\frac{-2}{1+(1/2)} = -\frac{4}{3}$ پر مرکوز ہے۔ مساوات ۳ کا n واں جزو صفر تک نہیں پہنچتا لہٰذا یہ تسلسل منفرج ہو گا۔

ہم بدلتا ہارمونی تسلسل کا ارتکاز ثابت کرنے کے لیے بدلتا تسلسل پرکھ استعمال کرتے ہیں۔

مسئلہ ۹.۸: **بدلتا تسلسل پرکھ (مسئلہ لیبنیز)**

اگر تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots$$

درج ذیل تینوں شرائط کو مطمئن کرتا ہو تب یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔

ا. تمام u_n مثبت ہوں،

ب. تمام $n \geq N$ کے لیے $u_n \geq u_{n+1}$ ہو، جہاں N کوئی عدد صحیح ہے،

ج. $u_n \to 0$

ثبوت: جفت n، مثلاً $n = 2m$، کی صورت میں ابتدائی n اجزاء کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

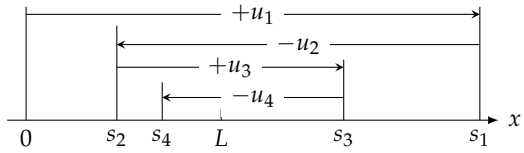
$$\begin{aligned} s_{2m} &= (u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2m-1}-u_{2m}) \\ &= u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\cdots-(u_{2m-2}-u_{2m-1})-u_{2m} \end{aligned}$$

پہلی مساوات میں قوسین میں بند قیمتیں مثبت یا صفر ہیں لہٰذا s_{2m} درحقیقت m غیر منفی اجزاء کا مجموعہ ہو گا۔ یوں $s_{2m+2} \geq s_{2m}$ ہو گا اور تسلسل $\{s_{2m}\}$ غیر گھٹتا ہو گا۔ دوسری مساوات کے تحت $s_{2m} \leq u_1$ ہو گا۔ چونکہ $\{s_{2m}\}$ غیر گھٹتا اور اوپر سے محدود تسلسل ہے لہٰذا اس کی حد

$$\lim_{n\to\infty} s_{2m} = L \tag{۴}$$

---

[۳۲] alternatingseries
[۳۳] alternatingharmonicseries



شکل ۹.۲۲: اس بدلتے تسلسل کے جزوی مجموعات جو $N = 1$ کے لیے مسئلہ ۹.۸ کے شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔

موجود ہو گی۔

اگر n طاق ہو، مثلاً $n = 2m + 1$، تب ابتدائی n اجزاء کا مجموعہ $s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1}$ ہو گا۔ چونکہ $u_n \to 0$ ہے لہٰذا

$$\lim_{m\to\infty} u_{2m+1} = 0$$

ہو گا اور $m \to \infty$ کرتے ہوئے

$$s_{2m+1} = s_{2m} + u_{2m+1} \to L + 0 = L \tag{۵}$$

ہو گا۔ مساوات ۴ اور مساوات ۵ ملا کر $\lim_{n\to\infty} s_n = L$ دیتے ہیں (سوال ۹.۵۳)۔

□

مثال ۹.۴۰: بدلتا ہارمونی تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

مسئلہ ۹.۸ کے تینوں شرائط کو مطمئن کرتا ہے لہٰذا یہ تسلسل مرتکز ہو گا۔ □

مسئلہ ۹.۸ کے تینوں شرائط کو $N = 1$ کے لیے مطمئن کرتے ہوئے بدلتے ہارمونی تسلسل کے جزوی مجموعوں کی ترسیم (شکل ۹.۲۲) سے ہم دیکھ سکتے ہیں کہ یہ اپنی حد L تک کیسے پہنچتا ہے۔ (سوال ۹.۴۲۳ میں آپ کو $N > 1$ کی صورت میں شکل بنانے کو کہا گیا ہے۔) محور x کے مبدا سے شروع کرتے ہوئے ہم $s_1 = u_1$ فاصلہ طے کرتے ہیں۔ $s_2 = u_1 - u_2$ تک پہنچنے کی خاطر ہم یہاں سے الٹ رخ u_2 چلتے ہیں۔ چونکہ $u_2 \leq u_1$ ہے لہٰذا ہم مبدا کی دوسری جانب نہیں جائیں گے۔ ہم اسی طرح آگے پیچھے چلتے رہتے ہیں۔ ہر $n \geq N$ قدم پر $u_{n+1} < u_n$ کی وجہ سے ہمارا قدم گزشتہ قدم سے چھوٹا یا اس کے برابر ہو گا۔ چونکہ n بڑھانے سے n واں جزو صفر تک پہنچتا ہے لہٰذا ہر اگلا قدم چھوٹا ہوتا جائے گا اور ہم حد L کی ایک جانب اور دوسری جانب قدم رکھتے ہوئے L کے نزدیک تر ہوتے جائیں گے۔ یکے بعد دیگرے ہر دو مجموعوں s_n اور s_{n+1} کے بیچ حد L پایا جائے گا لہٰذا حد اور s_n میں فرق u_{n+1} سے کم ہو گا۔

درج ذیل کی وجہ سے ہم مرتکز بدلتے تسلسل کے مجموعات کی قیمت کا اندازہ لگا سکتے ہیں۔

$$|L - s_n| < u_{n+1} \qquad n \geq N$$

مسئلہ ۹.۹: **مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ**

اگر بدلتا تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ مسئلہ ۹.۸ کے تین شرائط مطمئن کرتا ہو تب $n \geq N$ کے لیے تسلسل کا مجموعہ L تخمیناً

$$s_n = u_1 - u_2 + \cdots + (-1)^{n+1}u_n$$

ہو گا جس میں مطلق خلل کی قیمت u_{n+1} سے کم ہو گی جو پہلے غیر مستعمل جزو کی عددی قیمت ہے۔ مزید باقی $L - s_n$ کی علامت وہی ہو گی جو پہلی غیر مستعمل جزو کی علامت ہو۔

مثال ۹.۴۱: ہم مسئلہ ۹.۹ درج ذیل تسلسل پر لاگو کرتے ہیں جس کا مجموعہ ہم جانتے ہیں۔

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128}\Big| + \frac{1}{256} - \cdots$$

یہ مسئلہ کہتا ہے کہ تسلسل کے آٹھ اجزاء لینے سے ہم مثبت مقدار رد کرتے ہیں جس کی قیمت $\frac{1}{256}$ سے کم ہو گی۔ ابتدائی آٹھ اجزاء کا مجموعہ $0.664\,062\,5$ ہے۔ اس تسلسل کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$\frac{1}{1-(-1/2)} = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}$$

مجموعہ اور تخمینی قیمت میں فرق $\frac{2}{3} - 0.664\,062\,5 = 0.002\,604\,166\,6$ ہے جو مثبت اور $0.003\,906\,25 = \frac{1}{256}$ سے کم ہے۔ □

مطلق ارتکاز

تعریف: تسلسل $\sum a_n$ اس صورت **مطلق مرتکز**[۳۴] ہو گا جب مطلق قیمتوں کا مطابقتی تسلسل $\sum|a_n|$ مرتکز ہو۔

□

ہندسی تسلسل

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$$

مطلق مرتکز ہے چونکہ مطابقتی مطلق قیمتوں کا درج ذیل تسلسل مرتکز ہے۔

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

[۳۴] absolutelyconvergent

بدلتا ہارمونی تسلسل مطلق مرتکز نہیں ہے چونکہ مطابقتی مطلق قیمتوں کا تسلسل (منفرج) ہارمونی تسلسل ہے۔

تعریف: جو تسلسل مرتکز ہو مگر مطلق مرتکز نہ ہو **مشروط مرتکز**[۳۵] کہلاتا ہے۔

□

بدلتا ہارمونی تسلسل مشروط مرتکز ہے۔

مطلق ارتکاز دو وجوہات کی وجہ سے اہم ہے۔ پہلی وجہ یہ ہے کہ ہمارے پاس مثبت اجزاء کے تسلسل کی ارتکاز کا اچھے پرکھ ہیں۔ دوسری وجہ یہ کہ کہ مطلق مرتکز تسلسل ہر صورت مرتکز ہو گا۔ یہی اگلے مسئلہ کا موضوع ہے۔

مسئلہ ۹.۱۰: **مطلق ارتکاز پرکھ**

اگر $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ مرتکز ہو تب $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مرتکز ہو گا۔

ثبوت: ہر n کے لیے

$$-|a_n| \leq a_n \leq |a_n| \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

ہو گا۔ اگر $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ مرتکز ہو تب $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ مرتکز ہو گا اور بلاواسطہ تقابلی پرکھ کے تحت غیر منفی تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$$

بھی مرتکز ہو گا۔ ہم مساوات $a_n = (a_n + |a_n|) - |a_n|$ کی مدد سے $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ کو دو مرتکز تسلسل کا فرق

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

لکھ سکتے ہیں۔ یوں $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مرتکز ہو گا۔

□

ہم مسئلہ ۹.۱۰ کو یوں بھی پڑھ سکتے ہیں کہ ہر مطلق مرتکز تسلسل مرتکز ہو گا البتہ ضروری نہیں ہے کہ مرتکز تسلسل مطلق مرتکز ہو۔

مثال ۹.۴۲: تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \cdots$ کا مطابقتی مثبت اجزاء کا تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots$$

ہے جو مرتکز ہے۔ یوں اصل تسلسل اس لیے مرتکز ہے کہ یہ مطلق مرتکز ہے۔ □

---

[۳۵] conditionalconvergent

۱۵۰۶۹ مثال ۹.۴۳: تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} = \frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin 2}{4} + \frac{\sin 3}{9} + \cdots$ کا مطابقتی مثبت اجزاء کا تسلسل درج ذیل ہے

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| = \frac{|\sin 1|}{1} + \frac{|\sin 2|}{4} + \frac{|\sin 3|}{9} + \cdots$$

۱۵۰۷۰ جس کا ارتکاز $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ کے ساتھ موازنہ کرنے سے دیکھا جا سکتا ہے جہاں ہر n کے لیے $|\sin n| \leq 1$ ہو گا۔ چونکہ اصل تسلسل مطلق مرتکز
۱۵۰۷۱ ہے، لہٰذا یہ مرتکز ہو گا۔ □

۱۵۰۷۲ مثال ۹.۴۴: **بدلتا p تسلسل**

۱۵۰۷۳ مثبت مستقل p کی صورت میں ترتیب $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ گھٹتا ترتیب ہے جس کی حد صفر ہے۔ یوں بدلتا p تسلسل

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} = 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots, \quad p > 0$$

۱۵۰۷۴ مرتکز ہو گا۔

۱۵۰۷۵ اگر $p > 1$ ہو تب یہ مطلق مرتکز تسلسل ہو گا۔ اگر $p \leq 1$ ہو تب یہ مشروط مرتکز تسلسل ہو گا۔

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots \qquad \text{مشروط مرتکز}$$

$$1 - \frac{1}{2^{3/2}} + \frac{1}{3^{3/2}} - \frac{1}{4^{3/2}} + \cdots \qquad \text{مطلق مرتکز}$$

۱۵۰۷۶ □

۱۵۰۷۷ تسلسل کی ترتیب نو

۱۵۰۷۸ مسئلہ ۹.۱۱: **مطلق مرتکز تسلسل کا مسئلہ ترتیب نو**

۱۵۰۷۹ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلق مرتکز ہو اور ترتیب $\{a_n\}$ کے اجزاء کی ترتیب نو کر کے انہیں $b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$ لکھا جائے تب $\sum b_n$
۱۵۰۸۰ مطلق مرتکز ہو گا اور درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

۱۵۰۸۱ (اس مسئلہ کی ثبوت کے خاکہ کے لیے سوال ۹.۴۲۰ دیکھیں۔)

مثال ۹.۴۵: ہم نے مثال ۹.۴۲ میں دیکھا کہ تسلسل

$$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\cdots$$

مطلق مرتکز ہے۔ اس کی ترتیب نو کرتے ہوئے ابتدائی جزو مثبت اور اس کے بعد دو منفی اجزاء منتخب کیے جا سکتے ہیں۔ اس کے بعد تین مثبت اور چار منفی اجزاء منتخب کیے جا سکتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ یوں ایک ہی علامت کے k اجزاء کے بعد الٹ علامت کے $k+1$ اجزاء ہوں گے۔ ایسے تسلسل کے ابتدائی دس اجزاء درج ذیل ہوں گے۔

$$1-\frac{1}{4}-\frac{1}{16}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}-\frac{1}{36}-\frac{1}{64}-\frac{1}{100}-\frac{1}{144}+\cdots$$

مسئلہ ترتیب نو کے تحت دونوں تسلسل ایک ہی عدد پر مرتکز ہوں گے۔ اس مثال میں (اگر ہم جانتے کہ ایسا ممکن ہے) ہم خوشی سے دوسرے تسلسل کی جگہ پہلا تسلسل استعمال کرنا چاہیں گے۔ اس سے بھی بہتر ہوتا اگر ہم جانتے کہ ان دونوں تسلسل کا مجموعہ درج ذیل کے برابر ہے۔

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$

(سوال ۹.۴۲۱ دیکھیں۔) □

مثال ۹.۴۶: بدلتے ہارمونی تسلسل کی ترتیب نو

بدلتا ہارمونی تسلسل

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\cdots$$

کی ترتیب نو سے منفرج یا مخصوص قیمت کا تسلسل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

ا. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ کی ترتیب نو سے انفراج: اجزاء $\sum 1/(2n-1)$ کا مجموعہ $+\infty$ کو منفرج جبکہ $\sum(-1/2n)$ کا مجموعہ $-\infty$ کو منفرج ہے۔ ہم جتنے زیادہ طاق اجزاء کے بعد مجموعہ کیوں نہ لیں، آخر کار یہ تواتر سے پائے جانے والے اجزاء کا مجموعہ کسی بھی مقررہ قیمت سے بڑا ہو گا۔ اسی طرح ہم جتنے زیادہ منفی اجزاء کے بعد مجموعہ کیوں نہ لیں، آخر کار تواتر سے پائے جانے والے جفت اجزاء کا یہ مجموعہ کسی بھی مقررہ منفی قیمت سے زیادہ منفی ہو گا۔ اگر ہم چاہیں، ہم پہلے اتنے طاق اجزاء جمع کر سکتے ہیں کہ ان کا مجموعہ مثلاً $+3$ ہو اور اس کے بعد صرف جفت اجزاء جمع کرتے ہوئے مجموعے کو -4 تک پہنچائیں۔ اس کے بعد ہم غیر استعمال شدہ منفی اجزاء شامل کرتے ہوئے کل $+5$ حاصل کر کے اس کے ساتھ اتنے منفی اجزاء شامل کریں کہ -6 حاصل ہو، وغیرہ وغیرہ۔ اس طرح ہم دونوں اطراف جھولا اختیاری زیادہ کر سکتے ہیں۔

ب. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}/n$ کی ترتیب سے 1 پر ارتکاز: ہم ترتیب نو سے کسی بھی مخصوص قیمت پر بدلتے ہارمونی تسلسل کو مرتکز کر سکتے ہیں۔ فرض کریں ہم 1 پر مرتکز تسلسل حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ ہم پہلے جزو $\frac{1}{1}$ سے شروع کر کے $\frac{1}{2}$ منفی کرتے ہیں۔ اس کے بعد $\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{5}$ جمع کرتے ہوئے مجموعہ کو واپس 1 یا اس سے اوپر تک لاتے ہیں۔ اس کے بعد ہم متواتر منفی اجزاء جمع کرتے ہوئے مجموعہ 1 سے نیچے لے جاتے ہیں۔ ہم اسی طرح اجزاء جمع اور منفی کیے جاتے ہیں۔ جب مجموعہ 1 سے تجاوز کرے، ہم منفی اجزاء جمع کرتے ہیں حتیٰ کہ مجموعہ 1 یا اس سے کم ہو جائے۔ اس کے بعد ہم مثبت اجزاء جمع کرتے ہیں جب تک مجموعہ 1 یا اس سے زیادہ نہ ہو۔ اس طریقہ کار کو غیر معینہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ $n\to\infty$ کرنے سے

۱۵۱۰۳ اصل تسلسل کے جفت اور طاق اجزاء کی قیمتیں 0 تک پہنچتی ہیں لہٰذا نئی تسلسل کا جزوی مجموعہ 1 کے قریب تر ہوتا جائے گا لہٰذا نئے تسلسل کا مجموعہ 1 پر
۱۵۱۰۴ مرتکز ہو گا۔ نیا تسلسل درج ذیل صورت کا ہو گا:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{10}$$
$$+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}-\frac{1}{12}+\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{14}+\frac{1}{27}-\frac{1}{16}+\cdots$$

۱۵۱۰۵ □

۱۵۱۰۶ آپ نے دیکھا کہ مشروط مرتکز تسلسل کی ترتیب نو کر کے لامتناہی تعداد کے اجزاء جمع کرتے ہوئے اصل تسلسل سے بہت مختلف مجموعہ حاصل کیا جا سکتا ہے۔
۱۵۱۰۷ یوں ضروری ہے کہ مشروط مرتکز تسلسل کے اجزاء اسی ترتیب سے جمع کیے جائیں جس ترتیب سے یہ تسلسل میں پائے جاتے ہیں۔

۱۵۱۰۸ سوالات

۱۵۱۰۹ ارتکاز اور انفراج معلوم کرنا

۱۵۱۱۰ سوال ۹.۳۶۱ تا سوال ۹.۳۷۰ میں کونسا بدلتا تسلسل مرتکز اور کونسا منفرج ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۵۱۱۱ سوال ۹.۳۶۱: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$

۱۵۱۱۲ سوال ۹.۳۶۲: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^{3/2}}$

۱۵۱۱۳ سوال ۹.۳۶۳: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{10}\right)^n$

۱۵۱۱۴ سوال ۹.۳۶۴: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{10^n}{n^{10}}$

۱۵۱۱۵ سوال ۹.۳۶۵: $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln n}$

۱۵۱۱۶ سوال ۹.۳۶۶: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$

۱۵۱۱۷ سوال ۹.۳۶۷: $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{\ln n^2}$

۱۵۱۱۸ سوال ۹.۳۶۸: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

۱۵۱۱۹ سوال ۹.۳۶۹: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{\sqrt{n}+1}{n+1}\right)$

۱۵۱۲۰ سوال ۹.۳۷۰: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+1}$

۱۵۱۲۱ **مطلق ارتکاز**

۱۵۱۲۲ سوال ۹.۳۷۱ تا سوال ۹.۴۰۴ میں کون سے تسلسل مطلق مرتکز، مرتکز اور منفرج ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۵۱۲۳ سوال ۹.۳۷۱: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(0.1)^n$

۱۵۱۲۴ سوال ۹.۳۷۲: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(0.1)^n}{n}$

۱۵۱۲۵ سوال ۹.۳۷۳: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$

۱۵۱۲۶ سوال ۹.۳۷۴: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$

۱۵۱۲۷ سوال ۹.۳۷۵: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^3+1}$

۱۵۱۲۸ سوال ۹.۳۷۶: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^n}$

۱۵۱۲۹ سوال ۹.۳۷۷: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n+3}$

۱۵۱۳۰ سوال ۹.۳۷۸: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\sin n}{n^2}$

۱۵۱۳۱ سوال ۹.۳۷۹: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3+n}{5+n}$

۱۵۱۳۲ سوال ۹.۳۸۰: $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln(n^3)}$

۱۵۱۳۳ سوال ۹.۳۸۱: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1+n}{n^2}$

۱۵۱۳۴ سوال ۹.۳۸۲: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{n+5^n}$

۱۵۱۳۵ سوال ۹.۳۸۳: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}n^2(2/3)^n$

۱۵۱۳۶ سوال ۹.۳۸۴: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\sqrt[n]{10})$

۱۵۱۳۷ سوال ۹.۳۸۵: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\tan^{-1}n}{n^2+1}$

۱۵۱۳۸ سوال ۹.۳۸۶: $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n\ln n}$

۱۵۱۳۹ سوال ۹.۳۸۷: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{n+1}$

۱۵۱۴۰ سوال ۹.۳۸۸: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{n-\ln n}$

۱۵۱۴۱ سوال ۹.۳۸۹: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-100)^n}{n!}$

۱۵۱۴۲ سوال ۹.۳۹۰: $\sum_{n=1}^{\infty}(-5)^{-n}$

۱۵۱۴۳ سوال ۹.۳۹۱: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2+2n+1}$

۱۵۱۴۴ سوال ۹.۳۹۲: $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\left(\frac{\ln n}{\ln n^2}\right)^n$

۱۵۱۴۵ سوال ۹.۳۹۳: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}$

۱۵۱۴۶ سوال ۹.۳۹۴: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

۱۵۱۴۷ سوال ۹.۳۹۵: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)^n}{(2n)^n}$

۱۵۱۴۸ سوال ۹.۳۹۶: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n!)^2}{(2n)!}$

۱۵۱۴۹ سوال ۹.۳۹۷: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(2n)!}{2^n n! n}$

۱۵۱۵۰ سوال ۹.۳۹۸: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(n!)^2 3^n}{(2n+1)!}$

۱۵۱۵۱ سوال ۹.۳۹۹: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

سوال ۹.۴۰۰: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n^2+n} - n)$

سوال ۹.۴۰۱: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n})$

سوال ۹.۴۰۲: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

سوال ۹.۴۰۳: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{sech} n$

سوال ۹.۴۰۴: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{csch} n$

خلل کا اندازہ

سوال ۹.۴۰۵ تا سوال ۹.۴۰۸ میں ابتدائی چار اجزاء سے تخمینی مجموعہ حاصل کرنے سے پیدا خلل کا اندازہ لگائیں۔

سوال ۹.۴۰۵: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ اس تسلسل کا مجموعہ $\ln 2$ ہے۔

سوال ۹.۴۰۶: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{10^n}$

سوال ۹.۴۰۷: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(0.01)^n}{n}$ جیسا آپ حصہ ۹.۱۱ میں دیکھیں گے اس تسلسل کا مجموعہ $\ln(1.01)$ ہے۔

سوال ۹.۴۰۸: $\frac{1}{1+t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad 0 < t < 1$

کیلکولیٹر کا استعمال

سوال ۹.۴۰۹ اور سوال ۹.۴۱۰ میں مجموعہ کی تخمینی قیمت تلاش کریں جس میں خلل کی مقدار 5×10^{-6} سے کم ہو۔

سوال ۹.۴۰۹: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!}$ جیسا آپ حصہ ۹.۱۱ میں دیکھیں گے اس کا مجموعہ $\cos 1$ ہے جہاں 1 ریڈیئن میں ہے۔

سوال ۹.۴۱۰: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!}$ جیسا آپ حصہ ۹.۱۱ میں دیکھیں گے اس کا مجموعہ e^{-1} ہے۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۹.۴۱۱: (الف) تسلسل $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} - \frac{1}{4} + \frac{1}{27} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n} + \cdots$ مسئلہ ۹.۸ کے کس ایک شرط کو مطمئن نہیں کرتا ہے؟ (ب) اس تسلسل کا مجموعہ تلاش کریں۔

سوال ۹.۴۱۲: کیلکولیٹر

مسئلہ ۹.۸ کے شرائط کو مطمئن کرنے والے بدلتے تسلسل کی حد L کسی بھی دو یکے بعد دیگرے جزوی مجموعوں کے بیچ پائی جاتی ہے۔ یوں ہم L کی اندازاً قیمت

کے لیے اوسط $\frac{s_n+s_{n+1}}{2} = s_n + \frac{1}{2}(-1)^{n+2}a_{n+1}$ استعمال کر سکتے ہیں۔ بدلتے ہارمونی تسلسل کا تخمینی مجموعہ $s_{20} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{21}$ کا حساب لگائیں۔ ٹھیک ٹھیک مجموعہ $\ln 2 = 0.6931\cdots$ ہے۔

سوال ۹.۴۱۳: بدلتا تسلسل جو مسئلہ ۹.۸ کے شرائط مطمئن کرتا ہو کے جزوی مجموعہ کے باقی علامت

مسئلہ ۹.۹ کہتا ہے کہ جب مسئلہ ۹.۸ کے شرائط مطمئن کرنے والے تسلسل کے مجموعہ کو تخمیناً اس کے جزوی مجموعہ سے ظاہر کیا جائے تب تسلسل کے باقی اجزاء کے مجموعہ کی علامت پہلے غیر مستعمل جزو کی علامت ہو گی۔ اس فقرے کو ثابت کریں۔ (اشارہ: باقی اجزاء کو دو دو کی گروہوں میں جمع کریں۔)

سوال ۹.۴۱۴: دکھائیں کہ تسلسل $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$ کے ابتدائی $2n$ اجزاء کا مجموعہ درج ذیل تسلسل کے ابتدائی n اجزاء کے مجموعہ کے برابر ہو گا۔

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 6} + \cdots$$

کیا یہ تسلسل مرتکز ہیں؟ ابتدائی $2n+1$ اجزاء کا مجموعہ کتنا ہے؟ اگر تسلسل مرتکز ہوں تب ان کا مجموعہ کتنا ہے؟

سوال ۹.۴۱۵: دکھائیں کہ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ منفرج تب $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ بھی منفرج ہو گا۔

سوال ۹.۴۱۶: دکھائیں اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلق مرتکز ہو تب $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ہو گا۔

سوال ۹.۴۱۷: دکھائیں اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ اور $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ دونوں مطلق مرتکز ہوں درج ذیل بھی مطلق مرتکز ہوں گے۔

ا. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ ب. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ ج. $\sum_{n=1}^{\infty} ka_n$ (k عدد ہے)

سوال ۹.۴۱۸: مثال دے کر دکھائیں کہ مرتکز $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ اور مرتکز $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ کے باوجود $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ منفرج ہو سکتا ہے۔

سوال ۹.۴۱۹: آپ چاہتے ہیں کہ مثال ۹.۴۶ میں ترتیب نو سے ایسا تسلسل حاصل کریں جس کا مجموعہ $-\frac{1}{2}$ ہو۔ نئے تسلسل کو $-\frac{1}{2}$ سے شروع کریں۔ جب بھی مجموعہ $-\frac{1}{2}$ کے برابر یا اس سے کم ہو، یکے بعد دیگرے مثبت اجزاء شامل کریں حتٰی کہ مجموعہ $-\frac{1}{2}$ سے بڑا ہو۔ اس کے بعد منفی اجزاء شامل کریں حتٰی کہ مجموعہ $-\frac{1}{2}$ کے برابر یا اس سے کم ہو۔ اسی طرح چلتے جائیں حتٰی کہ جزوی مجموعات $-\frac{1}{2}$ سے تین مرتبہ تجاوز کر جائیں اور یہیں رک جائیں یا اس سے ایک قدم پہلے رک جائیں۔ اگر ابتدائی n نئے اجزاء کا مجموعہ s_n ہو تب (n, s_n) ترسیم کر کے جزوی مجموعات کا رویہ واضح کریں۔

سوال ۹.۴۲۰: مسئلہ ۹.۱۱ کے ثبوت کا خاکہ

ا. فرض کریں ϵ ایک مثبت حقیقی عدد ہو۔ مزید فرض کریں $L = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ اور $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$ ہیں۔ دکھائیں کہ کسی اشاریہ N_1 کے لیے اور کسی اشاریہ $N_2 \geq N_1$ کے لیے $\sum_{n=N_1}^{\infty} |a_n| \leq \frac{\epsilon}{2}$ اور $|s_{N_2} - L| < \frac{\epsilon}{2}$ ہوں گے۔ چونکہ تمام اجزاء $a_1, a_2, \cdots, a_{N_2}$ ترتیب $\{b_n\}$ میں کہیں نا کہیں پائے جاتے ہیں لہٰذا ایک ایسا اشاریہ $N_3 \geq N_2$ پایا جائے گا کہ اگر $n \geq N_3$ ہو تب $\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) - s_{N_2}$ زیادہ سے زیادہ اجزاء a_m کا مجموعہ ہو گا جہاں $m \geq N_1$ ہے۔ یوں اگر $n \geq N_3$ تب درج ذیل ہو

گا۔

$$\left|\sum_{k=1}^{n} b_k - L\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} b_k - s_{N_2}\right| + \left|s_{N_2} - L\right|$$
$$\leq \sum_{k=N_1}^{\infty} |a_k| + \left|s_{N_2} - L\right| < \epsilon$$

ب. جزو-الف کی بحث کے تحت اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلق مرتکز ہو تب $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ مرتکز اور $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ہو گا۔ اب دکھائیں کہ چونکہ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ مرتکز ہے لہٰذا $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ پر $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ مرتکز ہو گا۔

سوال ۹.۴۲۱:

ا. دکھائیں اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ مرتکز ہو اور $b_n = \begin{cases} a_n & a_n \geq 0 \\ 0 & a_n < 0 \end{cases}$ ہو تب $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ مرتکز ہو گا۔

ب. جزو-ا کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے اسی طرح دکھائیں کہ اگر $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ مرتکز ہو اور $c_n = \begin{cases} 0 & a_n \geq 0 \\ a_n & a_n < 0 \end{cases}$ ہو تب $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ مرتکز ہو گا۔

دوسرے لفظوں میں مطلق مرتکز تسلسل کی صورت میں اس کے مثبت اجزاء مرتکز تسلسل بناتے ہیں اور اس کے منفی اجزاء مرتکز تسلسل بناتے ہیں۔ مزید $b_n = \frac{a_n + |a_n|}{2}$ اور $c_n = \frac{a_n - |a_n|}{2}$ کی بنا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n$ ہو گا۔

سوال ۹.۴۲۲: یہاں کیا غلط ہے:

بدلتے ہارمونی تسلسل

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots$$

کے دونوں اطراف کو 2 سے ضرب دے کر

$$2S = 2 - 1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{7} - \frac{1}{4} + \frac{2}{9} - \frac{1}{5} + \frac{2}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

حاصل کریں۔ ایک سے نسب نما کے اجزاء جمع کریں، مثلاً $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$ اور $\frac{2}{5} - \frac{1}{5}$ ۔ یوں

$$2S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

حاصل ہو گا جہاں بائیں ہاتھ کا تسلسل وہی ہے جہاں سے ہم نے شروع کیا تھا۔ یوں $2S = S$ ہو گا جس کے دونوں اطراف کو S سے تقسیم کر کے $2 = 1$ ملتا ہے۔

سوال ۹.۴۲۳: $N > 1$ کی صورت میں مسئلہ ۹.۸ میں تسلسل کا ارتکاز شکل ۹.۲۲ کی طرح ترسیم بنا کر دکھائیں۔

۹.۹ طاقتی تسلسل

اب چونکہ ہم لامتناہی تسلسل کا ارتکاز پرکھ سکتے ہیں لہٰذا ہم اب لامتناہی کثیر رکنی کا مطالعہ کر سکتے ہیں جن کا ذکر حصہ ۹.۴ کی شروع میں کیا گیا۔ تعریف کی رو سے ان کثیر رکنیوں کو کسی متغیر، مثلاً x ، کے طاقتوں کا لامتناہی تسلسل لکھا جاتا ہے لہٰذا ہم ان کثیر رکنیوں کو طاقتی تسلسل کہتے ہیں۔ کثیر رکنیوں کی طرح، طاقتی تسلسلوں کو جمع، منفی، ضرب، تفرق اور تکمل کر کے نئے طاقتی تسلسل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

طاقتی تسلسل اور ارتکاز

ہم باضابطہ تعریف سے ابتدا کرتے ہیں۔

تعریف: نقطہ $x = 0$ کے لحاظ سے **طاقتی تسلسل**[۳۶] سے مراد درج ذیل صورت کا تسلسل ہے۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots \tag{۱}$$

نقطہ $x = a$ کے لحاظ سے طاقتی تسلسل سے مراد درج ذیل صورت کا تسلسل ہے

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \tag{۲}$$

جس میں **مرکز**[۳۷] a اور **عددی سر**[۳۸] c_0 ، c_1 ، c_2 ، $\cdots$ ، c_n ، $\cdots$ مستقل ہیں۔

□

مساوات ۲ میں $a = 0$ پر کرنے سے طاقتی تسلسل کی خصوصی روپ مساوات ۱ حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۹.۴۷: مساوات ۱ میں تمام عددی سر 1 لینے سے درج ذیل ہندسی طاقتی تسلسل حاصل ہوتا ہے۔

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

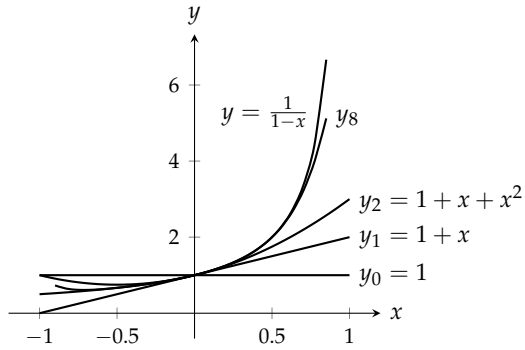
اس ہندسی تسلسل کا پہلا جزو 1 اور نسبت x ہے۔ یہ $|x| < 1$ کے لیے $\frac{1}{1-x}$ پر مرتکز ہے۔ اس حقیقت کا اظہار درج ذیل لکھ کر کیا جاتا ہے۔

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, \qquad -1 < x < 1 \tag{۳}$$

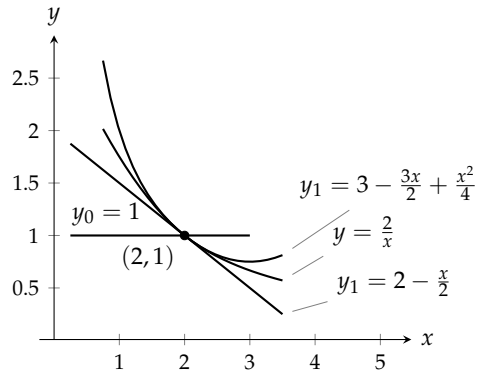
□

---

[۳۶] powerseries
[۳۷] center
[۳۸] coefficients



شکل ۹.۲۳: تفاعل $f(x) = \frac{1}{1-x}$ اور اس کی چار تخمینی کثیر رکنیاں (مثال ۹.۴۷)۔



شکل ۹.۲۴: تفاعل $f(x) = \frac{2}{x}$ اور اس کی ابتدائی تین تخمینی کثیر رکنیاں (مثال ۹.۴۸)۔

اب تک مساوات ۲ کو ہم دائیں ہاتھ تسلسل کے مجموعہ کا کلیہ استعمال کرتے آ رہے ہیں۔ ہم اب اپنی توجہ کا مرکز تبدیل کرتے ہیں۔ ہم دائیں ہاتھ تسلسل کے جزوی مجموعات کو کثیر رکنیاں $P_n(x)$ تصور کرتے ہیں جو بائیں ہاتھ تفاعل کی تخمین دیتے ہیں۔ صفر کے قریب x کی قیمتوں کے لیے تفاعل کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر ہم تسلسل کے ابتدائی چند اجزاء کا مجموعہ لے کر تفاعل کی اچھی تخمینی قیمت تلاش کر سکتے ہیں۔ ہاں $x = -1$ یا $x = 1$ کے قریب ہمیں تفاعل کی اچھی تخمین حاصل کرنے کی خاطر تسلسل کے زیادہ اجزاء کا مجموعہ لینا ہو گا شکل ۹.۲۳ میں تفاعل $f(x) = \frac{1}{1-x}$ اور اس کی تخمینی کثیر رکنیاں $y_n = P_n(x)$ دکھائی گئی ہیں۔

مثال ۹.۴۸: درج ذیل طاقتی تسلسل مساوات ۲ کی طرح ہے جہاں $a = 2$ ، $c_0 = 1$ ، $c_1 = -\frac{1}{2}$ ، $c_2 = \frac{1}{4}$ ، ۔۔۔ ، $c_n = (-1/2)^n$ ہیں۔

$$1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots \tag{۴}$$

یہ ایک ہندسی تسلسل ہے جس کا ابتدائی جزو 1 اور نسبت $r = -\frac{x-2}{2}$ ہے۔ یہ تسلسل $\left|\frac{x-2}{2}\right| < 1$ یعنی $0 < x < 4$ کے لیے مرکوز ہے۔ اس کا مجموعہ

$$\frac{1}{1-r} = \frac{1}{1+\frac{x-2}{2}} = \frac{2}{x}$$

ہے لہٰذا

$$\frac{2}{x} = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n + \cdots, \quad 0 < x < 4$$

ہوگا۔ مساوات ۴ کا تسلسل 2 کے قریب x کی قیمتوں کے لیے $f(x) = \frac{2}{x}$ کی کارآمد تخمینی کثیر رکنیاں پیدا کرتا ہے (شکل ۹.۲۴):

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) = 2 - \frac{x}{2}$$
$$P_2(x) = 1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 = 3 - \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{4}$$

□

مثال ۹.۴۹: درج ذیل طاقتی تسلسل x کی کن قیمتوں کے لیے ارتکاز پذیر ہے؟

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots \qquad \text{(ا)}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \qquad \text{(ب)}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \text{(ج)}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \cdots \qquad \text{(د)}$$

حل تناسبی پرکھ کا اطلاق تسلسل $\sum|u_n|$ پر کریں جہاں زیر غور تسلسل n جزو u_n ہے۔ نتائج شکل ۹.۲۵ میں دکھائے گئے ہیں۔

ا. $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n}{n+1}|x| \to |x|$

یہ تسلسل $|x| < 1$ کے لیے مطلق مرتکز ہے۔ $|x| > 1$ کے لیے چونکہ اس کا n واں جزو صفر تک نہیں پہنچتا لہٰذا تسلسل منفرج ہوگا جبکہ $x = 1$ پر ہمیں بدلتا ہارمونی تسلسل $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ حاصل ہوتا ہے جو مرتکز ہے۔ $x = -1$ پر ہمیں ہارمونی تسلسل کا نفی $-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \cdots$ ملتا ہے جو منفرج ہے۔ یوں تسلسل (ا) وقفہ $-1 < x \leq 1$ کے لیے مرتکز اور اس وقفہ کے باہر منفرج ہوگا۔

ب. $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{2n-1}{2n+1}x^2 \to x^2$

$x^2 < 1$ کے لیے تسلسل مطلق مرتکز ہے۔ چونکہ $x^2 > 1$ پر n واں جزو صفر پر مرکوز نہیں ہے لہٰذا تسلسل منفرج ہوگا۔ $x = 1$ پر تسلسل $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$ دیتا ہے جو مسئلہ بدلتا تسلسل کے تحت مرتکز ہوگا۔ $x = -1$ پر بھی بدلتا تسلسل ملتا ہے جو ارتکاز کے شرائط کو مطمئن کرتا ہے لہٰذا یہ مرتکز ہوگا۔ نقطہ $x = 1$ پر تسلسل کی قیمت نقطہ $x = -1$ پر تسلسل کی قیمت کا منفی ہے۔ تسلسل (ب) وقفہ $-1 \leq x \leq 1$ پر مرتکز جب کے اس کے باہر منفرج ہوگا۔

ج. $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n}\right| = \frac{|x|}{n+1} \to 0$

تسلسل تمام x کے لیے مطلق مرتکز ہے۔

شکل ۹.۲۵: وقفہ ارتکاز برائے مثال ۹.۴۹

د. $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = (n+1)|x| \to \infty$

ماسوائے $x = 0$ تسلسل x کی تمام قیمتوں کے لیے منفرج ہو گا۔

□

ہم نے مثال ۹.۴۹ میں تسلسل کو ارتکاز یا انفراج کے لیے پرکھنا دیکھا۔

طاقتی تسلسل کا پرکھ برائے ارتکاز

قدم ا: تناسبی پرکھ (یا n واں جذر پرکھ) استعمال کرتے ہوئے وہ وقفہ تلاش کریں جس پر تسلسل مطلق مرتکز ہو۔ عموماً یہ وقفہ کھلا وقفہ ہو گا:

$$a - R < x < a + R \quad \text{یعنی} \quad |x - a| < R$$

قدم ب: اگر مطلق ارتکاز کا وقفہ متناہی ہو تب ہر آخری نقطہ پر ارتکاز یا انفراج کے لیے تسلسل کو پرکھیں (جیسا مثال ۹.۴۹-ا اور ب میں کیا گیا)۔ آپ تقابلی پرکھ، تکملی پرکھ یا بدلتا تسلسل پرکھ استعمال کر سکتے ہیں۔

قدم ج: اگر مطلق ارتکاز کا وقفہ $a - R < x < a + R$ ہو تب $|x - a| > R$ کے لیے تسلسل منفرج ہو گا (تسلسل یہاں مشروط مرتکز بھی نہیں ہو گا) چونکہ x کی ان قیمتوں کے لیے n واں جزو صفر تک نہیں پہنچتا ہے۔

□

مسئلہ ۹.۱۲: **طاقتی تسلسل کا مسئلہ ارتکاز**

اگر $x = c \neq 0$ کے لیے تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ مرتکز ہو تب $|x| < |c|$ کے لیے یہ مطلق مرتکز ہو گا۔ اگر $x = d$ کے لیے تسلسل منفرج ہو تب $|x| > |d|$ کے لیے یہ منفرج ہو گا۔

ثبوت: فرض کریں تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n c^n$ مرتکز ہے۔ تب $\lim_{n\to\infty} a_n c^n = 0$ ہو گا۔ یوں ایسا عدد N پایا جائے گا کہ تمام $n \geq N$ کے لیے $|a_n c^n| < 1$ ہو گا، یعنی:

$$|a_n| < \frac{1}{|c^n|} \qquad n \geq N \tag{۵}$$

اب ایسا x لیں کہ $|x| < |c|$ ہو اور درج ذیل پر غور کریں۔

$$|a_0| + |a_1 x| + \left|a_{N-1}\, x^{N-1}\right| + \left|a_N\, x^N\right| + \left|a_{N+1}\, x^{N+1}\right| + \cdots$$

جزو $\left|a_N\, x^N\right|$ سے قبل متناہی تعداد کے اجزاء پائے جاتے ہیں اور ان کا مجموعہ متناہی ہے۔ مساوات ۵ کی وجہ سے جزو $\left|a_N\, x^N\right|$ اور اس کے بعد تمام اجزاء درج ذیل سے کم ہوں گے۔

$$\left|\frac{x}{c}\right|^N + \left|\frac{x}{c}\right|^{N+1} + \left|\frac{x}{c}\right|^{N+2} + \cdots \tag{۶}$$

اب مساوات ۶ ہندسی تسلسل ہے جس کا نسبت $r = \left|\frac{x}{c}\right|$ ہے جو $|x| < |c|$ کی وجہ سے 1 سے کم ہے۔ یوں مساوات ۶ کا تسلسل مرتکز ہے لہٰذا اصل تسلسل مطلق مرتکز ہو گا۔ یوں مسئلے کا پہلا حصہ ثابت ہوتا ہے۔

مسئلے کا دوسرا حصہ مسئلے کے پہلے حصہ سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر $x = d$ کے لیے تسلسل منفرج اور x_0 پر تسلسل مرتکز ہو جہاں $|x_0| > |d|$ ہے تب ہم مسئلے کے پہلے حصے میں $c = x_0$ لے کر فیصلہ کر سکتے ہیں کہ d پر تسلسل مطلق مرتکز ہو گا، لیکن ایک ہی وقت میں تسلسل مرتکز اور منفرج دونوں نہیں ہو سکتا ہے۔ یوں اگر تسلسل d پر منفرج ہو تب تمام $|x| > |d|$ کے لیے یہ منفرج ہو گا۔

□

علامتیت سادہ رکھنے کی خاطر مسئلہ ۹.۱۲ میں تسلسل $\sum a_n x^n$ کے ارتکاز کی بات کی گئی۔ تسلسل $\sum a_n (x-a)^n$ کے ارتکاز کی بات کرتے ہوئے ہم $x - a$ کی جگہ x' پر کر کے نتیجہ کو تسلسل $\sum a_n (x')^n$ پر لاگو کر سکتے ہیں۔

ارتکاز کا رداس اور وقفہ

اب تک دیکھے گئے مثالوں اور مذکورہ بالا مسئلے کو دیکھ کر ہم کہہ سکتے ہیں کہ طاقتی تسلسل کا رویہ درج ذیل میں سے ایک ہو گا۔

تسلسل $\sum c_n (x-a)^n$ کے ممکنہ رویے

ا. ایک ایسا مثبت عدد R پایا جاتا ہے کہ $|x-a| > R$ کے لیے تسلسل منفرج جبکہ $|x-a| < R$ کے لیے مطلق مرتکز ہے۔ ہر ایک آخری نقطہ $x = a - R$ اور $x = a + R$ پر تسلسل مرتکز یا منفرج ہو سکتا ہے۔

ب. ہر x پر تسلسل مطلق مرتکز ہے ($R = \infty$)۔

ج. تسلسل $x = a$ کے لیے مرتکز جبکہ باقی تمام x کے لیے منفرج ہے ($R = 0$)۔

پہلی صورت میں ارتکاز کے نقطوں کا سلسلہ متناہی وقفہ ہے جس کو **وقفہ ارتکاز**[۳۹] کہتے ہیں۔ ہم مذکورہ بالا مثالوں سے جانتے ہیں کہ وقفہ ارتکاز کھلا، نصف کھلا، یا بند ہو سکتا ہے اور یہ دیے گئے تسلسل پر منحصر ہو گا۔ وقفہ ارتکاز جس قسم کا بھی ہو، R کو تسلسل کا **رداس ارتکاز**[۴۰] کہیں گے اور تسلسل کے ان نقطوں کا

---

[۳۹] intervalofconvergence
[۴۰] radiusofconvergence

سلسلہ، جن کے لیے تسلسل مرتکز ہو، کا کم سے کم بالائی حد بندی $a + R$ ہو گا۔ اس وقفہ کی اندرونی ہر نقطہ پر ارتکاز مطلق ہو گا۔ اگر x کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے ایک تسلسل مطلق مرتکز ہو تب ہم کہتے ہیں اس تسلسل کا **رداس ارتکاز لامتناہی** ہے۔ اگر یہ صرف $x = a$ کے لیے مرتکز ہو تب اس کا **رداس ارتکاز صفر** ہو گا۔

جزو در جزو تفرق

اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ وقفہ ارتکاز کے اندر ہر نقطہ پر طاقتی تسلسل کا جزو در جزو تفرق لیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ ۹.۱۳: **مسئلہ جزو در جزو تفرق**
وقفہ $a - R < x < a + R$ پر مرتکز تسلسل $\sum c_n(x-a)^n$ درج ذیل تفاعل f دیتا کرتا ہے، جہاں $R > 0$ ہے۔

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \qquad\qquad a - R < x < a + R$$

وقفہ ارتکاز کے اندر ایسے تفاعل کا ہر رتبے کا تفرق پایا جاتا ہے۔ ان تفرق کو حاصل کرنے کے لیے ہم اصل تسلسل کا جزو در جزو تفرق

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \\ f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} \end{aligned}$$

لیتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔ اصل تسلسل کے وقفہ ارتکاز کے ہر اندرونی نقطہ کے لیے یہ تفرقی تسلسل مرتکز ہوں گے۔

انتباہ: ضروری نہیں کہ جزو در جزو تفرق دیگر تسلسل کے لیے بھی قابل استعمال ہو۔ مثال کے طور پر تکونیاتی تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^2}$ تمام x کے لیے مرتکز ہے۔ البتہ اس کا جزو در جزو تفرق $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\cos(n!x)}{n^2}$ ہے جو تمام x کے لیے منفرج ہے۔

مثال ۹.۵۰: درج ذیل تفاعل $f(x)$ کے تفرق $f'(x)$ اور $f''(x)$ حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad\qquad -1 < x < 1 \end{aligned}$$

حل

۱۵۳۰۷

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \qquad -1 < x < 1$$
$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + \cdots + n(n-1)x^{n-2} + \cdots$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} \qquad -1 < x < 1$$

۱۵۳۰۸ □

۱۵۳۰۹ **جزو در جزو تکمل**

۱۵۳۱۰ اعلیٰ احصاء کا دوسرا مسئلہ کہتا ہے کہ پورے وقفہ ارتکاز کے اندر طاقتی تسلسل کا جزو در جزو تکمل لیا جا سکتا ہے۔

۱۵۳۱۱ مسئلہ ۹.۱۴: **مسئلہ جزو در جزو تکمل**

۱۵۳۱۲ فرض کریں $a - R < x < a + R \ (R > 0)$ میں

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

۱۵۳۱۳ مرتکز ہو تب $a - R < x < a + R$ میں

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n (x-a)^{n+1}}{n+1}$$

۱۵۳۱۴ مرتکز ہو گا اور $a - R < x < a + R$ میں درج ذیل ہو گا۔

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

۱۵۳۱۵

۱۵۳۱۶ مثال ۹.۵۱: وقفہ $-1 \le x \le 1$ میں $\tan^{-1} x$ کا تسلسل

۱۵۳۱۷ درج ذیل تفاعل پہچانیں۔

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots \qquad -1 \le x \le 1$$

۱۵۳۱۸ **حل**

۱۵۳۱۹ ہم اصل تسلسل کا جزو در جزو تفرق لیتے ہیں۔

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots \qquad -1 \le x \le 1$$

۱۵۳۲۰ یہ ہندسی تسلسل ہے جس کا پہلا جزو 1 اور نسبت $-x^2$ ہے لہٰذا

$$f'(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

۱۵۳۲۱ ہو گا۔ ہم اب $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\int f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \tan^{-1} x + \mathrm{C}$$

۱۵۳۲۲ چونکہ $x = 0$ پر $f(x)$ کا تسلسل صفر ہے لہٰذا $\mathrm{C} = 0$ ہو گا۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \tan^{-1} x \qquad -1 < x < 1 \tag{۷}$$

۱۵۳۲۳ ہم حصہ ۹.۱۲ میں دیکھیں گے کہ یہ تسلسل $x = \pm 1$ پر بھی $\tan^{-1} x$ پر مرکوز ہے۔

۱۵۳۲۴ دھیان رہے کہ اس مثال میں ابتدائی (اصل) تسلسل دیے گئے وقفہ کے دونوں آخری سروں پر بھی مرتکز ہے لیکن مسئلہ ۹.۱۳ صرف اس وقفہ کے اندر تسلسل
۱۵۳۲۵ کی ارتکاز کی یقین دہانی کرتا ہے۔ □

۱۵۳۲۶ ہم دیکھیں گے کہ $x = \mp 1$ کے لیے بھی یہ تسلسل $\tan^{-1} x$ پر مرکوز ہے۔

۱۵۳۲۷ ہم دیکھتے ہیں کہ مثال ۹.۵۱ میں اصل تسلسل کے وقفہ ارتکاز کے دونوں آخری نقطوں کے لیے اصل تسلسل مرتکز ہے، البتہ مسئلہ ۹.۱۳ صرف اصل تسلسل کے
۱۵۳۲۸ وقفہ ارتکاز کے اندرون میں تفرقی تسلسل کے ارتکاز کی ضمانت دیتا ہے۔

۱۵۳۲۹ مثال ۹.۵۲: **وقفہ $-1 < x < 1$ کے لیے $\ln(1+x)$ کا تسلسل**

۱۵۳۳۰ کھلا وقفہ $-1 < t < 1$ کے لیے تسلسل

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots$$

۱۵۳۳۱ مرکوز ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \cdots \Big]_0^x \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad -1 < x < 1\end{aligned}$$

□

یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ $x = 1$ پر تسلسل عدد $\ln 2$ پر مرکوز ہے مگر مسئلہ اس کی ضمانت نہیں دیتا ہے۔

فنیات مطالعہ تسلسل

تسلسل کئی طریقوں سے تکمل کی طرح ہوتے ہیں۔ جیسے بنیادی تفاعل کی صورت میں صریح ضد تفرق رکھنے والے تفاعل کی تعداد قابل تکمل تفاعل کی تعداد سے بہت کم ہے، x کی صورت میں طاقتی تسلسل جو صریحاً بنیادی تفاعل کے ساتھ x وقفہ پر اتفاق کرتے ہوں کی تعداد ان طاقتی تسلسل کی تعداد سے بہت کم ہے جو کسی x وقفہ پر منفرج ہوں۔ جیسے مطلق تکمل کے مطالعہ میں اعدادی تکمل مددگار ثابت ہوتا ہے، اسی طرح مطالعہ تسلسل میں کمپیوٹر ترسیمات کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔ عموماً کمپیوٹر الجبرائی نظام میں x کی مخصوص قیمتوں پر طاقتی تسلسل کا مطالعہ کرنا ممکن ہوتا ہے۔

تیز مرتکز تسلسل کے مجموعہ کا اندازہ ہمیں کمپیوٹر دے سکتا ہے۔ مثال کے طور پر $31 \leq n \leq 200$ لے لیے ہم تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n-1}$ [مثال ۹.۳۳-ب] کے ابتدائی جزوی مجموعات آکٹیو[۴۱] سے $S_n = 1.606\,695\,152$ حاصل کرتے ہیں۔ یوں ہم کہہ سکتے ہیں کہ 10 ہندسوں تک اس تسلسل کا مجموعہ $1.606\,695\,152$ ہوگا۔ یقیناً

$$\sum_{n=201}^{\infty} \frac{1}{2^n-1} = \sum_{n=201}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}(2-\frac{1}{2^{n-1}})} < \sum_{n=201}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{199}} < 1.25 \times 10^{-60}$$

کے تحت 200 اجزاء کے بعد باقی قابل نظر انداز ہے۔

البتہ نہایت آہستہ مرتکز یا منفرج تسلسل کی صورت میں کمپیوٹر مددگار ثابت نہیں ہوتا ہے بلکہ اس کے نتائج بالکل غلط ہو سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر تسلسل $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^{10}n}$ کے جزوی مجموعات کا حساب کرنے کی کوشش کریں۔ یہاں اجزاء نہایت چھوٹے ہیں اور سیکڑوں اجزاء کا مجموعہ بھی نہایت چھوٹا ہے جس سے ہمیں غلط فہمی ہو سکتی ہے کہ یہ تسلسل مرتکز ہے۔ اس تسلسل کو $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $\frac{1}{10^{10}}$ لکھ کر صاف ظاہر ہے کہ یہ منفرج ہے۔

ہم حصہ ۹.۱۱ میں **اندازہ خلل**[۴۲] کا مطالعہ کرنے کے بعد اعدادی نتائج کی بہتر تشریح کرنے کے قابل ہوں گے۔

طاقتی تسلسل کا ضرب

ایک اعلیٰ مسئلہ کہتا ہے کہ مطلق مرتکز تسلسل کو کثیر رکنی کی طرح آپس میں ضرب دیا جاسکتا ہے۔

مسئلہ ۹.۱۵: **طاقتی تسلسل کے ضرب کا مسئلہ**

اگر $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ اور $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ وقفہ $|x| < R$ پر مطلق مرتکز ہوں اور

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

---

[۴۱] کمپیوٹر کا الجبرائی پروگرام

[۴۲] errorestimation

۱۵۳۵۱ ہو تب $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ وقفہ $|x| < R$ پر $A(x)B(x)$ کو مطلق مرتکز ہو گا۔

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

۱۵۳۵۲

۱۵۳۵۳ مثال ۹.۵۳: درج ذیل ہندسی تسلسل

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}, \qquad |x| < 1$$

۱۵۳۵۴ کو اپنے ساتھ ضرب کرتے ہوئے وقفہ $|x| < 1$ پر $\frac{1}{(1-x)^2}$ کا طاقتی تسلسل حاصل کریں۔

۱۵۳۵۵ **حل**

۱۵۳۵۶ فرض کریں

$$\begin{aligned} A(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \\ B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

۱۵۳۵۷ اور

$$\begin{aligned} c_n &= \underbrace{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_k b_{n-k} + \cdots + a_n b_0}_{n+1 \text{ اجزاء}} \\ &= \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n+1 \text{ ایک}} = n + 1 \end{aligned}$$

۱۵۳۵۸ اب مسئلہ ۹.۱۵ کے تحت $\frac{1}{(1-x)^2}$ کا تسلسل

$$\begin{aligned} A(x) \cdot B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n + \cdots \end{aligned}$$

۱۵۳۵۹ ہو گا جو $|x| < 1$ کے لیے مطلق مرتکز ہو گا۔

۱۵۳۶۰ درج ذیل کی وجہ سے مثال ۹.۵۰ بھی یہی نتیجہ دیتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

۱۵۳۶۱ □

سوالات

ارتکاز کے وقفے

سوال ۹.۴۲۴ تا سوال ۹.۴۵۵ میں (الف) تسلسل کا رداس اور وقفہ ارتکاز تلاش کریں۔ x کی کن قیمتوں کے لیے تسلسل (ب) مطلق مرتکز (ج) مشروط مرتکز ہے؟

سوال ۹.۴۲۴: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

سوال ۹.۴۲۵: $\sum_{n=0}^{\infty} (x+5)^n$

سوال ۹.۴۲۶: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (4x+1)^n$

سوال ۹.۴۲۷: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{n}$

سوال ۹.۴۲۸: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{10^n}$

سوال ۹.۴۲۹: $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$

سوال ۹.۴۳۰: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{n+2}$

سوال ۹.۴۳۱: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+2)^n}{n}$

سوال ۹.۴۳۲: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n}3^n}$

سوال ۹.۴۳۳: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$

سوال ۹.۴۳۴: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$

سوال ۹.۴۳۵: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n x^n}{n!}$

سوال ۹.۴۳۶: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$

سوال ۹.۴۳۷: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+3)^{2n+1}}{n!}$

۱۵۳۸۰ سوال ۹.۴۳۸: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

۱۵۳۸۱ سوال ۹.۴۳۹: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n^2+3}}$

۱۵۳۸۲ سوال ۹.۴۴۰: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+3)^n}{5^n}$

۱۵۳۸۳ سوال ۹.۴۴۱: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{4^n(n^2+1)}$

۱۵۳۸۴ سوال ۹.۴۴۲: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{n}x^n}{3^n}$

۱۵۳۸۵ سوال ۹.۴۴۳: $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}(2x+5)^n$

۱۵۳۸۶ سوال ۹.۴۴۴: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x^n$

۱۵۳۸۷ سوال ۹.۴۴۵: $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln x)x^n$

۱۵۳۸۸ سوال ۹.۴۴۶: $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

۱۵۳۸۹ سوال ۹.۴۴۷: $\sum_{n=0}^{\infty} n!(x-4)^n$

۱۵۳۹۰ سوال ۹.۴۴۸: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x+2)^n}{n2^n}$

۱۵۳۹۱ سوال ۹.۴۴۹: $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n(n+1)(x-1)^n$

۱۵۳۹۲ سوال ۹.۴۵۰: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(\ln n)^2}$ آپ سوال ۹.۲۶۹ کی مدد لے سکتے ہیں۔

۱۵۳۹۳ سوال ۹.۴۵۱: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n\ln n}$ آپ سوال ۹.۲۶۸ کی مدد لے سکتے ہیں۔

۱۵۳۹۴ سوال ۹.۴۵۲: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4x-5)^{2n+1}}{n^{3/2}}$

۱۵۳۹۵ سوال ۹.۴۵۳: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^{n+1}}{2n+2}$

۱۵۳۹۶ سوال ۹.۴۵۴: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+\pi)^n}{\sqrt{n}}$

۱۵۳۹۷ سوال ۹.۴۵۵: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-\sqrt{2})^{2n+1}}{2^n}$

۱۵۳۹۸ سوال ۹.۴۵۶ تا سوال ۹.۴۶۱ میں تسلسل کی ارتکاز کا وقفہ تلاش کریں اور اس وقفہ میں تسلسل کے مجموعہ کو x کا تفاعل لکھیں۔

۱۵۳۹۹ سوال ۹.۴۵۶: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}$

۱۵۴۰۰ سوال ۹.۴۵۷: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^{2n}}{9^n}$

۱۵۴۰۱ سوال ۹.۴۵۸: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{x}}{2} - 1\right)^n$

۱۵۴۰۲ سوال ۹.۴۵۹: $\sum_{n=0}^{\infty} (\ln x)^n$

۱۵۴۰۳ سوال ۹.۴۶۰: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2+1}{3}\right)^n$

۱۵۴۰۴ سوال ۹.۴۶۱: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2-1}{2}\right)^n$

۱۵۴۰۵ **نظریہ اور مثالیں**

۱۵۴۰۶ سوال ۹.۴۶۲: درج ذیل تسلسل x کی کن قیمتوں کے لیے مرتکز ہے؟

$$1 - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{4}(x-3)^2 + \cdots + (-\frac{1}{2})^n (x-3)^n + \cdots$$

۱۵۴۰۷ اس کا مجموعہ کتنا ہے؟ اس تسلسل کا جزو در جزو تفرق لینے سے کونسا تسلسل حاصل ہوتا ہے؟ یہ نیا تسلسل x کی کن قیمتوں کے لیے مرتکز ہوگا؟ اس کا مجموعہ کیا
۱۵۴۰۸ ہے؟

۱۵۴۰۹ سوال ۹.۴۶۳: اگر آپ سوال ۹.۴۶۲ کا تسلسل جزو در جزو تکمل کریں تب کونسا تسلسل حاصل ہوگا؟ x کی کن قیمتوں کے لیے یہ نیا تسلسل مرتکز ہوگا؟
۱۵۴۱۰ اس مجموعے کا دوسرا نام کیا ہے؟

۱۵۴۱۱ سوال ۹.۴۶۴: درج ذیل تسلسل تمام x کے لیے $\sin x$ پر مرکوز ہے۔

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

۱۵۴۱۲ ا. $\cos x$ کے تسلسل کے ابتدائی چھ اجزاء دریافت کریں۔ x کی کن قیمتوں کے لیے حاصل تسلسل مرتکز ہوگا۔

۱۵۴۱۳ ب. $\sin x$ کے تسلسل میں x کی جگہ $2x$ پر کرنے ایسا تسلسل حاصل کریں جو تمام x کے لیے $\sin 2x$ پر مرتکز ہو۔

ج. ضرب تسلسل اور جزو-الف کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے $2\sin x\cos x$ کے تسلسل کے ابتدائی چھ اجزاء حاصل کریں۔ جزو-ب کے نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۹.۴۶۵: درج ذیل تسلسل تمام x کے لیے e^x پر مرکوز ہے۔

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

ا. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x$ کا تسلسل دریافت کریں۔ کیا آپ کو دوبارہ e^x کا تسلسل حاصل ہوتا ہے؟ وجہ پیش کریں۔

ب. $\int e^x\,\mathrm{d}x$ کا تسلسل دریافت کریں۔ کیا آپ کو دوبارہ e^x کا تسلسل حاصل ہوتا ہے؟ وجہ پیش کریں۔

ج. e^x کے تسلسل میں x کی جگہ $-x$ پر کرکے e^{-x} کا تسلسل حاصل کریں۔ اب e^x کے تسلسل کو e^{-x} کے تسلسل کے ساتھ ضرب کرکے $e^x \cdot e^{-x}$ کے تسلسل کے ابتدائی چھ اجزاء تلاش کریں۔

سوال ۹.۴۶۶: درج ذیل تسلسل $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ کے لیے $\tan x$ پر مرتکز ہے۔

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots$$

ا. $\ln|\sec x|$ کے تسلسل کے ابتدائی پانچ اجزاء تلاش کریں۔ x کی کن قیمتوں کے لیے یہ تسلسل مرتکز ہوگا؟

ب. $\sec^2 x$ کے تسلسل کے ابتدائی پانچ اجزاء تلاش کریں۔ x کی کن قیمتوں کے لیے یہ تسلسل مرتکز ہوگا؟

ج. اگلے سوال میں $\sec x$ کے تسلسل کا مربع تلاش کرتے ہوئے جزو-ب کے نتیجہ کی تصدیق کریں۔

سوال ۹.۴۶۷: درج ذیل تسلسل $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ کے لیے $\sec x$ پر مرتکز ہے۔

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + \cdots$$

ا. $\ln|\sec x + \tan x|$ کے تسلسل کے ابتدائی پانچ اجزاء تلاش کریں۔ x کی کن قیمتوں کے لیے یہ تسلسل مرتکز ہوگا؟

ب. $\sec x \tan x$ کے تسلسل کے ابتدائی چار اجزاء تلاش کریں۔ x کی کن قیمتوں کے لیے یہ تسلسل مرتکز ہوگا؟

ج. گزشتہ سوال میں $\tan x$ کے تسلسل کو $\sec x$ کے تسلسل کے ساتھ ضرب کرتے ہوئے جزو-ب کے نتیجہ کی تصدیق کریں۔

سوال ۹.۴۶۸: مرتکز طاقتی تسلسل کی یکتائی

ا. دکھائیں کہ کھلے وقفہ $(-c, c)$ میں تمام x کے لیے مرتکز اور ایک دوسرے کے برابر تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ اور $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ کی صورت میں تمام n کے لیے $a_n = b_n$ ہوگا۔ (اشارہ: فرض کریں $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ ہے۔ جزو در جزو تفرق لے کر ثابت کریں کہ a_n اور b_n دونوں $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ کے برابر ہیں۔)

ب. دکھائیں کہ کھلے وقفہ $(-c, c)$ میں تمام x کے لیے $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$ کی صورت میں تمام n کے لیے $a_n = 0$ ہوگا۔

سوال ۹.۴۶۹: تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ کا مجموعہ تلاش کرنے کی خاطر $\frac{1}{1-x}$ کو ہندسی تسلسل کی صورت میں لکھ کر دونوں اطراف کا x کے ساتھ تفرق لیں، دونوں اطراف کو x سے ضرب دے کر دونوں اطراف کا تفرق لیں اور آخر کار دونوں اطراف کو x سے ضرب کریں۔ اب $x = \frac{1}{2}$ پر کریں۔ کیا حاصل ہوتا ہے؟

سوال ۹.۴۷۰: آخری نقطوں پر ارتکاز

ایک مثال سے دکھائیں کہ ایک طاقتی تسلسل کے وقفہ ارتکاز کے آخری سروں پر اس تسلسل کا ارتکاز مشروط یا مطلق ہو سکتا ہے۔

سوال ۹.۴۷۱: ایسے طاقتی تسلسل بنائیں جن کے وقفہ ارتکاز درج ذیل ہوں۔

ا. $(-3,3)$ ب. $(-2,0)$ ج. $(1,5)$

۹.۱۰ ٹیلر اور مکلارن تسلسل

اس حصہ میں دکھایا جائے گا کہ وہ تفاعل جو لا متناہی گنا قابل تفرق ہوں طاقتی تسلسل پیدا کرتے ہیں جنہیں ٹیلر تسلسل کہتے ہیں۔ عموماً ایسے تسلسل، پیداکار تفاعل کے کار آمد تخمینی کثیر رکنیاں پیش کرتے ہیں۔

تسلسلی اظہار

ہم جانتے ہیں کہ اپنے وقفہ ارتکاز کے اندر طاقتی تسلسل کا مجموعہ استمراری تفاعل ہوتا ہے جس کے تفارق ہر درجے کے پائے جاتے ہیں۔ لیکن کیا ہم یہی کچھ دوسری رخ بھی کہہ سکتے ہیں؟ یعنی کیا ایسا تفاعل $f(x)$ جس کے وقفہ I ہر رتبہ کے تفارق پائے جاتے ہوں کو I میں طاقتی تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن ہو گا؟! اگر ایسا ممکن ہو، تب اس تسلسل کے عددی سر کیا ہوں گے؟

ہم $f(x)$ کو مثبت رداس ارتکاز کے طاقت تسلسل کا مجموعہ

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \\ &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

تصور کر کے اس آخری سوال کا جواب باآسانی دے سکتے ہیں۔ وقفہ I میں بار بار جزو در جزو تفرق لینے سے

$$\begin{aligned} f'(x) &= a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + \cdots \\ f''(x) &= 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-a) + 3\cdot 4a_4(x-a)^2 + \cdots \\ f'''(x) &= 1\cdot 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a) + 3\cdot 4\cdot 5a_5(x-a)^2 + \cdots \end{aligned}$$

۱۵۴۵۴ حاصل ہو گا۔ یوں تمام n کے لیے n گنا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$f^{(n)}(x) = n!a_n + \text{اجزاء کا مجموعہ جن میں جزو ضربی } (x-a) \text{ پایا جاتا ہے}$$

۱۵۴۵۵ چونکہ یہ تمام مساوات $x = a$ پر کارآمد ہیں لہٰذا

$$\begin{aligned} f'(a) &= a_1 \\ f''(a) &= 1 \cdot 2a_2 \\ f'''(a) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 \end{aligned}$$

۱۵۴۵۶ یا عمومی طور پر

$$f^{(n)}(a) = n!a_n$$

۱۵۴۵۷ حاصل ہوتا ہے۔ یہ کلیہ وقفہ I پر f کو مرتکز کسی بھی طاقتی تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ کے عددی سروں کا ایک حیرت کن نقش پیش کرتا ہے۔

۱۵۴۵۸ اگر ایسا تسلسل پایا جاتا ہو (جو ہم اب تک نہیں جانتے کہ پایا جاتا ہے) تب ایسا تسلسل صرف ایک ہو سکتا ہے جس کے n عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

۱۵۴۵۹ اگر f کا تسلسلی روپ پایا جاتا ہو تب یہ تسلسل لازماً درج ذیل ہو گا۔

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \quad (1)$$

۱۵۴۶۰ لیکن کیا وقفہ I، جس کا مرکز $x = a$ ہو، پر لا متناہی گنا قابل تفرق اختیاری تفاعل f سے شروع کر کے مساوات ۱ کا تسلسل پیدا کر کے I کے اندرون

۱۵۴۶۱ میں ہر x پر $f(x)$ پر مرکوز تسلسل حاصل ہو گا؟ جیسا ہم دیکھیں گے بعض تفاعل کے لیے ایسا ہو گا اور بعض کے لیے ایسا نہیں ہو گا۔

۱۵۴۶۲ ٹیلر اور مکلارن تسلسل

۱۵۴۶۳ تعریف: فرض کریں کسی وقفہ، جس میں اندرونی نقطہ a پایا جاتا ہو، میں تفاعل f کا ہر درجے کا تفرق پایا جاتا ہے۔ تب نقطہ $x = a$ پر f کا **ٹیلر**

۱۵۴۶۴ **تسلسل**[۴۳] درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

---

[۴۳] Taylorseries

۱۵۴۶۵ نقطہ $x = 0$ پر f کے پیدا کردہ (درج ذیل) ٹیلر تسلسل کو **مکلارن تسلسل**[۴۴] کہتے ہیں۔

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

۱۵۴۶۶ □

۱۵۴۶۷ مثال ۹.۵۴: نقطہ $a = 2$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل حاصل کریں۔ یہ تسلسل $\frac{1}{x}$ پر کہاں مرتکز ہو گا۔

۱۵۴۶۸ **حل**

۱۵۴۶۹ ہمیں $f(2)$ ، $f'(2)$ ، $f''(2)$ ، ... درکار ہیں۔ تفرق لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^{-1}, & f(2) &= 2^{-1} = \frac{1}{2} \\
f'(x) &= -x^{-2}, & f'(2) &= -\frac{1}{2^2} \\
f''(x) &= 2!x^{-3}, & \frac{f''(2)}{2!} &= \frac{1}{2^3} \\
f'''(x) &= -3!x^{-4}, & \frac{f'''(2)}{3!} &= -\frac{1}{2^4} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^n n! x^{-(n+1)}, & \frac{f^{(n)}(2)}{n!} &= \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

۱۵۴۷۰ یوں ٹیلر تسلسل

$$\begin{aligned}
&f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n + \cdots \\
&\qquad = \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{2^2} + \frac{(x-2)^2}{2^3} - \cdots + (-1)^n \frac{(x-2)^n}{2^{n+1}} + \cdots
\end{aligned}$$

۱۵۴۷۱ ہو گا جو ایک ہندسی تسلسل ہے جس کا پہلا رکن $\frac{1}{2}$ اور نسبت $r = -\frac{(x-2)}{2}$ ہے۔ یہ وقفہ $|x-2| < 2$ میں مطلق مرتکز ہے اور اس کا مجموعہ

$$\frac{1/2}{1 + (x-2)/2} = \frac{1}{2 + (x-2)} = \frac{1}{x}$$

۱۵۴۷۲ ہے۔ اس مثال میں نقطہ $a = 2$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل وقفہ $|x-2| < 2$ یا $0 < x < 4$ میں $\frac{1}{x}$ پر مرتکز ہے □

---

[۴۴] Maclaurinseries

ٹیلر کثیر رکنیاں

نقطہ a پر قابل تفرق تفاعل f کی خط بندی درج ذیل کثیر رکنی ہے۔

$$P_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

اگر a پر f کے بلند رتبی تفارق پائے جاتے ہوں تب ہر پائے جانے والے تفرق کے لیے اس کی بلند رتبی تخمینی کثیر رکنی بھی پائی جائے گی۔ان کثیر رکنیوں کو f کی ٹیلر کثیر رکنیاں کہتے ہیں۔

ہم رتبہ n کے بجائے درجہ n ٹیلر کثیر رکنی کی بات کرتے ہیں چونکہ $f^{(n)}(a)$ صفر بھی ہو سکتا ہے۔مثال کے طور پر نقطہ $x = 0$ پر $\cos x$ کی ابتدائی دو ٹیلر کثیر رکنیاں $P_0(x) = 1$ اور $P_1(x) = 1$ ہیں۔رتبہ اول کثیر رکنی کا درجہ صفر ہے نا کہ اکائی۔

تعریف: فرض کریں کسی وقفہ، جس کے اندرون میں نقطہ a پایا جاتا ہو، میں تفاعل f کے k رتبی تفرق پائے جاتے ہیں جہاں $k = 1, 2, \cdots, N$ ہے۔تب 0 سے N تک ہر عدد صحیح کے لیے نقطہ a پر f کا پیدا کردہ n **رتبی ٹیلر تسلسل** درج ذیل کثیر رکنی ہو گا۔

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

□

جیسا $x = a$ پر f کی خط بندی، a کی پڑوس میں f کی بہترین خطی تخمین مہیا کرتی ہے اسی طرح بلند رتبی ٹیلر کثیر رکنیاں اپنے درجہ کے لحاظ سے بہترین تخمینی کثیر رکنی مہیا کرتے ہیں۔

مثال ۹.۵۵: نقطہ $x = 0$ پر $f(x) = e^x$ کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل اور ٹیلر کثیر رکنی حاصل کریں۔

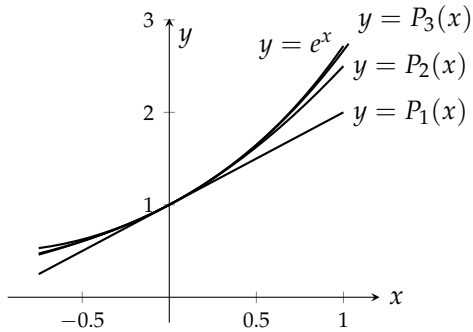
حل

درج ذیل

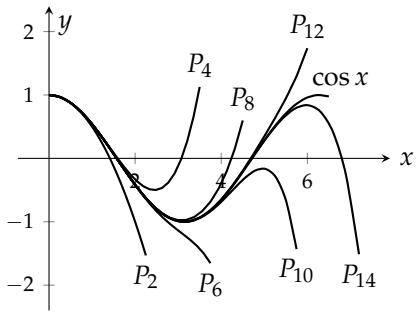
$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(x) = e^x$$

کی وجہ سے

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = 1, \quad \cdots, \quad f^{(n)}(0) = 1$$



شکل ۹.۲۶: قوت نمائی تفاعل $f(x) = e^x$ کی ٹیلر کثیر رکنیاں (مثال ۹.۵۵)



شکل ۹.۲۷: کوسائن اور اس کی ٹیلر کثیر رکنیاں (مثال ۹.۵۶)

۱۵۴۸۸ ہوں گے۔ یوں $x = 0$ پر f کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

۱۵۴۸۹ تعریف کی رو سے یہی e^x کا مکلارن تسلسل بھی ہو گا۔ ہم حصہ ۹.۱۱ میں دیکھیں گے کہ ہر x کے لیے یہ تسلسل e^x پر مرتکز ہے۔

۱۵۴۹۰ نقطہ $x = 0$ پر n رتبی ٹیلر کثیر رکنی درج ذیل ہوں گی

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

۱۵۴۹۱ یعنی نقطہ $x = 0$ پر n رتبی ٹیلر کثیر رکنیاں

$$P_1(x) = 1 + x, \quad P_2 = 1 + x + \frac{x^2}{2!}, \quad P_3 = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

۱۵۴۹۲ ہوں گی جو $x = 0$ کی پڑوس میں e^x کے بہت قریب ہے (۹.۲۶)۔ □

۱۵۴۹۳ مثال ۹.۵۶: نقطہ $x = 0$ پر تفاعل $f(x) = \cos x$ کا ٹیلر تسلسل اور ٹیلر کثیر رکنیاں حاصل کریں۔

۱۵۴۹۳ **حل**

۱۵۴۹۵ تفاعل اور اس کے تفارق درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & f'(x) &= -\sin x \\ f''(x) &= -\cos x & f^{(3)}(x) &= \sin x \\ &\vdots \\ f^{(2n)}(x) &= (-1)^n \cos x & f^{(2n+1)} &= (-1)^{n+1} \sin x \end{aligned}$$

۱۵۴۹۶ نقطہ 0 پر کوسائن کی قیمتیں 1 جبکہ سائن کی قیمتیں 0 ہیں لہٰذا

$$f^{(2n)}(0) = (-1)^n, \quad f^{(2n+1)}(0) = 0$$

۱۵۴۹۷ ہوں گے۔ نقطہ 0 پر f کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots \\ &= 1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2!} + 0 \cdot x^3 + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

۱۵۴۹۸ تعریف کی رو سے یہی $\cos x$ کا مکلارن تسلسل بھی ہو گا۔ ہم حصہ ۹.۱۱ میں دیکھیں گے کہ تمام x کے لیے یہ تسلسل $\cos x$ پر مرکوز ہو گا۔

۱۵۴۹۹ چونکہ $f^{(2n+1)}(0) = 0$ ہے لہٰذا $2n$ اور $2n+1$ رتبی ٹیلر کثیر رکنیاں ایک دوسرے جیسی ہوں گی:

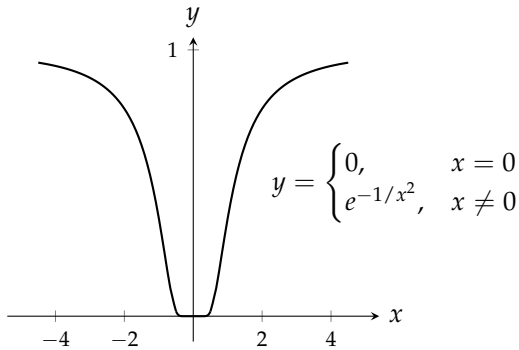
$$P_{2n}(x) = P_{2n+1}(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

۱۵۵۰۰ آپ شکل ۹.۲۷ میں دیکھ سکتے ہیں کہ $x = 0$ کی پڑوس میں یہ کثیر رکنیاں $\cos x$ کے کتنے قریب ہیں۔ چونکہ محور y کے لحاظ سے ترسیمات تشاکلی ہیں
۱۵۵۰۱ لہٰذا انہیں صرف $x \geq 0$ کے لیے دکھایا گیا ہے۔

۱۵۵۰۲ کثیر رکنیاں $P_{2n}(x)$ کوسائن تفاعل پر $n \to \infty$ کرنے سے مرکوز ہوتی ہیں۔ ہم $x = 0$ پر کوسائن اور اس کے تفارق کی قیمتیں جانتے ہوئے کسی
۱۵۵۰۳ بھی فاصلہ پر $\cos x$ کا رویہ جان سکتے ہیں۔ □

۱۵۵۰۴ ایسے لامتناہی گنا قابل تفرق تفاعل جنہیں صرف الگ تھلگ نقطوں پر ٹیلر تسلسل سے ظاہر کرنا ممکن ہوں حقیقتاً بہت کم پائے جاتے ہیں۔

۱۵۵۰۵ **مثال ۹.۵۷:** ایک تفاعل $f(x)$ جس کا ٹیلر تسلسل ہر x پر مرتکز ہے لیکن یہ تسلسل صرف $x = 0$ پر $f(x)$ کو مرتکز ہے۔



شکل ۹.۲۸: صفر پر تفاعل کی ترسیم اتنا (افقی) سیدھا ہے کے یہاں اس کے تمام تفارق 0 ہیں۔

۱۵۵۰۶ یہ (کافی محنت کے بعد) دکھایا جا سکتا ہے کہ $x = 0$ پر

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \end{cases}$$

۱۵۵۰۷ کا ہر رتبے کا تفرق پایا جاتا ہے اور تمام n کے لیے $f^{(n)}(0) = 0$ ہیں۔ اس کا مطلب ہوا کہ $x = 0$ پر f کا پیدا کردہ تسلسل

$$\begin{aligned} f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \cdots \\ &= 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \cdots + 0 \cdot x^n + \cdots \\ &= 0 + 0 + \cdots + 0 + \cdots \end{aligned}$$

۱۵۵۰۸ ہو گا جو ہر x کے لیے مرتکز ہے (جس کا مجموعہ 0 ہے) لیکن یہ صرف $x = 0$ پر $f(x)$ کو مرتکز ہے۔ تفاعل $y = e^{-1/x^2}$ کی استمراری
۱۵۵۰۹ توسیع کی ترسیم (شکل ۹.۲۸) صفر پر اتنا (افقی) سیدھا ہے کہ اس کے تمام تفارق یہاں 0 کے برابر ہیں۔ □

۱۵۵۱۰ دو سوالات اب بھی رہتے ہیں۔

۱۵۵۱۱ ا. ہم x کی کن قیمتوں کے لیے توقع کر سکتے ہیں کہ ایک تفاعل کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل اسی تفاعل پر مرتکز ہو گا؟

۱۵۵۱۲ ب. کسی دیے گئے وقفہ پر ایک تفاعل کا ٹیلر کثیر رکنی تخمین کتنی درستگی کے ساتھ اس تفاعل کو ظاہر کرتا ہے؟

۱۵۵۱۳ ان سوالات کے جوابات اگلے حصہ میں ٹیلر کا ایک مسئلہ دیتا ہے۔

سوالات

ٹیلر تسلسل کا حصول

سوال ۹.۴۷۲ تا سوال ۹.۴۷۹ میں a پر f کے پیدا کردہ 0 ، 1 ، 2 اور 3 رتبی ٹیلر کثیر رکنی حاصل کریں۔

سوال ۹.۴۷۲: $f(x) = \ln x, \quad a = 1$

سوال ۹.۴۷۳: $f(x) = \ln(1 + x), \quad a = 0$

سوال ۹.۴۷۴: $f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 2$

سوال ۹.۴۷۵: $f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad a = 0$

سوال ۹.۴۷۶: $f(x) = \sin x, \quad a = \frac{\pi}{4}$

سوال ۹.۴۷۷: $f(x) = \cos x, \quad a = \frac{\pi}{4}$

سوال ۹.۴۷۸: $f(x) = \sqrt{x}, \quad a = 4$

سوال ۹.۴۷۹: $f(x) = \sqrt{x + 4}, \quad a = 0$

مکلارن تسلسل کا حصول

سوال ۹.۴۸۰ تا سوال ۹.۴۹۱ میں دیے گئے تفاعل کا مکلارن تسلسل تلاش کریں۔

سوال ۹.۴۸۰: e^{-x}

سوال ۹.۴۸۱: $e^{x/2}$

سوال ۹.۴۸۲: $\frac{1}{1+x}$

سوال ۹.۴۸۳: $\frac{1}{1-x}$

سوال ۹.۴۸۴: $\sin 3x$

سوال ۹.۴۸۵: $\sin \frac{x}{2}$

سوال ۹.۴۸۶: $7 \cos(-x)$

سوال ۹.۴۸۷: $5 \cos \pi x$

سوال ۹.۴۸۸: $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

سوال ۹.۴۸۹: $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

سوال ۹.۴۹۰: $x^4 - 2x^3 - 5x + 4$

سوال ۹.۴۹۱: $(x + 1)^2$

ٹیلر تسلسل کی تلاش

سوال ۹.۴۹۲ تا سوال ۹.۴۹۹ میں $x = a$ پر f کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل تلاش کریں۔

سوال ۹.۴۹۲: $f(x) = x^3 - 2x + 4, \quad a = 2$

سوال ۹.۴۹۳: $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x - 8, \quad a = 1$

سوال ۹.۴۹۴: $f(x) = x^4 + x^2 + 1, \quad a = -2$

سوال ۹.۴۹۵: $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x^3 + x^2 - 2, \quad a = -1$

سوال ۹.۴۹۶: $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad a = 1$

سوال ۹.۴۹۷: $f(x) = \frac{x}{1-x}, \quad a = 0$

سوال ۹.۴۹۸: $f(x) = e^x, \quad a = 2$

سوال ۹.۴۹۹: $f(x) = 2^x, \quad a = 1$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۹.۵۰۰: نقطہ $x = a$ پر e^x کا پیدا کردہ تسلسل استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$e^x = e^a[1 + (x-a) + \frac{(x-a)^2}{2!} + \cdots]$$

سوال ۹.۵۰۱: نقطہ $x = 1$ پر e^x کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل تلاش کریں۔ سوال ۹.۵۰۰ میں حاصل کلیہ کے ساتھ اپنے جواب کا موازنہ کریں۔

سوال ۹.۵۰۲: فرض کریں $x = a$ پر $f(x)$ کے n رتبہ تک تمام تفارق پائے جاتے ہوں۔ دکھائیں کہ $x = a$ پر n رتبی ٹیلر کثیر رکنی اور اس کے ابتدائی n تفارق کی قیمتیں وہیں ہیں جو $x = a$ پر f اور اس کے ابتدائی n تفارق کی قیمتیں ہیں۔

سوال ۹.۵۰۳: درجہ $n \leq$ کے تمام کثیر رکنیوں میں سب سے بہتر تخمین n رتبی کثیر رکنی دیتی ہے۔ فرض کریں $f(x)$ ایک وقفہ جس کا مرکز $x = a$ ہو پر قابل تفرق ہے اور $g(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n$ ایک کثیر رکنی ہے جس کا درجہ n اور جس کے عددی سر مستقل b_0، ...، b_n ہیں۔ فرض کریں $E(x) = f(x) - g(x)$ ہے۔ دکھائیں کہ g پر درج ذیل شرائط

ا. $E(a) = 0$ نقطہ $x = a$ پر تخمینی خلل صفر ہے۔

ب. $\lim_{x \to a} \frac{E(x)}{(x-a)^n} = 0$ $(x-a)^n$ کے لحاظ سے خلل قابل نظر انداز ہے۔

لاگو کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

یوں $P_n(x)$ وہ واحد n کے برابر یا اس سے کم درجہ کی کثیر رکنی ہے جس کا خلل $x = a$ پر صفر اور $(x-a)^n$ کے لحاظ سے قابل نظر انداز ہے۔

دو درجی تخمینات

نقطہ $x = a$ پر دوگنا قابل تفرق تفاعل $f(x)$ کی پیدا کردہ 2 رتبی ٹیلر کثیر رکنی کو $x = a$ پر f کی **دو درجی تخمینہ**[۴۵] کہتے ہیں۔ سوال ۹.۵۰۴ تا سوال ۹.۵۰۹ میں $x = 0$ پر f کی (الف) خط بندی (1 رتبی ٹیلر کثیر رکنی) اور (ب) دو درجی تخمین تلاش کریں۔

سوال ۹.۵۰۴: $f(x) = \ln(\cos x)$

سوال ۹.۵۰۵: $f(x) = e^{\sin x}$

سوال ۹.۵۰۶: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

سوال ۹.۵۰۷: $f(x) = \cosh x$

سوال ۹.۵۰۸: $f(x) = \sin x$

سوال ۹.۵۰۹: $f(x) = \tan x$

۹.۱۱ ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ خلل کے اندازے

اس حصہ میں ان دو سوالات کا جواب دیا جائے گا جن کے جوابات حصہ ۹.۱۰ میں نہیں دیے گئے۔

ا. کب ایک ٹیلر تسلسل اپنے پیدا کردہ تفاعل پر مرکوز ہو گا؟

ب. کسی بھی وقفہ پر ایک تفاعل کے ٹیلر کثیر رکنیاں اس تفاعل کی کتنی درست تخمین دیتی ہیں؟

مسئلہ ۹.۱۶:

مسئلہ ٹیلر

اگر $[a,b]$ یا $[b,a]$ پر f اور اس کے n تفارق f'، f''، ...، $f^{(n)}$ استمراری ہوں اور (a,b) یا (b,a) پر $f^{(n)}$ قابل تفرق ہو تب a اور b کے بیچ ایک ایسا عدد c موجود ہو گا جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

مسئلہ ٹیلر در حقیقت مسئلہ اوسط قیمت کی عمومی شکل ہے (سوال ۹.۵۴۸)۔ مسئلہ اوسط قیمت کی عمومی صورت مسئلہ ٹیلر ہے۔ اس حصہ کے آخر میں مسئلہ ٹیلر کا ثبوت پیش کیا گیا ہے۔

---

[۴۵] quadraticapproximation

مسئلہ ٹیلر کو استعمال کرتے ہوئے ہم عموماً a کو مستقل جبکہ b کو غیر تابع متغیر رکھنا چاہتے ہیں۔ ایسی صورتوں میں ہم b کی جگہ x پر کرتے ہیں۔ اس تبدیلی کے بعد یہ مسئلہ درج ذیل پڑھا جائے گا۔

ضمنی نتیجہ ۹.۲: مسئلہ ٹیلر کا ضمنی نتیجہ

مسئلہ ٹیلر

اگر وقفہ I، جس میں a پایا جاتا ہو، میں f کے ہر رتبی تفارق پائے جاتے ہوں، تب ہر مثبت عدد صحیح n اور I میں ہر x کے لیے

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \tag{۱}$$

ہو گا جہاں

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{۲}$$

ہے جبکہ a اور x کے بیچ c کوئی نقطہ ہے۔

مسئلہ ٹیلر کو اس طرح بیان کرنے سے یہ کہتا ہے کہ I میں ہر x کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

ذرہ رک کر اس قابل ذکر مساوات پر غور کریں۔ یہ کلیہ وقفہ I پر کسی بھی n کے لیے f کی اسی رتبے کی تخمینی کثیر رکنی دیتی ہے اور اس تخمین سے پیدا خلل کا کلیہ بھی دیتی ہے۔

مساوات ۱ کو **کلیہ ٹیلر**[۴۶] کہتے ہیں۔ تفاعل $R_n(x)$ کو وقفہ I پر f کی تخمین $P_n(x)$ کا n **رتبی باقی** یا **جزو خلل** کہتے ہیں۔ اگر I میں تمام x کے لیے $n \to \infty$ سے $R_n(x) \to 0$ حاصل ہو تب ہم کہتے ہیں کہ $x = a$ پر f کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل I پر f پر مرکوز ہے جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

مثال ۹.۵۸: تفاعل e^x کا مکلارن تسلسل

دکھائیں کہ $x = 0$ پر $f(x) = e^x$ کا پیدا کردہ ٹیلر تسلسل ہر حقیقی x کے لیے f پر مرکوز ہے۔

حل تمام وقفہ $(-\infty, \infty)$ میں اس تفاعل کے ہر رتبی تفارق پائے جاتے ہیں۔ مساوات ۱ اور مساوات ۲ تفاعل $f(x) = e^x$ اور $a = 0$ لیتے ہوئے

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) \qquad \text{(مثال ۹.۵۵)}$$

---

[۴۶] Taylor'sformula

۱۵۶۰۱ اور

$$R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad \text{0 اور } x \text{ کے بیچ کسی } c \text{ کے لیے}$$

۱۵۶۰۲ دیتے ہیں۔ چونکہ e^x متغیر x کے ساتھ بڑھتا تفاعل ہے، لہٰذا $e^0 = 1$ اور e^x کے بیچ e^c پایا جائے گا۔ جب x منفی ہو تب c بھی منفی اور
۱۵۶۰۳ $e^c < 1$ ہو گا۔ جب x صفر ہو تب $e^x = 1$ اور $R_n(x) = 0$ ہو گا۔ جب x مثبت ہو تب c بھی مثبت اور $e^c < e^x$ ہو گا۔ یوں

$$\left|R_n(x)\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad x \leq 0$$

۱۵۶۰۴ اور

$$\left|R_n(x)\right| < e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \qquad x > 0$$

۱۵۶۰۵ ہوں گے۔ آخر میں، چونکہ تمام x کے لیے

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \qquad \text{(حصہ ۹.۲)}$$

۱۵۶۰۶ ہے لہٰذا $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ ہو گا اور تمام x کے لیے یہ تسلسل e^x پر مرکوز ہو گا۔

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

۱۵۶۰۷ □

۱۵۶۰۸ **باقی کا اندازہ**

۱۵۶۰۹ عموماً $R_n(x)$ کا اندازہ مثال ۹.۵۸ کی طرح لگایا جا سکتا ہے۔ اندازہ لگانے کی یہ ترکیب اتنی آسان ہے کہ مستقل میں استعمال کرنے کی غرض سے ہم اس کو
۱۵۶۱۰ بطور ایک مسئلہ بیان کرتے ہیں۔

۱۵۶۱۱ مسئلہ ۹.۱۷: **مسئلہ اندازہ باقی**

۱۵۶۱۲ اگر ایسے مثبت مستقل M اور r ہوں کہ a اور x کے بشمول اور ان کے بیچ تمام t کے لیے $\left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq Mr^{n+1}$ ہو تب مسئلہ ٹیلر
۱۵۶۱۳ میں جزو باقی درج ذیل عدم مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$\left|R_n(x)\right| \leq M\,\frac{r^{n+1}|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

۱۵۶۱۴ اگر یہ شرائط تمام n کے لیے مطمئن ہوں اور مسئلہ ٹیلر کے باقی تمام شرائط کو f مطمئن کرتا ہو تب یہ تسلسل $f(x)$ پر مرکوز ہو گا۔

سادہ ترین مثال میں ہم $r = 1$ لے سکتے ہیں بشرطیکہ f اور اس کے تفارق کی مقدار کی حد کوئی مستقل M ہو۔ دیگر صورتوں میں ہمیں r کو بھی لینا ہو گا۔ مثال کے طور پر اگر $f(x) = 2\cos(3x)$ ہو تب ہر تفرق جزو ضربی 3 دیگا لہٰذا r کو 1 سے بڑا منتخب کرنا لازمی ہو گا۔ اس مخصوص مثال میں ہم $r = 3$ اور $M = 2$ منتخب کر سکتے ہیں۔

مسئلہ اندازہ باقی اور مسئلہ ٹیلر استعمال کرتے ہوئے ہم اب ارتکاز کے مسائل حل کر سکتے ہیں۔ جیسا آپ دیکھیں گے، ہم ان سے کسی تفاعل کو تخمیناً ٹیلر کثیر رکنی سے ظاہر کرنے کی درستگی بھی جان سکتے ہیں۔

مثال ۹.۵۹: تفاعل $\sin x$ کا مکلارن تسلسل
دکھائیں کہ تمام x کے لیے $\sin x$ کا مکلارن تسلسل $\sin x$ پر مرکوز ہے۔

حل
تفاعل اور اس کے تفارق

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sin x, & f'(x) &= \cos x \\
f''(x) &= -\sin x, & f'''(x) &= -\cos x \\
&\vdots \\
f^{(2k)}(x) &= (-1)^k \sin x, & f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k \cos x
\end{aligned}$$

ہیں لہٰذا

$$f^{(2k)}(0) = 0 \qquad\qquad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$$

ہوں گے۔ تسلسل میں صرف طاق طاقتی اجزاء پائے جائیں گے اور $n = 2k+1$ کے لیے مسئلہ ٹیلر کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_{2k+1}(x)$$

تفاعل $\sin x$ کے تمام تفارق کی مطلق قیمتیں 1 یا اس سے کم ہیں لہٰذا ہم اندازہ باقی کے مسئلہ میں $M = 1$ اور $r = 1$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\left|R_{2k+1}(x)\right| \le 1 \cdot \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}$$

چونکہ کسی بھی x کے لیے $k \to 0$ سے $\left(|x|^{2k+2} / (2k+2)\right) \to 0$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا $R_{2k+1}(x) \to 0$ ہو گا اور تمام x کے لیے $\sin x$ کا مکلارن تسلسل $\sin x$ پر مرکوز ہو گا۔

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \tag{۳}$$

۱۵۶۳۱ □

۱۵۶۳۲ مثال ۹.۶۰: تفاعل $\cos x$ کا مکلارن تسلسل

۱۵۶۳۳ دکھائیں کہ تمام x کے لیے $\cos x$ کا مکلارن تسلسل $\cos x$ پر مرکوز ہے۔

۱۵۶۳۴ **حل**

۱۵۶۳۵ ہم مثال ۹.۵۶ میں حاصل $\cos x$ کی کثیر رکنی کے ساتھ جزو باقی جمع کر کے $\cos x$ کا کلیہ ٹیلر حاصل کرتے ہیں جس میں $n = 2k$ ہو گا:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k}(x)$$

۱۵۶۳۶ چونکہ کوسائن کی مطلق قیمت 1 کے برابر یا اس سے کم ہوتی ہے لہٰذا اندازہ باقی کے مسئلہ $M = 1$ اور $r = 1$ کے ساتھ درج ذیل دیگا۔

$$\left|R_{2k}(x)\right| \leq 1 \cdot \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

۱۵۶۳۷ چونکہ x کی ہر قیمت کے لیے، $k \to \infty$ سے $R_{2k}(x) \to 0$ حاصل ہو گا لہٰذا ہر x کے لیے یہ تسلسل $\cos x$ پر مرکوز ہو گا۔

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{۴}$$

۱۵۶۳۸ □

۱۵۶۳۹ مثال ۹.۶۱: ترکیب بدل سے مکلارن تسلسل کا حصول

۱۵۶۴۰ تفاعل $\cos 2x$ کا مکلارن تسلسل حاصل کریں۔

۱۵۶۴۱ **حل**

۱۵۶۴۲ ہم $\cos x$ کے مکلارن تسلسل میں x کی جگہ $2x$ پر کر کے $\cos 2x$ کا تسلسل حاصل کیا جا سکتا ہے:

$$\begin{aligned}
\cos 2x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x)^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots \qquad \text{مساوات ۴ میں } x \text{ کی جگہ } 2x \\
&= 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} x^{2k}}{(2k)!}
\end{aligned}$$

۱۵۶۴۳ وقفہ $-\infty < x < \infty$ پر مساوات ۴ مطمئن ہوتی ہے لہٰذا وقفہ $-\infty < 2x < \infty$ پر بھی یہ مطمئن ہو گی۔ یوں نیا تسلسل تمام x کے لیے

۱۵۶۴۴ مرتکز ہو گا۔ سوال ۹.۵۵۴ دکھاتا ہے کہ یہ تسلسل درحقیقت $\cos 2x$ کا مکلارن تسلسل ہے۔ □

مثال ۹.۶۲: مکلارن تسلسل کا حصول بذریعہ ضرب
تفاعل $x \sin x$ کا مکلارن تسلسل تلاش کریں۔

حل
ہم $\sin x$ کے مکلارن تسلسل کو x سے ضرب دے کر $x \sin x$ کا مکلارن تسلسل حاصل کر سکتے ہیں:

$$\begin{aligned} x \sin x &= x\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

چونکہ $\sin x$ کا تسلسل تمام x کے لیے مرتکز ہے لہٰذا یہ نیا تسلسل بھی تمام x کے لیے مرتکز ہو گا۔ سوال ۹.۵۵۴ دکھاتا ہے کہ یہ تسلسل درحقیقت $x \sin x$ کا مکلارن تسلسل ہے۔ □

حذفی خلل

تمام x کے لیے e^x کا مکلارن تسلسل e^x پر مرکوز ہے۔ اس کے باوجود کسی مخصوص درستگی تک نتائج حاصل کرنے کے لیے درکار اجزاء کی تعداد جاننا ضروری ہو گا۔ مسئلہ اندازہ باقی ہمیں یہ معلومات فراہم کرتا ہے۔

مثال ۹.۶۳: e کی قیمت تلاش کریں جس میں خلل 10^{-6} سے کم ہو۔

حل
ہم مثال ۹.۵۸ کے نتیجہ میں $x = 1$ لے کر

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n(1)$$

لکھتے ہیں جہاں 0 اور 1 کے بیچ کسی c پر درج ذیل ہو گا۔

$$R_n(1) = e^c \frac{1}{(n+1)!}$$

اس مثال کے لیے ہم فرض کرتے ہیں کہ $e < 3$ ہے۔ چونکہ $0 < c < 1$ کے لیے $1 < e^c < 3$ ہے لہٰذا یقیناً درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{(n+1)!} < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!}$$

تجربہ سے $\frac{1}{9!} > 10^{-6}$ اور $\frac{1}{10!} < 10^{-6}$ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا ہمیں $(n+1)$ کو کم از کم 10، یا n کو کم از کم 9 لینا ہو گا۔ خلل کو 10^{-6} سے کم رکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{9!} \approx 2.718\,282$$

۱۵۶۶۱ □

۱۵۶۶۲ مثال ۹.۶۴: خلل کی مقدار کو 3×10^{-4} سے کم رکھتے ہوئے ہم x کی کن قیمتوں کے لیے $\sin x$ کو $x - \frac{x^3}{3!}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں؟

۱۵۶۶۳ **حل**

۱۵۶۶۴ ہر غیر صفر x کے لیے $\sin x$ کا مکلارن تسلسل ایک بدلتا تسلسل ہے۔ مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ (مسئلہ ۹.۹) کے تحت

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!}\Big| + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

۱۵۶۶۵ کو $\frac{x^3}{3!}$ کے بعد حذف کرنے سے خلل

$$\left|\frac{x^5}{5!}\right| = \frac{|x|^5}{120}$$

۱۵۶۶۶ سے زیادہ نہیں ہو گا۔ یوں اگر

$$\frac{\left|x^5\right|}{120} < 3 \times 10^{-4} \quad \Longrightarrow \quad |x| < \sqrt[5]{360 \times 10^{-4}} \approx 0.514$$ محفوظ رہنے کے لیے نیچے پورو پور

۱۵۶۶۷ ہو تب خلل 3×10^{-4} سے کم یا اس کے برابر ہو گا۔ مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ ہمیں وہ کچھ بتاتا ہے جو مسئلہ اندازہ باقی ہمیں نہیں بتاتا، یعنی، چونکہ مثبت

۱۵۶۶۸ x کے لیے $\frac{x^5}{120}$ مثبت ہو گا لہٰذا $\sin x$ کا اندازہ $x - \frac{x^3}{3!}$ در حقیقت اصل قیمت سے کم ہو گا۔

۱۵۶۶۹ شکل ۹.۲۹ میں $\sin x$ اور اس کی کئی تخمینی ٹیلر کثیر رکنیاں دکھائی گئی ہیں۔ وقفہ $-1 \le x \le 1$ پر کثیر رکنی $P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$ اور

۱۵۶۷۰ تفاعل $\sin x$ کے ترسیمات بالکل ایک دوسرے جیسے ہیں۔

۱۵۶۷۱ آپ سوچ رہے ہوں گے کہ مسئلہ اندازہ باقی اور مسئلہ اندازہ بدلتا تسلسل کے نتائج میں سے کونسا اندازہ بہتر ہے۔ اگر ہم

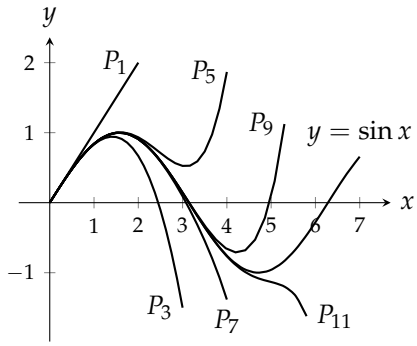
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + R_3$$

۱۵۶۷۲ لکھیں تب مسئلہ اندازہ باقی کے تحت

$$|R_3| \le 1 \cdot \frac{|x|^4}{4!} = \frac{|x|^4}{24}$$

۱۵۶۷۳ ہو گا جو اتنا بہتر نہیں ہے۔ لیکن اگر ہم $x - \frac{x^3}{3!} = 0 + x + 0x^2 - \frac{x^3}{3!} + 0x^4$ لکھیں جو 3 رتبی اور 4 رتبی ٹیلر کثیر رکنی ہے تب

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + 0 + R_4$$



شکل ۹.۲۹: $n \to \infty$ کرنے سے کثیر رکنیاں $\sin x$ پر مرکوز ہوتی ہیں

۱۵۶۷۴ لکھا جا سکتا ہے اور مسئلہ اندازہ باقی میں $M = r = 1$ لیتے ہوئے

$$|R_4| \leq 1 \cdot \frac{|x|^5}{5!} = \frac{|x|^5}{120}$$

۱۵۶۷۵ حاصل ہو گا۔ یہی نتیجہ مسئلہ اندازہ بدلتا تسلسل سے حاصل ہوتا ہے۔ □

۱۵۶۷۶ ٹیلر تسلسلوں کا ملاپ

۱۵۶۷۷ ٹیلر تسلسلوں کے وقفات ارتکاز کے تقاطع پر، ٹیلر تسلسلوں کو جمع، منفی اور مستقل سے ضرب دیا جا سکتا ہے۔ یوں حاصل تسلسل بھی ٹیلر تسلسل ہوں گے۔ تفاعل
۱۵۶۷۸ $f(x) + g(x)$ کا ٹیلر تسلسل $f(x)$ اور $g(x)$ کے ٹیلر تسلسلوں کا مجموعہ ہو گا۔ اسی طرح 1 کے ساتھ $\cos 2x$ کا مکلارن تسلسل جمع کر کے
۱۵۶۷۹ نتیجہ کو 2 سے تقسیم کرنے سے $\frac{1+\cos 2x}{2}$ کا مکلارن تسلسل حاصل ہو گا۔ $\sin x$ اور $\cos x$ کے مکلارن تسلسلوں کو جزو در جزو جمع کرنے سے
۱۵۶۸۰ $\sin x + \cos x$ کا مکلارن تسلسل حاصل ہو گا۔

۱۵۶۸۱ کلیہ یولر

۱۵۶۸۲ آپ جانتے ہیں کہ $a + ib$ روپ کے عدد کو مخلوط عدد کہتے ہیں، جہاں a اور b مستقل ہیں جبکہ $i = \sqrt{-1}$ ہے۔ اگر ہم e^x کے مکلارن تسلسل
۱۵۶۸۳ میں $x = i\theta$ پر کریں، جہاں θ حقیقی ہو، اور درج ذیل تعلقات استعمال کریں

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 i = -i, \quad i^2 = i^2 i^2 = 1, \quad i^5 = i^4 i = i, \quad \cdots$$

۱۵۶۸۴ تب درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{i^2\theta^2}{2!} + \frac{i^3\theta^3}{3!} + \frac{i^4\theta^4}{4!} + \frac{i^5\theta^5}{5!} + \frac{i^6\theta^6}{6!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

۱۵۶۸۵ چونکہ ہم e کے خیالی طاقت کی تعریف نہیں جانتے ہیں لہٰذا درج بالا مساوات $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ کو ثابت نہیں کرتا ہے۔ البتہ یہ مساوات
۱۵۶۸۶ ہمیں $e^{i\theta}$ کی ایسی تعریف پیش کرنے کا طریقہ دیتی ہے جو باقی ان تمام چیزوں کے ساتھ مطابقت رکھتی ہو جنہیں ہم جانتے ہیں۔

۱۵۶۸۷ تعریف: کسی بھی حقیقی عدد θ کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{۵}$$

۱۵۶۸۸ □

۱۵۶۸۹ مساوات ۵ جو **کلیہ یولر**[۴۷] کہلاتی ہے، کسی بھی مخلوط عدد $a + ib$ کے لیے ہمیں e^{a+ib} کی تعریف $e^a \cdot e^{ib}$ دیتی ہے۔

۱۵۶۹۰ **مسئلہ ٹیلر کا ثبوت**

۱۵۶۹۱ ہم $a < b$ فرض کرتے ہوئے مسئلہ ٹیلر ثابت کرتے ہیں۔ ($a > b$ کے لیے بھی ثبوت تقریباً ایسا ہے۔)

۱۵۶۹۲ نقطہ $x = a$ پر ٹیلر کثیر رکنی

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

۱۵۶۹۳ اور اس کے ابتدائی n تفارق، تفاعل f اور اس کے ابتدائی n تفارق کے موافق ہیں۔ اس میں $K(x-a)^{n+1}$ طرز کا جزو، جہاں K مستقل ہے،
۱۵۶۹۴ شامل کرنے سے یہ موافقت خراب نہیں ہوتی ہے چونکہ $x = a$ پر ایسا جزو اور اس کے تمام تفارق صفر ہیں۔ نقطہ $x = a$ پر یہ نیا تفاعل

$$\phi_n(x) = P_n(x) + K(x-a)^{n+1}$$

۱۵۶۹۵ اور اس کے ابتدائی n تفارق، f اور اس کے ابتدائی n تفارق کے ساتھ موافقت رکھیں گے۔

۱۵۶۹۶ ہم ایسا K منتخب کرتے ہیں کہ $x = b$ پر $y = \phi_n(x)$ کی منحنی اور اصل تفاعل $y = f(x)$ کی منحنی ایک دوسری جیسی ہوں، یعنی:

$$f(b) = P_n(b) + K(b-a)^{n+1} \quad \Longrightarrow \quad K = \frac{f(b) - P_n(b)}{(b-a)^{n+1}} \tag{۶}$$

---

[۴۷] Euler'sformula

۱۵۶۹۷ جب K کی قیمت مساوات ۶ دیتی ہو تب وقفہ $[a,b]$ میں تمام x کے لیے اصل تفاعل f اور تخمینی تفاعل ϕ_n میں فرق درج ذیل تفاعل دیگا۔

$$F(x) = f(x) - \phi_n(x)$$

۱۵۶۹۸ ہم اب مسئلہ رول (حصہ ۴.۲) استعمال کرتے ہیں۔ پہلی بات، چونکہ $F(a) = F(b) = 0$ ہے اور $[a,b]$ پر F اور F' استراری ہیں، ہم
۱۵۶۹۹ جانتے ہیں کہ

$$F'(c_1) = 0 \qquad \text{پر } c_1 \text{ میں کسی } (a,b)$$

۱۵۷۰۰ ہوگا۔ دوسری بات، چونکہ $F'(a) = F'(c_1) = 0$ ہے اور ساتھ ہی F' اور F'' دونوں $[a,c_1]$ پر استراری ہیں، ہم جانتے ہیں کہ

$$F''(c_2) = 0 \qquad \text{پر } c_2 \text{ میں کسی } (a,c_1)$$

۱۵۷۰۱ ہوگا۔ یکے بعد دیگرے F'' ، F''' ، . . . ، $F^{(n-1)}$ پر مسئلہ رول کے اطلاق سے درج ذیل مراد لیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
&\text{ہو، } F'''(c_3) = 0 \text{ کہ } c_3 \text{ میں ایسا } (a,c_2)\\
&\text{ہو، } F^{(4)}(c_4) = 0 \text{ کہ } c_4 \text{ میں ایسا } (a,c_3)\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\text{ہو۔ } F^{(n)}(c_n) = 0 \text{ کہ } c_n \text{ میں ایسا } (a,c_{n-1})
\end{aligned}$$

۱۵۷۰۲ آخر میں چونکہ $[a,c_n]$ پر $F^{(n)}$ استراری اور (a,c_n) پر قابل تفرق ہے، اور $F^{(n)}(a) = F^{(n)}(c_n) = 0$ ہے، مسئلہ رول سے
۱۵۷۰۳ مراد لیا جا سکتا ہے کہ (a,c_n) میں ایسا عدد c_{n+1} پایا جاتا ہے کہ درج ذیل مطمئن ہو۔

$$F^{(n+1)}(c_{n+1}) = 0 \tag{۷}$$

۱۵۷۰۴ تفاعل $F(x) = f(x) - P_n(x) - K(x-a)^{n+1}$ کا $n+1$ گنا تفرق درج ذیل ہوگا۔

$$F^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 - (n+1)!K \tag{۸}$$

۱۵۷۰۵ مساوات ۷ اور مساوات ۸ مل کر

$$K = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \qquad \text{پر } c = c_{n+1} \text{ میں کسی } (a,b) \tag{۹}$$

۱۵۷۰۶ دیتے ہیں۔ مساوات ۶ اور مساوات ۹ درج ذیل دیتے ہیں۔

$$f(b) = P_n(b) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

۱۵۷۰۷ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

سوالات

مکلارن تسلسل بذریعہ بدل

سوال ۹.۵۱۰ تا سوال ۹.۵۱۵ میں (مثال ۹.۶۱ کی طرح) ترکیب بدل سے تفاعل کا مکلارن تسلسل حاصل کریں۔

سوال ۹.۵۱۰: e^{-5x}

سوال ۹.۵۱۱: $e^{-x/2}$

سوال ۹.۵۱۲: $5\sin(-x)$

سوال ۹.۵۱۳: $\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

سوال ۹.۵۱۴: $\cos\sqrt{x}$

سوال ۹.۵۱۵: $\cos\left(\frac{x^{3/2}}{\sqrt{2}}\right)$

مزید مکلارن تسلسل

سوال ۹.۵۱۶ تا سوال ۹.۵۲۷ میں دیے گئے تفاعل کے مکلارن تسلسل حاصل کریں۔

سوال ۹.۵۱۶: xe^x

سوال ۹.۵۱۷: $x^2\sin x$

سوال ۹.۵۱۸: $\frac{x^2}{2} - 1 + \cos x$

سوال ۹.۵۱۹: $\sin x - x + \frac{x^3}{3!}$

سوال ۹.۵۲۰: $x\cos \pi x$

سوال ۹.۵۲۱: $x^2\cos(x^2)$

سوال ۹.۵۲۲: $\cos^2 x$ (اشارہ: $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$)

سوال ۹.۵۲۳: $\sin^2 x$

سوال ۹.۵۲۴: $\frac{x^2}{1-2x}$

سوال ۹.۵۲۵: $x\ln(1+2x)$

سوال ۹.۵۲۶: $\frac{1}{(1-x)^2}$

سوال ۹.۵۲۷: $\frac{2}{(1-x)^3}$

اندازہ خلل

سوال ۹.۵۲۸: خلل کی مقدار 5×10^{-4} سے بڑھائے بغیر x کی کن قیمتوں کے لیے $\sin x$ کو $x - \frac{x^3}{6}$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۹.۵۲۹: اگر $\cos x$ کو $1 - \frac{x^2}{2}$ سے ظاہر کیا جائے اور $|x| < 0.5$ ہو تب خلل کا اندازہ لگائیں۔ کیا $1 - \frac{x^2}{2}$ اصل سے زیادہ یا کم ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۹.۵۳۰: اگر $|x| < 10^{-3}$ ہو تب تخمین $\sin x = x$ کتنا درست ہو گا؟ x کی کن قیمتوں کے لیے $x < \sin x$ ہو گا؟

سوال ۹.۵۳۱: چھوٹے x کے لیے تخمین $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$ استعمال کیا جاتا ہے۔ خلل کا اندازہ $|x| < 0.01$ کی صورت میں لگائیں۔

سوال ۹.۵۳۲: تخمین $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ چھوٹے x کی صورت میں استعمال کیا جاتا ہے۔ مسئلہ اندازہ باقی استعمال کرتے ہوئے $|x| < 0.1$ کے لیے خلل تلاش کریں۔

سوال ۹.۵۳۳: تفاعل e^x کا تسلسل $x < 0$ کی صورت میں بدلتا تسلسل ہو گا (سوال ۹.۵۳۲)۔ تفاعل e^x کی جگہ $1 + x + \frac{x^2}{2}$ استعمال کرتے ہوئے مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ کی مدد سے $-0.1 < x < 0$ کی صورت میں خلل کا اندازہ لگائیں۔ اپنے جواب کا موازنہ سوال ۹.۵۳۲ کے نتیجہ کے ساتھ کریں۔

سوال ۹.۵۳۴: تخمین $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!}$ میں $|x| < 0.5$ کی صورت میں خلل کا اندازہ لگائیں۔ (اشارہ: R_4 استعمال کریں نا کہ R_3)

سوال ۹.۵۳۵: جب $0 \leq h \leq 0.01$ ہو، دکھائیں کہ e^h کی جگہ $1 + h$ استعمال کرنے سے پیدا خلل h کے $6\,\%$ سے تجاوز نہیں کرے گا۔ یہاں $e^{0.01} = 1.01$ استعمال کریں۔

سوال ۹.۵۳۶: تفاعل $\ln(1 + x)$ کو x کی کن مثبت قیمتوں کے لیے تخمیناً x لکھتے ہوئے خلل کی مقدار x کی $1\,\%$ سے تجاوز نہیں کرے گی؟

سوال ۹.۵۳۷: آپ $x = 1$ پر $\tan^{-1} x$ کے مکلارن تسلسل سے $\frac{\pi}{4}$ کی اندازاً قیمت دریافت کرنا چاہتے ہیں۔ نتیجہ 2 اعشاریہ مقامات تک درست حاصل کرنے کے لیے درکار اجزاء کی تعداد، مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ استعمال کرتے ہوئے معلوم کریں۔

سوال ۹.۵۳۸:

ا. تفاعل $\sin x$ کا مکلارن تسلسل اور مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin x}{x} < 1 \qquad x \neq 0$$

ب. وقفہ $-5 \leq x \leq 5$ کے لیے $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ کے ساتھ $y = 1 - \frac{x^2}{6}$ اور $y = 1$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ ترسیمات کے آپس میں تعلق پر تبصرہ کریں۔

سوال ۹.۵۳۹:

ا. تفاعل $\cos x$ کا مکلارن تسلسل اور مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} < \frac{1 - \cos x}{x^2} < \frac{1}{2} \qquad x \neq 0$$

ب. وقفہ $-9 \le x \le 9$ پر تفاعل $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ کے ساتھ $y = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{24}$ اور $y = \frac{1}{2}$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ان ترسیمات کا ایک دوسرے کے ساتھ تعلق پر تبصرہ کریں۔

مکلارن تسلسل کا حصول اور اس کی پہچان

سوال ۹.۵۴۰ تا سوال ۹.۵۴۳ میں کسی نقطہ پر تفاعل $f(x)$ کے مکلارن تسلسل کی قیمت دی گئی ہے۔ تفاعل اور نقطہ کی نشاندہی کریں۔ تسلسل کے مجموعہ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۹.۵۴۰: $(0.1) - \frac{(0.1)^3}{3!} + \frac{(0.1)^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^k(0.1)^{2k+1}}{(2k+1)!} + \cdots$

سوال ۹.۵۴۱: $1 - \frac{\pi^2}{4^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{4^4 \cdot 4!} - \cdots + \frac{(-1)^k(\pi)^{2k}}{4^{2k} \cdot (2k!)} + \cdots$

سوال ۹.۵۴۲: $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi^3}{3^3 \cdot 3} + \frac{\pi^5}{3^5 \cdot 5} - \cdots + \frac{(-1)^k \pi^{2k+1}}{3^{2k+1}(2k+1)} + \cdots$

سوال ۹.۵۴۳: $\pi - \frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{k-1}\pi^k}{k} + \cdots$

سوال ۹.۵۴۴: تفاعل $e^x \sin x$ کے مکلارن تسلسل کے ابتدائی پانچ غیر صفر اجزاء دریافت کرنے کی خاطر e^x اور $\sin x$ کے مکلارن تسلسلوں کو ضرب کریں۔

سوال ۹.۵۴۵: تفاعل $e^x \cos x$ کے مکلارن تسلسل کے ابتدائی پانچ غیر صفر اجزاء دریافت کرنے کی خاطر e^x اور $\cos x$ کے مکلارن تسلسلوں کو ضرب کریں۔

سوال ۹.۵۴۶: تفاعل $\sin^2 x$ کے مکلارن تسلسل کو مماثل $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ کی مدد سے تلاش کریں۔اس تسلسل کا تفرق لے کر $2 \sin x \cos x$ کا مکلارن تسلسل دریافت کریں۔اس کو پرکھیں کہ یہ $\sin 2x$ کا تسلسل ہے۔

سوال ۹.۵۴۷: تفاعل $\cos^2 x$ کا طاقتی تسلسل $\cos^2 x = \cos 2x + \sin^2 x$ کی مدد سے حاصل کریں (سوال ۹.۵۴۶)۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۹.۵۴۸: مسئلہ ٹیلر اور مسئلہ اوسط قیمت

سمجھائیں کیسے مسئلہ اوسط قیمت (مسئلہ ۴.۴) در حقیقت مسئلہ ٹیلر کی ایک مخصوص صورت ہے۔

سوال ۹.۵۴۹: نقاط تصریف پر خط بندی (سوال ۴.۴۶۷ جاری)

دکھائیں اگر دوگنا قابل تفرق تفاعل f کا $x = a$ پر نقطہ تصریف پایا جاتا ہو، تب $x = a$ پر f کی خط بندی، $x = a$ پر f کی دو درجی تخمین بھی ہو گی۔اس سے سمجھ آتی ہے کہ نقطہ تصریف پر مماس کیوں ترسیم پر اتنا بہتر بیٹھتا ہے۔

سوال ۹.۵۵۰: دوگنا تفرقی پرکھ

درج ذیل مساوات

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(c_2)}{2}(x-a)^2$$

استعمال کرتے ہوئے درج ذیل پرکھ کی تصدیق کریں۔

فرض کریں f کا ایک گنا اور دوگنا استمراری تفرق پایا جاتا ہے اور $f'(a) = 0$ ہے۔تب درج ذیل ہو گا۔

ا. اگر ایک پورے وقفہ، جس کے اندرون میں a پایا جاتا ہو، میں $f'' \leq 0$ ہو تب f کا a پر مقامی زیادہ سے زیادہ پایا جائے گا۔

ب. اگر ایک پورے وقفہ، جس کے اندرون میں a پایا جاتا ہو، میں $f'' \geq 0$ ہو تب f کا a پر مقامی کم سے کم پایا جائے گا۔

سوال ۹.۵۵۱: کعبی تخمین

کلیہ ٹیلر میں $a = 0$ اور $n = 3$ لیتے ہوئے $x = 0$ پر $f(x) = \frac{1}{1-x}$ کی معیاری کعبی تخمین تلاش کریں۔ اس تخمین کے خلل کی بالائی حد $|x| \leq 0.1$ کی صورت میں تلاش کریں۔

سوال ۹.۵۵۲:

ا. کلیہ ٹیلر میں $n = 2$ لیتے ہوئے $x = 0$ پر $f(x) = (1+x)^k$ (جہاں k مستقل ہے) کی دو درجی تخمین تلاش کریں۔

ب. وقفہ $[0, 1]$ میں $k = 3$ کی صورت میں x کی کن قیمتوں کے لیے دو درجی تخمین کا خلل $\frac{1}{100}$ سے کم ہو گا؟

سوال ۹.۵۵۳: π کی بہتر تخمین

ا. فرض کریں n اعشاریہ مقامات تک درستگی تک π کی تخمین P ہے۔ دکھائیں کہ $P = \sin P$ کی درستگی $3n$ اعشاریہ ہو گی۔ (اشارہ: $P = \pi + x$ لیں۔)

ب. کیلکولیٹر کی مدد سے اس کی تصدیق کریں۔

سوال ۹.۵۵۴: تفاعل $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ کا پیدا کردہ مکلارن تسلسل $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ہے۔ ایک تفاعل جس کے طاقتی تسلسل کا رداس ارتکاز $c > 0$ ہو، کا مکلارن تسلسل وقفہ $(-c, c)$ کے ہر نقطہ پر f پر مرکوز ہو گا۔ اس کی تصدیق کی خاطر دکھائیں کہ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ کا مکلارن تسلسل از خود $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ہو گا۔

نتیجتاً مکلارن تسلسل کو x سے ضرب دے کر حاصل تسلسل مثلاً

$$x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \frac{x^8}{7!} + \cdots$$

یا

$$x^2 e^x = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^5}{3!} + \cdots$$

اور ساتھ ہی مرتکز طاقتی تسلسل کے تفرق یا تکمل سے حاصل تسلسل بھی ان تفاعل کے مکلارن تسلسل ہوں گے جو انہیں پیدا کرتے ہیں۔

سوال ۹.۵۵۵: طاق اور جفت تفاعل کے مکلارن تسلسل (سوال ۹.۴۶۸ جاری)

فرض کریں کھلا وقفہ $(-c, c)$ میں تمام x کے لیے $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ مرتکز ہو۔ دکھائیں کہ

ا. اگر f جفت ہو تب $a_1 = a_3 = a_5 = \cdots = 0$ ہوں گے اور f کے تسلسل میں صرف جفت طاقت ہوں گے۔

ب. اگر f طاق ہو تب $a_2 = a_4 = a_6 = \cdots = 0$ ہوں گے اور f کے تسلسل میں صرف طاق طاقت ہوں گے۔

سوال ۹.۵۵۶: دوری تفاعل کے ٹیلر کثیر رکنیاں

ا. یہ دکھانے کی خاطر کہ ہر استراری دوری تفاعل $f(x), -\infty < x < \infty$ محدود ہو گا، دکھائیں کہ ہر x کے لیے ایسا مثبت مستقل M موجود ہو گا کہ $|f(x)| \leq M$ مطمئن ہو۔

ب. دکھائیں کہ $f(x) = \cos x$ کا ہر پیدا کردہ مثبت درجی ٹیلر کثیر رکنی، $|x|$ بڑھانے سے آخر کار $\cos x$ کی ترسیم سے دور ہٹے گا۔ شکل ۹.۲۷ میں اس عمل کو آپ دیکھ سکتے ہیں۔ شکل ۹.۲۹ میں $\sin x$ کی کثیر رکنیوں کا رویہ بھی ایسا ہے۔

سوال ۹.۵۵۷:

ا. منحنی $y = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{5}$ اور $y = \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3}$ کے ساتھ $y = \frac{1}{3}$ کو ترسیم کریں۔

ب. جو کچھ آپ کو نظر آتا ہے اس کو مکلارن تسلسل کی مدد سے سمجھائیں۔ درج ذیل کیا ہو گا؟

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \tan^{-1} x}{x^3}$$

کلیہ یولر

سوال ۹.۵۵۸: درج ذیل e کی طاقتوں کو مساوات ۵ کی مدد سے $a + ib$ کے روپ میں لکھیں۔

ا. $e^{-i\pi}$ ب. $e^{i\pi/4}$ ج. $e^{-i\pi/2}$

سوال ۹.۵۵۹: یولر مماثل

درج ذیل مساوات ۵ کی مدد سے حاصل کریں۔

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \qquad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

سوال ۹.۵۶۰: تفاعل $e^{i\theta}$ اور $e^{-i\theta}$ کے معیاری مکلارن تسلسل استعمال کرتے ہوئے سوال ۹.۵۵۹ کے مماثل کی تصدیق کریں۔

سوال ۹.۵۶۱: درج ذیل دکھائیں۔

ا. $\cosh i\theta = \cos\theta$ ب. $\sinh i\theta = i \sin\theta$

سوال ۹.۵۶۲: تفاعل e^x اور $\sin x$ کے مکلارن تسلسلوں کو آپس میں ضرب کرتے ہوئے $e^x \sin x$ کے مکلارن تسلسل کے x^5 تک اجزاء تلاش کریں۔ یہ تسلسل $e^x \cdot e^{ix} = e^{(1+i)x}$ کا خیالی حصہ ہو گا۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے اپنے نتیجہ کی تصدیق کریں۔ تفاعل $e^x \sin x$ کا تسلسل x کی کن قیمتوں کے لیے مرتکز ہو گا؟

سوال ۹.۵۶۳: حقیقی a اور b کے لیے ہم $e^{(a+ib)x}$ کی تعریف درج ذیل مساوات لیتے ہیں۔

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$$

اس مساوات کے دائیں ہاتھ کا تفرق لیتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{(a+ib)x} = (a+ib)e^{(a+ib)x}$$

یوں تفرق کا جانا پہچانا قاعدہ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{kx} = ke^{kx}$ حقیقی k کے ساتھ ساتھ مخلوط k کے لیے بھی درست ہے۔

سوال ۹.۵۶۴: تفاعل $e^{i\theta}$ کی تعریف استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ کسی بھی حقیقی اعداد θ ، θ_1 اور θ_2 کے لیے درج ذیل ہو گا۔

ا. $e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

ب. $e^{-i\theta} = 1/e^{i\theta}$

سوال ۹.۵۶۵: دو مخلوط اعداد $a+ib$ اور $c+id$ صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے اگر $a=c$ اور $b=d$ ہوں۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x \quad \text{اور} \quad \int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$$

کی قیمتیں

$$\int e^{(a+ib)x}\,\mathrm{d}x = \frac{a-ib}{a^2+b^2}e^{(a+ib)x} + \mathrm{C}$$

سے حاصل کریں جہاں $\mathrm{C} = \mathrm{C}_1 + i\mathrm{C}_2$ تکمل کا مخلوط مستقل ہے۔

کمپیوٹر کا استعمال: خطی، دو درجی اور کعبی تخمین

کلیہ ٹیلر میں $n=1$ اور $a=0$ پر کرنے سے $x=0$ پر تفاعل کی خطی تخمین حاصل ہوتی ہے جبکہ $n=2$ اور $n=3$ لینے سے بالترتیب معیاری دو درجی اور کعبی تخمین حاصل ہوتی ہیں۔ ان سوالات میں ہم ان تخمینات سے پیدا خلل پر غور کرتے ہیں۔ ہم دو سوالات کے جوابات جاننا چاہتے ہیں:

ا. خلل کو 10^{-2} سے کم رکھتے ہوئے x کی کن قیمتوں کے لیے تفاعل کی جگہ یہ تخمین استعمال کیے جا سکتے ہیں؟

ب. کسی مخصوص وقفہ پر تفاعل کی جگہ ان تخمین کے استعمال سے زیادہ سے زیادہ خلل کتنا متوقع ہو گا؟

کمپیوٹر کی مدد لیتے ہوئے سوال ۹.۵۶۶ تا سوال ۹.۵۷۱ میں دیے تفاعل اور وقفات کے لیے درج ذیل اقدام سے سوال-ا اور سوال-ب کے جوابات حاصل کریں۔

ا. دیے گئے وقفہ پر تفاعل ترسیم کریں۔

۲. نقطہ $x=0$ پر ٹیلر کثیر رکنیاں $P_1(x)$ ، $P_2(x)$ اور $P_3(x)$ تلاش کریں۔

۳. ہر ایک ٹیلر کثیر رکنی کے لیے باقی جزو سے وابستہ $(n+1)$ واں تفرق $f^{(n+1)}(c)$ حاصل کریں۔ اس تفرق کو دیے گئے وقفہ پر c کے لحاظ سے ترسیم کر کے اس کی زیادہ سے زیادہ مطلق قیمت M کا اندازہ لگائیں۔

۴. ہر ایک کثیر رکنی کے لیے باقی $R_n(x)$ تلاش کریں۔ قدم-3 میں اندازاً حاصل M کو $f^{(n+1)}(c)$ کی جگہ پر کرتے ہوئے دیے گئے وقفہ پر $R_n(x)$ ترسیم کر کے اس سے x کی قیمت سوال-ا کے لیے حاصل کریں۔

۵. دیے گئے وقفہ پر $E_n(x)$ ترسیم کر کے اندازاً خلل کا اصل خلل $E_n(x) = \left|f(x) - P_n(x)\right|$ کے ساتھ موازنہ کریں۔ یہ سوال-ب کا جواب حاصل کرنے میں مدد کرے گا۔

۶. اصل تفاعل اور اس کے تین تخمینی ٹیلر کثیر رکنیوں کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ قدم 4 اور 5 میں حاصل معلومات کے لحاظ سے ان ترسیمات پر تبصرہ کریں۔

سوال ۹.۵۶۶: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}, \quad |x| \leq \frac{3}{4}$

سوال ۹.۵۶۷: $f(x) = (1+x)^{3/2}, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

سوال ۹.۵۶۸: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}, \quad |x| \leq 2$

سوال ۹.۵۶۹: $f(x) = (\cos x)(\sin 2x), \quad |x| \leq 2$

سوال ۹.۵۷۰: $f(x) = e^{-x}\cos 2x, \quad |x| \leq 1$

سوال ۹.۵۷۱: $f(x) = e^{x/3}\sin 2x, \quad |x| \leq 2$

۹.۱۲ طاقتی تسلسل کے استعمال

اس حصہ میں ثنائی تسلسل متعارف کرایا جائے گا جو طاقت اور جذر کا اندازہ کرنے میں مددگار ثابت ہوتا ہے۔ مزید ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کو تخمیناً تسلسل سے ظاہر کرنا اور غیر بنیادی تکمل کے قیمت کے حصول میں تسلسل کا کردار دکھایا جائے گا۔ ایسے حد جو غیر معین صورت دیتے ہوں کا حل بھی سکھایا جائے گا۔ ہم $\tan^{-1} x$ کے مکلارن تسلسل کا ایک مختصر طریقہ دکھائیں گے اور بار بار استعمال ہونے والے تسلسلوں کی جدول کا ذکر کریں گے۔

طاقت اور جذر کے لیے ثنائی تسلسل

تفاعل $f(x) = (1+x)^m$ جہاں m مستقل ہے، کا مکلارن تسلسل درج ذیل ہے

$$(۱) \quad 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}x^k + \cdots$$

۱۵۸۷۱ جس کو **ثنائی تسلسل**[۴۸] کہتے ہیں اور جو $|x| < 1$ کے لیے مطلق مرتکز ہے۔ یہ تسلسل حاصل کرنے کی خاطر ہم تفاعل اور اس کے تفارق لکھتے ہیں:

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^m \\
f'(x) &= m(1+x)^{m-1} \\
f''(x) &= m(m-1)(1+x)^{m-2} \\
f'''(x) &= m(m-1)(m-2)(m-3)(1+x)^{m-3} \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k}
\end{aligned}$$

۱۵۸۷۲ نقطہ $x = 0$ پر ان کی قیمتیں دریافت کر کے مکلارن تسلسل کے کلیہ میں پر کرتے ہوئے مساوات ا کا تسلسل حاصل ہو گا۔

۱۵۸۷۳ اگر m عدد صحیح ہو جو صفر یا اس سے بڑا ہو تب $k = m+1$ عددی سر سے تمام عددی سر صفر ہوں گے لہٰذا $(m+1)$ اجزاء کے بعد یہ تسلسل
۱۵۸۷۴ رک جاتا ہے۔

۱۵۸۷۵ اگر m صفر یا مثبت عدد صحیح نہ ہو تب یہ تسلسل لامتناہی اجزاء پر مشتمل ہو گا جو $|x| < 1$ کے لیے مرتکز ہو گا۔ اس کی وجہ دیکھنے کی خاطر فرض کریں u_k
۱۵۸۷۶ وہ جزو ہے جس میں x^k پایا جاتا ہو۔ اب مطلق ارتکاز کے تناسبی پرکھ سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{m-k}{k+1}x\right| \to |x| \qquad k \to \infty$$

۱۵۸۷۷ ثنائی تسلسل کا حصول ہمیں صرف اتنا بتاتا ہے کہ $(1+x)^m$ اس کو پیدا کرتا ہے اور $|x| < 1$ کے لیے یہ تسلسل مرتکز ہے۔ تسلسل کا حصول ہمیں یہ
۱۵۸۷۸ نہیں دکھاتا ہے کہ یہ تسلسل $(1+x)^m$ پر مرکوز ہے۔ حقیقت میں یہ تسلسل $(1+x)^m$ پر مرکوز ہے، جس کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا۔

$$\begin{aligned}
(1+x)^m &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, && -1 < x < 1 \\
\binom{m}{1} &= m, \quad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!} && \text{جہاں} \\
\binom{m}{k} &= \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!} && \text{اور} \quad k \geq 3 \quad \text{کے لیے}
\end{aligned} \tag{۲}$$

۱۵۸۷۹ ہوں گے۔

---

[۴۸] binomialseries

۱۵۸۸۰ مثال ۹.۶۵: اگر $m = -1$ ہو تب

$$\binom{-1}{1} = -1, \quad \binom{-1}{2} = \frac{(-1)(-2)}{2!} = 1,$$
$$\binom{-1}{k} = \frac{(-1)(-2)(-3)\cdots(-1-k+1)}{k!} = (-1)^k\binom{k!}{k!} = (-1)^k$$

۱۵۸۸۱ ہوں گے اور مساوات ۲ درج ذیل ثنائی تسلسل دے گی۔

$$(1+x)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^k x^k + \cdots$$

۱۵۸۸۲ □

۱۵۸۸۳ مثال ۹.۶۶: ہم مثال ۴.۴۰ سے جانتے ہیں کہ چھوٹے $|x|$ کے لیے $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ ہو گا۔ ثنائی تسلسل میں $m = \frac{1}{2}$ لیتے ہوئے دو
۱۵۸۸۴ درجی اور بلند رتبی تخمین حاصل ہوتے ہیں، اور ساتھ ہی اندازہ خلل بھی حاصل ہوتا ہے جو مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ خلل دیتا ہے:

$$\begin{aligned}(1+x)^{1/2} &= 1 + \frac{x}{2} + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3 \\ &\qquad + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{4!}x^4 + \cdots \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \cdots\end{aligned}$$

۱۵۸۸۵ دیگر تخمین x کی مختلف قیمتیں پر کرتے ہوئے حاصل ہوں گی۔ مثال کے طور پر:

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} \qquad \text{چھوٹے } \left|x^2\right| \text{ کے لیے}$$
$$\sqrt{1-\frac{1}{x}} \approx 1 - \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} \qquad \text{چھوٹا } \left|\frac{1}{x}\right| \text{ یعنی بڑا } |x|$$

۱۵۸۸۶ □

۱۵۸۸۷ تفرقی مساوات کے طاقتی تسلسل حل اور ابتدائی قیمت مسائل

۱۵۸۸۸ ابتدائی قیمت مسئلے کے حل کی سادہ صورت حاصل کرنے میں ناکامی کی صورت میں ہم حل کے بارے میں معلومات دیگر طریقوں سے حاصل کرنے کی کوشش
۱۵۸۸۹ کرتے ہیں۔ ایک طریقہ ہے کہ ہم حل کی طاقتی تسلسل روپ حاصل کریں۔ اگر ہم ایسا کر پائیں تو ہمیں حل کی تخمینی کثیر رکنی حاصل ہو گی۔ حقیقت میں عموماً
۱۵۸۹۰ ہمیں یہی درکار ہوتا ہے۔ ہماری پہلی مثال (مثال ۹.۶۷) یک رتبی خطی تفرقی مساوات ہے جس کو ہم حصہ ۷.۱۱ کے تراکیب سے حل کر سکتے ہیں۔ اس مثال

میں ہم فرض کرتے ہیں کہ ہم دیے گئے تفرقی مساوات کو حل کرنا نہیں جانتے ہیں اور اس کو طاقتی تسلسل کے مدد سے حل کرتے ہیں۔ اگلی مثال (مثال ۹.۶۸) کو حصہ ۷.۱۱ کے تراکیب سے حل کرنا ممکن نہیں ہے۔

مثال ۹.۶۷: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$y' - y = x, \quad y(0) = 1$$

حل

ہم فرض کرتے ہیں کہ اس کے حل کا روپ درج ذیل ہے۔

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + \cdots \tag{۳}$$

ہم عددی سروں a_k کی ایسی قیمتیں تلاش کرتے ہیں کہ یہ تسلسل اور اس کا یک رتبی تفرق

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots \tag{۴}$$

دیے گئے تفرقی مساوات اور ابتدائی شرائط کو مطمئن کرتے ہوں۔ تسلسل $y' - y$ درحقیقت مساوات ۳ اور مساوات ۴ کا فرق ہے:

$$\begin{aligned} y' - y = (a_1 - a_0) + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - a_2)x^2 + \cdots \\ + (na_n - a_{n-1})x^{n-1} + \cdots \end{aligned} \tag{۵}$$

اگر y نے $y' - y = x$ کو مطمئن کرنا ہو تب مساوات ۵ میں دیا گیا تسلسل لازماً x کے برابر ہوگا۔ چونکہ طاقتی تسلسل روپ یکتا ہوتے ہیں (جیسا آپ نے سوال ۹.۴۶۸ میں دیکھا ہوگا) لہٰذا مساوات ۵ کے عددی سر لازمی طور پر درج ذیل مساوات کو مطمئن کریں گے۔

$a_1 - a_0 = 0$	مستقل جزو
$2a_2 - a_1 = 1$	x کا عددی سر
$3a_3 - a_2 = 0$	x^2 کا عددی سر
$\vdots$	
$na_n - a_{n-1} = 0$	x^{n-1} کا عددی سر
$\vdots$	

ہم مساوات ۳ سے یہ بھی جانتے ہیں کہ $x = 0$ پر $y = a_0$ ہوگا لہٰذا ابتدائی معلومات کو استعمال کرتے ہوئے $a_0 = 1$ ہوگا۔ ان تمام معلومات سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_0 = 1, \quad a_2 = \frac{1 + a_1}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2}$$
$$a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{3!}, \quad \cdots, \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{2}{n!}, \quad \cdots$$

۱۵۹۰۲ ان قیمتوں کو y کی مساوات (مساوات ۳) میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= 1 + x + 2 \cdot \frac{x^2}{2!} + 2 \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots + 2 \cdot \frac{x^n}{n!} + \cdots \\ &= 1 + x + 2 \underbrace{\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \right)}_{e^x - 1 - x \text{ کا منکلارن تسلسل}} \\ &= 1 + x + 2(e^x - 1 - x) = 2e^x - 1 - x \end{aligned}$$

۱۵۹۰۳ یوں ابتدائی قیمت مسئلے کا حل $y = 2e^x - 1 - x$ ہو گا۔

۱۵۹۰۴ ہم اس کو پرکھ سکتے ہیں یعنی

$$y(0) = 2e^0 - 1 - 0 = 2 - 1 = 1$$

۱۵۹۰۵ اور

$$y' - y = (2e^x - 1) - (2e^x - 1 - x) = x$$

۱۵۹۰۶ □

۱۵۹۰۷ مثال ۹.۶۸: درج ذیل کا طاقتی تسلسل حل تلاش کریں۔

$$y'' + x^2 y = 0 \tag{۶}$$

۱۵۹۰۸ **حل**

۱۵۹۰۹ ہم فرض کرتے ہیں کہ اس کا حل درج ذیل روپ کا ہے۔

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{۷}$$

۱۵۹۱۰ ہم عددی سروں a_k کی ایسی قیمتیں تلاش کرتے ہیں کہ یہ تسلسل اور اس کا دور تبی تفرق

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots \tag{۸}$$

۱۵۹۱۱ مساوات ۶ کو مطمئن کرتے ہوں۔ $x^2 y$ کا تسلسل مساوات ۷ کو x^2 سے ضرب دے کر حاصل ہو گا:

$$x^2 y = a_0 x^2 + a_1 x^3 + a_2 x^4 + \cdots + a_n x^{n+2} + \cdots \tag{۹}$$

۱۵۹۱۲ $y'' + x^2 y$ کا تسلسل مساوات ۸ اور مساوات ۹ کا مجموعہ ہو گا:

$$y'' + x^2 y = 2a_2 + 6a_3 x + (12a_4 + a_0)x^2 + (20a_5 + a_1)x^3 + \cdots + (n(n-1)a_n + a_{n-4})x^{n-2} + \cdots \tag{۱۰}$$

۱۵۹۱۳ دھیان رہے کہ مساوات ۹ میں x^{n-2} کا عددی سر a_{n-4} ہے۔ اگر y اور اس کے دوگنا تفرق، مساوات ۶ کو مطمئن کرتے ہوں تب مساوات ۱۰ کے
۱۵۹۱۴ دائیں ہاتھ x کی ہر انفرادی طاقت کا عددی سر صفر ہو گا:

$$2a_2 = 0, \quad 6a_3 = 0, \quad 12a_4 + a_0 = 0, \quad 20a_5 + a_1 = 0 \tag{۱۱}$$

۱۵۹۱۵ اور تمام $n \geq 4$ کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$n(n-1)a_n + a_{n-4} = 0 \tag{۱۲}$$

۱۵۹۱۶ ہم مساوات ۷ سے

$$a_0 = y(0), \quad a_1 = y'(0)$$

۱۵۹۱۷ حاصل کرتے ہیں یعنی ابتدائی دو عددی سر، $x = 0$ پر بالترتیب y اور y' کی قیمتیں ہیں۔ مساوات ۱۱ اور کلیہ توالی (مساوات ۱۲) کی مدد سے ہم باقی تمام
۱۵۹۱۸ عددی سر معلوم کر سکتے ہیں۔ مساوات ۱۱ کے پہلے دو درج ذیل دیتے ہیں۔

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0$$

۱۵۹۱۹ مساوات ۱۲ کہتی ہے کہ $a_{n-4} = 0$ کی صورت میں $a_n = 0$ ہو گا۔ نتیجتاً

$$a_6 = 0, \quad a_7 = 0, \quad a_{10} = 0, \quad a_{11} = 0$$

۱۵۹۲۰ ہوں گے اور جب بھی $n = 4k + 2$ یا $4k + 3$ ہو، a_n صفر ہو گا۔ باقی عددی سروں کے لیے

$$a_n = \frac{-a_{n-4}}{n(n-1)}$$

۱۵۹۲۱ ہو گا جس سے

$$a_4 = \frac{-a_0}{4 \cdot 3}, \quad a_8 = \frac{-a_4}{8 \cdot 7} = \frac{a_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8},$$
$$a_{12} = \frac{-a_8}{11 \cdot 12} = \frac{-a_0}{3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 12}$$

۱۵۹۲۲ اور

$$a_5 = \frac{-a_1}{5 \cdot 4}, \quad a_9 = \frac{-a_5}{9 \cdot 8} = \frac{a_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9}$$
$$a_{13} = \frac{-a_9}{12 \cdot 13} = \frac{-a_1}{4 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 13}$$

جواب کو دو علیحدہ تسلسلوں کے روپ میں لکھنا زیادہ مفید ثابت ہوتا ہے

$$\begin{aligned} y =& a_0\left(1 - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \frac{x^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} + \cdots\right) \\ &+ a_1\left(x - \frac{x^5}{4\cdot 5} + \frac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{x^{13}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} + \cdots\right) \end{aligned}$$

جہاں پہلا تسلسل a_0 سے ضرب اور دوسرا تسلسل a_1 سے ضرب ہوا ہے۔ جیسا تناسبی پرکھ سے ظاہر ہے، دونوں تسلسل تمام x کے لیے مطلق مرتکز ہیں۔ □

غیر بنیادی تکمل کی قیمت کا حصول

غیر بنیادی تکمل کو مکلارن تسلسل کی مدد سے تسلسل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

مثال ۹.۶۹: انکسار شعاع میں $\int \sin x^2 \,\mathrm{d}x$ طرز کے تکمل پائے جاتے ہیں۔ اس کو طاقتی تسلسل کی صورت میں لکھیں۔

حل

$\sin x$ کے تسلسل میں x کی جگہ x^2 پر کرتے ہوئے

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \frac{x^{14}}{7!} + \frac{x^{18}}{9!} - \cdots$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\int \sin x^2 \,\mathrm{d}x = C + \frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \frac{x^{19}}{19\cdot 9!} - \cdots$$

□

مثال ۹.۷۰: تکمل $\int_0^1 \sin x^2 \,\mathrm{d}x$ کی قیمت 0.001 سے کم خلل کے ساتھ دریافت کریں۔

حل

یہ بدلتا تسلسل ہے اور ہم تجربہ سے دیکھتے ہیں کہ

$$\frac{1}{11\cdot 5!} \approx 0.000\,76$$

وہ پہلا جزو ہے جس کی قیمت 0.001 سے کم ہے۔ اس سے قبل دو اجزاء کا مجموعہ

$$\int_0^1 \sin x^2 \,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} \approx 0.310$$

۱۵۳۷ ہے۔ ہم مزید دو اجزاء شامل کرتے ہوئے

$$\int_0^1 \sin x^2 \, \mathrm{d}x \approx 0.310\,268$$

۱۵۳۸ اندازہ حاصل کر سکتے ہیں جس میں خلل تقریباً 10^{-6} ہے۔ اس کے بعد صرف ایک اضافی جزو کی شمولیت سے

$$\int_0^1 \sin x^2 \, \mathrm{d}x \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} + \frac{1}{6894720} \approx 0.310\,268\,303$$

۱۵۳۹ حاصل ہوتا ہے جس میں خلل 1.08×10^{-9} سے کم ہے۔ □

۱۵۴۰ **الٹ ٹینجنٹ**

۱۵۴۱ ہم مثال ۹.۵۱ میں $\tan^{-1} x$ کا تسلسل تلاش کر چکے ہیں جہاں تفرق سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

۱۵۴۲ اور تکمل سے

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

۱۵۴۳ حاصل ہوئے۔ البتہ ہم نے مسئلہ جزو در جزو تکمل کا ثبوت پیش نہیں کیا ہے جس پر یہ نتائج منحصر ہیں۔ ہم اب متناہی کلیہ

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdot + (-1)^n t^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} \tag{۱۳}$$

۱۵۴۴ کے دونوں اطراف کا تکمل لے کر اسی تسلسل کو دوبارہ حاصل کرتے ہیں، جہاں آخری جزو تسلسل کا باقی ہے جس کو بطور ثنائی تسلسل جمع کیا گیا ہے اور اس ثنائی
۱۵۴۵ تسلسل کا ابتدائی جزو $a = (-1)^{n+1} t^{2n+2}$ اور تناسب $r = -t^2$ ہیں۔ مساوات ۱۳ کے دونوں اطراف کا تکمل $t = 0$ تا $t = x$
۱۵۴۶ لے کر

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R(n, x)$$

۱۵۴۷ حاصل ہو گا جہاں

$$R(n, x) = \int_0^x \frac{(-1)^{n+1} t^{2n+2}}{1+t^2} \, \mathrm{d}t$$

ہے۔ تکمل کا نسب نما 1 کے برابر یا اس سے بڑا ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\left|R(n,x)\right| \leq \int_0^{|x|} t^{2n+2}\,\mathrm{d}t = \frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$$

اگر $|x| \leq 1$ ہو تب اس عدم مساوات کا دایاں ہاتھ $\infty \leftarrow n$ کرتے ہوئے صفر تک پہنچتا ہے۔ یوں $|x| \leq 1$ کے لیے $\lim_{n\to\infty} R(n,x) = 0$ اور

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x| \leq 1$$

ہوں گے۔ اس طرح درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad |x| \leq 1 \tag{۱۴}$$

ہم $\tan^{-1} x$ کا مکلارن تسلسل بلاواسطہ اس لیے دریافت نہیں کرتے ہیں کہ $\tan^{-1} x$ کے بلند رتبی تفارق کے کلیات پیچیدہ ہوتے ہیں۔ مذکورہ بالا طریقہ زیادہ آسان ہے۔

مساوات ۱۴ میں $x = 1$ پر کرنے سے

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$$

حاصل ہوتا ہے جسے **کلیہ لیبنیز**[۴۹] کہتے ہیں۔ یہ تسلسل بہت آہستہ مرکوز ہے لہٰذا یہ π کی قیمت حاصل کرنے کے لیے زیادہ مفید ثابت نہیں ہوتا ہے۔ π کے حصول کے لیے اس سے بہتر کلیات استعمال کیے جاتے ہیں مثلاً

$$\pi = 48\tan^{-1}\frac{1}{18} + 32\tan^{-1}\frac{1}{57} - 20\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

جو 0 کے قریب x کی قیمتیں استعمال کرتا ہے۔

غیر معین روپ کی قیمت کا حصول

بعض اوقات غیر معین روپ کے تفاعل کو ٹیلر تسلسل کی صورت میں لکھ کر ان کی قیمت تلاش کرنا ممکن ہوتا ہے۔

مثال ۹.۷۱: غیر معین روپ $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ کی قیمت تلاش کریں۔

حل

ہم $\ln x$ کو $x-1$ کی طاقت کا ٹیلر تسلسل لکھتے ہیں۔ نقطہ $x = 1$ پر بلاواسطہ $\ln x$ کا ٹیلر تسلسل تلاش کر کے یا $\ln x$ کے تسلسل (مثال ۹.۵۲) میں x کی جگہ $x-1$ پر کرتے ہوئے ایسا تسلسل حاصل کیا جا سکتا ہے۔ دونوں طریقوں سے

$$\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \cdots$$

---

[۴۹] Leibniz'sformula

حاصل ہو گا جس کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(1-\frac{1}{2}(x-1)+\cdots\right)=1$$

□

مثال ۹.۷۲: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}$ کی قیمت تلاش کریں۔

حل

جزو x^5 تک $\sin x$ اور $\tan x$ کے مکلارن تسلسل

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots \qquad \tan x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\cdots$$

ہیں۔ یوں

$$\sin x-\tan x=-\frac{x^3}{2}-\frac{x^5}{8}-\cdots=x^3\left(-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{8}-\cdots\right)$$

اور

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{x^3}&=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{2}-\frac{x^2}{8}-\cdots\right)\\&=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ہو گا۔ □

ہم تسلسل استعمال کر کے نا صرف $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ کی قیمت تلاش کر پاتے ہیں بلکہ اس عمل میں $\csc x$ کا تخمینی کلیہ بھی حاصل کرتے ہیں۔

مثال ۹.۷۳: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$ تلاش کریں۔

حل

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}&=\frac{x-(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots)}{x\cdot(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots)}\\&=\frac{x^3(\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots)}{x^2(1-\frac{x^2}{3!}+\cdots)}=x\frac{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots}{1-\frac{x^2}{3!}+\cdots}\end{aligned}$$

۱۵۹۷۷ لہٰذا

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(x\frac{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots}{1-\frac{x^2}{3!}+\cdots}\right)=0$$

۱۵۹۷۸ ہو گا۔

۱۵۹۷۹ ہم چھوٹے $|x|$ کے لیے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=x\frac{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\cdots}{1-\frac{x^2}{3!}+\cdots}\approx x\cdot\frac{1}{3!}=\frac{x}{6}\qquad\Longrightarrow\qquad \csc x\approx\frac{1}{x}+\frac{x}{6}$$

۱۵۹۸۰ □

۱۵۹۸۱ عموماً مستعمل مکلارن تسلسل

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n,\quad |x|<1$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-x)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad |x|<1$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad |x|<\infty$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad |x|<\infty$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\quad |x|<\infty$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n},\quad -1<x\le 1$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\tanh^{-1}x=2\Big(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots\Big)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad |x|<1$$

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1},\quad |x|\le 1$$

۱۵۹۸۲ ثنائی تسلسل

$$
\begin{aligned}
(1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)x^2}{2!} + \frac{m(m-1)(m-2)x^3}{3!} + \cdots \\
&\qquad + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)x^k}{k!} + \cdots \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m}{k} x^k, \quad |x| < 1
\end{aligned}
$$

۱۵۹۸۳ جہاں

$$
\binom{m}{1} = m, \quad \binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2!}, \quad \binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!} \quad \text{کے لیے } k \geq 3
$$

۱۵۹۸۴ ہیں۔

۱۵۹۸۵ ثنائی تسلسل لکھتے ہوئے ہم $\binom{m}{0}$ کی تعریف 1 لیتے ہیں اور (اگر $x = 0$ ہو تب بھی) $x^0 = 1$ لیتے ہیں۔ یوں $(1+x)^m =$

۱۵۹۸۶ $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} x^k$ لکھا جاتا ہے۔ مثبت کے لیے تسلسل x^m پر ختم ہوتا ہے اور تمام x کے لیے مرتکز ہوتا ہے۔

۱۵۹۸۷ **سوالات**

۱۵۹۸۸ **ثنائی تسلسل**

۱۵۹۸۹ سوال ۹.۵۷۲ تا سوال ۹.۵۸۱ میں دیے تفاعل کے ثنائی تسلسل کے ابتدائی چار اجزاء تلاش کریں۔

۱۵۹۹۰ سوال ۹.۵۷۲: $(1+x)^{1/2}$

۱۵۹۹۱ سوال ۹.۵۷۳: $(1+x)^{1/3}$

۱۵۹۹۲ سوال ۹.۵۷۴: $(1-x)^{-1/2}$

۱۵۹۹۳ سوال ۹.۵۷۵: $(1-2x)^{1/2}$

۱۵۹۹۴ سوال ۹.۵۷۶: $(1+\frac{x}{2})^{-2}$

۱۵۹۹۵ سوال ۹.۵۷۷: $(1-\frac{x}{2})^{-2}$

۱۵۹۹۶ سوال ۹.۵۷۸: $(1+x^3)^{-1/2}$

۱۵۹۹۷ سوال ۹.۵۷۹: $(1+x^2)^{-1/3}$

۱۵۹۹۸ سوال ۹.۵۸۰: $(1+\frac{1}{x})^{1/2}$

۱۵۹۹۹ سوال ۹.۵۸۱: $(1-\frac{2}{x})^{1/3}$

سوال ۹.۵۸۲ تا سوال ۹.۵۸۵ میں تفاعل کے ثنائی تسلسل تلاش کریں۔

سوال ۹.۵۸۲: $(1+x)^4$

سوال ۹.۵۸۳: $(1+x^2)^3$

سوال ۹.۵۸۴: $(1-2x)^3$

سوال ۹.۵۸۵: $(1-\frac{x}{2})^4$

ابتدائی قیمت مسائل

سوال ۹.۵۸۶ تا سوال ۹.۶۰۳ میں ابتدائی قیمت مسئلے کے تسلسل حل تلاش کریں۔

سوال ۹.۵۸۶: $y' + y = 0, \quad y(0) = 1$

سوال ۹.۵۸۷: $y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1$

سوال ۹.۵۸۸: $y' - y = 1, \quad y(0) = 0$

سوال ۹.۵۸۹: $y' + y = 1, \quad y(0) = 2$

سوال ۹.۵۹۰: $y' - y = x, \quad y(0) = 0$

سوال ۹.۵۹۱: $y' + y = 2x, \quad y(0) = -1$

سوال ۹.۵۹۲: $y' - xy = 0, \quad y(0) = 1$

سوال ۹.۵۹۳: $y' - x^2y = 0, \quad y(0) = 1$

سوال ۹.۵۹۴: $(1-x)y' - y = 0, \quad y(0) = 2$

سوال ۹.۵۹۵: $(1+x^2)y' + 2xy = 0, \quad y(0) = 3$

سوال ۹.۵۹۶: $y'' - y = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 0$

سوال ۹.۵۹۷: $y'' + y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(0) = 1$

سوال ۹.۵۹۸: $y'' + y = x, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 2$

سوال ۹.۵۹۹: $y'' - y = x, \quad y'(0) = 2, \quad y(0) = -1$

سوال ۹.۶۰۰: $y'' - y = -x, \quad y'(2) = -2, \quad y(2) = 0$

سوال ۹.۶۰۱: $y'' - x^2y = 0, \quad y'(0) = b, \quad y(0) = a$

سوال ۹.۶۰۲: $y'' + x^2y = x, \quad y'(0) = b, \quad y(0) = a$

سوال ۹.۶۰۳: $y'' - 2y' + y = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y(0) = 0$

تخمین اور غیر بنیادی تکمل

سوال ۹.۶۰۴ تا سوال ۹.۶۰۷ میں تسلسل استعمال کرتے ہوئے، خلل کو 10^{-3} کم رکھتے ہوئے تکمل کی قیمت کا اندازہ لگائیں۔ (جوابات 5 اعشاریہ تک دکھائے گئے ہیں۔)

سوال ۹.۶۰۴: $\int_0^{0.2} \sin x^2 \, \mathrm{d}x$

سوال ۹.۶۰۵: $\int_0^{0.2} \frac{e^{-x}-1}{x} \, \mathrm{d}x$

سوال ۹.۶۰۶: $\int_0^{0.1} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \, \mathrm{d}x$

سوال ۹.۶۰۷: $\int_0^{0.25} \sqrt[3]{1+x^2} \, \mathrm{d}x$

سوال ۹.۶۰۸ تا سوال ۹.۶۱۱ میں تسلسل استعمال کرتے ہوئے، خلل کو 10^{-8} کم رکھتے ہوئے تکمل کی قیمت کا اندازہ لگائیں۔ (جوابات 10 اعشاریہ تک دکھائے گئے ہیں۔)

سوال ۹.۶۰۸: $\int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x$

سوال ۹.۶۰۹: $\int_0^{0.1} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$

سوال ۹.۶۱۰: $\int_0^{0.1} \sqrt{1+x^4} \, \mathrm{d}x$

سوال ۹.۶۱۱: $\int_0^{1} \frac{1-\cos x}{x^2} \, \mathrm{d}x$

سوال ۹.۶۱۲: تکمل $\int_0^1 \cos t^2 \, \mathrm{d}t$ میں $\cos t^2$ کو تخمیناً $1 - \frac{t^4}{2} + \frac{t^8}{4!}$ سے ظاہر کرتے ہوئے پیداخلل کا اندازہ لگائیں۔

سوال ۹.۶۱۳: تکمل $\int_0^t \cos \sqrt{t} \, \mathrm{d}t$ میں $\cos \sqrt{t}$ کو تخمیناً $1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4!} - \frac{t^3}{6!}$ سے ظاہر کرتے ہوئے پیداخلل کا اندازہ لگائیں۔

سوال ۹.۶۱۴ تا سوال ۹.۶۱۷ میں ایسا کثیر رکنی تلاش کریں جو خلل کو 10^{-3} سے کم رکھتے ہوئے پورے وقفہ پر $F(x)$ کو ظاہر کرتا ہو۔

سوال ۹.۶۱۴: $F(x) = \int_0^x \sin t^2 \, \mathrm{d}t, \quad [0,1]$

سوال ۹.۶۱۵: $F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} \, \mathrm{d}t, \quad [0,1]$

سوال ۹.۶۱۶: (الف) $[0,0.5]$ (ب) $[0,1]$ $F(x) = \int_0^x \tan^{-1} t \, \mathrm{d}t,$

سوال ۹.۶۱۷: (الف) $[0,0.5]$ (ب) $[0,1]$ $F(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} \, \mathrm{d}t,$

غیر معین روپ

سوال ۹.۶۱۸ تا سوال ۹.۶۲۷ میں تسلسل استعمال کرتے ہوئے حد تلاش کریں۔

سوال ۹.۶۱۸: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-(1+x)}{x^2}$

سوال ۹.۶۱۹: $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x}$

سوال ۹.۶۲۰: $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t - t^2/2}{t^4}$

سوال ۹.۶۲۱: $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta - \theta + \theta^3/6}{\theta^5}$

سوال ۹.۶۲۲: $\lim_{y\to 0} \frac{y - \tan^{-1} y}{y^3}$

سوال ۹.۶۲۳: $\lim_{y\to 0} \frac{\tan^{-1} y - \sin y}{y^3 \cos y}$

سوال ۹.۶۲۴: $\lim_{x\to\infty} x^2(e^{-1/x^2} - 1)$

سوال ۹.۶۲۵: $\lim_{x\to\infty} (x+1)\sin\frac{1}{x+1}$

سوال ۹.۶۲۶: $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{1-\cos x}$

سوال ۹.۶۲۷: $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{\ln(x-1)}$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۹.۶۲۸: تفاعل $\ln(1+x)$ کے مکلارن تسلسل میں x کی جگہ $-x$ پر کرتے ہوئے $\ln(1-x)$ کا مکلارن تسلسل حاصل کریں۔ اس تسلسل کو اب $\ln(1+x)$ کے تسلسل سے منفی کرتے ہوئے $|x| < 1$ کے لیے درج ذیل دکھائیں۔

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right)$$

سوال ۹.۶۲۹: خلل کی مقدار کو 10^{-8} سے کم رکھتے ہوئے $\ln(1.1)$ کی قیمت حاصل کرنے کے لیے $\ln(1+x)$ کے مکلارن تسلسل کے کتنے اجزاء کا مجموعہ لینا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۹.۶۳۰: خلل کی مقدار کو 10^{-3} سے کم رکھتے ہوئے $\frac{\pi}{4}$ کی قیمت حاصل کرنے کے لیے مسئلہ بدلتے تسلسل کا اندازہ کے تحت $\tan^{-1}(1)$ کے مکلارن تسلسل کے کتنے اجزاء کا مجموعہ لینا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۹.۶۳۱: دکھائیں کہ $|x| > 1$ کے لیے $f(x) = \tan^{-1} x$ کا مکلارن تسلسل منفرج ہے۔

سوال ۹.۶۳۲: خلل کی مقدار کو 10^{-6} رکھنے کے لیے درج ذیل مساوات کے دائیں ہاتھ میں ہر $\tan^{-1} x$ کے مکلارن تسلسل کے کتنے اجزاء کا مجموعہ لینا ہو گا؟

$$\pi = 48\tan^{-1}\frac{1}{18} + 32\tan^{-1}\frac{1}{57} - 20\tan^{-1}\frac{1}{239}$$

اس کے برعکس $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ اتنا ست $\frac{\pi^2}{6}$ پر مرکوز ہے کہ 50 اجزاء کا مجموعہ لینے سے بھی دو اعشاریہ مقامات تک درست نتیجہ حاصل نہیں ہوتا ہے۔

سوال ۹.۶۳۳: تفاعل $\tan t$ کے مکلارن تسلسل کے ابتدائی تین غیر صفر اجزاء کا تکمل 0 تا x لیتے ہوئے $\ln \sec x$ کی مکلارن کے تسلسل کے ابتدائی تین غیر صفر اجزاء حاصل کریں۔

سوال ۹.۶۳۴: (الف) ثنائی تسلسل اور

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin^{-1} x = (1 - x^2)^{-1/2}$$

استعمال کرتے ہوئے $\sin^{-1} x$ کے مکلارن تسلسل کے ابتدائی چار غیر صفر اجزاء تلاش کریں۔ رداس ارتکاز کتنا ہو گا؟ (ب) تفاعل $\cos^{-1} x$ کے مکلارن تسلسل کے ابتدائی پانچ غیر صفر اجزاء کو اس سوال کے جزو-الف کی مدد سے تلاش کریں۔

سوال ۹.۶۳۵: (الف) درج ذیل کے مکلارن تسلسل کے ابتدائی غیر صفر چار اجزاء تلاش کریں۔

$$\sinh^{-1} x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 + t^2}}$$

(ب) حاصل کردہ تسلسل کے ابتدائی تین اجزاء استعمال کرتے ہوئے $\sinh^{-1} 0.25$ کی قیمت کا اندازہ لگائیں۔ خلل کی مقدار کی بالائی حد تلاش کریں۔

سوال ۹.۶۳۶: تفاعل $\frac{-1}{1+x}$ کے مکلارن تسلسل سے $\frac{1}{(1+x)^2}$ کا مکلارن تسلسل حاصل کریں۔

سوال ۹.۶۳۷: تفاعل $\frac{1}{1-x^2}$ کے مکلارن تسلسل سے $\frac{2x}{(1-x^2)^2}$ کا مکلارن تسلسل حاصل کریں۔

سوال ۹.۶۳۸: انگلستانی ریاضی دان جان والس نے درج ذیل کلیہ اخذ کیا۔

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \cdots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot \cdots}$$

کمپیوٹر استعمال کر کے اس کلیہ سے π کی قیمت 2 اعشاریہ مقامات تک درست تلاش کریں۔

سوال ۹.۶۳۹: قدرتی لوگارتھم $\ln n$ کا جدول $n = 1, 2, 3, \cdots, 10$ کے لیے سوال ۹.۶۲۸ کے کلیہ سے حاصل کریں۔ ایسا کرتے ہوئے تعلقات $\ln 4 = 2 \ln 2$ ، $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$ ، $\ln 8 = 3 \ln 2$ ، $\ln 9 = 2 \ln 3$ اور $\ln 10 = \ln 2 +$ $\ln 5$ بروئے کار لائیں تاکہ کم سے کم لوگارتھمی قیمتوں کا استعمال ہو۔ سوال ۹.۶۲۸ میں x کے درج ذیل قیمتوں سے شروع کریں۔

$$\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{13}$$

سوال ۹.۶۴۰: تفاعل $(1 - x^2)^{-1/2}$ کے ثنائی تسلسل کا تکمل لے کر $|x| < 1$ کے لیے درج ذیل دکھائیں۔

$$\sin^{-1} x = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

۱۶۰۸۹ سوال ۹.۶۴۱: درج ذیل تسلسل کا پہلا تکمل

$$\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{1+1/t^2} = \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^4} + \frac{1}{t^6} - \frac{1}{t^8} + \cdots$$

۱۶۰۹۰ x تا ∞ لے کر اور دوسرا تکمل $-\infty$ تا x لے کر بالترتیب درج ذیل تسلسل حاصل کریں۔

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots \qquad x > 1$$
$$\tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \cdots \qquad x < -1$$

۱۶۰۹۱ سوال ۹.۶۴۲: دو زاویوں کے فرق کے ٹینجنٹ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ اخذ کریں۔

$$\tan(\tan^{-1}(n+1) - \tan^{-1}(n-1)) = \frac{2}{n^2}$$

۱۶۰۹۲

۱۶۰۹۳

باب ۱۰

مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد

جائزہ

حرکت پر غور احصاء کی مدد سے کیا جاسکتا ہے۔اس حصہ میں ہم وقت کے ساتھ ایک ذرے کے بدلتے مقام پر غور کریں گے۔ہم مخروطی حصوں کی مساوات سے شروع کرتے ہیں چونکہ بالعکس مربع قوت کی وجہ سے سیارے، مصنوعی سیارے،اور دیگر اجسام مخروطی راہ پر حرکت کرتے ہیں۔جیسا ہم باب ۱۲ میں دیکھیں گے،اگر ہمیں معلوم ہو کہ ایک جسم مخروطی راہ پر حرکت کر رہا ہے تب ہم اس کی رفتار اور اس پر عمل کرنے والی قوت دریافت کر سکتے ہیں۔قطبی محدد سیاروں کی حرکت پر غور کو بہت آسان بناتا ہے لہٰذا ہم اس نئے محدد میں منحنیات، تفرق اور تکمل پر بھی غور کریں گے۔

۱۰.۱ مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں

اس حصہ میں دکھایا جائے گا کہ مخروطی حصوں کو کس طرح محددی سطح پر بطور دو قدری مساوات پیش کیا جاتا ہے۔دوہرے مخروط کو سطح سے کاٹ کر مخروطی منحنیات پیدا کی جاتی ہیں اور اسی کی وجہ سے مخروطی حصہ کی اصطلاح پیدا ہوئی۔

دائرہ

تعریف: ایک مستوی میں رہتے ہوئے اس مستوی میں کسی مقررہ نقطہ سے مستقل فاصلے پر تمام نقطوں کے سلسلہ کو **دائرہ**[1] کہتے ہیں۔اس مقررہ نقطہ کو دائرے کا **مرکز**[2] کہتے ہیں جبکہ اس مستقل فاصلہ کو **رداس**[3] کہتے ہیں۔

□

---

[1] circle
[2] center
[3] radius

دائرے کے معیاری مساوات جنہیں حصہ ۱.۴ میں فاصلہ کی مساوات $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ سے اخذ کیا گیا درج ذیل ہیں۔

$$x^2+y^2=a^2 \qquad \text{رداس } a \text{ اور مرکز } (0,0)$$
$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2 \qquad \text{رداس } a \text{ اور مرکز } (h,k)$$

قطع مکافی

تعریف: ایک سطح میں رہتے ہوئے کسی مقررہ سیدھی لکیر اور مقررہ نقطہ (جو اس مقررہ سیدھی لکیر پر نہیں پایا جاتا ہو) سے مستقل فاصلہ پر پائے جانے والے تمام نقطوں کے سلسلہ کو **قطع مکافی**[۴] کہتے ہیں۔ مقررہ نقطے کو قطع مکافی کا [۵] کہتے ہیں جبکہ مقررہ لکیر کو **ناظمہ**[۶] کہتے ہیں۔

□

جب ماسکہ کسی محددی محور پر ہو اور ناظمہ اس محددی محور کے متوازی ہو تب قطع مکافی کی مساوات سادہ ترین ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر، فرض کریں کہ ماسکہ محور y پر نقطہ $F(0,p)$ پر پایا جاتا ہے اور لکیر $y=-p$ ناظمہ (شکل ۱.۱۰) ہے۔ یوں شکل ۱.۱۰ میں نقطہ $N(x,y)$ صرف اور صرف اس صورت اس قطع مکافی پر پایا جائے گا جب $NF=NQ$ ہو۔ فاصلہ کے کلیہ سے

$$NF=\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\sqrt{x^2+(y-p)^2}$$
$$NQ=\sqrt{(x-x)^2+(y-(-p))^2}=\sqrt{(y+p)^2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ان مساوات کو ایک دوسرے کے برابر پر کر کے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$y=\frac{x^2}{4p} \implies x^2=4py \qquad \text{معیاری روپ} \tag{۱}$$

اس مساوات سے قطع مکافی کی محور y کے لحاظ سے تشاکلی واضح ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ محور y اس قطع مکافی کا محور تشاکلی ہے جس کو عموماً چھوٹا کر کے صرف **محور**[۷] پکارا جاتا ہے۔

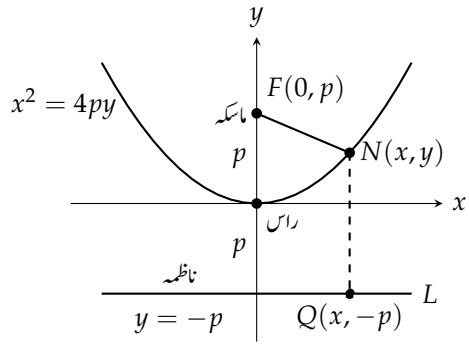
وہ نقطہ جس پر قطع مکافی اپنے محور کو قطع کرتا ہو **راس**[۸] کہلاتا ہے۔ قطع مکافی $x^2=4py$ کا راس مبدا پر پایا جاتا ہے (شکل ۱.۱۰)۔ مثبت عدد p کو قطع مکافی کا **طول ماسکہ**[۹] کہتے ہیں۔

اگر قطع مکافی نیچے رخ کھلتا ہو اور اس کا ماسکہ $(0,-p)$ جبکہ ناظمہ لکیر $y=p$ ہو تب مساوات ادرج ذیل روپ اختیار کرے گی (شکل ۲.۱۰)۔

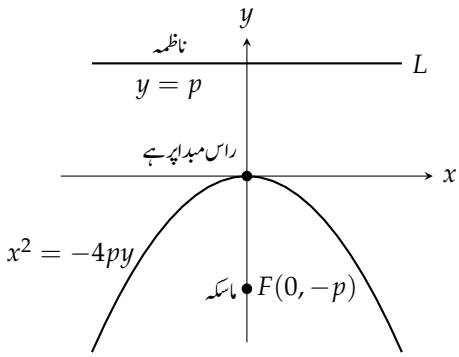
$$y=-\frac{x^2}{4p} \implies x^2=-4py$$

---

[۴] parabola
[۵] focus
[۶] directrix
[۷] axis
[۸] vertex
[۹] focallength



شکل ۱.۱۰: قطع مکافی $x^2 = 4py$ ؛ راس کا فاصل ماسکہ اور ناظمہ سے ایک سا ہے۔



شکل ۲.۱۰: قطع مکافی $x^2 = -4py$

جدول ۱.۱۰: مبدا پر راس والے قطع مکافی کے معیاری مساوات ($p > 0$)

مساوات	ماسکہ	ناظمہ	محور	کھلنے کا رخ
$x^2 = 4py$	$(0,p)$	$y = -p$	محور y	اوپر
$x^2 = -4py$	$(0,-p)$	$y = p$	محور y	نیچے
$y^2 = 4px$	$(p,0)$	$x = -p$	محور x	دائیں
$y^2 = -4px$	$(-p,0)$	$x = p$	محور x	بائیں

۱۶۲۳ ہم اسی طرح کے مساوات ہم دائیں اور بائیں کھلنے والے قطع مکافی کے لیے حاصل کر سکتے ہیں (جدول ۱.۱۰ اور شکل ۳.۱۰)۔

۱۶۲۴ مثال ۱.۱۰: قطع مکافی $y^2 = 10x$ کا ماسکہ اور ناظمہ تلاش کریں۔

۱۶۲۵ **حل**

۱۶۲۶ ہم معیاری مساوات $y^2 = 4px$ میں p کی قیمت تلاش کرتے ہیں:

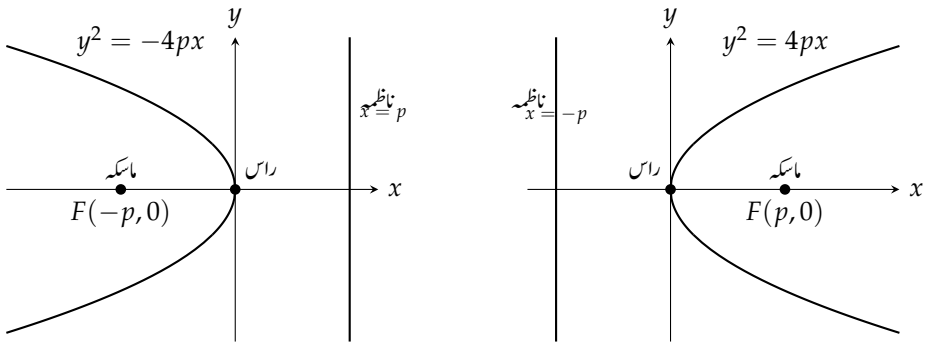
$$4p = 10 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

۱۶۲۷ اس کے بعد ہم حاصل کردہ p کے لیے ماسکہ اور ناظمہ تلاش کرتے ہیں۔

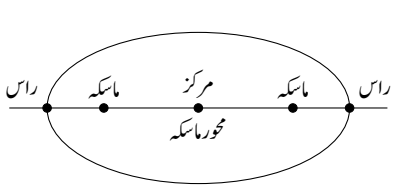
$$(p,0) = \left(\frac{5}{2},0\right) \qquad \text{ماسکہ}$$

$$x = -p, \qquad x = -\frac{5}{2} \qquad \text{ناظمہ}$$

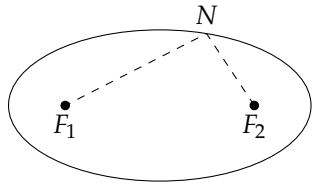
۱۶۲۸ □



شکل ۱۰.۳: قطع مکافی $y^2 = 4px$ اور $y^2 = -4px$ کے ترسیمات۔



شکل ۱۰.۵: ترخیم پر اہم نقطے۔



شکل ۱۰.۴: دونوں ماسکوں (F_1 اور F_2) سے کسی بھی نقطہ N تک فاصلوں کا مجموعہ (نقطہ دار لکیر) ایک مستقل ہے۔

جدول ۱۰.۱ کے کلیات پر حصہ ۱.۴ میں دیے گئے کلیات انتقال لاگو کرتے ہوئے دیگر مقامات پر واقع قطع مکافی کے مساوات حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ (سوال ۱۰.۳۹، سوال ۱۰.۴۰ اور سوال ۱۰.۴۵ تا سوال ۱۰.۴۸ دیکھیں۔)

ترخیم

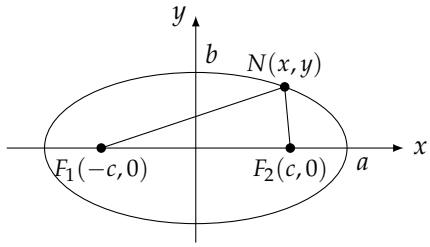
تعریف: ایک مستوی پر رہتے ہوئے، مستوی پر دو مقررہ نقطوں سے جن نقطوں کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہو، ان کے سلسلہ کو **ترخیم**[10] کہتے ہیں۔ ان دو مقررہ نقطوں کو ترخیم کے **ماسکے** کہتے ہیں (شکل ۱۰.۴ اور شکل ۱۰.۵)۔

□

ترخیم کو اس کی تعریف استعمال کرتے ہوئے بہت جلد ترسیم کیا جا سکتا ہے۔ مقررہ نقطوں F_1 اور F_2 پر ڈوری باندھیں۔ ڈوری کو قلم سے کھینچ کر رکھتے ہوئے قلم کو بند دائری حرکت دیں۔ چونکہ ڈوری کی لمبائی مستقل ہے لہذا قلم ترخیم کو ترسیم کرے گا (شکل ۱۰.۴)۔

اگر ماسکے $F_1(-c, 0)$ اور $F_2(c, 0)$ ہوں (شکل ۱۰.۶) اور فاصلہ $NF_1 + NF_2$ کو $2a$ سے ظاہر کیا جائے تب ترخیم پر نقطہ

[10] ellipse



شکل ۱۰.۶: ترخیم کی تعریف $NF_1 + NF_2 = 2a$ اور اس کی مساوات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ہے۔

۱۶۳۸ $N(x, y)$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

۱۶۳۹ اس مساوات کی سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر ہم دوسرے جذری جزو کو دائیں منتقل کر کے دونوں اطراف کا مربع لے کر حاصل واحد جذری جزو کو ایک
۱۶۴۰ ہاتھ رکھتے ہوئے دوبارہ مربع لیتے ہیں۔ نتیجتاً درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \tag{۲}$$

۱۶۴۱ چونکہ $NF_1 + NF_2$ کی لمبائی F_1F_2 کی لمبائی سے زیادہ ہے (تکون NF_1F_2 کے لیے تکونی عدم مساوات) لہٰذا عدد $2a$ عدد $2c$ سے بڑا ہو
۱۶۴۲ گا۔ یوں $a > c$ ہو گا لہٰذا مساوات ۲ میں $a^2 - c^2$ ایک مثبت عدد ہو گا۔

۱۶۴۳ ہم مساوات ۲ حاصل کرنے کے اقدام کو الٹ کرتے ہوئے دکھا سکتے ہیں کہ ہر وہ نقطہ جو مساوات ۲ کو $0 < c < a$ کے لیے مطمئن کرتا ہو $NF_1 +$
۱۶۴۴ $NF_2 = 2a$ کو بھی مطمئن کرے گا۔ یوں ایک نقطہ صرف اور صرف اس صورت ترخیم پر پایا جائے گا اگر وہ مساوات ۲ کو مطمئن کرتا ہو۔

۱۶۴۵ اگر

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \tag{۳}$$

۱۶۴۶ ہو تب $a^2 - c^2 = b^2$ ہو گا اور مساوات ۲ درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{۴}$$

۱۶۴۷ مساوات ۴ کے تحت مبدا اور دونوں محوروں کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔ یہ $x = \pm a$ اور $y = \pm b$ لکیروں میں بند مستطیل کے اندر پایا جاتا ہے۔ یہ
۱۶۴۸ محوروں کو نقطہ $(\pm a, 0)$ اور $(0, \pm b)$ پر قطع کرتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \qquad \text{مساوات ۴ سے حاصل کیا گیا}$$

۱۶۴۹ کی قیمت $x = 0$ پر صفر اور $y = 0$ پر لا متناہی ہے لہٰذا $(\pm a, 0)$ اور $(0, \pm b)$ پر مماثل محوروں کو عمودی ہوں گے۔

ترخیم کا اکبر اور اصغر محور

مساوات ۴ کی ترخیم کا **اکبر محور**[11] نقاط $(\pm 2, 0)$ کو جوڑنا والی لکیر ہے جس کی لمبائی $2a$ ہے۔ اس کے **اصغر محور**[12] کی لمبائی $2b$ ہے جو نقاط $(0, \pm b)$ کے بیچ لکیر ہے۔ عدد a از خود نصف اکبر محور جبکہ عدد نصف اصغر محور کہلاتے ہیں۔ مساوات ۳ سے عدد c

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

حاصل ہوتا ہے جو مرکز تا ماسکہ فاصلہ ہے۔

مثال ۱۰.۲: افقی اکبر محور

درج ذیل ترخیم

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{۵}$$

جس کو شکل ۱۰.۷ میں دکھایا گیا ہے کے لیے درج ذیل ہوں گے۔

نصف اکبر محور	$a = \sqrt{16} = 4$
نصف اصغر محور	$b = \sqrt{9} = 3$
ماسکہ سے مرکز تک فاصلہ	$c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$
ماسکے	$(\pm c, 0) = (\pm 7, 0)$
راس	$(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$
مرکز	$(0, 0)$

□

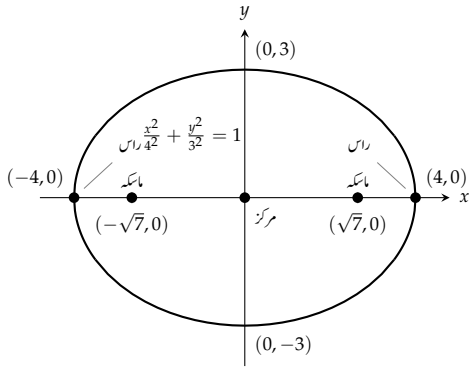
مثال ۱۰.۳: عمودی اکبر محور

مساوات ۵ میں x اور y کو ایک دوسرے کے ساتھ بدل کر درج ذیل ترخیم حاصل ہوتا ہے

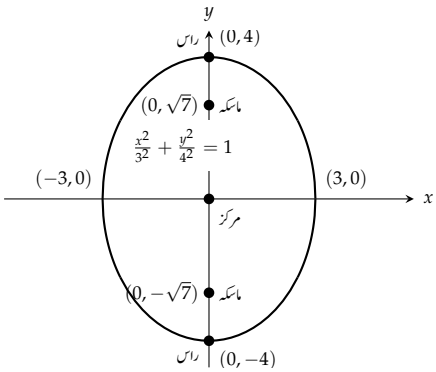
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \tag{۶}$$

---

[11] majoraxis
[12] minoraxis



شکل ۱۰.۷: اکبر محور افقی ہے۔ (مثال ۱۰.۲)



شکل ۱۰.۸: اکبر محور عمودی ہے۔ (مثال ۱۰.۳)

۱۶۱۶۰ جس کو شکل ۱۰.۸ میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے لیے درج ذیل ہوں گے۔

نصف اکبر محور	$a = \sqrt{16} = 4$
نصف اصغر محور	$b = \sqrt{9} = 3$
ماسکہ سے مرکز تک فاصلہ	$c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$
ماسکے	$(0, \pm c) = (0, \pm 7)$
راس	$(0, \pm a) = (0, \pm 4)$
مرکز	$(0, 0)$

۱۶۱۶۱ □

۱۶۱۶۲ مساوات ۵ اور مساوات ۶ کو سمجھنے میں کبھی دشواری پیش نہیں آتی ہے۔ ہم محددی محور پر نقطہ تقاطع معلوم کر کے لمبی محور کو اکبر محور چنتے ہیں۔ مرکز ان صورتوں
۱۶۱۶۳ میں مبدا پر ہو گا اور ماسکہ اکبر محور پر پائے جائیں گے۔

۱۶۱۶۴ مبدا پر مرکز والے ترخیم کے معیاری مساوات

۱۶۱۶۵

محور x پر ماسکہ	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$
مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ	$c=\sqrt{a^2-b^2}$
ماسکے	$(\pm c, 0)$
راس	$(\pm a, 0)$

محور y پر ماسکہ	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>b)$
مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ	$c=\sqrt{a^2-b^2}$
ماسکے	$(0, \pm c)$
راس	$(0, \pm a)$

۱۶۱۶۶ دونوں صورتوں میں نصف اکبر محور a اور نصف اصغر محور b ہیں۔

۱۶۱۶۷ **قطع زائد**

۱۶۱۶۸ تعریف: ایک مستوی میں رہتے ہوئے مستوی میں دو مقررہ نقطوں سے جن نقطوں کے فاصلوں کا فرق ایک مستقل ہو، ان تمام نقطوں کے سلسلہ کو **قطع**
۱۶۱۶۹ **زائد**[۱۳] کہتے ہیں۔ یہ دو مقررہ نقطے قطع زائد کے **ماسکہ** کہلاتے ہیں۔

۱۶۱۷۰ □

۱۶۱۷۱ اگر ماسکے $F_1(-c,0)$ اور $(F_2(c,0))$ ہوں (شکل ۱۰.۹) اور مستقل فرق $2a$ ہو تب نقطہ (x,y) صرف اور صرف اس صورت قطع زائد پر
۱۶۱۷۲ پایا جائے گا جب درج ذیل مطمئن ہو۔

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \tag{۷}$$

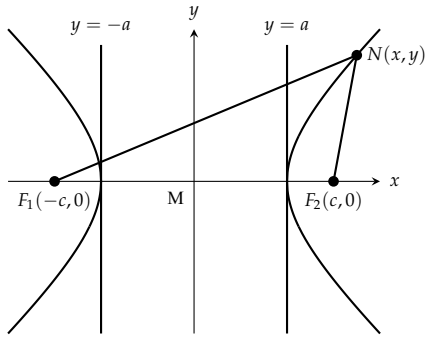
۱۶۱۷۳ اس مساوات کی سادہ روپ حاصل کرنے کی خاطر ہم دوسرے جذر کو دائیں ہاتھ منتقل کر کے دونوں ہاتھ کا مربع لے کر جذر کو ایک ہاتھ رکھ کر دوبارہ دونوں ہاتھ
۱۶۱۷۴ کا مربع لیتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \tag{۸}$$

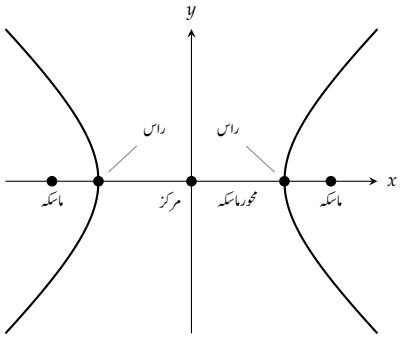
۱۶۱۷۵ اب تک یہ مساوات بالکل ترخیم کی مساوات کی طرح ہے۔ البتہ اب چونکہ تکون NF_1F_2 کے دو اضلاع کا فرق $2a$ ہے جو تیسرے ضلع $2c$ سے کم ہو گا
۱۶۱۷۶ لہٰذا a^2-c^2 منفی قیمت ہے۔

---

[۱۳] hyperbola



شکل ۱۰.۹: قطع زائد کے دائیں بازو کے لیے $NF_1 - NF_2 = 2a$ جبکہ بائیں بازو کے لیے $NF_2 - NF_1 = 2a$ ہوگا۔



شکل ۱۰.۱۰: قطع مکافی کے محور ماسکہ پر نقطے۔

۱۶۷۷ ہم مساوات ۸ کے حصول کے اقدام کو الٹ کرتے ہوئے دکھا سکتے ہیں کہ ہر وہ نقطہ N جو $0 < a < c$ کے لیے اس طرز کی مساوات کو مطمئن کرتا ہو،
۱۶۷۸ مساوات ۷ کو بھی مطمئن کرے گا۔ یوں ایک نقطہ صرف اور صرف اس صورت قطع زائد پر پایا جائے گا اگر اس کے محدد مساوات ۸ کو مطمئن کرتے ہوں۔

۱۶۷۹ اگر ہم $c^2 - a^2$ کے مثبت جذر کو b سے ظاہر کریں،

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \tag{۹}$$

۱۶۸۰ تب $a^2 - c^2 = -b^2$ ہوگا اور مساوات ۸ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{۱۰}$$

۱۶۸۱ قطع زائد کی مساوات ۱۰ اور ترخیم کی مساوات ۴ میں فرق منفی علامت کا اور درج ذیل نئے تعلق کا ہے۔

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{مساوات ۹ سے حاصل کیا گیا}$$

۱۶۸۲ ترخیم کی طرح قطع زائد بھی مبدا اور محددی محوروں کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔ یہ محور x کو نقطہ $(\pm a, 0)$ پر قطع کرتا ہے اور ان نقطوں پر چونکہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b^2 x}{a^2 y} \qquad \text{مساوات ۱۰ سے حاصل کیا گیا}$$

۱۶۸۳ ہے لہٰذا یہاں مماس عمودی ہوں گے۔

۱۶۸۴ تعریف: قطع زائد کے ماسکوں کے بیچ لکیر کو **محور ماسکہ**[۱۴] کہتے ہیں جس کے وسطی نقطہ کو قطع مکافی کا **مرکز**[۱۵] کہتے ہیں۔ جن نقطوں پر محور ماسکہ اور قطع مکافی
۱۶۸۵ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہوں، انہیں **راس**[۱۶] کہتے ہیں (شکل ۱۰.۱۰)۔

---

[۱۴] focalaxis
[۱۵] center
[۱۶] vertices

۱۶۱۸۶ □

۱۶۱۸۷ **قطع زائد کے متقارب؛ ترسیم کا عمل**

۱۶۱۸۸ قطع زائد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{11}$$

۱۶۱۸۹ کے دو **متقارب**[۱۷] درج ذیل لکیریں ہیں۔

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

۱۶۱۹۰ متقارب کی مدد سے ہم قطع زائد کو جلدی ترسیم کر پاتے ہیں۔ متقارب کی مساوات حاصل کرنے کا آسان ترین طریقہ مساوات ۱۱ میں دائیں ہاتھ 1 کی جگہ 0
۱۶۱۹۱ پر کر کے y کے لیے حل کرنا ہے:

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\text{قطع زائد}} \implies \underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0}_{\text{1 کی جگہ 0}} \implies \underbrace{y = \pm\frac{b}{a}x}_{\text{متقارب}}$$

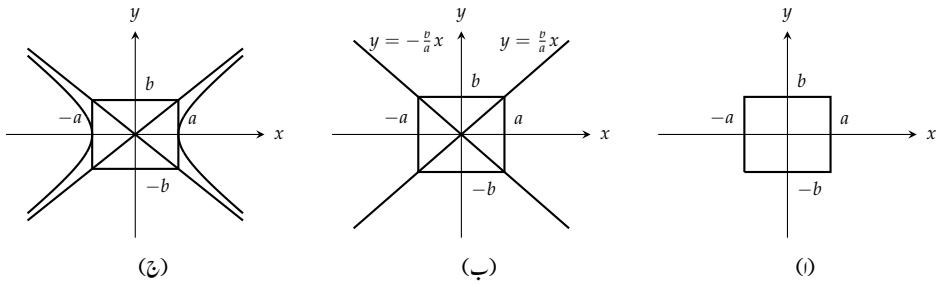
۱۶۱۹۲ **مرکز پر مبدا والے قطع زائد کی معیاری مساواتیں**

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	محور x پر ماسکے ہیں
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ
$(\pm c, 0)$	ماسکے
$(\pm a, 0)$	راس
$y = \pm\frac{b}{a}x$	متقارب

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	محور y پر ماسکے ہیں
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ
$(0, \pm c)$	ماسکے
$(0, \pm a)$	راس
$y = \pm\frac{a}{b}x$	متقارب

---

[۱۷] asymptotes



شکل ۱۰.۱۱: متقارب کی مدد سے قطع زائد کی ترسیم۔

۱۶۱۹۳ دھیان رہے کہ پہلی صورت میں متقارب کی مساوات میں $\frac{b}{a}$ اور دوسری صورت میں $\frac{a}{b}$ ہیں۔

۱۶۱۹۴ قطع زائد ترسیم کرنے کا عمل

۱۶۱۹۵ قطع زائد $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ترسیم کرنے کے لیے درج ذیل اقدام کریں (شکل ۱۰.۱۱)۔

۱۶۱۹۶ ا. نقاط $(\pm a, 0)$ اور $0, \pm b$ کو ترسیم کرتے ہوئے اس مستطیل کو مکمل کریں جن کے اضلاع میں یہ نقطے پائے جاتے ہوں۔

۱۶۱۹۷ ب. مستطیل کے وتر کو بڑھا کر متقارب ترسیم کریں۔

۱۶۱۹۸ ج. مستطیل اور متقارب کو راہ بر لیتے ہوئے قطع زائد ترسیم کریں۔

۱۶۱۹۹ مثال ۱۰.۴: محور x پر ماسکے

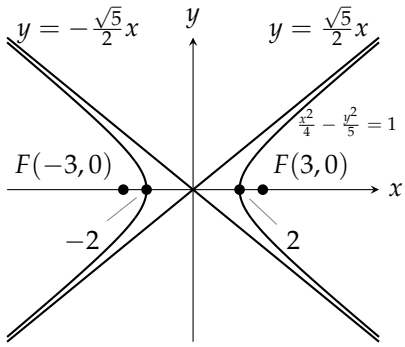
۱۶۲۰۰ درج ذیل قطع زائد کی مساوات ہے (شکل ۱۰.۱۲)

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$

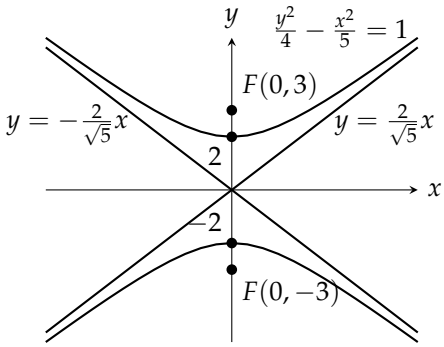
۱۶۲۰۱ جس میں $a^2 = 4$ اور $b^2 = 5$ ہیں (مساوات ۱۰)۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ	$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+5} = 3$
ماسکے	$(\pm c, 0) = (\pm 3, 0)$
راس	$(\pm a, 0) = (\pm 2, 0)$
متقارب	$y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} x$

۱۶۲۰۲ □



شکل ۱۰.۱۲: قطع زائد (مثال ۱۰.۴)



شکل ۱۰.۱۳: قطع زائد (مثال ۱۰.۵)

۱۶۲۰۳ مثال ۱۰.۵: درج ذیل قطع زائد کو مثال ۱۰.۴ کے قطع زائد میں x اور y کو ایک دوسرے کے ساتھ بدل کر حاصل کیا گیا ہے۔

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

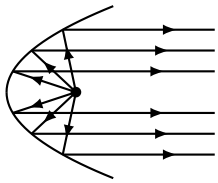
۱۶۲۰۴ اس قطع زائد کے راس عمودی محور پر پائے جائیں گے (شکل ۱۰.۱۳)۔ اب بھی $a^2 = 4$ اور $b^2 = 5$ ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ	$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+5} = 3$
ماسکے	$(0, \pm c) = (0, \pm 3)$
راس	$(0, \pm a) = (0, \pm 2)$
مرکز	$(0,0)$
متقارب	$y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} x$

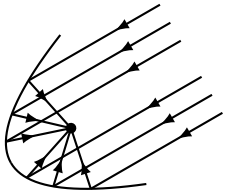
۱۶۲۰۵ □

۱۶۲۰۶ عکسی خواص

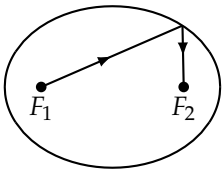
۱۶۲۰۷ قطع مکافی کا اہم ترین استعمال بطور شعاع اور ریڈیو امواج کا عاکس ہے۔ قطع مکافی کے ماسکہ سے خارج شعاع، قطع مکافی کے محور کے متوازی منعکس ہوتا ہے
۱۶۲۰۸ (شکل ۱۰.۱۴)۔ یہ خاصیت ہاتھ بتی اور گاڑیوں کی اگلی بتیوں میں بروئے کار لایا جاتا ہے۔ اس کے علاوہ خرد امواج نشر کرنے کے لیے بھی قطع مکافی اینٹینا استعمال
۱۶۲۰۹ کیا جاتا ہے جو نقطہ منبع سے خارج برقناطیسی امواج کو ایک محدود شعاع کی صورت میں خارج کرتا ہے۔ اس کے برعکس قطع مکافی عاکس کے محور کے متوازی آمد
۱۶۲۱۰ برقناطیسی امواج عاکس کے ماسکہ پر مرکوز کیے جاتے ہیں (شکل ۱۰.۱۵)۔ اس خاصیت کی وجہ سے ٹیلی وژن کا ڈش اینٹینا یا ریڈیو دوربین کمزور اشارات کو اکٹھے
۱۶۲۱۱ کر کے زیادہ طاقتور اشارہ حاصل کرتا ہے۔ اسی طرح سورج کی روشنی کو ایک نقطہ پر مرتکز کیا جا سکتا ہے۔



شکل ۱۰.۱۴: قطع مکافی آئینہ کے ماسکہ سے نکلتا شعاع انعکاس کے بعد محور کے متوازی ہو گا۔



شکل ۱۰.۱۵: قطع مکافی عاکس پر آمد شعاع ماسکہ پر پہنچتا ہے۔



شکل ۱۰.۱۶: ترخیم کے ایک ماسکہ سے خارج شعاع دوسرے ماسکہ پر پہنچتا ہے۔

۱۶۲۱۲ ایک ترخیم کو اس کے محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جا سکتا ہے جو **ترخیمی سطح**[۱۸] کہلاتا ہے۔ اس کی اندرونی سطح پر چاندی کی تہہ لگا کر آئینہ بنایا جا سکتا ہے۔
۱۶۲۱۳ ایک ماسکہ سے خارج شعاع دوسرے ماسکہ پر منعکس ہو گا (شکل ۱۰.۱۶ اور سوال ۱۰.۱۱۲)۔ ترخیمی سطح اسی طرح آواز کو بھی ایک ماسکہ سے دوسرے ماسکہ منتقل
۱۶۲۱۴ کرتا ہے۔ اس خاصیت کو استعمال کرتے ہوئے کمرہ سرگوشی بنایا جا سکتا ہے جس میں ایک ماسکہ پر بیٹھا شخص دوسرے ماسکہ پر بیٹھے شخص کے ساتھ سرگوشی سے
۱۶۲۱۵ باتیں کر سکتا ہے۔ کمرہ سرگوشی میں موجود باقی لوگ ان کی باتیں سننے سے قاصر ہوں گے۔ ہوائی جہازوں کی کارکردگی پر ہوائی سرنگ میں غور کیا جاتا ہے۔ جہاز
۱۶۲۱۶ کے شور پر غور کرتے ہوئے نقطہ غور کو ترخیمی سطح کے ایک ماسکہ پر رکھا جاتا ہے جبکہ مائکروفون کو اس کی دوسرے ماسکہ پر رکھا جاتا ہے۔ دیگر نقطوں سے پیدا شور
۱۶۲۱۷ کے اثر کو یوں بہت کم کرنا ممکن ہوتا ہے۔

۱۶۲۱۸ قطع زائد آئینہ کے ایک ماسکہ پر آمد شعاع کو آئینہ دوسرے ماسکہ پر بھیجتا ہے۔ قطع مکافی سطح، ترخیمی سطح اور قطع مکافی سطحوں کے خواص کو استعمال کرتے ہوئے
۱۶۲۱۹ جدید دوربین تیار کیے جاتے ہیں۔

۱۶۲۲۰ سوالات

۱۶۲۲۱ ترسیم کی پہچان

۱۶۲۲۲ سوال ۱۰.۱ تا سوال ۱۰.۴ میں دی گئی قطع مکافی کی مساوات درج ذیل میں تلاش کریں۔

$$x^2 = 2y, \quad x^2 = -6y, \quad y^2 = 8x, \quad y^2 = -4x$$

۱۶۲۲۳ اس کے بعد قطع مکافی کے ماسکہ اور ناظمہ دریافت کریں۔

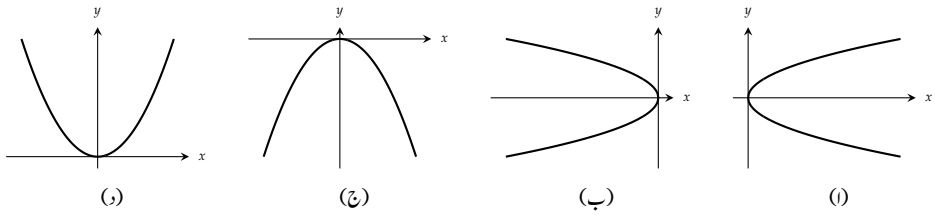
۱۶۲۲۴ سوال ۱۰.۱: شکل ۱۰.۱۷-ا

۱۶۲۲۵ سوال ۱۰.۲: شکل ۱۰.۱۷-ب

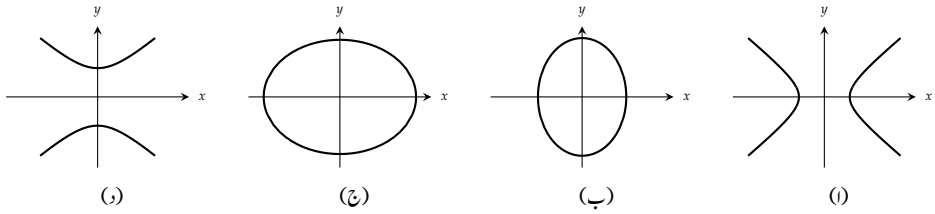
۱۶۲۲۶ سوال ۱۰.۳: شکل ۱۰.۱۷-ج

---

[۱۸] ellipsoid



شکل ۱۰.۱۷: ترسیم برائے سوال ۱۰.۱ تا سوال ۱۰.۴



شکل ۱۰.۱۸: ترسیمات برائے سوال ۱۰.۵ تا سوال ۱۰.۸

۱۶۲۲۷ سوال ۱۰.۴: شکل ۱۰.۱۷-د

۱۶۲۲۸

۱۶۲۲۹ سوال ۱۰.۵ تا سوال ۱۰.۸ میں دیے گئے مخروط کی مساوات درج ذیل میں تلاش کریں۔

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1,\quad \frac{x^2}{2}+y^2=1,\quad \frac{y^2}{4}-x^2=1,\quad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$$

۱۶۲۳۰ دیے گئے مخروط کا ماسکہ اور راس تلاش کریں۔ اگر قطع زائد دیا گیا ہو تب اس کے متقارب بھی دریافت کریں۔

۱۶۲۳۱ سوال ۱۰.۵: ترسیم شکل ۱۰.۱۸-ا میں دیا گیا ہے۔

۱۶۲۳۲ سوال ۱۰.۶: ترسیم شکل ۱۰.۱۸-ب میں دیا گیا ہے۔

۱۶۲۳۳ سوال ۱۰.۷: ترسیم شکل ۱۰.۱۸-ج میں دیا گیا ہے۔

۱۶۲۳۴ سوال ۱۰.۸: ترسیم شکل ۱۰.۱۸-د میں دیا گیا ہے۔

۱۶۲۳۵

۱۶۲۳۶ **قطع مکافی**

۱۶۲۳۷ سوال ۱۰.۹ تا سوال ۱۰.۱۶ میں دیے گئے قطع مکافی کا ماسکہ اور ناظمہ تلاش کرنے کے بعد اس کو ترسیم کریں۔ ماسکہ اور ناظمہ کو بھی ترسیم میں شامل کریں۔

۱۶۲۳۸ سوال ۱۰.۹: $y^2=12x$

سوال ۱۰.۱۰: $x^2 = 6y$

سوال ۱۰.۱۱: $x^2 = -8y$

سوال ۱۰.۱۲: $y^2 = -2x$

سوال ۱۰.۱۳: $y = 4x^2$

سوال ۱۰.۱۴: $y = -8x^2$

سوال ۱۰.۱۵: $x = -3y^2$

سوال ۱۰.۱۶: $x = 2y^2$

ترخیم

سوال ۱۰.۱۷ تا سوال ۱۰.۲۴ میں دیے گئے ترخیم کی مساوات کو معیاری روپ میں لکھ کر ترسیم کریں۔ ترسیم پر ماسکے دکھائیں۔

سوال ۱۰.۱۷: $16x^2 + 25y^2 = 400$

سوال ۱۰.۱۸: $7x^2 + 16y^2 = 112$

سوال ۱۰.۱۹: $2x^2 + y^2 = 2$

سوال ۱۰.۲۰: $2x^2 + y^2 = 4$

سوال ۱۰.۲۱: $3x^2 + 2y^2 = 6$

سوال ۱۰.۲۲: $9x^2 + 10y^2 = 90$

سوال ۱۰.۲۳: $6x^2 + 9y^2 = 54$

سوال ۱۰.۲۴: $169x^2 + 25y^2 = 4225$

سوال ۱۰.۲۵ اور سوال ۱۰.۲۶ میں مستوی xy میں پائے جانے والے ترخیم کے ماسکہ اور راس دیے گئے ہیں۔ ترخیم کا مرکز مستوی xy کے مبدا پر ہے۔ ترخیم کی معیاری مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۲۵: ماسکے $(\pm\sqrt{2}, 0)$ اور راس $(\pm 2, 0)$

سوال ۱۰.۲۶: ماسکے $(0, \pm 4)$ اور راس $(0, \pm 5)$

قطع زائد

سوال ۱۰.۲۷ تا سوال ۱۰.۳۴ میں قطع زائد کی مساواتیں دی گئی ہیں۔ مساوات کو معیاری روپ میں لکھیں اور قطع زائد کا متقارب دریافت کریں۔ قطع زائد کا خاکہ کھینچ کر متقارب اور ماسکہ بھی دکھائیں۔

سوال ۱۰.۲۷: $x^2 - y^2 = 1$

سوال ۱۰.۲۸: $9x^2 - 16y^2 = 144$

سوال ۱۰.۲۹: $y^2 - x^2 = 8$

سوال ۱۰.۳۰: $y^2 - x^2 = 4$

سوال ۱۰.۳۱: $8x^2 - 2y^2 = 16$

سوال ۱۰.۳۲: $y^2 - 3x^2 = 3$

سوال ۱۰.۳۳: $8y^2 - 2x^2 = 16$

سوال ۱۰.۳۴: $64x^2 - 36y^2 = 2304$

سوال ۱۰.۳۵ تا سوال ۱۰.۳۸ میں مستوی xy پر پائے جانے والے قطع زائد کے ماسکہ، راس اور متقارب کی معلومات دی گئی ہے۔ قطع زائد کا مرکز مستوی xy کے مبدا پر ہے۔ قطع زائد کی معیاری مساوات حاصل کریں۔

سوال ۱۰.۳۵: ماسکے $(0, \pm\sqrt{2})$ اور متقارب $y = \pm x$

سوال ۱۰.۳۶: ماسکے $(\pm 2, 0)$ اور متقارب $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$

سوال ۱۰.۳۷: راس $(\pm 3, 0)$ اور متقارب $y = \pm\frac{4}{3}x$

سوال ۱۰.۳۸: راس $(0, \pm 2)$ اور متقارب $y = \pm\frac{1}{2}x$

مخروطی حصوں کا انتقال

سوال ۱۰.۳۹: قطع مکافی $y^2 = 8x$ کو 2 اکائیاں نیچے اور 1 اکائی دائیں منتقل کر کے قطع مکافی $(y+2)^2 = 8(x-1)$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے قطع مکافی کے راس، ماسکہ اور ناظمہ دریافت کریں۔ (ب) نئے راس، ماسکہ اور ناظمہ کو ترسیم کرتے ہوئے نئے قطع مکافی کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۰.۴۰: قطع مکافی $x^2 = -4y$ کو 1 اکائی بائیں اور 3 اکائیاں اوپر منتقل کر کے قطع مکافی $(x+1)^2 = -4(y-3)$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے قطع مکافی کا راس، ماسکہ اور ناظمہ دریافت کریں۔ (ب) نئے راس، ماسکہ اور ناظمہ کو ترسیم کرتے ہوئے نئے قطع مکافی کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۰.۴۱: ترخیم $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ کو 4 اکائیاں دائیں اور 3 اکائیاں اوپر منتقل کر کے ترخیم $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے ترخیم کے ماسکے، راس اور مرکز دریافت کریں۔ (ب) نئے ماسکے، راس اور مرکز ترسیم کرتے ہوئے نئے ترخیم کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۰.۴۲: ترخیم $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ کو 3 اکائیاں بائیں اور 2 اکائیاں نیچے منتقل کر کے ترخیم $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے ترخیم کے ماسکے، راس اور مرکز دریافت کریں۔ (ب) نئے ماسکے، راس اور مرکز ترسیم کرتے ہوئے نئے ترخیم کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۰.۴۳: قطع زائد $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ کو 2 اکائیاں دائیں منتقل کر کے قطع زائد $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے قطع زائد کا مرکز، ماسکے، راس اور متقارب دریافت کریں۔ (ب) نئے مرکز، ماسکے، راس اور متقارب ترسیم کرتے ہوئے نئے قطع زائد کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۰.۴۴: قطع زائد $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ کو 2 اکائیاں نیچے منتقل کرتے ہوئے قطع زائد $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ پیدا کیا جاتا ہے۔ (الف) نئے قطع زائد کا مرکز، ماسکے اور متقارب دریافت کریں۔ (ب) نیا مرکز، ماسکے اور متقارب ترسیم کر کے نئے قطع زائد کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۰.۴۵ تا سوال ۱۰.۴۸ میں قطع مکافی کی مساوات اور اس کی منتقلی کی معلومات دی گئی ہے۔ نئے قطع مکافی کی مساوات تلاش کر کے نئے قطع مکافی کا راس، ماسکہ اور ناظمہ معلوم کریں۔

سوال ۱۰.۴۵: $y^2 = 4x$ ، 2 اکائیاں بائیں اور 3 اکائیاں نیچے۔

سوال ۱۰.۴۶: $y^2 = -12x$ ، 4 اکائیاں دائیں اور 3 اکائیاں اوپر۔

سوال ۱۰.۴۷: $x^2 = 8y$ ، 1 اکائی دائیں اور 7 اکائیاں نیچے۔

سوال ۱۰.۴۸: $x^2 = 6y$ ، 3 اکائیاں بائیں اور 2 اکائیاں نیچے۔

سوال ۱۰.۴۹ تا سوال ۱۰.۵۲ میں ترخیم کی مساوات اور اس کی منتقلی کی معلومات دی گئی ہے۔ نئے ترخیم کی مساوات تلاش کر کے نئے ترخیم کے ماسکے، راس اور مرکز معلوم کریں۔

سوال ۱۰.۴۹: $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$ ، 2 اکائیاں بائیں اور 1 اکائی نیچے۔

سوال ۱۰.۵۰: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ، 3 اکائیاں دائیں اور 4 اکائیاں اوپر۔

سوال ۱۰.۵۱: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ ، 2 اکائیاں دائیں اور 3 اکائیاں اوپر۔

سوال ۱۰.۵۲: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ ، 43 اکائیاں بائیں اور 5 اکائیاں نیچے۔

سوال ۱۰.۵۳ تا سوال ۱۰.۵۶ میں قطع زائد کی مساوات اور اس کی منتقلی کی معلومات دی گئی ہے۔ نئے قطع زائد کی مساوات تلاش کر کے نئے قطع زائد کا مرکز، ماسکے، راس اور متقارب معلوم کریں۔

سوال ۱۰.۵۳: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ دائیں 2 اکائیاں اور اوپر 2 اکائیاں۔

سوال ۱۰.۵۴: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ بائیں 5 اکائیاں اور نیچے 1 اکائی۔

سوال ۱۰.۵۵: $y^2 - x^2 = 1$ بائیں 1 اکائی اور نیچے 1 اکائی۔

سوال ۱۰.۵۶: $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$ دائیں 1 اکائی اور اوپر 3 اکائیاں۔

سوال ۱۰.۵۷ تا سوال ۱۰.۶۸ میں دیے گئے مخروط حصوں کا (جیسا مناسب ہو) مرکز، ماسکے، راس، متقارب اور رداس دریافت کریں۔

سوال ۱۰.۵۷: $x^2 + 4x + y^2 = 12$

سوال ۱۰.۵۸: $2x^2 + 2y^2 - 28x + 12y + 144$

سوال ۱۰.۵۹: $x^2 + 2x + 4y - 3 = 0$

سوال ۱۰.۶۰: $y^2 - 4y - 8x - 12 = 0$

سوال ۱۰.۶۱: $x^2 + 5y^2 + 4x = 1$

سوال ۱۰.۶۲: $9x^2 + 6y^2 + 36y = 0$

سوال ۱۰.۶۳: $x^2 + 2y^2 - 2x - 4y = -1$

سوال ۱۰.۶۴: $4x^2 + y^2 + 8x - 2y = -1$

سوال ۱۰.۶۵: $x^2 - y^2 - 2x + 4y = 4$

سوال ۱۰.۶۶: $x^2 - y^2 + 4x - 6y = 6$

سوال ۱۰.۶۷: $2x^2 - y^2 + 6y = 3$

سوال ۱۰.۶۸: $y^2 - 4x^2 + 16x = 24$

عدم مساوات

سوال ۱۰.۶۹ تا سوال ۱۰.۷۴ میں ایک خطہ کو مطمئن کرنے والی عدم مساوات یا عدم مساوات کی جوڑی دی گئی ہے۔ مستوی xy میں اس خطہ کو ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۶۹: $9x^2 + 16y^2 \leq 144$

سوال ۱۰.۷۰: $4x^2 + y^2 \leq 4$ اور $x^2 + y^2 \geq 1$

سوال ۱۰.۷۱: $4x^2 + 9y^2 \leq 36$ اور $x^2 + 4y^2 \geq 4$

سوال ۱۰.۷۲: $(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + 9y^2 - 9) \leq 0$

سوال ۱۰.۷۳: $4y^2 - x^2 \geq 4$

سوال ۱۰.۷۴: $\left|x^2 - y^2\right| \leq 1$

نظریہ اور مثالیں

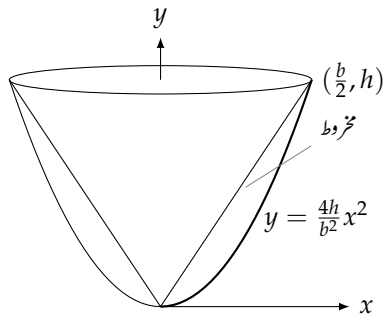
سوال ۱۰.۷۵: قطع مکافی ٹھوس جسم کے حجم کا کلیہ آرشمیدسی

قطع مکافی $y = \frac{4lt}{b^2}x^2$ اور لکیر $y = h$ میں گھیرے ہوئے خطے کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ دکھائیں کہ اس جسم کا حجم مطابقتی مخروط کے حجم کا $\frac{3}{2}$ گنا ہو گا (شکل ۱۰.۱۹)۔

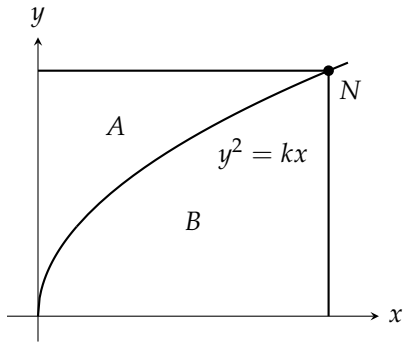
سوال ۱۰.۷۶: معلق پل کی رسیاں قطع مکافی کی صورت میں لٹکی ہوتی ہیں۔

ایک معلق پل کی کمیت m کلو گرام فی میٹر ہے۔ اس پل کو رسیوں سے لٹکایا گیا ہے۔ اگر مبدا پر رسّی کا افقی تناو H ہو تب رسّی کی منحنی درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتی ہے جہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{mg}{H}x$$



شکل ۱۰.۱۹: جسم طواف برائے سوال ۱۰.۷۵



شکل ۱۰.۲۰: خطے برائے سوال ۱۰.۸۱

۱۳۴۶ اس تفرقی مساوات کو حل کرتے ہوئے دکھائیں کہ رسّی کی منحنی کی مساوات ایک قطع مکافی ہے۔ $x = 0$ پر $y = 0$ ابتدائی معلومات ہے۔

۱۳۴۷ سوال ۱۰.۷۷: نقاط $(1,0)$ ، $(0,1)$ اور $(2,2)$ سے گزرتے دائرے کی مساوات دریافت کریں۔

۱۳۴۸ سوال ۱۰.۷۸: نقاط $(2,3)$ ، $(3,2)$ اور $(-4,3)$ سے گزرتے دائرے کی مساوات دریافت کریں۔

۱۳۴۹ سوال ۱۰.۷۹: ایک دائرہ جس کا مرکز $(-2,1)$ پر ہے نقطہ $(1,3)$ سے گزرتا ہے۔ کیا نقطہ $(1.1, 2.8)$ اس دائرے پر، اس کے اندر یا اس
۱۳۵۰ کے باہر پایا جاتا ہے؟

۱۳۵۱ سوال ۱۰.۸۰: جہاں دائرہ $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ محددی محوروں کو قطع کرتا ہے وہاں اس دائرے کے مماس معلوم کریں۔

۱۳۵۲ سوال ۱۰.۸۱: قطع مکافی $y^2 = kx, k > 0$ پر نقطہ N سے محددی محور کے متوازی لکیریں کھینچی جاتی ہیں۔ ان لکیروں اور محددی محوروں
۱۳۵۳ کے کے بیچ مستطیل خطہ کو قطع مکافی دو حصوں A اور B میں تقسیم کرتا ہے (شکل ۱۰.۲۰)۔ (الف) دکھائیں کہ ان خطوں کو محور y کے گرد گھما کر حاصل
۱۳۵۴ اجسام طواف کے حجم کی نسبت $1 : 4$ ہے۔ (ب) ان خطوں کو محور x کے گرد گھما کر حاصل اجسام طواف کے حجم کی نسبت کیا ہو گی؟

۱۳۵۵ سوال ۱۰.۸۲: دکھائیں کہ لکیر $x = -p$ پر کسی بھی نقطہ سے منحنی $y^2 = 4px$ پر دو مماس، آپس میں عمودی ہوں گے۔

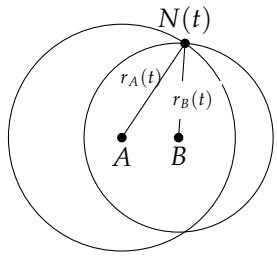
۱۳۵۶ سوال ۱۰.۸۳: ترخیم $x^2 + 4y^2 = 4$ میں محصور زیادہ سے زیادہ رقبے کے مستطیل کے اضلاع معلوم کریں۔ مستطیل کے اضلاع محددی محور
۱۳۵۷ کے متوازی ہیں۔

۱۳۵۸ سوال ۱۰.۸۴: ترخیم $9x^2 + 4y^2 = 36$ کو (الف) محور x ، (ب) محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کا حجم معلوم کریں۔

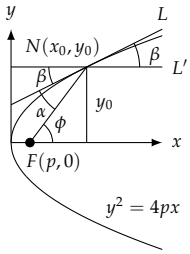
۱۳۵۹ سوال ۱۰.۸۵: ربع اول میں محور x ، لکیر $x = 4$ اور قطع زائد $9x^2 - 4y^2 = 36$ کے بیچ تکونی خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف
۱۳۶۰ پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

۱۳۶۱ سوال ۱۰.۸۶: ایک خطہ کا بایاں سرحد محور y ، دایاں سرحد قطع زائد $x^2 - y^2 = 1$ جبکہ اس کا نچلا اور بالائی سرحد لکیر $y = \pm 3$ ہیں۔ اس
۱۳۶۲ خطہ کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

۱۳۶۳ سوال ۱۰.۸۷: محور x کے بالائی اور ترخیم $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ کے نیچے خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔



شکل ۱۰.۲۱: امواج برائے سوال ۱۰.۸۹



شکل ۱۰.۲۲: قطع مکافی میں انعکاس (سوال ۱۰.۹۰)

سوال ۱۰.۸۸: قطع زائد $y^2 - x^2 = 1$ کے بالائی شاخ $y = \sqrt{x^2+1},\ 0 \le x \le \sqrt{2}$ کو محور x کر گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۸۹: پانی کی سطح کو پہلے A اور بعد میں B پر چھو کر شکل ۱۰.۲۱ میں دکھائے گئے امواج پیدا کیے گئے۔ جیسے جیسے یہ امواج پھیلتے ہیں، ان کا نقطہ تقاطع ایک منحنی بناتا ہے جو قطع زائد کی طرح معلوم ہوتا ہے۔ کیا ایسا حقیقتاً ہو گا؟ یہ جاننے کے لیے ہم A اور B پر مرکز دائروں کو امواج کا نمونہ لے سکتے ہیں۔

لمحہ t پر نقطہ N مرکز A سے $r_A(t)$ اور B سے $r_B(t)$ فاصلہ پر ہو گا۔ چونکہ دائروں کے رداس ایک مستقل رفتار (موج کی رفتار) سے بڑھتے ہیں لہٰذا $\frac{\mathrm{d}r_A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r_B}{\mathrm{d}t}$ ہو گا۔ اس سے اخذ کریں کہ $r_A - r_B$ ایک مستقل ہو گا لہٰذا N اس قطع زائد پر پایا جائے گا جس کے ماسکہ A اور B ہیں۔

سوال ۱۰.۹۰: قطع مکافی کے خواص انعکاس

قطع مکافی $y^2 = 4px$ پر عمومی نقطہ $N(x_0, y_0)$ کو شکل ۱۰.۲۲ میں دکھایا گیا ہے۔ نقطہ N پر لکیر L اس قطع مکافی کا مماس ہے۔ قطع مکافی کا ماسکہ $F(p, 0)$ ہے۔ نقطہ N سے دائیں منعکس شعاع L'، محور x کے متوازی ہے۔ ہم دکھاتے ہیں کہ F سے خارج، N پر پہنچتا شعاع انعکاس کے بعد L' کا ہم مکان ہو گا۔ یہ دکھانے کی خاطر ہم دکھاتے ہیں کہ $\beta = \alpha$ ہو گا۔ اس مساوات کی تصدیق درج ذیل اقدام کے ذریعہ کریں۔

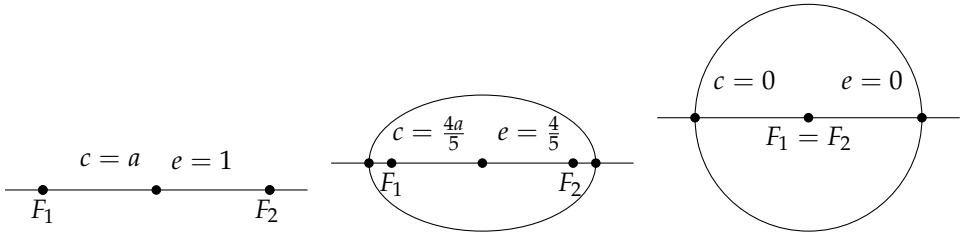
ا. دکھائیں کہ $\tan\beta = \frac{2p}{y_0}$ ہو گا۔

ب. دکھائیں کہ $\tan\phi = \frac{y_0}{x_0 - p}$ ہو گا۔

ج. درج ذیل مماثل

$$\tan\alpha = \frac{\tan\phi - \tan\beta}{1 + \tan\phi\tan\beta}$$

استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $\tan\alpha = \frac{2p}{y_0}$ ہو گا۔ چونکہ α اور β دونوں زاویہ حادہ ہیں لہٰذا $\tan\beta = \tan\alpha$ یعنی $\beta = \alpha$ ہو گا۔



شکل ۱۰.۲۳: اگر c کو 0 سے بڑھا کر a کیا جائے تب ترخیم کی صورت دائرہ سے لکیر کی ہو جاتی ہے۔

۱۰.۲ سنک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی

ہم ہر مخروط حصہ کے ساتھ ایک عدد منسلک کر سکتے ہیں جس کو مخروط حصے کا سنک کہتے ہیں۔ سنک سے مخروط حصے کی قسم (دائرہ، ترخیم، قطع مکافی یا قطع زائد) معلوم کی جا سکتی ہے۔ ترخیم اور قطع زائد کی صورت میں یہ عدد مخروط کی عمومی جسامت کی معلومات بھی فراہم کرتا ہے۔

سنک

اگرچہ مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ c درج ذیل مساوات میں نہیں پایا جاتا ہے

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$$

ترخیم کے لیے ہم c کو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ سے معلوم کر سکتے ہیں۔ اگر a کو مستقل رکھ کر c کو وقفہ $0 \leq c \leq a$ پر تبدیل کیا جائے تب حاصل ترخیم کی صورت بھی تبدیل ہو گی (شکل ۱۰.۲۳)۔ اگر $c = 0$ (یعنی $a = b$) ہو تب یہ دائرہ ہو گا جبکہ c بڑھانے سے یہ چپٹا ہو گا۔ اگر $c = a$ ہو تب راس اور ماسکے ایک دوسرے کے اوپر ہوں گے اور ترخیم ایک سیدھی لکیر کی صورت اختیار کرے گا۔

ہم c اور a کی نسبت سے ترخیم کی صورت بیان کرتے ہیں۔ یہ نسبت ترخیم کی **سنک** کہلاتی ہے۔

تعریف: ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ (a > b)$ کی **سنک**[19] درج ذیل ہے۔

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

□

نظام شمسی میں سورج کے گرد سیاروں کا مدار ترخیمی ہے۔ جیسا جدول ۱۰.۲ میں ان مدار کے سنک سے دیکھا جا سکتا ہے یہ زیادہ تر تقریباً دائری ہیں۔ پلوٹو کا مدار بہت سنکی ہے اور اس کا سنک $e = 0.21$ ہے۔ اسی طرح عطارہ کا سنک 0.21 ہے۔ نظام شمسی کے دیگر ارکان کے مدار مزید زیادہ سنکی ہیں۔ مثال کے طور پر سیارچہ آئکارس جو تقریباً 1.4 کلومیٹر چوڑا اور سورج کے گرد 409 زمینی دنوں میں ایک چکر کاٹتا ہے کی سنک 0.83 ہے۔

[19] eccentricity

جدول ۱۰.۲: سورج کے گرد سیاروں کے مداروں کی سنک

عطارہ	زہرہ	زمین	مریخ	مشتری	زحل	یورانس	نیپچون	پلوٹو
0.21	0.01	0.02	0.09	0.05	0.06	0.05	0.01	0.25

۱۹۳۹۸ مثال ۱۰.۶: دم دار ستارہ ہالی کا مدار 36.18 فلکیاتی اکائیاں لمبا اور 9.12 فلکیاتی اکائیاں چوڑا ہے۔ فلکیاتی اکائی سے مراد زمین کے مدار کے نصف اکبر
۱۹۳۹۹ محور کی لمبائی ہے جو 149 597 870 کلومیٹر ہے۔ اس کی سنک

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{(36.18/2)^2 + (9.12/2)^2}}{36.18/2} \approx 0.97$$

۱۹۴۰۰ □

۱۹۴۰۱ قطع مکافی کا ایک ماسکہ اور ایک ناظمہ ہوتے ہیں جبکہ ترخیم کے دو ماسکے اور دو ناظمہ ہوتے ہیں جو محور اکبر کے متوازی، مرکز سے $\frac{a}{e}$ فاصلے پر ہوتے ہیں۔ قطع
۱۹۴۰۲ مکافی کی ایک خاصیت درج ذیل ہے

$$NF = 1 \cdot ND \tag{۱}$$

۱۹۴۰۳ یعنی ترخیم پر کسی بھی نقطہ N کا ماسکہ سے فاصلہ اور N کا ناظمہ پر قریبی نقطہ D سے فاصلہ ایک سا ہو گا۔ ترخیم کے لیے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ مساوات ا کی
۱۹۴۰۴ جگہ درج ذیل ہو گا۔

$$NF_1 = e \cdot ND_1, \qquad NF_2 = e \cdot ND_2 \tag{۲}$$

۱۹۴۰۵ یہاں e سنک ہے، N ترخیم پر کوئی نقطہ ہے، F_1 اور F_2 ماسکے ہیں اور ناظمہ پر N کے قریب ترین نقطے D_1 اور D_2 ہیں (شکل ۱۰.۲۴)۔

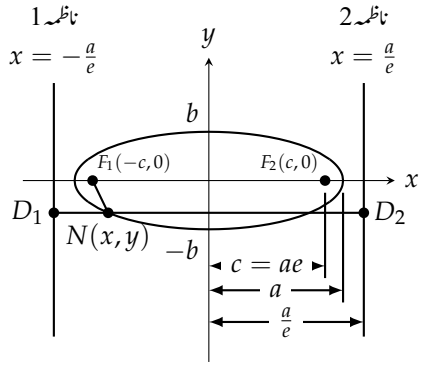
۱۹۴۰۶ مساوات ۲ کے دونوں اجزاء میں ماسکہ اور ناظمہ میں مطابقت لازمی ہے، یعنی، اگر ہم N سے F_1 تک فاصلہ لیں تب ہم N سے ناظمہ تک فاصلہ لیتے
۱۹۴۰۷ ہوئے ترخیم کا وہ ناظمہ لیں گے جو ترخیم کے اسی ہاتھ ہو۔ ناظمہ $x = -\frac{a}{e}$ اور ماسکہ $F_1(-c, 0)$ مطابقت رکھتے ہیں جبکہ ناظمہ $x = \frac{a}{e}$ اور
۱۹۴۰۸ ناظمہ $F_2(c, 0)$ مطابقت رکھتے ہیں۔

۱۹۴۰۹ قطع زائد کا سنک بھی $e = \frac{c}{a}$ ہے، البتہ اب c کی قیمت $\sqrt{a^2 + b^2}$ نا کہ $\sqrt{a^2 - b^2}$ ہو گی۔ مزید ترخیم کے سنک کے برعکس، قطع زائد کا
۱۹۴۱۰ سنک ہر صورت 1 سے زیادہ ہو گی۔

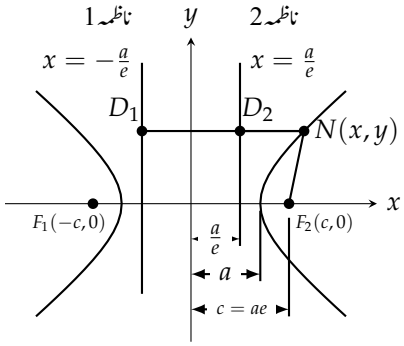
۱۹۴۱۱ تعریف: قطع زائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ کا سنک درج ذیل ہو گا۔

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

۱۹۴۱۲ □



شکل ۱۰.۲۴: ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کے ناظمہ اور ماسکے۔ ناظمہ 1 کا مطابقتی ماسکہ F_1 ہے جبکہ ناظمہ 2 کا مطابقتی ماسکہ F_2 ہے۔



شکل ۱۰.۲۵: قطع زائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ کے ماسکے اور ناظمہ۔ قطع زائد پر ہر N کے لیے $NF_1 = e \cdot ND_1$ اور $NF_2 = e \cdot ND_2$ ہوں گے۔

۱۶۳۱۳ ترخیم اور قطع زائد دونوں میں ماسکوں کے بیچ فاصلہ اور راس کے بیچ فاصلہ کا نسبت، سنک کے برابر ہوگا۔

$$\text{سنک} = \frac{\text{فاصلہ بیچ کے ماسکوں}}{\text{فاصلہ بیچ کے راس}}$$

۱۶۳۱۴ ترخیم میں راس دور اور ماسکے قریب ہوتے ہیں اور ان کی نسبت 1 سے کم ہوتی ہے۔ قطع مکافی میں ماسکے دور اور راس قریب ہوتے ہیں لہٰذا سنک 1 سے زیادہ
۱۶۳۱۵ ہوتا ہے۔

۱۶۳۱۶ مثال ۱۰.۷: ایک ترخیم کا سنک 0.8 اور ماسکے $(0, \pm 7)$ ہیں۔ اس کے راس تلاش کریں۔

۱۶۳۱۷ **حل**

۱۶۳۱۸ چونکہ $e = \frac{c}{a}$ ہے لہٰذا راس $(0, \pm a)$ پر ہوں گے جہاں

$$a = \frac{c}{e} = \frac{7}{0.8} = 8.75$$

۱۶۳۱۹ یعنی $(0, \pm 8.75)$ ہوگا۔ □

۱۶۳۲۰ مثال ۱۰.۸: قطع زائد $9x^2 - 16y^2 = 144$ کا سنک معلوم کریں۔

۱۶۳۲۱ **حل**

۱۶۳۲۲ ہم قطع زائد کی مساوات کے دونوں اطراف کو 144 سے تقسیم کر کے معیاری مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1, \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

یوں $a^2 = 16$ اور $b^2 = 9$ ہیں لہٰذا $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ ہو گا جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

□

ترخیم کی طرح یہاں بھی دکھایا جا سکتا ہے کہ لکیریں $x = \pm \frac{a}{e}$ قطع زائد کے ناظمہ ہوں گے، یعنی:

$$NF_1 = e \cdot ND_1, \quad NF_2 = e \cdot ND_2 \tag{۳}$$

یہاں قطع زائد پر N کوئی نقطہ ہے، F_1 اور F_2 ماسکے ہیں جبکہ ناظمہ پر N کے قریب ترین نقطے D_1 اور D_2 ہیں (شکل ۱۰.۲۵)۔

تصویر مکمل کرنے کی خاطر ہم قطع مکافی کے سنک کی تعریف $e = 1$ لیتے ہیں۔ مساوات ۱ تا مساوات ۳ کو یوں ایک ہی روپ $NF = e \cdot ND$ میں لکھا جا سکتا ہے۔

تعریف: قطع مکافی کا سنک $e = 1$ ہے۔

□

ماسکہ اور ناظمہ کی مساوات $NF = e \cdot ND$، قطع مکافی، ترخیم اور قطع زائد کو ایک دوسرے کے ساتھ درج ذیل طریقہ سے ملاتی ہے۔ فرض کریں نقطہ N سے کسی مقررہ لکیر (ناظمہ) تک فاصلہ ضرب e اس نقطے سے کسی مقررہ نقطہ F (ماسکہ) کے فاصلہ کے برابر ہو یعنی:

$$NF = e \cdot ND \tag{۴}$$

جہاں e ایک مستقل ہے۔ تب N درج ذیل راہ کھینچے گا۔

ا. قطع مکافی اگر $e = 1$ ہو،

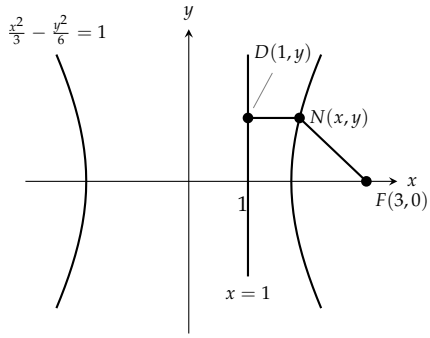
ب. ترخیم اگر $1 > e$ ہو،

ج. قطع زائد اگر $e > 1$ ہو۔

مساوات ۴ ظاہری طور پر زیادہ دلچسپ نظر نہیں آتی ہے۔ اس میں کوئی محدد نہیں پائے جاتے ہیں اور اس کو محددی روپ میں لکھنے سے، e کی قیمت پر منحصر، مختلف مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ کم از کم کارتیسی محدد میں ایسا ہوتا ہے۔ البتہ جیسا ہم حصہ ۱۰.۸ میں دیکھیں گے، قطبی محدد میں، e کی قیمت سے قطع نظر، مساوات $NF = e \cdot ND$ کی ترجمانی ایک ہی انتہائی سادہ مساوات کرتی ہے جو تقریباً 300 سالوں سے فلکی سائنسدانوں کی پسندیدہ مساوات رہی ہے۔

ایک قطع مکافی جس کا مرکز مبدا پر ہو کا محور x پر ماسکہ اور مطابقتی ناظمہ جانتے ہوئے ہم شکل سے e کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ سنک e کی قیمت جانتے ہوئے ہم کارتیسی نظام میں قطع زائد کی مساوات کو، اگلی مثال کی طرح، مساوات $NF = e \cdot ND$ سے حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم اسی طرح شکل ۱۰.۲۴ کی مدد سے اس ترخیم کی مساوات بھی کارتیسی محدد میں حاصل کر سکتے ہیں جس کا مرکز مبدا پر اور ماسکے محور x پر ہوں۔

مثال ۱۰.۹: ایک قطع زائد جس کا مرکز مبدا پر ہے کا ماسکہ $(3, 0)$ اور مطابقتی ناظمہ $x = 1$ ہے۔ اس قطع زائد کی مساوات تلاش کریں۔



شکل ۱۰.۲۶: قطع زائد برائے مثال ۱۰.۹

۱۶۳۴۵ **حل**

۱۶۳۴۶ ہم شکل ۱۰.۲۵ کو دیکھ کر اس کا سنک معلوم کرتے ہیں۔ چونکہ ماسکہ $(c, 0) = (3, 0)$ ہے لہٰذا $c = 3$ ہو گا۔ ناظمہ درج ذیل لکیر ہو گی

$$x = \frac{a}{e} = 1$$

۱۶۳۴۷ لہٰذا $a = e$ ہو گا۔ سنک کی مساوات $e = \frac{c}{a}$ کے ساتھ ملا کر $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{e}$ لہٰذا $e^2 = 3$ یعنی $e = \sqrt{3}$ حاصل ہوتا ہے۔ سنک e

۱۶۳۴۸ جانتے ہوئے ہم شکل ۱۰.۲۶ کو دیکھ کر $NF = e \cdot ND$ سے مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
NF &= e \cdot ND && \text{مساوات ۴} \\
\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} &= \sqrt{3}|x-1| && e = \sqrt{3} \\
x^2 - 6x + 9 + y^2 &= 3(x^2 - 2x + 1) \\
2x^2 - y^2 &= 6 \\
\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} &= 1
\end{aligned}$$

۱۶۳۴۹ □

۱۶۳۵۰ **سوالات**

۱۶۳۵۱ **ترخیم**

۱۶۳۵۲ سوال ۱۰.۹۱ تا سوال ۱۰.۹۸ میں ترخیم کا سنک تلاش کریں۔ اس کے بعد ترخیم کے ماسکے اور ناظمہ تلاش کر کے ترسیم کریں۔

۱۶۳۵۳ سوال ۱۰.۹۱: $16x^2 + 25y^2 = 400$

سوال ۱۰.۹۲: $7x^2 + 16y^2 = 112$

سوال ۱۰.۹۳: $2x^2 + y^2 = 2$

سوال ۱۰.۹۴: $2x^2 + y^2 = 4$

سوال ۱۰.۹۵: $3x^2 + 2y^2 = 6$

سوال ۱۰.۹۶: $9x^2 + 10y^2 = 90$

سوال ۱۰.۹۷: $6x^2 + 9y^2 = 54$

سوال ۱۰.۹۸: $169x^2 + 25y^2 = 4225$

سوال ۱۰.۹۹ تا سوال ۱۰.۱۰۲ میں ترخیم کے ماسکے یا راس اور سنک دیا گیا ہے۔ ترخیم مستوی xy میں پایا جاتا ہے اور اس کا مرکز مبدا پر ہے۔ ان میں ترخیم کی معیاری مساوات حاصل کریں۔

سوال ۱۰.۹۹: ماسکے $(0, \pm 3)$ اور سنک 0.5

سوال ۱۰.۱۰۰: ماسکے $(\pm 8, 0)$ اور سنک 0.2

سوال ۱۰.۱۰۱: راس $(0, \pm 70)$ اور سنک 0.1

سوال ۱۰.۱۰۲: راس $(\pm 10, 0)$ اور سنک 0.24

سوال ۱۰.۱۰۳ تا سوال ۱۰.۱۰۶ میں ترخیم کے ماسکے اور مطابقتی ناظمہ دیے گئے ہیں۔ ترخیم مستوی xy میں پایا جاتا ہے اور اس کا مرکز مبدا پر ہے۔ شکل ۱۰.۲۴ کو دیکھ کر ترخیم کا سنک معلوم کریں۔ اس کے بعد ترخیم کی معیاری مساوات حاصل کریں۔

سوال ۱۰.۱۰۳: ماسکہ $(\sqrt{5}, 0)$، ناظمہ $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$

سوال ۱۰.۱۰۴: ماسکہ $(4, 0)$، ناظمہ $x = \frac{16}{3}$

سوال ۱۰.۱۰۵: ماسکہ $(-4, 0)$، ناظمہ $x = -16$

سوال ۱۰.۱۰۶: ماسکہ $(-\sqrt{2}, 0)$، ناظمہ $x = -2\sqrt{2}$

سوال ۱۰.۱۰۷: ایک ترخیم جس کا سنک $\frac{4}{5}$ ہو کو ترسیم کریں۔ اپنی حکمت عملی کی وضاحت کریں۔

سوال ۱۰.۱۰۸: سیارہ پلوٹو (جس کا سنک 0.25 ہے) کا مدار ترسیم کریں۔ اپنی حکمت عملی کی وضاحت کریں۔

سوال ۱۰.۱۰۹: ایک ترخیم کے آخری سر $(1, 1)$ ، $(3, 4)$ ، $(1, 7)$ اور $(-1, 4)$ ہیں۔ اس ترخیم کا خاکہ کھینچیں، اس کی معیاری مساوات، ماسکے، سنک اور ناظمہ تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۱۱۰: ایک ترخیم کا سنک $\frac{2}{3}$ جبکہ لکیر $x = 9$ اس کی ناظمہ اور $(4, 0)$ مطابقتی ماسکہ ہے۔ اس ترخیم کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۱۱۱: درج ذیل ترخیم a ، b اور c کی کن قیمتوں کے لیے مبدا پر محور x کے متوازی ہوگا اور نقطہ $(-1,2)$ سے گزرے گا؟

$$4x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

اس ترخیم کا سنک کیا ہے؟

سوال ۱۰.۱۱۲: ترخیم کی خاصیت انعکاس

ایک ترخیم کو اس کے محور اکبر کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس ترخیمی جسم کی اندرونی سطح پر چاندی لگا کر ترخیمی آئینہ بنایا جاتا ہے۔ دکھائیں کہ اس ترخیمی آئینہ کے ایک ماسکہ سے خارج شعاع انعکاس کے بعد دوسرے ماسکہ پر پہنچتا ہے۔ صدا بھی اسی راہ کو اپناتا ہے۔ اس حقیقت کو بروئے کار لاتے ہوئے کمرہ سرگوشی بنایا جاتا ہے۔ (اشارہ: ترخیم کو مستوی xy پر معیاری مقام پر رکھ کر دکھائیں کہ کسی بھی نقطہ N سے دونوں ماسکوں تک لکیر، N پر ترخیم کے مماس کے ساتھ ایک سے زاویے بناتے ہیں۔)

قطع زائد

سوال ۱۰.۱۱۳ تا سوال ۱۰.۱۲۰ میں قطع زائد کا سنک تلاش کریں۔ اس کے بعد قطع زائد کے ماسکہ اور ناظمہ معلوم کر کے ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۱۱۳: $x^2 - y^2 = 1$

سوال ۱۰.۱۱۴: $9x^2 - 16y^2 = 144$

سوال ۱۰.۱۱۵: $y^2 - x^2 = 8$

سوال ۱۰.۱۱۶: $y^2 - x^2 = 4$

سوال ۱۰.۱۱۷: $8x^2 - 2y^2 = 16$

سوال ۱۰.۱۱۸: $y^2 - 3x^2 = 3$

سوال ۱۰.۱۱۹: $8y^2 - 2x^2 = 16$

سوال ۱۰.۱۲۰: $64x^2 - 36y^2 = 2304$

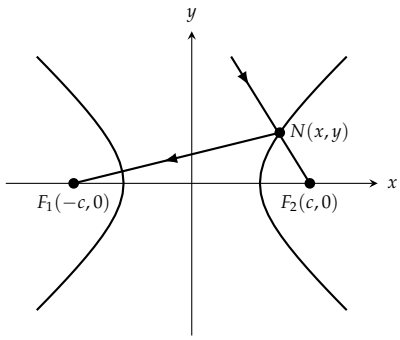
سوال ۱۰.۱۲۱ تا سوال ۱۰.۱۲۴ میں قطع زائد کا سنک اور راس یا ماسکے دیے گئے ہیں۔ یہ قطع زائد مستوی xy میں پائے جاتے ہیں جن کا مرکز مبدا پر ہے۔ ان قطع زائد کی معیاری مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۱۲۱: سنک 3 راس $(0, \pm 1)$

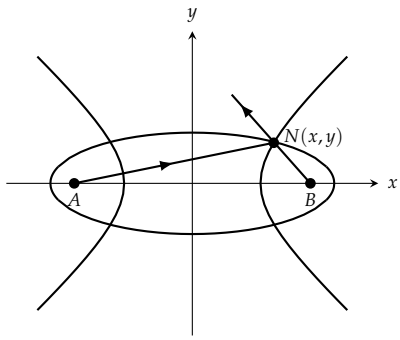
سوال ۱۰.۱۲۲: سنک 2 راس $(\pm 2, 0)$

سوال ۱۰.۱۲۳: سنک 3 ماسکے $(\pm 3, 0)$

سوال ۱۰.۱۲۴: سنک 1.25 ماسکے $(0, \pm 5)$



شکل ۱۰.۲۷: قطع زائد برائے سوال ۱۰.۱۳۱



شکل ۱۰.۲۸: قطع زائد اور ترخیم برائے سوال ۱۰.۱۳۲

سوال ۱۰.۱۲۵ تا سوال ۱۰.۱۲۸ میں قطع زائد کے ماسکے اور مطابقتی ناظمہ دیے گئے ہیں۔ یہ قطع زائد مستوی xy میں پائے جاتے ہیں اور ان کا مرکز مبدا پر پایا جاتا ہے۔ قطع زائد کا سنک اور معیاری مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۱۲۵: ماسکہ $(4,0)$، ناظمہ $x = 2$

سوال ۱۰.۱۲۶: ماسکہ $(\sqrt{10},0)$، ناظمہ $x = \sqrt{2}$

سوال ۱۰.۱۲۷: ماسکہ $(-2,0)$، ناظمہ $x = -\frac{1}{2}$

سوال ۱۰.۱۲۸: ماسکہ $(-6,0)$، ناظمہ $x = -2$

سوال ۱۰.۱۲۹: ایک قطع زائد کا سنک $\frac{3}{2}$ اور ایک ماسکہ $(1,-3)$ ہے۔ اس کا مطابقتی ناظمہ لکیر $y = 2$ ہے۔ اس قطع زائد کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۱۳۰: سنک کا قطع زائد کی صورت پر اثر

سنک بڑھانے سے قطع زائد کی صورت پر کیا اثر ہو گا؟ یہ جاننے کے لیے مساوات $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ کو a اور b کے بجائے a اور e کی صورت میں لکھیں۔ مختلف e کی قیمتوں کے لیے قطع زائد ترسیم کریں (a مستقل لیں)۔

سوال ۱۰.۱۳۱: قطع زائد کی خاصیت انعکاس

دکھائیں کہ قطع زائد کے ایک ماسکہ کی طرف گامزن شعاع، قطع زائد سے انعکاس کے بعد دوسرے ماسکہ پر پہنچتا ہے (شکل ۱۰.۲۷)۔ (اشارہ: دکھائیں کہ نقطہ N پر قطع زائد کا مماس قطعہ NF_1 اور NF_2 کے بیچ زاویہ کو نصف میں تقسیم کرتا ہے۔)

سوال ۱۰.۱۳۲: ہم ماسکہ ترخیم اور قطع زائد

دکھائیں کہ ایک ترخیم اور قطع زائد جن کے ایک سے ماسکے A اور B ہوں، ایک دوسرے کو 90 درجہ پر قطع کرتے ہیں (شکل ۱۰.۲۸)۔ (اشارہ: ماسکہ A سے خارج شعاع قطع زائد کے نقطہ N پر پہنچ کر قطع زائد سے یوں منعکس ہو گا جیسا یہ شعاع ماسکہ B سے خارج ہوا ہو (سوال ۱۰.۱۳۱)۔ یہی شعاع ترخیم سے منعکس ہو کر ماسکہ B پر پہنچتا ہے (سوال ۱۰.۱۱۲)۔)

۱۰.۳ دو درجی مساوات اور گھومنا

ہم اس حصہ میں تحلیلی جیومیٹری کی اس حیرت کن نتیجہ پر غور کریں گے کہ درج ذیل مساوات کی کارتیسی ترسیم

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{۱}$$

جہاں A ، B ، C اور D بیک وقت تمام صفر نہ ہوں، تقریباً ہر بار مخروطی حصہ ہو گا۔ ایسا تب نہیں ہوتا جب یا ترسیم ہی نہ پائی جاتی ہو اور یا جب ترسیم دو متوازی لکیروں پر مشتمل ہو۔ مساوات ۱ کی تمام ترسیمات، چاہیں وہ قوسی ہو یا نہیں، **دو درجی منحنیات**[۲۰] کہلاتی ہیں۔

جزو Bxy

آپ نے دیکھا کہ حصہ ۱.۱۰ میں مخروطی حصوں کی مساواتوں میں جزو Bxy نہیں پایا جاتا، چونکہ ان کے محور، محددی نظام کے محور کے متوازی (بلکہ ہم مکان) ہیں۔

مخروط حصہ کے محور، محددی محور کے غیر متوازی ہونے کی صورت کو دیکھنے کی خاطر ہم ایک قطع زائد کی مساوات حاصل کرتے ہیں جس کا $a = 3$ ہو اور جس کے ماسکے $F_1(-3,-3)$ اور $F_2(3,3)$ ہوں (شکل ۱۰.۲۹)۔ مساوات $|NF_1 - NF_2| = 2a$ اب $|NF_1 - NF_2| = 2(3) = 6$ یا

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y+3)^2} - \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2} = \pm 6$$

روپ اختیار کرتا ہے۔ ہم ایک جذر کو دوسرے ہاتھ منتقل کر کے دونوں اطراف کا مربع لے کر حاصل واحد جذر کو اکیلے ایک طرف رکھ کر دونوں اطراف کا مربع لے کر

$$2xy = 9 \tag{۲}$$

حاصل کرتے ہیں جو مساوات ۱ کی ایک روپ ہے جس میں جزو Bxy پایا جاتا ہے۔ مساوات ۲ میں دیے گئے قطع زائد کے متقارب x اور محور y ہیں، جبکہ اس کا محور ماسکہ مثبت محور x کے ساتھ $\frac{\pi}{4}$ ریڈیئن زاویہ بناتا ہے۔ اس مثال کی طرح مساوات ۱ میں جزو Bxy صرف اس صورت پایا جاتا ہے جب مخروط کے محور ترچھے ہوں۔

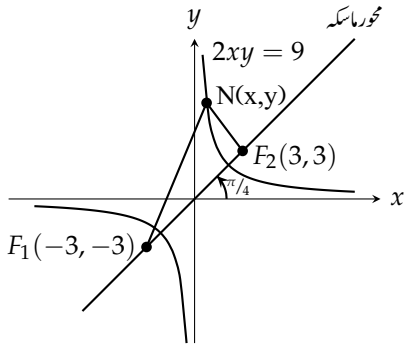
محددی محور گھمانے سے جزو Bxy سے نجات

مخروط کی مساوات سے جزو Bxy ہٹانے کی خاطر ہم محددی محور کر گھما کر مخروط کے محور کو محددی محور کے متوازی بناتے ہیں۔ گھمانے کی مساواتوں کو ہم درج ذیل طریقہ سے حاصل کرتے ہیں۔ شکل ۱۰.۳۰ میں گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ، مبدا کے گرد زاویہ α گھمانا دکھایا گیا ہے۔ اس شکل سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

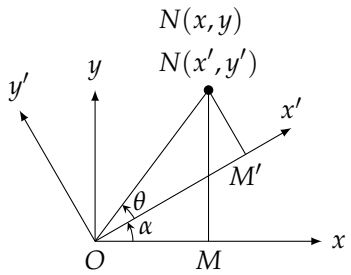
$$\begin{aligned} x &= OM = ON\cos(\theta+\alpha) = ON\cos\theta\cos\alpha - ON\sin\theta\sin\alpha \\ y &= MN = ON\sin(\theta+\alpha) = ON\cos\theta\sin\alpha + ON\sin\theta\cos\alpha \end{aligned} \tag{۳}$$

---

[۲۰] quadraticcurves



شکل ۱۰.۲۹: قطع زائد $2xy = 9$ کا محور ماسکہ، مثبت محور x کے ساتھ $\frac{\pi}{4}$ زاویہ بناتا ہے۔



شکل ۱۰.۳۰: مبدا کے گرد گھڑی کی الٹ رخ محور کو α زاویہ گھمانا۔

۱۲۵۴۷ چونکہ

$$ON\cos\theta = OM' = x'$$

۱۲۵۴۸ اور

$$ON\sin\theta = M'N = y'$$

۱۲۵۴۹ ہیں لہٰذا مساوات ۳ درج ذیل دیں گے۔

۱۲۵۵۰ **محدد کے محور مبدا کے گرد گھمانے کی مساواتیں**

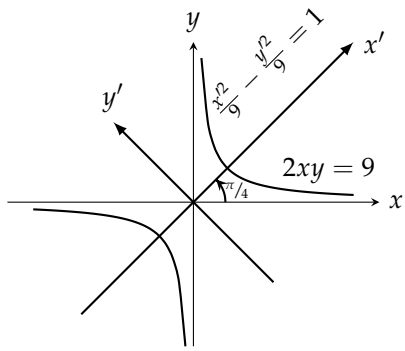
$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha \end{aligned} \tag{۴}$$

۱۲۵۵۱ مثال ۱۰.۱۰: مبدا کے گرد، گھڑی کے الٹ رخ، x اور محور y کو $\frac{\pi}{4}$ ریڈین گھمایا جاتا ہے۔ قطع زائد $2xy = 9$ کا ان نئے محور میں مساوات
۱۲۵۵۲ تلاش کریں۔

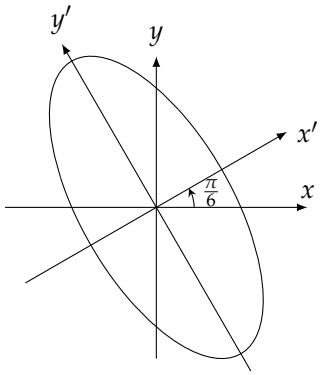
۱۲۵۵۳ **حل**

۱۲۵۵۴ چونکہ $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ لہٰذا ہم مساوات ۴ سے

$$x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}$$



شکل ۱۰.۳۱: نئے محور x' اور y' میں قطع زائد کی مساوات (مثال ۱۰.۱۰)



شکل ۱۰.۳۲: مخروط کو $\frac{\pi}{6}$ زاویہ گھڑی کے الٹ رخ گھمایا گیا ہے (مثال ۱۰.۱۱)

۱۶۵۵۵ کو $2xy = 9$ میں پر کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں (شکل ۱۰.۳۱)۔

$$
\begin{aligned}
2\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right) &= 9\\
x'^2 - y'^2 &= 0\\
\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{9} &= 1
\end{aligned}
$$

۱۶۵۵۶ □

۱۶۵۵۷ دو درجی مساوات اپر مساوات ۱۴ کو کرنے سے درج ذیل نئی دو درجی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{۵}$$

۱۶۵۵۸ جہاں پرانے اور نئے مستقلوں کے رشتے درج ذیل ہوں گے۔

$$
\begin{aligned}
A' &= A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha\\
B' &= B\cos 2\alpha + (C-A)\sin 2\alpha\\
C' &= A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha\\
D' &= D\cos\alpha + E\sin\alpha\\
E' &= -D\sin\alpha + E\cos\alpha\\
F' &= F
\end{aligned} \tag{۶}
$$

۱۲۵۵۹ یہ مساوات دیگر معلومات کے ساتھ ہمیں $B' = 0$ کے حصول کا طریقہ بھی دیتے ہیں۔ یوں Bxy جزو والی مساوات سے شروع کر کے ہم اس کو زاویہ
۱۲۵۶۰ α گھما کر ایسی دو درجی مساوات حاصل کر سکتے ہیں جس میں $B'xy$ کا جزو نہیں پایا جاتا ہو۔ ایسا زاویہ جاننے کے لیے ہم مساوات ۶ میں $B' = 0$ لے کر
۱۲۵۶۱ α کے حاصل مساوات

$$B\cos 2\alpha + (C - A)\sin 2\alpha = 0$$

۱۲۵۶۲ کو α کے لیے حل کرتے ہیں۔ یوں ہمیں درحقیقت مندرجہ ذیل دو مساوات میں سے کسی ایک کا حل درکار ہو گا۔

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B}, \quad \tan 2\alpha = \frac{B}{A - C} \tag{۷}$$

۱۲۵۶۳ مثال ۱۰.۱۱: درج ذیل دو درجی مساوات میں $\sqrt{3}xy$ کے جزو کے خاتمہ کے لیے محددی محور کو زاویہ α گھمایا جاتا ہے۔ اس زاویہ کو تلاش کریں۔

$$2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 10 = 0$$

۱۲۵۶۴ نئی مساوات تلاش کریں اور اس کو پہچانیں۔

۱۲۵۶۵ **حل**

۱۲۵۶۶ دی گئی مساوات میں $A = 2$ ، $B = \sqrt{3}$ اور $C = 1$ ہیں۔ مساوات ۷ میں ان قیمتوں کو پر کر کے α معلوم کرتے ہیں۔

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{2 - 1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \implies 2\alpha = \frac{\pi}{3}$$

۱۲۵۶۷ یوں $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ، $A = 2$ ، $B = \sqrt{3}$ ، $C = 1$ ، $D = E = 0$ اور $F = -10$ کو مساوات ۶ میں پر کر کے

$$A' = \frac{5}{2},\ B' = 0,\ C' = \frac{1}{2},\ D' = E' = 0,\ F' = -10$$

۱۲۵۶۸ حاصل ہوں گے اور مساوات ۵ درج ذیل دے گا۔

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{20} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{5}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - 10 = 0$$

۱۲۵۶۹ یہ منحنی ترخیم ہے جس کے ماسکے نئی y' محور پر پائے جاتے ہیں (شکل ۱۰.۳۲)۔ □

۱۲۵۷۰ **دو درجی مساوات کے ممکنہ ترسیمات**

۱۲۵۷۱ ہم اب عمومی دو درجی مساوات کی ترسیمات پر آتے ہیں۔

۱۲۵۷۲ چونکہ محور کو گھما کر Bxy طرز کے جزو کو ہٹایا جا سکتا ہے لہٰذا ہم تصور کرتے ہیں کہ یہی کرتے ہوئے درج ذیل عمومی دو درجی مساوات حاصل کی گئی ہے

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{۸}$$

۱۲۵۷۳ جہاں A' تا F' کو بالترتیب A تا F لکھا گیا ہے۔ مساوات ۸ درج ذیل کو ظاہر کرتی ہے۔

۱۶۵۷۴ ا. جب $A = C \neq 0$ ہو تب دائرہ (مخصوص حالات میں یہ نقطہ مانند ہو سکتا ہے یا اس کی کوئی ترسیم نہیں ہو گی۔)

۱۶۵۷۵ ب. اگر مساوات ۸ ایک متغیر میں خطی اور دوسرے میں دو درجی ہو تب یہ قطع مکافی کو ظاہر کرتی ہے۔

۱۶۵۷۶ ج. اگر A اور C دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب یہ ترخیم کو ظاہر کرتی ہے۔ (مخصوص حالات میں یہ دائرہ، واحد نقطہ دے سکتی ہے یا اس کی کوئی ترسیم
۱۶۵۷۷ نہیں ہو سکتی ہے۔)

۱۶۵۷۸ د. اگر A اور C کی علامتیں ایک دوسرے کی الٹ ہوں تب یہ قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔ (مخصوص حالات میں یہ دو منقطع لکیروں کو ظاہر کر سکتی ہے۔)

۱۶۵۷۹ ھ. اگر A اور C دونوں صفر ہوں جبکہ D اور E میں سے کم از کم ایک غیر صفر ہو تب یہ سیدھی لکیر کو ظاہر کرتی ہے۔

۱۶۵۸۰ و. اگر مساوات ۸ کے بائیں ہاتھ کو دو خطی اجزاء کا حاصل ضرب لکھنا ممکن ہو تب یہ ایک یا دو سیدھی لکیروں کو ظاہر کرتی ہے۔

۱۶۵۸۱ دو درجی ترسیمات کی مثالوں کے لیے صفحہ ۱۰۶۹ پر جدول ۱۰.۳ دیکھیں۔

۱۶۵۸۲ **ممیز پرکھ**

۱۶۵۸۳ درج ذیل مساوات کی قسم جاننے کے لیے ہمیں اس کا جزو Bxy ہٹانے کی ضرورت نہیں۔

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{۹}$$

۱۶۵۸۴ اگر ہمیں یہی معلومات درکار ہو تب ہم درج ذیل پرکھ بروئے کار لا سکتے ہیں۔

۱۶۵۸۵ جیسا ہم دیکھ چکے، $B \neq 0$ کی صورت میں ہم محددی محور کو مبدا کے گرد α زاویہ گھما کر جہاں α درج ذیل مساوات

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B} \tag{۱۰}$$

۱۶۵۸۶ کو مطمئن کرتا ہو، مساوات ۹ کو درج ذیل روپ میں بدلتا ہے

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x'E'y' + F' = 0 \tag{۱۱}$$

۱۶۵۸۷ جس میں Bxy طرز کا جزو نہیں پایا جاتا ہے۔

۱۶۵۸۸ اب مساوات ۱۱ کی ترسیم (حقیقی یا انحطاطی) درج ذیل ہو سکتی ہیں۔

۱۶۵۸۹ ا. اگر $A' = 0$ یا $C' = 0$ یعنی $A'C' = 0$ ہو تب قطع مکافی،

۱۶۵۹۰ ب. اگر A' اور C' کی علامتیں ایک دوسری جیسی ہوں یعنی اگر $A'C' > 0$ ہو تب ترخیم،

۱۶۵۹۱ ج. اور اگر A' اور C' کی علامتیں ایک دوسری کی الٹ ہوں یعنی اگر $A'C' < 0$ ہو تب قطع زائد۔

۱۶۵۹۲ مساوات ۶ سے کسی بھی زاویہ کے لیے

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C' \tag{۱۲}$$

۱۲۵۹۳ حاصل ہوتا ہے۔ یوں محددی محور گھمانے سے مقدار $B^2 - 4AC$ تبدیل نہیں ہوتی ہے البتہ مساوات ۱۰ کو مطمئن کرتا زاویہ α سے محور گھمانے سے
۱۲۵۹۴ B' صفر اور درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$B^2 - 4AC = -4A'C'$$

۱۲۵۹۵ چونکہ $A'C' = 0$ کی صورت میں ترسیم قطع مکافی، $A'C' > 0$ کی صورت میں ترخیم اور $A'C' < 0$ کی صورت میں قطع زائد ہو گی لہٰذا
۱۲۵۹۶ $B^2 - 4AC = 0$ کی صورت میں ترسیم لازمی طور پر قطع مکافی، $B^2 - 4AC < 0$ کی صورت میں ترخیم اور $B^2 - 4AC > 0$
۱۲۵۹۷ کی صورت میں قطع زائد۔ عدد $B^2 - 4AC$ کو مساوات ۹ کا **ممیز**[۲۱] کہتے ہیں۔

۱۲۵۹۸ **ممیز پرکھ**

۱۲۵۹۹ یہ جانتے ہوئے کہ کبھی کبھار انحطاطی صورت پائی جائے گی، درج ذیل دو قدری مساوات

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

۱۲۶۰۰ ا. $B^2 - 4AC = 0$ کی صورت میں ترخیم،

۱۲۶۰۱ ب. $B^2 - 4AC < 0$ کی صورت میں قطع مکافی اور

۱۲۶۰۲ ج. $B^2 - 4AC > 0$ کی صورت میں قطع زائد کو ظاہر کرے گی۔

۱۲۶۰۳ □

۱۲۶۰۴ مثال ۱۰.۱۲: (الف) درج ذیل کی وجہ سے $3x^2 - 6xy + 3y^2 + 2x - 7 = 0$ قطع مکافی کو ظاہر کرتی ہے۔

$$B^2 - 4AC = (-6)^2 - 4(3)(3) = 36 - 36 = 0$$

۱۲۶۰۵ (ب) درج ذیل کی وجہ سے $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ ترخیم کو ظاہر کرتی ہے۔

$$B^2 - 4AC = (1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$$

۱۲۶۰۶ (ج) درج ذیل کی وجہ سے $xy - y^2 - 5y + 1 = 0$ قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔

$$B^2 - 4AC = (1)^2 - 4(0)(-1) = 1 > 0$$

۱۲۶۰۷ □

۱۲۶۰۸ **فنیات**

۱۲۶۰۹ بعض کیلکولیٹر گھمانے کی عمل سے سائن اور کوسائن معلوم کرتا ہے۔ یہ عمل درج ذیل ہے۔

---

[۲۱] discriminant

جدول ۱۰.۳: دو درجی منحنیات کی مثالیں۔

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

	A	B	C	D	E	F	مساوات	رائے
دائرہ	1		1			-4	$x^2 + y^2 = 4$	$A = C; F < 0$
قطع مکافی			1	-9			$y^2 = 9x$	y میں دو درجی، x میں خطی
ترخیم	4		9			-36	$4x^2 + 9y^2 = 36$	A ، C یکساں علامت، $F < 0$ ؛ $A \neq C$
زائد قطع	1		-1			-1	$x^2 - y^2 = 1$	A ، C الٹ علامت
ایک لکیر	1						$x^2 = 0$	محور y
مقطع لکیریں		1		1	-1	-1	$xy + x - y - 1 = 0$	$(y+1)(x-1) = 0$ لہٰذا $x = 1$ ، $y = -1$
متوازی لکیریں	1			-3		2	$x^2 - 3x + 2 = 0$	$(x-2)(x-1) = 0$ لہٰذا $x = 1$ ، $x = 2$
نقطہ	1		1				$x^2 + y^2 = 0$	مبدا
بلا ترسیم	1					1	$x^2 = -1$	ترسیم نہیں کیا جا سکتی ہے

۱۶۶۱۰ ا. کیلکولیٹر میں تقریباً 10 زاویے محفوظ ہوتے ہیں مثلاً

$$\alpha_1 = \sin^{-1}(10^{-1}), \quad \alpha_2 = \sin^{-1}(10^{-2}), \quad \cdots, \quad \alpha_{10} = \sin^{-1}(10^{-10})$$

۱۶۶۱۱ ب. اسی طرح اس میں α_1 تا α_{10} کے سائن اور کوسائن بھی محفوظ ہوتے ہیں۔

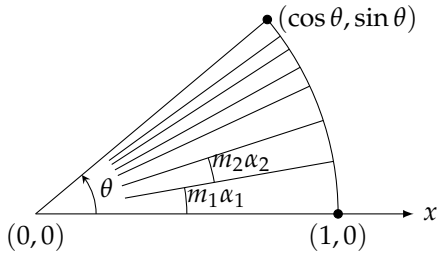
۱۶۶۱۲ کسی بھی زاویہ θ کا سائن یا کوسائن معلوم کرنے کی خاطر ہم کیلکولیٹر میں θ ریڈیئن داخل کرتے ہیں۔ کیلکولیٹر 2π کا مضرب θ کے ساتھ جمع کر کے 0
۱۶۶۱۳ اور 2π کے بیچ زاویہ حاصل کرتا ہے جس کا سائن اور کوسائن وہی ہو گا جو اصل زاویہ θ کا ہو گا (لہٰذا ہم اس نئے زاویہ کو θ ہی کہتے ہیں)۔ اب θ سے تجاوز
۱۶۶۱۴ کیے بغیر کیلکولیٹر θ کو α_1 کا مضرب جمع α_2 کا مضرب اور اسی طرح چلتے ہوئے، جمع α_{10} کا مضرب لکھتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\theta \approx m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_{10}\alpha_{10}$$

۱۶۶۱۵ اس کے بعد کیلکولیٹر نقطہ $1, 0$ کو m_1 گنا α_1 زاویہ گھماتا ہے۔ اس کے بعد m_2 گنا α_2 زاویہ گھماتا ہے، اور اسی طرح چلتے ہوئے، m_{10} گنا α_{10}
۱۶۶۱۶ زاویہ گھماتا ہے۔ اکائی دائرہ پر پائے جانے والے نقطہ $(1, 0)$ کے آخری مقام کے محدد $(\cos\theta, \sin\theta)$ ہوں گے (شکل ۱۰.۳۳)۔

۱۶۶۱۷ **سوالات**

۱۶۶۱۸ ممیز کا استعمال
۱۶۶۱۹ ممیز $B^2 - 4AC$ استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں آیا سوال ۱۰.۱۳۳ تا سوال ۱۰.۱۴۸ میں دی گئی مساوات قطع مکافی، ترخیم یا قطع زائد کو ظاہر کرتی
۱۶۶۲۰ ہے۔



شکل ۱۰.۳۳: سائن اور کوسائن حاصل کرنے کا عمل۔

۱۶۲۶ سوال ۱۰.۱۳۳: $x^2 - 3xy + y^2 - x = 0$

۱۶۲۷ سوال ۱۰.۱۳۴: $3x^2 - 18xy + 27y^2 - 5x + 7y = -4$

۱۶۲۸ سوال ۱۰.۱۳۵: $3x^2 - 7xy + \sqrt{17}y^2 = 1$

۱۶۲۹ سوال ۱۰.۱۳۶: $2x^2 - \sqrt{15}xy + 2y^2 + x + y = 0$

۱۶۳۰ سوال ۱۰.۱۳۷: $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - y + 2 = 0$

۱۶۳۱ سوال ۱۰.۱۳۸: $2x^2 - y^2 + 4xy - 2x + 3y = 6$

۱۶۳۲ سوال ۱۰.۱۳۹: $x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x = 6$

۱۶۳۳ سوال ۱۰.۱۴۰: $x^2 + y^2 + 3x - 2y = 10$

۱۶۳۴ سوال ۱۰.۱۴۱: $xy + y^2 - 3x = 5$

۱۶۳۵ سوال ۱۰.۱۴۲: $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$

۱۶۳۶ سوال ۱۰.۱۴۳: $3x^2 - 5xy + 2y^2 - 7x - 14y = -1$

۱۶۳۷ سوال ۱۰.۱۴۴: $2x^2 - 4.9xy + 3y^2 - 4x = 7$

۱۶۳۸ سوال ۱۰.۱۴۵: $x^2 - 3xy + 3y^2 + 6y = 7$

۱۶۳۹ سوال ۱۰.۱۴۶: $25x^2 + 21xy + 4y^2 - 350x = 0$

۱۶۴۰ سوال ۱۰.۱۴۷: $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y + 2 = 0$

۱۶۴۱ سوال ۱۰.۱۴۸: $3x^2 + 12xy + 12y^2 + 435x - 9y + 72 = 0$

۱۶۴۲

۱۶۴۳ **محددی محور گھمانا**

۱۶۴۴ سوال ۱۰.۱۴۹ تا سوال ۱۰.۱۵۸ میں محددی محور کو گھما کر دی گئی مساوات سے Bxy طرز کا جزو ختم کریں۔ اس کے بعد مساوات کی ترسیم کو پہچانیں۔ (نئی
۱۶۴۵ مساوات گھمانے کے رخ اور مقدار پر منحصر ہو گی۔)

سوال ۱۰.۱۴۹: $xy = 2$

سوال ۱۰.۱۵۰: $x^2 + xy + y^2 = 1$

سوال ۱۰.۱۵۱: $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 8x + 8\sqrt{3}y = 0$

سوال ۱۰.۱۵۲: $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 1$

سوال ۱۰.۱۵۳: $x^2 - 2xy + y^2 = 2$

سوال ۱۰.۱۵۴: $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 = 1$

سوال ۱۰.۱۵۵: $\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}xy + \sqrt{2}y^2 - 8x + 8y = 0$

سوال ۱۰.۱۵۶: $xy - y - x + 1 = 0$

سوال ۱۰.۱۵۷: $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 19$

سوال ۱۰.۱۵۸: $3x^2 + 4\sqrt{3}xy - y^2 = 7$

سوال ۱۰.۱۵۹: اس زاویہ کا سائن اور کوسائن دریافت کریں جس پر درج ذیل مساوات کو گھما کر Bxy طرز کا جزو ہٹایا جا سکتا ہے۔ نئی مساوات معلوم نہ کریں۔

$$14x^2 + 16xy + 2y^2 - 10x + 26370y - 17 = 0$$

سوال ۱۰.۱۶۰: اس زاویہ کا سائن اور کوسائن دریافت کریں جس پر درج ذیل مساوات کو گھما کر Bxy طرز کا جزو ہٹایا جا سکتا ہے۔ نئی مساوات حاصل نہ کریں۔

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$$

کیلکولیٹر

سوال ۱۰.۱۶۱ تا سوال ۱۰.۱۶۶ میں وہ زاویہ α دریافت کریں جس پر محددی محور کو گھما کر جزو Bxy کو مساوات سے ہٹایا جا سکتا ہے۔ اس کے بعد $\sin\alpha$ اور $\cos\alpha$ کو 2 اعشاریہ مقامات تک درست دریافت کریں۔ مساوات ۱۶ استعمال کرتے ہوئے نئی مساوات کے عددی سر ایک اعشاریہ تک تلاش کریں۔ اب بتائیں آیا مساوات قطع مکافی، ترخیم یا قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔

سوال ۱۰.۱۶۱: $x^2 - xy + 3y^2 + x - y - 3 = 0$

سوال ۱۰.۱۶۲: $2x^2 + xy - 3y^2 + 3x - 7 = 0$

سوال ۱۰.۱۶۳: $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5 = 0$

سوال ۱۰.۱۶۴: $2x^2 - 12xy + 18y^2 - 49 = 0$

سوال ۱۰.۱۶۵: $3x^2 + 5xy + 2y^2 - 8y - 1 = 0$

سوال ۱۰.۱۶۶: $2x^2 + 7xy + 9y^2 + 20x - 86 = 0$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۰.۱۶۷: مبدا کے گرد 90° گھمانے سے درج ذیل مساوات پر کیا اثر ہو گا؟ نئی مساوات تلاش کریں۔

ا. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ (a > b)$ ترخیم

ب. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ قطع زائد

ج. $x^2 + y^2 = a^2$ دائرہ

د. $y = mx$ لکیر

ھ. $y = mx + b$ لکیر

سوال ۱۰.۱۶۸: مبدا کے گرد 180° گھمانے سے درج ذیل مساوات پر کیا اثر ہو گا؟ نئی مساوات تلاش کریں۔

ا. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ (a > b)$ ترخیم

ب. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ قطع زائد

ج. $x^2 + y^2 = a^2$ دائرہ

د. $y = mx$ لکیر

ھ. $y = mx + b$ لکیر

سوال ۱۰.۱۶۹: قطع زائد $xy = a$ سائنس اور ریاضیات میں بہت اہمیت رکھتا ہے۔ اس کی ایک صورت $xy = 1$ ہے۔

ا. محددی محور کو 45° زاویہ گھما کر مساوات $xy = 1$ کی ایسی صورت تلاش کریں جس میں Bxy طرز کا جزو نہیں پایا جاتا ہو۔ اس نئی مساوات کو حاصل کریں۔

ب. مساوات $xy = a$ کے لیے بھی یہی کریں۔

سوال ۱۰.۱۷۰: قطع زائد $xy = 2$ کی سنک دریافت کریں۔

سوال ۱۰.۱۷۱: کیا $AC < 0$ کی صورت میں مساوات $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ کی ترسیم کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۰.۱۷۲: کیا کسی بھی غیر انحطاطی مخروط حصہ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ میں درج ذیل تمام خواص پائے جاتے ہیں؟

ا. یہ مبدا کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔

ب. یہ نقطہ $(1, 0)$ سے گزرتا ہے۔

ج. یہ نقطہ $(-2, 1)$ پر لکیر $y = 1$ کو مماسی ہے۔

اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۰.۱۷۳: دکھائیں کہ مبدا کے گرد محور کو گھمانے کی مساوات ۴ میں ہر زاویہ α کے لیے $x^2 + y^2 = a^2$ سے $x'^2 + y'^2 = a^2$ حاصل ہو گا۔

سوال ۱۰.۱۷۴: دکھائیں کہ جب بھی $A = C$ ہو، محور کو $\frac{\pi}{4}$ ریڈیئن گھمانے سے مساوات اکا Bxy جزو ختم ہوتا ہے۔

سوال ۱۰.۱۷۵:

ا. معلوم کریں کہ آیا درج ذیل مساوات ترخیم، قطع کافی یا قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x + 12y + 9 = 0$$

ب. دکھائیں کہ جزو-ا میں مساوات کی ترسیم لکیر $2y = -x - 3$ ہے۔

سوال ۱۰.۱۷۶:

ا. معلوم کریں کہ آیا درج ذیل مساوات ترخیم، قطع کافی یا قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔

$$9x^2 + 6xy + y^2 - 12x - 4y + 4 = 0$$

ب. دکھائیں کہ جزو-ا میں مساوات کی ترسیم لکیر $y = -3x + 2$ ہے۔

سوال ۱۰.۱۷۷: (الف) منحنی $xy + 2x - y = 0$ کس قسم کا مخروط حصہ ہے؟ (ب) مساوات $xy + 2x - y = 0$ کو y کے لیے حل کر کے اس کو x کے ناطق تفاعل کے طور پر ترسیم کریں۔ (ج) اس منحنی کے عمودی اور لکیر $y = -2x$ کے متوازی لکیروں کی مساواتیں معلوم کریں۔ ان لکیروں کو بھی ترسیم کا حصہ بنائیں۔

سوال ۱۰.۱۷۸: ترسیم $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ کے بارے میں درج ذیل فقروں کو ثابت کریں یا ان کے مخالف فقرے تلاش کریں۔

ا. اگر $AC > 0$ ہو تب ترسیم ترخیم ہو گا۔

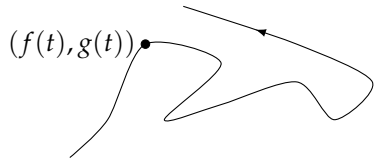
ب. اگر $AC > 0$ ہو تب ترسیم قطع زائد ہو گی۔

ج. اگر $AC < 0$ ہو تب ترسیم قطع زائد ہو گی۔

سوال ۱۰.۱۷۹: جب $B^2 - 4AC$ منفی ہو تب مساوات $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ ترخیم کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر اس ترخیم کے نصف محور a اور b ہوں تب اس کا رقبہ πab ہو گا (معیاری کلیہ)۔ دکھائیں کہ اس رقبہ کو $\frac{2\pi}{\sqrt{4AC-B^2}}$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔ (اشارہ: محور کو گھما کر جزو Bxy ہٹا کر مساوات ۱۱۲ استعمال کریں۔)

سوال ۱۰.۱۸۰: ہم مبدا کے گرد محور گھما کر $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$ کی بات کرتے ہوئے کہتے ہیں کہ دو درجی مساوات کا ممیز **غیر متغیر** ہے۔ مساوات ۶ کی مدد لیتے ہوئے دکھائیں کہ عدد (الف) $A + C$ اور (ب) $D^2 + E^2$ بھی غیر متغیر ہیں، یعنی:

$$A' + C' = A + C, \quad D'^2 + E'^2 = D^2 + E^2$$



شکل ۱۰.۳۴: مستوی xy میں ضروری نہیں کہ ذرے کی راہ x یا y کا تفاعل ہو۔

حقائق کو استعمال کرتے ہوئے مبدا کے گرد محور گھمانے کے بعد حاصل عددی سروں کی تصدیق کی جا سکتی ہے۔ انہیں حقائق کو استعمال کرتے ہوئے A' سے C' اور D' سے E' کی قیمتیں جلد معلوم کی جا سکتی ہیں۔

سوال ۱۰.۱۸۱: مبدا کے گرد محور کو کسی بھی زاویہ گھمانے کے بعد $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$ ثابت کرنے کے لیے مساوات ۶ کی مدد لیں۔ یہ ثابت کرتے ہوئے کچھ دیر ضرور لگے گی۔

۱۰.۴ مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول

جب ایک ذرہ شکل ۱۰.۳۴ میں دکھائی گئی راہ پر چلتا ہو، ہم اس کی حرکت کو کارتیسی کلیہ کی صورت میں لکھنے کی توقع نہیں کر سکتے ہیں جو y کو بلا واسطہ x کی صورت میں یا x کو بلا واسطہ y کی صورت میں پیش کرتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم ذرے کی راہ کے ہر محدد کو وقت t کا تفاعل لکھ کر اس راہ کو ایک جوڑی مساوات $x = f(x)$ ، $y = g(t)$ کی صورت میں لکھتے ہیں۔ چونکہ یہ مساوات ہر لمحہ t پر ذرے کا مقام دیتے ہیں لہٰذا حرکت پر غور کے لیے یہ مساوات زیادہ مفید ثابت ہوتے ہیں۔

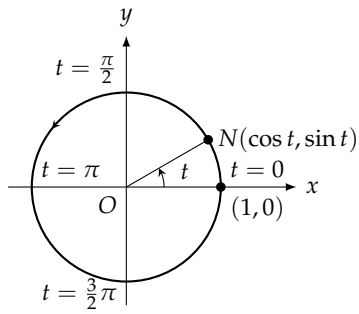
تعریف: اگر t کے ایک وقفہ پر x اور y استراری تفاعل

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

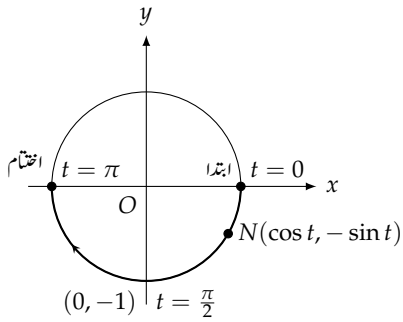
ہوں تب نقاط $(x, y) = (f(t), g(t))$ کا سلسلہ، جن کی تعریف مذکورہ بالا مساوات پیش کرتی ہیں، محددی مستوی میں ایک منحنی ہو گی۔ ان مساوات کو اس منحنی کی **مقدار معلوم مساوات**[۲۲] کہتے ہیں۔ متغیر t منحنی کا **مقدار معلوم**[۲۳] ہے اور اس کا وقفہ I **مقدار معلوم وقفہ**[۲۴] کہلاتا ہے۔ اگر I بند وقفہ $a \le t \le b$ ہو تب نقطہ $(f(a), g(a))$ منحنی کا **ابتدائی نقطہ**[۲۵] اور نقطہ $(f(b), g(b))$ اس کا **اختتامی نقطہ**[۲۶] ہو گا۔ منحنی کو **مقدار معلوم روپ دینے**[۲۷] سے مراد مستوی میں منحنی کی مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفہ بیان کرنا ہے۔

□

[۲۲] parametricequations
[۲۳] parameter
[۲۴] parameterinterval
[۲۵] initialpoint
[۲۶] terminalpoint
[۲۷] parametrization



شکل ۱۰.۳۵: گھڑی کے الٹ رخ حرکت (مثال ۱۰.۱۳)



شکل ۱۰.۳۶: گھڑی کے رخ حرکت (مثال ۱۰.۱۴)

۱۶۵۳۱ بہت سارے مواقع پر t وقت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ دیگر مواقع پر یہ کسی اور متغیر مثلاً زاویہ (اگلی مثال) کو ظاہر کر سکتا ہے۔

۱۶۵۳۲ مثال ۱۰.۱۳: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$

۱۶۵۳۳ درج ذیل مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفہ

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

۱۶۵۳۴ بڑھتے t کے لیے دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر گھڑی کی الٹ رخ ایک ذرہ کا مقام $N(x, y)$ ظاہر کرتے ہیں (شکل ۱۰.۳۵)۔

۱۶۵۳۵ چونکہ ہر t کے لیے

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

۱۶۵۳۶ ہوتا ہے لہٰذا ہم جانتے ہیں کہ یہ ذرہ اس دائرے پر حرکت کرتا ہے۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ دائرے کے کتنے حصہ پر ذرہ حرکت کرتا ہے۔

۱۶۵۳۷ یہ جاننے کے لیے ہم t کو 0 تا 2π کر کے ذرے کی مقام پر نظر رکھتے ہیں۔ مقدار معلوم t کی ناپ ریڈیئن میں ہے جو ON اور مثبت محور x
۱۶۵۳۸ کے بیچ زاویہ ہے۔ یہ ذرہ $t = 0$ پر نقطہ $(x, y) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$ سے شروع کر کے اوپر اور بائیں چلتے ہوئے
۱۶۵۳۹ $t = \frac{\pi}{2}$ پر $(x, y) = (\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}) = (0, 1)$ پہنچتا ہے۔ یہاں سے یہ بائیں اور نیچے چلتے ہوئے $t = \pi$ پر
۱۶۵۴۰ $(x, y) = (\cos \pi, \sin \pi) = (-1, 0)$ پہنچتا ہے۔ اس کے بعد ذرہ نیچے اور دائیں چل کر $(0, -1)$ پہنچ کر یہاں سے اوپر اور دائیں
۱۶۵۴۱ چل کر آخر کار $t = 2\pi$ پر نقطہ $(x, y) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (1, 0)$ پر واپس آن پہنچتا ہے۔ یوں $0 \leq t \leq 2\pi$
۱۶۵۴۲ کرنے سے یہ ذرہ ٹھیک ایک بار دائرہ پر گھڑی کے الٹ رخ چلتا ہے۔ □

۱۶۵۴۳ مثال ۱۰.۱۴: نصف دائرہ

۱۶۵۴۴ درج ذیل مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفہ

$$x = \cos t, \quad y = -\sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

ایک ذرے کا مقام دیتے ہیں جو t کو 0 سے بڑھا کر π کرنے سے بڑھانے سے گھڑی کے رخ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر حرکت کرتا ہے (شکل ۱۰.۳۶)۔

چونکہ مذکورہ بالا مقدار معلوم مساوات سے حاصل محدد دائرہ کی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا یہ ذرہ دائرے پر حرکت کرتا ہے۔ یہ جاننے کے لیے کہ دائرے کے کتنے حصے پر ذرہ حرکت کرتا ہے، ہم t کو 0 تا π کرتے ہوئے ذرہ کے مقام پر نظر رکھتے ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر مذکورہ بالا مساوات سے $(x, y) = (1, 0)$ ملتا ہے جو ذرے کا ابتدائی مقام ہے۔ البتہ اب t بڑھانے سے x کی قیمت گھٹتی ہے جبکہ y کی قیمت منفی ہو کر -1 تک پہنچ کر $t = \pi$ پر واپس 0 ہوتی ہے۔ چونکہ $t = \pi$ وقفے کا اختتامی نقطہ ہے لہٰذا ذرہ یہیں رہتا ہے۔ یوں ذرہ دائرے کے نچلے نصف حصے پر سفر کرتا ہے۔ □

مثال ۱۰.۱۵: نصف قطع مکافی

مستوی xy میں ایک ذرے کا مقام $N(x, y)$ درج ذیل مقدار مساوات اور مقدار معلوم وقفہ دیتے ہیں۔

$$x = \sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \geq 0$$

اس ذرے کی راہ کو پہچان کر اس کو بیان کریں۔

حل

ہم مساوات $x = \sqrt{t}$ اور $y = t$ سے t خارج کرتے ہوئے راہ کی مساوات تلاش کرتے ہیں۔ اگر ہماری قسمت اچھی ہو، ایسا کرنے سے کوئی جانی پہچانی مساوات حاصل ہو سکتی ہے۔

$$y = t = (\sqrt{t})^2 = x^2$$

اس سے ظاہر ہے کہ ذرے کے مقام کے محدد مساوات $y = x^2$ کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا ذرہ قطع مکافی $y = x^2$ پر حرکت کرتا ہے۔

البتہ یہ کہنا غلط ہو گا کہ یہ ذرہ پورے قطع مکافی $y = x^2$ پر حرکت کرتا ہے۔ یہ ذرہ حقیقت میں نصف قطع مکافی پر حرکت کرتا ہے۔ ذرے کے مقام کا x محدد کبھی بھی منفی نہیں ہوتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ذرہ $(0, 0)$ سے شروع کرتے ہوئے t بڑھنے سے ربع اول میں رہ کر اوپر بڑھتا جاتا ہے (شکل ۱۰.۳۷)۔ □

مثال ۱۰.۱۶: مکمل قطع مکافی راہ

مستوی xy میں ایک ذرے کا مقام $N(x, y)$ درج ذیل مساوات اور مقدار معلوم وقفہ دیتے ہیں۔

$$x = t, \quad y = t^2, \quad -\infty < t < \infty$$

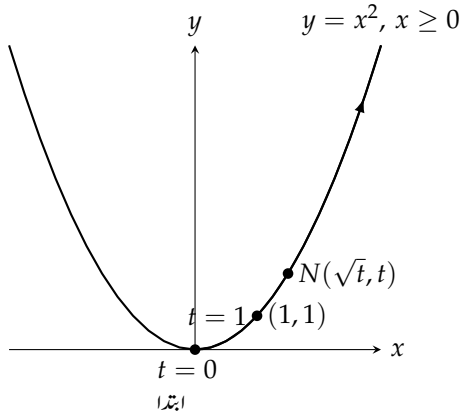
اس ذرے کی راہ کو پہچان کر اس کو بیان کریں۔

حل

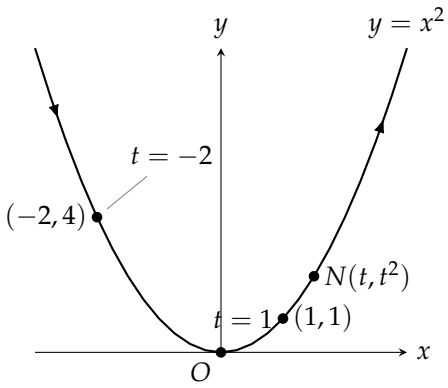
ہم مساوات $x = t$ اور $y = t^2$ سے t خارج کر کے x اور y کے بیچ مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y = (t)^2 = x^2$$

ذرے کا مقام مساوات $y = x^2$ کو مطمئن کرتی ہے لہٰذا ذرہ قطع مکافی $y = x^2$ پر حرکت کرتا ہے۔



شکل ۱۰.۳۷: نصف قطع مکافی راہ (مثال ۱۰.۱۵)



شکل ۱۰.۳۸: مکمل قطع مکافی راہ (مثال ۱۰.۱۶)

البتہ اب مثال ۱۰.۱۵ کے برعکس ذرہ مکمل قطع مکافی پر حرکت کرتا ہے۔ جیسے جیسے t کی قیمت $-\infty$ سے بڑھ کر ∞ پہنچتی ہے، ذرہ بائیں سے نیچے آتے ہوئے مبدا سے گزر کر اوپر دائیں حرکت کرتا ہے (شکل ۱۰.۳۸)۔ □

جیسا ہم نے مثال ۱۰.۱۶ میں دیکھا، کسی بھی منحنی $y = f(x)$ کی مقدار معلوم روپ $x = t,\ y = f(t)$ ہو گی۔ یہ اتنی سادہ صورت ہے کہ اس کو ہم حقیقت میں استعمال نہیں کرتے ہیں لیکن اس سے نظریہ باآسانی سمجھ آتا ہے۔

مثال ۱۰.۱۷: ایک ذرے کا مقام لمحہ t پر $N(x,y)$ درج ذیل دیتے ہیں۔

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

اس ذرے کی حرکت کو بیان کریں۔

حل

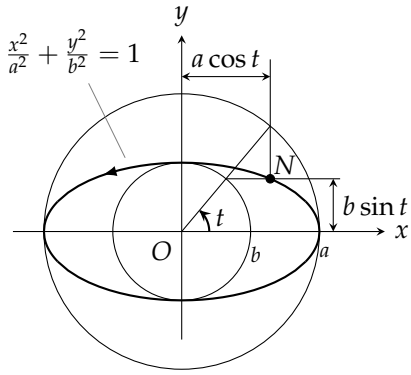
ہم مساوات $\cos t = \frac{x}{a}$ اور $\sin t = \frac{y}{b}$ سے t خارج کر کے کارتیسی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

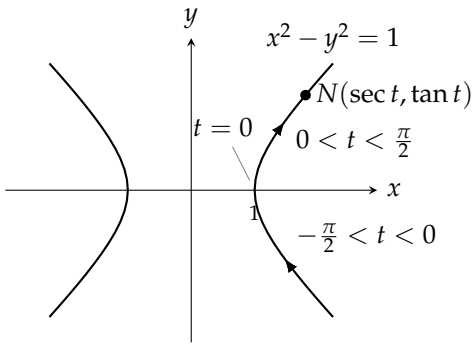
ذرے کا مقام مساوات ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کو مطمئن کرتا ہے لہٰذا یہ ذرہ ترخیم پر حرکت کرتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ذرے کے مقام کے محدد

$$x = a\cos(0) = a, \quad y = b\sin(0) = 0$$

ہوں گے لہٰذا یہ ابتدائی نقطہ $(a,0)$ سے حرکت شروع کرتا ہے۔ t بڑھانے سے ذرہ اوپر اور بائیں گھڑی کے الٹ رخ حرکت کرتا ہے۔ یہ قطع مکافی کے گرد ایک بار چل کر لمحہ $t = 2\pi$ پر واپس نقطہ $(a,0)$ پہنچ کر رک جاتا ہے (شکل ۱۰.۳۹)۔ □



شکل ۱۰.۳۹: ترخیمی راہ (مثال ۱۰.۱۷)



شکل ۱۰.۴۰: قطع زائد راہ (مثال ۱۰.۱۹)

۱۶۷۷۸ مثال ۱۰.۱۸: درج ذیل مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفہ، جو مثال ۱۰.۱۷ میں $b=a$ پر کرنے سے حاصل ہوتے ہیں،

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad 0\le t\le 2\pi$$

۱۶۷۷۹ دائرہ $x^2+y^2=a^2$ کو ظاہر کرتے ہیں۔ □

۱۶۷۸۰ مثال ۱۰.۱۹: ایک ذرے کا مقام لمحہ t پر درج ذیل مقدار معلوم مساوات دیتے ہیں۔

$$x=\sec t,\quad y=\tan t,\quad -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$$

۱۶۷۸۱ **حل**

۱۶۷۸۲ ہم درج ذیل مساوات

$$\sec t=x,\quad \tan t=y$$

۱۶۷۸۳ سے t خارج کر کے کارتیسی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ ایسا مماثل $\sec^2 t-\tan^2 t=1$ کی مدد سے کیا جائے گا۔

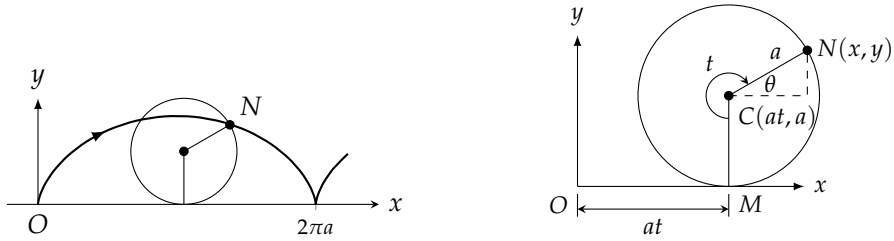
$$\sec^2 t-\tan^2 t=x^2-y^2=1$$

۱۶۷۸۴ چونکہ ذرے کے مقام کے محدد (x,y) مساوات $x^2-y^2=1$ کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا یہ ذرہ قطع زائد پر حرکت کرتا ہے۔ متغیر t کی قیمت
۱۶۷۸۵ $-\frac{\pi}{2}$ سے بڑھ کر $\frac{\pi}{2}$ تک پہنچنے سے $x=\sec t$ کی قیمت مثبت اور $y=\tan t$ کی قیمت $-\infty$ سے ∞ پہنچتی ہے لہٰذا N قطع زائد کے
۱۶۷۸۶ دایاں نصف حصہ پر رہے گا (شکل ۱۰.۴۰)۔ □

۱۶۷۸۷ مثال ۱۰.۲۰: تدویر

۱۶۷۸۸ ایک پہیا جس کا رداس a ہے افقی لکیر پر چل رہا ہے۔ اس کے محیط پر نقطہ N کی راہ کے مقدار معلوم مساوات معلوم کریں۔ اس راہ کو **تدویر**[۲۸] کہتے ہیں۔

[۲۸] cycloid



شکل ۱۰.۴۱: پہیے کے محیط پر نقطے کا مقام اور تدویر۔

۱۶۷۸۹ **حل**

۱۶۷۹۰ ہم محور x کو وہ لکیر لیتے ہیں جس پر پہیا چل رہا ہے اور لمحہ $t = 0$ پر نقطہ N کو مبدا پر لیتے ہیں۔ ہم زاویہ t کو مقدار معلوم لیتے ہیں جو پہیا گھومنے کا زاویہ
۱۶۷۹۱ ہے اور اس کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔ شکل ۱۰.۴۱ میں پہیے کو کچھ دیر بعد دکھایا گیا ہے جہاں اس کا قاعدہ، مبدا سے at فاصلہ پر ہے۔ پہیے کا مرکز (at, a)
۱۶۷۹۲ ہر ہو گا اور N کے محدد درج ذیل ہوں گے۔

$$x = at + a\cos\theta, \quad y = a + a\sin\theta$$

۱۶۷۹۳ زاویہ θ کو t کی صورت میں ظاہر کرنے کے لیے ہم شکل سے

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - t$$

۱۶۷۹۴ لکھ سکتے ہیں۔ یوں

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t, \quad \sin\theta = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t$$

۱۶۷۹۵ ہوں گے۔ درکار مساوات

$$x = at - a\sin t, \quad y = a - a\cos t$$

۱۶۷۹۶ ہیں جنہیں عموماً

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \tag{1}$$

۱۶۷۹۷ لکھا جاتا ہے۔ شکل ۱۰.۴۱ میں اس تدویر کا کچھ حصہ دکھایا گیا ہے۔ □

۱۶۷۹۸ کمتر وقتی منحنی اور یکساں وقتی منحنی

۱۶۷۹۹ اگر ہم شکل ۱۰.۴۱ کی تدویر کو الٹ کریں، مساوات ۱ اس پر بھی لاگو ہو گی (شکل ۱۰.۴۲) جہاں مثبت y نیچے رخ ہے۔ حاصل سر نیچے منحنی کے دو اہم خواص
۱۶۸۰۰ ہیں۔ پہلی خاصیت مبدا O اور پہلی قوس میں سب سے گہرا نقطہ B سے تعلق رکھتا ہے۔ ایک بلار گڑ گیند جس پر صرف کشش ثقل عمل کرتا ہو، ان دو نقطوں

کو جوڑنے والی تمام منحنیات میں سب سے جلد اس تدویر پر چلتے ہوئے O سے B پہنچتا ہے۔ یوں اس تدویر کو **کمتر وقتی منحنی** کہتے ہیں۔ اس کی دوسری خاصیت یہ ہے کہ اگر گیند کو O کے بجائے کسی دوسرے نقطہ سے چلنے دیا جائے یہ گیند B تک پہنچتے ہوئے اتنا ہی وقت لے گا جو یہ O سے B تک پہنچتے ہوئے لیتا ہے۔ یوں اس کو تدویر کو **یکساں وقتی منحنی** بھی کہتے ہیں۔

کیا O اور B کے بیچ اس کے علاوہ بھی کوئی کمتر وقت کی منحنی پائی جاتی ہے؟ ہم اس کو بطور ریاضیاتی پیش کر سکتے ہیں: ابتدا میں چونکہ گیند کی رفتار صفر ہے لہٰذا اس کی حرکی توانائی صفر ہو گی۔ مبدا $(0,0)$ سے کسی بھی نقطہ (x,y) تک گیند کو پہنچانے کی خاطر mgy کام ثقلی کشش کو کرنا ہو گا اور یہ توانائی لازماً حرکی توانائی میں تبدیلی کے برابر ہو گی، یعنی:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(0)^2$$

یوں (x,y) پر پہنچ کر گیند کی سمتی رفتار

$$v = \sqrt{2gy}$$

ہو گی جس کو

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gy}$$

گیند کی راہ پر چلتے ہوئے $\mathrm{d}s$ تفرقی فاصلہ ہے

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ کسی بھی مخصوص راہ $y = f(x)$ پر O سے $B(a\pi, 2a)$ تک چلتے ہوئے درکار وقت T_f درج ذیل ہو گا۔

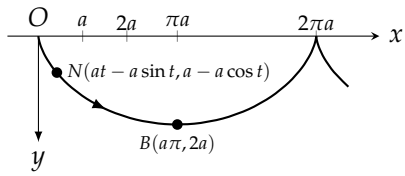
$$T_f = \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}{2gy}}\,\mathrm{d}x \tag{۲}$$

اس وقت (مکمل کی قیمت) کو کونسی منحنی $y = f(x)$ کمتر کرتی ہے؟

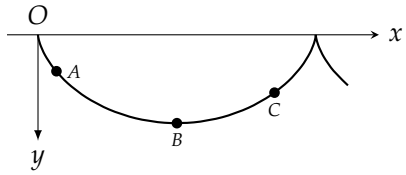
پہلی نظر میں یوں معلوم ہوتا ہے جیسا O سے B تک سیدھی لکیر (جو یقیناً کمتر فاصلہ ہے) پر گیند کمتر وقت میں O سے B تک پہنچے گا لیکن کیا ایسا ہوتا ہے۔ عین ممکن ہے کہ شروع میں گیند کو سیدھا نیچے گرنے دینے سے جلد زیادہ رفتار حاصل کیا جا سکتا ہے جس کی وجہ سے نسبتاً لمبی راہ بھی کم قوت میں طے کی جا سکتی ہو۔ حقیقت میں یہی درست جواب ہے۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے (ثبوت کو پیش نہیں کیا جائے گا) کہ O سے B تک تدویر O اور B کے بیچ واحد کمتر وقتی منحنی ہے۔ اگرچہ تدویر کو O اور B کے بیچ واحد کم وقتی منحنی ثابت کرنا اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا، ہم دکھا سکتے ہیں کہ یہ تدویر یکساں وقتی منحنی ہے۔ تدویر کے لیے مساوات ۲ درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\begin{aligned}
T_{\text{تدویر}} &= \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{2gy}} \\
&= \int_{t=0}^{t=\pi} \sqrt{\frac{a^2(2-2\cos t)}{2ga(1-\cos t)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{a}{g}}\,\mathrm{d}t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}
\end{aligned}$$

مساوات اسے $\mathrm{d}x = a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$ ، اور $\mathrm{d}y = a\sin t\,\mathrm{d}t$ ہوں گے $y = a(1-\cos t)$



شکل ۱۰.۴۲: سر نیچے تدویر پر کشش ثقل کی وجہ سے حرکت۔



شکل ۱۰.۴۳: سر نیچے تدویر پر کسی بھی نقطہ سے B تک پہنچنے کے لیے ایک سا وقت درکار ہوتا ہے۔

۱۶۸۱۶ یوں بے رگڑ گیند کو تدویر پر چلتے ہوئے O سے B تک پہنچنے کے لیے $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ وقت درکار ہو گا۔

۱۶۸۱۷ فرض کریں ہم O کے بجائے تدویر پر نقطہ (x_0, y_0) سے گیند کو چلنے دیں جس کی مطابقتی مقدار معلوم قیمت $t_0 > 0$ ہے۔ تدویر پر اس کے بعد کسی
۱۶۸۱۸ نقطہ (x, y) پر گیند کی سمتی رفتار

$$v = \sqrt{2g(y - y_0)} = \sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)} \qquad (y = (1 - \cos t))$$

۱۶۸۱۹ ہو گی۔ یوں (x_0, y_0) سے B تک پہنچنے کے لیے درکار وقت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
T &= \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos t)}{2ga(\cos t_0 - \cos t)}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{\cos t_0 - \cos t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2\sin^2 \frac{t}{2}}{(2\cos^2 \frac{t_0}{2} - 1) - (2\cos^2 \frac{t}{2} - 1)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{\sin \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 \frac{t_0}{2} - \cos^2 \frac{t}{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t=t_0}^{t=\pi} \frac{-2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}} \qquad [u = \cos(t/2),\ c = \cos(t_0/2)] \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \left[-\sin^{-1} \frac{u}{c} \right]_{t=t_0}^{t=\pi} \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \left[-\sin^{-1} \frac{\cos(t/2)}{\cos(t_0/2)} \right]_{t_0}^{\pi} \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}} (-\sin^{-1} 0 + \sin^{-1} 1) = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}
\end{aligned}$$

۱۶۸۲۰ یہ ٹھیک اتنا ہی وقت ہے جو گیند کو O سے B تک پہنچتے ہوئے درکار ہوتا ہے۔ نقطہ B تک پہنچنے کے لیے درکار وقت پر ابتدائی نقطے کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا
۱۶۸۲۱ ہے۔ یوں شکل ۱۰.۴۳ میں O ، A اور C سے ابتدا کرتے ہوئے تینوں گیند B تک ایک جتنے وقت میں پہنچیں گے۔

۱۲۸۲۲ **معیاری مقدار معلوم روپ**

۱۲۸۲۳

دائرہ

$$x^2 + y^2 = a^2$$
$$x = a\cos t$$
$$y = a\sin t$$
$$0 \le t \le 2\pi$$

ترخیم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$x = a\cos t$$
$$y = b\sin t$$
$$0 \le t \le 2\pi$$

۱۲۸۲۴

رداس a کے دائرہ کا پیدا کردہ تدویر

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

۱۲۸۲۵ **سوالات**

۱۲۸۲۶ **مقدار معلوم مساوات سے کارتیسی مساوات کا حصول**

۱۲۸۲۷ سوال ۱۰.۱۸۲ تا سوال ۱۰.۲۰۵ میں مستوی xy میں ایک ذرہ کی حرکت کی مقدار معلوم مساوات دی گئی ہیں۔ اس ذرے کی راہ کی کارتیسی مساوات حاصل

۱۲۸۲۸ کرتے ہوئے راہ کو پہچانئے۔ کارتیسی مساوات کو ترسیم کرتے ہوئے اس پر ذرے کی راہ اور رخ دکھائیں۔

۱۲۸۲۹ سوال ۱۰.۱۸۲: $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le \pi$

۱۲۸۳۰ سوال ۱۰.۱۸۳: $x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t, \quad 0 \le t \le \pi$

۱۲۸۳۱ سوال ۱۰.۱۸۴: $x = \sin(2\pi(1-t)), \quad y = \cos(2\pi(1-t)), \quad 0 \le t \le 1$

۱۲۸۳۲ سوال ۱۰.۱۸۵: $x = \cos(\pi - t), \quad y = \sin(\pi - t), \quad 0 \le t \le \pi$

۱۲۸۳۳ سوال ۱۰.۱۸۶: $x = 4\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

۱۲۸۳۴ سوال ۱۰.۱۸۷: $x = 4\sin t, \quad y = 2\cos t, \quad 0 \le t \le \pi$

۱۲۸۳۵ سوال ۱۰.۱۸۸: $x = 4\cos t, \quad y = 5\sin t, \quad 0 \le t \le \pi$

۱۲۸۳۶ سوال ۱۰.۱۸۹: $x = 4\sin t, \quad y = 5\cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

۱۲۸۳۷ سوال ۱۰.۱۹۰: $x = 3t, \quad y = 9t^2, \quad -\infty < t < \infty$

۱۲۸۳۸ سوال ۱۰.۱۹۱: $x = -\sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \ge 0$

۱۲۸۳۹ سوال ۱۰.۱۹۲: $x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \ge 0$

۱۲۸۴۰ سوال ۱۰.۱۹۳: $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

۱۲۸۴۱ سوال ۱۰.۱۹۴: $x = -\sec t, \quad y = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

سوال ۱۰.۱۹۵: $x = \csc t, \quad y = \cot t, \quad 0 < t < \pi$

سوال ۱۰.۱۹۶: $x = 2t - 5, \quad y = 4t - 7, \quad -\infty < t < \infty$

سوال ۱۰.۱۹۷: $x = 1 - t, \quad y = 1 + t, \quad -\infty < t < \infty$

سوال ۱۰.۱۹۸: $x = t, \quad y = 1 - t, \quad 0 \leq t \leq 1$

سوال ۱۰.۱۹۹: $x = 3 - 3t, \quad y = 2t, \quad 0 \leq t \leq 1$

سوال ۱۰.۲۰۰: $x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2}, \quad -t \leq t \leq 0$

سوال ۱۰.۲۰۱: $x = t, \quad y = \sqrt{4 - t^2}, \quad 0 \leq t \leq 2$

سوال ۱۰.۲۰۲: $x = t^2, \quad y = \sqrt{t^4 + 1}, \quad t \geq 0$

سوال ۱۰.۲۰۳: $x = \sqrt{t + 1}, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \geq 0$

سوال ۱۰.۲۰۴: $x = -\cosh t, \quad y = \sinh t, \quad -\infty < t < \infty$

سوال ۱۰.۲۰۵: $x = 2\sinh t, \quad y = 2\cosh t, \quad -\infty < t < \infty$

مقدار معلوم مساوات کا حصول

سوال ۱۰.۲۰۶: ایک ذرہ $(a, 0)$ سے ابتدا کرتے ہوئے دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ پر (ا) ایک بار گھڑی کے رخ، (ب) ایک بار گھڑی کے الٹ رخ، (ج) دو بار گھڑی کے رخ یا (د) دو بار گھڑی کے الٹ رخ صفر کرتا ہے۔ ہر ایک صورت میں اس ذرے کی راہ کی مقدار معلوم مساوات اور حرکت کا وقفہ تلاش کریں۔ (اس کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں لہٰذا آپ کا جواب دیے گئے جواب سے مختلف ہو سکتا ہے۔)

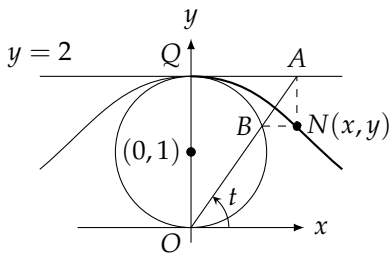
سوال ۱۰.۲۰۷: ایک ذرہ $(a, 0)$ سے ابتدا کرتے ہوئے ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ پر (ا) ایک بار گھڑی کے رخ، (ب) ایک بار گھڑی کے الٹ رخ، (ج) دو بار گھڑی کے رخ یا (د) دو بار گھڑی کے الٹ رخ صفر کرتا ہے۔ ہر ایک صورت میں اس ذرے کی راہ کی مقدار معلوم مساوات اور حرکت کا وقفہ تلاش کریں۔ (اس کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں لہٰذا آپ کا جواب دیے گئے جواب سے مختلف ہو سکتا ہے۔)

سوال ۱۰.۲۰۸: درج ذیل نصف دائرے کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔ ایسا کرتے ہوئے (x, y) پر منحنی کے مماس کی ڈھلوان $t = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو مقدار معلوم لیں۔

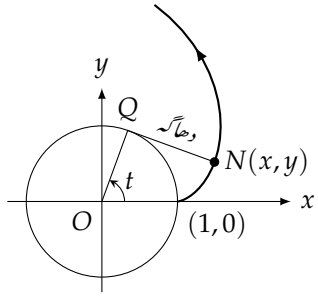
$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y > 0$$

سوال ۱۰.۲۰۹: دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ پر نقطہ $(a, 0)$ سے نقطہ (x, y) تک گھڑی کے الٹ رخ فاصلہ s کو مقدار معلوم لیتے ہوئے اس دائرے کی مقدار معلوم مساوات حاصل کریں۔

سوال ۱۰.۲۱۰: ایک دائرہ جس کا رداس 1 اور مرکز $(0, 1)$ ہو کو شکل ۱۰.۴۴ میں دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی لکیر $y = 2$ بھی دکھائی گئی ہے۔ اس لکیر پر کوئی نقطہ A لیں اور اس کو مبدا O کے ساتھ سیدھی لکیر سے ملائیں۔ خط OA اکائی دائرہ کو نقطہ N پر قطع کرتا ہے۔ نقطہ A کو لکیر $y = 2$ پر چلانے سے نقطہ N جس راہ پر چلتا ہے اس کو مریا گنیسی کی چڑیل کہتے ہیں۔ مریا گنیسی کی چڑیل کی مقدار معلوم مساوات اور اس کا مقدار معلوم وقفہ تلاش



شکل ۱۰.۴۴: ترسیم برائے سوال ۱۰.۲۱۰



شکل ۱۰.۴۵: اکائی دائرے کا در پیچیدہ (سوال ۱۰.۲۱۱)

کریں۔ قطعہ OA اور مثبت محور x کے بیچ زاویہ t کو مقدار معلوم لیں جہاں t کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔ درج ذیل مساوات فرض کرنے سے آپ کو مدد مل سکتی ہے۔

$$x = AQ, \quad y = 2 - AB\sin t, \quad AB \cdot OA = (AQ)^2$$

سوال ۱۰.۲۱۱: دائرے کا در پیچیدہ

ایک غیر تغیر پذیر دائرہ کے گرد لپٹے گئے دھاگے کو تان کر، دائرے کی مستوی میں رہتے ہوئے، کھولنے سے دھاگے کا سر N جس راہ پر چلتا ہے، اس کو دائرے کا **در پیچیدہ**[۲۹] کہتے ہیں۔ شکل ۱۰.۴۵ میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ اور ابتدائی نقطہ $(1,0)$ ہے۔ کھولا گیا دھاگہ Q پر دائرے کا مماس ہے۔ قطعہ OQ اور مثبت محور x کے بیچ زاویہ t ہے۔ نقطہ $N(x,y)$ کے محدد x اور y کو t کی روپ میں لکھ کر در پیچیدہ کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔ در پیچیدہ کی مقدار معلوم کا وقفہ $t \geq 0$ لیں۔

سوال ۱۰.۲۱۲: مستوی میں لکیروں کی مقدار معلوم روپ

(الف) دکھائیں کہ درج ذیل ایک ایسی لکیر کو ظاہر کرتی ہیں جو نقطہ (x_0, y_0) اور (x_1, y_1) سے گزرتی ہے (شکل ۱۰.۴۶)۔

$$x = x_0 + (x_1 - x_0)t, \quad y = y_0 + (y_1 - y_0)t, \quad -\infty < t < \infty$$

(ب) اسی مقدار معلوم وقفہ کو استعمال کرتے ہوئے نقطہ (x_1, y_1) اور مبدا سے گزرتی لکیر کی مقدار معلوم مساوات لکھیں۔ (ج) اسی مقدار معلوم وقفہ کے لیے $(-1,0)$ اور $(0,1)$ سے گزرتی لکیر کی مقدار معلوم مساوات معلوم کریں۔ شکل ۱۰.۴۶ میں تیر کا نشان بڑھتے t کا رخ ظاہر کرتا ہے۔

سوال ۱۰.۲۱۳: آرشمیدسی روک

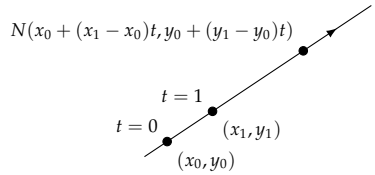
آرشمیدسی روک کو شکل ۱۰.۴۷ میں دکھایا گیا ہے جو ایک مضبوط سلاخ جس کی لمبائی L ہو پر مشتمل ہے۔ محور x اور y کے ساتھ اس کو پہیوں کے ساتھ منسلک کیا گیا ہے۔ اس سلاخ کا آزاد سر N ہے۔ سلاخ اور مثبت محور x کے بیچ زاویہ θ ہے۔

ا. مقدار معلوم θ کی صورت میں N کی راہ کی مساوات تلاش کریں۔

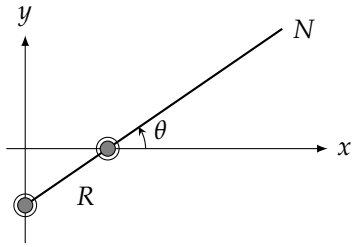
ب. N کی راہ کی کارتیسی مساوات تلاش کر کے اس کی ترسیم کو پہچانیں۔

---

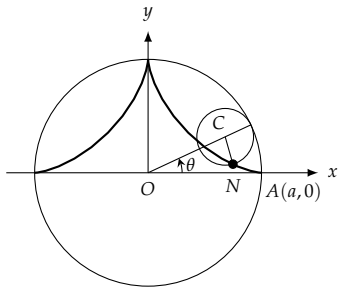
[۲۹] involute



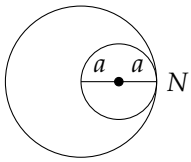
شکل ۱۰.۴۶: مستوی میں سیدھی لکیر (سوال ۱۰.۲۱۲)۔



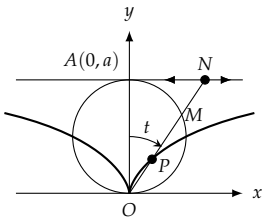
شکل ۱۰.۴۷: آرشمیدسی روک برائے سوال ۱۰.۲۱۳



شکل ۱۰.۴۸: ستارہ نما۔ سوال ۱۰.۲۱۴



شکل ۱۰.۴۹: تدویر برائے سوال ۱۰.۲۱۵



شکل ۱۰.۵۰: ترسیمات برائے سوال ۱۰.۲۱۶

سوال ۱۰.۲۱۴: فلک تدویر

ایک غیر تغیر پذیر دائرے کے محیط کے اندرون پر چلتے ہوئے دائرہ کے محیط پر کسی بھی نقطہ N کی راہ **فلک تدویر**[۳۰] کہلاتی ہے۔ غیر تغیر پذیر دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ لیں جبکہ دوسرے دائرے کا رداس b ہے۔ N کا ابتدائی مقام نقطہ $A(a, 0)$ لیں۔ دونوں دائروں کے مراکز کو ملانے والے خط اور مثبت محور x کے بیچ زاویہ θ ہے۔ فلک تدویر کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں جہاں مقدار معلوم θ ہے۔ بالخصوص $b = \frac{a}{4}$ کی صورت میں فلک تدویر درج ذیل **ستارہ نما**[۳۱] ہوگا (شکل ۱۰.۴۸)۔

$$x = a\cos^3\theta, \quad y = a\sin^3\theta$$

سوال ۱۰.۲۱۵: تدویر پر مزید معلومات

ایک دائرہ جس کا رداس $2a$ ہے کے اندر دوسرا دائرہ جس کا رداس a ہے شکل ۱۰.۴۹ میں دکھایا گیا ہے۔ نقطہ N پر یہ دائرے آپس میں ملتے ہیں۔ اندرونی دائرہ بیرونی دائرے کے اندر محیط پر چلتا ہے۔ نقطہ N کے مقام کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۲۱۶: نقطہ N لکیر $y = a$ پر چلتا ہے (شکل ۱۰.۵۰)۔ نقطہ P یوں حرکت کرتا ہے کہ $OP = MN$ ہو۔ زاویہ t کو مقدار معلوم لیتے ہوئے نقطہ P کی مقدار معلوم مساوات معلوم کریں۔ لکیر ON اور محور y کے بیچ زاویہ t ہے۔

---

[۳۰] hypocycloid
[۳۱] astroid

سوال ۱۰.۲۱۷: ایک پہیا جس کا رداس a ہے ایک سیدھی لکیر پر بغیر پھسلے چل رہا ہے۔ پہیے کے مرکز سے b اکائی دور نقطہ N کی راہ کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔ پہیا جتنا زاویہ (θ) گھومتا ہے، اس کو مقدار معلوم لیں۔

مقدار معلوم مساوات سے فاصلے کا حصول

سوال ۱۰.۲۱۸: قطع مکافی $x = t,\ y = t^2,\ -\infty < t < \infty$ پر $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ کا قریبی نقطہ تلاش کریں۔ (اشارہ: فاصلہ کے مربع کا t کے لحاظ سے تفرق لیں۔)

سوال ۱۰.۲۱۹: ترخیم $x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ پر $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$ کا قریبی نقطہ تلاش کریں۔ (اشارہ: فاصلہ کے مربع کا t کے لحاظ سے تفرق لیں۔)

کمپیوٹر کا استعمال

درج ذیل مقدار معلوم مساوات کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۲۲۰: ترخیم $x = 4\cos t,\ y = 2\sin t$ وقفہ (ا) $0 \le t \le 2\pi$ ،
(ب) $0 \le t \le \pi$ ، (ج) $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

سوال ۱۰.۲۲۱: قطع زائد $x = \sec t,\ y = \tan t$ کا ایک بازو وقفہ (ا) $-1.5 \le t \le 1.5$ ،
(ب) $-0.5 \le t \le 0.5$ ، (ج) $-0.1 \le t \le 0.1$

سوال ۱۰.۲۲۲: قطع مکافی $x = 2t + 3,\ y = t^2 - 1$ وقفہ $-2 \le t \le 2$

سوال ۱۰.۲۲۳: تدویر $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$ وقفہ (ا) $0 \le t \le 2\pi$ ، (ب) $0 \le t \le 4\pi$ ،
(ج) $\pi \le t \le 3\pi$

سوال ۱۰.۲۲۴: ستارہ نما $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$ وقفہ (ا) $0 \le t \le 2\pi$ ، (ب) $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

سوال ۱۰.۲۲۵: ایک خوبصورت منحنی یا تکھونٹا[۳۲]
اگر درج ذیل مساوات کے x اور y میں 2 کی جگہ -2 ہو تب کیا ہو گا؟

$$x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

اس نئی مساوات کو ترسیم کر کے دریافت کریں۔

سوال ۱۰.۲۲۶: مزید خوبصورت منحنی
اگر درج ذیل مساوات کے x اور y میں 3 کی جگہ -3 ہو تب کیا ہو گا؟

$$x = 3\cos t + \cos 3t, \quad y = 3\sin t - \sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

اس نئی مساوات کو ترسیم کر کے دریافت کریں۔

---

[۳۲] deltoid

سوال ۱۰.۲۲۷: گولا

توپ کے گولے کا مدار درج ذیل ہے۔

$$x = (64\cos\alpha)t, \quad y = -4.9t^2 + (64\sin\alpha)t, \quad 0 \le t \le 4\sin\alpha$$

توپ کے مدار کو زاویہ (ا) $\alpha = \frac{\pi}{4}$، (ب) $\alpha = \frac{\pi}{6}$، (ج) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ اور (د) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ کے لیے ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۲۲۸: تین خوبصورت منحنیات

ا. برتدویر:

$$x = 9\cos t - \cos 9t, \quad y = 9\sin t - \sin 9t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

ب. فلک تدویر:

$$x = 8\cos t + 2\cos 4t, \quad y = 8\sin t - 2\sin 4t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

ج. زیر تدویر:

$$x = \cos t + 5\cos 3t, \quad y = 6\cos t - 5\sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

سوال ۱۰.۲۲۹: خوبصورت ترین منحنیات

ا. $x = 6\cos t + 5\cos 3t, \quad y = 6\sin t - 5\sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

ب. $x = 6\cos 2t + 5\cos 6t, \quad y = 6\sin 2t - 5\sin 6t, \quad 0 \le t \le \pi$

ج. $x = 6\cos t + 5\cos 3t, \quad y = 6\sin 2t - 5\sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

د. $x = 6\cos 2t + 5\cos 6t, \quad y = 6\sin 4t - 5\sin 6t, \quad 0 \le t \le \pi$

۱۰.۵ احصاء اور مقدار معلوم منحنیات

اس حصہ میں مقدار معلوم منحنیات کے ساتھ وابستہ ڈھلوان، لمبائی اور سطحی رقبے کی تلاش پر غور کیا جائے گا۔

مقدار معلوم منحنیات کی ڈھلوان

تعریف: نقطہ $t = t_0$ پر مقدار معلوم منحنی $x = f(t), y = g(t)$ اس صورت **قابل تفرق** ہو گی جب $t = t_0$ پر f اور g قابل تفرق ہوں۔ یہ منحنی تب **قابل تفرق** ہو گی جب ہر مقدار معلوم قیمت پر یہ قابل تفرق ہو۔ یہ منحنی اس صورت **ہموار**[۳۳] ہو گی جب f' اور g' استمراری ہوں اور دونوں بیک وقت صفر نہ ہوں۔

□

ایک قابل تفرق منحنی پر اس نقطہ پر جہاں x کے لحاظ سے بھی y قابل تفرق تفاعل ہو، تفارق $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق درج ذیل زنجیری قاعدہ دیتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

اگر $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \neq 0$ ہو تب ہم دونوں اطراف کو $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ سے تقسیم کر کے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ حاصل کر سکتے ہیں۔

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ سے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کا حصول $(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \neq 0)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t} \tag{۱}$$

مثال ۱۰.۲۱: نقطہ $(\sqrt{2}, 1)$ جہاں $t = \frac{\pi}{4}$ ہے پر درج ذیل قطع زائد کے دائیں بازو کے مماس کی مساوت معلوم کریں (شکل ۱۰.۵۱)۔

$$x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

حل

اس منحنی کی t پر ڈھلوان

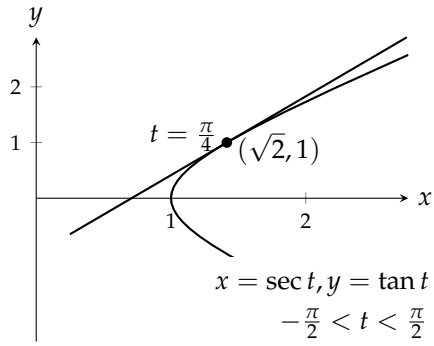
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t} \qquad \text{مساوات ۱}$$

ہے جس میں $t = \frac{\pi}{4}$ پر کرتے ہوئے

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sec(\frac{\pi}{4})}{\tan(\frac{\pi}{4})} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

---

[۳۳] smooth



شکل ۱۰.۵۱: مثال ۱۰.۲۱ کا قطع زائد بازو۔

۱۶۹۴۹ حاصل ہو گا۔ مماس کی نقطہ وڈھلوان مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 1 &= \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \\ y &= \sqrt{2}x - 2 + 1 \\ y &= \sqrt{2}x - 1 \end{aligned}$$

۱۶۹۵۰ □

۱۶۹۵۱ **مقدار معلوم کلیہ برائے $\frac{d^2 y}{dx^2}$**

۱۶۹۵۲ اگر ایک مقدار معلوم مساوات y کو x کا دوگنا قابل تفرق تفاعل پیش کرتی ہو، ہم $\frac{d^2 y}{dx^2}$ کو t کا تفاعل درج ذیل طریقہ سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

مساوات ۱ میں y کی جگہ y' لیا گیا ہے

۱۶۹۵۳ یوں $y' = \frac{dy}{dx}$ اور $\frac{dx}{dt}$ سے $\frac{d^2 y}{dx^2}$ کے حصول کا کلیہ درج ذیل ہو گا جہاں $\frac{dx}{dt} \neq 0$ ہے۔

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} \tag{۲}$$

۱۶۹۵۴ $\frac{d^2 y}{dx^2}$ کو t کی صورت میں لکھنے کے لیے درج ذیل اقدام لیں۔

۱۶۹۵۵ ۱. $y' = \frac{dy}{dx}$ کو t کے لحاظ سے لکھیں۔

۱۲۹۵۶ ب. $\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}$ معلوم کریں۔

۱۲۹۵۷ ج. $\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}$ کو $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ سے تقسیم کریں۔ان کا حاصل تقسیم $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ ہو گا۔

۱۲۹۵۸ مثال ۱۰.۲۲: $x = t - t^2$ اور $y = t - t^3$ کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ تلاش کریں۔

۱۲۹۵۹ **حل**

۱۲۹۶۰ قدم ا: y' کو t کے لحاظ سے لکھیں:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t} = \frac{1-3t^2}{1-2t} \qquad \text{مساوات ا میں } x = t - t^2 \text{ اور } y = t - t^3$$

۱۲۹۶۱ قدم ب: t کے لحاظ سے y' کا تفرق لیں:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1-3t^2}{1-2t}\right)\\ &= \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^2}\end{aligned}$$

۱۲۹۶۲ قدم ج: $\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}$ کو $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ سے تقسیم کریں۔چونکہ

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t-t^2) = 1-2t \qquad (x = t - t^2)$$

۱۲۹۶۳ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}y'/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t} \qquad \text{مساوات ۲}\\ &= \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^2}\cdot\frac{1}{1-2t}\\ &= \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^3}\end{aligned}$$

۱۲۹۶۴ □

مقدار معلوم منحنیات کی لمبائیاں

ہم ہموار منحنی $x = f(t),\ y = g(t),\ a \le t \le b$ کی لمبائی کا تکمل حاصل کرنے کی خاطر ہم حصہ ۶.۵ کے تکمل $L = \int \mathrm{d}s$ کو درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} L &= \int_{t=a}^{t=b} \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{(\mathrm{d}x)^2}{(\mathrm{d}t)^2} + \frac{(\mathrm{d}y)^2}{(\mathrm{d}t)^2}\right)\mathrm{d}t^2} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

درج بالا متکمل استمراری ہونے کے علاوہ ضروری ہے کہ جب t کی قیمت a سے b تک بڑھتی ہو تب نقطہ $N(x,y) = N(f(t), g(t))$ ، منحنی کے کسی بھی حصہ پر ایک سے زیادہ مرتبہ نہ گزرتا ہو۔

لمبائی

اگر t کی قیمت a تا b کرنے سے ہموار منحنی $x = f(t),\ y = g(t),\ a \le t \le b$ پر ٹھیک ایک بار چلا جائے تب اس منحنی کی لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \tag{۳}$$

حصہ ۶.۵ میں لمبائی کے کلیات مساوات ۳ کی مخصوص صورتیں ہیں (سوال ۱۰.۲۶۴ اور سوال ۱۰.۲۶۵)۔

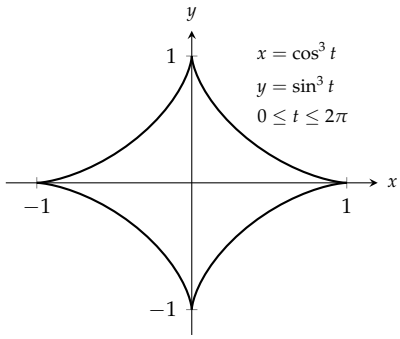
اعلیٰ احصاء کہتی ہے کہ منحنی کی ایک سے زائد مقدار معلوم مساوات سے حاصل لمبائیاں ایک دوسری جیسی ہوں گی۔ پس انہیں مساوات ۳ سے قبل دیے گئے شرائط پر پورا اترنا ہو گا۔

مثال ۱۰.۲۳: ستارہ نما $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi$ کی لمبائی معلوم کریں (شکل ۱۰.۵۲)۔

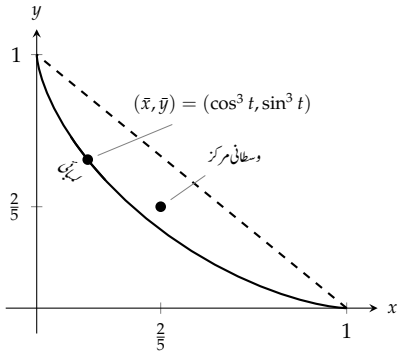
حل

محددی محور کے لحاظ سے منحنی کی تشاکلی کی وجہ سے کل منحنی کی لمبائی کسی ایک ربع میں اس کی لمبائی کے چار گنا ہو گی۔ ہم ربع اول میں لمبائی معلوم کرتے ہیں۔ ہمارے پاس

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t \\ \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 &= [3\cos^2 t(-\sin t)]^2 = 9\cos^4 t \sin^2 t \\ \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 &= [3\sin^2 t(\cos t)]^2 = 9\sin^4 t \cos^2 t \\ \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} &= \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} \qquad \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \\ &= \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t} \\ &= 3|\cos t \sin t| \\ &= 3\cos t \sin t \end{aligned}$$



شکل ۱۰.۵۲: ستارہ نما برائے مثال ۱۰.۲۳



شکل ۱۰.۵۳: ستارہ نما کا وسطانی مرکز۔

۱۲۹۸۰ ہے جہاں آخری قدم میں $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ پر $\cos t \sin t \ge 0$ ہے۔ یوں ربع اول میں لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\pi/2} 3 \cos t \sin t \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{3}{2} \int_0^{\pi/2} \sin 2t \, \mathrm{d}t \\ &= -\frac{3}{4} \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

۱۲۹۸۱ ستارہ نما کی لمبائی چار گنا ہو گی: $4(3/2) = 6$ □

۱۲۹۸۲ مثال ۱۰.۲۴: ربع اول میں مثال ۱۰.۲۳ کے ستارہ نما کا وسطانی مرکز معلوم کریں۔

۱۲۹۸۳ **حل**

۱۲۹۸۴ ہم منحنی کی کثافت $\delta = 1$ لے کر حصہ ۶.۷ کی طرح اس کی کمیت اور محددی محور کے لحاظ سے معیار اثر معلوم کرتے ہیں۔

۱۲۹۸۵ لکیر $y = x$ کے لحاظ سے کمیت کا تقسیم تشاکلی ہے لہٰذا $\bar{x} = \bar{y}$ ہو گا۔ منحنی کے کسی عمومی قطعہ کی کمیت درج ذیل ہو گی (شکل ۱۰.۵۳)۔

$$\mathrm{d}m = 1 \cdot \mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} \, \mathrm{d}t = 3 \cos t \sin t \, \mathrm{d}t$$ مثال ۱۰.۲۳ دیکھیں

۱۲۹۸۶ یوں منحنی کی کمیت

$$M = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}m = \int_0^{\pi/2} 3 \cos t \sin t \, \mathrm{d}t = \frac{3}{2}$$ مثال ۱۰.۲۳ دیکھیں

۱۶۹۸۷ ہو گی۔ محور x کے لحاظ سے منحنی کا معیار اثر

$$M_x = \int \bar{y}\,\mathrm{d}m = \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cdot 3\cos t \sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= 3\int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t\,\mathrm{d}t = 3 \cdot \frac{\sin^5 t}{5}\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3}{5}$$

۱۶۹۸۸ ہو گا۔ یوں

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{3/5}{3/2} = \frac{2}{5}$$

۱۶۹۸۹ اور وسطانی نقطہ $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ ہو گا۔ □

۱۶۹۹۰ **سطح طواف کا رقبہ**

۱۶۹۹۱ ہموار مقدار معلوم منحنیات کے لیے لمبائی کے کلیہ (مساوات ۳) سے، حصہ ۶.۶ میں کار تیسی کلیات کی طرح، سطح طواف کے درج ذیل کلیات اخذ ہوتے ہیں۔

۱۶۹۹۲ **سطح رقبہ**

۱۶۹۹۳ اگر t کی قیمت a تا b کرنے سے ہموار منحنی $x = f(t),\ y = g(t),\ a \le t \le b$ پر ٹھیک ایک بار چلا جائے تب اس منحنی کو محددی

۱۶۹۹۴ محور کے گرد گھمانے سے پیدا سطح طواف کے رقبے درج ذیل ہوں گے۔

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \qquad (y \ge 0)\ \text{محور } x \text{ کے گرد} \tag{۴}$$

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \qquad (x \ge 0)\ \text{محور } y \text{ کے گرد} \tag{۵}$$

۱۶۹۹۵ لمبائی کی طرح ہم سطح طواف کی کسی بھی مقدار معلوم مساوات، جو درکار شرائط مطمئن کرتی ہو، سے سطح طواف کا رقبہ تلاش کر سکتے ہیں۔

۱۶۹۹۶ مثال ۱۰.۲۵: مستوی xy میں رداس 1 کا دائرہ جس کا مرکز $(0,1)$ پر ہو کی مقدار معلوم مساوات درج ذیل ہیں۔

$$x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

۱۶۹۹۷ اس دائرے کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ درج بالا مقدار معلوم مساوات استعمال کرتے ہوئے پیدا سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔

۱۶۹۹۸ **حل**

۱۶۹۹۹ سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
S &= \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t && \text{مساوات ۴} \\
&= \int_0^{2\pi} 2\pi(1+\sin t)\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t && \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \\
&= 2\pi \int_0^{2\pi} (1+\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi\,[t - \cos t]_0^{2\pi} = 4\pi^2
\end{aligned}
$$

۱۷۰۰۰ □

۱۷۰۰۱ **سوالات**

۱۷۰۰۲ **مقدار معلوم منحنیات کے مماس**

۱۷۰۰۳ سوال ۱۰.۲۳۰ تا سوال ۱۰.۲۴۱ میں t پر مقدار معلوم منحنی کے مماس کی مساوات دریافت کریں گے۔ اس نقطہ پر $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ بھی معلوم کریں۔

۱۷۰۰۴ سوال ۱۰.۲۳۰: $x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad t = \frac{\pi}{4}$

۱۷۰۰۵ سوال ۱۰.۲۳۱: $x = \sin 2\pi t, \quad y = \cos 2\pi t, \quad t = -\frac{1}{6}$

۱۷۰۰۶ سوال ۱۰.۲۳۲: $x = 4\sin t, \quad y = 2\cos t, \quad t = \frac{\pi}{4}$

۱۷۰۰۷ سوال ۱۰.۲۳۳: $x = \cos t, \quad y = \sqrt{3}\cos t, \quad t = \frac{2\pi}{3}$

۱۷۰۰۸ سوال ۱۰.۲۳۴: $x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t = \frac{1}{4}$

۱۷۰۰۹ سوال ۱۰.۲۳۵: $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad t = -\frac{\pi}{4}$

۱۷۰۱۰ سوال ۱۰.۲۳۶: $x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad t = \frac{\pi}{6}$

۱۷۰۱۱ سوال ۱۰.۲۳۷: $x = -\sqrt{t+1}, \quad y = \sqrt{3t}, \quad t = 3$

۱۷۰۱۲ سوال ۱۰.۲۳۸: $x = 2t^2 + 3, \quad y = t^4, \quad t = -1$

۱۷۰۱۳ سوال ۱۰.۲۳۹: $x = \frac{1}{t}, \quad y = -2 + \ln t, \quad t = 1$

۱۷۰۱۴ سوال ۱۰.۲۴۰: $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t = \frac{\pi}{3}$

۱۷۰۱۵ سوال ۱۰.۲۴۱: $x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad t = \frac{\pi}{2}$

۱۷۰۱۶

خفی مقدار معلوم مساوات

سوال ۱۰.۲۴۲ تا سوال ۱۰.۲۴۵ میں x اور y بطور قابل تفرق خفی مقدار معلوم تفاعل $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ دیے گئے ہیں۔ دیے گئے t پر منحنی $x = f(t),\ t = g(t)$ کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۲۴۲: $x^2 - 2tx + 2t^2 = 4, \quad 2y^3 - 3t^2 = 4, \quad t = 2$

سوال ۱۰.۲۴۳: $x = \sqrt{5 - \sqrt{t}}, \quad y(t-1) = \ln y, \quad t = 1$

سوال ۱۰.۲۴۴: $x + 2x^{3/2} = t^2 + t, \quad y\sqrt{t+1} + 2t\sqrt{y} = 4, \quad t = 0$

سوال ۱۰.۲۴۵: $x \sin t + 2x = t, \quad t \sin t - 2t = y, \quad t = \pi$

منحنیات کی لمبائیاں

سوال ۱۰.۲۴۶ تا سوال ۱۰.۲۵۱ میں منحنیات کی لمبائیاں تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۲۴۶: $x = \cos t, \quad y = t + \sin t, \quad 0 \le t \le \pi$

سوال ۱۰.۲۴۷: $x = t^3, \quad y = \frac{3t^2}{2}, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$

سوال ۱۰.۲۴۸: $x = \frac{t^2}{2}, \quad y = \frac{(2t+1)^{3/2}}{3}, \quad 0 \le t \le 4$

سوال ۱۰.۲۴۹: $x = \frac{(2t+3)^{3/2}}{3}, \quad y = t + \frac{t^2}{2}, \quad 0 \le t \le 3$

سوال ۱۰.۲۵۰: $x = 8\cos t + 8t \sin t,\ y = 8 \sin t - 8t \cos t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

سوال ۱۰.۲۵۱: $x = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t,\ y = \cos t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{3}$

سطح رقبے

سوال ۱۰.۲۵۲ تا سوال ۱۰.۲۵۵ میں دیے گئے محور کے گرد منحنی گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال ۱۰.۲۵۲: محور x ؛ $x = \cos t, \quad y = 2 + \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۰.۲۵۳: محور y ؛ $x = \frac{2}{3}t^{3/2}, \quad y = 2\sqrt{t}, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$

سوال ۱۰.۲۵۴: محور y ؛ $x = t + \sqrt{2}, \quad y = \frac{t^2}{2} + \sqrt{2}t, \quad -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

سوال ۱۰.۲۵۵: محور x ؛ $x = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t, \quad y = \cos t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{3}$

سوال ۱۰.۲۵۶: مخروط مقطوع

نقطہ $(0,1)$ اور $(2,2)$ کے بیچ لکیر کو محور x کے گرد گھما کر مخروط مقطوع کا سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ مقدار معلوم مساوات $x = 2t,\ y = t + 1,\ 0 \le t \le 1$ استعمال کرتے ہوئے سطح طواف کا رقبہ معلوم کریں۔ نتیجہ کا جیومیٹری کے کلیہ (ترچھا قد) $S = \pi(r_1 + r_2)$ کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۱۰.۲۵۷: مخروط

مبدا اور نقطہ (h, r) کے بیچ قطعہ کو محور x کے گرد گھما کر مخروط سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے جس کے قاعدے کا رداس r اور قد h ہوں گے۔ مقدار معلوم مساوات $x = ht, y = rt, 0 \leq t \leq 1$ استعمال کرتے ہوئے سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔ نتیجے کا موازنہ جیومیٹری کے کلیہ (ترچھا قد) $S = \pi r$ کے ساتھ کریں۔

وسطانی مراکز

سوال ۱۰.۲۵۸: (ا) درج ذیل منحنی کے وسطانی مرکز کے محدد تلاش کریں۔

$$x = \cos t + t \sin t, \quad y = \sin t - t \cos t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

(ب) یہ منحنی شکل ۱۰.۴۵ میں دکھائی گئی در پیچیدہ کا حصہ ہے۔ اس منحنی کو ترسیم کریں۔ منحنی کا وسطانی مرکز 1 اعشاریہ تک تلاش کر کے ترسیم پر دکھائیں۔

سوال ۱۰.۲۵۹: (ا) درج ذیل منحنی کے وسطانی مرکز کے محدد تلاش کریں۔

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

(ب) اس منحنی کو ترسیم کریں۔ منحنی کا وسطانی مرکز 1 اعشاریہ تک تلاش کر کے ترسیم پر دکھائیں۔

سوال ۱۰.۲۶۰: (ا) درج ذیل منحنی کے وسطانی مرکز کے محدد تلاش کریں۔

$$x = \cos t, \quad y = t + \sin t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

(ب) اس منحنی کو ترسیم کریں۔ منحنی کا وسطانی مرکز 1 اعشاریہ تک تلاش کر کے ترسیم پر دکھائیں۔

سوال ۱۰.۲۶۱: تکمل کی قیمت

وسطانی مراکز کے مسائل کو عموماً کیلکولیٹر یا کمپیوٹر کی مدد سے حل کیا جاتا ہے۔ درج ذیل منحنی کا وسطانی مرکز 2 اعشاریہ تک کیلکولیٹر یا کمپیوٹر کی مدد سے تلاش کریں۔

$$x = t^3, y = \tfrac{3}{2}t^2, 0 \leq t \leq \sqrt{3}$$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۰.۲۶۲: لمبائی کا دارومدار مقدار معلوم مساوات پر نہیں ہوتا ہے۔

نصف دائرہ $y = \sqrt{1 - x^2}$ کی لمبائی درج ذیل مقدار معلوم مساوات استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

ا. $x = \cos 2t, y = \sin 2t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

ب. $x = \sin \pi t, y = \cos \pi t, -\frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$

۱۷۰۶۵ آپ دیکھیں گے کہ دونوں جوابات یکساں ہیں۔

۱۷۰۶۶ سوال ۱۰.۲۶۳: ترخیمی تکمل

۱۷۰۶۷ ترخیم $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ کی لمبائی درج ذیل ہے

$$L = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

۱۷۰۶۸ جہاں e ترخیم کی سنک ہے۔ ماسوائے $e = 0$ یا $e = 1$ یہ تکمل، جو **ترخیمی تکمل**[۳۴] کہلاتا ہے، غیر بنیادی ہے۔

۱۷۰۶۹ ا. قاعدہ ذوزنقہ میں $n = 10$ لے کر $a = 1$ اور $e = \frac{1}{2}$ کے لیے اس ترخیم کی لمبائی کا اندازہ لگائیں۔

۱۷۰۷۰ ب. تفاعل $f(t) = \sqrt{1 - e^2\cos^2 t}$ کے دوگنا تفرق کی قیمت 1 سے کم ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے جزو-ا میں حاصل قیمت

۱۷۰۷۱ میں خلل کا بالائی حد تلاش کریں۔

۱۷۰۷۲ سوال ۱۰.۲۶۴: جیسا حصہ ۱۰.۴ میں ذکر کیا گیا، وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل $y = f(x)$ کے ترسیم کی مقدار معلوم روپ درج ذیل ہو گی۔

$$x = x, \quad y = f(x), \quad a \le x \le b$$

۱۷۰۷۳ یہاں x از خود مقدار معلوم ہے۔

۱۷۰۷۴ اس مقدار معلوم روپ کے لیے دکھائیں کہ مقدار معلوم لمبائی

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

۱۷۰۷۵ درج ذیل کارتیسی صورت اختیار کرتی ہے جس کو حصہ ۶.۵ میں حاصل کیا گیا۔

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

۱۷۰۷۶ یوں کارتیسی کلیہ درحقیقت مقدار معلوم کلیہ کی ایک مخصوص صورت ہے۔

۱۷۰۷۷ سوال ۱۰.۲۶۵: دکھائیں کہ منحنی $x = g(y),\ c \le y \le d$ کی لمبائی کا کارتیسی کلیہ (مساوات ۳)

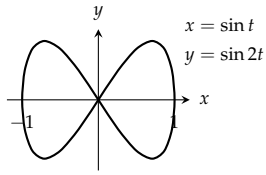
$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y$$

۱۷۰۷۸ درحقیقت درج ذیل مقدار معلوم کلیہ کی مخصوص صورت ہے۔

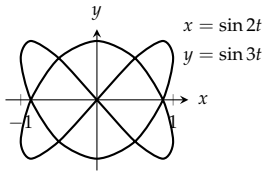
$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

---

[۳۴] ellipticintegral



شکل ۱۰.۵۴: ترسیم سوال ۱۰.۲۷۰



شکل ۱۰.۵۵: ترسیم سوال ۱۰.۲۷۱

سوال ۱۰.۲۶۶: درج ذیل تدویر کی ایک محراب کے نیچے رقبہ تلاش کریں۔

$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta)$$

(اشارہ: $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta$ استعمال کریں۔)

سوال ۱۰.۲۶۷: درج ذیل تدویر کی ایک محراب کی لمبائی معلوم کریں۔

$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta)$$

سوال ۱۰.۲۶۸: تدویر $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$ کی ایک محراب کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۲۶۹: محور x اور تدویر $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$ کے ایک محراب کے بیچ خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (اشارہ: $\mathrm{d}H = \pi y^2\,\mathrm{d}x = \pi y^2 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta$)

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۱۰.۲۷۰ اور سوال ۱۰.۲۷۱ میں **لساجو اشکال**[۳۵] دکھائی گئی ہیں۔ دونوں سوالات میں ربع اول میں وہ نقطہ تلاش کریں جہاں منحنی کا مماس افقی ہو۔ مبدا پر دو مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۲۷۰: ترسیم شکل ۱۰.۵۴ میں دی گئی ہے۔

سوال ۱۰.۲۷۱: ترسیم شکل ۱۰.۵۵ میں دی گئی ہے۔

سوال ۱۰.۲۷۲ تا سوال ۱۰.۲۷۸ میں تفاعل کو اپنی مرضی کے مقدار معلوم وقفہ پر ترسیم کریں۔ یہ ترسیمات لساجس اشکال ہیں جن کا عمومی کلیہ درج ذیل ہے

$$x = a\sin(mt + d), \quad y = b\sin nt$$

جہاں m اور n عدد صحیح ہیں۔

[۳۵] Lissajousfigures

۱۷۰۹۵ سوال ۱۰.۲۷۲: $x = \sin 2t, \quad y = \sin t$

۱۷۰۹۶ سوال ۱۰.۲۷۳: $x = \sin 3t, \quad y = \sin 4t$

۱۷۰۹۷ سوال ۱۰.۲۷۴: $x = \sin t, \quad y = \sin 4t$

۱۷۰۹۸ سوال ۱۰.۲۷۵: $x = \sin t, \quad y = \sin 5t$

۱۷۰۹۹ سوال ۱۰.۲۷۶: $x = \sin 3t, \quad y = \sin 5t$

۱۷۱۰۰ سوال ۱۰.۲۷۷: $x = \sin(3t + \pi/2), \quad y = \sin 5t$

۱۷۱۰۱ سوال ۱۰.۲۷۸: $x = \sin(3t + \pi/4), \quad y = \sin 5t$

۱۷۱۰۲

۱۷۱۰۳ سوال ۱۰.۲۷۹ تا سوال ۱۰.۲۸۴ میں دیے مقدار معلوم منحنیات پر کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کریں۔

۱۷۱۰۴ ا. منحنی کو t کے دیے گئے وقفہ پر ترسیم کریں۔

۱۷۱۰۵ ب. نقطہ t_0 پر $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ اور $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ تلاش کریں۔

۱۷۱۰۶ ج. نقطہ t_0 پر منحنی کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔ منحنی کی ترسیم پر اس مماس کو دکھائیں۔

۱۷۱۰۷ د. منحنی کی لمبائی دیے گئے وقفہ پر معلوم کریں۔

۱۷۱۰۸ سوال ۱۰.۲۷۹: $x = \frac{1}{3}t^3, \quad y = \frac{1}{2}t^2, \quad 0 \le t \le 1, \quad t_0 = \frac{1}{2}$

۱۷۱۰۹ سوال ۱۰.۲۸۰: $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5, \quad y = t^2 + t - 3, \quad 0 \le t \le 6, \quad t_0 = \frac{3}{2}$

۱۷۱۱۰ سوال ۱۰.۲۸۱: $x = e^t - t^2, \quad y = t + e^{-t}, \quad -1 \le t \le 2, \quad t_0 = 1$

۱۷۱۱۱ سوال ۱۰.۲۸۲: $x = t - \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad -\pi \le t \le \pi, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

۱۷۱۱۲ سوال ۱۰.۲۸۳: $x = e^t + \sin 2t, \quad y = e^t + \cos(t^2), \quad -\sqrt{2}\pi \le t \le \pi/4, \quad t_0 = -\frac{\pi}{4}$

۱۷۱۱۳ سوال ۱۰.۲۸۴: $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad 0 \le t \le \pi, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$

۱۷۱۱۴

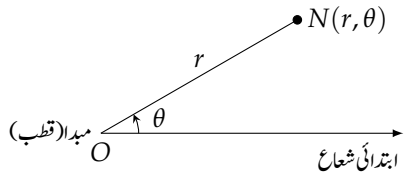
۱۷۱۱۵ سوال ۱۰.۲۸۵ اور سوال ۱۰.۲۸۶ میں x اور y کو t کا خفی مقدار معلوم تفاعل دیا گیا ہے۔ کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کریں۔

۱۷۱۱۶ ا. پہلی مساوات کو x کے لیے اور دوسری مساوات کو y کے لیے حل کر کے $x = f(t)$ اور $y = g(t)$ معلوم کریں۔

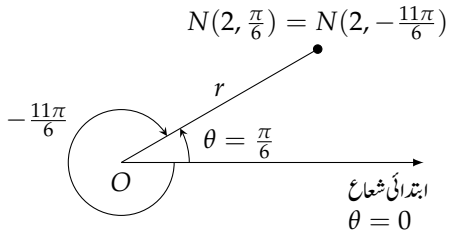
۱۷۱۱۷ ب. نقطہ t_0 پر منحنی $x = f(t)$ اور $y = g(t)$ کی ڈھلوان معلوم کریں۔

۱۷۱۱۸ ج. نقطہ t_0 پر منحنی کے مماس کی مساوات معلوم کریں۔

۱۷۱۱۹ د. دیے گئے وقفہ پر منحنی اور نقطہ t_0 پر مماس ترسیم کریں۔



شکل ۱۰.۵۶: قطبی محدد کی تعریف کے لیے ہم مبدا اور ابتدائی شعاع لیتے ہیں۔



شکل ۱۰.۵۷: قطبی محدد یکتا نہیں ہیں۔

سوال ۱۰.۲۸۵: $x^2 - 2tx + 3t^2 = 4, \quad y^3 - 2t^2 = 7, \quad -1 \le t \le 2, \quad t_0 = 1$

سوال ۱۰.۲۸۶: $x^2 \cos t + 2x = t, \quad t \sin t + 2\sqrt{y} = y, \quad -2\pi \le t \le 2\pi, \quad t_0 = -\frac{\pi}{4}$

۱۰.۶ قطبی محدد

اس حصہ میں ہم قطبی محدد اور کارتیسی محدد کے ساتھ ان کے تعلق پر غور کریں گے۔ اگرچہ مستوی پر ایک نقطہ کے صرف ایک جوڑی کارتیسی محدد ہوتے ہیں، اسی نقطہ کے قطبی محدد کی جوڑیوں کی تعداد لا متناہی ہوتی ہے۔ جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے، ترسیم پر اس کے دلچسپ اثرات مرتب ہوتے ہیں۔

قطبی محدد کی تعریف

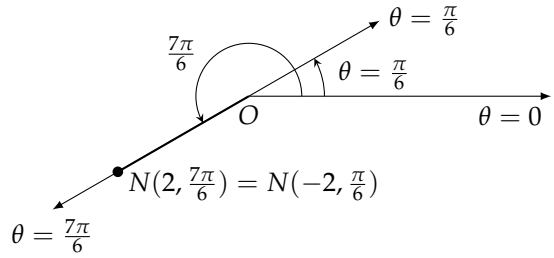
قطبی محدد متعارف کرنے کی خاطر ہم ایک **مبدا**[۳۶] O جو **قطب**[۳۷] کہلائے گا اور O سے ایک **ابتدائی شعاع** مقرر کرتے ہیں (شکل ۱۰.۵۶)۔ اب ہر نقطہ N کے مقام کو **قطبی محددی جوڑی** (r,θ) سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں O سے N تک فاصلہ r اور ابتدائی شعاع سے ON تک زاویہ θ ہوں گے۔

تکونیات کی طرح یہاں بھی گھڑی کے الٹ رخ θ کو مثبت جبکہ گھڑی کے رخ اس کو منفی تصور کیا جاتا ہے۔ کسی ایک نقطہ کے ساتھ منسلک زاویہ یکتا نہیں ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر مبدا سے 2 اکائی دور شعاع $\theta = \frac{\pi}{6}$ پر واقع نقطہ کے قطبی محدد $r = 2$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ ہیں۔ اسی نقطہ کے قطبی محدد $r = 2$ ، $\theta = -\frac{11\pi}{6}$ بھی ہوں گے (شکل ۱۰.۵۷)۔

r کی منفی قیمتیں

بعض اوقات ہم r کو منفی رکھنا چاہتے ہیں۔ مثال کے طور پر نقطہ $N(2,\frac{7\pi}{6})$ تک پہنچنے کے لیے ہم ابتدائی شعاع سے گھڑی کے الٹ رخ $\frac{7\pi}{6}$ گھوم کر آگے رخ 2 اکائیاں چلتے ہیں۔ اسی نقطہ تک پہنچنے کی خاطر ہم گھڑی کے الٹ رخ $\frac{\pi}{6}$ گھوم کر پیچھے رخ 2 اکائیاں چلیں گے (شکل ۱۰.۵۸)۔ یوں اس نقطے

[۳۶] origin
[۳۷] pole



شکل ۱۰.۵۸: قطبی محدد میں r منفی ہو سکتا ہے۔

کے قطبی محدد $r = -2$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ بھی ہوں گے۔

مثال ۱۰.۲۶: نقطہ $N(2, \frac{\pi}{6})$ کے قطبی محدد تلاش کریں۔

حل

ہم قطبی محدد کا مبدا اور ابتدائی شعاع ترسیم کرتے ہیں۔ ابتدائی شعاع کے ساتھ $\frac{\pi}{6}$ زاویے پر شعاع ترسیم کر کے اس پر مبدا سے 2 اکائیاں فاصلہ پر نقطہ $N(2, \frac{\pi}{6})$ ہو گا۔ ہم اب $r = 2$ اور $r = -2$ لیتے ہوئے اس نقطہ کے لیے دیگر قطبی محدد تلاش کرتے ہیں۔

$r = 2$ کے لیے درج ذیل زاویے ہوں گے۔

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{6} \pm 2\pi, \quad \frac{\pi}{6} \pm 4\pi, \quad \frac{\pi}{6} \pm 6\pi, \quad \cdots$$

$r = -2$ کے لیے درج ذیل زاویے ہوں گے۔

$$-\frac{5\pi}{6}, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 2\pi, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 4\pi, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 6\pi, \quad \cdots$$

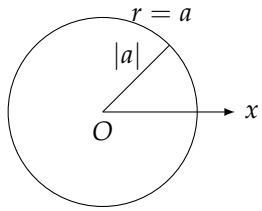
یوں N کے مطابق قطبی محددی جوڑیاں

$$(2, \tfrac{\pi}{6} + 2n\pi), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

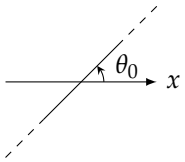
اور

$$(-2, -\tfrac{5\pi}{6} + 2n\pi), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

ہوں گی۔ یہ کلیات $n = 0$ کے لیے $(2, \frac{\pi}{6})$ اور $(-2, -\frac{5\pi}{6})$ دیتے ہیں۔ اسی طرح $n = 1$ کے لیے یہ کلیات $(2, \frac{13\pi}{6})$ اور $(-2, \frac{7\pi}{6})$ دیتے ہیں، وغیرہ، وغیرہ۔ یوں نقطہ $N(2, \frac{\pi}{6})$ کی لامتناہی قطبی محددی جوڑیاں پائی جاتی ہیں۔ □



شکل ۱۰.۵۹: قطبی محدد پر $r = a$ دائرہ ہوگا۔



شکل ۱۰.۶۰: قطبی محدد پر $\theta = \theta_0$ سیدھی لکیر ہے۔

بنیادی محددی مساوات اور عدم مساوات

اگر ہم r کو کسی مقررہ قیمت $r = a \neq 0$ پر رکھیں تب نقطہ $N(r, \theta)$ مبدا سے $|a|$ فاصلہ پر ہوگا۔ زاویہ θ کو وقفہ 0 تا 2π پر تبدیل کرنے سے نقطہ $N(r, \theta)$ مبدا سے رداس $|a|$ کے دائرہ پر چلے گا (شکل ۱۰.۵۹)۔

اگر ہم θ کو مقررہ قیمت $\theta = \theta_0$ پر رکھ کر r کو $-\infty$ تا ∞ کریں تب $N(r, \theta)$ مبدا سے گزرتی ہوئی اس سیدھی لکیر پر حرکت کرے گا جو ابتدائی شعاع کے ساتھ زاویہ θ_0 بناتی ہے (شکل ۱۰.۶۰)۔

ترسیم	مساوات
رداس $|a|$ کا دائرہ جس کا مرکز O ہے	$r = a$
ابتدائی شعاع کے ساتھ θ_0 زاویے کی لکیر	$\theta = \theta_0$

مثال ۱۰.۲۷: (ا) $r = 1$ اور $r = -1$ رداس 1 کے دائرے کی مساوات ہے جس کا مرکز مبدا پر ہے۔

(ب) $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، $\theta = \frac{7\pi}{6}$ اور $\theta = -\frac{5\pi}{6}$ اس سیدھی لکیر کی مساوات ہے جو مبدا سے گزرتی ہے اور ابتدائی شعاع کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{6}$ بناتی ہے۔ □

مساوات $r = a$ اور $\theta = \theta_0$ کو جوڑ کر دیگر قطعات، حصے اور شعاع بیان کیے جا سکتے ہیں۔

مثال ۱۰.۲۸: ان نقطوں کے سلسلہ کو ترسیم کریں جن کے قطبی محدد درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں۔

ا. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ اور $1 \leq r \leq 2$

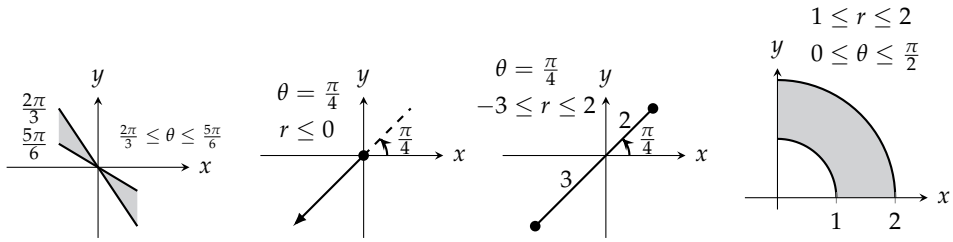
ب. $\theta = \frac{\pi}{4}$ اور $-3 \leq r \leq 2$

ج. $\theta = \frac{\pi}{4}$ اور $r \leq 0$

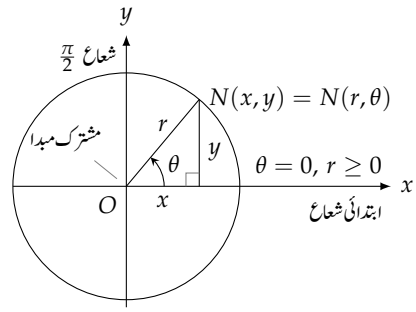
د. $-\infty < r < \infty$ اور $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$

حل

ترسیمات کو شکل ۱۰.۶۱ میں دکھایا گیا ہے۔ □



شکل ۱۰.۶۱: ترسیمات برائے مثال ۱۰.۲۸



شکل ۱۰.۶۲: کارتیسی اور قطبی محدد کے تعلقات معلوم کرنے کا عمومی طریقہ۔

کارتیسی بالمقابل قطبی محدد

ایک مستوی میں بیک وقت کارتیسی اور قطبی محدد استعمال کرتے ہوئے ہم دونوں محدد کے مبدا ایک ہی نقطہ پر رکھتے ہیں اور ابتدائی شعاع کو مثبت محور x پر رکھتے ہیں۔ یوں شعاع $\theta = \frac{\pi}{2},\ r > 0$ مثبت محور y ہوگا (شکل ۱۰.۶۲)۔ اب ان محددی نظام کے تعلقات درج ذیل ہوں گے۔

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{y}{x} = \tan\theta \tag{۱}$$

ہم مساوات ۱ استعمال کرتے ہوئے قطبی مساوات سے کارتیسی مساوات اور کارتیسی مساوات سے قطبی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۰.۲۹:

کارتیسی مساوات	قطبی مساوات
$x = 2$	$r\cos\theta = 2$
$xy = 4$	$r^2\cos\theta\sin\theta = 4$
$x^2 - y^2 = 1$	$r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$
$y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$	$r = 1 + 2r\cos\theta$
$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$	$r = 1 - \cos\theta$

۱۷۱۶۹ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بعض اوقات کارتیسی اور بعض اوقات قطبی مساوات زیادہ سادہ ہوتے ہیں۔ □

۱۷۱۷۰ مثال ۱۰.۳۰: دائرہ $x^2 + (y-3)^2 = 9$ کی قطبی مساوات معلوم کریں۔

۱۷۱۷۱ حل

مساوات کی سادہ صورت

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6y + 9 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 6y &= 0 \\ r^2 - 6r\sin\theta &= 0 \\ r = 0 \quad \text{یا} \quad r - 6\sin\theta &= 0 \\ r &= 6\sin\theta \end{aligned}$$

۱۷۱۷۲ مخروط حصوں کی قطبی مساوات پر حصہ ۱۰.۸ میں غور کیا جائے گا۔ □

۱۷۱۷۳ مثال ۱۰.۳۱: دی گئی قطبی مساوات سے کارتیسی مساوات حاصل کر کے ترسیم کو پہچانئے۔

۱۷۱۷۴ ا. $r\cos\theta = -4$

۱۷۱۷۵ ب. $r^2 = 4r\cos\theta$

۱۷۱۷۶ ج. $r = \frac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}$

۱۷۱۷۷ حل

۱۷۱۷۸ ہم $x = r\cos\theta$ ، $y = r\sin\theta$ اور $r^2 = x^2 + y^2$ استعمال کرتے ہیں۔

ا.

$$\begin{aligned} \underbrace{r\cos\theta}_{x} &= -4 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

۱۷۱۷۹ ترسیم: انتصابی لکیر جو محور x کو $x = -4$ پر قطع کرتی ہے۔

ب.

$$\begin{aligned} r^2 &= 4r\cos\theta \\ x^2 + y^2 &= 4x \\ x^2 - 4x + y^2 &= 0 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 &= 4 \\ (x-2)^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

۱۷۱۸۰ ترسیم: ایک دائرہ جس کا مرکز $(2,0)$ اور رداس 2 ہے۔

ج.

$$\begin{aligned} r(2\cos\theta - \sin\theta) &= 4 \\ 2r\cos\theta - r\sin\theta &= 4 \\ 2x - y &= 4 \\ y &= 2x - 4 \end{aligned}$$

ترسیم: ایک سیدھی لکیر جس کی ڈھلوان $m = 2$ ہے اور جو محور y کو $y = -4$ پر قطع کرتی ہے۔

□

سوالات

قطبی محددی جوڑیاں

سوال ۱۰.۲۸۷: کون سی محددی جوڑیاں ایک ہی نقطہ کو ظاہر کرتی ہیں۔

ا. $(3, 0)$ ب. $(-3, 0)$ ج. $(2, \frac{2\pi}{3})$ د. $(2, \frac{7\pi}{3})$ ھ. $(-3, \pi)$ و. $(2, \frac{\pi}{3})$ ز. $(-3, 2\pi)$ ح. $(-2, -\frac{\pi}{3})$

سوال ۱۰.۲۸۸: کون سی محددی جوڑیاں ایک ہی نقطہ کو ظاہر کرتی ہیں۔

ا. $(-2, \frac{\pi}{3})$ ب. $(2, -\frac{\pi}{3})$ ج. (r, θ) د. $(r, \theta + \pi)$ ھ. $(-r, \theta)$ و. $(2, -\frac{2\pi}{3})$ ز. $(-r, \theta + \pi)$ ح. $(-2, \frac{2\pi}{3})$

سوال ۱۰.۲۸۹: درج ذیل قطبی محدد میں دیے گئے نقطے ترسیم کریں۔ ان نقطوں کے تمام قطبی محدد تلاش کریں۔

ا. $(2, \frac{\pi}{2})$ ب. $(2, 0)$ ج. $(-2, \frac{\pi}{2})$ د. $(-2, 0)$

سوال ۱۰.۲۹۰: درج ذیل قطبی محدد میں دیے گئے نقطے ترسیم کریں۔ ان نقطوں کے تمام قطبی محدد تلاش کریں۔

ا. $(3, \frac{\pi}{4})$ ب. $(-3, \frac{\pi}{4})$ ج. $(3, -\frac{\pi}{4})$ د. $(-3, -\frac{\pi}{4})$

قطبی سے کارتیسی محدد

سوال ۱۰.۲۹۱: ان نقطوں کے کارتیسی محدد معلوم کریں جنہیں سوال ۱۰.۲۸۷ میں پیش کیا گیا ہے۔

سوال ۱۰.۲۹۲: درج ذیل نقطے قطبی محدد میں دیے گئے ہیں۔ ان کی کارتیسی محدد تلاش کریں۔

۱۷۲۱۸ ا. $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ ۱۷۲۲۰ ج. $(0, \frac{\pi}{2})$ ۱۷۲۲۲ ھ. $(-3, \frac{5\pi}{6})$ ۱۷۲۲۴ ز. $(-1, 7\pi)$

۱۷۲۱۹ ب. $(1, 0)$ ۱۷۲۲۱ د. $(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ ۱۷۲۲۳ و. $(5, \tan^{-1}(\frac{4}{3}))$ ۱۷۲۲۵ ح. $(2\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3})$

۱۷۲۲۶

قطبی مساوات اور عدم مساوات کی ترسیم

۱۷۲۲۷ سوال ۱۰.۲۹۳ تا سوال ۱۰.۳۰۸ میں دیے مساوات اور عدم مساوات کو مطمئن کرنے والے نقطوں کے سلسلہ کو ترسیم کریں۔

۱۷۲۲۸ سوال ۱۰.۲۹۳: $r = 2$

۱۷۲۲۹ سوال ۱۰.۲۹۴: $0 \leq r \leq 2$

۱۷۲۳۰ سوال ۱۰.۲۹۵: $r \geq 1$

۱۷۲۳۱ سوال ۱۰.۲۹۶: $1 \leq r \leq 2$

۱۷۲۳۲ سوال ۱۰.۲۹۷: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, \quad r \geq 0$

۱۷۲۳۳ سوال ۱۰.۲۹۸: $\theta = \frac{2\pi}{3}, \quad r \leq -2$

۱۷۲۳۴ سوال ۱۰.۲۹۹: $\theta = \frac{\pi}{3}, \quad -1 \leq r \leq 3$

۱۷۲۳۵ سوال ۱۰.۳۰۰: $\theta = \frac{11\pi}{4}, \quad r \geq -1$

۱۷۲۳۶ سوال ۱۰.۳۰۱: $\theta = \frac{\pi}{2}, \quad r \geq 0$

۱۷۲۳۷ سوال ۱۰.۳۰۲: $\theta = \frac{\pi}{2}, \quad r \leq 0$

۱۷۲۳۸ سوال ۱۰.۳۰۳: $0 \leq \theta \leq \pi, \quad r = 1$

۱۷۲۳۹ سوال ۱۰.۳۰۴: $0 \leq \theta \leq \pi, \quad r = -1$

۱۷۲۴۰ سوال ۱۰.۳۰۵: $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq 1$

۱۷۲۴۱ سوال ۱۰.۳۰۶: $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad -1 \leq r \leq 1$

۱۷۲۴۲ سوال ۱۰.۳۰۷: $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leq r \leq 2$

۱۷۲۴۳ سوال ۱۰.۳۰۸: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leq |r| \leq 2$

۱۷۲۴۴

۱۷۲۴۵

قطبی سے کارتیسی مساوات

۱۷۲۴۶ سوال ۱۰.۳۰۹ تا سوال ۱۰.۳۳۴ میں مطابقتی کارتیسی مساوات دریافت کریں۔ اس کے بعد ترسیم کو پہچانیے۔

۱۷۲۴۷ سوال ۱۰.۳۰۹: $r \cos \theta = 2$

۱۷۲۴۸ سوال ۱۰.۳۱۰: $r \sin \theta = -1$

۱۷۲۴۹ سوال ۱۰.۳۱۱: $r \sin \theta = 0$

۱۷۲۵۰ سوال ۱۰.۳۱۲: $r \cos \theta = 0$

۱۷۲۵۱ سوال ۱۰.۳۱۳: $r = 4\csc\theta$

۱۷۲۵۲ سوال ۱۰.۳۱۴: $r = -3\sec\theta$

۱۷۲۵۳ سوال ۱۰.۳۱۵: $r\cos\theta + r\sin\theta = 1$

۱۷۲۵۴ سوال ۱۰.۳۱۶: $r\sin\theta = r\cos\theta$

۱۷۲۵۵ سوال ۱۰.۳۱۷: $r^2 = 1$

۱۷۲۵۶ سوال ۱۰.۳۱۸: $r^2 = 4r\sin\theta$

۱۷۲۵۷ سوال ۱۰.۳۱۹: $r = \frac{5}{\sin\theta - 2\cos\theta}$

۱۷۲۵۸ سوال ۱۰.۳۲۰: $r^2\sin 2\theta = 2$

۱۷۲۵۹ سوال ۱۰.۳۲۱: $r = \cot\theta\csc\theta$

۱۷۲۶۰ سوال ۱۰.۳۲۲: $r = 4\tan\theta\sec\theta$

۱۷۲۶۱ سوال ۱۰.۳۲۳: $r = \csc\theta e^{r\cos\theta}$

۱۷۲۶۲ سوال ۱۰.۳۲۴: $r\sin\theta = \ln r + \ln\cos\theta$

۱۷۲۶۳ سوال ۱۰.۳۲۵: $r^2 + 2r^2\cos\theta\sin\theta = 1$

۱۷۲۶۴ سوال ۱۰.۳۲۶: $\cos^2\theta = \sin^2\theta$

۱۷۲۶۵ سوال ۱۰.۳۲۷: $r^2 = -4r\cos\theta$

۱۷۲۶۶ سوال ۱۰.۳۲۸: $r^2 = -6r\sin\theta$

۱۷۲۶۷ سوال ۱۰.۳۲۹: $r = 8\sin\theta$

۱۷۲۶۸ سوال ۱۰.۳۳۰: $r = 3\cos\theta$

۱۷۲۶۹ سوال ۱۰.۳۳۱: $r = 2\cos\theta + 2\sin\theta$

۱۷۲۷۰ سوال ۱۰.۳۳۲: $r = 2\cos\theta - \sin\theta$

۱۷۲۷۱ سوال ۱۰.۳۳۳: $r\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = 2$

۱۷۲۷۲ سوال ۱۰.۳۳۴: $r\sin(\frac{2\pi}{3} - \theta) = 5$

۱۷۲۷۳

۱۷۲۷۴ **کارتیسی سے قطبی مساوات**

۱۷۲۷۵ سوال ۱۰.۳۳۵ تا سوال ۱۰.۳۴۸ میں کارتیسی مساوات سے قطبی مساوات حاصل کریں۔

۱۷۲۷۶ سوال ۱۰.۳۳۵: $x = 7$

۱۷۲۷۷ سوال ۱۰.۳۳۶: $y = 1$

سوال ۱۰.۳۳۷: $x = y$

سوال ۱۰.۳۳۸: $x - y = 3$

سوال ۱۰.۳۳۹: $x^2 + y^2 = 4$

سوال ۱۰.۳۴۰: $x^2 - y^2 = 1$

سوال ۱۰.۳۴۱: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

سوال ۱۰.۳۴۲: $xy = 2$

سوال ۱۰.۳۴۳: $y^2 = 4x$

سوال ۱۰.۳۴۴: $x^2 + xy + y^2 = 1$

سوال ۱۰.۳۴۵: $x^2 + (y-2)^2 = 4$

سوال ۱۰.۳۴۶: $(x-5)^2 + y^2 = 25$

سوال ۱۰.۳۴۷: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$

سوال ۱۰.۳۴۸: $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 16$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۰.۳۴۹: مبدا کے تمام قطبی محدد تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۳۵۰: افقی اور انتصابی خط

ا. دکھائیں کہ مستوی xy میں ہر انتصابی خط کی قطبی مساوات کو $r = a \sec \theta$ لکھا جا سکتا ہے۔

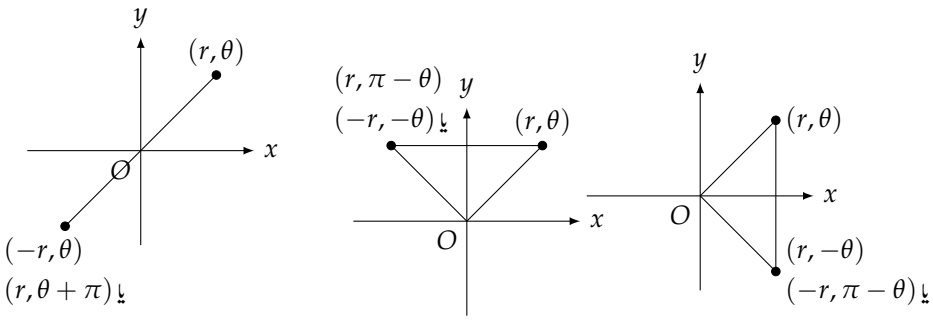
ب. مستوی xy میں ہر افقی خط کی قطبی مساوات کس صورت کی ہو گی؟

۱۰.۷ قطبی محدد میں ترسیم

اس حصہ میں مساوات کو قطبی محدد میں ترسیم کرنے کے تراکیب پر غور کیا جائے گا۔

تشاکلی

قطبی محدد میں تشاکلی کا معیاری پرکھ شکل ۱۰.۶۳ میں دکھایا گیا ہے۔



(ا) محور x کے لحاظ سے۔ (ب) محور y کے لحاظ سے۔ (ج) مبدا کے لحاظ سے۔

شکل ۱۰.۶۳: تشاکلی کے تین پرکھ۔

۱۰.۷.۳ قطبی ترسیمات کے پرکھ تشاکلی

۱۰.۷.۳.۱ ا. محور x کے لحاظ سے تشاکلی: اگر نقطہ (r,θ) ترسیم پر پایا جاتا ہو تب نقطہ $(r,-\theta)$ یا $(-r,\pi-\theta)$ بھی ترسیم پر پایا جائے گا (شکل ۱۰.۶۳-ا)۔

۱۰.۷.۳.۲ ب. محور y کے لحاظ سے تشاکلی: اگر نقطہ (r,θ) ترسیم پر پایا جاتا ہو تب نقطہ $(r,\pi-\theta)$ یا $(-r,-\theta)$ بھی ترسیم پر پایا جائے گا (شکل ۱۰.۶۳-ب)۔

۱۰.۷.۳.۳ ج. مبدا کے لحاظ سے تشاکلی: اگر نقطہ (r,θ) ترسیم پر پایا جاتا ہو تب نقطہ $(-r,\theta)$ یا $(r,\theta+\pi)$ بھی ترسیم پر پایا جائے گا (شکل ۱۰.۶۳-ج)۔

۱۰.۷.۳.۴ **ڈھلوان**

۱۰.۷.۳.۵ قطبی منحنی $r=f(\theta)$ کی ڈھلوان $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ہے نا کہ $r'=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}$۔ اس کی وجہ سمجھنے کی خاطر f کی ترسیم کو درج ذیل مقدار معلوم مساوات کی ترسیم
۱۰.۷.۳.۶ فرض کریں۔

$$x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta,\quad y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta$$

اگر f متغیر θ کا قابل تفرق تفاعل ہو تب x اور y بھی θ کے قابل تفرق تفاعل ہوں گے اور جب $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \neq 0$ ہو تب ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو درج ذیل مقدار معلوم کلیہ سے اخذ کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}\theta} && \text{مساوات ۱} \\
&= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(f(\theta)\cdot\sin\theta)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(f(\theta)\cdot\cos\theta)} \\
&= \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - f(\theta)\sin\theta} && \text{تفرق کا کلیہ ضرب}
\end{aligned}$$

منحنی $r = f(\theta)$ **کی ڈھلوان** جہاں (r,θ) پر $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \neq 0$ ہونا ضروری ہے۔

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(r,\theta)} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta} \tag{۱}$$

اگر مبدا پر منحنی $r = f(\theta)$ کا زاویہ $\theta = \theta_0$ ہو تب $f(\theta_0) = 0$ ہو گا اور مساوات ۱ سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(r,\theta)} = \frac{f'(\theta_0)\sin\theta_0}{f'(\theta_0)\cos\theta_0} = \tan\theta_0$$

اگر مبدا پر $r = f(\theta)$ کا زاویہ θ_0 ہو تب مبدا پر منحنی کی ڈھلوان $\tan\theta_0$ ہو گی۔ مبدا پر ڈھلوان کی بات کرتے ہوئے ہم کہتے ہیں "$(0,\theta)$ پر ڈھلوان" نا کہ "مبدا پر ڈھلوان" کیونکہ قطبی منحنی مبدا سے کئی بار گزر سکتی ہے اور θ کی مختلف قیمتوں کے لیے یہاں ڈھلوان مختلف ہو گی۔

مثال ۱۰.۳۲: قلب نما[۳۸]

منحنی $r = 1 - \cos\theta$ ترسیم کریں۔

حل

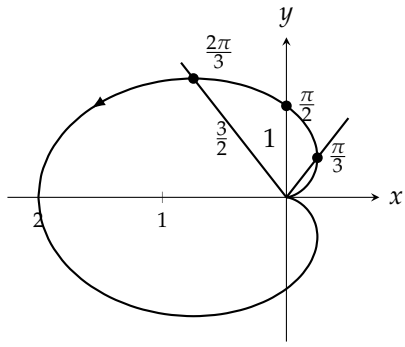
درج ذیل کی وجہ سے یہ منحنی محور x کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔

$$\begin{aligned}
(r,\theta) \text{ منحنی پر ہے} &\implies r = 1 - \cos\theta \\
&\implies r = 1 - \cos(-\theta) && \cos\theta = \cos(-\theta) \\
&\implies (r,\theta) \text{ بھی ترسیم پر ہے}
\end{aligned}$$

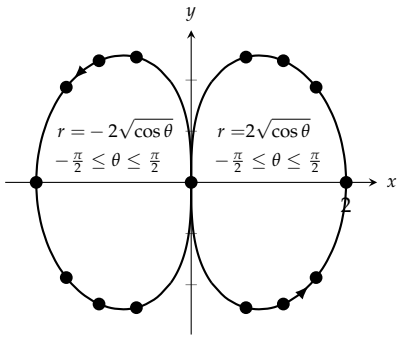
جیسے جیسے θ کی قیمت 0 سے π تک بڑھتی ہے، $\cos\theta$ کی قیمت 1 سے -1 تک گھٹتی ہے اور $r = 1 - \cos\theta$ کی قیمت کم سے کم قیمت 0 سے بڑھ کر زیادہ سے زیادہ قیمت 2 تک پہنچتی ہے۔ θ کی قیمت π سے 2π تک بڑھانے سے $\cos\theta$ کی قیمت -1 سے واپس 1 تک پہنچتی ہے اور r کی قیمت 2 سے واپس 0 ہوتی ہے۔ چونکہ $\cos\theta$ کا دوری عرصہ 2π ہے لہٰذا $\theta = 2\pi$ کے بعد یہی منحنی دوبارہ حاصل ہو گی۔

---

[۳۸] cardioid



شکل ۱۰.۶۴: قلب نما (مثال ۱۰.۳۲)



شکل ۱۰.۶۵: ترسیم برائے (مثال ۱۰.۳۳)

۱۷۳۲۶ یہ منحنی مبدا سے $\tan(0) = 0$ ڈھلوان پر نکلتی ہے اور مبدا پر $\tan(2\pi) = 0$ ڈھلوان پر پہنچتی ہے۔

۱۷۳۲۷ ہم $\theta = 0$ تا $\theta = \pi$ کی مختلف قیمتوں کے لیے r کی قیمتیں

θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
r	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2

۱۷۳۲۸ معلوم کر کے ان نقطوں کو ترسیم کرتے ہیں جس کا مماس مبدا پر افقی ہو گا۔ محور x میں اس کا عکس لیتے ہوئے ہم ترسیم مکمل کرتے ہیں (شکل ۱۰.۶۴)۔ شکل
۱۷۳۲۹ ۱۰.۶۴ میں تیر کا نشان بڑھتی θ کے رخ کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ اس منحنی کی شکل قلب کی مانند ہے لہٰذا اس منحنی کو **قلب نما** کہتے ہیں۔ پھر کی اور چرخی پر تہہ
۱۷۳۳۰ در تہہ ہموار دھاگہ لپیٹنے کے لیے قلب نما اشکال کے **کیم**[۳۹] استعمال کیے جاتے ہیں۔ اس کے علاوہ کئی ریڈیو اینٹینا کی شعاع بھی قلب نما ہوتی ہے۔ □

۱۷۳۳۱ مثال ۱۰.۳۳: منحنی $r^2 = 4\cos\theta$ ترسیم کریں۔

۱۷۳۳۲ **حل**

۱۷۳۳۳ مساوات $r^2 = \cos\theta$ کے لیے ضروری ہے کہ $\cos\theta \ge 0$ ہو لہٰذا پورا ترسیم حاصل کرنے کی خاطر ہم θ کو وقفہ $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ میں رکھتے
۱۷۳۳۴ ہیں۔ درج ذیل کی وجہ سے یہ منحنی محور x کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔

$$
\begin{aligned}
(r,\theta) \text{ ترسیم پر ہے} &\implies r^2 = 4\cos\theta \\
&\implies r^2 = 4\cos(-\theta) \qquad \cos\theta = \cos(-\theta) \\
&\implies (r,-\theta) \text{ نقطہ بھی ترسیم پر ہے}
\end{aligned}
$$

[۳۹] cam

یہ ترسیم مبدا کے لحاظ سے بھی تشاکلی ہے۔

$$\begin{aligned} (r,\theta) \text{ ترسیم پر ہے} &\implies r^2 = 4\cos\theta \\ &\implies (-r)^2 = 4\cos\theta \\ &\implies (-r,\theta) \text{ نقطہ بھی ترسیم پر ہے} \end{aligned}$$

مذکورہ بالا دو تشاکلی کو ملا کر ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ترسیم محور y کے لحاظ سے بھی تشاکلی ہو گا۔

یہ ترسیم $\theta = -\frac{\pi}{2}$ اور $\theta = \frac{\pi}{2}$ کے لیے مبدا سے گزرتی ہے۔ چونکہ ان زاویوں پر $\tan\theta$ کی قیمت لا متناہی ہے لہٰذا مبدا پر ترسیم کا مماس انتصابی ہو گا۔ وقفہ $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ میں ہر θ کے لیے کلیہ $r^2 = 4\cos\theta$ متغیر r کی درج ذیل دو قیمتیں دیتا ہے۔

$$r = \pm 2\sqrt{\cos\theta}$$

ہم اس وقفہ میں مختلف نقطے

θ	0	$\pm\frac{\pi}{6}$	$\pm\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{3}$	$\pm\frac{\pi}{2}$
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
r	± 2	± 1.9	± 1.7	± 1.4	0

معلوم کر کر انہیں ترسیم کر کے ہموار منحنی سے آپس میں جوڑتے ہیں۔ مماس اور تشاکلی کی معلومات استعمال کرتے ہوئے مکمل منحنی حاصل کی جاتی ہے (شکل ۱۰.۶۵)۔ □

تیزی سے ترسیم کا حصول

قطبی مساوات $r = f(\theta)$ کو ترسیم کرنے کے لیے کہ ہم (r,θ) کی قیمتوں کا جدول بنا کر ان نقطوں کو ترسیم کر کے بڑھتے θ رخ انہیں ہموار لکیر سے ملاتے ہیں۔ اگر ہمارے پاس اتنے زیادہ نقطے ہوں کہ قطبی ترسیم کا ہر گھیرا اور جھکاو صاف نظر آتا ہو تب یوں ترسیم کرنا ٹھیک ہے۔ درج ذیل اقدام ترسیم کی ایک دوسری ترکیب بیان کرتے ہیں جو نسبتاً آسان اور تیز ثابت ہوتا ہے۔

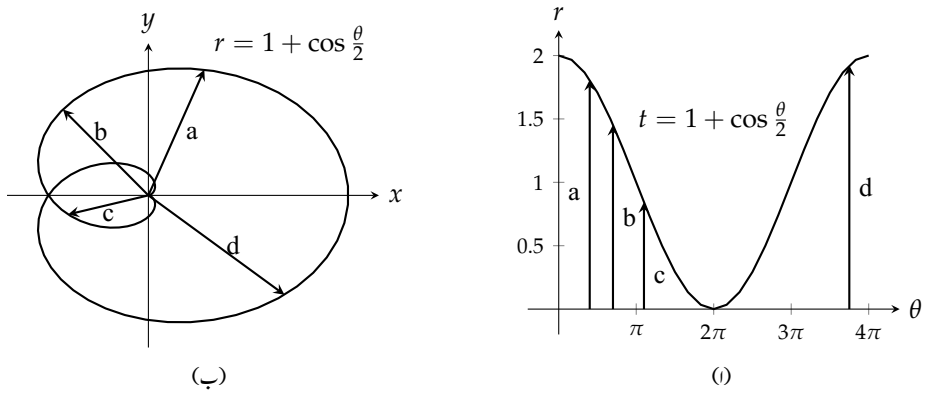
ا. پہلے کارتیسی $r\theta$ مستوی میں $r = f(\theta)$ ترسیم کریں (یعنی θ کی قیمتوں کو افقی اور مطابقتی r کی قیمتوں کو انتصابی محور پر رکھیں۔)

ب. اب کارتیسی ترسیم کو بطور جدول اور رہبر لیتے ہوئے قطبی ترسیم حاصل کریں۔

صرف نقطے ترسیم کرنے سے کارتیسی ترسیم اس لیے بہتر ہے کہ کارتیسی ترسیم سے جلد دیکھا جا سکتا ہے کہاں قیمتیں مثبت، منفی یا غیر موجود ہوتی ہیں۔ اس کے علاوہ r کا بڑھنا اور گھٹنا بھی واضح ہوتا ہے۔ ہم $r = 1 + \cos(\frac{\theta}{2})$ اور $r^2 = \sin 2\theta$ کو مثال بنا کر اس ترکیب کو دیکھتے ہیں۔

مثال ۱۰.۳۴: درج ذیل منحنی ترسیم کریں۔

$$r = 1 + \cos\frac{\theta}{2}$$



شکل ۱۰.۶۶: ترسیمات برائے مثال ۱۰.۳۴

حل

ہم پہلے r بالمقابل θ کو کارتیسی $r\theta$ مستوی میں ترسیم کرتے ہیں۔ چونکہ کوسائن کا دوری عرصہ 2π ہے لہٰذا مکمل ترسیم حاصل کرنے کی خاطر ہم θ کا وقفہ 0 تا 2π لیں گے۔ کارتیسی مستوی پر محور θ سے ترسیم تک لکیروں کی لمبائی (شکل ۱۰.۶۶-ا) قطبی ترسیم کا رداس r دیتی ہیں (شکل ۱۰.۶۶-ب)۔ □

مثال ۱۰.۳۵: دوچشمہ[۴۰]

منحنی $r^2 = \sin 2\theta$ ترسیم کریں۔

حل

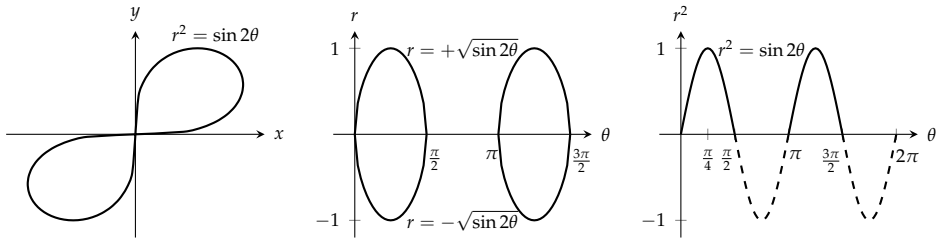
ہم r کے بجائے r^2 بالمقابل θ کو کارتیسی $r^2\theta$ مستوی پر ترسیم کرتے ہیں (شکل ۱۰.۶۷-ا) جہاں r^2 کو متغیر تصور کیا گیا ہے جس کی قیمت مثبت کے ساتھ ساتھ منفی بھی ہو سکتی ہے۔ اس کے بعد ہم $r = \pm\sqrt{\sin 2\theta}$ کو کارتیسی $r\theta$ مستوی پر ترسیم کرتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شکل ۱۰.۶۷-ا کے نقطہ دار حصے کا جذر نہیں لیا جا سکتا ہے لہٰذا شکل ۱۰.۶۷-ب میں یہ حصے خالی رہتے ہیں جبکہ جذر کی وجہ سے باقی حصے کے مثبت اور منفی حصے پائے جاتے ہیں۔ آخر میں ہم قطبی ترسیم حاصل کرتے ہیں۔ کارتیسی ترسیم (شکل ۱۰.۶۷-ب) دو بار قطبی ترسیم (شکل ۱۰.۶۷-ج) کو ڈھانپتا دیتا ہے۔ ہم کسی ایک گھیرا کو، یا دونوں گھیروں کے بالائی نصف یا دونوں کے گھیروں کے نچلے نصف استعمال کر سکتے تھے۔ البتہ دو بار ڈھانپنے سے کوئی نقصان نہیں ہوتا ہے اور ہم تفاعل کے رویہ کو بہتر سمجھ پاتے ہیں۔ □

قطبی قطب کے نقاط تقاطع کی تلاش

قطبی ترسیم میں ایک نقطہ کو مختلف طریقوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے لہٰذا یہ فیصلہ کرنے کے لیے خصوصی دھیان کرنا ہو گا کہ آیا کسی قطبی مساوات کی ترسیم پر ایک نقطہ پایا جاتا ہے۔ اسی طرح قطبی ترسیمات کے نقاط تقاطع معلوم کرتے ہوئے بھی دھیان رکھنا ضروری ہے۔ عین ممکن ہے کہ نقطہ تقاطع ایک ترسیم کو جن قطبی

---

[۴۰] lemniscate



شکل ۱۰.۶۷: ترسیم برائے مثال ۱۰.۳۵

محدد پر مطمئن کرتا ہو، وہ ان قطبی محدد سے مختلف ہوں جن پر یہی نقطہ تقاطع دوسری قطبی مساوات کو مطمئن کرتا ہو۔ یوں ضروری نہیں ہے کہ دونوں مساوات کو ایک ساتھ حل کرتے ہوئے تمام نقاط تقاطع دریافت ہوں۔ تمام نقاط تقاطع صرف مساوات ترسیم کر کے معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

مثال ۱۰.۳۶: فریبی محدد

دکھائیں کہ نقطہ $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ منحنی $r = 2\cos 2\theta$ پر پایا جاتا ہے۔

حل

اس نقطہ کو دی گئی مساوات میں پر کرنے سے درج ذیل عدم مساوات

$$2 = 2\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos \pi = -2$$

حاصل ہوتی ہے جس سے یوں معلوم ہوتا ہے کہ یہ نقطہ اس منحنی پر نہیں پایا جاتا ہے۔ یہاں مقدار درست ہے لیکن علامت غلط ہے جس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ اس نقطے کی ایسی محدد دی جوڑی، مثلاً $\left(-2, -\frac{\pi}{2}\right)$، تلاش کی جائے جو منفی رداس دیتا ہے۔ اس جوڑی کو $r = 2\cos 2\theta$ میں پر کر کے

$$-2 = 2\cos 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2(-1) = -2$$

ملتا ہے لہٰذا مساوات مطمئن ہوتی ہے۔ اس طرح نقطہ $\left(2, \frac{\pi}{2}\right)$ دی گئی منحنی پر پایا جاتا ہے۔ □

مثال ۱۰.۳۷: مبہم نقطہ تقاطع

درج ذیل منحنیات کے نقاط تقاطع تلاش کریں۔

$$r^2 = 4\cos\theta, \quad r = 1 - \cos\theta$$

حل

کارتیسی محدد میں دو مساوات کو ایک ساتھ حل کر کے ان کے نقاط تقاطع حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ قطبی محدد میں قصہ کچھ مختلف ہے۔ قطبی محدد میں دو منحنیات کی مساوات ایک ساتھ حل کرنے سے عین ممکن ہے کہ بعض نقاط تقاطع حاصل ہوں اور بعض حاصل نہ ہوں۔ اس مثال میں مساوات ایک ساتھ حل کر کے چار میں سے صرف دو نقاط تقاطع حاصل ہوتے ہیں۔ باقی دو ترسیم سے حاصل ہوں گے (سوال ۱۰.۳۹۹ بھی دیکھیں)۔

۱۷۳۸۲ اگر ہم $\cos\theta = \frac{r^2}{4}$ کو $r = 1 - \cos\theta$ میں پر کریں تب درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} r = 1 - \cos\theta &= 1 - \frac{r^2}{4} \\ 4r &= 4 - r^2 \\ r^2 + 4r - 4 &= 0 \\ r &= -2 \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

۱۷۳۸۳ ان میں $r = -2 - 2\sqrt{2}$ کی مطلق قیمت اتنی زیادہ ہے کہ یہ دونوں کو مطمئن نہیں کرتا ہے۔ دوسرے جواب $r = -2 + 2\sqrt{2}$ سے θ
۱۷۳۸۴ کی درج ذیل قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1}(1 - r) && (r = 1 - \cos\theta) \\ &= \cos^{-1}(1 - (2\sqrt{2} - 2)) && (r = 2\sqrt{2} - 2) \\ &= \cos^{-1}(3 - 2\sqrt{2}) \\ &= \pm 80^\circ && \text{قریبی درجہ تک پورم پور} \end{aligned}$$

۱۷۳۸۵ اس طرح ہم دو نقاط تقاطع $(r, \theta) = (2\sqrt{2} - 2, \pm 80^\circ)$ تلاش کرنے میں کامیاب ہوتے ہیں۔

۱۷۳۸۶ ہم شکل ۱۰.۶۴ اور شکل ۱۰.۶۵ کی مدد سے مساوات $r^2 = 4\cos\theta$ اور $r = 1 - \cos\theta$ کو ایک ساتھ ترسیم (شکل ۱۰.۶۸) کر کے
۱۷۳۸۷ دیکھتے ہیں کہ یہ نقطہ $(2, \pi)$ اور مبدا پر بھی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ ان نقاط کے رداس r کی قیمتیں کیوں مساوات ایک ساتھ حل کرنے سے
۱۷۳۸۸ حاصل نہیں ہوں پائی؟ اس کا جواب ہے کہ نقاط $(2, \pi)$ اور $(0, 0)$ دونوں منحنیات پر بیک وقت نہیں پائے جاتے ہیں۔ ان نقطوں تک پہنچنے کے
۱۷۳۸۹ لیے دنوں منحنیات پر θ کی مختلف قیمتیں درکار ہوتی ہیں۔ منحنی $r = 1 - \cos\theta$ پر نقطہ $(2, \pi)$ تک $\theta = \pi$ پر پہنچا جاتا ہے جبکہ منحنی
۱۷۳۹۰ $r^2 = 4\cos\theta$ پر اسی نقطہ تک $\theta = 0$ پر پہنچا جاتا ہے جہاں اس نقطہ کو محدد $(2, \pi)$ سے نہیں پہچانا جاتا جو اس مساوات کو مطمئن نہیں کرتے
۱۷۳۹۱ ہیں، بلکہ اس نقطہ کو محدد $(-2, 0)$ سے پہچانا جاتا ہے جو اس مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ اسی طرح قلب نما منحنی مبدا تک $\theta = 0$ پر پہنچتی ہے جبکہ
۱۷۳۹۲ منحنی $r^2 = 4\cos\theta$ مبدا تک $\theta = \frac{\pi}{2}$ پر پہنچتی ہے۔ □

۱۷۳۹۳ **سوالات**

۱۷۳۹۴ **تشاکلی اور قطبی ترسیمات**

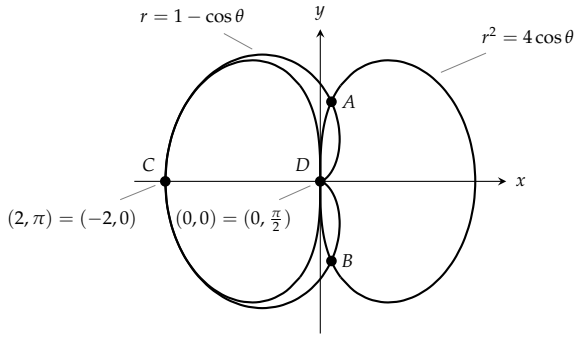
۱۷۳۹۵ سوال ۱۰.۳۵۱ تا سوال ۱۰.۳۶۲ میں منحنی کی تشاکلی پہچانئے۔ اس کے بعد منحنی ترسیم کریں۔

۱۷۳۹۶ سوال ۱۰.۳۵۱: $r = 1 + \cos\theta$

۱۷۳۹۷ سوال ۱۰.۳۵۲: $r = 2 - 2\cos\theta$

۱۷۳۹۸ سوال ۱۰.۳۵۳: $r = 1 - \sin\theta$

۱۷۳۹۹ سوال ۱۰.۳۵۴: $r = 1 + \sin\theta$



شکل ۱۰.۶۸: نقطہ تقاطع (مثال ۱۰.۳۷)

۱۷۴۰۰ سوال ۱۰.۳۵۵: $r = 2 + \sin\theta$

۱۷۴۰۱ سوال ۱۰.۳۵۶: $r = 1 + 2\sin\theta$

۱۷۴۰۲ سوال ۱۰.۳۵۷: $r = \sin\frac{\theta}{2}$

۱۷۴۰۳ سوال ۱۰.۳۵۸: $r = \cos\frac{\theta}{2}$

۱۷۴۰۴ سوال ۱۰.۳۵۹: $r^2 = \cos\theta$

۱۷۴۰۵ سوال ۱۰.۳۶۰: $r^2 = \sin\theta$

۱۷۴۰۶ سوال ۱۰.۳۶۱: $r^2 = -\sin\theta$

۱۷۴۰۷ سوال ۱۰.۳۶۲: $r^2 = -\cos\theta$

۱۷۴۰۸

۱۷۴۰۹ سوال ۱۰.۳۶۳ تا سوال ۱۰.۳۶۶ میں دی گئی دو چشمہ تر سیم کریں۔ ان منحنیات کی تشاکلی پہچانئے۔ سوال ۱۰.۳۶۳: $r^2 = 4\cos 2\theta$

۱۷۴۱۰ سوال ۱۰.۳۶۴: $r^2 = 4\sin 2\theta$

۱۷۴۱۱ سوال ۱۰.۳۶۵: $r^2 = -\sin 2\theta$

۱۷۴۱۲ سوال ۱۰.۳۶۶: $r^2 = -\cos 2\theta$

۱۷۴۱۳

۱۷۴۱۴ **قطبی منحنیات کی ڈھلوان**

۱۷۴۱۵ سوال ۱۰.۳۶۷ تا سوال ۱۰.۳۷۰ میں دیے گئے نقطوں پر منحنی کی ڈھلوان مساوات ۱ کی مدد سے دریافت کریں۔ منحنی کو ترسیم کر کے ان نقطوں پر مماس بھی
۱۷۴۱۶ کھینچیں۔

۱۷۴۱۷ سوال ۱۰.۳۶۷: قلب نما: $r = -1 + \cos\theta$ ؛ $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$

سوال ۱۰.۳۶۸: قلب نما: $r = -1 + \sin\theta$ ؛ $\theta = 0,\ \pi$

سوال ۱۰.۳۶۹: چار گل: $r = \sin 2\theta$ ؛ $\theta = \pm\frac{\pi}{4},\ \pm\frac{3\pi}{4}$

سوال ۱۰.۳۷۰: چار گل: $r = \cos 2\theta$ ؛ $\theta = 0,\ \pm\frac{\pi}{2},\ \pi$

گھونگے

سوال ۱۰.۳۷۱ تا سوال ۱۰.۳۷۴ میں دیے گھونگے ترسیم کریں۔ آپ کو اس نام کی سمجھ سوال ۱۰.۳۷۱ ترسیم کر کے آئے گی۔ گھونگوں کی مساوات کی عمومی صورت $r = a \pm b\cos\theta$ یا $r = a \pm b\sin\theta$ ہوتی ہے۔ ان کی چار بنیادی اشکال ہیں۔

سوال ۱۰.۳۷۱: اندرونی گھیرے والے گھونگے: (ا) $r = \frac{1}{2} + \cos\theta$، (ب) $r = \frac{1}{2} + \sin\theta$

سوال ۱۰.۳۷۲: قلب نما: (ا) $r = 1 - \cos\theta$، (ب) $r = -1 + \sin\theta$

سوال ۱۰.۳۷۳: ٹوئے والے گھونگے: (ا) $r = \frac{3}{2} + \cos\theta$، (ب) $r = \frac{3}{2} - \sin\theta$

سوال ۱۰.۳۷۴: چپٹے گھونگے: (ا) $r = 2 + \cos\theta$، (ب) $r = -2 + \sin\theta$

قطبی عدم مساوات کی ترسیم

سوال ۱۰.۳۷۵: ایک خطہ جس کو عدم مساوات $-1 \le r \le 2$ اور $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ بیان کرتی ہیں کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۰.۳۷۶: ایک خطہ جس کو عدم مساوات $0 \le r \le 2\sec\theta$ اور $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ بیان کرتی ہیں کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۰.۳۷۷: ایک خطہ جس کو عدم مساوات $0 \le r \le 2 - 2 - \cos\theta$ بیان کرتی ہے کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۰.۳۷۸: ایک خطہ جس کو عدم مساوات $0 \le r^2 \le \cos\theta$ بیان کرتی ہے کا خاکہ بنائیں۔

تقاطع

سوال ۱۰.۳۷۹: دکھائیں کہ نقطہ $\left(2, \frac{3\pi}{4}\right)$ منحنی $r = 2\sin 2\theta$ پر پایا جاتا ہے۔

سوال ۱۰.۳۸۰: دکھائیں کہ نقطہ $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ منحنی $r = -\sin\left(\frac{\theta}{3}\right)$ پر پایا جاتا ہے۔

سوال ۱۰.۳۸۱ تا سوال ۱۰.۳۸۸ میں نقاط تقاطع تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۳۸۱: $r = 1 + \cos\theta, \quad r = 1 - \cos\theta$

سوال ۱۰.۳۸۲: $r = 1 + \sin\theta, \quad r = 1 - \sin\theta$

سوال ۱۰.۳۸۳: $r = 2\sin\theta, \quad r = 2\sin 2\theta$

سوال ۱۰.۳۸۴: $r = \cos\theta, \quad r = 1 - \cos\theta$

۱۷۴۴۵ سوال ۱۰.۳۸۵: $r = \sqrt{2}, \quad r^2 = 4\sin\theta$

۱۷۴۴۶ سوال ۱۰.۳۸۶: $r^2 = \sqrt{2}\sin\theta, \quad r^2 = \sqrt{2}\cos\theta$

۱۷۴۴۷ سوال ۱۰.۳۸۷: $r = 1, \quad r^2 = 2\sin 2\theta$

۱۷۴۴۸ سوال ۱۰.۳۸۸: $r^2 = \sqrt{2}\cos 2\theta, \quad r^2 = \sqrt{2}\sin 2\theta$

۱۷۴۴۹

۱۷۴۵۰ سوال ۱۰.۳۸۹ تا سوال ۱۰.۳۹۲ میں کمپیوٹر کی مدد سے منحنیات ترسیم کریں۔

۱۷۴۵۱ سوال ۱۰.۳۸۹: $r^2 = \sin 2\theta, \quad r^2 = \cos 2\theta$

۱۷۴۵۲ سوال ۱۰.۳۹۰: $r = 1 + \cos\frac{\theta}{2}, \quad r = 1 - \sin\frac{\theta}{2}$

۱۷۴۵۳ سوال ۱۰.۳۹۱: $r = 1, \quad r = 2\sin 2\theta$

۱۷۴۵۴ سوال ۱۰.۳۹۲: $r = 1, \quad r^2 = 2\sin 2\theta$

۱۷۴۵۵

۱۷۴۵۶ **کمپیوٹر کا استعمال**

۱۷۴۵۷ سوال ۱۰.۳۹۳: (ا) $r = -1 - \cos\theta$ اور (ب) $r = 1 + \cos\theta$ میں کس کی ترسیم $r = 1 - \cos\theta$ کی ترسیم کی طرح
۱۷۴۵۸ ہے؟

۱۷۴۵۹ سوال ۱۰.۳۹۴: (ا) $r = -\sin(2\theta + \frac{\pi}{2})$ اور (ب) $r = -\cos\frac{\theta}{2}$ میں کس کی ترسیم $r = \cos 2\theta$ کی ترسیم کی طرح
۱۷۴۶۰ ہے؟

۱۷۴۶۱ سوال ۱۰.۳۹۵: پھول میں پھول
۱۷۴۶۲ منحنی $r = 1 - 2\sin 3\theta$ ترسیم کریں۔

۱۷۴۶۳ سوال ۱۰.۳۹۶: منحنی $r = 1 + 2\sin\frac{\theta}{2}$ ترسیم کریں۔

۱۷۴۶۴ سوال ۱۰.۳۹۷: گلاب
۱۷۴۶۵ گلاب $r = \cos m\theta$ جہاں $m = \frac{1}{3}, 2, 3, 7$ ہے ترسیم کریں۔

۱۷۴۶۶ سوال ۱۰.۳۹۸: پیچ دار
۱۷۴۶۷ قطبی محدد پیچ دار منحنیات کے لیے خصوصی طور پر بہتر ہے۔ درج ذیل پیچ دار منحنیات ترسیم کریں۔

۱۷۴۶۸ ا. $r = \theta$ ۱۷۴۷۰ ج. $r = e^{\theta/10}$ ۱۷۴۷۲ ھ. $r = \pm\frac{10}{\sqrt{\theta}}$

۱۷۴۶۹ ب. $r = -\theta$ ۱۷۴۷۱ د. $r = \frac{8}{\theta}$

۱۷۴۷۳

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۰.۳۹۹: (مثال ۱۰.۳۷ جاری) ہم مثال ۱۰.۳۷ میں درج ذیل مساوات

$$r^2 = 4\cos\theta \tag{۲}$$
$$r = 1 - \cos\theta \tag{۳}$$

اکٹھے حل کر کے نقاط $(0,0)$ اور $(2,\pi)$ کی نشاندہی نہیں کر پائے جہاں یہ منحنیات ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔

ا. ہم $r^2 = 4\cos\theta$ میں (r,θ) کی جگہ مماثل $(-r,\theta+\pi)$ پر کر کے نقطہ $(2,\pi)$ حاصل کر سکتے تھے:

$$\begin{aligned} r^2 &= 4\cos\theta \\ (-r)^2 &= 4\cos(\theta+\pi) \\ r^2 &= -4\cos\theta \end{aligned} \tag{۴}$$

مساوات ۳ اور مساوات ۴ اکٹھے حل کر کے دکھائیں کہ $(2,\pi)$ دونوں کو مطمئن کرتا ہے۔ (ہم اب بھی یہ نہیں جان سکتے ہیں کہ ترسیمات $(0,0)$ پر ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔)

ب. مبدا اب بھی خاص نقطہ ہے (جیسا یہ عموماً ہوتا ہے)۔ آئیں اس سے نپٹنے کا ایک طریقہ دیکھیں۔ مساوات ۲ اور مساوات ۳ میں $r = 0$ پر کر کے انہیں علیحدہ علیحدہ θ کے لیے حل کریں۔ چونکہ کسی بھی θ کے لیے $(0,\theta)$ مبدا ہے لہٰذا اس طرح ہم جان پائیں گے کہ دونوں منحنیات مبدا سے گزرتی ہیں اگرچہ یہ ایک دوسرے سے مختلف θ کے لیے مبدا سے گزرتی ہیں۔

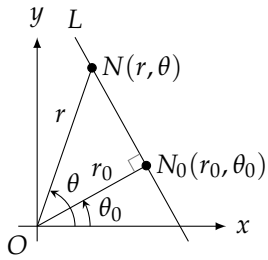
سوال ۱۰.۴۰۰: اگر اس حصہ کے شروع میں بتلائی گئی دو تشاکلی ایک منحنی میں پائی جاتی ہو تب کیا اس کی تیسری تشاکلی بھی ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۰.۴۰۱: چار گل $r = \cos 2\theta$ کے اس پھول کے پتے کی زیادہ سے زیادہ چوڑائی دریافت کریں جو محور x پر پایا جاتا ہے۔

سوال ۱۰.۴۰۲: محور x سے قلب نما $r = 2(1+\cos\theta)$ کا زیادہ سے زیادہ قد دریافت کریں۔

۱۰.۸ مخروط حصوں کے قطبی مساوات

چاند، سیارے، مصنوعی سیارے اور دم دار ستارے ترخیم، قطع مکافی اور قطع زائد پر حرکت کرتے ہیں۔ ان کی حرکت کو قطبی محدد میں ایک آسان مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے لہٰذا فلکیات اور فلکیاتی انجینئری میں قطبی محدد اہمیت رکھتے ہیں۔ ہم اس مساوات کو یہاں حاصل کرتے ہیں۔



شکل ۱۰.۶۹: خط کی قطبی مساوات

۱۷۴۹۲ **خطوط**

۱۷۴۹۳ فرض کریں مبدا O سے خط L تک عمودی لکیر، L پر نقطہ $N_0(r_0, \theta_0)$ پہنچتی ہے جہاں $r \geq 0$ ہے (شکل ۱۰.۶۹)۔ اب اگر L پر
۱۷۴۹۴ $N(r, \theta)$ کوئی دوسرا نقطہ ہو تب نقاط O ، N_0 اور N ایک قائمہ الزاویہ مثلث کے راس ہوں گے جس سے

$$\frac{r_0}{r} = \cos(\theta - \theta_0)$$

۱۷۴۹۵ یا

$$r\cos(\theta - \theta_0) = r_0$$

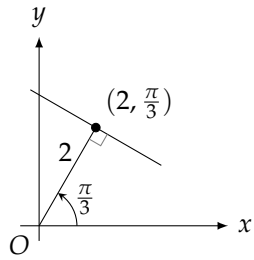
۱۷۴۹۶ لکھا جا سکتا ہے۔ **خط کی معیاری قطبی مساوات**
۱۷۴۹۷ اگر مبدا سے خط L تک عمود نقطہ $N_0(r_0, \theta_0)$ پر بیٹھتا ہو اور $r_0 \geq 0$ ہو تب L کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$r\cos(\theta - \theta_0) = r_0$$

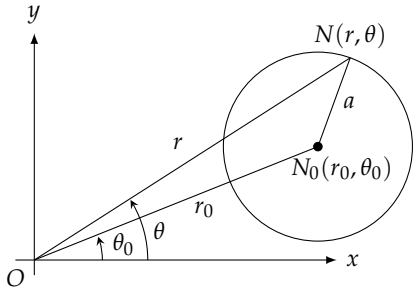
۱۷۴۹۸ **مثال ۱۰.۳۸:** مماثل $\cos(A - B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ استعمال کر کے شکل ۱۰.۷۰ میں دیے خط کی مساوات
۱۷۴۹۹ تلاش کریں۔

۱۷۵۰۰ **حل**
۱۷۵۰۱

$$\begin{aligned}
r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) &= 2 \\
r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) &= 2 \\
\frac{1}{2}r\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta &= 2 \\
\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y &= 2 \\
x + \sqrt{3}y &= 4
\end{aligned}$$



شکل ۱۰.۷۰: خط برائے مثال ۱۰.۳۸



شکل ۱۰.۷۱: دائری کی قطبی مساوات۔

۱۷۵۰۲ □

۱۷۵۰۳ **دائرے**

۱۷۵۰۴ ایک دائرہ جس کا مرکز $N_0(r_0, \theta_0)$ اور رداس a ہو کی قطبی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم مثلث ON_0N پر قاعدہ کوسائن لاگو کرتے ہیں
۱۷۵۰۵ (شکل ۱۰.۷۱) جس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$a^2 = r_0^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \theta_0) \tag{۱}$$

۱۷۵۰۶ اگر یہ دائرہ مبدا سے گزرتا ہو تب $r_0 = a$ ہو گا جس سے مساوات ادرج ذیل سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\begin{aligned} a^2 &= a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \theta_0) \quad (\text{مساوات ۱ میں } r_0 = a) \\ r^2 &= 2ar\cos(\theta - \theta_0) \\ r &= 2a\cos(\theta - \theta_0) \end{aligned} \tag{۲}$$

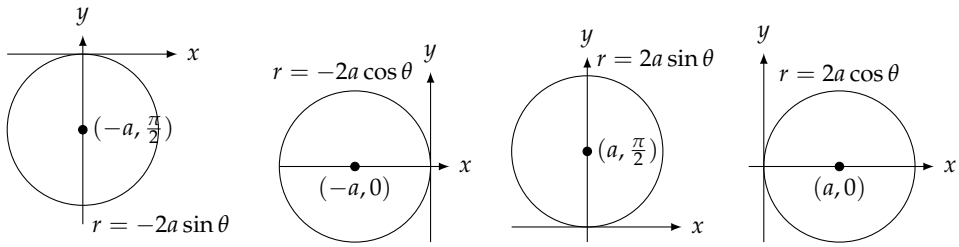
۱۷۵۰۷ اگر دائرے کا مرکز مثبت محور x پر پایا جاتا ہو تب مساوات ۲ درج ذیل دے گی۔

$$r = 2a\cos\theta \tag{۳}$$

۱۷۵۰۸ اگر دائرے کا مرکز مثبت محور y پر پایا جاتا ہو تب $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ اور $\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin\theta$ ہوں گے لہٰذا مساوات ۲ درج ذیل دے گی۔

$$r = 2a\sin\theta \tag{۴}$$

۱۷۵۰۹ مساوات ۳ اور مساوات ۴ میں r کی جگہ $-r$ پر کر کے ان دائروں کی مساواتیں حاصل ہوں گی جن کے مرکز منفی محور x یا منفی محور y پر ہوں (شکل
۱۷۵۱۰ ۱۰.۷۲)۔



شکل ۱۰.۷۲: کارتیسی محور پر مرکز والے دائروں کے قطبی مساوات۔

۱۷۵۱۱ **مثال ۱۰.۳۹:** مبدا سے گزرتے ہوئے دائرے

۱۷۵۱۲

رداس	مرکز	مساوات
3	$(3, 0)$	$r = 6\cos\theta$
2	$(2, \frac{\pi}{2})$	$r = 4\sin\theta$
$\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$r = -\cos\theta$
1	$(-1, \frac{\pi}{2})$	$r = -2\sin\theta$

۱۷۵۱۳ □

۱۷۵۱۴ ## ترخیم، قطع مکافی اور قطع زائد یکجا

۱۷۵۱۵ ترخیم، قطع مکافی اور قطع زائد کے قطبی مساوات معلوم کرنے کی خاطر ہم ایک ماسکہ کو مبدا پر رکھتے ہیں اور مطابقتی ناظمہ کو مبدا کے دائیں، انتصابی لکیر $x = k$ پر رکھتے ہیں (شکل ۱۰.۷۳)۔ یوں ۱۷۵۱۶

$$NF = r$$

۱۷۵۱۷ اور

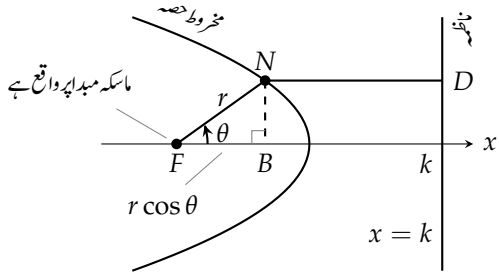
$$ND = k - FB = k - r\cos\theta$$

۱۷۵۱۸ ہوں گے۔ یوں مخروط کی ماسکہ ناظمہ مساوات $NF = e \cdot ND$ درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$r = e(k - r\cos\theta)$$

۱۷۵۱۹ جس کو r کے لیے حل کرتے ہیں:

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta} \tag{۵}$$



شکل ۱۰.۷۳: اس مقام پر رکھے گئے مخروط حصے کا $NF = r$ اور $ND = k - r\cos\theta$ ہوگا۔

یہ مساوات $0 < e < 1$ کے لیے ترخیم، $e = 1$ کے لیے قطع مکافی اور $e > 1$ کے لیے قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔ اس طرح ترخیم، قطع مکافی اور قطع زائد کو ایک ہی مساوات ظاہر کرتی ہے۔

مثال ۱۰.۴۰: مخروط حصہ مساوات ۵

$$r = \frac{k}{2+\cos\theta} \qquad e = \frac{1}{2} \quad \text{ترخیم:}$$

$$r = \frac{k}{1+\cos\theta} \qquad e = 1 \quad \text{قطع مکافی:}$$

$$r = \frac{2k}{1+2\cos\theta} \qquad e = 2 \quad \text{قطع زائد:}$$

□

آپ مساوات ۵ کی مختلف صورتیں دیکھیں گے جن کا دارومدار ناظمہ کے مقام پر ہوگا۔ اگر مبدا کے بائیں جانب لکیر $-k$ = ناظمہ ہو (جبکہ ماسکہ اب بھی مبدا پر ہو) تب مساوات ۵ کی جگہ درج ذیل ہوگا۔

$$r = \frac{ke}{1-e\cos\theta}$$

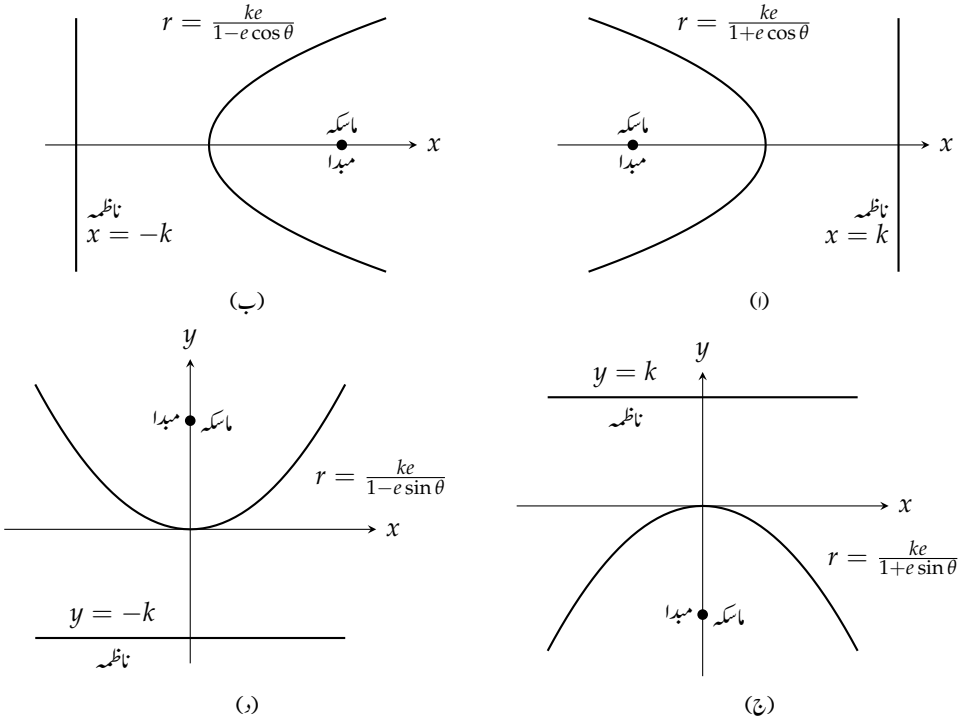
نسب نما میں اب $(+)$ کے بجائے $(-)$ ہوگا۔ اگر ناظمہ $y = k$ یا $y = -k$ ہو تب مساوات ۵ میں $\cos\theta$ کی جگہ $\sin\theta$ ہوگا (شکل ۱۰.۷۴)۔

مثال ۱۰.۴۱: ایک قطع زائد جس کی سنک $\frac{3}{2}$ اور ناظمہ $x = 2$ ہو کی مساوات دریافت کریں۔

حل

ہم شکل ۱۰.۷۴-الف کی مساوات میں $k = 2$ اور $e = \frac{3}{2}$ لیتے ہیں۔

$$r = \frac{2(\frac{3}{2})}{1+\frac{3}{2}\cos\theta} \implies r = \frac{6}{2+3\cos\theta}$$



شکل ۱۰.۷۴: مخروط حصوں کی مساواتیں $(e > 0)$

۱۷۵۳۲ □

۱۷۵۳۳ مثال ۱۰.۴۲: ایک قطع مکافی جس کی مساوات درج ذیل ہے کی ناظمہ معلوم کریں۔

$$r = \frac{25}{10 + 10\cos\theta}$$

۱۷۵۳۴ **حل**

۱۷۵۳۵ ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو 10 سے تقسیم کر کے مساوات کی معیاری روپ

$$r = \frac{5/2}{1 + \cos\theta}$$

۱۷۵۳۶ حاصل کرتے ہیں۔ یہ درج ذیل مساوات ہے

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta}$$

۱۷۵۳۷ جس میں $k = 5/2$ اور $e = 1$ ہیں۔ ناظمہ کی مساوات $x = \frac{5}{2}$ ہو گی۔ □

۱۷۵۳۸ ہم شکل ۱۰.۷۵ سے دیکھتے ہیں کہ ترخیم کے لیے k، سنک e اور نصف محور اکبر a کا تعلق

$$k = \frac{a}{e} - ea \tag{۶}$$

۱۷۵۳۹ ہے جس سے $ke = a(1 - e^2)$ ملتا ہے۔ مساوات ۵ میں ke کی جگہ پر کرنے سے ترخیم کی درج ذیل معیاری مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta} \qquad \text{سنک } e \text{ اور نصف اکبر محور } a \tag{۷}$$

۱۷۵۴۰ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات ۷ میں $e = 0$ پر کرنے سے $r = a$ حاصل ہوتا ہے جو ایک دائرہ کو ظاہر کرتی ہے۔

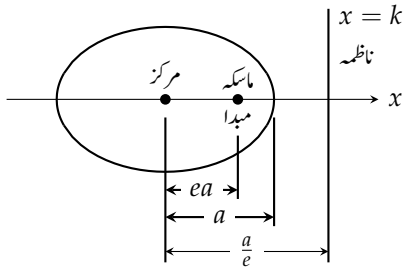
۱۷۵۴۱ سیاروں کے مدار معلوم کرنے کے لیے مساوات ۷ ابتدائی مساوات ہے۔

۱۷۵۴۲ مثال ۱۰.۴۳: ایک ترخیم کا نصف محور اکبر 39.44 فلکیاتی اکائی اور سنک 0.25 ہے۔ اس ترخیم کی قطبی مساوات تلاش کریں۔ یہ تخمیناً سیارہ پلوٹو کا
۱۷۵۴۳ مدار ہے۔

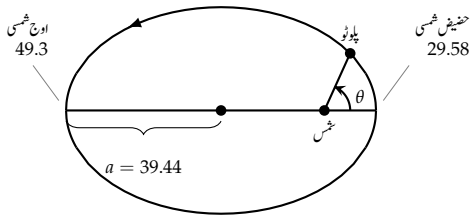
۱۷۵۴۴ **حل**

۱۷۵۴۵ ہم مساوات ۷ میں $a = 39.44$ اور $e = 0.25$ پر کرتے ہیں۔

$$r = \frac{39.44(1 - (0.25)^2)}{1 + 0.25\cos\theta} = \frac{147.9}{4 + \cos\theta}$$



شکل ۱۰.۷۵: ایک ترخیم جس کا نصف محور اکبر a ہو، ماسکہ تا ناظمہ فاصلہ لہٰذا $k = \frac{a}{e} - ea$ یعنی $ke = a(1-e^2)$ ہو گا۔



شکل ۱۰.۷۶: مدار پلوٹو (مثال ۱۰.۴۳)

۱۷۵۳۶ **حضیض شمسی**[۴۱] پر سورج سے پلوٹو

$$r = \frac{147.9}{4+1} = 29.58$$

۱۷۵۳۷ فلکی اکائیاں دور ہو گا جبکہ اصطلاحا اوج شمسی[۴۲] پر یہ سورج سے

$$r = \frac{147.9}{4-1} = 49.3$$

۱۷۵۳۸ فلکی اکائیاں دور ہو گا (شکل ۱۰.۷۶)۔ □

۱۷۵۳۹ مثال ۱۰.۴۴: ایک ماسکہ سے مطابقتی ناظمہ تک فاصل مثال ۱۰.۴۳ میں معلوم کریں۔

۱۷۵۵۰ **حل**

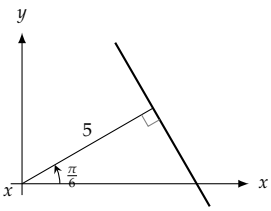
۱۷۵۵۱ ہم مساوات ۶ میں $a = 39.44$ اور $e = 0.25$ پر کر کے

$$k = 39.44\left(\frac{1}{0.25} - 0.25\right) = 147.9$$

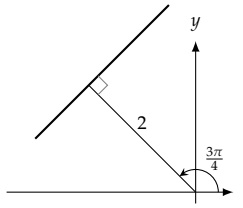
۱۷۵۵۲ فلکی اکائیاں حاصل کرتے ہیں۔ □

---

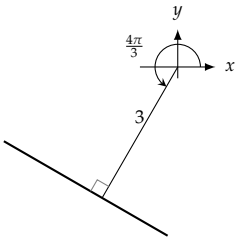
[۴۱] perihelion
[۴۲] aphelion



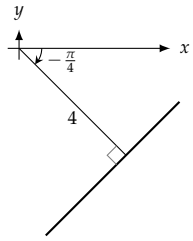
شکل ۱۰.۷۷: ترسیم سوال ۱۰.۴۰۳



شکل ۱۰.۷۸: ترسیم سوال ۱۰.۴۰۴



شکل ۱۰.۷۹: ترسیم سوال ۱۰.۴۰۵



شکل ۱۰.۸۰: ترسیم سوال ۱۰.۴۰۶

سوالات

خطوط

سوال ۱۰.۴۰۳ تا سوال ۱۰.۴۰۶ میں دیے خطوط کی قطبی اور کارتیسی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۴۰۳: خط شکل ۱۰.۷۷ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال ۱۰.۴۰۴: خط شکل ۱۰.۷۸ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال ۱۰.۴۰۵: خط شکل ۱۰.۷۹ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال ۱۰.۴۰۶: خط شکل ۱۰.۸۰ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال ۱۰.۴۰۷ تا سوال ۱۰.۴۱۰ میں دی مساوات کو ترسیم کریں اور ان کی کارتیسی مساوات معلوم کریں۔

سوال ۱۰.۴۰۷: $r\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

سوال ۱۰.۴۰۸: $r\cos(\theta + \frac{3\pi}{4}) = 1$

سوال ۱۰.۴۰۹: $r\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) = 3$

سوال ۱۰.۴۱۰: $r\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 2$

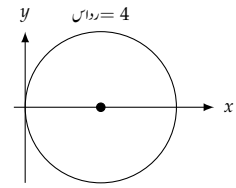
سوال ۱۰.۴۱۱ تا سوال ۱۰.۴۱۴ میں دی گئی کارتیسی مساوات کی قطبی روپ ($r\cos(\theta - \theta_0) = r_0$) تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۴۱۱: $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 6$

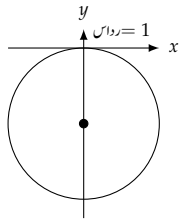
سوال ۱۰.۴۱۲: $\sqrt{3}x - y = 1$

سوال ۱۰.۴۱۳: $y = -5$

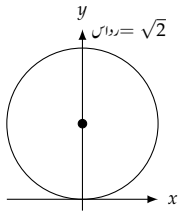
سوال ۱۰.۴۱۴: $x = -4$



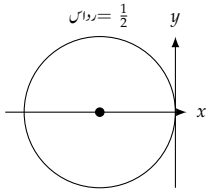
شکل ۱۰.۸۱: دائرہ سوال ۱۰.۴۱۵



شکل ۱۰.۸۲: دائرہ سوال ۱۰.۴۱۶



شکل ۱۰.۸۳: دائرہ سوال ۱۰.۴۱۷



شکل ۱۰.۸۴: دائرہ سوال ۱۰.۴۱۸

۱۷۵۷۲

۱۷۵۷۳ سوال ۱۰.۴۱۵ تا سوال ۱۰.۴۱۸ میں دی گئی دائروں کی قطبی مساوات دریافت کریں۔

۱۷۵۷۴ سوال ۱۰.۴۱۵: دائرہ شکل ۱۰.۸۱

۱۷۵۷۵ سوال ۱۰.۴۱۶: دائرہ شکل ۱۰.۸۲

۱۷۵۷۶ سوال ۱۰.۴۱۷: دائرہ شکل ۱۰.۸۳

۱۷۵۷۷ سوال ۱۰.۴۱۸: دائرہ شکل ۱۰.۸۴

۱۷۵۷۸

۱۷۵۷۹ سوال ۱۰.۴۱۹ تا سوال ۱۰.۴۲۲ میں دیے گئے دائرے ترسیم کریں۔ ان کے مرکز کے قطبی محدد اور رداس لکھیں۔

۱۷۵۸۰ سوال ۱۰.۴۱۹: $r = 4\cos\theta$

۱۷۵۸۱ سوال ۱۰.۴۲۰: $r = 6\sin\theta$

۱۷۵۸۲ سوال ۱۰.۴۲۱: $r = -2\cos\theta$

۱۷۵۸۳ سوال ۱۰.۴۲۲: $r = -8\sin\theta$

۱۷۵۸۴

۱۷۵۸۵ سوال ۱۰.۴۲۳ تا سوال ۱۰.۴۳۰ کے قطبی مساوات معلوم کریں۔

۱۷۵۸۶ سوال ۱۰.۴۲۳: $(x-6)^2 + y^2 = 36$

۱۷۵۸۷ سوال ۱۰.۴۲۴: $(x+2)^2 + y^2 = 4$

۱۷۵۸۸ سوال ۱۰.۴۲۵: $x^2 + (y-5)^2 = 25$

۱۷۵۸۹ سوال ۱۰.۴۲۶: $x^2 + (y+7)^2 = 49$

۱۷۵۹۰ سوال ۱۰.۴۲۷: $x^2 + 2x + y^2 = 0$

۱۷۵۹۱ سوال ۱۰.۴۲۸: $x^2 - 16x + y^2 = 0$

سوال ۱۰.۴۲۹: $x^2 + y^2 + y = 0$

سوال ۱۰.۴۳۰: $x^2 + y^2 - \frac{4}{3}y = 0$

سنک اور ناظمہ سے مخروط خطے

سوال ۱۰.۴۳۱ تا سوال ۱۰.۴۳۸ میں مخروط حصوں کی سنک دی گئی ہے۔ مخروط حصے کا ایک ماسکہ مبدا پر واقع ہے اور اس کا مطابقتی ناظمہ بھی دیا گیا ہے۔ اس مخروط حصے کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۴۳۱: $e = 1, \quad x = 2$

سوال ۱۰.۴۳۲: $e = 1, \quad y = 2$

سوال ۱۰.۴۳۳: $e = 5, \quad y = -6$

سوال ۱۰.۴۳۴: $e = 2, \quad x = 4$

سوال ۱۰.۴۳۵: $e = \frac{1}{2}, \quad x = 1$

سوال ۱۰.۴۳۶: $e = \frac{1}{4}, \quad x = -2$

سوال ۱۰.۴۳۷: $e = \frac{1}{5}, \quad y = -10$

سوال ۱۰.۴۳۸: $e = \frac{1}{3}, \quad y = 6$

قطع مکافی اور ترخیم

سوال ۱۰.۴۳۹ تا سوال ۱۰.۴۴۶ کے قطع مکافی اور ترخیمات کو ترسیم کریں۔ مبدا پر واقع ماسکہ کا مطابقتی ناظمہ بھی ترسیم کریں۔ ہر مخروط حصے کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۴۳۹: $r = \frac{1}{1+\cos\theta}$

سوال ۱۰.۴۴۰: $r = \frac{6}{2+\cos\theta}$

سوال ۱۰.۴۴۱: $r = \frac{25}{10-5\cos\theta}$

سوال ۱۰.۴۴۲: $r = \frac{4}{2-2\cos\theta}$

سوال ۱۰.۴۴۳: $r = \frac{400}{16+8\sin\theta}$

سوال ۱۰.۴۴۴: $r = \frac{12}{3+3\sin\theta}$

سوال ۱۰.۴۴۵: $r = \frac{8}{2-2\sin\theta}$

سوال ۱۰.۴۴۶: $r = \frac{4}{2-\sin\theta}$

عدم مساوات کی ترسیمات

سوال ۱۰.۴۴۷ اور سوال ۱۰.۴۴۸ میں عدم مساوات کو ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۴۴۷: $0 \leq r \leq 2\cos\theta$

سوال ۱۰.۴۴۸: $-3\cos\theta \leq r \leq 0$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۱۰.۴۴۹ تا سوال ۱۰.۴۵۸ میں دیے گئے خط اور مخروط خطے ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۴۴۹: $r = 3\sec(\theta - \frac{\pi}{3})$

سوال ۱۰.۴۵۰: $r = 4\sec(\theta + \frac{\pi}{6})$

سوال ۱۰.۴۵۱: $r = 4\sin\theta$

سوال ۱۰.۴۵۲: $r = -2\cos\theta$

سوال ۱۰.۴۵۳: $r = \frac{8}{4+\cos\theta}$

سوال ۱۰.۴۵۴: $r = \frac{8}{4+\sin\theta}$

سوال ۱۰.۴۵۵: $r = \frac{1}{1-\sin\theta}$

سوال ۱۰.۴۵۶: $r = \frac{1}{1+\cos\theta}$

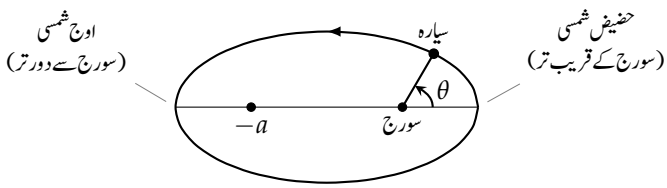
سوال ۱۰.۴۵۷: $r = \frac{1}{1+2\sin\theta}$

سوال ۱۰.۴۵۸: $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۰.۴۵۹: حضیض شمسی اور اوج شمسی

ایک سیارہ اپنے سورج کے گرد ایک ترخیم پر گھومتا ہے جس کے نصف محور اکبر کی لمبائی a ہے۔



جدول ۱۰.۴: سیاروں کے مدار کی معلومات۔

سیارہ	نصف محور اکبر (فلکی اکائیاں)	سنک
عطارہ	0.3871	0.2056
زھرہ	0.7233	0.0068
زمین	1.000	0.0167
مریخ	1.524	0.0934
مشتری	5.203	0.0484
زحل	9.539	0.0543
یورانس	19.18	0.0460
نیپچون	30.06	0.0082
پلوٹو	39.44	0.2481

۱۷۶۴۲ ا. دکھائیں کہ جب سیارہ سورج کے قریب تر ہو تب $r = a(1-e)$ ہو گا اور جب یہ سورج سے دور تر ہو تب $r = a(1+e)$ ہو گا۔

۱۷۶۴۳ ب. جدول ۱۰.۴ کی مدد سے معلوم کریں کہ ہماری نظام شمسی میں ہر سیارہ سورج کے کتنے نزدیک اور اس سے کتنا دور ہو سکتا ہے۔

۱۷۶۴۴

۱۷۶۴۵ سوال ۱۰.۴۶۰: سیاروں کے مدار پر حرکت

۱۷۶۴۶ ہم نے مثال ۱۰.۴۳ میں پلوٹو کے مدار کی قطبی مساوات معلوم کی۔ جدول ۱۰.۴ کی مدد سے دیگر سیاروں کے مدار کی مساوات تلاش کریں۔

۱۷۶۴۷ سوال ۱۰.۴۶۱: (الف) منحنیات $r = 4\sin\theta$ اور $r = \sqrt{3}\sec\theta$ کی کارتیسی مساواتیں تلاش کریں۔ (ب) ان دنوں منحنیات کو ایک
۱۷۶۴۸ ساتھ ترسیم کر کے ان کے نقطہ تقاطع کو کارتیسی اور قطبی محدد میں ظاہر کریں۔

۱۷۶۴۹ سوال ۱۰.۴۶۲: (الف) منحنیات $r = 8\cos\theta$ اور $r = 2\sec\theta$ کی کارتیسی مساواتیں تلاش کریں۔ (ب) ان دنوں منحنیات کو ایک
۱۷۶۵۰ ساتھ ترسیم کر کے ان کے نقطہ تقاطع کو کارتیسی اور قطبی محدد میں ظاہر کریں۔

۱۷۶۵۱ سوال ۱۰.۴۶۳: ایک قطع مکافی کا ماسکہ $(0,0)$ پر ہے جبکہ اس کا ناظمہ $r\cos\theta = 4$ ہے۔ اس کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

۱۷۶۵۲ سوال ۱۰.۴۶۴: ایک قطع مکافی کا ماسکہ $(0,0)$ پر ہے جبکہ اس کا ناظمہ $r\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = 2$ ہے۔ اس کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

۱۷۶۵۳ سوال ۱۰.۴۶۵: خلائی مہندس

۱۷۶۵۴ ا. ترخیمی مدار کی سنک کا کلیہ خلائی مہندس درج ذیل لکھے گا

$$e = \frac{r_{\text{اعظم}} - r_{\text{اقل}}}{r_{\text{اعظم}} + r_{\text{اقل}}}$$

۱۷۶۵۵ جہاں خلائی جہاز سے قوت کشش کے مرکز تک فاصلہ r ہے۔ یہ کلیہ کیوں قابل استعمال ہے؟

۱۷۶۵۶ ب. ترخیم کی ترسیم بذریعہ دھاگہ۔ آپ کے پاس 10 cm لمبائی کا ایک دھاگہ ہے جس کے سرپنیوں کے ساتھ بندھے ہوئے ہیں۔ آپ صفحہ ۱۰۳۸ پر شکل
۱۷۶۵۷ ۱۰.۴ میں دکھائی گئی ترکیب استعمال کر کے ایک ترخیم ترسیم کریں جس کی سنک 0.2 ہو۔ یہ ترخیم سیارہ مریخ کا مدار دے گا۔

سوال ۱۰.۴۶۶: ہالی دم دار ستارہ (مثال ۱۰.۶ دیکھیں۔)

ا. دم دار ستارہ ہالی کے مدار کی مساوات اس محددی نظام میں لکھیں جس میں شمس مبدا پر ہو جبکہ دوسرا ماسکہ منفی محور x پر ہو۔ فلکی اکائیاں استعمال کریں۔

ب. یہ دم دار ستارہ سورج کے کتنے قریب پہنچتا ہے؟ جواب فلکی اکائیوں میں اور کلو میٹر میں دیں۔

سوال ۱۰.۴۶۷ تا سوال ۱۰.۴۷۰ میں دی گئی منحنی کی قطبی مساوات تلاش کریں۔ منحنی کا خاکہ کھینچیں۔

سوال ۱۰.۴۶۷: $x^2 + y^2 - 2ay = 0$

سوال ۱۰.۴۶۸: $y^2 = 4ax + 4a^2$

سوال ۱۰.۴۶۹: $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p \quad (\alpha, p \text{ مستقل})$

سوال ۱۰.۴۷۰: $(x^2 + y^2)^2 + 2ax(x^2 + y^2) - a^2y^2 = 0$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۱۰.۴۷۱: کمپیوٹر پر درج ذیل کو k اور e کی مختلف قیمتوں اور $-\pi \leq \theta \leq \pi$ کے لیے ترسیم کریں۔

$$r = \frac{ke}{1 + e \cos \theta}$$

درج ذیل سوالات کے جواب دیں۔

ا. آپ $k = -2$ لیں۔ اب e کی قیمت $\frac{3}{4}$ ، 1 اور $\frac{5}{4}$ کرنے سے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ یہی کچھ $k = 2$ لے کر کریں۔

ب. آپ $k = -1$ لیں۔ اب e کی قیمت $\frac{7}{6}$ ، $\frac{5}{4}$ ، $\frac{4}{3}$ ، $\frac{3}{2}$ ، 2 ، 3 ، 5 ، 10 اور 20 کرنے سے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ یہ کچھ $e = \frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{10}$ اور $\frac{1}{20}$ کے لیے کریں۔

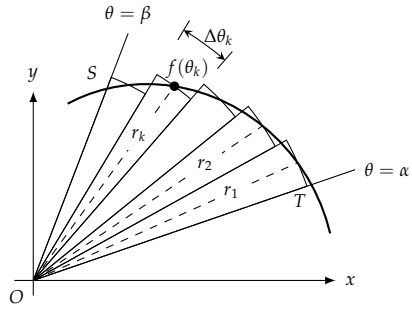
ج. اب $e > 0$ اور غیر متغیر رکھتے ہوئے k کی قیمت -1 ، -2 ، -3 ، -4 اور -5 کرنے سے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ ترخیم، قطع مکافی اور قطع زائد کی ترسیمات پر نظر رکھیں۔

سوال ۱۰.۴۷۲: درج ذیل قطبی ترخیم کو مختلف $a > 0$ اور $0 < e < 1$ ، $-\pi \leq \theta \leq \pi$ کے لیے کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔

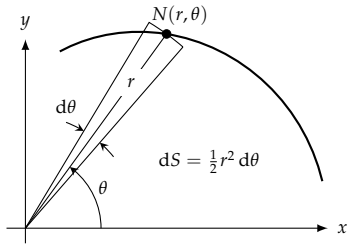
$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

ا. آپ $e = \frac{9}{10}$ لیں۔ اب a کی قیمت 1 ، $\frac{3}{2}$ ، 2 ، 3 ، 5 اور 10 لینے سے ترسیم پر کیا اثر پیدا ہو گا؟ یہی کچھ $e = \frac{1}{4}$ کے لیے کر کے دیکھیں۔

ب. آپ $a = 2$ لیں۔ اب e کی قیمت $\frac{9}{10}$ ، $\frac{8}{10}$ ، $\frac{7}{10}$ ، ...، $\frac{1}{10}$ ، $\frac{1}{20}$ اور $\frac{1}{50}$ لینے سے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟



شکل۱۰.۸۵: خطہ OTS کا رقبہ۔



شکل۱۰.۸۶: تفرقی رقبہ dS

۱۰.۹ قطبی محدد میں تکمل

اس حصہ میں قطبی محدد استعمال کرتے ہوئے مستوی خطوں کا رقبہ، منحنیات کی لمبائی، اور سطح طواف کا رقبہ حاصل کرنا سکھایا جائے گا۔

مستوی میں رقبہ

شکل۱۰.۸۵ میں خطہ OTS کی حدیں ودشعاع $\theta = \alpha$، شعاع $\theta = \beta$ اور منحنی $r = f(\theta)$ ہیں۔ ہم اس خطہ کو n عدد پنکھا نما پٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں جو زاویہ TOS کی خانہ بندی P پر مبنی ہے۔ ایک علامتی پٹی کا رداس $r_k = f(\theta_k)$ اور وسطی زاویہ $\Delta\theta_k$ ہو گا جبکہ اس کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S_k = \frac{1}{2}r_k^2\Delta\theta_k = \frac{1}{2}(f(\theta_k))^2\Delta\theta_k$$

یوں مکمل خطے کا رقبہ تخمیناً

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(f(\theta_k))^2\Delta\theta_k$$

ہو گا۔ اگر f استمراری ہو تب ہم توقع کرتے ہیں کہ $\|P\| \to 0$ کرنے سے یہ تخمین بہتر سے بہتر ہو گی لہٰذا خطے کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(f(\theta_k))^2\Delta\theta_k \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}(f(\theta))^2\,d\theta \end{aligned}$$

۱۷۶۹۰ **مبدا اور منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta$ کے بیچ پھنسا نما خطہ کا رقبہ**

۱۷۶۹۱

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \, \mathrm{d}\theta$$

۱۷۶۹۲ یہ درج ذیل تفرقی رقبے کا تکمل ہے (شکل ۱۰.۸۶)۔

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2} r^2 \, \mathrm{d}\theta$$

۱۷۶۹۳ مثال ۱۰.۴۵: قلب نما $r = 2(1 + \cos\theta)$ کا رقبہ تلاش کریں۔

۱۷۶۹۴ **حل**

۱۷۶۹۵ ہم قلب نما کو ترسیم (شکل ۱۰.۸۷) کر کے رداس OP کی نشاندہی کرتے ہیں جو $\theta = 0$ تا $\theta = 2\pi$ کرنے سے قلب نما پر ٹھیک ایک بار چلتا ہے۔
۱۷۶۹۶ یہ رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} r^2 \, \mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot 4(1 + \cos\theta)^2 \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta) \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(2 + 4\cos\theta + 2\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta) \, \mathrm{d}\theta \\
&= \left[3\theta + 4\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 6\pi - 0 = 6\pi
\end{aligned}$$

۱۷۶۹۷ □

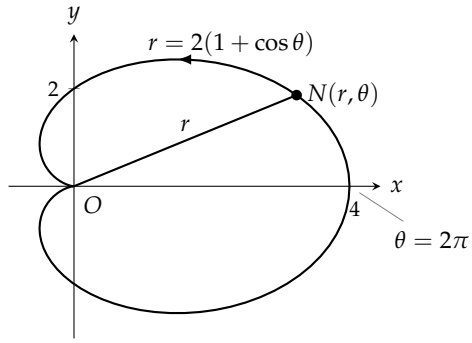
۱۷۶۹۸ مثال ۱۰.۴۶: درج ذیل گھونگا کے چھوٹے گھیرے کا رقبہ تلاش کریں۔

$$r = 1 + 2\cos\theta$$

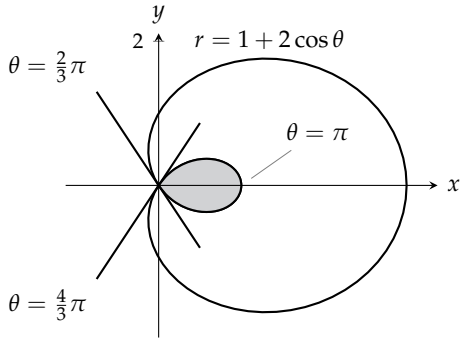
۱۷۶۹۹ **حل**

۱۷۷۰۰ ہم اس گھونگے کو ترسیم کرتے ہیں (شکل ۱۰.۸۸)۔ ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹے گھیرا $\theta = \frac{2}{3}\pi$ اور $\theta = \frac{4}{3}\pi$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ ہم نصف رقبہ $\theta = \frac{2}{3}\pi$ تا $\theta = \pi$ تلاش کر کے اس کو 2 سے ضرب دیتے ہیں۔
۱۷۷۰۱

$$S = 2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \frac{1}{2} r^2 \, \mathrm{d}\theta = \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} r^2 \, \mathrm{d}\theta$$



شکل ۱۰.۸۷: قلب نما کی ترسیم برائے مثال ۱۰.۴۵



شکل ۱۰.۸۸: رقبہ گھونگا (مثال ۱۰.۴۶)

۱۷۷۰۲ متکمل r^2 کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} r^2 &= (2\cos\theta + 1)^2 = 4\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1 \\ &= 4 \cdot \frac{1+\cos 2\theta}{2} + 4\cos\theta + 1 \\ &= 2 + 2\cos 2\theta + 4\cos\theta + 1 \\ &= 3 + 2\cos 2\theta + 4\cos\theta \end{aligned}$$

۱۷۷۰۳ یوں رقبہ درج ذیل ہو گا۔

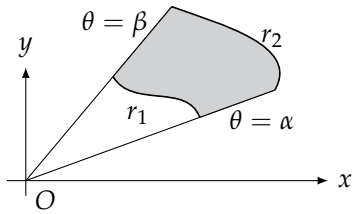
$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (3 + 2\cos 2\theta + 4\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \Big[3\theta + \sin 2\theta + 4\sin\theta\Big]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \\ &= (3\pi) - \left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

۱۷۷۰۴ □

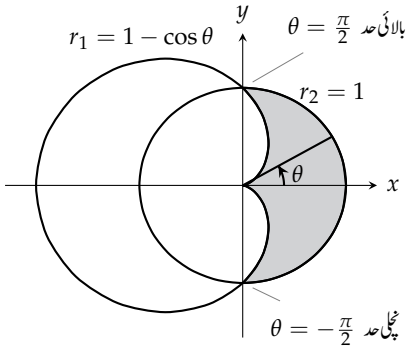
۱۷۷۰۵ ہم شکل ۱۰.۸۹ طرز خط جو منحنیات $r_1 = r_1(\theta)$ اور $r_2 = r_2(\theta)$ کے بیچ $\theta = \alpha$ تا $\theta = \beta$ پایا جاتا ہو، کا رقبہ تلاش کرنے کی خاطر

۱۷۷۰۶ تکمل $\frac{1}{2}r_2^2\,\mathrm{d}\theta$ سے تکمل $\frac{1}{2}r_1^2\,\mathrm{d}\theta$ منفی کرتے ہیں۔ اس سے درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

۱۷۷۰۷ **خطہ $\alpha \le \theta \le \beta$ ، $0 \le r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$ کا رقبہ**



شکل ۱۰.۸۹: سایہ دار رقبہ تلاش کرنے کی خاطر r_2 اور مبدا کے بیچ رقبہ سے r_1 اور مبدا O کے بیچ رقبہ منفی کیا جاتا ہے۔



شکل ۱۰.۹۰: دائرہ اور قلب نما کے بیچ رقبہ (مثال ۱۰.۴۷)

۱۷۷۰۸

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r_2^2 \, \mathrm{d}\theta - \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r_1^2 \, \mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2) \, \mathrm{d}\theta \tag{۱}$$

۱۷۷۰۹ مثال ۱۰.۴۷: اس خطے کا رقبہ تلاش کریں جو دائرہ $r = 1$ کے اندر اور قلب نما $r = 1 - \cos\theta$ کے باہر پایا جاتا ہے۔

۱۷۷۱۰ **حل**

۱۷۷۱۱ ہم رقبہ ترسیم کر کے خطے کی حدود اور تکمل کی حدود معلوم کرتے ہیں (شکل ۱۰.۹۰)۔ بیرونی منحنی $r_2 = 1$ جبکہ اندرونی منحنی $r_1 = 1 - \cos\theta$
۱۷۷۱۲ ہے جبکہ θ کی قیمت $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ ہے۔ مساوات اسے درج ذیل رقبہ حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2) \, \mathrm{d}\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2) \, \mathrm{d}\theta && \text{تشاکلی} \\
&= \int_0^{\pi/2} (1 - (1 - 2\cos\theta) + \cos^2\theta) \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} (2\cos\theta - \cos^2\theta) \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \left(2\cos\theta - \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) \\
&= \left[2\sin\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = 2 - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

۱۷۷۱۳ □

منحنی کی لمبائی

ہم منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$ کی لمبائی کا قطبی کلیہ اخذ کرنے کی خاطر اس منحنی کی درج ذیل مقدار معلوم مساوات لکھتے ہیں۔

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \quad y = r\sin\theta = f(\theta\sin\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta \tag{۲}$$

یوں مقدار معلوم لمبائی کے کلیہ (مساوات ۳)

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

میں x اور y کی قیمتیں مساوات ۲ سے پر کر کے درج ذیل حاصل ہو گا (سوال ۱۰.۵۰۵)۔

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

لمبائی قوس

اگر $\alpha \le \theta \le \beta$ پر $r = f(\theta)$ کا پہلا استمراری تفرق پایا جاتا ہو اور اگر θ کی قیمت α سے β کرنے سے نقطہ $N(r,\theta)$ پوری منحنی $r = f(\theta)$ پر ٹھیک ایک بار چلتا ہو تب اس منحنی کی لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta \tag{۳}$$

مثال ۱۰.۴۸: قلب نما $r = 1 - \cos\theta$ کی لمبائی دریافت کریں۔

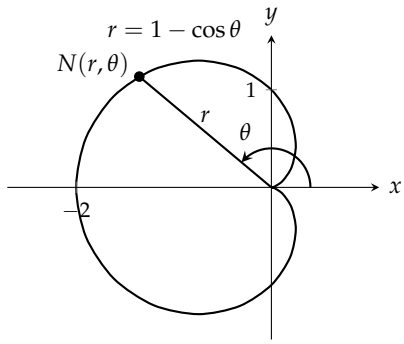
حل

ہم قلب نما کا خاکہ کھینچتے ہیں تاکہ تکمل کی حدود معلوم کر سکیں (شکل ۱۰.۹۱)۔ زاویہ θ کو 0 سے 2π کرنے سے نقطہ $N(r,\theta)$ ٹھیک ایک بار پوری قلب نما پر گھڑی کے الٹ رخ چلتا ہے لہٰذا $\alpha = 0$ اور $\beta = 2\pi$ ہوں گے۔ اب

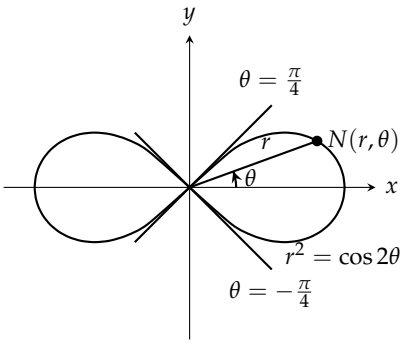
$$r = 1 - \cos\theta, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \sin\theta$$

سے

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= (1-\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 \\ &= 1 - 2\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} = 2 - 2\cos\theta \end{aligned}$$



شکل ۱۰.۹۱: قلب نما کی لمبائی (مثال ۱۰.۴۸)



شکل ۱۰.۹۲: قلب نما کی لمبائی (مثال ۱۰.۴۹)

۱۷۷۲۶ حاصل ہو گا لہٰذا لمبائی قوس درج ذیل ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
L &= \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta \qquad (1 - \cos\theta = 2\sin^2\tfrac{\theta}{2}) \\
&= \int_0^{2\pi} 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta \qquad (\text{ہو گا } \sin\tfrac{\theta}{2} \geq 0 \text{ کے لیے } 0 \leq \theta \leq 2\pi\ ) \\
&= \left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 4 + 4 = 8
\end{aligned}
$$

۱۷۷۲۷ □

۱۷۷۲۸ **سطح طواف کا رقبہ**

۱۷۷۲۹ سطح طواف کے رقبہ کا قطبی کلیہ اخذ کرنے کی خاطر ہم مساوات ۲ کی مدد سے منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta$ کی مقدار معلوم مساوات لکھ کر حصہ
۱۷۷۳۰ ۱۰.۵ میں دی گئی سطحی رقبے کا کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

۱۷۷۳۱ **سطح طواف کا رقبہ**

۱۷۷۳۲ اگر $\alpha \leq \theta \leq \beta$ پر $r = f(\theta)$ کا استمراری پہلا تفرق پایا جاتا ہو اور اگر θ کی قیمت α تا β کرنے سے نقطہ $N(r,\theta)$ منحنی $r =$

۱۷۵۳ $f(\theta)$ پر ٹھیک ایک بار چلتا ہو تب اس منحنی کو محور x اور محور y کے گرد گھما کر حاصل سطح طواف کے رقبے درج ذیل کلیات دیں گے۔

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi r \sin\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\, \mathrm{d}\theta \qquad (y \geq 0)\ \text{محور } x \text{ کے گرد} \tag{۴}$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi r \cos\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\, \mathrm{d}\theta \qquad (x \geq 0)\ \text{محور } y \text{ کے گرد} \tag{۵}$$

۱۷۵۴ مثال ۱۰.۴۹: گھونگا $r^2 = \cos 2\theta$ کے دائیں گھیر کو محور y کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ معلوم کریں۔

۱۷۵۵ **حل**

۱۷۵۶ ہم اس گھیر کا خاکہ بنا کر تکمل کی حد تلاش کرتے ہیں (شکل ۱۰.۹۲)۔ زاویہ θ کی قیمت $-\frac{\pi}{4}$ تا $\frac{\pi}{4}$ کرنے سے نقطہ $N(r,\theta)$ منحنی پر ٹھیک ایک بار
۱۷۵۷ گھڑی کے الٹ رخ چلتا ہے لہٰذا $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ اور $\beta = \frac{\pi}{4}$ ہوں گے۔

۱۷۵۸ ہم مساوات ۴ کا تکمل مرحلوں میں حل کرتے ہیں۔ پہلے مرحلہ میں درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$2\pi r \cos\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2} = 2\pi \cos\theta \sqrt{r^4 + \left(r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2} \tag{۶}$$

۱۷۵۹ اس کے بعد $r^2 = \cos 2\theta$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} &= -2\sin 2\theta \\
r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} &= -\sin 2\theta \\
\left(r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= \sin^2 2\theta
\end{aligned}$$

۱۷۶۰ آخر میں $r^4 = (r^2)^2 = \cos^2 2\theta$ کی وجہ سے مساوات ۶ میں دائیں ہاتھ جذر درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$\sqrt{r^4 + \left(r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} = 1$$

۱۷۶۱ ان تمام نتائج کو مل کر ہم رقبہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi r \cos\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\, \mathrm{d}\theta && \text{مساوات ۴} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\pi \cos\theta \cdot (1)\, \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \Big[\sin\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
&= 2\pi \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = 2\pi\sqrt{2}
\end{aligned}$$

□

سوالات

قطبی منحنیات کے اندر رقبہ

سوال ۱۰.۴۷۳ تا سوال ۱۰.۴۷۸ میں خطوں کے رقبے تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۴۷۳: چپٹا گھونگا $r = 4 + 2\cos\theta$ کے اندر۔

سوال ۱۰.۴۷۴: قلب نما $r = a(1+\cos\theta),\ a > 0$ کے اندر۔

سوال ۱۰.۴۷۵: چار گل $r = \cos 2\theta$ کے ایک پتا کے اندر۔

سوال ۱۰.۴۷۶: دو چشمہ $r^2 = 2a^2\cos 2\theta,\ a > 0$ کے اندر۔

سوال ۱۰.۴۷۷: دو چشمہ $r^2 = 4\sin 2\theta$ کے ایک گھیر کے اندر۔

سوال ۱۰.۴۷۸: شش گل $r^2 = 2\sin 3\theta$ کے اندر۔

مشترکہ قطبی خطے کا رقبہ

سوال ۱۰.۴۷۹ تا سوال ۱۰.۴۸۸ میں مشترکہ قطبی خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۴۷۹: دائرہ $r = 2\cos\theta$ اور $r = 2\sin\theta$ کا مشترکہ رقبہ۔

سوال ۱۰.۴۸۰: دائرہ $r = 1,$ اور $r = 2\sin\theta$ کا مشترکہ رقبہ۔

سوال ۱۰.۴۸۱: دائرہ $r = 2$ اور قلب نما $r = 2(1-\cos\theta)$ کا مشترکہ رقبہ۔

سوال ۱۰.۴۸۲: قلب نما $r = 2(1+\cos\theta)$ اور $r = 2(1-\cos\theta)$ کا مشترکہ رقبہ۔

سوال ۱۰.۴۸۳: دائرہ $r = \sqrt{3}$ کے باہر اور $r^2 = 6\cos 2\theta$ کے اندر۔

سوال ۱۰.۴۸۴: دائرہ $r = 3a\cos\theta$ کے اندر اور قلب نما $r = a(1+\cos\theta),\ a > 0$ کے باہر رقبہ۔

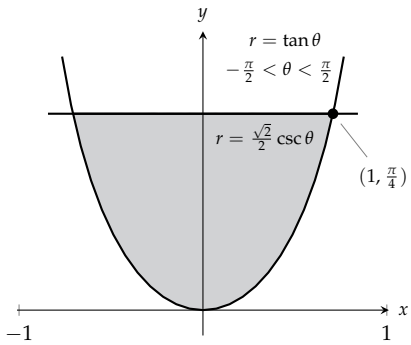
سوال ۱۰.۴۸۵: دائرہ $r = -2\cos\theta$ کے اندر اور دائرہ $r = 1$ کے باہر رقبہ۔

سوال ۱۰.۴۸۶: (ا) گھونگا $r = 2\cos\theta + 1$ کے بیرونی گھیر کا رقبہ (شکل ۱۰.۸۸)۔ (ب) گھونگا $r = 2\cos\theta + 1$ کے اندرونی گھیر کے باہر اور بیرونی گھیر کے اندر رقبہ۔

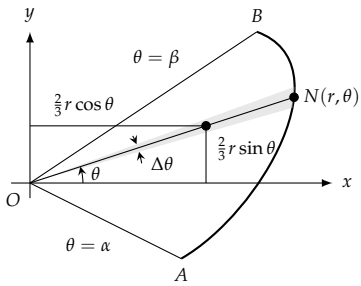
سوال ۱۰.۴۸۷: دائرہ $r = 6$ کے اندر خط $r = 3\csc\theta$ سے اوپر رقبہ۔

سوال ۱۰.۴۸۸: گھونگا $r^2 = 6\cos 2\theta$ کے اندر اور خط $r = \frac{3}{2}\sec\theta$ کے دائیں جانب رقبہ۔

سوال ۱۰.۴۸۹: (ا) سایہ دار خطہ شکل ۱۰.۹۳ میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا رقبہ تلاش کریں۔ (ب) ایسا معلوم ہوتا ہے کہ $r = \tan\theta,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ لکیر $x = 1$ اور لکیر $x = -1$ کا متقاربی خط ہو سکتا ہے۔ کیا ایسا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔



شکل ۱۰.۹۳: خطہ سوال ۱۰.۴۸۹



شکل ۱۰.۹۴: باریک سایہ دار خطے کے معیار اثر۔

۱۷۷۶۸

۱۷۷۶۹ سوال ۱۰.۴۹۰: قلب نما $r = \cos\theta + 1$ کے اندر اور دائرہ $r = \cos\theta$ کے باہر خطہ درج ذیل نہیں ہے۔

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(\cos\theta + 1)^2 - \cos^2\theta]\, d\theta = \pi$$

۱۷۷۷۰ ایسا کیوں ہے؟ اس کا رقبہ کتنا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۷۷۷۱

۱۷۷۷۲ قطبی منحنیات کی لمبائیاں

۱۷۷۷۳ سوال ۱۰.۴۹۱ تا سوال ۱۰.۴۹۹ میں منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

۱۷۷۷۴ سوال ۱۰.۴۹۱: پیچ دار منحنی $r = \theta^2, \quad 0 \le \theta \le \sqrt{5}$

۱۷۷۷۵ سوال ۱۰.۴۹۲: پیچ دار منحنی $r = \frac{e^\theta}{\sqrt{2}}, \quad 0 \le \theta \le \pi$

۱۷۷۷۶ سوال ۱۰.۴۹۳: قلب نما $r = 1 + \cos\theta$

۱۷۷۷۷ سوال ۱۰.۴۹۴: منحنی $r = a\sin^2\frac{\theta}{2},\ 0 \le \theta \le \pi,\ a > 0$

۱۷۷۷۸ سوال ۱۰.۴۹۵: قطع مکافی $r = \frac{6}{1+\cos\theta},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

۱۷۷۷۹ سوال ۱۰.۴۹۶: قطع مکافی $r = \frac{2}{1-\cos\theta},\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$

۱۷۷۸۰ سوال ۱۰.۴۹۷: منحنی $r = \cos^3\frac{\theta}{3},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

۱۷۷۸۱ سوال ۱۰.۴۹۸: منحنی $r = \sqrt{1 + \sin 2\theta},\ 0 \le \theta \le \sqrt{2}\pi$

۱۷۷۸۲ سوال ۱۰.۴۹۹: منحنی $r = \sqrt{1+\cos 2\theta},\ 0 \le \theta \le \sqrt{2}\pi$

۱۷۷۸۳ سوال ۱۰.۵۰۰: دائرے کا محیط

۱۷۷۸۴ نیا کلیہ سیکھنے کے بعد بہتر ہوتا ہے کہ اس کو جانے پہچانے مسئلوں پر لاگو کیا جائے۔ قوس لمبائی کا کلیہ مساوات ۱۳ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دائروں کے محیط کی
۱۷۷۸۵ لمبائیاں تلاش کریں۔

۱۷۷۸۶ ا. $r = a$ ۱۷۷۸۷ ب. $r = a\cos\theta$ ۱۷۷۸۸ ج. $r = a\sin\theta$

۱۷۷۸۹ **سطح رقبہ**

۱۷۷۹۰ سوال ۱۰.۵۰۱ تا سوال ۱۰.۵۰۴ میں منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح طواف کا رقبہ معلوم کریں۔

۱۷۷۹۱ سوال ۱۰.۵۰۱: $r = \sqrt{\cos 2\theta},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$، محور y

۱۷۷۹۲ سوال ۱۰.۵۰۲: $r = \sqrt{2}e^{\theta/2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$، محور x

۱۷۷۹۳ سوال ۱۰.۵۰۳: $r^2 = \cos 2\theta$، محور x

۱۷۷۹۴ سوال ۱۰.۵۰۴: $r = 2a\cos\theta,\ a > 0$، محور y

۱۷۷۹۵ **نظریہ اور مثالیں**

۱۷۷۹۶ سوال ۱۰.۵۰۵: منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$ کی لمبائی۔

۱۷۷۹۷ فرض کریں کہ مطلوبہ تفرق استراری ہیں۔ دکھائیں کہ مساوات ۲ میں

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta$$

۱۷۷۹۸ پر کرنے سے

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

۱۷۷۹۹ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

۱۷۸۰۰ سوال ۱۰.۵۰۶: اوسط قیمت

۱۷۸۰۱ استراری f کی صورت میں منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$ کے قطبی محدد r کی اوسط قیمت درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$r_{\text{اوسط}} = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

۱۷۸۰۲ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل میں θ کے لحاظ سے $r_{\text{اوسط}}$ معلوم کریں جہاں $a > 0$ ہے۔

ا. قلب نما $r = a(1 - \cos\theta)$

ب. دائرہ $r = a$

ج. دائرہ $r = a\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

سوال ۱۰.۵۰۷: کیا $r = f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$ اور $r = 2f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$ کی لمبائیوں کے تناسب کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۰.۵۰۸: منحنیات $r = f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$ اور $r = 2f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ کیا ان سطح طواف کے رقبوں کی تناسب کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

پنکھا نما خطوں کے وسطانی مراکز

چونکہ مثلث کا وسطانی مرکز ہر ایک وسطانیہ پر، راس سے دو تہائی دور مخالف قاعدہ پر، واقع ہوتا ہے لہذا شکل ۱۰.۹۴ میں محور x کے لحاظ سے باریک سایہ دور تکونی بیرم کا بازو تقریباً $\frac{2}{3}r\sin\theta$ ہو گا۔ اسی طرح محور y کے لحاظ سے اس باریک تکونی خطہ کا بازو $\frac{2}{3}r\cos\theta$ ہو گا۔ یہ تخمین $\Delta\theta \to 0$ سے بہتر ہو کر خطہ AOB کے وسطانیہ کے محدد کے لیے درج ذیل کلیات دیتی ہیں

$$\bar{x} = \frac{\int \frac{2}{3}r\cos\theta \cdot \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta}{\int \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta} = \frac{\frac{2}{3}\int r^3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\int r^2\,\mathrm{d}\theta}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \frac{2}{3}r\sin\theta \cdot \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta}{\int \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta} = \frac{\frac{2}{3}\int r^3\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\int r^2\,\mathrm{d}\theta}$$

جہاں تمام تکمل کی حدود α اور β ہیں۔

سوال ۱۰.۵۰۹: قلب نما $r = a(1 + \cos\theta)$ کے اندر خطہ کا وسطانیہ دریافت کریں۔

سوال ۱۰.۵۱۰: نصف دائری خطہ $0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \pi$ کا وسطانیہ دریافت کریں۔

باب ۱۱

سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری

اس حصہ میں سمتیات اور سہ بُعدی محددی نظام متعارف کیے جائیں گے۔ جیسا ایک متغیر کے تفاعل پر غور کے لیے محددی مستوی موزوں ہے، اسی طرح دو (یا دو سے زیادہ) متغیرات کے تفاعل پر غور کے لیے محددی خلاء موزوں ہے۔ ہم محددی مستوی میں ایک تیسرا محور شامل کر کے محددی خلاء پیدا کرتے ہیں۔ یہ محور مستوی xy سے نیچے اور اس سے اوپر فاصلہ ناپتا ہے۔

۱۱.۱ مستوی میں سمتیات

بعض چیزیں جنہیں ہم ناپتے ہیں کا تعین ان کی مقدار سے ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر کمیت، لمبائی اور وقت قلم بند کرنے کے لیے ہم صرف ایک عدد اور موزوں اکائی لکھتے ہیں۔ اس کے برعکس قوت، ہٹاو، یا سمتی رفتار جاننے کے لیے ہمیں مزید معلوم درکار ہو گی۔ قوت کو بیان کرنے کے لیے ہمیں اس کی مقدار کے ساتھ وہ رخ بھی جاننا ہو گا جس رخ یہ عمل کرتی ہے۔ کسی جسم کا ہٹاو بیان کرنے کے لیے ہمیں اس سمت کا ذکر کرنا ہو گا جس سمت یہ جسم حرکت کرتا ہے اور ساتھ اس فاصلہ کا ذکر کرنا ہو گا جتنا یہ طے کرتا ہے۔ ایک جسم کی سمتی رفتار بیان کرنے کے لیے ہم حرکت کی سمت اور جسم کی رفتار کی بات کرتے ہیں۔

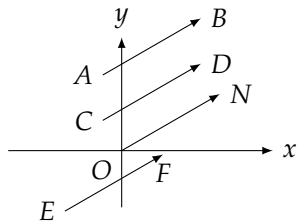
وہ مقدار جس کی جسامت اور سمت دونوں ہوں کو عموماً تیر کے نشان سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں مقدار کے رخ کو تیر کا رخ مقدار کی جسامت کو، موزوں اکائیوں میں، تیر کی لمبائی ظاہر کرتی ہے۔

تیر دار لکیروں کو ہم سمت بند خطوط تصور کرتے اور **سمتیات**[1] کہتے ہیں۔

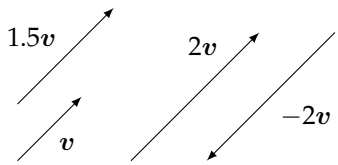
تعریف: ایک مستوی میں سمت بند خط کو **سمتیہ**[1] کہتے ہیں۔ دو سمتیات صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر یا یکساں ہوں گے جب ان کی مقداریں ایک سی ہوں اور ان کے رخ ایک سے ہوں۔

□

[1] vector



شکل ۱.۱۱: یکساں لمبائی اور یکساں رخ کے سمتیات ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں۔



شکل ۲.۱۱: سمتیہ کے غیر سمتی مضرب۔

۱۷۸۳۵ یوں اگر سمتیات کو ظاہر کرنے والے تیر آپس میں متوازی ہوں، ان کی لمبائیاں ایک سی ہوں اور ان کا رخ بھی ایک سا ہو تب یہ ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے
۱۷۸۳۶ ہیں۔ اس کتاب میں سمتیہ کو موٹی لکھائی میں رومانی حروف تہجی، مثلاً $\boldsymbol{v}$ ، سے ظاہر کیا جائے گا[۲]۔ نقطہ A سے نقطہ B تک تیر کو ہم $\overrightarrow{AB}$ لکھیں گے۔

۱۷۸۳۷ مثال ۱.۱۱: چار تیروں کو شکل ۱.۱۱ میں دکھایا گیا ہے جن کی لمبائیاں اور رخ ایک سے ہیں۔ یوں چاروں ایک ہی سمتیہ کو ظاہر کرتے ہیں جس کو ہم درج ذیل
۱۷۸۳۸ لکھتے ہیں۔

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{EF}$$

۱۷۸۳۹ □

۱۷۸۴۰ غیر سمتیہ اور غیر سمتی مضرب

۱۷۸۴۱ ہم کسی سمتیہ کو مثبت حقیقی عدد سے ضرب دینے کے لیے اس کی لمبائی کو اس عدد سے ضرب دیتے ہیں (شکل ۲.۱۱)۔ سمتیہ کو 2 سے ضرب دینے کے لیے ہم
۱۷۸۴۲ اس کی لمبائی دگنی کرتے ہیں۔ ایک سمتیہ کو 1.5 سے ضرب دینے کے لیے ہم اس کی لمبائی 50 % بڑھاتے ہیں، وغیرہ، وغیرہ۔ ایک سمتیہ کو منفی عدد سے
۱۷۸۴۳ ضرب دینے کے لیے ہم اس کا رخ الٹ کر کے اس کی لمبائی کو عدد کی مطلق قیمت سے ضرب دیتے ہیں۔

۱۷۸۴۴ اگر c غیر صفر حقیقی عدد اور $\boldsymbol{v}$ ایک سمتیہ ہو تب مثبت c کی صورت میں $\boldsymbol{v}$ اور $c\boldsymbol{v}$ کے رخ ایک سے ہوں گے جبکہ منفی c کی صورت میں ان کے رخ
۱۷۸۴۵ ایک دوسرے کے مخالف ہوں گے۔ یہاں حقیقی اعداد تبدیلی پیمانہ کے طور پر کام کرتے ہیں اور یہ **غیر سمتی**[۳] کہلاتے ہیں جبکہ $c\boldsymbol{v}$ کے مضرب کو $\boldsymbol{v}$ کا **غیر**
۱۷۸۴۶ **سمتی مضرب**[۴] کہتے ہیں۔

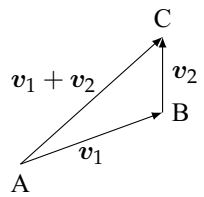
۱۷۸۴۷ صفر سے ضرب کو شامل کرنے کی خاطر ہم اس روایت کو اپناتے ہیں جس کے مطابق کسی بھی سمتیہ کو صفر سے ضرب دینے سے **صفر سمتیہ** $\mathbf{0}$ حاصل ہو گا، جو
۱۷۸۴۸ ایک نقطہ پر مشتمل ہو گا جس کی لمبائی صفر ہو گی۔ دیگر سمتیہ کے برعکس صفر سمتیہ $\mathbf{0}$ کا کوئی رخ نہیں ہوتا ہے۔

---

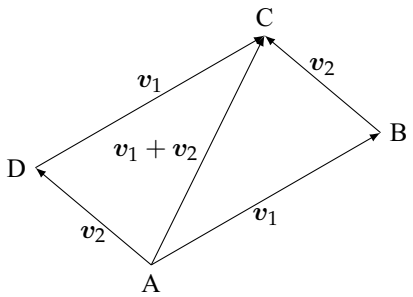
[۲] قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے سمتیہ کو رومانی حروف تہجی پر تیر کا نشان $\vec{\text{ج}}$ یا نصف تیر کا نشان $\overrightarrow{\text{ج}}$ ڈال کر ظاہر کیا جاتا ہے۔)

[۳] scalar

[۴] scalarmultiple



شکل ۱۱.۳: سمتیات v_1 اور v_2 کا مجموعہ۔



شکل ۱۱.۴: قاعدہ متوازی الاضلاع۔ مخالف اضلاع یکساں لمبائی ہونے کی وجہ سے $ABCD$ متوازی الاضلاع ہوگا۔

۱۷۸۴۹ **جیومیٹریائی مجموعہ: قاعدہ متوازی الاضلاع**

۱۷۸۵۰ دو غیر صفر سمتیات v_1 اور v_2 کا جیومیٹریائی مجموعہ لینے کی خاطر v_1 کا نمائندہ، مثلاً A سے B تک، ترسیم کرکے v_1 کے اختتامی نقطہ (سر) B پر
۱۷۸۵۱ v_2 کے نمائندہ کا ابتدائی نقطہ (دُم) رکھ کر ترسیم کریں۔ شکل ۱۱.۳ میں $v_2 = \overrightarrow{BC}$ ہے۔ مجموعہ $v_1 + v_2$ اب v_1 کی دُم A سے v_2 کے سر
۱۷۸۵۲ C تک سمتیہ ہوگا۔ یوں اگر

$$v_1 = \overrightarrow{AB}, \quad v_2 = \overrightarrow{BC}$$

۱۷۸۵۳ ہوں تب

$$v_1 + v_2 = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

۱۷۸۵۴ ہوگا۔ چونکہ اس عمل میں $v_1 + v_2$ متوازی الاضلاع کا وتر ہوتا ہے لہٰذا اس عمل کو بعض اوقات **قاعدہ متوازی الاضلاع**[۵] کہتے ہیں (شکل ۱۱.۴)۔

۱۷۸۵۵ **اجزاء**

۱۷۸۵۶ دو سمتیات اس صورت متوازی ہوں گے جب یہ ایک دوسرے کے غیر صفر، غیر سمتی مضرب ہوں، یعنی جب ان کو ظاہر کرنے والے خطوط متوازی ہوں۔

۱۷۸۵۷ جب بھی ایک سمتیہ v کو دو غیر متوازی سمتیات کا مجموعہ

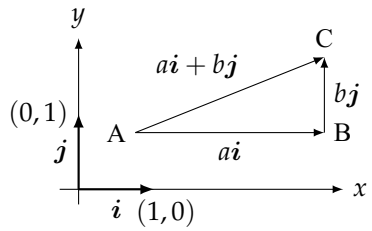
$$v = v_1 + v_2$$

۱۷۸۵۸ لکھنا ممکن ہو، سمتیات v_1 اور v_2 سمتیہ v کے اجزاء کہلائیں گے اور ہم کہتے ہیں کہ سمتیہ v کو اس کے اجزاء v_1 اور v_2 میں تحلیل کیا گیا ہے۔

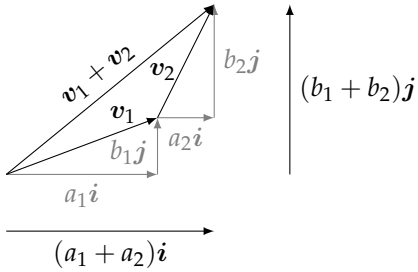
۱۷۸۵۹ سمتیات کے مقبول ترین الجبرا میں ہر سمتیہ کو کارتیسی محور کے متوازی اجزاء کی صورت میں بیان کیا جاتا ہے اور یہ اجزاء از خود موزوں **اساسی**[۶] سمتیہ، جن
۱۷۸۶۰ کی لمبائی 1 ہوتی ہے، کے مضرب ہوتے ہیں۔ مثبت محور x کے رخ اساسی سمتیہ نقطہ $(0,0)$ سے نقطہ $(1,0)$ تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس

---

[۵] parallelogramlaw
[۶] basic



شکل ۱۱.۵: اساس سمتیات $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کو استعمال کر کے کسی بھی سمتیہ $\overrightarrow{AC}$ کو لکھا جا سکتا ہے۔



شکل ۱۱.۶: سمتیات کا مجموعہ ان کے مطابقتی اجزاء کے مجموعہ لے کر حاصل ہو گا۔

اساسی سمتیہ کی علامت $\boldsymbol{i}$ ہے۔ مثبت محور y کے رخ اساسی سمتیہ نقطہ $(0,0)$ سے نقطہ $(0,1)$ تک تیر سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اس اساسی سمتیہ کی علامت $\boldsymbol{j}$ ہے۔ اب غیر سمتی a کے لیے محور x کے متوازی سمتیہ $a\boldsymbol{i}$ کی لمبائی $|a|$ ہو گی جبکہ اس کا رخ $a > 0$ کے لیے دایاں اور $a < 0$ کے لیے بایاں ہو گا۔ اس طرح غیر سمتی b کے لیے محور y کے متوازی سمتیہ $b\boldsymbol{j}$ کی لمبائی $|b|$ ہو گی جبکہ اس کا رخ $b > 0$ کے لیے اوپر اور $b < 0$ کے لیے نیچے ہو گا۔ شکل ۱۱.۵ میں سمتیہ $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{AC}$ کو اجزاء $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ میں تحلیل کیا گیا ہے:

$$\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$$

تعریف: اگر $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ ہو تب $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کے رخ، سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء سمتیات $a\boldsymbol{i}$ اور $b\boldsymbol{j}$ ہوں گے۔ اعداد a اور b، اساسی سمتیات $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کے رخ، سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے غیر سمتی اجزاء ہوں گے۔

□

تعریف: سمتیات کی برابری یا یکسانیت (الجبرائی تعریف)۔

$$a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} = a'\boldsymbol{i} + b'\boldsymbol{j} \quad \Leftrightarrow \quad a = a', \quad b = b' \tag{۱}$$

□

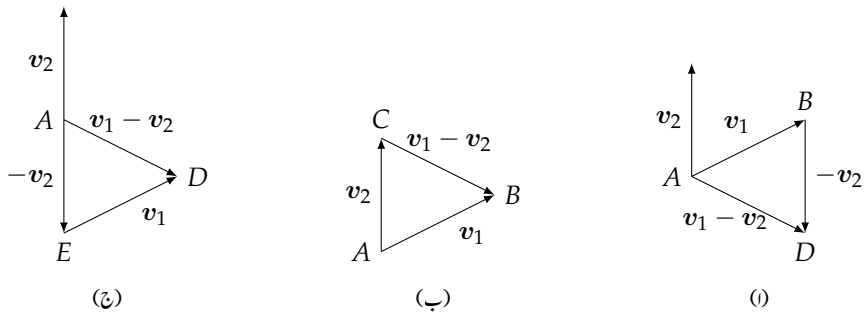
دو سمتیات صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کے رخ، ان کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

الجبرائی مجموعہ

سمتیات کے مطابقتی غیر سمتی اجزاء کا مجموعہ لے کر ان سمتیات کا مجموعہ حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل ۱۱.۶)۔

اگر $\boldsymbol{v}_1 = a_1\boldsymbol{i} + b_1\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{v}_2 = a_2\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = (a_1 + a_2)\boldsymbol{i} + (b_1 + b_2)\boldsymbol{j}$$



شکل ۷.۱۱: سمتیہ $v_1 - v_2$ کو ترسیم کرنے کے کئی طریقوں میں سے تین طریقے۔

۱۷۸۷۵ مثال ۲.۱۱:

$$(2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}) + (5\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}) = (2+5)\boldsymbol{i} + (-4+3)\boldsymbol{j} = 7\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$$

۱۷۸۷۶ □

۱۷۸۷۷ تفریق

۱۷۸۷۸ ایک سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا منفی سمتیہ $-\boldsymbol{v} = (-1)\boldsymbol{v}$ ہوگا۔ اس کی لمبائی $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی ہوگی البتہ اس کا رخ $\boldsymbol{v}$ کا مخالف ہوگا۔ سمتیہ $\boldsymbol{v}_2$ کو سمتیہ $\boldsymbol{v}_1$ سے
۱۷۸۷۹ منفی کرنے کی خاطر ہم $-\boldsymbol{v}_2$ اور $\boldsymbol{v}_1$ کا مجموعہ لیں گے۔ جیومیٹریائی طور پر ہم $\boldsymbol{v}_1$ کے سرے سے $-\boldsymbol{v}_2$ کھینچ کر $\boldsymbol{v}_1$ کی دُم سے $-\boldsymbol{v}_2$ کے سر تک
۱۷۸۸۰ سمتیہ ترسیم کریں گے۔ یہ عمل شکل ۷.۱۱-ا میں دکھایا گیا ہے جہاں

$$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \boldsymbol{v}_1 + (-\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$$

۱۷۸۸۱ اس کے علاوہ $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ کی دُم مشترکہ نقطہ پر رکھ کر $\boldsymbol{v}_1$ اور $\boldsymbol{v}_2$ ترسیم کر کے $\boldsymbol{v}_2$ کے سرے سے $\boldsymbol{v}_1$ کے سر تک سمتیہ $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ ہوگا۔ یہ عمل
۱۷۸۸۲ شکل ۷.۱۱-ب میں پیش کیا گیا ہے جہاں درج ذیل ہے۔

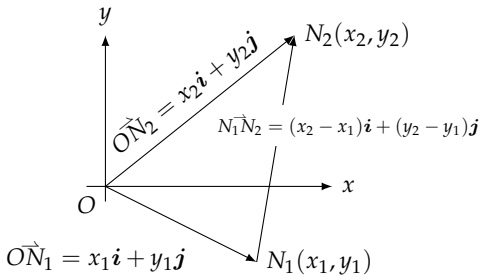
$$\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB} = -\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$$

۱۷۸۸۳ مزید، $-\boldsymbol{v}_2$ کے سرے سے $\boldsymbol{v}_1$ ترسیم کر کے $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل ۷.۱۱-ج)۔

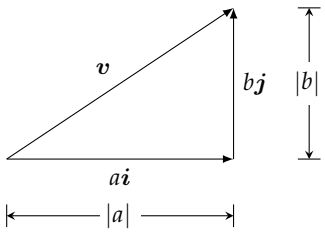
۱۷۸۸۴ درج ذیل قاعدہ سمتیات کی تفریق کو اجزاء کی صورت میں پیش کرتا ہے۔

$$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = (a_1 - a_2)\boldsymbol{i} + (b_1 - b_2)\boldsymbol{j} \tag{۲}$$

۱۷۸۸۵ اس قاعدہ کے تحت دو سمتیات تفریق کرنے کی خاطر ان کے مطابقتی اجزاء تفریق کیے جائیں گے۔



شکل ۱۱.۸



شکل ۱۱.۹: سمتیہ کی لمبائی مسئلہ فیثاغورث سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

۱۷۸۸۶ مثال ۱۱.۳:

$$(6\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) - (3\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j}) = (6 - 3)\boldsymbol{i} + (2 - (-5))\boldsymbol{j} = 3\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j}$$

۱۷۸۸۷ □

۱۷۸۸۸ ہم نقطہ $N_1(x_1, y_1)$ سے نقطہ $N_2(x_2, y_2)$ تک سمتیہ کے اجزاء حاصل کرنے کے لیے $\overrightarrow{ON_1} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j}$ کے اجزاء کو
۱۷۸۸۹ $\overrightarrow{ON_2} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j}$ کے اجزاء سے منفی کرتے ہیں۔
۱۷۸۹۰ $N_1(x_1, y_1)$ سے $N_2(x_2, y_2)$ تک سمتیہ درج ذیل ہوگا۔

$$\overrightarrow{N_1N_2} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} \tag{۳}$$

۱۷۸۹۱ مثال ۱۱.۴: نقطہ $N_1(3, 4)$ سے نقطہ $N_2(5, 1)$ تک سمتیہ درج ذیل ہے۔

$$\overrightarrow{N_1N_2} = (5 - 3)\boldsymbol{i} + (1 - 4)\boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$$

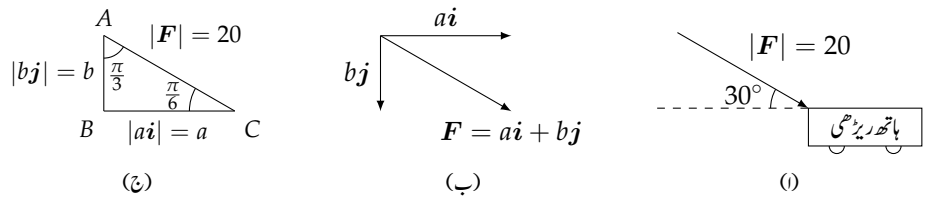
۱۷۸۹۲ □

۱۷۸۹۳ **مقدار**

۱۷۸۹۴ سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ کی **لمبائی**[۷] یا **مقدار**[۸] $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ اور اس کے دو سمتیہ اجزاء کے قائمہ مثلث پر مسئلہ
۱۷۸۹۵ فیثاغورث لاگو کرنے سے یہ کلیہ اخذ ہوتا ہے (شکل ۱۱.۹)۔ سمتیہ کی لمبائی $|\boldsymbol{v}|$ میں دو انتصابی لکیریں وہی ہیں جو مطلق قیمت کو ظاہر کرنے کے لیے استعمال کی
۱۷۸۹۶ جاتی ہیں۔

$$\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} \qquad |\boldsymbol{v}| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{۴}$$

[۷] length
[۸] magnitude



شکل ۱۱.۱۰: ہاتھ ریڑھی (مثال ۱۱.۵)

۱۷۸۹۷ مثال ۱۱.۵: آپ زمین کے ساتھ 30° زاویہ پر $20\,\mathrm{N}$ کی قوت $\boldsymbol{F}$ سے ہاتھ ریڑھی کو دکھالگاتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰-ا)۔ قوت کا افقی جزو ریڑھی کو
۱۷۸۹۸ حرکت دیتا ہے جبکہ اس کا انتصابی جزو ریڑھی کا وزن بڑھاتا ہے۔ اس قوت کا افقی اور انتصابی جزو معلوم کریں۔

۱۷۸۹۹ **حل**

۱۷۹۰۰ ہم قوت $\boldsymbol{F} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ اور اس کے اجزاء کے لیے مثلث بناتے ہیں (شکل ۱۱.۱۰-ب اور شکل ۱۱.۱۰-ج)۔ اس مثلث سے $a = 10\sqrt{3}$ اور
۱۷۹۰۱ $b = 10$ حاصل ہوتے ہیں۔ قوت کا افقی جزو $10\sqrt{3}\boldsymbol{i}$ اور انتصابی جزو $-10\boldsymbol{j}$ ہے۔ یوں $\boldsymbol{F} = 10\sqrt{3}\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j}$ ہوگا۔ انتصابی جزو کا
۱۷۹۰۲ رخ نیچے ہے لہٰذا یہ منفی ہے۔ □

۱۷۹۰۳ ## غیر سمتی ضرب

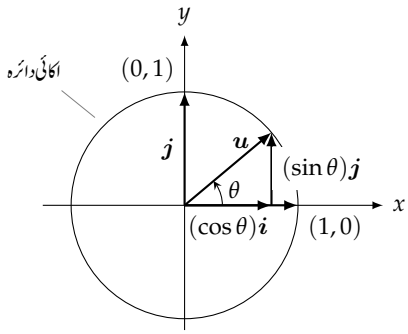
۱۷۹۰۴ غیر سمتی ضرب جزو در جزو حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اگر c ایک غیر سمتی اور $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ ایک سمتیہ ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$c\boldsymbol{v} = c(a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}) = (ca)\boldsymbol{i} + (cb)\boldsymbol{j} \tag{۵}$$

۱۷۹۰۵ سمتیہ $c\boldsymbol{v}$ کی لمبائی سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی ضرب $|c|$ ہوگا:

$$\begin{aligned}
|c\boldsymbol{v}| &= \left|(ca)\boldsymbol{i} + (cb)\boldsymbol{j}\right| \\
&= \sqrt{(ca)^2 + (cb)^2} \\
&= \sqrt{c^2(a^2 + b^2)} \\
&= \sqrt{c^2}\sqrt{a^2 + b^2} \\
&= |c||\boldsymbol{v}|
\end{aligned}$$

۱۷۹۰۶ یوں اگر c غیر سمتی ہو اور $\boldsymbol{v}$ ایک سمتیہ ہو تب $|c\boldsymbol{v}| = |c||\boldsymbol{v}|$ ہوگا۔



شکل ۱۱.۱۱: مستوی میں ہر اکائی سمتیہ کو $\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

۱۷۹۰۷ مثال ۱۱.۶: اگر $c = -2$ اور $\boldsymbol{v} = -3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{v}| &= |-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}| = \sqrt{(-3)^2 + (4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \\
|-2\boldsymbol{v}| &= \big|(-2)(-3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j})\big| = |6\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j}| = \sqrt{(6)^2 + (-8)^2} \\
&= \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10 = |-2||5| = |c||\boldsymbol{v}|
\end{aligned}$$

۱۷۹۰۸ □

۱۷۹۰۹ **صفر سمتیہ**

۱۷۹۱۰ صفر سمتیہ سے مراد درج ذیل سمتیہ ہے۔

$$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}$$

۱۷۹۱۱ دھیان رہے کہ صفر سمتیہ $\mathbf{0}$ کو ظاہر کرنے کے لیے 0 کو موٹی لکھائی میں لکھا جاتا ہے۔ صفر سمتیہ وہ واحد سمتیہ ہے جس کی لمبائی صفر ہے۔ یہ حقیقت درج
۱۷۹۱۲ ذیل سے واضح ہے۔

$$|a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b = 0$$

۱۷۹۱۳ **اکائی سمتیات**

۱۷۹۱۴ کوئی بھی سمتیہ جس کی لمبائی 1 ہو **اکائی سمتیہ**[9] کہلائے گا۔ سمتیات $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ اکائی سمتیات ہیں۔

$$|\boldsymbol{i}| = |1\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1, \quad |\boldsymbol{j}| = |0\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j}| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$$

[9] unitvector

سمتیہ $\boldsymbol{u}$ جو اکائی سمتیہ $\boldsymbol{i}$ کو θ زاویہ مثبت رخ گھما کر حاصل ہو گا، کے سمتی اجزاء درج ذیل ہوں گے (شکل ۱۱.۱۱)۔

$$\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j} \tag{۶}$$

چونکہ اکائی سمتیہ کو گھمانے سے اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا $\boldsymbol{u}$ بھی اکائی سمتیہ ہو گا یعنی:

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2} = \sqrt{1^2} = 1$$

زاویہ θ کو 0 تا 2π کرنے سے $\boldsymbol{u}$ کا سر N مبدا کے گرد، گھڑی کے الٹ رخ، دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر چلتا ہے جو مستوی میں ہر ممکنہ رخ کا اکائی سمتیہ دے گا۔

لمبائی اور رخ

اگر $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ ہو تب

$$\left|\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right| = \left|\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\boldsymbol{v}\right| = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}|\boldsymbol{v}| = 1$$

ہو گا لہٰذا $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ $\boldsymbol{v}$ کا رخ ہو گا۔ یوں ہم $\boldsymbol{v}$ کو اس کی دو اہم خواص، لمبائی اور رخ، کی صورت میں درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|\left(\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right)$$

یوں اگر $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ ہو تب

ا. $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ $\boldsymbol{v}$ کا رخ ہو گا۔ یوں ہم $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ کو $\boldsymbol{v}$ کو رخ کہتے ہیں۔

ب. مساوات $\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{v}|\left(\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right)$ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کو اس کی لمبائی اور رخ کی صورت میں بیان کرتی ہے۔

مثال ۱۱.۷: سمتیہ $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ کو اس کی لمبائی اور رخ کا حاصل ضرب لکھیں۔

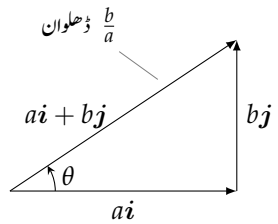
حل

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5 \qquad \boldsymbol{v} \text{ کی لمبائی}$$

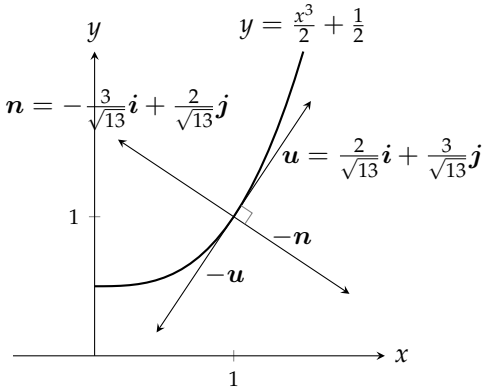
$$\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}}{5} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j} \qquad \boldsymbol{v} \text{ کا رخ}$$

$$\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} = \underbrace{5}_{\text{لمبائی}}\underbrace{\left(\frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}\right)}_{\text{رخ}}$$

□



شکل ۱۱.۱۲: اگر $a \neq 0$ ہو تب سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ کا ڈھلوان $\frac{b}{a}$ ہو گی۔



شکل ۱۱.۱۳: ایک نقطہ پر ترسیم کا اکائی مماسی اور اکائی عمودی سمتیہ (مثال ۱۱.۸)

ڈھلوان، مماس اور عمود

ایک سمتیہ اس صورت ایک خط کے متوازی ہو گا جب سمتیہ کو ظاہر کرنے والا قطعہ اور یہ خط متوازی ہوں۔ ایک غیر انتصابی سمتیہ کا ڈھلوان ان خطوط کا ڈھلوان ہو گی جو اس سمتیہ کے متوازی ہوں۔ یوں $a \neq 0$ کی صورت میں سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ کا ڈھلوان $\frac{b}{a}$ ہو گا (شکل ۱۱.۱۲)۔

کسی نقطہ پر ایک منحنی کو ایک سمتیہ تب **مماس**[۱۰] یا **عمودی**[۱۱] ہو گا جب اس نقطہ پر منحنی کا مماس اور یہ سمتیہ متوازی یا عمودی ہوں۔ اگلی مثال میں ایسی سمتیہ کو تلاش کرنا دکھایا گیا ہے۔

مثال ۱۱.۸: نقطہ $(1,1)$ پر منحنی $y = \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2}$ کو مماسی اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔

حل

ہم نقطہ $(1,0)$ پر منحنی کے مماس کے متوازی اور عمودی اکائی سمتیات معلوم کرتے ہیں (شکل ۱۱.۱۳)۔

اس نقطہ پر منحنی کے مماس کا ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$y' = \left.\frac{3x^2}{2}\right|_{x=1} = \frac{3}{2}$$

ہم اتنی ڈھلوان کی اکائی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔ سمتیہ $\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ اور اس کے ہر غیر صفر مضرب کا ڈھلوان $\frac{3}{2}$ ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا ایسا مضرب معلوم کرنے کے لیے جس کی لمبائی 1 ہو ہم $\boldsymbol{v}$ کو

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

---

[۱۰] tangent
[۱۱] normal

سے تقسیم کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i} + \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}$$

سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کی لمبائی 1 ہے اور یہ $(1,1)$ پر منحنی کا مماس ہے۔ درج ذیل سمتیہ

$$-\boldsymbol{u} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}$$

جو مخالف رخ ہے بھی $(1,1)$ پر منحنی کا مماس ہو گا۔ کسی اضافی شرط کے بغیر ان میں سے کسی ایک اکائی مماسی سمتیہ کو دوسری اکائی مماسی سمتیہ پر فوقیت نہیں دی جا سکتی ہے۔

نقطہ $(1,1)$ پر منحنی کا عمودی سمتیہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ایسا اکائی سمتیہ معلوم کرتے ہیں جس کا ڈھلوان $\boldsymbol{u}$ کا ڈھلوان کے بالعکس تناسب کے منفی کے برابر ہو۔ ہم $\boldsymbol{u}$ کے غیر سمتی اجزاء کے مقامات آپس میں تبدیل کر کے اور ان میں سے کسی ایک کی علامت بدل کر ایسا سمتیہ معلوم کر سکتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = -\frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}, \qquad -\boldsymbol{n} = \frac{3}{\sqrt{13}}\boldsymbol{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\boldsymbol{j}$$

یہاں بھی دونوں اکائی سمتیات دیے گئے نقطہ پر منحنی کو عمودی ہیں۔ ان دو عمودی اکائی سمتیات کا رخ ایک دوسرے کے الٹ ہے لیکن دونوں $(1,1)$ پر منحنی کو عمودی ہیں۔ □

سوالات

جیومیٹری اور حساب

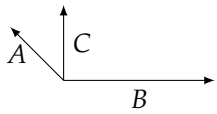
سوال ۱.۱۱: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کو شکل ۱۱.۱۴ میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ دُم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

ا. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ ب. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ ج. $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$ د. $\frac{1}{2}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{C}$

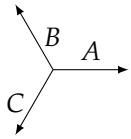
سوال ۲.۱۱: مستوی میں پائے جانے والے سمتیات $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کو شکل ۱۱.۱۵ میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کاغذ پر اتار کر سر کے ساتھ دُم جوڑ کر درج ذیل ترسیم کریں۔

ا. $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ ب. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$ ج. $2\boldsymbol{A}-\frac{1}{2}\boldsymbol{B}$ د. $\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C})$

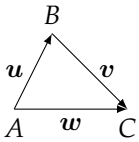
سوال ۳.۱۱ تا سوال ۶.۱۱ میں $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{C} = \sqrt{3}\boldsymbol{i} - \pi\boldsymbol{j}$ لیں۔ نتائج کو $a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھیں۔



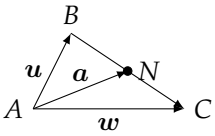
شکل ۱۱.۱۴



شکل ۱۱.۱۵



شکل ۱۱.۱۶



شکل ۱۱.۱۷

۱۷۹۶۶ سوال ۱۱.۳: $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{B}$

۱۷۹۶۷

۱۷۹۶۸ سوال ۱۱.۴: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}$

۱۷۹۶۹ سوال ۱۱.۵: $3\boldsymbol{A}-\frac{1}{\pi}\boldsymbol{C}$

۱۷۹۷۰

۱۷۹۷۱ سوال ۱۱.۶: $2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{B}+32\boldsymbol{j}$

۱۷۹۷۲ سوال ۱۱.۷: مثلث ABC کے اضلاع سمتیات $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ دیتے ہیں (شکل ۱۱.۱۶)۔

۱۷۹۷۳ ا. $\boldsymbol{w}$ کو $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ کی صورت میں لکھیں۔

۱۷۹۷۴ ب. $\boldsymbol{v}$ کو $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{w}$ کی صورت میں لکھیں۔

۱۷۹۷۵ سوال ۱۱.۸: مثلث ABC کے اضلاع سمتیات $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{w}$ دیتے ہیں جبکہ BC کا وسطی نقطہ N ہے (شکل ۱۱.۱۷)۔ سمتیہ $\boldsymbol{a}$ کو $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{w}$
۱۷۹۷۶ کی صورت میں لکھیں۔

۱۷۹۷۷

۱۷۹۷۸ سوال ۱۱.۹ تا سوال ۱۱.۱۶ میں سمتیہ کو $a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھیں۔ محددی سطح پر مبدا سے شروع کرتے ہوئے انہیں ترسیم کریں۔

۱۷۹۷۹ سوال ۱۱.۹: نقاط $N_1(5,7)$ اور $N_2(2,9)$ کے بیچ قطعہ $\overrightarrow{N_1N_2}$ تلاش کریں۔

۱۷۹۸۰ سوال ۱۱.۱۰: نقاط $N_1(1,2)$ اور $N_2(-3,5)$ کے بیچ قطعہ $\overrightarrow{N_1N_2}$ تلاش کریں۔

۱۷۹۸۱ سوال ۱۱.۱۱: نقاط $A(-5,3)$ اور $B(-10,8)$ کے بیچ قطعہ $\overrightarrow{AB}$ تلاش کریں۔

۱۷۹۸۲ سوال ۱۱.۱۲: نقاط $A(-7,-8)$ اور $B(6,11)$ کے بیچ قطعہ $\overrightarrow{AB}$ تلاش کریں۔

۱۷۹۸۳ سوال ۱۱.۱۳: نقاط $N_1(1,3)$ اور $N_2(2,-1)$ کے بیچ قطعہ $\overrightarrow{N_1N_2}$ تلاش کریں۔

۱۷۹۸۴ سوال ۱۱.۱۴: نقاط $N_3(1,3)$ اور N_4 کے بیچ قطعہ $\overrightarrow{N_3N_4}$ تلاش کریں جہاں $N_1(2,-1)$ اور $N_2(-4,3)$ کو ملانے والے
۱۷۹۸۵ قطعہ کا وسطی نقطہ N_4 ہے۔

۱۷۹۸۶ سوال ۱۱.۱۵: نقاط $A(1,-1)$ ، $B(2,0)$ ، $C(-1,3)$ اور $D(-2,2)$ دیے گئے ہیں۔ سمتیات $\overrightarrow{CD}$ اور $\overrightarrow{AB}$ کا مجموعہ
۱۷۹۸۷ تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۱۶: نقطہ A سے مبدا تک سمتیہ، جہاں $\overrightarrow{AB} = 4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ اور $B(-2,5)$ ہیں۔

سوال ۱۱.۱۷: سمتیہ $\overrightarrow{AB} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ اور نقطہ $A(2,9)$ دیا گیا ہے۔ نقطہ B تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۱۸: سمتیہ $\overrightarrow{NQ} = -6\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ اور نقطہ $Q(3,3)$ دیا گیا ہے۔ نقطہ N تلاش کریں۔

اکائی سمتیات

سوال ۱۱.۱۹ تا سوال ۱۱.۲۲ میں دیے سمتیات ترسیم کریں۔ ان سمتیات کو $a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ روپ میں لکھیں۔

سوال ۱۱.۱۹: زاویہ $\theta = \frac{\pi}{6}$ اور $\theta = \frac{2\pi}{3}$ کے لیے اکائی سمتیات $\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}$ ترسیم کریں۔ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کی ترسیم بھی شامل کریں۔

سوال ۱۱.۲۰: زاویہ $\theta = -\frac{\pi}{4}$ اور $\theta = -\frac{3\pi}{4}$ کے لیے اکائی سمتیات $\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}$ ترسیم کریں۔ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کی ترسیم بھی شامل کریں۔

سوال ۱۱.۲۱: سمتیہ $\boldsymbol{j}$ کو مبدا کے گرد گھڑی کے الٹ رخ $\frac{3\pi}{4}$ ریڈیئن گھما کر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔

سوال ۱۱.۲۲: سمتیہ $\boldsymbol{j}$ کو مبدا کے گرد گھڑی کے رخ $\frac{2\pi}{3}$ ریڈیئن گھما کر حاصل اکائی سمتیہ ترسیم کریں۔

سوال ۱۱.۲۳ اور سوال ۱۱.۲۴ میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}$ اسی رخ تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۲۳: $6\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j}$

سوال ۱۱.۲۴: $-\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$

سوال ۱۱.۲۵ تا سوال ۱۱.۲۸ میں دیے گئے نقطہ پر منحنی کے مماسی اکائی سمتیات اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔ منحنی اور اکائی سمتیات کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ (سمتیات کی تعداد چار ہو گی۔)

سوال ۱۱.۲۵: $y = x^2, \quad (2,4)$

سوال ۱۱.۲۶: $x^2 + 2y^2 = 6, \quad (2,1)$

سوال ۱۱.۲۷: $y = \tan^{-1} x, \quad (1, \frac{\pi}{4})$

سوال ۱۱.۲۸: $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (0,1)$

سوال ۱۱.۲۹ تا سوال ۱۱.۳۲ میں دیے گئے نقطہ پر منحنی کے مماسی اور عمودی اکائی سمتیات تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۲۹: $3x^2 + 8xy + 2y^2 - 3 = 0, \quad (1,0)$

سوال ۱۱.۳۰: $x^2 - 6xy + 8y^2 - 2x - 1 = 0, \quad (1,1)$

سوال ۱۱.۳۱: $y = \int_0^x \sqrt{3 + t^4}\, \mathrm{d}t, \quad (0,0)$

سوال ۱۱.۳۲: $y = \int_e^x \ln(\ln t)\, \mathrm{d}t, \quad (e,0)$

لمبائی اور رخ

سوال ۱۱.۳۳ اور سوال ۱۱.۳۴ میں دیے سمتیہ کو لمبائی ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

سوال ۱۱.۳۳: $5\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j}$

سوال ۱۱.۳۴: $2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$

سوال ۱۱.۳۵: سمتیہ $3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ کے متوازی دو اکائی سمتیات دریافت کریں۔

سوال ۱۱.۳۶: سمتیہ $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ کے مخالف رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 2 ہو۔ ایسے کتنے سمتیات ممکن ہیں؟

سوال ۱۱.۳۷: دکھائیں کہ $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ ایک دوسرے کے مخالف رخ ہیں۔ دونوں کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۱.۳۸: دکھائیں کہ $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{B} = \frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ کے رخ ایک دوسرے جیسے ہیں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۱.۳۹: آپ ایک ریڑھی کو قوت $\boldsymbol{F}$ سے کھینچ رہے ہیں جس کی مقدار $|\boldsymbol{F}| = 10\,\mathrm{N}$ ہے۔ زمین کے ساتھ قوت کا زاویہ 30° ہے۔ اس قوت کے x اور y اجزاء تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۴۰: پتنگ کی ڈوری آپ کو زمین کے ساتھ 45° زاویہ پر $5\,\mathrm{N}$ قوت سے کھینچتی ہے۔ اس قوت کے افقی اور انتصابی اجزاء تلاش کریں۔

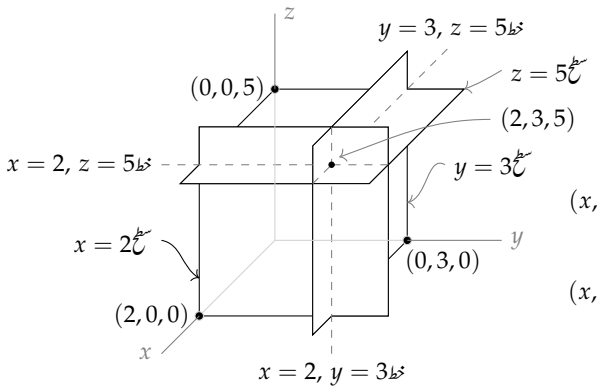
سوال ۱۱.۴۱: سمتیہ $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ دیے گئے ہیں۔ ایسے غیر سمتیات α اور β کہ $\boldsymbol{A} = \alpha\boldsymbol{B} + \beta\boldsymbol{C}$ ہو۔

سوال ۱۱.۴۲: سمتیات $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ دیے گئے ہیں۔ سمتیہ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2$ لکھیں جہاں $\boldsymbol{A}_1$ سمتیہ $\boldsymbol{B}$ کے متوازی اور $\boldsymbol{A}_2$ سمتیہ $\boldsymbol{C}$ کے متوازی ہے۔ (سوال ۱۱.۴۱ دیکھیں۔)

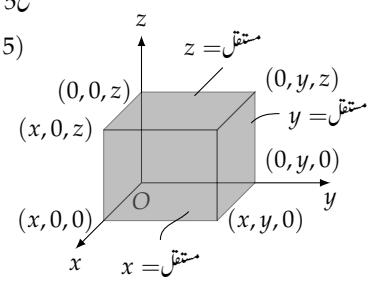
سوال ۱۱.۴۳: ایک پرندہ اپنے گھونسلے سے اڑ کر، مشرق سے شمال کی طرف 60° پر 5 کلومیٹر دور ایک درخت پر آرام کے لیے بیٹھتا ہے۔ اس کے بعد یہ جنوب مشرق رخ 10 کلومیٹر دور ایک کھنبے پر اڑ کر بیٹھتا ہے۔ مستوی xy کے مبدا پر گھونسلا، مثبت محور x پر مشرق اور مثبت محور y پر شمال رکھ (ا) درخت کا مقام تلاش کریں۔ (ب) کھنبے کا مقام تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۴۴: ایک پرندہ اپنے گھونسلے سے اڑ کر، شمال مشرق رخ 7 کلومیٹر دور ایک درخت پر آرام کرتا ہے۔ اس کے بعد یہ مغرب سے 30° زاویہ جنوب کے رخ 8 کلومیٹر دور ایک کھنبے پر اڑ کر بیٹھتا ہے۔ مستوی xy کے مبدا پر گھونسلا، مثبت محور x پر مشرق اور مثبت محور y پر شمال رکھ (ا) درخت کا مقام تلاش کریں۔ (ب) کھنبے کا مقام تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۴۵: مستوی میں $\boldsymbol{v}$ ایک سمتیہ ہے جو محور y کے متوازی نہیں ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا ڈھلوان اور سمتیہ $-\boldsymbol{v}$ کا ڈھلوان کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔



شکل ۱۱.۱۹: سطح $x = 2$ ، $y = 3$ اور $z = 5$ نقطہ $(2,3,5)$ سے گزرتی تین خط تعین کرتے ہیں۔



شکل ۱۱.۱۸: دایاں ہاتھ کارتیسی نظام۔

۱۱.۲ کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات

ہم اب سہ بُعدی کارتیسی محدد بیان کرتے ہیں اور فضا میں اپنا راستہ تلاش کرنا سیکھتے ہیں۔ ہم فاصلہ کی تعریف جانیں گے، فضا میں سمتیات کے ساتھ کام کرنا (مستوی کے قواعد اب بھی لاگو ہوں گے، پس اب ایک محدد بڑھ جائے گا)، اور نقطوں کے سلسلہ کی مساوات اور عدم مساوات کے ساتھ تعلق سیکھیں گے۔

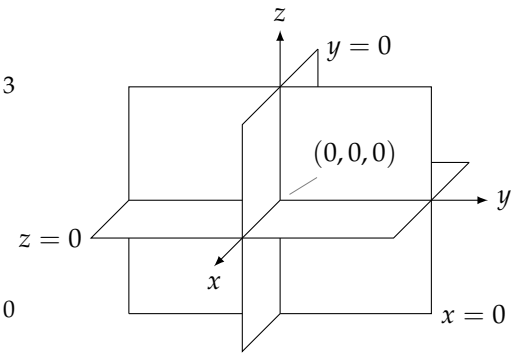
کارتیسی محدد

فضا میں نقطہ کی تلاش کے لیے تین آپس میں عمودی محددی محور استعمال کیے جاتے ہیں۔ شکل ۱۱.۱۸ میں محور Ox ، Oy اور Oz دایاں ہاتھ محددی نظام دیتے ہیں۔ دائیں ہاتھ کے نظام میں، انگوٹھے کو باقی انگلیوں کے ساتھ زاویہ قائمہ پر رکھتے ہوئے، اگر آپ اپنے دائیں ہاتھ کی چار انگلیوں کو مثبت محور x پر رکھ کر انہیں مثبت محور y کی جانب موڑیں تب آپ کا انگوٹھا مثبت محور z پر ہو گا۔

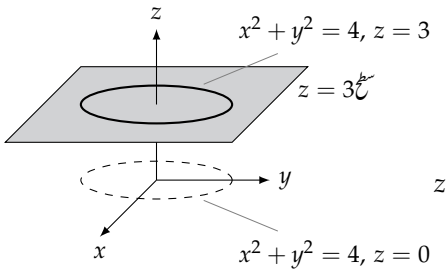
فضا میں نقطہ N سے گزرتی، محوروں کے قائمہ سطحیں ان محور کو اعداد (x,y,z) پر قطع کریں گی۔ یہی اعداد نقطہ N کے کارتیسی محدد ہوں گے۔

محور x پر نقطوں کے y اور z محدد صفر ہوں گے لہٰذا ان کے محدد کی صورت $(x,0,0)$ ہو گی۔ اسی طرح محور y پر نقطوں کے x اور z محدد صفر ہوں گے لہٰذا ان نقطوں کے محدد کی صورت $(0,y,0)$ ہو گی۔ محور z پر نقطوں کے x اور y محدد صفر ہوں گے لہٰذا ان کے محددی کی صورت $(0,0,z)$ ہو گی۔

محور x کے عمودی سطح پر تمام نقطوں کا x محدد وہی ہو گا جس x محدد پر یہ سطح محور x کو قطع کرتا ہے۔ اس سطح پر نقطوں کے y اور z محدد کچھ بھی ہو سکتے ہیں۔ اسی طرح محور y کے عمودی سطح پر تمام نقطوں کا مشترک y محدد ہو گا اور محور z کے عمودی سطح پر تمام نقطوں کا مشترک z محدد ہو گا۔ ان سطحوں کی مساوات لکھتے ہوئے ہم اس مشترکہ محدد کی قیمت لکھتے ہیں۔ یوں مستوی $x = 2$ محور x کو عمودی ہے اور یہ مستوی محور x کو نقطہ $x = 2$ پر قطع کرتا ہے۔ مستوی $y = 3$ محور y کو عمودی ہے اور اس کو نقطہ $y = 3$ پر قطع کرتا ہے۔ مستوی $z = 5$ محور z کو عمودی ہے اور اس محور کو نقطہ $z = 5$ پر قطع کرتا ہے۔ شکل ۱۱.۱۹ میں مستوی $x = 2$ ، $y = 3$ اور $z = 5$ دکھائے گئے ہیں۔ ان کا مشترک نقطہ بھی دکھایا گیا ہے



شکل ۱۱.۲۰: سطح $x = 0$ ، $y = 0$ اور $z = 0$ فضا کو آٹھ ثمن میں تقسیم کرتے ہیں۔



شکل ۱۱.۲۱: بلند دائرہ (مثال ۱۱.۱۰)

۱۸۰۵۸ جہاں یہ تینوں ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

۱۸۰۵۹ مستوی $x = 2$ اور $y = 3$ ایک دوسرے کو ایک لکیر پر قطع کرتے ہیں (شکل ۱۱.۱۹) جو محور z کے متوازی ہے۔ اس لکیر کو جوڑی مساوات $x =$
۱۸۰۶۰ 2 ، $y = 3$ ظاہر کرتے ہیں۔ نقطہ (x, y, z) صرف اور صرف اس صورت اس لکیر پر پایا جائے گا جب $x = 2$ اور $y = 3$ ہوں۔ اسی طرح
۱۸۰۶۱ مستوی $y = 3$ اور $z = 5$ ایک لکیر پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور اس لکیر کو جوڑی مساوات $y = 3$ ، $z = 5$ ظاہر کرتے ہیں۔ یہ
۱۸۰۶۲ لکیر محور x کے متوازی ہو گی۔ مستوی $x = 2$ اور $z = 5$ ایک لکیر پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اور اس لکیر کو جوڑی مساوات $x = 2$ ،
۱۸۰۶۳ $z = 5$ ظاہر کرتے ہیں۔ یہ لکیر محور y کے متوازی ہو گی۔

۱۸۰۶۴ محددی محوروں کے بیچ **مستوی** xy [۱۲] جس کی معیاری مساوات $z = 0$ ؛ **مستوی** yz جس کی معیاری مساوات $x = 0$ ؛ اور **مستوی** xz
۱۸۰۶۵ جس کی معیاری مساوات $y = 0$ ہے پائی جاتی ہیں۔ یہ تینوں مستوی مبدا $(0,0,0)$ پر آپس میں ملتے ہیں (شکل ۱۱.۲۰)۔

۱۸۰۶۶ تین **محددی مستوی** [۱۳] $x = 0$ ، $y = 0$ اور $z = 0$ فضا کو آٹھ حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جنہیں **ثمن** [۱۴] کہتے ہیں۔ وہ ثمن جس میں تمام
۱۸۰۶۷ محدد مثبت ہیں **پہلا ثمن** [۱۵] کہلاتا ہے۔ باقی سات ثمن کو نام دینے کا کوئی روایتی طریقہ نہیں پایا جاتا ہے۔

۱۸۰۶۸ چونکہ فضا کے کارتیسی محدد ایک دوسرے کو زاویہ قائمہ پر ملتے ہیں لہذا ان محدد کو **مستطیل محدد** [۱۶] بھی کہتے ہیں۔

۱۸۰۶۹ درج ذیل مثال میں ہم مساواتوں اور عدم مساواتوں کا خلا میں ہم پلہ نقطے تلاش کرتے ہیں۔

۱۸۰۷۰ مثال ۱۱.۹:

---

[۱۲] xy-plane
[۱۳] coordinateplanes
[۱۴] octant
[۱۵] firstoctant
[۱۶] rectangularcoordinates

مساوات اور عدم مساوات	تفصیل
$z \geq 0$	مستوی xy میں اور اس سے اوپر نصف فضا میں تمام نقطے۔
$x = -3$	مستوی x کو نقطہ $x = -3$ پر عمودی سطح۔ یہ سطح yz مستوی کے متوازی اور 3 اکائیاں اس کے پیچھے ہے۔
۱۸۰۷۱ $z = 0,\ x \leq 0,\ y \geq 0$	مستوی xy کا ربع دوم۔
$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$	پہلا ثمن۔
$-1 \leq y \leq 1$	سطح $y = -1$ اور $y = 1$ کے بیچ پٹی بشمول ان سطحوں کے۔
$y = -2,\ z = 2$	وہ خط جس میں سطح $y = -2$ اور سطح $z = 2$ ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں، یا وہ خط جو نقطہ $(0, -2, 2)$ سے گزرتا ہے اور محور x کے متوازی ہے۔

۱۸۰۷۲ □

۱۸۰۷۳ مثال ۱۱.۱۰: کون سے نقاط $N(x, y, z)$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتے ہیں؟

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{اور} \quad z = 3$$

۱۸۰۷۴ **حل**

۱۸۰۷۵ یہ نقطے افقی سطح $z = 3$ میں پائے جاتے ہیں اور اس سطح میں یہ دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ بناتے ہیں۔ ہم ان نقطوں کو "سطح $z = 3$ میں دائرہ
۱۸۰۷۶ $x^2 + y^2 = 4$" یا مختصراً "دائرہ $x^2 + y^2 = 4,\ z = 3$" کہتے ہیں (شکل ۱۱.۲۱)۔ □

۱۸۰۷۷ **فضا میں سمتیات**

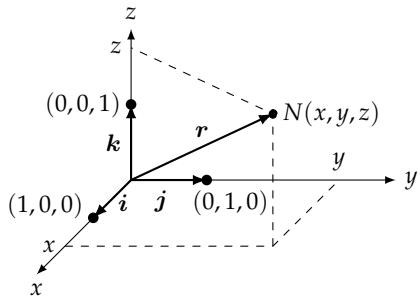
۱۸۰۷۸ سمت بند خطوط کا سلسلہ جو قوت، ہٹاو، اور سمتی رفتار ظاہر کرتے ہوں سمتیات کہلاتے ہیں، جیسے یہ مستوی میں کہلائے جاتے ہیں۔ سمتی مجموعہ، سمتی تفریق اور
۱۸۰۷۹ غیر سمتی ضرب کے وہی قواعد یہاں بھی کارآمد ہوں گے۔

۱۸۰۸۰ مبدا سے نقاط $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ اور $(0, 0, 1)$ تک سمت بند خطوط **اساسی سمتیات** ہیں (شکل ۱۱.۲۲) جنہیں بالترتیب $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$
۱۸۰۸۱ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مبدا O سے عمومی نقطہ $N(x, y, z)$ تک **تعین گر سمتیہ**[۱۷] $\boldsymbol{r}$ درج ذیل ہوگا۔

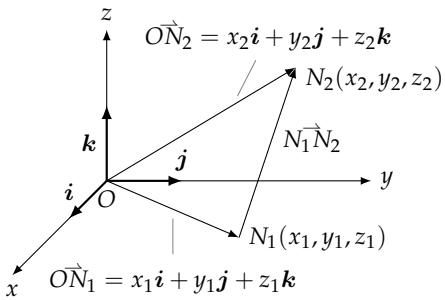
$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{ON} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \tag{1}$$

۱۸۰۸۲ تعریف: **فضا میں سمتیات کا مجموعہ اور تفریق**

[۱۷] positionvector



شکل ۱۱.۲۲: فضا میں نقطے کا تعین گر سمتیہ۔



شکل ۱۱.۲۳: دو نقطوں کے بیچ سمتیہ۔

۱۸۰۸۳ کسی بھی سمتیات $\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$ کے لیے درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} &= (a_1 + b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 + b_2)\boldsymbol{j} + (a_3 + b_3)\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} &= (a_1 - b_1)\boldsymbol{i} + (a_2 - b_2)\boldsymbol{j} + (a_3 - b_3)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

۱۸۰۸۴ □

۱۸۰۸۵ **دو نقاط کے بیچ سمتیہ**

۱۸۰۸۶ ہم نقاط $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کے بیچ سمتیہ $\overrightarrow{N_1N_2}$ کو

$$\begin{aligned}\overrightarrow{N_1N_2} &= \overrightarrow{ON_1} - \overrightarrow{ON_2}\\ &= (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k})\\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

۱۸۰۸۷ لکھ سکتے ہیں جو N_1 اور N_2 کے محدد کی صورت میں ہے (شکل ۱۱.۲۳)۔

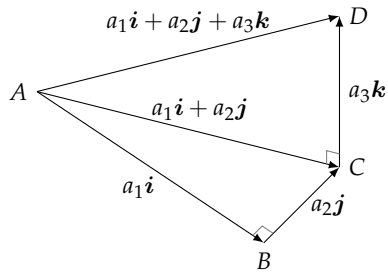
۱۸۰۸۸ یوں نقطہ $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N2(x_2, y_2, z_2)$ کے بیچ سمتیہ درج ذیل ہوگا۔

$$\overrightarrow{N_1N_2} = = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k} \tag{۲}$$

۱۸۰۸۹ **مقدار**

۱۸۰۹۰ جیسا ہم جانتے ہیں، سمتیہ کی مقدار اور سمت اس کے اہم خصوصیات ہیں۔ ہم مسئلہ فیثا غورث کی مدد سے شکل ۱۱.۲۴ میں سمتیہ $a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$
۱۸۰۹۱ کی مقدار (لمبائی) کا کلیہ تلاش کرتے ہیں۔ مثلث ABC سے

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$



شکل ۱۱.۲۴: قائمہ مثلث ABC اور ACD پر مسئلہ فیثاغورث کے اطلاق سے $\overrightarrow{AD}$ کی لمبائی حاصل ہوتی ہے۔

۱۸۰۹۲ ہوگا لہٰذا مثلث ACD سے

$$|a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}| = \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\left|\overrightarrow{CD}\right|^2} = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

۱۸۰۹۳ ہوگا۔

۱۸۰۹۴ یوں $\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ کی مقدار (لمبائی) درج ذیل ہوگی۔

$$|\boldsymbol{A}| = |a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{۳}$$

۱۸۰۹۵ **غیر سمتی ضرب**

۱۸۰۹۶ تعریف: اگر c غیر سمتی اور $\boldsymbol{A}$ ایک سمتیہ ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$c\boldsymbol{A} = (ca_1)\boldsymbol{i}+(ca_2)\boldsymbol{j}+(ca_3)\boldsymbol{k}$$

۱۸۰۹۷ □

۱۸۰۹۸ مثال ۱۱.۱۱: سمتیہ $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ کی لمبائی درج ذیل ہے۔

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{(1)^2+(-2)^2+(3)^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$$

۱۸۰۹۹ □

۱۸۱۰۰ اگر ہم سمتیہ $\boldsymbol{A}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$ کو غیر سمتی c سے ضرب دیں تب، مستوی میں غیر سمتی ضرب کی طرح اور انہیں وجوہات کی بنا، $c\boldsymbol{A}$

۱۸۱۰۱ کی لمبائی $|c|$ ضرب $\boldsymbol{A}$ کی لمبائی ہو گی:

$$
\begin{aligned}
c\boldsymbol{A} &= ca_1\boldsymbol{i} + ca_2\boldsymbol{j} + ca_3\boldsymbol{k} \\
|c\boldsymbol{A}| &= \sqrt{(ca_1)^2 + (ca_2)^2 + (ca_3)^2} = \sqrt{c^2a_1^2 + c^2a_2^2 + c^2a_3^2} \\
&= |c|\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = |c||\boldsymbol{A}|
\end{aligned} \tag{۴}
$$

۱۸۱۰۲ مثال ۱۱.۱۲: سمتیہ $\boldsymbol{A}$ مثال ۱۱.۱۱ میں دیا گیا ہے۔ یوں

$$2\boldsymbol{A} = 2(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$$

۱۸۱۰۳ کی لمبائی درج ذیل ہو گی:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{(2)^2 + (-4)^2 + (6)^2} &= \sqrt{4 + 16 + 36} = \sqrt{56} \\
&= \sqrt{4 \cdot 14} = 2\sqrt{14} = 2|\boldsymbol{A}|
\end{aligned}
$$

۱۸۱۰۴ □

۱۸۱۰۵ **صفر سمتیہ**

۱۸۱۰۶ فضا میں **صفر سمتیہ** سے مراد سمتیہ $\boldsymbol{0} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$ ہے۔ مستوی میں صفر سمتیہ کی طرح فضا میں $\boldsymbol{0}$ کی لمبائی صفر ہو گی اور اس کا کوئی رخ
۱۸۱۰۷ نہیں ہو گا۔

۱۸۱۰۸ **اکائی سمتیات**

۱۸۱۰۹ فضا میں اکائی سمتیہ کی لمبائی 1 ہو گی۔ اساسی سمتیات درج ذیل کی وجہ سے اکائی سمتیات ہیں۔

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{i}| &= |1\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1 \\
|\boldsymbol{j}| &= |0\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1 \\
|\boldsymbol{k}| &= |0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1
\end{aligned}
$$

۱۸۱۱۰ **مقدار اور رخ**

۱۸۱۱۱ اگر $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$ ہو تب $\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$ ایک اکائی سمتیہ ہو گا جس کا رخ وہی ہو گا جو $\boldsymbol{A}$ کا رخ ہے۔ یوں ہم $\boldsymbol{A}$ کو اس کی مقدار ضرب رخ کی صورت میں درج ذیل
۱۸۱۱۲ لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = |\boldsymbol{A}| \cdot \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} \tag{۵}$$

۱۸۱۳ مثال ۱۱.۱۳: سمتیہ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ کو اس کی مقدار ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

۱۸۱۴ **حل**

۱۸۱۵

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= |\boldsymbol{A}| \cdot \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} && \text{مساوات ۵} \\
&= \sqrt{14} \cdot \frac{\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}}{\sqrt{14}} && \text{مثال ۱۱.۱۱} \\
&= \sqrt{14}\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{i} - \frac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{k}\right) = (\ \boldsymbol{A}\ \text{لمبائی}) \cdot (\ \boldsymbol{A}\ \text{رخ})
\end{aligned}$$

۱۸۱۶ □

۱۸۱۷ مثال ۱۱.۱۴: نقطہ $N_1(1,0,1)$ سے نقطہ $N_2(3,2,0)$ تک سمتیہ کے رخ میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ تلاش کریں۔

۱۸۱۸ **حل**

۱۸۱۹ ہم $\overrightarrow{N_1N_2}$ کو اس کی لمبائی سے تقسیم کر کے $\boldsymbol{u}$ حاصل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{N_1N_2} &= (3-1)\boldsymbol{i} + (2-0)\boldsymbol{j} + (0-1)\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \\
\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right| &= \sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3 \\
\boldsymbol{u} &= \frac{\overrightarrow{N_1N_2}}{\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right|} = \frac{2\boldsymbol{i} + 2a\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}{3} = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\boldsymbol{j} - \frac{1}{3}\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

۱۸۲۰ □

۱۸۲۱ مثال ۱۱.۱۵: سمتیہ $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ کے رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 6 ہو۔

۱۸۲۲ **حل**

۱۸۲۳ ہم اس سمتیہ کے رخ اکائی سمتیہ کو 6 سے ضرب کر کے جواب حاصل کرتے ہیں:

$$6\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = 6\,\frac{2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = 6\,\frac{2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}}{3} = 4\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$$

۱۸۲۴ □

۱۸۲۵ **فضا میں فاصلہ**

۱۸۲۶ فضا میں نقاط N_1 اور N_2 کے بیچ فاصلہ، سمتیہ $\overrightarrow{N_1N_2}$ کی لمبائی $\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right|$ ہو گی۔

۱۸۱۲۷ **نقاط $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہو گا۔**

$$\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \tag{۶}$$

۱۸۱۲۸ مثال ۱۱.۱۶: نقاط $N_1(2, 1, 5)$ اور $N_2(-2, 3, 0)$ کے بیچ فاصلہ درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{N_1N_2}\right| &= \sqrt{(-2-2)^2 + (3-1)^2 + (0-5)^2}\\ &= \sqrt{16+4+25}\\ &= \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\end{aligned}$$

۱۸۱۲۹ □

۱۸۱۳۰ کرہ

۱۸۱۳۱ ہم مساوات ۶ استعمال کر کے اس کرہ کی مساوات لکھتے ہیں جس کا مرکز $N_0(x_0, y_0, z_0)$ اور رداس a ہو۔ نقطہ $N(x, y, z)$ اس صورت اس
۱۸۱۳۲ کرہ پر پایا جائے گا جب $\left|\overrightarrow{N_0N_1}\right| = a$ ہو یعنی:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$$

۱۸۱۳۳ **ایک کرہ جس کا مرکز (x_0, y_0, z_0) اور رداس a ہو کی معیاری مساوات درج ذیل ہے۔**

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2 \tag{۷}$$

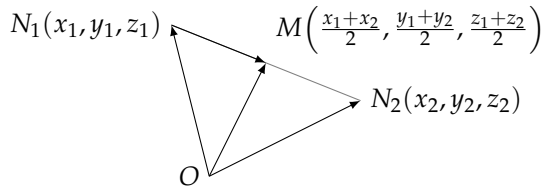
۱۸۱۳۴ مثال ۱۱.۱۷: درج ذیل کرہ کا مرکز اور رداس تلاش کریں۔

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 = 0$$

۱۸۱۳۵ **حل**

۱۸۱۳۶ ہم مستوی میں دائرے کا مرکز اور رداس حاصل کرنے کی طرح یہاں بھی x ، y اور z کے مربع مکمل کر کے معیاری مساوات کے ساتھ موازنہ کر کے
۱۸۱۳۷ مرکز اور رداس دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4z + 1 &= 0\\ (x^2 + 3x \quad) + y^2 + (z^2 - 4z \quad) &= -1\\ \left(x^2 + 3x + (\tfrac{3}{2})^2\right) + y^2 + \left(z^2 - 4z + (-\tfrac{4}{2})^2\right) &= -1 + (\tfrac{3}{2})^2 + (-\tfrac{4}{2})^2\\ (x + \tfrac{3}{2})^2 + y^2 + (z - 2)^2 &= -1 + \tfrac{9}{4} + 4 = \tfrac{21}{4}\end{aligned}$$



شکل ۱۱.۲۵: نقاط N_1 اور N_2 کے محدد کی اوسط قطعہ N_1N_2 کے وسطی نقطہ کے محدد ہوں گے۔

۱۸۳۸ یہ مساوات ۷ ہے لہٰذا $x_0 = -\frac{3}{2}$ ، $y_0 = 0$ ، $z_0 = 2$ اور $a = \frac{\sqrt{21}}{2}$ ہیں۔ یوں مرکز $\left(-\frac{3}{2}, 0, 2\right)$ اور رداس $\frac{\sqrt{21}}{2}$ ہوگا۔

۱۸۳۹ □

۱۸۴۰ مثال ۱۱.۱۸:

مساوات اور عدم مساوات	تفصیل
$x^2 + y^2 + z^2 < 4$	کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کا اندرون۔
$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$	سطح $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ اور اس کے اندرون پر مشتمل ٹھوس کرہ یا کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ میں محدود گیند۔
$x^2 + y^2 + z^2 > 4$	کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کا بیرون۔
$x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \leq 0$	کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کا نچلا نصف حصہ۔

۱۸۴۱ □

۱۸۴۲ وسطی نقاط

۱۸۴۳ کسی بھی قطعہ کا وسطی نقطہ اوسط کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔ نقطہ $N_1(x_1, y_1, z_1)$ اور $N_2(x_2, y_2, z_2)$ کا وسطی نقطہ درج ذیل ہوگا۔

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

۱۸۴۴ اس کی وجہ درج ذیل ہے (شکل ۱۱.۲۵)۔

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{ON}_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{N_1N_2} = \overrightarrow{ON}_1 + \frac{1}{2}(\overrightarrow{ON}_2 - \overrightarrow{ON}_1) \\
&= \frac{1}{2}(\overrightarrow{ON}_1 + \overrightarrow{ON}_2) \\
&= \frac{x_1 + x_2}{2}\boldsymbol{i} + \frac{y_1 + y_2}{2}\boldsymbol{j} + \frac{z_1 + z_2}{2}\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

مثال ۱۱.۱۹: نقطہ $N_1(3,-2,0)$ اور $N_2(7,4,4,)$ کو ملانے والی قطعہ کا وسطی نقطہ درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{3+7}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (5,1,2)$$

□

سوالات

سلسلہ، مساوات اور عدم مساوات

سوال ۱۱.۴۶ تا سوال ۱۱.۵۷ میں ان نقطوں کے سلسلہ کی جیومیٹریائی تفصیل بیان کریں جو دی گئی جوڑی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۱۱.۴۶: $x = 2, \quad y = 3$

سوال ۱۱.۴۷: $x = -1, \quad z = 0$

سوال ۱۱.۴۸: $y = 0, \quad z = 0$

سوال ۱۱.۴۹: $x = 1, \quad y = 0$

سوال ۱۱.۵۰: $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$

سوال ۱۱.۵۱: $x^2 + y^2 = 4, \quad z = -2$

سوال ۱۱.۵۲: $x^2 + z^2 = 4, \quad y = 0$

سوال ۱۱.۵۳: $y^2 + z^2 = 1, \quad x = 0$

سوال ۱۱.۵۴: $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x = 0$

سوال ۱۱.۵۵: $x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad y = -4$

سوال ۱۱.۵۶: $x^2 + y^2 + (z+3)^2 = 25, \quad z = 0$

سوال ۱۱.۵۷: $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4, \quad y = 0$

سوال ۱۱.۵۸ تا سوال ۱۱.۶۳ میں ان نقاط کے سلسلہ کو جیومیٹریائی بیان کریں جو دی گئی عدم مساوات یا مساوات اور عدم مساوات کی جوڑی کو مطمئن کرتے ہیں۔

سوال ۱۱.۵۸: (ا) $x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z = 0$ (ب) $x \geq 0, \quad y \leq 0, \quad z = 0$

سوال ۱۱.۵۹:

ا. $0 \leq x \leq 1$

ب. $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1$

ج. $0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$

سوال ۱۱.۶۰:

ا. $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$

ب. $x^2 + y^2 + z^2 > 1$

سوال ۱۱.۶۱: (ا) $x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 0$ (ب) $x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 3$ (ج) $x^2 + y^2 \leq 1$، جہاں z پر کوئی شرط لاگو نہیں ہے۔

سوال ۱۱.۶۲: (ا) $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$ (ب) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0$

سوال ۱۱.۶۳: (ا) $x = y,\ z = 0$ (ب) $x = y$، جہاں z پر کوئی شور لاگو نہیں ہے۔

سوال ۱۱.۶۴ تا سوال ۱۱.۷۳ میں دیے گئے سلسلہ کو ایک مساوات یا جوڑی مساوات سے ظاہر کریں۔

سوال ۱۱.۶۴: وہ مستوی جو (ا) نقطہ $(3,0,0)$ پر محور x، (ب) نقطہ $(0,-1,0)$ پر محور y، (ج) نقطہ $(0,0,-2)$ پر محور z کو عمودی ہے۔

سوال ۱۱.۶۵: ایک مستوی جو نقطہ $(3,-1,2)$ پر (ا) محور x، (ب) محور y، (ج) محور z کو عمودی ہے۔

سوال ۱۱.۶۶: ایک مستوی جو نقطہ $(3,-1,1)$ پر (ا) مستوی xy، (ب) مستوی yz، (ج) مستوی xz کے متوازی ہے۔

سوال ۱۱.۶۷: وہ دائرہ جس کا رداس 2 اور مرکز $(0,0,0)$ ہو اور جو (ا) مستوی xy، (ب) مستوی yz، (ج) مستوی xz میں پایا جاتا ہو۔

سوال ۱۱.۶۸: وہ دائرہ جس کا رداس 2 اور مرکز $(0,2,0)$ ہو اور جو (ا) مستوی xy، (ب) مستوی yz، (ج) مستوی $y = 2$ میں پایا جاتا ہو۔

سوال ۱۱.۶۹: وہ دائرہ جس کا رداس 1 اور مرکز $(-3,4,1)$ ہو اور جو (ا) مستوی xy، (ب) مستوی yz، (ج) مستوی xz کے متوازی سطح میں پایا جاتا ہو۔

سوال ۱۱.۷۰: نقطہ $(1,3,-1)$ سے گزرتا خط جو (ا) محور x، (ب) محور y، (ج) محور z کے متوازی ہو۔

سوال ۱۱.۷۱: فضا میں وہ نقطے معلوم کریں جن کا فاصلہ مبدا اور نقطہ $(0,2,0)$ سے یکساں ہو۔

سوال ۱۱.۷۲: وہ دائرہ معلوم کریں جس میں نقطہ $(1,1,3)$ سے گزرتا ہوا ایسا مستوی جو محور z کے عمودی ہو ایک ایسے دائرہ کو جا ملتا ہو جس کا رداس 5 اور مرکز $(0,0,0)$ ہو۔

سوال ۱۱.۷۳: فضا میں ان نقطوں کا سلسلہ جن کا فاصلہ $(0,0,1)$ سے 2 اور $(0,0,-1)$ سے 2 ہو۔

سوال ۱۱.۷۴ تا سوال ۱۱.۷۹ میں دیے سلسلہ کی عدم مساوات پیش کریں۔

سوال ۱۱.۷۴: سطح $z = 0$ اور $z = 1$ کے بیچ پٹی بشمول ان سطحوں کے۔

سوال ۱۱.۷۵: پہلے ثمن میں محددی سطحوں اور سطحوں $x = 2$، $y = 2$ اور $z = 2$ میں محدود ٹھوس مکعب۔

سوال ۱۱.۷۶: نصف فضا جو مستوی xy اور اس کے نیچے نقطوں پر مشتمل ہے۔

سوال ۱۱.۷۷: رداس 1 کا کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہو کا بالائی نصف حصہ۔

سوال ۱۱.۷۸: رداس 1 کا کرہ جس کا مرکز $(1,1,1)$ ہو کا (ا) اندرون، (ب) بیرون۔

سوال ۱۱.۷۹: رداس 1 اور 2 کے کرہ جن کے مراکز مبدا پر ہوں میں بند خطہ۔ (بند خطہ سے مراد ہے کہ کرہ کی سطحیں بھی اس خطہ میں شامل ہوں گی۔ کروی سطحوں کو شامل نہ کرنے کے لیے ہم آزاد خطے کی اصطلاح استعمال کرتے ہیں۔)

لمبائی اور رخ

سوال ۱۱.۸۰ تا سوال ۱۱.۸۹ میں دیے سمتیہ کو اس کی لمبائی ضرب رخ کی صورت میں لکھیں۔

سوال ۱۱.۸۰: $2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$

سوال ۱۱.۸۱: $3\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

سوال ۱۱.۸۲: $\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-8\boldsymbol{k}$

سوال ۱۱.۸۳: $9\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$

سوال ۱۱.۸۴: $5\boldsymbol{k}$

سوال ۱۱.۸۵: $-4\boldsymbol{j}$

سوال ۱۱.۸۶: $\frac{3}{5}\boldsymbol{i}+\frac{4}{5}\boldsymbol{k}$

سوال ۱۱.۸۷: $\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$

سوال ۱۱.۸۸: $\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$

سوال ۱۱.۸۹: $\frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{3}}+\frac{\boldsymbol{j}}{\sqrt{3}}+\frac{\boldsymbol{k}}{\sqrt{3}}$

سوال ۱۱.۹۰: سمتیات کی لمبائیاں اور رخ دیے گئے ہیں۔ ان سمتیات کو تلاش کریں۔ کوشش کریں کہ حساب زبانی کریں۔

شمار	لمبائی	رخ
(ا)	2	$\boldsymbol{i}$
(ب)	$\sqrt{3}$	$-\boldsymbol{k}$
(ج)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}\boldsymbol{j}+\frac{4}{5}\boldsymbol{k}$
(د)	7	$\frac{6}{7}\boldsymbol{i}-\frac{2}{7}\boldsymbol{j}+\frac{3}{7}\boldsymbol{k}$

سوال ۱۱.۹۱: سمتیات کی لمبائیاں اور رخ دیے گئے ہیں۔ ان سمتیات کو تلاش کریں۔ کوشش کریں کہ حساب زبانی کریں۔

شمار	لمبائی	رخ
(ا)	7	$-\boldsymbol{j}$
(ب)	$\sqrt{2}$	$-\frac{3}{5}\boldsymbol{i}-\frac{4}{5}\boldsymbol{k}$
(ج)	$\frac{13}{12}$	$\frac{3}{13}\boldsymbol{i}-\frac{4}{13}\boldsymbol{j}-\frac{12}{13}\boldsymbol{k}$
(د)	$a>0$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$

سوال ۱۱.۹۲: سمتیہ $\boldsymbol{A}=12\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{k}$ کے رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 7 ہو۔

سوال ۱۱.۹۳: سمتیہ $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ کے رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی $\sqrt{5}$ ہو۔

سوال ۱۱.۹۴: سمتیہ $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$ کے مخالف رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 5 ہو۔

سوال ۱۱.۹۵: سمتیہ $\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}\boldsymbol{j}-\frac{1}{2}\boldsymbol{k}$ کے مخالف رخ ایسا سمتیہ تلاش کریں جس کی لمبائی 3 ہو۔

سمتیات کا تعین بذریعہ نقاط، وسطی نقاط اور فاصلہ

سوال ۱۱.۹۶ تا سوال ۱۱.۱۰۱ میں درج ذیل معلوم کریں۔

ا. نقاط N_1 اور N_2 کے بیچ فاصلہ،

ب. رخ $\overrightarrow{N_1N_2}$ ،

ج. قطعہ N_1N_2 کا وسطی نقطہ۔

سوال ۱۱.۹۶: $N_1(1,1,1),\quad N_2(3,3,0)$

سوال ۱۱.۹۷: $N_1(-1,1,5),\quad N_2(2,5,0)$

سوال ۱۱.۹۸: $N_1(1,4,5),\quad N_2(4,-2,7)$

سوال ۱۱.۹۹: $N_1(3,4,5),\quad N_2(2,3,4)$

سوال ۱۱.۱۰۰: $N_1(0,0,0),\quad N_2(2,-2,-2)$

سوال ۱۱.۱۰۱: $N_1(5,3,-2),\quad N_2(0,0,0)$

سوال ۱۱.۱۰۲: اگر $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ اور B نقطہ $(5,1,3)$ ہو تب نقطہ A تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۱۰۳: اگر $\overrightarrow{AB}=-7\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$ اور A نقطہ $(-2,-3,6)$ ہو تب نقطہ B تلاش کریں۔

کرہ

سوال ۱۱.۱۰۴ تا سوال ۱۱.۱۰۷ میں کرہ کے رداس اور مراکز تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۱۰۴: $(x+2)^2+y^2+(z-2)^2=8$

سوال ۱۱.۱۰۵: $(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2+(z+\frac{1}{2})^2=\frac{21}{4}$

سوال ۱۱.۱۰۶: $(x-\sqrt{2})^2+(y-\sqrt{2})^2+(z+\sqrt{2})^2=2$

سوال ۱۱.۱۰۷: $x^2+(y+\frac{1}{3})^2+(z-\frac{1}{3})^2=\frac{29}{9}$

سوال ۱۱.۱۰۸ تا سوال ۱۱.۱۱۱ میں کرہ کے رداس اور مراکز دیے گئے ہیں۔ ان کرہ کی مساوات حاصل کریں۔

سوال ۱۱.۱۰۸: رداس $\sqrt{14}$ ، مرکز $(1,2,3)$

سوال ۱۱.۱۰۹: رداس 2 ، مرکز $(0,-1,5)$

سوال ۱۱.۱۱۰: رداس $\sqrt{3}$ ، مرکز $(-2,0,0)$

سوال ۱۱.۱۱۱: رداس 7 ، مرکز $(0,-7,0)$

سوال ۱۱.۱۱۲ تا سوال ۱۱.۱۱۵ میں دیے کرہ کے رداس اور مراکز دریافت کریں۔

سوال ۱۱.۱۱۲: $x^2+y^2+z^2+4x-4z=0$

سوال ۱۱.۱۱۳: $x^2+y^2+z^2-6y+8z=0$

سوال ۱۱.۱۱۴: $2x^2+2y^2+2z^2+x+y+z=9$

سوال ۱۱.۱۱۵: $3x^2+3y^2+3z^2+2y-2z=9$

سوال ۱۱.۱۱۶: نقطہ $N(x,y,z)$ سے (ا) محور x ، (ب) محور y ، (ج) محور z تک فاصلہ تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۱۱۷: نقطہ $N(x,y,z)$ سے (ا) سطح xy ، (ب) سطح yz ، (ج) سطح xz تک فاصلہ تلاش کریں۔

سمتیات اور جیومیٹری

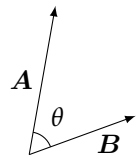
سوال ۱۱.۱۱۸: نقاط $A(4,2,0)$ ، $B(1,3,0)$ اور $C(1,1,3)$ یکساں کثافت کے باریک مثلث کے راس ہیں۔

ا. نقطہ C سے AB کے وسطی نقطہ M تک سمتیہ تلاش کریں۔

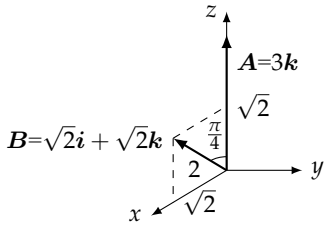
ب. نقطہ C سے وسطانیہ CM پر C سے $\frac{2}{3}$ فاصلہ تک سمتیہ تلاش کریں۔

ج. مثلث ABC کے وسطانیوں کے نقطہ تقاطع کے محدد تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۱۱۹: ایک مثلث جس کے راس $A(1,-1,2)$ ، $B(2,1,3)$ اور $C(-1,2,-1)$ ہیں کے وسطانیوں کے نقطہ تقاطع تک مبدا سے سمتیہ تلاش کریں۔



شکل ۱۱.۲۶: سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ زاویہ۔



شکل ۱۱.۲۷: سمتیات برائے مثال ۱۱.۲۰

سوال ۱۱.۱۲۰: فضا میں چار الاضلاع کے راس A ، B ، C اور D ہیں۔ یہ چار الاضلاع ضروری نہیں کہ مستوی ہو۔ دکھائیں کہ مخالف اضلاع کے وسطانی نقطوں کو جوڑنے والے قطعات ایک دوسرے کو نصف میں قطع کرتے ہیں۔ (اشارہ: دکھائیں کہ ان قطعات کے وسطی نقاط یکساں ہیں۔)

سوال ۱۱.۱۲۱: منظم n کثیر الاضلاع کے مرکز سے اس کے راس تک سمتیات بنائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ ان سمتیات کا مجموعہ صفر ہو گا۔ (اشارہ: کثیر الاضلاع کو اپنے مرکز کے گرد گھمانے سے اس مجموعہ پر کیا اثر ہو گا؟)

سوال ۱۱.۱۲۲: فرض کریں ایک مثلث کے راس A ، B اور C ہیں جبکہ مطابقتی مخالف اضلاع کے وسطی نقاط a ، b اور c ہیں۔ دکھائیں کہ $\overrightarrow{Aa} + \overrightarrow{Bb} + \overrightarrow{Cc} = 0$ ہو گا۔

۱۱.۳ ضرب نقطہ

ہم اب ضرب نقطہ پر غور کرتے ہیں جو سمتیات کو آپس میں ضرب دینے کے دو طریقوں میں سے ایک ہے۔ چونکہ ضرب نقطہ کا نتیجہ غیر سمتی ہوتا ہے لہٰذا ضرب نقطہ کو **غیر سمتی ضرب**[۱۸] بھی کہتے ہیں۔

ضرب نقطہ

جب دو غیر صفر سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے ابتدائی نقاط کو ایک ہی نقطہ پر رکھا جائے تب ان سمتیات کے بیچ زاویہ $0 \leq \theta \leq \pi$ پایا جاتا ہے۔ یہ زاویہ $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ زاویہ کہلاتا ہے۔

تعریف: سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے غیر سمتی ضرب (ضرب نقطہ) سے مراد درج ذیل عدد ہے

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \cos\theta \tag{۱}$$

جہاں θ سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ زاویہ ہے (شکل ۱۱.۲۶)۔

□

[۱۸] scalarproduct

الفاظ میں، $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ سے مراد $\boldsymbol{A}$ کی لمبائی ضرب $\boldsymbol{B}$ کی لمبائی ضرب اس زاویہ کا کوسائن جو ان سمتیات کے بیچ پایا جاتا ہے۔

سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے ضرب نقطہ کو $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ نقطہ سے ظاہر کیا جاتا ہے یعنی $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ جس کی وجہ سے یہ ضرب نقطہ کہلاتا ہے۔

مثال ۱۱.۲۰: سمتیات $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B}=\sqrt{2}\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\boldsymbol{k}$ کے ضرب نقطہ درج ذیل ہو گا (شکل ۱۱.۲۷)۔

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta=(3)(2)\cos\frac{\pi}{4}=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

□

چونکہ غیر سمتی ضرب کی علامت $\cos\theta$ پر منحصر ہے لہٰذا غیر سمتی ضرب کا نتیجہ زاویہ حادہ کی صورت میں مثبت، زاویہ منفرجہ کی صورت میں منفی (اور زاویہ قائمہ کی صورت میں صفر ہو گا)۔

چونکہ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کا اپنے ساتھ زاویہ صفر ہے اور $\cos 0=1$ ہوتا ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}|\cos 0=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}|\,(1)=|\boldsymbol{A}|^2$$

یعنی

$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}} \tag{۲}$$

ہو گا۔

حساب

کارتیسی نظام میں $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ کا حساب $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے اجزاء سے حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

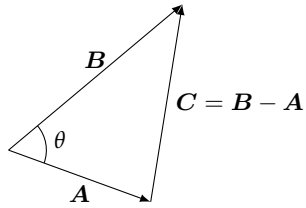
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}&=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{B}&=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k},\\
\boldsymbol{C}&=\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=(b_1-a_1)\boldsymbol{i}+(b_2-a_2)\boldsymbol{j}+(b_3-a_3)\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

ایک مثلث جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ ہوں کے لیے قاعدہ کوسائن درج ذیل ہو گا (شکل ۱۱.۲۸)۔

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{C}|^2&=|\boldsymbol{A}|^2+|\boldsymbol{B}|^2-2|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta\\
|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta&=\frac{|\boldsymbol{A}|^2+|\boldsymbol{B}|^2-|\boldsymbol{C}|^2}{2}
\end{aligned}$$

اس مساوات کا بایاں ہاتھ $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ ہے۔ ہم $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کے اجزاء کا مربع لے کر مساوات کے دائیں ہاتھ کی قیمت حاصل کرتے ہیں (مساوات ۳)۔ یوں

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{۳}$$



شکل ۱۱.۲۸: ایک مثلث جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ ہوں پر قاعدہ کوسائن کے اطلاق سے مساوات ۳ حاصل ہو گا۔

۱۸۳۰۱ حاصل ہوتا ہے لہٰذا دو سمتیات کا غیر سمتی ضرب لینے کی خاطر ہم اس کے مطابقتی $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ اجزاء کو ضرب دے کر ان کا مجموعہ لیتے ہیں۔

۱۸۳۰۲ مساوات ۱ کو θ کے لیے حل کر کے ان سمتیات کے بیچ زاویہ حاصل ہو گا۔

سمتیات کے بیچ زاویہ

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}\right) \tag{۴}$$

۱۸۳۰۳ چونکہ الٹ کوسائن کی قیمت $[0, \pi]$ میں پائی جاتی ہے لہٰذا مساوات ۴ خود بخود $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ زاویہ دیتی ہے۔

۱۸۳۰۴ مثال ۱۱.۲۱: سمتیات $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

۱۸۳۰۵ **حل**

۱۸۳۰۶ ہم مساوات ۱۴ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (1)(6) + (-2)(3) + (-2)(2) = 6 - 6 - 4 = -4\\
|\boldsymbol{A}| &= \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3\\
|\boldsymbol{B}| &= \sqrt{(6)^2 + (3)^2 + (2)^2} = \sqrt{49} = 7\\
\theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}\right)\\
&= \cos^{-1}\left(\frac{-4}{(3)(7)}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{4}{21}\right) \approx 1.76 \text{ ریڈیئن}
\end{aligned}$$

۱۸۳۰۷ □

۱۸۳۰۸ **قواعد ضرب نقطہ**

۱۸۳۰۹ ہم ضرب نقطہ کی مساوات $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + c_1c_2$ سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{۵}$$

۱۸۳۱۰ دوسرے لفظوں میں، ضرب نقطہ **تعویضی**[19] ہے۔ ہم مساوات ۳ سے یہ بھی دیکھتے ہیں کہ مستقل (یا غیر سمتی) عدد c کی صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$(c\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\cdot(c\boldsymbol{B}) = c(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{۶}$$

۱۸۳۱۱ اگر $\boldsymbol{C} = c_1\boldsymbol{i} + c_2\boldsymbol{j} + c_3\boldsymbol{k}$ کوئی تیسرا سمتیہ ہو تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) &= a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)+a_3(b_3+c_3)\\ &= (a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)+(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\\ &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\end{aligned}$$

۱۸۳۱۲ اس طرح ضرب نقطہ قانون تقسیم (درج ذیل) کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C} \tag{۷}$$

۱۸۳۱۳ اس کو مساوات ۵ کے ساتھ ملا کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} \tag{۸}$$

۱۸۳۱۴ مساوات ۷ اور مساوات ۸ ہمیں سمتیات کے مجموعوں کو، الجبرا کے قواعد کے مطابق، آپس میں ضرب دینے کی اجازت دیتے ہیں۔ مثال کے طور پر:

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{D} \tag{۹}$$

۱۸۳۱۵ **عمودی سمتیات**

۱۸۳۱۶ دو غیر صفر سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ تب **عمودی**[20] ہوں گے جب ان کے بیچ زاویہ $\frac{\pi}{2}$ ہو۔ یوں $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ کی وجہ سے عمودی سمتیات کے لیے
۱۸۳۱۷ $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ ہوگا۔ اسی طرح اگر $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ غیر صفر سمتیات ہوں اور $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta = 0$ ہو تب $\cos\theta = 0$
۱۸۳۱۸ یعنی $\theta = \cos^{-1}0 = \frac{\pi}{2}$ ہوگا۔

۱۸۳۱۹ دو غیر صفر سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ صرف اور صرف اس صورت عمودی ہوں گے جب $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ ہو۔

۱۸۳۲۰ مثال ۱۱.۲۲: سمتیات $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ درج ذیل کی وجہ سے عمودی ہیں۔

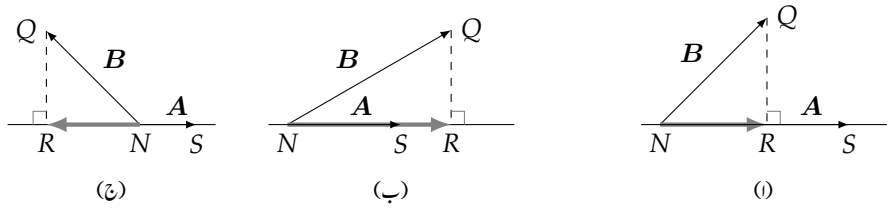
$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (3)(0)+(-2)(2)+(1)(4) = 0$$

۱۸۳۲۱ □

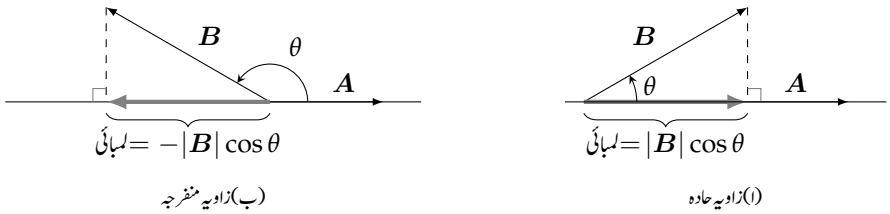
۱۸۳۲۲ **تظلیل سمتیہ**

۱۸۳۲۳ سمتیہ $\boldsymbol{B} = \overrightarrow{NQ}$ کا غیر صفر سمتیہ $\boldsymbol{A} = \overrightarrow{NS}$ پر تظلیل سمتیہ $\overrightarrow{NR}$ تعین کرنے کی خاطر Q سے (مبسوط) خط NS پر عمود گرایا جاتا ہے
۱۸۳۲۴ (شکل ۱۱.۲۹)۔ اس سمتیہ کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$\boldsymbol{B}$ کا $\boldsymbol{A}$ پر سمتی تظلیل $\qquad \text{proj}_{\boldsymbol{A}}\ \boldsymbol{B}$



شکل ۱۱.۲۹: $\boldsymbol{B}$ کا $\boldsymbol{A}$ پر سمتی تظلیل



شکل ۱۱.۳۰: $\boldsymbol{A}$ پر $\boldsymbol{B}$ کے تظلیل کی لمبائی

۱۸۳۲۵ اگر $\boldsymbol{B}$ قوت کو ظاہر کرتا ہو، تب $\text{proj}_{\boldsymbol{A}}\ \boldsymbol{B}$ سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کے رخ اثر انداز ہونے والی قوت ہو گی۔

۱۸۳۲۶ اگر $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ زاویہ حادہ ہو تب $\boldsymbol{A}$ پر تظلیل $\boldsymbol{B}$ کی لمبائی $|\boldsymbol{B}|\cos\theta$ اور رخ $\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$ ہو گا (شکل ۱۱.۳۰)۔ اگر θ زاویہ منفرجہ ہو تب

۱۸۳۲۷ $\cos\theta < 0$ ہو گا اور $\boldsymbol{A}$ پر تظلیل $\boldsymbol{B}$ کی لمبائی $-|\boldsymbol{B}|\cos\theta$ اور رخ $-\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}$ ہو گا۔ ان دونوں صورتوں میں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\text{proj}_{\boldsymbol{A}}\ \boldsymbol{B} &= (|\boldsymbol{B}|\cos\theta)\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} \\
&= \left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|}\right)\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} \qquad\qquad |\boldsymbol{B}|\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}|} \\
&= \left(\boldsymbol{B}\cdot\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}\right)\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}
\end{aligned}$$

$$\text{proj}_{\boldsymbol{A}}\ \boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{B}\cdot\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}\right)\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \left(\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\right)\boldsymbol{A} \tag{۱۰}$$

۱۸۳۲۸ عدد $|\boldsymbol{B}|\cos\theta$ کو $\boldsymbol{B}$ کا $\boldsymbol{A}$ کے رخ غیر سمتی جزو کہتے ہیں۔ درج ذیل کی بنا

$$|\boldsymbol{B}|\cos\theta = \boldsymbol{B}\cdot\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} \tag{۱۱}$$

---

[19] commutative
[20] orthogonal

ہم غیر سمتی جزو حاصل کرنے کی خاطر $\boldsymbol{B}$ کا ضرب نقطہ $\boldsymbol{A}$ کے رخ کے ساتھ لیں گے۔ مساوات ۱۰ کہتی ہے کہ $\boldsymbol{B}$ کا $\boldsymbol{A}$ پر تطلیل، $\boldsymbol{A}$ کے رخ $\boldsymbol{B}$ کے غیر سمتی جزو ضرب رخ $\boldsymbol{A}$ کے برابر ہو گا۔

جہاں مساوات ۱۰ کا پہلا حصہ $\boldsymbol{A}$ کے رخ $\boldsymbol{B}$ کے اثر کی بات کرتی ہے، اس کا دوسرا حصہ حساب کے لیے موزوں ہے چونکہ یہ جذر سے چھٹکارا دیتا ہے۔

مثال ۱۱.۲۳: سمتیہ $\boldsymbol{B} = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ کا $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ پر سمتی تطلیل تلاش کریں اور $\boldsymbol{A}$ کے رخ $\boldsymbol{B}$ کا غیر سمتی جزو تلاش کریں۔

حل

ہم مساوات ۱۰ استعمال کر کے سمتی تطلیل تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\operatorname{proj}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B} &= \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} = \frac{6-6-4}{1+4+4}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})\\ &= -\frac{4}{9}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}) = -\frac{4}{9}\boldsymbol{i}+\frac{8}{9}\boldsymbol{j}+\frac{8}{9}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

ہم $\boldsymbol{A}$ کے رخ $\boldsymbol{B}$ کا غیر سمتی جزو مساوات ۱۱ کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{B}|\cos\theta = \boldsymbol{B}\cdot\frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} &= (6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{i}-\frac{2}{3}\boldsymbol{j}-\frac{2}{3}\boldsymbol{k}\right)\\ &= 2-2-\frac{4}{3} = -\frac{4}{3}\end{aligned}$$

□

سمتیہ کو عمودی سمتیات کا مجموعہ لکھنا

میکانیات میں ہمیں عموماً ایک سمتیہ $\boldsymbol{B}$ کو سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کے متوازی سمتیہ اور $\boldsymbol{A}$ کے عمودی سمتیہ کا مجموعہ کی صورت میں لکھنا ہوتا ہے۔ ہم ایسا درج ذیل مساوات کی مدد سے کر سکتے ہیں (شکل ۱۱.۳۱)۔

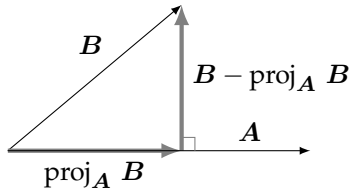
$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= \operatorname{proj}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B} + (\boldsymbol{B} - \operatorname{proj}_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B})\\ &= \underbrace{\left(\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\right)\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{A}\text{ کا متوازی}} + \underbrace{\left(\boldsymbol{B} - \left(\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\right)\boldsymbol{A}\right)}_{\boldsymbol{A}\text{ کا عمودی}}\end{aligned} \tag{۱۲}$$

مثال ۱۱.۲۴: سمتیہ $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ کو سمتیہ $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ کے متوازی سمتیہ اور $\boldsymbol{A}$ کے عمودی سمتیہ کا مجموعہ لکھیں۔

حل

ہم درج ذیل

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 6-1 = 5, \quad \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = 9+1 = 10$$



شکل ۱۱.۳۱: سمتیہ $\boldsymbol{B}$ کو سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کے عمودی اور متوازی سمتیات کا مجموعہ لکھنا۔

۱۸۳۴۴ کو مساوات ۱۲ میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A} + \left(\boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}}{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}\right) &= \frac{5}{10}(3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}) + \left(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k} - \frac{5}{10}(3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})\right)\\ &= \left(\frac{3}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{j}\right) + \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{3}{2}\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}\right)\end{aligned}$$

۱۸۳۴۵ آپ تسلی کر لیں کہ دائیں ہاتھ پہلا جزو $\frac{1}{2}\boldsymbol{A}$ کے برابر ہے۔ دائیں ہاتھ دوسرا جزو درج ذیل کی وجہ سے $\boldsymbol{A}$ کو عمودی ہے۔

$$\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{3}{2}\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}\right)\cdot(3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

۱۸۳۴۶ □

۱۸۳۴۷ **کام**

۱۸۳۴۸ ہم نے حصہ ۶.۸ میں مستقل قوت F جو ایک جسم پر عمل کر کے اس کو قوت کے رخ d فاصلہ منتقل کرتی ہے کا کام کلیہ $W = Fd$ سے دریافت کیا۔
۱۸۳۴۹ یہ کلیہ صرف اس صورت درست ہو گا جب قوت کا رخ اور حرکت کا رخ ایک ہوں۔ اگر مستقل قوت $\boldsymbol{F}$ اور جسم کے ہٹاو $\boldsymbol{D} = \overrightarrow{NQ}$ کے رخ مختلف
۱۸۳۵۰ ہوں تب $\boldsymbol{D}$ کے رخ، $\boldsymbol{F}$ کا جزو کام کرے گا۔ اگر $\boldsymbol{F}$ اور $\boldsymbol{D}$ کے بیچ زاویہ θ ہو تب کام درج ذیل ہو گا (شکل ۱۱.۳۲)۔

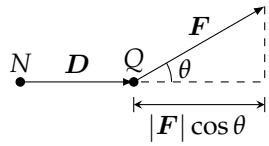
$$\begin{aligned}\text{کام} &= (\boldsymbol{D}\text{ کے رخ }\boldsymbol{F}\text{ کا غیر سمتی جزو})(\boldsymbol{D}\text{ کی لمبائی})\\ &= (|\boldsymbol{F}|\cos\theta)|\boldsymbol{D}|\\ &= \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{D}\end{aligned}$$

۱۸۳۵۱ تعریف: ہٹاو $\boldsymbol{D} = \overrightarrow{NQ}$ کے دوران مستقل قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام

$$W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{D} = |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{D}|\cos\theta \tag{۱۳}$$

۱۸۳۵۲ ہو گا جہاں ہٹاو اور قوت کے بیچ زاویہ θ ہے۔

۱۸۳۵۳ □



شکل ۱۱.۳۲: ہٹاو $\boldsymbol{D}$ کے دوران مستقل قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام $|\boldsymbol{D}|(|\boldsymbol{F}|\cos\theta)$ ہو گا۔

۱۸۳۵۴ کام کی اکائی نیوٹن ضرب میٹر ہے جس کو عموماً **جاول**[۲۱] کہتے ہیں۔

۱۸۳۵۵ مثال ۱۱.۲۵: اگر $|\boldsymbol{F}| = 40\,\mathrm{N}$ اور $|\boldsymbol{D}| = 3\,\mathrm{m}$ ہوں اور $\theta = 60^\circ$ ہو تب کام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\text{کام} &= |\boldsymbol{F}||\boldsymbol{D}|\cos\theta \\
&= (40)(3)\cos 60^\circ \\
&= (120)(\tfrac{1}{2}) \\
&= 60\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

۱۸۳۵۶ □

۱۸۳۵۷ **سوالات**

۱۸۳۵۸ سوال ۱۱.۱۲۳ تا سوال ۱۱.۱۳۲ میں درج ذیل دریافت کریں۔

۱۸۳۵۹ ا. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ ، $|\boldsymbol{A}|$ ، $|\boldsymbol{B}|$

۱۸۳۶۰ ب. $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ زاویہ کا کوسائن۔

۱۸۳۶۱ ج. $\boldsymbol{A}$ کے رخ $\boldsymbol{B}$ کا غیر سمتی جزو۔

۱۸۳۶۲ د. سمتیہ $\mathrm{proj}_{\boldsymbol{A}}\,\boldsymbol{B}$

۱۸۳۶۳ سوال ۱۱.۱۲۳: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} + \sqrt{5}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = -2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - \sqrt{5}\boldsymbol{k}$

۱۸۳۶۴ سوال ۱۱.۱۲۴: $\boldsymbol{A} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} + \frac{4}{5}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = 5\boldsymbol{i} + 12\boldsymbol{j}$

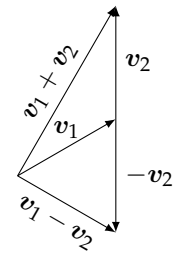
۱۸۳۶۵ سوال ۱۱.۱۲۵: $\boldsymbol{A} = 10\boldsymbol{i} + 11\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$

۱۸۳۶۶ سوال ۱۱.۱۲۶: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} - 11\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

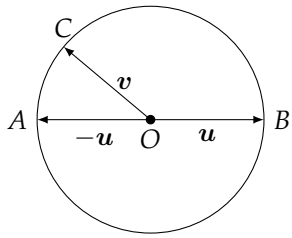
۱۸۳۶۷ سوال ۱۱.۱۲۷: $\boldsymbol{A} = -2\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{k}$

---

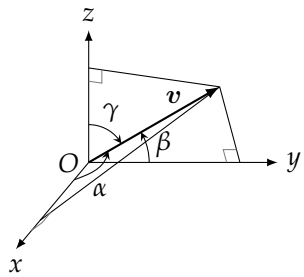
[۲۱] joule



شکل ۱۱.۳۳: سمتیات برائے سوال ۱۱.۱۳۷



شکل ۱۱.۳۴: دائرہ برائے سوال ۱۱.۱۳۸



شکل ۱۱.۳۵: زاویات رخ اور کوسائن رخ کی تعریف برائے سوال ۱۱.۱۴۴۔

۱۸۳۶۸ سوال ۱۱.۱۲۸: $\boldsymbol{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

۱۸۳۶۹ سوال ۱۱.۱۲۹: $\boldsymbol{A} = 5\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

۱۸۳۷۰ سوال ۱۱.۱۳۰: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

۱۸۳۷۱ سوال ۱۱.۱۳۱: $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{B} = \sqrt{2}\boldsymbol{i} + \sqrt{3}\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

۱۸۳۷۲ سوال ۱۱.۱۳۲: $\boldsymbol{A} = -5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + \sqrt{17}\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k}$

۱۸۳۷۳ سوال ۱۱.۱۳۳: سمتیہ $\boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ کو سمتیہ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ کے عمودی سمتیہ اور $\boldsymbol{A}$ کے متوازی سمتیہ کا مجموعہ لکھیں۔

۱۸۳۷۴ سوال ۱۱.۱۳۴: سمتیہ $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ کو سمتیہ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ کے عمودی سمتیہ اور $\boldsymbol{A}$ کے متوازی سمتیہ کا مجموعہ لکھیں۔

۱۸۳۷۵ سوال ۱۱.۱۳۵: سمتیہ $\boldsymbol{B} = 8\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} - 12\boldsymbol{k}$ کو سمتیہ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ کے عمودی سمتیہ اور $\boldsymbol{A}$ کے متوازی سمتیہ کا مجموعہ
۱۸۳۷۶ لکھیں۔

۱۸۳۷۷ سوال ۱۱.۱۳۶: سمتیہ $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$ پہلے سے سمتیہ $\boldsymbol{i}$ کے متوازی سمتیہ اور $\boldsymbol{i}$ کے عمودی سمتیہ کا مجموعہ ہے۔ اگر مساوات ۱۲ میں
۱۸۳۷۸ $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}$ ہو تب کیا $\boldsymbol{B}_{\|,\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{B}_{\perp,\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ملتے ہیں۔ (متوازی اور عمودی اجزاء کو بالترتیب زیر نوشت $\|$ اور $\perp$ سے ظاہر
۱۸۳۷۹ کیا جاتا ہے۔)

۱۸۳۸۰ **جیومیٹری**

۱۸۳۸۱ سوال ۱۱.۱۳۷: مجموعات اور فرق۔ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ شکل ۱۱.۳۳ میں $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ اور $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ عمودی ہیں۔ کیا یہ محض ایک اتفاق ہے یا
۱۸۳۸۲ ہم توقع کر سکتے ہیں کہ کسی بھی دو سمتیات کا مجموعہ اور فرق عمودی ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۸۳۸۳ سوال ۱۱.۱۳۸: ایک دائرہ جس کا مرکز O ہے کا قطر AB ہے۔ نقطہ C دائرے پر پایا جاتا ہے (شکل ۱۱.۳۴)۔ دکھائیں کہ $\overrightarrow{CA}$ اور $\overrightarrow{CB}$ عمودی
۱۸۳۸۴ ہوں گے۔

۱۸۳۸۵ سوال ۱۱.۱۳۹: دکھائیں کہ یکساں اضلاع کے متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کے عمودی ہوتے ہیں۔

۱۸۳۸۶ سوال ۱۱.۱۴۰: دکھائیں کہ مربع وہ واحد مستطیل ہے جس کے وتر عمودی ہوتے ہیں۔

سوال ۱۱.۱۴۱: ثابت کریں کہ ایک متوازی الاضلاع صرف اور صرف اس صورت مستطیل ہو گا جب اس کے وتروں کی لمبائی ایک سی ہو۔ ترکھان اس حقیقت کو عموماً استعمال کرتا ہے۔

سوال ۱۱.۱۴۲: متوازی الاضلاع کے قریبی ضلع $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ ہیں۔ دکھائیں کہ ان کے مشترکہ راس سے مخالف راس تک وتر، سمتیات $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ کے بیچ زاویہ کو دو برابر حصوں میں تقسیم کرتا ہے۔

سوال ۱۱.۱۴۳: ایک اہرام کے مربع قاعدہ $OABC$ کے ضلع کی لمبائی 1 اکائی ہے اور اہرام کی چوٹی D ہے۔ اہرام کا قد بھی 1 اکائی ہے۔ یوں نقطہ D ٹھیک وتر OB کے وسطی نقطہ کے سیدھا اوپر ہو گا۔ قطعہ $\overrightarrow{OB}$ اور $\overrightarrow{OD}$ کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۱۴۴: زاویات رخ اور کوسائن رخ

سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ کے زاویات رخ α ، β اور γ کی تعریف درج ذیل ہے (شکل ۱۱.۳۵)۔

مثبت محور x اور $\boldsymbol{v}$ کے بیچ زاویہ α ہے ($0 \le \alpha \le \pi$)،

مثبت محور y اور $\boldsymbol{v}$ کے بیچ زاویہ β ہے ($0 \le \beta \le \pi$)،

مثبت محور z اور $\boldsymbol{v}$ کے بیچ زاویہ γ ہے ($0 \le \gamma \le \pi$)۔

ا. درج ذیل

$$\cos\alpha = \frac{a}{|\boldsymbol{v}|}, \quad \cos\beta = \frac{b}{|\boldsymbol{v}|}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{|\boldsymbol{v}|}$$

اور $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ دکھائیں۔ ان کو سائن کو **کوسائن رخ**[۲۲] کہتے ہیں۔

ب. کوسائن رخ اور اکائی سمتیات۔ دکھائیں کہ اگر $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$ ایک اکائی سمتیہ ہو تب a ، b اور c سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے کوسائن رخ ہوں گے۔

سمتیات کے بیچ زاویے

سوال ۱۱.۱۴۵ تا سوال ۱۱.۱۴۸ میں کیلکولیٹر کی مدد سے سمتیات کے بیچ زاویات کو، ایک فی صد درست، ریڈیئن میں تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۱۴۵: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$

سوال ۱۱.۱۴۶: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}$

سوال ۱۱.۱۴۷: $\boldsymbol{A} = \sqrt{3}\boldsymbol{i} - 7\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{B} = \sqrt{3}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$

سوال ۱۱.۱۴۸: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \sqrt{2}\boldsymbol{j} - \sqrt{2}\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

سوال ۱۱.۱۴۹ تا سوال ۱۱.۱۵۱ میں کیلکولیٹر کی مدد سے سمتیات کے بیچ زاویات کو، ایک فی صد درست، ریڈیئن میں تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۱۴۹: مثلث ABC کے اندرونی زاویات۔ مثلث کے راس $A(-1,0,2)$ ، $B(2,1,-1)$ اور $C(1,-2,2)$ ہیں۔

سوال ۱۱.۱۵۰: سمتیات $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} - 11\boldsymbol{k}$ کے بیچ زاویہ۔

سوال ۱۱.۱۵۱: مکعب کے وتر اور مکعب کی ایک سطح کے وتر کے بیچ زاویہ۔ (اشارہ: ایسا مکعب استعمال کریں جس کے کنارے $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ ہوں۔)

---

[۲۲] directioncosines

سوال ۱۱.۱۵۲: پانی کی نالی میں ایک جوڑ ہے۔ اس جوڑ سے شمال رخ نالی کا ڈھلوان $10\,\%$ ہے جبکہ جوڑ سے مشرق رخ نالی کا ڈھلوان $20\,\%$ ہے۔ اس جوڑ پر نالی کے دو حصوں کے بیچ زاویہ کتنا ہو گا؟

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۱.۱۵۳:

ا. کسی بھی سمتیات $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ کے لیے عدم مساوات $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| \leq |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ کو $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\theta$ کی مدد سے دکھائیں۔

ب. کیا کبھی $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ ہو سکتا ہے؟ اگر ہو سکتا ہے تب کب ایسا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۱.۱۵۴: مستوی xy میں عمومی سمتیہ $\boldsymbol{v}$ بنائیں۔ اب ان نقطوں (x,y) کی نشاندہی کریں جن پر $(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{v} = 0$ ہو گا۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۱.۱۵۵: اگر $\boldsymbol{u}_1$ اور $\boldsymbol{u}_2$ عمودی اکائی سمتیات ہوں اور $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{u}_1 + b\boldsymbol{u}_2$ ہو تب $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}_1$ تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۱۵۶: ضرب نقطہ میں مشترک اجزاء کی منسوخی

حقیقی اعداد کے ضرب میں اگر $ab_1 = ab_2$ ہو اور a غیر صفر ہو تب دونوں اطراف a کو منسوخ کر کے $b_1 = b_2$ لکھا جا سکتا ہے۔ کیا ضرب نقطہ میں ایسا کرنا ممکن ہو گا: یعنی اگر $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}_2$ ہو تب کیا دونوں اطراف $\boldsymbol{A}$ منسوخ کر کے $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2$ لکھا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۱.۱۵۷: فرض کریں $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ آپس میں عمودی سمتیات ہیں۔ اب $\boldsymbol{D} = 5\boldsymbol{A} - 6\boldsymbol{B} + 3\boldsymbol{C}$ لیں۔

ا. اگر $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ اکائی سمتیات ہوں تب $\boldsymbol{D}$ کی مقدار $|\boldsymbol{D}|$ تلاش کریں۔

ب. اگر $|\boldsymbol{A}| = 2$ ، $|\boldsymbol{B}| = 3$ اور $|\boldsymbol{C}| = 4$ ہوں تب $|\boldsymbol{D}|$ کتنا ہو گا؟

سوال ۱۱.۱۵۸: فرض کریں $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ آپس میں عمودی اکائی سمتیات ہیں۔ اگر $\boldsymbol{D} = \alpha\boldsymbol{A} + \beta\boldsymbol{B} + \gamma\boldsymbol{C}$ ہو جہاں α ، β اور γ غیر سمتی ہیں تب دکھائیں کہ $\alpha = \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{A}$ ، $\beta = \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{B}$ اور $\gamma = \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{C}$ ہوں گے۔

کام

سوال ۱۱.۱۵۹: قوت $\boldsymbol{F} = 5\boldsymbol{k}$ (مقدار 5 نیوٹن) سیدھی لکیر پر مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک ایک جسم کو منتقل کرتا ہے (فاصلہ میٹر میں ہے)۔ یہ قوت کتنا کام کرتی ہے؟

سوال ۱۱.۱۶۰: ایک ریل گاڑی کا انجن 6000 ٹن کیت کی ریل گاڑی کو 602 148 N قوت سے کھینچ سکتا ہے۔ ایک افقی سیدھی پٹڑی پر 605 کلو میٹر فاصلہ طے کر کے یہ انجن کتنا کام کرتا ہے؟

سوال ۱۱.۱۶۱: ایک بوجھ کو 20 m لمبی ڈھلوان پر 200 N قوت کھینچتی ہے۔ افقی سطح کے ساتھ یہ قوت 30° کا زاویہ بناتی ہے۔ یہ قوت کتنا کام کرتی ہے؟

سوال ۱۱.۱۶۲: ایک کشتی کے بادبان پر ہوا 2000 N قوت لگاتی ہے۔ افقی سطح کے ساتھ قوت کا زاویہ 60° ہے۔ ایک کلو میٹر فاصل طے کرنے میں یہ قوت کتنا کام کرتی ہے؟

مستوی میں خط کی مساواتیں

سوال ۱۱.۱۶۳: دکھائیں کہ سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ لکیر $ax + by = c$ کو عمودی ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر دکھائیں کہ اس لکیر کا ڈھلوان، اس سمتیہ کا ڈھلوان کے بالعکس متناسب کا نفی ہے۔

سوال ۱۱.۱۶۴: دکھائی کہ سمتیہ $\boldsymbol{v} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ لکیر $bx - ay = c$ کے متوازی ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر دکھائیں کہ لکیر کا ڈھلوان اور سمتیہ کا ڈھلوان ایک دوسرے جیسے ہیں۔

سوال ۱۱.۱۶۵ تا سوال ۱۱.۱۶۸ میں سوال ۱۱.۱۶۳ کا نتیجہ استعمال کر کے نقطہ N پر $\boldsymbol{v}$ کے عمودی خط کی مساوات دریافت کریں۔ اس لکیر کو ترسیم کر کے مبدا پر اس عمودی سمتیہ کا بھی خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۱.۱۶۵: $N(2,1), \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$

سوال ۱۱.۱۶۶: $N(-1,2), \quad \boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

سوال ۱۱.۱۶۷: $N(-2,-7), \quad \boldsymbol{v} = -2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$

سوال ۱۱.۱۶۸: $N(11,10), \quad \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j}$

سوال ۱۱.۱۶۹ تا سوال ۱۱.۱۷۲ میں سوال ۱۱.۱۶۴ کا نتیجہ استعمال کر کے نقطہ N پر $\boldsymbol{v}$ کے متوازی خط کی مساوات دریافت کریں۔ اس لکیر کو ترسیم کر کے مبدا پر اس متوازی سمتیہ کا بھی خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۱.۱۶۹: $N(-2,1), \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

سوال ۱۱.۱۷۰: $N(0,-2), \quad \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}$

سوال ۱۱.۱۷۱: $N(1,2), \quad \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$

سوال ۱۱.۱۷۲: $N(1,3), \quad \boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$

مستوی میں خطوط کے بیچ زاویے

دو مستوی خط جن کے بیچ زاویہ حادہ جو قائمہ نہ ہو وہی ہو گا جو ان خطوط کے عمودی دو سمتیات کے بیچ یا ان خطوط کے متوازی دو سمتیات کے بیچ ہو گا۔ اس حقیقت کے ساتھ سوال ۱۱.۱۶۳ یا سوال ۱۱.۱۶۴ کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے سوال ۱۱.۱۷۳ تا سوال ۱۱.۱۷۶ میں خطوط کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۱۷۳: $3x + y = 5, \quad 2x - y = 4$

سوال ۱۱.۱۷۴: $y = \sqrt{3}x - 1, \quad y = -\sqrt{3}x + 2$

سوال ۱۱.۱۷۵: $\sqrt{3}x - y = -2, \quad x - \sqrt{3}y = 1$

سوال ۱۱.۱۷۶: $x + \sqrt{3}y = 1, \quad (1-\sqrt{3})x + (1+\sqrt{3})y = 8$

سوال ۱۱.۱۷۷ اور سوال ۱۱.۱۷۸ میں خطوط کے بیچ ایک ریڈیئن کے سواں حصہ تک زاویہ حادہ تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۱۷۷: $3x - 4y = 3, \quad x - y = 7$

سوال ۱۱.۱۷۸: $12x + 5y = 1, \quad 2x - 2y = 3$

قابل تفرق منحنیات کے بیچ زاویہ

دو قابل تفرق منحنیات کے نقطہ تقاطع پر ان کے بیچ زاویہ سے مراد اس نقطہ پر منحنیات کے مماس کے بیچ زاویہ ہے۔ سوال ۱۱.۱۷۹ تا سوال ۱۱.۱۸۲ میں منحنیات کے بیچ زاویات دو نقاط تقاطع پر معلوم کریں۔(آپ کو کیلکولیٹر کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔)

سوال ۱۱.۱۷۹: $y = \frac{3}{2} - x^2, \quad y = x^2$

سوال ۱۱.۱۸۰: $x = \frac{3}{4} - y^2, \quad x = y^2 - \frac{3}{4}$

سوال ۱۱.۱۸۱: $y = x^3, \quad x = y^2$

سوال ۱۱.۱۸۲: $y = -x^2, \quad y = \sqrt[3]{x}$

۱۱.۴ صلیبی ضرب

اس حصہ میں سمتیات کے ضرب کی دوسری قسم پر غور کیا جائے گا جس کو صلیبی ضرب کہتے ہیں۔ چونکہ صلیبی ضرب کا حاصل سمتی ہوتا ہے لہٰذا اس ضرب کو **سمتی ضرب**[۲۳] بھی کہتے ہیں۔

برقیات، مقناطیسیت، صلیبی ضرب، حرکت سیال اور میکانیات مدار میں قوتوں کے اثرات پر غور میں صلیبی ضرب اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ آئیں صلیبی ضرب کے خواص پر غور کریں۔

دو سمتیات کا صلیبی ضرب

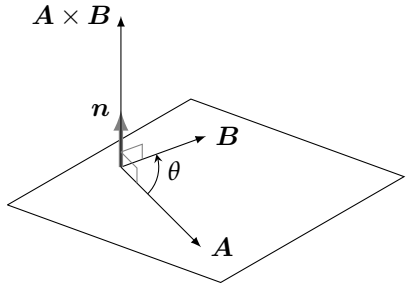
ہم خلا میں دو غیر صفر سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ سے شروع کرتے ہیں۔ غیر متوازی سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ سطح کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہم **دائیں ہاتھ قاعدہ** سے اس سطح پر عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ منتخب کرتے ہیں۔ یوں سطح میں $\boldsymbol{A}$ سے $\boldsymbol{B}$ کی جانب دائیں ہاتھ کی انگلیاں، زاویہ θ موڑنے سے، انگوٹھا $\boldsymbol{n}$ کا رخ دے گا (شکل ۱۱.۳۶)۔ دائیں ہاتھ کی انگلیاں موڑتے ہوئے زاویہ $0 \leq \theta \leq \pi$ لیا جاتا ہے۔ ہم سمتی ضرب $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

تعریف:

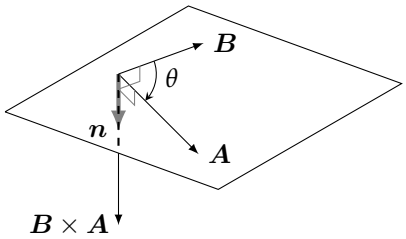
$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = (|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta)\boldsymbol{n} \tag{۱}$$

□

[۲۳] vectorproduct



شکل ۱۱.۳۶: صلیبی ضرب $A \times B$



شکل ۱۱.۳۷: صلیبی ضرب $B \times A$

۱۸۴۹۳ چونکہ سمتیہ $A \times B$ اکائی عمودی سمتیہ n کا غیر سمتی مضرب ہے لہٰذا یہ A اور B دونوں کو عمودی ہو گا۔ سمتیات A اور B کے سمتی ضرب
۱۸۴۹۴ کو عموماً A اور B کا **صلیبی ضرب**[۲۴] کہتے ہیں۔ صلیبی ضرب کو صلیب کے نشان $\times$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اور اسی کی وجہ سے یہ صلیبی ضرب کہلاتا ہے۔

۱۸۴۹۵ چونکہ 0 اور π کے سائن صفر ہوتے ہیں لہٰذا ہم مساوات ا میں دو غیر صفر متوازی سمتیات کے صلیبی ضرب کی تعریف $\mathbf{0}$ لیں گے۔

۱۸۴۹۶ اگر A یا B صفر ہو تب ہم $A \times B$ کی قیمت صفر لیں گے۔ یوں دو سمتیات A اور B کا صلیبی ضرب صرف اور صرف اس صورت صفر ہو گا
۱۸۴۹۷ جب A اور B متوازی ہوں یا ان میں سے ایک یا دونوں صفر ہوں۔ اس طرح غیر صفر سمتیات کا صلیبی ضرب صرف اور صرف اس صورت صفر ہو گا جب
۱۸۴۹۸ یہ متوازی ہوں۔

۱۸۴۹۹ $A \times B$ بالمقابل $B \times A$

۱۸۵۰۰ غیر صفر سمتی ضرب میں سمتیات کی ترتیب بدلنے سے حاصل ضرب کی سمت الٹ ہوتی ہے۔ اگر ہم سمتیہ B سے A کی جانب دائیں ہاتھ کی انگلیوں کو،
۱۸۵۰۱ زاویہ θ موڑیں، تب ہمارا انگوٹھا پہلے رخ کا مخالف رخ دے گا (یہاں پہلے رخ سے مراد $A \times B$ کے حصول میں انگوٹھے کا رخ ہے)۔ دائیں ہاتھ کی
۱۸۵۰۲ انگلیاں موڑتے ہوئے زاویہ $0 \leq \theta \leq \pi$ لیا جاتا ہے۔ شکل ۱۱.۳۷ میں ان نتائج کو دکھایا گیا ہے۔ یوں تمام سمتیات A اور B کے لیے درج ذیل
۱۸۵۰۳ ہو گا۔

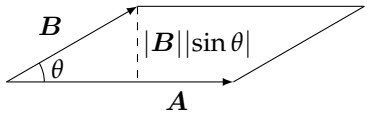
$$B \times A = -(A \times B) \tag{۲}$$

۱۸۵۰۴ ضرب نقطہ کے برعکس صلیبی ضرب **غیر تعویضی**[۲۵] ہے۔

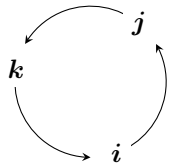
۱۸۵۰۵ صلیبی ضرب کی تعریف i ، j اور k کی جوڑیوں پر لاگو کرتے ہوئے درج ذیل نتائج حاصل ہوتے ہیں جنہیں دکھائے گئے دائرے سے بآسانی یاد رکھا جا
۱۸۵۰۶ سکتا ہے۔

---

[۲۴] crossproduct
[۲۵] noncommutative



شکل ۱۱.۳۸: متوازی الاضلاع کا رقبہ اس کے قاعدہ ضرب قد کے برابر ہوتا ہے۔



۱۸۵۰۷

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j} &= -(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k} &= -(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i} &= -(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}) - \boldsymbol{j} \end{aligned} \tag{۳}$$

۱۸۵۰۸ اکائی سمتیات کے ہم صلیبی ضرب صفر ہوں گے:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i} &= (|\boldsymbol{i}||\boldsymbol{i}|\sin 0^\circ)\boldsymbol{n} = ((1)(1)(0))\boldsymbol{n} = 0 \\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j} &= (|\boldsymbol{j}||\boldsymbol{j}|\sin 0^\circ)\boldsymbol{n} = ((1)(1)(0))\boldsymbol{n} = 0 \\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k} &= (|\boldsymbol{k}||\boldsymbol{k}|\sin 0^\circ)\boldsymbol{n} = ((1)(1)(0))\boldsymbol{n} = 0 \end{aligned}$$

۱۸۵۰۹ **صلیبی ضرب $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ متوازی الاضلاع کا رقبہ ہو گا**

۱۸۵۱۰ چونکہ $\boldsymbol{n}$ اکائی سمتیہ ہے لہٰذا $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ کی مقدار

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}||\sin\theta||\boldsymbol{n}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta \tag{۴}$$

۱۸۵۱۱ ہو گی جو اس متوازی الاضلاع کا رقبہ ہے جس کے ضلع $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ ہیں۔ اس متوازی الاضلاع کا قاعدہ $|\boldsymbol{A}|$ جبکہ اس کا قد $|\boldsymbol{B}\sin\theta|$ ہے (شکل
۱۸۵۱۲ ۱۱.۳۸)۔

۱۸۵۱۳ **قوت مروڑ**

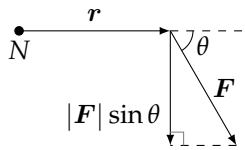
۱۸۵۱۴ نقطہ N پر چول کے ساتھ سلاخ کا ایک سر منسلک ہے جس کے دوسرے سے پر قوت $\boldsymbol{F}$ عمل کرتی ہے۔ چول سے سلاخ کے دوسرے سر تک ہٹاو کو سمتیہ
۱۸۵۱۵ $\boldsymbol{r}$ ظاہر کرتا ہے (شکل ۱۱.۳۹)۔ قوت مروڑ کی مقدار سے مراد ہم $\boldsymbol{r}$ کی لمبائی ضرب قوت کا وہ حصہ جو $\boldsymbol{r}$ کو عمودی ہے، لیتے ہیں۔ علامتی طور پر ہم قوت
۱۸۵۱۶ مروڑ سمتیہ کی مقدار کو

$$\text{قوت مروڑ سمتیہ کی مقدار} = |\boldsymbol{r}||\boldsymbol{F}|\sin\theta$$

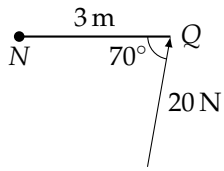
۱۸۵۱۷ یا $|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}|$ لکھ سکتے ہیں۔ ہم دائیں ہاتھ قاعدہ سے حاصل اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ استعمال کرتے ہوئے قوت مروڑ سمتیہ کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{قوت مروڑ سمتیہ} = (|\boldsymbol{r}||\boldsymbol{F}|\sin\theta)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}$$

۱۸۵۱۸ یاد رہے کہ (غیر صفر سمتیات کی صورت میں) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ تب $\boldsymbol{0}$ ہوتا ہے جب $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ متوازی ہوں۔ قوت مروڑ کی تعریف عین اس حقیقت کے
۱۸۵۱۹ مطابق ہے۔ یوں اگر قوت عین سلاخ کے متوازی عمل کرے تب حاصل قوت مروڑ صفر ہو گا۔



شکل ۱۱.۳۹: قوت مروڑ۔



شکل ۱۱.۴۰: قوت مروڑ (مثال ۱۱.۲۶)۔

۱۸۵۲۰ مثال ۱۱.۲۶: قوت مروڑ کی مقدار شکل ۱۱.۴۰ میں درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{NQ} \times \boldsymbol{F}\right| &= \left|\overrightarrow{NQ}\right| |\boldsymbol{F}| \sin 70^\circ \qquad \text{مساوات ۴}\\ &\approx (3)(20)(0.94)\\ &\approx 56.4\,\mathrm{N\,m}\end{aligned}$$

۱۸۵۲۱ □

۱۸۵۲۲ قوانین تلازم اور تقسیم

۱۸۵۲۳ صلیبی ضرب عام طور غیر تلازمی ہو گا چونکہ $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C}$ سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے مستوی میں پایا جاتا ہے جبکہ $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C})$
۱۸۵۲۴ سمتیات $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کے مستوی میں پایا جاتا ہے۔ اس کے باوجود درج ذیل قواعد مطمئن ہوتے ہیں۔

$$(r\boldsymbol{A}) \times (s\boldsymbol{B}) = (rs)(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \qquad \text{غیر سمتی قاعدہ حاصل تقسیم} \tag{۵}$$

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} \qquad \text{سمتی قاعدہ حاصل تقسیم} \tag{۶}$$

$$(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} + \boldsymbol{C} \times \boldsymbol{A} \qquad \text{سمتی قاعدہ حاصل تقسیم} \tag{۷}$$

۱۸۵۲۵ مساوات ۵ کی ایک مخصوص صورت درج ذیل ہے۔

$$(-\boldsymbol{A}) \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} \times (-\boldsymbol{B}) = -(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \tag{۸}$$

غیر سمتی قاعدہ حاصل تقسیم ثابت کرنے کی خاطر مساوات ۵ کے دونوں اطراف پر مساوات ۱ عائد کر کے نتائج کا موازنہ کریں۔ سمتی قاعدہ حاصل تقسیم مساوات ۶ کو ثابت کرنا اتنا آسان نہیں ہے۔ ہم اس کی حقیقت کو یہاں تسلیم کرتے ہیں۔ اس کا ثبوت ضمیمہ ز میں پیش کیا گیا ہے۔ مساوات ۷ کو مساوات ۶ سے اخذ کیا جا سکتا ہے۔ مساوات ۶ کے دونوں اطراف کو -1 سے ضرب کر کے حاصل اجزاء کے مقام تبدیل کریں۔

$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ کا کلیہ بذریعہ مقطع

ہم $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ کا حساب کارتیسی محددی نظام میں $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ سے کرنا چاہتے ہیں۔ ہم درج ذیل فرض کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$$

قواعد تقسیم اور $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کے قواعد ضرب سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= (a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \times (b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}) \\
&= a_1b_1\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} + a_1b_2\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} + a_1b_3\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{k} \\
&\quad + a_2b_1\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{i} + a_2b_2\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{j} + a_2b_3\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} \\
&\quad + a_3b_1\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} + a_3b_2\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} + a_3b_3\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{k} \\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\boldsymbol{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

مذکورہ بالا مساوات کا آخری حصہ قالب

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

کو کھول کر ملتا ہے۔

یوں اگر سمتیات $\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j} + a_3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j} + b_3\boldsymbol{k}$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{۹}$$

مثال ۱۱.۲۷:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

□

۱۸۵۳۷ مثال ۱۱.۲۸:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = (2)(3) - (1)(-4) = 6 + 4 = 10$$

۱۸۵۳۸ □

۱۸۵۳۹ مثال ۱۱.۲۹:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

۱۸۵۴۰ □

۱۸۵۴۱ مثال ۱۱.۳۰:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= (-5) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (3) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} + (1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -5(1-3) - 3(2+4) + 1(6+4) = 10 - 18 + 10 = 2 \end{aligned}$$

۱۸۵۴۲ □

۱۸۵۴۳ مثال ۱۱.۳۱: صلیبی ضرب $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}$ درج ذیل سمتیات کے لیے حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = -4\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

۱۸۵۴۴ حل

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \\ &= -2\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} &= -(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) = 2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 10\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

۱۸۵۴۵ □

۱۸۵۴۶ مثال ۱۱.۳۲: ایک مستوی پر نقاط $P(1,-1,0)$ ، $Q(2,1,-1)$ اور $R(-1,1,2)$ پائے جاتے ہیں۔ اس سطح کو عمودی سمتیہ
۱۸۵۴۷ تلاش کریں۔

۱۸۵۴۸ **حل**

۱۸۵۴۹ سمتیات $\overrightarrow{PQ}$ اور $\overrightarrow{PR}$ اس سطح میں پائے جائیں گے۔ چونکہ سمتیہ $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ ان دونوں سمتیات کو عمودی ہے لہٰذا یہ مستوی کو بھی عمودی ہو گا۔

۱۸۵۵۰ اجزاء کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= (2-1)\boldsymbol{i} + (1+1)\boldsymbol{j} + (-1-0)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \\
\overrightarrow{PR} &= (-1-1)\boldsymbol{i} + (1+1)\boldsymbol{j} + (2-0)\boldsymbol{k} = -2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} \\
\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \\
&= 6\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

۱۸۵۵۱ □

۱۸۵۵۲ مثال ۱۱.۳۳: ایک مثلث کے راس $P(1,-1,0)$ ، $Q(2,1,-1)$ اور $R(-1,1,2)$ ہیں۔ اس مثلث کا رقبہ معلوم کریں۔

۱۸۵۵۳ **حل**

۱۸۵۵۴ سمتیات $\overrightarrow{PQ}$ اور $\overrightarrow{PR}$ جس متوازی الاضلاع کے ضلع ہوں اس کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| &= |6\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{k}| \qquad \text{مثال ۱۱.۳۲} \\
&= \sqrt{(6)^2 + (6)^2} = 6\sqrt{2}
\end{aligned}$$

۱۸۵۵۵ مثلث کا رقبہ اس کا نصف $3\sqrt{2}$ ہو گا۔ □

۱۸۵۵۶ مثال ۱۱.۳۴: سطح $P(1,-1,0)$ ، $Q(2,1,-1)$ اور $R(-1,1,2)$ کا عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ دریافت کریں۔

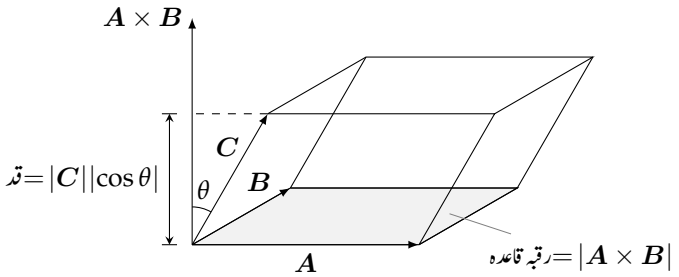
۱۸۵۵۷ **حل**

۱۸۵۵۸ چونکہ $\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$ مستوی کو عمودی ہے لہٰذا $\boldsymbol{n}$ کا رخ یہی سمتیہ دے گا۔ ہم اس سمتیہ کو اس کی مقدار سے تقسیم کر کے عمودی اکائی سمتیہ معلوم کرتے

۱۸۵۵۹ ہیں۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}}{\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right|} = \frac{6\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{k}}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$$

۱۸۵۶۰ چونکہ سطح کے دو آپس میں مخالف رخ عمودی سمتیات پائے جاتے ہیں لہٰذا اس سطح کا دوسرا عمودی اکائی سمتیہ $-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}$ ہو گا۔ □



شکل ۱۱.۴۱: مستطیلی متوازی السطوح کا حجم اس کے قاعدہ کا رقبہ ضرب قد کے برابر ہو گا۔

۱۸۵۶۱ **غیر سمتی سہ ضرب**

۱۸۵۶۲ ضرب $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$ کو $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کا غیر سمتی سہ ضرب کہتے ہیں جہاں سمتیات کی ترتیب یہی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں (شکل ۱۱.۴۱) کہ

۱۸۵۶۳ غیر سمتی سہ ضرب کی مطلق قیمت

$$\big|(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}\big| = |\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}||\boldsymbol{C}||\cos\theta|$$

۱۸۵۶۴ اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم دیتی ہے جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ ہوں۔ مستطیلی متوازی السطوح کا حجم اس کے قاعدہ کا رقبہ $|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|$

۱۸۵۶۵ اور اس کے قد $|\boldsymbol{C}||\cos\theta|$ کا حاصل ضرب نقطہ

$$\begin{aligned}\text{حجم} &= (\text{رقبہ قاعدہ})\cdot(\text{قد})\\ &= |\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|\cdot|\boldsymbol{C}||\cos\theta|\\ &= \big|(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}\big|\end{aligned}$$

۱۸۵۶۶ ہو گا۔

۱۸۵۶۷ سمتیات $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کی سطح کو شکل ۱۱.۴۱ میں قاعدہ دکھایا گیا ہے۔ ہم سمتیات $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کی سطح یا سمتیات $\boldsymbol{C}$ اور $\boldsymbol{A}$ کی سطح کو قاعدہ لے کر بھی

۱۸۵۶۸ حجم تلاش کر سکتے ہیں۔ چونکہ حجم اٹل قیمت ہے لہٰذا درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B} \tag{۱۰}$$

۱۸۵۶۹ اب غیر سمتی ضرب تعویضی ہے لہٰذا مساوات ۱۰ سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}) \tag{۱۱}$$

۱۸۵۷۰ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ غیر سمتی سہ ضرب میں سمتیات کا مقام تبدیل کیے بغیر صلیبی ضرب اور نقطہ ضرب کے مقامات کو بدلا جا سکتا ہے۔

۱۸۵۷۱ غیر سمتی سہ ضرب کی قیمت مقطع سے حاصل کی جا سکتی ہے:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= \boldsymbol{A}\cdot\left[\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}\right] \\ &= a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

۱۸۵۷۲ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \tag{۱۲}$$

۱۸۵۷۳ مثال ۱۱.۳۵: سمتیات $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{B} = -2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{C} = 7\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}$ ایک مستطیلی متوازی السطوح بناتے
۱۸۵۷۴ ہیں۔ اس کا حجم تلاش کریں۔

۱۸۵۷۵ **حل**

۱۸۵۷۶

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \\ &= -21 - 16 + 13 = -23\end{aligned}$$

۱۸۵۷۷ یوں حجم $\left|\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\right| = 23$ ہو گا۔ □

۱۸۵۷۸ **سوالات**

۱۸۵۷۹ **حساب**

۱۸۵۸۰ سوال ۱۱.۱۸۳ تا سوال ۱۱.۱۹۰ میں $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ (اگر معین ہو) کی لمبائیاں اور مقدار معلوم کریں۔

۱۸۵۸۱ سوال ۱۱.۱۸۳: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}$

۱۸۵۸۲ سوال ۱۱.۱۸۴: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$

۱۸۵۸۳ سوال ۱۱.۱۸۵: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$

۱۸۵۸۴ سوال ۱۱.۱۸۶: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$

۱۸۵۸۵ سوال ۱۱.۱۸۷: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{B} = -3\boldsymbol{j}$

۱۸۵۸۶ سوال ۱۱.۱۸۸: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k}$

۱۸۵۸۷ سوال ۱۱.۱۸۹: $\boldsymbol{A} = -8\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - 4\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

۱۸۵۸۸ سوال ۱۱.۱۹۰: $\boldsymbol{A} = \frac{3}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

۱۸۵۸۹ سوال ۱۱.۱۹۱ تا سوال ۱۱.۱۹۶ میں محددی محور کے مبدا پر $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ ترسیم کریں۔

۱۸۵۹۰ سوال ۱۱.۱۹۱: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}$

۱۸۵۹۱ سوال ۱۱.۱۹۲: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}$

۱۸۵۹۲ سوال ۱۱.۱۹۳: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

۱۸۵۹۳ سوال ۱۱.۱۹۴: $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$

۱۸۵۹۴ سوال ۱۱.۱۹۵: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$

۱۸۵۹۵ سوال ۱۱.۱۹۶: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i}$

۱۸۵۹۶

۱۸۵۹۷ سوال ۱۱.۱۹۷ تا سوال ۱۱.۲۰۰ میں درج ذیل اقدام کریں۔

۱۸۵۹۸ ا. اس مثلث کا رقبہ تلاش کریں جس کے راس نقاط P ، Q اور R ہوں۔

۱۸۵۹۹ ب. سطح PQR کا ایک عمودی اکائی سمتیہ تلاش کریں۔

۱۸۶۰۰ سوال ۱۱.۱۹۷: $P(1,-1,2), \quad Q(2,0,-1), \quad R(0,2,1)$

۱۸۶۰۱ سوال ۱۱.۱۹۸: $P(1,1,1), \quad Q(2,1,3), \quad R(3,-1,1)$

۱۸۶۰۲ سوال ۱۱.۱۹۹: $P(2,-2,1), \quad Q(3,-1,2), \quad R(3,-1,1)$

۱۸۶۰۳ سوال ۱۱.۲۰۰: $P(-2,2,0), \quad Q(0,1,-1), \quad R(-1,2,-2)$

۱۸۶۰۴

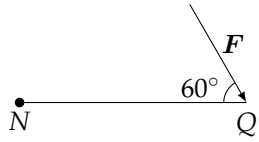
۱۸۶۰۵ سوال ۱۱.۲۰۱: سمتیات $\boldsymbol{A} = 5\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{j} - 5\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{C} = -15\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ لیں۔ ان میں کون سے
۱۸۶۰۶ سمتیات (اگر ہوں) (ا) عمودی (ب) کون سے متوازی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۸۶۰۷ سوال ۱۱.۲۰۲: سمتیات $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ اور
۱۸۶۰۸ $\boldsymbol{D} = -\frac{\pi}{2}\boldsymbol{i} - \pi\boldsymbol{j} + \frac{\pi}{2}\boldsymbol{k}$ لیں۔ کون سے سمتیات (اگر ہوں) (ا) عمودی اور (ب) کون سے متوازی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

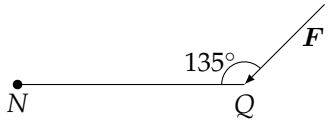
۱۸۶۰۹

۱۸۶۱۰ سوال ۱۱.۲۰۳ اور سوال ۱۱.۲۰۴ میں N پر $\boldsymbol{F}$ کا قوت مروڑ تلاش کریں جہاں $\left|\vec{NQ}\right| = 80\,\text{cm}$ اور $\boldsymbol{F} = 30\,\text{N}$ ہیں۔

۱۸۶۱۱ سوال ۱۱.۲۰۳: خاکہ شکل ۱۱.۴۲ میں دیا گیا ہے۔



شکل ۱۱.۴۲: خاکہ برائے سوال ۱۱.۲۰۳



شکل ۱۱.۴۳: خاکہ برائے سوال ۱۱.۲۰۴

سوال ۱۱.۲۰۴: خاکہ شکل ۱۱.۴۳ میں دیا گیا ہے۔

سوال ۱۱.۲۰۵ تا سوال ۱۱.۲۰۸ میں دکھائیں کہ $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}$ ہے۔ اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم تلاش کریں جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ ہوں۔

سوال ۱۱.۲۰۵: $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{C}=2\boldsymbol{k}$

سوال ۱۱.۲۰۶: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{C}=-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$

سوال ۱۱.۲۰۷: $\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ ، $\boldsymbol{B}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{k}$

سوال ۱۱.۲۰۸: $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{C}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۱.۲۰۹: درج ذیل میں کون سے حل صورت درست اور کون سے بعض اوقات درست ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. $|\boldsymbol{A}|=\sqrt{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}}$

ب. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|$

ج. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$

د. $\boldsymbol{A}\times(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$

ھ. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$

و. $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$

ز. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{B}=0$

ح. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

سوال ۱۱.۲۱۰: درج ذیل میں کون سے ہر صورت درست اور کون سے بعض اوقات درست ہوتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$

ب. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A})$

ج. $(-\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B}=-(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

۱۸۶۳۵ د. $(c\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot(c\boldsymbol{B})=c(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ جہاں c مستقل ہے۔

۱۸۶۳۶ ھ. $c(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(c\boldsymbol{A})\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times(c\boldsymbol{B})$ جہاں c مستقل ہے۔

۱۸۶۳۷ و. $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|^2$

۱۸۶۳۸ ز. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{A}=0$

۱۸۶۳۹ ح. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$

۱۸۶۴۰ سوال ۱۱.۲۱۱: سمتیات $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ غیر صفر ہیں۔ نقطہ ضرب اور صلیبی ضرب کی علامتیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھیں۔

۱۸۶۴۱ ا. $\boldsymbol{B}$ پر $\boldsymbol{A}$ کا سمتی تظلیل۔

۱۸۶۴۲ ب. $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کو عمودی سمتیہ۔

۱۸۶۴۳ ج. $\boldsymbol{C}$ اور $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ کو عمودی سمتیہ۔

۱۸۶۴۴ د. اس مستطیلی متوازی السطوح کا حجم جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ ہوں۔

۱۸۶۴۵ سوال ۱۱.۲۱۲: سمتیات $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ غیر صفر ہیں۔ نقطہ ضرب اور صلیبی ضرب کی علامتیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھیں۔

۱۸۶۴۶ ا. $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$ کو عمودی سمتیہ۔

۱۸۶۴۷ ب. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ کو عمودی سمتیہ۔

۱۸۶۴۸ ج. ایک سمتیہ جس کی لمبائی $|\boldsymbol{A}|$ اور جو $\boldsymbol{B}$ کے رخ ہو۔

۱۸۶۴۹ د. اس متوازی الاضلاع کا رقبہ جس کے اضلاع $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{C}$ ہوں۔

۱۸۶۵۰ سوال ۱۱.۲۱۳: فرض کریں $\boldsymbol{A}$ ، $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ سمتیات ہیں۔ درج ذیل میں کن کا معنی ہے اور کن کا کوئی معنی نہیں ہے؟

۱۸۶۵۱ ا. $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$

۱۸۶۵۲ ب. $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$

۱۸۶۵۳ ج. $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$

۱۸۶۵۴ د. $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$

۱۸۶۵۵ سوال ۱۱.۲۱۴: دکھائیں کہ ماسوائے انحطاطی صورت $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے مستوی میں $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ پایا جائے گا جبکہ $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ کے
۱۸۶۵۶ مستوی میں $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ پایا جائے گا۔ انحطاطی صورت کس کو کہتے ہیں؟

۱۸۶۵۷ سوال ۱۱.۲۱۵: صلیبی ضرب میں منسوخی
۱۸۶۵۸ کیا $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$ اور $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ کی صورت میں $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۸۶۵۹ سوال ۱۱.۲۱۶: دوگنا منسوخی
۱۸۶۶۰ کیا $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$ ، $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$ اور $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}$ کی صورت میں $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۸۶۶۱

مستوی میں رقبہ

سوال ۱۱.۲۱۷ تا سوال ۱۱.۲۲۰ میں متوازی الاضلاع کے راس دیے گئے ہیں۔ اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۲۱۷: $A(1,0), \quad B(0,1), \quad C(-1,0), \quad D(0,-1)$

سوال ۱۱.۲۱۸: $A(0,0), \quad B(7,3), \quad C(9,8), \quad D(2,5)$

سوال ۱۱.۲۱۹: $A(-1,2), \quad B(2,0), \quad C(7,1), \quad D(4,3)$

سوال ۱۱.۲۲۰: $A(-6,0), \quad B(1,-4), \quad C(3,1), \quad D(-4,5)$

سوال ۱۱.۲۲۱ تا سوال ۱۱.۲۲۴ میں مثلث کے راس دیے گئے ہیں۔ اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۲۲۱: $A(0,0), \quad B(-2,3), \quad C(3,1)$

سوال ۱۱.۲۲۲: $A(-1,-1), \quad B(3,3), \quad C(2,1)$

سوال ۱۱.۲۲۳: $A(-5,3), \quad B(1,-2), \quad C(6,-2)$

سوال ۱۱.۲۲۴: $A(-6,0), \quad B(10,-5), \quad C(-2,4)$

سوال ۱۱.۲۲۵: مستوی xy میں ایک مثلث کے راس $(0,0)$ ، (a_1,a_2) اور (b_1,b_2) ہیں۔ اس کے رقبہ کا کلیہ معلوم کریں۔ اپنے کام کی وضاحت کریں۔

سوال ۱۱.۲۲۶: ایک مثلث کے راس (a_1,a_2) ، (b_1,b_2) اور (c_1,c_2) ہیں۔ اس کے رقبہ کا کلیہ اخذ کریں۔

۱۱.۵ فضا میں خطوط اور مستویات

اس حصہ میں غیر سمتی ضرب اور سمتی ضرب استعمال کرتے ہوئے فضا میں خطوط، قطعات اور مستوی کی مساوات لکھنا سکھایا جائے گا۔

فضا میں خطوط اور قطعات

فرض کریں فضا میں نقطہ $N_0(x_0,y_0,z_0)$ سے گزرتا اور سمتیہ $\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$ کے متوازی ایک خط L ہے۔ تب L ان تمام نقطوں $N(x,y,z)$ کا سلسلہ ہوگا جن کے لیے $\overrightarrow{N_0N}$ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے متوازی ہو۔ یعنی L پر N صرف اور صرف اس صورت پایا جائے گا جب $\overrightarrow{N_0N}$ سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا غیر سمتی مضرب ہو۔

سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کا متوازی خط جو نقطہ $N_0(x_0,y_0,z_0)$ سے گزرتا ہو کی مساوات درج ذیل ہوگی۔

$$\overrightarrow{N_0N} = t\boldsymbol{v}, \quad -\infty < t < \infty \tag{1}$$

۱۸۶۸۵ مساوات ۱ کے دونوں اطراف مطابقتی اجزاء کو ایک دوسرے کے برابر لکھتے ہوئے تین غیر سمتی مساوات حاصل ہوں گے جن میں مقدار معلوم t پایا جائے گا:

$$(x-x_0)\boldsymbol{i}+(y-y_0)\boldsymbol{j}+(z-z_0)\boldsymbol{k}=t(A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k}) \qquad \text{اتساع مساوات ۱}$$

$$x-x_0=tA,\quad y-y_0=tB,\quad z-z_0=tC \qquad \text{مطابقتی اجزاء}$$

۱۸۶۸۶ ان مساوات سے وقفہ $-\infty < t < \infty$ پر سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے متوازی نقطہ $N_0(x_0,y_0,z_0)$ سے گزرتے خط کی درج ذیل معیاری مقدار معلوم
۱۸۶۸۷ مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$x=x_0+tA,\quad y=y_0+tB,\quad z=z_0+tC,\quad -\infty<t<\infty \qquad (۲)$$

۱۸۶۸۸ مثال ۱۱.۳۶: سمتیہ $\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ کے متوازی خط جو نقطہ $(-2,0,4)$ سے گزرتا ہو کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

۱۸۶۸۹ **حل**

۱۸۶۹۰ دی گئی معلومات کو مساوات ۲ میں پر کر کے خط کی مقدار معلوم مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$x=-2+2t,\quad y=4t,\quad z=4-2t$$

۱۸۶۹۱ □

۱۸۶۹۲ مثال ۱۱.۳۷: نقطہ $N(-3,2,-3)$ اور $Q(1,-1,4)$ سے گزرتے ہوئے خط کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

۱۸۶۹۳ **حل**

۱۸۶۹۴ ان نقطوں کے بیچ خط کا متوازی سمتیہ

$$\overrightarrow{NQ}=(1-(-3))\boldsymbol{i}+(-1-2)\boldsymbol{j}+(4-(-3))\boldsymbol{k}=4\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+7\boldsymbol{k}$$

۱۸۶۹۵ ہے جس کو مساوات ۲ میں $(x_0,y_0,z_0)=(-3,2,-3)$ کے ساتھ لیتے ہوئے مقدار معلوم مساوات حاصل کرتے ہیں۔

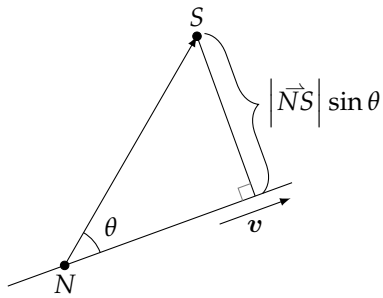
$$x=-3+4t,\quad y=2-3t,\quad z=-3+7t$$

۱۸۶۹۶ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $t=0$ پر $x=-3+4(0)=-3$ ، $y=2-3(0)=2$ اور $z=-3+$
۱۸۶۹۷ $7(0)=-3$ یعنی ابتدائی نقطہ $(-3,2,-3)$ حاصل ہوتا ہے۔ ہم نقطہ $Q(1,-1,4)$ کو بھی ابتدائی نقطہ منتخب کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنے
۱۸۶۹۸ سے درج ذیل مساوات حاصل ہو گا۔

$$x=1+4t,\quad y=-1-3t,\quad z=4+7t$$

۱۸۶۹۹ اب $t=0$ پر $x=1$ ، $y=-1$ اور $z=4$ یعنی ابتدائی نقطہ $(1,-1,4)$ حاصل ہوتا ہے۔ درج بالا دونوں مساوات درست ہیں۔
۱۸۷۰۰ ان کے ابتدائی نقطے مختلف ہیں۔ □

۱۸۷۰۱ دو نقطوں کے بیچ خطی قطعہ کی مقدار معلوم مساوات تلاش کرنے کی خاطر ہم پہلے ان نقطوں کے بیچ خط کی مقدار معلوم مساوات حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بعد
۱۸۷۰۲ ہم قطعہ کے آخری سروں پر t کی قیمتیں تلاش کر کے t کو ان قیمتوں کے بیچ بند وقفہ پر رہنے کا پابند بناتے ہیں۔ خط کی مساوات بشمول پابند وقفہ قطعہ کی مقدار
۱۸۷۰۳ معلوم مساوات ہو گی۔



شکل ۱۱.۴۴: نقطہ S سے سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے متوازی خط جو نقطہ N سے گزرتا ہو کا فاصلہ۔

۱۸۷۰۴ مثال ۱۱.۳۸: نقطہ $N(-3,2,-3)$ اور $Q(1,-1,4)$ کے بیچ قطعہ کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

۱۸۷۰۵ **حل**

۱۸۷۰۶ ہم پہلے نقاط N اور Q سے گزرتے ہوئے خط کی مساوات تلاش کرنی ہو گی۔ ہم مثال ۱۱.۳۷ میں اس کو حاصل کر چکے ہیں:

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t \tag{۳}$$

۱۸۷۰۷ درج ذیل نقطہ $t = 0$ پر نقطہ $N(-3,2,-3)$ اور $t = 1$ پر نقطہ $Q(1,-1,4)$ دیتا ہے۔

$$(x, y, z) = (-3 + 4t, 2 - 3t, -3 + 7t)$$

۱۸۷۰۸ مساوات ۳ بشمول $0 \leq t \leq 1$ کی پابندی قطعہ کی مقدار معلوم مساوات ہو گی:

$$x = -3 + 4t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -3 + 7t, \quad 0 \leq t \leq 1$$

۱۸۷۰۹ □

۱۸۷۱۰ **فضا میں ایک نقطہ سے ایک خط تک فاصلہ**

۱۸۷۱۱ نقطہ S سے سمتیہ $\boldsymbol{v}$ کے متوازی خط جو نقطہ N سے گزرتا ہو کا فاصلہ d جاننے کی خاطر ہم اس خط کے عمودی قطعہ $\overrightarrow{NS}$ کی لمبائی معلوم کرتے ہیں۔

۱۸۷۱۲ شکل ۱۱.۴۴ سے واضح ہے کہ یہ لمبائی $\left|\overrightarrow{NS}\right| \sin\theta$ یعنی $\frac{\left|\overrightarrow{NS} \times \boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|}$ ہو گی۔

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{NS} \times \boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|} \qquad \text{لکیر سے نقطے کا فاصلہ} \tag{۴}$$

۱۸۷۱۳ مثال ۱۱.۳۹: نقطہ $S(1,1,5)$ سے درج ذیل لکیر تک فاصلہ دریافت کریں۔

$$L: \quad x = 1 + t, \quad y = 3 - t, \quad z = 2t$$

۱۸۷۱۴ **حل**

۱۸۷۱۵ ہم $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ کے متوازی لکیر L جو $N(1,3,0)$ سے گزرتی ہو کی مساوات تلاش کرتے ہیں۔اب

$$\overrightarrow{NS} = (1-1)\boldsymbol{i} + (1-3)\boldsymbol{j} + (5-0)\boldsymbol{k} = -2\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$$

۱۸۷۱۶ اور

$$\overrightarrow{NS} \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} + 5\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$$

۱۸۷۱۷ لیتے ہوئے مساوات ۴ درج ذیل فاصلہ دیتی ہے۔

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{NS} \times \boldsymbol{v}\right|}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\sqrt{1+25+4}}{1+1+4} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}$$

۱۸۷۱۸ □

۱۸۷۱۹ **فضا میں مستوی کی مساوات**

۱۸۷۲۰ فرض کریں سطح M نقطہ $N_0(x_0, y_0, z_0)$ سے گزرتا ہے اور اس سطح کو سمتیہ $\boldsymbol{n} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}$ قائمہ ہے۔تب ان تمام
۱۸۷۲۱ نقطوں $N(x, y, z)$ کا سلسلہ، جن کے لیے $\overrightarrow{N_0N}$ اور $\boldsymbol{n}$ ایک دوسرے کے عمودی ہوں، M ہو گا (شکل ۱۱.۴۵)۔یعنی N صرف اور صرف
۱۸۷۲۲ اس صورت M پر واقع ہو گا جب $\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{N_0N} = 0$ ہو۔یہ مساوات

$$(A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j} + C\boldsymbol{k}) \cdot [(x - x_0)\boldsymbol{i} + (y - y_0)\boldsymbol{j} + (z - z_0)\boldsymbol{k}] = 0$$

۱۸۷۲۳ یا

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

۱۸۷۲۴ کے مترادف ہے۔

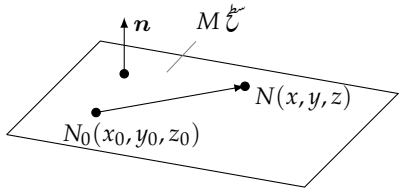
۱۸۷۲۵ **نقطہ $N_0(x_0, y_0, z_0)$ سے گزرتا ہوا اور $\boldsymbol{n}$ کو عمودی سطح کی مساوات**

۱۸۷۲۶

سمتی مساوات $$\boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{N_0N} = 0 \qquad (۵)$$

اجزائی مساوات $$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad (۶)$$

۱۸۷۲۷ مثال ۱۱.۴۰: نقطہ $N(-3, 0, 7)$ سے گزرتا سطح جو $\boldsymbol{n} = 5\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ کو عمودی ہو کی مساوات تلاش کریں۔



شکل ۱۱.۴۵: سطح میں نقاط N_0 اور N کے بیچ سمتی قطعہ اور سطح کا قائمہ سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔

۱۸۷۲۸ **حل**

۱۸۷۲۹

$$\begin{aligned} 5(x-(-3))+2(y-0)+(-1)(z-7)&=0 \qquad \text{مساوات ۵}\\ 5x+15+2y-z+7&=0\\ 5x+2y-z&=-22 \end{aligned}$$

۱۸۷۳۰ □

۱۸۷۳۱ آپ مثال ۱۱.۴۰ میں دیکھ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{n}=5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ کے عددی سر مساوات $5x+2y-z=-22$ میں x ، y اور z کے
۱۸۷۳۲ عددی سر کی طور پر ابھرتے ہیں۔ ایسا واقعاتی طور پر نہیں ہوا بلکہ مساوات ۶ کو $Ax+By+Cz=D$ لکھنا ممکن ہے جہاں $D=Ax_0+$
۱۸۷۳۳ By_0+Cz_0 ہو گا۔ یوں

$$A\boldsymbol{i}+B\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k} \quad \text{اور} \quad Ax+By+Cz=D$$

۱۸۷۳۴ ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔

۱۸۷۳۵ مثال ۱۱.۴۱: تین نقطے سطح تعین کرتے ہیں
۱۸۷۳۶ نقاط $A(0,0,1)$ ، $B(2,0,0)$ اور $C(0,3,0)$ سے گزرتے ہوئے مستوی کی مساوات تلاش کریں۔

۱۸۷۳۷ **حل**

۱۸۷۳۸ ہم ان نقاط کو استعمال کرتے ہوئے سطح کا عمودی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 3 & -1\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}$$

۱۸۷۳۹ ہم اس عمودی سمتیہ کے اجزاء اور (سطح پر کسی بھی) نقطہ $(0,0,1)$ کو مساوات ۶ میں پر کر کے مستوی کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 3(x-0)+2(y-0)+6(z-1)&=0\\ 3x+2y+6z&=6 \end{aligned}$$

۱۸۷۴۰ □

۱۸۷۴۱ مثال ۱۱.۴۲: سطح اور لکیر کی انقطاع

۱۸۷۴۲ وہ نقطہ دریافت کریں جہاں خط

$$x = \frac{8}{3} + 2t, \quad y = -2t, \quad z = 1 + t$$

۱۸۷۴۳ مستوی $3x + 2y + 6z = 6$ کو قطع کرتا ہو۔

۱۸۷۴۴ **حل**

۱۸۷۴۵ نقطہ

$$\left(\frac{8}{3} + 2t, -2t, 1 + t\right)$$

۱۸۷۴۶ اس سطح میں پایا جاتا ہے جو مستوی کی (درج ذیل) مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\begin{aligned} 3\left(\frac{8}{3} + 2t\right) + 2(-2t) + 6(1 + t) &= 6 \\ 8 + 6t - 4t + 6 + 6t &= 6 \\ 8t &= -8 \\ t &= -1 \end{aligned}$$

۱۸۷۴۷ نقطہ تقاطع درج ذیل ہو گا۔

$$(x, y, z)|_{t=-1} = \left(\frac{8}{3} - 2, 2, 1 - 1\right) = \left(\frac{2}{3}, 2, 0\right)$$

۱۸۷۴۸ □

۱۸۷۴۹ مثال ۱۱.۴۳: نقطہ سے مستوی تک فاصلہ

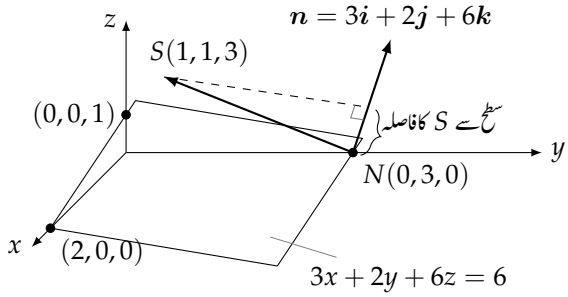
۱۸۷۵۰ نقطہ $S(1, 1, 3)$ سے سطح $3x + 2y + 6z = 6$ تک فاصلہ کتنا ہے؟

۱۸۷۵۱ **حل**

۱۸۷۵۲ ہم مستوی میں نقطہ N تلاش کر کے سمتیہ $\overrightarrow{NS}$ کا $\boldsymbol{n}$ پر تظلیل معلوم کر کے فاصلہ حاصل کرتے ہیں (شکل ۱۱.۴۶)۔

۱۸۷۵۳ مساوات $3x + 2y + 6z = 6$ کے عددی سروں سے درج ذیل عمودی سمتیہ حاصل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = 3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$$



شکل ۱۱.۴۶: نقطہ S سے سطح تک فاصلہ $\overrightarrow{NS}$ کی $\boldsymbol{n}$ پر سمتیہ تظلیل کی لمبائی کے برابر ہو گا۔

۱۸۷۵۴ مستوی کی مساوات سے مستوی میں نقاط حاصل کرتے ہیں۔ ان میں محوری قطعات معلوم کرنا بہت آسان ہوتا ہے۔ اگر ہم قطع y کو N لیں تب درج ذیل
۱۸۷۵۵ ہو گا۔

$$\begin{aligned}\overrightarrow{NS} &= (1-0)\boldsymbol{i} + (1-3)\boldsymbol{j} + (3-0)\boldsymbol{k}\\ &= \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}\\ |\boldsymbol{n}| &= \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7\end{aligned}$$

۱۸۷۵۶ نقطہ S سے سطح تک فاصلہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}d &= \left|\overrightarrow{NS} \cdot \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|\\ &= \left|(\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) \cdot \left(\frac{3}{7}\boldsymbol{i} + \frac{2}{7}\boldsymbol{j} + \frac{6}{7}\boldsymbol{k}\right)\right|\\ &= \left|\frac{3}{7} - \frac{4}{7} + \frac{18}{7}\right| = \frac{17}{7}\end{aligned}$$

۱۸۷۵۷ □

۱۸۷۵۸ **سطحوں کے بیچ زاویات؛ خطوط تقاطع**

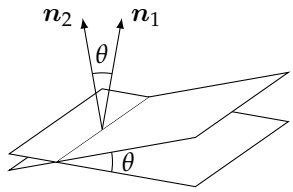
۱۸۷۵۹ دو متقاطع سطحوں کے بیچ زاویہ سے مراد ان کے عمودی سمتیات کے بیچ زاویہ حادہ ہے (شکل ۱۱.۴۷)۔

۱۸۷۶۰ مثال ۱۱.۴۴: سطح $3x - 6y - 2z = 15$ اور سطح $2x + y - 2z = 5$ کے بیچ زاویہ دریافت کریں۔

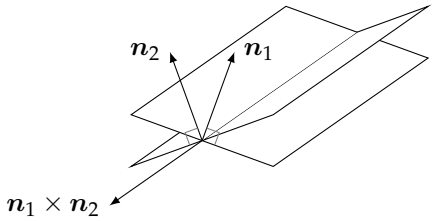
۱۸۷۶۱ **حل**

۱۸۷۶۲ ان سطحوں کے عمودی سمتیات درج ذیل ہیں۔

$$\boldsymbol{n}_1 = 3\boldsymbol{i} - 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{n}_2 = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$$



شکل ۱۱.۴۷: دو سطحوں کے بیچ زاویہ، ان سطحوں کے عمودی سمتیات کے بیچ زاویہ کے برابر ہوتا ہے۔



شکل ۱۱.۴۸: سطحوں کا خط تقاطع کا سطحوں کے عمودی سمتیات کے ساتھ تعلق۔

۱۸۷۶۳ ان کے بیچ زاویہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\theta &= \cos^{-1}\left(\frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n_1}|\boldsymbol{n}_2||}\right) \\ &= \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right) \\ &\approx 1.38 \text{ ریڈیئن}\end{aligned}$$

مساوات ۴

۱۸۷۶۴ □

۱۸۷۶۵ مثال ۱۱.۴۵: سطح $3x - 6y - 2z = 15$ اور سطح $2x + y - 2z = 5$ کے خط تقاطع کی مساوات تلاش کریں۔

۱۸۷۶۶ **حل**

۱۸۷۶۷ سطحوں کے عمودی سمتیات $\boldsymbol{n}_1$ ، $\boldsymbol{n}_2$ خط تقاطع کے عمودی ہوں گے لہٰذا خط تقاطع اور $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$ ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے (شکل
۱۸۷۶۸ ۱۱.۴۸)۔ اس کو دوسری نظر سے دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2$ خط تقاطع کے متوازی ہو گا۔ موجودہ مثال میں درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{n}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 14\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 15\boldsymbol{k}$$

۱۸۷۶۹ سمتیہ $14\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 15\boldsymbol{k}$ کا ہر غیر صفر غیر سمتی مضرب بھی درست جواب ہو گا۔ □

۱۸۷۷۰ مثال ۱۱.۴۶: اس لکیر کی مساوات تلاش کریں جس پر سطح $3x - 6y - 2z = 15$ اور سطح $2x + y - 2z = 5$ ایک دوسرے کو
۱۸۷۷۱ قطع کرتے ہیں۔

۱۸۷۷۲ **حل**

۱۸۷۷۳ ہم اس لکیر کے متوازی خط کی مساوات اور لکیر پر ایک نقطہ تلاش کر کے مساوات ۱۲ استعمال کرتے ہیں۔

۱۸۷۷۴ ہم مثال ۱۱.۴۵ میں خط تقاطع کا متوازی خط $\boldsymbol{v} = 14\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 15\boldsymbol{k}$ تلاش کر چکے ہیں۔ خط پر نقطہ معلوم کرنے کی خاطر ہم دونوں سطحوں کا کوئی
۱۸۷۷۵ بھی مشترک نقطہ لے سکتے ہیں۔ یوں $z = 0$ لے کر دونوں سطحوں کی مساواتوں کو ایک ساتھ حل کر کے نقطہ $(3, -1, 0)$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں خط

تقاطع درج ذیل ہو گا۔

$$x = 3 + 14t, \quad y = -1 + 2t, \quad z = 15t$$

□

سوالات

خطوط اور خطی قطعات

سوال ۱۱.۲۲۷ تا سوال ۱۱.۲۳۸ میں خطوط کی مقدار معلوم مساوات حاصل کریں۔

سوال ۱۱.۲۲۷: سمتیہ $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ کا متوازی اور نقطہ $N(3, -4, -1)$ سے گزرتا خط۔

سوال ۱۱.۲۲۸: نقاط $N(1, 2, -1)$ اور $Q(-1, 0, 1)$ سے گزرتا خط۔

سوال ۱۱.۲۲۹: نقاط $N(-2, 0, 3)$ اور $Q(3, 5, -2)$ سے گزرتا خط۔

سوال ۱۱.۲۳۰: نقاط $N(1, 2, 0)$ اور $Q(1, 1, -1)$ سے گزرتا خط۔

سوال ۱۱.۲۳۱: سمتیہ $2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ کا متوازی اور مبدا سے گزرتا خط۔

سوال ۱۱.۲۳۲: نقطہ $N(3, -2, 1)$ سے گزرتا اور لکیر $x = 1 + 2t,\ y = 2 - t,\ z = 3t$ کا متوازی خط۔

سوال ۱۱.۲۳۳: محور z کا متوازی لکیر $(1, 1, 1)$ کا متوازی خط۔

سوال ۱۱.۲۳۴: نقطہ $(2, 4, 5)$ سے گزرتا اور سطح $3x + 7y - 5z = 21$ کا قائمہ خط۔

سوال ۱۱.۲۳۵: نقطہ $(0, -7, 0)$ سے گزرتا اور سطح $x + 2y + 2z = 13$ کا قائمہ خط۔

سوال ۱۱.۲۳۶: نقطہ (2,3,0) سے گزرتا خط جو سمتیات $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 5\boldsymbol{k}$ کا قائمہ ہو۔

سوال ۱۱.۲۳۷: محور x

سوال ۱۱.۲۳۸: محور z

سوال ۱۱.۲۳۹ تا سوال ۱۱.۲۴۶ میں دیے گئے نقطوں کے بیچ قطعات کی مقدار معلوم مساوات معلوم کریں۔ محددی محور کھینچ کر قطعات دکھائیں۔ بڑھتے ہوئے t کے رخ کی نشاندہی کریں۔

سوال ۱۱.۲۳۹: $(0, 0, 0)$، $(1, 1, 3/2)$

سوال ۱۱.۲۴۰: $(0, 0, 0)$، $(1, 0, 0)$

سوال ۱۱.۲۴۱: $(1, 0, 0)$، $(1, 1, 0)$

سوال ۱۱.۲۴۲: $(1, 1, 0)$، $(1, 1, 1)$

۱۸۸۰۰ سوال ۱۱.۲۴۳: $(0,1,1)$ ، $(0,-1,1)$

۱۸۸۰۱

۱۸۸۰۲ سوال ۱۱.۲۴۴: $(0,2,0)$ ، $(3,0,0)$

۱۸۸۰۳ سوال ۱۱.۲۴۵: $(2,0,2)$ ، $(0,2,0)$

۱۸۸۰۴ سوال ۱۱.۲۴۶: $(1,0,-1)$ ، $(0,3,0)$

۱۸۸۰۵ **سطحیں**

۱۸۸۰۶ سوال ۱۱.۲۴۷ تا سوال ۱۱.۲۵۴ میں سطحیں کی مساوات تلاش کریں۔

۱۸۸۰۷ سوال ۱۱.۲۴۷: نقطہ $N_0(0,2,-1)$ سے گزرتا سمتیہ $\boldsymbol{n} = 3\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ کا عمودی سطح۔

۱۸۸۰۸ سوال ۱۱.۲۴۸: نقطہ $(1,-1,3)$ سے گزرتا سمتیہ $3x + y + z = 7$ کا متوازی سطح۔

۱۸۸۰۹ سوال ۱۱.۲۴۹: نقاط $(1,1,-1)$ ، $(2,0,2)$ اور $(0,-2,1)$ سے گزرتا سطح۔

۱۸۸۱۰ سوال ۱۱.۲۵۰: نقاط $(2,4,5)$ ، $(1,5,7)$ اور $(-1,6,8)$ سے گزرتا سطح۔

۱۸۸۱۱ سوال ۱۱.۲۵۱: نقطہ $N_0(2,4,5)$ سے گزرتا لکیر $x = 5 + t,\ y = 1 + 3t,\ z = 4t$ کا قائمہ سطح۔

۱۸۸۱۲ سوال ۱۱.۲۵۲: نقطہ $A(1,-2,1)$ سے گزرتا ہوا سطح جو مبدا سے A تک سمتیہ کا قائمہ ہو۔

۱۸۸۱۳ سوال ۱۱.۲۵۳: خطوط $x = 2t + 1,\ y = 3t + 2,\ z = 4t + 3$ اور $x = s + 2,\ y = 2s + 4,\ z = -4s - 1$

۱۸۸۱۴ کا نقطہ تقاطع تلاش کر کے وہ خط معلوم کریں جن میں یہ خطوط پائے جاتے ہیں۔

۱۸۸۱۵ سوال ۱۱.۲۵۴: خطوط $x = t,\ y = -t + 2,\ z = t + 1$ اور $x = 2s + 2,\ y = s + 3,\ z = 5s + 6$ کا

۱۸۸۱۶ نقطہ تقاطع تلاش کر کے وہ خط معلوم کریں جن میں یہ خطوط پائے جاتے ہیں۔

۱۸۸۱۷ سوال ۱۱.۲۵۵ اور سوال ۱۱.۲۵۶ میں مقطع خطوط سطح تعین کرتے ہیں۔ اس سطح کو تلاش کریں۔

۱۸۸۱۸ سوال ۱۱.۲۵۵:

$$\begin{aligned} L_1: &\quad x = -1 + t,\ y = 2 + t,\ z = 1 - t,\ -\infty < t < \infty \\ L_2: &\quad x = 1 - 4s,\ y = 1 + 2s,\ z = 2 - 2s,\ -\infty < s < \infty \end{aligned}$$

۱۸۸۱۹ سوال ۱۱.۲۵۶:

$$\begin{aligned} L_1: &\quad x = t,\ y = 3 - 3t,\ z = -2 - t,\ -\infty < t < \infty \\ L_2: &\quad x = 1 + s,\ y = 4 + s,\ z = -1 + s,\ -\infty < s < \infty \end{aligned}$$

۱۸۸۲۰ سوال ۱۱.۲۵۷: سطحیں $2x + y - z = 3,\ x + 2y + z = 2$ کے خط تقاطع کا قائمہ سطح جو نقطہ $N_0(2,1,-1)$ سے گزرتا

۱۸۸۲۱ ہو تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۲۵۸: سطح $4x - y + 2z = 7$ کا قائمہ اور نقاط $N_1(1,2,3)$ ، $N_2(3,2,1)$ سے گزرتا سطح تلاش کریں۔

فاصلہ

سوال ۱۱.۲۵۹ تا سوال ۱۱.۲۶۴ میں نقطہ اور لکیر کے بیچ فاصلہ دریافت کریں۔

سوال ۱۱.۲۵۹: $(0,0,12): \quad x = 4t,\ y = -2t,\ z = 2t$

سوال ۱۱.۲۶۰: $(0,0,0): \quad x = 5 + 3t,\ y = 5 + 4t,\ z = -3 - 5t$

سوال ۱۱.۲۶۱: $(2,1,3): \quad x = 2 + 2t,\ y = 1 + 6t,\ z = 3$

سوال ۱۱.۲۶۲: $(2,1,-1): \quad x = 2t,\ y = 1 + 2t,\ z = 2t$

سوال ۱۱.۲۶۳: $(3,-1,4): \quad x = 4 - t,\ y = 3 + 2t,\ z = -5 + 3t$

سوال ۱۱.۲۶۴: $(-1,4,3): \quad x = 10 + 4t,\ y = -3,\ z = 4t$

سوال ۱۱.۲۶۵ تا سوال ۱۱.۲۷۰ میں نقطہ سے لکیر تک فاصلہ دریافت کریں۔

سوال ۱۱.۲۶۵: $(2,-3,4), \quad x + 2y + 2z = 13$

سوال ۱۱.۲۶۶: $(0,0,0), \quad 3x + 2y + 6z = 6$

سوال ۱۱.۲۶۷: $(0,1,1), \quad 4y + 3z = -12$

سوال ۱۱.۲۶۸: $(2,2,3), \quad 2x + y + 2z = 4$

سوال ۱۱.۲۶۹: $(0,-1,0), \quad 2x + y + 2z = 4$

سوال ۱۱.۲۷۰: $(1,0,-1), \quad -4x + y + z = 4$

سوال ۱۱.۲۷۱: سطح $x + 2y + 6z = 1$ سے سطح $x + 2y + 6z = 10$ تک فاصلہ تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۲۷۲: لکیر $x = 2 + t,\ y = 1 + t,\ z = -\frac{1}{2} - \frac{t}{2}$ سے سطح $x + 2y + 6z = 10$ تک فاصلہ معلوم کریں۔

زاویات

سوال ۱۱.۲۷۳ اور سوال ۱۱.۲۷۴ میں سطحوں کے بیچ زاویات تلاش کریں۔ آپ کو کیلکولیٹر کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔

سوال ۱۱.۲۷۳: $x + y = 1, \quad 2x + y - 2z = 2$

سوال ۱۱.۲۷۴: $5x + y - z = 10, \quad x - 2y + 3z = -1$

سوال ۱۱.۲۷۵ تا سوال ۱۱.۲۷۸ میں سطحوں کے بیچ زاویہ حادہ کو کیلکولیٹر کی مدد سے تلاش کریں۔ جواب ایک ریڈیئن کے سواں حصہ تک درست ہو۔

سوال ۱۱.۲۷۵: $2x + 2y + 2z = 3, \quad 2x - 2y - z = 5$

سوال ۱۱.۲۷۶: $x + y + z = 1, \quad z = 0$

سوال ۱۱.۲۷۷: $2x + 2y - z = 3, \quad x + 2y + z = 2$

سوال ۱۱.۲۷۸: $4y + 3z = -12, \quad 3x + 2y + 6z = 6$

مقطع خطوط اور سطحیں

سوال ۱۱.۲۷۹ تا سوال ۱۱.۲۸۲ میں وہ نقطہ تلاش کریں جہاں دی گئی لکیر سطح کو مس کرتی ہے۔

سوال ۱۱.۲۷۹: $x = 1 - t,\ y = 3t,\ z = 1 + t; \quad 2x - y + 3z = 6$

سوال ۱۱.۲۸۰: $x = 2,\ y = 3 + 2t,\ z = -2 - 2t; \quad 6x + 3y - 4z = -12$

سوال ۱۱.۲۸۱: $x = 1 + 2t,\ y = 1 + 5t,\ z = 3t; \quad x + y + z = 2$

سوال ۱۱.۲۸۲: $x = -1 + 3t,\ y = -2,\ z = 5t; \quad 2x - 3z = 7$

سوال ۱۱.۲۸۳ تا سوال ۱۱.۲۸۶ میں سطحوں کے خط تقاطع کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۲۸۳: $x + y + z = 1, \quad x + y = 2$

سوال ۱۱.۲۸۴: $3x - 6y - 2z = 3, \quad 2x + y - 2z = 2$

سوال ۱۱.۲۸۵: $x - 2y + 4z = 2, \quad x + y - 2z = 5$

سوال ۱۱.۲۸۶: $5x - 2y = 11, \quad 4y - 5z = -17$

فضا میں دو ہمسطحی خطوط متوازی ہوں گے، یا ایک دوسرے کو قطع کریں گے۔ غیر ہمسطحی خطوط ایک دوسرے کے غیر متوازی ہوں گے اور یہ ایک دوسرے کو قطع نہیں کریں گے۔ سوال ۱۱.۲۸۷ اور سوال ۱۱.۲۸۸ میں تین لکیریں دی گئی ہیں۔ ایک وقت میں دو خطوط لیتے ہوئے دیکھیں آیا یہ متوازی ہیں، ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں یا یہ غیر ہمسطحی ہیں؟

سوال ۱۱.۲۸۷:

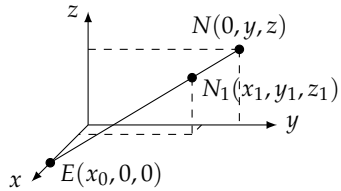
$$\begin{aligned} L_1 :&\quad x = 3 + 2t,\ y = -1 + 4t,\ z = 2 - t,\ -\infty < t < \infty \\ L_2 :&\quad x = 1 + 4s,\ y = 1 + 2s,\ z = -3 + 4s,\ -\infty < s < \infty \\ L_3 :&\quad x = 3 + 2r,\ y = 2 + r,\ z = -2 + 2r,\ -\infty < r < \infty \end{aligned}$$

سوال ۱۱.۲۸۸:

$$\begin{aligned} L_1 :&\quad x = 1 + 2t,\ y = -1 - t,\ z = 3t,\ -\infty < t < \infty \\ L_2 :&\quad x = 2 - s,\ y = 3s,\ z = 1 + s,\ -\infty < s < \infty \\ L_3 :&\quad x = 5 + 2r,\ y = 1 - r,\ z = 8 + 3r,\ -\infty < r < \infty \end{aligned}$$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۱.۲۸۹: نقطہ $N_1(2, -4, 7)$ سے گزرتا خط جو $\boldsymbol{v}_1 = 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$ کے متوازی ہو کی مقدار معلوم مساوات کو مساوات ۲ کی مدد سے دریافت کریں۔ اس کے بعد نقطہ $N_2(3, -2, 0)$ اور سمتیہ $\boldsymbol{v}_2 = -\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{j} - \frac{3}{2}\boldsymbol{k}$ استعمال کرتے ہوئے اس کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔



شکل ۱۱.۴۹: تحلیل (سوال ۱۱.۲۹۹)

سوال ۱۱.۲۹۰: نقطہ $N_1(4,1,5)$ سے گزرتی $\boldsymbol{n}_1 = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ کی قائمہ سطح کی مساوات کو مساوات ۶ کی مدد سے حاصل کریں۔ اب نقطہ $N_2(3,-2,0)$ اور عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}_2 = -\sqrt{2}\boldsymbol{i} + 2\sqrt{2}\boldsymbol{j} - \sqrt{2}\boldsymbol{k}$ استعمال کرتے ہوئے اس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۲۹۱: وہ نقاط تلاش کریں جن پر لکیر $x = 1 + 2t,\ y = -1 - t,\ z = 3t$ محوری مستوی کو مس کرتی ہو۔ جواب تک پہنچنے کے لیے اپنا طریقہ سوچ بیان کریں۔

سوال ۱۱.۲۹۲: سطح $z = 3$ میں اس خط کی مساوات تلاش کریں جو $\boldsymbol{i}$ کے ساتھ $\frac{\pi}{6}$ ریڈیئن اور $\boldsymbol{i}$ کے ساتھ $\frac{\pi}{3}$ ریڈیئن زاویہ بناتا ہو۔ اپنا طریقہ سوچ بیان کریں۔

سوال ۱۱.۲۹۳: کیا خط $x = 1 - 2t,\ y = 2 + 5t,\ z = -3t$ سطح $2x + y - z = 8$ کا متوازی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۱.۲۹۴: آپ کس طرح بتا سکتے ہیں کہ سطح $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ اور سطح $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ ایک دوسرے کے متوازی یا قائمہ ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۱.۲۹۵: دو سطحوں کا خط تقاطع $x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ z = 3 + 2t$ ہے۔ ان سطحوں کی مساوات تلاش کریں۔ مساوات کی صورت $Ax + By + Cz = D$ ہو۔

سوال ۱۱.۲۹۶: وہ سطح دریافت کریں جس مبدا سے گزرتا ہو اور سطح $2x + 3y + z = 12$ کا قائمہ ہو۔ آپ کیسے جانتے ہیں کہ یہ سطحیں ایک دوسرے کے قائمہ ہیں؟

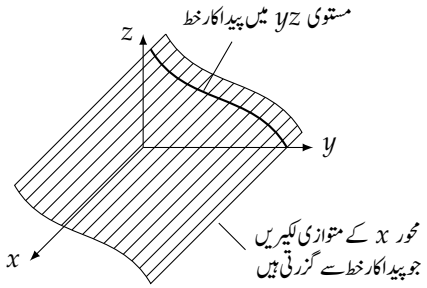
سوال ۱۱.۲۹۷: غیر صفر اعداد a ، b اور c کے لیے $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ کی ترسیم ایک سطح ہو گی۔ کن سطحوں کی مساوات ایسی ہو گی؟

سوال ۱۱.۲۹۸: فرض کریں L_1 اور L_2 غیر تقاطع، غیر متوازی خطوط ہیں۔ کیا کوئی غیر صفر سمتیہ ان دونوں کا قائمہ ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۱۱.۲۹۹: کمپیوٹر تصویر کشی

ہم تین بُعدی اجسام کو عموماً ایک مستوی پر ظاہر کرتے ہیں۔ فرض کریں آپ کی آنکھ $E(x_0,0,0)$ پر ہے اور ہم نقطہ $N_1(x_1,y_1,z_1)$ کو مستوی yz پر ظاہر کرنا چاہتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم E سے N_1 تک شعاع استعمال کرتے ہوئے N_1 کی تظلیل مستوی پر بناتے ہیں۔ یوں مستوی پر N_1 بطور $N(0,y,z)$ نظر آئے گا۔ ہمیں بطور ترسیمی تخلیق کار معلوم E اور N_1 سے y اور z حاصل کرنا ہے (شکل ۱۱.۴۹)۔



شکل ۱۱.۵۰: پیداکار خط اور نلکی

ا. $\overrightarrow{EN}$ اور $\overrightarrow{EN}_1$ کے تعلق کی سمتی مساوات لکھیں۔ اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے y اور z کو x_0 ، x_1 اور y_1 اور z_1 کی صورت میں لکھیں۔

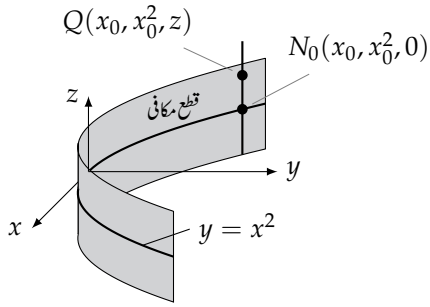
ب. جزو-ا میں حاصل نتائج کو پرکھنے کی خاطر $x_1 = 0$ اور $x_1 = x_0$ پر y اور z کا رویہ دیکھیں اور $x_0 \to \infty$ کرتے ہوئے دیکھیں کیا ہوتا ہے۔

سوال ۱۱.۳۰۰: کمپیوٹر تصویر کشی کے ایک مسئلہ پر غور کرتے ہیں۔ آپ کی آنکھ $(4,0,0)$ پر ہے۔ آپ مثلث چادر کو دیکھ رہے ہیں جس کے راس $(1,0,1)$ ، $(1,1,0)$ اور $(-2,2,2)$ ہیں۔ نقطہ $(1,0,0,)$ سے $(0,2,2)$ تک قطعہ اس چادر کو چھیر کر گزرتا ہے۔ اس قطعہ کا کون سا حصہ نظر سے اوجھل ہو گا؟

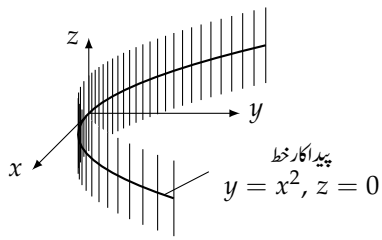
۱۱.۶ نلکی اور مربع سطحیں

واحد متغیر کے تفاعل کی احصاء میں ہم نے خطوط سے شروع کیا اور خطوط کے بارے میں اپنا علم استعمال کرتے ہوئے مستوی قوسین کا مطالعہ کیا۔ ہم نے مماس پر غور کیا اور دیکھا کہ کسی بھی قابل تفرق منحنی کے چھوٹے حصہ کو خطی تصور کیا جا سکتا ہے۔ خاص اہمیت کے حامل منحنیات میں مخروطی قطعات، اور دو درجی منحنیات شامل ہیں جنہیں متغیر x اور y کے دو درجی مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

ایک سے زائد متغیرات کے تفاعل کی احصاء کا مطالعہ کرنے کی خاطر ہم اسی طرح کی راہ پر چلتے ہیں۔ ہم دو بُعدی سطح سے شروع کر کے اس سطح کے بارے میں اپنا علم استعمال کر کر فضا میں تین بُعدی سطحوں پر غور کرتے ہیں۔ خاص اہمیت کے حامل سطحوں میں نلکیاں اور دو درجی سطحیں شامل ہیں جنہیں x ، y ، z کے دو درجی مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ گزشتہ حصہ میں دو بُعدی سطحوں پر غور کیا گیا۔ اس حصہ میں ہم تین بُعدی سطحوں پر غور کرتے ہیں۔



(ب) نلکی پر ہر نقطہ کے محدد (x_0, x_0^2, z) طرز کے ہیں لہٰذا ہم اس کو نلکی $y = x^2$ کہتے ہیں۔



(ا) مستوی xy میں قطع مکافی $y = x^2$ سے گزرتے خط جو محور z کے متوازی ہیں۔

شکل ۱۱.۵۱: اشکال برائے مثال ۱۱.۴۷

۱۸۹۰۹ نلکی

۱۸۹۱۰ **نلکی**[۲۶] سے مراد وہ سطح ہے جو (ا) ان تمام لکیروں پر مشتمل ہو جو فضا میں کسی دی گئی لکیر کے متوازی ہوں اور (ب) جو دی گئی مستوی منحنی سے گزرتی ہوں۔
۱۸۹۱۱ اس منحنی کو نلکی کی **پیداکار منحنی**[۲۷] کہتے ہیں (شکل ۱۱.۵۰)۔ ٹھوس جیومیٹری میں جہاں نلکی سے مراد دائری نلکی ہوتی ہے، پیداکار منحنی ایک دائرہ ہو گی، لیکن
۱۸۹۱۲ یہاں ہم کسی بھی قسم کی پیداکار منحنی کی اجازت دیں گے۔ ہماری (درج ذیل) پہلی مثال میں نلکی کو قطع مکافی پیدا کرتا ہے۔

۱۸۹۱۳ نلکی یا دیگر تین بُعدی سطحوں کو ترسیم کرتے ہوئے یا قلم و کاغذ سے ان کا خاکہ بناتے ہوئے ان سطحوں کا محددی سطحوں کے متوازی سطحوں کے ساتھ خط تقاطع کو
۱۸۹۱۴ دیکھنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ ان منحنیات کو **عمودی تراش**[۲۸] کہتے ہیں۔

۱۸۹۱۵ مثال ۱۱.۴۷: قطع مکافی نلکی $y = x^2$
۱۸۹۱۶ محور z کے متوازی لکیروں سے حاصل اس نلکی کی مساوات تلاش کریں جو قطع مکافی $y = x^2,\ z = 0$ سے گزرتی ہیں (شکل ۱۱.۵۱-ا)۔

۱۸۹۱۷ **حل**

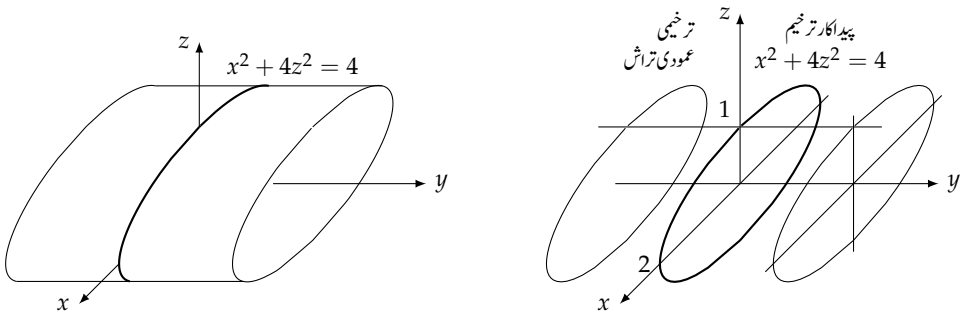
۱۸۹۱۸ فرض کریں مستوی xy میں قطع مکافی $y = x^2$ پر نقطہ $N_0(x_0, x_0^2, 0)$ پایا جاتا ہو۔ تب کسی بھی z کے لیے چونکہ نقطہ
۱۸۹۱۹ $Q(x_0, x_0^2, z)$ محور z کے متوازی لکیر $x = x_0,\ y = x_0^2$، جو نقطہ N_0 سے گزرتی ہے، پر پایا جائے گا لہٰذا Q اس نلکی پر پایا
۱۸۹۲۰ جائے گا (شکل ۱۱.۵۱-ب)۔

۱۸۹۲۱ اس طرح z کی قیمت سے قطع نظر اس سطح پر پائے جانے والے تمام نقاط مساوات $y = x^2$ کو مطمئن کریں گے۔ یوں $y = x^2$ اس نلکی کی مساوات
۱۸۹۲۲ ہو گی۔ اس کی وجہ سے ہم اس نلکی کو "نلکی $y = x^2$" کہتے ہیں۔ □

۱۸۹۲۳ ہم مثال ۱۱.۴۷ سے دیکھ سکتے ہیں کہ مستوی xy میں کوئی بھی منحنی $f(x, y) = c$ محور z کے متوازی نلکی دے گی اور اس نلکی کی مساوات

---

[۲۶] cylinder
[۲۷] generatingcurve
[۲۸] crosssection



شکل ۱۱.۵۲: محور y کے متوازی لکیریں جو سطح xz میں پائی جاتی ہوں اور ترخیمی $x^2 + 4z^2 = 4$ سے گزرتی ہوں، ترخیمی نلکی $x^2 + 4z^2 = 4$ پیدا کرتی ہیں۔ محور y کے عمودی سطحیں اس نلکی سے ترخیمی عمودی تراش کاٹتی ہیں۔ یہ نلکی پوری محور y پر پائی جائے گی۔

۱۸۹۲۴ $f(x, y) = c$ ہو گی۔ مساوات $x^2 + y^2 = 1$ ایک قائمہ نلکی بیان کرتی ہے جو محور z کے متوازی ان لکیروں پر مشتمل ہے جو مستوی xy
۱۸۹۲۵ میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ سے گزرتے ہیں۔ مساوات $x^2 + 4y^2 = 9$ ایک ترخیمی نلکی بیان کرتی ہے جو محور z کے متوازی ان لکیروں پر
۱۸۹۲۶ مشتمل ہے جو مستوی xy میں ترخیم $x^2 + 4y^2 = 9$ سے گزرتے ہیں۔

۱۸۹۲۷ اسی طرح مستوی xz میں کوئی بھی منحنی $g(x, z) = c$ محور y کے متوازی ایک نلکی دیتی ہے جس کی مساوات $g(x, z) = c$ ہو گی (شکل
۱۸۹۲۸ ۱۱.۵۲)۔ کوئی بھی مساوات $h(y, z) = c$ محور x کے متوازی نلکی دیتی ہے اور اس نلکی کی مساوات بھی $h(y, z) = c$ ہو گی (شکل ۱۱.۵۳)۔

۱۸۹۲۹ تین کارتیسی محوروں میں سے کسی بھی دو محوروں پر مبنی مساوات ایک نلکی دیتی ہے جو تیسری کارتیسی محور کے متوازی ہو گی۔

۱۸۹۳۰ مربع سطحیں

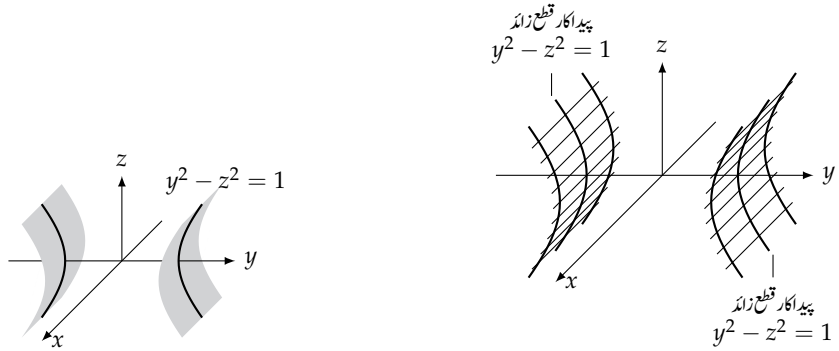
۱۸۹۳۱ مربع سطح سے مراد فضا میں x ، y اور z کی دو درجی مساوات کی ترسیم ہے جس کی عمومی مساوات درج ذیل ہے

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

۱۸۹۳۲ جہاں A ، B ، C ، D ، E ، F ، G ، H ، J اور K مستقل ہیں۔ اس مساوات کی سادہ صورت، حصہ ۱۰.۳ میں دو بُعدی صورت کی طرح،
۱۸۹۳۳ گھمانے اور منتقلی سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ مربع سطح کی مساوات میں ایک یا ایک سے زیادہ متغیرات کا مربع پایا جاتا ہے۔ ہم صرف سادہ مساوات پر غور کریں
۱۸۹۳۴ گے۔ اگرچہ نلکی کی تعریف یہ نہیں کہتی ہے البتہ اشکال مربع سطحوں کی بھی مثالیں ہیں۔ ہم اب ترخیمی سطحوں (جن میں کرہ شامل ہے)، قطع مکافی سطحوں،
۱۸۹۳۵ مخروطی سطحوں اور قطع زائد سطحوں پر غور کرتے ہیں۔

۱۸۹۳۶ مثال ۱۱.۴۸: ترخیمی سطح

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (۱)$$



شکل ۱۱.۵۳: محور x کے متوازی اور مستوی yz میں پائی جانے والی وہ لکیریں جو قطع زائد $y^2 - z^2 = 1$ سے گزرتی ہوں، قطع زائد نلکی $y^2 - z^2 = 1$ پیدا کرتی ہیں۔ محور x کے عمودی سطحیں اس سے قطع زائد کاٹتی ہیں۔

محددی محوروں کو $(\mp a, 0, 0)$ ، $(0, \mp b, 0)$ اور $(0, 0, \mp c)$ پر مس کرتا ہے (شکل ۱۱.۵۴)۔ یہ اس مستطیل ڈبہ $|x| \leq a$ ، $|y| \leq b$ ، $|z| \leq c$ کے اندر پایا جاتا ہے۔ چونکہ اس سطح کی تعریفی مساوات میں متغیرات کا مربع پایا جاتا ہے لہٰذا یہ سطح تینوں محددی سطحوں کے لحاظ سے تشاکلی ہو گا۔

تینوں محددی سطحوں کا اس سطح کے ساتھ منحنی تقاطع، ترخیمات ہوں گی۔ مثال کے طور پر محددی مستوی $z = 0$ اس سطح کو درج ذیل ترخیم پر قطع کرتا ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad\qquad z = 0$$

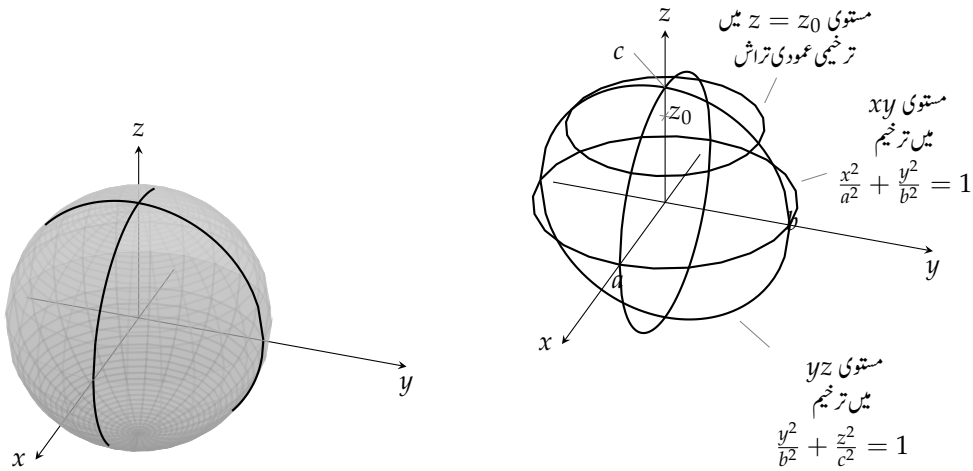
سطح $z = z_0, |z_0| < c$ اس سطح سے درج ذیل ترخیمی حصہ کاٹتا ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2(1 - z_0^2/c^2)} + \frac{y^2}{b^2(1 - z_0^2/c^2)} = 1$$

اگر نصف محور a ، b اور c میں کوئی دو ایک دوسرے کے برابر ہوں تب یہ **ترخیمی سطح طواف** ہو گا۔ اگر تینوں ایک دوسرے کے برابر ہوں تب یہ سطح کرہ ہو گا۔ □

فنیات فضا میں ذہنی تصویر کشی

فضا میں سطحوں کی تصویر کشی کمپیوٹر کی مدد سے کی جا سکتی ہے۔ یہ مختلف دو بُعدی سطحوں میں لکیریں کھینچ سکتا ہے۔ کمپیوٹر اشکال کو فضا میں گھمانے کا نظارہ پیش کر سکتا ہے گویا آپ جسم کو ہاتھ میں گھما رہے ہوں۔ کمپیوٹر اس کا خیال رکھتا ہے کہ اجسام کا سامنے حصہ نظر آئے جب کے اس کا پچھلا حصہ آنکھوں سے اوجھل رہے۔ عمومی طور پر کمپیوٹر کو سطحوں کی مقدار معلوم مساوات درکار ہوں گی۔



شکل ۱۱.۵۴: ترخیمی سطح

۱۸۹۴۸ مثال ۱۱.۴۹: سطح $x = 0$ اور سطح $y = 0$ کے لحاظ سے ترخیمی قطع مکافی سطح

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} \tag{۲}$$

۱۸۹۴۹ تشاکلی ہو گا (شکل ۱۱.۵۵)۔ صرف مبدا پر محوری تقاطع پایا جاتا ہے۔ مستقل c کی علامت تعین کرتی ہے کہ یہ مکمل سطح xy سے نیچے یا اس سے اوپر پایا جائے
۱۸۹۵۰ گا۔ محددی سطح اس سے درج ذیل حصے کاٹتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x = 0: &\quad z = \frac{c}{b^2}y^2 \text{ مکافی قطع} \\ y = 0: &\quad z = \frac{c}{a^2}x^2 \text{ مکافی قطع} \\ z = 0: &\quad (0,0,0) \text{ نقطہ} \end{aligned} \tag{۳}$$

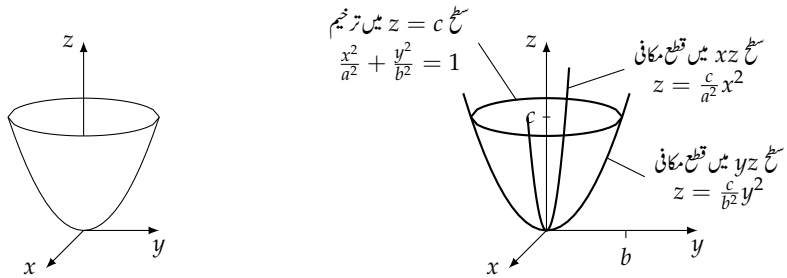
۱۸۹۵۱ مستوی xy سے اوپر ہر سطح $z = z_0$ اسے درج ذیل ترخیم میں کاٹتا ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z_0}{c}$$

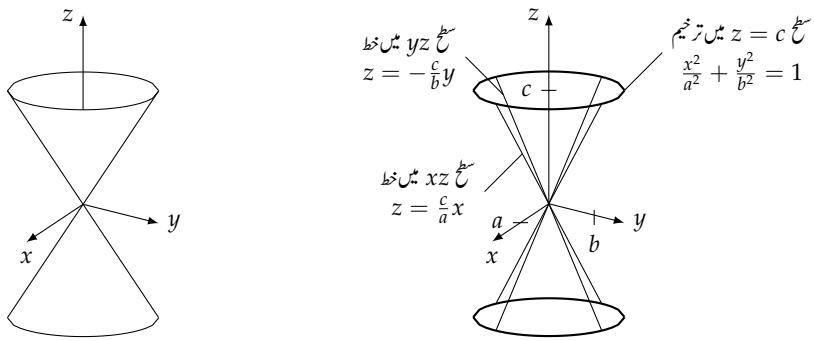
۱۸۹۵۲ □

۱۸۹۵۳ مثال ۱۱.۵۰: دائری قطع مکافی سطح یا قطع مکافی سطح طواف

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a = b^2} = \frac{z}{c} \tag{۴}$$



شکل ۱۱.۵۵: ترخیمی سطح (مثال ۱۱.۴۹)



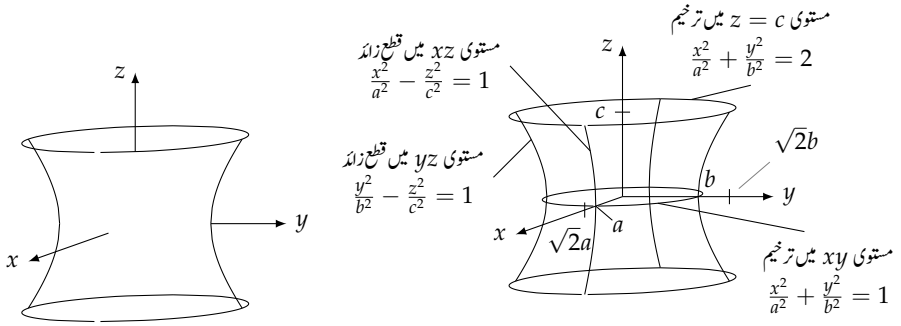
شکل ۱۱.۵۶: ترخیمی مخروط (مثال ۱۱.۵۱)

۱۸۹۵۴ کو مساوات ۲ میں $b = a$ پر کر کے حاصل کیا جاتا ہے۔ محور z کے عمودی سطحوں کی عمودی تراش سے دائرے حاصل ہوں گے جن کا مرکز محور z پر ہو
۱۸۹۵۵ گا۔ ان سطحوں کی عمودی تراش جن میں محور z پایا جاتا ہو، مماثل قطع مکافی ہوں گی جن کا مشترک ماسکہ $\left(0, 0, \frac{a^2}{4c}\right)$ ہو گا۔

۱۸۹۵۶ دائری قطع مکافی سطحوں سے حصے تراش کر بطور ریڈیو دوربین، مصنوعی سیارے کے تعاقب کار، اور خورد امواج ریڈیو کے اینٹینا استعمال کیے جاتے ہیں۔ □

۱۸۹۵۷ مثال ۱۱.۵۱: **ترخیمی مخروط**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \tag{۵}$$



شکل ۱۱.۵۷: یک چادری قطع زائد سطح

۱۸۹۵۸ تینوں محددی سطحوں کے لحاظ سے تشاکلی ہے (شکل ۱۱.۵۶)۔ محددی سطحیں اس سے درج ذیل حصے کاٹتے ہیں۔

$$x = 0: \qquad z = \pm\frac{c}{b}y \text{ خط} \tag{۶}$$

$$y = 0: \qquad z = \pm\frac{c}{a}x \text{ خط} \tag{۷}$$

$$z = 0: \qquad (0,0,0) \text{ نقطہ}$$

۱۸۹۵۹ مستوی xy سے اوپر اور اس سے نیچے سطحیں $z = z_0$، اس سے ترخیمات کاٹتے ہیں جن کے مراکز محور z پر اور راس مساوات ۶ اور مساوات ۷ میں دی
۱۸۹۶۰ گئی خطوط پر پائے جاتے ہیں۔

۱۸۹۶۱ اگر $a = b$ ہو تب یہ مخروط ایک قائمہ دائری مخروط ہو گا۔ □

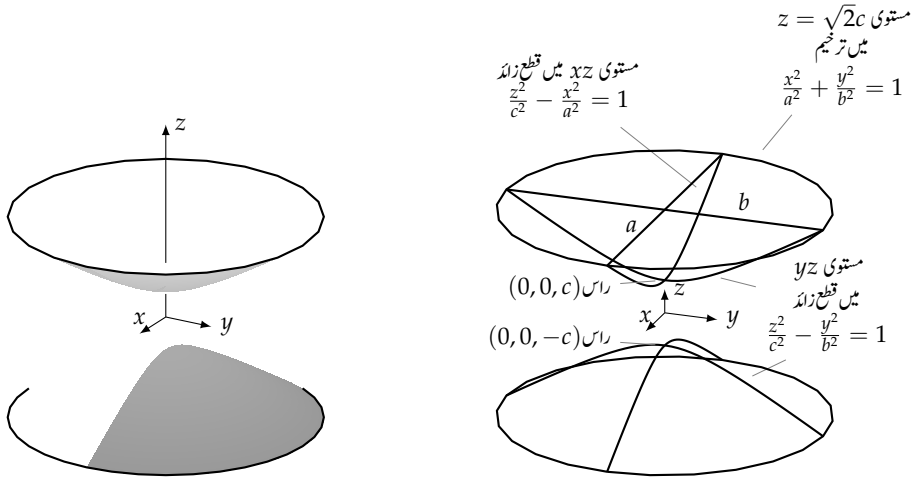
۱۸۹۶۲ مثال ۱۱.۵۲: **یک چادری قطع زائد سطح**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{۸}$$

۱۸۹۶۳ تینوں محددی سطحوں کے لحاظ سے تشاکلی ہو گا (شکل ۱۱.۵۷)۔ محددی سطحیں اس سے درج ذیل حصے کاٹتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x = 0: &\quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ قطع زائد} \\ y = 0: &\quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ قطع زائد} \\ z = 0: &\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ قطع زائد} \end{aligned} \tag{۹}$$

۱۸۹۶۴ سطح $z = z_0$ اس کو ترخیم میں کاٹتا ہے جس کا مرکز محور z پر اور راسیں مساوات ۹ میں دی گئی قطع مکافی میں سے ایک پر پائی جاتی ہیں۔



شکل ۱۱.۵۸: دو چادری قطع مکافی

۱۸۹۶۵ یہ پوری سطح آپس میں جُڑی ہوئی ہے یعنی اس سطح پر چل کر کسی ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک پہنچا جا سکتا ہے۔ اسی لیے اس کو یک چادری قطع مکافی سطح کہتے
۱۸۹۶۶ ہیں۔ اگلی مثال میں دو چادر کی سطح پائی جاتی ہے۔

۱۸۹۶۷ اگر $a = b$ ہو تب یہ قطع زائد سطح ایک سطح طواف ہو گا۔ □

۱۸۹۶۸ مثال ۱۱.۵۳: **دو چادری قطع مکافی سطح**

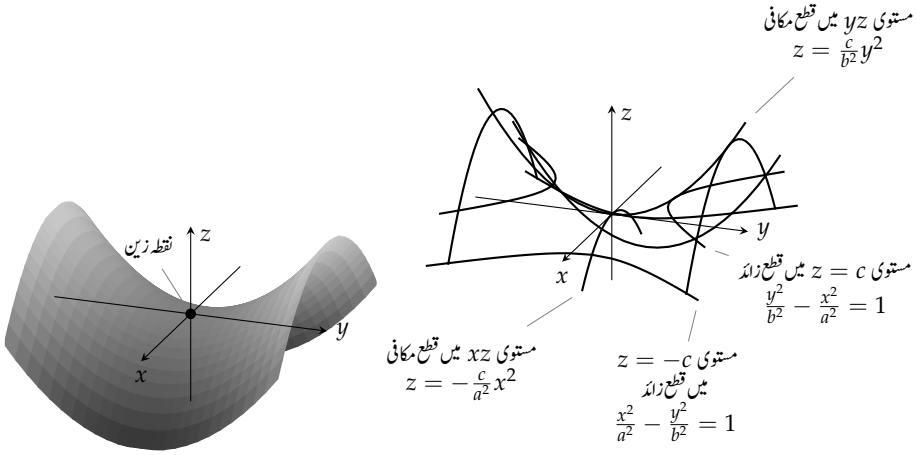
$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{۱۰}$$

۱۸۹۶۹ تینوں محددی سطحوں کے لحاظ سے تشاکلی ہے (شکل ۱۱.۵۸)۔ سطح $z = 0$ اس کو قطع نہیں کرتا ہے۔ درحقیقت ایک افقی سطح اس صورت اس کو قطع کرتا ہے
۱۸۹۷۰ جب $|z| \geq c$ ہو۔ قطع زائد حصوں

$$x = 0: \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad\qquad y = 0: \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

۱۸۹۷۱ کے راس اور ماسکے محور z پر پائے جاتے ہیں۔ یہ سطح دو حصوں میں تقسیم ہے۔ پہلا حصہ سطح $z = c$ سے اوپر اور دوسرا حصہ سطح $z = -c$ سے نیچے پایا
۱۸۹۷۲ جاتا ہے۔ اسی لیے اس کو دو چادری سطح کہتے ہیں۔

۱۸۹۷۳ مساوات ۸ اور مساوات ۱۰ میں منفی اجزاء کی تعداد ایک سا نہیں ہے۔ دونوں صورتوں میں منفی اجزاء کی تعداد اور چادروں کی تعداد ایک سی ہے۔ مساوات ۸ یا



شکل ۱۱.۵۹: قطع زائد قطع مکافی سطح

۱۸۹۷۴ مساوات ۱۰ میں دائیں ہاتھ 1 کی جگہ 0 پر کرنے سے ترخیمی مخروط کی مساوات

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

۱۸۹۷۵ حاصل ہوتی ہے (مساوات ۵)۔ قطع زائد سطحیں اس مخروط کے متقارب ہیں۔ یہ بالکل ایسا ہی ہے جیسے قطع زائد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \mp 1$$

۱۸۹۷۶ مستوی xy میں خط

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

۱۸۹۷۷ کے متقارب ہیں۔ □

۱۸۹۷۸ مثال ۱۱.۵۴: **قطع زائد قطع مکافی سطح**

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c} \qquad c > 0 \tag{۱۱}$$

سطح $x = 0$ اور سطح $y = 0$ کے لحاظ سے تشاکلی ہے (شکل ۱۱.۵۹)۔ قطع زائد قطع مکافی کی ان سطحوں کے ساتھ تقاطع درج ذیل ہوں گے۔

$$x = 0 : \qquad z = \frac{c}{b^2} y^2 \text{ مکافی قطع} \tag{۱۲}$$

$$y = 0 : \qquad z = -\frac{c}{a^2} x^2 \text{ مکافی قطع} \tag{۱۳}$$

سطح $x = 0$ میں قطع مکافی مبدا سے اوپر رخ کھلتا ہے۔ سطح $y = 0$ میں قطع مکافی مبدا سے نیچے رخ کھلتا ہے۔

قطع زائد قطع مکافی کو $z = z_0 > 0$ سے کاٹنے سے قطع زائد

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z_0}{c}$$

حاصل ہو گا جس کا محور ماسکہ، محددی محور y کے متوازی ہو گا جبکہ اس کے راس مساوات ۱۲ کی قطع مکافی پر ہوں گے۔ اگر z_0 منفی ہو تب محور ماسکہ، محددی محور x کے متوازی ہو گا اور راس مساوات ۱۳ کی قطع مکافی پر ہو گا۔

مبدا کے قریب اس سطح کی صورت نقطہ ساکن کی طرح ہو گی۔ مستوی yz میں اس سطح پر چلتے ہوئے مبدا، کم سے کم نقطہ نظر آئے گا۔ مستوی xz میں اس سطح پر چلتے ہوئے مبدا، زیادہ سے زیادہ قیمت کا نقطہ نظر آئے گا۔ ایسے نقطہ کو سطح کا **کم زیادہ**[۲۹] نقطہ یا **نقطہ زین**[۳۰] کہتے ہیں۔ □

مائع آئینہ دوربین

دائری برتن میں مائع ڈال کر برتن کو عمودی محور کے گرد گھمانے سے سطح مائع افقی نہیں رہتا بلکہ یہ قطع مکافی سطح طواف کی صورت اختیار کرتا ہے جو بطور انعکاسی دوربین کے ابتدائی آئینہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ گزشتہ صدی کی ابتدا میں ایسا آئینہ استعمال کرتے ہوئے دوربین بنانے کی ناکام کوششیں کی گئیں۔ ناکامی کی وجہ مائع کی سطح پر ناختم ہونے والی لہریں اور رفتار میں تبدیلی کی وجہ سے ماسکہ کی تبدیلی تھی۔ آج کل ان مشکلات کو حل کرنا ممکن ہے اور گھومنے کی رفتار کو انتہا کی حد تک برقرار رکھا جا سکتا ہے۔

انہیں تصورات کو استعمال کرتے ہوئے مائع شیشہ کو ایک رفتار پر گھومتے ہوئے برتن میں آہستہ آہستہ ٹھنڈا ہونے دیا جاتا ہے حتٰی کہ وہ ٹھوس ہو جائے۔ اس طرح بڑے سے بڑا آئینہ بنایا جا سکتا ہے۔

سوالات

سطحوں کی مساوات پہچانئے

سوال ۱۱.۳۰۱ تا سوال ۱۱.۳۱۲ میں سطحوں کی مساوات دی گئی ہیں۔ ان کے اشکال کو (ا) تا (ز) میں پہچانئے۔ سطح کی قسم (قطع مکافی سطح، قطع زائد سطح، وغیرہ) بھی پہچانئے۔

سوال ۱۱.۳۰۱: $x^2 + y^2 + 4z^2 = 10$

---

[۲۹] minimax
[۳۰] saddlepoint

۱۸۹۹۸ سوال ۱۱.۳۰۲: $z^2 + 4y^2 - 4x^2 = 4$

۱۸۹۹۹ سوال ۱۱.۳۰۳: $9y^2 + z^2 = 16$

۱۹۰۰۰ سوال ۱۱.۳۰۴: $y^2 + z^2 = x^2$

۱۹۰۰۱ سوال ۱۱.۳۰۵: $x = y^2 - z^2$

۱۹۰۰۲ سوال ۱۱.۳۰۶: $x = -y^2 - z^2$

۱۹۰۰۳ سوال ۱۱.۳۰۷: $x^2 + 2z^2 = 8$

۱۹۰۰۴ سوال ۱۱.۳۰۸: $z^2 + x^2 - y^2 = 1$

۱۹۰۰۵ سوال ۱۱.۳۰۹: $x = z^2 - y^2$

۱۹۰۰۶ سوال ۱۱.۳۱۰: $z = -4x^2 - y^2$

۱۹۰۰۷ سوال ۱۱.۳۱۱: $x^2 + 4z^2 = y^2$

۱۹۰۰۸ سوال ۱۱.۳۱۲: $9x^2 + 4y^2 + 2z^2 = 36$

۱۹۰۰۹

۱۹۰۱۰ **خاکہ**

۱۹۰۱۱ سوال ۱۱.۳۱۳ تا سوال ۱۱.۳۷۶ میں سطحوں کا خاکہ کھینچیں۔

۱۹۰۱۲ **نلکیاں**

۱۹۰۱۳ سوال ۱۱.۳۱۳: $x^2 + y^2 = 4$

۱۹۰۱۴ سوال ۱۱.۳۱۴: $x^2 + z^2 = 4$

۱۹۰۱۵ سوال ۱۱.۳۱۵: $z = y^2 - 1$

۱۹۰۱۶ سوال ۱۱.۳۱۶: $x = y^2$

۱۹۰۱۷ سوال ۱۱.۳۱۷: $x^2 + 4z^2 = 16$

۱۹۰۱۸ سوال ۱۱.۳۱۸: $4x^2 + y^2 = 36$

۱۹۰۱۹ سوال ۱۱.۳۱۹: $z^2 - y^2 = 1$

۱۹۰۲۰ سوال ۱۱.۳۲۰: $yz = 1$

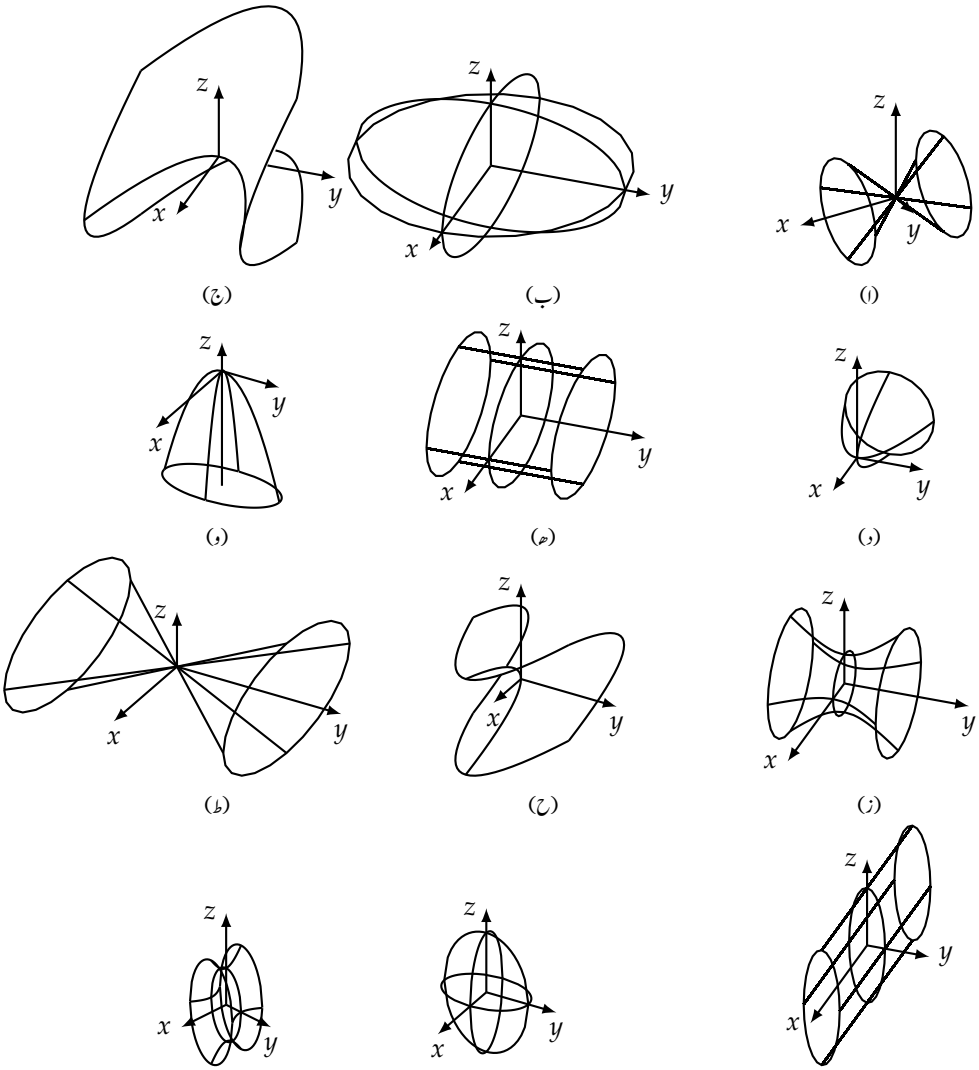
۱۹۰۲۱

۱۹۰۲۲ **ترخیمی سطحیں**

۱۹۰۲۳ سوال ۱۱.۳۲۱: $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$

۱۹۰۲۴ سوال ۱۱.۳۲۲: $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$

۱۹۰۲۵ سوال ۱۱.۳۲۳: $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$


(ا)
(ب)
(ج)
(د)
(ھ)
(و)
(ز)
(ح)
(ط)
(ي)
(یا)
(یب)

سوال ۱۱.۳۲۴: $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 = 36$

قطع مکافی سطحیں

سوال ۱۱.۳۲۵: $z = x^2 + 4y^2$

سوال ۱۱.۳۲۶: $z = x^2 + 9y^2$

سوال ۱۱.۳۲۷: $z = 8 - x^2 - y^2$

سوال ۱۱.۳۲۸: $z = 18 - x^2 - 9y^2$

سوال ۱۱.۳۲۹: $x = 4 - 4y^2 - z^2$

سوال ۱۱.۳۳۰: $y = 1 - x^2 - z^2$

ترخیمات

سوال ۱۱.۳۳۱: $x^2 + y^2 = z^2$

سوال ۱۱.۳۳۲: $y^2 + z^2 = x^2$

سوال ۱۱.۳۳۳: $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$

سوال ۱۱.۳۳۴: $9x^2 + 4y^2 = 36z^2$

قطع زائد سطحیں

سوال ۱۱.۳۳۵: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

سوال ۱۱.۳۳۶: $y^2 + z^2 - x^2 = 1$

سوال ۱۱.۳۳۷: $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

سوال ۱۱.۳۳۸: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$

سوال ۱۱.۳۳۹: $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

سوال ۱۱.۳۴۰: $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{4} - z^2 = 1$

سوال ۱۱.۳۴۱: $x^2 - y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$

سوال ۱۱.۳۴۲: $\frac{x^2}{4} - y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$

۱۹۰۵۲ **قطع زائد قطع مکافی سطحیں**

۱۹۰۵۳ سوال ۱۱.۳۴۳: $y^2 - x^2 = z$

۱۹۰۵۴ سوال ۱۱.۳۴۴: $x^2 - y^2 = z$

۱۹۰۵۵

۱۹۰۵۶ **مختلف سطحیں**

۱۹۰۵۷ سوال ۱۱.۳۴۵: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

۱۹۰۵۸ سوال ۱۱.۳۴۶: $4x^2 + 4y^2 = z^2$

۱۹۰۵۹ سوال ۱۱.۳۴۷: $z = 1 + y^2 - x^2$

۱۹۰۶۰ سوال ۱۱.۳۴۸: $y^2 - z^2 = 4$

۱۹۰۶۱ سوال ۱۱.۳۴۹: $y = -(x^2 + z^2)$

۱۹۰۶۲ سوال ۱۱.۳۵۰: $z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4$

۱۹۰۶۳ سوال ۱۱.۳۵۱: $16x^2 + 4y^2 = 1$

۱۹۰۶۴ سوال ۱۱.۳۵۲: $z = x^2 + y^2 + 1$

۱۹۰۶۵ سوال ۱۱.۳۵۳: $x^2 + y^2 - z^2 = 4$

۱۹۰۶۶ سوال ۱۱.۳۵۴: $x = 4 - y^2$

۱۹۰۶۷ سوال ۱۱.۳۵۵: $x^2 + z^2 = y$

۱۹۰۶۸ سوال ۱۱.۳۵۶: $z^2 - \frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

۱۹۰۶۹ سوال ۱۱.۳۵۷: $x^2 + z^2 = 1$

۱۹۰۷۰ سوال ۱۱.۳۵۸: $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$

۱۹۰۷۱ سوال ۱۱.۳۵۹: $16y^2 + 9z^2 = 4x^2$

۱۹۰۷۲ سوال ۱۱.۳۶۰: $z = x^2 - y^2 - 1$

۱۹۰۷۳ سوال ۱۱.۳۶۱: $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$

۱۹۰۷۴ سوال ۱۱.۳۶۲: $4x^2 + 9z^2 = y^2$

۱۹۰۷۵ سوال ۱۱.۳۶۳: $x^2 + y^2 - 16z^2 = 16$

۱۹۰۷۶ سوال ۱۱.۳۶۴: $z^2 + 4y^2 = 9$

۱۹۰۷۷ سوال ۱۱.۳۶۵: $z = -(x^2 + y^2)$

۱۹۰۷۸ سوال ۱۱.۳۶۶: $y^2 - x^2 - z^2 = 1$

سوال ۱۱.۳۶۷: $x^2 - 4y^2 = 1$

سوال ۱۱.۳۶۸: $z = 4x^2 + y^2 - 4$

سوال ۱۱.۳۶۹: $4y^2 + z^2 - 4x^2 = 4$

سوال ۱۱.۳۷۰: $z = 1 - x^2$

سوال ۱۱.۳۷۱: $x^2 + y^2 = z$

سوال ۱۱.۳۷۲: $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$

سوال ۱۱.۳۷۳: $yz = 1$

سوال ۱۱.۳۷۴: $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$

سوال ۱۱.۳۷۵: $9x^2 + 16y^2 = 4z^2$

سوال ۱۱.۳۷۶: $4z^2 - x^2 - y^2 = 4$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۱.۳۷۷: (ا) سطح $z = c$ ترخیمی سطح

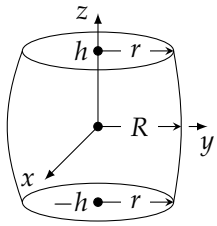
$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

سے رقبہ S کاٹتا ہے۔اس رقبہ کو متغیر c کا تفاعل لکھیں۔(ایک ترخیم جس کے نصف محور a اور b ہوں کا رقبہ πab ہوتا ہے۔)(ب) محور z کے عمودی ٹکیاں لیتے ہوئے جزو-ا میں ترخیمی سطح کا حجم تلاش کریں۔(ج) اب ترخیمی سطح

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

کا حجم تلاش کریں۔کیا آپ کا کلیہ $a = b = c$ کی صورت میں کرہ کا حجم دیتا ہے۔

سوال ۱۱.۳۷۸: محور z کے عمودی سطحیں ترخیمی سطح کے دونوں سروں سے برابر حصے کاٹ کر دکھائی گئی ڈرمی پیدا کرتی ہیں۔محور z کے قائمہ، عمودی تراش دائری ہیں۔ڈرمی کا قد $2h$، وسطی رداس R اور سروں کے رداس r ہیں۔ڈرمی کے حجم کا کلیہ تلاش کریں۔اب دو باتوں کی تصدیق کریں۔کیا ڈرمی کے اطراف سیدھا کرنے سے آپ کا کلیہ، قد $2h$ اور رداس R کے نلکی کا حجم دیتا ہے؟ کیا $r = 0$ اور $h = R$ کی صورت میں، جب ڈرمی کی شکل ایک کرہ مانند ہو گی، آپ کا کلیہ کرہ کا حجم دیتا ہے؟



سوال ۱۱.۳۷۹: سطح $z = h$ قطع مکافی سطح

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

سے ایک حصہ کاٹتا ہے۔ دکھائیں کہ اس حصے کا حجم، حصہ کے قاعدہ کا نصف ضرب قد کے برابر ہو گا۔ (شکل ۱۱.۵۵ میں $h = c$ کے لیے یہ حصہ دکھایا گیا ہے۔)

سوال ۱۱.۳۸۰: (ا) سطح $z = 0$ اور سطح $z = h,\ h > 0$ اور قطع زائد

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

کے بیچ ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) حاصل حجم کو h ، S_0 اور S_h کی صورت میں لکھیں۔ قطع زائد سے سطح $z = 0$ اور $z = h$ جن حصوں کو کاٹتے ہیں، ان کے رقبے S_0 اور S_h ہیں۔ (ج) دکھائیں کہ اس حجم کو

$$H = \frac{h}{6}(S_0 + 4S_m + S_h)$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں قطع زائد سے سطح $z = \frac{h}{2}$ جو حصہ کاٹتا ہے، اس کا رقبہ S_m ہے۔

سوال ۱۱.۳۸۱: سطح $y = y_1$ اور سطح $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$ کا خط تقاطع، قطع مکافی ہو گا۔ اس قطع مکافی کا راس اور ماسکہ تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۳۸۲: آپ درج ذیل مساوات میں $z = 0$ لے کر مستوی xy میں منحنی حاصل کرتے ہیں۔

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Jz + K = 0$$

یہ منحنی کیسی ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۱.۳۸۳: اب تک ہم دیکھتے آ رہے ہیں کہ کسی بھی محددی سطح کے متوازی سطح اور مربع سطح کا خط تقاطع، ترخیمی ہوتا ہے۔ کیا یہ محض اتفاق تھا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۱.۳۸۴: ایک سطح جو کسی بھی محددی سطح کا متوازی نہیں ہے، مربع سطح کو قطع کرتا ہے۔ ان کا خط تقاطع کیسا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۱۱.۳۸۵ تا سوال ۱۱.۳۸۸ میں دی گئی وقفہ پر سطحوں کو ترسیم کریں۔ اگر ممکن ہو، سطحوں کے مختلف تطلیل پیش کریں۔

سوال ۱۱.۳۸۵: $z = y^2, \quad -2 \le x \le 2, \quad -0.5 \le y \le 2$

سوال ۱۱.۳۸۶: $z = 1 - y^2, \quad -2 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 2$

سوال ۱۱.۳۸۷: $z = x^2 + y^2, \quad -3 \le x \le 3, \quad -3 \le y \le 3$

سوال ۱۱.۳۸۸: $z = x^2 + 2y^2$ کو درج ذیل وقفوں پر ترسیم کریں۔

۱. $-3 \le x \le 3, \quad -3 \le y \le 3$

ب. $-1 \le x \le 1, \quad -2 \le y \le 3$

ج. $-2 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 2$

د. $-2 \le x \le 2, \quad -1 \le y \le 1$

سوال ۱۱.۳۸۹ تا سوال ۱۱.۳۹۴ کو ترسیم کریں۔ سطح کی صورت سے اس کی قسم دریافت کریں۔

سوال ۱۱.۳۸۹: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1 - \frac{z^2}{25}$

سوال ۱۱.۳۹۰: $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{9} = 1 - \frac{y^2}{16}$

سوال ۱۱.۳۹۱: $5x^2 = z^2 - 3y^2$

سوال ۱۱.۳۹۲: $\frac{y^2}{16} = 1 - \frac{x^2}{9} + z$

سوال ۱۱.۳۹۳: $\frac{x^2}{9} - 1 = \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{2}$

سوال ۱۱.۳۹۴: $y - \sqrt{4 - z^2} = 0$

۱۱.۷ نلکی اور کروی محدد

اس حصہ میں فضا کے دو نئے محددی نظام متعارف کرائے جائیں گے جو نلکی محدد اور کروی محدد کہلاتے ہیں۔ نلکی محدد میں نلکی کی مساوات سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔ کروی محدد میں کرہ اور ترخیم کی مساوات سادہ صورت اختیار کرتی ہیں۔ ہم نلکی محدد میں سیاروں کی مدار پر حصہ ۱۲.۵ میں غور کریں گے۔

نلکی محدد

ہم مستوی xy میں قطبی محدد کے ساتھ محور z شامل کر کے فضا کی نلکی محدد حاصل کرتے ہیں۔ ہم یہاں قطبی محدد کا رداس ρ اور زاویہ ϕ لکھیں گے [۳۱]۔ یوں فضا میں ہر نقطہ کو ایک یا ایک سے زیادہ تین اعداد کی جوڑی (ρ, ϕ, z) مختص کی جا سکتی ہے (شکل ۱۱.۶۱)۔

تعریف: **نلکی محدد**[۳۲] فضا میں نقطہ N کو تین مرتب اعداد (ρ, ϕ, z) سے ظاہر کرتا ہے جہاں

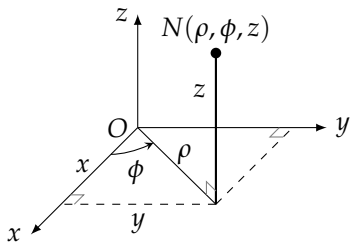
۱. ρ اور ϕ مستوی xy میں نقطہ N کے قائمہ تظلیل کے قطبی محدد ہیں،

۲. z اس نقطہ کا کارتیسی انتصابی محدد ہے۔

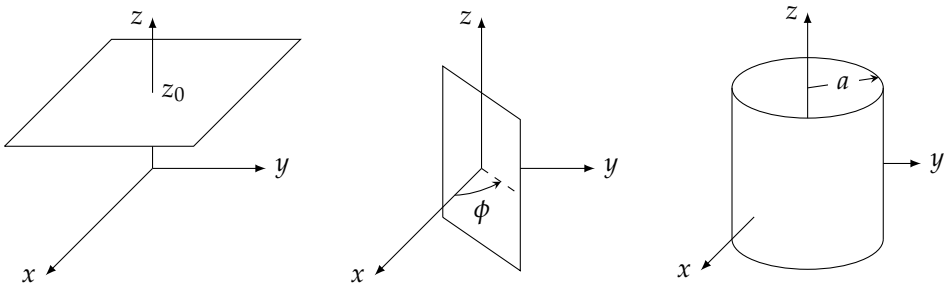
---

[۳۱] تاکہ ہم r اور θ کو کروی محدد کے لیے استعمال کر سکیں

[۳۲] cylindricalcoordinates



شکل ۱۱.۶۱: فضا میں نقطہ کے نلکی محدد ρ ، ϕ اور z ہوں گے۔



(ا) نلکی $\rho = a$ کی سطح میں ϕ اور z تبدیل ہوتے ہیں۔ (ب) مستوی $\phi = \phi_0$ میں ρ اور z تبدیل ہوتے ہیں۔ (ج) مستوی $z = z_0$ میں ρ اور ϕ تبدیل ہوتی ہیں۔

شکل ۱۱.۶۲: نلکی محدد میں مستقل محدد محددی مساواتیں نلکی اور سطح کو جنم دیتی ہیں۔

۱۹۱۴۲ □

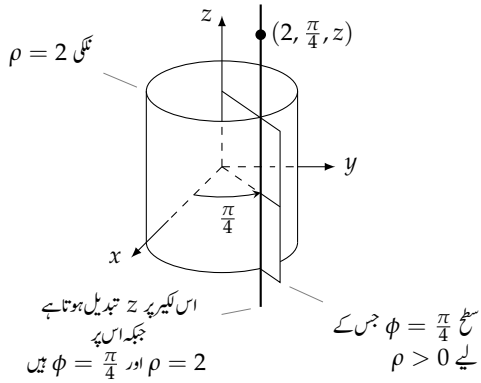
۱۹۱۴۳ کارتیسی محدد x ، y ، z اور نلکی محدد ρ ، ϕ ، z کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z \\ \rho^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\phi = \frac{y}{x} \end{aligned} \tag{ا}$$

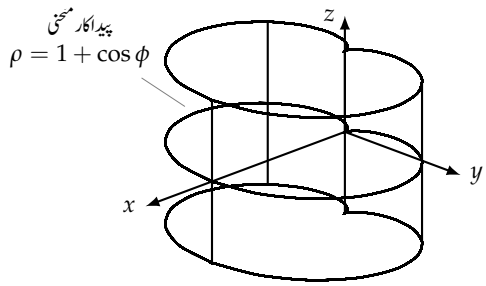
۱۹۱۴۴ نلکی محدد میں مساوات $\rho = a$ نا صرف xy مستوی میں ایک دائرہ کو ظاہر کرتی ہے بلکہ یہ ایک محور z کے گرد ایک نلکی کو بھی ظاہر کرتی ہے (شکل
۱۹۱۴۵ ۱۱.۶۲-ا)۔ محور z کو $\rho = 0$ ظاہر کرتی ہے۔ مساوات $\phi = \phi_0$ اس سطح کو ظاہر کرتی ہے جس میں محور z پایا جاتا ہے اور جو مثبت محور x کے
۱۹۱۴۶ ساتھ زاویہ ϕ_0 بناتا ہے۔ کارتیسی محدد کی طرح اب بھی مساوات $z = z_0$ ایک سطح کو ظاہر کرتی ہے جو محور z کے ساتھ قائمہ ہے۔

۱۹۱۴۷ مثال ۱۱.۵۵: کون سے نقاط درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

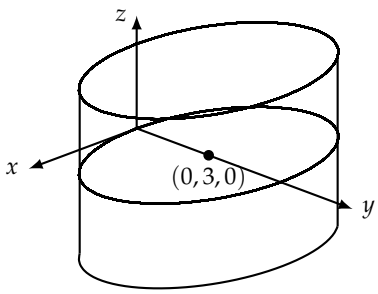
$$\rho = 2, \quad \phi = \frac{\pi}{4}$$



شکل ۱۱.۶۳: وہ نقطے جن کے پہلے دو نلکی محدد $\rho = 2$ اور $\phi = \frac{\pi}{4}$ ہوں ایک لکیر کو ظاہر کرتے ہیں جو z محدد کے متوازی ہے۔



شکل ۱۱.۶۴: قلب نما مساوات $\rho = 1 + \cos\phi$ فضا میں نلکی کو ظاہر کرتی ہے جس کی عمودی تراش محور z کو قائمہ ہے (مثال ۱۱.۵۶)۔



شکل ۱۱.۶۵: نلکی نما برائے مثال ۱۱.۵۹

۱۹۱۴۸ **حل**

۱۹۱۴۹ یہ نقطے اس لکیر کو ظاہر کرتے ہیں جہاں نلکی $\rho = 2$ سطح $\phi = \frac{\pi}{4}$ کو قطع کرتی ہے اور جہاں ρ مثبت ہے (شکل ۱۱.۶۳)۔ یہ لکیر نقطہ $(2, \frac{\pi}{4}, 0)$
۱۹۱۵۰ سے گزرتی ہے اور محور z کے متوازی ہے۔ □

۱۹۱۵۱ مثال ۱۱.۵۶: سطح $\rho = 1 + \cos\phi$ ترسیم کریں۔

۱۹۱۵۲ **حل**

۱۹۱۵۳ اس مساوات میں صرف ρ اور ϕ متغیرات پائے جاتے ہیں جبکہ z متغیر اس میں نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں یہ مساوات ایک ایسی نلکی سطح کو ظاہر کرتی ہے جو
۱۹۱۵۴ ،مستوی $\rho\phi$ میں قلب نما منحنی، $\rho = 1 + \cos\phi$ سے گزرتی ہے اور محور z کے متوازی ہے۔ ہم کارتیسی محور x ، y ، z کھینچ کر ان کے
۱۹۱۵۵ قائمہ، چند عمودی تراش ترسیم کرتے ہیں۔ ان عمودی تراش کو متوازی لکیروں سے ملا کر سطح حاصل ہو گی (شکل ۱۱.۶۴)۔ □

مثال ۱۱.۵۷: سطح $z = \rho^2$ کی کارتیسی مساوات تلاش کر کے سطح کو پہچانئے۔

حل

مساوات ا سے $z = \rho^2 = x^2 + y^2$ حاصل ہوتا ہے جو دائری قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ کی مساوات ہے۔ □

مثال ۱۱.۵۸: دائری نلکی $4x^2 + 4y^2 = 9$ کی مساوات نلکی محدد میں دریافت کریں۔

حل

یہ نلکی ان نقطوں پر مشتمل ہے جن کا محور z سے فاصلہ $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{3}{2}$ ہے لہٰذا نلکی محدد میں اس سطح کی مساوات $\rho = \frac{3}{2}$ ہو گی۔ آئیں اس کو باضابطہ حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}
4x^2 + 4y^2 &= 9 \\
4(\rho\cos\phi)^2 + 4(\rho\sin\phi)^2 &= 9 && \text{مساوات ا} \\
4\rho^2\cos^2\phi + 4\rho^2\sin^2\phi &= 9 \\
4\rho^2 &= 9 && \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1 \\
\rho^2 &= \frac{9}{4} \\
\rho &= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

□

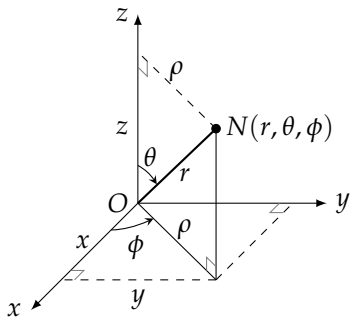
مثال ۱۱.۵۹: نلکی $x^2 + (y-3)^2 = 9$ کی مساوات نلکی محدد میں معلوم کریں (شکل ۱۱.۶۵)۔

حل

مساوات ا استعمال کرتے ہوئے نلکی محدد میں مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
x^2 + (y-3)^2 &= 9 \\
(\rho\cos\phi)^2 + (\rho\sin\phi - 3)^2 &= 9 && \text{مساوات ا} \\
\rho^2\cos^2\phi + \rho^2\sin^2\phi + 9 - 6\rho\sin\phi &= 9 \\
\rho^2 &= 6\rho\sin\phi \\
\rho &= 6\sin\phi && \text{درکار مساوات}
\end{aligned}$$

□



شکل ۱۱.۶۶: کروی محدد r ، ϕ ، θ اور کارتیسی محدد x ، y ، z کا تعلق۔

کروی محدد

کروی محدد میں نقطہ N کو زاویوں اور لمبائی سے تعین کیا جاتا ہے (شکل ۱۱.۶۶)۔ نقطہ N کا پہلا محدد $r = \left|\overrightarrow{ON}\right|$ ہے جو مبدا O سے N تک فاصلہ دیتا ہے۔ نکلی محدد کے ρ کے برعکس r ہر صورت غیر منفی ہو گا۔ دوسرا محدد θ ہے جو $\overrightarrow{ON}$ کا مثبت محور z کے ساتھ زاویہ ہے جو وقفہ $[0, \pi]$ پر رہنے کا پابند ہے۔ تیسرا محدد ϕ ہے جو عین نکلی محدد ϕ ہے۔

تعریف: **کروی محدد**[۳۳] فضا میں نقطہ N کو تین مرتب اعداد (r, θ, ϕ) سے ظاہر کرتا ہے جہاں

۱. مبدا سے N تک فاصلہ r ہے،

۲. مثبت محور z کے ساتھ $\overrightarrow{ON}$ کا زاویہ θ ہے ($0 \leq \theta \leq \pi$)،

۳. ϕ نکلی محدد کا زاویہ ہے۔

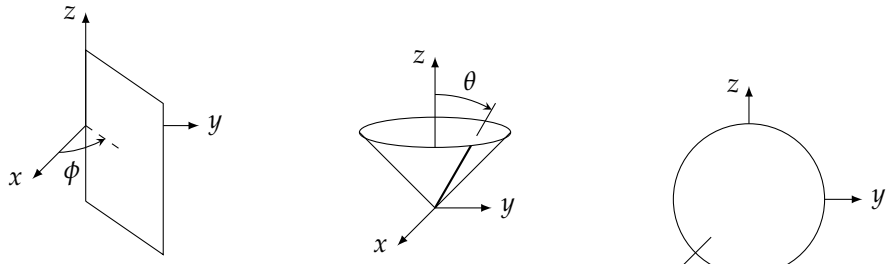
□

رداس a کے کرہ کی کروی محدد میں مساوات $r = a$ ہو گی جہاں کرہ کا مرکز مبدا پر ہے (شکل ۱۱.۶۷-ا)۔ مساوات $\theta = \theta_0$ ایک ترخیم کو ظاہر کرتی ہے جس کا راس مبدا پر ہے اور جس کا محور محور z پر ہے۔ (ہم ترخیم کے تصور کو وسعت دیتے ہوئے مستوی xy کو ترخیم $\theta = \frac{\pi}{2}$ تصور کرتے ہیں۔) اگر θ کی قیمت $\frac{\pi}{2}$ سے زیادہ ہو تب ترخیم نیچے رخ کھلتا ہے۔ کروی محدد میں بالکل نکلی محدد کی طرح $\phi = \phi_0$ اس سطح کو ظاہر کرتی ہے جس میں محور z شامل ہو اور جو مثبت محور x کے ساتھ زاویہ ϕ_0 بناتا ہو۔

کروی محدد کے کارتیسی اور نکلی محدد کے ساتھ تعلقات درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} \rho = r\sin\theta, \quad x = \rho\cos\phi = r\sin\theta\cos\phi, \\ z = r\cos\theta, \quad y = \rho\sin\phi = r\sin\theta\sin\phi, \\ r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{\rho^2+z^2} \end{aligned} \tag{۲}$$

[۳۳] sphericalcoordinates



(ا) مستقل رداس کرہ دیتا ہے۔ (ب) مثبت محور z کے ساتھ مستقل زاویہ ترخیم دیتا ہے۔ (ج) مثبت محور x کے ساتھ مستقل زاویہ انضابی سطح دیتا ہے۔

شکل ۱۱.۶۷: مستقل کروی محدد سے حاصل سطحیں۔

۱۹۱۸۲ مثال ۱۱.۶۰: درج ذیل کرہ کی کروی مساوات تلاش کریں (شکل ۱۱.۶۸)۔

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$$

۱۹۱۸۳ **حل**

۱۹۱۸۴ ہم مساوات ۲ استعمال کرتے ہوئے x ، y اور z کی کروی قیمتیں پر کرتے ہیں۔

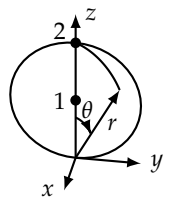
$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + (z-1)^2 &= 1 \\
r^2 \sin^2\theta \cos^2\phi + r^2 \sin^2\theta \sin^2\phi + (r\cos\theta - 1)^2 &= 1 \qquad \text{مساوات ۲} \\
r^2 \sin^2\theta \underbrace{(\cos^2\phi + \sin^2\phi)}_{1} + r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta + 1 &= 1 \\
r^2 \underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{1} &= 2r\cos\theta \\
r^2 &= 2r\cos\theta \\
r &= 2\cos\theta
\end{aligned}$$

۱۹۱۸۵ □

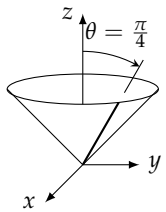
۱۹۱۸۶ مثال ۱۱.۶۱: ترخیم $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کی کروی مساوات تلاش کریں (شکل ۱۱.۶۹)۔

۱۹۱۸۷ **حل**

۱۹۱۸۸ پہلا حل جیومیٹری استعمال کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔ ترخیم محور z کے لحاظ سے تشاکلی ہے اور مستوی yz کے ربع اول کو خط $z = y$ میں قطع کرتا
۱۹۱۸۹ ہے۔ یوں مثبت محور z اور ترخیم کے بیچ زاویہ $\frac{\pi}{4}$ ہو گا۔ ترخیم ان نقطوں پر مبنی ہے جن کے کروی محدد θ کی قیمت $\frac{\pi}{4}$ ہے لہٰذا اس کی مساوات $\theta =$
۱۹۱۹۰ $\frac{\pi}{4}$ ہو گی۔



شکل ۱۱.۶۸: کرہ برائے مثال ۱۱.۶۰



شکل ۱۱.۶۹: ترخیم برائے مثال ۱۱.۶۱

۱۹۱۹۱ دوسرا حل الجبرا استعمال کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔ ہم مساوات ۱۲ استعمال کر کے یہی نتیجہ دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
z &= \sqrt{x^2+y^2} && \\
r\cos\theta &= \sqrt{r^2\sin^2\theta} && \text{مثال ۱۱.۶۰} \\
r\cos\theta &= r\sin\theta && r \geq 0, \sin\theta \geq 0 \\
\cos\theta &= \sin\theta && \\
\theta &= \frac{\pi}{4} && 0 \leq \theta \leq \pi
\end{aligned}
$$

۱۹۱۹۲ □

۱۹۱۹۳ **سوالات**

۱۹۱۹۴ **نقطوں کے محدد کا تبادلہ**

۱۹۱۹۵ فضا میں نقطہ کے محدد، سوال ۱۱.۳۹۵ تا سوال ۱۱.۴۰۴ میں کسی ایک محددی نظام میں دیے گئے ہیں۔ اس نقطہ کے محدد باقی دو محددی نظاموں میں تلاش کریں۔

۱۹۱۹۶ بعض اوقات ایک سے زیادہ جوابات ممکن ہوں گے۔

۱۹۱۹۷ سوال ۱۱.۳۹۵: کارتیسی نظام $(x,y,z) = (0,0,0)$

۱۹۱۹۸ سوال ۱۱.۳۹۶: کارتیسی نظام $(x,y,z) = (1,0,0)$

۱۹۱۹۹ سوال ۱۱.۳۹۷: کارتیسی نظام $(x,y,z) = (0,1,0)$

۱۹۲۰۰ سوال ۱۱.۳۹۸: کارتیسی نظام $(x,y,z) = (0,0,1)$

۱۹۲۰۱ سوال ۱۱.۳۹۹: نلکی نظام $(\rho,\phi,z) = (1,0,0)$

۱۹۲۰۲ سوال ۱۱.۴۰۰: نلکی نظام $(\rho,\phi,z) = (\sqrt{2},0,1)$

۱۹۲۰۳ سوال ۱۱.۴۰۱: نلکی نظام $(\rho,\phi,z) = (1,\frac{\pi}{2},1)$

سوال ۱۱.۴۰۲: کروی نظام $(r, \theta, \phi) = (\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{2})$

سوال ۱۱.۴۰۳: کروی نظام $(r, \theta, \phi) = (2\sqrt{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi)$

سوال ۱۱.۴۰۴: کروی نظام $(r, \theta, \phi) = (\sqrt{2}, \pi, \frac{\pi}{2})$

مساوات اور عدم مساوات کا ایک محددی نظام سے دوسرے محددی نظام میں تبادلہ؛ شکل کی پہچان

سوال ۱۱.۴۰۵ تا سوال ۱۱.۴۳۰ میں کسی ایک محددی نظام (کارتیسی، نلکی، کروی) میں دی گئی مساوات اور عدم مساوات کو باقی دو محددی نظام میں لکھیں۔ ان اشکال کو پہچانئے۔

سوال ۱۱.۴۰۵: $\rho = 0$

سوال ۱۱.۴۰۶: $x^2 + y^2 = 5$

سوال ۱۱.۴۰۷: $z = 0$

سوال ۱۱.۴۰۸: $z = -2$

سوال ۱۱.۴۰۹: $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z \leq 1$

سوال ۱۱.۴۱۰: $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 1 \leq z \leq 2$

سوال ۱۱.۴۱۱: $r \sin\theta \cos\phi = 0$

سوال ۱۱.۴۱۲: $\tan^2\theta = 1$

سوال ۱۱.۴۱۳: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

سوال ۱۱.۴۱۴: $x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$

سوال ۱۱.۴۱۵: $r = 5\cos\theta$

سوال ۱۱.۴۱۶: $r = -6\cos\theta$

سوال ۱۱.۴۱۷: $\rho = \csc\phi$

سوال ۱۱.۴۱۸: $\rho = -3\sec\phi$

سوال ۱۱.۴۱۹: $r = \sqrt{2}\sec\theta$

سوال ۱۱.۴۲۰: $r = 9\csc\theta$

سوال ۱۱.۴۲۱: $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, \quad z \leq 1$

سوال ۱۱.۴۲۲: $\rho^2 + z^2 = 4, \quad z \leq -\sqrt{2}$

سوال ۱۱.۴۲۳: $r = 3, \quad \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$

سوال ۱۱.۴۲۴: $x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad 0 \leq z \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۹۳۱ سوال ۱۱.۴۲۵: $z = 4 - 4\rho^2, \quad 0 \le r \le 1$

۱۹۳۲ سوال ۱۱.۴۲۶: $z = 4 - \rho, \quad 0 \le \rho \le 4$

۱۹۳۳ سوال ۱۱.۴۲۷: $\theta = \frac{3\pi}{4}, \quad 0 \le r \le \sqrt{2}$

۱۹۳۴ سوال ۱۱.۴۲۸: $\theta = \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le r \le \sqrt{7}$

۱۹۳۵ سوال ۱۱.۴۲۹: $z + \rho^2 \cos 2\phi = 0$

۱۹۳۶ سوال ۱۱.۴۳۰: $z^2 - \rho^2 = 1$

۱۹۳۷ سوال ۱۱.۴۳۱: درج ذیل کرہ کے مرکز کے کارتیسی محدد تلاش کریں۔

$$\rho^2 + z^2 = 4\rho\cos\phi + 6\rho\sin\phi + 2z$$

۱۹۳۸ سوال ۱۱.۴۳۲: درج ذیل کرہ کے مرکز کے کارتیسی محدد تلاش کریں۔

$$r = 2\sin\theta(\cos\phi - 2\sin\phi)$$

۱۹۳۹

۱۹۴۰ **معین نقطوں کے سلسلہ کی مساوات**

۱۹۴۱ سوال ۱۱.۴۳۳ تا سوال ۱۱.۴۳۶ میں نقطوں کے سلسلہ کے نلکی محدد دی گئی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ ان نقطوں کے سلسلہ کو ترسیم کریں۔

۱۹۴۲ سوال ۱۱.۴۳۳: $\rho = -2\sin\phi$

۱۹۴۳ سوال ۱۱.۴۳۴: $\rho = 2\cos\phi$

۱۹۴۴ سوال ۱۱.۴۳۵: $\rho = 1 - \cos\phi$

۱۹۴۵ سوال ۱۱.۴۳۶: $\rho = 1 + \sin\phi$

۱۹۴۶

۱۹۴۷ سوال ۱۱.۴۳۷ اور سوال ۱۱.۴۳۸ میں نقطوں کے سلسلہ کے کروی محدد دی گئی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ ان سلسلہ کو ترسیم کریں۔

۱۹۴۸ سوال ۱۱.۴۳۷: $r = 1 - \cos\theta$

۱۹۴۹ سوال ۱۱.۴۳۸: $r = 1 + \cos\theta$

۱۹۵۰

۱۹۵۱ **نظریہ اور مثالیں**

۱۹۵۲ سوال ۱۱.۴۳۹: نلکی اور کروی محدد میں افقی سطحیں

۱۹۵۳ (ا) دکھائیں کہ کارتیسی اور نلکی محدد میں مستوی $z = c \ (c \neq 0)$ کی کروی محدد میں مساوات $r = c\sec\theta$ ہو گی۔ (ب) مستوی xy کی

۱۹۵۴ کروی محدد میں مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۱.۴۴۰: کروی محدد میں انتصابی دائری بیلن

بیلن $x^2 + y^2 = a^2$ کی مساوات کروی محدد میں دریافت کریں۔ یہ مساوات $r = f(\theta)$ طرز کی ہو گی۔

سوال ۱۱.۴۴۱: نلکی محدد میں انتصابی سطح

(ا) دکھائیں کہ محور x کو قائمہ سطحوں کی نلکی محدد میں مساوات کی صورت $\rho = a \sec \phi$ ہو گی۔ (ب) دکھائیں کہ محور y کو قائمہ سطحوں کی نلکی محدد میں مساوات کی صورت $\rho = b \csc \phi$ ہو گی۔

سوال ۱۱.۴۴۲: (گزشتہ سوال جاری)

سطح $ax + by = c,\ c \neq 0$ کی نلکی محدد میں مساوات تلاش کریں۔ یہ مساوات $\rho = f(\phi)$ طرز کی ہو گی۔

سوال ۱۱.۴۴۳: تشاکلی

نلکی محدد میں مساوات $\rho = f(z)$ ایک سطح کو ظاہر کرتی ہے۔ اس سطح میں کونسی تشاکلی پائی جائے گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۱.۴۴۴: تشاکلی

کروی محدد میں مساوات $r = f(\theta)$ جس سطح کو ظاہر کرتی ہے اس کی تشاکلی کیا ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۱۱.۴۴۵ اور سوال ۱۱.۴۴۶ میں کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دی گئی مساوات کو ρ (نلکی محدد) یا r (کروی محدد) کے لیے حل کریں۔ مثبت جذر کا فقرہ منتخب کرتے ہوئے اس کی سادہ صورت دریافت کریں۔

ب. ρ بالمقابل ϕ اور z یا r بالمقابل θ اور ϕ ترسیم کریں (جیسا مناسب ہو)۔ ترسیم کے لیے دیا گیا وقفہ استعمال کریں۔

ج. جزو-ب کی ترسیم سے کرہ کے مرکز اور رداس کی قیمت کا اندازہ قریبی عدد صحیح تک لگائیں۔

د. دی گئی مساوات کو نلکی یا کروی محدد سے کارتیسی محدد میں تبدیل کریں۔ اس مساوات کی سادہ صورت حاصل کریں۔ مساوات کی سادہ صورت حاصل کرتے ہوئے آپ کو قلم و کاغذ کی ضرورت پیش آسکتی ہے۔ کرہ کی اس مساوات کی صورت $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = a^2$ ہو گی۔ جزو-ج میں حاصل قیمت کے ساتھ c کا موازنہ کریں۔

ھ. کرہ کی خفی مساوات جزو-د میں حاصل کی گئی۔ اس کو ترسیم کریں۔ اس ترسیم کا جزو-ب کی ترسیم کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۱۱.۴۴۵: $\rho^2 + z^2 = 2\rho(\cos\phi + \sin\phi) + 2, \quad \frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{9\pi}{4},\ -2 \leq z \leq 2$

سوال ۱۱.۴۴۶: $r^2 = 2r(\cos\phi \sin\theta - \cos\theta) + 2, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq \theta \leq \pi$

باب ۱۲

سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت

سرسری جائزہ جب کوئی جسم فضا میں حرکت کرتا ہو، مساوات $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ اور $z = h(t)$ جو اس جسم کے محدد کو بطور وقت کا تفاعل دیتی ہیں، اس جسم کی راہ اور حرکت کی مقدار معلوم مساوات ہوں گی۔ سمتیہ علامتیت کی مدد سے ہم انہیں ایک مساوات $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ کی صورت میں لکھ سکتے ہیں جو اس جسم کا مقام بطور وقت کا سمتی تفاعل دیتی ہے۔

اس باب میں ہم احصاء استعمال کرتے ہوئے حرکت پذیر اجسام کی راہ، سمتی رفتار اور اسراع پر غور کریں گے۔ ہم گولا، سیارہ اور مصنوعی سیارہ کی راہ اور حرکت کے عمومی سوالات کے جوابات جان سکے گے۔ آخر حصہ میں ہم نیوٹن کے قوانین اور تجاذب کی مدد سے سیاروں کی مدار کے قوانین کپلر دریافت کریں گے۔

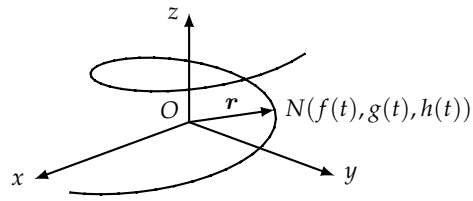
۱۲.۱ سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات

فضا میں متحرک ذرہ کی حرکت جاننے کی خاطر ہم مبدا سے اس ذرہ تک سمتیہ $\boldsymbol{r}$ لے کر $\boldsymbol{r}$ میں تبدیلی پر غور کرتے ہیں (شکل ۱۲.۱)۔ اگر اس ذرہ کے محدد مقام وقت کے ساتھ دو بار قابل تفرق ہوں، تب $\boldsymbol{r}$ بھی ایسا ہو گا، اور ہم کسی بھی لمحہ پر وقت کے لحاظ سے $\boldsymbol{r}$ کے تفرق لے کر اس ذرہ کی سمتی رفتار اور اسراع جان سکتے ہیں۔ اگر ہمیں اس ذرہ کی سمتیہ سمتی رفتار یا سمتیہ اسراع بطور وقت کے استمراری تفاعل معلوم ہو اور ہمیں ذرے کی ابتدائی مقام اور سمتیہ رفتار کے بارے میں معقول معلومات ہو، تب ہم تکمل کی مدد سے، وقت کا تفاعل $\boldsymbol{r}$ جان سکتے ہیں۔

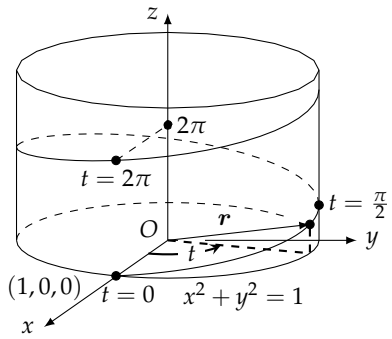
تعریف

جب وقفہ I کے دوران ایک ذرہ فضا میں حرکت کرتا ہو، ہم اس ذرہ کے محدد جو وقت کے تفاعل ہو گے کی تعریف درج ذیل کرتے ہیں۔

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad t \in I \tag{1}$$



شکل ۱.۱۲: فضا میں متحرک ذرہ کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{ON}$ متغیر t کا تفاعل ہو گا۔



شکل ۲.۱۲: پیچدار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}$ کا بالائی نصف حصہ

۱۹۲۹۳ نقاط $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t)),\ t \in I$ فضا میں وہ **منحنی** دیتے ہیں جنہیں ہم اس ذرے کی **راہ**[1] کہتے ہیں۔ مساوات ۱ اس منحنی کی
۱۹۲۹۴ **مقدار معلوم روپ** ہے۔ مبدا سے ذرے کے **مقام** $N(f(t), g(t), h(t))$ تک لمحہ t پر سمتیہ

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{ON} = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$$

۱۹۲۹۵ اس ذرے کا **تعین گر سمتیہ**[2] ہے۔ تفاعل f ، g اور h تعین گر سمتیہ کے **اجزاء** ہیں۔ ذرے کی راہ سے مراد وقفہ t کے دوران $\boldsymbol{r}$ کی پیدا کردہ منحنی
۱۹۲۹۶ ہے۔

۱۹۲۹۷ مساوات ۱ سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کی تعریف وقفہ I پر حقیقی متغیر t کی صورت میں دیتی ہے۔ زیادہ عمومی طور پر دائرہ کار، سلسلہ D ، پر **سمتی تفاعل**[3] یا **سمتی قیمت**
۱۹۲۹۸ **تفاعل**[4] سے مراد وہ قاعدہ ہو گا جو D کے ہر رکن کو فضا میں ایک سمتیہ مختص کرتا ہو۔ موجودہ استعمال میں دائرہ کار حقیقی اعداد کے وقفوں پر مشتمل ہوں گے۔
۱۹۲۹۹ باب ۱۵ میں دائرہ کار، مستوی یا فضا میں خطوں پر مشتمل ہوں گے جہاں ہم سمتی تفاعل کو سمتی میدان کہیں گے۔

۱۹۳۰۰ ہم حقیقی قیمت تفاعل کو **غیر سمتی تفاعل**[5] کہتے ہیں تاکہ ان میں اور سمتی تفاعل میں فرق کرنا ممکن ہو۔ سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کے اجزاء t کے غیر سمتی تفاعل ہیں۔ سمتی
۱۹۳۰۱ تفاعل کی تعریف اس کے ارکان تفاعل کی صورت میں دیتے وقت ہم فرض کرتے ہیں کہ سمتی تفاعل کا دائرہ کار ہی ارکان کے دائرہ کار ہیں۔

۱۹۳۰۲ مثال ۱.۱۲: پیچ دار تفاعل
۱۹۳۰۳ تمام حقیقی متغیر t کے لیے سمتی تفاعل

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

---

[1] path
[2] positionvector
[3] vectorfunction
[4] vector-valuedfunction
[5] scalarfunctions

۱۹۳۰۴ معین ہے اور $\boldsymbol{r}$ دائری نلکی $x^2 + y^2 = 1$ کے گرد لپٹ کر چلتا ہے (شکل ۱۲.۲)۔ سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ کے $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ اجزاء جو $\boldsymbol{r}$ کے سر کے x اور
۱۹۳۰۵ y محدد ہیں دائری نلکی کی مساوات

$$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$$

۱۹۳۰۶ کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا $\boldsymbol{r}$ اس نلکی پر پایا جاتا ہے۔ متغیر t بڑھنے $\boldsymbol{k}$ جزو بڑھتا ہے جس کی وجہ سے منحنی اوپر بلند ہو گی۔ نلکی کے گرد ایک دائرہ $t = 2\pi$
۱۹۳۰۷ پر مکمل ہو گا۔ درج ذیل مساوات پیچ دار تفاعل کی مقدار معلوم مساوات ہے، جہاں وقفہ $-\infty \leq t \leq \infty$ ہے۔

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

۱۹۳۰۸ □

۱۹۳۰۹ **حد اور استمرار**

۱۹۳۱۰ ہم سمتی قیمت تفاعل کی حدوں کی تعریف حقیقی قیمت تفاعل کی حد کی طرح کرتے ہیں۔

۱۹۳۱۱ تعریف: فرض کریں $\boldsymbol{r} = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ ایک سمتی تفاعل اور $\boldsymbol{L}$ ایک سمتیہ ہے۔ اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لیے ایک
۱۹۳۱۲ ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام t کے لیے

$$0 < |t - t_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{L}| < \epsilon$$

۱۹۳۱۳ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جب t کی قیمت t_0 کے قریب تر ہو تب $\boldsymbol{r}$ کا **حد**[۶] $\boldsymbol{L}$ ہو گا جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{L}$$

۱۹۳۱۴ □

۱۹۳۱۵ اگر $\boldsymbol{L} = L_1\boldsymbol{i} + L_2\boldsymbol{j} + L_3\boldsymbol{k}$ ہو تب $\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{L}$ ٹھیک اس صورت ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L_1, \quad \lim_{t \to t_0} g(t) = L_2, \quad \lim_{t \to t_0} h(t) = L_3$$

۱۹۳۱۶ درج ذیل مساوات سمتی تفاعل کی حد تلاش کرنے کی عملی ترکیب دیتی ہے۔

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \Big(\lim_{t \to t_0} f(t)\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\lim_{t \to t_0} g(t)\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\lim_{t \to t_0} h(t)\Big)\boldsymbol{k} \tag{۲}$$

---

[۶] limit

۱۹۳۱۷ مثال ۱۲.۲: اگر $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} &= \Big(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \cos t\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \sin t\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} t\Big)\boldsymbol{k}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j} + \frac{\pi}{4}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

۱۹۳۱۸ □

۱۹۳۱۹ ہم سمتی تفاعل کی استمرار کی تعریف حقیقی قیمت تفاعل کی استمرار کی تعریف کی طرح کرتے ہیں۔

۱۹۳۲۰ تعریف: اگر $\boldsymbol{r}(t)$ کے دائرہ کار میں نقطہ t_0 پر $\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0)$ ہو تب $\boldsymbol{r}(t)$ اس **نقطہ پر استمراری**[۷] ہو گا۔ اگر اپنے
۱۹۳۲۱ پورے دائرہ کار میں ہر نقطہ پر $\boldsymbol{r}(t)$ استمراری ہو تب یہ تفاعل **استمراری**[۸] ہو گا۔

۱۹۳۲۲ □

۱۹۳۲۳ چونکہ حد کو اجزاء کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے لہٰذا سمتی تفاعل کو استمرار کے لیے پرکھنے کی خاطر ہم اس کے اجزاء پر نظر ڈالتے ہیں۔

۱۹۳۲۴ **ایک نقطہ پر ارکان کے استمرار کا پرکھ**

۱۹۳۲۵ نقطہ t_0 پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ اس صورت استمراری ہو گا جب t_0 پر f ، g اور h استمراری ہوں۔

۱۹۳۲۶ مثال ۱۲.۳: (ا) درج ذیل تفاعل اس لیے استمراری ہے کہ $\cos t$ ، $\sin t$ اور t استمراری ہیں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

۱۹۳۲۷ (ب) درج ذیل تفاعل ہر عدد صحیح پر عدم استمراری ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + |t|\,\boldsymbol{k}$$

۱۹۳۲۸ □

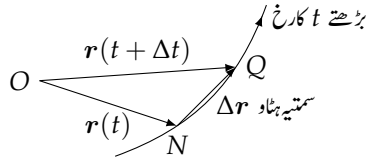
۱۹۳۲۹ **تفارق اور حرکت**

۱۹۳۳۰ فرض کریں فضا میں ایک متحرک ذرہ جو ایک منحنی پر چل رہا ہو کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ ہو جہاں f ، g اور
۱۹۳۳۱ h متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ ایسی صورت میں لمحات t اور $t + \Delta t$ پر اس ذرے کے مقام میں فرق

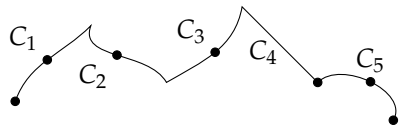
$$\Delta\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$$

---

[۷] continuousatapoint
[۸] continuous



شکل ۱۲.۳: لمحات t اور $t + \Delta t$ کے بیچ ایک ذرے کا ہٹاو $\overrightarrow{NQ} = \Delta\boldsymbol{r}$ ہوگا۔ نیا سمتی مجموعہ $\boldsymbol{r}(t) + \Delta\boldsymbol{r}$، ذرے کا نیا مقام $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ دے گا۔



شکل ۱۲.۴: پانچ ہموار منحنیات کو ساتھ ساتھ جوڑ کر ٹکڑوں میں ہموار منحنی حاصل کی گئی ہے۔

۱۹۳۳۲ ہوگا جس کو اجزاء کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (شکل ۱۲.۳)۔

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)\\ &= [f(t+\Delta t)\boldsymbol{i} + g(t+\Delta t)\boldsymbol{j} + h(t+\Delta t)\boldsymbol{k}] - [f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}]\\ &= [f(t+\Delta t) - f(t)]\boldsymbol{i} + [g(t+\Delta t) - g(t)]\boldsymbol{j} + [h(t+\Delta t) - h(t)]\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

۱۹۳۳۳ اب اگر Δt صفر کے قریب ہونے کی کوشش کرے تب تین اقدام بیکوقت ہوتے نظر آئیں گے۔ اول، منحنی پر چلتے ہوئے Q نقطہ N تک پہنچے گا۔
۱۹۳۳۴ دوسرا، سیکنٹ خط NQ نقطہ N پر منحنی کے تحدیدی مماسی مقام پر پہنچے گا۔ تیسرا، حاصل تقسیم $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ درج ذیل حد تک پہنچے گا۔

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} &= \left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\right]\boldsymbol{i} + \left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}\right]\boldsymbol{j}\\ &\quad + \left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}\right]\boldsymbol{k}\\ &= \left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right]\boldsymbol{i} + \left[\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right]\boldsymbol{j} + \left[\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right]\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

۱۹۳۳۵ یوں ماضی کے تجربات ہمیں درج ذیل تعریف تک پہنچاتے ہیں۔

۱۹۳۳۶ تعریف: نقطہ t_0 پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ اس صورت قابل تفرق ہوگا جب t_0 پر f، g
۱۹۳۳۷ اور h قابل تفرق ہوں۔ اس طرح اگر $\boldsymbol{r}$ اپنے دائرہ کار میں ہر نقطہ پر قابل تفرق ہو تب $\boldsymbol{r}$ قابل تفرق ہوگا۔ کسی بھی نقطہ t پر جہاں $\boldsymbol{r}$ قابل تفرق ہو،
۱۹۳۳۸ اس کا تفرق درج ذیل سمتیہ ہوگا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

۱۹۳۳۹ اگر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ استمراری اور کبھی بھی $\mathbf{0}$ نہ ہو، یعنی جب f، g اور h کے استمراری پہلے تفرق پائے جاتے ہوں اور جو بیکوقت 0 نہ ہوں، تب جس منحنی پر
۱۹۳۴۰ $\boldsymbol{r}$ چلتا ہو وہ **ہموار**[9] ہوگی۔

۱۹۳۴۱ □

[9] smooth

سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ جب $\mathbf{0}$ سے مختلف ہو، یہ منحنی کا مماسی سمتیہ ہو گا۔ نقطہ $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ پر ایک منحنی کے **مماسی خط** سے مراد وہ خط ہے جو اس نقطہ سے گزرتا ہو اور جو t_0 پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کے متوازی ہو۔ ہم ہموار منحنی پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \neq \mathbf{0}$ کی شرط رکھ کر اس بات کو یقینی بناتے ہیں کہ ہر نقطہ پر منحنی کا مماس استمراری طور پر مڑے گا۔ ایک ہموار منحنی پر سخت موڑ نہیں پایا جاتا ہے اور نا ہی اس پر کوئی کنگرہ پایا جاتا ہے۔

ایک منحنی جو متناہی تعداد کی ہموار منحنیات (بغیر خالی فاصلہ چھوڑے، ساتھ ساتھ) ملا کر حاصل کی گئی ہو **ٹکڑوں میں ہموار**[10] کہلاتی ہے (شکل ۱۲.۴)۔

شکل ۱۲.۴ پر ایک بار دوبارہ نظر ڈالیں۔ ہم نے اس شکل کو مثبت Δt کے لیے بنایا لہٰذا $\Delta \boldsymbol{r}$ آگے چلنے کی طرف اشارہ کرے گا۔ سمتیہ $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ (جسے دکھایا نہیں گیا ہے اور) جس کا وہی رخ ہے جو $\Delta \boldsymbol{r}$ کا ہے بھی آگے کی رخ اشارہ کرے گا۔ اگر Δt منفی ہو تا تب $\Delta \boldsymbol{r}$ چلنے کے مخالف رخ اشارہ کرے گا البتہ حاصل تقسیم $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ جو $\Delta \boldsymbol{r}$ کا منفی غیر سمتی مضرب ہے اب بھی چلنے کے رخ اشارہ کرے گا۔ ہم نے دیکھا کہ $\Delta \boldsymbol{r}$ جس رخ بھی اشارہ کرتا ہو، $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ ہر صورت چلنے کے رخ اشارہ کرتا ہے اور ہم توقع کرتے ہیں کہ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ جب $\mathbf{0}$ نہ ہو، بھی ہر صورت چلنے کے رخ اشارہ کرے گا۔ اس طرح ایک ذرہ کی سمتی رفتار کو ہم $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ یہ چلنے کی رخ دیتا ہے اور اس کی شرح، وقت کے لحاظ سے مقام کی تبدیلی دیتا ہے۔ ایک ہموار منحنی کے لیے سمتی رفتار کبھی بھی صفر نہیں ہو گا؛ یہ ذرہ نا کبھی رکتا ہے اور نا ہی یہ واپسی اختیار کرتا ہے۔

تعریف: اگر فضا میں ہموار منحنی پر چلتے ہوئے ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہو تب

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

اس ذرے کی **سمتی رفتار**[11] ہو گی جو اس منحنی کو مماسی ہو گی۔ کسی بھی لمحہ t پر، $\boldsymbol{v}$ کا رخ **چلنے کا رخ** ہو گا، $\boldsymbol{v}$ کی مقدار اس ذرے کی رفتار ہو گی، اور تفرق $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$، جب پایا جاتا ہو، اس ذرے کی **اسراع**[12] ہو گی۔ مختصراً درج ذیل ہو گا۔

ا. مقام کا تفرق، سمتی رفتار ہو گا: $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$

ب. سمتی رفتار کی مقدار، ذرے کی رفتار ہو گی: $\text{رفتار} = |\boldsymbol{v}|$

ج. سمتی رفتار کا تفرق، اسراع ہو گا: $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$

د. لمحہ t پر چلنے کا رخ سمتیہ $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ دیگا۔

□

ہم متحرک ذرے کی سمتی رفتار کو اس کی رفتار اور رخ کا حاصل ضرب لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{سمتی رفتار} = |\boldsymbol{v}| \left(\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right) = (\text{رفتار})(\text{رخ})$$

---

[10] piecewisesmooth
[11] velocity
[12] acceleration

۱۹۳۶۱ مثال ۱۲.۴: لمحہ t پر ایک متحرک جسم کا مقام سمتیہ

$$\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$$

۱۹۳۶۲ دیتا ہے۔ اس جسم کی رفتار اور رخ لمحہ $t = 2$ پر معلوم کریں۔ کس لمحہ پر (اگر کبھی ایسا ہو بھی) اس جسم کی سمتی رفتار اور اسراع آپس میں عمودی ہوں گے؟

۱۹۳۶۳ **حل**

۱۹۳۶۴

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t) &= (3\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -(3\sin t)\boldsymbol{i} + (3\cos t)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -(3\cos t)\boldsymbol{i} - (3\sin t)\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

۱۹۳۶۵ لمحہ $t = 2$ پر اس جسم کی رفتار اور رخ درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
\big|\boldsymbol{v}(2)\big| &= \sqrt{(-3\sin 2)^2 + (-3\cos 2)^2 + (4)^2} = 5 && \text{رفتار} \\
\frac{\boldsymbol{v}(2)}{\big|\boldsymbol{v}(2)\big|} &= -\Big(\frac{3}{5}\sin 2\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\frac{3}{5}\cos 2\Big)\boldsymbol{j} + \frac{4}{5}\boldsymbol{k} && \text{رخ}
\end{aligned}$$

۱۹۳۶۶ جس لمحہ پر $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{a}$ ایک دوسرے کے عمودی ہوں اس لمحہ پر $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = 0$ ہوگا۔ یوں

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = 9\sin t\cos t - 9\cos t\sin t + 4t = 4t = 0$$

۱۹۳۶۷ سے $t = 0$ حاصل ہوتا ہے۔ اس لمحہ پر سمتی رفتار اور اسراع ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔ □

۱۹۳۶۸ **قواعد تفرق**

۱۹۳۶۹ چونکہ سمتی تفاعل کے تفارق جزو در جزو حاصل کرنا ممکن ہے لہٰذا سمتی تفاعل کے تفارق کے قواعد کی نوعیت غیر سمتی تفاعل کے تفارق کے قواعد کی طرح ہوگی۔

۱۹۳۷۰ **سمتی تفاعل کے تفارق کے قواعد**

۱۹۳۷۱

۱۹۳۷۲ قاعدہ مستقل تفاعل: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$ جہاں $\boldsymbol{C}$ ایک مستقل سمتیہ ہے۔

۱۹۳۷۳ اگر $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ متغیر t کے قابل تفرق سمتی تفاعل ہوں اور f متغیر t کا قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہو تب

۱۹۳۷۴ قاعدہ غیر سمتی مضرب: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c\boldsymbol{u}) = c\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ جہاں c مستقل عدد ہے۔

۱۹۳۷۵ $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\boldsymbol{u}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u} + f\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

۱۹۳۷۶ قاعدہ مجموعہ: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

۱۹۳۷۷ قاعدہ فرق: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

۱۹۳۷۸ قاعدہ ضرب نقطہ: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

۱۹۳۷۹ قاعدہ ضرب صلیبی: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

۱۹۳۸۰ قاعدہ زنجیر: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$ جہاں $\boldsymbol{r}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے اور t متغیر s کا قابل تفرق تفرق ہے۔

۱۹۳۸۱ صلیبی ضرب میں سمتیات کی ترتیب نہایت اہم ہے۔ یوں اگر بائیں ہاتھ $\boldsymbol{u}$ کے بعد $\boldsymbol{v}$ آئے، تب دائیں ہاتھ بھی $\boldsymbol{u}$ کے بعد $\boldsymbol{v}$ ہو گا۔ ایسا نہ کرنے سے
۱۹۳۸۲ قیمت کی علامت تبدیل ہو گی۔

۱۹۳۸۳ ہم قاعدہ ضرب اور زنجیری قاعدہ کو ثابت کرتے ہیں۔ باقی ثبوت آپ کو مشق میں پیش کرنے ہوں گے۔

۱۹۳۸۴ ثبوت: قاعدہ ضرب نقطہ
۱۹۳۸۵ درج ذیل سمتیات فرض کریں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= u_1(t)\boldsymbol{i} + u_2(t)\boldsymbol{j} + u_3(t)\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{v} &= v_1(t)\boldsymbol{i} + v_2(t)\boldsymbol{j} + v_3(t)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

۱۹۳۸۶ تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)\\ &= \underbrace{u_1'v_1 + u_2'v_2 + u_3'v_3}_{\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}} + \underbrace{u_1v_1' + u_2v_2' + u_3v_3'}_{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}'}\end{aligned}$$

۱۹۳۸۷ □

۱۹۳۸۸ ثبوت: قاعدہ ضرب صلیبی
۱۹۳۸۹ ہم غیر سمتی تفاعل کے قاعدہ ضرب کی طرح اس کو ثابت کرتے ہیں۔ تفرق کی تعریف کی رو سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+h)\times\boldsymbol{v}(t+h) - \boldsymbol{u}(t) - \boldsymbol{v}(t)}{h}$$

۱۹۳۹۰ ہو گا۔ ہم شمار کنندہ کے ساتھ $\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+h)$ جمع اور منفی کرتے ہیں تاکہ درج بالا کو ایسی حاصل تقسیمات کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جن میں

۱۹۳۹۱ $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ کے تفارق پائے جاتے ہوں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\\
&\quad=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+h)\times\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+h)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)}{h}\\
&\quad=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\boldsymbol{u}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)}{h}\times\boldsymbol{v}(t+h)+\boldsymbol{u}(t)\times\frac{\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{v}(t)}{h}\right]\\
&\quad=\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)}{h}\times\lim_{h\to 0}\boldsymbol{v}(t+h)+\lim_{h\to 0}\boldsymbol{u}(t)\times\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{v}(t)}{h}
\end{aligned}
$$

۱۹۳۹۲ آخری لکیر پر دونوں مساوات اس لیے ٹھیک ہیں کہ دو سمتیات کے سمتی ضرب کی حد، ان کی حدوں کا سمتی ضرب ہوتی ہے (سوال ۱۲.۵۲)۔ چونکہ t پر $\boldsymbol{v}$
۱۹۳۹۳ قابل تفرق لہٰذا استمراری ہے، اس لیے جیسے جیسے h کی قیمت صفر تک پہنچتی ہے ویسے ویسے $\boldsymbol{v}(t+h)$ کی قیمت $\boldsymbol{v}(t)$ تک پہنچتی ہے۔ ان دو حاصل
۱۹۳۹۴ تقسیم کی قیمتیں t پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ تک پہنچتی ہیں۔ مختصراً درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

۱۹۳۹۵ □

۱۹۳۹۶ ثبوت: زنجیری قاعدہ

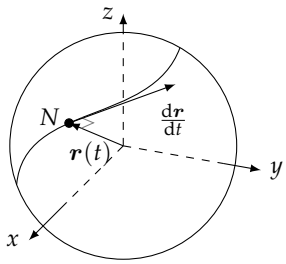
۱۹۳۹۷ فرض کریں $\boldsymbol{r}(t)=f(t)\boldsymbol{i}+g(t)\boldsymbol{j}+h(t)\boldsymbol{k}$ متغیر t کا قابل تفرق سمتی تفاعل ہے اور t از خود کسی متغیر s کا قابل تفرق غیر سمتی
۱۹۳۹۸ تفاعل ہے۔ تب f ، g اور h متغیر s کے قابل تفرق تفاعل ہوں گے اور حقیقی قیمت تفاعل کے زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}&=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}\\
&=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k}\\
&=\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\\
&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}
\end{aligned}
$$

۱۹۳۹۹ □

۱۹۴۰۰ مستقل لمبائی کے سمتی تفاعل

۱۹۴۰۱ ایک کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہو، پر جو جسم حرکت کرتا ہو، اس جسم کے تعین گر سمتیہ کی لمبائی اس کرہ کے رداس جتنی ہو گی (شکل ۱۲.۵)۔ اس کا سمتی رفتار سمتیہ
۱۹۴۰۲ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ ، جو حرکت کی راہ کو مماسی ہو گا، اس کرہ کو مماسی لہٰذا $\boldsymbol{r}$ کو قائمہ ہو گا۔ مستقل لمبائی والے قابل تفرق سمتی تفاعل کے لیے ہر بار ایسا ہی ہو گا۔ ایسا سمتیہ



شکل ۱۲.۵: اگر ایک ذرہ ایک کرہ پر یوں حرکت کرتا ہو کہ اس کی مقام $\boldsymbol{r}$ وقت کا قابل تفرق تفاعل ہو، تب $\boldsymbol{r} \cdot \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = 0$ ہو گا۔

۱۹۴۰۳ اور اس کا پہلا تفرق ایک دوسرے کو عمودی ہوں گے۔ لمبائی مستقل ہونے کی بدولت، سمتیہ میں تبدیلی درحقیقت سمتیہ کے رخ میں تبدیلی ہو گی اور رخ کی یہ
۱۹۴۰۴ تبدیلی سمتی تفاعل کے ساتھ زاویہ قائمہ پر ہو گی۔

۱۹۴۰۵ اگر $\boldsymbol{u}$ متغیر t کا قابل تفرق سمتی تفاعل ہو اور اس کی لمبائی اٹل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{u} \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = 0 \tag{۳}$$

۱۹۴۰۶ □

۱۹۴۰۷ یہ دیکھنے کی خاطر کہ مساوات ۳ کیوں درست ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے اور $|\boldsymbol{u}|$ ایک مستقل قیمت ہے۔
۱۹۴۰۸ یوں $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}|^2$ ایک مستقل ہو گا اور ہم اس مساوات کی دونوں اطراف کا تفرق لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) &= \frac{d}{dt}(\text{مستقل}) = 0 \\
\frac{d\boldsymbol{u}}{dt} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} &= 0 && \text{قاعدہ ضرب نقطہ میں } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \text{ لیتے ہوئے} \\
2\boldsymbol{u} \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} &= 0 && \text{ضرب نقطہ تعویضی ہے} \\
\boldsymbol{u} \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} &= 0
\end{aligned}$$

۱۹۴۰۹ مثال ۱۲.۵: دکھائیں کہ درج ذیل سمتیہ کی لمبائی مستقل ہے اور اس سمتیہ کا تفرق اور $\boldsymbol{u}$ آپس میں عمودی ہیں۔

$$\boldsymbol{u}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + \sqrt{3}\boldsymbol{k}$$

۱۹۴۱۰ حل

۱۹۳۱۱

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(t) &= (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{k} + \sqrt{3}\boldsymbol{k} \\
\left|\boldsymbol{u}(t)\right| &= \sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{+3} = 2 \\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= \sin t \cos t - \sin t \cos t = 0
\end{aligned}$$

۱۹۳۱۲ □

۱۹۳۱۳ **سمتی تفاعل کے تکملات**

۱۹۳۱۴ اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r}$ ہو تب قابل تفرق سمتی تفاعل $\boldsymbol{R}(t)$، وقفہ I پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ کا ضد تفرق ہو گا۔ اگر I پر $\boldsymbol{r}$ کا ضد
۱۹۳۱۵ تفرق $\boldsymbol{R}$ ہو تب، ایک وقت میں ایک جزو کے ساتھ کام کرتے ہوئے، یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ I پر $\boldsymbol{r}$ کے ضد تفرق کی صورت $\boldsymbol{R} + \boldsymbol{C}$ ہو گی جہاں
۱۹۳۱۶ $\boldsymbol{C}$ کوئی مستقل سمتیہ ہو گا (سوال ۱۲.۵۶)۔ وقفہ I پر $\boldsymbol{r}$ کے ضد تفارق کا سلسلہ I پر $\boldsymbol{r}$ کا **غیر قطعی تکمل**[۱۳] ہو گا۔

۱۹۳۱۷ تعریف: متغیر t کے لحاظ سے $\boldsymbol{r}$ کا غیر قطعی تکمل، $\boldsymbol{r}$ کے تمام ضد تفارق کا سلسلہ ہو گا، جس کو $\int \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر $\boldsymbol{r}$ کا ضد
۱۹۳۱۸ تفرق $\boldsymbol{R}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{C} \qquad \boldsymbol{C} \text{ مستقل سمتیہ ہے}$$

۱۹۳۱۹ □

۱۹۳۲۰ غیر قطعی تکملات کے تمام حسابی اصول یہاں قابل اطلاق ہوں گے۔

۱۹۳۲۱ مثال ۱۲.۶:

$$\begin{aligned}
\int ((\cos t)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}t &= \Big(\int \cos t\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\int \mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{j} - \Big(\int 2t\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{k} \\
&= (\sin t + \mathrm{C}_1)\boldsymbol{i} + (t + \mathrm{C}_2)\boldsymbol{j} - (t^2 + \mathrm{C}_3)\boldsymbol{k} \\
&= (\sin t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} - t^2\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C} \qquad \boldsymbol{C} = \mathrm{C}_1\boldsymbol{i} + \mathrm{C}_2\boldsymbol{j} - \mathrm{C}_3\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

۱۹۳۲۲ غیر سمتی تفاعل کے تکمل کی طرح یہاں بھی، درمیانے دو قدم کے بغیر، آپ بائیں ہاتھ سے سیدھا نتیجہ لکھ سکتے ہیں۔ □

۱۹۳۲۳ سمتی تفاعل کے قطعی تکمل کی تعریف اس کے اجزاء کی صورت میں کی جاتی ہے۔

---

[۱۳] indefiniteintegral

۱۹۳۲۴ تعریف: اگر وقفہ $[a, b]$ پر $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ کے اجزاء قابل تفرق ہوں تب اس وقفہ پر $\boldsymbol{r}$ بھی قابل تفرق
۱۹۳۲۵ ہوگا اور a تا b سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ کا قطعی تکمل درج ذیل ہوگا۔

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \Big(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{k}$$

۱۹۳۲۶ □

۱۹۳۲۷ قطعی تکملات کے تمام حسابی اصول یہاں قابل اطلاق ہوں گے (سوال ۱۲.۵۴)۔

۱۹۳۲۸ مثال ۱۲.۷:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi ((\cos t)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}t &= \Big(\int_0^\pi \cos t\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\int_0^\pi \mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{j} - \Big(\int_0^\pi 2t\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{k} \\
&= \Big[\sin t\Big]_0^\pi \boldsymbol{i} + \Big[t\Big]_0^\pi \boldsymbol{j} - \Big[t^2\Big]_0^\pi \\
&= [0-0]\boldsymbol{i} + [\pi - 0]\boldsymbol{j} - [\pi^2 - 0^2]\boldsymbol{k} \\
&= \pi\boldsymbol{j} - \pi^2\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

۱۹۳۲۹ □

۱۹۳۳۰ مثال ۱۲.۸: ذرے کے ابتدائی مقام اور ابتدائی سمتی رفتار سے اس کے مقام کا حصول
۱۹۳۳۱ فضا میں حرکت کرتے ہوئے ایک ذرے کا سمتی رفتار

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

۱۹۳۳۲ ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر اس ذرے کا مقام $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ ہو تب لمحہ t پر اس کا مقام کیا ہوگا؟

۱۹۳۳۳ **حل**
۱۹۳۳۴ ہمیں درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرنا ہوگا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} && \text{تفرقی مساوات} \\
\boldsymbol{r}(0) &= 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k} && \text{ابتدائی معلومات}
\end{aligned}$$

۱۹۳۳۵ دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے تکمل لے کر

$$\boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C}$$

۱۹۳۳۶ حاصل ہوتا ہے۔ ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے تکمل کا مستقل $\boldsymbol{C}$ معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(\sin 0)\boldsymbol{i} + (\cos 0)\boldsymbol{j} + (0)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C} &= 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{r}(0) = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{C} &= 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{C} &= 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\end{aligned}$$

۱۹۳۳۷ وقت t کے لحاظ سے ذرے کا مقام درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\sin t + 2)\boldsymbol{i} + (\cos t - 1)\boldsymbol{j} + (t + 1)\boldsymbol{k}$$

۱۹۳۳۸ حاصل نتیجہ کو پرکھنے کی خاطر ہم اس سے

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= (\cos t + 0)\boldsymbol{i} + (-\sin t - 0)\boldsymbol{j} + (1 + 0)\boldsymbol{k}\\ &= (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\end{aligned}$$

۱۹۳۳۹ اور

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(0) &= (\sin 0 + 2)\boldsymbol{i} + (\cos 0 - 1)\boldsymbol{j} + (0 + 1)\boldsymbol{k}\\ &= 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}\end{aligned}$$

۱۹۳۴۰ حاصل کرتے ہیں۔ □

۱۹۳۴۱ **سوالات**

۱۹۳۴۲ **مستوی xy میں حرکت**

۱۹۳۴۳ سوال ۱۲.۱ تا سوال ۱۲.۴ میں مستوی xy میں لمحہ t پر ایک ذرے کا مقام $\boldsymbol{r}(t)$ ہے۔ اس ذرے کی راہ کی ترسیم کے x اور y محدد کی مساواتیں تلاش
۱۹۳۴۴ کریں۔ اس کے بعد دیے گئے لمحہ پر ذرے کی سمتی رفتار اور اسراع سمتیات دریافت کریں۔

۱۹۳۴۵ سوال ۱۲.۱: $\boldsymbol{r}(t) = (t + 1)\boldsymbol{i} + (t^2 - 1)\boldsymbol{j}, \quad t = 1$

۱۹۳۴۶ سوال ۱۲.۲: $\boldsymbol{r}(t) = (t^2 + 1)\boldsymbol{i} + (2t - 1)\boldsymbol{j}, \quad t = \frac{1}{2}$

۱۹۳۴۷ سوال ۱۲.۳: $\boldsymbol{r}(t) = e^t\boldsymbol{i} + \frac{2}{9}e^{2t}\boldsymbol{j}, \quad t = \ln 3$

۱۹۳۴۸ سوال ۱۲.۴: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos 2t)\boldsymbol{i} + (3\sin 2t)\boldsymbol{j}, \quad t = 0$

۱۹۳۴۹

۱۹۳۵۰ سوال ۱۲.۵ تا سوال ۱۲.۸ میں مستوی xy میں مختلف منحنیات پر حرکت کرتے ہوئے ایک ذرے کا تعین گر سمتیہ دیا گیا ہے۔ دیے گئے لمحات پر اس ذرے
۱۹۳۵۱ کے سمتی رفتار اور اسراع کے سمتیات دریافت کریں۔ ان سمتیات کو منحنی پر ترسیم کریں۔

۱۹۳۵۲ سوال ۱۲.۵: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر حرکت

۱۹۳۵۳ $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}, \quad t = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

سوال ۱۲.۶: دائرہ $x^2 + y^2 = 16$ پر حرکت
$$\boldsymbol{r}(t) = (4\cos\tfrac{t}{2})\boldsymbol{i} + (4\sin\tfrac{t}{2})\boldsymbol{j}, \quad t = \pi, \tfrac{3\pi}{2}$$

سوال ۱۲.۷: تدویر $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$ پر حرکت
$$\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j}, \quad t = \pi, \tfrac{3\pi}{2}$$

سوال ۱۲.۸: قطع مکافی $y = x^2 + 1$ پر حرکت
$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (t^2 + 1)\boldsymbol{j},\ t = -1, 0, 1$$

فضا میں سمتی رفتار اور اسراع

سوال ۱۲.۹ تا سوال ۱۲.۱۴ میں لمحہ t پر ایک ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے۔ اس ذرے کی سمتی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔ دیے گئے لمحہ پر اس کی رفتار اور رخ کی قیمت تلاش کریں۔ اس لمحہ پر ذرے کی سمتی رفتار کو رفتار اور رخ کا حاصل ضرب لکھیں۔

سوال ۱۲.۹: $\boldsymbol{r}(t) = (t + 1)\boldsymbol{i} + (t^2 - 1)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

سوال ۱۲.۱۰: $\boldsymbol{r}(t) = (1 + t)\boldsymbol{i} + \frac{t^2}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{t^2}{3}\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

سوال ۱۲.۱۱: $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}, \quad t = \frac{\pi}{2}$

سوال ۱۲.۱۲: $\boldsymbol{r}(t) = (\sec t)\boldsymbol{i} + (\tan t)\boldsymbol{j} + \frac{4}{3}t\boldsymbol{k}, \quad t = \frac{\pi}{6}$

سوال ۱۲.۱۳: $\boldsymbol{r}(t) = (2\ln(t + 1))\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

سوال ۱۲.۱۴: $\boldsymbol{r}(t) = (e^{-t})\boldsymbol{i} + (2\cos 3t)\boldsymbol{j} + (2\sin 3t)\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

سوال ۱۲.۱۵ تا سوال ۱۲.۱۸ میں لمحہ t پر فضا میں ایک ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر اس کی سمتی رفتار اور اسراع کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

سوال ۱۲.۱۵: $\boldsymbol{r}(t) = (3t + 1)\boldsymbol{i} + \sqrt{3}t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$

سوال ۱۲.۱۶: $\boldsymbol{r}(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}t)\boldsymbol{i} + (\frac{\sqrt{2}}{2}t - 16t^2)\boldsymbol{j}$

سوال ۱۲.۱۷: $\boldsymbol{r}(t) = (\ln(t^2 + 1))\boldsymbol{i} + (\tan^{-1} t)\boldsymbol{j} + \sqrt{t^2 + 1}\boldsymbol{k}$

سوال ۱۲.۱۸: $\boldsymbol{r}(t) = \frac{4}{9}(1 + t)^{3/2}\boldsymbol{i} + \frac{4}{9}(1 - t)^{3/2}\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}t\boldsymbol{k}$

سوال ۱۲.۱۹ اور سوال ۱۲.۲۰ میں لمحہ t پر فضا میں ایک ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے۔ دیے گئے وقفہ میں وہ لمحہ یا لمحات تلاش کریں جن پر سمتی رفتار سمتیہ اور اسراع سمتیہ ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔

سوال ۱۲.۱۹: $\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۲.۲۰: $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + (\cos t)\boldsymbol{k}, \quad t \ge 0$

۱۹۳۸۲

۱۹۳۸۳ سمتی قیمت تفاعل کا تکمل

۱۹۳۸۴ سوال ۱۲.۲۱ تا سوال ۱۲.۲۶ میں تکمل حاصل کریں۔

۱۹۳۸۵ سوال ۱۲.۲۱: $\int_0^1 [t^3\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + (t+1)\boldsymbol{k}]\,\mathrm{d}t$

۱۹۳۸۶ سوال ۱۲.۲۲: $\int_1^2 \left[(6-6t)\boldsymbol{i} + 3\sqrt{t}\boldsymbol{j} + \frac{4}{t^2}\boldsymbol{k}\right]\mathrm{d}t$

۱۹۳۸۷ سوال ۱۲.۲۳: $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(\sin t)\boldsymbol{i} + (1+\cos t)\boldsymbol{j} + (\sec^2 t)\boldsymbol{k}]\,\mathrm{d}t$

۱۹۳۸۸ سوال ۱۲.۲۴: $\int_0^{\pi/3} [(\sec t \tan t)\boldsymbol{i} + (\tan t)\boldsymbol{j} + (2\sin t\cos t)\boldsymbol{k}]\,\mathrm{d}t$

۱۹۳۸۹ سوال ۱۲.۲۵: $\int_1^4 [\frac{1}{t}\boldsymbol{i} + \frac{1}{5-t}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2t}\boldsymbol{k}]\,\mathrm{d}t$

۱۹۳۹۰ سوال ۱۲.۲۶: $\int_0^1 [\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{1+t^2}\boldsymbol{k}]\,\mathrm{d}t$

۱۹۳۹۱

۱۹۳۹۲ سمتی تفاعل کے ابتدائی قیمت مسائل

۱۹۳۹۳ سوال ۱۲.۲۷ تا سوال ۱۲.۳۲ میں t کے سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ کے ابتدائی قیمت مسائل دیے گئے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

۱۹۳۹۴ سوال ۱۲.۲۷:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -t\boldsymbol{i} - t\boldsymbol{j} - t\boldsymbol{k} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} \qquad \text{ابتدائی شرط}$$

۱۹۳۹۵ سوال ۱۲.۲۸:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (180t)\boldsymbol{i} + (180t - 16t^2)\boldsymbol{j} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\boldsymbol{r}(0) = 100\boldsymbol{j} \qquad \text{ابتدائی شرط}$$

۱۹۳۹۶ سوال ۱۲.۲۹:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \tfrac{3}{2}(t+1)^{1/2}\boldsymbol{i} + e^{-t}\boldsymbol{j} + \tfrac{1}{t+1}\boldsymbol{k} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{k} \qquad \text{ابتدائی شرط}$$

۱۹۳۹۷ سوال ۱۲.۳۰:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (t^3 + 4t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + 2t^2\boldsymbol{k} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \qquad \text{ابتدائی شرط}$$

۱۹۴۹۸ سوال ۱۲.۳۱:

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -32\boldsymbol{k} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\boldsymbol{r}(0) = 100\boldsymbol{k} \qquad \text{ابتدائی شرائط}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 8\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}$$

۱۹۴۹۹ سوال ۱۲.۳۲:

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$\boldsymbol{r}(0) = 10\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k} \qquad \text{ابتدائی شرائط}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \boldsymbol{0}$$

۱۹۵۰۰

۱۹۵۰۱ **ہموار منحنیات کے مماسی خط**

۱۹۵۰۲ ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ کا $t = t_0$ پر مماسی خط نقطہ $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ سے گزرتا ہے
۱۹۵۰۳ اور، t_0 پر اس منحنی کے سمتی رفتار سمتیہ $\boldsymbol{v}(t_0)$، کا متوازی ہوتا ہے (متن میں بتایا گیا)۔ سوال ۱۲.۳۳ تا سوال ۱۲.۳۶ میں $t = t_0$ پر دیے گئے منحنی
۱۹۵۰۴ کے مماسی خط کی مقدار معلوم مساوات حاصل کریں۔

۱۹۵۰۵ سوال ۱۲.۳۳: $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (t^2 - \cos t)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}, \quad t_0 = 0$

۱۹۵۰۶ سوال ۱۲.۳۴: $\boldsymbol{r}(t) = (2\sin t)\boldsymbol{i} + (2\cos t)\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k}, \quad t_0 = 4\pi$

۱۹۵۰۷ سوال ۱۲.۳۵: $\boldsymbol{r}(t) = (a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}, \quad t_0 = 2\pi$

۱۹۵۰۸ سوال ۱۲.۳۶: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + (\sin 2t)\boldsymbol{k}, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$

۱۹۵۰۹

۱۹۵۱۰ **دائری راہ پر حرکت**

۱۹۵۱۱ سوال ۱۲.۳۷: اکائی دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر ایک ذرہ کے حرکت کو (ا) تا (د) میں دی گئی مساوات ظاہر کرتی ہیں۔ اگرچہ (ا) تا (د) میں ذرے کا راہ
۱۹۵۱۲ ایک ہے، ان راہ پر اس کا حرکی رویہ مختلف ہے۔ ہر راہ پر درج ذیل کے جوابات دیں۔

۱۹۵۱۳ ۱. کیا ذرے کی رفتار مستقل ہے؟ اگر ایسا ہو، تب اس کی رفتار کتنی ہے؟

۱۹۵۱۴ ۲. کیا ذرے کا سمتی رفتار سمتیہ اور اسراع آپس میں ہر جگہ عمودی ہیں؟

۱۹۵۱۵ ۳. کیا یہ ذرہ اکائی دائرے پر گھڑی کے رخ یا اس کے مخالف رخ گھومتا ہے؟

۱۹۵۱۶ ۴. کیا ذرہ نقطہ $(1, 0)$ سے ابتدا کرتا ہے؟

۱۹۵۱۷ ا. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

ب. $\boldsymbol{r}(t) = \cos(2t)\boldsymbol{i} + \sin(2t)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

ج. $\boldsymbol{r}(t) = \cos(t - \pi/2)\boldsymbol{i} + \sin(t - \pi/2)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

د. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

ھ. $\boldsymbol{r}(t) = \cos(t^2)\boldsymbol{i} + \sin(t^2)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

سوال ۱۲.۳۸: دکھائیں کہ درج ذیل ابتدائی قیمت سمتی قیمت تفاعل، مستوی $x + y - 2z = 2$ میں رداس 1 کے دائرہ پر حرکت کو ظاہر کرتا ہے جہاں دائرے کا مرکز $(2, 2, 1)$ ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + \cos t(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}) + \sin t(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k})$$

خط مستقیم پر حرکت

سوال ۱۲.۳۹: لمحہ $t = 0$ پر ایک ذرہ نقطہ $(1, 2, 3)$ پر واقع ہے۔ یہ خط مستقیم پر حرکت کرتا ہوا نقطہ $(4, 1, 4)$ پہنچتا ہے۔ اس کا رفتار $(1, 2, 3)$ پر 2 اور اس کی اسراع مستقل $3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ہے۔ لمحہ t پر اس کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ دریافت کریں۔

سوال ۱۲.۴۰: لمحہ $t = 0$ پر ایک ذرہ نقطہ $(1, -1, 2)$ پر پایا جاتا ہے اور اس کا رفتار 2 ہے۔ یہ نقطہ $(3, 0, 3)$ کی طرف یکساں اسراع $2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ سے بڑھتا ہے۔ لمحہ t پر اس کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۲.۴۱: ایک ذرہ قطع مکافی $y^2 = 2x$ کے بالائی حصہ پر بائیں سے دائیں رخ، 5 اکائیاں فی سیکنڈ کے مستقل رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ اس ذرہ کی سمتی رفتار اس لمحہ پر تلاش کریں جب یہ نقطہ $(2, 2)$ سے گزرتا ہے۔

سوال ۱۲.۴۲: ایک ذرہ مستوی xy میں ایک تدویر پر یوں حرکت کرتا ہے کہ لمحہ t اس کا تعین گر سمتیہ

$$\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j}$$

ہوتا ہے۔ $|\boldsymbol{r}|$ اور $|\boldsymbol{a}|$ کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمتیں تلاش کریں۔ (اشارہ: پہلے $|\boldsymbol{v}|^2$ اور $|\boldsymbol{a}|^2$ کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں اور بعد میں جذر لیں۔)

سوال ۱۲.۴۳: ایک ذرہ مستوی yz میں ترخیم $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ پر یوں حرکت کرتا ہے کہ لمحہ t پر اس کا تعین گر سمتیہ

$$\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{j} + (2\sin t)\boldsymbol{k}$$

ہوتا ہے۔ $|\boldsymbol{r}|$ اور $|\boldsymbol{a}|$ کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمتیں تلاش کریں۔ (بالائی سوال میں اشارہ دیکھیں۔)

سوال ۱۲.۴۴: مصنوعی سیارہ کا دائری مدار

ایک مصنوعی سیارہ جس کی کمیت m ہے ایک جسم جس کی کمیت M ہے کے گرد دائری مدار پر مستقل رفتار v سے طواف کرتا ہے۔ دائری مدار کا رداس r_0 ہے۔ اس مصنوعی سیارہ کے مدار کا دوری عرصہ T (ایک چکر کے لیے درکار وقت) درج ذیل اقدام کے ذریعہ تلاش کریں۔

۱۹۵۴۲ ا. کمیت M کے جسم کو مبدا پر اور لمحہ $t = 0$ پر مصنوعی سیارہ کو محور x پر رکھیں۔ حرکت کو گھڑی کے رخ تصور کریں (شکل دیکھیں)۔ لمحہ t پر سیارہ
۱۹۵۴۳ کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ لیں۔ دکھائیں کہ $\theta = \frac{vt}{r_0}$ ہو گا لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (r_0 \cos \tfrac{vt}{r_0})\boldsymbol{i} + (r_0 \sin \tfrac{vt}{r_0})\boldsymbol{j}$$

۱۹۵۴۴ ب. سیارے کی اسراع معلوم کریں۔

۱۹۵۴۵ ج. نیوٹن کے قانون تجاذب کے تحت سیارہ پر قوت درج ذیل ہو گی جہاں G تجاذب کا عالمگیر مستقل ہے۔

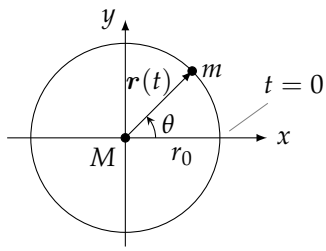
$$\boldsymbol{F} = \Big(-\frac{GMm}{r_0^2}\Big)\frac{\boldsymbol{r}}{r_0}$$

۱۹۵۴۶ نیوٹن کے دوسرے قانون سے $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ ہو گا جس سے $v^2 = \frac{GM}{r_0}$ حاصل کریں۔

۱۹۵۴۷ د. دکھائیں کہ T مساوات $vT = 2\pi r_0$ کو مطمئن کرتا ہے۔

۱۹۵۴۸ ھ. جزو-ج اور جزو-د سے درج ذیل حاصل کریں جو دوری عرصہ کا مربع ہے۔

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r_0^3$$



۱۹۵۴۹

۱۹۵۵۰ سوال ۱۲.۴۵: فرض کریں $\boldsymbol{v}$ متغیر t کا قابل تفرق سمتی تفاعل ہے۔ دکھائیں کہ اگر $\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0$ ہو تب $|\boldsymbol{v}|$ ایک مستقل ہو گا۔

۱۹۵۵۱ سوال ۱۲.۴۶: غیر سمتی سہ ضرب کا تفرق

۱۹۵۵۲

۱۹۵۵۳ ا. دکھائیں کہ اگر $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ قابل تفرق سمتی تفاعل ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t} \tag{۴}$$

۱۹۵۵۴ ب. دکھائیں مساوات ۴ درج ذیل کا معادل ہے۔

(۵)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix}$$

مساوات ۵ کہتی ہے 3 ضرب 3 قابل تفرق مقطع کا تفرق ان تین مقطع کا مجموعہ ہوگا جو ایک وقت میں ایک صف کا تفرق لے کر حاصل کیے گئے ہوں۔ اس نتیجہ کو بلند رتبی مقطع تک وسعت دی جا سکتی ہے۔

سوال ۱۲.۴۷: فرض کریں $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ ہو جہاں f ، g اور h قابل تین رتبی تفرق ہوں۔ مساوات ۴ یا مساوات ۵ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right) = \boldsymbol{r}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^3}\right) \tag{۶}$$

(اشارہ: بائیں ہاتھ تفرق لے کر ان سمتیات کی نشاندہی کریں جن کے حاصل ضرب صفر ہو۔)

سوال ۱۲.۴۸: قاعدہ مستقل تفاعل

دکھائیں کہ اگر $\boldsymbol{u}$ ایک ایسا سمتی تفاعل ہو جس کی قیمت مستقل $\boldsymbol{C}$ ہو تب $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}$ ہوگا۔

سوال ۱۲.۴۹: قواعد غیر سمتی ضرب

ا. دکھائیں اگر $\boldsymbol{u}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہو اور c کوئی حقیقی عدد ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\mathrm{d}(c\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t} = c\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

ب. ثابت کریں کہ اگر t کا $\boldsymbol{u}$ قابل تفرق تفاعل ہو اور t کا f قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\boldsymbol{u}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u} + f\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

سوال ۱۲.۵۰: قواعد مجموعہ اور فرق

ثابت کریں کہ اگر $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

سوال ۱۲.۵۱: ایک نقطہ پر استمرار کا پرکھ اجزاء

دکھائیں کہ سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ جس کو قاعدہ $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ بیان کرتا ہو نقطہ t_0 پر تب استمراری ہوگا جب f ، g اور h اس نقطہ پر استمراری ہوں۔

سوال ۱۲.۵۲: سمتی تفاعل کے صلیبی ضرب کی حد

فرض کریں $\boldsymbol{r}_1(t) = f_1(t)\boldsymbol{i} + f_2(t)\boldsymbol{j} + f_3(t)\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{r}_2(t) = g_1(t)\boldsymbol{i} + g_2(t)\boldsymbol{j} + g_3(t)\boldsymbol{k}$ ، $\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{A}$ اور $\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{B}$ ہیں۔ صلیبی ضرب کا کلیہ مقطع اور غیر سمتی تفاعل کے لیے قاعدہ حد حاصل ضرب استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$$

سوال ۱۲.۵۳: قابل تفرق سمتی تفاعل استراری ہوتے ہیں۔
دکھائیں کہ اگر $t = t_0$ پر $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ قابل تفرق ہو تب t_0 پر یہ استراری بھی ہوگا۔

سوال ۱۲.۵۴: قابل تکمل سمتی تفاعل کے درج ذیل خواص کی تصدیق کریں۔

ا. قاعدہ مستقل غیر سمتی مضرب:

$$\int_a^b k\boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = k\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t \qquad k \text{ کوئی مستقل ہے}$$

نفی کا قاعدہ $k = -1$ لے کر حاصل ہوگا:

$$\int_a^b (-\boldsymbol{r}(t))\,\mathrm{d}t = -\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t$$

ب. قواعد مجموعہ اور فرق:

$$\int_a^b (\boldsymbol{r}_1(t) \mp \boldsymbol{r}_2(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b \boldsymbol{r}_1(t)\,\mathrm{d}t \mp \int_a^b \boldsymbol{r}_2(t)\,\mathrm{d}t$$

ج. قاعدہ مستقل سمتیہ مضرب:

$$\int_a^b \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{C}\cdot\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \boldsymbol{C} \text{ کوئی سمتی مستقل ہے}$$

اور

$$\int_a^b \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{C}\times\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \boldsymbol{C} \text{ کوئی سمتی مستقل ہے}$$

سوال ۱۲.۵۵: غیر سمتی اور سمتی تفاعل کے حاصل ضرب
فرض کریں وقفہ $a \le t \le b$ پر غیر سمتی تفاعل $u(t)$ اور سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ معین ہیں۔

ا. دکھائیں کہ $[a,b]$ پر $u\boldsymbol{r}$ تب استراری ہوگا جب $[a,b]$ پر u اور $\boldsymbol{r}$ استراری ہوں۔

ب. اگر غیر سمتی تفاعل u اور سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ دونوں $[a,b]$ پر قابل تفرق ہوں تب دکھائیں کہ $[a,b]$ پر $u\boldsymbol{r}$ قابل تفرق ہوگا اور مزید درج ذیل بھی ہوگا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u\boldsymbol{r}) = u\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

سوال ۱۲.۵۶: سمتی تفاعل کے ضد تفارق

ا. غیر سمتی تفاعل کے مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ 2 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اگر وقفہ I پر دو سمتی تفاعل $\boldsymbol{R}_1(t)$ اور $\boldsymbol{R}_2(t)$ کے تفارق متماثل ہوں تب پورے I پر ان تفاعل میں صرف ایک مستقل سمتی قیمت کا فرق ہوگا۔

ب. جزو-ا کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اگر I پر $\boldsymbol{r}(t)$ کا ضد تفرق $\boldsymbol{R}(t)$ ہو تب I پر $\boldsymbol{r}$ کا ہر ضد تفرق $\boldsymbol{R}(t)+\boldsymbol{C}$ کے برابر ہو گا جہاں $\boldsymbol{C}$ کوئی مستقل سمتیہ ہوگا۔

سوال ۱۲.۵۷: احصاء کا بنیادی مسئلہ

احصاء کا بنیادی مسئلہ برائے حقیقی متغیر کا غیر سمتی تفاعل، حقیقی متغیر کے سمتی تفاعل کے لیے بھی کارآمد ہوگا۔ یہ ثابت کرنے کی خاطر غیر سمتی تفاعل کے لیے اس مسئلہ کو استعمال کر کے پہلے دکھائیں کہ اگر $a \le t \le b$ پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ استمراری ہو تب $[a,b]$ پر ہر نقطہ t کے لیے درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{r}(t)$$

اس کے بعد سوال ۱۲.۵۶ کے جزو-ب کا نتیجہ استعمال کر کے دکھائیں کہ اگر $[a,b]$ پر $\boldsymbol{r}(t)$ کا $\boldsymbol{R}$ کوئی ضد تفرق ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{R}(b) - \boldsymbol{R}(a)$$

کمپیوٹر کا استعمال

کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے سوال ۱۲.۵۸ تا سوال ۱۲.۶۱ میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کی فضائی راہ کی منحنی ترسیم کریں۔

ب. سمتی رفتار سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کے اجزاء تلاش کریں۔

ج. دیے گئے نقطہ t_0 پر سمتی رفتار $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت معلوم کر کے نقطہ $\boldsymbol{r}(t_0)$ پر مماسی خط کی مساوات تلاش کریں۔

د. دیے گئے وقفہ پر منحنی اور خط مماس ترسیم کریں۔

سوال ۱۲.۵۸: $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{i} + (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 6\pi,\ t_0 = \frac{3\pi}{2}$

سوال ۱۲.۵۹: $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{2}t\boldsymbol{i} + e^t\boldsymbol{j} + e^{-t}\boldsymbol{k}, \quad -2 \le t \le 3,\ t_0 = 1$

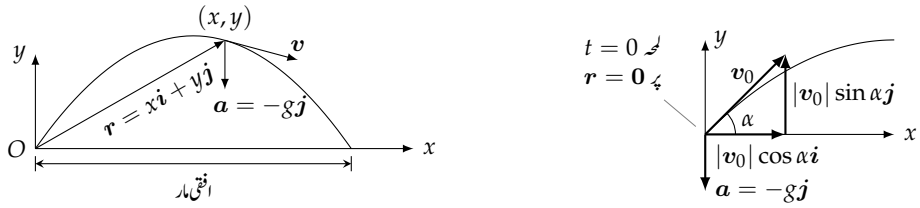
سوال ۱۲.۶۰: $\boldsymbol{r}(t) = (\sin 2t)\boldsymbol{i} + (\ln(1+t))\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 4\pi,\ t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال ۱۲.۶۱: $\boldsymbol{r}(t) = (\ln(t^2+2))\boldsymbol{i} + (\tan^{-1}3t)\boldsymbol{j} + \sqrt{t^2+1}\boldsymbol{k}, \quad -3 \le t \le 5,\ t_0 = 3$

سوال ۱۲.۶۲ اور سوال ۱۲.۶۳ میں آپ a اور b کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے پیچ دار منحنی

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos at)\boldsymbol{i} + (\sin at)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}$$

کے رویہ پر غور کریں گے۔ کمپیوٹر کو استعمال کریں۔



(ا) لمحہ $t = 0$ پر مقام، سمتی رفتار اور اسراع۔

(ب) کچھ دیر بعد لمحہ t پر مقام، سمتی رفتار اور اسراع۔

شکل ۱۲.۶: گولا کی مثالی پرواز۔

سوال ۱۲.۶۲: وقفہ $0 \leq t \leq 4\pi$ کے لیے نقطہ $t = \frac{3\pi}{2}$ پر پیچ دار منحنی اور اس کا مماسی خط، $b = 1$ اور $a = 1, 2, 4, 6$ لیتے ہوئے ترسیم کریں۔ اپنے الفاظ میں بتلائیں کہ a کی قیمت ان مثبت قیمتوں پر بڑھانے سے منحنی کی ترسیم اور مماسی خط کے مقام پر کیا اثر پیدا ہوتا ہے۔

سوال ۱۲.۶۳: وقفہ $0 \leq t \leq 4\pi$ کے لیے نقطہ $t = \frac{3\pi}{2}$ پر پیچ دار منحنی اور اس کا مماسی خط، $a = 1$ اور $b = 1/4, 1/2, 2, 4$ لیتے ہوئے ترسیم کریں۔ اپنے الفاظ میں بتلائیں کہ b کی قیمت ان مثبت قیمتوں پر بڑھانے سے منحنی کی ترسیم اور مماسی خط کے مقام پر کیا اثر پیدا ہوتا ہے۔

۱۲.۲ گولا کی حرکت کی نمونہ کشی

ایک گولا چلانے سے پہلے ہم جاننا چاہیں گے کہ آیا وہ حدف کو مار سکے گا (کیا حدف تک پہنچے گا)؟ یہ گولا کس بلندی تک پہنچے گا (کیا یہ پہاڑی کو پار کر پائے گا)؟ اور یہ حدف پر کتنی دیر میں پہنچے گا (نتائج کب حاصل ہوں گے)؟ یہ تمام معلومات گولے کی ابتدائی سمتیہ رفتار سے نیوٹن کے دوسرے قانون کی مدد سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔

گولا کی حرکت کی مقدار معلوم مثالی مساوات

حرکت گولا کی مثالی مساوات حاصل کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ یہ ایک ذرہ کی مانند مستوی میں حرکت کرتا ہے اور اس پر صرف مستقل قوت کشش سیدھا نیچے رخ عمل کرتی ہے۔ حقیقت میں یہ مفروضے درست نہیں ہیں۔ زمین گھومنے کی وجہ سے گولے کے نیچے زمین حرکت میں ہوتی ہے، ہوائی رگڑ جو گولے کی رفتار اور بلندی پر منحصر ہے گولا پر عمل کرتی ہے، اور قوت کشش ایک مستقل نہیں ہے بلکہ اس کی قیمت گولا کی بلندی پر منحصر ہے۔ اگرچہ ان تمام کے اثرات کو بھی دیکھنا ہوگا، ہم یہاں انہیں نظر انداز کرتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ لمحہ $t = 0$ پر ابتدائی سمتیہ رفتار $\boldsymbol{v}_0$ کے ساتھ مبدا سے گولا ربع اول میں مارا جاتا ہے (شکل ۱۲.۶)۔ اگر افقی زمین کے ساتھ $\boldsymbol{v}_0$ کا زاویہ α ہو تب

$$\boldsymbol{v}_0 = (|\boldsymbol{v}_0| \cos\alpha)\boldsymbol{i} + (|\boldsymbol{v}_0| \sin\alpha)\boldsymbol{j} \tag{۱}$$

۱۹۶۲۹ ہوگا۔اس میں $|\boldsymbol{v}_0|$ کو سادہ علامت v_0 سے ظاہر کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{v}_0 = (v_0 \cos\alpha)\boldsymbol{i} + (v_0 \sin\alpha)\boldsymbol{j} \tag{۲}$$

۱۹۶۳۰ گولا کا ابتدائی مقام درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{r}_0 = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0} \tag{۳}$$

۱۹۶۳۱ نیوٹن کا دوسرا قانون برائے حرکت کے تحت کمیت ضرب اسراع یعنی $m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ عامل قوت کے برابر ہوگا جہاں لمحہ t پر گولے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$
۱۹۶۳۲ ہے۔اگر صرف قوت کشش $-mg\boldsymbol{j}$ عمل کرتی ہو تب

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -g\boldsymbol{j} \quad \text{یا} \quad m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -mg\boldsymbol{j} \tag{۴}$$

۱۹۶۳۳ ہوگا۔ہم درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کر کے متغیر t کا تفاعل $\boldsymbol{r}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -g\boldsymbol{j} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0,\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_0 \quad \text{پر} \quad t = 0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

۱۹۶۳۴ پہلا تکمل

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -(gt)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{v}_0$$

۱۹۶۳۵ دیگا۔دوسرا تکمل

$$\boldsymbol{r} = -\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0$$

۱۹۶۳۶ دیگا۔ہم مساوات ۲ اور مساوات ۳ سے $\boldsymbol{v}_0$ اور $\boldsymbol{r}_0$ کی قیمتیں پر کر کے

$$\boldsymbol{r} = -\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j} + \underbrace{(v_0\cos\alpha)t\boldsymbol{i} + (v_0\sin\alpha)t\boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{v}_0 t} + \boldsymbol{0}$$

۱۹۶۳۷ یعنی

$$\boldsymbol{r} = (v_0\cos\alpha)t\boldsymbol{i} + \left((v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\boldsymbol{j} \tag{۵}$$

۱۹۶۳۸ حاصل کرتے ہیں۔

۱۹۳۹ مساوات ۵ گولے کی مثالی حرکت کی سمتی مساوات ہے۔ زاویہ α گولا **چلانے کا زاویہ** ہے جبکہ v_0 اس کی **ابتدائی رفتار** ہے۔

۱۹۴۰ مساوات ۵ درج ذیل دو غیر سمتی مساواتوں کے برابر ہے۔

$$x = (v_0 \cos\alpha)t, \quad y = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{۶}$$

۱۹۴۱ انہیں گولا کی مثالی پرواز کی مقدار معلوم مساوات کہتے ہیں۔ اگر وقت کو سیکنڈوں میں اور فاصلہ کو میٹروں میں ناپا جائے تب $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہو گا اور
۱۹۴۲ مساوات ۶ میں x اور y میٹر میں ہوں گے۔

۱۹۴۳ مثال ۱۲.۹: افقی میدان میں مبدا سے ایک گولا $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے 60° کے زاویہ پر داغا جاتا ہے۔ یہ گولا 10 سیکنڈ بعد کہاں ہو گا؟

۱۹۴۴ **حل**

۱۹۴۵ ہم $v_0 = 500$ ، $\alpha = 60$ ، $g = 9.8$ لیتے ہوئے مساوات ۶ استعمال کر کے لمحہ $t = 10$ پر گولے کا مقام معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
x &= (v_0 \cos\alpha)t = 500 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 = 2500\,\mathrm{m} \\
y &= (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \\
&= 500 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot (10)^2 \\
&= 2500\sqrt{3} - 490 \\
&\approx 3840\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

۱۹۴۶ گولا چلانے کے دس سیکنڈ بعد 3840 میٹر کی بلندی پر حدف کی طرف 2500 میٹر دور ہو گا۔ □

۱۹۴۷ **بلندی، دورانیہ پرواز اور فاصلہ مار**

۱۹۴۸ ہم مساوات ۶ سے مثالی گولا کی پرواز کے بارے میں عموماً سوالات کے جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔

۱۹۴۹ گولا اپنی بلند ترین مقام پر اس لمحہ پہنچتا ہے جب اس کی رفتار کا انتصابی حصہ صفر ہو:

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_0 \sin\alpha - gt = 0$$

۱۹۵۰ اس لمحہ پر y کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$y_{\text{بلند تر}} = (v_0 \sin\alpha)\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} \tag{۷}$$

۱۹۶۵۱ افقی میدان میں داغے گئے گولا کی پرواز کا دورانیہ جاننے کی خاطر ہم مساوات ۶ میں $y = 0$ پر کے t حاصل کرتے ہیں۔

$$(v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$
$$t\left(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt\right) = 0$$
$$t = 0, \quad t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \tag{۸}$$

۱۹۶۵۲ چونکہ $t = 0$ وہ لمحہ ہے جب گولا داغا گیا لہٰذا $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ وہ لمحہ ہو گا جب گولا واپس زمین پر گرتا ہے۔

۱۹۶۵۳ گولے کی مار R جاننے کی خاطر ہم مبدا سے گولا گرنے کے مقام تک فاصلہ معلوم کرتے ہیں۔ ہم $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ پر x تلاش کرتے ہیں۔

$$x = (v_0 \cos\alpha)t$$
$$R = (v_0 \cos\alpha)\left(\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\right)$$
$$= \frac{v_0^2}{g}(2\sin\alpha\cos\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \tag{۹}$$

۱۹۶۵۴ زیادہ سے زیادہ فاصلہ مار $\sin 2\alpha = 1$ یعنی $\alpha = 45^\circ$ پر حاصل ہو گا۔

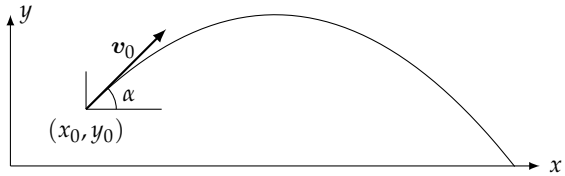
۱۹۶۵۵ مثال ۱۲.۱۰: افقی میدان میں مبدا سے ایک گولا $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے 60° کے زاویہ پر چلایا جاتا ہے۔ گولا کی زیادہ سے زیادہ بلندی، دورانیہ
۱۹۶۵۶ پرواز اور فاصلہ مار تلاش کریں (مثال ۱۲.۹)۔

۱۹۶۵۷ **حل**

۱۹۶۵۸

$$y_{\text{بلند تر}} = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} \qquad \text{زیادہ سے زیادہ بلندی (مساوات ۷)}$$
$$= \frac{(500 \sin 60^\circ)^2}{2(9.8)} \approx 9566\,\mathrm{m}$$
$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} \qquad \text{دورانیہ پرواز (مساوات ۸)}$$
$$= \frac{2(500)\sin 60^\circ}{9.8} \approx 88\,\mathrm{s}$$
$$R = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \qquad \text{فاصلہ مار (مساوات ۹)}$$
$$= \frac{(500)^2 \sin 120^\circ}{9.8} \approx 22\,092\,\mathrm{m}$$

۱۹۶۵۹ □



شکل ۱۲.۷: نقطہ (x_0, y_0) سے ابتدائی سمتی رفتار v_0 کے ساتھ مارے گئے گولا کی راہ۔

گولا کی مثالی پرواز قطع مکافی ہو گی

ہوائی رگڑ کو نظر انداز کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ مثالی پرواز، قطع مکافی راہ اپناتی ہے۔ مساوات ۶ کی ایک جزو سے $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ حاصل کر کے دوسرے جزو میں پر کرتے ہوئے

$$y = -\left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\right)x^2 + (\tan\alpha)x$$

حاصل ہوتا ہے جس کی روپ $y = ax^2 + bx$ ہے جو ایک قطع مکافی کو ظاہر کرتی ہے۔

نقطہ (x_0, y_0) سے گولا چلانا

مبدا کے بجائے نقطہ (x_0, y_0) سے گولا چلانے سے مساوات ۶ کی جگہ درج ذیل مساوات حاصل ہوں گی (شکل ۱۲.۷) جنہیں آپ سوال ۱۲.۸۲ میں حاصل کریں گے۔

$$x = x_0 + (v_0 \cos\alpha)t, \quad y = y_0 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{۱۰}$$

مثال ۱۲.۱۱: ایک نشانہ باز 2 m بلندی سے 30 m دور درخت پر 20 m بلندی پر لگائی گئی نشانی کو تیر کا نشانہ بناتا ہے۔ تیر نشانہ پر عین اس لمحہ پہنچتا ہے جب اس کی بلندی زیادہ سے زیادہ ہو۔ (ا) ابتدائی رفتار v_0 اور زاویہ α کی صورت میں زیادہ سے زیادہ بلندی y بلند تر لکھیں۔ (ب) اگر y بلند تر $= 20\,\text{m}$ ہو تب جزو-ا کے نتیجہ سے $v_0 \sin\alpha$ معلوم کریں۔ (ج) تیر 30 m افقی فاصلہ طے کر کے درخت تک پہنچتا ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے $v_0 \cos\alpha$ کی قیمت معلوم کریں۔ (د) تیر کا ابتدائی زاویہ تلاش کریں۔

حل

(ا) ہم نشانہ باز کو مبدا پر تصور کرتے ہیں۔ یوں $t = 0$ پر $x_0 = 0$ اور $y_0 = 2$ ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} y &= y_0 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 && \text{مساوات ۱۰} \\ &= 2 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 && y_0 = 2 \end{aligned}$$

۱۹۷۳ ہم $\frac{dy}{dt} = 0$ سے وہ لمحہ t تلاش کرتے ہیں جب تیر زیادہ سے زیادہ بلندی پر ہو گا:

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

۱۹۷۴ اس لمحہ پر y کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$y_{\text{بلند تر}} = 2 + (v_0 \sin\alpha)\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = 2 + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

۱۹۷۵ (ب) ہم مساوات ۱۰ میں $g = 9.8$ اور $y_{\text{بلند تر}} = 20$ پر کر کے جزو-ا سے

$$20 = 2 + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2(9.8)}$$

۱۹۷۶ یعنی

$$v_0 \sin\alpha = \sqrt{(18)(19.6)}$$

۱۹۷۷ (ج) ہم جزو-ا میں حاصل زیادہ سے زیادہ بلندی تک پہنچنے کے لیے درکار وقت t اور افقی فاصلہ $x = 30\,\text{m}$ مساوات ۱۰ میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x &= x_0(\cos\alpha)t && \text{مساوات ۱۰} \\ 30 &= 0 + (v_0 \cos\alpha)t && x = 30,\ x_0 = 0 \\ &= (v_0 \cos\alpha)\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) && t = (v_0 \sin\alpha)/g \end{aligned}$$

۱۹۷۸ اس مساوات کو $v_0 \cos\alpha$ کے حل کر کے اس میں جزو-ب کا نتیجہ پر کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$v_0 \cos\alpha = \frac{30g}{v_0 \sin\alpha}$$

۱۹۷۹ (د) ہم جزو-ب اور جزو-ج سے

$$\tan\alpha = \frac{(18)(19.6)}{(30)(9.8)} \approx 0.876$$

۱۹۸۰ یعنی

$$\alpha \approx \tan^{-1}(0.876) = 50.2^\circ$$

۱۹۸۱ حاصل کرتے ہیں۔ □

سوالات

درج ذیل سوالات میں گولا کی حرکت کو مثالی تصور کیا جائے۔ تمام زاویات افقی میدان سے ناپے جائیں گے۔ جہاں اس کے برعکس ذکر نہ کیا گیا ہو، گولا کو مبدا سے افقی میدان میں چلایا جاتا ہے۔

سوال ۱۲.۶۴: ایک گولا 60° زاویہ پر $840\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے داغا جاتا ہے۔ یہ حدف کے رخ کتنی دیر میں $21\,\mathrm{km}$ فاصلہ طے کرے گا؟

سوال ۱۲.۶۵: ایک توپ کی زیادہ سے زیادہ فاصلہ مار $24.5\,\mathrm{km}$ ہے۔ اس کے نالی میں گولے کی رفتار معلوم کریں۔

سوال ۱۲.۶۶: ایک گولا 45° زاویہ پر $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے داغا جاتا ہے۔ (ا) اس کا فاصلہ مار کتنا ہو گا؟ (ب) افقی رخ $5\,\mathrm{km}$ فاصلہ پر گولا کتنا بلند ہو گا؟ (ج) یہ گولا کتنی بلندی تک پہنچے گا؟

سوال ۱۲.۶۷: ایک گیند $10\,\mathrm{m}$ کی بلندی سے 30° زاویہ اور $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکی جاتی ہے۔ یہ گیند کب اور کتنے فاصلہ پر زمین کو مس کرے گی؟

سوال ۱۲.۶۸: ایک کھلاڑی $7\,\mathrm{kg}$ کا گولا $2\,\mathrm{m}$ بلندی سے 45° زاویہ پر $13.4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے پھینکتا ہے۔ یہ گیند کتنی دیر بعد اور کتنے فاصلہ پر زمین پر گرے گی؟

سوال ۱۲.۶۹: اگر سوال ۱۲.۶۸ میں گیند 40° پر پھینکی جاتی تب یہ نسبتاً زیادہ دور گرتی۔ فاصلہ میں اضافہ کتنا ہو گا؟

سوال ۱۲.۷۰: ایک گیند کو 45° زاویہ پر پھینکا جاتا ہے۔ یہ $10\,\mathrm{m}$ فاصلہ پر گرتا ہے۔ اس کی ابتدائی رفتار تلاش کریں۔ کن دو زاویات پر پھینکنے سے اس گیند کا فاصلہ مار $6\,\mathrm{m}$ ہو گا؟

سوال ۱۲.۷۱: ٹیلی ویژن کے ٹیوب میں ایک الیکٹران $5 \times 10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے $40\,\mathrm{cm}$ دور ٹیلی ویژن کے شیشہ کے رخ افقی سمت خارج ہوتا ہے۔ یہ الیکٹران شیشہ پر لگنے سے پہلے کتنا نیچے گرتا ہے؟

سوال ۱۲.۷۲: تجربہ گاہ میں گالف گیند کو پرکھنے کے دوران 100 دابے[۱۴] کی گیند کو $160\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ رفتار پر چلتے ہوئے لاٹھ سے مار کر 9° زاویہ پر پھینکا جاتا ہے۔ یہ گیند $227\,\mathrm{m}$ دور گرتا ہے۔ گیند کی ابتدائی رفتار کتنی تھی؟

سوال ۱۲.۷۳: ایک تماش گاہ میں ایک مسخرہ کو انسانی توپ سے $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے داغا جاتا ہے۔ توقع کی جاتی ہے کہ یہ $60\,\mathrm{m}$ دور نرم گدی پر جا گرے گا۔ یہ تماش گاہ ایک بڑے کمرہ میں منعقد ہوتا ہے جس کی چھت $23\,\mathrm{m}$ بلند ہے۔ کیا مسخرہ کو یوں داغا جا سکتا ہے کہ یہ چھت کو نہ لگے؟ اگر ایسا ممکن ہو تب توپ کا زاویہ کتنا ہونا چاہیے؟

سوال ۱۲.۷۴: ایک گالف گیند زمین سے 30° پر $35\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے روانہ ہوتا ہے۔ کیا یہ $45\,\mathrm{m}$ میٹر دور $15.2\,\mathrm{m}$ اونچے درخت کو پار کر پائے گا؟

سوال ۱۲.۷۵: ایک گیند کو $15\,\mathrm{m}$ کی گہرائی سے 45° پر $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے اچھال کر میدان میں پھینکا جاتا ہے۔ یہ گیند کتنا افقی فاصلہ طے کر کے زمین پر گرے گا؟

سوال ۱۲.۷۶: ایک گیند کو $2.5\,\mathrm{m}$ اونچائی سے 40° زاویہ سے نیچے میدان میں پھینکا جاتے ہے۔ یہ ٹھیک $65\,\mathrm{m}$ دور جا گرتا ہے۔ گیند کی ابتدائی رفتار کتنی تھی؟

---

[۱۴] 100compression

سوال ۱۲.۷۷: کرکٹ کا کھلاڑی گیند کو 50 cm اونچائی سے 30° زاویہ پر مارتا ہے۔ یہ گیند 90 m دور 12 m اونچی دیوار کو پار کرتی ہے۔ گیند کی ابتدائی رفتار تلاش کریں۔

سوال ۱۲.۷۸: دکھائیں کہ زاویہ α اور زاویہ $90 - \alpha$ پر داغے گئے گولوں کا فاصلہ مار ایک دوسرے کے برابر ہے۔ (اگر ہوائی رگڑ کو شامل کیا جائے تب ایسا نہیں ہوگا۔)

سوال ۱۲.۷۹: ایک گولا کی ابتدائی رفتار $400\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ اس کا نشانہ 16 km دور ایک مورچا ہے۔ گولے کی ابتدائی دو ایسے زاویات تلاش کریں جن پر یہ نشانہ کو مار پائے گا۔

سوال ۱۲.۸۰: دکھائیں کہ ابتدائی زاویہ تبدیل کیے بغیر ایک گولا کی ابتدائی رفتار دگنی کرنے سے اس کا فاصلہ مار 4 گنا ہوگا۔ گولے کی زیادہ سے زیادہ اونچائی اور فاصلہ مار دگنی کرنے کے لیے اس کی ابتدائی رفتار کتنے فی صد بڑھانی ہوگی؟

سوال ۱۲.۸۱: دکھائیں کہ زیادہ سے زیادہ بلندی تک پہنچنے کے لیے درکار وقت کے نصف وقت میں گولا اس اونچائی کے $\frac{3}{4}$ تک پہنچ پاتا ہے۔

سوال ۱۲.۸۲: ابتدائی قیمت مسئلہ

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -g\boldsymbol{j} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\boldsymbol{r} = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (v_0\cos\alpha)\boldsymbol{i} + (v_0\sin\alpha)\boldsymbol{j} \quad t = 0$$

کو مستوی میں سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کے لیے حل کرتے ہوئے مساوات ۱۰ حاصل کریں۔

سوال ۱۲.۸۳: ابتدائی زاویہ $\alpha = 50.2^\circ$ لیتے ہوئے مثال ۱۲.۱۱ میں تیر کی ابتدائی رفتار تلاش کریں۔

سوال ۱۲.۸۴: مثال ۱۲.۱۱ میں تیر کب نشانہ سے 2 m کے افقی فاصلہ پر ہوگا؟ اس لمحہ یہ کتنا بلند ہوگا؟

سوال ۱۲.۸۵: ایک گیند کو 5 m کی بلندی سے سیدھا اوپر پھینکا جاتا ہے۔ یہ کتنی دیر بعد زمین پر گرے گا؟

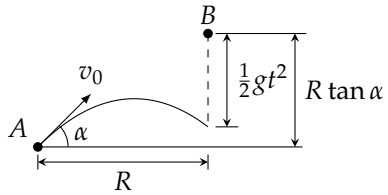
سوال ۱۲.۸۶: گیند A کو α زاویہ پر v_0 ابتدائی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ اسی لمحہ R افقی فاصلہ دور $R\tan\alpha$ اونچائی سے گیند B کو گرنے دیا جاتا ہے (شکل ۱۲.۸)۔ یہ دیکھا گیا ہے کہ یہ دونوں گیند کسی بھی v_0 کے لیے ایک دوسرے کو ٹکراتے ہیں۔ کیا یہ اتفاق ہے یا ایسا ہونا لازم ہے؟ جواب پیش کریں۔

سوال ۱۲.۸۷: ایک گیند کو پہاڑی سے نیچے پھینکا جاتا ہے (شکل ۱۲.۹)۔ (ا) دکھائیں کہ زیادہ سے زیادہ فاصلہ طے کرنے کے لیے ابتدائی سمتی رفتار، زاویہ AOR کو نصف میں قطع کرتا ہو۔ (ب) اگر گیند کو پہاڑی پر اوپر پھینکا جائے تب زیادہ سے زیادہ فاصلہ طے کرنے کے لیے ابتدائی زاویہ کیا ہونا چاہیے؟

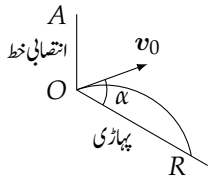
سوال ۱۲.۸۸: مبدا سے لمحہ $t = 0$ پر $\boldsymbol{v}_0$ سمتی رفتار سے ایک مثالی گولا کو داغا جاتا ہے۔ قوت کشش کی وجہ سے اس گولا کی نیچے رخ اسراع $\boldsymbol{a} = -g\boldsymbol{k}$ ہوگی۔ لمحہ پر گولے کی سمتی رفتار اور مقام تلاش کریں۔

سوال ۱۲.۸۹: رفتار کی راست متناسب ہوائی مزاحمت

ایک گولا جس کی کمیت m اور ابتدائی رفتار $\boldsymbol{v}_0$ کو رفتار کی راست متناسب ہوائی مزاحمت کا سامنا ہے۔ گولے پر کل قوت $m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ درج ذیل مساوات کو



شکل ۱۲.۸: دو گیند (سوال ۱۲.۸۶)



شکل ۱۲.۹: پہاڑی سے گیند پھینکا جاتا ہے (سوال ۱۲.۸۷)

مطمئن کرے گا جہاں k تناسبی مستقل ہے۔

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -mg\boldsymbol{j} - k\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

دکھائیں کہ اس کا پہلا مکمل درج ذیل دے گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 - gt\boldsymbol{j}$$

اس مساوات کو حل کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر مساوات کے دونوں اطراف کو $e^{(k/m)t}$ سے ضرب دیں۔ بایاں ہاتھ اب ایک تفاعل کا تفرق ہو گا لہٰذا دونوں اطراف قابل مکمل ہوں گے۔ اب دوسرا مکمل لیں۔ تفاعل $e^{(k/m)t}$ کو اس تفرقی مساوات کا جزو مکمل کہتے ہیں۔

سوال ۱۲.۹۰: ایک گولا کو زمین سے α زاویہ پر v_0 رفتار سے داغا جاتا ہے۔ زاویہ α کو متغیر اور v_0 کو مستقل تصور کریں۔ ہر $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ کے لیے ہمیں قطع مکافی راہ ملی ہے۔ دکھائیں کہ مستوی میں زیادہ سے زیادہ اونچائی کے تمام نقطے درج ذیل ترخیم پر پائے جاتے ہیں جہاں $x \geq 0$ ہے۔

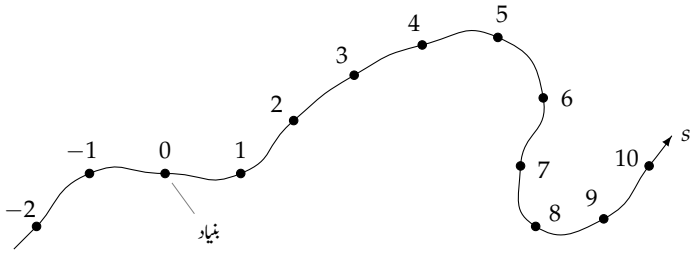
$$x^2 + 4\left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}$$

۱۲.۳ لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$

قابل تفرق منحنیات جن کا پہلا اور دوسرا استمراری تفرق پایا جاتا ہو خلاء میں حرکت کو ظاہر کرنے کے لیے اہم ہیں۔ ان پر تفصیلاً غور کیا گیا ہے۔ اس حصہ میں اور اگلے حصہ میں ہم ان کے چند ایسے خدوخال پر غور کریں گے جن کی وجہ سے ایسی منحنیات اہم ہیں۔

منحنی پر لمبائی قوس

ہموار فضائی منحنیات کی ایک خاص خاصیت یہ ہے کہ ان کی لمبائی قابل ناپ ہوتی ہے۔ یوں ہم منحنی پر کسی نقطہ کو بنیاد تصور کرتے ہوئے، بنیاد سے کسی بھی نقطہ N تک منحنی پر فاصلہ s، سے نقطہ N کی نشاندہی کر سکتے ہیں (شکل ۱۲.۱۰)۔ یہ محددی مستوی پر مبدا سے نقطہ کا فاصلہ دینے کے مترادف ہے۔ متحرک



شکل ۱۲.۱۰: ہموار منحنی پر بنیادی نقطہ سے فاصلہ کو پیمانہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

۱۹۷۴۷ جسم کی سمتی رفتار اور اسراع پر غور کے لیے وقت ایک فطری متغیر ہے جبکہ s منحنی کی صورت پر غور کرنے کے لیے ایک فطری متغیر ہے۔ فضا میں حرکت پر
۱۹۷۴۸ غور کے دوران ان دونوں متغیرات کی ضرورت پیش آتی ہے۔

۱۹۷۴۹ فضا میں ہموار منحنی پر فاصلہ ناپنے کی خاطر ہم مستوی میں منحنی کے کلیہ میں جزو z شامل کرتے ہیں۔

۱۹۷۵۰ تعریف: ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k},\ a \le t \le b$ جس پر $t = a$ تا $t = b$ صرف ایک بار چلا
۱۹۷۵۱ جاتا ہو، کی لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
L &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

۱۹۷۵۲ □

۱۹۷۵۳ مستوی منحنیات کی طرح، ہم فضا میں منحنی کی لمبائی معلوم کرتے ہوئے منحنی کی کوئی بھی مقدار معلوم مساوات، جو دیے گئے شرائط کو پورا کرتے ہوں، استعمال
۱۹۷۵۴ کر سکتے ہیں۔ اس کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا۔

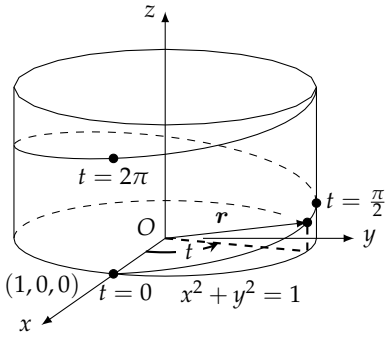
۱۹۷۵۵ مساوات ۱ میں جذر، سمتی رفتار سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کی لمبائی $|\boldsymbol{v}|$ ہے۔ یوں لمبائی قوس کا کلیہ مختصراً

$$
L = \int_a^b |\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}t \tag{۲}
$$

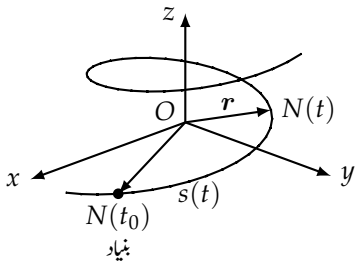
۱۹۷۵۶ لکھا جا سکتا ہے۔

۱۹۷۵۷ مثال ۱۲.۱۲: درج ذیل پیچ دار منحنی کے ایک چکر کی لمبائی تلاش کریں۔

$$
\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}
$$



شکل ۱۲.۱۱: پیچ دار منحنی برائے مثال ۱۲.۱۲



شکل ۱۲.۱۲: منحنی پر بنیاد $N(t_0)$ سے کسی نقطہ $N(t)$ تک فاصلہ $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{v}(\tau)|\, \mathrm{d}\tau$ ہوگا۔

۱۹۷۵۸ **حل**

۱۹۷۵۹ پیچ دار منحنی $t = 0$ سے $t = 2\pi$ تک ایک چکر مکمل کرتی ہے (شکل ۱۲.۱۱)۔ اس حصہ کی لمبائی

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b |\boldsymbol{v}|\, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2}\, \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, \mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

۱۹۷۶۰ ہوگی جو مستوی xy میں اس دائرہ کے لمبائی کا $\sqrt{2}$ گنا ہے جس پر پیچ دار منحنی کھڑی ہے۔ □

۱۹۷۶۱ اگر ہم ہموار منحنی C ، جس کی مقدار معلوم مساوات کا متغیر t ہو، پر نقطہ N_0 کو بنیادی نقطہ تصور کریں تب t کی ہر قیمت C پر ایک نقطہ $N(t) = (x(t), y(t), z(t))$ اور **سمتی بند فاصلہ**

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{v}(\tau)|\, \mathrm{d}\tau \tag{۳}$$

۱۹۷۶۳ دے گی جو N_0 سے C پر چلتے ہوئے ناپا جائے گا (شکل ۱۲.۱۲)۔ اگر $t > t_0$ ہو تب $N(t_0)$ سے $N(t)$ تک فاصلہ $s(t)$ ہوگا۔ اگر
۱۹۷۶۴ $t < t_0$ ہو تب $s(t)$ ، فاصلہ کے نفی کا برابر ہوگا۔ کی ہر ایک قیمت پر ایک نقطہ تعین کرتی ہے لہٰذا یوں s کے لحاظ سے C کی مقدار معلوم روپ
۱۹۷۶۵ حاصل ہوتی ہے۔ ہم کو منحنی کا **مقدار معلوم لمبائی قوس** کہتے ہیں جس کی قیمت بڑھتے t کے رخ بڑھتی ہے۔

۱۹۷۶۶ **بنیاد $N(t_0)$ لیتے ہوئے مقدار معلوم لمبائی قوس**

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2}\, \mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{v}(\tau)|\, \mathrm{d}\tau \tag{۴}$$

۱۹۷۶۷ مثال ۱۲.۱۳: اگر $t_0 = 0$ ہو تب پیچ دار منحنی

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

۱۹۷۶۸ پر t_0 سے t تک چلتے ہوئے مقدار معلوم لمبائی قوس درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^{t} \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right| \mathrm{d}\tau && \text{مساوات ۴} \\ &= \int_{0}^{t} \sqrt{2}\, \mathrm{d}\tau && \text{مساوات ۱۲.۱۲ کی قیمتیں} \\ &= \sqrt{2}t \end{aligned}$$

۱۹۷۶۹ یوں $s(2\pi) = 2\pi\sqrt{2}$ ، $s(-2\pi) = -2\pi\sqrt{2}$ ، وغیرہ، ہوں گے۔ □

۱۹۷۷۰ مثال ۱۲.۱۴: ایک لکیر پر لمبائی

۱۹۷۷۱ دکھائیں اگر $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$ اکائی سمتیہ ہو، تب لکیر

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + tu_1)\boldsymbol{i} + (y_0 + tu_2)\boldsymbol{j} + (z_0 + tu_3)\boldsymbol{k}$$

۱۹۷۷۲ پر، نقطہ $N_0(x_0, y_0, z_0)$ جہاں $t = 0$ ہو گا، سے سمت بند لمبائی از خود t کے برابر ہو گی۔

۱۹۷۷۳ **حل**

۱۹۷۷۴

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_0 + tu_1)\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y_0 + tu_2)\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z_0 + tu_3)\boldsymbol{k} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$$

۱۹۷۷۵ سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

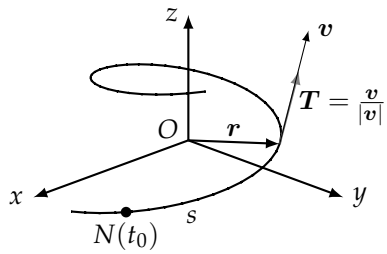
$$s(t) = \int_0^t |\boldsymbol{v}|\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t |\boldsymbol{u}|\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t 1\, \mathrm{d}\tau = t$$

۱۹۷۷۶ □

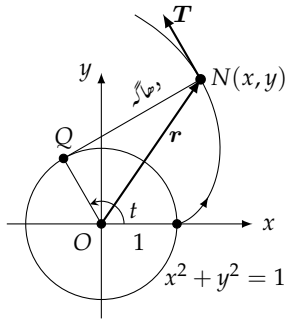
۱۹۷۷۷ ## ہموار منحنی پر رفتار

۱۹۷۷۸ چونکہ مساوات ۴ میں جذر کے اندر تفارق استمراری (ہموار منحنی) ہیں احصاء کے بنیادی مسئلہ کے تحت s متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور یہ تفرق درج
۱۹۷۷۹ ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left|\boldsymbol{v}(t)\right| \tag{۵}$$



شکل ۱۲.۱۳: ہم $\boldsymbol{v}$ کو $|\boldsymbol{v}|$ سے تقسیم کر کے مماسی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ حاصل کرتے ہیں۔



شکل ۱۲.۱۴: دائرہ پر لپٹے دھاگہ کو کھولتے ہوئے اس کا سر جس راہ پر چلتا ہو، وہ اس دائرے کا درپیچیدہ کہلاتا ہے۔ یہاں اکائی دائرہ مستوی xy میں ہے۔

۱۹۷۸۰ جیسا ہم توقع کریں گے، کسی بھی راہ پر ایک ذرے کی رفتار $\boldsymbol{v}$ کی مقدار ہوتی ہے۔

۱۹۷۸۱ دھیان رہے کہ اگرچہ s تعین کرنے میں بنیادی نقطہ $N(t_0)$ کا کردار پایا جاتا ہے، $N(t_0)$ کا مساوات ۵ میں کوئی کردار نہیں پایا جاتا۔ ایک راہ پر چلتے
۱۹۷۸۲ ہوئے جس رفتار سے ایک ذرہ فاصلہ طے کرتا ہے، اس کا بنیادی نقطہ کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے۔

۱۹۷۸۳ ساتھ ہی اس بات کو ذہن نشین کریں کہ چونکہ تعریف کی رو سے ہموار منحنی کے لیے $|\boldsymbol{v}|$ غیر صفر ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} > 0$ ہو گا۔ ہم ایک بار دوبارہ دیکھتے ہیں کہ
۱۹۷۸۴ s متغیر t کا بڑھتا تفاعل ہے۔

۱۹۷۸۵ اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$

۱۹۷۸۶ چونکہ زیر بحث منحنیات کے لیے $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} > 0$ ہے لہٰذا s یک بہ یک مطابقت رکھتا ہے اور اس کا الٹ پایا جائے گا جو t کو بطور s کا قابل تفرق تفاعل دے
۱۹۷۸۷ گا (حصہ ۱.۷)۔ اس الٹ کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\mathrm{d}s/\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|} \tag{۶}$$

۱۹۷۸۸ یوں $\boldsymbol{r}$ متغیر s کا قابل تفرق تفاعل ہو گا جس کے تفرق کو زنجیری قاعدہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{v}\frac{1}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \tag{۷}$$

۱۹۷۸۹ مساوات ۷ کہتی ہے کہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ ایک اکائی سمتیہ ہے جو $\boldsymbol{v}$ کے رخ ہے۔ ہم $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ کو $\boldsymbol{r}$ کی منحنی راہ کا اکائی مماسی سمتیہ کہتے ہیں اور اس کو $\boldsymbol{T}$ سے ظاہر کرتے
۱۹۷۹۰ ہیں (شکل ۱۲.۱۳)۔

۱۹۷۹۱ تعریف: قابل تفرق تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ کا اکائی مماسی سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\,\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \tag{۸}$$

۱۹۷۹۲ □

۱۹۷۹۳ جہاں بھی $\boldsymbol{v}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہو وہاں اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ بھی t کا قابل تفرق تفاعل ہو گا۔ جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے، فضا میں اجسام
۱۹۷۹۴ کی حرکت پر غور میں مستعمل، متحرک **حوالہ چوکھٹے**[۱۵]، کے تین اکائی سمتیات میں سے ایک اکائی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ہے۔

۱۹۷۹۵ مثال ۱۲.۱۵: درج ذیل پیچ دار منحنی کا اکائی مماسی سمتیہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

۱۹۷۹۶ **حل**

۱۹۷۹۷

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= (-\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} \\
\boldsymbol{T} &= \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = -\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

۱۹۷۹۸ □

۱۹۷۹۹ مثال ۱۲.۱۶: دائرہ کا درپیچیدہ (شکل ۱۲.۱۴)

۱۹۸۰۰ درج ذیل پیچ دار منحنی کا اکائی مماسی سمتیہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j} \qquad t > 0$$

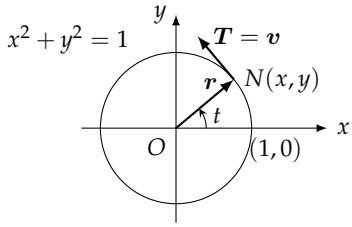
۱۹۸۰۱ **حل**

۱۹۸۰۲

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t + \sin t + t\cos t)\boldsymbol{i} + (\cos t - \cos t + t\sin t)\boldsymbol{j} \\
&= (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} \\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = \sqrt{t^2} = t \qquad \text{ہے } |t| = t \text{ کی وجہ سے } t > 0 \\
\boldsymbol{T} &= \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\boldsymbol{v}}{t} = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

---

[۱۵] referenceframe



شکل ۱۲.۱۵: حرکت $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}$ برائے مثال ۱۲.۱۷

۱۹۸۰۳ □

۱۹۸۰۴ مثال ۱۲.۱۷: اکائی دائرہ

$$\boldsymbol{v} = (-\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}$$

۱۹۸۰۵ کے گرد گھڑی کے مخالف رخ حرکت

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}$$

۱۹۸۰۶ کا اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{v}$ ہے (شکل ۱۲.۱۵)۔ □

۱۹۸۰۷ **سوالات**

۱۹۸۰۸ سوال ۱۲.۹۱ تا سوال ۱۲.۹۸ میں منحنی کا اکائی مماسی سمتیہ تلاش کریں۔ وقفہ پر منحنی کی لمبائی بھی دریافت کریں۔

۱۹۸۰۹ سوال ۱۲.۹۱: $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t)\boldsymbol{i} + (2\sin t)\boldsymbol{j} + \sqrt{5}t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

۱۹۸۱۰ سوال ۱۲.۹۲: $\boldsymbol{r}(t) = (6\sin 2t)\boldsymbol{i} + (6\cos 2t)\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

۱۹۸۱۱ سوال ۱۲.۹۳: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}t^{3/2}\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 8$

۱۹۸۱۲ سوال ۱۲.۹۴: $\boldsymbol{r}(t) = (2 + t)\boldsymbol{i} - (t + 1)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 3$

۱۹۸۱۳ سوال ۱۲.۹۵: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{j} + (\sin^3 t)\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

۱۹۸۱۴ سوال ۱۲.۹۶: $\boldsymbol{r}(t) = 6t^3\boldsymbol{i} - 2t^3\boldsymbol{j} - 3t^3\boldsymbol{k}, \quad 1 \le t \le 2$

۱۹۸۱۵ سوال ۱۲.۹۷: $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

۱۹۸۱۶ سوال ۱۲.۹۸: $\boldsymbol{r}(t) = (t\sin t + \cos t)\boldsymbol{i} + (t\cos t - \sin t)\boldsymbol{j}, \quad \sqrt{2} \le t \le 2$

۱۹۸۱۷ سوال ۱۲.۹۹: مبدا سے بڑھتی لمبائی کے رخ درج ذیل منحنی پر مبدا سے 26π دور نقطہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (5\sin t)\boldsymbol{i} + (5\cos t)\boldsymbol{j} + 12t\boldsymbol{k}$$

۱۹۸۱۸ سوال ۱۲.۱۰۰: مبدا سے بڑھتی لمبائی کے مخالف رخ درج ذیل منحنی پر مبدا سے 13π دور نقطہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (12\sin t)\boldsymbol{i} - (12\cos t)\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k}$$

۱۹۸۱۹ سوال ۱۲.۱۰۱ تا سوال ۱۲.۱۰۴ میں $t = 0$ سے دور کسی نقطہ پر مقدار معلوم لمبائی قوس درج ذیل تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے تلاش کریں۔

$$s = \int_0^t \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right| \mathrm{d}\tau \qquad \text{مساوات ۳}$$

۱۹۸۲۰ اس کے بعد دیے گئے وقفہ پر منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

۱۹۸۲۱ سوال ۱۲.۱۰۱: $\boldsymbol{r}(t) = (4\cos t)\boldsymbol{i} + (4\sin t)\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

۱۹۸۲۲ سوال ۱۲.۱۰۲: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}, \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \pi$

۱۹۸۲۳ سوال ۱۲.۱۰۳: $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\boldsymbol{i} + (e^t\sin t)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}, \quad -\ln 4 \le t \le 0$

۱۹۸۲۴ سوال ۱۲.۱۰۴: $\boldsymbol{r}(t) = (1+2t)\boldsymbol{i} + (1+3t)\boldsymbol{j} + (6-6t)\boldsymbol{k}, \quad -1 \le t \le 0$

۱۹۸۲۵ سوال ۱۲.۱۰۵: نقطہ $(0,0,1)$ سے $(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ تک درج ذیل منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{2}t)\boldsymbol{i} + (\sqrt{2}t)\boldsymbol{j} + (1-t^2)\boldsymbol{k}$$

۱۹۸۲۶ سوال ۱۲.۱۰۶: ہم نے مثال ۱۲.۱۲ میں پیچ دار منحنی کے ایک چکر کی لمبائی $2\pi\sqrt{2}$ تلاش کی۔ ایک مربع جس کا ضلع 2π ہو کے وتر کی لمبائی بھی یہی
۱۹۸۲۷ ہو گی۔ دکھائیں کہ جس نلکی پر پیچ دار منحنی کا ایک چکر لپٹا گیا ہے، اس کو انتصابی کاٹ کر سیدھا کرنے سے یہی مربع حاصل ہو گا۔

۱۹۸۲۸ سوال ۱۲.۱۰۷:

۱۹۸۲۹ ا. دکھائیں کہ $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + (1-\cos t)\boldsymbol{k}, 0 \le t \le 2\pi$ ایک ترخیم ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر
۱۹۸۳۰ دکھائیں کہ $\boldsymbol{r}$ قائمہ دائری نلکی اور ایک مستوی کا مطقاطع ہے۔ ان قائمہ دائری نلکی اور مستوی کی مساواتیں تلاش کریں۔

۱۹۸۳۱ ب. نلکی پر ترخیم کا خاکہ کھینچیں اور اس پر نقاط $t = 0$ ، $t = \frac{\pi}{2}$ ، $t = \pi$ اور $t = \frac{3\pi}{2}$ پر اکائی مماسی سمتیات بنائیں۔

۱۹۸۳۲ ج. دکھائیں کہ سمتیہ اسراع ہر صورت مستوی کو متوازی ہو گا (مستوی کے عمودی سمتیہ کو قائمہ ہو گا)۔ یوں اگر آپ اسراع کو ترخیم کے ساتھ جڑا دکھائیں تب
۱۹۸۳۳ یہ ترخیم کے مستوی میں پایا جائے گا۔ نقاط $t = 0$ ، $t = \frac{\pi}{2}$ ، $t = \pi$ اور $t = \frac{3\pi}{2}$ پر سمتیات اسراع کو خاکہ میں شامل کریں۔

۱۹۸۳۴ د. ترخیم کی لمبائی کا تکمل لکھیں۔ اس تکمل کی قیمت تلاش کرنے کی کوشش نہ کریں چونکہ یہ ایک غیر بنیادی تکمل ہے۔

۱۹۸۳۵ ھ. اعدادی ترکیبات سے ترخیم کی لمبائی دو اعشاریہ مقامات تک درست معلوم کریں۔

سوال ۱۲.۱۰۸: لمبائی کی قیمت مقدار معلوم روپ پر منحصر نہیں ہے۔

یہ دکھانے کی خاطر کہ لمبائی کی قیمت مقدار معلوم روپ پر منحصر نہیں ہے، ہم پیچ دار منحنی کے ایک چکر کی لمبائی درج ذیل (مختلف) مقدار معلوم مساواتیں استعمال کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

ا. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos 4t)\boldsymbol{i} + (\sin 4t)\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

ب. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(t/2))\boldsymbol{i} + (\sin(t/2))\boldsymbol{j} + (t/2)\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 4\pi$

ج. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j} - t\boldsymbol{k}, \quad -2\pi \le t \le 0$

۱۲.۴ انحنا، مروڑ اور TNB چوکھٹ

اس حصہ میں ہم تین آپس میں عمودی اکائی سمتیات پر مبنی ایسا چوکھٹ متعارف کرتے ہیں جو فضا میں منحنی پر جسم کے ساتھ ساتھ چلتا ہو (شکل ۱۲.۱۶)۔ اس چوکھٹ کے تین سمتیات ہیں۔ پہلا اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ہے۔ دوسرا $\boldsymbol{N}$ ہے جو $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}s}$ کے رخ اکائی سمتیہ ہے۔ تیسرا اکائی سمتیہ $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$ ہے۔ یہ سمتیات اور ان کے تفارق اگر معلوم ہوں، فضا میں سواری کی سمت بندی اور اس کی راہ میں موڑ اور بل کے بارے میں مفید معلومات مہیا کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}s}\right|$ ہمیں بتاتا ہے کہ راہ پر آگے چلتے ہوئے، سواری کی راہ کتنی دائیں یا بائیں مڑتی ہے؛ اسی لیے اس کو سواری کی راہ کی **انحنا**[16] کہتے ہیں۔ عدد $-(\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\,\mathrm{d}s)\cdot\boldsymbol{N}$ ہمیں بتاتا ہے کہ راہ پر آگے چلتے ہوئے، سواری کی راہ مستوی حرکت سے کتنی باہر مڑتی ہے یا بل کھاتی ہے؛ اس کو سواری کی راہ کی **مروڑ**[17] کہتے ہیں۔ دوبارہ شکل ۱۲.۱۶ پر نظر ڈالیں۔ اگر قوسی راہ پر ایک ریل گاڑی، P، اوپر چڑھ رہی ہو تب فی اکائی فاصلہ اس کی سربتی جتنی دائیں یا بائیں مڑتی ہو، یہ اس کی انحنا ہو گی۔ سمتیات $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ کے مستوی سے ریل گاڑی کا انجن جس شرح سے باہر نکلتا ہو، یہ اس کی مروڑ ہو گی۔

مستوی منحنی کی انحنا

جیسے جیسے ایک ذرہ مستوی منحنی میں حرکت کرتا ہے، منحنی کے مڑنے سے $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{T}$ بھی مڑتا ہے۔ چونکہ $\boldsymbol{T}$ اکائی سمتیہ ہے لہٰذا اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہوتی اور راہ پر چلتے ہوئے صرف اس کا رخ تبدیل ہوتا ہے۔ منحنی پر چلتے ہوئے اکائی فاصلہ پر $\boldsymbol{T}$ کی شرح تبدیلی کو انحنا کہتے ہیں (شکل ۱۲.۱۷)۔ انحنا کو روایتی طور پر یونانی حرف κ (کاپا) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

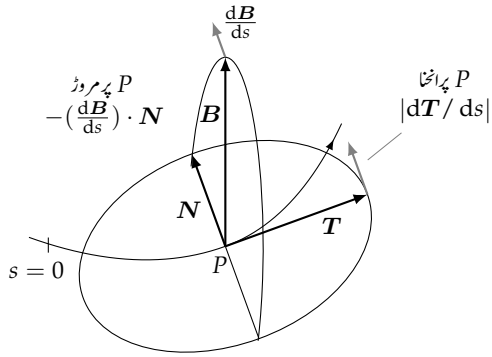
تعریف: ایک ہموار منحنی جس کا اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ہو، کا تفاعل انحنا درج ذیل ہو گا۔

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right|$$

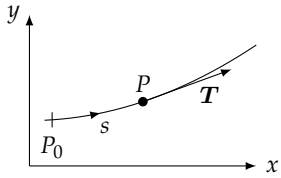
□

---

[16] curvature
[17] torsion



شکل ۱۲.۱۶: ہر متحرک جسم کے ساتھ ایک TNB چوکھٹ سفر کرتا ہے جو اس کی راہ کا کردار بیان کرتا ہے۔



شکل ۱۲.۱۷: بڑھتی لمبائی قوس کے رخ چلتے ہوئے اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ مڑتا ہے۔ نقطہ P پر $|d\boldsymbol{T}/ds|$ کی قیمت کو P پر منحنی کی انحنا کہتے ہیں۔

اگر $|d\boldsymbol{T}/ds|$ بڑی قیمت ہو تب نقطہ P سے گزرتے ہوئے ذرہ بہت تیزی سے مڑے گا اور P پر انحنا زیادہ ہو گی۔ اگر $|d\boldsymbol{T}/ds|$ صفر کے قریب ہو تب $\boldsymbol{T}$ کا رخ آہستہ تبدیل ہو گا اور P پر انحنا کم ہو گی۔ اس تعریف کو پرکھتے ہوئے ہم درج ذیل دو مثالوں میں دیکھتے ہیں کہ سیدھے خط اور دائروں کی انحنا مستقل ہو گی۔

مثال ۱۲.۱۸: سیدھے لکیر کی انحنا صفر ہو گی

سیدھے لکیر پر اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کا رخ تبدیل نہیں ہوتا ہے لہٰذا اس کے اجزاء مستقل ہوں گے۔ یوں $|d\boldsymbol{T}/ds| = |\boldsymbol{0}| = 0$ ہو گا (شکل ۱۲.۱۸)۔ □

مثال ۱۲.۱۹: رداس a کے دائرے کی انحنا $\frac{1}{a}$ ہو گی

ہم دائرہ کی مقدار معلوم مساوات

$$\boldsymbol{r}(\theta) = (a\cos\theta)\boldsymbol{i} + (a\sin\theta)\boldsymbol{j}$$

میں $\theta = \frac{s}{a}$ پر کر کے اس کی لمبائی قوس s کے لحاظ سے مقدار معلوم روپ حاصل کرتے ہیں (شکل ۱۲.۱۹)۔

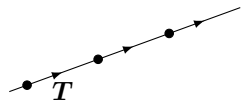
$$\boldsymbol{r} = (a\cos\frac{s}{a})\boldsymbol{i} + (a\sin\frac{s}{a})\boldsymbol{j}$$

یوں

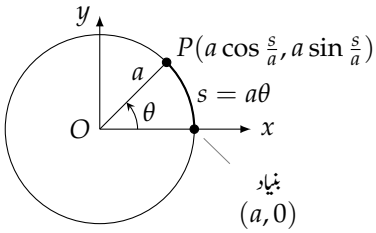
$$\boldsymbol{T} = \frac{d\boldsymbol{r}}{ds} = (-\sin\frac{s}{a})\boldsymbol{i} + (\cos\frac{s}{a})\boldsymbol{j}$$

اور

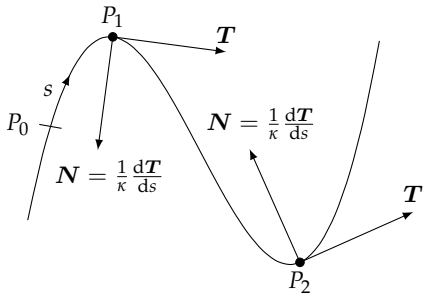
$$\frac{d\boldsymbol{T}}{ds} = (-\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a})\boldsymbol{i} - (\frac{1}{a}\sin\frac{s}{a})\boldsymbol{j}$$



شکل ۱۲.۱۸: سیدھے لکیر پر $\boldsymbol{T}$ کا رخ تبدیل نہیں ہوتا ہے لہٰذا اس کی انحنا $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\mathrm{d}s|$ صفر ہو گی۔



شکل ۱۲.۱۹: دائرہ برائے مثال ۱۲.۱۹



شکل ۱۲.۲۰: منحنی کا عمودی سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ ہر وقت اس رخ ہوتا ہے جس رخ $\boldsymbol{T}$ مڑتا ہو۔ سمتیہ $\boldsymbol{N}$ کا رخ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کا رخ ہے۔

۱۹۸۷۰ ہوں گے۔ اس طرح کسی بھی کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\kappa &= \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right| \\
&= \sqrt{\frac{1}{a^2}\cos^2\frac{s}{a} + \frac{1}{a^2}\sin^2\frac{s}{a}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2}} = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{a} \qquad a > 0 \text{ کی وجہ سے } |a| = a \text{ ہو گا}
\end{aligned}
$$

۱۹۸۷۱ □

۱۹۸۷۲ صدر اکائی عمودی سمتیہ

۱۹۸۷۳ چونکہ $\boldsymbol{T}$ کی لمبائی اکائی ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ اور $\boldsymbol{T}$ آپس میں عمودی ہوں گے (حصہ ۱۲.۱)۔ یوں $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کو لمبائی κ سے تقسیم کرنے سے ایسا اکائی سمتیہ
۱۹۸۷۴ حاصل ہو گا جو $\boldsymbol{T}$ کو عمودی ہو گا (شکل ۱۲.۲۰)۔

۱۹۸۷۵ تعریف: جس نقطہ پر $\kappa \neq 0$ ہو وہاں مستوی میں منحنی کا صدر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{N}$ درج ذیل ہوگا۔

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$$

۱۹۸۷۶ □

۱۹۸۷۷ موڑ پر سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کا رخ اس جانب ہوگا جس جانب منحنی مڑتی ہو۔ یوں اگر بڑھتے فاصلہ کے رخ منہ کرتے ہوئے، اگر $\boldsymbol{T}$ گھڑی کے رخ مڑے تب سمتیہ
۱۹۸۷۸ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کا رخ دائیں ہوگا اور اگر $\boldsymbol{T}$ گھڑی کے مخالف رخ مڑتی ہو تب اس کا رخ بائیں ہوگا۔ دوسرے لفظوں میں صدر عمودی سمتیہ $\boldsymbol{N}$ منحنی کے مقعر رخ
۱۹۸۷۹ ہوگا (شکل ۱۲.۲۰)۔ جس نقطہ پر $\kappa = 0$ ہو، وہاں کے بارے میں سوال ۱۲.۱۱۸ میں غور کیا گیا ہے۔

۱۹۸۸۰ تعریف کی رو سے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$ کی لمبائی قوس، مثبت $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کے لیے ہوگی لہٰذا $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$ ہوگا اور زنجیری قاعدہ درج
۱۹۸۸۱ ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s|} \\
&= \frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t)(\mathrm{d}t/\,\mathrm{d}s)}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t||\mathrm{d}t/\,\mathrm{d}s|} \\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|} \qquad (۱)
\end{aligned}$$

۱۹۸۸۲ اس طرح ہم κ اور s حاصل کیے بغیر $\boldsymbol{N}$ حاصل کر سکتے ہیں۔

۱۹۸۸۳ مثال ۱۲.۲۰: درج ذیل دائری حرکت کے لیے $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos 2t)\boldsymbol{i} + (\sin 2t)\boldsymbol{j}$$

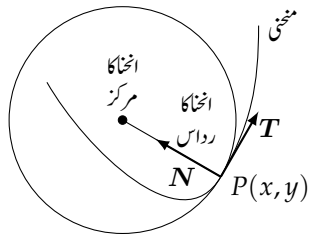
۱۹۸۸۴ حل

۱۹۸۸۵ ہم پہلے $\boldsymbol{T}$ دریافت کرتے ہیں۔

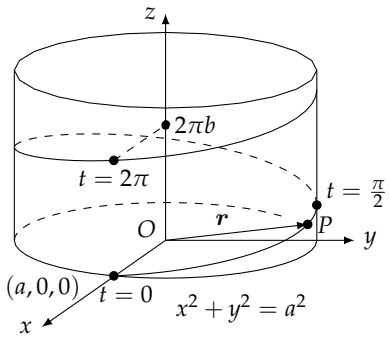
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= -(2\sin 2t)\boldsymbol{i} + (2\cos 2t)\boldsymbol{j}, \\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t} = 2, \\
\boldsymbol{T} &= \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \\
&= -(\sin 2t)\boldsymbol{i} + (\cos 2t)\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

۱۹۸۸۶ یوں

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} &= -(2\cos 2t)\boldsymbol{i} - (2\sin 2t)\boldsymbol{j}, \\
\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right| &= \sqrt{4\cos^2 2t + 4\sin^2 2t} = 2
\end{aligned}$$



شکل ۱۲.۲۱: نقطہ $P(x,y)$ پر دائرہ انحنا منحنی کے اندرونی رخ ہو گا۔



شکل ۱۲.۲۲: مثبت a ، b کے لیے $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}$

۱۹۸۸۷ اور درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|}\\ &= -(\cos 2t)\boldsymbol{i} - (\sin 2t)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

۱۹۸۸۸ □

۱۹۸۸۹ انحنا کا دائرہ اور انحنا کا رداس

۱۹۸۹۰ مستوی منحنی پر نقطہ P جہاں $\kappa \neq 0$ ہو، **دائرہ انحنا**[۱۸] سے مراد اس مستوی میں وہ دائرہ ہے جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

۱۹۸۹۱ ا. نقطہ P پر یہ منحنی کا مماسی ہو (منحنی کا مماسی خط ہی اس کا مماسی خط ہے)؛

۱۹۸۹۲ ب. نقطہ P پر اس کی انحنا اور منحنی کی انحنا ایک دوسرے کے برابر ہوں؛

۱۹۸۹۳ ج. یہ منحنی کے اندرونی یعنی مقعر رخ پایا جائے (شکل ۱۲.۲۱)۔

۱۹۸۹۴ نقطہ P پر منحنی کے **رداس انحنا**[۱۹] سے مراد اس نقطہ پر دائرہ انحنا کا رداس ہے، جو مثال ۱۲.۱۹ کے مطابق درج ذیل ہو گا۔

$$\text{رداس انحنا} = \rho = \frac{1}{\kappa} \tag{۲}$$

۱۹۸۹۵ رداس انحنا جاننے کے لیے ہم κ معلوم کر کے اس کا بالعکس متناسب لیتے ہیں۔ نقطہ P پر **مرکز انحنا**[۲۰] سے مراد یہاں کے دائرہ انحنا کا مرکز ہو گا۔

---

[۱۸] circleofcurvature
[۱۹] radiusofcurvature
[۲۰] centerofcurvature

۱۹۸۹۶ فضائی منحنیات کی انحنا اور عمودی سمتیات

۱۹۸۹۷ مستوی منحنیات کی طرح فضا میں ہموار منحنی کے لیے مقدار معلوم لمبائی قوس s، مماسی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ دیتا ہے۔ ہم اب بھی انحنا سے مراد

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right| \tag{۳}$$

۱۹۸۹۸ لیتے ہیں۔ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کو عمودی ہوگا اور ہم صدر اکائی عمودی سمتیہ سے مراد درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|} \tag{۴}$$

۱۹۸۹۹ مثال ۱۲.۲۱: درج ذیل پیچ دار منحنی کی انحنا دریافت کریں (شکل ۱۲.۲۲)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}, \quad a, b \geq 0,\ a^2 + b^2 \neq 0$$

۱۹۹۰۰ **حل**

۱۹۹۰۱ ہم سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ سے $\boldsymbol{T}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) &= -(a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k} \\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2} \\
\boldsymbol{T} &= \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[-(a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}]
\end{aligned}$$

۱۹۹۰۲ اب زنجیری قاعدہ سے $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ حاصل کرتے ہیں۔

زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\boldsymbol{v}| \implies \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{v}|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[-(a\cos t)\boldsymbol{i} - (a\sin t)\boldsymbol{j}]\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\
&= \frac{a}{a^2+b^2}[-(\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}]
\end{aligned}$$

۱۹۹۰۳ اس طرح درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}
\kappa &= \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right| \\
&= \frac{a}{a^2+b^2}\left|-(\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}\right| \\
&= \frac{a}{a^2+b^2}\sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \frac{a}{a^2+b^2}
\end{aligned} \tag{۵}$$

ہم مساوات ۵ سے دیکھتے ہیں کہ مستقل a کے لیے b بڑھانے سے انحنا کم ہوتی ہے۔ مستقل b کے لیے a کم کرنے سے بھی انحنا آخر کار انحنا کم کرتی ہے۔ ایک اسپرنگ کھینچنے سے سیدھا ہوتا ہے۔

اگر $b = 0$ ہو تب پیچ دار منحنی ایک دائرہ ہو گا جس کا رداس a اور انحنا $\frac{1}{a}$ ہو گی۔ اگر $a = 0$ ہو تب پیچ دار منحنی، محور z پر سیدھا خط ہو گا اور اس کی انحنا 0 ہو گی۔ □

مثال ۱۲.۲۲: گزشتہ مثال میں منحنی کے لیے $\boldsymbol{N}$ تلاش کریں۔

حل

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[(a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}] \qquad \text{مثال ۱۲.۲۱}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\boldsymbol{N} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|} \qquad \text{مساوات ۴}$$

$$= -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[(a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}]$$

$$= -(\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}$$

□

مروڑ اور دوہری عمودی سمتیہ

فضا میں منحنی کا **دوہری عمودی سمتیہ**[۲۱] $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$ ہے جو $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ دونوں کو عمودی ہو گا (شکل ۱۲.۲۳)۔ سمتیات $\boldsymbol{T}$، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ مل کر دایاں ہاتھ، متحرک، سمتی چوکھٹ دیتے ہیں جو فضا میں سواری کی حرکت پر غور میں مددگار ثابت ہوتا ہے۔

سمتیات $\boldsymbol{T}$، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے لحاظ سے $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ کا رویہ کیسا ہو گا؟ حاصل صلیبی ضرب کے قاعدہ تفرق سے

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\times\boldsymbol{N} + \boldsymbol{T}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s}$$

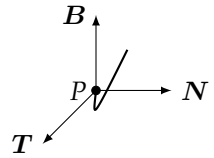
حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ $\boldsymbol{N}$ کا رخ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کے رخ ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\times\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$ ہو گا اور یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{T}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{T}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s} \tag{۶}$$

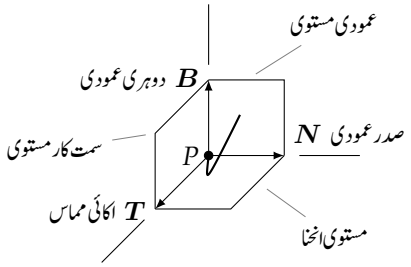
چونکہ حاصل صلیبی ضرب دونوں اجزاء کو عمودی ہوتا ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کو عمودی ہو گا۔

---

[۲۱] binormalvector



شکل ۱۲.۲۳: سمتیات $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ (اسی ترتیب میں) فضا میں آپس میں عمودی اکائی سمتیات کا دایاں ہاتھ چوکھٹ دیتے ہیں۔



شکل ۱۲.۲۴: سمتیات $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ ، $\boldsymbol{B}$ کے پیدا تین مستوی کے نام۔

۱۹۹۱۸ چونکہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{B}$ (جس کی لمبائی مستقل ہے) کو بھی عمودی ہے لہٰذا $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{T}$ کے مستوی کو $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ عمودی ہو گا۔ دوسرے لفظوں میں $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$
۱۹۹۱۹ سمتیہ $\boldsymbol{N}$ کے متوازی ہو گا اور یوں $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{N}$ کا مستقل مضرب ہو گا۔ اس حقیقت کو علامتی طور پر

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau \boldsymbol{N}$$

۱۹۹۲۰ لکھا جاتا ہے جہاں منفی کی علامت روایتی ہے۔ غیر سمتی τ ، **منحنی پر مروڑ** کہلاتا ہے۔ دھیان رہے کہ

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N} = -\tau \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{N} = -\tau(1) = -\tau$$

۱۹۹۲۱ کی وجہ سے درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N}$$

۱۹۹۲۲ تعریف: فرض کریں $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$ ہے۔ تب ہموار منحنی کا تفاعل **مروڑ**[۲۲] درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N}$$

۱۹۹۲۳ □

۱۹۹۲۴ انحنا κ کے برعکس جو کبھی منفی نہیں ہو سکتا ہے، مروڑ τ مثبت، منفی یا صفر ہو سکتا ہے۔

۱۹۹۲۵ منحنیات $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ مل کر تین مستوی دیتے ہیں (شکل ۱۲.۲۴)۔ منحنی پر چلتے ہوئے نقطہ P پر عمودی مستوی کی مڑنے کی شرح کو انحنا $\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right|$
۱۹۹۲۶ تصور کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح منحنی پر چلتے ہوئے نقطہ P پر $\boldsymbol{T}$ کے لحاظ سے سطح منحنی انحنا کی مڑنے کی شرح کو مروڑ $\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N}$
۱۹۹۲۷ تصور کیا جا سکتا ہے۔ منحنی میں بل کی پیمائش اس منحنی کی مروڑ ہو گی۔

---

[۲۲] torsion

اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء

قوت کشش، بریک یا انجن کی طاقت کی وجہ سے کسی جسم کی اسراع کے مماسی جزو میں ہم عموماً دلچسپی رکھتے ہیں جو اس قوت کی وجہ سے پیدا ہوتی ہے۔ ہم زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}$ کے لیے

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{T}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

لکھ کر دونوں اطراف کا تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{T}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\left(\kappa\boldsymbol{N}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\boldsymbol{N}
\end{aligned}$$

اس کو

$$\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{T} \tag{۷}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں اسراع کا غیر سمتی مماسی جزو a_T اور غیر سمتی عمودی جزو a_N درج ذیل ہوں گے۔

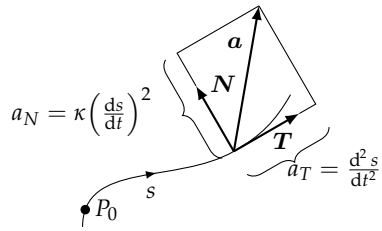
$$a_T = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{v}|, \qquad a_N = \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \kappa|\boldsymbol{v}|^2 \tag{۸}$$

آپ نے دیکھا کہ مساوات ۷ میں $\boldsymbol{B}$ نہیں پایا جاتا ہے۔ ایک راہ جس پر ایک جسم چل رہا ہو جتنا بھی گھومتا ہو، اس پر اسراع ہر صورت $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ کے مستوی میں $\boldsymbol{B}$ کی عمودی پائی جائے گی۔ یہ مساوات ہمیں یہ بھی بتاتی ہے کہ کتنی اسراع حرکت کے مماسی رخ $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ اور کتنی اسراع حرکت کے عمودی رخ $\kappa(\mathrm{d}s/\,\mathrm{d}t)^2$ ہو گی (شکل ۱۲.۲۵)۔

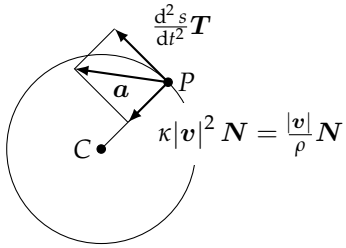
ہم مساوات ۸ سے کیا معلومات حاصل کر سکتے ہیں۔ تعریف کی رو سے، اسراع $\boldsymbol{a}$ سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ کی تبدیلی کی شرح ہو گی اور حرکت کے دوران سمتی رفتار کا رخ اور اس کی مقدار (لمبائی) تبدیل ہو گی۔ اسراع کا مماسی جزو a_T سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی کی شرح تبدیلی دیتا ہے (یعنی رفتار میں تبدیلی)۔ عمودی جزو a_N ہمیں $\boldsymbol{v}$ کے رخ کی تبدیلی کی شرح دیتا ہے۔

دھیان رہے کہ a_N انحنا ضرب رفتار کا مربع ہو گا۔ اس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ جب گاڑی تیز رفتار (زیادہ $|\boldsymbol{v}|$) سے چلتے ہوئے زیادہ جلدی مڑے (بڑی κ) تب ہمیں کیوں سیدھا بیٹھنے میں مشکل پیش آتی ہے۔ گاڑی کی رفتار دگنی کرنے سے آپ اسی انحنا کے لیے چار گنا زیادہ عمودی اسراع محسوس کریں گے (شکل ۱۲.۲۶)۔

اگر ایک جسم مستقل رفتار سے چل رہی ہو تب $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ صفر ہو گا اور تمام اسراع $\boldsymbol{N}$ کے رخ، دائرے کے مرکز کے رخ ہو گا۔ اگر ایک جسم کی رفتار بڑھ یا گھٹ رہی ہو تب $\boldsymbol{a}$ کا غیر صفر مماسی جزو ہو گا۔



شکل ۱۲.۲۵: اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء۔ اسراع $\boldsymbol{a}$ ہر صورت $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ کے مستوی میں $\boldsymbol{B}$ کے عمودی پایا جاتا ہے۔



شکل ۱۲.۲۶: ایک جسم جس کی رفتار ایک دائری راہ پر گھڑی کے الٹ رخ چلتے ہوئے بڑھ رہی ہو کے اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء۔ دائرہ کار داس ρ ہے۔

۱۹۹۳۵ اسراع کا عمودی جزو a_N معلوم کرنے کی خاطر ہم عموماً کلیہ $a_N = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_T^2}$ استعمال کرتے ہیں جو a_N کے لیے مساوات $|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a_T^2 + a_N^2$ حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم بغیر κ معلوم کیے، a_N معلوم کر سکتے ہیں۔

۱۹۹۳۶

$$a_N = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_T^2} \tag{۹}$$

۱۹۹۳۷ مثال ۱۲.۲۳: درج ذیل حرکت کے لیے $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ حاصل کیے بغیر اسراع $\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N}$ روپ میں لکھیں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}, \quad t > 0$$

۱۹۹۳۸ یہ راہ شکل ۱۲.۲۷ میں دکھائے دائرہ کار در پیچیدہ ہے۔

۱۹۹۳۹ **حل**

۱۹۹۵۰ ہم پہلے مساوات ۸ سے a_T حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{v} = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} \qquad \text{مثال ۱۲.۱۶}$$

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = \sqrt{t^2} = |t| = t \qquad t > 0$$

$$a_T = \frac{d}{dt}|\boldsymbol{v}| = \frac{d}{dt}(t) = 1 \qquad \text{مساوات ۸}$$

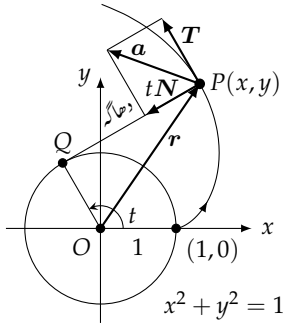
۱۹۹۵۱ اب مساوات ۹ استعمال کرتے ہوئے a_N حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a} = (\cos t - t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t + t\cos t)\boldsymbol{j}$$

$$|\boldsymbol{a}|^2 = t^2 + 1 \qquad \text{کچھ الجبرا کے بعد}$$

$$a_N = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_T^2}$$

$$= \sqrt{(t^2+1) - (1)} = \sqrt{t^2} = t$$



شکل ۱۲.۲۷: اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء (مثال ۱۲.۲۳)

۱۹۹۵۲ اس کے بعد ہم مساوات ۷ سے $\boldsymbol{a}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N} = (1)\boldsymbol{T} + (t)\boldsymbol{N} = \boldsymbol{T} + t\boldsymbol{N}$$

۱۹۹۵۳ □

۱۹۹۵۴ **انحنا اور مروڑ کے کلیات**

۱۹۹۵۵ ہم اب ہموار منحنیات کے انحنا اور مروڑ تلاش کرنے کے چند کلیات پیش کرتے ہیں جو استعمال میں آسان ثابت ہوتے ہیں۔ مساوات ۷ سے درج ذیل لکھا جا سکتا
۱۹۹۵۶ ہے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a} &= \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}\right)\times\left[\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\boldsymbol{N}\right] && \boldsymbol{v} = \tfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T} \text{ مساوات ۸ سے} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\right)(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T}) + \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}) \\
&= \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3\boldsymbol{B} && \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

۱۹۹۵۷ یوں

$$|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}| = \kappa\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|^3|\boldsymbol{B}| = \kappa|\boldsymbol{v}|^3 \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\boldsymbol{v}| \text{ اور } |\boldsymbol{B}| = 1$$

۱۹۹۵۸ ہو گا جس کو κ کے لیے حل کر کے درج ذیل کلیہ حاصل ہو گا۔

۱۹۹۵۹ **انحنا کا سمتی کلیہ**

$$\kappa = \frac{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{v}|^3} \tag{۱۰}$$

مساوات ۱۰ ہمیں منحنی پر چلتے ہوئے سمتی رفتار جہاں $\boldsymbol{v}$ غیر صفر ہو اور اسراع کی کسی بھی روپ سے انحنا، جو منحنی کی جیومیٹریائی خاصیت ہے، دیتی ہے۔ ذرہ رک کر اس حیرت کن حقیقت پر غور کریں۔ منحنی پر حرکت کے کسی بھی کلیہ سے، چاہے حرکت کتنا بھی متغیر کیوں نہ ہو (جب تک $\boldsymbol{v}$ صفر نہ ہو)، ہم منحنی کی طبعی خاصیت دریافت کر سکتے ہیں جس کا ظاہری طور پر منحنی پر چلنے سے کوئی تعلق نہیں ہے۔

مروڑ کا ایک مقبول کلیہ جو اعلیٰ نصاب میں حاصل کیا جاتا ہے درج ذیل ہے جہاں ایک نقطہ، t کے لحاظ سے ایک تفرق کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$، $\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ اور $\dddot{x} = \frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3}$ ہوں گے۔

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}|^2} \qquad \text{جہاں } \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \text{ ہو} \tag{۱۱}$$

یہ کلیہ $\boldsymbol{r}$ کے تفاعل اجزاء $x = f(t)$، $y = g(t)$ اور $z = h(t)$ سے مروڑ دیتا ہے۔ مقطع کی پہلی صف $\boldsymbol{v}$ سے، دوسری صف $\boldsymbol{a}$ سے اور تیسری صف $\dot{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$ سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۱۲.۲۴: درج ذیل پیچ دار کا κ اور τ مساوات ۱۰ اور مساوات ۱۱ سے حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}, \quad a, b \geq 0,\ a^2 + b^2 \neq 0$$

حل

ہم انحنا کو مساوات ۱۰ کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= -(a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}, \\
\boldsymbol{a} &= -(a\cos t)\boldsymbol{i} - (a\sin t)\boldsymbol{j}, \\
\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} \\
&= (ab\sin t)\boldsymbol{i} - (ab\cos t)\boldsymbol{j} + a^2\boldsymbol{k}, \\
\kappa &= \frac{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{v}|^3} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^4}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{a}{a^2+b^2}
\end{aligned} \tag{۱۲}$$

مساوات ۱۲ اور مساوات ۵ جہاں ہم نے انحنا کو اس کی تعریف سے حاصل کیا، ایک سا نتیجہ دیتی ہیں۔

مروڑ کے لیے مساوات ۱۱ استعمال کرنے سے پہلے ہم مقطع کے اندراج تلاش کرتے ہیں۔ ہم $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{a}$ جانتے ہیں لہٰذا

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = (a\sin t)\boldsymbol{i} - (a\cos t)\boldsymbol{j}$$

۱۹۹۷۲ ہو گا۔ یوں مروڑ درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}|^2} = \frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}}{(a\sqrt{a^2+b^2})^2} \quad \text{مساوات ۱۲ کی قیمتیں}$$

$$= \frac{b(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)}{a^2(a^2+b^2)} \tag{۱۳}$$

$$= \frac{b}{a^2+b^2}$$

۱۹۹۷۳ □

۱۹۹۷۴ ہم مساوات ۱۳ سے دیکھتے ہیں کہ دائری نلکی پر پیچ دار راہ کا مروڑ مستقل ہو گا۔ در حقیقت فضا میں تمام منحنیات میں پیچ دار منحنی کی نشانی اس کی مستقل انحنا اور
۱۹۹۷۵ مستقل مروڑ ہیں۔

۱۹۹۷۶ ڈی این اے[۲۳] زندگی کا بنیادی سالمہ ہے۔ یہ دو پیچ دار حصوں پر مشتمل ہوتی ہے جو ایک دوسرے کے گرد لپٹے ہوتے ہیں۔ لپٹی صورت کی وجہ سے سالمہ بہت کم
۱۹۹۷۷ جگہ لیتی ہے اور خرابی کی صورت میں (مستقل انحنا اور مروڑ کی بنا) خراب حصہ کو سالماتی قینچی سے کاٹا جا سکتا ہے۔ سالماتی قینچی استعمال کرتے ہوئے سائنس دان
۱۹۹۷۸ امید رکھتے ہیں کہ وہ انسانیت کو ہر قسم کی بیماری سے نجات دے پائیں گے۔

۱۹۹۷۹ فضا میں منحنیات کے کلیات

---

[۲۳] DNA

۱۹۹۸۰

$\boldsymbol{T} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{\lvert\boldsymbol{v}\rvert}$	اکائی مماسی سمتیہ
$\boldsymbol{N} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{\lvert\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t\rvert}$	صدر اکائی عمودی سمتیہ
$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$	دوہری عمودی سمتیہ
$\kappa = \left\lvert\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right\rvert = \dfrac{\lvert\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}\rvert}{\lvert\boldsymbol{v}\rvert^3}$	انحنا
$\tau = -\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N} = \dfrac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{\lvert\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}\rvert^2}$	مروڑ
$\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N}$	اسراع
$a_T = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lvert\boldsymbol{v}\rvert$	اسراع کا مماسی جزو
$a_N = \kappa\lvert\boldsymbol{v}\rvert^2 = \sqrt{\lvert\boldsymbol{a}\rvert - a_T^2}$	اسراع کا عمودی جزو

۱۹۹۸۱ **سوالات**

۱۹۹۸۲ **مستوی منحنیات**

۱۹۹۸۳ سوال ۱۲.۱۰۹ تا سوال ۱۲.۱۱۲ میں مستوی منحنیات کا $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور κ تلاش کریں۔

۱۹۹۸۴ سوال ۱۲.۱۰۹: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (\ln\cos t)\boldsymbol{j}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

۱۹۹۸۵ سوال ۱۲.۱۱۰: $\boldsymbol{r}(t) = (\ln\sec t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

۱۹۹۸۶ سوال ۱۲.۱۱۱: $\boldsymbol{r}(t) = (2t+3)\boldsymbol{i} + (5-t^2)\boldsymbol{j}$

۱۹۹۸۷ سوال ۱۲.۱۱۲: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}, \quad t > 0$

۱۹۹۸۸

۱۹۹۸۹ سوال ۱۲.۱۱۳ اور سوال ۱۲.۱۱۴ میں $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ معلوم کیے بغیر $\boldsymbol{a}$ کو $\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N}$ روپ میں لکھیں۔

۱۹۹۹۰ سوال ۱۲.۱۱۳: $\boldsymbol{r}(t) = (2t+3)\boldsymbol{i} + (t^2-1)\boldsymbol{j}$

۱۹۹۹۱ سوال ۱۲.۱۱۴: $\boldsymbol{r}(t) = \ln(t^2+1)\boldsymbol{i} + (t - 2\tan^{-1} t)\boldsymbol{j}$

۱۹۹۹۲ سوال ۱۲.۱۱۵: مستوی xy میں تفاعل کی ترسیم کی انحنا کا کلیہ۔

۱۹۹۹۳ ا. مستوی xy میں ترسیم $y = f(x)$ کی مقدار معلوم روپ $x = x,\ y = f(x)$ ہے اور سمتی کلیہ $\boldsymbol{r}(t) = x\boldsymbol{i} + f(x)\boldsymbol{j}$
۱۹۹۹۴ ہوگا۔ اگر f دوبار قابل تفرق ہو تب اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

۱۹۹۹۵ ب. جزو-ا میں κ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے $y = \ln(\cos x),\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ کی انحنا تلاش کریں۔ اپنے جواب کا سوال ۱۲.۱۰۹ کے
۱۹۹۹۶ جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

۱۹۹۹۷ ج. دکھائیں کہ نقطہ تصریف پر انحنا صفر ہو گی۔

۱۹۹۹۸ سوال ۱۲.۱۱۶: مستوی میں مقدار معلوم روپ میں دی گئی منحنی کی انحنا کا کلیہ

۱۹۹۹۹

۲۰۰۰۰ ا. دکھائیں کہ دوبار قابل تفرق تفاعل $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ پر مبنی ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$ کی انحنا درج ذیل کلیہ
۲۰۰۰۱ دیتا ہے۔

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

۲۰۰۰۲ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنیات کے انحنا تلاش کریں۔

۲۰۰۰۳ ب. $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (\ln \sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 < t < \pi$

۲۰۰۰۴ ج. $\boldsymbol{r}(t) = [\tan^{-1}(\sinh t)]\boldsymbol{i} + (\ln \cosh t)\boldsymbol{j}$

۲۰۰۰۵ سوال ۱۲.۱۱۷: مستوی منحنیات کے عمود

۲۰۰۰۶

۲۰۰۰۷ ا. دکھائیں کہ نقطہ $(f(t), g(t))$ پر منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$ کے عمودی سمتیات $\boldsymbol{n}(t) = -g'(t)\boldsymbol{i} + f'(t)\boldsymbol{j}$ اور $-n(t) = g'(t)\boldsymbol{i} - f'(t)\boldsymbol{j}$ ہیں۔ کسی مخصوص مستوی کا $\boldsymbol{N}$ تلاش کرنے کی خاطر ہم $\boldsymbol{n}$ اور $-\boldsymbol{n}$ میں جو مقعر
۲۰۰۰۹ رخ ہو کو منتخب کر کے اس سے اکائی سمتیہ حاصل کرتے ہیں (شکل ۱۲.۲۰)۔ یہ طریقہ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا $\boldsymbol{N}$ تلاش کریں۔

۲۰۰۱۰ ب. $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + e^{2t}\boldsymbol{j}$

۲۰۰۱۱ ج. $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{4 - t^2}\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j}, \quad -2 \le t \le 2$

۲۰۰۱۲ سوال ۱۲.۱۱۸:

۲۰۰۱۳ ا. منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{t^3}{3}\boldsymbol{j}$ کا $\boldsymbol{N}$ وقفہ $t < 0$ اور وقفہ $t > 0$ پر سوال ۱۲.۱۱۷ کے کلیہ سے حاصل کریں۔

۲۰۰۱۴ ب. جزو-ا میں منحنی کے لیے

$$\boldsymbol{N} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|}, \quad t \neq 0$$

۲۰۰۱۵ حاصل کریں۔ کیا $t = 0$ پر $\boldsymbol{N}$ موجود ہے؟ اس منحنی کو ترسیم کریں اور منفی سے مثبت جانب گزرتے ہوئے $\boldsymbol{N}$ کے رویہ پر تبصرہ کریں۔

فضائی منحنیات

سوال ۱۲.۱۱۹ تا سوال ۱۲.۱۲۶ میں فضائی منحنیات کا $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ ، $\boldsymbol{B}$ ، κ اور τ دریافت کریں۔

سوال ۱۲.۱۱۹: $\boldsymbol{r}(t) = (3\sin t)\boldsymbol{i} + (3\cos t)\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}$

سوال ۱۲.۱۲۰: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$

سوال ۱۲.۱۲۱: $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\boldsymbol{i} + (e^t\sin t)\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

سوال ۱۲.۱۲۲: $\boldsymbol{r}(t) = (6\sin 2t)\boldsymbol{i} + (6\cos 2t)\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k}$

سوال ۱۲.۱۲۳: $\boldsymbol{r}(t) = \frac{t^3}{3}\boldsymbol{i} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{j}, \quad t > 0$

سوال ۱۲.۱۲۴: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{i} + (\sin^3 t)\boldsymbol{j}, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$

سوال ۱۲.۱۲۵: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (a\cosh\frac{t}{a})\boldsymbol{j}, \quad a > 0$

سوال ۱۲.۱۲۶: $\boldsymbol{r}(t) = (\cosh t)\boldsymbol{i} - (\sinh t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$

سوال ۱۲.۱۲۷ اور سوال ۱۲.۱۲۸ میں $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ تلاش کیے بغیر $\boldsymbol{a}$ کو $\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N}$ روپ میں لکھیں۔

سوال ۱۲.۱۲۷: $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}$

سوال ۱۲.۱۲۸: $\boldsymbol{r}(t) = (1 + 3t)\boldsymbol{i} + (t - 2)\boldsymbol{j} - 3t\boldsymbol{k}$

سوال ۱۲.۱۲۹ اور سوال ۱۲.۱۳۲ میں $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ تلاش کیے بغیر، دیے گئے t پر $\boldsymbol{a}$ کو $\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N}$ روپ میں لکھیں۔

سوال ۱۲.۱۲۹: $\boldsymbol{r}(t) = (t + 1)\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

سوال ۱۲.۱۳۰: $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

سوال ۱۲.۱۳۱: $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + (t + \frac{t^3}{3})\boldsymbol{j} + (t - \frac{t^3}{3})\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

سوال ۱۲.۱۳۲: $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\boldsymbol{i} + (e^t\sin t)\boldsymbol{j} + \sqrt{2}e^t\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

سوال ۱۲.۱۳۳ اور سوال ۱۲.۱۳۴ میں دیے گئے $\boldsymbol{r}$ پر $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ معلوم کریں۔ اس کے بعد درپیچیدہ مستوی، عمودی مستوی اور سمت کار مستوی کی مساوات اس t پر حاصل کریں۔

سوال ۱۲.۱۳۳: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \quad t = \frac{\pi}{4}$

سوال ۱۲.۱۳۴: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

طبعی استعمال

سوال ۱۲.۱۳۵: آپ کی گاڑی کا رفتار پیمایہ برقرار $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ دکھا رہا ہے۔ کیا آپ کی اسراع ممکن ہے؟ جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۲.۱۳۶: کیا مستقل رفتار سے چلتے ہوئے ذرہ کی اسراع کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۲.۱۳۷: ایک ذرہ کی اسراع پر لمحہ اس کی سمتی رفتار کے عمودی ہے۔ اس کی رفتار کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۲.۱۳۸: ایک جسم جس کی کمیت m ہے قطع مکافی $y = x^2$ پر مستقل رفتار $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے حرکت کرتا ہے۔ نقطہ $(0,0)$ اور نقطہ $(\sqrt{2},2)$ پر اسراع کی بدولت اس پر کتنی قوت ہو گی؟ اپنا جواب $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کی روپ میں لکھیں۔ (نیوٹن کا کلیہ $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ ذہن میں رکھیں۔)

سوال ۱۲.۱۳۹: ایک منحنی پر کسی جسم کو مستقل رفتار سے حرکت دینے کے لیے درکار قوت، قوانین نیوٹن کے تحت، حرکت کی انحنا کی مستقل مضرب ہو گی۔ حساب سے دکھائیں کہ یہ فقرہ کیوں درست ہے۔

سوال ۱۲.۱۴۰: دکھائیں اگر ایک ذرے کی اسراع کا عمودی جزو صفر ہو تب یہ متحرک ذرہ سیدھا حرکت کرے گا۔

انحنا پر مزید سوالات

سوال ۱۲.۱۴۱: دکھائیں کہ قطع مکافی $y = ax^2,\ a \neq 0$ کی زیادہ سے زیادہ انحنا راس کی راس پر ہو گی جبکہ کسی بھی نقطہ پر کم سے کم انحنا نہیں ہو گی۔ (چونکہ منحنی کو فضا میں ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے یا گھمانے سے انحنا تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا یہ حقیقت کسی بھی قطع مکافی کے لیے درست ہو گا۔)

سوال ۱۲.۱۴۲: دکھائیں کہ ترخیم $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ a > b > 0$ کا زیادہ سے زیادہ انحنا اس کے محور اکبر پر اور کم سے کم انحنا اس کے محور اصغر پر ہو گا۔ (گزشتہ سوال کی طرح یہ حقیقت بھی ہر ترخیم کے لیے درست ہو گی۔)

سوال ۱۲.۱۴۳: پیچ دار منحنی کی زیادہ سے زیادہ انحنا

ہم نے مثال ۱۲.۲۱ میں دیکھا کہ پیچ دار $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k},\ (a,b \geq 0)$ کی انحنا $\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}$ ہو گی۔ کسی بھی b کے لیے زیادہ سے زیادہ انحنا کتنی ہو گی؟ اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۲.۱۴۴: اگر آپ کو $|a_N|$ اور $|\boldsymbol{v}|$ معلوم ہوں تب کلیہ $a_N = \kappa|\boldsymbol{v}|^2$ سے انحنا حاصل کی جا سکتی ہے۔ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنی کی انحنا اور رداس انحنا دریافت کریں۔ (a_N اور $|\boldsymbol{v}|$ کی قیمتیں مثال ۱۲.۲۳ سے لیں۔)

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}, \quad t > 0$$

سوال ۱۲.۱۴۵: دکھائیں کہ درج ذیل خط کے لیے κ اور τ صفر ہوں گے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + At)\boldsymbol{i} + (y_0 + Bt)\boldsymbol{j} + (z_0 + Ct)\boldsymbol{k}$$

سوال ۱۲.۱۴۶: مکمل انحنا

ہم ایک منحنی پر $s = s_0$ سے $s = s_1 > s_0$ تک حصہ کی مکمل انحنا حاصل کرنے کی خاطر s_0 تا s_1 انحنا κ کا تکمل لیتے ہیں۔ اگر منحنی کا متغیر s

کے بجائے t ہو تب مکمل انحنا درج ذیل ہو گی، جہاں s_0 اور s_1 کے مطابق قیمتیں t_0 اور t_1 ہیں۔

$$K = \int_{s_0}^{s_1} \kappa \, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} \kappa \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \kappa |\boldsymbol{v}| \, \mathrm{d}t$$

وقفہ $0 \leq t \leq 4\pi$ پر پیچ دار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ کی مکمل انحنا معلوم کریں۔

سوال ۱۲.۱۴۷: گزشتہ سوال جاری

درج ذیل منحنیات کی مکمل انحنا دریافت کریں۔

ا. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j},\ a \leq t \leq b\ (a > 0)$ (انحنا معلوم کرنے کا آسان طریقہ سوال ۱۲.۱۴۴ میں پیش کیا گیا ہے۔ مثال ۱۲.۲۳ کی قیمتیں استعمال کریں۔)

ب. $y = x^2, \quad -\infty < x < \infty =$

سوال ۱۲.۱۴۸:

ا. نقطہ $(\frac{\pi}{2}, 1)$ پر منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}$ کے دائرہ انحنا کی مساوات تلاش کریں۔ (یہ مستوی xy میں $y = \sin x$ کی مقدار معلوم روپ ہے۔)

ب. نقطہ $(0, -2)$ جہاں $t = 1$ ہے پر منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (2\ln t)\boldsymbol{i} - (t + \frac{1}{t})\boldsymbol{j},\ e^{-2} \leq t \leq e^2$ کے دائرہ انحنا کی مساوات تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۲.۱۴۹: مستوی منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$ جو کافی قابل تفرق ہو کی مروڑ کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۲.۱۵۰: پیچ دار کی مروڑ

ہم نے مثال ۱۲.۲۴ میں دیکھا کہ پیچ دار

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}, \quad a, b \geq 0$$

کی انحنا $\frac{b}{a^2+b^2}$ ہے۔ کسی مستقل a کے لیے τ کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۲.۱۵۱: صفر مروڑ کی قابل تفرق منحنیات مستویات میں پائی جاتی ہیں۔

صفر مروڑ کی قابل تفرق منحنیات مستویات میں پائی جاتی ہیں۔ یہ اس حقیقت کی ایک مخصوص صورت ہے کہ ایک ذرہ جس کی سمتی رفتار کسی مقررہ سمتیہ $\boldsymbol{C}$ کی عمودی ہو، ایسی مستوی میں حرکت کرتا ہے جو C کو عمودی ہو گا، اور یہ حقیقت از خود درج ذیل مسئلہ کا حل ہے۔

فرض کریں وقفہ $[a, b]$ میں تمام t پر $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ دو بار قابل تفرق ہو، اور $t = a$ پر $\boldsymbol{r} = 0$ ہو اور $[a, b]$ میں تمام t پر $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k} = 0$ ہو تب $[a, b]$ میں تمام t پر $h(t) = 0$ ہو گا۔

اس مسئلہ کو حل کریں۔ (اشارہ: اسراع $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ سے شروع کریں اور ابتدائی معلومات الٹ رخ لاگو کریں۔)

سوال ۱۲.۱۵۲: ایک کلیہ جو $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{v}$ سے τ حاصل کرتا ہے

اگر ہم تعریف $\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N}$ سے شروع کر کے $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ کو زنجیری قاعدہ سے

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}$$

لکھیں تب ہمیں درج ذیل کلیہ حاصل ہو گا۔

$$\tau = -\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{N}\right)$$

یہ کلیہ استعمال میں، اخذ کرنے میں اور بیان کرنے میں مساوات ۱۱ سے زیادہ آسان ہے۔ اس میں قباحت یہ ہے کہ کمپیوٹر کے بغیر اسے استعمال کرنے میں بہت زیادہ کام کرنا ہو گا۔ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے مثال ۱۲.۲۴ میں پیچ دار کی مروڑ تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال مروڑ کا کلیہ

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

جسے ہم نے سوال ۱۲.۱۱۵ میں اخذ کیا، دو بار قابل تفرق مستوی منحنی $y = f(x)$ کی انحنا κ کو x کا تفاعل دیتا ہے۔ سوال ۱۲.۱۵۳ تا سوال ۱۲.۱۵۶ میں دی گئی منحنیات کا تفاعل انحنا تلاش کریں۔ اس کے بعد دیے گئے وقفہ پر $\kappa(x)$ اور $f(x)$ کو ترسیم کریں۔ آپ چند دلچسپ حقائق دیکھیں گے۔

سوال ۱۲.۱۵۳: $y = x^2, \quad -2 \le x \le 2$

سوال ۱۲.۱۵۴: $y = \frac{x^4}{4}, \quad -2 \le x \le 2$

سوال ۱۲.۱۵۵: $y = \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

سوال ۱۲.۱۵۶: $y = e^x, \quad -1 \le x \le 2$

دائرہ انحنا

سوال ۱۲.۱۵۷ تا سوال ۱۲.۱۶۴ میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے مستوی منحنی میں نقطہ P پر، جہاں $\kappa \neq 0$ ہو، دائرہ انحنا پر غور کریں گے۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دی گئی مستوی منحنی کی صورت دیکھنے کی خاطر دیے گئے وقفہ پر منحنی ترسیم کریں۔

ب. دیے گئے نقطہ t_0 پر منحنی کی انحنا κ کی قیمت سوال ۱۲.۱۱۵ یا سوال ۱۲.۱۱۶ میں دیے کلیہ سے معلوم کریں۔ اگر منحنی بطور تفاعل $y = f(x)$ دی گئی ہو تب اس کی مقدار معلوم روپ $x = t,\ y = f(t)$ استعمال کریں۔

ج. نقطہ t_0 پر اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{N}$ تلاش کریں۔ دھیان رہے کہ t_0 پر اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کا گھڑی کے رخ یا گھڑی کے مخالف رخ گھومنا، $\boldsymbol{N}$ کے اجزاء کی علامتیں تعین کرتا ہے (سوال ۱۲.۱۱۷)۔

د. اگر مبدا سے دائرہ انحنا کے مرکز (a, b) تک سمتیہ $\boldsymbol{C} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ ہو تب مرکز $\boldsymbol{C}$ درج ذیل سمتی مساوات سے معلوم کریں۔

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{r}(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\boldsymbol{N}(t_0)$$

منحنی پر نقطہ $P(x_0, y_0)$ تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t_0)$ دیتا ہے۔

ھ. دائرہ انحنا کی خفی مساوات $(y-b)^2 + (x-a)^2 = \frac{1}{\kappa^2}$ ترسیم کریں۔ اس کے بعد منحنی اور دائرہ انحنا کو اکٹھے ترسیم کریں۔ (قابل دید ترسیمات حاصل کرنے کی خاطر افقی اور انتصابی پیمائش برابر رکھتے ہوئے، آپ کو مختلف وقفوں پر ترسیم کرنا پڑ سکتا ہے۔)

سوال ۱۲.۱۵۷: $\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{i} + (5\sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال ۱۲.۱۵۸: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{i} + (\sin^3 t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال ۱۲.۱۵۹: $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + (t^3 - 3t)\boldsymbol{j}, \quad -4 \le t \le 4, \quad t_0 = \frac{3}{5}$

سوال ۱۲.۱۶۰: $\boldsymbol{r}(t) = (t^3 - 2t^2 - t)\boldsymbol{i} + \frac{3t}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{j}, \quad -2 \le t \le 5, \quad t_0 = 1$

سوال ۱۲.۱۶۱: $\boldsymbol{r}(t) = (2t - \sin t)\boldsymbol{i} + (2 - 2\cos t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 3\pi, \quad t_0 = \frac{3\pi}{2}$

سوال ۱۲.۱۶۲: $\boldsymbol{r}(t) = (e^{-t}\cos t)\boldsymbol{i} + (e^{-t}\sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 6\pi, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال ۱۲.۱۶۳: $y = x^2 - x, \quad -2 \le x \le 5, \quad x_0 = 1$

سوال ۱۲.۱۶۴: $y = x(1-x)^{2/5}, \quad -1 \le x \le 2, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

انحنا، مروڑ اور TNB چوکھٹے

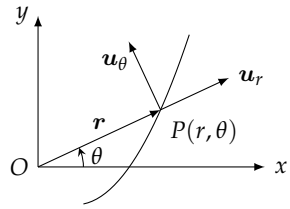
سوال ۱۲.۱۶۵ تا سوال ۱۲.۱۶۸ میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے دیے گئے نقطہ t پر چار اعشاریہ مقامات تک درستگی تک $\boldsymbol{v}$ ، $\boldsymbol{a}$ ، رفتار، $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ ، $\boldsymbol{B}$ ، κ ، τ اور اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء تلاش کریں۔

سوال ۱۲.۱۶۵: $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad t = \sqrt{3}$

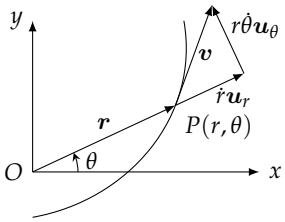
سوال ۱۲.۱۶۶: $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\boldsymbol{i} + (e^t\sin t)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}, \quad t = \ln 2$

سوال ۱۲.۱۶۷: $\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j} + \sqrt{-t}\boldsymbol{k}, \quad t = -3\pi$

سوال ۱۲.۱۶۸: $\boldsymbol{r}(t) = (3t - t^2)\boldsymbol{i} + (3t^2)\boldsymbol{j} + (3t + t^3)\boldsymbol{k}, \quad t = 1$



شکل ۱۲.۲۸: نقطہ P کا قطبی محدد r سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کی مقدار ہو گی۔ یوں $\boldsymbol{u}_r$، جو $\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ ہے $\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ ہو گا۔



شکل ۱۲.۲۹: قطبی محدد میں سمتی رفتار سمتیہ $\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta$ ہو گا۔

۲۰۱۳۵ ۱۲.۵ فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت

۲۰۱۳۶ اس حصہ میں ہم قوانین نیوٹن اور قوت کشش کی مدد سے سیاروں کی حرکت کے قوانین کپلر اخذ کریں گے اور زمین کے گرد مصنوعی سیاروں کے مدار پر بحث
۲۰۱۳۷ کریں گے۔ قوانین نیوٹن سے قوانین کپلر کا حصول احصاء کی اہم کامیابی ہے۔ اس میں وہ سب کچھ درکار ہو گا جو ہم نے اب تک پڑھا ہے جیسا فضا میں سمتیات کا
۲۰۱۳۸ الجبرا اور جیومیٹری، سمتی تفاعل کا احصاء، تفرقی مساوات کے حل، ابتدائی قیمت مسائل اور ترخیمی حصوں کی قطبی محددی تشریح۔

۲۰۱۳۹ قطبی اور نلکی محدد میں حرکت کی سمتی مساواتیں

۲۰۱۴۰ ہم یہاں قطبی محدد کو r ، θ اور نلکی محدد کو r ، θ ، z لکھیں گے۔ ایک ذرہ قطبی محددی مستوی میں حرکت کرتا ہو، ہم اس کے مقام، سمتی رفتار اور اسراع
۲۰۱۴۱ کو متحرک اکائی سمتیات

$$\boldsymbol{u}_r = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{u}_\theta = -(\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\boldsymbol{j} \tag{۱}$$

۲۰۱۴۲ کی روپ میں لکھتے ہیں (شکل ۱۲.۲۸)۔ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}_r$ کا رخ سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ کے رخ ہے لہٰذا $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r$ ہو گا۔ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}_\theta$ بڑھتے θ کے رخ یعنی
۲۰۱۴۳ سمتیہ $\boldsymbol{u}_r$ کو عمودی ہے۔

۲۰۱۴۴ مساوات اسے ہمیں درج ذیل ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_r}{\mathrm{d}\theta} &= -(\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\boldsymbol{j} = \boldsymbol{u}_\theta\\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta} &= -(\cos\theta)\boldsymbol{i} - (\sin\theta)\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{u}_r\end{aligned} \tag{۲}$$

۲۰۱۴۵ ہم وقت کے لحاظ سے $\boldsymbol{u}_r$ اور $\boldsymbol{u}_\theta$ کی تبدیلی دیکھنے کی خاطر ان کا تفرق t کے لحاظ سے زنجیری قاعدہ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\dot{\boldsymbol{u}}_r = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta, \quad \dot{\boldsymbol{u}}_\theta = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = -\dot{\theta}\boldsymbol{u}_r \tag{۳}$$

۲۰۱۴۶ یوں سمتی رفتار (شکل ۱۲.۲۹)

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\boldsymbol{u}_r) = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\boldsymbol{u}}_r = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta \tag{۴}$$

۲۰۱۴۷ اور اسراع درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = (\ddot{r}\boldsymbol{u}_r + \dot{r}\dot{\boldsymbol{u}}_r) + (\dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{u}}_\theta) \tag{۵}$$

۲۰۱۴۸ جب $\dot{\boldsymbol{u}}_r$ اور $\dot{\boldsymbol{u}}_\theta$ کے حصول کے لیے مساوات ۱۳ استعمال کیا جائے اور اجزاء کو علیحدہ کیے جائیں تب اسراع کی مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta \tag{۶}$$

۲۰۱۴۹ ہم مساوات $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r$ کے دائیں ہاتھ جزو $z\boldsymbol{k}$ جمع کر کے ان مساواتوں کو وسعت دے کر فضا میں حرکت کے لیے قابل استعمال بنا سکتے ہیں۔ یوں نکی
۲۰۱۵۰ محدد میں درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= r\boldsymbol{u}_r + z\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{v} &= \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + \dot{z}\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta + \ddot{z}\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{۷}$$

۲۰۱۵۱ دھیان رہے کہ $z \neq 0$ کی صورت میں $|\boldsymbol{r}| = r$ ہو گا۔

۲۰۱۵۲ سمتیات $\boldsymbol{u}_r$ ، $\boldsymbol{u}_\theta$ اور $\boldsymbol{k}$ دایاں ہاتھ چوکھٹ دیتے ہیں جس میں درج ذیل ہوں گے (شکل ۱۲.۳۰)۔

$$\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_\theta = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{u}_\theta \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{u}_r, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{u}_\theta \tag{۸}$$

۲۰۱۵۳ سیارے مستوی میں حرکت کرتے ہیں

۲۰۱۵۴ نیوٹن کا قانون تجاذب کہتا ہے کہ اگر سورج کی کمیت M ، سیارہ کی کمیت m اور سورج کے کمیتی مرکز سے سیارہ کے کمیتی مرکز تک رداس سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہو تب
۲۰۱۵۵ سیارہ اور سورج کے بیچ قوت کشش $\boldsymbol{F}$ درج ذیل ہو گا (شکل ۱۲.۳۱) جہاں G (عالمگیر) **تجاذبی مستقل**[۲۴] کہلاتا ہے۔

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \tag{۹}$$

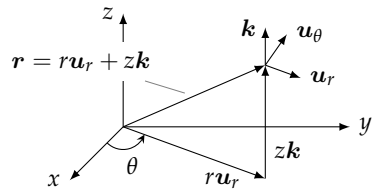
۲۰۱۵۶ اگر قوت کی اکائی نیوٹن، کمیت کی اکائی کلو گرام اور فاصلہ کی اکائی میٹر ہو تب $G = 6.6720 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ ہو گا۔ نیوٹن کے
۲۰۱۵۷ دوسرے قانون $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ کو مساوات ۹ کے ساتھ ملا کر

$$\begin{aligned}
m\ddot{\boldsymbol{r}} &= -\frac{GMm}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \\
\ddot{\boldsymbol{r}} &= -\frac{GM}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

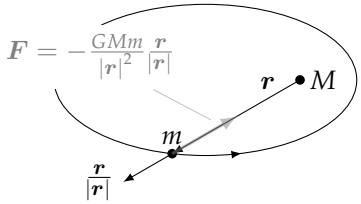
۲۰۱۵۸ حاصل ہو گا۔ سیارہ ہر لمحہ سورج کی جانب اسراع پذیر ہے۔

---

[۲۴] gravitationalconstant



شکل ۱۲.۳۰: نلکی محدد میں تعین گر سمتیہ اور بنیادی اکائی سمتیات



شکل ۱۲.۳۱: قوت کشش دونوں کمیتوں کے بیچ سیدھے خط پر ہو گا۔

مساوات ۱۰ کہتی ہے کہ $\boldsymbol{r}$ کا غیر سمتی مضرب $\ddot{\boldsymbol{r}}$ ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0} \tag{۱۱}$$

ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}}$ از خود $\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ کا تفرق ہے:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = \underbrace{\dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}}}_{\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} \tag{۱۲}$$

یوں مساوات ۱۱ درج ذیل کا معادل ہے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{0} \tag{۱۳}$$

جس کا تکمل

$$\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{C} \tag{۱۴}$$

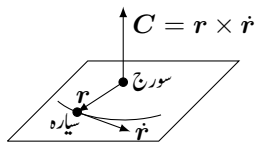
ہے جہاں $\boldsymbol{C}$ مستقل سمتیہ ہے۔

ہمیں مساوات ۱۴ بتاتی ہے کہ $\boldsymbol{r}$ اور $\dot{\boldsymbol{r}}$ ہر لمحہ ایک ایسے مستوی میں ہوں گے جو $\boldsymbol{C}$ کو عمودی ہو گا۔ یوں سورج کے مرکز سے گزرتی مستوی میں سیارے حرکت کرتے ہیں (شکل ۱۲.۳۲)۔

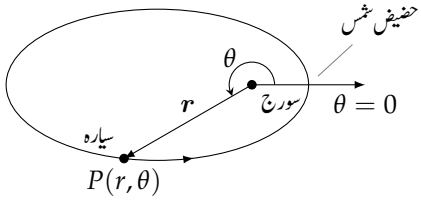
محدد اور ابتدائی معلومات

ہم نلکی محدد کے مرکز کو سورج کے کمیتی مرکز پر رکھتے ہیں اور سیارے کی حرکت کو قطبی محددی سطح لیتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{r}$ سیارے کا تعین گر سمتیہ ہو گا۔ یوں $|\boldsymbol{r}| = r$ اور $\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \boldsymbol{u}_r$ ہوں گے۔ ہم $\boldsymbol{C}$ کو محور z پر رکھتے ہیں لہٰذا $\boldsymbol{C}$ کا رخ $\boldsymbol{k}$ ہو گا۔ یوں $\boldsymbol{k}$ کا $\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ کے ساتھ وہی دائیں ہاتھ کا تعلق ہو گا جو اس کے ساتھ $\boldsymbol{C}$ کا ہے اور مثبت محور z سے دیکھتے ہوئے سیارہ گھڑی کے مخالف رخ گھومے گا۔ اس طرح t بڑھنے سے θ بڑھے گا لہٰذا تمام t کے لیے $\dot{\theta} > 0$ ہو گا۔ ہم اس لمحہ کو ابتدائی لمحہ منتخب کرتے ہیں جب سیارہ سورج کے قریب ترین ہو اور نلکی محدد کو (اگر ضرورت ہو) محور z کے گرد یوں گھماتے ہیں کہ ابتدائی لمحہ پر $\boldsymbol{r}$ اور ابتدائی شعاع ہم مکان ہوں۔ یوں ابتدائی شعاع سیارے کے **حضیض شمس**[۲۵] سے گزرے گا (شکل ۱۲.۳۳)۔

[۲۵] perihelion



شکل ۱۲.۳۲: سورج کے گرد سیارہ اس مستوی میں حرکت کرتا ہے جو $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ کو عمودی ہو اور سورج کے کمیتی مرکز سے گزرتا ہے۔



شکل ۱۲.۳۳: حرکت سیارہ کا محددی نظام۔اوپر سے دیکھتے ہوئے حرکت، $\dot{\theta} > 0$ کی بنا، گھڑی کے مخالف رخ ہے۔

۲۰۱۷۲ اگر ہم وقت کی پیمائش یوں کریں کہ حضیض شمسی پر $t = 0$ ہو تب سیارے کی حرکت کی ابتدائی معلومات درج ذیل ہوں گی۔

۲۰۱۷۳ ا. لمحہ $t = 0$ پر $r = r_0$ ہو گا جو کم سے کم رداس ہے،

۲۰۱۷۴ ب. لمحہ $t = 0$ پر (r کی قیمت کم سے کم ہونے کی بنا) $\dot{r} = 0$ ہو گا،

۲۰۱۷۵ ج. لمحہ $t = 0$ پر $\theta = 0$ ہو گا،

۲۰۱۷۶ د. لمحہ $t = 0$ پر $|\boldsymbol{v}| = v_0$ ہو گا۔

۲۰۱۷۷ مزید

$$
\begin{aligned}
v_0 &= |\boldsymbol{v}|_{t=0} \\
&= \left|\dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta\right|_{t=0} && \text{مساوات ۴} \\
&= \left|r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta\right|_{t=0} && \dot{r} = 0 \text{ پر } t = 0 \\
&= (\left|r\dot{\theta}\right| |\boldsymbol{u}_\theta|)_{t=0} \\
&= \left|r\dot{\theta}\right|_{t=0} && |\boldsymbol{u}_\theta| = 1 \\
&= (r\dot{\theta})_{t=0} && r \text{ اور } \dot{\theta} \text{ دونوں مثبت ہیں}
\end{aligned}
$$

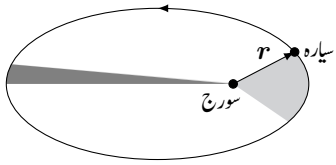
۲۰۱۷۸ کی وجہ سے ہم درج ذیل بھی جانتے ہیں۔

۲۰۱۷۹ ھ. لمحہ $t = 0$ پر $r\dot{\theta} = v_0$ ہو گا۔

۲۰۱۸۰ کپلر کا پہلا قانون (قانون مخروط حصہ)

۲۰۱۸۱ کپلر کا پہلا قانون کہتا ہے کہ سیارے کی حرکت مخروطی ہے جس کے ایک ماسکہ پر سورج پایا جاتا ہے۔اس مخروط کی سنک

$$e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \tag{۱۵}$$



شکل ۱۲.۳۴: سورج اور سیارہ کے بیچ سیدھی لکیر مساوی اوقات میں مساوی رقبوں کو واضح کرتی ہے۔

۲۰۱۸۲ اور قطبی مساوات درج ذیل ہے۔

$$r = \frac{(1+e)r_0}{1+e\cos\theta} \tag{۱۶}$$

۲۰۱۸۳ کپلر کا دوسرا قانون (قانون یکساں رقبہ)

۲۰۱۸۴ کپلر کا دوسرا قانون کہتا ہے کہ سورج سے سیارہ تک رداسی سمتیہ (جو ہمارے نمونہ میں $\boldsymbol{r}$ ہو گا) مساوی اوقات میں مساوی علاقوں کو واضح کرتا ہے (شکل
۲۰۱۸۵ ۱۲.۳۴)۔ اس قانون کو اخذ کرنے کی خاطر ہم مساوات ۱۴ استعمال کرتے ہوئے مساوات ۱۴ میں دی گئی حاصل صلیبی ضرب $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ کی قیمت
۲۰۱۸۶ معلوم کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \\
&= r\boldsymbol{u}_r \times (\dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta) && \text{مساوات ۴} \\
&= r\dot{r}\underbrace{(\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_r)}_{\boldsymbol{0}} + r(r\dot{\theta})\underbrace{(\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_\theta)}_{\boldsymbol{k}} \\
&= r(r\dot{\theta})\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{۱۷}$$

۲۰۱۸۷ لمحہ $t = 0$ پر اس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\boldsymbol{C} = [r(r\dot{\theta})]_{t=0}\boldsymbol{k} = r_0 v_0 \boldsymbol{k} \tag{۱۸}$$

۲۰۱۸۸ مساوات ۱۷ میں $\boldsymbol{C}$ کی یہ قیمت پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$r^2\dot{\theta} = r_0 v_0 \quad \text{یعنی} \quad r_0 v_0 \boldsymbol{k} = r^2\dot{\theta}\boldsymbol{k} \tag{۱۹}$$

۲۰۱۸۹ قطبی محدد میں تفرقی رقبہ درج ذیل لکھا جاتا ہے (حصہ ۱۰.۹)۔

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta$$

۲۰۱۹۰ یوں $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت ایک مستقل ہے:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}r_0 v_0 \tag{۲۰}$$

جو کپلر کا دوسرا قانون ہے۔

زمین کے لیے r_0 تقریباً $1.5 \times 10^8\ \mathrm{km}$ ، v_0 تقریباً $30\ \mathrm{km\,s^{-1}}$ ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ تقریباً $2.25 \times 10^9\ \mathrm{km^2\,s^{-1}}$ ہو گا۔ یوں آپ کے دل کی ہر ایک دھڑکن میں زمین اپنے مدار میں $30\ \mathrm{km}$ فاصلہ طے کرتی ہے اور سورج سے زمین تک رداسی خط $2.25 \times 10^9\ \mathrm{km^2}$ رقبہ واضح کرتا ہے۔

کپلر کے پہلے قانون کا ثبوت

یہ دکھانے کی خاطر کہ سورج کے گرد سیارے کا مدار مخروطی ہوتا ہے جس کے ایک ماسکہ پر سورج واقع ہوتا ہے، ہمیں r کو متغیر θ کا تفاعل لکھنا ہو گا۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں ایک لمبا حساب کرنا ہو گا۔

ہم وقتی طور پر $\dot{\theta}$ سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر مساوات ۶ اور مساوات ۱۰ میں $\boldsymbol{u}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ کے عددی سر ایک دوسرے کے برابر پر لکھ کر درج ذیل مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \tag{۲۱}$$

اس میں ہم مساوات ۱۹ سے $\dot{\theta}$ کی جگہ $\frac{r_0 v_0}{r^2}$ پر کر کے ترتیب دیتے ہوئے

$$\ddot{r} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2} \tag{۲۲}$$

حاصل کرتے ہیں۔ ہم متغیرات تبدیل کرتے ہوئے اس سے درجہ اول کی تفرقی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ یوں زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے

$$p = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$$

لکھ کر مساوات ۲۲ درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2} \tag{۲۳}$$

دونوں اطراف کو 2 سے ضرب کرتے ہوئے r کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔

$$p^2 = (\dot{r})^2 = -\frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} + \frac{2GM}{r} + C_1 \tag{۲۴}$$

لمحہ $t = 0$ پر ابتدائی معلومات $r = r_0$ اور $\dot{r} = 0$ سے C_1 کی قیمت تعین ہو گی۔

$$C_1 = v_0^2 - \frac{2GM}{r_0}$$

۲.۲.۵ اس طرح مساوات ۲۴ کو ترتیب دینے کے بعد درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\dot{r}^2 = v_0^2\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \tag{۲۵}$$

۲.۲.۶ مساوات ۲۱ سے مساوات ۲۵ حاصل کرنے میں ہم نے r کی دو درجی تفرقی مساوات سے r کی ایک درجی تفرقی مساوات حاصل کی۔ ہمیں اب θ کی روپ
۲.۲.۷ میں r کو لکھنا باقی ہے لہٰذا ہم θ کو دوبارہ مساوات میں لاتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر مساوات ۲۵ کے دونوں اطراف کو مساوات $r^2\dot{\theta} = r_0 v_0$
۲.۲.۸ (مساوات ۱۹) کے مطابق تی اطراف سے تقسیم کر کے حقیقت $\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{\mathrm{d}r/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ بروئے کار لاتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GM}{r_0^2 v_0^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \tag{۲۶}$$

$$= \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} + 2h\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \qquad h = \frac{GM}{r_0^2 v_0^2} \tag{۲۷}$$

۲.۲.۹ اس کی مزید سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل پر کرتے ہیں۔

$$u = \frac{1}{r}, \quad u_0 = \frac{1}{r_0}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{1}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$$

۲.۲.۱۰ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = u_0^2 - u^2 + 2hu - 2hu_0 = (u_0 - h)^2 - (u - h)^2 \tag{۲۸}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \mp\sqrt{(u_0 - h)^2 - (u - h)^2} \tag{۲۹}$$

۲.۲.۱۱ ہمیں کس علامت کا انتخاب کرنا ہو گا؟ ہم جانتے ہیں کہ $\dot{\theta} = \frac{r_0 v_0}{r^2}$ مثبت ہے۔ ساتھ ہی $t = 0$ پر r کم سے کم قیمت سے شروع ہوتا ہے لہٰذا یہ یکدم
۲.۲.۱۲ گھٹ نہیں سکتا ہے، اور ابتدائی مثبت لمحات میں $\dot{r} \geq 0$ ہو گا لہٰذا

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} \leq 0 \quad \text{اور} \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} \geq 0$$

۲.۲.۱۳ ہو گا۔ مساوات ۲۹ میں منفی علامت درست ہو گی۔ یہ جاننے کے بعد ہم مساوات ۲۹ کو ترتیب دے کر θ کے لحاظ سے دونوں اطراف اک تکمل لیتے ہیں۔

$$\frac{-1}{\sqrt{(u_0 - h)^2 - (u - h)^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = 1$$
$$\cos^{-1}\left(\frac{u - h}{u_0 - h}\right) = \theta + C_2 \tag{۳۰}$$

۲.۲.۱۴ چونکہ $\theta = 0$ پر $u = u_0$ ہو گا اور $\cos^{-1}(1) = 0$ ہوتا ہے لہٰذا C_2 صفر ہو گا۔ یوں

$$\frac{u - h}{u_0 - h} = \cos\theta \tag{۳۱}$$

اور

$$\frac{1}{r} = u = h + (u_0 - h)\cos\theta \tag{۳۲}$$

ہو گا جس کو چند الجبرائی اقدام کے بعد

$$r = \frac{(1+e)r_0}{1+e\cos\theta} \tag{۳۳}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$e = \frac{1}{r_0 h} - 1 = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \tag{۳۴}$$

ہوں گے۔ مساوات ۳۳ اور مساوات ۳۴ مل کر کہتے ہیں کہ سیارے کی راہ مخروطی ہو گی جس کے ایک ماسکہ پر سورج ہو گا اور جس کی سنک $e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$ ہو گی۔ یہ قانون کپلر اول کی جدید مساوات ہے۔

کپلر کا تیسرا قانون (قانون وقت اور فاصلہ)

ایک سیارہ جتنے وقت T میں اپنے سورج کے گرد ایک چکر کاٹتا ہے، اس کو سیارہ کا **دوری عرصہ**[۲۶] کہتے ہیں۔ کپلر کا تیسرا قانون کہتا ہے کہ T اور سیارے کے مدار کے نصف محور اکبر a کے بیچ درج ذیل تعلق پایا جاتا ہے۔

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \tag{۳۵}$$

چونکہ کسی بھی شمسی نظام کے اندر اس مساوات کا دایاں ہاتھ ایک مستقل ہو گا لہٰذا اس نظام میں تمام سیاروں کے لیے T^2 اور a^3 کا تناسب یکساں ہو گا۔

کپلر کا تیسرا قانون ہمیں ہمارے نظام شمسی کی جسامت کی معلومات حاصل کرنے کا موقع دیتا ہے۔ ہم ہر ایک سیارے کے نصف محور اکبر کو فلکیاتی اکائیوں میں لکھ سکتے ہیں۔ زمین کے نصف محور اکبر کی لمبائی فلکیاتی اکائی کہلاتی ہے۔ ہم کسی بھی لمحہ تمام سیاروں کے بیچ فاصلوں کو بھی فلکیاتی اکائیوں میں لکھ سکتے ہیں۔ اب آخری کام، ان تمام فاصلوں میں کسی ایک کی لمبائی، کلومیٹروں میں معلوم کرنا رہ گیا ہے۔ زھرہ سے ٹکرانے کے بعد ریڈار کی واپس پلٹی موجوں سے ہم زمین اور زھرہ کے بیچ فاصلہ ناپ سکتے ہیں۔ اس قسم کے تجربات سے ہم اب جانتے ہیں کہ ایک فلکیاتی اکائی $149\,597\,870\ \mathrm{km}$ کے برابر ہے۔

ہم سیارے کے ترخیمی مدار میں گھیرے گئے رقبہ کے دو مختلف کلیات کو ملا کر کپلر کا تیسرا قانون اخذ کرتے ہیں:

$$\text{رقبہ} = \pi ab \qquad \text{کلیہ 1}$$

$$\text{رقبہ} = \int_0^T \mathrm{d}S \qquad \text{کلیہ 2}$$

$$= \int_0^T \frac{1}{2} r_0 v_0 \,\mathrm{d}t \qquad \text{مساوات ۲۰}$$

$$= \frac{1}{2} T r_0 v_0$$

---

[۲۶] orbitalperiod

ان دو مساوات کو ایک دوسرے کے مساوی رکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

ترخیم کے لیے $b = a\sqrt{1-e^2}$ ہوتا ہے

$$T = \frac{2\pi ab}{r_0 v_0} = \frac{2\pi a^2}{r_0 v_0}\sqrt{1-e^2} \qquad (۳۶)$$

ہمیں اب a اور e کو r_0 ، v_0 ، G اور M کی روپ میں لکھنا ہے۔ مساوات ۳۴ ہمیں e دیتی ہے جبکہ مساوات ۳۳ میں θ کو π کے برابر پر کرنے سے

$$r_{\text{بلند تر}} = r_0\frac{1+e}{1-e}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا a کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$2a = r_0 + r_{\text{بلند تر}} = \frac{2r_0}{1-e} = \frac{2r_0 GM}{2GM - r_0 v_0^2} \qquad (۳۷)$$

مساوات ۳۶ کے دونوں اطراف کا مربع لے کر اس میں مساوات ۳۴ اور مساوات ۳۷ کے نتائج پر کرنے سے کپلر کا تیسرا قانون حاصل ہو گا (سوال ۱۲.۱۸۲)۔

مدار

اگرچہ کپلر نے یہ قوانین تجرباتی طور پر دریافت کیے، قوانین نیوٹن سے قوانین کپلر کے حصول کے بعد ہم جانتے ہیں کہ یہ قوانین ہر اس جسم پر لاگو ہوں گے جس پر بالعکس مربع قانون کے تحت قوت لاگو ہو۔ یہ سورج کے گرد ہالی دم دار ستارہ اور آئکارس سیارچہ کی مدار اور زمین کے گرد چاند کے مدار پر لاگو ہوں گے۔ اسی طرح یہ چاند کے گرد اپالو 8 کے خلائی جہاز کے مدار پر بھی لاگو ہوتے ہیں۔ ایٹم کے مرکزہ پر مارے گئے بار بردار ذرات قوانین کپلر کو مطمئن کرتے ہوئے قطع زائد راہوں پر فشاں ہوتے ہیں۔

جدول ۱۲.۱ میں نظام شمسی کے سیاروں کے مدار کی معلومات دی گئی ہے۔ مصنوعی سیاروں کے حاصل مواد سے ہم سمندروں میں پانی کی سطح میں فرق جان سکے اور بحر الکاہل میں دور ترین جزیروں کا درست مقام معلوم کر سکے۔ اس مواد سے ہمیں یہ بھی معلوم ہوا کہ سورج اور چاند کی قوت کشش زمین کے گرد مصنوعی سیاروں کے مدار پر اثر انداز ہوں گے اور شمسی اخراج اتنا دباو پیدا کرتا ہے کہ مدار کی شکل تبدیل ہو جائے۔

جدول ۱۲.۲ اور جدول ۱۲.۳ میں مزید مواد پیش کیا گیا ہے۔

سوالات

سوال ۱۲.۱۶۹: سکائے لیب 4 کا نصف محور اکبر $a = 6808\ \text{km}$ ہے۔ کپلر کے تیسرے قانون میں زمین کی کمیت کو M لیتے ہوئے دوری عرصہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس کا حساب لگائیں۔ جدول ۱۲.۲ میں دی گئی قیمت کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۱۲.۱۷۰: حضیض شمسی پر سورج سے زمین کا فاصلہ تقریباً $149\,577\,000\ \text{km}$ ہوتا ہے اور سورج کے گرد زمین کے مدار کی سنک 0.0167 ہے۔ حضیض شمس پر زمین کی رفتار v_0 تلاش کریں (مساوات ۱۱۵ استعمال کریں)۔

سوال ۱۲.۱۷۱: روس نے جولائی ۱۹۶۵ میں پروٹان 1، مصنوعی سیارہ مدار میں چھوڑا جس کی کمیت (چھوڑتے وقت) $12\,200\ \text{kg}$، بلندی حضیض $183\ \text{km}$، بلندی اوج $589\ \text{km}$ اور دوری عرصہ 92.25 منٹ تھا۔ زمین کی کمیت اور تجاذبی مستقل کی قیمتیں استعمال کر کے مساوات ۳۵ سے نصف محور اکبر a تلاش کریں۔ اس کا موازنہ اس عدد سے کریں جو حضیض اور اوج کے مجموعہ کے ساتھ زمین کا قطر جمع کرنے سے حاصل ہو گا۔

جدول ۱۲.۱: شمسی سیاروں کے a ، e اور T کی قیمتیں۔

سیارہ	نصف محور $a^{\dagger}$	سنک e	دوری عرصہ T
عطارہ	57.95	0.2056	87.967دن
زھرہ	108.11	0.0068	224.701دن
زمین	149.57	0.0167	365.256دن
مریخ	227.84	0.0934	1.8808سال
مشتری	778.14	0.0484	11.8613سال
زحل	1427.0	0.0543	29.4568سال
یورانس	2870.3	0.0460	84.0081سال
نیپچون	4499.9	0.0082	164.784سال
پلوٹو	5909	0.2481	248.35سال

† ملین کلومیٹر (10^6 km)

جدول ۱۲.۲: زمین کے گرد مصنوعی سیاروں کی معلومات

نام	پرواز	خلائی زندگی	کمیت	دوری عرصہ ††	حضیض †	اوج †	نصف محور اکبر †	سنک
سپٹنک 1	اکتوبر 1957	57.6دن	83.6	96.2	215	939	6955	0.052
ونگارڈ 1	مارچ 1958	300سال	1.47	138.5	649	4340	8872	0.208
سنکام 3	اگست 1964	$> 10^6$ سال	39	1436.2	35718	35903	42189	0.002
سکائے لیب 4	نومبر 1973	84.06دن	13980	93.11	422	437	6808	0.001
ٹائرس 11	اکتوبر 1978	500سال	734	102.12	850	866	7236	0.001
گوس 4	ستمبر 1980	$> 10^6$ سال	627	1436.2	35776	35800	42166	0.0003
انٹل سیٹ 5	دسمبر 1980	$> 10^6$ سال	1928	1417.67	35143	35707	41803	0.007

† کلومیٹر
†† منٹ

جدول ۱۲.۳: اعدادی مواد

تجاذبی مستقل	$6.6720 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$
کمیت شمس	1.99×10^{30} kg
کمیت زمین	5.975×10^{24} kg
استوائی رداس زمین	6378.533 km
قطبی رداس زمین	6356.912 km
زمین کا ہم دوری عرصہ	1436.1 منٹ
زمین کا سورج کے گرد دوری عرصہ	365.256 دن (ایک سال)

سوال ۱۲.۱۷۲: (ا) وائکنگ 1 مصنوعی سیارہ، جس کا دوری عرصہ 1639 منٹ تھا، نے اگست 1975 تا جون 1976 مریخ کا جائزہ کیا۔ مریخ کی کمیت 6.418×10^{23} kg لیتے ہوئے وائکنگ 1 کا نصف محور اکبر تلاش کریں۔ (ب) مریخ کی سطح سے وائکنگ 1 کا کم سے کم فاصلہ 1499 km اور زیادہ سے زیادہ فاصلہ 35 800 km تھا۔ ان حقائق اور جزو-ا میں حاصل نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مریخ کے اوسط قطر کی اندازاً قیمت معلوم کریں۔

سوال ۱۲.۱۷۳: وائکنگ 2 مصنوعی سیارہ نے ستمبر 1975 تا اگست 1976 مریخ کا جائزہ کیا۔ اس کے نصف محور اکبر 22 030 km تھا۔ اس کا دوری عرصہ دریافت کریں۔

سوال ۱۲.۱۷۴: ہم عصر مدار

زمین کی استوائی مستوی میں کئی مصنوعی سیاروں کے مدار تقریباً دائری ہے اور ان کا دوری عرصہ عین ایک دن کے برابر ہے۔ یوں یہ بلندی پر رہتے ہوئے سطح زمین کے اوپر ساکن نظر آتے ہیں۔ ایسے مدار کو **ہم عصر مدار**[۲۶] کہتے ہیں۔

ا. ہم عصر مصنوعی سیارے کا نصف محور اکبر تقریباً کتنا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ب. زمین کی سطح سے ہم عصر مدار کتنی بلندی پر ہو گا؟

ج. جدول ۱۲.۲ میں دیے گئے مصنوعی سیاروں میں کس کا مدار تقریباً ہم عصر ہے؟

سوال ۱۲.۱۷۵: مریخ کی کمیت 6.418×10^{23} kg ہے جبکہ مریخ کا ایک دن 1477.4 منٹ ہے۔ مریخ کے گرد مدار میں ایک مصنوعی سیارہ جس کا دوری عرصہ مریخی دن کے برابر ہو، سطح مریخ سے کتنی بلندی پر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۲.۱۷۶: زمین کے گرد چاند کا دوری عرصہ $2.360\,55 \times 10^6$ سیکنڈ ہے۔ چاند کتنا دور ہے؟

سوال ۱۲.۱۷۷: زمین کے گرد ایک مصنوعی سیارہ دائری مدار میں حرکت کرتا ہے۔ مصنوعی سیارے کی رفتار کو مدار کے رداس کا تفاعل لکھیں۔

سوال ۱۲.۱۷۸: نظام شمسی میں سیاروں کا $\frac{T^2}{a^3}$ کتنا ہو گا؟ زمین کے گرد مصنوعی سیاروں کے لیے کتنا ہو گا؟ چاند کے گرد مصنوعی سیاروں کے لیے یہ کتنا ہو گا؟ (چاند کی کمیت 7.354×10^{22} kg ہے۔)

بغیر کیلکولیٹر استعمال کیے قلم و کاغذ سے حل کریں

سوال ۱۲.۱۷۹: مساوات ۱۵ میں v_0 کی کس قیمت کے لیے مساوات ۱۶ کا مدار دائری ہو گا؟ ترخیمی ہو گا؟ قطع مکافی ہو گا؟ قطع زائد ہو گا؟

سوال ۱۲.۱۸۰: دکھائیں کہ دائری مدار میں سیارہ یکساں رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ (اشارہ: یہ قوانین کپلر کی بدولت ہو گا۔)

سوال ۱۲.۱۸۱: فرض کریں ایک مستوی میں متحرک ذرے کا تعین گرسمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہے اور یہ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ کی شرح سے رقبہ واضح کرتا ہے۔ محدد متعارف کیے بغیر اور مطلوبہ تفارق کی موجودگی تصور کرتے ہوئے، بڑھوتری اور حد پر مبنی درج ذیل مساوات کی جیومیٹریائی جواز پیش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}|$$

سوال ۱۲.۱۸۲: کپلر کے تیسرے قانون کا اشتقاق پورا کریں (مساوات ۳۶ کے بعد حصہ۔)

---

[۲۶] geosynchronousorbit,geostationaryorbit

سوال ۱۲.۱۸۳: کسی ستارہ کے گرد دو سیارے دائری مدار میں طواف کرتے ہیں۔ سیارہ A ستارے کے قریب ہے جبکہ سیارہ B ستارہ سے زیادہ فاصلہ پر ہے۔ فرض کریں لمحہ t پر ان کے مقام بالترتیب

$$\boldsymbol{r}_A(t) = 2\cos(2\pi t)\boldsymbol{i} + 2\sin(2\pi t)\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{r}_B(t) = 3\cos(\pi t)\boldsymbol{i} + 3\sin(\pi t)\boldsymbol{j}$$

ہیں جہاں ستارہ کا مقام مبدا ہے اور فاصلوں کو فلکیاتی اکائیوں میں ناپا گیا ہے۔ (دھیان رہے کہ سیارہ A کی رفتار سیارہ B سے زیادہ ہے۔)

سیارہ A پر رہائش پذیر لوگوں کا خیال ہے کہ ان کا سیارہ، ان کے شمسی نظام کا مرکز ہے۔

ا. سیارہ A کو نئی محددی نظام کا مبدا تصور کرتے ہوئے سیارہ B کے مقام کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔ اپنا جواب $\cos(\pi t)$ اور $\sin(\pi t)$ کی صورت میں لکھیں۔

ب. سیارہ A کو مبدا تصور کرتے ہوئے سیارہ B کی راہ ترسیم کریں۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ان لوگوں کو سیاروں کی حرکت سمجھنے میں کتنی دشواری ہو گی۔ کپلر سے پہلے یہی حال ہمارا تھا۔

سوال ۱۲.۱۸۴: کپلر نے دریافت کیا کہ سورج کے گرد زمین ترخیمی راہ پر طواف کرتی ہے اور سورج اس کے ایک ماسکہ پر پایا جاتا ہے۔ سورج کے مرکز سے زمین کے مرکز تک لمحہ t پر تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ لیں۔ زمین کے جنوبی قطب سے شمالی قطب تک سمتیہ $\boldsymbol{w}$ لیں۔ ہم جانتے ہیں کہ $\boldsymbol{w}$ مستقل ہے اور ترخیم کے مستوی کو عمودی نہیں ہے (زمین کا محور جھکا ہے)۔ سمتیات $\boldsymbol{w}$ اور $\boldsymbol{r}(t)$ کے روپ میں (ا) حضیض شمسی، (ب) اوج شمسی، (ج) اعتدالین (جب دن اور رات ایک دوسرے کے برابر ہوں)، (د) لمبا ترین دن (گرم ترین دن)، (ہ) چھوٹا ترین دن (سرد ترین دن) کے ریاضی معنی پیش کریں۔

نلکی محددی نظام

سوال ۱۲.۱۸۵: نلکی محدد میں مقام اور حرکت کے اکائی سمتیات۔

فضا میں متحرک ذرے کا مقام نلکی محدد میں لکھتے ہوئے ہم

$$\boldsymbol{u}_r = \cos(\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{u}_\theta = -(\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\boldsymbol{j}$$

اور $\boldsymbol{k}$ اکائی سمتیات استعمال کرتے ہیں۔ یوں متحرک ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r + z\boldsymbol{k}$ ہو گا جہاں r مبدا سے ذرے کا مثبت قطبی فاصلہ ہے۔

ا. دکھائیں کہ $\boldsymbol{u}_r$ ، $\boldsymbol{u}_\theta$ اور $\boldsymbol{k}$ ، اسی ترتیب میں، اکائی سمتیات کا دایاں ہاتھ چوکھٹ دیتے ہیں۔

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_r}{\mathrm{d}\theta} = \boldsymbol{u}_\theta, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\boldsymbol{u}_r$$

ج. یہ فرض کرتے ہوئے کہ t کے لحاظ سے درکار تفارق موجود ہیں، $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ اور $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}$ کو $\boldsymbol{u}_r$ ، $\boldsymbol{u}_\theta$ ، $\boldsymbol{k}$ ، $\dot{r}$ اور $\dot{\theta}$ کی صورت میں لکھیں۔ (نقطہ t کے لحاظ سے تفرق کو ظاہر کرتا ہے، لہٰذا $\dot{\boldsymbol{r}}$ سے مراد $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ اور $\ddot{\boldsymbol{r}}$ سے مراد $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔) حصہ ۱۲.۵ میں ان کلیات کو اخذ کیا گیا ہے اور ساتھ ہی ان سمتیات کو فلکیاتی سیاروں کی حرکت بیان کرنے کے لیے استعمال کیا گیا ہے۔

سوال ۱۲.۱۸۶: نلکی محدد میں لمبائی قوس

ا. دکھائیں کہ $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ کو نلکی محدد میں بیان کرنے سے $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}z^2$ حاصل ہوتا ہے۔

ب. ایک ڈبے کے کناروں اور وتر کی صورت میں جزو-ا کے نتیجہ کی تشریح کریں۔ اس ڈبہ کا خاکہ بنائیں۔

ج. منحنی $r = e^\theta,\ z = e^\theta,\ 0 \le \theta \le \ln 8$ کی لمبائی جزو-ا کے نتیجہ کی مدد سے حاصل کریں۔

کروی محددی نظام

سوال ۱۲.۱۸۷: مقام اور رفتار کے لیے مستعمل کروی محدد کے اکائی سمتیات

فضا میں نقطہ P کے کروی محددی محور r ، θ اور ϕ میں کسی دو کو مستقل رکھتے ہوئے تیسرے کو بڑھنے دیں۔ جس رخ P بڑھتا ہے اس رخ کا اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ لیں جس کے ساتھ مطابقتی زیر نوشت منسلک ہو۔ ایسے تین اکائی سمتیات $\boldsymbol{u}_r$ ، $\boldsymbol{u}_\theta$ اور $\boldsymbol{u}_\phi$ ہوں گے۔

ا. $\boldsymbol{u}_r$ ، $\boldsymbol{u}_\theta$ اور $\boldsymbol{u}_\phi$ کو $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کی صورت میں لکھیں۔

ب. دکھائیں کہ $\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_\theta = 0$ ہوگا۔

ج. دکھائیں کہ $\boldsymbol{u}_\theta = \boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_\theta$ ہوگا۔

د. دکھائیں کہ $\boldsymbol{u}_r$ ، $\boldsymbol{u}_\theta$ اور $\boldsymbol{u}_\phi$ ، اسی ترتیب میں، آپس میں عمودی سمتیات کا دایاں ہاتھ چوکھٹ دیتے ہیں۔

سوال ۱۲.۱۸۸: کروی محدد میں لمبائی قوس

ا. دکھائیں کہ $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ کو کروی محدد میں بیان کرنے سے $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2$ حاصل ہوتا ہے۔

ب. ٹھوس کرہ سے کاٹے گئے ڈبے کے کناروں اور وتر کی صورت میں جزو-ا کے نتیجہ کی تشریح کریں۔ اس ڈبہ کا خاکہ بنائیں۔

ج. منحنی $r = 2e^\theta,\ \theta = \frac{\pi}{6},\ 0 \le \phi \le \ln 8$ کی لمبائی جزو-ا میں حاصل نتیجہ کی مدد سے حاصل کریں۔

باب ۱۳

کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفارق

جائزہ

سائنس میں دو یا دو سے زائد غیر تابع متغیرات کے تفاعل ایک متغیر کے تفاعل سے زیادہ کثرت سے پائے جاتے ہیں اور ان کی علم احصاء زیادہ عمدہ ہوتی ہے۔ زیادہ متغیرات ایک دوسرے پر زیادہ طریقوں سے اثر انداز ہو سکتے ہیں جس کی وجہ سے ان کے تفارق مختلف اور زیادہ دلچسپ صورتیں اختیار کر سکتے ہیں۔ ان کے تکملات زیادہ اقسام کے عملی مسائل میں کام آتے ہیں۔ احتمال، سیالی حرکیات، اور برقیات، وغیرہ، پر غور کے دوران ایک سے زائد متغیرات کے تفاعل قدرتی طور پر رونما ہوتے ہیں۔ ان تفاعل کی ریاضیات، سائنس کی عظیم کامیابیوں میں سے ایک ہے۔

۱۳.۱ کثیر متغیرات کے تفاعل

کئی تفاعل ایک سے زائد متغیرات کے تابع ہوتے ہیں۔ دائری نلکی کا حجم، اس کے رداس اور قد سے، تفاعل $H = \pi r^2 h$ دیتا ہے۔ مستوی xy میں نقطہ $N(x, y)$ کے دو محدد سے، قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ کا قد تفاعل $f(x, y) = x^2 + y^2$ دیتا ہے۔ اس حصہ میں ہم ایک سے زیادہ متغیرات کے تابع تفاعل متعارف کرتے ہیں اور ان کو ترسیم کرنے کے طریقوں پر غور کرتے ہیں۔

تفاعل اور متغیرات

کثیر غیر تابع حقیقی متغیرات کے حقیقی قیمت تفاعل کی تعریف بالکل واحد متغیر کے تفاعل کی طرح کی جاتی ہے۔ ان کے وقفے حقیقی (تین، چار، وغیرہ) اعداد کے مرتب جوڑی کے سلسلے ہوں گے اور ان کی سعت، اس طرح کے حقیقی اعداد کے سلسلے ہوں گے جن کے ساتھ ہم کام کرتے آرہے ہیں۔

تعریفات: فرض کریں n عدد حقیقی اعداد $x_1, x_2, \cdots, x_n$ کا سلسلہ D ہے۔ تب D پر **حقیقی قیمت تفاعل**[1] f سے مراد وہ قاعدہ ہے جو D کے ہر رکن کو حقیقی عدد

$$w = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

[1] realvaluedfunction

مختص کرتا ہو۔ سلسلہ D اس تفاعل کا **دائرہ کار**[۲] ہو گا۔ تفاعل f کی w قیمتوں کا سلسلہ f کی **سعت**[۳] ہو گی۔ علامت w تفاعل f کا **تابع متغیر**[۴] ہو گا اور f کو n **غیر تابع متغیرات**[۵] x_1 تا x_n کا تفاعل کہتے ہیں۔ ہم ان x کو تفاعل کے **داخلی متغیرات**[۶] اور w کو تفاعل کا **خارجی متغیر**[۷] بھی کہتے ہیں۔

□

اگر f دو غیر تابع متغیرات کا تفاعل ہو تب عموماً ہم ان غیر تابع متغیرات کو x اور y کہتے ہیں اور f کے دائرہ کار کو مستوی xy میں ایک خطہ تصور کرتے ہیں۔ اگر f تین غیر تابع متغیرات کا تفاعل ہو تب ہم ان متغیرات کو x ، y اور z کہتے ہیں اور تفاعل کے دائرہ کار کو فضا میں ایک خطہ تصور کرتے ہیں۔

عملی استعمال میں ہم وہ حروف استعمال کرتے ہیں جو ہمیں ان چیزوں کی یاد دلا سکیں جن کے لیے یہ متغیرات استعمال کیے گئے ہوں۔ یہ کہنے کی خاطر کہ دائری نلکی کا حجم اس کے رداس r اور قد h کا تفاعل ہو گا، ہم $H = f(r,h)$ لکھ سکتے ہیں۔ بالخصوص ہم $f(r,h)$ کی جگہ وہ کلیہ استعمال کر سکتے ہیں جو r اور h کی قیمتوں سے H کی قیمت دیتا ہو، یعنی ہم $H = \pi r^2 h$ لکھ سکتے ہیں۔ دونوں صورتوں میں r اور h غیر تابع متغیرات ہوں گے اور H تابع متغیر ہو گا۔

ہمیشہ کی طرح، ہم تفاعل کی تعریفی کلیہ میں غیر تابع متغیرات کی قیمتیں پر کر کے مطابقتی تابع متغیر کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

مثال ۱.۱۳: نقطہ $(3,0,4)$ پر تفاعل $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$f(3,0,4) = \sqrt{(3)^2+(0)^2+(4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

□

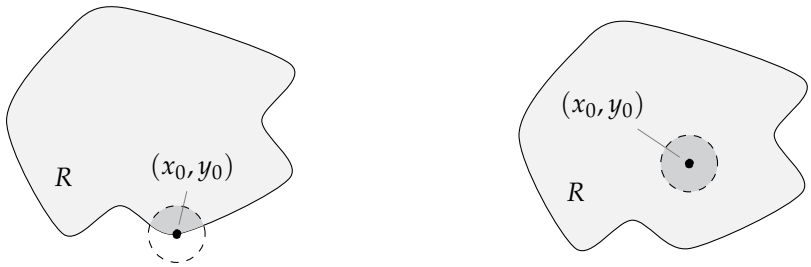
دائرہ کار

ایک سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کی تعریف میں، ہمیشہ کی طرح، ہم ان مداخل کو شامل نہیں کرتے ہیں جو مخلوط اعداد دیتے ہوں یا جن کی وجہ سے تقسیم صفر کا عمل پیدا ہوتا ہو۔ یوں $f(x,y) = \sqrt{y-x^2}$ میں y کی قیمت x^2 کی قیمت سے کم نہیں ہو سکتی ہے اور $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ میں xy کی قیمت صفر نہیں ہو سکتی ہے۔ ان شرائط کو مطمئن کرتے ہوئے، تفاعل کے دائرہ کار سے مراد وہ بڑے سے بڑا سلسلہ ہو گا جس پر تفاعل کا تعریفی قاعدہ حقیقی اعداد پیدا کرتا ہو۔

مثال ۲.۱۳: دو متغیرات کے تفاعل

---

[۲] domain
[۳] range
[۴] dependentvariable
[۵] independentvariable
[۶] inputvariable
[۷] outputvariable



(ا)اندرونی نقطہ (ب)سرحدی نقطہ

شکل ۱.۱۳: مستوی خطہ R کا اندرونی نقطہ اور سرحدی نقطہ۔ اندرونی نقطہ لازماً R کا حصہ ہو گا جبکہ ضروری نہیں کہ سرحدی نقطہ کا حصہ ہو۔

تفاعل	دائرہ کار	سعت
$w = \sqrt{y - x^2}$	$y \geq x^2$	$[0, \infty)$
$w = \frac{1}{xy}$	$xy \neq 0$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$w = \sin xy$	پورا مستوی	$[-1, 1]$

۲۰۳۵۵

۲۰۳۵۶ □

۲۰۳۵۷ مثال ۳.۱۳: تین متغیرات کے تفاعل

۲۰۳۵۸

تفاعل	دائرہ کار	سعت
$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	پوری فضا	$[0, \infty)$
$w = \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$	$(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$	$(0, \infty)$
$w = xy \ln z$	نصف فضا $z>0$	$(-\infty, \infty)$

۲۰۳۵۹

۲۰۳۶۰ □

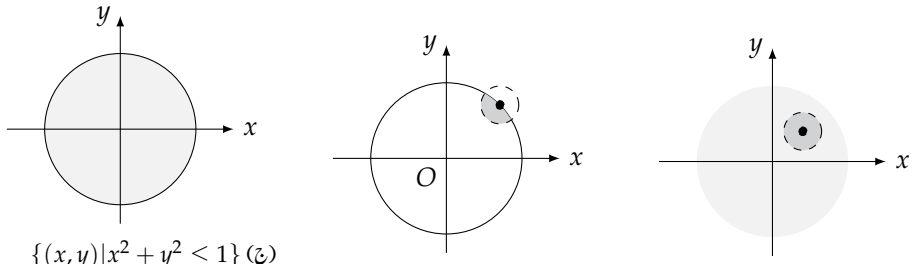
۲۰۳۶۱ بالکل حقیقی لکیر کے وقفوں پر معین تفاعل کے دائرہ کار کی طرح، مستوی کے حصوں پر معین تفاعل کے دائرہ کار کے اندرونی نقطے اور سرحدی نقطے ہو سکتے ہیں۔

۲۰۳۶۲ تعریفات

۲۰۳۶۳ مستوی xy میں خطہ (سلسلہ) R میں نقطہ (x_0, y_0) تب R کا **اندرونی نقطہ**[8] ہو گا جب یہ اس قرص کا مرکز ہو جو مکمل طور پر R میں پایا جاتا ہو

۲۰۳۶۴ (شکل ۱.۱۳)۔ نقطہ (x_0, y_0) تب R کا **سرحدی نقطہ**[9] ہو گا جب ہر اس قرص میں، جس کا مرکز (x_0, y_0) ہو، R کے بیرونی اور R کے

[8] interiorpoint
[9] boundarypoint



(ا) $\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$
کھلا قرص۔ ہر نقطہ اندرونی نقطہ ہے۔

(ب) $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$
اکائی قرص کی سرحد۔ (اکائی دائرہ۔)

(ج) $\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$
بند اکائی قرص۔ تمام سرحدی نقطے اس میں شامل ہیں۔

شکل ۱۳.۲: مستوی میں اکائی قرص کے اندرونی نقطے اور سرحدی نقطے۔

اندرونی نقطے پائے جاتے ہوں۔ (ضروری نہیں کہ سرحدی نقطہ از خود R میں شامل ہو۔)

ایک خطہ کے اندرونی نقطے، بطور ایک سلسلہ، اس خطہ کی **اندرونی**[10] ہوں گے۔ اس خطہ کے سرحدی نقطے اس کی **سرحد**[11] ہیں۔ ایسا خطہ جو مکمل طور پر اندرونی نقطوں پر مشتمل ہو **کھلا**[12] خطہ کہلاتا ہے۔ ایسا خطہ جس میں اس کے تمام سرحدی نقطے شامل ہوں **بند**[13] خطہ کہلاتا ہے۔

حقیقی اعداد کے وقفوں کی طرح، مستوی میں بعض خطے نا کھلا اور نا ہی بند ہوتے ہیں۔ شکل ۱۳.۲ کے کھلا قرص میں چند، نا کہ تمام، سرحدی نقطے شامل کرنے سے ایسا خطہ حاصل ہو گا جو نا کھلا ہو گا اور نا ہی بند ہو گا۔ اس میں شامل سرحدی نقطے اس کو کھلا وقفہ بننے سے روکتے ہیں جبکہ اس میں نا شامل سرحدی نقطے اس کو بند خطہ بننے سے روکتے ہیں۔

تعریف: مستوی میں مقررہ رداس کے قرص میں پائے جانے والا خطہ **محدود**[14] ہو گا۔ ایسا خطہ جو محدود نا ہو **غیر محدود**[15] ہو گا۔

□

مثال ۱۳.۴:

مستوی میں محدود سلسلے: خطی قطعات؛ مثلثیں؛ مثلثوں کی اندرون؛ مستطیلیں؛ اقراص۔

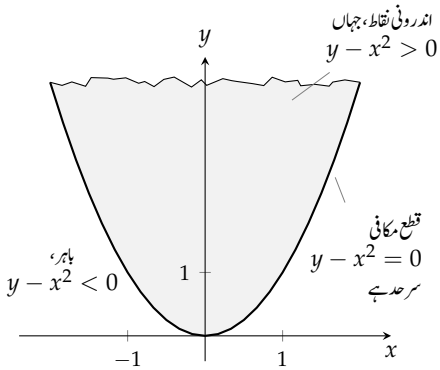
مستوی میں غیر محدود سلسلے: خطوط،؛ محددی محور؛ لا تناہی وقفہ پر معین تفاعل کی ترسیم؛ ربعات، نصف مستوی؛ مستوی از خود۔

□

مثال ۱۳.۵: تفاعل $f(x,y)=\sqrt{y-x^2}$ کا دائرہ کار بند اور غیر محدود ہے (شکل ۱۳.۳)۔ قطع مکافی $y=x^2$ اس دائرہ کار کی سرحد ہے۔ قطع مکافی سے اوپر نقطے دائرہ کار کی اندرون ہیں۔ □

---

[10] interior
[11] boundary
[12] open
[13] closed
[14] bounded
[15] unbounded



شکل ۱۳.۳: تفاعل $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$ کا دائرہ کار سایہ دار خطہ ہے اور اس کی سرحد قطع مکافی $y = x^2$ ہے۔

فضا میں اندرون، سرحد، کھلا، بند، محدود اور غیر محدود کی تعریفیں عین مستوی میں انہیں کی تعریفوں کی طرح ہیں۔ اضافی بُعد کی وجہ سے ہم قرص کی بجائے گیند لیتے ہیں۔ **بند گیند**[16] میں کرہ کے اندرونی نقطوں کے ساتھ کرہ کی سطح بھی شامل ہو گی۔ **کھلا گیند**[17] میں کرہ کے اندرونی نقطے شامل ہوں گے جبکہ کرہ کی سطح اس میں شامل نہیں ہو گی۔

تعریفات: فضا میں خطہ D میں نقطہ (x_0, y_0, z_0) اس صورت D کا **اندرونی نقطہ**[18] ہو گا جب یہ نقطہ ایسے گیند کا مرکز ہو جو مکمل طور پر D میں پایا جاتا ہو۔ اگر ہر گیند، جس کا مرکز (x_0, y_0, z_0) ہو، میں شامل نقطوں میں کچھ نقطے D کے اندرونی اور کچھ اس کے بیرونی نقطے ہوں تب یہ نقطہ D کا **سرحدی نقطہ**[19] ہو گا۔ خطہ D کے اندرونی نقطوں کا سلسلہ D کا **اندرون**[20] ہو گا۔ خطہ D کے سرحدی نقطوں کا سلسلہ D کا **سرحد**[21] ہو گا۔

ایک ایسا خطہ جو صرف اندرونی نقطوں پر مشتمل ہو **کھلا**[22] خطہ کہلائے گا۔ ایک خطہ جس میں خطے کا پورا سرحد شامل ہو **بند**[23] خطہ کہلائے گا۔

□

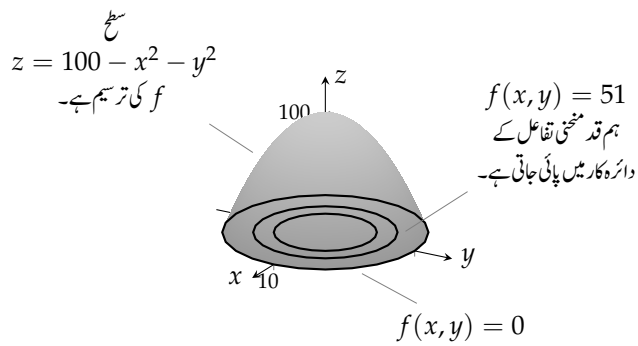
مثال ۱۳.۶:

فضا میں کھلا سلسلے کھلا گیند؛ کھلا نصف فضا $z > 0$؛ ربع اول (بغیر تحدیدی سطحیں)؛ فضا از خود

فضا میں بند سلسلے خطوط؛ مستوی؛ بند گیند؛ بند نصف فضا $z \geq 0$؛ ربع اول بمع اس کے تحدیدی سطحیں؛ فضا از خود

---

[16] closedball
[17] openball
[18] interiorpoint
[19] boundarypoint
[20] interior
[21] boundary
[22] open
[23] closed



شکل ۱۳.۴: تفاعل کی ترسیم اور منتخب ہم قد منحنیات۔

۲۰۳۹۰ ناکھلا اور نابند بند گیند جس میں تحدیدی کرہ کا کچھ حصہ شامل نہ ہو؛ ٹھوس مربع جس میں ایک تحدیدی سطح یا کنارہ یا کونا شامل نہ ہو

۲۰۳۹۱ □

۲۰۳۹۲ **دو متغیرات کے تفاعل کی ترسیمات اور ہم قد منحنیات**

۲۰۳۹۳ تفاعل $f(x,y)$ کی تصویر کشی دو طریقوں سے کی جا سکتی ہے۔ اول، ہم اس دائرہ کار میں f کی منحنیات ترسیم کر سکتے ہیں جس پر f کی قیمت مستقل ہو۔
۲۰۳۹۴ دوم، ہم فضا میں سطح $z = f(x,y)$ ترسیم کر سکتے ہیں۔

۲۰۳۹۵ تعریفات: اس مستوی میں نقطوں کا سلسلہ جہاں $f(x,y)$ کی قیمت ایک مستقل $f(x,y) = c$ ہو، f کی **ہم قد منحنی**[۲۴] کہلاتا ہے۔ فضا
۲۰۳۹۶ میں f کے دائرہ کار میں (x,y) کے لیے تمام نقطوں $(x,y,f(x,y))$ کا سلسلہ f کی **ترسیم**[۲۵] کہلاتا ہے۔ تفاعل f کی ترسیم کو **سطح**[۲۶]
۲۰۳۹۷ $z = f(x,y)$ بھی کہتے ہیں۔

۲۰۳۹۸ □

۲۰۳۹۹ دھیان رہے کہ ہم قد منحنیات اس مستوی میں پائی جاتی ہیں جس پر تفاعل کا دائرہ کار پایا جاتا ہے۔

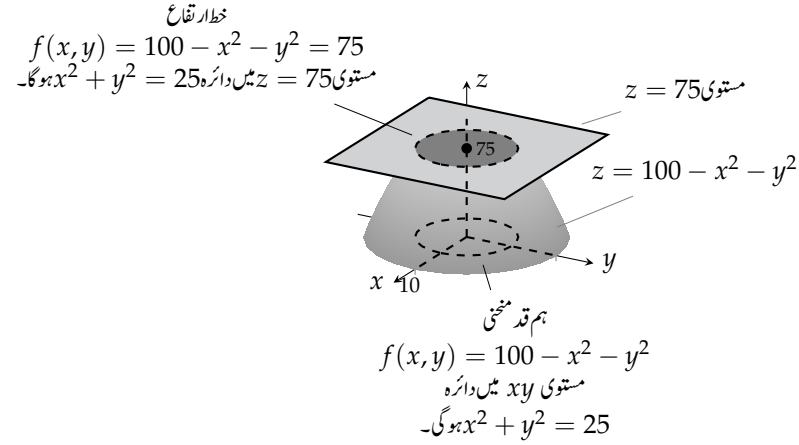
۲۰۴۰۰ مثال ۱۳.۷: تفاعل $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ ترسیم کریں اور مستوی میں f کے دائرہ کار میں ہم قد منحنیات $f(x,y) = 0$ ، $f(x,y) = 51$ اور $f(x,y) = 75$ ترسیم کریں۔

۲۰۴۰۲ **حل**

۲۰۴۰۳ تفاعل f کا دائرہ کار پورا مستوی xy ہے جبکہ اس کی سعت 100 جتنا یا اس سے کم تمام حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے۔ قطع مکافی $z = 100 - x^2 -$

---

[۲۴] levelcurve
[۲۵] graph
[۲۶] surface



شکل ۱۳.۵: تفاعل $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ کی ترسیم اور مستوی $z = 75$ کے ساتھ اس کا تقاطع۔

۲۰۳۰۴ y^2 اس کی ترسیم ہے جس کا کچھ حصہ شکل ۱۳.۴ میں دکھایا گیا ہے۔

۲۰۳۰۵ مستوی xy میں ان نقطوں کا سلسلہ جن پر درج ذیل ہو، ہم قد منحنی $f(x,y) = 0$ ہو گی جو ایک دائرہ ہے جس کا رداس 10 اور جس کا مرکز مبدا پر
۲۰۳۰۶ ہے۔

$$x^2 + y^2 = 100 \quad \text{یعنی} \quad f(x,y) = 100 - x^2 - y^2 = 0$$

۲۰۳۰۷ اسی طرح ہم قد منحنیات $f(x,y) = 51$ اور $f(x,y) = 75$ درج ذیل دائرے ہوں گے جو مستوی xy میں پائے جاتے ہیں اور جن کے
۲۰۳۰۸ مراکز عین مبدا پر پائے جاتے ہیں۔

$$x^2 + y^2 = 49 \quad \text{یعنی} \quad f(x,y) = 100 - x^2 - y^2 = 51$$
$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{یعنی} \quad f(x,y) = 100 - x^2 - y^2 = 75$$

۲۰۳۰۹ ہم قد منحنی $f(x,y) = 100$ صرف مبدا پر مشتمل ہے۔ (اس کے باوجود یہ ایک ہم قد منحنی ہے۔) □

۲۰۳۱۰ **خطوط ارتفاع**

۲۰۳۱۱ فضا میں وہ منحنی جس میں مستوی $z = c$ سطح $z = f(x,y)$ کو مس کرتا ہو، ان نقطوں پر مشتمل ہو گی جو تفاعل $f(x,y) = c$ کو ظاہر کرتی
۲۰۳۱۲ ہے۔ اس کو **خط ارتفاع**[۲۷] $f(x,y) = c$ کہتے ہیں تاکہ اس کے بیچ اور f کے دائرہ کار میں ہم قد منحنی $f(x,y) = c$ کے بیچ تمیز کرنا ممکن
۲۰۳۱۳ ہو۔ شکل ۱۳.۵ میں تفاعل $f(x,y) = 100 - x^2 - y^2$ کی سطح $z = 100 - x^2 - y^2$ پر خط ارتفاع $f(x,y) = 75$

---

[۲۷] contourline

دکھایا گیا ہے۔ یہ خطار تفاع ٹھیک دائرہ $x^2 + y^2 = 25$ ، جو تفاعل کے دائرہ کار میں ہم قد منحنی $f(x, y) = 75$ ہے، کے اوپر کچھ بلندی پر پایا جاتا ہے۔

بعض ریاضی دان خطار تفاع اور ہم قد منحنی میں تمیز نہیں کرتے ہیں اور دونوں کو کسی ایک نام سے پکارتے ہیں۔ ایسی صورت میں متن سے آپ جان سکتے ہیں کہ کس کی بات کی گئی ہے۔ عموماً نقشات پر (سطح سمندر سے) مستقل بلندی کو ظاہر کرنے والی منحنیات کو خطار تفاع پکارا جاتا ہے نا کہ ہم قد منحنیات۔

سہ متغیری تفاعل کی ہم قد منحنیات

مستوی میں جن نقطوں پر دو غیر تابع متغیرات کے تفاعل کی قیمت ایک مستقل $f(x, y) = c$ ہو اس تفاعل کے دائرہ کار میں ایک منحنی تشکیل دیتے ہیں۔ فضا میں جن نقطوں پر تین غیر تابع متغیرات کے تفاعل کی قیمت ایک مستقل $f(x, y, z) = c$ ہو اس تفاعل کے دائرہ کار ایک سطح تشکیل دیتے ہیں۔

تعریف: فضا میں ان نقطوں (x, y, z) کا سلسلہ جن پر تین غیر تابع متغیرات کے تفاعل کی قیمت ایک مستقل $f(x, y, z) = c$ ہو، f کی **ہم قد سطح**[۲۸] کہلاتا ہے۔

□

مثال ۱۳.۸: درج ذیل تفاعل کے ہم قد سطحوں پر تبصرہ کریں۔

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

حل

تفاعل f کی قیمت، مبدا سے نقطہ (x, y, z) تک فاصلہ ہو گا۔ ہر ہم قد سطح $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = c,\ c > 0$ رداس c کا کرہ ہو گا جس کا مرکز مبدا پر ہو گا۔ ہم قد سطح $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0$ صرف مبدا پر مشتمل ہے۔

ہم یہاں تفاعل کو ترسیم نہیں کر رہے ہیں۔ ایک تفاعل جو نقاط $(x, y, z, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ پر مشتمل ہو، چار متغیری فضا میں پایا جائے گا۔ اس کے بجائے ہم تفاعل کے دائرہ کار میں ہم قد سطحوں کو دیکھ رہے ہیں۔

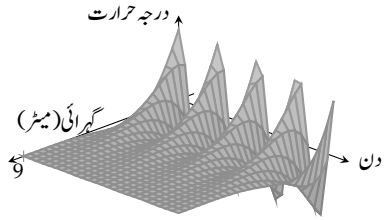
اس تفاعل کی ہم قد سطحیں ہمیں تفاعل کے دائرہ کار میں چلتے ہوئے تفاعل کی قیمت کی تبدیلی دکھاتی ہیں۔ اگر ہم رداس c کے کرہ، جس کا مرکز مبدا پر ہو، پر چہل قدمی کریں تب تفاعل کی قیمت بدستور c رہے گی۔ ایک کرہ سے دوسری کرہ منتقل ہونے پر تفاعل کی قیمت تبدیل ہو گی۔ مبدا سے دوری تفاعل کی قیمت بڑھاتی ہے جبکہ مبدا کے قریب ہونے سے اس کی قیمت کم ہوتی ہے۔ تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کا دارومدار ہمارے چلنے کے رخ پر ہو گا۔ تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کا رخ پر انحصار ایک اہم حقیقت ہے جس پر حصہ ۱۳.۷ میں غور کیا جائے گا۔ □

کمپیوٹر ترسیم کشی

کمپیوٹر کی مدد سے دو متغیرات کا تفاعل باآسانی ترسیم کیا جا سکتا ہے۔ عموماً ترسیم ہمیں کلیہ سے زیادہ معلومات جلدی فراہم کرتی ہے۔

---

[۲۸] levelsurface



شکل ۱۳.۶: سطح زمین کی نسبت سے گہرائی میں درجہ حرارت کی تبدیلی بالمقابل وقت۔

مثال ۱۳.۹: تفاعل $w = \cos(1.7 \times 10^{-2}t - 0.656x)e^{-0.656x}$ کی ترسیم کو شکل ۱۳.۶ میں دکھایا گیا ہے، جہاں وقت کو t اور فاصلہ کو x ظاہر کرتے ہیں۔ یہ ترسیم سطح زمین سے نیچے درجہ حرارت کی تبدیلی بالمقابل وقت دکھاتی ہے۔ گہرائی میں درجہ حرارت کی تبدیلی w کو سطحی تبدیلی کی نسبت سے دکھایا گیا ہے۔ چار میٹر کی گہرائی پر سطح تبدیلی کے 6.3 فی صد جتنی تبدیلی پائی جاتی ہے۔ نو میٹر گہرائی پر پورے سال درجہ حرارت میں تبدیلی قابل نظر انداز ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ 4 میٹر گہرائی پر درجہ حرارت سطحی درجہ حرارت سے تقریباً آدھا سال پیچھے ہے۔ یوں اس گہرائی پر گرمی کی موسم میں کم سے کم اور سردی کی موسم میں اعظم درجہ حرارت ہو گا۔ (میں مشورہ دوں گا کہ زیر زمین ایک کمرہ ضرور بنائیں۔) □

سوالات

دائرہ کار، سعت اور ہم قد منحنیات

سوال ۱۳.۱ تا سوال ۱۳.۱۲ میں (ا) تفاعل کا دائرہ کار تلاش کریں، (ب) تفاعل کی سعت تلاش کریں، (ج) تفاعل کی ہم قد منحنی پر تبصرہ کریں، (د) تفاعل کے دائرہ کار کی سرحد معلوم کریں، (ہ) کیا دائرہ کار کھلا خطہ، بند خطہ یا دونوں میں سے کوئی نہیں ہے، (و) کیا دائرہ کار محدود یا غیر محدود ہے؟

سوال ۱۳.۱: $f(x,y) = y - x$

سوال ۱۳.۲: $f(x,y) = \sqrt{y - x}$

سوال ۱۳.۳: $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$

سوال ۱۳.۴: $f(x,y) = x^2 - y^2$

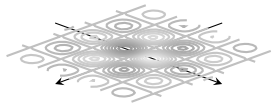
سوال ۱۳.۵: $f(x,y) = xy$

سوال ۱۳.۶: $f(x,y) = \frac{y}{x^2}$

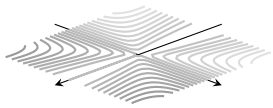
سوال ۱۳.۷: $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

سوال ۱۳.۸: $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

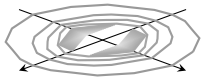
سوال ۱۳.۹: $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$



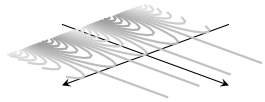
شکل ۱۳.۷



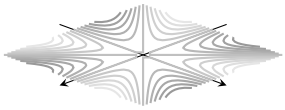
شکل ۱۳.۸



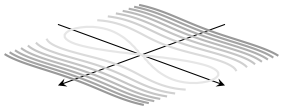
شکل ۱۳.۹



شکل ۱۳.۱۰



شکل ۱۳.۱۱



شکل ۱۳.۱۲

سوال ۱۳.۱۰: $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$

سوال ۱۳.۱۱: $f(x,y) = \sin^{-1}(y-x)$

سوال ۱۳.۱۲: $f(x,y) = \tan^{-1}(\frac{y}{x})$

ہم قد ترسیمات اور تفاعل کی پہچان

سوال ۱۳.۱۳ تا سوال ۱۳.۱۸ میں دی گئی ہم قد ترسیمات کی سطحیں شکل ۱۳.۱۸ تا شکل ۱۳.۱۷ میں دی گئی ہیں۔ ہم قد ترسیمات کی سطح پہچانیے۔

سوال ۱۳.۱۳: ہم قد ترسیم شکل ۱۳.۷ میں دی گئی ہے۔

سوال ۱۳.۱۴: ہم قد ترسیم شکل ۱۳.۸ میں دی گئی ہے۔

سوال ۱۳.۱۵: ہم قد ترسیم شکل ۱۳.۹ میں دی گئی ہے۔

سوال ۱۳.۱۶: ہم قد ترسیم شکل ۱۳.۱۰ میں دی گئی ہے۔

سوال ۱۳.۱۷: ہم قد ترسیم شکل ۱۳.۱۱ میں دی گئی ہے۔

سوال ۱۳.۱۸: ہم قد ترسیم شکل ۱۳.۱۲ میں دی گئی ہے۔

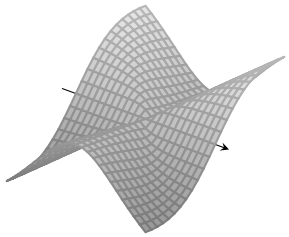
دو متغیرات کے تفاعل کی پہچان

سوال ۱۳.۱۹ تا سوال ۱۳.۲۸ میں تفاعل کی قیمتوں کو دو طرح دکھائیں۔ (ا) سطح $z = f(x,y)$ کو ترسیم کرتے ہوئے اور (ب) تفاعل کے دائرہ کار میں منتخب ہم قد منحنیات ترسیم کرتے ہوئے۔ ہر ایک ہم قد منحنی کی نشاندہی تفاعل کی قیمت سے کریں۔

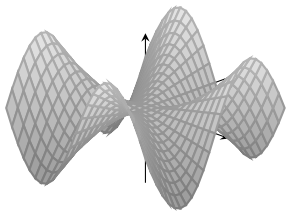
سوال ۱۳.۱۹: $f(x,y) = y^2$

سوال ۱۳.۲۰: $f(x,y) = 4 - y^2$

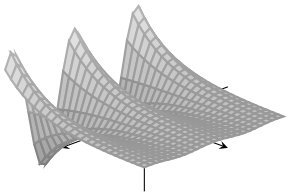
سوال ۱۳.۲۱: $f(x,y) = x^2 + y^2$



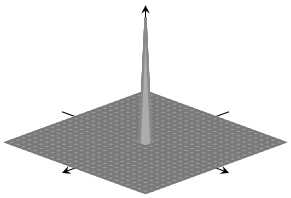
شکل ۱۳.۱۳



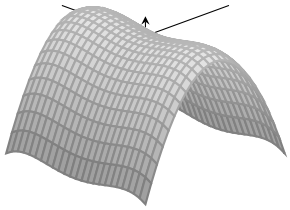
شکل ۱۳.۱۴



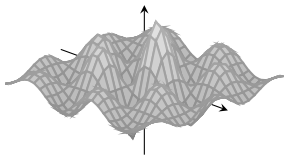
شکل ۱۳.۱۵



شکل ۱۳.۱۶



شکل ۱۳.۱۷



شکل ۱۳.۱۸

۲۰۴۷۴ سوال ۱۳.۲۲: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

۲۰۴۷۵ سوال ۱۳.۲۳: $f(x,y) = -(x^2+y^2)$

۲۰۴۷۶ سوال ۱۳.۲۴: $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$

۲۰۴۷۷ سوال ۱۳.۲۵: $f(x,y) = 4x^2 + y^2$

۲۰۴۷۸ سوال ۱۳.۲۶: $f(x,y) = 4x^2 + y^2 + 1$

۲۰۴۷۹ سوال ۱۳.۲۷: $f(x,y) = 1 - |y|$

۲۰۴۸۰ سوال ۱۳.۲۸: $f(x,y) = 1 - |x| - |y|$

۲۰۴۸۱

۲۰۴۸۲ ہم قد سطحیں

۲۰۴۸۳ سوال ۱۳.۲۹ تا سوال ۱۳.۳۶ میں تفاعل کا ایک علامتی ہم قد سطح کا خاکہ بنائیں۔

۲۰۴۸۴ سوال ۱۳.۲۹: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

۲۰۴۸۵ سوال ۱۳.۳۰: $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$

۲۰۴۸۶ سوال ۱۳.۳۱: $f(x,y,z) = x + z$

۲۰۴۸۷ سوال ۱۳.۳۲: $f(x,y,z) = z$

۲۰۴۸۸ سوال ۱۳.۳۳: $f(x,y,z) = x^2 + y^2$

سوال ۱۳.۳۴: $f(x,y,z) = y^2 + z^2$

سوال ۱۳.۳۵: $f(x,y,z) = z - x^2 - y^2$

سوال ۱۳.۳۶: $f(x,y,z) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9}$

ہم قد منحنی کی تلاش

سوال ۱۳.۳۷ تا سوال ۱۳.۴۰ میں تفاعل $f(x,y)$ کی اس ہم قد منحنی کی مساوات تلاش کریں جو دیے گئے نقطہ سے گزرتی ہو۔

سوال ۱۳.۳۷: $f(x,y) = 16 - x^2 - y^2, \quad (2\sqrt{2}, \sqrt{2})$

سوال ۱۳.۳۸: $f(x,y) = \sqrt{x^2 - 1}, \quad (1,0)$

سوال ۱۳.۳۹: $f(x,y) = \int\limits_x^y \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}, \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

سوال ۱۳.۴۰: $f(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n, \quad (1,2)$

ہم قد سطح کی تلاش

سوال ۱۳.۴۱ تا سوال ۱۳.۴۴ میں دیے گئے نقطہ سے گزرتی ہم قد سطح کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۱: $f(x,y,z) = \sqrt{x-y} - \ln z, \quad (3,-1,1)$

سوال ۱۳.۴۲: $f(x,y,z) = \ln(x^2 + y + z^2), \quad (-1,2,1)$

سوال ۱۳.۴۳: $g(x,y,z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!z^n}, \quad (\ln 2, \ln 4, 3)$

سوال ۱۳.۴۴: $g(x,y,z) = \int\limits_x^y \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} + \int\limits_{\sqrt{2}}^z \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}, \quad (0, \frac{1}{2}, 2)$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۳.۴۵: فضا میں ایک لکیر پر تفاعل کی اعظم قیمت۔

کیا لکیر $x = 20 - t,\ y = t,\ z = 20$ پر تفاعل $f(x,y,z) = xyz$ کی اعظم قیمت پائی جاتی ہے؟ اگر ہو، تب اس کی قیمت کتنی ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (اشارہ: اس لکیر پر $w = (f,y,z)$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے۔)

سوال ۱۳.۴۶: فضا میں ایک لکیر پر تفاعل کی اقل قیمت۔

کیا لکیر $x = t - 1,\ y = t - 2,\ z = t + 7$ پر تفاعل $f(x,y,z) = xy - z$ کی اقل قیمت پائی جاتی ہے؟ اگر ہو، تب اس کی قیمت کتنی ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (اشارہ: اس لکیر پر $w = (f,y,z)$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے۔)

سوال ۱۳.۴۷: جہاز کا صوتی دھماکا

ایک جہاز کے نیچے زمین پر اس خطہ کی چوڑائی w جہاں جہاز کا صوتی دھماکا انسان برائے راست (جو فضا میں ہوا کی مختلف سطحوں سے منعکس نہ ہو) سن سکتا ہو،

درج ذیل کا تفاعل ہو گا۔

- T زمین پر ہوا کی درجہ حرارت (کیلون)
- h جہاز کی بلندی (کلومیٹر)
- d درجہ حرارت کی انتصابی شرح تبدیلی (کیلون فی کلومیٹر)

اس چوڑائی کا کلیہ درج ذیل ہے۔

$$w = 4\sqrt{\frac{Th}{d}}$$

یہ جہاز $16.8\,\mathrm{km}$ کی بلندی پر پرواز کرتا ہوا بحیرہ عرب سے کراچی شہر پہنچ رہا ہے۔ اگر سطحی درجہ حرارت $290\,\mathrm{K}$ اور انتصابی شرح حرارت $5\,\mathrm{K\,km^{-1}}$ ہو تب جہاز ساحل سے کتنا دور ہو گا جب اس کا صوتی دھماکا سنائی دے۔

سوال ۱۳.۴۸: جیسا کہ آپ جانتے ہیں، واحد حقیقی متغیر کے حقیقی قیمت تفاعل کی ترسیم دو محددی فضا کا سلسلہ ہوتا ہے۔ دو غیر تابع حقیقی متغیرات کے حقیقی قیمت تفاعل کی ترسیم تین محددی فضا کا سلسلہ ہوتا ہے۔ تین غیر تابع حقیقی متغیرات کے حقیقی قیمت تفاعل کی ترسیم چار محددی فضا کا سلسلہ ہوتا ہے۔ آپ چار غیر تابع متغیرات کے تفاعل $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ کی ترسیم کے بارے میں کیا کہیں گے؟۔ آپ n غیر تابع متغیرات کے تفاعل $f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ کی ترسیم کے بارے میں کیا کہیں گے؟

کمپیوٹر کا استعمال۔ صریح سطح

کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے سوال ۱۳.۴۹ تا سوال ۱۳.۵۲ میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دیے گئے مستطیل پر سطح ترسیم کریں۔

ب. اس مستطیل میں کئی ہم قد منحنیات ترسیم کریں۔

ج. دیے گئے نقطہ سے گزرتی ہوئی f کی ہم قد منحنی ترسیم کریں۔

سوال ۱۳.۴۹: $f(x,y) = x\sin\frac{y}{2} + y\sin 2x, \quad 0 \le x \le 5\pi, \quad 0 \le y \le 5\pi$

سوال ۱۳.۵۰: $f(x,y) = (\sin x)(\cos x)e^{\sqrt{x^2+y^2}/8}, \quad 0 \le x \le 5\pi, \quad 0 \le y \le 5\pi$

سوال ۱۳.۵۱: $f(x,y) = \sin(x + 2\cos y), \quad -2\pi \le x \le 2\pi, \quad -2\pi \le y \le 2\pi$

سوال ۱۳.۵۲: $f(x,y) = e^{(x^{0.1}-y)}\sin(x^2+y^2), \quad 0 \le x \le 2\pi, \quad -2\pi \le y \le \pi$

کمپیوٹر کا استعمال۔ خفی سطح

سوال ۱۳.۵۳ تا سوال ۱۳.۵۶ میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے ہم قد سطحیں ترسیم کریں۔

سوال ۱۳.۵۳: $4\ln(x^2+y^2+z^2) = 1$

سوال ۱۳.۵۴: $x^2 + z^2 = 1$

سوال ۱۳.۵۵: $x + y^2 - 3z^2 = 1$

سوال ۱۳.۵۶: $\sin\left(\frac{x}{2}\right) - (\cos y)\sqrt{x^2+z^2} = 2$

کمپیوٹر کا استعمال۔ مقدار معلوم سطح

جیسا آپ کسی مقدار معلوم وقفہ I پر مستوی میں منحنیات کو مقدار معلوم مساوات $x = f(t),\ y = g(t)$ کی روپ میں لکھتے ہیں، آپ بعض اوقات کسی مقدار معلوم مستطیل $a \le u \le b,\ c \le v \le d$ وقفہ پر فضا میں سطحوں کو مقدار معلوم تین مساوات $x = f(u,v),\ y = g(u,v),\ z = h(u,v)$ کی روپ میں لکھ سکتے ہیں۔ کمپیوٹر اس قسم کی مقدار معلوم مساواتوں سے سطح ترسیم کر سکتا ہے۔ سوال ۱۳.۵۷ تا سوال ۱۳.۶۰ میں کمپیوٹر کی مدد سے سطحیں ترسیم کریں۔ ساتھ ہی مستوی xy میں چند ہم قد منحنیات ترسیم کریں۔

سوال ۱۳.۵۷: $x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = u,\quad 0 \le u \le 2,\quad 0 \le v \le 2\pi$

سوال ۱۳.۵۸: $x = u\cos v,\quad y = u\sin v,\quad z = v,\quad 0 \le u \le 2,\quad 0 \le v \le 2\pi$

سوال ۱۳.۵۹: $x = (2+\cos u)\cos v,\ y = (2+\cos u)\sin v,\ z = \sin u,$
$0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le 2\pi$

سوال ۱۳.۶۰: $x = 2\cos u\cos v,\quad y = 2\cos u\sin v,\quad z = 2\sin u$
$0 \le u \le 2\pi,\quad 0 \le v \le \pi$

۱۳.۲ حد اور استمرار

اس حصہ میں کثیر المتغیر تفاعل کی حد اور استمرار پر غور کیا جائے گا۔

حد

اگر نقطہ (x_0, y_0) کے قریب تمام نقاط (x,y) کے لیے تفاعل $f(x,y)$ کی قیمتیں کسی مقررہ حقیقی عدد L کے بہت زیادہ قریب ہوں تب ہم کہتے ہیں کہ جیسے جیسے (x,y) نقطہ (x_0,y_0) تک پہنچنے کی کوشش کرتا ہے، تفاعل f کی قیمت L تک پہنچنے کی کوشش کرتی ہے۔ یہ تعریف، واحد متغیر کے تفاعل کی حد کی تعریف کی مانند ہے۔ البتہ، دھیان رہے کہ اگر (x_0,y_0) تفاعل f کے دائرہ کار کی اندرون میں پایا جاتا ہو تب (x,y) نقطہ (x_0,y_0) تک کسی بھی رخ سے پہنچنے کی کوشش کر سکتا ہے۔ جیسا آپ نیچے دی گئی مثالوں میں سے چند میں دیکھیں گے، قریب پہنچنے کا رخ بعض اوقات مسئلہ کھڑا کر سکتا ہے۔

تعریف: اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لیے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ f کے دائرہ کار میں تمام (x,y) کے لیے

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \implies |f(x,y) - L| < \epsilon \qquad (1)$$

۲۰۵۶۲ ہو، تب ہم کہتے ہیں کہ (x_0, y_0) تک (x, y) پہنچنے سے $f(x, y)$ کی قیمت حد[۲۹] L تک پہنچتی ہے جس کو ہم درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

۲۰۵۶۳ □

۲۰۵۶۴ حد کی تعریف میں $\delta\sigma$ کی شرط اس کی معادل ہے کہ، کسی بھی $\epsilon > 0$ کے لیے ایسا مطابقتی $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام x کے لیے درج ذیل ہو
۲۰۵۶۵ (سوال ۱۳.۱۱۹)۔

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{اور} \quad 0 < |y - y_0| < \delta \implies |f(x, y) - L| < \epsilon \tag{۲}$$

۲۰۵۶۶ یوں حد کی قیمت تلاش کرتے ہوئے ہم مستوی میں فاصلوں کی صورت یا محدد میں فرق کی صورت میں سوچ سکتے ہیں۔

۲۰۵۶۷ حد کی تعریف، تفاعل f کے دائرہ کار کی اندرون کے ساتھ سرحدی نقاط (x_0, y_0) کے لیے بھی کارآمد ہے۔ بس اتنا ضروری ہے کہ نقطہ (x, y) ہر
۲۰۵۶۸ وقت دائرہ کار کے اندر رہے۔

۲۰۵۶۹ واحد متغیر کے تفاعل کی طرح درج ذیل دکھائے جا سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
&\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0 \\
&\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0 \\
&\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} k = k \quad \text{کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے } k
\end{aligned} \tag{۳}$$

۲۰۵۷۰ یہ بھی دکھایا جا سکتا ہے کہ دو تفاعل کے مجموعہ کی حد، ان تفاعل کے انفرادی حد (اگر دونوں موجود ہوں) کا مجموعہ ہو گی۔ اسی طرح کے نتائج فرق، حاصل
۲۰۵۷۱ ضرب، حاصل تقسیم، مستقل مضرب اور طاقت کے لیے بھی دکھائے جا سکتے ہیں۔

۲۰۵۷۲ مسئلہ ۱۳.۱: **دو متغیرات کے تفاعل کی حد کے خواص**
۲۰۵۷۳ اگر

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L \quad \text{اور} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = M$$

۲۰۵۷۴ ہوں تب درج ذیل قواعد کارآمد ہوں گے۔

۲۰۵۷۵ قاعدہ مجموعہ: $\lim[f(x, y) + g(x, y)] = L + M$

۲۰۵۷۶ قاعدہ فرق: $\lim[f(x, y) - g(x, y)] = L - M$

۲۰۵۷۷ قاعدہ مستقل مضرب: $\lim kf(x, y) = kL$ جہاں k کوئی مستقل ہے۔

---

[۲۹] limit

۲۰۵۷۸ قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$ اگر $M \neq 0$ ہو۔

۲۰۵۷۹ قاعدہ طاقت: $\lim[f(x,y)]^{m/n} = L^{m/n}$ اگر m اور n اعداد صحیح اور $L^{m/n}$ ایک حقیقی عدد ہو۔

۲۰۵۸۰ تمام حد $(x,y) \to (x_0,y_0)$ کی صورت میں حاصل کیے جائیں گے اور L ، M کا حقیقی اعداد ہونا لازمی ہے۔

۲۰۵۸۱

۲۰۵۸۲ مساوات ۳ پر مسئلہ ۱.۱۳ کے اطلاق سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ $(x,y) \to (x_0,y_0)$ کرتے ہوئے کثیر رکنی اور ناطق تفاعل کی حد ہم
۲۰۵۸۳ (x_0,y_0) پر تفاعل کی قیمت سے حاصل کرتے ہیں۔ بس اتنا ضروری ہے کہ نقطہ (x_0,y_0) پر تفاعل معین ہو۔

۲۰۵۸۴ مثال ۱۰.۱۳:

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x - xy + 3}{x^2y + 5xy - y^3} = \frac{0 - (0)(1) + 3}{(0)^2(1) + 5(0)(1) - (1)^3} = -3$$
$$\lim_{(x,y)\to(3,-4)} \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

۲۰۵۸۵ □

۲۰۵۸۶ مثال ۱۱.۱۳: درج ذیل حاصل کریں۔

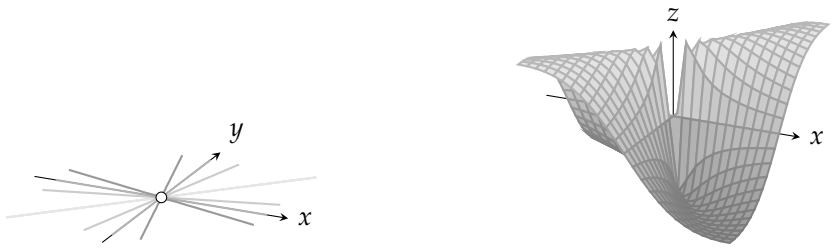
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$$

۲۰۵۸۷ **حل**

۲۰۵۸۸ چونکہ $(x,y) \to (0,0)$ پر نسب نما 0 کو پہنچتا ہے لہٰذا ہم قاعدہ حاصل تقسیم (مسئلہ ۱.۱۳) استعمال نہیں کر سکتے ہیں۔ البتہ نسب نما اور شمار کنندہ کو
۲۰۵۸۹ $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ سے ضرب دے کر ایسا معادل حاصل تقسیم حاصل ہوتا ہے جس کی حد ہم تلاش کر سکتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2 - xy)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(x-y)(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{x - y} && \text{الجبرا} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} x(\sqrt{x} + \sqrt{y}) && \text{جزو } (x-y) \text{ کاٹا گیا} \\
&= 0(\sqrt{0} + \sqrt{0}) = 0
\end{aligned}$$

۲۰۵۹۰ □



شکل ۱۳.۱۹: ماسوائے نقطہ $(0,0)$ تفاعل $f(x,y)$ استمراری ہے۔

۲۰۵۹۱ **استمرار**

۲۰۵۹۲ واحد متغیر کے تفاعل کی طرح، استمرار کی تعریف حد کی صورت میں کی جاتی ہے۔

۲۰۵۹۳ **تعریف:** اگر

۲۰۵۹۴ ا. (x_0, y_0) پر f معین ہو،

۲۰۵۹۵ ب. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ موجود ہو،

۲۰۵۹۶ ج. $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ ہو،

۲۰۵۹۷ تب تفاعل f **نقطہ** (x_0, y_0) **پر استمراری**[۳۰] ہو گا۔ ایک تفاعل جو اپنے دائرہ کار کے ہر نقطہ پر استمراری ہو **استمراری**[۳۱] ہو گا۔

۲۰۵۹۸ □

۲۰۵۹۹ حد کی تعریف کی طرح، استمرار کی تعریف بھی f کے دائرہ کار کے تمام اندرونی نقاط کے ساتھ ساتھ سرحدی نقاط پر بھی قابل اطلاق ہوتا ہے بس اتنا ضروری
۲۰۶۰۰ ہے کہ پورے وقت نقطہ (x,y) تفاعل کے دائرہ کار میں رہے۔

۲۰۶۰۱ جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں، مسئلہ ۱.۱۳ کا ایک نتیجہ یہ ہے کہ استمراری تفاعل کے الجبرائی جوڑ ہر اس نقطہ پر استمراری ہوں گے جس پر تمام شامل تفاعل استمراری
۲۰۶۰۲ ہوں۔ اس کا مطلب ہے کہ جہاں تمام استمراری تفاعل استمراری ہوں وہاں ان کے مجموعہ، فرق، حاصل ضرب، مستقل مضرب، حاصل تقسیم اور طاقت
۲۰۶۰۳ استمراری ہوں گے۔ بالخصوص دو متغیرات کی کثیر رکنی اور ناطق تفاعل ان تمام نقطوں پر استمراری ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

۲۰۶۰۴ اگر x اور y کا استمراری تفاعل $z = f(x,y)$ ہو جبکہ z کا استمراری تفاعل $w = g(z)$ ہو، تب مرکب $w = g(f(x,y))$
۲۰۶۰۵ استمراری ہو گا۔ یوں ہر نقطہ (x,y) پر درج ذیل استمراری ہوں گے۔

$$e^{x-y}, \quad \cos\frac{xy}{x^2+1}, \quad \ln(1+x^2y^2)$$

۲۰۶۰۶ واحد متغیر کے تفاعل کی طرح، استمراری تفاعل کا مرکب بھی استمراری ہو گا، بس اتنا ضروری ہے کہ وہاں ہر تفاعل استمراری ہو۔

---

[۳۰] continuous
[۳۱] continuous

۲۰۶۰۷ مثال ۱۳.۱۲: دکھائیں کہ ماسوائے مبدا درج ذیل ہر نقطہ پر استمراری ہے (شکل ۱۳.۱۹)۔

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

۲۰۶۰۸ **حل**

۲۰۶۰۹ ہر نقطہ $(x,y) \neq (0,0)$ پر تفاعل کی قیمت x اور y کے ناطق تفاعل سے حاصل کی جاتی ہے لہٰذا f استمراری ہو گا۔

۲۰۶۱۰ نقطہ $(0,0)$ پر f کی قیمت معین ہے، لیکن ہم دعویٰ کرتے ہیں کہ $(x,y) \to (0,0)$ کرتے ہوئے اس کی حد غیر موجود ہے۔ اس کی وجہ، جیسا
۲۰۶۱۱ ہم دیکھیں گے، یہ ہے کہ مبدا تک مختلف راہوں سے پہنچتے ہوئے مختلف نتائج حاصل ہوتے ہیں۔

۲۰۶۱۲ درج ذیل کی بنا، سوراخ دار لکیر $y = mx,\ x \neq 0$ پر m کی ہر قیمت کے لیے تفاعل f کی ایک مستقل قیمت ہو گی۔

$$f(x,y)\big|_{y=mx} = \left.\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|_{y=mx} = \frac{2x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{2m}{1+m^2}$$

۲۰۶۱۳ یوں اس لکیر پر جیسے جیسے (x,y) مبدا تک پہنچتا ہے، f کی حد اتنی ہو گی:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{خط } y=mx \text{ پر}}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[f(x,y)\big|_{y=mx} \right] = \frac{2m}{1+m^2}$$

۲۰۶۱۴ ہم دیکھتے ہیں کہ حد کی قیمت m پر منحصر ہے۔ یوں ایسی کوئی یکتا قیمت حاصل نہیں ہوتی جس کو مبدا تک (x,y) پہنچنے پر ہم f کی حد کہہ سکیں۔ مبدا پر حد
۲۰۶۱۵ غیر موجود ہے لہٰذا مبدا پر تفاعل غیر استمراری ہو گا۔ □

۲۰۶۱۶ دو (یا دو سے زیادہ) متغیرات کے تفاعل کی حدوں کے بارے میں ایک اہم نقطہ مثال ۱۳.۱۲ میں اجاگر ہوا۔ ایک نقطہ پر حد کی موجودگی کے لیے ضروری ہے کہ
۲۰۶۱۷ اس نقطہ تک تمام آمد راہوں پر حد کی قیمت ایک سی ہو۔ یوں جب بھی ہم ایک نقطہ تک ایسی راہیں تلاش کریں جن پر حد ایک دوسرے سے مختلف ہوں تب اس
۲۰۶۱۸ نقطہ پر تفاعل کی حد غیر موجود ہو گی۔

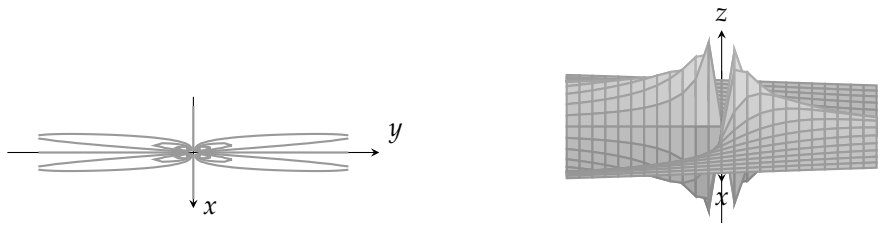
۲۰۶۱۹ **حد کی غیر موجودگی کی دو راہ پرکھ**

۲۰۶۲۰ اگر (x_0,y_0) تک نقطہ (x,y) ایسی دو مختلف راہوں سے پہنچے جن پر $f(x,y)$ کی حدیں ایک دوسرے سے مختلف ہوں تب
۲۰۶۲۱ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ غیر موجود ہو گا۔

۲۰۶۲۲ □

۲۰۶۲۳ مثال ۱۳.۱۳: دکھائیں کہ $(0,0)$ تک (x,y) پہنچنے سے درج ذیل تفاعل کا کوئی حد حاصل نہیں ہوتا ہے (شکل ۱۳.۲۰)۔

$$f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$$



شکل ۱۳.۲۰: ماسوائے نقطہ $(0,0)$ تفاعل $f(x,y) = 2x^2y/(x^4+y^2)$ استمراری ہے۔

۲۰۶۲۴ **حل**

۲۰۶۲۵ منحنی $y = kx^2,\ x \neq 0$ پر اس تفاعل کی قیمت ایک مستقل ہے:

$$f(x,y)\big|_{y=kx^2} = \left.\frac{2x^2y}{x^4+y^2}\right|_{y=kx^2} = \frac{2x^2(kx^2)}{x^4+(kx^2)^2} = \frac{2kx^4}{x^4+k^2x^4} = \frac{2k}{1+k^2}$$

۲۰۶۲۶ یوں

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ \text{پر } y=kx^2}} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\, f(x,y)\big|_{y=kx^2} \,\right] = \frac{2k}{1+k^2}$$

۲۰۶۲۷ ہو گا جو آمد راہ پر منحصر ہے۔ اگر (x,y) نقطہ $(0,0)$ تک قطع مکافی $y = x^2$ راہ پر چلتے ہوئے پہنچے، جہاں $k = 1$ ہے، تب حد 1 کے
۲۰۶۲۸ برابر حاصل ہوتا ہے۔ اگر (x,y) نقطہ $(0,0)$ تک محور x پر چلتے ہوئے پہنچے، جہاں $k = 0$ ہے، تب حد 0 کے برابر حاصل ہوتا ہے۔ یوں دو
۲۰۶۲۹ راہ پر کھ کے تحت $(0,0)$ تک (x,y) کے پہنچنے سے f کا کوئی حد حاصل نہیں ہو گا۔ □

۲۰۶۳۰ یہاں آپ سوال اٹھا سکتے ہیں کہ مبدا تک نقطہ (x,y) کے پہنچنے سے بہت سارے مختلف حد ملتے ہیں لہٰذا یہ کہنا درست نہیں کہ f کی حد غیر موجود ہے۔
۲۰۶۳۱ یہی وہ نقطہ ہے جسے سمجھنا ضروری ہے۔ حد کی تعریف کہتی ہے کہ حد کی قیمت راہ پر منحصر نہیں ہو سکتی۔

۲۰۶۳۲ **دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل**

۲۰۶۳۳ دو متغیرات کے تفاعل کی حدیں اور استمرار کی تعریف اور ان تفاعل کے مجموعہ، فرق، حاصل ضرب، حاصل تقسیم، طاقت اور مرکب کے بارے میں حاصل
۲۰۶۳۴ نتائج تین یا تین سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کے لیے بھی کار آمد ہیں۔ درج ذیل تفاعل اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری ہیں

$$\ln(x+y+z) \quad \text{اور} \quad \frac{y\sin z}{x-1}$$

۲۰۶۳۵ اور درج ذیل طرز کی حد، جہاں N نقطہ (x,y,z) کو ظاہر کرتا ہے، حاصل کرنے کے لیے تفاعل میں نقطہ پر کیا جاتا ہے۔

$$\lim_{N\to(1,0,-1)} \frac{e^{x+z}}{z^2+\cos\sqrt{xy}} = \frac{e^{1-1}}{(-1)^2+\cos 0} = \frac{1}{2}$$

سوالات

حد کی قیمت کی تلاش

سوال ۱۳.۶۱ تا سوال ۱۳.۷۲ میں حد کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۶۱: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2-y^2+5}{x^2+y^2+2}$

سوال ۱۳.۶۲: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,4)} \frac{x}{\sqrt{y}}$

سوال ۱۳.۶۳: $\lim\limits_{(x,y)\to(3,4)} \sqrt{x^2+y^2-1}$

سوال ۱۳.۶۴: $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-3)} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^2$

سوال ۱۳.۶۵: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\pi/4)} \sec x \tan y$

سوال ۱۳.۶۶: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \cos \frac{x^2+y^3}{x+y+1}$

سوال ۱۳.۶۷: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\ln 2)} e^{x-y}$

سوال ۱۳.۶۸: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \ln\left|1+x^2y^2\right|$

سوال ۱۳.۶۹: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$

سوال ۱۳.۷۰: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \cos \sqrt[3]{|xy|-1}$

سوال ۱۳.۷۱: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x \sin y}{x^2+1}$

سوال ۱۳.۷۲: $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi/2,0)} \frac{\cos y+1}{y-\sin x}$

حاصل تقسیم کی حدیں

حاصل تقسیم کو ترتیب دیتے ہوئے سوال ۱۳.۷۳ تا سوال ۱۳.۸۰ میں حد تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۷۳: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \frac{x^2-2xy+y^2}{x-y}$

۲۰۶۵۵ سوال ۱۳.۷۴: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq y}} \frac{x^2-y^2}{x-y}$

۲۰۶۵۶ سوال ۱۳.۷۵: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\ x\neq 1}} \frac{xy-y-2x+2}{x-1}$

۲۰۶۵۷ سوال ۱۳.۷۶: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,-4)\\ y\neq -4,\, x\neq x^2}} \frac{y+4}{x^2y-xy+4x^2-4x}$

۲۰۶۵۸ سوال ۱۳.۷۷: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x\neq y}} \frac{x-y+2\sqrt{x}-2\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

۲۰۶۵۹ سوال ۱۳.۷۸: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,2)\\ x+y\neq 4}} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y}-2}$

۲۰۶۶۰ سوال ۱۳.۷۹: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(2,0)\\ 2x-y\neq 4}} \frac{\sqrt{2x-y}-2}{2x-y-4}$

۲۰۶۶۱ سوال ۱۳.۸۰: $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(4,3)\\ x\neq y+1}} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y+1}}{x-y-1}$

۲۰۶۶۲

۲۰۶۶۳ **تین متغیرات کے تفاعل کی حد**

۲۰۶۶۴ سوال ۱۳.۸۱ تا سوال ۱۳.۸۶ میں حد تلاش کریں۔

۲۰۶۶۵ سوال ۱۳.۸۱: $\lim\limits_{N\to(1,3,4)} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

۲۰۶۶۶ سوال ۱۳.۸۲: $\lim\limits_{N\to(1,-1,-1)} \frac{2xy+yz}{x^2+z^2}$

۲۰۶۶۷ سوال ۱۳.۸۳: $\lim\limits_{N\to(3,3,0)} (\sin^2 x+\cos^2 y+\sec^2 z)$

۲۰۶۶۸ سوال ۱۳.۸۴: $\lim\limits_{N\to(-1/4,\pi/2,2)} \tan^{-1} xyz$

۲۰۶۶۹ سوال ۱۳.۸۵: $\lim\limits_{N\to(\pi,0,3)} ze^{-2y}\cos 2x$

۲۰۶۷۰ سوال ۱۳.۸۶: $\lim\limits_{N\to(0,-2,0)} \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

۲۰۶۷۱

۲۰۶۷۲ **مستوی میں استرار**

۲۰۶۷۳ سوال ۱۳.۸۷ تا سوال ۱۳.۹۰ میں کس نقطہ (x,y) پر مستوی میں تفاعل استراری ہیں؟

۲۰۶۷۴ سوال ۱۳.۸۷: (ا) $f(x,y)=\sin(x+y)$ (ب) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$

۲۰۶۷۵ سوال ۱۳.۸۸: (ا) $f(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$ (ب) $f(x,y)=\frac{y}{x^2+1}$

۲۰۶۷۶ سوال ۱۳.۸۹: (ا) $g(x,y)=\sin\frac{1}{xy}$ (ب) $g(x,y)=\frac{x+y}{2+\cos x}$

۲۰۶۷۷ سوال ۱۳.۹۰: (ا) $g(x,y)=\frac{x^2+y^2}{x^2-3x+2}$ (ب) $g(x,y)=\frac{1}{x^2-y}$

۲۰۶۷۸

۲۰۶۷۹ **فضا میں استرار**

۲۰۶۸۰ سوال ۱۳.۹۱ تا سوال ۱۳.۹۴ میں کس نقطہ (x,y,z) پر فضا میں تفاعل استراری ہیں؟

۲۰۶۸۱ سوال ۱۳.۹۱: (ا) $f(x,y,z)=x^2+y^2-2z^2$ (ب) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2-1}$

۲۰۶۸۲ سوال ۱۳.۹۲: (ا) $f(x,y,z)=\ln xyz$ (ب) $f(x,y,z)=e^{x+y}\cos z$

۲۰۶۸۳ سوال ۱۳.۹۳: (ا) $h(x,y,z)=xy\sin\frac{1}{z}$ (ب) $h(x,y,z)=\frac{1}{x^2+z^2-1}$

۲۰۶۸۴ سوال ۱۳.۹۴: (ا) $h(x,y,z)=\frac{1}{|y|+|z|}$ (ب) $h(x,y,z)=\frac{1}{|xy|+|z|}$

۲۰۶۸۵

۲۰۶۸۶ **نقطہ پر حد غیر موجود**

۲۰۶۸۷ نقطہ تک مختلف راہ پر پہنچتے ہوئے سوال ۱۳.۹۵ تا سوال ۱۳.۱۰۲ میں دکھائیں کہ $(x,y)\to(0,0)$ کرتے ہوئے تفاعل کا کوئی حد نہیں پایا جاتا ہے۔

۲۰۶۸۸ سوال ۱۳.۹۵: $f(x,y)=-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (شکل ۱۳.۲۱-ا)

۲۰۶۸۹ سوال ۱۳.۹۶: $h(x,y)=\frac{x^4}{x^4+y^2}$ (شکل ۱۳.۲۱-ب)

۲۰۶۹۰ سوال ۱۳.۹۷: $h(x,y)=\frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$

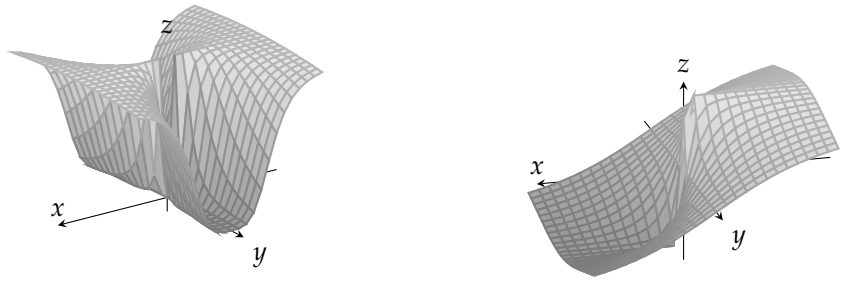
۲۰۶۹۱ سوال ۱۳.۹۸: $f(x,y)=\frac{xy}{|xy|}$

۲۰۶۹۲ سوال ۱۳.۹۹: $g(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$

۲۰۶۹۳ سوال ۱۳.۱۰۰: $g(x,y)=\frac{x+y}{x-y}$

۲۰۶۹۴ سوال ۱۳.۱۰۱: $h(x,y)=\frac{x^2+y}{y}$

۲۰۶۹۵ سوال ۱۳.۱۰۲: $h(x,y)=\frac{x^2}{x^2-y}$



(ب) (ا)

شکل ۱۳.۲۱

۲۰۶۹۶ **نظریہ اور مثالیں**

۲۰۶۹۷ سوال ۱۳.۱۰۳: کیا $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ کی صورت میں (x_0, y_0) کا معین ہونا لازمی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش

۲۰۶۹۸ کریں۔

۲۰۶۹۹ سوال ۱۳.۱۰۴: اگر $f(x_0, y_0) = 3$ ہو تب درج ذیل کے بارے میں (ا) (x_0, y_0) پر استمراری f کی صورت میں،

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

۲۰۷۰۰ (ب) (x_0, y_0) پر غیر استمراری f کی صورت میں کیا کہا جا سکتا ہے۔ اپنے جواب کہ وجہ پیش کریں۔

۲۰۷۰۱ دو متغیرات کے تفاعل کا مسئلہ بیچ کہتا ہے کہ اگر ایک قرص، جس کا مرکز (x_0, y_0) ہو، کے اندر تمام $(x,y) \neq (x_0, y_0)$ پر $g(x,y) \leq$

۲۰۷۰۲ $f(x,y) \leq h(x,y)$ ہو، اور $(x,y) \to (x_0, y_0)$ کرتے ہوئے g اور h دونوں کا حد متناہی اور L ہو تب

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

۲۰۷۰۳ ہو گا۔ سوال ۱۳.۱۰۵ تا سوال ۱۳.۱۱۰ میں اس نتیجہ کا سہارا لیتے ہوئے جواب دیں۔

۲۰۷۰۴ سوال ۱۳.۱۰۵: کیا

$$1 - \frac{x^2y^2}{3} < \frac{\tan^{-1} xy}{xy} < 1$$

۲۰۷۰۵ جانتے ہوئے آپ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan^{-1} xy}{xy}$$

۲۰۷۰۶ کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۳.۱۰۶: کیا

$$2|xy| - \frac{x^2y^2}{6} < 4 - 4\cos\sqrt{|xy|} < 2|xy|$$

جانتے ہوئے

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{4 - 4\cos\sqrt{|xy|}}{|xy|}$$

کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۳.۱۰۷: کیا $\left|\sin(1/x)\right| \leq 1$ جانتے ہوئے درج ذیل کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\sin\frac{1}{x}$$

سوال ۱۳.۱۰۸: کیا $\left|\cos(1/y)\right| \leq 1$ جانتے ہوئے درج ذیل کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x\cos\frac{1}{y}$$

سوال ۱۳.۱۰۹: (ا) دوبارہ مثال ۱۳.۱۲ کو پڑھیں۔ اب درج ذیل کلیہ میں $m = \tan\theta$ پر کر کے اس کی سادہ صورت حاصل کرتے ہوئے دکھائیں کہ f کی قیمت لکیر کے زاویہ میلان پر منحصر ہی گی۔

$$f(x,y)\big|_{y=mx} = \frac{2m}{1+m^2}$$

(ب) جزو-ا میں حاصل کلیہ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ لکیر $y = mx$ پر چلتے ہوئے $(x,y) \to (0,0)$ کرنے سے f کے حد کی قیمت -1 تا 1 ہو سکتی ہے جو قریب پہنچنے کی راہ کے زاویہ پر منحصر ہو گی۔

سوال ۱۳.۱۱۰: $f(0,0)$ کی ایسی تعریف پیش کریں جو درج ذیل کو مبدا پر بھی استمراری بناتا ہو۔

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

قطبی محدد میں تبادلہ

اگر کارتیسی محدد میں $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ کے حصول میں پیش رفت نہ ہو تب قطبی محدد میں حد تلاش کرنے کی کوشش کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ کرتے ہوئے $r \to 0$ کے لیے حاصل تفاعل کی حد تلاش کریں۔ دوسرے الفاظ میں یہ دیکھنے کی کوشش کریں کہ آیا کوئی ایسا عدد L پایا جاتا ہے جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو:

۲۰۷۲۲ کسی بھی دیے گئے عدد $\epsilon > 0$ کا ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام r اور θ کے لیے درج ذیل ہو۔

$$|r| < \delta \implies \left|f(r,\theta) - L\right| < \epsilon$$

۲۰۷۲۳ اگر ایسا L موجود ہو تب

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r,\theta) = L \tag{۴}$$

۲۰۷۲۴ ہو گا۔ مثال کے طور پر

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3\cos^3\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r\cos^3\theta = 0$$

۲۰۷۲۵ ہو گا۔ آخری عدم مساوات کی تصدیق کرنے کی خاطر ہمیں دکھانا ہو گا کہ $f(r,\theta) = r\cos^3\theta$ اور L مساوات ۴ کو مطمئن کرتے ہیں۔ یعنی ہمیں
۲۰۷۲۶ دکھانا ہو گا کہ کسی بھی دیے گئے عدد $\epsilon > 0$ کے لیے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ تمام r اور θ کے لیے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$|r| < \delta \implies \left|r\cos^3\theta - 0\right| < \epsilon \tag{۵}$$

۲۰۷۲۷ چونکہ

$$\left|r\cos^3\theta\right| = |r|\left|\cos^3\theta\right| \le |r|\cdot 1 = |r|$$

۲۰۷۲۸ ہوتا ہے لہٰذا $\delta = \epsilon$ لینے سے تمام r اور θ کے لیے مساوات ۵ مطمئن ہو گا۔

۲۰۷۲۹ اس کے برعکس $|r|$ جتنا بھی چھوٹا کیوں نا ہو درج ذیل تفاعل کی قیمت 0 سے 1 تک ہو سکتی ہے لہٰذا $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ غیر موجود ہو گا۔

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{r^2\cos^2\theta}{r^2} = \cos^2\theta$$

۲۰۷۳۰ درج بالا دو تفاعل میں $r \to 0$ کرتے ہوئے حد کی موجودگی یا غیر موجودگی کا مسئلہ سیدھا تھا۔ البتہ ضروری نہیں کہ قطبی محدد میں تبادلہ سود مند ثابت
۲۰۷۳۱ ہو، بلکہ بعض اوقات ایسا کرنے سے ہم بالکل غلط نتیجہ کی طرف راغب ہو سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر، تمام سیدھے خطوط $\theta = c$، جہاں c مستقل ہے،
۲۰۷۳۲ پر حد موجود ہو سکتا ہے اگرچہ وسیع معنوں میں حد غیر موجود ہو گا۔ مثال ۱۳.۱۳ میں اس حقیقت کی وضاحت کی گئی ہے۔ قطبی محدد میں $r \neq 0$ کے لیے
۲۰۷۳۳ $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^4+y^2}$ درج ذیل ہو گا۔

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta\sin 2\theta}{r^2\cos^4\theta + \sin^2\theta}$$

۲۰۷۳۴ اب θ برقرار رکھتے ہوئے $r \to 0$ کرنے سے حد 0 ملتا ہے۔ البتہ راہ $y = x^2$ پر $r\sin\theta = r^2\cos^2\theta$ لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f(r\cos\theta, r\sin\theta) &= \frac{r\cos\theta\sin 2\theta}{r^2\cos^4\theta + (r\cos^2\theta)^2} \\ &= \frac{2r\cos^2\theta\sin\theta}{2r^2\cos^4\theta} = \frac{r\sin\theta}{r^2\cos^2\theta} = 1 \end{aligned}$$

۲۰۷۳۵ سوال ۱۳.۱۱۱ تا سوال ۱۳.۱۱۶ میں $(x,y) \to (0,0)$ کرتے ہوئے f کی حد تلاش کریں یا دکھائیں کہ اس کی حد غیر موجود ہے۔

۲۰۷۳۶ سوال ۱۳.۱۱۱: $f(x,y) = \frac{x^3-xy^2}{x^2+y^2}$

۲۰۷۳۷ سوال ۱۳.۱۱۲: $f(x,y) = \cos\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right)$

۲۰۷۳۸ سوال ۱۳.۱۱۳: $f(x,y) = \frac{y^2}{x^2+y^2}$

۲۰۷۳۹ سوال ۱۳.۱۱۴: $f(x,y) = \frac{2x}{x^2+x+y^2}$

۲۰۷۴۰ سوال ۱۳.۱۱۵: $f(x,y) = \tan^{-1}\left(\frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}\right)$

۲۰۷۴۱ سوال ۱۳.۱۱۶: $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

۲۰۷۴۲

۲۰۷۴۳ سوال ۱۳.۱۱۷ اور سوال ۱۳.۱۱۸ میں $f(0,0)$ کی ایسی تعریف پیش کریں کہ f مبدا پر بھی استمراری ہو۔

۲۰۷۴۴ سوال ۱۳.۱۱۷: $f(x,y) = \ln\left(\frac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}\right)$

۲۰۷۴۵ سوال ۱۳.۱۱۸: $f(x,y) = \frac{2xy^2}{x^2+y^2}$

۲۰۷۴۶

۲۰۷۴۷ $\delta\epsilon$ تعریفات کا استعمال

۲۰۷۴۸ سوال ۱۳.۱۱۹: دکھائیں کہ حد کی تعریف (مساوات ۱) میں $\delta\epsilon$ پر عائد شرط مساوات ۲ میں دی گئی شرط کے مترادف ہے۔

۲۰۷۴۹ سوال ۱۳.۱۲۰: $(x,y) \to (x_0,y_0)$ کرتے ہوئے تفاعل $f(x,y)$ کی حدوں کی باضابطہ $\delta\epsilon$ تعریف کو مد نظر رکھتے ہوئے
۲۰۷۵۰ $(x,y,z) \to (x_0,y_0,z_0)$ کرتے ہوئے $g(x,y,z)$ کی حدوں کی تعریف پیش کریں۔ چار غیر تابع متغیرات کے تفاعل
۲۰۷۵۱ $h(x,y,z,t)$ کی حد کی تعریف کیا ہو گی؟

۲۰۷۵۲

۲۰۷۵۳ سوال ۱۳.۱۲۱ تا سوال ۱۳.۱۲۴ میں تفاعل $f(x,y)$ اور مثبت عدد ϵ دیے گئے ہیں۔ ہر ایک سوال میں یاد کھائیں کہ ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ
۲۰۷۵۴ (x,y) کے لیے

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta \implies |f(x,y) - f(0,0)| < \epsilon$$

۲۰۷۵۵ مطمئن ہوتا ہے یاد کھائیں کہ ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ تمام (x,y) کے لیے

$$|x| < \delta, \quad |y| < \delta \implies |f(x,y) - f(0,0)| < \epsilon$$

۲۰۷۵۶ مطمئن ہوتا ہے۔ ان میں سے وہ دکھائیں جو آپ کو زیادہ آسان لگے۔ دونوں دکھانے کی ضرورت نہیں ہے۔

سوال ۱۳.۱۲۱: $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad \epsilon = 0.01$

سوال ۱۳.۱۲۲: $f(x,y) = \frac{y}{x^2+1}, \quad \epsilon = 0.05$

سوال ۱۳.۱۲۳: $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+1}, \quad \epsilon = 0.01$

سوال ۱۳.۱۲۴: $f(x,y) = \frac{x+y}{2+\cos x}, \quad \epsilon = 0.02$

سوال ۱۳.۱۲۵ تا سوال ۱۳.۱۲۸ میں تفاعل $f(x,y,z)$ اور مثبت عدد ϵ دیے گئے ہیں۔ ہر ایک سوال میں یاد کھائیں کہ ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ (x,y,z) کے لیے

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} < \delta \implies \left|f(x,y,z) - f(0,0,0)\right| < \epsilon$$

مطمئن ہوتا ہے یاد کھائیں کہ ایسا $\delta > 0$ موجود ہے کہ تمام (x,y,z) کے لیے

$$|x| < \delta, \quad |y| < \delta, \quad |z| < \delta \implies \left|f(x,y,z) - f(0,0,0)\right| < \epsilon$$

مطمئن ہوتا ہے۔ ان میں سے وہ دکھائیں جو آپ کو زیادہ آسان لگے۔ دونوں دکھانے کی ضرورت نہیں ہے۔

سوال ۱۳.۱۲۵: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2, \quad \epsilon = 0.015$

سوال ۱۳.۱۲۶: $f(x,y,z) = xyz, \quad \epsilon = 0.008$

سوال ۱۳.۱۲۷: $f(x,y,z) = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2+1}, \quad \epsilon = 0.015$

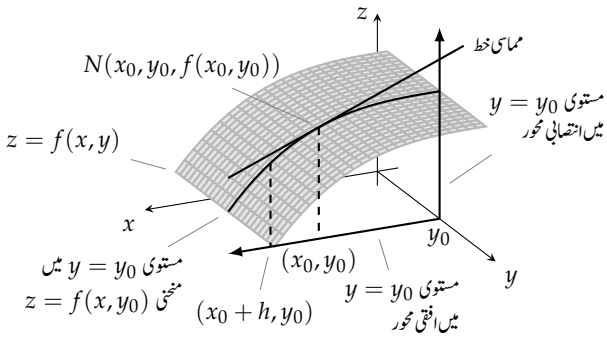
سوال ۱۳.۱۲۸: $f(x,y,z) = \tan^2 x + \tan^2 y + \tan^2 z, \quad \epsilon = 0.03$

سوال ۱۳.۱۲۹: دکھائیں کہ ہر نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر تفاعل $f(x,y,z) = x + y - z$ استمراری ہے۔

سوال ۱۳.۱۳۰: دکھائیں کہ مبدا پر $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ استمراری ہے۔

۱۳.۳ جزوی تفارق

جب ہم ایک غیر تابع متغیر کے علاوہ باقی تمام کو اٹل رکھ کر اس ایک متغیر کے لحاظ سے تفاعل کا تفرق لیں تو ہمیں ''جزوی'' تفرق حاصل ہوتا ہے۔ اس حصہ میں جزوی تفارق کی تعریف پیش کی جائے گی، ان کا جیومیٹریائی مفہوم بتایا جائے گا، اور واحد متغیر کے تفاعل کے تفرق کے قواعد بروئے کار لاتے ہوئے جزوی تفارق کی قیمت کا حصول بتایا جائے گا۔



شکل ۱۳.۲۲: مستوی $y = y_0$ اور سطح $z = f(x, y)$ کا تقاطع۔

تعریفات اور علامتیت

اگر تفاعل $f(x, y)$ کے دائرہ کار میں (x_0, y_0) ایک نقطہ ہو تب انتصابی سطح $y = y_0$ سطح $z = f(x, y)$ کو منحنی $z = f(x, y_0)$ میں مس کرے گا (شکل ۱۳.۲۲)۔ یہ منحنی مستوی $y = y_0$ میں تفاعل $z = f(x, y_0)$ کی ترسیم ہو گی۔ اس مستوی میں افقی محدد x ہے؛ انتصابی محدد z ہے۔

ہم نقطہ (x_0, y_0) پر x کے لحاظ سے f کے جزوی تفرق سے مراد نقطہ $x = x_0$ پر $f(x, y_0)$ کا سادہ تفرق لیتے ہیں۔

تعریف: نقطہ (x_0, y_0) پر x کے لحاظ سے $f(x, y)$ کا جزوی تفرق[۳۲]

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)\right|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{۱}$$

ہو گا بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔ (آپ ∂ کو d کی ایک قسم تصور کریں۔)

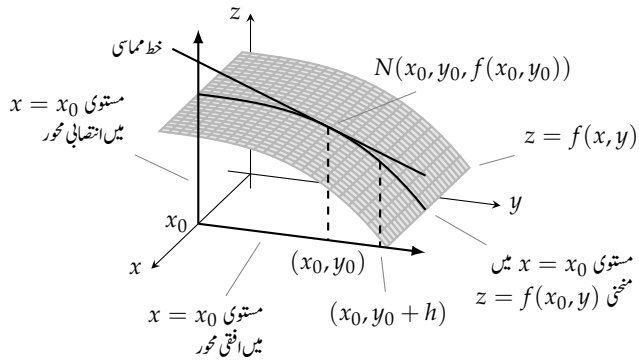
□

نقطہ $N(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ پر مستوی $y = y_0$ میں منحنی $z = f(x, y_0)$ کی ڈھلوان سے مراد نقطہ (x_0, y_0) پر x کے لحاظ سے f کے جزوی تفرق کی قیمت ہے۔ نقطہ N پر منحنی کا مماسی خط، مستوی $y = y_0$ میں وہ خط ہے جو N سے گزرتا ہو اور جس کی ڈھلوان یہی ہو۔ جب y کی قیمت برقرار y_0 رکھی جائے تب x کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی نقطہ (x_0, y_0) پر جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial x}$ دیتا ہے۔ یہ نقطہ (x_0, y_0) پر i کے رخ f کی شرح تبدیلی ہے۔

جزوی تفرق کی علامت اس چیز پر منحصر ہو گی جس پر ہم زور دینا چاہتے ہیں۔ یوں درج ذیل علامت اس وقت استعمال کیے جائیں گے جب ہم نقطہ (x_0, y_0) پر زور دینا چاہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0)$$

[۳۲] partialderivative



شکل ۱۳.۲۳: مستوی $x = x_0$ اور سطح $z = f(x, y)$ کا تقاطع۔

۲۰۷۹۲ سائنس اور انجینئری میں درج ذیل علامت مقبول ہے جہاں تفاعل کا صریحاً ذکر کیے بغیر نقطہ (x_0, y_0) پر x کے لحاظ سے z کا جزوی تفرق لیا گیا ہے۔

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$$

۲۰۷۹۳ جہاں جزوی تفرق کو ایک تفاعل تصور کرنا مقصود ہو وہاں درج ذیل علامت استعمال کیے جائیں گے، جہاں x لے لحاظ سے f (یا z) کے جزوی تفارق لیے
۲۰۷۹۴ گئے ہیں۔

$$f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z_x, \quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

۲۰۷۹۵ نقطہ (x_0, y_0) پر y کے لحاظ سے $f(x, y)$ کے جزوی تفرق کی تعریف، x کے لحاظ سے f کی جزوی تفرق کی تعریف کی طرح ہے۔ ہم x کو
۲۰۷۹۶ x_0 رکھتے ہوئے y_0 پر y کے لحاظ سے $f(x_0, y)$ کا سادہ تفرق لیتے ہیں۔

۲۰۷۹۷ تعریف: نقطہ (x_0, y_0) پر y کے لحاظ سے $f(x, y)$ کا **جزوی تفرق**[۳۳]

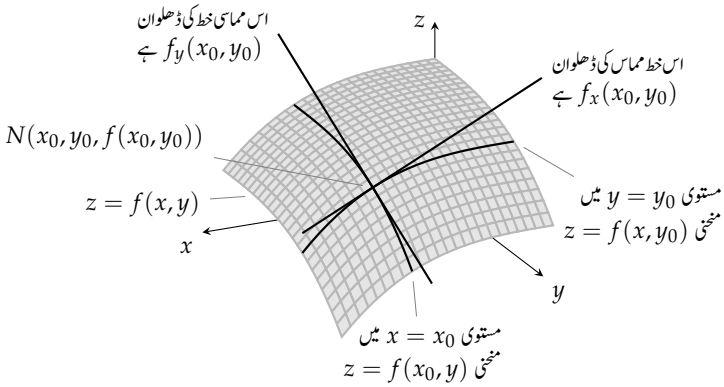
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\right|_{y=y_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} \tag{۲}$$

۲۰۷۹۸ ہو گا بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

۲۰۷۹۹ □

۲۰۸۰۰ نقطہ $N(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ پر مستوی $x = x_0$ میں منحنی $z = f(x_0, y)$ کی ڈھلوان سے مراد نقطہ (x_0, y_0) پر y
۲۰۸۰۱ کے لحاظ سے f کے جزوی تفرق کی قیمت ہے (شکل ۱۳.۲۳)۔ نقطہ N پر منحنی کا مماسی خط، مستوی $x = x_0$ میں وہ خط ہے جو N سے گزرتا ہو

[۳۳] partialderivative



شکل ۱۳.۲۴: نقطہ N پر دو مماس کا تعین کردہ سطح ظاہری طور پر $z = f(x, y)$ کو مماسی نظر آتا ہے۔

اور جس کی ڈھلوان یہی ہو۔ جب x کی قیمت برقرار x_0 رکھی جائے تب y کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی نقطہ (x_0, y_0) پر جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial y}$ دیتا ہے۔ یہ نقطہ (x_0, y_0) پر y کے رخ f کی شرح تبدیلی ہے۔

متغیر y کے لحاظ سے جزوی تفرق کو x کے لحاظ سے جزوی تفرق کی طرح لکھا جاتا ہے:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \quad f_y(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f_y$$

دھیان رہے کہ نقطہ (x_0, y_0) پر اب سطح $z = f(x, y)$ کے ساتھ دو مماسی خط منسلک ہیں (شکل ۱۳.۲۴)۔ شکل ۱۳.۲۴ میں ظاہری طور پر دو مماس کا تعین کردہ سطح نقطہ N پر $z = f(x, y)$ کو مماسی نظر آتا ہے۔ کیا ایسے دو مماسی کا تعین کردہ سطح نقطہ N پر $z = f(x, y)$ کو مماسی ہو گا؟ جزوی تفرق کے بارے میں مزید معلومات جاننے کے بعد ہم اس سوال کا جواب دے پائیں گے۔

حساب

جیسا ہم مساوات اسے جانتے ہیں، y کو مستقل تصور کرتے ہوئے x کے لحاظ سے f کا سادہ تفرق ہمیں $\frac{\partial f}{\partial x}$ دیگا۔ اسی طرح مساوات ۲ کہتی ہے کہ x کو مستقل ٹھراتے ہوئے y کے لحاظ سے f کا سادہ تفرق ہمیں $\frac{\partial f}{\partial y}$ دیگا۔

مثال ۱۳.۱۴: نقطہ $(4, -5)$ پر درج ذیل کے لیے $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور $\frac{\partial f}{\partial y}$ کی قیمتیں تلاش کریں۔

$$f(x, y) = x^2 + 3xy + y - 1$$

حل

ہم y کو مستقل تصور کرتے ہوئے x کے لحاظ سے f کا تفرق لے کر $\frac{\partial f}{\partial x}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 3xy + y - 1) = 2x + 3 \cdot 1 \cdot y + 0 - 0 = 2x + 3y$$

نقطہ $(4,-5)$ پر $\frac{\partial f}{\partial x}$ کی قیمت $2(4)+3(-5)=-7$ ہو گی۔

اسی طرح ہم x کو مستقل تصور کرتے ہوئے y کے لحاظ سے f کا تفرق لے کر $\frac{\partial f}{\partial y}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+3xy+y-1)=0+3\cdot x\cdot 1+1-0=3x+1$$

نقطہ $(4,-5)$ پر $\frac{\partial f}{\partial y}$ کی قیمت $3(4)+1=13$ ہو گی۔ □

مثال ۱۳.۱۵: تفاعل $f(x,y)=y\sin xy$ کا $\frac{\partial f}{\partial y}$ معلوم کریں۔

حل

ہم x کو مستقل تصور جبکہ f کو y اور $\sin xy$ کا حاصل ضرب تصور کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(y\sin xy)=y\frac{\partial}{\partial y}\sin xy+(\sin xy)\frac{\partial}{\partial y}(y)\\&=(y\cos xy)\frac{\partial}{\partial y}(xy)+\sin xy=xy\cos xy+\sin xy\end{aligned}$$

□

فنیات

جزوی تفرق کمپیوٹر آپ کو حساب میں کئی بعد تک مدد فراہم کر سکتا ہے۔ آپ ایک غیر تابع متغیر کے علاوہ تمام متغیرات کی قیمتیں فراہم کر کے واحد متغیر کے لحاظ سے جزوی تفرق معلوم کر کے ترسیم کر سکتے ہیں۔ جزوی تفرق اور سادہ تفرق کے لیے کمپیوٹر کی زبان میں عموماً ایک سی اصطلاح استعمال کی جاتی ہے۔ جزوی تفارق کے حصول میں کمپیوٹر ضرور استعمال کریں۔

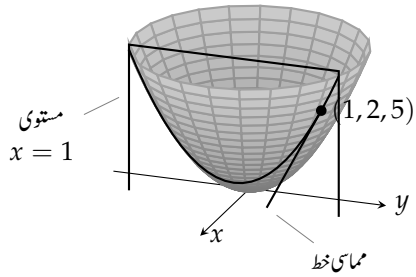
مثال ۱۳.۱۶: تفاعل $f(x,y)=\frac{2y}{y+\cos x}$ کے لیے f_x تلاش کریں۔

حل

ہم f کو حاصل تقسیم تصور کر کے y کو مستقل ٹھرا کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}f_x&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2y}{y+\cos x}\right)=\frac{(y+\cos x)\frac{\partial}{\partial x}(2y)-2y\frac{\partial}{\partial x}(y+\cos x)}{(y+\cos x)^2}\\&=\frac{(y+\cos x)(0)-2y(-\sin x)}{(y+\cos x)^2}=\frac{2y\sin x}{(y+\cos x)^2}\end{aligned}$$

□



شکل ۱۳.۲۵: مستوی $x = 1$ اور سطح $z = x^2 + y^2$ کے تقاطع منحنی کا نقطہ $(1, 2, 5)$ پر مماس (مثال ۱۳.۱۷)۔

۲۰۸۲۹ مثال ۱۳.۱۷: مستوی $x = 1$ قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ کو قطع مکافی میں قطع کرتا ہے۔ نقطہ $(1, 2, 5)$ پر اس قطع مکافی کے مماس
۲۰۸۳۰ کی ڈھلوان تلاش کریں۔

۲۰۸۳۱ **حل**

۲۰۸۳۲ مماس کی ڈھلوان نقطہ $(1, 2)$ پر جزوی تفرق $\frac{\partial z}{\partial y}$ کی قیمت ہو گی (شکل ۱۳.۲۵):

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,2)} = \left.\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)\right|_{(1,2)} = 2y\big|_{(1,2)} = 2(2) = 4$$

۲۰۸۳۳ تصدیق کی خاطر ہم قطع مکافی کو واحد متغیر تفاعل $z = (1)^2 + y^2 = 1 + y^2$ کی مستوی $x = 1$ میں ترسیم تصور کر کے $y = 2$ پر
۲۰۸۳۴ اس کی ڈھلوان حاصل کرتے ہیں۔ یہ ڈھلوان جس کو سادہ تفرق سے حاصل کیا جاتا ہے درج ذیل ہو گا۔

$$\left.\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right|_{y=2} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(1 + y^2)\right|_{y=2} = 2y\big|_{y=2} = 4$$

۲۰۸۳۵ □

۲۰۸۳۶ سادہ تفرق کی طرح جزوی تفرق کے لیے بھی خفی تفرق کار آمد ہے۔

۲۰۸۳۷ مثال ۱۳.۱۸: اگر درج ذیل مساوات دو غیر تابع متغیرات x اور y کا تفاعل z دیتی ہو جس کا جزوی تفرق موجود ہو تب $\frac{\partial z}{\partial x}$ تلاش کریں۔

$$yz - \ln z = x + y$$

۲۰۸۳۸ **حل**

۲۰۸۳۹ ہم y کو مستقل اور z کو x کا تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}\ln z &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} \\
y\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x} &= 1 + 0 && y \text{ مستقل} \\
\left(y - \frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} &= 1 && \frac{\partial}{\partial x}(yz) = y\frac{\partial z}{\partial x} \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{z}{yz-1}
\end{aligned}$$

۲۰۸۴۰ □

۲۰۸۴۱ دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل

۲۰۸۴۲ دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرق کی تعریف، دو متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرق کی طرح ہے۔ یہ ایک متغیر کے لحاظ سے سادہ تفرق ہوتے
۲۰۸۴۳ ہیں جبکہ باقی تمام متغیرات کو مستقل تصور کیا جاتا ہے۔

۲۰۸۴۴ مثال ۱۳.۱۹: اگر x ، y اور z غیر تابع متغیرات ہوں جن کا تفاعل

$$f(x,y,z) = x\sin(y+3z)$$

۲۰۸۴۵ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}[x\sin(y+3z)] = x\frac{\partial}{\partial z}\sin(y+3z) \\
&= x\cos(y+3z)\frac{\partial}{\partial z}(y+3z) = 3x\cos(y+3z)
\end{aligned}$$

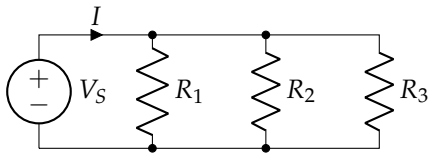
۲۰۸۴۶ □

۲۰۸۴۷ مثال ۱۳.۲۰: متوازی جڑی برقی مزاحمت
۲۰۸۴۸ اگر R_1 ، R_2 اور R_3 مزاحمت متوازی جڑی ہوں تب ان کا معادل مزاحمت R درج ذیل کلیہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل ۱۳.۲۶)۔

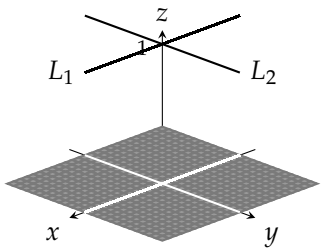
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \tag{۳}$$

۲۰۸۴۹ برقی مزاحمتوں کی قیمتیں $R_1 = 30\,\Omega$ ، $R_2 = 45\,\Omega$ ، $R_3 = 90\,\Omega$ لیتے ہوئے جزوی تفرق $\frac{\partial R}{\partial R_2}$ حاصل کریں۔

۲۰۸۵۰ حل



شکل ۱۳.۲۶: اس طرح جوڑے گئے مزاحمتوں کو متوازی جُڑا کہتے ہیں۔



شکل ۱۳.۲۷: تفاعل f چار کھلے ربعات اور لکیر L_1 ، L_2 پر مشتمل ہے (مثال ۱۳.۲۱)۔

۲۰۸۵۱ ہم R_1 اور R_3 کو مستقل تصور کرتے ہوئے $\frac{\partial R}{\partial R_2}$ تلاش کرنے کی خاطر مساوات ۳ کے دونوں اطراف کا R_2 کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R}\right) &= \frac{\partial}{\partial R_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)\\
-\frac{1}{R^2}\frac{\partial R}{\partial R_2} &= 0-\frac{1}{R_2^2}+0\\
\frac{\partial R}{\partial R_2} &= \frac{R^2}{R_2^2}=\left(\frac{R}{R_2}\right)^2
\end{aligned}$$

۲۰۸۵۲ مزاحمتوں کی دی گئی قیمتیں پر کرتے ہیں۔

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{30}+\frac{1}{45}+\frac{1}{90}=\frac{3+2+1}{90}=\frac{6}{90}=\frac{1}{15}$$

۲۰۸۵۳ یوں $R=15\,\Omega$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا درج ذیل نتیجہ حاصل ہوگا۔

$$\frac{\partial R}{\partial R_2}=\left(\frac{15}{45}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

۲۰۸۵۴ □

۲۰۸۵۵ استمرار اور جزوی تفرق کی موجودگی کا تعلق

۲۰۸۵۶ ایک نقطہ پر ایک تفاعل کا x اور y دونوں کے لحاظ سے جزوی تفرق موجود ہونے کے باوجود تفاعل غیر استمراری ہو سکتا ہے۔ یہ واحد متغیر تفاعل سے مختلف
۲۰۸۵۷ ہے جہاں تفاعل کے تفرق کی موجودگی اس کی استمرار یقینی بناتی ہے۔ ہاں (جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے)، اگر ایک قرص میں، جس کا مرکز (x_0, y_0)
۲۰۸۵۸ ہو، $f(x,y)$ کے جزوی تفرق موجود ہوں جو پورے قرص میں استمراری ہوں تب (x_0, y_0) پر f استمراری ہوگا۔

۲۰۸۵۹ مثال ۱۳.۲۱: درج ذیل تفاعل

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$$

۲۰۸۶۰ نقطہ $(0,0)$ پر غیر استمراری ہے (شکل ۱۳.۲۷)۔ لکیر $y = x$ پر چلتے ہوئے نقطہ (x,y) کا (x_0,y_0) تک پہنچنے سے f کی حد 0 حاصل
۲۰۸۶۱ ہوتی ہے جبکہ $f(0,0) = 1$ ہے۔ نقطہ $(0,0)$ پر f کے جزوی تفارق f_x ، f_y ، جو شکل میں خط L_1 اور L_2 کی ڈھلوان ہیں، دونوں
۲۰۸۶۲ موجود ہیں۔ □

۲۰۸۶۳ **دور تبی جزوی تفارق**

۲۰۸۶۴ تفاعل $f(x,y)$ کو دو بار تفرق کرنے سے ہمیں اس تفاعل کا دور تبی تفرق ملتا ہے۔ ان تفارق کو عموماً درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \text{یا} \quad f_{xx}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \text{یا} \quad f_{yy}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \text{یا} \quad f_{yx}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{یا} \quad f_{xy}$$

۲۰۸۶۵ ان کی تعریفی مساوات درج ذیل ہیں

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

۲۰۸۶۶ جہاں تفرق لینے کی ترتیب دھیان سے دیکھیں۔

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$ پہلے y اور بعد میں x کے ساتھ تفرق لیں

$$f_{yx} = (f_y)_x$$ ان کا بھی یہی مطلب ہے۔

۲۰۸۶۷ مثال ۱۳.۲۲: اگر $f(x,y) = x\cos y + ye^x$ ہو تب

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos y + ye^x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\sin y + e^x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = ye^x$$

۲۰۸۶۸ اور درج ذیل ہوں گے۔

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin y + e^x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -\sin y + e^x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -x \cos y$$

۲۰۸۶۹ □

۲۰۸۷۰ مسئلہ یولر

۲۰۸۷۱ آپ نے مثال ۱۳.۲۲ میں دھیان دیا ہو گا کہ مدغم دور تبی جزوی تفارق

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

۲۰۸۷۲ کی قیمتیں ایک سی تھیں۔ یہ محض اتفاق نہیں ہے۔ جہاں بھی f ، f_x ، f_y ، f_{xy} اور f_{yx} استمراری ہوں یہ ایک دوسرے کے برابر ہوں گے۔

۲۰۸۷۳ مسئلہ ۱۳.۲: **مدغم تفرق مسئلہ یا مسئلہ یولر**

۲۰۸۷۴ اگر ایک کھلے خطہ میں، جس میں نقطہ (a, b) پایا جاتا ہو، $f(x, y)$ اور اس کے جزوی تفارق f_x ، f_y ، f_{xy} اور f_{yx} معین ہوں اور (a, b)
۲۰۸۷۵ پر یہ تمام استمراری ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b) \tag{۴}$$

۲۰۸۷۶

۲۰۸۷۷ مسئلہ یولر (مسئلہ ۱۳.۲) کا ثبوت آپ کو ضمیمہ ط میں ملے گا۔

۲۰۸۷۸ مسئلہ ۱۳.۲ کہتا ہے کہ مدغم دور تبی جزوی تفرق کے حصول میں ہم کسی بھی ترتیب سے تفرق لے سکتے ہیں۔ بعض اوقات ایسا مددگار ثابت ہوتا ہے۔

۲۰۸۷۹ مثال ۱۳.۲۳: درج ذیل تفاعل کے لیے $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ تلاش کریں۔

$$w = xy + \frac{e^y}{y^2 + 1}$$

۲۰۸۸۰ **حل**

۲۰۸۸۱ ہمیں $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ کہتا ہے کہ کہ پہلے y کے لحاظ سے تفرق لیں اور بعد میں x کے لحاظ سے تفرق لیں۔ البتہ اگر ہم پہلے x اور بعد میں y کے لحاظ سے تفرق

۲۰۸۸۲ لیں تب نتیجہ زیادہ جلدی اور زیادہ آسانی سے صرف دو قدموں میں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\partial w}{\partial x} = y$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = 1$$

۲۰۸۸۳ اب پہلے y اور بعد میں x کا تفرق لیتے ہوئے اسی کو دوبارہ حل کر کے دیکھیں۔ □

۲۰۸۸۴ مزید بلند رتبہ کے جزوی تفارق

۲۰۸۸۵ عملی استعمال میں یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفارق زیادہ کثرت سے پائے جاتے ہیں لہٰذا ہمیں عموماً انہیں سے واسطہ ہو گا۔ جہاں تک تفاعل کے بلند تفارق کی بات
۲۰۸۸۶ ہے، ہم ایک تفاعل کا تفرق جتنی بار چاہیں لیں سکتے ہیں بشرطیکہ ایسے تفارق موجود ہوں۔ یوں ہم تین رتبی اور چار رتبی تفارق لے سکتے ہیں جنہیں درج ذیل
۲۰۸۸۷ علامتوں کی طرز پر ظاہر کیا جائے گا۔

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial^2 y} = f_{yyx}$$
$$\frac{\partial^4 f}{\partial^2 x \partial^2 y} = f_{yyxx}$$

۲۰۸۸۸ دو رتبی تفرق کی طرح، تفرق کی ترتیب غیر اہم ہے جب تک تمام تفارق استمراری ہوں۔

۲۰۸۸۹ سوالات

۲۰۸۹۰ یک رتبی جزوی تفرق کی تلاش

۲۰۸۹۱ سوال ۱۳.۱۳۱ تا سوال ۱۳.۱۵۲ میں $\frac{\partial f}{\partial x}$ اور $\frac{\partial f}{\partial y}$ تلاش کریں۔

۲۰۸۹۲ سوال ۱۳.۱۳۱: $f(x,y) = 2x^2 - 3y - 4$

۲۰۸۹۳ سوال ۱۳.۱۳۲: $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

۲۰۸۹۴ سوال ۱۳.۱۳۳: $f(x,y) = (x^2 - 1)(y + 2)$

۲۰۸۹۵ سوال ۱۳.۱۳۴: $f(x,y) = 5xy - 7x^2 - y^2 + 3x - 6y + 2$

۲۰۸۹۶ سوال ۱۳.۱۳۵: $f(x,y) = (xy - 1)^2$

۲۰۸۹۷ سوال ۱۳.۱۳۶: $f(x,y) = (2x - 3y)^3$

۲۰۸۹۸ سوال ۱۳.۱۳۷: $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

۲۰۸۹۹ سوال ۱۳.۱۳۸: $f(x,y) = (x^3 + y/2)^{2/3}$

۲۰۹۰۰ سوال ۱۳.۱۳۹: $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$

۲۰۹۰۱ سوال ۱۳.۱۴۰: $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

۲۰۹۰۲ سوال ۱۳.۱۴۱: $f(x,y) = \frac{x+y}{xy-1}$

۲۰۹۰۳ سوال ۱۳.۱۴۲: $f(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

۲۰۹۰۴ سوال ۱۳.۱۴۳: $f(x,y) = e^{x+y+1}$

۲۰۹۰۵ سوال ۱۳.۱۴۴: $f(x,y) = e^{-x}\sin(x+y)$

۲۰۹۰۶ سوال ۱۳.۱۴۵: $f(x,y) = \ln(x+y)$

۲۰۹۰۷ سوال ۱۳.۱۴۶: $f(x,y) = e^{xy}\ln y$

۲۰۹۰۸ سوال ۱۳.۱۴۷: $f(x,y) = \sin^2(x-3y)$

۲۰۹۰۹ سوال ۱۳.۱۴۸: $f(x,y) = \cos^2(3x-y^2)$

۲۰۹۱۰ سوال ۱۳.۱۴۹: $f(x,y) = x^y$

۲۰۹۱۱ سوال ۱۳.۱۵۰: $f(x,y) = \log_y x$

۲۰۹۱۲ سوال ۱۳.۱۵۱: تمام t کے لیے g استراری ہے $f(x,y) = \int_x^y g(t)\,\mathrm{d}t$

۲۰۹۱۳ سوال ۱۳.۱۵۲: $f(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}(xy)^n \quad (|xy| < 1)$

۲۰۹۱۴

۲۰۹۱۵ سوال ۱۳.۱۵۳ تا سوال ۱۳.۱۶۴ میں f_x ، f_y اور f_z تلاش کریں۔

۲۰۹۱۶ سوال ۱۳.۱۵۳: $f(x,y,z) = 1 + xy^2 - 2z^2$

۲۰۹۱۷ سوال ۱۳.۱۵۴: $f(x,y,z) = xy + yz + xz$

۲۰۹۱۸ سوال ۱۳.۱۵۵: $f(x,y,z) = x - \sqrt{y^2+z^2}$

۲۰۹۱۹ سوال ۱۳.۱۵۶: $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

۲۰۹۲۰ سوال ۱۳.۱۵۷: $f(x,y,z) = \sin^{-1}(xyz)$

۲۰۹۲۱ سوال ۱۳.۱۵۸: $f(x,y,z) = \sec^{-1}(x+yz)$

۲۰۹۲۲ سوال ۱۳.۱۵۹: $f(x,y,z) = \ln(x+2y+3z)$

۲۰۹۲۳ سوال ۱۳.۱۶۰: $f(x,y,z) = yz\ln(xy)$

۲۰۹۲۴ سوال ۱۳.۱۶۱: $f(x,y,z) = e^{-(x^2+y^2+z^2)}$

۲۰۹۲۵ سوال ۱۳.۱۶۲: $f(x,y,z) = e^{-xyz}$

سوال ۱۳.۱۶۳: $f(x,y,z) = \tanh(x+2y+3z)$

سوال ۱۳.۱۶۴: $f(x,y,z) = \sinh(xy - z^2)$

سوال ۱۳.۱۶۵ تا سوال ۱۳.۱۷۰ میں ہر متغیر کے لحاظ سے تفاعل کا جزوی تفرق تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۱۶۵: $f(t,\alpha) = \cos(2\pi t - \alpha)$

سوال ۱۳.۱۶۶: $g(u,v) = v^2 e^{2u/v}$

سوال ۱۳.۱۶۷: $h(\rho,\theta,\phi) = \rho \sin\theta \cos\phi$

سوال ۱۳.۱۶۸: $g(r,\theta,z) = r(1-\cos\theta) - z$

سوال ۱۳.۱۶۹: قلب کا کام

$$W(P,H,\delta,v,g) = PH + \frac{H\delta v^2}{2g}$$

سوال ۱۳.۱۷۰: $A(c,h,k,m,q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$

دورتبی جزوی تفرق کا حصول

سوال ۱۳.۱۷۱ تا سوال ۱۳.۱۷۶ میں تفاعل کے تمام دورتبی جزوی تفارق تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۱۷۱: $f(x,y) = x + y + xy$

سوال ۱۳.۱۷۲: $f(x,y) = \sin xy$

سوال ۱۳.۱۷۳: $g(x,y) = x^2 y + \cos y + y \sin x$

سوال ۱۳.۱۷۴: $h(x,y) = xe^y + y + 1$

سوال ۱۳.۱۷۵: $r(x,y) = \ln(x,y)$

سوال ۱۳.۱۷۶: $s(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

مدغم جزوی تفارق

سوال ۱۳.۱۷۷ تا سوال ۱۳.۱۸۰ میں $w_{xy} = w_{yx}$ کی تصدیق کریں۔

سوال ۱۳.۱۷۷: $w = \ln(2x+3y)$

سوال ۱۳.۱۷۸: $w = e^x + x\ln y + y\ln x$

سوال ۱۳.۱۷۹: $w = xy^2 + x^2y^3 + x^3y^4$

سوال ۱۳.۱۸۰: $w = x\sin y + y\sin x + xy$

سوال ۱۳.۱۸۱: بغیر قلم اٹھائے بتائیں کہ درج ذیل میں x کے لحاظ سے پہلے اور y کے لحاظ سے بعد میں یا اس کے الٹ حل کرتے ہوئے f_{xy} زیادہ جلدی حاصل ہو گا۔

ا. $f(x,y) = x\sin y + e^y$

ب. $f(x,y) = \frac{1}{x}$

ج. $f(x,y) = y + \frac{x}{y}$

د. $f(x,y) = y + x^2y + 4y^3 - \ln(y^2+1)$

ہ. $f(x,y) = x^2 + 5xy + \sin x + 7e^x$

و. $f(x,y) = x\ln xy$

سوال ۱۳.۱۸۲: درج ذیل میں تمام کا پانچ رتبی جزوی تفرق $\frac{\partial^5 f}{\partial x^2 \partial y^3}$ صفر کے برابر ہے۔ اس کی تصدیق کرنے کی خاطر آپ کس متغیر کے لحاظ سے پہلے جزوی تفرق لیں گے؟ بغیر کچھ لکھے جواب دینے کی کوشش کریں۔

ا. $f(x,y) = y^2x^4e^x + 2$

ب. $f(x,y) = y^2 + y(\sin x - x^4)$

ج. $f(x,y) = x^2 + 5xy + \sin x + 7e^x$

د. $f(x,y) = xe^{y^2/2}$

جزوی تفرق کی تعریف کا استعمال

سوال ۱۳.۱۸۳ اور سوال ۱۳.۱۸۴ میں جزوی تفرق کی تعریف بذریعہ حد استعمال کرتے ہوئے دیے گئے نقطہ پر تفاعل کا جزوی تفرق حاصل کریں۔

سوال ۱۳.۱۸۳: $f(x,y) = 1 - x + y - 3x^2y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (1,2)$

سوال ۱۳.۱۸۴: $f(x,y) = 4 + 2x - 3y - xy^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \quad (-2,1)$

سوال ۱۳.۱۸۵: فرض کریں $w = f(x,y,z)$ تین غیر تابع متغیرات کا تفاعل ہے۔ نقطہ (x_0,y_0,z_0) پر جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial z}$ کی باضابطہ تعریف لکھیں کریں۔ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $(1,2,3)$ پر $f(x,y,z) = x^2yz^2$ کا $\frac{\partial f}{\partial z}$ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۱۸۶: فرض کریں $w = f(x,y,z)$ تین غیر تابع متغیرات کا تفاعل ہے۔ نقطہ (x_0,y_0,z_0) پر جزوی تفرق $\frac{\partial f}{\partial y}$ کی باضابطہ تعریف لکھیں کریں۔ اس تعریف کو استعمال کرتے ہوئے $(-1,0,3)$ پر $f(x,y,z) = -2xy^2 + yz^2$ کا $\frac{\partial f}{\partial z}$ تلاش کریں۔

خفی جزوی تفارق

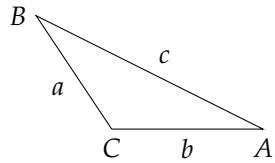
سوال ۱۳.۱۸۷: ذیل مساوات میں غیر تابع متغیرات x اور y کا تفاعل z پیش کیا گیا ہے۔ نقطہ $(1,1,1)$ پر $\frac{\partial z}{\partial x}$ کی قیمت تلاش کریں۔ اس نقطہ پر یہ جزوی تفرق موجود ہے۔

$$xy + z^3x - 2yz = 0$$

سوال ۱۳.۱۸۸: ذیل مساوات میں غیر تابع متغیرات x اور y کا تفاعل z پیش کیا گیا ہے۔ نقطہ $(1, -1, -3)$ پر $\frac{\partial z}{\partial x}$ کی قیمت تلاش کریں۔ اس نقطہ پر یہ جزوی تفرق موجود ہے۔

$$xz + y \ln x - x^2 + 4 = 0$$

سوال ۱۳.۱۸۹ اور سوال ۱۳.۱۸۹ درج ذیل مثلث کے بارے میں ہے۔



سوال ۱۳.۱۸۹: A کو خفی طور پر a ، b اور c کا تفاعل لکھ کر $\frac{\partial A}{\partial a}$ اور $\frac{\partial A}{\partial b}$ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۱۹۰: a کو خفی طور پر A ، b اور B کا تفاعل لکھ کر $\frac{\partial a}{\partial A}$ اور $\frac{\partial a}{\partial B}$ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۱۹۱: غیر تابع متغیرات x اور y کی صورت میں تفاعل u اور v مساوات $x = v \ln u$ اور $y = u \ln v$ دیتی ہیں۔ جزوی تفرق v_x ، جو موجود ہے، کو u اور v کی صورت میں لکھیں۔ (اشارہ: دونوں مساوات کا تفرق x اکے لحاظ سے لے کر v_x کے لیے حل کریں۔)

سوال ۱۳.۱۹۲: غیر تابع متغیرات u اور v کی صورت میں تفاعل x اور y مساوات $u = x^2 - y^2$ اور $v = x^2 - y$ دیتی ہیں۔ جزوی تفرق $\frac{\partial x}{\partial u}$ اور $\frac{\partial y}{\partial u}$ ، جو موجود ہیں تلاش کریں۔ (اشارہ: سوال ۱۳.۱۹۱ میں دیا گیا اشارہ دیکھیں۔) اب $s = x^2 + y$ لیتے ہوئے $\frac{\partial s}{\partial u}$ حاصل کریں۔

مساوات لاپلاس

تین بُعدی مساوات لاپلاس

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \tag{۵}$$

کو فضا میں برقرار حال حراری تقسیم $T = f(x, y, z)$ ، تجاذبی مخفی قوہ اور برقی ساکن مخفی قوہ مطمئن کرتے ہیں۔ مساوات ۵ سے جزو $\frac{\partial f}{\partial z}$ نکالنے سے

دو بُعدی مساوات لاپلاس

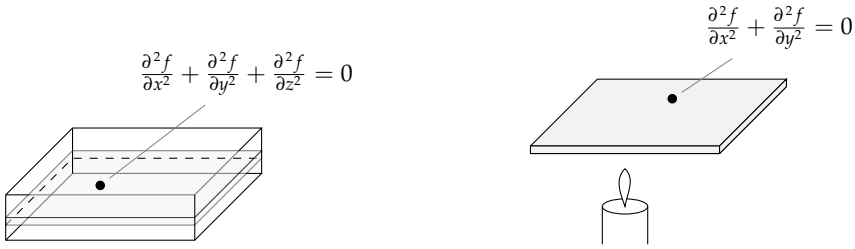
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \tag{۶}$$

حاصل ہوتی ہے جو مستوی میں خفی قوہ اور برقرار حال حراری تقسیم بیان کرتی ہے (شکل ۱۳.۲۸)۔

دکھائیں کہ سوال ۱۳.۱۹۳ تا سوال ۱۳.۱۹۸ میں دیا ہر ایک تفاعل مساوات لاپلاس میں سے کسی ایک کو مطمئن کرتا ہے۔

سوال ۱۳.۱۹۳: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$

سوال ۱۳.۱۹۴: $f(x, y, z) = 2z^3 - 3(x^2 + y^2)z$



(ا) (ب) مستوی کی سرحدی (کناروں کی) حرارت قابو کی گئی ہے۔

شکل ۱۳.۲۸: مستوی اور ٹھوس اجسام میں برقرار حال حرارت، مساوات لاپلاس کو مطمئن کرتی ہے۔

۲۰۹۹۸ سوال ۱۳.۱۹۵: $f(x,y) = e^{-2y}\cos 2x$

۲۰۹۹۹ سوال ۱۳.۱۹۶: $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$

۲۱۰۰۰ سوال ۱۳.۱۹۷: $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

۲۱۰۰۱ سوال ۱۳.۱۹۸: $f(x,y,z) = e^{2x+4y}\cos 5z$

۲۱۰۰۲

۲۱۰۰۳ **مساواتِ موج**

۲۱۰۰۴ سمندر کے کنارے کھڑے ہو کر سمندری امواج کی لی گئی تصویر میں نشیب و فراز کا ایک منظم نقش نظر آتا ہے۔ ہمیں فضا میں فاصلہ کے لحاظ سے دوری انتصابی
۲۱۰۰۵ حرکت نظر آتی ہے۔ پانی میں کھڑے ہو کر ہم گزرتی امواج کی وجہ سے پانی کا اتار چھڑاو محسوس کرتے ہیں۔ ہم وقت کے لحاظ سے دوری انتصابی حرکت دیکھتے
۲۱۰۰۶ ہیں۔ طبیعیات میں اس خوبصورت تشاکلی کو یک بُعدی مساوات موج

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (۷)$$

۲۱۰۰۷ بیان کرتی ہے جہاں قد موج w، فاصلاتی متغیر x، لمحاتی متغیر t اور موج کی رفتار c ہے۔

۲۱۰۰۸ سمندری سطح پر فاصلہ x ہو گا لیکن دیگر عملی استعمال میں x ارتعاش پذیر تار کے ساتھ ساتھ فاصلہ، ہوا میں فاصلہ (صوتی امواج)، یا فضا میں فاصلہ (امواج نور)
۲۱۰۰۹ ہو سکتا ہے۔ عدد c کی قیمت موج کی قسم اور ذریعہ پر منحصر ہو گا۔

۲۱۰۱۰ دکھائیں کہ سوال ۱۳.۱۹۹ تا سوال ۱۳.۲۰۵ میں تمام تفاعل مساوات موج کو مطمئن کرتے ہیں۔

۲۱۰۱۱ سوال ۱۳.۱۹۹: $w = \sin(x+ct)$

۲۱۰۱۲ سوال ۱۳.۲۰۰: $w = \cos(2x+2ct)$

۲۱۰۱۳ سوال ۱۳.۲۰۱: $w = \sin(x+ct) + \cos(2x+2ct)$

۲۱۰۱۴ سوال ۱۳.۲۰۲: $w = \ln(2x+2ct)$

۲۱۰۱۵ سوال ۱۳.۲۰۳: $w = \tan(2x-2ct)$

سوال ۱۳.۲۰۴: $w = 5\cos(3x + 3ct) + e^{x+ct}$

سوال ۱۳.۲۰۵: $w = f(u)$ ؛جہاں f متغیر u کا قابل تفرق تفاعل، $u = a(x + ct)$ اور a مستقل ہیں۔

۱۳.۴ تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات

اس حصہ میں ہم تفرق پذیری کی تعریف کے بعد خط بندی اور تفرقات پیش کرتے ہیں۔اس حصہ کے ریاضی نتائج مسئلہ بڑھوتری کی وجہ سے ہیں۔جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے، کثیر المتغیر تفاعل کے زنجیری قاعدہ کی بنیاد بھی یہی مسئلہ ہے۔

تفرق پذیری

نقطہ بڑھوتری کا تصور، تفرق پذیری کی ابتدا ہے۔آپ کو یاد ہو گا کہ اگر $x = x_0$ پر ایک متغیر کا تفاعل $y = f(x)$ قابل تفرق ہو تب x کی قیمت x_0 سے $x_0 + \Delta x$ کرنے سے f کی قیمت میں تبدیلی

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon\Delta x \tag{۱}$$

لکھی جا سکتی ہے جہاں $\Delta x \to 0$ اور $\epsilon \to 0$ ہیں۔دو متغیرات کے تفاعل کے لیے یہی خاصیت تفرق پذیری کی تعریف بنتی ہے۔اعلیٰ احصاء کا مسئلہ بڑھوتری ہمیں یقین دلاتا ہے کہ یہ خاصیت کارآمد رہے گی:

مسئلہ ۱۳.۳: **دو متغیرات کے تفاعل کا مسئلہ بڑھوتری**

فرض کریں پورا کھلا خطہ R میں، جس میں نقطہ (x_0, y_0) پایا جاتا ہو، $f(x, y)$ کے جزوی اول تفارق معین ہیں اور (x_0, y_0) پر f_x اور f_y استمراری ہیں۔تب نقطہ (x_0, y_0) کو R میں دوسری جگہ $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ منتقل کرنے سے f میں رونما ہونے والی تبدیلی

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

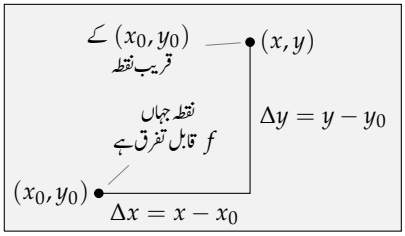
درج ذیل روپ کی مساوات کو مطمئن کرے گی جہاں $\Delta x,\ \Delta y \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1,\ \epsilon_2 \to 0$ ہوں گے۔

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y \tag{۲}$$

آپ ضمیمہ ط میں اس کا ثبوت دیکھ کر جان سکیں گے کہ ϵ_1 ، ϵ_2 کہاں سے آتے ہیں۔آپ یہ بھی دیکھ پائیں گے کہ اسی طرح کے نتائج دو سے زیادہ غیر تابع متغیرات کے تفاعل کے لیے کارآمد ہوں گے۔

تعریف: اگر $f_x(x_0, y_0)$ اور $f_y(x_0, y_0)$ موجود ہوں اور (x_0, y_0) پر f مساوات ۲ کو مطمئن کرتا ہو تب (x_0, y_0) پر $f(x, y)$ **قابل تفرق** ہو گا۔اگر f اپنے دائرہ کار کے اندر ہر نقطہ پر قابل تفرق ہو تب f **قابل تفرق**[۳۴] ہو گا۔

[۳۴] differentiable



شکل ۲۹.۱۳: اگر (x_0, y_0) پر f قابل تفرق ہو تب قریبی نقطہ (x, y) پر f کی قیمت تقریباً $f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$ ہو گی۔

۲۱۰۳۷ □

۲۱۰۳۸ اس تعریف کی روشنی میں ہمیں مسئلہ ۳.۱۳ کا ضمنی نتیجہ ملتا ہے جس کے تحت جس تفاعل کے جزوی اول تفارق استراری ہوں وہ تفاعل قابل تفرق ہو گا۔

۲۱۰۳۹ ضمنی نتیجہ ۱.۱۳: **برائے مسئلہ ۳۔۱۳** اگر پورے کھلا وقفہ R میں تفاعل $f(x, y)$ کے جزوی تفارق f_x اور f_x استراری ہوں تب R کے
۲۱۰۴۰ ہر نقطہ پر f تفرق پذیر ہو گا۔

۲۱۰۴۱

۲۱۰۴۲ ہم مساوات ۲ میں z کی جگہ $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ پر کر کے اس کو

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y \tag{۳}$$

۲۱۰۴۳ لکھتے ہوئے دیکھتے ہیں کہ اگر Δx اور Δy صفر کے قریب پہنچنے کی کوشش کرے تب نئی مساوات کا دایاں ہاتھ $f(x_0, y_0)$ کے قریب پہنچتا ہے۔ اس
۲۱۰۴۴ سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ تفاعل $f(x, y)$ ان تمام نقطوں پر استراری ہو ہو گا جہاں یہ تفرق پذیر ہو۔

۲۱۰۴۵ مسئلہ ۴.۱۳: اگر نقطہ (x_0, y_0) پر تفاعل $f(x, y)$ تفرق پذیر ہو تب (x_0, y_0) پر f استراری ہو گا۔

۲۱۰۴۶

۲۱۰۴۷ ہم مسئلہ ۳.۱۳ اور مسئلہ ۴.۱۳ سے دیکھتے ہیں کہ اگر اس پورے خطہ میں، جس میں نقطہ (x_0, y_0) پایا جاتا ہو، f_x اور f_y استراری ہوں تب
۲۱۰۴۸ (x_0, y_0) پر $f(x, y)$ لازماً استراری ہو گا۔ یاد رہے کہ دو متغیرات کا تفاعل اس نقطہ پر غیر استراری ہو سکتا ہے جہاں اس کا جزوی اول تفرق موجود ہو
۲۱۰۴۹ (مثال ۲۱.۱۳)۔ صرف موجودگی کافی نہیں ہے۔

۲۱۰۵۰ دو متغیرات کے تفاعل کی خط بندی

۲۱۰۵۱ دو متغیرات کے تفاعل پیچیدہ ہو سکتے ہیں اور بعض اوقات ہم چاہیں گے کہ ان کی جگہ ایسے نسبتاً سادہ تفاعل استعمال کریں جن کے ساتھ کام کرنا آسان ہو اور جو
۲۱۰۵۲ مخصوص عملی استعمال میں درکار درستگی دیتے ہوں۔ ہم واحد متغیر کے تفاعل کی خط بندی کی طرز پر ایسا کرتے ہیں (حصہ ۷.۴)۔

۲۱۰۵۳ فرض کریں تفاعل $z = f(x, y)$ نقطہ (x_0, y_0) پر قابل تفرق ہے اور ہم اس نقطہ پر f ، f_x اور f_y کی قیمتیں جانتے ہیں۔ ہم اس تفاعل
۲۱۰۵۴ کا ایسا متبادل چاہتے ہیں جو (x_0, y_0) کے قریب موثر ہو۔ چونکہ f قابل تفرق ہے لہذا نقطہ (x_0, y_0) پر مساوات ۳ تفاعل f کے لیے کارآمد ہو

گا۔ یوں $\Delta x = x - x_0$ اور $\Delta y = y - y_0$ کی بڑھوتری سے (x_0, y_0) سے نقطہ (x, y) منتقل (شکل ۱۳.۲۹) ہونے سے f کی نئی قیمت

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

ملتی ہے جہاں $\Delta x, \Delta y \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ ہو گا۔ اگر Δx اور Δy چھوٹے ہوں تب $\epsilon_1 \Delta x$ اور $\epsilon_2 \Delta y$ آخر کار مزید چھوٹے ہوں گے لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$f(x,y) \approx \underbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{L(x,y)}$$

دوسرے لفظوں میں، جب تک Δx اور Δy چھوٹے ہوں، f کی قیمت تقریباً وہی ہو گی جو خطی تفاعل L کی ہو گی۔ اگر f کے ساتھ کام کرنا دشوار ہو اور L ہمیں درکار درستگی دیتا ہو تب ہم f کی جگہ L استعمال کر سکتے ہیں۔

تعریف: نقطہ (x_0, y_0) پر، جہاں تفاعل $f(x,y)$ قابل تفرق ہو، f کا **خط بند**[۳۵] تفاعل درج ذیل ہو گا۔

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \tag{۴}$$

درج ذیل تخمین

$$f(x,y) \approx L(x,y)$$

نقطہ (x_0, y_0) پر تفاعل f کی **معیاری خطی تخمین**[۳۶] ہے۔

□

ہم حصہ ۱۳.۸ میں دیکھیں گے کہ مستوی $z = L(x,y)$ سطح $z = f(x,y)$ کو نقطہ (x_0, y_0) پر مماسی ہے۔ یوں جیسا واحد متغیر کی خط بندی مماسی خط تخمین دیتی ہے، اسی طرح دو متغیرات کے تفاعل کی خط بندی ہمیں مماسی مستوی تخمین دیتی ہے۔

مثال ۱۳.۲۴: نقطہ $(3,2)$ پر درج ذیل کی خط بند تخمین تلاش کریں۔

$$f(x,y) = x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3$$

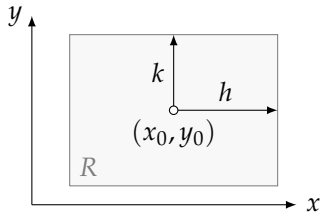
حل

ہم مساوات ۴ میں درج ذیل پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
f(x_0,y_0) &= \left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3,2)} = 8 \\
f_x(x_0,y_0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3,2)} = (2x - y)_{(3,2)} = 4 \\
f_y(x_0,y_0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 + 3\right)_{(3,2)} = (-x + y)_{(3,2)} = -1
\end{aligned}$$

---

[۳۵] linearization
[۳۶] standardlinearapproximation



شکل ۱۳.۳۰: مستوی xy میں مستطیل خطہ R: $|x - x_0| \leq h, |y - y_0| \leq k$ جہاں میں ہم اپنی تخمین کے خلل کی کارآمد حد بندی تلاش کر سکتے ہیں

۲۱۰۷۰ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) \qquad \text{مساوات ۴} \\ &= 8 + (4)(x-3) + (-1)(y-2) = 4x - y - 2 \end{aligned}$$

۲۱۰۷۱ نقطہ $(3,2)$ پر f کی خط بندی $L(x,y) = 4x - y - 2$ ہے۔ □

۲۱۰۷۲ معیاری خطی تخمین کی درستگی

۲۱۰۷۳ تخمین $f(x,y) \approx L(x,y)$ میں خلل کی تلاش میں ہم f کے دور تبی جزوی تفارق استعمال کرتے ہیں۔ فرض کریں ایک کھلا سلسلہ میں
۲۱۰۷۴ f کے یک رتبی اور دور تبی جزوی تفارق استمراری ہوں اور اس سلسلہ میں ایک مستطیل خطہ R جس کا مرکز (x_0, y_0) ہو پایا جاتا ہو۔ اس مستطیل خطہ کو
۲۱۰۷۵ درج ذیل عدم مساوات ظاہر کرتے ہیں (شکل ۱۳.۳۰)۔

$$|x - x_0| \leq h, \quad |y - y_0| \leq k$$

۲۱۰۷۶ چونکہ R بند اور محدود ہے لہٰذا R میں تمام دور تبی جزوی تفارق کی مطلق اعظم قیمتیں ہوں گی۔ اگر ان میں B سب سے بڑی قیمت ہو تب، جیسا آگے حصہ
۲۱۰۷۷ ۱۳.۱۰ میں سمجھایا گیا ہے، پورے R میں معیاری خطی تخمین میں خلل $E(x,y) = f(x,y) - L(x,y)$ درج ذیل عدم مساوات کو مطمئن
۲۱۰۷۸ کرے گا۔

$$|E(x,y)| \leq \frac{1}{2}B(|x - x_0| + |y - y_0|)^2$$

۲۱۰۷۹ جب ہم اس عدم مساوات کو E کی اندازاً قیمت حاصل کرنے کے لیے استعمال کریں تب ہم f_{xx} ، f_{yy} اور f_{xy} ، جو B تعین کرتے ہیں، حاصل
۲۱۰۸۰ کرنے سے قاصر ہوں گے لہٰذا ہمیں بالائی حد بندی یعنی بدترین قیمت پر گزارہ کرنا ہو گا۔ اگر R میں $|f_{xx}|$ ، $|f_{yy}|$ اور $|f_{xy}|$ کی مشترک بالائی حد
۲۱۰۸۱ بندی M ہو، تب B کی قیمت M کے برابر یا اس سے کم ہو گی لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$|E(x,y)| \leq \frac{1}{2}M(|x - x_0| + |y - y_0|)^2$$

۲۱۰۸۲ اس عدم مساوات سے عموماً E کی تخمینی قیمت حاصل کی جاتی ہے۔ کسی M کے لیے $\left|E(x,y)\right|$ کی قیمت کم کرنے کے لیے ہم $|x-x_0|$ اور
۲۱۰۸۳ $\left|y-y_0\right|$ کو چھوٹا بناتے ہیں۔

۲۱۰۸۴ معیاری خطی تخمین میں خلل

۲۱۰۸۵ اگر ایک کھلا سلسلہ میں f کے یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفارق استمراری ہوں اور اس سلسلہ میں ایک مستطیل خطہ R جس کا مرکز (x_0,y_0) ہو پایا جاتا
۲۱۰۸۶ ہو اور R پر $\left|f_{xx}\right|$، $\left|f_{yy}\right|$ اور $\left|f_{xy}\right|$ کی بالائی حد بندی M ہو تب R پر $f(x,y)$ کا متبادل

$$L(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

۲۱۰۸۷ استعمال کرنے سے پیدا خلل $E(x,y)$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$\left|E(x,y)\right|\leq\frac{1}{2}M(|x-x_0|+\left|y-y_0\right|)^2 \tag{۵}$$

۲۱۰۸۸ مثال ۱۳.۲۵: ہم نے مثال ۱۳.۲۴ میں $(3,2)$ پر درج ذیل کی خط بندی کی۔

$$f(x,y)=x^2-xy+\frac{1}{2}y^2+3$$

۲۱۰۸۹ مستطیل

$$R:\quad |x-3|\leq 0.1,\quad \left|y-2\right|\leq 0.1$$

۲۱۰۹۰ پر تخمین $f(x,y)\ \approx\ L(x,y)$ کے خلل کی بالائی حد بندی تلاش کریں۔ اس حد بندی کو مستطیل کے مرکز پر f کی قیمت $f(3,2)$ کا فی صد
۲۱۰۹۱ لکھیں۔

۲۱۰۹۲ **حل**

۲۱۰۹۳ ہم درج ذیل عدم مساوات استعمال کرتے ہیں۔

$$\left|E(x,y)\right|\leq\frac{1}{2}M(|x-x_0|+\left|y-y_0\right|)^2 \qquad \text{مساوات ۵}$$

۲۱۰۹۴ ہم معمول کے تفرق سے دیکھتے ہیں کہ f_{xx}، f_{yy} اور f_{xy} تینوں مستقل ہیں:

$$\left|f_{xx}\right|=|2|=2,\quad \left|f_{xy}\right|=|-1|=1,\quad \left|f_{yy}\right|=|1|=1$$

۲۱۰۹۵ ان تمام میں سب سے بڑی قیمت 2 ہے لہٰذا ہم M کو 2 کے برابر رکھ سکتے ہیں۔ اب $(x_0,y_0)=(3,2)$ کے لیے R میں درج ذیل ہو گا۔

$$\left|E(x,y)\right|\leq\frac{1}{2}(2)(|x-3|+\left|y-2\right|)^2$$

آخر میں چونکہ $|x-3| \leq 0.1$ اور $|y-2| \leq 0.1$ ہیں لہٰذا R پر

$$\left|E(x,y)\right| \leq (0.1+0.1)^2 = 0.04$$

ہوگا۔ جب تب (x,y) مستطیل R میں رہے تخمین $f(x,y) \approx L(x,y)$ میں خلل 0.04 سے زیادہ نہیں ہوگی جو R کے مرکز پر f کی قیمت کا 0.5 % ہے۔ □

تفرقات سے تبدیلی کی پیش گوئی

فرض کریں ہم نقطہ (x_0, y_0) پر قابل تفرق تفاعل $f(x,y)$ اور اس کے یک رتبی تفارق کی قیمتیں جانتے ہیں اور ہم قریبی نقطہ $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ پر منتقل ہونے سے f کی قیمت میں تبدیلی جاننا چاہتے ہیں۔ اگر Δx اور Δy چھوٹے ہوں تب (x_0, y_0) پر f اور اس کی خط بندی کی قیمت میں تبدیلی تقریباً ایک دوسرے جیسی ہوگی لہٰذا L کی تبدیلی سے ہمیں عملاً f کی تبدیلی حاصل ہوگی۔

تفاعل f میں تبدیلی درج ذیل ہوگی۔

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$$

ہم مساوات ۴ میں $x - x_0 = \Delta x$ اور $y - y_0 = \Delta y$ لیتے ہوئے L میں تبدیلی

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0+\Delta x, y_0+\delta y) - L(x_0, y_0)\\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y\end{aligned}$$

حاصل کرتے ہیں۔ عموماً ΔL کے کلیہ کے ساتھ کام کرنا اتنا ہی مشکل ہوگا جتنا Δf کے کلیہ کے ساتھ کام کرنا مشکل ہوگا۔ البتہ L میں تبدیلی f کے کلیہ سے حاصل کرنا زیادہ مشکل ثابت ہوتا ہے۔ خطی تخمین L میں تبدیلی، ایک معلوم مستقل ضرب Δx جمع دوسرا معلوم مستقل ضرب Δy ہوتا ہے۔

ہم تبدیلی ΔL کو عموماً درج ذیل خیال آفریں علامتی روپ سے ظاہر کرتے ہیں جہاں x اور y میں تبدیلی Δx اور Δy کی وجہ سے خط بندی میں تبدیلی کو $\mathrm{d}f$ ظاہر کرتی ہے۔

$$\mathrm{d}f = f_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y$$

حسب معمول ہم $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ کو x اور y کا تفرقہ کہتے ہیں اور $\mathrm{d}f$ کو f کا مطابقتی تفرقہ کہتے ہیں۔

تعریف: نقطہ (x_0, y_0) سے قریبی نقطہ $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ منتقلی کی وجہ سے f کا **تفرقہ**[۳۷] درج ذیل ہوگی۔

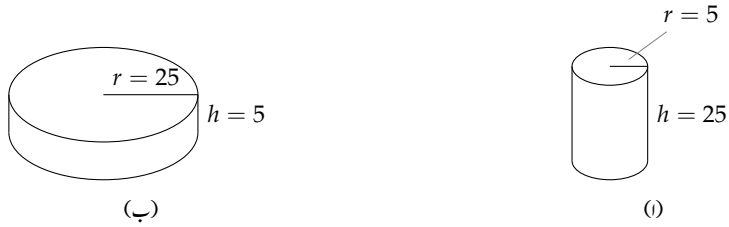
$$\mathrm{d}f = f_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y \tag{۶}$$

تفاعل f کی خط بندی میں اس تبدیلی کو f **کا کل تفرقہ**[۳۸] کہتے ہیں۔

□

---

[۳۷] differential
[۳۸] totaldifferential



شکل ۱۳.۳۱: بیلن-اکا حجم r میں چھوٹی تبدیلی کو زیادہ حساس ہے جبکہ بیلن-ب کا حجم h میں چھوٹی تبدیلی کو زیادہ حساس ہے۔

۲۱۱۱۳ مثال ۱۳.۲۶: تبدیلی کے لیے حساسیت

۲۱۱۱۴ آپ کا ادارہ دائری نلکی حوض بناتا ہے جس کا قد $25\,\mathrm{m}$ اور رداس $5\,\mathrm{m}$ ہے۔ قد اور رداس میں چھوٹی تبدیلی کو حوض کے حجم کی حساسیت تلاش کریں۔

۲۱۱۱۵ **حل**

۲۱۱۱۶ حوض کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H(r,h) = \pi r^2 h$$

۲۱۱۱۷ قد اور رداس میں چھوٹی تبدیلیوں $\mathrm{d}h$ اور $\mathrm{d}r$ کی وجہ سے حوض کے حجم میں تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H &= H_r(5,25)\,\mathrm{d}r + H_h(5,25)\,\mathrm{d}h \qquad \text{مساوات ۶}\\ &= (2\pi rh)_{(5,25)}\,\mathrm{d}r + (\pi r^2)_{(5,25)}\,\mathrm{d}h\\ &= 250\pi\,\mathrm{d}r + 25\pi\,\mathrm{d}h\end{aligned}$$

۲۱۱۱۸ یوں r میں 1 اکائی تبدیلی H میں 250π اکائیاں تبدیلی پیدا کرتی ہے جبکہ h میں 1 اکائی تبدیلی H میں 25π اکائیاں تبدیلی پیدا کرتی ہے۔

۲۱۱۱۹ حوض کا حجم r میں چھوٹی تبدیلی کو، h میں چھوٹی تبدیلی کے لحاظ سے 10 گنا زیادہ حساس ہے۔ یوں آپ کو رداس پر کھڑی نظر رکھنی ہو گی۔

۲۱۱۲۰ اس کے برعکس اگر r اور h کی قیمتیں آپس میں بدل دی جائیں تاکہ $r = 25\,\mathrm{m}$ اور $h = 5\,\mathrm{m}$ ہوں تب کل تفرقہ حجم

$$\mathrm{d}H = (2\pi rh)_{(25,5)}\,\mathrm{d}h + (\pi r^2)_{(25,5)}\,\mathrm{d}r = 250\pi\,\mathrm{d}r + 625\pi\,\mathrm{d}h$$

۲۱۱۲۱ ہو گا۔ اب حوض کا حجم قد میں تبدیلی کو زیادہ حساس ہے (شکل ۱۳.۳۱)۔

۲۱۱۲۲ اس مثال سے ہم یہ قاعدہ سیکھتے ہیں کہ تفاعل ان متغیرات کو زیادہ حساس ہوتے ہیں جو سب سے بڑا جزوی تفرق دیتا ہو۔ □

۲۱۱۲۳ مطلق، نسبتی اور فی صف تبدیلی

۲۱۱۲۴ ایک نقطہ (x_0, y_0) سے قریبی نقطہ منتقلی کی وجہ سے تفاعل $f(x,y)$ کی قیمت میں تبدیلی کو تین مختلف طریقوں سے بیان کیا جا سکتا ہے:

۲۱۱۲۵

	درست	اندازاً
مطلق تبدیلی	Δf	$\mathrm{d}f$
نسبتی تبدیلی	$\frac{\Delta f}{f(x_0,y_0)}$	$\frac{\mathrm{d}f}{f(x_0,y_0)}$
فی صد تبدیلی	$\frac{\Delta f}{f(x_0,y_0)} \times 100$	$\frac{\mathrm{d}f}{f(x_0,y_0)} \times 100$

۲۱۱۲۶ مثال ۱۳.۲۷: فرض کریں متغیرات r اور h کی قیمتوں $(r_0, h_0) = (1, 5)$ میں تبدیلی $\mathrm{d}r = 0.03$ اور $\mathrm{d}h = -0.1$ ہو۔
۲۱۱۲۷ تفاعل $H = \pi r^2 h$ کی قیمت میں مطلق، نسبتی اور فی صد تبدیلی کتنی ہو گی؟

۲۱۱۲۸ **حل**

۲۱۱۲۹ تفاعل H میں تبدیلی جاننے کے لیے ہم

$$\mathrm{d}H = H_r(r_0, h_0)\,\mathrm{d}r + H_h(r_0, h_0)\,\mathrm{d}h$$

۲۱۱۳۰ کی قیمت تلاش کر کے

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H &= 2\pi r_0 h_0\,\mathrm{d}r + \pi r_0^2 h\,\mathrm{d}h \\ &= 2\pi(1)(5)(0.03) + \pi(1)^2(-0.1) = 0.3\pi - 0.1\pi = 0.2\pi\end{aligned}$$

۲۱۱۳۱ حاصل کرتے ہیں جبکہ $H(1,5) = \pi(1)^2(5) = 5\pi$ ہے۔یوں مطلق تبدیلی 0.2π ، نسبتی تبدیلی $\frac{0.2\pi}{5\pi} = 0.04$ اور فی صف
۲۱۱۳۲ تبدیلی $4\,\%$ ہو گی۔ □

۲۱۱۳۳ مثال ۱۳.۲۸: ایک دائری بیلن کا حجم $H = \pi r^2 h$ اس کا رداس اور قد ناپ کر حاصل کیا جاتا ہے۔فرض کریں رداس اور قد کی ناپ میں خلل
۲۱۱۳۴ بالترتیب $2\,\%$ اور $0.5\,\%$ سے زیادہ نہیں ہو سکتا ہے۔ حجم کی قیمت حاصل کرنے میں خلل کتنا ہو سکتا ہے؟

۲۱۱۳۵ **حل**

۲۱۱۳۶ ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہیں۔

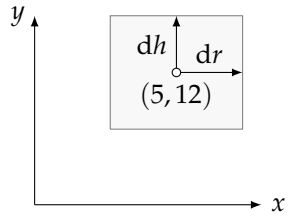
$$\left|\frac{\mathrm{d}r}{r} \times 100\right| \le 2, \quad \left|\frac{\mathrm{d}h}{h} \times 100\right| \le 0.5$$

۲۱۱۳۷ چونکہ

$$\frac{\mathrm{d}H}{H} = \frac{2\pi r h\,\mathrm{d}r + \pi r^2\,\mathrm{d}h}{\pi r^2 h} = \frac{2\,\mathrm{d}r}{r} + \frac{\mathrm{d}h}{h}$$

۲۱۱۳۸ ہے لہٰذا

$$\begin{aligned}\left|\frac{\mathrm{d}H}{H} \times 100\right| &= \left|2\frac{\mathrm{d}r}{r} \times 100 + \frac{\mathrm{d}h}{h} \times 100\right| \\ &\le 2\left|\frac{\mathrm{d}r}{r} \times 100\right| + \left|\frac{\mathrm{d}h}{h} \times 100\right| \le 2(2) + 0.5 = 4.5\end{aligned}$$



شکل ۱۳.۳۲: نقطہ $(5, 12)$ کے گرد چھوٹا مربع (مثال ۱۳.۲۹)

ہو گا۔ ہمارا اندازہ ہے کہ حجم کے حساب میں خلل $4.5\,\%$ سے زیادہ نہیں ہو گا۔ □

ہمیں r اور h کتنی درستگی سے ناپنا ہو گا تاکہ حجم کے حساب میں خلل مثلاً $2\,\%$ سے زیادہ نہ ہو؟ اس طرح کے سوالات کا جواب دینا مشکل ہے چونکہ اس کا کوئی ایک صحیح جواب نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{\mathrm{d}H}{H} = 2\frac{\mathrm{d}r}{r} + \frac{\mathrm{d}h}{h}$$

ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}H}{H}$ کو $\frac{\mathrm{d}r}{r}$ اور $\frac{\mathrm{d}h}{h}$ مل کر قابو کرتے ہیں۔ اگر ہم h درست ناپ سکیں تب عین ممکن ہے کہ r کی ناپ زیادہ درست نہ ہونے کی صورت میں بھی ہمیں درکار نتائج ملیں۔ اس کے برعکس h کی ناپ اتنی ناقص ہو سکتی ہے کہ ہم جتنا چاہیں r کی ناپ درست رکھیں، نتائج قابل قبول نہ ہوں۔

ایسی صورت میں ہم ناپی گئی قیمتوں (r_0, h_0) کو مرکز رکھتے ہوئے ایک مربع منتخب کرتے ہیں جس میں H کی قیمت $\pi r_0^2 h_0$ سے قابل قبول حد سے زیادہ تجاوز نہ کرتا ہو۔

مثال ۱۳.۲۹: نقطہ $(r_0, h_0 = (5, 12)$ کو مرکز رکھتے ہوئے ایسا مربع تلاش کریں جس میں حجم $H = \pi r^2 h$ کی قیمت ± 0.1 سے زیادہ تجاوز نہ کرے (شکل ۱۳.۳۲)۔

حل

ہم $\mathrm{d}H$ کی درج ذیل تخمین لیتے ہیں۔

$$\mathrm{d}H = 2\pi r_0 h_0\,\mathrm{d}r + \pi r_0^2\,\mathrm{d}h = 2\pi(5)(12)\,\mathrm{d}r + \pi(5)^2\,\mathrm{d}h = 120\pi\,\mathrm{d}r + 25\pi\,\mathrm{d}h$$

چونکہ ہم جس خطہ کے اندر رہنا چاہتے ہیں وہ خطہ ایک مربع ہے لہٰذا ہم $\mathrm{d}h = \mathrm{d}r$ لے کر

$$\mathrm{d}H = 120\pi\,\mathrm{d}r + 25\pi\,\mathrm{d}r = 145\pi\,\mathrm{d}r$$

حاصل کرتے ہیں۔ ہم اب پوچھتے ہیں، $\mathrm{d}r$ کتنا چھوٹا ہونا چاہیے تاکہ $|\mathrm{d}H|$ کی قیمت 0.1 سے کسی صورت زیادہ نہ ہو؟ ہم عدم مساوات

$$|\mathrm{d}H| \leq 0.1$$

سے شروع کر کے $\mathrm{d}H$ کو $\mathrm{d}r$ کی صورت

$$|145\pi\,\mathrm{d}r| \leq 0.1$$

میں لکھ کر $\mathrm{d}r$ کی بالائی حد بندی تلاش کرتے ہیں:

$$|\mathrm{d}r| \leq \frac{0.1}{145\pi} \approx 2.1 \times 10^{-4}$$

نیچے پورا کرتے ہیں تاکہ غلطی سے $\mathrm{d}r$ بڑا نہ ہو جائے

اب $\mathrm{d}h = \mathrm{d}r$ کی وجہ سے ہمارا مربع درج ذیل مساوات دے گا۔

$$|r-5| \leq 2.1 \times 10^{-4}, \quad |h-12| \leq 2.1 \times 10^{-4}$$

جب تک (r,h) اس مربع میں رہیں، ہم توقع کر سکتے ہیں کہ $|\mathrm{d}H|$ کی قیمت 0.1 کے برابر یا اس سے کم ہو گی اور ہم توقع کر سکتے ہیں کہ $|\Delta H|$ بھی تقریباً اتنا ہو گا۔ $\square$

دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل

دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کے لیے بھی ایسا ہو گا۔

۱. نقطہ $N_0(x_0,y_0,z_0)$ پر تفاعل $f(x,y,z)$ کی خط بندی درج ذیل ہو گی۔

$$L(x,y,z) = f(N_0) + f_x(N_0)(x-x_0) + f_y(N_0)(y-y_0) + f_z(N_0)(z-z_0) \tag{۷}$$

۲. فرض کریں بند ٹھوس مستطیل R کا مرکز N_0 ہے۔ یہ مستطیل ایسے خطہ میں پایا جاتا ہے جہاں f کے دور تبی جزوی تفارق استمراری ہیں۔ مزید فرض کریں کہ پورے R پر $|f_{xx}|$، $|f_{yy}|$، $|f_{zz}|$، $|f_{xy}|$، $|f_{xz}|$ اور $|f_{yz}|$ کی قیمتیں M کے برابر یا اس سے کم ہیں۔ تب پورے R میں f کی تخمین L میں **خلل**[۳۹] $E(x,y,z) = f(x,y,z) - L(x,y,z)$ کی بالائی حد بندی درج ذیل عدم مساوات دے گی۔

$$|E| \leq \frac{1}{2}M(|x-x_0| + |y-y_0| + |z-z_0|)^2 \tag{۸}$$

۳. اگر f کے دور تبی جزوی تفارق استمراری ہوں اور x، y، z کی قیمتیں چھوٹی تبدیلیوں $\mathrm{d}x$، $\mathrm{d}y$، $\mathrm{d}z$ کی وجہ سے x_0، y_0، z_0 سے تبدیل ہو جائیں، تب کل تفرقہ

$$\mathrm{d} = f_x(N_0)\,\mathrm{d}x + f_y(N_0)\,\mathrm{d}y + f_z(N_0)\,\mathrm{d}z$$

تفاعل f میں نتیجتاً تبدیلی کی اچھی تخمین ہو گی۔

مثال ۱۳.۳۰: نقطہ $(x_0,y_0,z_0) = (2,1,0)$ پر درج ذیل تفاعل کی خط بندی $L(x,y,z)$ تلاش کریں۔

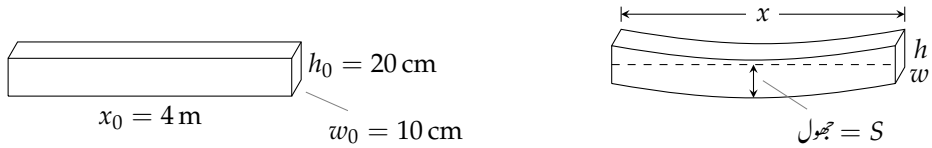
$$f(x,y,z) = x^2 - xy + 3\sin z$$

تفاعل f کی جگہ تخمین L استعمال کرنے سے درج ذیل مستطیل میں پیدا خلل کی بالائی حد بندی دریافت کریں۔

$$R: \quad |x-2| \leq 0.01, \quad |y-1| \leq 0.02, \quad |z| \leq 0.01$$

---

[۳۹] error



(ا) شہتیر کا جھول (ب) شہتیر کی جسامت

شکل ۱۳.۳۳

۲۱۱۶۸ **حل**

۲۱۱۶۹ ہم پہلے درج ذیل معلوم کرتے ہیں۔

$$f(2,1,0) = 2, f_x(2,1,0) = 3, f_y(2,1,0) = -2, f_z(2,1,0) = 3$$

۲۱۱۷۰ ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۷ درج ذیل دیتی ہے۔

$$L(x,y,z) = 2 + 3(x-2) + (-2)(y-1) + 3(z-0) = 3x - 2y + 3z - 2$$

۲۱۱۷۱ اسی طرح پہلے دو رتبی جزوی تفارق حاصل کرتے ہیں۔

$$f_{xx} = 2, f_{yy} = 0, f_{zz} = -3\sin z, f_{xy} = -1, f_{xz} = 0, f_{yz} = 0$$

۲۱۱۷۲ مساوات ۸ میں M کو $|-3\sin z|$ کی اعظم قیمت یعنی 3 لے سکتے ہیں۔ یوں

$$|E| \leq \frac{1}{2}(3)(0.01 + 0.02 + 0.01)^2 = 0.0024$$

۲۱۱۷۳ ہو گا لہٰذا خلل 0.0024 سے زیادہ نہیں ہو گا۔ □

۲۱۱۷۴ مثال ۱۳.۳۱: یکساں بار بردار شہتیر کی جھول

۲۱۱۷۵ ایک افقی مستطیل شہتیر جس کے دونوں سروں کو سہارا دیا گیا اور جس پر یکساں بوجھ (یکساں وزن فی میٹر لمبائی) ڈالا گیا ہو اس بوجھ کے نیچے جھک جائے گا (شکل

۲۱۱۷۶ ۱۳.۳۳-ا)۔ جھکاو S کو درج ذیل کلیہ سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

$$S = C\frac{px^4}{wh}$$

۲۱۱۷۷ اس مساوات میں متغیرات کی تفصیل درج ذیل ہے۔

۲۱۱۷۸ p بوجھ (شہتیر کے ایک میٹر پر وزن۔ وزن کی اکائی نیوٹن ہے۔)

۲۱۱۷۹ x دونوں سروں پر سہارا کے بیچ فاصلہ (میٹر)

۲۱۱۸۰ w شہتیر کی چوڑائی (میٹر)

h شہتیر کا قد (میٹر)

C ایک مستقل جو اس مادہ پر منحصر ہو گا جس سے شہتیر بنایا گیا ہو۔

ایک شہتیر کی لمبائی $4\,\mathrm{m}$ ، چوڑائی $10\,\mathrm{cm}$ اور قد $20\,\mathrm{cm}$ ہیں۔ اس پر $100\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ بوجھ ڈالا گیا ہے (شکل ۱۳.۳۳-ب)۔ جھول میں تبدیلی $\mathrm{d}S$ سے شہتیر کے بارے میں کیا نتیجہ حاصل کیا جا سکتا ہے؟

حل

چونکہ S چار متغیرات p ، x ، w ، h کا تفاعل ہے لہٰذا اس کا کل تفرقہ $\mathrm{d}S$ درج ذیل ہو گی۔

$$\mathrm{d}S = S_p\,\mathrm{d}p + S_x\,\mathrm{d}x + S_w\,\mathrm{d}w + S_h\,\mathrm{d}h$$

کسی مخصوص p_0 ، x_0 ، w_0 ، h_0 کے لیے اس کو حل کرتے ہوئے مساوات کی سادہ صورت حاصل کرنے سے

$$\mathrm{d}S = S_0\left(\frac{\mathrm{d}p}{p_0} + \frac{4\,\mathrm{d}x}{x_0} - \frac{\mathrm{d}w}{w_0} - \frac{3\,\mathrm{d}h}{h_0}\right)$$

ملتا ہے جہاں $S_0 = S(p_0, x_0, w_0, h_0) = C p_0 x_0^4/(w_0 h_0^3)$ ہے۔

اگر $p_0 = 100\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ ، $x_0 = 4\,\mathrm{m}$ ، $w_0 = 0.1\,\mathrm{m}$ اور $h_0 = 0.2\,\mathrm{m}$ ہوں تب

$$\mathrm{d}S = S_0\left(\frac{\mathrm{d}p}{100} + \mathrm{d}x - 10\,\mathrm{d}w - 15\,\mathrm{d}h\right) \tag{۹}$$

اس مساوات میں چونکہ $\mathrm{d}p$ اور $\mathrm{d}x$ کے عددی سر مثبت ہیں لہٰذا p اور x جھول بڑھاتے ہیں۔ اس کے برعکس $\mathrm{d}w$ اور $\mathrm{d}h$ کے عددی سر منفی ہیں لہٰذا w اور h جھول کم کرتے ہیں۔ چونکہ $\mathrm{d}p$ کا عددی سر $\frac{1}{100}$ ہے لہٰذا بوجھ کا جھول پر زیادہ اثر نہیں ہو گا۔ چونکہ $\mathrm{d}h$ کا عددی سر $\mathrm{d}w$ کے عددی سر سے بڑا ہے لہٰذا شہتیر کا قد $1\,\mathrm{cm}$ بڑھانے سے جھول زیادہ کم ہو گا۔ □

سوالات

خط بندی کی تلاش

سوال ۱۳.۲۰۶ تا سوال ۱۳.۲۱۱ میں ایک ایک نقطہ پر خط بندی $L(x, y)$ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۲۰۶: $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ (ا) $(0, 0)$ ، (ب) $(1, 1)$

سوال ۱۳.۲۰۷: $f(x, y) = (x + y + 2)^2$ (ا) $(0, 0)$ ، (ب) $(1, 2)$

سوال ۱۳.۲۰۸: $f(x, y) = 3x - 4y + 5$ (ا) $(0, 0)$ ، (ب) $(1, 1)$

سوال ۱۳.۲۰۹: $f(x, y) = x^3 y^4$ (ا) $(1, 1)$ ، (ب) $(0, 0)$

سوال ۱۳.۲۱۰: $f(x, y) = e^x \cos y$ (ا) $(0, 0)$ ، (ب) $(0, \pi/2)$

سوال ۱۳.۲۱۱: $f(x, y) = e^{2y-x}$ (ا) $(0, 0)$ ، (ب) $(1, 2)$

خطی تخمین کی بالائی حد بندی

سوال ۱۳.۲۱۲ تا سوال ۱۳.۲۱۷ میں N_0 پر تفاعل $f(x,y)$ کی خط بندی $L(x,y)$ تلاش کریں۔ اس کے بعد مربع R میں تخمین $f(x,y) \approx L(x,y)$ کی وجہ سے پیدا خلل کی مقدار $|E|$ کی بالائی حد بندی عدم مساوات ۵ سے دریافت کریں۔

سوال ۱۳.۲۱۲: $f(x,y) = x^2 - 3xy + 5, \quad N_0(2,1),\ R : |x-2| \le 0.1, |y-1| \le 0.1$

سوال ۱۳.۲۱۳: $f(x,y) = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{4} + 3x - 3y + 4,$
$N_0(2,2), R : |x-2| \le 0.1, |y-2| \le 0.1$

سوال ۱۳.۲۱۴: $f(x,y) = 1 + y + x\cos y, N_0(0,0), R : |x| \le 0.2, |y| \le 0.2$
(خلل E کے حصول میں $|\cos y| \le 1$ اور $|\sin y| \le 1$ استعمال کریں۔)

سوال ۱۳.۲۱۵: $f(x,y) = xy^2 + y\cos(x-1), N_0(1,2), R : |x-1| \le 0.1, |y-2| \le 0.1$

سوال ۱۳.۲۱۶: $f(x,y) = e^x \cos y, N_0(0,0), R : |x| \le 0.1, |y| \le 0.1$
(خلل E کے حصول میں $e^x \le 1.11$ اور $|\cos y| \le 1$ استعمال کریں۔)

سوال ۱۳.۲۱۷: $f(x,y) = \ln x + \ln y, N_0(1,1), R : |x-1| \le 0.2, |y-1| \le 0.2$

تبدیلی کو حساسیت، اندازہ

سوال ۱۳.۲۱۸: آپ ایک لمبی اور پتلی مستطیل کا رقبہ ناپنا چاہتے ہیں۔ کس ضلع کی ناپ میں زیادہ احتیاط ضروری ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۳.۲۱۹: (ا) نقطہ $(1,0)$ کے قریب تفاعل $f(x,y) = x^2(y+1)$ متغیر x یا y میں تبدیلی کو زیادہ حساس ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) نقطہ $(1,0)$ پر $\mathrm{d}f$ کو صفر بنانے کے لیے $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ نسبت تلاش کریں۔

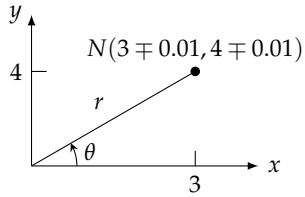
سوال ۱۳.۲۲۰: تفاعل $T = x(e^y + e^{-y})$ کی قیمت x اور y ناپ کر حاصل کی جاتی ہے۔ یہ ناپ بالترتیب 2 اور $\ln 2$ ہیں جن میں اعظم خلل $|\mathrm{d}x| = 0.1$ اور $|\mathrm{d}y| = 0.02$ ممکن ہے۔ تفاعل کی قیمت میں اعظم خلل کتنا متوقع ہے؟

سوال ۱۳.۲۲۱: متغیرات r اور h کی ناپ میں $1\,\%$ خلل کی وجہ سے $H = \pi r^2 h$ میں کتنا خلل متوقع ہے؟

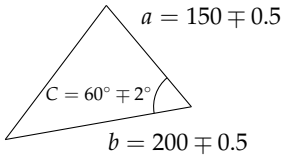
سوال ۱۳.۲۲۲: رداس $r = 5\,\mathrm{cm}$ اور قد $h = 12\,\mathrm{cm}$ ایک ملی میٹر درستگی تک ناپے جاتے ہیں۔ حجم $H = \pi r^2 h$ میں کتنا خلل متوقع ہے؟

سوال ۱۳.۲۲۳: ایک بیلن کا رداس تقریباً $r = 2\,\mathrm{m}$ اور قد تقریباً $h = 3\,\mathrm{m}$ ہے۔ رداس اور قد کی ناپ میں خلل کو یکساں تصور کریں۔ رداس اور قد کی ناپ میں اعظم کتنا خلل قابل برداشت ہوگا اگر یوں ناپی گئی حجم میں خلل $0.1\,\mathrm{m}^3$ سے کم رکھنا ہو۔

سوال ۱۳.۲۲۴: نقطہ $(1,1)$ کو مربع کا مرکز لیتے ہوئے ایسا مربع تلاش کریں جس میں $f(x,y) = x^3y^4$ کی قیمت میں ∓ 0.1 سے زیادہ تبدیلی نہ ہو۔



شکل ۱۳.۳۴



شکل ۱۳.۳۵

سوال ۱۳.۲۲۵: دو برقی مزاحمت متوازی جوڑ کر ایک برقی دور حاصل کیا جاتا ہے۔ ان کی کل مزاحمت $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ ہو گی۔ (ا) درج ذیل دکھائیں۔

$$\mathrm{d}R = \left(\frac{R}{R_1}\right)^2 \mathrm{d}R_1 + \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 \mathrm{d}r_2$$

(ب) آپ $R_1 = 100\,\Omega$ اور $R_2 = 400\,\Omega$ رکھنا چاہتے ہیں لیکن دستیاب مزاحمت کبھی بھی سو فی صد درست نہیں ہوتے۔ کیا R کی قیمت R_1 کو یا R_2 کو زیادہ حساس ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۳.۲۲۶: آپ سوال ۱۳.۲۲۵ کے برقی دور کی طرح دوسرے دور میں R_1 کی قیمت $20\,\Omega$ سے تبدیل کر کے $20.1\,\Omega$ کرتے ہیں جبکہ R_2 کی قیمت $25\,\Omega$ سے تبدیل کر کے $24.9\,\Omega$ کرتے ہیں۔ ان تبدیلیوں کی وجہ سے کل مزاحمت R میں کتنے فی صد تبدیلی رونما ہو گی؟

سوال ۱۳.۲۲۷: محدد کی تبدیلی میں خلل کی منتقل

(ا) اگر $x = 3 \mp 0.01$ اور $y = 4 \mp 0.01$ ہوں تب نقطہ $N(x,y)$ کے قطبی محدد r ، θ کتنی درستگی تک کلیات $r^2 = x^2 + y^2$ ، $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ سے حاصل ہوں گے؟ حاصل قطبی محدد میں تبدیلی کو نقطہ $(x_0, y_0) = (3,4)$ پر مطابقتی قیمتوں کافی صد لکھیں۔ (ب) نقطہ $(x_0, y_0) = (3,4)$ پر r اور θ کی قیمتیں x یا y کو زیادہ حساس ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں (شکل ۱۳.۳۴)۔

تین متغیرات کے تفاعل

سوال ۱۳.۲۲۸ تا سوال ۱۳.۲۳۳ میں دیے نقاط پر تفاعل کی خط بندی $L(x,y)$ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۲۲۸: $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ (ا) $(1,1,1)$ ، (ب) $(1,0,0)$ ، (ج) $(0,0,0)$

سوال ۱۳.۲۲۹: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ (ا) $(1,1,1)$ ، (ب) $(0,1,0)$ ، (ج) $(1,0,0)$

سوال ۱۳.۲۳۰: $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (ا) $(1,0,0)$ ، (ب) $(1,1,0)$ ، (ج) $(1,2,2)$

سوال ۱۳.۲۳۱: $f(x,y,z) = \frac{\sin xy}{z}$ (ا) $(\frac{\pi}{2},1,1)$ ، (ب) $(2,0,1)$

سوال ۱۳.۲۳۲: $f(x,y,z) = e^x + \cos(y+z)$ (ا) $(0,0,0)$ ، (ب) $(0,\frac{\pi}{2},0)$ ، (ج) $(0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4})$

سوال ۱۳.۲۳۳: $f(x,y,z) = \tan^{-1}(xyz)$ (ا) $(1,0,0)$ ، (ب) $(1,1,0)$ ، (ج) $(1,1,1)$

سوال ۱۳.۲۳۴ تا سوال ۱۳.۲۳۷ میں N_0 پر تفاعل $f(x,y,z)$ کی خط بندی $L(x,y,z)$ تلاش کریں۔ اس کے بعد خطہ R میں تخمین $f(x,y,z) \approx L(x,y,z)$ سے پیدا خلل E کی مقدار کی بالائی حد بندی عدم مساوات ۸ سے حاصل کریں۔

سوال ۱۳.۲۳۴:
$$f(x,y,z) = xz - 3yz + 2, \quad N_0(1,1,2),$$
$$R: \quad |x-1| \le 0.01, |y-1| \le 0.01, |z-2| \le 0.02$$

سوال ۱۳.۲۳۵:
$$f(x,y,z) = x^2 + xy + yz + \tfrac{1}{4}z^2, \quad N_0(1,1,2),$$
$$R: \quad |x-1| \le 0.01, |y-1| \le 0.01, |z-2| \le 0.08$$

سوال ۱۳.۲۳۶:
$$f(x,y,z) = xy + 2yz - 3xz, \quad N_0(1,1,0)$$
$$R: \quad |x-1| \le 0.01, |y-1| \le 0.01, |z| \le 0.01$$

سوال ۱۳.۲۳۷:
$$f(x,y,z) = \sqrt{2}\cos x \sin(y+z), \quad N_0(0,0,\tfrac{\pi}{4})$$
$$R: \quad |x| \le 0.01, |y| \le 0.01, |z - \tfrac{\pi}{4}| \le 0.01$$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۳.۲۳۸: مثال ۱۳.۳۱ کی شہتیر کو پلٹا دیا جاتا ہے۔ یوں $h = 0.1\,\mathrm{m}$ اور $w = 0.2\,\mathrm{m}$ ہوں گے۔ (ا) اب $\mathrm{d}S$ کی کیا قیمت ہو گی؟ (ب) قد میں چھوٹی تبدیلی کی حساسیت اور چوڑائی میں تبدیلی کی حساسیت کا آپس میں موازنہ کریں۔

سوال ۱۳.۲۳۹: ایک نلکی ڈبے کا رداس $r = 2.54\,\mathrm{cm}$ اور قد $h = 12.7\,\mathrm{cm}$ ہے۔ (ا) اس کے حجم کی رداس میں تبدیلی کو حساسیت بالمقابل قد میں تبدیلی کو حساسیت کتنی ہے؟ (ب) کیا آپ ایسا نلکی ڈبہ تخلیق دے سکتے ہیں جس کا حجم ظاہری طور پر زیادہ لیکن حقیقت میں وہی ہو۔ (اس کے کئی جواب ممکن ہیں۔)

سوال ۱۳.۲۴۰: اگر $|a|$ کی قیمت $|b|$، $|c|$، $|d|$ سے بہت زیادہ ہو تب مقطع

$$f(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

متغیرات a، b، c اور d میں کس متغیر کو زیادہ حساس ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۳.۲۴۱: حاصل ضرب $p(a,b,c) = abc$ متغیرات a، b اور c میں بیکوقت $2\,\%$ خلل کو کتنا حساس ہے؟

سوال ۱۳.۲۴۲: بغیر ڈھکن ایک خول $0.5\,\mathrm{cm}$ موٹی چادر سے بنایا جاتا ہے۔ اس خول کی اندرونی لمبائی $10\,\mathrm{cm}$، اندرونی چوڑائی $10\,\mathrm{cm}$ اور اندرونی گہرائی $5\,\mathrm{cm}$ ہے۔ اس خول میں کتنی چادر استعمال کی گئی؟

سوال ۱۳.۲۴۳: مثلث کا رقبہ $\frac{1}{2}ab\sin C$ کے برابر ہوتا ہے جہاں a اور b مستطیل کے دو اضلاع کی لمبائی جبکہ C ان اضلاع کے بیچ زاویہ ہے (شکل ۱۳.۳۵)۔ آپ $a = 150$، $b = 200$ اور $C = 60^\circ$ ناپتے ہیں۔ اگر a اور b کی ناپ میں ∓ 0.5 اور C کی ناپ میں $\mp 2^\circ$ خلل متوقع ہو تب رقبہ میں کتنا کل ہو سکتا ہے؟ (یاد رہے کہ زاویہ ریڈیئن میں لینا ضروری ہے۔)

سوال ۱۳.۲۴۴: فرض کریں $u = xe^y + y\sin z$ ہے جہاں x، y اور z کی ناپ میں بالترتیب اعظم ∓ 0.2، ∓ 0.6 اور $\mp \frac{\pi}{180}$ خلل ممکن ہے۔ آپ $x = 2$، $y = \ln 3$ اور $z = \frac{\pi}{2}$ ناپتے ہیں۔ بتائیں u میں اعظم کتنا خلل ممکن ہے؟

سوال ۱۳.۲۴۵: ولسن کا کلیہ برائے جسامت کھیپ

اقتصادیات کی میدان میں ولسن کا کلیہ برائے جسامت کھیپ کہتا ہے کہ مال (جوتے، برتن، وغیرہ) کی بہترین تعداد Q جو ایک دکان منگوا سکتا ہے $Q = \sqrt{\frac{2KM}{h}}$ ہے جہاں مال منگواتے وقت ادائگی K، ہفتہ وار فروخت کی تعداد M، اور ایک رکن کو دکان میں رکھنے کا ہفتہ وار خرچ (دکان کا کرایا، دکان میں مزدوروں کی تنخواہ، وغیرہ) h ہو۔ نقطہ $(K_0, M_0, h_0) = (2, 20, 0.05)$ کے قریب Q کس متغیر کو زیادہ حساس ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۳.۲۴۶: کیا پورے کھلا خطہ R میں استمراری دور تبی جزوی تفارق والا تفاعل $f(x, y)$ خطہ R میں لازماً استمراری ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۳.۲۴۷: کیا پورے کھلا خطہ R میں استمراری دور تبی جزوی تفارق والے اتفاعل $f(x, y)$ کے خطہ R میں لازماً استمراری یک رتبی جزوی تفارق پائے جائیں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۳.۵ زنجیری قاعدہ

جب ہم فضا میں کسی منحنی $x = g(t), y = h(t), z = k(t)$ کے مختلف نقطوں پر درجہ حرارت $w = f(x, y, z)$ جاننا چاہتے ہوں، یا کسی مائع یا گیس میں کسی راہ پر دباو میں دلچسپی رکھتے ہوں، ہم f کو واحد متغیر t کا تفاعل تصور کر سکتے ہیں۔ یوں t کی ہر قیمت کے لیے نقطہ $(g(t), h(t), k(t))$ پر حرارت کی قیمت مرکب تفاعل $f(g(t), h(t), k(t))$ کی قیمت دے گی۔ اس راہ پر t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی ہمیں t کے لحاظ سے f کا تفرق دیگا، بشرطیکہ ایسا تفرق موجود ہو۔

بعض اوقات ہم g، h اور k کے کلیات کو f کے کلیہ میں پر کر کے t کے لحاظ سے f کا بلاواسطہ تفرق لے سکتے ہیں۔ لیکن زیادہ تر g، h اور k کے کلیات اتنا پیچیدہ ہوتے ہیں یا ان کے کلیات باآسانی دستیاب نہیں ہوتے ہیں لہٰذا انہیں f میں پر کر کے t کے لحاظ سے f کا بلاواسطہ تفرق لینا ممکن نہیں ہوگا۔ ایسی صورتوں میں تفاعل کا تفرق حاصل کرنے کی خاطر ہم زنجیری قاعدہ کی مدد لیتے ہیں۔ زنجیری قاعدہ کا روپ متغیرات کی تعداد پر منحصر ہوگا۔ ماسوائے اضافی متغیرات کے زنجیری قاعدہ عین حصہ ۳.۵ کے زنجیری قاعدہ کی طرح کام کرتا ہے۔

دو متغیرات کے تفاعل کا زنجیری قاعدہ

ہم نے حصہ ۳.۵ میں زنجیری قاعدہ استعمال کیا جہاں $w = f(x)$ متغیر x کا قابل تفرق تفاعل تھا اور $x = g(t)$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل تھا۔ یوں w متغیر t کا قابل تفرق تفاعل تھا اور زنجیری قاعدہ کے تحت $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ کو درج ذیل کلیہ سے حاصل کیا جا سکتا تھا۔

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

تفاعل $w = f(x, y)$ کے لیے ایسا کلیہ مسئلہ ۱۳.۵ پیش کرتا ہے۔

مسئلہ ۱۳.۵: **دو غیر تابع متغیرات کے تفاعل کا زنجیری قاعدہ**

اگر $w = f(x, y)$ قابل تفرق ہو اور x، y متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب w متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہوگا اور $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ درج ذیل

ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{۱}$$

ثبوت: ہم نے اتنا دکھانا ہو گا کہ اگر x اور y نقطہ t_0 $=$ t پر قابل تفرق ہوں تب w بھی t_0 پر قابل تفرق ہو گا اور N_0 $=$ $(x(t_0, y(t_0))$ پر درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{N_0}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{N_0}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} \tag{۲}$$

ہم t کو t_0 سے $t_0 + \Delta t$ منتقل کرنے سے پیدا بڑھوتری Δx ، Δy اور Δw لیتے ہیں۔ چونکہ f قابل تفرق ہے (حصہ ۱۳.۴ میں دی گئی تعریف ذہن میں رکھتے ہوئے)

$$\Delta w = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{N_0}\Delta x + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{N_0}\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y \tag{۳}$$

ہو گا، جہاں $\Delta x, \Delta y \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ ہوں گے۔ ہم مساوات ۳ کے دونوں اطراف کو Δt سے تقسیم کر کے Δt کو صفر کے قریب پہنچا کر $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ حاصل کرتے ہیں۔ تقسیم سے

$$\frac{\Delta w}{\Delta t} = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{N_0}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{N_0}\frac{\Delta y}{\Delta t} + \epsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta t} + \epsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta t}$$

حاصل ہو گا اور Δt کو صفر کے قریب پہنچانے سے درج ذیل ملے گا۔

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta t}\\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{N_0}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{N_0}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} + 0\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0} + 0\cdot\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)_{t_0}\end{aligned}$$

یہ مساوات ۲ کی تصدیق کرتی ہے لہٰذا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

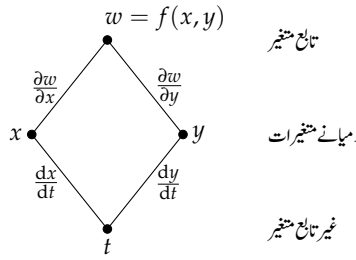
□

تفرق $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ میں حقیقی غیر تابع متغیر t اور تابع متغیر w ہے جبکہ x اور y درمیانی متغیرات ہیں جنہیں t قابو کرتا ہے۔ زنجیری قاعدہ کا درج ذیل روپ ہمیں مساوات ۱ میں مختلف تفارق کے حصول کا صحیح طریقہ دیتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0)$$

یوں $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ نقطہ t_0 پر حاصل کیے جائیں گے۔ حقیقی غیر تابع متغیر کی قیمت t_0 ، درمیانی متغیرات x اور y کی x_0 اور y_0 قیمتیں تعین کرتا ہے۔ جزوی تفارق $\frac{\partial w}{\partial x}$ اور $\frac{\partial w}{\partial y}$ نقطہ (x_0, y_0) پر حاصل کیے جاتے ہیں۔

زنجیری قاعدہ



$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

شکل ۱۳.۳۶: زنجیری قاعدہ یاد رکھنے کی خاطر اس شکل کو ذہن میں رکھیں۔ اب $\frac{dw}{dt}$ معلوم کرنے کی خاطر w سے شروع ہو کر t تک باری باری دونوں راہ پر چل کر تفارق کا حاصل ضرب لیں۔ آخر میں دونوں راہ کے حاصل ضرب کا مجموعہ لیں۔

زنجیری قاعدہ کو شکل ۱۳.۳۶ کی مدد سے یاد رکھنا زیادہ آسان ہو گا۔ اس طرح شکل کو **شجرہ**[۴۰] کہتے ہیں۔ آپ شکل شجرہ سے دیکھ سکتے ہیں کہ جب $t = t_0$ ہو تفارق $\frac{dx}{dt}$ اور $\frac{dy}{dt}$ کی قیمتیں t_0 پر حاصل کیا جاتا ہے۔ اب قابل تفرق تفاعل x کے لیے x_0 کی قیمت t_0 تعین کرتا ہے اور قابل تفرق تفاعل y کے لیے y_0 کی قیمت t_0 تعین کرتا ہے۔ جزوی تفارق $\frac{\partial w}{\partial x}$ ، $\frac{\partial w}{\partial y}$ (جو از خود x اور y کے تفاعل ہیں) کی قیمتیں نقطہ $N_0(x_0, y_0)$ پر حاصل کی جاتی ہیں جو t_0 کا مطابقتی نقطہ ہے۔ حقیقی غیر تابع متغیر t ہے جبکہ x اور y درمیانے متغیرات اور w تابع متغیر ہے۔

مثال ۱۳.۳۲: زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے راہ $x = \cos t,\ y = \sin t$ پر درج ذیل کا تفرق $\frac{dw}{dt}$ حاصل کریں۔

$$w = xy$$

نقطہ $t = \frac{\pi}{2}$ پر اس تفرق کی قیمت کیا ہو گی؟

حل

ہم مساوات اکا دایاں ہاتھ $w = xy$ ، $x = \cos t$ اور $y = \sin t$ لیتے ہوئے معلوم کرتے ہیں:

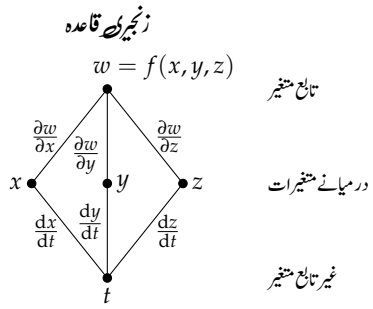
$$\frac{\partial w}{\partial x} = y = \sin t, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = x = \cos t, \quad \frac{dx}{dt} = -\sin t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos t$$

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} = (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t)\\ &= -\sin^2 t + \cos^2 t = \cos 2t\end{aligned}$$

آپ نے دیکھا کہ ہم نے $x = \cos t$ اور $y = \sin t$ کو جزوی تفارق $\frac{\partial w}{\partial x}$ اور $\frac{\partial w}{\partial y}$ میں پر کیا (شکل ۱۳.۳۷)۔ یوں حاصل تفرق $\frac{dw}{dt}$ کا اظہار غیر تابع متغیر t کی صورت میں کیا جاتا ہے (جس میں درمیانے متغیرات x اور y نہیں پائے جاتے ہیں۔)

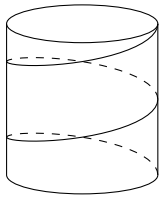
---

[۴۰] treediagram



$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

شکل ۱۳.۳۷: یہاں w سے t تک تین راستے ہیں۔ اب بھی $\frac{dw}{dt}$ حاصل کرنے کی خاطر ہر راہ پر چلتے ہوئے تفارق کا ضرب لے کر تمام کا مجموعہ لیں۔



شکل ۱۳.۳۸: بیچدار منحنی

۲۱۳۲۵ اس مثال میں ہم حاصل نتیجہ کی تصدیق زیادہ بلاواسطہ طریقہ سے کر سکتے ہیں۔ ہم w کو t کا تفاعل لکھتے ہیں:

$$w = xy = \cos t \sin t = \frac{1}{2}\sin 2t$$

۲۱۳۲۶ یوں

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\cos 2t = \cos 2t$$

۲۱۳۲۷ ہوگا۔ دونوں صورتوں میں $t = \frac{\pi}{2}$ پر درج ذیل ہوگا۔

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{t=\pi/2} = \cos(2\cdot\tfrac{\pi}{2}) = \cos\pi = -1$$

۲۱۳۲۸ □

۲۱۳۲۹ **تین متغیرات کے تفاعل کا زنجیری قاعدہ**

۲۱۳۳۰ ہم مساوات ۱ کے ساتھ ایک جزو جمع کرتے ہوئے زنجیری قاعدہ حاصل کرتے ہیں۔

۲۱۳۳۱ **تین غیر تابع متغیرات کے تفاعل کا زنجیری قاعدہ**

۲۱۳۳۲

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} \tag{۴}$$

اس کا ثبوت مساوات ۱ کی ثبوت کی طرح ہے، بس اب دو کے بجائے تین درمیانے متغیرات ہوں گے۔

مثال ۱۳.۳۳: پیچ دار منحنی پر تفاعل کی قیمت میں تبدیلی

درج ذیل لیتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

$$w = xy + z, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

نقطہ $t = 0$ پر اس تفرق کی قیمت کیا ہو گی (شکل ۱۳.۳۸)؟

حل

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} && \text{مساوات ۴} \\
&= (y)(-\sin t) + (x)(\cos t) + (1)(1) \\
&= (\sin t)(-\sin t) + (\cos t)(\cos t) + 1 \\
&= -\sin^2 t + \cos^2 t + 1 = 1 + \cos 2t
\end{aligned}$$

یوں $t = 0$ پر درج ذیل ہو گا۔

$$\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 1 + \cos(0) = 2$$

□

سطح پر معین تفاعل کا زنجیری قاعدہ

اگر ہماری دلچسپی فضا میں ایک کرہ پر نقطہ (x, y, z) کے حرارت $w = f(x, y, z)$ سے ہو، ہم x ، y اور z کو متغیرات r اور s کے تفاعل تصور کر سکتے ہیں جو اس نقطہ کے عرض بلند اور طول بلند قیمتیں دیتے ہیں۔ اگر $x = g(r, s)$ ، $y = h(r, s)$ اور $z = k(r, s)$ ہوں تب ہم حرارت کو r اور s کا مرکز تفاعل

$$w = f(g(r, s), h(r, s), k(r, s))$$

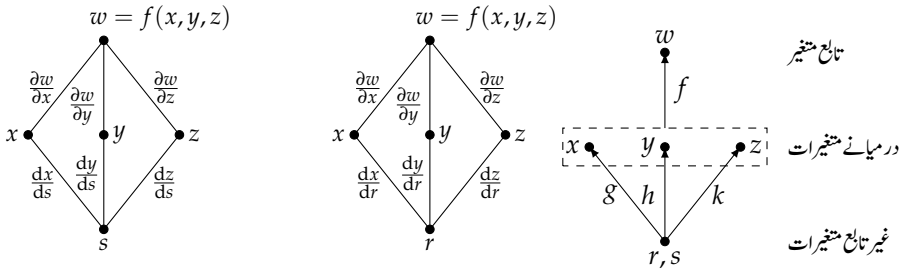
تصور کر سکتے ہیں۔ موزوں حالات میں r اور s دونوں کے لحاظ سے w کے جزوی تفارق موجود ہوں گے جنہیں درج ذیل طریقہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

دو غیر تابع متغیرات اور تین درمیانے متغیرات کا زنجیری قاعدہ

فرض کریں $w = f(x, y, z)$ ، $x = g(r, s)$ ، $y = h(r, s)$ اور $z = k(r, s)$ ہوں۔ اگر چاروں تفاعل قابل تفرق ہوں، تب r اور s کے لحاظ سے w کے جزوی تفارق قابل پائے جائیں گے جنہیں درج ذیل مساوات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \tag{۵}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \tag{۶}$$



$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{ds} \qquad \frac{dw}{dr} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dr} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dr} \qquad w = f(g(r,s), h(r,s), k(r,s))$$

(ج) (ب) (ا)

شکل ۱۳.۳۹: مرکب تفاعل اور شکل شجرہ برائے مساوات ۵ اور مساوات ۶

۲۱۳۵۰ ہم s کو مستقل تصور کر کے اور r کو t لیتے ہوئے مساوات ۵ کو مساوات ۴ سے حاصل کر سکتے ہیں۔ اسی طرح ہم r کو مستقل تصور کر کے اور s کو t لیتے
۲۱۳۵۱ ہوئے مساوات ۶ کو مساوات ۴ سے حاصل کر سکتے ہیں۔ مساوات ۵ اور مساوات ۶ کے اشکال شجرہ شکل ۱۳.۳۹ میں دکھائی گئی ہیں۔

۲۱۳۵۲ مثال ۱۳.۳۴: درج ذیل لیتے ہوئے $\frac{\partial w}{\partial r}$ اور $\frac{\partial w}{\partial s}$ کو r اور s کی صورت میں لکھیں۔

$$w = x + 2y + z^2, \quad x = \frac{r}{x}, \quad y = r62 + \ln s, \quad z = 2r$$

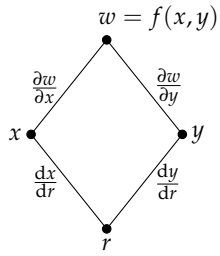
۲۱۳۵۳ **حل**

۲۱۳۵۴

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} && \text{مساوات ۵}\\
&= (1)\left(\frac{1}{s}\right) + (2)(2r) + (2z)(2)\\
&= \frac{1}{s} + 4r + (4r)(2) = \frac{1}{s} + 12r\\
\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} && \text{مساوات ۶}\\
&= (1)\left(-\frac{r}{s^2}\right) + (2)\left(\frac{1}{s}\right) + (2z)(0) = \frac{2}{s} - \frac{r}{s^2}
\end{aligned}$$

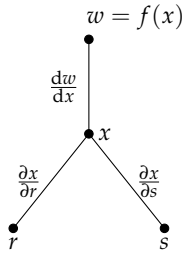
۲۱۳۵۵ □

۲۱۳۵۶ اگر f تین کے بجائے دو متغیرات کا تفاعل ہو تب درمیانہ متغیر z نہیں پایا جائے گا لہٰذا مساوات ۵ اور مساوات ۶ میں ایک ایک جزو کم ہو گا۔



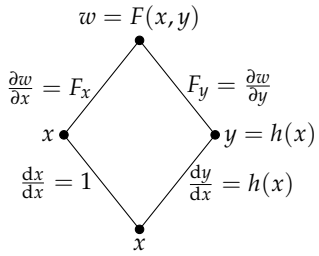
$$\frac{dw}{dr} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dr}$$

شکل ۱۳.۴۰: مساوات ۷ کی پہلی مساوات کی شکل شجرہ۔



$$\frac{dw}{dr} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial r}$$
$$\frac{dw}{ds} = \frac{dw}{dx}\frac{\partial x}{\partial s}$$

شکل ۱۳.۴۱: شجرہ برائے مساوات ۸



$$\frac{dw}{dx} = F_x \cdot 1 + F_y \cdot \frac{dy}{dx}$$

شکل ۱۳.۴۲: شجرہ برائے مساوات ۹

۲۱۳۵۷ اگر $w = f(x, y)$ ، $x = g(r, s)$ اور $y = h(r, s)$ ہوں تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{اور} \quad \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \tag{۷}$$

۲۱۳۵۸ شکل ۱۳.۴۰ میں مساوات ۷ کی شکل شجرہ دکھائی گئی ہے۔

۲۱۳۵۹ مثال ۱۳.۳۵: درج ذیل لیتے ہوئے $\frac{\partial w}{\partial r}$ اور $\frac{\partial w}{\partial s}$ کو r اور s کی صورت میں لکھیں۔

$$w = x^2 + y^2, \quad x = r - s, \quad y = r + s$$

۲۱۳۶۰ **حل**

۲۱۳۶۱ ہم مساوات ۷ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= (2x)(1) + (2y)(1) \\ &= 2(r - s) + 2(r + s) \\ &= 4r\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial s} &= \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \\ &= (2x)(-1) + (2y)(1) \\ &= -2(r - s) + 2(r + s) \\ &= 4s\end{aligned}$$

۲۱۳۶۲ □

۲۱۳۶۳ اگر f صرف x کا تفاعل ہو تب مساوات ۵ اور مساوات ۶ مزید سادہ صورت اختیار کرتے ہیں۔

۲۱۳۶۴ اگر $w = f(x)$ اور $x = g(r,s)$ ہوں تب

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\partial x}{\partial s} \quad \text{اور} \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\frac{\partial x}{\partial r} \tag{۸}$$

۲۱۳۶۵ ہوں گے جہاں $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$ سادہ (ایک متغیر کا) تفرق ہے (شکل ۱۳.۴۱)۔

۲۱۳۶۶ خفی تفرق (باب ۳)

۲۱۳۶۷ یقین کیجیے مساوات ۱ میں دیا گیا دو متغیرات کا زنجیری قاعدہ سے ایک ایسا کلیہ اخذ ہوتا ہے جو خفی تفرق کا حصول نہایت آسان بناتا ہے۔ فرض کریں

۲۱۳۶۸ ۱. تفاعل $F(x,y)$ قابل تفرق ہے اور

۲۱۳۶۹ ۲. مساوات $F(x,y) = 0$ تابع متغیر y کو خفی طور پر غیر تابع متغیر x کے قابل تفرق مساوات کی کی صورت، مثلاً $y = h(x)$، میں پیش
۲۱۳۷۰ کرتا ہو۔

۲۱۳۷۱ چونکہ $w = F(x,y) = 0$ ہے، تفرق $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$ صفر ہو گا۔ زنجیری قاعدہ (شکل ۱۳.۴۲) سے تفرق حاصل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا:

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} &= F_x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} + F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \qquad \text{مساوات ۱ میں } t = x \text{ اور } f = F \\ &= F_x \cdot 1 + F_y \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \end{aligned} \tag{۹}$$

۲۱۳۷۲ اگر $F_y = \frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$ ہو تب ہم مساوات ۹ کو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کے لیے حل کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}$$

۲۱۳۷۳ فرض کریں $F(x,y)$ قابل تفرق ہو اور مساوات $F(x,y) = 0$ تابع متغیر y کو غیر تابع متغیر x کے قابل تفرق تفاعل کی صورت میں پیش
۲۱۳۷۴ کرتی ہو، تب ایسا نقطہ پر جہاں $F_y \neq 0$ ہو درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y} \tag{۱۰}$$

۲۱۳۷۵ مثال ۱۳.۳۶: $x^2 + \sin y - 2y = 0$ لیتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔ **حل**
۲۱۳۷۶ ہم $F(x,y) = x^2 + \sin y - 2y$ لیتے ہیں۔ یوں

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{\cos y - 2} \qquad \text{مساوات ۱۰}$$

۲۱۳۷۷ ہو گا۔ ہم مثال ۳.۴۹ میں اس کو پہلے حل کر چکے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موجودہ طریقہ زیادہ جلدی جواب مہیا کرتا ہے۔ □

متعدد متغیرات کے تفاعل کا زنجیری قاعدہ

فرض کریں $f(x, y, \cdots, v)$ غیر تابع (متناہی تعداد کے) متغیرات $x, y, \cdots, v$ کا قابل تفرق تفاعل ہے اور $x, y, \cdots, v$ (ایک دوسرے متناہی تعداد کے) متغیرات $p, q, \cdots, t$ کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ تب w متغیرات $p, q, \cdots, t$ کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور ان متغیرات کے لحاظ سے w کے جزوی تفارق کی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p} + \cdots + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial p} \tag{11}$$

باقی مساوات حاصل کرنے کے لیے p کی جگہ باری باری $q, \cdots, t$ پر کریں۔

مساوات ۱۱ کو یاد رکھنے کا ایک طریقہ یہ ہے کہ اس کے دائیں ہاتھ کو دو سمتیات، جن کے اجزاء درج ذیل ہوں، کا ضرب نقطہ تصور کیا جائے۔

$$\underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial p}, \cdot, \frac{\partial v}{\partial p}\right)}_{\text{منتخب غیر تابع متغیر کے لحاظ سے درمیانی متغیرات کے تفارق}} \quad \text{اور} \quad \underbrace{\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \cdot, \frac{\partial w}{\partial v}\right)}_{\text{درمیانی متغیرات کے لحاظ سے } w \text{ کے تفارق}}$$

سوالات

زنجیری قاعدہ: ایک غیر تابع متغیر

سوال ۱۳.۲۴۸ تا سوال ۱۳.۲۵۳ میں (ا) پہلے زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اور بعد میں w کو t کا تفاعل لکھ کر t کے لحاظ سے بلاواسطہ تفرق لیتے ہوئے، $\frac{dw}{dt}$ کو t کا تفاعل لکھیں۔ (ب) اس کے بعد t کی دی گئی قیمت پر $\frac{dw}{dt}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۲۴۸: $w = x^2 + y^2, \quad x = \cos t, \quad y = \sin t; \quad t = \pi$

سوال ۱۳.۲۴۹: $w = x^2 + y^2, \quad x = \cos t + \sin t, \quad y = \cos t - \sin t; \quad t = 0$

سوال ۱۳.۲۵۰: $w = \frac{x}{z} + \frac{y}{z}, \quad x = \cos^2 t, \quad y = \sin^2 t, \quad z = \frac{1}{t}; \quad t = 3$

سوال ۱۳.۲۵۱: $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2), \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 4\sqrt{t}, \quad t = 3$

سوال ۱۳.۲۵۲: $w = 2ye^x - \ln z, \quad x = \ln(t^2 + 1), \quad y = \tan^{-1} t, \quad z = e^t; \quad t = 1$

سوال ۱۳.۲۵۳: $w = z - \sin xy, \quad x = t, \quad y = \ln t, \quad z = e^{t-1}; \quad t = 1$

زنجیری قاعدہ: دو اور تین غیر تابع متغیرات

سوال ۱۳.۲۵۴ اور سوال ۱۳.۲۵۵ میں (ا) $\frac{\partial z}{\partial r}$ اور $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ کو r اور θ کی صورت میں (پہلے) زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اور (بعد میں) z کو r اور θ کا تفاعل لکھ کر بلاواسطہ تفرق لیتے ہوئے لکھیں۔ (ب) اس کے بعد دیے گئے نقطہ (r, θ) پر $\frac{\partial z}{\partial r}$ اور $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ کی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۲۵۴: $z = 4e^x \ln y, \; x = \ln(r\cos\theta), \; y = r\sin\theta; \; (r, \theta) = (2, \frac{\pi}{4})$

سوال ۱۳.۲۵۵: $z = \tan^{-1}\frac{x}{y}, \; x = r\cos\theta, \; y = r\sin\theta; \; (r, \theta) = (1.3, \frac{\pi}{6})$

سوال ۱۳.۲۵۶ اور سوال ۱۳.۲۵۷ میں (ا) $\frac{\partial w}{\partial u}$ اور $\frac{\partial w}{\partial v}$ کو u اور v کی صورت میں (پہلے) زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اور (بعد میں) w کو u اور v کا تفاعل لکھ کر بلاواسطہ تفرق لیتے ہوئے لکھیں۔ (ب) اس کے بعد دیے گئے نقطہ (u, v) پر $\frac{\partial w}{\partial u}$ اور $\frac{\partial w}{\partial v}$ کی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۲۵۶: $w = xy + yz + xz,\ x = u + v,\ y = u - v,\ z = uv;\ (u, v) = (\frac{1}{2}, 1)$

سوال ۱۳.۲۵۷: $w = \ln(x^2 + y^2 + z^2),\ x = ue^v \sin u,\ y = ue^v \cos u,$
$z = ue^v;\ (u, v) = (-2, 0)$

سوال ۱۳.۲۵۸ اور سوال ۱۳.۲۵۹ میں (ا) $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}$ اور $\frac{\partial u}{\partial z}$ کو x ، y اور z کی صورت میں (پہلے) زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اور (بعد میں) u کو x ، y اور z کا تفاعل لکھ کر بلاواسطہ تفرق لیتے ہوئے لکھیں۔ (ب) اس کے بعد دیے گئے نقطہ (x, y, z) پر $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، $\frac{\partial u}{\partial y}$ اور $\frac{\partial u}{\partial z}$ کی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۲۵۸: $u = \frac{p-q}{q-r},\ p = x + y + z,\ q = x - y + z,\ r = x + y - z;\ (x, y, z) = (\sqrt{3}, 2, 1)$

سوال ۱۳.۲۵۹: $u = e^{qr} \sin^{-1} p,\ p = \sin x,\ q = z^2 \ln y,\ r = \frac{1}{z};\ (x, y, z) = (\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

شجرہ کا استعمال

سوال ۱۳.۲۶۰ تا سوال ۱۳.۲۷۱ میں شکل شجرہ بناتے ہوئے ہر ایک تفرق کا کلیہ اخذ کریں۔

سوال ۱۳.۲۶۰: $\frac{dz}{dt}$ ؛ $z = f(x, y)$ ، $x = g(t)$ ، $y = h(t)$

سوال ۱۳.۲۶۱: $\frac{dz}{dt}$ ؛ $z = f(u, v, w)$ ، $u = g(t)$ ، $v = h(t)$ ، $w = k(t)$

سوال ۱۳.۲۶۲: $\frac{\partial w}{\partial u}$ ، $\frac{\partial w}{\partial v}$ ؛ $w = h(x, y, z)$ ، $x = f(u, v)$ ، $y = g(u, v)$ ، $z = k(u, v)$

سوال ۱۳.۲۶۳: $\frac{\partial w}{\partial x}$ ، $\frac{\partial w}{\partial y}$ ؛ $w = f(r, s, t)$ ، $r = g(x, y)$ ، $s = h(x, y)$ ، $t = k(x, y)$

سوال ۱۳.۲۶۴: $\frac{\partial w}{\partial u}$ ، $\frac{\partial w}{\partial v}$ ؛ $w = g(x, y)$ ، $x = h(u, v)$ ، $y = k(u, v)$

سوال ۱۳.۲۶۵: $\frac{\partial w}{\partial x}$ ، $\frac{\partial w}{\partial y}$ ؛ $w = g(u, v)$ ، $u = h(x, y)$ ، $v = k(x, y)$

سوال ۱۳.۲۶۶: $\frac{\partial z}{\partial t}$ ، $\frac{\partial z}{\partial s}$ ؛ $z = f(x, y)$ ، $x = g(t, s)$ ، $y = h(t, s)$

سوال ۱۳.۲۶۷: $\frac{\partial y}{\partial r}$ ؛ $y = f(u)$ ، $u = g(r, s)$

سوال ۱۳.۲۶۸: $\frac{\partial w}{\partial s}$ ، $\frac{\partial w}{\partial t}$ ؛ $w = g(u)$ ، $u = h(s, t)$

سوال ۱۳.۲۶۹: $\frac{\partial w}{\partial p}$ ؛ $w = f(x, y, z, v)$ ، $x = g(p, q)$ ، $y = h(p, q)$ ،
$z = j(p, q)$ ، $v = k(p, q)$

سوال ۱۳.۲۷۰: $\frac{\partial w}{\partial r}$ ، $\frac{\partial w}{\partial s}$ ؛ $w = f(x, y)$ ، $x = g(r)$ ، $y = h(s)$

سوال ۱۳.۲۷۱: $\frac{\partial w}{\partial s}$ ؛ $w = g(x, y)$ ، $x = h(r, s, t)$ ، $y = k(r, s, t)$

خفی تفرق

سوال ۱۳.۲۷۲تا سوال ۱۳.۲۷۵ میں تصور کریں کہ دی گئی مساوات y کو غیر تابع متغیر x کا قابل تفرق تفاعل پیش کرتی ہے۔ دیے گئے نقطہ پر مساوات ۱۰ کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۲۷۲: $x^3 - 2y^2 + xy = 0, \quad (1,1)$

سوال ۱۳.۲۷۳: $xy + y^2 - 3x - 3 = 0, \quad (-1,1)$

سوال ۱۳.۲۷۴: $x^2 + xy + y^2 - 7 = 0, \quad (1,2)$

سوال ۱۳.۲۷۵: $xe^y + \sin xy + y - \ln 2 = 0, \quad (0, \ln 2)$

ہم تین یا اس سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کے لیے مساوات ۱۰ کی موزوں صورتیں لکھ سکتے ہیں۔ تین متغیرات کے تفاعل کے لیے کچھ یوں ہو گا:

اگر مساوات $F(x,y,z) = 0$ تابع متغیر z کو غیر تابع متغیرات x ، y کی صورت میں پیش کرتی ہو تب جن نقطوں پر $F_z \neq 0$ ہو وہاں درج ذیل ہوں گے:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \tag{۱۲}$$

اس مساوات کو استعمال کرتے ہوئے سوال ۱۳.۲۷۶تا سوال ۱۳.۲۷۹ میں دیے گئے نقطہ پر $\frac{\partial z}{\partial x}$ اور $\frac{\partial z}{\partial y}$ کی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۲۷۶: $z^3 - xy + yz + y^3 - 2 = 0, \quad (1,1,1)$

سوال ۱۳.۲۷۷: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} - 1 = 0, \quad (2,3,6)$

سوال ۱۳.۲۷۸: $\sin(x+y) + \sin(y+z) + \sin(x+z) = 0, \quad (\pi, \pi, \pi)$

سوال ۱۳.۲۷۹: $xe^y + ye^z + 2\ln x - 2 - 3\ln 2 = 0, \quad (1, \ln 2, \ln 3)$

منتخب جزوی تفارق

سوال ۱۳.۲۸۰: $w = (x+y+z)^2$ ، $x = r - s$ ، $y = \cos(r+s)$ اور $z = \sin(r+s)$ لیتے ہوئے $r = 1$ ، $s = -1$ پر $\frac{\partial w}{\partial r}$ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۲۸۱: $w = xy + \ln z$ ، $x = \frac{v^2}{u}$ ، $y = u + v$ اور $z = \cos u$ لیتے ہوئے $u = -1$ ، $v = 2$ پر $\frac{\partial w}{\partial v}$ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۲۸۲: $w = x^2 + \frac{y}{x}$ ، $x = u - 2v + 1$ اور $y = 2u + v - 2$ لیتے ہوئے $u = 0$ ، $v = 0$ پر $\frac{\partial w}{\partial v}$ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۲۸۳: $z = \sin xy + x \sin y$ ، $x = u^2 + v^2$ اور $y = uv$ لیتے ہوئے $u = 0$ ، $v = 1$ پر $\frac{\partial z}{\partial u}$ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۲۸۴: $z = 5\tan^{-1} x$ اور $x = e^u + \ln v$ لیتے ہوئے $u = \ln 2$ ، $v = 1$ پر $\frac{\partial z}{\partial u}$ اور $\frac{\partial z}{\partial v}$ تلاش کریں۔

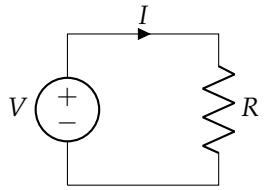
سوال ۱۳.۲۸۵: $z = \ln q$ اور $q = \sqrt{v+3}\tan^{-1} u$ لیتے ہوئے $u = 1$ ، $v = -2$ پر $\frac{\partial z}{\partial u}$ اور $\frac{\partial z}{\partial v}$ تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۳.۲۸۶: دور میں برقی دباو کی تبدیلی

ایک برقی دور جو $V = IR$ کو مطمئن کرتا ہو میں بیٹری کمزور پڑنے سے برقی دباو V آہستہ آہستہ گھٹتا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ مزاحمت گرم ہونے کی وجہ سے بڑھتا ہے۔ درج ذیل مساوات استعمال کرتے ہوئے اس لمحہ پر برقی رو کی شرح تبدیلی دریافت کریں جب $R = 600\,\Omega$ ، $I = 0.04\,\mathrm{A}$ ، $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = 0.5\,\Omega\,\mathrm{s}^{-1}$ اور $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -0.01\,\mathrm{V\,s}^{-1}$ ہوں۔

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial V}{\partial I}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial V}{\partial R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$$



سوال ۱۳.۲۸۷: ایک ڈبے کی اضلاع کی تبدیلی

ایک مستطیل ڈبے کے اضلاع a ، b اور c وقت کے ساتھ تبدیل ہو رہے ہیں۔ اس ڈبے کا حجم اور سطحی رقبہ کس شرح سے اس لمحہ تبدیل ہوں گے جب $a = 1\,\mathrm{m}$ ، $b = 2\,\mathrm{m}$ ، $c = 3\,\mathrm{m}$ ، $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = 1\,\mathrm{m\,s}^{-1}$ اور $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = -3\,\mathrm{m\,s}^{-1}$ ہوں؟ کیا اس لمحہ پر ڈبے کے اندرونی وتروں کی لمبائیاں بڑھ رہی ہیں یا گھٹ رہی ہیں؟

سوال ۱۳.۲۸۸: اگر $f(u,v,w)$ قابل تفرق ہو اور $u = x - y$ ، $v = y - z$ اور $w = z - x$ ہوں تب دکھائیں کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

سوال ۱۳.۲۸۹: (ا) دکھائیں کہ قابل تفرق تفاعل $w = f(x,y)$ میں قطبی محدد $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ پر کر کے درج ذیل حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

$$\frac{\partial w}{\partial r} = f_x\cos\theta + f_y\sin\theta, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} = -f_x\sin\theta + f_y\cos\theta$$

(ب) جزو-ا میں دی گئی مساواتوں کو حل کرتے ہوئے f_x اور f_y کو $\frac{\partial w}{\partial r}$ اور $\frac{\partial w}{\partial \theta}$ کی صورت میں لکھیں۔ (ج) درج ذیل دکھائیں۔

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$$

سوال ۱۳.۲۹۰: اگر $w = f(u,v)$ مساوات لاپلاس $f_{uu} + f_{vv} = 0$ کو مطمئن کرتا ہو اور $u = \frac{x^2-y^2}{2}$ اور $v = xy$ ہوں تب دکھائیں کہ w مساوات لاپلاس $w_{xx} + w_{yy} = 0$ کو بھی مطمئن کرے گا۔

سوال ۱۳.۲۹۱: فرض کریں $w = f(u) + g(v)$ ہے جہاں $u = x + iy$ ، $v = x - iy$ اور $i = \sqrt{-1}$ ہیں۔ دکھائیں کہ w مساوات لاپلاس $w_{xx} + w_{yy} = 0$ کو مطمئن کرتا ہے، بشرطیکہ تمام درکار تفاعل قابل تفرق ہوں۔

منحنی پر چلتے ہوئے تفاعل کی قیمت میں تبدیلی

سوال ۱۳.۲۹۲: فرض کریں پیچدار منحنی $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t$ پر پائے جانے والے نقطوں پر تفاعل $f(x,y,z)$ کے جزوی تفارق درج ذیل ہیں۔

$$f_x = \cos t, \quad f_y = \sin t, \quad f_z = t^2 + t - 2$$

اس منحنی پر، کس نقطوں پر (اگر ایسا ہو) f کی انتہائی قیمتیں ہوں گی؟

سوال ۱۳.۲۹۳: تفاعل $w = x^2e^{2y}\cos 3z$ لیتے ہوئے دائرہ $x = \cos t,\ y = \ln(t+2),\ z = t,$ کے نقطہ $(1, \ln 2, 0)$ پر $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۲۹۴: دائرہ $x = \cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ کے نقطہ (x,y) پر درجہ حرارت $T = f(x,y)$ لیں اور درج ذیل فرض کریں۔

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 8x - 4y, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 8y - 4x$$

ا. تفارق $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}$ کو دیکھ کر بتائیں کہ اس دائرہ پر کہاں اعظم اور کہاں اقل درجہ حرارت ہو گا۔

ب. حرارت $T = 4x^2 - 4xy + 4y^2$ لیتے ہوئے دائرہ پر اعظم اور اقل T تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۲۹۵: درج ذیل ترخیم کے نقطہ (x,y) پر درجہ حرارت $T = g(x,y)$ لیں۔

$$x = 2\sqrt{2}\cos t, \quad y = \sqrt{2}\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

مزید درج ذیل فرض کریں۔

$$\frac{\partial T}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = x$$

ا. تفارق $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}t^2}$ کو دیکھ کر بتائیں ترخیم پر کہاں اعظم اور کہاں اقل T ہو گا۔

ب. حرارت $T = xy - 2$ لیتے ہوئے ترسیم کر کہاں اعظم اور اقل T ہو گا؟

۲۱۳۸۸ **تکملات کے تفارق**

۲۱۳۸۹ استمرار کی نرم شرائط پر پورا کرتے ہوئے اگر

$$F(x) = \int_a^b g(t,x)\,\mathrm{d}t$$

۲۱۳۹۰ ہو تب $F'(x) = \int_a^b g_x(t,x)\,\mathrm{d}t$ ہو گا۔ اس حقیقت کو اور زنجیری قاعدہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم

$$F(x) = \int_a^{f(x)} g(t,x)\,\mathrm{d}t$$

۲۱۳۹۱ کا تفرق درج ذیل لے کر حاصل کر سکتے ہیں جہاں $u = f(x)$ ہو گا۔

$$G(u,x) = \int_a^u g(t,x)\,\mathrm{d}t$$

۲۱۳۹۲ سوال ۱۳.۲۹۶ اور سوال ۱۳.۲۹۷ میں تفاعل کے تفرق تلاش کریں۔

۲۱۳۹۳ سوال ۱۳.۲۹۶: $F(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{t^4 + x^3}\,\mathrm{d}t$

۲۱۳۹۴ سوال ۱۳.۲۹۷: $F(x) = \int_{x^2}^1 \sqrt{t^3 + x^2}\,\mathrm{d}t$

۲۱۳۹۵

۲۱۳۹۶

۱۳.۶ پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرق

۲۱۳۹۷

۲۱۳۹۸ اب تک تفاعل، مثلاً $w = f(x,y)$، کے جزوی تفارق تلاش کرتے ہوئے ہم x اور y کو بالکل آزاد غیر تابع متغیرات تصور کرتے رہے
۲۱۳۹۹ ہیں، اگرچہ عملی زندگی میں ضروری نہیں کہ ایسا ہو۔ مثال کے طور پر ہم گیس کی اندرونی توانائی U کو دباو P، حجم H اور حرارت T کا تفاعل
۲۱۵۰۰ $U = f(P,H,T)$ لکھ سکتے ہیں۔ اگر گیس کے انفرادی مالیکیول ایک دوسرے پر اثر انداز نہ ہوں تب P، H اور T مثالی گیس کے قانون

$$PH = nRT \qquad n, R \text{ مستقل ہیں}$$

۲۱۵۰۱ کو مطمئن کریں گے لہٰذا یہ متغیرات بالکل آزاد ہر گز نہیں ہوں گے۔ ایسی صورت میں جزوی تفارق کی تلاش پیچیدہ ثابت ہوتے ہیں۔ بہر حال ان سے نمٹنا
۲۱۵۰۲ ضروری ہے۔

۲۱۵۰۳ **فیصلہ کریں کہ کون سے متغیرات غیر تابع اور کون سے تابع ہیں**

۲۱۵۰۴ اگر تفاعل $w = f(x,y,z)$ کے متغیرات کسی تعلق، مثلاً $z = x^2 + y^2$، کے پابند ہوں تب f کے جزوی تفارق کی جیومیٹریائی معنی
۲۱۵۰۵ اور عددی قیمت اس پر منحصر ہوں گے کہ کن متغیرات کو غیر تابع اور کن کو تابع متغیرات تصور کیا جاتا ہے۔ اس انتخاب کے اثرات کو دیکھنے کی خاطر آئیں $w = x^2 + y^2 + z^2$
۲۱۵۰۶ اور $z = x^2 + y^2$ کی صورت میں $\frac{\partial w}{\partial x}$ تلاش کریں۔

مثال ۱۳.۳۷: تفاعل $w = x^2 + y^2 + z^2$ اور متغیرات کو پابند کرنے والی مساوات $z = x^2 + y^2$ کی صورت میں $\frac{\partial w}{\partial x}$ تلاش کریں۔

حل

ہمیں چار متغیرات کی دو مساوات دی گئی ہیں جنہیں ہم دو (تابع) متغیرات کے لیے باقی (غیر تابع) متغیرات کی صورت میں حل کر سکتے ہیں۔ جب ہمیں $\frac{\partial w}{\partial x}$ تلاش کرنے کو کہا جائے، اس کا مطلب ہے کہ w تابع متغیر اور x تابع متغیر ہے۔ یوں ہمارے پاس تابع اور غیر تابع متغیرات منتخب کرنے کے درج ذیل ممکنات ہیں۔

تابع	غیر تابع
w, z	x, y
w, y	x, z

ہم دونوں صورتوں میں w کو منتخب غیر تابع متغیرات کی صورت میں صریحاً لکھ سکتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم دوسری مساوات استعمال کرتے ہوئے پہلی مساوات کا دوسرا تابع متغیر حذف کرتے ہیں۔

پہلی انتخاب میں z دوسرا تابع متغیر ہو گا۔ ہم پہلی مساوات میں اس کی جگہ $x^2 + y^2$ پر کر کے اس کو حذف کرتے ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned} w &= x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (x^+y^2)^2 \\ &= x^2 + y^2 + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 \end{aligned}$$

حاصل ہو گا جس سے

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 4xy^2 \tag{۱}$$

حاصل ہو گا جو x اور y غیر تابع متغیرات لیتے ہوئے $\frac{\partial w}{\partial x}$ کی مساوات ہے۔

دوسری انتخاب میں غیر تابع متغیرات x اور z ہیں جبکہ دوسرا تابع تغیر y ہے۔ یوں y حذف کرنے کی خاطر ہم پہلی مساوات میں y^2 کی جگہ $z - x^2$ پر کر کے

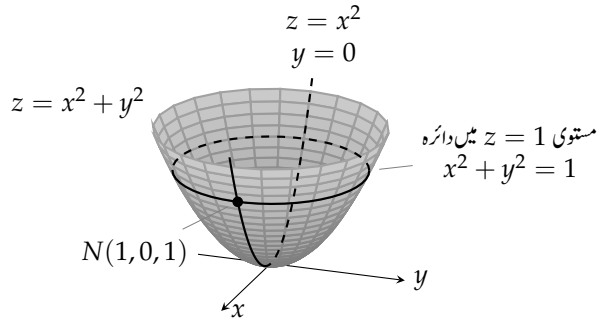
$$w = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (z - x^2) + z^2 = z + z^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{۲}$$

حاصل کرتے ہیں۔ یوں غیر تابع متغیرات x اور z منتخب کرنے سے $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ حاصل ہوتا ہے۔

مساوات ۱ اور مساوات ۲ ایک دوسرے سے بالکل مختلف ہیں۔ ہم $z = x^2 + y^2$ استعمال کرتے ہوئے ایک سے دوسری مساوات حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔ یوں ہمارے پاس ایک $\frac{\partial w}{\partial x}$ کے بجائے دو نتائج موجود ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ہمیں پوری معلومات فراہم کیے بغیر جزوی تفرق حاصل کرنے کو کہا گیا۔ ہمیں پوچھنا ہو گا کہ کونسا $\frac{\partial w}{\partial x}$ درکار ہے؟

ہم مساوات ۱ اور مساوات ۲ کی جیومیٹریائی (شکل ۱۳.۴۳) مطلب کو دیکھ کر جان سکتے ہیں کہ یہ جوابات ایک دوسرے سے مختلف کیوں ہیں۔ تفاعل $w = x^2 + y^2 + z^2$ مبدا سے نقطہ (x, y, z) کا فاصلہ ناپتا ہے۔ شرط $z = x^2 + y^2$ کہتا ہے کہ نقطہ (x, y, z) قطع مکافی کے جسم طواف پر پایا جاتا ہے۔ صرف اس سطح پر چلتے ہوئے نقطہ $N(x, y, z)$ پر $\frac{\partial w}{\partial x}$ سے کیا مراد ہے؟ مثال کے طور پر نقطہ $(1, 0, 1)$ پر $\frac{\partial w}{\partial x}$ کی کیا قیمت ہو گی؟



شکل ۱۳.۴۳: نقطہ N کو پابند کرنے سے جزوی تفارق کے مختلف نتائج حاصل ہوں گے۔

اگر ہم x اور y کو غیر تابع متغیرات لیں تب ہم y کو مستقل (موجودہ صورت میں $y = 0$) تصور کرتے ہوئے x تبدیل کرتے ہوئے $\frac{\partial w}{\partial x}$ تلاش کرتے ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ N مستوی xz میں قطع مکافی $z = x^2$ پر حرکت کرے گا۔ اس قطع مکافی پر چلتے ہوئے، w جو مبدا سے N تک فاصلے کا مربع ہے تبدیل ہو گا۔ ہم ایسی صورت میں درج ذیل حاصل کرتے ہیں (جو مذکورہ بالا پہلا نتیجہ ہے۔)

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 4x^3 + 4xy^2$$

نقطہ $(1,0,1)$ پر اس کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2 + 4 + 0 = 6$$

اگر ہم x اور z کو غیر تابع متغیرات منتخب کریں تب ہم z کو مستقل ٹھہراتے ہوئے x تبدیل کر کے $\frac{\partial w}{\partial x}$ تلاش کرتے ہیں۔ چونکہ N کا z محدد 1 ہے لہٰذا x تبدیل کرنے سے N مستوی $z = 1$ میں ایک دائرہ پر حرکت کرے گا۔ اس دائرہ پر چلتے ہوئے مبدا سے N تک فاصلہ تبدیل نہیں ہوتا ہے لہٰذا w جو اس فاصلے کا مربع ہے بھی تبدیل نہیں ہو گا۔ یوں

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

ہو گا جو دوسرا انتخاب کرتے ہوئے ہم حاصل کر چکے ہیں۔ □

جزوی تفرق $\frac{\partial w}{\partial x}$ جب تفاعل $w = f(x,y,z)$

کے متغیرات کو دوسری مساوات قابو کرتی ہو جیسا ہم نے مساوات ۱۳.۳۷ میں دیکھا، جب تفاعل $w = f(x,y,z)$ کے متغیرات کو ایک دوسری مساوات قابو کرتی ہو تب $\frac{\partial w}{\partial x}$ تین قدموں میں حاصل ہو گا۔ یہ اقدام $\frac{\partial w}{\partial y}$ اور $\frac{\partial w}{\partial z}$ کے حصول کے لیے بھی کارآمد ہوں گے۔

۱. پہلے فیصلہ کریں کہ کون سے متغیرات تابع اور کون سے غیر تابع تصور کیے جائیں گے۔ (حقیقت میں ایسا فیصلہ طبیعی یا نظریاتی سیاق و سباق پر منحصر ہو گا۔)

۲. باقی تابع متغیرات کو w کی مساوات سے خارج کریں۔

۳. تفرق کو معمول کے مطابق حاصل کریں۔

اگر دوسرے قدم پر ہم باقی تابع متغیرات کو حذف نہ کر سکیں تب ہم دونوں مساوات کا تفرق لے کر $\frac{\partial w}{\partial x}$ کے لیے حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ اگلی مثال میں ایسا کرنا دکھایا گیا ہے۔

مثال ۱۳.۳۸: اگر درج ذیل ہوں تب نقطہ $(x, y, z) = (2, -1, 1)$ پر $\frac{\partial w}{\partial x}$ کیا ہوگا؟

$$w = x^2 + y^2 + z^2, \quad z^3 - xy + yz + y^3 = 1$$

حل

یہاں w کی مساوات سے z حذف کرنا آسان نہیں ہے۔ ہم اس لیے x اور y کو غیر تابع متغیرات جبکہ w اور z کو تابع متغیرات تصور کرتے ہوئے دونوں مساوات کا x کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔ یوں

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} \tag{۳}$$

اور

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x} - y + y\frac{\partial z}{\partial x} + 0 = 0 \tag{۴}$$

حاصل ہوں گے۔ ان مساوات کو ملا کر x ، y اور z کی صورت میں $\frac{\partial w}{\partial x}$ کے لیے حل کرتے ہیں۔ ہم مساوات ۴ کو $\frac{\partial z}{\partial x}$ کے لیے حل کر کے

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{y + 3z^2}$$

حاصل کرتے ہیں جس کو مساوات ۳ میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{(2,-1,1)} = 2(2) + \frac{2(-1)(1)}{-1 + 3(1)^2} = 4 + \frac{-2}{2} = 3$$

□

تفرق کے حصول میں غیر تابع متغیرات واضح کرنے کی خاطر ہم درج ذیل علامتیت استعمال کرتے ہیں۔

$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ $\frac{\partial w}{\partial x}$ جہاں x اور y غیر تابع ہیں۔

$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x,t}$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ جہاں y ، x اور t غیر تابع ہیں۔

مثال ۱۳.۳۹: جزوی تفرق $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z}$ تلاش کریں جہاں $w = x^2 + y - z + \sin t$ اور $x + y = t$ ہیں۔

۲۱۵۵۷ **حل**

۲۱۵۵۸ متغیرات x ، y اور z کو غیر تابع لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} t &= x+y, \quad w = x^2+y-z+\sin(x+y) \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{y,z} &= 2x+0-0+\cos(x+y)\frac{\partial}{\partial x}(x+y) \\ &= 2x+\cos(x+y) \end{aligned}$$

۲۱۵۵۹ □

۲۱۵۶۰ **تیر دار اشکال**

۲۱۵۶۱ مثال ۱۳.۳۹ کی طرح مسائل حل کرتے ہوئے تیر دار اشکال استعمال کرنا مددگار ثابت ہوتا ہے۔ تیر دار اشکال تفاعل اور متغیرات کے بیچ تعلق دکھاتے ہیں۔ اگر

$$x+y=t \quad \text{اور} \quad w = x*2+y-z+\sin t$$

۲۱۵۶۲ ہوں ہمیں x ، y اور z غیر تابع لیتے ہوئے $\frac{\partial w}{\partial x}$ تلاش کرنے کو کہا جائے تب درکار اشکال درج ذیل ہوں گے:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{غیر تابع متغیرات}} \to \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{\text{درمیانے متغیرات اور تعلق}} \to \underbrace{w}_{\text{تابع متغیر}} \tag{۵}$$

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= y \\ z &= z \\ t &= x+y \end{aligned}$$

۲۱۵۶۳ اس تیر دار شکل میں غیر تابع متغیرات دائیں ہاتھ، درمیانے متغیرات اور ان کا غیر تابع متغیرات کے ساتھ تعلق درمیان میں اور تابع متغیرات دائیں ہاتھ ہیں۔

۲۱۵۶۴ جزوی تفرق $\frac{\partial w}{\partial x}$ حاصل کرنے کے لیے ہم چار متغیرات کا زنجیری قاعدہ w پر لاگو کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} \tag{۶}$$

۲۱۵۶۵ اس کلیہ کے دائیں ہاتھ میں w کے جزوی تفارق کو $w = x^2+y-z+\sin t$ کے لیے حاصل کر کے اس کلیہ میں پر کرتے ہوئے درج ذیل

۲۱۵۶۶ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= 2x\frac{\partial x}{\partial x} + (1)\frac{\partial y}{\partial x} + (-1)\frac{\partial z}{\partial x} + \cos t\frac{\partial t}{\partial x} \\ &= 2x\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} + \cos t\frac{\partial t}{\partial x} \end{aligned} \tag{۷}$$

باقی جزوی تفارق حاصل کرنے کے لیے ہم متغیرات کی غیر تابعیت اور تابعیت بروئے کار لاتے ہیں۔ ہم مساوات ۵ سے دیکھتے ہیں کہ x ، y اور z غیر تابع ہیں اور $t = x + y$ ہے۔ یوں

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x+y) = (1+0) = 1$$

ہو گا۔ ہم انہیں مساوات ۷ میں پر کر کے $\frac{\partial x}{\partial x}$ حاصل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)_{y,z} &= 2x(1) + 0 - 0 + (\cos t)(1) \\ &= 2x + \cos t \\ &= 2x + \cos(x+y) \qquad \text{غیر تابع متغیر کی صورت میں}\end{aligned}$$

سوالات

پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفارق

سوال ۱۳.۲۹۸ تا سوال ۱۳.۳۰۰ میں تیر دار اشکال سے شروع کرتے ہوئے دیے تفارق تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۲۹۸: $w = x^2 + y^2 + z^2, \quad z = x^2 + y^2$

(ا) $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ ، (ب) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_x$ ، (ج) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$

سوال ۱۳.۲۹۹: $w = x^2 + y - z + \sin t, \quad x + y = t$

(ا) $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{x,z}$ ، (ب) $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{z,t}$ ، (ج) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{x,y}$ ،

(د) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{y,t}$ ، (ہ) $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{x,z}$ ، (و) $\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)_{y,z}$ ،

سوال ۱۳.۳۰۰: ایک گیس جو مثالی گیس کے کلیہ $PH = nRT$ پر پورا اترتا ہو، جہاں n ، R مستقل ہیں، کی اندرونی توانائی $U = f(P, H, T)$ ہو گی۔

(ا) $\left(\frac{\partial U}{\partial P}\right)_H$ ، (ب) $\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H$

سوال ۱۳.۳۰۱: نقطہ $(x, y, z) = (0, 1, \pi)$ اور $w = x^2 + y^2 + z^2$ ، $y \sin z + z \sin x = 0$ لیں۔ اس نقطہ پر (ا) $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_y$ ، (ب) $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_y$ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۳۰۲: نقطہ $(w, x, y, z) = (4, 2, 1, -1)$ اور $w = x^2y^2 + yz - z^3$ اور $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ لیتے ہوئے اس نقطہ پر (ا) $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x$ ، (ب) $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_z$ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۳۰۳: نقطہ $(u, v) = (\sqrt{2}, 1)$ پر $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_x$ تلاش کریں جہاں $x = u^2 + v^2$ اور $y = uv$ ہیں۔

سوال ۱۳.۳۰۴: فرض کریں $x^2 + y^2 = r^2$ اور $x = r\cos\theta$ ہیں۔ جزوی تفارق $\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)_\theta$ اور $\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y$ تلاش کریں۔

۲۱۵۸۷ سوال ۱۳.۳۰۵: فرض کریں $w = x^2 - y^2 + 4z + t$ اور $x + 2z + t = 25$ ہیں۔ دکھائیں کہ مساوات

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x - 1 \quad \text{اور} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 2x - 2$$

۲۱۵۸۸ مختلف متغیرات کو تابع اور غیر تابع تصور کرتے ہوئے $\frac{\partial w}{\partial x}$ دیتے ہیں۔ دونوں صورتوں میں غیر تابع متغیرات تلاش کریں۔

۲۱۵۸۹ بغیر کسی مخصوص کلیہ جزوی تفارق کا حصول

۲۱۵۹۰ سوال ۱۳.۳۰۶: ماقواحرکیات کی میدان میں ایک مستمل حقیقت کہتا ہے کہ اگر $f(x, y, z) = 0$ ہو تب

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

۲۱۵۹۱ ہو گا۔ اس حقیقت کی تصدیق کریں۔ (اشارہ: تمام تفارق کو باضابطہ جزوی تفارق $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial f}{\partial y}$ اور $\frac{\partial f}{\partial z}$ کی صورت میں لکھیں۔)

۲۱۵۹۲ سوال ۱۳.۳۰۷: اگر $z = x + f(u)$ اور $u = xy$ ہوں تب درج ذیل دکھائیں۔

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x$$

۲۱۵۹۳ سوال ۱۳.۳۰۸: فرض کریں مساوات $g(x, y, z) = 0$ غیر تابع متغیرات x اور y کا قابل تفرق تفاعل z تعین کرتی ہے اور $g_z \neq 0$
۲۱۵۹۴ ہے۔ درج ذیل دکھائیں۔

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -\frac{\partial g/\partial y}{\partial g/\partial z}$$

۲۱۵۹۵ سوال ۱۳.۳۰۹: فرض کریں $f(x, y, z, w) = 0$ اور $g(x, y, z, w) = 0$ غیر تابع متغیرات x اور y کے قابل تفاعل z
۲۱۵۹۶ اور w تعین کرتے ہیں۔ مزید

$$\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial z} \neq 0$$

۲۱۵۹۷ فرض کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial z}}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_x = -\frac{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}}{\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial z}}$$

۲۱۵۹۸

۲۱۵۹۹

۱۳.۷ رخی تفارق، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں

ہم حصہ ۱۳.۵ سے جانتے ہیں کہ قابل تفرق تفاعل $f(x,y)$ منحنی $x = g(t),\ y = h(t)$ کے ساتھ ساتھ چلتے ہوئے t کے لحاظ سے شرح تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

نقطہ $N_0(x_0, y_0) = N_0(g(t_0), h(t_0))$ پر یہ مساوات بڑھتی t کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی دیتی ہے، جو دیگر چیزوں کے ساتھ منحنی پر چلنے کے رخ پر بھی منحصر ہے۔ یہ مشاہدہ اس صورت خصوصاً اہم ہو گا جب یہ منحنی ایک سیدھی لکیر ہو اور نقطہ N_0 سے منحنی پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے رخ چلتے ہوئے مقدار معلوم لمبائی قوس t ہو۔ چونکہ تب $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کے دائرہ کار میں فاصلہ کے لحاظ سے f کی شرح تبدیلی $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ ہو گی۔ ہم $\boldsymbol{u}$ تبدیل کرتے ہوئے نقطہ N_0 پر، فاصلہ کے لحاظ سے f کی مختلف رخ میں شرح تبدیلی دریافت کر سکتے ہیں۔ ان رخی **تفرق**[۴۱] کی سائنس، انجینئری اور ریاضیات میں کارآمد تشریحات کی جاتی ہیں۔ اس حصہ میں ان کی قیمت دریافت کرنے کا کلیہ اخذ کیا جائے گا جس کے بعد فضا میں سطحوں کی مماسی سطحیں اور عمودی سطحیں تلاش کی جائیں گی۔

مستوی میں رخی تفارق

فرض کریں مستوی xy میں پورے خطہ R میں تفاعل $f(x,y)$ معین ہے، $N_0(x_0, y_0)$ خطہ R میں ایک نقطہ ہے، اور $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$ ایک اکائی سمتیہ ہے۔ تب $\boldsymbol{u}$ کے متوازی نقطہ N_0 سے گزرتے خط کی مقدار معلوم مساواتیں درج ذیل ہوں گی۔

$$x = x_0 + su_1, \quad y = y_0 + su_2$$

اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے رخ نقطہ N_0 سے فاصلہ کو مقدار معلوم s سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ہم نقطہ N_0 پر $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کی شرح تبدیلی $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}$ سے حاصل کرتے ہیں (شکل ۱۳.۴۴)۔

تعریف: نقطہ $N_0(x_0, y_0)$ پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$ کے رخ f کا تفرق درج ذیل عدد ہو گا

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)_{\boldsymbol{u},N_0} = \lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1, y_0+su_2) - f(x_0,y_0)}{s} \tag{1}$$

بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

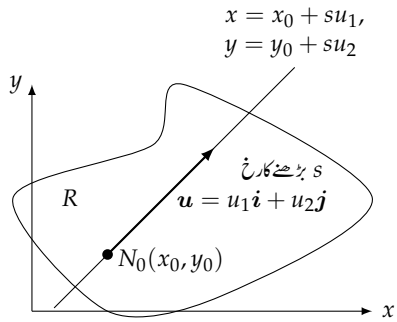
□

رخی تفرق کو درج ذیل سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔

N_0 پر $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کا تفرق $\qquad (D_{\boldsymbol{u}}f)_{N_0}$

---

[۴۱] directionalderivative



شکل ۱۳.۴۴: نقطہ N_0 پر $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کی شرح تبدیلی N_0 پر لکیر کے ساتھ f کی شرح تبدیلی ہو گی۔

۲۱۶۱۸ مثال ۱۳.۴۰: نقطہ $N_0(1,2)$ پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$ کے رخ درج ذیل کا تفرق تلاش کریں۔

$$f(x,y) = x^2 + xy$$

۲۱۶۱۹ **حل**

۲۱۶۲۰

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)_{\boldsymbol{u},N_0} &= \lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+su_1, y_0+su_2) - f(x_0,y_0)}{s} && \text{مساوات ۱}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{f\left(1+s\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}, 2+s\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - f(1,2)}{s}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{\left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(1+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(2+\frac{s}{\sqrt{2}}\right) - (1^2+1\cdot 2)}{s}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{\left(1+\frac{2s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\right) + \left(2+\frac{3s}{\sqrt{2}}+\frac{s^2}{2}\right) - 3}{s}\\
&= \lim_{s\to 0}\frac{\frac{5s}{\sqrt{2}}+s^2}{s} = \lim_{s\to 0}\left(\frac{5}{\sqrt{2}}+s\right) = \left(\frac{5}{\sqrt{2}}+0\right) = \frac{5}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

۲۱۶۲۱ نقطہ $N_0(1,2)$ پر $\boldsymbol{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$ کے رخ $f(x,y) = x^2 + xy$ کی تبدیلی کی شرح $\frac{5}{\sqrt{2}}$ ہے۔ □

۲۱۶۲۲ رخی تفرق کی جیومیٹریائی تشریح

۲۱۶۲۳ مساوات $z = f(x,y)$ فضا میں ایک سطح S کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر $z_0 = f(x_0,y_0)$ ہو تب نقطہ $N_0(x_0,y_0,z_0)$ سطح S پر
۲۱۶۲۴ واقع ہو گا۔ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے متوازی انتصابی مستوی، جو $N(x,y)$ اور $N_0(x_0,y_0)$ سے گزرتا ہو، S کو منحنی C میں قطع کرے گا۔ اکائی

سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کی شرح تبدیلی N پر C کے مماس کی ڈھلوان ہو گی۔

دھیان رہے کہ جب $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}$ ہو، N_0 پر رخی تفرق $\frac{\partial f}{\partial x}$ ہو گا جس کی قیمت (x_0, y_0) پر حاصل کی جائے گی۔ اسی طرح جب $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{j}$ ہو، N_0 پر رخی تفرق $\frac{\partial f}{\partial y}$ ہو گا جس کی قیمت (x_0, y_0) پر حاصل کی جائے گی۔ رخی تفرق ان دو جزوی تفارق کو عمومی بناتا ہے۔ ہم اب $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کے علاوہ کسی بھی رخ $\boldsymbol{u}$، تفاعل f کی تبدیلی شرح جان سکتے ہیں۔

حساب

جیسا آپ جانتے ہیں، تفرق کی تعریف بطور حد سے کسی بھی تفرق کا حصول اتنا آسان نہیں ہوتا ہے۔ رخی تفرق کی تعریف سے بھی رخی تفرق کا حصول مشکل کام ہے۔ آئیں رخی تفرق کا زیادہ آسان کلیہ اخذ کریں۔ ہم خط

$$x = x_0 + su_1, \quad y = y_0 + su_2 \tag{۲}$$

سے شروع کرتے ہیں جو نقطہ $N_0(x_0, y_0)$ سے گزرتے خط کی مقدار معلوم مساوات ہے جس میں اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}$ کے رخ بڑھتا ہوا s مقدار معلوم لمبائی قوس ہے۔ تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)_{\boldsymbol{u},N_0} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{N_0}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{N_0}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} && \text{زنجیری قاعدہ} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{N_0}\cdot u_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{N_0}\cdot u_2 && \text{مساوات ۲ سے } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = u_1 \text{ اور } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = u_2 \\
&= \underbrace{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{N_0}\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{N_0}\cdot\boldsymbol{j}\right]}_{N_0 \text{ پر } f \text{ کی ڈھلوان}}\cdot\underbrace{\left[u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j}\right]}_{\boldsymbol{u} \text{ کا رخ}} && (۳)
\end{aligned}$$

تعریف: نقطہ $N_0(x_0, y_0)$ پر $f(x, y)$ کا سمتیہ ڈھلوان (ڈھلوان) درج ذیل سمتیہ ہو گا

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$$

جس کی قیمت N_0 پر f کے رخی تفرق سے حاصل کی جائے گی۔

□

سمتی ڈھلوان ∇f کو "ڈھلوان f" پڑھتے ہیں۔ علامت ∇ یونانی حرف "نیبلا" ہے۔

مساوات ۳ کہتی ہے کہ N_0 پر $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کا تفرق N_0 پر f کی ڈھلوان اور $\boldsymbol{u}$ کا حاصل ضرب ہو گا۔

مسئلہ ۱۳.۶: اگر $N_0(x_0, y_0)$ پر $f(x, y)$ کے جزوی تفارق معین ہوں تب N_0 پر $\boldsymbol{u}$ کے رخ f کا تفرق، N_0 پر f کی ڈھلوان اور $\boldsymbol{u}$ کا غیر سمتی ضرب ہو گا:

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\right)_{\boldsymbol{u},N_0} = \left(\nabla\right)_{N_0}\cdot\boldsymbol{u} \tag{۴}$$

مثال ۱۳.۴۱: نقطہ $(2,0)$ پر $\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j}$ رخ $f(x,y) = xe^y + \cos(xy)$ کا رخی تفرق تلاش کریں۔

حل

ہم $\boldsymbol{A}$ کی لمبائی سے $\boldsymbol{A}$ کو تقسیم کرتے ہوئے $\boldsymbol{A}$ کے رخ اکائی سمتیہ تلاش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{\boldsymbol{A}}{5} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} - -\frac{4}{5}\boldsymbol{j}$$

نقطہ $(2,0)$ پر f کے جزوی تفارق

$$\begin{aligned} f_x(2,0) &= (e^y - y\sin(xy))_{(2,0)} = e^0 - 0 = 1 \\ f_y(2,0) &= (xe^y - x\sin(xy))_{(2,0)} = 2e^0 - 2\cdot 0 = 2 \end{aligned}$$

ہوں گے لہٰذا نقطہ $(2,0)$ پر f کی ڈھلوان

$$\nabla f\big|_{(2,0)} = f_x(2,0)\boldsymbol{i} + f_y(2,0)\boldsymbol{j} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$$

ہو گی (شکل ۱۳.۴۵)۔ نقطہ $(2,0)$ پر $\boldsymbol{A}$ رخ f کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \Big(D_{\boldsymbol{u}} f\Big)\Big|_{(2,0)} &= \nabla f\big|_{(2,0)} \cdot \boldsymbol{u} \\ &= (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) \cdot \left(\frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}\right) = \frac{3}{5} - \frac{8}{5} = -1 \end{aligned}$$

□

رخی تفارق کے خواص

رخی تفرق کے کلیہ

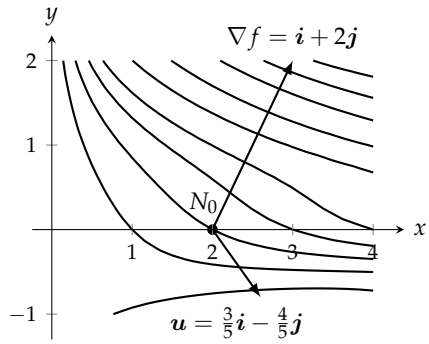
$$D_{\boldsymbol{u}} f = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} = \big|\nabla f\big| |\boldsymbol{u}| \cos\theta = \big|\nabla f\big| \cos\theta$$

کی قیمت تلاش کرنے سے درج ذیل خواص دریافت ہوتے ہیں:

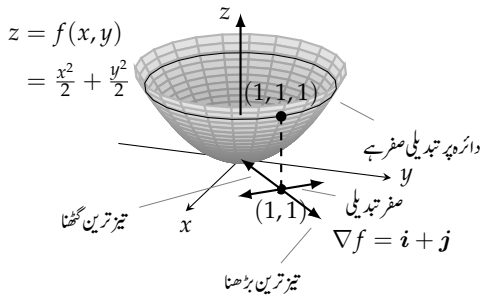
رخی تفرق $D_{\boldsymbol{u}} f = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} = \big|\nabla f\big| \cos\theta$ کے خواص

۱. تفاعل f اس صورت تیز ترین بڑھتا ہے جب $\cos\theta = 1$ ہو، یعنی جب $\boldsymbol{u}$ اور ∇f ایک ہی رخ ہوں۔ اس طرح، اپنے دائرہ کار میں، نقطہ N پر سمتیہ ڈھلوان ∇f کے رخ، f تیز ترین بڑھتا ہے۔ اس رخ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$D_{\boldsymbol{u}} f = \big|\nabla f\big| \cos(0) = \big|\nabla f\big|$$



شکل ۱۳.۴۵: روایتی طور پر ∇f کو f کے دائرہ کار میں دکھایا جاتا ہے۔ موجودہ تفاعل کے لیے مکمل مستوی xy دائرہ کار ہو گا۔ سمتیہ $\boldsymbol{u} = \frac{3}{5}\boldsymbol{i} - \frac{4}{5}\boldsymbol{j}$ کے رخ f کی شرح تبدیلی $\nabla f \cdot \boldsymbol{u} = -1$ ہو گی (مثال ۱۳.۴۱)۔



شکل ۱۳.۴۶: نقطہ $(1, 1, 1)$ پر f تیز ترین ∇f رخ بڑھتا ہے جو سطح پر سیدھا چڑھنے کا مطابقتی رخ ہے (مثال ۱۳.۴۲)۔

۲۱۶۵۶ ۲. اسی طرح $-\nabla f$ کے رخ f تیز ترین گھٹتا ہے۔ اس رخ تفرق $D_{\boldsymbol{u}} f = |\nabla f| \cos(\pi) = -|\nabla f|$ ہو گا۔

۲۱۶۵۷ ۳. ڈھلوان کے عمودی کسی بھی رخ $\boldsymbol{u}$ کوئی تبدیلی نہیں پائی جائے گی۔ ایسے رخ θ کی قیمت $\frac{\pi}{2}$ ہو گی لہٰذا درج ذیل ہو گا:

$$D_{\boldsymbol{u}} f = |\nabla f| \cos(\pi/2) = |\nabla f| \cdot 0 = 0$$

۲۱۶۵۸ جیسا ہم دیکھیں گے، یہ خواص تین بُعدی فضا میں بھی کارآمد ہوں گی۔

۲۱۶۵۹ مثال ۱۳.۴۲: نقطہ $(1, 1)$ پر وہ رخ تلاش کریں جس رخ تفاعل $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ (ا) تیز ترین بڑھتا ہو، (ب) تیز ترین گھٹتا ہو،
۲۱۶۶۰ (ج) میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہوتی ہو۔

۲۱۶۶۱ **حل**

۲۱۶۶۲ (ا) یہ تفاعل نقطہ $(1,1)$ پر ∇f کے رخ تیز ترین بڑھے گا۔ اس نقطہ پر ڈھلوان

$$(\nabla f)_{(1,1)} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})_{(1,1)} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$$

۲۱۶۶۳ ہے لہٰذا تیز ترین بڑھنے کا رخ درج ذیل اکائی سمتیہ دیگا۔

$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}}{|\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$$

۲۱۶۶۴ (ب) یہ تفاعل $-\nabla f$ رخ تیز ترین گھٹے گا۔ یہ رخ درج ذیل ہو گا۔

$$-\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$$

۲۱۶۶۵ (ج) نقطہ $(1,1)$ پر صفر تبدیلی کا رخ ∇f کو عمودی ہو گا۔ یہ رخ درج ذیل ہوں گے (شکل ۱۳.۴۶)۔

$$\boldsymbol{n} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}, \quad -\boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}$$

۲۱۶۶۶ □

۲۱۶۶۷ ہم قد منحنی کے ڈھلوان اور مماس

۲۱۶۶۸ اگر ہموار منحنی $\boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j}$ پر قابل تفرق تفاعل $f(x,y)$ کی قیمت مستقل ہو (جس کی وجہ سے یہ منحنی، f کی ہم قد منحنی ہو گی)،
۲۱۶۶۹ تب $f(g(t),h(t)) = 0$ ہو گا۔ دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے تفرق درج ذیل مساوات دیگا:

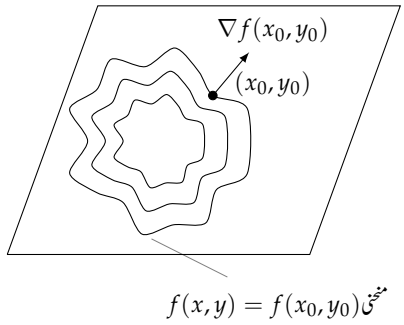
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g(t),h(t)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c) \\
\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= 0 \qquad \text{زنجیری قاعدہ} \\
\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}\right)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}\right)}_{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}} &= 0
\end{aligned} \tag{۵}$$

۲۱۶۷۰ مساوات ۵ کہتی ہے کہ مماسی سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کو ∇f عمودی ہو گا، لہٰذا ∇f نقطہ (x_0,y_0) پر منحنی کو عمودی ہو گا۔

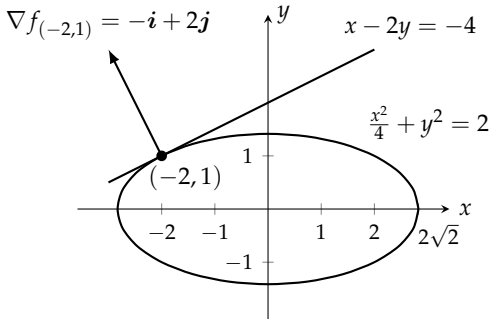
۲۱۶۷۱ تفاعل $f(x,y)$ کے دائرہ کار میں ہر نقطہ (x_0,y_0) پر f کی ڈھلوان نقطہ (x_0,y_0) پر ہم قد منحنی کو عمودی ہو گی (شکل ۱۳.۴۷)۔

۲۱۶۷۲ ہم اس مشاہدہ کی وجہ سے ہم قد منحنیات کی مماسات کی مساواتیں دریافت کر سکتے ہیں۔ یہ ڈھلوان کو عمودی خطوط ہوں گے۔ نقطہ $N_0(x_0,y_0)$ سے
۲۱۶۷۳ گزرتا ہوا، سمتیہ $\boldsymbol{N} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j}$ کو عمودی خط کی مساوات درج ذیل ہو گی (سوال ۱۳.۳۶۸)۔

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) = 0$$



شکل ۱۳.۴۷: دو متغیرات کے تفاعل کی ڈھلوان ہر صورت ہم قد منحنیات کی عمودی ہو گی۔



شکل ۱۳.۴۸: ہم قطع مکافی کو تفاعل $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$ کی ہم قد منحنی تصور کر کے اس کا مماس تلاش کر سکتے ہیں (مثال ۱۳.۴۳)۔

۲۱۶۷۴ اگر $\boldsymbol{N}$ ڈھلوان $(\nabla f)_{(x_0,y_0)} = f_x(x_0,y_0)\boldsymbol{i} + f_y(x_0,y_0)\boldsymbol{j}$ ہو تب اس مساوات کی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) = 0 \tag{۶}$$

۲۱۶۷۵

۲۱۶۷۶ مثال ۱۳.۴۳: نقطہ $(-2,1)$ پر درج ذیل ترخیم کے مماس کی مساوات تلاش کریں (شکل ۱۳.۴۸)۔

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

۲۱۶۷۷ **حل**

۲۱۶۷۸ یہ ترخیم درج ذیل تفاعل کی ہم قد منحنی ہے۔

$$f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2$$

۲۱۶۷۹ نقطہ $(-2,1)$ پر f کی ڈھلوان

$$\nabla f\big|_{(-2,1)} = \left(\frac{x}{2}\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}\right)_{(-2,1)} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$$

۲۱۶۸۰ ہو گی لہٰذا مماسی خط کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$(-1)(x+2) + (2)(y-1) = 0 \qquad \text{مساوات ۶}$$
$$x - 2y = -4$$

۲۱۶۸۱ □

تین متغیرات کا تفاعل

ہم دو متغیرات کلیات کے ساتھ جزو z شامل کر کے تین متغیرات کلیات حاصل کرتے ہیں۔ فضا میں قابل تفرق تفاعل $f(x,y,z)$ اور اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$ کے لیے ہم

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

اور

$$D_{\boldsymbol{u}} f = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial f}{\partial x}u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}u_2 + \frac{\partial f}{\partial z}u_3$$

لکھیں گے۔ رخی تفرق اب بھی

$$D_{\boldsymbol{u}} f = \nabla f \cdot \boldsymbol{u} = |\nabla f||\boldsymbol{u}|\cos\theta = |\nabla f|\cos\theta$$

ہو گا لہٰذا دو متغیرات کے خواص (جن کا ہم ذکر کر چکے ہیں)، تین متغیرات کے تفاعل کے لیے بھی کارآمد ہوں گے۔ کسی بھی نقطہ پر ∇f رخ تفاعل تیز ترین بڑھتا ہے اور $-\nabla f$ رخ تیز ترین گھٹتا ہے، جبکہ ∇f کے عمودی کسی بھی رخ، تفرق صفر ہو گا۔

مثال ۱۳.۴۴: (ا) نقطہ $(N_0(1,1,0))$ پر $\boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$ رخ $f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - z$ کا تفرق تلاش کریں۔ (ب) نقطہ N_0 پر f کس رخ تیز ترین بڑھتا ہے؟ اس رخ شرح تبدیلی کیا ہو گی؟

حل

(ا) سمتیہ $\boldsymbol{A}$ کو اس کی لمبائی سے تقسیم کر کے اس کے رخ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (6)^2} = \sqrt{49} = 7$$
$$\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} = \frac{2}{7}\boldsymbol{i} - \frac{3}{7}\boldsymbol{j} + \frac{6}{7}\boldsymbol{k}$$

نقطہ N_0 پر جزوی تفارق

$$f_x = 3x^2 - y^2\Big|_{(1,1,0)} = 2, \quad f_y = -2xy\big|_{(1,1,0)} = -2, \quad f_z = -1\big|_{(1,1,0)} = -1$$

ہوں گے لہٰذا N_0 پر f کی ڈھلوان درج ذیل ہو گی۔

$$\nabla f\big|_{(1,1,0)} = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$$

نقطہ N_0 پر $\boldsymbol{A}$ کے رخ f کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} D_{\boldsymbol{u}} f\big|_{(1,1,0)} &= \nabla f\big|_{(1,1,0)} \cdot \boldsymbol{u} = (2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) \cdot \left(\frac{2}{7}\boldsymbol{i} - \frac{3}{7}\boldsymbol{j} + \frac{6}{7}\boldsymbol{k}\right) \\ &= \frac{4}{7} + \frac{6}{7} - \frac{6}{7} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

۲۱۶۹۵ (ب) تفاعل تیز ترین رخ بڑھتا ہے اور $\nabla f = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ رخ تیز ترین گھٹتا ہے۔ ان رخ
۲۱۶۹۶ تبدیلی کی شرح بالترتیب درج ذیل ہوں گی۔

$$\begin{aligned} |\nabla f| &= \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3 \\ -|\nabla f| &= -3 \end{aligned}$$

۲۱۶۹۷ □

۲۱۶۹۸ **مماسی مستوی اور عمودی خطوط کی مساواتیں**

۲۱۶۹۹ اگر قابل تفرق تفاعل f کی ہم قد منحنی $f(x,y,z) = c$ پر $\boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ ایک ہموار منحنی ہو تب
۲۱۷۰۰ $f(g(t), h(t), k(t)) = 0$ ہو گا۔ دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے تفرق درج ذیل دیگا:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(g(t), h(t), k(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{زنجیری قاعدہ}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)}_{\nabla f} \cdot \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right)}_{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}} = 0 \tag{۷}$$

۲۱۷۰۱ منحنی کے ساتھ ساتھ ہر نقطہ پر ∇f، منحنی کی سمتیہ رفتار کو عمودی ہو گا۔

۲۱۷۰۲ آئیں اب نقطہ N_0 سے گزرتی منحنی تک اپنے آپ کو محدود رکھتے ہیں (شکل ۱۳.۴۹)۔ نقطہ N_0 پر تمام سمتیات رفتار، N_0 پر ∇f کو عمودی ہوں
۲۱۷۰۳ گے لہذا منحنی کے تمام مماسی خط اس مستوی میں پائے جائیں گے جو N_0 پر ∇f کو عمودی ہو۔ اس مستوی کو ہم N_0 پر سطح کا مماسی مستوی کہتے ہیں۔ نقطہ
۲۱۷۰۴ N_0 سے گزرتا ہوا ایسا خط جو اس مستوی کو عمودی ہو، N_0 پر سطح کا عمودی خط ہو گا۔

۲۱۷۰۵ تعریف: نقطہ $N_0(x_0, y_0, z_0)$ پر $\nabla f\big|_{N_0}$ کا عمودی مستوی، نقطہ N_0 پر ہم قد منحنی $f(x,y,z) = c$ کا مماسی مستوی ہو گا۔

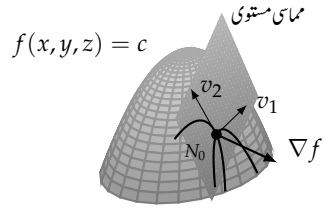
۲۱۷۰۶ نقطہ N_0 پر $\nabla f\big|_{N_0}$ کا متوازی خط، نقطہ N_0 پر سطح کا عمودی خط ہو گا۔

۲۱۷۰۷ □

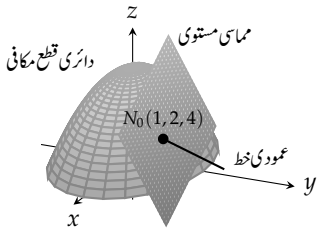
۲۱۷۰۸ یوں حصہ ۱۱.۵ کے تحت، مماسی مستوی اور عمودی خط کی بالترتیب مساوات درج ذیل ہوں گی۔

$$f_x(N_0)(x - x_0) + f_y(N_0)(y - y_0) + f_z(N_0)(z - z_0) = 0 \tag{۸}$$

$$x = x_0 + f_x(N_0)t, \quad y = y_0 + f_y(N_0)t, \quad z = z_0 + f_z(N_0)t \tag{۹}$$



شکل ۱۳.۴۹: نقطہ N_0 سے گزرتی ہوئی سطح میں ہر ہموار منحنی کا سمتیہ رفتار ∇f کو عمودی ہوگا۔ یوں N_0 پر سمتیات رفتار ایک مشترک مستوی میں پائے جائیں گے جس کو ہم مماسی مستوی کہتے ہیں۔



شکل ۱۳.۵۰: نقطہ N_0 پر دائری قطع مکافی سطح کا مماسی مستوی اور عمودی خط (مثال ۱۳.۴۵)۔

۲۱۷۰۹ مثال ۱۳.۴۵: نقطہ $N_0(1,2,4)$ پر درج ذیل کا مماسی مستوی اور عمودی خط دریافت کریں (شکل ۱۳.۵۰)۔

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z-9=0 \qquad \text{دائری قطع مکافی}$$

۲۱۷۱۰ **حل**

۲۱۷۱۱ نقطہ N_0 پر f کی ڈھلوان کو عمودی سطح، نقطہ N_0 پر مستوی ہوگا۔ ڈھلوان

$$\nabla f\big|_{N_0}=(2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})_{(1,2,4)}=2\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

۲۱۷۱۲ ہے لہٰذا مستوی درج ذیل ہوگا۔

$$2(x-1)+4(y-2)+(z-4)=0 \quad \text{یعنی} \quad 2x+4y+z=14$$

۲۱۷۱۳ نقطہ N_0 پر سطح کا عمودی خط درج ذیل ہوگا۔

$$x=1+2t,\quad y=2+4t,\quad z=4+t$$

۲۱۷۱۴ □

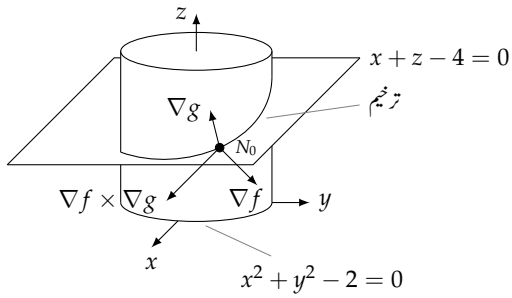
۲۱۷۱۵ مثال ۱۳.۴۶: بیلنی سطح

$$f(x,y,z)=x^2+y^2-2=0$$

۲۱۷۱۶ اور مستوی

$$g(x,y,z)=x+z-4=0$$

۲۱۷۱۷ ایک ترخیم T میں ملتے ہیں (شکل ۱۳.۴۶)۔ نقطہ $N_0(1,1,3)$ پر T کے مماسی خط کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔



شکل ۱۳.۵۱: بیلن $f(x,y,z) = x^2+y^2-2 = 0$ اور مستوی $g(x,y,z) = x+z-4 = 0$ ایک دوسرے کو ترخیم میں قطع کرتے ہیں۔

۲۱۷۱۸ **حل**

۲۱۷۱۹ نقطہ N_0 پر مماسی خط ∇f اور ∇g دونوں کو عمودی لہٰذا $\boldsymbol{v} = \nabla f \times \nabla g$ کو متوازی ہو گا۔ نقطہ N_0 کے محدد اور $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء ہمیں
۲۱۷۲۰ مماسی خط کی مساوات دیتے ہیں۔ ہمارے پاس درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
\nabla f_{(1,1,3)} &= (2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j})_{(1,1,3)} = 2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}\\
\nabla g_{(1,1,3)} &= (\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k})_{(1,1,3)} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{v} = (2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j})\times(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

۲۱۷۲۱ مماسی خط درج ذیل ہو گا۔

$$x = 1+2t, \quad y = 1-2t, \quad z = 3-2t$$

۲۱۷۲۲ □

۲۱۷۲۳ سطح $z = f(x,y)$ کا مماسی مستوی

۲۱۷۲۴ نقطہ $N_0(x_0,y_0,z_0)$ پر سطح $z = f(x,y)$ کے مماسی مستوی کی مساوات تلاش کریں۔ اس نقطہ پر $z_0 = f(x_0,y_0)$ ہو گا۔
۲۱۷۲۵ ہم دیکھتے ہیں کہ مساوات $z = f(x,y)$ کو $f(x,y)-z = 0$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں سطح $z = f(x,y)$ درحقیقت تفاعل

۲۱۷۲۶ $F(x,y,z) = f(x,y) - z$ کا صفر ہم قد مستوی ہو گا۔ تفاعل F کے جزوی تفارق

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x}(f(x,y) - z) = f_x - 0 = f_x$$
$$F_y = \frac{\partial}{\partial y}(f(x,y) - z) = f_y - 0 = f_y$$
$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(f(x,y) - z) = 0 - 1 = -1$$

۲۱۷۲۷ ہوں گے۔ نقطہ N_0 پر مماسی مستوی کا کلیہ

$$F_x(N_0)(x - x_0) + F_y(N_0)(y - y_0) + F_z(N_0)(z - z_0) = 0$$

۲۱۷۲۸ یوں درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - z_0) \tag{۱۰}$$

۲۱۷۲۹ مثال ۱۳.۴۷: نقطہ $(0,0,0)$ پر سطح $z = x\cos y - ye^x$ کا مماسی مستوی تلاش کریں۔

۲۱۷۳۰ **حل**

۲۱۷۳۱ ہم جزوی تفارق معلوم کر کے مساوات ۱۰ استعمال کریں گے:

$$f_x(0,0) = (\cos y - ye^x)_{(0,0)} = 1 - 0 \cdot 1 = 1$$
$$f_y(0,0) = (-x\sin y - e^x)_{(0,0)} = 0 - 1 = -1$$

۲۱۷۳۲ یوں مماسی مستوی

$$1 \cdot (x - 0) - 1 \cdot (y - 0) - (z - 0) = 0 \qquad \text{مساوات ۱۰}$$

۲۱۷۳۳ یعنی درج ذیل ہو گا۔

$$x - y - z = 0$$

۲۱۷۳۴ □

۲۱۷۳۵ **بڑھوتری اور فاصلہ**

۲۱۷۳۶ نقطہ N_0 سے فاصلہ $\mathrm{d}s$ دور قریبی نقطہ منتقلی کے دوران تفاعل f کی قیمت میں تبدیلی جاننے کی خاطر رخی تفرق ایک سادہ تفرق کا کردار ادا کرتا ہے۔ اگر
۲۱۷۳۷ f ایک متغیر کا تفاعل ہو تا تب درج ذیل ہوتا۔

$$\mathrm{d}f = f'(N_0)\,\mathrm{d}s \qquad \text{سادہ تفرق} \times \text{بڑھوتری}$$

۲۱۷۳۸ دو یا دو سے زیادہ متغیرات کے تفاعل کے لیے ہم درج ذیل کلیہ استعمال کریں گے

$$\mathrm{d}f = (\nabla f\big|_{N_0} \cdot \boldsymbol{u}) \cdot \mathrm{d}s \qquad \text{رخی تفرق} \times \text{بڑھوتری}$$

۲۱۷۳۹ جہاں N_0 سے حرکت کا رخ $\boldsymbol{u}$ ہو گا۔

۲۱۷۴۰ **رخ $\boldsymbol{u}$ میں f کی تبدیلی کا اندازہ**

۲۱۷۴۱ ہم نقطہ N_0 سے رخ $\boldsymbol{u}$ چھوٹا فاصلہ $\mathrm{d}x$ حرکت کرنے سے f کی قیمت میں تبدیلی درج ذیل کلیہ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathrm{d}f = \underbrace{(\nabla f\big|_{N_0} \cdot \boldsymbol{u})}_{\text{رخی تفرق}} \cdot \underbrace{\mathrm{d}s}_{\text{فاصلاتی بڑھوتری}} \tag{11}$$

۲۱۷۴۲ مثال ۱۳.۴۸: نقطہ $N(x,y,z)$ ابتدائی نقطہ $N_0(2,0,0)$ سے 0.1 اکائی دور $N_1(4,1,-4)$ کے رخ منتقل ہوتا ہے۔ درج ذیل
۲۱۷۴۳ تفاعل کی قیمت میں کتنی تبدیلی رونما ہو گی؟

$$f(x,y,z) = xe^y + yz$$

۲۱۷۴۴ **حل**

۲۱۷۴۵ ہم N_0 پر سمتیہ

$$\overrightarrow{N_0N_1} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$$

۲۱۷۴۶ کے رخ f کا تفرق حاصل کرتے ہیں۔ اس سمتیہ کا رخ

$$\boldsymbol{u} = \frac{\overrightarrow{N_0N_1}}{\left|\overrightarrow{N_0N1}\right|} = \frac{\overrightarrow{N_0N_1}}{3} = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k}$$

۲۱۷۴۷ ہو گا۔ نقطہ N_0 پر f کی ڈھلوان

$$\nabla f\big|_{(2,0,0)} = (e^y\boldsymbol{i} + (xe^y + z)\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k})\big|_{(2,0,0)} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$$

۲۱۷۴۸ ہو گی لہٰذا

$$\nabla f\big|_{N_0} \cdot \boldsymbol{u} = (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}) \cdot \left(\frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

۲۱۷۴۹ ہو گا۔ نقطہ N_0 سے $\boldsymbol{u}$ رخ 0.1 اکائی دور منتقلی سے f کی قیمت تقریباً درج ذیل تبدیلی رونما ہو گی۔

$$\mathrm{d}f = (\nabla f\big|_{N_0} \cdot \boldsymbol{u})(\mathrm{d}s) = \left(\frac{4}{3}\right)(0.1) \approx 0.13$$

۲۱۷۵۰ □

۲۱۷۵۱ **ڈھلوان کے الجبرائی قواعد**

۲۱۷۵۲ اگر ہم دو تفاعل f اور g کی ڈھلوان جانتے ہوں تب ہم ان کے مستقل مضرب، مجموعہ، فرق، حاصل ضرب، اور حاصل تقسیم کی ڈھلوان بھی جانتے ہیں۔

۲۱۷۵۳ **ڈھلوان کے الجبرائی قواعد**

۲۱۷۵۴

۲۱۷۵۵ قاعدہ مستقل مضرب $\nabla(kf) = k\nabla f$ جہاں k مستقل ہے

۲۱۷۵۶ قاعدہ مجموعہ $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

۲۱۷۵۷ قاعدہ فرق $\nabla(f-g) = \nabla f - \nabla g$

۲۱۷۵۸ قاعدہ ضرب $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

۲۱۷۵۹ قاعدہ حاصل تقسیم $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

۲۱۷۶۰ مثال ۱۳.۴۹: ہم درج ذیل تفاعل لیتے ہوئے ان قواعد کو دکھاتے ہیں۔

$$f(x,y,z) = x - y, \quad g(x,y,z) = z, \quad \nabla f = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}, \quad \nabla g = \boldsymbol{k}$$

۲۱۷۶۱ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\nabla(2f) &= \nabla(2x-2y) = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} = 2\nabla f \\
\nabla(f+g) &= \nabla(x-y+z) = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} = \nabla f + \nabla g \\
\nabla(f-g) &= \nabla(x-y-z) = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} = \nabla f - \nabla g \\
\nabla(fg) &= \nabla(xz-yz) = z\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + (x-y)\boldsymbol{k} = g\nabla f + f\nabla g \\
\nabla\left(\frac{f}{g}\right) &= \nabla\left(\frac{x-y}{z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-y}{z}\right)\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-y}{z}\right)\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x-y}{z}\right)\boldsymbol{k} \\
&= \frac{1}{z}\boldsymbol{i} - \frac{1}{z}\boldsymbol{j} + \frac{z\cdot 0 - (x-y)\cdot 1}{z^2}\boldsymbol{k} \\
&= \frac{z\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} - (x-y)\boldsymbol{k}}{z^2} = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}
\end{aligned}$$

۲۱۷۶۲ □

۲۱۷۶۳ **سوالات**

۲۱۷۶۴ **نقطہ پر ڈھلوان کا حصول**

۲۱۷۶۵ سوال ۱۳.۳۱۰ تا سوال ۱۳.۳۱۳ میں دیے نقطہ پر تفاعل کی ڈھلوان تلاش کریں۔ اس نقطہ پر ڈھلوان اور اس نقطہ سے گزرتی ہم قد منحنی ترسیم کریں۔

۲۱۷۶۶ سوال ۱۳.۳۱۰: $f(x,y) = y - x, \quad (2,1)$

سوال ۱۳.۳۱۱: $f(x,y) = \ln(x^2+y^2), \quad (1,1)$

سوال ۱۳.۳۱۲: $g(x,y) = y - x^2, \quad (-1,0)$

سوال ۱۳.۳۱۳: $g(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}, \quad (\sqrt{2},1)$

سوال ۱۳.۳۱۴ تا سوال ۱۳.۳۱۷ میں دیے نقطہ پر ∇f تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۳۱۴: $f(x,y,z) = x^2+y^2-2z^2+z\ln x, \quad (1,1,1)$

سوال ۱۳.۳۱۵: $f(x,y,z) = 2z^3-3(x^2+y^2)z+\tan^{-1} xz, \quad (1,1,1)$

سوال ۱۳.۳۱۶: $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}+\ln(xyz), \quad (-1,2,-2)$

سوال ۱۳.۳۱۷: $f(x,y,z) = e^{x+y}\cos z+(y+1)\sin^{-1} x, \quad (0,0,\pi/6)$

مستوی xy میں رخ تفرق کی تلاش

سوال ۱۳.۳۱۸ تا سوال ۱۳.۳۲۵ میں N_0 پر $\boldsymbol{A}$ کے رخ تفاعل کا رخی تفرق دریافت کریں۔

سوال ۱۳.۳۱۸: $f(x,y) = 2xy-3y^2, \quad N_0(5,5), \quad \boldsymbol{A} = 4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}$

سوال ۱۳.۳۱۹: $f(x,y) = 2x^2+y^2, \quad N_0(-1,1), \quad \boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$

سوال ۱۳.۳۲۰: $g(x,y) = x-\frac{y^2}{x}+\sqrt{3}\sec^{-1}(2xy), \quad N_0(1,1), \quad \boldsymbol{A} = 12\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$

سوال ۱۳.۳۲۱: $h(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}+\sqrt{3}\sin^{-1}\frac{xy}{2}, \quad N_0(1,1), \quad \boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}$

سوال ۱۳.۳۲۲: $f(x,y,z) = xy+yz+zx, \quad N_0(1,-1,2), \quad \boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i}+6\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$

سوال ۱۳.۳۲۳: $f(x,y,z) = x^2+2y^2-3z^2, \quad N_0(1,1,1), \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

سوال ۱۳.۳۲۴: $g(x,y,z) = 3e^x\cos yz, \quad N_0(0,0,0), \quad \boldsymbol{A} = 2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$

سوال ۱۳.۳۲۵: $h(x,y,z) = \cos xy+e^{yz}+\ln zx, \quad N_0(1,0,1/2), \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$

تیز بڑھنے اور گھٹنے کے رخ

سوال ۱۳.۳۲۶ تا سوال ۱۳.۳۳۱ میں نقطہ N_0 پر وہ رخ تلاش کریں جس رخ تفاعل کے بڑھنے اور گھٹنے کی تبدیلی تیز ترین ہو۔ ان رخ تفاعل کے تفرق دریافت کریں۔

سوال ۱۳.۳۲۶: $f(x,y) = x^2+xy+y^2, \quad N_0(-1,1)$

سوال ۱۳.۳۲۷: $f(x,y) = x^2y+e^{xy}\sin y, \quad N_0(1,0)$

سوال ۱۳.۳۲۸: $f(x,y,z) = \frac{x}{y}-yz, \quad N_0(4,1,1)$

سوال ۱۳.۳۲۹: $g(x,y,z) = xe^y+z^2, \quad N_0(1,\ln 2,1/2)$

سوال ۱۳.۳۳۰: $f(x,y,z) = \ln xy + \ln yz + \ln xz, \quad N_0(1,1,1)$

سوال ۱۳.۳۳۱: $h(x,y,z) = \ln(x^2+y^2-1) + y + 6z, \quad N_0(1,1,0)$

تبدیلی کا اندازہ

سوال ۱۳.۳۳۲: نقطہ $N(x,y,z)$ کو $N_0(3,4,12)$ سے $3\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ رخ $0.1 = \mathrm{d}s$ اکائیاں دور منتقل کرنے سے $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ کی قیمت میں کتنی تبدیلی رونما ہو گی؟

سوال ۱۳.۳۳۳: نقطہ $N(x,y,z)$ کو مبدا سے $2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 2\boldsymbol{k}$ رخ $0.1 = \mathrm{d}s$ اکائیاں دور منتقل کرنے سے تفاعل $f(x,y,z) = e^x \cos yz$ کی قیمت میں کتنی تبدیلی رونما ہو گی؟

سوال ۱۳.۳۳۴: نقطہ $N(x,y,z)$ کو $N_0(2,-1,0)$ سے $N_1(0,1,2)$ جانب $0.2 = \mathrm{d}s$ اکائیاں دور منتقل کرنے سے تفاعل $g(x,y,z) = x + x\cos z - y\sin z + y$ کی قیمت میں کتنی تبدیلی رونما ہو گی؟

سوال ۱۳.۳۳۵: نقطہ $N(x,y,z)$ کو $N_0(-1,-1,-1)$ سے مبدا کے رخ $0.1 = \mathrm{d}s$ اکائیاں دور منتقل کرنے سے تفاعل $h(x,y,z) = \cos(\pi xy) + xz^2$ کی قیمت میں کتنی تبدیلی رونما ہو گی؟

سطح کا مماسی مستوی اور عمودی خط

سوال ۱۳.۳۳۶ تا سوال ۱۳.۳۴۳ میں نقطہ N_0 پر دیے گئے سطح کا (ا) مماسی مستوی اور (ب) عمودی خط تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۳۳۶: $x^2+y^2+z^2 = 3, \quad N_0(1,1,1)$

سوال ۱۳.۳۳۷: $x^2+y^2-z^2 = 18, \quad N_0(3,5,-4)$

سوال ۱۳.۳۳۸: $2z - x^2 = 0, \quad N_0(2,0,2)$

سوال ۱۳.۳۳۹: $x^2+2xy-y^2+z^2 = 7, \quad N_0(1,-1,3)$

سوال ۱۳.۳۴۰: $\cos\pi x - x^2y + e^{xz} + yz = 4, \quad N_0(0,1,2)$

سوال ۱۳.۳۴۱: $x^2 - xy - y^2 - z = 0, \quad N_0(1,1,-1)$

سوال ۱۳.۳۴۲: $x+y+z = 1, \quad N_0(0,1,0)$

سوال ۱۳.۳۴۳: $x^2+y^2-2xy-x+3y-z = -4, \quad N_0(2,-3,18)$

سوال ۱۳.۳۴۴ تا سوال ۱۳.۳۴۷ میں دیے گئے نقطہ پر سطح کے مماسی مستوی کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۳۴۴: $z = \ln(x^2+y^2), \quad (1,0,0)$

سوال ۱۳.۳۴۵: $z = e^{-(x^2+y^2)}, \quad (0,0,1)$

سوال ۱۳.۳۴۶: $z = \sqrt{y-x}, \quad (1,2,1)$

سوال ۱۳.۳۴۷: $z = 4x^2 + y^2, \quad (1,1,5)$

منحنیات کے مماسی خط

سوال ۱۳.۳۴۸ تا سوال ۱۳.۳۵۱ میں منحنی $f(c,y) = c$ ترسیم کریں۔ ساتھ ہی دیے گئے نقطہ پر ∇f اور مماسی خط ترسیم کریں۔

سوال ۱۳.۳۴۸: $x^2 + y^2 = 4, \quad (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

سوال ۱۳.۳۴۹: $x^2 - y = 1, \quad (\sqrt{2}, 1)$

سوال ۱۳.۳۵۰: $xy = -4, \quad (2, -2)$

سوال ۱۳.۳۵۱: $x^2 - xy + y^2 = 7, \quad (-1, 2)$ (یہ مثال ۳.۵۰ کی منحنی ہے۔)

سوال ۱۳.۳۵۲ تا سوال ۱۳.۳۵۷ میں دیے نقطہ پر سطحوں کی متقاطع منحنی کے مماسی خط کی مقدار معلوم مساوات

سوال ۱۳.۳۵۲: $x + y^2 + 2z = 4, \quad x = 1; \quad (1,1,1)$

سوال ۱۳.۳۵۳: $xyz = 1, \quad x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6; \quad (1,1,1)$

سوال ۱۳.۳۵۴: $x^2 + 2y + 2z = 4, \quad y = 1; \quad (1,1,1/2)$

سوال ۱۳.۳۵۵: $x + y^2 + z = 2, \quad y = 1; \quad (1/2,1,1/2)$

سوال ۱۳.۳۵۶: $x^3 + 3x^2y^2 + y^3 + 4xy - z^2 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 11; \quad (1,1,3)$

سوال ۱۳.۳۵۷: $x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 - z = 0; \quad (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۳.۳۵۸: نقطہ $N(3,2)$ پر کس رخ $f(x,y) = xy + y^2$ کا تفرق صفر ہو گا؟

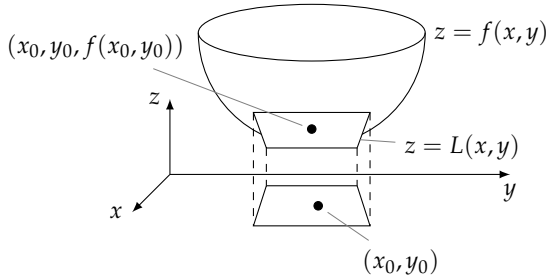
سوال ۱۳.۳۵۹: نقطہ $N(1,1)$ پر کن دو رخ تفاعل $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ کے تفارق صفر ہوں گے؟

سوال ۱۳.۳۶۰: کیا $N(1,2)$ پر ایسا کوئی رخ $\boldsymbol{A}$ ہے جس رخ $f(x,y) = x^2 - 3xy + 4y^2$ کا تفرق 14 کے برابر ہو؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

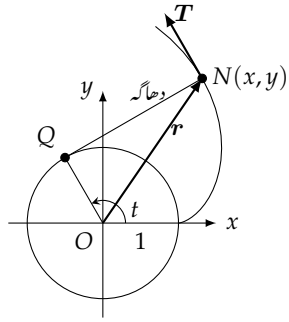
سوال ۱۳.۳۶۱: کیا کسی رخ $\boldsymbol{A}$، نقطہ $N(1,-1,1)$ پر درجہ حرارت $T(x,y,z) = 2xy - yz$ کی شرح تبدیلی $-3\,^\circ\mathrm{C\,m^{-1}}$ ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۳.۳۶۲: نقطہ $N_0(1,2)$ پر $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ رخ $f(x,y)$ کا تفرق $2\sqrt{2}$ اور $-2\boldsymbol{j}$ رخ -3 ہے۔ سمتیہ $-\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ رخ f کا تفرق کیا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۳.۳۶۳: کسی نقطہ پر $f(x,y,z)$ کے تفرق کی قیمت $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ رخ اعظم ہے۔ اس رخ تفرق کی قیمت $2\sqrt{3}$ ہے۔ (ا) اس نقطہ پر ∇f کتنا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) سمتیہ $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ کے رخ اس نقطہ پر f کا تفرق کیا ہو گا؟



شکل ۱۳.۵۳: تفاعل $z = f(x, y)$ اور نقطہ (x_0, y_0) پر اس کی خط بندی $z = L(x, y)$ کی ترسیم۔ خط بند مستوی L، نقطہ (x_0, y_0) کے سیدھا اوپر بلندی پر سطح $z = f(x, y)$ کو مماسی ہوگا۔ یوں آپ جیومیٹریائی طور پر دیکھ سکتے ہیں کہ (x_0, y_0) کی پڑوس میں L اور f کی قیمتیں یکساں ہوں گی۔



شکل ۱۳.۵۲: دائرے کا در پیچیدہ (سوال ۱۳.۳۶۵)

۲۱۸۵۰ سوال ۱۳.۳۶۴: دائرہ پر درجہ حرارت کی تبدیلی

۲۱۸۵۱ فرض کریں مستوی xy میں نقطہ (x, y) پر درجہ حرارت $T(x, y) = x \sin 2y$ ہے۔ ایک ذرہ ایک میٹر رداس کے دائرہ پر گھڑی کے رخ

۲۱۸۵۲ $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ اس دائرے کا مرکز مبدا پر ہے۔ (ا) نقطہ $N(1/2, \sqrt{3}/2)$ پر یہ ذرہ کس شرح حرارت $^\circ\mathrm{C\,m^{-1}}$

۲۱۸۵۳ سے گزرتا ہے؟ (ب) نقطہ $N(1/2, \sqrt{3}/2)$ پر یہ ذرہ کس شرح حرارت $^\circ\mathrm{C\,s^{-1}}$ سے گزرتا ہے؟

۲۱۸۵۴ سوال ۱۳.۳۶۵: دائرہ کے در پیچیدہ پر تبدیلی

۲۱۸۵۵ درج ذیل منحنی کے اکائی مماسی سمتیہ کے رخ تفاعل $f(x, y) = x^2 + y^2$ کا تفرق تلاش کریں (شکل ۱۳.۵۲)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t \cos t)\boldsymbol{j},\ t > 0$$

۲۱۸۵۶ سوال ۱۳.۳۶۶: پیچدار منحنی کے ساتھ ساتھ تبدیلی

۲۱۸۵۷ نقاط $t = -\pi/4, 0, \pi/4$ پر پیچ دار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ کے اکائی مماسی سمتیات کے رخ تفاعل

۲۱۸۵۸ $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ کے تفارق تلاش کریں۔ یہ تفاعل مبدا سے پیچدار منحنی کے نقطہ $N(x, y, z)$ کے فاصلہ کا مربع دیتا

۲۱۸۵۹ ہے۔ اس منحنی پر چلتے ہوئے تفرق t کے لحاظ سے فاصلے کے مربع کی شرح تبدیلی دے گا۔

۲۱۸۶۰ سوال ۱۳.۳۶۷: فضا میں درجہ حرارت $T(x, y, z) = 2x^2 - xyz$ ہے۔ ایک متحرک ذرے کا مقام لمحہ t پر $x = 2t^2$، $y =$

۲۱۸۶۱ $3t$، $z = -t^2$ ہے، جہاں وقت کی اکائی سیکنڈ اور فاصلہ کی اکائی میٹر ہے۔ (ا) نقطہ $N(8, 6, -4)$ پر یہ ذرہ کس شرح تبدیلی $^\circ\mathrm{C\,m^{-1}}$

۲۱۸۶۲ سے گزرتا ہے؟ (ب) نقطہ $N(8, 6, -4)$ پر یہ ذرہ کس شرح تبدیلی $^\circ\mathrm{C\,s^{-1}}$ سے گزرتا ہے؟

۲۱۸۶۳ سوال ۱۳.۳۶۸: دکھائیں کہ مستوی xy میں نقطہ (x_0, y_0) پر سمتیہ $\boldsymbol{N} = A\boldsymbol{i} + B\boldsymbol{j}$ کے عمودی خط کی مساوات درج ذیل ہوگی۔

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

سوال ۱۳.۳۶۹: عمودی منحنیات اور مماسی منحنیات

ایک منحنی اس صورت ایک سطح $f(x,y,z) = c$ کو نقطہ تقاطع پر عمودی ہو گی جب منحنی کا سمتیہ رفتار اس نقطہ پر ∇f کا مستقل مضرب ہو۔ نقطہ تقاطع پر ایک منحنی اس صورت سطح f کی مماسی منحنی ہو گی جب منحنی کا سمتیہ رفتار اس نقطہ پر ∇f کو عمودی ہو۔(ا) دکھائیں کہ منحنی $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{t}\boldsymbol{i} + \sqrt{t}\boldsymbol{j} - \frac{1}{4}(t+3)\boldsymbol{k}$ نقطہ $t = 1$ پر سطح $x^2 + y^2 - z = 3$ کو عمودی ہے۔(ب) دکھائیں کہ منحنی $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{t}\boldsymbol{i} + \sqrt{t}\boldsymbol{j} + (2t-1)\boldsymbol{k}$ نقطہ $t = 1$ پر سطح $x^2 + y^2 - z = 1$ کو مماسی ہے۔

سوال ۱۳.۳۷۰: ہم قد منحنیات اور ڈھلوان ایک دوسرے کے عمودی کیوں ہوتے ہیں۔ دوسرا نقطہ نظر۔

فرض کریں t کی تمام قیمتوں کے لیے قابل تفرق منحنی $x = g(t),\ y = h(t)$ پر قابل تفرق تفاعل $f(x,y)$ کی قیمت مستقل c ہو۔ مساوات $f(g(t),h(t)) = c$ کے دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے تفرق لے کر دکھائیں کہ ہر نقطہ پر منحنی کا مماس اور ∇f آپس میں عمودی ہیں۔

سوال ۱۳.۳۷۱: تفاعل $f(x,y)$ کی خط بندی، مماسی مستوی تخمین ہو گی۔

دکھائیں کہ نقطہ $N_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ پر سطح $z = f(x,y)$ کا مماسی مستوی درج ذیل ہو گا جہاں f قابل تفرق ہے۔

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - (z - f(x_0,y_0)) = 0$$

یعنی

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

یوں N_0 پر مماسی مستوی نقطہ N_0 پر f کی خط بندی کی ترسیم ہو گی (شکل ۱۳.۵۳)۔

سوال ۱۳.۳۷۲: رخی تفارق اور غیر سمتی اجزاء

نقطہ N_0 پر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ کے رخ قابل تفرق تفاعل $f(x,y,z)$ کے تفارق کا $\boldsymbol{u}$ کے رخ $(\nabla f)_{N_0}$ کے غیر سمتی اجزاء کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۳.۳۷۳: رخی تفارق اور جزوی تفارق

فرض کریں کہ $f(x,y,z)$ کے مطلوبہ تفارق موجود ہیں۔ تفارق $D_i f$ ، $D_j f$ اور $D_k f$ کا تفارق f_x ، f_y اور f_z کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۳.۳۷۴: الجبرائی قواعد برائے ڈھلوان

مستقل k اور ڈھلوان $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$ اور $\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\boldsymbol{k}$ دیے گئے ہیں۔ غیر سمتی مساوات

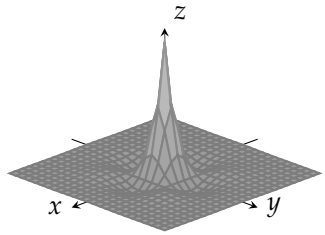
$$\frac{\partial}{\partial x}(kf) = k\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}(f \mp g) = \frac{\partial f}{\partial x} \mp \frac{\partial g}{\partial x},$$
$$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\frac{\partial f}{\partial x} - f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2},$$

وغیرہ، استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قواعد کی تصدیق کریں۔

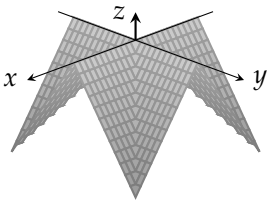
ا. $\nabla(kf) = k\nabla f$ جہاں k مستقل ہے

ب. $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

ج. $\nabla(f-g) = \nabla f - \nabla g$



شکل ۱۳.۵۴: چوکور خطہ $|x| \leq \frac{3\pi}{2}, |y| \leq \frac{3\pi}{2}$ پر تفاعل $z = (\cos x)(\cos y)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$ کی اعظم قیمت 1 اور اقل قیمت تقریباً -0.067 ہے۔



شکل ۱۳.۵۵: چوکور خطہ $|x| \leq a, |y| \leq a$ پر ''تفاعل چھت'' $z = \frac{1}{2}\left(\left||x|-|y|\right|-|x|-|y|\right)$ کی اعظم قیمت 0 اور اقل قیمت $-a$ ہے۔

د. $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$

ھ. $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$

۱۳.۸ انتہائی قیمتیں اور نقاط زین

مستوی xy میں محدود بند خطہ میں استمراری تفاعل کی اس دائرہ کار میں مطلق اعظم اور مطلق اقل قیمتیں پائی جائیں گی (شکل ۱۳.۵۴ اور شکل ۱۳.۵۵)۔ ان قیمتوں کا جاننا اور ان نقطوں کا جاننا، جہاں یہ قیمتیں پائی جاتی ہیں، ضروری ہے۔ ہم جزوی تفارق سے عموماً انہیں جان سکتے ہیں۔

تفرقی پرکھ

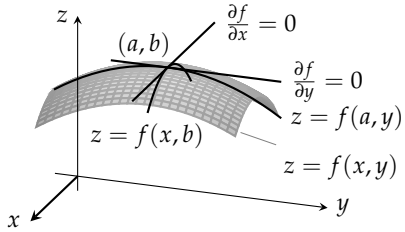
واحد متغیری تفاعل کا مقامی انتہائی نقطہ تلاش کرنے کی خاطر ہم ان نقطوں پر نظر رکھتے ہیں جہاں اس تفاعل کا مماس افقی ہو۔ ان نقطوں پر ہم مقامی مطلق اعظم قیمت، مطلق اقل قیمت یا نقطہ زین تلاش کرتے ہیں۔ دو متغیری تفاعل $z = f(x,y)$ کے لیے ہم ان نقطوں پر نظر رکھتے ہیں جہاں اس تفاعل کا مماسی مستوی افقی ہو۔ ان نقطوں پر ہم مقامی مطلق اعظم قیمت، مطلق اقل قیمت یا نقطہ زین تلاش کرتے ہیں۔ (نقطہ زین پر مزید بات جلد کی جائے گی۔)

تعریفات: فرض کریں خطہ R، جس میں نقطہ (a,b) پایا جاتا ہو، میں تفاعل $f(x,y)$ معین ہے۔ تب

۱. اگر کھلا قرص، جس کا مرکز (a,b) ہو، میں دائرہ کار کے تمام نقاط (x,y) پر $f(a,b) \geq f(x,y)$ ہو تب $f(a,b)$ تفاعل f کا مقامی اعظم قیمت نقطہ ہو گا۔

۲. اگر کھلا قرص، جس کا مرکز (a,b) ہو، میں دائرہ کار کے تمام نقاط (x,y) پر $f(a,b) \leq f(x,y)$ ہو تب $f(a,b)$ تفاعل f کا مقامی اقل قیمت نقطہ ہو گا۔

□



شکل ۵۶.۱۳: تفاعل f کی اعظم قیمت $x = a$ ، $y = b$ پر ہے۔

مقامی اعظم قیمت نقطہ کو سطح $z = f(x,y)$ پر پہاڑی جبکہ مقامی اقل نقطہ کو وادی میں گھاٹی تصور کیا جا سکتا ہے۔ ایسے نقطوں پر مماسی مستوی افقی ہوں گے، بشرطیکہ یہ موجود ہوں۔

واحد متغیر تفاعل کی طرح، مقامی انتہا کی تلاش ایک رتبی تفرقی پرکھ پر منحصر ہو گا۔

مسئلہ ۱۳.۷: **مقامی انتہائی قیمت کا یک رتبی تفرقی پرکھ** اگر تفاعل $f(x,y)$ کے دائرہ کار کی اندرونی نقطہ (a,b) پر مقامی اعظم یا اقل قیمت پائی جاتی ہو، اور اگر تفاعل کے یک رتبی تفارق موجود ہوں، تب $f_x(a,b) = 0$ اور $f_y(a,b) = 0$ ہوں گے۔

ثبوت: فرض کریں تفاعل f کی دائرہ کار کے ایک اندرونی نقطہ (a,b) پر تفاعل کی مقامی اعظم قیمت پائی جاتی ہے۔ تب

۱. مستوی $y = b$ سطح $z = f(x,y)$ کو جس منحنی $z = f(x,b)$ میں قطع کرتا ہے، نقطہ $x = a$ اس منحنی کے دائرہ کار کا اندرونی نقطہ ہو گا (شکل ۵۶.۱۳)۔

۲. نقطہ $x = a$ پر تفاعل $z = f(x,b)$ متغیر x کے لحاظ سے قابل تفرق ہو گا (اور یہ تفرق $f_x(a,b)$ ہو گا)۔

۳. نقطہ $x = a$ پر تفاعل $z = f(x,b)$ کی مقامی اعظم قیمت پائی جائے گی۔

۴. یوں $x = a$ پر $z = f(x,b)$ کا تفرق صفر ہو گا (مسئلہ ۴.۲)۔ چونکہ یہ تفرق $f_x(a,b)$ ہے لہٰذا $f_x(a,b) = 0$ ہو گا۔ نقطہ $x = a$ منحنی $z = f(x,b)$ کے دائرہ کار کا اندرونی نقطہ ہو گا۔

تفاعل $z = f(a,y)$ لیتے ہوئے اسی طرح کی دلیل سے $f_y(a,b) = 0$ ثابت کیا جا سکتا ہے۔

یوں مقامی اعظم قیمت کے لیے مسئلے کا ثابت مکمل ہوتا ہے۔ مقامی اقل قیمت کے لیے مسئلے کا ثبوت آپ سے سوالات میں مانگا گیا ہے۔

□

نقطہ (a,b) پر سطح $z = f(x,y)$ کے مماسی مستوی کی مساوات

$$f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) - (z - f(a,b)) = 0$$

میں $f_x(a,b) = 0$ اور $f_y(a,b) = 0$ پر کرنے سے

$$0 \cdot (x-a) + 0 \cdot (y-b) - z + f(a,b) = 0$$

یعنی

$$z = f(a,b)$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس طرح مسئلہ ۱۳.۷ کہتا ہے کہ مقامی انتہا پر یقیناً افقی مماسی مستوی ہو گا، بشرطیکہ اس نقطہ پر مماسی مستوی موجود ہو۔

واحد متغیر تفاعل کی صورت کی طرح، مسئلہ ۱۳.۷ کہتا ہے کہ تفاعل $f(x,y)$ کی انتہائی قیمت صرف اور صرف درج ذیل نقطوں پر پائی جا سکتی ہے:

۱. اندرونی نقاط جہاں $f_x = f_y = 0$ ہو،

۲. اندرونی نقاط جہاں f_x اور f_y میں سے ایک یا دونوں غیر موجود ہوں،

۳. تفاعل کے دائرہ کار کے سرحدی نقاط۔

تعریف: تفاعل $f(x,y)$ کے دائرہ کار کا وہ اندرونی نقطہ جہاں f_x اور f_y دونوں صفر ہوں یا جہاں f_x اور f_y میں سے ایک یا دونوں غیر موجود ہوں، f کا **نقطہ فاصل**[۴۲] ہو گا۔

□

اس طرح تفاعل $f(x,y)$ کی انتہائی قیمتیں صرف نقاط فاصل اور سرحدی نقاط پر پائی جائیں گی۔ واحد متغیر کے قابل تفرق تفاعل کی طرح، ضروری نہیں کہ ہر نقطہ فاصل پر مقامی انتہا ہو۔ واحد متغیر کے قابل تفرق تفاعل کا نقطہ تصریف ممکن ہے۔ دو متغیرات کے قابل تفرق تفاعل کا نقطہ زین ممکن ہو گا۔

تعریف: نقطہ فاصل (a,b) پر اس صورت قابل تفرق تفاعل $f(x,y)$ کا **نقطہ زین**[۴۳] پایا جائے گا جب ہر کھلے قرص میں، جس کا مرکز (a,b) ہو، ایسے دائرہ کاری نقاط (x,y) پائے جاتے ہوں جن پر $f(x,y) > f(a,b)$ ہو، اور ایسے دائرہ کاری نقاط (x,y) پائے جاتے ہوں جن پر $f(x,y) < f(a,b)$ ہو۔ سطح $z = f(x,y)$ پر مطابقتی نقطہ $(a,b,f(a,b))$ اس سطح کا نقطہ زین کہلاتا ہے (شکل ۱۳.۵۹)۔

□

مثال ۱۳.۵۰: تفاعل $f(x,y) = x^2 + y^2$ کی مقامی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

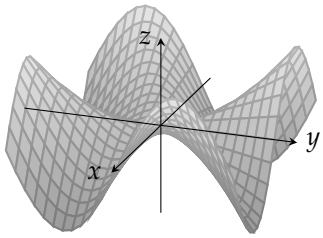
حل

پورا مستوی xy تفاعل f کا دائرہ کار ہے (لہٰذا کوئی سرحدی نقاط نہیں پائے جاتے ہیں) اور جزوی تفارق $f_x = 2x$ اور $f_y = 2y$ ہر نقطہ پر موجود ہوں گے۔ یوں مقامی انتہائی قیمتیں صرف اس صورت ممکن ہوں گی جب

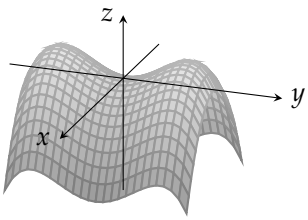
$$f_y = 2y = 0 \quad \text{اور} \quad f_x = 2x = 0$$

---

[۴۲] criticalpoint
[۴۳] saddlepoint



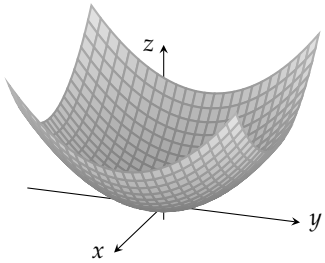
شکل ۱۳.۵۷: $z = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$



شکل ۱۳.۵۸: $z = y^2 - y^4 - x^2$

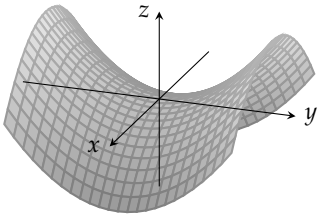
شکل ۱۳.۵۹: مبدا پر نقاط زین۔

$z = x^2 + y^2$



شکل ۱۳.۶۰: تفاعل $f(x,y) = x^2 + y^2$ کی ترسیم قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ ہے۔ اس تفاعل کا ایک فاصل نقطہ پایا جاتا ہے، جو مبدا پر ہے اور جس پر مقامی اقل قیمت 0 پائی جاتی ہے۔

$z = y^2 - x^2$



شکل ۱۳.۶۱: مبدا اس تفاعل کا نقطہ زین ہے۔ اس تفاعل کے کوئی بھی مقامی انتہائی قیمتیں موجود نہیں ہیں۔

ہوں۔ ایسا صرف مبدا پر ممکن ہے جہاں f کی قیمت 0 ہے۔ چونکہ f کبھی بھی منفی نہیں ہو سکتا ہے لہٰذا مبدا پر تفاعل کی اقل قیمت پائی جائے گی (شکل ۱۳.۶۰)۔ □

مثال ۱۳.۵۱: تفاعل $f(x,y) = y^2 - x^2$ کی انتہائی قیمتیں، اگر موجود ہوں، تلاش کریں۔

حل

پورا مستوی xy تفاعل f کا دائرہ کار ہے (لہٰذا کوئی سرحدی نقاط نہیں پائے جاتے ہیں) اور جزوی تفارق $f_x = -2x$ اور $f_y = 2y$ ہر نقطہ پر موجود ہوں گے۔ یوں مقامی انتہا قیمت صرف مبدا پر ممکن ہے۔ البتہ، مثبت محور x پر f کی قیمت $f(x,0) = -x^2 < 0$ اور مثبت محور y پر اس کی قیمت $f(0,y) = y^2 > 0$ ہو گی۔ یوں مستوی xy میں ہر کھلا قرص، جس کا مرکز $(0,0)$ ہو، میں ایسا نقاط پائے جاتے ہیں جہاں f مثبت ہو اور ایسے نقاط بھی پائے جاتے ہیں جہاں f منفی ہو۔ اس طرح مبدا پر مقامی انتہائی قیمت کے بجائے تفاعل کا نقطہ زین پایا جاتا ہے (شکل ۱۳.۶۱)۔ ہم

دیکھتے ہیں کہ اس تفاعل کی کوئی مقامی انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔ □

ہم دائرہ کار R کے اندرونی نقطہ (a,b) پر $f_x = f_y = 0$ جانتے ہوئے یہ نہیں کہہ سکتے ہیں کہ آیا اس نقطہ پر انتہائی قیمت پائی جاتی ہے۔ البتہ اگر R پر f اور اس کے یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفارق استمراری ہوں تب ہم باقی معلومات درج ذیل مسئلہ (جسے حصہ ۱۳.۱۰ میں ثابت کیا گیا ہے) سے دریافت کر سکتے ہیں۔

مسئلہ ۱۳.۸: **مقامی انتہائی قیمت کا دو رتبی تفرقی پرکھ**

فرض کریں کہ ایک قرص میں، جس کا مرکز (a,b) ہے، تفاعل f اور اس کے یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفارق ہر نقطہ پر استمراری ہیں اور $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ ہے۔ اب

۱. اگر (a,b) پر $f_{xx} < 0$ اور $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ہوں تب (a,b) پر f کی **مقامی اعظم قیمت**[۴۴] پائی جائے گی۔

۲. اگر (a,b) پر $f_{xx} > 0$ اور $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ہوں تب (a,b) پر f کی **مقامی اقل قیمت**[۴۵] پائی جائے گی۔

۳. اگر (a,b) پر $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ہو تب (a,b) پر f کا **نقطہ زین**[۴۶] پایا جائے گا۔

۴. اگر (a,b) پر $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ ہو تب یہ پرکھ غیر فیصلہ کن ہو گا اور ہمیں (a,b) پر f کا رویہ کسی دوسرے طریقہ سے جاننا ہو گا۔

ہم $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ کو f کا **ممیز**[۴۷] کہتے ہیں جس کو درج ذیل مقطع کی صورت میں یاد رکھنا زیادہ آسان ہے۔

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

مسئلہ ۱۳.۸ کہتا ہے کہ (a,b) پر مثبت ممیز کی صورت میں سطح تمام اطراف ایک ہی رخ مڑتا ہے: $f_{xx} < 0$ کی صورت میں یہ نیچے کو مڑتا ہے جس کی وجہ سے مقامی اعظم قیمت پائی جاتی ہے، اور $f_{xx} > 0$ کی صورت میں سطح اوپر کو مڑتا ہے جس کی وجہ سے اس نقطہ پر اقل قیمت پائی جاتی ہے۔ اس کے برعکس (a,b) پر منفی ممیز کی صورت میں سطح بعض اطراف اوپر اور اور بعض اطراف نیچے مڑتا ہے جس کی وجہ سے (a,b) پر نقطہ زین پایا جاتا ہے۔

مثال ۱۳.۵۲: درج ذیل تفاعل کے مقامی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

$$f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$$

حل

یہ تفاعل تمام x اور y پر معین اور قابل تفرق ہے اور اس کے دائرہ کار کا کوئی سرحدی نقطہ نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں اس تفاعل کے انتہائی نقاط صرف وہاں ممکن

---

[۴۴] localmaximum
[۴۵] localminimum
[۴۶] saddlepoint
[۴۷] descriminant

۲۱۹۷۱ ہوں گے جہاں f_x اور f_y دونوں بیک وقت صفر ہوں۔ اس سے

$$f_x = y - 2x - 2 = 0, \quad f_y = x - 2y - 2 = 0$$

۲۱۹۷۲ یعنی

$$x = y = -2$$

۲۱۹۷۳ ملتا ہے۔ یوں $(-2, -2)$ وہ واحد نقطہ ہے جہاں f کی انتہائی قیمت ممکن ہے۔ یہ دیکھنے کی خاطر کہ ایسا ہے، ہمیں درج ذیل معلوم کرنا ہو گا۔

$$f_{xx} = -2, \quad f_{yy} = -2, \quad fxy = 1$$

۲۱۹۷۴ نقطہ $(a, b) = (-2, -2)$ پر f کا ممیز

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = (-2)(-2) - (1)^2 = 4 - 1 - 3$$

۲۱۹۷۵ ہو گا۔ یوں

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0 \quad \text{اور} \quad f_{xx} < 0$$

۲۱۹۷۶ کو دیکھ کر ہم کہہ سکتے ہیں کہ $(-2, -2)$ پر f کی مقامی اعظم قیمت ہو گی جو $f(-2, -2) = 8$ کے برابر ہو گی۔ □

۲۱۹۷۷ مثال ۱۳.۵۳: تفاعل $f(x, y) = xy$ کی مقامی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

۲۱۹۷۸ **حل**

۲۱۹۷۹ چونکہ f ہر نقطہ پر قابل تفرق ہے (شکل ۱۳.۶۲) لہٰذا اس کی انتہائی قیمتیں صرف ان نقطوں پر پائی جائیں گی جہاں

$$f_y = x = 0 \quad \text{اور} \quad f_x = y = 0$$

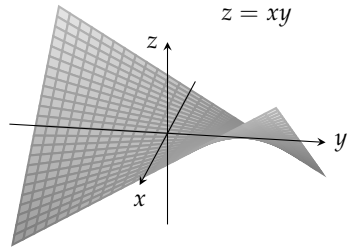
۲۱۹۸۰ ہوں۔ یوں مبدا وہ واحد نقطہ ہے جہاں تفاعل کی انتہائی قیمت ممکن ہے۔ اس نقطہ پر تفاعل کا رویہ جاننے کی خاطر ہم درج ذیل معلوم کرتے ہیں۔

$$f_{xx} = 0, \quad f_{yy} = 0, \quad f_{xy} = 1$$

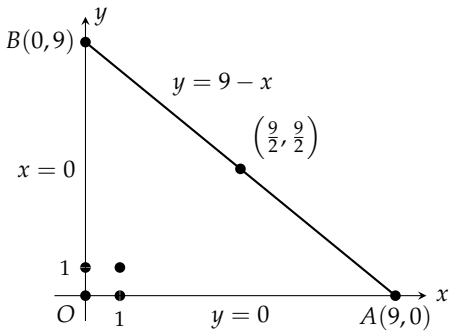
۲۱۹۸۱ یوں ممیز

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -1$$

۲۱۹۸۲ منفی ہے لہٰذا $(0, 0)$ پر نقطہ زین پایا جائے گا۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ تفاعل $f(x, y) = xy$ کی کوئی مقامی انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔ □



شکل ۱۳.۶۲: مبدا پر $z = xy$ کا نقطہ زین پایا جاتا ہے۔



شکل ۱۳.۶۳: تکونی خطہ میں تفاعل کی انتہائی قیمتوں کی تلاش (مثال ۱۳.۵۴)۔

بند اور محدود خطہ میں مطلق اعظم اور اقل نقاط

ہم بند اور محدود خطہ R میں تفاعل $f(x,y)$ کی مطلق انتہائی قیمتوں کی تلاش تین قدموں میں کرتے ہیں۔

قدم 1: خطہ R کی ان اندرونی نقاط کے سلسلہ پر f کی قیمتیں تلاش کریں جہاں f کے مقامی انتہائی قیمت متوقع ہو۔ یہ وہ نقطے ہوں گے جہاں $f_x = f_y = 0$ ہو یا جہاں f_x اور f_y دونوں یا ان میں سے ایک غیر موجود ہو (جو f کا نقطہ زین ہو گا)۔

قدم 2: خطہ R کی ان سرحدی نقاط کے سلسلہ پر f کی قیمتیں تلاش کریں جہاں f کی مقامی انتہائی قیمتیں متوقع ہوں۔ اس قدم کی تفصیل جلد فراہم کی جائے گی۔

قدم 3: نقطوں کے دونوں سلسلوں پر f کی قیمتوں کو دیکھ کر اعظم اور اقل قیمتیں معلوم کریں۔ یہ قیمتیں R پر f کی مطلق اعظم اور مطلق اقل قیمتیں ہوں گی۔ چونکہ مطلق انتہائی قیمتیں مقامی انتہائی قیمتیں بھی ہوتی ہیں لہٰذا مطلق انتہائی قیمتیں پہلے دو قدموں میں کہیں نا کہیں پائی جائیں گی۔

مثال ۱۳.۵۴: ربع اول میں $x = 0$، $y = 0$ اور $y = 9 - x$ لکیروں کے بیچ تکونی خطہ میں درج ذیل تفاعل کی مطلق اعظم اور مطلق اقل قیمت تلاش کریں۔

$$f(x,y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$$

حل

چونکہ f قابل تفرق ہے لہٰذا مطلق انتہائی قیمتیں صرف تکونی خطہ کی سرحدی نقاط پر یا خطہ کے اندر وہاں ممکن ہوں گی جہاں $f_x = f_y = 0$ ہو (شکل ۱۳.۶۳)۔

اندرونی نقاط: ان کے لیے

$$f_x = 2 - 2x = 0, \quad f_y = 2 - 2y = 0$$

سے $(x,y) = (1,1)$ حاصل ہوتا ہے جہاں $f(1,1) = 4$ ہو گا۔ سرحدی نقاط: ہم ایک وقت میں تکون کا ایک ضلع لیتے ہیں۔

۱. قطعہ OA پر $y = 0$ لہٰذا تفاعل

$$f(x,y) = f(x,0) = 2 + 2x - x^2$$

ہو گا جس کو اب ہم واحد متغیر x کا تفاعل تصور کر سکتے ہیں اور جس کا دائرہ کار $0 \leq x \leq 9$ ہو گا۔ جیسا ہم باب ۴ سے جانتے ہیں، اس کی انتہائی قیمتیں آخری سروں پر

$$f(0,0) = 2 \quad \text{جہاں} \quad x = 0$$
$$f(9,0) = 2 + 18 - 81 = -61 \quad \text{جہاں} \quad x = 9$$

اور اندرونی نقاط پر جہاں $f'(x,0) = 2 - 2x = 0$ ہو۔ وہ واحد اندرونی نقطہ جہاں $f'(x,0) = 0$ ہو $x = 1$ ہے جہاں $f(x,0) = f(1,0) = 3$ ہے۔

۲. قطعہ OB پر $x = 0$ لہٰذا

$$f(x,y) = f(0,y) = 2 + 2y - y^2$$

ہو گا۔ ہم x اور y میں f کی تشاکلی سے، مذکورہ بالا کی بنا، توقع کرتے ہیں کہ یہ نقاط درج ذیل ہوں گے۔

$$f(0,0) = 2, \quad f(0,9) = -61, \quad f(0,1) = 3$$

۳. ہم AB کے آخری سروں پر f کی قیمت پر غور کر چکے ہیں لہٰذا ہمیں صرف AB کی اندرونی نقطوں پر غور کرنا ہو گا۔ اب $y = 9 - x$ لیتے ہوئے

$$f(x,y) = 2 + 2x + 2(9-x) - x^2 - (9-x)^2 = -61 + 18x - 2x^2$$

ہو گا۔ یوں $f'(x, 9-x) = 18 - 4x = 0$ سے $x = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$ حاصل ہو گا جس پر

$$f(x,y) = f(\frac{9}{2}, \frac{9}{2} = -\frac{41}{2}) \quad \text{اور} \quad y = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

ہوں گے۔

خلاصہ: ہم تمام متوقع قیمتوں کے سلسلہ $4, 2, -61, 3, -\frac{41}{2}$ کو دیکھ کر اعظم قیمت 4 معلوم کرتے ہیں جو نقطہ $(1,1)$ پر پائی جاتی ہے۔ اسی طرح اقل قیمت -61 نقاط (0.9) اور $(9,0)$ پر پائی جاتی ہے۔ □

نتیجہ

اگرچہ مسئلہ ۱۳.۸ طاقتور ہے لیکن اس کی کمزوری کو نہ بھولیں۔ یہ تفاعل کے دائرہ کار کے سرحدی نقطوں پر کارآمد نہیں ہوتا ہے جہاں تفاعل کے انتہائی قیمتیں اور غیر صفر تفارق پائے جا سکتے ہیں۔ ساتھ ہی اگر f_x یا f_y غیر موجود ہو تب بھی یہ مسئلہ کارآمد نہیں ہو گا۔

اعظم، اقل پرکھ کا خلاصہ

تفاعل $f(x,y)$ کی انتہائی قیمتیں صرف درج ذیل نقطوں پر ممکن ہیں۔

۱. تفاعل f کے **سرحدی نقاط**،

۲. نقاط فاصل (اندرونی نقاط جہاں $f_x = f_y = 0$ ہو یا f_x اور یا f_y غیر موجود ہو)

اگر ایک قرص میں، جس کا مرکز (a,b) ہو، ہر نقطہ پر f کے یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفارق استمراری ہوں اور $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ ہو، آپ $f(a,b)$ کی جماعت بندی **دو رتبی تفرقی پرکھ** سے کر پائیں گے:

۱. اگر (a,b) پر $f_{xx} < 0$ اور $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ہوں تب **مقامی اعظم قیمت** پائی جائے گی۔

۲. اگر (a,b) پر $f_{xx} > 0$ اور $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ہوں تب **مقامی اقل قیمت** پائی جائے گی۔

۳. اگر (a,b) پر $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ ہو تب **نقطہ زین** پایا جائے گا۔

۴. اگر (a,b) پر $f_{xx}fyy - f_{xy}^2 = 0$ ہو پرکھ **غیر فیصلہ کن** ہو گا۔

سوالات

مقامی انتہا کی تلاش

سوال ۱۳.۳۷۵ تا سوال ۱۳.۴۰۴ میں تفاعل کے تمام مقامی اعظم قیمت نقاط، مقامی اقل قیمت نقاط اور نقاط زین تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۳۷۵: $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + 3x - 3y + 4$

سوال ۱۳.۳۷۶: $f(x,y) = x^2 + 3xy + 3y^2 - 6x + 3y - 6$

سوال ۱۳.۳۷۷: $f(x,y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x + 4y - 4$

سوال ۱۳.۳۷۸: $f(x,y) = 2xy - 5x^2 - 2y^2 + 4x - 4$

سوال ۱۳.۳۷۹: $f(x,y) = x^2 + xy + 3x + 2y + 5$

سوال ۱۳.۳۸۰: $f(x,y) = y^2 + xy - 2x - 2y + 2$

سوال ۱۳.۳۸۱: $f(x,y) = 5xy - 7x^2 + 3x - 6y + 2$

سوال ۱۳.۳۸۲: $f(x,y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4$

سوال ۱۳.۳۸۳: $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^2 + 6y + 2$

سوال ۱۳.۳۸۴: $f(x,y) = 3x^2 + 6xy + 7y^2 - 2x + 4y$

سوال ۱۳.۳۸۵: $f(x,y) = 2x^2 + 3xy + 4y^2 - 5x + 2y$

سوال ۱۳.۳۸۶: $f(x,y) = 4x^2 - 6xy + 5y^2 - 20x + 26y$

سوال ۱۳.۳۸۷: $f(x,y) = x^2 - y^2 - 2x + 4y + 6$

سوال ۱۳.۳۸۸: $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 2y + 1$

سوال ۱۳.۳۸۹: $f(x,y) = x^2 + 2xy$

سوال ۱۳.۳۹۰: $f(x,y) = 3 + 2x + 2y - 2x^2 - 2xy - y^2$

سوال ۱۳.۳۹۱: $f(x,y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$

سوال ۱۳.۳۹۲: $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$

سوال ۱۳.۳۹۳: $f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$

سوال ۱۳.۳۹۴: $f(x,y) = 3y^2 - 2y^3 - 3x^2 + 6xy$

سوال ۱۳.۳۹۵: $f(x,y) = 9x^3 + \frac{y^3}{3} - 4xy$

سوال ۱۳.۳۹۶: $f(x,y) = 8x^3 + y^3 + 6xy$

سوال ۱۳.۳۹۷: $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$

سوال ۱۳.۳۹۸: $f(x,y) = 2x^3 + 2y^3 - 9x^2 + 3y^2 - 12y$

سوال ۱۳.۳۹۹: $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

سوال ۱۳.۴۰۰: $f(x,y) = x^4 + y^4 + 4xy$

سوال ۱۳.۴۰۱: $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-1}$

سوال ۱۳.۴۰۲: $f(x,y) = \frac{1}{x} + xy + \frac{1}{y}$

سوال ۱۳.۴۰۳: $f(x,y) = y \sin x$

سوال ۱۳.۴۰۴: $f(x,y) = e^{2x} \cos y$

مطلق انتہا کی تلاش

سوال ۱۳.۴۰۵ تا سوال ۱۳.۴۱۲ میں تفاعل کی مطلق انتہا دیے گئے خطہ میں تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۰۵: تفاعل $f(x,y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ ؛ ربع اول میں بند تکون، جس کے سرحد $x = 0$ ، $y = 2$ اور $y = 2x$ ہیں۔

سوال ۱۳.۴۰۶: تفاعل $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ ؛ ربع اول میں بند تکون، جس کے اطراف $x = 0$ ، $y = 4$ اور $y = x$ ہیں۔

سوال ۱۳.۴۰۷: تفاعل $f(x,y) = x^2 + y^2$ ؛ ربع اول میں بند تکون، جس کے اطراف $x = 0$ ، $y = 0$ اور $y + 2x = 2$ ہیں۔

سوال ۱۳.۴۰۸: تفاعل $T(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$ ؛ مستطیل پٹی $0 \le x \le 5,\ -3 \le y \le 3$ پر۔

سوال ۱۳.۴۰۹: تفاعل $T(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$ ؛ مستطیل $0 \le x \le 5,\ -3 \le y \le 0$ پر۔

سوال ۱۳.۴۱۰: تفاعل $f(x,y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2$; مستطیل $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ پر۔

سوال ۱۳.۴۱۱: تفاعل $f(x,y) = (4x - x^2)\cos y$; مستطیل $1 \le x \le 3,\ -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}$ پر۔

سوال ۱۳.۴۱۲: تفاعل $f(x,y) = 4x - 8xy + 2y + 1$، اضلاع $x = 0$ ، $y = 0$ اور $x + y = 1$ میں بند تکونی خطہ میں۔

سوال ۱۳.۴۱۳: دو ایسے اعداد a اور b، جہاں $a \le b$ ہو، تلاش کریں تاکہ درج ذیل کی قیمت اعظم ہو۔

$$\int_a^b (6 - x - x^2)\,\mathrm{d}x$$

سوال ۱۳.۴۱۴: دو ایسے اعداد a اور b، جہاں $a \le b$ ہو، تلاش کریں تاکہ درج ذیل کی قیمت اعظم ہو۔

$$\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{1/3}\,\mathrm{d}x$$

سوال ۱۳.۴۱۵: درجہ حرارت

ایک دائری پٹی $x^2 + y^2 \le 1$ اور اس کی سرحد $x^2 + y^2 = 1$ کو یوں گرم کیا جاتا ہے کہ نقطہ (x,y) پر درجہ حرارت $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$ ہو۔ اس پٹی پر اعظم اور اقل درجہ حرارت تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۱۶: کھلا ربع اول $x > 0,\ y > 0$ میں $f(x,y) = xy + 2x - \ln x^2 y$ کا نقطہ فاصل تلاش کریں اور دکھائیں کہ اس نقطہ پر تفاعل کی قیمت اقل ہو گی۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۳.۴۱۷: درج ذیل معلومات استعمال کرتے ہوئے اعظم قیمت نقاط، اقل قیمت نقاط اور نقاط زین، اگر موجود ہوں، تلاش کریں۔

ا. $f_x = 2x - 4y, \quad f_y = 2y - 4x$

ب. $f_x = 2x - 2, \quad f_y = 2y - 4$

ج. $f_x = 9x^2 - 9, \quad f_y = 2y + 4$

ہر جواب کی وجہ بیان کریں۔

سوال ۱۳.۴۱۸: درج ذیل تفاعل کے لیے مبدا پر ممیز $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ صفر ہے لہٰذا دو رتبی تفرقی پرکھ غیر فیصلہ کن ہو گا۔ مبدا پر سطح $z = f(x,y)$ کی ذہنی تصویر کشی کرتے ہوئے دریافت کریں کہ مبدا پر اعظم قیمت نقطہ، اقل قیمت نقطہ یا نقطہ زین پایا جائے گا۔ ہر جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. $f(x,y) = x^2y^2$

ب. $f(x,y) = 1 - x^2y^2$

ج. $f(x,y) = xy^2$

د. $f(x,y) = x^3y^2$

ھ. $f(x,y) = x^3y^3$

و. $f(x,y) = x^4y^4$

سوال ۱۳.۴۱۹: دکھائیں کہ k کی ہر قیمت کے لیے $(0,0)$ تفاعل $f(x,y) = x^2 + kxy + y^2$ کا نقطہ فاصل ہو گا۔ (اشارہ: دو صورتوں پر غور کریں: $k = 0$ اور $k \neq 0$)

سوال ۱۳.۴۲۰: مستقل k کی کن قیمتوں کے لیے دور تبی تفرقی پرکھ ضمانت دیتا ہے کہ $(0,0)$ پر درج ذیل تفاعل کا (ا) نقطہ زین (ب) مقامی اقل قیمت کا نقطہ پایا جائے گا؟

$$f(x,y) = x^2 + kxy + y^2$$

مستقل k کی کن قیمتوں کے لیے دور تبی تفرقی پرکھ غیر فیصلہ کن ہو گا؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۳.۴۲۱: (ا) کیا $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ ہوتے ہوئے ہر صورت (a,b) پر f کا مقامی زیادہ سے زیادہ قیمت نقطہ یا اقل قیمت نقطہ پایا جائے گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ (ب) اگر ایک قرص میں، جس کا مرکز (a,b) ہو، ہر نقطہ پر f اور اس کے یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفارق استمراری ہوں، اور $f_{xx}(a,b)$ اور $f_{yy}(a,b)$ کی علامتیں ایک دوسرے سے مختلف ہوں تب کیا f کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۳.۴۲۲: نقطہ (a,b) پر f کا مقامی اعظم قیمت نقطہ ہونے کی صورت میں مسئلہ ۱۳.۷ کا دیا گیا ثبوت استعمال کرتے ہوئے اس مسئلہ کو (a,b) پر مقامی اقل قیمت نقطہ ہونے کی صورت کے لیے ثابت کریں۔

سوال ۱۳.۴۲۳: مستوی $x + 2y + 3z = 0$ سے زیادہ بلندی پر $z = 10 - x^2 - y^2$ کی ترسیم کے تمام نقاط میں وہ نقطہ تلاش کریں جو اس مستوی سے دور ترین ہو۔

سوال ۱۳.۴۲۴: مستوی $x + 2y - z = 0$ سے $z = x^2 + y^2 + 10$ کی ترسیم کا قریب ترین نقطہ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۲۵: بند ربع اول $x \geq 0, y \geq 0$ میں تفاعل $f(x,y) = x + y$ کی کوئی مطلق اعظم قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔ کیا اس حقیقت میں اور کتاب میں مطلق انتہا کی تلاش پر کی گئی گفتگو میں تضاد پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۳.۴۲۶: مربع $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ میں تفاعل $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy - x - y + 1$ پر غور کریں۔

ا. دکھائیں کہ اس مربع میں خطی قطعہ $2x + 2y = 1$ پر f کی مطلق اقل قیمت پائی جاتی ہے۔ اس اقل قیمت کو تلاش کریں۔

ب. مربع پر f کی مطلق اعظم قیمت تلاش کریں۔

مقدار معلوم منحنیات پر انتہائی قیمتیں

منحنی $x = x(t), y = y(t)$ پر تفاعل $f(x,y)$ کی انتہائی قیمتیں تلاش کرنے کی خاطر ہم f کو واحد متغیر t کا تفاعل تصور کرتے ہوئے زنجیری قاعدہ سے $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ معلوم کر کے صفر کے برابر رکھتے ہیں۔ کسی بھی واحد متغیر تفاعل کی طرح، انتہائی قیمتوں کو درج ذیل نقطوں پر تلاش کیا جاتا ہے۔

ا. نقطہ فاصل پر (جہاں $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ صفر ہو یا غیر موجود ہو)، اور

ب. مقدار معلوم دائرہ کار کے آخری سروں پر۔

سوال ۱۳.۴۲۷ تا سوال ۱۳.۴۳۰ میں تفاعل کی مطلق اعظم قیمت اور مطلق اقل قیمتیں دی گئی منحنیات پر دریافت کریں۔

۲۲۱۲۱ سوال ۱۳.۴۲۷: تفاعل:

۲۲۱۲۲ ا. $f(x,y) = x + y$ ۲۲۱۲۳ ب. $g(x,y) = xy$ ۲۲۱۲۴ ج. $h(x,y) = 2x^2 + y^2$

۲۲۱۲۵ منحنیات:

۲۲۱۲۶ ا. $x^2 + y^2 = 4,\ y \geq 0$ ۲۲۱۲۷ ب. $x^2 + y^2 = 4,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

۲۲۱۲۸ مقدار معلوم مساوات $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t$ استعمال کریں۔

۲۲۱۲۹ سوال ۱۳.۴۲۸: تفاعل:

۲۲۱۳۰ ا. $f(x,y) = 2x + 3y$ ۲۲۱۳۱ ب. $g(x,y) = xy$ ۲۲۱۳۲ ج. $h(x,y) = x^2 + 3y^2$

۲۲۱۳۳ منحنیات:

۲۲۱۳۴ ا. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ y \geq 0$ ۲۲۱۳۵ ب. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

۲۲۱۳۶ مقدار معلوم مساوات $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t$ استعمال کریں۔

۲۲۱۳۷ سوال ۱۳.۴۲۹: تفاعل: $f(x,y) = xy$

۲۲۱۳۸ منحنیات:

۲۲۱۳۹ ا. $x = 2t,\ y = t + 1$ ۲۲۱۴۱ ج. $x = 2t,\ y = t + 1,\ 0 \leq t \leq 1$

۲۲۱۴۰ ب. $x = 2t,\ y = t + 1,\ -1 \leq t \leq 0$

۲۲۱۴۲ سوال ۱۳.۴۳۰: تفاعل:

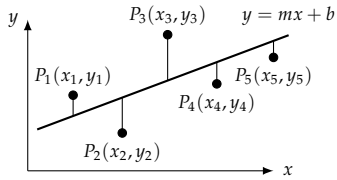
۲۲۱۴۳ ا. $f(x,y) = x^2 + y^2$ ۲۲۱۴۴ ب. $g(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

۲۲۱۴۵ منحنیات:

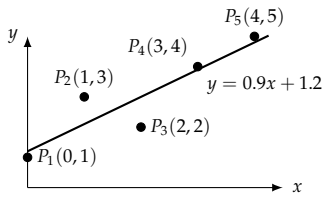
۲۲۱۴۶ ا. $x = t,\ y = 2 - 2t$ ۲۲۱۴۷ ب. $x = t,\ y = 2 - 2t,\ 0 \leq t \leq 1$

۲۲۱۴۸ **کمتر مربعے اور خطوط رجعت**

۲۲۱۴۹ اعدادی نقاط مواد $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$ پر سیدھا خط $y = mx + b$ بٹھاتے ہوئے ہم نقطوں سے خط تک افقی



شکل ۱۳.۶۴: غیر ہم خطی نقاط پر سیدھا خط بٹھانے کے لیے ہم وہ لکیر منتخب کرتے ہیں جس میں انتصابی فرق کے مربع کا مجموعہ اقل ہو۔



شکل ۱۳.۶۵: کمتر مربع خط۔

۲۲۱۵۰ فاصلوں کے مربع کے مجموعہ کو کم سے کم رکھتے ہیں (شکل ۱۳.۶۴)۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں m اور b کی وہ قیمتیں تلاش کرنی ہوں گی جو درج ذیل کی قیمت
۲۲۱۵۱ کم سے کم کرتے ہوں۔

$$w = (mx_1 + b - y_1)^2 + \cdots + (mx_n + b - y_n)^2 \tag{۱}$$

۲۲۱۵۲ یک رتبی اور دو رتبی تفرقی پرکھ سے m اور b کی مطلوبہ قیمتیں

$$m = \frac{(\sum x_k)(\sum y_k) - n\sum x_k y_k}{(\sum x_k)^2 - n\sum x_k^2} \tag{۲}$$

$$b = \frac{1}{n}(\sum y_k - m\sum x_k) \tag{۳}$$

۲۲۱۵۳ حاصل ہوتی ہیں جہاں تمام مجموعے $k = 1$ تا $k = n$ لیے جاتے ہیں۔ عموماً کیلکولیٹر میں یہ کلیات دیے گئے ہوں گے۔

۲۲۱۵۴ وہ خط $y = mx + b$ جس میں m اور b کی مذکورہ بالا قیمتیں استعمال کی گئی ہوں زیر غور مواد کا خط رجعت[۴۸] کہلاتا ہے۔ کمتر مربعی خط کی
۲۲۱۵۵ مدد سے (ا) آپ مواد کو ایک سادہ مساوات سے ظاہر کر پاتے ہیں، (ب) متغیر x کی دیگر قیمتوں کے لیے y کی قیمت کی پیش گوئی کر پاتے ہیں، (ج) اور مواد پر
۲۲۱۵۶ تحلیلی غور کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر نقاط $(0, 1)$ ، $(1, 3)$ ، $(2, 2)$ ، $(3, 4)$ ، $(4, 5)$ کو جدول

۲۲۱۵۷

$x_k y_k$	x_k^2	y_k	x_k	k
0	0	1	0	1
3	1	3	1	2
4	4	2	2	3
12	9	4	3	4
20	16	5	4	5
39	30	15	10	$\sum$

[۴۸] regressionline

(ا) لوسن کی پیداوار

پانی کی گہرائی x, [cm]	فی ایکڑ پیداوار y, [kg]
30	5270
45	5680
60	6250
75	7210
90	8200
100	8710

(ب) مرتبخ پر گڑھے

قطر D [km]	جماعتی وقفہ کی بایاں قیمت کے لیے $\frac{1}{D^2}$	تعدد F
$32-45$	0.001	51
$45-64$	0.0005	22
$64-90$	0.00024	14
$90-128$	0.000123	4

۲۲۱۵۸ کی صورت میں لکھ کر

$$m = \frac{(10)(15)-5(39)}{(10)^2-5(30)} = 0.9 \qquad \text{مساوات ۲}$$

$$b = \frac{1}{5}(15-(0.9)(10)) = 1.2 \qquad \text{مساوات ۳}$$

۲۲۱۵۹ حاصل ہوں گے۔ یوں ان نقاطی مواد کا خط رجعت $y = 0.9x + 1.2$ ہو گا (شکل ۱۳.۶۵)۔

۲۲۱۶۰ سوال ۱۳.۴۳۱ تا سوال ۱۳.۴۳۴ میں مساوات ۲ اور مساوات ۳ استعمال کرتے ہوئے ہر نقاطی مواد کے لیے خط رجعت تلاش کریں۔ یوں حاصل خطی مساوات
۲۲۱۶۱ استعمال کرتے ہوئے $x = 4$ کے لیے y کی قیمت کی پیش گوئی کریں۔

۲۲۱۶۲ سوال ۱۳.۴۳۱: $(-1,2), (0,1), (3,-4)$

۲۲۱۶۳ سوال ۱۳.۴۳۲: $(-2,0), (0,2), (2,3)$

۲۲۱۶۴ سوال ۱۳.۴۳۳: $(0,0), (1,2), (2,3)$

۲۲۱۶۵ سوال ۱۳.۴۳۴: $(0,1), (2,2), (3,2)$

۲۲۱۶۶ سوال ۱۳.۴۳۵: جدول ۱.۱۳ میں پانی کی مقدار (گہرائی) بالمقابل لوسن کی اوسط پیداوار (کلو گرام فی ایکڑ) دی گئی ہے۔ اس کی خطی مساوات تلاش کریں۔
۲۲۱۶۷ اس مواد کو اور خطی مساوات کو ترسیم کریں۔

۲۲۱۶۸ سوال ۱۳.۴۳۶: مرتبخ پر گڑھے

۲۲۱۶۹ ایک نظریہ کہتا ہے کہ گڑھوں کی تعدد قطر کے مربع کی بالعکس متناسب ہو گی۔ مرتبخ کی سطح کی تصویر سے جدول ۱.۱۳ب میں دی گئی معلومات حاصل کی جاتی
۲۲۱۷۰ ہے۔ اس مواد پر $F = m(1/D^2) + b$ طرز کی لکیر بٹھائیں۔ مواد اور اس لکیر کو ترسیم کریں۔

۲۲۱۷۱

۲۲۱۷۲ کمپیوٹر کا استعمال

۲۲۱۷۳ سوال ۱۳.۴۳۷ تا سوال ۱۳.۴۴۲ میں تفاعل پر غور کرتے ہوئے ان کے مقامی انتہائی نقاط تلاش کرنا مقصود ہے۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام
۲۲۱۷۴ کریں۔

ا. دیے گئے مستطیل پر تفاعل ترسیم کریں۔

ب. مستطیل میں چند ہم قد منحنیات ترسیم کریں۔

ج. تفاعل کا یک رتبی تفرق لے کر کمپیوٹر کی مدد سے اس مساوات کو حل کر کے نقاط فاصل تلاش کریں۔ نقاط فاصل اور ہم قد منحنیات کے بیچ کیا تعلق نظر آتا ہے؟ کون سے نقاط فاصل پر نقاط زین پائے جاتے ہیں؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

د. تفاعل کے دو رتبی تفارق تلاش کر کے ممیز $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ معلوم کریں۔

ھ. اعظم اور کم سے کم پر کھ استعمال کرتے ہوئے جزو-ج کے نقاط فاصل کی جماعت بندی کریں۔ کیا یہ معلومات آپ کی جزو-ج میں دی گئی وجوہات سے مطابقت رکھتی ہے۔

سوال ۱۳.۴۳۷: $f(x,y) = x^2 + y^3 - 3xy, \quad -5 \le x \le 5, -5 \le y \le 5$

سوال ۱۳.۴۳۸: $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + y^2, \quad -2 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le 2$

سوال ۱۳.۴۳۹: $f(x,y) = x^4 + y^2 - 8x^2 - 6y + 16, \quad -3 \le x \le 3, \quad -6 \le y \le 6$

سوال ۱۳.۴۴۰: $f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 3, \quad -\frac{3}{2} \le x \le \frac{3}{2}, \quad -\frac{3}{2} \le y \le \frac{3}{2}$

سوال ۱۳.۴۴۱: $f(x,y) = 5x^6 + 18x^5 - 30x^4 + 30xy^2 - 120x^3,$
$-4 \le x \le 3, \quad -2 \le y \le 2$

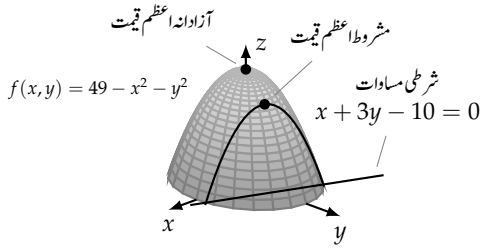
سوال ۱۳.۴۴۲:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^5 \ln(x^2+y^2) & (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
$$-2 \le x \le 2, \quad -2 \le y \le y$$

۱۳.۹ لیگرینج ضاربین

جیسا ہم حصہ ۱۳.۸ میں دیکھ چکے، بعض اوقات ہمیں تفاعل کی انتہائی قیمت ایسی صورت درکار ہو گی جب اس کے دائرہ کار کو مستوی کے کسی مخصوص ذیلی حصہ، مثلاً قرص یا بند تکونی خطہ، پر رہنے کا پابند بنایا گیا ہو۔ لیکن جیسا شکل ۱۳.۶۶ میں دکھایا گیا ہے، تفاعل پر دیگر پابندیاں بھی عائد کی جا سکتی ہیں۔

اس حصہ میں ہم پابند تفاعل کی انتہائی قیمتیں تلاش کرنے کے ایک طاقتور ترکیب پر غور کریں گے جس کو لیگرینج ضاربین کی ترکیب کہتے ہیں۔ جیومیٹری کے انتہا قیمت مسائل حل کرتے ہوئے یوسف لوئی لیگرینج نے ۱۷۵۵ء میں اس ترکیب کو دریافت کیا۔ موجودہ دور میں اس کا استعمال اقتصادیات، انجینئری (جہاں کثیر المراحل راکٹ کی تخلیق میں اسے استعمال کیا جاتا ہے) اور ریاضیات میں پایا جاتا ہے۔



شکل ۱۳.۶۶: تفاعل $f(x,y) = 49 - x^2 - y^2$ کی شرطی مساوات $x + 3y - 10 = 0$ کے تحت اعظم قیمت۔

۲۲۱۹۷ **تفاعل کی مشروط اعظم قیمت نقاط اور اقل قیمت نقاط**

۲۲۱۹۸ مثال ۱۳.۵۵: مبدا کے قریب ترین نقطہ $N(x,y,z)$ مستوی $2x + y - z = 0$ پر تلاش کریں۔

۲۲۱۹۹ **حل**

۲۲۲۰۰ ہمیں تفاعل

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{ON}\right| &= \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\end{aligned}$$

۲۲۲۰۱ کی اقل قیمت درج ذیل شرط کے تحت تلاش کرنے کو کہا گیا ہے۔

$$2x + y - z - 5 = 0$$

۲۲۲۰۲ چونکہ جب بھی تفاعل

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

۲۲۲۰۳ کی قیمت کم سے کم ہو، $\overrightarrow{ON}$ کی قیمت بھی کم سے کم ہوتی ہے لہٰذا ہم $2x + y - z - 5 = 0$ کی شرط کو مطمئن کرتے ہوئے $f(x,y,z)$

۲۲۲۰۴ کی اقل قیمت تلاش کر کے اس مسئلہ کو حل کر سکتے ہیں۔ اس مساوات میں x اور y کو غیر تابع متغیرات تصور کرتے ہوئے z کو

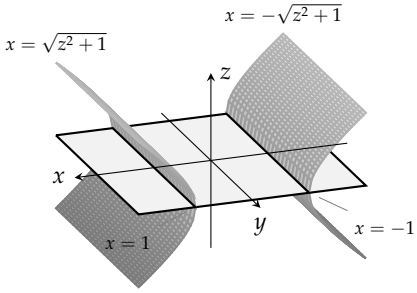
$$z = 2x + y - 5$$

۲۲۲۰۵ لکھ کر ہمیں وہ نقطہ (x,y) تلاش کرنا ہوگا جس پر تفاعل

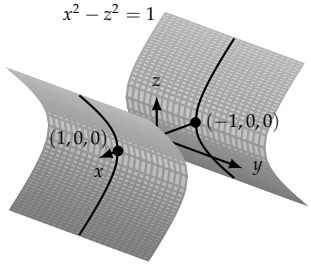
$$h(x,y) = f(x,y,2x+y-5) = x^2 + y^2 + (2x+y-5)^2$$

۲۲۲۰۶ کی قیمت کم سے کم ہو۔ چونکہ پورا مستوی xy h کا دائرہ کار ہے لہٰذا ایک رتبی تفرقی پرکھ کے تحت h کی اقل قیمت ان نقاط پر پائی جائے گی جن پر

$$h_x = 2x + 2(2x+y-5)(2) = 0, \quad h_y = 2y + 2(2x+y-5) = 0$$



(ب) قطع زائد $x^2 - z^2 = 1$ پر مستوی xy میں نقطہ (x, y, z) کے پہلے دو محدد کے انتخاب میں مستوی xy کی پٹی $-1 < x < 1$ شامل نہیں ہو گی۔



(ا) قطع زائد بیلن۔

شکل ۱۳.۶۷: مشروط انتہائی قیمت۔

۲۲۲۰۷ ہو۔ ان سے

$$10x + 4y = 20, \quad 4x + 4y = 10$$

۲۲۲۰۸ یعنی

$$x = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{5}{6}$$

۲۲۲۰۹ حاصل ہو گا۔ ہم دور تبی تفرقی پرکھ کے ساتھ ساتھ جیومیٹریائی دلیل دیتے ہوئے دکھا سکتے ہیں کہ ان قیمتوں پر h کی قیمت کم سے کم ہو گی۔ مستوی $z = 2x + y - 5$ پر مطابقتی z محدد

۲۲۲۱۰

$$z = 2\left(\frac{5}{3}\right) + \frac{5}{6} - 5 = -\frac{5}{6}$$

۲۲۲۱۱ ہو گا۔ یوں مطلوبہ نقطہ

$$N\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\right)$$

۲۲۲۱۲ ہو گا جو مبدا سے $\frac{5}{\sqrt{6}} \approx 2.04$ فاصلہ پر ہو گا۔ □

۲۲۲۱۳ ہم نے مثال ۱۳.۵۵ میں پابندی کے شرط کی قیمتیں پر کرتے ہوئے اقل قیمت نقطہ تلاش کیا۔ یہ ترکیب بعض اوقات ہمیں آسانی سے جواب نہیں دے

۲۲۲۱۴ پاتی۔ یہی وجہ ہے کہ اس حصہ میں ایک نئی ترکیب متعارف کی جائے گی۔

۲۲۲۱۵ مثال ۱۳.۵۶: درج ذیل قطع زائد بیلن پر مبدا کا قریب ترین نقطہ تلاش کریں۔

$$x^2 - z^2 - 1 = 0$$

پہلا حل

بیلن کو شکل ۱۳.۶۷-ا میں دکھایا گیا ہے۔ ہمیں اس بیلن پر مبدا کے قریب تر نقاط تلاش کرنے ہیں۔ یہ وہ نقاط ہوں گے جو $x^2 - z^2 - 1 = 0$ کو مطمئن کرتے ہوئے تفاعل

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{فاصلے کا مربع}$$

کی قیمت کو کم سے کم بناتے ہوں۔ اگر ہم شرطی مساوات میں x اور y کو غیر تابع متغیرات تصور کریں تب

$$z^2 = x^2 - 1$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں بیلن پر نقاط کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$h(x, y) = x^2 + y^2 + (x^2 - 1) = 2x^2 + y^2 - 1$$

بیلن پر ان نقاط کے محدد جو f کی قیمت کو کم سے کم بناتے ہوں تلاش کرنے کی خاطر ہمیں مستوی xy میں وہ نقاط معلوم کرنے ہوں گے جن پر h کی قیمت کم سے کم ہو۔ ہم جانتے ہیں کہ h کی انتہائی قیمتیں صرف ان نقاط پر ممکن ہیں جن پر

$$h_x = 4x = 0, \quad h_y = 2y = 0$$

ہو، یعنی، نقطہ $(0, 0)$ لیکن بیلن پر ایسا کوئی نقطہ نہیں پایا جاتا ہے جہاں x اور y بیکوقت صفر ہوں۔ ایسا کیوں کر ہوا؟

کیا ہوا کہ یک رتبی تفرقی پرکھ سے ہم نے (درست طور پر) h کے دائرہ کار میں وہ نقطہ معلوم کیا جس پر h کی قیمت کم سے کم تھی جبکہ ہمیں بیلن پر وہ نقطہ درکار تھا جس پر h کی قیمت کم سے کم ہو۔ اگرچہ h کا دائرہ کار مکمل مستوی xy پر مشتمل ہے، ہمیں مستوی xy میں بیلن کے سایہ کو دائرہ کار لیتے ہوئے نقطہ (x, y, z) کے پہلے دو محدد تلاش کرنے تھے۔ بیلن کے سایہ میں خطوط $x = -1$ اور $x = 1$ کے بیچ خطہ شامل نہیں ہو گا (شکل ۱۳.۶۷-ب)۔

ہم (x اور y کے بجائے) y اور z کو غیر تابع متغیرات تصور کرتے ہوئے اس پریشانی سے نجات حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں

$$x^2 = z^2 + 1$$

لکھ کر $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ سے

$$k(y, z) = (z^2 + 1) + y^2 + z^2 = 1 + y^2 + 2z^2$$

حاصل ہو گا۔ اب ہم وہ نقاط تلاش کرتے ہیں جن پر k کی قیمت کم سے کم ہو۔ اب yz مستوی میں k کے دائرہ کار میں وہ حصہ جس میں y اور z دریافت کیے جاتے ہیں، بیلن پر اس دائرہ کار جس پر (x, y, z) مطلوب ہے، ایک دوسرے جیسے ہیں۔ یوں جو نقاط k کی قیمت کو کم سے کم بناتے ہوں، بیلن پر مطابقتی نقاط دیں گے۔ اب k کی اقل قیمت ان نقطوں پر ہو گی جہاں

$$k_y = 2y = 0, \quad k_z = 4z = 0$$

یعنی $y = z = 0$ ہو۔ یوں

$$x^2 = z^2 + 1 = 1, \quad x = \mp 1$$

ہو گا۔ بیلن پر مطابقتی نقاط $(\mp 1, 0, 0)$ ہوں گے۔ ہم عدم مساوات

$$k(y, z) = 1 + y^2 + 2z^2 \geq 1$$

سے دیکھ سکتے ہیں کہ نقاط $(\mp 1, 0, 0)$ ہمیں k کی اقل قیمت دیں گے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ مبدا سے بیلن کا کم سے کم فاصلہ 1 ہو گا۔

دوسرا حل

مبدا سے بیلن تک کم ترین فاصلہ یوں بھی تلاش کیا جا سکتا ہے کہ آپ مبدا پر ایک بلبلا تصور کریں۔ اس بلبلا میں اتنی ہوا بھریں کہ یہ بیلن کو بس چھوئے (شکل ۱۳.۶۸)۔ جس نقطہ پر یہ بلبلا بیلن کو چھوتا ہے اس نقطہ پر بلبلے اور بیلن کا ایک ہی مماسی مستوی اور ایک ہی عمودی خط ہو گا۔ یوں اگر

$$g(x, y, z) = x^2 - z^2 - 1 \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$$

کو 0 کے برابر رکھ کر حاصل ہم قد منحنیات کو بلبلا اور بیلن تصور کیا جائے تب ڈھلوان ∇f اور ∇g اس نقطہ پر متوازی ہوں گے جہاں یہ سطحیں ایک دوسرے کو چھوتی ہیں۔ یوں نقطہ مس پر ہم ایسا غیر سمتی λ تلاش کر سکتے ہیں جو

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

یعنی

$$2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k} = \lambda(2x\boldsymbol{i} - 2z\boldsymbol{k})$$

کو مطمئن کرتا ہو۔ اس طرح نقطہ مماس پر x ، y اور z محدد درج ذیل تین مساوات کو مطمئن کریں گے۔

$$2x = 2\lambda x, \quad 2y = 0, \quad 2z = -2\lambda z \tag{۱}$$

نقطہ (x, y, z) جس کے محدد مساوات ۱ کو مطمئن کرتے ہوں λ کی کس قیمت کے لیے سطح $x^2 - z^2 - 1 = 0$ پر پائے جائیں گے؟ اس کا جواب دینے کی خاطر ہم اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کہ اس سطح پر کسی بھی نقطہ کا x محدد صفر نہیں ہے، فیصلہ کرتے ہیں کہ مساوات ۱ کی پہلی مساوات میں $x \neq 0$ ہو گا۔ یوں $2x = 2\lambda x$ صرف

$$\lambda = 1 \quad \text{یعنی} \quad 2 = 2\lambda$$

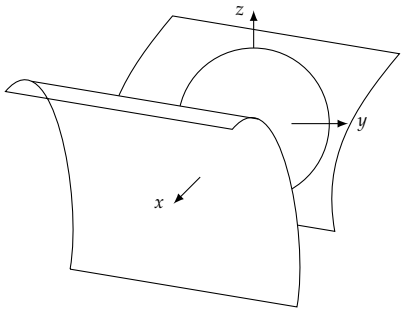
کی صورت میں ممکن ہو گا۔ اب $\lambda = 1$ لیتے ہوئے مساوات $2z = -2\lambda z$ سے $2z = -2z$ حاصل ہو گا جس کو صرف $z = 0$ مطمئن کرتا ہے۔ ساتھ ہی مساوات $2y = 0$ سے $y = 0$ حاصل ہو گا۔ ان معلومات سے ہم دیکھتے ہیں کہ مطلوبہ نقطہ کا روپ درج ذیل ہو گا۔

$$(x, 0, 0)$$

سطح $x^2 - z^2 = 1$ پر کن نقاط کے محدد کا یہی روپ ہے؟ ان نقاط پر

$$x^2 - (0)^2 = 1, \quad x^2 = 1, \quad x = \mp 1$$

ہو گا۔ بیلن پر مبدا کے قریب ترین نقاط $(\mp 1, 0, 0)$ ہوں گے۔ $\square$



شکل ۱۳.۶۸: مبدا پر ایک بلبلا جو قطع زائد $x^2 - z^2 - 1 = 0$ کو مس کرتا ہے۔

لیگرینج ضاربین

ہم نے مثال ۱۳.۵۶ کا دوسرا حل **لیگرینج ضاربین**[۴۹] کی ترکیب سے حاصل کیا۔ عمومی طور پر یہ ترکیب کہتی ہے تفاعل $f(x, y, z)$ ، جس کے متغیرات پر شرط $g(x, y, z) = 0$ لاگو کی گئی ہو، کی انتہائی قیمتیں، سطح $g = 0$ پر ان نقاط پر پائی جائیں گی جو

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

کو کسی غیر سمتی مستقل λ (جس کو **لیگرینج ضارب**[۵۰] کہتے ہیں) کے لیے مطمئن کرتے ہوں۔

اس ترکیب کو مزید جاننے کے لیے اور یہ دیکھنے کی خاطر کہ یہ ترکیب کیوں کام کرتی ہے، ہم درج ذیل مشاہدہ کرتے ہیں جس کو ایک مسئلہ کی صورت میں پیش کیا گیا ہے۔

مسئلہ ۱۳.۹: **عمودی ڈھلوان کا مسئلہ**

فرض کریں $f(x, y, z)$ ایک ایسے خطہ میں قابل تفرق ہے جس کی اندرون میں ہموار منحنی

$$C: \quad \boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$$

پائی جاتی ہے۔ اگر C پر N_0 ایک ایسا نقطہ ہو جہاں C کے لحاظ سے (یعنی f کے متغیرات x ، y اور z منحنی C کو مطمئن کرتے ہوں) f کی مقامی (مشروط) اعظم یا مقامی اقل قیمت ہو تب N_0 پر ∇f منحنی C کو عمودی ہو گا۔

ثبوت : ہم دکھاتے ہیں کہ N_0 پر منحنی کے سمتیہ رفتار کو ∇f عمودی ہو گا۔ منحنی C پر f کی قیمتیں مرکب تفاعل $f(g(t), h(t), k(t))$ دیتا ہے جس کا t کے لحاظ سے تفرق

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = \nabla f \cdot \boldsymbol{v}$$

---

[۴۹] methodofLagrangemultipliers
[۵۰] Lagrange!multiplier

ہوگا۔ایک نقطہ N_0 جس پر f کی، C کے لحاظ سے،(مشروط)مقامی اعظم قیمت یا مقامی اقل قیمت ہو، $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 0$ ہوگا لہٰذا

$$\nabla f \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

ہوگا۔

ہم مسئلہ ۱۳.۹ میں جزو z کو حذف کرکے دو متغیری تفاعل کے لیے اسی طرح کا نتیجہ حاصل کرتے ہیں۔

$\square$

ضمنی نتیجہ ۱۳.۲: برائے مسئلہ ۱۳.۹

ہموار منحنی $\boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j}$ پر قابل تفرق تفاعل $f(x,y)$ کی قیمتوں کے لحاظ سے، جن نقاط پر f کی (مشروط) اعظم یا اقل قیمتیں ہوں وہاں $\nabla f \cdot \boldsymbol{v} = 0$ ہوگا۔

ترکیب لیگرینج ضاربین کا انحصار مسئلہ ۱۳.۹ پر ہے۔فرض کریں $f(x,y,z)$ اور $g(x,y,z)$ قابل تفرق تفاعل ہیں اور سطح $g(x,y,z) = 0$ پر N_0 ایک ایسا نقطہ ہے، جہاں سطح پر دیگر قیمتوں کے لحاظ سے، f کی (مشروط) مقامی اعظم قیمت یا مقامی اقل قیمت پائی جاتی ہو۔تب سطح $g(x,y,z) = 0$ پر N_0 سے گزرتی ہوئی ہر قابل تفرق منحنی پر، f کی قیمتوں کے لحاظ سے، N_0 پر f کی (مشروط) مقامی اعظم قیمت یا مقامی اقل قیمت پائی جائے گی۔یوں N_0 سے گزرتی ہوئی ایسی ہر قابل تفرق منحنی کا سمتیہ رفتار ڈھلوان ∇f کو عمودی ہوگا۔لیکن ∇g (جیسا ہم حصہ ۱۳.۷ میں دیکھ چکے ہیں ∇g ہم قد سطح $g = 0$ کو عمودی ہوگا) بھی ان سمتیات رفتار کو عمودی ہے لہٰذا N_0 پر ∇g اور غیر سمتی λ کا حاصل ضرب ∇f کے برابر ہوگا۔

لیگرینج ضاربین کی ترکیب

فرض کریں $f(x,y,z)$ اور $g(x,y,z)$ قابل تفرق ہیں۔شرط $g(x,y,z) = 0$ پر پورا اترتے ہوئے f کی مقامی اعظم قیمت یا مقامی اقل قیمت تلاش کرنے کی خاطر x ، y ، z اور λ کی ایسی قیمتیں معلوم کریں جو درج ذیل مساوات کو بیک وقت مطمئن کرتی ہوں۔

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g(x,y,z) = 0$$

دو متغیری تفاعل کے لیے موزوں مساوات درج ذیل ہوں گی۔

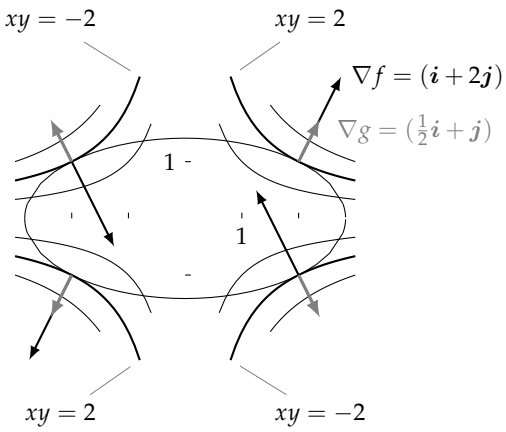
$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g(x,y) = 0$$

مثال ۱۳.۵۷: ترخیم

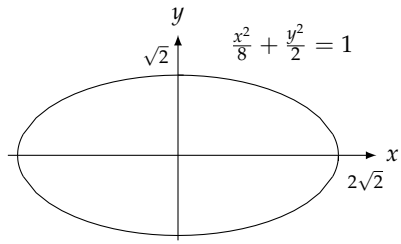
$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$$

پر درج ذیل تفاعل کی اعظم اور اقل قیمتیں تلاش کریں (شکل ۱۳.۶۹-ا)۔

$$f(x,y) = xy$$



(ب)



(ا)

شکل ۱۳.۶۹: تفاعل $f(x,y) = xy$ پر شرط $g(x,y) = x^2/8 + y^2/2 - 1 = 0$ لاگو کرنے سے تفاعل f کی انتہائی قیمتیں چار نقاط $(\mp 2, \mp 1)$ پر حاصل ہوتی ہیں۔ یہ ترخیم پر وہ نقاط ہیں جہاں ∇g کا غیر سمتی مضرب ∇f ہوگا۔

۲۲۲۸۲ **حل**

۲۲۲۸۳ ہم $f(x,y) = xy$ کی انتہائی قیمتیں درج ذیل شرط پر پورا اترتے ہوئے تلاش کرنا چاہتے ہیں۔

$$g(x,y) = \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} - 1 = 0$$

۲۲۲۸۴ ایسا کرنے کی خاطر ہم پہلے x ، y اور λ کی وہ قیمتیں دریافت کرتے ہیں جو درج ذیل کو مطمئن کرتی ہوں۔

$$\nabla f = \lambda \nabla g, \quad g(x,y) = 0$$

۲۲۲۸۵ مساوات ڈھلوان ہمیں

$$y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} = \frac{\lambda}{4} x\boldsymbol{i} + \lambda y\boldsymbol{j}$$

۲۲۲۸۶ دیتی ہے جس سے

$$y = \frac{\lambda}{4} x, \quad x = \lambda y, \quad y = \frac{\lambda}{4}(\lambda y) = \frac{\lambda^2}{4} y$$

۲۲۲۸۷ حاصل ہوتے ہیں لہٰذا $y = 0$ یعنی $\lambda = \mp 2$ ہوگا۔ ہم اب درج ذیل دو صورتوں پر غور کرتے ہیں۔

۲۲۲۸۸ **پہلی صورت:** اگر $y = 0$ ہو تب $x = y = 0$ ہوگا۔ لیکن $(0,0)$ ترخیم پر نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا $y \neq 0$ ہوگا۔

دوسری صورت: اگر $y \neq 0$ ہو تب $\lambda = \mp 2$ اور $x = \mp 2y$ ہو گا۔ انہیں مساوات $g(x,y) = 0$ میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{(\mp 2y)^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1, \quad 4y^2 + 4y^2 = 8, \quad y = \mp 1$$

یوں ترخیم پر تفاعل $f(x,y) = xy$ کی انتہائی قیمتیں چار نقطوں $(\mp 2, 1)$ ، $(\mp 2, -1)$ پر پائی جائیں گی۔ یہ انتہائی قیمتیں $f(x,y) = xy = 2$ اور $f(x,y) = xy = -2$ ہوں گی۔

حل کی جیومیٹری

تفاعل $f(x,y) = xy$ کی ہم قد منحنیات قطع زائد $xy = c$ ہیں (شکل ۱۳.۶۹-ب)۔ مبدا سے یہ قطع زائد جتنے دور ہوں، f کی مطلق قیمت اتنی بڑی ہو گی۔ ہم $f(x,y)$ کی وہ انتہائی قیمتیں جاننا چاہتے ہیں جو ترخیم $x^2 + 4y^2 = 8$ پر پائی جاتی ہوں۔ مبدا سے دور ترین وہ کونسی قطع زائد ہیں، جو ترخیم کو قطع کرتی ہیں؟ وہ قطع زائد جو ترخیم کو مس کرتی ہوئی گزرتی ہوں، جو ترخیم کی مماسی ہوں۔ ان نقطوں پر جو بھی سمتیہ قطع زائد کو عمودی ہو، ترخیم کو بھی عمودی ہو گا، لہٰذا $\nabla f = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ سمتیہ $\nabla g = \frac{x}{4}\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ کا مستقل مضرب ($\lambda = \mp 2$) ہو گا۔ مثلاً نقطہ $(2,1)$ پر

$$\nabla f = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}, \quad \nabla g = \frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \quad \nabla f = 2\nabla g$$

ہو گا جبکہ نقطہ $(-2,1)$ پر درج ذیل ہو گا۔

$$\nabla f = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}, \quad \nabla g = -\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}, \quad \nabla f = -2\nabla g$$

□

مثال ۱۳.۵۸: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر تفاعل $f(x,y) = 3x + 4y$ کی اعظم اور اقل قیمتیں تلاش کریں۔

حل

ہم ترکیب لیگرینج ضاربین میں

$$f(x,y) = 3x + 4y, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

لیتے ہوئے x ، y اور λ کی وہ قیمتیں تلاش کرتے ہیں جو درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتی ہوں۔

$$\begin{aligned} \nabla f = \lambda \nabla g: &\quad 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} = 2x\lambda\boldsymbol{i} + 2y\lambda\boldsymbol{j}, \\ g(x,y) = 0: &\quad x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

مساوات ڈھلوان سے مراد $\lambda \neq 0$ لیا جا سکتا ہے لہٰذا یہ مساوات

$$x = \frac{3}{2\lambda}, \quad y = \frac{2}{\lambda}$$

دیتی ہے جو دیگر حقائق کے ساتھ ساتھ ہمیں بتاتی ہے کہ x اور y کی علامتیں ایک دوسرے جیسی ہیں۔ مساوات $g(x,y) = 0$ میں x اور y کی قیمتیں پر کرتے ہوئے

$$\left(\frac{3}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{2}{\lambda}\right)^2 - 1 = 0$$

یعنی

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1, \quad 9 + 16 = 4\lambda^2, \quad \lambda = \mp\frac{5}{2}$$

حاصل ہو گا۔ یوں

$$x = \frac{3}{2\lambda} = \mp\frac{3}{5}, \quad y = \frac{2}{\lambda} = \mp\frac{4}{5}$$

ہوں گے اور $f(x,y) = 3x + 4y$ کی انتہائی قیمتیں نقاط $\mp(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ پر پائی جائیں گی۔

نقاط $\mp(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ پر $3x + 4y$ کی قیمتیں معلوم کر کے ہم دیکھتے ہیں کہ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر اعظم اور اقل قیمتیں درج ذیل ہوں گی۔

$$3\left(\frac{3}{5}\right) + 4\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{25}{5} = 5, \quad 3\left(-\frac{3}{5}\right) + 4\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{25}{5} = -5$$

حل کی جیومیٹری

تفاعل $f(x,y) = 3x + 4y$ کی ہم قد منحنیات، خطوط $3x + 4y = c$ ہیں (شکل ۱۳.۷۰)۔ مبدا سے یہ خطوط جتنے دور ہوں، f کی مطلق قیمت اتنی زیادہ ہو گی۔ ہم f کی وہ انتہائی قیمتیں جاننا چاہتے ہیں جو دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر پائے جاتے ہوں۔ وہ کون سے خطوط ہیں جو مبدا سے دور ترین ہوتے ہوئے دائرہ کو قطع کرتے ہیں؟ وہ خطوط جو دائرے کے مماس ہیں۔ نقطہ مماس پر ہر وہ سمتیہ جو خط کو عمودی ہو، دائرہ کو بھی عمودی ہو گا لہٰذا ڈھلوان ∇f ڈھلوان ∇g کا مستقل مضرب ($\lambda = \mp\frac{5}{2}$) ہو گا۔ مثلاً نقطہ $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ پر درج ذیل ہوں گے۔

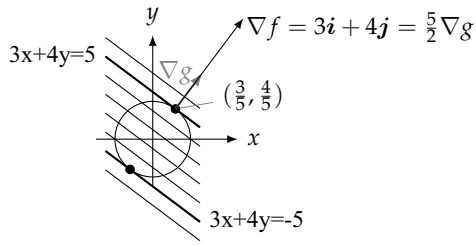
$$\nabla f = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}, \quad \nabla g = \frac{6}{5}\boldsymbol{i} + \frac{8}{5}\boldsymbol{j}, \quad \nabla f = \frac{5}{2}\nabla g$$

□

دو شرائط کے ساتھ لیگرینج ضاربین

متعدد مسائل میں ہمیں قابل تفرق تفاعل $f(x,y,z)$ کی انتہائی قیمتیں اس صورت درکار ہوتی ہیں جہاں تفاعل کے متغیرات دو شرائط کو مطمئن کرتے ہوں۔ اگر یہ شرائط

$$g_2(x,y,z) = 0, \quad \text{اور} \quad g_1(x,y,z) = 0$$



شکل ۱۳.۷۰: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر تفاعل $f(x,y) = 3x + 4y$ کی اعظم قیمت نقطہ $(3/5, 4/5)$ اور اقل قیمت نقطہ $(-3/5, -4/5)$ پر پائی جاتی ہیں۔ ان نقطوں پر ∇g کا مستقل مضرب ∇f ہو گا۔ اس شکل میں پہلے نقطہ پر ڈھلوان دکھائی گئی ہے جبکہ دوسرے نقطہ پر ڈھلوان نہیں دکھائی گئی ہے۔

ہوں اور g_1 ، g_2 قابل تفرق ہوں اور ساتھ ہی ∇g_1 اور ∇g_2 آپس میں متوازی نہ ہوں تب ہم f کی مشروط مقامی اعظم اور مقامی اقل قیمت نقاط تلاش کرنے کی خاطر دو لیگرینج مستقل λ اور μ (جس کا تلفظ ''میو'' ہے) متعارف کرتے ہیں۔ اس طرح f کی انتہائی قیمت نقاط تلاش کرنے کی خاطر ہم x ، y ، z ، λ اور μ کی وہ قیمتیں دریافت کرتے ہیں جو درج ذیل مساوات کو بیک وقت مطمئن کرتے ہوں۔

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2, \quad g_1(x,y,z) = 0, \quad g_2(x,y,z) = 0 \tag{۲}$$

درج بالا (مساوات ۲) کا ایک خوبصورت جیومیٹریائی مطلب ہے (شکل ۱۳.۷۱)۔ سطح $g_1 = 0$ اور سطح $g_2 = 0$ (عموماً) ایک ہموار منحنی میں، جسے ہم C کہیں گے، ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں اور اس منحنی پر چلتے ہوئے ہم وہ نقاط تلاش کرنا چاہتے ہیں، جہاں C پر f کی قیمتوں کے لحاظ سے، f کی (مشروط) اعظم اور اقل قیمت پائی جاتی ہو۔ جیسا ہم مسئلہ ۱۳.۹ سے جانتے ہیں، ان نقاط پر ∇f ، منحنی C کو عمودی ہو گا۔ لیکن ان نقاط پر چونکہ منحنی C ، سطح $g_1 = 0$ اور سطح $g_2 = 0$ میں پائی جاتی ہے لہٰذا ∇g_1 اور ∇g_2 بھی C کو عمودی ہوں گے۔ یوں ∇f اس مستوی میں پایا جائے گا جسے ∇g_1 اور ∇g_2 تعین کرتے ہیں لہٰذا $\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2$ ہو گا جہاں λ اور μ کوئی مستقل ہوں گے۔ چونکہ مطلوبہ نقاط بھی ان دونوں سطحوں میں پائے جاتے ہیں لہٰذا ان کے محدد مساوات $g_1(x,y,z) = 0$ اور $g_2(x,y,z) = 0$ کو لازماً مطمئن کریں گے (جو مساوات ۲ کے باقی شرائط ہیں)۔

مثال ۱۳.۵۹: مستوی $x + y + z = 1$ بیلن $x^2 + y^2 = 1$ کو ایک ترخیم میں قطع کرتا ہے۔ اس ترخیم پر وہ نقاط تلاش کریں جو مبدا سے دور تر اور نزدیک تر ہوں (شکل ۱۳.۷۲)۔

حل

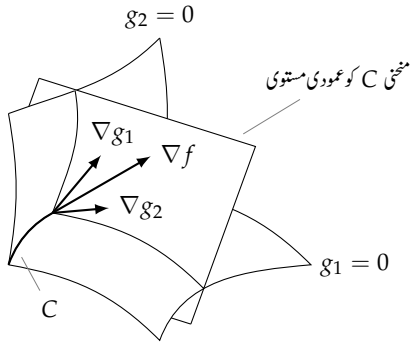
ہم (مبدا سے نقطہ (x,y,z) کے فاصلے کے مربع)

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

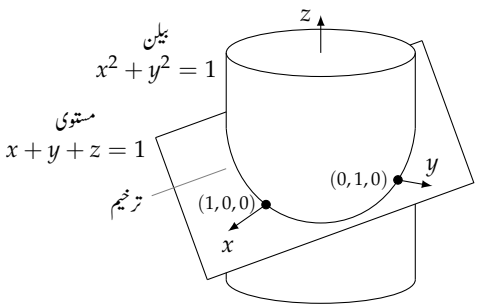
کی وہ انتہائی قیمتیں معلوم کرتے ہیں جو درج ذیل شرائط پر پورا اترتی ہوں۔

$$g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \tag{۳}$$

$$g_2(x,y,z) = x + y + z - 1 = 0 \tag{۴}$$



شکل ۱۳.۷۱: چونکہ ∇g_1 سطح $g_1 = 0$ کو عمودی ہے اور ∇g_2 سطح $g_2 = 0$ کو عمودی ہے لہٰذا سمتیات ∇g_1 اور ∇g_2 منحنی C کے عمودی مستوی میں پائے جاتے ہیں۔



شکل ۱۳.۷۲: جس ترخیم پر بیلن اور مستوی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں اس پر مبدا سے دور تر اور نزدیک تر نقاط کی تلاش۔

۲۲۳۳۶ یوں مساوات ۲ میں ڈھلوان کی مساوات

$$\nabla f = \lambda \nabla g_1 + \mu \nabla g_2 \qquad \text{مساوات ۲}$$

$$2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k} = \lambda(2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}) + \mu(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$

$$2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k} = (2\lambda x + \mu)\boldsymbol{i} + (2\lambda y + \mu)\boldsymbol{j} + \mu\boldsymbol{k}$$

۲۲۳۳۷ یعنی

$$2x = 2\lambda x + \mu, \quad 2y = 2\lambda y + \mu, \quad 2z = \mu \tag{۵}$$

۲۲۳۳۸ دے گی۔ غیر سمتی مساوات ۵ ہمیں درج ذیل دیتی ہیں۔

$$\begin{aligned} 2x = 2\lambda x + 2z \quad &\Longrightarrow \quad (1-\lambda)x = z \\ 2y = 2\lambda y + 2z \quad &\Longrightarrow \quad (1-\lambda)y = z \end{aligned} \tag{۶}$$

۲۲۳۳۹ مساوات ۶ بیکوقت اس صورت مطمئن ہوں گی جب یا $\lambda = 1$ اور $z = 0$ ہوں یا $\lambda \neq 1$ اور $x = y = \frac{z}{1-\lambda}$ ہوں۔

۲۲۳۴۰ اگر $z = 0$ ہو تب مساوات ۱۳ اور مساوات ۴ کو ایک ساتھ حل کرتے ہوئے ترخیم پر مطابقتی نقاط $(1,0,0)$ اور $(0,1,0)$ حاصل ہوتے ہیں جو

۲۲۳۴۱ شکل کو دیکھ کر معنی خیز نظر آتے ہیں۔

۲۲۳۴۲ اگر $x = y$ ہو تب مساوات ۱۳ اور مساوات ۴ درج ذیل دیں گے۔

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 - 1 &= 0 \\ 2x^2 &= 1 \\ x &= \mp\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x + x + z - 1 &= 0 \\ z &= 1 - 2x \\ z &= 1 \mp \sqrt{2} \end{aligned}$$

۲۲۳۴۳ ترخیم پر مطابقتی نقاط

$$N_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1+\sqrt{2}\right) \quad \text{اور} \quad N_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1-\sqrt{2}\right)$$

۲۲۳۴۴ ہوں گے۔ یہاں احتیاط کی ضرورت ہے۔ اگرچہ N_1 اور N_2 دونوں ترخیم پر f کی مقامی اعظم قیمتیں دیتے ہیں، نقطہ N_2 مبدا سے زیادہ دور ہے۔

۲۲۳۴۵ ترخیم پر مبدا کے قریب تر نقاط $(1,0,0)$ اور $(0,1,0)$ ہیں۔ ترخیم پر مبدا سے دور تر نقطہ N_2 ہے۔ □

۲۲۳۴۶ **سوالات**

۲۲۳۴۷ **دو غیر تابع متغیرات اور ایک شرط**

۲۲۳۴۸ سوال ۱۳.۴۴۳: ترخیم $x^2 + 2y^2 = 1$ پر وہ نقاط تلاش کریں جن پر $f(x,y) = xy$ کی انتہائی قیمتیں پائی جاتی ہوں۔

۲۲۳۴۹ سوال ۱۳.۴۴۴: تفاعل $f(x,y) = xy$ کی شرطی مساوات $g(x,y) = x^2 + y^2 - 10 = 0$ کے لحاظ سے مشروط انتہائی
۲۲۳۵۰ قیمتیں تلاش کریں۔

۲۲۳۵۱ سوال ۱۳.۴۴۵: لکیر $x + 3y = 10$ پر چلتے ہوئے تفاعل $f(x,y) = 49 - x^2 - y^2$ کی اعظم قیمت تلاش کریں۔

۲۲۳۵۲ سوال ۱۳.۴۴۶: خط $x + y = 3$ پر $f(x,y) = x^2y$ کی مقامی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

۲۲۳۵۳ سوال ۱۳.۴۴۷: منحنی $xy^2 = 54$ پر مبدا کے قریب تر نقاط تلاش کریں۔

۲۲۳۵۴ سوال ۱۳.۴۴۸: منحنی $x^2y = 2$ پر مبدا کے قریب تر نقاط تلاش کریں۔

۲۲۳۵۵ سوال ۱۳.۴۴۹: ترکیب لیگرینج ضاربین کی مدد سے

۲۲۳۵۶ ا. $x + y$ کی مشروط کم سے کم قیمت $xy = 16,\ x > 0,\ y > 0$ پر پورا اترتے ہوئے تلاش کریں۔

۲۲۳۵۷ ب. xy کی اعظم قیمت شرط $x + y = 16$ کے لحاظ سے تلاش کریں۔

۲۲۳۵۸ سوال ۱۳.۴۵۰: مستوی xy میں رہتے ہوئے منحنی $x^2 + xy + y^2 = 1$ پر مبدا سے دور تر اور نزدیک تر نقاط تلاش کریں۔

۲۲۳۵۹ سوال ۱۳.۴۵۱: ایک بند دائری قائمہ بیلن کا حجم $16\pi,\ \text{cm}^3$ ہے۔ اس کی وہ جسامت تلاش کریں جس سے اس بیلن کا سطحی رقبہ کم سے کم ہو۔

۲۲۳۶۰ سوال ۱۳.۴۵۲: رداس a کے کرہ میں محصور اعظم سطح کے کھلا دائری قائمہ بیلن کا سطحی رقبہ کتنا ہو گا؟

۲۲۳۶۱ سوال ۱۳.۴۵۳: ترکیب لیگرینج ضاربین استعمال کرتے ہوئے ترخیم $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ میں محصور اعظم محیط کا ایسا مستطیل تلاش کریں جس کے
۲۲۳۶۲ اضلاع محددی محور کے متوازی ہوں۔ اس مستطیل کا محیط کتنا ہو گا؟

۲۲۳۶۳ سوال ۱۳.۴۵۴: ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ میں محصور اعظم محیط کا مستطیل جس کے اضلاع محددی محور کے متوازی ہوں کے اضلاع تلاش کریں۔
۲۲۳۶۴ اس مستطیل کا محیط کتنا ہو گا؟

سوال ۱۳.۴۵۵: شرط $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$ پر پورا اترتے ہوئے $x^2 + y^2$ کی اعظم اور اقل قیمتیں تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۵۶: شرط $x^2 + y^2 = 4$ کے لحاظ سے $3x - y + 6$ کی اعظم اور اقل قیمتیں تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۵۷: ایک دھاتی چادر کے نقطہ (x, y) پر درجہ حرارت $T(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2$ ہے۔ ایک چیونٹی رداس 5 کے دائرہ پر، جس کا مرکز مبدا پر ہے، حرکت کرتی ہے۔ اس چیونٹی کو اعظم اور کم سے کم کتنے درجہ حرارت کا سامنا کرنا ہو گا؟

سوال ۱۳.۴۵۸: آپ کو تیل ذخیرہ کرنے کے لیے حوض بنانے کو کہا گیا ہے۔ یہ حوض بیلنی ہو گا جس کے آخری سر نصف کروی ہوں گے۔ اس کا حجم $8000\ \mathrm{m}^3$ ہو گا۔ آپ کو کم سے کم چادر استعمال کر کے حوض بنانا ہے۔ اس حوض کا رداس اور قد کتنا ہو گا؟

تین متغیرات اور ایک شرط

سوال ۱۳.۴۵۹: مستوی $x + 2y + 3z = 13$ پر $(1, 1, 1)$ کو نزدیک تر نقطہ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۶۰: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ پر وہ نقطہ تلاش کریں جو $(1, -1, 1)$ سے دور تر ہو۔

سوال ۱۳.۴۶۱: مبدا سے سطح $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ کا کم تر فاصلہ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۶۲: سطح $z = xy + 1$ پر مبدا کو قریب تر نقطہ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۶۳: سطح $z^2 = xy + 4$ پر مبدا کو قریب تر نقطہ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۶۴: سطح $xyz = 1$ پر مبدا کو قریب تر نقطہ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۶۵: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 30$ پر $f(x, y, z) = x - 2y + 5z$ کی اعظم اور اقل قیمتیں تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۶۶: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ پر وہ نقاط تلاش کریں جن پر $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$ کی اعظم اور اقل قیمتیں پائی جاتی ہوں۔

سوال ۱۳.۴۶۷: تین ایسے حقیقی اعداد تلاش کریں جن کا مجموعہ 9 اور ان کے مربعوں کا مجموعہ کم سے کم ہو۔

سوال ۱۳.۴۶۸: اگر $x + y + z^2 = 16$ ہو تب مثبت اعداد x ، y اور z کا اعظم حاصل ضرب کتنا ہو گا؟

سوال ۱۳.۴۶۹: اکائی کرہ میں محصور اعظم حجم کے بند مستطیلی ڈبہ کے اضلاع تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۷۰: ربع اول میں اعظم حجم کے ایسے بند مستطیل ڈبہ کا حجم تلاش کریں جس کی دیواریں مستوی سطحوں میں ہوں اور جس کا راس $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ، جہاں $a > 0, b > 0, c > 0$ ہے، کو چھوتا ہو۔

سوال ۱۳.۴۷۱: خلائی تحقیق کے اختتام پر ترخیمی صورت

$$4x^2 + y^2 + 4z^2 = 16$$

کا خلائی جہاز زمینی ہوا میں داخل ہوتے ہی گرم ہونا شروع ہوتا ہے۔ ایک گھنٹہ بعد خلائی جہاز کی سطحی نقطہ (x, y, z) پر درجہ حرارت

$$T(x, y, z) = 8x^2 + 4yz - 16z + 600$$

ہے۔اس جہاز کی سطح پر گرم ترین نقطہ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۷۲: کرہ $x^2+y^2+z^2=1$ کے سطحی نقطہ (x,y,z) پر درجہ حرارت $T(x,y,z)=400xyz^2$ سیلسیئس ہے۔اس کرہ پر اعظم اور کم سے کم درجہ حرارت تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۷۳: اقتصادیات سے ایک مثال

دو اشیاء G_1 اور G_2 کی تعداد x اور y کی افادیت کو بعض اوقات تفاعل $U(x,y)$ سے ناپا جاتا ہے۔مثال کے طور پر G_1 اور G_2 وہ دو کیمیا ہو سکتے ہیں جن کی مختلف مقداریں استعمال کرتے ہوئے دوا ساز ادارہ مختلف تراکیب استعمال کرتے ہوئے دوائی تیار کرتا ہو اور مطابقتی منافع $U(x,y)$ ہو۔اگر G_1 پر a اور G_2 پر b روپیہ فی کلو گرام لاگت آتی ہو اور ان دونوں کی خریداری کے لیے c روپیہ مختص کیے گئے ہوں تب ادارے کا سربراہ $ax+by=c$ کی زیر شرط $U(x,y)$ کی قیمت کو اعظم بنانا چاہے گا جو ترکیب لیگرینج ضاربین سے حاصل کرنا ممکن ہو گا۔

فرض کریں

$$U(x,y)=xy+2x, \quad ax+by=c=2x+y=30$$

ہوں تب U کی مشروط اعظم قیمت اور مطابقتی x اور y تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۷۴: ایک سیارہ پر آپ ریڈیائی دوربین کو اس مقام پر نصب کرنا چاہتے ہو جہاں سیارہ کی مقناطیسی میدان کمزور ترین ہو تا کہ دوربین کی کارکردگی میں خلل اندازی کو کم سے کم ہو۔اس سیارہ کا رداس 6 اکائیاں ہے۔محددی نظام کے مبدا کو سیارہ کے مرکز پر رکھتے ہوئے، سیارہ کا مقناطیسی میدان $M(x,y,z)=6x-y^2+xz+60$ ہے۔آپ ریڈیائی دوربین کو کہاں نصب کریں گے؟

لیگرینج ضاربین مع دو شرائط

سوال ۱۳.۴۷۵: تفاعل $f(x,y,z)=x^2+2y-z^2$ کی قیمت کو زیر شرائط $2x-y=0$ اور $y+z=0$ اعظم بنائیں۔

سوال ۱۳.۴۷۶: زیر $x+2y+3z=6$ اور $x+3y+9z=9$ تفاعل $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ کی قیمت کو کم سے کم بنائیں۔

سوال ۱۳.۴۷۷: سطح $y+2z=12$ اور سطح $x+y=6$ کی تقاطع پر مبدا کو قریب تر نقطہ تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۷۸: سطح $2x-y=0$ اور سطح $y+z=0$ کی منحنی تقاطع پر $f(x,y,z)=x^2+2y-z^2$ کی اعظم قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۷۹: مستوی $z=1$ اور کرہ $x^2+y^2+z^2=10$ کے تقاطع پر $f(x,y,z)=x^2yz+1$ کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۸۰: (ا) سطح $x+y+z=40$ اور سطح $x+y-z=0$ کی خط تقاطع پر $w=xyz$ کی اعظم قیمت تلاش کریں۔
(ب) جیومیٹریائی دلیل دیتے ہوئے ثابت کریں کہ آپ نے w کی اعظم قیمت حاصل کی ہے نا کہ اس کی اقل قیمت۔

سوال ۱۳.۴۸۱: مستوی $y-x=0$ کرہ $x^2+y^2+z^2=4$ کو ایک دائرہ میں قطع کرتا ہے۔اس دائرہ پر $f(x,y,z)=xy+z^2$ کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۸۲: مستوی $2y+4z=5$ اور مخروط $z^2=4x^2+4y^2$ کے تقاطع پر مبدا کو قریب تر نقطہ تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۳.۴۸۳: $\nabla f = \lambda \nabla g$ کافی نہیں ہے۔

اگرچہ زیر شرط $g(x,y) = 0$ تفاعل $f(x,y)$ کی انتہائی قیمتوں کے ہونے کے لیے تعلق $\nabla f = \lambda \nabla g$ لازمی ہے، یہ تعلق از خود اس بات کی ضمانت نہیں دیتا کہ اس تفاعل کی انتہائی قیمتیں موجود ہوں گی۔ مثال کے طور پر زیر شرط $xy = 16$ ترکیب لیگرینج ضاربین کی مدد سے $f(x,y) = x + y$ کی اعظم قیمت تلاش کرنے کی کوشش کریں۔ یہ ترکیب آپ کو دو نقاط $(4,4)$ اور $(-4,-4)$ دے گی جن پر توقع کی جا سکتی ہے کہ f کی اعظم قیمت پائی جاتی ہو۔ اس کے باوجود قطع زائد $xy = 16$ پر $x + y$ کی کوئی اعظم قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔ آپ ربع اول میں مبدا سے جتنے دور چلتے ہیں، f کی قیمت اتنی زیادہ ہو گی۔

سوال ۱۳.۴۸۴: کمتر مربعی مستوی

مستوی $z = Ax + By + C$ کو درج ذیل نقاط (x_k, y_k, z_k) پر بٹھانا مقصود ہے۔

$$(0,0,0), \quad (0,1,1), \quad (1,1,1), \quad (1,0,-1)$$

مستقل A ، B اور C کی وہ قیمتیں تلاش کریں جو انحرافات کے مربع کے مجموعہ

$$\sum_{k=1}^{4} (Ax_k + By_k + C - z_k)^2$$

کی قیمت کو کم سے کم بناتے ہوں۔

سوال ۱۳.۴۸۵: (ا) کارتیسی محددی abc نظام کے مبدا پر رداس r کا کرہ رکھا گیا ہے۔ دکھائیں کہ اس کرہ پر $a^2b^2c^2$ کی اعظم قیمت $\left(\frac{r^2}{3}\right)^3$ ہو گی۔ (ب) جزو-ا استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ غیر منفی اعداد a ، b اور c کے لیے

$$(abc)^{1/3} \leq \frac{a+b+c}{3}$$

ہو گا، یعنی، تین اعداد کا ہندسی اوسط اس کے حسابی اوسط جتنا یا اس سے کم ہو گا۔

سوال ۱۳.۴۸۶: فرض کریں $a_1, a_2, \cdots, a_n$ مثبت n اعداد ہیں۔ زیر شرط $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$ مجموعہ $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ کی اعظم قیمت تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۱۳.۴۸۷ تا سوال ۱۳.۴۹۲ میں کمپیوٹر کی مدد سے ترکیب لیگرینج ضاربین استعمال کرتے ہوئے مشروط انتہائی قیمتیں دریافت کریں۔

ا. تفاعل f ، جس کی قیمت کو زیر شرائط $g_1 = 0$ اور $g_2 = 0$ بہتر بنانا مقصود ہے، سے تفاعل $h = f - \lambda_1 g_1 - \lambda_2 g_2$ حاصل کریں۔

ب. بشمول λ_1 اور λ_2 کے لحاظ سے، h کی تمام جزوی یک رتبی تفارق حاصل کر کے 0 کے برابر رکھیں۔

ج. جزو-ب میں حاصل نظام مساوات کو، بشمول λ_1 اور λ_2 ، تمام متغیرات کے لیے حل کریں۔

د. جزو-ج میں ہر نقطہ حل پر f کی قیمت حاصل کر کے مشروط انتہائی قیمتیں دریافت کریں۔

سوال ۱۳.۴۸۷: زیر شرائط $x^2 + y^2 - 2 = 0$ اور $x^2 + z^2 - 2 = 0$ تفاعل $f(x, y, z) = xy + yz$ کی اقل قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۸۸: زیر شرائط $x^2 + y^2 - 1 = 0$ اور $x - z = 0$ تفاعل $f(x, y, z) = xyz$ کی اقل قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۸۹: زیر شرائط $2y + 4z - 5 = 0$ اور $4x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$ تفاعل $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ کی اعظم قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۹۰: زیر شرائط $x^2 - xy + y^2 - z^2 - 1 = 0$ اور $x^2 + y^2 - 1 = 0$ تفاعل $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ کی اقل قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۹۱: زیر شرائط $2x - y + z - w - 1 = 0$ اور $x + y - z + w - 1 = 0$ تفاعل $f(x, y, z, w) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2$ کی اقل قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۴۹۲: لکیر $y = x + 1$ سے قطع مکافی $y^2 = x$ تک فاصلہ تلاش کریں۔(اشارہ: فرض کریں لکیر پر (x, y) ایک نقطہ ہے اور (w, z) قطع مکافی پر ایک نقطہ ہے۔ آپ $(x - w)^2 + (y - z)^2$ کی قیمت کم سے کم چاہتے ہیں۔)

۱۳.۱۰ کلیہ ٹیلر

اس حصہ میں کلیہ ٹیلر (حصہ ۹.۱۱) استعمال کرتے ہوئے ہم مقامی انتہائی قیمتوں (حصہ ۱۳.۸) کا دور تبی تفرقی پرکھ اور دو غیر تابع متغیرات کے تفاعل کی خط بندی کا کلیہ (مساوات ۵) خلل اخذ کرتے ہیں۔ کلیہ ٹیلر کے استعمال سے دو متغیری تفاعل کی تمام رتبہ کی کثیر رکنی تخمین کے کلیہ کو وسعت ملتی ہے۔

دور تبی تفرقی پرکھ کا اشتقاق

فرض کریں خطہ R میں تفاعل $f(x, y)$ کے استمراری جزوی تفارق پائے جاتے ہیں اور اس خطہ میں نقطہ $N(a, b)$ پایا جاتا ہے جس پر $f_x = f_y = 0$ ہے۔ مزید فرض کریں کہ h اور k اتنے چھوٹے ہیں کہ نقطہ $S(a + h, y + k)$ اور S سے N تک قطعے، R میں پائے جاتے ہیں۔ ہم قطعہ NS کی مقدار معلوم مساوات لکھتے ہیں:

$$x = a + th, \quad y = b + tk, \quad 0 \le t \le 1$$

اگر $F(t) = f(a + th, b + tk)$ ہو تب زنجیری قاعدہ سے درج ذیل ہو گا۔

$$F'(t) = f_x \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + f_y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = hf_x + kf_y$$

چونکہ f_x اور f_y قابل تفرق ہیں (ان کے استمراری جزوی تفارق پائے جاتے ہیں) لہٰذا t کے لحاظ سے F' قابل تفرق ہو گا۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا

۲۴۴۶۲ ہے۔

$$
\begin{aligned}
F'' &= \frac{\partial F'}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F'}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial x}(hf_x + kf_y)\cdot h + \frac{\partial}{\partial y}(hf_x + kf_y)\cdot k \\
&= h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy} \qquad\qquad f_{xy} = f_{yx}
\end{aligned}
$$

۲۴۴۶۳ چونکہ $[0,1]$ پر F اور F'' استراری ہیں اور $(0,1)$ پر F' قابل تفرق ہے، ہم $n = 2$ اور $a = 0$ لیتے ہوئے 0 اور 1 کے بیچ کسی c
۲۴۴۶۴ کے لیے کلیہ ٹیلر سے

$$
\begin{aligned}
F(1) &= F(0) + F'(0)(1-0) + F''(c)\frac{(1-0)^2}{2} \\
F(1) &= F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(c) \qquad (۱)
\end{aligned}
$$

۲۴۴۶۵ حاصل کر سکتے ہیں۔ مساوات ۱ کو f کی صورت میں لکھنے سے

$$
\begin{aligned}
(۲) \quad f(a+h, b+k) &= f(a,b) + hf_x(a,b) + kf_y(a,b) \\
&\quad + \frac{1}{2}(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy})\Big|_{(a+ch,b+ck)}
\end{aligned}
$$

۲۴۴۶۶ حاصل ہو گا۔ چونکہ $f_x = f_y = 0$ ہے لہٰذا اس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$
(۳) \qquad f(a+h, b+k) - f(a,b) = \frac{1}{2}(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy})\Big|_{(a+ch,b+ck)}
$$

۲۴۴۶۷ نقطہ (a,b) پر f کی انتہائی قیمت $f(a+h, b+k) - f(a,b)$ کی علامت تعین کرتی ہے جو مساوات ۳ کے تحت درج ذیل کی علامت ہو
۲۴۴۶۸ گی۔

$$
Q(c) = (h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy})\Big|_{(a+ch,b+ck)}
$$

۲۴۴۶۹ اب اگر $Q(0) \neq 0$ ہو تب کافی چھوٹی h اور چھوٹی k کے لیے $Q(c)$ کی علامت وہی ہو گی جو $Q(0)$ کی ہو گی۔ ہم

$$
(۴) \qquad Q(0) = h^2 f_{xx}(a,b) + 2hkf_{xy}(a,b) + k^2 f_{yy}(a,b)
$$

۲۴۴۷۰ کی علامت کی پیش گوئی (a,b) پر f_{xx} اور $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2$ کی علامتوں سے کر سکتے ہیں۔ مساوات ۳ کے دونوں اطراف کو f_{xx} سے ضرب
۲۴۴۷۱ دینے کے بعد دائیں ہاتھ کی ترتیب نو سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
(۵) \qquad f_{xx}Q(0) = (hf_{xx} + kf_{xy})^2 + (f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2)k^2
$$

۲۴۴۷۲ مساوات ۵ سے درج ذیل معلومات حاصل ہوتی ہیں۔

۱. اگر (a,b) پر $f_{xx} < 0$ اور $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ہوں تب h اور k کی تمام غیر صفر انتہائی چھوٹی قیمتوں کے لیے $Q(0) < 0$ ہوگا اور (a,b) پر f کی مقامی اعظم قیمت پائی جائے گی۔

۲. اگر (a,b) پر $f_{xx} > 0$ اور $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ہوں تب h اور k کی تمام غیر صفر انتہائی چھوٹی قیمتوں کے لیے $Q(0) > 0$ ہوگا اور (a,b) پر f کی مقامی اقل قیمت پائی جائے گی۔

۳. اگر (a,b) پر $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$ ہو تب h اور k کی ایسی غیر صفر انتہائی چھوٹی قیمتیں پائی جائیں گی جن کے لیے $Q(0) > 0$ ہوگا اور h اور k کی ایسی غیر صفر انتہائی چھوٹی قیمتیں بھی پائی جائیں گی جن کے لیے $Q(0) < 0$ ہوگا۔ نقطہ $N_0(a,b,f(a,b))$ کے بہت نزدیک سطح $z = f(x,y)$ پر N_0 سے بلندی پر اور اس سے نیچے نقطے پائے جائیں گے لہٰذا (a,b) پر f کا نقطہ زین ہوگا۔

۴. اگر $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ ہو تب یہ پرکھ غیر نتیجہ کن ہوگا اور ہمیں کوئی دوسرا پرکھ درکار ہوگا۔ $Q(0)$ کی ممکنہ صفر قیمت ہمیں $Q(c)$ کی علامت جاننے سے روکتی ہے۔

خطی تخمین کا کلیہ خلل

ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ (x_0,y_0) پر تفاعل $f(x,y)$ اور اس کی خطی تخمین $L(x,y)$ کی قیمتوں میں فرق $E(x,y)$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

$$|E(x,y)| \le \frac{1}{2}B(|x-x_0| + |y-y_0|)^2$$

ہم فرض کرتے ہیں کہ بند مستطیل خطہ R جس کا مرکز (x_0,y_0) ایک ایسے کھلے سلسلہ میں پایا جاتا ہے جس کے ہر نقطہ پر f کے استمراری دور تبی جزوی تفارق پائے جاتے ہیں۔ خطہ R میں $|f_{xx}|$، $|f_{yy}|$ اور $|f_{xy}|$ کی سب سے بڑی قیمت B ہے۔

ہمیں مساوات ۲ مطلوبہ عدم مساوات دیتی ہے۔ ہم a اور b کی جگہ بالترتیب x_0 اور y_0 جبکہ h اور k کی جگہ بالترتیب $x - x_0$ اور $y - y_0$ پر کر کے ترتیب نو سے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}_{\text{خطبندی } L(x,y)}$$
$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\Big((x-x_0)^2 f_{xx} + 2(x-x_0)(y-y_0)f_{xy} + (y-y_0)^2 f_{yy}\Big)\Big|_{(x_0+c(x-x_0),y_0+c(y-y_0))}}_{\text{خلل } E(x,y)}$$

اس مساوات سے ہمیں درج ذیل معلوم ہوتا ہے۔

$$|E| \le \frac{1}{2}\Big(|x-x_0|^2|f_{xx}| + 2|x-x_0||y-y_0||f_{xy}| + |y-y_0|^2|f_{yy}|\Big)$$

یوں اگر R پر $|f_{xx}|$، $|f_{yy}|$ اور $|f_{xy}|$ کی قیمتوں کی بالائی حد بندی B ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}|E| &\leq \frac{1}{2}\Big(|x-x_0|^2 B + 2|x-x_0||y-y_0| B + |y-y_0|^2 B\Big)\\ &\leq \frac{1}{2}B(|x-x_0|+|y-y_0|)^2\end{aligned}$$

دو متغیری تفاعل کے لیے کلیہ ٹیلر

ہم $f(x,y)$ پر درج ذیل **عاملین**[51] لاگو کرتے ہوئے F' اور F'' کے لیے، پہلے اخذ کیے گئے، کلیات حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

یہ عاملین زیادہ عمومی کلیہ

$$F^{(n)}(t) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}F(t) = \left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y) \tag{۶}$$

کے پہلے دو کلیات ہیں جو کہتا ہے کہ $F(t)$ پر $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}$ لاگو کرنا $f(x,y)$ پر درج ذیل عامل، مسئلہ ثنائی سے پھیلانے کے بعد، لاگو کرنے کے مترادف ہے۔

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n$$

اگر ایک مستطیل، جس کا مرکز (a,b) ہو، میں f کے $n+1$ رتبہ تک جزوی تفارق ہر نقطہ پر استمراری ہوں، تب ہم $F(t)$ کے کلیہ ٹیلر کو وسعت دے کر

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{F''(0)}{2!}t^2 + \cdots + \frac{F^{(n)}}{n!}t^n + \text{باقی}$$

لکھتے ہوئے $t=1$ لے کر

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2!} + \cdots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \text{باقی}$$

حاصل کرتے ہیں۔ اس آخری تسلسل کے دائیں ہاتھ اولین n تفارق میں $t=0$ پر مساوات ۶ سے حاصل مطابقتی تعلقات پر کر کے موزوں باقی جزو جمع کرتے ہوئے درج ذیل کلیہ حاصل ہو گا۔

---

[51] operators

نقطہ (a,b) پر $f(x,y)$ کے لیے کلیہ ٹیلر

$$
\begin{aligned}
f(a+h,b+k) =& f(a,b) + (hf_x + kf_y)|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy})|_{(a,b)} \\
&+ \frac{1}{3!}(h^2 f_{xxx} + 3h^2 k f_{xxy} + 3hk^2 f_{xyy} + k^3 f_{yyy})|_{(a,b)} + \cdots \\
&+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f\Bigg|_{(a,b)} + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Bigg|_{(a+ch,b+ck)}
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

اولین n تفرقی اجزاء کی قیمتیں (a,b) پر حاصل کی جاتی ہیں۔ آخری جزو کی قیمت (a,b) اور $(a+h,b+k)$ کے بیچ قطعہ پر کسی نقطہ $(a+ch,b+ck)$ پر حاصل کی جاتی ہے۔

اگر $(a,b) = (0,0)$ ہو اور ہم h اور k کو غیر تابع متغیرات تصور کر کے بالترتیب x اور y سے ظاہر کریں تب مساوات ۷ درج ذیل سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔

مبدا پر $f(x,y)$ کے لیے کلیہ ٹیلر

$$
\begin{aligned}
f(x,y) =& f(0,0) + xf_x + yf_y + \frac{1}{2!}(x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy}) \\
&+ \frac{1}{3!}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy}) + \cdots \\
&+ \frac{1}{n!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f + \frac{1}{(n+1)!}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f\Bigg|_{(cx,cy)}
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

اولین n تفرقی اجزاء کی قیمتیں $(0,0)$ پر حاصل کی جاتی ہیں۔ آخری جو کی قیمت مبدا سے (x,y) تک قطعہ پر کسی نقطہ (cx,cy) پر حاصل کی جاتی ہے۔

کلیہ ٹیلر ہمیں دو متغیری تفاعل کی کثیر رکنی تخمین مہیا کرتا ہے۔ اولین n تفرقی اجزاء کثیر رکنی دیتے ہیں جبکہ آخری جزو تخمینی خلل دیتا ہے۔ کلیہ ٹیلر کے اولین تین اجزاء تفاعل کی خط بندی دیتے ہیں۔ خط بندی سے بہتر نتائج کے حصول کے لیے ہم مزید اجزاء شامل کرتے ہیں۔

مثال ۱۳.۶۰: تفاعل $f(x,y) = \sin x \sin y$ کی مبدا کے قریب مربعی (دو درجی) تخمین تلاش کریں۔ یہ تخمین $|x| \leq 0.1$ اور $|y| \leq 0.1$ کی صورت میں کتنی درست ہو گی؟

حل

ہم مساوات ۸ میں $n = 2$ لیتے ہیں:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) =& f(0,0) + (xf_x + yf_y) + \frac{1}{2}(x^2 f_{xx} + 2xyf_{xy} + y^2 f_{yy}) \\
&+ \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})|_{(cx,yx)}
\end{aligned}
$$

۲۲۵۱۷ اس میں

$$\begin{aligned} f(0,0) &= \sin x \sin y|_{(0,0)} = 0, & f_{xx}(0,0,) &= -\sin x \sin y|_{(0,0)} = 0, \\ f_x(0,0) &= \cos x \sin y|_{(0,0)} = 0, & f_{xy}(0,0) &= \cos x \cos y|_{(0,0)} = 1, \\ f_y(0,0) &= \sin x \cos y|_{(0,0)} = 0, & f_{yy}(0,0) &= -\sin x \sin y|_{(0,0)} = 0 \end{aligned}$$

۲۲۵۱۸ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sin x \sin y \approx 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2}(x^2(0) + 2xy(1) + y^2(0)), \\ f(x,y) &= \sin x \sin y \approx xy \end{aligned}$$

۲۲۵۱۹ حاصل ہوتا ہے۔اس تخمین میں خلل

$$E(x,y) = \frac{1}{6}(x^3 f_{xxx} + 3x^2 y f_{xxy} + 3xy^2 f_{xyy} + y^3 f_{yyy})|_{(cx,cy)}$$

۲۲۵۲۰ ہوگا۔چونکہ تین رتبی تفارق sin اور cos کے حاصل ضرب ہیں لہٰذا ان کی مطلق قیمتیں کسی صورت 1 سے زیادہ نہیں ہو سکتی ہیں۔مزید $|x| \leq$
۲۲۵۲۱ 0.1 اور $|y| \leq 0.1$ ہیں لہٰذا

$$E(x,y) \leq \frac{1}{6}((0.1)^3 + 3(0.1)^3 + 3(0.1)^3 + (0.1)^3) \leq \frac{8}{6}(0.1)^3 \leq 0.00134 \quad \text{(اوپر کو پورو پور)}$$

۲۲۵۲۲ ہوگا۔اگر $|x| \leq 0.1$ اور $|y| \leq 0.1$ ہوں تب خلل کسی صورت 0.00134 سے تجاوز نہیں کرے گا۔ □

۲۲۵۲۳ **سوالات**

۲۲۵۲۴ **مربعی اور کعبی تخمین**

۲۲۵۲۵ سوال ۱۳.۴۹۳ تا سوال ۱۳.۵۰۲ میں مبدا پر کلیہ ٹیلر استعمال کرتے ہوئے مبدا کے قریب f کی مربعی اور کعبی تخمین تلاش کریں۔

۲۲۵۲۶ سوال ۱۳.۴۹۳: $f(x,y) = xe^y$

۲۲۵۲۷ سوال ۱۳.۴۹۴: $f(x,y) = e^x \cos y$

۲۲۵۲۸ سوال ۱۳.۴۹۵: $f(x,y) = y \sin x$

۲۲۵۲۹ سوال ۱۳.۴۹۶: $f(x,y) = \sin x \cos y$

۲۲۵۳۰ سوال ۱۳.۴۹۷: $f(x,y) = e^x \ln(1+y)$

۲۲۵۳۱ سوال ۱۳.۴۹۸: $f(x,y) = \ln(2x+y+1)$

۲۲۵۳۲ سوال ۱۳.۴۹۹: $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$

سوال ۱۳.۵۰۰: $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$

سوال ۱۳.۵۰۱: $f(x,y) = \frac{1}{1-x-y}$

سوال ۱۳.۵۰۲: $f(x,y) = \frac{1}{1-x-y+xy}$

سوال ۱۳.۵۰۳: مبدا پر $f(x,y) = \cos x \cos y$ کی مربعی تخمین کلیہ ٹیلر کی مدد سے حاصل کریں۔ تخمین کی خلل $|x| \leq 0.1$ اور $|y| \leq 0.1$ کی صورت میں تلاش کریں۔

سوال ۱۳.۵۰۴: مبدا پر $f(x,y) = e^x \sin y$ کی مربعی تخمین کلیہ ٹیلر کی مدد سے حاصل کریں۔ تخمین کی خلل $|x| \leq 0.1$ اور $|y| \leq 0.1$ کی صورت میں تلاش کریں۔

باب ۱۴

تکمل بالکثرت

جائزہ

تکمل سے حل دو اور تین متغیری تفاعل کی نوعیت تکمل سے حل ایک متغیری تفاعل کے مسائل کی طرح ہوتی ہے، بس یہ زیادہ عمومی ہوتے ہیں۔ گزشتہ ابواب کی طرح ہم ایک متغیری تفاعل کی معلومات استعمال کرتے ہوئے دو اور تین متغیری تفاعل کا حساب آگے بڑھا سکتے ہیں۔

۱۴.۱ دوہرا تکملات

ہم مستوی xy میں محدود خطہ پر استراری تفاعل $f(x,y)$ کا تکمل حاصل کرنا سکھاتے ہیں۔ یہاں متعارف کیے جانے والا دوہرا (دوگنا) تکمل اور باب ۵ میں متعارف کردہ ایک گنا تکمل میں بہت ساری یکساں خوبیاں پائی جاتی ہیں۔ ہر دوہرا تکمل کی قیمت ایک گنا تکمل کی ترکیب سے مراحل میں حاصل کی جا سکتی ہے۔

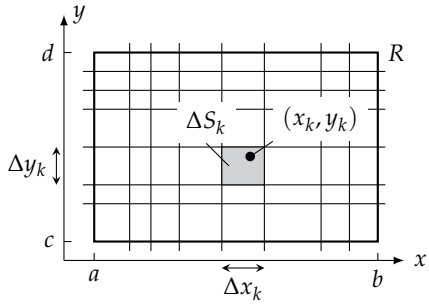
مستطیل پر دوہرا تکملات

فرض کریں تفاعل $f(x,y)$ درج ذیل مستطیل خطہ R میں معین ہے۔

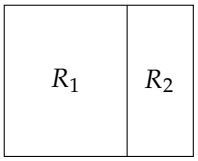
$$R: \quad a \le x \le b, \quad c \le y \le d$$

ہم تصور میں R پر x اور محور y کے متوازی لکیروں کا ایک جال بچھاتے ہیں جو R کو چھوٹے چھوٹے رقبوں $\Delta S = \Delta x \Delta y$ میں تقسیم کرتے ہیں (شکل ۱.۱۴)۔ ہم ان رقبوں کو کسی ترتیب ΔS_1 ، ΔS_2 ، ۰ ۰ ۰ ، ΔS_n سے شمار کر کے ہر چھوٹے رقبہ ΔS_k میں ایک نقطہ (x_k, y_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ J_n لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta S_k \tag{۱}$$



شکل ۱.۱۴: خطہ R کو مستطیل جال چھوٹے مستطیل خانوں میں تقسیم کرتا ہے جن کے رقبے $\Delta S_k = \Delta x_k \Delta y_k$ ہوں گے۔



$$\iint\limits_{R_1 \cup R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}S$$

شکل ۲.۱۴: دوہرا تکملات بھی ایک گنا تکملات کی طرح مجموعیت دائرہ کار کی خاصیت رکھتے ہیں۔

۲۲۵۵۵ اگر پورے R میں f استراری ہو، تب، ہم جال کے خانوں کو اتنا چھوٹا کر سکتے ہیں کہ Δx اور Δy دونوں صفر تک پہنچنے کی کوشش کریں۔ ایسا کرنے
۲۲۵۵۶ سے مساوات ۱ میں دیا گیا مجموعہ ایک تحدیدی قیمت تک پہنچے گا جس کو R پر f کا **دوہرا تکمل**[1] کہتے ہیں۔ اس کو علامتی طور پر

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \quad \text{یا} \quad \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

۲۲۵۵۷ لکھا جاتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \lim_{\Delta S \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \Delta S_k \tag{۲}$$

۲۲۵۵۸ واحد متغیری تفاعل کی طرح، جب تک خانہ بندی کے دونوں معیار صفر تک پہنچتے ہوں، وقفات $[a,b]$ اور $[c,d]$ کی طرز تقسیم کا مجموعہ کی حد پر کوئی
۲۲۵۵۹ اثر نہیں پایا جائے گا۔ مساوات ۲ میں حد کی قیمت، ناتور قبات ΔS_k کی ترتیب شمار پر اور نا ہی ہر ΔS_k میں نقطہ (x_k, y_k) کے مقام پر منحصر ہو گی۔
۲۲۵۶۰ انفرادی مجموعات J_n کی قیمتیں ان پر ضرور منحصر ہوں گی لیکن ان مجموعات کی حد آخر میں وہی ایک ہو گی۔ استراری f کے لیے اس حد کی وجودیت اور یکتائی
۲۲۵۶۱ کے ثبوت اعلیٰ نصاب میں دیے جاتے ہیں۔ دوہرا تکمل کی وجودیت کے لیے f کا استرار کافی لیکن غیر لازمی شرط ہے۔ یہ حد بہت سارے غیر استراری تفاعل
۲۲۵۶۲ کے لیے بھی موجود ہے۔

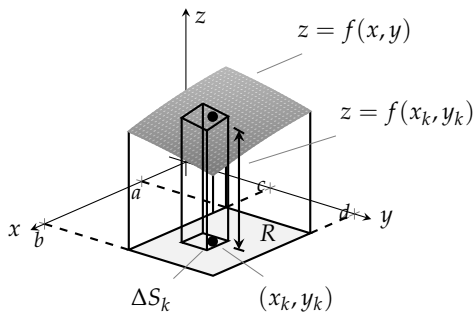
۲۲۵۶۳ دوہرا تکملات کے خواص

۲۲۵۶۴ ایک گنا تکملات کی طرح، دوہرا تکملات کے ایسا الجبرائی خواص پائے جاتے ہیں جو حساب اور عملی استعمال کے لیے کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

۲۲۵۶۵ ۱. $\iint\limits_R kf(x,y)\,\mathrm{d}S = k \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S$ جہاں k کوئی مستقل ہے۔

---

[1] doubleintegral



شکل ۱۴.۳: ٹھوس جسم کو تخمینی طور پر متعدد مستطیل منشور نما سے ظاہر کرتے ہوئے ہم زیادہ عمومی منشور نما کے حجم کو بطور دوہرا تکمل تعین کر سکتے ہیں۔ یہاں منشور کا حجم R پر $f(x, y)$ کا دوہرا تکمل ہو گا۔

۲۲۵۶۶ ب. $$\iint\limits_R (f(x,y) \mp g(x,y))\,\mathrm{d}S = \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \mp \iint\limits_R g(x,y)\,\mathrm{d}S$$

۲۲۵۶۷ ج. اگر R پر $f(x, y) \geq 0$ ہو تب $\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \geq 0$ ہو گا۔

۲۲۵۶۸ د. اگر R پر $f(x, y) \geq g(x, y)$ ہو تب $\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \geq \iint\limits_R g(x,y)\,\mathrm{d}S$ ہو گا۔

۲۲۵۶۹ یہ خواص ایک گنا تکملات کے خواص کی طرح ہیں (حصہ ۵.۶)۔ ان کے علاوہ درج ذیل مجموعیت کا خواص بھی پایا جاتا ہے

۲۲۵۷۰ ھ. $$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int\limits_{R_1} f(x,y)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}S$$

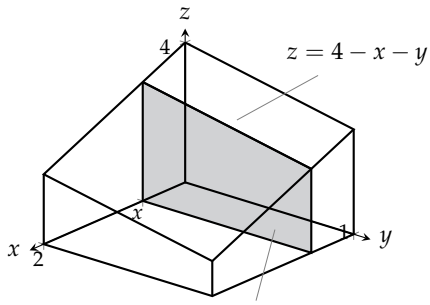
۲۲۵۷۱ جہاں ایک دوسرے کو ناڈھانپنے والے مستطیل R_1 اور R_2 خطوں کا اشتراک R ہے (شکل ۱۴.۲)۔ یہاں بھی ہم ثبوت پیش نہیں کریں گے۔

۲۲۵۷۲ دوہرا تکملات بطور حجم

۲۲۵۷۳ مثبت $f(x, y)$ کی صورت میں ہم مستطیل خطہ R پر f کے دوہرا تکمل کو ٹھوس منشور نما کا حجم تصور کر سکتے ہیں جس کی نچلا سطح R اور بالائی سطح
۲۲۵۷۴ $z = f(x, y)$ ہو گی (شکل ۱۴.۳)۔ مجموعہ $J_n = \sum f(x_k, y_k)\Delta S_k$ میں ہر رکن $f(x_k, y_k)\Delta S_k$ ایک انتصابی مستطیلی منشور
۲۲۵۷۵ نما کا حجم ہو گا جو بنیاد ΔS_k پر سیدھا کھڑے ٹھوس خطے کے حجم کی تخمینی قیمت ہو گی۔ یوں مجموعہ J_n پورے ٹھوس جسم کے حجم کی تخمین ہو گی۔ اس حجم کی
۲۲۵۷۶ تعریف درج ذیل ہے۔

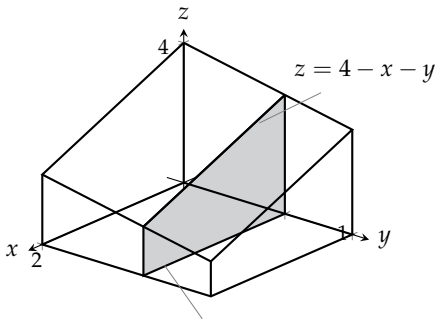
$$\text{حجم} = \lim J_n = \iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \tag{۳}$$

۲۲۵۷۷ جیسا ہم توقع کرتے ہیں، حجم تلاش کرنے کی مذکورہ بالا زیادہ عمومی ترکیب سے حاصل نتائج، باب ۶ میں پیش کی گئی ترکیب کے نتائج کے عین مطابق ہیں۔ ہم اس
۲۲۵۷۸ حقیقت کا ثبوت یہاں پیش نہیں کریں گے۔



$S(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\,\mathrm{d}y$

شکل ۱۴.۴: رقبہ عمودی تراش $S(x)$ حاصل کرنے کے لیے ہم x کو مستقل ٹھراتے ہوئے y کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔



$S(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y)\,\mathrm{d}x$

شکل ۱۴.۵: رقبہ عمودی تراش $S(y)$ حاصل کرنے کے لیے ہم y کو مستقل ٹھراتے ہوئے x کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔

۲۲۵۷۹ دوہرا تکمل کے حصول کا مسئلہ فوبینی

۲۲۵۸۰ فرض کریں ہم مستوی xy میں مستطیل خطہ $R : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1$ پر مستوی $z = 4 - x - y$ کے نیچے حجم تلاش کرنا
۲۲۵۸۱ چاہتے ہیں۔ اگر ہم حصہ ۶.۲ کی ترکیب استعمال کرتے ہوئے محور x کے عمودی ٹکیاں لیں (شکل ۱۴.۴) تب حجم

$$\int_{x=0}^{x=2} S(x)\,\mathrm{d}x \tag{۴}$$

۲۲۵۸۲ ہو گا جہاں x پر رقبہ عمودی تراش $S(x)$ ہے۔ ہم x کی ہر قیمت کے لیے درج ذیل تکمل سے $S(x)$ معلوم کر سکتے ہیں

$$S(x) = \int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\,\mathrm{d}y \tag{۵}$$

۲۲۵۸۳ جو منحنی $z = 4 - x - y$ کے نیچے، x پر عمودی تراش کے مستوی میں، رقبہ ہو گا۔ رقبہ $S(x)$ کے حصول میں x کو مستقل تصور کرتے ہوئے
۲۲۵۸۴ y کے لحاظ سے تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔ مساوات ۳ اور مساوات ۴ کو ملا کر پورے ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\text{حجم} &= \int_{x=0}^{x=2} S(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=1} (4 - x - y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{x=0}^{x=2} \left[4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}x = \int_{x=0}^{x=2} \left(\frac{7}{2} - x \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{7}{2}x - \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 5
\end{aligned} \tag{۶}$$

۲۲۵۸۵ اگر ہم حجم تلاش کرنے کی صرف بات کرنا چاہتے ہوں تب ہم درج ذیل لکھیں گے۔

$$\text{حجم} = \int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

۲۲۵۸۶ دائیں ہاتھ الجبرائی فقرہ، جسے **بارہا تکملہ**[۲] یا **اعادہ تکملہ**[۳] کہتے ہیں، کہتا ہے کہ حجم تلاش کرنے کی خاطر، پہلے x کو مستقل ٹھراتے ہوئے y کے لحاظ سے
۲۲۵۸۷ $4 - x - y$ کا تکمل $y = 0$ تا $y = 1$ لیں اور اس کے بعد y کو مستقل ٹھراتے ہوئے، x کے لحاظ سے حاصل نتیجہ کا تکمل $x = 0$ تا
۲۲۵۸۸ $x = 2$ لیں۔

۲۲۵۸۹ اگر ہم محور y کے عمودی ٹکیاں لیتے تب نتیجہ کیا ہوتا (شکل ۱۴.۵)؟ ایسی صورت میں ایک علامتی رقبہ عمودی تراش، y کا تفاعل ہوگا:

$$S(y) = \int_{x=0}^{x=2} (4 - x - y)\,\mathrm{d}x = \left[4x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_{x=0}^{x=2} = 6 - 2y \tag{۷}$$

۲۲۵۹۰ یوں پورے جسم کا حجم

$$\text{حجم} = \int_{y=0}^{y=1} S(y)\,\mathrm{d}y = \int_{y=0}^{y=1} (6 - 2y)\,\mathrm{d}y = \left[6y - y^2\right]_0^1 = 5 \tag{۸}$$

۲۲۵۹۱ ہوگا جو ہماری گزشتہ حساب کے عین مطابق ہے۔

۲۲۵۹۲ ہم اب حجم کی بات کرتے ہوئے

$$\text{حجم} = \int_0^1 \int_0^2 (4 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

۲۲۵۹۳ لکھ سکتے ہیں۔ دائیں ہاتھ الجبرائی فقرہ کہتا ہے کہ حجم تلاش کرنے کی خاطر، پہلے y کو مستقل ٹھراتے ہوئے x کے لحاظ سے $4 - x - y$ کا تکمل $x =$
۲۲۵۹۴ 0 تا $x = 2$ لیں۔ اس کے بعد x کو مستقل ٹھراتے ہوئے x کے لحاظ سے حاصل نتیجہ کا تکمل $y = 0$ تا $y = 1$ لیں۔ اس بار ہم بارہا تکمل کے
۲۲۵۹۵ حصول میں پہلے x اور بعد میں y کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں جو مساوات ۶ میں تکمل کے ترتیب کا الٹ ہے۔

۲۲۵۹۶ مذکورہ بالا دو بار حجم کے حساب کا مستطیل خطہ $R:\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1$ پر درج ذیل دوہرا تکمل کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

$$\iint_R (4 - x - y)\,\mathrm{d}S$$

۲۲۵۹۷ اس کا جواب ہے کہ یہ دونوں تکمل اس دوہرا تکمل کی قیمت دیتے ہیں۔ مسئلہ فوبینی کہتا ہے کہ مستطیل خطہ پر استمراری تفاعل کا دوہرا تکمل، کسی بھی ترتیب سے،
۲۲۵۹۸ بارہا تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ (جناب فوبینی نے اس مسئلہ کو زیادہ عمومیت کے ساتھ ثابت کیا لیکن فی الحال اس کو ہم درج ذیل بیان کرتے ہیں۔)

---

[۲] repeatedintegral
[۳] iteratedintegral

۲۲۵۹۹ مسئلہ ۱۴.۱: **مسئلہ فوبینی (پہلا روپ)**

۲۲۶۰۰ اگر مستطیل خطہ $R:\ a \le x \le b,\ c \le y \le d$ پر $f(x,y)$ استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

۲۲۶۰۱

۲۲۶۰۲ مسئلہ فوبینی کہتا ہے کہ مستطیل خطہ پر دوہرا تکمل کی قیمت بارہا تکمل سے حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں دوہرا تکمل کے حصول میں ہم باری باری ایک ایک متغیر کے
۲۲۶۰۳ لحاظ سے تکمل لے سکتے ہیں۔

۲۲۶۰۴ مسئلہ فوبینی مزید کہتا ہے کہ دوہرا تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے ہم بارہا تکمل کسی بھی ترتیب سے حل کر سکتے ہیں، جو بہت کارآمد ثابت ہوتا ہے (جیسا ہم مثال
۲۲۶۰۵ ۱۴.۳ میں دیکھتے ہیں)۔ بالخصوص حجم کی تلاش میں ہم محور x یا محور y کے عمودی سطحیں لے کر ٹکیاں کاٹ سکتے ہیں۔

۲۲۶۰۶ مثال ۱۴.۱: خطہ $R:\ 0 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 1$ میں $f(x,y) = 1 - 6x^2y$ کے دوہرا تکمل
۲۲۶۰۷ $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S$ کی قیمت تلاش کریں۔

۲۲۶۰۸ **حل**

۲۲۶۰۹ مسئلہ فوبینی کے تحت درج ذیل ہو گا:

$$\begin{aligned}\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S &= \int_{-1}^1 \int_0^2 (1-6x^2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \left[x - 2x^3y\right]_{x=0}^{x=2} \mathrm{d}y \\ &= \int_{-1}^1 (2-16y)\,\mathrm{d}y = \left[2y - 8y^2\right]_{-1}^1 = 4\end{aligned}$$

۲۲۶۱۰ تکمل کی ترتیب بدلنے سے بھی یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \int_{-1}^1 (1-6x^2y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \left[y - 3x^2y^2\right]_{y=-1}^{y=1} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^2 \left[(1-3x^2) - (-1-3x^2)\right] \mathrm{d}x = \int_0^2 2\,\mathrm{d}x = 4\end{aligned}$$

۲۲۶۱۱ □

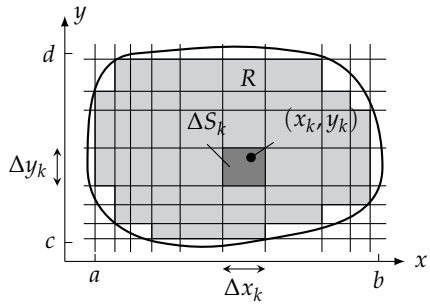
۲۲۶۱۲ آپ سے گزارش کی جاتی ہے کہ کمپیوٹر پر دوہرا تکملات کا حصول سیکھیں۔ کمپیوٹر الجبرائی پروگرام میکسما[۴] میں یہ عمل درج ذیل ہو گا۔

۲۲۶۱۳

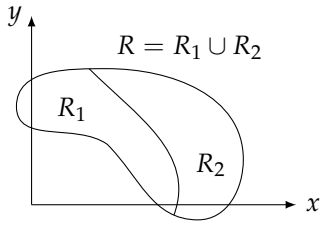
میکسما احکامات	درکار دوہرا تکمل
integrate(integrate($x^2 * y, x$), y);	$\iint x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
integrate(integrate($x * \cos(y), x, 0, 1$), y, $-\%pi/3$, $\%pi/4$);	$\int_{-\pi/3}^{\pi/4} \int_0^1 x\cos y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

۲۲۶۱۴

[۴] wxMaxima



شکل ۱۴.۶: غیر مستطیل محدود خطہ کو مستطیل جال سے خانہ بند کیا گیا ہے۔



$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \iint_{R_1} f(x,y)\,\mathrm{d}S + \iint_{R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}S$$

شکل ۱۴.۷: مستطیل خطہ کی مجموعیت کی خاصیت ان غیر مستطیل خطوں کے لیے بھی کارآمد ہے جن کی پوری سرحد استمراری منحنیات سے بنی ہو۔

۲۲۶۱۵ محدود غیر مستطیل خطہ پر دوہرا تکملات

۲۲۶۱۶ محدود غیر مستطیل خطہ پر تفاعل $f(x,y)$ کا دوہرا تکمل تعین کرنے کی خاطر ہم اب بھی R پر مستطیل جال بچھاتے ہیں (شکل ۱۴.۶) لیکن جزوی مجموعہ
۲۲۶۱۷ میں صرف ان چھوٹے رقبوں $\Delta S = \Delta x \Delta y$ کو شامل کرتے ہیں جو مکمل طور پر اس خطہ میں پائے جاتے ہوں۔ ہم ان چھوٹے رقبوں کو کسی بھی ترتیب
۲۲۶۱۸ سے شمار کرتے ہوئے، ہر رقبہ ΔS_k میں کوئی نقطہ (x_k, y_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

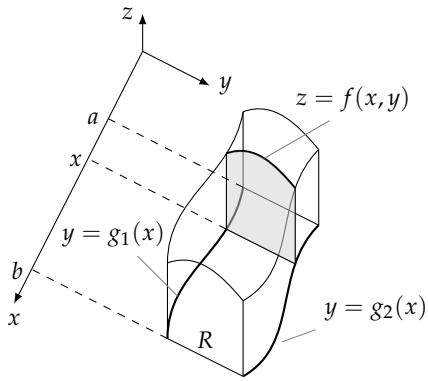
$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

۲۲۶۱۹ اس مجموعہ میں اور مستطیل خطے پر مجموعہ (مساوات ۱) میں صرف اتنا فرق ہے کہ اب شامل کردہ تمام ΔS_k مل کر خطہ R کو مکمل طور پر نہیں ڈھانپتے
۲۲۶۲۰ ہیں۔ البتہ جیسے جیسے جال کے خانوں کا رقبہ چھوٹے سے چھوٹا ہو، J_n میں اجزاء کی تعداد بڑھتی جائے گی اور R کا زیادہ سے زیادہ حصہ J_n میں شامل ہو گا۔
۲۲۶۲۱ اگر f استمراری ہو اور R کی سرحد، متغیر x کی متناہی تعداد کے استمراری تفاعل اور (یا) متغیر y کی متناہی تعداد کے استمراری تفاعل کی ترسیمات، ایک
۲۲۶۲۲ دوسرے کے ساتھ جوڑ کر حاصل کی گئی ہو، تب، بشرطیکہ مستطیل جال کے خانوں کے معیار غیر مختارانہ طور پر صفر کو پہنچتے ہوں، مجموعہ J_n کی حد موجود ہو
۲۲۶۲۳ گی۔ ہم اس حد کو R پر f کا **دوہرا تکمل** کہتے ہیں:

$$\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \lim_{\Delta S \to 0} \sum f(x, y_k)\Delta S_k$$

۲۲۶۲۴ یہ حد کم پابندی کی صورت میں بھی موجود ہو سکتا ہے۔

۲۲۶۲۵ غیر مستطیل خطہ پر استمراری تفاعل کے دوہرا تکملات کے وہی خواص ہوں گے جو مستطیل خطہ پر دوہرا تکملات کے ہوتے ہیں۔ دائرہ کار کی خواص مجموعیت کہتی
۲۲۶۲۶ ہے کہ اگر R کو ایسے دو خطوں R_1 اور R_2 میں تقسیم کیا جائے جو ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوں اور جن کی سرحدیں متناہی تعداد کے قطعات یا ہموار



شکل ۱۴.۸: سایہ دار انتصابی تکیہ کا رقبہ $S(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$ ہو گا۔ اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کرنے کے لیے ہم $x = a$ سے $x = b$ تک $S(x)$ کا تکمل لیں گے۔

۲۲۲۷ منحنیات سے بنی ہوئی ہوں (مثال کے لیے شکل ۱۴.۷ دیکھیں) تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,\mathrm{d}S + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,\mathrm{d}S$$

۲۲۲۸ ہم R پر استمراری اور مثبت f کی صورت میں R اور $f(x,y) = z$ کے بیچ ٹھوس جسم کے حجم کی تعریف پہلے کی طرح اب بھی
۲۲۲۹ $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S$ کرتے ہیں۔

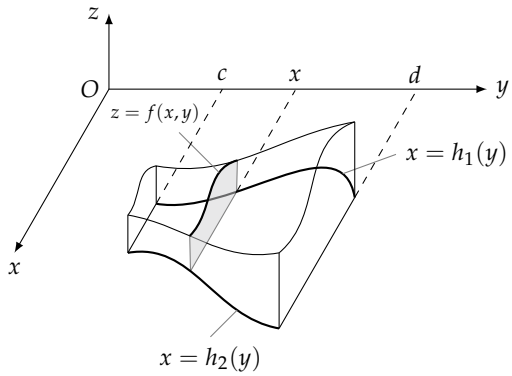
۲۲۳۰ اگر شکل ۱۴.۸ میں مستوی xy میں دکھائے گئے خطہ کی طرح R ہو اور حجم کی "بالائی" حد $y = g_2(x)$، "زیریں" حد $y = g_1(x)$، اور
۲۲۳۱ اطراف کی حدود خط $x = a$ اور خط $x = b$ ہوں تب ہم حجم H کو ٹکیوں کی ترکیب سے حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم پہلے رقبہ عمودی تراش تلاش کرتے
۲۲۳۲ ہیں

$$S(x) = \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

۲۲۳۳ اور اس کے بعد $x = a$ سے $x = b$ تک $S(x)$ کا تکمل لیتے ہوئے بار ہا تکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

$$H = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \tag{۹}$$

۲۲۳۴ اسی طرح اگر شکل ۱۴.۹ میں دکھائے گئے خطہ کی طرح R ہو اور حجم کی حدود $x = h_2(y)$ ، $x = h_1(y)$ اور خط $y = c$ اور $y = d$



شکل ۱۴.۹: سایہ دار تکیہ کا رقبہ $S(y) = \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ ہے۔
ٹھوس جسم کا حجم $\int_c^d S(y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہو گا۔

۲۲۳۳۵ ہوں تب تکیوں کی ترکیب سے بار ہا تکمل سے حجم تلاش کیا جا سکتا ہے:

$$H = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{۱۰}$$

۲۲۳۳۶ ہم نے دیکھا کہ مساوات ۹ اور مساوات ۹، جو R پر f کے دوہرا تکمل ہیں، دونوں حجم دیتے ہیں۔ اس کی وجہ مسئلہ فوبینی کی درج ذیل زیادہ مضبوط صورت ہے۔

۲۲۳۳۷ مسئلہ ۱۴.۲: **مسئلہ فوبینی (مضبوط روپ)**

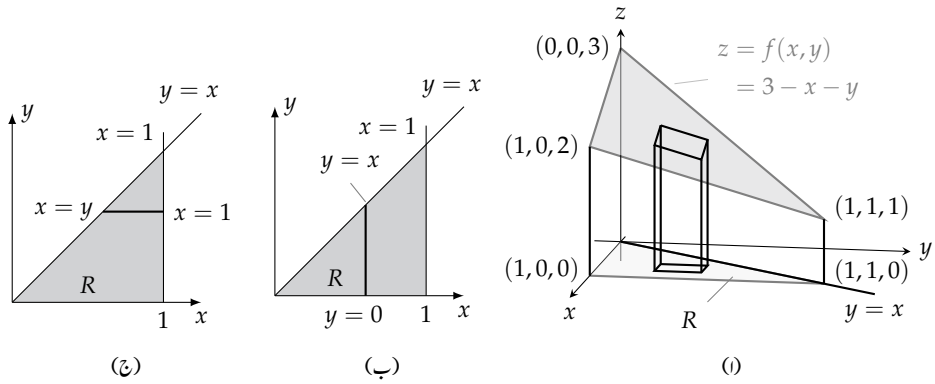
۲۲۳۳۸ فرض کریں خطہ R پر f استمراری ہے۔

۲۲۳۳۹ ا. اگر R کو $a \le x \le b$ ، $g_1(x) \le y \le g_2(x)$ تعین کرتے ہوں جہاں $[a,b]$ پر g_1 اور g_2 استمراری ہوں تب درج
۲۲۳۴۰ ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

۲۲۳۴۱ ب. اگر R کو $c \le y \le d$ ، $h_1(y) \le y \le h_2(y)$ تعین کرتے ہوں جہاں $[c,d]$ پر h_1 اور h_2 استمراری ہوں تب درج ذیل
۲۲۳۴۲ ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



شکل ۱۰.۱۴: منشور کا حجم (مثال ۲.۱۴)

مثال ۲.۱۴: ایک منشور جس کا قاعدہ مستوی xy میں ایک مثلث ہو، جس کے اضلاع محور x، خط $x = 1$ اور خط $y = x$ ہوں اور جس کا راس درج ذیل مستوی میں پایا جاتا ہو، کا حجم تلاش کریں۔

$$z = f(x,y) = 3 - x - y$$

حل

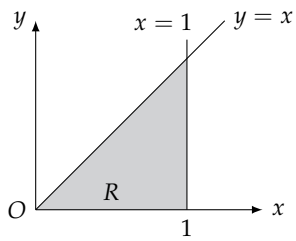
ہم دیکھتے ہیں (شکل ۱۰.۱۴-ا) کہ 0 اور 1 تک کسی بھی x کے لیے y کی قیمت $y = 0$ تا $y = x$ ہو گی (شکل ۱۰.۱۴-ب)۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
H &= \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[3y - xy - \frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=x} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(3x - \frac{3x^2}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right]_{x=0}^{x=1} = 1
\end{aligned}$$

تکملات کی ترتیب الٹ کرنے سے درج ذیل ہو گا (شکل ۱۰.۱۴-ج)۔

$$\begin{aligned}
H &= \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \left[3x - \frac{x^2}{2} - xy\right]_{x=y}^{x=1} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{y^2}{2} + y^2\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\frac{5}{4} - 4y + \frac{3}{2}y^2\right) \mathrm{d}y = \left[\frac{5}{2}y - 2y^2 + \frac{y^3}{2}\right]_{y=0}^{y=1} = 1
\end{aligned}$$

دونوں تکملات کے جواب ایک سے ہیں۔ ہمیں یہی توقع تھی۔ □



شکل ۱۱.۱۴: تکمل کا دائرہ کار برائے مثال ۳.۱۴

۲۲۶۵۱ اگرچہ مسئلہ فوبینی ہمیں یقین دھیانی کرتا ہے کہ دوہرا تکمل کی قیمت بارہا تکمل میں کسی بھی ترتیب سے تکملات لیتے ہوئے حاصل کیا جا سکتا ہے، حقیقت میں ایک
۲۲۶۵۲ تکمل کا حصول دوسرے سے آسان ہو سکتا ہے۔ اگلی مثال میں آپ ایسی صورت حال دیکھتے ہیں۔

۲۲۶۵۳ مثال ۳.۱۴: مستوی xy میں محور x، خط $x = 1$ اور خط $y = x$ کے بیچ خطہ R ہے۔ درج ذیل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\iint\limits_R \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}S$$

۲۲۶۵۴ **حل**

۲۲۶۵۵ تکمل کا خطہ شکل ۱۱.۱۴ میں دکھایا گیا ہے۔ اگر ہم پہلے y اور بعد میں x کے لحاظ سے تکمل لیں تب

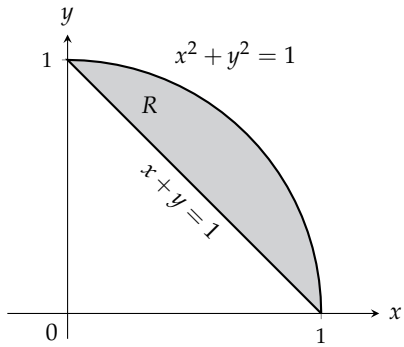
$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left(y\frac{\sin x}{x}\Big]_{y=0}^{y=x}\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin x\,\mathrm{d}x \\ &= -\cos(1) + 1 \approx 0.46\end{aligned}$$

۲۲۶۵۶ ہو گا۔ اگر ہم تکمل لینے کی ترتیب الٹ کریں تب

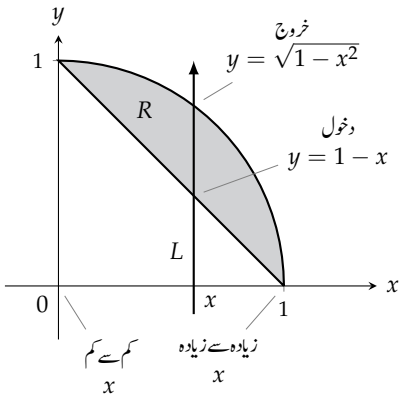
$$\int_0^1 \int_y^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

۲۲۶۵۷ ہو گا اور چونکہ $\int ((\sin x)/x)\,\mathrm{d}x$ کو بنیادی تفاعل کی صورت میں نہیں لکھا جا سکتا ہے لہٰذا ہم اس کو حل کرنے سے قاصر ہیں۔

۲۲۶۵۸ قبل از وقت یہ جاننا ممکن نہیں کہ کس ترتیب سے تکمل لینے سے ہمیں آسانی ہو گی لہٰذا اس پر زیادہ مت سوچیں اور کسی ایک ترتیب سے حل کرنے کی کوشش
۲۲۶۵۹ کریں اور اگر مشکلات پیش آئیں تب تکمل کی ترتیب الٹ کر کے دوبارہ کوشش کریں۔ □



(ا) تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں اور تحدیدی منحنیات کی نشاندہی کریں۔



(ب) خطہ R میں جس نقاط پر انتصابی لکیر داخل اور خارج ہوتی ہے، ان کی نشاندہی کریں۔ یہی تکمل کے y حد ہوں گے۔ تمام انتصابی لکیروں کو شامل کرنے والے x حدود کی نشاندہی کریں۔ یہی تکمل کے x حد ہوں گے۔

شکل ۱۲.۱۴: تکمل کی حدوں کی تلاش۔

تکمل کی حدوں کی تلاش

دوہرا تکمل کی قیمت کے حصول میں سب سے مشکل کام تکمل کی حدیں تلاش کرنا ہو سکتا ہے۔ خوش قسمتی سے ایک اچھا طریقہ کار موجود ہے جس پر ہم چل سکتے ہیں۔

تکمل کی حدیں تلاش کرنے کا طریقہ کار

(ا) خطہ R پر $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}S$ کی قیمت حاصل کرتے ہوئے پہلے y اور بعد میں x کے لحاظ سے تکمل لینے کے لیے درج ذیل اقدام کریں۔

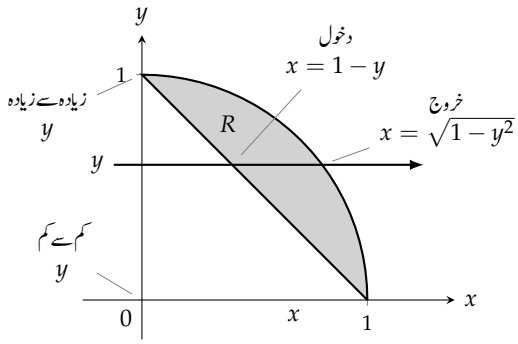
۱. خاکہ: تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں اور اس کی سرحدی منحنیات پر نام و نشان لگائیں (شکل ۱۲.۱۴-ا)۔

۲. تکمل کی y حدیں: بڑھتی y رخ خطہ R سے گزرتا ہوا انتصابی خط L کھینچیں۔ جن مقامات پر L اس خطہ میں داخل اور اس سے خارج ہوتا ہے، یہ تکمل کی y حدیں ہوں گی (شکل ۱۲.۱۴-ب)۔

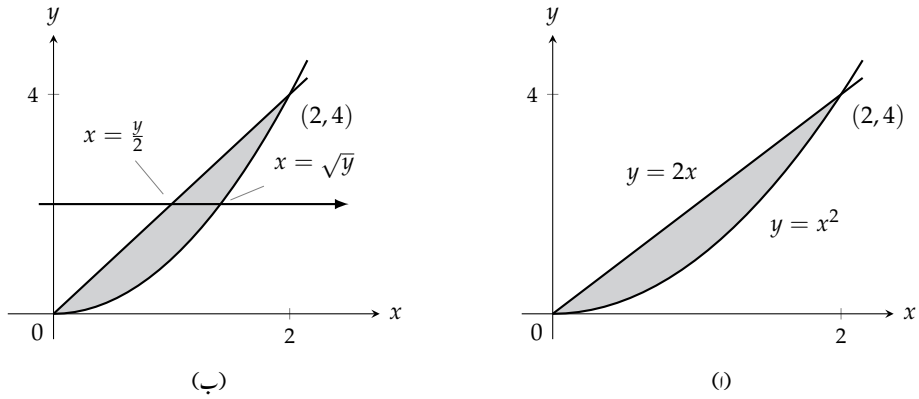
۳. تکمل کی x حدیں: متغیر x کی وہ قیمتیں منتخب کریں جن میں R سے گزرتی ہوئی تمام انتصابی لکیریں شامل ہوں (شکل ۱۲.۱۴-ب)۔ یہ قیمتیں تکمل کی x حدیں ہوں گی۔

تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_{x=0}^{x=1}\int_{y=1-x}^{y=\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$



شکل ۱۳.۱۴: بارہا تکمل میں ترتیب الٹ کرنے سے R پر افقی لکیریں کھینچی جائیں گی۔



شکل ۱۴.۱۴: دو منحنیات کے بیچ خطہ (مثال ۴.۱۴)

۲۲۶۷۱ (ب) اسی دوہرا تکمل کو بطور بارہا تکمل حل کرتے ہوئے، ترتیب الٹ کرنے سے، انتصابی لکیروں کے بجائے افقی لکیریں استعمال کریں (شکل ۱۳.۱۴)۔ تکمل
۲۲۶۷۲ درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S = \int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

۲۲۶۷۳ مثال ۴.۱۴: درج ذیل تکمل کے خطہ تکمل کا خاکہ بنائیں اور تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے اس کا مساوی تکمل لکھیں۔

$$\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4x+2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

حل

تکمل کا خطہ، عدم مساوات $x^2 \le y \le 2x$ اور $0 \le x \le 2$ دیتے ہیں۔ یوں اس خطہ کی حدیں، خط $x = 0$، خط $x = 2$ اور منحنیات $y = x^2$ اور $y = 2x$ ہوں گی (شکل ۱۴.۱۴-ا)۔

تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے ہم اس خطہ پر افقی لکیریں کھینچتے ہیں۔ یہ لکیریں اس خطہ میں $x = \frac{y}{2}$ پر داخلی ہوتی ہیں اور $x = \sqrt{y}$ پر اس سے خارج ہوتی ہیں۔ ان تمام افقی لکیریں کو شامل کرنے کے لیے ہمیں $y = 0$ سے $y = 4$ تک لینا ہو گا (شکل ۱۴.۱۴-ب)۔ یوں متبادل تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (4x+2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ان دونوں تکملات کے جواب 8 ہے۔ □

سوالات

تکمل کے خطہ کی تلاش اور دوہرا تکملات

سوال ۱۴.۱ تا سوال ۱۴.۱۰ میں تکمل کے خطے کا خاکہ بنائیں اور تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱: $\int_0^3 \int_0^2 (4-y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۲: $\int_0^3 \int_{-2}^0 (x^2y-2xy)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۳: $\int_{-1}^0 \int_{-1}^1 (x+y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال ۱۴.۴: $\int_{\pi}^{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin x+\cos y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال ۱۴.۵: $\int_0^{\pi} \int_0^{x} x\sin y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۶: $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۷: $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال ۱۴.۸: $\int_1^2 \int_y^{y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال ۱۴.۹: $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3e^{xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال ۱۴.۱۰: $\int_1^4 \int_0^{\sqrt{x}} \frac{3}{2}e^{y/\sqrt{x}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۱۱ تا سوال ۱۴.۱۶ میں f کو دیے ہوئے خطہ پر تکمل کریں۔

سوال ۱۴.۱۱: ربع اول میں لکیر $y = x$، $y = 2x$، $x = 1$ اور $x = 2$ کے بیچ خطہ پر تفاعل $f(x,y) = \frac{x}{y}$ کا تکمل۔

۲۲۶۹۷ سوال ۱۴.۱۲: چوکور $1 \le x \le 2,\ 1 \le y \le 2$ پر تفاعل $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ کا تکمل۔

۲۲۶۹۸ سوال ۱۴.۱۳: مثلث خطہ جس کے راس $(0,0)$ ، $(1,0)$ اور $(0,1)$ ہیں میں تفاعل $f(x,y) = x^2 + y^2$ کا تکمل۔

۲۲۶۹۹ سوال ۱۴.۱۴: مستطیل $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le 1$ پر تفاعل $f(x,y) = y \cos xy$ کا تکمل۔

۲۲۷۰۰ سوال ۱۴.۱۵: مستوی uv کے ربع اول میں لکیر $u + v = 1$ کے نیچے تفاعل $f(u,v) = v - \sqrt{u}$ کا تکمل۔

۲۲۷۰۱ سوال ۱۴.۱۶: مستوی st کے ربع اول میں منحنی $s = \ln t$ کے اوپر جانب $t = 1$ سے $t = 2$ تک تفاعل $f(s,t) = e^s \ln t$ کا
۲۲۷۰۲ تکمل۔

۲۲۷۰۳ سوال ۱۴.۱۷ تا سوال ۱۴.۲۰ میں تکملات دیے گئے ہیں۔ ان تکملات کے خطوں کا خاکہ بنائیں اور تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

۲۲۷۰۴ سوال ۱۴.۱۷: $\int_{-2}^{0} \int_{v}^{-v} 2 \, \mathrm{d}p \, \mathrm{d}v$ مستوی pv

۲۲۷۰۵ سوال ۱۴.۱۸: $\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-s^2}} 8t \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s$ مستوی st

۲۲۷۰۶ سوال ۱۴.۱۹: $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \int_{0}^{\sec t} 3 \cos t \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}t$ مستوی tu

۲۲۷۰۷ سوال ۱۴.۲۰: $\int_{0}^{3} \int_{-2}^{4-2u} \frac{4-2u}{v^2} \, \mathrm{d}v \, \mathrm{d}u$ مستوی uv

۲۲۷۰۸

۲۲۷۰۹ تکمل کی الٹ ترتیب

۲۲۷۱۰ سوال ۱۴.۲۱ تا سوال ۱۴.۳۰ میں تکمل کے خطہ کا خاکہ بنا کر معادل الٹ ترتیب کا تکمل لکھیں۔

۲۲۷۱۱ سوال ۱۴.۲۱: $\int_{0}^{1} \int_{2}^{4-2x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

۲۲۷۱۲ سوال ۱۴.۲۲: $\int_{0}^{2} \int_{y-2}^{0} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

۲۲۷۱۳ سوال ۱۴.۲۳: $\int_{0}^{1} \int_{y}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

۲۲۷۱۴ سوال ۱۴.۲۴: $\int_{0}^{1} \int_{1-x}^{1-x^2} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

۲۲۷۱۵ سوال ۱۴.۲۵: $\int_{0}^{1} \int_{1}^{e^x} \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

۲۲۷۱۶ سوال ۱۴.۲۶: $\int_{0}^{\ln 2} \int_{e^y}^{2} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

۲۲۷۱۷ سوال ۱۴.۲۷: $\int_{0}^{3/2} \int_{0}^{9-4x^2} 16x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

۲۲۷۱۸ سوال ۱۴.۲۸: $\int_{0}^{2} \int_{0}^{4-y^2} y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

۲۲۷۱۹ سوال ۱۴.۲۹: $\int_{0}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 3y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

۲۲۷۲۰ سوال ۱۴.۳۰: $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} 6x \, dy \, dx$

۲۲۷۲۱

۲۲۷۲۲ **دوہرا تکمل کی قیمت کا حصول**

۲۲۷۲۳ سوال ۱۴.۳۱ تا سوال ۱۴.۴۰ میں تکمل کے خطہ کا خاکہ بنا کر تکمل کی ترتیب تعین کرتے ہوئے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

۲۲۷۲۴ سوال ۱۴.۳۱: $\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} \, dy \, dx$

۲۲۷۲۵ سوال ۱۴.۳۲: $\int_0^2 \int_x^2 2y^2 \sin xy \, dy \, dx$

۲۲۷۲۶ سوال ۱۴.۳۳: $\int_0^1 \int_y^1 x^2 e^{xy} \, dx \, dy$

۲۲۷۲۷ سوال ۱۴.۳۴: $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{xe^{2y}}{4-y} \, dy \, dx$

۲۲۷۲۸ سوال ۱۴.۳۵: $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2} \, dx \, dy$

۲۲۷۲۹ سوال ۱۴.۳۶: $\int_0^3 \int_{\sqrt{x/3}}^1 e^{y^3} \, dy \, dx$

۲۲۷۳۰ سوال ۱۴.۳۷: $\int_0^{1/16} \int_{y^{1/4}}^{1/2} \cos(16\pi x^5) \, dx \, dy$

۲۲۷۳۱ سوال ۱۴.۳۸: $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{dy \, dx}{y^4+1}$

۲۲۷۳۲ سوال ۱۴.۳۹: $\iint\limits_R (y - 2x^2) \, dS$ جہاں R چوکور $|x| + |y| = 1$ کا اندرونی خطہ ہے۔

۲۲۷۳۳ سوال ۱۴.۴۰: $\iint\limits_R xy \, dS$ جہاں لکیر $y = x$ ، $y = 2x$ اور $x + y = 2$ کے بیچ خطہ R ہے۔

۲۲۷۳۴

۲۲۷۳۵ **سطح $z = f(x, y)$ کے نیچے حجم**

۲۲۷۳۶ سوال ۱۴.۴۱: مستوی xy میں لکیر $y = x$ ، $x = 0$ اور $x + y = 2$ کے بیچ مثلث کے اور قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ کے
۲۲۷۳۷ نیچے خطہ کا حجم تلاش کریں۔

۲۲۷۳۸ سوال ۱۴.۴۲: ایک ٹھوس جسم اوپر سے بیلن $z = x^2$ اور نیچے سے مستوی xy میں لکیر $y = x$ اور قطع مکافی $y = 2 - x^2$ کے بیچ
۲۲۷۳۹ مثلث خطہ کے درمیان پایا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

۲۲۷۴۰ سوال ۱۴.۴۳: ایک ٹھوس جسم کا قاعدہ مستوی xy میں لکیر $y = 3x$ اور قطع مکافی $y = 4 - x^2$ کے بیچ خطہ ہے جبکہ اس کا بالائی سر
۲۲۷۴۱ مستوی $z = x + 4$ پر مشتمل ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

۲۲۷۴۲ سوال ۱۴.۴۴: ثُمن اول میں محددی مستویات، بیلن $x^2 + y^2 = 4$ اور مستوی $z + y = 3$ کے بیچ ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔

۲۲۷۴۳ سوال ۱۴.۴۵: ثُمن اول میں محددی مستویات، مستوی $x = 3$ اور قطع مکافی بیلن $z = 4 - y^2$ کے بیچ ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۴۶: ثُمن اول سے سطح $z = 4 - x^2 - y$ ایک ٹھوس جسم کاٹتی ہے۔اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۴۷: ثُمن اول سے بیلن $z = 12 - 3y^2$ اور مستوی $x + y = 2$ ایک پچر کاٹتے ہیں۔اس پچر کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۴۸: چوکور ستون $|x| + |y| \leq 1$ سے مستویات $z = 0$ اور $3x + z = 3$ جس ٹھوس جسم کو کاٹتے ہیں اس کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۴۹: ایک ٹھوس جسم سامنے اور پشت سے مستویات $x = 2$ اور $x = 1$ ،اطراف سے بیلن $y = \mp\frac{1}{x}$ ،اوپر سے مستوی $z = x + 1$ اور نیچے سے مستوی $z = 0$ میں گھیرا ہوا ہے۔اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۵۰: ایک جسم سامنے اور پشت سے مستویات $x = \pm\frac{\pi}{3}$ ،اطراف سے بیلن $y = \mp\sec x$ ،اوپر سے بیلن $z = 1 + y^2$ اور نیچے سے مستوی xy میں گھیرا ہوا ہے۔اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

غیر محدود خطوں پر تکملات

سوال ۱۴.۵۱ تا سوال ۱۴.۵۴ میں غیر مناسب تکملات کو بار ہا تکمل تصور کرتے ہوئے ان کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۵۱: $\int_1^\infty \int_{e^{-x}}^1 \frac{1}{x^3 y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۵۲: $\int_{-1}^1 \int_{-1/\sqrt{1-x^2}}^{1/\sqrt{1-x^2}} (2y+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۵۳: $\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال ۱۴.۵۴: $\int_0^\infty \int_0^\infty xe^{-(x+2y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

دوہرا تکملات کی تخمین

سوال ۱۴.۵۵ اور سوال ۱۴.۵۶ میں تفاعل $f(x,y)$ کے دوہرا تکمل کے خطہ R کو انتصابی خط $x = a$ اور افقی خط $y = c$ خانہ بند کرتی ہیں۔ہر ذیلی مستطیل میں دکھائے گئے (x_k, y_k) لیتے ہوئے درج ذیل تخمین استعمال کر کے دوہرا تکملات کی تخمینی قیمتیں تلاش کریں۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}S \approx \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k)\Delta S_k$$

سوال ۱۴.۵۵: تفاعل $f(x,y) = x + y$ اور خطہ R ،جو نصف دائرہ $y = \sqrt{1-x^2}$ اور محور x کے بیچ ہے۔خانہ بندی $x = -1, -1/2, 0, 1/4, 1/2, 1$ اور $y = 0, 1/2, 1$ لیں۔نقطہ (x_k, y_k) کو k واں خانے کا نچلا بایاں کونا لیں بشرطیکہ یہ مستطیل R کے اندر پایا جاتا ہو۔

سوال ۱۴.۵۶: تفاعل $f(x,y) = x + 2y$ ہے جبکہ اور دائرہ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ کا اندرونی خطہ R ہے۔خانہ بندی $x = 1, 3/2, 2, 5/2, 3$ اور $y = 2, 5/2, 3, 7/2, 4$ لیں۔بشرطیکہ k واں مستطیل R میں پایا جاتا ہو، k ویں مستطیل کے وسطانی مرکز کو (x_k, y_k) لیں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۴.۵۷: قرص $x^2 + y^2 \leq 4$ کو شعاع $\theta = \frac{\pi}{6}$ اور $\theta = \frac{\pi}{2}$ دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ان میں سے چھوٹے ٹکڑے پر $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2}$ کا تکمل لیں۔

سوال ۱۴.۵۸: لامتناہی مستطیل $2 \leq x \leq \infty,\ 0 \leq y \leq 2$ پر $f(x, y) = \frac{1}{(x^2-x)(y-1)^{2/3}}$ کا تکمل لیں۔

سوال ۱۴.۵۹: ایک ٹھوس (غیر دائری) قائمہ بیلن کا قاعدہ مستوی xy ہے جبکہ اس کی بالائی سرحد قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ ہے۔ اس بیلن کا حجم

$$H = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

ہے۔ خطہ R کا خاکہ بنائیں اور بیلن کے حجم کو، تکمل کی ترتیب الٹ کرتے ہوئے، ایک بار ہا تکمل کی صورت میں لکھ کر حل کریں۔

سوال ۱۴.۶۰: درج ذیل کی قیمت تلاش کریں۔ (اشارہ: متکمل کو ایک تکمل کی صورت میں لکھیں۔)

$$\int_0^2 (\tan^{-1} \pi x - \tan^{-1} x)\,\mathrm{d}x$$

سوال ۱۴.۶۱: مستوی xy میں کونسا خطہ R درج ذیل تکمل کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بناتا ہے؟

$$\iint_R (4 - x^2 - 2y^2)\,\mathrm{d}S$$

اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۴.۶۲: مستوی xy میں کونسا خطہ R درج ذیل تکمل کی قیمت کو کم سے کم بناتا ہے؟

$$\iint_R (x^2 + y^2 - 9)\,\mathrm{d}S$$

اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۴.۶۳: کیا استراری تفاعل $f(x, y)$ کا مستوی xy میں مستطیل خطہ پر تکمل کی ترتیب بدلتے ہوئے مختلف نتائج کا حصول ٹھیک ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ بتائیں۔

سوال ۱۴.۶۴: ایک مثلث جس کے راس $(0, 1)$ ، $(2, 0)$ اور $(1, 2)$ ہوں پر استراری تفاعل $f(x, y)$ کے دوہرا تکمل کی قیمت درکار ہے۔ آپ یہ قیمت کیسے حاصل کریں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۴.۶۵: درج ذیل تعلق کو ثابت کریں۔

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{b\to\infty}\int_{-b}^{b}\int_{-b}^{b} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

سوال ۱۴.۶۶: درج ذیل غیر مناسب تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^1\int_0^3 \frac{x^2}{(y-1)^{2/3}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

اعدادی تراکیب سے تکمل کی قیمت کی تلاش

سوال ۱۴.۶۷ تا سوال ۱۴.۷۰ میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے اعدادی تراکیب سے دوہرا تکملات کی قیمتیں دریافت کریں۔

سوال ۱۴.۶۷: $\int_1^3\int_1^x \frac{1}{xy}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۶۸: $\int_0^1\int_0^1 e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۶۹: $\int_0^1\int_0^1 \tan^{-1} xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۷۰: $\int_{-1}^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3\sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

۱۴.۲ رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت

اس حصہ میں دوہرا تکملات استعمال کرتے ہوئے مستوی میں محدود خطوں کے رقبات اور ان خطوں پر باریک چادروں کی کمیت، معیار اثر، مرکز کمیت، اور حرکت دواری[۵] کے رداس معلوم کرنا دکھایا جائے گا۔ ان کا حساب باب ۶ کے حساب کی طرح ہو گا لیکن اب ہم زیادہ قسم کے اشکال کے لیے حساب کر پائیں گے۔

مستوی میں محدود خطوں کے رقبات

گزشتہ حصہ میں خطہ R پر دوہرا تکمل کی تعریف میں $f(x,y)=1$ لینے سے جزوی مجموعات کی تخفیف شدہ صورت

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta S_k = \sum_{k=1}^{n}\Delta S_k \tag{۱}$$

[۵] gyration

۲۲۸۰۰ حاصل ہو گی۔ یہ تخمینی طور پر R کا رقبہ ہو گا۔ جوں جوں شکل ۱۴.۱۵ میں Δx اور Δy صفر کے قریب تر ہوتے جاتے ہیں توں توں R کے زیادہ سے
۲۲۸۰۱ زیادہ حصہ کو تمام ΔS_k مل کر کوڈھانپتے ہیں، اور ہم R کی رقبہ کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\text{رقبہ} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \iint\limits_R \mathrm{d}S \tag{۲}$$

۲۲۸۰۲ تعریف: بند محدود خطہ R کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \iint\limits_R \mathrm{d}S \tag{۳}$$

۲۲۸۰۳ □

۲۲۸۰۴ اس باب کے دیگر تعریفات کی طرح، رقبے کی یک متغیری تعریف کے لحاظ سے، جو ہم پہلے پیش کر چکے ہیں، موجودہ تعریف زیادہ اقسام کے خطوں پر قابل
۲۲۸۰۵ اطلاق ہو گی، لیکن، جن خطوں پر دونوں تعریفات قابل اطلاق ہوں، وہاں موجودہ تعریف گزشتہ تعریف کے عین موافق ہو گی۔

۲۲۸۰۶ مساوات ۳ میں دی گئی تکمل کی قیمت کے حصول میں ہم R پر $f(x,y) = 1$ لیتے ہیں۔

۲۲۸۰۷ مثال ۱۴.۵: ربع اول میں $y = x$ اور $y = x^2$ کے بیچ محیط رقبہ تلاش کریں۔

۲۲۸۰۸ **حل**

۲۲۸۰۹ ہم اس خطہ کا خاکہ (شکل ۱۴.۱۶) بنا کر رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

$$S = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[y\Big]_{x^2}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

۲۲۸۱۰ □

۲۲۸۱۱ مثال ۱۴.۶: قطع مکافی $y = x^2$ اور لکیر $y = x + 2$ کے بیچ محیط رقبہ تلاش کریں۔

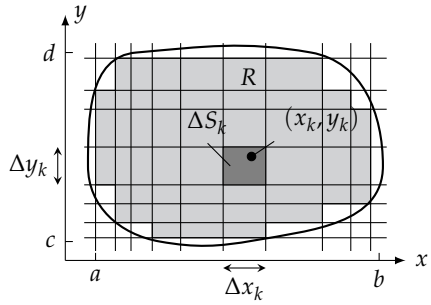
۲۲۸۱۲ **حل**

۲۲۸۱۳ اگر ہم پہلے x کے لحاظ سے تکمل لیں تب ہمیں اس خطہ کو R_1 اور R_2 میں تقسیم کر کے درج ذیل دو علیحدہ علیحدہ تکملات کی ضرورت پیش آئے گی (شکل
۲۲۸۱۴ ۱۴.۱۷-ا)۔

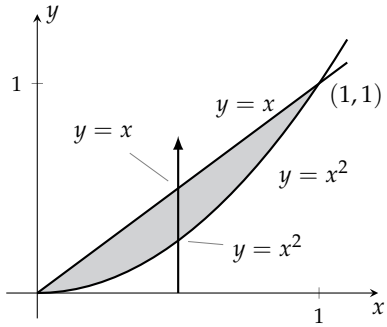
$$S = \iint\limits_{R_1} \mathrm{d}S + \iint\limits_{R_2} \mathrm{d}S = \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^4 \int_{y-2}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

۲۲۸۱۵ اس کے برعکس تکمل کی ترتیب الٹ کرنے سے صرف ایک تکمل

$$S = \int_{-1}^{2} \int_{x^2}^{x+2} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$



شکل ۱۴.۱۵: ایک خطہ کے رقبے کی تلاش میں پہلا قدم خطے کے اندرون کی خانہ بندی ہے۔



شکل ۱۴.۱۶: قطع مکافی اور لکیر کے بیچ رقبہ (مثال ۱۴.۵)۔

۲۲۸۱۶ کی ضرورت پیش آئے گی (شکل ۱۴.۱۷-ب)۔ ہم اسی سے رقبہ تلاش کرتے ہیں۔

$$S = \int_{-1}^{2} \Big[y\Big]_{x^2}^{x+2} \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)\, \mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

۲۲۸۱۷ □

۲۲۸۱۸ **اوسط قیمت**

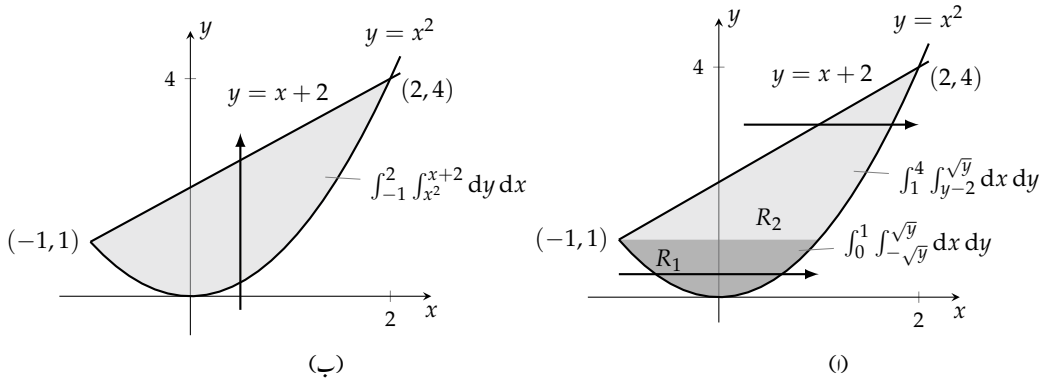
۲۲۸۱۹ بند وقفہ پر قابل تکمل واحد متغیر تفاعل کی اوسط قیمت اس وقفہ پر تفاعل کا تکمل تقسیم لمبائی وقفہ ہو گی۔ بند اور محدود خطہ پر، جس کا رقبہ قابل ناپ ہو، معین قابل
۲۲۸۲۰ تکمل دو متغیر تفاعل کی اوسط قیمت اس خطہ پر تفاعل کا تکمل تقسیم خطہ کا رقبہ ہو گی۔ اگر خطہ R اور تفاعل f ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$R \text{ پر } f \text{ کی اوسط قیمت} = \frac{1}{R \text{ کا رقبہ}} \iint_R f\, \mathrm{d}S \tag{۴}$$

۲۲۸۲۱ اگر خطہ R پر باریک (پتلی) چادر کی کثافت رقبہ f ہو تب R پر f کے دوہرا تکمل کو R کے رقبہ سے تقسیم کرنے سے اس چادر کی اوسط کثافت حاصل
۲۲۸۲۲ ہو گی جس کی اکائی کمیت فی اکائی رقبہ ہو گی۔ اگر نقطہ (x, y) سے مقررہ نقطہ N تک فاصلہ $f(x, y)$ ہو تب R پر f کی اوسط قیمت، N سے R
۲۲۸۲۳ کے نقاط کا اوسط فاصلہ ہو گا۔

۲۲۸۲۴ مثال ۱۴.۷: مستطیل $R:\ 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le 1$ پر $f(x, y) = x \cos xy$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

۲۲۸۲۵ **حل**



(ب) (ا)

شکل ۱۷.۱۴: (ا) اگر ہم پہلے x کے لحاظ سے تکمل لیں تب رقبے کے حصول کے لیے دو تکملات کا مجموعہ درکار ہو گا۔ (ب) البتہ پہلے y کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے صرف ایک تکمل سے حاصل ہو گا۔

۲۲۸۲۶ خطہ R پر f کا تکمل

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \int_0^1 x \cos xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y &= \int_0^{\pi} \Big[\sin xy \Big]_{y=0}^{y=1} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\pi} (\sin x - 0) \, \mathrm{d}x = -\cos x \Big]_0^{\pi} 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

۲۲۸۲۷ ہو گا جبکہ مستطیل R کا رقبہ π ہے۔ یوں R پر f کی اوسط قیمت $\frac{2}{\pi}$ ہو گی۔ □

۲۲۸۲۸ مراکز کمیت کے معیار اثر اول اور دوم

۲۲۸۲۹ باریک چادروں کی کمیت اور معیار اثر تلاش کرنے کے لیے ہم باب ۶ کے کلیات کی طرح کلیات استعمال کرتے ہیں۔ فرق صرف اتنا ہے کہ دوہرا تکمل کی وجہ سے
۲۲۸۳۰ اب ہم زیادہ اشکال اور کثافتی تفاعل کو عمل میں لا سکتے ہیں۔ جدول میں ان کلیات درج ذیل ہیں۔

۲۲۸۳۱ **مستوی xy میں باریک چادر کی کمیت، معیار اثر اول[۶]، معیار اثر دوم[۷] اور رداس دوار[۸] کے کلیات**
۲۲۸۳۲

۲۲۸۳۳ کثافت: $\delta(x, y)$

۲۲۸۳۴ کمیت: $M = \iint \delta(x, y) \, \mathrm{d}S$

---

[۶] firstmoment
[۷] secondmoment
[۸] radiusofgyration

۲۲۸۳۵ معیار اثر اول: $M_x = \iint y\delta(x,y)\,\mathrm{d}S, \quad M_y = \iint x\delta(x,y)\,\mathrm{d}S$

۲۲۸۳۶ مرکز کمیت: $\bar{x} = \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M}$

۲۲۸۳۷ معیار اثر دوم (جمودی معیار اثر):

$$I_x = \iint y^2\delta(x,y)\,\mathrm{d}S \qquad \text{بلحاظ محور } x$$

$$I_y = \int x^2\delta(x,y)\,\mathrm{d}S \qquad \text{بلحاظ محور } y$$

$$I_L = \iint r^2(x,y)\delta(x,y)\,\mathrm{d}S, \quad (\text{جہاں } L \text{ سے } (x,y) \text{ کا فاصلہ } r(x,y) \text{ ہے}) \qquad \text{بلحاظ خط } L$$

$$I_0 = \int (x^2+y^2)\delta(x,y)\,\mathrm{d}S = I_x + I_y \qquad \text{(قطبی معیار اثر) بلحاظ مبدا}$$

۲۲۸۳۸ رداس دوار:

$$R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} \qquad \text{بلحاظ محور } x$$

$$R_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} \qquad \text{بلحاظ محور } y$$

$$R_0 = \sqrt{\frac{I_0}{M}} \qquad \text{بلحاظ مبدا}$$

۲۲۸۳۹ ان کلیات کا استعمال مثالوں کی مدد سے سمجھایا جائے گا۔

۲۲۸۴۰ معیار اثر اول M_x اور M_y اور معیار اثر دوم (جمودی معیار اثر) I_x اور I_y میں ریاضیاتی فرق یہ ہے کہ معیار اثر دور "بیرم کے بازوؤں" کے فاصلوں،
۲۲۸۴۱ x اور y، کا مربع لیتا ہے۔

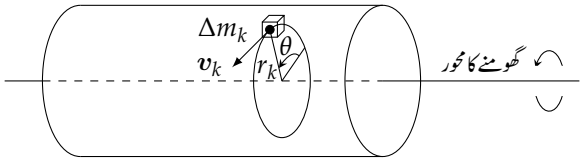
۲۲۸۴۲ معیار اثر I_0 کو **قطبی معیار اثر**[9] بھی کہتے ہیں۔ کمیتی کثافت $\delta(x,y)$ (کمیت فی اکائی رقبہ) ضرب x^2+y^2، جو نمائندہ نقطہ (x,y) سے مبدا
۲۲۸۴۳ تک فاصلہ ہے، کا مکمل قطبی معیار اثر کہلاتا ہے۔ چونکہ $I_0 = I_x + I_y$ ہے لہٰذا ان میں سے کسی دو کے حصول کے بعد تیسرے کو اس تعلق سے اخذ کیا
۲۲۸۴۴ جا سکتا ہے۔ (معیار اثر I_0 بعض اوقات I_z لکھا جاتا اور بلحاظ محور z معیار اثر کہلاتا ہے۔ تب تماثل $I_z = I_x + I_y$ **مسئلہ عمودی محور**[10] کہلاتا
۲۲۸۴۵ ہے۔)

۲۲۸۴۶ **رداس دوار** R_x کی تعریف درج ذیل مساوات ہے۔

$$I_x = MR_x^2$$

---

[9] polarmoment
[10] PerpendicularAxisTheorem



شکل ۱۸.۱۴: گھومتے ہوئے دھرے میں ذخیرہ توانائی دریافت کرنے کی خاطر ہم اس کو متعدد چھوٹے کمیتوں میں تقسیم کر کے ہر تمام چھوٹے کمیتوں کی حرکی توانائی کا مجموعہ لیتے ہیں۔

۲۲۸۴۷ رداس دوار ہمیں بتاتا ہے کہ محور x کتنا دور پوری چادر کی کمیت منجمد کرتے ہوئے وہی I_x حاصل ہو گا۔ رداس دوار استعمال کرتے ہوئے ہم معیار اثر کو کمیت
۲۲۸۴۸ اور لمبائی کی صورت میں لکھ پاتے ہیں۔ رداس R_y اور R_0 کی تعریفات بھی اسی طرح ہیں:

$$I_y = MR_y^2, \quad I_0 = MR_0^2$$

۲۲۸۴۹ ہم ان تعریفی مساوات کے جذر سے R_x ، R_y اور R_0 کے کلیات لکھتے ہیں۔

۲۲۸۵۰ ہمیں معیار اثر میں کیا دلچسپی ہے؟ ایک جسم کا پہلا معیار اثر ہمیں ثقلی میدان میں اس جسم کے توازن اور مختلف محوروں کے لحاظ سے اس کی قوت مروڑ کے بارے
۲۲۸۵۱ میں معلومات فراہم کرتا ہے۔ اب اگر یہ جسم گھومتا ہوا دھرا ہو تب ہمیں اس میں ذخیرہ توانائی جاننے میں زیادہ دلچسپی ہو گی تاکہ ہم جان سکیں کہ اس کو روکنے کے
۲۲۸۵۲ لیے یا اس کو کسی خاص زاویاتی رفتار تک پہنچانے میں کتنی توانائی درکار ہو گی۔ ایسی صورت میں معیار اثر دوم استعمال ہو گا۔

۲۲۸۵۳ اس دھرا کو متعدد چھوٹی کمیتوں Δm_k میں تقسیم کریں اور گھومنے کے محور سے k ویں کمیتی ٹکڑے کے فاصلہ کو r_k سے ظاہر کریں (شکل ۱۸.۱۴)۔ اگر
۲۲۸۵۴ دھرا کی زاویاتی سمتی رفتار $\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ ریڈیئن فی سیکنڈ ہو، تب اس ٹکڑے کا کمیتی مرکز اپنے مدار میں خطی رفتار

$$v_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r_k\theta) = r_k\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = r_k\omega$$

۲۲۸۵۵ سے حرکت کرے گا۔ اس ٹکڑے کی حرکی توانائی تخمیناً

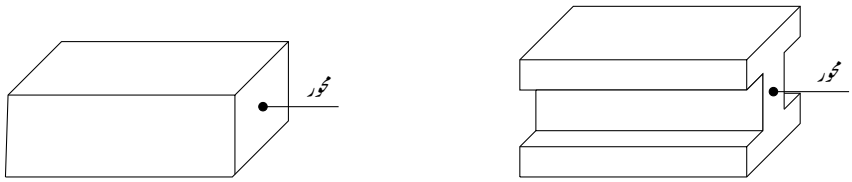
$$\frac{1}{2}\Delta m_k v_k^2 = \frac{1}{2}\Delta m_k (r_k\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2 r_k^2 \Delta m_k \tag{۵}$$

۲۲۸۵۶ ہو گی۔ دھرا کی حرکی توانائی تخمیناً

$$\sum \frac{1}{2}\omega^2 r_k^2 \Delta m_k \tag{۶}$$

۲۲۸۵۷ ہو گی۔ دھرا کو زیادہ سے زیادہ ٹکڑوں میں تقسیم کرنے سے اس مجموعہ کی قیمت ایک حد تک پہنچتی ہے جسے تکمل

$$\text{دھرا کی حرکی توانائی} = \int \frac{1}{2}\omega^2 r^2\,\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\omega^2 \int r^2\,\mathrm{d}m \tag{۷}$$



(ب) (ا)

شکل ۱۴.۱۹: دونوں شہتیر کا رقبہ عمودی تراش ایک سا ہے لیکن شہتیر-ا کا جمودی معیار اثر زیادہ ہے لہٰذا شہتیر-ا زیادہ اکڑ ہو گا۔

۲۲۸۵۸ لکھا جا سکتا ہے۔ جزو

$$I = \int r^2 \, \mathrm{d}m \tag{۸}$$

۲۲۸۵۹ درحقیقت گھومنے کے محور کے لحاظ سے دھرے کا جمودی معیار اثر ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۷ درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\text{دھرا کی حرکی توانائی} = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{۹}$$

۲۲۸۶۰ ایک دھرا، جس کا جمودی معیار اثر I ہو، کو ω زاویاتی سمتی رفتار تک پہنچانے کے لیے $\frac{1}{2} I \omega^2$ حرکی توانائی درکار ہو گی اور اس رفتار پر چلتے ہوئے دھرا کو
۲۲۸۶۱ روکنے کے لیے ہمیں دھرا سے اتنی ہی حرکی توانائی نکالنی ہو گی۔ کمیت m کی گاڑی کو سمتی رفتار v تک پہنچانے کے لیے اس کو $\frac{1}{2} m v^2$ حرکی توانائی درکار
۲۲۸۶۲ ہو گی اور اس کو روکنے کے لیے اس گاڑی سے اتنی ہی حرکی توانائی نکالنی ہو گی۔ دھرے کا جمودی معیار اثر گاڑی کی کمیت کا مماثل ہے۔ گاڑی کی رفتار تیز یا کم
۲۲۸۶۳ کرنے کو گاڑی کی کمیت مشکل بناتی ہے۔ اسی طرح دھرے کی زاویاتی رفتار تیز یا کم کرنے کو دھرے کا جمودی معیار اثر مشکل بناتا ہے۔ جمودی معیار اثر کمیت کے
۲۲۸۶۴ علاوہ کمیت کی تقسیم کا بھی حساب رکھتا ہے۔

۲۲۸۶۵ بوجھ بردار افقی دھاتی شہتیر کے جھکاو کو بھی جمودی معیار اثر تعین کرتا ہے۔ شہتیر کا اکڑ پن I ضرب ایک مستقل ہوتا ہے، جہاں شہتیر کے افقی محور کے لحاظ سے
۲۲۸۶۶ عمودی تراش کا قطبی معیار اثر I ہے۔ جمودی معیار اثر I کی قیمت جتنی زیادہ ہو، شہتیر اتنا زیادہ اکڑ ہو گا اور اتنا کم جھکے گا۔ یہی وجہ ہے کہ ہم شکل ۱۴.۱۹-ا میں
۲۲۸۶۷ دکھایا گیا شہتیر استعمال کرتے ہیں نا کہ ایسے شہتیر جن کی عمودی تراش چوکور ہو (شکل ۱۴.۱۹-ب)۔ شہتیر کے بالائی اور زیریں کگر زیادہ تر کمیت کو افقی محور سے
۲۲۸۶۸ دور رکھتے ہوئے I کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بناتے ہیں۔

۲۲۸۶۹ جمودی معیار اثر کو سمجھنے کے لیے ایک تجربہ کریں۔ ایک قلم کے دونوں سروں کے ساتھ سکے چپکا کر قلم کو انگلیوں میں تیزی سے آگے پیچھے گھمائیں۔ گھومنے
۲۲۸۷۰ کا رخ تبدیل کرتے وقت آپ کو جو مزاحمت محسوس ہوتی ہے وہ جمودی معیار اثر کی وجہ سے ہے۔ اب ان سکوں کو قلم کے سروں سے دور اور آپس میں قریب
۲۲۸۷۱ کریں۔ قلم اور سکوں کی کمیت تبدیل نہیں ہوئی ہے البتہ اس نظام کا جمودی معیار اثر کم ہو ہے۔ اب آپ دیکھیں گے کہ انہیں آگے پیچھے گھمانا زیادہ آسان ہو گا۔

۲۲۸۷۲ آپ کہہ سکتے ہیں کہ معیار اثر اول کا تعلق توازن سے ہے جبکہ معیار اثر دوم کا تعلق گھومنے سے ہے۔

۲۲۸۷۳ مثال ۱۴.۸: محور x، لکیر $x = 1$ اور لکیر $y = 2x$ کے بیچ تکونی چادر پائی جاتی ہے۔ نقطہ (x, y) پر اس چادر کی کثافت $\delta(x, y) =$
۲۲۸۷۴ $6x + 6y + 6$ ہے۔ اس چادر کی کمیت، پہلا معیار اثر، مرکز کمیت، جمودی معیار اثر اور محددی محوروں کے لحاظ سے رداس دوار تلاش کریں۔

۲۲۸۷۵ **حل**

۲۲۸۷۶ ہم اس خطہ کا خاکہ بنا کر (شکل ۱۴.۲۰) اس پر اتنی معلومات درج کرتے ہیں کہ تکمل کی حدیں جان سکیں۔

۲۲۸۷۷ چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^1 \int_0^{2x} \delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2x} (6x+6y+6)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big[6xy+3y^2+6y\Big]_{y=0}^{y=2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (24x^2+12x)\,\mathrm{d}x = \Big[8x^3+6x^2\Big]_0^1 = 14
\end{aligned}$$

۲۲۸۷۸ محور x کے لحاظ سے پہلا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy+6y^2+6y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big[3xy^2+2y^3+3y^2\Big]_{y=0}^{y=2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (28x^3+12x^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[7x^4+4x^3\Big]_0^1 = 11
\end{aligned}$$

۲۲۸۷۹ اسی طرح محور y کے لحاظ سے پہلا معیار اثر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$M_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 10$$

۲۲۸۸۰ مرکز کمیت کے محدد درج ذیل ہوں گے۔

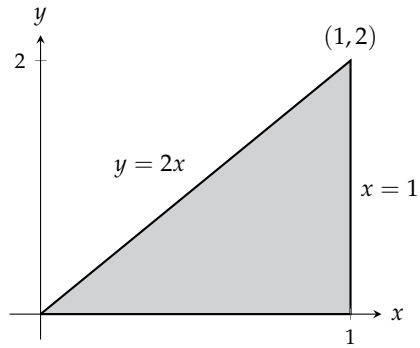
$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{11}{14}$$

۲۲۸۸۱ محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

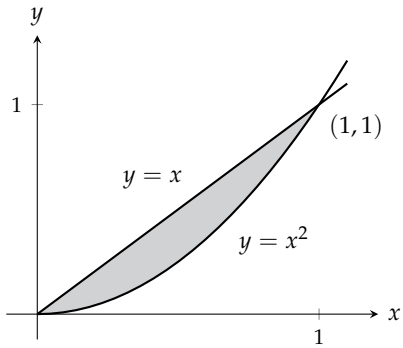
$$\begin{aligned}
I_x &= \int_0^1 \int_0^{2x} y^2\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^{2x} (6xy^2+6y^3+6y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \Big[2xy^3+\frac{3}{2}y^4+2y^3\Big]_{y=0}^{y=2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (40x^4+16x^3)\,\mathrm{d}x \\
&= \Big[8x^5+4x^4\Big]_0^1 = 12
\end{aligned}$$

۲۲۸۸۲ اسی طرح محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$I_y = \int_0^1 \int_0^{2x} x^2\delta(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{39}{5}$$



شکل ۱۴.۲۰: خطہ برائے مثال ۱۴.۸



شکل ۱۴.۲۱: خطہ برائے مثال ۱۴.۹

۲۲۸۸۳ ہم I_x اور I_y کی قیمتوں سے I_0 کی قیمت کلیہ $I_0 = I_x + I_y$ کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

$$I_0 = 12 + \frac{39}{5} = \frac{60+39}{5} = \frac{99}{5}$$

۲۲۸۸۴ تین رداس دوار درج ذیل ہوں گے۔

$$R_x = \sqrt{\frac{I_x}{M}} = \sqrt{\frac{12}{14}} = \sqrt{\frac{6}{7}}$$
$$R_y = \sqrt{\frac{I_y}{M}} = \sqrt{\left(\frac{39}{5}\right)/14} = \sqrt{\frac{39}{70}}$$
$$R_0 = \sqrt{\frac{I_0}{M}} = \sqrt{\left(\frac{99}{5}\right)/14} = \sqrt{\frac{99}{70}}$$

۲۲۸۸۵ □

۲۲۸۸۶ جیومیٹریائی اشکال کے وسطانی مراکز

۲۲۸۸۷ مستقل کثافت کی صورت میں $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے کلیات میں شمار کنندہ اور نسب نما میں موجود کثافت ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں۔ $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے نقطہ
۲۲۸۸۸ نظر سے δ کی قیمت 1 ہو سکتی ہے۔ یوں مستقل δ کی صورت میں مرکز کمیت کا دارومدار جسم کی شکل و صورت پر منحصر ہو گا نا کہ جسم کے مادہ پر۔ ایسی
۲۲۸۸۹ صورت میں مرکز کمیت عموماً شکل کا **وسطانی مرکز**[۱۱] پکارا جاتا ہے۔ وسطانی مرکز کی تلاش میں ہم $\delta = 1$ لے کر، پہلے کی طرح، معیار اثر اول کو کمیت سے
۲۲۸۹۰ تقسیم کرتے ہوئے $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ دریافت کرتے ہیں۔

۲۲۸۹۱ مثال ۱۴.۹: ربع اول میں اوپر سے لکیر $y = x$ اور نیچے سے قطع مکافی $y = x^2$ ایک خطہ کو محدود کرتے ہیں۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش
۲۲۸۹۲ کریں۔

---

[۱۱] centroid

۲۲۸۹۳ **حل**

۲۲۸۹۴ ہم خطے کا خاکہ بنا کر تکمل کی حدیں جانتے ہیں (شکل ۱۴.۲۱)۔ اس کے بعد $\delta = 1$ لے کر آگے بڑھتے ہیں۔

$$M = \int_0^1 \int_{x^2}^x 1 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[y\Big]_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (x - x^2) \, \mathrm{d}x = \Big[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$M_x = \int_0^1 \int_{x^2}^x y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^1 \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2}\Big) \, \mathrm{d}x = \Big[\frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{10}\Big]_0^1 = \frac{1}{15}$$

$$M_y = \int_0^1 \int_{x^2}^x x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \Big[xy\Big]_{y=x^2}^{y=x} \mathrm{d}x = \int_0^1 (x^2 - x^3) \, \mathrm{d}x = \Big[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{12}$$

۲۲۸۹۵ ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے ہم وسطانی مرکز کے محدد دریافت کرتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1/12}{1/6} = 2, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1/15}{1/6} = \frac{2}{5}$$

۲۲۸۹۶ نقطہ $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$ اس خطے کا وسطانی مرکز ہو گا۔ □

۲۲۸۹۷ **سوالات**

۲۲۸۹۸ **رقبہ بذریعہ دوہرا تکمل**

۲۲۸۹۹ سوال ۱۴.۷۱ تا سوال ۱۴.۷۸ میں منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کا خاکہ بنا کر اس خطے کے رقبہ کو بطور دوہرا بار ہا تکمل لکھیں۔ اس تکمل کی قیمت دریافت
۲۲۹۰۰ کریں۔

۲۲۹۰۱ سوال ۱۴.۷۱: محددی محور اور لکیر $x + y = 2$

۲۲۹۰۲ سوال ۱۴.۷۲: لکیر $x = 0$ ، $y = 2x$ اور $y = 4$

۲۲۹۰۳ سوال ۱۴.۷۳: قطع مکافی $x = -y^2$ اور لکیر $y = x + 2$

۲۲۹۰۴ سوال ۱۴.۷۴: قطع مکافی $x = y - y^2$ اور لکیر $y = -x$

۲۲۹۰۵ سوال ۱۴.۷۵: منحنی $y = e^x$ اور لکیر $y = 0$ ، $x = 0$ اور $x = \ln 2$

۲۲۹۰۶ سوال ۱۴.۷۶: ربع اول میں منحنیات $y = \ln x$ ، $y = 2 \ln x$ اور لکیر $x = e$

۲۲۹۰۷ سوال ۱۴.۷۷: قطع مکافی $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$

۲۲۹۰۸ سوال ۱۴.۷۸: قطع مکافی $x = y^2 - 1$ اور $x = 2y^2 - 2$

۲۲۹۰۹

سوال ۱۴.۷۹ تا سوال ۱۴.۸۴ میں مستوی xy میں خطوں کے رقبات کو تکمل یا تکملات کے مجموعوں کی کی صورت میں پیش کیا گیا ہے۔ ان خطوں کا خاکہ بنا کر سرحدی منحنیات پر ان کی مساواتیں لکھیں اور ان نقطوں کی نشاندہی کریں جہاں منحنیات ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔ اس کے بعد ان خطہ کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۷۹: $\int_0^6 \int_{y^2/3}^{2y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال ۱۴.۸۰: $\int_0^3 \int_{-x}^{x(2-x)} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۸۱: $\int_0^{\pi/4} \int_{\sin x}^{\cos x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۸۲: $\int_{-1}^{2} \int_{y^2}^{y+2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

سوال ۱۴.۸۳: $\int_{-1}^{0} \int_{-2x}^{1-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_0^2 \int_{-x/2}^{1-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۸۴: $\int_0^2 \int_{x^2-4}^{0} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

اوسط قیمت

سوال ۱۴.۸۵: تفاعل $f(x,y) = \sin(x+y)$ کی اوسط قیمت درج ذیل خطوں پر تلاش کریں۔

ا. مستطیل $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi$

ب. مستطیل $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi/2$

سوال ۱۴.۸۶: کیا چوکور $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ یا ربع اول میں دائرہ $x^2+y^2=1$ میں $f(x,y) = xy$ کی اوسط قیمت زیادہ ہو گی؟ ان دونوں خطوں میں اوسط کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۸۷: چوکور $0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2$ میں قطع مکافی $z = x^2+y^2$ کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۸۸: چوکور $\ln 2 \le x \le 2\ln 2,\ \ln 2 \le y \le 2\ln 2$ میں $f(x,y) = \frac{1}{xy}$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

مستقل کثافت

سوال ۱۴.۸۹: ربع اول میں قطع مکافی $y = 2-x^2$ اور لکیر $x=0$ ، $y=x$ کے بیچ ایک باریک چادر جس کی کثافت $\delta = 3$ ہو پائی جاتی ہے۔ اس کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۹۰: ربع اول میں محددی محور اور لکیر $x=3$ اور $y=3$ کے بیچ مستقل کثافت کی باریک مستطیل چادر پائی جاتی ہے۔ اس کے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۹۱: ربع اول میں محور x ، قطع مکافی $y^2=2x$ اور لکیر $x+y=4$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۹۲: ربع اول سے لکیر $x+y=3$ ایک تکونی خطہ کاٹتی ہے۔ اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۹۳: محور x اور منحنی $y=\sqrt{1-x^2}$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۹۴: ربع اول میں قطع مکافی $y = 6x - x^2$ اور لکیر $y = x$ کے بیچ خطے کا رقبہ $\frac{125}{6}$ ہے۔اس کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۹۵: ربع اول سے دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ ایک خطہ کاٹتا ہے۔اس خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۹۶: دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ کے بیچ کثافت $\delta = 1$ کی باریک چادر کے محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔اس نتیجہ کو استعمال کرتے ہوئے اس خطہ کی I_y اور I_0 دریافت کریں۔

سوال ۱۴.۹۷: محور x اور قوس $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۹۸: محور x اور منحنی $y = \frac{\sin^2 x}{x^2}$ کے بیچ وقفہ $\pi \le x \le 2\pi$ پر کثافت $\delta = 1$ کی باریک چادر پائی جاتی ہے۔محور y کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۹۹: لامتناہی خطہ کا وسطانی مرکز

ربع دوم میں محدد دی محور اور منحنی $y = e^x$ کے بیچ خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔(کمیت اور معیار اثر کے کلیات میں آپ کو غیر مناسب تکملات استعمال کرنے ہوں گے۔)

سوال ۱۴.۱۰۰: لامتناہی چادر کا پہلا معیار اثر

ربع اول میں منحنی $y = e^{-x^2/2}$ کے نیچے کثافت $\delta = 1$ کے لامتناہی جسامت کی چادر کا محور y کے لحاظ سے پہلا معیار اثر تلاش کریں۔

متغیر کثافت

سوال ۱۴.۱۰۱: قطع مکافی $x = y - y^2$ اور لکیر $x + y = 0$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = x + y$ ہے۔محور x کے لحاظ سے اس کی جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۰۲: ترخیم $x^2 + 4y^2 = 12$ سے قطع مکافی $x = 4y^2$ جس چھوٹے حصہ کو کاٹتا ہے،اس کی کثافت $\delta(x, y) = 5x$ ہے۔اس کی کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۰۳: محور y اور لکیر $y = x$ اور $y = 2 - x$ کے بیچ تکونی چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 6x + 3y + 3$ ہے۔اس چادر کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۰۴: منحنیات $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = y + 1$ ہے۔اس کی کمیت اور محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۰۵: ربع اول سے خطوط $x = 6$ اور $y = 1$ ایک مستطیل باریک چادر کاٹتے ہیں جس کی کثافت $\delta(x, y) = x + y + 1$ ہے۔اس کی مرکز کمیت اور محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۰۶: قطع مکافی $y = x^2$ اور لکیر $y = 1$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = y + 1$ ہے۔اس کا مرکز کمیت اور محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۰۷: قطع مکافی $y = x^2$ ، محور x اور لکیر $x = \mp 1$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 7y + 1$ ہے۔اس کا مرکز کمیت اور محور y کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۰۸: خطوط $x = 0$ ، $x = 20$ ، $y = -1$ اور $y = 1$ کے بیچ باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 1 + x/20$ ہے۔اس کا مرکز کمیت اور محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۰۹: لکیر $y = x$ ، $y = -x$ اور $y = 1$ کے بیچ تکونی چادر کی کثافت $\delta(x, y) = y + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محددی محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔ اس کا قطبی جمودی معیار اثر اور رداس دوار بھی تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۱۰: کثافت $\delta(x, y) = 3x^2 + 1$ لیتے ہوئے سوال ۱۴.۱۰۹ کو دوبارہ حل کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۴.۱۱۱: مستوی xy میں جراثیم کی تعدادی کثافت $f(x, y) = \frac{10000e^y}{1+|x|/2}$ ہے جہاں x اور y کی ناپ سنٹی میٹر میں ہے۔ مستطیل $-5 \leq x \leq 5, -2 \leq y \leq 0$ میں جراثیم کی کل تعداد تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۱۲: سطح زمین پر کثافت آبادی $f(x, y) = 100(y + 1)$ ہے جہاں x اور y کلومیٹر میں ہیں۔ منحنیات $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$ کے بیچ کل آبادی کتنی ہو گی؟

سوال ۱۴.۱۱۳: مستقل کثافت کا ایک برتن مستوی xy میں خطہ $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq a(1 - x^2)$ پر واقع ہے۔ یہ برتن $45°$ تک ٹیڑھا کرنے تک واپس اپنی جگہ پر آن گرتا ہے۔ مستقل a کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۱۴: جمودی معیار اثر کم سے کم کرنا

ربع اول میں کثافت $\delta(x, y) = 1$ کی چادر لکیر $x = 4$ اور $y = 2$ کے بیچ پائی جاتی ہے۔ لکیر $y = a$ کے لحاظ سے اس چادر کی جمودی معیار اثر I_a درج ذیل ہے۔

$$I_a = \int_0^4 \int_0^2 (y - a)^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

مستقل a کی وہ قیمت تلاش کریں جو I_a کو کم سے کم کرتا ہو۔

سوال ۱۴.۱۱۵: مستوی xy میں لکیر $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $y = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ، $x = 0$ اور $x = 1$ کے بیچ لامتناہی خطہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۱۶: ایک پتلی چھڑی کی مستقل خطی کثافت δ گرام فی سنٹی میٹر اور لمبائی L ہے۔ اس کا رداس دوار دیے گئے محور کے لحاظ سے تلاش کریں۔

ا. چھڑی کے محور کو عمودی اور اس کی مرکز کمیت سے گزرتے ہوا خط۔

ب. چھڑی کے ایک سر پر چھڑی کے محور کو عمودی خط۔

سوال ۱۴.۱۱۷: مستوی xy میں مستقل کثافت δ کی چادر منحنیات $x = y^2$ اور $x = 2y - y^2$ کے بیچ پائی جاتی ہے۔

ا. ایسا δ دریافت کریں کہ چادر کی کمیت سوال ۱۴.۱۰۴ کے چادر کی کمیت کے برابر ہو۔

ب. جزو-ا میں حاصل δ کی قیمت کا اس خطہ پر $\delta(x, y) = y + 1$ کی اوسط قیمت کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۱۴.۱۱۸: دائرہ $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ کی کثافت مستقل ہے۔ محوروں کے لحاظ سے اس کے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

مسئلہ متوازی محور

مستوی xy میں ایک خطہ پر کمیت m کی باریک چادر پائی جاتی ہے۔ اس کے مرکز کمیت سے خط $L_{c,m}$ گزرتا ہے۔ خط $L_{c,m}$ کے متوازی h اکائیاں

دور خط L پایا جاتا ہے۔ مسئلہ متوازی محور کہتا ہے کہ $L_{c,m}$ اور L کے لحاظ سے بالترتیب جمودی معیار اثر $I_{c,m}$ اور I_L درج ذیل کلیہ کو مطمئن کریں گے۔

$$I_L = I_{c,m} + mh^2 \tag{۱۰}$$

اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ایک جمودی معیار اثر سے دوسرا با آسانی دریافت کیا جا سکتا ہے۔

سوال ۱۴.۱۱۹: مسئلہ متوازی محور کا ثبوت

(ا) دکھائیں کہ باریک چادر کے مرکز کمیت سے گزرتی خط کے لحاظ سے چادر کا جمودی معیار اثر صفر ہو گا۔ (اشارہ: مرکز کمیت کو مبدا پر رکھیں اور خط کو محور y پر رکھیں۔ کلیہ $\bar{x} = \frac{M_y}{M}$ کیا دیگا؟) (ب) جزو-ا کے نتیجہ سے مسئلہ متوازی محور اخذ کریں۔ (اشارہ: خط $L_{c,m}$ کو محور y اور L کو $x = h$ پر رکھ کر I_L کے تکمل کو دو حصوں میں لکھیں۔)

سوال ۱۴.۱۲۰: (ا) مسئلہ متوازی محور استعمال کرتے ہوئے مثال ۱۴.۸ کے نتائج استعمال کرتے ہوئے اس مثال میں چادر کے مرکز کمیت سے گزرتی افقی اور انتصابی خطوط کے لحاظ سے چادر کی جمودی معیار اثر تلاش کریں۔ (ب) جزو-ا کے نتائج استعمال کرتے ہوئے خطوط $x = 1$ اور $y = 2$ کے لحاظ سے چادر کی جمودی معیار اثر دریافت کریں۔

کلیہ پاپس

جناب پاپس نے حصہ ۶.۱۰ کا مسئلہ پاپس بیان کیا۔ اس کے علاوہ وہ جانتے تھے کہ ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوئے دو مستوی خطوں کا وسطانی مرکز ان خطوں کے وسطانی مراکز سے گزرتے ہوئے خط پر پایا جاتا ہے۔ مستوی xy میں ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتی ہوئی دو باریک چادر P_1 اور P_2 فرض کریں، جن کی کمیت بالترتیب m_1 اور m_2 ہو۔ مبدا سے بالترتیب ان چادروں کے مراکز کمیت تک سمتیات $\boldsymbol{c}_1$ اور $\boldsymbol{c}_2$ لیں۔ اب اشتراک $P_1 \cup P_2$ کے مرکز کمیت کا تعین گر سمتیہ درج ذیل دیگا۔

$$\boldsymbol{c} = \frac{m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2}{m_1 + m_2} \tag{۱۱}$$

مساوات ۱۱ کو **کلیہ پاپس**[۱۲] کہتے ہیں۔ ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتی ہوئی دو سے زیادہ (لیکن متناہی تعداد کی) چادروں کے لیے درج ذیل کلیہ ہو گا۔

$$\boldsymbol{c} = \frac{m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + m_n\boldsymbol{c}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{۱۲}$$

یہ کلیہ بالخصوص وہاں فائدہ مند ہو گا جہاں غیر منظم شکل و صورت کی چادر کے حصوں کے وسطانی مراکز ہم جیومیٹری سے علیحدہ علیحدہ طور پر جانتے ہوں اور جہاں ہر حصہ از خود مستقل کثافت کا ہو۔ ہم اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے پوری چادر کا وسطانی مرکز معلوم کر سکتے ہیں۔

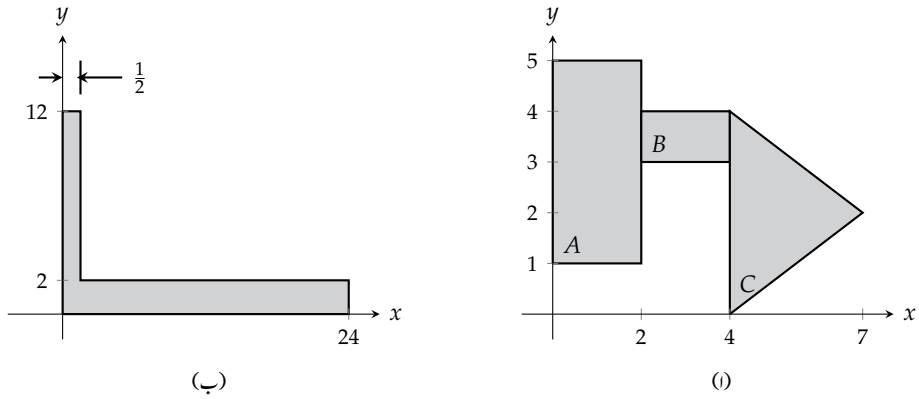
سوال ۱۴.۱۲۱: کلیہ پاپس (مساوات ۱۱) اخذ کریں۔ (اشارہ: ربع اول میں ان خطوں کو ترسیم کر کے ان کے مراکز کمیت $(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ اور $(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$ کی نشاندہی کریں۔ محددی محور کے لحاظ سے $P_1 \cup P_2$ کے معیار اثر کیا ہوں گے؟)

سوال ۱۴.۱۲۲: ریاضی (الکراجی) ماخوذ اور مساوات ۱۱ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ کسی بھی عدد صحیح $n > 2$ کے لیے مساوات ۱۲ مطمئن ہو گا۔

سوال ۱۴.۱۲۳: فرض کریں A ، B اور C تین اشکال ہیں (شکل ۱۴.۲۲-ا)۔ کلیہ پاپس کی مدد سے درج ذیل کے وسطانی مراکز دریافت کریں۔

---

[۱۲] Pappus'sformula



شکل ۱۴.۲۲: اشکال برائے سوال ۱۴.۱۲۳ اور سوال ۱۴.۱۲۴

۲۳۰۱۳ ا. $A \cup B$ ۲۳۰۱۴ ب. $A \cup C$ ۲۳۰۱۵ ج. $B \cup C$ ۲۳۰۱۶ د. $A \cup B \cup C$

۲۳۰۱۷ سوال ۱۴.۱۲۴: وسطانی مرکز دریافت کریں (شکل ۱۴.۲۲-ب)۔

۲۳۰۱۸ سوال ۱۴.۱۲۵: ایک مساوی الساقین مثلث T کا قاعدہ $2a$ اور قد h ہے۔ اس کا قاعدہ، رداس a کے نصف دائرہ D کے قطر پر پایا جاتا ہے۔ مثلث
۲۳۰۱۹ دائرہ کے باہر ہے۔ $T \cup D$ کا وسطانی مرکز (ا) T اور D کی مشترک سرحد پر (ب) T کے اندر ہونے کے لیے a اور h کا تعلق دریافت کریں۔

۲۳۰۲۰ سوال ۱۴.۱۲۶: ایک مساوی الساقین مثلث T جس کا قد h ہے کا قاعدہ چوکور Q کا ایک ضلع ہے۔ چوکور کے ضلع کی لمبائی s ہے۔ (چوکور اور مثلث
۲۳۰۲۱ ایک دوسرے کو نہیں ڈھانپتے ہیں۔) $T \cup Q$ کا وسطانی مرکز مثلث کے قاعدہ پر رکھنے کی خاطر h کا s کے ساتھ کیا تعلق گا؟ اپنے جواب کا موازنہ سوال
۲۳۰۲۲ ۱۴.۱۲۵ کے جواب کے ساتھ کریں۔

۲۳۰۲۳

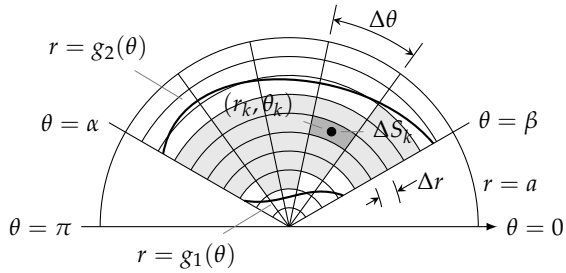
۲۳۰۲۴

۲۳۰۲۵ ۱۴.۳ دوہرا تکملات کا قطبی روپ

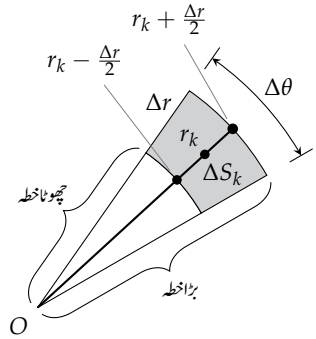
۲۳۰۲۶ بعض اوقات تکمل کو قطبی روپ میں تبدیل کرنے سے اس کا حل آسان ہو جاتا ہے۔ اس حصہ میں یہ تبدیلی دکھائی جائے گی اور ان تکملات کی قیمت کا حصول
۲۳۰۲۷ دکھایا جائے گا جن کے سرحد قطبی روپ میں دیے گئے ہوں۔

۲۳۰۲۸ قطبی روپ میں تکملات

۲۳۰۲۹ مستوی xy میں دوہرا تکمل کا ذکر کرتے ہوئے ہم نے خطہ R کو مستطیلی ٹکڑوں میں اس طرح کاٹا کہ مستطیل کے اضلاع محددی محوروں کے متوازی
۲۳۰۳۰ ہوں۔ اس طرح ان مستطیلوں کے اضلاع مستقل x اور یا مستقل y لکھے جا سکتے ہیں۔ کارتیسی محدد میں مستطیل قدرتی صورت ہے۔ قطبی محددی نظام میں



شکل ۱۴.۲۳: خطہ $R : g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta)$ ، $\alpha \le \theta \le \beta$ پنکھا نما خطہ $Q : 0 \le r \le a$ ، $\alpha \le \theta \le \beta$ میں پایا جاتا ہے۔ خطہ Q کی خانہ بندی شعاعوں اور دائری قوسین سے کرتے ہوئے R کی خانہ بندی کی جاتی ہے۔



شکل ۱۴.۲۴: سایہ دار خطے کا رقبہ ΔS_k حاصل کرنے کے لیے بڑے خطے سے چھوٹے خطے کا رقبہ منفی کریں۔

۲۳۰۳۱ ''قطبی مستطیل'' قدرتی صورت ہے جس کے اضلاع مستقل r اور مستقل θ لکھے جا سکتے ہیں۔

۲۳۰۳۲ فرض کریں تفاعل $f(r, \theta)$ خطہ R پر معین ہے جس کے سرحد شعاع $\theta = \alpha$ اور $\theta = \beta$ اور استمراری منحنیات $r = g_1(\theta)$ اور
۲۳۰۳۳ $r = g_2(\theta)$ ہیں۔ مزید α اور β کے بیچ ہر قیمت کے لیے $0 \le g_1(\theta) \le g_2(\theta) \le a$ ہے۔ یوں R پنکھا نما خطہ Q میں، جس کو
۲۳۰۳۴ عدم مساوات $0 \le r \le a,\ \alpha \le \theta \le \beta$ ظاہر کرتی ہیں، پایا جائے گا (شکل ۱۴.۲۳)۔

۲۳۰۳۵ ہم Q پر دائری قوسین اور شعاعوں کا جال بچھاتے ہیں۔ یہ قوسین ان دائروں سے کاٹے جاتے ہیں جن کا مرکز مبدا پر ہے اور جن کے رداس Δr ، $2\Delta r$ ،
۲۳۰۳۶ $\cdots$ ، $m\Delta r$ ہیں جہاں $\Delta r = \frac{a}{m}$ ہے۔ ان شعاع کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\Delta\theta = \frac{\beta-\alpha}{m'}$ ہے۔

$$\theta = \alpha,\ \theta = \alpha + \Delta\theta,\ \theta = \alpha + 2\Delta\theta, \cdots, \theta = \alpha + m'\Delta\theta = \beta$$

۲۳۰۳۷ یہ شعاع اور قوسین Q کو ''قطبی مستطیلوں'' میں تقسیم کرتے ہیں۔

۲۳۰۳۸ ہم ان قطبی مستطیلوں کو 1 تا n کی شمار سے ظاہر کرتے ہیں جو مکمل طور پر R کے اندر پائے جاتے ہوں اور ان کے رقبوں کو ΔS_1 ، ΔS_2 ، $\cdots$ ،
۲۳۰۳۹ ΔS_n سے ظاہر کرتے ہیں۔ شمار کرنے کی ترتیب غیر ضروری ہے۔ ہم ΔS_k رقبے کی قطبی مستطیل کے مرکز کو (r_k, θ_k) سے ظاہر کرتے ہیں۔ قطبی
۲۳۰۴۰ مستطیل کے مرکز سے مراد وہ نقطہ ہے جو دونوں دائری قوسین کے اوسط رداس کی قوس اور اس شعاع پر پایا جاتا ہو جو دونوں قوسین کو درمیان سے کاٹتی ہو۔ ہم
۲۳۰۴۱ اب درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(r, \theta)\Delta S_n \tag{1}$$

۲۳۰۴۲ اگر پورے R پر f استمراری ہو، تب جال کے خانے چھوٹے سے چھوٹے کر کے Δr اور $\Delta\theta$ کو صفر تک پہنچانے سے یہ مجموعہ ایک حد تک پہنچتا ہے۔ یہ

۲۳۰۴۳ حد R پر f کا دوہرا تکمل کہلاتا ہے جس کو علامتی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \iint\limits_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}S$$

۲۳۰۴۴ اس حد کی قیمت تلاش کرنے کی خاطر ہمیں مجموعہ J_n یوں لکھنا ہو گا کہ ΔS_k کی قیمت Δr اور $\Delta\theta$ کی روپ میں ہو۔ رقبہ ΔS_k کی اندرونی قوسی
۲۳۰۴۵ سرحد کا رداس $r_k - \frac{\Delta r}{2}$ جبکہ اس کی بیرونی قوسی سرحد کا رداس $r_k + \frac{\Delta r}{2}$ ہے (شکل ۱۴.۲۴)۔ ان قوسین سے مبدا تک دائری تکونی خطوں کے
۲۳۰۴۶ رقبے

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta \quad \text{اندرونی تکونی رقبہ} \\ &\frac{1}{2}\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta\theta \quad \text{بیرونی تکونی رقبہ} \end{aligned} \tag{۲}$$

۲۳۰۴۷ ہوں گے۔ یوں درج ہو گا۔

$$\begin{aligned} \Delta S_k &= \text{بیرونی تکونی رقبہ} - \text{اندرونی تکونی رقبہ} \\ &= \frac{\Delta\theta}{2}\left[\left(r_k + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 - \left(r_k - \frac{\Delta r}{2}\right)^2\right] = \frac{\Delta\theta}{2}(2r_k\Delta r) = r_k\Delta r_k\Delta\theta \end{aligned}$$

۲۳۰۴۸ اس نتیجہ کو مساوات ۱ میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(r_k,\theta_k) r_k \Delta r \Delta\theta \tag{۳}$$

۲۳۰۴۹ مسئلہ فوبینی کی ایک صورت کہتی ہے کہ اس مجموعہ کی حد r اور θ کے لحاظ سے درج ذیل بار ہا تکمل دیگا۔

$$\iint\limits_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}S = \int_{\theta=\alpha}^{\theta=\beta}\int_{r=g_1(\theta)}^{r=g_2(\theta)} f(r,\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{۴}$$

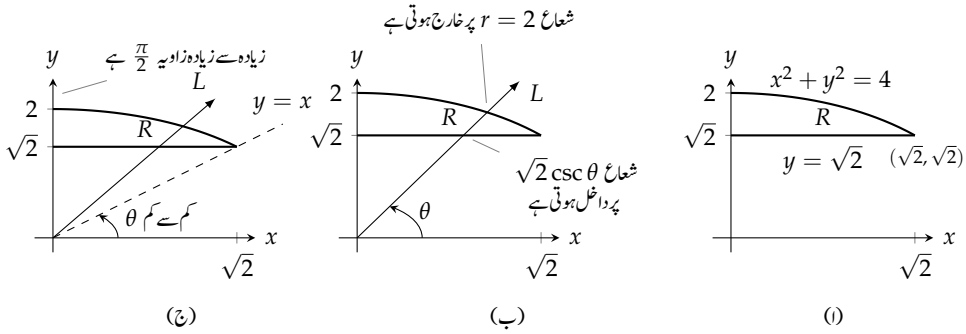
۲۳۰۵۰ تکمل کی حدیں

۲۳۰۵۱ کارتیسی محدد میں تکمل کی حدیں تلاش کرنے کا طریقہ کار قطبی محدد کے لیے بھی کارآمد ہے۔

۲۳۰۵۲ **قطبی محدد میں تکمل حاصل کرنے کا طریقہ**

۲۳۰۵۳ قطبی محدد میں خطہ R پر $\iint_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}S$ کی قیمت حاصل کرنے کے لیے پہلے r کے لحاظ سے اور بعد میں θ کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے ہمیں
۲۳۰۵۴ درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

۲۳۰۵۵ ۱. خاکہ: تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں اور اس کی سرحدی منحنیات پر نام و نشان لگائیں (شکل ۱۴.۲۵-۱)۔



شکل ۱۴.۲۵: قطبی محدد میں تکمل کی قیمت کے قدم۔

۲۳۰۵۶ ۲. تکمل کی r حدیں: مبدا سے بڑھتی ہوئی r کے رخ خطہ R سے گزرتا ہوا شعاع L کھینچیں۔ جن مقامات پر L اس خطہ میں داخل اور اس سے
۲۳۰۵۷ خارج ہوتا ہے، یہ تکمل کی r حدیں ہوں گے۔ ان کی قیمتیں عموماً θ پر منحصر ہو گی (شکل ۱۴.۲۵-ب)۔

۲۳۰۵۸ ۳. تکمل کی θ حدیں: وہ θ حدیں منتخب کریں جن میں R سے گزرتی ہوئی تمام شعاعیں شامل ہوں (شکل ۱۴.۲۵-ج)۔

۲۳۰۵۹ تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_R f(r,\theta)\,\mathrm{d}S = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/2} \int_{r=\sqrt{2}\csc\theta}^{r=2} f(r,\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

۲۳۰۶۰ مثال ۱۴.۱۰: دائرہ $r = 1$ کے باہر اور قلب نما $r = 1 + \cos\theta$ کے اندر خطہ میں $f(r,\theta)$ کے تکمل کی حدیں تلاش کریں۔

۲۳۰۶۱ **حل**

۲۳۰۶۲

۲۳۰۶۳ ۱. خاکہ: ہم خطے کا خاکہ بنا کر سرحدی منحنیات پر نام و نشان لکھتے ہیں (شکل ۱۴.۲۶)۔

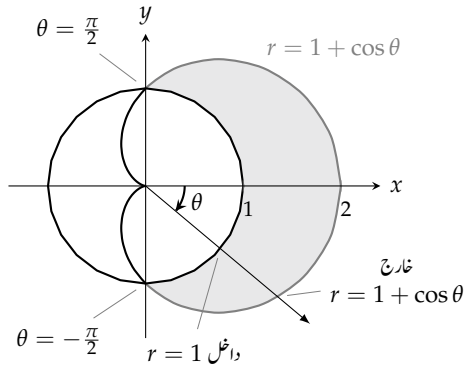
۲۳۰۶۴ ۲. تکمل کی r حدیں: مبدا سے نکلتی ہوئی علامتی شعاع خطہ R میں $r = 1$ کے مقام پر داخل اور $r = 1 + \cos\theta$ کے مقام پر خارج ہو
۲۳۰۶۵ گی۔

۲۳۰۶۶ ۳. تکمل کی θ حدیں: مبدا سے نکلتی ہوئی وہ شعاعیں جو R سے گزرتی ہوں، $\theta = -\frac{\pi}{2}$ تا $\theta = \frac{\pi}{2}$ میں پائی جاتی ہیں۔

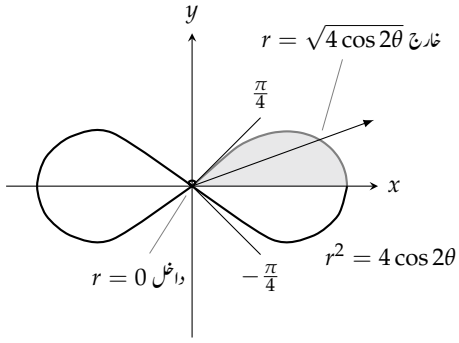
۲۳۰۶۷ یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{1}^{1+\cos\theta} f(r,\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

۲۳۰۶۸ □



شکل ۱۴.۲۶: دائرہ اور قلب نما (مثال ۱۴.۱۰)



شکل ۱۴.۲۷: تکمل کی قیمت کے حصول میں ہم r کو 0 تا $\sqrt{4\cos 2\theta}$ جبکہ θ کو 0 تا $\frac{\pi}{4}$ لیتے ہیں۔

۲۳۰۶۹ اگر $f(r,\theta)$ ایک مستقل تفاعل ہو جس کی قیمت 1 ہو تب R پر f کا تکمل R کا رقبہ ہو گا۔

۲۳۰۷۰ قطبی محدد میں رقبہ

۲۳۰۷۱ قطبی محددی مستوی میں بند اور محدود خطہ R کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \iint\limits_R r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{۵}$$

۲۳۰۷۲ جیسا آپ توقع کرتے ہوں گے یہ کلیہ، پہلے دیے گئے کلیات کے عین مطابق ہے۔ ہم اس حقیقت کا ثبوت پیش نہیں کریں گے۔

۲۳۰۷۳ مثال ۱۴.۱۱: دوچشمہ $r^2 = 4\cos 2\theta$ میں گھیرا ہوا رقبہ تلاش کریں۔

۲۳۰۷۴ حل

۲۳۰۷۵ ہم دوچشمہ کا خاکہ بنا کر تکمل کی حدیں معلوم کرتے ہیں (شکل ۱۴.۲۷)۔ ہم دیکھتے ہیں کہ ربع اول میں دوچشمہ کے رقبہ کو 4 سے ضرب دے کر پورا رقبہ
۲۳۰۷۶ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} S &= 4\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{4\cos 2\theta}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\pi/4}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=0}^{r=\sqrt{4\cos 2\theta}}\mathrm{d}\theta \\ &= 4\int_0^{\pi/4} 2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\sin 2\theta\Big]_0^{\pi/4} = 4 \end{aligned}$$

۲۳۰۷۷ □

۲۳۰۷۸ کارتیسی تکملات کی قطبی تکملات میں تبدیلی

۲۳۰۷۹ کارتیسی تکمل $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کو قطبی تکمل میں دو قدموں میں تبدیل کیا جاتا ہے:

۲۳۰۸۰ ۱. کارتیسی تکمل میں $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ پر کرتے ہوئے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی جگہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھیں۔

۲۳۰۸۱ ۲. خطہ R کی سرحد کی قطبی حدیں مہیا کریں۔

۲۳۰۸۲ یوں کارتیسی تکمل سے درج ذیل حاصل ہو گا جہاں تکمل کے خطہ کو قطبی محدد میں G سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_G f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \tag{۶}$$

۲۳۰۸۳ یہ باب ۵ میں ترکیب بدل کی طرح ہے البتہ یہاں ایک کے بجائے دو متغیرات ہیں۔ دھیان رہے کہ $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی جگہ $\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ نہیں بلکہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ پر
۲۳۰۸۴ کیا جاتا ہے۔ اس کی وجہ حصہ ۱۴.۷ پیش کی جائے گی۔

۲۳۰۸۵ مثال ۱۴.۱۲: ربع اول میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کی ایک چوتھائی میں کثافت $\delta(x,y) = 1$ کی باریک چادر کی مبدا کے لحاظ سے قطبی معیار
۲۳۰۸۶ اثر تلاش کریں۔

۲۳۰۸۷ **حل**

۲۳۰۸۸ ہم چادر کا خاکہ بنا کر تکمل کی حدیں معلوم کرتے ہیں (شکل ۱۴.۲۸)۔ کارتیسی محدد میں اس خطہ کا قطبی معیار اثر سے مراد درج ذیل تکمل ہے۔

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

۲۳۰۸۹ ہم y کے لحاظ سے تکمل لے کر

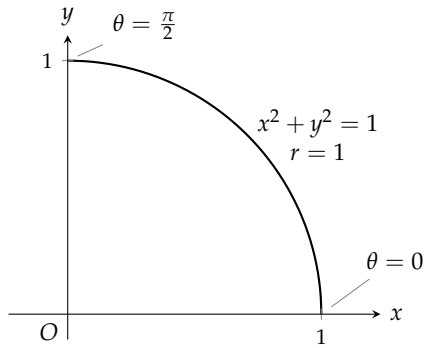
$$\int_0^1 (x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{3})\,\mathrm{d}x$$

۲۳۰۹۰ حاصل کرتے ہیں جس کا حل، جدول کی مدد کے بغیر، مشکل ہے۔

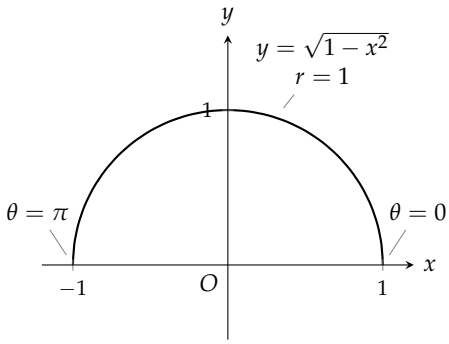
۲۳۰۹۱ اس تکمل کو قطبی تکمل میں تبدیل کرنے سے حالات بہتر ہوتے ہیں۔ ہم $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ پر کر کے $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ کی جگہ
۲۳۰۹۲ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھ کر

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2}\int_0^1 (r^2) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{r^2}{4}\right]_{r=0}^{r=1} \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

۲۳۰۹۳ حاصل کرتے ہیں۔ قطبی محدد میں تکمل اتنا آسان کیوں ہوا۔ ایک وجہ یہ ہے کہ $x^2 + y^2$ سادہ صورت r^2 اختیار کرتا ہے۔ دوسری وجہ یہ کہ تکمل کی
۲۳۰۹۴ حدیں اب مستقل ہیں۔ □



شکل ۱۴.۲۸: قطبی محدد میں یہ خطہ $0 \le r \le 1$ ، $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ ہے۔



شکل ۱۴.۲۹: نصف دائری خطہ $0 \le r \le 1$ ، $0 \le \theta \le \pi$ ہے۔

۲۳۰۹۵ مثال ۱۴.۱۳: محور x اور منحنی $y = \sqrt{1 - x^2}$ کے بیچ نصف دائری خطہ R پر درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں (شکل ۱۴.۲۹)۔

$$\iint\limits_R e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

۲۳۰۹۶ **حل**

۲۳۰۹۷ کارتیسی محدد میں یہ تکمل غیر بنیادی ہے اور $e^{x^2+y^2}$ کا x یا y کے لحاظ سے تکمل، سیدھا طریقے سے، حاصل نہیں کیا جا سکتا ہے۔ اس کے باوجود یہ تکمل

۲۳۰۹۸ اور اس طرح کے دیگر تکملات ریاضیات میں اہمیت رکھتے ہیں اور ان کا حل ضروری ہے۔ قطبی محدد یہاں مددگار ثابت ہوتے ہیں۔ ہم $x = r\cos\theta$ اور

۲۳۰۹۹ $y = r\sin\theta$ پر کر کے $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ کی جگہ $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ لکھ کر تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}\iint\limits_R e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \int_0^1 e^{r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \left[\frac{1}{2}e^{r^2}\right]_0^1 \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2}(e-1)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}(e-1)\end{aligned}$$

۲۳۱۰۰ آپ نے دیکھا کہ e^{r^2} کے تکمل میں ہمیں $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$ کا r درکار تھا جس کے بغیر ہم تکمل حاصل نہیں کر سکتے تھے۔ □

سوالات

قطبی تکملات کی قیمت کی تلاش

سوال ۱۴.۱۲۷ تا سوال ۱۴.۱۴۲ میں دیے گئے تکملات کو قطبی روپ میں تبدیل کر کے حل کریں۔

سوال ۱۴.۱۲۷: $\int_{-1}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۱۲۸: $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۱۲۹: $\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

سوال ۱۴.۱۳۰: $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

سوال ۱۴.۱۳۱: $\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۱۳۲: $\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

سوال ۱۴.۱۳۳: $\int_{0}^{6} \int_{0}^{y} x\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

سوال ۱۴.۱۳۴: $\int_{0}^{2} \int_{0}^{x} y\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۱۳۵: $\int_{-1}^{0} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۱۳۶: $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

سوال ۱۴.۱۳۷: $\int_{0}^{\ln 2} \int_{0}^{\sqrt{(\ln 2)^2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

سوال ۱۴.۱۳۸: $\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۱۳۹: $\int_{0}^{2} \int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۱۴۰: $\int_{0}^{2} \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} xy^2\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

سوال ۱۴.۱۴۱: $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$

سوال ۱۴.۱۴۲: $\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$

قطبی محدد میں رقبات کی تلاش

سوال ۱۴.۱۴۳: ربع اول سے منحنی $r = 2(2 - \sin 2\theta)^{1/2}$ جس خطہ کو کاٹتی ہے، اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۴۴: قلب نما $r = 1 + \cos\theta$ کے اندر اور دائرہ $r = 1$ کے باہر خطہ کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۴۵: گلاب $r = 12\cos 3\theta$ کے ایک پتے کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۴۶: مثبت محور x اور پیچ دار $r = \frac{4\theta}{3},\ 0 \le \theta \le 2\pi$ کے پیچ رقبہ تلاش کریں۔ اس خطہ کی صورت گھونگا کے خول سے ملتی جلتی ہے۔

سوال ۱۴.۱۴۷: ربع اول میں قلب نما $r = 1 + \sin\theta$ جس خطہ کو کاٹتا ہے، اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۴۸: قلب نما $r = 1 + \cos\theta$ اور $r = 1 - \cos\theta$ کے مشترکہ خطہ کا رقبہ تلاش کریں۔

کمیت اور معیار اثر

سوال ۱۴.۱۴۹: مستقل کثافت $\delta(x, y) = 3$ کی باریک چادر جس کی زیریں سرحد محور x اور بالائی سرحد قلب نما $r = 1 - \cos\theta$ ہے، کا محور x کے لحاظ سے معیار اثر اول تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۵۰: دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ کے اندر باریک دائرہ قرص کی کثافت $\delta(x, y) = k(x^2 + y^2)$ ہے جہاں k ایک مستقل ہے۔ اس قرص کے محور x کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور مبدا کے لحاظ سے قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۵۱: دائرہ $r = 3$ کے باہر اور دائرہ $r = 6\sin\theta$ کے اندر چادر کی کثافت $\delta(r, \theta) = \frac{1}{r}$ ہے۔ اس چادر کی کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۵۲: قلب نما $r = 1 - \cos\theta$ کے اندر اور دائرہ $r = 1$ کے باہر باریک چادر کی کثافت $\delta(r, \theta) = \frac{1}{r^2}$ ہے۔ مبدا کے لحاظ سے اس چادر کی قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۵۳: قلب نما $r = 1 + \cos\theta$ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۵۴: قلب نما $r = 1 + \cos\theta$ کے اندر باریک چادر کی کثافت $\delta(x, y) = 1$ ہے۔ مبدا کے لحاظ سے اس چادر کی قطبی معیار اثر تلاش کریں۔

اوسط قیمتیں

سوال ۱۴.۱۵۵: مستوی xy میں قرص $x^2 + y^2 \le a^2$ کے اوپر نصف کرہ $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۵۶: مستوی xy میں قرص $x^2 + y^2 \le a^2$ کے اوپر (ایک) مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کا اوسط قد تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۵۷: قرص $x^2 + y^2 \le a^2$ میں مبدا سے نقطہ $N(x, y)$ کا اوسط فاصلہ تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۵۸: قرص $x^2 + y^2 \le a$ میں نقطہ $N(x, y)$ کا سرحدی نقطہ $A(1, 0)$ سے فاصلے کے مربع کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۴.۱۵۹: خطہ $1 \le x^2+y^2 \le e$ پر $f(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ کے تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

سوال ۱۴.۱۶۰: خطہ $1 \le x^2+y^2 \le e^2$ پر $f(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ کا تکمل حل کریں۔

سوال ۱۴.۱۶۱: قلب نما $r = 1+\cos\theta$ کے اندر اور دائرہ $r = 1$ کے باہر خطہ ٹھوس قائمہ بیلن کا قاعدہ ہے۔ اس بیلن کی چوٹی مستوی $z = x$ میں پائی جاتی ہے۔ اس بیلن کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۶۲: دوچشمہ $r^2 = 2\cos 2\theta$ کے اندر خطہ ٹھوس قائمہ بیلن کا قاعدہ ہے۔ اس بیلن کی چوٹی کرہ $z = \sqrt{2-r^2}$ کی سطح کو مس کرتی ہے۔ اس بیلن کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۶۳: (ا) غیر مناسب تکمل $I = \int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ کے حل کا درست طریقہ یہ ہے کہ پہلے اس کا مربع لیں:

$$I^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

اس تکمل کو قطبی روپ میں لکھ کر حل کریں۔ (ب) درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ (حصہ ۸.۶ کا سوال ۸.۴۵۳ جاری)۔

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{erf}(x) = \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{2e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{d}t$$

سوال ۱۴.۱۶۴: درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سوال ۱۴.۱۶۵: قرص $x^2+y^2 \le \frac{3}{4}$ پر تفاعل $f(x,y) = 1/(1-x^2-y^2)$ کا تکمل حل کریں۔ کیا قرص $x^2+y^2 \le 1$ پر $f(x,y)$ کا تکمل موجود ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۴.۱۶۶: قطبی محدد میں دوہرا تکمل استعمال کرتے ہوئے قطبی منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$ اور مبدا کے بیچ پنکھا نما خطہ کے رقبہ کا درج ذیل کلیہ اخذ کریں۔

$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta$$

سوال ۱۴.۱۶۷: رداس a کے دائرہ میں N_0 ایک نقطہ ہے اور N_0 سے دائرہ کے مرکز تک فاصلہ h ہے۔ کسی بھی اختیاری نقطہ N سے N_0 تک فاصلہ کو d سے ظاہر کریں۔ دائرہ میں محیط خطہ پر d^2 کی اوسط قیمت تلاش کریں۔ (اشارہ: دائرے کے مرکز کو مبدا پر اور N_0 کو محور x پر رکھ کر اپنے لیے آسانی پیدا کریں۔)

سوال ۱۴.۱۶۸: فرض کریں ایک قطبی خطے کا رقبہ درج ذیل ہے۔

$$S = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \int_{\csc\theta}^{2\sin\theta} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta$$

(ا) اس تکمل کے خطہ کا خاکہ بنائیں۔ (ب) پاپس کے ایک مسئلہ اور حصہ ۶.۱۰ میں سوال ۶.۳۵۰ میں وسطانی مرکز کی معلومات استعمال کرتے ہوئے اس خطہ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل ٹھوس جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۱۴.۱۶۹ تا سوال ۱۴.۱۷۲ میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے کارتیسی تکملات کو قطبی تکملات میں تبدیل کر کے ان قطبی تکملات کی قیمتیں تلاش کریں۔ آپ کو درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

ا. کارتیسی تکمل کے خطہ کا خاکہ مستوی xy پر بنائیں۔

ب. جزو-ا میں خطہ کی ہر سرحد کی کارتیسی مساوات کو r اور θ کے لیے حل کرتے ان کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

ج. جزو-ب کے نتائج استعمال کرتے ہوئے تکمل کے خطہ کے خاکہ کو قطبی $r\theta$ مستوی میں بنائیں۔

د. متکمل کو کارتیسی سے قطبی روپ میں تبدیل کریں۔ جزو-ج کے خاکہ سے تکمل کی حدیں معلوم کر کے قطبی تکمل کی قیمت کمپیوٹر کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال ۱۴.۱۶۹: $\int_0^1 \int_x^1 \frac{y}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۱۷۰: $\int_0^1 \int_0^{x/2} \frac{x}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۱۷۱: $\int_0^1 \int_{-y/3}^{y/3} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

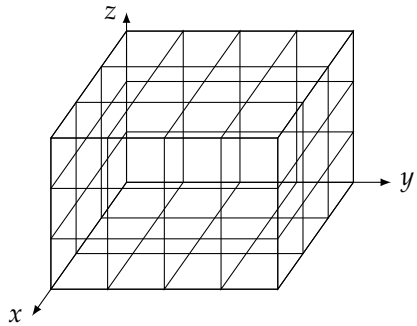
سوال ۱۴.۱۷۲: $\int_0^1 \int_y^{2-y} \sqrt{x+y} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

۱۴.۴ کارتیسی محدد میں تہرا تکمل

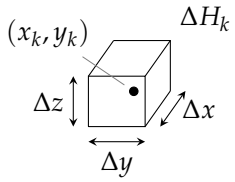
ہم تہرا تکملات کی مدد سے تین بُعدی اجسام کے حجم، کمیت اور معیار اثر اور تین متغیری تفاعل کی اوسط قیمت معلوم کرتے ہیں۔ باب ۱۵ میں ہم دیکھیں گے کہ سمتی میدان اور حرکت سیال کے مطالعہ میں ہمیں ان تکملات سے کیسا واسطہ پڑتا ہے۔

تہرا تکمل

فرض کریں فضا میں بند محدود خطہ D پر تفاعل $F(x, y, z)$ معین ہے، تب D پر تکمل F کی تعریف کچھ یوں ہو گی۔ ہم ایک مستطیل خطہ جس میں D پایا جاتا ہو کو محددی مستویات کے متوازی مستویات سے مستطیل خانوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل ۱۴.۳۰-ا)۔ ہم D کے اندر پائے جانے والے



(ا)ایک حجم جس میں D پایا جاتا ہے کو محددی مستویات کے متوازی سطحوں سے مستطیل مکعب خلیوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔



(ب)ایک مستطیل مکعب خلیہ کا حجم۔

شکل ۱۴.۳۰: ٹھوس جسم کو ΔH_k حجم کے مستطیل خانوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔

۲۳۱۸۷ خانوں کو (کسی بھی ترتیب سے) 1 تا n کی شمار سے ظاہر کرتے ہیں۔ یوں ایک علامتی مستطیل خانے کے اضلاع Δx_k ، Δy_k اور Δz_k جبکہ اس کا حجم
۲۳۱۸۸ ΔH_h ہو گا (شکل ۱۴.۳۰-ب)۔ ہم ہر مستطیل خانے میں کوئی نقطہ (x_k, y_k, z_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} F(x_k, y_k, z_k)\Delta H_k \tag{۱}$$

۲۳۱۸۹ اگر F استمراری ہو اور D کی تحدیدی سطح ہموار سطحوں پر مشتمل ہو جو ایک دوسرے کے ساتھ استمراری منحنیات میں جڑتے ہوں، تب جوں جوں
۲۳۱۹۰ Δx_k ، Δy_k اور Δz_k صفر کے قریب پہنچتے ہوں توں توں مجموعات J_n ایک حد تک پہنچتے ہیں:

$$\lim_{n\to\infty} J_n = \iiint\limits_D F(x, y, z)\,\mathrm{d}H \tag{۲}$$

۲۳۱۹۱ ہم اس حد کو D پر F کا **تہرا تکمل**[۱۳] کہتے ہیں۔ یہ حد چند غیر استمراری تفاعل کے لیے بھی موجود ہے۔

۲۳۱۹۲ **تہرا تکملات کے خواص**

۲۳۱۹۳ تہرا تکملات کے خواص وہی ہیں جو واحد تکملات اور دوہرا تکملات کے ہیں۔ اگر $F = F(x, y, z)$ اور $G = G(x, y, z)$ استمراری ہوں، تب

۲۳۱۹۴ ۱. $\iiint\limits_D kF\,\mathrm{d}H = k\iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H$ (k کوئی عدد ہے)

۲۳۱۹۵ ۲. $\iiint\limits_D (F \mp G)\,\mathrm{d}H = \iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H \mp \iiint\limits_D G\,\mathrm{d}H$

---

[۱۳] tripleintegral

۳. اگر D پر $F \geq 0$ تب $\iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H \geq 0$

۴. اگر D پر $F \geq D$ ہو تب $\iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H \geq \iiint\limits_D G\,\mathrm{d}H$

۵. تہرا تکملات مجموعیت کی خاصیت بھی رکھتے ہیں جو طبیعیات، انجینئری اور ریاضیات کے میدان میں کام آتی ہے۔ اگر استمراری تفاعل F کے دائرہ کار D کو ہموار سطحوں سے متناہی تعداد کے علیحدہ علیحدہ ٹکڑوں D_1 ، D_2 ، ۰ ۰ ۰ ، D_n میں تقسیم کیا جائے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H = \iiint\limits_{D_1} F\,\mathrm{d}H + \iiint\limits_{D_2} F\,\mathrm{d}H + \cdots + \iiint\limits_{D_n} F\,\mathrm{d}H$$

فضا میں خطے کا حجم

اگر F ایک مستقل تفاعل ہو جس کی قیمت 1 ہو تب مساوات ا کے تہرا مجموعہ کی تخفیف صورت درج ذیل ہو گی۔

$$J_n = \sum F(x_k, y_k, z_k)\Delta H_k = \sum 1 \cdot \Delta H_k = \sum \Delta H_k \tag{۳}$$

جوں جوں Δx_k ، Δy_k اور Δz_k صفر تک پہنچتے ہیں توں توں ΔH_k جسامت میں چھوٹے اور تعداد میں زیادہ ہوتے جاتے ہیں اور D کے زیادہ حصہ کو بھرتے ہیں۔ اسی لیے ہم D کے حجم کی تعریف درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta H_k = \iiint\limits_D \mathrm{d}H$$

تعریف: فضا میں بند محدود خطہ D کا **حجم**[۱۴] درج ذیل ہو گا۔

$$H = \iiint\limits_D \mathrm{d}H \tag{۴}$$

□

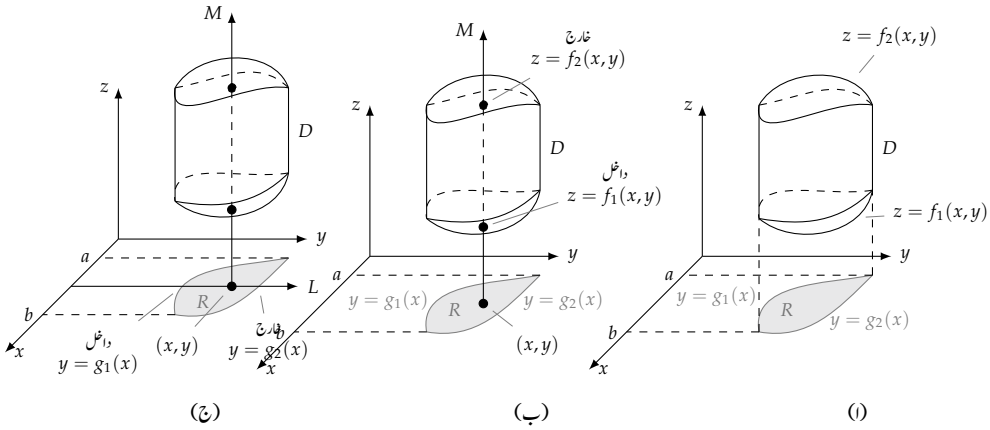
جیسا ہم جلد دیکھیں گے، قوسی سطحوں میں ملفوف ٹھوس اجسام کا حجم اس تکمل سے حاصل کیا جاتا ہے۔

تہرا تکمل کی قیمت کا حصول

ہم تہرا تکمل کی تعریف سے اس کی قیمت شاذ و نادر حاصل کرتے ہیں۔ اس کے بجائے ہم مسئلہ فوبینی کی تین بُعدی روپ استعمال کرتے ہوئے تین بار ایک گنا تکملات سے اس کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔ دہرا تکمل کی طرح، تکمل کی حدیں معلوم کرنے کا جیومیٹریائی طریقہ کار پایا جاتا ہے۔

---

[۱۴] volume



شکل ۱۴.۳۱: تہرا تکملات کی حدوں کی تلاش۔

تہرا تکملات کی حدوں کی تلاش

دائرہ کار D پر درج ذیل تکمل میں پہلے z ،اس کے بعد y اور آخر میں x کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

$$\iiint\limits_D F(x, y, z)\,\mathrm{d}H$$

۱. خاکہ: خطہ D کا خاکہ بنائیں اور مستوی xy پر اس کا انتصابی سایہ R دکھائیں۔ خطہ D کی بالائی اور زیریں تحدیدی سطحوں کی نشاندہی کریں اور R کی بالائی اور زیریں تحدیدی منحنیات کی نشاندہی کریں (شکل ۱۴.۳۱-ا)۔

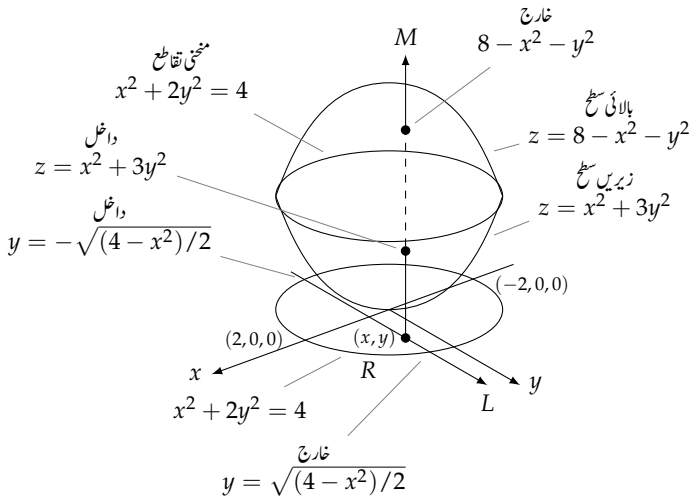
۲. تکمل کی z حدیں: خطہ R میں علامتی نقطہ (x, y) سے محور z کے متوازی لکیر M کھینچیں۔ بڑھتے z رک چلتے ہوئے، یہ لکیر $z = f_1(x, y)$ پر D میں داخل ہو گی اور $z = f_2(x, y)$ پر D سے خارج ہو گی۔ یہی تکمل کی z حدیں ہیں (شکل ۱۴.۳۱-ب)۔

۳. تکمل کی y حدیں: نقطہ (x, y) سے گزرتی ہوئی محور y کے متوازی لکیر L کھینچیں۔ بڑھتے y رخ چلتے ہوئے یہ لکیر R میں $y = g_1(x)$ پر داخل اور $y = g_2(x)$ پر خارج ہو گی۔ یہی تکمل کی y حدیں ہیں (شکل ۱۴.۳۱-ج)۔

۴. تکمل کی x حدیں: وہ x حدیں منتخب کریں جس میں محور y کے متوازی، R سے گزرتی ہوئی تمام لکیریں L شامل ہوں۔ ہماری مثال میں یہ حدیں $x = a$ اور $x = b$ ہیں۔

یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{x=a}^{x=b} \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x, y, z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$



شکل ۱۴.۳۲: دو سطحوں کے بیچ حجم (مثال ۱۴.۱۴)

تکملات کی ترتیب تبدیل کرنے کی صورت میں اسی طرح کی طریقہ کار سے تکملات کی حدیں تلاش کریں۔ بارہا تکمل میں آخری دو متغیرات، جن کے لحاظ سے تکمل لیا گیا ہو، کے مستوی میں D کا سایہ درکار ہو گا۔

مثال ۱۴.۱۴: خطہ D سطح $z = x^2 + 3y^2$ اور سطح $z = 8 - x^2 - y^2$ میں ملفوف ہے۔ اس کا حجم تلاش کریں۔

حل

ہم $F(x, y, z) = 1$ لیتے ہوئے حجم کے لیے درج ذیل تکمل لکھتے ہیں۔

$$H = \iiint\limits_D \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

ہم تکمل کی حدیں درج ذیل اقدام سے معلوم کرتے ہیں۔

۱. خاکہ: یہ سطحیں ایک دوسرے کو قطع مکافی $x^2 + 3y^2 = 8 - x^2 - y^2$ یعنی $x^2 + 2y^2 = 4$ میں قطع کرتی ہیں (شکل ۱۴.۳۲)۔ مستوی xy میں D کے سایہ R کی سرحد کی مساوات یہی ($x^2 + 2y^2 = 4$) ہو گی۔ خطہ R کی بالائی سرحد منحنی $y = \sqrt{(4 - x^2)/2}$ اور اس کی زیریں سرحد منحنی $y = -\sqrt{(4 - x^2)/2}$ ہو گی۔

۲. تکمل کی z حدیں: خطہ R میں علامتی نقطہ (x, y) سے گزرتی ہوئی محور z کی متوازی لکیر M خطہ D میں $z = x^2 + 3y^2$ پر داخل اور $z = 8 - x^2 - y^2$ پر خارج ہوتی ہے۔

۳. تکمل کی y حدیں: نقطہ (x, y) سے گزرتی ہوئی محور y کی متوازی لکیر L خطہ R میں $y = -\sqrt{(4 - x^2)/2}$ پر داخل اور $y = \sqrt{(4 - x^2)/2}$ پر خارج ہوتی ہے۔

۴. تکمل کی x حدیں: محور y کی متوازی لکیریں L خطہ R میں $x = -2$ (نقطہ(-2,0,0)) سے $x = 2$ (نقطہ(2,0,0)) تک گزرتی ہیں۔

یوں حجم درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
H &= \iiint\limits_D \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}} (8-2x^2-4y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2}\left[(8-2x^2)y-\frac{4}{3}y^3\right]_{y=-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{y=\sqrt{(4-x^2)/2}}\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2}\left(2(8-2x^2)]\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}-\frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{2}\left[8\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2}-\frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2}\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}(4-x^2)^{3/2}\,\mathrm{d}x \\
&= 8\pi\sqrt{2} && x = 2\sin u \text{ پر کر کے تکمل لیا گیا ہے}
\end{aligned}
$$

□

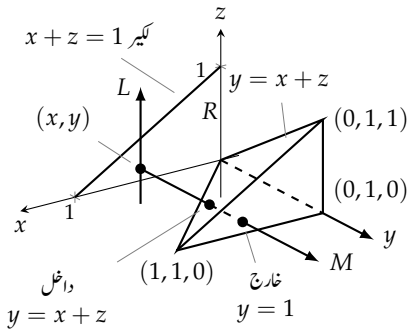
اگلی مثال میں ہم مستوی xy کے بجائے مستوی xz میں D کا سایہ لیتے ہیں۔

مثال ۱۴.۱۵: چوسطحہ D کے راس $(0,0,0)$ ، $(1,1,0)$ ، $(0,1,0)$ اور $(0,1,1)$ ہیں۔ تفاعل $F(x,y,z)$ کے تہرا تکمل کی حدیں معلوم کریں۔

حل

۱. خطہ: ہم D اور مستوی xz میں اس کے سایہ R کا خاکہ بناتے ہیں (شکل ۱۴.۳۳)۔ خطہ D کی بالائی (دائیں ہاتھ) تحدیدی سطح مستوی $y = 1$ میں پائی جاتی ہے۔ اس کی زیریں (بائیں ہاتھ) تحدیدی سطح مستوی $y = x + z$ میں پائی جاتی ہے۔ خطہ R کی بالائی سرحد لکیر $z = 1 - x$ اور زیریں سرحد لکیر $z = 0$ ہیں۔

۲. تکمل کی y حدیں: خطہ R میں علامتی نقطہ (x,y) سے گزرتی لکیر جو محور y کے متوازی ہو D میں $y = x + z$ پر داخل اور $y = 1$ پر خارج ہوتی ہے۔



شکل ۱۴.۳۳: چوسطحہ (مثال ۱۴.۱۵)

۲۳۲۵۰ ۳. تکمل کی z حدیں: محور z کے متوازی نقطہ (x,y) سے گزرتی لکیر L خطہ R میں $z=0$ پر داخل اور $z=1-x$ پر خارج ہوتی
۲۳۲۵۱ ہے۔

۲۳۲۵۲ ۴. تکمل کی x حدیں: خطہ R میں $x=0$ سے $x=1$ تک گزرتی ہیں۔

۲۳۲۵۳ یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_{x+z}^1 F(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

۲۳۲۵۴ □

۲۳۲۵۵ جیسا ہم جانتے ہیں، دہرا تکمل کا حصول عموماً (لیکن ضروری نہیں) ایک گنا تکملات کو دو مختلف ترتیب سے حاصل کر کے حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ تہرا تکمل کے
۲۳۲۵۶ لیے اس طرح کے چھ ترتیب ممکن ہو سکتے ہیں۔

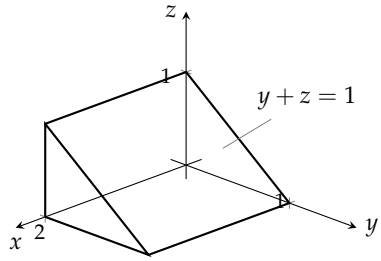
۲۳۲۵۷ مثال ۱۴.۱۶: درج ذیل چھ تکملات شکل ۱۴.۳۴ میں دکھائے گئے منشور کا حجم دیتے ہیں۔

$$\int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \qquad \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$$

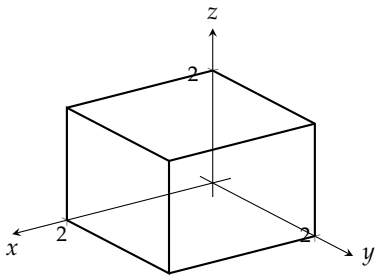
$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-z} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \qquad \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-z} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{1-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \int_0^2 \int_0^1 \int_0^{1-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

۲۳۲۵۸ □



شکل ۱۴.۳۴: منشور کے حجم کی چھ بارہا تہرا تکملات مثال ۱۴.۱۶ میں دیے گئے ہیں۔



شکل ۱۴.۳۵: تکمل کا خطہ (مثال ۱۴.۱۷)

۳۳۲۵۹ **فضا میں تفاعل کی اوسط قیمت**

۳۳۲۶۰ فضا میں خطہ D پر تفاعل F کی اوسط قیمت درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$\text{اوسط قیمت } F \text{ پر } D = \frac{1}{D \text{ کا حجم}} \iiint\limits_D F\,\mathrm{d}H \tag{۵}$$

۳۳۲۶۱ مثال کے طور پر اگر $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ہو تب D پر F کی اوسط قیمت سے مراد مبدا سے D میں نقطوں کا اوسط فاصلہ
۳۳۲۶۲ ہے۔ اگر D میں $F(x,y,z)$ ایک ٹھوس جسم کی کمیتی کثافت ہو تب D میں F کی اوسط قیمت اس جسم کی اوسط کمیتی کثافت ہو گی جس کی اکائی
۳۳۲۶۳ کمیت فی اکائی حجم ہو گی۔

۳۳۲۶۴ مثال ۱۴.۱۷: شُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 2$ ، $y = 2$ اور $z = 2$ کے بیچ $F(x,y,z) = xyz$ کی اوسط
۳۳۲۶۵ قیمت تلاش کریں۔

۳۳۲۶۶ **حل**

۳۳۲۶۷ ہم اس مکعب کا خاکہ بنا کر اس پر تکمل کی حدوں کی نشاندہی کرتے ہیں (شکل ۱۴.۳۵)۔ اس کے بعد مساوات ۵ سے مکعب پر F کی اوسط قیمت حاصل کرتے ہیں۔

۳۳۲۶۸ مکعب کا حجم $(2)(2)(2) = 8$ ہو گا۔ مکعب پر F کی قیمت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_0^2\int_0^2\int_0^2 xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_0^2\int_0^2 \left[\frac{x^2}{2}yz\right]_{x=0}^{x=2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2\int_0^2 2yz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &= \int_0^2 \left[y^2z\right]_{y=0}^{y=2}\mathrm{d}z = \int_0^2 4z\,\mathrm{d}z = \left[2z^2\right]_0^2 = 8\end{aligned}$$

۳۳۲۶۹ ان قیمتوں کو استعمال کرتے ہوئے مساوات ۵ سے درج ذیل اوسط قیمت حاصل ہو گی۔

$$\text{مکعب پر اوسط قیمت} = \frac{1}{\text{حجم}}\iiint xyz\,\mathrm{d}H = \left(\frac{1}{8}\right)(8) = 1$$

ہم نے اس تکمل کو $\mathrm{d}x$ ، $\mathrm{d}y$ ، $\mathrm{d}z$ ترتیب سے حاصل کیا۔ ہم باقی پانچ ترتیب میں سے کسی ایک ترتیب کو استعمال کرتے ہوئے بھی اس تکمل کو حل کر سکتے ہیں۔ □

سوالات

مختلف اعادوں سے تہرا تکمل کی قیمت کا حصول

سوال ۱۴.۱۷۳: چھ مختلف اعادوں سے مثال ۱۴.۱۶ میں حجم کا حل دیا گیا ہے۔ ان تمام کا مشترک جواب کیا ہے؟

سوال ۱۴.۱۷۴: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 2$ اور $z = 3$ کے بیچ ٹھوس مستطیل جسم کے حجم کے چھ مختلف اعادہ تہرا تکملات لکھیں۔ ان میں سے ایک تکمل کی قیمت معلوم کریں۔

سوال ۱۴.۱۷۵: ثُمن اول سے مستوی $6x + 3y + 2z = 6$ ایک چوسطحہ کاٹتا ہے۔ اس کے حجم کے چھ مختلف اعادہ تہرا تکملات لکھیں۔ ان میں سے ایک تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال ۱۴.۱۷۶: ثُمن اول سے بیلن $x^2 + z^2 = 4$ اور مستوی $y = 3$ ایک خطہ کاٹتے ہیں۔ اس خطہ کے حجم کے چھ مختلف اعادہ تہرا تکملات لکھیں۔ ان میں سے ایک تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۷۷: قطعات مکافی $z = 8 - x^2 - y^2$ اور $z = x^2 + y^2$ میں محیط خطہ D کے حجم کا چھ مختلف تہرا اعادہ تکملات لکھیں۔ ان میں سے ایک تکمل کی قیمت معلوم کریں۔

سوال ۱۴.۱۷۸: قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ اور مستوی $z = 2y$ میں ملفوف خطہ D کے حجم کی تہرا اعادہ تکملات ترتیب $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ اور $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ میں لکھیں۔ ان میں سے کسی بھی تکمل کی قیمت حاصل نہ کریں۔

تہرا اعادہ تکمل کی قیمت کی تلاش

سوال ۱۴.۱۷۹ تا سوال ۱۴.۱۹۲ میں تکملات کی قیمتیں تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۱۷۹: $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

سوال ۱۴.۱۸۰: $\int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{3y} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

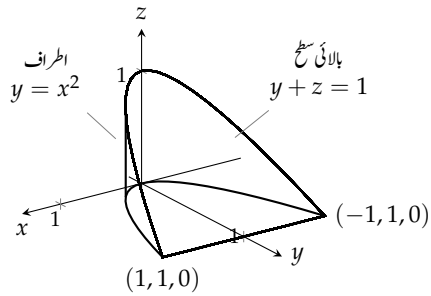
سوال ۱۴.۱۸۱: $\int_1^e \int_1^e \int_1^e \frac{1}{xyz}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۴.۱۸۲: $\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

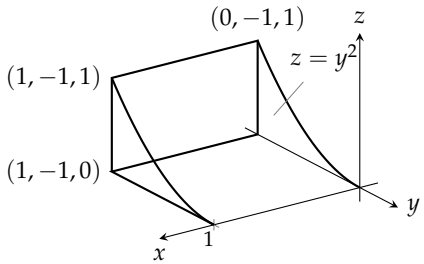
سوال ۱۴.۱۸۳: $\int_0^1 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} y \sin z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۴.۱۸۴: $\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x + y + z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۴.۱۸۵: $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$



شکل ۱۴.۳۶: خاکہ برائے سوال ۱۴.۱۹۳



شکل ۱۴.۳۷: خاکہ برائے سوال ۱۴.۱۹۴

۲۳۲۹۴ سوال ۱۴.۱۸۶: $\int_0^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{2x+y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

۲۳۲۹۵ سوال ۱۴.۱۸۷: $\int_0^1 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

۲۳۲۹۶ سوال ۱۴.۱۸۸: $\int_0^1 \int_0^{1-x^2} \int_3^{4-x^2-y} x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

۲۳۲۹۷ سوال ۱۴.۱۸۹: $\int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^\pi \cos(u+v+w)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$ (uvw فضا)

۲۳۲۹۸ سوال ۱۴.۱۹۰: $\int_1^e \int_1^e \int_1^e \ln r \ln s \ln t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s$ (rst فضا)

۲۳۲۹۹ سوال ۱۴.۱۹۱: $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\ln\sec v} \int_{-\infty}^{2t} e^x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}v$ (tvx فضا)

۲۳۳۰۰ سوال ۱۴.۱۹۲: $\int_0^7 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-q^2}} \frac{q}{r+1}\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}r$ (pqr فضا)

۲۳۳۰۱

۲۳۳۰۲ **حجم بذریعہ تہرا تکملات**

۲۳۳۰۳ سوال ۱۴.۱۹۳: درج ذیل تکمل کا خطہ شکل ۱۴.۳۶ میں دکھایا گیا ہے۔

$$\int_{-1}^{1} \int_{x^2}^{1} \int_0^{1-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

۲۳۳۰۴ اس تکمل کو درج ذیل ترتیب کے اعادہ معادل روپ میں لکھیں۔

۲۳۳۰۵ ا. $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$

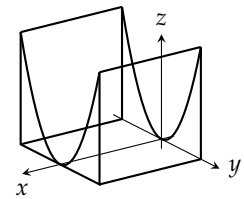
۲۳۳۰۶ ب. $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$

۲۳۳۰۷ ج. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

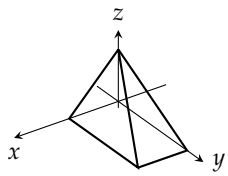
۲۳۳۰۸ د. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$

۲۳۳۰۹ ھ. $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

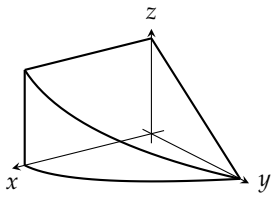
۲۳۳۱۰



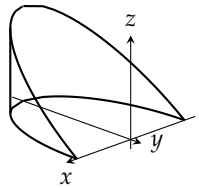
شکل ۱۴.۳۸: خاکہ برائے سوال ۱۴.۱۹۵



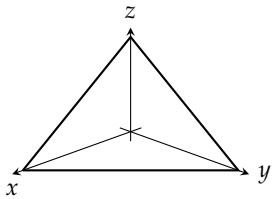
شکل ۱۴.۳۹: خاکہ برائے سوال ۱۴.۱۹۶



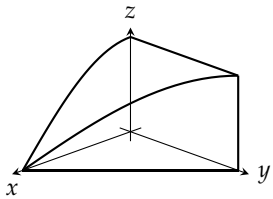
شکل ۱۴.۴۰: خاکہ برائے سوال ۱۴.۱۹۷



شکل ۱۴.۴۱: خاکہ برائے سوال ۱۴.۱۹۸



شکل ۱۴.۴۲: خاکہ برائے سوال ۱۴.۱۹۹



شکل ۱۴.۴۳: خاکہ برائے سوال ۱۴.۲۰۰

۲۳۳۱۱ سوال ۱۴.۱۹۴: درج ذیل تکمل کا خطہ شکل ۱۴.۳۷ میں دکھایا گیا ہے۔

$$\int_0^1 \int_{-1}^0 \int_0^{y^2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

۲۳۳۱۲ اس تکمل کو درج ذیل ترتیب کے اعادہ معادل روپ میں لکھیں۔

۲۳۳۱۳ ا. $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$

۲۳۳۱۴ ب. $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$

۲۳۳۱۵ ج. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

۲۳۳۱۶ د. $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$

۲۳۳۱۷ ھ. $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

۲۳۳۱۸

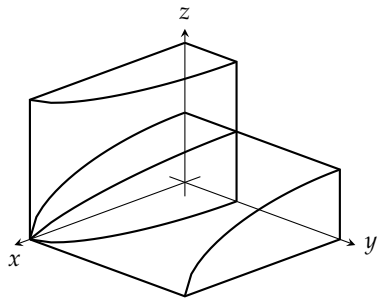
۲۳۳۱۹ سوال ۱۴.۱۹۵ تا سوال ۱۴.۲۰۸ میں خطوں کا حجم تلاش کریں۔

۲۳۳۲۰ سوال ۱۴.۱۹۵: بیلن $z = y^2$ اور مستوی xy کے بیچ خطہ جس کی سرحدیں مستویات $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = -1$ اور $y = 1$
۲۳۳۲۱ ہیں (شکل ۱۴.۳۸)۔

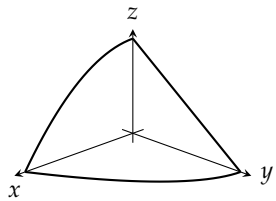
۲۳۳۲۲ سوال ۱۴.۱۹۶: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x + z = 1$ ، $y + 2z = 2$ کے بیچ خطہ (شکل ۱۴.۳۹)۔

۲۳۳۲۳ سوال ۱۴.۱۹۷: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستوی $y + z = 2$ اور بیلن $x = 4 - y^2$ کے بیچ خطہ (شکل ۱۴.۴۰)۔

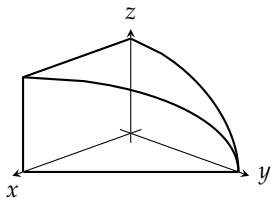
۲۳۳۲۴



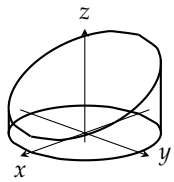
شکل ۱۴.۴۴: خاکہ برائے سوال ۱۴.۲۰۱



شکل ۱۴.۴۵: خاکہ برائے سوال ۱۴.۲۰۲



شکل ۱۴.۴۶: خاکہ برائے سوال ۱۴.۲۰۳



شکل ۱۴.۴۷: خاکہ برائے سوال ۱۴.۲۰۴

۲۲۲۲۵ سوال ۱۴.۱۹۸: بیلن $x^2 + y^2 = 1$ سے مستویات $z = -y$ اور $z = 0$ جو پچر کاٹتے ہیں (شکل ۱۴.۴۱)۔

۲۲۲۲۶ سوال ۱۴.۱۹۹: ثُمن اول میں محددی مستویات اور مستوی $x + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ کے بیچ چوسطحہ (شکل ۱۴.۴۲)۔

۲۲۲۲۷ سوال ۱۴.۲۰۰: ثُمن اول میں محددی مستویات، مستوی $y = 1 - x$ اور سطح $z = \cos(\pi x/2),\ 0 \le x \le 1$ کے بیچ خطہ
۲۲۲۲۸ (شکل ۱۴.۴۳)۔

۲۲۲۲۹ سوال ۱۴.۲۰۱: بیلن $x^2 + y^2 = 1$ اور بیلن $x^2 + z^2 = 1$ کا مشترک اندرون (شکل ۱۴.۴۴)۔

۲۲۲۳۰ سوال ۱۴.۲۰۲: ثُمن اول میں محددی مستویات اور سطح $z = 4 - x^2 - y$ کے بیچ خطہ (شکل ۱۴.۴۵)۔

۲۲۲۳۱ سوال ۱۴.۲۰۳: ثُمن اول میں محددی مستویات، مستوی $x + y = 4$ اور بیلن $y^2 + 4z^2 = 16$ کے بیچ خطہ (شکل ۱۴.۴۶)۔

۲۲۲۳۲ سوال ۱۴.۲۰۴: بیلن $x^2 + y^2 = 4$ سے مستویات $z = 0$ اور $x + z = 3$ جو خطہ کاٹتے ہیں (شکل ۱۴.۴۷)۔

۲۲۲۳۳ سوال ۱۴.۲۰۵: ثُمن اول میں مستویات $x + y + 2z = 2$ اور $2x + 2y + z = 4$ کے بیچ خطہ۔

۲۲۲۳۴ سوال ۱۴.۲۰۶: مستویات $z = x$ ، $x + z = 8$ ، $z = y$ اور $y = 8$ کے بیچ متناہی خطہ۔

۲۲۲۳۵ سوال ۱۴.۲۰۷: ٹھوس ترخیمی بیلن $x^2 + 4y^2 \le 4$ سے مستوی xy اور مستوی $z = x + 2$ جو خطہ کاٹتے ہیں۔

سوال ۱۴.۲۰۸: وہ خطہ جس کا پشت مستوی $x = 0$، سامنے اور اطراف قطع مکافی بیلن $x = 1 - y^2$، بالا قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ اور نیچے مستوی xy ہوں۔

اوسط قیمتیں

سوال ۱۴.۲۰۹ تا سوال ۱۴.۲۱۲ میں دیے گئے خطہ پر $F(x, y, z)$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۲۰۹: شُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 2$، $y = 2$ اور $z = 2$ کے بیچ مکعب خطہ اور تفاعل $F(x, y, z) = x^2 + 9$ لیں۔

سوال ۱۴.۲۱۰: شُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 1$، $y = 1$ اور $z = 2$ کے بیچ خطہ اور تفاعل $F(x, y, z) = x + y - z$ لیں۔

سوال ۱۴.۲۱۱: شُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 1$، $y = 1$ اور $z = 1$ کے بیچ خطہ اور تفاعل $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ لیں۔

سوال ۱۴.۲۱۲: شُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 2$، $y = 2$ اور $z = 2$ کے بیچ خطہ اور تفاعل $F(x, y, z) = xyz$ لیں۔

تکمل کی ترتیب بدلنا

سوال ۱۴.۲۱۳ تا سوال ۱۴.۲۱۶ میں موزوں طریقہ سے تکمل کی ترتیب تبدیل کر کے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۲۱۳: $\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$

سوال ۱۴.۲۱۴: $\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z$

سوال ۱۴.۲۱۵: $\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \sin \pi y^2}{y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$

سوال ۱۴.۲۱۶: $\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۴.۲۱۷: درج ذیل کو a کے لیے حل کریں۔

$$\int_0^1 \int_0^{4-a-x^2} \int_a^{4-x^2-y} \mathrm{d}z\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \frac{4}{15}$$

سوال ۱۴.۲۱۸: ترخیمی سطح $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ کا حجم c کی کس قیمت کے لیے 8π ہوگا؟

سوال ۱۴.۲۱۹: فضا میں کونسا دائرہ کار D درج ذیل تکمل کی قیمت کو کم سے کم بناتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\iiint\limits_D (4x^2 + 4y^2 + z^2 - 4)\,\mathrm{d}H$$

سوال ۱۴.۲۲۰: فضا میں کونسا دائرہ کار D درج ذیل تکمل کی قیمت کو زیادہ سے زیادہ بناتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\iiint\limits_D (1 - x^2 - y^2 - z^2)\,\mathrm{d}H$$

کمپیوٹر

سوال ۱۴.۲۲۱ تا سوال ۱۴.۲۲۴ میں دیے گئے خطہ پر تفاعل کا تہرا تکمل کمپیوٹر کی مدد سے حل کریں۔

سوال ۱۴.۲۲۱: مستویات $z = 0$ اور $z = 1$ اور سطح $x^2 + y^2 = 1$ کے بیچ ٹھوس بیلن پر تفاعل $F(x, y, z) = x^2y^2z$ لیں۔

سوال ۱۴.۲۲۲: ٹھوس خطہ جو نیچے سے قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ اور اوپر سے مستوی $z = 1$ میں ملفوف ہو اور تفاعل $F(x, y, z) = |xyz|$ لیں۔

سوال ۱۴.۲۲۳: ٹھوس خطہ جو نیچے سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ اور اوپر سے مستوی $z = 1$ میں ملفوف ہو اور تفاعل $F(x, y, z) = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ لیں۔

سوال ۱۴.۲۲۴: ٹھوس کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ اور تفاعل $F(x, y, z) = x^4 + y^2 + z^2$ لیں۔

۱۴.۵ تعین بعد میں کمیت اور معیار اثر

اس حصہ میں تین بُعدی اجسام کی کمیت اور معیار اثر کا حصول کارتیسی محدد میں سکھایا جائے گا۔ یہ کلیات دو بُعدی اجسام کے کلیات کی طرح ہیں۔ کروی اور نلکی محدد میں حساب کرنا حصہ ۱۴.۶ میں دکھایا جائے گا۔

کمیت اور معیار اثر

فضا میں خطہ D میں پائے جانے والے ایک جسم کی کمیتی کثافت $\delta(x, y, z)$ ہے۔ خطہ D پر δ کا تکمل اس جسم کی کمیت دیگا۔ یہ دیکھنے کی خاطر کہ ایسا کیوں کر ہو گا ہم اس جسم کو n ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل ۱۴.۴۸)۔ جسم کی کمیت درج ذیل حد ہو گی۔

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \delta(x_k, y_k, z_k)\Delta H_k = \iiint\limits_D \delta(x, y, z)\,\mathrm{d}H \qquad (۱)$$

۲۳۳۷۹ اگر D میں لکیر L سے نقطہ (x,y,z) کا فاصلہ $r(x,y,z)$ ہو، تب L کے لحاظ سے کمیت $\Delta m_k = \delta(x,y_k,z_k)\Delta H_k$ تقریباً
۲۳۳۸۰ $\Delta I_k = r^2(x_k,y_k,z_k)\Delta m_k$ ہو گا۔ یوں L کے لحاظ سے پورے جسم کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$I_L = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\Delta I_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} r^2(x_k,y_k,z_k)\delta(x_k,y_k,z_k)\Delta H_k = \iiint\limits_D r^2\delta\,\mathrm{d}H$$

۲۳۳۸۱ اگر L محور x ہو تب $r^2 = y^2+z^2$ ہو گا اور

$$I_x = \iiint\limits_D (y^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}H$$

۲۳۳۸۲ ہو گا۔ اسی طرح

$$I_z = \iiint\limits_D (x^2+y^2)\delta\,\mathrm{d}H \quad \text{اور} \quad I_y = \iiint\limits_D (x^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}H$$

۲۳۳۸۳ ہوں گے۔ ان کلیات کو دیگر کلیات کے ساتھ یہاں یکجا کیا گیا ہے۔

۲۳۳۸۴ کمیت: $M = \iiint\limits_D \delta\,\mathrm{d}H$ (δ = کثافت)

۲۳۳۸۵ محددی مستویات کے لحاظ سے معیار اثر اول:

۲۳۳۸۶ $$M_{yz} = \iiint\limits_D x\delta\,\mathrm{d}H, \quad M_{xz} = \iiint\limits_D y\delta\,\mathrm{d}H, \quad M_{xy} = \iiint\limits_D z\delta\,\mathrm{d}H$$

۲۳۳۸۷ مرکز کمیت: $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$

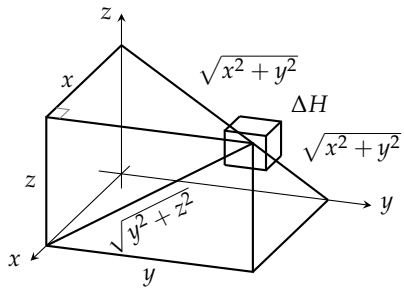
۲۳۳۸۸ جمودی معیار اثر (معیار اثر دوم):

$$I_x = \iiint (y^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}H$$
$$I_y = \iiint (x^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}H$$
$$I_z = \iiint (x^2+y^2)\delta\,\mathrm{d}H$$

۲۳۳۸۹ خط L کے لحاظ سے معیار اثر: $I_L = \iiint r^2\delta\,\mathrm{d}H$ (جہاں L سے نقطہ (x,y,z) کا فاصلہ $r(x,y,z)$ ہے۔)

۲۳۳۹۰ خط L کے لحاظ سے رداس دوار: $R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$

۲۳۳۹۱ مثال ۱۴.۱۸: مستقل کثافت δ کا مستطیل ٹھوس جسم شکل ۱۴.۴۹ میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے I_x ، I_y اور I_z دریافت کریں۔



شکل ۱۴.۴۸: محددی محور اور محددی مستویات سے ایک ٹکڑے کے فاصلے۔

۲۳۳۹۲ **حل**

۲۳۳۹۳ ہم مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہیں۔ یوں

$$I_x = \int_{-c/2}^{c/2}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-a/2}^{a/2}(y^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{۲}$$

۲۳۳۹۴ ہوگا۔ چونکہ $\delta(y^2+z^2)$ متغیرات x ، y اور z کا جفت تفاعل ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
I_x &= 8\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}\int_0^{a/2}(y^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 4a\delta\int_0^{c/2}\int_0^{b/2}(y^2+z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= 4a\delta\int_0^{c/2}\left[\frac{y^3}{3}+z^2y\right]_{y=0}^{y=b/2}\mathrm{d}z\\
&= 4a\delta\int_0^{c/2}\left(\frac{b^3}{24}+\frac{z^2b}{2}\right)\mathrm{d}z\\
&= 4a\delta\left(\frac{b^3c}{48}+\frac{c^3b}{48}\right) = \frac{abc\delta}{12}(b^2+c^2) = \frac{M}{12}(b^2+c^2)
\end{aligned}$$

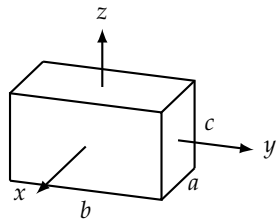
۲۳۳۹۵ اسی طرح درج ذیل ہوں گے۔

$$I_z = \frac{M}{12}(a^2+b^2) \quad \text{اور} \quad I_y = \frac{M}{12}(a^2+c^2)$$

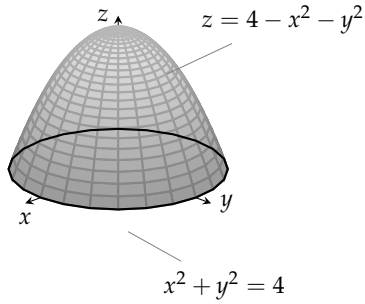
۲۳۳۹۶ □

۲۳۳۹۷ مثال ۱۴.۱۹: مستقل کثافت δ کے جسم کی نچلی سرحد مستوی $z=0$ میں قرص $R:\ x^2+y^2\leq 4$ ہے جبکہ اس کی بالائی حد قطع مکافی
۲۳۳۹۸ $z=4-x^2-y^2$ ہے (شکل ۱۴.۵۰)۔ اس جسم کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

۲۳۳۹۹ **حل**



شکل ۴۹.۱۴: ٹھوس جسم برائے مثال ۱۸.۱۴



شکل ۵۰.۱۴: ٹھوس جسم برائے مثال ۱۹.۱۴

۲۳۴۰۰ تشاکلی کی وجہ سے $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ہوگا۔ ہمیں $\bar{z}$ معلوم کرنے کے لیے پہلے درج ذیل دریافت کرنے ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \iint\limits_R \int_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} z\delta \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \iint\limits_R \left[\frac{z^2}{2}\right]_{z=0}^{z=4-x^2-y^2} \delta\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\delta}{2}\iint\limits_R (4-x^2-y^2)^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\delta}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (4-r)^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta && \text{قطبی محدد} \\
&= \frac{\delta}{2}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{6}(4-r^2)^3\right]_{r=0}^{r=2}\mathrm{d}\theta = \frac{16\delta}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{32\pi\delta}{3}
\end{aligned}$$

۲۳۴۰۱ اسی طرح

$$M = \iint\limits_R \int_0^{4-x^2-y^2} \delta\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 8\pi\delta$$

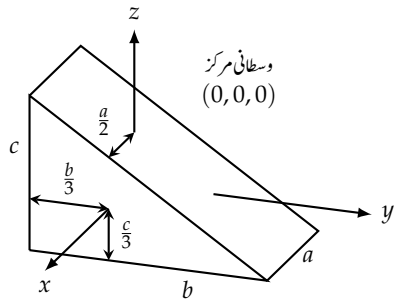
۲۳۴۰۲ ہوگا۔ یوں $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{4}{3}$ اور مرکز کمیت $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 4/3)$ ہوگا۔ □

۲۳۴۰۳ جب جسم کی کثافت اٹل ہو (جیسا مثال ۱۸.۱۴ اور مثال ۱۹.۱۴ میں تھا)، تب (دو بُعدی اجسام کی طرح) مرکز کمیت اس جسم کا **وسطانی مرکز**[۱۵] ہوگا۔

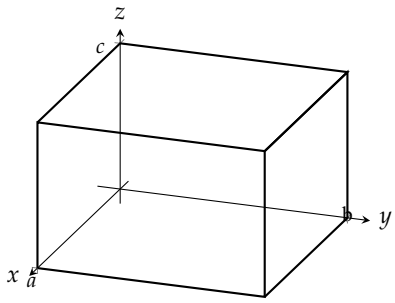
۲۳۴۰۴ **سوالات**

۲۳۴۰۵ **مستقل کثافت**

[۱۵] centroid



شکل ۱۴.۵۱: پچر برائے سوال ۱۴.۲۲۶



شکل ۱۴.۵۲: مستطیل ٹھوس جسم برائے سوال ۱۴.۲۲۷

سوال ۱۴.۲۲۵ تا سوال ۱۴.۲۳۶ میں کثافت $\delta = 1$ ہے۔

سوال ۱۴.۲۲۵: جمودی معیار اثر کی مساوات ۲ کو سیدھا حل کر کے مثال ۱۴.۱۸ میں مستعمل چھوٹے طریقہ کے نتیجہ کی تصدیق کریں۔ مثال ۱۴.۱۸ کے نتائج استعمال کرتے ہوئے تینوں محددی محوروں کے لحاظ سے اس جسم کے رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۲۲۶: ایک پچر کے وسطانی مرکز گزرتے محددی محور پچر کے کناروں کے متوازی ہیں (شکل ۱۴.۵۱)۔ اگر $a = b = 6$ اور $c = 4$ تب I_x ، I_y اور I_z کیا ہوں گے۔

سوال ۱۴.۲۲۷: مستطیل ٹھوس جسم کے I_x ، I_y اور I_z دریافت کرتے ہوئے جسم کے کناروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں (شکل ۱۴.۵۲)۔

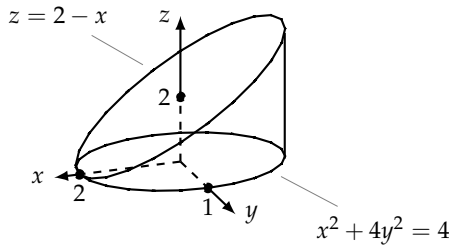
سوال ۱۴.۲۲۸: (ا) ایک چوسطحہ جس کے راس $(0,0,0)$ ، $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ اور $(0,0,1)$ ہیں کا وسطانی مرکز اور I_x ، I_y اور I_z تلاش کریں۔ (ب) محور x کے لحاظ سے اس چوسطحہ کا رداس دوار معلوم کریں۔ محور x سے وسطانی مرکز تک فاصلہ کے ساتھ اس کا موازنہ کریں۔

سوال ۱۴.۲۲۹: مستقل کثافت کے ایک ٹھوس "کونڈا" کی زیریں سرحدی سطح $z = 4y^2$ ، بالائی سرحدی سطح $z = 4$ اور اطراف مستویات $x = 1$ اور $x = -1$ ہیں۔ اس کی مرکز کمیت اور تینوں محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

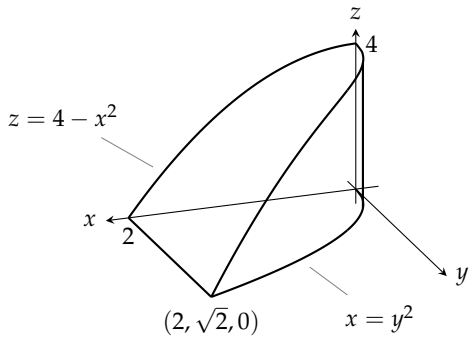
سوال ۱۴.۲۳۰: مستقل کثافت کے ایک ٹھوس جسم کی زیریں سرحد مستوی $z = 0$ ، بالائی سرحد مستوی $z = 2 - x$ اور اس کے اطراف ترخیمی بیلن $x^2 + 4y^2 = 4$ ہے (شکل ۱۴.۵۳)۔ (ا) $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ دریافت کریں۔ (ب) درج ذیل تکمل کی قیمت حاصل کریں۔ آخری تکمل میں x کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے آپ کو تکملات کا جدول استعمال کرنا ہو گا۔ $M_{xy} = \int_{-2}^{2} \int_{-(1/2)\sqrt{4-x^2}}^{(1/2)\sqrt{4-x^2}} \int_{0}^{2-x} z \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$ اس کے بعد M_{xy} کو M سے تقسیم کر کے تصدیق کریں کہ $\bar{z} = \frac{5}{4}$ ہو گا۔

سوال ۱۴.۲۳۱: (ا) مستقل کثافت کے ایک ٹھوس جسم کی زیریں سرحد قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ اور بالائی سرحد مستوی $z = 4$ ہے۔ اس جسم کا مرکز کمیت تلاش کریں۔ (ب) وہ مستوی $z = c$ دریافت کریں جو اس جسم کو برابر حجم کے دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتا ہو۔ یہ مستوی اس جسم کے مرکز کمیت سے نہیں گزرتا ہے۔

سوال ۱۴.۲۳۲: ایک ٹھوس مکعب کے اضلاع کی لمبائیاں 2 اکائیاں ہے۔ یہ مستویات $x = \mp 1$ ، $z = \mp 1$ ، $y = 3$ اور $y = 5$



شکل ۱۴.۵۳: ٹھوس جسم برائے سوال ۱۴.۲۳۰



شکل ۱۴.۵۴: ٹھوس جسم برائے سوال ۱۴.۲۳۸

کے بیچ واقع ہے۔اس مکعب کا مرکز کمیت اور محددی محوروں کے لحاظ سے مکعب کے رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۲۳۳: ایک پچر کے $a = 4$ ، $b = 6$ اور $c = 3$ ہیں (سوال ۱۴.۲۲۶ دیکھیں)۔اس کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ پچر کے کسی علامتی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L : y = 6, z = 0$ تک فاصلے کا مربع $r^2 = (y-6)^2 + z^2$ ہوگا۔لکیر L کے لحاظ سے اس پچر کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

سوال ۱۴.۲۳۴: ایک پچر کے $a = 4$ ، $b = 6$ اور $c = 3$ ہیں (سوال ۱۴.۲۲۶ دیکھیں)۔اس کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ پچر کے کسی علامتی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L : x = 4, y = 0$ تک فاصلے کا مربع $r^2 = (x-4)^2 + y^2$ ہوگا۔لکیر L کے لحاظ سے اس پچر کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

سوال ۱۴.۲۳۵: ایک مستطیل ٹھوس جسم کے $a = 4$ ، $b = 2$ اور $c = 1$ ہیں (سوال ۱۴.۲۲۷ دیکھیں)۔اس جسم کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ اس جسم کے کسی علامتی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L : y = 2, z = 0$ تک فاصلہ کا مربع $r^2 = (y-2)^2 + z^2$ ہوگا۔ لکیر L کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۲۳۶: ایک مستطیل ٹھوس جسم کے $a = 4$ ، $b = 2$ اور $c = 1$ ہیں (سوال ۱۴.۲۲۷ دیکھیں)۔اس جسم کا خاکہ بنا کر تصدیق کریں کہ اس جسم کے کسی علامتی نقطہ (x, y, z) سے لکیر $L : x = 4, y = 0$ تک فاصلہ کا مربع $r^2 = (x-4)^2 + y^2$ ہوگا۔ لکیر L کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

متغیر کثافت

سوال ۱۴.۲۳۷ اور سوال ۱۴.۲۳۸ میں (ا) جسم کی کمیت اور (ب) اس کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۲۳۷: ثُمن اول میں ایک ٹھوس جسم جو محددی مستویات اور مستوی $x + y + z = 2$ کے بیچ واقع ہے۔اس جسم کی کثافت $\delta(x, y, z) = 2x$ ہے۔

سوال ۱۴.۲۳۸: شُمن اول میں مستویات $y = 0$ اور $z = 0$ اور سطح $z = 4 - x^2$ اور سطح $x = y^2$ کے بیچ واقع جسم کی کثافت $\delta(x, y, z) = kxy$ ہے جہاں k ایک مستقل ہے (شکل ۱۴.۵۴)۔

سوال ۱۴.۲۳۹ اور سوال ۱۴.۲۴۰ میں درج ذیل تلاش کریں۔

ا. اس جسم کی کمیت۔

ب. اس جسم کا مرکز کمیت۔

ج. محددی محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر۔

د. محددی محوروں کے لحاظ سے رداس دور۔

سوال ۱۴.۲۳۹: شُمن اول میں محددی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ اور $z = 1$ کے بیچ ٹھوس مکعب جس کی کثافت $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$ ہے۔

سوال ۱۴.۲۴۰: ایک مستطیل ٹھوس جسم جس کے $a = 2$ ، $b = 6$ اور $c = 3$ ہیں (سوال ۱۴.۲۲۶ دیکھیں) کی کثافت $\delta(x, y, z) = x + 1$ ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مستقل کثافت کی صورت میں اس جسم کا مرکز کمیت $(0, 0, 0)$ ہوگا۔

سوال ۱۴.۲۴۱: مستویات $x + z = 1$ ، $x - z = -1$ ، $y = 0$ اور سطح $y = \sqrt{z}$ کے بیچ واقع ٹھوس جسم جس کی کثافت $\delta(x, y, z) = 2y + 5$ ہے۔

سوال ۱۴.۲۴۲: قطع مکافی سطح $z = 16 - 2x^2 - 2y^2$ اور $z = 2x^2 + 2y^2$ کے بیچ ٹھوس جسم کی کثافت $\delta(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ہے۔ اس جسم کی کمیت تلاش کریں۔

کام

سوال ۱۴.۲۴۳ اور سوال ۱۴.۲۴۴ میں درج ذیل معلوم کریں۔

ا. مکمل بھرے ہوئے برتن سے سیال کو مستوی xy میں منتقل کرنے کے لیے مستقل تجاذب g کتنا کام کرے گا؟ (اشارہ: برتن میں سیال کو چھوٹے چھوٹے حجم کے ٹکڑوں ΔH_k میں تقسیم کرتے ہوئے ہر ٹکڑے کو منتقل کرنے کے لیے درکار کام دریافت کریں۔ ان تمام کا مجموعہ پورے سیال کو منتقل کرنے کا کام ہوگا۔ یہ مجموعہ، حد کی صورت میں، تہرا تکمل دیگا جس کی قیمت آپ کو معلوم کرنی ہوگی۔)

ب. مکمل بھرے ہوئے برتن میں سیال کے مرکز کمیت کو مستوی xy میں منتقل کرنے کے لیے مستقل تجاذب g کتنا کام کرے گا؟

سوال ۱۴.۲۴۳: برتن شُمن اول میں کعبی ڈبہ کی صورت کا ہے جو محددی مستویات اور مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ اور $z = 1$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ سیال کی کثافت $\delta(x, y, z) = x + y + z + 1$ ہے (سوال ۱۴.۲۳۹ دیکھیں)۔

سوال ۱۴.۲۴۴: مستویات $y = 0$ ، $z = 0$ اور سطحوں $z = 4 - x^2$ ، $x = y^2$ کے بیچ برتن پایا جاتا ہے۔ سیال کی کثافت $\delta(x, y, z) = kxy$ ہے جہاں k ایک مستقل ہے (سوال ۱۴.۲۳۸ دیکھیں)۔

مسئلہ متوازی محور

مسئلہ متوازی محور (حصہ ۱۴.۲ کے سوالات دیکھیں) دو بُعدی صورت کے ساتھ ساتھ تین بُعدی صورت کے لیے بھی کارآمد ہے۔ فرض کریں ایک جسم جس کی کمیت m ہو کے مرکز کمیت سے خط $L_{c,m}$ گزرتا ہو جس کے متوازی h فاصلہ پر خط L پایا جاتا ہو۔ مسئلہ متوازی محور کہتا ہے کہ $L_{c,m}$ اور L کے لحاظ سے اس جسم کے جمودی معیار اثر درج ذیل کلیہ کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$I_L = I_{c,m} + mh^2 \tag{۳}$$

دو بُعدی صورت کی طرح اگر ہمیں ایک جمودی معیار اثر، فاصلہ h اور جسم کی کمیت m معلوم ہو تب ہم اس مسئلہ کی مدد سے دوسرا جمودی معیار اثر باآسانی دریافت کر سکتے ہیں۔

سوال ۱۴.۲۴۵: مسئلہ متوازی محور کا ثبوت

ا. پہلے دکھائیں کہ جسم کے مرکز کمیت سے گزرتے ہوئے فضا میں کسی بھی مستوی کے لحاظ سے معیار اثر اول صفر ہو گا۔ (اشارہ: جسم کے مرکز کمیت کو مبدا پر اور مستوی کو مستوی yz لیں۔ تب کلیہ $\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}$ کیا معلومات فراہم کرتا ہے؟)

ب. جسم کے مرکز کمیت کو مبدا پر، خط $L_{c,m}$ کو محور z پر، اور نقطہ $(h,0,0)$ پر L کو مستوی xy کا متوازی رکھیں۔ فرض کریں یہ جسم فضا میں خطہ D میں پایا جاتا ہے۔ تب شکل کے لحاظ سے درج ذیل ہو گا۔

$$I_L = \iiint\limits_D |\boldsymbol{v} - h\boldsymbol{i}|^2 \,\mathrm{d}m \tag{۴}$$

اس تکمل کو پھیلا کر حل کرتے ہوئے ثبوت مکمل کریں۔

سوال ۱۴.۲۴۶: مستقل کثافت، رداس a کے کرہ قطر کے لحاظ سے جمودی معیار اثر $\frac{2}{5}ma^2$ ہو گا جہاں کرہ کی کمیت m ہے۔ کرہ کو مماسی خط کے لحاظ سے کرہ کا جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

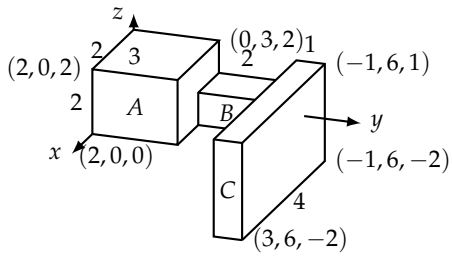
سوال ۱۴.۲۴۷: محور z کے لحاظ سے سوال ۱۴.۲۲۷ کے جسم کا جمودی معیار اثر $I_z = \frac{1}{3}abc(a^2+b^2)$ ہے۔

ا. مساوات ۱۳ استعمال کرتے ہوئے اس ٹھوس جسم کے مرکز کمیت سے گزرتے ہوئے، محور z کے متوازی خط کے لحاظ سے جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

ب. جزو-ا کے نتائج اور مساوات ۱۳ استعمال کرتے ہوئے خط $x = 0,\ y = 2b$ کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۲۴۸: اگر سوال ۱۴.۲۲۶ کے پچر میں $a = b = 6$ اور $c = 4$ ہوں محور x کے لحاظ سے $I_x = 208$ ہو گا۔ اس پچر کا خط $y = 4,\ z = -4/3$ (پچر کے تنگ سر کے کنارہ) کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

کلیہ پارلر



شکل ۱۴.۵۵: ٹھوس جسم برائے سوال ۱۴.۲۵۰

۲۳۴۹۶ کلیہ پاپس (حصہ ۱۴.۲ کے سوالات دیکھیں) دو بُعدی صورت کے ساتھ ساتھ تین بُعدی صورت کے لیے بھی کارآمد ہے۔ فرض کریں دو اجسام B_1 اور
۲۳۴۹۷ B_2 جن کی کمیتیں بالترتیب m_1 اور m_2 ہوں فضا میں ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوئے خطوں میں پائے جاتے ہیں۔ مبدا سے ان اجسام کے مراکز کمیت
۲۳۴۹۸ تک سمتیات بالترتیب $\boldsymbol{c}_1$ اور $\boldsymbol{c}_2$ ہیں۔ تب ان کے اشتراک $B_1 \cup B_2$ کے مرکز کمیت کا تعین گر سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{c} = \frac{m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2}{m_1 + m_2} \tag{۵}$$

۲۳۴۹۹ پہلے کی طرح، اس کو **کلیہ پاپس**[۱۶] کہتے ہیں۔ دو بُعدی صورت کی طرح، n عدد اجسام کے لیے اس کلیہ کی عمومی روپ درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{c} = \frac{m_1\boldsymbol{c}_1 + m_2\boldsymbol{c}_2 + \cdots + m_n\boldsymbol{c}_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n} \tag{۶}$$

۲۳۵۰۰ سوال ۱۴.۲۴۹: کلیہ پاپس (مساوات ۵) اخذ کریں۔ (اشارہ: ثُمن اول میں ایک دوسرے کو نہ ڈھانپتے ہوئے اجسام B_1 اور B_2 کا خاکہ بنا کر ان کے
۲۳۵۰۱ مراکز کمیت کو $(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)$ اور $(\bar{x}_2, \bar{y}_2, \bar{z}_2)$ سے ظاہر کریں۔ کمیت m_1 اور m_2 اور ان کمیت کے مراکز کے محدد کی صورت میں محددی
۲۳۵۰۲ مستویات کے لحاظ سے $B_1 \cup B_2$ کے معیار اثر حاصل کریں۔)

۲۳۵۰۳

۲۳۵۰۴ سوال ۱۴.۲۵۰: مستقل کثافت $\delta = 1$ کے تین مستطیل ٹھوس اجسام سے ایک جسم حاصل کیا گیا ہے (شکل ۱۴.۵۵)۔ کلیہ پاپس استعمال کرتے
۲۳۵۰۵ ہوئے درج ذیل کے مراکز کمیت تلاش کریں۔

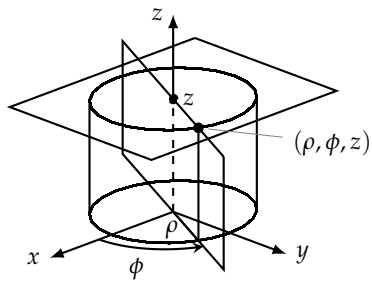
۲۳۵۰۶ ا. $A \cup B$ ۲۳۵۰۷ ب. $A \cup C$ ۲۳۵۰۸ ج. $B \cup C$ ۲۳۵۰۹ د. $A \cup B \cup C$

۲۳۵۱۰ سوال ۱۴.۲۵۱:

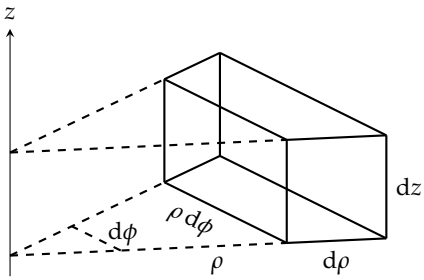
۲۳۵۱۱ ا. قد h اور رداس r کے قاعدہ کا دائری ٹھوس مخروط C، رداس a کے ٹھوس نصف کرہ S پر قلفی کی طرح جمایا گیا ہے۔ ٹھوس مخروط کا وسطانی مرکز
۲۳۵۱۲ قاعدہ سے راس کے رخ ایک چوتھائی ($\frac{1}{4}$) فاصلہ پر واقع ہے۔ نصف کرہ کے وسطانی مرکز قاعدہ سے سر کے رخ تین آٹھواں ($\frac{3}{8}$) فاصلہ دور ہے۔
۲۳۵۱۳ مشترک جسم $C \cup S$ کا مرکز مشترک قاعدہ پر رکھنے کی خاطر a اور h کے بیچ تعلق معلوم کریں۔

---

[۱۶] Pappus'sformula



شکل ۱۴.۵۶: نلکی محدد میں مستقل محدد سطحیں۔



شکل ۱۴.۵۷: نلکی محدد میں چھوٹا حجم $dH = dz\rho\, d\rho\, d\phi$ ہو گا۔

ب. اگر آپ نے حصہ ۱۴.۲ میں معادل سوال ۱۴.۱۲۵ کو اب تک حل نہ کیا ہو، تب اس کو حل کریں۔ دونوں کے جواب ایک سے نہیں ہیں۔

سوال ۱۴.۲۵۲: ایک ٹھوس اہرام P جس کا قد h اور مماثل چار اضلاع ہیں کا قاعدہ ٹھوس مکعب C کا ایک مربعی سطح ہے جس کے اضلاع کی لمبائیاں s ہے۔ ٹھوس اہرام کا وسطانی مرکز قاعدہ سے راس کے رخ ایک چوتھائی فاصلہ پر ہے۔ ٹھوس جسم $P \cup C$ کا وسطانی مرکز اہرام کے قاعدہ پر رکھنے کی خاطر s اور h کا تعلق دریافت کریں۔ سوال ۱۴.۲۵۱ کے نتیجہ کے ساتھ موازنہ کریں۔ حصہ ۱۴.۲ میں سوال ۱۴.۱۲۶ کے نتیجہ کے ساتھ بھی موازنہ کریں۔

۱۴.۶ نلکی اور کروی محدد میں تہرا تکمل

انجینئری، طبیعیات اور جیومیٹری میں مخروط، بیلن یا کرہ کے ساتھ کام نلکی اور کروی محدد میں زیادہ آسان ہوتا ہے۔

نلکی محدد

جن بیلن کا محور z محدد پر پایا جاتا ہو اور وہ مستویات جن میں z محدد پایا جاتا ہو یا جو z محدد کے عمودی ہوں، کو نلکی محدد میں بیان کرنا نہایت آسان ہوتا ہے (شکل ۱۴.۵۶)۔

جیسا ہم دیکھ چکے ہیں ان سطحوں کی مساوات مستقل محددی صورت رکھتی ہیں۔

$$\rho = 4$$
$$\phi = \frac{\pi}{3}$$
$$z = 2$$

فضا میں خطہ کی نلکی محدد میں مستطیلی خانہ بندی کا ایک خانہ شکل ۱۴.۵۷ میں دکھایا گیا ہے۔ اگر z محدد سے اس خانے کی وسط تک رداس ρ ہو تب خانے کے اندرونی اور بیرونی سطحوں کے رداس بالترتیب $\rho - \frac{d\rho}{2}$ اور $\rho + \frac{d\rho}{2}$ ہوں گے۔ اس چھوٹے خانے کو نقطہ دار لکیروں سے z محدد تک بڑھا کر حجم

۳۳۵۲۷ $\frac{1}{2}(\rho+\frac{\mathrm{d}\rho}{2})^2\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ حاصل ہو گا جس میں سے اضافی حجم $\frac{1}{2}(\rho-\frac{\mathrm{d}\rho}{2})^2\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ منفی کر کے چھوٹے حصہ کا حجم معلوم کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\mathrm{d}H &= \frac{1}{2}\left(\rho+\frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)^2\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z-\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)^2\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\\ &= \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\end{aligned}$$

۳۳۵۲۸ چھوٹے مستطیل خانے کی وسطی (یا اندرونی قوسی) چوڑائی $\rho\,\mathrm{d}\phi$ ، لمبائی $\mathrm{d}\rho$ اور قد $\mathrm{d}z$ لے کر

$$\mathrm{d}H = (\rho\,\mathrm{d}\phi)(\mathrm{d}\rho)(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}z\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$$

۳۳۵۲۹ حجم زیادہ آسانی سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح خانے کی سامنے (یا پشت) سطح کا رقبہ $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$ ، نچلی (یا بالائی) سطح کا رقبہ $\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho$ اور قوسی
۳۳۵۳۰ (اندرونی یا بیرونی) سطح کا رقبہ $\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$ ہو گا۔ یوں نکی محدد میں تہہ انکملات کو بطور بار ہا تکملات حل کیا جائے گا۔ ایسا اگلی مثال میں دکھایا گیا ہے۔

۳۳۵۳۱ مثال ۱۴.۲۰: خطہ D پر تفاعل $f(\rho,\phi,z)$ کی نکی محدد میں تکمل کی حدیں تلاش کریں۔ خطہ D نیچے سے مستوی $z=0$ اور اطراف سے
۳۳۵۳۲ دائری بیلن $x^2+(y-1)^2=1$ جبکہ اوپر سے قطع مکافی $z=x^2+y^2$ کے بیچ پایا جاتا ہے (شکل ۱۴.۵۸)۔

۳۳۵۳۳ حل

۳۳۵۳۴ ۱. خاکہ بنانا: D کا قاعدہ ہی مستوی xy پر D کی تظلیل R ہو گی۔ تظلیل R کی سرحد دائرہ $x^2+(y-1)^2=2$ ہو گی جس کی
۳۳۵۳۵ قطبی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}x^2+(y-1)^2&=1\\ x^2+y^2-2y+1&=1\\ \rho^2-2\rho\sin\phi&=0\\ \rho&=2\sin\phi\end{aligned}$$

۳۳۵۳۶ ۲. تکمل کی z حدیں: خطہ R میں عمومی نقطہ (ρ,ϕ) سے گزرتی ہوئی لکیر M ، جو z محدد کے متوازی ہو D میں $z=0$ پر داخل اور
۳۳۵۳۷ $z=x^2+y^2=\rho^2$ پر خارج ہو گی۔

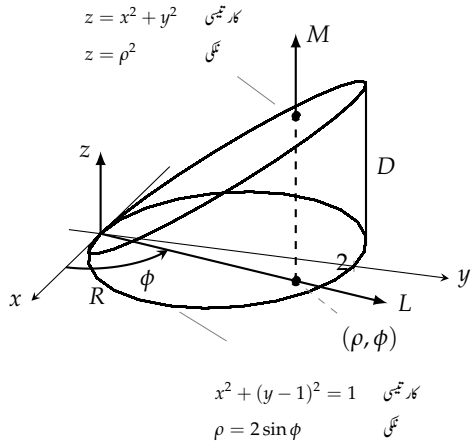
۳۳۵۳۸ ۳. تکمل کی ρ حدیں: مبدا سے خط L جو نقطہ (ρ,ϕ) سے گزرتا ہو، R میں $\rho=0$ پر داخل اور $\rho=2\sin\phi$ پر خارج ہو گا۔

۳۳۵۳۹ ۴. تکمل کی ϕ حدیں: خط L جھاڑو کی طرح R کو جھاڑتے ہوئے مثبت محور x کے ساتھ $\phi=0$ اور $\phi=\pi$ کے بیچ رہتا ہے۔

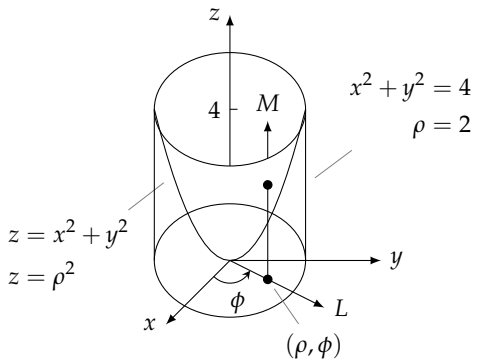
۳۳۵۴۰ یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint\limits_D f(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}H = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\phi}\int_0^{\rho^2} f(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$$

۳۳۵۴۱ □



شکل ۱۴.۵۸: جسم برائے مثال ۱۴.۲۰



شکل ۱۴.۵۹: جسم برائے مثال ۱۴.۲۱

اس مثال میں ہم نے نلکی محدد میں تکمل کی حدیں تلاش کرنا سیکھا۔

مثال ۱۴.۲۱: بیلن $x^2 + y^2 = 4$ میں بند ٹھوس جسم جو اوپر سے قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ اور نیچے سے مستوی xy کے بیچ پایا جاتا ہو، کا وسطانی مرکز تلاش کریں (شکل ۱۴.۲۱)۔ ٹھوس جسم کی کثافت $\delta = 1$ ہے۔

حل

ہم اوپر سے قطع مکافی $z = \rho^2$ اور نیچے سے مستوی $z = 0$ میں ملفوف ٹھوس جسم کا خاکہ بناتے ہیں۔ اس کا قاعدہ R مستوی xy میں قرص $|\rho| \leq 2$ ہو گا۔

ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تشاکلی محور پر ہو گا جو محور z ہے۔ یوں $\bar{x} = \bar{y} = 0$ ہو گا۔ ہم معیار اثر M_{xy} کو کمیت M سے تقسیم کر کے $\bar{z}$ تلاش کرتے ہیں۔

کمیت اور معیار اثر کے تکملات کی حدیں تلاش کرنے کی خاطر ہم وہی چار مخصوص قدم لیتے ہیں۔ خاکہ بنا کر ہم پہلا قدم مکمل کر چکے ہیں۔ باقی اقدام درج ذیل ہیں۔

۲. تکمل کی z حدیں: علامتی نقطہ (ρ, ϕ) سے گزرتی ہوئی، محدد z کی متوازی لکیر M، ٹھوس جسم میں $z = 0$ سے داخل اور $z = \rho^2$ سے خارج ہو گی۔

۳. تکمل کی ρ حدیں: مبدا سے شروع نقطہ ρ, ϕ سے گزرتی ہوئی لکیر L خطہ R میں $\rho = 0$ سے داخل اور $\rho = 2$ سے خارج ہو گی۔

۴. تکمل کی ϕ حدیں: لکیر L قاعدہ پر گھڑی کی سوئی کی طرح گھومتی ہوئی $\phi = 0$ سے $\phi = 2\pi$ تک طے کرتی ہے۔

۳۳۵۵۷ یوں M_{xy} کی قیمت

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\rho^2} z\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{\rho^5}{2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^6}{12}\right]_0^{\rho^2}\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\frac{16}{3}\,\mathrm{d}\phi = \frac{32\pi}{3} \end{aligned}$$

۳۳۵۵۸ اور M کی قیمت

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{\rho^2} \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[z\right]_0^{\rho^2}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^2\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}4\,\mathrm{d}\phi = 8\pi \end{aligned}$$

۳۳۵۵۹ ہو گی لہٰذا

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{32\pi}{3}\frac{1}{8\pi} = \frac{4}{3}$$

۳۳۵۶۰ ہو گا۔ وسطانی مرکز $(0,0,4/3)$ ہو گا جو ٹھوس جسم سے باہر ہے۔ □

۳۳۵۶۱ نلکی محدد میں تکمل کی قیمت کا حصول

۳۳۵۶۲ فضا میں خطہ D پر تکمل

$$\iiint_D f(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}H$$

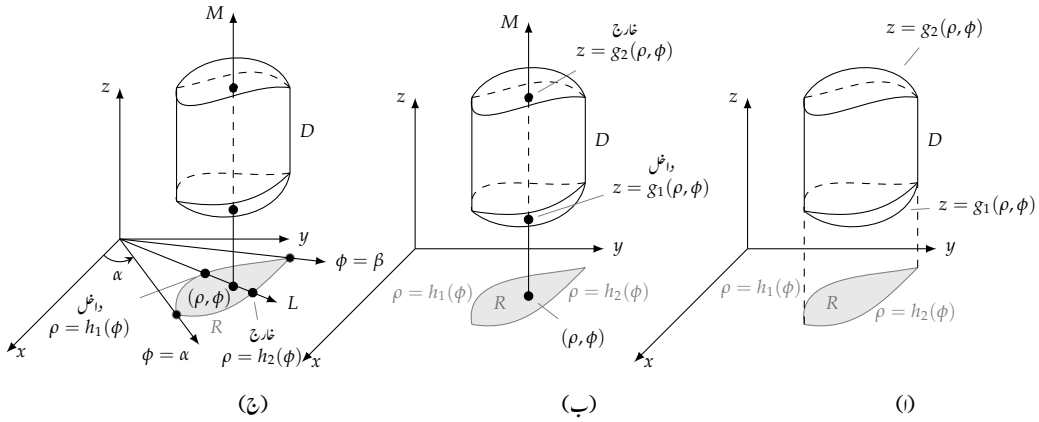
۳۳۵۶۳ کی قیمت حاصل کرتے ہوئے نلکی محدد میں پہلے z، اس کے بعد ρ اور آخر میں ϕ کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

۳۳۵۶۴ ۱. خاکہ: خطہ D اور مستوی xy پر اس کی تظلیل R کا خاکہ بنائیں۔ D اور R کی سرحدی سطحوں اور منحنیات کی نشاندہی کریں (شکل ۱۴.۶۰-
۳۳۵۶۵ ا)۔

۳۳۵۶۶ ۲. تکمل کی z حدیں: R میں علامتی نقطہ (ρ,ϕ) پر محور z کے متوازی ایک علامتی لکیر M کھینچیں جو بڑھ کر D میں $z = g_1(\rho,\phi)$
۳۳۵۶۷ سے داخل اور $z = g_2(\rho,\phi)$ سے خارج ہو گی (شکل ۱۴.۶۰-ب)۔ یہی تکمل کی z حدیں ہوں گی۔

۳۳۵۶۸ ۳. تکمل کی ρ حدیں: مبدا سے ایک لکیر L کھینچیں جو نقطہ (ρ,ϕ) سے گزرتی ہو۔ یہ شعاع خطہ R میں $\rho = h_1(\phi)$ سے داخل اور
۳۳۵۶۹ $\rho = h_2(\phi)$ سے خارج ہو گی (شکل ۱۴.۶۰-ج)۔ یہی تکمل کی ρ حدیں ہوں گی۔

۳۳۵۷۰ ۴. تکمل کی ϕ حدیں: لکیر L خطہ R کو جھاڑتے ہوئے مثبت محور x کے ساتھ زاویہ $\phi = \alpha$ اور $\phi = \beta$ کے بیچ رہتی ہے (شکل ۱۴.۶۰-
۳۳۵۷۱ ج)۔ یہی تکمل کی ϕ حدیں ہوں گی۔



شکل ۱۴.۶۰: نلکی محدد میں تہرا تکمل کی حدوں کا تعین۔

۲۳۵۷۲ یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint\limits_D f(\rho, \phi, z)\, \mathrm{d}H = \int_{\phi=\alpha}^{\phi=\beta} \int_{\rho=h_1(\phi)}^{\rho=h_2(\phi)} \int_{z=g_1(\rho,\phi)}^{z=g_2(\rho,\phi)} f(\rho, \phi, z)\, \mathrm{d}z\, \rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\phi \tag{۱}$$

۲۳۵۷۳ **کروی محدد**

۲۳۵۷۴ ایسے کرہ جن کے مراکز مبدا پر ہوں، وہ نصف چادر جن کا چول محور z ہو، اور وہ مخروط جن کا راس مبدا پر اور محور محددی نظام کے محور z پر ہو، کو کروی محدد
۲۳۵۷۵ (شکل ۱۴.۶۱) میں بیان کرنا زیادہ آسان ہوتا ہے۔ ان سطحوں کی مساواتیں درج ذیل ہوں گی۔ اس نظام میں کسی بھی نقطہ $N(r_0, \theta_0, \phi_0)$ کے محدد
۲۳۵۷۶ (r_0, θ_0, ϕ_0)، آپس میں عمودی تین سطحوں $r = r_0$ ، $\theta = \theta_0$ ، $\phi = \phi_0$ کا نقطہ ملاپ ہو گا (شکل ۱۴.۶۲)۔

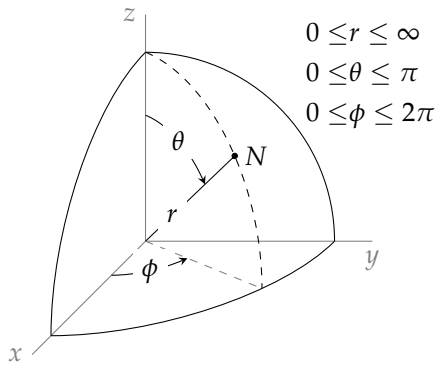
$r = 4$	کرہ، جس کا رداس 4 اور مرکز مبدا پر ہے
$\theta = \dfrac{\pi}{3}$	مبدا سے اوپر رخ کھلتا ہوا مخروط جو مثبت محور z کے ساتھ $\pi/3$ زاویہ بناتا ہے
$\phi = \dfrac{\pi}{3}$	نصف چادر جس کا چول محور z ہے اور جو مثبت محور x کے ساتھ $\pi/3$ زاویہ بناتا ہے

۲۳۵۷۷

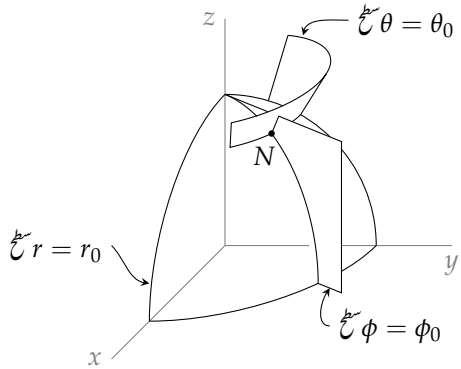
۲۳۵۷۸ کروی محدد میں چھوٹے مستطیل حجم سے مراد وہ **کروی پچر**[۱۷] ہے جس کو $\mathrm{d}r$ ، $\mathrm{d}\theta$ اور $\mathrm{d}\phi$ تعین کرتے ہیں۔ یہ پچر تقریباً مستطیلی ہو گا جس کے ایک
۲۳۵۷۹ اطراف کی قوسی لمبائی $r\,\mathrm{d}\theta$ ، دوسرے طرف کی قوسی لمبائی $r \sin\theta\, \mathrm{d}\phi$ اور موٹائی $\mathrm{d}r$ ہو گی۔ یوں کروی محدد میں چھوٹے ٹکڑے کا حجم $\mathrm{d}H$
۲۳۵۸۰ (شکل ۱۴.۶۳)

$$\mathrm{d}H = (\mathrm{d}r)(r \sin\theta\, \mathrm{d}\phi)(r\, \mathrm{d}\theta) = r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi \tag{۲}$$

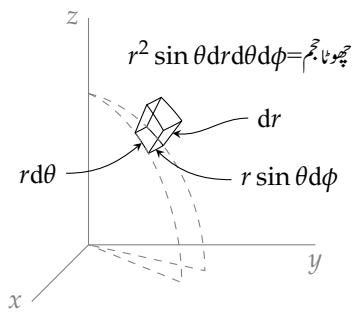
[۱۷] sphericalwedge



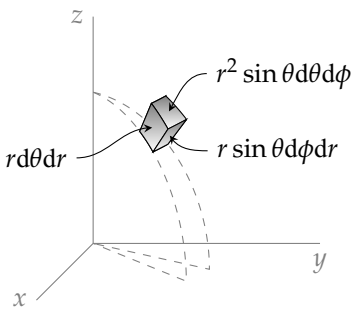
شکل ۱۴.۶۱: کروی محدد کی پیمائش ایک فاصلہ اور دو زاویات کی مدد سے کی جاتی ہے۔



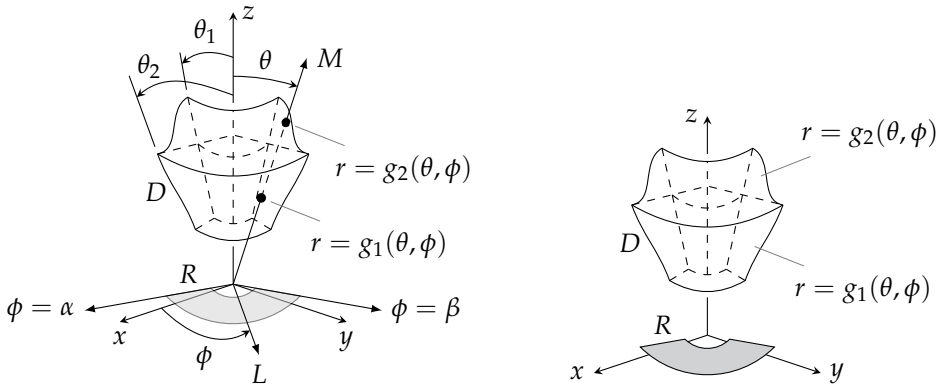
شکل ۱۴.۶۲: کروی محدد میں تین آپس میں عمودی سطحیں نقطہ N تعین کرتے ہیں۔



شکل ۱۴.۶۳: کروی محدد میں چھوٹا حجم۔



شکل ۱۴.۶۴: کروی محدد میں چھوٹی سطحیں۔



شکل ۱۴.۶۵: کروی محدد میں تہرا تکمل کی حدوں کی تلاش۔

۲۳۵۸۱ ہو گا اور تہرا تکمل کی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$\iiint F(r, \theta, \phi)\, \mathrm{d}H = \iiint F(r, \theta, \phi) r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$$

۲۳۵۸۲ ہم عموماً پہلے r کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔ ہم صرف ان تکملات پر غور کریں گے جو محور z کے لحاظ سے اجسام طواف (یا ان کا حصہ) ہوں اور جن کے θ اور
۲۳۵۸۳ ϕ حدیں مستقل ہوں۔

۲۳۵۸۴ اس مستطیلی پچر کی سطحیں شکل ۱۴.۶۴ میں دکھائی گئی ہیں۔

۲۳۵۸۵ کروی محدد میں تکمل کی قیمت کا حصول

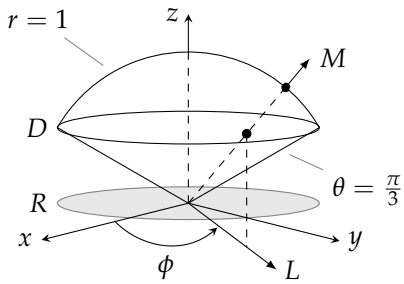
۲۳۵۸۶ فضا میں خطہ D پر تکمل

$$\iiint\limits_D F(r, \theta, \phi)\, \mathrm{d}H$$

۲۳۵۸۷ کی قیمت حاصل کرتے ہوئے پہلے r، اس کے بعد θ، اور آخر میں ϕ کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے ہمیں درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

۲۳۵۸۸ ۱. خاکہ: خطہ D اور مستوی xy میں D کی تظلیل R کا خاکہ بنا کر D کی سرحدی سطحوں کی نشاندہی کریں (شکل ۱۴.۶۵)۔

۲۳۵۸۹ ۲. تکمل کی r حدیں: مبدا سے ایک لکیر M کھینچیں جو مثبت محور z کے ساتھ زاویہ ϕ بناتی ہو۔ ساتھ ہی R پر M کی تظلیل L کا خاکہ بنائیں جو
۲۳۵۹۰ مثبت محور x کے ساتھ زاویہ ϕ بنائی گی۔ جیسے جیسے r بڑھے گا M خطہ D میں $r = g_1(\theta, \phi)$ سے داخل اور $r = g_2(\theta, \phi)$
۲۳۵۹۱ سے خارج ہو گی۔ یہی تکمل کی r حدیں ہوں گی۔



شکل ۱۴.۶۶: کرہ اور مخروط کے بیچ خطہ۔

۳۳۵۹۲ ۳. تکمل کی ϕ حدیں: کسی بھی مخصوص ϕ کے لیے M مثبت محور z کے ساتھ $\theta = \theta_1$ سے $\theta = \theta_2$ تک زاویہ بنائے گی۔ یہی تکمل کی
۳۳۵۹۳ θ حدیں ہوں گی۔

۳۳۵۹۴ ۴. تکمل کی ϕ حدیں: کسی بھی مخصوص ϕ کے لیے L خطہ R پر جھاڑو کی طرح چلتے ہوئے $\phi = \alpha$ سے $\phi = \beta$ تک چلتی ہے۔ یہی تکمل
۳۳۵۹۵ کی ϕ حدیں ہوں گی۔

۳۳۵۹۶ یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint\limits_D F(r,\theta,\phi)\,\mathrm{d}H = \int_{\phi=\alpha}^{\phi=\beta}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{r=g_1(\theta,\phi)}^{r=g_2(\theta,\phi)} F(r,\theta,\phi) r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

۳۳۵۹۷ مثال ۱۴.۲۲: ٹھوس کرہ $r \le 1$ سے مخروط $\theta = \pi/3$ بالائی خطہ D کاٹتا ہے۔ اس خطہ کا حجم تلاش کریں۔ **حل**
۳۳۵۹۸ اس خطے کا حجم $\iiint\limits_D r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ ہو گا۔ تکمل کی قیمت معلوم کرنے کے لیے درج ذیل اقدام کرنے ہوں گے۔

۳۳۵۹۹ ۱. خاکہ: ہم D اور مستوی xy میں اس کی تظلیل R کا خاکہ بناتے ہیں (شکل ۱۴.۶۶)۔

۳۳۶۰۰ ۲. تکمل کی r حدیں: ہم مثبت محور z کے ساتھ θ زاویہ پر مبدا سے شعاع M کھینچتے ہیں اور ساتھ ہی مستوی xy میں اس کی تظلیل L کھینچتے ہیں
۳۳۶۰۱ جو مثبت محور x کے ساتھ زاویہ ϕ بناتا ہے۔ شعاع M خطہ D میں $(r = 0$ سے داخل اور $r = 1$ سے خارج ہو گا۔

۳۳۶۰۲ ۳. تکمل کی θ حدیں: مخروط $\theta = \pi/3$ مثبت محور z کے ساتھ زاویہ $\pi/3$ بناتا ہے۔ یوں شعاع M زاویہ $\theta = 0$ سے $\theta =$
۳۳۶۰۳ $\pi/3$ تک چل سکتی ہے۔

۳۳۶۰۴ ۴. تکمل کی ϕ حدیں: شعاع L خطہ R پر $\phi = 0$ سے 2π تک چلتی ہے۔

۲۳۶۰۵ یوں تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
H &= \iiint\limits_D r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\frac{1}{3}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}\cos\theta\right]_0^{\pi/3}\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}\phi = \frac{1}{6}(2\pi) = \frac{\pi}{3}
\end{aligned}
$$

۲۳۶۰۶ □

۲۳۶۰۷ مثال ۱۴.۲۳: مستقل کثافت $\delta = 1$ کا ایک ٹھوس جسم مثال ۱۴.۲۲ کے خطہ D میں پایا جاتا ہے۔ محور z کے لحاظ سے اس جسم کا جمودی معیار اثر
۲۳۶۰۸ تلاش کریں۔

۲۳۶۰۹ **حل**

۲۳۶۱۰ کارتیسی محدد میں جمودی معیار اثر

$$I_z = \iiint (x^2+y^2)\,\mathrm{d}H$$

۲۳۶۱۱ ہو گا۔ کروی محدد میں $x^2+y^2 = (r\sin\theta\cos\phi)^2 + (r\sin\theta\sin\phi)^2 = r^2\sin^2\theta$ کی وجہ سے جمودی معیار اثر

$$I_z = \iiint (r^2\sin^2\theta) r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \iiint r^4\sin^3\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$$

۲۳۶۱۲ ہو گا جس کی قیمت مثال ۱۴.۲۲ کے خطہ کے لیے درج ذیل ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
I_z &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 r^4\sin^3\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1 \sin^3\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\left[-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/3}\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{2}+1+\frac{1}{24}-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}\phi = \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\frac{5}{24}\,\mathrm{d}\phi = \frac{1}{24}(2\pi) = \frac{\pi}{12}
\end{aligned}
$$

۲۳۶۱۳ □

۲۳۶۱۴ **محددی بدل کے کلیات**

۲۳۶۱۵

۲۳۶۱۶

کروی سے نلکی	کروی سے کارتیسی	نلکی سے کارتیسی
$\rho = r\sin\theta$	$x = r\sin\theta\cos\phi$	$x = \rho\cos\phi$
$z = r\cos\theta$	$y = r\sin\theta\sin\phi$	$y = \rho\sin\phi$
$\phi = \phi$	$z = r\cos\theta$	$z = z$

۲۳۶۱۷ مطابقتی چھوٹے حجم درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z && \text{کارتیسی} \\ &= \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi && \text{نلکی} \\ &= r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi && \text{کروی} \end{aligned}$$

۲۳۶۱۸ **سوالات**

۲۳۶۱۹ **نلکی محدد**

۲۳۶۲۰ سوال ۱۴.۲۵۳ تا سوال ۱۴.۲۵۸ میں تکمل کی قیمت نلکی محدد استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

۲۳۶۲۱ سوال ۱۴.۲۵۳: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_\rho^{\sqrt{2-\rho^2}} \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

۲۳۶۲۲ سوال ۱۴.۲۵۴: $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_{\rho^2/3}^{\sqrt{18-\rho^2}} \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

۲۳۶۲۳ سوال ۱۴.۲۵۵: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\phi/2\pi}\int_0^{3+24\rho^2} \mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

۲۳۶۲۴ سوال ۱۴.۲۵۶: $\int_0^{\pi}\int_0^{\phi/\pi}\int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{3\sqrt{4-\rho^2}} z\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

۲۳۶۲۵ سوال ۱۴.۲۵۷: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_\rho^{1/\sqrt{2-\rho^2}} 3\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

۲۳۶۲۶ سوال ۱۴.۲۵۸: $\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{-1/2}^{1/2}(\rho^2\sin^2\phi + z^2)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

۲۳۶۲۷ اب تک ہم نلکی محدد کی تکملات کو پسندیدہ ترتیب z ، ρ ، ϕ سے حل کرتے آرہے ہیں۔ بعض اوقات دیگر ترتیبات سے تکمل کا حل زیادہ آسان ہوتا ہے۔

۲۳۶۲۸ سوال ۱۴.۲۵۹ تا سوال ۱۴.۲۶۲ کے تکملات کی قیمت تلاش کریں۔

۲۳۶۲۹ سوال ۱۴.۲۵۹: $\int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{z/3} \rho^3\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi$

۲۳۶۳۰ سوال ۱۴.۲۶۰: $\int_{-1}^1\int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\phi} 4\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$

۲۳۶۳۱ سوال ۱۴.۲۶۱: $\int_0^1\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{2\pi}(\rho^2\cos^2\phi + z^2)\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$

۲۳۶۳۲ سوال ۱۴.۲۶۲: $\int_0^2\int_{\rho-2}^{\sqrt{4-\rho^2}}\int_0^{2\pi}(\rho\sin\phi + 1)\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$

سوال ۱۴.۲۶۳: نیچے سے مستوی $z = 0$، اوپر سے کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$، اور اطراف سے بیلن $x^2 + y^2 = 1$ میں خطہ D ملفوف ہے۔ نلکی محدد میں خطہ D کا حجم معلوم کرنے کے لیے تہرا تکمل درج ذیل تکمل کی ترتیب کے لیے لکھیں۔

ا. $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ ب. $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi$ ج. $\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$

سوال ۱۴.۲۶۴: نیچے سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$، اوپر سے قطع مکافی $z = 2 - x^2 - y^2$ میں خطہ D ملفوف ہے۔ نلکی محدد میں خطہ D کا حجم معلوم کرنے کے لیے تہرا تکمل درج ذیل تکمل کی ترتیب کے لیے لکھیں۔

ا. $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ ب. $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi$ ج. $\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$

سوال ۱۴.۲۶۵: نیچے سے مستوی $z = 0$، اطراف سے بیلن $\rho = \cos\phi$، اور اوپر سے قطع مکافی سطح $z = 3\rho^2$ میں ملفوف خطہ D کے لیے درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کرنے کے لیے کے تکمل کی حدیں معلوم کریں۔

$$\iiint F(\rho, \phi, z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$$

سوال ۱۴.۲۶۶: درج ذیل تکمل کو معادل نلکی محدد کے تکمل میں تبدیل کر اس کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{0}^{x}(x^2 + y^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سوال ۱۴.۲۶۷ تا سوال ۱۴.۲۷۲ میں دیے گئے خطہ D پر تکمل $\iiint_D F(\rho, \phi, z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$ کی قیمت حاصل کرنے کے لیے تہرا تکمل لکھیں۔

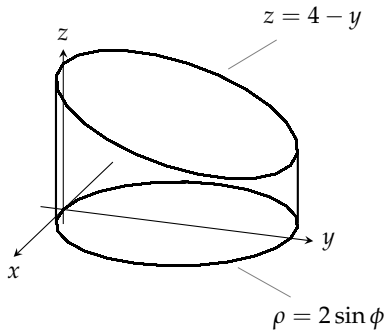
سوال ۱۴.۲۶۷: وہ قائمہ دائری بیلن جس کا قاعدہ مستوی xy میں دائرہ $\rho = 2\sin\phi$ اور سر مستوی $z = 4 - y$ میں ہو، خطہ D ہے (شکل ۱۴.۶۷)۔

سوال ۱۴.۲۶۸: وہ قائمہ دائری بیلن جس کا قاعدہ مستوی xy میں دائرہ $\rho = 3\cos\phi$ اور سر مستوی $z = 5 - x$ میں ہو، خطہ D ہے (شکل ۱۴.۶۸)۔

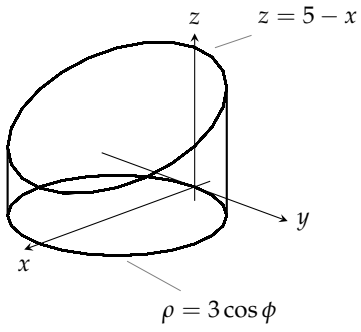
سوال ۱۴.۲۶۹: وہ قائمہ دائری بیلن جس کا قاعدہ مستوی xy میں قلب نما $\rho = 1 + \cos\phi$ کے اندر اور دائرہ $\rho = 1$ کے باہر اور سر مستوی $z = 4$ میں ہو، خطہ D ہے (شکل ۱۴.۶۹)۔

سوال ۱۴.۲۷۰: وہ ٹھوس قائمہ بیلن جس کا قاعدہ دائرہ $\rho = \cos\phi$ اور دائرہ $\rho = 2\cos\phi$ کے بیچ اور سر مستوی $z = 3 - y$ میں ہو، خطہ D ہے (شکل ۱۴.۷۰)۔

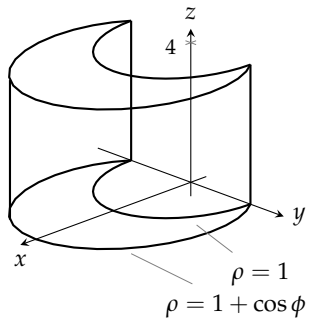
سوال ۱۴.۲۷۱: وہ منشور جس کا قاعدہ مستوی xy میں محور x، لکیر $y = x$ اور لکیر $x = 1$ کے بیچ مثلث اور سر مستوی $z = 2 - y$ میں ہو، خطہ D ہے (شکل ۱۴.۷۱)۔



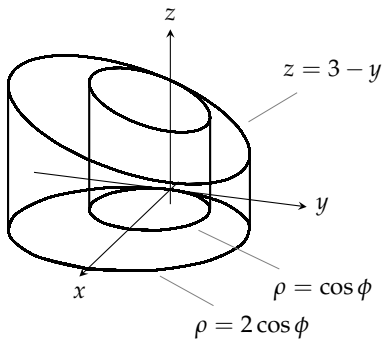
شکل ۱۴.۶۷: خطہ برائے سوال ۱۴.۲۶۷



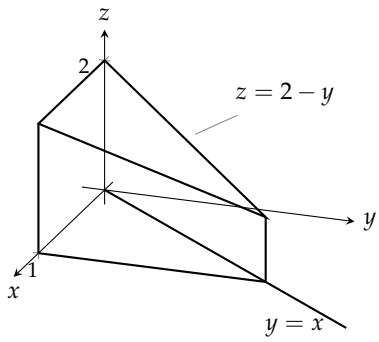
شکل ۱۴.۶۸: خطہ برائے سوال ۱۴.۲۶۸



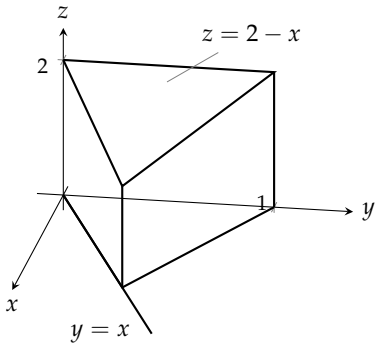
شکل ۱۴.۶۹: خطہ برائے سوال ۱۴.۲۶۹



شکل ۱۴.۷۰: خطہ برائے سوال ۱۴.۲۷۰



شکل ۱۴.۷۱: خطہ برائے سوال ۱۴.۲۷۱



شکل ۱۴.۷۲: خطہ برائے سوال ۱۴.۲۷۲

سوال ۱۴.۲۷۲: وہ منشور جس کا قاعدہ مستوی xy میں محور y، لکیر $y = x$ اور لکیر $y = 1$ کے بیچ مثلث اور سر مستوی $z = 2 - x$ میں ہو، خطہ D ہے (شکل ۱۴.۷۲)۔

کروی محدد

سوال ۱۴.۲۷۳ تا سوال ۱۴.۲۷۸ میں کروی تکملات کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۲۷۳: $\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$

سوال ۱۴.۲۷۴: $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{2} (r\cos\theta) r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$

سوال ۱۴.۲۷۵: $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{(1-\cos\theta)/2} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$

سوال ۱۴.۲۷۶: $\int_0^{3\pi/2} \int_0^{\pi} \int_0^{1} 5r^3 \sin^3\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$

سوال ۱۴.۲۷۷: $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_{\sec\theta}^{2} 3r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$

سوال ۱۴.۲۷۸: $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec\theta} (r\cos\theta) r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$

اب تک ہم کروی محدد کی تکملات کو پسندیدہ ترتیب سے حل کرتے آرہے ہیں۔ بعض اوقات دیگر ترتیبات سے تکمل کا حل زیادہ آسان ہوتا ہے۔ سوال ۱۴.۲۷۹ تا سوال ۱۴.۲۸۲ میں تکملات کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۲۷۹: $\int_0^{2} \int_{-\pi}^{0} \int_{\pi/4}^{\pi/2} r^3 \sin 2\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$

سوال ۱۴.۲۸۰: $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \int_{\csc\theta}^{2\csc\theta} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, d\phi \, dr \, d\theta$

سوال ۱۴.۲۸۱: $\int_0^{1} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/4} 12r \sin^3\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$

سوال ۱۴.۲۸۲: $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{\csc\theta}^{2} 5r^4 \sin^3\theta \, dr \, d\phi \, d\theta$

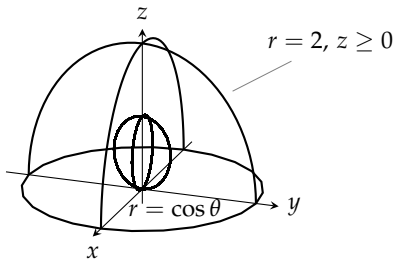
سوال ۱۴.۲۸۳: کروی محدد میں (ا) $dr \, d\theta \, d\phi$، (ب) $d\theta \, dr \, d\phi$ ترتیب سے سوال ۱۴.۲۶۳ کے خطہ کے حجم کے تہرا تکمل لکھیں۔

سوال ۱۴.۲۸۴: نیچے سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ اور اوپر سے مستوی $z = 1$ کے بیچ خطہ D کے حجم کا تکمل کروی محدد میں (ا) $dr \, d\theta \, d\phi$، (ب) $d\theta \, dr \, d\phi$ ترتیب کے لیے لکھیں۔

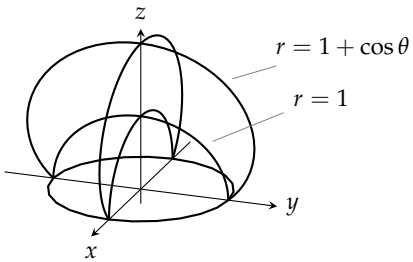
سوال ۱۴.۲۸۵ تا سوال ۱۴.۲۹۰ میں دیے گئے ٹھوس جس کے حجم کے کروی تکمل (ا) کی حدیں تلاش کریں۔ (ب) کروی تکمل حل کرتے ہوئے جسم کا حجم معلوم کریں۔

سوال ۱۴.۲۸۵: کرہ $r = \cos\theta$ اور نصف کرہ $r = 2, \ z \geq 0$ کے بیچ ٹھوس جسم (شکل ۱۴.۷۳)۔

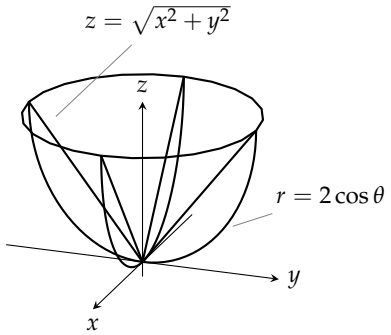
سوال ۱۴.۲۸۶: نیچے سے نصف کرہ $r = 1, \ z \geq 0$ اور اوپر سے سطح طواف قلب نما $r = 1 + \cos\theta$ میں ملفوف ٹھوس جسم (شکل ۱۴.۷۴)۔



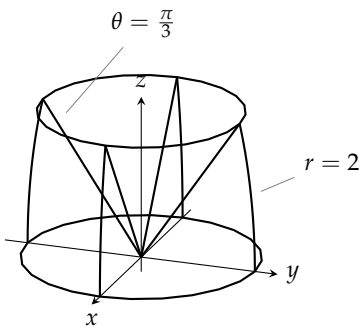
شکل ۱۴.۷۳: جسم برائے سوال ۱۴.۲۸۵



شکل ۱۴.۷۴: جسم برائے سوال ۱۴.۲۸۶



شکل ۱۴.۷۵: جسم برائے سوال ۱۴.۲۸۹



شکل ۱۴.۷۶: جسم برائے سوال ۱۴.۲۹۰

۲۳۶۸۶ سوال ۱۴.۲۸۷: جسم طواف قلب نما $r = 1 - \cos\theta$ میں ملفوف۔

۲۳۶۸۷ سوال ۱۴.۲۸۸: وہ بالائی خطہ جو سوال ۱۴.۲۸۷ کے جسم سے مستوی xy کاٹتا ہے۔

۲۳۶۸۸

۲۳۶۸۹ سوال ۱۴.۲۸۹: نیچے سے کرہ $r = 2\cos\theta$ اور اوپر سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ میں ملفوف جسم (شکل ۱۴.۷۵)۔

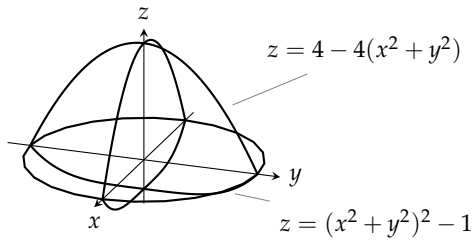
۲۳۶۹۰ سوال ۱۴.۲۹۰: نیچے سے مستوی xy، اوپر سے مخروط $\theta = \frac{\pi}{3}$ اور اطراف سے کرہ $r = 2$ میں ملفوف جسم (شکل ۱۴.۷۶)۔

۲۳۶۹۱

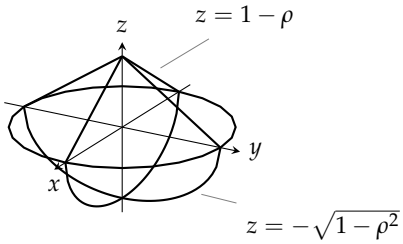
۲۳۶۹۲ کارتیسی، نلکی اور کروی محدد

۲۳۶۹۳ سوال ۱۴.۲۹۱: کرہ $r = 2$ کے حجم کا تہرا تکمل (ا) کروی، (ب) نلکی، اور (ج) کارتیسی محدد میں لکھیں۔

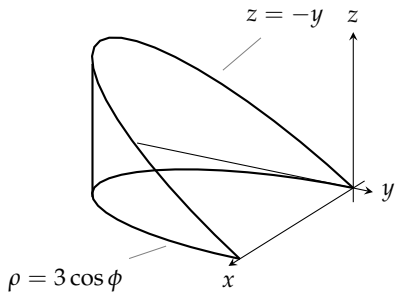
۲۳۶۹۴ سوال ۱۴.۲۹۲: ثُمن اول میں نیچے سے مخروط $\theta = \frac{\pi}{4}$ اور اوپر سے کرہ $r = 3$ میں ملفوف خطہ D کے حجم کا تہرا تکمل (ا) نلکی اور (ب) کروی
۲۳۶۹۵ محدد میں لکھیں۔ (ج) اس کے بعد اس جسم کا حجم تلاش کریں۔



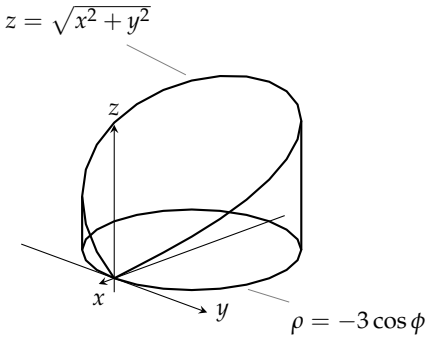
شکل ۱۴.۷۷: جسم برائے شکل ۱۴.۲۹۵



شکل ۱۴.۷۸: جسم برائے شکل ۱۴.۲۹۶



شکل ۱۴.۷۹: جسم برائے شکل ۱۴.۲۹۷



شکل ۱۴.۸۰: جسم برائے شکل ۱۴.۲۹۸

۲۳۶۹۶ سوال ۱۴.۲۹۳: رداس 2 اکائیاں کے کرہ کو، کرہ سے مرکز سے 1 اکائی دور، مستوی دو ٹکڑوں میں کاٹتی ہے۔ چھوٹے ٹکڑے کے حجم کا تہرا تکمل (ا)
۲۳۶۹۷ کروی، (ب) تکلی، اور (ج) کارتیسی محدد میں لکھیں۔ (د) اس ٹکڑے کا حجم کسی ایک تہرا تکمل کو حل کرتے ہوئے معلوم کریں۔

۲۳۶۹۸ سوال ۱۴.۲۹۴: ٹھوس نصف کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0$ کے جمودی معیار اثر I_z کو (ا) تکلی اور (ب) کروی محدد میں لکھیں۔
۲۳۶۹۹ (ج) I_z کی قیمت تلاش کریں۔

۲۳۷۰۰

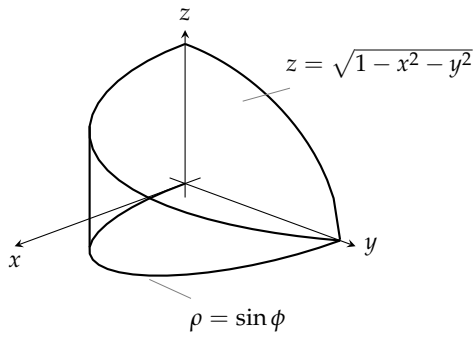
۲۳۷۰۱ **حجم**

۲۳۷۰۲ سوال ۱۴.۲۹۵ تا سوال ۱۴.۳۰۰ میں ٹھوس اجسام کے حجم تلاش کریں۔

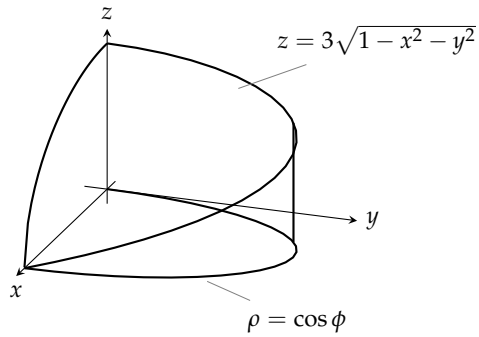
۲۳۷۰۳ سوال ۱۴.۲۹۵: اوپر سے $z = 4 - 4(x^2 + y^2)$ اور نیچے سے $z = (x^2 + y^2)^2 - 1$ میں ملفوف جسم (شکل ۱۴.۷۷)۔

۲۳۷۰۴ سوال ۱۴.۲۹۶: اوپر سے $z = 1 - \rho$ اور نیچے سے $z = -\sqrt{1 - \rho^2}$ میں ملفوف جسم (شکل ۱۴.۷۸)۔

۲۳۷۰۵ سوال ۱۴.۲۹۷: مستوی xy سے اوپر ٹھوس تکلی $\rho = 3\cos\phi$ کا وہ حصہ جو مستوی $z = -y$ سے نیچے ہے (شکل ۱۴.۷۹)۔



شکل ۱۴.۸۱: جسم برائے شکل ۱۴.۲۹۹



شکل ۱۴.۸۲: جسم برائے شکل ۱۴.۳۰۰

۲۳۷۰۶ سوال ۱۴.۲۹۸: مستوی xy سے اوپر ٹھوس نلکی $\rho = -3\cos\phi$ کا وہ حصہ جو سطح $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ سے نیچے ہے (شکل ۱۴.۸۰)۔

۲۳۷۰۷ سوال ۱۴.۲۹۹: مستوی xy سے اوپر ٹھوس نلکی $\rho = \sin\phi$ کا وہ حصہ جو سطح $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ سے نیچے ہے (شکل ۱۴.۸۱)۔

۲۳۷۰۸ سوال ۱۴.۳۰۰: مستوی xy سے اوپر ٹھوس نلکی $\rho = \cos\phi$ کا وہ حصہ جو مستوی $z = 3\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ سے نیچے ہے (شکل
۲۳۷۰۹ ۱۴.۸۲)۔

۲۳۷۱۰ سوال ۱۴.۳۰۱: مخروط $\theta = \frac{\pi}{3}$ اور $\theta = \frac{2\pi}{3}$ کے بیچ ٹھوس کرہ $r \leq a$ کے حصہ کا حجم تلاش کریں۔

۲۳۷۱۱ سوال ۱۴.۳۰۲: ثُمن اول میں نصف مستویات $\phi = 0$ اور $\phi = \frac{\pi}{6}$ کے بیچ ٹھوس کرہ $r \leq a$ کے حصہ کا حجم تلاش کریں۔

۲۳۷۱۲ سوال ۱۴.۳۰۳: ٹھوس کرہ $r \leq 2$ سے مستوی $z = 1$ جو چھوٹا ٹکڑا کاٹتا ہے، اس کا حجم تلاش کریں۔

۲۳۷۱۳ سوال ۱۴.۳۰۴: مستویات $z = 1$ اور $z = 2$ کے بیچ مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کے حصہ کا حجم تلاش کریں۔

۲۳۷۱۴ سوال ۱۴.۳۰۵: نیچے سے مستوی $z = 0$، اوپر سے سطح قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ اور اطراف سے بیلن $x^2 + y^2 = 1$ میں ملفوف
۲۳۷۱۵ خطے کا حجم تلاش کریں۔

۲۳۷۱۶ سوال ۱۴.۳۰۶: نیچے سے سطح قطع مکافی $z = x^2 + y^2$، اوپر سے سطح قطع مکافی $z = 1 + x^2 + y^2$ اور اطراف سے بیلن $x^2 + y^2 = 1$
۲۳۷۱۷ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

۲۳۷۱۸ سوال ۱۴.۳۰۷: موٹی دیوار کے بیلن $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ سے مخروط $z = \mp\sqrt{x^2 + y^2}$ جتنا حصہ کاٹتے ہیں، اس کا حجم تلاش
۲۳۷۱۹ کریں۔

۲۳۷۲۰ سوال ۱۴.۳۰۸: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ کے اندر اور بیلن $x^2 + y^2 = 1$ کے باہر خطے کا حجم تلاش کریں۔

۲۳۷۲۱ سوال ۱۴.۳۰۹: بیلن $x^2 + y^2 = 4$ اور مستویات $z = 0$ اور $y + z = 4$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

۲۳۷۲۲ سوال ۱۴.۳۱۰: بیلن $x^2 + y^2 = 4$ اور مستویات $z = 0$ اور $x + y + z = 4$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۳۱۱: اوپر سے سطح قطع مکافی $z = 5 - x^2 - y^2$ اور نیچے سے سطح قطع مکافی $z = 4x^2 + 4y^2$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۳۱۲: بیلن $x^2 + y^2 = 1$ سے باہر، اوپر سے سطح قطع مکافی $z = 9 - x^2 - y^2$ اور نیچے سے مستوی xy میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۳۱۳: اس خطے کا حجم تلاش کریں جسے ٹھوس بیلن $x^2 + y^2 \leq 1$ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ سے کاٹتا ہے۔

سوال ۱۴.۳۱۴: اوپر سے کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ اور نیچے سے سطح قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ میں ملفوف خطے کا حجم تلاش کریں۔

اوسط قیمت

سوال ۱۴.۳۱۵: مستویات $z = -1$ اور $z = 1$ کے بیچ بیلن $\rho = 1$ میں تفاعل $F(\rho, \phi, z) = \rho$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۳۱۶: کرہ $\rho^2 + z^2 = 1$ (یعنی کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$) کے اندر تفاعل $F(\rho, \phi, z) = \rho$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۳۱۷: ٹھوس گیند $r \leq 1$ میں تفاعل $F(r, \theta, \phi) = r$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۳۱۸: بالائی نصف ٹھوس کرہ $r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \pi/2$ میں تفاعل $F(r, \theta, \phi) = r\cos\theta$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

کمیت، معیار اثر، اور وسطانی مراکز

سوال ۱۴.۳۱۹: نیچے سے مستوی $z = 0$، اوپر سے مخروط $z = \rho,\ \rho \geq 0$، اور اطراف سے بیلن $\rho = 1$ میں ملفوف مستقل کثافت کے ٹھوس جسم کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۳۲۰: ثُمن اول میں اوپر سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$، نیچے سے مستوی $z = 0$، اور اطراف سے بیلن $x^2 + y^2 = 4$ اور مستویات $x = 0$ اور $y = 0$ میں ملفوف خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۳۲۱: اس ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تلاش کریں جو سوال ۱۴.۲۸۶ میں دیا گیا ہے۔

سوال ۱۴.۳۲۲: اوپر سے کرہ $r = a$ اور نیچے سے مخروط $\theta = \frac{\pi}{4}$ کے بیچ ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۳۲۳: اوپر سے سطح $z = \sqrt{\rho}$، نیچے سے مستوی xy، اور اطراف سے بیلن $\rho = 4$ میں ملفوف ٹھوس جسم کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۳۲۴: اس خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں جو نصف مستویات $\phi = -\pi/3,\ \rho \geq 0$ اور $\phi = \pi/3,\ \rho \geq 0$ ٹھوس گیند $\rho^2 + z^2 \leq 1$ سے کاٹتے ہیں۔

سوال ۱۴.۳۲۵: قائمہ دائری موٹی دیوار کے بیلن کی اندرونی سطح بیلن $\rho = 1$ اور بیرونی سطح بیلن $\rho = 2$ ہیں۔ اس کا نچلا سر مستوی $z = 0$ اور بالائی سر مستوی $z = 4$ میں پایا جاتا ہے۔ محور z کے لحاظ سے اس کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال ۱۴.۳۲۶: ایک قائمہ دائری بیلن کا رداس 1 اور قد 2 ہے۔(ا) بیلن کے محور، (ب) بیلن کے وسطانی مرکز سے گزرتی ہوئے لکیر جو بیلن کے محور کو عمودی ہو، کے لحاظ سے بیلن کا جمودی معیار اثر تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال ۱۴.۳۲۷: ایک قائمہ دائری مخروط کا رداس قاعدہ 1 اور قد 1 ہے۔ مخروط کے راس سے گزرتی ہوئی لکیر جو مخروط کے محور کو عمودی ہے کے لحاظ سے مخروط کا جمودی معیار اثر تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال ۱۴.۳۲۸: رداس a کے کرہ کا جمودی معیار اثر کرہ کے قطر کے لحاظ سے تلاش کریں ($\delta = 1$ لیں)۔

سوال ۱۴.۳۲۹: ایک قائمہ دائری مخروط کا رداس قاعدہ a اور قد h ہے۔ اس کا جمودی معیار اثر مخروط کے محور کے لحاظ سے تلاش کریں۔ (اشارہ: مخروط کے محور کو محور z اور راس کو مبدا پر رکھیں۔)

سوال ۱۴.۳۳۰: ایک ٹھوس جسم اوپر سے قطع مکافی سطح $z = \rho^2$، نیچے سے مستوی $z = 0$، اور اطراف سے بیلن $\rho = 1$ میں ملفوف ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں جہاں جسم کی کثافت (ا) $\delta(\rho, \phi, z) = z$، (ب) $\delta(\rho, \phi, z) = \rho$ ہے۔

سوال ۱۴.۳۳۱: ایک ٹھوس جسم نیچے سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ اور اوپر سے مستوی $z = 1$ میں ملفوف ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں جہاں جسم کی کثافت (ا) $\delta(\rho, \phi, z) = z$، (ب) $\delta(\rho, \phi, z) = z^2$ ہے۔

سوال ۱۴.۳۳۲: ایک ٹھوس گیند کا رداس $r = a$ ہے اور کثافت (ا) $\delta(r, \theta, \phi) = r^2$، (ب) $\delta(r, \theta, \phi) = \rho = r \sin\theta$ ہے۔ محور z کے لحاظ سے اس گیند کا جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

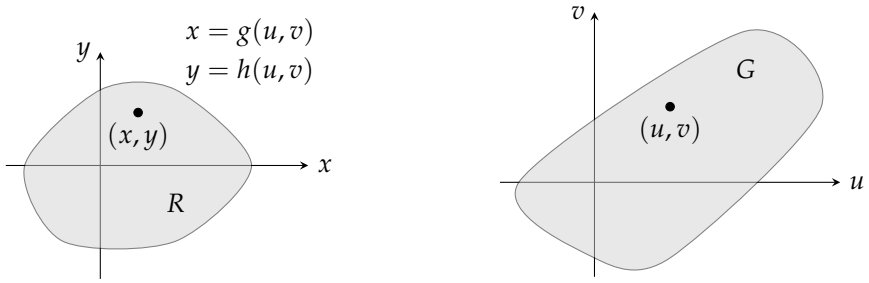
سوال ۱۴.۳۳۳: دکھائیں کہ ایک نیم ترخیمی سطح طواف $\frac{\rho^2}{a^2} + \frac{z^2}{h^2} \leq 1, z \geq 0$ کا وسطانی مرکز محور z پر قاعدہ سے سر جانب تین آٹھواں فاصلے پر ہے۔ بالخصوص $h = a$ ایک ٹھوس نصف کرہ دیتا ہے۔ یوں ٹھوس نصف کرہ کا وسطانی مرکز قاعدہ سے سر جانب تین آٹھواں فاصلے پر ہو گا۔

سوال ۱۴.۳۳۴: دکھائیں کہ ایک قائمہ دائری ٹھوس مخروط کا وسطانی مرکز محور پر قاعدہ سے راس جانب ایک چوتھائی فاصلے پر ہو گا۔ (عمومی طور پر مخروط اور اہرام کا وسطانی مرکز قاعدہ سے راس جانب ایک چوتھائی فاصلے پر ہو گا)۔

سوال ۱۴.۳۳۵: رداس $\rho = a$ کا ایک قائمہ دائری بیلن مستویات $z = 0$ اور $z = h, h > 0$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ اس کی کثافت $\delta(\rho, \phi, z) = z + 1$ ہے۔ اس کا مرکز کمیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۳۳۶: رداس R کے ایک سیارہ پر ہوا کی کثافت $\mu = \mu_0 e^{-ch}$ ہے جہاں سیارہ کی سطح سے بلندی h ہے جبکہ سیارہ کی سطح پر ہوا کی کثافت μ_0 ہے اور c ایک مثبت مستقل ہے۔ سیارہ میں ہوا کی کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۳۳۷: ایک سیارہ کا رداس R اور کمیت M ہے۔ اس کی کثافت کروی تشاکلی ہے جو سطح سے مرکز تک خطی بڑھتی ہے۔ سیارہ کی سطحی کثافت صفر لیتے ہوئے اس کے مرکز پر کثافت تلاش کریں۔



(ب) کارتیسی xy مستوی (ا) کارتیسی uv مستوی

شکل ۱۴.۸۳: مستوی xy میں خطہ R پر تکمل کا تبادلہ مساوات $x = g(u,v)$ ، $y = h(u,v)$ مستوی uv میں خطہ G پر کرتی ہیں۔

۱۴.۷ تکملات بالکثرت میں بدل

اس حصہ میں بارہا تکمل کی قیمت کا حصول بذریعہ بدل سکھایا جائے گا۔ واحد تکمل کی طرح یہاں بھی پیچیدہ تکمل کو سادہ تکمل سے بدلا جاتا ہے۔ بدل سے متکمل یا تکمل کی حدوں یا ان دونوں کی سادہ روپ استعمال کی جاتی ہے۔

دوہرا تکملات میں بدل

ہم قطبی محدد کی بدل کا استعمال حصہ ۱۴.۳ میں دیکھ چکے ہیں جو دہرا تکملات کی بدل، جس میں متغیرات کی تبدیلی کو خطے کی تبدیلی تصور کیا جاتا ہے، کی ایک مخصوص صورت ہے۔

فرض کریں مستوی uv کے خطہ G کا تبادلہ یک بہ یک مطابقت کی مساوات

$$x = g(u,v), \quad y = h(u,v)$$

کے ذریعہ مستوی xy کے خطہ R میں کیا جاتا ہے (شکل ۱۴.۸۳)۔ ہم R کو اس تبادل میں G کا **عکس**[18] اور G کو R کا **قبل عکس**[19] کہتے ہیں۔ خطہ R میں کسی بھی تفاعل $f(x,y)$ کو خطہ G میں معین تفاعل $f(g(u,v),h(u,v))$ بھی تصور کیا جا سکتا ہے۔ خطہ R میں $f(x,y)$ کے تکمل کا خطہ G میں $f(g(u,v),h(u,v))$ کے تکمل کے ساتھ کیا تعلق ہو گا؟

اس کا جواب: اگر g ، h اور f کے جزوی تفارق استمراری ہوں اور $J(u,v)$ (جس پر جلد تبصرہ کیا جائے گا) صرف تنہا نقطوں پر صفر ہو (اگر صفر ہو بھی) تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_G f(g(u,v),h(u,v))\big|J(u,v)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{ا}$$

---

[18] image
[19] preimage

۲۳۷۹۰ مذکورہ بالا مساوات میں $J(u,v)$ ، جو یعقوبی کہلاتا ہے، کی مطلق قیمت استعمال کی گئی۔

۲۳۷۹۱ تعریف: **یعقوبی مقطع**[20] یا محددی تبادل $x = g(u,v)$ ، $y = h(u,v)$ کے **یعقوبی**[21] سے مراد درج ذیل ہے:

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \tag{۲}$$

۲۳۷۹۲ □

۲۳۷۹۳ یعقوبی کو

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

۲۳۷۹۴ سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے جو ہمیں یاد دلاتا ہے کہ x اور y کی جزوی تفارق سے یعقوبی (مساوات ۲) حاصل ہوتا ہے۔ مساوات ۱ کی استخراج آپ کو اعلیٰ احصاء
۲۳۷۹۵ کے نصاب میں ملے گی جس کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

۲۳۷۹۶ قطبی محدد میں میں u اور v کی جگہ r اور θ ہوں گے لہٰذا $x = r\cos\theta$ اور $y = r\sin\theta$ لیتے ہوئے یعقوبی

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r$$

۲۳۷۹۷ ہو گا اور مساوات ادرج ذیل صورت اختیار کرے گی جو حصہ ۱۴.۳ کی مساوات ۶ ہے۔

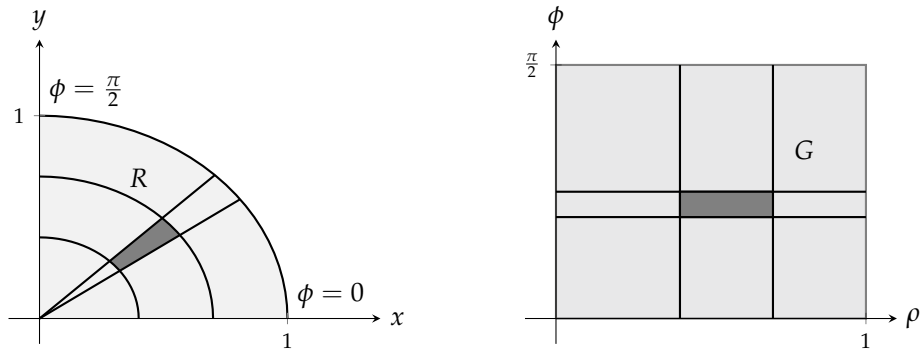
$$\begin{aligned} \iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta)|r|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \iint_G f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{اگر } r \geq 0 \text{ ہو} \end{aligned} \tag{۳}$$

۲۳۷۹۸ شکل ۱۴.۸۴ میں دکھایا گیا ہے کہ کس طرح مستطیل $G : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi/2$ کا تبادلہ مساوات $x = r\cos\theta$ اور
۲۳۷۹۹ $y = r\sin\theta$ ایک چوتھائی دائرہ R ، جس کی سرحد ربع اول میں مستوی xy پر $x^2 + y^2 = 1$ ہے، میں کرتی ہیں۔

۲۳۸۰۰ دھیان رہے کہ مساوات ۳ کی دائیں ہاتھ میں قطبی محددی مستوی میں کسی خطہ پر $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ کا تکمل نہیں بلکہ کارتیسی r,θ مستوی کے
۲۳۸۰۱ خطہ G میں $f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ اور r کے حاصل ضرب کا تکمل ہے۔

---

[20] یہ ریاضی دان کارل گستاف یعقوب یعقوبی کے نام سے منسوب ہے۔
[21] Jacobian



(ب) کارتیسی xy مستوی (ا) کارتیسی $\rho\phi$ مستوی

شکل ۱۴.۸۴: خطہ G کا تبادلہ مساوات $x = \rho\cos\phi$ ، $y = \rho\sin\phi$ خطہ R میں کرتی ہیں۔

۲۳۸۰۲ دھیان رہے کہ مساوات تبادل $x = g(u,v)$ ، $y = h(u,v)$ خطہ G کا تبادلہ R میں کرتی ہیں مگر یہ مساوات R میں تکمل کو تبدیل کر
۲۳۸۰۳ کے G میں تکمل دیتی ہیں۔

۲۳۸۰۴ آئیں تبادل کی دوسری مثال دیکھیں۔

۲۳۸۰۵ مثال ۱۴.۲۴: مستوی uv میں موزوں خطہ پر تبادل

$$u = \frac{2x-y}{2}, \quad v = \frac{y}{2} \tag{۴}$$

۲۳۸۰۶ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=y/2+1} \frac{2x-y}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

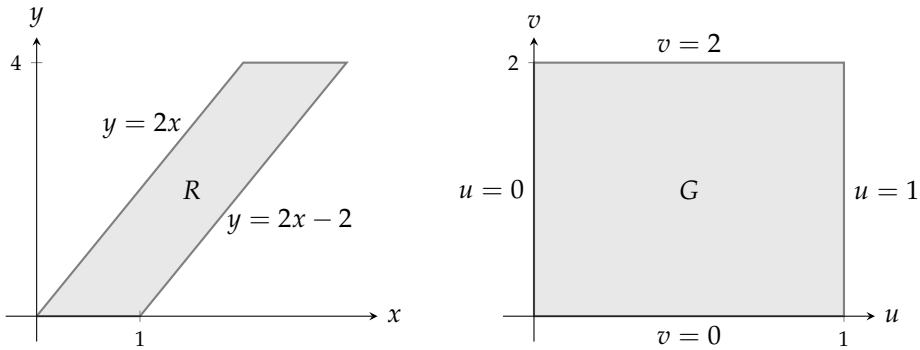
۲۳۸۰۷ **حل**

۲۳۸۰۸ ہم مستوی xy میں تکمل کے خطے کا خاکہ بنا کر اس کی سرحدوں کی نشاندہی کرتے ہیں (شکل ۱۴.۸۵)۔

۲۳۸۰۹ مساوات ۱ استعمال کرنے کی خاطر ہمیں مستوی uv میں مطابقتی خطہ G اور تبادل کا یعقوبی معلوم کرنے ہوں گے۔ انہیں دریافت کرنے کے لیے ہم
۲۳۸۱۰ مساوات ۴ کو x اور y کے لیے u اور v کی صورت میں حل کرتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$x = u+v, \quad y = 2v \tag{۵}$$

۲۳۸۱۱ اس کے بعد ہم R کی سرحدوں کی مساوات میں انہیں پر کر کے G کی سرحدیں دریافت کرتے ہیں۔



شکل ۸۵.۱۴: خطہ G کا تبادلہ مساوات $x = u + v$ ، $y = 2v$ خطہ R میں کرتی ہیں۔ ان مساوات کو $u = (2x - y)/2$ ، $v = y/2$ لکھ کر R کا تبادلہ G میں کیا جا سکتا ہے۔

خطہ R کی سرحد کی xy مساواتیں	خطہ G کی مطابقتی سرحد کی uv مساواتیں	uv مساواتوں کی سادہ صورت
$x = \frac{y}{2}$	$u + v = \frac{2v}{2} = v$	$u = 0$
$x = \frac{y}{2} + 1$	$u + v = \frac{2v}{2} + 1 = v + 1$	$u = 1$
$y = 0$	$2v = 0$	$v = 0$
$y = 4$	$2v = 4$	$v = 2$

۲۳۸۱۴

۲۳۸۱۳ تبادل کا یعقوبی (مساوات ۵ سے) درج ذیل ہو گا۔

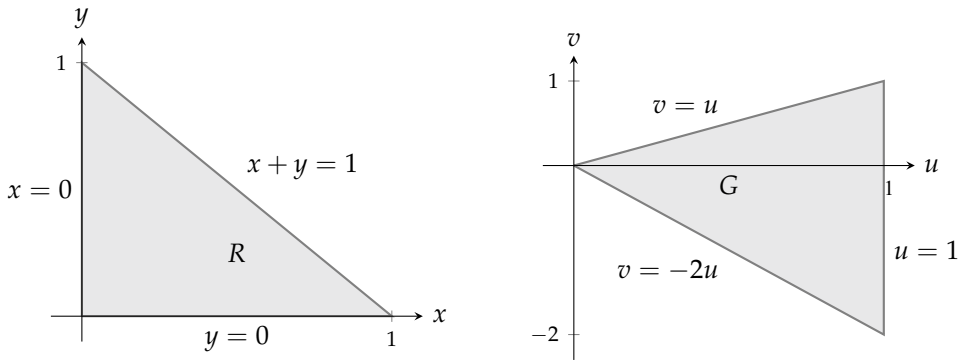
$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial u}(u+v) & \frac{\partial}{\partial v}(u+v) \\ \frac{\partial}{\partial u}(2v) & \frac{\partial}{\partial v}(2v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

۲۳۸۱۴ ہم اب مساوات ۱ استعمال کرنے کی تمام معلومات جانتے ہیں:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=y/2+1} \frac{2x-y}{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{v=0}^{v=2} \int_{u=0}^{u=1} u\big|J(u,v)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \int_0^2 \int_0^1 (u)(2)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_0^2 \Big[u^2\Big]_0^1 \mathrm{d}v = \int_0^2 \mathrm{d}v = 2 \end{aligned}$$

۲۳۸۱۵

□



شکل ۱۴.۸۶: خطہ G کا تبادلہ مساوات $x = \frac{u}{3} - \frac{v}{3}$ ، $y = \frac{2u}{3} + \frac{v}{3}$ خطہ R میں کرتی ہیں۔ ان مساوات کو $u = x + y$ ، $v = y - 2x$ لکھ کر R کا تبادلہ G میں کیا جا سکتا ہے۔

۲۳۸۱۶ مثال ۱۴.۲۵: درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

۲۳۸۱۷ **حل**

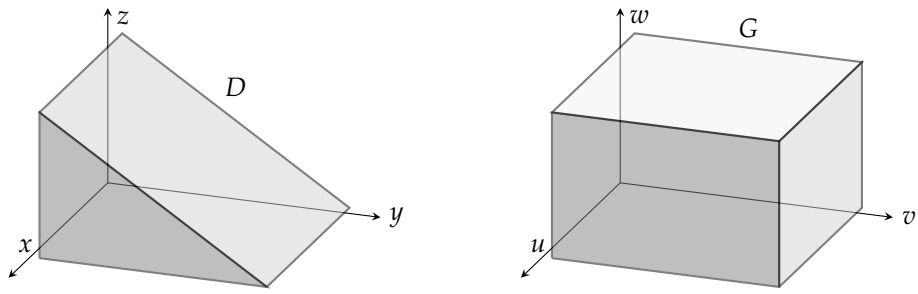
۲۳۸۱۸ ہم مستوی xy میں تکمل کے خطہ R کا خاکہ بنا کر اس کی سرحدوں کی نشاندہی کرتے ہیں (شکل ۱۴.۸۶)۔ متکمل کو دیکھ کر ہمیں خیال آتا ہے کہ تبادل $u = x + y$ اور $v = y - 2x$ استعمال کیا جائے جنہیں u اور v کی صورت میں x اور y کے لیے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔ ۲۳۸۱۹

$$x = \frac{u}{3} - \frac{v}{3}, \quad y = \frac{2u}{3} + \frac{v}{3} \tag{۶}$$

۲۳۸۲۰ ہم مساوات ۶ سے مستوی uv میں خطہ G کی سرحدیں معلوم کرتے ہیں۔

uv مساواتوں کی سادہ صورت	G کی مطابقتی سرحد کی uv مساواتیں	R کی سرحد کی xy مساواتیں
$u = 1$	$\left(\frac{u}{3} - \frac{v}{3}\right) + \left(\frac{2u}{3} + \frac{v}{3}\right) = 1$	$x + y = 1$
$v = u$	$\frac{u}{3} - \frac{v}{3} = 0$	$x = 0$
$v = -2u$	$\frac{2u}{3} + \frac{v}{3} = 0$	$y = 0$

۲۳۸۲۱



(ا)کارتیسی uvw فضا۔ (ب)کارتیسی xyz فضا۔

شکل ۱۴.۸۷: کارتیسی xyz فضا میں خطہ D پر تکمل کا تبادلہ مساوات $x = g(u,v,w)$ ، $y = h(u,v,w)$ ، $z = k(u,v,w)$ کارتیسی uvw فضا میں خطہ G پر تکمل میں کرتی ہیں۔

۲۳۸۲۲ مساوات ۶ میں دیے تبادل کا یعقوبی درج ذیل ہو گا۔

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$$

۲۳۸۲۳ ہم مساوات اسے تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہیں:

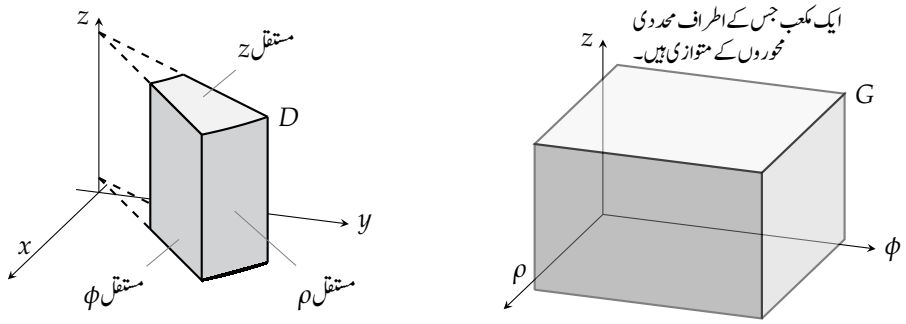
$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2 \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{u=0}^{u=1} \int_{v=-2u}^{v=u} u^{1/2}\, v^2 \big|J(u,v)\big| \,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \int_{-2u}^{u} u^{1/2}\, v^2 \left(\frac{1}{3}\right) \mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_0^1 u^{1/2} \left(\frac{1}{3}v^3\right)_{v=-2u}^{v=u} \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{9}\int_0^1 u^{1/2}(u^3+8u^3)\,\mathrm{d}u = \int_0^1 u^{7/2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{9}u^{9/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

۲۳۸۲۴ □

۲۳۸۲۵ تہرا تکملات میں بدل

۲۳۸۲۶ تکلی اور کروی بدل ان بدل کی خصوصی صورتیں ہیں جو تہرا تکملات کے متغیرات کی تبدیلی کو تین بُعدی فضا کا تبادل تصور کرتے ہیں۔ یہ ترکیب دوہرا تکملات کی
۲۳۸۲۷ ترکیب کی طرح ہے، بس اب ہم دو کے بجائے تین بعد میں کام کرتے ہیں۔

۲۳۸۲۸ فرض کریں uvw فضا میں خطہ G کا تبادلہ یک بہ یک مطابقت کے ساتھ xyz فضا کے خطہ D میں درج ذیل روپ کی مساواتوں سے کیا جاتا ہے



(ا)کارتیسی $\rho\phi z$ فضا۔ (ب)کارتیسی xyz فضا۔

شکل ۱۴.۸۸: خطہ G کا تبادلہ مساوات $x = \rho\cos\phi$ ، $y = \rho\sin\phi$ ، $z = z$ خطہ D میں کرتی ہیں۔

۲۳۸۲۹ (شکل ۱۴.۸۷)۔

$$x = g(u,v,w), \quad y = h(u,v,w), \quad z = k(u,v,w)$$

۲۳۸۳۰ تب D میں کسی بھی تفاعل $F(x,y,z)$ کو G میں معین تفاعل

$$F(g(u,v,w), h(u,v,w), k(u,v,w)) = H(u,v,w)$$

۲۳۸۳۱ تصور کیا جا سکتا ہے۔ اگر g ، h اور k کے اول جزوی تفارق استمراری ہوں تب D پر F کے تکمل کا G پر $H(u,v,w)$ کے تکمل کے ساتھ
۲۳۸۳۲ تعلق درج ذیل مساوات دیگی۔

$$\iiint\limits_D F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_G H(u,v,w)\big|J(u,v,w)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \tag{۷}$$

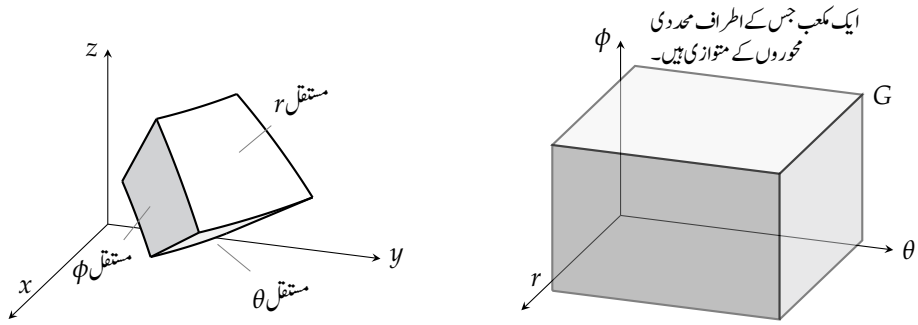
۲۳۸۳۳ اس مساوات میں $J(u,v,w)$ کی مطلق قیمت استعمال کی گئی ہے جو درج ذیل **یعقوبی مقطع**[۲۲] ہے۔

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \tag{۸}$$

۲۳۸۳۴ متغیرات کی تبدیلی کا کلیہ، جس کو مساوات ۷ میں پیش کیا گیا ہے، پیچیدہ ہے اور دو بُعدی صورت کی طرح، اس کی اشتقاق کو یہاں پیش نہیں کیا جائے گا۔

---

[۲۲] Jacobiandeterminant



(ا)کارتیسی $r\theta\phi$ فضا۔ (ب)کارتیسی xyz فضا۔

شکل ۱۴.۸۹: خطہ G کا تبادلہ مساوات $x = r\sin\theta\cos\phi$ ، $y = r\sin\theta\sin\phi$ ، $z = r\cos\theta$ خطہ D میں کرتی ہیں۔

۲۳۸۳۵ نلکی محدد میں u ، v اور w کی جگہ ρ ، ϕ اور z ہوں گے۔ کارتیسی $\rho\phi z$ فضا سے کارتیسی xyz فضا میں تبادل درج ذیل مساوات دیں گی (شکل
۲۳۸۳۶ ۱۴.۸۸)۔

$$x = \rho\cos\phi, \quad y = \rho\sin\phi, \quad z = z$$

۲۳۸۳۷ اس تبادل کا یعقوبی

$$\begin{aligned} J(\rho,\phi,z) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \rho\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \rho\cos^2\phi + \rho\sin^2\phi = \rho \end{aligned}$$

۲۳۸۳۸ ہو گا۔ یوں مساوات ۷ درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$\iiint\limits_D F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_G H(\rho,\phi,z)\left|\rho\right|\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \tag{۹}$$

۲۳۸۳۹ جب بھی $\rho \geq 0$ ہو، ہم مطلق کی علامت سے چھٹکارا حاصل کر سکتے ہیں۔

۲۳۸۴۰ کروی محدد میں u ، v اور w کی جگہ r ، θ اور ϕ ہوں گے۔ کارتیسی $r\theta\phi$ فضا سے کارتیسی xyz فضا میں تبادل درج ذیل مساوات دیں گی
۲۳۸۴۱ (شکل ۱۴.۸۹)۔

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\sin\theta$$

۲۳۸۴۲ اس تبادل کا یعقوبی

$$J(r,\theta,\phi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{vmatrix} = r^2 \sin\theta \tag{۱۰}$$

۲۳۸۴۳ ہو گا (سوال ۱۴.۳۵۴)۔ یوں مساوات ۷ درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$\iiint\limits_D F(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint\limits_G H(r,\theta,\phi)\left|r^2\sin\theta\right|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \tag{۱۱}$$

۲۳۸۴۴ کروی محدد میں $0 \le \theta \le \pi$ کی وجہ سے $\sin\theta$ کبھی بھی منفی نہیں ہو سکتا ہے لہٰذا مطلق کی علامت لکھنے کی ضرورت نہیں ہے۔

۲۳۸۴۵ آئیں تبادل کی ایک مثال دیکھتے ہیں۔

۲۳۸۴۶ مثال ۱۴.۲۶: درج ذیل تبادل

$$u = (2x-y)/2, \quad v = y/2, \quad w = z/3 \tag{۱۲}$$

۲۳۸۴۷ استعمال کرتے ہوئے uvw فضا میں موزوں خطہ پر تکمل لے کر درج ذیل تکمل کی قیمت دریافت کریں۔

$$\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=y/2+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

۲۳۸۴۸ **حل**

۲۳۸۴۹ ہم xyz فضا میں تکمل کے خطہ D کا خاکہ بنا کر اس کی سرحدوں کی نشاندہی کرتے ہیں (شکل ۱۴.۹۰)۔ یہاں سرحدی سطحیں مستویات ہیں۔

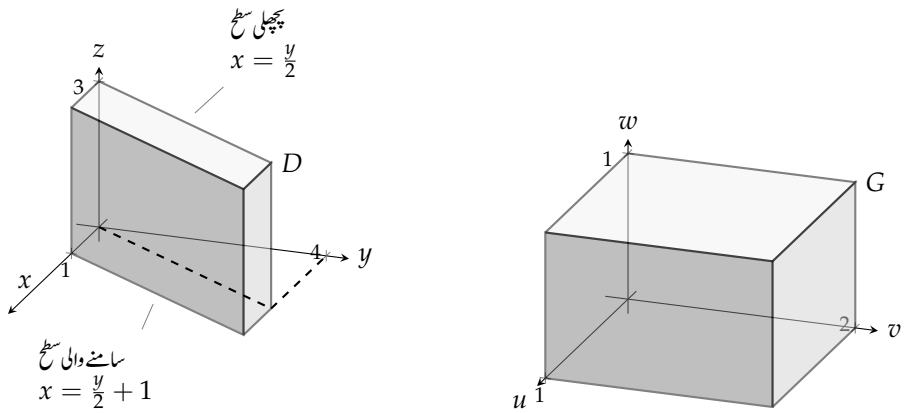
۲۳۸۵۰ مساوات ۷ استعمال کرنے کے لیے ہمیں uvw فضا میں مطابقتی خطہ G اور تبادل کا یعقوبی جاننا ہو گا۔ ہم مساوات ۱۲ کو x ، y اور z کے لیے u ، v
۲۳۸۵۱ اور w کی صورت میں حل کر کے

$$x = u+v, \quad y = 2v, \quad z = 3w \tag{۱۳}$$

۲۳۸۵۲ حاصل کرتے ہیں۔ ہم D کی سرحدوں کی مساوات میں یہ قیمتیں پر کر کے G کی سرحدوں کی مساواتیں دریافت کرتے ہیں:

۲۳۸۵۳

uvw مساواتوں کی سادہ صورتیں	G کی سرحدوں کی مطابقتی uvw مساواتیں	D کی سرحدوں کی xyz مساواتیں
$u=0$	$u+v = 2v/2 = v$	$x = y/2$
$u=1$	$u+v = 2v/2+1 = v+1$	$x = y/2+1$
$v=0$	$2v = 0$	$y = 0$
$v=2$	$2v = 4$	$y = 4$
$w=0$	$3w = 0$	$z = 0$
$w=1$	$3w = 3$	$z = 3$



شکل ۱۴.۹۰: خطہ G کا تبادلہ مساوات $x = u + v$ ، $y = 2v$ ، $z = 3w$ خطہ D میں کرتی ہیں جبکہ ان کی مخالف مساوات $u = \frac{2x-y}{2}$ ، $v = \frac{y}{2}$ ، $w = \frac{z}{3}$ خطہ D کا تبادلہ G میں کرتی ہیں۔

۲۳۸۵۴ ہم مساوات ۱۱۳ استعمال کرتے ہوئے یعقوبی تلاش کرتے ہیں۔

$$J(u,v,w) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

۲۳۸۵۵ ہم مساوات ۱۷ استعمال کرنے کے لیے درکار تمام معلوم جان چکے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=y/2+1} \left(\frac{2x-y}{2} + \frac{z}{3}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u+w)\big|J(u,v,w)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\
&= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^1 (u+w)(6)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = 6\int_0^1 \int_0^2 \left[\frac{u^2}{2} + uw\right]_0^1 \mathrm{d}v\,\mathrm{d}w \\
&= 6\int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{1}{2} + w\right) \mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = 6\int_0^1 \left[\frac{v}{2} + vw\right]_0^2 \mathrm{d}w = 6\int_0^1 (1+2w)\,\mathrm{d}w \\
&= 6\left[w + w^2\right]_0^1 = 6(2) = 12
\end{aligned}$$

□ ۲۳۸۵۶

سوالات

تبادل محدد

سوال ۱۴.۳۳۸:

ا. درج ذیل نظام کو x اور y کے لیے u اور v کی صورت میں حل کریں۔ اس کے بعد یعقوبی $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ کی قیمت تلاش کریں۔

$$u = x - y, \quad v = 2x + y$$

ب. مستوی xy میں تکونی خطہ جس کے راس $(0,0)$ ، $(1,1)$ اور $(1,-2)$ ہیں کا عکس تبادل $u = x - y$ ، $v = 2x + y$ میں تلاش کریں۔ مستوی uv میں تبدیل شدہ خطے کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۴.۳۳۹:

ا. درج ذیل نظام کو x اور y کے لیے u اور v کی صورت میں حل کریں۔ اس کے بعد یعقوبی $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ کی قیمت تلاش کریں۔

$$u = x + 2y, \quad v = x - y$$

ب. مستوی xy میں لکیر $y = 0$ ، $y = x$ اور $x + 2y = 2$ کے بیچ تکونی خطے کا عکس تبادل $u = x + 2y$ ، $v = x - y$ میں تلاش کریں۔ مستوی uv میں تبدیل شدہ خطے کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۴.۳۴۰:

ا. درج ذیل نظام کو x اور y کے لیے u اور v کی صورت میں حل کریں۔ اس کے بعد یعقوبی $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ کی قیمت تلاش کریں۔

$$u = 3x + 2y, \quad v = x + 4y$$

ب. مستوی xy میں محور x ، محور y اور لکیر $x + y = 1$ کے بیچ تکونی خطے کا عکس تبادل $u = 3x + 2y$ ، $v = x + 4y$ میں تلاش کریں۔ مستوی uv میں تبدیل شدہ خطے کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۴.۳۴۱:

ا. درج ذیل نظام کو x اور y کے لیے u اور v کی صورت میں حل کریں۔ اس کے بعد یعقوبی $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ کی قیمت تلاش کریں۔

$$u = 2x - 3y, \quad v = -x + y$$

ب. مستوی xy میں $x = -3$ ، $x = 0$ ، $y = x$ اور $y = x + 1$ کے بیچ متوازی الاضلاع کا عکس تبادل $u = 2x - 3y$ ، $v = -x + y$ میں تلاش کریں۔ مستوی uv میں تبدیل شدہ خطے کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۴.۳۴۲: درج ذیل تبادل کے یعقوبی تلاش کریں۔

۳۸۷۶ ا. $x = u\cos v, \quad y = u\sin v$ ۳۸۷۷ ب. $x = u\sin v, \quad y = u\cos v$

۳۸۷۸ سوال ۱۴.۳۴۳: درج ذیل تبادل کے یعقوبی تلاش کریں۔

۳۸۷۹ ا. $x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = w$

۳۸۸۰ ب. $x = 2u - 1, \quad y = 3v - 4, \quad z = \frac{1}{2}(w - 4)$

۳۸۸۱ **دوہرا تکملات**

۳۸۸۲ سوال ۱۴.۳۴۴: درج ذیل تکمل کی قیمت x اور y کے لحاظ سے تکمل لے کر حاصل کرتے ہوئے مثال ۱۴.۲۴ میں حاصل قیمت (2) کی تصدیق
۳۸۸۳ کریں۔

$$\int_0^4 \int_{x=y/2}^{x=y/2+1} \frac{2x - y}{2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

۳۸۸۴ سوال ۱۴.۳۴۵: ربع اول میں لکیر $y = -2x + 4$ ، $y = -2x + 7$ ، $y = x - 2$ اور $y = x + 1$ کے بیچ خطہ R پر
۳۸۸۵ درج ذیل تکمل کی قیمت سوال ۱۴.۳۳۸ کا تبادل استعمال کرتے ہوئے حاصل کریں۔

$$\iint_R (2x^2 - xy - y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

۳۸۸۶ سوال ۱۴.۳۴۶: ربع اول میں لکیر $y = -\frac{3}{2}x + 1$ ، $y = -\frac{3}{2}x + 3$ ، $y = -\frac{1}{4}x$ اور $y = -\frac{1}{4}x + 1$ کے بیچ خطہ
۳۸۸۷ R پر درج ذیل تکمل کی قیمت سوال ۱۴.۳۴۰ کا تبادل استعمال کرتے ہوئے حاصل کریں۔

$$\iint_R (3x^2 + 14xy + 8y^2) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

۳۸۸۸ سوال ۱۴.۳۴۷: درج ذیل تکمل کی قیمت سوال ۱۴.۳۴۱ کا خطہ R اور تبادل استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں۔

$$\iint_R 2(x - y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

۳۸۸۹ سوال ۱۴.۳۴۸: ربع اول میں مستوی xy میں قطع زائد $xy = 1$ ، $xy = 9$ اور لکیر $y = x$ ، $y = 4x$ کے بیچ خطہ R ہے۔
۳۸۹۰ تبادل $x = u/v$ ، $y = uv$ جہاں $u > 0$ ، $v > 0$ ہیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تکمل کو مستوی uv میں موزوں خطہ G پر
۳۸۹۱ ایک تکمل کی صورت میں لکھیں۔

$$\iint_R \left(\sqrt{\frac{y}{x}} + \sqrt{xy}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

خطہ G پر اس uv تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۴.۳۴۹: (ا) تبادل $x = u$ ، $y = uv$ کا یعقوبی تلاش کریں اور خطہ $G : 1 \leq u \leq 2, 1 \leq uv \leq 2$ کا مستوی uv میں خاکہ بنائیں۔ (ب) اس کے بعد مساوات ۱۱ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل تکمل کو G پر ایک تکمل کی صورت میں لکھیں۔ دونوں تکملات کو حل کرتے ہوئے تکمل کی قیمتیں حاصل کریں۔

$$\int_1^2 \int_1^2 \frac{y}{x} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$$

سوال ۱۴.۳۵۰: مستوی xy میں ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \ a > 0, b > 0$ کے بیچ خطہ پر مستقل کثافت کی پتلی چادر کی مبدا کے لحاظ سے معیار اثر اول تلاش کریں۔ (اشارہ: تبادل $x = ar \cos \theta$ ، $y = br \sin \theta$ استعمال کریں۔)

سوال ۱۴.۳۵۱: مستوی xy میں $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ پر تفاعل $f(x, y) = 1$ کا تکمل لے کر ترخیم کا رقبہ πab حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس تکمل کو سیدھا حل کرنے کے لیے اس میں تکونیاتی تفاعل پر کرنا ہو گا۔ اس سے آسان طریقہ تبادل $x = au$ ، $y = bv$ استعمال کرتے ہوئے تبدیل شدہ تکمل کی قیمت کا مستوی uv میں قرص $G : u^2 + v^2 \leq 1$ پر حصول ہے۔

سوال ۱۴.۳۵۲: درج ذیل تکمل کو پہلے مستوی uv میں خطہ G پر سوال ۱۴.۳۳۹ کے تبادل سے تبدیل کرتے ہوئے حل کریں۔

$$\int_0^{2/3} \int_y^{2-2y} (x + 2y) e^{(y-x)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

سوال ۱۴.۳۵۳: مستوی uv میں درج ذیل تکمل کو تبادل $x = u + \frac{v}{2}$ ، $y = v$ کی مدد سے منتقل کریں۔ تبدیل شدہ تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_0^2 \int_{y/2}^{(y+4)/2} y^3 (2x - y) e^{(2x-y)^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

تہرا تکملات

سوال ۱۴.۳۵۴: کارتیسی $r\theta\phi$ فضا سے کارتیسی xyz فضا کے تبادل کا یعقوبی مساوات ۱۰ کا مقطع دیتا ہے۔ اس مقطع کو حل کر کے اس کی قیمت $r^2 \sin \theta$ حاصل کریں۔

سوال ۱۴.۳۵۵: متغیرات x ، y اور z کے لحاظ سے تکمل لیتے ہوئے مثال ۱۴.۲۶ کا تکمل حل کریں۔

سوال ۱۴.۳۵۶: ترخیم نما

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

کا حجم تلاش کریں۔ (اشارہ: تبادل $x = au$ ، $y = bv$ ، $z = cw$ لے کر فضا uvw میں موزوں خطہ پر تکمل کی قیمت تلاش کریں۔)

سوال ۱۴.۳۵۷: ٹھوس ترخیم نما

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$$

پر درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔(اشارہ: تبادل $x = au$ ، $y = bv$ ، $z = cw$ لے کر فضا uvw میں موزوں خطہ پر تکمل کی قیمت تلاش کریں۔)

$$\iiint |xyz| \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

سوال ۱۴.۳۵۸: فضا xyz میں خطہ D درج ذیل ہے۔

$$1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq xy \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 1$$

تبادل

$$u = x, \quad v = xy, \quad w = 3z$$

استعمال کر کے فضا uvw میں موزوں خطہ G پر درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\iiint\limits_D (x^2y + 3xyz) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

سوال ۱۴.۳۵۹: یہ جانتے ہوئے کہ نصف کرہ کا مرکز کمیت کرہ کے قاعدہ سے سر جانب محور تشاکلی پر تین آٹھواں فاصلہ پر ہے، موزوں تکملات کو بدل کر دکھائیں کہ نصف ترخیم نما

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \, z \geq 0$$

کا مرکز کمیت محور z پر قاعدہ سے راس جانب تین آٹھواں فاصلہ پر ہو گا۔ آپ کو تکمل حل کرنے کی ضرورت پیش نہیں آنی چاہیے۔

سوال ۱۴.۳۶۰: واحد متغیر کے تکملات میں بدل کو کس طرح ترکیب تبادل کا ایک خصوصی روپ تصور کیا جا سکتا ہے؟ ان میں یعقوبی کی قیمت کیا ہو گی؟ ایک مثال کی مدد سے وضاحت کریں۔

باب ۱۵

سمتی میدان میں تکمل

ایک جائزہ اس باب کا موضوع سمتی میدان میں تکمل ہے۔ اس باب کی ریاضی کو برقناطیسیت کے خواص بیان کرنے کے لیے، تاروں میں حرارت کے بہاؤ پر غور، اور مصنوعی سیارہ کو مدار میں منتقل کرنے کے لیے درکار توانائی کے حصول کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔

۱۵.۱ لکیری تکمل

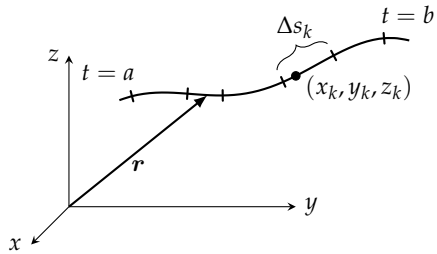
جب فضا میں تفاعل $f(x, y, z)$ کے دائرہ کار سے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k},\ a \leq t \leq b$ گزرے تب اس منحنی کے ساتھ چلتے ہوئے f کی قیمتیں مرکب تفاعل $f(g(t), h(t), k(t))$ دیگا۔ نقطہ a سے b تک لمبائی قوس کے لحاظ سے اس مرکب تفاعل کے تکمل کو قوس کے ساتھ f کا **لکیری تکمل**[1] کہتے ہیں۔ تین بُعدی جیومیٹری کے باوجود، لکیری تکمل حقیقی اعداد کے وقفہ پر حقیقی قیمت تفاعل کا سادہ تفاعل ہو گا۔

لکیری تکمل کی اہمیت اس کے استعمال میں ہے۔ ان تکملات کی مدد سے ہم متغیر قوتوں کی فضا میں راہ پر کام اور قوس کے ساتھ یا سرحد پار کرتی سیال کی شرح بہاؤ کا حساب کرتے ہیں۔

تعریفات اور علامتیت

فرض کریں تفاعل $f(x, y, z)$ کے دائرہ کار میں منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k},\ a \leq t \leq b$ پائی جاتی ہے۔ ہم اس منحنی کی، متناہی تعداد کی قوسچوں میں، خانہ بندی کرتے ہیں (شکل ۱۵.۱)۔ ایک علامتی قوسچہ کی لمبائی Δs_k ہو گی۔ ہم ہر قوسچہ پر ایک نقطہ

[1] lineintegral



شکل ۱۵.۱: منحنی $\boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ کو $t = a$ اور $t = b$ کے بیچ قوسچوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ایک علامتی قوسچہ کی لمبائی Δs_k ہے۔

۳۳۹۳۷ (x_k, y_k, z_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k \tag{۱}$$

۳۳۹۳۸ اگر f استمراری ہو اور g ، h ، اور k کے اول تفرق استمراری ہوں تب جیسے جیسے n بڑھایا جائے، Δs_k صفر تک پہنچے گی اور مساوات ۱ کا مجموعہ ایک
۳۳۹۳۹ حد کو پہنچے گا۔ ہم اس حد کو a تا b **اس قوس پر** f **کا تکمل** کہتے ہیں۔ قوس کو C سے ظاہر کرتے ہوئے اس تکمل کو علامتی طور پر درج ذیل لکھا جاتا
۳۳۹۴۰ ہے۔

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s \qquad \text{“C پر } f \text{ کا تکمل”} \tag{۲}$$

۳۳۹۴۱ **ہموار منحنیات پر تکمل کی قیمت کا حصول**

۳۳۹۴۲ اگر وقفہ $a \le t \le b$ پر $\boldsymbol{r}(t)$ ہموار ہو ($\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ استمراری ہو اور کبھی بھی $\mathbf{0}$ نہ ہو) تب ہم $\mathrm{d}s$ کو بیان کرنے کے لیے درج ذیل مساوات
۳۳۹۴۳ استعمال کر سکتے ہیں چونکہ اس سے $\mathrm{d}s = \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right| \mathrm{d}t$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$s(t) = \int_a^t \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right| \mathrm{d}\tau \qquad t_0 = a \text{ حصہ ۱۲.۳ کی مساوات ۴ میں}$$

۳۳۹۴۴ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ایسی صورت میں ہم درج ذیل طریقہ سے C پر f کے تکمل کی قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t))\left|\boldsymbol{v}(t)\right| \mathrm{d}t$$

۳۳۹۴۵ ہم جس مقدار معلوم روپ کو بھی استعمال کریں، جب تک زیر استعمال مقدار معلوم روپ ہموار ہو، یہ کلیہ ہمیں تکمل کی قیمت دیگا۔

لکیری تکمل کی قیمت کا حصول

منحنی C پر استمراری تفاعل f کا تکمل لینے کے لیے

ا. C کی مقدار معلوم روپ تلاش کریں:

$$\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}, \quad a \leq t \leq b$$

ب. درج ذیل تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(g(t),h(t),k(t))\left|\boldsymbol{v}(t)\right|\mathrm{d}t \tag{۳}$$

دھیان رہے کہ مستقل تفاعل $f = 1$ کی صورت میں مذکورہ بالا تکمل C کی لمبائی دیگا۔

مثال ۱۵.۱: مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک قطع پر $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$ تکمل کریں (شکل ۱۵.۲)۔

حل

ہم ذہن میں آنے والا سادہ ترین مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

جس کی اجزاء کے اول تفرق استمراری ہیں اور $\left|\boldsymbol{v}(t)\right| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ کبھی بھی $\mathbf{0}$ نہیں ہو سکتا ہے لہٰذا یہ مقدار معلوم روپ ہموار ہے۔ یوں C پر f کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

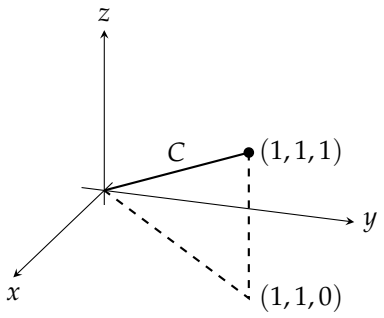
$$\begin{aligned}
\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 f(t,t,t)(\sqrt{3})\,\mathrm{d}t && \text{مساوات ۳}\\
&= \int_0^1 (t - 3t^2 + t)\sqrt{3}\,\mathrm{d}t\\
&= \sqrt{3}\int_0^1 (2t - 3t^2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\Big[t^2 - t^3\Big]_0^1 = 0
\end{aligned}$$

□

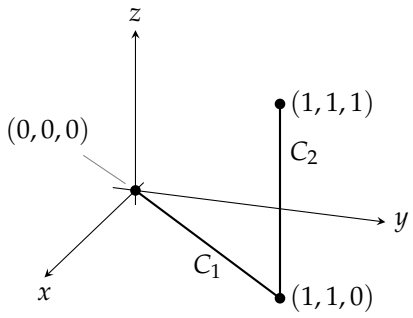
جمع پذیری

اگر متناہی تعداد کی منحنیات C_1 ، C_2 ، ۔ ۔ ۔ ، C_n کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر منحنی C حاصل کی جائے تب C پر تفاعل کا تکمل ان منحنیات پر تفاعل کے تکملات کا مجموعہ ہو گا:

$$\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_{C_1} f\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f\,\mathrm{d}s + \cdots + \int_{C_n} f\,\mathrm{d}s \tag{۴}$$



شکل ۱۵.۲: تکمل کی راہ (مثال ۱۵.۱)۔



شکل ۱۵.۳: تکمل کی راہ (مثال ۱۵.۲)۔

۳۳۹۶۰ مثال ۱۵.۲: مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک راہ C_1 اور C_2 پر چل کر پہنچا جاتا ہے (شکل ۱۵.۳)۔ یوں C ان کا اشتراک $C_1 \cup C_2$ ہو گا۔

۳۳۹۶۱ تفاعل $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$ کے تکمل کی قیمت $C_1 \cup C_2$ پر تلاش کریں۔

۳۳۹۶۲ **حل**

۳۳۹۶۳ ہم C_1 اور C_2 کے لیے، ذہن میں آنے والے سادہ ترین، مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} C_1: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 1; |\boldsymbol{v}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ C_2: &\quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1; |\boldsymbol{v}| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = 1 \end{aligned}$$

۳۳۹۶۴ ان مقدار معلوم روپ کے ساتھ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_{C_1 \cup C_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \int_{C_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s \qquad \text{مساوات ۴} \\ &= \int_0^1 f(t,t,0)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(1,1,t)(1)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2 + 0)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1 - 3 + t)(1)\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}\left[\frac{t^2}{2} - t^3\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - 2t\right]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

۳۳۹۶۵ □

۳۳۹۶۶ یہاں مثال ۱۵.۱ اور مثال ۱۵.۲ کے نتائج پر غور کرتے ہیں۔ اول، دیکھیں کہ موزوں منحنی کے اجزاء f میں پر کرتے ہی t کے لحاظ سے ایک سادہ تکمل حاصل
۳۳۹۶۷ ہوتا ہے۔ دوم، $C_1 \cup C_2$ پر f کا تکمل لینے کے لیے C_1 اور C_2 پر f کے علیحدہ علیحدہ تکملات لے کر نتائج کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ سوم، مثال ۱۵.۱
۳۳۹۶۸ میں C اور مثال ۱۵.۲ میں $C_1 \cup C_2$ پر تکمل کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف تھے۔ عموماً تفاعل کے لیے دو نقطوں کے بیچ مختلف راہ پر تکملات کے
۳۳۹۶۹ نتائج ایک دوسرے سے مختلف ہوں گے۔ البتہ بعض تفاعل کے لیے تکمل کی قیمت پر راہ کا کوئی اثر نہیں ہوتا ہے۔

جدول ۱۵.۱: فضا میں ہموار منحنی C کے ہمراہ اسپرنگ، باریک سلاخ، اور تار کی کمیت اور معیار اثر کے کلیات۔

کمیت:

$$M = \int_S \delta(x, y, z)\, \mathrm{d}s$$

محددی مستویات کے لحاظ سے اول معیار اثر:

$$M_{yz} = \int_C x\delta\, \mathrm{d}s, \quad M_{xz} = \int_C y\delta\, \mathrm{d}s, \quad M_{xy} = \int_C z\delta\, \mathrm{d}s$$

مرکز کمیت کے محدد:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

معیار اثر: جہاں لکیر L سے نقطہ (x, y, z) تک فاصلہ $r(x, y, z)$ ہے۔

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\delta\, \mathrm{d}s \qquad I_y = \int_C (x^2 + z^2)\delta\, \mathrm{d}s$$

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\delta\, \mathrm{d}s \qquad I_L = \int_C r^2\delta\, \mathrm{d}s$$

لکیر L کے لحاظ سے رداس دوار:

$$R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$$

کمیت اور معیار اثر کا حساب

ہم اسپرنگ اور تار کو فضا میں ہموار منحنی پر استمراری کمیتی کثافت $\delta(x, y, z)$ کی تقسیم تصور کرتے ہیں۔ یوں اسپرنگ یا تار کی کمیت، مرکز کمیت، اور ان کے معیار اثر اور رداس دوار کا حساب جدول ۱۵.۱ میں پیش کلیات سے کیا جائے گا۔ یہی کلیات باریک (پتلی) تار کے لیے بھی کارآمد ہوں گے۔

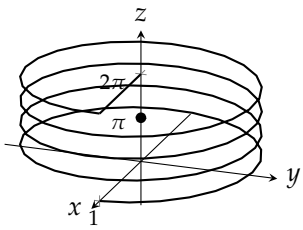
مثال ۱۵.۳: ایک اسپرنگ درج ذیل پیچدار منحنی کے ہمراہ پایا جاتا ہے (شکل ۱۵.۴)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

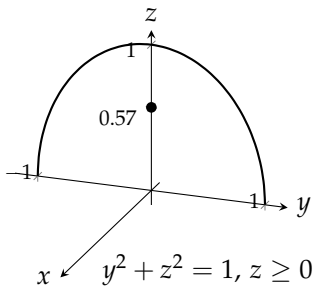
اسپرنگ کی کثافت مستقل $\delta = 1$ ہے۔ اسپرنگ کی کمیت اور مرکز کمیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

حل

ہم اسپرنگ کا خاکہ بناتے ہیں۔ تشاکلی کی وجہ سے اس کا مرکز کمیت محور z پر نقطہ $(0, 0, \pi)$ پر پایا جائے گا۔ باقی حساب کے لیے ہم $|\boldsymbol{v}(t)|$ تلاش



شکل ۱۵.۴: اسپرنگ برائے مثال ۱۵.۳



شکل ۱۵.۵: محراب کا مرکز کمیت (مثال ۱۵.۴)۔

۳۳۹۷۷ کرتے ہیں:

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{v}(t)| &= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \\
&= \sqrt{(-4\sin 4t)^2 + (4\cos 4t)^2 + 1} = \sqrt{17}
\end{aligned}
$$

۳۳۹۷۸ اب جدول ۱.۱۵ میں پیش کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
M &= \int\limits_{\text{پیچدار}} \delta\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (1)\sqrt{17}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{17} \\
I_z &= \int\limits_{\text{پیچدار}} (x^2 + y^2)\delta\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (\cos^2 4t + \sin^2 4t)(1)(\sqrt{17})\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{17}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{17} \\
R_z &= \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{\frac{2\pi\sqrt{17}}{2\pi\sqrt{17}}} = 1
\end{aligned}
$$

۳۳۹۷۹ دھیان رہے کہ محور z کے لحاظ سے رداس دوار عین اس بیلن کے رداس جتنا ہے جس پر اسپرنگ لپیٹا گیا ہے۔ □

۳۳۹۸۰ مثال ۱۵.۴: مستوی yz میں نصف دائرہ $y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$ پر ایک دبلا پتلا محراب پایا جاتا ہے (شکل ۱۵.۵)۔ محراب کے نقطہ
۳۳۹۸۱ (x, y, z) پر کثافت $\delta(x, y, z) = 2 - z$ ہے۔ محراب کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

۳۳۹۸۲ **حل**

۳۳۹۸۳ چونکہ یہ محراب مستوی yz میں پایا جاتا ہے اور محور z کے لحاظ سے اس کی کمیتی تقسیم دونوں اطراف یکساں ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ اور $\bar{y} = 0$ ہوں

۲۳۹۸۴ گے۔ ہم دائرہ کی مقدار معلوم روپ

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{j} + (\sin t)\boldsymbol{k},\ 0 \leq t \leq \pi$$

۲۳۹۸۵ لکھتے ہوئے $\dot{\boldsymbol{r}}$ دریافت کرتے ہیں۔ اس مقدار معلوم روپ کے لیے

$$|\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$

۲۳۹۸۶ ہو گا۔ یوں مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
M &= \int_C \delta\,\mathrm{d}s = \int_C (2-z)\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi (2-\sin t)\,\mathrm{d}t = 2\pi - 2\\
M_{xy} &= \int_0^C z\delta\,\mathrm{d}s = \int_C z(2-z)\,\mathrm{d}s = \int_0^\pi (\sin t)(2-\sin t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^\pi (2\sin t - \sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \frac{8-\pi}{2}\\
\bar{z} &= \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8-\pi}{2}\cdot\frac{1}{2\pi-2} \approx 0.57
\end{aligned}$$

۲۳۹۸۷ یوں مرکز کمیت تقریباً $(0, 0, 0.57)$ ہو گا۔ □

۲۳۹۸۸ **سوالات**

۲۳۹۸۹ **سمتی مساوات کی ترسیمات**

۲۳۹۹۰ سوال ۱۵.۱ تا سوال ۱۵.۸ میں دی گئی مساوات کی مطابقتی ترسیم شکل ۱۵.۶ تا شکل ۱۵.۱۳ میں تلاش کریں۔ سوال ۱۵.۱:

۲۳۹۹۱ $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (1-t)\boldsymbol{j},\quad 0 \leq t \leq 1$

۲۳۹۹۲ سوال ۱۵.۲: $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\quad -1 \leq t \leq 1$

۲۳۹۹۳ سوال ۱۵.۳: $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t)\boldsymbol{i} + (2\sin t)\boldsymbol{j},\quad 0 \leq t \leq 2\pi$

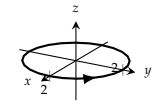
۲۳۹۹۴ سوال ۱۵.۴: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i},\quad -1 \leq t \leq 1$

۲۳۹۹۵ سوال ۱۵.۵: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\quad 0 \leq t \leq 2$

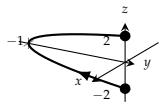
۲۳۹۹۶ سوال ۱۵.۶: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{j} + (2-2t)\boldsymbol{k},\quad 0 \leq t \leq 1$

۲۳۹۹۷ سوال ۱۵.۷: $\boldsymbol{r}(t) = (t^2-1)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k},\quad -1 \leq t \leq 1$

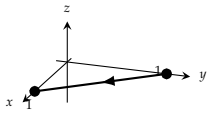
۲۳۹۹۸ سوال ۱۵.۸: $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t)\boldsymbol{i} + 2\sin t\boldsymbol{k},\quad 0 \leq t \leq \pi$



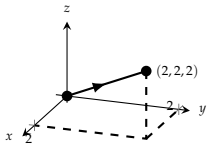
شکل ۱۵.۶



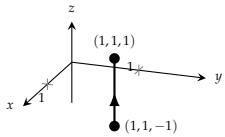
شکل ۱۵.۷



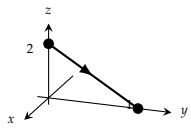
شکل ۱۵.۸



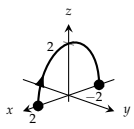
شکل ۱۵.۹



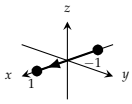
شکل ۱۵.۱۰



شکل ۱۵.۱۱



شکل ۱۵.۱۲



شکل ۱۵.۱۳

فضائی منحنیات پر تکمل کی قیمت کا حصول

سوال ۱۵.۹: تکمل $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s$ کی قیمت حاصل کریں جہاں C نقطہ $(0,1,0)$ تا $(1,0,0)$ خط مستقیم $x = t$ ، $y = (1-t)$ ، $z = 0$ ہے۔

سوال ۱۵.۱۰: تکمل $\int_C (x-y+z-2)\,\mathrm{d}s$ کی قیمت حاصل کریں جہاں C نقطہ $(0,1,1)$ تا $(1,0,1)$ خط مستقیم $x = t$ ، $y = (1-t)$ ، $z = 1$ ہے۔

سوال ۱۵.۱۱: تکمل $\int_C (xy+y+z)\,\mathrm{d}s$ کی قیمت منحنی $\boldsymbol{r}(t) = 2t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + (2-2t)\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$ پر حاصل کریں۔

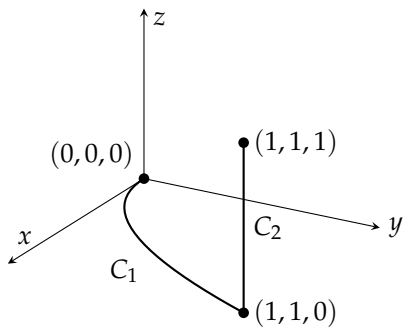
سوال ۱۵.۱۲: منحنی $\boldsymbol{r}(t) = 4\cos t\boldsymbol{i} + 4\sin t\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k},\ -2\pi \le t \le 2\pi$ پر تکمل $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$ کی قیمت حاصل کریں۔

سوال ۱۵.۱۳: تفاعل $f(x,y,z) = x+y+z$ کا تکمل $(1,2,3)$ تا $(0,-1,1)$ خط مستقیم قطع پر تلاش کریں۔

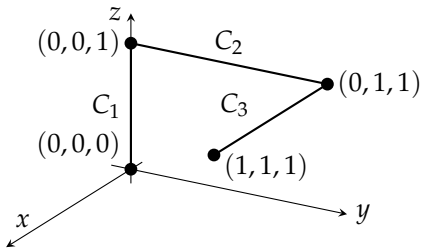
سوال ۱۵.۱۴: تفاعل $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{3}}{x^2+y^2+z^2}$ کا تکمل منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 1 \le t \le \infty$ پر تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۵: تفاعل $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} - z^2$ کا تکمل $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ درج ذیل راہ پر چلتے ہوئے تلاش کریں (شکل ۱۵.۱۴)۔

$$
\begin{aligned}
C_1: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 1 \\
C_2: &\quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1
\end{aligned}
$$



شکل ۱۵.۱۴: راہ برائے تکمل (سوال ۱۵.۱۵)



شکل ۱۵.۱۵: ٹکڑوں میں خطی راہ برائے سوال ۱۵.۱۶

سوال ۱۵.۱۶: تفاعل $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} - z^2$ کا تکمل $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ درج ذیل راہ پر چلتے ہوئے تلاش کریں (شکل ۱۵.۱۵)۔

$$\begin{aligned} C_1: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1 \\ C_2: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1 \\ C_3: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1 \end{aligned}$$

سوال ۱۵.۱۷: تفاعل $f(x,y,z) = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$ کا تکمل راہ $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, 0 < a \le t \le b$ پر تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۸: تفاعل $f(x,y,z) = -\sqrt{x^2+z^2}$ کا تکمل درج ذیل دائری راہ پر تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

مسطح منحنیات پر لکیری تکملات

سوال ۱۵.۱۹ تا سوال ۱۵.۲۲ میں f کا تکمل دی گئی منحنی پر تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۹: $f(x,y) = \frac{x^3}{y}, \quad C: y = \frac{x^2}{2}, \quad 0 \le x \le 2$

سوال ۱۵.۲۰: $f(x,y) = \frac{x+y^2}{\sqrt{1+x^2}}, \quad C: y = \frac{x^2}{2},$ $(0,0)$ سے $(1,\frac{1}{2})$ تک

سوال ۱۵.۲۱: $f(x,y) = x + y, \quad C: x^2 + y^2 = 4,$ $(0,2)$ سے $(2,0)$ تک ربع اول میں

سوال ۱۵.۲۲: $f(x,y) = x^2 - y, \quad C: x^2 + y^2 = 4,$ $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ سے $(0,2)$ تک ربع اول میں

کمیت اور معیار اثر

سوال ۱۵.۲۳: ایک پتلی تار جس کی کثافت $\delta = \frac{3}{2}t$ ہے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (t^2-1)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔اس تار کی کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۴: ایک پتلی تار جس کی کثافت $\delta(x,y,z) = 15\sqrt{y+2}$ ہے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (t^2-1)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k},\ -1 \le t \le 1$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔اس تار کا مرکز کمیت تلاش کریں۔اس منحنی کو ترسیم کر کے اس پر مرکز کمیت دکھائیں۔

سوال ۱۵.۲۵: منحنی $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{2}t\boldsymbol{j} + (4-t^2)\boldsymbol{k}\ 0 \le t \le 1$ کے ساتھ ساتھ ایک پتلی تار پائی جانے والی تار کی کثافت (ا) $\delta = 3t$ ، (ب) $\delta = 1$ ہے۔اس تار کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۶: ایک پتلی تار جس کی کثافت $\delta = 3\sqrt{5+t}$ ہے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}t^{3/2}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔اس تار کی کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۷: مستوی xy میں دائرہ $x^2+y^2=a^2$ پر مستقل کثافت δ کی ایک پتلی تار پائی جاتی ہے۔محور z کے لحاظ سے اس تار کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۸: مستوی yz میں لکیری قطع $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{j} + (2-2t)\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$ پر مستقل کثافت کی ایک پتلی تار پائی جاتی ہے۔تینوں محددی محوروں کے لحاظ سے اس تار کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۹: مستقل کثافت δ کی ایک پتلی تار پیچدار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔(ا) I_z اور R_z تلاش کریں۔(ب) فرض کریں مستقل کثافت δ کی ایک دوسری پتلی تار، جس کی لمبائی دگنی ہے ($0 \le t \le 4\pi$)، اسی منحنی $\boldsymbol{r}(t)$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔بغیر حل کیے بتلائیں کہ آیا اس تار کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار پہلی تار سے مختلف ہوں گے؟ اب انہیں حل کر کے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال ۱۵.۳۰: منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + (\frac{2\sqrt{2}}{3})t^{3/2}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$ کے ساتھ ساتھ مستقل کثافت $\delta = 1$ کی ایک پتلی تار پائی جاتی ہے۔اس کی $\bar{z}$ ، I_z اور R_z تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۱: I_z اور R_z مثال ۱۵.۴ کی محراب کے لیے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۲: ایک پتلی تار جس کی کثافت $\delta = \frac{1}{t+1}$ ہے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\boldsymbol{j} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔اس تار کا مرکز کمیت اور محددی محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۱۵.۳۳ تا سوال ۱۵.۳۶ میں کمپیوٹر پر درج ذیل اقدام سے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

ا. راہ $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ کے لیے $\mathrm{ds} = |\boldsymbol{v}(t)|\,\mathrm{d}t$ دریافت کریں۔

ب. متکمل $f(g(t),h(t),k(t))|\boldsymbol{v}(t)|$ کو مقدار معلوم t کا تفاعل لکھیں۔

ج. تکمل $\int_C f\,\mathrm{ds}$ کی قیمت مساوات ۳ کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال ۱۵.۳۳: $f(x,y,z) = \sqrt{1+30x^2+10y};\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k},\quad 0 \le t \le 2$

سوال ۱۵.۳۴: $f(x,y,z) = \sqrt{1+x^3+5y^3}; \quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}t^2\boldsymbol{j} + \sqrt{t}\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2$

سوال ۱۵.۳۵: $f(x,y,z) = x\sqrt{y} - 3z^2; \boldsymbol{r}(t) = \cos 2t\boldsymbol{i} + \sin 2t\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۵.۳۶: $f(x,y,z) = \left(1 + \frac{9}{4}z^{1/3}\right)^{1/4}; \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t) = \cos 2t\boldsymbol{i} + \sin 2t\boldsymbol{j} + t^{5/2}\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

۱۵.۲ سمتی میدان، کام، دائری بہاؤ، اور بہاؤ

ان طبیعی مظہر کے مطالعہ کے دوران، جنہیں سمتیات سے ظاہر کیا جاتا ہے، بند راہ پر تکملات کے بجائے سمتی میدان میں راہ پر تکملات استعمال کیے جاتے ہیں۔ متغیر قوت کے خلاف ایک مقام سے دوسری مقام کسی جسم کو منتقل کرنے (جیسا قوت ثقل کے خلاف خلاء میں سواری بھیجنے) یا سمتی میدان میں ایک جسم کو کسی راہ پر حرکت دینے (جیسا مسرع کسی ذرے کی توانائی بڑھاتا ہو) کے لیے درکار کام اس طرح کے تکملات سے حاصل کیے جاتے ہیں۔ منحنیات عبور کرتا ہوا سیال کے بہاؤ کی شرح بھی لکیری تکملات سے حاصل کی جاتی ہے۔

سمتی میدان

مستوی یا فضا میں دائرہ کار پر **سمتی میدان**[۲] سے مراد ایسا تفاعل ہے جو دائرہ کار کے ہر نقطہ کو ایک سمتیہ مختص کرتا ہو۔ سہ ابعادی سمتیات کے میدان کا ایک کلیہ درج ذیل ہو سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

استمراری جزوی تفاعل M ، N ، P کی صورت میں یہ میدان استمراری ہو گا، قابل تفرق M ، N ، P کی صورت میں یہ میدان قابل تفرق ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ دو ابعادی سمتیات کے میدان کا ایک کلیہ درج ذیل ہو سکتا ہے۔

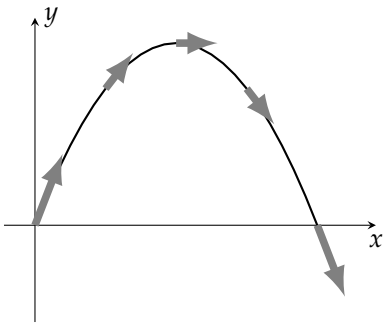
$$\boldsymbol{F}(x,y) = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$$

گول انداز کی گزرگاہ کے مستوی میں گزرگاہ کے ہر نقطہ کے ساتھ گول انداز کا سمتی رفتاری سمتیہ منسلک کرنے سے گزرگاہ کے ہمراہ دو ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ غیر سمتی تفاعل کے ہم قد سطح کے ہر نقطہ کے ساتھ تفاعل کا سمتیہ ڈھلوان منسلک کرنے سے سطح پر سہ ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ متحرک سیال کے ہر نقطہ کے ساتھ سمتی رفتاری سمتیہ منسلک کرنے سے فضا میں اس خطہ پر سہ ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ بشمول ان کے چند میدان شکل ۱۵.۱۶ تا شکل ۱۵.۲۰ میں دکھائے گئے ہیں جہاں کچھ میدانوں کے کلیات بھی دیے گئے ہیں۔

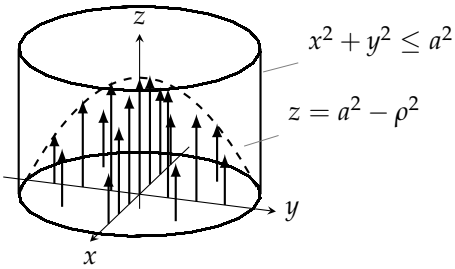
وہ میدان ترسیم کرنے کے لیے جن کے کلیات معلوم ہوں، ہم دائرہ کار میں چند نقطے منتخب کر کے ان نقطوں پر نقطوں کے ساتھ منسلک سمتیات کا خاکہ بناتے ہیں۔ دھیان رہے کہ روایتی طور پر اس نقطہ پر، جہاں سمتی تفاعل کی قیمت حاصل کی گئی ہو، سمتیہ ظاہر کرنے والی تیر دار لکیر کی دُم رکھی جاتی ہے نا کہ سر۔ تعین گر سمتیات (باب ۱۲) کے لیے ایسا نہیں کیا جاتا ہے بلکہ تعین گر سمتیات کو ظاہر کرنے والی تیر دار لکیر کی دُم مبدا پر رکھی جاتی ہے جبکہ اس کا سر سیارہ یا گول انداز کے مقام پر رکھا جاتا ہے۔

---

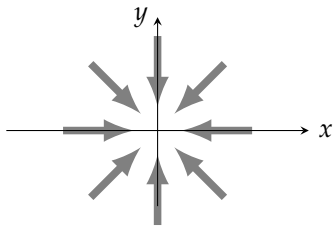
[۲] vectorfield



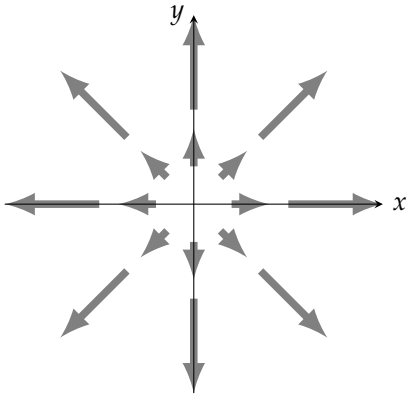
شکل ۱۵.۱۶: گول انداز کے سمتی رفتاری سمتیات $\boldsymbol{v}(t)$ سمتی میدان دیتے ہیں۔



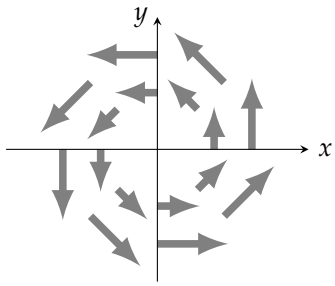
شکل ۱۵.۱۷: لمبی نالی میں سیال کی حرکت۔ سمتیات $\boldsymbol{v} = (a^2 - \rho^2)\boldsymbol{k}$ کی دُم مستوی xy میں اور سر قطع مکافی $z = a^2 - \rho^2$ پر پائے جاتے ہیں۔



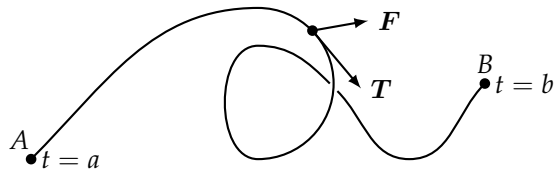
شکل ۱۵.۱۸: ثقلی میدان $\boldsymbol{F} = -\frac{GM(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ میں سمتیات۔



شکل ۱۵.۱۹: مستوی میں مختلف نقاط پر رداسی میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ جہاں تیر دار لکیر کی دُم اس نقطہ پر رکھی جاتی ہے جہاں کا سمتیہ درکار ہو۔



شکل ۱۵.۲۰: اکائی سمتیات $\boldsymbol{F} = \frac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ کا چکری میدان۔



شکل ۱۵.۲۱: ہموار راہ $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ پر A سے B تک استراری قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام $t = a$ تا $t = b$ راہ کے ہمراہ $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ کا تکمل ہوگا۔

۲۳۰۷۶ **میدان ڈھلوان**

۲۳۰۷۷ تعریف: قابل تفرق تفاعل $f(x, y, z)$ کے **میدان ڈھلوان**[۳] سے مراد سمتیات ڈھلوان

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

۲۳۰۷۸ کا میدان ہے۔

۲۳۰۷۹ □

۲۳۰۸۰ مثال ۱۵.۵: تفاعل $f(x, y, z) = xyz$ کا میدان ڈھلوان تلاش کریں۔

۲۳۰۸۱ **حل**

۲۳۰۸۲ تفاعل f کے میدان ڈھلوان سے مراد میدان $\boldsymbol{F} = \nabla f = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ ہے۔ □

۲۳۰۸۳ ہم دیکھیں گے کہ انجینئری، ریاضیات، طبیعیات، وغیرہ میں میدان ڈھلوان خصوصی اہمیت رکھتے ہیں۔

۲۳۰۸۴ **فضا میں منحنی کے ہمراہ قوت کا کیا ہوا کام**

۲۳۰۸۵ فرض کریں فضا کے ایک خطہ میں سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M(x, y, z)\boldsymbol{i} + N(x, y, z)\boldsymbol{j} + P(x, y, z)\boldsymbol{k}$ ایک قوت کو ظاہر کرتا ہے

۲۳۰۸۶ (یہ قوت ثقل یا کسی قسم کی برقناطیسی قوت ہو سکتی ہے) جبکہ اس خطہ میں درج ذیل ایک ہموار منحنی ہے۔

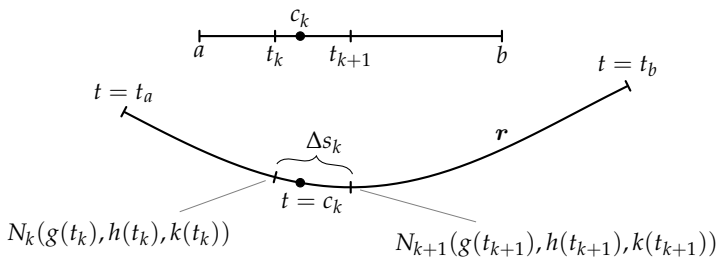
$$\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b$$

۲۳۰۸۷ ایسی صورت میں منحنی پر $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$، اکائی مماسی سمتیہ کے رخ $\boldsymbol{F}$ کا غیر سمتی جزو، کے تکمل کو a تا b $\boldsymbol{F}$ کا کیا ہوا کام کہتے ہیں (شکل ۱۵.۲۱)۔

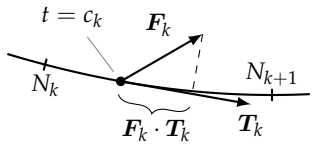
۲۳۰۸۸ تعریف: ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ پر a تا b قوت $\boldsymbol{F} = M(x, y, z)\boldsymbol{i} +$

---

[۳] gradientfield



شکل ۱۵.۲۲: مقدار معلوم وقفہ $a \leq t \leq b$ کی ہر خانہ بندی منحنی $\boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ کی خانہ بندی پیدا کرتی ہے۔



شکل ۱۵.۲۳: گزشتہ شکل کے قطع N_kN_{k+1} کو بڑا کر کے $t = c_k$ کے مطابقتی نقطہ پر اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ اور قوت سمتیہ $\boldsymbol{F}$ دکھائے گئے ہیں۔

۲۴۰۸۹ $N(x, y, z)\boldsymbol{j} + P(x, y, z)\boldsymbol{k}$ کا کیا ہوا کام W درج ذیل ہو گا۔

$$W = \int_{t=1}^{t=b} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\, \mathrm{d}s \tag{1}$$

۲۴۰۹۰ □

۲۴۰۹۱ مثبت محور x رخ مقدار $F(x)$ کی استمراری قوت کے کام کا کلیہ $W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x$ حصہ ۶.۸ میں اخذ کیا گیا۔ مساوات ۱ کے حصول کے
۲۴۰۹۲ دلائل وہی ہیں۔ ہم منحنی کو چھوٹے قطعات میں تقسیم کر کے، ہر قطع پر کام کو تخمیناً مستقل قوت ضرب فاصلہ لے کر، نتائج کے مجموعہ کو منحنی پر کام کی تخمینی
۲۴۰۹۳ قیمت حاصل کرتے ہیں، اور قطعات کی تعداد زیادہ سے زیادہ کر کے ہر قطع کی لمبائی کم سے کم کرتے ہوئے، تخمینی مجموعات کی تحدیدی قیمت کو کام کی تعریف
۲۴۰۹۴ لیتے ہیں۔ یہ جاننے کے لیے کہ تحدیدی تکمل کی قیمت کیا ہو گی، ہم قطع $[a, b]$ کی خانہ بندی عمومی طرح کر کے ہر ذیلی قطع $[t_k, t_{k+1}]$ پر
۲۴۰۹۵ نقطہ c_k منتخب کرتے ہیں۔ قطع I کی خانہ بندی منحنی کی خانہ بندی تعین (پیدا) کرتی ہے، جہاں تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کا سر نقطہ N_k پر ہو گا اور ذیلی قطع
۲۴۰۹۶ N_kN_{k+1} کی لمبائی Δs_k ہو گی (شکل ۱۵.۲۲)۔ اگر منحنی پر $t = c_k$ کے مطابقتی نقطہ پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت $\boldsymbol{F}_k$ اور منحنی کا مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}_k$ ہو تب
۲۴۰۹۷ $t = c_k$ پر $\boldsymbol{T}$ کے رخ $\boldsymbol{F}$ کا غیر سمتی جزو $\boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{T}_k$ ہو گا (شکل ۱۵.۲۳)۔ منحنی کے قطع N_kN_{k+1} کے ہمراہ $\boldsymbol{F}$ کا کیا ہوا کام تخمیناً درج
۲۴۰۹۸ ذیل ہو گا۔

$$(\text{حرکت کے رخ قوت کا جزو}) \times (\text{طے فاصلہ}) = \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{T}_k \Delta s_k$$

جدول ۱۵.۲: تکمل کام لکھنے کے چھ طریقے۔

$W = \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\, \mathrm{d}s$	تعریف
$= \int_a^b \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$	مختصر تفرقی روپ
$= \int_a^b \boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\, \mathrm{d}t$	پھیلا کر $\mathrm{d}t$ شامل کیا گیا؛ مقدار معلوم t اور سمتی رفتار $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ اجاگر کیے گئے
$= \int_a^b \left(M\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} + N\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + P\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t$	جزوی تفاعل اجاگر کیے گئے
$= \int_a^b \left(M\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + N\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + P\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) \mathrm{d}t$	$\boldsymbol{r}$ کے اجزاء استعمال کیے گئے
$= \int_a^b M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}t$ منسوخ کر کے عمومی روپ حاصل کیا گیا

۲۴۰۹۹ منحنی کے ہمراہ $t = a$ تا $t = b$ کام تخمیناً درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{T}_k \Delta s_k$$

۲۴۱۰۰ جیسا جیسا $[a, b]$ کے خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب سے قریب ہوتا ہے، ویسے ویسے منحنی کی پیدا کردہ خانہ بندی کا معیار بھی صفر کے قریب سے قریب ہوتا
۲۴۱۰۱ ہے اور مجموعہ درج ذیل لکیری تکمل کو پہنچتا ہے۔

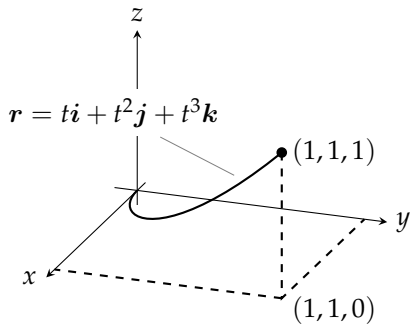
$$\int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\, \mathrm{d}s$$

۲۴۱۰۲ اس تکمل سے حاصل عدد کی علامت، t بڑھانے سے حاصل پر چلنے کے، رخ پر منحصر ہو گی۔ منحنی پر چلنے کا رخ الٹ کرنے سے $\boldsymbol{T}$ کا رخ الٹ ہو گا جس کی وجہ
۲۴۱۰۳ سے $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ اور تکمل کی علامت الٹ ہو گی۔

۲۴۱۰۴ علامتیت اور قیمت کا حصول

۲۴۱۰۵ تکمل کام (مساوات ۱) لکھنے کے چھ طریقے جدول ۱۵.۲ میں پیش ہیں۔

۲۴۱۰۶ جدول ۱۵.۲ کے کلیات کی قیمتوں کا حصول، بظاہر مختلف روپ کے باوجود، ایک ہی طرح کیا جاتا ہے۔



شکل ۱۵.۲۴: منحنی برائے مثال ۱۵.۶

تکمل کام کی قیمت کا حصول

تکمل کام کی قیمت حاصل کرنے کے اقدام درج ذیل ہیں۔

۱. منحنی پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت مقدار معلوم t کے تفاعل کے روپ میں لکھیں۔

۲. تفرق $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

۳. $\boldsymbol{F}$ اور $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کا غیر سمتی ضرب لیں۔

۴. $t = a$ سے $t = b$ تک تکمل کریں۔

مثال ۱۵.۶: منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$ کے ہمراہ $(0,0,0)$ سے $(1,1,1)$ تک $\boldsymbol{F} = (y - x^2)\boldsymbol{i} + (z - y^2)\boldsymbol{j} + (x - z^2)\boldsymbol{k}$ کا کام تلاش کریں (شکل ۱۵.۲۴)۔

حل

پہلا قدم: منحنی پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت کا حصول۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= (y - x^2)\boldsymbol{i} + (z - y^2)\boldsymbol{j} + (x - z^2)\boldsymbol{k}\\ &= (\underbrace{t^2 - t^2}_{0})\boldsymbol{i} + (t^3 - t^4)\boldsymbol{j} + (t - t^6)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

دوسرا قدم: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}$$

۲۴۱۱۸ تیسرا قدم: $\boldsymbol{F}$ اور $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کا غیر سمتی ضرب۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= [(t^3-t^4)\boldsymbol{j}+(t-t^6)\boldsymbol{k}]\cdot(\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+3t^2\boldsymbol{k})\\ &= (t^3-t^4)(2t)+(t-t^6)(3t^2)=2t^4-2t^5+3t^3-3t^8\end{aligned}$$

۲۴۱۱۹ چوتھا قدم: $t=0$ تا $t=1$ تکمل۔

$$\begin{aligned}\text{کام} = W &= \int_0^1 (2t^4-2t^5+3t^3-3t^8)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{2}{5}t^5-\frac{2}{6}t^6+\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{9}t^9\right]_0^1=\frac{29}{60}\end{aligned}$$

۲۴۱۲۰ □

۲۴۱۲۱ **تکمل ہمراہ بہاؤ اور دائری بہاؤ**

۲۴۱۲۲ فرض کریں $\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}+P\boldsymbol{k}$ میدان قوت کے بجائے فضا کے ایک خطہ (مثلاً پانی سے چلنے والے جنریٹر کا چرخی خانہ یا سمندری طاس) میں
۲۴۱۲۳ بہتا ہوا سیال کے سمتی رفتاری میدان کو ظاہر کرتا ہے۔ ایسی صورت میں منحنی کے ہمراہ $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}$ کا تکمل، منحنی کے ہمراہ سیال کا بہاؤ دے گا۔

۲۴۱۲۴ تعریف: استمراری سمتی رفتاری میدان کے دائرہ کار میں ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t)=g(t)\boldsymbol{i}+h(t)\boldsymbol{j}+k(t)\boldsymbol{k},\ a\le t\le b$ پر a
۲۴۱۲۵ سے b تک $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}$ کا تکمل، $t=a$ سے $t=b$ تک منحنی کا ہمراہ بہاؤ دے گا:

$$\text{ہمراہ بہاؤ} = \int_a^b \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{ds} \qquad (۲)$$

۲۴۱۲۶ اس تکمل کو **تکمل ہمراہ بہاؤ**[۴] کہتے ہیں۔ بند منحنی کی صورت میں اس بہاؤ کو منحنی کے گرد منحنی کے ہمراہ **دائری بہاؤ**[۵] کہتے ہیں۔

۲۴۱۲۷ □

۲۴۱۲۸ تکمل ہمراہ بہاؤ کی قیمت بھی تکمل کام کی قیمت کی طرح حاصل کی جاتی ہے۔

۲۴۱۲۹ مثال ۱۵.۷: ایک سیال کا سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}$ ہے۔ درج ذیل پیچدار منحنی کے ساتھ ساتھ اس کے ہمراہ بہاؤ تلاش
۲۴۱۳۰ کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t)=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{j}+t\boldsymbol{k},\ 0\le t\le\frac{\pi}{2}$$

۲۴۱۳۱ **حل**

۲۴۱۳۲ پہلا قدم: منحنی پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت تلاش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}=(\cos t)\boldsymbol{i}+(\sin t)\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{k}$$

---

[۴] flowintegral
[۵] circulation

۲۴۱۳۳ دوسرا قدم: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

۲۴۱۳۴ تیسرا قدم: غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= (\cos t)(-\sin t) + (t)(\cos t) + (\sin t)(1)\\ &= -\sin t \cos t + t\cos t + \sin t\end{aligned}$$

۲۴۱۳۵ چوتھا قدم: $t = a$ تا $t - b$ تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\text{بہاؤ} &= \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} (-\sin t\cos t + t\cos t + \sin t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{\cos^2 t}{2} + \sin t\right]_0^{\pi/2} = \left(0 + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

۲۴۱۳۶ □

۲۴۱۳۷ مثال ۱۵.۸: میدان $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ کا دائرہ $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ کے ہمراہ
۲۴۱۳۸ دائرہ کے گرد دائری بہاؤ تلاش کریں۔

۲۴۱۳۹ **حل**

۲۴۱۴۰

۲۴۱۴۱ ۱. دائرہ پر $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} = (\cos t - \sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}$ ہوگا۔

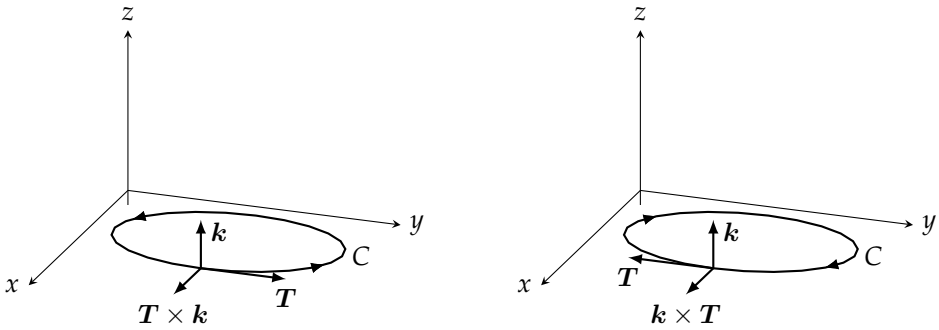
۲۴۱۴۲ ۲. $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}$

۲۴۱۴۳ ۳. $\boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -\sin t\cos t + \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1}$

۲۴۱۴۴ ۴. دائری بہاؤ درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}\text{دائری بہاؤ} &= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1 - \sin t\cos t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[t - \frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi\end{aligned}$$

۲۴۱۴۵ □



(ا) گھڑی وار حرکت کے لیے $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{T}$ باہر رخ ہو گا۔ (ب) خلاف گھڑی حرکت کے لیے $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k}$ باہر رخ ہو گا۔

شکل ۱۵.۲۵: ہموار منحنی C، جو بڑھتے t کی صورت میں مستوی xy میں خلاف گھڑی حرکت کرتی ہو، کا باہر رخ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k}$ ہو گا۔

مستوی منحنی کو عبور کرتا ہوا بہاؤ

مستوی xy میں ہموار بند منحنی C میں محیط خطہ سے سیال کے اخراج و دخول کی شرح C پر $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ (منحنی کے بیرونی عمودی اکائی سمتیہ کے رخ رفتاری میدان کے غیر سمتی جزو) کے لکیری تکمل سے حاصل ہو گی۔ اس تکمل کی قیمت کو C عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ (یا **نفاذ**) کہتے ہیں۔ برقی یا مقناطیسی میدان $\boldsymbol{F}$ کی صورت میں بھی اس تکمل کی قیمت کو C عبور کرتا ہوا بہاؤ یا نفاذ کہیں گے اگرچہ ان میں کوئی بہتا ہوا سیال نہیں پایا جاتا ہے۔

تعریف: استمراری سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ کے دائرہ کار میں ہموار مسطح بند منحنی C جس کا بیرونی رخ عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہو کی صورت میں C کو عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کا **بہاؤ**[۶] درج ذیل تکمل دے گا۔

$$\text{C عبور کرتا ہوا } \boldsymbol{F} \text{ کا بہاؤ} = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}s \tag{۳}$$

□

منحنی کو عبور کرتے ہوئے بہاؤ (نفاذ) اور دائری بہاؤ میں فرق سے واقف ہونا ضروری ہے۔ منحنی C کو عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کے بہاؤ سے مراد منحنی پر $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ (منحنی کے بیرونی عمود کے رخ $\boldsymbol{F}$ کے غیر سمتی جزو) کا تکمل ہے۔ بند منحنی C کے گرد $\boldsymbol{F}$ کے دائری بہاؤ سے مراد منحنی پر $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ (منحنی کے اکائی مماس کے رخ $\boldsymbol{F}$ کے غیر سمتی جزو) کا تکمل ہے۔ منحنی عبور کرتا ہوا بہاؤ سے مراد $\boldsymbol{F}$ کے عمودی جزو کا تکمل جبکہ دائری بہاؤ سے مراد $\boldsymbol{F}$ کے مماسی جزو کا تکمل ہے۔ روزمرہ زندگی میں منحنی کو عبور کرتے ہوئے بہاؤ یعنی نفاذ کو مختصراً **بہاؤ** کہا جاتا ہے۔

مساوات ۳ کے تکمل کی قیمت معلوم کرنے کی خاطر ہم مقدار معلوم روپ

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad a \le t \le b$$

---

[۶] flux

سے ابتدا کرتے ہیں۔ یوں t کی قیمت a سے b تک بڑھانے سے منحنی پر ایک سرے سے دوسرے سر تک ٹھیک ایک بار چلا جائے گا۔ منحنی کے اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ اور کارتیسی محددی نظام کے اکائی سمتیہ $\boldsymbol{k}$ کا سمتی ضرب منحنی کا بیرونی اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ دے گا۔ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ایسے دو سمتی ضرب $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{T}$ پائے جاتے ہیں۔ ان میں کونسا بیرونی اکائی سمتیہ دے گا؟ مقدار معلوم t بڑھانے سے C پر چلنے کے رخ پر اس کا جواب منحصر ہو گا۔ اگر منحنی پر حرکت گھڑی وار ہو تب $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{T}$ بیرونی اکائی سمتیہ دے گا جبکہ خلاف گھڑی حرکت کی صورت میں $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k}$ بیرونی اکائی سمتیہ دے گا (شکل ۱۵.۲۵)۔ عموماً خلاف گھڑی حرکت کے لیے کلیات اخذ کیے جاتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k}$ ہو گا۔ اگرچہ مساوات ۳ میں دیے گئے تکمل کی قیمت منحنی پر چلنے کے رخ پر منحصر نہیں ہے، ہم خلاف گھڑی حرکت تصور کرتے ہوئے مساوات ۳ کو حل کرنے کے کلیات اخذ کرتے ہیں۔

ارکان کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}\right) \times \boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}$$

اگر $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ ہو تب

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = M(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - N(x,y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

لہٰذا

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int_C \left(M\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - N\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s$$

ہو گا جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \oint_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x \tag{۴}$$

یاد رہے کہ C پر خلاف گھڑی چلتے ہوئے بند تکمل $\oint$ کی قیمت حاصل کی جائے گی۔ اس تکمل کے حصول کی خاطر ہم M ، $\mathrm{d}y$ ، N اور $\mathrm{d}x$ کو مقدار معلوم t کے روپ میں لکھ کر $t = a$ تا $t = b$ تکمل لیتے ہیں۔ ہمیں بہاؤ (نفاذ) تلاش کرنے کے لیے $\boldsymbol{n}$ یا $\mathrm{d}s$ جاننے کی ضرورت پیش نہیں آتی ہے۔ منحنی C پر خلاف گھڑی ٹھیک ایک بار چلتے ہوئے کوئی بھی ہموار مقدار معلوم روپ $x = g(t)$ ، $y = h(t)$ ، جہاں $a \le t \le b$ ہو، استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مثال ۱۵.۹: مستوی xy میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کو پار کرتا ہوا $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ کا بہاؤ (نفاذ) تلاش کریں۔

حل

مقدار معلوم روپ $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ دائرے پر ٹھیک ایک بار چلتا ہے لہٰذا مساوات ۴ حل کرنے کی خاطر درج ذیل لیے جا سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} M &= x - y = \cos t - \sin t, & \mathrm{d}y &= \mathrm{d}(\sin t) = \cos t\,\mathrm{d}t \\ N &= x = \cos t, & \mathrm{d}x &= \mathrm{d}(\cos t) = -\sin t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$= \int_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin t \cos t + \cos t \sin t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{مساوات ۴}$$
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$$

دائرہ کو عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ π ہے۔ چونکہ نتیجہ مثبت ہے لہٰذا دائرے سے کل بہاؤ کا رخ باہر کو ہو گا۔ دائرے میں دخول کی صورت میں نتیجہ منفی ہوتا۔ □

سوالات

سمتی میدان اور میدان ڈھلوان

سوال ۱۵.۳۷ تا سوال ۱۵.۴۰ میں تفاعل کے میدان ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۷: $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

سوال ۱۵.۳۸: $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

سوال ۱۵.۳۹: $g(x,y,z) = e^z - \ln\sqrt{x^2+y^2}$

سوال ۱۵.۴۰: $g(x,y,z) = xy + yz + xz$

سوال ۱۵.۴۱: مستوی میں سمتی میدان کا ایسا کلیہ $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ پیش کریں کہ $\boldsymbol{F}$ کی مقدار مبدا سے (x,y) تک فاصلہ کے مربع کا بالعکس متناسب ہو اور $\boldsymbol{F}$ کا رخ مبدا کے رخ ہو۔ (یہ میدان مبدا پر غیر معین ہے۔)

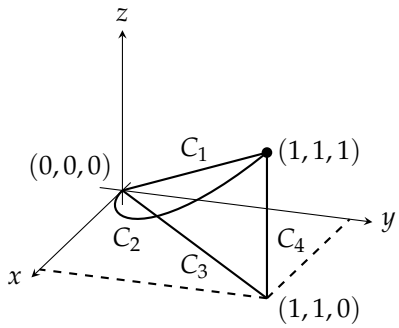
سوال ۱۵.۴۲: مستوی میں میدان کا ایسا کلیہ $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ پیش کریں کہ $(0,0)$ پر $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ ہو جبکہ کسی دوسرے نقطہ (a,b) پر $|\boldsymbol{F}| = \sqrt{a^2+b^2}$ اور دائرہ $x^2+y^2=a^2+b^2$ کو میدان گھڑی وار مماسی ہو۔

کام

سوال ۱۵.۴۳ تا سوال ۱۵.۴۸ میں $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام درج ذیل راہوں پر تلاش کریں (شکل ۱۵.۲۶)۔

ا. سیدھی لکیر $C_1:\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$

ب. قوسی راہ $C_2:\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^4\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$



شکل ۱۵.۲۶

۲۲۱۹۹ ج. راہ $C_3 \cup C_4$ جو $(0,0,0)$ تا $(1,1,0)$ اور $(1,1,0)$ تا $(1,1,1)$ خطی قطعات پر مشتمل ہے۔

۲۲۲۰۰ سوال ۱۵.۴۳: $\boldsymbol{F} = 3y\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$

۲۲۲۰۱ سوال ۱۵.۴۴: $\boldsymbol{F} = \frac{1}{1+x^2}\boldsymbol{j}$

۲۲۲۰۲ سوال ۱۵.۴۵: $\boldsymbol{F} = \sqrt{z}\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + \sqrt{y}\boldsymbol{k}$

۲۲۲۰۳ سوال ۱۵.۴۶: $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$

۲۲۲۰۴ سوال ۱۵.۴۷: $\boldsymbol{F} = (3x^2 - 3x)\boldsymbol{i} + 3z\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

۲۲۲۰۵ سوال ۱۵.۴۸: $\boldsymbol{F} = (y+z)\boldsymbol{i} + (z+x)\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k}$

۲۲۲۰۶ سوال ۱۵.۴۹ تا سوال ۱۵.۵۲ میں بڑھتے t رخ $\boldsymbol{F}$ کا کام تلاش کریں۔

۲۲۲۰۷ سوال ۱۵.۴۹: $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - yz\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$

۲۲۲۰۸ سوال ۱۵.۵۰: $\boldsymbol{F} = 2y\boldsymbol{i} + 3x\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k},$

۲۲۲۰۹ $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + \frac{t}{6}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

۲۲۲۱۰ سوال ۱۵.۵۱: $\boldsymbol{F} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

۲۲۲۱۱ سوال ۱۵.۵۲: $\boldsymbol{F} = 6z\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + 12x\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + \frac{t}{6}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

۲۲۲۱۲ لکیری تکمل اور مستوی میں سمتی میدان

۲۲۲۱۳ سوال ۱۵.۵۳: نقطہ $(-1,1)$ سے $(2,4)$ تک منحنی $y = x^2$ پر $\int_C xy\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$ کی قیمت تلاش کریں۔

۲۲۲۱۴ سوال ۱۵.۵۴: ایک مثلث جس کے راس $(0,0)$ ، $(1,0)$ اور $(0,1)$ ہیں پر $\int_C (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$ کی قیمت

۲۲۲۱۵ خلاف گھڑی چلتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۵۵: نقطہ $(4,2)$ سے $(1,-1)$ تک منحنی $x = y^2$ پر چلتے ہوئے سمتی میدان $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ کے لیے $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۵۶: نقطہ $(1,0)$ سے $(0,1)$ تک اکائی دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر خلاف گھڑی چلتے ہوئے سمتی میدان $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ کے لیے $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۵۷: نقطہ $(1,1)$ سے $(2,3)$ تک سیدھی لکیر پر قوت $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + (y-x)\boldsymbol{j}$ کا کام دریافت کریں۔

سوال ۱۵.۵۸: تفاعل $f(x,y) = (x+y)^2$ کی ڈھلوان کا کام دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ پر خلاف گھڑی نقطہ $(2,0)$ سے چلتے ہوئے ایک چکر کے لیے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۵۹: میدان $\boldsymbol{F}_1 = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{F}_2 = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ کی دائری بہاؤ درج ذیل منحنیات کے ہمراہ تلاش کریں اور ان منحنیات کو عبور کرتا ہوا بہاؤ تلاش کریں۔

ا. دائرہ $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$

ب. ترخیم $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (4\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۵.۶۰: دائرہ $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ کو عبور کرتا ہوا بہاؤ درج ذیل میدان کے لیے حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{F}_1 = 2x\boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{F}_2 = 2x\boldsymbol{i} + (x-y)\boldsymbol{j}$$

سوال ۱۵.۶۱ تا سوال ۱۵.۶۴ میں نصف دائری قوس $\boldsymbol{r}_1(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le \pi$ اور قطع $\boldsymbol{r}_2(t) = t\boldsymbol{i},\ -a \le t \le a$ پر مشتمل نصف دائری راہ کے ہمراہ بہاؤ اور اس کو عبور کرتا ہوا بہاؤ، میدان $\boldsymbol{F}$ کے لیے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۶۱: $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۶۲: $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۶۳: $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۶۴: $\boldsymbol{F} = -y^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۶۵: سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{F} = (x+y)\boldsymbol{i} - (x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ کے بہاؤ کے تکمل کی قیمت درج ذیل راہ کے ہمراہ مستوی xy میں نقطہ $(1,0)$ سے $(-1,0)$ تک تلاش کریں۔

ا. دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کا بالائی نصف حصہ۔

ب. نقطہ $(1,0)$ تا $(-1,0)$ لکیری قطع۔

ج. نقطہ $(1,0)$ تا $(0,-1)$ اور اس کے بعد $(0,-1)$ سے $(-1,0)$ تک لکیری قطع۔

سوال ۱۵.۶۶: ایک مثلث، جس کے راس $(1,0)$ ، $(0,1)$ اور $(-1,0)$ ہیں، سے خارجی بہاؤ سوال ۱۵.۶۵ کے میدان کے لیے تلاش کریں۔

مستوی میں میدان کی تلاش اور خاکہ

سوال ۱۵.۶۷: چکری میدان $\boldsymbol{F} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}$ بمع افقی اور انتصابی اجزاء کا خاکہ دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ کے مختلف نقطوں پر بنائیں۔

سوال ۱۵.۶۸: رداسی میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ بمع افقی اور انتصابی اجزاء کا خاکہ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کے مختلف نقطوں پر بنائیں۔

سوال ۱۵.۶۹: (ا) مستوی xy میں میدان $\boldsymbol{G} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ تلاش کریں جس کی قیمت نقطہ $(a,b) \neq (0,0)$ پر $\sqrt{a^2+b^2}$، رخ خلاف گھڑی اور دائرہ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ کو مماسی ہو۔ نقطہ $(0,0)$ پر میدان غیر معین ہے۔ (ب) میدان $\boldsymbol{G}$ اور چکری میدان $\boldsymbol{F} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}$ کے بیچ کیا تعلق پایا جاتا ہے؟

سوال ۱۵.۷۰: (ا) مستوی xy میں ایسا میدان $\boldsymbol{G} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ تلاش کریں جو $(a,b) \neq (0,0)$ پر دائرہ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ کو مماسی ہو، اس کی مطلق قیمت اکائی ہو اور اس کا رخ گھڑی وار ہو۔ (ب) میدان $\boldsymbol{G}$ اور چکری میدان $\boldsymbol{F} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}$ کے بیچ کیا تعلق پایا جاتا ہے؟

سوال ۱۵.۷۱: مستوی xy میں ایسا میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ تلاش کریں جو $(x,y) \neq (0,0)$ پر مبدا کے رخ ہو اور اس کی مطلق قیمت اکائی ہو۔ نقطہ $(0,0)$ پر میدان غیر معین ہے۔

سوال ۱۵.۷۲: مستوی xy میں ایسا میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ تلاش کریں جو $(x,y) \neq (0,0)$ پر مبدا کے رخ ہو اور $|\boldsymbol{F}|$ کی قیمت (ا) مبدا سے (x,y) تک فاصلہ کے برابر ہو، (ب) مبدا سے (x,y) تک فاصلہ کے بالعکس متناسب ہو۔ نقطہ $(0,0)$ پر میدان غیر معین ہے۔

فضا میں راہ کے ہمراہ تکمل بہاؤ

سوال ۱۵.۷۳ تا سوال ۱۵.۷۶ میں فضا کے کسی خطہ میں سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{F}$ سیال کے بہاؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ دی گئی منحنی کے ہمراہ بہاؤ، بڑھتے t کے رخ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۷۳: $\boldsymbol{F} = -4xy\boldsymbol{i} + 8y\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2$

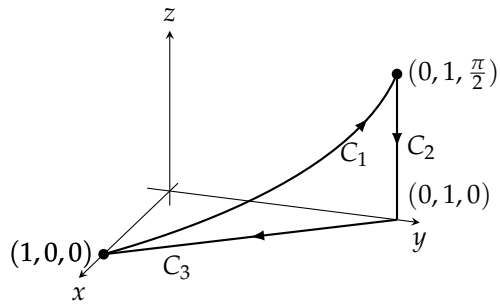
سوال ۱۵.۷۴: $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = 3t\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$

سوال ۱۵.۷۵: $\boldsymbol{F} = (x-z)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le \pi$

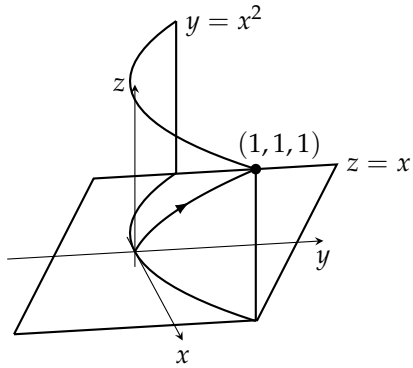
سوال ۱۵.۷۶: $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},$
$\boldsymbol{r}(t) = (-2\cos t)\boldsymbol{i} + (2\sin t)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۵.۷۷: بڑھتے t رخ چلتے ہوئے درج ذیل تین عدد بند راہ پر $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{j} + 2y\boldsymbol{k}$ کا دائری بہاؤ تلاش کریں (شکل ۱۵.۲۷)۔

$$
\begin{aligned}
C_1: &\quad \boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, && 0 \le t \le \tfrac{\pi}{2}\\
C_2: &\quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{j} + \tfrac{\pi}{2}(1-t)\boldsymbol{k}, && 0 \le t \le 1\\
C_3: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (1-t)\boldsymbol{j}, && 0 \le t \le 1
\end{aligned}
$$



شکل ۱۵.۲۷



شکل ۱۵.۲۸

۲۴۲۶۷ سوال ۱۵.۷۸: مستوی $2x + 3y - z = 0$ اور بیلن $x^2 + y^2 = 12$ ایک دوسرے کو ترخیم C پر قطع کرتے ہیں۔ بغیر کوئی تکمل
۲۴۲۶۸ حل کیے دکھائیں کہ میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ کا C پر دونوں رخ چلتے ہوئے دائری بہاؤ صفر کے برابر ہے۔

۲۴۲۶۹ سوال ۱۵.۷۹: فضا میں ایک سیال کے بہاؤ کا سمتی رفتار کا میدان $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - yz\boldsymbol{k}$ ہے۔ بیلن $y = x^2$ اور مستوی $z = x$
۲۴۲۷۰ کی تقاطع لکیر کے ہمراہ نقطہ $(0, 0, 0)$ سے $(1, 1, 1)$ تک بہاؤ تلاش کریں (شکل ۱۵.۲۸)۔ (اشارہ: $t = x$ کو مقدار معلوم لیں۔)

۲۴۲۷۱ سوال ۱۵.۸۰: میدان $\boldsymbol{F} = \nabla(xy^2z^3)$ کا بہاؤ درج ذیل کے ہمراہ تلاش کریں۔

۲۴۲۷۲ ا. اوپر سے دیکھ کر گھڑی وار ایک بار چکر لگاتے ہوئے سوال ۱۵.۷۸ میں دی گئی C کے ہمراہ۔

۲۴۲۷۳ ب. نقطہ $(1, 1, 1)$ تا $(2, 1, -1)$ لکیری قطع کے ہمراہ۔

۲۴۲۷۴ نظریہ اور مثالیں

۲۴۲۷۵ سوال ۱۵.۸۱: فرض کریں $a \le t \le b$ کے لیے $f(t)$ قابل تفرق اور مثبت ہے۔ مزید $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i}$ ہے جبکہ راہ $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} +$
۲۴۲۷۶ $f(t)\boldsymbol{j},\ a \le t \le b$ کو C ظاہر کرتی ہے۔ کیا محور t، لکیر $t = a$، $t = b$ اور ترسیم f کے بیچ رقبہ اور تکمل کام $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کا
۲۴۲۷۷ ایک دوسرے کے ساتھ کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۲۴۲۷۸ سوال ۱۵.۸۲: ایک ذرہ نقطہ $(a, f(a))$ سے $(b, f(b))$ تک ہموار منحنی $y = f(x)$ پر حرکت کرتا ہے۔ محرک قوت ہر نقطہ پر مبدا
۲۴۲۷۹ سے دوری کے رخ ہے جبکہ اس کی مطلق قیمت مستقل k ہے۔ دکھائیں کہ یہ قوت درج ذیل کام کرتی ہے۔

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s = k\left[\sqrt{b^2 + (f(b))^2} - \sqrt{a^2 + (f(a))^2}\right]$$

۲۴۲۸۰ **کمپیوٹر کا استعمال** سوال ۱۵.۸۳ تا سوال ۱۵.۸۸ میں کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کرتے ہوئے دی گئی راہ پر قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام تلاش کریں۔

۲۴۲۸۱ ا. راہ $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ کے لیے $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ تلاش کریں۔

ب. راہ کے ہمراہ قوت $\boldsymbol{F}$ کی قیمت تلاش کریں۔

ج. تکمل $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۸۳: $\boldsymbol{F} = xy^6\boldsymbol{i} + 3x(xy^5+2)\boldsymbol{j};\ \boldsymbol{r}(t) = 2\cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۵.۸۴: $\boldsymbol{F} = \frac{3}{1+x^2}\boldsymbol{i} + \frac{2}{1+y^2}aj;\ \boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le \pi$

سوال ۱۵.۸۵: $\boldsymbol{F} = (y + yz\cos xyz)\boldsymbol{i} + (x^2 + xz\cos xyz)\boldsymbol{j} + (z + xy\cos xyz)\boldsymbol{k};$
$\boldsymbol{r}(t) = 2\cos t\boldsymbol{i} + 3\sin t\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۵.۸۶: $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} - y^2\boldsymbol{j} + ze^x\boldsymbol{k};$
$\boldsymbol{r}(t) = -t\boldsymbol{i} + \sqrt{t}\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 4$

سوال ۱۵.۸۷: $\boldsymbol{F} = (2y + \sin x)\boldsymbol{i} + (z^2 + \frac{1}{3}\cos y)\boldsymbol{j} + x^4\boldsymbol{k};$
$\boldsymbol{r}(t) = \sin t\boldsymbol{i} + \cos t\boldsymbol{j} + \sin 2t\boldsymbol{k},\ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

سوال ۱۵.۸۸: $\boldsymbol{F} = x^2y\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}x^3\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k};$
$\boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} + (2\sin^2 t - 1)\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

۱۵.۳ راہ سے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان

ثقلی اور برقی میدان میں کمیت یا بار کو ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ منتقل کرنے کے لیے درکار کام صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر منحصر ہوتا ہے نا کہ منتقلی کی راہ پر۔ اس حصہ میں تکمل کام کی راہ سے آزادی کے تصور پر غور کیا جائے گا اور ایسے میدانوں کی خواص پر غور کیا جائے گا جن میں تکمل کام کی قیمت راہ کے تابع نہیں ہوتا۔

راہ سے آزادی

فضا میں کھلا خطہ D پر معین میدان $\boldsymbol{F}$ ایک ذرہ کو D میں نقطہ A سے نقطہ B منتقل کرتا ہے۔ عموماً تکمل کام $\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ کی قیمت منتقلی کی راہ پر منحصر ہو گی، البتہ ایسے میدان پائے جاتے ہیں جن میں تکمل کام کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر منحصر ہو گی نا کہ منتقلی کی راہ پر۔ اگر D میں تمام A اور B کے لیے ایسا ہو تب یہ میدان بقائی میدان کہلائے گا اور ہم کہیں گے کہ D میں $\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ راہ سے آزاد ہے اور D پر $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے۔

تعریف: فضا میں کھلا خطہ D پر $\boldsymbol{F}$ کو ایک معین میدان لیتے ہوئے تصور کریں کہ D میں ہر دو نقطوں A اور B کے بیچ ہر ممکنہ راہ پر تکمل کام $\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ کی قیمت ایک سی ہے۔ تب تکمل $\int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ خطہ D میں **راہ سے آزاد**[7] ہو گا اور میدان $\boldsymbol{F}$ خطہ D پر **بقائی**[8] ہو گا۔

□

[7] pathindependent
[8] conservative

عملی زندگی میں عموماً میدان $\boldsymbol{F}$ صرف اور صرف اس صورت بقائی ہو گا جب D پر $\boldsymbol{F} = \nabla f$ ہو جہاں f ایک غیر سمتی تفاعل ہے۔ ایسی صورت میں تفاعل f کو $\boldsymbol{F}$ کا مخفی قوہ تفاعل کہتے ہیں۔

تعریف: اگر D پر میدان $\boldsymbol{F}$ معین ہو اور $\boldsymbol{F} = \nabla f$ ہو جہاں f خطہ D پر ایک غیر سمتی تفاعل ہو تب f کو $\boldsymbol{F}$ کا **مخفی قوہ تفاعل**[9] کہتے ہیں۔

□

برقی مخفی قوہ ایک غیر سمتی تفاعل ہے جس کا میدان ڈھلوان ایک برقی میدان ہوتا ہے۔ ثقلی مخفی قوہ ایک غیر سمتی تفاعل ہے جس کا میدان ڈھلوان ایک ثقلی میدان ہوتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ جیسا ہم اب دیکھیں گے، میدان $\boldsymbol{F}$ کا مخفی قوہ تفاعل f جاننے کے بعد $\boldsymbol{F}$ کی دائرہ کار میں تمام تکملات کام کی قیمتیں درج ذیل سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔

$$\int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(B) - f(A) \tag{1}$$

اگر آپ واحد متغیر کے تفرق f' کی طرح ∇f کو متعدد متغیرات کے تفاعل کے لیے فرض کریں تب مساوات ۱ کو احصاء کے بنیادی کلیہ

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

کا مطابقتی سمتی احصاء کا کلیہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

بقائی میدان کی دیگر قابل ذکر خواص پر، آگے چلتے ہوئے ساتھ ساتھ، غور کیا جائے گا۔ مثلاً، D پر بقائی $\boldsymbol{F}$ کی صورت میں D میں ہر بند راہ پر تکمل کام صفر ہو گا۔ مساوات ۱ اور اس کی مضمرات کی درستگی برقرار رکھنے کی خاطر ہمیں اس مساوات میں مستعمل منحنی، میدان، اور دائرہ کار پر شرائط مسلط کرنی ہوں گے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام منحنیات **ٹکڑوں میں ہموار**[10] ہیں، یعنی، انہیں متناہی تعداد کی ہموار منحنیات کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر، حصہ ۱.۱۲ کی طرح، حاصل کیا گیا ہے۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{F}$ کے اجزاء کے یک رتبی استمراری تفرق پائے جاتے ہیں۔ استمرار کی اس شرح کے بعد $\boldsymbol{F} = \nabla f$ کی صورت میں مخفی قوہ تفاعل f کے مدغم تفرق ایک دوسرے کے برابر ہوں گے، جو بقائی میدان $\boldsymbol{F}$ کے خواص پر غور کے دوران افشاں انگیز ثابت ہو گا۔

ہم فضا میں D کو ایک کھلا خطہ فرض کرتے ہیں۔ یوں D میں ہر نقطہ ایک ایسے گیند کے مرکز پر پایا جائے گا جو مکمل طور پر D میں پایا جاتا ہو۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ D **تعلق (دار)**[11] خطہ ہے۔ کھلا خطہ میں تعلق دار سے مراد ایسا خطہ ہے، جس میں ہر دو نقطوں کو ایک ایسی مسلسل راہ سے جوڑا جا سکتا ہے جو مکمل طور پر اس خطہ میں پائی جاتی ہو۔

---

[9] potentialfunction
[10] piecewisesmooth
[11] connected

بقائی میدان میں لکیری تکملات

بقائی میدان میں لکیری تکملات کی قیمتیں درج ذیل نتیجہ کی مدد سے باآسانی حاصل کی جا سکتی ہیں۔اس نتیجہ کے تحت تکمل کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتام نقطوں پر منحصر ہو گی نا کہ منتقلی کی راہ پر۔

مسئلہ ۱۵.۱: لکیری تکملات کا بنیادی مسئلہ

۱. فرض کریں فضا میں کھلے تعلق دار خطہ D میں سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ کے اجزاء استمراری ہیں۔تب صرف اور صرف اس صورت جب D میں تمام نقاط A اور B کے لیے تکمل $\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت، D کے اندر رہتے ہوئے A اور B کے بیچ تمام راہ سے آزاد ہو، ایسا قابل تفرق تفاعل f موجود ہو گا جو درج ذیل پر پورا اترتا ہو۔

$$\boldsymbol{F} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

۲. اگر تکمل کی قیمت A اور B کے بیچ راہ سے آزاد ہو تب تکمل کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(B) - f(A)$$

ثبوت: کہ $\boldsymbol{F} = \nabla f$ سے مراد تکمل کی قیمت کا راہ سے آزاد ہونا ہے

فرض کریں D میں A اور B دو نقطے ہیں اور D میں A سے B تک ہموار راہ درج ذیل ہے۔

$$C: \quad \boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b$$

منحنی کے ہمراہ t کے لحاظ سے C قابل تفرق ہے اور درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \qquad \text{زنجیری قاعدہ}$$

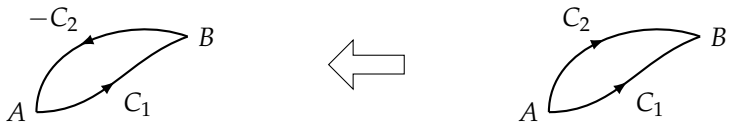
$$= \nabla f\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right) = \nabla f\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \qquad (۲)$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{مساوات ۲}$$

$$= f(g(t), h(t), k(t))\Big]_a^b = f(B) - f(A)$$

اس طرح تکمل کام کی قیمت A اور B پر f کی قیمتوں پر منحصر ہو گی نا کہ ان کے بیچ راہ پر۔یوں مسئلہ کے دوسرا جزو کے ساتھ ساتھ پہلا مضمر جزو بھی ثابت ہوتا ہے۔ہم الٹ مضمر کا زیادہ پیچیدہ ثبوت پیش نہیں کرتے ہیں۔



شکل ۱۵.۲۹: دو نقطوں کے بیچ دو راہ میں سے ایک راہ کا رخ تبدیل کرتے ہوئے بند راہ حاصل کی جا سکتی ہے۔

۲۳۳۴۱ □

۲۳۳۴۲ مثال ۱۵.۱۰: نقاط $(-1,3,9)$ اور $(1,6,-4)$ کے بیچ ہموار منحنی C پر چلتے ہوئے درج ذیل بقائی میدان کا کم تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k} = \nabla(xyz)$$

۲۳۳۴۳ **حل**

۲۳۳۴۴ $f(x,y,z) = xyz$ لیتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_A^B \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} && \boldsymbol{F} = \nabla f \\
&= f(B) - f(A) && \text{مسئلہ ۱۵.۱ کا جزو دوم} \\
&= xyz\big|_{(1,6,-4)} - xyz\big|_{(-1,3,9)} \\
&= (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9) \\
&= -24 + 27 = 3
\end{aligned}$$

۲۳۳۴۵ □

۲۳۳۴۶ مسئلہ ۱۵.۲: درج ذیل فقرے معادل ہیں۔

۲۳۳۴۷ ا. خطہ D میں ہر بند راہ پر $\int \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$ ہے۔

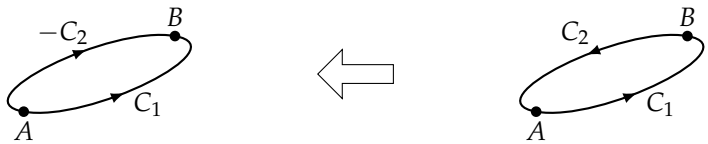
۲۳۳۴۸ ب. خطہ D پر میدان $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے۔

۲۳۳۴۹

۲۳۳۵۰ ثبوت: **جزو-ا**

۲۳۳۵۱ ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ D میں کسی بھی دو نقاط A اور B کے بیچ کسی بھی دو راہوں C_1 اور C_2 پر $\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کے تکملات کی قیمتیں ایک دوسرے
۲۳۳۵۲ جیسی ہوں گی۔ ہم شکل ۱۵.۲۹ میں C_2 کا رخ الٹ کر کے B سے A تک راہ کو $-C_2$ لکھتے ہیں۔ راہ C_1 اور راہ $-C_2$ مل کر بند راہ C دیتے
۲۳۳۵۳ ہیں۔ اب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_{C_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{-C_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$



شکل ۱۵.۳۰: بند راہ پر نقاط A اور B کی صورت میں ایک طرف راہ کا رخ تبدیل کر کے نقاط کے بیچ دو راہ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

۲۴۳۵۴ یوں C_1 اور C_2 پر تکمل کی قیمتیں ایک دوسرے جیسی ہیں۔

۲۴۳۵۵ □

۲۴۳۵۶ ثبوت: جزو-ب

۲۴۳۵۷ ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ ہر بند راہ C پر $\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کا تکمل صفر ہے۔ ہم C پر کسی دو نقطوں A اور B کا انتخاب کر کے C کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے

۲۴۳۵۸ ہیں: نقطہ A سے B تک ٹکڑے کو C_1 اور نقطہ B سے A تک ٹکڑے کو C_2 لیتے ہوئے خلاف گھڑی تکمل درج ذیل ہو گا (شکل ۱۵.۳۰)۔

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_B^A \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

۲۴۳۵۹ □

۲۴۳۶۰ مسئلہ ۱۵.۱ اور مسئلہ ۱۵.۲ کے نتائج کو یکجا کرتے ہیں۔

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \text{ میں کسی بھی بند راہ پر } D \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{F} \text{ بقائی ہے پر } D \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{F} = \nabla f \text{ پر } D$$

۲۴۳۶۱ یہ جانتے ہوئے کہ بقائی میدان میں لکیری تکملات کا حل کتنا آسان ہے، دو سوالات پیدا ہوتے ہیں:

۲۴۳۶۲ ۱. ہمیں کیسے جان سکتے ہیں کہ میدان $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے؟

۲۴۳۶۳ ۲. بقائی میدان $\boldsymbol{F}$ کا مطابقتی مخفی قوہ تفاعل f کیسے دریافت کیا جا سکتا ہے (جہاں $\boldsymbol{F} = \nabla f$ ہو گا)۔

۲۴۳۶۴ **بقائی میدان کا مخفی قوہ تفاعل کا حصول**

۲۴۳۶۵ بقائی میدان کا پرکھ درج ذیل ہے۔

۲۴۳۶۶ **بقائی میدان کا اجزائی پرکھ**

۲۴۳۶۷ میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$ جس کے اجزائی تفاعل کے استمراری یک رتبی جزوی تفرق پائے

۲۴۳۶۸ جاتے ہوں صرف اور صرف اس صورت بقائی ہو گا جب درج ذیل مطمئن ہوں۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \text{اور} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \tag{۳}$$

۲۴۳۶۹ □

۲۴۳۷۰ ثبوت پرکھ: ہم دکھاتے ہیں کہ بقائی $\boldsymbol{F}$ کے لیے مساوات ۳ ہر صورت مطمئن ہو گا۔ ایسا مخفی قوہ تفاعل f پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

$$\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

۲۴۳۷۱ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} && \text{استمراری ہونے کی بدولت مدغم جزوی تفرق} \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial z} && \text{ایک دوسرے کے برابر ہوں گے}
\end{aligned}$$

۲۴۳۷۲ مساوات ۳ کے باقی دو اجزاء بھی اسی طرح ثابت کیے جا سکتے ہیں۔

۲۴۳۷۳ ثبوت کا دوسرا حصہ، جس سے مراد لیا جا سکتا ہے کہ مساوات ۳ کہتی ہے کہ $\boldsymbol{F}$ بقائی ہو گا، مسئلہ سٹوکس کا نتیجہ ہے۔

۲۴۳۷۴ □

۲۴۳۷۵ یہ جانتے ہوئے کہ $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے، ہم عموماً مخفی قوہ تفاعل f دریافت کرنا چاہیں گے جو مساوات $\nabla f = \boldsymbol{F}$ یعنی

$$\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$$

۲۴۳۷۶ کو f کے لیے حل کرنے سے حاصل ہو گا۔ ہم درج ذیل تین مساوات کا تکمل لے کر ایسا کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = P$$

۲۴۳۷۷ مثال ۱۵.۱۱: دکھائیں کہ $\boldsymbol{F} = (e^x \cos y + yz)\boldsymbol{i} + (xz - e^x \sin y)\boldsymbol{j} + (xy + z)\boldsymbol{k}$ بقائی ہے اور اس کا مخفی قوہ
۲۴۳۷۸ تفاعل f تلاش کریں۔

۲۳۷۹ **حل**

۲۳۸۰ ہم مساوات ۳ میں دی گئی پرکھ کا اطلاق

$$M = e^x \cos y + yz, \quad N = xz - e^x \sin y, \quad P = xy + z$$

۲۳۸۱ پرکھ کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = z - e^x \sin y = \frac{\partial M}{\partial y}$$

۲۳۸۲ یہ مساوات مل کر ہمیں بتاتے ہیں کہ ایسا f پایا جاتا ہے جو $\nabla f = \boldsymbol{F}$ کو مطمئن کرتا ہے۔

۲۳۸۳ ہم درج ذیل مساواتوں کے تکملات سے f کو تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + z \tag{۴}$$

۲۳۸۴ ہم بائیں سے شروع کرتے ہوئے y اور z کو مستقل تصور کر کے پہلی مساوات کا تکمل x کے لحاظ سے لیتے ہیں:

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + g(y, z) \tag{۵}$$

۲۳۸۵ ہم نے تکمل کے مستقل کو $g(y, z)$ لکھا ہے چونکہ اس کی قیمت y اور z کے ساتھ تبدیل ہو سکتی ہے۔اس مساوات سے ہم $\frac{\partial f}{\partial y}$ تلاش کر کے

۲۳۸۶ مساوات ۴ میں دی گئی $\frac{\partial f}{\partial y}$ کے برابر ٹھراتے ہیں:

$$-e^x \sin y + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \sin y$$

۲۳۸۷ یوں $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ ہو گا لہٰذا g کی قیمت صرف z پر منحصر ہو گی۔اس طرح مساوات ۵ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + h(z)$$

۲۳۸۸ اس مساوات سے ہم $\frac{\partial f}{\partial z}$ معلوم کر کے مساوات ۴ میں دی گئی $\frac{\partial f}{\partial z}$ کے برابر ٹھراتے ہیں:

$$xy + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} = xy + z$$

یعنی $$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} = z$$

۲۳۸۹ متغیر z کے ساتھ تکمل لیتے ہیں:

$$h(z) == \frac{z^2}{2} + C$$

۲۴۳۹۰ اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$f(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + \mathrm{C}$$

۲۴۳۹۱ یوں مستقل C کی لاتناہی ممکنہ منفرد قیمتیں منتخب کر کے $\boldsymbol{F}$ کے لاتناہی تعداد کے مخفی قوہ تفاعل حاصل ہوں گے۔ □

۲۴۳۹۲ مثال ۱۵.۱۲: دکھائیں کہ $\boldsymbol{F} = (2x-3)\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + (\cos z)\boldsymbol{k}$ غیر بقائی ہے۔

۲۴۳۹۳ **حل**

۲۴۳۹۴ ہم مساوات ۳ میں دی گئی پرکھ استعمال کر کے

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos z) = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1$$

۲۴۳۹۵ حاصل کرتے ہیں۔ یہ قیمتیں ایک دوسرے سے مختلف ہیں لہٰذا $\boldsymbol{F}$ غیر بقائی ہو گا۔ پرکھ کے باقی اجزاء کو دیکھنے کی ضرورت نہیں ہے۔ □

۲۴۳۹۶ **قطعی تفرقی روپ**

۲۴۳۹۷ جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے، مکمل کام اور مکمل دائری بہاؤ کا اظہار ''تفرقی'' روپ

$$\int_A^B M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z$$

۲۴۳۹۸ میں کرنا زیادہ مناسب ثابت ہوتا ہے (حصہ ۱۵.۲)۔ جہاں $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z$ تفاعل f کا تفرقہ ہو وہاں ان تکملات کا حل نسبتاً آسان
۲۴۳۹۹ ہوتا ہے۔ چونکہ تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int_A^B M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z &= \int_A^B \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_A^B \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&= f(B) - f(A) \qquad \text{مسئلہ ۱۵.۱}
\end{aligned}$$

۲۴۴۰۰ یوں واحد متغیر کے قابل تفرق تفاعل کی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\int_A^B \mathrm{d}f = f(B) - f(A)$$

۲۴۴۰۱ تعریف: روپ $M(x,y,z)\,\mathrm{d}x + N(x,y,z)\,\mathrm{d}y + P(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ کو **تفرقی روپ**[۱۲] کہتے ہیں۔ فضا میں دائرہ کار D
۲۴۴۰۲ پر تفرقی روپ اس صورت قطعی تفرقی ہو گا جب پورے D میں کسی غیر سمتی تفاعل f درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$$

۲۴۴۰۳ □

۲۴۴۰۴ دھیان رہے کہ D میں $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$ کی صورت میں D پر f کا میدان ڈھلوان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} +$
۲۴۴۰۵ $P\boldsymbol{k}$ ہو گا۔ اسی طرح اگر $\boldsymbol{F} = \nabla f$ ہو تب روپ $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$ قطعی تفرقی ہو گا۔ یوں $\boldsymbol{F}$ کے بقائی ہونا کا
۲۴۴۰۶ پرکھ ہی اس روپ کے قطعی تفرقی ہونے کا پرکھ ہو گا۔

۲۴۴۰۷ **قطعی تفرقی پرکھ برائے** $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$

۲۴۴۰۸ تفرقی روپ $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$ صرف اور صرف درج ذیل صورت قطعی تفرقی ہو گا۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \text{اور} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \tag{۶}$$

۲۴۴۰۹ یہ اس بات کا معادل ہے کہ میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ بقائی ہے۔

۲۴۴۱۰ □

۲۴۴۱۱ مثال ۱۵.۱۳: دکھائیں کہ $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرقی ہے اور درج ذیل تکمل کی قیمت قطع $(1,1,1)$ تا $(2,3,-1)$ پر
۲۴۴۱۲ حاصل کریں۔

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}z$$

۲۴۴۱۳ **حل**

۲۴۴۱۴ ہم $M = y$ ، $N = x$ اور $P = 4$ لے کر مساوات ۶ میں دیا گیا پرکھ بروئے کار لاتے ہیں۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 = \frac{\partial M}{\partial y}$$

۲۴۴۱۵ ان مساوات کے تحت $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرقی ہے لہٰذا

$$y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$$

---

[۱۲] differentialform

۲۴۴۱۶ ہو گا جہاں f کوئی غیر سمتی تفاعل ہے اور تکمل کی قیمت $f(2,3,-1) - f(1,1,1)$ ہو گی۔

۲۴۴۱۷ ہم درج ذیل مساوات کے تکملات لیتے ہوئے تفاعل f تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4 \tag{۷}$$

۲۴۴۱۸ بائیں ہاتھ سے پہلی مساوات کا تکمل درج ذیل دے گا۔

$$f(x,y,z) = xy + g(y,z) \tag{۸}$$

۲۴۴۱۹ اس کا y تفرق لے کر دوسری مساوات کے برابر ٹھہراتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial g}{\partial y} = x$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \text{یعنی}$$

۲۴۴۲۰ یہاں g صرف متغیر z پر منحصر ہے لہٰذا مساوات ۸ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$f(x,y,z) = xy + h(z) \tag{۹}$$

۲۴۴۲۱ مساوات ۷ کی تیسرے جزو کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 + \frac{\partial h}{\partial z} = 4$$
$$h(z) = 4z + C \quad \text{یعنی}$$

۲۴۴۲۲ یوں

$$f(x,y,z) = xy + 4z + C$$

۲۴۴۲۳ ہو گا اور تکمل کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$f(2,3,-1) - f(1,1,1) = 2 + C - (5 + C) = -3$$

۲۴۴۲۴ □

۲۴۴۲۵ **سوالات**

۲۴۴۲۶ **بقائی میدان کی پرکھ**

۲۴۴۲۷ سوال ۱۵.۸۹ تا سوال ۱۵.۹۴ میں کون سے میدان بقائی اور کون سے غیر بقائی ہیں؟

۲۲۲۲۸ سوال ۱۵.۸۹: $\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$

۲۲۲۲۹ سوال ۱۵.۹۰: $\boldsymbol{F} = (y\sin z)\boldsymbol{i} + (x\sin z)\boldsymbol{j} + (xy\cos z)\boldsymbol{k}$

۲۲۲۳۰ سوال ۱۵.۹۱: $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + (x+z)\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}$

۲۲۲۳۱ سوال ۱۵.۹۲: $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

۲۲۲۳۲ سوال ۱۵.۹۳: $\boldsymbol{F} = (y+z+\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k}$

۲۲۲۳۳ سوال ۱۵.۹۴: $\boldsymbol{F} = (e^x\cos y)\boldsymbol{i} - (e^x\sin y)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

۲۲۲۳۴ مخفی قوہ تفاعل کی تلاش

۲۲۲۳۵ سوال ۱۵.۹۵ تا سوال ۱۵.۱۰۰ میں میدان $\boldsymbol{F}$ کا مخفی قوہ تفاعل f تلاش کریں۔

۲۲۲۳۶ سوال ۱۵.۹۵: $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$

۲۲۲۳۷ سوال ۱۵.۹۶: $\boldsymbol{F} = (y+z)\boldsymbol{i} + (x+z)\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k}$

۲۲۲۳۸ سوال ۱۵.۹۷: $\boldsymbol{F} = e^{y+2z}(\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 2x\boldsymbol{k})$

۲۲۲۳۹ سوال ۱۵.۹۸: $\boldsymbol{F} = (y\sin z)\boldsymbol{i} + (x\sin z)\boldsymbol{j} + (xy\cos z)\boldsymbol{k}$

۲۲۲۴۰ سوال ۱۵.۹۹: $\boldsymbol{F} = (\ln x + \sec^2(x+y))\boldsymbol{i} + \left(\sec^2(x+y) + \frac{y}{y^2+z^2}\right)\boldsymbol{j} + \frac{z}{y^2+z^2}\boldsymbol{k}$

۲۲۲۴۱ سوال ۱۵.۱۰۰: $\boldsymbol{F} = \frac{y}{1+x^2y^2}\boldsymbol{i} + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} + \frac{z}{\sqrt{1-y^2z^2}}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2z^2}} + \frac{1}{z}\right)\boldsymbol{k}$

۲۲۲۴۲ لکیری تکملات کی قیمتوں کا حصول

۲۲۲۴۳ سوال ۱۵.۱۰۱ تا سوال ۱۵.۱۱۰ میں دکھائیں کہ متکمل قطعی تفرق ہے۔ اس کے بعد لکیری تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

۲۲۲۴۴ سوال ۱۵.۱۰۱: $\int_{(0,0,0)}^{(2,3,-6)} 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2z\,\mathrm{d}z$

۲۲۲۴۵ سوال ۱۵.۱۰۲: $\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$

۲۲۲۴۶ سوال ۱۵.۱۰۳: $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 - z^2)\,\mathrm{d}y - 2yz\,\mathrm{d}z$

۲۲۲۴۷ سوال ۱۵.۱۰۴: $\int_{(0,0,0)}^{(3,3,1)} 2x\,\mathrm{d}x - y^2\,\mathrm{d}y - \frac{4}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$

۲۲۲۴۸ سوال ۱۵.۱۰۵: $\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} \sin y\cos x\,\mathrm{d}x + \cos y\sin x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$

۲۲۲۴۹ سوال ۱۵.۱۰۶: $\int_{(0,2,1)}^{(1,\pi/2,2)} 2\cos y\,\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{y} - 2x\sin y\right)\mathrm{d}y + \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$

۲۲۲۵۰ سوال ۱۵.۱۰۷: $\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} 3x^2\,\mathrm{d}x + \frac{z^2}{y}\,\mathrm{d}y + 2z\ln y\,\mathrm{d}z$

۲۲۲۵۱ سوال ۱۵.۱۰۸: $\int_{(1,2,1)}^{(2,1,1)} (2x\ln y - yz)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x^2}{y} - xz\right)\mathrm{d}y - xy\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۱۰۹: $\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{\mathrm{d}x}{y} + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right) \mathrm{d}y - \frac{y}{z^2}\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۱۱۰: $\int_{(-1,-1,-1)}^{(2,2,2)} \frac{2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y+2z\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$

سوال ۱۵.۱۱۱: نقطہ $(1,1,1)$ سے $(2,3,-1)$ تک قطع کی مقدار معلوم مساواتیں دریافت کر کے اس پر میدان $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ کی لکیری تکمل

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}z$$

کی قیمت تلاش کریں۔ چونکہ $\boldsymbol{F}$ بقائی میدان ہے لہٰذا تکمل کی قیمت راہ سے بے نیاز ہو گی۔ درج ذیل لکیری تکمل مثال ۱۵.۱۳

سوال ۱۵.۱۱۲: نقطہ $(0,0,0)$ سے $(0,3,4)$ تک قطع C کے ہمراہ درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_C x^2\,\mathrm{d}x + yz\,\mathrm{d}y + \frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}z$$

نظریہ، عملی استعمال اور مثالیں

دکھائیں کہ سوال ۱۵.۱۱۳ اور سوال ۱۵.۱۱۴ میں تکمل کی قیمت راہ A تا B پر منحصر نہیں ہے۔

سوال ۱۵.۱۱۳: $\int_A^B z^2\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2xz\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۱۱۴: $\int_A^B \frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

سوال ۱۵.۱۱۵ اور سوال ۱۵.۱۱۶ میں $\boldsymbol{F}$ کو ∇f روپ میں لکھیں۔

سوال ۱۵.۱۱۵: $\boldsymbol{F} = \frac{2x}{y}\boldsymbol{i} + \left(\frac{1-x^2}{y^2}\right)\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۱۱۶: $\boldsymbol{F} = (e^x \ln y)\boldsymbol{i} + \left(\frac{e^x}{y} + \sin z\right)\boldsymbol{j} + (y\cos z)\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۱۱۷: نقطہ $(1,0,0)$ سے $(1,0,1)$ تک درج ذیل راہ کے ہمراہ $\boldsymbol{F} = (x^2+y)\boldsymbol{i} + (y^2+x)\boldsymbol{j} + ze^z\boldsymbol{k}$ کا کام تلاش کریں۔

ا. لکیری قطع $x = 1$ ، $y = 0$ ، $0 \le z \le 1$

ب. پیچدار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + \frac{t}{2\pi}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

ج. محور x پر $(1,0,0)$ سے $(0,0,0)$ کے بعد $(0,0,0)$ سے $(1,0,1)$ تک قطع مکافی $z = x^2,\ y = 0$

سوال ۱۵.۱۱۸: قوت $\boldsymbol{F} = e^{yz}\boldsymbol{i} + (xze^{yz} + z\cos y)\boldsymbol{j} + (xye^{yz} + \sin y)\boldsymbol{k}$ کا کام نقطہ $(1,0,1)$ تا $(1,\frac{\pi}{2},0)$ درج ذیل راہ کے ہمراہ تلاش کریں۔

ا. لکیری قطع $x = 1$ ، $y = \frac{\pi t}{2}$ ، $z = 1 - t$ ، $0 \le t \le 1$

ب. نقطہ $(1,0,1)$ سے مبدا تک قطع اور اس کے بعد مبدا سے $(1, \frac{\pi}{2}, 0)$ تک قطع۔

ج. نقطہ $(1,0,1)$ تا $(1,0,0)$ قطع کے بعد محور x پر $(1,0,0)$ سے مبدا اور آخر میں قطع مکافی $y = \frac{\pi x^2}{2}, z = 0$

سوال ۱۵.۱۱۹: مستوی xy میں $(-1,1)$ تا $(1,1)$ راہ C ،نقطہ $(-1,1)$ تا $(0,0)$ اور نقطہ $(0,0)$ تا $(1,1)$ قطعات پر مشتمل ہے جبکہ $\boldsymbol{F} = \nabla(x^3y^2)$ ہے۔ تکمل $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت درج ذیل دو طریقوں سے تلاش کریں۔

ا. راہ C کی مقدار معلوم روپ تلاش کریں۔ اس کو استعمال کر کے تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

ب. اس حقیقت کو برائے کار لائیں کہ $\boldsymbol{F}$ کا مخفی قوہ تفاعل $f(x,y) = x^3y^2$ ہے۔

سوال ۱۵.۱۲۰: مستوی xy میں درج ذیل راہ C کے ہمراہ $\int_C 2x\cos y\,\mathrm{d}x - x^2\sin y\,\mathrm{d}y$ کی قیمت تلاش کریں۔

ا. نقطہ $(1,0)$ تا $(0,1)$ قطع مکافی $y = (x-1)^2$

ب. نقطہ $(-1,\pi)$ تا $(1,0)$ لکیری قطع

ج. ستارہ نما $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{i} + (\sin^3 t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ پر نقطہ $(1,0)$ سے خلاف گھڑی واپس نقطہ $(1,0)$ تک۔

سوال ۱۵.۱۲۱: ثقلی میدان $\boldsymbol{F} = -GmM\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ کا مخفی قوہ تفاعل تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۲۲: مبدا سے s_1 اور s_2 فاصلوں پر بالترتیب نقاط N_1 اور N_2 پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ سوال ۱۵.۱۲۱ کے ثقلی میدان میں N_1 سے N_2 تک ایک ذرہ کو منتقل کرنے کے لیے $GmM\left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}\right)$ کام درکار ہو گا۔

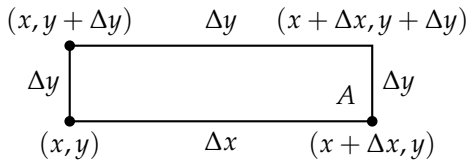
سوال ۱۵.۱۲۳: (ا) روپ $(ay^2 + 2czx)\,\mathrm{d}x + y(bx+cz)\,\mathrm{d}y + (ay^2+cx^2)\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرقی ہونے کی صورت میں مستقل a ، b اور c کا تعلق تلاش کریں۔ (ب) b اور c کی کن قیمتوں کے لیے درج ذیل میدان ڈھلوان ہو گا؟

$$\boldsymbol{F} = (y^2 + 2czx)\boldsymbol{i} + y(bx+cz)\boldsymbol{j} + (y^2+cx^2)\boldsymbol{k}$$

سوال ۱۵.۱۲۴: فرض کریں $\boldsymbol{F} = \nabla f$ بقائی سمتی میدان ہے اور $g(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ ہے۔ دکھائیں کہ $\nabla g = \boldsymbol{F}$ ہو گا۔

سوال ۱۵.۱۲۵: آپ کو دو نقطوں کے بیچ وہ راہ تلاش کرنی ہے جس پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{F}$ کم سے کم کام کرے گا۔ آپ جانتے ہیں کہ $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے۔ آپ کا جواب کیا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۵.۱۲۶: آپ تجرباتی طور جانتے ہیں کہ A سے B تک راہ C_1 کے ہمراہ $\boldsymbol{F}$ کا کام راہ C_2 کے ہمراہ کام کا نصف ہے۔ آپ $\boldsymbol{F}$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔



شکل ۱۵.۳۱: نقطہ (x, y) پر سمتی میدان کی کثافت بہاؤ (پھیلاؤ) کی تعریف کے لیے درکار مستطیل۔

۱۵.۴ مستوی میں مسئلہ گرین

ہم اب ایک ایسا مسئلہ پیش کرتے ہیں جو مستوی خطہ کی سرحد کے ہمراہ یا اس کو عبور کرتے ہوئے داب ناپذیر سیال کی بہاؤ اور خطہ کے اندر اس کی حرکت کے بیچ تعلق پیش کرتا ہے۔ پھیلاو اور گردش کے تصورات سیال کے سرحدی رویہ اور اندرونی رویہ کے بیچ تعلق پیش کرنا ممکن بناتے ہیں۔ سیال کی سمتی رفتار میدان کا پھیلاو کسی نقطہ پر خطہ میں سیال کے دخول یا خروج کی ناپ ہے جبکہ گردش اس نقطہ پر سیال کے گھومنے کی شرح کی ناپ ہے۔

مسئلہ گرین کہتا ہے کہ، چند ایسے شرائط مطمئن ہونے کی صورت میں جو عملی استعمال میں عموماً پورے ہوتے ہیں، مستوی خطہ کی سرحد سے خارجی بہاؤ سرحد کے اندر میدان کے پھیلاو کے دوہرا تکمل کے برابر ہو گا۔ اس مسئلے کا دوسرا روپ کہتا ہے کہ خطہ کی سرحد کے ہمراہ خلاف گھڑی دائری بہاؤ اس خطہ میں میدان کی گردش کے دوہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

مسئلہ گرین، علم احصاء کے عظیم مسائل میں سے ایک ہے۔ یہ گہرا اور حیرت کن ہے اور اس کے دور رس نتائج پائے جاتے ہیں۔ خالص ریاضیات میں مسئلہ گرین کی اہمیت، احصاء کے بنیادی مسئلہ کے برابر ہے۔ عملی ریاضیات میں مسئلہ گرین کا تین ابعادی روپ برقی، مقناطیسی، اور سیالی حرکیات کے مسائل کا بنیاد مہیا کرتا ہے۔

ہم سیال کی حرکت کی سمتی رفتار میدان کی بات اس لیے کرتے ہیں کہ سیال کی حرکت کا ذہنی خاکہ بنانا آسان ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ مسئلہ گرین کسی بھی سمتی میدان، جو چند شرائط کو مطمئن کرتا ہو، کے لیے درست ہو گا۔ اس کی درستگی میدان کے کسی خصوصی طبیعی خاصیت کے ہونے پر منحصر نہیں ہے۔

نقطہ پر کثافت بہاؤ: پھیلاو

مسئلہ گرین کے لیے ہمیں دو نئے تصورات کی ضرورت پیش آتی ہے۔ پہلا تصور، ایک نقطہ پر سمتی میدان کی کثافت بہاؤ ہے جس کو ریاضیات میں سمتی میدان کا پھیلاو کہتے ہیں۔ اس کو حاصل کرنے کا طریقہ درج ذیل ہے۔

فرض کریں مستوی میں سمتی میدانی کا سیالی بہاؤ $\boldsymbol{F}(x, y) = M(x, y)\boldsymbol{i} + N(x, y)\boldsymbol{j}$ ہے اور خطہ R کے ہر نقطہ پر M اور N کے یک رتبی جزوی تفرق استمراری ہیں۔ خطہ R میں (x, y) ایک نقطہ ہے اور A ایک ایسا چھوٹا مستطیل ہے جو مکمل طور پر R میں پایا جاتا ہے اور جس کا ایک راس (x, y) ہے (شکل ۱۵.۳۱)۔ اس مستطیل کے اطراف محددی محور کے متوازی ہیں اور ان کی لمبائیاں Δx اور Δy ہیں۔ مستطیل کی نچلی سرحد کو عبور کرتا ہوا خارجی سیال کی شرح تخمیناً نقطہ (x, y) پر باہر رخ عمودی سمتی رفتار کے غیر سمتی جزو ضرب لمبائی قطع کے برابر ہو گی:

$$\boldsymbol{F}(x, y) \cdot (-\boldsymbol{j})\Delta x = -N(x, y)\Delta x \tag{۱}$$

یوں اگر سمتی رفتار کی اکائی میٹر فی سیکنڈ ہو تب خارجی شرح کی اکائی میٹر فی سیکنڈ ضرب میٹر یعنی مربع میٹر فی سیکنڈ ہو گی۔ باقی تین اطراف کے عمودی باہر رخ

۲۴۵۱۶ خارجی سیال کی شرح بھی اسی طرح حاصل کی جاسکتی ہیں۔ چاروں اطراف کے نتائج کو یہاں پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(x,y+\Delta y)\cdot \boldsymbol{j}\Delta x &= N(x,y+\Delta y)\Delta x && \text{بالا}\\
\boldsymbol{F}(x,y)\cdot(-\boldsymbol{j})\Delta x &= -N(x,y)\Delta x && \text{نچلا}\\
\boldsymbol{F}(x+\Delta x,y)\cdot \boldsymbol{i}\Delta y &= M(x+\Delta x,y)\Delta y && \text{دایاں}\\
\boldsymbol{F}(x,y)\cdot(-\boldsymbol{i})\Delta y &= -M(x,y)\Delta y && \text{بایاں}
\end{aligned} \tag{۲}$$

۲۴۵۱۷ مخالف اضلاع کی شرح کے مجموعات درج ذیل ہوں گے۔

$$[N(x,y+\Delta y)-N(x,y)]\Delta x \approx \left(\frac{\partial N}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \qquad \text{نچلا اور بالا} \tag{۳}$$

$$[M(x+\Delta x,y)-M(x,y)]\Delta y \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \qquad \text{دایاں اور بایاں} \tag{۴}$$

۲۴۵۱۸ مساوات ۳ اور مساوات ۴ کا مجموعہ کل اخراج دیگا:

$$\text{مستطیل کی سرحد کو عبور کرتا ہوا بہاؤ} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y$$

۲۴۵۱۹ ہم اب $\Delta x\Delta y$ سے تقسیم کر کے بہاؤ فی اکائی رقبہ یعنی بہاؤ کی کثافت حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\text{مستطیل کی سرحد کو عبور کرتا ہوا بہاؤ}}{\text{مستطیل کا رقبہ}} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}\right)$$

۲۴۵۲۰ آخر میں ہم Δx اور Δy کو صفر تک پہنچا کر نقطہ (x,y) پر $\boldsymbol{F}$ کے کثافت بہاؤ کی تعریف اخذ کرتے ہیں۔

۲۴۵۲۱ ریاضیات میں ہم کثافت بہاؤ کو $\boldsymbol{F}$ کا پھیلاو کہتے ہیں۔ میدان $\boldsymbol{F}$ کے پھیلاو کو ہم پھیلاو $\boldsymbol{F}$ لکھتے ہیں۔

۲۴۵۲۲ تعریف: نقطہ (x,y) پر سمتی میدان $\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}$ کا کثافت بہاؤ یا **پھیلاو**[۱۳] درج ذیل ہوگا۔

$$\text{پھیلاو}\,\boldsymbol{F} = \frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y} \tag{۵}$$

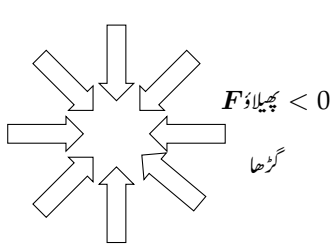
۲۴۵۲۳ □

۲۴۵۲۴ اگر نقطہ (x_0,y_0) پر باریک سوراخ سے سیال خطہ میں داخل ہو تب اس سوراخ سے خطہ میں سیال پھیلے گا (جس کی وجہ سے اس کو پھیلاو نام دیا گیا ہے)۔
۲۴۵۲۵ چھوٹے مستطیل میں نقطہ (x_0,y_0) پر سوراخ سے خطہ میں سیال داخل ہونے کی صورت میں پھیلاو مثبت ہوگا جبکہ اس نقطہ پر سوراخ کے ذریعہ خطہ سے
۲۴۵۲۶ سیال کے اخراج کی صورت میں پھیلاو کی قیمت منفی ہوگی (شکل ۱۵.۳۲)۔

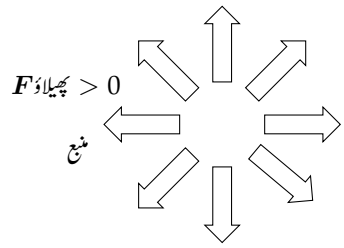
۲۴۵۲۷ مثال ۱۵.۱۴: سمتی میدان $\boldsymbol{F}(x,y)=(x^2-y)\boldsymbol{i}+(xy-y^2)\boldsymbol{j}$ کا پھیلاو تلاش کریں۔

---

[۱۳] divergence

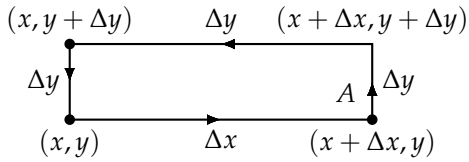


نقطہ (x_0, y_0) پر چھوٹے سوراخ کے ذریعہ خطہ سے سیال کا اخراج۔



نقطہ (x_0, y_0) پر چھوٹے سوراخ کے ذریعہ خطہ میں سیال کا دخول۔

شکل ۱۵.۳۲: داب ناپذیر سیال کے بہاؤ کی صورت میں مستوی خطہ کو پار کرتے ہوئے ''منبع'' پر، جہاں نظام میں سیال داخل ہو گا، پھیلاؤ مثبت ہو گا، جبکہ ''گڑھا'' پر، جہاں نظام سے سیال کا اخراج ہو گا، پھیلاؤ منفی ہو گا۔



شکل ۱۵.۳۳: نقطہ (x, y) پر کثافت دائری بہاؤ (گردش) کی تعریف کے لیے درکار مستطیل۔

۲۴۵۲۸ **حل**

۲۴۵۲۹ ہم مساوات ۱۵ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\text{ پھیلاؤ} &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y) + \frac{\partial}{\partial y}(xy - y^2)\\ &= 2x - x - 2y = 3x - 2y\end{aligned}$$

۲۴۵۳۰ □

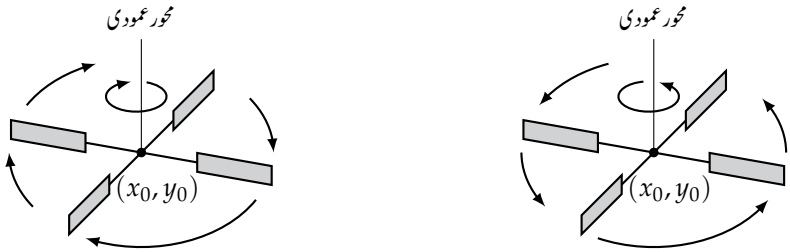
۲۴۵۳۱ **ایک نقطہ پر کثافت دائری بہاؤ: گردش**

۲۴۵۳۲ مسئلہ گرین کے لیے درکار دوسرا نیا تصور ایک نقطہ پر سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کی کثافت دائری بہاؤ ہے جس کو ریاضیات میں $\boldsymbol{F}$ کی گردش کہتے ہیں۔ اس کو حاصل
۲۴۵۳۳ کرنے کی خاطر ہم وہی سمتی میدان

$$\boldsymbol{F}(x, y) = M(x, y)\boldsymbol{i} + N(x, y)\boldsymbol{j}$$

۲۴۵۳۴ اور نقطہ (x, y) پر چھوٹا مستطیل رقبہ A لیتے ہیں۔ اس مستطیل کو شکل ۱۵.۳۳ میں دوبارہ پیش کیا گیا ہے۔

۲۴۵۳۵ رقبہ A کے گرد خلاف گھڑی $\boldsymbol{F}$ کا دائری بہاؤ مستطیل A کے اطراف کے ہمراہ بہاؤ کی شرح کا مجموعہ ہو گا۔ اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{i}$ کے رخ سمتی رفتار $\boldsymbol{F}$



$\boldsymbol{F}$ گردش $(x_0, y_0) > 0$
خلاف گھڑی دائری بہاؤ

$\boldsymbol{F}$ گردش $(x_0, y_0) < 0$
گھڑی وار دائری بہاؤ

شکل ۱۵.۳۴: مستوی خطہ پر داب ناپذیر سیال کے بہاؤ میں کسی نقطہ پر سیال کے گھومنے کی شرح کی ناپ کو گردش کہتے ہیں۔ جن نقطوں پر سیال خلاف گھڑی گھومتا ہے ان نقطوں پر گردش مثبت ہو گی جبکہ جن نقطوں پر سیال کا گھماؤ گھڑی وار ہو وہاں گردش منفی ہو گی۔

۲۴۵۳۶ کا غیر سمتی جزو ضرب لمبائی قطع تخمیناً نچلے ضلع کے ہمراہ بہاؤ کے برابر ہو گا:

$$\boldsymbol{F}(x, y) \cdot \boldsymbol{i}\Delta x = M(x, y)\Delta x \tag{۶}$$

۲۴۵۳۷ باقی اطراف کے ہمراہ خلاف گھڑی بہاؤ اسی طرح حاصل کی جا سکتی ہیں۔ چاروں اضلاع کے نتائج درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(x, y + \Delta y) \cdot (-\boldsymbol{i})\Delta x &= -M(x, y + \Delta y)\Delta x && \text{بالا} \\
\boldsymbol{F}(x, y) \cdot \boldsymbol{i}\Delta x &= M(x, y)\Delta x && \text{نچلا} \\
\boldsymbol{F}(x + \Delta x, y) \cdot \boldsymbol{j}\Delta y &= N(x + \Delta x, y)\Delta y && \text{دایاں} \\
\boldsymbol{F}(x, y) \cdot (-\boldsymbol{j})\Delta y &= -N(x, y)\Delta y && \text{بایاں}
\end{aligned} \tag{۷}$$

۲۴۵۳۸ ہم مخالف اطراف کے اجزاء کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$-[M(x, y + \Delta y) - M(x, y)]\Delta x \approx -\left(\frac{\partial M}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \qquad \text{بالا اور نچلا} \tag{۸}$$

$$[N(x + \Delta x, y) - N(x, y)]\Delta y \approx \left(\frac{\partial N}{\partial x}\Delta x\right)\Delta x \qquad \text{دایاں اور بایاں} \tag{۹}$$

۲۴۵۳۹ مساوات ۸ اور مساوات ۹ کے مجموعہ کو $\delta x \Delta y$ سے تقسیم کر کے مستطیل کی کثافت دائری بہاؤ کی تخمینی قیمت حاصل ہو گی:

$$\frac{\text{مستطیل کے گرد دائری بہاؤ}}{\text{مستطیل کا رقبہ}} \approx \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

۲۴۵۴۰ آخر میں ہم Δx اور Δy کو صفر تک پہنچا کر نقطہ (x, y) پر $\boldsymbol{F}$ کی کثافت دائری بہاؤ کی تعریف اخذ کرتے ہیں جس کو ریاضیات میں $\boldsymbol{F}$ کی گردش کہتے
۲۴۵۴۱ ہیں۔

شکل ۱۵.۳۵: مسئلہ گرین کے ثبوت میں ہم دو قسم کی بند منحنیات، سادہ اور غیر سادہ، میں فرق کرتے ہیں۔ سادہ منحنی اپنے آپ پر نہیں گزرتی۔ یوں دائرہ ایک سادہ منحنی ہے جبکہ "8" شکل کی منحنی غیر سادہ ہے۔

۲۴۵۴۲ **تعریف:** نقطہ (x, y) پر سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کی کثافت دائری بہاؤ یا **گردش**[۱۴] درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{F} \text{ گردش } = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \tag{۱۰}$$

۲۴۵۴۳ □

۲۴۵۴۴ مستوی xy میں نہایت کم گہرائی کے رواں پانی میں نقطہ (x_0, y_0) پر گردش یا کثافت دائری بہاؤ، اس نقطہ پر نصب چرخی، جس کا محور مستوی کو عمودی
۲۴۵۴۵ ہو، کی حرکت کی رفتار اور رخ کی پیمائش ہو گی (شکل ۱۵.۳۴)۔

۲۴۵۴۶ **مثال ۱۵.۱۵:** درج ذیل سمتی میدان کی گردش تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{F}(x, y) = (x^2 - y)\boldsymbol{i} + (xy - y^2)\boldsymbol{j}$$

۲۴۵۴۷ **حل**

۲۴۵۴۸ ہم مساوات ۱۰ استعمال کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{F} \text{ گردش } = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xy - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) = y + 1$$

۲۴۵۴۹ □

۲۴۵۵۰ مستوی میں مسئلہ گرین

۲۴۵۵۱ مسئلہ گرین کا ایک روپ کہتا ہے کہ موزوں حالات میں مستوی میں **سادہ**[۱۵] بند منحنی سے سمتی میدان کا خارجی بہاؤ، اس منحنی میں محیط خطہ پر میدان کے پھیلاو
۲۴۵۵۲ کے دہرا تکمل کے برابر ہو گا۔ مساوات ۱۳ اور مساوات ۴ میں بہاؤ کے کلیات پر دوبارہ نظر ڈالیں (شکل ۱۵.۳۵)۔

---

[۱۴] curl
[۱۵] simple

مسئلہ ۱۵.۳: **مسئلہ گرین (پھیلاو و بہاؤ یا عمودی روپ)**

سادہ بند منحنی C سے میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کا اخراجی بہاؤ، C میں محیط خطہ R پر F کے پھیلاو کے دہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

$$\underbrace{\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s}_{\text{اخراجی بہاؤ}} = \oint_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x = \underbrace{\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\text{تکمل پھیلاو}} \tag{۱۱}$$

مسئلہ گرین کا دوسرا روپ کہتا ہے کہ ایک سادہ بند منحنی کے ہمراہ، خلاف گھڑی ایک میدان کا دائری بہاؤ، اس منحنی میں محیط خطہ پر میدان کی گردش کے دہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

مسئلہ ۱۵.۴: **مسئلہ گرین (دائری بہاؤ و گردش یا مماسی روپ)**

مستوی میں ایک سادہ بند منحنی C کے ہمراہ خلاف گھڑی، میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کی دائری بہاؤ، منحنی میں محیط خطہ R پر میدان کی گردش کے دہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

$$\underbrace{\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s}_{\text{خلاف گھڑی دائری بہاؤ}} = \oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \underbrace{\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\text{تکمل گردش}} \tag{۱۲}$$

□

میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کے لیے مساوات ۲ میں دائری بہاؤ کے لیے دیا گیا تکمل درج ذیل معادل روپ اختیار کرے گا۔

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s = \oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y$$

مسئلہ گرین کے دو روپ ایک دوسرے کے معادل ہیں۔ میدان $\boldsymbol{G}_1 = N\boldsymbol{i} - M\boldsymbol{j}$ پر مساوات ۱۱ کا اطلاق مساوات ۱۲ دے گی جبکہ میدان $\boldsymbol{G}_2 = -N\boldsymbol{i} + M\boldsymbol{j}$ پر مساوات ۱۲ کا اطلاق مساوات ۱۱ دے گی۔

مسئلہ گرین کے لیے ضروری ہے دو مفروضے مطمئن ہوتے ہوں۔ اول ہمیں M اور N پر ایسا شرائط مسلط کرنے ہوں گے کہ مسئلہ گرین میں پائے جانے والے تکملات موجود ہوں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی ایسے کھلا خطہ، جس میں C اور R پائے جاتے ہوں، کے ہر نقطہ پر M اور N اور ان کے یک رتبی تفرق استراری ہوں گے۔ دوم، ہمیں منحنی C پر ہندسی شرائط مسلط کرنے ہوں گے۔ منحنی سادہ، بند اور ایسے ٹکڑوں پر مشتمل ہونی چاہیے جن کے ہمراہ M اور N قابل تکمل ہوں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ C ٹکڑوں میں ہموار ہے۔ ہم جو ثبوت مسئلہ گرین کے لیے پیش کرتے ہیں اس میں R کی شکل و صورت پر بھی شرائط مسلط کیے گئے ہیں۔ اعلیٰ نصاب کی کتب میں نسبتاً کم شرائط پر مبنی ثبوت موجود ہیں۔ آئیں پہلے چند مثالیں دیکھیں۔

۲۳۵۷۱ مثال ۱۵.۱۶: مسئلہ گرین کے دونوں روپ کی تصدیق میدان

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (x-y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$$

۲۳۵۷۲ کے لیے اکائی دائرہ C میں محدود خطہ R پر کریں۔

$$C: \quad \boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

۲۳۵۷۳ **حل**

۲۳۵۷۴ ہم پہلے تفاعلات، تفارق اور تفرقات کو t کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} M = \cos t - \sin t, \quad \mathrm{d}x &= \mathrm{d}(\cos t) = -\sin t\,\mathrm{d}t \\ N = \cos t, \quad \mathrm{d}y &= \mathrm{d}(\sin t) = \cos t\,\mathrm{d}t \\ \frac{\partial M}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} &= 1, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

۲۳۵۷۵ مساوات ۱۱ کے دو اطراف درج ذیل روپ اختیار کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \oint_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x &= \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)(\cos t\,\mathrm{d}t) - (\cos t)(-\sin t\,\mathrm{d}t) \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \pi \\ \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_R (1+0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \iint_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \text{اکائی دائرے کا رقبہ} = \pi \end{aligned}$$

۲۳۵۷۶ مساوات ۱۲ کے دو اطراف درج ذیل روپ اختیار کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \oint_c M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y &= \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)(-\sin t\,\mathrm{d}t) + (\cos t)(\cos t\,\mathrm{d}t) \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin t\cos t + 1)\,\mathrm{d}t = 2\pi \\ \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_R (1-(-1))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi \end{aligned}$$

۲۳۵۷۷ □

۲۳۵۷۸ مسئلہ گرین استعمال کرتے ہوئے لکیری تکملات کی قیمت کا تلاش

۲۳۵۷۹ ہم مختلف منحنی کے سر آپس میں جوڑ کر ایک بند منحنی C حاصل کر سکتے ہیں؛ منحنی C پر لکیری تکمل کی قیمت تلاش کرنے کا عمل لمبا ہو سکتا ہے؛ چونکہ اس میں
۲۳۵۸۰ C کے بہت سارے مختلف تکملات کی قیمت حاصل کرنی ہو گی۔ لیکن، اگر C ایسے خطہ R کی حد بندی کرتی ہو، جس پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہوتا ہو، ہم مسئلہ
۲۳۵۸۱ گرین استعمال کر کے C پر لکیری تکمل کو R پر دہرا تکمل میں تبدیل کر سکتے ہیں۔

۲۳۵۸۲ مثال ۱۵.۱۷: درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں

$$\oint_C xy\,\mathrm{d}y - y^2\,\mathrm{d}x$$

۲۳۵۸۳ جہاں ربع اول میں لکیر $x = 1$ اور $y = 1$ چوکور C کاٹتی ہیں۔

۲۳۵۸۴ **حل**

۲۳۵۸۵ ہم مسئلہ گرین کے دو روپ میں سے کوئی ایک استعمال کر کے لکیری تکمل کو چوکور پر دہرا تکمل میں تبدیل کر سکتے ہیں۔

۲۳۵۸۶ ۱. مساوات ۱۱ استعمال کرتے ہیں: $M = xy$ ، $N = y^2$ لے کر، جہاں چوکور کی سرحد C اور اس کا اندرون R ہے، ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\oint_C xy\,\mathrm{d}y - y^2\,\mathrm{d}x &= \iint_R (y+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 3y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 \Big[3xy\Big]_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y = \int_0^1 3y\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}y^2\Big]_0^1 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

۲۳۵۸۷ ۲. مساوات ۱۲ استعمال کرتے ہیں: $M = iy^2$ اور $N = xy$ لینے سے یہی نتیجہ حاصل ہو گا۔

$$\oint_C -y^2\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = \iint_R (y-(-2y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}$$

۲۳۵۸۸ □

۲۳۵۸۹ مثال ۱۵.۱۸: میدان $\boldsymbol{F}(x,y) = x\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j}$ کا اس چوکور سے خارجی بہاو تلاش کریں جس کو لکیریں $x = \pm 1$ اور $y = \pm 1$
۲۳۵۹۰ گھیرتی ہیں۔

۲۳۵۹۱ **حل**

۲۳۵۹۲ لکیری تکمل سے بہاو حاصل کرنے کے لیے چار تکملات کی ضرورت پیش آئے گی؛ چوکور کے ہر ضلع کے لیے ایک تکمل کرنا ہو گا۔ مسئلہ گرین سے ہم لکیری تکمل

۲۴۵۹۳ کو ایک دہرا تکمل میں تبدیل کر سکتے ہیں۔ ہم $M = x$ ، $N = y^2$ ، چوکور C ، اور چوکور کا اندرون R لیتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\text{بہاو} &= \oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}s = \oint_C M\, \mathrm{d}y - N\, \mathrm{d}x \\
&= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \qquad \text{(مسئلہ گرین)} \\
&= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} (1 + 2y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \Big[x + 2xy\Big]_{x=-1}^{x=1} \mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^{1} (2 + 4y)\, \mathrm{d}y = \Big[2y + 2y^2\Big]_{-1}^{1} = 4
\end{aligned}$$

۲۴۵۹۴ □

۲۴۵۹۵ مسئلہ گرین کا ثبوت (خصوصی خطے)

۲۴۵۹۶ فرض کریں مستوی xy میں C ایسی ہموار، سادہ، منحنی ہے جس کو محور کے متوازی کوئی لکیر دو سے زیادہ نقطوں پر نہیں کاٹتی۔ فرض کریں، منحنی C خطہ
۲۴۵۹۷ R گھیرتی ہے، اور ایسے کھلا خطہ میں جس میں C اور R دونوں پائے جاتے ہوں M ، N ، اور ان کے یک گنا جزوی تفرق ہر نقطہ پر استمراری ہیں۔ ہم
۲۴۵۹۸ مسئلہ گرین کا دائری بہاو و گردش روپ:

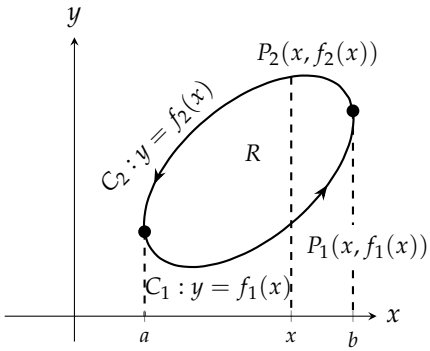
$$\oint_C M\, \mathrm{d}x + N\, \mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{۱۳}$$

۲۴۵۹۹ ثابت کرنا چاہتے ہیں۔ شکل ۱۵.۳۶ میں C دو سمت بند حصوں کا مجموعہ دکھایا گیا ہے۔

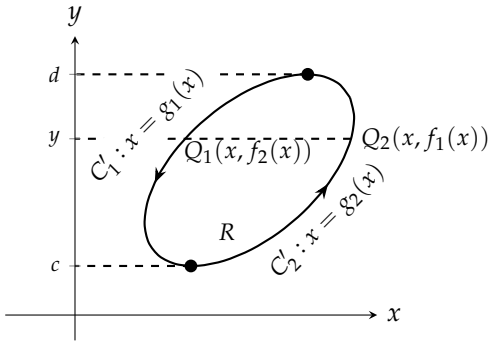
$$C_1 : y = f_1(x), \quad a \le x \le b, \qquad\qquad C_2 : y = f_2(x), \quad b \ge x \ge a$$

۲۴۶۰۰ نقطہ a اور نقطہ b کے بیچ کسی بھی x کے لیے ہم $\frac{\partial M}{\partial y}$ کا تکمل y کے لحاظ سے $y = f_1(x)$ تا $y = f_2(x)$ لے سکتے ہیں، جو درج ذیل
۲۴۶۰۱ دیگا۔

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\, \mathrm{d}y = M(x, y)\Big]_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} = M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x)) \tag{۱۴}$$



شکل ۱۵.۳۶: منحنی C_1 جو $y = f_1(x)$ کی ترسیم ہے اور C_2 جو $y = f_2(x)$ کی ترسیم ہے، مل کر سرحدی منحنی C دیتی ہیں۔



شکل ۱۵.۳۷: منحنی C_1' جو $x = g_1(y)$ کی ترسیم ہے اور C_2' جو $x = g_2(y)$ کی ترسیم ہے، مل کر سرحدی منحنی C دیتی ہیں۔

۲۴۶۰۲ اس کو ہم x کے لحاظ سے a تا b تکمل کر سکتے ہیں۔

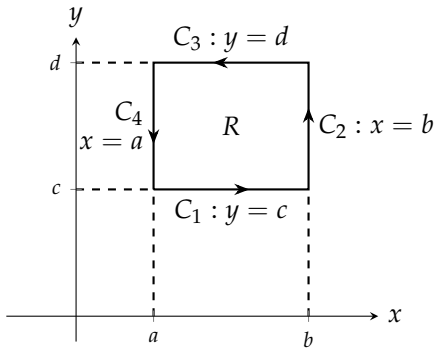
$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))]\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_b^a M(x, f_2(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b M(x, f_1(x))\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{C_2} M\,\mathrm{d}x - \int_{C_1} M\,\mathrm{d}x \\
&= -\oint_C M\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

۲۴۶۰۳ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C M\,\mathrm{d}x = \iint_R \Big(-\frac{\partial M}{\partial y}\Big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{۱۵}$$

۲۴۶۰۴ مساوات ۱۵ ہمیں مساوات ۱۳ میں درکار نتائج کا نصف حصہ دیتی ہے۔ جیسا شکل ۱۵.۳۷ عندیہ دیتی ہے، اس کا دوسرا نصف حصہ، $\frac{\partial N}{\partial x}$ کا تکمل، پہلے x اور
۲۴۶۰۵ بعد میں y کے لحاظ سے، لے کر حاصل ہو گا۔ اس میں شکل ۱۵.۳۶ کی منحنی C کو درج ذیل دو سمت بند حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

$$C_1' : x = g_1(y), \quad d \geq y \geq c \qquad \text{اور} \qquad C_2' : x = g_2(y), \quad c \leq y \leq d$$



شکل ۱۵.۳۸: مستطیل کے لیے مسئلہ گرین کا ثبوت پیش کرنے کی خاطر ہم سرحد کو چار سمت بند لکیروں میں تقسیم کرتے ہیں۔

۲۴۶۰۶ اس دہرا تکمل کا نتیجہ درج ذیل ہے۔

$$\oint_C N\,\mathrm{d}y = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{۱۶}$$

۲۴۶۰۷ مساوات ۱۵ اور مساوات ۱۶ ملا کر مساوات ۱۳ حاصل ہو گی۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

۲۴۶۰۸ دیگر خطوں کو ثبوت کی توسیع

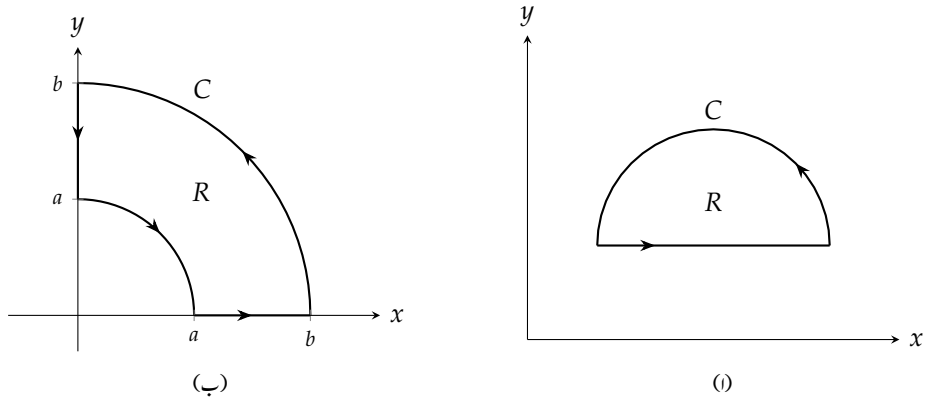
۲۴۶۰۹ شکل ۱۵.۳۸ میں لکیر $x = a$ ، $x = b$ ، $y = c$ ، اور $y = d$ مستطیل خطہ کی سرحد کو دو سے زیادہ نقطوں پر مس کرتی ہیں لہٰذا مسئلہ گرین
۲۴۶۱۰ کے ثبوت میں پیش دلائل اس مستطیل خطہ کے لیے قابل قبول نہیں۔ البتہ سرحد C کو چار سمت بند لکیری قطعات

$$\begin{aligned} C_1 :&\quad y = c, \quad a \le x \le b, & C_2 :&\quad x = b, \quad c \le y \le d,\\ C_3 :&\quad y = d, \quad b \ge x \ge a, & C_4 :&\quad x = a, \quad d \ge y \ge c, \end{aligned}$$

۲۴۶۱۱ میں تقسیم کر کے ہم دلائل میں درج ذیل ترمیم کر سکتے ہیں۔

۲۴۶۱۲ مساوات ۱۶ کے ثبوت کی طرز پر چلتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_c^d (N(b,y) - N(a,y))\,\mathrm{d}y\\ &= \int_c^d N(b,y)\,\mathrm{d}y + \int_d^c N(a,y))\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{C_2} N\,\mathrm{d}y + \int_{C_4} N\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{۱۷}$$



شکل ۱۵.۳۹: دیگر خطے جن پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہو گا۔

۲۴۶۱۳ اب C_1 اور C_3 پر y مستقل ہے، لہٰذا $\int_{C_1} N\,\mathrm{d}y = \int_{C_3} N\,\mathrm{d}y = 0$ ہو گا اور ہم مساوات ۱۷ چھیڑے بغیر، اس کے کے دائیں ہاتھ
۲۴۶۱۴ $\int_{C_1} N\,\mathrm{d}y + \int_{C_3} N\,\mathrm{d}y$ جمع کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے درج ذیل ہو گا۔

$$\int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_C N\,\mathrm{d}y \tag{۱۸}$$

۲۴۶۱۵ اسی طرح ہم درج ذیل دکھا سکتے ہیں۔

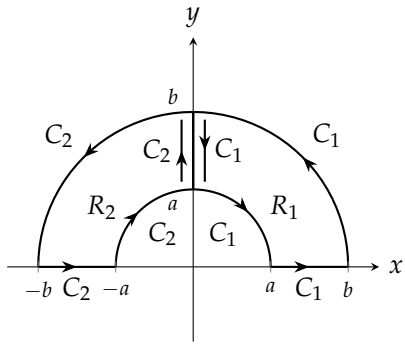
$$\int_a^b \int_c^d \frac{\partial M}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -\oint_C M\,\mathrm{d}x \tag{۱۹}$$

۲۴۶۱۶ مساوات ۱۸ سے مساوات ۱۹ منفی کر کے درج ذیل نتیجہ دوبارہ حاصل ہو گا۔

$$\oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

۲۴۶۱۷ شکل ۱۵.۳۹ طرز کے خطوں کو بھی اتنی ہی آسانی سے نپٹا جا سکتا ہے۔ مساوات ۱۳ کا اطلاق اب بھی ہو گا۔ شکل ۱۵.۴۰ میں گھوڑے کے نعل کی شکل کا خطہ R
۲۴۶۱۸ دکھایا گیا ہے؛ اور ہم دیکھتے ہیں کہ خطہ R_1، خطہ R_2 اور ان کی سرحد اکٹھا کرتے ہوئے مساوات ۱۳ کا اطلاق ہو گا۔ مسئلہ گرین کا اطلاق C_1، R_1 اور
۲۴۶۱۹ C_2، R_2 پر ہو گا، جس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int_{C_1} M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\int_{C_2} M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_{R_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



شکل ۱۵.۴۰: خطہ R_1 اور R_2 کو ملا کر خطہ R حاصل کیا گیا ہے۔

ان مساوات کو آپس میں جمع کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ محور y پر C_1 کے لیے b تا a لکیری تکمل کو C_2 پر اسی قطع پر لیکن مخالف رخ کا تکمل کاٹتا ہے۔ یوں ذیل ہو گا

$$\oint M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

جہاں محور x کے دو قطعات $-b$ تا $-a$ اور a تا b اور دو نصف دائرے مل کر C دیتے ہیں، اور جہاں خطہ R منحنی C کے اندر پایا جاتا ہے۔

مختلف سرحدوں پر لکیری تکملات جمع کر کے ایک سرحد پر تکمل کے حصول کی ترکیب کو متناہی تعداد کے ذیلی خطوں تک وسعت دی جا سکتی ہے۔ شکل ۱۵.۴۱-ا میں مخالف گھڑی سمت بند سرحد C_1 ربع اول میں واقع خطہ R_1 کو گھیرتی ہے۔ باقی تین ربعات کے لیے بھی ایسا ہو گا: خطہ R_i کی سرحد C_i ہو گی، جہاں $i = 1, 2, 3, 4$ ہے۔ مسئلہ گرین کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_{C_i} M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_{R_i} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{۲۰}$$

ہم $i = 1, 2, 3, 4$ کے لیے مساوات ۲۰ کا مجموعہ لے کر شکل ۱۵.۴۱-ب حاصل کرتے ہیں۔

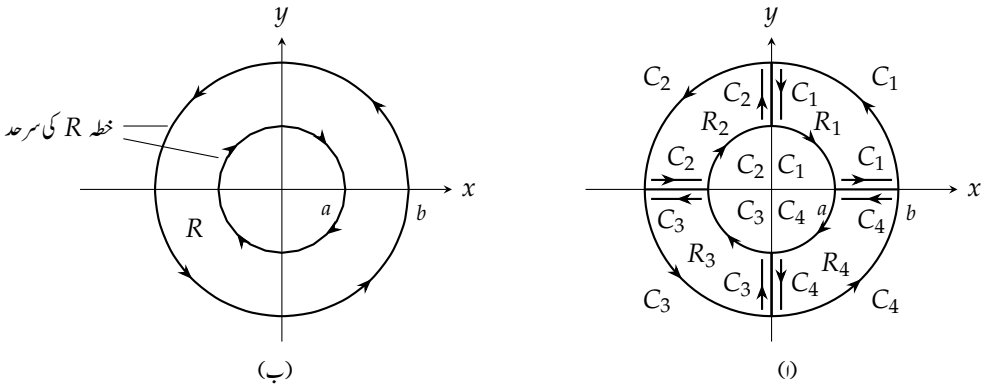
$$\oint_{r=b} (M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y) + \oint_{r=a} (M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y) = \iint_{a\le r\le b} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{۲۱}$$

مساوات ۲۱ کہتی ہے، **چھلے دار**[۱۶] خطہ R پر $(\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$ کا دہرا تکمل، R کی مکمل سرحد پر چلتے ہوئے R بائیں ہاتھ رکھ کر $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y$ کے لکیری تکمل کے برابر ہو گا (شکل ۱۵.۴۱-ب)۔

مثال ۱۵.۱۹: چھلے دار خطہ $R : h^2 \le x^2 + y^2 \le 1,\ 0 < h < 1$ (شکل ۱۵.۴۲) پر مسئلہ گرین (مساوات ۱۲) کے دائری بہاو روپ کی تصدیق درج ذیل کے لیے کریں۔

$$M = \frac{-y}{x^2 + y^2} \qquad N = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

[۱۶] annular



شکل ۱۵.۴۱: خطہ R چار ٹکڑوں پر مشتمل ہے۔ نلکی محدد میں اندرونی دائرے کے لیے $r = a$ اور بیرونی کے لیے $r = b$ ہے جبکہ خطہ کے لیے $a \leq r \leq b$ ہے۔

۲۴۶۳۱ **حل**

۲۴۶۳۲ خطہ R کی سرحد دائرہ:

$$C_\ell : \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

۲۴۶۳۳ جس پر t بڑھانے سے ہم خلاف گھڑی گامزن ہوں گے، اور دائرہ:

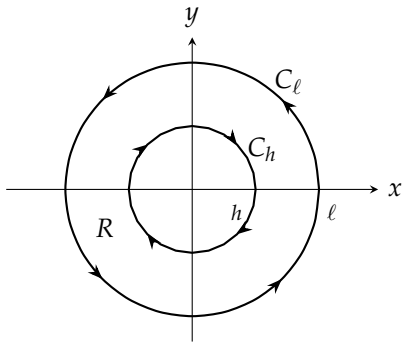
$$C_h : \quad x = h\cos\theta, \quad y = -h\sin\theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

۲۴۶۳۴ جس پر θ بڑھانے سے ہم گھڑی وار گامزن ہوں گے، پر مشتمل ہے۔ پورے خطہ R میں تفاعلات M ، N اور ان کے جزوی تفرق استمراری ہیں۔ مزید

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{(x^2+y^2)(-1)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}\end{aligned}$$

۲۴۶۳۵ لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$



شکل ۱۵.۴۲: دکھائی گئی سرحدوں کے ہمراہ تکمل لیتے ہوئے چھلادار خطہ R پر مسئلہ گرین کا اطلاق کیا جا سکتا ہے (مثال ۱۵.۱۹)۔

۲۴۳۳۶ خطہ R کی سرحد پر $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y$ کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y &= \oint_{C_1} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} + \oint_{C_h} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \frac{h^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{h^2}\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\pi - 2\pi = 0\end{aligned}$$

۲۴۳۳۷ □

۲۴۳۳۸ چونکہ مثال ۱۵.۱۹ میں $(0,0)$ پر تفاعلات M اور N غیر استراری ہیں لہٰذا دائرہ C_1 اور اس کے اندر خطہ پر مسئلہ گرین کا اطلاق نہیں ہو گا۔ ہمیں
۲۴۳۳۹ مبدا خارج (غیر شامل) کرنا ہو گا؛ ہم C_h کے اندر نقطے خارج کر کے ایسا کرتے ہیں۔

۲۴۳۴۰ ہم مثال ۱۵.۱۹ میں دائرہ C_1 کی بجائے ایسی ترخیم یا سادہ بند منحنی K لے سکتے ہیں، جو C_h کو گھیرتی ہو (شکل ۱۵.۴۳)۔ نتیجہ اب بھی

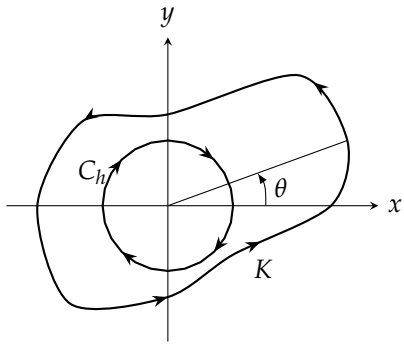
$$\oint_K (M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y) + \oint_{C_h} (M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 0$$

۲۴۳۴۱ ہو گا، جس سے کسی بھی ایسی منحنی K کے لیے درج ذیل حیرت کن نتیجہ اخذ ہوتا ہے۔

$$\oint_K (M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y) = 2\pi$$

۲۴۳۴۲ قطبی محدد استعمال کر کے یہ نتیجہ سمجھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta & y &= r\sin\theta\\ \mathrm{d}x &= -r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta + \cos\theta\,\mathrm{d}r & \mathrm{d}y &= r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta + \sin\theta\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$



شکل ۱۵.۴۳: دائرہ C اور منحنی K کے بیچ خطہ۔

۲۴۶۴۳ لکھ کر درج ذیل ہو گا

$$\frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \frac{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta}{r^2} = \mathrm{d}\theta$$

۲۴۶۴۴ اور ایک مرتبہ K پر خلاف گھڑی چکر کاٹنے سے θ کی قیمت 2π بڑھتی ہے۔

۲۴۶۴۵ **سوالات**

۲۴۶۴۶

۲۴۶۴۷ مسئلہ گرین کی تصدیق

۲۴۶۴۸ سوال ۱۵.۱۲۷ تا سوال ۱۵.۱۳۰ میں میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کے لیے مساوات ۱۱ اور مساوات ۱۲ کے دونوں اطراف کی قیمتیں تلاش کر کے مسئلہ
۲۴۶۴۹ گرین کی تصدیق کریں۔ دونوں صورتوں میں تکمل کا دائرہ کار قرص $R : x^2 + y^2 \leq a^2$ اور محدود کار دائرہ $C : r = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}, 0 \leq t \leq 2\pi$
۲۴۶۵۰ لیں۔

۲۴۶۵۱ سوال ۱۵.۱۲۷: $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

۲۴۶۵۲ سوال ۱۵.۱۲۸: $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i}$

۲۴۶۵۳ سوال ۱۵.۱۲۹: $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j}$

۲۴۶۵۴ سوال ۱۵.۱۳۰: $\boldsymbol{F} = -x^2y\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j}$

۲۴۶۵۵

خلاف گھڑی دائری بہاو اور باہر رخ بہاو

سوال ۱۵.۱۳۱ تا ۱۵.۱۳۶ میں میدان $\boldsymbol{F}$ اور منحنی C کے لیے مسئلہ گرین استعمال کر کے خلاف گھڑی دائری بہاو اور باہر رخ بہاو تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۳۱: $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + (y-x)\boldsymbol{j}$ اور C کو چوکور $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۲: $\boldsymbol{F} = (x^2+4y)\boldsymbol{i} + (x+y^2)\boldsymbol{j}$ اور C کو چوکور $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۳: $\boldsymbol{F} = (y^2-x^2)\boldsymbol{i} + (x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ اور C کو مثلث $y = 0$ ، $x = 3$ ، $y = x$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۴: $\boldsymbol{F} = (x+y)\boldsymbol{i} - (x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ اور C کو مثلث $y = 0$ ، $x = 1$ ، $y = x$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۵: $\boldsymbol{F} = (x+e^x\sin y)\boldsymbol{i} + (x+e^x\cos y)\boldsymbol{j}$ اور C دو چشمہ $r^2 = \cos 2\theta$ کا دایاں ہاتھ گھیرے ہے۔

سوال ۱۵.۱۳۶: $\boldsymbol{F} = \left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)\boldsymbol{i} + \ln(x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ اور C اس خطے کی سرحد ہے جس کو قطبی محدد عدم مساوات $1 \le r \le 2$ ، $0 \le \theta \le \pi$ تعین کرتی ہیں۔

سوال ۱۵.۱۳۷: ربع اول میں منحنیات $y = x^2$ اور $y = x$ کے بیچ خطے کی سرحد پر خلاف گھڑی چلتے ہوئے میدان $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j}$ کا دائری بہاؤ اور خطے سے باہر رخ گزرنے والا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۳۸: ربع اول سے لکیر $x = \pi/2$ اور $y = \pi/2$ مربع کاٹتی ہیں۔ میدان $\boldsymbol{F} = (-\sin y)\boldsymbol{i} + (x\cos y)\boldsymbol{j}$ کا اس مربع پر خلاف گھڑی دائری بہاؤ اور خطے سے باہر رخ گزرنے والا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۳۹: قلب نما $r = a(1+\cos\theta)$ $a > 0$ سے درج ذیل میدان کا باہر رخ گزرنے والا بہاؤ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{F} = \left(3xy - \frac{x}{1+y^2}\right)\boldsymbol{i} + (e^x + \tan^{-1} y)\boldsymbol{j}$$

سوال ۱۵.۱۴۰: جس خطے کو اوپر سے منحنی $y = 3 - x^2$ اور نیچے سے منحنی $y = x^4 + 1$ گھیرتی ہیں اس کی سرحد پر خلاف گھڑی چلتے ہوئے میدان $\boldsymbol{F} = (y + e^x \ln y)\boldsymbol{i} + (e^y/y)\boldsymbol{j}$ کا دائری بہاؤ تلاش کریں۔

کام

دی گئی منحنی پر خلاف گھڑی ایک مرتبہ چل کر سوال ۱۵.۱۴۱ اور سوال ۱۵.۱۴۲ میں $\boldsymbol{F}$ کا کام تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۴۱: $\boldsymbol{F} = 2xy^3\boldsymbol{i} + 4x^2y^2\boldsymbol{j}$

ربع اول میں محور x ، لکیر $x = 1$ ، اور منحنی $y = x^3$ کے بیچ مثلث نما خطے کی سرحد C ہے۔

سوال ۱۵.۱۴۲: $\boldsymbol{F} = (4x-2y)\boldsymbol{i} + (2x-4y)\boldsymbol{j}$

دائرہ $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$ راہ C ہے۔

۲۴۶۸۱ مستوی میں لکیری تکملات کی قیمت کی تلاش

۲۴۶۸۲ مسئلہ گرین کا اطلاق سوالات ۱۵.۱۴۳ تا ۱۵.۱۴۶ پر کر کے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

۲۴۶۸۳ سوال ۱۵.۱۴۳: $\oint_C (y^2\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y)$

۲۴۶۸۴ مثلث C کو $x = 0$ ، $x + y = 1$ ، اور $y = 0$ گھیرتی ہیں۔

۲۴۶۸۵ سوال ۱۵.۱۴۴: $\oint_C (3y\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y)$

۲۴۶۸۶ خطہ $0 \le x \le \pi$ ، $0 \le y \le \sin x$ کی سرحد C ہے۔

۲۴۶۸۷ سوال ۱۵.۱۴۵: $\oint_C (6y + x)\,\mathrm{d}x + (y + 2x)\,\mathrm{d}y$

۲۴۶۸۸ دائرہ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$ راہ C ہے۔

۲۴۶۸۹ سوال ۱۵.۱۴۶: $\oint_C (2x + y^2)\,\mathrm{d}x + (2xy + 3y)\,\mathrm{d}y$

۲۴۶۹۰ مستوی میں کوئی بھی ایسی بند راہ C جس پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہوتا ہو۔

۲۴۶۹۱

۲۴۶۹۲ مسئلہ گرین استعمال کر کے رقبے کی تلاش

۲۴۶۹۳ اگر مستوی میں سادہ منحنی C اور اس میں محیط خطہ R مسئلہ گرین پر پورا اترتے ہوں، R کا رقبہ ذیل ہو گا۔

رقبے کا مسئلہ گرین کلیہ

$$R \text{ رقبہ } = \frac{1}{2}\oint_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x \tag{۲۲}$$

۲۴۶۹۴ اس کی وجہ جانتے ہیں۔ مساوات ۱۱ کو الٹ چلا کر ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} R \text{ رقبہ } &= \iint_R \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \iint_R \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \oint_C \frac{1}{2}x\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}y\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

۲۴۶۹۵ منحنیات میں محیط خطوں کے رقبے، سوال ۱۵.۱۴۷ تا ۱۵.۱۵۰ میں، مساوات ۲۲ استعمال کر کے حاصل کریں۔

۲۴۶۹۶ سوال ۱۵.۱۴۷: دائرہ $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$

۲۴۶۹۷ سوال ۱۵.۱۴۸: ترخیم $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (b\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$

۲۴۶۹۸ سوال ۱۵.۱۴۹: ستارہ نما (صفحہ ۱۰۹۲ پر شکل ۱۰.۵۲) $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{i} + (\sin^3 t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$

۲۴۶۹۹ سوال ۱۵.۱۵۰: منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + ((t^3/3) - t)\boldsymbol{j},\ -\sqrt{3} \le t \le \sqrt{t}$

۲۴۷۰۰

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۵.۱۵۱: فرض کریں خطے کی سرحد C پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہوتا ہے۔ مسئلہ گرین استعمال کر کے ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\oint_C f(x)\,\mathrm{d}x + g(y)\,\mathrm{d}y$

ب. $\oint_C ky\,\mathrm{d}x + hx\,\mathrm{d}y$ (h اور k مستقل ہیں)

سوال ۱۵.۱۵۲: دکھائیں کہ مربع کی سرحد پر درج ذیل تکمل کی قیمت مربع کے رقبے پر منحصر ہے نا کہ مستوی میں مربع کے مقام پر۔

$$\oint_C xy^2\,\mathrm{d}x + (x^2y + 2x)\,\mathrm{d}y$$

سوال ۱۵.۱۵۳: درج ذیل تکمل میں کیا خاص بات ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

$$\oint_C 4x^3y\,\mathrm{d}x + x^4\,\mathrm{d}y$$

سوال ۱۵.۱۵۴: درج ذیل تکمل میں کیا خاص بات ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

$$\oint_C -y^3\,\mathrm{d}x + x^3\,\mathrm{d}y$$

سوال ۱۵.۱۵۵: دکھائیں کہ اگر مستوی میں خطہ R کو ٹکڑوں میں ہموار سادہ بند منحنی C احاطہ کرتی ہو تب درج ذیل ہو گا۔

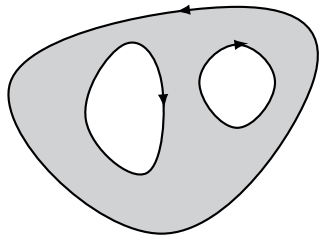
$$\text{رقبہ } R = \oint_C x\,\mathrm{d}y = -\oint_C y\,\mathrm{d}x$$

سوال ۱۵.۱۵۶: فرض کریں غیر منفی تفاعل $y = f(x)$ کا $[a, b]$ پر یک رتبی تفرق استمراری ہے۔ مستوی xy میں خطہ نیچے سے محور x ، اوپر سے f کی ترسیم، اور اطراف سے لکیر $x = a$ اور لکیر $x = b$ میں گھیرا ہوا ہے اور اس کی سرحد C ہے۔ دکھائیں کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\oint_C y\,\mathrm{d}x$$

سوال ۱۵.۱۵۷: مستوی xy میں خطہ R جو ٹکڑوں میں ہموار سادہ بند منحنی C میں گھیرا ہوا ہے کا رقبہ A ہے اور خطے کے وسطانی مرکز کا x محدد $\bar{x}$ ہے۔ دکھائیں کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{2}\oint_C x^2\,\mathrm{d}y = -\oint_C xy\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\oint_C x^2\,\mathrm{d}y - xy\,\mathrm{d}x = A\bar{x}$$



شکل ۱۵.۴۴: متعدد سوراخ والے خطے پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہوتا ہے (سوال ۱۵.۱۶۱)۔

۲۴۷۱۳ سوال ۱۵.۱۵۸: فرض کریں سوال ۱۵.۱۵۷ میں محور y کے لحاظ سے خطے کا معیار اثر I_y ہے۔ دکھائیں کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{3}\oint_C x^3\,\mathrm{d}y = -\oint_C x^2 y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\oint_C x^3\,\mathrm{d}y - x^2 y\,\mathrm{d}x = I_y$$

۲۴۷۱۴ سوال ۱۵.۱۵۹: مسئلہ گرین اور لاپلاس کی مساوات

۲۴۷۱۵ فرض کریں تمام لازم تفرق موجود اور استمراری ہیں۔ دکھائیں کہ اگر $f(x,y)$ لاپلاس کی مساوات

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

۲۴۷۱۶ کو مطمئن کرتا ہو تب ان تمام بند منحنیات C پر جن پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہوتا ہو درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}x - \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}y = 0$$

۲۴۷۱۷ (اس کا الٹ بھی درست ہے: اگر مذکورہ بالا لکیری تکمل ہر صورت صفر ہو، تب f لاپلاس کی مساوات کو مطمئن کرے گا۔)

۲۴۷۱۸ سوال ۱۵.۱۶۰: مستوی میں ان تمام ہموار سادہ بند منحنیات میں سے، جو خلاف گھڑی سمت بند ہوں، وہ تلاش کریں جس پر چلتے ہوئے درج ذیل کا سرانجام
۲۴۷۱۹ کام زیادہ سے زیادہ ہو گا۔

$$\boldsymbol{F} = \left(\frac{1}{4}x^2 y + \frac{1}{3}y^3\right)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$$

۲۴۷۲۰ (اشارہ: $\boldsymbol{F}$ کی گردش کہاں مثبت ہے؟)

۲۴۷۲۱ سوال ۱۵.۱۶۱: خطہ R پر، جس میں متناہی تعداد کے سوراخ ہوں، اور جس کی سرحدی منحنیات ہموار، سادہ، اور بند ہوں پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہو گا
۲۴۷۲۲ بشرطیکہ ہر انفرادی سرحد پر تکمل لیتے ہوئے سرحد پر چلنے کا رخ یوں رکھا جائے کہ قریبی خطہ بائیں ہاتھ ہو۔ (شکل ۱۵.۴۴)۔

۲۴۷۲۳ ۱. اگر $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ ہو اور دائرہ $x^2+y^2=a^2$ منحنی C ہو، درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\oint_C \nabla f \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$$

ب. فرض کریں مستوی میں K ایسی ہموار سادہ بند منحنی ہے جو $(0,0)$ سے نہیں گزرتی۔ مسئلہ گرین استعمال کر کے دکھائیں کہ درج ذیل تکمل کی دو ممکنہ جواب ہیں جس کا انحصار اس حقیقت پر ہے کہ آیا $(0,0)$ منحنی K کے اندر واقع ہے یا اس کے باہر۔

$$\oint_K \nabla f \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{ds}$$

سوال ۱۵.۱۶۲: مستوی سیلان کے انفرادی ذرات کی حرکت کی نمائندگی ہموار منحنیات کرتی ہیں جو **خطوط رو**[17] کہلاتی ہیں۔ سیالی سیلان کے سمتی رفتار سمتیات $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ ، خطوط رو کو مماسی ہیں۔ دکھائیں اگر سیلان سادہ تعلق خطے R (جس میں سوراخ یا غیر موجود نقطے نہیں پائے جاتے) میں واقع ہو، اور پورے R میں $M_x + N_y \neq 0$ ہو، تب R میں کوئی ایک خط رو بھی بند نہیں ہو گا۔ دوسرے لفظوں میں، سیال کا کوئی ذرہ R میں بند راہ پر نہیں چلتا۔ شرط $M_x + N_y \neq 0$ کو بند راہ کی عدم موجودگی کا شرط کہتے ہیں۔

سوال ۱۵.۱۶۳: مسئلہ گرین کے مخصوص صورت کا ثبوت مکمل کرنے کی خاطر مساوات ۱۶ کی تصدیق کریں۔

سوال ۱۵.۱۶۴: مسئلہ گرین کی وسعت کی دلیل مکمل کرنے کی خاطر مساوات ۱۹ کی تصدیق کریں۔

سوال ۱۵.۱۶۵: کیا بقائی دو ابعادی سمتیہ میدان کی گردش کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

سوال ۱۵.۱۶۶: کیا بقائی میدان کے دائری بہاؤ کے بارے میں مسئلہ گرین کوئی معلومات دیتا ہے؟ کیا یہ کسی دوسری حقیقت، جو آپ جانتے ہو، کے مطابق ہے؟ اپنے جواب کی وجوہات پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

کمپیوٹر اور مسئلہ گرین استعمال کر کے سوال ۱۵.۱۶۷ تا ۱۵.۱۷۰ میں میدان $\boldsymbol{F}$ کا خلاف گھڑی دائری بہاؤ سادہ بند منحنی C کے ہمراہ تلاش کریں۔ کمپیوٹر پر درج ذیل اقدام کریں۔

ا. مستوی xy میں C ترسیم کریں۔

ب. مسئلہ گرین کے گردشی روپ کے لیے متکمل $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ تعین کریں۔

ج. دوہرا تکمل کی حدیں جزوالف کی ترسیم سے تعین کریں اور دائری بہاؤ کے گردشی تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

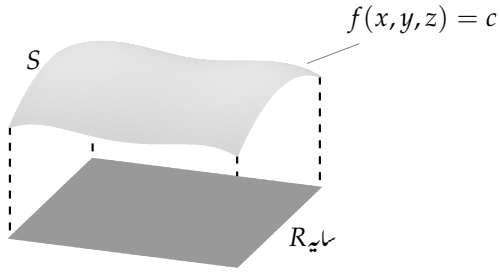
سوال ۱۵.۱۶۷: $\boldsymbol{F} = (2x - y)\boldsymbol{i} + (x + 3y)\boldsymbol{j}$
ترخیم $x^2 + 4y^2 = 4$ منحنی C ہے۔

سوال ۱۵.۱۶۸: $\boldsymbol{F} = (2x^3 - y^3)\boldsymbol{i} + (x^3 + y^3)\boldsymbol{j}$
ترخیم $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ منحنی C ہے۔

سوال ۱۵.۱۶۹: $\boldsymbol{F} = x^{-1}e^y\boldsymbol{i} + (e^y \ln x + 2x)\boldsymbol{j}$
منحنیات $y = 1 + x^4$ اور $y = 2$ کے بیچ خطے کی سرحد C ہے۔

---

[17] streamlines



شکل ۱۵.۴۵: سطح S اور اس کے نیچے مستوی پر سطح کی تظلیل قائمہ R ۔آپ R کو مستوی پر S کا سایہ تصور کر سکتے ہو۔

سوال ۱۵.۱۷۰: $\boldsymbol{F} = xe^y\boldsymbol{i} + 4x^2 \ln y\boldsymbol{j}$

مثلث جس کے راس $(0,0)$ ، $(2,0)$ ،اور $(0,4)$ ہیں منحنی C ہے۔

۱۵.۵ سطحی رقبہ اور سطحی تکملات

ہم مستوی میں خطہ پر تفاعل کا تکمل لینا جانتے ہیں لیکن ایسی صورت میں کیا ہو گا جب تفاعل ایک قوسی سطح پر پایا جاتا ہو؟ایسی صورت میں تکمل کیسے حاصل ہو گا؟ ایسا تکمل، جو **سطحی تکمل**[۱۸] کہلاتا ہے، کی قیمت تلاش کرنے کی خاطر اس کو، سطح کے نیچے محددی مستوی پر (شکل ۱۵.۴۵)، دہرا تکمل کے روپ میں لکھا جاتا ہے۔ حصہ ۱۵.۷ اور حصہ ۱۵.۸ میں ہم دیکھیں گے کہ سطحی تکملات کی مدد سے مسئلہ گرین کو تین ابعاد میں عمومیت دی جا سکتی ہے۔

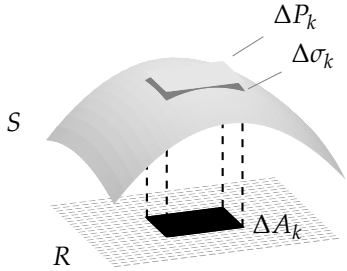
سطحی رقبہ کی تعریف

شکل ۱۵.۴۶ میں سطح S اور نیچے محددی مستوی میں اس کا ''سایہ'' خطہ R دکھایا گیا ہے۔ سطح کی تعریف مساوات $f(x,y,c) = c$ دیتی ہے۔ اگر سطح **ہموار**[۱۹] ہو (∇f استمراری ہے اور S پر کہیں بھی صفر نہیں ہے)، ہم اس کے رقبہ کی تعریف اور قیمت R پر دہرا تکمل کی صورت میں کر سکتے ہیں۔

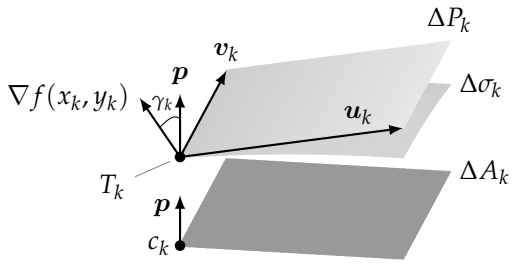
ہم خطہ R کی خانہ بندی چھوٹے چھوٹے مستطیلوں ΔA_k میں ہم یوں کرتے ہیں جیسے R پر تکمل کی تعریف پیش کرنا چاہتے ہوں۔ یہ S کے رقبہ کی تعریف پیش کرنے کا کا پہلا قدم ہے۔ ہر ایک ΔA کے بالکل اوپر کچھ بلندی پر سطح $\Delta\sigma_k$ پایا جاتا ہے، جس کو ہم مماسی سطح کے چھوٹے حصہ ΔP_k سے تخمین دے سکتے ہیں۔ اس کی وضاحت کرتے ہیں۔ رقبہ ΔA_k کے اگلے بائیں کونے C_k کے بالکل اوپر نقطہ $T_k(x_k, y_k, z_k)$ پر سطح کے مماس کا ΔP_k ایک ٹکڑا ہے۔ اگر مماسی سطح R کا متوازی ہو، تب ΔP_k رقبہ ΔA_k کا موافق ہو گا۔ بصورت دیگر، یہ ایک مستطیل ہو گا جس کا رقبہ ΔA_k کے رقبہ سے کچھ زیادہ ہو گا۔

---

[۱۸] surfaceintegral
[۱۹] smooth



شکل ۱۵.۴۶: مماسی چادر ΔP_k تخمیناً رقبہ ΔA_k سے اوپر سطحی رقبہ $\Delta\sigma_k$ کو ظاہر کرتی ہے۔



شکل ۱۵.۴۷: گزشتہ شکل کی تفصیل بڑی کر کے دکھائی گئی ہے۔ چونکہ سمتیہ $\boldsymbol{v}_k \times \boldsymbol{u}_k$ (جو شکل میں نہیں دکھایا گیا) اور سمتیہ ∇f دونوں سطح ΔP_k کو عمودی ہیں لہٰذا یہ آپس میں متوازی ہوں گے۔

شکل ۱۵.۴۷ میں $\Delta\sigma_k$ اور ΔP_k بڑھا چڑھا کر پیش کیے گئے ہیں، جہاں T_k پر ڈھلوان سمتیہ $\nabla f(x_k, y_k, z_k)$ اور R کا عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{p}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔اس شکل میں ∇f اور $\boldsymbol{p}$ کے بیچ زاویہ γ_k بھی دکھایا گیا ہے۔اس شکل میں دیگر سمتیات $\boldsymbol{u}_k$ اور $\boldsymbol{v}_k$ مماسی مستوی میں ΔP_k کے کناروں پر پائے جاتے ہیں۔یوں $\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k$ اور ∇f دونوں مماسی مستوی کو عمودی ہیں۔سمتیہ $\boldsymbol{u}_k$ اور سمتیہ $\boldsymbol{v}_k$ دونوں سمتیہ $\nabla f(x_k, y_k)$ کو عمودی ہوں گے۔

اعلیٰ سمتی ہندسہ سے ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی مستوی پر، جس کا عمود $\boldsymbol{p}$ ہو، ایسے مستطیل کی تطلیل کا رقبہ $|(\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k) \cdot \boldsymbol{p}|$ ہوگا جس کو $\boldsymbol{u}_k$ اور $\boldsymbol{v}_k$ تعین کرتے ہوں۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$|(\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k) \cdot \boldsymbol{p}| = \Delta A_k \tag{۱}$$

اب سمتی ضرب کی ایک خاصیت (جو صلیبی ضرب کی ایک حقیقت ہے) یہ ہے کہ $|\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k|$ رقبہ ΔP_k ہوگا، لہٰذا مساوات ۱ ذیل روپ

$$\underbrace{|\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k|}_{\Delta P_k} \underbrace{|\boldsymbol{p}|}_{1} \underbrace{|\cos(\text{زاویہ کے بیچ } \boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k \text{ اور } \boldsymbol{p})|}_{\substack{\text{چونکہ } \nabla f \text{ اور } \boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k \text{ دونوں مماسی مستوی کو} \\ \text{عمودی ہیں لہٰذا یہ } |\cos\gamma_k| \text{ کے برابر ہوگا}}} = \Delta A_k \tag{۲}$$

یا

$$\Delta P_k |\cos\gamma_k| = \Delta A_k$$

اختیار کرتی ہے جو $\cos\gamma_k \neq 0$ کی صورت میں ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\Delta P_k = \frac{\Delta A_k}{|\cos\gamma_k|}$$

جب تک ∇f زمینی مستوی کو متوازی نہ ہو اور $\nabla f \cdot \boldsymbol{p} \neq 0$ ہو $\cos\gamma_k \neq 0$ ہوگا۔

چونکہ، سطحی ٹکڑے $\Delta\sigma_k$ جو مل کر رقبہ S دیتے ہیں، کو ΔP_k تخمیناً ظاہر کرتے ہیں، لہٰذا مجموعہ

$$\sum \Delta P_k = \sum \frac{\Delta A_k}{|\cos\gamma_k|} \tag{۳}$$

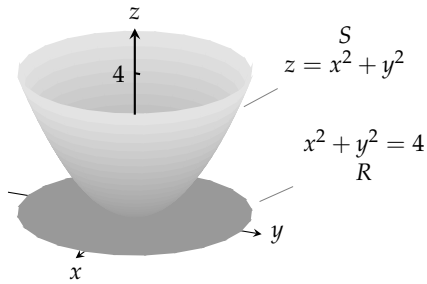
سطحی رقبے S کا تخمین نظر آتا ہے۔ہم یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ خطہ R کو مزید چھوٹے خانوں میں تقسیم کرنے سے یہ تخمین بہتر ہوگی۔درحقیقت، مساوات ۳ کے دائیں ہاتھ مجموعہ دوہرا تکمل

$$\iint_R \frac{1}{|\cos\gamma|}\,\mathrm{d}A \tag{۴}$$

کے تخمینی مجموعے ہیں۔یہی وجہ ہے کہ جب بھی یہ تکمل موجود ہو ہم اسے S کے **رقبہ**[۲۰] کی تعریف لیتے ہیں۔

---

[۲۰] area



شکل ۱۵.۴۸: اس قطع مکافی سطح کا رقبہ مثال ۱۵.۲۰ میں حاصل کیا گیا ہے۔

عملی کلیہ

کسی بھی سطح $f(x, y, z) = c$ کے لیے $|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}| = |\nabla f||\boldsymbol{p}||\cos\gamma|$ ہوگا، لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے، جہاں اکائی سمتیہ کی مطلق قیمت 1 ہے ($|\boldsymbol{p}| = 1$)۔

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|}$$

اس کو مساوات ۴ کے ساتھ ملا کر رقبے کا عملی کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

سطحی رقبے کا کلیہ

بند اور محدود مستوی میں خطہ R پر سطح $f(x, y, z) = c$ کا رقبہ ذیل ہوگا

$$\text{سطحی رقبہ} = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|}\, \mathrm{d}A \tag{۵}$$

جہاں $\boldsymbol{p}$ خطہ R کا اکائی عمودی سمتیہ ہے اور $\nabla f \cdot \boldsymbol{p} \neq 0$ ہے۔

یوں ∇f کی قدر کو ∇f کے اس غیر سمتی عمودی جزو کی قدر سے تقسیم کر کے جو R کو عمودی ہو، خطہ R پر دوہرا تکمل لینے سے رقبہ حاصل ہوگا۔

ہم نے ∇f کو استراری تصور کر کے اور پورے R پر $\nabla f \cdot \neq 0$ تصور کر کے مساوات ۵ حاصل کی۔ جب بھی یہ تکمل موجود ہو، اس کی قیمت کو سطح $f(x, y, z) = c$ کے اس حصہ کے رقبے کی تعریف لی جاتی ہے جو R کے اوپر (بلندی پر) پایا جاتا ہو۔

مثال ۱۵.۲۰: قطع مکافی $x^2 + y^2 - z = 0$ کے نچلے حصے سے مستوی $z = 4$ ایک سطح کاٹتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم مستوی xy میں سطح S اور اس کے نیچے خطہ R کا خاکہ بناتے ہیں (شکل ۱۵.۴۸)۔ سطح S، ہم قد سطح $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z = 0$ کا حصہ ہے اور R، مستوی xy میں قرص $x^2 + y^2 \leq 4$ ہے۔ مستوی R کا اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$ ہے۔

۲۴۷۹۱ سطح پر کسی بھی نقطہ x, y, z پر ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x^2+y^2-z \\
\nabla f &= 2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k} \\
|\nabla f| &= \sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(-1)^2} \\
&= \sqrt{4x^2+4y^2+1} \\
|\nabla f\cdot\boldsymbol{p}| &= |\nabla f\cdot\boldsymbol{k}| = |-1| = 1
\end{aligned}$$

۲۴۷۹۲ خطہ R میں $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہو گا، لہٰذا ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\text{سطحی رقبہ} &= \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot\boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A && \text{(مساوات ۵)} \\
&= \iint_{x^2+y^2\le 4} \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4r^2+1}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta && \text{(قطبی محدد)} \\
&= \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1}{12}(17^{\frac{3}{2}}-1)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1)
\end{aligned}$$

۲۴۷۹۳ □

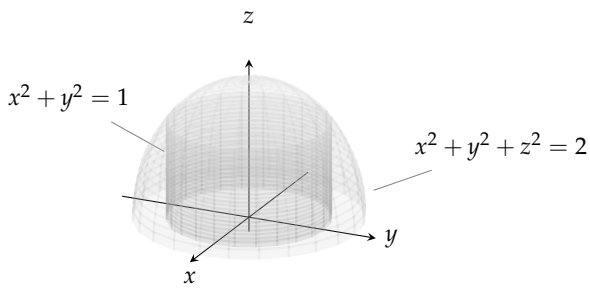
۲۴۷۹۴ مثال ۱۵.۲۱: نصف کرہ $x^2+y^2+z^2=2, z\ge 0$ سے بیلن $x^2+y^2=1$ ایک ٹوپی کاٹتا ہے (شکل ۱۵.۴۹)۔ اس ٹوپی کا
۲۴۷۹۵ رقبہ تلاش کریں۔

۲۴۷۹۶ **حل**

۲۴۷۹۷ ٹوپی S، ہم قد سطح $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = 2$ کا حصہ ہے۔ یہ یک بہ یک مطابقت کے ساتھ مستوی xy میں قرص R :
۲۴۷۹۸ $x^2+y^2\le 1$ پر تطلیل کرتا ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{k}$ مستوی R کو عمودی ہے۔

۲۴۷۹۹ سطح میں کسی بھی نقطے پر ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2 \\
\nabla f &= 2x\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k} \\
|\nabla f| &= 2\sqrt{x^2+y^2+z^2} = 2\sqrt{2} && \text{(چونکہ ٹوپی پر ہمیشہ } x^2+y^2+z^2=2 \text{ ہو گا)} \\
|\nabla f\cdot\boldsymbol{p}| &= |\nabla f\cdot\boldsymbol{k}| = |2z| = 2z
\end{aligned}$$



شکل ۱۵.۴۹: کرہ سے بیلن ٹوپی کاٹتا ہے (مثال ۱۵.۲۱)۔

۲۴۸۰۰ یوں ادرج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\text{سطحی رقبہ} = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A = \iint_R \frac{2\sqrt{2}}{2z}\,\mathrm{d}A = \sqrt{2}\iint_R \frac{\mathrm{d}A}{z} \tag{۶}$$

۲۴۸۰۱ یہاں z کا کیا کیا جائے؟

۲۴۸۰۲ چونکہ z کرہ کی سطح پر ایک نقطے کا z محدد ہے، لہٰذا اس کو ہم x اور y کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$$

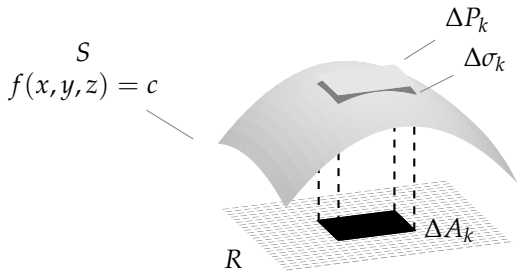
۲۴۸۰۳ اس کو مساوات ۶ میں ڈالتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\text{سطحی رقبہ} &= \sqrt{2}\iint_R \frac{\mathrm{d}A}{z} = \sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{\mathrm{d}A}{\sqrt{2-x^2-y^2}} \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2-r^2}} && \text{(قطبی محدد)} \\
&\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\Big[-(2-r^2)^{\frac{1}{2}}\Big]_{r=0}^{r=1}\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\sqrt{2}-1)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi(2-\sqrt{2})
\end{aligned}$$

۲۴۸۰۴ □

۲۴۸۰۵ **سطحی تکملات**

۲۴۸۰۶ سطحی رقبے کے حساب میں مستعمل تصورات بروئے کار لاتے ہوئے سطح پر تفاعل کے تکمل کا حصول سیکھتے ہیں۔



شکل ۱۵.۵۰: سطح پر کثافت بار جانتے ہوئے، سطحی تکمل میں ردوبدل کر کے، سطح پر کل بار دریافت کیا جا سکتا ہے۔

۲۴۸۰۷ فرض کریں، سطح $f(x,y,z)=c$ پر برقی بار تقسیم ہے (شکل ۱۵.۵۰) اور S کے ہر نقطہ پر تفاعل $g(x,y,z)$ بار فی اکائی رقبہ (کثافت بار) دیتا
۲۴۸۰۸ ہے۔ ایسی صورت میں S پر کل بار کا حساب تکمل کی صورت میں درج ذیل طریقے سے لکھا جا سکتا ہے۔

۲۴۸۰۹ ہم S کے نیچے، زمینی مستوی پر خطہ R کو چھوٹے چھوٹے مستطیلوں میں بالکل اسی طرح تقسیم کرتے ہیں جیسا S کا سطحی رقبہ تلاش کرنے کے لیے کیا جاتا
۲۴۸۱۰ ہے۔ ہر ایک ΔA_k کے بالکل اوپر کچھ بلندی پر سطح $\Delta\sigma_k$ پایا جاتا ہے، جس کو ہم مماسی مستوی پر مستطیلی ٹکڑا ΔP_k سے تخمین کرتے ہیں۔

۲۴۸۱۱ ہم سطحی رقبے کی تعریف کے طرز پر چل رہے ہیں، تاہم یہاں ایک اضافی قدم لیتے ہیں: ہم (x_k,y_k,z_k) پر g کی قیمت معلوم کر کے رقبہ $\Delta\sigma_k$ پر
۲۴۸۱۲ کل بار کو تخمیناً حاصل ضرب $g(x_k,y_k,z_k)\Delta P_k$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس کی وجہ درج ذیل ہے: خطہ R کو کافی چھوٹے چھوٹے مستطیلوں میں
۲۴۸۱۳ تقسیم کرنے کی صورت میں پورے $\Delta\sigma_k$ پر g کی قیمت تقریباً مستقل ہو گی، اور ΔP_k تقریباً $\Delta\sigma_k$ کے کے برابر ہو گا۔ یوں S پر کل بار تخمیناً درج
۲۴۸۱۴ ذیل مجموعہ کے برابر ہو گا۔

$$\text{کل بار} = \approx \sum g(x_k,y_k,z_k)\Delta P_k = \sum g(x_k,y_k,z_k)\frac{\Delta A_k}{|\cos\gamma_k|} \tag{۷}$$

۲۴۸۱۵ اگر سطح S کو ظاہر کرنے والا تفاعل f اور اس کے یک رتبی جزوی تفرق استمراری ہوں، اور S پر g استمراری ہو، تب R کی خانہ بندی ہمیشہ کی طرح
۲۴۸۱۶ نفیس بنانے سے مساوات ۷ کے دائیں ہاتھ میں پیش مجموعے درج ذیل حد کو پہنچتے ہیں۔

$$\iint_R g(x,y,z)\frac{\mathrm{d}A}{|\cos\gamma|} = \iint g(x,y,z)\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot\boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \tag{۸}$$

۲۴۸۱۷ یہ حد سطح S پر g کا تکمل کہلاتا ہے، جس کو R پر دہرا تکمل لکھا اور حاصل کیا جاتا ہے۔ اس تکمل کی قیمت سطح S پر کل بار دے گی۔

۲۴۸۱۸ اگر مساوات ۸ کا تکمل موجود ہو، تب آپ توقع کر سکتے ہیں کہ مساوات ۸ کا کلیہ سطح S پر کسی بھی تفاعل g کے تکمل کی تعریف ہے۔

تعریفات

اگر سطح S، جس کی تعریف مساوات $f(x,y,z) = c$ دیتی ہے، کا سایہ R ہو اور S کے تمام نقطوں پر g استمراری تفاعل ہو، S پر g کا **تکمل** درج ذیل ہو گا:

$$\iint g(x,y,z)\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \tag{۹}$$

جہاں $\boldsymbol{p}$ سایہ دار خطہ R کا اکائی عمودی سمتیہ ہے اور $\nabla f\cdot \boldsymbol{p} \neq 0$ ہے۔ اس تکمل کو **سطحی تکمل**[۲۱] کہتے ہیں۔

مختلف عملی استعمال میں مساوات ۹ کا تکمل مختلف معنی رکھتا ہے۔ اگر g کی قیمت مستقل طور پر 1 ہو، تکمل S کا رقبہ دے گا۔ اگر g ایک باریک خول، جس کی شکل کا نمونہ S ہو، کی کمیتی کثافت ہو تب تکمل خول کی کمیت دے گا۔

الجبرائی خواص: سطحی رقبے کا تفرقہ

ہم $\mathrm{d}A\,(|\nabla f|\,/\,|\nabla f\cdot \boldsymbol{p}|)$ کو $\mathrm{d}\sigma$ لکھ کر مساوات ۹ کا تکمل مختصراً (درج ذیل) لکھ سکتے ہیں۔

سطحی رقبہ کا تفرقہ اور سطحی تکملات کا تفرقی کلیہ

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \tag{۱۰}$$

سطحی رقبے کا تفرقہ

$$\iint_S g\,\mathrm{d}\sigma$$

سطحی تکملات کا تفرقی کلیہ

سطحی تکملات دیگر دہرا تکملات کی طرح رویہ رکھتے ہیں: دو تفاعلات کا تکمل ان تفاعلات کے انفرادی تکملات کا مجموعہ ہو گا وغیرہ وغیرہ۔ دائرہ کار کی جمع پذیری خاصیت درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

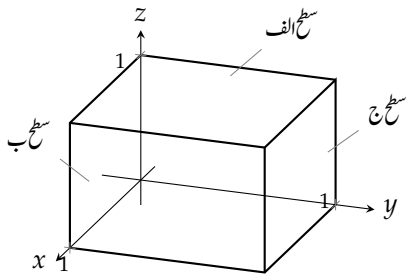
$$\iint_S g\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{S_1} g\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{S_2} g\,\mathrm{d}\sigma + \cdots + \iint_{S_n} g\,\mathrm{d}\sigma$$

کلیدی تصور یہ ہے کہ اگر S کو ہموار منحنیات، متناہی تعداد کی غیر منطبق، ہموار قطعات میں خانہ بند کرتی ہوں (یعنی اگر S **ٹکڑوں میں ہموار**[۲۲] ہو) تب قطعات پر تکملات کا مجموعہ S پر تکمل کے برابر ہو گا۔ یوں، مکعب کی سطح پر تفاعل کا تکمل، مکعب کی چھ سطحوں پر تکملات کا مجموعہ ہو گا۔

مثال ۱۵.۲۲: ربع اول سے مستویات $x = 1$، $y = 1$، اور $z = 1$ ایک مکعب کاٹتی ہیں (شکل ۱۵.۵۱)۔ اس مکعب کی سطح پر $g(x,y,z) = xyz$ کا تکمل لیں۔

---

[۲۱] surfaceintegral
[۲۲] piecewisesmooth



شکل ۱۵.۵۱: مکعب پر تفاعل کا تکمل حاصل کرنے کے لیے مکعب کے چھ اطراف پر تکمل لے کر نتائج جمع کریں (مثال ۱۵.۲۲)۔

۲۴۸۳۴ **حل**

۲۴۸۳۵ ہم باری باری مکعب کی چھ سطحوں پر xyz کا تکمل لے کر تمام نتائج کا مجموعہ لیتے ہیں۔ محددی مستویات میں پائے جانے والے اطراف میں $xyz = 0$

۲۴۸۳۶ ہو گا، لہٰذا مکعب کی سطح پر تکمل گھٹ کر درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے۔

$$\iint_{\text{سطح مکعبی}} xyz \, \mathrm{d}\sigma = \iint_{\text{سطح الف}} xyz \, \mathrm{d}\sigma + \iint_{\text{سطح ب}} xyz \, \mathrm{d}\sigma + \iint_{\text{سطح ج}} xyz \, \mathrm{d}\sigma$$

۲۴۸۳۷ مستوی xy میں چوکور خطہ $R_{xy} : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ پر سطح الف کی مساوات $f(x,y,z) = z = 1$ ہے۔ اس سطح

۲۴۸۳۸ اور خطہ کے لیے ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}, \quad \nabla f = \boldsymbol{k}, \quad |\nabla f| = 1, \quad |\nabla f \cdot \boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}| = 1, \\
&\mathrm{d}\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|} \, \mathrm{d}A = \frac{1}{1} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \\
&xyz = xy(1) = xy
\end{aligned}$$

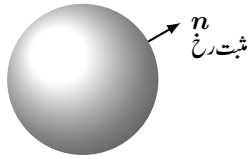
۲۴۸۳۹ یوں ذیل ہو گا۔

$$\iint_{\text{سطح الف}} xyz \, \mathrm{d}\sigma = \iint_{R_{xy}} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y}{2} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{4}$$

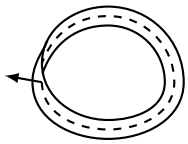
۲۴۸۴۰ تشاکلیت کی وجہ سے سطح ب اور ج پر xyz کے تکمل بھی $\frac{1}{4}$ دیں گے۔ یوں ذیل ہو گا۔

$$\iint_{\text{سطح مکعبی}} xyz \, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

۲۴۸۴۱ □



شکل ۱۵.۵۲: ہموار بند سطح ہمیشہ قابل سمت بند ہو گی۔ ہر نقطے پر باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ مثبت رخ دیگا۔



شکل ۱۵.۵۳: موبیوس پٹی ناقابل سمت بند ہے۔

سمت بندی

وہ ہموار سطح S ، جس پر عمودی اکائی سمتیات کا ایسا میدان $\boldsymbol{n}$ متعارف کیا جا سکتا ہو جو مقام کے ساتھ استمراری تبدیل ہو، **قابل سمت بند**[۲۳] یا **دو طرفہ**[۲۴] کہلاتی ہے۔ قابل سمت بند سطح کا ہر ذیلی ٹکڑا قابل سمت بند ہو گا۔ کرہ اور فضا میں دیگر بند سطحیں (ایسی ہموار سطحیں جو ٹھوس اجسام کو احاطہ کرتی ہوں) قابل سمت بند ہوں گی۔ روایتاً $\boldsymbol{n}$ کا رخ بند سطح سے باہر کی طرف رکھا جاتا ہے۔

میدان $\boldsymbol{n}$ منتخب کرنے کے بعد ہم کہتے ہیں سطح **سمت بند**[۲۵] بنائی گئی ہے اور سطح بشمول عمودی میدان **سمت بند سطح**[۲۶] کہلاتی ہے۔ کسی بھی نقطے پر سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ، اس نقطے پر مثبت رخ کہلاتا ہے (شکل ۱۵.۵۲)۔

شکل ۱۵.۵۳ میں **موبیوس پٹی**[۲۷] دکھائے گئی ہے جو ناقابل سمت بند ہے۔ آپ کسی بھی نقطہ سے آغاز کر کے استمراری اکائی عمودی میدان بنانا شروع کریں۔ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کو سطح پر استمراری حرکت دینے سے آپ ابتدائی نقطے تک یوں پہنچ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{n}$ کا رخ ابتدائی رخ کا مخالف ہو۔ ایک نقطے پر سمتیہ بیک وقت دو مخالف رخ نہیں ہو سکتا، اگرچہ استمراری میدان کی صورت میں موبیوس پٹی پر ایسا ہی ہونا چاہیے۔ یوں ہم اخذ کرتے ہیں کہ ایسا میدان موجود نہیں ہو گا۔

بہاؤ کا سطحی تکمل

فرض کریں قابل سمت بند سطح S پر استمراری سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ ہے، اور سطح پر منتخب اکائی عمودی میدان $\boldsymbol{n}$ ہے۔ ہم S پر $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ کے تکمل کو S پر مثبت رخ کا بہاؤ کہتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{n}$ کے رخ $\boldsymbol{F}$ کے غیر سمتی جزو کا S پر تکمل، سطح سے گزرتا بہاؤ دے گا۔

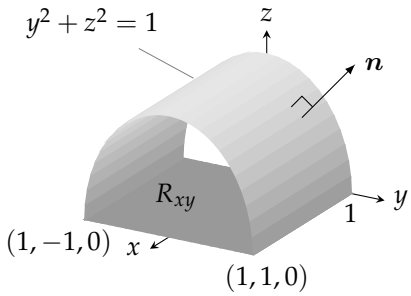
تعریف

قابل سمت بند سطح S کو پار کرتا، $\boldsymbol{n}$ کے رخ، تین ابعادی سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ درج ذیل کلیہ دے گا۔

$$\text{بہاؤ} = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \tag{۱۱}$$

---

[۲۳] orientable
[۲۴] two-sided
[۲۵] oriented
[۲۶] orientedsurface
[۲۷] Mobiusband



شکل ۱۵.۵۴: سطح سے باہر رخ سمتی میدان کا بہاؤ (مثال ۱۵.۲۳)۔ زمینی رقبہ R_{xy} دو (2) کے برابر ہے۔

۲۴۸۵۶ یہ تعریف مسطح منحنی C کو پار کرتے، دو ابعادی میدان $\boldsymbol{F}$ کے بہاؤ کی تعریف کے عین مطابق ہے۔ مستوی میں بہاؤ کو، منحنی C کو $\boldsymbol{F}$ کے عمودی غیر
۲۴۸۵۷ سمتی جزو کا تکمل:

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$$

۲۴۸۵۸ ظاہر کرتا ہے۔

۲۴۸۵۹ گر $\boldsymbol{F}$ تین ابعادی سیالی بہاؤ کا سمتی رفتار میدان ہو، تب S سے (گزرتا) $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ، منتخب مثبت رخ میں S سے گزرتے سیال کی خالص شرح دے گا
۲۴۸۶۰ ۔ ایسے بہاؤ پر تفصیلاً تبصرہ حصہ ۱۵.۷ میں کیا جائے گا۔

۲۴۸۶۱ اگر S ہم قد سطح $g(x,y,z)=c$ کا حصہ ہو، تب $\boldsymbol{n}$ درج ذیل میں سے، جو پسند کا رخ دیتا ہو، ہو گا۔

$$\boldsymbol{n}=\pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|} \tag{۱۲}$$

۲۴۸۶۲ مطابقتی بہاؤ ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\text{بہاؤ} &= \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma && \text{مساوات ۱۱}\\
&= \iint_R \left(\boldsymbol{F}\cdot\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g|}\right)\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A && \text{مساوات ۱۰ اور ۱۲}\\
&= \iint_R \boldsymbol{F}\cdot\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g\cdot\boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A && (۱۳)
\end{aligned}$$

۲۴۸۶۳ مثال ۱۵.۲۳: بیلن $y^2+z^2=1, z\geq 0$ سے مستویات $x=0$ اور $x=1$ سطح S کاٹتی ہیں (شکل ۱۵.۵۴)۔ سطح S سے باہر
۲۴۸۶۴ رخ $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ کا بہاؤ تلاش کریں۔

۲۴۸۶۵ **حل**

۲۴۸۶۶ سطح S پر باہر روح عمودی میدان $\boldsymbol{n}$ کو $g(x,y,z) = y^2 + z^2$ کی ڈھلوان (ذیل دیکھیں) سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{n} = +\frac{\nabla g}{|\nabla g|} = \frac{2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} = \frac{2yaj + 2z\boldsymbol{k}}{2\sqrt{1}} = y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

۲۴۸۶۷ چونکہ $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$ ہے لہٰذا درج ذیل بھی ہو گا۔

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{|\nabla g|}{|\nabla g \cdot \boldsymbol{k}|}\,\mathrm{d}A = \frac{2}{|2z|}\,\mathrm{d}A = \frac{1}{z}\,\mathrm{d}A$$

۲۴۸۶۸ ہم $z \geq 0$ کی وجہ سے مطلق قیمت کی علامت ہٹا سکتے ہیں۔

۲۴۸۶۹ سطح پر $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ کی قیمت ذیل کلیہ دیگا، جہاں آخری قدم میں S پر $y^2 + z^2 = 1$ ہو گا۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} &= (yz\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}) \cdot (y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})\\ &= y^2z + z^3 = z(y^2 + z^2)\\ &= z\end{aligned}$$

۲۴۸۷۰ یوں S سے $\boldsymbol{F}$ کا اخراجی بہاؤ ذیل ہو گا۔

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S (z)\left(\frac{1}{z}\,\mathrm{d}A\right) = \iint_{R_{xy}} \mathrm{d}A = \text{رقبہ}\ R_{xy} = 2$$

۲۴۸۷۱ □

۲۴۸۷۲ **باریک خول کی کمیت اور معیار اثر**

۲۴۸۷۳ گھریلو برتن، ڈھول، اور دیگر باریک خول کو سطحوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ان کی کمیت اور معیار اثر جدول ۱۵.۳ میں پیش کلیات سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔

۲۴۸۷۴ مثال ۱۵.۲۴: رداس a اور مستقل کثافت δ کے باریک نصف کروی خول کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

۲۴۸۷۵ **حل:** ہم خول کو نصف کرہ:

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad z \geq 0$$

۲۴۸۷۶ سے ظاہر کرتے ہیں (شکل ۱۵.۵۵)۔ محور z کے لحاظ سے سطح کی تشاکلی کی وجہ سے $\overline{x} = \overline{y} = 0$ ہو گا۔ کلیہ $\overline{z} = M_{xy}/M$ سے $\overline{z}$ تلاش

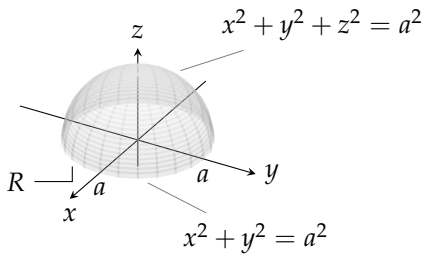
۲۴۸۷۷ کرنا باقی ہے۔

۲۴۸۷۸ خول کی کمیت درج ذیل ہے۔

$$M = \iint_S \delta\,\mathrm{d}\sigma = \delta \iint_S \mathrm{d}\sigma = (\delta)(\text{رقبہ}, S) = 2\pi a^2\delta$$

جدول ۱۵.۳: نہایت باریک خول کی کمیت اور معیار اثر

کمیت	$M = \iint_S \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$ نقطہ (x,y,z) پر $\delta(x,y,z)$ کثافت (کمیت فی اکائی رقبہ) ہے
محددی مستویات کے لحاظ سے اول معیار اثر	$M_{yz} = \iint_S x\delta\,\mathrm{d}\sigma, \qquad M_{xz} = \iint_S y\delta\,\mathrm{d}\sigma, \qquad M_{xy} = \iint_S z\delta\,\mathrm{d}\sigma$
مرکز کمیت کے محدد	$\overline{x} = M_{yz}/M, \qquad \overline{y} = M_{xz}/M, \qquad \overline{z} = M_{xy}/M$
جمودی معیار اثر	$I_x = \iint_S (y^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}\sigma, \qquad I_y = \iint_S (x^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}\sigma$ $I_z = \iint_S (x^2+y^2)\delta\,\mathrm{d}\sigma, \qquad I_L = \iint_S r^2\delta\,\mathrm{d}\sigma$ نقطہ (x,y,z) سے لکیر L کا فاصلہ $r(x,y,z)$ ہے
لکیر L کے لحاظ سے ردائی دوار	$R_L = \sqrt{I_L/M}$



شکل ۱۵.۵۵: مستقل کمیتی کثافت کی باریک چادر کا نصف کروی خول (مثال ۱۵.۲۴)۔

۲۴۸۷۹ M_{xy} کا تکمل تلاش کرنے کی خاطر $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$ لیتے ہیں۔ یوں،

$$M_{xy} = \iint_S z\delta \,\mathrm{d}\sigma = \delta \iint_R z\frac{a}{z}\,\mathrm{d}\sigma = \delta a \iint_R \mathrm{d}A = \delta a(\pi a^2) = \delta \pi a^3$$

۲۴۸۸۰ لہٰذا ذیل ہو گا۔

$$\overline{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi a^3 \delta}{2\pi a^2 \delta} = \frac{a}{2}$$

۲۴۸۸۱ خول کا مرکز کمیت نقطہ $(0, 0, a/2)$ پر ہو گا۔ □

۲۴۸۸۲ **سوالات**

۲۴۸۸۳

۲۴۸۸۴ **سطحی رقبہ**

۲۴۸۸۵ سوال ۱۵.۱۷۱: مکانی جسم $x^2 + y^2 - z = 0$ سے مستوی $z = 2$ جو سطح کاٹتی ہے اس کا رقبہ تلاش کریں۔

۲۴۸۸۶ سوال ۱۵.۱۷۲: مکانی جسم $x^2 + y^2 - z = 0$ سے مستویات $z = 2$ اور $z = 6$ جو پٹی کاٹتی ہے اس کا رقبہ تلاش کریں۔

۲۴۸۸۷ سوال ۱۵.۱۷۳: مستوی $x + 2y + 2z = 5$ سے ایک بیلن، جس کی دیواریں $x = y^2$ اور $x = 2 - y^2$ ہیں، جو خطہ کاٹتا ہے اس
۲۴۸۸۸ کا رقبہ تلاش کریں۔

۲۴۸۸۹ سوال ۱۵.۱۷۴: سطح $x^2 - 2z = 0$ کے اس حصے کا رقبہ تلاش کریں جو مستوی xy میں واقع اس مثلث کے اوپر پایا جاتا ہے جس کو لکیر $x =$
۲۴۸۹۰ $\sqrt{3}$ ، $y = 0$ ، اور $y = x$ گھیرتی ہیں۔

۲۴۸۹۱ سوال ۱۵.۱۷۵: سطح $x^2 - 2y - 2z = 0$ کے اس حصے کا رقبہ تلاش کریں جو مستوی xy میں واقع اس مثلث کے اوپر پایا جاتا ہے جس کو لکیر
۲۴۸۹۲ x=2 ، $y = 0$ ، اور $y = 3x$ گھیرتی ہیں۔

۲۴۸۹۳ سوال ۱۵.۱۷۶: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ جو ٹوپی کاٹتا ہے اس کا رقبہ تلاش کریں۔

۲۴۸۹۴ سوال ۱۵.۱۷۷: مستوی $z = cx$ سے بیلن $x^2 + y^2 = 1$ جو ترخیم کاٹتا ہے اس کا رقبہ تلاش کریں۔

۲۴۸۹۵ سوال ۱۵.۱۷۸: بیلن $x^2 + z^2 = 1$ کے اس بالائی حصے کا رقبہ تلاش کریں جو مستویات $x = \pm 1/2$ اور $y = \pm 1/2$ کے بیچ پایا جاتا
۲۴۸۹۶ ہے۔

۲۴۸۹۷ سوال ۱۵.۱۷۹: مستوی yz میں واقع چھلا $1 \leq y^2 + z^2 \leq 4$ کے اوپر مکانی جسم $x = 4 - y^2 - z^2$ کا جو حصہ پایا جاتا ہے اس کا
۲۴۸۹۸ رقبہ تلاش کریں۔

۲۴۸۹۹ سوال ۱۵.۱۸۰: مکانی سطح $x^2 + y + z^2 = 2$ سے مستوی $y = 0$ جو سطح کاٹتی ہے اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۸۱: مستوی xy میں واقع مربع $R:\ 1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1$ کے اوپر سطح $x^2 - 2\ln x + \sqrt{15}y - z = 0$ کا جو حصہ پایا جاتا ہے اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۸۲: مستوی xy میں واقع مربع $R:\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ کے اوپر سطح $2x^{3/2} + 2y^{3/2} - 3z = 0$ کا جو حصہ پایا جاتا ہے اس کا رقبہ تلاش کریں۔

سطحی تکملات

سوال ۱۵.۱۸۳: ثمن اول سے مستویات $x = a$ ، $y = a$ ، اور $z = a$ جو مکعب کاٹتی ہیں اس کی سطح پر $g(x,y,z) = x + y + z$ کا تکمل حاصل کریں۔

سوال ۱۵.۱۸۴: ثمن اول سے محددی مستویات اور مستویات $x = 2$ اور $y + z = 1$ جو بیچر کاٹتی ہیں اس کی سطح پر $g(x,y,z) = y + z$ کا تکمل حاصل کریں۔

سوال ۱۵.۱۸۵: ثمن اول سے مستویات $x = a$ ، $y = b$ ، اور $z = c$ جو مستطیلی ٹھوس جسم کاٹتی ہیں اس کی سطح پر $g(x,y,z) = xyz$ کا تکمل لیں۔

سوال ۱۵.۱۸۶: مستویات $x = \pm a$ ، $y = \pm b$ ، اور $z = \pm c$ جو مستطیلی ٹھوس جسم گھیرتی ہیں اس کی سطح پر $g(x,y,z) = xyz$ کا تکمل لیں۔

سوال ۱۵.۱۸۷: تفاعل $g(x,y,z) = x + y + z$ کا تکمل ثمن اول میں واقع مستوی $2x + 2y + z = 2$ کے ٹکڑے پر حاصل کریں۔

سوال ۱۵.۱۸۸: تفاعل $g(x,y,z) = x\sqrt{y^2+4}$ کا تکمل اس سطح پر لیں جو مستویات $x = 0$ ، $x = 1$ ، اور $z = 0$ مکافی بیلن $y^2 + 4z = 16$ سے کاٹتی ہیں۔

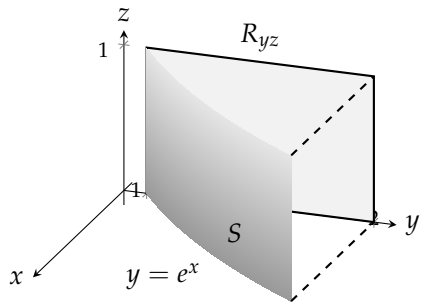
سطح سے گزرنے والا بہاؤ

سطح S سے میدان $\boldsymbol{F}$ کا گزرنے والا بہاؤ سوال ۱۵.۱۸۹ اور سوال ۱۵.۱۹۰ میں تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۸۹: $\boldsymbol{F}(x,y,z) = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$
مستطیل سطح $z = 0,\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 3$ جس کا رخ $\boldsymbol{k}$ ہے سطح S ہے۔

سوال ۱۵.۱۹۰: $\boldsymbol{F}(x,y,z) = yx^2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$
مستطیل سطح $y = 0,\ -1 \le x \le 2,\ 2 \le z \le 7$ جس کا رخ $-\boldsymbol{j}$ ہے سطح S ہے۔

ثمن اول میں کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ کے ٹکڑے سے، جس کا رخ مبدا سے دوری کی جانب ہے، میدان $\boldsymbol{F}$ کا گزرنے والا بہاؤ سوال ۱۵.۱۹۱ تا ۱۵.۱۹۶ میں تلاش کریں۔



شکل ۱۵.۵۶: سطح اور خطہ برائے سوال ۱۵.۱۹۹

سوال ۱۵.۱۹۱: $\boldsymbol{F}(x, y, z) = z\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۱۹۲: $\boldsymbol{F}(x, y, z) = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۱۹۳: $\boldsymbol{F}(x, y, z) = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۱۹۴: $\boldsymbol{F}(x, y, z) = zx\boldsymbol{i} + zy\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۱۹۵: $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۱۹۶: $\boldsymbol{F}(x, y, z) = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

سوال ۱۵.۱۹۷: قطع مکافی بیلن $z = 4 - y^2$ سے مستویات $x = 0$ ، $x = 1$ ،اور $z = 0$ جو سطح کاٹتی ہیں اس سے اوپر رخ گزرتا بہاؤ میدان $\boldsymbol{F}(x, y, z) = z^2\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - 3z\boldsymbol{k}$ کے لیے تلاش کریں۔

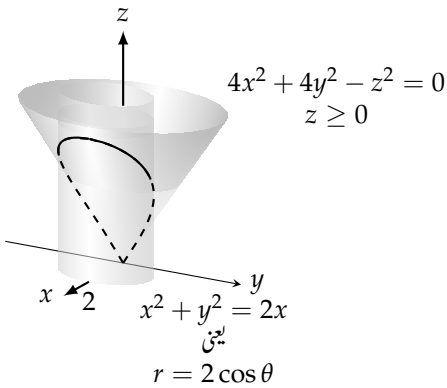
سوال ۱۵.۱۹۸: مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ کے نچلے حصے سے مستوی $z = 1$ جو سطح کاٹتی ہے اس سے باہر رخ (محور z سے دور جانب) گزرتا بہاؤ میدان $\boldsymbol{F}(x, y, z) = 4x\boldsymbol{i} + 4y\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ کے لیے تلاش کریں۔

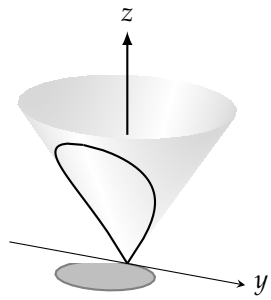
سوال ۱۵.۱۹۹: فرض کریں ثمن اول میں بیلن $y = e^x$ کا ٹکڑا S مستوی yz میں واقع مستطیل $R_{yz} : 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 1$ پر محور x کے متوازی سایہ ڈالتا ہے (شکل ۱۵.۵۶)۔ فرض کریں S کے اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کا رخ مستوی yz سے دور جانب ہے۔ سطح S سے $\boldsymbol{n}$ کے رخ گزرنے والا بہاؤ میدان $\boldsymbol{F}(x, y, z) = -2\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ کے لیے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۰۰: ثمن اول میں بیلن $y = \ln x$ کا ٹکڑا سطح S ، مستوی xz پر محور y کے متوازی مستطیل سایہ $R_{xz} : 1 \leq x \leq e, 0 \leq z \leq 1$ ڈالتا ہے۔ سطح S کے اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کا رخ مستوی xz سے دور جانب ہے۔ میدان $\boldsymbol{F} = 2y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ کا $\boldsymbol{n}$ کے رخ S سے گزرتا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۰۱: ثمن اول سے مستویات $x = a$ ، $y = a$ ،اور $z = a$ مکعب کاٹتی ہیں۔ مکعب کی سطح سے باہر رخ میدان $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j} + 2xz\boldsymbol{k}$ کا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۰۲: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ سے مستوی $z = 3$ بالائی ٹوپی کاٹتا ہے۔ میدان $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ کا بہاؤ اس ٹوپی سے باہر رخ تلاش کریں۔





شکل ۱۵.۵۷: سطح برائے سوال ۱۵.۲۰۵

۲۴۹۴۸

۲۴۹۴۹ **معیار اثر اور کمیت**

۲۴۹۵۰ سوال ۱۵.۲۰۳: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ کے اس حصہ کا، جو ثمن اول میں پایا جاتا ہے، وسطانی مرکز تلاش کریں۔

۲۴۹۵۱ سوال ۱۵.۲۰۴: بیلن $y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$ سے مستویات $x = 0$ اور $x = 3$ جو سطح کاٹتی ہیں (یہ مثال ۱۵.۲۳ کی سطح سے
۲۴۹۵۲ مشابہت رکھتی ہے) اس کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

۲۴۹۵۳ سوال ۱۵.۲۰۵: مستقل کثافت δ کے مخروط $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ سے مستویات $z = 1$ اور $z = 2$ جو باریک خول کاٹتی ہیں اس
۲۴۹۵۴ کا مرکز کمیت، اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

۲۴۹۵۵ سوال ۱۵.۲۰۶: مستقل کثافت δ کے مخروط $4x^2 + 4y^2 - z^2, z \geq 0$ سے دائری بیلن $x^2 + y^2 = 2x$ جو باریک خول
۲۴۹۵۶ (شکل ۱۵.۵۷) کاٹتا ہے اس کا محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

۲۴۹۵۷ سوال ۱۵.۲۰۷:

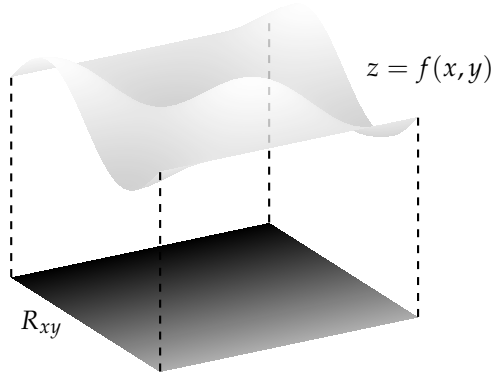
۲۴۹۵۸ ا. مستقل کثافت δ اور رداس a کے باریک کروی خول کا جمودی معیار اثر قطر کے لحاظ سے تلاش کریں۔ (نصف کرہ کے لیے نتیجہ حاصل کر کے دگنا
۲۴۹۵۹ کریں۔)

۲۴۹۶۰ ب. مسئلہ متوازی محور (سوالات ۱۴.۵) اور جزو الف کا نتیجہ استعمال کر کے خول کے مماسی لکیر کے لحاظ سے خول کا جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

۲۴۹۶۱ سوال ۱۵.۲۰۸:

۲۴۹۶۲ ا. ٹھوس مخروط کا قد h اور رداس a ہے۔ مخروط کی جانبی سطح (تل شامل نہیں) کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

۲۴۹۶۳ ب. کلیہ پاپس (سوالات ۱۴.۵) اور جزو الف کا نتیجہ استعمال کر کے مخروط کی مکمل سطح (جانبی سطح اور تل دونوں شامل) کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔



شکل ۱۵.۵۸: سطح $z = f(x, y)$ کے لیے سطح کا رقبہ کلیہ $A = \iint_{R_{xy}} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ دے گا۔

ج. رداس a اور قد h کے مخروط کو رداس a کے نصف کرہ کے ساتھ جوڑنے سے سطح S بنتی ہے جو آئس کریم کے مخروط سے مشابہ ہے۔ کلیہ پاپس اور جزو الف کا نتیجہ استعمال کر کے S کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ وسطانی مرکز کو مخروط اور نصف کرہ کے ملاپ کی سطح پر ہونے کے لیے مخروط کا قد کتنا ہونا ہو گا؟

سطحی رقبوں کے خصوصی کلیے

اگر مستوی xy میں واقع پورے خطہ R_{xy} میں سطح S کو تفاعل $z = f(x, y)$ معین کرتا ہو، جس کے یک رتبی تفرق استمراری ہوں (شکل ۱۵.۵۸)، تب سطح S تفاعل $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ کی ہم قد سطح $F(x, y, z) = 0$ بھی ہو گی۔ خطہ R_{xy} کا عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$ لیتے ہوئے ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
|\nabla F| &= |f_x \boldsymbol{i} + f_y \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}, \\
|\nabla F \cdot \boldsymbol{p}| &= |(f_x \boldsymbol{i} + f_y \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{k}| = |-1| = 1 \\
A &= \iint_{R_{xy}} \frac{|\nabla F|}{|\nabla F \cdot \boldsymbol{p}|}\, \mathrm{d}A = \iint_{R_{xy}} \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y
\end{aligned}
\tag{۱۴}
$$

اسی طرح مستوی yz میں واقع خطہ R_{yz} پر ہموار سطح $x = f(y, z)$ کا رقبہ ذیل

$$
A = \iint_{R_{yz}} \sqrt{f_y^2 + f_z^2 + 1}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z \tag{۱۵}
$$

۲۴۹۷۳ اور مستوی xz میں واقع خطہ R_{xz} پر ہموار سطح $y = f(x,z)$ کا رقبہ ذیل ہو گا۔

$$A = \iint_{R_{xz}} \sqrt{f_x^2 + f_z^2 + 1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \tag{۱۶}$$

۲۴۹۷۴ مساوات ۱۴ تا ۱۶ استعمال کر کے سوال ۱۵.۲۰۹ تا ۱۵.۲۱۴ میں رقبے تلاش کریں۔

۲۴۹۷۵ سوال ۱۵.۲۰۹: مکافی سطح $z = x^2 + y^2$ کے زیریں حصے سے مستوی $z = 3$ جو سطح کاٹتا ہے۔

۲۴۹۷۶ سوال ۱۵.۲۱۰: مکفی سطح $x = 1 - y^2 - z^2$ کی نوک سے مستوی yz جو سطح کاٹتا ہے۔

۲۴۹۷۷ سوال ۱۵.۲۱۱: مستوی xy میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ اور ترخیم $z = 9x^2 + 4y^2 = 36$ کے بیچ خطے کے اوپر مخروط
۲۴۹۷۸ $\sqrt{x^2 + y^2}$ کا ٹکڑا۔ (اشارہ: ہندسہ کے کلیات استعمال کر کے خطے کا رقبہ تلاش کریں۔)

۲۴۹۷۹ سوال ۱۵.۲۱۲: مستوی $2x + 6y + 3z = 6$ سے ثمن اول کے مستویات جو مثلث کاٹتی ہیں۔ باری باری ایک کلیہ استعمال کر کے رقبہ تین
۲۴۹۸۰ مختلف طریقوں سے تلاش کریں۔

۲۴۹۸۱ سوال ۱۵.۲۱۳: ثمن اول میں بیلن $y = (2/3)z^{3/2}$ سے مستویات $x = 1$ اور $y = 16/3$ جو سطح کاٹتی ہیں۔

۲۴۹۸۲ سوال ۱۵.۲۱۴: مستوی xz کے ربع اول سے مکافی $x = 4 - z^2$ جو خطہ کاٹتا ہے اس کے اوپر مستوی $y + z = 4$ کا ٹکڑا۔

۲۴۹۸۳

۲۴۹۸۴

۲۴۹۸۵ ۱۵.۶ مقدار معلوم سطحیں

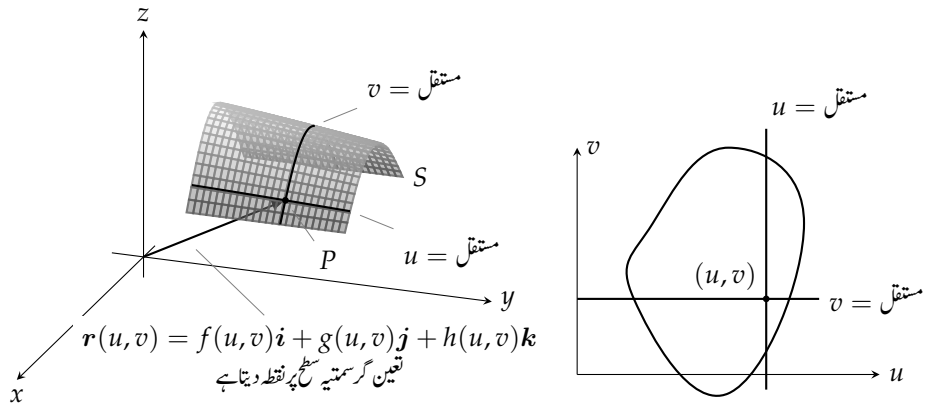
۲۴۹۸۶ ہم مستوی میں منحنیات کو ذیل تین مختلف طریقوں سے بیان کر چکے ہیں۔

صریح روپ	$y = f(x)$
خفی روپ	$F(x,y) = 0$
مقدار معلوم سمتیہ روپ	$\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}, \qquad a \le t \le b$

۲۴۹۸۷ فضا میں سطوح کی بھی ایسی تعریفیں موجود ہیں۔

صریح روپ	$z = f(x,y)$
خفی روپ	$F(x,y,z) = 0$

۲۴۹۸۸ ایک مقدار معلوم روپ بھی پایا جاتا ہے جس میں سطح پر نقطے کا مقام دو متغیرات کا سمتی تفاعل دیتا ہے۔ اس حصے میں سطحی رقبے اور سطحی تکملات کے مطالعہ کو ان
۲۴۹۸۹ سطحوں تک وسعت دی جائے گی جنہیں مقدار معلوم روپ میں بیان کیا گیا ہو۔



شکل ۱۵.۵۹: خطہ R پر دو متغیر کا سمتیہ تفاعل سطح S کا مقدار معلوم روپ دیتا ہے۔

سطحوں کی مقدار معلوم نمائندگی

فرض کریں استمراری سمتی تفاعل جو مستوی uv کے خطہ R پر معین اور R کے اندرونی حصے میں یک بہ یک مطابقت رکھتا ہے (شکل ۱۵.۵۹) کو درج ذیل مساوات ظاہر کرتی ہے۔

$$\boldsymbol{r}(u,v) = f(u,v)\boldsymbol{i} + g(u,v)\boldsymbol{j} + h(u,v)\boldsymbol{k} \tag{1}$$

ہم $\boldsymbol{r}$ کے دائرہ کار کو **سطح** S کہتے ہیں جس کی تعریف یا نقشہ کشی $\boldsymbol{r}$ کے ذریعہ کی جاتی ہے۔ مساوات ۱ اور R کا دائرہ کار مل کر سطح کا **مقدار معلوم روپ**[۲۸] دیتے ہیں۔ متغیرات u اور v **مقدار معلوم**[۲۹] کہلاتے ہیں جبکہ R کو **مقدار معلوم کا دائرہ کار**[۳۰] کہا جاتا ہے۔ مباحثہ سادہ رکھنے کی خاطر ہم فرض کرتے ہیں کہ R مستطیل خطہ ہے جس کو عدم مساوات $a \leq u \leq b,\ c \leq v \leq d$ تعین کرتی ہیں۔ یہ شرط مسلط کرنے سے کہ R کے اندرون میں $\boldsymbol{r}$ یک بہ یک مطابقت رکھتا ہو، یقینی بناتا ہے کہ سطح S خود کو قطع نہیں کرتی۔ دھیان رہے کہ مساوات ادرج ذیل تین مقدار معلوم مساوات کی سمتی معادل ہے۔

$$x = f(u,v), \qquad y = g(u,v), \qquad z = h(u,v)$$

مثال ۱۵.۲۵: مخروط کا مقدار معلوم روپ

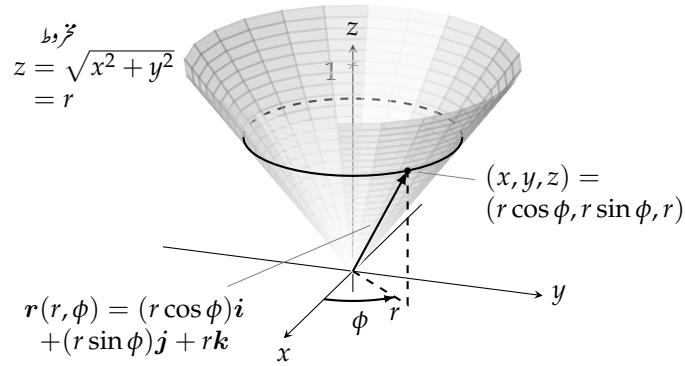
درج ذیل مخروط کا مقدار معلوم روپ حاصل کریں۔

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad 0 \leq z \leq 1$$

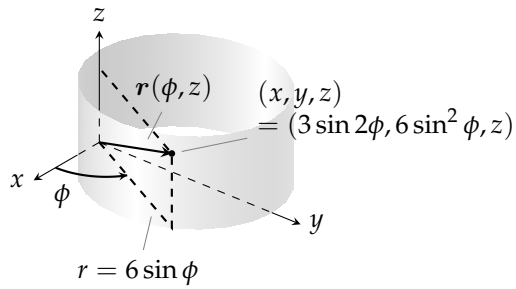
حل

---

parametricform[۲۸]
parameters[۲۹]
parameterdomain[۳۰]

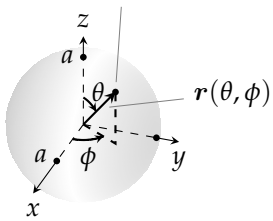


شکل ۱۵.۶۰: نلکی محدد میں مثال ۱۵.۲۵ کے مخروط کا مقدار معلوم روپ۔



شکل ۱۵.۶۲: نلکی محدد استعمال میں مثال ۱۵.۲۷ کے بیلن کا مقدار معلوم روپ۔

$$(x, y, z) = (a\sin\theta\cos\phi, a\sin\theta\sin\phi, a\cos\theta)$$



شکل ۱۵.۶۱: کروی محدد استعمال میں مثال ۱۵.۲۶ کے کرہ کا مقدار معلوم روپ۔

یہاں نلکی محدد استعمال کرنا بہتر ہے۔ مخروط پر عمومی نقطہ (x, y, z) (شکل ۱۵.۶۰) کے لیے $x = r\cos\phi$ ، $y = r\sin\phi$ ، $z = \sqrt{x^2+y^2} = r$ ہو گا جہاں $0 \le r \le 1$ اور $0 \le \phi \le 2\pi$ ہوں گے۔ مساوات ۱ میں $u = r$ اور $v = \phi$ لینے سے درج ذیل مقدار معلوم روپ حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{r}(r,\phi) = (r\cos\phi)\boldsymbol{i} + (r\sin\phi)\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k}, \quad 0 \le r \le 1, \qquad 0 \le \phi \le 2\pi$$

□

مثال ۱۵.۲۶: **کرہ کا مقدار معلوم روپ**

کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ کا مقدار معلوم روپ تلاش کریں۔

حل

کروی محدد میں عمومی نقطہ (x, y, z) کے لیے $x = a\sin\theta\cos\phi$ ، جبکہ $y = a\sin\theta\sin\phi$ ، اور $z = a\cos\theta$ ہو گا

۲۵۰۰۹ جہاں $0 \leq \theta \leq \pi$ اور $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ہیں (شکل ۱۵.۶۱)۔ مساوات ۱ میں $u = \theta$ اور $v = \phi$ لے کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(\theta, \phi) =& (a \sin\theta \cos\phi)\boldsymbol{i} + (a \sin\theta \sin\phi)\boldsymbol{j} + (a \cos\theta)\boldsymbol{k} \\ & 0 \leq \theta \leq \pi, \qquad 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{aligned}$$

۲۵۰۱۰ □

۲۵۰۱۱ مثال ۱۵.۲۷: **بیلن کا مقدار معلوم روپ**

۲۵۰۱۲ درج ذیل بیلن کا مقدار معلوم روپ تلاش کریں۔

$$x^2 + (y-3)^2 = 9, \qquad 0 \leq z \leq 5$$

۲۵۰۱۳ **حل**

۲۵۰۱۴ نلکی محدد میں نقطہ (x, y, z) کے لیے $x = r\cos\phi$ ، $y = r\sin\phi$ ، اور $z = z$ ہو گا۔ بیلن $x^2 + (y-3)^2 = 9$

۲۵۰۱۵ (شکل ۱۵.۶۲) پر واقع نقاط کی مساوات وہی ہو گی جو xy مستوی میں بیلن کے تل کی (رداس کو r لکھ کر) نلکی محدد مساوات ہے، یعنی

$$\begin{aligned} x^2 + (y^2 - 6y + 9) &= 9 \\ r^2 - 6r\sin\phi &= 0 \end{aligned}$$

۲۵۰۱۶ یا درج ذیل۔

$$r = 6\sin\phi, \qquad 0 \leq \phi \leq \pi$$

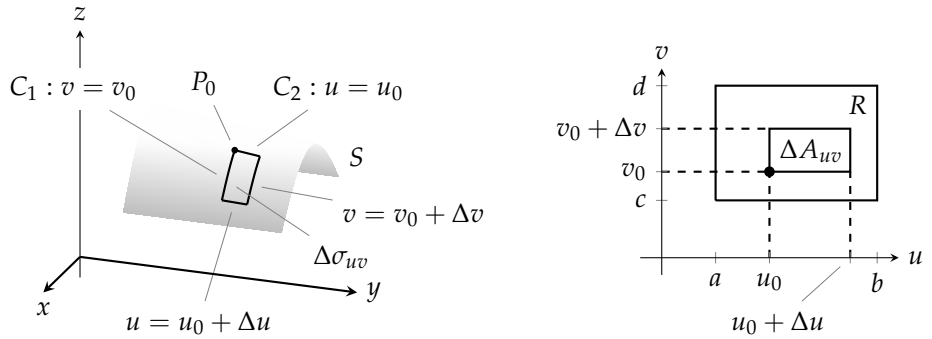
۲۵۰۱۷ پس بیلن پر عمومی نقطے کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi = 6\sin\phi\cos\phi = 3\sin 2\phi \\ y &= r\sin\phi = 6\sin^2\phi \\ z &= z \end{aligned}$$

۲۵۰۱۸ مساوات ۱ میں $u = \phi$ اور $v = z$ لینے سے درج ذیل مقدار معلوم روپ حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{r}(\phi, z) = (3\sin 2\phi)\boldsymbol{i} + (6\sin^2\phi)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}, \qquad 0 \leq \phi \leq \pi, \qquad 0 \leq z \leq 5$$

۲۵۰۱۹ □



شکل ۱۵.۶۳: مستوی uv میں رقبے کا چھوٹا ٹکڑا ΔA_{uv} سطح S پر خمیدہ رقبے کا ٹکڑا $\Delta\sigma_{uv}$ دیگا۔

سطحی رقبہ

ہم ایسا دوہرا تکمل حاصل کرنا چاہتے ہیں جس کے ذریعے خمیدہ سطح S ، جس کا مقدار معلوم روپ درج ذیل ہے، کا رقبہ نکالا جا سکے۔

$$\boldsymbol{r}(u,v) = f(u,v)\boldsymbol{i} + g(u,v)\boldsymbol{j} + h(u,v)\boldsymbol{k}, \qquad a \le u \le b, \qquad c \le v \le d$$

اس کے لیے سطح کا ہموار ہونا ضروری ہے۔ ہمواری کی تعریف سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ کے درج ذیل جزوی تفرق پر مبنی ہے۔

$$\boldsymbol{r}_u = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\boldsymbol{j} + \frac{\partial h}{\partial u}\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{r}_v = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v}\boldsymbol{i} + \frac{\partial g}{\partial v}\boldsymbol{j} + \frac{\partial h}{\partial v}\boldsymbol{k}$$

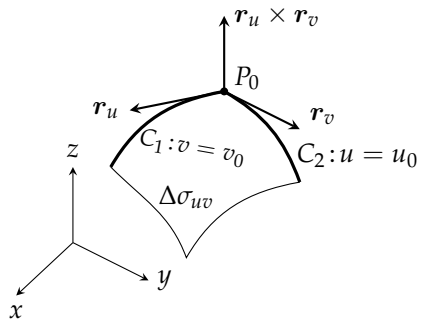
تعریف: **ہموار مقدار معلوم شدہ سطح**

مقدار معلوم سطح $\boldsymbol{r}(u,v) = f(u,v)\boldsymbol{i} + g(u,v)\boldsymbol{j} + h(u,v)\boldsymbol{k}$ اس وقت ہموار کہلاتی ہے جب $\boldsymbol{r}_u$ اور $\boldsymbol{r}_v$ استمراری ہوں اور مقدار معلوم دائرہ کار پر سمتیہ $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ کبھی صفر نہ ہو۔

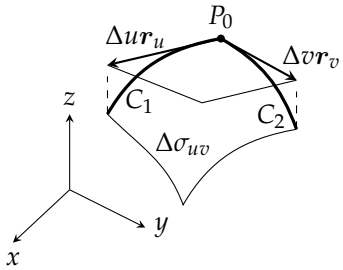
□

ہمواری کی تعریف میں یہ شرط کہ سمتیہ $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ مقدار معلوم دائرہ کار پر کبھی صفر نہ ہو، اس بات کو یقینی بناتی ہے کہ سمتیات $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ نہ صرف غیر صفر ہوں بلکہ کبھی ایک خط پر بھی نہ ہوں، لہٰذا یہ ہمیشہ سطح کے لیے مماسی سطح تعین کرتے ہیں۔

اب R میں ایک چھوٹا مستطیل ΔA_{uv} لیں جس کے اطراف $u=u_0$ ، $u=u_0+\Delta u$ ، $v=v_0$ ، اور $v=v_0+\Delta v$ ہوں (شکل ۱۵.۶۳)۔ مستطیل ΔA_{uv} کا ہر پہلو سطح S پر ایک منحنی پر نقش ہو جاتا ہے، اور یہ چار منحنیات مل کر سطح پر ایک ''چھوٹا خمیدہ رقبہ'' ΔS_{uv} کے گرد



شکل ۱۵.۶۴: رقبے کا ٹکڑا $\Delta\sigma_{uv}$ بڑا کر کے دکھایا گیا ہے۔



شکل ۱۵.۶۵: مستطیل جس کے اضلاع $\Delta u\boldsymbol{r}_u$ اور $\Delta v\boldsymbol{r}_v$ ہیں تخمیناً $\Delta\sigma_{uv}$ دیتا ہے۔

۲۵۰۳۱ گھیرا بناتی ہیں۔ شکل کے مطابق $v = v_0$ ضلع منحنی C_1 پر نقش ہے، $u = u_0$ منحنی C_2 پر، اور ان کا مشترک راس (u_0, v_0) نقطہ P_0 پر
۲۵۰۳۲ نقش ہے۔

۲۵۰۳۳ شکل ۱۵.۶۴ میں $\Delta\sigma_{uv}$ بڑا کر کے دکھایا گیا ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{r}_u(u_0, v_0)$ منحنی C_1 کو نقطہ P_0 کے مقام پر مماس ہے۔ اسی
۲۵۰۳۴ طرح $\boldsymbol{r}_v(u_0, v_0)$ منحنی C_2 کو نقطہ P_0 کے مقام پر مماس ہے۔ ان سمتیات کا صلیبی ضرب $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v$ نقطہ P_0 پر سطح کے عمود کا
۲۵۰۳۵ متوازی ہو گا۔ (یہاں ہم یہ مفروضہ استعمال کرتے ہیں کہ سطح S ہموار ہے، تاکہ یہ یقینی بنایا جا سکے کہ $\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v \neq \boldsymbol{0}$ ہو۔)

۲۵۰۳۶ ہم سطحی ٹکڑا $\Delta\sigma_{uv}$ کو مماسی مستوی پر موجود اس متوازی الاضلاع سے تخمین دیتے ہیں جس کے اطراف سمتیات $\Delta u\,\boldsymbol{r}_u$ اور $\Delta v\,\boldsymbol{r}_v$ ہیں (شکل
۲۵۰۳۷ ۱۵.۶۵)۔ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ درج ذیل ہے۔

$$|\Delta u\boldsymbol{r}_u \times \Delta v\boldsymbol{r}_v| = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\Delta u\Delta v \tag{۲}$$

۲۵۰۳۸ مستوی uv میں R کی خانہ بندی چھوٹے مستطیل رقبوں ΔA_{uv} سے کر کے سطح S کی خانہ بندی کی جا سکتی ہے جو $\Delta\sigma_{uv}$ سطحی ٹکڑوں پر مبنی ہو
۲۵۰۳۹ گا۔ ہر سطحی ٹکڑے $\Delta\sigma_{uv}$ کے رقبے کو مساوات ۲ سے تخمین دے کر تمام رقبے جمع کر کے S کا رقبہ تخمیناً درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sum_u \sum_v |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\,\Delta u\Delta v \tag{۳}$$

۲۵۰۴۰ اگر Δu اور Δv آزادانہ طور پر صفر کو پہنچتے ہو، $\boldsymbol{r}_u$ اور $\boldsymbol{r}_v$ کا استمرار اس بات کی ضمانت دیتا ہے کہ مساوات ۳ میں دیا گیا مجموعہ دوہرے تکمل
۲۵۰۴۱ $\int_c^d \int_a^b |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ کو پہنچے گا۔ یہی دوہرا تکمل سطح S کے رقبے کی تعریف ہے، اور یہ پچھلی تعریفوں کے ساتھ ہم آہنگ ہونے کے ساتھ
۲۵۰۴۲ ساتھ زیادہ عمومی ہے۔

۲۵۰۴۳ تعریف: **ہموار سطح کا رقبہ**

۲۵۰۴۴ ہموار سطح جس کی مقدار معلوم مساوات درج ذیل ہو

$$\boldsymbol{r}(u,v) = f(u,v)\boldsymbol{i} + g(u,v)\boldsymbol{j} + h(u,v)\boldsymbol{k}, \qquad a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d$$

۲۵۰۴۵ کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$A = \int_c^d \int_a^b |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \tag{۴}$$

۲۵۰۴۶ □

۲۵۰۴۷ ہم حصہ ۱۵.۵ کی طرح $|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$ کی جگہ $\mathrm{d}\sigma$ لکھ کر اس تکمل کو مختصراً درج ذیل لکھتے ہیں۔

سطحی رقبے کا تفرقہ اور سطحی رقبے کا تفرقی کلیہ

$$\mathrm{d}\sigma = |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \tag{۵}$$

سطحی رقبے کا تفرقہ

$$\iint_S \mathrm{d}\sigma$$

سطحی رقبے کا تفرقی کلیہ

۲۵۰۴۸ مثال ۱۵.۲۸: **مخروط کا رقبہ (مخروط)**

۲۵۰۴۹ مثال ۱۵.۲۵ میں ہم مخروط (شکل ۱۵.۶۰) کا درج ذیل مقدار معلوم روپ دریافت کر چکے ہیں۔

$$\boldsymbol{r}(r, \phi) = (r\cos\phi)\boldsymbol{i} + (r\sin\phi)\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k}, \qquad 0 \le r \le 1, \qquad 0 \le \phi \le 2\pi$$

۲۵۰۵۰ مساوات ۴ استعمال کرنے کے لیے ہم پہلے $\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\phi$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\phi &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos\phi & \sin\phi & 1 \\ -r\sin\phi & r\cos\phi & 0 \end{vmatrix} \\
&= -(r\cos\phi)\boldsymbol{i} - (r\sin\phi)\boldsymbol{j} + (\underbrace{r\cos^2\phi + r\sin^2\phi}_{r})\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

۲۵۰۵۱ یوں $|\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\phi| = \sqrt{r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi + r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r$ اور مخروط کا سطحی رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
A &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 |\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\phi| \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \qquad \text{مساوات ۴ میں } u = r, v = \phi \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2}\, r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} \, \mathrm{d}\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\pi) = \pi\sqrt{2} \quad \text{مربع اکائیاں}
\end{aligned}$$

۲۵۰۵۲ □

۲۵۰۵۳ مثال ۱۵.۲۹: **سطحی رقبہ (کرہ)**

۲۵۰۵۴ اس کرہ کا سطحی رقبہ تلاش کریں جس کا رداس a ہو۔

۲۵۰۵۵ **حل**

۲۵۰۵۶ ہم مثال ۱۵.۲۶ میں حاصل کیا گیا درج ذیل مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}(\theta,\phi) =&(a\sin\theta\cos\phi)\boldsymbol{i}+(a\sin\theta\sin\phi)\boldsymbol{j}+(a\cos\theta)\boldsymbol{k}\\ &0\le\theta\le\pi,\qquad 0\le\phi\le 2\pi\end{aligned}$$

۲۵۰۵۷ اب $\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\phi$ نکالتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\phi &= \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ a\cos\theta\cos\phi & a\cos\theta\sin\phi & -a\sin\theta\\ -a\sin\theta\sin\phi & a\sin\theta\cos\phi & 0\end{vmatrix}\\ &= (a^2\sin^2\theta\cos\phi)\boldsymbol{i}+(a^2\sin^2\theta\sin\phi)\boldsymbol{j}+(a^2\sin\theta\cos\theta)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

۲۵۰۵۸ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\left|\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_\phi\right| &= \sqrt{a^4\sin^4\theta\cos^2\phi+a^4\sin^4\theta\sin^2\phi+a^4\sin^2\theta\cos^2\theta}\\ &= \sqrt{a^4\sin^4\theta+a^2\sin^2\theta\cos^2\theta}=\sqrt{a^4\sin^2\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}\\ &= a^2\sqrt{\sin^2\theta}=a^2\sin\theta\end{aligned}$$

۲۵۰۵۹ چونکہ $0\le\theta\le\pi$ پر $\sin\theta\ge 0$ ہو گا لہٰذا سطحی رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi\\ &\int_0^{2\pi}\Big[-a^2\cos\theta\Big]_0^{\pi}\ \mathrm{d}\phi=\int_0^{2\pi}2a^2\ \mathrm{d}\phi=4\pi a^2 \quad \text{مربع اکائیاں}\end{aligned}$$

۲۵۰۶۰ یہ نتیجہ کرہ کے معلوم کلیہ کے عین مطابق ہے۔ □

۲۵۰۶۱ سطحی تکملات

۲۵۰۶۲ مقدار معلوم سطح کے رقبہ کا کلیہ حاصل کرنے کے بعد اب ہم تفاعل کا تکمل مقدار معلوم سطح پر حل کر سکتے ہیں۔

۲۵۰۶۳ تعریف: **سطحی تکمل برائے مقدار معلوم سطح**

۲۵۰۶۴ اگر سطح S استمراری ہو جس کا مقدار معلوم روپ $\boldsymbol{r}(u,v) = f(u,v)\boldsymbol{i} + g(u,v)\boldsymbol{j} + h(u,v)\boldsymbol{k}$ ہو جہاں $a \leq u \leq b$
۲۵۰۶۵ اور $c \leq v \leq d$ ہیں، اور $G(x,y,z)$ استمراری تفاعل ہو جو S پر معین ہو، تب S پر G کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_S G(x,y,z)\ \mathrm{d}\sigma = \int_c^d \int_a^b G\Big(f(u,v), g(u,v), h(u,v)\Big)\ |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$$

۲۵۰۶۶ □

۲۵۰۶۷ مثال ۱۵.۳۰: مقدار معلوم روپ کی سطح پر تکمل

۲۵۰۶۸ تفاعل $G(x,y,z) = x^2$ کا تکمل مخروطی سطح $z = \sqrt{x^2+y^2},\ 0 \leq z \leq 1$ پر معلوم کریں۔

۲۵۰۶۹ **حل**

۲۵۰۷۰ مثال ۱۵.۲۵ اور مثال ۱۵.۲۸ کا کام آگے بڑھاتے ہوئے $|\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\phi| = \sqrt{2}r$ لے کر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\iint_S x^2\ \mathrm{d}\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\cos^2\phi)(\sqrt{2}\,r)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi \qquad\qquad x = r\cos\phi \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\phi\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\phi\ \mathrm{d}\phi = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{\phi}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\phi\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

۲۵۰۷۱ □

۲۵۰۷۲ مثال ۱۵.۳۱: بہاؤ کی تلاش

۲۵۰۷۳ قطع مکافی بیلن $y = x^2,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq 4$ سے $\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k}$ کا باہر رخ گزرتا بہاؤ تلاش کریں (شکل
۲۵۰۷۴ ۱۵.۶۶)۔

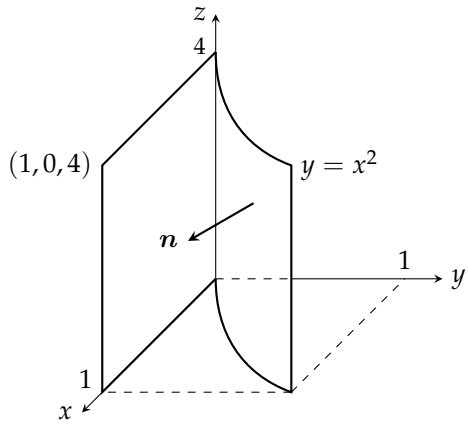
۲۵۰۷۵ **حل**

۲۵۰۷۶ سطح پر $x = x$ ، $y = x^2$ ، اور $z = z$ ہیں لہٰذا مقدار معلوم روپ $\boldsymbol{r}(x,z) = x\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ ہو گا جہاں
۲۵۰۷۷ $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq 4$ ہے۔ مماسی سمتیات کا صلیبی ضرب درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_z = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$$

۲۵۰۷۸ سطح پر باہر رخ عمودی سمتیہ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_z}{|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_z|} = \frac{2x\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}}{\sqrt{4x^2+1}}$$



شکل ۱۵.۶۶: مکافی نما بیل کی سطح سے گزرنے والے بہاؤ کی تلاش۔

۲۵۰۷۹ سطح پر $y = x^2$ ہے لہٰذا اس پر سمتیہ میدان درج ذیل ہو گا۔

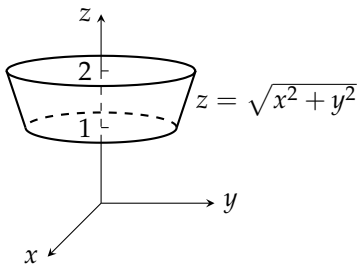
$$\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k} = x^2z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k}$$

۲۵۰۸۰ یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} &= \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}((x^2z)(2x) + (x)(-1) + (-z^2)(0))\\ &= \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2+1}}\end{aligned}$$

۲۵۰۸۱ اور $\boldsymbol{F}$ کا سطح سے باہر رخ گزرتا بہاؤ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}\sigma &= \int_0^4\int_0^1 \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2+1}}\,|\boldsymbol{r}_x\times\boldsymbol{r}_z|\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}z\\ &= \int_0^4\int_0^1 \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2+1}}\sqrt{4x^2+1}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}z\\ &= \int_0^4\int_0^1 (2x^3z - x)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z = \int_0^4 \left[\frac{x^4z}{2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \mathrm{d}z\\ &\int_0^4 \frac{z-1}{2}\ \mathrm{d}z = \frac{1}{4}(z-1)^2\Big]_0^4\\ &= \frac{1}{4}(9) - \frac{1}{4}(1) = 2\end{aligned}$$



شکل ۱۵.۶۷: سطوح $z = 1$ اور $z = 2$ مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ کو کاٹتی ہیں (برائے مثال ۱۵.۳۲)۔

۲۵۰۸۲ □

۲۵۰۸۳ مثال ۱۵.۳۲: مرکز کمیت کی تلاش

۲۵۰۸۴ مستقل کثافت δ کا باریک خول مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ سے مستویات $z = 1$ اور $z = 2$ کاٹتی ہیں (شکل ۱۵.۶۷)۔ اس خول کا مرکز
۲۵۰۸۵ کمیت تلاش کریں۔

۲۵۰۸۶ **حل**

۲۵۰۸۷ محور z کے لحاظ سے سطح تشاکل ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ اور $\bar{y} = 0$ ہوگا۔ ہمیں $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$ تلاش کرنی ہے۔ مثال ۱۵.۲۵ اور مثال ۱۵.۲۸ کی طرح
۲۵۰۸۸ چلتے ہوئے

$$\boldsymbol{r}(r,\phi) = r\cos\phi\,\boldsymbol{i} + r\sin\phi\,\boldsymbol{j} + r\,\boldsymbol{k}, \quad 1 \le r \le 2,\ 0 \le \phi \le 2\pi$$

۲۵۰۸۹ اور

$$\left|\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\phi\right| = \sqrt{2}\,r$$

۲۵۰۹۰ ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}
M &= \iint\limits_S \delta\ \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \delta\sqrt{2}\,r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi \\
&= \delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 \mathrm{d}\phi = \delta\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(2-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\phi \\
&= \delta\sqrt{2}\left[\frac{3\phi}{2}\right]_0^{2\pi} = 3\pi\delta\sqrt{2}
\end{aligned}$$

۲۵۰۹۱

$$
\begin{aligned}
M_{xy} &= \iint_S \delta z \, \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \delta r \sqrt{2} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi \\
&= \delta\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\phi = \delta\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 \mathrm{d}\phi \\
&= \delta\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{7}{3} \, \mathrm{d}\phi = \frac{14}{3}\pi\delta\sqrt{2} \\
\bar{z} &= \frac{M_{xy}}{M} = \frac{14\pi\delta\sqrt{2}}{3(3\pi\delta\sqrt{2})} = \frac{14}{9}
\end{aligned}
$$

۲۵۰۹۲ خول کا مرکز کمیت نقطہ $(0, 0, \frac{14}{9})$ پر پایا جاتا ہے۔ □

۲۵۰۹۳ **سوالات**

۲۵۰۹۴

۲۵۰۹۵ **سطح کے مقدار معلوم روپ کی تلاش**

۲۵۰۹۶ سوال ۱۵.۲۱۵ تا ۱۵.۲۳۰ میں دی گئی سطح کا مقدار معلوم روپ تلاش کریں۔ (درست جواب کے مختلف روپ ممکن ہیں لہٰذا آپ کے جواب کتاب میں دیے
۲۵۰۹۷ جواب سے مختلف ہو سکتے ہیں۔)

۲۵۰۹۸ سوال ۱۵.۲۱۵: قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2, \; z \leq 4$

۲۵۰۹۹ سوال ۱۵.۲۱۶: قطع مکافی سطح $z = 9 - x^2 - y^2, \; z \geq 0$

۲۵۱۰۰ سوال ۱۵.۲۱۷: **مخروط مقطوع** ثُمن اول میں $z = 0$ اور $z = 3$ کے بیچ مخروط $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$

۲۵۱۰۱ سوال ۱۵.۲۱۸: **مخروط مقطوع** مستوی $z = 2$ اور مستوی $z = 4$ کے بیچ مخروط $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$

۲۵۱۰۲ سوال ۱۵.۲۱۹: **کروی ٹوپی** کروی ٹوپی جو $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کاٹتا ہے۔

۲۵۱۰۳ سوال ۱۵.۲۲۰: **کروی ٹوپی** ثُمن اول میں مستوی xy اور مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کے بیچ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

۲۵۱۰۴ سوال ۱۵.۲۲۱: **کروی پٹی** مستوی $z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ اور مستوی $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ کے بیچ کروی پٹی $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

۲۵۱۰۵ سوال ۱۵.۲۲۲: **کروی ٹوپی** وہ بالائی کروی ٹوپی جو $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ سے مستوی $z = -2$ کاٹتا ہے۔

سوال ۱۵.۲۲۳: **مستویات کے بیچ قطع مکافی بیلن** وہ حصہ جو قطع مکافی بیلن $z = 4 - y^2$ سے مستویات $x = 0, x = 2, z = 0$ کاٹتی ہیں۔

سوال ۱۵.۲۲۴: **مستویات کے بیچ قطع مکافی بیلن** قطع مکافی بیلن $y = x^2$ جو $z = 0, z = 3$ اور $y = 2$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔

سوال ۱۵.۲۲۵: **دائری بیلنی پٹی** مستوی $x = 0$ اور مستوی $x = 3$ کے بیچ بیلن $y^2 + z^2 = 9$

سوال ۱۵.۲۲۶: **دائری بیلنی پٹی** مستوی xy سے اوپر مستوی $y = -2$ اور مستوی $y = 2$ کے بیچ بیلن $x^2 + z^2 = 4$

سوال ۱۵.۲۲۷: **بیلن کے اندر ترچھا مستوی** درج ذیل بیلن کے اندر مستوی $x + y + z = 1$ کا ٹکڑا۔ (الف) $x^2 + y^2 = 9$، (ب) $y^2 + z^2 = 9$

سوال ۱۵.۲۲۸: **بیلن کے اندر ترچھا مستوی** درج ذیل بیلن کے اندر مستوی $x - y + 2z = 2$ کا ٹکڑا۔ (الف) $x^2 + z^2 = 3$، (ب) $y^2 + z^2 = 2$

سوال ۱۵.۲۲۹: **دائری بیلنی پٹی** مستویات $y = 0$ اور $y = 3$ کے بیچ بیلن $(x - 2)^2 + z^2 = 4$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۳۰: **دائری بیلنی پٹی** مستویات $x = 0$ اور $x = 10$ کے بیچ بیلن $y^2 + (z - 5)^2 = 25$ کا ٹکڑا۔

مقدار معلوم روپ سطح کا رقبہ

سوال ۱۵.۲۳۱ تا ۱۵.۲۴۰ میں مقدار معلوم روپ استعمال کر کے سطح کے رقبے کو دوہرا تکمل لکھیں۔ اس کے بعد تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ (تکمل لکھنے کے کئی درست طریقے ہیں لہٰذا آپ کا لکھا ہوا تکمل کتاب میں دیے جواب سے مختلف ہو سکتا ہے۔ تاہم ان کی قیمت وہی ہونی چاہیے جو کتاب میں دی گئی ہے۔)

سوال ۱۵.۲۳۱: **بیلن میں ترچھا مستوی** بیلن $x^2 = y^2 = 1$ کے اندر مستوی $y + 2z = 2$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۳۲: **بیلن کے اندر مستوی** بیلن $x^2 + y^2 = 4$ کے اندر مستوی $z = -x$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۳۳: **مخروط مقطوع** مستویات $z = 2$ اور $z = 6$ کے بیچ مخروط $z = 2\sqrt{2x^2 + y^2}$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۳۴: **مخروط مقطوع** مستویات $z = 1$ اور $z = 4/3$ کے بیچ مخروط $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۳۵: **دائری بیلنی پٹی** مستویات $z = 1$ اور $z = 4$ کے بیچ مخروط $x^2 + y^2 = 1$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۳۶: **دائری بیلنی پٹی** مستویات $y = -1$ اور $y = 1$ کے بیچ مخروط $x^2 + z^2 = 10$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۳۷: **قطع مکافی ٹوپی** وہ ٹوپی جو قطع مکافی $z = 2 - x^2 - y^2$ سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کاٹتا ہے۔

سوال ۱۵.۲۳۸: **قطع مکافی پٹی** قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ کا وہ حصہ جو مستویات $z = 1$ اور $z = 4$ کے بیچ ہے۔

سوال ۱۵.۲۳۹: **کٹا ہوا کرہ** کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ کا وہ نچلا حصہ جو اس کرہ سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کاٹتا ہے۔

سوال ۱۵.۲۴۰: **کروی پٹی** مستویات $z = -1$ اور $z = \sqrt{3}$ کے بیچ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کا ٹکڑا۔

مقدار معلوم سطح پر تکمل

سوال ۱۵.۲۴۱ تا ۱۵.۲۴۸ میں دیے گئے تفاعل کا تکمل دی گئی سطح پر حاصل کریں۔ سوال ۱۵.۲۴۱: **قطع مکافی بیلن** قطع مکافی بیلن $y = x^2,\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le z \le 3$ پر تفاعل $G(x, y, z) = x$

سوال ۱۵.۲۴۲: **دائری بیلن** بیلنی سطح $y^2 + z^1 = 4,\ z \ge 0,\ 1 \le x \le 4$ پر تفاعل $G(x, y, z) = z$

سوال ۱۵.۲۴۳: **کرہ** اکائی کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ پر $G(x, y, z) = x^2$

سوال ۱۵.۲۴۴: **نصف کرہ** نصف کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \ge 0$ پر $G(x, y, z) = z^2$

سوال ۱۵.۲۴۵: **مستوی کا ٹکڑا** تفاعل $F(x, y, z) = z - x$ مستوی $z = x + y + z = 4$ کے اس حصہ پر جو مستوی xy سے اوپر چوکور $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ پر پایا جاتا ہے۔

سوال ۱۵.۲۴۶: **مخروط** مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$، $0 \le z \le 1$ پر تفاعل $F(x, y, z) = z - x$

سوال ۱۵.۲۴۷: **قطع مکافی گنبد** قطع مکافی گنبد $z = 1 - x^2 - y^2,\ z \ge 0$ پر تفاعل $H(x, y, z) = x^2\sqrt{5 - 4z}$

سوال ۱۵.۲۴۸: **کروی ٹوپی** کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کا وہ حصہ جو مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ سے اوپر پایا جاتا ہو اور تفاعل $H(x, y, z) = yz$

سطحی مقدار معلوم روپ اور بہاؤ

سوال ۱۵.۲۴۹ تا ۱۵.۲۵۸ میں مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہوئے دیے گئے رخ میں بہاؤ $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma$ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۴۹: **قطع مکافی بیلن** قطع مکافی بیلن $z = 4 - y^2$ سے سطوح $x = 0$ ، $x = 1$ ، اور $z = 0$ جو سطح کاٹتی ہیں اس سے گزرتا باہر رخ (یعنی محور x سے عمودی دور جانب) بہاؤ میدان $\boldsymbol{F} = z^2\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - 3z\boldsymbol{k}$ کے لیے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۵۰: **قطع مکافی بیلن** قطع مکافی بیلن $y = x^2,\ -1 \le x \le 1$ سے سطوح $z = 0$ ، اور $z = 2$ سطح کاٹتی ہیں۔ اس سطح سے باہر رخ گزرتا بہاؤ (یعنی مستوی yz کو قائمہ) میدان $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{j} - xz\boldsymbol{k}$ کے لیے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۵۱: **کرہ** مبدا سے دوری کی جانب، ثُمن اول میں موجود کرہ $x^2+y^2+z^2=a^2$ کے حصہ سے، میدان $\boldsymbol{F}=z\boldsymbol{k}$ کا بہاؤ دریافت کریں۔

سوال ۱۵.۲۵۲: **کرہ** مبدا سے دوری کی جانب، کرہ $x^2+y^2+z^2=a^2$ سے گزرتا بہاؤ، میدان $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ کے لیے دریافت کریں۔

سوال ۱۵.۲۵۳: **مستوی** میدان $\boldsymbol{F}=2xy\boldsymbol{i}+2yz\boldsymbol{j}+2xz\boldsymbol{k}$ کا اوپر کی سمت بہاؤ مستوی $x+y+z=2a$ کے اس حصے پر تلاش کریں جو مستوی xy میں موجود چوکور $0\le x\le a,\ 0\le y\le a$ کے اوپر پایا جاتا ہے۔

سوال ۱۵.۲۵۴: **بیلن** میدان $\boldsymbol{F}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ کا باہر کی سمت گزرتا بہاؤ بیلن $x^2+y^2=1,\ 0\le z\le a$ کے اس حصے کے لیے تلاش کریں جسے مستویات $z=0$ اور $z=a$ گھیرتی ہیں۔

سوال ۱۵.۲۵۵: **مخروط** میدان $\boldsymbol{f}=xy\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{k}$ کا مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2},\ 0\le z\le 1$ سے باہر کی سمت (محور z سے عمودی دور) گزرتا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۵۶: **مخروط** میدان $\boldsymbol{F}=y^2\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ کا مخروط $z=2-x^2-y^2, 0\le z\le 2$ سے باہر کی سمت (محور z سے عمودی دور) گزرتا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۵۷: **مخروطی مقطوع** میدان $\boldsymbol{F}=-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ کا مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ کے اس حصے سے باہر کی سمت (محور z سے عمودی دور) گزرتا بہاؤ تلاش کریں جو مستویات $z=1$ اور $z=2$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔

سوال ۱۵.۲۵۸: **قطع مکافی جسم** میدان $\boldsymbol{F}=4x\boldsymbol{i}+4y\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ کا مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ کے اس نچلے حصے سے باہر کی سمت (محور z سے عمودی دور) گزرتا بہاؤ تلاش کریں جو مستوی $z=1$ کاٹتا ہے۔

معیار اثر اور کمیت

سوال ۱۵.۲۵۹: کرہ $x^2+y^2+z^2=a^2$ کے اس حصے کا وسطانی مرکز تلاش کریں جو ثُمن اول میں موجود ہے۔

سوال ۱۵.۲۶۰: مستقل کثافت δ کی باریک موٹائی کا خول مستویات $z=1$ اور $z=2$ مخروط $x^2+y^2-z^2=0$ سے کاٹتی ہیں۔ اس خول کا مرکز کمیت اور محور z کے گرد جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۶۱: مستقل کثافت δ کے باریک کروی خول $x^2+y^2+z^2=a^2$ کا محور z کے گرد جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۶۲: مستقل کثافت δ کے باریک مخروطی خول $z=\sqrt{x^2+y^2},\ 0\le z\le 1$ کا محور z کے گرد جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

مقدار معلوم سطوح کے مماسی مستویات

مقدار معلوم سطح $\boldsymbol{r}(u,v) = f(u,v)\boldsymbol{i} + g(u,v)\boldsymbol{a}_y + h(u,v)\boldsymbol{k}$ کے نقطہ $P_0(f(u_0,v_0), g(u_0,v_0), h(u_0,v_0))$ پر مماسی مستوی سے مراد وہ مستوی ہے جو نقطہ P_0 پر مماسی سمتیات $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)$ اور $\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$ کے صلیبی ضرب سمتیہ $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0) \times \boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$ کو عمودی ہو۔ سوال ۱۵.۲۶۳ تا ۱۵.۲۶۶ میں نقطہ P_0 پر سطح کے مماسی مستوی کی مساوات تلاش کریں۔ اس کے بعد سطح کی کارتیسی مساوات دریافت کر کے سطح اور مماسی مستوی دونوں کا خاکہ ایک ساتھ کھینچیں۔

سوال ۱۵.۲۶۳: **مخروط** مخروط $\boldsymbol{r}(r,\phi) = r\cos\phi\,\boldsymbol{i} + r\sin\phi\,\boldsymbol{j} + r\,\boldsymbol{k},\ r \geq 0,\quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$ پر نقطہ $P_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ کے مقام پر، جو $(r,\phi) = (2, \pi/4)$ کے مطابق ہے۔

سوال ۱۵.۲۶۴: **نصف کرہ** نصف کرہ $\boldsymbol{r}(\phi,\theta) = 4\sin\phi\cos\theta\,\boldsymbol{i} + 4\sin\phi\sin\theta\,\boldsymbol{j} + 4\cos\phi\,\boldsymbol{k},$ جہاں $0 \leq \theta \leq \pi/2$ اور $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ہیں اور نقطہ $P_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ ہے، جو $(\theta,\phi) = (\pi/6, \pi/4)$ کے مطابق ہے۔

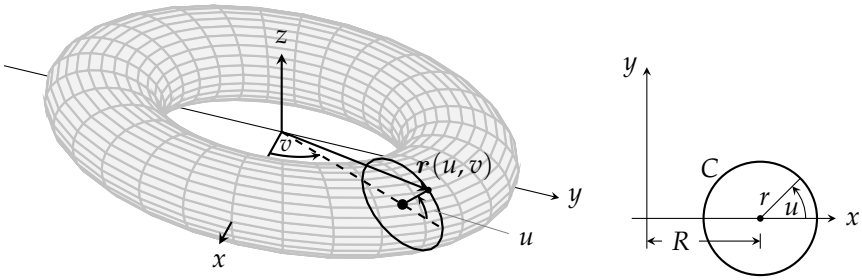
سوال ۱۵.۲۶۵: **دائروی بیلن** دائروی بیلن $\boldsymbol{r}(\phi,z) = 3\sin(2\phi)\,\boldsymbol{i} + 6\sin^2\phi\,\boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k},\ 0 \leq \phi \leq \pi$ اور نقطہ $P_0 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)$ ہے، جو $(\phi,z) = (\pi/3, 0)$ کے مطابق ہے (مثال ۱۵.۲۷ ملاحظہ کریں)۔

سوال ۱۵.۲۶۶: **قطع مکافی بیلن** قطع مکافی بیلن $\boldsymbol{r}(x,y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - x^2\boldsymbol{k},\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty$ نقطہ $P_0 = (1, 2, -1)$ ہے، جو $(x,y) = (1,2)$ کے مطابق ہے۔

مقدار معلوم روپ کی مزید مثالیں

سوال ۱۵.۲۶۷:

(الف) محور z کے گرد مستوی xz میں دائرہ C کو فضا میں گھمانے سے اندر سہ حاصل ہو گا۔ (دکھائے گئے شکل سے رجوع کریں۔) اگر C کا رداس $r > 0$ اور مرکز $(R, 0, 0)$ ہو ثابت کریں کہ اندر سہ کا مقدار معلوم روپ درج ذیل ہے



$$\boldsymbol{r}(u,v) = (R + r\cos u)\cos v\,\boldsymbol{i} + (R + r\cos u)\sin v\,\boldsymbol{j} + r\sin u\,\boldsymbol{k}$$

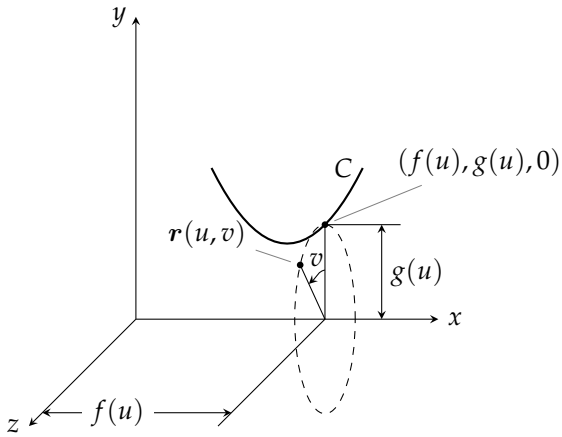
جہاں $0 \leq u \leq 2\pi$ اور $0 \leq v \leq 2\pi$ ہیں۔

(ب) ثابت کریں کہ اندرسہ کا رقبہ $A = 4\pi^2 Rr$ ہے۔

سوال ۱۵.۲۶۸: **سطح طواف کا مقدار معلوم روپ** فرض کریں مقدار معلوم شدہ منحنی $C : (f(u), g(u))$ محور x کے گرد گھمائی جاتی ہے، جہاں $a \leq u \leq b$ پر $g(u) > 0$ ہے۔

(الف) دکھائیں کہ سطح طواف کا مقدار معلوم روپ درج ذیل ہو گا

$$\boldsymbol{r}(u,v) = f(u)\boldsymbol{i} + g(u)\cos v\,\boldsymbol{j} + g(u)\sin v\,\boldsymbol{k}$$



جہاں مستوی xy سے نقطہ $\boldsymbol{r}(u,v)$ تک زاویہ $0 \leq v \leq 2\pi$ ہے۔(دی گئی شکل ملاحظہ کریں۔)دھیان دیں کہ $f(u)$ محور طواف کے ہمراہ فاصلے دیتا ہے اور $g(u)$ محور طواف سے فاصلے دیتا ہے۔

(ب) اس سطح کا مقدار معلوم روپ معلوم کریں جو منحنی $y \geq 0\,,\, x = y^2$ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل ہو گا۔

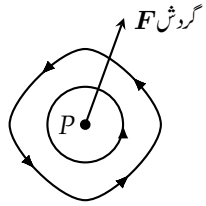
سوال ۱۵.۲۶۹: **ترخیمی سطح کا مقدار معلوم روپ**

(الف) ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (حصہ ۱۰.۴ میں مثال ۱۰.۱۷) کا مقدار معلوم روپ $x = a\cos\phi$ ، $y = b\sin\phi$ جہاں $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ہے دیا گیا۔ کروی محدد کے زاویات θ اور ϕ استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ کا مقدار معلوم روپ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{r}(\theta,\phi) = a\sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{i} + b\sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{j} + c\cos\theta\,\boldsymbol{k}$$

(ب) ترخیمی سطح کے رقبے کا تکمل لکھیں، لیکن اسے حل نہ کریں۔

سوال ۱۵.۲۷۰: **یک ورقی قطع زائد سطح**



شکل ۱۵.۶۸: سیال کے تین ابعادی بہاؤ میں مستوی میں نقطہ P پر دائری بہاؤ سمتیہ۔ دھیان رہے کہ دائری لکیر کے ساتھ اس کا دائیں ہاتھ کا تعلق ہے۔

(الف) یک ورقی قطع زائد سطح $x^2+y^2-z^2=1$ کا مقدار معلوم روپ دائرہ $x^2+y^2=r^2$ سے وابسطہ زاویہ ϕ اور ہذلولی تفاعل $r^2-z^2=1$ سے وابسطہ ہذلولی مقدار معلوم u استعمال کر کے حاصل کریں۔ (حصہ ۷.۱۰ میں سوال ۷.۶۹۹ سے رجوع کریں۔)

(ب) جز والف کے نتیجہ کو درج ذیل کے لیے عمومی بنائیں۔

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

سوال ۱۵.۲۷۱: **گزشتہ سوال کو آگے بڑھاتے ہیں۔** قطع زائد سطح $x^2+y^2-z^2=25$ کے مماسی مستوی کی کارتیسی مساوات اس نقطہ (x_0,y_0,z_0) پر تلاش کریں جہاں $x_0^2+y_0^2=25$ ہو۔

سوال ۱۵.۲۷۲: **دو ورقی قطع زائد سطح** دو ورقی قطع زائد سطح $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ کا مقدار معلوم روپ تلاش کریں۔

۱۵.۷ مسئلہ سٹوکس

ہم نے حصہ ۱۵.۴ میں دیکھا کہ دوبُعدی میدان $\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}$ میں نقطہ (x,y) پر کثافت دائری بہاؤ یعنی گردش کو غیر سمتی مقدار $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$ بیان کرتا ہے۔ تین ابعاد میں مستوی میں نقطہ P کے گرد دائری بہاؤ کو سمتیہ کے ذریعے بیان کیا جاتا ہے۔ یہ سمتیہ دائری بہاؤ کے مستوی کو عمودی ہو گا (شکل ۱۵.۶۸)، اور سمتیہ کا رخ دائری بہاؤ کے خط کے ساتھ دائیں ہاتھ کا تعلق رکھے گا۔ سمتیہ کی لمبائی سیال کے گھومنے کی شرح ظاہر کرتی ہے، جو P کے لحاظ سے دائری بہاؤ کا مستوی جھکانے سے عموماً تبدیل ہو گی۔ ہم کیا دیکھتے ہیں کہ جب دائری بہاؤ کا سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{F}=M\boldsymbol{i}+N\boldsymbol{j}+P\boldsymbol{k}$ ہو، زیادہ سے زیادہ دائری بہاؤ کا سمتیہ درج ذیل **گردشی سمتیہ**[۳۱] ہو گا۔

$$\text{گردش}\,\boldsymbol{F}=\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{۱}$$

[۳۱] curlvector

۲۵۲۳۰ یہ معلومات ہمیں **مسئلہ سٹوکس**[۳۲] دیتا ہے، جو مسئلہ گرین کی دائری بہاؤ و گردشی روپ کی تین بُعدی وسعت ہے۔

۲۵۲۳۱ دھیان رہے کہ $(\text{گردش}\,\boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ اور $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ کی صورت میں حصہ ۱۵.۴ میں پیش کی

۲۵۲۳۲ گئی تعریف بلا تضاد ہیں۔ مساوات ۱ میں گردش $\boldsymbol{F}$ کا کلیہ عموماً درج ذیل علامتی عامل کے ذریعے لکھا جاتا ہے۔

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{۲}$$

۲۵۲۳۳ (علامت ∇ کو ہم ''ڈیل[۳۳]'' پڑھتے ہیں۔) یہ عامل استعمال کر کے گردش $\boldsymbol{F}$[۳۴] کو ہم $\nabla \times \boldsymbol{F}$ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \\
&= \text{گردش}\,\boldsymbol{F}
\end{aligned}$$

۲۵۲۳۴ مختصراً درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\text{گردش}\,\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} \tag{۳}$$

۲۵۲۳۵ مثال ۱۵.۳۳: گردش $\boldsymbol{F}$ کی تلاش

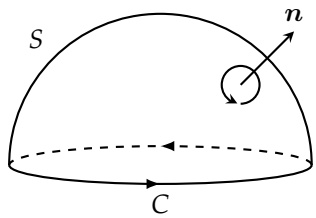
۲۵۲۳۶ میدان $\boldsymbol{F} = (x^2 - y)\boldsymbol{i} + 4z\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$ کی گردش تلاش کریں۔

۲۵۲۳۷ **حل**

$$\begin{aligned}
\text{گردش}\,\boldsymbol{F} &= \nabla \times \boldsymbol{F} \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y & 4z & x^2 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(4z)\right)\boldsymbol{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y)\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(4z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y)\right)\boldsymbol{k} \\
&= (0-4)\boldsymbol{i} - (2x - 0)\boldsymbol{j} + (0+1)\boldsymbol{k} \\
&= -4\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

---

[۳۲] Stokes'Theorem
[۳۳] del
[۳۴] curl



شکل ۱۵.۶۹: تحدیدی منحنی C کی سمت بندی، عمودی میدان $\boldsymbol{n}$ کے ساتھ دائیں ہاتھ کا تعلق رکھتی ہے۔

۲۵۳۳۸ □

۲۵۳۳۹ ہم دیکھیں گے کہ عامل ∇ کے دیگر استعمال بھی ہیں۔ مثلاً، غیر سمتی تفاعل $f(x, y, z)$ پر لگانے سے **ڈھلوان**[۳۵] حاصل ہو گا۔

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

۲۵۳۴۰ اسے ہم ''ڈھلوان f ''اور[۳۶] یا ''ڈیل f ''کہیں[۳۷] گے۔

۲۵۳۴۱ مسئلہ سٹوکس

۲۵۳۴۲ **مسئلہ سٹوکس**[۳۸] کہتا ہے کہ ایسی صورتوں میں جو عملاً عام طور پائی جاتی ہیں، فضا میں سمت بند سطح کی سرحد پر، سطح کے عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کے لحاظ سے
۲۵۳۴۳ خلاف گھڑی رخ چلتے ہوئے (شکل ۱۵.۶۹)، سمتیہ میدان کا دائری بہاؤ اور سطح پر میدان کی گردش کے عمودی جزو کا تکمل برابر ہوں گے۔

۲۵۳۴۴ مسئلہ ۱۵.۵: **مسئلہ سٹوکس**
۲۵۳۴۵ سمت بند سطح S کی سرحد C پر، سطح کے عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کے لحاظ سے خلاف گھڑی چلتے ہوئے سمتیہ میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ کا
۲۵۳۴۶ دائری بہاؤ S پر $\nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ کے تکمل کا برابر ہو گا۔

$$\underbrace{\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}}_{\text{خلاف گھڑی دائری بہاؤ}} = \underbrace{\iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}\sigma}_{\text{تکمل گردش}} \tag{۴}$$

۲۵۳۴۷

---

[۳۵] gradient
[۳۶] gradf
[۳۷] delf
[۳۸] Stokes'Theorem

شکل ۱۵.۷۰: مسئلہ گرین اور مسئلہ سٹوکس کا موازنہ۔

۲۵۲۴۸ ہم مساوات ۴ کو دیکھ کر کہہ سکتے ہیں کہ ایسی دو مختلف سمت بند سطحیں S_1 اور S_2 جن کی سرحد C ایک ہو، کے تکمل گردش برابر ہوں گے۔

$$\iint\limits_{S_1} (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}_1 \, \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{S_2} (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}_2 \, \mathrm{d}\sigma$$

۲۵۲۴۹ بشرطیکہ اکائی عمودی سمتیات $\boldsymbol{n}_1$ اور $\boldsymbol{n}_2$ سطوح کی درست سمت بندی کرتی ہوں، دونوں تکمل گردش مساوات ۴ کے بائیں ہاتھ کے برابر، لہٰذا ایک
۲۵۲۵۰ دوسرے کے برابر ہوں گے۔

۲۵۲۵۱ مسئلہ سٹوکس میں موجود تکملات کی وجودیت یقینی بنانے کے لیے $\boldsymbol{F}$ ، C ،اور S پر ریاضیاتی شرائط مسلط ہوں گے۔ درکار عمومی شرائط کہتے ہیں کہ تمام
۲۵۲۵۲ تفاعل، سمتیہ میدان، اور ان کے تفرق استمراری ہوں۔

۲۵۲۵۳ اگر C مستوی xy میں موجود، خلاف گھڑی سمت بند منحنی ہو، اور R مستوی xy میں ایک خطہ ہو جس کو C گھیرتی ہو، تب $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
۲۵۲۵۴ اور درج ذیل ہو گا۔

$$(\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} = (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

۲۵۲۵۵ ان حالات میں مساوات سٹوکس درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$\oint\limits_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint\limits_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

۲۵۲۵۶ جو مسئلہ گرین میں موجود مساوات کی دائری بہاؤ و گردشی روپ ہے۔ اسی طرح انہیں قدموں پر الٹ چلتے ہوئے ہم مسئلہ گرین کے دائری بہاؤ و گردشی روپ کو
۲۵۲۵۷ دو بُعدی میدان کے لیے درج ذیل ''ڈیل'' علامتیت میں لکھ سکتے ہیں۔ شکل ۱۵.۷۰ ملاحظہ کریں۔

$$\oint\limits_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint\limits_R (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k} \, \mathrm{d}A \tag{۵}$$

۲۵۲۵۸

مثال ۱۵.۳۴: نصف کرہ کے لیے مساوات سٹوکس کی تصدیق

نصف کرہ $S\ :\ x^2+y^2+z^2 = 9,\ z \geq 0$ کو گھیرنے والے دائرہ $C\ :\ x^2+y^2 = 9,\ z = 0$ اور میدان $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ کے لیے مساوات ۴ کی قیمت تلاش کریں۔

حل

مقدار معلوم روپ $\boldsymbol{r}(\phi) = (3\cos\phi)\boldsymbol{i} + (3\sin\phi)\boldsymbol{j},\ 0 \leq \phi \leq 2\pi$ استعمال کرتے ہوئے اوپر سے نظارہ کرتے ہوئے C کے گرد خلاف گھڑی دائری بہاؤ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= -3\sin\phi\ \mathrm{d}\phi\,\boldsymbol{i} + 3\cos\phi\ \mathrm{d}\phi\,\boldsymbol{j}\\
\boldsymbol{F} &= y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j} = 3\sin\phi\,\boldsymbol{i} - 3\cos\phi\,\boldsymbol{j}\\
\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= -9\sin^2\phi\ \mathrm{d}\phi - 9\cos^2\phi\ \mathrm{d}\phi = -9\,\mathrm{d}\phi\\
\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_0^{2\pi} -9\ \mathrm{d}\phi = -18\pi
\end{aligned}$$

اب $\boldsymbol{F}$ کے لیے تکمل گردش تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{F} &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\\
&= (0-0)\boldsymbol{i} + (0-0)\boldsymbol{j} + (-1-1)\boldsymbol{k} = -2\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{n} &= \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{3} && \text{بیرونی اکائی عمودی سمتیہ}\\
\mathrm{d}\sigma &= \frac{3}{z}\,\mathrm{d}A && \text{حصہ ۱۵.۵ کی مثال ۱۵.۲۴ میں } a = 3\\
\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma &= -\frac{2z}{3}\frac{3}{z}\,\mathrm{d}A = -2\,\mathrm{d}A
\end{aligned}$$

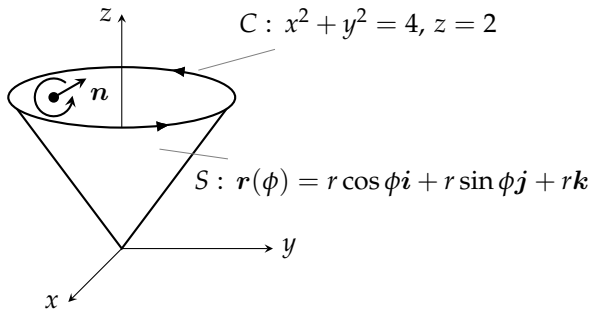
یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}\sigma = \iint_{x^2+y^2\leq 9} -2\ \mathrm{d}A = -18\pi$$

دائرے کے ہمراہ دائری بہاو اور نصف کرہ پر گردش کا تکمل برابر ہیں، جیسا کہ ہونا چاہیے۔ □

مثال ۱۵.۳۵: دائری بہاؤ کی تلاش

مستوی $z = 2$ مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ سے منحنی C پر ملتا ہے۔ اس منحنی پر، اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی (شکل ۱۵.۷۱)، میدان $\boldsymbol{F} = (x^2-y)\boldsymbol{i} + 4z\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$ کا، دائری بہاؤ تلاش کریں۔



شکل ۱۵.۷۱: منحنی C اور مخروط S برائے مثال ۱۵.۳۵

۲۵۲۷۱ **حل**

۲۵۲۷۲ مسئلہ سٹوکس کے استعمال سے ہم دائری بہاؤ سطح پر تکمل سے حاصل کرتے ہیں۔ اوپر سے دیکھتے ہوئے C پر گھڑی مخالف چلنا اندرونی عمود $\boldsymbol{n}$ لینے کے مترادف

۲۵۲۷۳ ہے جس کا z جزو مثبت ہو گا۔ ہم مخروط کا مقدار معلوم روپ لکھتے ہیں۔

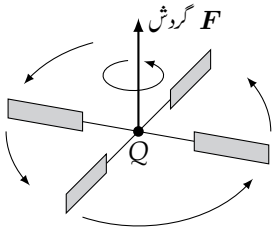
$$\boldsymbol{r}(r,\phi)=r\cos\phi\,\boldsymbol{i}+r\sin\phi\,\boldsymbol{j}+r\,\boldsymbol{k},\quad 0\le r\le 2,\ 0\le\phi\le 2\pi$$

۲۵۲۷۴ اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n}&=\frac{\boldsymbol{r}_r\times\boldsymbol{r}_\phi}{|\boldsymbol{r}_r\times\boldsymbol{r}_\phi|}=\frac{-r\cos\phi\,\boldsymbol{i}-r\sin\phi\,\boldsymbol{j}+r\,\boldsymbol{k}}{r\sqrt{2}} && \text{حصہ ۱۵.۶ مثال ۱۵.۲۸}\\
&=\frac{-\cos\phi\,\boldsymbol{i}-\sin\phi\,\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}}{\sqrt{2}}\\
\mathrm{d}\sigma&=r\sqrt{2}\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi && \text{حصہ ۱۵.۶ مثال ۱۵.۲۸}\\
\nabla\times\boldsymbol{F}&=-4\boldsymbol{i}-2x\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} && \text{مثال ۱۵.۳۳}\\
&=-4\boldsymbol{i}-2r\cos\phi\,\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k} && x=r\cos\phi
\end{aligned}$$

۲۵۲۷۵ یوں

$$\begin{aligned}
(\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(4\cos\phi+2r\cos\phi\sin\phi+1\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(4\cos\phi+r\sin 2\phi+1\right)
\end{aligned}$$



شکل ۱۵.۷۲: گردش $\boldsymbol{F}$ کی چپو چرخی سے تشبیہ۔

۲۵۲۷۶ اور دائری بہاؤ درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}\sigma$$

مسئلہ سٹوکس مساوات ۴

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}}\left(4\cos\phi + r\sin 2\phi + 1\right)\left(\sqrt{2}\,r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\phi\right) = 4\pi$$

۲۵۲۷۷ □

۲۵۲۷۸ $\nabla\times\boldsymbol{F}$ کی چپو چرخی سے تشبیہ

۲۵۲۷۹ فرض کریں حرکت پذیر سیال کی رفتار $\boldsymbol{v}(x,y,z)$ اور نقطہ (x,y,z) پر اس کی کثافت $\delta(x,y,z)$ ہے۔ مزید فرض کریں $\boldsymbol{F} = \delta\boldsymbol{v}$
۲۵۲۸۰ ہے۔ ایسی صورت میں بند منحنی C کے ہمراہ سیال کا دائری بہاؤ درج ذیل ہو گا۔

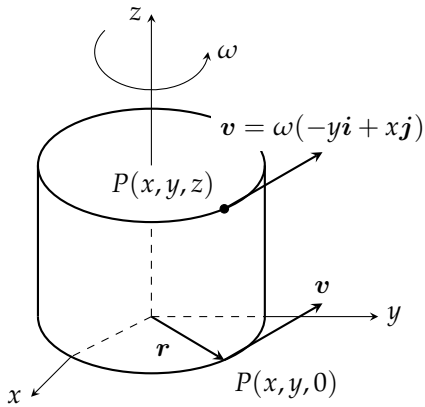
$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

۲۵۲۸۱ مسئلہ سٹوکس کے مطابق یہ دائری بہاؤ، C میں محیط سطح S سے گزرتا $\nabla\times\boldsymbol{F}$ کے بہاؤ کا برابر ہو گا۔

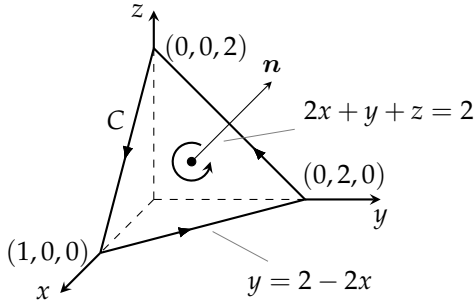
$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}\delta$$

۲۵۲۸۲ ہم $\boldsymbol{F}$ کے دائرہ کار میں اٹل نقطہ Q، اور اس نقطہ پر مخصوص سمت $\boldsymbol{u}$ منتخب کرتے ہیں۔ فرض کریں C ایک دائرہ ہے جس کا رداس ρ اور مرکز Q
۲۵۲۸۳ ہے اور جس کا مستوی $\boldsymbol{u}$ کو عمودی ہے۔ اگر Q پر $\nabla\times\boldsymbol{F}$ استمراری ہو، C میں محیط دائری قرص S پر $\nabla\times\boldsymbol{F}$ کے $\boldsymbol{u}$ ویں جزو کی اوسط
۲۵۲۸۴ قیمت $\rho\to 0$ کی صورت میں Q پر $\nabla\times\boldsymbol{F}$ کے $\boldsymbol{u}$ ویں جزو کو پہنچے گی۔

$$(\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u})_Q = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{u}\ \mathrm{d}\sigma$$



شکل ۱۵.۷۳: مستوی xy میں مثبت (خلاف گھڑی) مستقل زاویائی سمتی رفتار ω کے ساتھ، مستوی xy کے متوازی سیال برقرار گھوم رہا ہے (مثال ۱۵.۳۶)۔



شکل ۱۵.۷۴: مسطح سطح برائے مثال ۱۵.۳۷

۲۵۲۸۵ آخری مساوات میں سطحی تکمل کی جگہ دائری بہاؤ لکھ کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(\nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{u})_{\mathrm{Q}} = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\pi \rho^2} \oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{۶}$$

۲۵۲۸۶ مساوات ۶ کے بائیں ہاتھ کی قیمت اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو گی جب $\boldsymbol{u}$ کا رخ، $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کی سمت میں ہو۔ چھوٹے ρ کے لیے مساوات ۶ کے دائیں
۲۵۲۸۷ ہاتھ کی حد تخمیناً درج ذیل ہو گی، جو C کے ہمراہ دائری بہاؤ تقسیم رقبہ قرص (دائری بہاؤ کی کثافت) ہے۔

$$\frac{1}{\pi \rho^2} \oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

۲۵۲۸۸ فرض کریں Q پر رداس ρ کی چپو چرخی رکھی جاتی ہے جس کا دھرا $\boldsymbol{u}$ کے ہمراہ ہے۔ سیال کا C کے ہمراہ دائری بہاؤ چپو چرخی کے گھومنے کی رفتار پر اثر
۲۵۲۸۹ انداز ہو گا۔ جب دائری بہاؤ تکمل کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو اس صورت چپو چرخی تیز سے تیز گھومے گی؛ یوں جب دھرا $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کے رخ ہو، چپو چرخی تیز
۲۵۲۹۰ سے تیز گھومے گی (شکل ۱۵.۷۲)۔

۲۵۲۹۱ مثال ۱۵.۳۶: کثافت دائری بہاؤ اور $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کا تعلق

۲۵۲۹۲ اٹل کثافت کا سیال محور z کے گرد $\boldsymbol{v} = \omega(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})$ سمتی رفتار سے گھوم رہا ہے جہاں ω ایک مثبت مستقل جس کو گھومنے کا **زاویائی**
۲۵۲۹۳ **رفتار** کہتے ہیں (شکل ۱۵.۷۳)۔ اگر $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{v}$ ہو، $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کیا ہو گا اور کثافت دائری بہاؤ کے ساتھ اس کا تعلق کیا ہو گا؟

۲۵۲۹۴ **حل**

۲۵۲۹۵ چونکہ $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{v} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \\ &= (0-0)\boldsymbol{i} + (0-0)\boldsymbol{j} + (\omega - (-\omega))\boldsymbol{k} = 2\omega\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

۲۵۲۹۶ مسئلہ سٹوکس کے مطابق، رداس ρ کے دائرہ C کے ہمراہ، جو مستوی مثلاً مستوی xy میں قرص S کا احاطہ کرتا ہو، کے ہمراہ $\boldsymbol{F}$ کا دائری بہاؤ درج ذیل
۲۵۲۹۷ ہو گا۔

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}\sigma = \iint_S 2\omega\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (2\omega)(\pi\rho^2)$$

۲۵۲۹۸ یوں درج ذیل ہو گا جو $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{k}$ لیتے ہوئے مساوات ۶ کے عین مطابق ہے۔

$$(\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k} = 2\omega = \frac{1}{\pi\rho^2}\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

۲۵۲۹۹ □

۲۵۳۰۰ مثال ۱۵.۳۷: مسئلہ سٹوکس کا اطلاق

۲۵۳۰۱ اوپر سے نظارہ کرتے ہوئے ثُمن اول میں واقع مستوی $2x + y + z = 2$ کے ایک ٹکڑے کی سرحد C پر خلاف گھڑی چل کر $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی
۲۵۳۰۲ قیمت مسئلہ سٹوکس استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں، جہاں $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + 3xz\boldsymbol{k}$ ہے (شکل ۱۵.۷۴)۔

۲۵۳۰۳ **حل**

۲۵۳۰۴ یہ مستوی تفاعل $f(x, y, z) = 2x + y + z$ کی ہم قد سطح $f(x, y, z) = 2$ ہے۔ اس کا اکائی عمودی سمتیہ

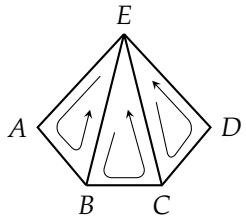
$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{|2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$

۲۵۳۰۵ سرحد C پر خلاف گھڑی حرکت کے عین مطابق ہے۔ مسئلہ سٹوکس استعمال کرنے کے لیے درج ذیل حاصل کرنے ہیں۔

$$\boldsymbol{F}\text{ گردش} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & 3xz \end{vmatrix} = (x - 3z)\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$$

۲۵۳۰۶ مستوی پر $z = 2 - 2x - y$ ہے لہٰذا

$$\nabla \times \boldsymbol{F} = (x - 3(2 - 2x - y))\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k} = (7x + 3y - 6)\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$$



شکل ۱۵.۷۵: کثیر سطحی کا کچھ حصہ۔

۲۵۳۰۷ اور

$$(\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(7x + 3y - 6 + y) = \frac{1}{\sqrt{6}}(7x + 4y - 6)$$

۲۵۳۰۸ ہو گا۔ سطحی رقبے کا چھوٹا ٹکڑا درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{k}|}\ \mathrm{d}A = \frac{\sqrt{6}}{1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{6}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

۲۵۳۰۹ دائری بہاؤ درج ذیل ہو گا۔

مسئلہ سٹوکس، مساوات ۴

$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \iint_S \nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\ \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \frac{1}{\sqrt{6}}(7x + 4y - 6)\sqrt{6}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -1\end{aligned}$$

۲۵۳۱۰ □

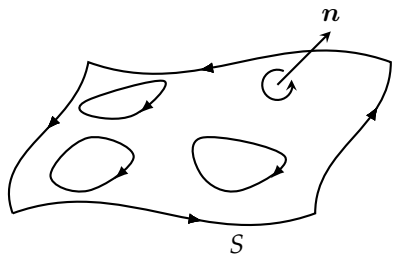
۲۵۳۱۱ کثیر سطحی سطح کے لیے مسئلہ سٹوکس کا ثبوت

۲۵۳۱۲ فرض کریں S کثیر سطحی سطح ہے جو محدود تعداد کے مسطح حصوں پر مشتمل ہے (مثلاً شکل ۱۵.۷۵)۔ ہم S کے علیحدہ علیحدہ تختی حصوں پر مسئلہ گرین کا
۲۵۳۱۳ اطلاق کرتے ہیں۔ تختیوں کی دو قسمیں ہیں۔

۲۵۳۱۴ ۱. وہ جن کو ہر طرف سے دوسرے تختی گھیرتے ہوں۔

۲۵۳۱۵ ۲. وہ جن کا ایک یا ایک سے زیادہ ضلع کسی دوسرے تختی سے متصل نہ ہو۔

۲۵۳۱۶ سطح S کی سرحد Δ ، دوسری (۲) قسم کی مستویات کے ان کناروں پر مشتمل ہے جو دوسری مستویات سے متصل نہیں۔ شکل ۱۵.۷۵ میں مثلثات
۲۵۳۱۷ EAB ، BCE ، اور CDE سطح S کے کچھ حصے کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ $ABCD$ سرحد Δ کے کچھ حصے کو ظاہر کرتا ہے۔ تینوں مثلثات پر



شکل ۱۵.۷۶: سوراخ دار سمت بند سطوح پر بھی مسئلہ سٹوکس کا اطلاق ہوتا ہے۔

۲۵۳۱۸ بالترتیب مسئلہ گرین کا اطلاق کر کے نتائج جمع کر کے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\left(\oint_{EAB} + \oint_{BCE} + \oint_{CDE}\right) \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left(\iint_{EAB} + \iint_{BCE} + \iint_{CDE}\right) \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \tag{۷}$$

۲۵۳۱۹ چونکہ مساوات ۷ میں بائیں ہاتھ کے تین لکیری تکملات میں اندرونی (متصل مثلثات کے مشترک) اضلاع پر لکیری تکملات کے جوڑے ایک دوسرے کو کاٹتے
۲۵۳۲۰ ہیں لہٰذا تینوں مل کر کنارہ $ABCDE$ پر واحد ایک تکمل دیتے ہیں۔ مثال کے طور پر مثلث ABE کے ضلع BE پر لکیری تکمل کی علامت $(\pm)$
۲۵۳۲۱ مثلث EBC کے اسی ضلع پر لکیری تکمل کی علامت $(\mp)$ کی الٹ ہو گی۔ ضلع CE پر بھی ایسا ہو گا۔ یوں مساوات ۷ گھٹ کر درج ذیل روپ اختیار
۲۵۳۲۲ کرتی ہے۔

$$\oint_{ABCDE} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{ABCDE} \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

۲۵۳۲۳ تمام تختوں پر مسئلہ گرین کا اطلاق کر کے درج ذیل حاصل ہو گا جو در حقیقت کثیر سطحی کی سطح S کا مسئلہ سٹوکس ہے۔ زیادہ عمومی سطوح کے لیے ثبوت آپ کو
۲۵۳۲۴ اعلیٰ نصاب میں ملیں گے۔

$$\oint_{\Delta} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_{S} \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

۲۵۳۲۵ مسئلہ سٹوکس برائے سوراخ دار سطوح

۲۵۳۲۶ مسئلہ گرین کو وسعت دینے کے طرز پر، مسئلہ سٹوکس کو ایسی سمت بند سطح S تک وسعت دی جا سکتی ہے جس میں ایک یا ایک سے زیادہ سوراخ ہوں (شکل
۲۵۳۲۷ ۱۵.۷۶)۔ سطح S پر $\nabla\times\boldsymbol{F}$ کے عمودی جزو کا سطحی تکمل اور تمام سرحدی منحنیات پر $\boldsymbol{F}$ کے مماسی جزو کے لکیری تکملات کا مجموعہ ایک دوسرے
۲۵۳۲۸ کے برابر ہو گا، جہاں S کی سمت بندی کو مد نظر رکھ کر منحنیات پر چلنا ہو گا۔

ایک اہم تماثل

ریاضیات اور طبیعی سائنس میں درج ذیل تماثل بار بار پیش آتا ہے۔

$$\nabla \times \nabla f = \mathbf{0} \qquad \text{گردش ڈھلوان } f = \mathbf{0} \tag{۸}$$

یہ تماثل جو ہر اس تفاعل $f(x, y, z)$ کے لیے کارآمد ہے جس کے دوہرے جزوی تفرق استمراری ہوں، کہتا ہے کہ تفاعل $f(x, y, z)$ کے ڈھلوان کی گردش صفر ہو گی۔ اس کا ثبوت درج ذیل ہے۔

$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = (f_{zy} - f_{yz})\boldsymbol{i} - (f_{zx} - f_{xz})\boldsymbol{j} + (f_{yx} - f_{xy})\boldsymbol{k}$$

ثانی جزوی تفرق استمراری ہونے کی صورت میں قوسین میں بند مختلف اقسام کے ثانی تفرق برابر ہوں گے (حصہ ۱۳.۳، مسئلہ ۱۳.۲) لہٰذا سمتیہ صفر ہو گا۔

بقائی میدان اور مسئلہ سٹوکس

ہم نے حصہ ۱۵.۳ میں دیکھا کہ کھلے خطہ D میں میدان $\boldsymbol{F}$ کا بقائی ہونا اس کے مترادف ہے کہ D میں ہر بند راہ پر $\boldsymbol{F}$ کا لکیری تکمل صفر ہو۔ یہ از خود، سادہ تعلق خطوں میں، اس کے مترادف ہے کہ $\nabla \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ ہو۔

مسئلہ ۱۵.۶: $\nabla \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ اور بند حلقہ کی خاصیت کا تعلق

اگر فضا میں سادہ تعلق آزاد خطہ D کے ہر نقطہ پر $\nabla \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ ہو تب D میں ٹکڑوں میں ہموار و بند راہ C پر درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

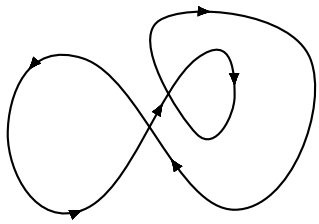
ثبوت: **خاکہ** مسئلہ ۱۵.۶ کا ثبوت عموماً دو مراحل میں کیا جاتا ہے۔ پہلا مرحلہ سادہ بند منحنیات کے لیے ہو گا۔ اعلیٰ ریاضیات کی ایک شاخ **ربڑی ہندسہ**[۳۹] کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ سادہ تعلق کھلے خطہ D میں ہر قابل تفرق سادہ بند منحنی C ایک ہموار دو طرفہ سطح S، جو D میں پائی جاتی ہو، کی سرحد ہو گی۔ یوں مسئلہ سٹوکس کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S (\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = 0$$

دوسرا مرحلہ اُن منحنیات کے لیے ہے جو خود کو کاٹتی ہیں، جیسے کہ شکل ۱۵.۷۷ میں دکھائی گئی ہے۔ ایسی منحنیات کو سادہ حلقات، جن کا احاطہ قابل سمت بند سطوح کرتی ہوں، میں تقسیم کر کے باری باری ایک ایک حلقہ پر مسئلہ سٹوکس کا اطلاق کر کے نتائج کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔

---

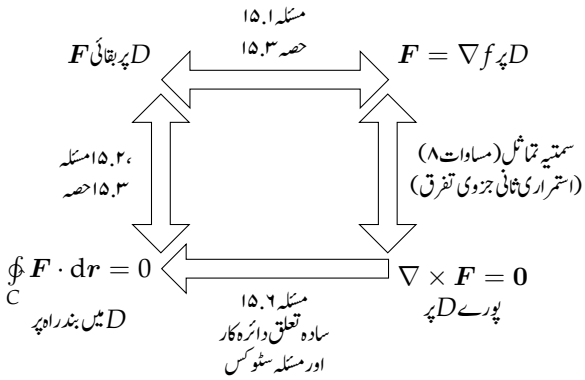
[۳۹] topology



شکل ۱۵.۷۷: فضا میں سادہ تعلق خطہ میں، قابل تفرق منحنیات جو خود کو کاٹتی ہوں کو بند رگھیروں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے جن پر مسئلہ سٹوکس کا اطلاق ہوتا ہے۔

۲۵۳۴۴ □

۲۵۳۴۵ تعلق دار، سادہ تعلق کھلے خطوں پر معین بقائی میدان کے لیے حاصل نتائج کا نچوڑ درج ذیل شکل میں پیش کیا گیا ہے۔



۲۵۳۴۶

۲۵۳۴۷ **سوالات**

۲۵۳۴۸

۲۵۳۴۹ **مسئلہ سٹوکس کے ذریعہ دائری بہاؤ کی قیمت کا حصول**

۲۵۳۵۰ سوال ۱۵.۲۷۳ تا ۱۵.۲۷۸ میں مسئلہ سٹوکس استعمال کرتے ہوئے منحنی C کے ہمراہ دی گئی سمت میں میدان $\boldsymbol{F}$ کے دائری بہاؤ کی قیمت تلاش کریں۔

۲۵۳۵۱ سوال ۱۵.۲۷۳: $\boldsymbol{F} = x^2\,\boldsymbol{i} + 2x\,\boldsymbol{j} + z^2\,\boldsymbol{k}$

۲۵۳۵۲ مستوی xy میں C ترخیم $4x^2 + y^2 = 4$ ہے جو اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی ہے۔

سوال ۱۵.۲۷۴: $\boldsymbol{F} = 2y\,\boldsymbol{i} + 3x\,\boldsymbol{j} - z^2\,\boldsymbol{k}$
مستوی xy میں C دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ ہے جو اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی ہے۔

سوال ۱۵.۲۷۵: $\boldsymbol{F} = y\,\boldsymbol{i} + xz\,\boldsymbol{j} + x^2\,\boldsymbol{k}$
مستوی $x + y + z = 1$ سے ثُمن اول مثلث کاٹتا ہے جس کی سرحد C ہے جو اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی ہے۔

سوال ۱۵.۲۷۶: $\boldsymbol{F} = (y^2 + z^2)\,\boldsymbol{i} + (x^2 + z^2)\,\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\,\boldsymbol{k}$
مستوی $x + y + z = 1$ سے ثُمن اول مثلث کاٹتا ہے جس کی سرحد C ہے جو اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی ہے۔

سوال ۱۵.۲۷۷: $\boldsymbol{F} = (y^2 + z^2)\,\boldsymbol{i} + (x^2 + y^2)\,\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\,\boldsymbol{k}$
مستوی xy میں خطوط $x = \pm 1$ اور $y = \pm 1$ ایک مربع C گھیرتے ہیں جو اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی ہے۔

سوال ۱۵.۲۷۸: $\boldsymbol{F} = x^2y^3\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$
بیلن $x^2 + y^2 = 4$ اور نصف کرہ $z \geq 0$ ، $x^2 + y^2 + z^2 = 16,$ کے تقاطع سے حاصل منحنی C جو اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی ہے۔

گردش کا بہاؤ

سوال ۱۵.۲۷۹: بیضوی خول $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36,\ z \geq 0$: S کا بیرونی اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے۔ میدان $\boldsymbol{F} = y\,\boldsymbol{i} + x^2\,\boldsymbol{j} + \left(x^2 + y^4\right)^{3/2} \sin\left(e^{\sqrt{xyz}}\right)\boldsymbol{k}$ کے لیے تکمل $\iint\limits_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$ کی قیمت تلاش کریں۔ (اشارہ: بیضوی خول کے تل پر ایک مقدار معلوم روپ $x = 3\cos t$ ، $y = 2\sin t$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ ہے۔)

سوال ۱۵.۲۸۰: قطع مکافی خول $4x^2 + y + z^2 = 4,\ y \geq 0$: S کا بیرونی (مبدا سے دوری کی جانب) اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے۔ درج ذیل میدان

$$\boldsymbol{F} = \left(-z + \frac{1}{2+x}\right)\boldsymbol{i} + (\tan^{-1} y)\boldsymbol{j} + \left(x + \frac{1}{4+z}\right)\boldsymbol{k}$$

کے لیے تکمل $\iint\limits_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۸۱: فرض کریں سطح S بیلن $x^2 + y^2 = a^2,\ 0 \leq z \leq h$ اور اس کا بالائی ڈھکن $x^2 + y^2 \leq a^2,\ z = h$ پر مشتمل ہے۔ میدان $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$ کے لیے سطح S سے $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کا باہر رخ بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۸۲: درج ذیل تکمل کا حساب کریں جہاں S نصف کرہ $x^2+y^2+z^2=1,\ z\geq 0$ ہے۔

$$\iint\limits_S \Big(\nabla\times(y\boldsymbol{i})\Big)\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}\sigma$$

سوال ۱۵.۲۸۳: **گردش $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ**

دکھائیں کہ ان تمام سمت بند سطوح S کے لیے، جو C کا احاطہ ہوں اور جن کا C پر مثبت رخ ایک ہو، درج ذیل تکمل کی قیمتیں برابر ہوں گی۔

$$\iint\limits_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}\sigma$$

سوال ۱۵.۲۸۴: فرض کریں $\boldsymbol{F}$ قابل سمت بند سمتی میدان ہے جو ایسے خطے پر معین ہے جس میں ایک ہموار بند سمت بند سطح S اور اس کا اندرونی حصہ شامل ہیں۔ سطح S پر اکائی عمودی سمتیہ میدان $\boldsymbol{n}$ ہے۔ مزید فرض کریں کہ S، دو سطحوں S_1 اور S_2 کا مجموعہ ہے جو آپس میں ایک ہموار سادہ بند منحنی C پر جڑی ہوئی ہیں۔ کیا درج ذیل کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟

$$\iint\limits_S (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\ \mathrm{d}\sigma$$

اپنے جواب کی وجوہات بیان کریں۔

مقدار معلوم سطوح کے لیے مسئلہ سٹوکس

سوال ۱۵.۲۸۵ تا ۱۵.۲۹۰ میں بیرونی سمت اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کے رخ، سطح S سے گزرتا میدان $\boldsymbol{F}$ کی گردش کے بہاؤ کی قیمت مسئلہ سٹوکس کا سطحی تکمل استعمال کر کے تلاش کریں۔ سوال ۱۵.۲۸۵: $\boldsymbol{F}=2z\boldsymbol{i}+3x\boldsymbol{j}+5y\boldsymbol{k}$

$$S:\quad \boldsymbol{r}(r,\theta)=r\cos\theta\,\boldsymbol{i}+r\sin\theta\,\boldsymbol{j}+(4-r^2)\boldsymbol{k},\qquad 0\leq r\leq 2,\ 0\leq\theta\leq 2\pi$$

سوال ۱۵.۲۸۶: $\boldsymbol{F}=(y-z)\boldsymbol{i}+(z-x)\boldsymbol{j}+(x+z)\boldsymbol{k}$

$$S:\quad \boldsymbol{r}(r,\theta)=r\cos\theta\,\boldsymbol{i}+r\sin\theta\,\boldsymbol{j}+(9-r^2)\boldsymbol{k}\qquad 0\leq r\leq 3,\ 0\leq\theta\leq 2\pi$$

سوال ۱۵.۲۸۷: $\boldsymbol{F}=x^2y\,\boldsymbol{i}+2y^3z\,\boldsymbol{j}+3z\,\boldsymbol{k}$

$$S:\quad \boldsymbol{r}(r,\theta)=r\cos\theta\,\boldsymbol{i}+r\sin\theta\,\boldsymbol{j}+r\,\boldsymbol{k},\qquad 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi$$

۲۵۳۹۵ سوال ۱۵.۲۸۸: $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + (y-z)\boldsymbol{j} + (z-x)\boldsymbol{k}$

$$S: \quad \boldsymbol{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\boldsymbol{i} + r\sin\theta\,\boldsymbol{j} + (5-r)\boldsymbol{k}, \qquad 0 \le r \le 5,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

۲۵۳۹۶

۲۵۳۹۷ سوال ۱۵.۲۸۹: $\boldsymbol{F} = 3y\,\boldsymbol{i} + (5-2x)\boldsymbol{j} + (z^2-2)\boldsymbol{k}$

$$S: \quad \boldsymbol{r}(\phi,\theta) = \sqrt{3}\sin\phi\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sqrt{3}\sin\phi\sin\theta\,\boldsymbol{j} + \sqrt{3}\cos\phi\,\boldsymbol{k}$$

۲۵۳۹۸

$$0 \le \phi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

۲۵۳۹۹ سوال ۱۵.۲۹۰: $\boldsymbol{F} = y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$

$$S: \quad \boldsymbol{r}(\phi,\theta) = 2\sin\phi\cos\theta\,\boldsymbol{i} + 2\sin\phi\sin\theta\,\boldsymbol{j} + 2\cos\phi\,\boldsymbol{k}$$

۲۵۴۰۰

$$0 \le \phi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

۲۵۴۰۱

۲۵۴۰۲ **نظریہ اور مثالیں**

۲۵۴۰۳ سوال ۱۵.۲۹۱: **صفر دائری بہاؤ** تماثل $\nabla \times \nabla f$ (مساوات ۸) اور مسئلہ سٹوکس استعمال کرتے ہوئے دکھائی کہ فضا میں کسی بھی ہموار
۲۵۴۰۴ قابل سمت بند سطح کی سرحد کے ہمراہ درج ذیل میدان کا دائری بہاؤ صفر ہو گا۔

۲۵۴۰۵ ا. $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$

۲۵۴۰۶ ب. $\boldsymbol{F} = \nabla(xy^2z^3)$

۲۵۴۰۷ ج. $\boldsymbol{F} = \nabla \times (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$

۲۵۴۰۸ د. $\boldsymbol{F} = \nabla f$

۲۵۴۰۹

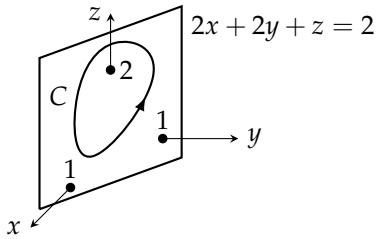
۲۵۴۱۰ سوال ۱۵.۲۹۲: **صفر دائری بہاؤ** تفاعل $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ اور میدان $\boldsymbol{F} = \nabla f$ ہیں۔ درج ذیل
۲۵۴۱۱ طریقوں سے دکھائیں کہ مستوی xy میں دائرہ $x^2+y^2=a^2$ پر میدان کا گھڑی وار دائری بہاؤ صفر ہے۔

۲۵۴۱۲ ا. دائرے پر $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ لیں جہاں $\boldsymbol{r}(t) = a\cos t\,\boldsymbol{i} + a\sin t\,\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ ہے۔

۲۵۴۱۳ ب. مسئلہ سٹوکس کا استعمال کریں۔

سوال ۱۵.۲۹۳: مستوی $2x + 2y + z = 2$ میں C ایک سادہ بند ہموار منحنی ہے جس کی سمت بندی یہاں دکھائی گئی ہے۔ دکھائیں کہ درج ذیل کی قیمت C میں محیط خطے کے رقبے پر منحصر ہے نا کہ C کی شکل و صورت یا مقام پر۔

$$\oint_C (2y\,dx + 3z\,dy - x\,dz)$$



سوال ۱۵.۲۹۴: ثابت کریں اگر $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ ہو تب $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$ ہو گا۔

سوال ۱۵.۲۹۵: ایسا سمتی میدان معلوم کریں جس کے اجزاء دو مرتبہ قابل تفرق ہوں اور جس کی گردش $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ ہو، یا ثابت کریں ایسا کوئی میدان موجود نہیں۔

سوال ۱۵.۲۹۶: کیا مسئلہ سٹوکس ایسے میدان میں گردش کے بارے میں کوئی خاص نتیجہ دیتا ہے جس کی گردش صفر ہو؟ اپنے جواب کی وجوہات بیان کریں۔

سوال ۱۵.۲۹۷: مستوی xy میں R ایسا خطہ ہے جس کو ٹکڑوں میں ہموار سادہ بند منحنی C گھیرتی ہے۔ فرض کریں محور x اور محور y کے لحاظ سے R کے جمود بالترتیب I_x اور I_y ہیں۔ درج ذیل تکمل کی قیمت I_x اور I_y کے روپ میں تلاش کریں جہاں $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ہے۔

$$\oint_C \nabla(r^4) \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$$

سوال ۱۵.۲۹۸: **گردش صفر تاہم میدان غیر بقائی** دکھائیں کہ درج ذیل کی گردش صفر ہے

$$\boldsymbol{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2}\boldsymbol{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

تاہم مستوی xy میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کو C لیتے ہوئے درج ذیل صفر نہیں۔

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

(میدان $\boldsymbol{F}$ کا دائرہ کار یہاں سادہ تعلق خطہ نہیں لہٰذا مسئلہ ۱۵.۶ کا اطلاق نہیں ہوگا۔ محور z کے ہمراہ میدان $\boldsymbol{F}$ معین نہیں لہٰذا ایسا کوئی طریقہ ممکن نہیں کہ $\boldsymbol{F}$ کے دائرہ کار سے باہر نکلے بغیر ہم C کو ایک نقطے میں سمیٹ لیں۔)

۱۵.۸ مسئلہ پھیلاؤ اور ایک مربوط نظریہ

مستوی میں مسئلہ گرین کا گردشی روپ کہتا ہے کہ سادہ بند منحنی کو پار کرنے والا، سمتی میدان کا خالص بیرونی بہاؤ، منحنی میں محیط خطے پر میدان کے پھیلاؤ پر تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ تین ابعاد میں متعلقہ مسئلہ، جو مسئلہ پھیلاؤ کہلاتا ہے، کے تحت فضا میں بند سطح سے سمتیہ میدان کا باہر رخ گزرنے والا بہاؤ، سطح میں محیط خطے پر، میدان کے پھیلاؤ کے تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس حصے میں ہم مسئلہ پھیلاؤ ثابت کرتے ہیں، اور دکھاتے ہیں کہ یہ بہاؤ کی قیمت کی تلاش کیسے آسان بناتا ہے۔ ہم برقی میدان میں بہاؤ کا قانون گاوس اور ماقواحرکیات کی استمراری مساوات بھی اخذ کرتے ہیں۔ آخر میں ہم باب کے سمتی تکملی مسائل کو ایک بنیادی مسئلہ کے روپ میں پیش کرتے ہیں۔

تین ابعاد میں پھیلاؤ

سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$ کا **پھیلاؤ**[۴۰] درج ذیل غیر سمتی تفاعل ہوگا۔

$$\text{پھیلاؤ}\ \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \tag{۱}$$

علامت ''پھیلاؤ $\boldsymbol{F}$'' کو ''F کا پھیلاؤ'' پڑھا جاتا ہے، جبکہ علامت ''$\nabla \cdot \boldsymbol{F}$'' کو ''ڈیل ایف'' پڑھا جاتا ہے۔

تین ابعاد میں پھیلاؤ $\boldsymbol{F}$ کا وہی طبیعی مفہوم ہے جو دو ابعاد میں ہے۔ اگر $\boldsymbol{F}$ سیال کے بہاؤ کا سمتی میدان رفتار ہو، نقطہ (x,y,z) پر بہاؤ $\boldsymbol{F}$ کی قیمت اس نقطے پر سیال کے دخول یا خروج کی شرح دے گی۔ پھیلاؤ سے مراد نقطے پر بہاؤ فی اکائی حجم یعنی کثافت بہاؤ ہے۔

مثال ۱۵.۳۸: پھیلاؤ کی تلاش

سمتی میدان $\boldsymbol{F} = 2xz\boldsymbol{i} - xy\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$ کا پھیلاو تلاش کریں۔

حل

سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کا پھیلاؤ درج ذیل ہے۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-xy) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 2z - x - 1$$

---

[۴۰] divergence

۲۵۳۵۰ □

۲۵۳۵۱ **مسئلہ پھیلاؤ**

۲۵۳۵۲ مسئلہ پھیلاؤ کہتا ہے کہ مناسب شرائط کے تحت، (باہر رخ سمت بند) بند سطح سے سمتی میدان کا باہر گزرنے والا بہاؤ، سطح میں محیط خطے پر، میدان کے پھیلاؤ کے
۲۵۳۵۳ تہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

۲۵۳۵۴ مسئلہ ۱۵.۷: **مسئلہ پھیلاؤ**

۲۵۳۵۵ بند، سمت بند سطح S سے سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کا، سطح کے باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ کے رخ، گزرنے والا بہاؤ، سطح میں محیط خطہ D پر $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ کے تکمل کے
۲۵۳۵۶ برابر ہو گا۔

$$\underbrace{\iint\limits_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma}_{\text{باہر رخ بہاؤ}} = \underbrace{\iint\limits_D \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, \mathrm{d}H}_{\text{تکمل پھیلاؤ}} \tag{۲}$$

۲۵۳۵۷

۲۵۳۵۸ مثال ۱۵.۳۹: مسئلہ پھیلاؤ کی حمایت میں
۲۵۳۵۹ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ پر سمتی میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ کے لیے مساوات ۲ کے دونوں اطراف حل کریں۔

۲۵۳۶۰ **حل**

۲۵۳۶۱ سطح S کے باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ کو $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ کے ڈھلوان سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{a}$$

۲۵۳۶۲ یوں درج ذیل ہو گا جہاں سطح پر $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ لیا گیا ہے۔

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a}\, \mathrm{d}\sigma = \frac{a^2}{a}\, \mathrm{d}\sigma = a\, \mathrm{d}\sigma$$

۲۵۳۶۳ لہٰذا مساوات ۲ کا ایک ہاتھ ادرج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = \iint\limits_S a\, \mathrm{d}\sigma = a \iint\limits_S \mathrm{d}\sigma = 4\pi a^3$$

۲۵۳۶۴ میدان $\boldsymbol{F}$ کا پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$$

لہٰذا مساوات ۲ کا دوسرا ہاتھ درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint\limits_D \nabla \cdot \boldsymbol{F}\ \mathrm{d}H = \iiint\limits_D 3\,\mathrm{d}H = 3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = 4\pi a^3$$

□

مثال ۱۵.۴۰: بہاؤ کی تلاش

شُمن اول سے مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ ، اور $z = 1$ مکعب کاٹتی ہیں۔ سمتی میدان $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$ کا مکعب کی سطح سے باہر رخ گزرتا بہاؤ تلاش کریں۔

حل

مکعب کی چھ سطوح پر تکمل لے کر بہاؤ کی قیمت تلاش کرنے کے بجائے ہم پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = y + z + x$$

کا تکمل مکعب کے اندرون پر لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\text{بہاؤ} &= \iint\limits_{\text{مکعبی سطوح}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{\text{مکعبی اندرون}} \nabla \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H \qquad \text{مسئلہ پھیلاو} \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

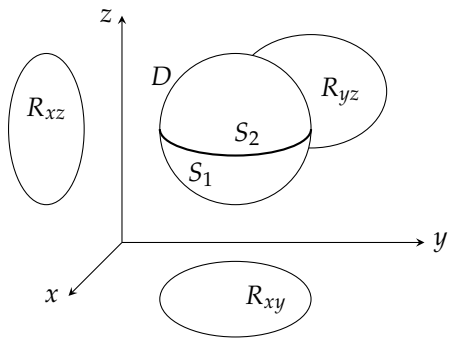
□

مخصوص خطوں کے لیے مسئلہ پھیلاؤ کا ثبوت

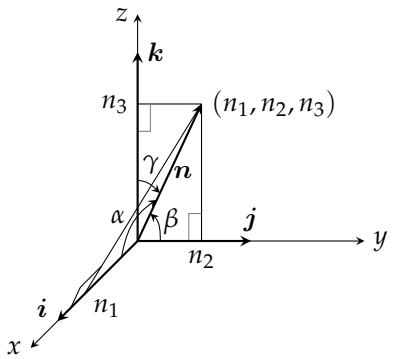
ہم فرض کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{F}$ کے اجزاء کے جزوی یک رتبی تفرق استمراری ہیں۔ ہم مزید فرض کرتے ہیں کہ خطہ D محدب ہے اور اس میں کوئی سوراخ یا بلبلا نہیں پایا جاتا، مثلاً ٹھوس مکعب، کرہ، یا تر خیمی جسم، اور اس کی سطح S ٹکڑوں میں ہموار ہے۔ اس کے ساتھ ساتھ ہم فرض کرتے ہیں کہ مستوی xy پر D کے تظلیل قائمہ R_{xy} کے اندرونی ہر نقطے پر، xy مستوی کو عمودی لکیر، سطح S کو ٹھیک دو نقاط پر قطع کرتی ہے جس سے ہمیں درج ذیل دو سطوح ملتے ہیں

$$\begin{aligned}
S_1 :&\quad z = f_1(x, y), \quad \text{نقطہ } (x, y) \text{ تظلیل } R_{xy} \text{ میں ہے} \\
S_2 :&\quad z = f_2(x, y), \quad \text{نقطہ } (x, y) \text{ تظلیل } R_{xy} \text{ میں ہے}
\end{aligned}$$

جہاں $f_1 \leq f_2$ ہے۔ ہم اسی طرح کے مفروضے دیگر محددی سطوح پر D کے تظلیل قائمہ کے لیے فرض کرتے ہیں۔ شکل ۱۵.۷۸ دیکھیں۔



شکل ۱۵.۷۸: دکھائی گئی قسم کے تین ابعادی خطے کے لیے مسئلہ پھیلاؤ ثابت کرنے کے بعد مسئلے کو دیگر خطوں تک وسعت دی جائے گی۔



شکل ۱۵.۷۹: اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ ،اور $\boldsymbol{k}$ کے ساتھ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ بالترتیب زاویہ α ، β ،اور γ بناتا ہے۔ان زاویوں کے کوسائن $\boldsymbol{n}$ کے غیر سمتی اجزاء ہیں۔

۲۵۴۷۹ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n} = n_1\boldsymbol{i} + n_2\boldsymbol{j} + n_3\boldsymbol{k}$ کے اجزاء،زاویات α ، β ،اور γ کے کوسائن ہیں،جو $\boldsymbol{n}$ اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ ،اور $\boldsymbol{k}$
۲۵۴۸۰ کے ساتھ بناتا ہے (شکل ۱۵.۷۹)۔تمام سمتیات اکائی ہونے کی وجہ سے ایسا ہو گا۔یوں

$$
\begin{aligned}
n_1 &= \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{i} = |\boldsymbol{n}||\boldsymbol{i}|\cos\alpha = \cos\alpha\\
n_2 &= \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j} = |\boldsymbol{n}||\boldsymbol{j}|\cos\beta = \cos\beta\\
n_3 &= \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k} = |\boldsymbol{n}||\boldsymbol{k}|\cos\gamma = \cos\gamma
\end{aligned}
$$

۲۵۴۸۱ لہٰذا

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha)\boldsymbol{i} + (\cos\beta)\boldsymbol{j} + (\cos\gamma)\boldsymbol{k}$$

۲۵۴۸۲ اور درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma$$

۲۵۴۸۳ اجزاء کے روپ میں مسئلہ پھیلاؤ کہتا ہے درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_S (M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

۲۵۴۸۴ ہم درج ذیل تین مساویت ثابت کر کے مسئلہ ثابت کرتے ہیں۔

$$\iint\limits_S M\cos\alpha\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_D \frac{\partial M}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{۳}$$

$$\iint\limits_S N\cos\beta\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_D \frac{\partial N}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{۴}$$

$$\iint\limits_S P\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_D \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{۵}$$

۲۵۴۸۵ **مساوات ۵ کا ثبوت**

۲۵۴۸۶ ہم بائیں ہاتھ کے سطحی تکمل کو مستوی xy پر D کی قائمہ تطلیل پر دوہرے تکمل میں تبدیل کر کے مساوات ۵ ثابت کرتے ہیں (شکل ۱۵.۸۰)۔ سطح S دو

۲۵۴۸۷ سطوح S_2 اور S_1 پر مشتمل ہے جہاں S_2 بالا حصہ ہے اور اس کی مساوات $z = f_2(x,y)$ ہے اور S_1 نچلا حصہ ہے اور اس کی مساوات

۲۵۴۸۸ $z = f_1(x,y)$ ہے۔ سطح S_2 پر باہر رخ عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کا $\boldsymbol{k}$ جزو مثبت علامت رکھتا ہے اور چونکہ

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}A}{|\cos\gamma|} = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\cos\gamma}$$

۲۵۴۸۹ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا (شکل ۱۵.۸۱ پر نظر ڈالیں)۔

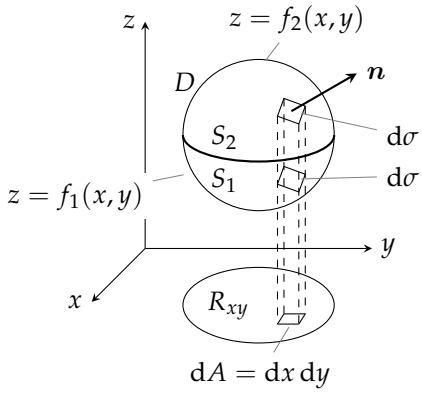
$$\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

۲۵۴۹۰ سطح S_1 پر $\boldsymbol{n}$ کا $\boldsymbol{k}$ جزو منفی علامت رکھتا ہے لہٰذا اس سطح پر درج ذیل ہو گا۔

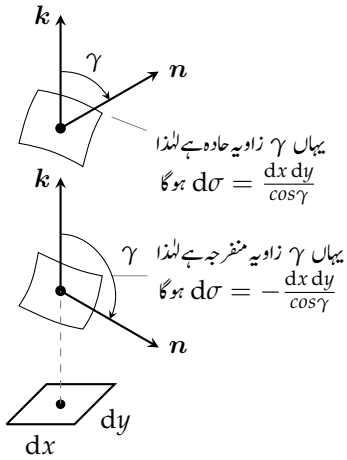
$$\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma = -\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

۲۵۴۹۱ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S P\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma &= \iint\limits_{S_2} P\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{S_1} P\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \iint\limits_{R_{xy}} P(x,y,f_2(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint\limits_{R_{xy}} P(x,y,f_1(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{R_{xy}} [P(x,y,f_2(x,y)) - P(x,y,f_1(x,y))]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{R_{xy}} \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint\limits_D \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$



شکل ۱۵.۸۰: تین بُعدی خطہ D ، جو مستوی xy پر دو ابعادی قائمہ تظلیل R_{xy} ڈالتا ہے، کو سطوح S_1 اور S_2 گھیرتی ہیں۔



شکل ۱۵.۸۱: گزشتہ شکل میں پیش رقبوں کے ٹکڑے بڑا کر کے دکھائے گئے ہیں۔ تعلق $\mathrm{d}\sigma = \pm\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y/\cos\gamma$ حصہ ۱۵.۵ میں اخذ کیا گیا ہے۔

یوں مساوات ۵ ثابت ہوا۔

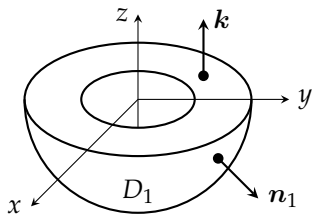
□

مساوات ۳ اور مساوات ۴ کے ثبوت اسی طرز پر حاصل ہوں گے؛ یا مساوات ۵ میں بالترتیب x ، y ، z ؛ M ، N ، P ؛ α ، β ، γ ایک دوسرے کی جگہ رکھ کر نتائج لکھیں۔

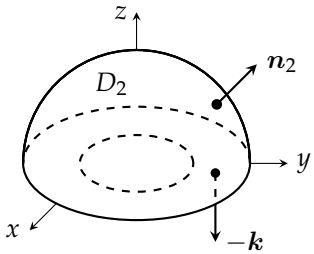
دیگر خطوں کے لیے مسئلہ پھیلاؤ

مسئلہ پھیلاؤ کو ان خطوں تک وسعت دی جا سکتی ہے جنہیں محدود تعداد کے مذکورہ سادہ قسم کے خطوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے یا ایسے خطوں تک جنہیں کسی طرح سادہ خطوں کی حد تصور کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر، فرض کریں دو ہم مرکز کرّات کے بیچ خطہ D ہے جہاں D کے اندر اور اس کے تحدیدی سطوح پر $\boldsymbol{F}$ کے جزوی تفرق استمراری ہیں۔ استوائی مستوی پر D کو دو حصوں میں تقسیم کر کے دونوں نصف حصوں پر مسئلہ پھیلاؤ کا اطلاق کریں۔ نچلا نصف حصہ D_1 شکل ۱۵.۸۲ میں پیش کیا گیا ہے جس کی تحدیدی سطح S_1 ہے جو بیرونی کرہ، مسطح چھلا، اور اندرونی کرہ پر مشتمل ہے۔ مسئلہ پھیلاؤ درج ذیل کہتا ہے۔

$$\iint\limits_{S_1} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}_1 \,\mathrm{d}\sigma_1 = \iiint\limits_{D_1} \nabla \cdot \boldsymbol{F} \,\mathrm{d}H_1 \tag{۶}$$



شکل ۱۵.۸۲: دو ہم مرکز کرّات کے بیچ ٹھوس خطے کا نچلا نصف حصہ۔



شکل ۱۵.۸۳: دو ہم مرکز کرّات کے بیچ ٹھوس خطے کا بالائی نصف حصہ۔

۲۵۵۰۱ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}_1$ کا رخ نچلے نصف حصہ D_1 کے بیرونی سطح پر مبدا سے دور کی جانب ہے، چھلے پر یہ $\boldsymbol{k}$ کے برابر ہے، اور اندرونی سطح پر اس کا رخ مبدا
۲۵۵۰۲ کی جانب ہے۔ اس کے بعد D_2 اور اس کی سطح S_2 پر مسئلہ پھیلاؤ کا اطلاق کریں (شکل ۱۵.۸۳)۔

$$\iint\limits_{S_2} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_2\,\mathrm{d}\sigma_2 = \iiint\limits_{D_2} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H_2 \tag{۷}$$

۲۵۵۰۳ بالائی نصف حصہ D_2 کی سطح S_2 پر چلتے ہوئے عمادی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}_2$ پر نظر رکھیں۔ بیرونی کرہ پر اس کا رخ مبدا سے دور جانب ہے، چھلا پر یہ $-\boldsymbol{k}$ کے
۲۵۵۰۴ برابر ہے، جبکہ اندرونی کرہ پر اس کا رخ مبدا کی جانب ہے۔ مساوات ۶ اور مساوات ۷ جمع کرتے ہوئے، چھلے پر $\boldsymbol{n}_1$ اور $\boldsymbol{n}_2$ کی علامتیں الٹ ہونے کی وجہ
۲۵۵۰۵ سے، اس پر تکمل ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔ یوں درج ذیل نتیجہ حاصل ہو گا

$$\iint\limits_{S} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_{D} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H$$

۲۵۵۰۶ جہاں دو کرّات (اندرونی اور بیرونی) کے بیچ خطہ D ہے، D کی سرحد S دو کرّات (اندرونی اور بیرونی) کی سطوح پر مشتمل ہے، اور S پر D سے باہر
۲۵۵۰۷ رخ عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے۔

۲۵۵۰۸ مثال ۱۵.۴۱: باہر رخ بہاؤ کا حصول
۲۵۵۰۹ خطہ $D:\ 0 < a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le b^2$ کی سرحد سے باہر رخ گزرنے والا صافی بہاؤ درج ذیل میدان کے لیے تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{F} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}}{\rho^3},\quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

۲۵۵۱۰ **حل**

۲۵۵۱۱ خطہ D پر $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ کا تکمل ہمیں بہاؤ دیگا۔ درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\rho}$$
$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\rho^{-3}) = \rho^{-3} - 3x\rho^{-4}\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3x^2}{\rho^5}$$

۲۵۵۱۲ اسی طرح درج ذیل بھی ہو گا۔

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3y^2}{\rho^5}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3z^2}{\rho^5}$$

۲۵۵۱۳ لہٰذا

$$\boldsymbol{F}\text{پھیلاؤ} = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3}{\rho^5}(x^2+y^2+z^2) = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3\rho^2}{\rho^5} = 0$$

۲۵۵۱۴ اور درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint\limits_D \nabla \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H = 0$$

۲۵۵۱۵ اس طرح D پر $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ کا تکمل صفر ہے اور D کی سرحد کو باہر رخ عبور کرتا ہوا صافی بہاؤ صفر ہو گا۔ اس مثال سے مزید معلومات بھی حاصل ہوتی ہیں۔
۲۵۵۱۶ اندرونی کرہ S_a کو پار کرتا ہوا جو بہاؤ D سے خارج ہوتا ہے کی علامت اس بہاؤ کے الٹ ہو گی جو بیرونی کرہ S_b کو عبور کرتا ہوا D سے خارج ہوتا ہے (یاد
۲۵۵۱۷ رہے ان بہاؤ کا مجموعہ صفر ہے)۔ یوں مبدا سے دوری کے رخ $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ جو S_a کو عبور کرتا ہے $\boldsymbol{F}$ کے اس بہاؤ کے برابر ہو گا جو مبدا سے دوری کے رخ
۲۵۵۱۸ S_b کو پار کرتا ہوا D سے خارج ہوتا ہے۔ یوں مبدا پر مرکوز کرہ کو عبور کرتا $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ کرہ کے رداس پر منحصر نہیں۔ یہ بہاؤ کتنا ہو گا؟

۲۵۵۱۹ اس کی قیمت جاننے کی خاطر ہم بہاؤ کا تکمل حل کرتے ہیں۔ رداس a کے کرہ کا باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{a}$$

۲۵۵۲۰ یوں کرہ پر

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = \left(\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{a^3}\right)\cdot\left(\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{a}\right) = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^4} = \frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2}$$

۲۵۵۲۱ لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_{S_a} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{a^2}\iint\limits_{S_a}\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{a^2}(4\pi a^2) = 4\pi$$

۲۵۵۲۲ مبدا پر مرکوز ہر کرہ سے $\boldsymbol{F}$ کا باہر رخ بہاؤ 4π ہو گا۔ □

۲۵۵۲۳ **گاوس کا قانون: برقناطیسیت کے چار عظیم قوانین میں سے ایک**

۲۵۵۲۴ ابھی مثال ۱۵.۴۱ سے بہت کچھ سیکھا جا سکتا ہے۔ برقناطیسی نظریہ میں، مبدا پر موجود نقطی بار q درج ذیل برقی میدان پیدا کرتا ہے

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}|^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\rho^3}$$

جہاں ϵ_0 طبیعی مستقل، $\boldsymbol{r}$ نقطہ (x, y, z) کا تعین گر سمتیہ، اور $\rho = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ہے۔ مثال ۱۵.۴۱ کی علامتیت میں اس کو لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\boldsymbol{F}$$

مثال ۱۵.۴۱ سے ہم دیکھتے ہیں کہ مبدا پر مرکوز ہر کرہ سے باہر رخ $\boldsymbol{E}$ کا بہاؤ q/ϵ_0 ہو گا، لیکن یہ نتیجہ صرف کرہ تک محدود نہیں۔ کسی بھی بند سطح S سے، جو مبدا کو گھیرتی ہو (اور جس پر مسئلہ پھیلاؤ کا اطلاق ہوتا ہو)، $\boldsymbol{E}$ کا باہر رخ بہاؤ q/ϵ_0 ہو گا۔ اس کی وجہ جاننے کی خاطر مبدا پر مرکوز اتنے بڑے کرہ S_a کا تصور کریں جو S کو گھیرتا ہو۔ جب $\rho > 0$ ہو درج ذیل ہو گا

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = \nabla\cdot\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\boldsymbol{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\nabla\cdot\boldsymbol{F} = 0$$

جس کی وجہ سے S اور S_a کے بیچ خطہ D پر $\nabla\cdot\boldsymbol{E}$ کا تکمل صفر ہو گا۔ لہٰذا مسئلہ پھیلاؤ کے تحت

$$\iint\limits_{D\text{ کی سرحد}} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = 0$$

ہو گا، اور مبدا سے دوری کے رخ S کو عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{E}$ کا بہاؤ لازماً مبدا سے دوری کے رخ S_a کو عبور کرتے ہوئے $\boldsymbol{E}$ کے بہاؤ کے برابر ہو گا، جو q/ϵ_0 ہے۔ یہ فقرہ، جو **قانون گاوس**[41] کہلاتا ہے، یہاں فرض کیے گئے بار سے زیادہ عمومی تقسیم بار کے لیے بھی درست ہے، جیسا آپ طبیعیات کے کسی بھی نصابی کتاب میں پڑھ سکتے ہیں۔

$$\iint\limits_{S} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad \text{قانون گاوس}$$

ماقوا حرکیات کی استمراری مساوات

فرض کریں فضا میں خطہ D بند، سمت بند سطح S میں محدود ہے۔ اگر نقطہ (x, y, z) اور وقت t پر D میں بہتے ہوئے سیال کا سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{v}(x, y, z)$، اور کثافت $\delta = \delta(t, x, y, z)$ ہو، اور $\boldsymbol{F} = \delta\boldsymbol{v}$ ہو، تب ماقوا حرکیات کی **استمراری مساوات**[42] درج ذیل کہتی ہے۔

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F} + \frac{\partial\delta}{\partial t} = 0$$

اگر ملوث تفاعلات کے یک رتبی جزوی تفرق استمراری ہوں، یہ مساوات مسئلہ پھیلاؤ سے اخذ کی جا سکتی ہے۔ آئیں یہ عمل دیکھیں۔

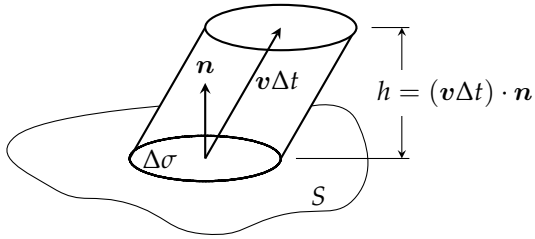
درج ذیل تکمل، S کو عبور کر کے D سے کمیتی اخراج (اخراج اس لیے کہ $\boldsymbol{n}$ باہر رخ عمودی ہے) کی شرح دیتا ہے۔

$$\iint\limits_{S} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

---

[41] Gauss'law

[42] continuityequation



شکل ۱۵.۸۴: قلیل وقت Δt کے دوران جو سیال رقبے کے ٹکڑا $\Delta\sigma$ سے اوپر رخ گزرتا ہے اس کا حجم بیلن $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\Delta\sigma\Delta t$ کے برابر ہو گا۔

۲۵۵۳۹ اس کی وجہ جاننے کی خاطر، سطح پر رقبے کا ٹکڑا $\Delta\sigma$ لیں (شکل ۱۵.۸۴)۔ قلیل زمانی وقفہ Δt میں، اس ٹکڑے کو ΔH حجم عبور کرتا ہے جو تخمیناً اس بیلن
۲۵۵۴۰ کے حجم کے برابر ہو گا جس کا تل $\Delta\sigma$ اور لمبائی $(\boldsymbol{v}\Delta t)\cdot\boldsymbol{n}$ ہو، جہاں اس ٹکڑے کے کسی ایک نقطے پر سمتی رفتاری سمتیہ $\boldsymbol{v}$ ہے۔

$$\Delta H \approx \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\Delta\sigma\Delta t$$

۲۵۵۴۱ اس حجم کی کمیت تقریباً

$$\Delta m \approx \delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\Delta\sigma\Delta t$$

۲۵۵۴۲ ہو گی، لہٰذا سے اس ٹکڑے سے گزر کر D سے کمیت کے اخراج کی شرح تخمیناً درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \approx \delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\Delta\sigma$$

۲۵۵۴۳ اس سے درج ذیل تخمین لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{\sum\Delta m}{\Delta t} \approx \sum\delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\Delta\sigma$$

۲۵۵۴۴ جو S سے گزرنے والی کمیت کی تخمیناً اوسط شرح ظاہر کرتی ہے۔ آخر میں $\Delta\sigma \to 0$ اور $\Delta t \to 0$ لیتے ہوئے D سے S کے ذریعہ اخراج کی
۲۵۵۴۵ لمحاتی شرح:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \iint\limits_S \delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

۲۵۵۴۶ حاصل ہو گی جو اس مخصوص سیال کے لیے درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

۲۵۵۴۷ اب فرض کریں سیال میں نقطہ Q پر مرکوز ٹھوس کرہ B رکھا جاتا ہے۔ کرہ B پر $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{1}{B\text{ کا حجم}} \iiint\limits_B \nabla \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H$$

۲۵۵۴۸ پھیلاؤ کے استمرار کا ایک پہلو یہ ہے کہ B میں کسی ایک نقطہ P پر $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ کی قیمت یہی ہو گی۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}(\nabla \cdot \boldsymbol{F})_P &= \frac{1}{B\text{ کا حجم}} \iiint\limits_B \nabla \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H = \frac{\iint\limits_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma}{B\text{ کا حجم}} \\ &= \frac{S\text{ سطح کے ذریعہ } B\text{ سے کمیتی اخراج کی شرح}}{B\text{ کا حجم}} \qquad (۸)\end{aligned}$$

۲۵۵۴۹ دائیں ہاتھ کسر اکائی حجم میں کمیت کی کمی کی شرح بیان کرتا ہے۔

۲۵۵۵۰ اب مرکز Q کو ایک ہی مقام پر رکھتے ہوئے B کے رداس کو صفر کے قریب پہنچائیں۔ مساوات ۸ کا بایاں ہاتھ $(\nabla \cdot \boldsymbol{F})_Q$ کو، جبکہ اس کا دایاں ہاتھ
۲۵۵۵۱ $(-\partial\delta/\partial t)_Q$ پر مرکوز ہو گا۔ ان دو حدوں کی مساویت ہمیں درج ذیل **استراری مساوات**[۴۳] دیتی ہے۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = -\frac{\partial \delta}{\partial t}$$

۲۵۵۵۲ استراری مساوات ہمیں $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ کا مفہوم دیتی ہے: کسی نقطے پر $\boldsymbol{F}$ کا پھیلاؤ اس نقطے پر سیال کی کثافت میں کمی کی شرح دیتا ہے۔

۲۵۵۵۳ مسئلہ پھیلاؤ

$$\iint\limits_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_D \nabla \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H$$

۲۵۵۵۴ اب کہتا ہے کہ خطہ D میں کثافت کی صافی کمی کی وجہ کمیت کی سطح S سے دوسری جانب منتقلی ہے۔ یوں یہ مسئلہ کمیت کی بقا بیان کرتا ہے (سوال
۲۵۵۵۵ ۱۵.۳۲۹)۔

۲۵۵۵۶ تکملی مسائل کی یکجائی

۲۵۵۵۷ دو بُعدی میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ کو ایسا تین بُعدی میدان تصور کر کے جس کا $\boldsymbol{k}$ جزو صفر ہو ہم

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = (\partial M/\partial x) + (\partial N/\partial y)$$

۲۵۵۵۸ لکھ سکتے ہیں اور یوں مسئلہ گرین کا عمودی روپ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\oint\limits_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \iint\limits_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_R \nabla \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}A$$

---

[۴۳] continuityequation

۲۵۵۵۹ اسی طرح $\nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{k} = (\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$ ہوگا لہٰذا مسئلہ گرین کا مماسی روپ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{k}\,\mathrm{d}A$$

۲۵۵۶۰ مسئلہ گرین کی مساوات ڈیل علامتیت میں لکھ کر ان کا مسئلہ سٹوکس اور مسئلہ پھیلاؤ کے ساتھ تعلق افشا ہوتا ہے۔

۲۵۵۶۱ مسئلہ گرین کی تین ابعادی تعمیم

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \iint_R \nabla \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}A \qquad \text{مسئلہ گرین کا عمودی روپ}$$

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H \qquad \text{مسئلہ پھیلاؤ}$$

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_R \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{k}\,\mathrm{d}A \qquad \text{مسئلہ گرین کا مماسی روپ}$$

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{مسئلہ سٹوکس}$$

۲۵۵۶۲ مستوی میں چپٹی سطح پر مسئلہ گرین کے مماسی (گردش) روپ کو مسئلہ سٹوکس تین ابعادی فضا میں سطح پر عمومیت دیتا ہے۔ دنوں میں، سطح کے اندرون پر گردش
۲۵۵۶۳ $\boldsymbol{F}$ کے عمودی جزو کا تکمل اور سرحد کے ہمراہ $\boldsymbol{F}$ کا دائری بہاؤ برابر ہوگا۔

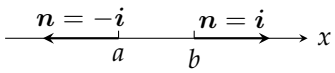
۲۵۵۶۴ اسی طرح دو ابعادی مستوی میں خطہ پر مسئلہ گرین کے عمودی (بہاؤ) روپ کو مسئلہ پھیلاؤ فضا میں تین ابعادی خطہ پر عمومیت دیتا ہے۔ دونوں میں، خطے کے
۲۵۵۶۵ اندرون پر $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ کا تکمل اور سرحد کو عبور کرتے ہوئے میدان کا کل بہاؤ برابر ہوگا۔

۲۵۵۶۶ ابھی مزید معلومات حاصل کی جا سکتی ہیں۔ ان تمام نتائج کو ایک بنیادی مسئلے کے مختلف روپ تصور کیا جا سکتا ہے۔ حصہ ۵.۷ میں تکمل کا بنیادی مسئلہ پیش کیا گیا جو
۲۵۵۶۷ کہتا ہے اگر (a, b) پر $f(x)$ قابل تفرق اور $[a, b]$ پر استمراری ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

۲۵۵۶۸ اگر پورے $[a, b]$ پر $\boldsymbol{F} = f(x)\boldsymbol{i}$ ہو تب $(\mathrm{d}f/\,\mathrm{d}x) = \nabla \cdot \boldsymbol{F}$ ہوگا۔ اگر ہم $[a, b]$ کی سرحد پر عمودی اکائی سمتی میدان $\boldsymbol{n}$ کو
۲۵۵۶۹ b پر $\boldsymbol{i}$ اور a پر $-\boldsymbol{i}$ مان لیں (شکل ۱۵.۸۵) تب درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= f(b)\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} + f(a)\boldsymbol{i} \cdot (-\boldsymbol{i}) \\ &= \boldsymbol{F}(b) \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{F}(a) \cdot \boldsymbol{n} \\ &= \text{کی سرحد سے باہر رخ } \boldsymbol{F} \text{ کا کل بہاؤ } [a, b] \end{aligned}$$



شکل ۱۵.۸۵: یک بُعدی فضا میں $[a, b]$ کی سرحد پر باہر رخ اکائی عمودی سمتیات۔

تکمل کا بنیادی مسئلہ یوں درج ذیل کہتا ہے۔

$$\boldsymbol{F}(b) \cdot \boldsymbol{n} + \boldsymbol{F}(a) \cdot \boldsymbol{n} = \int\limits_{[a,b]} \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}x$$

تکمل کا بنیادی مسئلہ، مسئلہ گرین کا عمودی روپ، اور مسئلہ پھیلاؤ تینوں کہتے ہیں کہ تفرقی عامل $\nabla \cdot$ جو کسی خطے میں میدان $\boldsymbol{F}$ پر عمل کرتا ہو اس خطے کی سرحد پر میدان کے عمودی اجزاء کے مجموعے کے برابر ہو گا۔ (یہاں ہم مسئلہ گرین میں موجود لکیری تکمل اور مسئلہ پھیلاؤ میں موجود سطحی تکمل سے مراد سرحد پر "مجموعہ" لیتے ہیں۔)

مسئلہ سٹوکس اور مسئلہ گرین کا مماسی روپ دونوں کہتے ہیں کہ درست سمت بندی کر کے، گردش میدان کے عمودی جزو کا تکمل اور سطح کی سرحد پر میدان کے مماسی اجزاء کا مجموعہ برابر ہوں گے۔

مفہوم کو اس طرح سمجھنے سے ایک مربوط اصول ابھرتا ہے جو درج ذیل بیان کیا جا سکتا ہے۔

تفرقی عامل کے زیر اثر میدان کا خطے میں تکمل اور خطے کی سرحد پر، عامل کے لحاظ سے موزوں، میدان کے اجزاء کا مجموعہ برابر ہو گا۔

سوالات

پھیلاؤ کی قیمت کی تلاش

سوال ۱۵.۲۹۹ تا سوال ۱۵.۳۰۲ میں میدان کا پھیلاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۹۹: شکل ۱۵.۲۰ میں چکری میدان۔

سوال ۱۵.۳۰۰: شکل ۱۵.۱۹ میں رداسی میدان۔

سوال ۱۵.۳۰۱: شکل ۱۵.۱۸ میں تجاذبی میدان۔

سوال ۱۵.۳۰۲: شکل ۱۵.۱۷ کا سمتی رفتاری میدان۔

مسئلہ پھیلاؤ کے استعمال سے باہر رخ بہاؤ کی قیمت کی تلاش

سوال ۱۵.۳۰۳ تا سوال ۱۵.۳۱۴ میں مسئلہ پھیلاؤ استعمال کر کے خطہ D کی سرحد سے باہر جانب $\boldsymbol{F}$ کا گزرنے والا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۰۳: **مکعب** $\boldsymbol{F} = (y-x)\boldsymbol{i} + (z-y)\boldsymbol{j} + (y-x)\boldsymbol{k}$

مکعب D جس کو سطوح $x = \pm 1$ ، $y = \pm 1$ ، اور $z = \pm 1$ گھیرتی ہیں۔

سوال ۱۵.۳۰۴: $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} + z^2\boldsymbol{k}$

ا. **مکعب** مکعب D جسے ثمن اول سے مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ ، $z = 1$ کاٹتی ہیں۔

ب. **مکعب** مکعب D جسے مستویات $x = \pm 1$ ، $y = \pm 1$ ، اور $z = \pm 1$ گھیرتی ہیں۔

ج. **بیلن** خطہ D جس کو مستویات $z = 0$ اور $z = 1$ ٹھوس بیلن $x^2 + y^2 \leq 4$ سے کاٹتی ہیں۔

سوال ۱۵.۳۰۵: **بیلن اور مکافی جسم** $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$

ٹھوس بیلن $x^2 + y^2 \leq 4$ کے اندر خطہ D جو مستوی $z = 0$ اور مکافی جسم $z = x^2 + y^2$ کے بیچ ہے۔

سوال ۱۵.۳۰۶: **کرہ** $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + 3z\boldsymbol{k}$

ٹھوس کرہ $D:\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$

سوال ۱۵.۳۰۷: **کرے کا ٹکڑا** $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} - 2xy\boldsymbol{j} + 3xz\boldsymbol{k}$

خطہ D وہ ہے جسے ثمن اول سے کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کاٹتا ہے۔

سوال ۱۵.۳۰۸: **بیلن** $\boldsymbol{F} = (6x^2 + 2xy)\boldsymbol{i} + (2y + x^2z)\boldsymbol{j} + 4x^2y^3\boldsymbol{k}$

مستوی $z = 3$ اور بیلن $x^2 + y^2 = 4$ ثمن اول سے خطہ D کاٹتے ہیں۔

سوال ۱۵.۳۰۹: **پچر** $\boldsymbol{F} = 2xz\boldsymbol{i} - xy\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k}$

مستوی $y + z = 4$ اور بیضوی بیلن $4x^2 = y^2 = 16$ ثمن اول سے پچر D کاٹتے ہیں۔

سوال ۱۵.۳۱۰: **کرہ** $\boldsymbol{F} = x^3\boldsymbol{i} + y^3\boldsymbol{j} + z^3\boldsymbol{k}$

خطہ D ٹھوس کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ ہے۔

سوال ۱۵.۳۱۱: **موٹا کرہ** $\boldsymbol{F} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})$

خطہ D جسے $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ ظاہر کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۳۱۲: **موٹا کرہ** $\boldsymbol{F} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

خطہ D جسے $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ظاہر کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۳۱۳: **موٹا کرہ** $\boldsymbol{F} = (5x^3 + 12xy^2)\boldsymbol{i} + (y^3 + e^y \sin z)\boldsymbol{j} + (5z^3 + e^y \cos z)\boldsymbol{k}$

کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ اور کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ کے بیچ ٹھوس خطہ D ہے۔

۲۵۶۱۵ سوال ۱۵.۳۱۴: **موٹا بیلن** $\boldsymbol{F} = \ln(x^2+y^2)\boldsymbol{i} - (\frac{2z}{x}\tan^{-1}\frac{y}{x})\boldsymbol{j} + z\sqrt{x^2+y^2}\boldsymbol{k}$

۲۵۶۱۶ خطہ D موٹی چادر کا بیلن $1 \le x^2+y^2 \le 2$ ، $-1 \le z \le 2$ ہے۔

۲۵۶۱۷

۲۵۶۱۸ گردش اور پھیلاؤ کے خواص

۲۵۶۱۹ سوال ۱۵.۳۱۵: **گردش G کا پھیلاؤ صفر ہو گا**

۲۵۶۲۰

۲۵۶۲۱ ا. دکھائیں اگر میدان $\boldsymbol{G} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ کے مطلوبہ جزوی تفرق استمراری ہوں، تب $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{G} = 0$ ہو گا۔

۲۵۶۲۲ ب. کیا آپ اس سے، میدان $\nabla \times \boldsymbol{G}$ کا بند سطح سے گزرتے بہاؤ کے بارے میں، کوئی نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۲۵۶۲۳ سوال ۱۵.۳۱۶: فرض کریں $\boldsymbol{F}_1$ اور $\boldsymbol{F}_2$ قابل تفرق سمتی میدان ہیں جبکہ a اور b حقیقی اختیاری مستقل ہیں۔ درج ذیل تماثل کی تصدیق کریں۔

۲۵۶۲۴ ا. $\nabla \cdot (a\boldsymbol{F}_1 + b\boldsymbol{F}_2) = a\nabla \cdot \boldsymbol{F}_1 + b\nabla \cdot \boldsymbol{F}_2$

۲۵۶۲۵ ب. $\nabla \times (a\boldsymbol{F}_1 + b\boldsymbol{F}_2) = a\nabla \times \boldsymbol{F}_1 + b\nabla \times \boldsymbol{F}_2$

۲۵۶۲۶ ج. $\nabla \cdot (\boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{F}_2) = \boldsymbol{F}_2 \cdot \nabla \times \boldsymbol{F}_1 - \boldsymbol{F}_1 \cdot \nabla \times \boldsymbol{F}_2$

۲۵۶۲۷ سوال ۱۵.۳۱۷: فرض کریں $\boldsymbol{F}$ قابل تفرق سمتی میدان جبکہ $g(x,y,z)$ قابل تفرق غیر سمتی میدان ہے۔ درج ذیل تماثل کی تصدیق کریں۔

۲۵۶۲۸ ا. $\nabla \cdot (g\boldsymbol{F}) = g\nabla \cdot \boldsymbol{F} + \nabla g \cdot \boldsymbol{F}$

۲۵۶۲۹ ب. $\nabla \times (g\boldsymbol{F}) = g\nabla \times \boldsymbol{F} + \nabla g \times \boldsymbol{F}$

۲۵۶۳۰

۲۵۶۳۱ سوال ۱۵.۳۱۸: قابل تفرق سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ کے لیے علامتی اظہار $\boldsymbol{F} \cdot \nabla$ کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$M\frac{\partial}{\partial x} + N\frac{\partial}{\partial y} + P\frac{\partial}{\partial z}$$

۲۵۶۳۲ قابل تفرق سمتی میدان $\boldsymbol{F}_1$ اور $\boldsymbol{F}_2$ کے لیے درج ذیل کی تصدیق کریں۔

۲۵۶۳۳ ا. $\nabla \times (\boldsymbol{F}_1 \times \boldsymbol{F}_2) = (\boldsymbol{F}_2 \cdot \nabla)\boldsymbol{F}_1 - (\boldsymbol{F}_1 \cdot \nabla)\boldsymbol{F}_2 + (\nabla \cdot \boldsymbol{F}_2)\boldsymbol{F}_1 - (\nabla \cdot \boldsymbol{F}_1)\boldsymbol{F}_2$

۲۵۶۳۴ ب. $\nabla(\boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{F}_2) = (\boldsymbol{F}_1 \cdot \nabla)\boldsymbol{F}_2 + (\boldsymbol{F}_2 \cdot \nabla)\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_1 \times (\nabla \times \boldsymbol{F}_2) + \boldsymbol{F}_2 \times (\nabla \times \boldsymbol{F}_1)$

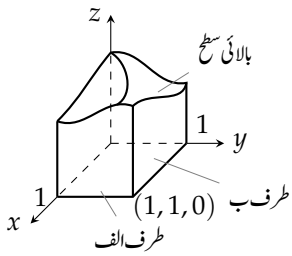
۲۵۶۳۵

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۵.۳۱۹: سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کے اجزاء کے یک رتبی تفرق فضا کے ایک ایسے حصہ میں استمراری ہیں جس کے اندر ہموار بند سطح S میں محدود خطہ D پایا جاتا ہے۔ اگر $\boldsymbol{F} \leq 1$ ہو کیا درج ذیل کی قیمت کی حد بندی ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\iiint\limits_D \nabla \cdot \boldsymbol{F}\, \mathrm{d}H$$

سوال ۱۵.۳۲۰: مستوی xy پر اکائی مربع دکھائے گئے کعبی نما سطح کا تل ہے۔ سطح کے چار اطراف مستویات $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، اور $y = 1$ میں پائے جاتے ہیں۔ بالائی سطح اختیاری ہموار لیکن نامعلوم ہے۔ فرض کریں $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j} + (z+3)\boldsymbol{k}$ ہے اور باہر رخ بہاؤ الف طرف سے 1 اور ب طرف سے -3 ہے۔ کیا آپ بالائی سطح سے باہر رخ بہاؤ کے بارے میں نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔



سوال ۱۵.۳۲۱:

ا. دکھائیں کہ ہموار بند سطح S سے تعین گر سمتی میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ کا باہر رخ بہاؤ، اس خطے کے حجم کے تین گنا ہے جس کو سطح S گھیرتی ہے۔

ب. فرض کریں S کا باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے۔ دکھائیں ایسا ممکن نہیں کہ S کے ہر نقطے پر $\boldsymbol{F}$ سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کو قائمہ ہو۔

سوال ۱۵.۳۲۲: **زیادہ سے زیادہ بہاؤ** ان تمام ٹھوس مستطیل میں سے، جنہیں عدم مساوات $0 \leq x \leq a$ ، $0 \leq y \leq b$ ، اور $0 \leq z \leq 1$ بیان کرتی ہوں، وہ تلاش کریں جس کے چار اطراف سے باہر رخ $\boldsymbol{F} = (-x^2 - 4xy)\boldsymbol{i} - 6yz\boldsymbol{j} + 12z\boldsymbol{k}$ کا بہاؤ زیادہ سے زیادہ ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ بہاؤ کی قیمت کیا ہو گی؟

سوال ۱۵.۳۲۳: **ٹھوس خطے کا حجم** فرض کریں S اور D مسئلہ پھیلاؤ کی شرائط پر پورا اترتے ہیں، اور $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ ہے۔ دکھائیں کہ D کا حجم درج ذیل دیگا۔

$$D \text{ کا حجم} = \frac{1}{3} \iint\limits_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma$$

سوال ۱۵.۳۲۴: **مستقل میدان کا بہاؤ** دکھائیں کہ مستقل سمتی میدان $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{C}$ کا کسی بھی بند سطح، جس پر مسئلہ پھیلاؤ کا اطلاق ہوتا ہو، سے باہر رخ بہاؤ صفر ہو گا۔

سوال ۱۵.۳۲۵: **ہارمونی تفاعلات** فضا کے خطہ D میں تفاعل $f(x, y, z)$ اس صورت **ہارمونی**[۴۴] کہلاتا ہے جب وہ پورے D میں درج ذیل لاپلاسی مساوات کو مطمئن کرتا ہو۔

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

ا. فرض کریں ہموار سطح S، جس کا منتخب اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے، محدود خطہ D کو گھیرتی ہے اور f اس پورے خطے میں ہارمونی ہے۔ دکھائیں کہ S پر $\nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ کا تکمل، یعنی $\boldsymbol{n}$ کے رخ f کا تفرق، صفر ہے۔

ب. دکھائیں اگر D میں f ہارمونی ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_S f \nabla f \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_D |\nabla f|^2 \, \mathrm{d}H$$

سوال ۱۵.۳۲۶: **ڈھلوان میدان کا بہاؤ** فرض کریں ثمن اول میں موجود کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ کے ٹکڑے کی سطح S ہے اور $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ہے۔ درج ذیل کی قیمت تلاش کریں۔ (سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کے رخ f کا تفرق $\nabla f \cdot \boldsymbol{n}$ ہے۔)

$$\iint\limits_S \nabla f \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma$$

سوال ۱۵.۳۲۷: **گرین کا کلیہ اول** ٹکڑوں میں ہموار بند سطح S میں بند پورے خطے D پر غیر سمتی تفاعلات f اور g کے یک رتبی اور دو رتبی جزوی تفرق استمراری ہیں۔ دکھائیں کہ درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_S f \nabla g \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \iiint\limits_D (f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g) \, \mathrm{d}H \tag{۹}$$

مساوات ۹ **گرین کا کلیہ اول**[۴۵] ہے۔ (اشارہ: میدان $\boldsymbol{F} = f \nabla g$ پر مسئلہ پھیلاؤ کا اطلاق کریں۔)

---

[۴۴] harmonic
[۴۵] Greens'sfirstformula

سوال ۱۵.۳۲۸: **گرین کا کلیہ دوم** (سوال ۱۵.۳۲۷ کو آگے بڑھاتے ہیں۔) مساوات ۹ میں f اور g کی جگہیں آپس میں تبدیل کر کے اسی قسم کا دوسرا کلیہ اخذ کریں۔ اس کلیہ کو مساوات ۹ سے منفی کر کے درج ذیل دکھائیں۔

$$\iint_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_D (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,\mathrm{d}H \tag{۱۰}$$

مساوات ۱۰ **گرین کا کلیہ دوم**[۴۶] ہے۔

سوال ۱۵.۳۲۹: **کمیت کی بقا** فضا میں خطہ D پر $\boldsymbol{v}(t,x,y,z)$ استمراری قابل تفرق سمتی میدان ہے، جبکہ $p(t,x,y,z)$ استمراری قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہے۔ متغیر t وقت کو ظاہر کرتا ہے۔ **کمیت کی بقا کا قانون**[۴۷] درج ذیل کہتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_D p(t,x,y,z)\,\mathrm{d}H = -\iint_S p\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

جہاں S وہ سطح ہے جو D کو گھیرتی ہے۔

ا. سمتی بہاؤ میدان $\boldsymbol{v}$ اور لمحہ t پر نقطہ (x,y,z) پر سیال کی کثافت p لے کر کمیت کی بقا کے قانون کا طبیعی مفہوم پیش کریں۔

ب. مسئلہ پھیلاؤ اور لیبنٹز کا قاعدہ:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_D p(t,x,y,z)\,\mathrm{d}H = \iiint_D \frac{\partial p}{\partial t}\,\mathrm{d}H$$

استعمال کر کے دکھائیں کہ کمیت کی بقا کا قانون استمراری مساوات:

$$\nabla\cdot p\boldsymbol{v} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

کا معادل ہے۔ (اول رکن $\nabla\cdot p\boldsymbol{v}$ میں متغیر t اٹل رکھا جاتا ہے، جبکہ دوسرے رکن $\partial p/\partial t$ میں، ہم فرض کرتے ہیں کہ نقطہ (x,y,z) خطہ D میں اٹل رکھا گیا ہے۔)

سوال ۱۵.۳۳۰: **نفوذ حرکی مساوات** فرض کریں فضا میں خطہ D میں مکین ٹھوس جسم کے نقطہ (x,y,z) کا درجہ حرارت لمحہ t پر تفاعل $T(t,x,y,z)$ دیتا ہو جس کے دوہرے تفرق استمراری ہیں۔ جسم کی حری استعداد c اور کمیتی کثافت ρ ہے۔ مقدار $c\rho T$ جسم کی فی اکائی حجم حری توانائی کہلاتی ہے۔

ا. بتلائیں $-\nabla T$ کیوں حرارت کے بہاؤ کا رخ دیگا۔

---

[۴۶] Green'ssecondformula
[۴۷] LawofConservationofMass

ب. **بہاؤ حر کا سمتیہ**[48] $-k\nabla T$ لیں۔(یہاں مستقل k **موصلیت**[49] کہلاتا ہے۔) کمیتی بقا کے قانون (سوال ۱۵.۳۲۹) میں $-k\nabla T = \boldsymbol{v}$ اور $c\rho T = p$ لے کر مساوات نفوذ (برائے حرارت):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K\nabla^2 T$$

اخذ کریں، جہاں $K = k/(c\rho) > 0$ **نفوذیت**[50] کا مستقل کہلاتا ہے۔(دھیان رہے اگر یکساں موصل سلاخ جس کے سرے مکمل غیر موصل رکھے گئے ہوں کے نقطہ x اور لمحہ t پر درجہ حرارت کو $T(t,x)$ ظاہر کرتا ہو، تب $\nabla^2 T = \partial^2 T/\partial x^2$ ہو گا اور مساوات نفوذ، باب ۱۳ کے اضافی سوالات میں دی گئی یک بُعدی مساوات حرّ دیگی۔)

نظر ثانی کی خاطر چند سوالات

سوال ۱۵.۳۳۱: لکیری تکملات کیا ہوتے ہیں؟ ان کی قیمتیں کیسے تلاش کی جاتی ہیں؟ مثال دیں۔

سوال ۱۵.۳۳۲: اسپرنگ کا کمیتی مرکز لکیری تکملات سے کیسے حاصل کیا جا سکتا ہے؟ وضاحت کریں۔

سوال ۱۵.۳۳۳: سمتی میدان، اور ڈھلوان میدان سے کیا مراد ہے؟ مثال پیش کریں۔

سوال ۱۵.۳۳۴: منحنی کے ہمراہ ذرے کو حرکت دینے والے قوت کے کام کی قیمت کیسے تلاش کی جائیگی؟ ایک مثال دیں۔

سوال ۱۵.۳۳۵: بہاؤ، دائری بہاؤ، اور گردش سے کیا مراد ہے؟

سوال ۱۵.۳۳۶: راہ پر غیر منحصر میدان کی کیا خاصیت ہے؟

سوال ۱۵.۳۳۷: آپ کیسے جان پاتے ہیں کہ میدان بقائی ہے؟

سوال ۱۵.۳۳۸: مخفی تفاعل سے کیا مراد ہے؟ مثال سے دکھائیں کہ بقائی میدان کا مخفی تفاعل کیسے تلاش کیا جاتا ہے۔

سوال ۱۵.۳۳۹: تفرقی روپ سے کیا مراد ہے؟ ایسا روپ قطعی ہونے سے کیا مراد ہے؟ قطعی ہونے کی پرکھ کیا ہے؟ مثال پیش کریں۔

سوال ۱۵.۳۴۰: سمتی میدان کا پھیلاؤ کیا ہو گا؟ اس کا مفہوم بیان کریں۔

سوال ۱۵.۳۴۱: سمتی میدان کی گردش کیا ہو گی؟ اس کا مفہوم بیان کریں۔

سوال ۱۵.۳۴۲: مسئلہ گرین کیا ہے؟ اس کا مفہوم بیان کریں

سوال ۱۵.۳۴۳: فضا میں قوسی سطح کے رقبے کی قیمت کیسے تلاش کی جاتی ہے؟ مثال پیش کریں۔

---

[48] energyfluxvector
[49] conductivity
[50] diffusivity

سوال ۱۵.۳۴۴: سمت بند سطح سے کیا مراد ہے؟ سمت بند سطح کو عبور کرتے ہوئے، تین بُعدی سمتی میدان کے بہاؤ کی قیمت کیسے تلاش کی جاتی ہے؟ مثال دیں۔

سوال ۱۵.۳۴۵: سطحی تکملات کیا ہوتے ہیں؟ ان کی مدد سے کیا تلاش کیا جا سکتا ہے؟ مثال دیں۔

سوال ۱۵.۳۴۶: مقدار معلوم سطوح کیا ہوتی ہیں؟ ان سطوح کا رقبہ کیسے تلاش کیا جاتا ہے؟ مثال دیں۔

سوال ۱۵.۳۴۷: مقدار معلوم سطح پر تفاعل کا تکمل کیسے حاصل کیا جاتا ہے؟ مثال دیں۔

سوال ۱۵.۳۴۸: مسئلہ سٹوکس کیا ہے؟ اس کا مفہوم بیان کریں۔

سوال ۱۵.۳۴۹: باب میں پیش، بقائی میدان کے نتائج کا خلاصہ پیش کریں۔

سوال ۱۵.۳۵۰: مسئلہ پھیلاؤ کیا ہے؟ اس کا مفہوم بیان کریں۔

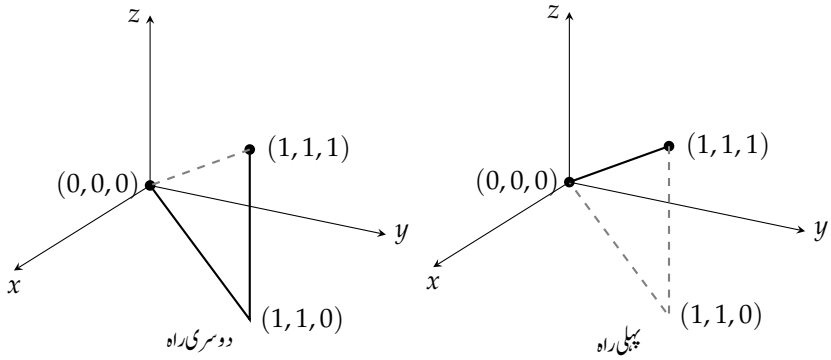
سوال ۱۵.۳۵۱: مسئلہ گرین کو مسئلہ سٹوکس عمومیت کیسے دیتا ہے؟

سوال ۱۵.۳۵۲: مسئلہ گرین، مسئلہ سٹوکس، اور مسئلہ پھیلاؤ کو کیسے ایک ہی بنیادی مسئلے کے مختلف روپ تصور کیا جا سکتا ہے؟

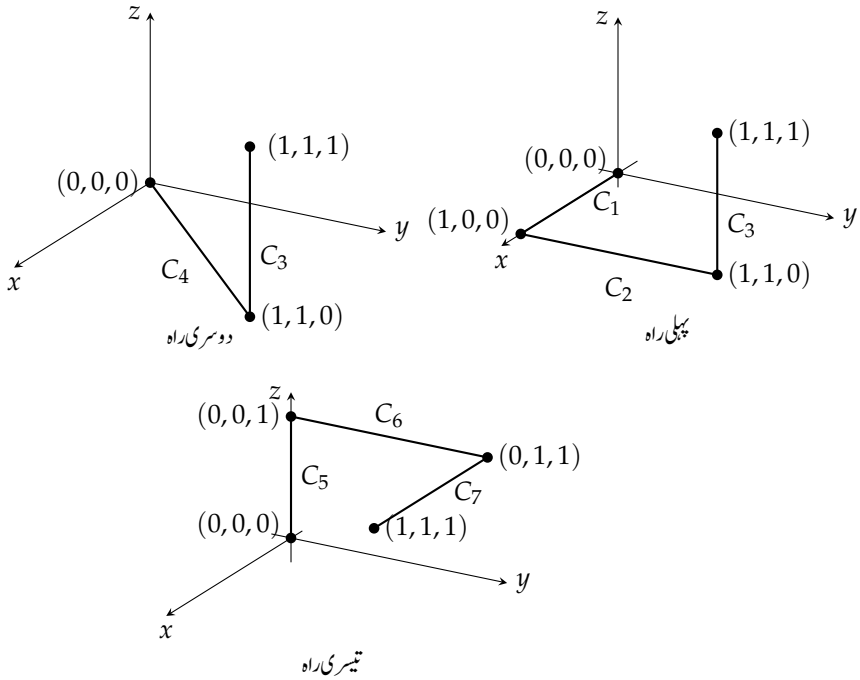
مشق

لکیری تکمل کی قیمت

سوال ۱۵.۳۵۳: مبدا کو نقطہ $(1,1,1)$ سے فضا میں جوڑنے کے دو راستے شکل میں دکھائے گئے ہیں۔ باری باری ان راہ پر $f(x,y,z) = 2x - 3y^2 - 2z + 3$ کا تکمل لیں۔



سوال ۱۵.۳۵۴: مبدا کو نقطہ $(1,1,1)$ سے فضا میں جوڑنے کے تین راستے شکل میں دکھائے گئے ہیں۔ باری باری ان راہ پر $f(x,y,z) = x^2 + y - z$ کا تکمل لیں۔



سوال ۱۵.۳۵۵: دائرہ 2π $0 \leq t \leq 2\pi$، $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{j} + (a\sin t)\boldsymbol{k}$ پر تفاعل $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+z^2}$ کا تکمل پر لیں۔

سوال ۱۵.۳۵۶: **درپیچیدہ**[۵۱] منحنی $0 \leq t \leq \sqrt{3}$، $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}$ پر تفاعل $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$ تکمل کریں۔

مشق ۱۵.۳۵۷ اور ۱۵.۳۵۸ میں تکملات کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۵۷:

$$\int_{(-1,1,1)}^{(4,-3,0)} \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z}{\sqrt{x+y+z}}$$

---

[۵۱] involute

سوال ۱۵.۳۵۸:

$$\int_{(1,1,1)}^{(10,3,3)} \mathrm{d}x - \sqrt{\frac{z}{y}}\,\mathrm{d}y - \sqrt{\frac{y}{z}}\,\mathrm{d}z$$

سوال ۱۵.۳۵۹: کرہ $x^2+y^2+z^2=5$ سے مستوی $z=-1$ ایک دائرہ کاٹتا ہے۔ اوپر سے دیکھتے ہوئے اس دائرے پر گھڑی وار چلتے ہوئے $\boldsymbol{F}=-(y\sin z)\boldsymbol{i}+(x\sin z)\boldsymbol{j}+(xy\cos z)\boldsymbol{k}$ کا تکمل لیں۔

سوال ۱۵.۳۶۰: تفاعل $\boldsymbol{F}=3x^2y\boldsymbol{i}+(x^3+1)\boldsymbol{j}+9z^2\boldsymbol{k}$ کا تکمل اس دائرے پر لیں جس کو کرہ $x^2+y^2+z^2=9$ سے مستوی $x=2$ کاٹتا ہے۔

مشق ۱۵.۳۶۱ اور ۱۵.۳۶۲ میں تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۶۱:

$$\int_C 8x\sin y\,\mathrm{d}x - 8y\cos x\,\mathrm{d}y$$

مربع C کو ربع اول سے لکیر $x=\pi/2$ اور $y=\pi/2$ کاٹتی ہیں۔

سوال ۱۵.۳۶۲:

$$\int_C y^2\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$$

C دائرہ $x^2+y^2=4$ ہے۔

سطحی تکملات کی قیمت کی تلاش

سوال ۱۵.۳۶۳: **بیضوی خطے کا رقبہ** اس بیضوی خطے کا رقبہ تلاش کریں جسے بیلن $x^2+y^2=1$ مستوی $x+y+z=1$ سے کاٹتا ہے۔

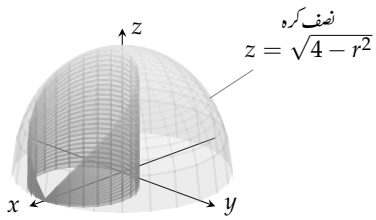
سوال ۱۵.۳۶۴: **قطع مکافی ٹوپی کا رقبہ** قطع مکافی مجسم $y^2+z^2=3x$ سے مستوی $x=1$ ایک ٹوپی کاٹتا ہے۔ اس ٹوپی کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۶۵: **کروی ٹوپی کا رقبہ** کرہ $x^2+y^2+z^2=1$ کے اوپری حصے سے مستوی $z=\sqrt{2}/2$ ایک ٹوپی کاٹتا ہے۔ اس ٹوپی کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۶۶:

ا. **نصف کرہ کو بیلن کاٹتا ہے** نصف کرہ $x^2+y^2+z^2=4,\ z\geq 0$ سے بیلن $x^2+y^2=2x$ سطح کاٹتا ہے۔اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

ب. نصف کرہ کے اندر موجود بیلن کے ٹکڑے کا رقبہ تلاش کریں۔(اشارہ: مستوی xy پر قائمہ تظلیل لیں۔یا تکمل $\int h\,\mathrm{ds}$ تلاش کریں جہاں کرہ کے اندر h بیلن کا قد دیتا ہے اور مستوی xy میں $x^2+y^2=2x$ کا چھوٹا قطع ds ہے۔)



سوال ۱۵.۳۶۷: **مثلث کا رقبہ** شمن اول کو مستوی $x/a+y/b+z/c=1,\ (a,b,c>1)$ ایک مثلث میں قطع کرتی ہیں۔اس مثلث کا رقبہ تلاش کریں۔نتیجے کی تصدیق سمتیہ حساب کر کے کریں۔

سوال ۱۵.۳۶۸: **قطع مکافی بیلن کو مستویات کاٹتی ہیں** مستویات $x=0$ ، $x=3$ ،اور $z=0$ قطع مکافی بیلن $y^2-z=1$ سے ایک سطح کاٹتی ہیں۔اس سطح پر درج ذیل کا تکمل لیں۔

ا. $g(x,y,z)=\frac{yz}{\sqrt{4y^2+1}}$

ب. $g(x,y,z)=\frac{z}{\sqrt{4y^2+1}}$

سوال ۱۵.۳۶۹: **بیلن کو مستویات قطع کرتی ہیں** شمن اول میں بیلن $x^2+z^2=25$ کے اس حصے پر، جو مستویات $x=0$ اور $x=1$ کے بیچ مستوی $z=3$ سے اوپر پایا جاتا ہے، $g(x,y,z)=x^4y(y^2+z^2)$ کا تکمل لیں۔

سوال ۱۵.۳۷۰: حکومت پاکستان معدنیات کی تلاش کی غرض سے خطوط طول بلد $62^\circ 13' 0''$ اور $69^\circ 13' 0''$ کے درمیان اور شمالی خطوط عرض بلد 41° اور 45° کے بیچ علاقے کا معائنہ کرنا چاہتی ہے۔زمین کا رداس $R=6371\ \mathrm{km}$ لیتے ہوئے اس علاقے کا رقبہ تلاش کریں۔

مقدار معلوم شدہ سطوح

مشق ۱۵.۳۷۱ تا ۱۵.۳۷۶ میں سطوح کے مقدار معلوم روپ تلاش کریں۔(چونکہ ایسا کرنے کے کئی طریقے ہیں لہٰذا آپ کے جواب، کتاب میں دیے گئے جواب سے مختلف ہو سکتے ہیں۔)

سوال ۱۵.۳۷۱: **کروی پٹی** مستویات $z=-3$ اور $z=3\sqrt{3}$ کے بیچ کرہ $x^2+y^2+z^2=36$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۳۷۲: **قطع مکافی ٹوپی** مستوی $z=-2$ سے اوپر قطع مکافی جسم $z=-(x^2+y^2)/2$ کا ٹکڑا۔

۲۵۷۷۷ سوال ۱۵.۳۷۳: **مخروط** مخروط $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2},\ z \leq 3$

۲۵۷۷۸ سوال ۱۵.۳۷۴: **مربع کے اوپر مستوی** ربع اول اور مستوی xy میں مربع $0 \leq x \leq 2$ ، $0 \leq y \leq 2$ کے اوپر موجود مستوی
۲۵۷۷۹ $4x + 2y + 4z = 12$ کا ٹکڑا۔

۲۵۷۸۰ سوال ۱۵.۳۷۵: **قطع مکافی مجسم کا ٹکڑا** مستوی xy سے اوپر موجود قطع مکافی مجسم $y = 2(x^2 + z^2),\ y \leq 2$ کا ٹکڑا۔

۲۵۷۸۱ سوال ۱۵.۳۷۶: **نصف کرے کا ٹکڑا** ثمن اول میں موجود کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 10,\ y \geq 0$ کا ٹکڑا۔

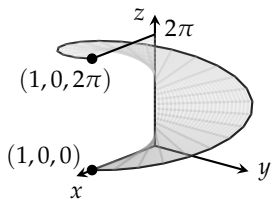
۲۵۷۸۲ سوال ۱۵.۳۷۷: **سطح رقبہ** درج ذیل سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(u, v) = (u + v)\boldsymbol{i} + (u - v)\boldsymbol{j} + v\boldsymbol{k}$$
$$0 \leq u \leq 1, \qquad 0 \leq v \leq 1$$

۲۵۷۸۳ سوال ۱۵.۳۷۸: **سطح تکمل** مشق ۱۵.۳۷۷ کی سطح پر $f(x, y, z) = xy - z^2$ کا تکمل لیں۔

۲۵۷۸۴ سوال ۱۵.۳۷۹: **چکر دار زینہ کا رقبہ** چکر دار زینہ جس کی مساوات درج ذیل ہے شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا رقبہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(r, \phi) = (r\cos\phi)\boldsymbol{i} + (r\sin\phi)\boldsymbol{j} + \phi\boldsymbol{k},\ 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ 0 \leq r \leq 1$$



۲۵۷۸۵

۲۵۷۸۶ سوال ۱۵.۳۸۰: **سطح تکمل** تکمل $\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2 + 1}\, \mathrm{d}\sigma$ کو مشق ۱۵.۳۷۹ میں دی گئی سطح پر حل کریں۔

۲۵۷۸۷

۲۵۷۸۸ **بقائی میدان**

۲۵۷۸۹ مشق ۱۵.۳۸۱ تا ۱۵.۳۸۴ میں بقائی اور غیر بقائی میدان کی نشاندہی کریں۔

۲۵۷۹۰ سوال ۱۵.۳۸۱: $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

۲۵۷۹۱ سوال ۱۵.۳۸۲: $\boldsymbol{F} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) / (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$

۲۵۷۹۲ سوال ۱۵.۳۸۳: $\boldsymbol{F} = xe^y\boldsymbol{i} + ye^z\boldsymbol{j} + ze^x\boldsymbol{k}$

۲۵۷۹۳ سوال ۱۵.۳۸۴: $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}) / (x + yz)$

مشق ۱۵.۳۸۵ اور ۱۵.۳۸۶ میں میدان کے مخفی تفاعل تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۸۵: $\boldsymbol{F} = 2\boldsymbol{i} + (2y + z)\boldsymbol{j} + (y + 1)\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۳۸۶: $\boldsymbol{F} = (z \cos xz)\boldsymbol{i} + e^y\boldsymbol{j} + (x \cos xz)\boldsymbol{k}$

کام اور دائری بہاؤ

مشق ۱۵.۳۵۳ میں نقطہ $(0, 0, 0)$ سے $(1, 1, 1)$ تک راہ کے ہمراہ مشق ۱۵.۳۸۷ اور ۱۵.۳۸۸ کے میدان کا کام تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۸۷: $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۳۸۸: $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۳۸۹: **دو طریقوں سے کام کی تلاش** مسطح منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (e^t \cos t)\boldsymbol{i} + (e^t \sin t)\boldsymbol{j}$ پر چلتے ہوئے نقطہ $(1, 0)$ سے $(e^{2\pi}, 0)$ تک درج ذیل قوت $\boldsymbol{F} = (x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})/(x^2 + y^2)^{3/2}$ کا کام دو طریقوں سے تلاش کریں۔

ا. منحنی کا مقدار معلوم روپ استعمال کر کے تکمل کام کی قیمت تلاش کریں۔

ب. سمتیہ $\boldsymbol{F}$ کے مخفی تفاعل کی قیمت تلاش کرتے ہوئے۔

سوال ۱۵.۳۹۰: **مختلف راہ کے ہمراہ سیال کا گزر** میدان $\boldsymbol{F} = \nabla(x^2 z e^y)$ کا بہاؤ درج ذیل پر تلاش کریں۔

ا. مثبت محور y سے دیکھتے ہوئے اس ترخیم C پر ایک چکر گھڑی وار چل کر، جس پر مستوی $x + y + z = 1$ بیلن $x^2 + z^2 = 25$ کو کاٹتا ہے۔

ب. مشق ۱۵.۳۷۹ میں چکردار زینہ کی قوسی سرحد کے ہمراہ $(1, 0, 0)$ سے $(1, 0, 2\pi)$ تک۔

مشق ۱۵.۳۹۱ اور ۱۵.۳۹۲ میں مسئلہ سٹوکس کا تکمل استعمال کر کے C پر دی گئی سمت چلتے ہوئے میدان $\boldsymbol{F}$ کا دائری بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۹۱: **ترخیم پر دائری بہاؤ** $\boldsymbol{F} = y^2\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j} + 3z^2\boldsymbol{k}$

مستوی $2x + 6y - 3z = 6$ بیلن $x^2 + y^2 = 1$ کو ترخیم C پر ملتا ہے۔ اوپر سے دیکھتے ہوئے ترخیم پر خلاف گھڑی چلیں۔

سوال ۱۵.۳۹۲: **دائرے کے ہمراہ بہاؤ** $\boldsymbol{F} = (x^2 + y)\boldsymbol{i} + (x + y)\boldsymbol{j} + (4y^2 - z)\boldsymbol{k}$

مستوی $z = -y$ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کو دائرہ C پر ملتا ہے۔ اوپر سے دیکھتے ہوئے دائرے پر خلاف گھڑی چلیں۔

کمیت اور معیار اثر

سوال ۱۵.۳۹۳: **مختلف کثافت کے تار** منحنی $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{2t}\boldsymbol{i} + \sqrt{2t}\boldsymbol{j} + (4-t^2)\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$ کے ہمراہ باریک تار کی کمیت تلاش کریں اگر t پر تار کی کثافت (ا) $\delta = 3t$ اور (ب) $\delta = 1$ ہو۔

سوال ۱۵.۳۹۴: **متغیر کثافت کا تار** منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (2/3)t^{3/2}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2$ کے ہمراہ تار کی کثافت t پر $\delta = 3\sqrt{5+t}$ ہے۔ تار کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۹۵: **متغیر کثافت کا تار** باریک تار جس کی کثافت t پر $\delta = 1/(t+1)$ ہے درج ذیل منحنی کے ہمراہ ہے۔ تار کا مرکز کمیت اور جمودی معیار اثر اور رداس دوار محددی محور کے لحاظ سے تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\boldsymbol{j} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{k}, \qquad 0 \le t \le 2$$

سوال ۱۵.۳۹۶: **محراب کا مرکز کمیت** مستوی xy میں باریک دھاتی محراب نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کے ہمراہ موجود ہے۔ نقطہ (x, y) پر محراب کی کثافت $\delta(x, y) = 2a - y$ ہے۔ محراب کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۹۷: **مستقل کثافت کا تار** منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (e^t \cos t)\boldsymbol{i} + (e^t \sin t)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le \ln 2$ کے ہمراہ مستقل کثافت $\delta = 1$ کا تار موجود ہے۔ گزارش ہے کہ $\bar{z}$ ، I_z ، اور R_z تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۹۸: **مستقل کثافت پیچ دار تار** پیچ دار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (2\sin t)\boldsymbol{i} + (2\cos t)\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$ کے ہمراہ موجود تار کی مستقل کثافت δ ہے۔ تار کی کمیت اور اس کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۹۹: **خول کا جمود، رداس دوار، اور مرکز کمیت** مستوی $z = 3$ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ کے بالا حصہ سے باریک خول کاٹتا ہے جس کی کثافت $\delta(x, y, z) = z$ ہے۔ خول کے I_z ، R_z ، اور مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۰۰: **مکعب کا جمودی معیار اثر** محور z کے لحاظ سے اس مکعب کی سطح کا جمودی معیار اثر معلوم کریں جس کو مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ ، اور $z = 1$ ثمن اول سے کاٹتی ہیں۔ کثافت $\delta = 1$ ہے۔

مسطح منحنی یا سطح سے باہر رخ گزرنے والا بہاؤ

مشق ۱۵.۴۰۱ اور ۱۵.۴۰۲ میں دیے گئے میدان $\boldsymbol{F}$ اور منحنیات C کے لیے مسئلہ گرین استعمال کر کے خلاف گھڑی دائری بہاؤ اور باہر رخ بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۰۱: **مربع** $\boldsymbol{F} = (2xy + x)\boldsymbol{i} + (xy - y)\boldsymbol{j}$
منحنیات $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، اور $y = 1$ مربع C دیتی ہیں۔

سوال ۱۵.۴۰۲: **مثلث** $\boldsymbol{F} = (y - 6x^2)\boldsymbol{i} + (x + y^2)\boldsymbol{j}$
لکیر $y = 0$ ، $y = x$ ، اور $x = 1$ مثلث C دیتی ہیں۔

سوال ۱۵.۴۰۳: **صفر لکیری تکمل** دکھائیں کہ کسی بھی بند منحنی C کے لیے، جس پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہوتا ہو، درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C (\ln x \sin y \, dy - \frac{\cos y}{x} \, dx) = 0$$

سوال ۱۵.۴۰۴:

ا. **باہر رخ بہاؤ اور رقبہ** دکھائیں کہ تعین گر سمتی میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ کا باہر رخ بہاؤ کسی بھی بند منحنی پر، جس پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہوتا ہو، منحنی میں محیط خطے کے رقبے کا دگنا ہو گا۔

ب. فرض کریں $\boldsymbol{n}$ ایسے بند منحنی C کا باہر رخ عمودی اکائی سمتیہ ہے جس پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہوتا ہے۔ دکھائیں یہ ممکن نہیں کہ C کے ہر نقطے پر $\boldsymbol{n}$ تعین گر سمتی میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ کو قائمہ ہو۔

مشق ۱۵.۴۰۵ تا ۱۵.۴۰۸ میں سرحد D کو باہر رخ عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۰۵: **مکعب** $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j} + 2xz\boldsymbol{k}$

خطہ D کو ثمن اول سے مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ ، اور $z = 1$ کاٹتی ہیں۔

سوال ۱۵.۴۰۶: **کروی ٹوپی** $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

ٹھوس کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$ کے اس بالائی ٹوپی کی مکمل سطح جس کو مستوی $z = 3$ کرہ سے کاٹتا ہے D ہے۔

سوال ۱۵.۴۰۷: **کروی ٹوپی** $\boldsymbol{F} = -2x\boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

ٹھوس کرہ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ کا وہ بالائی خطہ جس کو قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ کرہ سے کاٹتا ہے D ہے۔

سوال ۱۵.۴۰۸: **مخروط اور بیلن** $\boldsymbol{F} = (6x + y)\boldsymbol{i} - (x + z)\boldsymbol{a}_y + 4yz\boldsymbol{k}$

ثمن اول میں مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، بیلن $x^2 + y^2 = 1$ ، اور محددی مستویات کے بیچ خطہ D ہے۔

سوال ۱۵.۴۰۹: **نصف کرہ، بیلن، اور مستوی** S وہ سطح ہے جس کو بائیں سے نصف کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, y \leq 0$ ، درمیان میں بیلن $x^2 + z^2 = a^2, 0 \leq y \leq a$ ، اور دائیں سے مستوی $y = a$ محدود کرتے ہیں۔ سطح S سے باہر رخ $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ کا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۱۰: **بیلن اور مستویات** ثمن اول میں بیلن $x^2 + 4y^2 = 16$ اور مستویات $y = 2z$ ، $x = 0$ ، اور $z = 0$ کے بیچ خطے کی سرحد سے باہر رخ $\boldsymbol{F} = 3xz^2\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - z^3\boldsymbol{k}$ کا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۱۱: **بیلن پر تنز** بیلن $x^2 + y^2 = 1$ اور مستویات $z = 1$ اور $z = -1$ میں محصور خطہ کی سطح سے باہر رخ $\boldsymbol{F} = xy^2\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ کا بہاؤ، مسئلہ پھیلاؤ استعمال کر کے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۱۲: **نصف کرہ** نصف کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ سے اوپر رخ $\boldsymbol{F} = (3z + 1)\boldsymbol{k}$ کا بہاؤ (ا) مسئلہ پھیلاؤ استعمال کر کے اور (ب) بہاؤ کا تکمل حل کے تلاش کریں۔

۲۵۸۶۹

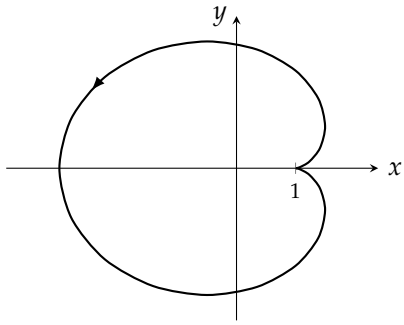
۲۵۸۷۰

۲۵۸۷۱

۲۵۸۷۲ مسئلہ گرین کے استعمال سے رقبہ کی تلاش

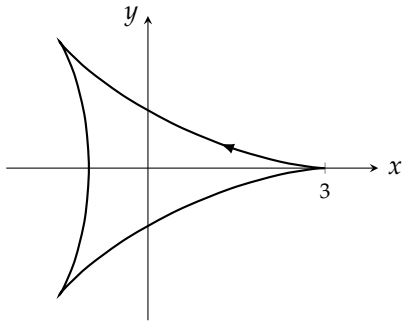
۲۵۸۷۳ مسئلہ گرین کا کلیہ برائے رقبہ (صفحہ ۱۵۹۲ پر مساوات ۲۲) استعمال کر کے سوال ۱۵.۴۱۳ تا ۱۵.۴۱۶ میں دی منحنیات میں محصور خطوں کے رقبے تلاش کریں۔

۲۵۸۷۴ سوال ۱۵.۴۱۳: گھونگا $x = 2\cos t - \cos 2t$ ، $y = 2\sin t - \sin 2t$ ، $0 \le t \le 2\pi$



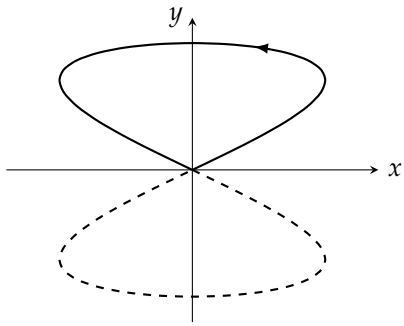
۲۵۸۷۵

۲۵۸۷۶ سوال ۱۵.۴۱۴: مثلثی $x = 2\cos t + \cos 2t$ ، $y = 2\sin t - \sin 2t$ ، $0 \le t \le 2\pi$



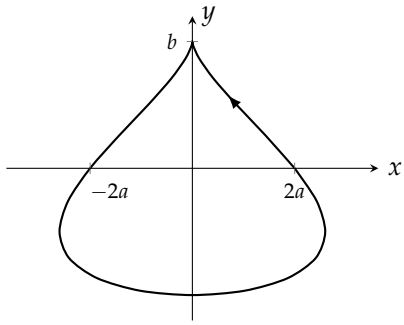
۲۵۸۷۷

۲۵۸۷۸ سوال ۱۵.۴۱۵: منحنی آٹھ $x = (1/2)\sin 2t$ ، $y = \sin t$ ، $0 \le t \le \pi$ (ایک گھیر)



۲۵۸۷۹

۲۵۸۸۰ سوال ۱۵.۴۱۶: آنسو کا قطرہ $x = 2a\cos t - a\sin 2t$ ، $y = b\sin t$ ، $0 \le t \le 2\pi$



۲۵۸۸۱

۲۵۸۸۲

۲۵۸۸۳ نظریہ اور عملی استعمال

۲۵۸۸۴ سوال ۱۵.۴۱۷:

۲۵۸۸۵ ا. ایسے سمتی میدان $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ کی مثال پیش کریں جو صرف ایک نقطہ پر $\mathbf{0}$ ہو اور جس کا گردش $\boldsymbol{F}$ ہر نقطے پر غیر صفر ہو۔ اس نقطے کی نشاندہی
۲۵۸۸۶ کریں اور گردش کی قیمت تلاش کریں۔

۲۵۸۸۷ ب. ایسے سمتی میدان $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ کی مثال پیش کریں جو صرف ایک لکیر پر $\mathbf{0}$ ہو اور جس کا گردش $\boldsymbol{F}$ ہر مقام پر غیر صفر ہو۔ اس لکیر کی نشاندہی
۲۵۸۸۸ کریں اور گردش کی قیمت تلاش کریں۔

۲۵۸۸۹ ج. ایسے سمتی میدان $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ کی مثال پیش کریں جو ایک سطح پر $\mathbf{0}$ ہو اور جس کا گردش $\boldsymbol{F}$ ہر مقام پر غیر صفر ہو۔ اس سطح کی نشاندہی کریں اور
۲۵۸۹۰ گردش کی قیمت تلاش کریں۔

۲۵۸۹۱ سوال ۱۵.۴۱۸: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ کی سطح پر ایسے تمام نقطے (a, b, c) تلاش کریں جہاں $\boldsymbol{F}(a, b, c) \neq \mathbf{0}$ اور سطح کو
۲۵۸۹۲ سمتی میدان $\boldsymbol{F} = yz^2\boldsymbol{i} + xz^2\boldsymbol{j} + 2xyz\boldsymbol{k}$ عمودی ہو۔

سوال ۱۵.۴۱۹: رداس R کے کروی خول کے نقطہ (x, y, z) پر کمیتی کثافت $\delta(x, y, z)$ سطح پر اٹل نقطہ (a, b, c) سے اس نقطے تک فاصلے کے برابر ہے۔ خول کی کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۲۰: پیچ دار سطح $\boldsymbol{r}(r, \theta) = (r\cos\theta)\boldsymbol{i} + (r\sin\theta)\boldsymbol{j} + \theta\boldsymbol{k}$ جہاں $0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$ ہے کی کثافت $\delta(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ ہے۔ اس کی کمیت تلاش کریں۔ (مشق ۱۵.۳۷۹ میں پیش شکل پر نظر ڈالیں۔)

سوال ۱۵.۴۲۱: ایسے تمام مستطیل خطے $0 \leq x \leq a$ ، $0 \leq y \leq b$ تلاش کریں جس کے چار اطراف سے $\boldsymbol{F} = (x^2 + 4xy)\boldsymbol{i} - 6y\boldsymbol{j}$ کا کل باہر رخ بہاؤ کم سے کم ہو۔ اس بہاؤ کی قیمت کیا ہو گی؟

سوال ۱۵.۴۲۲: مبدا سے گزرتا مستوی کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کو دائرے پر قطع کرتا ہے جس پر میدان $\boldsymbol{F} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ کا دائری بہاؤ زیادہ سے زیادہ ہونے کی صورت میں مستوی کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۲۳: ربع اول میں $(2, 0)$ تا $(0, 2)$ دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ پر دھاگا پڑا ہوا ہے جس کی کثافت $\delta(x, y) = xy$ ہے۔

ا. دھاگے کو محدود تعداد کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کر کے دکھائیں کہ دھاگے کو سیدھا نیچے x محور تک کھینچتے ہوئے ثقلی کشش درج ذیل کام سرانجام دیگی جہاں g تجاذبی مستقل ہے۔

$$\text{کام} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g x_k y_k^2 \Delta s_k = \int_C g x y^2 \, \mathrm{d}s$$

ب. جزو (ا) میں تکمل حل کر کے کل کام تلاش کریں۔

ج. دکھائیں کہ یہ کام اس کام کے برابر ہے جو دھاگے کا مرکز کمیت $(\bar{x}, \bar{y})$ سیدھا نیچے محور x محور تک کھینچنے کے لیے درکار ہو گا۔

سوال ۱۵.۴۲۴: ثمن اول میں باریک چادر کا ٹکڑا مستوی $x + y + z = 1$ کے ہمراہ ہے۔ چادر کی کثافت $\delta(x, y, z) = xy$ ہے۔

ا. چادر کو محدود تعداد کے چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کر کے دکھائیں کہ چادر کو سیدھا نیچے xy مستوی تک کھینچتے ہوئے ثقلی کشش درج ذیل کام سرانجام دیگی جہاں g تجاذبی مستقل ہے۔

$$\text{کام} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} g x_k y_k z_k \Delta\sigma_k = \int_S g x y z \, \mathrm{d}\sigma$$

ب. جزو (ا) میں سطحی تکمل حل کر کے کل کام تلاش کریں۔

ج. دکھائیں کہ یہ کام اس کام کے برابر ہے جو چادر کے کا مرکز کمیت $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ سیدھا نیچے محور xy مستوی تک کھینچنے کے لیے درکار ہو گا۔

سوال ۱۵.۴۲۵: **اصول آرشمیدس** اگر کوئی جسم مثلاً ایک گیند سیال میں رکھا جائے، یہ یا ڈوب کر تل تک پہنچتا ہے، تیرتا ہے، یا کچھ فاصلے تک ڈوب کر سیال میں آویزاں رہتا ہے۔ فرض کریں سیال کی وزنی کثافت w مستقل ہے اور سیال کی سطح مستوی $z = 4$ پر پائی جاتی ہے۔ سیال میں آویزاں ایک کروی گیند خطہ $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 \leq 1$ گھیرے ہوئے ہے۔

۲۵۹۱۴ ا. دکھائیں کہ گیند پر سیال کے دباؤ کی سے پیدا کل قوت درج ذیل سطحی تکمل دیتا ہے۔

$$\text{قوت} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} w(4-z_k)\Delta\sigma_k = \iint\limits_S w(4-z)\,\mathrm{d}\sigma$$

۲۵۹۱۵ ب. چونکہ گیند ساکن ہے، دکھائیں کہ گیند کو درج ذیل قوت اچھال آویزاں رکھتی ہے جہاں (x,y,z) پر $\boldsymbol{n}$ باہر رخ عمودی اکائی سمتیہ ہے۔

$$\text{قوت اچھال} = \iint\limits_S w(z-4)\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

۲۵۹۱۶ یہ اصول آرشمیدسی اجگر کرتا ہے جس کے تحت، ٹھوس جسم پر قوت اچھال، اس سیال کے وزن کے برابر ہو گا جو زیر سیال ہو۔

۲۵۹۱۷ ج. مسئلہ پھیلاؤ استعمال کر کے جزو (ب) میں قوت اچھال کی قدر تلاش کریں۔

۲۵۹۱۸ سوال ۱۵.۴۲۶: **قوس سطح پر قوت سیال** ایک مخروط جس کی شکل سطح $z = \sqrt{x^2+y^2},\ 0 \le z \le 2$ دیتی ہے مستقل وزنی
۲۵۹۱۹ کثافت w کے سیال سے بھرا جاتا ہے۔ محددی xy مستوی کو سطح زمین تصور کریں۔ دکھائیں کہ $z=1$ تا $z=2$ مخروطی سطح پر سیال کی کل قوت
۲۵۹۲۰ درج ذیل سطحی تکمل دیتا ہے۔

$$F = \iint\limits_S w(2-z)\,\mathrm{d}\sigma$$

۲۵۹۲۱ اس تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

۲۵۹۲۲ سوال ۱۵.۴۲۷: **قانون فیراڈے** نظریہ برقناطیسیت کے ایک اصول کے تحت اگر نقطہ (x,y,z) اور لمحہ t پر برقی میدان اور مقناطیسی
۲۵۹۲۳ میدان بالترتیب $\boldsymbol{E}(t,x,y,z)$ اور $\boldsymbol{B}(t,x,y,z)$ ہوں تب $\nabla\times\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ ہو گا۔ اس میں $\nabla\times\boldsymbol{E}$ کی قیمت
۲۵۹۲۴ تلاش کرتے ہوئے t اٹل رکھا جاتا ہے اور $\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ کی قیمت تلاش کرتے ہوئے (x,y,z) اٹل رکھا جاتا ہے۔ مسئلہ سٹوکس استعمال کرتے ہوئے
۲۵۹۲۵ فیراڈے کا قانون (درج ذیل) اخذ کریں

$$\oint\limits_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_S \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

۲۵۹۲۶ جہاں C دائری برقی تار کو ظاہر کرتا ہے جس میں سطح کے عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کے لحاظ سے خلاف گھڑی برقی رو رواں ہے جو C پر درج ذیل برقی دباؤ پیدا
۲۵۹۲۷ ہوتا ہے۔

$$\oint\limits_C \boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

۲۵۹۲۸ مساوات کے دائیں ہاتھ سطحی تکمل کو **مقناطیسی بہاؤ**[۵۲] کہتے ہیں جہاں S ہر وہ سطح ہو سکتا ہے جس کی سرحد C ہو۔

---

[۵۲] magneticflux

سوال ۱۵.۴۲۸: تجاذبی قوت کے میدان $\boldsymbol{F}$ کی تعریف $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{0}$ کے لیے درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GmM}{|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{r}$$

حصہ ۱۵.۸ میں پیش قانون گاوس استعمال کر کے دکھائیں کہ ایسا کوئی استمراری قابل تفرق سمتی میدان $\boldsymbol{H}$ نہیں پایا جاتا جو $\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{H}$ کو مطمئن کرتا ہو۔

سوال ۱۵.۴۲۹: ثابت کریں اگر سمت بند سطح S ، جس کی تحدیدی سرحد C ہو، پر $f(x,y,z)$ اور $g(x,y,z)$ استمراری قابل تفرق غیر سمتی میدان ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\iint\limits_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \oint\limits_C f \nabla g \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

سوال ۱۵.۴۳۰: فرض کریں خطہ D میں، جو سمت بند سطح S میں محصور ہے جس کا باہر رخ عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے، $\nabla \cdot \boldsymbol{F}_1 = \nabla \cdot \boldsymbol{F}_2$ اور $\nabla \times \boldsymbol{F}_1 = \nabla \times \boldsymbol{F}_2$ ہیں اور S پر $\boldsymbol{F}_1 \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{F}_2 \cdot \boldsymbol{n}$ ہے۔ ثابت کریں پورے D پر $\boldsymbol{F}_1 = \boldsymbol{F}_2$ ہو گا۔

سوال ۱۵.۴۳۱: اگر $\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$ اور $\nabla \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ ہوں تب درست یا غلط ثابت کریں کہ $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ ہو گا۔

سوال ۱۵.۴۳۲: فرض کریں سمت بند سطح کا مقدار معلوم روپ $\boldsymbol{r}(u,v)$ ہے۔ ایسی علاقیت متعارف کریں کہ $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{r}_u\,\mathrm{d}u \times \boldsymbol{r}_v\,\mathrm{d}v$ ہو تاکہ $\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ سطح کو عمودی سمتیہ ہو۔ مزید (حصہ ۱۵.۶ میں مساوات ۵ کے تحت) مقدار $\mathrm{d}\sigma = |\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}|$ سطح کے چھوٹے ٹکڑے کا رقبہ دیگا۔ درج ذیل تماثل اخذ کریں

$$\mathrm{d}\sigma = (EG - F^2)^{1/2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

جہاں درج ذیل ہے۔

$$E = |\boldsymbol{r}_u|^2, \quad F = \boldsymbol{r}_u \cdot \boldsymbol{r}_v, \quad G = |\boldsymbol{r}_v|^2$$

سوال ۱۵.۴۳۳: فضا میں خطہ D سمت بند سطح S جس کا باہر رخ عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے میں محصور ہے۔ دکھائیں کہ خطے کا حجم H درج ذیل تماثل کو مطمئن کرتا ہے

$$H = \frac{1}{3}\iint\limits_S \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

جہاں D میں نقطہ (x,y,z) کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہے۔

ضمیمہ ا

ریاضیاتی ترغیب

ریاضیاتی ترغیب کا اصول[1] استعمال کر کے ثابت کیا جا سکتا ہے کہ کئی کلیات ہر مثبت عدد صحیح کے لئے مطمئن ہوں گے۔ ایسا ایک کلیہ درج ذیل ہے۔

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

جو ثبوت اس مسلمہ کو استعمال کرتا ہے وہ ترغیبی ثبوت کہلاتا ہے۔

ترغیب سے کلیے کا ثبوت درج ذیل اقدام سے کیا جاتا ہے۔

۱. تصدیق کریں کہ کلیہ $n = 1$ کے لئے درست ہے۔

۲. ثابت کریں کہ اگر کلیہ کسی مثبت عدد صحیح $n = k$ کے لئے درست ہو تب یہ $n = k + 1$ کے لئے بھی درست ہو گا۔

مسلمہ ترغیب کہتا ہے ان دو اقدام کے مکمل ہونے پر کلیہ تمام مثبت عدد صحیح n کے لئے درست ہو گا۔ قدم اول تصدیق کرتا ہے کہ کلیہ $n = 1$ کے لئے درست ہے۔ قدم دوم کے تحت اگر کلیہ $n = 2$ کے لئے درست ہو تب کلیہ $n = 3$ کے لئے بھی درست ہو گا، اور اسی طرح قدم دوم کے تحت اگر کلیہ $n = 3$ کے لئے درست ہو تب یہ $n = 4$ کے لئے بھی درست ہو گا، وغیرہ۔

مثال ا.ا: درج ذیل کلیہ ہر مثبت عدد صحیح n کے لئے درست ثابت کریں۔

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

حل: ہم مذکورہ بالا دو اقدام پر چلتے ہوئے ثبوت پیش کرتے ہیں۔

[1] mathematicalinduction

۲۵۹۵۸ ۱. ہم کلیہ میں دونوں اطراف $n = 1$ پُر کر کے قدم اول کی تصدیق کرتے ہیں۔

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

۲۵۹۵۹ ۲. قدم دوم میں ہم فرض کرتے ہیں کلیہ مثبت عدد صحیح $n = k$ کے لئے درست ہے، یعنی ہم مان لیتے ہیں کہ درج ذیل درست ہے۔

$$1 + 2 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

۲۵۹۶۰ اب اگلا مثبت عدد صحیح $k + 1$ ہو گا لہٰذا ہم کلیے کا صرف بایاں ہاتھ لے کر اس میں $k + 1$ جمع کر کے حل کرتے ہیں۔

$$\underbrace{1 + 2 + \cdots + k}_{\frac{k(k+1)}{2}} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{1} + (k+1) = \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+1)+1}{2}$$

۲۵۹۶۱ یوں دونوں اطراف $k + 1$ کی جگہ n لکھ کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

۲۵۹۶۲ یعنی کلیے کو $n = k$ کے لئے درست مان کر ہم نے ثابت کیا کہ یہی کلیہ $n = k + 1$ کے لئے بھی درست ہے۔

۲۵۹۶۳ یوں ریاضیاتی ترغیب کا اصول اس بات کی ضمانت دیتا ہے کہ تمام مثبت عدد صحیح n کے لئے دیا گیا کلیہ درست ہے۔

۲۵۹۶۴ □

۲۵۹۶۵ دوسری مثال پیش کرتے ہیں۔

۲۵۹۶۶ مثال ا.۲: ریاضیاتی ترغیب استعمال کر کے ثابت کریں کہ تمام مثبت عدد صحیح کے لئے درج ذیل کلیہ درست ہو گا۔

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

۲۵۹۶۷ حل: ہم ریاضیاتی ترغیب کی دو اقدام مکمل کر کے ثبوت پیش کرتے ہیں۔

۲۵۹۶۸ ۱. ہم کلیہ $n = 1$ کے لئے جانچتے ہیں۔

$$\frac{1}{2^1} = 1 - \frac{1}{2^1}$$

۲۵۹۶۹ ۲. اگر $n = k$ کے لئے درج ذیل درست تسلیم کیا جائے

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$$

۲۵۹۷۰ تب بائیں ہاتھ اگلا جزو جمع کر کے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} &= 1 - \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1 \cdot 2}{2^k \cdot 2} + \frac{1}{2^{k+1}} \\ &= 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}}\end{aligned}$$

۲۵۹۷۱ یوں اگر دیا گیا کلیہ $n = k$ کے لئے درست ہو تب یہ $n = k + 1$ کے لئے بھی درست ہو گا۔

۲۵۹۷۲ ان اقدام کی تصدیق کے بعد اصول ریاضیاتی ترغیب ضمانت دیتا ہے کہ کلیہ ہر مثبت عدد صحیح کے لئے درست ہو گا۔

۲۵۹۷۳ □

۲۵۹۷۴ دیگر ابتدائی عدد صحیح

۲۵۹۷۵ بعض ترغیبی دلائل میں $n = 1$ سے آغاز کرنے کے بجائے کسی اور عدد صحیح سے ابتدا کی جاتی ہے۔ اس طرح کے دلائل کے قدم درج ذیل ہیں۔

۲۵۹۷۶ ۱. تصدیق کریں کہ کلیہ $n = n_1$ (متعلقہ پہلا عدد صحیح) کے لئے درست ہے۔

۲۵۹۷۷ ۲. ثابت کریں کہ اگر کلیہ کسی بھی عدد صحیح $n = k \geq n_1$ کے لئے درست ہو تب یہ $n = (k+1)$ کے لئے بھی درست ہو گا۔

۲۵۹۷۸ ان اقدام کے مکمل ہونے کے بعد اصول ریاضیاتی ترغیب ضمانت دیتا ہے کہ کلیہ تمام $n \geq n_1$ کے لئے درست ہو گا۔

۲۵۹۷۹ مثال ۱.۳: دکھائیں کہ اگر n کافی بڑا ہو تب $n! > 3^n$ ہو گا۔

۲۵۹۸۰ حل: یہاں کتنا بڑا عدد صحیح کافی بڑا تصور کیا جا سکتا ہے؟ یہ جانتے ہیں۔

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	2	6	24	120	720	5040
3^n	3	9	27	81	243	729	2187

۲۵۹۸۱ ان نتائج کو دیکھ کر $n! > 3^n$ کے لئے $n \geq 7$ ہونا کافی ہے۔ اس کی مکمل تصدیق کے لئے ہم ریاضیاتی ترغیب بروئے کار لاتے ہیں۔ ہم قدم اول میں
۲۵۹۸۲ $n_1 = 7$ منتخب کرتے ہیں اور قدم دوم مکمل کرتے ہیں۔ قدم دوم میں ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی $k \geq 7$ کے لئے $k! > 3^k$ ہے۔ یوں درج ذیل
۲۵۹۸۳ ہو گا۔

$$(k+1)! = (k+1)(k!) > (k+1)3^k > 7 \cdot 3^k > 3^{k+1}$$

۲۵۹۸۴ لہٰذا $k \geq 7$ کے لئے $k! > 3^k$ سے مراد $(k+1)! \geq 3^{k+1}$ ہو گا۔ ریاضیاتی ترغیب کا اصول ضمانت دیتا ہے کہ تمام $n \geq 7$ کے لئے
۲۵۹۸۵ $n! > 3^n$ ہو گا۔ □

سوالات

سوال ا.ا: یہ مان لینے کے بعد کہ ہر دو اعداد a اور b کے لئے مثلثی عدم مساوات $|a+b| \leq |a|+|b|$ مطمئن ہو گا، ثابت کریں کہ کسی بھی عدد n کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$|x_1+x_2+\cdots+x_n| \leq |x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$$

سوال ا.۲: دکھائیں کہ $r \neq 1$ کی صورت میں کسی بھی مثبت عدد صحیح n کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$1+r+r^2+\cdots+r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

سوال ا.۳: حاصل ضرب کا قاعدہ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ اور یہ جانتے ہوئے کہ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1$ ہے دکھائیں کہ ہر مثبت عدد صحیح n کے لئے $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$ ہو گا۔

سوال ا.۴: فرض کریں تفاعل $f(x)$ کی خاصیت یہ ہے کہ کسی بھی دو عدد صحیح x_1 اور x_2 کے لئے $f(x_1x_2) = f(x_1)+f(x_2)$ ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ کسی بھی n مثبت اعداد x_1، x_2، $\cdots$، x_n کے لئے $f(x_1x_2\cdots x_n) = f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$ ہو گا۔

سوال ا.۵: دکھائیں کہ تمام مثبت اعداد n کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{2}{3^1}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^n} = 1-\frac{1}{3^n}$$

سوال ا.۶: دکھائیں کہ تمام بڑے اعداد n کے لئے $2^n > n^2$ ہو گا۔

سوال ا.۷: دکھائیں کہ تمام بڑے اعداد n کے لئے $2^n \geq n^2$ ہو گا۔

سوال ا.۸: دکھائیں کہ $n \geq -3$ کے لئے $2^n \geq 1/8$ ہو گا۔

سوال ا.۹: **مربعوں کے مجموعے** دکھائیں کہ پہلے n مثبت عدد صحیح کے مربعوں کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{n(n+\frac{1}{2})(n+1)}{3}$$

سوال ا.۱۰: **مکعب کے مجموعے** دکھائیں کہ پہلے n مثبت عدد صحیح کے مربعوں کا مجموعہ $(n(n+1)/2)^2$ ہو گا۔

سوال ا.۱۱: **محدود مجموعوں کے قواعد** دکھائیں کہ محدود مجموعوں کے درج ذیل قواعد ہر مثبت عدد صحیح n کے لئے مطمئن ہوں گے۔

ا.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

ب.

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$$

ج.

$$\sum_{k=1}^{n} ca_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (c \text{ کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے})$$

د.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = n \cdot c \quad (\text{اگر } a_k \text{ کی قیمت مستقل } c \text{ ہو})$$

۲۶۰۰۲ سوال ۱.۱۲: دکھائیں کہ ہر مثبت عدد صحیح n اور ہر حقیقی عدد x کے لئے $|x^n| = |x|^n$ ہو گا۔

۲۶۰۰۳

ضمیمہ ب

تحدیدی مسائل کے ثبوت

اس ضمیمے میں حصہ ۲.۲ میں پیش کیے گئے مسئلہ ۲.۱ کے جزو ۲تا۵اور مسئلہ ۲.۴ کے ثبوت دیے جاتے ہیں۔

پہلے حصہ ۲.۲ کا درج ذیل مسئلہ ۲.۱ دیکھتے ہیں۔

مسئلہ ب.۱: **حد کے خواص**

اگر L ، M ، c ،اور k حقیقی اعداد ہوں اور

$$\lim_{x\to c} f(x) = L, \quad \lim_{x\to c} g(x) = M$$

ہوں تب درج ذیل ہوں گے۔

۱.	مجموعے کا قاعدہ	$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = L+M$	
۲.	فرق کا قاعدہ	$\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = L-M$	
۳.	حاصل ضرب کا قاعدہ	$\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M$	
۴.	مستقل سے ضرب کا قاعدہ	$\lim_{x\to c}(kf(x)) = kL$	(k کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے)
۵.	حاصل تقسیم کا قاعدہ	$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$	جہاں $M \neq 0$ ہے
۶.	طاقت کا قاعدہ	اگر r اور s عدد صحیح ہوں جن کے مشترک جزو ضربی موجود نہ ہوں اور $s \neq 0$ ہو تب	

$$\lim_{x\to c}(f(x))^{r/s} = L^{r/s}$$

ہو گا بشرطیکہ $L^{r/s}$ حقیقی عدد ہو۔(جفت s کی صورت میں ہم $L > 0$ فرض کرتے ہیں۔)

ہم نے مجموعے کے قاعدے کا ثبوت حصہ ۲.۳ میں پیش کیا جبکہ طاقتی قاعدے کا ثبوت اعلیٰ نسابی کتابوں میں ملے گا۔ مجموعے کے قاعدہ میں $g(x)$ کی جگہ $-g(x)$ اور M کی جگہ $-M$ ڈالنے سے فرق کا قاعدہ حاصل ہو گا۔ حاصل ضرب قاعدہ میں $g(x) = k$ ڈالنے سے مستقل ضرب کا قاعدہ

حاصل ہوگا۔ یوں صرف حاصل ضرب اور حاصل تقسیم کے قاعدے رہ گئے ہیں۔

ثبوت: **تحدیدی حاصل ضرب قاعدے کا ثبوت** ہم دکھاتے ہیں کہ کسی بھی $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا $\delta > 0$ موجود ہوگا کہ f اور g کے دائرہ کار کے تقاطع D میں تمام x پر درج ذیل ہوگا۔

$$0 < |x - c| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x)g(x) - LM| < \epsilon$$

اب فرض کریں ϵ مثبت عدد ہے اور $f(x)$ اور $g(x)$ کو درج ذیل لکھیں۔

$$f(x) = L + (f(x) - L), \qquad g(x) = M + (g(x) - M)$$

ان کو آپس میں ضرب دے کر LM منفی کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) - LM &= (L + (f(x) - L))(M + (g(x) - M)) - LM \\ &= LM + L(g(x) - M) + M(f(x) - L) \\ &\qquad + (f(x) - L)(g(x) - M) - LM \\ &= L(g(x) - M) + M(f(x) - L) + (f(x) - L)(g(x) - M) \end{aligned} \tag{۱}$$

چونکہ $x \to c$ کرنے سے f اور g کی حدیں L اور M پائی جاتی ہیں، لہٰذا D میں تمام x کے لئے ایسے مثبت اعداد δ_1 ، δ_2 ، δ_3 ، اور δ_4 موجود ہوں گے کہ درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} 0 < |x - c| < \delta_1 \qquad &\Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \sqrt{\epsilon/3} \\ 0 < |x - c| < \delta_2 \qquad &\Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \sqrt{\epsilon/3} \\ 0 < |x - c| < \delta_3 \qquad &\Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon/(3(1 + |M|)) \\ 0 < |x - c| < \delta_4 \qquad &\Rightarrow \qquad |f(x) - L| < \epsilon/(3(1 + |L|)) \end{aligned} \tag{۲}$$

اگر ہم δ_1 تا δ_4 میں سب سے چھوٹے کو δ لیں، عدم مساوات ۲ کے دائیں ہاتھ کی عدم مساوات $0 < |x - c| < \delta$ کے لئے بھی مطمئن ہوں گی۔ لہٰذا D میں تمام x کے لئے، $0 < |x - c| < \delta$ سے مراد درج ذیل لیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} &|f(x) \cdot g(x) - LM| && \text{مساوات اپر مثلثی عدم مساوات کا اطلاق} \\ &\leq |L||g(x) - M| + |M||f(x) - L| + |f(x) - L||g(x) - M| \\ &\leq (1 + |L|)|g(x) - M| + (1 + |M|)|f(x) - L| + |f(x) - L||g(x) - M| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \sqrt{\frac{\epsilon}{3}}\sqrt{\frac{\epsilon}{3}} = \epsilon && \text{مساوات ۲ سے قیمتیں لی گئیں} \end{aligned}$$

یوں تحدیدی حاصل ضرب قاعدے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

۲۶۰۲۶ ثبوت: **تحدیدی حاصل تقسیم قاعدے کا ثبوت** ہم دکھاتے ہیں کہ $\lim_{x\to c}(1/g(x)) = 1/M$ ہوگا۔اس کے بعد ہم
۲۶۰۲۷ تحدیدی حاصل ضرب قاعدہ کے تحت درج ذیل اخذ کر سکتے ہیں۔

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) = \lim_{x\to c}f(x)\cdot\lim_{x\to c}\frac{1}{g(x)} = L\cdot\frac{1}{M} = \frac{l}{M}$$

۲۶۰۲۸ فرض کریں $\epsilon > 0$ ہے۔یہ دکھانے کی خاطر کہ $\lim_{x\to c}(1/g(x)) = 1/M$ ہے ہمیں دکھانا ہوگا کہ تمام x کے لئے ایسا $\delta > 0$
۲۶۰۲۹ موجود ہے کہ درج ذیل مطمئن ہو۔

$$0 < |x-c| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \epsilon$$

۲۶۰۳۰ چونکہ $|M| > 0$ ہے لہٰذا تمام x کے لئے ایسا مثبت عدد δ_1 موجود ہے جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہے۔

$$0 < |x-c| < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad |g(x) - M| < \frac{M}{2} \tag{۳}$$

۲۶۰۳۱ کسی بھی عدد A اور B کے لئے ہم جانتے ہیں کہ $|A| - |B| \leq |A-B|$ اور $|B| - |A| \leq |A-B|$ ہوگا جس سے
۲۶۰۳۲ $||A| - |B|| \leq |A-B|$ اخذ کیا جا سکتا ہے۔اس میں $A = g(x)$ اور $B = M$ لینے سے درج ذیل حاصل ہوگا

$$||g(x)| - |M|| \leq |g(x) - M|$$

۲۶۰۳۳ جس کو عدم مساوات ۳ کے ساتھ ملا کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
||g(x)| - |M|| &< \frac{|M|}{2}\\
-\frac{|M|}{2} < |g(x)| - |M| &< \frac{|M|}{2}\\
\frac{|M|}{2} < |g(x)| &< \frac{3|M|}{2}\\
|M| < 2|g(x)| &< 3|M|\\
\frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|M|} &< \frac{3}{|g(x)|}
\end{aligned} \tag{۴}$$

۲۶۰۳۴ یوں $0 < |x-c| < \delta_1$ سے درج ذیل مراد لیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| &= \left|\frac{M - g(x)}{Mg(x)}\right| \leq \frac{1}{|M|}\cdot\frac{1}{|g(x)|}\cdot|M - g(x)|\\
&< \frac{1}{|M|}\cdot\frac{2}{|M|}\cdot|M - g(x)| \quad \text{عدم مساوات ۴}
\end{aligned} \tag{۵}$$

۲۶۰۳۵ چونکہ $(1/2)|M|^2\epsilon > 0$ ہے لہٰذا تمام x کے لئے ایسا عدد $\delta_2 > 0$ موجود ہوگا جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$0 < |x-c| < \delta_2 \quad \Rightarrow \quad |M - g(x)| < \frac{\epsilon}{2}|M|^2 \tag{۶}$$

۲۶۰۳۶ اگر ہم δ کو δ_1 اور δ_2 میں چھوٹے کے برابر لیں، تب تمام x کے لئے $0 < |x-c| < \delta$ کی صورت میں عدم مساوات ۵ اور ۶ مطمئن ہوں
۲۶۰۳۷ گے۔ ان نتائج کو ملا کر درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$0 < |x-c| < \delta \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{M}\right| < \epsilon$$

۲۶۰۳۸ یوں تحدیدی حاصل تقسیم کے قاعدے کا ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

۲۶۰۳۹ □

۲۶۰۴۰ اب حصہ ۲.۲ کا درج ذیل مسئلہ ۲.۴ دیکھتے ہیں۔

۲۶۰۴۱ مسئلہ **مسئلہ بیچ** فرض کریں کھلے وقفہ I میں، جس میں c پایا جاتا ہو، (غالباً) $x = c$ کے سوا تمام x کے لئے درج ذیل ہے۔

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$

۲۶۰۴۲ مزید فرض کریں $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$ ہے۔ تب $\lim_{x\to c} f(x) = L$ ہوگا۔

۲۶۰۴۳

۲۶۰۴۴ ثبوت: **دائیں ہاتھ حدوں کا ثبوت** فرض کریں $\lim_{x\to c^+} g(x) = \lim_{x\to c^+} h(x) = L$ ہے۔ تب کسی بھی
۲۶۰۴۵ $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا $\delta > 0$ موجود ہوگا کہ تمام x کے لئے وقفہ $c < x < c+\delta$ وقفہ I کے اندر واقع ہو اور عدم مساوات سے مراد
۲۶۰۴۶ درج ذیل ہو۔

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \quad \text{اور} \quad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$$

۲۶۰۴۷ ان عدم مساوات کو عدم مساوات $g(x) \le f(x) \le h(x)$ کے ساتھ ملا کر درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} L - \epsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) < L + \epsilon, \\ L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon, \\ -\epsilon < f(x) - L < \epsilon \end{aligned}$$

۲۶۰۴۸ یوں تمام x کے لئے عدم مساوات $c < x < c+\delta$ سے مراد $|f(x) - L| < \epsilon$ ہوگا۔

۲۶۰۴۹ □

۲۶۰۵۰ ثبوت: **بائیں ہاتھ حدوں کا ثبوت** فرض کریں $\lim_{x\to c^-} g(x) = \lim_{x\to c^-} h(x) = L$ ہے۔ تب کسی بھی
۲۶۰۵۱ $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا $\delta > 0$ موجود ہوگا کہ تمام x کے لئے وقفہ $c - \delta < x < c$ وقفہ I کے اندر واقع ہو اور عدم مساوات سے درج
۲۶۰۵۲ ذیل مراد ہو۔

$$L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon \quad \text{اور} \quad L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$$

پہلے کی طرح ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ تمام x کے لئے عدم مساوات $c - \delta < x < c$ سے مراد $|f(x) - L| < \epsilon$ ہوگا۔

$\square$

ثبوت: **دو طرفہ حدود کا ثبوت** اگر $\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L$ ہو، تب $x \to c^+$ اور $x \to c^-$ دونوں کے لئے $g(x)$ اور $h(x)$ حد L کو پہنچتے ہیں۔ یوں $\lim_{x\to c^+} f(x) = L$ اور $\lim_{x\to c^-} f(x) = L$ ہوں گے۔ لہٰذا $\lim_{x\to c} f(x)$ موجود اور L کے برابر ہوگا۔

$\square$

سوالات

سوال ب.۱: فرض کریں $x \to c$ کرنے سے تفاعل $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، اور $f_3(x)$ کی حدیں بالترتیب L_1 ، L_2 ، اور L_3 ہیں۔ دکھائیں کہ ان تفاعلات کے مجموعے کی حد $L_1 + L_2 + L_3$ ہوگی۔ ریاضیاتی ترغیب (ضمیمہ الف) استعمال کر کے اس نتیجے کو محدود تعداد کے تفاعلات کے مجموعے تک عمومیت دو۔

سوال ب.۲: مسئلہ ۲.۲ میں حاصل ضرب کی حد اور ریاضیاتی ترغیب استعمال کر کے دکھائیں کہ اگر تفاعل $f_1(x)$ ، $f_2(x)$ ، $\cdots$ ، $f_n(x)$ کی حدیں بالترتیب L_1 ، L_2 ، $\cdots$ ، L_n ہوں تب درج ذیل ہوگا۔

$$\lim_{x\to c} f_1(x) \lim_{x\to c} f_2(x) \cdots \lim_{x\to c} f_n(x) = L_1 L_2 \cdots L_n$$

سوال ب.۳: یہ جانتے ہوئے کہ $\lim_{x\to c} x = c$ ہے اور سوال ب.۲ کا نتیجہ استعمال کر کے دکھائیں کہ کسی بھی عدد صحیح $n > 1$ کے لئے $\lim_{x\to c} x^n = c^n$ ہوگا۔

سوال ب.۴: **کثیر رکنی کی حد** یہ جانتے ہوئے کہ کسی بھی عدد k کے لئے $\lim_{c\to c}(k) = k$ ہوگا اور سوال ب.۱ اور سوال ب.۳ کے نتائج استعمال کر کے دکھائیں کہ کسی بھی کثیر رکنی تفاعل

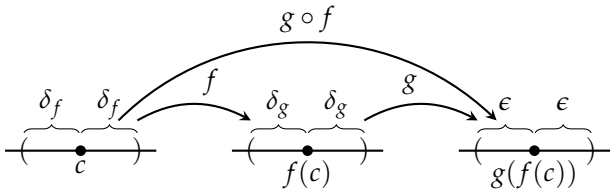
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

کے لئے $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ ہوگا۔

سوال ب.۵: **ناطق تفاعلات کی حدیں** مسئلہ ب.۱ اور سوال ب.۴ کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اگر $f(x)$ اور $g(x)$ کثیر رکنی تفاعلات ہوں اور $g(c) \neq 0$ ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}$$

سوال ب.۶: **استمراری تفاعلات کے مرکب** دو استمراری تفاعلات کا مرکب استمراری ہونے کا خاکہ شکل ب.۱ میں پیش کیا گیا ہے۔ خاکے سے ثبوت کی تشکیل کریں۔ آپ نے ثابت کرنا ہے کہ اگر $x = c$ پر f استمراری ہو اور $f(c)$ پر g استمراری ہو تب c پر $g \circ f$ استمراری ہوگا۔



شکل ب.۱: دو استمراری تفاعلات کا مرکب بھی استمراری ہو گا۔

۲۶۰۷۴ فرض کریں کہ نقطہ c تفاعل f کے دائرہ کار کے اندر واقع ہے اور نقطہ $f(c)$ تفاعل g کے دائرہ کار کے اندر واقع ہے۔ ایسا کرنے سے مطلوبہ حدیں دو
۲۶۰۷۵ طرفہ صورت اختیار کرتی ہیں۔ (یک طرفہ حد کی صورت میں بھی دلائل اسی طرح ہیں۔)

۲۶۰۷۶

ضمیمہ ج

مخلوط اعداد

مخلوط اعداد سے مراد $a + ib$ روپ کا اظہار ہے جہاں a اور b حقیقی اعداد ہیں اور i جذر $\sqrt{-1}$ کی علامت ہے۔ حقیقی اعداد کا نظام تخلیق دینے میں جدوجہد درکار تھی جس کے مختلف مراحل پر اس ضمیمے میں غور کیا جائے گا۔ یہ جاننے کے بعد مخلوط اعداد کا نظام عجیب نظر نہیں آئے گا۔

حقیقی اعداد کا ارتقا

اعدادی نظام کے ارتقا میں پہلا قدم گنتی کے اعداد $1, 2, 3, \cdots$ کی پہچان تھی جنہیں ہم اب **قدرتی اعداد**[1] یا **مثبت عدد صحیح**[2] کہتے ہیں۔ نظام کے اندر رہتے ہوئے ان اعداد کو استعمال کر کے چند بنیادی حسابی عملیات ممکن ہیں۔ یعنی مثبت اعداد صحیح کا نظام جمع اور ضرب کے عمل کے لحاظ سے **بند**[3] نظام ہے۔ اس سے ہمارا مراد یہ ہے کہ اگر m اور n مثبت عدد صحیح ہوں تب درج ذیل بھی مثبت عدد صحیح ہوں گے۔

$$m + n = p \quad \text{اور} \quad mn = q \tag{1}$$

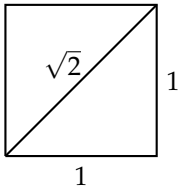
مساوات ۱ کی دونوں مساواتوں میں بائیں ہاتھ دو عدد صحیح جانتے ہوئے ہم مطابقتی دائیں ہاتھ کے عدد صحیح دریافت کر سکتے ہیں۔ بعض اوقات مثبت عدد صحیح m اور p جانتے ہوئے ہم ایسا مثبت عدد صحیح n تلاش کر سکتے ہیں کہ $m + n = p$ ہو۔ مثال کے طور ہم $3 + n = 7$ کو حل کر کے ہم مثبت عدد صحیح n تلاش کر سکتے ہیں۔ اس کے برعکس $7 + n = 3$ کو حل کر کے ہم ایسا n دریافت نہیں کر سکتے جو مثبت عدد صحیح ہو۔ اس مثال سے واضح ہے کہ مثبت عدد صحیح نظام زیادہ کارآمد نہیں اور اس کو وسیع بنانے کی ضرورت ہے۔

منفی اعداد صحیح اور عدد صفر کی ایجاد نے $7 + n = 3$ طرز کی مساوات حل کرنا ممکن بنایا۔ ایسی تہذیب میں، جو تمام **عدد صحیح**[4]

$$\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{2}$$

---

[1] naturalnumbers
[2] positiveintegers
[3] closed
[4] integers



شکل ج.۱: اکائی مربع کے ضلع کی لمبائی غیر ناطق ہو گی۔

جانتی ہو، ایک پڑھا لکھا شخص مساوات $m + n = p$ میں دو عدد صحیح جانتے ہوئے نامعلوم عدد صحیح تلاش کر سکتا ہے۔

فرض کریں یہ پڑھا لکھا شخص مساوات ۲ میں دیے گئے اعداد استعمال کر کے ضرب کرنا بھی جانتا ہے۔ اگر m اور q معلوم ہو، وہ دیکھے گا کہ بعض اوقات n تلاش کرنا ممکن ہوتا ہے اور بعض اوقات ناممکن۔ اگر یہ شخص قابل اور ذہین ہو، ممکن ہے وہ اعداد کے نظام کو مزید وسعت دے کر عدد صحیح m اور n کی مرتب جوڑیاں m/n ، جس کو ہم کسر کہتے ہیں، متعارف کرے۔ عدد صفر خصوصی خواص رکھتا ہے جو کچھ عرصہ کے لئے مسئلے پیدا کر سکتا ہے، لیکن وہ جلد اس نتیجے پر پہنچ پائیں گے کہ m/n طرز کی تمام جوڑیاں کارآمد ہیں تاہم جن کے نسب نما میں صفر ہو انہیں عددی نظام میں شامل نہیں کیا جائے۔ یہ مجموع، جو **ناطق اعداد**[5] کہلاتا ہے، نظام میں کسی بھی دو اعداد پر حساب کی درج ذیل **ناطق عملیات**[6] ممکن بناتا ہے، تاہم صفر سے تقسیم کرنا ممکن نہیں۔

۱. ا) جمع
ب) منفی

۲. ا) ضرب
ب) تقسیم

اکائی مربع کا ہندسہ (شکل ج.۱) اور مسئلہ فیثاغورث سے ہم جانتے ہیں کہ وہ ہندسی بناوٹ کی مدد سے لمبائی کی کسی بنیادی اکائی کے لحاظ سے $\sqrt{2}$ اکائی لمبائی کی لکیر کھینچ سکتے تھے۔ یوں ہم کہہ سکتے ہیں کہ ہندسی بناوٹ سے وہ درج ذیل مساوات حل کر سکتے تھے۔

$$x^2 = 2$$

تاہم ان کو معلوم ہوا کہ $\sqrt{2}$ لمبائی کی لکیر اور 1 لمبائی کی لکیر متبائن مقادیر ہیں۔ یعنی $\sqrt{2}/1$ کو کسی دوسری زیادہ بنیادی اکائی لمبائی کے دو عدد صحیح مضرب کی نسبت نہیں لکھا جا سکتا۔ یوں ایک پڑھا لکھا شخص مساوات $x^2 = 2$ کا حل ناطق عدد کی صورت میں دریافت نہیں کر سکتا تھا۔

ایسا کوئی ناطق عدد نہیں پایا جاتا جس کا مربع 2 ہو۔ یہ جاننے کے لئے کہ ایسا کیوں کر ہے، فرض کریں کہ ایسا ناطق عدد پایا جاتا ہے۔ یوں ہم ایسے دو عدد صحیح p اور q دریافت کر سکیں گے جن کا 1 کے علاوہ کوئی مشترک جزو ضربی نہ ہو اور جو درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں۔

$$p^2 = 2q^2 \tag{۳}$$

چونکہ p اور q عدد صحیح ہیں، p کو جفت ہونا ہو گا ورنہ اس کا اپنے ساتھ حاصل ضرب طاق ہو گا۔ علامتوں میں $p = 2p_1$ ہو گا جہاں p_1 عدد صحیح ہے۔ یوں $2p_1^2 = q^2$ لکھا جا سکتا ہے جس کے تحت q کو جفت ہونا ہو گا مثلاً $q = 2q_1^2$ جہاں q_1 عدد صحیح ہے۔ اس طرح 2 کو p

---

[5] rationalnumbers
[6] rationaloperations

اور q دونوں کا جزو ضربی ہونا ہوگا، لیکن ہم نے p اور q کا انتخاب اس طرح کیا تھا کہ 1 کے علاوہ ان کا کوئی مشترک جزو ضربی نہ ہو۔ لہٰذا ایسا کوئی ناطق عدد نہیں پایا جاتا جس کا مربع 2 ہو۔

اگرچہ پڑھا لکھا شخص مساوات $x^2 = 2$ کو حل نہیں کر سکتا تاہم وہ ناطق اعداد کی ترتیب

$$\frac{1}{1}, \frac{7}{5}, \frac{41}{29}, \frac{239}{169}, \ldots \tag{۴}$$

وضع کر سکتا تھا جن کے مربع درج ذیل ترتیب دیتے ہیں

$$\frac{1}{1}, \frac{49}{25}, \frac{1681}{841}, \frac{57121}{28561}, \ldots \tag{۵}$$

جس کی حد 2 پر مرکوز ہے۔ اس حقیقت کی وجہ سے انہیں ناطق اعداد کی ترتیب کی حد کا تصور واضح ہوا۔ اگر ہم اس حقیقت کو مان لیں کہ اوپر سے محدود بڑھتی ترتیب ہر صورت ایک حد پر مرکوز ہو گی اور ہم دیکھیں کہ (۴) میں دی گئی ترتیب یہ خواص رکھتی ہے تب ہم چاہیں گے کہ یہ حد L ہو۔ ترتیب ۵ کو دیکھ کر اس کا یہ مطلب بھی ہے کہ $L^2 = 2$ ہو گا لہٰذا L ناطق عدد نہیں ہو سکتا۔ ناطق اعداد کے ساتھ ناطق اعداد کی تمام بڑھتی محدود ترتیبات کی حدیں شامل کرنے سے ہمیں تمام حقیقی اعداد کا نظام ملتا ہے۔ یہاں لفظ حقیقی اس نظام کو کسی بھی لحاظ سے ریاضی کے دیگر نظام سے زیادہ یا کم حقیقی نہیں بناتا۔ یہ محض ایک نام ہے جو اس نظام کو دیا گیا ہے۔

مخلوط اعداد

ہم نے حقیقی اعداد کا نظام بنتے دیکھا۔ درحقیقت اس نظام کے ارتقا میں تین مراحل دیکھے گئے۔

۱. پہلے عددی نظام کی ایجاد: تمام عدد صحیح کا سلسلہ سادہ گنتی سے حاصل کیا۔

۲. دوسرے عددی نظام کی ایجاد: ناطق اعداد $m/n!$ کا سلسلہ اعداد صحیح سے حاصل کیا گیا۔

۳. تیسرے عددی نظام کی ایجاد: حقیقی اعداد x کا سلسلہ ناطق اعداد اسے حاصل کیا گیا۔

عددی نظام کی ایجادات درجائی ہیں۔ ہر نئے نظام میں گزشتہ نظام شامل ہیں۔ ہر نیا نظام زیادہ وسیع ہے اور اس نظام میں رہتے ہوئے مزید ریاضیاتی عمل ممکن ہیں۔

۱. تمام اعداد صحیح کے نظام میں درج ذیل روپ کی تمام مساوات حل کی جا سکتی ہیں جہاں a عدد صحیح ہے۔

$$x + a = 0 \tag{۶}$$

۲. تمام ناطق اعداد کے نظام میں درج ذیل روپ کی مساوات حل کی جا سکتی ہیں جہاں a اور b ناطق اعداد ہیں اور $a \neq 0$ ہے۔

$$ax + b = 0 \tag{۷}$$

۳. تمام حقیقی اعداد کے نظام میں مساوات ۶ اور مساوات ۷ کے علاوہ تمام دو درجی مساوات

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{۸}$$

حل کرنا ممکن ہے، جہاں $a \neq 0$ اور $b^2 - 4ac \geq 0$ ہیں۔

۲۶۱۲۷ آپ غالباً درج ذیل کلیہ جانتے ہیں جو مساوات ۸ کا حل دیتا ہے۔

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{۹}$$

۲۶۱۲۸ آپ یقیناً یہ بھی جانتے ہوں گے جب **مفرق**[۷]، $d = b^2 - 4ac$، منفی ہو، مساوات ۹ کا حل کسی بھی مذکورہ بالا اعدادی نظام میں نہیں پایا جاتا۔
۲۶۱۲۹ درحقیقت، مذکورہ بالا ایجاد شدہ اعداد نظام کے اندر رہتے ہوئے، درج ذیل نہایت سادہ دو درجی مساوات کا حل ممکن نہیں۔

$$x^2 + 1 = 0$$

۲۶۱۳۰ اس طرح ہم چوتھا عددی نظام ایجاد کرتے ہیں، جو تمام مخلوط اعداد $a + ib$ پر مشتمل ہے۔ ہم علامت i کو رد کر کے علامت (a, b) استعمال کر سکتے ہیں،
۲۶۱۳۱ جہاں ہم عدد صحیح a اور b کی جوڑی کی بات کریں گے۔ الجبرائی عمل میں a اور b کے ساتھ مختلف برتاؤ کیا جاتا ہے لہٰذا قوسین میں ان کی ترتیب تبدیل
۲۶۱۳۲ نہیں کی جا سکتی۔ یوں ہم کہہ سکتے ہیں کہ مخلوط عددی نظام، اعداد صحیح کی تمام مرتب جوڑیوں (a, b) پر مشتمل ہے اور جوڑیوں کی مساویت، مجموعہ، فرق،
۲۶۱۳۳ ضرب، وغیرہ درج ذیل قواعد کے تحت ہیں۔ درج ذیل بحث میں (a, b) اور $a + ib$ علامتیت دونوں استعمال کی گئی ہے۔ ہم a کو مخلوط عدد (a, b)
۲۶۱۳۴ کا **حقیقی جزو**[۸] اور b کو اس کا **خیالی جزو**[۹] کہتے ہیں۔

۲۶۱۳۵ ہم درج ذیل متعارف کرتے ہیں۔

۲۶۱۳۶ مساویت

۲۶۱۳۷ دو مخلوط اعداد $a + ib$ اور $c + id$ صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر:

$$a + ib = c + id$$

ہوں گے جب $a = c$ اور $b = d$ ہو۔

دو مخلوط اعداد (a, b) اور (c, d) صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب $a = c$ اور $b = d$ ہو۔

۲۶۱۳۸ جمع

۲۶۱۳۹

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

دو مخلوط اعداد (a, b) اور (c, d) کا مجموعہ مخلوط عدد $(a + c, b + d)$ ہو گا۔

۲۶۱۴۰ ضرب

۲۶۱۴۱

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

دو مخلوط اعداد (a, b) اور (c, d) کا حاصل ضرب مخلوط عدد $(ac - bd, ad + bc)$ ہو گا۔

۲۶۱۴۲ ان تمام مخلوط اعداد (a, b) کا سلسلہ جن میں دوسرا عدد b صفر ہو حقیقی اعداد a کے سلسلہ کے تمام خواص رکھتا ہے۔ مثال کے طور پر $(a, 0)$ اور
۲۶۱۴۳ $(b, 0)$ کا مجموعہ اور حاصل ضرب درج ذیل ہوں گے

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$$
$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0)$$

۲۶۱۴۴ جو اسی قسم کے اعداد ہیں اور ان کا خیالی جزو صفر ہے۔ اسی طرح "حقیقی عدد" $(a, 0)$ اور مخلوط عدد (c, d) کو آپس میں ضرب کرنے سے درج ذیل
۲۶۱۴۵ حاصل ہو گا۔

$$(a, 0) \cdot (c, d) = (ac, ad) = a(c, d)$$

---

[۷] discriminant
[۸] realpart
[۹] imaginarypart

۲۶۱۴۶ بالخصوص، مخلوط عددی نظام میں مخلوط عدد $(0,0)$ صفر کا کردار اور مخلوط عدد $(1,0)$ اکائی کا کردار ادا کرتا ہے۔

۲۶۱۴۷ جوڑی عدد $(0,1)$ ، جس کا حقیقی جزو صفر اور خیالی جزو ایک کے برابر ہے، کی خاصیت یہ ہے کہ اس کے مربع:

$$(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$$

۲۶۱۴۸ میں حقیقی جزو منفی ایک اور خیالی جزو صفر کے برابر ہے۔ یوں، مخلوط اعداد (a,b) کے نظام میں ایسا عدد $x=(0,1)$ پایا جاتا ہے جس کے مربع کو اکائی
۲۶۱۴۹ $(1,0)$ کے ساتھ جمع کرنے سے صفر $(0,0)$ حاصل ہوتا ہے (ذیل دیکھیں)۔

$$(0,1)^2+(1,0)=(0,0)$$

۲۶۱۵۰ یوں اس نئے عددی نظام میں درج ذیل مساوات کا حل $x=(0,1)$ ہے۔

$$x^2+1=0$$

۲۶۱۵۱ آپ غالباً (a,b) کے لحاظ سے $a+ib$ کی علامت سے زیادہ واقف ہیں۔ مرتب جوڑیوں کے ریاضی قواعد کے تحت درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=a(1,0)+b(0,1)$$

۲۶۱۵۲ اور چونکہ $(1,0)$ کا رویہ اکائی کی طرح اور $(0,1)$ کا رویہ منفی ایک کے جذر کی طرح ہے لہٰذا (a,b) کی جگہ $a+ib$ لکھنے میں جھجک محسوس نہ
۲۶۱۵۳ کریں، جس میں b کے ساتھ چسپاں i یقینی بناتا ہے کہ خیالی جزو کی درست نشاندہی ہو۔ ہم جب چاہیں $a+ib$ کی جگہ (a,b) یا (a,b) کی جگہ
۲۶۱۵۴ $a+ib$ لکھ سکتے ہیں۔ مخلوط عددی نظام (a,b) میں رائج الجبرائی قواعد جاننے کے بعد یاد رہے کہ علامت $(0,1)=i$ کسی بھی لحاظ سے علامت
۲۶۱۵۵ $(1,0)$ سے کم حقیقی نہیں ہے۔ پس ایک کو حقیقی اور دوسرے کو خیالی نام دیا گیا ہے۔

۲۶۱۵۶ مخلوط اعداد کے کسی بھی ناطق ملاپ کو واحد ایک مخلوط عدد میں سمیٹنے کے لئے بنیادی الجبرا کے قواعد استعمال کریں اور جہاں i^2 ہو وہاں -1 لکھیں۔ یاد رہے
۲۶۱۵۷ کہ مخلوط عدد $(0,0)=0+i0$ سے تقسیم کی اجازت نہیں۔ اگر $a+ib\neq 0$ ہو تب تقسیم کا عمل درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{c+id}{a+ib}=\frac{(c+id)(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)}=\frac{(ac+bd)+i(ad-bc)}{a^2+b^2}$$

۲۶۱۵۸ نتیجہ مخلوط عدد $x+iy$ ہے جہاں x اور y درج ذیل ہیں

$$x=\frac{ac+bd}{a^2+b^2},\quad y=\frac{ad-bc}{a^2+b^2}$$

۲۶۱۵۹ جہاں $a+ib=(a,b)\neq(0,0)$ کی وجہ سے $a^2+b^2\neq 0$ ہو گا۔

۲۶۱۶۰ نسب نما کو ضارب $a-ib$ سے ضرب دے کر نسب نما میں i سے چھٹکارہ حاصل کیا گیا۔ اس ضارب کو $a+ib$ کا **مخلوط جوڑی دار**[۱۰] کہتے ہیں۔ روایتی
۲۶۱۶۱ طور پر مخلوط عدد z کے مخلوط جوڑی دار کو $\bar{z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

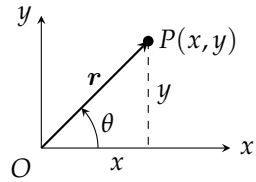
$$z=a+ib,\quad \bar{z}=a-ib$$

۲۶۱۶۲ کسر $(c+id)/(a+ib)$ کے شمار کنندہ اور نسب نما کو مخلوط جوڑی دار سے ضرب دینے سے نسب نما ہر صورت حقیقی عدد میں تبدیل ہو گا۔

۲۶۱۶۳ مثال ج.ا:

---

[۱۰] complexconjugate



شکل ج.۲: اغگن خاکہ میں $z = x + iy$ کو نقطہ $P(x, y)$ اور سمتیہ $\vec{OP}$ ظاہر کیا جاتا ہے۔

۲۶۱۶۴ ا.
$$(2 + 3i) + (6 - 2i) = (2 + 6) + (3 - 2)i = 8 + i$$

۲۶۱۶۵ ب.
$$(2 + 3i) - (6 - 2i) = (2 - 6) + (3 - (-2))i = -4 + 5i$$

۲۶۱۶۶ ج.
$$\begin{aligned}(2 + 3i)(6 - 2i) &= (2)(6) + (2)(-2i) + (3i)(6) + (3i)(-2i)\\ &= 12 - 4i + 18i - 6i^2 = 12 + 14i + 6 = 18 + 14i\end{aligned}$$

۲۶۱۶۷ د.
$$\begin{aligned}\frac{2 + 3i}{6 - 2i} &= \left(\frac{2 + 3i}{6 - 2i}\right)\left(\frac{6 + 2i}{6 + 2i}\right)\\ &= \frac{12 + 4i + 18i + 6i^2}{36 + 12i - 12i - 4i^2}\\ &= \frac{6 + 22i}{40} = \frac{3}{20} + \frac{11}{20}i\end{aligned}$$

۲۶۱۶۸ □

۲۶۱۶۹ **اغگن خاکے**

۲۶۱۷۰ مخلوط عدد $z = x + iy$ کا ہندسی اظہار درج ذیل دو طریقوں سے کیا جاتا ہے۔

۲۶۱۷۱ ا. اس کو مستوی xy میں نقطہ $P(x, y)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

۲۶۱۷۲ ب. اس کو مستوی xy میں مبدا سے نقطہ P تک سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

۲۶۱۷۳ دونوں اظہار میں محور x **حقیقی محور**[۱۱] اور محور y **خیالی محور**[۱۲] اور کہلاتے ہیں۔ دونوں اظہار $x + iy$ کے **اغگن خاکے**[۱۳] (شکل ج.۲) ہیں۔

۲۶۱۷۴ قطبی محدد میں x اور y کی قیمت درج ذیل ہو گی

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

---

[۱۱] realaxis
[۱۲] imaginaryaxis
[۱۳] Arganddiagrams

۲۶۱۷۵ لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{۱۰}$$

۲۶۱۷۶ ہم r کو مخلوط عدد $x + iy$ کی **مطلق قیمت**[۱۴] قرار دیتے ہیں جو مبدا سے نقطہ $P(x, y)$ تک سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ کی لمبائی ہے۔ مطلق قیمت کو عمودی
۲۶۱۷۷ خطوط $|\ |$ سے ظاہر کیا جاتا ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 = y^2}$$

۲۶۱۷۸ قطبی محدد r اور θ استعمال کرتے ہوئے، جس میں r غیر منفی ہو گا، درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$r = |x + iy|$$

۲۶۱۷۹ قطبی زاویہ θ کو z کی **دلیل**[۱۵] کہا جاتا ہے اور ہم "دلیل $z = \theta$" لکھتے ہیں۔ ظاہر ہے θ کے ساتھ 2π کا کوئی بھی عدد صحیح مضرب جمع کر کے
۲۶۱۸۰ متعلقہ متبادل زاویہ پیدا کیا جا سکتا ہے۔

۲۶۱۸۱ درج ذیل ایک مفید کلیہ ہے جو مخلوط عدد z، اس کا جوڑی دار $\bar{z}$، اور مطلق قیمت $|z|$ کا تعلق دیتا ہے۔

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

۲۶۱۸۲ کلیہ یولر، حاصل ضرب، اور حاصل تقسیم

۲۶۱۸۳ درج ذیل تماثل، جو **کلیہ یولر**[۱۶] کہلاتا ہے،

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

۲۶۱۸۴ کی مدد سے مساوات ۱۰ درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$z = re^{i\theta}$$

۲۶۱۸۵ اس سے مخلوط اعداد کے حاصل ضرب، حاصل تقسیم، طاقت، اور جذر کے درج ذیل قواعد پیدا ہوتے ہیں۔ اس سے $e^{i\theta}$ کے انگن خا کے بھی حاصل ہوتے
۲۶۱۸۶ ہیں۔ مساوات ۱۰ میں $r = 1$ لینے سے $\cos\theta + i\sin\theta$ ملتا ہے لہٰذا ہم کہتے ہیں $e^{i\theta}$ کو اکائی سمتیہ ظاہر کرتا ہے جو مثبت محور x کے ساتھ زاویہ
۲۶۱۸۷ θ بناتا ہے (شکل ج.۳)۔

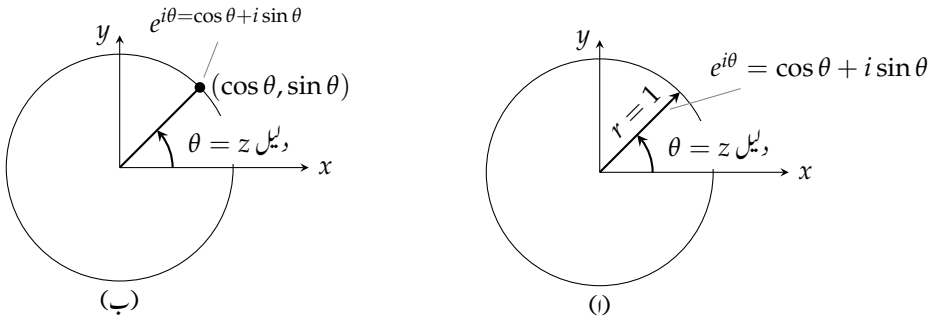
۲۶۱۸۸ حاصل ضرب

۲۶۱۸۹ دو مخلوط اعداد کو ضرب کرنے کے لئے ان کی مطلق قیمتوں کو آپس میں ضرب کیا جاتا ہے جبکہ ان کے زاویوں کو آپس میں جمع کیا جاتا ہے۔ ہم دو مخلوط اعداد:

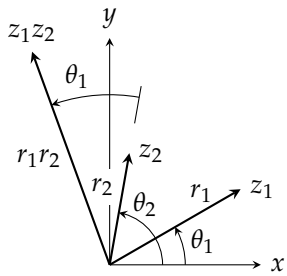
$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2} \tag{۱۱}$$

---

[۱۴] absolutevalue
[۱۵] argument
[۱۶] Euler'sformula



شکل ج.۳: اٹگن خاکہ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ کو بطور (ا) سمتیہ، اور (ب) ایک نقطہ ظاہر کرتا ہے۔



شکل ج.۴: مخلوط اعداد z_1 اور z_2 ضرب دینے سے $|z_1z_2| = r_1 \cdot r_2$ اور (z_1z_2) دلیل $= \theta_1 + \theta_2$ حاصل ہوگا۔

۲۶۱۹۰ لیتے ہیں لہٰذا

$$|z_1| = r_1, \quad z_1 \text{ دلیل} = \theta_1; \qquad |z_2| = r_2, \quad z_2 \text{ دلیل} = \theta_2$$

۲۶۱۹۱ ہوگا۔ یوں

$$z_1z_2 = r_1e^{i\theta_1} \cdot r_2e^{i\theta_2} = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

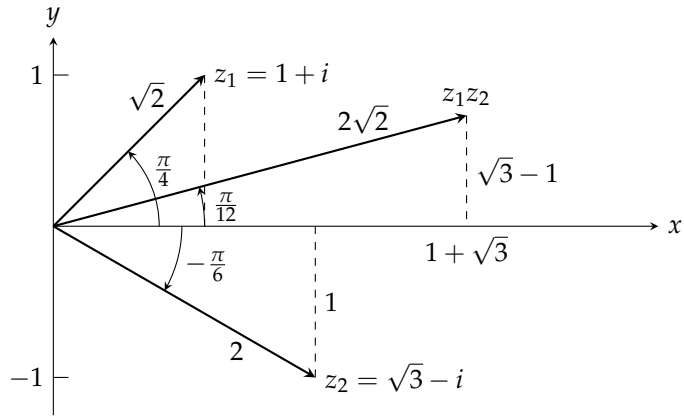
۲۶۱۹۲ لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} |z_1z_2| &= r_1r_2 = |z_1| \cdot |z_2| \\ (z_1z_2)\text{ دلیل} &= \theta_1 + \theta_2 = z_1 \text{ دلیل} + z_2 \text{ دلیل} \end{aligned} \tag{۱۲}$$

۲۶۱۹۳ یوں دو مخلوط اعداد کا حاصل ضرب ایسے سمتیہ سے ظاہر ہوگا جس کی لمبائی مخلوط اعداد کی مطلق قیمتوں کا حاصل ضرب اور دلیل اعداد کی دلائل کا مجموعہ (شکل
۲۶۱۹۴ ج.۴) ہو۔ مزید سمتیہ کو $e^{i\theta}$ سے ضرب دینا سمتیہ کو خلاف گھڑی زاویہ θ گھمانے کے مترادف ہے۔ سمتیہ کو i سے ضرب دینا خلاف گھڑی 90° گھماتا
۲۶۱۹۵ ہے، -1 سے ضرب 180°، اور $-i$ سے ضرب 270° خلاف گھڑی گھماتا ہے، وغیرہ۔

۲۶۱۹۶ مثال ج.۲: فرض کریں $z_1 = 1 + i$ اور $z_2 = \sqrt{3} - i$ ہیں۔ ہمیں ان کے اٹگن خاکوں (شکل ج.۵) سے مطلق قیمتیں اور دلائل کی
۲۶۱۹۷ قیمتیں دیکھ کر درج لکھتے ہیں۔

$$z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \quad z_2 = 2e^{-i\pi/6}$$



شکل ج.۵: دو مخلوط اعداد آپس میں ضرب کرنے کے لئے ان کی مطلق قیمتوں کو آپس میں ضرب کریں اور ان کے دلائل آپس میں جمع کریں۔

۲۶۱۹۸ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= 2\sqrt{2} e^{\left(\frac{i\pi}{4} - \frac{i\pi}{6}\right)} = 2\sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{12}} \\ &= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \approx 2.73 + 0.73i \end{aligned}$$

۲۶۱۹۹ □

۲۶۲۰۰ حاصل تقسیم

۲۶۲۰۱ فرض کریں مساوات ۱۱ میں $r_2 \neq 0$ ہے۔ تب

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

۲۶۲۰۲ لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{اور} \quad \left(\frac{z_1}{z_2}\right) \text{دلیل} = \theta_1 - \theta_2 = z_1 \text{دلیل} - z_2 \text{دلیل}$$

۲۶۲۰۳ یعنی ہم لمبائیاں تقسیم اور زاویے منفی کرتے ہیں۔

۲۶۲۰۴ مثال ج.۳: گزشتہ مثال کی طرح یہاں بھی دو مخلوط اعداد $z_1 = 1 + i$ اور $z_2 = \sqrt{3} - i$ ہیں۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{-i\pi/6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{5\pi i/12} \approx 0.707\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$$
$$\approx 0.183 + 0.\overline{683}i$$

۲۶۲۰۵ □

۲۶۲۰۶ **طاقت**

۲۶۲۰۷ اگر n مثبت عدد صحیح ہو، ہم مساوات ۱۲ استعمال کر کے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$z^n = z \cdot z \cdots z, \quad n \text{ اجزائے ضربی}$$

۲۶۲۰۸ اب $z = re^{i\theta}$ کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{i(\theta+\theta+\cdots+\theta)}, \quad n \text{ اجزائے ضربی}$$
$$= r^n e^{in\theta} \tag{۱۳}$$

۲۶۲۰۹ لمبائی $r = |z|$ کی n ویں طاقت لی جاتی ہے اور زاویہ $\theta =$ دلیل z کو n سے ضرب دیا جاتا ہے۔

۲۶۲۱۰ مساوات ۱۳ میں $r = 1$ لینے سے **مسئلہ ڈی موے ور**[۱۷] حاصل ہوتا ہے۔

۲۶۲۱۱ **مسئلہ ڈی موے ور**

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{۱۴}$$

۲۶۲۱۲ ڈی موے ور کی مساوات (مساوات ۱۴) کا بایاں ہاتھ الکراجی کے مسئلہ ثنائی سے کھولنے کے بعد مختصر روپ $a + ib$ حاصل کر کے ہمیں $\cos\theta$ اور
۲۶۲۱۳ $\sin\theta$ کے درجہ n روپ میں $\cos n\theta$ اور $\sin n\theta$ کی مساوات حاصل ہوتی ہیں۔

۲۶۲۱۴ مثال ج.۴: اگر مساوات ۱۴ میں $n = 3$ ہو تب درج ذیل ہوگا۔

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

۲۶۲۱۵ مساوات کے بائیں ہاتھ کو الکراجی کے مسئلہ ثنائی سے کھول کر درج ذیل ملتا ہے۔

$$\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$$

۲۶۲۱۶ حقیقی حصہ لازماً $\cos 3\theta$ کے برابر اور خیالی حصہ لازماً $\sin 3\theta$ کے برابر ہوگا۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

۲۶۲۱۷ □

---

[۱۷] DeMoivre'theorem

جذر

اگر مخلوط عدد $z = r^{i\theta}$ غیر صفر ہو اور n مثبت عدد صحیح ہو، تب ٹھیک ایسے n منفرد مخلوط اعداد w_0 ، w_1 ، $\cdots$ ، w_{n-1} پائے جاتے ہیں جو z کے n ویں جذر ہوں گے۔ اس کی وجہ جاننے کے لئے، $w = \rho e^{i\alpha}$ کو $z = re^{i\theta}$ کا n واں جذر مان لیں، تاکہ

$$w^n = z$$

یعنی درج ذیل ہو۔

$$\rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}$$

تب r کا حقیقی، مثبت n واں جذر درج ذیل ہو گا۔

$$\rho = \sqrt[n]{r}$$

زاویے کی بات کرتے ہوئے، اگرچہ ہم یہ نہیں کہہ سکتے کہ $n\alpha$ اور θ ایک دوسرے کے برابر ہوں گے، ہم یہ ضرور کہہ سکتے ہیں کہ ان میں فرق 2π کا مضرب ہو گا۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$n\alpha = \theta + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

اس طرح

$$\alpha = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$$

ہو گا اور $z = re^{i\theta}$ کے تمام n ویں جذر درج ذیل ہوں گے۔

$$\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n})}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{۱۵}$$

آپ کو ایسا نظر آئے گا کہ k کی لامتناہی قیمتوں کی وجہ سے لامتناہی جذر ہوں گے، تاہم مساوات ۱۵ ہمیں $k = n + m$ کے لئے وہی جواب دیتی ہے جو وہ $k = m$ دیتی ہے۔ یوں z کی تمام n منفرد جذر معلوم کرنے کی خاطر ہمیں k کی صرف ابتدائی یکے بعد دیگرے n قیمتیں درکار ہوں گی۔

اپنی آسانی کی خاطر ہم درج ذیل لیتے ہیں۔

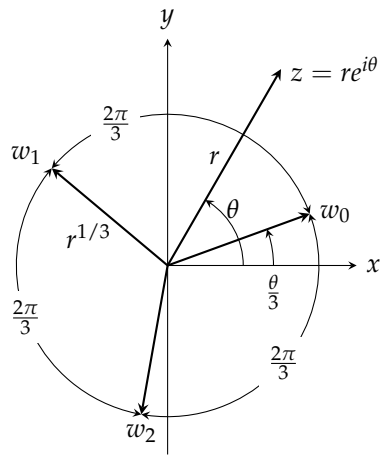
$$k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

مخلوط عدد $re^{i\theta}$ کے تمام n جذر، مبدا پر مرکوز ایسے دائرے پر پائے جاتے ہیں جس کا رداس r کا n ویں جذر ہے۔ ان میں ایک کی دلیل $\alpha = \theta/n$ کے برابر ہے۔ باقی جذر دائرے پر ایک دوسرے سے یکساں فاصلے پر پائے جاتے ہیں جہاں دو قریبی جذر کے بیچ زاویہ $2\pi/n$ ہو گا۔ شکل ج.۶ میں مخلوط عدد $z = re^{i\theta}$ کے کعبی جذر w_0 ، w_1 ، اور w_2 کے محل وقوع دکھائے گئے ہیں۔

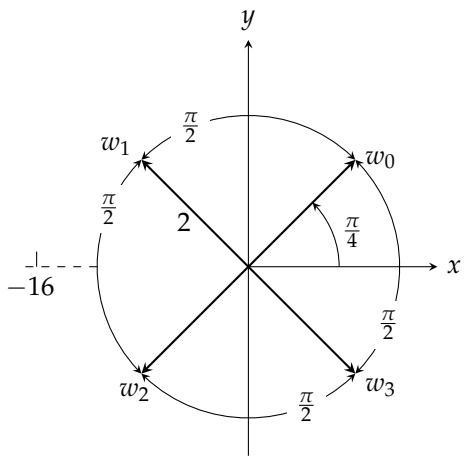
مثال ج.۵: عدد -16 کی تمام چوتھی جذریں تلاش کریں۔

حل: سب سے پہلے عدد -16 کا انگن خاکہ (شکل ج.۷) بنا کر اس کا قطبی روپ $re^{i\theta}$ تلاش کرتے ہیں۔ یہاں $z = -16$ ، $r = +16$ ، اور $\theta = \pi$ ہیں۔ عدد $16e^{i\pi}$ کا ایک چوتھواں جذر $2e^{i\pi/4}$ ہے۔ باقی جذر جاننے کے لئے ہم پہلے جذر کی دلیل کے ساتھ یکے بعد دیگرے $2\pi/4 = \pi/2$ جمع کرتے ہیں۔ یوں

$$\sqrt[4]{16e^{i\pi}} = 2e^{i(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})}$$



شکل ج.۶: مخلوط عدد $z = re^{i\theta}$ کے تین کعبی جذر۔



شکل ج.۷: عدد -16 کے چار چوتھویں جذر۔

۲۶۲۳۷ ہو گا لہٰذا چار جذر درج ذیل ہوں گے۔

$$
\begin{aligned}
w_0 &= 2\left[\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(1+i)\\
w_1 &= 2\left[\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(-1+i)\\
w_2 &= 2\left[\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(-1-i)\\
w_3 &= 2\left[\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right] = \sqrt{2}(1-i)
\end{aligned}
$$

۲۶۲۳۸ □

۲۶۲۳۹ الجبرا کا بنیادی مسئلہ

۲۶۲۴۰ ہم کہہ سکتے ہیں کہ $\sqrt{-1}$ کی ایجاد نہایت مفید ثابت ہوئی اور اس کے ذریعے سے جو عددی نظام حاصل ہوا وہ حقیقی عددی نظام سے بہت بہتر ہے؛ تاہم یہ
۲۶۲۴۱ جاننا ضروری ہے کہ بہتر سے بہتر عددی نظام کی ایجاد کا سلسلہ کب ختم ہو گا۔ کیا ہمیں مزید نظام ایجاد کرنے ہوں گے جن میں $\sqrt[4]{-1}$ ، $\sqrt[6]{-1}$ ، وغیرہ
۲۶۲۴۲ استعمال ہوں گے؟ یہاں تک پہنچنے کے بعد آپ پر واضح ہو چکا ہو گا کہ ایسا کرنے کی ضرورت نہیں چونکہ ان اعداد کو ہم مخلوط عددی نظام میں $a + ib$ کے
۲۶۲۴۳ روپ میں لکھ سکتے ہیں۔ درحقیقت، الجبرا کا بنیادی مسئلہ کہتا ہے کہ مخلوط اعداد متعارف کرنے کے بعد ہر کثیر رکنی کو خطی اجزائے ضربی کا حاصل ضرب لکھنے کے
۲۶۲۴۴ لئے ہمارے پاس کافی اعداد موجود ہیں، لہٰذا ہر ممکنہ کثیر رکنی مساوات حل کرنے کے لئے ہمارے پاس کافی اعداد موجود ہیں۔

۲۶۲۴۵ **الجبرا کا بنیادی مسئلہ** درج ذیل روپ کی ہر مساوات

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \cdots + a_{n-1}z + a_0 = 0$$

۲۶۲۴۶ جس میں عددی سر a_0 ، a_1 ، ۔ ۔ ۔ ، a_n مخلوط اعداد ہوں، جس کا درجہ n ایک کے برابر یا اس سے بڑا ہو، اور جس کا عددی سر a_0 غیر صفر ہو، کے
۲۶۲۴۷ ٹھیک n جذر مخلوط عددی نظام میں پائے جاتے ہیں، بشرطیکہ ہر وہ جذر جس کا تعدد m ہو m جذر شمار ہوں۔

۲۶۲۴۸

۲۶۲۴۹ اس مسئلے کا ثبوت مخلوط متغیر کے تفاعلات کے نظریہ کی تقریباً ہر کتاب میں دیکھا جا سکتا ہے۔

۲۶۲۵۰ سوالات

۲۶۲۵۱

۲۶۲۵۲ مخلوط اعداد پر عملیات

۲۶۲۵۳ سوال ج.۱: کمپیوٹر مخلوط اعداد کیسے ضرب کرتا ہے۔
۲۶۲۵۴ درج ذیل کے لئے $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$ تلاش کریں۔

۲۶۲۵۵ ا. $(2,3)\cdot(4,-2)$ ۲۶۲۵۶ ب. $(2,-1)\cdot(-2,3)$ ۲۶۲۵۷ ج. $(-1,-2)\cdot(2,1)$

۲۶۲۵۸ (مخلوط اعداد کا حاصل ضرب کمپیوٹر اس طرح حاصل کرتا ہے۔)

۲۶۲۵۹ سوال ج.۲: درج ذیل حل کر کے حقیقی اعداد x اور y تلاش کریں۔

۲۶۲۶۰ ا. $(3+4i)^2-2(x-iy)=x+iy$

۲۶۲۶۱ ب. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\frac{1}{x+iy}=1+i$

۲۶۲۶۲ ج. $(3-2i)(x+iy)=2(x-2iy)+2i-1$

۲۶۲۶۳

۲۶۲۶۴ ترسیم اور ہندسہ

۲۶۲۶۵ سوال ج.۳: درج ذیل مخلوط اعداد میں کتنوں کو ہندسہ کے ذریعہ $z=x+iy$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ خاکے کھینچیں۔

۲۶۲۶۶ ا. $\bar{z}$ ۲۶۲۶۸ ج. $-z$

۲۶۲۶۷ ب. $\overline{(-z)}$ ۲۶۲۶۹ د. $\frac{1}{z}$

۲۶۲۷۰ سوال ج.۴: دکھائیں کہ اگلن خاکے میں دو نقطوں z_1 اور z_2 کے بیچ فاصلہ $|z_1-z_2|$ ہوگا۔

۲۶۲۷۱

۲۶۲۷۲ سوال ج.۵ تا ج.۱۰ میں شرائط پر پورا اترنے والے نقاط $z=x+iy$ ترسیم کریں۔

۲۶۲۷۳ سوال ج.۵:

۲۶۲۷۴ ا. $|z|=2$ ۲۶۲۷۵ ب. $|z|<2$ ۲۶۲۷۶ ج. $|z|>2$

۲۶۲۷۷ سوال ج.۶: $|z-1|=2$

۲۶۲۷۸ سوال ج.۷: $|z+1|=1$

۲۶۲۷۹ سوال ج.۸: $|z+1|=|z-1|$

۲۶۲۸۰ سوال ج.۹: $|z+i|=|z-1|$

۲۶۲۸۱ سوال ج.۱۰: $|z+1|\geq|z|$

۲۶۲۸۲

۲۶۲۸۳ سوال ج.۱۱ تا ج.۱۴ میں مخلوط اعداد کو $re^{i\theta}$ کے روپ میں لکھیں، جہاں $r\geq 0$ اور $-\pi<\theta<\pi$ ہے۔ ہر عدد کا اگلن خاکہ بنائیں۔

سوال ج.۱۱: $(1+\sqrt{-3})^2$

سوال ج.۱۲: $\dfrac{1+i}{1-i}$

سوال ج.۱۳: $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$

سوال ج.۱۴: $(2+3i)(1-2i)$

نظریہ اور مثالیں

سوال ج.۱۵: انگلن خاکے کی مدد سے دکھائیں کہ سمتیات جمع کرنے کا متوازی الاضلاع قاعدہ ہی مخلوط اعداد جمع کرنے کا قاعدہ ہے۔

سوال ج.۱۶: دکھائیں کہ دو مخلوط اعداد z_1 اور z_2 کے مجموعہ (حاصل ضرب، یا حاصل تقسیم) کا جوڑی دار وہی ہو گا جو ان اعداد کے جوڑی دار کا مجموعہ (حاصل ضرب، یا حاصل تقسیم) ہو گا۔

سوال ج.۱۷: حقیقی عددی سر والے کثیر رکنیوں کے مخلوط جذر، مخلوط جوڑی دار جوڑیوں میں پائے جاتے ہیں۔

ا. اگر درج ذیل کثیر رکنی کے عددی سر a_0 ، ۰ ۰ ۰ ، a_n حقیقی ہوں تب سوال ج.۱۶ کے نتیجہ کو وسعت دیتے ہوئے دکھائیں کہ $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ ہو گا۔

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_0$$

ب. اگر کثیر رکنی $f(z)$ کے عددی سر (جزو الف کی طرح) حقیقی ہوں اور مساوات $f(z) = 0$ کا ایک جذر z ہو، دکھائیں کہ $\bar{z}$ بھی اس مساوات کا جذر ہو گا۔ (اشارہ: $f(z) = u + iv = 0$ لیں؛ یوں u اور v دونوں صفر ہوں گے؛ اب اس حقیقت کو بروئے کار لائیں کہ $f(\bar{z}) = \overline{f(z)} = u - iv$ ہو گا۔)

سوال ج.۱۸: دکھائیں کہ $|\bar{z}| = |z|$ ہو گا۔

سوال ج.۱۹: اگر z اور $\bar{z}$ برابر ہوں، مخلوط مستوی میں نقطہ z کے مقام کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

سوال ج.۲۰: مخلوط عدد z کے حقیقی حصے کو $\mathrm{Re}(z)$ اور خیالی حصے کو $\mathrm{Im}(z)$ سے ظاہر کرتے ہوئے دکھائیں کہ درج ذیل تعلقات کو مخلوط اعداد z_1 ، z_2 ، اور z_3 مطمئن کرتے ہیں۔

ا. $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$

ب. $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

ج. $|\mathrm{Re}(z)| \le |z|$

د. $|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1 \bar{z}_2)$

ھ. $|z_1 + z_1| \le |z_1| + |z_2|$

مسئلہ ڈی موے ور استعمال کر کے سوال ج.۲۱ اور سوال ج.۲۲ میں تکونیاتی تفاعلات کا اظہار $\cos\theta$ اور $\sin\theta$ کے روپ میں کریں۔

سوال ج.۲۱: $\cos 4\theta$

سوال ج.۲۲: $\sin 4\theta$

جذر

سوال ج.۲۳: عدد 1 کے تین کعبی جذر تلاش کریں۔

سوال ج.۲۴: عدد i کے دو جذر المربع تلاش کریں۔

سوال ج.۲۵: عدد $-8i$ کے تین کعبی جذر تلاش کریں۔

سوال ج.۲۶: عدد 64 کے چھ چھٹے جذر تلاش کریں۔

سوال ج.۲۷: مساوات $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ کے چار حل تلاش کریں۔

سوال ج.۲۸: مساوات $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$ کے چھ حل تلاش کریں۔

سوال ج.۲۹: مساوات $x^4 + 4x^2 + 16 = 0$ کے تمام حل تلاش کریں۔

سوال ج.۳۰: مساوات $x^4 + 1 = 0$ حل کریں۔

ضمیمہ د

سمسن کا ایک تہائی کا قاعدہ

تکمل $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ کی تخمین کا سمسن قاعدہ f کی ترسیم کو مکافی قوسوں سے تخمین دینے پر منحصر ہے۔

شکل د.۱ میں مکافی کے نیچے سایہ دار خطے کا رقبہ درج ذیل ہے۔

$$\text{رقبہ} = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

اس کلیہ کو **سمسن کا ایک تہائی کا قاعدہ**[1] کہتے ہیں۔

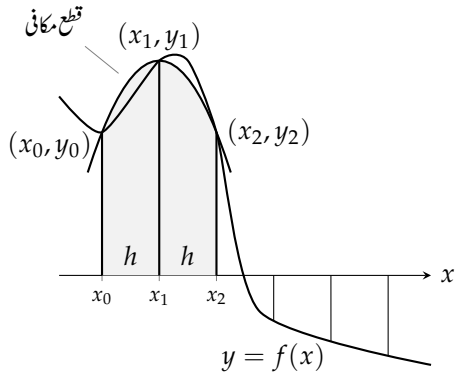
آئیں یہ کلیہ اخذ کریں۔ الجبرا سادہ رکھنے کی غرض سے شکل د.۲ میں پیش محددی نظام استعمال کیا جائے گا۔ مکافی کے نیچے رقبہ محور y کے مقام پر منحصر نہیں تاہم اس محور کا عمودی پیمانہ برقرار رکھنا ضروری ہے۔ مکافی کی مساوات $y = Ax^2 + Bx + C$ روپ رکھتی ہے لہٰذا $x = -h$ تا $x = h$ اس کے نیچے رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\text{رقبہ} = \int_{-h}^{h} (Ax^2 + Bx + C)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + Cx\right]_{-h}^{h} \\
&= \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch \\
&= \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C)
\end{aligned}$$

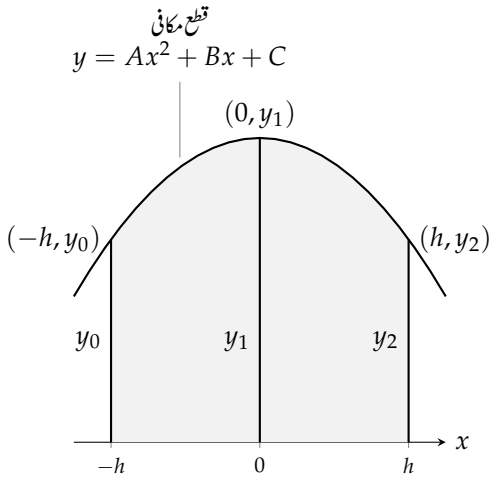
منحنی نقاط $(-h, y_0)$ ، $0, y_1$ ، اور (h, y_2) سے بھی گزرتی ہے لہٰذا درج ذیل بھی ہو گا۔

$$y_0 = Ah^2 - Bh + C, \quad y_1 = C, \quad y_2 = Ah^2 + Bh + C$$

[1] Simson'sone-thirdrule



شکل د.۱: سمسن کا قاعدہ منحنی کے چھوٹے چھوٹے قطعات کو قطع مکافی سے تخمین دیتا ہے۔



شکل د.۲: سایہ دار رقبہ تلاش کرنے کے لئے $-h$ تا h تکمل لے کر $\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$ حاصل ہو گا۔

۲۹۳۳۳ ان مساوات سے ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} C &= y_1 \\ Ah^2 - Bh &= y_0 - y_1 \\ Ah^2 + Bh &= y_2 - y_1 \\ 2Ah^2 &= y_0 + y_2 - 2y_1 \end{aligned}$$

۲۹۳۳۴ رقبے کی مساوات میں C اور $2Ah^2$ کی قیمتیں ڈال کر ذیل حاصل ہو گا۔

$$\text{رقبہ} = \frac{h}{3}(2Ah^2 + 6C) = \frac{h}{3}((y_0 + y_2 - 2y_1) + 6y_1) = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

ضمیمہ ھ

کوشی کا مسئلہ اوسط قیمت اور قاعدہ لھوپیٹال ے کا پائیدار روپ

اس ضمیمہ میں قاعدہ لھوپیٹال (حصہ ۷.۶، مسئلہ ۷.۳) کے پائیدار روپ کی محدود حد صورت کا ثبوت پیش کیا جاتا ہے۔

قاعدہ لھوپیٹال (پائیدار روپ)

فرض کریں کھلے وقفہ (a, b) پر، جس میں نقطہ x_0 پایا جاتا ہے، تفاعلات f اور g دونوں قابل تفرق ہیں اور درج ذیل ہے۔

$$f(x_0) = g(x_0) = 0$$

مزید فرض کریں پورے (a, b) میں، ممکنہ طور پر ماسوائے نقطہ x_0 کے، ہر نقطے پر $g' \neq 0$ ہے۔ تب ذیل ہو گا، بشرطیکہ دائیں ہاتھ پر حد موجود ہو۔

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{۱}$$

قاعدہ لھوپیٹال کے پائیدار روپ کا ثبوت کوشی کے مسئلہ اوسط قیمت پر منحصر ہے، جو ایسا اوسط قیمت مسئلہ ہے جو ایک کے بجائے دو تفاعلات کے متعلق ہے۔ ہم مسئلہ کوشی ثابت کرنے کے بعد دکھاتے ہیں اس سے قاعدہ لھوپیٹال کیسے اخذ ہوتا ہے۔

کوشی کا اوسط قیمت مسئلہ

فرض کریں $[a, b]$ پر تفاعلات f اور g استراری اور پورے (a, b) پر قابل تفرق ہیں، اور پورے (a, b) پر $g' \neq 0$ ہے۔ تب (a, b) میں ایسا عدد c موجود ہو گا جس پر درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \tag{۲}$$

اس میں $g(x) = x$ رکھنے سے مسئلہ اوسط قیمت کا سادہ روپ (حصہ ۴.۲، مسئلہ ۴.۴) حاصل ہو گا۔

کوشی کے اوسط قیمت مسئلے کا ثبوت

ہم حصہ ۴.۲ کے مسئلہ اوسط قیمت کا اطلاق دو مرتبہ کرتے ہیں۔اس کو استعمال کر کے ہم پہلے دکھاتے ہیں کہ $g(a) \neq g(b)$ ہو گا۔اگر $g(b)$ اور $g(a)$ برابر ہوں تب a اور b کے بیچ کسی c پر مسئلہ اوسط قیمت درج ذیل دیتا

$$g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 0$$

تاہم (a, b) میں $g'(x) \neq 0$ ہے لہٰذا ایسا ممکن نہیں۔

اس کے بعد مسئلہ اوسط قیمت کا اطلاق ہم ذیل تفاعل پر کرتے ہیں۔

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g(x) - g(a)]$$

یہ تفاعل وہاں استراری اور قابل تفرق ہے جہاں f اور g استراری اور قابل تفرق ہیں،اور $F(b) = F(a) = 0$ ہے۔لہٰذا a اور b کے بیچ ایسا عدد c موجود ہو گا جس پر $F'(c) = 0$ ہو گا۔تفاعلات f اور g کی صورت میں یہ حقیقت درج ذیل لکھی جا سکتی ہے

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}[g'(c)] = 0$$

جس سے ذیل لکھا جا سکتا ہے جو مساوات ۲ ہے۔

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

□

قاعدہ لھوپیٹال کے پائیدار روپ کا ثبوت

ہم اول $x \to x_0^+$ کی صورت میں مساوات ا کی تصدیق کرتے ہیں۔یہی طریقہ $x \to x_0^-$ کے لئے بھی استعمال ہو گا،اور دونوں کو ملا کر نتیجہ حاصل ہو گا۔

فرض کریں x_0 کے دائیں جانب x پایا جاتا ہے۔یوں $g'(x) \neq 0$ ہو گا لہٰذا x_0 سے لیکر x تک کے بند وقفے پر کوشی کے مسئلہ اوسط قیمت کا اطلاق ہو گا۔اس سے x_0 اور x کے بیچ ایسا عدد c حاصل ہو گا جس پر درج ذیل مطمئن ہو گا،

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

تاہم $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

جیسے جیسے x کی قیمت x_0 کی قیمت کے قریب پہنچتی ہے، چونکہ c خود x اور x_0 کے بیچ پایا جاتا ہے لہٰذا c کی قیمت x_0 کو پہنچے گی۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to x_0^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

یوں قاعدہ لھوپیٹال کا ثبوت اس صورت کے لئے مکمل ہوا جب x کی قیمت x_0 کی قیمت تک اوپر سے پہنچتی ہو۔ جہاں x کی قیمت x_0 کی قیمت تک نیچے سے پہنچتی ہو وہاں ہم $x < x_0$ لے کر کوشی کے اوسط قیمت مسئلہ کا اطلاق وقفہ $[x, x_0]$ پر کرتے ہوئے ثبوت حاصل کرتے ہیں۔

$\square$

ضمیمہ و

کثیر استعمال حدود

یہ ضمیمہ حصہ ۹.۲ کے جدول ۹.۲ میں پیش حد ۴تا۶ کی تصدیق کرتا ہے۔

ثبوت: **حد ۴: اگر $|x| < 1$ ہو تب $\lim_{x^n} x^n = 0$ ہو گا۔** ہم نے دکھانا ہو گا کہ ہر $\epsilon > 0$ کا مطابق اتنا بڑا عدد صحیح N موجود ہے جس سے بڑے تمام اعداد n کے لئے $|x^n| < \epsilon$ ہو گا۔ چونکہ $|x| < 1$ کی صورت میں $\epsilon^{1/n} \to 1$ ہے، ایسا عدد صحیح موجود ہو گا جس کے لئے $\epsilon^{1/N} > |x|$ ہو۔ دوسرے الفاظ میں درج ذیل ہو گا۔

$$|x^N| = |x|^N < \epsilon \tag{۱}$$

یہ وہ عدد صحیح ہے جس کی ہمیں تلاش ہے چونکہ $|x| < 1$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$|x^n| < |x^N| \quad \text{تمام } n > N \text{ کے لئے} \tag{۲}$$

مساوات ۱ اور مساوات ۲ ملا کر، تمام $n > N$ کے لئے $|x^n| < \epsilon$ حاصل ہو گا۔ یوں ثبوت مکمل ہوا۔

$\square$

ثبوت: **حد ۵: کسی بھی عدد x کے لئے $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$ ہو گا۔**

درج ذیل فرض کرتے ہوئے

$$a_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\ln a_n = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

۲۳۸۰ ال ہوس پٹل کا قاعدہ استعمال کرتے ہوئے، ہم n کے لحاظ سے تفرق لے کر حد تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x/n)}{1/n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{1+x/n}\right)\cdot\left(-\frac{x}{n^2}\right)}{-1/n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+x/n} = x\end{aligned}$$

۲۳۸۱ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\ln a_n \to x$$

۲۳۸۲ حصہ 11.1 کا مسئلہ 4 بروئے کار لاتے ہوئے اور $f(x) = e^x$ لے کر درج ذیل اخذ ہو گا۔

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = a_n = e^{\ln a_n} \to e^x$$

۲۳۸۳ □

۲۳۸۴ ثبوت: **کسی بھی عدد x کے لئے $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$ ہو گا۔**

۲۳۸۵ درج ذیل جانتے ہوئے

$$-\frac{|x|^n}{n!} \le \frac{x^n}{n!} \le \frac{|x|^n}{n!}$$

۲۳۸۶ ہمیں صرف اتنا دکھانا ہے کہ $|x|^n/n! \to 0$ ہو گا۔ اس کے بعد ہم مسئلہ بیچ برائے ترتیبات (حصہ 11.1 میں مسئلہ 2) استعمال کر کے $x^n/n! = 0$

۲۳۸۷ اخذ کر سکتے ہیں۔

۲۳۸۸ یہ دکھانے کی خاطر کہ $|x|^n/n! \to 0$ ہے، سب سے پہلے ایسا عدد صحیح $M > |x|$ منتخب کرنا ہو گا جو $(|x|/M) < 1$ دے۔ یوں حد ۴

۲۳۸۹ جو ہم ثابت کر چکے کے تحت $(|x|/M)^n \to 0$ ہو گا۔ لہٰذا $n > M$ قیمتوں تک اپنی توجہ محدود رکھ کر ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{|x|^n}{n!} &= \frac{|x|^n}{1\cdot 2\cdots M\cdot \underbrace{(M+1)(M+2)\cdot n}_{\text{جزو ضربی } (n-M)}}\\ &\le \frac{|x|^n}{M!M^{n-M}} = \frac{|x|^n M^M}{M!M^n} = \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n\end{aligned}$$

۲۳۹۰ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$0 \le \frac{|x|^n}{n!} \le \frac{M^M}{M!}\left(\frac{|x|}{M}\right)^n$$

۲۳۹۱ اب جیسے جیسے n کی قیمت بڑھتی ہے مستقل $M^M/M!$ کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔ یوں مسئلہ بیچ کے تحت $(|x|/M)^n \to 0$ کی وجہ سے

۲۳۹۲ $|x|^n/n! \to 0$ ہو گا۔

۲۳۹۳ □

ضمیمہ ز

جزئیتی تقسیم کا قانون برائے سمتی ضرب

اس ضمیمہ میں درج ذیل جزئیتی تقسیم کا قانون (حصہ ۱۱.۴، مساوات ۶) ثابت کیا جائے گا۔

$$\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{C} \tag{1}$$

ثبوت

مساوات اثابت کرنے کی خاطر ہم $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ کا خاکہ نئے انداز سے بناتے ہیں۔ ہم مشترک نقطہ O سے $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{B}$ کھینچ کر مستوی M، نقطہ O پر $\boldsymbol{A}$ کو قائمہ، بناتے ہیں (شکل ز.۱)۔ ہم M پر $\boldsymbol{B}$ کا قائمہ تظلیل لیتے ہیں جو سمتیہ $\boldsymbol{B}'$ ہو گا، اور جس کی لمبائی $|\boldsymbol{B}| \sin\theta$ ہو گی۔ ہم $\boldsymbol{B}'$ کو $\boldsymbol{A}$ کے گرد مثبت سمت میں 90° گھما کر سمتیہ $\boldsymbol{B}''$ حاصل کرتے ہیں۔ آخر میں ہم $\boldsymbol{B}''$ کو $\boldsymbol{A}$ کی لمبائی سے ضرب دیتے ہیں۔ یوں حاصل سمتیہ $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}''$ درحقیقت $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ کے برابر ہو گا، چونکہ اس کی بناوٹ (شکل ز.۱) یوں کی گئی کہ $\boldsymbol{B}''$ کا رخ وہی ہو جو $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ کا رخ ہے اور ساتھ ہی درج ذیل بھی ہے۔

$$|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}''| = |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}'| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| \sin\theta = |\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}|$$

اب درج ذیل میں سے ہر ایک عمل ایسے مثلث پر کرنے سے، جس کا مستوی $\boldsymbol{A}$ کو عمودی نہ ہو، ایک نیا مثلث پیدا ہو گا۔ اگر ہم ایسے مثلث سے شروع کریں جس کے اضلاع $\boldsymbol{B}$ ، $\boldsymbol{C}$ ، اور $\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ ہوں (شکل ز.۲) اور یہ تین اقدام لاگو کریں تو یکے بعد دیگرے درج ذیل حاصل ہو گا۔

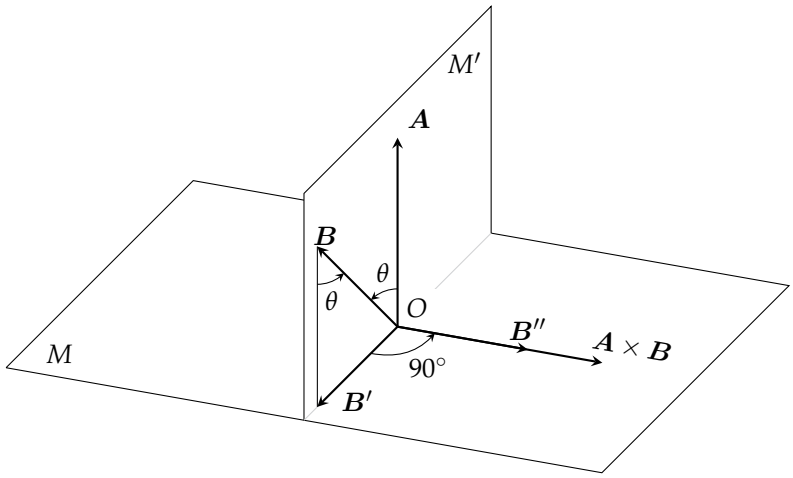
۱. ایک مثلث جس کے اضلاع $\boldsymbol{B}'$ ، $\boldsymbol{C}'$ ، اور $(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})'$ ہوں گے جہاں درج ذیل سمتی مساوات مطمئن ہو گی۔

$$\boldsymbol{B}' + \boldsymbol{C}' = (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})'$$

۲. ایک مثلث جس کے اضلاع $\boldsymbol{B}''$ ، $\boldsymbol{C}''$ ، اور $(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})''$ ہوں گے جہاں درج ذیل سمتی مساوات مطمئن ہو گی۔

$$\boldsymbol{B}'' + \boldsymbol{C}'' = (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})''$$

(جہاں سمتیات وہی ہیں جو شکل ز.۱ میں دکھائے گئے ہیں۔)



شکل ز.۱: $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}''$ ہوگا۔

۳۶۴۰۸ ۳. ایک مثلث جس کے اضلاع $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}''$ ، $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{C}''$ ،اور $|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})''$ ہوں گے جہاں درج ذیل سمتی مساوات مطمئن ہو گی۔

$$|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}''+|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{C}''=|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})'' \tag{۲}$$

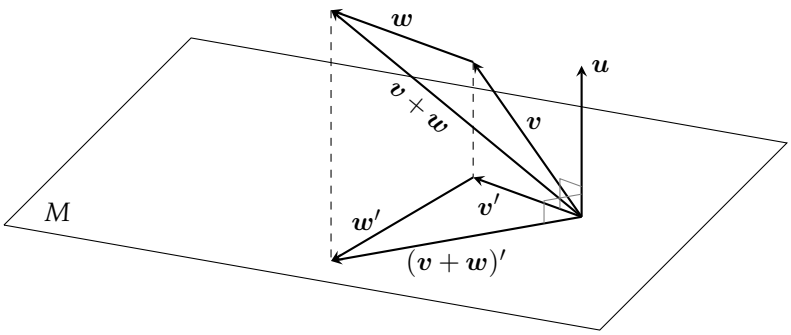
۳۶۴۰۹ اب $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}''=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ ، $|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{C}''=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$ ،اور $|\boldsymbol{A}|(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})''=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ ڈالنے سے

۳۶۴۱۰ مساوات ۲ درج ذیل دے گی

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$$

۳۶۴۱۱ جو وہ قانون ہے جس کا ثبوت درکار تھا۔

۳۶۴۱۲ □



شکل ز.۲: سمتیات $\boldsymbol{v}$ ، $\boldsymbol{w}$ ، $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ ،اور $\boldsymbol{u}$ کے عمودی مستوی پر ان کے تظلیل۔

ضمیمہ ح

مقاطع اور کریمر کا قاعدہ

اعداد کی مستطیل ترتیب:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

قالب[1] کہلاتا ہے۔اس قالب میں دو صف اور تین قطار ہیں لہٰذا ہم A کو ۲ با ۳ قالب یا ۲ ضرب ۳ قالب کہتے ہیں۔ایک m با n قالب میں m صف اور n قطار ہوں گے،اور قالب کی i ویں صف اور j ویں قطار میں موجود **رکن**[2] (عدد) a_{ij} سے ظاہر کیا جائے گا۔یوں درج ذیل قالب

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

کے ارکان درج ذیل لکھے جائیں گے۔

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2, \quad a_{12} = 1, \quad a_{13} = 3, \\ a_{21} &= 1, \quad a_{22} = 0, \quad a_{23} = -2 \end{aligned}$$

جس قالب میں صفوں اور قطاروں کی تعداد برابر ہو **مکعب قالب**[3] کہلاتا ہے۔مکعب قالب جس میں صفوں کی تعداد اور قطاروں کی تعداد n ہو n **رتبی قالب**[4] کہلاتا ہے۔

---

[1] matrix
[2] element
[3] squarematrix
[4] matrixofordern

ہر مکعب قالب A کے ساتھ ایک عدد وابستہ کیا جاتا ہے جو A کا **مقطع**[5] کہلاتا اور "مقطع A" یا $|a_{ij}|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (یہاں $|\ |$ کی علامت مطلق قیمت کو ظاہر نہیں کرتی)۔ مقطع کی قیمت قالب A کے ارکان سے درج ذیل عمل کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے۔ یک رتبی $n = 1$ قالب اور دو رتبی قالب $n = 2$ کے مقطع کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$\text{مقطع}\,[a] = a \tag{۱}$$

$$\text{مقطع}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{۲}$$

تین رتبی قالب کے مقطع کی تعریف درج ذیل ہے

$$\text{مقطع}\,A = \text{مقطع}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{array}{c}\text{روپ کے تمام } \pm a_{1i}a_{2j}a_{3k} \\ \text{علامت دار حاصل ضرب کا مجموعہ}\end{array} \tag{۳}$$

جہاں i ، j ، k سے مراد 1 ، 2 ، 3 کی کسی ترتیب سے مرتب اجتماع ہے۔ ایسے $3! = 6$ مرتب اجتماعات ہیں لہٰذا مجموعے میں چھ جزو ہوں گے۔ جب مرتب اجتماعات کا اشاریہ جفت ہو، علامت مثبت ہو گی اور جب طاق ہو علامت منفی ہو گی۔

تعریف: **مرتب اجتماع کا اشاریہ**

اعداد $1, 2, 3, \cdots, n$ کی دی گئی مرتب اجتماع کو $i_1, i_2, i_3, \cdots, i_n$ سے ظاہر کریں۔ اس نظم میں i_1 کے بعد آنے والے چند اعداد i_1 سے چھوٹے ہو سکتے ہیں۔ ایسے اعداد کی تعداد کو نظم میں i_1 سے متعلق **تعکیس کی تعداد**[6] کہتے ہیں۔ اسی طرح نظم میں تمام دیگر i سے متعلق تعکیس کی تعداد ہو گی، جو نظم میں اس مخصوص i کے بعد ان اعداد کی تعداد ہو گی جو اس مخصوص عدد سے چھوٹے ہوں۔ تمام اشاریوں کے تعکیس کی تعداد کا مجموعہ مرتب اجتماع کا **اشاریہ**[7] کہلاتا ہے۔

□

مثال ح.۱: عدد $n = 5$ کی ایک مرتب اجتماع ذیل ہے

$$5 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 2$$

جس میں پہلا رکن 5 ہے جس کے بعد آنے والے چاروں ارکان اس سے چھوٹے ہیں لہٰذا 5 سے متعلق تعکیس کی تعداد 4 ہے؛ دوسرا رکن 3 ہے اور اس کے بعد آنے والے دو ارکان اس سے چھوٹے ہیں لہٰذا 3 سے متعلق تعکیس کی تعداد 2 ہے؛ اگلا رکن 1 ہے جس کے بعد ایسا کوئی رکن نہیں آتا جو ایک سے چھوٹا ہو لہٰذا 1 سے متعلق تعکیس کی تعداد 0 ہے؛ اگلے دونوں ارکان سے متعلق انفرادی تعکیس کی تعداد 0 ہے؛ یوں اشاریہ $4 + 2 = 6$ ہو گا۔ □

---

[5] determinant
[6] numberofinversions
[7] index

۲۶۴۳۷ اگلا جدول 1, 2, 3 کی مرتب اجتماعات، ہر مرتب اجتماع کا اشاریہ، اور مساوات ۳ کے مقطع میں علامت دار حاصل ضرب دیتا ہے۔

(۴)

علامت دار حاصل ضرب	اشاریہ	مرتب اجتماع		
$+a_{11}a_{22}a_{33}$	0	1	2	3
$-a_{11}a_{23}a_{32}$	1	1	3	2
$-a_{12}a_{21}a_{33}$	1	2	1	3
$+a_{12}a_{23}a_{31}$	2	2	3	1
$+a_{13}a_{21}a_{32}$	2	3	1	2
$-a_{13}a_{22}a_{31}$	3	3	2	1

۲۶۴۳۸ ان چھ حاصل ضرب کا مجموعہ ذیل ہو گا۔

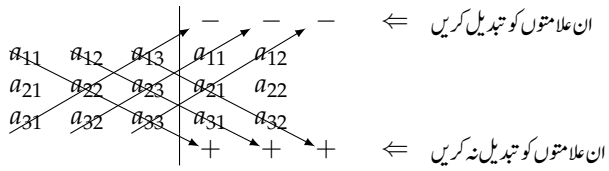
$$
\begin{aligned}
a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})\\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad (۵)
\end{aligned}
$$

۲۶۴۳۹ درج ذیل کلیہ 3 با 3 مقطع کے حساب کو تین عدد 2 با 2 مقطع کے حساب میں تبدیل کرتا ہے۔

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \qquad (۶)
$$

۲۶۴۴۰ بعض حضرات 3 با 3 قالب کے مقطع میں پائے جانے والے چھ حاصل ضرب کو درج ذیل طریقہ کار سے معلوم کرنے کو ترجیح دیتے ہیں۔

(۷)



۲۶۴۴۱

۲۶۴۴۲ اصاغر اور ہمزاد اجزائے ضربی

۲۶۴۴۳ مساوات ۶ کے دائیں ہاتھ دور تبی مقاطع کو ان ارکان کے **اصاغر**[۸] (صغیر مقطع کی مختصر اصطلاح) کہتے ہیں جن سے انہیں ضرب کیا گیا ہے۔ یوں

۲۶۴۴۴

$$a_{11} \text{ کا اصغر } \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{اور} \quad a_{12} \text{ کا اصغر } \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

۲۶۴۴۵ ہو گا، وغیرہ۔ قالب A سے وہ صف اور قطار خارج کرنے کے بعد، جس میں رکن a_{ij} پایا جاتا ہو، حاصل قالب کا مقطع a_{ij} کا اصغر ہو گا۔

۲۶۴۴۶

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ سے } a_{22} \text{ کا اصغر } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ حاصل ہوتا ہے۔}$$

۲۶۴۴۷

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ سے } a_{23} \text{ کا اصغر } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \text{ حاصل ہوتا ہے۔}$$

۲۶۴۴۸ رکن a_{ij} کا ہمزاد جزو ضربی A_{ij} حاصل کرنے کے لئے a_{ij} کے اصغر کو $(-1)^{i+j}$ سے ضرب دیں۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

۲۶۴۴۹ جزو ضربی $(-1)^{i+j}$ اصغر کی علامت اس صورت تبدیل کرتا ہے جب $i+j$ طاق ہو۔ درج ذیل نقشہ اس کی وضاحت کرتا ہے۔

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

۲۶۴۵۰ اوپر بائیں کونے میں $i = 1$ ، $j = 1$ ہے لہٰذا $(-1)^{1+1} = +1$ ہے۔ اسی صف یا اسی قطار میں رہتے ہوئے اگلے خانے میں i یا j کی
۲۶۴۵۱ قیمت بڑھ کر 2 ہو جاتی ہے، تاہم i اور j دونوں کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی، اور یوں $(-1)^{1+2} = -1$ حاصل ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی
۲۶۴۵۲ ایک صف یا کسی ایک قطار میں رہ کر چلتے ہوئے ہر قدم پر علامت $+$ سے $-$ یا $-$ سے $+$ ہو گی۔

۲۶۴۵۳ ہم مساوات ۶ کو ہمزاد اجزائے ضربی کے روپ میں درج لکھ سکتے ہیں۔

$$A \text{ مقطع } = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{۸}$$

---

[۸] minors

۲۶۳۵۴ مثال ح.۲: درج ذیل قالب کا مقطع تلاش کریں۔

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

۲۶۳۵۵ **حل 1:** ہمزاد اجزائے ضربی حاصل کرتے ہیں۔

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix},$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

۲۶۳۵۶ مقطع A معلوم کرنے کے لئے A کی پہلی صف کا ہر رکن اپنے ہمزاد جزو ضربی سے ضرب کر کے مجموعہ لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} A\text{مقطع} &= 2\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 2(-1+6) - 1(3+4) + 3(9+2) = 10 - 7 + 33 = 36 \end{aligned}$$

۲۶۳۵۷ **حل 2:** ہم مساوات ۷ سے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & -6 & -12 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & \\ 3 & -1 & -2 & 3 & -1 & \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & \\ & & & -2 & -4 & 27 \end{array}$$

ان علامتوں کو تبدیل کریں $\Leftarrow$

۲۶۳۵۸ ان علامتوں کو تبدیل نہ کریں $\Leftarrow$

۲۶۳۵۹ $$A\text{مقطع} = -(-6) - (-12) - 3 + (-2) + (-4) + 27 = 36$$

۲۶۳۶۰ □

۲۶۳۶۱ **دیگر قطار یا دیگر صف پر پھیلانا**

۲۶۳۶۲ مکعب قالب کا مقطع کسی بھی صف یا قطار کے ہمزاد اجزائے ضربی سے تلاش کیا جا سکتا ہے۔

۲۶۳۶۳ ہم مثال ح.۲ میں مقطع کو تیسرے قطار کے ہمزاد اجزائے ضربی سے حاصل کر سکتے تھے۔ یہ عمل درج ذیل ہے۔

$$+3\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(9+2) + 2(6-2) + 1(-2-3) = 33 + 8 - 5 = 36$$

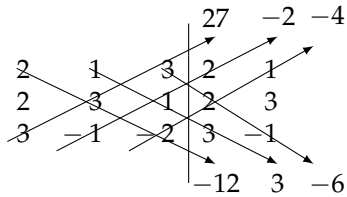
مقطع کے مفید حقائق

حقیقت 1: اگر دو صف (یا دو قطار) یکساں ہوں، مقطع صفر ہو گا۔

حقیقت 2: دو صف (یا دو قطار) آپس میں بدلنے سے مقطع کی علامت تبدیل ہو گی۔

حقیقت 3: ایک صف دوسری صف کے ساتھ جمع کرنے یا اس سے منفی کرنے سے مقطع تبدیل نہیں ہوتا۔ اسی طرح ایک قطار دوسری قطار کے ساتھ جمع کرنے یا اس سے منفی کرنے سے مقطع کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔

ہم مثال ح. ۲ کے قالب میں دو صف آپس میں تبدیل کر کے مقطع تلاش کر کے دیکھتے ہیں۔



$$-(27)-(-2)-(-4)+(-12)+(3)+(-6)=-36$$

آپ نے دیکھا کہ مقطع کی علامت تبدیل ہوئی۔

مثال ح. ۳: چہ رتبی مقطع تلاش کریں۔

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

حل: ہم پہلی صف کو دو سے ضرب دے کر دوسری صف سے منفی کرتے ہیں، اور پہلی صف کو تیسری صف کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

ہم اب پہلی قطار کے ارکین کو ہمزاد اجزائے ضربی سے ضرب دے کر مقطع حاصل کرتے ہیں۔

$$D=\begin{vmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=5(4+2)-(-6)(0+1)+0=36$$

□

۲۶۳۷۶ **کریمر کا قاعدہ**

۲۶۳۷۷ اگر نظام

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned} \tag{۹}$$

۲۶۳۷۸ کا مقطع صفر ہو

$$D = A \text{ مقطع } = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0$$

۲۶۳۷۹ تب نظام کا یا کوئی حل موجود نہیں ہو گا اور یا اس کے لا متناہی حل موجود ہوں گے۔ درج ذیل نظام

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

۲۶۳۸۰ جس کا مقطع صفر ہے

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

۲۶۳۸۱ کے لا متناہی حل موجود ہیں۔ ہم کسی بھی دیے گئے y کے لئے مطابقتی x تلاش کر سکتے ہیں۔ درج ذیل نظام

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ 2x + 2y &= 2 \end{aligned}$$

۲۶۳۸۲ کا کوئی حل موجود نہیں۔ اگر $x + y = 0$ ہو تب $2x + 2y = 2(x + y)$ کسی صورت 2 کے برابر نہیں ہو سکتا۔

۲۶۳۸۳ **سوالات**

۲۶۳۸۴

۲۶۳۸۵ **مقطع کی قیمت تلاش کریں**

۲۶۳۸۶ درج ذیل مقطع تلاش کریں۔

۲۶۳۸۷ سوال ح.۱:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

۲۶۴۸۸ سوال ح.۲:
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

۲۶۴۸۹ سوال ح.۳:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

۲۶۴۹۰ سوال ح.۴:
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

۲۶۴۹۱

۲۶۴۹۲ درج ذیل مقطع (ا) تیسری صف اور (ب) دوسری قطار کے ہمزاد اجزائے ضربی سے تلاش کریں۔

۲۶۴۹۳ سوال ح.۵:
$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

۲۶۴۹۴ سوال ح.۶:
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

۲۶۴۹۵ سوال ح.۷:
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

۲۶۴۹۶ سوال ح.۸:
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

۲۶۴۹۷

۲۶۴۹۸ **نظام کی مساوات**

۲۶۴۹۹ کریمر کا قاعدہ استعمال کر کے درج ذیل نظام کی مساوات حل کریں۔

۲۶۵۰۰ سوال ح.۹:

$$\begin{aligned} x + 8y &= 4 \\ 3x - y &= -13 \end{aligned}$$

۲۶۵۰۱ سوال ح.۱۰:

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 \\ 3x - y &= 2 \end{aligned}$$

۲۶۵۰۲ سوال ح.۱۱:

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= 6 \\ 3x - 2y &= 5 \end{aligned}$$

۲۶۵۰۳ سوال ح.۱۲:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x - y + z &= 0 \\ x + 2y - z &= 4 \end{aligned}$$

۲۶۵۰۴ سوال ح.۱۳:

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 2 \\ x - y + z &= 7 \\ 2x + 2y + z &= 4 \end{aligned}$$

۲۶۵۰۵ سوال ح.۱۴:

$$\begin{aligned} 2x - 4y \qquad &= 6 \\ x + y + z &= 1 \\ 5y + 7z &= 10 \end{aligned}$$

۲۶۵۰۶ سوال ح.۱۵:

$$\begin{aligned} x \qquad - z &= 3 \\ 2y - 2z &= 2 \\ 2x \qquad + z &= 3 \end{aligned}$$

۲۶۵۰۷ سوال ح.۱۶:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 2 \\ x_1 \qquad + x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned}$$

۲۶۵۰۸

۲۶۵۰۹ **نظریہ اور مثال**

۲۶۵۱۰ سوال ح.۱۷: درج ذیل نظام کے لئے h اور k کی ایسی قیمتیں تلاش کریں کہ نظام (ا) کے حلول کی تعداد لا متناہی ہو، (ب) کا کوئی حل نہ ہو۔

$$\begin{aligned} 2x + hy &= 8 \\ x + 3y &= k \end{aligned}$$

۲۶۵۱۱ سوال ح.۱۸: متغیر x کی کس قیمت پر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{vmatrix} x & x & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

۲۶۵۱۲ سوال ح.۱۹: فرض کریں u ، v ، اور w متغیر x کے تفاعل اور دو مرتبہ قابل تفرق ہیں، اور $au + bv + cw = 0$ کو مطمئن کرتے
۲۶۵۱۳ ہیں، جہاں a ، b ، اور c مستقل ہیں جو ایک ساتھ صفر نہیں ہو سکتے۔ درج ذیل دکھائیں۔

$$\begin{vmatrix} u & v & w \\ u' & v' & w' \\ u'' & v'' & w'' \end{vmatrix} = 0$$

۲۶۵۱۴ سوال ح.۲۰: جزوی کسر درج ذیل حاصل تقسیم

$$\frac{ax + b}{(x - r_1)(x - r_2)}$$

۲۶۵۱۵ کا جزوی کسری پھیلاؤ تلاش کرنا C اور D کی ایسی قیمت تلاش کرنے کے مترادف ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہو۔

$$\frac{ax + b}{(x - r_1)(x - r_2)} = \frac{C}{x - r_1} + \frac{D}{x - r_2}$$

۲۶۵۱۶ ا. خطی مساوات کا ایسا نظام تلاش کریں جس سے C اور D کی قیمتیں حاصل ہوں۔

۲۶۵۱۷ ب. کن شرائط کے تحت جزو(ا) میں نظام کا حل یکتا ہو گا؟ یعنی نظام کے عددی سروں کے قالب کا مقطع کب صفر نہیں ہو گا؟

۲۶۵۱۸

۲۶۵۱۹

ضمیمہ ط

مسئلہ یولر اور مسئلہ بڑھوتری

اس ضمیمہ میں مسئلہ یولر (حصہ 12.3، مسئلہ 2) اور دو متغیرات کا مسئلہ بڑھوتری (حصہ 12.4، مسئلہ 3) اخذ کیے جائیں گے۔ یولر نے ۱۷۳۴ء میں مسئلہ بیان کیا۔

مسئلہ یولر

اگر $f(x,y)$ اور اس کے جزوی تفرق f_x ، f_y ، f_{xy} اور f_{yx} ایک ایسے پورے کھلے خطے میں معین ہوں جس میں نقطہ (a,b) پایا جاتا ہو اور (a,b) پر f ، f_x ، f_y ، f_{xy} اور f_{yx} استمراری ہوں تب $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ ہو گا۔

ثبوت: اوسط قیمت مسئلے (حصہ 3.2، مسئلہ 4) کو چار مرتبہ لاگو کر کے $f_{xy}(a,b)$ اور $f_{yx}(a,b)$ کی برابری ثابت کی جا سکتی ہے۔ فرض کریں مستوی xy میں مستطیل R کے اندرون میں نقطہ (a,b) پایا جاتا ہے اور مستطیل R میں f ، f_x ، f_y ، f_{xy} ، اور f_{yx} معین ہیں۔ ہم ایسے اعداد h اور k لیتے ہیں کہ نقطہ $(a+h, b+k)$ بھی مستطیل R میں پایا جاتا ہو، اور درج ذیل فرق پر غور کرتے ہیں

$$\Delta = F(a+h) - F(a) \tag{۱}$$

جہاں درج ذیل مراد ہے۔

$$F(x) = f(x, b+k) - f(x, b) \tag{۲}$$

ہم اوسط قیمت مسئلے کا اطلاق F پر کرتے ہیں (جو قابل تفرق ہونے کی وجہ سے استمراری ہے)۔ یوں مساوات ادرج ذیل روپ اختیار کرتی ہے

$$\Delta = hF'(c_1) \tag{۳}$$

جہاں c_1 اعداد a اور $a+h$ کے بیچ ہو گا۔ مساوات ۲ سے

$$F'(x) = f_x(x, b+k) - f_x(x, b)$$

۲۶۵۳۳ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات ۳ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\Delta = h[f_x(c_1, b+k) - f_x(c_1, b)] \tag{۴}$$

۲۶۵۳۵ اب ہم اوسط قیمت مسئلے کا اطلاق $g(y) = f_x(c_1, y)$ پر کر کے

$$g(b+k) - g(b) = kg'(d_1)$$

۲۶۵۳۶ یا

$$f_x(c_1, b+k) - f_x(c_1, b) = kf_{xy}(c_1, d_1)$$

۲۶۵۳۷ حاصل کرتے ہیں جہاں d_1 اعداد b اور $b+k$ کے بیچ ہو گا۔ اس کو مساوات ۴ میں ڈال کر درج ذیل حاصل ہو گا

$$\Delta = hkf_{xy}(c_1, d_1) \tag{۵}$$

۲۶۵۳۸ جہاں (c_1, d_1) مستطیل R' میں، جس کے راس (a, b) ، $(a+h, b)$ ، $(a+h, b+k)$ ، اور $(a, b+k)$ ہیں، کوئی نقطہ
۲۶۵۳۹ ہے (شکل A13 دیکھیں)۔

۲۶۵۴۰ مساوات ۲ سے مساوات ۱ میں پُر کرنے سے ذیل حاصل ہو گا

$$\begin{aligned}\Delta &= f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a, b)\\ &= [f(a+h, b+k) - f(a, b+k)] - [f(a+h, b) - f(a, b)]\\ &= \phi(b+k) - \phi(b)\end{aligned} \tag{۶}$$

۲۶۵۴۱ جہاں ϕ سے مراد ذیل ہے۔

$$\phi(y) = f(a+h, y) - f(a, y) \tag{۷}$$

۲۶۵۴۲ اوسط قیمت مسئلے کا اطلاق مساوات ۶ پر کر کے ذیل حاصل ہو گا

$$\Delta = k\phi'(d_2) \tag{۸}$$

۲۶۵۴۳ جہاں d_2 اعداد b اور $b+k$ کے بیچ ہو گا۔ مساوات ۷ سے ذیل ہو گا۔

$$\phi'(y) = f_y(a+h, y) - f_y(a, y) \tag{۹}$$

۲۶۵۴۴ مساوات ۹ سے مساوات ۸ میں پُر کر کے ذیل ملتا ہے۔

$$\Delta = k[f_y(a+h, d_2) - f_y(a, d_2)]$$

۲۶۵۴۵ آخر میں ہم اوسط قیمت مسئلے کا اطلاق قوسین میں بند عبارت پر کر کے ذیل حاصل کرتے ہیں

$$\Delta = hkf_{yx}(c_2, d_2) \tag{۱۰}$$

جہاں c_2 اعداد a اور $a+h$ کے بیچ ہوگا۔

مساوات ۵ اور مساوات ۱۰ مل کر درج ذیل دیتی ہیں

$$f_{xy}(c_1,d_1) = f_{yx}(c_2,d_2) \tag{11}$$

جہاں (c_1,d_1) اور (c_2,d_2) دونوں مستطیل R' (شکل A13) میں پائے جاتے ہیں۔ مساوات ۱۱ کہتی ہے کہ f_{xy} کی (c_1,d_1) پر قیمت f_{yx} کی (c_2,d_2) پر قیمت کے برابر ہے۔ اگرچہ بظاہر یہ وہ نتیجہ نہیں جو ہم چاہتے ہیں تاہم اعداد h اور k کو ہم جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں۔ چونکہ (a,b) پر f_{xy} اور f_{yx} دونوں استمراری ہیں لہٰذا $f_{xy}(c_1,d_1) = f_{xy}(a,b) + \epsilon_1$ اور $f_{yx}(c_2,d_2) = f_{yx}(a,b) + \epsilon_2$ ہوں گے جہاں $h \to 0$ اور $k \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1 \to 0$ اور $\epsilon_2 \to 0$ ہوگا۔ یوں $h \to 0$ اور $k \to 0$ کرنے سے $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ ہوگا۔

□

ہم $f_{xy}(a,b)$ اور $f_{yx}(a,b)$ کی برابری کا ثبوت کمزور قیاس کرتے ہوئے دے سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر، اتنا کافی ہے کہ f ، f_x ، اور f_y مستطیل R میں موجود ہوں اور (a,b) پر f_{xy} استمراری ہو۔ ایسی صورت میں (a,b) پر f_{yx} موجود ہوگا اور اس نقطے پر f_{xy} کے برابر ہوگا۔

دو متغیرات کے تفاعلات کا مسلہ بڑھوتری

فرض کریں پورے کھلے خطہ R میں، جس میں نقطہ (x_0,y_0) پایا جاتا ہے، $z = f(x,y)$ کے یک رتبی جزوی تفرق معین ہیں، اور نقطہ (x_0,y_0) پر f_x اور f_y استمراری ہیں۔ ایسی صورت میں R میں رہ کر نقطہ (x_0,y_0) سے $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ منتقل ہونے پر f کی قیمت میں تبدیلی $\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ درج ذیل روپ کی مساوات مطمئن کرتی ہے

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

جہاں $\Delta x \to 0$ ، $\Delta y \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1 \to 0$ ، $\epsilon_2 \to 0$ ہوگا۔

ثبوت: ہم R کے اندر مستطیل T ، جس کا مرکز $A(x_0,y_0)$ پر ہے، استعمال کرتے ہیں، اور ہم فرض کرتے ہیں کہ Δx اور Δy کی لمبائیاں اتنی چھوٹی ہیں کہ A کو $B(x_0+\Delta x, y_0)$ سے ملانے والا لکیری قطع اور B کو $C(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ سے ملانے والا لکیری قطع T کے اندر پائے جاتے ہیں (شکل A14)۔

ہم Δz کو دو بڑھوتریوں کا مجموعہ $\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2$ تصور کر سکتے ہیں جہاں A سے B منتقل ہونے پر f کی قیمت میں تبدیلی درج ذیل ہے

$$\Delta z_1 = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)$$

اور B سے C انتقال کے دوران f کی قیمت میں تبدیلی درج ذیل ہے (شکل A15)۔

$$\Delta z_2 = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0)$$

متغیر x کی قیمتوں کے اس بند وقفے پر جو x_0 کو $x_0+\Delta x$ سے ملاتی ہیں، $F(x) = f(x,x_0)$ متغیر x کا قابل تفرق (لہٰذا استمراری) تفاعل ہوگا، اور اس تفاعل کا تفرق درج ذیل ہوگا۔

$$F'(x) = f_x(x,y_0)$$

۲۶۵۶۹ اوسط قیمت مسئلے (حصہ 3.2، مسئلہ 4) کے تحت x_0 اور $x_0 + \Delta x$ کے بیچ x کی ایک قیمت c ایسی ہو گی جس پر

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = F'(c)\Delta x$$

۲۶۵۷۰ یعنی

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(c, y_0)\Delta x$$

۲۶۵۷۱ یا

$$\Delta z_1 = f_x(c, y_0)\Delta x \tag{۱۲}$$

۲۶۵۷۲ مطمئن ہو گا۔

۲۶۵۷۳ اسی طرح y_0 اور $y_0 + \Delta y$ کو ملانے والے y کے بند لکیری قطع پر $G(y) = f(x_0 + \Delta x, y)$ متغیر y کا قابل تفرق (لہٰذا
۲۶۵۷۴ استمراری) تفاعل ہو گا، جس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$G'(y) = f_y(x_0 + \Delta x, y)$$

۲۶۵۷۵ یوں y_0 اور $y_0 + \Delta y$ کے بیچ y کی ایک قیمت d ایسی ہو گی جس پر

$$G(y_0 + \Delta y) - G(y_0) = G'(d)\Delta y$$

۲۶۵۷۶ یعنی

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y) = f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y$$

۲۶۵۷۷ یا

$$\Delta z_2 = f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y \tag{۱۳}$$

۲۶۵۷۸ مطمئن ہو گا۔

۲۶۵۷۹ اب $\Delta x \to 0$ اور $\Delta y \to 0$ کرنے سے $c \to x_0$ اور $d \to y_0$ ہو گا۔ یوں، چونکہ (x_0, y_0) پر f_x اور f_y استمراری
۲۶۵۸۰ ہیں، لہٰذا $\Delta x \to 0$ اور $\Delta y \to 0$ کرنے پر درج ذیل دونوں مقادیر صفر کو پہنچتی ہیں۔

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= f_x(c, y_0) - f_x(x_0, y_0) \\ \epsilon_2 &= f_y(x_0 + \Delta x, d) - f_y(x_0, y_0) \end{aligned} \tag{۱۴}$$

۲۶۵۸۱ آخر میں درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} \Delta z &= \Delta z_1 + \Delta z_2 \\ &= f_x(c, y_0)\Delta x + f_y(x_0 + \Delta x, d)\Delta y && \text{مساوات ۱۲ اور مساوات ۱۳ سے} \\ &= [f_x(x_0, y_0) + \epsilon_1]\Delta x + [f_y(x_0, y_0) + \epsilon_2]\Delta y && \text{مساوات ۱۴ سے} \\ &= f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1\Delta x + \epsilon_2\Delta y \end{aligned}$$

۲۶۵۸۲ جہاں $\Delta x \to 0$ اور $\Delta y \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1 \to 0$ اور $\epsilon_2 \to 0$ ہوں گے۔یوں ثبوت مکمل ہوا۔

۲۶۵۸۳ $\square$

۲۶۵۸۴ اسی طرح کے نتائج متناہی تعداد کے غیر تابع متغیرات کے ہر تفاعل کے لئے مطمئن ہوتے ہیں۔فرض کریں کھلے خطہ پر، جس میں نقطہ (x_0, y_0, z_0) پایا
۲۶۵۸۵ جاتا ہے،درج ذیل کے یک رتبی جزوی تفرق معین ہیں،

$$w = f(x, y, z)$$

۲۶۵۸۶ اور (x_0, y_0) پر f_x ، f_y ،اور f_z استمراری ہیں۔تب درج ذیل ہوگا

$$\begin{aligned} \Delta w &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \\ &= f_x \Delta x + f_y \Delta y + f_z \Delta z + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y + \epsilon_3 \Delta z \end{aligned} \tag{۱۵}$$

۲۶۵۸۷ جہاں $\Delta x \to 0$ ، $\Delta y \to 0$ ، $\Delta z \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1 \to 0$ ، $\epsilon_2 \to 0$ ، $\epsilon_3 \to 0$ ہوگا۔

۲۶۵۸۸ اس کلیہ میں تفرق f_x ، f_y ، f_z نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر حاصل کیے جائیں گے۔

۲۶۵۸۹ مساوات ۱۵ میں پیش نتیجے کا ثبوت، Δw کو درج ذیل تین بڑھوتریوں کا مجموعہ تصور کر کے

$$\Delta w_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) \tag{۱۶}$$

$$\Delta w_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) \tag{۱۷}$$

$$\Delta w_3 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0) \tag{۱۸}$$

۲۶۵۹۰ ہر ایک پر علیحدہ علیحدہ اوسط قیمت مسئلے کے اطلاق سے حاصل ہوگا۔ ہر ایک جزوی بڑھوتری Δw_1 ، Δw_2 ، Δw_3 میں دو محدد مستقل جبکہ ایک
۲۶۵۹۱ متغیر رہے۔مثال کے طور پر، مساوات ۱۷ میں y متغیر ہے جبکہ x کی قیمت مستقلاً $x_0 + \Delta x$ اور z کی قیمت مستقلاً $z_0 + \Delta z$ رہتی ہے۔چونکہ
۲۶۵۹۲ $f(x_0 + \Delta x, y, z_0)$ متغیر y کا استمراری تفاعل ہے اور اس کا تفرق f_y ہے لہٰذا اس پر مسئلہ اوسط قیمت کا اطلاق ہوگا،اور یوں y_0 اور
۲۶۵۹۳ $y_0 + \Delta y$ کے بیچ کسی نقطہ y_1 پر درج ذیل ہوگا۔

$$\Delta w_2 = f_y(x_0 + \Delta x, y_1, z_0)\Delta y$$

ضمیمہ ي

تکملات کا مختصر جدول

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u \tag{۱}$$

$$\int a^u\,\mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a \neq 1, \quad a > 0 \tag{۲}$$

$$\int \cos u\,\mathrm{d}u = \sin u + C \tag{۳}$$

$$\int \sin u\,\mathrm{d}u = -\cos u + C \tag{۴}$$

$$\int (ax+b)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C, \quad n \neq -1 \tag{۵}$$

$$\int (ax+b)^{-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C \tag{۶}$$

$$\int x(ax+b)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a^2}\left[\frac{ax+b}{n+2} - \frac{b}{n+1}\right] + C, \quad n \neq -1, -2 \tag{۷}$$

$$\int x(ax+b)^{-1}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln|ax+b| + C \tag{۸}$$

$$\int x(ax+b)^{-2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2}\left[\ln|ax+b| + \frac{b}{ax+b}\right] + C \tag{۹}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}\ln\left|\frac{x}{ax+b}\right| + C \tag{۱۰}$$

۲۶۵۹۷

(۱۱) $$\int (\sqrt{ax+b})^n \,\mathrm{d}x = \frac{2}{a}\frac{(\sqrt{ax+b})^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2$$

(۱۲) $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{ax+b} + b\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}}$$

۲۶۵۹۸

(۱۳) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax-b}} = \frac{2}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\sqrt{\frac{ax-b}{b}} + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\ln\left|\frac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right| + C$$

(۱۴) $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{ax+b}}{x} + \frac{a}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} + C$$

(۱۵) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{ax+b}} + C$$

۲۶۵۹۹

(۱۶) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

(۱۷) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$$

(۱۸) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$$

(۱۹) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right| + C$$

(۲۰) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\frac{x}{a} + C = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$$

۲۶۶۰۰

(۲۱) $$\int \sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$$

(۲۲) $$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(a^2+2x^2)\sqrt{a^2+x^2} - \frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C$$

(۲۳) $$\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{a^2+x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$$

(۲۴) $$\int \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) - \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x} + C$$

۲۶۶۰۱

(۲۵) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + C$$

(۲۶) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2+x^2}}{x}\right| + C$$

(۲۷) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + C$$

(۲۸) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

(۲۹) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} + C$$

۲۶۶۰۲

(۳۰) $$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^4}{8}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{8}x\sqrt{a^2-x^2}(a^2-2x^2) + C$$

(۳۱) $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + C$$

(۳۲) $$\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} + C$$

(۳۳) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C$$

(۳۴) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\ln|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}| + C$$

(۳۵) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x} + C$$

(۳۶) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\frac{x}{a} + C = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$$

(۳۷) $$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$$

(۳۸)
$$\int (\sqrt{x^2-a^2})^n dx = \frac{x(\sqrt{x^2-a^2})^n}{n+1} - \frac{na^2}{n+1}\int (\sqrt{x^2-a^2})^{n-2}\,\mathrm{d}x, \quad n \neq -1$$

(۳۹) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{x^2-a^2})^n} = \frac{x(\sqrt{x^2-a^2})^{2-n}}{(2-n)a^2} - \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{dx}{(\sqrt{x^2-a^2})^{n-2}}, n \neq 2$$

(۴۰)
$$\int x(\sqrt{x^2-a^2})^n\,\mathrm{d}x = \frac{(\sqrt{x^2-a^2})^{n+2}}{n+2} + C, \quad n \neq -2$$

(۴۱) $$\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + C$$

(۴۲) $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-a^2} - a\sec^{-1}|\frac{x}{a}| + C$$

(۴۳) $$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + C$$

(۴۴) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| + \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} + C$$

۲۶۶۰۳

(۴۵) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}|\frac{x}{a}| + C = \frac{1}{a}\cos^{-1}|\frac{a}{x}| + C$$

(۴۶) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x} + C$$

(۴۷) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2ax-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$$

(۴۸)
$$\int \sqrt{2ax-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$$

(۴۹)
$$\int (\sqrt{2ax-x^2})^n\,\mathrm{d}x = \frac{(x-a)(\sqrt{2ax-x^2})^n}{n+1} + \frac{na^2}{n+1}\int (\sqrt{2ax-x^2})^{n-2}\,\mathrm{d}x$$

(۵۰)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{2ax-x^2})^n} = \frac{(x-a)(\sqrt{2ax-x^2})^{2-n}}{(n-2)a^2} + \frac{n-3}{(n-2)a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sqrt{2ax-x^2})^{n-2}}$$

۲۶۶۰۴

(۵۱) $$\int x\sqrt{2ax-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{(x+a)(2x-3a)\sqrt{2ax-x^2}}{6} + \frac{a^3}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$$

(۵۲) $$\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2ax-x^2} + a\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$$

(۵۳) $$\int \frac{\sqrt{2ax-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -2\sqrt{\frac{2a-x}{x}} - \sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) + C$$

(۵۴) $$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{2ax-x^2}} = a\sin^{-1}\left(\frac{x-a}{a}\right) - \sqrt{2ax-x^2} + C$$

۲۶۶۰۵

(۵۵) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{2ax-x^2}} = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a-x}{x}} + C$$

(۵۶) $$\int \sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos ax + C$$

(۵۷) $$\int \cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin ax + C$$

(۵۸) $$\int \sin^2 ax\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} + C$$

(۵۹) $$\int \cos^2 ax\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a} + C$$

(۶۰) $$\int \sin^n ax\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin^{n-1} ax\cos ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} ax\,\mathrm{d}x$$

(۶۱) $$\int \cos^n ax\,\mathrm{d}x = \frac{\cos^{n-1} ax\sin ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} ax\,\mathrm{d}x$$

۲۶۶۰۶

$$\int \sin ax\cos bx\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$$

(۶۲) $$\int \sin ax\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$$

$$\int \cos ax\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + C, \quad a^2 \neq b^2$$

(۶۳) $$\int \sin ax\cos ax\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos 2ax}{4a} + C$$

(۶۴) $$\int \sin^n ax\cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1$$

۲۶۶۰۷

(۶۵) $$\int \frac{\cos ax}{\sin ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|\sin ax| + C$$

(۶۶) $$\int \cos^n ax \sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a} + C, \quad n \neq -1$$

(۶۷) $$\int \frac{\sin ax}{\cos ax}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C$$

۲۶۶۰۸

(۶۸) $$\int \sin^n ax \cos^m ax\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin^{n-1} ax \cos^{m+1} ax}{a(m+n)} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^{n-2} ax \cos^m ax\,\mathrm{d}x, \quad n \neq -m \quad (\sin^n ax \text{ تخفیف})$$

۲۶۶۰۹

(۶۹) $$\int \sin^n ax \cos^m ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sin^{n+1} ax \cos^{m-1} ax}{a(m+n)} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^n ax \cos^{m-2} ax\,\mathrm{d}x, \quad m \neq -n \quad (\cos^m ax \text{ تخفیف})$$

۲۶۶۱۰

(۷۰)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{b + c\sin ax} = \frac{-2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\tan^{-1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)\right] + C, \quad b^2 > c^2$$

(۷۱)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{b + c\sin ax} = \frac{-1}{a\sqrt{c^2-b^2}}\ln\left|\frac{c + b\sin ax + \sqrt{c^2-b^2}\cos ax}{b + c\sin ax}\right| + C, \quad b^2 < c^2$$

(۷۲)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sin ax} = -\frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + C$$

(۷۳)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 - \sin ax} = \frac{1}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + C$$

(۷۴)
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{b + c\cos ax} = \frac{2}{a\sqrt{b^2-c^2}}\tan^{1}\left[\sqrt{\frac{b-c}{b+c}}\tan\frac{ax}{2}\right] + C, \quad b^2 > c^2$$

(۷۵)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{b + c\cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{c^2 - b^2}} \ln \left| \frac{c + b\cos ax + \sqrt{c^2 - b^2}\sin ax}{b + c\cos ax} \right| + C, \quad b^2 < c^2$$

(۷۶)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \cos ax} = \frac{1}{a} \tan \frac{ax}{2} + C$$

(۷۷)

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 - \cos ax} = -\frac{1}{a} \cot \frac{ax}{2} + C$$

(۷۸)

$$\int x \sin ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2} \sin ax - \frac{x}{a} \cos ax + C$$

(۷۹)

$$\int x \cos ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax + C$$

(۸۰)

$$\int x^n \sin ax \,\mathrm{d}x = -\frac{x^n}{a} \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \,\mathrm{d}x$$

۲۶۶۱۲

$$\int x^n \cos ax \, \mathrm{d}x = \frac{x^n}{a} \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, \mathrm{d}x \tag{۸۱}$$

$$\int \tan ax \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \ln |\sec ax| + C \tag{۸۲}$$

$$\int \cot ax \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \ln |\sin ax| + C \tag{۸۳}$$

$$\int \tan^2 ax \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \tan ax - x + C \tag{۸۴}$$

$$\int \cot^2 ax \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{a} \cot ax - x + C \tag{۸۵}$$

$$\int \tan^n ax \, \mathrm{d}x = \frac{\tan^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \tan^{n-2} ax \, \mathrm{d}x, \quad n \neq 1 \tag{۸۶}$$

$$\int \cot^n ax \, \mathrm{d}x = -\frac{\cot^{n-1} ax}{a(n-1)} - \int \cot^{n-2} ax \, \mathrm{d}x, \quad n \neq 1 \tag{۸۷}$$

$$\int \sec ax \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \ln |\sec ax + \tan ax| + C \tag{۸۸}$$

$$\int \csc ax \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{a} \ln |\csc ax + \cot ax| + C \tag{۸۹}$$

۲۶۶۳

(۹۰) $$\int \sec^2 ax \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\tan ax + C$$

(۹۱) $$\int \csc^2 ax \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cot ax + C$$

(۹۲) $$\int \sec^n ax \,\mathrm{d}x = \frac{\sec^{n-2} ax \tan ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} ax \,\mathrm{d}x, \quad n \neq 1$$

(۹۳) $$\int \csc^n ax \,\mathrm{d}x = -\frac{\csc^{n-2} ax \cot ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} ax \,\mathrm{d}x, \quad n \neq 1$$

(۹۴) $$\int \sec^n ax \tan ax \,\mathrm{d}x = \frac{\sec^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$$

(۹۵) $$\int \csc^n ax \cot ax \,\mathrm{d}x = -\frac{\csc^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0$$

(۹۶) $$\int \sin^{-1} ax \,\mathrm{d}x = x\sin^{-1} ax + \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2} + C$$

(۹۷) $$\int \cos^{-1} ax \,\mathrm{d}x = x\cos^{-1} ax - \frac{1}{a}\sqrt{1-a^2x^2} + C$$

(۹۸) $$\int \tan^{-1} ax \,\mathrm{d}x = x\tan^{-1} ax - \frac{1}{2a}\ln(1+a^2x^2) + C$$

(۹۹) $$\int x^n \sin^{-1} ax \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\sin^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-a^2x^2}}, \quad n \neq -1$$

۲۶۶۴

(۱۰۰) $$\int x^n \cos^{-1} ax \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\cos^{-1} ax + \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-a^2x^2}}, \quad n \neq -1$$

(۱۰۱) $$\int x^n \tan^{-1} ax \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\tan^{-1} ax - \frac{a}{n+1}\int \frac{x^{n+1}\,\mathrm{d}x}{1+a^2x^2}, \quad n \neq -1$$

(۱۰۲) $$\int e^{ax} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

(۱۰۳) $$\int b^{ax} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\frac{b^{ax}}{\ln b} + C, \quad b > 0, \quad b \neq 1$$

(۱۰۴) $$\int xe^{ax} \,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C$$

(۱۰۵) $$\int x^n e^{ax} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax} \,\mathrm{d}x$$

۲۶۲۱۵

$$\int x^n b^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{x^n b^{ax}}{a\ln b} - \frac{n}{a\ln b}\int n^{n-1} b^{ax}\,\mathrm{d}x, \quad b>0,\ b\neq 1 \tag{۱۰۶}$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C \tag{۱۰۷}$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C \tag{۱۰۸}$$

$$\int \ln ax\,\mathrm{d}x = x\ln ax - x + C \tag{۱۰۹}$$

$$\int x^n(\ln ax)^m\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}(\ln ax)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^n(\ln ax)^{m-1}\,\mathrm{d}x, \quad n\neq -1 \tag{۱۱۰}$$

۲۶۲۱۶

$$\int x^{-1}(\ln ax)^m\,\mathrm{d}x = \frac{(\ln ax)^{m+a}}{m+1} + C, \quad m\neq -1 \tag{۱۱۱}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln ax} = \ln|\ln ax| + C \tag{۱۱۲}$$

$$\int \sinh ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\cosh ax + C \tag{۱۱۳}$$

$$\int \cosh ax\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sinh ax + C \tag{۱۱۴}$$

۲۶۲۱۷

$$\int \sinh^2 ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sinh 2ax}{4a} - \frac{x}{2} + C \tag{۱۱۵}$$

$$\int \cosh^2 ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sinh 2ax}{4a} + \frac{x}{2} + C \tag{۱۱۶}$$

$$\int \sinh^n ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sinh^{n-1} ax\cosh ax}{na} - \frac{n-1}{n}\int \sinh^{n-2} ax\,\mathrm{d}x, \quad n\neq 0 \tag{۱۱۷}$$

$$\int \cosh^n ax\,\mathrm{d}x = \frac{\cosh^{n-1} ax\sinh ax}{na} + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2} ax\,\mathrm{d}x, \quad n\neq 0 \tag{۱۱۸}$$

$$\int x\sinh ax\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a}\cosh ax - \frac{1}{a^2}\sinh ax + C \tag{۱۱۹}$$

$$\int x\cosh ax\,\mathrm{d}x = \frac{x}{a}\sinh ax - \frac{1}{a^2}\cosh ax + C \tag{۱۲۰}$$

$$\int x^n\sinh ax\,\mathrm{d}x = \frac{x^n}{a}\cosh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\cosh ax\,\mathrm{d}x \tag{۱۲۱}$$

$$\int x^n\cosh ax\,\mathrm{d}x = \frac{x^n}{a}\sinh ax - \frac{n}{a}\int x^{n-1}\sinh ax\,\mathrm{d}x \tag{۱۲۲}$$

۲۶۶۱۸

$$\int \tanh ax \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \ln(\cosh ax) + C \tag{۱۲۳}$$

$$\int \coth ax \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \ln|\sinh ax| + C \tag{۱۲۴}$$

$$\int \tanh^2 ax \, \mathrm{d}x = x - \frac{1}{a} \tanh ax + C \tag{۱۲۵}$$

$$\int \coth^2 ax \, \mathrm{d}x = x - \frac{1}{a} \coth ax + C \tag{۱۲۶}$$

$$\int \tanh^n ax \, \mathrm{d}x = -\frac{\tanh^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \tanh^{n-2} ax \, \mathrm{d}x, \quad n \neq 1 \tag{۱۲۷}$$

$$\int \coth^n ax \, \mathrm{d}x = -\frac{\coth^{n-1} ax}{(n-1)a} + \int \coth^{n-2} ax \, \mathrm{d}x, \quad n \neq 1 \tag{۱۲۸}$$

$$\int \operatorname{sech} ax \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \sin^{-1}(\tanh ax) + C \tag{۱۲۹}$$

۲۶۶۱۹

$$\int \operatorname{csch} ax \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \ln \left| \tanh \frac{ax}{2} \right| + C \tag{۱۳۰}$$

$$\operatorname{sech}^2 ax \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \tanh ax + C \tag{۱۳۱}$$

$$\int \operatorname{csch}^2 ax \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{a} \coth ax + C \tag{۱۳۲}$$

$$\int \operatorname{sech}^n ax \, \mathrm{d}x = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \tanh ax}{(n-1)a} + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{sech}^{n-2} ax \, \mathrm{d}x, \quad n \neq 1 \tag{۱۳۳}$$

$$\int \operatorname{csch}^n ax \, \mathrm{d}x = -\frac{\operatorname{csch}^{n-2} ax \coth ax}{(n-1)a} - \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{csch}^{n-2} ax \, \mathrm{d}x, \quad n \neq 1 \tag{۱۳۴}$$

۲۶۲۲۰

$$\int \operatorname{sech}^n ax \tanh ax \, dx = -\frac{\operatorname{sech}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0 \tag{۱۳۵}$$

$$\int \operatorname{csch}^n ax \coth ax \, dx = -\frac{\operatorname{csch}^n ax}{na} + C, \quad n \neq 0 \tag{۱۳۶}$$

$$\int e^{ax} \sinh bx \, dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} - \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \quad a^2 \neq b^2 \tag{۱۳۷}$$

$$\int e^{ax} \cosh bx \, dx = \frac{e^{ax}}{2}\left[\frac{e^{bx}}{a+b} + \frac{e^{-bx}}{a-b}\right] + C, \quad a^2 \neq b^2 \tag{۱۳۸}$$

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} \, dx = \Gamma(n) = (n-1)!, \quad n > 0 \tag{۱۳۹}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}, \quad a > 0 \tag{۱۴۰}$$

۲۶۲۲۱

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots n} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{اگر } n \geq 2 \text{ عدد صحیح ہو} \\ \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdots n}, & \text{اگر } n \geq 3 \text{ طاق عدد صحیح ہو} \end{cases} \tag{۱۴۱}$$

۲۶۲۴۲ جوابات

۲۶۲۴۳ حصہ ۱.۱ صفحہ ۹

۲۶۲۴۴ ۱.۱) $0.\bar{1}, 0.\bar{2}, 0.\bar{3}, 0.\bar{8}$

۲۶۲۴۵ ۱.۵) $x < -2$

۲۶۲۴۶ ۱.۷) $x \leq \frac{5}{4}$

۲۶۲۴۷ ۱.۹) $x \leq -\frac{1}{3}$

۲۶۲۴۸ ۱.۱۱) $x < -\frac{6}{7}$

۲۶۲۴۹ ۱.۱۳) ∓ 3

۲۶۲۵۰ ۱.۱۵) $-\frac{1}{2}, \quad -\frac{9}{2}$

۲۶۲۵۱ ۱.۱۷) $\frac{7}{6}, \quad \frac{25}{6}$

۲۶۲۵۲ ۱.۱۹) $-2 < x < 2$

۲۶۲۵۳ ۱.۲۱) $-2 \leq t \leq 4$

۲۶۲۵۴ ۱.۲۳) $1 < y < \frac{11}{3}$

۲۶۲۵۵ ۱.۲۵) $0 \leq z \leq 10$

۲۶۲۵۶ ۱.۲۷) $\frac{10}{35} < x < \frac{14}{35}$ یا $\frac{2}{7} < y < \frac{11}{3}$

۲۶۲۵۷ ۱.۲۹) $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

۲۶۲۵۸ ۱.۳۱) $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

۲۶۲۵۹ ۱.۳۳) $(-\infty, -3] \cup [1, \infty)$

۲۶۲۶۰ ۱.۳۵) $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

۲۶۲۶۱ ۱.۳۷) $(-3, -2) \cup (2, 3)$

۲۶۲۶۲ ۱.۳۹) $(-1, 3)$

۲۶۲۶۳ ۱.۴۱) $(0, 1)$

۲۶۲۶۴ ۱.۴۳) تمام منفی حقیقی اعداد کے لیے غلط جبکہ $a \geq 0$ کے لیے درست ہے۔

۲۶۲۶۵ ۱.۴۷) $-\frac{1}{2} < x \leq 3$

۲۶۲۶۶ ۱.۴۹) $(-2, 0) \cup (4, \infty)$

۲۶۲۶۷ حصہ ۱.۲ صفحہ ۲۳

۲۶۲۶۸ ۱.۵۱) $2, -4; 2\sqrt{5}$

۲۶۲۶۹ ۱.۵۳) $-4.9, 0; 4.9$

۲۶۲۷۰ ۱.۵۵) اکائی دائرہ

۲۶۲۷۱ ۱.۵۷) رداس $\sqrt{3}$ کا دائرہ اور اس کا اندرون۔ دائرے کا مرکز مبدا پر ہے۔

۲۶۲۷۲ ۱.۵۹) $m_{\perp} = -\frac{1}{3}$

۲۶۲۷۳ ۱.۶۱) $m_{\perp}$ غیر معین ہے۔

۲۶۲۷۴ ۱.۶۳) (الف) $x = -1$ (ب) $y = \frac{4}{3}$

۲۶۲۷۵ ۱.۶۵) (الف) $x = 0$ $y = -\sqrt{2}$

۲۶۲۷۶ ۱.۶۷) $y = -x$

۲۶۲۷۷ ۱.۶۹) $y = -\frac{x}{5} + \frac{23}{5}$

۲۶۲۷۸ ۱.۷۱) $y = -\frac{5}{4}x + 6$

۲۶۲۷۹ ۱.۷۳) $y = -9$

۲۶۲۸۰ ۱.۷۵) $y = 4x + 4$

۲۶۲۸۱ ۱.۷۷) $y = -\frac{2}{5}x + 1$

۲۶۲۸۲ ۱.۷۹) $y = -\frac{x}{2} + 12$

۲۶۲۸۳ ۱.۸۱) قطع $x = 4$ ، قطع $y = 3$

۲۶۲۸۴ ۱.۸۳) قطع $x = \sqrt{3}$ ، قطع $y = -\sqrt{2}$

۲۶۲۸۵ ۱.۸۵) جی ہاں۔ خطوط قائمہ ہیں چونکہ ان کے ڈھلوان $-\frac{A}{B}$ اور $\frac{B}{A}$ ایک دوسرے کے منفی مقلوب ہیں۔

۲۶۲۸۶

۲۶۲۸۷ ۱.۸۷) $(3, -3)$

۲۶۲۸۸ ۱.۸۹) $(-2, -9)$

۲۶۲۸۹ ۱.۹۱) 5.97 کرہ ہوائی دباو

۲۶۲۹۰ ۱.۹۳) جی ہاں۔ $C = F = -40^\circ$

۲۶۲۹۱ ۱.۹۷) $(-1, 4), (-1, -2), (5, 2)$

۲۶۲۹۲ ۱.۹۹) $k = -8, \quad k = \frac{1}{2}$

۲۶۲۹۳ حصہ ۱.۳ صفحہ ۳۷

۲۶۲۹۴ ۱.۱۰۳) دائرہ کار $(-\infty, \infty)$ ، سعت $[1, \infty)$

۲۶۲۹۵ ۱.۱۰۵) دائرہ کار $(0, \infty)$ ، سعت $(0, \infty)$

۲۶۲۹۶ ۱.۱۰۷) دائرہ کار $[-2, 2]$ ، سعت $[0, 2]$

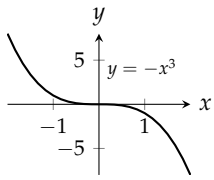
۲۶۲۹۷ ۱.۱۰۹) (الف) چونکہ چند x پر y کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں لہٰذا x کا تفاعل نہیں ہے۔

۲۶۲۹۸

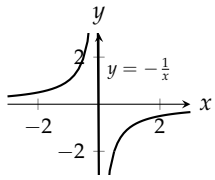
(ب) چونکہ ہر x پر y کی ایک قیمت پائی جاتی ہے لہٰذا x کا تفاعل ہے۔

۱.۱۱۱) $A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2, \quad p = 3x$

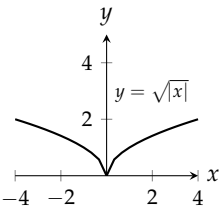
۱.۱۱۵) مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔



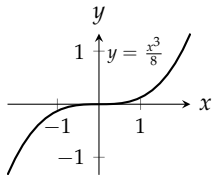
۱.۱۱۷) مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔



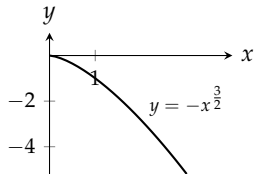
۱.۱۱۹) y محدد کے لحاظ سے تشاکل ہے۔



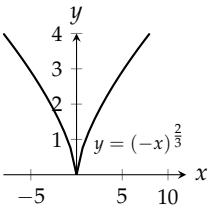
۱.۱۲۱) مبدا کے لحاظ سے تشاکل ہے۔



۱.۱۲۳) کوئی تشاکل نہیں پایا جاتا ہے۔

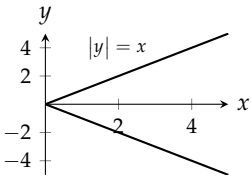


۱.۱۲۵) محور y کے لحاظ سے تشاکل۔

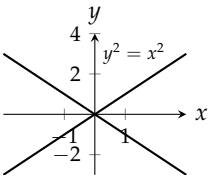


۱.۱۲۷) (الف) x کی ہر مثبت قیمت کے لیے y کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں۔

(ب) ہر $x \neq 0$ کے لیے y



کی دو قیمتیں پائی جاتی ہیں۔



۱.۱۲۹) جفت

۱.۱۳۱) جفت

۱.۱۳۳) طاق

۱.۱۳۵) جفت

۱.۱۳۷) ناجفت اور ناطاق

۱.۱۳۹) ناجفت اور ناطاق

۱.۱۴۱)

$$D_f : -\infty < x < \infty, D_g : x \geq 1,$$
$$R_f : -\infty < y < \infty, R_g : y \geq 0,$$
$$D_{f+g} = D_{f \cdot g} = D_g,$$
$$R_{f+g} : y \geq 1, R_{f \cdot g} : y \geq 0$$

۱.۱۴۳)

$$D_f : -\infty < x < \infty, D_g : -\infty < x < \infty,$$
$$R_f : y = 2, \; R_g : y \geq 1,$$
$$D_{\frac{f}{g}} : -\infty < x < \infty, \; R_{\frac{f}{g}} : 0 < y \leq 2,$$
$$D_{\frac{g}{f}} : -\infty < x < \infty, \; R_{\frac{g}{f}} : y \geq \frac{1}{2}$$

۱.۱۴۵)

ا. 2

ب. 22

ج. $x^2 + 2$

د. $x^2 + 10x + 22$

ھ. 5

و. -2

ز. $g + 10$

۲۶۷۱۹ ج. $x^4 - 6x^2 + 6$

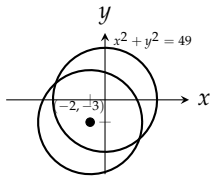
۲۶۷۲۹ ۱.۱۶۹) (الف) $y = (x-2)^2 + 2$

۲۶۷۳۰ (ب) $y = (x+2)^2 + 2$

۲۶۷۳۱ (پ) $y = (x+3)^2 - 2$

۲۶۷۳۲ (ت) $y = (x-1)^2 - 4$

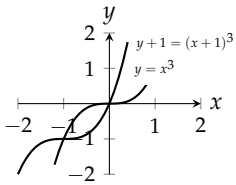
۲۶۷۳۳ ۱.۱۷۱) $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 49$ ،



۱.۱۵۱)

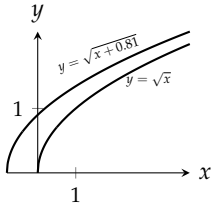
	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
۲۶۷۳۴ (الف)	$x-7$	$\sqrt{x}$	$\sqrt{x-7}$
(ب)	$x+2$	$3x$	$3x+6$
(ج)	x^2	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
۲۶۷۳۵ (د)	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	x
(ه)	$\frac{1}{x-1}$	$1+\frac{1}{x}$	x
(و)	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x}$	x

۱.۱۷۳) $y + 1 = (x+1)^3$ ،



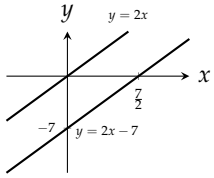
۲۶۷۳۶

۲۶۷۳۷ ۱.۱۷۵) $y = \sqrt{x + 0.81}$ ،



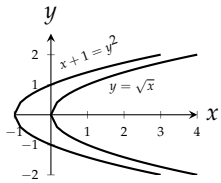
۲۶۷۳۸

۱.۱۷۷) $y = 2x$ ،



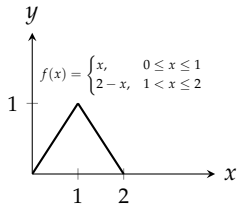
۲۶۷۳۹

۱.۱۷۹) $x + 1 = y^2$ ،

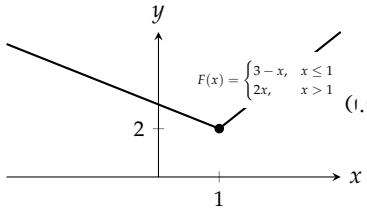


۲۶۷۴۰

۱.۱۵۳) ۲۶۷۴۰



۲۶۷۴۱ ۱.۱۵۵)



۲۶۷۴۲ ۱.۱۵۷) (الف) $y = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$ $y =$ ۲۶۷۴۰

۲۶۷۴۳ (ب) $\begin{cases} 2, & 0 \le x < 1 \text{ یا } 2 \le x < 3 \\ 0, & 1 \le x < 2 \text{ یا } 3 \le x \le 4 \end{cases}$

۲۶۷۴۴ ۱.۱۵۹) الف $0 \le x < 1$ (ب) $-1 < x \le 0$

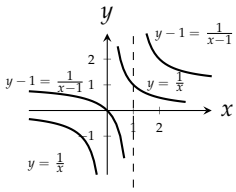
۲۶۷۴۵ ۱.۱۶۱) بلی

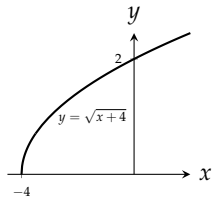
۲۶۷۴۶ حصه ۱.۴ صفحه ۵۲

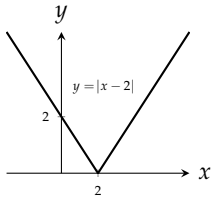
۲۶۷۴۷ ۱.۱۶۷) (الف) $y = -(x+7)^2$ $y = -(x-4)^2$

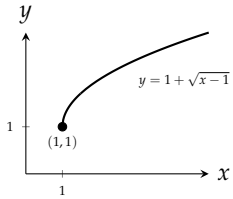
۲۶۷۴۸ (ب)

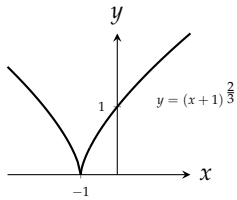
۲۶۷۴۹ ۱.۱۸۱) $y - 1 = \frac{1}{x-1}$ ،

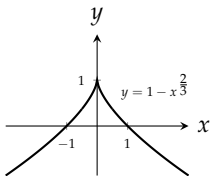
۲۶۷۴۴ 

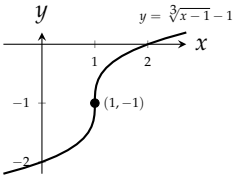
۲۶۷۴۵ (۱.۱۸۳ 

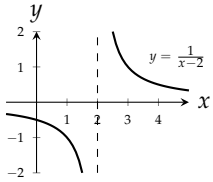
۲۶۷۴۶ (۱.۱۸۵ 

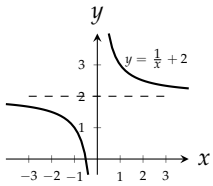
۲۶۷۴۷ (۱.۱۸۷ 

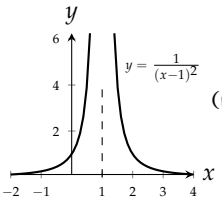
۲۶۷۴۸ (۱.۱۸۹ 

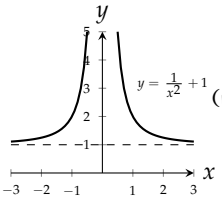
۲۶۷۴۹ (۱.۱۹۱ 

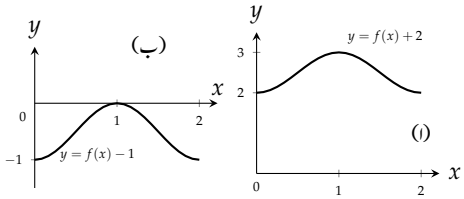
۲۶۷۵۰ (۱.۱۹۳ 

۲۶۷۵۱ (۱.۱۹۵ 

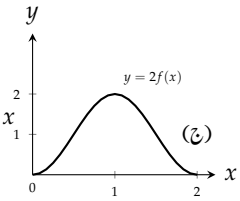
۲۶۷۵۲ (۱.۱۹۷ 

۲۶۷۵۳ (۱.۱۹۹ 

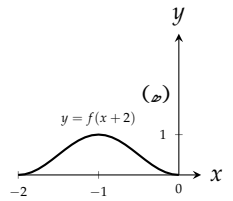
۲۶۷۵۴ (۱.۲۰۱ 

۲۶۷۵۵ (۱.۲۰۳ 

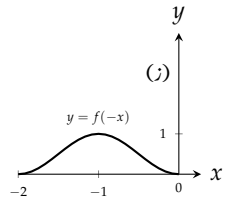
۲۶۷۵۶



۲۶۷۵۷



۲۶۷۵۸



۲۶۷۵۹ جبکہ دائرہ کار اور سعت درج ذیل ہیں۔

۲۶۷۶۰ ا. $D : [0,2],\ R : [2,3]$

۲۶۷۶۱ ب. $D : [0,2],\ R : [-1,0]$

۲۶۷۶۲ ج. $D : [0,2],\ R = [0,2]$

۲۶۷۶۳ د. $D : [0,2],\ R : [-1,0]$

۲۶۷۶۴ ھ. $D : [-2,0],\ R : [0,1]$

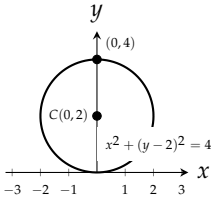
۲۶۷۶۵ و. $D : [1,3],\ R : [0,1]$

۲۶۷۶۶ ز. $D : [-2,0],\ R : [0,1]$

۲۶۷۶۷ ح. $D : [-1,1],\ R : [0,1]$

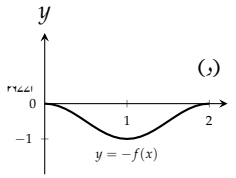
۲۶۷۶۸ ۱.۲۰۵) $x^2 + (y-2)^2 = 4$ ،

۲۶۷۶۹

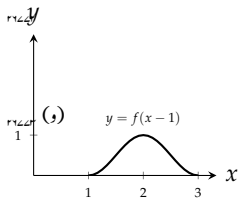


۲۶۷۷۰ ۱.۲۰۷) $(x+1)^2 + (y-5)^2 = 10$ ،

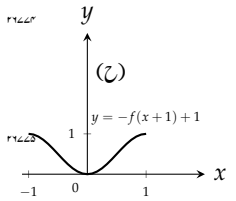
۲۶۷۷۱



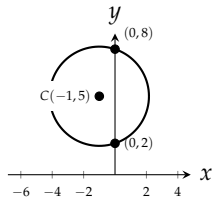
۲۶۷۷۲



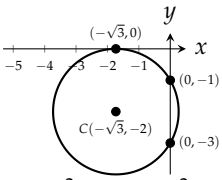
۲۶۷۷۳



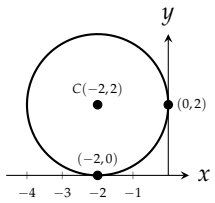
۲۶۷۷۴ ۱.۲۰۹) $(x+\sqrt{3})^2 + (y+2)^2 = 4$ ،



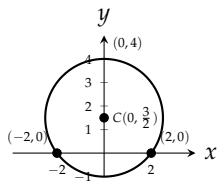
۲۶۷۷۵ ۱.۲۱۱) $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 4$ ،



۲۶۷۷۶ ۱.۲۱۳) $x^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{25}{4}$ ،

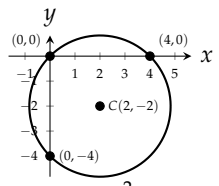


۲۶۷۷۷



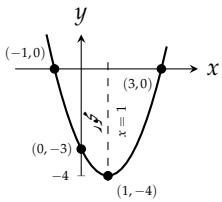
۲۶۷۷۸ ۱.۲۱۵) $(x-2)^2(y+2)^2 = 8$ ،

۲۶۷۷۹



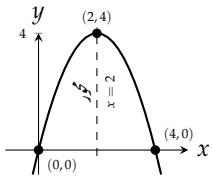
۲۶۷۸۰ ۱.۲۱۷) $y = x^2 - 2x - 3$ ،

۲۶۷۸۱

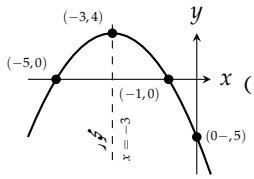


۲۶۷۸۲ (۱.۲۱۹ $y = -x^2 + 4x$

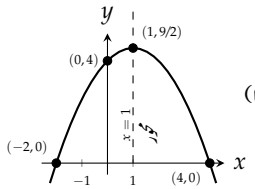
۲۶۷۸۳



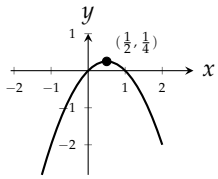
۲۶۷۸۴ (۱.۲۲۱



۲۶۷۸۵ (۱.۲۲۳



۲۶۷۸۶ (۱.۲۲۵



۲۶۷۸۷ (۱.۲۲۷ رداس $\sqrt{7}$ کے دائرے کا بیرون۔ دائرے کا مرکز مبدا پر ہے۔

۲۶۷۸۸ (۱.۲۲۹ $(1,0)$ پر مرکز اور رداس 2 دائرے پر اور اس کے اندر۔

۲۶۷۸۹ (۱.۲۳۱ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ اور دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ کے بیچ

۲۶۷۹۰ جھلی۔ (وہ نقطے جن کا مبدا سے فاصلہ 1 اور 2 کے بیچ ہے۔)

۲۶۷۹۱ (۱.۲۳۳ خط $y = -3$ کی بالائی جانب رداس 3 کے دائرہ کا

۲۶۷۹۲ اندرون۔ دائرے کا مرکز $(0,-3)$ ہے۔

۲۶۷۹۳ (۱.۲۳۵ $(x+2)^2 + (y-1)^2 < 6$

۲۶۷۹۴ (۱.۲۳۷ $x^2 + y^2 \leq 2, \quad x \geq 1$

۲۶۷۹۵ (۱.۲۳۹ $y = y_0 + m(x - x_0)$

۲۶۷۹۶ (۱.۲۴۱ $(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}), \quad (-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$

۲۶۷۹۷ (۱.۲۴۳ $(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}), \quad (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2})$

۲۶۷۹۸ (۱.۲۴۵ $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3}), \quad (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{3})$

۲۶۷۹۹ (۱.۲۴۷ $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}), \quad (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$

۲۶۸۰۰ حصہ ۱.۵ صفحہ ۷۱

۲۶۸۰۱ (۱.۲۵۳ (الف) 8π سنٹی میٹر (ب) 0.19 میٹر

۲۶۸۰۲ (۱.۲۵۵ 20.9 cm

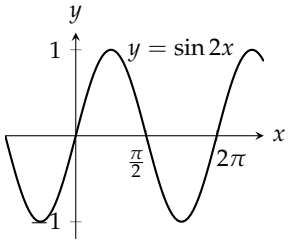
۲۶۸۰۳ (۱.۲۵۹ $\cos x = -\frac{4}{5}, \quad \tan x = -\frac{3}{4}$

۲۶۸۰۴ (۱.۲۶۱ $\sin x = -\frac{\sqrt{8}}{3}, \quad \tan x = -\sqrt{8}$

۲۶۸۰۵ (۱.۲۶۳ $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \cos x = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

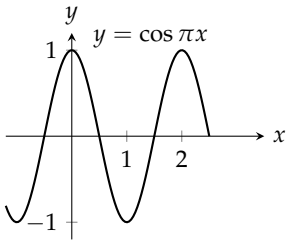
۲۶۸۰۶ (۱.۲۶۵ دوری عرصہ π ہے۔

۲۶۸۰۷

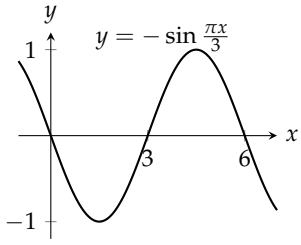


۲۶۸۰۸ (۱.۲۶۷ دائرہ کار: 2 ،

۲۶۸۰۹

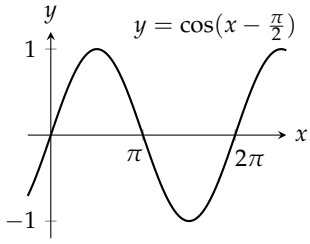


۲۶۸۱۰ (۱.۲۶۹ دائرہ کار: 6 ،



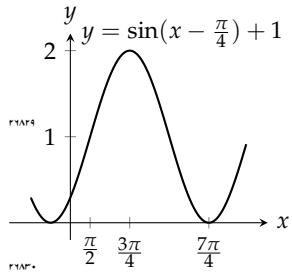
۲۶۸۱۲ (۱.۲۷۱ دائرہ کار: 2π ،

۲۶۸۱۳



۲۶۸۱۴ (۱.۲۷۳ دائرہ کار: 2π ،

۲۶۸۱۵

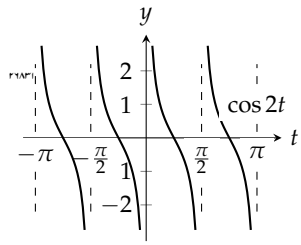


۲۶۸۲۹

۲۶۸۳۰

۲۶۸۱۶ ۱.۲۷۵) دائرہ کار: $\frac{\pi}{2}$ ،

۲۶۸۱۷

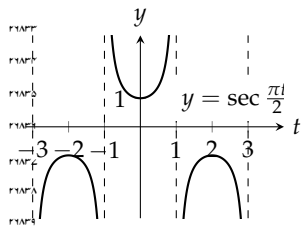


۲۶۸۳۱

۲۶۸۳۲

۲۶۸۱۸ ۱.۲۷۷) دائرہ کار: 4 ،

۲۶۸۱۹



۲۶۸۳۳

۲۶۸۳۴

۲۶۸۳۵

۲۶۸۳۶

۲۶۸۳۷

۲۶۸۳۸

۲۶۸۳۹

۲۶۸۲۰ ۱.۲۹۱) $-\cos x$

۲۶۸۲۱ ۱.۲۹۳) $-\cos x$

۲۶۸۲۲ ۱.۲۹۵) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

۲۶۸۲۳ ۱.۲۹۷) $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

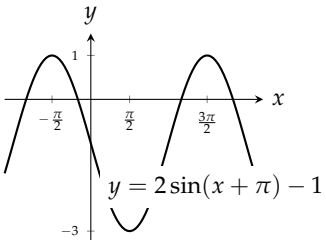
۲۶۸۲۴ ۱.۲۹۹) $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

۲۶۸۲۵ ۱.۳۰۱) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

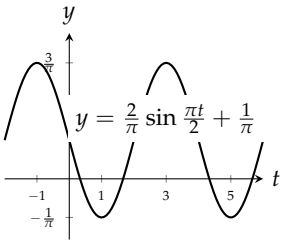
۲۶۸۲۶ ۱.۳۰۷) $c = \sqrt{7} \approx 2.646$

۲۶۸۲۷ ۱.۳۱۱) $a = 1.464$

۲۶۸۲۸ ۱.۳۱۳) $A = 2, B = 2\pi, C = -\pi, D = -1$ ؛



۱.۳۱۵) $A = -\frac{2}{\pi}, B = 4, C = 0, D = \frac{1}{\pi}$ ؛



حصہ ۲.۱ صفحہ ۸۶

۲.۱) (ا) موجود نہیں ہے۔ جیسے جیسے x دائیں سے 1 کے قریب تر ہوتا ہے ویسے ویسے $g(x)$ کی قیمت 0 کے قریب تر ہوتی ہے۔ جیسے جیسے x بائیں سے 1 کے قریب تر ہوتا ہے ویسے ویسے $g(x)$ کی قیمت 1 کے قریب تر ہوتی ہے۔ یوں x کی قیمت 1 کے قریب تر ہونے سے $g(x)$ کسی یکتا قیمت L کے قریب تر نہیں پہنچتا۔ (ب) 1 (ج) 0

۲.۳) (ا) درست (ب) درست (ج) غلط (د) غلط (ہ) غلط (و) درست

۲.۵) جیسے جیسے x دائیں سے 0 کے نزدیک تر ہوتا ہے $\frac{x}{|x|}$ کی قیمت $+1$ حاصل ہوتی ہے۔ جیسے جیسے x بائیں سے 1 کے نزدیک تر ہوتا ہے $\frac{x}{|x|}$ کی قیمت -1 حاصل ہوتی ہے۔ یوں x کا 0 کے نزدیک تر ہونے سے $\frac{x}{|x|}$ کسی یکتا قیمت کے نزدیک تر نہیں ہوتا۔

۲.۱۱) (ا)

x	-3.1	-3.01	-3.001
$f(x)$	-6.1	-6.01	-6.001

x	-3.0001	-3.00001	-3.000001
$f(x)$	-6.0001	-6.00001	-6.000001

x	-2.9	-2.99	-2.999
$f(x)$	-5.9	-5.99	-5.999

x	-2.9999	-2.99999	-2.999999
$f(x)$	-5.9999	-5.99999	-5.999999

(ج) $\lim_{x \to -3} f(x) = -6$

۲.۱۳) (ا)

۲۶۸۳۸

x	-5.9	-5.99	-5.999
$G(x)$	-0.126582	-0.1251564	-0.1250156

x	-5.9999	-5.99999	-5.999999
$G(x)$	-0.1250015	-0.1250001	-0.1250000

x	-6.1	-6.01	-6.001
$G(x)$	-0.123456	-0.124843	-0.124984

x	-6.0001	-6.00001	-6.000001
$G(x)$	-0.124998	-0.124999	-0.124999

۲۶۸۳۹ (ج) $\lim_{x\to -6} G(x) = -\frac{1}{8} = -0.125$

۲۶۸۵۰ ۲.۱۵) (ا)

x	-1.1	-1.01	-1.001
$f(x)$	2.1	2.01	2.001

x	-1.0001	-1.00001	-1.000001
$f(x)$	2.0001	2.00001	2.000001

۲۶۸۵۱

x	-0.9	-0.99	-0.999
$f(x)$	1.9	1.99	1.999

x	-0.9999	-0.99999	-0.999999
$f(x)$	1.9999	1.99999	1.999999

۲۶۸۵۲ (ج) $\lim_{x\to -1} f(x) = 2$

۲۶۸۵۳ ۲.۱۷) (ا)

θ	0.1	0.01	0.001
$g(\theta)$	0.998334	0.999983	0.999999

θ	0.0001	0.00001	0.000001
$g(\theta)$	0.999999	0.999999	0.999999

θ	-0.1	-0.01	-0.001
$g(\theta)$	0.998334	0.999983	0.999999

θ	-0.0001	-0.00001	-0.000001
$g(\theta)$	0.999999	0.999999	0.999999

۲۶۸۵۴ (ج) $\lim_{\theta\to 0} g(\theta) = 1$

۲۶۸۵۵ ۲.۱۹) (ا)

x	0.9	0.99	0.999
$f(x)$	0.348678	0.366032	0.367695

x	0.9999	0.99999	0.999999
$f(x)$	0.367861	0.367877	0.367879

۲۶۸۵۶

x	1.1	1.01	1.001
$f(x)$	0.385543	0.369711	0.368063

x	1.0001	1.00001	1.000001
$f(x)$	0.367897	0.367881	0.367878

۲۶۸۵۷ (ج) $\lim_{x\to 1} f(x) \approx 0.36788$

۲۶۸۵۸ ۲.۲۱) 4

۲۶۸۵۹ ۲.۲۳) 0

۲۶۸۶۰ ۲.۲۵) 9

۲۶۸۶۱ ۲.۲۷) $\frac{\pi}{2}$

۲۶۸۶۲ ۲.۲۹) (ا) 19 (ب) 1

۲۶۸۶۳ ۲.۳۱) (ا) $-\frac{4}{\pi}$ (ب) $-\frac{3\sqrt{3}}{\pi}$

۲۶۸۶۴ ۲.۳۳) 1

۲.۳۶) (ب) 5600000 ≈ سالانہ (پ) 4200000 ≈ سالانہ

۲.۳۸) (ا) $\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$, 0.414213, 0.449489 (ب)

$1+h$	1.1	1.01	1.001
$\sqrt{1+h}$	1.04880	1.004987	1.0004998
$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$	0.4880	0.4987	0.4998

$1+h$	1.0001	1.00001	1.000001
$\sqrt{1+h}$	1.0000499	1.000005	1.000005
$\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}$	0.499	0.5	0.5

(ج) 0.5 (د) 0.5

حصہ ۲.۲ صفحہ ۹۹

۲.۴۶) -9

۲.۴۸) 4

۲.۵۰) -8

۲.۵۲) $\frac{5}{8}$

۲.۵۴) $\frac{5}{2}$

۲.۵۶) 27

۲.۵۸) 16

۲.۶۰) $\frac{3}{2}$

۲.۶۲) $\frac{1}{10}$

۲.۶۴) -7

۲.۶۶) $\frac{3}{2}$

۲.۶۸) $-\frac{1}{2}$

۲.۷۰) $\frac{4}{3}$

۲.۷۲) $\frac{1}{6}$

۲.۷۴) 4

۲.۷۶) (ا) قاعدہ حاصل تقسیم (ب) فرق اور قاعدہ طاقت (پ) مجموعہ اور ضرب مستقل قاعدہ

۲.۷۸) (ا) -10 (ب) -20 (ج) -1 (د) $\frac{5}{7}$

۲.۸۰) (ا) 4 (ب) -21 (ج) -12 (د) $-\frac{7}{3}$

۲.۸۲) 2

۲.۸۴) 3

۲.۸۶) $\frac{1}{2\sqrt{7}}$

۲.۸۸) $\sqrt{5}$

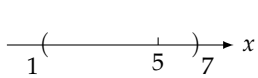
۲.۹۰) (ا) حد 1 ہے۔

۲.۹۴) 7

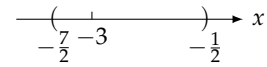
۲.۹۶) (ا) 5 (ب) 5

حصہ ۲.۳ صفحہ ۱۱۴

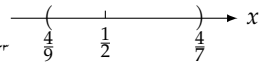
۲.۱۰۰) $\delta = 2$



۲۶۸۹۸ ۲.۱۰۲) $\delta = \frac{1}{2}$



۲۶۸۹۹ ۲.۱۰۴) $\delta = \frac{1}{18}$



۲۶۹۰۰ ۲.۱۰۶) $\delta = 0.1$

۲۶۹۰۱ ۲.۱۰۸) $\delta = \frac{7}{16}$

۲۶۹۰۲ ۲.۱۱۰) $\delta = \sqrt{5} - 2$

۲۶۹۰۳ ۲.۱۱۲) $\delta = 0.36$

۲۶۹۰۴ ۲.۱۱۴) $\delta = 0.01, \quad (3.99, 4.01)$

۲۶۹۰۵ ۲.۱۱۶) $\delta = 0.19, \quad (-0.19, 0.21)$

۲۶۹۰۶ ۲.۱۱۸) $\delta = 5, \quad (3, 15)$

۲۶۹۰۷ ۲.۱۲۰) $\delta = \frac{2}{3}, \quad (\frac{10}{3}, 5)$

۲۶۹۰۸ ۲.۱۲۲) $\delta = \sqrt{4.5} - 2 \approx 0.12, \ (-\sqrt{4.5}, -\sqrt{3.5})$

۲۶۹۰۹ ۲.۱۲۴) $\delta = \sqrt{17} - 4 \approx 0.12, \quad (\sqrt{15}, \sqrt{17})$

۲۶۹۱۰ ۲.۱۲۶) $\delta = \frac{0.03}{m}, \quad (2 - \frac{0.03}{m}, 2 + \frac{0.03}{m})$

۲۶۹۱۱ ۲.۱۲۸) $\delta = \frac{c}{m}, \quad (\frac{1}{2} - \frac{c}{m}, \frac{1}{2} + \frac{c}{m})$

۲۶۹۱۲ ۲.۱۳۰) $\delta = 0.01, \quad L = -3$

۲۶۹۱۳ ۲.۱۳۲) $\delta = 0.05, \quad L = 4$

۲۶۹۱۴ ۲.۱۳۴) $\delta = 0.75, \quad L = 4$

۲۶۹۱۵ ۲.۱۵۴) $[8.589, 8.598]$

۲۶۹۱۶ حصہ ۲.۴ صفحہ ۱۲۹

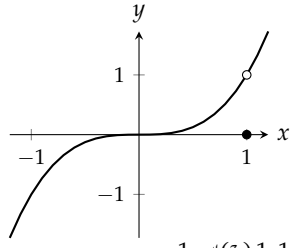
۲۶۹۱۷ ۲.۱۶۸) (ا) $2, 1$ ،

۲۶۹۱۸ (ب) نہیں $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$

۲۶۹۱۹ (ج) $3, 3$ ،(د) ہاں، 3

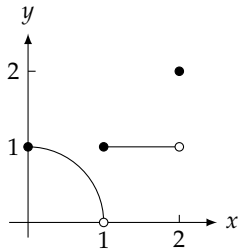
۲۶۹۲۰ ۲.۱۷۰) (ا) نہیں (ب) ہاں، 0 (ج) نہیں

۲۶۹۲۱ ۲.۱۷۲) (ا)



۲۶۹۲۲ (ب) $1, 1$ (ج) ہاں، 1

۲۶۹۲۳ ۲.۱۷۴)



۲۶۹۲۴ (ا) $D: 0 \le x \le 2$ ، $R: 0 < y \le 1$

۲۶۹۲۵ (ب) $(0,1) \cup (1,2)$ (ج) $y = 2$ اور $x = 2$

۲۶۹۲۶ (د) $x = 0$

۲۶۹۲۷ ۲.۱۷۶) $\sqrt{3}$

۲۶۹۲۸ ۲.۱۷۸) 1

۲۶۹۲۹ ۲.۱۸۰) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

۲۶۹۳۰ ۲.۱۸۲) (ا) 1 (ب) -1

۲۶۹۳۱ ۲.۱۸۴) (ا) 1 (ب) $\frac{2}{3}$

۲۶۹۳۲ ۲.۱۸۶) ∞

۲۶۹۳۳ ۲.۱۸۸) $-\infty$

۲۶۹۳۴ ۲.۱۹۰) $-\infty$

۲۶۹۳۵ ۲.۱۹۲) ∞

۲۶۹۳۶ ۲.۱۹۴) (ا) ∞ (ب) $-\infty$

۲۶۹۳۷ ۲.۱۹۶) ∞

۲۶۹۳۸ ۲.۱۹۸) ∞

۲۶۹۳۹ ۲.۲۰۰) $-\infty$

۲۶۹۴۰ ۲.۲۰۲) (ا) ∞ (ب) $-\infty$ (ج) ∞ (د) ∞

۲۶۹۴۱ ۲.۲۰۴) (ا) $-\infty$ (ب) ∞ (ج) 0 (د) $\frac{3}{2}$

۲۶۹۴۲ ۲.۲۰۶) (ا) $-\infty$ (ب) $\frac{1}{4}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $-\infty$ ہوگا۔

۲۶۹۴۳ ۲.۲۰۸) (ا) $-\infty$ (ب) ∞

۲۶۹۴۴ ۲.۲۱۰) (ا) ∞ (ب) ∞ (ج) ∞ (د) ∞

۲۶۹۴۵ ۲.۲۱۶) $\delta = \epsilon^2, \lim_{x\to 5^+} \sqrt{x-5} = 0$

۲۶۹۴۶ ۲.۲۲۰) (ا) 400 (ب) 399 (ج) حد غیر موجود ہے۔

۲۶۹۴۷ ۲.۲۲۶) (ا) ہر مثبت حقیقی عدد B کے لیے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود
۲۶۹۴۸ ہے کہ $x_0 - \delta < x < x_0$ میں تمام x کے لیے
۲۶۹۴۹ $f(x) > B$ ہے۔(ب) ہر منفی حقیقی عدد $-B$ کے لیے ایسا
۲۶۹۵۰ مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ $x_0 < x < x_0 + \delta$
۲۶۹۵۱ میں تمام x کے لیے $f(x) < -B$ ہے۔(ج) ہر منفی حقیقی
۲۶۹۵۲ عدد $-B$ کے لیے ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ موجود ہے کہ
۲۶۹۵۳ $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ میں تمام x کے لیے
۲۶۹۵۴ $f(x) < -B$ ہے۔

۲۶۹۵۵ حصہ ۲.۵ صفحہ ۱۴۹

۲۶۹۵۶ ۲.۲۳۳) نہیں؛ $x = 2$ پر غیر استراری ہے؛ $x = 2$ پر غیر معین ہے۔

۲۶۹۵۷ (۲.۲۳۵) استمراری

۲۶۹۵۸ (۲.۲۳۷) (ا)ہاں،(ب)ہاں،(ج)ہاں،(د)ہاں

۲۶۹۵۹ (۲.۲۳۹) (ا)نہیں،(ب)نہیں

۲۶۹۶۰ (۲.۲۴۱) 0

۲۶۹۶۱ (۲.۲۴۳) 1 ناقابل ہٹاؤ؛ 0 قابل ہٹاؤ

۲۶۹۶۲ (۲.۲۴۵) تمام ماسوائے $x = 2$

۲۶۹۶۳ (۲.۲۴۷) تمام ماسوائے $x = 3$ اور $x = 1$

۲۶۹۶۴ (۲.۲۴۹) تمام x

۲۶۹۶۵ (۲.۲۵۱) تمام ماسوائے $x = 0$

۲۶۹۶۶ (۲.۲۵۳) تمام x ماسوائے $x = \frac{n\pi}{2}$ جہاں n عدد صحیح ہے۔

۲۶۹۶۷ (۲.۲۵۵) تمام x ماسوائے $x = \frac{n\pi}{2}$ جہاں n طاق عدد صحیح ہے۔

۲۶۹۶۸ (۲.۲۵۷) تمام $x > -\frac{3}{2}$

۲۶۹۶۹ (۲.۲۵۹) تمام x

۲۶۹۷۰ (۲.۲۶۱) 0

۲۶۹۷۱ (۲.۲۶۳) 1

۲۶۹۷۲ (۲.۲۶۵) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲۶۹۷۳ (۲.۲۶۷) $g(3) = 6$

۲۶۹۷۴ (۲.۲۶۹) $f(1) = \frac{3}{2}$

۲۶۹۷۵ (۲.۲۷۱) $a = \frac{4}{3}$

۲۶۹۷۶ (۲.۲۹۵) $x \approx 1.8794, -1.5321, -0.3473$

۲۶۹۷۷ (۲.۲۹۷) $x \approx 1.7549$ ایک جذر حاصل کریں۔

۲۶۹۷۸ (۲.۲۹۹) $x \approx 3.5156$

۲۶۹۷۹ (۲.۳۰۱) $x \approx 0.7391$

۲۶۹۸۰ حصہ ۲.۶ صفحہ ۱۶۱

۲۶۹۸۱ (۲.۳۰۳) $N_1 : m = -2.25, \quad N_2 : m = 6$

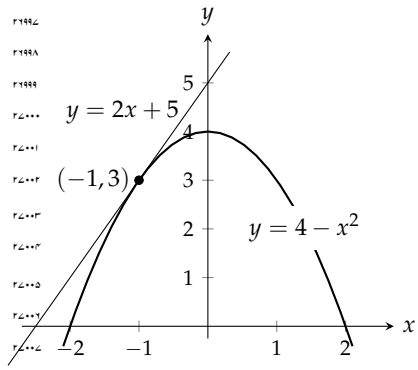
۲۶۹۸۲ (۲.۳۰۴) $N_1 : m = -2, \quad N_2 : m = 2$

۲۶۹۸۳ (۲.۳۰۵) $N_1 : m = -1.5, \quad N_2 : m = 0.5$

۲۶۹۸۴ (۲.۳۰۶) $N_1 : m = 2, \quad N_2 : m = -2$

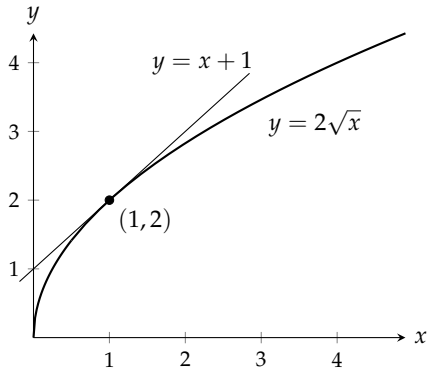
۲۶۹۸۵ (۲.۳۰۷) $y = 2x + 5$

۲۶۹۸۶



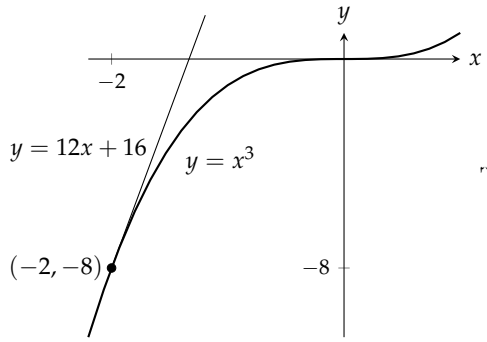
۲۶۹۸۷ (۲.۳۰۹) $y = x + 1$

۲۶۹۸۸



۲۶۹۸۹ (۲.۳۱۱) $y = 12x + 16$

۲۶۹۹۰



۲۶۹۹۱ (۲.۳۱۳) $m = 4, \quad y - 5 = 4(x - 2)$

۲۶۹۹۲ (۲.۳۱۵) $m = -2, \quad y - 3 = -2(x - 3)$

۲۶۹۹۳ (۲.۳۱۷) $m = 12, \quad y - 8 = 12(t - 2)$

۲۶۹۹۴ (۲.۳۱۹) $m = \frac{1}{4}, \quad y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$

۲۶۹۹۵ (۲.۳۲۱) $m = -10$

۲۶۹۹۶ (۲.۳۲۳) $m = -\frac{1}{4}$

۲۶۹۹۷ (۲.۳۲۵) $(-2, -5)$

۲۶۹۹۸ (۲.۳۲۷) $y = -(x + 1), \quad y = -(x - 3)$

۲۶۹۹۹ (۲.۳۲۹) $19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

۲۷۰۰۰ (۲.۳۳۱) 6π

۲۷۰۰۱ (۲.۳۳۳) ہاں

۲۷۰۰۲ (۲.۳۳۵) ہاں

۲۷۰۰۳ (۲.۳۳۷) (ا) کہیں نہیں

۲۷۰۰۴ (۲.۳۳۹) (ا) $x = 0$ پر

۲۷۰۰۵ (۲.۳۴۱) (ا) کہیں نہیں

۲۷۰۰۶ (۲.۳۴۳) (ا) $x = 1$ پر

۲۷۰۰۷ (۲.۳۴۵) (ا) $x = 0$ پر

حصہ ۳.۱ صفحہ ۱۷۸

۳.۱) $-2x, 6, 0, -2$

۳.۳) $-\frac{2}{t^3}, 2, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

۳.۵) $\frac{3}{2\sqrt{3\theta}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}$

۳.۷) $6x^2$

۳.۹) $\frac{1}{(2t+1)^2}$

۳.۱۱) $-\frac{1}{2(q+1)\sqrt{q+1}}$

۳.۱۳) $1-\frac{9}{x^2}, 0$

۳.۱۵) $3t^2-2t, 5$

۳.۱۷) $\frac{-4}{(x-2)\sqrt{x-2}}, y-4=-\frac{1}{2}(x-6)$

۳.۱۹) 6

۳.۲۱) $\frac{1}{8}$

۳.۲۳) -1

۳.۲۵) $-\frac{1}{4}$

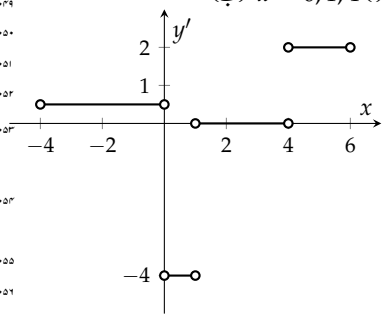
۳.۲۷) شکل ۳.۱۲-ب

۳.۲۸) شکل ۳.۱۲-د

۳.۲۹) شکل ۳.۱۲-ج

۳.۳۰) شکل ۳.۱۲-ا

۳.۳۱) (ا) $x=0,1,4$؛ (ب)



۳.۳۳) چونکہ $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$ جبکہ $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$ ہے لہٰذا $x=0$ پر $f(x)$ ناقابل تفرق ہے۔

۳.۳۵) چونکہ $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2$ جبکہ $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \frac{1}{2}$ ہے لہٰذا $x=1$ پر $f(x)$ ناقابل تفرق ہے۔

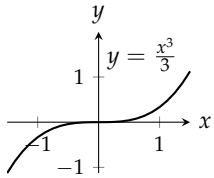
۳.۳۷) (ا) $-3 \le x \le 2$ (ب) کوئی نہیں (ج) کوئی نہیں۔

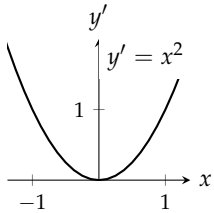
۳.۳۹) (ا) $-3 \le x < 0, 0 < x \le 3$ (ب) کوئی نہیں (ج) $x=0$

۳.۴۱) (ا) $-1 \le x < 0, 0 < x \le 2$ (ب) $x=0$ (ج) کوئی نہیں۔

۳.۴۳) (ا) $y'=-2x$ (ج) $x<0, x=0, x>0$ (د) $-\infty < x < 0, 0 < x < \infty$

۳.۴۵) (ا) $y'=x^2$، (ب)





(ج) $x \neq 0$ ، $x=0$ ، کوئی نہیں، (د) $-\infty < x < \infty$ ، کوئی نہیں۔

۳.۴۷) $y'=3x^2$ کبھی منفی نہیں ہوگا۔

۳.۴۹) ہاں، $y+16=-(x-3)$ نقطہ $(3,-16)$ پر مماس ہے۔

۳.۵۱) نہیں، چونکہ تفاعل $y=\lfloor x \rfloor$ متوسط قیمت خاصیت پر پورا نہیں اترتا۔

۳.۵۳) ہاں؛ $(-f)'(x)=-(f'(x))$

۳.۵۵) $g(t)=mt$ اور $h(t)=t$ کے لیے $\lim_{t\to 0}\frac{g(t)}{h(t)}=m$ ہوگا جو غیر صفر ہو سکتا ہے۔

حصہ ۳.۲ صفحہ ۱۹۷

۳.۶۶) $y'=-2x, \quad y''=-2$

۳.۶۸) $s'=15t^2-15t^4, \quad s''=30t-60t^3$

۳.۷۰) $y'=4x^2-1, \quad y''=8x$

۳.۷۲) $w'=-6z^{-3}+\frac{1}{z^2}, \quad w''=18z^{-4}-\frac{2}{z^3}$

۳.۷۴) $y'=12x-10+10x^{-3}, \quad y''=12-30x^{-4}$

۳.۷۶) $r'=-\frac{2}{3s^3}+\frac{5}{2s^2}, \quad r''=\frac{2}{s^4}-\frac{5}{s^3}$

۳.۷۸) $y'=-5x^4+12x^2-2x-3$

۳.۸۰) $y'=3x^2+10x+2-\frac{1}{x^2}$

۳.۸۲) $y'=\frac{-19}{(3x-2)^2}$

۳.۸۴) $g'(x)=\frac{x^2+x+4}{(x+0.5)^2}$

۳.۸۶) $\frac{dv}{dt}=\frac{t^2-2t-1}{(1+t^2)^2}$

۳.۸۸) $f'(s) = \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)^2}$

۳.۹۰) $v' = -\frac{1}{x^2} + 2x^{-3/2}$

۳.۹۲) $y' = \frac{-4x^3-3x^2+1}{(x^2-1)^2(x^2+x+1)^2}$

۳.۹۴) $y' = 2x^3 - 3x - 1, y'' = 6x^2 - 3,$
$y''' = 12x, y^{(4)} = 12$ جبکہ تمام $n \geq 5$ کے لیے
$y^{(n)} = 0$ ذیل ہوگا۔

۳.۹۶) $y' = 2x - 7x^{-2}, \quad y'' = 2 + 14x^{-3}$

۳.۹۸) $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 3\theta^{-4}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\theta^2} = -12\theta^{-5}$

۳.۱۰۰) $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = -z^{-2} - 1, \quad \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} = 2z^{-3}$

۳.۱۰۲) $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} = \frac{1}{6}q + \frac{1}{6}q^{-3} + q^{-5},$
$\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}q^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}q^{-4} - 5q^{-6}$

۳.۱۰۴) (ا) 13، (ب) -7، (ج) $\frac{7}{25}$، (د) 20

۳.۱۰۶) (ا) $y = -\frac{x}{8} + \frac{5}{4}$، (ب) $(0,1)$ پر $m = -4$، (ج) $y = 8x - 15$، $y = 8x + 17$

۳.۱۰۸) $y = 4x, y = 2$

۳.۱۱۰) $a = 1, b = 1, c = 0$

۳.۱۱۲) (ا) $y = 2x + 2$، (ج) $(2,6)$

۳.۱۱۴) $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}H} = -\frac{nRT}{(H-nb)^2} + \frac{2an^2}{H^3}$

۳.۱۱۶) قاعدہ حاصل ضرب اب مستقل مضرب کا قاعدہ ہوگا، لہٰذا دوسرا قاعدہ پہلے قاعدے میں موجود ہے۔

۳.۱۲۰) (ا) $\frac{3}{2}x^{1/2}$، (ب) $\frac{5}{2}x^{3/2}$، (ج) $\frac{7}{2}x^{5/2}$، (د) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{n/2}) = \frac{n}{2}x^{(n/2)-1}$

حصہ ۳.۳ صفحہ ۲۱۱

۳.۱۲۱) (ا) 80 m، (ب) $8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، $0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، $16\,\mathrm{m\,s^{-1}}$؛ (ج) $1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$، $1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ سمت تبدیلی نہیں ہوتی۔

۳.۱۲۳) (ا) $-9\,\mathrm{m}$، (ب) $-3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$؛ (ج) $-12\,\mathrm{m\,s^{-2}}$، $6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$؛ $12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سمت تبدیلی نہیں ہوتی۔

۳.۱۲۵) (ا) $-20\,\mathrm{m}$، (ب) $-5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، $45\,\mathrm{m\,s^{-1}}$؛ (ج) $\frac{4}{25}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$، $140\,\mathrm{m\,s^{-2}}$؛ $0.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سمت تبدیل نہیں ہوتی۔

۳.۱۲۷) (ا) $a(1) = -6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$، $a(3) = 6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
(ب) $v(2) = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (ج) 6 m

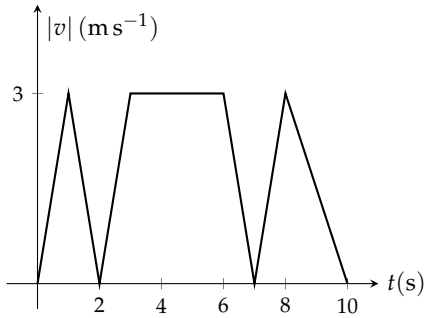
۳.۱۲۹) مریخ: 7.5 s، مشتری: 1.2 s

۳.۱۳۱) (ا) $9.8t\,\mathrm{m\,s^{-1}} - 2.4$، (ب) $-9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

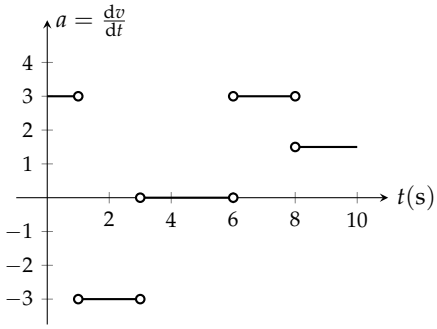
۳.۱۳۳) چاند پر 320 سیکنڈ، زمین پر 52 سیکنڈ؛ چاند پر 20287 میٹر، زمین پر 3297 میٹر

۳.۱۳۵) (ا) $9.8t\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (ب) $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

۳.۱۳۷) (ا) $t = 2, t = 7$ (ب) $3 \leq t \leq 6$
(ج)



(د)



۳.۱۳۹) (ا) $60\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (ب) 2 s
(ج) $t = 8.12\,\mathrm{s}$، $v = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
(د) 12 s، $v = -38\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
(ہ) 10 s (و) لمحہ $t = 2\,\mathrm{s}$ پر
(ز) 2 s تا 12 s

۳.۱۴۲) مقام بالمقابل وقت شکل-ج، رفتار بالمقابل وقت شکل-ب اور اسراع بالمقابل وقت شکل-ا ہیں۔

۳.۱۴۳) (ا) 110 روپیہ فی مشین (ب) 80 روپیہ (ج) 79.9 روپیہ

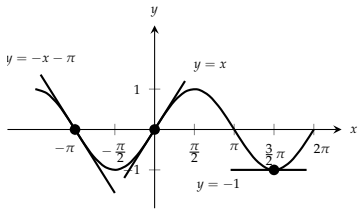
۳.۱۴۵) (ا) 10^4 جرثومے فی گھنٹہ؛ (ب) 0 جرثومے فی گھنٹہ؛ (ج) -10^4 جرثومے فی گھنٹہ

۳.۱۴۷) (ا) $5(\frac{t}{60} - 1)$ (ب) $t = 0$ پر گہرائی تیز ترین گھٹتی ہے جب شرح $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -5$ ہے اور $t = 60$ پر گھٹنے کی کم تر شرح $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ ہوگی۔

۳.۱۴۹) جہاز 25 سیکنڈ بعد اڑتا ہے اور اس دوران یہ 694 m فاصلہ طے کرتا ہے۔

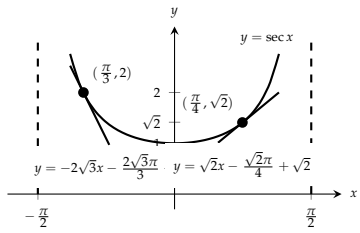
۳.۱۵۲) (ا) $t = 6.25\,\mathrm{s}$؛ (ب) $[0, 6.25)$ پر اوپر رخ اور $(6.25, 12.5]$ پر نیچے رخ؛ (ج) $t = 6.25\,\mathrm{s}$؛ (د) $[0, 6.25)$ پر رفتار بڑھتی ہے جبکہ $(6.25, 12.5]$ پر رفتار گھٹتی ہے؛ (د) $t = 0, 12.5$ پر تیز تر اور $t = 6.25$ پر آہستہ ترین؛ (و) $t = 6.25\,\mathrm{s}$

۳.۲۰۳)



۳.۱۵۴) (ا) $t = \frac{6\mp\sqrt{15}}{3}$؛ (ب) $\left(\frac{6-\sqrt{15}}{3}, \frac{6+\sqrt{15}}{3}\right)$ پر بائیں رخ اور $\left[0, \frac{6-\sqrt{15}}{3}\right) \cup \left(\frac{6+\sqrt{15}}{3}, 4\right]$ پر دائیں رخ؛ (ج) $t = \frac{6\mp\sqrt{15}}{3}$؛ (د) $\left(\frac{6-\sqrt{15}}{3}, 2\right) \cup \left(2, \frac{6+\sqrt{15}}{3}\right)$ پر رفتار بڑھتی ہے جبکہ $\left[0, \frac{6-\sqrt{15}}{3}\right) \cup \left(\frac{6+\sqrt{15}}{3}, 4\right]$ پر رفتار گھٹتی ہے؛ (و) $t = 0, 4$ پر تیز تر ہیں اور $t = \frac{6\mp\sqrt{15}}{3}$ پر آہستہ ترین؛ (و) $t = \frac{6+\sqrt{15}}{3}$

۳.۲۰۵)



حصہ ۳.۴ صفحہ ۲۲۷

۳.۱۵۵) $y' = -10 - 3\sin x$

۳.۱۵۷) $y' = -\csc x \cot x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

۳.۱۵۹) $y' = 0$

۳.۱۶۱) $\frac{-\csc^2 x}{(1+\cot x)^2}$

۳.۱۶۳) $4\tan x \sec x - \csc^2 x$

۳.۱۶۵) $x^2 \cos x$

۳.۱۶۷) $\sec^2 t - 1$

۳.۱۶۹) $\frac{-2\csc t \cot t}{(1-\csc t)^2}$

۳.۱۷۱) $-\theta(\theta\cos\theta + 2\sin\theta)$

۳.۱۷۳) $\sec\theta\csc\theta(\tan\theta - \cot\theta) = \sec^2\theta - \csc^2\theta$

۳.۱۷۵) $\sec^2 q$

۳.۱۷۷) $\sec^2 q$

۳.۱۷۹) (ا) $2\csc^3 x - \csc x$ (ب) $-2\sec^3 x - \sec x$

حصہ ۳.۵ صفحہ ۲۴۱

۳.۱۸۱) 0

۳.۱۸۳) -1

۳.۱۸۵) 0

۳.۱۸۷) 1

۳.۱۸۹) $3/4$

۳.۱۹۱) 2

۳.۱۹۳) $1/2$

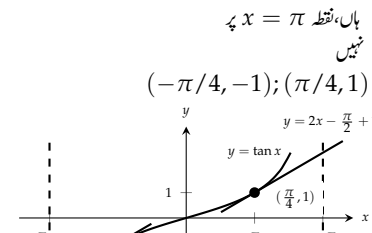
۳.۱۹۵) 2

۳.۱۹۷) 1

۳.۱۹۹) $1/2$

۳.۲۰۱) $3/8$

۳.۲۰۳)



۳.۲۰۵) $-\sqrt{2}\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \sqrt{2}\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \sqrt{2}\,\mathrm{m\,s^{-2}}, \sqrt{2}\,\mathrm{m\,s^{-3}}$

۳.۲۰۷) ہاں، نقطہ $x = \pi$ پر

۳.۲۰۹) نہیں

۳.۲۱۱) $(-\pi/4, -1); (\pi/4, 1)$

۳.۲۱۳) (ا) $y = -x + \pi/2 + 2$، (ب) $y = 4 - \sqrt{3}$

۳.۲۱۵)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 5u^4 \cdot 2 = 10(2x+1)^4$$

ہوگا۔

۳.۲۱۷) $c = 9$

۳.۲۱۹) $\sin x$

۳.۲۲۱) $u = (1 - x/7)$ لے کر، $y = u^{-7}$،

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -7u^{-8} \cdot \left(\frac{1}{7}\right) = (1 - x/7)^{-8}$$

۳.۲۲۳) $12x^3$

۳.۲۲۵) $3\cos(3x+1)$

۳.۲۲۷) $-\sin(\sin x)\cos x$

۳.۲۲۹) $10\sec^2(10x-5)$

۳.۲۳۱) $u = 2x + 1$ لیتے ہوئے $y = u^5$ اور

۲۷۱۸۷ (۳.۲۴۲) $u = x^2/8 + x - 1/x$ لے کر، $y = u^4$ ، حصہ ۳.۶ صفحہ ۲۵۶

۲۷۱۸۸ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} =$

۲۷۱۸۹ $4(x^2/8 + x - 1/x)^3(x/4 + 1 + 1/x^2)$

۲۷۱۹۰ (۳.۲۴۴) $u = \tan x$ لے کر $y = \sec u$ اور

۲۷۱۹۱ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (\sec u \tan u)(\sec^2 x) =$

۲۷۱۹۲ $\sec(\tan x)\tan(\tan x)\sec^2 x$

۲۷۱۹۳ (۳.۲۴۶) $u = \sin x$ لے کر $y = u^3$ اور

۲۷۱۹۴ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 3u^2\cos x =$

۲۷۱۹۵ $3\sin^2 x \cos x$

۲۷۱۹۶ (۳.۲۴۸) $-\frac{1}{2\sqrt{3-t}}$

۲۷۱۹۷ (۳.۲۵۰) $\frac{4}{\pi}(\cos 3t - \sin 5t)$

۲۷۱۹۸ (۳.۲۵۲) $\frac{\csc\theta}{\cot\theta + \csc\theta}$

۲۷۱۹۹ (۳.۲۵۴) $2x\sin^4 x + 4x^2\sin^3 x\cos x +$

۲۷۲۰۰ $\cos^{-2} x + 2x\cos^{-3} x \sin x$

۲۷۲۰۱ (۳.۲۵۶) $(3x-2)^6 - \frac{1}{x^3(4-\frac{1}{2x^2})^2}$

۲۷۲۰۲ (۳.۲۵۸) $\frac{(4x+3)^3(4x+7)}{(x+1)^4}$

۲۷۲۰۳ (۳.۲۶۰) $\sqrt{x}\sec^2(2\sqrt{x}) + \tan(2\sqrt{x})$

۲۷۲۰۴ (۳.۲۶۲) $\frac{2\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}$

۲۷۲۰۵ (۳.۲۶۴) $\frac{dr}{d\theta} = -2\sin(\theta^2)\sin 2\theta +$

۲۷۲۰۶ $2\theta\cos(2\theta)\cos(\theta^2)$

۲۷۲۰۷ (۳.۲۶۶) $\frac{dq}{dt} = (\frac{t+2}{2(t+1)^{3/2}})\cos(\frac{t}{\sqrt{t+1}})$

۲۷۲۰۸ (۳.۲۶۸) $2\pi\sin(\pi t - 2)\cos(\pi t - 2)$

۲۷۲۰۹ (۳.۲۷۰) $\frac{8\sin 2t}{(1+\cos 2t)^5}$

۲۷۲۱۰ (۳.۲۷۲) $-2\cos(\cos(2t-5))\sin(2t-5)$

۲۷۲۱۱ (۳.۲۷۴) $(1+\tan^4(\frac{t}{12}))^2(\tan^3(\frac{t}{12})\sec^2(\frac{t}{12}))$

۲۷۲۱۲ (۳.۲۷۶) $\frac{-t\sin(t^2)}{\sqrt{1+\cos(t^2)}}$

۲۷۲۱۳ (۳.۲۷۸) $\frac{6}{x^3}(1+\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})$

۲۷۲۱۴ (۳.۲۸۰) $2\csc^2(3x-1)\cot(3x-1)$

۲۷۲۱۵ (۳.۲۸۲) $\frac{5}{2}$

۲۷۲۱۶ (۳.۲۸۴) $-\pi/4$

۲۷۲۱۷ (۳.۲۸۶) 0

۲۷۲۱۸ (۳.۲۸۸) (ا) $2/3$ ، (ب) $2\pi + 5$ ، (ج) -8π ، (د) $37/6$ ،

۲۷۲۱۹ (ہ) -1 ، (و) $\frac{\sqrt{2}}{24}$ ، (ز) $5/32$ ، (ح) $\frac{-5}{3\sqrt{17}}$

۲۷۲۲۰ (۳.۲۹۰) 5

۲۷۲۲۱ (۳.۲۹۲) (ا) 1 ، (ب) 1

۲۷۲۲۲ (۳.۲۹۴) (ا) $y = \pi x + 2 - \pi$ ، (ب) $\pi/2$

۲۷۲۲۳ (۳.۲۹۶) سمتی رفتار دگنی، اسراع چار گنا اور جھٹکا آٹھ گنا ہو جاتا ہے۔

۲۷۲۲۴ (۳.۲۹۸) $v = 0.4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $a = -\frac{4}{125}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

۲۷۲۲۵ (۳.۳۱۱) $\frac{9}{4}x^{5/4}$

۲۷۲۲۶ (۳.۳۱۳) $\frac{2^{1/3}}{3x^{2/3}}$

۲۷۲۲۷ (۳.۳۱۵) $\frac{7}{2(x+6)^{1/2}}$

۲۷۲۲۸ (۳.۳۱۷) $-(2x+5)^{-3/2}$

۲۷۲۲۹ (۳.۳۱۹) $\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{1/2}}$

۲۷۲۳۰ (۳.۳۲۱) $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{7}t^{-5/7}$

۲۷۲۳۱ (۳.۳۲۳) $\frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3}(2t+5)^{-5/3}\cos[(2t+5)^{-2/3}]$

۲۷۲۳۲ (۳.۳۲۵) $f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x(1-\sqrt{x})}}$

۲۷۲۳۳ (۳.۳۲۷) $h'(\theta) = -\frac{2}{3}(\sin 2\theta)(1+\cos 2\theta)^{-2/3}$

۲۷۲۳۴ (۳.۳۲۹) $\frac{-2xy-y^2}{x^2+2xy}$

۲۷۲۳۵ (۳.۳۳۱) $\frac{1-2y}{2x+2y-1}$

۲۷۲۳۶ (۳.۳۳۳) $\frac{-2x^3+3x^2y-xy^2+x}{x^2y-x^3+y}$

۲۷۲۳۷ (۳.۳۳۵) $\frac{1}{y(x+1)^2}$

۲۷۲۳۸ (۳.۳۳۷) $\cos^2 y$

۲۷۲۳۹ (۳.۳۳۹) $\frac{-\cos^2(xy)-y}{x}$

۲۷۲۴۰ (۳.۳۴۱) $\frac{-y^2}{y\sin(\frac{1}{y})-\cos(\frac{1}{y})+xy}$

۲۷۲۴۱ (۳.۳۴۳) $-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\theta}}$

۲۷۲۴۲ (۳.۳۴۵) $\frac{-r}{\theta}$

۲۷۲۴۳ (۳.۳۴۷) $y' = -\frac{x}{y}$, $y'' = \frac{-y^2-x^2}{y^3}$

۲۷۲۴۴ (۳.۳۴۹) $y' = \frac{x+1}{y}$, $y'' = \frac{y^2-(x+1)^2}{y^3}$

۲۷۲۴۵ (۳.۳۵۱) $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1}$, $y'' = \frac{1}{2(\sqrt{y}+1)^3}$

۲۷۲۴۶ (۳.۳۵۳) -2

۲۷۲۴۷ (۳.۳۵۵) $(-2,1) : m = -1$, $(-2,-1) : m = 1$

۲۷۲۴۸ (۳.۳۵۷) (ا) $y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$ ، (ب) $y = -\frac{4}{7}x + \frac{29}{7}$

۲۷۲۴۹ (۳.۳۵۹) (ا) $y = 3x + 6$ ، (ب) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

۲۷۲۵۰ (۳.۳۶۱) (ا) $y = \frac{6}{7}x + \frac{6}{7}$ ، (ب) $y = -\frac{7}{6}x - \frac{7}{6}$

۲۷۲۵۱ (۳.۳۶۳) (ا) $y = -\frac{\pi}{2}x + \pi$ ، (ب) $y = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$

۲۷۲۵۲ (۳.۳۶۵) (ا) $y = 2\pi x - 2\pi$ ، (ب) $y = -\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}$

۲۷۲۵۳ (۳.۳۶۷) نقطہ $(-\sqrt{7}, 0)$ اور $\sqrt{7}, 0$ ، ڈھلوان: -2

۲۷۲۵۴ (۳.۳۶۹) $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ پر

۲۷۲۵۵ $m = -1$ ، $(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2})$ پر $m = \sqrt{3}$

۲۷۵۷ (۳.۳۷۱ $(3,2) : m = -\frac{27}{8}; (-3,-2) : m =$

۲۷۵۸ $\frac{27}{8}; (3,2) : m = \frac{27}{8};$

۲۷۵۹ $(3,-2) : m = -\frac{27}{8}$

۲۷۶۰ (۳.۳۷۳ (ا)غلط،(ب)درست،(ج)درست،(د)درست

۲۷۶۱ (۳.۳۷۵ $(3,-1)$

۲۷۶۲ (۳.۳۷۹ $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3+2xy}{x^2+3xy^2},$

۲۷۶۳ $\frac{dx}{dy} = -\frac{x^2+3xy^2}{y^3+2xy}, \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{dy/dx}$

۲۷۶۴ حصہ ۳.۷ صفحہ ۲۶۶

۲۷۶۵ (۳.۳۹۱ $\frac{dS}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$

۲۷۶۶ (۳.۳۹۳ (ا) $\frac{dH}{dt} = \pi r^2\frac{dh}{dt}$، (ب) $\frac{dH}{dt} = 2\pi rh\frac{dr}{dt}$،

۲۷۶۷ (ج) $\frac{dH}{dt} = \pi r^2\frac{dh}{dt} + 2\pi rh\frac{dr}{dt}$

۲۷۶۸ (۳.۳۹۵ (ا) $1\,\mathrm{V\,s^{-1}}$، (ب) $-\frac{1}{3}\,\mathrm{A\,s^{-1}}$،

۲۷۶۹ (ج) $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{I}\left(\frac{dV}{dt} - \frac{V}{I}\frac{dI}{dt}\right)$، (د) $\frac{3}{2}\,\Omega\,\mathrm{s^{-1}}$،

۲۷۷۰ مزاحمت بڑھ رہی ہے۔

۲۷۷۱ (۳.۳۹۷ (ا) $\frac{dS}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dx}{dt}$،

۲۷۷۲ (ب) $\frac{dS}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dx}{dt} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dy}{dt}$، ۲۷۳۰۵

۲۷۷۳ (ج) $\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}$

۲۷۷۴ (۳.۳۹۹ (ا) $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$،

۲۷۷۵ (ب) $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}b\sin\theta\frac{da}{dt}$، ۲۷۳۰۶

۲۷۷۶ (ج) $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}b\sin\theta\frac{da}{dt} +$

۲۷۷۷ $\frac{1}{2}a\sin\theta\frac{db}{dt}$

۲۷۷۸ (۳.۴۰۱ (ا) $14\,\mathrm{cm^2\,s^{-1}}$ سے بڑھتا ہے؛

۲۷۷۹ (ب) $0\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$، مستقل؛

۲۷۸۰ (ج) $-\frac{14}{13}\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$، گھٹ رہا ہے۔

۲۷۸۱ (۳.۴۰۳ (ا) $\frac{-3\sqrt{7}}{14}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، (ب) $\frac{-\sqrt{7}}{14}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$

۲۷۸۲ (۳.۴۰۵ $20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ۲۷۳۰۸

۲۷۸۳ (۳.۴۰۷ (ا) $\frac{dh}{dt} = 11.19\,\mathrm{cm\,min^{-1}}$،

۲۷۸۴ (ب) $\frac{dr}{dt} = 14.92\,\mathrm{cm\,min^{-1}}$

۲۷۸۵ (۳.۴۰۹ (ا) $-\frac{1}{24\pi}\,\mathrm{m\,min^{-1}}$، (ب) $r =$

۲۷۸۶ $\sqrt{26y-y^2}\,\mathrm{m}$، (ج) $\frac{dy}{dt} = -\frac{5}{288\pi}\,\mathrm{m\,min^{-1}}$

۲۷۸۷ (۳.۴۱۱ $1\,\mathrm{m/min}$، $40\pi\,\mathrm{m^2\,min^{-1}}$

۲۷۸۸ (۳.۴۱۳ $11\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

۲۷۸۹ (۳.۴۱۵ $\frac{466}{1681}\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ سے بڑھ رہا ہے۔ ۲۷۳۱۰

۲۷۹۰ (۳.۴۱۷ $1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

۲۷۹۱ (۳.۴۱۹ $-5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

۲۷۹۲ (۳.۴۲۱ $490\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

۲۷۹۳ (۳.۴۲۳ $\frac{dr}{dt} = 55\,\mu\mathrm{m\,s^{-1}}, \frac{dS}{dt} =$

$1.66\,\mathrm{cm^2\,s^{-1}}$

۲۷۹۴ (۳.۴۲۵ $58.9\,\mathrm{cm/min}$

۲۷۹۵ (۳.۴۲۷ (ا) $\frac{-12}{\sqrt{13}}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، (ب) $\frac{d\theta_1}{dt} = -0.138\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$،

۲۷۹۶ $\frac{d\theta_2}{dt} = 0.138\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

۲۷۹۷ (۳.۴۲۹ $4\sqrt{109}\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

۲۷۹۸ حصہ ۴.۱ صفحہ ۲۸۳

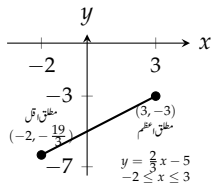
۲۷۹۹

۲۷۳۰۰ (۴.۱ $x = c_2$ پر مطلق اقل؛ $x = b$ پر مطلق اعظم۔

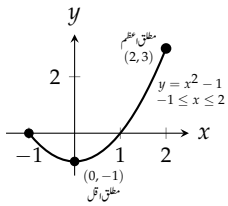
۲۷۳۰۱ (۴.۳ $x = c$ پر مطلق اعظم؛ مطلق اقل غیر موجود۔

۲۷۳۰۲ (۴.۵ $x = a$ پر مطلق اقل؛ $x = c$ پر مطلق اعظم۔

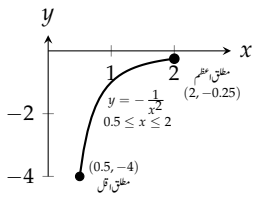
۲۷۳۰۳ (۴.۷ $x = -3$ پر مطلق اعظم؛ $x = -\frac{19}{3}$ پر مطلق اقل۔



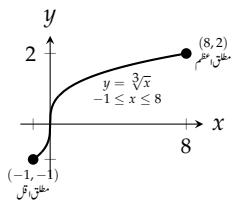
۲۷۳۰۴ (۴.۹ مطلق اعظم: 3 ، مطلق اقل: -1 ہے۔



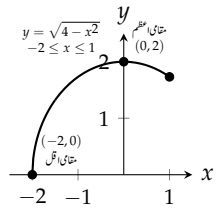
۲۷۳۰۷ (۴.۱۱ مطلق اعظم: -0.25 ، مطلق اقل: -4 ہے۔



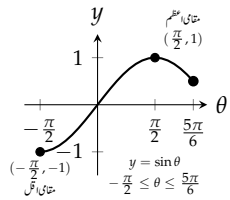
۲۷۳۰۸ (۴.۱۳ مطلق اعظم: 2 ، مطلق اقل: -1 ہے۔



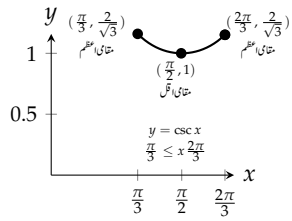
۴.۱۵) مطلق اعظم: 2 ، مطلق اقل: 0 ہے۔



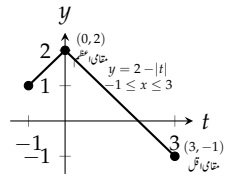
۴.۱۷) مطلق اعظم: 1 ، مطلق اقل: -1 ہے۔



۴.۱۹) مطلق اعظم: $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ، مطلق اقل: -1 ہے۔



۴.۲۱) مطلق اعظم: 2 ، مطلق اقل: -1 ہے۔



۴.۲۳) $(0,8)$ پر بڑھتا ہے، $(-1,0)$ پر گھٹتا ہے، $x^5 = 8$ پر مطلق اعظم 16 اور $x = 0$ پر مطلق اقل 0 ہے۔

۴.۲۵) $(-32,1)$ پر بڑھتا ہے، $\theta = 1$ پر مطلق اعظم 1 اور $\theta = -32$ پر مطلق اقل -8 ہے۔

۴.۲۷) (ا) $x = \mp 2$ پر مقامی اعظم 0 ہے، $x = 0$ پر مقامی اقل -4 ہے، مطلق اعظم 0 اور مطلق اقل -4 ہے۔ (ب) $x = -2$ پر مقامی اعظم 0 ہے، $x = 0$ پر مقامی اقل -4 ہے، مطلق اعظم 0 اور مطلق اقل -4 ہے۔ (ج) مقامی اعظم غیر موجود، $x = 0$ پر مقامی اقل -4 اور مطلق اقل -4 ہے۔ (د) $x = -2$ پر مقامی اعظم 0 ہے، $x = 0$ پر مقامی اقل -4 اور مطلق اقل -4 ہے۔ (ہ) مقامی انتہا غیر موجود، مطلق انتہا غیر موجود۔

۴.۲۹) ہاں

حصہ ۴.۲ صفحہ ۲۹۴

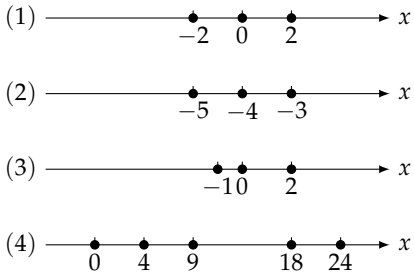
۴.۴۱) $\frac{1}{2}$

۴.۴۳) 1

۴.۴۵) نہیں کرتا؛ دائرہ کار کے اندرونی نقطہ $x = 0$ پر f ناقابل تفرق ہے۔

۴.۴۷) کرتا ہے۔

۴.۵۱) (ا)



۴.۶۷) $1.09999 \le f(0.1) \le 1.1$

۴.۷۱) ہاں

۴.۷۳) (ا) 4 ، (ب) 3 ، (ج) 3

۴.۷۵) (ا) $\frac{x^2}{2} + C$ ، (ب) $\frac{x^3}{3} + C$ ، (ج) $\frac{x^4}{4} + C$

۴.۷۷) (ا) $\frac{1}{x} + C$ ، (ب) $x + \frac{1}{x} + C$ ، (ج) $5x - \frac{1}{x} + C$

۴.۷۹) (ا) $-\frac{1}{2}\cos 2t + C$ ، (ب) $2\sin\frac{t}{2} + C$ ، (ج) $-\frac{1}{2}\cos 2t + 2\sin\frac{t}{2} + C$

۴.۸۱) $f(x) = x^2 - x$

۴.۸۳) $r(\theta) = 8\theta + \cot\theta - 2\pi - 1$

حصہ ۴.۳ صفحہ ۳۰۵

۴.۹۴) (ا) 0 ، 1 ؛ (ب) $(-\infty, 0)$ اور $(1, \infty)$ پر بڑھتا ہے، $(0.1, c)$ پر گھٹتا ہے، مقامی اعظم $x = 0$ پر اور مقامی اقل $x = 1$ پر ہے۔

۴.۹۶) (ا) -2 ، 1 ؛ (ب) $(-2, 1)$ اور $(1, \infty)$ پر بڑھتا، $-\infty, -2$ پر گھٹتا؛ (ج) مقامی اعظم غیر موجود، $(x = -2)$ پر مقامی اقل۔

۴.۹۸) (ا) -2 ، 1 ، 3 ؛ (ب) $(-2, 1)$ اور $(3, \infty)$ پر بڑھتا، $(-\infty, -2)$ اور $(1, 3)$ پر گھٹتا؛ (ج) $(x = 1)$ پر مقامی اعظم، $(x = -2)$ اور $x = 3$ پر مقامی اقل۔

۴.۱۰۰) (ا) -2 ، 0 ؛(ب) $(-\infty,-2)$ اور $(0,\infty)$ پر بڑھتا، $(-2,0)$ پر گھٹتا؛(ج) $x=-2$ مقامی اعظم، $x=0$ پر مقامی اقل۔

۴.۱۰۲) (ا) 0 $(-\infty,-1.5)$ پر بڑھتا، $(-1.5,\infty)$ پر گھٹتا؛ (ب) $t=-1.5$ پر مقامی اعظم 5.25 ؛ (ج) $t=-1.5$ پر مطلق اعظم 5.25 ہے۔

۴.۱۰۴) (ا) $(-\infty,0)$ اور $(\frac{4}{3},\infty)$ پر گھٹتا، $(0,\frac{4}{3})$ پر بڑھتا؛ (ب) $x=0$ پر مقامی اقل، $x=\frac{4}{3}$ پر مقامی اعظم $(\frac{4}{3},\frac{32}{27})$ ؛(ج) مطلق انتہا غیر موجود۔

۴.۱۰۶) (ا) $(-\infty,0)$ اور $(\frac{1}{2},\infty)$ پر گھٹتا، $(0,\frac{1}{2})$ پر بڑھتا؛ (ب) $\theta=\frac{1}{2}$ پر مقامی اعظم $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ ؛(ج) مطلق انتہا غیر موجود۔

۴.۱۰۸) (ا) $(-\infty,\infty)$ پر بڑھتا ہے یعنی کبھی کم نہیں ہوتا؛(ب) مقامی انتہا غیر موجود؛(ج) مطلق انتہا غیر موجود۔

۴.۱۱۰) (ا) $(-2,0)$ اور $(2,\infty)$ پر بڑھتا، $(-\infty,-2)$ اور $(0,2)$ پر گھٹتا؛(ب) $x=0$ پر مقامی اعظم 16 اور $x=\mp 2$ پر مقامی اقل 0 ؛(ج) مطلق اعظم غیر موجود؛ $x=\mp 2$ پر مطلق اقل 0

۴.۱۱۲) (ا) $(-\infty,-1)$ اور $(0,1)$ پر بڑھتا، $(-1,0)$ اور $(1,\infty)$ پر گھٹتا؛(ب) $x=\mp 1$ پر مقامی اعظم $(\mp 1,0.5)$ ہے $x=0$ پر مقامی اقل $(0,0)$ ہے؛(ج) $x=\mp 1$ پر مطلق اعظم جبکہ مطلق اقل غیر موجود۔

۴.۱۱۴) (ا) $(-2\sqrt{2},-2)$ اور $(2,2\sqrt{2})$ پر گھٹتا $(-2,2)$ پر بڑھتا ہے؛(ب) مقامی اقل $g(-2)=-4$ ، $g(2\sqrt{2}=0$ ؛مقامی اعظم $g(-2\sqrt{2}=4$ ، $g(2)=4$ (ج) $x=2$ پر مطلق اعظم 4 اور $x=-2$ پر مطلق اقل -4 ہے۔

۴.۱۱۶) (ا) $(-\infty,1)$ پر بڑھتا $1<x<2$ اور $2<x<3$ پر گھٹتا ہے۔ $x=2$ پر غیر استراری اور $(3,\infty)$ پر بڑھتا ہے۔(ب) $x=3$ پر مقامی اقل $(3,6)$ اور $x=1$ پر مقامی اعظم $(1,2)$ ؛(ج) مطلق انتہا غیر موجود۔

۴.۱۱۸) (ا) $(-2,0)$ اور $(0,\infty)$ پر بڑھتا، $(-\infty,-2)$ پر گھٹتا؛(ب) $x=-2$ پر مقامی اقل $-6\sqrt[3]{2}$ ؛(ج) مطلق اعظم غیر موجود، $x=-2$ پر مطلق اقل $-6\sqrt[3]{2}$ ہے۔

۴.۱۲۰) (ا) $(-\infty,-\frac{2}{\sqrt{7}})$ اور $(\frac{2}{\sqrt{7}},\infty)$ پر بڑھتا، $(-\frac{2}{\sqrt{7}},\frac{2}{\sqrt{7}})$ پر گھٹتا؛(ب) $x=\frac{2}{\sqrt{7}}$ پر مقامی اعظم $x=\frac{2}{\sqrt{7}}$ جبکہ $\frac{24\sqrt[3]{2}}{7^{7/6}}\approx 3.12$ پر مقامی اقل $-\frac{24\sqrt[3]{2}}{7^6}\approx -3.12$ ہے؛(ج) مطلق انتہا غیر موجود۔

۴.۱۲۲) (ا) $x=1$ پر مقامی اعظم 1 اور $x=2$ پر مقامی اقل 0 ہے؛ (ب) $x=1$ پر مطلق اعظم 1 جبکہ مطلق اقل غیر موجود۔

۴.۱۲۴) (ا) $x=1$ پر مقامی اعظم 1 اور $x=2$ پر مقامی اقل 0 ہے؛ (ب) مطلق اعظم غیر موجود، $x=2$ پر مطلق اقل 0 ہے۔

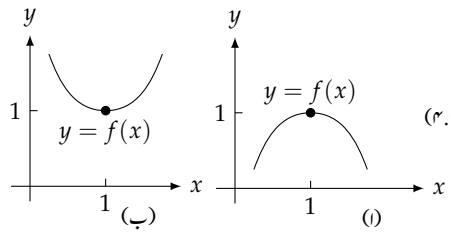
۴.۱۲۶) (ا) $t=-3$ پر $9-$ اور $t=2$ پر 16 مقامی اعظم ہیں۔ $t=-2$ پر مقامی اقل $16-$ ہے۔(ب) $t=2$ پر مطلق اعظم 16 ؛مطلق اقل غیر موجود۔

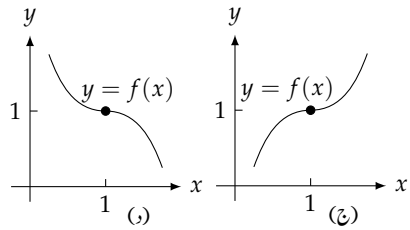
۴.۱۲۸) (ا) $x=0$ پر مقامی اقل 0 ؛(ب) مطلق اعظم غیر موجود؛ $x=0$ پر مطلق اقل 0 ہے۔

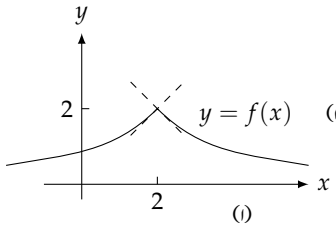
۴.۱۳۰) (ا) $x=\frac{2\pi}{3}$ پر مقامی اقل $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$ جبکہ $x=0$ پر مقامی اعظم 0 ہے اور $x=2\pi$ پر مقامی اعظم π ہے۔

۴.۱۳۲) (ا) $x=\frac{\pi}{4}$ پر مقامی اقل 0 ہے۔

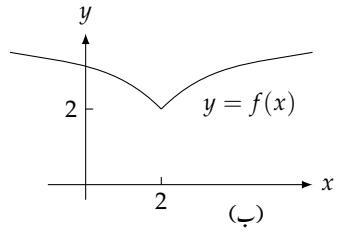
۴.۱۳۴) (ا) $\theta=0$ پر مقامی اعظم 3 اور $\theta=2\pi$ پر مقامی اقل -3 ہے۔



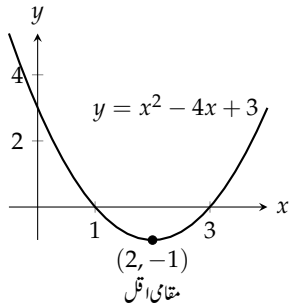




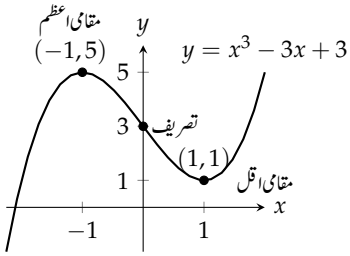
۴.۱۳۸)

۲۷۴۱۳ 

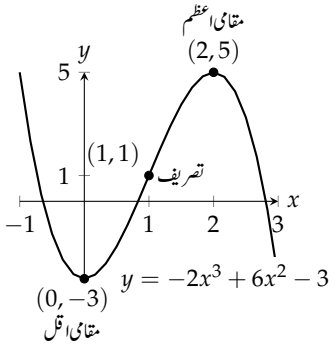
(۴.۱۵۶ ۷۳۸



۲۷۴۱۴ حصہ ۴.۴ صفحہ ۳۱۷

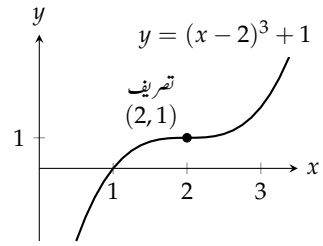


۲۷۴۱۵ (۴.۱۴۲ $x = -1$ پر $\frac{3}{2}$ مقامی اعظم، $x = 2$ پر -3 مقامی اقل (۴.۱۵۲
۲۷۴۱۶ نقطہ تصریف $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$، چڑھاؤ $(-\infty, -1)$ اور
۲۷۴۱۷ $(2, \infty)$ پر، اتار $(-1, 2)$ پر، اوپر مقعر $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ پر جبکہ
۲۷۴۱۸ نیچے مقعر $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ پر۔



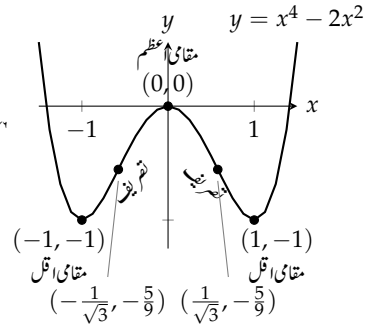
۲۷۴۱۹ (۴.۱۴۴ $x = 0$ پر $\frac{3}{4}$ مقامی اعظم، $x = \mp 1$ پر 0 مقامی اقل،
۲۷۴۲۰ $\left(-\sqrt{3}, \frac{3\sqrt[3]{4}}{4}\right)$ اور $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt[3]{4}}{4}\right)$ پر نقطہ تصریف،
۲۷۴۲۱ چڑھاؤ $(-1, 0)$ اور $(1, \infty)$ پر، اتراؤ $(-\infty, -1)$ اور
۲۷۴۲۲ $(0, 1)$ پر، $(-\infty, -\sqrt{3})$ ور $(\sqrt{3}, \infty)$ پر مقعر اوپر،
۲۷۴۲۳ $(-\sqrt{3}, 3)$ پر مقعر نیچے۔

۲۷۴۲۴ (۴.۱۴۶ $x = -\frac{2\pi}{3}$ پر $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\pi}{3}$ اور $x = -\frac{2\pi}{3}$ (۴.۱۵۴ ۷۴۰
۲۷۴۲۵ $x = -\frac{\pi}{3}$ پر $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}$ مقامی اعظم،
۲۷۴۲۶ $x = \frac{2\pi}{3}$ پر $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}$ اور $x = -\frac{2\pi}{3}$ پر $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{3}$ مقامی
۲۷۴۲۷ اقل، $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$، $(0, 0)$ اور $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ پر نقطہ
۲۷۴۲۸ تصریف، $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ پر چڑھاؤ، $\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right)$ اور
۲۷۴۲۹ $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ پر اتار، $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ اور $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ پر مقعر اوپر،
۲۷۴۳۰ $\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right)$ اور $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ پر مقعر نیچے۔

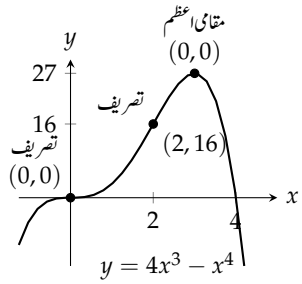


۲۷۴۳۱ (۴.۱۴۸ $x = -\frac{\pi}{2}$ اور $x = \frac{\pi}{2}$ پر 1 مقامی اعظم، $x =$
۲۷۴۳۲ -2π، $x = 0$ اور $x = 2\pi$ پر صفر، $x = -\frac{3\pi}{2}$
۲۷۴۳۳ اور $\frac{3\pi}{2}$ $x =$ پر -1 مقامی اقل، $(-\pi, 0)$ اور
۲۷۴۳۴ $(\pi, 0)$ نقطہ تصریف، $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$، $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (۴.۱۵۶ ۷۴۱
۲۷۴۳۵ $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ پر چڑھاؤ، $\left(-2\pi, -\frac{3\pi}{2}\right)$، $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$
۲۷۴۳۶ اور $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ پر اتار، $(-2\pi, -\pi)$ اور $(\pi, 2\pi)$ پر
۲۷۴۳۷ مقعر اوپر، $(-\pi, \pi)$ پر مقعر نیچے۔

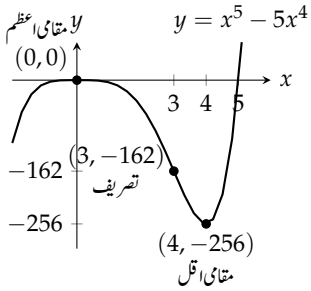
(۴.۱۵۸.۷۳۳۲)



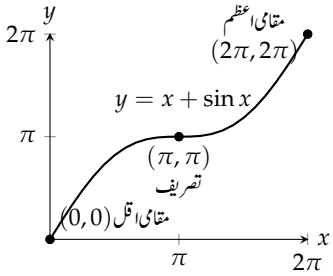
(۴.۱۶۰.۷۳۳۳)



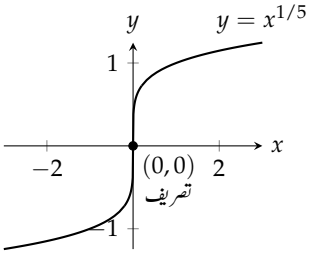
(۴.۱۶۲.۷۳۳۴)



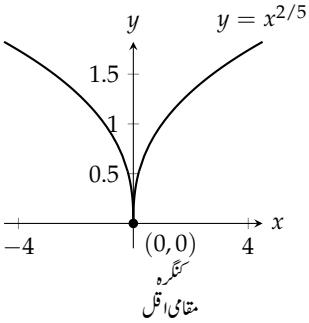
(۴.۱۶۴.۷۳۳۵)



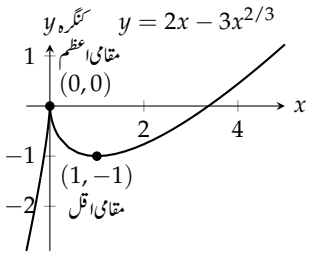
(۴.۱۶۶.۷۳۳۶)



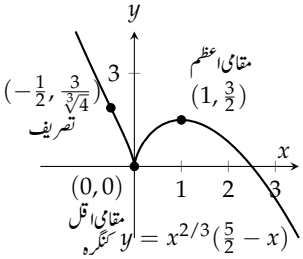
(۴.۱۶۸.۷۳۳۷)



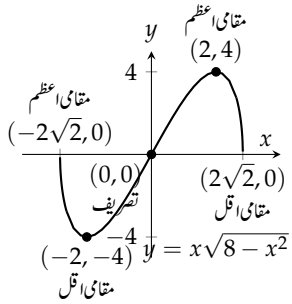
(۴.۱۷۰.۷۳۳۸)



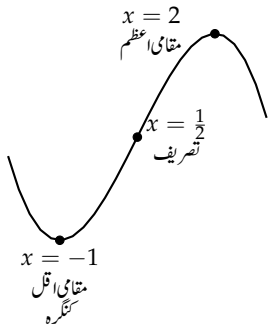
(۴.۱۷۲.۷۳۳۹)



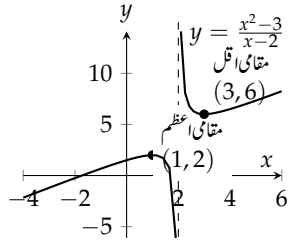
(۴.۱۷۴ ۲۷۳۵۰



۲۷۳۵۵

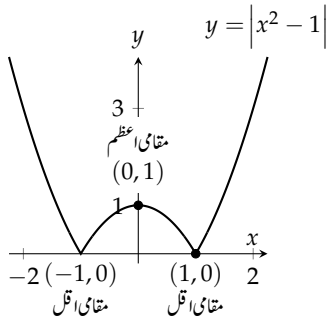


(۴.۱۷۶ ۲۷۳۵۱



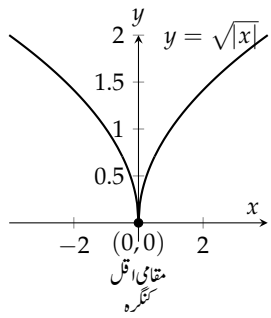
۲۷۳۵۲

(۴.۱۷۷ ۲۷۳۵۲



۲۷۳۵۳

(۴.۱۷۸ ۲۷۳۵۳



۲۷۳۵۴

(۴.۱۸۲ $y'' = 1 - 2x$

۲۷۳۵۵

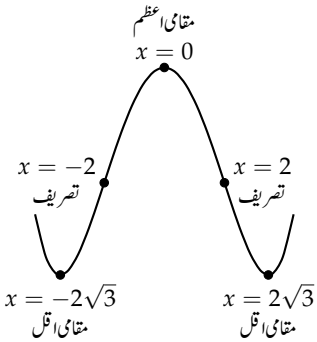
(۴.۱۸۳

۲۷۳۵۶

(۴.۱۸۴ $y'' = 3(x-3)(x-1)$

۲۷۳۵۷

(۴.۱۸۵



۲۷۳۵۸

(۴.۱۸۶ $y'' = 3(x-2)(x+2)$

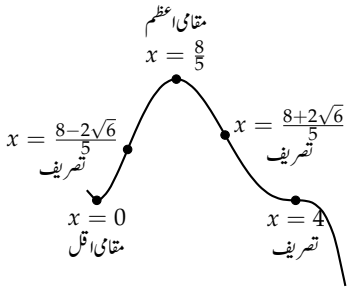
۲۷۳۵۹

(۴.۱۸۷

۲۷۳۶۰

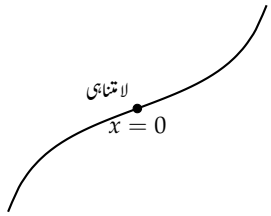
(۴.۱۸۸ $y'' = 4(4-x)(5x^2-16x+8)$

۲۷۳۶۱



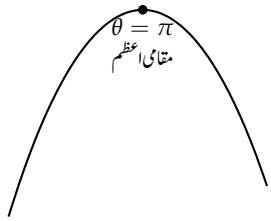
۲۷۳۶۲ $y'' = 2\sec^2 x \tan x$ (۴.۱۹۰

۲۷۳۶۳



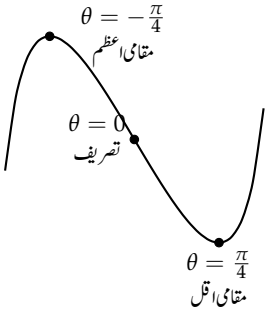
۲۷۳۶۴ $y'' = -\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2},\ 0 < \theta < 2\pi$ (۴.۱۹۲

۲۷۳۶۵



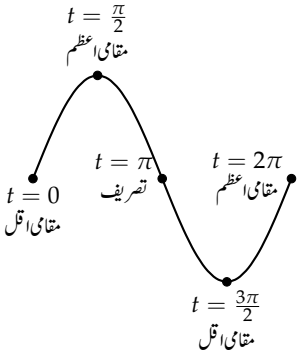
۲۷۳۶۶ $y'' = 2\tan\theta\sec^2\theta,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ (۴.۱۹۴

۲۷۳۶۷



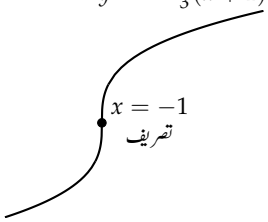
۲۷۳۶۸ $y'' = -\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ (۴.۱۹۶

۲۷۳۶۹



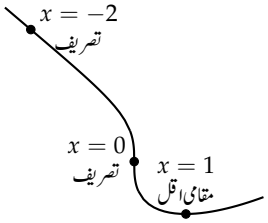
۲۷۳۷۰ $y'' = -\frac{2}{3}(x+1)^{-5/3}$ (۴.۱۹۸

۲۷۳۷۱



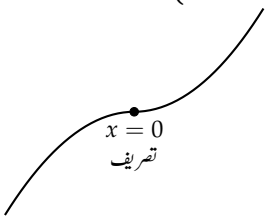
۲۷۳۷۲ $y'' = \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{2}{3}x^{-5/3}$ (۴.۲۰۰

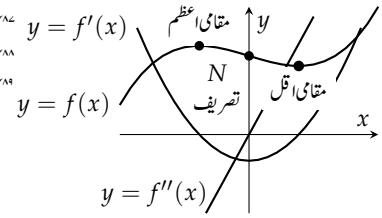
۲۷۳۷۳

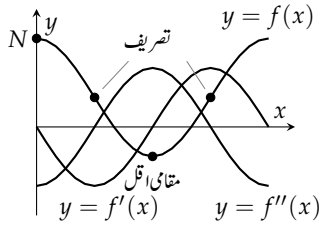


۲۷۳۷۴ $y'' = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$ (۴.۲۰۲

۲۷۳۷۵



۲۷۴۸۷ ۴.۲۰۴) 

۲۷۴۸۷ ۴.۲۰۶) 

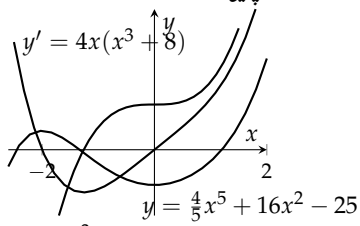
۲۷۴۸۸ ۴.۲۰۸)

	y'	y''
P	$-$	$+$
Q	$+$	0
R	$+$	$-$
S	0	$-$
T	$-$	$-$

۲۷۴۸۷ ۴.۲۲۸) $y' = 0$ اور $y'' = 0$ کے صفر بالترتیب نقطہ انتہا اور نقطہ تصریف ہیں۔ تصریف $x = -\sqrt[3]{2}$ پر اور مقامی اعظم $x = -2$ پر ہیں۔

۲۷۴۸۸

۲۷۴۸۹



۲۷۴۹۰

۲۷۴۹۱ ۴.۲۳۲) (ب) $f'(x) = 3x^2 + k; -12k$؛ مثبت اگر $k <$
۲۷۴۹۲ 0، منفی اگر $k > 0$ ہو، 0 اگر $k = 0$ ہو؛ اگر $k < 0$ ہو
۲۷۴۹۳ تب f' کے دو صفر ہوں گے، $k = 0$ کی صورت میں ایک صفر اور
۲۷۴۹۴ $k > 0$ کی صورت میں کوئی صفر نہیں ہوگا۔

۲۷۴۹۵ ۴.۲۳۴) (ب) چونکہ $\lim_{x\to 0^-} y' = \infty$ اور
۲۷۴۹۶ $\lim_{x\to 0^+} y' = -\infty$ ہیں لہٰذا کنگرہ ہوگا۔

۲۷۴۹۷ ۴.۲۳۶) y' کی ترسیم $x = -3$ کے قریب محور کو قطع کرتی ہے لہٰذا
۲۷۴۹۸ $x = -3$ کے قریب y کا افقی مماس ہوگا۔

۲۷۴۹۹ **حصہ ۴.۵ صفحہ ۳۴۰**

۲۷۵۰۰ ۴.۲۳۷) (ا) -3، (ب) -3

۲۷۵۰۱ ۴.۲۳۹) (ا) $\frac{1}{2}$، (ب) $\frac{1}{2}$

۲۷۵۰۲ ۴.۲۴۱) (ا) $-\frac{5}{3}$، (ب) $-\frac{5}{3}$

۲۷۵۰۳ ۴.۲۴۳) 0

۲۷۵۰۴ ۴.۲۴۵) -1

۲۷۵۰۵ ۴.۲۴۷) (ا) $\frac{2}{5}$، (ب) $\frac{2}{5}$

۲۷۵۰۶ ۴.۲۴۹) (ا) 0، (ب) 0

۲۷۵۰۷ ۴.۲۵۱) (ا) $-\infty$، (ب) ∞

۲۷۵۰۸ ۴.۲۵۳) (ا) 7، (ب) 7

۲۷۵۰۹ ۴.۲۵۵) (ا) $-\infty$، (ب) ∞

۲۷۵۱۰ ۴.۲۵۷) (ا) ∞، (ب) $-\infty$

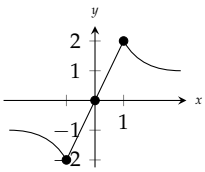
۲۷۵۱۱ ۴.۲۵۹) (ا) $-\frac{2}{3}$، (ب) $-\frac{2}{3}$

۲۷۵۱۲ ۴.۲۶۱) 0

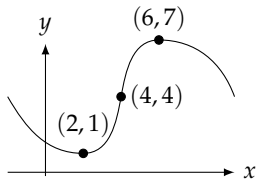
۲۷۵۱۳ ۴.۲۶۳) 1

۲۷۵۱۴ ۴.۲۶۵) ∞

۲۷۵۱۵ ۴.۲۶۷)



۲۷۴۷۸ ۴.۲۱۰)



۲۷۴۷۹ ۴.۲۱۴) تقریباً 60 پیداوار پر۔

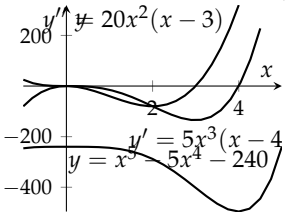
۲۷۴۸۰ ۴.۲۱۶) $x = 2$ پر مقامی اقل، $x = 1$ اور $x = \frac{5}{3}$ پر تصریف۔

۲۷۴۸۱ ۴.۲۲۰) $b = -3$

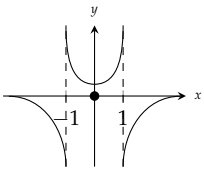
۲۷۴۸۲ ۴.۲۲۲) (ا) $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$؛ (ب) $a > 0$ کی صورت میں اوپر
۲۷۴۸۳ مقعر جبکہ $a < 0$ کی صورت میں نیچے مقعر۔

۲۷۴۸۴ ۴.۲۲۶) $y' = 0$ اور $y'' = 0$ کے صفر بالترتیب نقطہ انتہا اور نقطہ
۲۷۴۸۵ تصریف ہیں۔

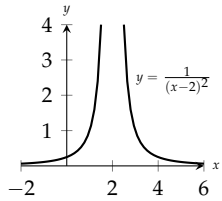
۲۷۴۸۶



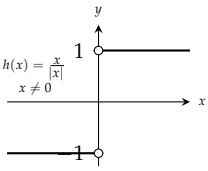
۲۷۵۱۶ (۴.۲۶۹



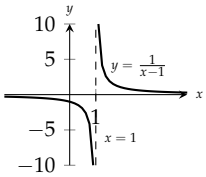
۲۷۵۱۷ (۴.۲۷۱



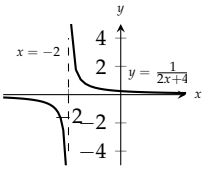
۲۷۵۱۸ (۴.۲۷۳



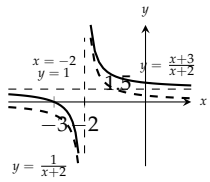
۲۷۵۱۹ (۴.۲۷۵



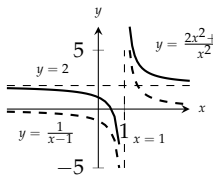
۲۷۵۲۰ (۴.۲۷۷



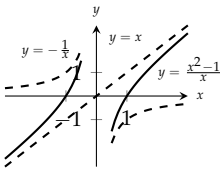
۲۷۵۲۱ (۴.۲۷۹



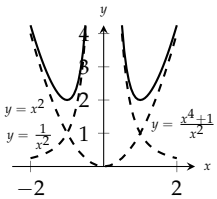
۲۷۵۲۲ (۴.۲۸۱



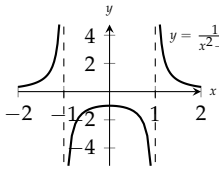
۲۷۵۲۳ (۴.۲۸۳



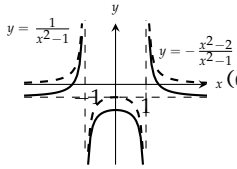
۲۷۵۲۴ (۴.۲۸۵



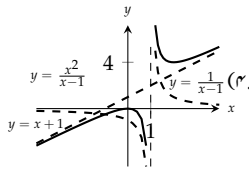
۲۷۵۲۵ (۴.۲۸۷



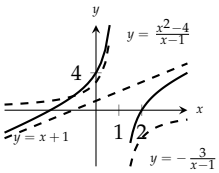
۲۷۵۲۶ (۴.۲۸۹



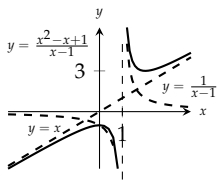
۲۷۵۲۷ (۴.۲۹۱



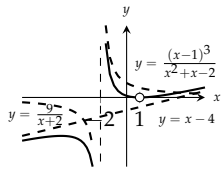
۲۷۵۲۸ (۴.۲۹۳



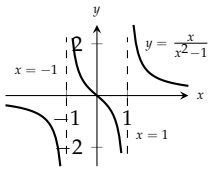
۲۷۵۲۹ (۴.۲۹۵



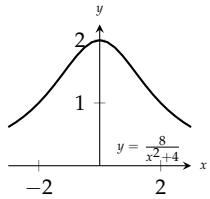
۲۷۵۳۰ (۴.۲۹۷



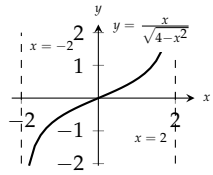
۲۷۵۳۱ (۴.۲۹۹



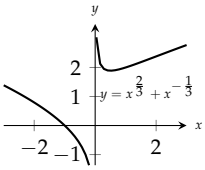
۲۷۵۳۲ (۴.۳۰۱



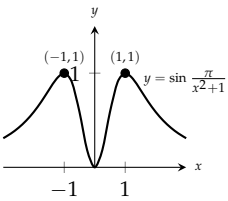
۲۷۵۳۳ (۴.۳۰۳



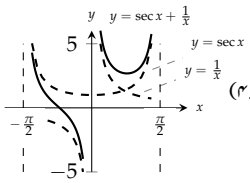
۲۷۵۳۴ (۴.۳۰۵



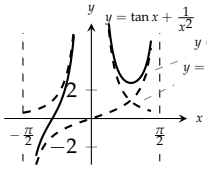
۲۷۵۳۵ (۴.۳۰۷



۲۷۵۳۶ (۴.۳۰۹



۲۷۵۳۷ (۴.۳۱۱



۲۷۵۳۸ (۴.۳۱۵ بڑھتا

۲۷۵۳۹ (۴.۳۱۹ 2

۲۷۵۴۰ (۴.۳۲۱ (ب) $f(x) = 2 + \frac{1}{x}\sin x^2$ ممکن ہے۔

۲۷۵۴۱ (۴.۳۲۵ $x = -1,\ y = 1 - x$

۲۷۵۴۲ (۴.۳۲۷ $x = 1,\ x = -1,\ y = x - 1$

۲۷۵۴۳ (۴.۳۳۵ (ا) $y \to \infty$، (ب) $y \to \infty$، (ج) $x = \mp 1$ پر

۲۷۵۴۴ کنگرہ

۲۷۵۴۵ (۴.۳۳۷ جزو-ج میں فاصلے اتنے زیادہ ہیں کہ چھوٹی حرکت نظر نہیں آتی۔

۲۷۵۴۶ (۴.۳۳۹ 1

۲۷۵۴۷ (۴.۳۴۱ $\frac{3}{2}$

۲۷۵۴۸ (۴.۳۴۳ 3

۲۷۵۴۹ حصہ ۴.۶ صفحہ ۳۵۹

۲۷۵۵۰ (۴.۳۴۵ $r = 25\,\mathrm{m}, s = 50\,\mathrm{m}$

۲۷۵۵۱ (۴.۳۴۷ $16\,\mathrm{cm}$

۲۷۵۵۲ (۴.۳۴۹ (ا) $(x, 1-x)$، (ب) $A(x) = 2x(1-x)$،

۲۷۵۵۳ (ج) $\frac{1}{2}$ مربع اکائیاں

۲۷۵۵۴ (۴.۳۵۱ $\frac{14}{3} \times \frac{35}{3} \times \frac{5}{3}\,\mathrm{cm}^3$

۲۷۵۵۵ (۴.۳۵۳ $80\,000\,\mathrm{m}^2$

۲۷۵۵۶ (۴.۳۵۵ $8 \times 8 \times 4\,\mathrm{m}^3$

۲۷۵۵۷ (۴.۳۵۷ $9\,\mathrm{cm} \times 18\,\mathrm{cm}$

۲۷۵۵۸ (۴.۳۵۹ $\frac{\pi}{2}$

۲۷۵۵۹ (۴.۳۶۱ $r = h = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\,\mathrm{cm}$

۲۷۵۶۰ (۴.۳۶۳ $18\,\mathrm{cm} \times 18\,\mathrm{cm} \times 36\,\mathrm{cm}$

۲۷۵۶۱ (۴.۳۶۵ (ا) $12\,\mathrm{cm}$ ، $6\,\mathrm{cm}$؛ (ب) $12\,\mathrm{cm}$ ، $6\,\mathrm{cm}$

۲۷۵۶۲ (۴.۳۶۷ (ا) دائرے کا محیط $4\,\mathrm{m}$ ہے۔

۲۷۵۶۳ (۴.۳۶۹ اگر نصف دائرے کا رداس r ، مستطیل کا قاعدہ $2r$ اور اس کی بلندی

۲۷۵۶۴ h ہوں تب $\frac{2r}{h} = \frac{8}{4+\pi}$ ہوگا۔

۲۷۵۶۵ (۴.۳۷۱ $\frac{\pi}{6}$

۲۷۵۶۶ (۴.۳۷۳ $\frac{v_0^2}{2g} + s_0$

۲۷۵۶۷ (۴.۳۷۵ (ا) $\frac{30}{\sqrt{3}}\,\mathrm{cm} \times \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathrm{cm}$

۲۷۵۶۸ (۴.۳۷۷ $2\sqrt{2}\,\mathrm{A}$

۲۷۵۶۹ (۴.۳۷۹ (ا) جب π کا عدد صحیح مضرب t ہو۔ (ب) $t = \frac{2\pi}{3}$ ، $t =$

۲۷۵۷۰ $t = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$ ، $\frac{4\pi}{3}$

۲۷۵۷۱ (۴.۳۸۱ (ا) $t = \frac{8}{5}$ ، $t = 4$؛ (ب) $\frac{8}{5} < t < 4$؛ (ج)

۲۷۵۷۲ $\frac{2187}{125}$ اکائی فی وقت

۲۷۵۷۳ (۴.۳۸۵) نہیں۔ تفاعل کی مطلق اقل قیمت $\frac{3}{4}$ ہے۔

۲۷۵۷۴ (۴.۳۸۷) (ا) $(c-\frac{1}{2}, \sqrt{c-\frac{1}{2}})$؛ (ب) $(0,0)$

۲۷۵۷۵ (۴.۳۸۹) (ا) $a=-3, b=-9$؛ (ب) $a=-3, b=$

۲۷۵۷۶ -24

۲۷۵۷۷ (۴.۳۹۱) (ا) $y=-1$

۲۷۵۷۸ (۴.۳۹۳) $\frac{7\sqrt{17}}{2}$

۲۷۵۷۹ (۴.۳۹۷) $M=\frac{c}{2}$

۲۷۵۸۰ (۴.۳۹۹) $\frac{c}{2}+50$

۲۷۵۸۱ (۴.۴۰۱) $\sqrt{\frac{2km}{h}}$

۲۷۵۸۲ حصہ ۴.۷ صفحہ ۳۸۱

۲۷۵۸۳ (۴.۴۰۵) $4x-3$

۲۷۵۸۴ (۴.۴۰۷) $2x-2$

۲۷۵۸۵ (۴.۴۰۹) $\frac{1}{4}x+1$

۲۷۵۸۶ (۴.۴۱۱) $2x$

۲۷۵۸۷ (۴.۴۱۳) -5

۲۷۵۸۸ (۴.۴۱۵) $\frac{1}{12}x+\frac{4}{3}$

۲۷۵۸۹ (۴.۴۱۷) (ا) $L(x)=x$، (ب) $L(x)=\pi-x$

۲۷۵۹۰ (۴.۴۱۹) (ا) $L(x)=1$،

۲۷۵۹۱ (ب) $L(x)=2-2\sqrt{3}(x+\frac{\pi}{3})$

۲۷۵۹۲ (۴.۴۲۱) (ا) $1+2x$، (ب) $1-5x$، (ج) $2+2x$،

۲۷۵۹۳ (د) $1-6x$، (ھ) $3+x$، (و) $1-\frac{x}{2}$

۲۷۵۹۴ (۴.۴۲۳) $\frac{3}{2}x+1$، ان کے مجموعے کے برابر ہے۔

۲۷۵۹۵ (۴.۴۲۵) $(3x^2-\frac{3}{2\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x$

۲۷۵۹۶ (۴.۴۲۷) $\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

۲۷۵۹۷ (۴.۴۲۹) $\frac{1-y}{3\sqrt{y}+x}\,\mathrm{d}x$

۲۷۵۹۸ (۴.۴۳۱) $\frac{5}{2\sqrt{x}}\cos(5\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

۲۷۵۹۹ (۴.۴۳۳) $(4x^2)\sec^2(\frac{x^3}{3})\,\mathrm{d}x$

۲۷۶۰۰ (۴.۴۳۵) $\frac{3}{\sqrt[3]{x}}(\operatorname{cosec}(1-2\sqrt{x})\cot(1-2\sqrt{x}))\,\mathrm{d}x$

۲۷۶۰۱ (۴.۴۳۷) (ا) 0.21، (ب) 0.2، (ج) 0.01

۲۷۶۰۲ (۴.۴۳۹) (ا) 0.231، (ب) 0.2، (ج) 0.031

۲۷۶۰۳ (۴.۴۴۱) (ا) $-\frac{1}{3}$، (ب) $-\frac{2}{5}$، (ج) $\frac{1}{15}$

۲۷۶۰۴ (۴.۴۴۳) $\mathrm{d}H=4\pi r_0^2\,\mathrm{d}r$

۲۷۶۰۵ (۴.۴۴۵) $\mathrm{d}S=12x_0\,\mathrm{d}x$

۲۷۶۰۶ (۴.۴۴۷) $\mathrm{d}H=2\pi r_0 h\,\mathrm{d}r$

۲۷۶۰۷ (۴.۴۴۹) (ا) $0.08\pi\,\mathrm{m}^2$، (ب) $3\,\%$

۲۷۶۰۸ (۴.۴۵۱) $3\,\%$

۲۷۶۰۹ (۴.۴۵۳) $3\,\%$

۲۷۶۱۰ (۴.۴۵۵) $\frac{1}{3}\,\%$

۲۷۶۱۱ (۴.۴۵۷) $0.05\,\%$

۲۷۶۱۲ (۴.۴۶۱) حجم $=(x+\Delta x)^3=x^3+3x^2(\Delta x)+$

۲۷۶۱۳ $3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$

۲۷۶۱۴ (۴.۴۶۳) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}}{1+(x/2)}=\frac{\sqrt{1+0}}{1+(0/2)}=\frac{1}{1}=1$

۲۷۶۱۵ حصہ ۴.۸ صفحہ ۳۹۵

۲۷۶۱۶ (۴.۴۷۵) $x_2=\frac{13}{21}, -\frac{5}{3}$

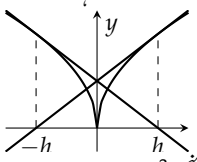
۲۷۶۱۷ (۴.۴۷۷) $x_2=\frac{5763}{4945}, -\frac{51}{31}$

۲۷۶۱۸ (۴.۴۷۹) $x_2=\frac{2387}{2000}$

۲۷۶۱۹ (۴.۴۸۱) $x\approx 0.45$

۲۷۶۲۰ (۴.۴۸۳) جذر 1.17951 ہے۔

۲۷۶۲۱ (۴.۴۸۷)



۲۷۶۲۲ (۴.۴۸۹) (ا) منحنی $y=x^3$ اور $y=3x+1$ یا

۲۷۶۲۳ منحنی $y=x^3-3x$ اور $y=1$ کے نقطہ تقاطع کی x

۲۷۶۲۴ قیمت وہی ہے جو جزو-ا کے جذر یا جزو-د کے حل کی ہیں۔

۲۷۶۲۵ (ب) -1.53209 ، -0.34730

۲۷۶۲۶ (۴.۴۹۱) $-1.532\,09,\ -0.347\,30$

۲۷۶۲۷ (۴.۴۹۲) $1.165\,561\,185\,207\,211$

۲۷۶۲۸ (۴.۴۹۳) $0.630\,115\,396\,163\,843\,2,$

۲۷۶۲۹ $2.573\,271\,963\,535\,193$

۲۷۶۳۰ (۴.۴۹۴) $0.350\,035\,015,$

۲۷۶۳۱ $-1.026\,173\,161\,530\,1$

۲۷۶۳۲ (۴.۴۹۵) $0.390\,040\,316\,667\,547$

۲۷۶۳۳ (۴.۴۹۶) $\mp 1.306\,562\,964\,876\,4,$

۲۷۶۳۴ $\mp 0.541\,196\,100\,146\,19$

۲۷۶۳۵ (۴.۴۹۷) $-0.976\,823\,589,\ 0.100\,363\,332,$

۲۷۶۳۶ $0.642\,746\,671,\ 1.983\,713\,87$

۲۷۶۳۷ حصہ ۵.۱ صفحہ ۴۰۵

۲۷۶۳۸ (۵.۱) (ا) x^2، (ب) $\frac{x^3}{3}$، (ج) $\frac{x^3}{3}-x^2+x$

۲۷۶۳۹ (۵.۳) (ا) x^{-3}، (ب) $-\frac{1}{3}x^{-3}$،

۲۷۶۴۰ (ج) $-\frac{1}{3}x^{-3}+x^2+3x$

۲۷۶۴۱ (۵.۵) (ا) $-\frac{1}{x}$، (ب) $-\frac{5}{x}$، (ج) $2x+\frac{5}{x}$

۲۷۶۴۲ (۵.۷) (ا) $\sqrt{x^3}$، (ب) $\sqrt{x}$، (ج) $\frac{2\sqrt{x^3}}{3}+2\sqrt{x}$

۲۷۶۴۳ (۵.۹) (ا) $x^{2/3}$، (ب) $x^{1/3}$، (ج) $x^{-1/3}$

۲۷۶۴۴ (۵.۱۱) (ا) $\cos(\pi x)$، (ب) $-3\cos x$،

۲۷۶۴۵ (ج) $-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)+\cos(3x)$

۲۷۶۴۶ (۵.۱۳) (ا) $\tan x$، (ب) $2\tan(\frac{x}{3})$، (ج) $-\frac{2}{3}\tan(\frac{3x}{2})$

۲۷۶۳۷ (۵.۱۵) (ا) $-\csc x$، (ب) $\frac{1}{5}\csc(5x)$، (ج) $2\csc(\frac{\pi x}{2})$

۲۷۶۳۸ (۵.۱۷) $x + \frac{\cos(2x)}{2}$

۲۷۶۳۹ (۵.۱۹) $\frac{x^2}{2} + x + C$

۲۷۶۵۰ (۵.۲۱) $t^3 + \frac{t^2}{4} + C$

۲۷۶۵۱ (۵.۲۳) $\frac{x^4}{2} - \frac{5x^2}{2} + 7x + C$

۲۷۶۵۲ (۵.۲۵) $-\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{3} + C$

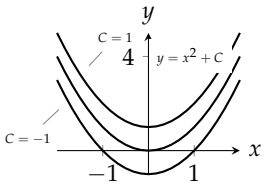
۲۷۶۵۳ (۵.۲۷) $\frac{3}{2}x^{2/3} + C$

۲۷۶۵۴ (۵.۲۹) $\frac{2}{3}x^{3/2} + \frac{3}{4}x^{4/3} + C$

۲۷۶۵۵ (۵.۳۱) $4y^2 - \frac{8}{3}y^{3/4} + C$

۲۷۶۵۶ (۵.۳۳) $x^2 + \frac{2}{x} + C$

۲۷۶۵۷ (۵.۱۰۷)



۲۷۶۵۸ (۵.۳۵) $2\sqrt{t} - \frac{2}{\sqrt{t}} + C$

۲۷۶۵۹ (۵.۳۷) $-2\sin t + C$

۲۷۶۶۰ (۵.۳۹) $-21\cos\frac{\theta}{3} + C$

۲۷۶۶۱ (۵.۴۱) $3\cot x + C$

۲۷۶۶۲ (۵.۴۳) $-\frac{1}{2}\csc\theta + C$

۲۷۶۶۳ (۵.۴۵) $4\sec x - 2\tan x + C$

۲۷۶۶۴ (۵.۴۷) $-\frac{1}{2}\cos 2x + \cot x + C$

۲۷۶۶۵ (۵.۴۹) $2y - \sin 2y + C$

۲۷۶۶۶ (۵.۵۱) $\frac{t}{2} + \frac{\sin 4t}{8} + C$

۲۷۶۶۷ (۵.۵۳) $\tan\theta + C$

۲۷۶۶۸ (۵.۵۵) $-\cot x - x + C$

۲۷۶۶۹ (۵.۵۷) $-\cos\theta + \theta + C$

۲۷۶۷۰ (۵.۶۵) (ا)غلط،(ب)غلط،(ج)درست

۲۷۶۷۱ (۵.۶۷) (ا)غلط،(ب)غلط،(ج)درست

۲۷۶۷۲ (۵.۶۹) (ا) $-\sqrt{x} + C$، (ب) $x + C$، (ج) $\sqrt{x} + C$،

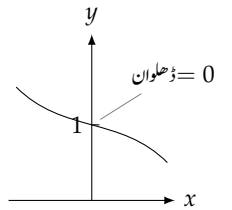
۲۷۶۷۳ (د) $-x + C$، (ہ) $x - \sqrt{x} + C$،

۲۷۶۷۴ (و) $-x - \sqrt{x} + C$، (ز) $\frac{x^2}{2} - \sqrt{x} + C$،

۲۷۶۷۵ (ح) $-3x + C$

۲۷۶۷۵ حصہ ۵.۲ صفحہ ۴۱۷

۲۷۶۹۸ (۵.۱۱۳)



۲۷۶۷۶ (۵.۷۱) (ب)

۲۷۶۷۷ (۵.۷۲) (ب)

۲۷۶۷۸ (۵.۷۳) $y = x^2 - 7x + 10$

۲۷۶۷۹ (۵.۷۵) $y = -\frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$

۲۷۶۸۰ (۵.۷۷) $y = 9x^{1/3} + 4$

۲۷۶۸۱ (۵.۷۹) $s = t + \sin t + 4$

۲۷۶۸۲ (۵.۸۱) $r = \cos(\pi\theta) - 1$

۲۷۶۸۳ (۵.۸۳) $v = \frac{1}{2}\sec t + \frac{1}{2}$

۲۷۶۸۴ (۵.۸۵) $y = x^2 - x^3 + 4x + 1$

۲۷۶۸۵ (۵.۸۷) $r = \frac{1}{t} + 2t - 2$

۲۷۶۸۶ (۵.۸۹) $y = x^3 - 4x^2 + 5$

۲۷۶۸۷ (۵.۹۱) $y = -\sin t + \cos t + t^3 - 1$

۲۷۶۸۸ (۵.۹۳) $s = 4.9t^2 + 5t + 10$

۲۷۶۸۹ (۵.۹۵) $s = \frac{1-\cos(\pi t)}{\pi}$

۲۷۶۹۰ (۵.۹۷) $s = 16t^2 + 20t + 5$

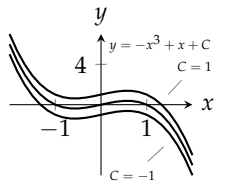
۲۷۶۹۱ (۵.۹۹) $s = \sin(2t) - 3$

۲۷۶۹۲ (۵.۱۰۱) $y = 2x^{3/2} - 50$

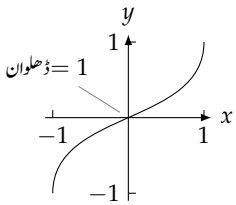
۲۷۶۹۳ (۵.۱۰۳) $y = x - x^{4/3} + \frac{1}{2}$

۲۷۶۹۴ (۵.۱۰۵) $y = -\sin x - \cos x - 2$

۲۷۶۹۵ (۵.۱۰۷)



۲۷۶۹۶ (۵.۱۰۹)



۲۷۶۹۷ (۵.۱۱۱)

۲۷۶۹۸ (۵.۱۱۳)

۲۷۶۹۹ (۵.۱۱۵) $48\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

۲۷۷۰۰ (۵.۱۱۷) $14\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

۲۷۷۰۱ (۵.۱۱۹) $t = \frac{100}{k},\ k = \frac{200}{3}\,\mathrm{km\,h^{-2}}$

۲۷۷۰۲ (۵.۱۲۱) $v = 10t^{3/2} - 6t^{1/2},\ s = 4t^{5/2} - 4t^{3/2}$

۲۷۷۰۳ (۵.۱۲۵) (الف) $33.2\,\mathrm{m}$، $33.2\,\mathrm{m}$، (ب)درست

۲۷۷۰۴ حصہ ۵.۳ صفحہ ۴۲۹

۲۷۷۰۵ (۵.۱۲۷) $-\frac{1}{3}\cos 3x + C$

۲۷۷۰۶ (۵.۱۲۹) $\frac{1}{2}\sec 2t + C$

۲۷۷۰۷ (۵.۱۳۱) $-(7x-2)^{-4} + C$

۲۷۷۰۸ (۵.۱۳۳) $-6(1-r^3)^{1/2} + C$

۲۷۷۰۹ (۵.۱۳۵) $\frac{1}{3}(x^{3/2}-1) - \frac{1}{6}\sin(2x^{3/2}-2) + C$

۲۷۷۱۰ (۵.۱۳۷) $-\frac{1}{4}(\csc^2 2\theta) + C, \quad -\frac{1}{4}(\cot^2 2\theta) + C,$

۲۷۷۱۱ $-\frac{1}{3}(3-2s)^{3/2} + C$

۲۷۷۱۲ (۵.۱۳۱) $\frac{2}{5}(5s+4)^{1/2} + C$

۲۷۷۱۳ (۵.۱۴۳) $-\frac{2}{5}(1-\theta^2)^{5/4} + C$

۲۷۷۱۴ (۵.۱۴۵) $-\frac{1}{3}(7-3y^2)^{3/2} + C$

۲۷۷۱۵ (۵.۱۴۷) $(-\frac{2}{1+\sqrt{x}}) + C$

۲۷۷۱۶ (۵.۱۴۹) $\frac{1}{3}\sin(3z+4) + C$

۲۷۷۱۷ (۵.۱۵۱) $\frac{1}{3}\tan(3x+2) + C$

۲۷۷۱۸ (۵.۱۵۳) $\frac{1}{2}\sin^6(\frac{x}{3}) + C$

۲۷۷۱۹ (۵.۱۵۵) $(\frac{t^3}{18}-1)^6 + C$

۲۷۷۲۰ (۵.۱۵۷) $-\frac{2}{3}\cos(x^{3/2}+1) + C$

۲۷۷۲۱ (۵.۱۵۹) $\sec(v+\frac{\pi}{2}) + C$

۲۷۷۲۲ (۵.۱۶۱) $\frac{1}{2\cos(2t+1)} + C$

۲۷۷۲۳ (۵.۱۶۳) $-\frac{2}{3}(\cot^3 y)^{1/2} + C$

۲۷۷۲۴ (۵.۱۶۵) $-\sin(\frac{1}{t}-1) + C$

۲۷۷۲۵ (۵.۱۶۷) $-\frac{\sin^2(\frac{1}{\theta})}{2} + C$

۲۷۷۲۶ (۵.۱۶۹) $\frac{(s^3+2s^2-5s+5)^2}{2} + C$

۲۷۷۲۷ (۵.۱۷۱) $\frac{1}{16}(1+t^4)^4 + C$

۲۷۷۲۸ (۵.۱۷۳) (الف) $-\frac{6}{2+\tan^3 x} + C$ ،

۲۷۷۲۹ (ب) $-\frac{6}{2+\tan^3 x} + C$ ،

۲۷۷۳۰ (ج) $-\frac{6}{2+\tan^3 x} + C$

۲۷۷۳۱ (۵.۱۷۵) $\frac{1}{6}\sin\sqrt{3(2r-1)^2+6} + C$

۲۷۷۳۲ (۵.۱۷۷) $s = \frac{1}{2}(3t^2-1)^4 - 5$

۲۷۷۳۳ (۵.۱۷۹) $s = 4t - 2\sin(2t+\frac{\pi}{6}) + 9$

۲۷۷۳۴ (۵.۱۸۱) $s = \sin(2t-\frac{\pi}{2}) + 100t + 1$

۲۷۷۳۵ (۵.۱۸۳) $6\,\mathrm{m}$

۲۷۷۳۶ **حصہ ۵.۴ صفحہ ۴۴۳**

۲۷۷۳۷ (۵.۱۸۷) $\approx 44.8,\ 6.7\,\mathrm{L\,min^{-1}}$

۲۷۷۳۸ (۵.۱۸۹) (ا) $87\,\mathrm{m}$ ،(ب) $86\,\mathrm{m}$

۲۷۷۳۹ (۵.۱۹۱) (ا) $969\,\mathrm{m}$ ،(ب) $1067\,\mathrm{m}$

۲۷۷۴۰ (۵.۱۹۳) (ا) 112 ،(ب) $9\,\%$

۲۷۷۴۱ (۵.۱۹۵) (ا) 80π ،(ب) $6\,\%$

۲۷۷۴۲ (۵.۱۹۷) (ا) $\frac{93\pi}{2}$ زیادہ اندازہ،(ب) $9\,\%$

۲۷۷۴۳ (۵.۱۹۹) (ا) 40 ،(ب) $25\,\%$ ،(ج) $36,\ 12.5\,\%$

۲۷۷۴۴ (۵.۲۰۱) (ا) 118.5π یا تقریباً $372.28\,\mathrm{m}^3$ ،

۲۷۷۴۵ (ب) تقریباً $11\,\%$ خلل

۲۷۷۴۶ (۵.۲۰۳) (ا) 1.6π ،(ب) $20\,\%$

۲۷۷۴۷ (۵.۲۰۵) $\frac{31}{16}$

۲۷۷۴۸ (۵.۲۰۷) 1

۲۷۷۴۹ (۵.۲۰۹) (ا) $22.81\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ،(ب) $13.81\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ،

۲۷۷۵۰ (ج) $35.175\,\mathrm{m}$

۲۷۷۵۱ (۵.۲۱۱) (ا) $758\,\mathrm{L}$ ، $543\,\mathrm{L}$ ،(ب) $2363\,\mathrm{L}$ ، $1693\,\mathrm{L}$ ،(ج)

۲۷۷۵۲ $31.4\,\mathrm{h}$ ، $32.4\,\mathrm{h}$

۲۷۷۵۳ **حصہ ۵.۵ صفحہ ۴۶۵**

۲۷۷۵۴ (۵.۲۱۷) $\frac{6(1)}{1+1} + \frac{6(2)}{2+1} = 7$

۲۷۷۵۵ (۵.۲۱۹) $\cos(1\pi) + \cos(2\pi) + \cos(3\pi) +$

۲۷۷۵۶ $\cos(4\pi) = 0$

۲۷۷۵۷ (۵.۲۲۱) $\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}-2}{2}$

۲۷۷۵۸ (۵.۲۲۳) تمام

۲۷۷۵۹ (۵.۲۲۵) ب

۲۷۷۶۰ (۵.۲۲۷) $\sum_{k=1}^{6} k$

۲۷۷۶۱ (۵.۲۲۹) $\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{2^k}$

۲۷۷۶۲ (۵.۲۳۱) $\sum_{k=1}^{5} (-1)^{k+1}\frac{1}{k}$

۲۷۷۶۳ (۵.۲۳۳) (ا) -15 ،(ب) 1 ،(ج) 1 ،(د) -11 ،(ہ) 16

۲۷۷۶۴ (۵.۲۳۵) (ا) 55 ،(ب) 385 ،(ج) 3025

۲۷۷۶۵ (۵.۲۳۷) -56

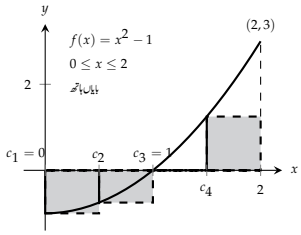
۲۷۷۶۶ (۵.۲۳۹) -73

۲۷۷۶۷ (۵.۲۴۱) 240

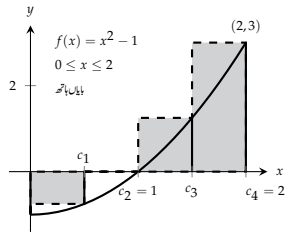
۲۷۷۶۸ (۵.۲۴۳) 3376

۲۷۷۶۹ (۵.۲۴۵) ا)

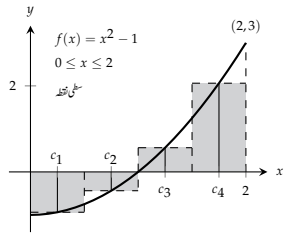
۲۷۷۷۰



۲۷۷۷۱ ب)

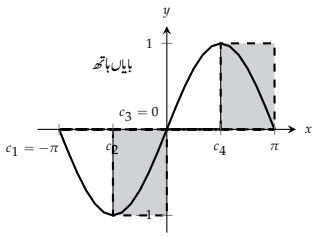


۲۷۷۷۲ ج)

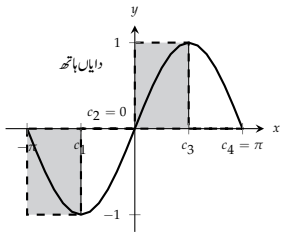


۲۷۷۷۳ ا) (۵.۲۴۷

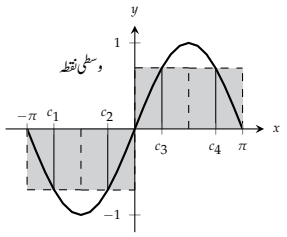
۲۷۷۷۴



۲۷۷۷۵ ب)



۲۷۷۷۶ ج)



۲۷۷۷۷ (۵.۲۴۹ 1.2

۲۷۷۷۸ (۵.۲۵۱ $\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x$

۲۷۷۷۹ (۵.۲۵۳ $\int_{-7}^5 (x^2 - 3x)\,\mathrm{d}x$

۲۷۷۸۰ (۵.۲۵۵ $\int_2^3 \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x$

۲۷۷۸۱ (۵.۲۵۷ $\int_{-\pi/4}^0 \sec x\,\mathrm{d}x$

۲۷۷۸۲ (۵.۲۵۹ 15

۲۷۷۸۳ (۵.۲۶۱ -480

۲۷۷۸۴ (۵.۲۶۳ 2.75

۲۷۷۸۵ (۵.۲۶۵ رقبہ=21مربع اکائیاں

۲۷۷۸۶ (۵.۲۶۷ رقبہ $\frac{9\pi}{2}$ مربع اکائیاں ہے۔

۲۷۷۸۷ (۵.۲۶۹ رقبہ 2.5 مربع اکائیاں ہے۔

۲۷۷۸۸ (۵.۲۷۱ رقبہ 3 مربع اکائیاں ہے۔

۲۷۷۸۹ (۵.۲۷۳ $\frac{b^2}{2}$

۲۷۷۹۰ (۵.۲۷۵ $b^2 - a^2$

۲۷۷۹۱ (۵.۲۷۷ $\frac{1}{2}$

۲۷۷۹۲ (۵.۲۷۹ $\frac{3\pi^2}{2}$

۲۷۷۹۳ (۵.۲۸۱ $\frac{7}{3}$

۲۷۷۹۴ (۵.۲۸۳ $\frac{1}{24}$

۲۷۷۹۵ (۵.۲۸۵ $\frac{3a^2}{2}$

۲۷۷۹۶ (۵.۲۸۷ $\frac{b}{3}$

۲۷۷۹۷ (۵.۲۸۹ $\Delta x = \frac{b}{n}$ لمبائی کے n ذیلی وقفوں کے دائیں سر قیمتیں لیتے

۲۷۷۹۸ ہوئے: رقبہ $= \int_0^b 3x^2\,\mathrm{d}x = b^3$

۲۷۷۹۹ (۵.۲۹۱ $\Delta x = \frac{b}{n}$ لمبائی کے n ذیلی وقفوں کے دائیں سر قیمتیں لیتے

۲۸۰۰ ہوئے: رقبہ $= \int_0^b 2x\,\mathrm{d}x = b^2$

۲۸۰۱ (۵.۲۹۳ $a = 0$ اور $b = 1$ تکمل کی قیمت زیادہ سے زیادہ بناتے ہیں۔

۲۸۰۲ (۵.۲۹۷ $\frac{b^3}{3}$

۲۸۰۳ حصہ ۵.۶ صفحہ ۴۸۴

۲۸۰۴ (۵.۳۱۱ (ا) 0، (ب) -8، (ج) -12، (د) 10، (ہ) -2، (و)

۲۸۰۵ 16

۲۸۰۶ (۵.۳۱۳ (ا) 5، (ب) $5\sqrt{3}$، (ج) -5، (د) -5

۲۸۰۷ (۵.۳۱۵ (ا) 4، (ب) -4

۲۸۰۸ (۵.۳۱۷ -14

۲۸۰۹ (۵.۳۱۹ 10

۲۸۱۰ (۵.۳۲۱ -2

۲۸۱۱ (۵.۳۲۳ $-\frac{7}{4}$

۲۸۱۲ (۵.۳۲۵ 7

۲۸۱۳ (۵.۳۲۷ 0

۲۸۱۴ (۵.۳۲۹ $\frac{16}{3}$

۲۸۱۵ (۵.۳۳۱ $\frac{19}{3}$

۲۸۱۶ (۵.۳۳۳ (ا) 6، (ب) $\frac{22}{3}$

۲۸۱۷ (۵.۳۳۵ (ا) 0، (ب) $\frac{8}{3}$

۲۸۱۸ (۵.۳۳۷ $x = 1$ پر اوسط قیمت $= 0$ $f_{\text{اوسط}}$ اختیار کی جاتی ہے۔

۲۸۱۹ (۵.۳۳۹ $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ پر اوسط قیمت $= -2$ $f_{\text{اوسط}}$ اختیار کی جاتی ہے۔

۲۷۸۲۰ (۵.۳۴۱) $t = 0$ اور $t = 2$ پر اوسط قیمت f اوسط $= 1$ اختیار کی جاتی
۲۷۸۲۱ ہے۔
۲۷۸۲۲ (۵.۳۴۳) (ا) $x = \mp\frac{1}{2}$ پر اوسط قیمت g اوسط $= -\frac{1}{2}$ اختیار کی جاتی
۲۷۸۲۳ ہے۔(ب) $x = 2$ پر g اوسط $= 1$ اختیار کی جاتی ہے۔(ج)
۲۷۸۲۴ $x = \frac{5}{4}$ پر g اوسط $= \frac{1}{4}$ اختیار کی جاتی ہے۔
۲۷۸۲۵ (۵.۳۴۵) $\frac{3}{2}$
۲۷۸۲۶ (۵.۳۴۷) 0
۲۷۸۲۷ (۵.۳۴۹) بالائی حدود=1، زیریں حدود=1/2
۲۷۸۲۸ (۵.۳۵۷) بالائی حدود $\frac{1}{2}$
۲۷۸۲۹ (۵.۳۶۱) $37.5\,\mathrm{km\,h^{-1}}$
۲۷۸۳۰ حصہ ۵.۷ صفحہ ۴۹۷
۲۷۸۳۱ (۵.۳۶۳) 6
۲۷۸۳۲ (۵.۳۶۵) 8
۲۷۸۳۳ (۵.۳۶۷) 1
۲۷۸۳۴ (۵.۳۶۹) $\frac{5}{2}$
۲۷۸۳۵ (۵.۳۷۱) 2
۲۷۸۳۶ (۵.۳۷۳) $2\sqrt{3}$
۲۷۸۳۷ (۵.۳۷۵) 0
۲۷۸۳۸ (۵.۳۷۷) $-\frac{\pi}{4}$
۲۷۸۳۹ (۵.۳۷۹) $\frac{2\pi^3}{3}$
۲۷۸۴۰ (۵.۳۸۱) $-\frac{8}{3}$
۲۷۸۴۱ (۵.۳۸۳) $-\frac{3}{4}$
۲۷۸۴۲ (۵.۳۸۵) $\sqrt{2} - \sqrt[4]{8} + 1$
۲۷۸۴۳ (۵.۳۸۷) 16
۲۷۸۴۴ (۵.۳۸۹) 0
۲۷۸۴۵ (۵.۳۹۱) $\frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$
۲۷۸۴۶ (۵.۳۹۳) $\frac{\pi}{2} + \sin 2$
۲۷۸۴۷ (۵.۳۹۵) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
۲۷۸۴۸ (۵.۳۹۷) $\frac{28}{3}$
۲۷۸۴۹ (۵.۳۹۹) $\frac{1}{2}$
۲۷۸۵۰ (۵.۴۰۱) $\frac{51}{4}$
۲۷۸۵۱ (۵.۴۰۳) π
۲۷۸۵۲ (۵.۴۰۵) $\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$
۲۷۸۵۳ (۵.۴۰۷) $(\cos\sqrt{x})(\frac{1}{2\sqrt{x}})$
۲۷۸۵۴ (۵.۴۰۹) $4t^5$
۲۷۸۵۵ (۵.۴۱۱) $\sqrt{1 + x^2}$
۲۷۸۵۶ (۵.۴۱۳) $\frac{1}{2}x^{-1/2}\sin x$
۲۷۸۵۷ (۵.۴۱۵) 1
۲۷۸۵۸ (۵.۴۱۷) چونکہ $y' = \frac{1}{x}$ اور $y(\pi) = \int_\pi^\pi \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - 3 = -3$،
۲۷۸۵۹ ہیں لہٰذا درست ہے۔

۲۷۸۶۰ (۵.۴۱۹) چونکہ $y = \sec x$ اور $y(0) = \int_0^0 \sec t\,\mathrm{d}t + 4 = 4$
۲۷۸۶۱ ہیں لہٰذا درست ہے۔
۲۷۸۶۲ (۵.۴۲۱) $y = \int_2^x \sec t\,\mathrm{d}t + 3$
۲۷۸۶۳ (۵.۴۲۳) $s = \int_{t_0}^t f(x)\,\mathrm{d}x + s_0$
۲۷۸۶۴ (۵.۴۲۵) (ا) $\frac{125}{6}$، (ب) $h = \frac{25}{4}$، (د) $d = \frac{2}{3}bh$
۲۷۸۶۵ (۵.۴۲۷) (ا) 9، (ب) 10
۲۷۸۶۶ (۵.۴۲۹) (ا) $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x =$
۲۷۸۶۷ $f(t) \implies v(5) = f(5) = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
۲۷۸۶۸ (ب) لمحہ $t = 5$ پر مماس منفی ہے لہٰذا $a = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ منفی ہوگا۔
۲۷۸۶۹ (ج) $s = \int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(3)(3) = \frac{9}{2}\,\mathrm{m}$
۲۷۸۷۰ تکمل کی قیمت درحقیقت $t = 0$ تا $t = 3$ تفاعل f اور محور x
۲۷۸۷۱ کے بیچ تکونی رقبہ ہے۔
۲۷۸۷۲ (د) زیادہ فاصلہ لمحہ $t = 6$ پر ہوگا چونکہ اس کے بعد $t = 6$ تا
۲۷۸۷۳ $t = 9$ تفاعل f منفی ہے جس سے رقبہ گھٹے گا۔
۲۷۸۷۴ (ہ) $t = 4$ اور $t = 7$ پر جہاں مماس افقی ہیں۔
۲۷۸۷۵ (و) لمحہ $t = 6$ تا $t = 9$ رفتار منفی ہے لہٰذا اس دوران ذرہ مبدا
۲۷۸۷۶ کی جانب حرکت کرتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ تا $t = 6$ رفتار مثبت ہے
۲۷۸۷۷ لہٰذا ذرہ مبدا سے دوری کے رخ حرکت کرتا ہے۔
۲۷۸۷۸ (ز) چونکہ $t = 0$ تا $t = 9$ مثبت رقبہ زیادہ ہے لہٰذا ذرہ مثبت
۲۷۸۷۹ (دائیں) جانب ہوگا۔
۲۷۸۸۰ (۵.۴۳۱) $\int_{-2}^2 4(9 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{368}{3}$
۲۷۸۸۱ (۵.۴۳۳) $\int_4^8 \pi(64 - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{320\pi}{3}$
۲۷۸۸۲ (۵.۴۳۷) $2x - 2$
۲۷۸۸۳ (۵.۴۳۹) $-3x + 5$
۲۷۸۸۴ (۵.۴۴۱) (ا) درست، چونکہ f استمراری ہے لہٰذا احصاء کے بنیادی مسئلے کے جزو
۲۷۸۸۵ اول کے تحت g قابل تفرق ہوگا۔ (ب) درست۔ چونکہ g قابل
۲۷۸۸۶ تفرق ہے لہٰذا یہ استمراری ہوگا۔ (ج) درست چونکہ $g'(1) =$
۲۷۸۸۷ $f(1) = 0$ ہے۔ (د) غلط۔ چونکہ $g''(1) =$
۲۷۸۸۸ $f'(1) > 0$ ہے۔ (ہ) درست۔ چونکہ $g'(1) = 0$ اور
۲۷۸۸۹ $g''(1) = f'(1) > 0$ ہیں۔ (و) غلط۔ $g''(x) =$
۲۷۸۹۰ $f'(x) > 0$ لہٰذا g'' کی علامت کبھی تبدیل نہیں ہوتی۔ (ز)
۲۷۸۹۱ درست۔ چونکہ $g'(1) = f(1) = 0$ اور x کے ساتھ
۲۷۸۹۲ $g'(x) = f(x)$ بڑھتا تفاعل ہے (چونکہ $f'(x) > 0$
۲۷۸۹۳ ہے)۔
۲۷۸۹۴ حصہ ۵.۸ صفحہ ۵۰۸
۲۷۸۹۵ (۵.۴۵۵) (ا) $\frac{14}{3}$، (ب) $\frac{2}{3}$
۲۷۸۹۶ (۵.۴۵۷) (ا) $\frac{1}{2}$، (ب) $-\frac{1}{2}$
۲۷۸۹۷ (۵.۴۵۹) (ا) $\frac{15}{16}$، (ب) 0
۲۷۸۹۸ (۵.۴۶۱) (ا) 0، (ب) $\frac{1}{8}$
۲۷۸۹۹ (۵.۴۶۳) (ا) 4، (ب) 0

۲۷۹۰۰ (۵.۴۶۵ (ا) $\frac{1}{6}$ ،(ب) $\frac{1}{2}$

۲۷۹۰۱ (۵.۴۶۷ (ا) 0 ،(ب) 0

۲۷۹۰۲ (۵.۴۶۹ $2\sqrt{3}$

۲۷۹۰۳ (۵.۴۷۱ $\frac{3}{4}$

۲۷۹۰۴ (۵.۴۷۳ $9^{5/4} - 1$

۲۷۹۰۵ (۵.۴۷۵ 3

۲۷۹۰۶ (۵.۴۷۷ $\frac{\pi}{3}$

۲۷۹۰۷ (۵.۴۷۹ $\frac{16}{3}$

۲۷۹۰۸ (۵.۴۸۱ $2^{5/2}$

۲۷۹۰۹ (۵.۴۸۳ $F(6) - F(2)$

۲۷۹۱۰ (۵.۴۸۵ (ا) -3 ،(ب) 3

۲۷۹۱۱ (۵.۴۸۷ $I = \frac{a}{2}$

۲۷۹۱۲ حصہ ۵.۹ صفحہ ۵۲۱

۲۷۹۱۳ (۵.۴۹۱ :1) (ا) 1.5 ، 0 ،(ب) 1.5 ، 0 ،(ج) 0 % ؛

۲۷۹۱۴ :2) (ا) 1.5 ، 0 ،(ب) 1.5 ، 0 ،(ج) 0 %

۲۷۹۱۵ (۵.۴۹۳ :1) (ا) 2.75 ، 0.08 ،(ب) 2.67 ، 0.08 ،

۲۷۹۱۶ (ج) $0.0312 \approx 3$ % ؛

۲۷۹۱۷ :2) (ا) 2.67 ، 0 ،(ب) 2.67 ، 0 ،(ج) 0 %

۲۷۹۱۸ (۵.۴۹۵ :1) (ا) 6.25 ، 0.5 ،(ب) 6 ، 0.25 ،

۲۷۹۱۹ (ج) $0.0417 \approx 4$ % ؛

۲۷۹۲۰ :2) (ا) 6 ، 0 ،(ب) 6 ، 0 ،(ج) 0 %

۲۷۹۲۱ (۵.۴۹۷ :1) (ا) 0.509 ، 0.03125 ،(ب) 0.5 ، 0.009 ،

۲۷۹۲۲ (ج) $0.018 \approx 2$ % ؛

۲۷۹۲۳ :2) (ا) 0.5 ، 0.002604 ،(ب) 0.5 ، 0.0004 ،

۲۷۹۲۴ (ج) 0 %

۲۷۹۲۵ (۵.۴۹۹ :1) (ا) 1.8961 ، 0.161 ،(ب) 2 ، 0.1039 ،

۲۷۹۲۶ (ج) $0.052 \approx 5$ % ؛:2) (ا) 2.0045 ، 0.0066 ،

۲۷۹۲۷ (ب) 2 ، 0.00454 ،(ج) 0 %

۲۷۹۲۸ (۵.۵۰۱ (ا) 0.31929 ،(ب) 0.32812 ،

۲۷۹۲۹ (ج) $\frac{1}{3}$ ، 0.01404 ، 0.00521

۲۷۹۳۰ (۵.۵۰۳ (ا) 1.95643 ،(ب) 2.00421 ،

۲۷۹۳۱ (ج) 2 ، 0.04357 ، -0.00421

۲۷۹۳۲ (۵.۵۰۵ (ا) 1 ،(ب) 2

۲۷۹۳۳ (۵.۵۰۷ (ا) 116 ،(ب) 2

۲۷۹۳۴ (۵.۵۰۹ (ا) 283 ،(ب) 2

۲۷۹۳۵ (۵.۵۱۱ (ا) 71 ،(ب) 10

۲۷۹۳۶ (۵.۵۱۳ (ا) 76 ،(ب) 12

۲۷۹۳۷ (۵.۵۱۵ (ا) 82 ،(ب) 8

۲۷۹۳۸ (۵.۵۱۷ 4873

۲۷۹۳۹ (۵.۵۱۹ $2973\,\mathrm{cm}^2$

۲۷۹۴۰ (۵.۵۲۱ 4 ، 4

۲۷۹۴۱ (۵.۵۲۳ (ا) 3.11571 ،(ب) 0.02588 ،

۲۷۹۴۲ (ج) $M = 3.11$ سے

۲۷۹۴۳ $|E_T| \leq \frac{\pi^3}{1200}(3.11) < 0.081$ ملتا ہے۔

۲۷۹۴۴ (۵.۵۲۷ 1.08943

۲۷۹۴۵ (۵.۵۲۹ 0.82812

۲۷۹۴۶ حصہ ۶.۱ صفحہ ۵۳۷

۲۷۹۴۷ (۶.۱ $\frac{\pi}{2}$

۲۷۹۴۸ (۶.۳ $\frac{1}{12}$

۲۷۹۴۹ (۶.۵ $\frac{128}{15}$

۲۷۹۵۰ (۶.۷ $\frac{5}{6}$

۲۷۹۵۱ (۶.۹ $\frac{38}{3}$

۲۷۹۵۲ (۶.۱۱ $\frac{49}{6}$

۲۷۹۵۳ (۶.۱۳ $\frac{32}{3}$

۲۷۹۵۴ (۶.۱۵ $\frac{48}{5}$

۲۷۹۵۵ (۶.۱۷ $\frac{8}{3}$

۲۷۹۵۶ (۶.۱۹ 8

۲۷۹۵۷ (۶.۲۱ $\frac{5}{3}$ تین نقاط تقاطع پائے جاتے ہیں۔

۲۷۹۵۸ (۶.۲۳ 18

۲۷۹۵۹ (۶.۲۵ $\frac{243}{8}$

۲۷۹۶۰ (۶.۲۷ $\frac{8}{3}$

۲۷۹۶۱ (۶.۲۹ 2

۲۷۹۶۲ (۶.۳۱ $\frac{104}{15}$

۲۷۹۶۳ (۶.۳۳ $\frac{56}{15}$

۲۷۹۶۴ (۶.۳۵ 4

۲۷۹۶۵ (۶.۳۷ $\frac{4}{3} - \frac{4}{\pi}$

۲۷۹۶۶ (۶.۳۹ $\frac{\pi}{2}$

۲۷۹۶۷ (۶.۴۱ 2

۲۷۹۶۸ (۶.۴۳ $\frac{1}{2}$

۲۷۹۶۹ (۶.۴۵ 1

۲۷۹۷۰ (۶.۴۷ (ا) $(\mp\sqrt{c}, c)$ ،(ب) $c = 4^{2/3}$ ،(ج) $c=4^{2/3}$

۲۷۹۷۱ (۶.۴۹ $\frac{11}{3}$

۲۷۹۷۲ (۶.۵۱ $\frac{3}{4}$

۲۷۹۷۳ (۶.۵۳ کوئی نہیں

۲۷۹۷۴ حصہ ۶.۲ صفحہ ۵۴۵

۲۷۹۷۵ (۶.۵۹ (ا) $S(x) = \pi(1 - x^2)$ ،

۲۷۹۷۶ (ب) $S(x) = 4(1 - x^2)$ ،

۲۷۹۷۷ (ج) $S(x) = 2(1 - x^2)$ ،

۲۷۹۷۸ (د) $S(x) = \sqrt{3}(1 - x^2)$

۲۷۹۷۹ (۶.۶۱ 16

۲۷۹۸۰ (۶.۶۳ $\frac{16}{3}$

۲۷۹۸۱ ۶.۶۵ (ا) $2\sqrt{3}$، (ب) 8

۲۷۹۸۲ ۶.۶۷ 8π

۲۷۹۸۳ ۶.۶۹ (ا) s^2h، (ب) s^2h

۲۷۹۸۴ حصہ ۶.۳ صفحہ ۵۵۷

۲۷۹۸۵ ۶.۷۳ $\frac{2\pi}{3}$

۲۷۹۸۶ ۶.۷۵ $4-\pi$

۲۷۹۸۷ ۶.۷۷ $\frac{32\pi}{5}$

۲۷۹۸۸ ۶.۷۹ 36π

۲۷۹۸۹ ۶.۸۱ π

۲۷۹۹۰ ۶.۸۳ $\pi\left(\frac{\pi}{2}+2\sqrt{2}-\frac{11}{3}\right)$

۲۷۹۹۱ ۶.۸۵ 2π

۲۷۹۹۲ ۶.۸۷ 2π

۲۷۹۹۳ ۶.۸۹ 3π

۲۷۹۹۴ ۶.۹۱ $\pi^2-2\pi$

۲۷۹۹۵ ۶.۹۳ $\frac{2\pi}{3}$

۲۷۹۹۶ ۶.۹۵ 2π

۲۷۹۹۷ ۶.۹۷ $\frac{117\pi}{5}$

۲۷۹۹۸ ۶.۹۹ $\pi(\pi-2)$

۲۷۹۹۹ ۶.۱۰۱ $\frac{4\pi}{3}$

۲۸۰۰۰ ۶.۱۰۳ 8π

۲۸۰۰۱ ۶.۱۰۵ $\sqrt{3}\pi$

۲۸۰۰۲ ۶.۱۰۷ $\frac{7\pi}{6}$

۲۸۰۰۳ ۶.۱۰۹ (ا) 8π، (ب) $\frac{32\pi}{5}$، (ج) $\frac{8\pi}{3}$، (د) $\frac{224\pi}{15}$

۲۸۰۰۴ ۶.۱۱۱ (ا) $\frac{16\pi}{15}$، (ب) $\frac{56\pi}{15}$، (ج) $\frac{64\pi}{15}$

۲۸۰۰۵ ۶.۱۱۳ $H=1053\pi\,\mathrm{cm}^3$

۲۸۰۰۶ ۶.۱۱۵ (ا) $c=\frac{2}{\pi}$، (ب) $c=0$

۲۸۰۰۷ ۶.۱۱۷ $H=2a^2b\pi^2$

۲۸۰۰۸ ۶.۱۱۹ (ب) $H=\frac{\pi r^2h}{3}$

۲۸۰۰۹ حصہ ۶.۴ صفحہ ۵۶۸

۲۸۰۱۰ ۶.۱۲۰ 6π

۲۸۰۱۱ ۶.۱۲۲ 2π

۲۸۰۱۲ ۶.۱۲۴ $\frac{14\pi}{3}$

۲۸۰۱۳ ۶.۱۲۶ 8π

۲۸۰۱۴ ۶.۱۲۸ $\frac{5\pi}{6}$

۲۸۰۱۵ ۶.۱۳۰ $\frac{128\pi}{5}$

۲۸۰۱۶ ۶.۱۳۲ 3π

۲۸۰۱۷ ۶.۱۳۴ $\frac{16\pi}{15}(3\sqrt{2}+5)$

۲۸۰۱۸ ۶.۱۳۶ $\frac{8\pi}{3}$

۲۸۰۱۹ ۶.۱۳۸ $\frac{4\pi}{3}$

۲۸۰۲۰ ۶.۱۴۰ $\frac{16\pi}{3}$

۲۸۰۲۱ ۶.۱۴۲ (ا) $\frac{6\pi}{5}$، (ب) $\frac{4\pi}{5}$، (ج) 2π، (د) 2π

۲۸۰۲۲ ۶.۱۴۴ (ا) $\frac{5\pi}{3}$، (ب) $\frac{4\pi}{3}$، (ج) 2π، (د) $\frac{2\pi}{3}$

۲۸۰۲۳ ۶.۱۴۶ (ا) $\frac{11\pi}{15}$، (ب) $\frac{97\pi}{105}$، (ج) $\frac{121\pi}{210}$، (د) $\frac{23\pi}{30}$

۲۸۰۲۴ ۶.۱۴۸ (ا) $\frac{512\pi}{21}$، (ب) $\frac{832\pi}{21}$

۲۸۰۲۵ ۶.۱۵۰ (ا) $\frac{\pi}{6}$، (ب) $\frac{\pi}{6}$

۲۸۰۲۶ ۶.۱۵۲ $\frac{9\pi}{16}$

۲۸۰۲۷ ۶.۱۵۴ (ب) 4π

۲۸۰۲۸ ۶.۱۵۶ قرص: دو مکمل؛ چھلا: دو مکمل؛ خول: ایک مکمل

۲۸۰۲۹ ۶.۱۵۸ $3x$

۲۸۰۳۰ حصہ ۶.۵ صفحہ ۵۷۹

۲۸۰۳۱ ۶.۱۵۹ (ا) $\int_{-1}^{2}\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$، (ج) ≈ 6.13

۲۸۰۳۲ ۶.۱۶۱ (ا) $\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 y}\,\mathrm{d}y$، (ج) ≈ 3.82

۲۸۰۳۳ ۶.۱۶۳ (ا) $\int_{-1}^{3}\sqrt{1+(y+1)^2}\,\mathrm{d}y$، (ج) ≈ 9.29

۲۸۰۳۴ ۶.۱۶۵ (ا) $\int_{0}^{\pi/6}\sec x\,\mathrm{d}x$، (ج) ≈ 0.55

۲۸۰۳۵ ۶.۱۶۷ 12

۲۸۰۳۶ ۶.۱۶۹ $\frac{53}{6}$

۲۸۰۳۷ ۶.۱۷۱ $\frac{123}{32}$

۲۸۰۳۸ ۶.۱۷۳ $\frac{99}{8}$

۲۸۰۳۹ ۶.۱۷۵ 2

۲۸۰۴۰ ۶.۱۷۷ (ا) $y=\sqrt{x}$ یا $y=-\sqrt{x}+2$، (ب) دو

۲۸۰۴۱ ۶.۱۷۹ 1

۲۸۰۴۲ ۶.۱۸۱ $50.44\,\mathrm{cm}$

۲۸۰۴۳ حصہ ۶.۶ صفحہ ۵۸۹

۲۸۰۴۴ ۶.۱۹۱ (ا) $2\pi\int_0^{\pi/4}\tan x\sqrt{1+\sec^4 x}\,\mathrm{d}x$،

۲۸۰۴۵ (ج) ≈ 3.84

۲۸۰۴۶ ۶.۱۹۳ (ا) $2\pi\int_1^2\frac{1}{y}\sqrt{1+y^{-4}}\,\mathrm{d}y$، (ج) ≈ 5.02

۲۸۰۴۷ ۶.۱۹۵ (ا) $2\pi\int_0^4(3-\sqrt{x})^2\sqrt{1+(1-3x^{-1/2})^2}\,\mathrm{d}x$،

۲۸۰۴۸ (ج) ≈ 63.37

۲۸۰۴۹ ۶.۱۹۷ (ا) $2\pi\int_0^{\pi/3}\left(\int_0^y\tan t\,\mathrm{d}t\right)\sec y\,\mathrm{d}y$،

۲۸۰۵۰ (ج) ≈ 2.08

۲۸۰۵۱ ۶.۱۹۹ $4\pi\sqrt{5}$

۲۸۰۵۲ ۶.۲۰۱ $3\pi\sqrt{5}$

۲۸۰۵۳ ۶.۲۰۳ $\frac{98\pi}{81}$

۲۸۰۵۴ ۶.۲۰۵ 2π

۲۸۰۵۵ ۶.۲۰۷ $\frac{\pi(\sqrt{8}-1)}{9}$

۲۸۰۵۶ ۶.۲۰۹ $\frac{35\pi\sqrt{5}}{3}$

۲۸۰۵۷ ۶.۲۱۱ $\frac{253\pi}{20}$

۲۸۰۵۸ (۶.۲۱۵) (ا) $2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos x)\sqrt{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

۲۸۰۵۹ (ب) ≈ 14.4236

۲۸۰۶۰ (۶.۲۱۷) $452.4\,\mathrm{L}$

۲۸۰۶۱ (۶.۲۲۱) $5\sqrt{2}\pi$

۲۸۰۶۲ (۶.۲۲۳) 14.4

۲۸۰۶۳ (۶.۲۲۵) 54.9

۲۸۰۶۴ حصہ ۶.۷ صفحہ ۶۰۵

۲۸۰۶۵ (۶.۲۲۸) $\frac{8}{5}\,\mathrm{m}$

۲۸۰۶۶ (۶.۲۳۰) $\left(\frac{L}{4}, \frac{L}{4}\right)$

۲۸۰۶۷ (۶.۲۳۲) $M_0 = 8,\ M = 8,\ \bar{x} = 1$

۲۸۰۶۸ (۶.۲۳۴) $M_0 = \frac{15}{2},\ M = \frac{9}{2},\ \bar{x} = \frac{5}{3}$

۲۸۰۶۹ (۶.۲۳۶) $M_0 = \frac{73}{6},\ M = 5,\ \bar{x} = \frac{73}{30}$

۲۸۰۷۰ (۶.۲۳۸) $M_0 = 3,\ M = 3,\ \bar{x} = 1$

۲۸۰۷۱ (۶.۲۴۰) $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = \frac{12}{5}$

۲۸۰۷۲ (۶.۲۴۲) $\bar{x} = 1,\ \bar{y} = -\frac{3}{5}$

۲۸۰۷۳ (۶.۲۴۴) $\bar{x} = \frac{16}{105},\ \bar{y} = \frac{8}{15}$

۲۸۰۷۴ (۶.۲۴۶) $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = \frac{\pi}{8}$

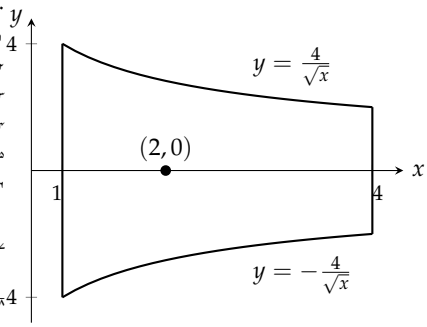
۲۸۰۷۵ (۶.۲۴۸) $\bar{x} = 1,\ \bar{y} - \frac{2}{5}$

۲۸۰۷۶ (۶.۲۵۰) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{4-\pi}$

۲۸۰۷۷ (۶.۲۵۲) $\bar{x} = \frac{3}{2},\ \bar{y} = \frac{1}{2}$

۲۸۰۷۸ (۶.۲۵۴) (الف) $\frac{224\pi}{3}$، (ب) $\bar{x} = 2,\ \bar{y} = 0$، (ج)

۲۸۰۷۹



۲۸۰۸۰

۲۸۰۸۱ (۶.۲۵۸) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{3}$

۲۸۰۸۲ (۶.۲۶۰) $\bar{x} = \frac{a}{3},\ \bar{y} = \frac{b}{3}$

۲۸۰۸۳ (۶.۲۶۲) $\frac{13\delta}{6}$

۲۸۰۸۴ (۶.۲۶۴) $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = \frac{a\pi}{4}$

۲۸۰۸۵ حصہ ۶.۸ صفحہ ۶۱۶

۲۸۰۸۶ (۶.۲۷۰) $1960\,\mathrm{J}$

۲۸۰۸۷ (۶.۲۷۲) $780\,\mathrm{J}$

۲۸۰۸۸ (۶.۲۷۴) $1764\,\mathrm{J}$

۲۸۰۸۹ (۶.۲۷۸) $400\,\mathrm{N\,m^{-1}}$

۲۸۰۹۰ (۶.۲۸۰) $0.08\,\mathrm{J}$ ، $4\,\mathrm{cm}$

۲۸۰۹۱ (۶.۲۸۲) (ا) $1.25 \times 10^6\,\mathrm{N\,m^{-1}}$، (ب) $62.5\,\mathrm{J}$ ،

۲۸۰۹۲ $187.5\,\mathrm{J}$

۲۸۰۹۳ (۶.۲۸۴) (ا) $18.375 \times 10^6\,\mathrm{J}$، (ب) 20 گھنٹے اور 25 منٹ۔ (د)

۲۸۰۹۴ 20 گھنٹے اور 22.5 منٹ، 20 گھنٹے اور 29 منٹ۔

۲۸۰۹۵ (۶.۲۸۶) $38\,484\,510\,\mathrm{J}$

۲۸۰۹۶ (۶.۲۸۸) $19.95 \times 10^6\,\mathrm{J}$

۲۸۰۹۷ (۶.۲۹۰) $0.43\,\mathrm{J}$

۲۸۰۹۸ (۶.۲۹۲) $21\,446\,605.9\,\mathrm{J}$

۲۸۰۹۹ (۶.۲۹۴) $4\,027\,512\,\mathrm{J}$

۲۸۱۰۰ (۶.۲۹۶) $5.144 \times 10^{10}\,\mathrm{J}$

۲۸۱۰۱ (۶.۳۰۰) $117.6\,\mathrm{J}$

۲۸۱۰۲ (۶.۳۰۲) $67\,901\,\mathrm{J}$

۲۸۱۰۳ (۶.۳۰۴) $56.25\,\mathrm{J}$

۲۸۱۰۴ حصہ ۶.۹ صفحہ ۶۲۷

۲۸۱۰۵ (۶.۳۰۶) $1.23 \times 10^9\,\mathrm{N}$

۲۸۱۰۶ (۶.۳۰۷) $6.08 \times 10^7\,\mathrm{N}$

۲۸۱۰۷ (۶.۳۱۰) $163\,333\,\mathrm{N}$

۲۸۱۰۸ (۶.۳۱۲) (ا) $182\,933\,\mathrm{N}$، (ب) $188\,238\,\mathrm{N}$

۲۸۱۰۹ (۶.۳۱۴) (ا) $58\,800\,\mathrm{N}$، (ب) $61.9\,\mathrm{cm}$، (ج) چونکہ فشار صرف

۲۸۱۱۰ گہرائی پر منحصر ہے لہٰذا لمبائی کا قوت سیال پر کوئی اثر نہیں ہوگا۔

۲۸۱۱۱ (۶.۳۱۶) $15\,126.3\,\mathrm{N}$

۲۸۱۱۲ (۶.۳۱۸) $20.2\,\mathrm{N}$

۲۸۱۱۳ $102.08\,\mathrm{N}$

۲۸۱۱۴ (۶.۳۲۲) (ا) $22\,827\,\mathrm{N}$، (ب) $2.6544\,\mathrm{m}$

۲۸۱۱۵ (۶.۳۲۴) $1133.77\,\mathrm{m}^3$

۲۸۱۱۶ (۶.۳۲۶) $\frac{wb}{2}$

۲۸۱۱۷ حصہ ۶.۱۰ صفحہ ۶۳۸

۲۸۱۱۸ (۶.۳۲۸) (ب) $20\,\mathrm{m}$، (ج) $0\,\mathrm{m}$

۲۸۱۱۹ (۶.۳۳۰) (ب) $6\,\mathrm{m}$، (ج) $2\,\mathrm{m}$

۲۸۱۲۰ (۶.۳۳۲) (ب) $245\,\mathrm{m}$، (ج) $0\,\mathrm{m}$

۲۸۱۲۱ (۶.۳۳۴) (ب) $6\,\mathrm{m}$، (ج) $4\,\mathrm{m}$

۲۸۱۲۲ (۶.۳۳۶) (ب) $2 < t < 4$، (ج) $6\,\mathrm{m}$، (د) $\frac{22}{3}\,\mathrm{m}$

۲۸۱۲۳ (۶.۳۳۸) (ا) کل فاصلہ 7 ہٹاؤ 3؛ (ب) کل فاصلہ 19.5 ہٹاؤ -4.5

۲۸۱۲۴ (۶.۳۴۰) $\sqrt{3}\pi$

۲۸۱۲۵ (۶.۳۴۲) (ا) $82.67\,\mathrm{m}^3$، (ب) $85\,071\,\mathrm{kg}$

۲۸۱۲۶ (۶.۳۴۳) $H = 32\pi$ ، $S = 32\sqrt{2}\pi$

۲۸۱۲۷ (۶.۳۴۵) $4\pi^2$

۲۸۱۲۸ ۶.۳۴۷) $\bar{x} = 0$ ، $\bar{y} = \frac{2a}{\pi}$

۲۸۱۲۹ ۶.۳۴۹) $\bar{x} = 0$ ، $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$

۲۸۱۳۰ ۶.۳۵۱) $\frac{\sqrt{2}\pi a^3(4+3\pi)}{6}$

۲۸۱۳۱ ۶.۳۵۳) $\frac{2a^3}{3}$

۲۸۱۳۲ حصہ ۷.۱ صفحہ ۶۵۲

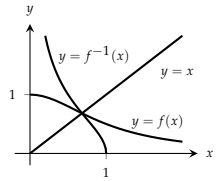
۲۸۱۳۳ ۷.۱) یک بہ یک

۲۸۱۳۴ ۷.۳) غیر یک بہ یک

۲۸۱۳۵ ۷.۵) یک بہ یک

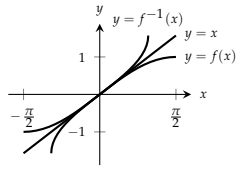
۲۸۱۳۶ ۷.۷) دائرہ کار $(0,1]$ ، سعت $[0,\infty)$

۲۸۱۳۷



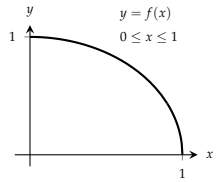
۲۸۱۳۸ ۷.۹) دائرہ کار $[-1,1]$ ، سعت $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$

۲۸۱۳۹



۲۸۱۴۰ ۷.۱۱) لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔

۲۸۱۴۱



۲۸۱۴۲ ۷.۱۳) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

۲۸۱۴۳ ۷.۱۵) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

۲۸۱۴۴ ۷.۱۷) $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$

۲۸۱۴۵ ۷.۱۹) $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$ دائرہ کار $-\infty < x < \infty$ ، سعت

۲۸۱۴۶ $-\infty < y < \infty$

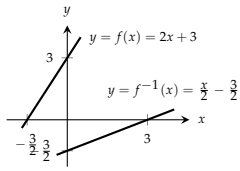
۲۸۱۴۷ ۷.۲۱) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ دائرہ کار $-\infty < x < \infty$ ،

۲۸۱۴۸ سعت $-\infty < y < \infty$

۲۸۱۴۹ ۷.۲۳) $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ دائرہ کار $x > 0$ ، سعت $y > 0$

۲۸۱۵۰ ۷.۲۵) ا) $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

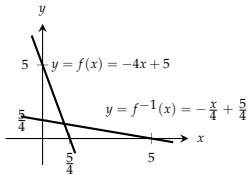
۲۸۱۵۱ (ب)



۲۸۱۵۲ (ج) $2, \frac{1}{2}$

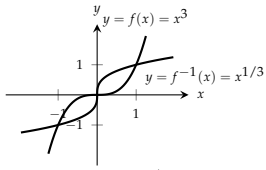
۲۸۱۵۳ ۷.۲۷) ا) $f^{-1}(x) = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}$

۲۸۱۵۴ (ب)



۲۸۱۵۵ (ج) $-4, -\frac{1}{4}$

۷.۲۹) (ب)



۲۸۱۵۷ (ج) $(1,1)$ پر f کا ڈھلوان 3 ہے؛ $(1,1)$ پر g کا ڈھلوان

۲۸۱۵۸ $\frac{1}{3}$ ہے؛ $-1, -1$ پر f کا ڈھلوان 3 اور $(-1,-1)$ پر

۲۸۱۵۹ g ڈھلوان $\frac{1}{3}$ ہے۔(د) $x = 0$ پر $y = x^3$ کا مماس

۲۸۱۶۰ $y = 0$ ہے؛ $x = 0$ پر $y = \sqrt[3]{x}$ کا مماس $x = 0$

۲۸۱۶۱ ہے۔

۲۸۱۶۲ ۷.۳۱) $\frac{1}{9}$

۲۸۱۶۳ ۷.۳۳) 3

۲۸۱۶۴ ۷.۳۵) ا) $f^{-1}(x) = \frac{x}{m}$ ، (ب) f^{-1} کی ترسیم مبدا سے گزرتی

۲۸۱۶۵ ہے اور اس کا ڈھلوان $\frac{1}{m}$ ہے۔

۲۸۱۶۶ ۷.۳۷) ا) $f^{-1}(x) = x - 1$ ، (ب) $f^{-1}(x) =$

۲۸۱۶۷ $x - b$ ، f^{-1} کی ترسیم f کی ترسیم کے متوازی ہے۔ f^{-1}

۲۸۱۶۸ اور f کی ترسیمات لکیر $y = x$ کے مخالف اطراف میں اور اس لکیر

۲۸۱۶۹ سے برابر فاصلہ پر ہیں۔(ج) ترسیمات ایک دوسرے کے متوازی ہوں

۲۸۱۷۰ گے اور لکیر $y = x$ کے مخالف اطراف اور برابر فاصلہ پر ہوں گے۔

۲۸۱۷۱ ۷.۴۱) بڑھتا، لہٰذا یک بہ یک؛ $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{9}x^{-2/3}$

۲۸۱۷۲ ۷.۴۳) گھٹتا، لہٰذا یک بہ یک؛ $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{3}x^{-2/3}$

۲۸۱۷۳ حصہ ۷.۲ صفحہ ۶۶۸

۲۸۱۷۴ ۷.۶۳) ا) $\ln 3 - 2\ln 2$ (ب) $2(\ln 2 - \ln 3)$ ، (ج)

۲۸۱۷۵ $-\ln 2$ ، (د) $\frac{2}{3}\ln 3$ ، (ہ) $\ln 3 + \frac{1}{2}\ln 2$ ، (و)

۲۸۱۷۶ $\frac{1}{2}(3\ln 3 - \ln 2)$

۲۸۱۷۷ (۷.۶۵) (ا) $\ln 5$، (ب) $\ln(x-3)$، (ج) $\ln(t^2)$

۲۸۱۷۸ (۷.۶۷) $\frac{1}{x}$

۲۸۱۷۹ (۷.۶۹) $\frac{2}{t}$

۲۸۱۸۰ (۷.۷۱) $-\frac{1}{x}$

۲۸۱۸۱ (۷.۷۳) $\frac{1}{\theta+1}$

۲۸۱۸۲ (۷.۷۵) $\frac{3}{x}$

۲۸۱۸۳ (۷.۷۷) $2\ln t + (\ln t)^2$

۲۸۱۸۴ (۷.۷۹) $x^3 \ln x$

۲۸۱۸۵ (۷.۸۱) $\frac{1-\ln t}{t^2}$

۲۸۱۸۶ (۷.۸۳) $\frac{1}{x(1+\ln x)^2}$

۲۸۱۸۷ (۷.۸۵) $\frac{1}{x\ln x}$

۲۸۱۸۸ (۷.۸۷) $2\cos(\ln\theta)$

۲۸۱۸۹ (۷.۸۹) $-\frac{3x+2}{2x(x+1)}$

۲۸۱۹۰ (۷.۹۱) $\frac{2}{t(1-\ln t)^2}$

۲۸۱۹۱ (۷.۹۳) $\frac{\tan(\ln\theta)}{\theta}$

۲۸۱۹۲ (۷.۹۵) $\frac{10x}{x^2+1} + \frac{1}{2(1-x)}$

۲۸۱۹۳ (۷.۹۷) $2x\ln|x| - x\ln\frac{|x|}{\sqrt{2}}$

۲۸۱۹۴ (۷.۹۹) $\frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}$

۲۸۱۹۵ (۷.۱۰۱) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{t+1}}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{t}(t+1)^{3/2}}$

۲۸۱۹۶ (۷.۱۰۳) $\sqrt{\theta+3}(\sin\theta)\left(\frac{1}{2(\theta+3)}+\cot\theta\right)$

۲۸۱۹۷ (۷.۱۰۵) $t(t+1)(t+2)[\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t+2}] = 3t^2+6t+2$

۲۸۱۹۹ (۷.۱۰۷) $\frac{\theta+5}{\theta\cos\theta}[\frac{1}{\theta+5}-\frac{1}{\theta}+\tan\theta]$

۲۸۲۰۰ (۷.۱۰۹) $\frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}}[\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+1}-\frac{2}{3(x+1)}]$

۲۸۲۰۱ (۷.۱۱۱) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}-\frac{2x}{x^2+1}\right)$

۲۸۲۰۲ (۷.۱۱۳) $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

۲۸۲۰۳ (۷.۱۱۵) $\ln\left|y^2-25\right| + C$

۲۸۲۰۴ (۷.۱۱۷) $\ln 3$

۲۸۲۰۵ (۷.۱۱۹) $(\ln 2)^2$

۲۸۲۰۶ (۷.۱۲۱) $\frac{1}{\ln 4}$

۲۸۲۰۷ (۷.۱۲۳) $\ln|6+3\tan t| + C$

۲۸۲۰۸ (۷.۱۲۵) $\ln 2$

۲۸۲۰۹ (۷.۱۲۷) $\ln 27$

۲۸۲۱۰ (۷.۱۲۹) $\ln(1+\sqrt{x}) + C$

۲۸۲۱۱ (۷.۱۳۱) (ا) $x = 0$ پر بلند تر 0 اور $x = \frac{\pi}{3}$ پر کم تر $\ln 2$؛

۲۸۲۱۲ (ب) $x = 1$ پر بلند تر 1 اور $x = \frac{1}{2}$ پر کم تر

۲۸۲۱۳ $\cos(\ln 2)$

۲۸۲۱۴ (۷.۱۳۳) $\ln 16$

۲۸۲۱۵ (۷.۱۳۵) $4\pi\ln 4$

۲۸۲۱۶ (۷.۱۳۷) $\pi\ln 16$

۲۸۲۱۷ (۷.۱۳۹) (ا) $6+\ln 2$، (ب) $8+\ln 9$

۲۸۲۱۸ (۷.۱۴۱) (ا) $\bar{x}\approx 1.44,\ \bar{y}\approx 0.36$

۲۸۲۱۹ (۷.۱۴۳) $y = x+\ln|x|+2$

۲۸۲۲۰ (۷.۱۴۵) (ب) 0.00469

۲۸۲۲۱ (۷.۱۴۷) 2

۲۸۲۲۲ **حصہ ۷.۳ صفحہ ۶۸۰**

۲۸۲۲۳ (۷.۱۵۳) (ا) 7.2، (ب) $\frac{1}{x^2}$، (ج) $\frac{x}{y}$

۲۸۲۲۴ (۷.۱۵۵) (ا) 1، (ب) 1، (ج) $-x^2-y^2$

۲۸۲۲۵ (۷.۱۵۷) e^{2t+4}

۲۸۲۲۶ (۷.۱۵۹) $e^{5t}+40$

۲۸۲۲۷ (۷.۱۶۱) $y = 2xe^x+1$

۲۸۲۲۸ (۷.۱۶۳) (ا) $k=\ln 2$، (ب) $k=\frac{1}{10}\ln 2$،

۲۸۲۲۹ (ج) $k = 1000\ln a$

۲۸۲۳۰ (۷.۱۶۵) (ا) $t=-10\ln 3$، (ب) $t=-\frac{\ln 2}{k}$،

۲۸۲۳۱ (ج) $t=\frac{\ln 0.4}{\ln 0.2}$

۲۸۲۳۲ (۷.۱۶۷) $4(\ln x)^2$

۲۸۲۳۳ (۷.۱۶۹) $-5e^{-5x}$

۲۸۲۳۴ (۷.۱۷۱) $-7e^{5-7x}$

۲۸۲۳۵ (۷.۱۷۳) xe^x

۲۸۲۳۶ (۷.۱۷۵) x^2e^x

۲۸۲۳۷ (۷.۱۷۷) $2e^\theta\cos\theta$

۲۸۲۳۸ (۷.۱۷۹) $2\theta e^{-\theta^2}\sin(e^{-\theta^2})$

۲۸۲۳۹ (۷.۱۸۱) $\frac{1-t}{t}$

۲۸۲۴۰ (۷.۱۸۳) $\frac{1}{1+e^\theta}$

۲۸۲۴۱ (۷.۱۸۵) $e^{\cos t}(1-t\sin t)$

۲۸۲۴۲ (۷.۱۸۷) $\frac{\sin x}{x}$

۲۸۲۴۳ (۷.۱۸۹) $\frac{ye^y\cos x}{1-ye^y\sin x}$

۲۸۲۴۴ (۷.۱۹۱) $\frac{2e^{2x}-\cos(x+3y)}{3\cos(x+3y)}$

۲۸۲۴۵ (۷.۱۹۳) $\frac{1}{3}e^{3x}-5e^{-x}+C$

۲۸۲۴۶ (۷.۱۹۵) 1

۲۸۲۴۷ (۷.۱۹۷) $8e^{x+1}+C$

۲۸۲۴۸ (۷.۱۹۹) 2

۲۸۲۴۹ (۷.۲۰۱) $2e^{\sqrt{r}}+C$

۲۸۲۵۰ (۷.۲۰۳) $-e^{-t^2}+C$

۲۸۲۵۱ (۷.۲۰۵) $-e^{1/x}+C$

۲۸۲۵۲ (۷.۲۰۷) e

۲۸۲۵۳ (۷.۲۰۹) $\frac{1}{\pi}e^{\sec\pi t}+C$

۲۸۲۵۴ (۷.۲۱۱) 1

۲۸۲۵۵ ۷.۲۱۳) $\ln(1+e^r)+C$

۲۸۲۵۶ ۷.۲۱۵) $y=1-\cos(e^t-2)$

۲۸۲۵۷ ۷.۲۱۷) $y=2(e^{-x}+x)-1$

۲۸۲۵۸ ۷.۲۱۹) نقطہ $x=0$ پر مطلق اعظم 1 ؛نقطہ $x=\ln 2$ پر مطلق اقل

۲۸۲۵۹ $2-2\ln 2$

۲۸۲۶۰ ۷.۲۲۱) $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ پر مطلق اعظم $\frac{1}{2e}$

۲۸۲۶۱ ۷.۲۲۳) 2

۲۸۲۶۲ ۷.۲۲۵) $y=e^{x/2}-1$

۲۸۲۶۳ ۷.۲۲۷) ا) $\frac{d}{dx}(x\ln x-x+C)=x\cdot\frac{1}{x}+\ln x$

۲۸۲۶۴ $1+0=\ln x$ ،(ب) $\frac{1}{e-1}$

۲۸۲۶۵ ۷.۲۲۹) (ب) حتمی خلل تقریباً 0.02140

۲۸۲۶۶ ۷.۲۳۱) $2.718\,281\,83$

۲۸۲۶۷ حصہ ۷.۴ صفحہ ۶۹۵

۲۸۲۶۸ ۷.۲۳۵) ا) 7 ،(ب) $\sqrt{2}$ ،(ج) 75 ،(د) 2 ،(ھ) 0.5 ،(و) -1

۲۸۲۶۹ ۷.۲۳۷) ا) $\sqrt{x}$ ،(ب) x^2 ،(ج) $\sin x$

۲۸۲۷۰ ۷.۲۳۹) ا) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ ،(ب) 3 ،(ج) 2

۲۸۲۷۱ ۷.۲۴۱) $x=12$

۲۸۲۷۲ ۷.۲۴۳) $x=3$ یا $x=2$

۲۸۲۷۳ ۷.۲۴۵) $2^x\ln x$

۲۸۲۷۴ ۷.۲۴۷) $(\frac{\ln 5}{2\sqrt{s}})5^{\sqrt{s}}$

۲۸۲۷۵ ۷.۲۴۹) $\pi x^{\pi-1}$

۲۸۲۷۶ ۷.۲۵۱) $-\sqrt{2}\cos\theta^{(\sqrt{2}-1)}\sin\theta$

۲۸۲۷۷ ۷.۲۵۳) $7^{\sec\theta}(\ln 7)^2(\sec\theta\tan\theta)$

۲۸۲۷۸ ۷.۲۵۵) $(3\cos 3t)(2^{\sin 3t})\ln 2$

۲۸۲۷۹ ۷.۲۵۷) $\frac{1}{\theta\ln 2}$

۲۸۲۸۰ ۷.۲۵۹) $\frac{3}{x\ln 4}$

۲۸۲۸۱ ۷.۲۶۱) $\frac{2(\ln r)}{r(\ln 2)(\ln 4)}$

۲۸۲۸۲ ۷.۲۶۳) $\frac{-2}{(x+1)(x-1)}$

۲۸۲۸۳ ۷.۲۶۵) $\sin(\log_7\theta)+\frac{1}{\ln 7}\cos(\log_7\theta)$

۲۸۲۸۴ ۷.۲۶۷) $\frac{1}{\ln 5}$

۲۸۲۸۵ ۷.۲۶۹) $\frac{1}{t}(\log_2 3)3^{\log_2 t}$

۲۸۲۸۶ ۷.۲۷۱) $\frac{1}{t}$

۲۸۲۸۷ ۷.۲۷۳) $(x+1)^x(\frac{x}{x+1}+\ln(x+1))$

۲۸۲۸۸ ۷.۲۷۵) $(\sqrt{t})^t(\frac{\ln t}{2}+\frac{1}{2})$

۲۸۲۸۹ ۷.۲۷۷) $(\sin x)^x(\ln\sin x+x\cot x)$

۲۸۲۹۰ ۷.۲۷۹) $(x^{\ln x})(\frac{\ln x^2}{x})$

۲۸۲۹۱ ۷.۲۸۱) $\frac{5^x}{\ln 5}+C$

۲۸۲۹۲ ۷.۲۸۳) $\frac{1}{2\ln 2}$

۲۸۲۹۳ ۷.۲۸۵) $\frac{1}{\ln 2}$

۲۸۲۹۴ ۷.۲۸۷) $\frac{6}{\ln 7}$

۲۸۲۹۵ ۷.۲۸۹) 32760

۲۸۲۹۶ ۷.۲۹۱) $\frac{3x^{(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt{3}+1}+C$

۲۸۲۹۷ ۷.۲۹۳) $3^{\sqrt{2}+1}$

۲۸۲۹۸ ۷.۲۹۵) $\frac{1}{\ln 10}(\frac{(\ln x)^2}{2})+C$

۲۸۲۹۹ ۷.۲۹۷) $2(\ln 2)^2$

۲۸۳۰۰ ۷.۲۹۹) $\frac{3\ln 2}{2}$

۲۸۳۰۱ ۷.۳۰۱) $\ln 10$

۲۸۳۰۲ ۷.۳۰۳) $(\ln 10)\ln|\ln x|+C$

۲۸۳۰۳ ۷.۳۰۵) $\ln(\ln x),\ x>1$

۲۸۳۰۴ ۷.۳۰۷) $-\ln x$

۲۸۳۰۵ ۷.۳۰۹) $2\ln 5$

۲۸۳۰۶ ۷.۳۱۱) $[10^{-7.44},10^{-7.37}]$

۲۸۳۰۷ ۷.۳۱۳) $k=10$

۲۸۳۰۸ ۷.۳۱۵) ا) 10^{-7} ،(ب) 7 ،(ج) $1:1$

۲۸۳۰۹ ۷.۳۱۷) $x\approx-0.76666$

۲۸۳۱۰ ۷.۳۱۹) ا) $L(x)=1+(\ln 2)x\approx 0.69x+1$

۲۸۳۱۱ ۷.۳۲۱) ا) 1.89279 ، (ب) -0.35621 ، (ج) 0.94575 ،

۲۸۳۱۲ (د) -2.80735 ، (ھ) 5.29595 ، (و) 0.97041 ، (ز)

۲۸۳۱۳ -1.03972 ،(ح) -1.61181

۲۸۳۱۴ حصہ ۷.۵ صفحہ ۷۰۹

۲۸۳۱۵ ۷.۳۲۳) ا) $-0.000\,01$ ،(ب) 10.536 سال،(ج) 82 %

۲۸۳۱۶ ۷.۳۲۵) 54.88 g

۲۸۳۱۷ ۷.۳۲۷) 19.93 m

۲۸۳۱۸ ۷.۳۲۹) 2.8147497×10^{14}

۲۸۳۱۹ ۷.۳۳۱) ا) 8 سال،(ب) 32.02 سال

۲۸۳۲۰ ۷.۳۳۳) 15.28 سال

۲۸۳۲۱ ۷.۳۳۵) ا) $A_0e^{0.2}$ ،(ب) 17.33 سال،(ج) 27.74 سال

۲۸۳۲۲ ۷.۳۳۷) 4.50 %

۲۸۳۲۳ ۷.۳۳۹) 0.585 دن

۲۸۳۲۴ ۷.۳۴۳) ا) 17.5 منٹ،(ب) 13.26 منٹ

۲۸۳۲۵ ۷.۳۴۵) $-3\,^\circ\mathrm{C}$

۲۸۳۲۶ ۷.۳۴۷) تقریباً 6658 سال

۲۸۳۲۷ ۷.۳۴۹) 41 سال پرانا

۲۸۳۲۸ حصہ ۷.۶ صفحہ ۷۲۰

۲۸۳۲۹ ۷.۳۵۰) $\frac{1}{4}$

۲۸۳۳۰ ۷.۳۵۲) $-\frac{23}{7}$

۲۸۳۳۱ ۷.۳۵۴) $\frac{5}{7}$

۲۸۳۳۲ ۷.۳۵۶) 0

۲۸۳۳۳ ۷.۳۵۸) -16

۲۸۳۳۴ (۷.۳۶۰) -2

۲۸۳۳۵ (۷.۳۶۲) $\frac{1}{4}$

۲۸۳۳۶ (۷.۳۶۴) 2

۲۸۳۳۷ (۷.۳۶۶) 3

۲۸۳۳۸ (۷.۳۶۸) -1

۲۸۳۳۹ (۷.۳۷۰) $\ln 3$

۲۸۳۴۰ (۷.۳۷۲) $\frac{1}{\ln 2}$

۲۸۳۴۱ (۷.۳۷۴) $\ln 2$

۲۸۳۴۲ (۷.۳۷۶) 1

۲۸۳۴۳ (۷.۳۷۸) $\frac{1}{2}$

۲۸۳۴۴ (۷.۳۸۰) $\ln 2$

۲۸۳۴۵ (۷.۳۸۲) 0

۲۸۳۴۶ (۷.۳۸۴) $-\frac{1}{2}$

۲۸۳۴۷ (۷.۳۸۶) $\ln 2$

۲۸۳۴۸ (۷.۳۸۸) -1

۲۸۳۴۹ (۷.۳۹۰) 1

۲۸۳۵۰ (۷.۳۹۲) $\frac{1}{e}$

۲۸۳۵۱ (۷.۳۹۴) 1

۲۸۳۵۲ (۷.۳۹۶) $\frac{1}{e}$

۲۸۳۵۳ (۷.۳۹۸) $e^{1/2}$

۲۸۳۵۴ (۷.۴۰۰) 1

۲۸۳۵۵ (۷.۴۰۲) 3

۲۸۳۵۶ (۷.۴۰۴) 1

۲۸۳۵۷ (۷.۴۰۶) (ب)درست

۲۸۳۵۸ (۷.۴۰۸) (د)درست

۲۸۳۵۹ (۷.۴۱۰) $c = \frac{25}{10}$

۲۸۳۶۰ حصہ ۷.۷ صفحہ ۷۳۳

۲۸۳۶۱ (۷.۴۲۴) (ا)آہستہ (ب)آہستہ (ج)آہستہ (د)تیز (ہ)آہستہ (و)آہستہ
۲۸۳۶۲ (ز)ایک سا (ح)آہستہ

۲۸۳۶۳ (۷.۴۲۶) (ا)ایک سا (ب)تیز (ج)ایک سا (د)ایک سا (ہ)آہستہ
۲۸۳۶۴ (و)تیز (ز)آہستہ (ح)ایک سا

۲۸۳۶۵ (۷.۴۲۸) (ا)ایک سا (ب)ایک سا (ج)ایک سا (د)تیز
۲۸۳۶۶ (ہ)تیز (و)ایک سا (ز)آہستہ (ح)تیز

۲۸۳۶۷ (۷.۴۳۰) د، ا، ج، ب

۲۸۳۶۸ (۷.۴۳۲) (ا)غلط (ب)غلط (ج)درست (د)درست
۲۸۳۶۹ (ہ)درست (و)درست (ز)غلط (ح)درست

۲۸۳۷۰ (۷.۴۳۶) جب f کا درجہ g کے درجہ سے کم یا اس کے برابر ہو۔

۲۸۳۷۱ (۷.۴۳۸) زیادہ درجے کی کثیر رکنی، کم درجے کی کثیر رکنی سے زیادہ تیز بڑھتی
۲۸۳۷۲ ہے۔ایک سے درجہ کی کثیر رکنی کی شرح نمو برابر ہوتی ہے۔

۲۸۳۷۳ (۷.۴۴۴) (ب) $\ln(e^{17\,000\,000}) = 17\,000\,000 <$
۲۸۳۷۴ $(e^{17\times 10^6})^{1/10^6} = e^{17} \approx 24\,154\,952.75$

۲۸۳۷۵ (ج) $x \approx 3.4306311 \times 10^{15}$ ، (د)نقطہ تقاطع
۲۸۳۷۶ $x \approx 3.4306311 \times 10^{15}$ ہے۔

۲۸۳۷۷ (۷.۴۴۶) (ا)جو $O(n \log_2 n)$ قدم چلتا ہے۔

۲۸۳۷۸ (۷.۴۴۸) ترتیبی تلاش کو دس لاکھ قدم چلنا پڑھ سکتا ہے جبکہ ثنائی تلاش میں زیادہ
۲۸۳۷۹ سے زیادہ 20 قدم چلنا ہو گا۔

۲۸۳۸۰ حصہ ۷.۸ صفحہ ۷۴۶

۲۸۳۸۱ (۷.۴۵۰) (ا) $\frac{\pi}{4}$ ، (ب) $-\frac{\pi}{3}$ ، (ج) $\frac{\pi}{6}$

۲۸۳۸۲ (۷.۴۵۲) (ا) $-\frac{\pi}{6}$ ، (ب) $\frac{\pi}{4}$ ، (ج) $-\frac{\pi}{3}$

۲۸۳۸۳ (۷.۴۵۴) (ا) $\frac{\pi}{3}$ ، (ب) $\frac{3\pi}{4}$ ، (ج) $\frac{\pi}{6}$

۲۸۳۸۴ (۷.۴۵۶) (ا) $\frac{3\pi}{4}$ ، (ب) $\frac{\pi}{6}$ ، (ج) $\frac{2\pi}{3}$

۲۸۳۸۵ (۷.۴۵۸) (ا) $\frac{\pi}{4}$ ، (ب) $-\frac{\pi}{3}$ ، (ج) $\frac{\pi}{6}$

۲۸۳۸۶ (۷.۴۶۰) (ا) $\frac{3\pi}{4}$ ، (ب) $\frac{\pi}{6}$ ، (ج) $\frac{2\pi}{3}$

۲۸۳۸۷ (۷.۴۶۲) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\tan\alpha = \frac{5}{12}$,
۲۸۳۸۸ $\sec\alpha = \frac{13}{12}$, $\csc\alpha = \frac{13}{5}$, $\cot\alpha = \frac{12}{5}$

۲۸۳۸۹ (۷.۴۶۴) $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$,
۲۸۳۹۰ $\tan\alpha = -2$, $\csc\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cot\alpha = -\frac{1}{2}$

۲۸۳۹۱ (۷.۴۶۶) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲۸۳۹۲ (۷.۴۶۸) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

۲۸۳۹۳ (۷.۴۷۰) $\frac{4+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

۲۸۳۹۴ (۷.۴۷۲) 1

۲۸۳۹۵ (۷.۴۷۴) $-\sqrt{2}$

۲۸۳۹۶ (۷.۴۷۶) $\frac{\pi}{6}$

۲۸۳۹۷ (۷.۴۷۷) (جواب $-\frac{\pi}{4}$ نہیں ہے۔)

۲۸۳۹۸ (۷.۴۷۸) $\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$

۲۸۳۹۹ (۷.۴۸۰) $\sqrt{9y^2-1}$

۲۸۴۰۰ (۷.۴۸۲) $\sqrt{1-x^2}$

۲۸۴۰۱ (۷.۴۸۴) $\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$

۲۸۴۰۲ (۷.۴۸۶) $\frac{\sqrt{9-4y^2}}{3}$

۲۸۴۰۳ (۷.۴۸۸) $\frac{\sqrt{x^2-16}}{x}$

۲۸۴۰۴ (۷.۴۹۰) $\frac{\pi}{2}$

۲۸۴۰۵ (۷.۴۹۲) $\frac{\pi}{2}$

۲۸۴۰۶ (۷.۴۹۴) $\frac{\pi}{2}$

۲۸۴۰۷ (۷.۴۹۶) 0

۲۸۴۰۸ (۷.۵۰۰) $\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 54.7^\circ$

۲۸۴۰۹ (۷.۵۰۶) (ا)معین؛ایسا زاویہ پایا جاتا ہے جس کا ٹینجنٹ 2 کے برابر ہے۔
(ب)غیر معین؛ایسا کوئی زاویہ نہیں پایا جاتا ہے جس کا کوسائن 2 کے
برابر ہو۔

۲۸۴۱۰ (۷.۵۰۸) (ا)غیر معین؛کسی زاویے کا سیکنٹ 0 نہیں ہے۔(ب)غیر معین؛کسی
زاویے کا سائن $\sqrt{2}$ نہیں ہے۔

۲۸۴۱۲ (۷.۵۱۰) (ا) 0.84107 ، (ب) -0.72973 ، (ج) 0.46365

۲۸۳۱۵ ۷.۵۱۲) (ا)دائرہ کار: تمام حقیقی اعداد ماسوائے وہ جن کی روپ $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ہو۔

۲۸۳۱۶ جہاں k عدد صحیح ہے؛ سعت: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

۲۸۳۱۷ (ب)دائرہ کار: $-\infty < x < \infty$ ؛

۲۸۳۱۸ سعت $-\infty \leq y \leq \infty$

۲۸۳۱۹ ۷.۵۱۴) (ا)دائرہ کار: $-\infty < x < \infty$ ؛ سعت $0 \leq y \leq \pi$

۲۸۳۲۰ (ب)دائرہ کار: $-1 \leq x \leq 1$ ؛

۲۸۳۲۱ سعت $-1 \leq y \leq 1$

۲۸۳۲۲ ۷.۵۱۶) ترسیمات بالکل ایک سی ہیں۔

۲۸۳۲۳ حصہ ۷.۹ صفحہ ۷۵۸

۲۸۳۲۴ ۷.۵۱۸) $\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

۲۸۳۲۵ ۷.۵۲۰) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}}$

۲۸۳۲۶ ۷.۵۲۲) $\frac{1}{|2s+1|\sqrt{s^2+s}}$

۲۸۳۲۷ ۷.۵۲۴) $\frac{-2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2}}$

۲۸۳۲۸ ۷.۵۲۶) $\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$

۲۸۳۲۹ ۷.۵۲۸) $\frac{-1}{2\sqrt{t}(1+t)}$

۲۸۳۳۰ ۷.۵۳۰) $\frac{1}{\tan^{-1}(x(1+x^2))}$

۲۸۳۳۱ ۷.۵۳۲) $\frac{-1}{\sqrt{e^{2t}-1}} = \frac{-e^t}{|e^t|\sqrt{(e^t)^2-1}}$

۲۸۳۳۲ ۷.۵۳۴) $\frac{-2s^2}{\sqrt{1-s^2}}$

۲۸۳۳۳ ۷.۵۳۶) 0

۲۸۳۳۴ ۷.۵۳۸) $\sin^{-1} x$

۲۸۳۳۵ ۷.۵۴۰) $\sin^{-1} \frac{x}{7} + C$

۲۸۳۳۶ ۷.۵۴۲) $\frac{1}{\sqrt{17}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{17}} + C$

۲۸۳۳۷ ۷.۵۴۴) $\frac{1}{\sqrt{2}} \sec^{-1} \left| \frac{5x}{\sqrt{2}} \right| + C$

۲۸۳۳۸ ۷.۵۴۶) $\frac{2\pi}{3}$

۲۸۳۳۹ ۷.۵۴۸) $\frac{\pi}{16}$

۲۸۳۴۰ ۷.۵۵۰) $-\frac{\pi}{12}$

۲۸۳۴۱ ۷.۵۵۲) $\frac{3}{2} \sin^{-1} 2(r-1) + C$

۲۸۳۴۲ ۷.۵۵۴) $\frac{\sqrt{2}}{2} \tan^{-1}(\frac{x-1}{\sqrt{2}}) + C$

۲۸۳۴۳ ۷.۵۵۶) $\frac{1}{4} \sec^{-1} \left| \frac{2x-1}{2} \right| + C$

۲۸۳۴۴ ۷.۵۵۸) π

۲۸۳۴۵ ۷.۵۶۰) $\frac{\pi}{12}$

۲۸۳۴۶ ۷.۵۶۲) $\frac{1}{2} \sin^{-1} y^2 + C$

۲۸۳۴۷ ۷.۵۶۴) $\sin^{-1}(x-2) + C$

۲۸۳۴۸ ۷.۵۶۶) π

۲۸۳۴۹ ۷.۵۶۸) $\frac{1}{2} \tan^{-1}(\frac{y-1}{2}) + C$

۲۸۳۵۰ ۷.۵۷۰) 2π

۲۸۳۵۱ ۷.۵۷۲) $\sec^{-1}|x+1| + C$

۲۸۳۵۲ ۷.۵۷۴) $e^{\sin^{-1} x} + C$

۲۸۳۵۳ ۷.۵۷۶) $\frac{1}{3}(\sin^{-1} x)^3 + C$

۲۸۳۵۴ ۷.۵۷۸) $\ln\left|\tan^{-1} y\right| + C$

۲۸۳۵۵ ۷.۵۸۰) $\sqrt{3} - 1$

۲۸۳۵۶ ۷.۵۸۲) 5

۲۸۳۵۷ ۷.۵۸۴) 2

۲۸۳۵۸ ۷.۵۹۰) $y = \sin^{-1}(x)$

۲۸۳۵۹ ۷.۵۹۲) $y = \sec^{-1}(x) + \frac{2\pi}{3}, \quad x > 1$

۲۸۳۶۰ ۷.۵۹۴) $3\sqrt{5}\,\mathrm{m}$

۲۸۳۶۱ ۷.۵۹۶) جی ہاں، $\sin^{-1}(x)$ اور $\cos^{-1}(x)$ میں فرق مستقل $\frac{\pi}{2}$

۲۸۳۶۲ ہے۔

۲۸۳۶۳ ۷.۶۰۶) $\frac{\pi^2}{2}$

۲۸۳۶۴ ۷.۶۰۸) (ا) $\frac{\pi^2}{2}$ (ب) 2π

۲۸۳۶۵ حصہ ۷.۱۰ صفحہ ۷۷۴

۲۸۳۶۶ ۷.۶۱۴) $\cosh x = \frac{5}{4}$, $\tanh x = -\frac{3}{5}$,

۲۸۳۶۷ $\coth x = -\frac{5}{3}$, $\operatorname{sech} x = \frac{4}{5}$,

۲۸۳۶۸ $\operatorname{csch} x = -\frac{4}{3}$

۲۸۳۶۹ ۷.۶۱۶) $\sinh x = \frac{8}{15}$, $\tanh x = \frac{8}{17}$,

۲۸۳۷۰ $\coth x = \frac{17}{8}$, $\operatorname{sech} x = \frac{15}{17}$,

۲۸۳۷۱ $\operatorname{csch} x = \frac{15}{8}$

۲۸۳۷۲ ۷.۶۱۸) $x + \frac{1}{x}$

۲۸۳۷۳ ۷.۶۲۰) e^{5x}

۲۸۳۷۴ ۷.۶۲۲) e^{4x}

۲۸۳۷۵ ۷.۶۲۴) $2\cosh \frac{x}{3}$

۲۸۳۷۶ ۷.۶۲۸) $\operatorname{sech}^2 \sqrt{t} + \frac{\tanh \sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

۲۸۳۷۷ ۷.۶۳۰) $\coth z$

۲۸۳۷۸ ۷.۶۳۲) $(\ln \operatorname{sech} \theta)(\operatorname{sech} \theta \tanh \theta)$

۲۸۳۷۹ ۷.۶۳۴) $\tanh^3 v$

۲۸۳۸۰ ۷.۶۳۶) 2

۲۸۳۸۱ ۷.۶۳۸) $\frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$

۲۸۳۸۲ ۷.۶۴۰) $\frac{1}{1+\theta} - \tanh^{-1} \theta$

۲۸۳۸۳ ۷.۶۴۲) $\frac{1}{2\sqrt{t}} - \coth^{-1} \sqrt{t}$

۲۸۳۸۴ ۷.۶۴۴) $-\operatorname{sech}^{-1} x$

۲۸۳۸۵ ۷.۶۴۶) $\frac{\ln 2}{\sqrt{1+(1/2)^{2\theta}}}$

۲۸۳۸۶ ۷.۶۴۸) $|\sec x|$

۲۸۳۸۷ ۷.۶۵۴) $\frac{\cosh 2x}{2} + C$

۲۸۴۸۸ (۷.۶۵۶) $12\sinh(\frac{x}{2} - \ln 3) + C$

۲۸۴۸۹ (۷.۶۵۸) $7\ln\left|e^{x/7} + e^{-x/7}\right| + C$

۲۸۴۹۰ (۷.۶۶۰) $\tanh(x - \frac{1}{2}) + C$

۲۸۴۹۱ (۷.۶۶۲) $-2\operatorname{sech}\sqrt{t} + C$

۲۸۴۹۲ (۷.۶۶۴) $\ln\frac{5}{2}$

۲۸۴۹۳ (۷.۶۶۶) $\frac{3}{32} + \ln 2$

۲۸۴۹۴ (۷.۶۶۸) $e - e^{-1}$

۲۸۴۹۵ (۷.۶۷۰) $\frac{3}{4}$

۲۸۴۹۶ (۷.۶۷۲) $\frac{3}{8} + \ln\sqrt{2}$

۲۸۴۹۷ (۷.۶۷۴) $\ln\frac{2}{3}$

۲۸۴۹۸ (۷.۶۷۶) $-\frac{\ln 3}{2}$

۲۸۴۹۹ (۷.۶۷۸) $\ln 3$

۲۸۵۰۰ (۷.۶۸۰) (ا) $\sinh^{-1}(\sqrt{3})$ (ب) $\ln(\sqrt{3}+2)$

۲۸۵۰۱ (۷.۶۸۲) (ا) $\coth^{-1}(\frac{5}{4})$ (ب) $\coth^{-1}(2)$

۲۸۵۰۲ $\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{3})$

۲۸۵۰۳ (۷.۶۸۴) (ا) $-\operatorname{sech}^{-1}(\frac{12}{13}) + \operatorname{sech}^{-1}(\frac{4}{5})$

۲۸۵۰۴ (ب) $\ln(\frac{1+\sqrt{1-(12/13)^2}}{12/13}) + \ln(\frac{1+\sqrt{1-(4/5)^2}}{4/5}) =$

۲۸۵۰۵ $-\ln(\frac{3}{2}) + \ln(2) = \ln(\frac{4}{3})$

۲۸۵۰۶ (۷.۶۸۶) (ا) 0 (ب) 0

۲۸۵۰۷ (۷.۶۸۸) (ب) $f(x) = \frac{2f(x)}{2} + 0 = f(x)$ ، $f(x) =$

۲۸۵۰۸ $0 + \frac{2f(x)}{2} = f(x)$

۲۸۵۰۹ (۷.۶۹۰) (ب) $v = \sqrt{\frac{gm}{k}}$ ، (ج) $v = 54.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

۲۸۵۱۰ (۷.۶۹۲) $y = \operatorname{sech}^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2}$

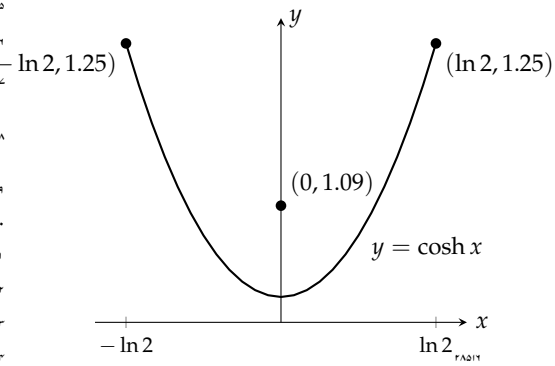
۲۸۵۱۱ (۷.۶۹۴) 2π

۲۸۵۱۲ (۷.۶۹۶) (ا) $\frac{6}{5}$ (ب) $\frac{\sinh ab}{a}$

۲۸۵۱۳ (۷.۶۹۸) (ا) $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = \frac{5}{8} + \frac{\ln 4}{3} \approx 1.09$

۲۸۵۱۴ (ب)

۲۸۵۱۵



۲۸۵۱۶

۲۸۵۱۷ (۷.۷۰۲) (ج) $a \approx 0.1785413$ (د) $32.93\,\mathrm{N}$

۲۸۵۱۸ حصہ ۷.۱۱ صفحہ ۷۹۳

۲۸۵۱۹ (۷.۷۱۱) $y = \tan(x^2 + C)$

۲۸۵۲۰ (۷.۷۱۳) $\frac{2}{3}y^{3/2} - x^{1/2} = C$

۲۸۵۲۱ (۷.۷۱۵) $e^y - e^x = C$

۲۸۵۲۲ (۷.۷۱۷) $y = \frac{e^x + C}{x}$

۲۸۵۲۳ (۷.۷۱۹) $y = \frac{C - \cos x}{x^3},\ x > 0$

۲۸۵۲۴ (۷.۷۲۱) $y = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{C}{x^2},\ x > 0$

۲۸۵۲۵ (۷.۷۲۳) $y = \frac{1}{2}xe^{x/2} + Ce^{x/2}$

۲۸۵۲۶ (۷.۷۲۵) $y = x^2e^{-2x} + Ce^{-2x}$

۲۸۵۲۷ (۷.۷۲۷) $-e^{-y} - e^{\sin x} = C$

۲۸۵۲۸ (۷.۷۲۹) $s = \frac{t^3}{3(t-1)^4} - \frac{t}{(t-1)^4} + \frac{C}{(t-1)^4}$

۲۸۵۲۹ (۷.۷۳۱) $2\tan\sqrt{x} = t + C$

۲۸۵۳۰ (۷.۷۳۳) $r = \csc\theta(\ln|\sec\theta| + C)$

۲۸۵۳۱ (۷.۷۳۵) $y = -e^{-x}\operatorname{sech} x + C\operatorname{sech} x$

۲۸۵۳۲ (۷.۷۳۷) $y = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t}$

۲۸۵۳۳ (۷.۷۳۹) $y = -\frac{1}{\theta}\cos\theta + \frac{\pi}{2\theta}$

۲۸۵۳۴ (۷.۷۴۱) $y = 6e^{x^2} - \frac{e^{x^2}}{x+1}$

۲۸۵۳۵ (۷.۷۴۳) $y = y_0e^{kt}$

۲۸۵۳۶ (۷.۷۴۵) (الف)غلط(ب)درست

۲۸۵۳۷ (۷.۷۴۷) (ا) $c = \frac{G}{100Vk} + (c_0 - \frac{G}{100Vk})e^{-kt}$ ، (ب)

۲۸۵۳۸ $\frac{G}{100Vk}$

۲۸۵۳۹ (۷.۷۴۹) 40 منٹ

۲۸۵۴۰ (۷.۷۵۱) (ا) $168\,\mathrm{m}$ ، (ب)تقریباً 70 سیکنڈ

۲۸۵۴۱ (۷.۷۵۳) $t = \frac{L}{R}\ln 2$ سیکنڈ بعد

۲۸۵۴۲ (۷.۷۵۵) (ا) $i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-3} \approx 0.95\frac{V}{R}$ ، (ب) 86 %

۲۸۵۴۳ (۷.۷۵۷) (ا) $2\,\mathrm{kg\,min^{-1}}$ ، (ب) $100 + t$ لٹر،

۲۸۵۴۴ (ج) $\frac{4y}{100+t}\ \mathrm{kg\,min^{-1}}$ ،

۲۸۵۴۵ (د) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2 - \frac{4y}{100+t},\ y(0) = 25$ ،

۲۸۵۴۶ $y(t) = \frac{2}{5}(100+t) - \frac{15}{(1+t/100)^4}$ ،

۲۸۵۴۷ (ہ) $0.35\,\mathrm{kg\,L^{-1}}$

۲۸۵۴۸ حصہ ۷.۱۲ صفحہ ۸۰۵

۲۸۵۴۹ (۷.۷۶۱) $y_{\text{تحلیلی}} = \frac{x}{2} - \frac{4}{x},\ y_1 = -0.25,$

۲۸۵۵۰ $y_2 = 0.3,\ y_3 = 0.75$

۲۸۵۵۱ (۷.۷۶۳) $y_{\text{تحلیلی}} = 3e^{x(x+2)},\ y_1 = 4.2,$

۲۸۵۵۲ $y_2 = 6.216,\ y_3 = 9.697$

۲۸۵۵۳ (۷.۷۶۵) $y_{\text{تحلیلی}} = e^{x^2} + 1,\ y_1 = 2.0,$

۲۸۵۵۴ $y_2 = 2.0202,\ y_3 = 2.0618$

۲۸۵۵۵ (۷.۷۶۷ $y \approx 2.488\,32$ ، ٹھیک جواب e ہے۔

۲۸۵۵۶ (۷.۷۶۹ $y \approx -0.2272$ ،

۲۸۵۵۷ ٹھیک جواب $\frac{1}{1-2\sqrt{5}} \approx -0.2880$ ہے۔

۲۸۵۵۸ (۷.۷۷۱ ب

۲۸۵۵۹ (۷.۷۷۳ الف

۲۸۵۶۰ حصہ ۸.۱ صفحہ ۸۱۵

۲۸۵۶۱ (۸.۱ $2\sqrt{8x^2+1}+C$

۲۸۵۶۲ (۸.۳ $2(\sin v)^{3/2}+C$

۲۸۵۶۳ (۸.۵ $\ln 5$

۲۸۵۶۴ (۸.۷ $2\ln(\sqrt{x}+1)+C$

۲۸۵۶۵ (۸.۹ $-\frac{1}{7}\ln\left|\sin(3-7x)\right|+C$

۲۸۵۶۶ (۸.۱۱ $-\ln\left|\csc(e^\theta+1)+\cot(e^\theta+1)\right|+C$

۲۸۵۶۷ (۸.۱۳ $3\ln\left|\sec\frac{t}{3}+\tan\frac{t}{3}\right|+C$

۲۸۵۶۸ (۸.۱۵ $-\ln\left|\csc(s-\pi)+\cot(s-\pi)\right|+C$

۲۸۵۶۹ (۸.۱۷ 1

۲۸۵۷۰ (۸.۱۹ $e^{\tan v}+C$

۲۸۵۷۱ (۸.۲۱ $\frac{e^{x+1}}{\ln 3}+C$

۲۸۵۷۲ (۸.۲۳ $\frac{2^{\sqrt{w}}}{\ln 2}+C$

۲۸۵۷۳ (۸.۲۵ $3\tan^{-1}3u+C$

۲۸۵۷۴ (۸.۲۷ $\frac{\pi}{18}$

۲۸۵۷۵ (۸.۲۹ $\sin^{-1}s^2+C$

۲۸۵۷۶ (۸.۳۱ $6\sec^{-1}|5x|+C$

۲۸۵۷۷ (۸.۳۳ $\tan^{-1}e^x+C$

۲۸۵۷۸ (۸.۳۵ $\ln(2+\sqrt{3})$

۲۸۵۷۹ (۸.۳۷ 2π

۲۸۵۸۰ (۸.۳۹ $\sin^{-1}(t-2)+C$

۲۸۵۸۱ (۸.۴۱ جب $|x+1|>1$ تب $\sec^{-1}|x+1|+C$

۲۸۵۸۲ (۸.۴۳ $\tan x - 2\ln|\csc x+\cot x| - \cot x -$

۲۸۵۸۳ $x+C$

۲۸۵۸۴ (۸.۴۵ $x+\sin 2x+C$

۲۸۵۸۵ (۸.۴۷ $x-\ln|x+1|+C$

۲۸۵۸۶ (۸.۴۹ $7+\ln 8$

۲۸۵۸۷ (۸.۵۱ $2t^2-t+2\tan^{-1}(\frac{t}{2})+C$

۲۸۵۸۸ (۸.۵۳ $\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+C$

۲۸۵۸۹ (۸.۵۵ $\sqrt{2}$

۲۸۵۹۰ (۸.۵۷ $\tan x-\sec x+C$

۲۸۵۹۱ (۸.۵۹ $\ln|1+\sin\theta|+C$

۲۸۵۹۲ (۸.۶۱ $\cot x+x+\csc x+C$

۲۸۵۹۳ (۸.۶۳ 4

۲۸۵۹۴ (۸.۶۵ $\sqrt{2}$

۲۸۵۹۵ (۸.۶۷ 2

۲۸۵۹۶ (۸.۶۹ $\ln\left|\sqrt{2}+1\right|-\ln\left|\sqrt{2}-1\right|$

۲۸۵۹۷ (۸.۷۱ $4-\frac{\pi}{2}$

۲۸۵۹۸ (۸.۷۳ $-\ln\left|\csc(\sin\theta)+\cot(\sin\theta)\right|+C$

۲۸۵۹۹ (۸.۷۵ $\ln|\sin x|+\ln|\cos x|+C$

۲۸۶۰۰ (۸.۷۷ $12\tan^{-1}(\sqrt{y})+C$

۲۸۶۰۱ (۸.۷۹ $\sec^{-1}\left|\frac{x-1}{7}\right|+C$

۲۸۶۰۲ (۸.۸۱ $\ln\left|\sec(\tan t)\right|+C$

۲۸۶۰۳ (۸.۸۳ (ا) $\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta + C$ (ب) $\sin\theta$

۲۸۶۰۴ $\frac{2}{3}\sin^3\theta+\frac{1}{5}\sin^5\theta+C$

۲۸۶۰۵ (ج) $\int\cos^9\theta\,d\theta=\int\cos^8\theta(\cos\theta)\,d\theta$

۲۸۶۰۶ $\int(1-\sin^2\theta)^4(\cos\theta)\,d\theta$

۲۸۶۰۷ (۸.۸۵ ا. $\int\tan^3\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta -$

۲۸۶۰۸ $\int\tan\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\tan^2\theta +$

۲۸۶۰۹ $\ln|\cos\theta|+C$

۲۸۶۱۰ ب. $\int\tan^5\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\tan^4\theta\,d\theta -$

۲۸۶۱۱ $\int\tan^3\theta\,d\theta$

۲۸۶۱۲ ج. $\int\tan^7\theta\,d\theta = \frac{1}{6}\tan^6\theta -$

۲۸۶۱۳ $\int\tan^5\theta\,d\theta$

۲۸۶۱۴ د. $\int\tan^{2k+1}\theta\,d\theta = \frac{1}{2k}\tan^{2k}\theta -$

۲۸۶۱۵ $\int\tan^{2k-1}\theta\,d\theta$

۲۸۶۱۶ (۸.۸۷ $2\sqrt{2}-\ln(3+2\sqrt{2})$

۲۸۶۱۷ (۸.۸۹ π^2

۲۸۶۱۸ (۸.۹۱ $\ln(2+\sqrt{3})$

۲۸۶۱۹ (۸.۹۳ $\bar{x}=0,\ \bar{y}=\frac{1}{\ln(2\sqrt{2}+3)}$

۲۸۶۲۰ حصہ ۸.۲ صفحہ ۸۲۹

۲۸۶۲۱ (۸.۹۷ $-2x\cos(\frac{x}{2})+4\sin(\frac{x}{2})+C$

۲۸۶۲۲ (۸.۹۹ $t^2\sin t+2t\cos t-2\sin t+C$

۲۸۶۲۳ (۸.۱۰۱ $\ln 4-\frac{3}{4}$

۲۸۶۲۴ (۸.۱۰۳ $y\tan^{-1}(y)-\ln\sqrt{1+y^2}+C$

۲۸۶۲۵ (۸.۱۰۵ $x\tan x+\ln|\cos x|+C$

۲۸۶۲۶ (۸.۱۰۷ $(x^3-3x^2+6x-6)e^x+C$

۲۸۶۲۷ (۸.۱۰۹ $(x^2-7x+7)e^x+C$

۲۸۶۲۸ (۸.۱۱۱ $(x^5-5x^4+20x^3-60x^2+120x-$

۲۸۶۲۹ $120)e^x+C$

۲۸۶۳۰ (۸.۱۱۳ $\frac{\pi^2-4}{8}$

۲۸۶۳۱ (۸.۱۱۵ $\frac{5\pi-3\sqrt{3}}{9}$

۲۸۶۳۲ (۸.۱۱۷ $\frac{1}{2}(-e^\theta\cos\theta+e^\theta\sin\theta)+C$

۲۸۶۳۳ (۸.۱۱۹ $\frac{e^{2x}}{13}(3\sin 3x+2\cos 3x)+C$

۲۸۶۳۴ (۸.۱۲۱ $\frac{2}{3}(\sqrt{3s+9}\,e^{\sqrt{3s+9}}-e^{\sqrt{3s+9}})+C$

۲۸۶۳۵ (۸.۱۲۳) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3} - \ln(2) - \frac{\pi^2}{18}$

۲۸۶۳۶ (۸.۱۲۵) $\frac{1}{2}[-x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x)] + C$

۲۸۶۳۷ (۸.۱۲۷) (ا) π، (ب) 3π، (ج) 5π، (د) $(2n+1)\pi$

۲۸۶۳۸ (۸.۱۲۹) $2\pi(1 - \ln 2)$

۲۸۶۳۹ (۸.۱۳۱) (ا) $\pi(\pi - 2)$، (ب) 2π

۲۸۶۴۰ (۸.۱۳۳) $\bar{x} = \frac{6-2e}{e-2} \approx 0.78,\ \bar{y} = \frac{e^2-3}{8(e-2)} \approx 0.76$

۲۸۶۴۱ (۸.۱۳۵) $\pi^2 + \pi - 4$

۲۸۶۴۲ (۸.۱۳۷) (ا) $\frac{1}{2\pi}(1 - e^{-2\pi})$

۲۸۶۴۳ (۸.۱۳۹) $x\sin^{-1} x + \cos(\sin^{-1} x) + C$

۲۸۶۴۴ (۸.۱۴۱) $x\sec^{-1} x - \ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + C$

۲۸۶۴۵ (۸.۱۴۳) جی ہاں

۲۸۶۴۶ (۸.۱۴۵) (ا) $x\sinh^{-1} x - \cosh(\sinh^{-1} x) + C$،

۲۸۶۴۷ (ب) $x\sinh^{-1} x + (1+x^2)^{1/2} + C$

۲۸۶۴۸ حصہ ۸.۳ صفحہ ۸۴۳

۲۸۶۴۹ (۸.۱۴۷) $\frac{2}{x-3} + \frac{3}{x-2}$

۲۸۶۵۰ (۸.۱۴۹) $\frac{1}{x+1} + \frac{3}{(x+1)^2}$

۲۸۶۵۱ (۸.۱۵۱) $-\frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z-1}$

۲۸۶۵۲ (۸.۱۵۳) $1 + \frac{17}{t-3} - \frac{12}{t-2}$

۲۸۶۵۳ (۸.۱۵۵) $\frac{1}{2}[\ln|1+x| - \ln|1-x|] + C$

۲۸۶۵۴ (۸.۱۵۷) $\frac{1}{7}\ln\left|(x+6)^2(x-1)^5\right| + C$

۲۸۶۵۵ (۸.۱۵۹) $\frac{\ln 15}{2}$

۲۸۶۵۶ (۸.۱۶۱) $-\frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{6}\ln|t+2| + \frac{1}{3}\ln|t-1| + C$

۲۸۶۵۷ (۸.۱۶۳) $3\ln 2 - 2$

۲۸۶۵۸ (۸.۱۶۵) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| - \frac{x}{2(x^2-1)} + C$

۲۸۶۵۹ (۸.۱۶۷) $\frac{\pi + 2\ln 2}{8}$

۲۸۶۶۰ (۸.۱۶۹) $\tan^{-1} y - \frac{1}{y^2+1} + C$

۲۸۶۶۱ (۸.۱۷۱) $-(s-1)^{-2} + (s-1)^{-1} + \tan^{-1} s + C$

۲۸۶۶۲ (۸.۱۷۳) $\frac{-1}{\theta^2+2\theta+2} + \ln\left|\theta^2 + 2\theta + 2\right| - \tan^{-1}(\theta+1) + C$

۲۸۶۶۳

۲۸۶۶۴ (۸.۱۷۵) $x^2 + \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C$

۲۸۶۶۵ (۸.۱۷۷) $9x + 2\ln|x| + \frac{1}{x} + 7\ln|x-1| + C$

۲۸۶۶۶ (۸.۱۷۹) $\frac{y^2}{2} - \ln|y| + \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + C$

۲۸۶۶۷ (۸.۱۸۱) $\ln\left|\frac{e^t+1}{e^t+2}\right| + C$

۲۸۶۶۸ (۸.۱۸۳) $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\sin y - 2}{\sin y + 3}\right| + C$

۲۸۶۶۹ (۸.۱۸۵) $\frac{(\tan^{-1} 2x)^2}{4} - 3\ln|x-2| + \frac{6}{x-2} + C$

۲۸۶۷۰ (۸.۱۸۷) $x = \ln|t-2| - \ln|t-1| + \ln 2$

۲۸۶۷۱ (۸.۱۸۹) $x = \frac{6t}{t+2} - 1$

۲۸۶۷۲ (۸.۱۹۱) $3\pi\ln 25$

۲۸۶۷۳ (۸.۱۹۳) 1.10

۲۸۶۷۴ (۸.۱۹۵) (ا) $x = \frac{1000e^{4t}}{499+e^{4t}}$، (ب) 1.55 دن

۲۸۶۷۵ (۸.۱۹۷) (ا) $\frac{22}{7} - \pi$، (ب) 0.04 %، (ج) رقبہ 0.003 سے کم ہے۔

۲۸۶۷۶

۲۸۶۷۷ حصہ ۸.۴ صفحہ ۸۵۳

۲۸۶۷۸ (۸.۱۹۹) $\ln\left|\sqrt{9+y^2} + y\right| + C$

۲۸۶۷۹ (۸.۲۰۱) $\frac{\pi}{4}$

۲۸۶۸۰ (۸.۲۰۳) $\frac{\pi}{6}$

۲۸۶۸۱ (۸.۲۰۵) $\frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{t}{5} + \frac{t\sqrt{25-t^2}}{2} + C$

۲۸۶۸۲ (۸.۲۰۷) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x}{7} + \frac{\sqrt{4x^2-49}}{7}\right| + C$

۲۸۶۸۳ (۸.۲۰۹) $7[\frac{\sqrt{y^2-49}}{7} - \sec^{-1}\frac{y}{7}] + C$

۲۸۶۸۴ (۸.۲۱۱) $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$

۲۸۶۸۵ (۸.۲۱۳) $\frac{1}{3}(x^2+4)^{3/2} - 4\sqrt{x^2+4} + C$

۲۸۶۸۶ (۸.۲۱۵) $\frac{-2\sqrt{4-w^2}}{w} + C$

۲۸۶۸۷ (۸.۲۱۷) $4\sqrt{3} - \frac{4\pi}{3}$

۲۸۶۸۸ (۸.۲۱۹) $\frac{-x}{\sqrt{x^2-1}} + C$

۲۸۶۸۹ (۸.۲۲۱) $-\frac{1}{5}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)^5 + C$

۲۸۶۹۰ (۸.۲۲۳) $2\tan^{-1} 2x + \frac{4x}{4x^2+1} + C$

۲۸۶۹۱ (۸.۲۲۵) $\frac{1}{3}\left(\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\right)^3 + C$

۲۸۶۹۲ (۸.۲۲۷) $\ln 9 - \ln(1+\sqrt{10})$

۲۸۶۹۳ (۸.۲۲۹) $\frac{\pi}{6}$

۲۸۶۹۴ (۸.۲۳۱) $\sec^{-1}|x| + C$

۲۸۶۹۵ (۸.۲۳۳) $\sqrt{x^2-1} + C$

۲۸۶۹۶ (۸.۲۳۵) $y = 2[\frac{\sqrt{x^2-4}}{2} - \sec^{-1}\frac{x}{2}]$

۲۸۶۹۷ (۸.۲۳۷) $y = \frac{3}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{8}$

۲۸۶۹۸ (۸.۲۳۹) $\frac{3\pi}{4}$

۲۸۶۹۹ (۸.۲۴۱) $\frac{2}{1-\tan\frac{x}{2}} + C$

۲۸۷۰۰ (۸.۲۴۳) 1

۲۸۷۰۱ (۸.۲۴۵) $\frac{\sqrt{3}\pi}{9}$

۲۸۷۰۲ (۸.۲۴۷) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\tan(t/2)+1-\sqrt{2}}{\tan(t/2)+1+\sqrt{2}}\right| + C$

۲۸۷۰۳ (۸.۲۴۹) $\ln\left|\frac{1+\tan(\theta/2)}{1-\tan(\theta/2)}\right| + C$

۲۸۷۰۴ حصہ ۸.۵ صفحہ ۸۶۳

۲۸۷۰۵ $\frac{2}{\sqrt{3}}(\tan^{-1}\sqrt{\frac{x-3}{3}})+C$ (۸.۲۵۱)

۲۸۷۰۶ $\sqrt{x-2}(\frac{2(x-2)}{3}+4)+C$ (۸.۲۵۳)

۲۸۷۰۷ $\frac{(2x-3)^{3/2}(x+1)}{5}+C$ (۸.۲۵۵)

۲۸۷۰۸ $\frac{-\sqrt{9-4x}}{x}-\frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{9-4x}-3}{\sqrt{9-4x}+3}\right|+C$ (۸.۲۵۷)

۲۸۷۰۹ $\frac{(x+2)(2x-6)\sqrt{4x-x^2}}{6}+4\sin^{-1}(\frac{x-2}{2})+$ (۸.۲۵۹)

۲۸۷۱۰ C

۲۸۷۱۱ $-\frac{1}{\sqrt{7}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}+\sqrt{7+x^2}}{x}\right|+C$ (۸.۲۶۱)

۲۸۷۱۲ $\sqrt{4-x^2}-2\ln\left|\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+C$ (۸.۲۶۳)

۲۸۷۱۳ $\frac{p}{2}\sqrt{25-p^2}+\frac{25}{2}\sin^{-1}\frac{p}{5}+C$ (۸.۲۶۵)

۲۸۷۱۴ $2\sin^{-1}\frac{r}{2}-\frac{1}{2}r\sqrt{4-r^2}+C$ (۸.۲۶۷)

۲۸۷۱۵ $-\frac{1}{3}\tan^{-1}[\frac{1}{3}\tan(\frac{\pi}{4}-\theta)]+C$ (۸.۲۶۹)

۲۸۷۱۶ $\frac{e^{2t}}{13}(2\cos 3t+3\sin 3t)+C$ (۸.۲۷۱)

۲۸۷۱۷ $\frac{x^2}{2}\cos^{-1}x+\frac{1}{4}\sin^{-1}x-\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}+$ (۸.۲۷۳)

۲۸۷۱۸ C

۲۸۷۱۹ $\frac{s}{18(9-s^2)}+\frac{1}{108}\ln\left|\frac{s+3}{s-3}\right|+C$ (۸.۲۷۵)

۲۸۷۲۰ $-\frac{\sqrt{4x+9}}{x}+\frac{2}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{4x+9}-3}{\sqrt{4x+9}+3}\right|+C$ (۸.۲۷۷)

۲۸۷۲۱ $2\sqrt{3t-4}-4\tan^{-1}\sqrt{\frac{3t-4}{4}}+C$ (۸.۲۷۹)

۲۸۷۲۲ $\frac{x^3}{3}\tan^{-1}x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C$ (۸.۲۸۱)

۲۸۷۲۳ $-\frac{\cos 5x}{10}-\frac{\cos x}{2}+C$ (۸.۲۸۳)

۲۸۷۲۴ $8[\frac{\sin(7t/2)}{7}-\frac{\sin(9t/2)}{9}]+C$ (۸.۲۸۵)

۲۸۷۲۵ $6\sin(\theta/12)+\frac{6}{7}\sin(7\theta/12)+C$ (۸.۲۸۷)

۲۸۷۲۶ $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\tan^{-1}x+$ (۸.۲۸۹)

۲۸۷۲۷ C

۲۸۷۲۸ $(x-\frac{1}{2})\sin^{-1}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+C$ (۸.۲۹۱)

۲۸۷۲۹ $\sin^{-1}\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}+C$ (۸.۲۹۳)

۲۸۷۳۰ $\sqrt{1-\sin^2 t}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin t}\right|+C$ (۸.۲۹۵)

۲۸۷۳۱ $\ln\left|\ln y+\sqrt{3+(\ln y)^2}\right|+C$ (۸.۲۹۷)

۲۸۷۳۲ $\ln\left|3r+\sqrt{9r^2-1}\right|+C$ (۸.۲۹۹)

۲۸۷۳۳ $x\cos^{-1}\sqrt{x}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\sqrt{x}-$ (۸.۳۰۱)

۲۸۷۳۴ $\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+C$

۲۸۷۳۵ $-\frac{\sin^4 2x\cos 2x}{10}-\frac{2\sin^2 2x\cos 2x}{15}-$ (۸.۳۰۳)

۲۸۷۳۶ $\frac{4\cos 2x}{15}+C$

۲۸۷۳۷ $\frac{\cos^3 2\pi t\sin 2\pi t}{\pi}+\frac{3}{2}\frac{\cos 2\pi t\sin 2\pi t}{\pi}+3t+$ (۸.۳۰۵)

۲۸۷۳۸ C

۲۸۷۳۹ $\frac{\sin^3 2\theta\cos^2 2\theta}{10}+\frac{\sin^3 2\theta}{15}+C$ (۸.۳۰۷)

۲۸۷۴۰ $\frac{2}{3}\tan^3 t+C$ (۸.۳۰۹)

۲۸۷۴۱ $\tan^2 2x-2\ln|\sec 2x|+C$ (۸.۳۱۱)

۲۸۷۴۲ $8[-\frac{1}{3}\cot^3 t+\cot t+t]+C$ (۸.۳۱۳)

۲۸۷۴۳ $\frac{(\sec\pi x)(\tan\pi x)}{\pi}+\frac{1}{\pi}\ln|\sec\pi x+\tan\pi x|+$ (۸.۳۱۵)

۲۸۷۴۴ C

۲۸۷۴۵ $\frac{\sec^2 3x\tan 3x}{3}+\frac{2}{3}\tan 3x+C$ (۸.۳۱۷)

۲۸۷۴۶ $-\frac{\csc^3 x\cot x}{4}-\frac{3\csc x\cot x}{8}-\frac{3}{8}\ln|\csc x+\cot x|+$ (۸.۳۱۹)

۲۸۷۴۷ C

۲۸۷۴۸ $4x^4(\ln x)^2-2x^4(\ln x)+\frac{x^2}{2}+C$ (۸.۳۲۱)

۲۸۷۴۹ $\frac{e^{3x}}{9}(3x-1)+C$ (۸.۳۲۳)

۲۸۷۵۰ $2x^3e^{x/2}-12x^2e^{x/2}+96e^{x/2}(\frac{x}{2}-$ (۸.۳۲۵)

۲۸۷۵۱ $1)+C$

۲۸۷۵۲ $\frac{x^2 2^x}{\ln 2}-\frac{2}{\ln 2}[\frac{x2^x}{\ln 2}-\frac{2^x}{(\ln 2)^2}]+C$ (۸.۳۲۷)

۲۸۷۵۳ $\frac{x\pi^x}{\ln\pi}-\frac{\pi^x}{(\ln\pi)^2}+C$ (۸.۳۲۹)

۲۸۷۵۴ $\frac{1}{2}[\sec(e^t-1)\tan(e^t-1)+$ (۸.۳۳۱)

۲۸۷۵۵ $\ln\left|\sec(e^t-1)+\tan(e^t-1)\right|]+C$

۲۸۷۵۶ $\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)$ (۸.۳۳۳)

۲۸۷۵۷ $\frac{\pi}{3}$ (۸.۳۳۵)

۲۸۷۵۸ $\frac{1}{120}\sinh^4 3x\cosh 3x-\frac{1}{90}\sinh^2 3x\cosh 3x+$ (۸.۳۳۷)

۲۸۷۵۹ $\frac{2}{90}\cosh 3x+C$

۲۸۷۶۰ $\frac{x^2}{3}\sinh 3x-\frac{2x}{9}\cosh 3x+\frac{2}{27}\sinh 3x+$ (۸.۳۳۹)

۲۸۷۶۱ C

۲۸۷۶۲ $-\frac{\sinh^7 x}{7}+C$ (۸.۳۴۱)

۲۸۷۶۳ $\pi(2\sqrt{3}+\sqrt{2})\ln(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ (۸.۳۵۱)

۲۸۷۶۴ $\bar{x}=\frac{4}{3},\ \bar{y}=\ln\sqrt{2}$ (۸.۳۵۳)

۲۸۷۶۵ 7.62 (۸.۳۵۵)

۲۸۷۶۶ $\frac{\pi}{8}$ (۸.۳۵۷)

۲۸۷۶۷ $\frac{\pi}{4}$ (۸.۳۶۱)

۲۸۷۶۸ حصه ۸.۶ صفحه ۸۸۲

۲۸۷۶۹ $\frac{\pi}{2}$ (۸.۳۶۲)

۲۸۷۷۰ 2 (۸.۳۶۴)

۲۸۷۷۱ 6 (۸.۳۶۶)

۲۸۷۷۲ $\frac{\pi}{2}$ (۸.۳۶۸)

۲۸۷۷۳ $\ln 3$ (۸.۳۷۰)

۲۸۷۷۴ $\ln 4$ (۸.۳۷۲)

۲۸۷۷۵ 0 (۸.۳۷۴)

۲۸۷۷۶ (۸.۳۷۶) $\sqrt{3}$

۲۸۷۷۷ (۸.۳۷۸) π

۲۸۷۷۸ (۸.۳۸۰) $\ln(1+\pi/2)$

۲۸۷۷۹ (۸.۳۸۲) -1

۲۸۷۸۰ (۸.۳۸۴) 1

۲۸۷۸۱ (۸.۳۸۶) $-\frac{1}{4}$

۲۸۷۸۲ (۸.۳۸۸) $\frac{\pi}{2}$

۲۸۷۸۳ (۸.۳۹۰) $\frac{\pi}{3}$

۲۸۷۸۴ (۸.۳۹۲) 6

۲۸۷۸۵ (۸.۳۹۴) $\ln 2$

۲۸۷۸۶ (۸.۳۹۶) منفرج

۲۸۷۸۷ (۸.۳۹۸) مرتکز

۲۸۷۸۸ (۸.۴۰۰) مرتکز

۲۸۷۸۹ (۸.۴۰۲) مرتکز

۲۸۷۹۰ (۸.۴۰۴) منفرج

۲۸۷۹۱ (۸.۴۰۶) مرتکز

۲۸۷۹۲ (۸.۴۰۸) مرتکز

۲۸۷۹۳ (۸.۴۱۰) منفرج

۲۸۷۹۴ (۸.۴۱۲) مرتکز

۲۸۷۹۵ (۸.۴۱۴) مرتکز

۲۸۷۹۶ (۸.۴۱۶) منفرج

۲۸۷۹۷ (۸.۴۱۸) مرتکز

۲۸۷۹۸ (۸.۴۲۰) منفرج

۲۸۷۹۹ (۸.۴۲۲) مرتکز

۲۸۸۰۰ (۸.۴۲۴) مرتکز

۲۸۸۰۱ (۸.۴۲۶) (ب) $\approx 0.886\,21$

۲۸۸۰۲ (۸.۴۳۰) 1

۲۸۸۰۳ (۸.۴۳۲) 2π

۲۸۸۰۴ (۸.۴۳۴) $\ln 2$

۲۸۸۰۵ (۸.۴۴۰) منفرج

۲۸۸۰۶ (۸.۴۴۲) مرتکز

۲۸۸۰۷ (۸.۴۴۴) مرتکز

۲۸۸۰۸ (۸.۴۴۶) منفرج

۲۸۸۰۹ (۸.۴۵۲) (ب) $\frac{\pi}{2}$

۲۸۸۱۰ **حصہ ۹.۱ صفحہ ۹۰۲**

۲۸۸۱۱ (۹.۱) $a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{1}{4},\ a_3 = -\frac{2}{9},\ a_4 = -\frac{3}{16}$

۲۸۸۱۲ (۹.۳) $a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{3},\ a_3 = \frac{1}{5},\ a_4 = -\frac{1}{7}$

۲۸۸۱۳ (۹.۵) $a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{2},\ a_4 = \frac{1}{2}$

۲۸۸۱۴ (۹.۷) $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \frac{63}{32}, \frac{127}{64}, \frac{255}{128}, \frac{511}{256}, \frac{1023}{512}$

۲۸۸۱۵ (۹.۹) $2, 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, -\frac{1}{64}, \frac{1}{128}, \frac{1}{256}$

۲۸۸۱۶ (۹.۱۱) $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55$

۲۸۸۱۷ (۹.۱۳) $a_n = (-1)^{n+1},\ n \geq 1$

۲۸۸۱۸ (۹.۱۵) $a_n = (-1)^{n+1}(n)^2,\ n \geq 1$

۲۸۸۱۹ (۹.۱۷) $a_n = n^2 - 1,\ n \geq 1$

۲۸۸۲۰ (۹.۱۹) $a_n = 4n - 3,\ n \geq 1$

۲۸۸۲۱ (۹.۲۱) $a_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2},\ n \geq 1$

۲۸۸۲۲ (۹.۲۳) $N = 692,\ a_n = \sqrt[n]{0.5},\ L = 1$

۲۸۸۲۳ (۹.۲۵) $N = 65,\ a_n = (0.9)^n,\ L = 0$

۲۸۸۲۴ (۹.۲۷) (ب) $\sqrt{3}$

۲۸۸۲۵ (۹.۳۱) غیر گھٹتا، محدود

۲۸۸۲۶ (۹.۳۳) غیر گھٹتا نہیں ہے، محدود

۲۸۸۲۷ (۹.۳۵) مرتکز، غیر گھٹتا، غیر گھٹتا تسلسل کا مسئلہ

۲۸۸۲۸ (۹.۳۷) مرتکز، غیر گھٹتا، غیر گھٹتا تسلسل کا مسئلہ

۲۸۸۲۹ (۹.۳۹) منفرج، انفراج کی تعریف

۲۸۸۳۰ (۹.۴۳) مرتکز

۲۸۸۳۱ (۹.۴۵) مرتکز

۲۸۸۳۲ **حصہ ۹.۳ صفحہ ۹۱۷**

۲۸۸۳۳ (۹.۶۹) مرتکز، 2

۲۸۸۳۴ (۹.۷۱) مرتکز، -1

۲۸۸۳۵ (۹.۷۳) مرتکز، -5

۲۸۸۳۶ (۹.۷۵) منفرج

۲۸۸۳۷ (۹.۷۷) منفرج

۲۸۸۳۸ (۹.۷۹) مرتکز، $\frac{1}{2}$

۲۸۸۳۹ (۹.۸۱) مرتکز، 0

۲۸۸۴۰ (۹.۸۳) مرتکز، $\sqrt{2}$

۲۸۸۴۱ (۹.۸۵) مرتکز، 1

۲۸۸۴۲ (۹.۸۷) مرتکز، 0

۲۸۸۴۳ (۹.۸۹) مرتکز، 0

۲۸۸۴۴ (۹.۹۱) مرتکز، 0

۲۸۸۴۵ (۹.۹۳) مرتکز، 1

۲۸۸۴۶ (۹.۹۵) مرتکز، e^7

۲۸۸۴۷ (۹.۹۷) مرتکز، 1

۲۸۸۴۸ (۹.۹۹) مرتکز، 1

۲۸۸۴۹ (۹.۱۰۱) منفرج

۲۸۸۵۰ (۹.۱۰۳) مرتکز، 4

۲۸۸۵۱ (۹.۱۰۵) مرتکز، 0

۲۸۸۵۲ (۹.۱۰۷) منفرج

۲۸۸۵۳ (۹.۱۰۹) مرتکز، e^{-1}

۲۸۸۵۴ (۹.۱۱۱) مرتکز، $e^{2/3}$

۲۸۸۵۵ (۹.۱۱۳) مرتکز، x ، $(x > 0)$

۲۸۸۵۶ (۹.۱۱۵) مرتکز، 0

۲۸۸۵۷ (۹.۱۱۷) مرتکز، 1

۲۸۸۵۸ (۹.۱۱۹) مرتکز، $\frac{1}{2}$

۲۸۸۵۹ (۹.۱۲۱) مرتکز، $\frac{\pi}{2}$

۲۸۸۶۰ (۹.۱۲۳) مرتکز، 0

۲۸۸۶۱ (۹.۱۲۵) مرتکز، 0

۲۸۸۶۲ (۹.۱۲۷) مرتکز، $\frac{1}{2}$

۲۸۸۶۳ (۹.۱۲۹) مرتکز، 0

۲۸۸۶۴ (۹.۱۳۱) $x_n = 2^{n-2}$

۲۸۸۶۵ (۹.۱۳۳) (الف) $f(x) = x^2 - 2$, $1.414213562 \approx$

۲۸۸۶۶ $\sqrt{2}$ ،

۲۸۸۶۷ (ب) $f(x) = \tan(x) - 1$, $0.7853981635 \approx$

۲۸۸۶۸ $\frac{\pi}{4}$ (ج)، $f(x) = e^x$ ،منفرج

۲۸۸۶۹ (۹.۱۳۵) (ب) 1

۲۸۸۷۰ (۹.۱۴۳) 1

۲۸۸۷۱ (۹.۱۴۵) -0.73908456

۲۸۸۷۲ (۹.۱۴۷) 0.853748068

۲۸۸۷۳ (۹.۱۵۱) -3

۲۸۸۷۴ حصہ ۹.۴ صفحہ ۹۳۲

۲۸۸۷۵ (۹.۱۵۳) $3, \quad s_n = \frac{2(1-(1/3)^n)}{1-(1/3)}$

۲۸۸۷۶ (۹.۱۵۵) $\frac{2}{3}, \quad s_n = \frac{1-(-1/2)^n}{1-(-1/2)}$

۲۸۸۷۷ (۹.۱۵۷) $\frac{1}{2}, \quad s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$

۲۸۸۷۸ (۹.۱۵۹) $\frac{4}{5}, \quad 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \cdots$

۲۸۸۷۹ (۹.۱۶۱) $\frac{7}{3}, \quad \frac{7}{4} + \frac{7}{16} + \frac{7}{64} + \cdots$

۲۸۸۸۰ (۹.۱۶۳) $\frac{23}{2}, \quad (5+1) + (\frac{5}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{5}{4} + \frac{1}{9}) +$

۲۸۸۸۱ $(\frac{5}{8} + \frac{1}{27}) + \cdots$

۲۸۸۸۲ (۹.۱۶۵) $\frac{17}{6}, \quad (1+1) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{5}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{25}) +$

۲۸۸۸۳ $(\frac{1}{8} - \frac{1}{125}) + \cdots$

۲۸۸۸۴ (۹.۱۶۷) 1

۲۸۸۸۵ (۹.۱۶۹) 5

۲۸۸۸۶ (۹.۱۷۱) مرتکز، 1

۲۸۸۸۷ (۹.۱۷۳) مرتکز، $-\frac{1}{\ln 2}$

۲۸۸۸۸ (۹.۱۷۵) مرتکز، $2 + \sqrt{2}$

۲۸۸۸۹ (۹.۱۷۷) مرتکز، 1

۲۸۸۹۰ (۹.۱۷۹) منفرج

۲۸۸۹۱ (۹.۱۸۱) مرتکز، $\frac{e^2}{e^2-1}$

۲۸۸۹۲ (۹.۱۸۳) مرتکز، $\frac{2}{9}$

۲۸۸۹۳ (۹.۱۸۵) مرتکز، $\frac{3}{2}$

۲۸۸۹۴ (۹.۱۸۷) منفرج

۲۸۸۹۵ (۹.۱۸۹) منفرج

۲۸۸۹۶ (۹.۱۹۱) مرتکز، $\frac{\pi}{\pi-e}$

۲۸۸۹۷ (۹.۱۹۳) $a = 1, r = -x \quad |x| < 1$ کے لیے $\frac{1}{1+x}$ پر مرتکز

۲۸۸۹۸ مرتکز۔

۲۸۸۹۹ (۹.۱۹۵) $a = 3, r = \frac{x-1}{2} \quad (-1,3)$ میں x کے لیے

۲۸۹۰۰ $\frac{6}{3-x}$ پر مرتکز۔

۲۸۹۰۱ (۹.۱۹۷) $|x| < \frac{1}{2}, \frac{1}{1-2x}$

۲۸۹۰۲ (۹.۱۹۹) $-2 < x < 0, \frac{1}{2+x}$

۲۸۹۰۳ (۹.۲۰۱) $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ جہاں k عدد صحیح ہے؛ $\frac{1}{1-\sin x}$

۲۸۹۰۴ (۹.۲۰۳) $\frac{23}{99}$

۲۸۹۰۵ (۹.۲۰۵) $\frac{7}{9}$

۲۸۹۰۶ (۹.۲۰۷) $\frac{1}{15}$

۲۸۹۰۷ (۹.۲۰۹) $\frac{41251}{33300}$

۲۸۹۰۸ (۹.۲۱۱) (الف) $\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$ (ب)، $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$ ،

۲۸۹۰۹ (ج) $\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{(n-3)(n-2)}$

۲۸۹۱۰ (۹.۲۱۳) (الف)جواب مختلف ہو سکتے ہیں،(ب)جواب مختلف ہو سکتے ہیں،(ج)

۲۸۹۱۱ جواب مختلف ہو سکتے ہیں۔

۲۸۹۱۲ (۹.۲۲۱) (الف) $r = \frac{3}{5}$ (ب)، $r = -\frac{3}{10}$

۲۸۹۱۳ (۹.۲۲۳) $|r| < 1, \frac{1+2r}{1-r^2}$

۲۸۹۱۴ (۹.۲۲۵) $28\,\mathrm{m}$

۲۸۹۱۵ (۹.۲۲۷) $8\,\mathrm{m}^2$

۲۸۹۱۶ (۹.۲۲۹) (الف) $3(\frac{4}{3})^{n-1}$ (ب)، $A_n = A + \frac{1}{3}A +$

۲۸۹۱۷ $\frac{1}{3}(\frac{4}{9})A + \cdots + \frac{1}{3}(\frac{4}{9})^{n-2}A$ ،

۲۸۹۱۸ $\lim_{n\to\infty} A_n = \frac{2\sqrt{3}}{5}$

۲۸۹۱۹ حصہ ۹.۵ صفحہ ۹۴۳

۲۸۹۲۰ (۹.۲۳۱) مرتکز؛ہندسی تسلسل، $r = \frac{1}{10} < 1$

۲۸۹۲۱ (۹.۲۳۳) منفرج؛ $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$

۲۸۹۲۲ (۹.۲۳۵) منفرج؛ p تسلسل، $p < 1$

۲۸۹۲۳ (۹.۲۳۷) مرتکز؛ہندسی تسلسل، $r = \frac{1}{8} < 1$

۲۸۹۲۴ (۹.۲۳۹) منفرج؛ تکملی پرکھ

۲۸۹۲۵ (۹.۲۴۱) مرتکز؛ہندسی تسلسل، $r = \frac{2}{3} < 1$

۲۸۹۲۶ (۹.۲۴۳) منفرج؛ تکملی پرکھ

۲۸۹۲۷ (۹.۲۴۵) منفرج؛ $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n+1} \neq 0$

۲۸۹۲۸ (۹.۲۴۷) منفرج؛ $\lim_{n\to\infty}(\frac{\sqrt{n}}{\ln n}) \neq 0$

۲۸۹۲۹ (۹.۲۴۹) منفرج؛ہندسی تسلسل، $r = \frac{1}{\ln 2} > 1$

۲۸۹۳۰ (۹.۲۵۱) مرتکز؛ تکملی پرکھ

۲۸۹۳۱ (۹.۲۵۳) منفرج؛ n واں جزو پرکھ

۲۸۹۳۲ (۹.۲۵۵) مرتکز؛ تکملی پرکھ

۲۸۹۳۳ (۹.۲۵۷) مرتکز؛ تکملی پرکھ

۲۸۹۳۴ (۹.۲۵۹) مرتکز؛ تکملی پرکھ

۲۸۹۳۵ (۹.۲۶۱) (الف) $a = 1$

۲۸۹۳۶ (۹.۲۶۳) (ب) تقریباً 41.55

۲۸۹۳۷ (۹.۲۶۵) درست ہے۔

۲۸۹۳۸ **حصہ ۹.۶ صفحہ ۹۵۳**

۲۸۹۳۹ (۹.۲۷۳) منفرج، $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ کے ساتھ تقابل حد

۲۸۹۴۰ (۹.۲۷۵) مرتکز، $\sum \frac{1}{2^n}$ کے ساتھ تقابل

۲۸۹۴۱ (۹.۲۷۷) منفرج، n واں جزو پرکھ

۲۸۹۴۲ (۹.۲۷۹) مرتکز، $\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n < \left(\frac{n}{3n}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

۲۸۹۴۳ (۹.۲۸۱) منفرج، $\sum \frac{1}{n}$ کے ساتھ بلاواسطہ تقابل

۲۸۹۴۴ (۹.۲۸۳) مرتکز، $\sum \frac{1}{n^2}$ کے ساتھ تقابل حد

۲۸۹۴۵ (۹.۲۸۵) منفرج، $\sum \frac{1}{n}$ کے ساتھ تقابل حد

۲۸۹۴۶ (۹.۲۸۷) منفرج، $\sum \frac{1}{n}$ کے ساتھ تقابل حد

۲۸۹۴۷ (۹.۲۸۹) منفرج، تکملی پرکھ

۲۸۹۴۸ (۹.۲۹۱) مرتکز، $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ کے ساتھ تقابل

۲۸۹۴۹ (۹.۲۹۳) مرتکز، $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$

۲۸۹۵۰ (۹.۲۹۵) مرتکز، $\frac{1}{3^{n-1}+1} < \frac{1}{3^{n-1}}$

۲۸۹۵۱ (۹.۲۹۷) منفرج، $\sum \frac{1}{n}$ کے ساتھ تقابل حد

۲۸۹۵۲ (۹.۲۹۹) مرتکز، $\sum \frac{1}{n^2}$ کے ساتھ تقابل

۲۸۹۵۳ (۹.۳۰۱) مرتکز، $\frac{\tan^{-1} n}{n^{1.1}} < \frac{\pi/2}{n^{1.1}}$

۲۸۹۵۴ (۹.۳۰۳) مرتکز، $\sum \frac{1}{n^2}$ کے ساتھ تقابل

۲۸۹۵۵ (۹.۳۰۵) منفرج، چونکہ $3n > n\sqrt[n]{n} \implies \frac{1}{3n} < \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ سے

۲۸۹۵۶ مراد $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ کا انفراج ہے۔

۲۸۹۵۷ (۹.۳۰۷) مرتکز، $\sum \frac{1}{n^2}$ کے ساتھ تقابل حد

۲۸۹۵۸ **حصہ ۹.۷ صفحہ ۹۶۲**

۲۸۹۵۹ (۹.۳۱۴) مرتکز، تناسبی پرکھ

۲۸۹۶۰ (۹.۳۱۶) منفرج، تناسبی پرکھ

۲۸۹۶۱ (۹.۳۱۸) مرتکز، تناسبی پرکھ

۲۸۹۶۲ (۹.۳۲۰) مرتکز، $\sum \frac{3}{1.25^n}$ کے ساتھ تقابل

۲۸۹۶۳ (۹.۳۲۲) منفرج، $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{3}{n})^n = e^{-3} \neq 0$

۲۸۹۶۴ (۹.۳۲۴) مرتکز، $\sum \frac{1}{n^2}$ کے ساتھ تقابل

۲۸۹۶۵ (۹.۳۲۶) منفرج، $\sum \frac{1}{2n}$ کے ساتھ تقابل

۲۸۹۶۶ (۹.۳۲۸) منفرج، $\sum \frac{1}{n}$ کے ساتھ تقابل

۲۸۹۶۷ (۹.۳۳۰) مرتکز، تناسبی پرکھ

۲۸۹۶۸ (۹.۳۳۲) مرتکز، تناسبی پرکھ

۲۸۹۶۹ (۹.۳۳۴) مرتکز، تناسبی پرکھ

۲۸۹۷۰ (۹.۳۳۶) مرتکز، تناسبی پرکھ

۲۸۹۷۱ (۹.۳۳۸) مرتکز، $\sum \frac{1}{n^2}$ کے ساتھ تقابل

۲۸۹۷۲ (۹.۳۴۰) مرتکز، تناسبی پرکھ

۲۸۹۷۳ (۹.۳۴۲) منفرج، تناسبی پرکھ

۲۸۹۷۴ (۹.۳۴۴) مرتکز، تناسبی پرکھ

۲۸۹۷۵ (۹.۳۴۶) مرتکز، تناسبی پرکھ

۲۸۹۷۶ (۹.۳۴۸) منفرج، $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(1/n!)} \to 1$

۲۸۹۷۷ (۹.۳۵۰) مرتکز، تناسبی پرکھ

۲۸۹۷۸ (۹.۳۵۲) منفرج، تناسبی پرکھ

۲۸۹۷۹ (۹.۳۵۴) مرتکز، تناسبی پرکھ

۲۸۹۸۰ (۹.۳۵۶) مرتکز تناسبی پرکھ

۲۸۹۸۱ (۹.۳۶۰) جی ہاں

۲۸۹۸۲ **حصہ ۹.۸ صفحہ ۹۷۲**

۲۸۹۸۳ (۹.۳۶۱) مسئلہ ۹.۸ کے تحت ارتکاز

۲۸۹۸۴ (۹.۳۶۳) انفراج؛ $a_n \not\to 0$

۲۸۹۸۵ (۹.۳۶۵) مسئلہ ۹.۸ کے تحت ارتکاز

۲۸۹۸۶ (۹.۳۶۷) انفراج؛ $a_n \to \frac{1}{2}$

۲۸۹۸۷ (۹.۳۶۹) مسئلہ ۹.۸ کے تحت ارتکاز

۲۸۹۸۸ (۹.۳۷۱) مطلق مرتکز۔ مطلق قیمتوں کا تسلسل مرتکز ہندسی تسلسل ہے۔

۲۸۹۸۹ (۹.۳۷۳) مشروط ارتکاز۔ $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$ لیکن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ منفرج ہے۔

۲۸۹۹۰ (۹.۳۷۵) مطلق مرتکز۔ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ کے ساتھ موازنہ کریں۔

۲۸۹۹۱ (۹.۳۷۷) مشروط مرتکز۔ $\frac{1}{n+3} \to 0$ ہے لیکن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$ منفرج ہے۔ ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ کے ساتھ موازنہ کریں۔)

۲۸۹۹۲

۲۸۹۹۳ (۹.۳۷۹) انفراج: $\frac{3+n}{5+n} \to 1$

۲۸۹۹۴ (۹.۳۸۱) مشروط مرتکز۔ $\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right) \to 0$ لیکن $\frac{1+n}{n^2} > \frac{1}{n}$

۲۸۹۹۵ ہے۔

۲۸۹۹۶ (۹.۳۸۳) مطلق ارتکاز؛ جذری پرکھ

۲۸۹۹۷ (۹.۳۸۵) مطلق ارتکاز۔ تکملی پرکھ

۲۸۹۹۸ (۹.۳۸۷) منفرج؛ $a_n \not\to 0$

۲۸۹۹۹ (۹.۳۸۹) مطلق مرتکز۔ تناسبی پرکھ

۲۹۰۰۰ (۹.۳۹۱) مطلق مرتکز: $\frac{1}{n^2+2n+1} < \frac{1}{n^2}$

۲۹۰۰۱ (۹.۳۹۳) مطلق ارتکاز (مرتکز p تسلسل): $= \left|\frac{\cos n\pi}{n\sqrt{n}}\right|$

۲۹۰۰۲ $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^{3/2}}\right| = \frac{1}{n^{3/2}}$

۲۹۰۰۳ (۹.۳۹۵) مطلق مرتکز۔ جذری پرکھ

۲۹۰۰۴ (۹.۳۹۷) منفرج: $a_n \to \infty$

۲۹۰۰۵ (۹.۳۹۹) مشروط مرتکز: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \to$

۲۹۰۰۶ 0 لیکن مطلق قیمتوں کا تسلسل منفرج ہوتا ہے۔ ($\sum \frac{1}{n}$ کے ساتھ

۲۹۰۰۷ موازنہ کریں۔)

۲۹۰۰۸ (۹.۴۰۱) منفرج: $a_n \to \frac{1}{2} \neq 0$ ۲۹۰۳۸

۲۹۰۰۹ (۹.۴۰۳) مطلق مرتکز: $\operatorname{sech} n = \frac{2}{e^n+e^{-n}} = \frac{2e^n}{e^{2n}+1} <$ ۲۹۰۴۴

۲۹۰۱۰ $\frac{2e^n}{e^{2n}} = \frac{2}{e^n}$ اور $\frac{2}{e^n}$ مرتکز ہندسی تسلسل کا ایک جزو ہے۔ ۲۹۰۵۰

۲۹۰۱۱ (۹.۴۰۵) $\left|\text{خلل}\right| < 0.2$ ۲۹۰۵۱

۲۹۰۱۲ (۹.۴۰۷) $\left|\text{خلل}\right| < 2 \times 10^{-11}$ ۲۹۰۵۲

۲۹۰۱۳ (۹.۴۰۹) 0.54030 ۲۹۰۵۳

۲۹۰۱۴ (۹.۴۱۱) (الف) $a_n \geq a_{n+1}$ (ب) $-\frac{1}{2}$ ۲۹۰۵۴

۲۹۰۵۵

۲۹۰۱۵ حصہ ۹.۹ صفحہ ۹۸۸ ۲۹۰۵۶

۲۹۰۱۶ (۹.۴۲۴) (الف) $-1 < x < 1$ (ب) $1, -1 < x < 1$ ۲۹۰۵۷

۲۹۰۱۷ (ج) کوئی نہیں

۲۹۰۱۸ (۹.۴۲۶) (الف) $\frac{1}{2} < x < 0$ (ب) $\frac{1}{4}, -\frac{1}{2} < x < 0$ ۲۹۰۵۸

۲۹۰۱۹ (ج) کوئی نہیں ۲۹۰۵۹

۲۹۰۲۰ (۹.۴۲۸) (الف) $-8 < x <$ (ب) $10, -8 < x < 12$ ۲۹۰۶۰

۲۹۰۲۱ 12 (ج) کوئی نہیں ۲۹۰۶۱

۲۹۰۲۲ (۹.۴۳۰) (الف) $-1 < x < 1$ (ب) $1, -1 < x < 1$ ۲۹۰۶۲

۲۹۰۲۳ (ج) کوئی نہیں ۲۹۰۶۳

۲۹۰۲۴ (۹.۴۳۲) (الف) $[-3, 3]$ (ب) $3, [-3, 3]$ (ج) کوئی نہیں ۲۹۰۶۴

۲۹۰۲۵ (۹.۴۳۴) (الف) تمام x کے لیے ∞ (ب) تمام x کے لیے (ج) کوئی نہیں ۲۹۰۶۵

۲۹۰۲۶ (۹.۴۳۶) (الف) تمام x کے لیے ∞ (ب) تمام x کے لیے (ج) کوئی نہیں ۲۹۰۶۶

۲۹۰۲۷ (۹.۴۳۸) (الف) $-1 < x < 1$ (ب) $1, -1 \leq x < 1$ ۲۹۰۶۷

۲۹۰۲۸ (ج) $x = -1$

۲۹۰۲۹ (۹.۴۴۰) (الف) $-8 < x < 2$ (ب) $5, -8 < x < 2$ ۲۹۰۶۸

۲۹۰۳۰ (ج) کوئی نہیں ۲۹۰۶۹

۲۹۰۳۱ (۹.۴۴۲) (الف) $-3 < x < 3$ (ب) $3, -3 < x < 3$ ۲۹۰۷۰

۲۹۰۳۲ (ج) کوئی نہیں

۲۹۰۳۳ (۹.۴۴۴) (الف) $-1 < x < 1$ (ب) $1, -1 < x < 1$ ۲۹۰۷۱

۲۹۰۳۴ (ج) کوئی نہیں ۲۹۰۷۲

۲۹۰۳۵ (۹.۴۴۶) (الف) $0, x = 0$ (ب) $x = 0$ (ج) کوئی نہیں ۲۹۰۷۳

۲۹۰۳۶ (۹.۴۴۸) (الف) $-4 < x < 0$ (ب) $2, -4 < x \leq 0$ ۲۹۰۷۴

۲۹۰۳۷ (ج) $x = 0$ ۲۹۰۷۵

۲۹۰۳۸ (۹.۴۵۰) (الف) $-1 \leq x \leq 1$ (ب) $1, -1 \leq x \leq 1$ ۲۹۰۷۶

۲۹۰۳۹ (ج) کوئی نہیں

۲۹۰۴۰ (۹.۴۵۲) (الف) $\frac{1}{4}, 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ (ب) $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ (ج) ۲۹۰۷۷

۲۹۰۴۱ کوئی نہیں ۲۹۰۷۸

۲۹۰۴۲ (۹.۴۵۴) (الف) $1, (-1-\pi) \leq x < (1-\pi)$ ۲۹۰۷۹

۲۹۰۴۳ (ب) $(-1-\pi) < x < (1-\pi)$ (ج) $x =$

۲۹۰۴۴ $-1-\pi$

۲۹۰۴۵ (۹.۴۵۶) $-1 < x < 3, \frac{4}{3+2x-x^2}$ ۲۹۰۸۰

۲۹۰۴۶ (۹.۴۵۸) $0 < x < 16, \frac{2}{4-\sqrt{x}}$

۲۹۰۴۷ (۹.۴۶۰) $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}, \frac{3}{2-x^2}$ ۲۹۰۸۱

۲۹۰۴۸ (۹.۴۶۲) $1 < x < 5, \frac{2}{x-1}, 1 < x < 5, \frac{-2}{(x-1)^2}$

۲۹۰۴۹ (۹.۴۶۴) (الف) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$ ؛ تمام x کے لیے مرتکز ہے

۲۹۰۵۰ (ب) اور (ج) $2x - \frac{2^3x^3}{3!} + \frac{2^5x^5}{5!} - \frac{2^7x^7}{7!} + \frac{2^9x^9}{9!} - \frac{2^{11}x^{11}}{11!} + \cdots$

۲۹۰۵۱

۲۹۰۵۲

۲۹۰۵۳ (۹.۴۶۶) (الف) $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \frac{17x^8}{2520} + \frac{31x^{10}}{14175}, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

۲۹۰۵۴

۲۹۰۵۵ (ب) $1 + x^2 + \frac{2x^4}{3} + \frac{17x^6}{45} + \frac{62x^8}{315} + \cdots, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

۲۹۰۵۶

۲۹۰۵۷ حصہ ۹.۱۰ صفحہ ۹۹۸

۲۹۰۵۸ (۹.۴۷۲) $P_0(x) = 0$ ، $P_1(x) = x - 1$ ، $P_2(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$ ، $P_3(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$

۲۹۰۵۹

۲۹۰۶۰ (۹.۴۷۴) $P_0(x) = \frac{1}{2}$ ، $P_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2)$ ، $P_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2$ ، $P_3(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{8}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(x-2)^3$

۲۹۰۶۱

۲۹۰۶۲ (۹.۴۷۶) $P_0(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $P_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4})$ ، $P_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2$ ، $P_3(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(x - \frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2}}{4}(x - \frac{\pi}{4})^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}(x - \frac{\pi}{4})^3$

۲۹۰۶۳

۲۹۰۶۴ (۹.۴۷۸) $P_0(x) = 2$ ، $P_1(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4)$ ، $P_2(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2$ ، $P_3(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3$

۲۹۰۶۵

۲۹۰۶۶ (۹.۴۸۰) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$

۲۹۰۶۷

۲۹۰۶۸ (۹.۴۸۲) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$

۲۹۰۶۹

۲۹۰۷۰ (۹.۴۸۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

۲۹۰۷۱

۲۹۰۷۲ (۹.۴۸۶) $7 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

۲۹۰۷۳

۲۹۰۷۴ (۹.۴۸۸) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

۲۹۰۷۵

۲۹۰۷۶

۲۹۰۷۷

۲۹۰۷۸

۲۹۰۷۹

۲۹۰۸۰

۲۹۰۸۱

(۹.۴۹۰) $x^4 - 2x^3 - 5x + 4$

(۹.۴۹۲) $8 + 10(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3$

(۹.۴۹۴) $24 - 36(x+2) + 25(x+2)^2 - 8(x+2)^3 + (x+2)^4$

(۹.۴۹۶) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(x-1)^n$

(۹.۴۹۸) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^2}{n!}(x-2)^n$

(۹.۵۰۴) $L(x) = 0,\ Q(x) = -\frac{x^2}{2}$

(۹.۵۰۶) $L(x) = 1,\ Q(x) = 1 + \frac{x^2}{2}$

(۹.۵۰۸) $L(x) = x,\ Q(x) = x$

حصہ ۹.۱۲ صفحہ ۱۰۲۸

(۹.۵۳۶) $|x| < 0.02$

(۹.۵۴۰) $\sin x, \quad x = 0.1;\ \sin(0.1)$

(۹.۵۴۲) $\tan^{-1} x, \quad x = \frac{\pi}{3};\ \sqrt{3}$

(۹.۵۴۴) $e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + \cdots$

(۹.۵۵۲) (الف) $Q(x) = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2$، (ب) $0 \le x \le 100^{-1/3}$

(۹.۵۵۸) (ا) -1، (ب) $(1/\sqrt{2})(1+i)$، (ج) $-i$

(۹.۵۶۲) $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \cdots$ تمام x کے لیے مرتکز ہے۔

حصہ ۹.۱۱ صفحہ ۱۰۱۰

(۹.۵۷۲) $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16}$

(۹.۵۷۴) $1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \cdots$

(۹.۵۷۶) $1 - x + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^3}{2}$

(۹.۵۷۸) $1 - \frac{x^3}{2} + \frac{3x^6}{8} - \frac{5x^9}{16}$

(۹.۵۸۰) $1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1}{16x^3}$

(۹.۵۸۲) $(1+x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$

(۹.۵۸۴) $(1-2x)^3 = 1 - 6x + 12x^2 - 8x^3$

(۹.۵۸۶) $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n = e^{-x}$

(۹.۵۸۸) $y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1$

(۹.۵۹۰) $y = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x - x - 1$

(۹.۵۹۲) $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} = e^{x^2/2}$

(۹.۵۹۴) $y = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^n = \frac{2}{1-x}$

(۹.۵۹۶) $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh x$

(۹.۵۹۸) $y = 2 + x - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!}$

(۹.۶۰۰) $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-2(x-2)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

(۹.۶۰۲) $y = a + bx + \frac{1}{6}x^3 - \frac{ax^4}{3\cdot 4} - \frac{bx^5}{4\cdot 5} - \frac{x^7}{6\cdot 6\cdot 7} + \frac{ax^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} + \frac{bx^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} + \cdots$

$a_n = (n-2)(n-3)a_{n-4}$ اور $n \ge 6$ کے لیے ہوں گے۔

(۹.۶۰۴) $0.002\,67$

(۹.۶۰۶) 0.1

(۹.۶۰۸) $0.099\,944\,461$

(۹.۶۱۰) $0.100\,001$

(۹.۶۱۲) $\frac{1}{13\cdot 6!} \approx 0.000\,11$

(۹.۶۱۴) $\frac{t^3}{3} - \frac{t^7}{7\cdot 3!} + \frac{t^{11}}{11\cdot 5!}$

(۹.۶۱۶) (الف) $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12}$، (ب) $\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^6}{5\cdot 6} - \frac{x^8}{7\cdot 8} + \cdots + (-1)^{15}\frac{x^{32}}{31\cdot 32}$

(۹.۵۱۰) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5x)^n}{n!} = 1 - 5x + \frac{5^2x^2}{2!} - \frac{5^3x^3}{3!} + \cdots$

(۹.۵۱۲) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(-1)^n(-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -5x + \frac{5x^3}{3!} - \frac{5x^5}{5!} + \frac{5x^7}{7!} + \cdots$

(۹.۵۱۴) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$

(۹.۵۱۶) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \cdots$

(۹.۵۱۸) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$

(۹.۵۲۰) $x - \frac{\pi^2 x^3}{2!} + \frac{\pi^4 x^5}{4!} - \frac{\pi^6 x^7}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \pi^{2n} x^{2n+1}}{(2n)!}$

(۹.۵۲۲) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{2\cdot(2n)!} = 1 - \frac{(2x)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(2x)^4}{2\cdot 4!} - \frac{(2x)^6}{2\cdot 6!} + \cdots$

(۹.۵۲۴) $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^{n+2} = 2^2x^2 + 2^3x^3 + 2^4x^3 + \cdots$

(۹.۵۲۶) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

(۹.۵۲۸) $|x| < (0.06)^{1/5} < 0.56968$

(۹.۵۳۰) $\left|\text{خلل}\right| < \frac{(10^{-3})^3}{6} < 1.67 \times 10^{-10}, \quad -10^{-3} < x < 0$

(۹.۵۳۲) $\left|\text{خلل}\right| < \frac{(3^{0.1})(0.1)^3}{6} < 1.87 \times 10^{-5}$

(۹.۵۳۴) $0.000\,293\,653$

۲۹۱۵۱ (۹.۶۱۸ $\frac{1}{2}$

۲۹۱۵۲ (۹.۶۲۰ $-\frac{1}{24}$

۲۹۱۵۳ (۹.۶۲۲ $\frac{1}{3}$

۲۹۱۵۴ (۹.۶۲۴ -1

۲۹۱۵۵ (۹.۶۲۶ 2

۲۹۱۵۶ (۹.۶۳۰ 500 اجزاء

۲۹۱۵۷ (۹.۶۳۲ 3 اجزاء

۲۹۱۵۸ (۹.۶۳۴ (الف) $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112}$ ؛ رداس ارتکاز 1 ہے،

۲۹۱۵۹ (ب) $\frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^5}{40} - \frac{5x^7}{112}$ ۱۰.۱۹ ۲۹۱۷۳

۲۹۱۶۰ (۹.۶۳۶ $1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$

۲۹۱۶۱ حصہ ۱۰.۱ صفحہ ۱۰۴۷

۲۹۱۶۲ (۱۰.۱ $y^2 = 8x$ ، ماسکہ $F(2,0)$ اور ناظمہ $x = -2$

۲۹۱۶۳ (۱۰.۳ $x^2 = -6y$ ، ماسکہ $F(0,-\frac{3}{2})$ اور ناظمہ $y = \frac{3}{2}$ ۱۰.۲۱ ۲۹۱۷۴

۲۹۱۶۴ (۱۰.۵ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ ، ماسکے $F(\pm\sqrt{13},0)$ ، راس

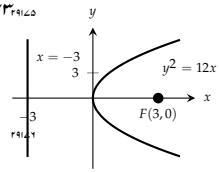
۲۹۱۶۵ $V(\pm 2,0)$ اور متقارب $y = \pm\frac{3}{2}x$

۲۹۱۶۶ (۱۰.۷ $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ، ماسکے $F(\pm 1,0)$ ، راس

۲۹۱۶۷ $V(\pm\sqrt{2},0)$

۱۰.۲۳ ۲۹۱۷۵

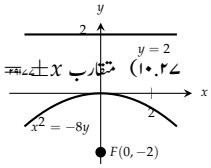
۲۹۱۶۸ (۱۰.۹



۲۹۱۷۶

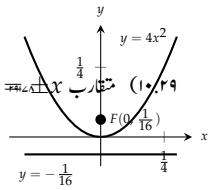
۱۰.۲۵) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

۲۹۱۶۹ (۱۰.۱۱



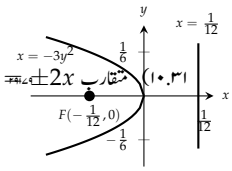
۱۰.۲۷) متقارب $y = \pm x$ ہیں۔

۱۰.۱۳ ۲۹۱۷۰



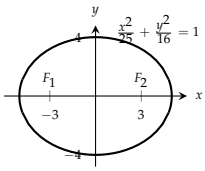
۱۰.۲۹) متقارب $y = \pm x$ ہیں۔

۱۰.۱۵ ۲۹۱۷۱

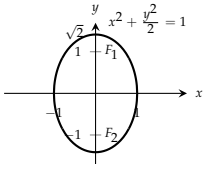


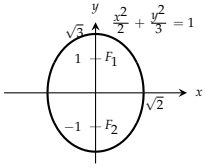
۱۰.۳۱) متقارب $y = \pm 2x$ ہیں۔

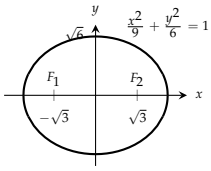
۱۰.۱۷ ۲۹۱۷۲

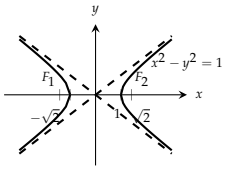


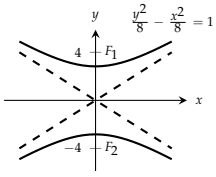
۱۰.۱۹ ۲۹۱۷۳

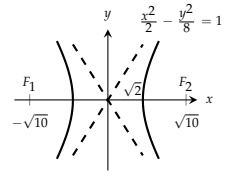




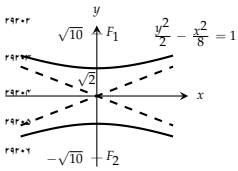








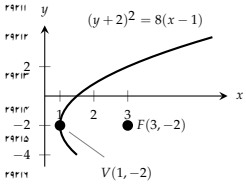
۱۰.۳۳) متقارب $y = \pm\frac{x}{2}$ ہیں۔



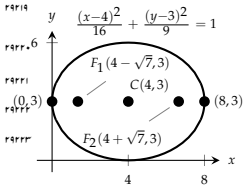
۱۰.۳۵) $y^2 - x^2 = 1$

۱۰.۳۷) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

۱۰.۳۹) (الف) راس $(1,-2)$ ، ماسکہ $(3,-2)$ ، ناظمہ $x = -1$ ؛(ب)

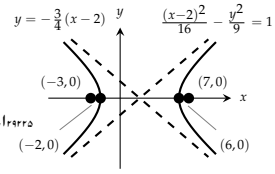


۱۰.۴۱) (الف)ماسکے $(4 \pm \sqrt{7}, 3)$ ،راس $(8,3)$ اور $(0,3)$ ؛(ب) مرکز $(4,3)$



۱۰.۴۳) (الف)مرکز $(2,0)$ ،ماسکے $(7,0)$ اور $(-3,0)$ ،راس $(6,0)$ اور $(-2,0)$ ،

(ب): متقارب $y = \pm\frac{3}{4}(x-2)$



۱۰.۴۵) $(y+3)^2 = 4(x+2)$ ،راس $V(-2,-3)$ ، ماسکہ $F(-1,-3)$ ،ناظمہ $x = -3$

۱۰.۴۷) $(x-1)^2 = 8(y+7)$ ،راس $V(1,-7)$ ،ماسکہ $F(1,-5)$ ،ناظمہ $y = -9$

۱۰.۴۹) $\frac{(x+2)^2}{6} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ ، $F(-2, \pm\sqrt{3} - 1)$ ، $V(-2, \pm 3 - 1)$ ، $C(-2,-1)$

۱۰.۵۱) $\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{2} = 1$ ، $F(3,3)$ اور $F(1,3)$ ، $V(\pm\sqrt{3}+2, 3)$ ، $C(2,3)$

۱۰.۵۳) $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$ ، $C(2,2)$ ، $F(5,2)$ اور $F(-1,2)$ ، $V(4,2)$ اور $V(0,2)$ ، متقارب $y - 2 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x-2)$

۱۰.۵۵) $(y+1)^2 - (x+1)^2 = 1$ ، $C(-1,-1)$ ، $F(-1, -\sqrt{2} - 1)$ اور $F(-1, \sqrt{2} - 1)$ ، $V(-1,-2)$ ، $V(-1,0)$ ، متقارب $y + 1 = \pm(x+1)$

۱۰.۵۷) $a = 4$ ، $C(-2,0)$

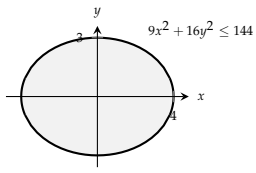
۱۰.۵۹) $F(-1,0)$ ، $V(-1,1)$

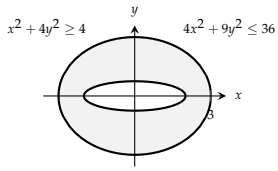
۱۰.۶۱) ترخیم $\frac{(x+2)^2}{5} + y^2 = 1$ ، $C(-2,0)$ ، $F(0,0)$ اور $F(-4,0)$ ، $V(\sqrt{5} - 2, 0)$ اور $V(-\sqrt{5} - 2, 0)$

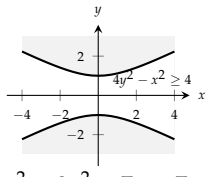
۱۰.۶۳) ترخیم $\frac{(x-1)^2}{5} + (y-1)^2 = 1$ ، $C(1,1)$ ، $F(2,1)$ اور $F(0,1)$ ، $V(\sqrt{2} + 1, 1)$ اور $V(-\sqrt{2} + 1, 1)$

۱۰.۶۵) قطع زائد $(x-1)^2 - (y-2)^2 = 1$ ، $C(1,2)$ ، $F(1+\sqrt{2}, 2)$ اور $F(1-\sqrt{2}, 2)$ ، $V(2,2)$ اور $V(0,2)$ ، متقارب $y - 2 = \pm(x-1)$

۱۰.۶۷) قطع زائد، $\frac{(y-3)^2}{6} - \frac{x^2}{3} = 1$ ، $C(0,3)$ ، $F(0,6)$ اور $F(0,0)$ ، $V(0, \sqrt{6} + 3)$ اور $V(0, -\sqrt{6} + 3)$ ، متقارب $y = \sqrt{2}x + 3$ اور $y = -\sqrt{2}x + 3$







۱۰.۷۱) $3x^2 + 3y^2 - 7x - 7y + 4 = 0$

۱۰.۷۳) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 13$ نقطہ دائرے کے اندر ہے۔

۲۹۳۳۰ (۱۰.۸۱) (ب) $1:1$

۲۹۳۳۱ (۱۰.۸۳) لمبائی $2\sqrt{2}$، چوڑائی $\sqrt{2}$، رقبہ 4

۲۹۳۳۲ (۱۰.۸۵) 24π

۲۹۳۳۳ (۱۰.۸۷) $(0, \frac{16}{3\pi})$

۲۹۳۳۴ حصہ ۱۰.۲ صفحہ ۱۰۵۹

۲۹۳۳۵ (۱۰.۹۱) $e = \frac{3}{5}$, $F(\pm 3, 0)$, $x = \pm\frac{25}{3}$

۲۹۳۳۶ (۱۰.۹۳) $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $F(0, \pm 1)$, $y = \pm 2$

۲۹۳۳۷ (۱۰.۹۵) $e = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $F(0, \pm 1)$, $y = \pm 3$

۲۹۳۳۸ (۱۰.۹۷) $e = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $F(\pm\sqrt{3}, 0)$, $x = \pm 3\sqrt{3}$

۲۹۳۳۹ (۱۰.۹۹) $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$

۲۹۳۴۰ (۱۰.۱۰۱) $\frac{x^2}{4851} + \frac{y^2}{4900} = 1$

۲۹۳۴۱ (۱۰.۱۰۳) $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

۲۹۳۴۲ (۱۰.۱۰۵) $e = \frac{1}{2}$, $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$

۲۹۳۴۳ (۱۰.۱۰۹) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1$, $F(1, 4 \pm \sqrt{5})$,

۲۹۳۴۴ $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $y = 4 \pm \frac{9\sqrt{5}}{5}$

۲۹۳۴۵ (۱۰.۱۱۱) $a = 0$, $b = -4$, $c = 0$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۹۳۴۶ (۱۰.۱۱۳) $e = \sqrt{2}$, $F(\pm\sqrt{2}, 0)$, $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲۹۳۴۷ (۱۰.۱۱۵) $e = \sqrt{2}$, $F(0, \pm 4)$, $y = \pm 2$

۲۹۳۴۸ (۱۰.۱۱۷) $e = \sqrt{5}$, $F(\pm\sqrt{10}, 0)$, $x = \pm\frac{2}{\sqrt{10}}$

۲۹۳۴۹ (۱۰.۱۱۹) $e = \sqrt{5}$, $F(0, \pm\sqrt{10})$, $y = \pm\frac{2}{\sqrt{10}}$

۲۹۳۵۰ (۱۰.۱۲۱) $y^2 - \frac{x^2}{8} = 1$

۲۹۳۵۱ (۱۰.۱۲۳) $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$

۲۹۳۵۲ (۱۰.۱۲۵) $e = \sqrt{2}$, $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

۲۹۳۵۳ (۱۰.۱۲۷) $e = 2$, $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

۲۹۳۵۴ (۱۰.۱۲۹) $\frac{(y-6)^2}{36} - \frac{(x-1)^2}{45} = 1$

۲۹۳۵۵ حصہ ۱۰.۳ صفحہ ۱۰۶۹

۲۹۳۵۶ (۱۰.۱۳۳) قطع زائد

۲۹۳۵۷ (۱۰.۱۳۵) ترخیم

۲۹۳۵۸ (۱۰.۱۳۷) قطع مکافی

۲۹۳۵۹ (۱۰.۱۳۹) قطع مکافی

۲۹۳۶۰ (۱۰.۱۴۱) قطع زائد

۲۹۳۶۱ (۱۰.۱۴۳) قطع زائد

۲۹۳۶۲ (۱۰.۱۴۵) ترخیم

۲۹۳۶۳ (۱۰.۱۴۷) ترخیم

۲۹۳۶۴ (۱۰.۱۴۹) $x'^2 - y'^2 = 4$ قطع زائد

۲۹۳۶۵ (۱۰.۱۵۱) $4x'^2 + 16y'^2 = 0$ قطع مکافی

۲۹۳۶۶ (۱۰.۱۵۳) $y'^2 = 1$ متوازی لکیریں

۲۹۳۶۷ (۱۰.۱۵۵) $2\sqrt{2}x'^2 + 8\sqrt{2}y'^2 = 0$ قطع مکافی

۲۹۳۶۸ (۱۰.۱۵۷) $4x'^2 + 2y'^2 = 19$ ترخیم

۲۹۳۶۹ (۱۰.۱۵۹) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ یا

۲۹۳۷۰ $\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

۲۹۳۷۱ (۱۰.۱۶۱) $A' = 0.88$, $B' = 0.00$, $C' = 3.10$,

۲۹۳۷۲ $D' = 0.74$, $E' = -1.20$, $F' = -3$,

۲۹۳۷۳ $0.88x'^2 + 3.01y'^2 + 0.74x' -$

۲۹۳۷۴ $1.20y' - 3 = 0$ ترخیم

۲۹۳۷۵ (۱۰.۱۶۳) $A' = 0.00$, $B' = 0.00$, $C' = 5.00$,

۲۹۳۷۶ $D' = 0$, $E' = 0$, $F' = -5$,

۲۹۳۷۷ $5.00y'^2 - 5 = 0$ یا

۲۹۳۷۸ $y' = \pm 1$ متوازی لکیریں

۲۹۳۷۹ (۱۰.۱۶۵) $A' = 5.05$, $B' = 0.00$, $C' = -0.05$,

۲۹۳۸۰ $D' = -5.07$, $E' = -6.18$, $F' = -1$

۲۹۳۸۱ $5.05x'^2 - 0.05y'^2 - 5.07x' -$

۲۹۳۸۲ $6.18y' - 1 = 0$ قطع زائد

۲۹۳۸۳ (۱۰.۱۶۷) (الف) $\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$، (ب) $\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$،

۲۹۳۸۴ (ج) $x'^2 + y'^2 = a^2$، (د) $y' = -\frac{1}{m}x'$،

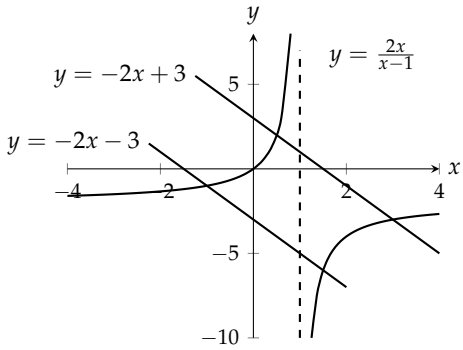
۲۹۳۸۵ (ہ) $y' = -\frac{1}{m}x' + \frac{b}{m}$

۲۹۳۸۶ (۱۰.۱۶۹) (الف) $x'^2 - y'^2 = 2$، (ب) $x'^2 - y'^2 = 2a$

۲۹۳۸۷ (۱۰.۱۷۵) (الف) قطع مکافی

۲۹۳۸۸ (۱۰.۱۷۷) (الف) قطع زائد، (ب)

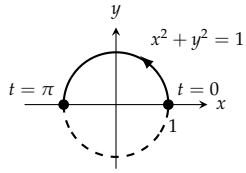
۲۹۳۸۹



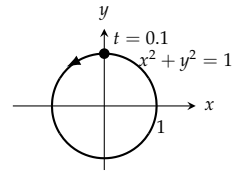
۲۹۳۹۰ (ج) $y = -2x + 3$، $y = -2x - 3$

۲۹۳۹۱ حصہ ۱۰.۴ صفحہ ۱۰۸۲

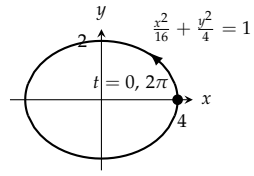
(۱۰.۱۸۲ ص۹۳)



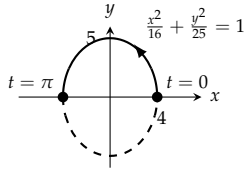
(۱۰.۱۸۳ ص۹۳)



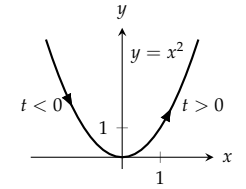
(۱۰.۱۸۴ ص۹۳)



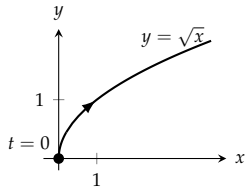
(۱۰.۱۸۵ ص۹۳)



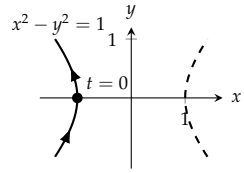
(۱۰.۱۸۶ ص۹۳)



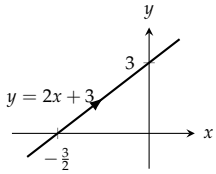
(۱۰.۱۹۲ ص۹۳)



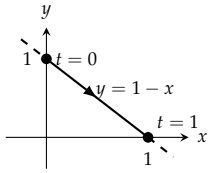
(۱۰.۱۹۳ ص۹۳)



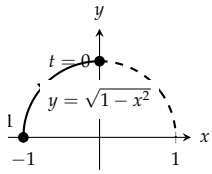
(۱۰.۱۹۴ ص۹۳)



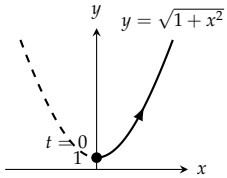
(۱۰.۱۹۵ ص۹۳)



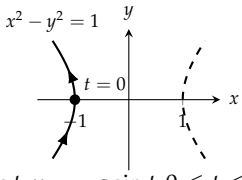
(۱۰.۲۰۰ ص۹۳)



(۱۰.۲۰۱ ص۹۳)



(۱۰.۲۰۲ ص۹۳)



(۱۰.۲۰۳ ص۹۳)

(۱۰.۲۰۶ ص۹۳) $x=a\cos t, y=-a\sin t, 0\le t\le 2\pi$ (ا)

ص۹۳ $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\le t\le 2\pi$ (ب)

ص۹۳ $x=a\cos t,\ y=-a\sin t,\ 0\le t\le 4\pi$ (ج)

ص۹۳ $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ 0\le t\le 4\pi$ (د)

(۱۰.۲۰۸ ص۹۳) $x=\frac{-at}{\sqrt{1+t^2}},\ y=\frac{a}{\sqrt{1+t^2}},\ -\infty<t<\infty$

(۱۰.۲۱۰ ص۹۳) $x=2\cos t,\ y=2\sin^2 t,\ 0<t<\pi$

(۱۰.۲۱۲ ص۹۳) (ب) $x=x_1t,\ y=y_1t$ آپ کا جواب مختلف ہو سکتا ہے،

ص۹۳ (ج) $x=-1+t,\ y=t$ آپ کا جواب مختلف ہو سکتا ہے۔

(۱۰.۲۱۴ ص۹۳)

$$x=(a-b)\cos\theta+b\cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right),$$

ص۹۳

$$y=(a-b)\sin\theta-b\sin\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$$

(۱۰.۲۱۶ ص۹۳) $x=a\sin^2 t\tan t,\ y=a\sin^2 t$

۲۹۳۱۷ (۱۰.۲۱۸ $(1,1)$

۲۹۳۱۸ حصہ ۱۰.۵ صفحہ ۱۰۹۴

۲۹۳۱۹ (۱۰.۲۳۰ $y = -x + 2\sqrt{2},\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\sqrt{2}$

۲۹۳۲۰ (۱۰.۲۳۲ $y = -\frac{1}{2}x + 2\sqrt{2},\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

۲۹۳۲۱ (۱۰.۲۳۴ $y = x + \frac{1}{4},\ \frac{d^2y}{dx^2} = -2$

۲۹۳۲۲ (۱۰.۲۳۶ $y = 2x - \sqrt{3},\ \frac{d^2y}{dx^2} = -3\sqrt{3}$

۲۹۳۲۳ (۱۰.۲۳۸ $y = x - 4,\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}$

۲۹۳۲۴ (۱۰.۲۴۰ $y = \sqrt{3}x - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 2,\ \frac{d^2y}{dx^2} = -4$

۲۹۳۲۵ (۱۰.۲۴۲ 0

۲۹۳۲۶ (۱۰.۲۴۴ -6

۲۹۳۲۷ (۱۰.۲۴۶ 4

۲۹۳۲۸ (۱۰.۲۴۸ 12

۲۹۳۲۹ (۱۰.۲۵۰ π^2

۲۹۳۳۰ (۱۰.۲۵۲ $8\pi^2$

۲۹۳۳۱ (۱۰.۲۵۴ $\frac{52\pi}{3}$

۲۹۳۳۲ (۱۰.۲۵۶ $3\pi\sqrt{5}$

۲۹۳۳۳ (۱۰.۲۵۸ (ا) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{12}{\pi} - \frac{24}{\pi^2}, \frac{24}{\pi^2} - 2)$، (ب) وسطانی ۱۰.۲۹۳۵۹

۲۹۳۳۴ مرکز $(1.4, 0.4)$

۲۹۳۳۵ (۱۰.۲۶۰ (ا) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{1}{3}, \pi - \frac{4}{3})$

۲۹۳۳۶ (۱۰.۲۶۲ (ا) π، (ب) π

۲۹۳۳۷ (۱۰.۲۶۶ $3\pi a^2$

۲۹۳۳۸ (۱۰.۲۶۸ $\frac{64\pi}{3}$

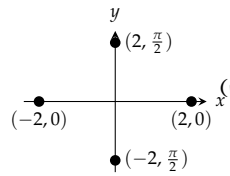
۲۹۳۳۹ (۱۰.۲۷۰ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$، $t = 0$ پر $y = 2x$، $t = \pi$ پر ۱۰.۲۹۳۶۰

۲۹۳۴۰ $y = -2x$

۲۹۳۴۱ حصہ ۱۰.۶ صفحہ ۱۱۰۵

۲۹۳۴۲ (۱۰.۲۸۷ ااور ہ؛ب اور ز؛ج اور ح؛د اور و

۲۹۳۴۳ (۱۰.۲۸۹



۱۰.۲۹۳۶۱

۲۹۳۴۴ (ا) $(2, \frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ اور

۲۹۳۴۵ $(-2, \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi)$

۲۹۳۴۶ جہاں n عدد صحیح ہے۔ ۱۰.۳۰۳۶۲

۲۹۳۴۷ (ب) $(2, 2n\pi)$ اور

۲۹۳۴۸ $(-2, (2n+1)\pi)$ جہاں

۲۹۳۴۹ n عدد صحیح ہے۔

۲۹۳۵۰ (ج) $(2, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi)$ اور

۲۹۳۵۱ $(-2, \frac{3\pi}{2} + (2n+1)\pi)$

۲۹۳۵۲ جہاں n عدد صحیح ہے۔

۲۹۳۵۳ (د) $(2, (2n+1)\pi)$ اور

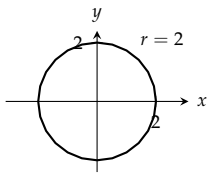
۲۹۳۵۴ $(-2, 2n\pi)$ جہاں n عدد صحیح ہے۔

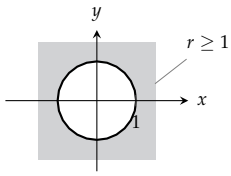
۲۹۳۵۵ (۱۰.۲۹۱ (ا) $(3,0)$، (ب) $(-3,0)$، (ج) $(-1,\sqrt{3})$،

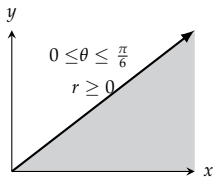
۲۹۳۵۶ (د) $(1,\sqrt{3})$، (ہ) $(3,0)$، (و) $(1,\sqrt{3})$، (ز)

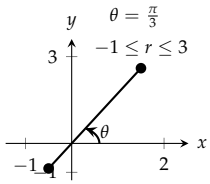
۲۹۳۵۷ $(-1,\sqrt{3})$، (ح) $(-3,0)$

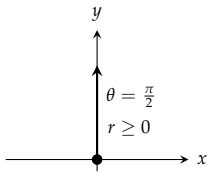
۲۹۳۵۸ (۱۰.۲۹۳۵۸





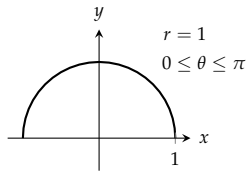




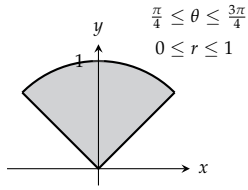


۲۹۳۹۱ حصہ ۱۰.۷ صفحہ ۱۱۱۵

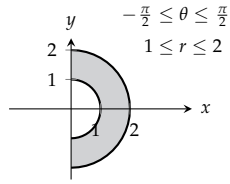
(۱۰.۳۰۴-۲۹۳)



(۱۰.۳۰۵-۲۹۴)



(۱۰.۳۰۷-۲۹۵)



۲۹۳۶۶ (۱۰.۳۰۹) $x = 2$ ،نقطہ $(2,0)$ سے گزرتی انتصابی خط

۲۹۳۶۷ (۱۰.۳۱۱) $y = 0$ ، محور x

۲۹۳۶۸ (۱۰.۳۱۳) $y = 4$ ،نقطہ $(0,4)$ سے گزرتی افقی خط

۲۹۳۶۹ (۱۰.۳۱۵) $x + y = 1$ ،لکیر،جہاں $m = -1$ اور $b = 1$ ہیں۔

۲۹۳۷۰ (۱۰.۳۱۷) $x^2 + y^2 = 1$ ،دائرہ،رداس 1 ،مرکز $(0,0)$

۲۹۳۷۱ (۱۰.۳۱۹) $y - 2x = 5$ ،لکیر، $m = 2$ ، $b = 5$

۲۹۳۷۲ (۱۰.۳۲۱) $y^2 = x$ ،قطع مکافی،راس $(0,0)$ ،دائیں کھلتا ہے۔

۲۹۳۷۳ (۱۰.۳۲۳) $y = e^x$ ،قدرتی قوت نمائی تفاعل۔

۲۹۳۷۴ (۱۰.۳۲۵) $x + y = \pm 1$ ،دو متوازی سیدھی لکیریں جن کی ڈھلوان

۲۹۳۷۵ $m = -1$ اور $b = \pm 1$ ہیں۔

۲۹۳۷۶ (۱۰.۳۲۷) $(x+2)^2 + y^2 = 4$ ،دائرہ،رداس 2 ،مرکز

۲۹۳۷۷ $(-2,0)$

۲۹۳۷۸ (۱۰.۳۲۹) $x^2 + (y-4)^2 = 16$ ،دائرہ،رداس 4 ،مرکز

۲۹۳۷۹ $(0,4)$

۲۹۳۸۰ (۱۰.۳۳۱) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ ،دائرہ،رداس $\sqrt{2}$ ،

۲۹۳۸۱ مرکز $(1,1)$

۲۹۳۸۲ (۱۰.۳۳۳) $\sqrt{3}y + x = 4$

۲۹۳۸۳ (۱۰.۳۳۵) $r\cos\theta = 7$

۲۹۳۸۴ (۱۰.۳۳۷) $\theta = \frac{\pi}{4}$

۲۹۳۸۵ (۱۰.۳۳۹) $r = 2$ یا $r = -2$

۲۹۳۸۶ (۱۰.۳۴۱) $4r^2\cos^2\theta + 9r^2\sin^2\theta = 36$

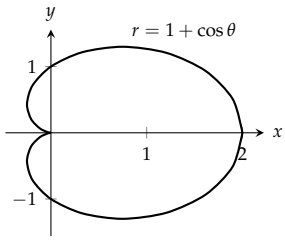
۲۹۳۸۷ (۱۰.۳۴۳) $r\sin^2\theta = 4\cos\theta$

۲۹۳۸۸ (۱۰.۳۴۵) $r = 4\sin\theta$

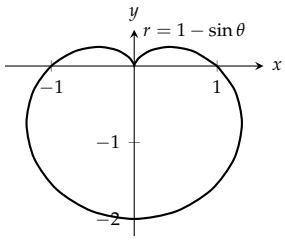
۲۹۳۸۹ (۱۰.۳۴۷) $r^2 = 6r\cos\theta - 2r\sin\theta - 6$

۲۹۳۹۰ (۱۰.۳۴۹) $(0,\theta)$ جہاں θ زاویہ ہے۔

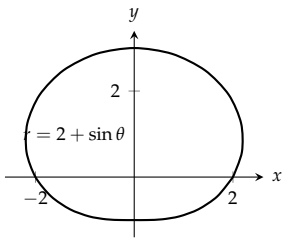
(۱۰.۳۵۱-۲۹۳)



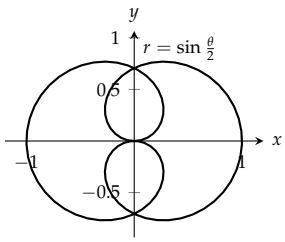
(۱۰.۳۵۳-۲۹۳)



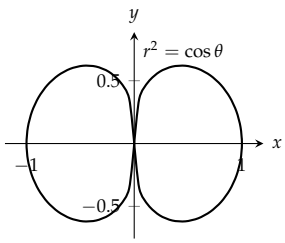
(۱۰.۳۵۵-۲۹۳)

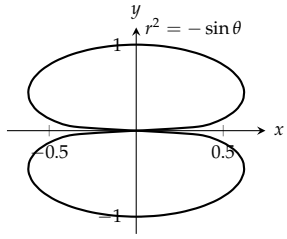


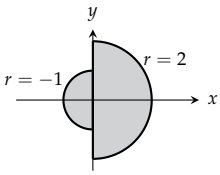
(۱۰.۳۵۷-۲۹۵)

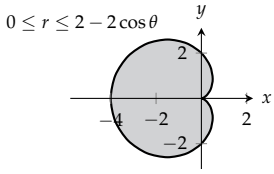


(۱۰.۳۵۹-۲۹۶)



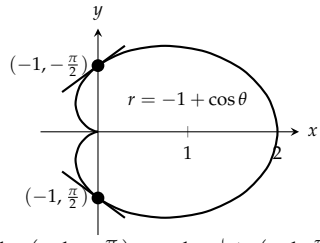
(۱۰.۳۶۶) 

(۱۰.۳۷۵) 

(۱۰.۳۷۷) 

۲۹۳۹۸) ۱۰.۳۶۳) محور x ، محور y ، مبدا

۲۹۳۹۹) ۱۰.۳۶۵) مبدا

(۱۰.۳۶۷) 

۲۹۳۰۱) $(-1, \frac{\pi}{2})$ پر ڈھلوان -1 اور $(-1, -\frac{\pi}{2})$ پر 1 ہے۔

۲۹۳۰۹) ۱۰.۳۸۱) $(0,0), (1, \frac{\pi}{2}), (1, \frac{3\pi}{2})$

۲۹۳۱۰) ۱۰.۳۸۳) $(0,0), (\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}), (-\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3})$

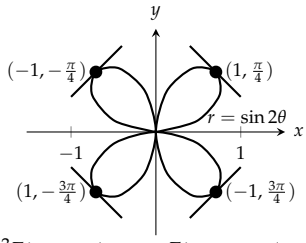
۲۹۳۱۱) ۱۰.۳۸۵) $(\sqrt{2}, \pm\frac{\pi}{6}), (\sqrt{2}, \pm\frac{5\pi}{6})$

۲۹۳۱۲) ۱۰.۳۸۷) $(1, \frac{\pi}{12}), (1, \frac{5\pi}{12}), (1, \frac{13\pi}{12}), (1, \frac{17\pi}{12})$

۲۹۳۱۳) ۱۰.۳۹۳) الف

۲۹۳۱۴) ۱۰.۴۰۱) $2y = \frac{2\sqrt{6}}{9}$

۲۹۳۱۵) حصہ ۱۰.۸ صفحہ ۱۱۲۶

(۱۰.۳۶۹) 

۲۹۳۱۶) ۱۰.۴۰۳) $r\cos(\theta - \frac{\pi}{6}) = 5, \quad y = -\sqrt{3}x + 10$

۲۹۳۱۷) ۱۰.۴۰۵) $r\cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) = 3, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x -$

۲۹۳۱۸) $2\sqrt{3}$

۲۹۳۱۹) ۱۰.۴۰۷) $y = 2 - x$

۲۹۳۲۰) ۱۰.۴۰۹) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$

۲۹۳۲۱) ۱۰.۴۱۱) $r\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 3$

۲۹۳۲۲) ۱۰.۴۱۳) $r\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = 5$

۲۹۳۲۳) ۱۰.۴۱۵) $r = 8\cos\theta$

۲۹۳۲۴) ۱۰.۴۱۷) $r = 2\sqrt{2}\sin\theta$

۲۹۳۲۵) ۱۰.۴۱۹) $C(2,0), \quad 2$

۲۹۳۲۶) ۱۰.۴۲۱) $C(1,\pi), \quad 1$

۲۹۳۲۷) ۱۰.۴۲۳) $r = 12\cos\theta$

۲۹۳۲۸) ۱۰.۴۲۵) $r = 10\sin\theta$

۲۹۳۲۹) ۱۰.۴۲۷) $(x+1)^2 + y^2 = 1, \quad r = -2\cos\theta$

۲۹۳۳۰) ۱۰.۴۲۹) $x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}, \quad r = -\sin\theta$

۲۹۳۳۱) ۱۰.۴۳۱) $r = \frac{2}{1+\cos\theta}$

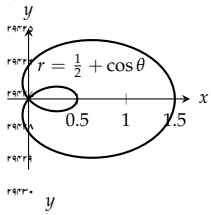
۲۹۳۳۲) ۱۰.۴۳۳) $r = \frac{30}{1-5\sin\theta}$

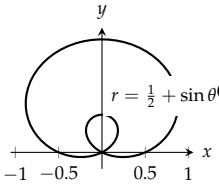
۲۹۳۳۳) ۱۰.۴۳۵) $r = \frac{1}{2+\cos\theta}$

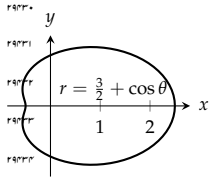
۲۹۳۳۴) ۱۰.۴۳۷) $r = \frac{10}{5-\sin\theta}$

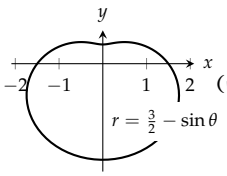
۲۹۳۰۳) $(1, \frac{\pi}{4})$ پر -1 ، $(-1, -\frac{\pi}{4})$ پر 1 ، $(-1, \frac{3\pi}{4})$

۲۹۳۰۴) $(1, -\frac{3\pi}{4})$ پر 1 ، -1 پر

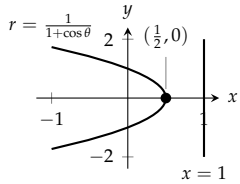
(۱۰.۳۷۱) 



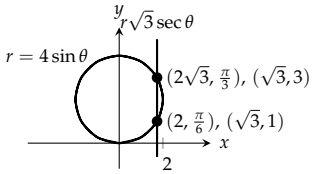
(۱۰.۳۷۳) 



(۱۰.۴۳۹-۳۵



۲۹۳۳۲



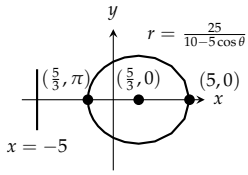
۲۹۳۳۳ (۱۰.۴۶۳ $r = \frac{4}{1+\cos\theta}$

۲۹۳۳۴ (۱۰.۴۶۵ (ب)پنیا 2 سنٹی میٹر دور ہونی چاہیے۔

۲۹۳۳۵ (۱۰.۴۶۷ $r = 2a\sin\theta$ دائرہ

۲۹۳۳۶ (۱۰.۴۶۹ $r\cos(\theta - \alpha) = p$ خط

(۱۰.۴۴۸-۳۳۶



۲۹۳۳۷ حصہ ۱۰.۹ صفحہ ۱۱۴۰

۲۹۳۳۸ (۱۰.۴۷۳ 18π

۲۹۳۳۹ (۱۰.۴۷۵ $\frac{\pi}{8}$

۲۹۳۵۰ (۱۰.۴۷۷ 2

۲۹۳۵۱ (۱۰.۴۷۹ $\frac{\pi}{2} - 1$

۲۹۳۵۲ (۱۰.۴۸۱ $5\pi - 8$

۲۹۳۵۳ (۱۰.۴۸۳ $3\sqrt{3} - \pi$

۲۹۳۵۴ (۱۰.۴۸۵ $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

۲۹۳۵۵ (۱۰.۴۸۷ $12\pi - 9\sqrt{3}$

۲۹۳۵۶ (۱۰.۴۸۹ $\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$

۲۹۳۵۷ (۱۰.۴۹۱ $\frac{19}{3}$

۲۹۳۵۸ (۱۰.۴۹۳ 8

۲۹۳۵۹ (۱۰.۴۹۵ $3(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$

۲۹۳۶۰ (۱۰.۴۹۷ $\frac{\pi}{8} + \frac{3}{8}$

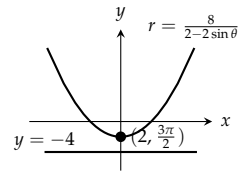
۲۹۳۶۱ (۱۰.۴۹۹ 2π

۲۹۳۶۲ (۱۰.۵۰۱ $\pi\sqrt{2}$

۲۹۳۶۳ (۱۰.۵۰۳ $2\pi(2 - \sqrt{2})$

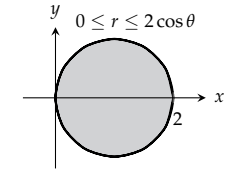
۲۹۳۶۴ (۱۰.۵۰۹ $(\frac{5}{6}a, 0)$

(۱۰.۴۴۵-۳۸



(۱۰.۴۴۴-۳۷

(۱۰.۴۴۷-۳۹

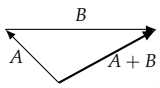


۲۹۳۶۴ حصہ ۱۱.۱ صفحہ ۱۱۵۵

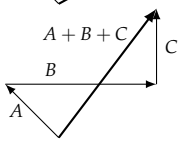
سیارہ	حضیض شمسی (فلکی اکائیاں)	اوج شمسی (فلکی اکائیاں)
عطارہ	0.3075	0.4667
زھرہ	0.7184	0.7282
زمین	0.9833	1.0167
مریخ	1.3817	1.6663
مشتری	4.9512	5.4548
زحل	9.0210	10.0570
یورانس	18.2977	20.0623
نیپچون	29.8135	30.3065
پلوٹو	29.6549	49.2251

۲۹۳۶۵ (۱۱.۱ (ب) ۱۹:۴۰:۵۹

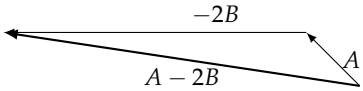
۲۹۳۶۶ (۱۱.۱ (ا



۲۹۳۶۷ (ب)



(ج)



۲۹۳۶۸

۲۹۳۶۹ (۱۰.۴۶۱ (ا) $x^2 + (y-2)^2 = 4,\ x = \sqrt{3}$ ،(ب)

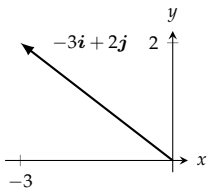
۲۹۳۶۹ ج)

۲۹۳۷۰ (۱۱.۳ $4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}$

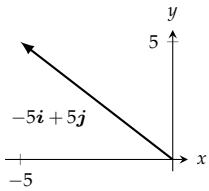
۲۹۳۷۱ (۱۱.۵ $(6-\frac{\sqrt{3}}{\pi})\boldsymbol{i}-20\boldsymbol{j}$

۲۹۳۷۲ (۱۱.۷ (ا) $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ (ب) $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}-\boldsymbol{u}$

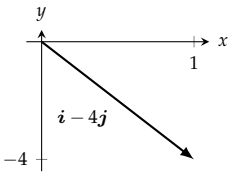
۲۹۳۷۳ (۱۱.۹



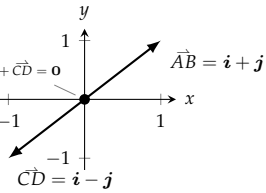
۲۹۳۷۴ (۱۱.۱۱



۲۹۳۷۵ (۱۱.۱۳

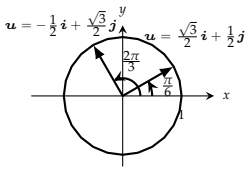


۲۹۳۷۶ (۱۱.۱۵

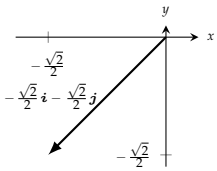


۲۹۳۷۷ (۱۱.۱۷ $(5,8)$

۲۹۳۷۸ (۱۱.۱۹



۲۹۳۷۹ (۱۱.۲۱



۲۹۳۸۰ (۱۱.۲۳ $\frac{3}{5}\boldsymbol{i}-\frac{4}{5}\boldsymbol{j}$

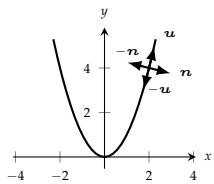
۲۹۳۸۱ (۱۱.۲۵ $\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sqrt{17}}\boldsymbol{i}+\frac{4}{\sqrt{17}}\boldsymbol{j},$

۲۹۳۸۲ $-\boldsymbol{u}=-\frac{1}{\sqrt{17}}\boldsymbol{i}-\frac{4}{\sqrt{17}}\boldsymbol{j},$

۲۹۳۸۳ $\boldsymbol{n}=\frac{4}{\sqrt{17}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{17}}\boldsymbol{j},$

۲۹۳۸۴ $-\boldsymbol{n}=-\frac{4}{\sqrt{17}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{17}}\boldsymbol{j}$

۲۹۳۸۵



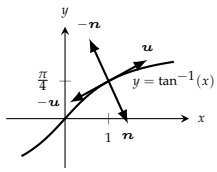
۲۹۳۸۶ (۱۱.۲۷ $\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}),$

۲۹۳۸۷ $-\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}),$

۲۹۳۸۸ $\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}),$

۲۹۳۸۹ $-\boldsymbol{n}=\frac{1}{\sqrt{5}}(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}),$

۲۹۳۹۰



۲۹۳۹۱ (۱۱.۲۹ $\boldsymbol{u}=\pm\frac{1}{5}(-4\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}),$

۲۹۳۹۲ $\boldsymbol{v}=\pm\frac{1}{5}(3\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j})$

۲۹۳۹۳ (۱۱.۳۱ $\boldsymbol{u}=\pm\frac{1}{2}(\boldsymbol{i}+\sqrt{3}\boldsymbol{j}),$

۲۹۳۹۴ $\boldsymbol{v}=\pm\frac{1}{2}(-\sqrt{3}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$

۲۹۳۹۵ (۱۱.۳۳ $13(\frac{5}{13}\boldsymbol{i}+\frac{12}{13}\boldsymbol{j})$

۲۹۳۹۶ (۱۱.۳۵ $\frac{3}{5}\boldsymbol{i}-\frac{4}{5}\boldsymbol{j},\quad -\frac{3}{5}\boldsymbol{i}+\frac{4}{5}\boldsymbol{j}$

۲۹۳۹۷ (۱۱.۳۹ $5\sqrt{3}\boldsymbol{i},\quad 5\boldsymbol{j}$

۲۹۳۹۸ (۱۱.۴۱ $\alpha=\frac{3}{2},\quad \beta=\frac{1}{2}$

۲۹۳۹۹ (۱۱.۴۳ (ا) $(5\cos 60^\circ, 5\sin 60^\circ)=(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2})$

۲۹۵۰۰ (ب) $(5\cos 60+10\cos 315, 5\sin 60^\circ+$

۲۹۵۰۱ $10\sin 315^\circ)=(\frac{5+\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{3}-10\sqrt{2}}{2})$

۲۹۵۰۲ (۱۱.۴۵ $-\boldsymbol{v}\ =\ -a\boldsymbol{i}-b\boldsymbol{j}$ کا ڈھلوان $\frac{(-b)}{(-a)}$ ہے۔ یہی $\boldsymbol{v}$ کا بھی

۲۹۵۰۳ ڈھلوان ہے۔

۲۹۵۰۴ **حصہ ۱۱.۲ صفحہ ۱۱۶۸**

۲۹۵۰۵ ۱۱.۴۶) محور z کے متوازی نقطہ $(2,3,0)$ سے گزرتا ہوا خط۔

۲۹۵۰۶ ۱۱.۴۸) محور x

۲۹۵۰۷ ۱۱.۵۰) مستوی xy میں دائرہ $x^2+y^2=4$

۲۹۵۰۸ ۱۱.۵۲) مستوی xz میں دائرہ $x^2+z^2=4$

۲۹۵۰۹ ۱۱.۵۴) مستوی yz میں دائرہ $y^2+z^2=1$

۲۹۵۱۰ ۱۱.۵۶) مستوی xy میں دائرہ $x^2+y^2=16$

۲۹۵۱۱ ۱۱.۵۸) (ا)مستوی xy کا ربع اول۔(ب)مستوی xy کا ربع چہارم۔

۲۹۵۱۲ ۱۱.۶۰) (ا)رداس 1 کا گیند جس کا مرکز مبدا پر ہے۔(ب)مبدا سے 1 اکائی سے

۲۹۵۱۳ زیادہ دور تمام نقاط۔

۲۹۵۱۴ ۱۱.۶۲) (ا)رداس 1 کا نصف بالائی کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہے۔(ب)رداس 1

۲۹۵۱۵ کا نصف بالائی ٹھوس کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہے۔

۲۹۵۱۶ ۱۱.۶۴) (ا) $x=3$ ،(ب) $y=-1$ ،(ج) $z=-2$

۲۹۵۱۷ ۱۱.۶۶) (ا) $z=1$ ،(ب) $x=3$ ،(ج) $y=-1$

۲۹۵۱۸ ۱۱.۶۸) (ا) $x^2+(y-2)^2=4,\ z=0$ ،(ب) $y=0$،

۲۹۵۱۹ $(y-2)^2+z^2=4,\ x=0$ ،

۲۹۵۲۰ (ج) $x^2+z^2=4,\ y=2$

۲۹۵۲۱ ۱۱.۷۰) (ا) $y=3,\ z=-1$ ،(ب) $x=1,\ z=-1$

۲۹۵۲۲ (ج) $x=1,\ y=3$

۲۹۵۲۳ ۱۱.۷۲) $x^2+y^2+z^2=25,\ z=3$

۲۹۵۲۴ ۱۱.۷۴) $0\le z\le 1$

۲۹۵۲۵ ۱۱.۷۶) $z\le 0$

۲۹۵۲۶ ۱۱.۷۸) (ا) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2<1$

۲۹۵۲۷ (ب) $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2>1$

۲۹۵۲۸ ۱۱.۸۰) $3(\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}\boldsymbol{j}-\frac{2}{3}\boldsymbol{k})$

۲۹۵۲۹ ۱۱.۸۲) $9(\frac{1}{9}\boldsymbol{i}+\frac{4}{9}\boldsymbol{j}-\frac{8}{9}\boldsymbol{k})$

۲۹۵۳۰ ۱۱.۸۴) $5(\boldsymbol{k})$

۲۹۵۳۱ ۱۱.۸۶) $1(\frac{3}{5}\boldsymbol{i}+\frac{4}{5}\boldsymbol{k})$

۲۹۵۳۲ ۱۱.۸۸) $\sqrt{\frac{1}{2}}(\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k})$

۲۹۵۳۳ ۱۱.۹۰) (ا) $2\boldsymbol{i}$ ،(ب) $-\sqrt{3}\boldsymbol{k}$ ،(ج) $\frac{3}{10}\boldsymbol{j}+\frac{2}{5}\boldsymbol{k}$ ،(د) $6\boldsymbol{i}$

۲۹۵۳۴ $2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$

۲۹۵۳۵ ۱۱.۹۲) $\frac{7}{13}(12\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{k})$

۲۹۵۳۶ ۱۱.۹۴) $-\frac{10}{7}\boldsymbol{i}+\frac{15}{7}\boldsymbol{j}-\frac{30}{7}\boldsymbol{k}$

۲۹۵۳۷ ۱۱.۹۶) (ا) 3 ،(ب) $\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}-\frac{1}{3}\boldsymbol{k}$ ،(ج) $(2,2,\frac{1}{2})$

۲۹۵۳۸ ۱۱.۹۸) (ا) 7 ،(ب) $\frac{3}{7}\boldsymbol{i}-\frac{6}{7}\boldsymbol{j}+\frac{2}{7}\boldsymbol{k}$ ،(ج) $(\frac{5}{2},1,6)$

۲۹۵۳۹ ۱۱.۱۰۰) (ا) $2\sqrt{3}$ ،(ب) $\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}$ ،(ج)

۲۹۵۴۰ $(1,-1,-1)$

۲۹۵۴۱ ۱۱.۱۰۲) $A(4,-3,5)$

۲۹۵۴۲ ۱۱.۱۰۴) $C(-2,0,2),\quad a=2\sqrt{2}$

۲۹۵۴۳ ۱۱.۱۰۶) $C(\sqrt{2},\sqrt{2},-\sqrt{2}),\quad a=\sqrt{2}$

۲۹۵۴۴ ۱۱.۱۰۸) $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14$

۲۹۵۴۵ ۱۱.۱۱۰) $(x+2)^2+y^2+z^2=3$

۲۹۵۴۶ ۱۱.۱۱۲) $C(-2,0,2),\quad a=\sqrt{8}$

۲۹۵۴۷ ۱۱.۱۱۴) $C(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4},-\frac{1}{4}),\quad a=\frac{5\sqrt{3}}{4}$

۲۹۵۴۸ ۱۱.۱۱۶) (ا) $\sqrt{y^2+z^2}$ ، (ب) $\sqrt{x^2+z^2}$ ، (ج)

$\sqrt{x^2+y^2}$

۲۹۵۴۹ ۱۱.۱۱۸) (ا) $\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{3}{2}\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ ،(ب) $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$ ،(ج)

$(2,2,1)$

۲۹۵۵۲ **حصہ ۱۱.۳ صفحہ ۱۱۸۰**

۲۹۵۵۳ ۱۱.۱۲۳) (ا) $-25,\ 5,\ 5$ ،(ب) -1 ،(ج) -5 ،(د) $-2\boldsymbol{i}+$

$4\boldsymbol{j}-\sqrt{5}\boldsymbol{k}$

۲۹۵۵۴ ۱۱.۱۲۵) (ا) $25,\ 15,\ 5$ ،(ب) $\frac{1}{3}$ ،(ج) $\frac{5}{3}$ ،(د) $\frac{1}{9}(10\boldsymbol{i}+$

$11\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k})$

۲۹۵۵۶ ۱۱.۱۲۷) (ا) $0,\ \sqrt{53}$ ،(ب) 0 ،(ج) 0 ،(د) 0

۲۹۵۵۷ ۱۱.۱۲۹) (ا) $2,\ \sqrt{34},\ \sqrt{3}$ ،(ب) $\frac{2}{\sqrt{3}\sqrt{34}}$ ،(ج) $\frac{2}{\sqrt{34}}$ ،(د)

$\frac{1}{17}(5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k})$

۲۹۵۶۰ ۱۱.۱۳۱) (ا) $\sqrt{3}-\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 3$ ،(ب) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$ ،(ج)

$\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ،(د) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}(-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$

۲۹۵۶۲ ۱۱.۱۳۳) $(\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{3}{2}\boldsymbol{j})+(-\frac{3}{2}\boldsymbol{i}+\frac{3}{2}\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k})$

۲۹۵۶۳ ۱۱.۱۳۵) $(\frac{14}{3}\boldsymbol{i}+\frac{28}{3}\boldsymbol{j}-\frac{14}{3}\boldsymbol{k})+(\frac{10}{3}\boldsymbol{i}-\frac{16}{3}\boldsymbol{j}-$

$\frac{22}{3}\boldsymbol{k})$

۲۹۵۶۴ ۱۱.۱۳۷) یکساں مقدار کے دو سمتیات کا مجموعہ اور تفریق ہر صورت ایک دوسرے

۲۹۵۶۵ کے عمودی ہوتے ہیں۔یہ حقیقت درج ذیل سے واضح ہو گا۔

۲۹۵۶۶ $(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2)\cdot(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)=\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_1+$

۲۹۵۶۷ $\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{v}_2=$

۲۹۵۶۸ $|\boldsymbol{v}_1|^2-|\boldsymbol{v}_2|^2$

۲۹۵۶۹ ۱۱.۱۴۳) $\tan^{-1}\sqrt{2}$

۲۹۵۷۰ ۱۱.۱۴۵) 0.75 ریڈیئن

۲۹۵۷۱ ۱۱.۱۴۷) 1.77 ریڈیئن

۲۹۵۷۲ ۱۱.۱۴۹) $\angle A\approx 1.24,\ \angle B\approx 0.66,\ \angle C\approx 1.24$

۲۹۵۷۳ ۱۱.۱۵۱) 0.62 ریڈیئن

۲۹۵۷۴ ۱۱.۱۵۳) (ا)چونکہ $|\cos\theta|\le 1$ ہوتا ہے لہٰذا $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|=$

۲۹۵۷۵ $|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}||\cos\theta|\le|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\,(1)=|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|$ ہو

۲۹۵۷۶ گا۔(ب)جب $|\cos\theta|=1$ ہو یا $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ میں سے ایک یا

۲۹۵۷۷ دونوں صفر ہوں۔غیر صفر سمتیات کی صورت میں مساوات تب درست

۲۹۵۷۸ ہو گا جب سمتیات متوازی ہوں یعنی جب $\theta=0$ یا $\theta=\pi$

۲۹۵۷۹ ہو۔

۲۹۵۸۰ ۱۱.۱۵۵) a

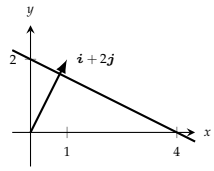
۲۹۵۸۱ ۱۱.۱۵۷) (ا) $\sqrt{70}$ ،(ب) $\sqrt{568}$

۲۹۵۸۲ ۱۱.۱۵۹) 5 J

۲۹۵۸۳ ۱۱.۱۶۱) 3464.10 J

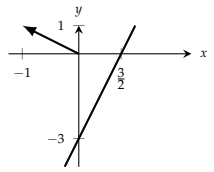
۲۹۵۸۵ (۱۱.۱۶۵ $x + 2y = 4$

۲۹۵۸۶



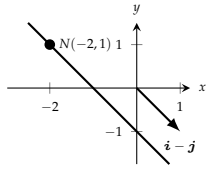
۲۹۵۸۷ (۱۱.۱۶۷ $-2x + y = -3$

۲۹۵۸۸



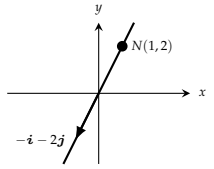
۲۹۵۸۹ (۱۱.۱۶۹ $x + y = -1$

۲۹۵۹۰



۲۹۵۹۱ (۱۱.۱۷۱ $2x - y = 0$

۲۹۵۹۲



۲۹۵۹۳ (۱۱.۱۷۳ $\frac{\pi}{4}$

۲۹۵۹۴ (۱۱.۱۷۵ $\frac{\pi}{6}$

۲۹۵۹۵ (۱۱.۱۷۷ 0.14

۲۹۵۹۶ (۱۱.۱۷۹ $\frac{\pi}{3}$ اور $\frac{2\pi}{3}$ دونوں نقطوں پر۔

۲۹۵۹۷ (۱۱.۱۸۱ نقطہ $(0,0)$ پر $\frac{\pi}{2}$؛ نقطہ $(1,1)$ پر $\frac{\pi}{4}$ اور $\frac{3\pi}{4}$

۲۹۵۹۸ حصہ ۱۱.۴ صفحہ ۱۱۹۳

۲۹۵۹۹ (۱۱.۱۸۳ $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = 3$، رخ $\frac{2}{3}\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k}$؛

۲۹۶۰۰ $|\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}| = 3$، رخ $-\frac{2}{3}\boldsymbol{i} - \frac{1}{3}\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k}$

۲۹۶۰۱ (۱۱.۱۸۵ $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = 0$، کوئی رخ نہیں ہے؛ $|\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}| = 0$،

۲۹۶۰۲ کوئی رخ نہیں ہے۔

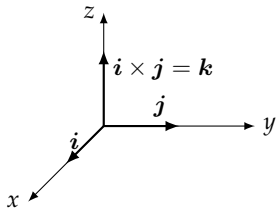
۲۹۶۰۳ (۱۱.۱۸۷ $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = 6$، رخ $-\boldsymbol{k}$؛

۲۹۶۰۴ $|\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}| = 6$، رخ $\boldsymbol{k}$

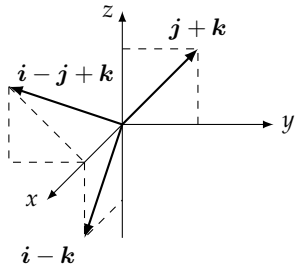
۲۹۶۰۵ (۱۱.۱۸۹ $|\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}| = 6\sqrt{5}$، رخ $\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}$؛

۲۹۶۰۶ $|\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}| = 6\sqrt{5}$، رخ $-\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}$

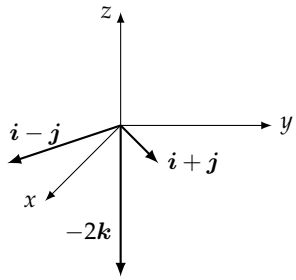
۲۹۶۰۷ (۱۱.۱۹۱



۲۹۶۰۸ (۱۱.۱۹۳



۲۹۶۰۹ (۱۱.۱۹۵



۲۹۶۱۰ (۱۱.۱۹۷ (ا) $2\sqrt{6}$، (ب) $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$

۲۹۶۱۱ (۱۱.۱۹۹ (ا) $\frac{\sqrt{2}}{2}$، (ب) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j})$

۲۹۶۱۲ (۱۱.۲۰۱ (ا) نہیں (ب) $\boldsymbol{A}$ اور $\boldsymbol{C}$

۲۹۶۱۳ (۱۱.۲۰۳ $4\sqrt{3}\,\mathrm{N\,m}$

۲۹۶۱۴ (۱۱.۲۰۵ 8

۲۹۶۱۵ (۱۱.۲۰۷ 7

۲۹۶۱۶ (۱۱.۲۰۹ (ا) درست، (ب) بعض اوقات درست، (ج) درست، (د) درست،

۲۹۶۱۷ (ہ) بعض اوقات درست، (و) درست، (ز) درست، (ح) درست

۲۹۶۱۸ (۱۱.۲۱۱ (ا) $\mathrm{proj}_{\boldsymbol{B}}\,\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}$، (ب) $\pm\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$،

۲۹۶۱۹ (ج) $\pm(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \times \boldsymbol{C}$، (د) $\left|(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C}\right|$

۲۹۶۲۰ (۱۱.۲۱۳ (ا) ہاں، (ب) نہیں، (ج) ہاں، (د) نہیں

۲۹۶۲۱ (۱۱.۲۱۵ (ا) نہیں۔ ضروری نہیں کہ $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{C}$ برابر ہوں۔ مثال کے طور پر

۲۹۶۲۲ $\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \neq -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ ہے لیکن

$$\boldsymbol{i} \times (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{i} \times (-\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) = -\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i} + \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}$$

۲۹۶۲۳ (۱۱.۲۱۷ 2

(۱۱.۲۱۹ 13

(۱۱.۲۲۱ $\frac{11}{2}$

(۱۱.۲۲۳ $\frac{25}{2}$

(۱۱.۲۲۵ اگر $\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{i} + a_2\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{B} = b_1\boldsymbol{i} + b_2\boldsymbol{j}$ ہوں تب

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

ہو گا لہٰذا مثلث کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

اگر مستوی xy میں گھڑی کے الٹ رخ $\boldsymbol{A}$ سے $\boldsymbol{B}$ چلتے ہوئے زاویہ حادہ ہو تب $(+)$ علامت جبکہ گھڑی کے رخ چلتے ہوئے زاویہ حادہ ہونے کی صورت میں $(-)$ علامت استعمال ہو گی۔

حصہ ۱۱.۵ صفحہ ۱۲۰۵

(۱۱.۲۲۷ $x = 3 + t,\ y = -4 + t,\ z = -1 + t$

(۱۱.۲۲۹ $x = -2 + 5t,\ y = 5t,\ z = 3 - 5t$

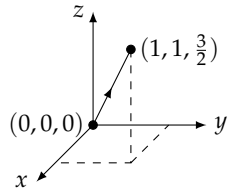
(۱۱.۲۳۱ $x = 0,\ y = 2t,\ z = t$

(۱۱.۲۳۳ $x = 1,\ y = 1,\ z = 1 + t$

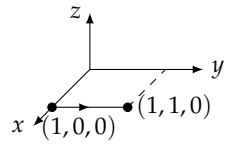
(۱۱.۲۳۵ $x = t,\ y = -7 + 2t,\ z = 2t$

(۱۱.۲۳۷ $x = t,\ y = 0,\ z = 0$

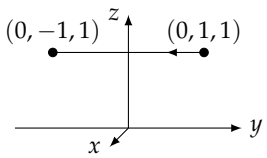
(۱۱.۲۳۹ $x = t,\ y = t,\ z = 3/2t,\ 0 \le t \le 1$



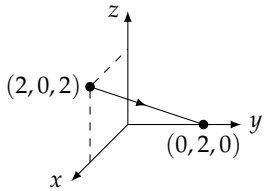
(۱۱.۲۴۱ $x = 1,\ y = 1 + t,\ z = 0,\ -1 \le t \le 0$



(۱۱.۲۴۳ $x = 0,\ y = 1 - 2t,\ z = 1,\ 0 \le t \le 1$



(۱۱.۲۴۵ $x = 2 - 2t,\ y = 2t,\ z = 2 - 2t,\ 0 \le t \le 1$



(۱۱.۲۴۷ $3x - 2y - z = -3$

(۱۱.۲۴۹ $7x - 5y - 4z = 6$

(۱۱.۲۵۱ $x + 3y + 4z = 34$

(۱۱.۲۵۳ $(1, 2, 3),\ -20x + 12y + z = 7$

(۱۱.۲۵۵ $y + z = 3$

(۱۱.۲۵۷ $x - y + z = 0$

(۱۱.۲۵۹ $2\sqrt{30}$

(۱۱.۲۶۱ 0

(۱۱.۲۶۳ $\frac{9\sqrt{42}}{7}$

(۱۱.۲۶۵ 3

(۱۱.۲۶۷ $19/5$

(۱۱.۲۶۹ $5/3$

(۱۱.۲۷۱ $9/\sqrt{41}$

(۱۱.۲۷۳ $\pi/4$

(۱۱.۲۷۵ 1.76 ریڈیئن

(۱۱.۲۷۷ 0.82 ریڈیئن

(۱۱.۲۷۹ $(3/2, -3/2, 1/2)$

(۱۱.۲۸۱ $(1, 1, 0)$

(۱۱.۲۸۳ $x = 1 - t,\ y = 1 + t,\ z = -1$

(۱۱.۲۸۵ $x = 4,\ y = 3 + 6t,\ z = 1 + 3t$

(۱۱.۲۸۷ L_1 اور L_2 متقاطع ہیں؛ L_2 اور L_3 متوازی ہیں؛ L_1 اور L_3 غیر ہمسطحی ہیں۔

(۱۱.۲۸۹ $x = 2 + 2t,\ y = -4 - t,\ z = 7 + 3t;\ x = -2 - t,\ y = -2 + t/2,\ z = 1 - 3/2t$

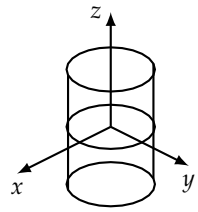
(۱۱.۲۹۱ $(0, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}),\ (-1, 0, -3),\ (1, -1, 0)$

(۱۱.۲۹۵ بہت سارے مختلف جوابات ممکن ہیں۔ ان میں سے ایک جواب ہے: $x + y = 3,\ 2y + z = 7$

۲۹۶۷۷ (۱۱.۲۹۷ ماسوائے ان سطحوں کے جو مبدا سے گزرتے ہوں یا جو محددی محور کے
۲۹۶۷۸ متوازی ہوں تمام سطحوں کو $x/a + y/b + z/c = 1$
۲۹۶۷۹ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

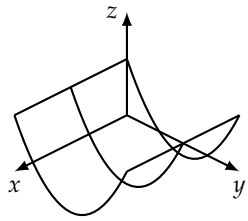
۲۹۶۸۰ حصہ ۱۱.۶ صفحہ ۱۲۱۹

۲۹۶۸۱ (۱۱.۳۰۱ شکل ۱۱.۶۰ب
۲۹۶۸۲ (۱۱.۳۰۳ شکل ۱۱.۶۰ي
۲۹۶۸۳ (۱۱.۳۰۵ شکل ۱۱.۶۰ج
۲۹۶۸۴ (۱۱.۳۰۷ شکل ۱۱.۶۰ھ
۲۹۶۸۵ (۱۱.۳۰۹ شکل ۱۱.۶۰ح
۲۹۶۸۶ (۱۱.۳۱۱ شکل ۱۱.۶۰ط
۲۹۶۸۷ (۱۱.۳۱۳ $x^2 + y^2 = 4$



۲۹۶۸۸

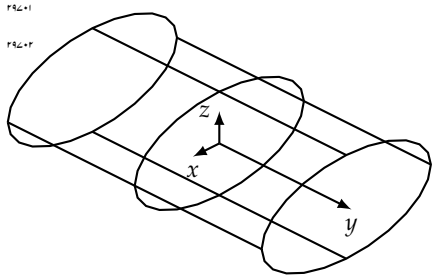
۲۹۶۸۹ (۱۱.۳۱۵ $z = y^2 - 1$



۲۹۶۹۰

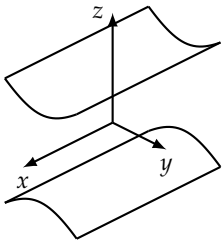
۲۹۶۹۱ (۱۱.۳۱۷ $x^2 + 4z^2 = 16$

۲۹۶۹۲



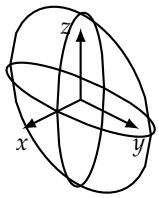
۲۹۶۹۳

۲۹۶۹۴ (۱۱.۳۱۹ $z^2 - y^2 = 1$



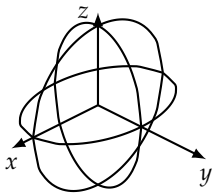
۲۹۶۹۵

۲۹۶۹۶ (۱۱.۳۲۱ $9x^2 + y^2 + z^2 = 9$



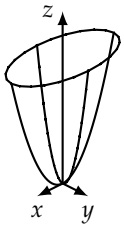
۲۹۶۹۷

۲۹۶۹۸ (۱۱.۳۲۳ $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$



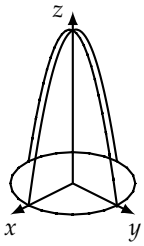
۲۹۶۹۹

۲۹۷۰۰ (۱۱.۳۲۵ $z = x^2 + 4y^2$



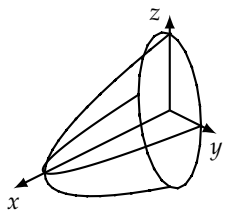
۲۹۷۰۱

۲۹۷۰۲ (۱۱.۳۲۷ $z = 8 - x^2 - y^2$



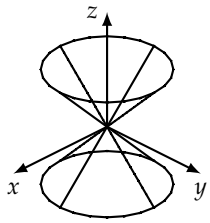
۲۹۷۰۳

۲۹۷۰۴ $x = 4 - 4y^2 - z^2$ (۱۱.۳۲۹



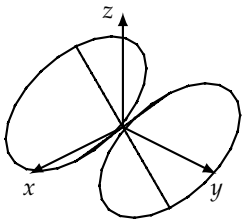
۲۹۷۰۵

۲۹۷۰۶ $x^2 + y^2 = z^2$ (۱۱.۳۳۱



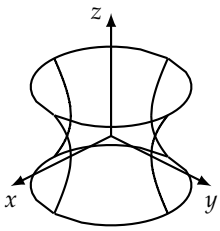
۲۹۷۰۷

۲۹۷۰۸ $4x^2 + 9z^2 = 9y^2$ (۱۱.۳۳۳



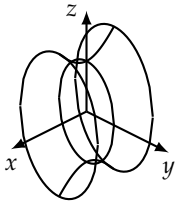
۲۹۷۰۹

۲۹۷۱۰ $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (۱۱.۳۳۵



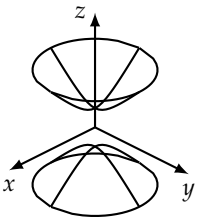
۲۹۷۱۱

۲۹۷۱۲ $\frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ (۱۱.۳۳۷



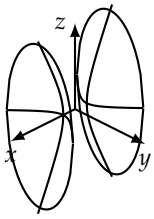
۲۹۷۱۳

۲۹۷۱۴ $z^2 - x^2 - y^2 = 1$ (۱۱.۳۳۹



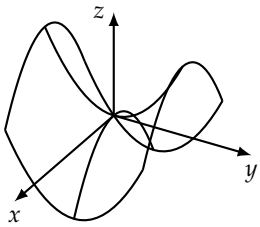
۲۹۷۱۵

۲۹۷۱۶ $x^2 - y^2 - \frac{z^2}{4} = 1$ (۱۱.۳۴۱



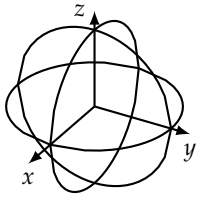
۲۹۷۱۷

۲۹۷۱۸ $y^2 - x^2 = z$ (۱۱.۳۴۳



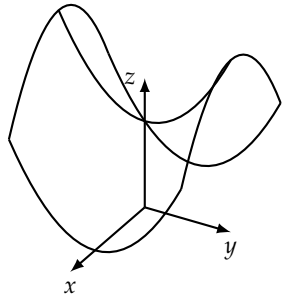
۲۹۷۱۹

۲۹۷۲۰ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (۱۱.۳۴۵



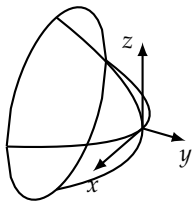
۲۹۷۲۱

۲۹۷۲۲ $z = 1 + y^2 - x^2$ (۱۱.۳۴۷



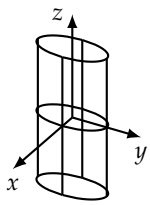
۲۹۷۳۳

$y = -x^2 - z^2$ (۱۱.۳۴۹ ۲۹۷۳۴



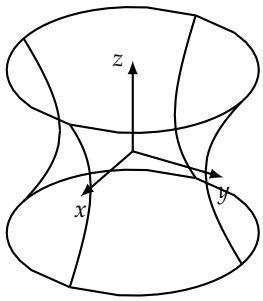
۲۹۷۳۵

$16x^2 + 4y^2 = 1$ (۱۱.۳۵۱ ۲۹۷۳۶



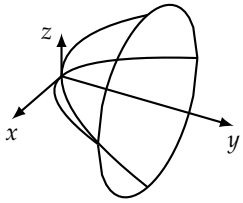
۲۹۷۳۷

$x^2 + y^2 - z^2 = 4$ (۱۱.۳۵۳ ۲۹۷۳۸



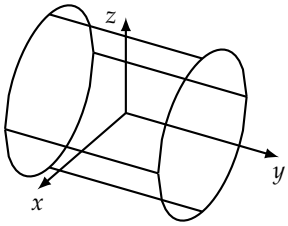
۲۹۷۳۹

$x^2 + z^2 = y$ (۱۱.۳۵۵ ۲۹۷۴۰



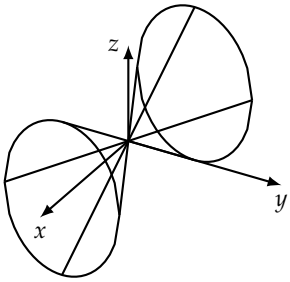
۲۹۷۴۱

$x^2 + z^2 = 1$ (۱۱.۳۵۷ ۲۹۷۴۲



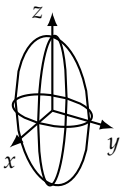
۲۹۷۴۳

$16y^2 + 9z^2 = 4x^2$ (۱۱.۳۵۹ ۲۹۷۴۴



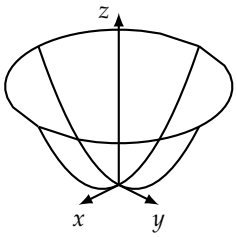
۲۹۷۴۵

$9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$ (۱۱.۳۶۱ ۲۹۷۴۶



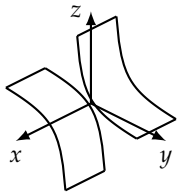
۲۹۷۴۷

$x^2 + y^2 - 16z^2 = 16$ (۱۱.۳۶۳ ۲۹۷۴۸



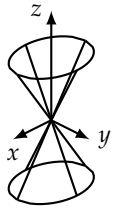
۲۹۷۳۷

۲۹۷۳۸ (۱۱.۳۷۳ $yz = 1$



۲۹۷۳۹

۲۹۷۴۰ (۱۱.۳۷۵ $9x^2 + 16y^2 = 4z^2$



۲۹۷۴۱

۲۹۷۴۲ (۱۱.۳۷۷ (ا) $\frac{2\pi(9-c^2)}{9}$، (ب) 8π، (ج) $\frac{4\pi abc}{3}$

۲۹۷۴۳ (۱۱.۳۸۱ راس $(0, y_1, cy_1^2/b^2 2)$،

۲۹۷۴۴ ماسکہ $(0, y_1, cy_1^2/b^2 - a^2/(4c))$

۲۹۷۴۵ حصہ ۱۱.۷ صفحہ ۱۲۳۲

۲۹۷۴۶ (۱۱.۳۹۵ نکلی $(0,0,0)$، کروی $(0,0,0)$

۲۹۷۴۷ (۱۱.۳۹۷ نکلی $(1,\pi/2,0)$، کروی $(1,\pi/2,\pi/2)$

۲۹۷۴۸ (۱۱.۳۹۹ کارتیسی $(1,0,0)$، کروی $(1,\pi/2,0)$

۲۹۷۴۹ (۱۱.۴۰۱ کارتیسی $(0,1,1)$، کروی $(\sqrt{2},\pi/4,\pi/2)$

۲۹۷۵۰ (۱۱.۴۰۳ کارتیسی $(0,-2\sqrt{2},0)$، نکلی $(2\sqrt{2},3\pi/2,0)$

۲۹۷۵۱ (۱۱.۴۰۵ $x^2+y^2=0$، $\phi = 0$ یا $\phi = \pi$ یعنی محور z

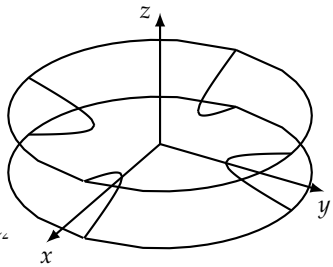
۲۹۷۵۲ (۱۱.۴۰۷ $z=0$، $\theta = \pi/2$، مستوی xy

۲۹۷۵۳ (۱۱.۴۰۹ $z=\rho$، $0 \le \rho \le 1$؛ $\theta = \pi/4$،

۲۹۷۵۴ $0 \le r \le \sqrt{2}$؛ ایک محدود تر خیم

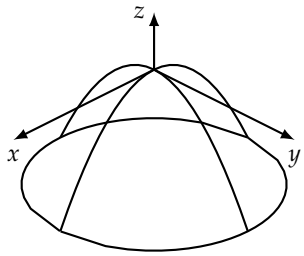
۲۹۷۵۵ (۱۱.۴۱۱ $x=0$، $\phi = \pi/2$، مستوی yz

۲۹۷۵۶ (۱۱.۴۱۳ $\rho^2+z^2=4$، $r=2$؛ رداس 2 کا کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہے۔



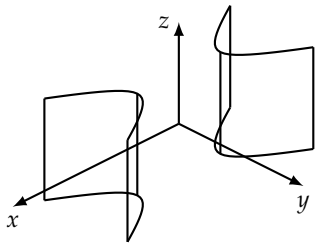
۲۹۷۳۹

۲۹۷۴۰ (۱۱.۳۶۵ $z = -x^2 - y^2$



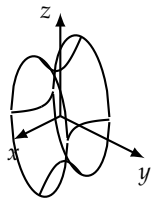
۲۹۷۴۱

۲۹۷۴۲ (۱۱.۳۶۷ $x^2 - 4y^2 = 1$



۲۹۷۴۳

۲۹۷۴۴ (۱۱.۳۶۹ $4y^2 + z^2 - 4x^2 = 4$



۲۹۷۴۵

۲۹۷۴۶ (۱۱.۳۷۱ $x^2 + y^2 = z$

۱۱.۴۱۵) $\rho^2 + x^2 + y^2 + (z - 5/2)^2 = 25/4$ ، $z^2 = 5z$ ، رداس $5/2$ کا کرہ جس کا مرکز $(0, 0, 5/2)$ (کارتیسی) ہے۔

۱۱.۴۱۷) $y = 1$ ، $r \sin\theta \sin\phi = 1$ ، مستوی $y = 1$

۱۱.۴۱۹) $z = \sqrt{2}$ ، $z = \sqrt{2}$ سطح

۱۱.۴۲۱) $\rho^2 + z^2 = 2z$ ، $z \leq 1$ ؛ $\rho = 2\cos\theta$ ؛ $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/2$ ؛ نچلا نصف کرہ جس کا رداس 1 اور مرکز $(0, 0, 1)$ (کارتیسی) ہے۔

۱۱.۴۲۳) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ، $-3/2 \leq z \leq 3/2$ ؛ $\rho^2 + z^2 = 9$ ، $-3/2 \leq z \leq 3/2$ ، رداس 3 کے کرہ کا وہ حصہ جو سطح $z = -3/2$ اور سطح $z = 3/2$ کے بیچ ہے۔ کرہ کا مرکز مبدا پر ہے۔

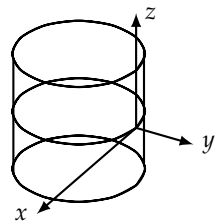
۱۱.۴۲۵) $z = 4 - 4(x^2 + y^2)$ ، $0 \leq z \leq 4$ ؛ $r\cos\theta = 4 - 4r^2\sin^2\theta$ ، $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ، قطع مکافی سطح $z = 4 - 4(x^2 + y^2)$ کا بالائی حصہ جس کو مستوی xy کاٹتا ہے۔

۱۱.۴۲۷) $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$ ، $-1 \leq z \leq 0$ ؛ $z = -\rho$ ، $0 \leq \rho \leq 1$ ، ترخیم جس کا راس مبدا پر ہے، اس کا قاعدہ، مستوی $z = -1$ میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ ہے،

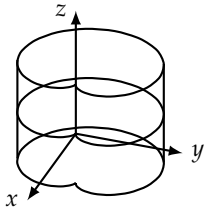
۱۱.۴۲۹) $z + x^2 - y^2 = 0$ یا $z = y^2 - x^2$ ، $\cos\theta + r\sin^2\theta\cos 2\phi = 0$ ، قطع زائد قطع مکافی سطح

۱۱.۴۳۱) $(2, 3, 1)$

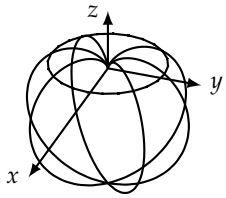
۱۱.۴۳۳) مستوی $\rho\phi$ میں دائرہ $\rho = -2\sin\phi$ کا پیدا کردہ، محور z کا متوازی قائمہ دائری بیلن۔



۱۱.۴۳۵) محور z کے متوازی لکیروں کی پیدا کردہ نلکی جس کو مستوی $\rho\phi$ میں قلب نما $\rho = 1 - \cos\phi$ پیدا کرتا ہے۔



۱۱.۴۳۷) سطح طواف قلب نما جو محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔ مبدا پر کنگرہ نیچے رخ ہے۔



۱۱.۴۳۹) (ب) $\theta = \pi/2$

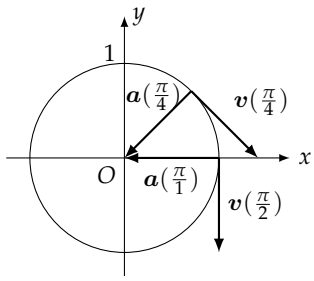
۱۱.۴۴۳) سطح کی مساوات $\rho = f(z)$ ہمیں بتاتی ہے کہ نقطہ $(\rho, \phi, z) = (f(z), \phi, z)$ تمام ϕ کے لیے سطح پر واقع ہو گا۔ بالخصوص جس بھی $(f(z), \phi, z)$ اس سطح پر پایا جاتا ہو اس وقت $(f(z), \phi + \pi, z)$ بھی اس سطح پر پایا جائے گا لہٰذا محور z کے لحاظ سے یہ سطح تشاکلی ہے۔

حصہ ۱۲.۱ صفحہ ۱۲۴۹

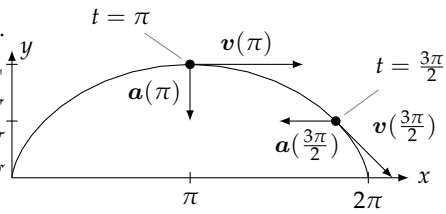
۱۲.۱) $y = x^2 - 2x,\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{j}$

۱۲.۳) $y = \frac{2}{9}x^2,\ \boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}$

۱۲.۵) $t = \frac{\pi}{4} : \boldsymbol{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j};\ t = \frac{\pi}{2} : \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i}$



۱۲.۷) $t = \pi : \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{j};\ t = \frac{3\pi}{2} : \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i}$



(۱۲.۹ $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{j}$; رفتار 3؛ رخ $\frac{1}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{1}) = 3(\frac{1}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k})$

(۱۲.۱۱ $\boldsymbol{v} = (-2\sin t)\boldsymbol{i} + (3\cos t)\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{a} = (-2\cos t)\boldsymbol{i} - (3\sin t)\boldsymbol{j}$; رفتار $2\sqrt{5}$; رخ $\frac{-1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{v}(\pi/2) = 2\sqrt{5}[-\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}]$

(۱۲.۱۳ $\boldsymbol{v} = (\frac{2}{t+1})\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{a} = \frac{-2}{(t+1)^2}\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$; رفتار $\sqrt{6}$; رخ $\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}$; $\boldsymbol{v}(1) = \sqrt{6}(\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k})$

(۱۲.۱۵ $\frac{\pi}{2}$

(۱۲.۱۷ $\frac{\pi}{2}$

(۱۲.۱۹ $t = 0,\ \pi,\ 2\pi$

(۱۲.۲۱ $\frac{1}{4}\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + \frac{3}{2}\boldsymbol{k}$

(۱۲.۲۳ $\frac{\pi+2\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

(۱۲.۲۵ $(\ln 4)\boldsymbol{i} + (\ln 4)\boldsymbol{j} + (\ln 2)\boldsymbol{k}$

(۱۲.۲۷ $\boldsymbol{r}(t) = (\frac{-t^2}{2} + 1)\boldsymbol{i} + (\frac{-t^2}{2} + 2)\boldsymbol{j} + (\frac{-t^2}{2} + 3)\boldsymbol{k}$

(۱۲.۲۹ $\boldsymbol{r}(t) = ((t+1)^{3/2} - 1)\boldsymbol{i} + (-e^{-t} + 1)\boldsymbol{j} + (\ln(t+1) + 1)\boldsymbol{k}$

(۱۲.۳۱ $\boldsymbol{r}(t) = 8t\boldsymbol{i} + 8t\boldsymbol{j} + (-16t^2 + 100)\boldsymbol{k}$

(۱۲.۳۳ $x = t,\ y = -1,\ z = 1 + t$

(۱۲.۳۵ $x = at,\ y = a,\ z = 2\pi b + bt$

(۱۲.۳۷ ا)(1)مستقل رفتار 1 ؛(2)جی ہاں(3)گھڑی کے مخالف رخ(4)جی ہاں

ب)(1)مستقل رفتار 2 (2)جی ہاں(3)گھڑی کے مخالف رخ(4) جی ہاں

ج)(1)مستقل رفتار 1 (2)جی ہاں(3)گھڑی کے مخالف رخ(4)یہ $(1,0)$ کے بجائے $(0,-1)$ سے ابتدا کرتا ہے

د)(1)مستقل رفتار 1 (2)جی ہاں(3)گھڑی کے رخ(4)جی ہاں

ہ)(1)متغیر رفتار(2)نہیں(3)گھڑی کے مخالف رخ(4)جی ہاں

(۱۲.۳۹ $\boldsymbol{r}(t) = (\frac{3}{2}t^2 + \frac{6}{\sqrt{11}}t + 1)\boldsymbol{i} - (\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t - 2)\boldsymbol{j} + (\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t + 3)\boldsymbol{k} = (\frac{1}{2}t^2 + \frac{2t}{\sqrt{11}})(3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})$

(۱۲.۴۱ $\boldsymbol{v}(t) = 2\sqrt{5}\boldsymbol{i} + \sqrt{5}\boldsymbol{j}$

(۱۲.۴۳ $|\boldsymbol{v}| = 3$ زیادہ سے زیادہ، $|\boldsymbol{v}| = 2$ کم سے کم، زیادہ سے زیادہ $|\boldsymbol{a}| = 3$، $|\boldsymbol{a}| = 2$ کم سے کم

حصہ ۱۲.۲ صفحہ ۱۲۶۳

(۱۲.۶۴ 50 s

(۱۲.۶۶ ا) 72.2 s ، (ب) 25 510 m ؛ (ج) 4020 m ؛ 6378 m

(۱۲.۶۸ $t \approx 2.1257\,\mathrm{s}, \quad x \approx 20.14\,\mathrm{m}$

(۱۲.۷۰ $v_0 = 9.9\,\mathrm{m\,s^{-1}},\ \alpha = 18.4^\circ, \alpha = 71.6^\circ$

(۱۲.۷۲ $174\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

(۱۲.۷۴ گیند درخت کے پتوں کو چھوتا ہوا اسے پار کر پائے گا۔

(۱۲.۷۶ $24.87\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

(۱۲.۸۰ 141 %

(۱۲.۸۴ 1.789 سیکنڈ، 19.92 m

(۱۲.۸۸ $\boldsymbol{v}(t) = -gt\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v}_0,\ \boldsymbol{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v}_0 t$

حصہ ۱۲.۳ صفحہ ۱۲۷۲

(۱۲.۹۱ $\boldsymbol{T} = (-\frac{2}{3}\sin t)\boldsymbol{i} + (\frac{2}{3}\cos t)\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{5}}{3}\boldsymbol{k}, \quad 3\pi$

(۱۲.۹۳ $\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}\boldsymbol{k}, \quad \frac{52}{3}$

(۱۲.۹۵ $\boldsymbol{T} = -\cos t\boldsymbol{j} + \sin t\boldsymbol{k}, \quad \frac{3}{2}$

(۱۲.۹۷ $\boldsymbol{T} = (\frac{\cos t - t\sin t}{t+1})\boldsymbol{i} + (\frac{\sin t + t\cos t}{t+1})\boldsymbol{j} + (\frac{\sqrt{2}t^{1/2}}{t+1})\boldsymbol{k}, \quad \frac{\pi^2}{2} + \pi$

(۱۲.۹۹ $(0, 5, 24\pi)$

(۱۲.۱۰۱ $s(t) = 5t, \quad L = \frac{5\pi}{2}$

(۱۲.۱۰۳ $s(t) = \sqrt{3}e^t - \sqrt{3}, \quad L = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

(۱۲.۱۰۵ $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$

(۱۲.۱۰۷ ا) نکلی $x^2 + y^2 = 1$ اور مستوی $x + z = 1$

ب) $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t}\, dt$

ج) $L \approx 7.64$

حصہ ۱۲.۴ صفحہ ۱۲۸۷

(۱۲.۱۰۹ $\boldsymbol{T} = (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{N} = (-\sin t)\boldsymbol{i} - (\cos t)\boldsymbol{j},\ \kappa = \cos t$

(۱۲.۱۱۱) $\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{i} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{N} = \frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{j},\ \kappa = \frac{1}{2(\sqrt{1+t^2})^3}$

(۱۲.۱۱۳) $\boldsymbol{a} = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{T} + \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{N}$

(۱۲.۱۱۵) (ب) $\cos x$

(۱۲.۱۱۷) (ب) $\boldsymbol{N} = \frac{-2e^{2t}}{\sqrt{1+4e^{4t}}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{1+4e^{4t}}}\boldsymbol{j}$، (ج) $\boldsymbol{N} = -\frac{1}{2}(\sqrt{4-t^2}\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j})$

(۱۲.۱۱۹) $\boldsymbol{T} = \frac{3\cos t}{5}\boldsymbol{i} - \frac{3\sin t}{5}\boldsymbol{j} + \frac{4}{5}\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{N} = (-\sin t)\boldsymbol{i} - (\cos t)\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{B} = (\frac{4}{5}\cos t)\boldsymbol{i} - (\frac{4}{5}\sin t)\boldsymbol{j} - \frac{3}{5}\boldsymbol{k},\ \kappa = \frac{3}{25},\ \tau = -\frac{4}{25}$

(۱۲.۱۲۱) $\boldsymbol{T} = (\frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}})\boldsymbol{i} + (\frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{2}})\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{N} = (\frac{-\cos t - \sin t}{\sqrt{2}})\boldsymbol{i} + (\frac{-\sin t + \cos t}{\sqrt{2}})\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{k},\ \kappa = \frac{1}{e^t\sqrt{2}},\ \tau = 0$

(۱۲.۱۲۳) $\boldsymbol{T} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{t\boldsymbol{j}}{\sqrt{t^2+1}},\ \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{k},\ \kappa = \frac{1}{t(t^2+1)^{3/2}},\ \tau = 0$

(۱۲.۱۲۵) $\boldsymbol{T} = (\operatorname{sech}\frac{t}{a})\boldsymbol{i} + (\tanh\frac{t}{a})\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{N} = (-\tanh\frac{t}{a})\boldsymbol{i} + (\operatorname{sech}\frac{t}{a})\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{k},\ \kappa = \frac{1}{a}\operatorname{sech}^2\frac{t}{a},\ \tau = 0$

(۱۲.۱۲۷) $\boldsymbol{a} = |a|\,\boldsymbol{N}$

(۱۲.۱۲۹) (ا) $\boldsymbol{a}(1) = \frac{4}{3}\boldsymbol{T} + \frac{2\sqrt{5}}{3}\boldsymbol{N}$

(۱۲.۱۳۱) $\boldsymbol{a}(0) = 2\boldsymbol{N}$

(۱۲.۱۳۳) $\boldsymbol{r}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{T}(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{N}(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{B}(\frac{\pi}{4}) = \boldsymbol{k};$ مستوی دائرہ انحنا $z = -1$ ہے؛ عمودی مستوی $x + y = 0$ ہے؛ سمت کار مستوی $x + y = \sqrt{2}$ ہے۔

(۱۲.۱۳۵) جی ہاں۔ اگر گاڑی مڑتی سڑک $(\kappa \neq 0)$ پر چل رہی ہو تب $a_N = \kappa|\boldsymbol{v}|^2 \neq 0$ اور $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ ہوگا۔

(۱۲.۱۳۹) $|\boldsymbol{F}| = \kappa(m(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})^2)$

(۱۲.۱۴۳) $\frac{1}{2b}$

(۱۲.۱۴۷) (ا) $b - a$، (ب) π

(۱۲.۱۵۳) $\kappa(x) = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$

(۱۲.۱۵۵) $\kappa(x) = \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$

(۱۲.۱۶۵) $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء: -1.8701، 0.7089، 1.0000؛ $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء: -1.6960، -2.0307، 0؛ رفتار 2.2361؛ $\boldsymbol{T}$ کے اجزاء: -0.8364، 0.3170؛ $\boldsymbol{N}$ کے اجزاء: -0.4143، 0.8998؛ $\boldsymbol{B}$ کے اجزاء: 0.3590، -0.2998، -0.1369؛ انحنا 0.5060؛ مروڑ 0.2813؛ اسراع کا مماسی جزو: 0.7746؛ اسراع کا عمودی جزو 2.5298؛

(۱۲.۱۶۷) $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء: 2.0000، 0، 0.1629؛ $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء: 0، -1.0000، 0.0086؛ رفتار 2.0066؛ $\boldsymbol{T}$ کے اجزاء: 0.9967، 0، 0.0812؛ $\boldsymbol{N}$ کے اجزاء: -0.0007، -1.0000، 0.0086؛ $\boldsymbol{B}$ کے اجزاء: 0.0812، -0.0086، -0.9967؛ انحنا 0.2484؛ مروڑ -0.0411؛ اسراع کا مماسی جزو: 0.0007؛ اسراع کا عمودی جزو 1.0000؛

حصہ ۱۲.۵ صفحہ ۱۳۰۲

(۱۲.۱۶۹) $T = 93.2\,\mathrm{min}$

(۱۲.۱۷۱) $a = 6763\,\mathrm{km}$

(۱۲.۱۷۳) $T = 1655\,\mathrm{min}$

(۱۲.۱۷۵) $a = 20\,430\,\mathrm{km}$

(۱۲.۱۷۷) $|v| = 1.9966 \times 10^7 r^{-1/2}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

(۱۲.۱۷۹) دائرہ: $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$؛ ترخیم: $\sqrt{\frac{GM}{r_0}} < v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$؛ قطع مکافی: $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$؛ قطع زائد: $v_0 > \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$

(۱۲.۱۸۳) (ا) $x(t) = 2 + (3 - 4\cos(\pi t))\cos(\pi t)$
$y(t) = (3 - 4\cos(\pi t))\sin(\pi t)$

(۱۲.۱۸۵) (ج) $\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + \dot{z}\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta + \ddot{z}\boldsymbol{k}$

(۱۲.۱۸۷) (ا)
$\boldsymbol{u}_r = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{u}_\theta = \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{j} - \sin\theta\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{u}_\phi = -\sin\phi\boldsymbol{i} + \cos\phi\boldsymbol{j}$

حصہ ۱۳.۱ صفحہ ۱۳۱۵

۱۳.۱ (ا) مستوی xy میں تمام نقاط، (ب) تمام حقیقی، (ج) خطوط $x = c$ y، (د) کوئی سرحدی نقطہ نہیں ہے (ہ) کھلا اور بند دونوں، (و) غیر محدود

۱۳.۳ (ا) مستوی xy میں تمام نقاط، (ب) $z \geq 0$، (ج) $f(x,y) = 0$ کے لیے مرکز عین مبدا پر ہے؛ $f(x,y) \neq 0$ کے لیے وہ ترخیم جس کا مرکز $(0,0)$ جبکہ محور اکبر اور محور اصغر بالترتیب محور x اور محور y پر ہوں، (د) کوئی سرحدی نقطہ نہیں ہے، (ہ) کھلا اور بند دونوں، (و) غیر محدود

۱۳.۵ (ا) مستوی xy میں تمام نقاط، (ب) تمام حقیقی، (ج) $f(x,y) = 0$ کے لیے محور x اور محور y جبکہ $f(x,y) \neq 0$ کے لیے

۲۹۹۶۲ قطع زائد جس کے متقارب محور x اور محور y ہیں،(د) کوئی سرحدی
۲۹۹۶۳ نقطہ نہیں ہے،(ہ) کھلا اور بند دونوں،(و) غیر محدود

۲۹۹۶۴ ۱۳.۷) (ا) وہ تمام (x, y) جو $x^2 + y^2 < 16$ کو مطمئن کرتے ہوں،
۲۹۹۶۵ (ب) $z \geq \frac{1}{4}$ ،(ج) وہ دائرے جن کے مرکز مبدا پر ہوں اور جن ۲۹۹۶۶ ۱۳.۲۱
۲۹۹۶۶ کے رداس $r < 4$ ہوں،(د) دائرہ $x^2 + y^2 = 16$ سرحد
۲۹۹۶۷ ہے،(ہ) کھلا،(و) محدود

۲۹۹۶۸ ۱۳.۹) (ا) $(x, y) \neq (0, 0)$ ،(ب) تمام حقیقی،(ج) وہ دائرے جن
۲۹۹۶۹ کے مراکز مبدا پر ہوں اور جن کے رداس $r > 0$ ہوں،(د) واحد
۲۹۹۷۰ نقطہ $(0, 0)$ سرحدی نقطہ ہے،(ہ) کھلا،(و) غیر محدود ۲۹۹۸۶

۲۹۹۷۱ ۱۳.۱۱) (ا) وہ تمام (x, y) جو $-1 \leq y - x \leq 1$ کو مطمئن کرتے
۲۹۹۷۲ ہوں،(ب) $-\frac{\pi}{2} \leq z \leq \frac{\pi}{2}$ ،(ج) $y - x = c$
۲۹۹۷۳ طرز کے خطوط جہاں $-1 \leq c \leq 1$ ہے،(د) دو سیدھے خطوط
۲۹۹۷۴ $y = 1 + x$ اور $y = -1 + x$ سرحد ہیں،(ہ) بند،(و)
۲۹۹۷۵ غیر محدود

۲۹۹۷۶ ۱۳.۱۳) شکل ۱۳.۱۸ جو تفاعل $z = \cos x \cos y e^{-\sqrt{x^2+y^2}/4}$
۲۹۹۷۷ ہے۔ ۲۹۹۸۷ ۱۳.۲۳

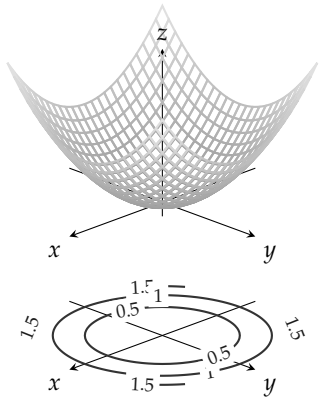
۲۹۹۷۸ ۱۳.۱۴) شکل ۱۳.۱۳ جو تفاعل $z = -\frac{xy^2}{x^2+y^2}$ ہے۔

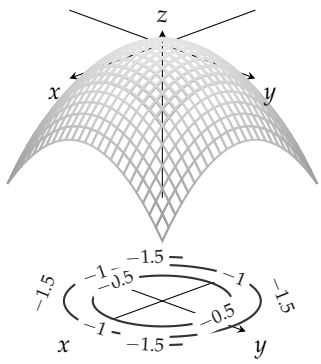
۲۹۹۷۹ ۱۳.۱۵) شکل ۱۳.۱۶ جو تفاعل $z = \frac{1}{4x^2+y^2}$ ہے۔

۲۹۹۸۰ ۱۳.۱۶) شکل ۱۳.۱۵ جو تفاعل $z = e^{-y} \cos x$ ہے۔ ۲۹۹۸۸

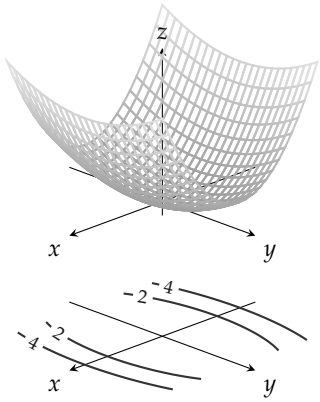
۲۹۹۸۱ ۱۳.۱۷) شکل ۱۳.۱۴ جو تفاعل $z = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ ہے۔

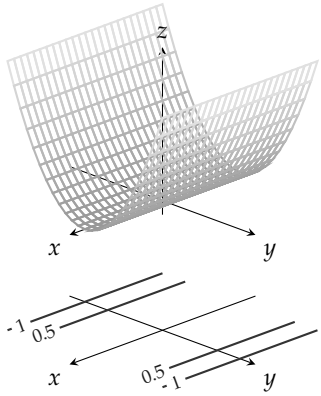
۲۹۹۸۲ ۱۳.۱۸) شکل ۱۳.۱۷ جو تفاعل $z = y^2 - y^4 - x^2$ ہے۔



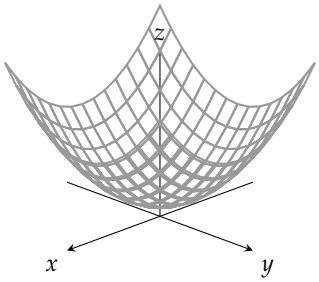


۲۹۹۸۳ ۱۳.۱۹) ۲۹۹۸۹ ۱۳.۲۵





۲۹۹۸۴ ۲۹۹۹۰



(۱۳.۳۵

۲۹۹۹۹

$f(x,y,z) = z - x^2 - y^2 = 1$ ۳۰۰۰۰

یعنی $z = x^2 + y^2 + 1$ ۳۰۰۰۱

(۱۳.۳۷ $x^2 + y^2 = 10$ ۳۰۰۰۲

(۱۳.۳۹ $\tan^{-1} y - \tan^{-1} x = 2\tan^{-1}\sqrt{2}$ ۳۰۰۰۳

(۱۳.۴۱ $\sqrt{x-y} - \ln z = 2$ ۳۰۰۰۴

(۱۳.۴۳ $\frac{x+y}{z} = \ln 2$ ۳۰۰۰۵

(۱۳.۴۵ جی ہاں، 2000 ۳۰۰۰۶

(۱۳.۴۷ 63 km ۳۰۰۰۷

۳۰۰۰۸ حصہ ۱۳.۲ صفحہ ۱۳۲۶

(۱۳.۲۹

(۱۳.۶۱ $\frac{5}{2}$ ۳۰۰۰۹

(۱۳.۶۳ $2\sqrt{6}$ ۳۰۰۱۰

(۱۳.۶۵ 1 ۳۰۰۱۱

(۱۳.۶۷ $\frac{1}{2}$ ۳۰۰۱۲

(۱۳.۶۹ 1 ۳۰۰۱۳

(۱۳.۷۱ 0 ۳۰۰۱۴

(۱۳.۷۳ 0 ۳۰۰۱۵

(۱۳.۷۵ -1 ۳۰۰۱۶

(۱۳.۷۷ 2 ۳۰۰۱۷

(۱۳.۷۹ $\frac{1}{4}$ ۳۰۰۱۸

(۱۳.۸۱ $\frac{19}{12}$ ۳۰۰۱۹

(۱۳.۸۳ 2 ۳۰۰۲۰

(۱۳.۸۵ 3 ۳۰۰۲۱

(۱۳.۸۷ (ا) تمام (x,y)، (ب) ماسوائے $(0,0)$ تمام (x,y) ۳۰۰۲۲

(۱۳.۸۹ (ا) تمام (x,y) ماسوائے جہاں $x = 0$ یا $y = 0$ ہو، (ب) تمام (x,y) ۳۰۰۲۳

۳۰۰۲۴

(۱۳.۹۱ (ا) تمام (x,y,z)، (ب) نلکی $x^2 + y^2 = 1$ کی اندرون کے علاوہ تمام (x,y,z) ۳۰۰۲۵

۳۰۰۲۶

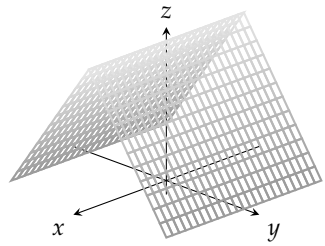
(۱۳.۹۳ (ا) وہ تمام (x,y,z) جہاں $z \neq 0$ ہو، (ب) وہ تمام (x,y,z) جہاں $x^2 + y^2 \neq 1$ ہو۔ ۳۰۰۲۷

۳۰۰۲۸

(۱۳.۹۵ راہ $y = x, x > 0$ اور $y = x, x < 0$ لیں۔ ۳۰۰۲۹

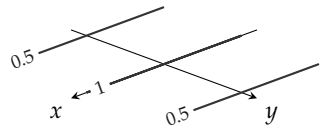
(۱۳.۹۷ راہ $y = kx^2$ لیں جہاں k ایک مستقل ہو۔ (۱۳.۳۳

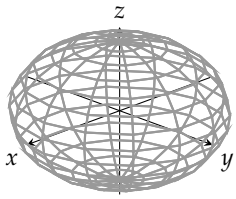
(۱۳.۹۹ راہ $y = mx$ لیں جہاں m ایک مستقل $m \neq -1$ ہو۔ ۳۰۰۳۱



(۱۳.۲۷

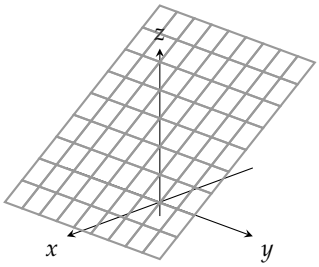
۲۹۹۹۲





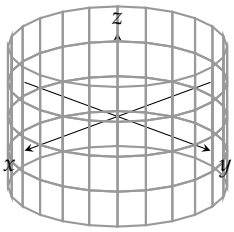
۲۹۹۹۳

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ۲۹۹۹۴



۲۹۹۹۵

$f(x,y,z) = x + z = 1$ ۲۹۹۹۶



۲۹۹۹۷

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 = 1$ ۲۹۹۹۸

۳۰۰۳۲ (۱۳.۱۰۱) راہ $y = kx^2$ لیں جہاں k ایک مستقل $k \neq 0$ ہو۔

۳۰۰۳۳ (۱۳.۱۰۳) نہیں

۳۰۰۳۴ (۱۳.۱۰۵) حد 1 ہے۔

۳۰۰۳۵ (۱۳.۱۰۷) حد 0 ہے۔

۳۰۰۳۶ (۱۳.۱۰۹) (ا) $f(x,y)\big|_{y=mx} = \sin 2\theta$ جہاں

۳۰۰۳۷ $\tan\theta = m$ ہے۔

۳۰۰۳۸ (۱۳.۱۱۱) 0

۳۰۰۳۹ (۱۳.۱۱۳) غیر موجود ہے۔

۳۰۰۴۰ (۱۳.۱۱۵) $\frac{\pi}{2}$

۳۰۰۴۱ (۱۳.۱۱۷) $f(0,0) = \ln 3$

۳۰۰۴۲ (۱۳.۱۲۱) $\delta = 0.1$

۳۰۰۴۳ (۱۳.۱۲۳) $\delta = 0.005$

۳۰۰۴۴ (۱۳.۱۲۵) $\delta = \sqrt{0.015}$

۳۰۰۴۵ (۱۳.۱۲۷) $\delta = 0.005$

۳۰۰۴۶ حصہ ۱۳.۳ صفحہ ۱۳۴۳

۳۰۰۴۷ (۱۳.۱۳۱) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3$

۳۰۰۴۸ (۱۳.۱۳۳) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(y+2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$

۳۰۰۴۹ (۱۳.۱۳۵) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y(xy-1), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x(xy-1)$

۳۰۰۵۰ (۱۳.۱۳۷) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

۳۰۰۵۱ (۱۳.۱۳۹) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-1}{(x+y)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{(x+y)^2}$

۳۰۰۵۲ (۱۳.۱۴۱) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y^2-1}{(xy-1)^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^2-1}{(xy-1)^2}$

۳۰۰۵۳ (۱۳.۱۴۳) $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x+y+1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^{x+y+1}$

۳۰۰۵۴ (۱۳.۱۴۵) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x+y}$

۳۰۰۵۵ (۱۳.۱۴۷) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2\sin(x-3y)\cos(x-3y),$

۳۰۰۵۶ $\frac{\partial f}{\partial y} = -6\sin(x-3y)\cos(x-3y)$

۳۰۰۵۷ (۱۳.۱۴۹) $\frac{\partial f}{\partial x} = yx^{y-1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^y \ln x$

۳۰۰۵۸ (۱۳.۱۵۱) $\frac{\partial f}{\partial x} = -g(x), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = g(y)$

۳۰۰۵۹ (۱۳.۱۵۳) $f_x = y^2, \quad f_y = 2xy, \quad f_z = -4z$

۳۰۰۶۰ (۱۳.۱۵۵) $f_x = 1, f_y = -y(y^2+z^2)^{-1/2},$

۳۰۰۶۱ $f_z = -z(y^2+z^2)^{-1/2}$

۳۰۰۶۲ (۱۳.۱۵۷) $f_x = \frac{yz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}, f_y = \frac{xz}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}},$

۳۰۰۶۳ $f_z = \frac{xy}{\sqrt{1-x^2y^2z^2}}$

۳۰۰۶۴ (۱۳.۱۵۹) $f_x = \frac{1}{x+2y+3z}, f_y = \frac{2}{x+2y+3z},$

۳۰۰۶۵ $f_z = \frac{3}{x+2y+3z}$

۳۰۰۶۶ (۱۳.۱۶۱) $f_x = -2xe^{-(x^2+y^2+z^2)},$

۳۰۰۶۷ $f_y = -2ye^{-(x^2+y^2+z^2)},$

۳۰۰۶۸ $f_z = -2ze^{-(x^2+y^2+z^2)}$

۳۰۰۶۹ (۱۳.۱۶۳) $f_x = \operatorname{sech}^2(x+2y+3z),$

۳۰۰۷۰ $f_y = 2\operatorname{sech}^2(x+2y+3z),$

۳۰۰۷۱ $f_z = 3\operatorname{sech}^2(x+2y+3z)$

۳۰۰۷۲ (۱۳.۱۶۵) $\frac{\partial f}{\partial t} = -2\pi\sin(2\pi t - \alpha),$

۳۰۰۷۳ $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \sin(2\pi t - \alpha)$

۳۰۰۷۴ (۱۳.۱۶۷) $\frac{\partial h}{\partial \rho} = \sin\theta\cos\phi,$

۳۰۰۷۵ $\frac{\partial h}{\partial \theta} = \rho\cos\theta\cos\phi,$

۳۰۰۷۶ $\frac{\partial h}{\partial \phi} = -\rho\sin\theta\sin\phi$

۳۰۰۷۷ (۱۳.۱۶۹) $W_P(P,H,\delta,v,g) = H,$

۳۰۰۷۸ $W_H(P,H,\delta,v,g) = P + \frac{\delta v^2}{2g},$

۳۰۰۷۹ $W_\delta(P,H,\delta,v,g) = \frac{Hv^2}{2g},$

۳۰۰۸۰ $W_v(P,H,\delta,v,g) = \frac{H\delta v}{g},$

۳۰۰۸۱ $W_g(P,H,\delta,v,g) = -\frac{H\delta v^2}{2g^2}$

۳۰۰۸۲ (۱۳.۱۷۱) $\frac{\partial f}{\partial x} = 1+y, \frac{\partial f}{\partial y} = 1+x, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,$

۳۰۰۸۳ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 1$

۳۰۰۸۴ (۱۳.۱۷۳) $\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy + y\cos x,$

۳۰۰۸۵ $\frac{\partial g}{\partial y} = x^2 - \sin y + \sin x,$

۳۰۰۸۶ $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2y - y\sin x, \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\cos y,$

۳۰۰۸۷ $\frac{\partial^2 g}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 2x + \cos x$

۳۰۰۸۸ (۱۳.۱۷۵) $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{x+y}, \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{x+y}, \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{-1}{(x+y)^2}$

۳۰۰۸۹ $\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{-1}{(x+y)^2}, \frac{\partial^2 r}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{-1}{(x+y)^2}$

۳۰۰۹۰ (۱۳.۱۷۷) $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{2}{2x+3y}, \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2x+3y},$

۳۰۰۹۱ $\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{-6}{(2x+3y)^2}$

۳۰۰۹۲ (۱۳.۱۷۹) $\frac{\partial w}{\partial x} = y^2 + 2xy^3 + 3x^2y^4,$

۳۰۰۹۳ $\frac{\partial w}{\partial y} = 2xy + 3x^2y^2 + 4x^3y^3,$

۳۰۰۹۴ $\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial x} = 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3,$

۳۰۰۹۵ $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 2y + 6xy^2 + 12x^2y^3$

۳۰۰۹۶ (۱۳.۱۸۱) (ا) پہلے x، (ب) پہلے y، (ج) پہلے x، (د) پہلے x، (ہ) پہلے

۳۰۰۹۷ y، (و) پہلے y

۳۰۰۹۸ (۱۳.۱۸۳) $f_x(1,2) = -13, f_y(1,2) = -2$

۳۰۰۹۹ (۱۳.۱۸۵) 12

۳۰۱۰۰ (۱۳.۱۸۷) -2

۳۰۱۰۱ (۱۳.۱۸۹) $\frac{\partial A}{\partial a} = \frac{a}{bc\sin A}$, $\frac{\partial A}{\partial b} = \frac{c\cos A - b}{bc\sin A}$

۳۰۱۰۲ (۱۳.۱۹۱) $v_x = \frac{\ln v}{(\ln u)(\ln v) - 1}$

۳۰۱۰۳ حصہ ۱۳.۴ صفحہ ۱۳۶۰

۳۰۱۰۴ (۱۳.۲۰۶) (ا) $L(x,y) = 1$،

۳۰۱۰۵ (ب) $L(x,y) = 2x + 2y - 1$

۳۰۱۰۶ (۱۳.۲۰۸) (ا) $L(x,y) = 3x - 4y + 5$،

۳۰۱۰۷ (ب) $L(x,y) = 3x - 4y + 5$

۳۰۱۰۸ (۱۳.۲۱۰) (ا) $L(x,y) = 1 + x$،

۳۰۱۰۹ (ب) $L(x,y) = -y + \frac{\pi}{2}$

۳۰۱۱۰ (۱۳.۲۱۲) $L(x,y) = 7 + x - 6y; 0.06$

۳۰۱۱۱ (۱۳.۲۱۴) $L(x,y) = x + y + 1; 0.08$

۳۰۱۱۲ (۱۳.۲۱۶) $L(x,y) = 1 + x; 0.0222$

۳۰۱۱۳ (۱۳.۲۱۸) چھوٹے ضلع پر زیادہ توجہ دیں۔ یہ زیادہ بڑا جزوی تفرق دے گا۔

۳۰۱۱۴ (۱۳.۲۲۰) خلل کی اعظم مقدار (اندازاً) $0.31 \leq$ ہو گی۔

۳۰۱۱۵ (۱۳.۲۲۲) اعظم فی صد خلل $\mp 4.83\,\%$ ہو گا۔

۳۰۱۱۶ (۱۳.۲۲۴) $|x-1| \leq 0.014$ اور $|y-1| \leq 0.014$ لیں۔

۳۰۱۱۷ (۱۳.۲۲۶) $\approx 0.1\,\%$

۳۰۱۱۸ (۱۳.۲۲۸) (ا) $L(x,y,z) = 2x + 2y + 2z - 3$،

۳۰۱۱۹ (ب) $L(x,y,z,) = y + z$،

۳۰۱۲۰ (ج) $L(x,y,z) = 0$

۳۰۱۲۱ (۱۳.۲۳۰) (ا) $L(x,y,z) = x$،

۳۰۱۲۲ (ب) $L(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}$،

۳۰۱۲۳ (ج) $L(x,y,z) = \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} + \frac{2z}{3}$

۳۰۱۲۴ (۱۳.۲۳۲) (ا) $L(x,y,z) = 2 + x$،

۳۰۱۲۵ (ب) $L(x,y,z) = x - y - z + \frac{\pi}{2} + 1$،

۳۰۱۲۶ (ج) $L(x,y,z) = x - y - z + \frac{\pi}{2} + 1$

۳۰۱۲۷ (۱۳.۲۳۴) $L(x,y,z) = 2x - 6y - 2z + 6,\ 0.0024$

۳۰۱۲۸ (۱۳.۲۳۶) $L(x,y,z) = x + y - z - 1,\ 0.00135$

۳۰۱۲۹ (۱۳.۲۳۸) (ا) $S_0(\frac{1}{100}\,\mathrm{d}p + \mathrm{d}x - 5\,\mathrm{d}w - 30\,\mathrm{d}h)$

۳۰۱۳۰ (ب) قد میں تبدیلی کو زیادہ حساس ہے۔

۳۰۱۳۱ (۱۳.۲۴۰) d میں تبدیلی کو f زیادہ حساس ہے۔

۳۰۱۳۲ (۱۳.۲۴۴) ممکنہ خلل کی مقدار $4.8 \leq$ ہو گی۔

۳۰۱۳۳ (۱۳.۲۴۶) جی ہاں

۳۰۱۳۴ حصہ ۱۳.۵ صفحہ ۱۳۷۲

۳۰۱۳۵ (۱۳.۲۴۸) $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = 0,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(\pi) = 0$

۳۰۱۳۶ (۱۳.۲۵۰) $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = 1,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(3) = 1$

۳۰۱۳۷ (۱۳.۲۵۲) $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = 4t\tan^{-1} t + 1,\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}(1) = \pi + 1$

۳۰۱۳۸ (۱۳.۲۵۴) (ا) $\frac{\partial z}{\partial r} = 4\cos\theta\ln(r\sin\theta) + 4\cos\theta$

۳۰۱۳۹ $\frac{\partial z}{\partial \theta} = -4r\sin\theta\ln(r\sin\theta) + \frac{4r\cos^2\theta}{\sin\theta}$

۳۰۱۴۰ (ب) $\frac{\partial z}{\partial r} = \sqrt{2}(\ln 2 + 2)$،

۳۰۱۴۱ $\frac{\partial z}{\partial \theta} = -2\sqrt{2}\ln 2 + 4\sqrt{2}$

۳۰۱۴۲ (۱۳.۲۵۶) (ا) $\frac{\partial w}{\partial u} = 2u + 4uv$،

۳۰۱۴۳ $\frac{\partial w}{\partial v} = -2v + 2u^2$

۳۰۱۴۴ (ب) $\frac{\partial w}{\partial u} = 3,\ \frac{\partial w}{\partial v} = -\frac{3}{2}$

۳۰۱۴۵ (۱۳.۲۵۸) (ا) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{z}{(z-y)^2}$

۳۰۱۴۶ $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-y}{(z-y)^2}$

۳۰۱۴۷ (ب) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial y} = 1, \frac{\partial u}{\partial z} = -2$

۳۰۱۴۸ (۱۳.۲۶۰) $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$

۳۰۱۴۹ (۱۳.۲۶۲) $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$

۳۰۱۵۰ $\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$

۳۰۱۵۱ (۱۳.۲۶۴) $\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$

۳۰۱۵۲ $\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$

۳۰۱۵۳ (۱۳.۲۶۶) $\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$

۳۰۱۵۴ $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$

۳۰۱۵۵ (۱۳.۲۶۸) $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial s},\ \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial t}$

۳۰۱۵۶ (۱۳.۲۷۰) چونکہ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} = 0$ ہے لہٰذا

۳۰۱۵۷ $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}r}$

۳۰۱۵۸ چونکہ $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = 0$ ہے لہٰذا

۳۰۱۵۹ $\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$

۳۰۱۶۰ (۱۳.۲۷۲) $\frac{4}{3}$

۳۰۱۶۱ (۱۳.۲۷۴) $-\frac{4}{5}$

۳۰۱۶۲ (۱۳.۲۷۶) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{4},\ \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{3}{4}$

۳۰۱۶۳ (۱۳.۲۷۸) $\frac{\partial z}{\partial x} = -1,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -1$

۳۰۱۶۴ (۱۳.۲۸۰) 12

۳۰۱۶۵ (۱۳.۲۸۲) -7

۳۰۱۶۶ (۱۳.۲۸۴) $\frac{\partial z}{\partial u} = 2,\ \frac{\partial z}{\partial v} = 1$

۳۰۱۶۷ (۱۳.۲۸۶) $-0.000\,05\ \mathrm{A\,s^{-1}}$

۳۰۱۶۸ (۱۳.۲۹۲) $(\cos 1, \sin 1, 1)$ اور $(\cos(-2), \sin(-2), -2)$

۳۰۱۶۹ (۱۳.۲۹۴) (ا) $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ اور $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ پر اعظم،

۳۰۱۷۰ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ اور $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ اقل۔

۳۰۱۷۱ (ب) زیادہ $= 6$، کم $= 2$

۳۰۱۷۲ (۱۳.۲۹۶) $2x\sqrt{x^8 + x^3} + \int_0^{x^2} \frac{3x^2}{2\sqrt{t^4 + x^3}}\,\mathrm{d}t$

۳۰۱۷۳ حصہ ۱۳.۶ صفحہ ۱۳۸۲

۳۰۱۷۴ (۱۳.۲۹۸ (ا) 0 ،(ب) $1+2z$ ،(ج) $1+2z$

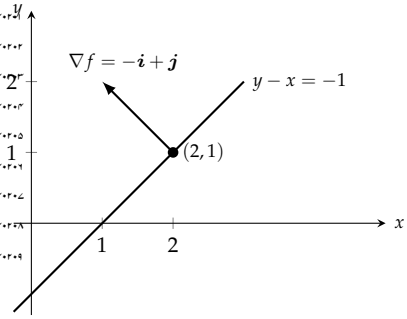
۳۰۱۷۵ (۱۳.۳۰۰ (ا) $\frac{\partial U}{\partial P}\left(\frac{nR}{H}\right)+\frac{\partial U}{\partial T}\left(\frac{H}{nR}\right)$ (ب) $\frac{\partial U}{\partial P}$

۳۰۱۷۶ (۱۳.۳۰۲ (ا) 5 ،(ب) 5

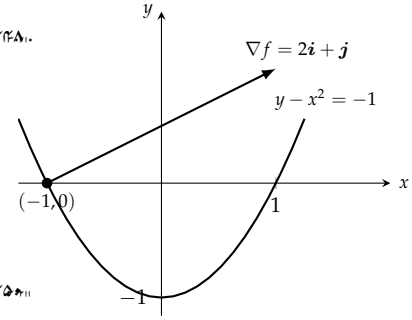
۳۰۱۷۷ (۱۳.۳۰۴ $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

۳۰۱۷۸ حصہ ۱۳.۷ صفحہ ۱۳۹۷

۳۰۱۷۹ (۱۳.۳۱۳



۳۰۱۸۰ (۱۳.۳۱۴



۳۰۱۸۱ (۱۳.۳۱۴ $\nabla f=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$

۳۰۱۸۲ (۱۳.۳۱۶ $\nabla f=-\frac{26}{27}\boldsymbol{i}+\frac{23}{54}\boldsymbol{j}-\frac{23}{54}\boldsymbol{k}$

۳۰۱۸۳ (۱۳.۳۱۸ -4

۳۰۱۸۴ (۱۳.۳۲۰ $\frac{31}{13}$

۳۰۱۸۵ (۱۳.۳۲۲ 3

۳۰۱۸۶ (۱۳.۳۲۴ 2

۳۰۱۸۷ (۱۳.۳۲۶ $\boldsymbol{u}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j},\ (D_{\boldsymbol{u}}f)_{N_0}=\sqrt{2};$

۳۰۱۸۸ $-\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}-\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j},$

۳۰۱۸۹ $(D_{-\boldsymbol{u}}f)_{N_0}=-\sqrt{2}$

۳۰۱۹۰ (۱۳.۳۲۸ $\boldsymbol{u}=\frac{1}{3\sqrt{3}}\boldsymbol{i}-\frac{5}{3\sqrt{3}}\boldsymbol{j}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\boldsymbol{k},$

۳۰۱۹۱ $(D_{\boldsymbol{u}}f)_{N_0}=3\sqrt{3};$

۳۰۱۹۲ $-\boldsymbol{u}=-\frac{1}{3\sqrt{3}}\boldsymbol{i}+\frac{5}{3\sqrt{3}}\boldsymbol{j}+\frac{1}{3\sqrt{3}}\boldsymbol{k},$

۳۰۱۹۳ $(D_{-\boldsymbol{u}}f)_{N_0}=-3\sqrt{3};$

۳۰۱۹۴ (۱۳.۳۳۰ $\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}),\ (D_{\boldsymbol{u}}f)_{N_0}=$

۳۰۱۹۵ $2\sqrt{3};$

۳۰۱۹۶ $-\boldsymbol{u}=-\frac{1}{\sqrt{3}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}),$

۳۰۱۹۷ $(D_{-\boldsymbol{u}}f)_{N_0}=-2\sqrt{3};$

۳۰۱۹۸ (۱۳.۳۳۲ $\mathrm{d}f=\frac{9}{910}\approx 0.01$

۳۰۱۹۹ (۱۳.۳۳۴ $\mathrm{d}g=0$

۳۰۲۰۰ (۱۳.۳۳۶ مماس $x+y+z=3$ ،عمودی خط

۳۰۲۰۱ $x=1+2t,\ y=1+2t,\ z=1+2t$

۳۰۲۰۲ (۱۳.۳۳۸ مماس $2x-z-2=0$ ،عمودی خط

۳۰۲۰۳ $x=2-4t,\ y=0,\ z=2+2t$

۳۰۲۰۴ (۱۳.۳۴۰ مماس $2x+2y+z-4=0$ ،عمودی خط

۳۰۲۰۵ $x=2t,\ y=1+2t,\ z=2+t$

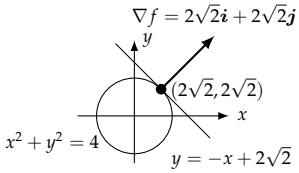
۳۰۲۰۶ (۱۳.۳۴۲ مماس $x+y+z-1=0$ ،عمودی خط

۳۰۲۰۷ $x=t,\ y=1+t,\ z=t$

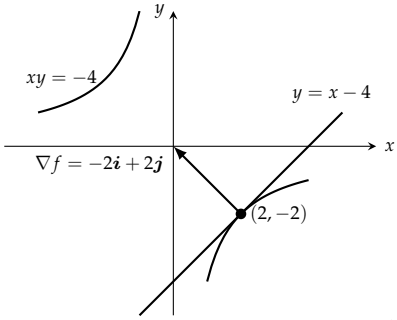
۳۰۲۰۸ (۱۳.۳۴۴ $2x-z-2=0$

۳۰۲۰۹ (۱۳.۳۴۶ $x-y+2z-1=0$

(۱۳.۳۴۸



(۱۳.۳۵۰



۳۰۲۱۲ (۱۳.۳۵۲ $x=1, y=1+2t, z=1-2t$

۳۰۲۱۳ (۱۳.۳۵۴ $x=1-2t, y=1, z=\frac{1}{2}+2t$

۳۰۲۱۴ (۱۳.۳۵۶ $x=1+90t, y=1-90t, z=3$

۳۰۲۱۵ (۱۳.۳۵۸ $\boldsymbol{u}=\frac{7}{\sqrt{53}}\boldsymbol{i}-\frac{2}{\sqrt{53}}\boldsymbol{j},$

۳۰۲۱۶ $-\boldsymbol{u}=-\frac{7}{\sqrt{53}}\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt{53}}\boldsymbol{j}$

۳۰۲۱۷ (۱۳.۳۶۰ نہیں،اعظم شرح تبدیلی $\sqrt{185}<14$ ہے۔

۳۰۲۱۸ (۱۳.۳۶۲ $-\frac{7}{\sqrt{5}}$

۳۰۲۱۹ (۱۳.۳۶۴ (ا) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\sqrt{3} - \frac{1}{2}\cos\sqrt{3} \approx 0.935\,^\circ\mathrm{C\,m^{-1}}$

۳۰۲۲۰ (ب) $\sqrt{3}\sin\sqrt{3} - \cos\sqrt{3} \approx 1.87\,^\circ\mathrm{C\,s^{-1}}$

۳۰۲۲۱ (۱۳.۳۶۶ $-\frac{\pi}{4}$ پر $-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ ؛ 0 پر 0 ؛ $\frac{\pi}{4}$ پر $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

۳۰۲۲۲ حصہ ۱۳.۸ صفحہ ۱۴۱۱

۳۰۲۲۳ (۱۳.۳۷۵ $f(-3,3) = -5$ مقامی اقل قیمت نقطہ

۳۰۲۲۴ (۱۳.۳۷۷ $f\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = 0$ مقامی اعظم قیمت نقطہ

۳۰۲۲۵ (۱۳.۳۷۹ $f(-2,1)$ نقطہ زین

۳۰۲۲۶ (۱۳.۳۸۱ $f\left(\frac{6}{5}, \frac{69}{25}\right)$ نقطہ زین

۳۰۲۲۷ (۱۳.۳۸۳ $f(2,1)$ نقطہ زین

۳۰۲۲۸ (۱۳.۳۸۵ $f(2,-1) = -6$ مقامی اقل قیمت نقطہ

۳۰۲۲۹ (۱۳.۳۸۷ $f(1,2)$ نقطہ زین

۳۰۲۳۰ (۱۳.۳۸۹ $f(0,0)$ نقطہ زین

۳۰۲۳۱ (۱۳.۳۹۱ $f(0,0)$ نقطہ زین؛ $f\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{170}{27}$ مقامی اعظم

۳۰۲۳۲ قیمت نقطہ

۳۰۲۳۳ (۱۳.۳۹۳ $f(0,0) = 0$ مقامی اقل قیمت نقطہ؛ $f(1,-1)$ نقطہ

۳۰۲۳۴ زین

۳۰۲۳۵ (۱۳.۳۹۵ $f(0,0)$ نقطہ زین؛ $f\left(\frac{4}{9}, \frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{81}$ مقامی اقل

۳۰۲۳۶ قیمت نقطہ

۳۰۲۳۷ (۱۳.۳۹۷ $f(0,0)$ نقطہ زین؛ $f(0,2) = -12$ مقامی اقل

۳۰۲۳۸ قیمت نقطہ؛ $f(-2,0) = -4$ مقامی اعظم قیمت نقطہ؛

۳۰۲۳۹ $f(-2,2)$ نقطہ زین

۳۰۲۴۰ (۱۳.۳۹۹ $f(0,0)$ نقطہ زین؛ $f(1,1) = 2$

۳۰۲۴۱ $f(-1,-1) = 2$ مقامی اعظم قیمت نقطہ

۳۰۲۴۲ (۱۳.۴۰۱ $f(0,0) = -1$ مقامی اعظم قیمت نقطہ

۳۰۲۴۳ (۱۳.۴۰۳ $f(n\pi,0)$ نقطہ زین؛ ہر n پر $f(n\pi,0) = 0$

۳۰۲۴۴ (۱۳.۴۰۵ $(0,0)$ پر مطلق اعظم قیمت 1 جبکہ $(1,2)$ پر مطلق اقل

۳۰۲۴۵ قیمت -5

۳۰۲۴۶ (۱۳.۴۰۷ $(0,2)$ پر مطلق اعظم قیمت 4 جبکہ $(0,0)$ پر مطلق اقل

۳۰۲۴۷ قیمت 0

۳۰۲۴۸ (۱۳.۴۰۹ $(0,-3)$ پر مطلق اعظم قیمت 11 جبکہ $(4,-2)$ پر

۳۰۲۴۹ مطلق اقل قیمت -10

۳۰۲۵۰ (۱۳.۴۱۱ $(2,0)$ پر مطلق اعظم قیمت 4 جبکہ $\left(3,-\frac{\pi}{4}\right)$ ،

۳۰۲۵۱ $\left(3,\frac{\pi}{4}\right)$ ، $\left(1,-\frac{\pi}{4}\right)$ اور $\left(1,\frac{\pi}{4}\right)$ پر مطلق اقل قیمت

۳۰۲۵۲ $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$

۳۰۲۵۳ (۱۳.۴۱۳ $a = -3,\ b = 2$

۳۰۲۵۴ (۱۳.۴۱۵ $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ اور $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ پر گرم تھیں

۳۰۲۵۵ $2.25\,^\circ\mathrm{C}$ جبکہ $\left(\frac{1}{2},0\right)$ پر سرد ترین $-0.25\,^\circ\mathrm{C}$

۳۰۲۵۶ (۱۳.۴۱۷ (ا) $f(0,0)$ نقطہ زین، (ب) $f(1,2)$ مقامی اقل

۳۰۲۵۷ قیمت نقطہ، (ج) $f(1,-2)$ مقامی اقل قیمت نقطہ، (د)

۳۰۲۵۸ $f(-1,-2)$ نقطہ زین

۳۰۲۵۹ (۱۳.۴۲۳ $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{355}{36}\right)$

۳۰۲۶۰ (۱۳.۴۲۷ (ا) نصف دائرہ: $t = \frac{\pi}{4}$ پر مقامی اعظم قیمت $f = 2\sqrt{2}$

۳۰۲۶۱ جبکہ $t = \pi$ پر مقامی اقل قیمت $f = -2$ ؛ چوتھائی دائرہ:

۳۰۲۶۲ $t = \frac{\pi}{4}$ پر مقامی اعظم قیمت $f = 2\sqrt{2}$ جبکہ $t = 0$

۳۰۲۶۳ اور $t = \frac{\pi}{2}$ پر مقامی اقل قیمت $f = 2$ (ب) نصف دائرہ:

۳۰۲۶۴ $t = \frac{\pi}{4}$ پر مقامی اعظم قیمت $g = 2$ جبکہ $t = \frac{3\pi}{4}$

۳۰۲۶۵ پر مقامی اقل قیمت $g = -2$ ؛ چوتھائی دائرہ: $t = \frac{\pi}{4}$ پر

۳۰۲۶۶ مقامی اعظم قیمت $g = 2$ جبکہ $t = 0$ اور $t = \frac{\pi}{2}$

۳۰۲۶۷ پر مقامی اقل قیمت $g = 0$ ؛ (ج) نصف دائرہ: $t = 0$ اور

۳۰۲۶۸ $t = \pi$ پر مقامی اعظم قیمت $h = 8$ جبکہ $t = \frac{\pi}{2}$ پر

۳۰۲۶۹ اقل قیمت $h = 4$ ؛ چوتھائی دائرہ: $t = 0$ پر مقامی اعظم قیمت

۳۰۲۷۰ $h = 8$ جبکہ $t = \frac{\pi}{2}$ پر مقامی اقل قیمت $h = 4$

۳۰۲۷۱ (۱۳.۴۲۹ (ا) $t = -\frac{1}{2}$ پر اقل قیمت $f = -\frac{1}{2}$ جبکہ کوئی اعظم

۳۰۲۷۲ قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔ (ب) $t = -1$ اور $t = 0$ پر اعظم

۳۰۲۷۳ $f = 0$ جبکہ $t = -\frac{1}{2}$ پر کم سے کم $f = -\frac{1}{2}$ پائی جاتی

۳۰۲۷۴ ہے۔ (ج) $t = 1$ پر اعظم $f = 4$ جبکہ $t = 0$ پر کم سے کم

۳۰۲۷۵ قیمت $f = 0$ پائی جاتی ہے۔

۳۰۲۷۶ (۱۳.۴۳۱ $y = -\frac{20}{13}x + \frac{9}{13}, \quad y\big|_{x=4} = -\frac{71}{13}$

۳۰۲۷۷ (۱۳.۴۳۳ $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{6}, \quad y\big|_{x=4} = \frac{37}{6}$

۳۰۲۷۸ (۱۳.۴۳۵ $y = 51.3x + 3467$

۳۰۲۷۹ حصہ ۱۳.۹ صفحہ ۱۴۳۰

۳۰۲۸۰ (۱۳.۴۴۳ $\left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right), \left(\mp\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$

۳۰۲۸۱ (۱۳.۴۴۵ 39

۳۰۲۸۲ (۱۳.۴۴۷ $(3, \mp 3\sqrt{2})$

۳۰۲۸۳ (۱۳.۴۴۹ (ا) 8 ، (ب) 64

۳۰۲۸۴ (۱۳.۴۵۱ $r = 2\,\mathrm{cm},\ h = 4\,\mathrm{cm}$

۳۰۲۸۵ (۱۳.۴۵۳ $l = 4\sqrt{2},\ w = 3\sqrt{2}$

۳۰۲۸۶ (۱۳.۴۵۵ کم سے کم $f(0,0) = 0$ ، اعظم $f(2,4) = 20$

۳۰۲۸۷ (۱۳.۴۵۷ کم سے کم 0° ، اعظم 125°

۳۰۲۸۸ (۱۳.۴۵۹ $\left(\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$

۳۰۲۸۹ (۱۳.۴۶۱ 1

۳۰۲۹۰ (۱۳.۴۶۳ $(0,0,2),\ (0,0,-2)$

۳۰۲۹۱ (۱۳.۴۶۵ کم سے کم $-30 = f(-1,2,-5)$ ، اعظم

۳۰۲۹۲ $f(1,-2,5) = 30$

۳۰۲۹۳ (۱۳.۴۶۷ $3, 3, 3$

۳۰۲۹۴ (۱۳.۴۶۹ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ضرب $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ضرب $\frac{2}{\sqrt{3}}$ اکائیاں

۳۰۲۹۵ (۱۳.۴۷۱ $\left(\mp\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

۳۰۲۹۶ (۱۳.۴۷۳ $U(8,14) = 128$

۳۰۲۹۷ (۱۳.۴۷۵ $f\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$

۱۳.۴۷۷) $(2,4,4)$

۱۳.۴۷۹) $(\mp\sqrt{6},-\sqrt{3},1)$ پر کم سے کم $1 - 6\sqrt{3}$ اور $(\mp\sqrt{6},\sqrt{3},1)$ پر اعظم $1+6\sqrt{3}$

۱۳.۴۸۱) $(\mp\sqrt{2},\mp\sqrt{2},0)$ پر کم سے کم 2 اور $(0,0,\mp 2)$ پر اعظم 4

حصہ ۱۳.۱۰ صفحہ ۱۴۳۹

۱۳.۴۹۳) مربعی $x+xy$، مکعبی $x+xy+\frac{1}{2}xy^2$

۱۳.۴۹۵) مربعی xy، مکعبی xy

۱۳.۴۹۷) مربعی $y+\frac{1}{2}(2xy-y^2)$، مکعبی $y+\frac{1}{2}(2xy-y^2)+\frac{1}{6}(3x^2y-3xy^2+2y^3)$

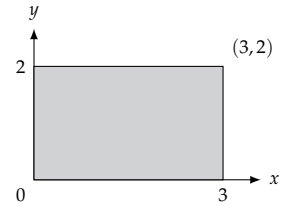
۱۳.۴۹۹) مربعی x^2+y^2، مکعبی x^2+y^2

۱۳.۵۰۱) مربعی $1+(x+y)+(x+y)^2$، مکعبی $1+(x+y)+(x+y)^2+(x+y)^3$

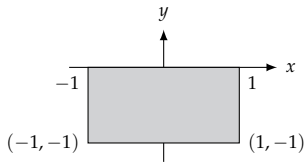
۱۳.۵۰۳) مربعی $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2$؛ خلل $E(x,y)\le 0.00134$

حصہ ۱۴.۱ صفحہ ۱۴۵۴

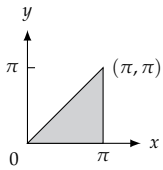
۱۴.۱) 16



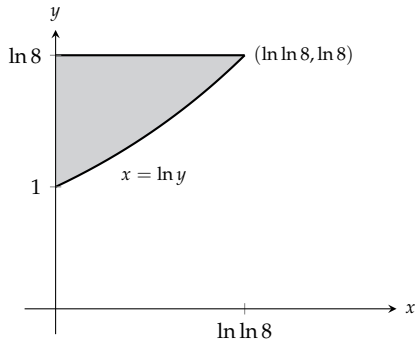
۱۴.۳) 1



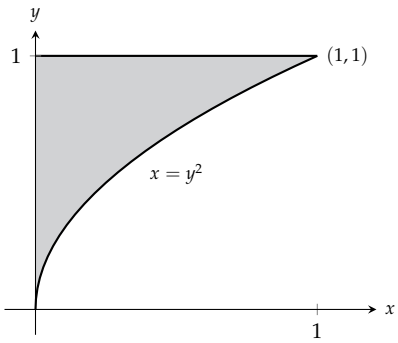
۱۴.۵) $\frac{\pi^2}{2}+2$



۱۴.۷) $8\ln 8 - 16 + e$



۱۴.۹) $e-2$

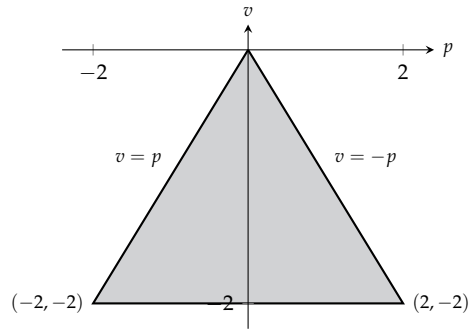


۱۴.۱۱) $\frac{3}{2}\ln 2$

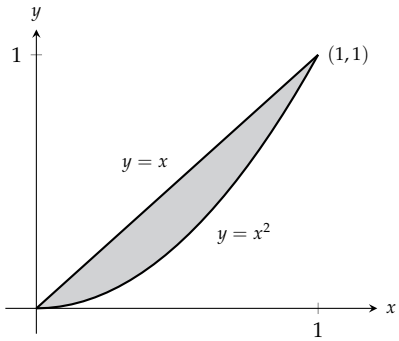
۱۴.۱۳) $\frac{1}{6}$

۱۴.۱۵) $-\frac{1}{10}$

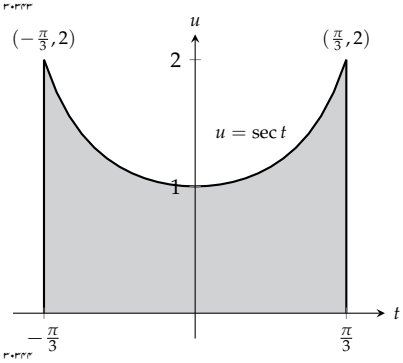
۱۴.۱۷) 8



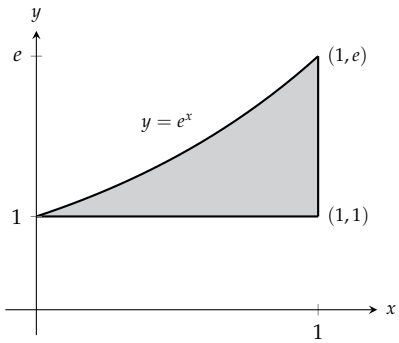
۱۴.۱۹) 2π



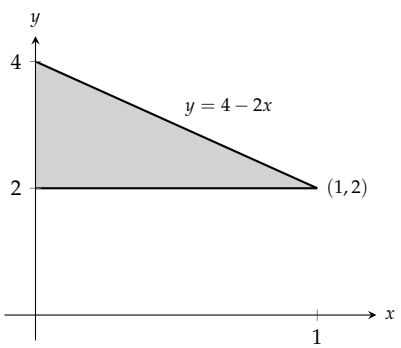
۱۴.۲۵) $\int_1^e \int_{\ln y}^1 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$



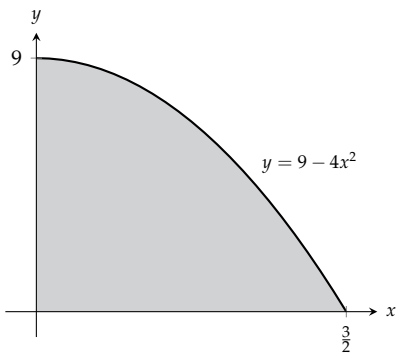
۱۴.۲۱) $\int_2^4 \int_0^{(4-y)/2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$



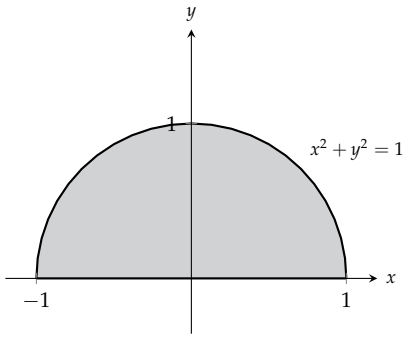
۱۴.۲۷) $\int_0^9 \int_0^{(\sqrt{9-y})/2} 16x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

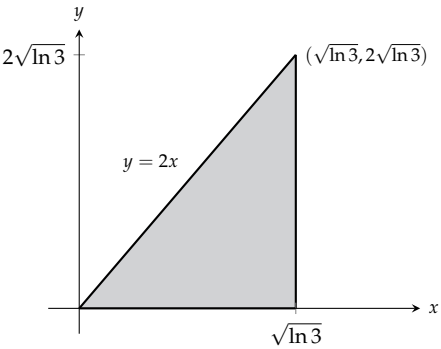


۱۴.۲۳) $\int_0^1 \int_{x^2}^x \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$



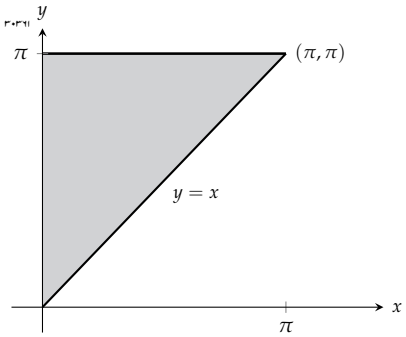
۱۴.۲۹) $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} 3y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

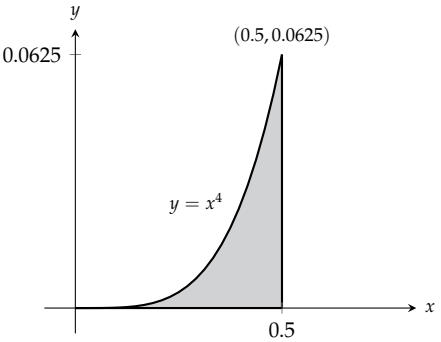




۱۴.۳۱) 2

۱۴.۳۷) $\frac{1}{80\pi}$





۱۴.۳۳) $\frac{e-2}{2}$

۱۴.۳۹) $-\frac{2}{3}$

۱۴.۴۱) $\frac{4}{3}$

۱۴.۴۳) $\frac{625}{12}$

۱۴.۴۵) 16

۱۴.۴۷) 20

۱۴.۴۹) $2(1+\ln 2)$

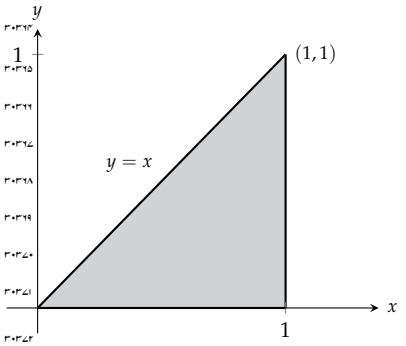
۱۴.۵۱) 1

۱۴.۵۳) π^2

۱۴.۵۵) $-\frac{1}{4}$

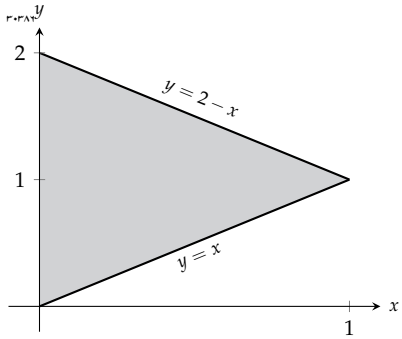
۱۴.۵۷) $\frac{20\sqrt{3}}{9}$

۱۴.۵۹) $\int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{4}{3}$



۱۴.۳۵) 2

۳۰۳۸۰



۳۰۳۷۵

۳۰۳۸۷

۳۰۳۷۶ ۱۴.۶۷) 0.603

۳۰۳۸۸ ۱۴.۷۷) $\int_0^1 \int_{y^2}^{2y-y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}$

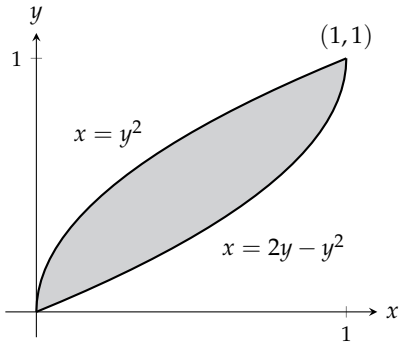
۳۰۳۷۷ ۱۴.۶۹) 0.233

۳۰۳۸۹

۳۰۳۷۸ حصه ۱۴.۲ صفحه ۱۴۶۸

۳۰۳۷۹ ۱۴.۷۱) $\int_0^2 \int_0^{2-x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 2,\ \int_0^2 \int_0^{2-y} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$

۳۰۳۸۰ 2



۳۰۳۹۰

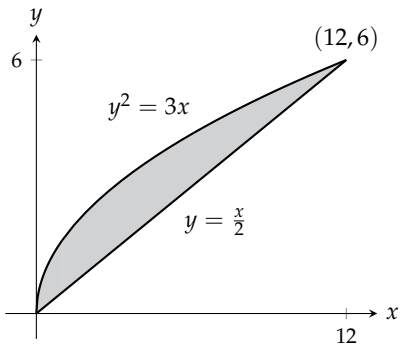
۳۰۳۸۱

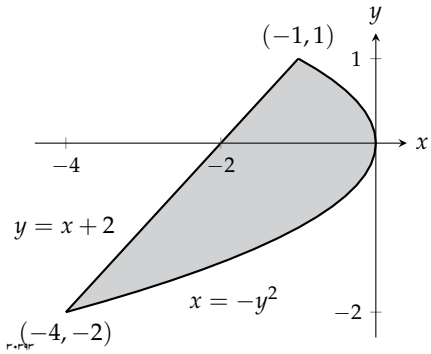
۳۰۳۹۱ ۱۴.۷۹) 12

۳۰۳۸۲ ۱۴.۷۳) $\int_{-2}^1 \int_{y-2}^{-y^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{9}{2}$

۳۰۳۹۲

۳۰۳۸۳





۳۰۳۹۳

۳۰۳۸۴

۳۰۳۹۴ ۱۴.۸۱) $\sqrt{2} - 1$

۳۰۳۸۵ ۱۴.۷۵) $\int_0^{\ln 2} \int_0^{e^x} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 1$

$\frac{3\sqrt{2}}{5}$

(۱۴.۱۱۱) $40\,000(1-e^{-2})\ln(\frac{7}{2}) \approx 43\,329$

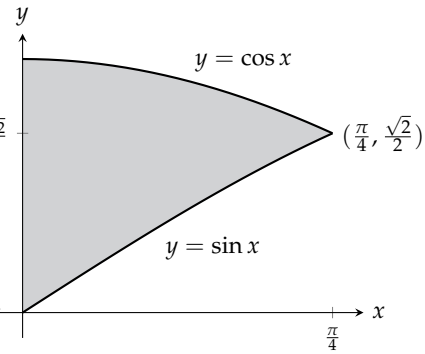
(۱۴.۱۱۳) $0 < a \le \frac{5}{2}$

(۱۴.۱۱۵) $(\bar{x}, \bar{y}) = (2/\pi, 0)$

(۱۴.۱۱۷) (ا) $\frac{3}{2}$، (ب) ایک سے ہیں۔

(۱۴.۱۲۳) (ا) $(\frac{7}{5}, \frac{31}{10})$، (ب) $(\frac{19}{7}, \frac{18}{7})$، (ج) $(\frac{9}{2}, \frac{19}{8})$، (د) $(\frac{11}{4}, \frac{43}{16})$

(۱۴.۱۲۵) مشترک سرحد پر ہونے کے لیے $h = a\sqrt{2}$، مثلث کے اندر ہونے کے لیے $h > a\sqrt{2}$



حصہ ۱۴.۳ صفحہ ۱۴۷۹

(۱۴.۱۲۷) $\frac{\pi}{2}$

(۱۴.۱۲۹) $\frac{\pi}{8}$

(۱۴.۱۳۱) πa^2

(۱۴.۱۳۳) 36

(۱۴.۱۳۵) $(1-\ln 2)\pi$

(۱۴.۱۳۷) $(2\ln 2 - 1)(\pi/2)$

(۱۴.۱۳۹) $\frac{\pi}{2} + 1$

(۱۴.۱۴۱) $\pi(\ln(4) - 1)$

(۱۴.۱۴۳) $2(\pi - 1)$

(۱۴.۱۴۵) 12π

(۱۴.۱۴۷) $\frac{3\pi}{8} + 1$

(۱۴.۱۴۹) 4

(۱۴.۱۵۱) $6\sqrt{3} - 2\pi$

(۱۴.۱۵۳) $\bar{x} = \frac{5}{6}, \bar{y} = 0$

(۱۴.۱۵۵) $\frac{2a}{3}$

(۱۴.۱۵۷) $\frac{2a}{3}$

(۱۴.۱۵۹) 2π

(۱۴.۱۶۱) $\frac{4}{3} + \frac{5\pi}{8}$

(۱۴.۱۶۳) (ا) $\sqrt{\pi/2}$، (ب) 1

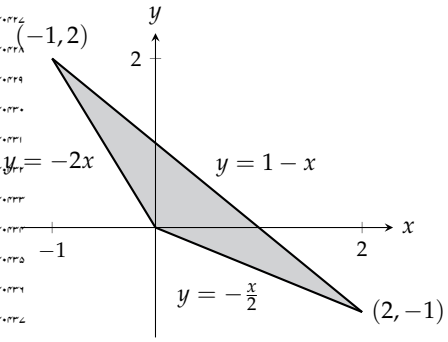
(۱۴.۱۶۵) $\pi \ln 4$ نہیں

(۱۴.۱۶۷) $\frac{1}{2}(a^2 + 2h^2)$

حصہ ۱۴.۴ صفحہ ۱۴۹۱

(۱۴.۱۷۳) 1

(۱۴.۱۷۵) $\int_0^1 \int_0^{2-2x} \int_0^{3-3x-3y/2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$
$\int_0^2 \int_0^{1-y/2} \int_0^{3-3x-3y/2} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$
$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{2-2x-2z/3} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$
$\int_0^3 \int_0^{1-z/3} \int_0^{2-2x-2z/3} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z,$
$\int_0^2 \int_0^{3-3y/2} \int_0^{1-y/2-z/3} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y,$



(۱۴.۸۵) (ا) 0، (ب) $\frac{4}{\pi^2}$

(۱۴.۸۷) $\frac{8}{3}$

(۱۴.۸۹) $\bar{x} = \frac{5}{14}, \bar{y} = \frac{38}{35}$

(۱۴.۹۱) $\bar{x} = \frac{64}{35}, \bar{y} = \frac{5}{7}$

(۱۴.۹۳) $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{4}{3\pi}$

(۱۴.۹۵) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{4a}{3\pi}$

(۱۴.۹۷) $\bar{x} = \frac{\pi}{2}, \bar{y} = \frac{\pi}{8}$

(۱۴.۹۹) $\bar{x} = -1, \bar{y} = \frac{1}{4}$

(۱۴.۱۰۱) $I_x = \frac{64}{105}, R_x = 2\sqrt{\frac{2}{7}}$

(۱۴.۱۰۳) $\bar{x} = \frac{3}{8}, \bar{y} = \frac{17}{16}$

(۱۴.۱۰۵) $\bar{x} = \frac{11}{3}, \bar{y} = \frac{14}{27}, I_y = 432, R_y = 4$

(۱۴.۱۰۷) $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{13}{31}, I_y = \frac{7}{5}, R_y = \sqrt{\frac{21}{31}}$

(۱۴.۱۰۹) $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{7}{10}, I_x = \frac{9}{10}, I_y = \frac{3}{10}$

$I_0 = \frac{6}{5}, R_x = \frac{3\sqrt{6}}{10}, R_y = \frac{3\sqrt{2}}{10}, R_0 =$

۳۰۴۵۲ $\int_0^3 \int_0^{2-2z/3} \int_0^{1-y/2-z/3} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

۳۰۴۵۳ تکملات کا جواب 1 ہے۔

۳۰۴۵۴ (۱۴.۱۷۷ $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x,$

۳۰۴۵۵ $\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \int_{x^2+y^2}^{8-x^2-y^2} 1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$

۳۰۴۵۶ $\int_{-2}^{2} \int_{4}^{8-y^2} \int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y \quad +$

۳۰۴۵۷ $\int_{-2}^{2} \int_{y^2}^{4} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y,$

۳۰۴۵۸ $\int_{4}^{8} \int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}} \int_{-\sqrt{8-z-y^2}}^{\sqrt{8-z-y^2}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad +$

۳۰۴۵۹ $\int_{0}^{4} \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$

۳۰۴۶۰ $\int_{-2}^{2} \int_{4}^{8-x^2} \int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \quad +$

۳۰۴۶۱ $\int_{-2}^{2} \int_{x^2}^{4} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$

۳۰۴۶۲ $\int_{4}^{8} \int_{-\sqrt{8-z}}^{\sqrt{8-z}} \int_{-\sqrt{8-z-x^2}}^{\sqrt{8-z-x^2}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z \quad +$

۳۰۴۶۳ $\int_{0}^{4} \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}zS$ تمام تکملات

۳۰۴۶۴ کا جواب 16π ہے۔

۳۰۴۶۵ (۱۴.۱۷۹ 1

۳۰۴۶۶ (۱۴.۱۸۱ 1

۳۰۴۶۷ (۱۴.۱۸۳ $\frac{\pi^3}{2}(1-\cos 1)$

۳۰۴۶۸ (۱۴.۱۸۵ 18

۳۰۴۶۹ (۱۴.۱۸۷ $\frac{7}{6}$

۳۰۴۷۰ (۱۴.۱۸۹ 0

۳۰۴۷۱ (۱۴.۱۹۱ $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$

۳۰۴۷۲ (۱۴.۱۹۳ ا. $\int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} \int_{x^2}^{1-z} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$

۳۰۴۷۳ ب. $\int_{0}^{1} \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} \int_{x^2}^{1-z} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$

۳۰۴۷۴ ج. $\int_{0}^{1} \int_{0}^{1-z} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$

۳۰۴۷۵ د. $\int_{0}^{1} \int_{0}^{1-y} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y$

۳۰۴۷۶ ھ. $\int_{0}^{1} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \int_{0}^{1-y} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

۳۰۴۷۷ (۱۴.۱۹۵ $\frac{2}{3}$

۳۰۴۷۸ (۱۴.۱۹۷ $\frac{20}{3}$

۳۰۴۷۹ (۱۴.۱۹۹ 1

۳۰۴۸۰ (۱۴.۲۰۱ $\frac{16}{3}$

۳۰۴۸۱ (۱۴.۲۰۳ $8\pi - \frac{32}{3}$

۳۰۴۸۲ (۱۴.۲۰۵ 2

۳۰۴۸۳ (۱۴.۲۰۷ 4π

۳۰۴۸۴ (۱۴.۲۰۹ $\frac{31}{3}$

۳۰۴۸۵ دہتمام (۱۴.۲۱۱ 1

۳۰۴۸۶ (۱۴.۲۱۳ $2\sin 4$

۳۰۴۸۷ (۱۴.۲۱۵ 4

۳۰۴۸۸ (۱۴.۲۱۷ $a = 3$ یا $a = \frac{13}{3}$

۳۰۴۸۹ حصہ ۱۴.۶ صفحہ ۱۵۱۴

۳۰۴۹۰ (۱۴.۲۵۳ $\frac{4\pi(\sqrt{2}-1)}{3}$

۳۰۴۹۱ (۱۴.۲۵۵ $\frac{17\pi}{5}$

۳۰۴۹۲ (۱۴.۲۵۷ $\pi(6\sqrt{2}-8)$

۳۰۴۹۳ (۱۴.۲۵۹ $\frac{3\pi}{10}$

۳۰۴۹۴ (۱۴.۲۶۱ $\frac{\pi}{3}$

۳۰۴۹۵ (۱۴.۲۶۳ ا) $\int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

۳۰۴۹۶ ب) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi + \int_0^{2\pi} \int_{\sqrt{3}}^{2} \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi$

۳۰۴۹۷ ج) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \int_0^{2\pi} \rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$

۳۰۴۹۸ (۱۴.۲۶۵ $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\cos\phi} \int_0^{3\rho^2} F(\rho,\phi,z)\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

۳۰۴۹۹ (۱۴.۲۶۷ $\int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\phi} \int_0^{4-\rho\sin\phi} F(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

۳۰۵۰۰ (۱۴.۲۶۹ $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_1^{1+\cos\phi} \int_0^4 F(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

۳۰۵۰۱ (۱۴.۲۷۱ $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\sec\phi} \int_0^{2-\rho\sin\phi} F(\rho,\phi,z)\,\mathrm{d}z\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

۳۰۵۰۲ (۱۴.۲۷۳ π^2

۳۰۵۰۳ (۱۴.۲۷۵ $\pi/3$

۳۰۵۰۴ (۱۴.۲۷۷ 5π

۳۰۵۰۵ (۱۴.۲۷۹ 2π

۳۰۵۰۶ (۱۴.۲۸۱ $(\frac{8-5\sqrt{2}}{2})\pi$

۳۰۵۰۷ (۱۴.۲۸۳ ا) $\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_0^2 r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi \quad +$

۳۰۵۰۸ $\int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{\csc\theta} r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

۳۰۵۰۹ ب) $\int_0^{2\pi} \int_1^2 \int_{\pi/6}^{\sin^{-1}(1/r)} r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi +$

۳۰۵۱۰ $\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{\pi/6} r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$

۳۰۵۱۱ (۱۴.۲۸۵ $= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \int_{\cos\theta}^2 r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

۳۰۵۱۲ $\frac{31\pi}{6}$

۳۰۵۱۳ (۱۴.۲۸۷ $= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1-\cos\theta} r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

۳۰۵۱۴ $\frac{8\pi}{3}$

۳۰۵۱۵ (۱۴.۲۸۹ $= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\cos\theta} r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

۳۰۵۱۶ $\frac{\pi}{3}$

۳۰۵۱۷ (۱۴.۲۹۱ ا) $8\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

۳۰۵۱۸ ب) $8\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

۳۰۵۱۹ ج) $8\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

۳۰۵۲۰ (۱۴.۲۹۳) (ا) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{\sec\theta}^{2} r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$

۳۰۵۲۱ (ب) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-\rho^2}} \rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi$

۳۰۵۲۲ (ج) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\int_{-\sqrt{3-x^2}}^{\sqrt{3-x^2}}\int_1^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

۳۰۵۲۳ (د) $\frac{5\pi}{3}$

۳۰۵۲۴ (۱۴.۲۹۵) $8\pi/3$

۳۰۵۲۵ (۱۴.۲۹۷) $9/4$

۳۰۵۲۶ (۱۴.۲۹۹) $(3\pi-4)/18$

۳۰۵۲۷ (۱۴.۳۰۱) $\frac{2\pi a^3}{3}$

۳۰۵۲۸ (۱۴.۳۰۳) $\frac{5\pi}{3}$

۳۰۵۲۹ (۱۴.۳۰۵) $\pi/2$

۳۰۵۳۰ (۱۴.۳۰۷) $\frac{4(2\sqrt{2}-1)\pi}{3}$

۳۰۵۳۱ (۱۴.۳۰۹) 16π

۳۰۵۳۲ (۱۴.۳۱۱) $5\pi/2$

۳۰۵۳۳ (۱۴.۳۱۳) $\frac{4\pi(8-3\sqrt{3})}{3}$

۳۰۵۳۴ (۱۴.۳۱۵) $2/3$

۳۰۵۳۵ (۱۴.۳۱۷) $3/4$

۳۰۵۳۶ (۱۴.۳۱۹) $\bar{x}=\bar{y}=0,\ \bar{z}=3/8$

۳۰۵۳۷ (۱۴.۳۲۱) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,3/8)$

۳۰۵۳۸ (۱۴.۳۲۳) $\bar{x}=\bar{y}=0,\ \bar{z}=5/6$

۳۰۵۳۹ (۱۴.۳۲۵) $I_z=30\pi,\ R_z=\sqrt{\frac{5}{2}}$

۳۰۵۴۰ (۱۴.۳۲۷) $I_x=\pi/4$

۳۰۵۴۱ (۱۴.۳۲۹) $\frac{a^4h\pi}{10}$

۳۰۵۴۲ (۱۴.۳۳۱) (ا) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,4/5),\ I_z=\pi/12$

۳۰۵۴۳ (ب) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,5/6)$، $R_z=\sqrt{1/3}$

۳۰۵۴۴ $I_z=\pi/14,\ R_z=\sqrt{5/14}$

۳۰۵۴۵ (۱۴.۳۳۵) $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,\frac{2h^2+3h}{3h+6})$

۳۰۵۴۶ $I_z=\frac{\pi a^4(h^2+2h)}{4},\ R_z=\frac{a}{\sqrt{2}}$

۳۰۵۴۷ (۱۴.۳۳۷) $\frac{3M}{\pi R^3}$

۳۰۵۴۸ حصہ ۱۴.۷ صفحہ ۱۵۳۳

۳۰۵۴۹ (۱۴.۳۳۸) (ا) $x=\frac{u+v}{3},\ y=\frac{v-2u}{3};\ \frac{1}{3}$

۳۰۵۵۰ (ب) تکونی خطہ جس کی سرحدیں $u=0$ ، $v=0$ اور

۳۰۵۵۱ $u+v=3$ ہیں۔

۳۰۵۵۲ (۱۴.۳۴۰) (ا) $x=\frac{1}{5}(2u-v),\ y=\frac{1}{10}(3v-u);\ \frac{1}{10}$

۳۰۵۵۳ (ب) تکونی خطہ جس کی سرحدیں $3v=u$ ، $v=2u$ اور

۳۰۵۵۴ $3u+v=10$ ہیں۔

۳۰۵۵۵ (۱۴.۳۴۲) (ا) $\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}=u$

۳۰۵۵۶ (ب) $\begin{vmatrix}\sin v & u\cos v\\ \cos v & -u\sin v\end{vmatrix}=-u$

۳۰۵۵۷ (۱۴.۳۴۶) $\frac{64}{5}$

۳۰۵۵۸ (۱۴.۳۴۸) $\int_1^2\int_1^3(u+v)\frac{2u}{v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=8+\frac{52}{3}\ln 2$

۳۰۵۵۹ (۱۴.۳۵۰) $\frac{\pi ab(a^2+b^2)}{4}$

۳۰۵۶۰ (۱۴.۳۵۲) $\frac{1}{3}(1+\frac{3}{e^2})\approx 0.4687$

۳۰۵۶۱ (۱۴.۳۵۶) $\frac{4\pi abc}{3}$

۳۰۵۶۲ (۱۴.۳۵۸) $\int_0^3\int_0^2\int_1^2(\frac{v}{3}+\frac{vw}{3u})\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = 2+\ln 8$

۳۰۵۶۳

۳۰۵۶۴ حصہ ۱۵.۱ صفحہ ۱۵۴۳

۳۰۵۶۵ (۱۵.۱) شکل ۱۵.۸

۳۰۵۶۶ (۱۵.۲) شکل ۱۵.۱۰

۳۰۵۶۷ (۱۵.۳) شکل ۱۵.۶

۳۰۵۶۸ (۱۵.۴) شکل ۱۵.۱۳

۳۰۵۶۹ (۱۵.۵) شکل ۱۵.۹

۳۰۵۷۰ (۱۵.۶) شکل ۱۵.۱۱

۳۰۵۷۱ (۱۵.۷) شکل ۱۵.۷

۳۰۵۷۲ (۱۵.۸) شکل ۱۵.۱۲

۳۰۵۷۳ (۱۵.۹) $\sqrt{2}$

۳۰۵۷۴ (۱۵.۱۱) $\frac{13}{2}$

۳۰۵۷۵ (۱۵.۱۳) $3\sqrt{14}$

۳۰۵۷۶ (۱۵.۱۵) $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}+9)$

۳۰۵۷۷ (۱۵.۱۷) $\sqrt{3}\ln\frac{b}{a}$

۳۰۵۷۸ (۱۵.۱۹) $\frac{10\sqrt{5}-2}{3}$

۳۰۵۷۹ (۱۵.۲۱) 8

۳۰۵۸۰ (۱۵.۲۳) $2\sqrt{2}-1$

۳۰۵۸۱ (۱۵.۲۵) (ا) $4\sqrt{2}-1$ ، (ب) $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$

۳۰۵۸۲ (۱۵.۲۷) $I_z=2\pi\delta a^3$ ، $R_z=a$

۳۰۵۸۳ (۱۵.۲۹) (ا) $I_z=2\pi\sqrt{2}\delta$ ، $R_z=1$ ؛

۳۰۵۸۴ (ب) $I_z=4\pi\sqrt{2}\delta$ ، $R_z=1$

۳۰۵۸۵ (۱۵.۳۱) $I_z=2\pi-2$ ، $R_z=1$

۳۰۵۸۶ حصہ ۱۵.۲ صفحہ ۱۵۵۷

۳۰۵۸۷ (۱۵.۳۷) $\nabla f=\frac{-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

۳۰۵۸۸ (۱۵.۳۹) $\nabla g=-\frac{2x}{x^2+y^2}\boldsymbol{i}-\frac{2y}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}+e^z\boldsymbol{k}$

۳۰۵۸۹ (۱۵.۴۱) $\boldsymbol{F}=\frac{-kx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\boldsymbol{i}-\frac{ky}{(x^2+y^2)^{3/2}}\boldsymbol{j},k>0$

۳۰۵۹۰ (۱۵.۴۳) (ا) $\frac{9}{2}$ ، (ب) $\frac{13}{3}$ ، (ج) $\frac{9}{2}$

۳۰۵۹۱ (۱۵.۴۵) (ا) $\frac{1}{3}$ ، (ب) $-\frac{1}{5}$ ، (ج) 0

۳۰۵۹۲ (۱۵.۴۷) (ا) 2 ، (ب) $\frac{3}{2}$ ، (ج) $\frac{1}{2}$

۳۰۵۹۳ (۱۵.۴۹) $\frac{1}{2}$

۳۰۵۹۴ (۱۵.۵۱) $-\pi$

۳۰۵۹۵ (۱۵.۵۳ $\frac{207}{12}$

۳۰۵۹۶ (۱۵.۵۵ $-\frac{39}{2}$

۳۰۵۹۷ (۱۵.۵۷ $\frac{25}{6}$

۳۰۵۹۸ (۱۵.۵۹ (ا)دائری بہاؤ اول 0 ، دائری بہاؤ دوم 2π ، بہاؤ اول 2π ، بہاؤ

۳۰۵۹۹ دوم 0 ؛(ب)دائری بہاؤ اول 0 ، دائری بہاؤ دوم 8π ، بہاؤ اول

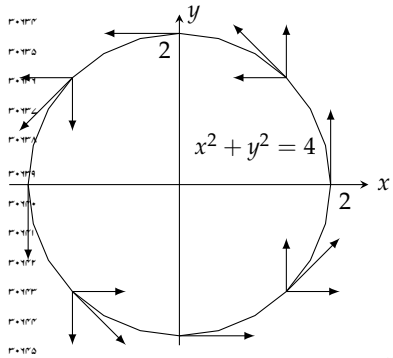
۳۰۶۰۰ 8π ، بہاؤ دوم 0

۳۰۶۰۱ (۱۵.۶۱ دائری بہاؤ 0 ، بہاؤ $a^2\pi$

۳۰۶۰۲ (۱۵.۶۳ دائری بہاؤ $a^2\pi$ ، بہاؤ 0

۳۰۶۰۳ (۱۵.۶۵ (ا) $-\frac{\pi}{2}$ ،(ب) 0 ،(ج) 1

۳۰۶۰۴ (۱۵.۶۷



۳۰۶۰۵

۳۰۶۰۶ (۱۵.۶۹ (ا) $\boldsymbol{G} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ ،

۳۰۶۰۷ (ب) $\boldsymbol{G} = \sqrt{x^2+y^2}\boldsymbol{F}$

۳۰۶۰۸ (۱۵.۷۱ $\boldsymbol{F} = \frac{-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

۳۰۶۰۹ (۱۵.۷۳ 48

۳۰۶۱۰ (۱۵.۷۵ π

۳۰۶۱۱ (۱۵.۷۷ 0

۳۰۶۱۲ (۱۵.۷۹ $\frac{1}{2}$

۳۰۶۱۳ حصہ ۱۵.۳ صفحہ ۱۵۷۱

۳۰۶۱۴ (۱۵.۸۹ بقائی

۳۰۶۱۵ (۱۵.۹۱ غیر بقائی

۳۰۶۱۶ (۱۵.۹۳ غیر بقائی

۳۰۶۱۷ (۱۵.۹۵ $f(x,y,z) = x^2 + \frac{3y^2}{2} + 2z^2 + C$

۳۰۶۱۸ (۱۵.۹۷ $f(x,y,z) = xe^{y+2z} + C$

۳۰۶۱۹ (۱۵.۹۹ $f(x,y,z) = x\ln x - x + \tan(x+y) +$

۳۰۶۲۰ $\frac{1}{2}\ln(y^2+z^2) + C$

۳۰۶۲۱ (۱۵.۱۰۱ 49

۳۰۶۲۲ (۱۵.۱۰۳ -16

۳۰۶۲۳ (۱۵.۱۰۵ 1

۳۰۶۲۴ (۱۵.۱۰۷ $9\ln 2$

۳۰۶۲۵ (۱۵.۱۰۹ 0

۳۰۶۲۶ (۱۵.۱۱۱ -3

۳۰۶۲۷ (۱۵.۱۱۵ $\boldsymbol{F} = \nabla(\frac{x^2-1}{y})$

۳۰۶۲۸ (۱۵.۱۱۷ (ا) 1 ،(ب) 1 ،(ج) 1

۳۰۶۲۹ (۱۵.۱۱۹ (ا) 2 ،(ب) 2

۳۰۶۳۰ (۱۵.۱۲۱ $f(x,y,z) = \frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$

۳۰۶۳۱ (۱۵.۱۲۳ (ا) $c = b = 2a$ ،(ب) $c = b = 2$

۳۰۶۳۲ (۱۵.۱۲۵ چونکہ میدان بقائی ہے لہٰذا کام راہ پر منحصر نہیں ہوگا۔

۳۰۶۳۳ حصہ ۱۵.۴ صفحہ ۱۵۹۰

۳۰۶۳۴ (۱۵.۱۲۷ بہاؤ 0 ،دائری بہاؤ $2\pi a^2$

۳۰۶۳۵ (۱۵.۱۲۹ بہاؤ $-\pi a^2$ ،دائری بہاؤ 0

۳۰۶۳۶ (۱۵.۱۳۱ بہاؤ 2 ،دائری بہاؤ 0

۳۰۶۳۷ (۱۵.۱۳۳ بہاؤ -9 ،دائری بہاؤ 9

۳۰۶۳۸ (۱۵.۱۳۵ بہاؤ $\frac{1}{2}$ ،دائری بہاؤ $\frac{1}{2}$

۳۰۶۳۹ (۱۵.۱۳۷ بہاؤ $\frac{1}{5}$ ،دائری بہاؤ $-\frac{1}{12}$

۳۰۶۴۰ (۱۵.۱۳۹ 0

۳۰۶۴۱ (۱۵.۱۴۱ $\frac{2}{33}$

۳۰۶۴۲ (۱۵.۱۴۳ 0

۳۰۶۴۳ (۱۵.۱۴۵ -16π

۳۰۶۴۴ (۱۵.۱۴۷ πa^2

۳۰۶۴۵ (۱۵.۱۴۹ $\frac{3}{8}\pi$

۳۰۶۴۶ (۱۵.۱۵۱ (ا) 0 ،(ب) $(h-k)$ (خطے کا رقبہ)

۳۰۶۴۷ (۱۵.۱۶۱ (ا) 0

۳۰۶۴۸ حصہ ۱۵.۵ صفحہ ۱۶۰۹

۳۰۶۴۹ (۱۵.۱۷۱ $\frac{13}{3}\pi$

۳۰۶۵۰ (۱۵.۱۷۳ 4

۳۰۶۵۱ (۱۵.۱۷۵ $6\sqrt{6} - 2\sqrt{2}$

۳۰۶۵۲ (۱۵.۱۷۷ $\pi\sqrt{c^2+1}$

۳۰۶۵۳ (۱۵.۱۷۹ $\frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 5\sqrt{5})$

۳۰۶۵۴ (۱۵.۱۸۱ $3 + 2\ln 2$

۳۰۶۵۵ (۱۵.۱۸۳ $9a^3$

۳۰۶۵۶ (۱۵.۱۸۵ $\frac{abc}{4}(ab+ac+bc)$

۳۰۶۵۷ (۱۵.۱۸۷ 2

۳۰۶۵۸ (۱۵.۱۸۹ 18

۳۰۶۵۹ (۱۵.۱۹۱ $\frac{\pi a^3}{6}$

۳۰۶۶۰ (۱۵.۱۹۳ $\frac{\pi a^2}{4}$

۳۰۶۶۱ (۱۵.۱۹۵ $\frac{\pi a^3}{2}$

۳۰۶۶۲ (۱۵.۱۹۷ -32

۳۰۶۶۳ (۱۵.۱۹۹ -4

۳۰۶۶۴ (۱۵.۲۰۱ $3a^4$

۳۰۶۶۵ (۱۵.۲۰۳ $(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$

$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{14}{9}), I_z = \frac{15\pi\sqrt{2}}{2}\delta,$ (۱۵.۲۰۵)

$R_z = \frac{\sqrt{10}}{2}$

(ا) $\frac{8\pi}{3}a^4\delta$ (ب) $\frac{20\pi}{3}a^4\delta$ (۱۵.۲۰۷)

$\frac{\pi}{6}(13\sqrt{13} - 1)$ (۱۵.۲۰۹)

$5\pi\sqrt{2}$ (۱۵.۲۱۱)

$\frac{2}{3}(5\sqrt{5} - 1)$ (۱۵.۲۱۳)

حصہ ۱۵.۶ صفحہ ۱۶۲۵

$\boldsymbol{r}(r, \phi) = r\cos\phi\boldsymbol{i} + r\sin\phi\boldsymbol{j} + r^2\boldsymbol{k},$ (۱۵.۲۱۵)

$0 \le r \le 2, 0 \le \phi \le 2\pi$

$\boldsymbol{r}(r, \phi) = r\cos\phi\boldsymbol{i} + r\sin\phi\boldsymbol{j} + r/2\boldsymbol{k},$ (۱۵.۲۱۷)

$0 \le r \le 6, 0 \le \phi \le \pi/2$

$\boldsymbol{r}(r, \phi) = r\cos\phi\boldsymbol{i} + r\sin\phi\boldsymbol{j} +$ (۱۵.۲۱۹)

$\sqrt{9 - r^2}\boldsymbol{k}, 0 \le r \le 3/\sqrt{2}, 0 \le \phi \le 2\pi$

یا

$\boldsymbol{r}(\theta, \phi) = 3\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i} +$

$3\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j} + 3\cos\theta\boldsymbol{k},$

$0 \le \theta \le \pi/4, 0 \le \phi \le 2\pi$

$\boldsymbol{r}(\theta, \phi) = \sqrt{3}\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i} +$ (۱۵.۲۲۱)

$\sqrt{3}\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j} + \sqrt{3}\cos\phi\boldsymbol{k},$

$\pi/3 \le \theta \le \pi/4, 0 \le \phi \le 2\pi$

(۱۵.۲۲۳)

$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + (4 - y^2)\boldsymbol{k},$ (۱۵.۲۲۳)

$0 \le x \le 2, -2 \le y \le 2$

$\boldsymbol{r}(u, v) = u\boldsymbol{i} + 3\cos v\boldsymbol{j} + 3\sin v\boldsymbol{k},$ (۱۵.۲۲۵)

$0 \le u \le 3, 0 \le v \le 2\pi$

$\boldsymbol{r}(r, \phi) = r\cos\phi\boldsymbol{i} + r\sin\phi\boldsymbol{j} +$ (ا) (۱۵.۲۲۷)

$(1 - r\cos\phi - r\sin\phi)\boldsymbol{k},$

$0 \le r \le 3, 0 \le \phi \le 2\pi$

(ب) $\boldsymbol{r}(u, v) = (1 - u\cos v - u\sin v)\boldsymbol{i}$ (۱۵.۲۲۶)

$+ u\cos v\boldsymbol{j} + u\sin v\boldsymbol{k}$

$0 \le u \le 3, 0 \le v \le 2\pi$

$\boldsymbol{r}(u, v) = 4\cos^2 v\boldsymbol{i} + u\boldsymbol{j} +$ (۱۵.۲۲۹)

$4\cos v\sin v\boldsymbol{k}$

$0 \le u \le 3, -\pi/2 \le v \le \pi/2$

دوسرا طریقہ

$\boldsymbol{r}(u, v) = (2 + 2\cos v)\boldsymbol{i} + u\boldsymbol{j}$

$2\sin v\boldsymbol{k}, 0 \le u \le 3, 0 \le v \le 2\pi$

$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{\sqrt{5}}{2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi\sqrt{5}}{2}$ (۱۵.۲۳۱)

$\int_0^{2\pi}\int_0^3 r\sqrt{5}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = 8\pi\sqrt{5}$ (۱۵.۲۳۳)

$\int_0^{2\pi}\int_0^4 1\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 6\pi$ (۱۵.۲۳۵)

$\int_0^{2\pi}\int_0^1 u\sqrt{4u^2 + 1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi$ (۱۵.۲۳۷)

$\int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi} 2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = (4 + 2\sqrt{2})\pi$ (۱۵.۲۳۹)

$\int_S x\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^3\int_0^2 u\sqrt{4u^2 + 1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{17\sqrt{17}-1}{4}$ (۱۵.۲۴۱)

$\iint_S x^2\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^3\theta\cdot\cos^2\phi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi = \frac{4\pi}{3}$ (۱۵.۲۴۳)

$\iint_S z\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^1\int_0^1(4 - u - v)\sqrt{3}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = 3\sqrt{3}$ (۱۵.۲۴۵)

(جہاں $x = u$ اور $y = v$ ہیں۔)

$\iint_S x^2\sqrt{5 - 4z}\,\mathrm{d}\sigma = \int_0^1\int_0^{2\pi} u^2\cos^2 v\cdot\sqrt{4u^2 + 1}\cdot u\sqrt{4u^2 + 1}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \int_0^1\int_0^{2\pi} u^3(4u^2 + 1)\cos^2 v\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = \frac{11\pi}{12}$ (۱۵.۲۴۷)

-32 (۱۵.۲۴۹)

$\pi a^3/6$ (۱۵.۲۵۱)

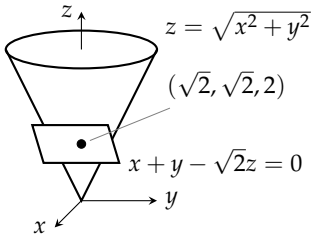
$13a^4/6$ (۱۵.۲۵۳)

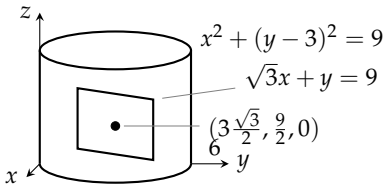
$2\pi/3$ (۱۵.۲۵۵)

$-73\pi/6$ (۱۵.۲۵۷)

$(a/2, a/2, a/2)$ (۱۵.۲۵۹)

$8\delta\pi a^4/3$ (۱۵.۲۶۱)





$A = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}[a^2b^2\sin^2\theta\cos^2\theta + b^2c^2\sin^4\theta\cos^2\phi + a^2c^2\sin^2\theta\sin^2\phi]^{1/2}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi$ (۱۵.۲۶۹)

$x_0x + y_0y = 25$ (۱۵.۲۷۱)

حصہ ۱۵.۷ صفحہ ۱۶۴۳

4π (۱۵.۲۷۳)

$-5/6$ (۱۵.۲۷۵)

0 (۱۵.۲۷۷)

-6π (۱۵.۲۷۹)

$2\pi a^2$ (۱۵.۲۸۱)

۳۰۷۳۵ (۱۵.۲۸۵ 12π

۳۰۷۳۶ (۱۵.۲۸۷ $-\pi/4$

۳۰۷۳۷ (۱۵.۲۸۹ -15π

۳۰۷۳۸ (۱۵.۲۹۷ $16I_y + 16I_x$

۳۰۷۳۹ حصہ ۱۵.۸ صفحہ ۱۶۶۰

۳۰۷۴۰ (۱۵.۲۹۹ 0

۳۰۷۴۱ (۱۵.۳۰۱ 0

۳۰۷۴۲ (۱۵.۳۰۳ -16

۳۰۷۴۳ (۱۵.۳۰۵ -8π

۳۰۷۴۴ (۱۵.۳۰۷ 3π

۳۰۷۴۵ (۱۵.۳۰۹ $-40/3$

۳۰۷۴۶ (۱۵.۳۱۱ 12π

۳۰۷۴۷ (۱۵.۳۱۳ $12\pi(4\sqrt{2}-1)$

۳۰۷۴۸ (۱۵.۳۱۹ تکمل کی قیمت کسی صورت S کے سطحی رقبے سے زیادہ نہیں ہوگی۔

۳۰۷۴۹ مشق برائے باب ۱۵ صفحہ ۱۶۶۷

۳۰۷۵۰ (۱۵.۳۵۳ پہلی راہ: $2\sqrt{3}$، دوسری راہ: $1+3\sqrt{2}$

۳۰۷۵۱ (۱۵.۳۵۵ $4a^2$

۳۰۷۵۲ (۱۵.۳۵۷ 0

۳۰۷۵۳ (۱۵.۳۵۹ 0

۳۰۷۵۴ (۱۵.۳۶۱ 0

۳۰۷۵۵ (۱۵.۳۶۳ $\pi\sqrt{3}$

۳۰۷۵۶ (۱۵.۳۶۵ $2\pi(1-1/\sqrt{2})$

۳۰۷۵۷ (۱۵.۳۶۷ $\frac{abc}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$

۳۰۷۵۸ (۱۵.۳۶۹ 50

۳۰۷۵۹ (۱۵.۳۷۱ $\boldsymbol{r}(\theta,\phi) = 6\sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i} +$

۳۰۷۶۰ $6\sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j}$

۳۰۷۶۱ $+6\cos\theta\boldsymbol{k},\ \frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{2\pi}{3},\ 0\le\phi\le 2\pi$

۳۰۷۶۲ (۱۵.۳۷۳ $\boldsymbol{r}(r,\phi) = r\cos\phi\boldsymbol{i} + r\sin\phi\boldsymbol{j} +$

۳۰۷۶۳ $(1+r)\boldsymbol{k},\ 0\le r\le 2, 0\le\phi\le 2\pi$

۳۰۷۶۴ (۱۵.۳۷۵ $\boldsymbol{r}(u,v) = u\cos v\boldsymbol{i} + 2u^2\boldsymbol{j} + u\sin v\boldsymbol{k},$

۳۰۷۶۵ $0\le u\le 1, 0\le v\le\pi$

۳۰۷۶۶ (۱۵.۳۷۷ $\sqrt{6}$

۳۰۷۶۷ (۱۵.۳۷۹ $\pi[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$

۳۰۷۶۸ (۱۵.۳۸۱ بقائی

۳۰۷۶۹ (۱۵.۳۸۳ غیر بقائی

۳۰۷۷۰ (۱۵.۳۸۵ $f(x,y,z) = y^2+yz+2x+z$

۳۰۷۷۱ (۱۵.۳۸۷ پہلی راہ: 2، دوسری راہ: $\frac{8}{3}$

۳۰۷۷۲ (۱۵.۳۸۹ ا) $1-e^{-2\pi}$، ب) $1-e^{-2\pi}$

۳۰۷۷۳ (۱۵.۳۹۱ 0

۳۰۷۷۴ (۱۵.۳۹۳ ا) $4\sqrt{2}-2$، ب) $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$

۳۰۷۷۵ (۱۵.۳۹۵ $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (1, \frac{16}{15}, \frac{2}{3});$

۳۰۷۷۶ $I_x = \frac{232}{45}, I_y = \frac{64}{15}, I_z = \frac{56}{9};$

۳۰۷۷۷ $R_x = \sqrt{\frac{116}{45}}, R_y = \sqrt{\frac{32}{15}}, R_z = \sqrt{\frac{28}{9}}$

۳۰۷۷۸ (۱۵.۳۹۷ $\bar{z} = \frac{3}{2}, I_z = \frac{7\sqrt{3}}{3}, R_z = \sqrt{\frac{7}{3}}$

۳۰۷۷۹ (۱۵.۳۹۹ $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (0,0,\frac{49}{12}), I_z = 640\pi,$

۳۰۷۸۰ $R_z = 2\sqrt{2}$

۳۰۷۸۱ (۱۵.۴۰۱ بہاؤ: $3/2$، دائری بہاؤ: $-1/2$

۳۰۷۸۲ (۱۵.۴۰۵ 3

۳۰۷۸۳ (۱۵.۴۰۷ $\frac{2\pi}{3}(7-8\sqrt{2})$

۳۰۷۸۴ (۱۵.۴۰۹ 0

۳۰۷۸۵ (۱۵.۴۱۱ π

۳۰۷۸۶ مشق برائے باب ۱۵ صفحہ ۱۶۷۵

۳۰۷۸۷ (۱۵.۴۱۳ 6π

۳۰۷۸۸ (۱۵.۴۱۵ $\frac{2}{3}$

۳۰۷۸۹ (۱۵.۴۱۷ ا) $\boldsymbol{F}(x,y,z) = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ ب)

۳۰۷۹۰ $\boldsymbol{F}(x,y,z) = z\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{k}$ ج)

۳۰۷۹۱ $z\boldsymbol{i}$

۳۰۷۹۲ (۱۵.۴۱۹ $\frac{16\pi R^3}{3}$

۳۰۷۹۳ (۱۵.۴۲۱ $a = 2$ ، $b = 1$ ہیں اور کم سے کم بہاؤ -4 ہے۔

۳۰۷۹۴ (۱۵.۴۲۳ ب) $\frac{16}{3}g$ ،

۳۰۷۹۵ ج) $\bar{y} = g\int_C xy^2\,\mathrm{d}s = (\int_C gxy\,\mathrm{d}s)$ کام

۳۰۷۹۶ (۱۵.۴۲۵ ج) $\frac{4}{3}\pi w$

۳۰۷۹۷ (۱۵.۴۳۱ اگر $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ ہو، غلط ہے۔

۳۰۷۹۸ حصہ ج.۰ صفحہ ۱۷۰۵

۳۰۷۹۹ ج.۱) ا) $(14,8)$، ب) $(-1,8)$، ج) $(0,-5)$

۳۰۸۰۰ ج.۳) ا) حقیقی محور میں z کا عکس لے کر۔ ب) خیالی محور میں z کا عکس لے کر۔ ج) مبدا میں z کا عکس لے کر۔ د) حقیقی محور میں z کا عکس لے کر سمتیہ کی لمبائی کو $1/|z|^2$ سے ضرب دے کر۔

۳۰۸۰۱ ج.۵) ا) دائرہ $x^2+y^2=4$ پر نقطے۔ ب) دائرہ $x^2+y^2=4$ کے اندرون میں نقطے۔ ج) دائرہ $x^2+y^2=4$ سے باہر نقطے۔

۳۰۸۰۲ ج.۷) اس دائرے پر نقطے جس کا رداس 1 اور مرکز $(-1,0)$ ہو۔

۳۰۸۰۳ ج.۹) لکیر $y=-x$ پر نقطے۔

۳۰۸۰۴ ج.۱۱) $4e^{2\pi i/3}$

۳۰۸۰۵ ج.۱۳) $1e^{2\pi i/3}$

۳۰۸۰۶ ج.۲۱) $\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$

۳۰۸۰۷ ج.۲۳) $1,\ -\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

۳۰۸۰۸ ج.۲۵) $2i,\ -\sqrt{3}-,\ \sqrt{3}-i$

۳۰۸۰۹ ج.۲۷) $\frac{\sqrt{6}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i,\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$

۳۰۸۱۳ ج.۲۹) $1 \pm \sqrt{3}i,\ -a \pm \sqrt{3}i$

۳۰۸۱۴ حصہ ج.۰ صفحہ ۱۷۲۷

۳۰۸۱۵ ج.۱) -5

۳۰۸۱۶ ج.۳) 1

۳۰۸۱۷ ج.۵) -7

۳۰۸۱۸ ج.۷) 38

۳۰۸۱۹ ج.۹) $x = -4,\ y = 1$

۳۰۸۲۰ ج.۱۱) $x = 3,\ y = 2$

۳۰۸۲۱ ج.۱۳) $x = 3,\ y = -2,\ z = 2$

۳۰۸۲۲ ج.۱۵) $x = 2,\ y = 0,\ z = -1$

۳۰۸۲۳ ج.۱۷) ا) $h = 6,\ k = 4$ ، ب) $h = 6,\ k \neq 4$