# احصاء اور تحلیلی ہندسہ

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۱۶ جولائی ۲۰۲۶

# عنوان


۱ ابتدائی معلومات ۱
۱.۱ حقیقی اعداد اور حقیقی خط . . . . . ۱
۱.۲ محدد، خطوط اور بڑھوتری . . . . . ۱۳
۱.۳ تفاعل . . . . . ۲۸
۱.۴ ترسیم کی منتقلی . . . . . ۴۸
۱.۵ تکونیاتی تفاعل . . . . . ۶۵

۲ حدود اور استمرار ۸۵
۲.۱ تبدیلی کی شرح اور حد . . . . . ۸۵
۲.۲ حد تلاش کرنے کے قواعد . . . . . ۱۰۰
۲.۳ مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف . . . . . ۱۱۲
۲.۴ تصور حد کی توسیع . . . . . ۱۳۰
۲.۵ استمرار . . . . . ۱۴۸
۲.۶ مماسی خط . . . . . ۱۶۴

۳ تفرق ۱۷۷
۳.۱ تفاعل کا تفرق . . . . . ۱۷۷
۳.۲ قواعد تفرق . . . . . ۱۹۶
۳.۳ تبدیلی کی شرح . . . . . ۲۱۳
۳.۴ تکونیاتی تفاعل کا تفرق . . . . . ۲۲۹
۳.۵ زنجیری قاعدہ . . . . . ۲۴۷
۳.۶ خفی تفرق اور ناطق قوت نما . . . . . ۲۶۲
۳.۷ دیگر شرح تبدیلی . . . . . ۲۷۷

۴ تفرق کا استعمال ۲۸۹
۴.۱ تفاعل کی انتہائی قیمتیں . . . . . ۲۸۹
۴.۲ مسئلہ اوسط قیمت . . . . . ۳۰۲
۴.۳ مقامی انتہائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پرکھ . . . . . ۳۱۵

۴.۳.۱ پرکھ . . . . . ۳۱۶
۴.۴ $y'$ اور $y''$ کے ساتھ ترسیم . . . . . ۳۲۵
۴.۵ $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء . . . . . ۳۴۷
۴.۶ بہترین بنانا . . . . . ۳۷۱
۴.۷ خط بندی اور تفرقات . . . . . ۳۹۲
۴.۸ ترکیب نیوٹن . . . . . ۴۱۲

۵ تکمل ۴۲۳
۵.۱ غیر قطعی تکملات . . . . . ۴۲۳
۵.۲ تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی . . . . . ۴۳۴
۵.۳ تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق . . . . . ۴۴۸
۵.۴ اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ . . . . . ۴۵۹
۵.۵ ریمان مجموعے اور قطعی تکملات . . . . . ۴۷۵
۵.۶ خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ . . . . . ۵۰۰
۵.۷ بنیادی مسئلہ . . . . . ۵۱۵
۵.۸ قطعی تکمل میں بدل . . . . . ۵۳۳
۵.۹ اعدادی تکمل . . . . . ۵۳۹
۵.۱۰ قاعدہ ذوزنقہ . . . . . ۵۳۹

۶ تکمل کا استعمال ۵۵۷
۶.۱ منحنیات کے بیچ رقبہ . . . . . ۵۵۷
۶.۱.۱ تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد . . . . . ۵۶۱
۶.۲ ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش . . . . . ۵۷۱
۶.۳ اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا . . . . . ۵۷۸
۶.۴ نلکی چھلے . . . . . ۵۹۱
۶.۵ مستوی منحنیات کی لمبائیاں . . . . . ۶۰۳
۶.۶ سطح طواف کا رقبہ . . . . . ۶۱۲
۶.۷ معیار اثر اور مرکز کمیت . . . . . ۶۲۳
۶.۷.۱ وسطانی مرکز . . . . . ۶۳۴
۶.۸ کام . . . . . ۶۳۹
۶.۹ فشار سیال اور قوت سیال . . . . . ۶۵۲
۶.۱۰ بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال . . . . . ۶۶۰

۷ ماورائی تفاعل ۶۷۳
۷.۱ الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات . . . . . ۶۷۴
۷.۲ قدرتی لوگارتھم . . . . . ۶۹۰
۷.۳ قوت نمائی تفاعل . . . . . ۷۰۶
۷.۴ $a^x$ اور $\log_a x$ . . . . . ۷۱۹
۷.۵ افزائش اور تنزل . . . . . ۷۲۸

۷.۶ قاعدہ لھوپیٹال . . . . . ۷۴۰
۷.۷ اضافی شرح نمو . . . . . ۷۵۴
۷.۷.۱ ترتیبی اور ثنائی تلاش . . . . . ۷۵۹
۷.۸ الٹ تکونیاتی تفاعل . . . . . ۷۶۴
۷.۹ الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل . . . . . ۷۷۹
۷.۱۰ ہذلولی تفاعل . . . . . ۷۹۴
۷.۱۱ یک رتبی تفرقی مساوات . . . . . ۸۱۳
۷.۱۲ یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان . . . . . ۸۳۰

۸ تکمل کے طریقے ۸۳۹
۸.۱ تکمل کے بنیادی کلیات . . . . . ۸۳۹
۸.۲ تکمل بالحصص . . . . . ۸۵۳
۸.۲.۱ بار بار استعمال . . . . . ۸۵۷
۸.۳ جزوی کسر . . . . . ۸۶۶
۸.۴ تکونیاتی بدل . . . . . ۸۷۹
۸.۵ جدول تکمل اور کمپیوٹر . . . . . ۸۸۹
۸.۶ غیر مناسب تکمل . . . . . ۹۰۴

۹ لامتناہی تسلسل ۹۲۷
۹.۱ اعداد کی ترتیب کی حد . . . . . ۹۲۷
۹.۲ ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے . . . . . ۹۴۳
۹.۳ لامتناہی تسلسل . . . . . ۹۵۸
۹.۴ غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پرکھ . . . . . ۹۷۵
۹.۵ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ . . . . . ۹۸۵
۹.۶ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ . . . . . ۹۹۴
۹.۷ بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز . . . . . ۱۰۰۴
۹.۸ طاقتی تسلسل . . . . . ۱۰۱۷
۹.۹ ٹیلر اور مکلارن تسلسل . . . . . ۱۰۳۲
۹.۱۰ ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ خلل کے اندازے . . . . . ۱۰۴۱
۹.۱۱ طاقتی تسلسل کے استعمال . . . . . ۱۰۵۸

۱۰ مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد ۱۰۷۵
۱۰.۱ مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں . . . . . ۱۰۷۵
۱۰.۲ سنک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی . . . . . ۱۰۹۵
۱۰.۳ دو درجی مساوات اور گھومنا . . . . . ۱۱۰۳
۱۰.۴ مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول . . . . . ۱۱۱۴
۱۰.۵ احصاء اور مقدار معلوم منحنیات . . . . . ۱۱۲۸
۱۰.۶ قطبی محدد . . . . . ۱۱۴۰

۱۰.۷ قطبی محدد میں ترسیم . . . . . ۱۱۴۹
۱۰.۸ مخروط حصوں کے قطبی مساوات . . . . . ۱۱۶۱
۱۰.۸.۱ دائرے . . . . . ۱۱۶۳
۱۰.۹ قطبی محدد میں تکمل . . . . . ۱۱۷۵

دیباچہ ۱۰۷۵

میری پہلی کتاب کا دیباچہ ۱۰۷۵

۱۱ سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری ۱۱۹۵
۱۱.۱ مستوی میں سمتیات . . . . . ۱۱۹۵
۱۱.۲ کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات . . . . . ۱۲۰۹
۱۱.۲.۱ کرہ . . . . . ۱۲۱۶
۱۱.۳ ضرب نقطہ . . . . . ۱۲۲۳
۱۱.۳.۱ حساب . . . . . ۱۲۲۴
۱۱.۴ صلیبی ضرب . . . . . ۱۲۳۵
۱۱.۵ فضا میں خطوط اور مستویات . . . . . ۱۲۴۷
۱۱.۶ نلکی اور مربع سطحیں . . . . . ۱۲۵۹
۱۱.۷ نلکی اور کروی محدد . . . . . ۱۲۷۵

۱۲ سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت ۱۲۹۱
۱۲.۱ سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات . . . . . ۱۲۹۱
۱۲.۲ گولا کی حرکت کی نمونہ کشی . . . . . ۱۳۱۲
۱۲.۳ لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ . . . . . ۱۳۲۰
۱۲.۴ انحنا، مروڑ اور $TNB$ چھوکٹ . . . . . ۱۳۲۷
۱۲.۵ فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت . . . . . ۱۳۴۸

۱۳ کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات ۱۳۶۳
۱۳.۱ کثیر متغیرات کے تفاعل . . . . . ۱۳۶۳
۱۳.۲ حد اور استمرار . . . . . ۱۳۷۶
۱۳.۳ جزوی تفرقات . . . . . ۱۳۸۹
۱۳.۴ تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات . . . . . ۱۴۰۵
۱۳.۵ زنجیری قاعدہ . . . . . ۱۴۲۰
۱۳.۶ پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات . . . . . ۱۴۳۳
۱۳.۷ رخی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں . . . . . ۱۴۳۹
۱۳.۸ انتہائی قیمتیں اور نقاط زین . . . . . ۱۴۵۸
۱۳.۸.۱ نتیجہ . . . . . ۱۴۶۶
۱۳.۹ لیگرینج ضاربین . . . . . ۱۴۷۴
۱۳.۱۰ کلیہ ٹیلر . . . . . ۱۴۸۹

۱۴ تکمل بالکثرت ۱۴۹۷
۱۴.۱ دوہرا تکملات . . . . . ۱۴۹۷
۱۴.۲ رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت . . . . . ۱۵۱۵
۱۴.۳ دوہرا تکملات کا قطبی روپ . . . . . ۱۵۲۹
۱۴.۴ کارتیسی محدد میں تہرا تکمل . . . . . ۱۵۳۹
۱۴.۵ تعین بعد میں کمیت اور معیار اثر . . . . . ۱۵۵۲
۱۴.۶ نلکی اور کروی محدد میں تہرا تکمل . . . . . ۱۵۶۱
۱۴.۷ تکملات بالکثرت میں بدل . . . . . ۱۵۷۸

ا ریاضیاتی ترغیب ۱۷۳۵

ب تحدیدی مسائل کے ثبوت ۱۷۴۱

ج مخلوط اعداد ۱۷۴۷
ج.۱ سوالات . . . . . ۱۷۵۹

د سمسن کا ایک تہائی کا قاعدہ ۱۷۶۳

ھ کوشی کا مسئلہ اوسط قیمت اور قاعدہ لھوپیٹال کے پائیدار روپ ۱۷۶۵

و کثیر استعمال حدود ۱۷۶۹

ز جزئیتی تقسیم کا قانون برائے سمتی ضرب ۱۷۷۱

ح مقاطع اور کریمر کا قاعدہ ۱۷۷۵

ط مسئلہ یولر اور مسئلہ بڑھوتری ۱۷۸۵

ي تکملات کا مختصر جدول ۱۷۹۱

ضمیمے ۱۸۰۲

جوابات ۱۸۰۳

# باب ۱۰

# مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد

جائزہ

حرکت پر غور احصاء کی مدد سے کیا جا سکتا ہے۔ اس حصہ میں ہم وقت کے ساتھ ایک ذرے کے بدلتے مقام پر غور کریں گے۔ ہم مخروطی حصوں کی مساوات سے شروع کرتے ہیں چونکہ بالعکس مربع قوت کی بنا سیارے، مصنوعی سیارے، اور دیگر اجسام مخروطی راہ پر حرکت کرتے ہیں۔ جیسا ہم باب ۱۲ میں دیکھیں گے، اگر ہمیں معلوم ہو کہ ایک جسم مخروطی راہ پر حرکت کر رہا ہے تب ہم اس کی رفتار اور اس پر عمل کرنے والی قوت دریافت کر سکتے ہیں۔ قطبی محدد سیاروں کی حرکت پر غور کو بہت آسان بناتا ہے لہٰذا ہم اس نئے محدد میں منحنیات، تفرق اور تکمل پر بھی غور کریں گے۔

## ۱۰.۱ مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں

اس حصہ میں دکھایا جائے گا کہ مخروطی حصوں کو کس طرح محددی سطح پر بطور دو قدری مساوات پیش کیا جاتا ہے۔ دوہرے مخروط کو سطح سے کاٹ کر مخروطی منحنیات پیدا کی جاتی ہیں اور اسی کی بنا مخروطی حصہ کی اصطلاح پیدا ہوئی۔

دائرہ

تعریف: ایک مستوی میں رہتے ہوئے اس مستوی میں کسی مقررہ نقطہ سے مستقل فاصلے پر تمام نقطوں کے سلسلہ کو **دائرہ**[1] کہتے ہیں۔ اس مقررہ نقطہ کو دائرے کا **مرکز**[2] کہتے ہیں جبکہ اس مستقل فاصلہ کو **رداس**[3] کہتے ہیں۔

□

---

[1] circle
[2] center
[3] radius

دائرے کے معیاری مساوات جنہیں حصہ ۱.۴ میں فاصلہ کی مساوات $d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ سے اخذ کیا گیا درج ذیل ہیں۔

$$x^2+y^2=a^2 \qquad \text{رداس } a \text{ اور مرکز } (0,0)$$
$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2 \qquad \text{رداس } a \text{ اور مرکز } (h,k)$$

## قطع مکافی

تعریف: ایک سطح میں رہتے ہوئے کسی مقررہ سیدھی لکیر اور مقررہ نقطہ (جو اس مقررہ سیدھی لکیر پر نہیں پایا جاتا ہو) سے مستقل فاصلہ پر پائے جانے والے تمام نقطوں کے سلسلہ کو **قطع مکافی**[۴] کہتے ہیں۔ مقررہ نقطے کو قطع مکافی کا[۵] کہتے ہیں جبکہ مقررہ لکیر کو **ناظمہ**[۶] کہتے ہیں۔

□

جب ماسکہ کسی محددی محور پر ہو اور ناظمہ اس محددی محور کے متوازی ہو تب قطع مکافی کی مساوات سادہ ترین ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر، فرض کریں کہ ماسکہ $y$ محور پر نقطہ $F(0,p)$ پر پایا جاتا ہے اور لکیر $y=-p$ ناظمہ (شکل ۱.۱۰) ہے۔ یوں شکل ۱.۱۰ میں نقطہ $N(x,y)$ صرف اور صرف اس صورت اس قطع مکافی پر پایا جائے گا جب $NF=NQ$ ہو۔ فاصلہ کے کلیہ سے

$$NF=\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\sqrt{x^2+(y-p)^2}$$
$$NQ=\sqrt{(x-x)^2+(y-(-p))^2}=\sqrt{(y+p)^2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ان مساوات کو ایک دوسرے کے برابر پر کر کے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$y=\frac{x^2}{4p} \quad \Longrightarrow \quad x^2=4py \qquad \text{معیاری روپ} \tag{۱۰.۱}$$

اس مساوات سے قطع مکافی کی $y$ محور کے لحاظ سے تشاکلی واضح ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ محور $y$ اس قطع مکافی کا محور تشاکلی ہے جس کو عموماً چھوٹا کر کے صرف **محور**[۷] پکارا جاتا ہے۔

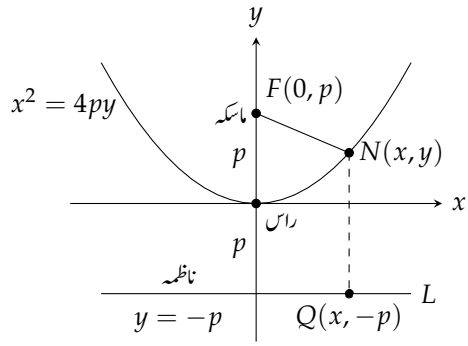
وہ نقطہ جس پر قطع مکافی اپنے محور کو قطع کرتا ہو **راس**[۸] کہلاتا ہے۔ قطع مکافی $x^2=4py$ کا راس مبدا پر پایا جاتا ہے (شکل ۱.۱۰)۔ مثبت عدد $p$ کو قطع مکافی کا **طول ماسکہ**[۹] کہتے ہیں۔

اگر قطع مکافی نیچے رخ کھلتا ہو اور اس کا ماسکہ $(0,-p)$ جبکہ ناظمہ لکیر $y=p$ ہو تب مساوات ۱.۱۰ درج ذیل روپ اختیار کرے گی (شکل ۲.۱۰)۔

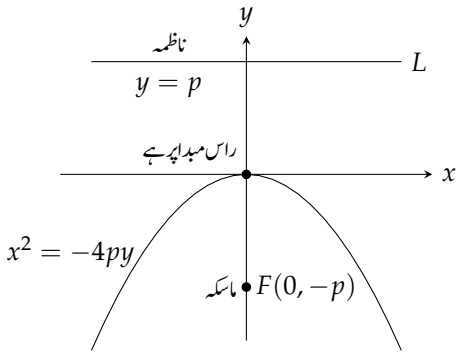
$$y=-\frac{x^2}{4p} \quad \Longrightarrow \quad x^2=-4py$$

---

[۴] parabola
[۵] focus
[۶] directrix
[۷] axis
[۸] vertex
[۹] focal length




شکل ۱.۱۰: قطع مکافی $x^2 = 4py$ ؛راس کا فاصل ماسکہ اور ناظمہ سے ایک جیسا ہے۔




شکل ۲.۱۰: قطع مکافی $x^2 = -4py$

جدول ۱.۱۰: مبدا پر راس والے قطع مکافی کے معیاری مساوات ( $p > 0$ )

| کھلنے کا رخ | محور | ناظمہ | ماسکہ | مساوات |
|---|---|---|---|---|
| اوپر | محور $y$ | $y = -p$ | $(0,p)$ | $x^2 = 4py$ |
| نیچے | محور $y$ | $y = p$ | $(0,-p)$ | $x^2 = -4py$ |
| دائیں | محور $x$ | $x = -p$ | $(p,0)$ | $y^2 = 4px$ |
| بائیں | محور $x$ | $x = p$ | $(-p,0)$ | $y^2 = -4px$ |

ہم اسی طرح کے مساوات ہم دائیں اور بائیں کھلنے والے قطع مکافی کے لئے حاصل کر سکتے ہیں (جدول ۱.۱۰ اور شکل ۳.۱۰)۔

مثال ۱.۱۰: قطع مکافی $y^2 = 10x$ کا ماسکہ اور ناظمہ تلاش کریں۔

حل: ہم معیاری مساوات $y^2 = 4px$ میں $p$ کی قیمت تلاش کرتے ہیں:

$$4p = 10 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

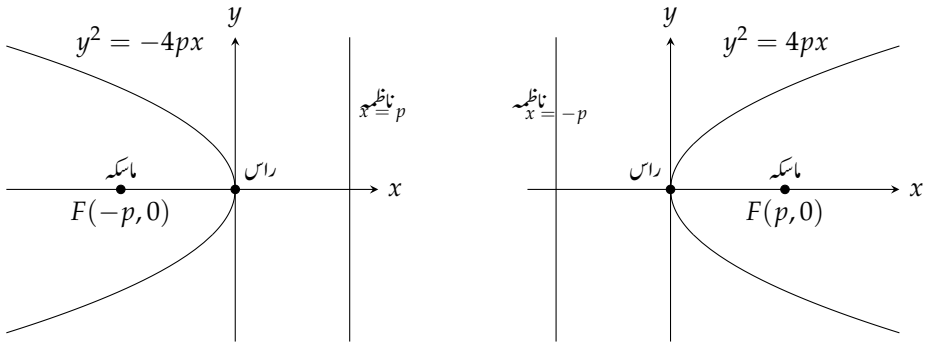
اس کے بعد ہم حاصل کردہ $p$ کے لئے ماسکہ اور ناظمہ تلاش کرتے ہیں۔

$$(p,0) = \left(\frac{5}{2},0\right) \qquad \text{ماسکہ}$$

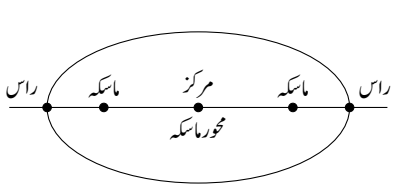
$$x = -p, \qquad x = -\frac{5}{2} \qquad \text{ناظمہ}$$

□

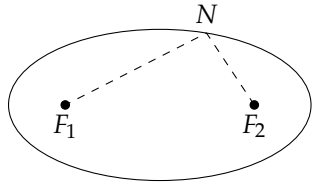
جدول ۱.۱۰ کے کلیات پر حصہ ۱.۴ میں دیے گئے کلیات انتقال لاگو کرتے ہوئے دیگر مقامات پر واقع قطع مکافی کے مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ (سوال ۱۰.۳۹، سوال ۱۰.۴۰ اور سوال ۱۰.۴۵ تا سوال ۱۰.۴۸ دیکھیں۔)




شکل ۱۰.۳: قطع مکافی $y^2 = 4px$ اور $y^2 = -4px$ کے ترسیمات۔




شکل ۱۰.۵: ترخیم پر اہم نقطے۔




شکل ۱۰.۴: دونوں ماسکوں ( $F_1$ اور $F_2$ ) سے کسی بھی نقطہ $N$ تک فاصلوں کا مجموعہ (نقطہ دار لکیر) ایک مستقل ہے۔

## ترخیم

تعریف: ایک مستوی پر رہتے ہوئے، مستوی پر دو مقررہ نقطوں سے جن نقطوں کے فاصلوں کا مجموعہ مستقل ہو، ان کے سلسلہ کو **ترخیم**[۱۰] کہتے ہیں۔ ان دو مقررہ نقطوں کو ترخیم کے **ماسکے** کہتے ہیں (شکل ۱۰.۴ اور شکل ۱۰.۵)۔

□

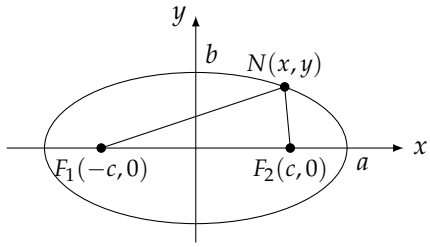
ترخیم کو اس کی تعریف استعمال کرتے ہوئے بہت جلد ترسیم کیا جا سکتا ہے۔ مقررہ نقطوں $F_1$ اور $F_2$ پر ڈوری باندھیں۔ ڈوری کو قلم سے کھینچ کر رکھتے ہوئے قلم کو بند دائری حرکت دیں۔ چونکہ ڈوری کی لمبائی مستقل ہے لہذا قلم ترخیم کو ترسیم کرے گا (شکل ۱۰.۴)۔

اگر ماسکے $F_1(-c, 0)$ اور $F_2(c, 0)$ ہوں (شکل ۱۰.۶) اور فاصلہ $NF_1 + NF_2$ کو $2a$ سے ظاہر کیا جائے تب ترخیم پر نقطہ $N(x, y)$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

---

[۱۰] ellipse




شکل ۱۰.۶: ترخیم کی تعریف $NF_1 + NF_2 = 2a$ اور اس کی مساوات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ہے۔

اس مساوات کی سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر ہم دوسرے جذری جزو کو دائیں منتقل کر کے دونوں اطراف کا مربع لے کر حاصل واحد جذری جزو کو ایک ہاتھ رکھتے ہوئے دوبارہ مربع لیتے ہیں۔ نتیجتاً درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 \tag{۱۰.۲}$$

چونکہ $NF_1 + NF_2$ کی لمبائی $F_1F_2$ کی لمبائی سے زیادہ ہے (تکون $NF_1F_2$ کے لئے تکونی عدم مساوات) لہٰذا عدد $2a$ عدد $2c$ سے بڑا ہو گا۔ یوں $a > c$ ہو گا لہٰذا مساوات ۱۰.۲ میں $a^2 - c^2$ ایک مثبت عدد ہو گا۔

ہم مساوات ۱۰.۲ حاصل کرنے کے اقدام کو الٹ کرتے ہوئے دکھا سکتے ہیں کہ ہر وہ نقطہ جو مساوات ۱۰.۲ کو $0 < c < a$ کے لئے مطمئن کرتا ہو $NF_1 + NF_2 = 2a$ کو بھی مطمئن کرے گا۔ یوں ایک نقطہ صرف اور صرف اس صورت ترخیم پر پایا جائے گا اگر وہ مساوات ۱۰.۲ کو مطمئن کرتا ہو۔

اگر

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \tag{۱۰.۳}$$

ہو تب $a^2 - c^2 = b^2$ ہو گا اور مساوات ۱۰.۲ درج ذیل صورت اختیار کرے گی۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{۱۰.۴}$$

مساوات ۱۰.۴ کے تحت مبدا اور دونوں محوروں کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔ یہ $x = \pm a$ اور $y = \pm b$ لکیروں میں بند مستطیل کے اندر پایا جاتا ہے۔ یہ محوروں کو نقطہ $(\pm a, 0)$ اور $(0, \pm b)$ پر قطع کرتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$ مساوات ۱۰.۴ سے حاصل کیا گیا

کی قیمت $x = 0$ پر صفر اور $y = 0$ پر لا متناہی ہے لہٰذا $(\pm a, 0)$ اور $(0, \pm b)$ پر مماس محوروں کو عمودی ہوں گے۔

### ترخیم کا اکبر اور اصغر محور

مساوات ۱۰.۴ کی ترخیم کا **اکبر محور**[۱] نقاط $(\pm 2, 0)$ کو جوڑنا والی لکیر ہے جس کی لمبائی $2a$ ہے۔ اس کے **اصغر محور**[۲] کی لمبائی $2b$ ہے جو نقاط $(0, \pm b)$ کے بیچ لکیر ہے۔ عدد $a$ از خود نصف اکبر محور جبکہ عدد نصف اصغر محور کہلاتے ہیں۔ مساوات ۱۰.۳ سے عدد $c$

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

حاصل ہوتا ہے جو مرکز تا ماسکہ فاصلہ ہے۔

مثال ۱۰.۲: افقی اکبر محور
درج ذیل ترخیم

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{۱۰.۵}$$

جس کو شکل ۱۰.۷ میں دکھایا گیا ہے کے لئے درج ذیل ہوں گے۔

| | |
|---|---|
| نصف اکبر محور | $a = \sqrt{16} = 4$ |
| نصف اصغر محور | $b = \sqrt{9} = 3$ |
| ماسکہ سے مرکز تک فاصلہ | $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$ |
| ماسکے | $(\pm c, 0) = (\pm 7, 0)$ |
| راس | $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$ |
| مرکز | $(0, 0)$ |

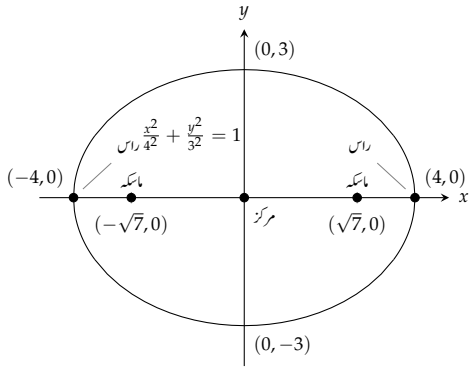
□

مثال ۱۰.۳: عمودی اکبر محور
مساوات ۱۰.۵ میں $x$ اور $y$ کو ایک دوسرے کے ساتھ بدل کر درج ذیل ترخیم حاصل ہوتا ہے

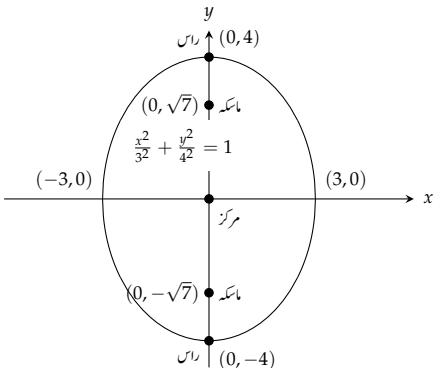
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 \tag{۱۰.۶}$$

---

[۱] major axis
[۲] minor axis




شکل ۱۰.۷: اکبر محور افقی ہے۔ (مثال ۱۰.۲)




شکل ۱۰.۸: اکبر محور عمودی ہے۔ (مثال ۱۰.۳)

جس کو شکل ۱۰.۸ میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے لئے درج ذیل ہوں گے۔

| | |
|---|---|
| نصف اکبر محور | $a = \sqrt{16} = 4$ |
| نصف اصغر محور | $b = \sqrt{9} = 3$ |
| ماسکہ سے مرکز تک فاصلہ | $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$ |
| ماسکے | $(0, \pm c) = (0, \pm 7)$ |
| راس | $(0, \pm a) = (0, \pm 4)$ |
| مرکز | $(0, 0)$ |

□

مساوات ۱۰.۵ اور مساوات ۱۰.۶ کو سمجھنے میں کبھی دشواری پیش نہیں آتی ہے۔ ہم محددی محور پر نقطہ قطع معلوم کر کے لمبی محور کو اکبر محور چنتے ہیں۔ مرکز ان صورتوں میں مبدا پر ہو گا اور ماسکہ اکبر محور پر پائے جائیں گے۔

## مبدا پر مرکز والے ترخیم کے معیاری مساوات

| | |
|---|---|
| $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$ | $x$ محور پر ماسکہ |
| $c=\sqrt{a^2-b^2}$ | مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ |
| $(\pm c, 0)$ | ماسکے |
| $(\pm a, 0)$ | راس |

| | |
|---|---|
| $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad (a>b)$ | $y$ محور پر ماسکہ |
| $c=\sqrt{a^2-b^2}$ | مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ |
| $(0, \pm c)$ | ماسکے |
| $(0, \pm a)$ | راس |

دونوں صورتوں میں نصف اکبر محور $a$ اور نصف اصغر محور $b$ ہیں۔

### قطع زائد

تعریف: ایک مستوی میں رہتے ہوئے مستوی میں دو مقررہ نقطوں سے جن نقطوں کے فاصلوں کا فرق ایک مستقل ہو، ان تمام نقطوں کے سلسلہ کو **قطع زائد**[۱۳] کہتے ہیں۔ یہ دو مقررہ نقطے قطع زائد کے **ماسکہ** کہلاتے ہیں۔

□

اگر ماسکے $F_1(-c,0)$ اور $(F_2(c,0))$ ہوں (شکل ۱۰.۹) اور مستقل فرق $2a$ ہو تب نقطہ $(x,y)$ صرف اور صرف اس صورت قطع زائد پر پایا جائے گا جب درج ذیل مطمئن ہو۔

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \tag{۱۰.۷}$$

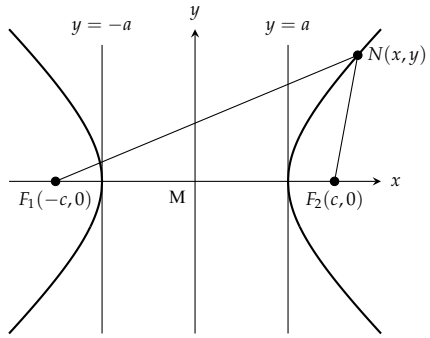
اس مساوات کی سادہ روپ حاصل کرنے کی خاطر ہم دوسرے جذر کو دائیں ہاتھ منتقل کر کے دونوں ہاتھ کا مربع لے کر جذر کو ایک ہاتھ رکھ کر دوبارہ دونوں ہاتھ کا مربع لیتے ہیں۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1 \tag{۱۰.۸}$$

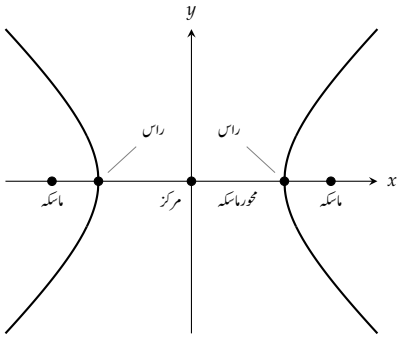
اب تک یہ مساوات بالکل ترخیم کی مساوات کی طرح ہے۔ البتہ اب چونکہ تکون $NF_1F_2$ کے دو اضلاع کا فرق $2a$ ہے جو تیسرے ضلع $2c$ سے کم ہو گا لہٰذا $a^2-c^2$ منفی قیمت ہے۔

---

[۱۳] hyperbola




شکل ۱۰.۹: قطع زائد کے دائیں بازو کے لئے $NF_1 - NF_2 = 2a$ جبکہ بائیں بازو کے لئے $NF_2 - NF_1 = 2a$ ہوگا۔




شکل ۱۰.۱۰: قطع مکافی کے محور ماسکہ پر نقطے۔

ہم مساوات ۱۰.۸ کے حصول کے اقدام کو الٹ کرتے ہوئے دکھا سکتے ہیں کہ ہر وہ نقطہ $N$ جو $0 < a < c$ کے لئے اس طرز کی مساوات کو مطمئن کرتا ہو، مساوات ۱۰.۷ کو بھی مطمئن کرے گا۔ یوں ایک نقطہ صرف اور صرف اس صورت قطع زائد پر پایا جائے گا اگر اس کے محدد مساوات ۱۰.۸ کو مطمئن کرتے ہوں۔

اگر ہم $c^2 - a^2$ کے مثبت جذر کو $b$ سے ظاہر کریں،

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \tag{۱۰.۹}$$

تب $a^2 - c^2 = -b^2$ ہوگا اور مساوات ۱۰.۸ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{۱۰.۱۰}$$

قطع زائد کی مساوات ۱۰.۱۰ اور ترخیم کی مساوات ۱۰.۴ میں فرق منفی علامت کا اور درج ذیل نئے تعلق کا ہے۔

$$c^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{مساوات ۱۰.۹ سے حاصل کیا گیا}$$

ترخیم کی طرح قطع زائد بھی مبدا اور محددی محوروں کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔ یہ $x$ محور کو نقطہ $(\pm a, 0)$ پر قطع کرتا ہے اور ان نقطوں پر چونکہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b^2 x}{a^2 y} \qquad \text{مساوات ۱۰.۱۰ سے حاصل کیا گیا}$$

ہے لہٰذا یہاں مماس عمودی ہوں گے۔

تعریف: قطع زائد کے ماسکوں کے بیچ لکیر کو **محور ماسکہ**[۱۴] کہتے ہیں جس کے وسطی نقطہ کو قطع مکافی کا **مرکز**[۱۵] کہتے ہیں۔ جن نقطوں پر محور ماسکہ اور قطع مکافی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہوں، انہیں **راس**[۱۶] کہتے ہیں (شکل ۱۰.۱۰)۔

□

## قطع زائد کے متقارب؛ ترسیم کا عمل

قطع زائد

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{۱۰.۱۱}$$

کے دو **متقارب**[۱۷] درج ذیل لکیریں ہیں۔

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

متقارب کی مدد سے ہم قطع زائد کو جلدی ترسیم کر پاتے ہیں۔ متقارب کی مساوات حاصل کرنے کا آسان ترین طریقہ مساوات ۱۰.۱۱ میں دائیں ہاتھ 1 کی جگہ 0 پر کر کے $y$ کے لئے حل کرنا ہے:

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\text{قطع زائد}} \implies \underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0}_{\text{1 کی جگہ 0}} \implies \underbrace{y = \pm\frac{b}{a}x}_{\text{متقارب}}$$

---

[۱۴] focal axis
[۱۵] center
[۱۶] vertices
[۱۷] asymptotes

## مرکز پر مبدا والے قطع زائد کی معیاری مساواتیں

| | |
|---|---|
| محور $x$ پر ماسکے ہیں | $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ |
| مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ | $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ |
| ماسکے | $(\pm c, 0)$ |
| راس | $(\pm a, 0)$ |
| متقارب | $y = \pm \frac{b}{a} x$ |

| | |
|---|---|
| محور $y$ پر ماسکے ہیں | $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ |
| مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ | $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ |
| ماسکے | $(0, \pm c)$ |
| راس | $(0, \pm a)$ |
| متقارب | $y = \pm \frac{a}{b} x$ |

دھیان رہے کہ پہلی صورت میں متقارب کی مساوات میں $\frac{b}{a}$ اور دوسری صورت میں $\frac{a}{b}$ ہیں۔

### قطع زائد ترسیم کرنے کا عمل

قطع زائد $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ترسیم کرنے کے لئے درج ذیل اقدام کریں (شکل ۱۰.۱۱)۔

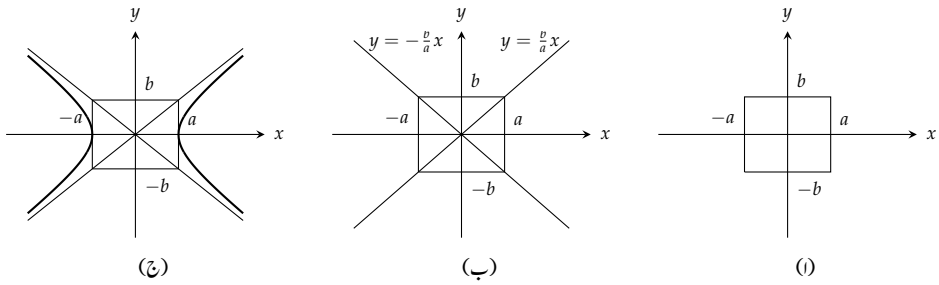
ا. نقاط $(\pm a, 0)$ اور $0, \pm b$ کو ترسیم کرتے ہوئے اس مستطیل کو مکمل کریں جن کے اضلاع میں یہ نقطے پائے جاتے ہوں۔

ب. مستطیل کے وتر کو بڑھا کر متقارب ترسیم کریں۔

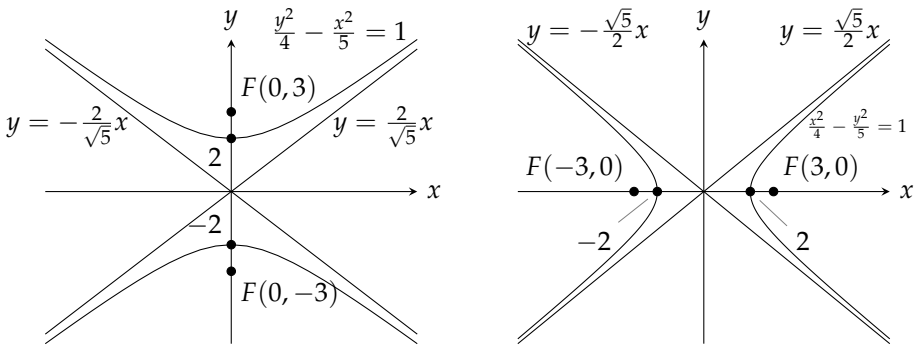
ج. مستطیل اور متقارب کو راہ بر لیتے ہوئے قطع زائد ترسیم کریں۔

مثال ۱۰.۴: محور $x$ پر ماسکے
درج ذیل قطع زائد کی مساوات ہے (شکل ۱۰.۱۲)

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$$




شکل ۱۰.۱۱: متقارب کی مدد سے قطع زائد کی ترسیم۔




شکل ۱۰.۱۲: قطع زائد (مثال ۱۰.۴)

شکل ۱۰.۱۳: قطع زائد (مثال ۱۰.۵)

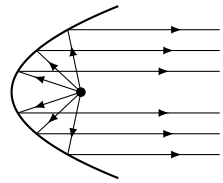
جس میں $a^2 = 4$ اور $b^2 = 5$ ہیں (مساوات ۱۰.۱۰)۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

| | |
|---|---|
| مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ | $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+5} = 3$ |
| ماسکے | $(\pm c, 0) = (\pm 3, 0)$ |
| راس | $(\pm a, 0) = (\pm 2, 0)$ |
| متقارب | $y = \pm \frac{\sqrt{5}}{2} x$ |

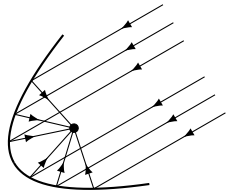
□

مثال ۱۰.۵: درج ذیل قطع زائد کو مثال ۱۰.۴ کے قطع زائد میں $x$ اور $y$ کو ایک دوسرے کے ساتھ بدل کر حاصل کیا گیا ہے۔

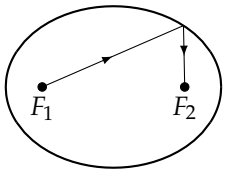
$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$



شکل ۱۰.۱۴: قطع مکافی آئینہ کے ماسکہ سے نکلتا شعاع انعکاس کے بعد محور کے متوازی ہو گا۔



شکل ۱۰.۱۵: قطع مکافی عاکس پر آمد شعاع ماسکہ پر پہنچتا ہے۔




شکل ۱۰.۱۶: ترخیم کے ایک ماسکہ سے خارج شعاع دوسرے ماسکہ پر پہنچتا ہے۔

اس قطع زائد کے راس عمودی محور پر پائے جائیں گے (شکل ۱۰.۱۳)۔اب بھی $a^2 = 4$ اور $b^2 = 5$ ہوں گے۔یوں درج ذیل ہو گا۔

| | |
|---|---|
| مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ | $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4+5} = 3$ |
| ماسکے | $(0, \pm c) = (0, \pm 3)$ |
| راس | $(0, \pm a) = (0, \pm 2)$ |
| مرکز | $(0, 0)$ |
| متقارب | $y = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} x$ |

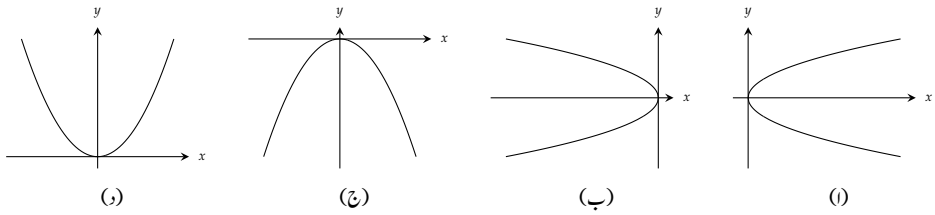
□

## عکسی خواص

قطع مکافی کا اہم ترین استعمال بطور شعاع اور ریڈیو امواج کا عاکس ہے۔ قطع مکافی کے ماسکہ سے خارج شعاع، قطع مکافی کے محور کے متوازی منعکس ہوتا ہے (شکل ۱۰.۱۴)۔ یہ خاصیت ہاتھ بتی اور گاڑیوں کی اگلی بتیوں میں بروئے کار لایا جاتا ہے۔اس کے علاوہ خرد امواج نشر کرنے کے لئے بھی قطع مکافی اینٹینا استعمال کیا جاتا ہے جو نقطہ منبع سے خارج برقناطیسی امواج کو ایک محدود شعاع کی صورت میں خارج کرتا ہے۔اس کے برعکس قطع مکافی عاکس کے محور کے متوازی آمد برقناطیسی امواج عاکس کے ماسکہ پر مرکوز کیے جاتے ہیں (شکل ۱۰.۱۵)۔اس خاصیت کی بنا ٹیلی وژن کا ڈش اینٹینا یا ریڈیو دوربین کمزور اشارات کو اکٹھے کر کے زیادہ طاقتور اشارہ حاصل کرتا ہے۔اسی طرح سورج کی روشنی کو ایک نقطہ پر مرتکز کیا جا سکتا ہے۔

ایک ترخیم کو اس کے محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جا سکتا ہے جو **ترخیمی سطح**[۱۸] کہلاتا ہے۔اس کی اندرونی سطح پر چاندی کی تہہ لگا کر آئینہ بنایا جا سکتا ہے۔ ایک ماسکہ سے خارج شعاع دوسرے ماسکہ پر منعکس ہو گا (شکل ۱۰.۱۶ اور سوال ۱۰.۲۲)۔ ترخیمی سطح اسی طرح آواز کو بھی ایک ماسکہ سے دوسرے ماسکہ منتقل کرتا ہے۔اس خاصیت کو استعمال کرتے ہوئے کمرہ سرگوشی بنایا جا سکتا ہے جس میں ایک ماسکہ پر بیٹھا شخص دوسرے ماسکہ پر بیٹھے شخص کے ساتھ سرگوشی سے

[۱۸] ellipsoid




شکل ۱۰.۱۷: ترسیم برائے سوال ۱۰.۱ تا سوال ۱۰.۴

باتیں کر سکتا ہے۔ کمرہ سرگوشی میں موجود باقی لوگ ان کی باتیں سننے سے قاصر ہوں گے۔ ہوائی جہازوں کی کارکردگی پر ہوائی سرنگ میں غور کیا جاتا ہے۔ جہاز کے شور پر غور کرتے ہوئے نقطہ غور کو ترخیمی سطح کے ایک ماسکہ پر رکھا جاتا ہے جبکہ مائکروفون کو اس کی دوسرے ماسکہ پر رکھا جاتا ہے۔ دیگر نقطوں سے پیدا شور کے اثر کو یوں بہت کم کرنا ممکن ہوتا ہے۔

قطع زائد آئینہ کے ایک ماسکہ پر آمد شعاع کو آئینہ دوسرے ماسکہ پر بھیجتا ہے۔ قطع مکافی سطح، ترخیمی سطح اور قطع مکافی سطحوں کے خواص کو استعمال کرتے ہوئے جدید دوربین تیار کیے جاتے ہیں۔

## سوالات

### ترسیم کی پہچان

سوال ۱۰.۱ تا سوال ۱۰.۴ میں دی گئی قطع مکافی کی مساوات درج ذیل میں تلاش کریں۔

$$x^2 = 2y, \quad x^2 = -6y, \quad y^2 = 8x, \quad y^2 = -4x$$

اس کے بعد قطع مکافی کے ماسکہ اور ناظمہ دریافت کریں۔

سوال ۱۰.۱: شکل ۱۰.۱۷-ا

سوال ۱۰.۲: شکل ۱۰.۱۷-ب

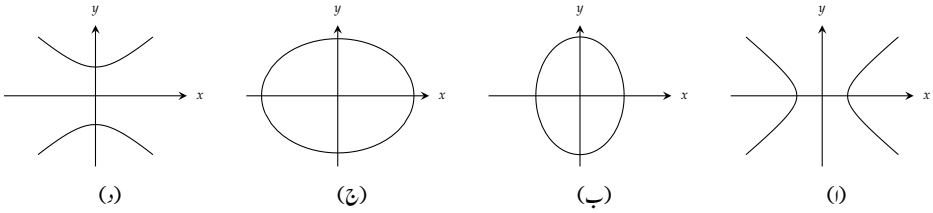
سوال ۱۰.۳: شکل ۱۰.۱۷-ج

سوال ۱۰.۴: شکل ۱۰.۱۷-د

سوال ۱۰.۵ تا سوال ۱۰.۸ میں دیے گئے مخروط کی مساوات درج ذیل میں تلاش کریں۔

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \quad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, \quad \frac{y^2}{4} - x^2 = 1, \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

دیے گئے مخروط کا ماسکہ اور راس تلاش کریں۔ اگر قطع زائد دیا گیا ہو تب اس کے متقارب بھی دریافت کریں۔




شکل ۱۰.۱۸: ترسیمات برائے سوال ۱۰.۵ تا سوال ۱۰.۸

سوال ۱۰.۵: ترسیم شکل ۱۰.۱۸-ا میں دیا گیا ہے۔

سوال ۱۰.۶: ترسیم شکل ۱۰.۱۸-ب میں دیا گیا ہے۔

سوال ۱۰.۷: ترسیم شکل ۱۰.۱۸-ج میں دیا گیا ہے۔

سوال ۱۰.۸: ترسیم شکل ۱۰.۱۸-د میں دیا گیا ہے۔

## قطع مکافی

سوال ۱۰.۹ تا سوال ۱۰.۱۶ میں دیے گئے قطع مکافی کا ماسکہ اور ناظمہ تلاش کرنے کے بعد اس کو ترسیم کریں۔ ماسکہ اور ناظمہ کو بھی ترسیم میں شامل کریں۔

سوال ۱۰.۹: $y^2 = 12x$

سوال ۱۰.۱۰: $x^2 = 6y$

سوال ۱۰.۱۱: $x^2 = -8y$

سوال ۱۰.۱۲: $y^2 = -2x$

سوال ۱۰.۱۳: $y = 4x^2$

سوال ۱۰.۱۴: $y = -8x^2$

سوال ۱۰.۱۵: $x = -3y^2$

سوال ۱۰.۱۶: $x = 2y^2$

## ترخیم

سوال ۱۰.۱۷ تا سوال ۱۰.۲۴ میں دیے گئے ترخیم کی مساوات کو معیاری روپ میں لکھ کر ترسیم کریں۔ ترسیم پر ماسکے دکھائیں۔

سوال ۱۰.۱۷: $16x^2 + 25y^2 = 400$

سوال ۱۰.۱۸: $7x^2 + 16y^2 = 112$

سوال ۱۰.۱۹: $2x^2 + y^2 = 2$

سوال ۱۰.۲۰: $2x^2 + y^2 = 4$

سوال ۱۰.۲۱: $3x^2 + 2y^2 = 6$

سوال ۱۰.۲۲: $9x^2 + 10y^2 = 90$

سوال ۱۰.۲۳: $6x^2 + 9y^2 = 54$

سوال ۱۰.۲۴: $169x^2 + 25y^2 = 4225$

سوال ۱۰.۲۵ اور سوال ۱۰.۲۶ میں $xy$ مستوی میں پائے جانے والے ترخیم کے ماسکہ اور راس دیے گئے ہیں۔ ترخیم کا مرکز $xy$ مستوی کے مبدا پر ہے۔ ترخیم کی معیاری مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۲۵: ماسکے $(\pm\sqrt{2}, 0)$ اور راس $(\pm 2, 0)$

سوال ۱۰.۲۶: ماسکے $(0, \pm 4)$ اور راس $(0, \pm 5)$

## قطع زائد

سوال ۱۰.۲۷ تا سوال ۱۰.۳۴ میں قطع زائد کی مساواتیں دی گئی ہیں۔ مساوات کو معیاری روپ میں لکھیں اور قطع زائد کا متقارب دریافت کریں۔ قطع زائد کا خاکہ کھینچ کر متقارب اور ماسکہ بھی دکھائیں۔

سوال ۱۰.۲۷: $x^2 - y^2 = 1$

سوال ۱۰.۲۸: $9x^2 - 16y^2 = 144$

سوال ۱۰.۲۹: $y^2 - x^2 = 8$

سوال ۱۰.۳۰: $y^2 - x^2 = 4$

سوال ۱۰.۳۱: $8x^2 - 2y^2 = 16$

سوال ۱۰.۳۲: $y^2 - 3x^2 = 3$

سوال ۱۰.۳۳: $8y^2 - 2x^2 = 16$

سوال ۱۰.۳۴: $64x^2 - 36y^2 = 2304$

سوال ۱۰.۳۵ تا سوال ۱۰.۳۸ میں $xy$ مستوی پر پائے جانے والے قطع زائد کے ماسکہ، راس اور متقارب کی معلومات دی گئی ہے۔ قطع زائد کا مرکز $xy$ مستوی کے مبدا پر ہے۔ قطع زائد کی معیاری مساوات حاصل کریں۔

سوال ۱۰.۳۵: ماسکے $(0, \pm\sqrt{2})$ اور متقارب $y = \pm x$

سوال ۱۰.۳۶: ماسکے $(\pm 2, 0)$ اور متقارب $y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$

سوال ۱۰.۳۷: راس $(\pm 3, 0)$ اور متقارب $y = \pm \frac{4}{3}x$

سوال ۱۰.۳۸: راس $(0, \pm 2)$ اور متقارب $y = \pm \frac{1}{2}x$

## مخروطی حصوں کا انتقال

سوال ۱۰.۳۹: قطع مکافی $y^2 = 8x$ کو 2 اکائیاں نیچے اور 1 اکائی دائیں منتقل کر کے قطع مکافی $(y+2)^2 = 8(x-1)$ پیدا کیا جاتا ہے۔(الف) نئے قطع مکافی کے راس، ماسکہ اور ناظمہ دریافت کریں۔(ب) نئے راس، ماسکہ اور ناظمہ کو ترسیم کرتے ہوئے نئے قطع مکافی کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۰.۴۰: قطع مکافی $x^2 = -4y$ کو 1 اکائی بائیں اور 3 اکائیاں اوپر منتقل کر کے قطع مکافی $(x+1)^2 = -4(y-3)$ پیدا کیا جاتا ہے۔(الف) نئے قطع مکافی کا راس، ماسکہ اور ناظمہ دریافت کریں۔(ب) نئے راس، ماسکہ اور ناظمہ کو ترسیم کرتے ہوئے نئے قطع مکافی کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۰.۴۱: ترخیم $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ کو 4 اکائیاں دائیں اور 3 اکائیاں اوپر منتقل کر کے ترخیم $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$ پیدا کیا جاتا ہے۔(الف) نئے ترخیم کے ماسکے، راس اور مرکز دریافت کریں۔(ب) نئے ماسکے، راس اور مرکز ترسیم کرتے ہوئے نئے ترخیم کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۰.۴۲: ترخیم $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ کو 3 اکائیاں بائیں اور 2 اکائیاں نیچے منتقل کر کے ترخیم $\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$ پیدا کیا جاتا ہے۔(الف) نئے ترخیم کے ماسکے، راس اور مرکز دریافت کریں۔(ب) نئے ماسکے، راس اور مرکز ترسیم کرتے ہوئے نئے ترخیم کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۰.۴۳: قطع زائد $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ کو 2 اکائیاں دائیں منتقل کر کے قطع زائد $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ پیدا کیا جاتا ہے۔(الف) نئے قطع زائد کا مرکز، ماسکے، راس اور متقارب دریافت کریں۔(ب) نئے مرکز، ماسکے، راس اور متقارب ترسیم کرتے ہوئے نئے قطع زائد کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۰.۴۴: قطع زائد $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ کو 2 اکائیاں نیچے منتقل کرتے ہوئے قطع زائد $\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$ پیدا کیا جاتا ہے۔(الف) نئے قطع زائد کا مرکز، ماسکے اور متقارب دریافت کریں۔(ب) نیا مرکز، ماسکے اور متقارب ترسیم کر کے نئے قطع زائد کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۱۰.۴۵ تا سوال ۱۰.۴۸ میں قطع مکافی کی مساوات اور اس کی منتقلی کی معلومات دی گئی ہے۔ نئے قطع مکافی کی مساوات تلاش کر کے نئے قطع مکافی کا راس، ماسکہ اور ناظمہ معلوم کریں۔

سوال ۱۰.۴۵: $y^2 = 4x$ ، 2 اکائیاں بائیں اور 3 اکائیاں نیچے۔

سوال ۱۰.۴۶: $y^2 = -12x$ ، 4 اکائیاں دائیں اور 3 اکائیاں اوپر۔

سوال ۱۰.۴۷: $x^2 = 8y$ ، 1 اکائی دائیں اور 7 اکائیاں نیچے۔

سوال ۱۰.۴۸: $x^2 = 6y$ ، 3 اکائیاں بائیں اور 2 اکائیاں نیچے۔

سوال ۱۰.۴۹ تا سوال ۱۰.۵۲ میں ترخیم کی مساوات اور اس کی منتقلی کی معلومات دی گئی ہے۔ نئے ترخیم کی مساوات تلاش کر کے نئے ترخیم کے ماسکے، راس اور مرکز معلوم کریں۔

سوال ۱۰.۴۹: $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$ ، 2 اکائیاں بائیں اور 1 اکائی نیچے۔

سوال ۱۰.۵۰: $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ، 3 اکائیاں دائیں اور 4 اکائیاں اوپر۔

سوال ۱۰.۵۱: $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ ، 2 اکائیاں دائیں اور 3 اکائیاں اوپر۔

سوال ۱۰.۵۲: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ ، 43 اکائیاں بائیں اور 5 اکائیاں نیچے۔

سوال ۱۰.۵۳ تا سوال ۱۰.۵۶ میں قطع زائد کی مساوات اور اس کی منتقلی کی معلومات دی گئی ہے۔ نئے قطع زائد کی مساوات تلاش کر کے نئے قطع زائد کا مرکز، ماسکے، راس اور متقارب معلوم کریں۔

سوال ۱۰.۵۳: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ دائیں 2 اکائیاں اور اوپر 2 اکائیاں۔

سوال ۱۰.۵۴: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ بائیں 5 اکائیاں اور نیچے 1 اکائی۔

سوال ۱۰.۵۵: $y^2 - x^2 = 1$ بائیں 1 اکائی اور نیچے 1 اکائی۔

سوال ۱۰.۵۶: $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$ دائیں 1 اکائی اور اوپر 3 اکائیاں۔

سوال ۱۰.۵۷ تا سوال ۱۰.۶۸ میں دیے گئے مخروط حصوں کا (جیسا مناسب ہو) مرکز، ماسکے، راس، متقارب اور رداس دریافت کریں۔

سوال ۱۰.۵۷: $x^2 + 4x + y^2 = 12$

سوال ۱۰.۵۸: $2x^2 + 2y^2 - 28x + 12y + 144$

سوال ۱۰.۵۹: $x^2 + 2x + 4y - 3 = 0$

سوال ۱۰.۶۰: $y^2 - 4y - 8x - 12 = 0$

سوال ۱۰.۶۱: $x^2 + 5y^2 + 4x = 1$

سوال ۱۰.۶۲: $9x^2 + 6y^2 + 36y = 0$

سوال ۱۰.۶۳: $x^2 + 2y^2 - 2x - 4y = -1$

سوال ۱۰.۶۴: $4x^2 + y^2 + 8x - 2y = -1$

سوال ۱۰.۶۵: $x^2 - y^2 - 2x + 4y = 4$

سوال ۱۰.۶۶: $x^2 - y^2 + 4x - 6y = 6$

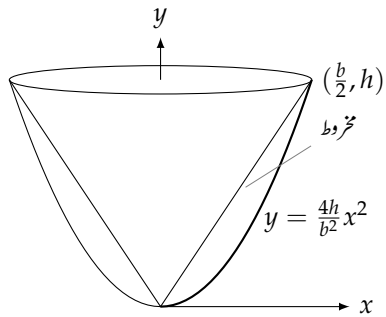
سوال ۱۰.۶۷: $2x^2 - y^2 + 6y = 3$

سوال ۱۰.۶۸: $y^2 - 4x^2 + 16x = 24$

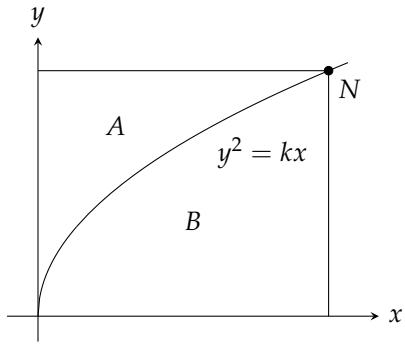
## عدم مساوات

سوال ۱۰.۶۹ تا سوال ۱۰.۷۴ میں ایک خطہ کو مطمئن کرنے والی عدم مساوات یا عدم مساوات کی جوڑی دی گئی ہے۔ $xy$ مستوی میں اس خطہ کو ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۶۹: $9x^2 + 16y^2 \leq 144$




شکل ۱۰.۱۹: جسم طواف برائے سوال ۱۰.۷۵




شکل ۱۰.۲۰: خطے برائے سوال ۱۰.۸۱

سوال ۱۰.۷۰: $4x^2 + y^2 \leq 4$ اور $x^2 + y^2 \geq 1$

سوال ۱۰.۷۱: $4x^2 + 9y^2 \leq 36$ اور $x^2 + 4y^2 \geq 4$

سوال ۱۰.۷۲: $(x^2 + y^2 - 4)(x^2 + 9y^2 - 9) \leq 0$

سوال ۱۰.۷۳: $4y^2 - x^2 \geq 4$

سوال ۱۰.۷۴: $\left|x^2 - y^2\right| \leq 1$

## نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۰.۷۵: قطع مکافی ٹھوس جسم کے حجم کا کلیہ آرشمیدسی

قطع مکافی $y = \frac{4h}{b^2}x^2$ اور لکیر $y = h$ میں گھیرے ہوئے خطے کو $y$ محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ دکھائیں کہ اس جسم کا حجم مطابقتی مخروط کے حجم کا $\frac{3}{2}$ گنّا ہوگا (شکل ۱۰.۱۹)۔

سوال ۱۰.۷۶: معلق پل کی رسیاں قطع مکافی کی صورت میں لٹکی ہوتی ہیں۔

ایک معلق پل کی کمیت $m$ کلو گرام فی میٹر ہے۔ اس پل کو رسیوں سے لٹکایا گیا ہے۔ اگر مبدا پر رسی کا افقی تناو $H$ ہو تب رسی کی منحنی درج ذیل مساوات کو مطمئن کرتی ہے جہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{mg}{H}x$$

اس تفرقی مساوات کو حل کرتے ہوئے دکھائیں کہ رسی کی منحنی کی مساوات ایک قطع مکافی ہے۔ $x = 0$ پر $y = 0$ ابتدائی معلومات ہے۔

سوال ۱۰.۷۷: نقاط $(1,0)$ ، $(0,1)$ اور $(2,2)$ سے گزرتے دائرے کی مساوات دریافت کریں۔

سوال ۱۰.۷۸: نقاط $(2,3)$ ، $(3,2)$ اور $(-4,3)$ سے گزرتے دائرے کی مساوات دریافت کریں۔

سوال ۱۰.۷۹: ایک دائرہ جس کا مرکز $(-2,1)$ پر ہے نقطہ $(1,3)$ سے گزرتا ہے۔ کیا نقطہ $(1.1,2.8)$ اس دائرے پر، اس کے اندر یا اس کے باہر پایا جاتا ہے؟

سوال ۱۰.۸۰: جہاں دائرہ $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ محددی محوروں کو قطع کرتا ہے وہاں اس دائرے کے مماس معلوم کریں۔

سوال ۱۰.۸۱: قطع مکافی $y^2=kx,\ k>0$ پر نقطہ $N$ سے محددی محور کے متوازی لکیریں کھینچی جاتی ہیں۔ ان لکیروں اور محددی محوروں کے کے بیچ مستطیل خطہ کو قطع مکافی دو حصوں $A$ اور $B$ میں تقسیم کرتا ہے (شکل ۱۰.۲۰)۔ (الف) دکھائیں کہ ان خطوں کو $y$ محور کے گرد گھما کر حاصل اجسام طواف کے حجم کی نسبت $1:4$ ہے۔ (ب) ان خطوں کو $x$ محور کے گرد گھما کر حاصل اجسام طواف کے حجم کی نسبت کیا ہو گی؟

سوال ۱۰.۸۲: دکھائیں کہ لکیر $x=-p$ پر کسی بھی نقطہ سے منحنی $y^2=4px$ پر دو مماس، آپس میں عمودی ہوں گے۔

سوال ۱۰.۸۳: ترخیم $x^2+4y^2=4$ میں محصور زیادہ سے زیادہ رقبے کے مستطیل کے اضلاع معلوم کریں۔ مستطیل کے اضلاع محددی محور کے متوازی ہیں۔

سوال ۱۰.۸۴: ترخیم $9x^2+4y^2=36$ کو (الف) $x$ محور، (ب) $y$ محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کا حجم معلوم کریں۔

سوال ۱۰.۸۵: ربع اول میں $x$ محور، لکیر $x=4$ اور قطع زائد $9x^2-4y^2=36$ کے بیچ تکونی خطہ کو $x$ محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۸۶: ایک خطہ کا بایاں سرحد محور $y$، دایاں سرحد قطع زائد $x^2-y^2=1$ جبکہ اس کا نچلا اور بالائی سرحد لکیر $y=\pm 3$ ہیں۔ اس خطہ کو $y$ محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۸۷: محور $x$ کے بالائی اور ترخیم $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ کے نیچے خطے کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۸۸: قطع زائد $y^2-x^2=1$ کے بالائی شاخ $y=\sqrt{x^2+1},\ 0\le x\le\sqrt{2}$ کو $x$ محور کر گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۸۹: پانی کی سطح کو پہلے $A$ اور بعد میں $B$ پر چھو کر شکل ۱۰.۲۱ میں دکھائے گئے امواج پیدا کئے گئے۔ جیسے جیسے یہ امواج پھیلتے ہیں، ان کا نقطہ قطع ایک منحنی بناتا ہے جو قطع زائد کی طرح معلوم ہوتا ہے۔ کیا ایسا حقیقتاً ہو گا؟ یہ جاننے کے لئے ہم $A$ اور $B$ پر مرکز دائروں کو امواج کا نمونہ لے سکتے ہیں۔

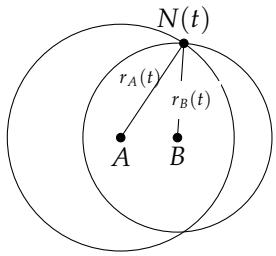
لمحہ $t$ پر نقطہ $N$ مرکز $A$ سے $r_A(t)$ اور $B$ سے $r_B(t)$ فاصلہ پر ہو گا۔ چونکہ دائروں کے رداس ایک مستقل رفتار (موج کی رفتار) سے بڑھتے ہیں لہٰذا $\frac{\mathrm{d}r_A}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r_B}{\mathrm{d}t}$ ہو گا۔ اس سے اخذ کریں کہ $r_A-r_B$ ایک مستقل ہو گا لہٰذا $N$ اس قطع زائد پر پایا جائے گا جس کے ماسکہ $A$ اور $B$ ہیں۔

سوال ۱۰.۹۰: قطع مکافی کے خواص انعکاس

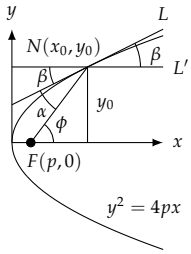
قطع مکافی $y^2=4px$ پر عمومی نقطہ $N(x_0,y_0)$ کو شکل ۱۰.۲۲ میں دکھایا گیا ہے۔ نقطہ $N$ پر لکیر $L$ اس قطع مکافی کا مماس ہے۔ قطع مکافی کا ماسکہ $F(p,0)$ ہے۔ نقطہ $N$ سے دائیں منعکس شعاع $L'$، محور $x$ کے متوازی ہے۔ ہم دکھاتے ہیں کہ $F$ سے خارج، $N$ پر پہنچتا شعاع انعکاس کے بعد $L'$ کا ہم مکان ہو گا۔ یہ دکھانے کی خاطر ہم دکھاتے ہیں کہ $\beta=\alpha$ ہو گا۔ اس مساوات کی تصدیق درج ذیل اقدام کے ذریعہ کریں۔

ا. دکھائیں کہ $\tan\beta=\frac{2p}{y_0}$ ہو گا۔

ب. دکھائیں کہ $\tan\phi=\frac{y_0}{x_0-p}$ ہو گا۔




شکل ۱۰.۲۱: امواج برائے سوال ۱۰.۸۹




شکل ۱۰.۲۲: قطع مکافی میں انعکاس (سوال ۱۰.۹۰)

ج. درج ذیل مماثل

$$\tan\alpha = \frac{\tan\phi - \tan\beta}{1 + \tan\phi\tan\beta}$$

استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $\tan\alpha = \frac{2p}{y_0}$ ہوگا۔ چونکہ $\alpha$ اور $\beta$ دونوں زاویہ حادہ ہیں لہٰذا $\tan\beta = \tan\alpha$ یعنی $\beta = \alpha$ ہو گا۔

## ۱۰.۲ سنک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی

ہم ہر مخروط حصہ کے ساتھ ایک عدد منسلک کر سکتے ہیں جس کو مخروط حصے کا سنک کہتے ہیں۔ سنک سے مخروط حصے کی قسم (دائرہ، ترخیم، قطع مکافی یا قطع زائد) معلوم کی جاسکتی ہے۔ ترخیم اور قطع زائد کی صورت میں یہ عدد مخروط کی عمومی جسامت کی معلومات بھی فراہم کرتا ہے۔

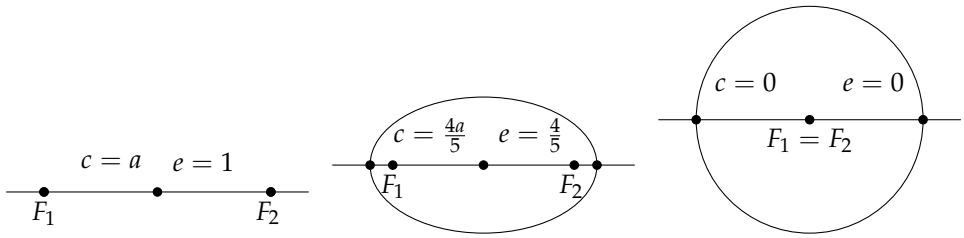
### سنک

اگرچہ مرکز سے ماسکہ تک فاصلہ $c$ درج ذیل مساوات میں نہیں پایا جاتا ہے

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$$

ترخیم کے لئے ہم $c$ کو $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ سے معلوم کر سکتے ہیں۔ اگر $a$ کو مستقل رکھ کر $c$ کو وقفہ $0 \leq c \leq a$ پر تبدیل کیا جائے تب حاصل ترخیم کی صورت بھی تبدیل ہو گی (شکل ۱۰.۲۳)۔ اگر $c = 0$ (یعنی $a = b$) ہو تب یہ دائرہ ہو گا جبکہ $c$ بڑھانے سے یہ چپٹا ہو گا۔ اگر $c = a$ ہو تب راس اور ماسکے ایک دوسرے کے اوپر ہوں گے اور ترخیم ایک سیدھی لکیر کی صورت اختیار کرے گا۔

ہم $c$ اور $a$ کی نسبت سے ترخیم کی صورت بیان کرتے ہیں۔ یہ نسبت ترخیم کی **سنک** کہلاتی ہے۔




شکل ۱۰.۲۳: اگر $c$ کو $0$ سے بڑھا کر $a$ کیا جائے تب ترخیم کی صورت دائرہ سے لکیر کی ہو جاتی ہے۔

جدول ۱۰.۲: سورج کے گرد سیاروں کے مداروں کی سنک

| عطارہ | زہرہ | زمین | مریخ | مشتری | زحل | یورانس | نیپچون | پلوٹو |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.21 | 0.01 | 0.02 | 0.09 | 0.05 | 0.06 | 0.05 | 0.01 | 0.25 |

تعریف: ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ (a > b)$ کی **سنک**[۱۹] درج ذیل ہے۔

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

□

نظام شمسی میں سورج کے گرد سیاروں کا مدار ترخیمی ہے۔ جیسا جدول ۱۰.۲ میں ان مدار کی سنک سے دیکھا جا سکتا ہے یہ زیادہ تر تقریباً دائری ہیں۔ پلوٹو کا مدار بہت سنکی ہے اور اس کی سنک $e = 0.21$ ہے۔ اسی طرح عطارہ کی سنک $0.21$ ہے۔ نظام شمسی کے دیگر ارکان کے مدار مزید زیادہ سنکی ہیں۔ مثال کے طور پر سیارچہ آئکارس جو تقریباً $1.4$ کلومیٹر چوڑا اور سورج کے گرد $409$ زمینی دنوں میں ایک چکر کاٹتا ہے کی سنک $0.83$ ہے۔

مثال ۱۰.۱: دم دار ستارہ ہالی کا مدار $36.18$ فلکیاتی اکائیاں لمبا اور $9.12$ فلکیاتی اکائیاں چوڑا ہے۔ فلکیاتی اکائی سے مراد زمین کے مدار کے نصف اکبر محور کی لمبائی ہے جو $149\,597\,870$ کلومیٹر ہے۔ اس کی سنک

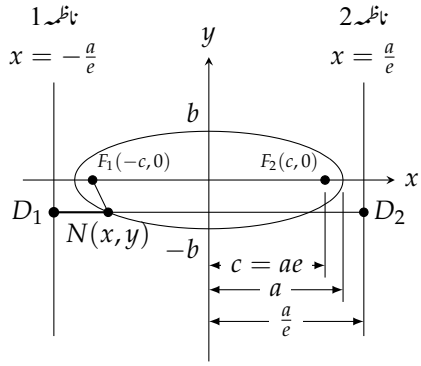
$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{(36.18/2)^2 + (9.12/2)^2}}{36.18/2} \approx 0.97$$

□

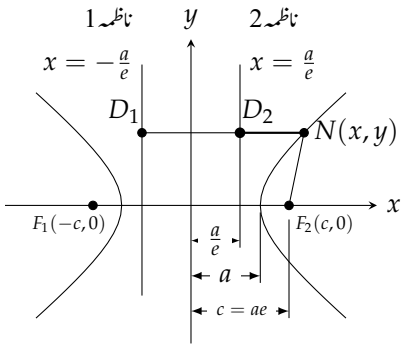
قطع مکافی کا ایک ماسکہ اور ایک ناظمہ ہوتے ہیں جبکہ ترخیم کے دو ماسکے اور دو ناظمہ ہوتے ہیں جو محور اکبر کے متوازی، مرکز سے $\frac{a}{e}$ فاصلے پر ہوتے ہیں۔ قطع مکافی کی ایک خاصیت درج ذیل ہے

$$NF = 1 \cdot ND \tag{۱۰.۱}$$

[۱۹] eccentricity




شکل ۱۰.۲۴: ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کے ناظمہ اور ماسکے۔ ناظمہ 1 کا مطابقتی ماسکہ $F_1$ ہے جبکہ ناظمہ 2 کا مطابقتی ماسکہ $F_2$ ہے۔




شکل ۱۰.۲۵: قطع زائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ کے ماسکے اور ناظمہ۔ قطع زائد پر ہر $N$ کے لئے $NF_1 = e \cdot ND_1$ اور $NF_2 = e \cdot ND_2$ ہوں گے۔

یعنی ترخیم پر کسی بھی نقطہ $N$ کا ماسکہ سے فاصلہ اور $N$ کا ناظمہ پر قریبی نقطہ $D$ سے فاصلہ ایک جیسا ہوگا۔ ترخیم کے لئے یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ مساوات ۱.۱۰ کی جگہ درج ذیل ہوگا۔

$$NF_1 = e \cdot ND_1, \qquad NF_2 = e \cdot ND_2 \tag{۱۰.۲}$$

یہاں $e$ سنک ہے، $N$ ترخیم پر کوئی نقطہ ہے، $F_1$ اور $F_2$ ماسکے ہیں اور ناظمہ پر $N$ کے قریب ترین نقطے $D_1$ اور $D_2$ ہیں (شکل ۱۰.۲۴)۔

مساوات ۱۰.۲ کے دونوں اجزاء میں ماسکہ اور ناظمہ میں مطابقت لازمی ہے، یعنی، اگر ہم $N$ سے $F_1$ تک فاصلہ لیں تب ہم $N$ سے ناظمہ تک فاصلہ لیتے ہوئے ترخیم کا وہ ناظمہ لیں گے جو ترخیم کے اسی ہاتھ ہو۔ ناظمہ $x = -\frac{a}{e}$ اور ماسکہ $F_1(-c,0)$ مطابقت رکھتے ہیں جبکہ ناظمہ $x = \frac{a}{e}$ اور ناظمہ $F_2(c,0)$ مطابقت رکھتے ہیں۔

قطع زائد کی سنک بھی $e = \frac{c}{a}$ ہے، البتہ اب $c$ کی قیمت $\sqrt{a^2+b^2}$ نا کہ $\sqrt{a^2-b^2}$ ہوگی۔ مزید ترخیم کی سنک کے برعکس، قطع زائد کی سنک ہر صورت $1$ سے زیادہ ہوگی۔

تعریف: قطع زائد $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ کی سنک درج ذیل ہوگی۔

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$$

□

ترخیم اور قطع زائد دونوں میں ماسکوں کے بیچ فاصلہ اور راس کے بیچ فاصلہ کا نسبت، سنک کے برابر ہوگا۔

$$\text{سنک} = \frac{\text{فاصلہ بیچ کے ماسکوں}}{\text{فاصلہ بیچ کے راس}}$$

ترخیم میں راس دور اور ماسکے قریب ہوتے ہیں اور ان کی نسبت 1 سے کم ہوتی ہے۔ قطع مکافی میں ماسکے دور اور راس قریب ہوتے ہیں لہٰذا سنک 1 سے زیادہ ہوتا ہے۔

مثال ۱۰.۲: ایک ترخیم کی سنک 0.8 اور ماسکے $(0, \pm 7)$ ہیں۔ اس کے راس تلاش کریں۔

حل: چونکہ $e = \frac{c}{a}$ ہے لہٰذا راس $(0, \pm a)$ پر ہوں گے جہاں

$$a = \frac{c}{e} = \frac{7}{0.8} = 8.75$$

یعنی $(0, \pm 8.75)$ ہوگا۔ □

مثال ۱۰.۳: قطع زائد $9x^2 - 16y^2 = 144$ کی سنک معلوم کریں۔

حل: ہم قطع زائد کی مساوات کے دونوں اطراف کو 144 سے تقسیم کر کے معیاری مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1, \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

یوں $a^2 = 16$ اور $b^2 = 9$ ہیں لہٰذا $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$ ہوگا جس سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

□

ترخیم کی طرح یہاں بھی دکھایا جا سکتا ہے کہ لکیریں $x = \pm \frac{a}{e}$ قطع زائد کے ناظمہ ہوں گے، یعنی:

$$NF_1 = e \cdot ND_1, \quad NF_2 = e \cdot ND_2 \tag{۱۰.۳}$$

یہاں قطع زائد پر $N$ کوئی نقطہ ہے، $F_1$ اور $F_2$ ماسکے ہیں جبکہ ناظمہ پر $N$ کے قریب ترین نقطے $D_1$ اور $D_2$ ہیں (شکل ۱۰.۲۵)۔

تصویر مکمل کرنے کی خاطر ہم قطع مکافی کی سنک کی تعریف $e = 1$ لیتے ہیں۔ مساوات ۱۰.۱ تا مساوات ۱۰.۳ کو یوں ایک ہی روپ $NF = e \cdot ND$ میں لکھا جا سکتا ہے۔

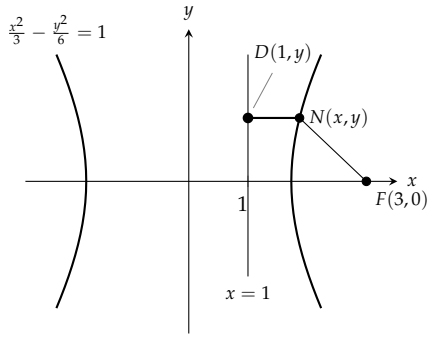
تعریف: قطع مکافی کی سنک $e = 1$ ہے۔

□

ماسکہ اور ناظمہ کی مساوات $NF = e \cdot ND$، قطع مکافی، ترخیم اور قطع زائد کو ایک دوسرے کے ساتھ درج ذیل طریقہ سے ملاتی ہے۔ فرض کریں نقطہ $N$ سے کسی مقررہ لکیر (ناظمہ) تک فاصلہ ضرب $e$ اس نقطے سے کسی مقررہ نقطہ $F$ (ماسکہ) کے فاصلہ کے برابر ہو یعنی:

$$NF = e \cdot ND \tag{۱۰.۴}$$

جہاں $e$ ایک مستقل ہے۔ تب $N$ درج ذیل راہ کھینچے گا۔




شکل ۱۰.۲۶: قطع زائد برائے مثال ۱۰.۴

ا. قطع مکافی اگر $e = 1$ ہو،

ب. ترخیم اگر $< 1$ ہو،

ج. قطع زائد اگر $e > 1$ ہو۔

مساوات ۱۰.۴ ظاہری طور پر زیادہ دلچسپ نظر نہیں آتی ہے۔ اس میں کوئی محدد نہیں پائے جاتے ہیں اور اس کو محددی روپ میں لکھنے سے، $e$ کی قیمت پر منحصر، مختلف مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ کم از کم کارتیسی محدد میں ایسا ہوتا ہے۔ البتہ جیسا ہم حصہ ۱۰.۸ میں دیکھیں گے، قطبی محدد میں، $e$ کی قیمت سے قطع نظر، مساوات $NF = e \cdot ND$ کی ترجمانی ایک ہی انتہائی سادہ مساوات کرتی ہے جو تقریباً 300 سالوں سے فلکی سائنسدانوں کی پسندیدہ مساوات رہی ہے۔

ایک قطع مکافی جس کا مرکز مبدا پر ہو کا $x$ محور پر ماسکہ اور مطابقتی ناظمہ جانتے ہوئے ہم شکل سے $e$ کی قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔ سنک $e$ کی قیمت جانتے ہوئے ہم کارتیسی نظام میں قطع زائد کی مساوات کو، اگلی مثال کی طرح، مساوات $NF = e \cdot ND$ سے حاصل کر سکتے ہیں۔ ہم اسی طرح شکل ۱۰.۲۴ کی مدد سے اس ترخیم کی مساوات بھی کارتیسی محدد میں حاصل کر سکتے ہیں جس کا مرکز مبدا پر اور ماسکے $x$ محور پر ہوں۔

مثال ۱۰.۴: ایک قطع زائد جس کا مرکز مبدا پر ہے کا ماسکہ $(3,0)$ اور مطابقتی ناظمہ $x = 1$ ہے۔ اس قطع زائد کی مساوات تلاش کریں۔

حل: ہم شکل ۱۰.۲۵ کو دیکھ کر اس کی سنک معلوم کرتے ہیں۔ چونکہ ماسکہ $(c,0) = (3,0)$ ہے لہٰذا $c = 3$ ہو گا۔ ناظمہ درج ذیل لکیر ہو گی

$$x = \frac{a}{e} = 1$$

لہٰذا $a = e$ ہو گا۔ سنک کی مساوات $e = \frac{c}{a}$ کے ساتھ ملا کر $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{e}$ لہٰذا $e^2 = 3$ یعنی $e = \sqrt{3}$ حاصل ہوتا ہے۔ سنک $e$

جانتے ہوئے ہم شکل ۱۰.۲۶ کو دیکھ کر $NF = e \cdot ND$ سے مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$NF = e \cdot ND \qquad \text{مساوات ۱۰.۴}$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{3}|x-1| \qquad e = \sqrt{3}$$

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 3(x^2 - 2x + 1)$$

$$2x^2 - y^2 = 6$$

$$\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$$

□

## سوالات

### ترخیم

سوال ۱۰.۱ تا سوال ۱۰.۸ میں ترخیم کی سنک تلاش کریں۔ اس کے بعد ترخیم کے ماسکے اور ناظمہ تلاش کر کے ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۱: $16x^2 + 25y^2 = 400$

سوال ۱۰.۲: $7x^2 + 16y^2 = 112$

سوال ۱۰.۳: $2x^2 + y^2 = 2$

سوال ۱۰.۴: $2x^2 + y^2 = 4$

سوال ۱۰.۵: $3x^2 + 2y^2 = 6$

سوال ۱۰.۶: $9x^2 + 10y^2 = 90$

سوال ۱۰.۷: $6x^2 + 9y^2 = 54$

سوال ۱۰.۸: $169x^2 + 25y^2 = 4225$

سوال ۱۰.۹ تا سوال ۱۰.۱۲ میں ترخیم کے ماسکے یا راس اور سنک دیا گیا ہے۔ ترخیم $xy$ مستوی میں پایا جاتا ہے اور اس کا مرکز مبدا پر ہے۔ ان میں ترخیم کی معیاری مساوات حاصل کریں۔

سوال ۱۰.۹: ماسکے $(0, \pm 3)$ اور سنک $0.5$

سوال ۱۰.۱۰: ماسکے $(\pm 8, 0)$ اور سنک $0.2$

سوال ۱۰.۱۱: راس $(0, \pm 70)$ اور سنک $0.1$

سوال ۱۰.۱۲: راس $(\pm 10, 0)$ اور سنک $0.24$

سوال ۱۰.۱۳ تا سوال ۱۰.۱۶ میں ترخیم کے ماسکے اور مطابقتی ناظمہ دیے گئے ہیں۔ ترخیم $xy$ مستوی میں پایا جاتا ہے اور اس کا مرکز مبدا پر ہے۔ شکل ۱۰.۲۴ کو دیکھ کر ترخیم کی سنک معلوم کریں۔ اس کے بعد ترخیم کی معیاری مساوات حاصل کریں۔

سوال ۱۰.۱۳: ماسکہ $(\sqrt{5}, 0)$، ناظمہ $x = \frac{9}{\sqrt{5}}$

سوال ۱۰.۱۴: ماسکہ $(4, 0)$، ناظمہ $x = \frac{16}{3}$

سوال ۱۰.۱۵: ماسکہ $(-4, 0)$، ناظمہ $x = -16$

سوال ۱۰.۱۶: ماسکہ $(-\sqrt{2}, 0)$، ناظمہ $x = -2\sqrt{2}$

سوال ۱۰.۱۷: ایک ترخیم جس کی سنک $\frac{4}{5}$ ہو کو ترسیم کریں۔ اپنی حکمت عملی کی وضاحت کریں۔

سوال ۱۰.۱۸: سیارہ پلوٹو (جس کی سنک 0.25 ہے) کا مدار ترسیم کریں۔ اپنی حکمت عملی کی وضاحت کریں۔

سوال ۱۰.۱۹: ایک ترخیم کے آخری سر $(1, 1)$ ، $(3, 4)$ ، $(1, 7)$ اور $(-1, 4)$ ہیں۔ اس ترخیم کا خاکہ کھینچیں، اس کی معیاری مساوات، ماسکے، سنک اور ناظمہ تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۲۰: ایک ترخیم کی سنک $\frac{2}{3}$ جبکہ لکیر $x = 9$ اس کی ناظمہ اور $(4, 0)$ مطابقتی ماسکہ ہے۔ اس ترخیم کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۲۱: درج ذیل ترخیم $a$ ، $b$ اور $c$ کی کن قیمتوں کے لئے مبدا پر $x$ محور کے متوازی ہو گا اور نقطہ $(-1, 2)$ سے گزرے گا؟

$$4x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

اس ترخیم کی سنک کیا ہے؟

سوال ۱۰.۲۲: ترخیم کی خاصیت انعکاس

ایک ترخیم کو اس کے محور اکبر کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس ترخیمی جسم کی اندرونی سطح پر چاندی لگا کر ترخیمی آئینہ بنایا جاتا ہے۔ دکھائیں کہ اس ترخیمی آئینہ کے ایک ماسکہ سے خارج شعاع انعکاس کے بعد دوسرے ماسکہ پر پہنچتا ہے۔ صدا بھی اسی راہ کو اپناتا ہے۔ اس حقیقت کو بروئے کار لاتے ہوئے کمرہ سرگوشی بنایا جاتا ہے۔ (اشارہ: ترخیم کو $xy$ مستوی پر معیاری مقام پر رکھ کر دکھائیں کہ کسی بھی نقطہ $N$ سے دونوں ماسکوں تک لکیر، $N$ پر ترخیم کے مماس کے ساتھ ایک جیسے زاویے بناتے ہیں۔)

## قطع زائد

سوال ۱۰.۲۳ تا سوال ۱۰.۳۰ میں قطع زائد کی سنک تلاش کریں۔ اس کے بعد قطع زائد کے ماسکہ اور ناظمہ معلوم کر کے ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۲۳: $x^2 - y^2 = 1$

سوال ۱۰.۲۴: $9x^2 - 16y^2 = 144$

سوال ۱۰.۲۵: $y^2 - x^2 = 8$

سوال ۱۰.۲۶: $y^2 - x^2 = 4$

سوال ۱۰.۲۷: $8x^2 - 2y^2 = 16$

سوال ۱۰.۲۸: $y^2 - 3x^2 = 3$

سوال ۱۰.۲۹: $8y^2 - 2x^2 = 16$

سوال ۱۰.۳۰: $64x^2 - 36y^2 = 2304$

سوال ۱۰.۳۱ تا سوال ۱۰.۳۴ میں قطع زائد کی سنک اور راس یا ماسکے دیے گئے ہیں۔ یہ قطع زائد $xy$ مستوی میں پائے جاتے ہیں جن کا مرکز مبدا پر ہے۔ ان قطع زائد کی معیاری مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۳۱: سنک 3 راس $(0, \pm 1)$

سوال ۱۰.۳۲: سنک 2 راس $(\pm 2, 0)$

سوال ۱۰.۳۳: سنک 3 ماسکے $(\pm 3, 0)$

سوال ۱۰.۳۴: سنک 1.25 ماسکے $(0, \pm 5)$

سوال ۱۰.۳۵ تا سوال ۱۰.۳۸ میں قطع زائد کے ماسکے اور مطابقتی ناظمہ دیے گئے ہیں۔ یہ قطع زائد $xy$ مستوی میں پائے جاتے ہیں اور ان کا مرکز مبدا پر پایا جاتا ہے۔ قطع زائد کی سنک اور معیاری مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۳۵: ماسکہ $(4, 0)$، ناظمہ $x = 2$

سوال ۱۰.۳۶: ماسکہ $(\sqrt{10}, 0)$، ناظمہ $x = \sqrt{2}$

سوال ۱۰.۳۷: ماسکہ $(-2, 0)$، ناظمہ $x = -\frac{1}{2}$

سوال ۱۰.۳۸: ماسکہ $(-6, 0)$، ناظمہ $x = -2$

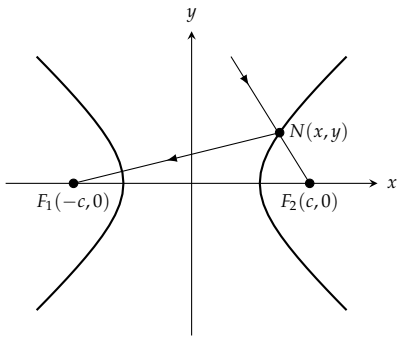
سوال ۱۰.۳۹: ایک قطع زائد کی سنک $\frac{3}{2}$ اور ایک ماسکہ $(1, -3)$ ہے۔ اس کا مطابقتی ناظمہ لکیر $y = 2$ ہے۔ اس قطع زائد کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۴۰: سنک کی قطع زائد کی صورت پر اثر

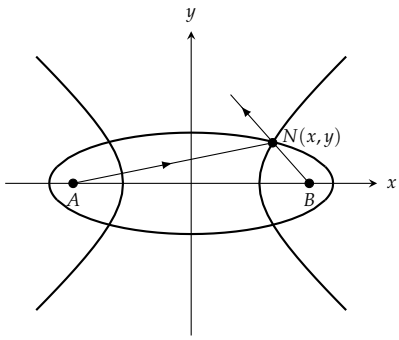
سنک بڑھانے سے قطع زائد کی صورت پر کیا اثر ہوتا ہے؟ یہ جاننے کے لئے مساوات $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ کو $a$ اور $b$ کی بجائے $a$ اور $e$ کی صورت میں لکھیں۔ مختلف $e$ کی قیمتوں کے لئے قطع زائد ترسیم کریں ($a$ مستقل لیں)۔

سوال ۱۰.۴۱: قطع زائد کی خاصیت انعکاس

دکھائیں کہ قطع زائد کے ایک ماسکہ کی طرف گامزن شعاع، قطع زائد سے انعکاس کے بعد دوسرے ماسکہ پر پہنچتا ہے (شکل ۱۰.۲۷)۔ (اشارہ: دکھائیں کہ نقطہ $N$ پر قطع زائد کا مماس قطع $NF_1$ اور $NF_2$ کے بیچ زاویہ کو نصف میں تقسیم کرتا ہے۔)




شکل ۱۰.۲۷: قطع زائد برائے سوال ۱۰.۴۱




شکل ۱۰.۲۸: قطع زائد اور ترخیم برائے سوال ۱۰.۴۲

سوال ۱۰.۴۲: ہم ماسکہ ترخیم اور قطع زائد

دکھائیں کہ ایک ترخیم اور قطع زائد جن کے ایک جیسے ماسکے $A$ اور $B$ ہوں، ایک دوسرے کو 90 درجہ پر قطع کرتے ہیں (شکل ۱۰.۲۸)۔ (اشارہ: ماسکہ $A$ سے خارج شعاع قطع زائد کے نقطہ $N$ پر پہنچ کر قطع زائد سے یوں منعکس ہو گا جیسا یہ شعاع ماسکہ $B$ سے خارج ہوا ہو (سوال ۱۰.۴۱)۔ یہی شعاع ترخیم سے منعکس ہو کر ماسکہ $B$ پر پہنچتا ہے (سوال ۱۰.۲۲)۔)

## ۱۰.۳ دو درجی مساوات اور گھومنا

ہم اس حصہ میں تحلیلی جیومیٹری کی اس حیرت کن نتیجہ پر غور کریں گے کہ درج ذیل مساوات کی کارتیسی ترسیم

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{۱۰.۱}$$

جہاں $A$ ، $B$ ، $C$ اور $D$ بیک وقت تمام صفر نہ ہوں، تقریباً ہر بار مخروطی حصہ ہو گا۔ ایسا تب نہیں ہوتا جب یا ترسیم ہی نہ پائی جاتی ہو اور یا جب ترسیم دو متوازی لکیروں پر مشتمل ہو۔ مساوات ۱۰.۱ کی تمام ترسیمات، چاہیں وہ قوسی ہو یا نہیں، **دو درجی منحنیات**[۲۰] کہلاتی ہیں۔

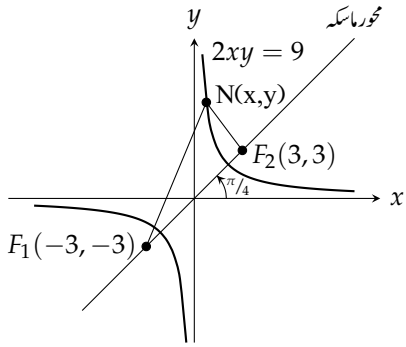
### جزو $Bxy$

آپ نے دیکھا کہ حصہ ۱۰.۱ میں مخروطی حصوں کی مساواتوں میں جزو $Bxy$ نہیں پایا جاتا، چونکہ ان کے محور، محددی نظام کے محور کے متوازی (بلکہ ہم مکان) ہیں۔

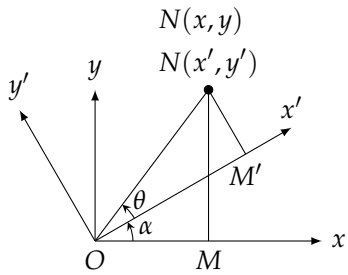
مخروط حصہ کے محور، محددی محور کے غیر متوازی ہونے کی صورت کو دیکھنے کی خاطر ہم ایک قطع زائد کی مساوات حاصل کرتے ہیں جس کا $a = 3$ ہو اور جس کے ماسکے $F_1(-3,-3)$ اور $F_2(3,3)$ ہوں (شکل ۱۰.۲۹)۔ مساوات $|NF_1 - NF_2| = 2a$ اب

---

[۲۰] quadratic curves




شکل ۱۰.۲۹: قطع زائد $2xy = 9$ کا محور ماسکہ، مثبت $x$ محور کے ساتھ $\frac{\pi}{4}$ زاویہ بناتا ہے۔




شکل ۱۰.۳۰: مبدا کے گرد گھڑی کی الٹ رخ محور کو $\alpha$ زاویہ گھمانا۔

یا $|NF_1 - NF_2| = 2(3) = 6$

$$\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2} - \sqrt{(x-3)^2+(y-3)^2} = \pm 6$$

روپ اختیار کرتا ہے۔ ہم ایک جذر کو دوسرے ہاتھ منتقل کر کے دونوں اطراف کا مربع لے کر حاصل واحد جذر کو اکیلے ایک طرف رکھ کر دونوں اطراف کا مربع لے کر

$$2xy = 9 \tag{۱۰.۲}$$

حاصل کرتے ہیں جو مساوات ۱.۱۰ کی ایک روپ ہے جس میں جزو $Bxy$ پایا جاتا ہے۔ مساوات ۱۰.۲ میں دیے گئے قطع زائد کے متقارب $x$ اور $y$ محور ہیں، جبکہ اس کا محور ماسکہ مثبت $x$ محور کے ساتھ $\frac{\pi}{4}$ ریڈیئن زاویہ بناتا ہے۔ اس مثال کی طرح مساوات ۱.۱۰ میں جزو $Bxy$ صرف اس صورت پایا جاتا ہے جب مخروط کے محور ترچھے ہوں۔

## محددی محور گھمانے سے جزو $Bxy$ سے نجات

مخروط کی مساوات سے جزو $Bxy$ ہٹانے کی خاطر ہم محددی محور کر گھما کر مخروط کے محور کو محددی محور کے متوازی بناتے ہیں۔ گھمانے کی مساواتوں کو ہم درج ذیل طریقہ سے حاصل کرتے ہیں۔ شکل ۱۰.۳۰ میں گھڑی کی سوئیوں کے گھومنے کی الٹ رخ، مبدا کے گرد زاویہ $\alpha$ گھمانا دکھایا گیا ہے۔ اس شکل سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} x &= OM = ON\cos(\theta+\alpha) = ON\cos\theta\cos\alpha - ON\sin\theta\sin\alpha \\ y &= MN = ON\sin(\theta+\alpha) = ON\cos\theta\sin\alpha + ON\sin\theta\cos\alpha \end{aligned} \tag{۱۰.۳}$$

چونکہ

$$ON\cos\theta = OM' = x'$$

اور

$$ON \sin\theta = M'N = y'$$

ہیں لہٰذا مساوات ۱۰.۳ درج ذیل دیں گے۔

## محددی محور مبدا کے گرد گھمانے کی مساواتیں

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{aligned} \tag{۱۰.۴}$$

مثال ۱۰.۱: مبدا کے گرد، گھڑی کے الٹ رخ، $x$ اور $y$ محور کو $\frac{\pi}{4}$ ریڈیئن گھمایا جاتا ہے۔ قطع زائد $2xy = 9$ کا ان نئے محور میں مساوات تلاش کریں۔

حل: چونکہ $\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ لہٰذا ہم مساوات ۱۰.۴ سے

$$x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

کو $2xy = 9$ میں پر کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں (شکل ۱۰.۳۱)۔

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) &= 9 \\ x'^2 - y'^2 &= 0 \\ \frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

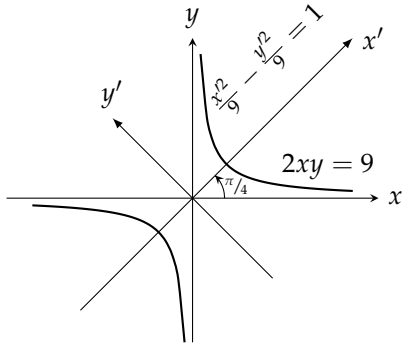
□

دو درجی مساوات ۱۰.۱ پر مساوات ۱۰.۴ لاگو کرنے سے درج ذیل نئی دو درجی مساوات حاصل ہوتی ہے

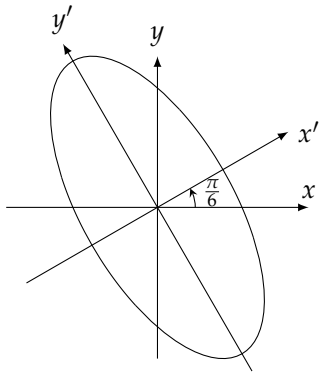
$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0 \tag{۱۰.۵}$$

جہاں پرانے اور نئے مستقلوں کے رشتے درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2\alpha + B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha \\ B' &= B\cos 2\alpha + (C - A)\sin 2\alpha \\ C' &= A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha \\ D' &= D\cos\alpha + E\sin\alpha \\ E' &= -D\sin\alpha + E\cos\alpha \\ F' &= F \end{aligned} \tag{۱۰.۶}$$




شکل ۱۰.۳۱: نئے محور $x'$ اور $y'$ میں قطع زائد کی مساوات (مثال ۱۰.۱)




شکل ۱۰.۳۲: مخروط کو $\frac{\pi}{6}$ زاویہ گھڑی کے الٹ رخ گھمایا گیا ہے (مثال ۱۰.۲)

یہ مساوات دیگر معلومات کے ساتھ ہمیں $B' = 0$ کے حصول کا طریقہ بھی دیتے ہیں۔ یوں $Bxy$ جزو والی مساوات سے شروع کر کے ہم اس کو زاویہ $\alpha$ گھما کر ایسی دو درجی مساوات حاصل کر سکتے ہیں جس میں $B'xy$ کا جزو نہیں پایا جاتا ہو۔ ایسا زاویہ جاننے کے لئے ہم مساوات ۱۰.۶ میں $B' = 0$ لے کر $\alpha$ کے حاصل مساوات

$$B\cos 2\alpha + (C - A)\sin 2\alpha = 0$$

کو $\alpha$ کے لئے حل کرتے ہیں۔ یوں ہمیں درحقیقت مندرجہ ذیل دو مساوات میں سے کسی ایک کا حل درکار ہو گا۔

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B}, \quad \tan 2\alpha = \frac{B}{A - C} \tag{۱۰.۷}$$

مثال ۱۰.۲: درج ذیل دو درجی مساوات میں $\sqrt{3}xy$ کے جزو کے خاتمہ کے لئے محددی محور کو زاویہ $\alpha$ گھمایا جاتا ہے۔ اس زاویہ کو تلاش کریں۔

$$2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 - 10 = 0$$

نئی مساوات تلاش کریں اور اس کو پہچانیں۔

حل: دی گئی مساوات میں $A = 2$ ، $B = \sqrt{3}$ اور $C = 1$ ہیں۔ مساوات ۱۰.۷ میں ان قیمتوں کو پر کر کے $\alpha$ معلوم کرتے ہیں۔

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B} = \frac{2 - 1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \implies 2\alpha = \frac{\pi}{3}$$

یوں $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ، $A = 2$ ، $B = \sqrt{3}$ ، $C = 1$ ، $D = E = 0$ اور $F = -10$ کو مساوات ۱۰.۶ میں پر کر کے

$$A' = \frac{5}{2},\ B' = 0,\ C' = \frac{1}{2},\ D' = E' = 0,\ F' = -10$$

حاصل ہوں گے اور مساوات ۱۰.۵ درج ذیل دے گا۔

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{20} = 1 \quad \text{یا} \quad \frac{5}{2}x'^2 + \frac{1}{2}y'^2 - 10 = 0$$

یہ منحنی ترخیم ہے جس کے ماسکے نئی $y'$ محور پر پائے جاتے ہیں (شکل ۱۰.۳۲)۔ □

## دو درجی مساوات کے ممکنہ ترسیمات

ہم اب عمومی دو درجی مساوات کی ترسیمات پر آتے ہیں۔

چونکہ محور کو گھما کر $Bxy$ طرز کے جزو کو ہٹایا جا سکتا ہے لہٰذا ہم تصور کرتے ہیں کہ یہی کرتے ہوئے درج ذیل عمومی دو درجی مساوات حاصل کی گئی ہے

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{۱۰.۸}$$

جہاں $A'$ تا $F'$ کو بالترتیب $A$ تا $F$ لکھا گیا ہے۔ مساوات ۱۰.۸ درج ذیل کو ظاہر کرتی ہے۔

ا. جب $A = C \neq 0$ ہو تب دائرہ (مخصوص حالات میں یہ نقطہ مانند ہو سکتا ہے یا اس کی کوئی ترسیم نہیں ہو گی۔)

ب. اگر مساوات ۱۰.۸ ایک متغیر میں خطی اور دوسرے میں دو درجی ہو تب یہ قطع مکافی کو ظاہر کرتی ہے۔

ج. اگر $A$ اور $C$ دونوں مثبت یا دونوں منفی ہوں تب یہ ترخیم کو ظاہر کرتی ہے۔ (مخصوص حالات میں یہ دائرہ، واحد نقطہ دے سکتی ہے یا اس کی کوئی ترسیم نہیں ہو سکتی ہے۔)

د. اگر $A$ اور $C$ کی علامتیں ایک دوسرے کی الٹ ہوں تب یہ قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔ (مخصوص حالات میں یہ دو منقطع لکیروں کو ظاہر کر سکتی ہے۔)

ھ. اگر $A$ اور $C$ دونوں صفر ہوں جبکہ $D$ اور $E$ میں سے کم از کم ایک غیر صفر ہو تب یہ سیدھی لکیر کو ظاہر کرتی ہے۔

و. اگر مساوات ۱۰.۸ کے بائیں ہاتھ کو دو خطی اجزاء کا حاصل ضرب لکھنا ممکن ہو تب یہ ایک یا دو سیدھی لکیروں کو ظاہر کرتی ہے۔

دو درجی ترسیمات کی مثالوں کے لئے صفحہ ۱۰۹ پر جدول ۱۰.۳ دیکھیں۔

## ممیز پرکھ

درج ذیل مساوات کی قسم جاننے کے لئے ہمیں اس کا جزو $Bxy$ ہٹانے کی ضرورت نہیں۔

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{۱۰.۹}$$

اگر ہمیں یہی معلومات درکار ہو تب ہم درج ذیل پرکھ بروئے کار لا سکتے ہیں۔

جیسا ہم دیکھ چکے، $B \neq 0$ کی صورت میں ہم محددی محور کو مبدا کے گرد $\alpha$ زاویہ گھما کر جہاں $\alpha$ درج ذیل مساوات

$$\cot 2\alpha = \frac{A - C}{B} \tag{۱۰.۱۰}$$

کو مطمئن کرتا ہو، مساوات ۱۰.۹ کو درج ذیل روپ میں بدلتا ہے

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x'E'y' + F' = 0 \tag{۱۰.۱۱}$$

جس میں $Bxy$ طرز کا جزو نہیں پایا جاتا ہے۔

اب مساوات ۱۰.۱۱ کی ترسیم (حقیقی یا انحطاطی) درج ذیل ہو سکتی ہیں۔

ا. اگر $A' = 0$ یا $C' = 0$ یعنی $A'C' = 0$ ہو تب قطع مکافی،

ب. اگر $A'$ اور $C'$ کی علامتیں ایک دوسری جیسی ہوں یعنی اگر $A'C' > 0$ ہو تب ترخیم،

ج. اور اگر $A'$ اور $C'$ کی علامتیں ایک دوسری کی الٹ ہوں یعنی اگر $A'C' < 0$ ہو تب قطع زائد۔

مساوات ۱۰.۶ سے کسی بھی زاویہ کے لئے

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4A'C' \tag{۱۰.۱۲}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں محددی محور گھمانے سے مقدار $B^2 - 4AC$ تبدیل نہیں ہوتی ہے البتہ مساوات ۱۰.۱۰ کو مطمئن کرتا زاویہ $\alpha$ سے محور گھمانے سے $B'$ صفر اور درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$B^2 - 4AC = -4A'C'$$

چونکہ $A'C' = 0$ کی صورت میں ترسیم قطع مکافی، $A'C' > 0$ کی صورت میں ترخیم اور $A'C' < 0$ کی صورت میں قطع زائد ہو گی لہٰذا $B^2 - 4AC = 0$ کی صورت میں ترسیم لازمی طور پر قطع مکافی، $B^2 - 4AC < 0$ کی صورت میں ترخیم اور $B^2 - 4AC > 0$ کی صورت میں قطع زائد۔ عدد $B^2 - 4AC$ کو مساوات ۱۰.۹ کا **ممیز**[۲۱] کہتے ہیں۔

### ممیز پرکھ

یہ جانتے ہوئے کہ کبھی کبھار انحطاطی صورت پائی جائے گی، درج ذیل دو قدری مساوات

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

ا. $B^2 - 4AC = 0$ کی صورت میں ترخیم،

ب. $B^2 - 4AC < 0$ کی صورت میں قطع مکافی اور

ج. $B^2 - 4AC > 0$ کی صورت میں قطع زائد کو ظاہر کرے گی۔

□

مثال ۱۰.۳: (الف) درج ذیل کی بنا $3x^2 - 6xy + 3y^2 + 2x - 7 = 0$ قطع مکافی کو ظاہر کرتی ہے۔

$$B^2 - 4AC = (-6)^2 - 4(3)(3) = 36 - 36 = 0$$

---

[۲۱] discriminant

جدول ۱۰.۳: دو درجی منحنیات کی مثالیں۔

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | مساوات | رائے |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| دائرہ | 1 | | 1 | | | $-4$ | $x^2 + y^2 = 4$ | $A = C; F < 0$ |
| قطع مکافی | | | 1 | $-9$ | | | $y^2 = 9x$ | $y$ میں دو درجی، $x$ میں خطی |
| ترخیم | 4 | | 9 | | | $-36$ | $4x^2 + 9y^2 = 36$ | $A$ ، $C$ یکساں علامت، $F < 0$ ؛ $A \neq C$ |
| زائد قطع | 1 | | $-1$ | | | $-1$ | $x^2 - y^2 = 1$ | $A$ ، $C$ الٹ علامت |
| ایک لکیر | 1 | | | | | | $x^2 = 0$ | $y$ محور |
| مقطع لکیریں | | 1 | | 1 | $-1$ | $-1$ | $xy + x - y - 1 = 0$ | $(y+1)(x-1) = 0$ لہٰذا $x = 1$ ، $y = -1$ |
| متوازی لکیریں | 1 | | | $-3$ | | 2 | $x^2 - 3x + 2 = 0$ | $(x-2)(x-1) = 0$ لہٰذا $x = 1$ ، $x = 2$ |
| نقطہ | 1 | | 1 | | | | $x^2 + y^2 = 0$ | مبدا |
| بلا ترسیم | 1 | | | | | 1 | $x^2 = -1$ | ترسیم نہیں کیا جا سکتی ہے |

(اب) درج ذیل کی بنا $x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$ ترخیم کو ظاہر کرتی ہے۔

$$B^2 - 4AC = (1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$$

(ج) درج ذیل کی بنا $xy - y^2 - 5y + 1 = 0$ قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔

$$B^2 - 4AC = (1)^2 - 4(0)(-1) = 1 > 0$$

□

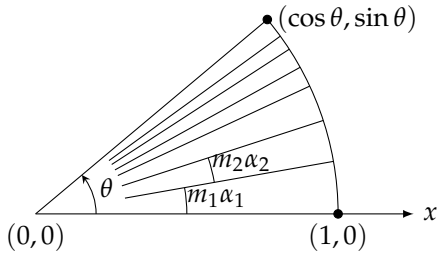
## فنیات

بعض کیلکولیٹر گھمانے کی عمل سے سائن اور کوسائن معلوم کرتا ہے۔ یہ عمل درج ذیل ہے۔

ا. کیلکولیٹر میں تقریباً 10 زاویے محفوظ ہوتے ہیں مثلاً

$$\alpha_1 = \sin^{-1}(10^{-1}), \quad \alpha_2 = \sin^{-1}(10^{-2}), \quad \cdots, \quad \alpha_{10} = \sin^{-1}(10^{-10})$$

ب. اسی طرح اس میں $\alpha_1$ تا $\alpha_{10}$ کے سائن اور کوسائن بھی محفوظ ہوتے ہیں۔




شکل ۱۰.۳۳: سائن اور کوسائن حاصل کرنے کا عمل۔

کسی بھی زاویہ $\theta$ کا سائن یا کوسائن معلوم کرنے کی خاطر ہم کیلکولیٹر میں $\theta$ ریڈیئن داخل کرتے ہیں۔ کیلکولیٹر $2\pi$ کا مضرب $\theta$ کے ساتھ جمع کر کے $0$ اور $2\pi$ کے بیچ زاویہ حاصل کرتا ہے جس کا سائن اور کوسائن وہی ہو گا جو اصل زاویہ $\theta$ کا ہو گا (لہٰذا ہم اس نئے زاویہ کو $\theta$ ہی کہتے ہیں)۔ اب $\theta$ سے تجاوز کئے بغیر کیلکولیٹر $\theta$ کو $\alpha_1$ کا مضرب جمع $\alpha_2$ کا مضرب اور اسی طرح چلتے ہوئے، جمع $\alpha_{10}$ کا مضرب لکھتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\theta \approx m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \cdots + m_{10}\alpha_{10}$$

اس کے بعد کیلکولیٹر نقطہ $1,0$ کو $m_1$ گنّا $\alpha_1$ زاویہ گھماتا ہے۔ اس کے بعد $m_2$ گنّا $\alpha_2$ زاویہ گھماتا ہے، اور اسی طرح چلتے ہوئے، $m_{10}$ گنّا $\alpha_{10}$ زاویہ گھماتا ہے۔ اکائی دائرہ پر پائے جانے والے نقطہ $(1,0)$ کے آخری مقام کے محدد $(\cos\theta, \sin\theta)$ ہوں گے (شکل ۱۰.۳۳)۔

## سوالات

ممیز کا استعمال

ممیز $B^2 - 4AC$ استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں آیا سوال ۱.۱۰ تا سوال ۱۶.۱۰ میں دی گئی مساوات قطع مکافی، ترخیم یا قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔

سوال ۱.۱۰: $x^2 - 3xy + y^2 - x = 0$

سوال ۲.۱۰: $3x^2 - 18xy + 27y^2 - 5x + 7y = -4$

سوال ۳.۱۰: $3x^2 - 7xy + \sqrt{17}y^2 = 1$

سوال ۴.۱۰: $2x^2 - \sqrt{15}xy + 2y^2 + x + y = 0$

سوال ۵.۱۰: $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - y + 2 = 0$

سوال ۶.۱۰: $2x^2 - y^2 + 4xy - 2x + 3y = 6$

سوال ۷.۱۰: $x^2 + 4xy + 4y^2 - 3x = 6$

سوال ۸.۱۰: $x^2 + y^2 + 3x - 2y = 10$

سوال ۹.۱۰: $xy + y^2 - 3x = 5$

سوال ۱۰.۱۰: $3x^2 + 6xy + 3y^2 - 4x + 5y = 12$

سوال ۱۰.۱۱: $3x^2 - 5xy + 2y^2 - 7x - 14y = -1$

سوال ۱۰.۱۲: $2x^2 - 4.9xy + 3y^2 - 4x = 7$

سوال ۱۰.۱۳: $x^2 - 3xy + 3y^2 + 6y = 7$

سوال ۱۰.۱۴: $25x^2 + 21xy + 4y^2 - 350x = 0$

سوال ۱۰.۱۵: $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y + 2 = 0$

سوال ۱۰.۱۶: $3x^2 + 12xy + 12y^2 + 435x - 9y + 72 = 0$

## محددی محور گھمانا

سوال ۱۰.۱۷ تا سوال ۱۰.۲۶ میں محددی محور کو گھما کر دی گئی مساوات سے $Bxy$ طرز کا جزو ختم کریں۔ اس کے بعد مساوات کی ترسیم کو پہچانیں۔ (نئی مساوات گھمانے کے رخ اور مقدار پر منحصر ہو گی۔)

سوال ۱۰.۱۷: $xy = 2$

سوال ۱۰.۱۸: $x^2 + xy + y^2 = 1$

سوال ۱۰.۱۹: $3x^2 + 2\sqrt{3}xy + y^2 - 8x + 8\sqrt{3}y = 0$

سوال ۱۰.۲۰: $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 1$

سوال ۱۰.۲۱: $x^2 - 2xy + y^2 = 2$

سوال ۱۰.۲۲: $3x^2 - 2\sqrt{3}xy + y^2 = 1$

سوال ۱۰.۲۳: $\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}xy + \sqrt{2}y^2 - 8x + 8y = 0$

سوال ۱۰.۲۴: $xy - y - x + 1 = 0$

سوال ۱۰.۲۵: $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 19$

سوال ۱۰.۲۶: $3x^2 + 4\sqrt{3}xy - y^2 = 7$

سوال ۱۰.۲۷: اس زاویہ کا سائن اور کوسائن دریافت کریں جس پر درج ذیل مساوات کو گھما کر $Bxy$ طرز کا جزو ہٹایا جا سکتا ہے۔ نئی مساوات معلوم نہ کریں۔

$$14x^2 + 16xy + 2y^2 - 10x + 26370y - 17 = 0$$

سوال ۱۰.۲۸: اس زاویہ کا سائن اور کوسائن دریافت کریں جس پر درج ذیل مساوات کو گھما کر $Bxy$ طرز کا جزو ہٹایا جا سکتا ہے۔ نئی مساوات حاصل نہ کریں۔

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 8\sqrt{5}x - 16\sqrt{5}y = 0$$

## کیلکولیٹر

سوال ۱۰.۲۹ تا سوال ۱۰.۳۴ میں وہ زاویہ $\alpha$ دریافت کریں جس پر محددی محور کو گھما کر جزو $Bxy$ کو مساوات سے ہٹایا جا سکتا ہے۔ اس کے بعد $\sin\alpha$ اور $\cos\alpha$ کو 2 اعشاریہ درست دریافت کریں۔ مساوات ۱۰.۶ استعمال کرتے ہوئے نئی مساوات کے عددی سر ایک اعشاریہ تک تلاش کریں۔ اب بتائیں آیا مساوات قطع مکافی، ترخیم یا قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔

سوال ۱۰.۲۹: $x^2 - xy + 3y^2 + x - y - 3 = 0$

سوال ۱۰.۳۰: $2x^2 + xy - 3y^2 + 3x - 7 = 0$

سوال ۱۰.۳۱: $x^2 - 4xy + 4y^2 - 5 = 0$

سوال ۱۰.۳۲: $2x^2 - 12xy + 18y^2 - 49 = 0$

سوال ۱۰.۳۳: $3x^2 + 5xy + 2y^2 - 8y - 1 = 0$

سوال ۱۰.۳۴: $2x^2 + 7xy + 9y^2 + 20x - 86 = 0$

## نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۰.۳۵: مبدا کے گرد $90^\circ$ گھمانے سے درج ذیل مساوات پر کیا اثر ہو گا؟ نئی مساوات تلاش کریں۔

ا. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ (a > b)$ ترخیم

ب. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ قطع زائد

ج. $x^2 + y^2 = a^2$ دائرہ

د. $y = mx$ لکیر

ھ. $y = mx + b$ لکیر

سوال ۱۰.۳۶: مبدا کے گرد $180^\circ$ گھمانے سے درج ذیل مساوات پر کیا اثر ہو گا؟ نئی مساوات تلاش کریں۔

ا. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ (a > b)$ ترخیم

ب. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ قطع زائد

ج. $x^2 + y^2 = a^2$ دائرہ

د. $y = mx$ لکیر

ھ. $y = mx + b$ لکیر

سوال ۱۰.۳۷: قطع زائد $xy = a$ سائنس اور ریاضیات میں بہت اہمیت رکھتا ہے۔ اس کی ایک صورت $xy = 1$ ہے۔

ا. محددی محور کو $45^\circ$ زاویہ گھما کر مساوات $xy = 1$ کی ایسی صورت تلاش کریں جس میں $Bxy$ طرز کا جزو نہیں پایا جاتا ہو۔ اس نئی مساوات کو حاصل کریں۔

ب. مساوات $xy = a$ کے لئے بھی یہی کریں۔

سوال ۱۰.۳۸: قطع زائد $xy = 2$ کی سنک دریافت کریں۔

سوال ۱۰.۳۹: کیا $AC < 0$ کی صورت میں مساوات $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ کی ترسیم کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۰.۴۰: کیا کسی بھی غیر انحطاطی مخروط حصہ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ میں درج ذیل تمام خواص پائے جاتے ہیں؟

ا. یہ مبدا کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔

ب. یہ نقطہ $(1,0)$ سے گزرتا ہے۔

ج. یہ نقطہ $(-2,1)$ پر لکیر $y = 1$ کو مماسی ہے۔

اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۰.۴۱: دکھائیں کہ مبدا کے گرد محور کو گھمانے کی مساوات ۱۰.۴ میں ہر زاویہ $\alpha$ کے لئے $x^2 + y^2 = a^2$ سے $x'^2 + y'^2 = a^2$ حاصل ہو گا۔

سوال ۱۰.۴۲: دکھائیں کہ جب بھی $A = C$ ہو، محور کو $\frac{\pi}{4}$ ریڈیئن گھمانے سے مساوات ۱۰.۱ کا $Bxy$ جزو ختم ہوتا ہے۔

سوال ۱۰.۴۳:

ا. معلوم کریں کہ آیا درج ذیل مساوات ترخیم، قطع کافی یا قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 6x + 12y + 9 = 0$$

ب. دکھائیں کہ جزو-ا میں مساوات کی ترسیم لکیر $2y = -x - 3$ ہے۔

سوال ۱۰.۴۴:

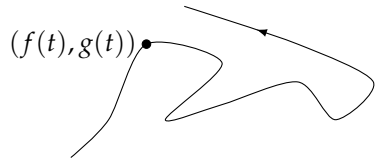
ا. معلوم کریں کہ آیا درج ذیل مساوات ترخیم، قطع کافی یا قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔

$$9x^2 + 6xy + y^2 - 12x - 4y + 4 = 0$$

ب. دکھائیں کہ جزو-ا میں مساوات کی ترسیم لکیر $y = -3x + 2$ ہے۔

سوال ۱۰.۴۵: (الف) منحنی $xy + 2x - y = 0$ کس قسم کا مخروط حصہ ہے؟ (ب) مساوات $xy + 2x - y = 0$ کو $y$ کے لئے حل کر کے اس کو $x$ کے ناطق تفاعل کے طور پر ترسیم کریں۔ (ج) اس منحنی کے عمودی اور لکیر $y = -2x$ کے متوازی لکیروں کی مساواتیں معلوم کریں۔ ان لکیروں کو بھی ترسیم کا حصہ بنائیں۔

سوال ۱۰.۴۶: ترسیم $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ کے بارے میں درج ذیل فقروں کو ثابت کریں یا ان کے مخالف فقرے تلاش کریں۔




شکل ۱۰.۳۴: مستوی $xy$ میں ضروری نہیں کہ ذرے کی راہ $x$ یا $y$ کا تفاعل ہو۔

ا. اگر $AC > 0$ ہو تب ترسیم ترخیم ہو گا۔

ب. اگر $AC > 0$ ہو تب ترسیم قطع زائد ہو گی۔

ج. اگر $AC < 0$ ہو تب ترسیم قطع زائد ہو گی۔

سوال ۱۰.۴۷: جب $B^2 - 4AC$ منفی ہو تب مساوات $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1$ ترخیم کو ظاہر کرتی ہے۔ اگر اس ترخیم کے نصف محور $a$ اور $b$ ہوں تب اس کا رقبہ $\pi ab$ ہو گا (معیاری کلیہ)۔ دکھائیں کہ اس رقبہ کو $\frac{2\pi}{\sqrt{4AC-B^2}}$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔ (اشارہ: محور کو گھما کر جزو $Bxy$ ہٹا کر مساوات ۱۰.۱۲ استعمال کریں۔)

سوال ۱۰.۴۸: ہم مبدا کے گرد محور گھما کر $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$ کی بات کرتے ہوئے کہتے ہیں کہ دو درجی مساوات کا ممیز **غیر متغیر** ہے۔ مساوات ۱۰.۶ کی مدد لیتے ہوئے دکھائیں کہ عدد (الف) $A + C$ اور (ب) $D^2 + E^2$ بھی غیر متغیر ہیں، یعنی:

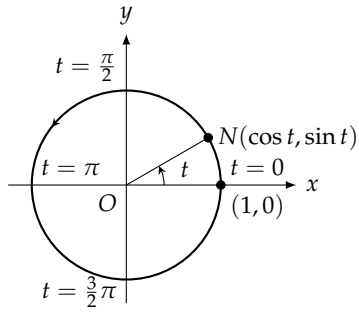
$$A' + C' = A + C, \quad D'^2 + E'^2 = D^2 + E^2$$

حقائق کو استعمال کرتے ہوئے مبدا کے گرد محور گھمانے کے بعد حاصل عددی سروں کی تصدیق کی جا سکتی ہے۔ انہیں حقائق کو استعمال کرتے ہوئے $A'$ سے $C'$ اور $D'$ سے $E'$ کی قیمتیں جلد معلوم کی جا سکتی ہیں۔

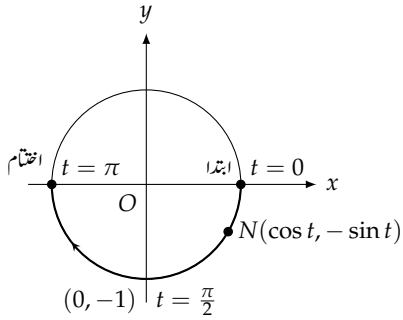
سوال ۱۰.۴۹: مبدا کے گرد محور کو کسی بھی زاویہ گھمانے کے بعد $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$ ثابت کرنے کے لئے مساوات ۱۰.۶ کی مدد لیں۔ یہ ثابت کرتے ہوئے کچھ دیر ضرور لگے گی۔

## ۱۰.۴ مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول

جب ایک ذرہ شکل ۱۰.۳۴ میں دکھائی گئی راہ پر چلتا ہو، ہم اس کی حرکت کو کارتیسی کلیہ کی صورت میں لکھنے کی توقع نہیں کر سکتے ہیں جو $y$ کو بلا واسطہ $x$ کی صورت میں یا $x$ کو بلا واسطہ $y$ کی صورت میں پیش کرتا ہو۔ ایسی صورت میں ہم ذرے کی راہ کے ہر محدد کو وقت $t$ کا تفاعل لکھ کر اس راہ کو ایک جوڑی مساوات $x = f(x)$ ، $y = g(t)$ کی صورت میں لکھتے ہیں۔ چونکہ یہ مساوات ہر لمحہ $t$ پر ذرے کا مقام دیتے ہیں لہٰذا حرکت پر غور کے لئے یہ مساوات زیادہ مفید ثابت ہوتے ہیں۔




شکل ۱۰.۳۵: گھڑی کے الٹ رخ حرکت (مثال ۱۰.۱)




شکل ۱۰.۳۶: گھڑی کے رخ حرکت (مثال ۱۰.۲)

تعریف: اگر $t$ کے ایک وقفہ پر $x$ اور $y$ استمراری تفاعل

$$x = f(t), \quad y = g(t)$$

ہوں تب نقاط $(x, y) = (f(t), g(t))$ کا سلسلہ، جن کی تعریف مذکورہ بالا مساوات پیش کرتی ہیں، محددی مستوی میں ایک منحنی ہو گی۔ ان مساوات کو اس منحنی کی **مقدار معلوم مساوات**[۲۲] کہتے ہیں۔ متغیر $t$ منحنی کا **مقدار معلوم**[۲۳] ہے اور اس کا وقفہ $I$ **مقدار معلوم وقفہ**[۲۴] کہلاتا ہے۔ اگر $I$ بند وقفہ $a \leq t \leq b$ ہو تب نقطہ $(f(a), g(a))$ منحنی کا **ابتدائی نقطہ**[۲۵] اور نقطہ $(f(b), g(b))$ اس کا **اختتامی نقطہ**[۲۶] ہو گا۔ منحنی کو **مقدار معلوم روپ دینے**[۲۷] سے مراد مستوی میں منحنی کی مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفہ بیان کرنا ہے۔

□

بہت سارے مواقع پر $t$ وقت کو ظاہر کرتا ہے جبکہ دیگر مواقع پر یہ کسی اور متغیر مثلاً زاویہ (اگلی مثال) کو ظاہر کر سکتا ہے۔

مثال ۱۰.۱: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$
درج ذیل مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفہ

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

بڑھتے $t$ کے لئے دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر گھڑی کی الٹ رخ ایک ذرہ کا مقام $N(x, y)$ ظاہر کرتے ہیں (شکل ۱۰.۳۵)۔
چونکہ ہر $t$ کے لئے

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

---

[۲۲] parametric equations
[۲۳] parameter
[۲۴] parameter interval
[۲۵] initial point
[۲۶] terminal point
[۲۷] parametrization

ہوتا ہے لہٰذا ہم جانتے ہیں کہ یہ ذرہ اس دائرے پر حرکت کرتا ہے۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ دائرے کے کتنے حصہ پر ذرہ حرکت کرتا ہے۔

یہ جاننے کے لئے ہم $t$ کو 0 تا $2\pi$ کر کے ذرے کی مقام پر نظر رکھتے ہیں۔ مقدار معلوم $t$ کی ناپ ریڈیئن میں ہے جو $ON$ اور مثبت $x$ محور کے بیچ زاویہ ہے۔ یہ ذرہ $t = 0$ پر نقطہ $(x,y) = (\cos 0, \sin 0) = (1,0)$ سے شروع کر کے اوپر اور بائیں چلتے ہوئے $t = \frac{\pi}{2}$ پر $(x,y) = (\cos\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2}) = (0,1)$ پہنچتا ہے۔ یہاں سے یہ بائیں اور نیچے چلتے ہوئے $t = \pi$ پر $(x,y) = (\cos\pi, \sin\pi) = (-1,0)$ پہنچتا ہے۔ اس کے بعد ذرہ نیچے اور دائیں چل کر $(0,-1)$ پہنچ کر یہاں سے اوپر اور دائیں چل کر آخر کار $t = 2\pi$ پر نقطہ $(x,y) = (\cos 2\pi, \sin 2\pi) = (1,0)$ پر واپس آن پہنچتا ہے۔ یوں $0 \le t \le 2\pi$ کرنے سے یہ ذرہ ٹھیک ایک بار دائرہ پر گھڑی کے الٹ رخ چلتا ہے۔ □

مثال ۱۰.۲: نصف دائرہ

درج ذیل مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفہ

$$x = \cos t, \quad y = -\sin t, \quad 0 \le t \le \pi$$

ایک ذرے کا مقام دیتے ہیں جو $t$ کو 0 سے بڑھا کر $\pi$ کرنے سے بڑھانے سے گھڑی کے رخ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر حرکت کرتا ہے (شکل ۱۰.۳۶)۔

چونکہ مذکورہ بالا مقدار معلوم مساوات سے حاصل محدد دائرہ کی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا یہ ذرہ دائرے پر حرکت کرتا ہے۔ یہ جاننے کے لئے کہ دائرے کے کتنے حصے پر ذرہ حرکت کرتا ہے، ہم $t$ کو 0 تا $\pi$ کرتے ہوئے ذرہ کے مقام پر نظر رکھتے ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر مذکورہ بالا مساوات سے $(x,y) = (1,0)$ ملتا ہے جو ذرے کا ابتدائی مقام ہے۔ البتہ اب $t$ بڑھانے سے $x$ کی قیمت گھٹتی ہے جبکہ $y$ کی قیمت منفی ہو کر $-1$ تک پہنچ کر $t = \pi$ پر واپس 0 ہوتی ہے۔ چونکہ $t = \pi$ وقفے کا اختتامی نقطہ ہے لہٰذا ذرہ یہیں رہتا ہے۔ یوں ذرہ دائرے کے نچلے نصف حصے پر سفر کرتا ہے۔ □

مثال ۱۰.۳: نصف قطع مکافی

مستوی $xy$ میں ایک ذرے کا مقام $N(x,y)$ درج ذیل مقدار مساوات اور مقدار معلوم وقفہ دیتے ہیں۔

$$x = \sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \ge 0$$

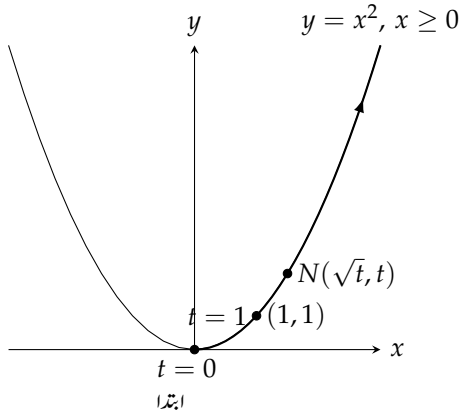
اس ذرے کی راہ کو پہچان کر اس کو بیان کریں۔

حل: ہم مساوات $x = \sqrt{t}$ اور $y = t$ سے $t$ خارج کرتے ہوئے راہ کی مساوات تلاش کرتے ہیں۔ اگر ہماری قسمت اچھی ہو، ایسا کرنے سے کوئی جانی پہچانی مساوات حاصل ہو سکتی ہے۔

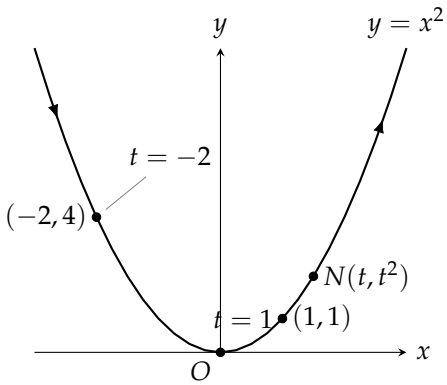
$$y = t = (\sqrt{t})^2 = x^2$$

اس سے ظاہر ہے کہ ذرے کے مقام کے محدد مساوات $y = x^2$ کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا ذرہ قطع مکافی $y = x^2$ پر حرکت کرتا ہے۔

البتہ یہ کہنا غلط ہو گا کہ یہ ذرہ پورے قطع مکافی $y = x^2$ پر حرکت کرتا ہے۔ یہ ذرہ حقیقت میں نصف قطع مکافی پر حرکت کرتا ہے۔ ذرے کے مقام کا $x$ محدد کبھی بھی منفی نہیں ہوتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ذرہ $(0,0)$ سے شروع کرتے ہوئے $t$ بڑھنے سے ربع اول میں رہ کر اوپر بڑھتا جاتا ہے (شکل ۱۰.۳۷)۔ □




شکل ۱۰.۳۷: نصف قطع مکافی راہ (مثال ۱۰.۳)




شکل ۱۰.۳۸: مکمل قطع مکافی راہ (مثال ۱۰.۴)

مثال ۱۰.۴: مکمل قطع مکافی راہ
مستوی $xy$ میں ایک ذرے کا مقام $N(x, y)$ درج ذیل مساوات اور مقدار معلوم وقفہ دیتے ہیں۔

$$x = t, \quad y = t^2, \quad -\infty < t < \infty$$

اس ذرے کی راہ کو پہچان کر اس کو بیان کریں۔

حل: ہم مساوات $x = t$ اور $y = t^2$ سے $t$ خارج کرکے $x$ اور $y$ کے بیچ مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y = (t)^2 = x^2$$

ذرے کا مقام مساوات $y = x^2$ کو مطمئن کرتی ہے لہٰذا ذرہ قطع مکافی $y = x^2$ پر حرکت کرتا ہے۔

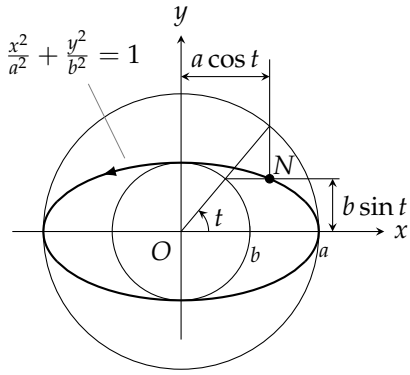
البتہ اب مثال ۱۰.۳ کے برعکس ذرہ مکمل قطع مکافی پر حرکت کرتا ہے۔ جیسے جیسے $t$ کی قیمت $-\infty$ سے بڑھ کر $\infty$ پہنچتی ہے، ذرہ بائیں سے نیچے آتے ہوئے مبدا سے گزر کر اوپر دائیں حرکت کرتا ہے (شکل ۱۰.۳۸)۔ □

جیسا ہم نے مثال ۱۰.۴ میں دیکھا، کسی بھی منحنی $y = f(x)$ کی مقدار معلوم روپ $x = t,\ y = f(t)$ ہو گی۔ یہ اتنی سادہ صورت ہے کہ اس کو ہم حقیقت میں استعمال نہیں کرتے ہیں لیکن اس سے نظریہ باآسانی سمجھ آتا ہے۔

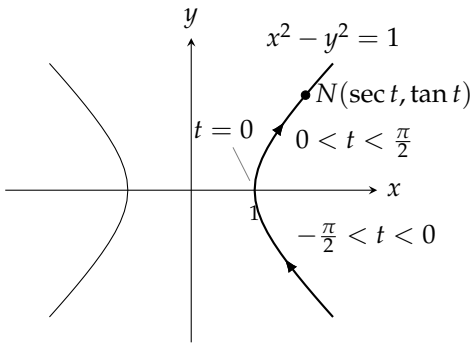
مثال ۱۰.۵: ایک ذرے کا مقام لمحہ $t$ پر $N(x, y)$ درج ذیل دیتے ہیں۔

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

اس ذرے کی حرکت کو بیان کریں۔




شکل ۱۰.۳۹: ترخیمی راہ (مثال ۱۰.۵)




شکل ۱۰.۴۰: قطع زائد راہ (مثال ۱۰.۷)

حل: ہم مساوات $\cos t = \frac{x}{a}$ اور $\sin t = \frac{y}{b}$ سے $t$ خارج کرکے کارتیسی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad \Longrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ذرے کا مقام مساوات ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ کو مطمئن کرتا ہے لہٰذا یہ ذرہ ترخیم پر حرکت کرتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر ذرے کے مقام کے محدد

$$x = a\cos(0) = a, \quad y = b\sin(0) = 0$$

ہوں گے لہٰذا یہ ابتدائی نقطہ $(a, 0)$ سے حرکت شروع کرتا ہے۔ $t$ بڑھانے سے ذرہ اوپر اور بائیں گھڑی کے الٹ رخ حرکت کرتا ہے۔ یہ قطع مکافی کے گرد ایک بار چل کر لمحہ $t = 2\pi$ پر واپس نقطہ $(a, 0)$ پہنچ کر رک جاتا ہے (شکل ۱۰.۳۹)۔ □

مثال ۱۰.۶: درج ذیل مقدار معلوم مساوات اور مقدار معلوم وقفہ، جو مثال ۱۰.۵ میں $b = a$ پر کرنے سے حاصل ہوتے ہیں،

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ کو ظاہر کرتے ہیں۔ □

مثال ۱۰.۷: ایک ذرے کا مقام لمحہ $t$ پر درج ذیل مقدار معلوم مساوات دیتے ہیں۔

$$x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

حل: ہم درج ذیل مساوات

$$\sec t = x, \quad \tan t = y$$

سے $t$ خارج کر کے کارتیسی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ایسا مماثل $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$ کی مدد سے کیا جائے گا۔

$$\sec^2 t - \tan^2 t = x^2 - y^2 = 1$$

چونکہ ذرے کے مقام کے محدد $(x, y)$ مساوات $x^2 - y^2 = 1$ کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا یہ ذرہ قطع زائد پر حرکت کرتا ہے۔متغیر $t$ کی قیمت $-\frac{\pi}{2}$ سے بڑھ کر $\frac{\pi}{2}$ تک پہنچنے سے $x = \sec t$ کی قیمت مثبت اور $y = \tan t$ کی قیمت $-\infty$ سے $\infty$ پہنچتی ہے لہٰذا $N$ قطع زائد کے دایاں نصف حصہ پر رہے گا (شکل ۱۰.۴۰)۔ □

مثال ۱۰.۸: تدویر

ایک پہیا جس کا رداس $a$ ہے افقی لکیر پر چل رہا ہے۔اس کے محیط پر نقطہ $N$ کی راہ کے مقدار معلوم مساوات معلوم کریں۔اس راہ کو **تدویر**[۲۸] کہتے ہیں۔

حل: ہم $x$ محور کو وہ لکیر لیتے ہیں جس پر پہیا چل رہا ہے اور لمحہ $t = 0$ پر نقطہ $N$ کو مبدا پر لیتے ہیں۔ہم زاویہ $t$ کو مقدار معلوم لیتے ہیں جو پہیا گھومنے کا زاویہ ہے اور اس کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔شکل ۱۰.۴۱ میں پہیے کو کچھ دیر بعد دکھایا گیا ہے جہاں اس کا قاعدہ، مبدا سے $at$ فاصلہ پر ہے۔پہیے کا مرکز $(at, a)$ ہر ہو گا اور $N$ کے محدد درج ذیل ہوں گے۔

$$x = at + a\cos\theta, \quad y = a + a\sin\theta$$

زاویہ $\theta$ کو $t$ کی صورت میں ظاہر کرنے کے لئے ہم شکل سے

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - t$$

لکھ سکتے ہیں۔یوں

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\sin t, \quad \sin\theta = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t$$

ہوں گے۔درکار مساوات

$$x = at - a\sin t, \quad y = a - a\cos t$$

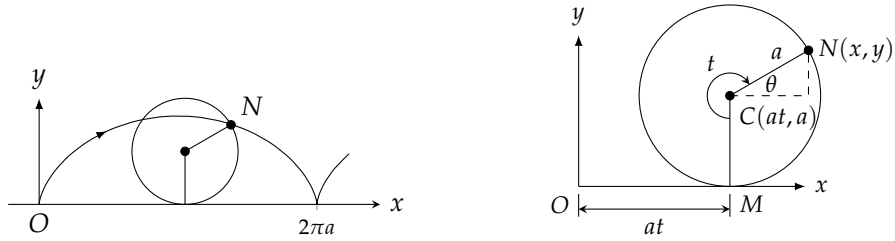
ہیں جنہیں عموماً

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \tag{۱۰.۱}$$

لکھا جاتا ہے۔شکل ۱۰.۴۱ میں اس تدویر کا کچھ حصہ دکھایا گیا ہے۔ □

---

[۲۸] cycloid




شکل ۱۰.۴۱: پہیے کے محیط پر نقطے کا مقام اور تدویر۔

## کمتر وقتی منحنی اور یکساں وقتی منحنی

اگر ہم شکل ۱۰.۴۱ کی تدویر کو الٹ کریں، مساوات ۱۰.۱۱ اس پر بھی لاگو ہو گی (شکل ۱۰.۴۲) جہاں مثبت $y$ نیچے رخ ہے۔ حاصل سر نیچے منحنی کے دو اہم خواص ہیں۔ پہلی خاصیت مبدا $O$ اور پہلی قوس میں سب سے گہرا نقطہ $B$ سے تعلق رکھتا ہے۔ ایک بلا رگڑ گیند جس پر صرف کشش ثقل عمل کرتا ہو، ان دو نقطوں کو جوڑنے والی تمام منحنیات میں سب سے جلد اس تدویر پر چلتے ہوئے $O$ سے $B$ پہنچتا ہے۔ یوں اس تدویر کو **کمتر وقتی منحنی** کہتے ہیں۔ اس کی دوسری خاصیت یہ ہے کہ اگر گیند کو $O$ کی بجائے کسی دوسرے نقطہ سے چلنے دیا جائے یہ گیند $B$ تک پہنچتے ہوئے اتنا ہی وقت لے گا جو یہ $O$ سے $B$ تک پہنچتے ہوئے لیتا ہے۔ یوں اس کو تدویر کو **یکساں وقتی منحنی** بھی کہتے ہیں۔

کیا $O$ اور $B$ کے بیچ اس کے علاوہ بھی کوئی کمتر وقت کی منحنی پائی جاتی ہے؟ ہم اس کو بطور ریاضیاتی پیش کر سکتے ہیں: ابتدا میں چونکہ گیند کی رفتار صفر ہے لہذا اس کی حرکی توانائی صفر ہو گی۔ مبدا $(0,0)$ سے کسی بھی نقطہ $(x,y)$ تک گیند کو پہنچانے کی خاطر $mgy$ کام ثقلی کشش کو کرنا ہو گا اور یہ توانائی لازماً حرکی توانائی میں تبدیلی کے برابر ہو گی، یعنی:

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(0)^2$$

یوں $(x,y)$ پر پہنچ کر گیند کی سمتی رفتار

$$v = \sqrt{2gy}$$

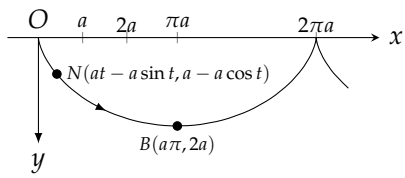
ہو گی جس کو

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{2gy}$$

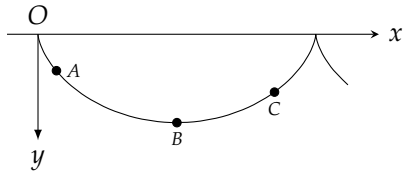
گیند کی راہ پر چلتے ہوئے
$\mathrm{d}s$ تفرقی فاصلہ ہے

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ کسی بھی مخصوص راہ $y = f(x)$ پر $O$ سے $B(a\pi, 2a)$ تک چلتے ہوئے درکار وقت $T_f$ درج ذیل ہو گا۔

$$T_f = \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}{2gy}}\,\mathrm{d}x \tag{۱۰.۲}$$




شکل ۱۰.۴۲: سر نیچے تدویر پر کشش ثقل کی بنا حرکت۔




شکل ۱۰.۴۳: سر نیچے تدویر پر کسی بھی نقطہ سے $B$ تک پہنچنے کے لئے ایک جیسا وقت درکار ہوتا ہے۔

اس وقت (تکمل کی قیمت) کو کونسی منحنی $y = f(x)$ کمتر کرتی ہے؟

پہلی نظر میں یوں معلوم ہوتا ہے جیسا $O$ سے $B$ تک سیدھی لکیر (جو یقیناً کمتر فاصلہ ہے) پر گیند کمتر وقت میں $O$ سے $B$ تک پہنچے گا لیکن کیا ایسا ہوتا ہے۔ عین ممکن ہے کہ شروع میں گیند کو سیدھا نیچے گرنے دینے سے جلد زیادہ رفتار حاصل کیا جا سکتا ہے جس کی بنا نسبتاً لمبی راہ بھی کم قوت میں طے کی جا سکتی ہو۔ حقیقت میں یہی درست جواب ہے۔ یہ ثابت کیا جا سکتا ہے (ثبوت کو پیش نہیں کیا جائے گا) کہ $O$ سے $B$ تک تدویر $O$ اور $B$ کے بیچ واحد کمتر وقتی منحنی ہے۔ اگرچہ تدویر کو $O$ اور $B$ کے بیچ واحد کم وقتی منحنی ثابت کرنا اس کتاب میں پیش نہیں کیا جائے گا، ہم دکھا سکتے ہیں کہ یہ تدویر یکساں وقتی منحنی ہے۔ تدویر کے لئے مساوات ۱۰.۲ درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$T_{\text{تدویر}} = \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{2gy}}$$

مساوات ۱۰.۱ سے $\mathrm{d}x = a(1-\cos t)\,\mathrm{d}t$ ، اور $\mathrm{d}y = a\sin t\,\mathrm{d}t$ ہوں گے $y = a(1-\cos t)$

$$= \int_{t=0}^{t=\pi} \sqrt{\frac{a^2(2-2\cos t)}{2ga(1-\cos t)}}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{a}{g}}\,\mathrm{d}t = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

یوں بے رگڑ گیند کو تدویر پر چلتے ہوئے $O$ سے $B$ تک پہنچنے کے لئے $\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$ وقت درکار ہوگا۔

فرض کریں ہم $O$ کی بجائے تدویر پر نقطہ $(x_0, y_0)$ سے گیند کو چلنے دیں جس کی مطابقتی مقدار معلوم قیمت $t_0 > 0$ ہے۔ تدویر پر اس کے بعد کسی نقطہ $(x, y)$ پر گیند کی سمتی رفتار

$$v = \sqrt{2g(y-y_0)} = \sqrt{2ga(\cos t_0 - \cos t)} \qquad (y = (1-\cos t))$$

ہو گی۔ یوں $(x_0, y_0)$ سے $B$ تک پہنچنے کے لئے درکار وقت درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
T &= \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{a^2(2-2\cos t)}{2ga(\cos t_0 - \cos t)}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1-\cos t}{\cos t_0 - \cos t}}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2\sin^2 \frac{t}{2}}{(2\cos^2 \frac{t_0}{2} - 1) - (2\cos^2 \frac{t}{2} - 1)}}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t_0}^{\pi} \frac{\sin \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{\cos^2 \frac{t_0}{2} - \cos^2 \frac{t}{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{a}{g}} \int_{t=t_0}^{t=\pi} \frac{-2\,\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2 - u^2}} \qquad [u = \cos(t/2),\ c = \cos(t_0/2)] \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \left[ -\sin^{-1} \frac{u}{c} \right]_{t=t_0}^{t=\pi} \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}} \left[ -\sin^{-1} \frac{\cos(t/2)}{\cos(t_0/2)} \right]_{t_0}^{\pi} \\
&= 2\sqrt{\frac{a}{g}} (-\sin^{-1} 0 + \sin^{-1} 1) = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}
\end{aligned}
$$

یہ ٹھیک اتنا ہی وقت ہے جو گیند کو $O$ سے $B$ تک پہنچتے ہوئے درکار ہوتا ہے۔ نقطہ $B$ تک پہنچنے کے لئے درکار وقت پر ابتدائی نقطے کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا ہے۔ یوں شکل ۱۰.۴۳ میں $O$ ، $A$ اور $C$ سے ابتدا کرتے ہوئے تینوں گیند $B$ تک ایک جتنے وقت میں پہنچیں گے۔

## معیاری مقدار معلوم روپے

دائرہ

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= a^2 \\
x &= a\cos t \\
y &= a\sin t \\
0 &\le t \le 2\pi
\end{aligned}
$$

ترخیم

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\
x &= a\cos t \\
y &= b\sin t \\
0 &\le t \le 2\pi
\end{aligned}
$$

رداس $a$ کے دائرہ کا پیدا کردہ تدویر

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

## سوالات

### مقدار معلوم مساوات سے کارتیسی مساوات کا حصول

سوال ۱۰.۱ تا سوال ۱۰.۲۴ میں $xy$ مستوی میں ایک ذرہ کی حرکت کی مقدار معلوم مساوات دی گئی ہیں۔ اس ذرے کی راہ کی کارتیسی مساوات حاصل کرتے ہوئے راہ کو پہچانئے۔ کارتیسی مساوات کو ترسیم کرتے ہوئے اس پر ذرے کی راہ اور رخ دکھائیں۔

سوال ۱۰.۱: $x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \le t \le \pi$

سوال ۱۰.۲: $x = \cos 2t, \quad y = \sin 2t, \quad 0 \le t \le \pi$

سوال ۱۰.۳: $x = \sin(2\pi(1-t)), \quad y = \cos(2\pi(1-t)), \quad 0 \le t \le 1$

سوال ۱۰.۴: $x = \cos(\pi - t), \quad y = \sin(\pi - t), \quad 0 \le t \le \pi$

سوال ۱۰.۵: $x = 4\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۰.۶: $x = 4\sin t, \quad y = 2\cos t, \quad 0 \le t \le \pi$

سوال ۱۰.۷: $x = 4\cos t, \quad y = 5\sin t, \quad 0 \le t \le \pi$

سوال ۱۰.۸: $x = 4\sin t, \quad y = 5\cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۰.۹: $x = 3t, \quad y = 9t^2, \quad -\infty < t < \infty$

سوال ۱۰.۱۰: $x = -\sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \ge 0$

سوال ۱۰.۱۱: $x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \ge 0$

سوال ۱۰.۱۲: $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

سوال ۱۰.۱۳: $x = -\sec t, \quad y = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

سوال ۱۰.۱۴: $x = \csc t, \quad y = \cot t, \quad 0 < t < \pi$

سوال ۱۰.۱۵: $x = 2t - 5, \quad y = 4t - 7, \quad -\infty < t < \infty$

سوال ۱۰.۱۶: $x = 1 - t, \quad y = 1 + t, \quad -\infty < t < \infty$

سوال ۱۰.۱۷: $x = t, \quad y = 1 - t, \quad 0 \le t \le 1$

سوال ۱۰.۱۸: $x = 3 - 3t, \quad y = 2t, \quad 0 \le t \le 1$

سوال ۱۰.۱۹: $x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2}, \quad -t \le t \le 0$

سوال ۱۰.۲۰: $x = t, \quad y = \sqrt{4 - t^2}, \quad 0 \le t \le 2$

سوال ۱۰.۲۱: $x = t^2, \quad y = \sqrt{t^4 + 1}, \quad t \ge 0$

سوال ۱۰.۲۲: $x = \sqrt{t+1}, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \ge 0$

سوال ۱۰.۲۳: $x = -\cosh t, \quad y = \sinh t, \quad -\infty < t < \infty$

سوال ۱۰.۲۴: $x = 2\sinh t, \quad y = 2\cosh t, \quad -\infty < t < \infty$

## مقدار معلوم مساوات کا حصول

سوال ۱۰.۲۵: ایک ذرہ $(a, 0)$ سے ابتدا کرتے ہوئے دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ پر (ا) ایک بار گھڑی کے رخ، (ب) ایک بار گھڑی کے الٹ رخ، (ج) دو بار گھڑی کے رخ یا (د) دو بار گھڑی کے الٹ رخ صفر کرتا ہے۔ ہر ایک صورت میں اس ذرے کی راہ کی مقدار معلوم مساوات اور حرکت کا وقفہ تلاش کریں۔ (اس کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں لہٰذا آپ کا جواب دیے گئے جواب سے مختلف ہو سکتا ہے۔)

سوال ۱۰.۲۶: ایک ذرہ $(a, 0)$ سے ابتدا کرتے ہوئے ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ پر (ا) ایک بار گھڑی کے رخ، (ب) ایک بار گھڑی کے الٹ رخ، (ج) دو بار گھڑی کے رخ یا (د) دو بار گھڑی کے الٹ رخ صفر کرتا ہے۔ ہر ایک صورت میں اس ذرے کی راہ کی مقدار معلوم مساوات اور حرکت کا وقفہ تلاش کریں۔ (اس کو حل کرنے کے کئی طریقے ہیں لہٰذا آپ کا جواب دیے گئے جواب سے مختلف ہو سکتا ہے۔)

سوال ۱۰.۲۷: درج ذیل نصف دائرے کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔ ایسا کرتے ہوئے $(x, y)$ پر منحنی کے مماس کی ڈھلوان $t = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو مقدار معلوم لیں۔

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y > 0$$

سوال ۱۰.۲۸: دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ پر نقطہ $(a, 0)$ سے نقطہ $(x, y)$ تک گھڑی کے الٹ رخ فاصلہ $s$ کو مقدار معلوم لیتے ہوئے اس دائرے کی مقدار معلوم مساوات حاصل کریں۔

سوال ۱۰.۲۹: ایک دائرہ جس کا رداس 1 اور مرکز $(0, 1)$ ہو کو شکل ۱۰.۴۴ میں دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی لکیر $y = 2$ بھی دکھائی گئی ہے۔ اس لکیر پر کوئی نقطہ $A$ لیں اور اس کو مبدا $O$ کے ساتھ سیدھی لکیر سے ملائیں۔ خط $OA$ اکائی دائرہ کو نقطہ $N$ پر قطع کرتا ہے۔ نقطہ $A$ کو لکیر $y = 2$ پر چلانے سے نقطہ $N$ جس راہ پر چلتا ہے اس کو مریا گنیسی کی چڑیل کہتے ہیں۔ مریا گنیسی کی چڑیل کی مقدار معلوم مساوات اور اس کا مقدار معلوم وقفہ تلاش کریں۔ قطع $OA$ اور مثبت $x$ محور کے بیچ زاویہ $t$ کو مقدار معلوم لیں جہاں $t$ کو ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔ درج ذیل مساوات فرض کرنے سے آپ کو مدد مل سکتی ہے۔

$$x = AQ, \quad y = 2 - AB\sin t, \quad AB \cdot OA = (AQ)^2$$

سوال ۱۰.۳۰: دائرے کا در پیچیدہ

ایک غیر تغیر پذیر دائرہ کے گرد لپٹے گئے دھاگے کو تان کر، دائرے کی مستوی میں رہتے ہوئے، کھولنے سے دھاگے کا سر $N$ جس راہ پر چلتا ہے، اس کو دائرے کا **در پیچیدہ**[۲۹] کہتے ہیں۔ شکل ۱۰.۴۵ میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ اور ابتدائی نقطہ $(1, 0)$ ہے۔ کھولا گیا دھاگہ $Q$ پر دائرے کا مماس ہے۔ قطع $OQ$ اور مثبت $x$ محور کے بیچ زاویہ $t$ ہے۔ نقطہ $N(x, y)$ کے محدد $x$ اور $y$ کو $t$ کی روپ میں لکھ کر در پیچیدہ کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔ در پیچیدہ کی مقدار معلوم کا وقفہ $t \geq 0$ لیں۔

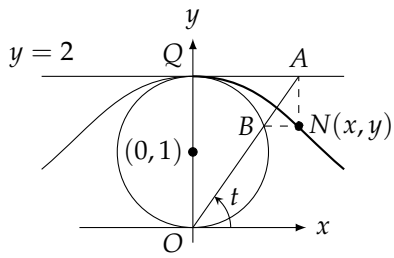
سوال ۱۰.۳۱: مستوی میں لکیروں کی مقدار معلوم روپ

(الف) دکھائیں کہ درج ذیل ایک ایسی لکیر کو ظاہر کرتی ہیں جو نقطہ $(x_0, y_0)$ اور $(x_1, y_1)$ سے گزرتی ہے (شکل ۱۰.۴۶)۔

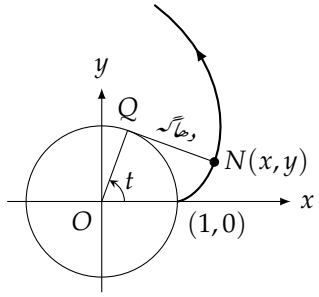
$$x = x_0 + (x_1 - x_0)t, \quad y = y_0 + (y_1 - y_0)t, \quad -\infty < t < \infty$$

---

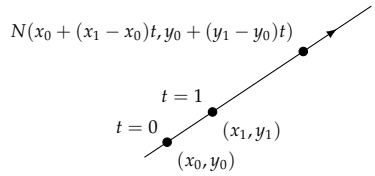
[۲۹] involute



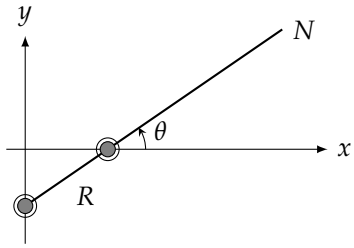

شکل ۱۰.۴۴: ترسیم برائے سوال ۱۰.۲۹




شکل ۱۰.۴۵: اکائی دائرے کا درپیچیدہ (سوال ۱۰.۳۰)




شکل ۱۰.۴۶: مستوی میں سیدھی لکیر (سوال ۱۰.۳۱)۔




شکل ۱۰.۴۷: آرشمیدسی روک برائے سوال ۱۰.۳۲

(ب) اسی مقدار معلوم وقفہ کو استعمال کرتے ہوئے نقطہ $(x_1, y_1)$ اور مبدا سے گزرتی لکیر کی مقدار معلوم مساوات لکھیں۔ (ج) اسی مقدار معلوم وقفہ کے لئے $(-1, 0)$ اور $(0, 1)$ سے گزرتی لکیر کی مقدار معلوم مساوات معلوم کریں۔ شکل ۱۰.۴۶ میں تیر کا نشان بڑھتے $t$ کا رخ ظاہر کرتا ہے۔

سوال ۱۰.۳۲: آرشمیدسی روک

آرشمیدسی روک کو شکل ۱۰.۴۷ میں دکھایا گیا ہے جو ایک مضبوط سلاخ جس کی لمبائی $L$ ہو پر مشتمل ہے۔ محور $x$ اور $y$ کے ساتھ اس کو پہیوں کے ساتھ منسلک کیا گیا ہے۔ اس سلاخ کا آزاد سر $N$ ہے۔ سلاخ اور مثبت $x$ محور کے بیچ زاویہ $\theta$ ہے۔

ا. مقدار معلوم $\theta$ کی صورت میں $N$ کی راہ کی مساوات تلاش کریں۔

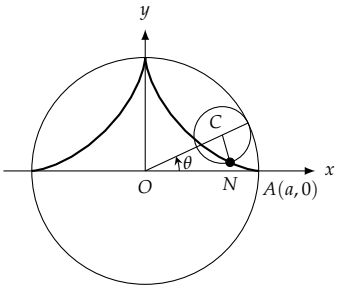
ب. $N$ کی راہ کی کارتیسی مساوات تلاش کر کے اس کی ترسیم کو پہچانیں۔

سوال ۱۰.۳۳: فلک تدویر

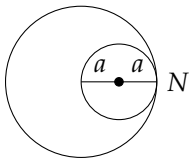
ایک غیر تغیر پذیر دائرے کے محیط کی اندرون پر چلتے ہوئے دائرہ کی محیط پر کسی بھی نقطہ $N$ کی راہ **فلک تدویر**[۳۰] کہلاتی ہے۔ غیر تغیر پذیر دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ لیں جبکہ دوسرے دائرے کا رداس $b$ ہے۔ $N$ کا ابتدائی مقام نقطہ $A(a, 0)$ لیں۔ دونوں دائروں کے مراکز کو ملانے والے خط اور مثبت $x$ محور کے بیچ زاویہ $\theta$ ہے۔ فلک تدویر کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں جہاں مقدار معلوم $\theta$ ہے۔ بالخصوص $b = \frac{a}{4}$ کی صورت

---

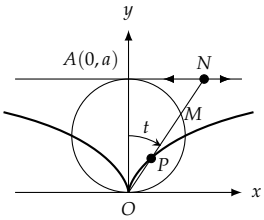
[۳۰] hypocycloid




شکل ۱۰.۴۸: ستارہ نما۔ سوال ۱۰.۳۳




شکل ۱۰.۴۹: تدویر برائے سوال ۱۰.۳۴




شکل ۱۰.۵۰: ترسیمات برائے سوال ۱۰.۳۵

میں فلک تدویر درج ذیل **ستارہ نما**[۳۱] ہوگا (شکل ۱۰.۴۸)۔

$$x = a\cos^3\theta, \quad y = a\sin^3\theta$$

سوال ۱۰.۳۴: تدویر پر مزید معلومات
ایک دائرہ جس کا رداس $2a$ ہے کے اندر دوسرا دائرہ جس کا رداس $a$ ہے شکل ۱۰.۴۹ میں دکھایا گیا ہے۔ نقطہ $N$ پر یہ دائرے آپس میں ملتے ہیں۔ اندرونی دائرہ بیرونی دائرے کے اندر محیط پر چلتا ہے۔ نقطہ $N$ کے مقام کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۳۵: نقطہ $N$ لکیر $y = a$ پر چلتا ہے (شکل ۱۰.۵۰)۔ نقطہ $P$ یوں حرکت کرتا ہے کہ $OP = MN$ ہو۔ زاویہ $t$ کو مقدار معلوم لیتے ہوئے نقطہ $P$ کی مقدار معلوم مساوات معلوم کریں۔ لکیر $ON$ اور $y$ محور کے بیچ زاویہ $t$ ہے۔

سوال ۱۰.۳۶: ایک پہیا جس کا رداس $a$ ہے ایک سیدھی لکیر پر بغیر پھسلے چل رہا ہے۔ پہیے کے مرکز سے $b$ اکائی دور نقطہ $N$ کی راہ کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔ پہیا جتنا زاویہ ( $\theta$ ) گھومتا ہے، اس کو مقدار معلوم لیں۔

## مقدار معلوم مساوات سے فاصلے کا حصول

سوال ۱۰.۳۷: قطع مکافی $x = t,\ y = t^2,\ -\infty < t < \infty$ پر $(2, \frac{1}{2})$ کا قریبی نقطہ تلاش کریں۔ (اشارہ: فاصلہ کے مربع کا $t$ کے لحاظ سے تفرق لیں۔)

سوال ۱۰.۳۸: ترخیم $x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ پر $(\frac{3}{4}, 0)$ کا قریبی نقطہ تلاش کریں۔ (اشارہ: فاصلہ کے مربع کا $t$ کے لحاظ سے تفرق لیں۔)

## کمپیوٹر کا استعمال

درج ذیل مقدار معلوم مساوات کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔

---

[۳۱] astroid

سوال ۱۰.۳۹: ترخیم $x = 4\cos t,\ y = 2\sin t$ وقفہ (ا) $0 \le t \le 2\pi$ ، (ب) $0 \le t \le \pi$ ، (ج) $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

سوال ۱۰.۴۰: قطع زائد $x = \sec t,\ y = \tan t$ کا ایک بازو وقفہ (ا) $-1.5 \le t \le 1.5$ ، (ب) $-0.5 \le t \le 0.5$ ، (ج) $-0.1 \le t \le 0.1$

سوال ۱۰.۴۱: قطع مکافی $x = 2t + 3,\ y = t^2 - 1$ وقفہ $-2 \le t \le 2$

سوال ۱۰.۴۲: تدویر $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$ وقفہ (ا) $0 \le t \le 2\pi$ ، (ب) $0 \le t \le 4\pi$ ، (ج) $\pi \le t \le 3\pi$

سوال ۱۰.۴۳: ستارہ نما $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$ وقفہ (ا) $0 \le t \le 2\pi$ ، (ب) $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$

سوال ۱۰.۴۴: ایک خوبصورت منحنی یا مثلث[۳۲]
اگر درج ذیل مساوات کے $x$ اور $y$ میں 2 کی جگہ $-2$ ہو تب کیا ہو گا؟

$$x = 2\cos t + \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

اس نئی مساوات کو ترسیم کر کے دریافت کریں۔

سوال ۱۰.۴۵: مزید خوبصورت منحنی
اگر درج ذیل مساوات کے $x$ اور $y$ میں 3 کی جگہ $-3$ ہو تب کیا ہو گا؟

$$x = 3\cos t + \cos 3t, \quad y = 3\sin t - \sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

اس نئی مساوات کو ترسیم کر کے دریافت کریں۔

سوال ۱۰.۴۶: گولا
توپ کے گولے کا مدار درج ذیل ہے۔

$$x = (64\cos\alpha)t, \quad y = -4.9t^2 + (64\sin\alpha)t, \quad 0 \le t \le 4\sin\alpha$$

توپ کے مدار کو زاویہ (ا) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ، (ب) $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ، (ج) $\alpha = \frac{\pi}{3}$ اور (د) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ کے لئے ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۴۷: تین خوبصورت منحنیات

ا. برتدویر:

$$x = 9\cos t - \cos 9t, \quad y = 9\sin t - \sin 9t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

ب. فلک تدویر:

$$x = 8\cos t + 2\cos 4t, \quad y = 8\sin t - 2\sin 4t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

---

[۳۲] deltoid

ج. زیر تدویر:

$$x = \cos t + 5\cos 3t, \quad y = 6\cos t - 5\sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

سوال ۱۰.۴۸: خوبصورت ترین منحنیات

ا. $x = 6\cos t + 5\cos 3t, \quad y = 6\sin t - 5\sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

ب. $x = 6\cos 2t + 5\cos 6t, \quad y = 6\sin 2t - 5\sin 6t, \quad 0 \le t \le \pi$

ج. $x = 6\cos t + 5\cos 3t, \quad y = 6\sin 2t - 5\sin 3t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

د. $x = 6\cos 2t + 5\cos 6t, \quad y = 6\sin 4t - 5\sin 6t, \quad 0 \le t \le \pi$

## ۱۰.۵ احصاء اور مقدار معلوم منحنیات

اس حصہ میں مقدار معلوم منحنیات کے ساتھ وابستہ ڈھلوان، لمبائی اور سطحی رقبے کی تلاش پر غور کیا جائے گا۔

### مقدار معلوم منحنیات کی ڈھلوان

تعریف: نقطہ $t = t_0$ پر مقدار معلوم منحنی $x = f(t), y = g(t)$ اس صورت **قابل تفرق** ہو گی جب $t = t_0$ پر $f$ اور $g$ قابل تفرق ہوں۔ یہ منحنی تب **قابل تفرق** ہو گی جب ہر مقدار معلوم قیمت پر یہ قابل تفرق ہو۔ یہ منحنی اس صورت **ہموار**[۳۳] ہو گی جب $f'$ اور $g'$ استمراری ہوں اور دونوں بیک وقت صفر نہ ہوں۔

□

ایک قابل تفرق منحنی پر اس نقطہ پر جہاں $x$ کے لحاظ سے بھی $y$ قابل تفرق تفاعل ہو، تفرقات $\frac{dx}{dt}$ ، $\frac{dy}{dt}$ اور $\frac{dz}{dt}$ کا تعلق درج ذیل زنجیری قاعدہ دیتا ہے:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

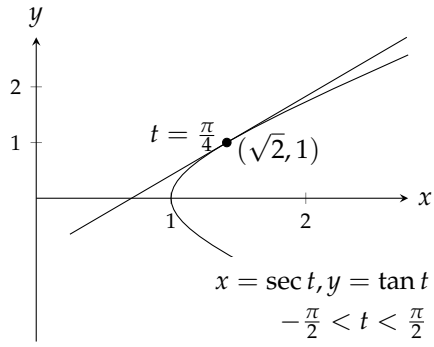
اگر $\frac{dx}{dt} \neq 0$ ہو تب ہم دونوں اطراف کو $\frac{dx}{dt}$ سے تقسیم کر کے $\frac{dy}{dx}$ حاصل کر سکتے ہیں۔

$\frac{dy}{dt}$ اور $\frac{dx}{dt}$ سے $\frac{dy}{dx}$ کا حصول $(\frac{dx}{dt} \neq 0)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \tag{۱۰.۱}$$

---

[۳۳] smooth




شکل ۱۰.۵۱: مثال ۱۰.۱ کا قطع زائد بازو۔

مثال ۱۰.۱: نقطہ $(\sqrt{2}, 1)$ جہاں $t = \frac{\pi}{4}$ ہے پر درج ذیل قطع زائد کے دائیں بازو کے مماس کی مساوت معلوم کریں (شکل ۱۰.۵۱)۔

$$x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$$

حل: اس منحنی کی $t$ پر ڈھلوان

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t} \qquad \text{مساوات ۱۰.۱}$$

ہے جس میں $t = \frac{\pi}{4}$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} &= \frac{\sec(\frac{\pi}{4})}{\tan(\frac{\pi}{4})} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}\end{aligned}$$

حاصل ہو گا۔ مماس کی نقطہ-ڈھلوان مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}y - y_0 &= m(x - x_0) \\ y - 1 &= \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \\ y &= \sqrt{2}x - 2 + 1 \\ y &= \sqrt{2}x - 1\end{aligned}$$

□

### مقدار معلوم کلیہ برائے $\frac{d^2y}{dx^2}$

اگر ایک مقدار معلوم مساوات $y$ کو $x$ کا دوگنا قابل تفرق تفاعل پیش کرتی ہو، ہم $\frac{d^2y}{dx^2}$ کو $t$ کا تفاعل درج ذیل طریقہ سے معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$ مساوات ۱.۱۰ میں $y$ کی جگہ $y'$ لیا گیا ہے

یوں $y' = \frac{dy}{dx}$ اور $\frac{dx}{dt}$ سے $\frac{d^2y}{dx^2}$ کے حصول کا کلیہ درج ذیل ہوگا جہاں $\frac{dx}{dt} \neq 0$ ہے۔

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} \tag{۱۰.۲}$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ کو $t$ کی صورت میں لکھنے کے لئے درج ذیل اقدام لیں۔

ا. $y' = \frac{dy}{dx}$ کو $t$ کے لحاظ سے لکھیں۔

ب. $\frac{dy'}{dt}$ معلوم کریں۔

ج. $\frac{dy'}{dt}$ کو $\frac{dx}{dt}$ سے تقسیم کریں۔ ان کا حاصل تقسیم $\frac{d^2y}{dx^2}$ ہوگا۔

مثال ۱۰.۲: $x = t - t^2$ اور $y = t - t^3$ کی صورت میں $\frac{d^2y}{dx^2}$ تلاش کریں۔

حل: قدم ا: $y'$ کو $t$ کے لحاظ سے لکھیں:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1-3t^2}{1-2t}$$ مساوات ۱.۱۰ میں $x = t - t^2$ اور $y = t - t^3$

قدم ب: $t$ کے لحاظ سے $y'$ کا تفرق لیں:

$$\begin{aligned}\frac{dy'}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{1-3t^2}{1-2t}\right)\\ &= \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^2}\end{aligned}$$

قدم ج: $\frac{dy'}{dt}$ کو $\frac{dx}{dt}$ سے تقسیم کریں۔ چونکہ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t-t^2) = 1-2t \qquad (x = t - t^2)$$

ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}y'/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}t} \\ &= \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^2}\cdot\frac{1}{1-2t} \\ &= \frac{2-6t+6t^2}{(1-2t)^3}\end{aligned}$$ مساوات ۱۰.۲

□

## مقدار معلوم منحنیات کی لمبائیاں

ہم ہموار منحنی $x = f(t),\ y = g(t),\ a \le t \le b$ کی لمبائی کا تکمل حاصل کرنے کی خاطر ہم حصہ ۶.۵ کے تکمل $L = \int \mathrm{d}s$ کو درج ذیل صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}L &= \int_{t=a}^{t=b} \mathrm{d}s = \int_a^b \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{(\mathrm{d}x)^2}{(\mathrm{d}t)^2} + \frac{(\mathrm{d}y)^2}{(\mathrm{d}t)^2}\right)\mathrm{d}t^2} = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

درج بالا مکمل استمراری ہونے کے علاوہ ضروری ہے کہ جب $t$ کی قیمت $a$ سے $b$ تک بڑھتی ہو تب نقطہ $N(x,y) = N(f(t),g(t))$ ، منحنی کے کسی بھی حصہ پر ایک سے زیادہ مرتبہ نہ گزرتا ہو۔

### لمبائی

اگر $t$ کی قیمت $a$ تا $b$ کرنے سے ہموار منحنی $x = f(t),\ y = g(t),\ a \le t \le b$ پر ٹھیک ایک بار چلا جائے تب اس منحنی کی لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \tag{۱۰.۳}$$

حصہ ۶.۵ میں لمبائی کے کلیات مساوات ۱۰.۳ کی مخصوص صورتیں ہیں (سوال ۱۰.۳۵ اور سوال ۱۰.۳۶)۔

اعلیٰ احصاء کہتی ہے کہ منحنی کی ایک سے زائد مقدار معلوم مساوات سے حاصل لمبائیاں ایک دوسری جیسی ہوں گی۔ پس انہیں مساوات ۱۰.۳ سے قبل دیے گئے شرائط پر پورا اترنا ہو گا۔

مثال ۱۰.۳: ستارہ نما $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi$ کی لمبائی معلوم کریں (شکل ۱۰.۵۲)۔

حل: محددی محور کے لحاظ سے منحنی کی تشاکلی کی بنا کل منحنی کی لمبائی کسی ایک ربع میں اس کی لمبائی کے چار گنّا ہو گی۔ ہم ربع اول میں لمبائی معلوم کرتے ہیں۔ ہمارے پاس

$$\begin{aligned}
x &= \cos^3 t, \quad y = \sin^3 t \\
\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 &= [3\cos^2 t(-\sin t)]^2 = 9\cos^4 t \sin^2 t \\
\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 &= [3\sin^2 t(\cos t)]^2 = 9\sin^4 t \cos^2 t \\
\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} &= \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)} \qquad \cos^2 t + \sin^2 t = 1 \\
&= \sqrt{9\cos^2 t \sin^2 t} \\
&= 3|\cos t \sin t| \\
&= 3\cos t \sin t
\end{aligned}$$

ہے جہاں آخری قدم میں $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ پر $\cos t \sin t \ge 0$ ہے۔ یوں ربع اول میں لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\pi/2} 3\cos t \sin t \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \sin 2t \,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{3}{4}\cos 2t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

ستارہ نما کی لمبائی چار گنّا ہو گی: $4(3/2) = 6$ □

مثال ۱۰.۴: ربع اول میں مثال ۱۰.۳ کے ستارہ نما کا وسطانی مرکز معلوم کریں۔

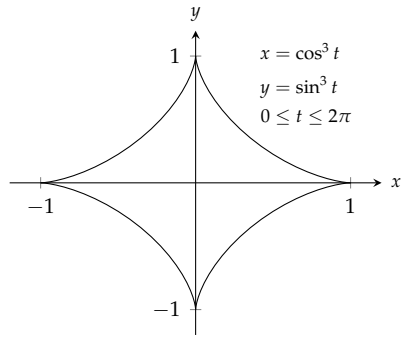
حل: ہم منحنی کی کثافت $\delta = 1$ لے کر حصہ ۶.۷ کی طرح اس کی کمیت اور محددی محور کے لحاظ سے معیار اثر معلوم کرتے ہیں۔

لکیر $y = x$ کے لحاظ سے کمیت کا تقسیم تشاکلی ہے لہٰذا $\bar{x} = \bar{y}$ ہو گا۔ منحنی کے کسی عمومی قطع کی کمیت درج ذیل ہو گی (شکل ۱۰.۵۳)۔

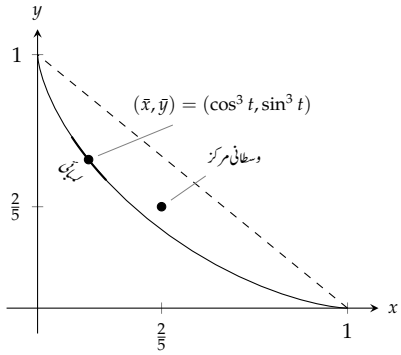
$$\mathrm{d}m = 1 \cdot \mathrm{d}s = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = 3\cos t \sin t \,\mathrm{d}t \qquad \text{مثال ۱۰.۳ دیکھیں}$$

یوں منحنی کی کمیت

$$M = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}m = \int_0^{\pi/2} 3\cos t \sin t \,\mathrm{d}t = \frac{3}{2} \qquad \text{مثال ۱۰.۳ دیکھیں}$$




شکل ۱۰.۵۲: ستارہ نما برائے مثال ۱۰.۳




شکل ۱۰.۵۳: ستارہ نما کا وسطانی مرکز۔

ہو گی۔ محور $x$ کے لحاظ سے منحنی کا معیار اثر

$$M_x = \int \bar{y}\,\mathrm{d}m = \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cdot 3\cos t \sin t\,\mathrm{d}t$$
$$= 3\int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t\,\mathrm{d}t = 3 \cdot \left.\frac{\sin^5 t}{5}\right|_0^{\pi/2} = \frac{3}{5}$$

ہو گا۔ یوں

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{3/5}{3/2} = \frac{2}{5}$$

اور وسطانی نقطہ $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$ ہو گا۔ □

## سطح طواف کا رقبہ

ہموار مقدار معلوم منحنیات کے لئے لمبائی کے کلیہ (مساوات ۱۰.۳) سے، حصہ ۶.۶ میں کارتیسی کلیات کی طرح، سطح طواف کے درج ذیل کلیات اخذ ہوتے ہیں۔

### سطح رقبہ

اگر $t$ کی قیمت $a$ تا $b$ کرنے سے ہموار منحنی $x = f(t),\ y = g(t),\ a \le t \le b$ پر ٹھیک ایک بار چلا جائے تب اس منحنی کو محددی

محور کے گرد گھمانے سے پیدا سطح طواف کے رقبے درج ذیل ہوں گے۔

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \qquad (y \geq 0) \text{ محور } x \text{ کے گرد} \tag{۱۰.۴}$$

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \qquad (x \geq 0) \text{ محور } y \text{ کے گرد} \tag{۱۰.۵}$$

لمبائی کی طرح ہم سطح طواف کی کسی بھی مقدار معلوم مساوات، جو درکار شرائط مطمئن کرتی ہو، سے سطح طواف کا رقبہ تلاش کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۰.۵: مستوی $xy$ میں رداس 1 کا دائرہ جس کا مرکز $(0,1)$ پر ہو کی مقدار معلوم مساوات درج ذیل ہیں۔

$$x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

اس دائرے کو محور $x$ کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ درج بالا مقدار معلوم مساوات استعمال کرتے ہوئے پیدا سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
S &= \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t && \text{مساوات ۱۰.۴} \\
&= \int_0^{2\pi} 2\pi(1+\sin t)\sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2}\,\mathrm{d}t && \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \\
&= 2\pi \int_0^{2\pi} (1+\sin t)\,\mathrm{d}t \\
&= 2\pi\,[t - \cos t]_0^{2\pi} = 4\pi^2
\end{aligned}$$

□

## سوالات

### مقدار معلوم منحنیات کے مماس

سوال ۱.۱۰ تا سوال ۱۲.۱۰ میں $t$ پر مقدار معلوم منحنی کے مماس کی مساوات دریافت کریں گے۔ اس نقطہ پر $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ بھی معلوم کریں۔

سوال ۱.۱۰: $x = 2\cos t, \quad y = 2\sin t, \quad t = \frac{\pi}{4}$

سوال ۲.۱۰: $x = \sin 2\pi t, \quad y = \cos 2\pi t, \quad t = -\frac{1}{6}$

سوال ۳.۱۰: $x = 4\sin t, \quad y = 2\cos t, \quad t = \frac{\pi}{4}$

سوال ۴.۱۰: $x = \cos t, \quad y = \sqrt{3}\cos t, \quad t = \frac{2\pi}{3}$

سوال ۱۰.۵: $x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t = \frac{1}{4}$

سوال ۱۰.۶: $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad t = -\frac{\pi}{4}$

سوال ۱۰.۷: $x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad t = \frac{\pi}{6}$

سوال ۱۰.۸: $x = -\sqrt{t+1}, \quad y = \sqrt{3t}, \quad t = 3$

سوال ۱۰.۹: $x = 2t^2 + 3, \quad y = t^4, \quad t = -1$

سوال ۱۰.۱۰: $x = \frac{1}{t}, \quad y = -2 + \ln t, \quad t = 1$

سوال ۱۰.۱۱: $x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t = \frac{\pi}{3}$

سوال ۱۰.۱۲: $x = \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad t = \frac{\pi}{2}$

## خفی مقدار معلوم مساوات

سوال ۱۰.۱۳ تا سوال ۱۰.۱۶ میں $x$ اور $y$ بطور قابل تفرق خفی مقدار معلوم تفاعل $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ دیے گئے ہیں۔ دیے گئے $t$ پر منحنی $x = f(t), t = g(t)$ کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۱۳: $x^2 - 2tx + 2t^2 = 4, \quad 2y^3 - 3t^2 = 4, \quad t = 2$

سوال ۱۰.۱۴: $x = \sqrt{5 - \sqrt{t}}, \quad y(t-1) = \ln y, \quad t = 1$

سوال ۱۰.۱۵: $x + 2x^{3/2} = t^2 + t, \quad y\sqrt{t+1} + 2t\sqrt{y} = 4, \quad t = 0$

سوال ۱۰.۱۶: $x \sin t + 2x = t, \quad t \sin t - 2t = y, \quad t = \pi$

## منحنیات کی لمبائیاں

سوال ۱۰.۱۷ تا سوال ۱۰.۲۲ میں منحنیات کی لمبائیاں تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۱۷: $x = \cos t, \quad y = t + \sin t, \quad 0 \le t \le \pi$

سوال ۱۰.۱۸: $x = t^3, \quad y = \frac{3t^2}{2}, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$

سوال ۱۰.۱۹: $x = \frac{t^2}{2}, \quad y = \frac{(2t+1)^{3/2}}{3}, \quad 0 \le t \le 4$

سوال ۱۰.۲۰: $x = \frac{(2t+3)^{3/2}}{3}, \quad y = t + \frac{t^2}{2}, \quad 0 \le t \le 3$

سوال ۱۰.۲۱: $x = 8\cos t + 8t \sin t, \; y = 8 \sin t - 8t \cos t, \; 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

سوال ۱۰.۲۲: $x = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t, \; y = \cos t, \; 0 \le t \le \frac{\pi}{3}$

## سطح رقبے

سوال ۱۰.۲۳ تا سوال ۱۰.۲۶ میں دیے گئے محور کے گرد منحنی گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال ۱۰.۲۳: محور $x$ ؛ $x = \cos t, \quad y = 2 + \sin t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۰.۲۴: محور $y$ ؛ $x = \frac{2}{3}t^{3/2}, \quad y = 2\sqrt{t}, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$

سوال ۱۰.۲۵: محور $y$ ؛ $x = t + \sqrt{2}, \quad y = \frac{t^2}{2} + \sqrt{2}t, \quad -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$

سوال ۱۰.۲۶: محور $x$ ؛ $x = \ln(\sec t + \tan t) - \sin t, \quad y = \cos t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{3}$

سوال ۱۰.۲۷: مخروط مقطوع

نقطہ $(0,1)$ اور $(2,2)$ کے بیچ لکیر کو محور $x$ کے گرد گھما کر مخروط مقطوع کا سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ مقدار معلوم مساوات $x = 2t,\ y = t + 1,\ 0 \le t \le 1$ استعمال کرتے ہوئے سطح طواف کا رقبہ معلوم کریں۔ نتیجہ کا جیومیٹری کے کلیہ $S = \pi(r_1 + r_2)$ (ترچھا قد) کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۱۰.۲۸: مخروط

مبدا اور نقطہ $(h, r)$ کے بیچ قطع کو محور $x$ کے گرد گھما کر مخروط سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے جس کے قاعدے کا رداس $r$ اور قد $h$ ہوں گے۔ مقدار معلوم مساوات $x = ht,\ y = rt,\ 0 \le t \le 1$ استعمال کرتے ہوئے سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔ نتیجے کا موازنہ جیومیٹری کے کلیہ $S = \pi r$ (ترچھا قد) کے ساتھ کریں۔

## وسطانی مراکز

سوال ۱۰.۲۹: (ا) درج ذیل منحنی کے وسطانی مرکز کے محدد تلاش کریں۔

$$x = \cos t + t\sin t, \quad y = \sin t - t\cos t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

(ب) یہ منحنی شکل ۱۰.۴۵ میں دکھائی گئی در پیچیدہ کا حصہ ہے۔ اس منحنی کو ترسیم کریں۔ منحنی کا وسطانی مرکز 1 اعشاریہ تک تلاش کر کے ترسیم پر دکھائیں۔

سوال ۱۰.۳۰: (ا) درج ذیل منحنی کے وسطانی مرکز کے محدد تلاش کریں۔

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad 0 \le t \le \pi$$

(ب) اس منحنی کو ترسیم کریں۔ منحنی کا وسطانی مرکز 1 اعشاریہ تک تلاش کر کے ترسیم پر دکھائیں۔

سوال ۱۰.۳۱: (ا) درج ذیل منحنی کے وسطانی مرکز کے محدد تلاش کریں۔

$$x = \cos t, \quad y = t + \sin t, \quad 0 \le t \le \pi$$

(ب) اس منحنی کو ترسیم کریں۔ منحنی کا وسطانی مرکز 1 اعشاریہ تک تلاش کر کے ترسیم پر دکھائیں۔

سوال ۱۰.۳۲: تکمل کی قیمت

وسطانی مراکز کے مسائل کو عموماً کیلکولیٹر یا کمپیوٹر کی مدد سے حل کیا جاتا ہے۔ درج ذیل منحنی کا وسطانی مرکز 2 اعشاریہ تک کیلکولیٹر یا کمپیوٹر کی مدد سے تلاش

کریں۔

$$x = t^3,\ y = \tfrac{3}{2}t^2,\ 0 \le t \le \sqrt{3}$$

## نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۰.۳۳: لمبائی کا دارومدار مقدار معلوم مساوات پر نہیں ہوتا ہے۔

نصف دائرہ $y = \sqrt{1-x^2}$ کی لمبائی درج ذیل مقدار معلوم مساوات استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں۔

ا. $x = \cos 2t,\ y = \sin 2t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

ب. $x = \sin \pi t,\ y = \cos \pi t,\ -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}$

آپ دیکھیں گے کہ دونوں جوابات یکساں ہیں۔

سوال ۱۰.۳۴: ترخیمی تکمل

ترخیم $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ کی لمبائی درج ذیل ہے

$$L = 4a\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-e^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

جہاں $e$ ترخیم کی سنک ہے۔ ماسوائے $e=0$ یا $e=1$ یہ تکمل، جو **ترخیمی تکمل**[۳۴] کہلاتا ہے، غیر بنیادی ہے۔

ا. قاعدہ ذوزنقہ میں $n=10$ لے کر $a=1$ اور $e=\frac{1}{2}$ کے لئے اس ترخیم کی لمبائی کا اندازہ لگائیں۔

ب. تفاعل $f(t) = \sqrt{1-e^2\cos^2 t}$ کے دوگنّا تفرق کی قیمت 1 سے کم ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے جزو-ا میں حاصل قیمت میں خلل کا بالائی حد تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۳۵: جیسا حصہ ۱۰.۴ میں ذکر کیا گیا، وقفہ $[a,b]$ پر تفاعل $y=f(x)$ کے ترسیم کی مقدار معلوم روپ درج ذیل ہو گی۔

$$x = x,\quad y = f(x),\quad a \le x \le b$$

یہاں $x$ از خود مقدار معلوم ہے۔

اس مقدار معلوم روپ کے لئے دکھائیں کہ مقدار معلوم لمبائی

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

درج ذیل کار تیسی صورت اختیار کرتی ہے جس کو حصہ ۶.۵ میں حاصل کیا گیا۔

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

---

[۳۴] elliptic integral

یوں کارتیسی کلیہ درحقیقت مقدار معلوم کلیہ کی ایک مخصوص صورت ہے۔

سوال ۱۰.۳۶: دکھائیں کہ منحنی $x = g(y),\ c \le y \le d$ کی لمبائی کا کارتیسی کلیہ (مساوات ۶.۳)

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y$$

درحقیقت درج ذیل مقدار معلوم کلیہ کی مخصوص صورت ہے۔

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

سوال ۱۰.۳۷: درج ذیل تدویر کی ایک محراب کے نیچے رقبہ تلاش کریں۔

$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta)$$

(اشارہ: $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta$ استعمال کریں۔)

سوال ۱۰.۳۸: درج ذیل تدویر کی ایک محراب کی لمبائی معلوم کریں۔

$$x = a(\theta - \sin\theta), \quad y = a(1 - \cos\theta)$$

سوال ۱۰.۳۹: تدویر $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$ کی ایک محراب کو محور $x$ کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۴۰: محور $x$ اور تدویر $x = \theta - \sin\theta,\ y = 1 - \cos\theta$ کے ایک محراب کے بیچ خطہ کو محور $x$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (اشارہ: $\mathrm{d}H = \pi y^2\,\mathrm{d}x = \pi y^2 \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\,\mathrm{d}\theta$)

## کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۱۰.۴۱ اور سوال ۱۰.۴۱ میں **لساجو اشکال**[۳۵] دکھائی گئی ہیں۔ دونوں سوالات میں ربع اول میں وہ نقطہ تلاش کریں جہاں منحنی کا مماس افقی ہو۔ مبدا پر دو مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۴۱: ترسیم شکل ۱۰.۵۴ میں دی گئی ہے۔

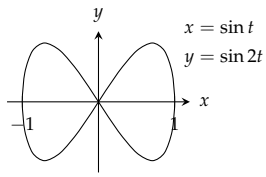
سوال ۱۰.۴۲: ترسیم شکل ۱۰.۵۵ میں دی گئی ہے۔

سوال ۱۰.۴۳ تا سوال ۱۰.۴۹ میں تفاعل کو اپنی مرضی کے مقدار معلوم وقفہ پر ترسیم کریں۔ یہ ترسیمات لساجس اشکال ہیں جن کا عمومی کلیہ درج ذیل ہے

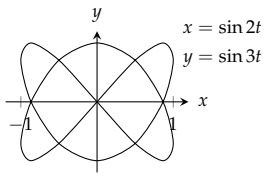
$$x = a\sin(mt + d), \quad y = b\sin nt$$

---

[۳۵] Lissajous figures




شکل ۱۰.۵۴: ترسیم سوال ۱۰.۴۱




شکل ۱۰.۵۵: ترسیم سوال ۱۰.۴۲

جہاں $m$ اور $n$ عدد صحیح ہیں۔

سوال ۱۰.۴۳: $x = \sin 2t, \quad y = \sin t$

سوال ۱۰.۴۴: $x = \sin 3t, \quad y = \sin 4t$

سوال ۱۰.۴۵: $x = \sin t, \quad y = \sin 4t$

سوال ۱۰.۴۶: $x = \sin t, \quad y = \sin 5t$

سوال ۱۰.۴۷: $x = \sin 3t, \quad y = \sin 5t$

سوال ۱۰.۴۸: $x = \sin(3t + \pi/2), \quad y = \sin 5t$

سوال ۱۰.۴۹: $x = \sin(3t + \pi/4), \quad y = \sin 5t$

سوال ۱۰.۵۰ تا سوال ۱۰.۵۵ میں دیے مقدار معلوم منحنیات پر کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. منحنی کو $t$ کے دیے گئے وقفہ پر ترسیم کریں۔

ب. نقطہ $t_0$ پر $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ اور $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ تلاش کریں۔

ج. نقطہ $t_0$ پر منحنی کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔ منحنی کی ترسیم پر اس مماس کو دکھائیں۔

د. منحنی کی لمبائی دیے گئے وقفہ پر معلوم کریں۔

سوال ۱۰.۵۰: $x = \frac{1}{3}t^3, \quad y = \frac{1}{2}t^2, \quad 0 \le t \le 1, \quad t_0 = \frac{1}{2}$

سوال ۱۰.۵۱: $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5, \quad y = t^2 + t - 3, \quad 0 \le t \le 6, \quad t_0 = \frac{3}{2}$

سوال ۱۰.۵۲: $x = e^t - t^2, \quad y = t + e^{-t}, \quad -1 \le t \le 2, \quad t_0 = 1$

سوال ۱۰.۵۳: $x = t - \cos t, \quad y = 1 + \sin t, \quad -\pi \le t \le \pi, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال ۱۰.۵۴: $x = e^t + \sin 2t, \quad y = e^t + \cos(t^2), \quad -\sqrt{2}\pi \le t \le \pi/4, \quad t_0 = -\frac{\pi}{4}$

سوال ۱۰.۵۵: $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \sin t, \quad 0 \le t \le \pi, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$

سوال ۱۰.۵۶ اور سوال ۱۰.۵۷ میں $x$ اور $y$ کو $t$ کا خفی مقدار معلوم تفاعل دیا گیا ہے۔ کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. پہلی مساوات کو $x$ کے لئے اور دوسری مساوات کو $y$ کے لئے حل کر کے $x = f(t)$ اور $y = g(t)$ معلوم کریں۔

ب. نقطہ $t_0$ پر منحنی $x = f(t)$ اور $y = g(t)$ کی ڈھلوان معلوم کریں۔

ج. نقطہ $t_0$ پر منحنی کے مماس کی مساوات معلوم کریں۔

د. دیے گئے وقفہ پر منحنی اور نقطہ $t_0$ پر مماس ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۵۶: $x^2 - 2tx + 3t^2 = 4, \quad y^3 - 2t^2 = 7, \quad -1 \le t \le 2, \quad t_0 = 1$

سوال ۱۰.۵۷: $x^2 \cos t + 2x = t, \quad t \sin t + 2\sqrt{y} = y, \quad -2\pi \le t \le 2\pi, \quad t_0 = -\frac{\pi}{4}$

## ۱۰.۶ قطبی محدد

اس حصہ میں ہم قطبی محدد اور کارتیسی محدد کے ساتھ ان کے تعلق پر غور کریں گے۔ اگرچہ مستوی پر ایک نقطہ کے صرف ایک جوڑی کارتیسی محدد ہوتے ہیں، اسی نقطہ کے قطبی محدد کی جوڑیوں کی تعداد لامتناہی ہوتی ہے۔ جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے، ترسیم پر اس کے دلچسپ اثرات مرتب ہوتے ہیں۔

### قطبی محدد کی تعریف

قطبی محدد متعارف کرنے کی خاطر ہم ایک **مبدا**[۳۶] $O$ جو **قطب**[۳۷] کہلائے گا اور $O$ سے ایک **ابتدائی شعاع** مقرر کرتے ہیں (شکل ۱۰.۵۶)۔ اب ہر نقطہ $N$ کے مقام کو **قطبی محددی جوڑی** $(r, \theta)$ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں $O$ سے $N$ تک فاصلہ $r$ اور ابتدائی شعاع سے $ON$ تک زاویہ $\theta$ ہوں گے۔

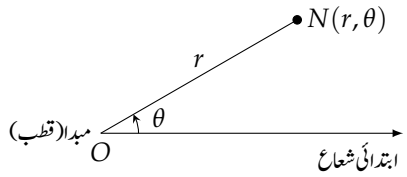
تکونیات کی طرح یہاں بھی گھڑی کے الٹ رخ $\theta$ کو مثبت جبکہ گھڑی کے رخ اس کو منفی تصور کیا جاتا ہے۔ کسی ایک نقطہ کے ساتھ منسلک زاویہ یکتا نہیں ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر مبدا سے 2 اکائی دور شعاع $\theta = \frac{\pi}{6}$ پر واقع نقطہ کے قطبی محدد $r = 2$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ ہیں۔ اسی نقطہ کے قطبی محدد $r = 2$ ، $\theta = -\frac{11\pi}{6}$ بھی ہوں گے (شکل ۱۰.۵۷)۔

### $r$ کی منفی قیمتیں

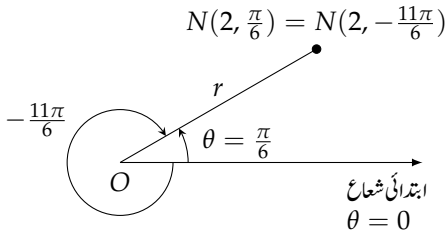
بعض اوقات ہم $r$ کو منفی رکھنا چاہتے ہیں۔ مثال کے طور پر نقطہ $N(2, \frac{7\pi}{6})$ تک پہنچنے کے لئے ہم ابتدائی شعاع سے گھڑی کے الٹ رخ $\frac{7\pi}{6}$ گھوم کر آگے رخ 2 اکائیاں چلتے ہیں۔ اسی نقطہ تک پہنچنے کی خاطر ہم گھڑی کے الٹ رخ $\frac{\pi}{6}$ گھوم کر پیچھے رخ 2 اکائیاں چلیں گے (شکل ۱۰.۵۸)۔ یوں اس نقطے کے قطبی محدد $r = -2$ ، $\theta = \frac{\pi}{6}$ بھی ہوں گے۔

---

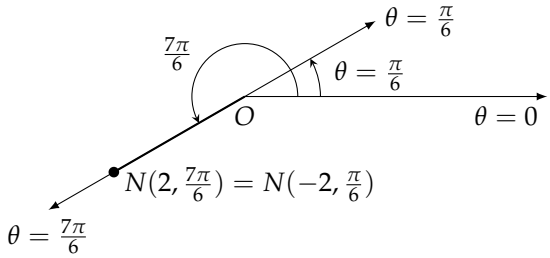
[۳۶] origin
[۳۷] pole




شکل ۱۰.۵۶: قطبی محدد کی تعریف کے لئے ہم مبدا اور ابتدائی شعاع لیتے ہیں۔




شکل ۱۰.۵۷: قطبی محدد یکتا نہیں ہیں۔




شکل ۱۰.۵۸: قطبی محدد میں $r$ منفی ہو سکتا ہے۔

مثال ۱۰.۱: نقطہ $N(2,\frac{\pi}{6})$ کے قطبی محدد تلاش کریں۔

حل: ہم قطبی محدد کا مبدا اور ابتدائی شعاع ترسیم کرتے ہیں۔ ابتدائی شعاع کے ساتھ $\frac{\pi}{6}$ زاویے پر شعاع ترسیم کر کے اس پر مبدا سے 2 اکائیاں فاصلہ پر نقطہ $N(2,\frac{\pi}{6})$ ہو گا۔ ہم اب $r = 2$ اور $r = -2$ لیتے ہوئے اس نقطہ کے لئے دیگر قطبی محدد تلاش کرتے ہیں۔

$r = 2$ کے لئے درج ذیل زاویے ہوں گے۔

$$\frac{\pi}{6},\quad \frac{\pi}{6}\pm 2\pi,\quad \frac{\pi}{6}\pm 4\pi,\quad \frac{\pi}{6}\pm 6\pi,\quad \cdots$$

$r = -2$ کے لئے درج ذیل زاویے ہوں گے۔

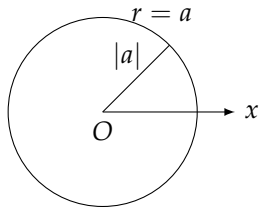
$$-\frac{5\pi}{6},\quad -\frac{5\pi}{6}\pm 2\pi,\quad -\frac{5\pi}{6}\pm 4\pi,\quad -\frac{5\pi}{6}\pm 6\pi,\quad \cdots$$

یوں $N$ کے مطابق محددی جوڑیاں

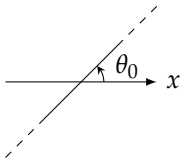
$$(2,\tfrac{\pi}{6}+2n\pi),\quad n = 0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

اور

$$(-2,-\tfrac{5\pi}{6}+2n\pi),\quad n = 0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$




شکل ۱۰.۵۹: قطبی محدد پر $r = a$ دائرہ ہوگا۔




شکل ۱۰.۶۰: قطبی محدد پر $\theta = \theta_0$ سیدھی لکیر ہے۔

ہوں گی۔ یہ کلیات $n = 0$ کے لئے $(2, \frac{\pi}{6})$ اور $(-2, -\frac{5\pi}{6})$ دیتے ہیں۔ اسی طرح $n = 1$ کے لئے یہ کلیات $(2, \frac{13\pi}{6})$ اور $(-2, \frac{7\pi}{6})$ دیتے ہیں، وغیرہ، وغیرہ۔ یوں نقطہ $N(2, \frac{\pi}{6})$ کی لا تناہی قطبی محددی جوڑیاں پائی جاتی ہیں۔ □

### بنیادی محددی مساوات اور عدم مساوات

اگر ہم $r$ کو کسی مقررہ قیمت $r = a \neq 0$ پر رکھیں تب نقطہ $N(r, \theta)$ مبدا سے $|a|$ فاصلہ پر ہوگا۔ زاویہ $\theta$ کو وقفہ 0 تا $2\pi$ پر تبدیل کرنے سے نقطہ $N(r, \theta)$ مبدا سے رداس $|a|$ کے دائرہ پر چلے گا (شکل ۱۰.۵۹)۔

اگر ہم $\theta$ کو مقررہ قیمت $\theta = \theta_0$ پر رکھ کر $r$ کو $-\infty$ تا $\infty$ کریں تب $N(r, \theta)$ مبدا سے گزرتی ہوئی اس سیدھی لکیر پر حرکت کرے گا جو ابتدائی شعاع کے ساتھ زاویہ $\theta_0$ بناتی ہے (شکل ۱۰.۶۰)۔

| ترسیم | مساوات |
|---|---|
| رداس $|a|$ کا دائرہ جس کا مرکز $O$ ہے | $r = a$ |
| ابتدائی شعاع کے ساتھ $\theta_0$ زاویے کی لکیر | $\theta = \theta_0$ |

مثال ۱۰.۲: (ا) $r = 1$ اور $r = -1$ رداس 1 کے دائرے کی مساوات ہے جس کا مرکز مبدا پر ہے۔
(ب) $\theta = \frac{\pi}{6}$ ، $\theta = \frac{7\pi}{6}$ اور $\theta = -\frac{5\pi}{6}$ اس سیدھی لکیر کی مساوات ہے جو مبدا سے گزرتی ہے اور ابتدائی شعاع کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{6}$ بناتی ہے۔ □

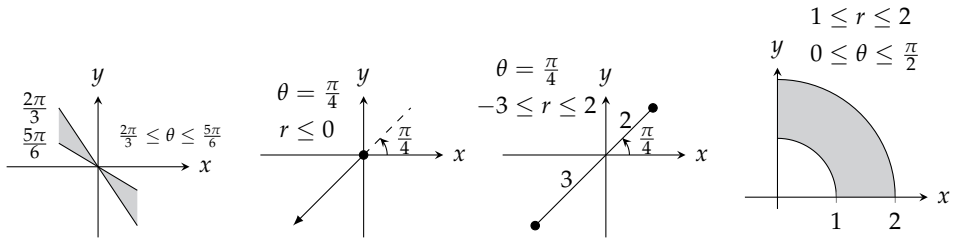
مساوات $r = a$ اور $\theta = \theta_0$ کو جوڑ کر دیگر قطعات، حصے اور شعاع بیان کیے جا سکتے ہیں۔

مثال ۱۰.۳: ان نقطوں کے سلسلہ کو ترسیم کریں جن کے قطبی محدد درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں۔

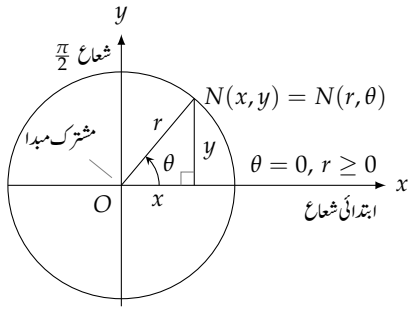
ا. $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ اور $1 \leq r \leq 2$

ب. $\theta = \frac{\pi}{4}$ اور $-3 \leq r \leq 2$

ج. $\theta = \frac{\pi}{4}$ اور $r \leq 0$




شکل ۱۰.۶۱: ترسیمات برائے مثال ۱۰.۳




شکل ۱۰.۶۲: کارتیسی اور قطبی محدد کے تعلقات معلوم کرنے کا عمومی طریقہ۔

د. $-\infty < r < \infty$ اور $\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$

حل: ترسیمات کو شکل ۱۰.۶۱ میں دکھایا گیا ہے۔ □

## کارتیسی بالمقابل قطبی محدد

ایک مستوی میں بیک وقت کارتیسی اور قطبی محدد استعمال کرتے ہوئے ہم دونوں محدد کے مبدا ایک ہی نقطہ پر رکھتے ہیں اور ابتدائی شعاع کو مثبت $x$ محور پر رکھتے ہیں۔ یوں شعاع $\theta = \frac{\pi}{2},\ r > 0$ مثبت $y$ محور ہو گا (شکل ۱۰.۶۲)۔ اب ان محددی نظام کے تعلقات درج ذیل ہوں گے۔

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{y}{x} = \tan\theta \tag{۱۰.۱}$$

ہم مساوات ۱۰.۱ استعمال کرتے ہوئے قطبی مساوات سے کارتیسی مساوات اور کارتیسی مساوات سے قطبی مساوات حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۰.۴:

| کارتیسی مساوات | قطبی مساوات |
|---|---|
| $x = 2$ | $r\cos\theta = 2$ |
| $xy = 4$ | $r^2\cos\theta\sin\theta = 4$ |
| $x^2 - y^2 = 1$ | $r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$ |
| $y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$ | $r = 1 + 2r\cos\theta$ |
| $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$ | $r = 1 - \cos\theta$ |

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ بعض اوقات کارتیسی اور بعض اوقات قطبی مساوات زیادہ سادہ ہوتے ہیں۔ □

مثال ۱۰.۵: دائرہ $x^2 + (y-3)^2 = 9$ کی قطبی مساوات معلوم کریں۔

حل:

مساوات کی سادہ صورت

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 6y + 9 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 6y &= 0 \\ r^2 - 6r\sin\theta &= 0 \\ r = 0 \quad \text{یا} \quad r - 6\sin\theta &= 0 \\ r &= 6\sin\theta \end{aligned}$$

مخروط حصوں کی قطبی مساوات پر حصہ ۱۰.۸ میں غور کیا جائے گا۔ □

مثال ۱۰.۶: دی گئی قطبی مساوات سے کارتیسی مساوات حاصل کر کے ترسیم کو پہچانئے۔

ا. $r\cos\theta = -4$

ب. $r^2 = 4r\cos\theta$

ج. $r = \frac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}$

حل: ہم $r\cos\theta = x$ ، $r\sin\theta = y$ اور $r^2 = x^2 + y^2$ استعمال کرتے ہیں۔

ا.

$$\begin{aligned} \underbrace{r\cos\theta}_{x} &= -4 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

ترسیم: انتصابی لکیر جو $x$ محور کو $x = -4$ پر قطع کرتی ہے۔

ب.

$$\begin{aligned}
r^2 &= 4r\cos\theta \\
x^2+y^2 &= 4x \\
x^2-4x+y^2 &= 0 \\
x^2-4x+4+y^2 &= 4 \\
(x-2)^2+y^2 &= 4
\end{aligned}$$

ترسیم: ایک دائرہ جس کا مرکز $(2,0)$ اور رداس 2 ہے۔

ج.

$$\begin{aligned}
r(2\cos\theta-\sin\theta) &= 4 \\
2r\cos\theta - r\sin\theta &= 4 \\
2x-y &= 4 \\
y &= 2x-4
\end{aligned}$$

ترسیم: ایک سیدھی لکیر جس کی ڈھلوان $m=2$ ہے اور جو $y$ محور کو $y=-4$ پر قطع کرتی ہے۔

□

## سوالات

### قطبی محددی جوڑیاں

سوال ۱۰.۱: کون سی محددی جوڑیاں ایک ہی نقطہ کو ظاہر کرتی ہیں۔

ا. $(3,0)$ ج. $(2,\frac{2\pi}{3})$ ھ. $(-3,\pi)$ ز. $(-3,2\pi)$

ب. $(-3,0)$ د. $(2,\frac{7\pi}{3})$ و. $(2,\frac{\pi}{3})$ ح. $(-2,-\frac{\pi}{3})$

سوال ۱۰.۲: کون سی محددی جوڑیاں ایک ہی نقطہ کو ظاہر کرتی ہیں۔

ا. $(-2,\frac{\pi}{3})$ ج. $(r,\theta)$ ھ. $(-r,\theta)$ ز. $(-r,\theta+\pi)$

ب. $(2,-\frac{\pi}{3})$ د. $(r,\theta+\pi)$ و. $(2,-\frac{2\pi}{3})$ ح. $(-2,\frac{2\pi}{3})$

سوال ۱۰.۳: درج ذیل قطبی محدد میں دیے گئے نقطے ترسیم کریں۔ ان نقطوں کے تمام قطبی محدد تلاش کریں۔

ا. $(2, \frac{\pi}{2})$ ب. $(2, 0)$ ج. $(-2, \frac{\pi}{2})$ د. $(-2, 0)$

سوال ۱۰.۴: درج ذیل قطبی محدد میں دیے گئے نقطے ترسیم کریں۔ ان نقطوں کے تمام قطبی محدد تلاش کریں۔

ا. $(3, \frac{\pi}{4})$ ب. $(-3, \frac{\pi}{4})$ ج. $(3, -\frac{\pi}{4})$ د. $(-3, -\frac{\pi}{4})$

## قطبی سے کارتیسی محدد

سوال ۱۰.۵: ان نقطوں کے کارتیسی محدد معلوم کریں جنہیں سوال ۱.۱۰ میں پیش کیا گیا ہے۔

سوال ۱۰.۶: درج ذیل نقطے قطبی محدد میں دیے گئے ہیں۔ ان کی کارتیسی محدد تلاش کریں۔

ا. $(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ ج. $(0, \frac{\pi}{2})$ ھ. $(-3, \frac{5\pi}{6})$ ز. $(-1, 7\pi)$

ب. $(1, 0)$ د. $(-\sqrt{2}, \frac{\pi}{4})$ و. $(5, \tan^{-1}(\frac{4}{3}))$ ح. $(2\sqrt{3}, \frac{2\pi}{3})$

## قطبی مساوات اور عدم مساوات کی ترسیم

سوال ۱۰.۷ تا سوال ۱۰.۲۲ میں دیے مساوات اور عدم مساوات کو مطمئن کرنے والے نقطوں کے سلسلہ کو ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۷: $r = 2$

سوال ۱۰.۸: $0 \leq r \leq 2$

سوال ۱۰.۹: $r \geq 1$

سوال ۱۰.۱۰: $1 \leq r \leq 2$

سوال ۱۰.۱۱: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, \quad r \geq 0$

سوال ۱۰.۱۲: $\theta = \frac{2\pi}{3}, \quad r \leq -2$

سوال ۱۰.۱۳: $\theta = \frac{\pi}{3}, \quad -1 \leq r \leq 3$

سوال ۱۰.۱۴: $\theta = \frac{11\pi}{4}, \quad r \geq -1$

سوال ۱۰.۱۵: $\theta = \frac{\pi}{2}, \quad r \geq 0$

سوال ۱۰.۱۶: $\theta = \frac{\pi}{2}, \quad r \leq 0$

سوال ۱۰.۱۷: $0 \leq \theta \leq \pi, \quad r = 1$

سوال ۱۰.۱۸: $0 \leq \theta \leq \pi, \quad r = -1$

سوال ۱۰.۱۹: $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq 1$

سوال ۱۰.۲۰: $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad -1 \leq r \leq 1$

سوال ۱۰.۲۱: $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leq r \leq 2$

سوال ۱۰.۲۲: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 1 \leq |r| \leq 2$

## قطبی سے کارتیسی مساوات

سوال ۱۰.۲۳ تا سوال ۱۰.۴۸ میں مطابقتی کارتیسی مساوات دریافت کریں۔ اس کے بعد ترسیم کو پہچانئے۔

سوال ۱۰.۲۳: $r\cos\theta = 2$

سوال ۱۰.۲۴: $r\sin\theta = -1$

سوال ۱۰.۲۵: $r\sin\theta = 0$

سوال ۱۰.۲۶: $r\cos\theta = 0$

سوال ۱۰.۲۷: $r = 4\csc\theta$

سوال ۱۰.۲۸: $r = -3\sec\theta$

سوال ۱۰.۲۹: $r\cos\theta + r\sin\theta = 1$

سوال ۱۰.۳۰: $r\sin\theta = r\cos\theta$

سوال ۱۰.۳۱: $r^2 = 1$

سوال ۱۰.۳۲: $r^2 = 4r\sin\theta$

سوال ۱۰.۳۳: $r = \frac{5}{\sin\theta - 2\cos\theta}$

سوال ۱۰.۳۴: $r^2\sin 2\theta = 2$

سوال ۱۰.۳۵: $r = \cot\theta\csc\theta$

سوال ۱۰.۳۶: $r = 4\tan\theta\sec\theta$

سوال ۱۰.۳۷: $r = \csc\theta e^{r\cos\theta}$

سوال ۱۰.۳۸: $r\sin\theta = \ln r + \ln\cos\theta$

سوال ۱۰.۳۹: $r^2 + 2r^2\cos\theta\sin\theta = 1$

سوال ۱۰.۴۰: $\cos^2\theta = \sin^2\theta$

سوال ۱۰.۴۱: $r^2 = -4r\cos\theta$

سوال ۱۰.۴۲: $r^2 = -6r\sin\theta$

سوال ۱۰.۴۳: $r = 8\sin\theta$

سوال ۱۰.۴۴: $r = 3\cos\theta$

سوال ۱۰.۴۵: $r = 2\cos\theta + 2\sin\theta$

سوال ۱۰.۴۶: $r = 2\cos\theta - \sin\theta$

سوال ۱۰.۴۷: $r\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = 2$

سوال ۱۰.۴۸: $r\sin(\frac{2\pi}{3} - \theta) = 5$

## کارتیسی سے قطبی مساوات

سوال ۱۰.۴۹ تا سوال ۱۰.۶۲ میں کارتیسی مساوات سے قطبی مساوات حاصل کریں۔

سوال ۱۰.۴۹: $x = 7$

سوال ۱۰.۵۰: $y = 1$

سوال ۱۰.۵۱: $x = y$

سوال ۱۰.۵۲: $x - y = 3$

سوال ۱۰.۵۳: $x^2 + y^2 = 4$

سوال ۱۰.۵۴: $x^2 - y^2 = 1$

سوال ۱۰.۵۵: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

سوال ۱۰.۵۶: $xy = 2$

سوال ۱۰.۵۷: $y^2 = 4x$

سوال ۱۰.۵۸: $x^2 + xy + y^2 = 1$

سوال ۱۰.۵۹: $x^2 + (y-2)^2 = 4$

سوال ۱۰.۶۰: $(x-5)^2 + y^2 = 25$

سوال ۱۰.۶۱: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$

سوال ۱۰.۶۲: $(x+2)^2 + (y-5)^2 = 16$

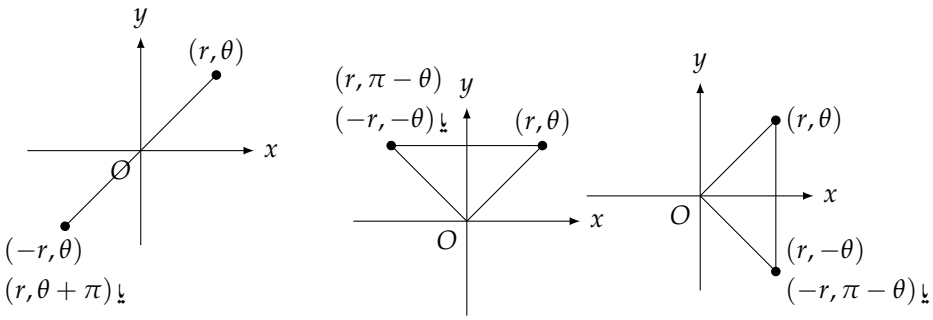
## نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۰.۶۳: مبدا کے تمام قطبی محدد تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۶۴: افقی اور انتصابی خط

ا. دکھائیں کہ $xy$ مستوی میں ہر انتصابی خط کی قطبی مساوات کو $r = a\sec\theta$ لکھا جا سکتا ہے۔

ب. $xy$ مستوی میں ہر افقی خط کی قطبی مساوات کس صورت کی ہو گی؟




(ا) محور $x$ کے لحاظ سے۔ (ب) محور $y$ کے لحاظ سے۔ (ج) مبدا کے لحاظ سے۔

شکل ۱۰.۶۳: تشاکلی کے تین پرکھ۔

## ۱۰.۷ قطبی محدد میں ترسیم

اس حصہ میں مساوات کو قطبی محدد میں ترسیم کرنے کے تراکیب پر غور کیا جائے گا۔

### تشاکلی

قطبی محدد میں تشاکلی کا معیاری پرکھ شکل ۱۰.۶۳ میں دکھایا گیا ہے۔

### قطبی ترسیمات کے پرکھ تشاکلی

ا. محور $x$ کے لحاظ سے تشاکلی: اگر نقطہ $(r,\theta)$ ترسیم پر پایا جاتا ہو تب نقطہ $(r,-\theta)$ یا $(-r,\pi-\theta)$ بھی ترسیم پر پایا جائے گا (شکل ۱۰.۶۳-ا)۔

ب. محور $y$ کے لحاظ سے تشاکلی: اگر نقطہ $(r,\theta)$ ترسیم پر پایا جاتا ہو تب نقطہ $(r,\pi-\theta)$ یا $(-r,-\theta)$ بھی ترسیم پر پایا جائے گا (شکل ۱۰.۶۳-ب)۔

ج. مبدا کے لحاظ سے تشاکلی: اگر نقطہ $(r,\theta)$ ترسیم پر پایا جاتا ہو تب نقطہ $(-r,\theta)$ یا $(r,\theta+\pi)$ بھی ترسیم پر پایا جائے گا (شکل ۱۰.۶۳-ج)۔

### ڈھلوان

قطبی منحنی $r=f(\theta)$ کی ڈھلوان $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ ہے نا کہ $r'=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}$۔ اس کی وجہ سمجھنے کی خاطر $f$ کی ترسیم کو درج ذیل مقدار معلوم مساوات کی ترسیم فرض کریں۔

$$x=r\cos\theta=f(\theta)\cos\theta,\quad y=r\sin\theta=f(\theta)\sin\theta$$

اگر $f$ متغیر $\theta$ کا قابل تفرق تفاعل ہو تب $x$ اور $y$ بھی $\theta$ کے قابل تفرق تفاعل ہوں گے اور جب $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \neq 0$ ہو تب ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو درج ذیل مقدار معلوم کلیہ سے اخذ کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y/\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x/\,\mathrm{d}\theta} && \text{مساوات ۱۰.۱} \\
&= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(f(\theta)\cdot\sin\theta)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(f(\theta)\cdot\cos\theta)} \\
&= \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\cos\theta - f(\theta)\sin\theta} && \text{تفرق کا کلیہ ضرب}
\end{aligned}$$

**منحنی** $r = f(\theta)$ **کی ڈھلوان** جہاں $(r,\theta)$ پر $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta} \neq 0$ ہونا ضروری ہے۔

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(r,\theta)} = \frac{f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta} \tag{۱۰.۱}$$

اگر مبدا پر منحنی $r = f(\theta)$ کا زاویہ $\theta = \theta_0$ ہو تب $f(\theta_0) = 0$ ہو گا اور مساوات ۱۰.۱ سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(r,\theta)} = \frac{f'(\theta_0)\sin\theta_0}{f'(\theta_0)\cos\theta_0} = \tan\theta_0$$

اگر مبدا پر $r = f(\theta)$ کا زاویہ $\theta_0$ ہو تب مبدا پر منحنی کی ڈھلوان $\tan\theta_0$ ہو گی۔ مبدا پر ڈھلوان کی بات کرتے ہوئے ہم کہتے ہیں "$(0,\theta)$ پر ڈھلوان"، نا کہ "مبدا پر ڈھلوان"، کیونکہ قطبی منحنی مبدا سے کئی بار گزر سکتی ہے اور $\theta$ کی مختلف قیمتوں کے لئے یہاں ڈھلوان مختلف ہو گی۔

مثال ۱۰.۱: قلب نما[۳۸]

منحنی $r = 1 - \cos\theta$ ترسیم کریں۔

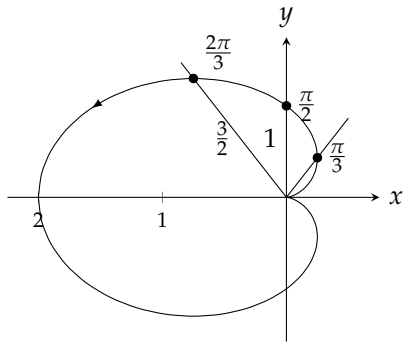
حل: درج ذیل کی بنا پر منحنی محور $x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔

$$\begin{aligned}
(r,\theta) \text{ منحنی پر ہے} &\implies r = 1 - \cos\theta \\
&\implies r = 1 - \cos(-\theta) && \cos\theta = \cos(-\theta) \\
&\implies (r,\theta) \text{ بھی ترسیم پر ہے}
\end{aligned}$$

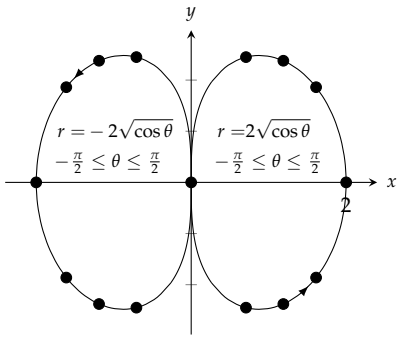
جیسے جیسے $\theta$ کی قیمت 0 سے $\pi$ تک بڑھتی ہے، $\cos\theta$ کی قیمت 1 سے $-1$ تک گھٹتی ہے اور $r = 1 - \cos\theta$ کی قیمت کم سے کم قیمت 0 سے بڑھ کر زیادہ سے زیادہ قیمت 2 تک پہنچتی ہے۔ $\theta$ کی قیمت $\pi$ سے $2\pi$ تک بڑھانے سے $\cos\theta$ کی قیمت $-1$ سے واپس 1 تک پہنچتی ہے اور $r$ کی قیمت 2 سے واپس 0 ہوتی ہے۔ چونکہ $\cos\theta$ کا دوری عرصہ $2\pi$ ہے لہذا $\theta = 2\pi$ کے بعد یہی منحنی دوبارہ حاصل ہو گی۔

---

[۳۸] cardioid




شکل ۱۰.۶۴: قلب نما (مثال ۱.۱۰)




شکل ۱۰.۶۵: ترسیم برائے (مثال ۱۰.۲)

یہ منحنی مبدا سے $\tan(0) = 0$ ڈھلوان پر نکلتی ہے اور مبدا پر $\tan(2\pi) = 0$ ڈھلوان پر پہنچتی ہے۔

ہم $\theta = 0$ تا $\theta = \pi$ کی مختلف قیمتوں کے لئے $r$ کی قیمتیں

| $\theta$ | $0$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $r$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $\frac{3}{2}$ | $2$ |

معلوم کر کے ان نقطوں کو ترسیم کرتے ہیں جس کا مماس مبدا پر افقی ہو گا۔ محور $x$ میں اس کا عکس لیتے ہوئے ہم ترسیم مکمل کرتے ہیں (شکل ۱۰.۶۴)۔ شکل ۱۰.۶۴ میں تیر کا نشان بڑھتی $\theta$ کے رخ کو ظاہر کرتا ہے۔ چونکہ اس منحنی کی شکل قلب کی مانند ہے لہٰذا اس منحنی کو **قلب نما** کہتے ہیں۔ پھر کی اور چرخی پر تہہ در تہہ ہموار دھاگہ لپیٹنے کے لئے قلب نما اشکال کے **کیم**[۳۹] استعمال کئے جاتے ہیں۔ اس کے علاوہ کئی ریڈیو اینٹینا کی شعاع بھی قلب نما ہوتی ہے۔ □

مثال ۱۰.۲: منحنی $r^2 = 4\cos\theta$ ترسیم کریں۔

حل: مساوات $r^2 = \cos\theta$ کے لئے ضروری ہے کہ $\cos\theta \ge 0$ ہو لہٰذا پورا ترسیم حاصل کرنے کی خاطر ہم $\theta$ کو وقفہ $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ میں رکھتے ہیں۔ درج ذیل کی بنا یہ منحنی محور $x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔

$$\begin{aligned}
(r,\theta) \text{ ترسیم پر ہے} &\implies r^2 = 4\cos\theta \\
&\implies r^2 = 4\cos(-\theta) \qquad \cos\theta = \cos(-\theta) \\
&\implies (r,-\theta) \text{ نقطہ بھی ترسیم پر ہے}
\end{aligned}$$

---

[۳۹] cam

یہ ترسیم مبدا کے لحاظ سے بھی تشاکلی ہے۔

$$\begin{aligned} (r,\theta) \text{ ترسیم پر ہے} &\implies r^2 = 4\cos\theta \\ &\implies (-r)^2 = 4\cos\theta \\ &\implies (-r,\theta) \text{ نقطہ بھی ترسیم پر ہے} \end{aligned}$$

مذکورہ بالا دو تشاکلی کو ملا کر ہم دیکھتے ہیں کہ یہ ترسیم محور $y$ کے لحاظ سے بھی تشاکلی ہو گا۔

یہ ترسیم $\theta = -\frac{\pi}{2}$ اور $\theta = \frac{\pi}{2}$ کے لئے مبدا سے گزرتی ہے۔ چونکہ ان زاویوں پر $\tan\theta$ کی قیمت لا متناہی ہے لہٰذا مبدا پر ترسیم کا مماس انتصابی ہو گا۔ وقفہ $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ میں ہر $\theta$ کے لئے کلیہ $r^2 = 4\cos\theta$ متغیر $r$ کی درج ذیل دو قیمتیں دیتا ہے۔

$$r = \pm 2\sqrt{\cos\theta}$$

ہم اس وقفہ میں مختلف نقطے

| $\theta$ | $0$ | $\pm\frac{\pi}{6}$ | $\pm\frac{\pi}{4}$ | $\pm\frac{\pi}{3}$ | $\pm\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\theta$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $r$ | $\pm 2$ | $\pm 1.9$ | $\pm 1.7$ | $\pm 1.4$ | $0$ |

معلوم کر کر انہیں ترسیم کر کے ہموار منحنی سے آپس میں جوڑتے ہیں۔ مماس اور تشاکلی کی معلومات استعمال کرتے ہوئے مکمل منحنی حاصل کی جاتی ہے (شکل ۱۰.۶۵)۔ □

## تیزی سے ترسیم کا حصول

قطبی مساوات $r = f(\theta)$ کو ترسیم کرنے کے لئے کہ ہم $(r,\theta)$ کی قیمتوں کا جدول بنا کر ان نقطوں کو ترسیم کر کے بڑھتے $\theta$ رخ انہیں ہموار لکیر سے ملاتے ہیں۔ اگر ہمارے پاس اتنے زیادہ نقطے ہوں کہ قطبی ترسیم کا ہر گھیرا اور جھکاو صاف نظر آتا ہو تب یوں ترسیم کرنا ٹھیک ہے۔ درج ذیل اقدام ترسیم کی ایک دوسری ترکیب بیان کرتے ہیں جو نسبتاً آسان اور تیز ثابت ہوتا ہے۔

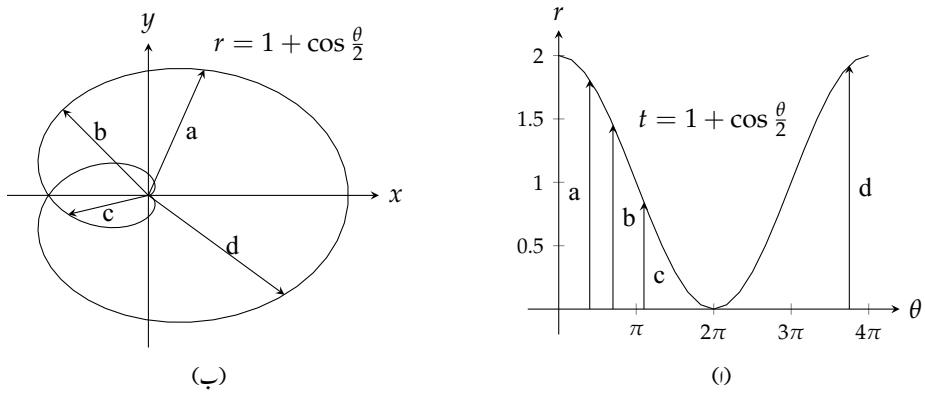
ا. پہلے کارتیسی $r\theta$ مستوی میں $r = f(\theta)$ ترسیم کریں (یعنی $\theta$ کی قیمتوں کو افقی اور مطابقتی $r$ کی قیمتوں کو انتصابی محور پر رکھیں۔)

ب. اب کارتیسی ترسیم کو بطور جدول اور رہبر لیتے ہوئے قطبی ترسیم حاصل کریں۔

صرف نقطے ترسیم کرنے سے کارتیسی ترسیم اس لئے بہتر ہے کہ کارتیسی ترسیم سے جلد دیکھا جا سکتا ہے کہاں قیمتیں مثبت، منفی یا غیر موجود ہوتی ہیں۔ اس کے علاوہ $r$ کا بڑھنا اور گھٹنا بھی واضح ہوتا ہے۔ ہم $r = 1 + \cos(\frac{\theta}{2})$ اور $r^2 = \sin 2\theta$ کو مثال بنا کر اس ترکیب کو دیکھتے ہیں۔

مثال ۱۰.۳: درج ذیل منحنی ترسیم کریں۔

$$r = 1 + \cos\frac{\theta}{2}$$




شکل ۱۰.۶۶: ترسیمات برائے مثال ۱۰.۳

حل: ہم پہلے $r$ بالمقابل $\theta$ کو کارتیسی $r\theta$ مستوی میں ترسیم کرتے ہیں۔ چونکہ کوسائن کا دوری عرصہ $2\pi$ ہے لہٰذا مکمل ترسیم حاصل کرنے کی خاطر ہم $\theta$ کا وقفہ 0 تا $2\pi$ لیں گے۔ کارتیسی مستوی پر محور $\theta$ سے ترسیم تک لکیروں کی لمبائی (شکل ۱۰.۶۶-ا) قطبی ترسیم کا رداس $r$ دیتی ہیں (شکل ۱۰.۶۶-ب)۔ □

مثال ۱۰.۴: دوچشمہ[۴۰]
منحنی $r^2 = \sin 2\theta$ ترسیم کریں۔

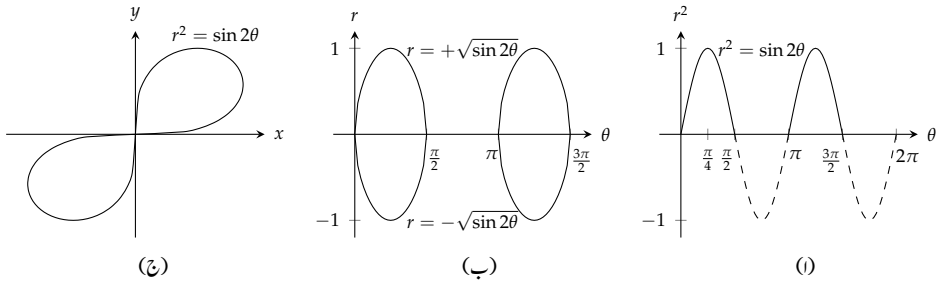
حل: ہم $r$ کی بجائے $r^2$ بالمقابل $\theta$ کو کارتیسی $r^2\theta$ مستوی پر ترسیم کرتے ہیں (شکل ۱۰.۶۷-ا) جہاں $r^2$ کو متغیر تصور کیا گیا ہے جس کی قیمت مثبت کے ساتھ ساتھ منفی بھی ہو سکتی ہے۔ اس کے بعد ہم $r = \pm\sqrt{\sin 2\theta}$ کو کارتیسی $r\theta$ مستوی پر ترسیم کرتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شکل ۱۰.۶۷-ا کے نقطہ دار حصے کا جذر نہیں لیا جا سکتا ہے لہٰذا شکل ۱۰.۶۷-ب میں یہ حصے خالی رہتے ہیں جبکہ جذر کی بنا باقی حصے کے مثبت اور منفی حصے پائے جاتے ہیں۔ آخر میں ہم قطبی ترسیم حاصل کرتے ہیں۔ کارتیسی ترسیم (شکل ۱۰.۶۷-ب) دو بار قطبی ترسیم (شکل ۱۰.۶۷-ج) کو ڈھانپتا دیتا ہے۔ ہم کسی ایک گھیرا کو، یا دونوں گھیروں کے بالائی نصف یا دونوں کے گھیروں کے نچلے نصف استعمال کر سکتے تھے۔ البتہ دو بار ڈھانپنے سے کوئی نقصان نہیں ہوتا ہے اور ہم تفاعل کے رویہ کو بہتر سمجھ پاتے ہیں۔ □

## قطبی قطب کے نقاط تقاطع کی تلاش

قطبی ترسیم میں ایک نقطہ کو مختلف طریقوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے لہٰذا یہ فیصلہ کرنے کے لئے خصوصی دھیان کرنا ہو گا کہ آیا کسی قطبی مساوات کی ترسیم پر ایک نقطہ پایا جاتا ہے۔ اسی طرح قطبی ترسیمات کے نقاط تقاطع معلوم کرتے ہوئے بھی دھیان رکھنا ضروری ہے۔ عین ممکن ہے کہ نقطہ تقاطع ایک ترسیم کو جن قطبی محدد پر مطمئن کرتا ہو، وہ ان قطبی محدد سے مختلف ہوں جن پر یہی نقطہ تقاطع دوسری قطبی مساوات کو مطمئن کرتا ہو۔ یوں ضروری نہیں ہے کہ دونوں مساوات کو ایک ساتھ حل کرتے ہوئے تمام نقاط تقاطع دریافت ہوں۔ تمام نقاط تقاطع صرف مساوات ترسیم کر کے معلوم کیے جا سکتے ہیں۔

---

[۴۰] lemniscate




شکل ۱۰.۶۷: ترسیم برائے مثال ۱۰.۴

مثال ۱۰.۵: فربہی محدد
دکھائیں کہ نقطہ $(2, \frac{\pi}{2})$ منحنی $r = 2\cos 2\theta$ پر پایا جاتا ہے۔

حل: اس نقطہ کو دی گئی مساوات میں پر کرنے سے درج ذیل عدم مساوات

$$2 = 2\cos 2(\tfrac{\pi}{2}) = 2\cos \pi = -2$$

حاصل ہوتی ہے جس سے یوں معلوم ہوتا ہے کہ یہ نقطہ اس منحنی پر نہیں پایا جاتا ہے۔ یہاں مقدار درست ہے لیکن علامت غلط ہے جس سے ہمیں خیال آتا ہے کہ اس نقطے کی ایسی محددی جوڑی، مثلاً $(-2, -\frac{\pi}{2})$، تلاش کی جائے جو منفی رداس دیتا ہے۔ اس جوڑی کو $r = 2\cos 2\theta$ میں پر کر کے

$$-2 = 2\cos 2(-\tfrac{\pi}{2}) = 2(-1) = -2$$

ملتا ہے لہٰذا مساوات مطمئن ہوتی ہے۔ اس طرح نقطہ $(2, \frac{\pi}{2})$ دی گئی منحنی پر پایا جاتا ہے۔ □

مثال ۱۰.۶: مبہم نقطہ تقاطع
درج ذیل منحنیات کے نقاط تقاطع تلاش کریں۔

$$r^2 = 4\cos\theta, \quad r = 1 - \cos\theta$$

حل: کارتیسی محدد میں دو مساوات کو ایک ساتھ حل کر کے ان کے نقاط تقاطع حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ قطبی محدد میں قصہ کچھ مختلف ہے۔ قطبی محدد میں دو منحنیات کی مساوات ایک ساتھ حل کرنے سے عین ممکن ہے کہ بعض نقاط تقاطع حاصل ہوں اور بعض حاصل نہ ہوں۔ اس مثال میں مساوات ایک ساتھ حل کر کے چار میں سے صرف دو نقاط تقاطع حاصل ہوتے ہیں۔ باقی دو ترسیم سے حاصل ہوں گے (سوال ۱۰.۴۹ بھی دیکھیں)۔

اگر ہم $\cos\theta = \frac{r^2}{4}$ کو $r = 1 - \cos\theta$ میں پر کریں تب درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} r = 1 - \cos\theta &= 1 - \frac{r^2}{4} \\ 4r &= 4 - r^2 \\ r^2 + 4r - 4 &= 0 \\ r &= -2 \pm 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

ان میں $r = -2 - 2\sqrt{2}$ کی مطلق قیمت اتنی زیادہ ہے کہ یہ دونوں کو مطمئن نہیں کرتا ہے۔ دوسرے جواب $r = -2 + 2\sqrt{2}$ سے $\theta$ کی درج ذیل قیمت حاصل ہوتی ہے۔

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1}(1 - r) && (r = 1 - \cos\theta) \\ &= \cos^{-1}(1 - (2\sqrt{2} - 2)) && (r = 2\sqrt{2} - 2) \\ &= \cos^{-1}(3 - 2\sqrt{2}) \\ &= \pm 80^\circ && \text{قریبی درجہ تک پورم پور} \end{aligned}$$

اس طرح ہم دو نقاط تقاطع $(r, \theta) = (2\sqrt{2} - 2, \pm 80^\circ)$ تلاش کرنے میں کامیاب ہوتے ہیں۔

ہم شکل ۱۰.۶۴ اور شکل ۱۰.۶۵ کی مدد سے مساوات $r^2 = 4\cos\theta$ اور $r = 1 - \cos\theta$ کو ایک ساتھ ترسیم (شکل ۱۰.۶۸) کر کے دیکھتے ہیں کہ یہ نقطہ $(2, \pi)$ اور مبدا پر بھی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔ ان نقاط کے رداس $r$ کی قیمتیں کیوں مساوات ایک ساتھ حل کرنے سے حاصل نہیں ہوں پائی؟ اس کا جواب ہے کہ نقاط $(2, \pi)$ اور $(0, 0)$ دونوں منحنیات پر بیک وقت نہیں پائے جاتے ہیں۔ ان نقطوں تک پہنچنے کے لئے دنوں منحنیات پر $\theta$ کی مختلف قیمتیں درکار ہوتی ہیں۔ منحنی $r = 1 - \cos\theta$ پر نقطہ $(2, \pi)$ تک $\theta = \pi$ پر پہنچا جاتا ہے جبکہ منحنی $r^2 = 4\cos\theta$ پر اسی نقطہ تک $\theta = 0$ پر پہنچا جاتا ہے جہاں اس نقطہ کو محدد $(2, \pi)$ سے نہیں پہچانا جاتا جو اس مساوات کو مطمئن نہیں کرتے ہیں، بلکہ اس نقطہ کو محدد $(-2, 0)$ سے پہچانا جاتا ہے جو اس مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ اسی طرح قلب نما منحنی مبدا تک $\theta = 0$ پر پہنچتی ہے جبکہ منحنی $r^2 = 4\cos\theta$ مبدا تک $\theta = \frac{\pi}{2}$ پر پہنچتی ہے۔ □

## سوالات

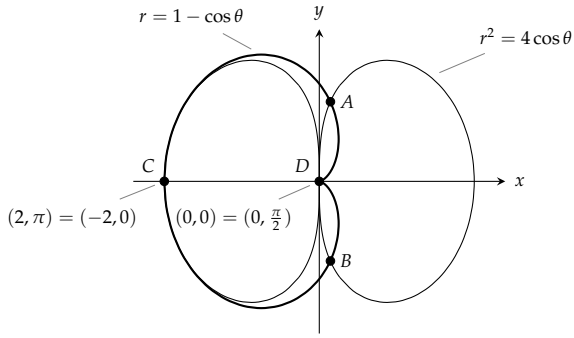
### تشاکلی اور قطبی ترسیمات

سوال ۱۰.۱ تا سوال ۱۰.۱۲ میں منحنی کی تشاکلی پہچانئے۔ اس کے بعد منحنی ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۱: $r = 1 + \cos\theta$
جواب: شکل ۱۰.۶۹

سوال ۱۰.۲: $r = 2 - 2\cos\theta$

سوال ۱۰.۳: $r = 1 - \sin\theta$
جواب: شکل ۱۰.۷۰




شکل ۱۰.۶۸: نقطہ تقاطع (مثال ۱۰.۶)

سوال ۱۰.۴: $r = 1 + \sin\theta$

سوال ۱۰.۵: $r = 2 + \sin\theta$
جواب: شکل ۱۰.۷۱

سوال ۱۰.۶: $r = 1 + 2\sin\theta$

سوال ۱۰.۷: $r = \sin\frac{\theta}{2}$
جواب: شکل ۱۰.۷۲

سوال ۱۰.۸: $r = \cos\frac{\theta}{2}$

سوال ۱۰.۹: $r^2 = \cos\theta$
جواب: شکل ۱۰.۷۳

سوال ۱۰.۱۰: $r^2 = \sin\theta$

سوال ۱۰.۱۱: $r^2 = -\sin\theta$
جواب: شکل ۱۰.۷۴

سوال ۱۰.۱۲: $r^2 = -\cos\theta$

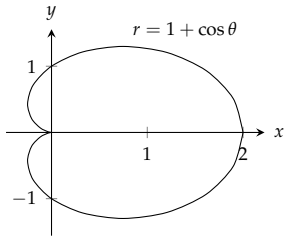
سوال ۱۰.۱۳ تا سوال ۱۰.۱۶ میں دی گئی دو چشمہ ترسیم کریں۔ ان منحنیات کی تشاکلی پہچانئے۔

سوال ۱۰.۱۳: $r^2 = 4\cos 2\theta$
جواب: محور $x$، محور $y$، مبدا

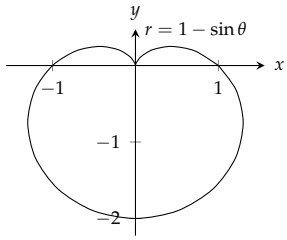
سوال ۱۰.۱۴: $r^2 = 4\sin 2\theta$

سوال ۱۰.۱۵: $r^2 = -\sin 2\theta$
جواب: مبدا

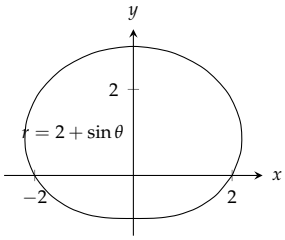
سوال ۱۰.۱۶: $r^2 = -\cos 2\theta$



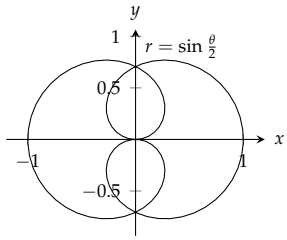

شکل ۱۰.۶۹



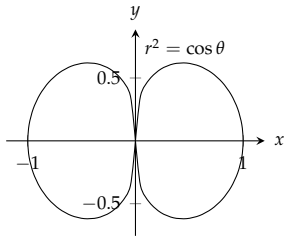

شکل ۱۰.۷۰



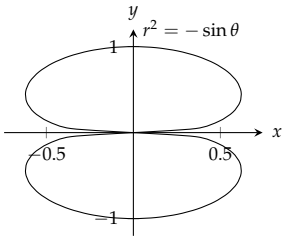

شکل ۱۰.۷۱




شکل ۱۰.۷۲




شکل ۱۰.۷۳




شکل ۱۰.۷۴

## قطبی منحنیات کی ڈھلوان

سوال ۱۰.۱۷ تا سوال ۱۰.۲۰ میں دیے گئے نقطوں پر منحنی کی ڈھلوان مساوات ۱۰.۱ کی مدد سے دریافت کریں۔ منحنی کو ترسیم کر کے ان نقطوں پر مماس بھی کھینچیں۔

سوال ۱۰.۱۷: قطب نما: $r = -1 + \cos\theta$ ؛ $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$

جواب: شکل ۱۰.۷۵، $\left(-1, \frac{\pi}{2}\right)$ پر ڈھلوان $-1$ اور $\left(-1, -\frac{\pi}{2}\right)$ پر $1$ ہے۔

سوال ۱۰.۱۸: قطب نما: $r = -1 + \sin\theta$ ؛ $\theta = 0, \pi$

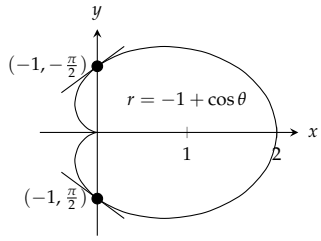
سوال ۱۰.۱۹: چار گل: $r = \sin 2\theta$ ؛ $\theta = \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$

جواب: شکل ۱۰.۷۶، $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ پر $-1$ ، $\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$ پر $1$ ، $\left(-1, \frac{3\pi}{4}\right)$ پر $-1$ $\left(1, -\frac{3\pi}{4}\right)$

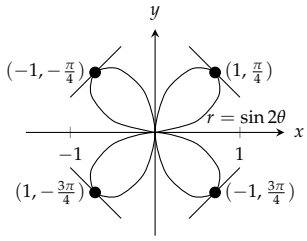
سوال ۱۰.۲۰: چار گل: $r = \cos 2\theta$ ؛ $\theta = 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pi$

## گھونگے

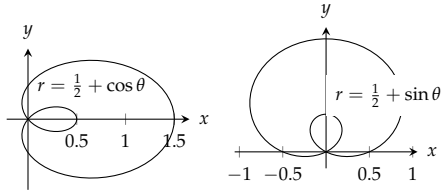
سوال ۱۰.۲۱ تا سوال ۱۰.۲۴ میں دیے گھونگے ترسیم کریں۔ آپ کو اس نام کی سمجھ سوال ۱۰.۲۱ ترسیم کر کے آئے گی۔ گھونوں کی مساوات کی عمومی صورت $r = a \pm b\cos\theta$ یا $r = a \pm b\sin\theta$ ہوتی ہے۔ ان کے چار بنیادی اشکال ہیں۔



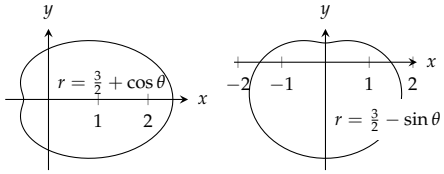

شکل ۱۰.۷۵




شکل ۱۰.۷۶




شکل ۱۰.۷۷




شکل ۱۰.۷۸

سوال ۱۰.۲۱: اندرونی گھیرے والے گھونگے: (ا) $r = \frac{1}{2} + \cos\theta$، (ب) $r = \frac{1}{2} + \sin\theta$

جواب: شکل ۱۰.۷۷

سوال ۱۰.۲۲: قلب نما: (ا) $r = 1 - \cos\theta$، (ب) $r = -1 + \sin\theta$

سوال ۱۰.۲۳: ٹوئے والے گھونگے: (ا) $r = \frac{3}{2} + \cos\theta$، (ب) $r = \frac{3}{2} - \sin\theta$

جواب: شکل ۱۰.۷۸

سوال ۱۰.۲۴: چپٹے گھونگے: (ا) $r = 2 + \cos\theta$، (ب) $r = -2 + \sin\theta$

## قطبی عدم مساوات کی ترسیم

سوال ۱۰.۲۵: ایک خطہ جس کو عدم مساوات $-1 \leq r \leq 2$ اور $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ بیان کرتی ہیں کا خاکہ بنائیں۔

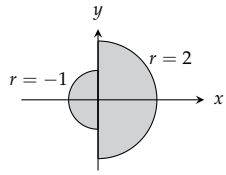
جواب: شکل ۱۰.۷۹

سوال ۱۰.۲۶: ایک خطہ جس کو عدم مساوات $0 \leq r \leq 2\sec\theta$ اور $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ بیان کرتی ہیں کا خاکہ بنائیں۔

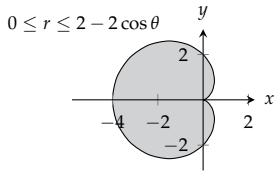
سوال ۱۰.۲۷: ایک خطہ جس کو عدم مساوات $0 \leq r \leq 2 - 2 - \cos\theta$ بیان کرتی ہے کا خاکہ بنائیں۔

جواب: شکل ۱۰.۸۰

سوال ۱۰.۲۸: ایک خطہ جس کو عدم مساوات $0 \leq r^2 \leq \cos\theta$ بیان کرتی ہے کا خاکہ بنائیں۔




شکل ۱۰.۷۹




شکل ۱۰.۸۰

## تقاطع

سوال ۱۰.۲۹: دکھائیں کہ نقطہ $(2, \frac{3\pi}{4})$ منحنی $r = 2\sin 2\theta$ پر پایا جاتا ہے۔

سوال ۱۰.۳۰: دکھائیں کہ نقطہ $(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{2})$ منحنی $r = -\sin(\frac{\theta}{3})$ پر پایا جاتا ہے۔

سوال ۱۰.۳۱ تا سوال ۱۰.۳۸ میں نقاط تقاطع تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۳۱: $r = 1 + \cos\theta, \quad r = 1 - \cos\theta$

جواب: $(0,0), (1, \frac{\pi}{2}), (1, \frac{3\pi}{2})$

سوال ۱۰.۳۲: $r = 1 + \sin\theta, \quad r = 1 - \sin\theta$

سوال ۱۰.۳۳: $r = 2\sin\theta, \quad r = 2\sin 2\theta$

جواب: $(0,0), (\sqrt{3}, \frac{\pi}{3}), (-\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3})$

سوال ۱۰.۳۴: $r = \cos\theta, \quad r = 1 - \cos\theta$

سوال ۱۰.۳۵: $r = \sqrt{2}, \quad r^2 = 4\sin\theta$

جواب: $(\sqrt{2}, \pm\frac{\pi}{6}), (\sqrt{2}, \pm\frac{5\pi}{6})$

سوال ۱۰.۳۶: $r^2 = \sqrt{2}\sin\theta, \quad r^2 = \sqrt{2}\cos\theta$

سوال ۱۰.۳۷: $r = 1, \quad r^2 = 2\sin 2\theta$

جواب: $(1, \frac{\pi}{12}), (1, \frac{5\pi}{12}), (1, \frac{13\pi}{12}), (1, \frac{17\pi}{12})$

سوال ۱۰.۳۸: $r^2 = \sqrt{2}\cos 2\theta, \quad r^2 = \sqrt{2}\sin 2\theta$

سوال ۱۰.۳۹ تا سوال ۱۰.۴۲ میں کمپیوٹر کی مدد سے منحنیات ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۳۹: $r^2 = \sin 2\theta, \quad r^2 = \cos 2\theta$

سوال ۱۰.۴۰: $r = 1 + \cos\frac{\theta}{2}, \quad r = 1 - \sin\frac{\theta}{2}$

سوال ۱۰.۴۱: $r = 1, \quad r = 2\sin 2\theta$

سوال ۱۰.۴۲: $r = 1, \quad r^2 = 2\sin 2\theta$

## کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۱۰.۴۳: (ا) $r = -1 - \cos\theta$ اور (ب) $r = 1 + \cos\theta$ میں کس کی ترسیم $r = 1 - \cos\theta$ کی ترسیم کی طرح ہے؟

جواب: الف

سوال ۱۰.۴۴: (ا) $r = -\sin(2\theta + \frac{\pi}{2})$ اور (ب) $r = -\cos\frac{\theta}{2}$ میں کس کی ترسیم $r = \cos 2\theta$ کی ترسیم کی طرح ہے؟

سوال ۱۰.۴۵: پھول میں پھول

منحنی $r = 1 - 2\sin 3\theta$ ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۴۶: منحنی $r = 1 + 2\sin\frac{\theta}{2}$ ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۴۷: گلاب

گلاب $r = \cos m\theta$ جہاں $m = \frac{1}{3}, 2, 3, 7$ ہے ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۴۸: پیچ دار

قطبی محدد پیچ دار منحنیات کے لئے خصوصی طور پر بہتر ہے۔ درج ذیل پیچ دار منحنیات ترسیم کریں۔

ا. $r = \theta$ ب. $r = -\theta$ ج. $r = e^{\theta/10}$ د. $r = \frac{8}{\theta}$ ھ. $r = \pm\frac{10}{\sqrt{\theta}}$

## نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۰.۴۹: (مثال ۱۰.۶ جاری) ہم مثال ۱۰.۶ میں درج ذیل مساوات

$$r^2 = 4\cos\theta \tag{۱۰.۲}$$

$$r = 1 - \cos\theta \tag{۱۰.۳}$$

اکٹھے حل کر کے نقاط $(0,0)$ اور $(2,\pi)$ کی نشاندہی نہیں کر پائے جہاں یہ منحنیات ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔

ا. ہم $r^2 = 4\cos\theta$ میں $(r,\theta)$ کی جگہ مماثل $(-r,\theta+\pi)$ پر کر کے نقطہ $(2,\pi)$ حاصل کر سکتے تھے:

$$\begin{aligned} r^2 &= 4\cos\theta \\ (-r)^2 &= 4\cos(\theta+\pi) \\ r^2 &= -4\cos\theta \end{aligned} \tag{۱۰.۴}$$

مساوات ۱۰.۳ اور مساوات ۱۰.۴ اکٹھے حل کر کے دکھائیں کہ $(2,\pi)$ دونوں کو مطمئن کرتا ہے۔ (ہم اب بھی یہ نہیں جان سکتے ہیں کہ ترسیمات $(0,0)$ پر ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں۔)

ب. مبدا اب بھی خاص نقطہ ہے (جیسا یہ عموماً ہوتا ہے)۔ آئیں اس سے نپٹنے کا ایک طریقہ دیکھیں۔ مساوات ۱۰.۲ اور مساوات ۱۰.۳ میں $r = 0$ پر کر کے انہیں علیحدہ علیحدہ $\theta$ کے لئے حل کریں۔ چونکہ کسی بھی $\theta$ کے لئے $(0, \theta)$ مبدا ہے لہٰذا اس طرح ہم جان پائیں گے کہ دونوں منحنیات مبدا سے گزرتی ہیں اگرچہ یہ ایک دوسرے سے مختلف $\theta$ کے لئے مبدا سے گزرتی ہیں۔

سوال ۱۰.۵۰: اگر اس حصہ کے شروع میں بتلائی گئی دو تشاکلی ایک منحنی میں پائی جاتی ہو تب کیا اس کی تیسری تشاکلی بھی ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۰.۵۱: چار گل $r = \cos 2\theta$ کی اس پھول کی پتی کی زیادہ سے زیادہ چوڑائی دریافت کریں جو $x$ محور پر پایا جاتا ہے۔
جواب: $2y = \frac{2\sqrt{6}}{9}$

سوال ۱۰.۵۲: محور $x$ سے قلب نما $r = 2(1 + \cos\theta)$ کا زیادہ سے زیادہ قدر دریافت کریں۔

## ۱۰.۸ مخروط حصوں کے قطبی مساوات

چاند، سیارے، مصنوعی سیارے اور دم دار ستارے ترخیم، قطع مکافی اور قطع زائد پر حرکت کرتے ہیں۔ ان کی حرکت کو قطبی محدد میں ایک آسان مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے لہٰذا فلکیات اور فلکیاتی انجینئری میں قطبی محدد اہمیت رکھتے ہیں۔ ہم اس مساوات کو یہاں حاصل کرتے ہیں۔

### خطوط

فرض کریں مبدا $O$ سے خط $L$ تک عمودی لکیر، $L$ پر نقطہ $N_0(r_0, \theta_0)$ پہنچتی ہے جہاں $r \geq 0$ ہے (شکل ۱۰.۸۱)۔ اب اگر $L$ پر $N(r, \theta)$ کوئی دوسرا نقطہ ہو تب نقاط $O$ ، $N_0$ اور $N$ ایک قائمہ الزاویہ مثلث کے راس ہوں گے جس سے

$$\frac{r_0}{r} = \cos(\theta - \theta_0)$$

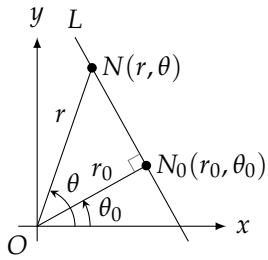
یا

$$r\cos(\theta - \theta_0) = r_0$$

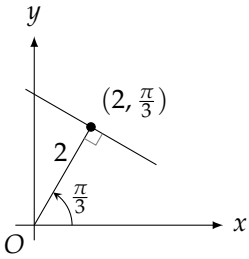
لکھا جا سکتا ہے۔ **خط کی معیاری قطبی مساوات**
اگر مبدا سے خط $L$ تک عمود نقطہ $N_0(r_0, \theta_0)$ پر بیٹھتا ہو اور $r_0 \geq 0$ ہو تب $L$ کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$r\cos(\theta - \theta_0) = r_0$$

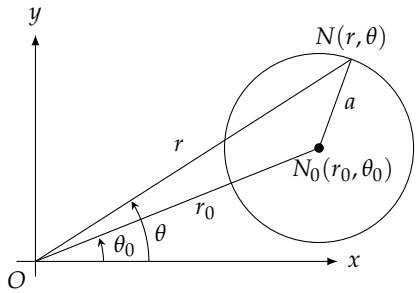
مثال ۱۰.۱: مماثل $\cos(A - B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ استعمال کر کے شکل ۱۰.۸۲ میں دیے خط کی مساوات تلاش کریں۔




شکل ۱۰.۸۱: خط کی قطبی مساوات




شکل ۱۰.۸۲: خط برائے مثال ۱۰.۱

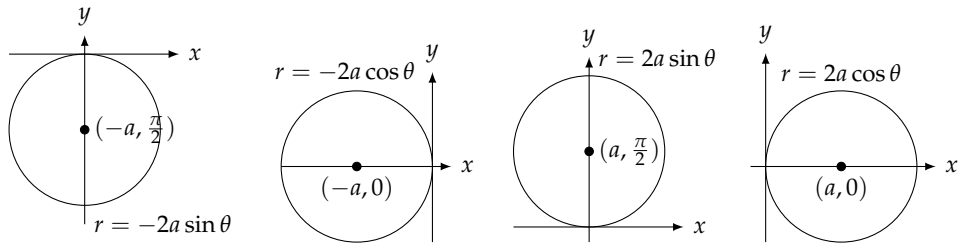



شکل ۱۰.۸۳: دائری کی قطبی مساوات۔

حل:

$$
\begin{aligned}
r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) &= 2 \\
r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} - \sin\theta\sin\frac{\pi}{3}\right) &= 2 \\
\frac{1}{2}r\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}r\sin\theta &= 2 \\
\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y &= 2 \\
x + \sqrt{3}y &= 4
\end{aligned}
$$

□




شکل ۱۰.۸۴: کارتیسی محور پر مرکز والے دائروں کے قطبی مساوات۔

### ۱۰.۸.۱ دائرے

ایک دائرہ جس کا مرکز $N_0(r_0, \theta_0)$ اور رداس $a$ ہو کی قطبی مساوات حاصل کرنے کی خاطر ہم مثلث $ON_0N$ پر قاعدہ کوسائن لاگو کرتے ہیں (شکل ۱۰.۸۳) جس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$a^2 = r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\theta - \theta_0) \tag{۱۰.۱}$$

اگر یہ دائرہ مبدا سے گزرتا ہو تب $r_0 = a$ ہو گا جس سے مساوات ۱۰.۱ درج ذیل سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\begin{aligned} a^2 &= a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \theta_0) \quad (\text{مساوات ۱۰.۱ میں } r_0 = a) \\ r^2 &= 2ar\cos(\theta - \theta_0) \\ r &= 2a\cos(\theta - \theta_0) \end{aligned} \tag{۱۰.۲}$$

اگر دائرے کا مرکز مثبت $x$ محور پر پایا جاتا ہو تب مساوات ۱۰.۲ درج ذیل دے گی۔

$$r = 2a\cos\theta \tag{۱۰.۳}$$

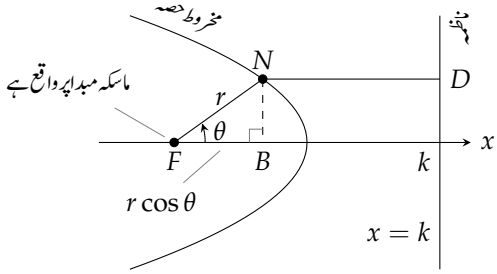
اگر دائرے کا مرکز مثبت $y$ محور پر پایا جاتا ہو تب $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ اور $\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin\theta$ ہوں گے لہٰذا مساوات ۱۰.۲ درج ذیل دے گی۔

$$r = 2a\sin\theta \tag{۱۰.۴}$$

مساوات ۱۰.۳ اور مساوات ۱۰.۴ میں $r$ کی جگہ $-r$ پر کر کے ان دائروں کی مساواتیں حاصل ہوں گی جن کے مرکز منفی $x$ محور یا منفی $y$ محور پر ہوں (شکل ۱۰.۸۴)۔

مثال ۱۰.۲: مبدا سے گزرتے ہوئے دائرے

| رداس | مرکز | مساوات |
|---|---|---|
| $3$ | $(3, 0)$ | $r = 6\cos\theta$ |
| $2$ | $(2, \frac{\pi}{2})$ | $r = 4\sin\theta$ |
| $\frac{1}{2}$ | $(-\frac{1}{2}, 0)$ | $r = -\cos\theta$ |
| $1$ | $(-1, \frac{\pi}{2})$ | $r = -2\sin\theta$ |




شکل ۱۰.۸۵: اس مقام پر رکھے گئے مخروط حصے کا $NF = r$ اور $ND = k - r\cos\theta$ ہو گا۔

□

## ترخیم، قطع مکافی اور قطع زائد یکجا

ترخیم، قطع مکافی اور قطع زائد کے قطبی مساوات معلوم کرنے کی خاطر ہم ایک ماسکہ کو مبدا پر رکھتے ہیں اور مطابقتی ناظمہ کو مبدا کے دائیں، انتصابی لکیر $x = k$ پر رکھتے ہیں (شکل ۱۰.۸۵)۔ یوں

$$NF = r$$

اور

$$ND = k - FB = k - r\cos\theta$$

ہوں گے۔ یوں مخروط کی ماسکہ ناظمہ مساوات $NF = e \cdot ND$ درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$r = e(k - r\cos\theta)$$

جس کو $r$ کے لئے حل کرتے ہیں:

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta} \tag{۱۰.۵}$$

یہ مساوات $0 < e < 1$ کے لئے ترخیم، $e = 1$ کے لئے قطع مکافی اور $e > 1$ کے لئے قطع زائد کو ظاہر کرتی ہے۔ اس طرح ترخیم، قطع مکافی اور قطع زائد کو ایک ہی مساوات ظاہر کرتی ہے۔

مثال ۱۰.۳: مخروط حصہ مساوات ۱۰.۵

$$r = \frac{k}{2+\cos\theta} \qquad \text{ترخیم:} \quad e = \frac{1}{2}$$

$$r = \frac{k}{1+\cos\theta} \qquad \text{قطع مکافی:} \quad e = 1$$

$$r = \frac{2k}{1+2\cos\theta} \qquad \text{قطع زائد:} \quad e = 2$$

□

آپ مساوات ۱۰.۵ کی مختلف صورتیں دیکھیں گے جن کا دارومدار ناظمہ کے مقام پر ہو گا۔ اگر مبدا کے بائیں جانب لکیر $-k$ = ناظمہ ہو (جبکہ ماسکہ اب بھی مبدا پر ہو) تب مساوات ۱۰.۵ کی جگہ درج ذیل ہو گا۔

$$r = \frac{ke}{1-e\cos\theta}$$

نسب نما میں اب $(+)$ کی بجائے $(-)$ ہو گا۔ اگر ناظمہ $y = k$ یا $y = -k$ ہو تب مساوات ۱۰.۵ میں $\cos\theta$ کی جگہ $\sin\theta$ ہو گا (شکل ۱۰.۸۶)۔

مثال ۱۰.۴: ایک قطع زائد جس کی سنک $\frac{3}{2}$ اور ناظمہ $x = 2$ ہو کی مساوات دریافت کریں۔

حل: ہم شکل ۱۰.۸۶-الف کی مساوات میں $k = 2$ اور $e = \frac{3}{2}$ لیتے ہیں۔

$$r = \frac{2(\frac{3}{2})}{1+\frac{3}{2}\cos\theta} \implies r = \frac{6}{2+3\cos\theta}$$

□

مثال ۱۰.۵: ایک قطع مکافی جس کی مساوات درج ذیل ہے کی ناظمہ معلوم کریں۔

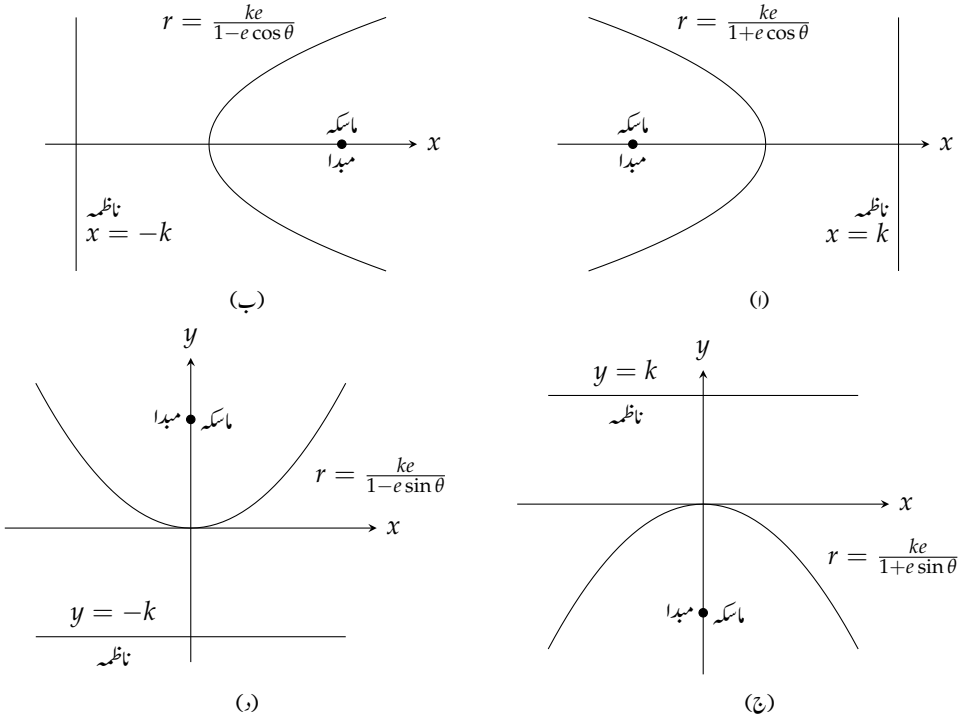
$$r = \frac{25}{10+10\cos\theta}$$

حل: ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو 10 سے تقسیم کر کے مساوات کی معیاری روپ

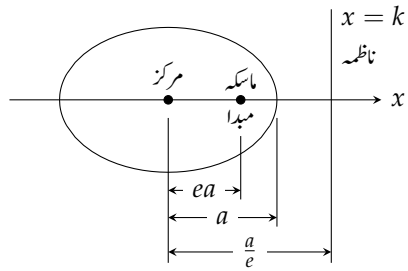
$$r = \frac{5/2}{1+\cos\theta}$$

حاصل کرتے ہیں۔ یہ درج ذیل مساوات ہے

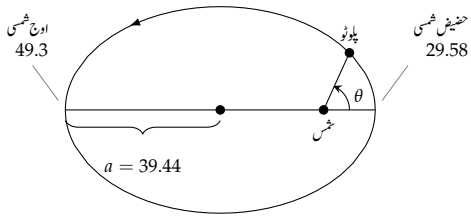
$$r = \frac{ke}{1+e\cos\theta}$$




شکل ۱۰.۸۶: مخروط حصوں کی مساواتیں $(e > 0)$




شکل ۱۰.۸۷: ایک ترخیم جس کا نصف محور اکبر $a$ ہو، ماسکہ تا ناظمہ فاصلہ لہٰذا $k = \frac{a}{e} - ea$ یعنی $ke = a(1-e^2)$ ہو گا۔




شکل ۱۰.۸۸: مدار پلوٹو (مثال ۱۰.۶)

جس میں $k = 5/2$ اور $e = 1$ ہیں۔ ناظمہ کی مساوات $x = \frac{5}{2}$ ہو گی۔ □

ہم شکل ۱۰.۸۷ سے دیکھتے ہیں کہ ترخیم کے لئے $k$، سنک $e$ اور نصف محور اکبر $a$ کا تعلق

$$k = \frac{a}{e} - ea \tag{۱۰.۶}$$

ہے جس سے $ke = a(1-e^2)$ ملتا ہے۔ مساوات ۱۰.۵ میں $ke$ کی جگہ پر کرنے سے ترخیم کی درج ذیل معیاری مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \tag{۱۰.۷}$$

سنک $e$ اور نصف اکبر محور $a$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات ۱۰.۷ میں $e = 0$ پر کرنے سے $r = a$ حاصل ہوتا ہے جو ایک دائرہ کو ظاہر کرتی ہے۔

سیاروں کے مدار معلوم کرنے کے لئے مساوات ۱۰.۷ ابتدائی مساوات ہے۔

مثال ۱۰.۶: ایک ترخیم کا نصف محور اکبر 39.44 فلکیاتی اکائی اور سنک 0.25 ہے۔ اس ترخیم کی قطبی مساوات تلاش کریں۔ یہ تخمیناً سیارہ پلوٹو کا مدار ہے۔

حل: ہم مساوات ۱۰.۷ میں $a = 39.44$ اور $e = 0.25$ پر کرتے ہیں۔

$$r = \frac{39.44(1-(0.25)^2)}{1+0.25\cos\theta} = \frac{147.9}{4+\cos\theta}$$

حضیض شمسی[۴۱] پر سورج سے پلوٹو

$$r = \frac{147.9}{4+1} = 29.58$$

[۴۱] perihelion

فلکی اکائیاں دور ہو گا جبکہ اصطلاحاوج شمسی[۴۲] پر یہ سورج سے

$$r = \frac{147.9}{4-1} = 49.3$$

فلکی اکائیاں دور ہو گا (شکل ۱۰.۸۸)۔ □

مثال ۱۰.۷: ایک ماسکہ سے مطابقتی ناظمہ تک فاصل مثال ۱۰.۶ میں معلوم کریں۔

حل: ہم مساوات ۱۰.۶ میں $a = 39.44$ اور $e = 0.25$ پر کر کے

$$k = 39.44\left(\frac{1}{0.25} - 0.25\right) = 147.9$$

فلکی اکائیاں حاصل کرتے ہیں۔ □

## سوالات

### خطوط

سوال ۱۰.۱ تا سوال ۱۰.۴ میں دیے خطوط کی قطبی اور کارتیسی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۱: خط شکل ۱۰.۸۹ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

جواب: $r\cos(\theta - \frac{\pi}{6}) = 5, \quad y = -\sqrt{3}x + 10$

سوال ۱۰.۲: خط شکل ۱۰.۹۰ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال ۱۰.۳: خط شکل ۱۰.۹۱ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

جواب: $r\cos(\theta - \frac{4\pi}{3}) = 3, \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 2\sqrt{3}$

سوال ۱۰.۴: خط شکل ۱۰.۹۲ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

سوال ۱۰.۵ تا سوال ۱۰.۸ میں دی مساوات کو ترسیم کریں اور ان کی کارتیسی مساوات معلوم کریں۔

سوال ۱۰.۵: $r\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$

جواب: $y = 2 - x$

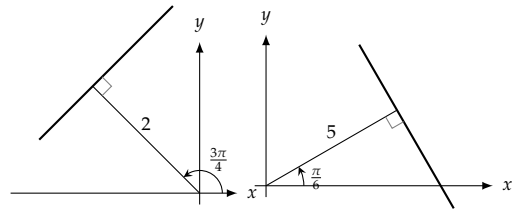
سوال ۱۰.۶: $r\cos(\theta + \frac{3\pi}{4}) = 1$

سوال ۱۰.۷: $r\cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) = 3$

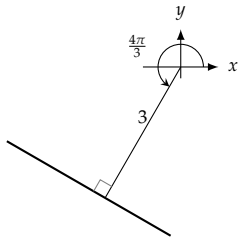
جواب: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$

---

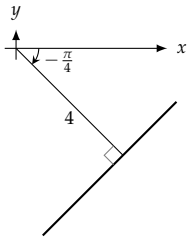
[۴۲] aphelion




شکل ۱۰.۸۹: ترسیم سوال ۱۰.۱ شکل ۱۰.۹۰: ترسیم سوال ۱۰.۲




شکل ۱۰.۹۱: ترسیم سوال ۱۰.۳




شکل ۱۰.۹۲: ترسیم سوال ۱۰.۴

سوال ۱۰.۸: $r\cos(\theta + \frac{\pi}{3}) = 2$

سوال ۱۰.۹ تا سوال ۱۰.۱۲ میں دی گئی کارتیسی مساوات کی قطبی روپ ( $r\cos(\theta - \theta_0) = r_0$ ) تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۹: $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 6$
جواب: $r\cos(\theta - \frac{\pi}{4}) = 3$

سوال ۱۰.۱۰: $\sqrt{3}x - y = 1$

سوال ۱۰.۱۱: $y = -5$
جواب: $r\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = 5$

سوال ۱۰.۱۲: $x = -4$

سوال ۱۰.۱۳ تا سوال ۱۰.۱۶ میں دی گئی دائروں کی قطبی مساوات دریافت کریں۔

سوال ۱۰.۱۳: دائرہ شکل ۱۰.۹۳
جواب: $r = 8\cos\theta$

سوال ۱۰.۱۴: دائرہ شکل ۱۰.۹۴

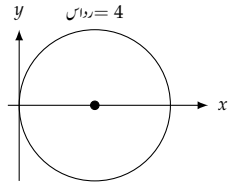
سوال ۱۰.۱۵: دائرہ شکل ۱۰.۹۵
جواب: $r = 2\sqrt{2}\sin\theta$

سوال ۱۰.۱۶: دائرہ شکل ۱۰.۹۶

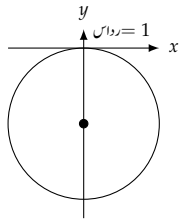
سوال ۱۰.۱۷ تا سوال ۱۰.۲۰ میں دیے گئے دائرے ترسیم کریں۔ ان کے مرکز کے قطبی محدد اور رداس لکھیں۔

سوال ۱۰.۱۷: $r = 4\cos\theta$
جواب: $C(2,0), \quad 2$

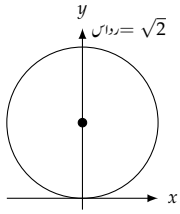
سوال ۱۰.۱۸: $r = 6\sin\theta$



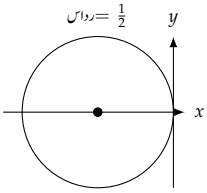

شکل ۱۰.۹۳: دائرہ سوال ۱۰.۱۳




شکل ۱۰.۹۴: دائرہ سوال ۱۰.۱۴




شکل ۱۰.۹۵: دائرہ سوال ۱۰.۱۵




شکل ۱۰.۹۶: دائرہ سوال ۱۰.۱۶

سوال ۱۰.۱۹: $r = -2\cos\theta$
جواب: $C(1, \pi), \quad 1$

سوال ۱۰.۲۰: $r = -8\sin\theta$

سوال ۱۰.۲۱ تا سوال ۱۰.۲۸ کے قطبی مساوات معلوم کریں۔

سوال ۱۰.۲۱: $(x-6)^2 + y^2 = 36$
جواب: $r = 12\cos\theta$

سوال ۱۰.۲۲: $(x+2)^2 + y^2 = 4$

سوال ۱۰.۲۳: $x^2 + (y-5)^2 = 25$
جواب: $r = 10\sin\theta$

سوال ۱۰.۲۴: $x^2 + (y+7)^2 = 49$

سوال ۱۰.۲۵: $x^2 + 2x + y^2 = 0$
جواب: $(x+1)^2 + y^2 = 1, \quad r = -2\cos\theta$

سوال ۱۰.۲۶: $x^2 - 16x + y^2 = 0$

سوال ۱۰.۲۷: $x^2 + y^2 + y = 0$
جواب: $x^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}, \quad r = -\sin\theta$

سوال ۱۰.۲۸: $x^2 + y^2 - \frac{4}{3}y = 0$

## سنک اور ناظمہ سے مخروط خطے

سوال ۱۰.۲۹ تا سوال ۱۰.۳۶ میں مخروط حصوں کی سنک دی گئی ہے۔ مخروط حصے کا ایک ماسکہ مبدا پر واقع ہے اور اس کا مطابقتی ناظمہ بھی دیا گیا ہے۔ اس مخروط حصے کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۲۹: $e = 1, \quad x = 2$
جواب: $r = \frac{2}{1+\cos\theta}$

سوال ۱۰.۳۰: $e = 1, \quad y = 2$

سوال ۱۰.۳۱: $e = 5, \quad y = -6$
جواب: $r = \frac{30}{1-5\sin\theta}$

سوال ۱۰.۳۲: $e = 2, \quad x = 4$

سوال ۱۰.۳۳: $e = \frac{1}{2}, \quad x = 1$
جواب: $r = \frac{1}{2+\cos\theta}$

سوال ۱۰.۳۴: $e = \frac{1}{4}, \quad x = -2$

سوال ۱۰.۳۵: $e = \frac{1}{5}, \quad y = -10$
جواب: $r = \frac{10}{5-\sin\theta}$

سوال ۱۰.۳۶: $e = \frac{1}{3}, \quad y = 6$

## قطع مکافی اور ترخیم

سوال ۱۰.۳۷ تا سوال ۱۰.۴۴ کے قطع مکافی اور ترخیات کو ترسیم کریں۔ مبدا پر واقع ماسکہ کا مطابقتی ناظمہ بھی ترسیم کریں۔ ہر مخروط حصے کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۳۷: $r = \frac{1}{1+\cos\theta}$
جواب: شکل ۱۰.۹۷

سوال ۱۰.۳۸: $r = \frac{6}{2+\cos\theta}$

سوال ۱۰.۳۹: $r = \frac{25}{10-5\cos\theta}$
جواب: شکل ۱۰.۹۸

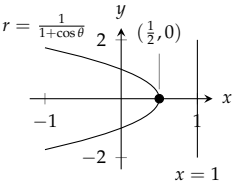
سوال ۱۰.۴۰: $r = \frac{4}{2-2\cos\theta}$

سوال ۱۰.۴۱: $r = \frac{400}{16+8\sin\theta}$
جواب: شکل ۱۰.۹۹

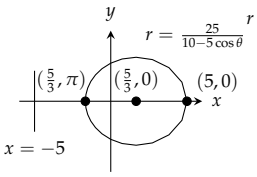
سوال ۱۰.۴۲: $r = \frac{12}{3+3\sin\theta}$

سوال ۱۰.۴۳: $r = \frac{8}{2-2\sin\theta}$
جواب: شکل ۱۰.۱۰۰

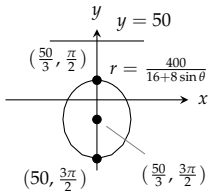
سوال ۱۰.۴۴: $r = \frac{4}{2-\sin\theta}$



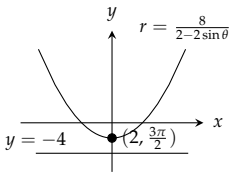

شکل ۱۰.۹۷



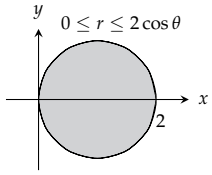

شکل ۱۰.۹۸



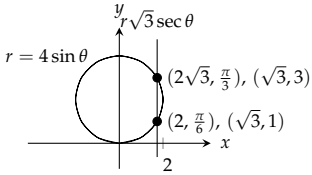

شکل ۱۰.۹۹




شکل ۱۰.۱۰۰




شکل ۱۰.۱۰۱




شکل ۱۰.۱۰۲

## عدم مساوات کی ترسیمات

سوال ۱۰.۴۵ اور سوال ۱۰.۴۶ میں عدم مساوات کو ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۴۵: $0 \le r \le 2\cos\theta$

جواب: شکل ۱۰.۱۰۱

سوال ۱۰.۴۶: $-3\cos\theta \le r \le 0$

## کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۱۰.۴۷ تا سوال ۱۰.۵۶ میں دیے گئے خط اور مخروط خطے ترسیم کریں۔

سوال ۱۰.۴۷: $r = 3\sec(\theta - \frac{\pi}{3})$

سوال ۱۰.۴۸: $r = 4\sec(\theta + \frac{\pi}{6})$

سوال ۱۰.۴۹: $r = 4\sin\theta$

سوال ۱۰.۵۰: $r = -2\cos\theta$

سوال ۱۰.۵۱: $r = \frac{8}{4+\cos\theta}$

سوال ۱۰.۵۲: $r = \frac{8}{4+\sin\theta}$

جدول ۱۰.۴: نظام شمسی

(ا) نظام شمسی میں سیاروں کی سنک اور نصف محور اکبر

| سیارہ | نصف محور اکبر (فلکی اکائیاں) | سنک |
|---|---|---|
| عطارہ | 0.3871 | 0.2056 |
| زھرہ | 0.7233 | 0.0068 |
| زمین | 1.000 | 0.0167 |
| مریخ | 1.524 | 0.0934 |
| مشتری | 5.203 | 0.0484 |
| زحل | 9.539 | 0.0543 |
| یورانس | 19.18 | 0.0460 |
| نیپچون | 30.06 | 0.0082 |
| پلوٹو | 39.44 | 0.2481 |

(ب) نظام شمسی میں حضیض شمسی اور اوج شمسی۔

| سیارہ | حضیض شمسی (فلکی اکائیاں) | اوج شمسی (فلکی اکائیاں) |
|---|---|---|
| عطارہ | 0.3075 | 0.4667 |
| زھرہ | 0.7184 | 0.7282 |
| زمین | 0.9833 | 1.0167 |
| مریخ | 1.3817 | 1.6663 |
| مشتری | 4.9512 | 5.4548 |
| زحل | 9.0210 | 10.0570 |
| یورانس | 18.2977 | 20.0623 |
| نیپچون | 29.8135 | 30.3065 |
| پلوٹو | 29.6549 | 49.2251 |

سوال ۱۰.۵۳: $r = \frac{1}{1-\sin\theta}$

سوال ۱۰.۵۴: $r = \frac{1}{1+\cos\theta}$

سوال ۱۰.۵۵: $r = \frac{1}{1+2\sin\theta}$

سوال ۱۰.۵۶: $r = \frac{1}{1+2\cos\theta}$

## نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۰.۵۷: حضیض شمسی اور اوج شمسی

ایک سیارہ اپنے سورج کے گرد ایک ترخیم پر گھومتا ہے جس کے نصف محور اکبر کی لمبائی $a$ ہے۔

ا. دکھائیں کہ جب سیارہ سورج کے قریب تر ہو تب $r = a(1-e)$ ہو گا اور جب یہ سورج سے دور تر ہو تب $r = a(1+e)$ ہو گا۔

ب. جدول ۱۰.۴-ا کی مدد سے معلوم کریں کہ ہماری نظام شمسی میں ہر سیارہ سورج کے کتنے نزدیک اور اس سے کتنا دور ہو سکتا ہے۔

جواب: (ب) جدول ۱۰.۴-ب

سوال ۱۰.۵۸: سیاروں کی مدار پر حرکت

ہم نے مثال ۱۰.۶ میں پلوٹو کے مدار کی قطبی مساوات معلوم کی۔ جدول ۱۰.۴-ا کی مدد سے دیگر سیاروں کے مدار کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۵۹: (الف) منحنیات $r = 4\sin\theta$ اور $r = \sqrt{3}\sec\theta$ کی کارتیسی مساواتیں تلاش کریں۔ (ب) ان دنوں منحنیات کو ایک ساتھ ترسیم کر کے ان کے نقطہ تقاطع کو کارتیسی اور قطبی محدد میں ظاہر کریں۔

جواب: (ا) $x = \sqrt{3}$, $x^2 + (y-2)^2 = 4$، (ب) شکل ۱۰.۱۰۲

سوال ۱۰.۶۰: (الف) منحنیات $r = 8\cos\theta$ اور $r = 2\sec\theta$ کی کارتیسی مساواتیں تلاش کریں۔ (ب) ان دونوں منحنیات کو ایک ساتھ ترسیم کر کے ان کے نقطہ تقاطع کو کارتیسی اور قطبی محدد میں ظاہر کریں۔

سوال ۱۰.۶۱: ایک قطع مکافی کا ماسکہ $(0,0)$ پر ہے جبکہ اس کا ناظمہ $r\cos\theta = 4$ ہے۔ اس کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

جواب: $r = \frac{4}{1+\cos\theta}$

سوال ۱۰.۶۲: ایک قطع مکافی کا ماسکہ $(0,0)$ پر ہے جبکہ اس کا ناظمہ $r\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = 2$ ہے۔ اس کی قطبی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۶۳: خلائی مہندس

ا. ترخیمی مدار کی سنک کا کلیہ خلائی مہندس درج ذیل لکھے گا

$$e = \frac{r_{\text{بلند تر}} - r_{\text{کمتر}}}{r_{\text{بلند تر}} + r_{\text{کمتر}}}$$

جہاں خلائی جہاز سے قوت کشش کے مرکز تک فاصلہ $r$ ہے۔ یہ کلیہ کیوں قابل استعمال ہے؟

ب. ترخیم کی ترسیم بذریعہ دھاگہ۔ آپ کے پاس 10 cm لمبائی کا ایک دھاگہ ہے جس کے سرپنیوں کے ساتھ بندھے ہوئے ہیں۔ آپ صفحہ ۱۰۷۸ پر شکل ۱۰.۴ میں دکھائی گئی ترکیب استعمال کر کے ایک ترخیم ترسیم کریں جس کی سنک 0.2 ہو۔ یہ ترخیم سیارہ مریخ کا مدار دے گا۔

جواب: (ب) پنیا 2 سنٹی میٹر دور ہونی چاہیے۔

سوال ۱۰.۶۴: ہالی دم دار ستارہ (مثال ۱۰.۱ دیکھیں۔)

ا. دم دار ستارہ ہالی کے مدار کی مساوات اس محددی نظام میں لکھیں جس میں شمس مبدا پر ہو جبکہ دوسرا ماسکہ منفی $x$ محور پر ہو۔ فلکی اکائیاں استعمال کریں۔

ب. یہ دم دار ستارہ سورج کے کتنے قریب پہنچتا ہے؟ جواب فلکی اکائیوں میں اور کلومیٹر میں دیں۔

سوال ۱۰.۶۵ تا سوال ۱۰.۶۸ میں دی گئی منحنی کی قطبی مساوات تلاش کریں۔ منحنی کا خاکہ کھینچیں۔

سوال ۱۰.۶۵: $x^2 + y^2 - 2ay = 0$

جواب: $r = 2a\sin\theta$ دائرہ

سوال ۱۰.۶۶: $y^2 = 4ax + 4a^2$

سوال ۱۰.۶۷: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p \quad (\alpha, p \text{ مستقل})$

جواب: $r\cos(\theta - \alpha) = p$ خط

سوال ۱۰.۶۸: $(x^2+y^2)^2 + 2ax(x^2+y^2) - a^2y^2 = 0$

## کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۱۰.۶۹: کمپیوٹر پر درج ذیل کو $k$ اور $e$ کی مختلف قیمتوں اور $-\pi \leq \theta \leq \pi$ کے لئے ترسیم کریں۔

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta}$$

درج ذیل سوالات کے جواب دیں۔

ا. آپ $k = -2$ لیں۔اب $e$ کی قیمت $\frac{3}{4}$ ، 1 اور $\frac{5}{4}$ کرنے سے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ یہی کچھ $k = 2$ لے کر کریں۔

ب. آپ $k = -1$ لیں۔اب $e$ کی قیمت $\frac{7}{6}$ ، $\frac{5}{4}$ ، $\frac{4}{3}$ ، $\frac{3}{2}$ ، 2 ، 3 ، 5 ، 10 اور 20 کرنے سے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ یہ کچھ $e = \frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{10}$ اور $\frac{1}{20}$ کے لئے کریں۔

ج. اب $e > 0$ اور غیر متغیر رکھتے ہوئے $k$ کی قیمت $-1$ ، $-2$ ، $-3$ ، $-4$ اور $-5$ کرنے سے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟ ترخیم، قطع مکافی اور قطع زائد کی ترسیمات پر نظر رکھیں۔

سوال ۱۰.۷۰: درج ذیل قطبی ترخیم کو مختلف $a > 0$ اور $0 < e < 1$ ، $-\pi \leq \theta \leq \pi$ کے لئے کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

ا. آپ $e = \frac{9}{10}$ لیں۔اب $a$ کی قیمت 1 ، $\frac{3}{2}$ ، 2 ، 3 ، 5 اور 10 لینے سے ترسیم پر کیا اثر پیدا ہو گا؟ یہی کچھ $e = \frac{1}{4}$ کے لئے کر کے دیکھیں۔

ب. آپ $a = 2$ لیں۔اب $e$ کی قیمت $\frac{9}{10}$ ، $\frac{8}{10}$ ، $\frac{7}{10}$ ، ... ، $\frac{1}{10}$ ، $\frac{1}{20}$ اور $\frac{1}{50}$ لینے سے ترسیم پر کیا اثر ہو گا؟

## ۱۰.۹ قطبی محدد میں تکمل

اس حصہ میں قطبی محدد استعمال کرتے ہوئے مستوی خطوں کا رقبہ، منحنیات کی لمبائی، اور سطح طواف کا رقبہ حاصل کرنا سکھایا جائے گا۔

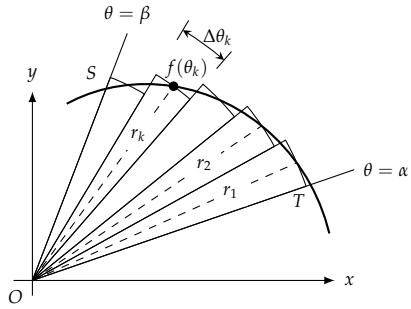
### مستوی میں رقبہ

شکل ۱۰.۱۰۳ میں خطہ $OTS$ کے حدود شعاع $\theta = \alpha$ ، شعاع $\theta = \beta$ اور منحنی $r = f(\theta)$ ہیں۔ہم اس خطہ کو $n$ عدد پنکھا نما پٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں جو زاویہ $TOS$ کی خانہ بندی $P$ پر مبنی ہے۔ایک علامتی پٹی کا رداس $r_k = f(\theta_k)$ اور وسطی زاویہ $\Delta\theta_k$ ہو گا جبکہ اس کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

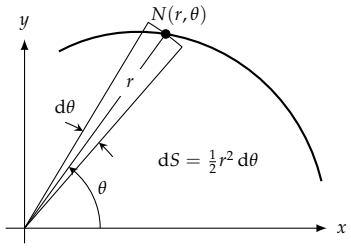
$$S_k = \frac{1}{2}r_k^2\Delta\theta_k = \frac{1}{2}(f(\theta_k))^2\Delta\theta_k$$

یوں مکمل خطے کا رقبہ تخمیناً

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(f(\theta_k))^2\Delta\theta_k$$




شکل ۱۰.۱۰۳: خطہ $OTS$ کا رقبہ۔




شکل ۱۰.۱۰۴: تفرقی رقبہ $\mathrm{d}S$

ہو گا۔ اگر $f$ استمراری ہو تب ہم توقع کرتے ہیں کہ $\|P\| \to 0$ کرنے سے یہ تخمین بہتر سے بہتر ہو گی لہٰذا خطے کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} S &= \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(f(\theta_k))^2 \Delta\theta_k \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(f(\theta))^2\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

**مبدا اور منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$ کے بیچ پنکھا نما خطہ کا رقبہ**

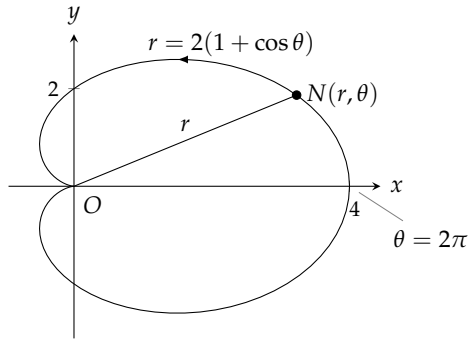
$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta$$

یہ درج ذیل تفرقی رقبے کا تکمل ہے (شکل ۱۰.۱۰۴)۔

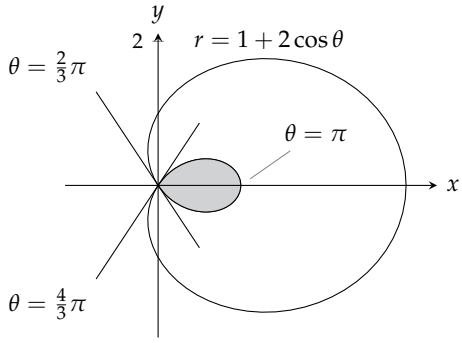
$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta$$

مثال ۱۰.۱: قلب نما $r = 2(1+\cos\theta)$ کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ہم قلب نما کو ترسیم (شکل ۱۰.۱۰۵) کر کے رداس $OP$ کی نشاندہی کرتے ہیں جو $\theta = 0$ تا $\theta = 2\pi$ کرنے سے قلب نما پر ٹھیک ایک




شکل ۱۰.۱۰۵: قلب نما کی ترسیم برائے مثال ۱۰.۱




شکل ۱۰.۱۰۶: رقبہ گھونگا (مثال ۱۰.۲)

بار چلتا ہے۔ یہ رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} r^2 \,\mathrm{d}\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot 4(1+\cos\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2(1+2\cos\theta+\cos^2\theta) \,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(2+4\cos\theta+2\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (3+4\cos\theta+\cos 2\theta) \,\mathrm{d}\theta \\
&= \left[3\theta+4\sin\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 6\pi - 0 = 6\pi
\end{aligned}$$

□

مثال ۱۰.۲: درج ذیل گھونگا کے چھوٹے گھیرے کا رقبہ تلاش کریں۔

$$r = 1+2\cos\theta$$

حل: ہم اس گھونگے کو ترسیم کرتے ہیں (شکل ۱۰.۱۰۶)۔ ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹے گھیرا $\theta = \frac{2}{3}\pi$ اور $\theta = \frac{4}{3}\pi$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ ہم نصف رقبہ $\theta = \frac{2}{3}\pi$ تا $\theta = \pi$ تلاش کر کے اس کو 2 سے ضرب دیتے ہیں۔

$$S = 2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \frac{1}{2} r^2 \,\mathrm{d}\theta = \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} r^2 \,\mathrm{d}\theta$$

متکمل $r^2$ کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} r^2 &= (2\cos\theta + 1)^2 = 4\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1 \\ &= 4 \cdot \frac{1+\cos 2\theta}{2} + 4\cos\theta + 1 \\ &= 2 + 2\cos 2\theta + 4\cos\theta + 1 \\ &= 3 + 2\cos 2\theta + 4\cos\theta \end{aligned}$$

یوں رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} S &= \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} (3 + 2\cos 2\theta + 4\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \Big[3\theta + \sin 2\theta + 4\sin\theta\Big]_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi} \\ &= (3\pi) - \left(2\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \pi - \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

□

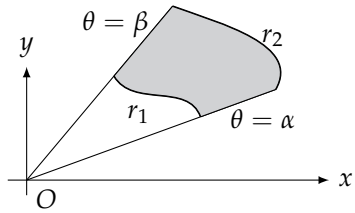
ہم شکل ۱۰.۱۰۷ طرز خط جو منحنیات $r_1 = r_1(\theta)$ اور $r_2 = r_2(\theta)$ کے بیچ $\theta = \alpha$ تا $\theta = \beta$ پایا جاتا ہو، کا رقبہ تلاش کرنے کی خاطر تکمل $\frac{1}{2}r_2^2\,\mathrm{d}\theta$ سے تکمل $\frac{1}{2}r_1^2\,\mathrm{d}\theta$ منفی کرتے ہیں۔ اس سے درج ذیل کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

**خطہ $0 \le r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta$ کا رقبہ**

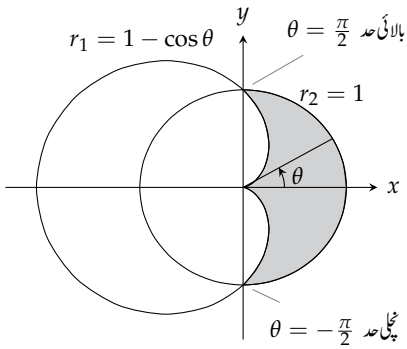
$$S = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r_2^2\,\mathrm{d}\theta - \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}r_1^2\,\mathrm{d}\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\,\mathrm{d}\theta \tag{۱۰.۱}$$

مثال ۱۰.۳: اس خطے کا رقبہ تلاش کریں جو دائرہ $r = 1$ کے اندر اور قلب نما $r = 1 - \cos\theta$ کے باہر پایا جاتا ہے۔

حل: ہم رقبہ ترسیم کر کے خطے کے حدود اور تکمل کے حدود معلوم کرتے ہیں (شکل ۱۰.۱۰۸)۔ بیرونی منحنی $r_2 = 1$ جبکہ اندرونی منحنی $r_1 =$




شکل ۱۰.۱۰۷: سایہ دار رقبہ تلاش کرنے کی خاطر $r_2$ اور مبدا کے بیچ رقبہ سے $r_1$ اور مبدا $O$ کے بیچ رقبہ منفی کیا جاتا ہے۔




شکل ۱۰.۱۰۸: دائرہ اور قلب نما کے بیچ رقبہ (مثال ۱۰.۳)

$1 - \cos\theta$ ہے جبکہ $\theta$ کی قیمت $-\frac{\pi}{2}$ تا $\frac{\pi}{2}$ ہے۔ مساوات ۱۰.۱ سے درج ذیل رقبہ حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(r_2^2 - r_1^2)\,\mathrm{d}\theta && \text{تشاکلی} \\
&= \int_0^{\pi/2} (1 - (1 - 2\cos\theta) + \cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} (2\cos\theta - \cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \left(2\cos\theta - \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) \\
&= \left[2\sin\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = 2 - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}
$$

□

## منحنی کی لمبائی

ہم منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$ کی لمبائی کا قطبی کلیہ اخذ کرنے کی خاطر اس منحنی کی درج ذیل مقدار معلوم مساوات لکھتے ہیں۔

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \quad y = r\sin\theta = f(\theta\sin\theta), \quad \alpha \le \theta \le \beta \tag{۱۰.۲}$$

یوں مقدار معلوم لمبائی کے کلیہ (مساوات ۱۰.۳)

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

میں $x$ اور $y$ کی قیمتیں مساوات ۱۰.۲ سے پر کر کے درج ذیل حاصل ہو گا (سوال ۱۰.۳۳)۔

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

## لمبائی قوس

اگر $\alpha \leq \theta \leq \beta$ پر $r = f(\theta)$ کا پہلا استمراری تفرق پایا جاتا ہو اور اگر $\theta$ کی قیمت $\alpha$ سے $\beta$ کرنے سے نقطہ $N(r,\theta)$ پوری منحنی $r = f(\theta)$ پر ٹھیک ایک بار چلتا ہو تب اس منحنی کی لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta \tag{۱۰.۳}$$

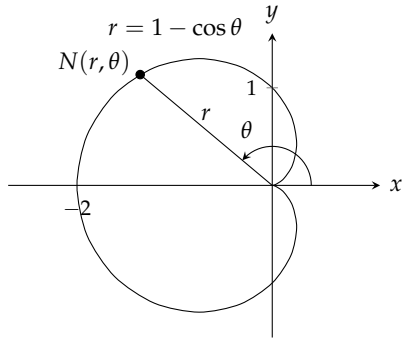
مثال ۱۰.۴: قلب نما $r = 1 - \cos\theta$ کی لمبائی دریافت کریں۔

حل: ہم قلب نما کا خاکہ کھینچتے ہیں تاکہ تکمل کے حدود معلوم کر سکیں (شکل ۱۰.۱۰۹)۔ زاویہ $\theta$ کو $0$ سے $2\pi$ کرنے سے نقطہ $N(r,\theta)$ ٹھیک ایک بار پوری قلب نما پر گھڑی کے الٹ رخ چلتا ہے لہٰذا $\alpha = 0$ اور $\beta = 2\pi$ ہوں گے۔ اب

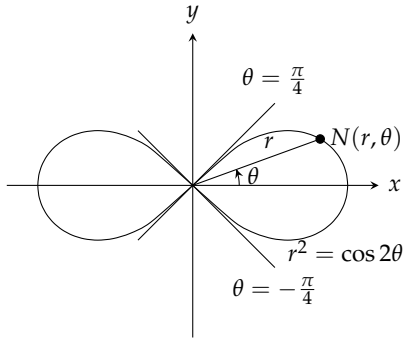
$$r = 1 - \cos\theta, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \sin\theta$$

سے

$$\begin{aligned} r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= (1-\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 \\ &= 1 - 2\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1} = 2 - 2\cos\theta \end{aligned}$$




شکل ۱۰.۱۰۹: قلب نما کی لمبائی (مثال ۱۰.۴)




شکل ۱۰.۱۱۰: قلب نما کی لمبائی (مثال ۱۰.۵)

حاصل ہو گا لہٰذا لمبائی قوس درج ذیل ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
L &= \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta \qquad (1 - \cos\theta = 2\sin^2\tfrac{\theta}{2}) \\
&= \int_0^{2\pi} 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta \qquad (\text{کے لئے } 0 \le \theta \le 2\pi \text{ ہو گا } \sin\tfrac{\theta}{2} \ge 0) \\
&= \left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 4 + 4 = 8
\end{aligned}
$$

□

## سطح طواف کا رقبہ

سطح طواف کے رقبہ کا قطبی کلیہ اخذ کرنے کی خاطر ہم مساوات ۱۰.۲ کی مدد سے منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$ کی مقدار معلوم مساوات لکھ کر حصہ ۱۰.۵ میں دی گئی سطحی رقبے کا کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

## سطح طواف کا رقبہ

اگر $\alpha \le \theta \le \beta$ پر $r = f(\theta)$ کا استمراری پہلا تفرق پایا جاتا ہو اور اگر $\theta$ کی قیمت $\alpha$ تا $\beta$ کرنے سے نقطہ $N(r,\theta)$ منحنی $r =$

$f(\theta)$ پر ٹھیک ایک بار چلتا ہو تب اس منحنی کو محور $x$ اور محور $y$ کے گرد گھما کر حاصل سطح طواف کے رقبے درج ذیل کلیات دیں گے۔

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi r \sin\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\, \mathrm{d}\theta \qquad (y \geq 0 \text{ محور } x \text{ کے گرد}) \tag{۱۰.۴}$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi r \cos\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\, \mathrm{d}\theta \qquad (x \geq 0 \text{ محور } y \text{ کے گرد}) \tag{۱۰.۵}$$

مثال ۱۰.۵: گھونگا $r^2 = \cos 2\theta$ کے دائیں گھیر کو محور $y$ کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ معلوم کریں۔

حل: ہم اس گھیر کا خاکہ بنا کر تکمل کے حد تلاش کرتے ہیں (شکل ۱۰.۱۱۰)۔ زاویہ $\theta$ کی قیمت $-\frac{\pi}{4}$ تا $\frac{\pi}{4}$ کرنے سے نقطہ $N(r,\theta)$ منحنی پر ٹھیک ایک بار گھڑی کے الٹ رخ چلتا ہے لہٰذا $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ اور $\beta = \frac{\pi}{4}$ ہوں گے۔

ہم مساوات ۱۰.۴ کا تکمل مرحلوں میں حل کرتے ہیں۔ پہلے مرحلہ میں درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$2\pi r \cos\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2} = 2\pi \cos\theta \sqrt{r^4 + \left(r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2} \tag{۱۰.۶}$$

اس کے بعد $r^2 = \cos 2\theta$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} &= -2\sin 2\theta \\
r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} &= -\sin 2\theta \\
\left(r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 &= \sin^2 2\theta
\end{aligned}$$

آخر میں $r^4 = (r^2)^2 = \cos^2 2\theta$ کی بنا مساوات ۱۰.۶ میں دائیں ہاتھ جذر درج ذیل صورت اختیار کرے گا۔

$$\sqrt{r^4 + \left(r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta} = 1$$

ان تمام نتائج کو مل کر ہم رقبہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi r \cos\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\, \mathrm{d}\theta && \text{مساوات ۱۰.۴} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} 2\pi \cos\theta \cdot (1)\, \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \Big[\sin\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
&= 2\pi \Big[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\Big] = 2\pi\sqrt{2}
\end{aligned}$$

□

## سوالات

### قطبی منحنیات کے اندر رقبہ

سوال ۱۰.۱ تا سوال ۱۰.۶ میں خطوں کے رقبے تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۱: چپٹا گھونگا $r = 4 + 2\cos\theta$ کے اندر۔
جواب: $18\pi$

سوال ۱۰.۲: قلب نما $r = a(1 + \cos\theta),\ a > 0$ کے اندر۔

سوال ۱۰.۳: چار گل $r = \cos 2\theta$ کے ایک پتا کے اندر۔
جواب: $\frac{\pi}{8}$

سوال ۱۰.۴: دو چشمہ $r^2 = 2a^2\cos 2\theta,\ a > 0$ کے اندر۔

سوال ۱۰.۵: دو چشمہ $r^2 = 4\sin 2\theta$ کے ایک گھیر کے اندر۔
جواب: $2$

سوال ۱۰.۶: شش گل $r^2 = 2\sin 3\theta$ کے اندر۔

### مشترکہ قطبی خطے کا رقبہ

سوال ۱۰.۷ تا سوال ۱۰.۱۶ میں مشترکہ قطبی خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۷: دائرہ $r = 2\cos\theta$ اور $r = 2\sin\theta$ کا مشترکہ رقبہ۔
جواب: $\frac{\pi}{2} - 1$

سوال ۱۰.۸: دائرہ $r = 1,$ اور $r = 2\sin\theta$ کا مشترکہ رقبہ۔

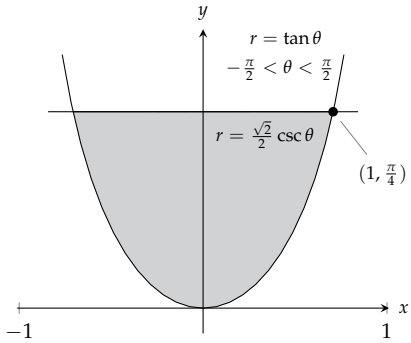
سوال ۱۰.۹: دائرہ $r = 2$ اور قلب نما $r = 2(1 - \cos\theta)$ کا مشترکہ رقبہ۔
جواب: $5\pi - 8$

سوال ۱۰.۱۰: قلب نما $r = 2(1 + \cos\theta)$ اور $r = 2(1 - \cos\theta)$ کا مشترکہ رقبہ۔

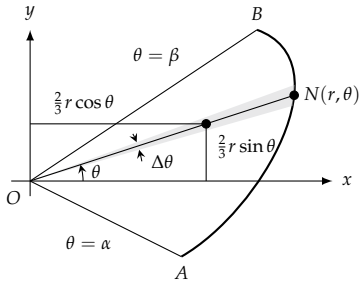
سوال ۱۰.۱۱: دائرہ $r = \sqrt{3}$ کے باہر اور $r^2 = 6\cos 2\theta$ کے اندر۔
جواب: $3\sqrt{3} - \pi$

سوال ۱۰.۱۲: دائرہ $r = 3a\cos\theta$ کے اندر اور قلب نما $r = a(1 + \cos\theta),\ a > 0$ کے باہر رقبہ۔

سوال ۱۰.۱۳: دائرہ $r = -2\cos\theta$ کے اندر اور دائرہ $r = 1$ کے باہر رقبہ۔
جواب: $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$




شکل ۱۰.۱۱۱: خطہ سوال ۱۰.۱۷




شکل ۱۰.۱۱۲: باریک سایہ دار خطے کے معیار اثر۔

سوال ۱۰.۱۴: (ا) گھونگا $r = 2\cos\theta + 1$ کے بیرونی گھیر کا رقبہ (شکل ۱۰.۱۰۶)۔ (ب) گھونگا $r = 2\cos\theta + 1$ کے اندرونی گھیر کے باہر اور بیرونی گھیر کے اندر رقبہ۔

سوال ۱۰.۱۵: دائرہ $r = 6$ کے اندر خط $r = 3\csc\theta$ سے اوپر رقبہ۔

جواب: $12\pi - 9\sqrt{3}$

سوال ۱۰.۱۶: گھونگا $r^2 = 6\cos 2\theta$ کے اندر اور خط $r = \frac{3}{2}\sec\theta$ کے دائیں جانب رقبہ۔

سوال ۱۰.۱۷: (ا) سایہ دار خطہ شکل ۱۰.۱۱۱ میں دکھایا گیا ہے۔ اس کا رقبہ تلاش کریں۔ (ب) ایسا معلوم ہوتا ہے کہ $r = \tan\theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ لکیر $x = 1$ اور لکیر $x = -1$ کا متقاربی خط ہو سکتا ہے۔ کیا ایسا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

جواب: $\frac{3}{2} - \frac{\pi}{4}$

سوال ۱۰.۱۸: قلب نما $r = \cos\theta + 1$ کے اندر اور دائرہ $r = \cos\theta$ کے باہر خطہ درج ذیل نہیں ہے۔

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} [(\cos\theta + 1)^2 - \cos^2\theta]\, d\theta = \pi$$

ایسا کیوں ہے؟ اس کا رقبہ کتنا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

## قطبی منحنیات کی لمبائیاں

سوال ۱۰.۱۹ تا سوال ۱۰.۲۷ میں منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

سوال ۱۰.۱۹: پیچ دار منحنی $r = \theta^2, \quad 0 \le \theta \le \sqrt{5}$

جواب: $\frac{19}{3}$

سوال ۱۰.۲۰: پیچ دار منحنی $r = \frac{e^\theta}{\sqrt{2}}, \quad 0 \le \theta \le \pi$

سوال ۱۰.۲۱: قلب نما $r = 1 + \cos\theta$
جواب: $8$

سوال ۱۰.۲۲: منحنی $r = a\sin^2\frac{\theta}{2},\ 0 \le \theta \le \pi,\ a > 0$

سوال ۱۰.۲۳: قطع مکافی $r = \frac{6}{1+\cos\theta},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$
جواب: $3(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}))$

سوال ۱۰.۲۴: قطع مکافی $r = \frac{2}{1-\cos\theta},\ \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$

سوال ۱۰.۲۵: منحنی $r = \cos^3\frac{\theta}{3},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$
جواب: $\frac{\pi}{8} + \frac{3}{8}$

سوال ۱۰.۲۶: منحنی $r = \sqrt{1+\sin 2\theta},\ 0 \le \theta \le \sqrt{2}\pi$

سوال ۱۰.۲۷: منحنی $r = \sqrt{1+\cos 2\theta},\ 0 \le \theta \le \sqrt{2}\pi$
جواب: $2\pi$

سوال ۱۰.۲۸: دائرے کا محیط
نیا کلیہ سیکھنے کے بعد بہتر ہوتا ہے کہ اس کو جانے پہچانے مسئلوں پر لاگو کیا جائے۔ قوس لمبائی کا کلیہ مساوات ۱۰.۳ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دائروں کے محیط کی لمبائیاں تلاش کریں۔

۱. $r = a$ ب. $r = a\cos\theta$ ج. $r = a\sin\theta$

## سطح رقبہ

سوال ۱۰.۲۹ تا سوال ۱۰.۳۲ میں منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح طواف کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال ۱۰.۲۹: محور $y$، $r = \sqrt{\cos 2\theta},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$
جواب: $\pi\sqrt{2}$

سوال ۱۰.۳۰: محور $x$، $r = \sqrt{2}e^{\theta/2},\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

سوال ۱۰.۳۱: محور $x$، $r^2 = \cos 2\theta$
جواب: $2\pi(2-\sqrt{2})$

سوال ۱۰.۳۲: محور $y$، $r = 2a\cos\theta,\ a > 0$

## نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۰.۳۳: منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \le \theta \le \beta$ کی لمبائی۔
فرض کریں کہ مطلوبہ تفرق استمراری ہیں۔ دکھائیں کہ مساوات ۱۰.۲ میں

$$x = f(\theta)\cos\theta, \quad y = f(\theta)\sin\theta$$

پر کرنے سے

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

سوال ۱۰.۳۴: اوسط قیمت
استمراری $f$ کی صورت میں منحنی $r = f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta$ کے قطبی محدد $r$ کی اوسط قیمت درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$r_{\text{اوسط}} = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_\alpha^\beta f(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل میں $\theta$ کے لحاظ سے $r_{\text{اوسط}}$ معلوم کریں جہاں $a > 0$ ہے۔

ا. قلب نما $r = a(1 - \cos\theta)$

ب. دائرہ $r = a$

ج. دائرہ $r = a\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

سوال ۱۰.۳۵: کیا $r = f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta$ اور $r = 2f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta$ کی لمبائیوں کے تناسب کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۰.۳۶: منحنیات $r = f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta$ اور $r = 2f(\theta),\ \alpha \leq \theta \leq \beta$ کو محور $x$ کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ کیا ان سطح طواف کے رقبوں کی تناسب کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

## پنکھا نما خطوں کے وسطانی مراکز

چونکہ مثلث کا وسطانی مرکز ہر ایک وسطانیہ پر، راس سے دو تہائی دور مخالف قاعدہ پر، واقع ہوتا ہے لہٰذا شکل ۱۰.۱۱۲ میں محور $x$ کے لحاظ سے باریک سایہ دور تکونی بیرم کا بازو تقریباً $\frac{2}{3}r\sin\theta$ ہو گا۔ اسی طرح محور $y$ کے لحاظ سے اس باریک تکونی خطہ کا بازو $\frac{2}{3}r\cos\theta$ ہو گا۔ یہ تخمین $\Delta\theta \to 0$ سے بہتر ہو کر خطہ $AOB$ کے وسطانیہ کے محدد کے لئے درج ذیل کلیات دیتی ہیں

$$\bar{x} = \frac{\int \frac{2}{3}r\cos\theta \cdot \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta}{\int \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta} = \frac{\frac{2}{3}\int r^3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\int r^2\,\mathrm{d}\theta}$$

$$\bar{y} = \frac{\int \frac{2}{3}r\sin\theta \cdot \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta}{\int \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta} = \frac{\frac{2}{3}\int r^3\sin\theta\,\mathrm{d}\theta}{\int r^2\,\mathrm{d}\theta}$$

جہاں تمام تکمل کے حدود $\alpha$ اور $\beta$ ہیں۔

سوال۱۰.۳۷: قلب نما $r = a(1 + \cos\theta)$ کے اندر خطہ کا وسطانیہ دریافت کریں۔
جواب: $\left(\frac{5}{6}a, 0\right)$

سوال۱۰.۳۸: نصف دائری خطہ $0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq \pi$ کا وسطانیہ دریافت کریں۔

# جوابات

حصہ ۱۰.۱ صفحہ ۱۰۸۸

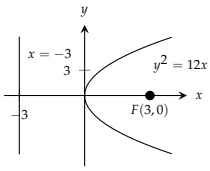
۱۰.۱) $y^2 = 8x$ ، ماسکہ $F(2,0)$ اور ناظمہ $x = -2$

۱۰.۳) $x^2 = -6y$ ، ماسکہ $F(0,-\frac{3}{2})$ اور ناظمہ $y = \frac{3}{2}$

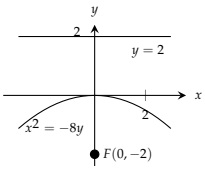
۱۰.۵) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ ، ماسکے $F(\pm\sqrt{13},0)$ ، راس $V(\pm 2,0)$ اور متقارب $y = \pm\frac{3}{2}x$

۱۰.۷) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ، ماسکے $F(\pm 1,0)$ ، راس $V(\pm\sqrt{2},0)$

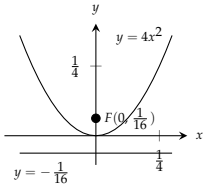
۱۰.۹)



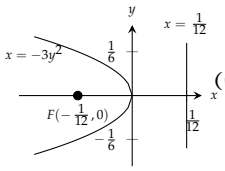

۱۰.۱۱)



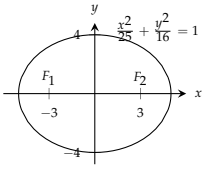

۱۰.۱۳)



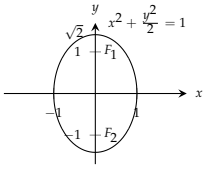

۱۰.۱۵)



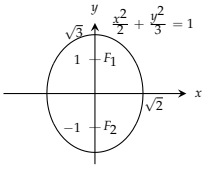

۱۰.۱۷)



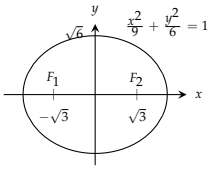

۱۰.۱۹)




۱۰.۲۱)

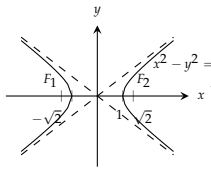



۱۰.۲۳)

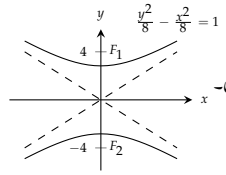



۱۰.۲۵) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$

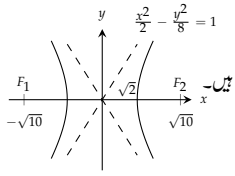
۱۰.۲۷) متقارب $y = \pm x$ ہیں۔



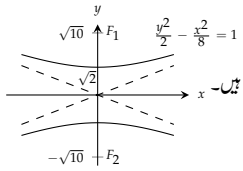

۱۰.۲۹) متقارب $y = \pm x$ ہیں۔




۱۰.۳۱) متقارب $y = \pm 2x$ ہیں۔



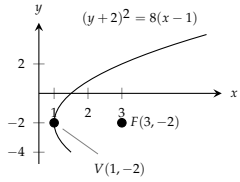

۱۰.۳۳) متقارب $y = \pm \frac{x}{2}$ ہیں۔



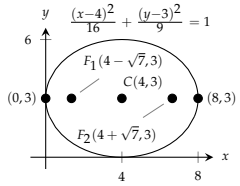

۱۰.۳۵) $y^2 - x^2 = 1$

۱۰.۳۷) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

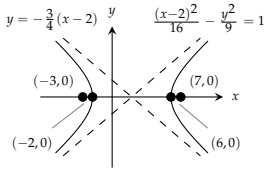
۱۰.۳۹) (الف) راس $(1, -2)$ ، ماسکہ $(3, -2)$ ، ناظمہ $x = -1$ ؛(ب)




۱۰.۴۱) (الف)ماسکے $(4 \pm \sqrt{7}, 3)$ ،راس $(8, 3)$ اور $(0, 3)$ ، مرکز $(4, 3)$ ؛(ب)




۱۰.۴۳) (الف)مرکز $(2, 0)$ ،ماسکے $(7, 0)$ اور $(-3, 0)$ ،راس $(6, 0)$ اور $(-2, 0)$ ، متقارب $y = \pm \frac{3}{4}(x - 2)$ ؛(ب)




۱۰.۴۵) $(y + 3)^2 = 4(x + 2)$ ،راس $V(-2, -3)$ ، ماسکہ $F(-1, -3)$ ،ناظمہ $x = -3$

۱۰.۴۷) $(x - 1)^2 = 8(y + 7)$ ،راس $V(1, -7)$ ،ماسکہ $F(1, -5)$ ،ناظمہ $y = -9$

۱۰.۴۹) $\frac{(x+2)^2}{6} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ ، $F(-2, \pm\sqrt{3} - 1)$ ، $V(-2, \pm 3 - 1)$ ، $C(-2, -1)$

۱۰.۵۱) $\frac{(x-2)^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{2} = 1$ ، $F(3, 3)$ اور $F(1, 3)$ ، $V(\pm\sqrt{3} + 2, 3)$ ، $C(2, 3)$

۱۰.۵۳) $\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{5} = 1$ ، $C(2, 2)$ ، $F(5, 2)$ اور $F(-1, 2)$ ، $V(4, 2)$ اور $V(0, 2)$ ، متقارب $y - 2 = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}(x - 2)$

۱۰.۵۵) $(y + 1)^2 - (x + 1)^2 = 1$ ، $C(-1, -1)$ ، $F(-1, \sqrt{2} - 1)$ اور $F(-1, -\sqrt{2} - 1)$ ، $V(-1, 0)$ ، $V(-1, -2)$ ، متقارب $y + 1 = \pm(x + 1)$

۱۰.۵۷) $C(-2, 0)$ ، $a = 4$

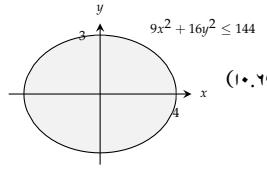
۱۰.۵۹) $V(-1, 1)$ ، $F(-1, 0)$

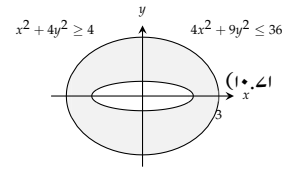
۱۰.۶۱) ترخیم $\frac{(x+2)^2}{5} + y^2 = 1$ ، $C(-2, 0)$ ، $F(0, 0)$ اور $F(-4, 0)$ ، $V(\sqrt{5} - 2, 0)$ اور $V(-\sqrt{5} - 2, 0)$

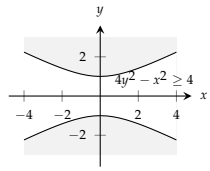
۱۰.۶۳) ترخیم $\frac{(x-1)^2}{5} + (y - 1)^2 = 1$ ، $C(1, 1)$ ، $F(2, 1)$ اور $F(0, 1)$ ، $V(\sqrt{2} + 1, 1)$ اور $V(-\sqrt{2} + 1, 1)$

۱۰.۶۵) قطع زائد $(x - 1)^2 - (y - 2)^2 = 1$ ، $C(1, 2)$ ، $F(1 + \sqrt{2}, 2)$ اور $F(1 - \sqrt{2}, 2)$ ، $V(2, 2)$ اور $V(0, 2)$ ، متقارب $y - 2 = \pm(x - 1)$

۱۰.۶۷) قطع زائد، $\frac{(y-3)^2}{6} - \frac{x^2}{3} = 1$ ، $C(0, 3)$ ، $F(0, 6)$ اور $F(0, 0)$ ، $V(0, \sqrt{6} + 3)$ اور $V(0, -\sqrt{6} + 3)$ ، متقارب $y = \sqrt{2}x + 3$ اور $y = -\sqrt{2}x + 3$

۱۰.۶۹) 


۱۰.۷۱) 


۱۰.۷۳) 


۱۰.۷۷) $3x^2 + 3y^2 - 7x - 7y + 4 = 0$

۱۰.۷۹) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 13$ نقطہ دائرے کے اندر ہے۔

۱۰.۸۱) (ب) $1 : 1$

۱۰.۸۳) لمبائی $2\sqrt{2}$، چوڑائی $\sqrt{2}$، رقبہ $4$

۱۰.۸۵) $24\pi$

۱۰.۸۷) $(0, \frac{16}{3\pi})$

## حصہ ۱۰.۲ صفحہ ۱۱۰۰

۱۰.۱) $e = \frac{3}{5},\ F(\pm 3, 0),\ x = \pm\frac{25}{3}$

۱۰.۳) $e = \frac{1}{\sqrt{2}},\ F(0, \pm 1),\ y = \pm 2$

۱۰.۵) $e = \frac{1}{\sqrt{3}},\ F(0, \pm 1),\ y = \pm 3$

۱۰.۷) $e = \frac{\sqrt{3}}{3},\ F(\pm\sqrt{3}, 0),\ x = \pm 3\sqrt{3}$

۱۰.۹) $\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$

۱۰.۱۱) $\frac{x^2}{4851} + \frac{y^2}{4900} = 1$

۱۰.۱۳) $e = \frac{\sqrt{5}}{3},\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

۱۰.۱۵) $e = \frac{1}{2},\ \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$

۱۰.۱۹) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-4)^2}{9} = 1,\ F(1, 4 \pm \sqrt{5}),$
$e = \frac{\sqrt{5}}{3},\ y = 4 \pm \frac{9\sqrt{5}}{5}$

۱۰.۲۱) $a = 0,\ b = -4,\ c = 0,\ e = \frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۰.۲۳) $e = \sqrt{2},\ F(\pm\sqrt{2}, 0),\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

۱۰.۲۵) $e = \sqrt{2},\ F(0, \pm 4),\ y = \pm 2$

۱۰.۲۷) $e = \sqrt{5},\ F(\pm\sqrt{10}, 0), x = \pm\frac{2}{\sqrt{10}}$

۱۰.۲۹) $e = \sqrt{5},\ F(0, \pm\sqrt{10}),\ y = \pm\frac{2}{\sqrt{10}}$

۱۰.۳۱) $y^2 - \frac{x^2}{8} = 1$

۱۰.۳۳) $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$

۱۰.۳۵) $e = \sqrt{2},\ \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$

۱۰.۳۷) $e = 2,\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

۱۰.۳۹) $\frac{(y-6)^2}{36} - \frac{(x-1)^2}{45} = 1$

## حصہ ۱۰.۳ صفحہ ۱۱۱۰

۱۰.۱) قطع زائد

۱۰.۳) ترخیم

۱۰.۵) قطع مکافی

۱۰.۷) قطع مکافی

۱۰.۹) قطع زائد

۱۰.۱۱) قطع زائد

۱۰.۱۳) ترخیم

۱۰.۱۵) ترخیم

۱۰.۱۷) $x'^2 - y'^2 = 4$ قطع زائد

۱۰.۱۹) $4x'^2 + 16y'^2 = 0$ قطع مکافی

۱۰.۲۱) $y'^2 = 1$ متوازی لکیریں

۱۰.۲۳) $2\sqrt{2}x'^2 + 8\sqrt{2}y'^2 = 0$ قطع مکافی

۱۰.۲۵) $4x'^2 + 2y'^2 = 19$ ترخیم

۱۰.۲۷) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ یا
$\sin\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

۱۰.۲۹) $A' = 0.88,\ B' = 0.00,\ C' = 3.10,$
$D' = 0.74,\ E' = -1.20,\ F' = -3,$
$0.88x'^2 + 3.01y'^2 + 0.74x' -$
$1.20y' - 3 = 0$ ترخیم

۱۰.۳۱) $A' = 0.00,\ B' = 0.00,\ C' = 5.00,$
$D' = 0,\ E' = 0,\ F' = -5,$
$5.00y'^2 - 5 = 0$ یا
$y' = \pm 1$ متوازی لکیریں

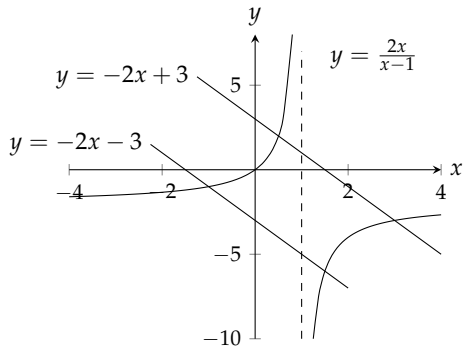
۱۰.۳۳) $A' = 5.05,\ B' = 0.00,\ C' = -0.05,$
$D' = -5.07,\ E' = -6.18,\ F' = -1$
$5.05x'^2 - 0.05y'^2 - 5.07x' -$
$6.18y' - 1 = 0$ قطع زائد

۱۰.۳۵) (الف) $\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$، (ب) $\frac{y'^2}{a^2} - \frac{x'^2}{b^2} = 1$،
(ج) $x'^2 + y'^2 = a^2$، (د) $y' = -\frac{1}{m}x'$،
(ہ) $y' = -\frac{1}{m}x' + \frac{b}{m}$

۱۰.۳۷) (الف) $x'^2 - y'^2 = 2$ ، (ب) $x'^2 - y'^2 = 2a$

۱۰.۴۳) (الف) قطع مکافی

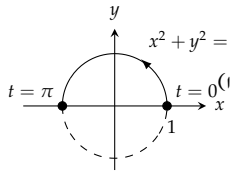
۱۰.۴۵) (الف) قطع زائد، (ب)



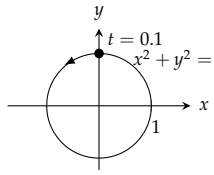

(ج) $y = -2x - 3$ ، $y = -2x + 3$

حصہ ۱۰.۴ صفحہ ۱۱۲۲

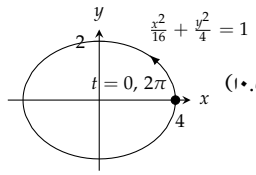
۱۰.۱)



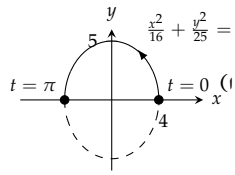

۱۰.۳)



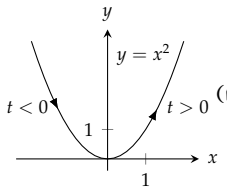

۱۰.۵)



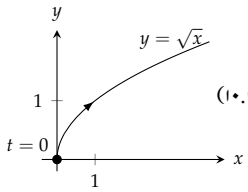

۱۰.۷)



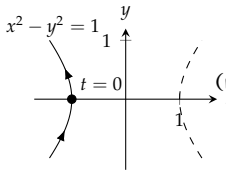

۱۰.۹)



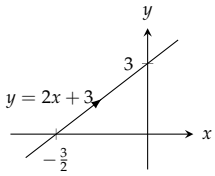

۱۰.۱۱)



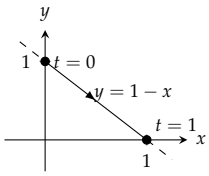

۱۰.۱۳)



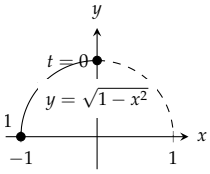

۱۰.۱۵)



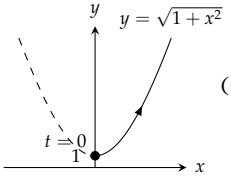

۱۰.۱۷)



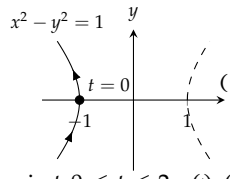

۱۰.۱۹)




۱۰.۲۱)



۱۰.۲۳)




۱۰.۲۵) (ا) $x = a\cos t, y = -a\sin t, 0 \le t \le 2\pi$
(ب) $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$
(ج) $x = a\cos t,\ y = -a\sin t,\ 0 \le t \le 4\pi$
(د) $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le 4\pi$

۱۰.۲۷) $x = \frac{-at}{\sqrt{1+t^2}},\ y = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}},\ -\infty < t < \infty$

۱۰.۲۹) $x = 2\cos t,\ y = 2\sin^2 t,\ 0 < t < \pi$

۱۰.۳۱) (ب) $x = x_1 t,\ y = y_1 t$ آپ کا جواب مختلف ہو سکتا ہے،
(ج) $x = -1 + t,\ y = t$ آپ کا جواب مختلف ہو سکتا ہے۔

۱۰.۳۳) $x = (a-b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\theta\right),$
$y = (a-b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a-b}{b}\theta\right)$

۱۰.۳۵) $x = a\sin^2 t\tan t,\ y = a\sin^2 t$

۱۰.۳۷) $(1,1)$

## حصہ ۱۰.۵ صفحہ ۱۱۳۴

۱۰.۱) $y = -x + 2\sqrt{2},\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\sqrt{2}$

۱۰.۳) $y = -\frac{1}{2}x + 2\sqrt{2},\ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

۱۰.۵) $y = x + \frac{1}{4},\ \frac{d^2y}{dx^2} = -2$

۱۰.۷) $y = 2x - \sqrt{3},\ \frac{d^2y}{dx^2} = -3\sqrt{3}$

۱۰.۹) $y = x - 4,\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}$

۱۰.۱۱) $y = \sqrt{3}x - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 2,\ \frac{d^2y}{dx^2} = -4$

۱۰.۱۳) $0$

۱۰.۱۵) $-6$

۱۰.۱۷) $4$

۱۰.۱۹) $12$

۱۰.۲۱) $\pi^2$

۱۰.۲۳) $8\pi^2$

۱۰.۲۵) $\frac{52\pi}{3}$

۱۰.۲۷) $3\pi\sqrt{5}$

۱۰.۲۹) (ا) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{12}{\pi} - \frac{24}{\pi^2}, \frac{24}{\pi^2} - 2)$، (ب) وسطانی مرکز $(1.4, 0.4)$

۱۰.۳۱) (ا) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{1}{3}, \pi - \frac{4}{3})$

۱۰.۳۳) (ا) $\pi$، (ب) $\pi$

۱۰.۳۷) $3\pi a^2$

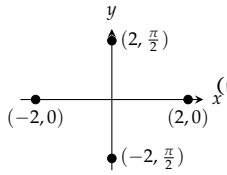
۱۰.۳۹) $\frac{64\pi}{3}$

۱۰.۴۱) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$، $t = 0$ پر $y = 2x$، $t = \pi$ پر $y = -2x$

## حصہ ۱۰.۶ صفحہ ۱۱۴۵

۱۰.۱) ااورہ؛ ب اور ز؛ ج اور ح؛ د اور و

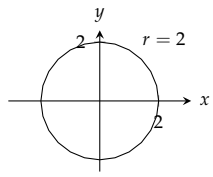
۱۰.۳)



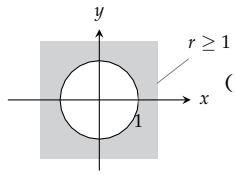

(ا) $(2, \frac{\pi}{2} + 2n\pi)$ اور $(-2, \frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi)$ جہاں $n$ عدد صحیح ہے۔
(ب) $(2, 2n\pi)$ اور $(-2, (2n+1)\pi)$ جہاں $n$ عدد صحیح ہے۔
(ج) $(2, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi)$ اور $(-2, \frac{3\pi}{2} + (2n+1)\pi)$ جہاں $n$ عدد صحیح ہے۔
(د) $(2, (2n+1)\pi)$ اور $(-2, 2n\pi)$ جہاں $n$ عدد صحیح ہے۔

۱۰.۵) (ا) $(3, 0)$، (ب) $(-3, 0)$، (ج) $(-1, \sqrt{3})$، (د) $(1, \sqrt{3})$، (ہ) $(3, 0)$، (و) $(1, \sqrt{3})$، (ز) $(-3, 0)$، (ح) $(-1, \sqrt{3})$

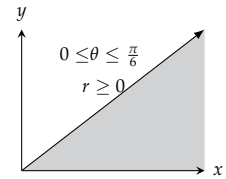
۱۰.۷)



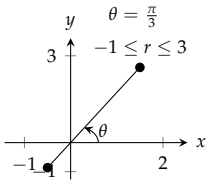

۱۰.۹)



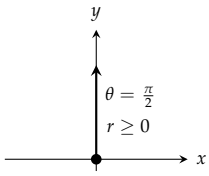
۱۰.۱۱)



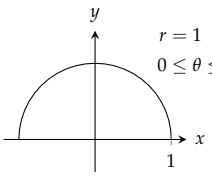

۱۰.۱۳)



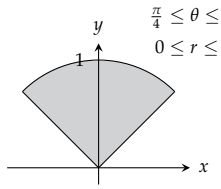

۱۰.۱۵)



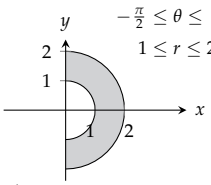

۱۰.۱۷)




۱۰.۱۹)




۱۰.۲۱)




۱۰.۲۳) $x = 2$ ، نقطہ $(2,0)$ سے گزرتی انتصابی خط

۱۰.۲۵) $y = 0$ ، محور $x$

۱۰.۲۷) $y = 4$ ، نقطہ $(0,4)$ سے گزرتی افقی خط

۱۰.۲۹) $x + y = 1$ ، لکیر، جہاں $m = -1$ اور $b = 1$ ہیں۔

۱۰.۳۱) $x^2 + y^2 = 1$ ، دائرہ، رداس 1 ، مرکز $(0,0)$

۱۰.۳۳) $y - 2x = 5$ ، لکیر، $m = 2$ ، $b = 5$

۱۰.۳۵) $y^2 = x$ ، قطع مکافی، راس $(0,0)$ ، دائیں کھلتا ہے۔

۱۰.۳۷) $y = e^x$ ، قدرتی قوت نمائی تفاعل۔

۱۰.۳۹) $x + y = \pm 1$ ، دو متوازی سیدھی لکیریں جن کی ڈھلوان $m = -1$ اور $b = \pm 1$ ہیں۔

۱۰.۴۱) $(x+2)^2 + y^2 = 4$ ، دائرہ، رداس 2 ، مرکز $(-2,0)$

۱۰.۴۳) $x^2 + (y-4)^2 = 16$ ، دائرہ، رداس 4 ، مرکز $(0,4)$

۱۰.۴۵) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ ، دائرہ، رداس $\sqrt{2}$ ، مرکز $(1,1)$

۱۰.۴۷) $\sqrt{3}y + x = 4$

۱۰.۴۹) $r\cos\theta = 7$

۱۰.۵۱) $\theta = \frac{\pi}{4}$

۱۰.۵۳) $r = 2$ یا $r = -2$

۱۰.۵۵) $4r^2\cos^2\theta + 9r^2\sin^2\theta = 36$

۱۰.۵۷) $r\sin^2\theta = 4\cos\theta$

۱۰.۵۹) $r = 4\sin\theta$

۱۰.۶۱) $r^2 = 6r\cos\theta - 2r\sin\theta - 6$

۱۰.۶۳) $(0,\theta)$ جہاں $\theta$ زاویہ ہے۔