احصاء اور تحلیلی ہندسہ

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۲۱ جولائی ۲۰۲۶

عنوان

۱ ابتدائی معلومات ۱
۱.۱ حقیقی اعداد اور حقیقی خط ۱
۱.۲ محدد، خطوط اور بڑھوتری ۱۳
۱.۳ تفاعل ۲۸
۱.۴ ترسیم کی منتقلی ۴۸
۱.۵ تکونیاتی تفاعل ۶۵

۲ حدود اور استمرار ۸۵
۲.۱ تبدیلی کی شرح اور حد ۸۵
۲.۲ حد تلاش کرنے کے قواعد ۱۰۰
۲.۳ مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف ۱۱۲
۲.۴ تصور حد کی توسیع ۱۳۰
۲.۵ استمرار ۱۴۸
۲.۶ مماسی خط ۱۶۴

۳ تفرق ۱۷۷
۳.۱ تفاعل کا تفرق ۱۷۷
۳.۲ قواعد تفرق ۱۹۵
۳.۳ تبدیلی کی شرح ۲۱۲
۳.۴ تکونیاتی تفاعل کا تفرق ۲۲۷
۳.۵ زنجیری قاعدہ ۲۴۵
۳.۶ خفی تفرق اور ناطق قوت نما ۲۵۹
۳.۷ دیگر شرح تبدیلی ۲۷۲

دیباچہ ۱۷۷

میری پہلی کتاب کا دیباچہ ۱۷۷

۴ تفرق کا استعمال ۲۸۷
۴.۱ تفاعل کی انتہائی قیمتیں ۲۸۷
۴.۲ مسئلہ اوسط قیمت ۲۹۹
۴.۳ مقامی انتہائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پرکھ ۳۱۲
پرکھ ۳۱۲
۴.۴ y' اور y'' کے ساتھ ترسیم ۳۲۰
۴.۵ $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء ۳۳۸
۴.۶ بہترین بنانا ۳۵۹
۴.۷ خط بندی اور تفرقات ۳۸۰
۴.۸ ترکیب نیوٹن ۴۰۰

۵ تکمل ۴۱۱
۵.۱ غیر قطعی تکملات ۴۱۱
۵.۲ تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی ۴۲۲
۵.۳ تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق ۴۳۵
۵.۴ اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ ۴۴۵
۵.۵ ریمان مجموعے اور قطعی تکملات ۴۶۱
۵.۶ خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ ۴۸۵
۵.۷ بنیادی مسئلہ ۵۰۰
۵.۸ قطعی تکمل میں بدل ۵۱۷
۵.۹ اعدادی تکمل ۵۲۲
قاعدہ ذوزنقہ ۵۲۲

۶ تکمل کا استعمال ۵۳۹
۶.۱ منحنیات کے بیچ رقبہ ۵۳۹
تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد ۵۴۳
۶.۲ ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش ۵۵۲
۶.۳ اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا ۵۵۹
۶.۴ نلکی چھلے ۵۷۲
۶.۵ مستوی منحنیات کی لمبائیاں ۵۸۲
۶.۶ سطح طواف کا رقبہ ۵۹۲
۶.۷ معیار اثر اور مرکز کمیت ۶۰۲
وسطانی مرکز ۶۱۳
۶.۸ کام ۶۱۸
۶.۹ فشار سیال اور قوت سیال ۶۳۰
۶.۱۰ بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال ۶۳۸

۷ ماورائی تفاعل ۶۵۱
۷.۱ الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات ۶۵۲

۷.۲ قدرتی لوگارتھم ۶۶۷
۷.۳ قوت نمائی تفاعل ۶۸۱
۷.۴ a^x اور $\log_a x$ ۶۹۳
۷.۵ افزائش اور تنزل ۷۰۳
۷.۶ قاعدہ لھوپیٹال ۷۱۵
۷.۷ اضافی شرح نمو ۷۲۸
ترتیبی اور ثنائی تلاش ۷۳۳
۷.۸ الٹ تکونیاتی تفاعل ۷۳۷
۷.۹ الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل ۷۵۲
۷.۱۰ ہذلولی تفاعل ۷۶۶
۷.۱۱ یک رتبی تفرقی مساوات ۷۸۴
۷.۱۲ یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان ۸۰۰

۸ تکمل کے طریقے ۸۱۱
۸.۱ تکمل کے بنیادی کلیات ۸۱۱
۸.۲ تکمل بالحصص ۸۲۳
بار بار استعمال ۸۲۸
۸.۳ جزوی کسر ۸۳۶
۸.۴ تکونیاتی بدل ۸۴۹
۸.۵ جدول تکمل اور کمپیوٹر ۸۵۸
۸.۶ غیر مناسب تکمل ۸۷۲

۹ لامتناہی تسلسل ۸۹۳
۹.۱ اعداد کی ترتیب کی حد ۸۹۳
۹.۲ ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے ۹۰۹
۹.۳ سوالات ۹۱۷
۹.۴ لامتناہی تسلسل ۹۲۳
۹.۵ غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پرکھ ۹۳۸
۹.۶ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ ۹۴۷
۹.۷ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ ۹۵۵
۹.۸ بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز ۹۶۵
۹.۹ طاقتی تسلسل ۹۷۷
۹.۱۰ ٹیلر اور مکلارن تسلسل ۹۹۱
۹.۱۱ ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ خلل کے اندازے ۱۰۰۰
۹.۱۲ طاقتی تسلسل کے استعمال ۱۰۱۵

۱۰ مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد ۱۰۳۱
۱۰.۱ مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں ۱۰۳۱

۱۰.۲ سنک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی ۱۰۵۱
۱۰.۳ دو درجی مساوات اور گھومنا ۱۰۵۹
۱۰.۴ مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول ۱۰۷۰
۱۰.۵ احصاء اور مقدار معلوم منحنیات ۱۰۸۴
۱۰.۶ قطبی محدد ۱۰۹۶
۱۰.۷ قطبی محدد میں ترسیم ۱۱۰۵
۱۰.۸ مخروط حصوں کے قطبی مساوات ۱۱۱۵
دائرے ۱۱۱۷
۱۰.۹ قطبی محدد میں تکمل ۱۱۲۸

۱۱ سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری ۱۱۴۱
۱۱.۱ مستوی میں سمتیات ۱۱۴۱
۱۱.۲ کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات ۱۱۵۵
کرہ ۱۱۶۲
۱۱.۳ ضرب نقطہ ۱۱۶۹
حساب ۱۱۷۰
۱۱.۴ صلیبی ضرب ۱۱۸۱
۱۱.۵ فضا میں خطوط اور مستویات ۱۱۹۳
۱۱.۶ نلکی اور مربع سطحیں ۱۲۰۵
۱۱.۷ نلکی اور کروی محدد ۱۲۲۱

۱۲ سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت ۱۲۳۳
۱۲.۱ سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات ۱۲۳۳
۱۲.۲ گولا کی حرکت کی نمونہ کشی ۱۲۵۴
۱۲.۳ لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ۱۲۶۲
۱۲.۴ انحنا، مروڑ اور TNB چھوکٹ ۱۲۶۹
۱۲.۵ فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت ۱۲۹۰

۱۳ کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات ۱۳۰۵
۱۳.۱ کثیر متغیرات کے تفاعل ۱۳۰۵
۱۳.۲ حد اور استمرار ۱۳۱۸
۱۳.۳ جزوی تفرقات ۱۳۳۱
۱۳.۴ تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات ۱۳۴۶
۱۳.۵ زنجیری قاعدہ ۱۳۶۱
۱۳.۶ پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات ۱۳۷۴
۱۳.۷ رخی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں ۱۳۸۰
۱۳.۸ انتہائی قیمتیں اور نقاط زین ۱۳۹۹
نتیجہ ۱۴۰۷
۱۳.۹ لیگرینج ضاربین ۱۴۱۵

۱۳.۱۰ کلیہ ٹیلر ۱۴۳۰

۱۴ تکمل بالکثرت ۱۴۳۷
۱۴.۱ دوہرا تکملات ۱۴۳۷
۱۴.۲ رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت ۱۴۵۵
۱۴.۳ دوہرا تکملات کا قطبی روپ ۱۴۶۹
۱۴.۴ کارتیسی محدد میں تہرا تکمل ۱۴۷۹
۱۴.۵ تعین بعد میں کمیت اور معیار اثر ۱۴۹۲
۱۴.۶ نلکی اور کروی محدد میں تہرا تکمل ۱۵۰۱
۱۴.۷ تکملات بالکثرت میں بدل ۱۵۱۸

۱۵ سمتی میدان میں تکمل ۱۵۳۳
۱۵.۱ لکیری تکمل ۱۵۳۳
۱۵.۲ سمتی میدان، کام، دائری بہاؤ، اور بہاؤ ۱۵۴۳
۱۵.۳ راہ سے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان ۱۵۵۸
۱۵.۴ مستوی میں مسئلہ گرین ۱۵۷۰
۱۵.۵ سطحی رقبہ اور سطحی تکملات ۱۵۹۰
۱۵.۶ مقدار معلوم سطحیں ۱۶۰۸
۱۵.۷ مسئلہ سٹوکس ۱۶۲۵
نظریہ اور مثالیں ۱۶۴۰
۱۵.۸ مسئلہ پھیلاؤ اور ایک مربوط نظریہ ۱۶۴۱

ا ریاضیاتی ترغیب ۱۶۷۵

ب تحدیدی مسائل کے ثبوت ۱۶۸۱

ج مخلوط اعداد ۱۶۸۷
ج.۱ سوالات ۱۶۹۹

د سمسن کا ایک تہائی کا قاعدہ ۱۷۰۳

ھ کوشی کا مسئلہ اوسط قیمت اور قاعدہ لھوپیٹال ے کا پائیدار روپ ۱۷۰۵

و کثیر استعمال حدود ۱۷۰۹

ز جزئیتی تقسیم کا قانون برائے سمتی ضرب ۱۷۱۱

ح مقاطع اور کریمر کا قاعدہ ۱۷۱۵

ط مسئلہ یولر اور مسئلہ بڑھوتری ۱۷۲۵

ي تکملات کا مختصر جدول ۱۷۳۱

ضمیمے ۱۷۴۲

جوابات ۱۷۴۳

باب ۳

تفرق

گزشتہ باب میں ہم نے دیکھا کہ کسی نقطہ پر سیکنٹ کی ڈھلوان کی حد کو اس نقطے پر منحنی کی ڈھلوان کہتے ہیں۔ یہ حد، جس کو تفرق کہتے ہیں، تفاعل تبدیل ہونے کی شرح کی ناپ ہے جو احصاء میں اہم ترین تصورات میں سے ایک ہے۔ تفرق کو سائنس، معاشیات اور دیگر شعبوں میں بہت زیادہ استعمال کیا جاتا ہے جہاں سمتی رفتار اور اسراع کا حساب، مشین کی کارکردگی سمجھنے، وغیرہ کے لئے اس کو استعمال میں لایا جاتا ہے۔ تفرق کو حد سے تلاش کرنا مشکل کام ہے۔ اس باب میں تفرق حاصل کرنے کے طریقوں پر غور کیا جائے گا۔

۳.۱ تفاعل کا تفرق

گزشتہ باب کے آخر میں ہم نے نقطہ $x = x_0$ پر منحنی $y = f(x)$ کی ڈھلوان m کی درج ذیل تعریف پیش کی۔

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

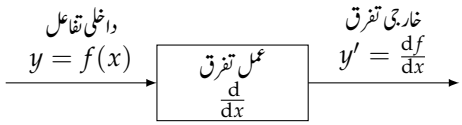
اس حد کو، بشرطیکہ یہ موجود ہو، x_0 پر f کا تفرق کہتے ہیں۔ اس حصے میں f کی دائرہ کار میں ہر نقطے پر f کی ڈھلوان پر بطور تفاعل غور کیا جائے گا۔

تعریف: متغیر x کے لحاظ سے تفاعل f کا **تفرق**[1] درج ذیل تفاعل f' ہے، بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

□

[1] derivative



شکل ۳.۱: تفرق کے عمل کی ڈبہ صورت

f' کا دائرہ کار، نقطوں کا وہ سلسلہ جہاں یہ حد موجود ہو، تفاعل f کے دائرہ کار سے کم ہو سکتا ہے۔ اگر $f'(x)$ موجود ہو تب ہم کہتے ہیں کہ x پر f کا **تفرق** پایا جاتا ہے یا کہ x پر f **قابل تفرق**[۲] ہے۔

علامتیت

تفاعل $y = f(x)$ کی تفرق کو ظاہر کرنے کے کئی طریقے رائج ہیں۔ $f'(x)$ کے علاوہ درج ذیل علامتیں کافی مقبول ہیں۔

y' یہ مختصر علامت ہے جو غیر تابع متغیر کی نشاندہی نہیں کرتی ہے۔

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ یہ علامت دونوں متغیرات کی نشاندہی کرتی ہے اور تفرق کو d سے ظاہر کرتی ہے۔

$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ یہ علامت تفاعل کا نام واضح کرتی ہے۔

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ اس علامت سے ظاہر ہوتا ہے کہ تفرق کا عمل f پر لاگو کیا جاتا ہے (شکل ۳.۱)۔

$D_x f$ یہ تفرقی عامل ہے۔

$\dot{y}$ نیوٹن اس علامت کو استعمال کرتے تھے جو اب وقتی تفرق کو ظاہر کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو "x کے لحاظ سے y کا تفرق" پڑھتے ہیں۔ اسی طرح $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ اور $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$ کو "x کے لحاظ سے f کا تفرق" پڑھا جاتا ہے۔

تفرق کی تعریف سے تفرق کا حصول

مثال ۲.۲ اور مثال ۲.۳ میں تفاعل $y = mx + b$ اور $y = \frac{1}{x}$ کے تفرق کو تعریف سے حاصل کرنا دکھایا گیا۔ مثال ۲.۲ میں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mx + b) = m$$

اور مثال ۲.۳ میں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \tag{۳.۱}$$

حاصل کیا گیا۔

تفرق کی تعریف سے تفرق کا حصول

[۲] differentiable

۱. $f(x)$ اور $f(x+h)$ لکھیں۔

۲. درج ذیل تفریقی حاصل تقسیم کو پھیلا کر اس کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

۳. سادہ ترین حاصل تقسیم سے $f'(x)$ حاصل کرنے کی خاطر درج ذیل حد تلاش کریں۔

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مزید دو مثال درج ذیل ہیں۔

مثال ۱.۳:

ا. $f(x)=\frac{x}{x-1}$ کو تفرق کریں۔

ب. تفاعل $y=f(x)$ کی ڈھلوان کس نقطے پر -1 کے برابر ہے؟

حل: (ا) ہم مذکورہ بالا تین اقدام استعمال کرتے ہوئے تعریف سے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

پہلا قدم: یہاں $f(x)=\frac{x}{x-1}$ ہے جس سے $f(x+h)=\frac{x+h}{(x+h)-1}$ لکھا جا سکتا ہے۔

دوسرا قدم:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\frac{\frac{x+h}{x+h-1}-\frac{x}{x-1}}{h}\\&=\frac{1}{h}\cdot\frac{(x+h)(x-1)-x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)}\\&=\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}\end{aligned}$$

تیسرا قدم:

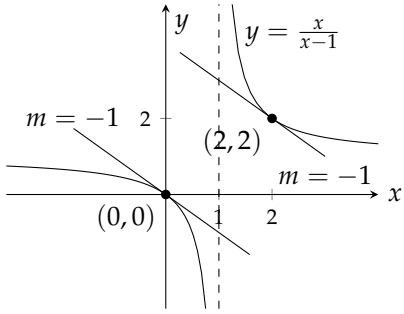
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h-1)(x-)}=-\frac{1}{(x-1)^2}$$

(ب) $y=f(x)$ کی ڈھلوان اس صورت -1 کے برابر ہو گی جب درج ذیل ہو۔

$$-\frac{1}{(x-1)^2}=-1$$

اس مساوات $(x-1)^2=1$ کے مترادف ہے لہٰذا $x=2$ اور $x=0$ درکار نتائج ہیں (شکل ۳.۲)۔ □

مثال ۳.۲:



شکل ۳.۲: $x = 0$ اور $x = 2$ پر $y' = -1$ ہوگا (مثال ۳.۱)۔

۱. $x > 0$ کے لئے $y = \sqrt{x}$ کا تفرق حاصل کریں۔

۲. $x = 4$ پر تفاعل $y = \sqrt{x}$ کے مماس کی مساوات حاصل کریں۔

حل: (ا) **پہلا قدم:**

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad f(x+h) = \sqrt{x+h}$$

دوسرا قدم:

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(h)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \qquad \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \text{ سے ضرب دیتے ہیں}\\ &= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\end{aligned}$$

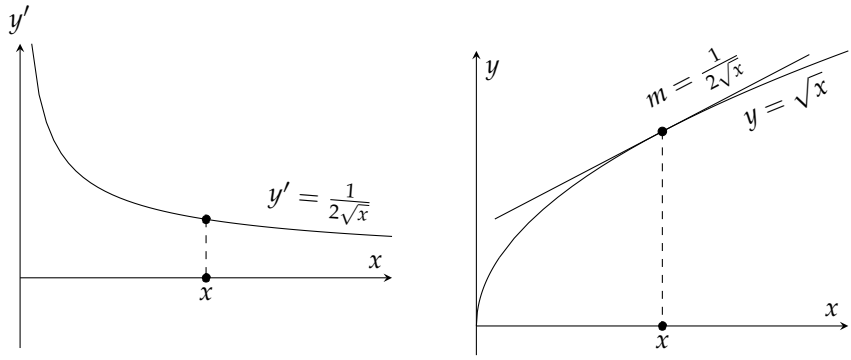
تیسرا قدم:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

شکل ۳.۳ دیکھیں۔

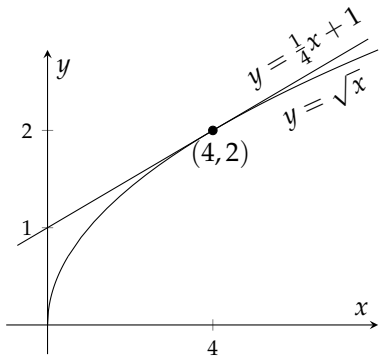
(ب) $x = 4$ پر تفاعل کی ڈھلوان درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{x}}|_{x=4} = \frac{1}{4}$$



(ب) $x > 0$ کے لئے $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(ا) تفاعل $y = \sqrt{x}$



(ج) تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور نقطہ $(4, 2)$ پر اس کا مماس $y = \frac{1}{4}x + 1$ ۔

شکل ۳.۳: اشکال برائے مثال ۳.۲۔ نقطہ $x = 0$ پر تفاعل معین ہے لیکن اس کا تفرق غیر معین ہے۔

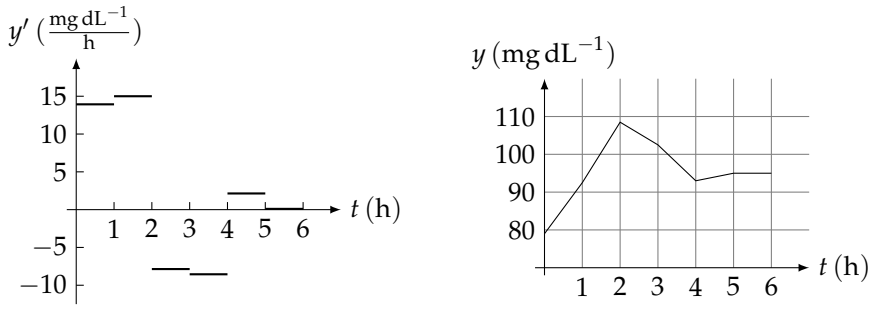
نقطہ $(4, 2)$ سے گزرتا ہوا خط جس کی ڈھلوان $\frac{1}{4}$ ہو $(4, 2)$ پر f کا مماس ہو گا۔ مماس کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$y = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) = \frac{1}{4}x + 1$$

□

نقطہ $x = a$ پر تفاعل $y = f(x)$ کے تفرق کی قیمت حاصل کرنے کو

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$



(ب) (ا)

شکل ۳.۴: (ا) قبل پرواز پرکھ برداشت کے دوران دموی شکر کا ڈھلوان مختلف پرکھ میں نہایت تیزی سے بہت زیادہ تبدیل ہوتا ہے۔

کے علاوہ

$$y'\Big|_{x=a} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\Big|_{x=a}$$

سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں $|_{x=a}$ علامت کی بائیں ہاتھ کی قیمت کو $x = a$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔

اندازاً حاصل قیمتوں سے f' کی ترسیم

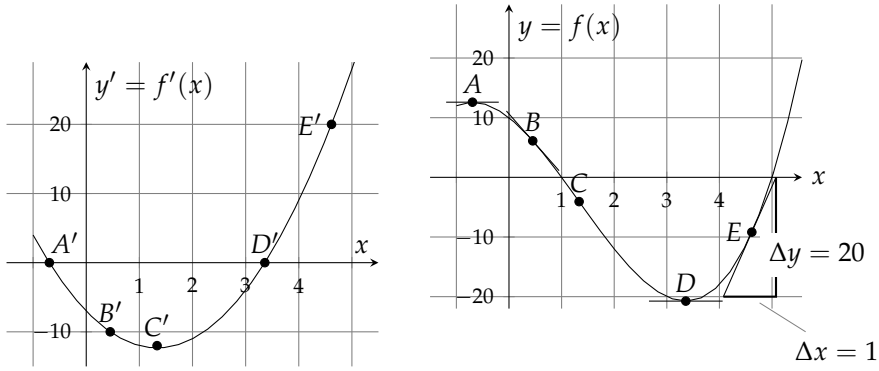
تفاعل $y = f(x)$ کی تجربہ سے حاصل قیمتوں (مثلاً دباو بالمقابل وقت یا آبادی بالمقابل وقت) کو ہم بطور نقطے ترسیم کرنے کے بعد عموماً سیدھے خطوط یا ہموار منحنی سے جوڑتے ہیں تاکہ ہمیں f کی صورت نظر آئے۔ مختلف مقامات پر تفاعل کی ڈھلوان f' سے ہم عموماً f' کو بھی ترسیم کر پاتے ہیں۔ درج ذیل مثال میں اس عمل کو دکھایا گیا ہے۔

مثال ۳.۳: دوا

23 اپریل 1988 کو 31 کلو گرام وزنی، ڈیڈلس[۳] نامی جہاز کو انسانی جسمانی طاقت سے یونان کے جنوب مشرق میں جزیرہ کریتی[۴] سے جزیرہ سانٹورینی[۵] تک اڑا کر 115.11 کلومیٹر کا فاصلہ 3 گھنٹوں اور 54 منٹوں میں طے کرتے ہوئے عالمی کارنامہ سرانجام دیا گیا۔ یہ جہاز امریکی یونیورسٹی[۶] کے طلبہ نے تیار کیا۔ اس تاریخی پرواز کی تیاری کے لئے ممکنہ ہوا بازوں کی جسمانی برداشت کو 6 گھنٹوں تک پرکھا جاتا تھا جس دوران ماہرین ہوا بازوں کی کثافت دموی شکر پر نظر رکھتے تھے۔ ان میں سے ایک ہوا باز کی کثافت دموی شکر (ملی گرام فی ڈیسی لٹر) بالمقابل وقت (گھنٹوں) کو شکل ۳.۴-ا میں دکھایا گیا ہے۔ موادی نقطوں کو قطعات سے جوڑ کر ترسیم حاصل کی گئی ہے۔ ہر قطع کی غیر متغیر ڈھلوان سے اس قطع پر کثافت دموی شکر کے تفرق کا اندازہ کیا جا سکتا ہے۔ تمام قطعات پر اس تفرق کو حاصل کرتے ہوئے شکل ۳.۴-ب میں ترسیم کیا گیا ہے۔ مثال کے طور پر پہلے گھنٹہ میں کثافت دموی شکر $79\,\text{mg dL}^{-1}$ سے بڑھ کر $83\,\text{mg dL}^{-1}$ ہو جاتا ہے۔ یوں تبدیل $\Delta y = 93 - 79 = 14\,\text{mg dL}^{-1}$ ہے جس کو $\Delta x = 1\,\text{h}$ سے تقسیم کرتے

---

[۳] Daedalus
[۴] Crete
[۵] Santorini
[۶] MIT



(ا) دیا گیا تفاعل $y = f(x)$ (ب) دیے گئے تفاعل کا تفرق $y' = f'(x)$

شکل ۵.۳: اشکال برائے مثال ۵.۳

ہوئے پہلے گھنٹہ میں کثافت کی شرح تبدیلی

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{14}{1} = \frac{14\,\mathrm{mg\,dL^{-1}}}{\mathrm{h}}$$

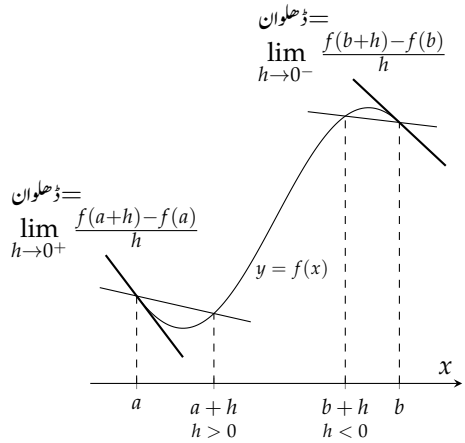
حاصل ہوتی ہے۔

دھیان رہے کہ لمحات $t = 1, 2, \cdots, 5$ پر، جہاں ترسیم کے کونے پائے جاتے ہیں لہٰذا ہم ڈھلوان حاصل نہیں کر سکتے ہیں، ہم کثافت کی شرح تبدیلی کا اندازہ نہیں لگا سکتے ہیں۔ ان نقطوں پر تفرقی سیڑھی تفاعل غیر معین ہے۔ □

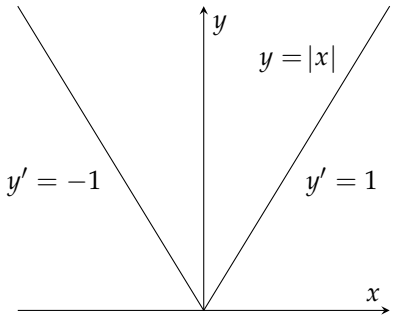
جہاں ہمارے پاس اتنے زیادہ تعداد میں نقطے ہوں کہ انہیں قطعات سے جوڑ کر ہموار منحنی حاصل ہوتی ہو وہاں ہم تفرق کو بھی ہموار خط سے ظاہر کرنا چاہیں گے۔ اگلے مثال میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔

مثال ۴.۳: تفاعل $y = f(x)$ کو شکل ۵.۳-ا میں دکھایا گیا ہے۔ اس کے تفرق $y' = f'(x)$ کو ترسیم کریں۔

حل: شکل ۵.۳-ا کے ترسیم پر مختلف نقطوں مثلاً A, B, C, D, E پر منحنی کی ڈھلوان جیومیٹریائی طریقے سے حاصل کرتے ہیں۔ شکل-ا کو دیکھ کر ہی وہ خطے نظر آتے ہیں جہاں ڈھلوان مثبت، منفی اور صفر ہیں۔ A سے D تک ڈھلوان منفی ہے جبکہ D کی دائیں جانب اور A کی بائیں جانب ڈھلوان مثبت ہے۔ اسی طرح وہ خطے بھی واضح ہیں جہاں ڈھلوان بڑھ یا گھٹ رہا ہے۔ نقطہ A اور D پر سیکنٹ کی حد کی ڈھلوان 0 ہیں جو شکل ۵.۳-ب کے مطابق نقطے A' اور D' دیتے ہیں جہاں $y' = 0$ ہے۔ نقطہ E پر سیکنٹ کی ڈھلوان حاصل کرنے کی خاطر قائمہ مثلث مکمل کیا گیا ہے جہاں سے $\Delta x = 1$ اور $\Delta y = 20$ پڑھے جا سکتے ہیں جن سے $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 20$ حاصل ہوتا ہے۔ شکل-ب میں اس کو نقطہ E' دکھایا گیا ہے۔ آپ شکل-ا میں نقطہ B پر بھی مثلث بنا کر ڈھلوان حاصل کر سکتے ہیں جو -10 ہوگا جس کو شکل-ب میں B' دکھایا گیا ہے۔ شکل-ا میں نقطہ C وہ نقطہ ہے جس پر ڈھلوان کی کم تر قیمت حاصل ہوتی ہے جس سے شکل-ب کا نشیب C' حاصل ہوتا ہے۔ □



شکل ۳.۶: وقفہ کے آخری سر نقطوں پر تفرق یک طرفہ ہوں گے۔



شکل ۳.۷: چونکہ مبدا پر بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں لہٰذا مبدا پر تفاعل کا تفرق غیر موجود ہے (مثال ۳.۵)۔

وقفے پر قابل تفرق؛ یک طرفہ تفرق

کھلے وقفہ (متناہی یا لا متناہی) پر تفاعل $y = f(x)$ اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس وقفے کے ہر نقطے پر f قابل تفرق ہو۔ یہ بند وقفہ $[a, b]$ پر اس صورت قابل تفرق ہو گا جب اس وقفے کے ہر اندرونی نقطے پر f قابل تفرق ہو اور درج ذیل تفرق موجود ہوں (شکل ۳.۶)۔

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad a \text{ پر دائیں ہاتھ تفرق}$$

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} \qquad b \text{ پر بائیں ہاتھ تفرق}$$

تفاعل کے دائرہ کار میں کہیں پر بھی تفاعل کے دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ تفرق معین ہو سکتے ہیں۔ یک طرفہ اور دو طرفہ حد کا تعلق ان تفرق پر بھی قابل اطلاق ہو گا۔ مسئلہ ۵ کی بنا کسی نقطے پر تفاعل کا تفرق صرف اور صرف اس صورت موجود ہو گا جب اس نقطے پر تفاعل کے بائیں ہاتھ تفرق اور دائیں ہاتھ تفرق موجود ہوں اور ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

مثال ۳.۵: تفاعل $y = |x|$ وقفہ $(-\infty, 0)$ اور $(0, \infty)$ پر قابل تفرق ہے لیکن $x = 0$ پر اس کا تفرق موجود نہیں ہے۔ مبدا کے دائیں جانب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1\cdot x) = 1, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mx+b) = m$$

ہے جبکہ مبدا کے بائیں جانب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(|x|) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-1\cdot x) = -1$$

ہے (شکل ۳.۷)۔ چونکہ مبدا پر تفاعل کا دائیں ہاتھ تفرق اور بائیں ہاتھ تفرق ایک جیسے نہیں ہیں لہٰذا مبدا پر تفاعل کا تفرق نہیں پایا جاتا ہے۔

صفر پر $|x|$ کا دائیں ہاتھ تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h} &= \lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h} \qquad \text{اگر } h>0 \text{ تب } |h|=h \text{ ہوگا}\\ &= \lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1\end{aligned}$$

صفر پر $|x|$ کا بائیں ہاتھ تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h} &= \lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h} \qquad \text{اگر } h<0 \text{ تب } |h|=-h \text{ ہوگا}\\ &= \lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} -1 = -1\end{aligned}$$

□

کسی نقطے پر تفاعل کا تفرق کب نہیں پایا جاتا ہے؟

اگر نقطہ $N(x_0, f(x_0))$ اور اس کے قریب نقطہ Q سے گزرتے ہوئے سیکنٹ کی ڈھلوان، Q کو N کے نزدیک تر کرنے سے تحدیدی قیمت اختیار کرتی ہو تب تفاعل $f(x)$ نقطہ N پر قابل تفرق ہوگا۔ اگر Q کو N کے نزدیک تر کرنے سے سیکنٹ کی ڈھلوان تحدیدی قیمت اختیار نہ کرتی ہو یا یہ سیکنٹ انتصابی تحدیدی صورت اختیار کرتی ہو، تب اس تفاعل کا N پر تفرق نہیں پایا جائے گا۔ ہموار منحنی والے تفاعل کا درج ذیل صورتوں میں نقطہ N پر تفرق نہیں پایا جائے گا۔

۱. نوکدار منحنی۔ منحنی کی نوک پر بائیں تفرق اور دائیں تفرق ایک جیسے نہیں ہوتے ہیں (شکل ۳.۸-ا)۔

۲. راس، جہاں NQ کی تحدیدی ڈھلوان ایک طرف سے ∞ اور دوسری طرف سے $-\infty$ ہوتی ہے (شکل ۳.۸-ب)۔

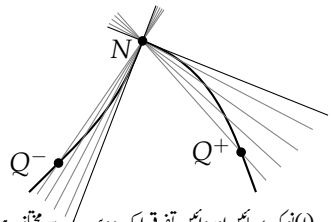
۳. انتصابی مماس، جہاں دونوں اطراف سے تحدیدی NQ کی ڈھلوان ∞ یا $-\infty$ ہوتی ہے (شکل ۳.۸-ج)۔

۴. عدم استمرار (شکل ۳.۸-د اور شکل ۳.۸-ہ)۔

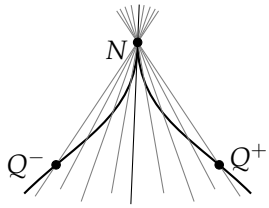
قابل تفرق تفاعل استمراری ہوں گے

جس نقطے پر ایک تفاعل قابل تفرق ہو اس پر یہ تفاعل استمراری ہوگا۔

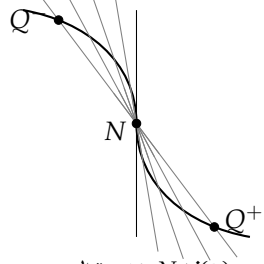
مسئلہ ۱: اگر $x=c$ پر f کا تفرق موجود ہو تب $x=c$ پر f استمراری ہوگا۔



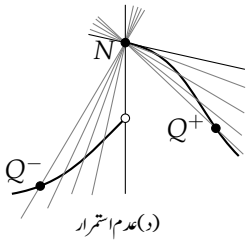
(ا) نوک پر بائیں اور دائیں تفرق ایک دوسرے سے مختلف ہوتے ہیں۔



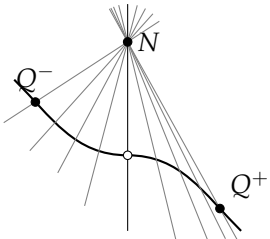
(ب) راس پر ایک طرف سے ڈھلوان ∞ جبکہ دوسری طرف سے $-\infty$ ہوتی ہے۔



(ج) نقطہ N پر مماس انتصابی ہے۔

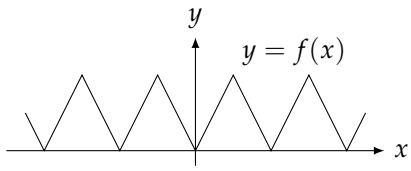


(د) عدم استمرار

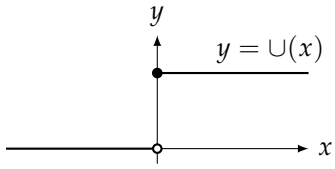


(ھ) عدم استمرار

شکل ۳.۸: ان نقطوں کی پہچان جہاں تفاعل ناقابل تفرق ہو گا۔



شکل ۹.۳: دندان ترسیم استمراری لیکن لا متناہی نقطوں پر نا قابل تفرق ہے۔



شکل ۱۰.۳: اکائی سیڑھی تفاعل متوسط قیمت خاصیت نہیں رکھتا ہے لہٰذا حقیقی خط پر یہ کسی دوسرے تفاعل کا تفرق نہیں ہو سکتا ہے۔

ثبوت: ہم جانتے ہیں کہ $f'(c)$ موجود ہے اور ہم نے دکھانا ہے کہ $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$ یا اس کا مماثل $\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c)$ درست ہیں۔ اگر $h \neq 0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f(c+h) &= f(c) + (f(c+h) - f(c)) \\ &= f(c) + \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot h \end{aligned}$$

اب $h \to 0$ لیں۔ مسئلہ ۱ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(c+h) &= \lim_{h\to 0} f(c) + \lim_{h\to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\ &= f(c) + f'(c) \cdot 0 \\ &= f(c) \end{aligned}$$

□

اسی قسم کی دلیل سے ثابت ہوتا ہے کہ اگر $x = c$ پر f کا یک طرفہ (بایاں یا دایاں) تفرق پایا جاتا ہو تب $x = c$ پر f اسی طرف (بائیں یا دائیں) سے استمراری ہو گا۔

انتباہ مسئلہ ۱ کا الٹ درست نہیں ہے یعنی جس نقطے پر تفاعل استمراری ہو اس پر تفاعل نا قابل تفرق ہو سکتا ہے جیسے ہم نے مثال ۵.۳ میں دیکھا۔

استمراری تفاعل کی ترسیم کتنی غیر ہموار ہو سکتی ہے؟ ہم نے دیکھا کہ مطلق قیمت تفاعل $y = |x|$ ایک نقطہ پر نا قابل تفرق ہوتا ہے۔ یوں ہم استمراری دندان ترسیم (شکل ۹.۳) بنا سکتے ہیں جو لا متناہی تعداد کے نقطوں پر نا قابل تفرق ہو گا۔

کیا استمراری تفاعل ہر نقطے پر نا قابل تفرق ہو سکتا ہے؟ اس کا جواب ہے "جی ہاں" جیسے کارل وائنسٹراس[۷] نے 1872 میں درج ذیل کلیہ (اور کئی اور) پیش کرتے ہوئے ثابت کیا۔

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cos(9^n \pi x)$$

[۷] [1815-1897] وائنسٹراس کارل دان ریاضی جرمن

یہ کلیہ f کو بڑھتی تعدد کے کوسائن تفاعل کے مجموعے کی صورت میں پیش کرتا ہے۔ بل کو بل دینے سے ایسا تفاعل حاصل ہوتا ہے جس کا تحدیدی سیکنٹ کسی بھی نقطے پر حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے لہٰذا اس کا مماس کہیں پر بھی نہیں پایا جاتا ہے۔

استمراری تفاعل جن کا کسی بھی نقطے پر مماس نہ پایا جاتا ہو نظریہ ابتری[۸] میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔ ایسے تفاعل کو متناہی لمبائی مختص کرنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ ہم منحنی کی لمبائی اور تفرق کا تعلق پر بعد میں غور کریں گے۔

تفرق کی متوسط قیمت خاصیت

ضروری نہیں ہے کہ ایک تفاعل کسی دوسرے کا تفرقی تفاعل ہو۔ درج ذیل مسئلہ سے اس حقیقت کو اخذ کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ ۲: اگر جس وقفے پر f قابل تفرق ہو اس وقفے میں نقطہ a اور b پائے جاتے ہیں تب $f'(a)$ اور $f'(b)$ کے بیچ ہر قیمت کا تفرق f' پایا جائے گا۔

مسئلہ ۲ (جس کا ثبوت ہم پیش نہیں کریں گے) کہتا ہے کہ کسی وقفے پر ایک تفاعل اس صورت تک کسی دوسرے تفاعل کا تفرق نہیں ہو گا جب تک اس وقفے پر یہ متوسط قیمت خاصیت نہ رکھتا ہو (شکل ۳.۱۰)۔ ایک تفاعل کب کسی دوسرے تفاعل کا تفرق ہو گا؟ یہ احصاء کی اہم ترین سوالات میں سے ایک ہے جس کا جواب نیوٹن اور لیبنٹز نے دے کر ریاضیات میں انقلاب برپا کیا۔ ان کے جواب کو ہم باب ۵ میں دیکھیں گے۔

سوالات

تفرقی تفاعل اور قیمتوں کی تلاش

سوال ۳.۱ تا سوال ۳.۶ میں تفرق کی تعریف استعمال کرتے ہوئے دیے گئے تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۳.۱: $f(x) = 4 - x^2; \quad f'(-3), f'(0), f'(1)$

سوال ۳.۲: $F(x) = (x-1)^2 + 1; \quad F'(-1), F'(0), F'(2)$

سوال ۳.۳: $g(t) = \frac{1}{t^2}; \quad g'(-1), g'(2), g'(\sqrt{3})$

سوال ۳.۴: $k(z) = \frac{1-z}{2z}; \quad k'(-1), k'(1), k'(\sqrt{2})$

سوال ۳.۵: $p(\theta) = \sqrt{3\theta}; \quad p'(1), p'(3), p'(\frac{2}{3})$

سوال ۳.۶: $r(s) = \sqrt{2s+1}; \quad r'(0), r'(1), r'(\frac{1}{2})$

سوال ۳.۷ تا سوال ۳.۱۲ میں دیا گیا تفرق حاصل کریں۔

سوال ۳.۷: $y = 2x^3; \quad \frac{dy}{dx}$

سوال ۳.۸: $r = \frac{s^3}{2} + 1; \quad \frac{dr}{ds}$

سوال ۳.۹: $s = \frac{t}{2t+1}; \quad \frac{ds}{dt}$

---

[۸] chaos theory

سوال ۳.۱۰: $v = t - \frac{1}{t}; \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

سوال ۳.۱۱: $p = \frac{1}{\sqrt{q+1}}; \quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$

سوال ۳.۱۲: $z = \frac{1}{\sqrt{3w-2}}; \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}w}$

ڈھلوان اور مماسی خطوط

سوال ۳.۱۳ تا سوال ۳.۱۶ میں تفاعل کا تفرق حاصل کرتے ہوئے دیے گئے غیر تابع متغیر پر مماس کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال ۳.۱۳: $f(x) = x + \frac{9}{x}; \quad x = -3$

سوال ۳.۱۴: $k(x) = \frac{1}{2+x}; \quad x = 2$

سوال ۳.۱۵: $s = t^3 - t^2; \quad t = -1$

سوال ۳.۱۶: $y = (x+1)^3; \quad x = -2$

سوال ۳.۱۷ تا سوال ۳.۱۸ میں تفاعل کا تفرق حاصل کریں۔ ترسیم پر دیے گئے نقطے پہ تفاعل کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۳.۱۷: $f(x) = \frac{8}{\sqrt{x-2}}; \quad (x, y) = (6, 4)$

سوال ۳.۱۸: $g(z) = 1 + \sqrt{4-z}; \quad (z, w) = (3, 2)$

سوال ۳.۱۹ تا سوال ۳.۲۲ میں تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۳.۱۹: $\left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=-1}; \quad s = 1 - 3t^2$

سوال ۳.۲۰: $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\sqrt{3}}; \quad y = 1 - \frac{1}{x}$

سوال ۳.۲۱: $\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta=0}; \quad r = \frac{2}{\sqrt{4-\theta}}$

سوال ۳.۲۲: $\left.\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|_{z=4}; \quad w = z + \sqrt{z}$

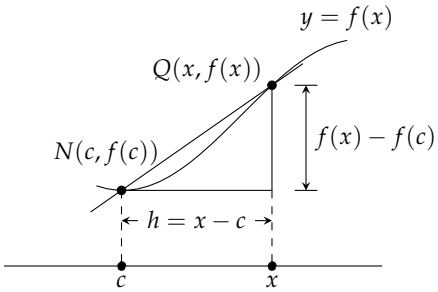
تفرق کے حصول کا متبادل کلیہ

تحدیدی سیکنٹ سے تفرق کا حاصل کلیہ مستعمل نقطوں کی علامتی اظہار پر منحصر ہوتا ہے۔ شکل ۳.۱۱ میں سیکنٹ کی ڈھلوان $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ ہے جس کی N پر تحدیدی قیمت (Q کو N کے نزدیک تر کرتے ہوئے) N پر تفاعل کا تفرق دیتی ہے۔

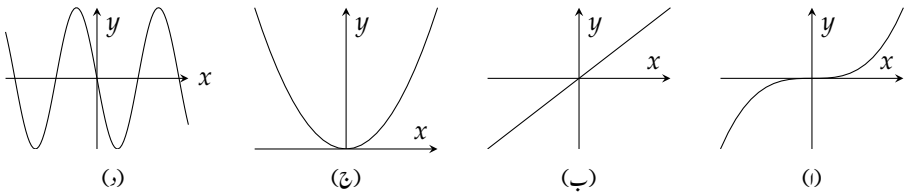
$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{۳.۲}$$

اس کلیہ کا استعمال چند تفرق کا حصول آسان بناتا ہے۔ سوال ۳.۲۳ تا سوال ۳.۲۶ میں اس کلیہ کی مدد سے c پر تفاعل کا تفرق حاصل کریں۔

سوال ۳.۲۳: $f(x) = \frac{1}{x+2}, \quad c = -1$



شکل ۳.۱۱: حصول تفرق کا متبادل کلیہ



شکل ۳.۱۲: تفاعل کے تفرق

سوال ۳.۲۴: $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad c = 2$

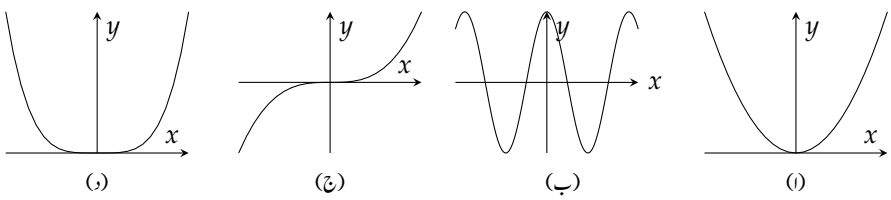
سوال ۳.۲۵: $g(t) = \frac{t}{t-1}, \quad c = 3$

سوال ۳.۲۶: $k(s) = 1 + \sqrt{s}, \quad c = 9$

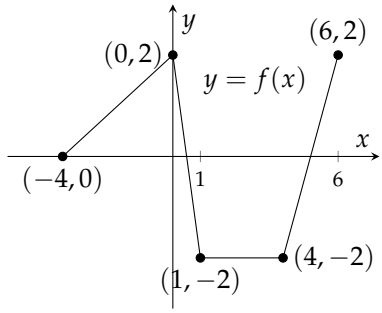
ترسیمات سوال ۳.۲۷ تا سوال ۳.۳۰ میں دیے گئے تفاعل کا تفرق شکل ۳.۱۲ میں تلاش کریں۔

سوال ۳.۲۷: شکل ۳.۱۳-ا

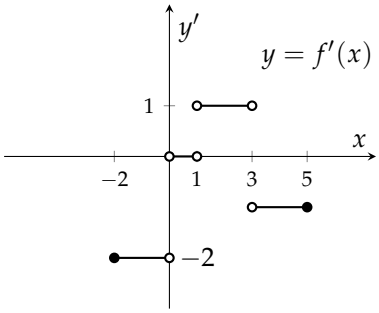
سوال ۳.۲۸: شکل ۳.۱۳-ب



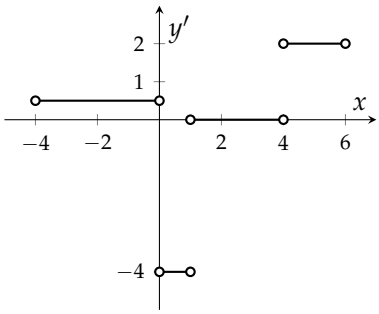
شکل ۳.۱۳: اصل تفاعل



شکل ۳.۱۴: ترسیم برائے سوال ۳.۳۱



شکل ۳.۱۵: تفاعل کے تفرق کا ترسیم برائے سوال ۳.۳۲



شکل ۳.۱۶: جواب برائے سوال ۳.۳۲

سوال ۳.۲۹: شکل ۳.۱۳-ج

سوال ۳.۳۰: شکل ۳.۱۳-د

سوال ۳.۳۱: قطعات کو جوڑ کر شکل ۳.۱۴ حاصل کی گئی ہے۔(ا) وقفہ $[-4,6]$ پر کہاں f' غیر معین ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔(ب) انتصابی محور کو y' کہتے ہوئے f' کو ترسیم کریں۔ ترسیم سیڑھی نما ہو گا۔

سوال ۳.۳۲: تفاعل کے تفرق سے اصل تفرق کی وصولی

(ا) درج ذیل طریقے سے تفاعل f کو وقفہ $[-2,5]$ پر ترسیم کریں۔

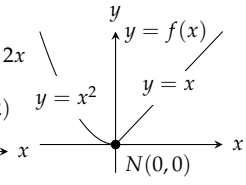
۱. بند قطعات کو جوڑ کر ترسیم حاصل کریں۔

۲. ترسیم کو نقطہ $(-2,3)$ سے شروع کریں۔

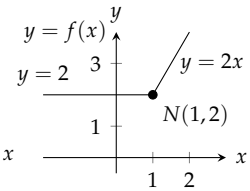
۳. تفاعل کا تفرق شکل ۳.۱۵ میں دکھایا گیا ہے۔

(ب) نقطہ $(-2,0)$ سے شروع کرتے ہوئے جزو (ا) کا ترسیم دوبارہ حاصل کریں۔

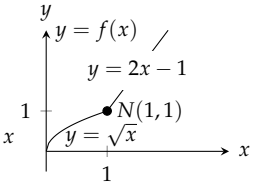
سوال ۳.۳۳ تا سوال ۳.۳۶ میں نقطہ N پر بائیں اور دائیں ہاتھ تفرق کا موازنہ کرتے ہوئے دکھائیں کہ اس نقطے پر تفاعل ناقابل تفرق ہے۔



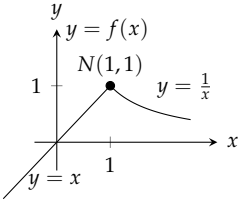
شکل ۳.۱۷



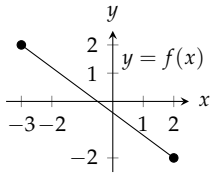
شکل ۳.۱۸



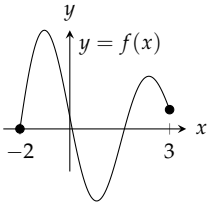
شکل ۳.۱۹



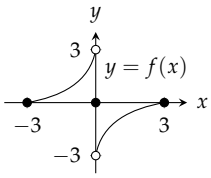
شکل ۳.۲۰



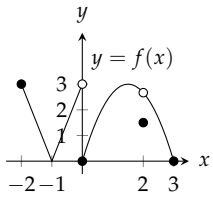
شکل ۳.۲۱



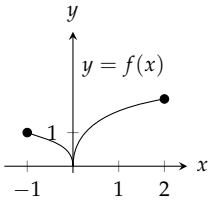
شکل ۳.۲۲



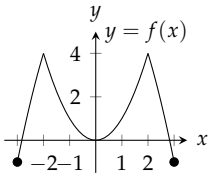
شکل ۳.۲۳



شکل ۳.۲۴



شکل ۳.۲۵



شکل ۳.۲۶

سوال ۳.۳۳: تفاعل کو شکل ۳.۱۷ میں دکھایا گیا ہے۔

سوال ۳.۳۴: تفاعل کو شکل ۳.۱۸ میں دکھایا گیا ہے۔

سوال ۳.۳۵: تفاعل کو شکل ۳.۱۹ میں دکھایا گیا ہے۔

سوال ۳.۳۶: تفاعل کو شکل ۳.۲۰ میں دکھایا گیا ہے۔

سوال ۳.۳۷ تا سوال ۳.۴۲ میں بند دائرہ کار D پر تفاعل کا ترسیم دکھایا گیا ہے۔ کن نقطوں پر تفاعل (ا) قابل تفرق، (ب) استراری لیکن ناقابل تفرق، (ج) غیر استراری اور ناقابل تفرق ہے؟

سوال ۳.۳۷: ترسیم شکل ۳.۲۱ میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -3 \leq x \leq 2$ ہے۔

سوال ۳.۳۸: ترسیم شکل ۳.۲۲ میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -2 \leq x \leq 3$ ہے۔

سوال ۳.۳۹: ترسیم شکل ۳.۲۳ میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -3 \leq x \leq 3$ ہے۔

سوال ۳.۴۰: ترسیم شکل ۳.۲۴ میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -2 \leq x \leq 3$ ہے۔

سوال ۳.۴۱: ترسیم شکل ۳.۲۵ میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -1 \leq x \leq 2$ ہے۔

سوال ۳.۴۲: ترسیم شکل ۳.۲۶ میں دکھایا گیا ہے جبکہ $D : -3 \leq x \leq 3$ ہے۔

سوال ۳.۴۳ تا سوال ۳.۴۶ میں درج ذیل کریں۔

ا. تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق $y' = f'(x)$ تلاش کریں۔

ب. $y = f(x)$ اور $y' = f'(x)$ کو علیحدہ محدد پر قریب قریب ترسیم کرتے ہوئے درج ذیل کا جواب دیں۔

ج. x کی کن قیمتوں کے لئے y' کی قیمت مثبت، منفی اور صفر ہے۔

د. x بڑھنے سے x کی قیمتوں کے کن وقفوں پر $y = f(x)$ بڑھتا ہے؟ گھٹتا ہے؟ اس کا جزو (ج) کے جوابات کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ (باب ۴ میں اس تعلق پر غور کیا جائے گا۔)

سوال ۳.۴۳: $y = -x^2$

سوال ۳.۴۴: $y = -\frac{1}{x}$

سوال ۳.۴۵: $y = \frac{x^3}{3}$

سوال ۳.۴۶: $y = \frac{x^4}{4}$

سوال ۳.۴۷: کیا $y = x^3$ کا کبھی منفی ڈھلوان ہو گا؟ اگر ہے تو کہاں ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۴۸: کیا $y = 2\sqrt{x}$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر پایا جاتا ہے تو کہاں پایا جاتا ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۴۹: کیا قطع مکافی $y = 2x^2 - 13x + 5$ کے مماس کا ڈھلوان -1 ہو سکتا ہے۔ اگر ممکن ہے تب اس مماس کی مساوات حاصل کریں اور وہ نقطہ تلاش کریں جہاں مماس منحنی کو مس کرتا ہے۔ اگر ممکن نہیں ہے تب اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۵۰: کیا منحنی $y = \sqrt{x}$ کا کوئی مماس x محور کو $x = -1$ پر قطع کرتا ہے؟ ممکن ہونے کی صورت میں نقطہ مماس اور مماس کی مساوات تلاش کریں جبکہ غیر ممکن ہونے کی صورت میں وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۵۱: کیا $(-\infty, \infty)$ پر قابل تفرق تفاعل کا تفرق $y = \lfloor x \rfloor$ ہو سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۵۲: $f(x) = |x|$ کے تفرق کو ترسیم کرنے کے بعد $y = \frac{|x|-0}{x-0} = \frac{|x|}{x}$ ترسیم کریں۔ ان سے آپ کیا نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

سوال ۳.۵۳: یہ جانتے ہوئے کہ $x = x_0$ پر تفاعل $f(x)$ قابل تفرق ہے، آپ $x = x_0$ پر تفاعل $-f$ کی قابل تفرق ہونے کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۵۴: کیا $t = 7$ پر $g(t)$ کا قابل تفرق ہونے سے آپ $t = 7$ پر $3g$ کے قابل تفرق ہونے کے بارے میں کچھ کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۵۵: فرض کریں کہ t کی تمام قیمتوں کے لئے تفاعل $g(t)$ اور $h(t)$ معین ہیں اور $g(0) = h(0) = 0$ ہے۔ کیا $\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{h(t)}$ موجود ہوگا؟ اگر حد موجود ہو تب کیا یہ حد ضرور صفر کے برابر ہوگا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۵۶: (ا) فرض کریں کہ $-1 \leq x \leq 1$ کے لئے تفاعل $f(x)$ شرط $\left|f(x)\right| \leq x^2$ کو مطمئن کرتا ہے۔ دکھائیں کہ $x = 0$ پر f قابل تفرق ہے اور $f'(0)$ حاصل کریں۔ (ب) دکھائیں کہ $x = 0$ پر

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

قابل تفرق ہے اور $f'(0)$ تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۳.۵۷: $0 \leq x \leq 2$ کے لئے $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ کو ترسیم کریں۔ اس کے اوپر پہلے $h = 1, 0.5, 0.1$ لیتے ہوئے $y = \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$ ترسیم کریں اور بعد میں $h = -1, -0.5, -0.1$ لے کر ترسیم کریں۔ سمجھائیں کہ کیا ہو رہا ہے۔

سوال ۳.۵۸: $-2 \leq x \leq 2$ اور $0 \leq y \leq 3$ لیتے ہوئے $y = 3x^2$ ترسیم کریں۔ اسی کے اوپر پہلے $h = 2, 1, 0.2$ لیتے ہوئے $y = \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$ ترسیم کریں اور بعد میں $h = -2, -1, -0.2$ لے کر ترسیم کریں۔ سمجھائیں کیا ہو رہا ہے۔

سوال ۳.۵۹: وائنسٹرا اس کا ناقابل تفرق تفاعل وائنسٹرا اس تفاعل $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} ()^n \cos(9^n \pi x)$ کے پہلے آٹھ ارکان کا مجموعہ درج ذیل ہے۔

$$g(x) = \cos(\pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^1 \cos(9\pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cos(9^2 \pi x) + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cos(9^3 \pi x) + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^7 \cos(9^7 \pi x)$$

اس تفاعل کو ترسیم کریں۔ ترسیم کی جسامت بڑی کرتے ہوئے دیکھیں کہ یہ کتنی بلدار ہے۔

سوال ۳.۶۰ تا سوال ۳.۶۵ میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کریں۔

ا. $y = f(x)$ ترسیم کرتے ہوئے اس کا رویہ دیکھیں۔

ب. عمومی جسامت قدم h لیتے ہوئے عمومی نقطہ x پر حاصل تقسیم q متعارف کریں۔

ج. $h \to 0$ کرتے ہوئے حد لینے سے کون سا کلیہ حاصل ہوتا ہے؟

د. $x = x_0$ پر کرتے ہوئے تفاعل اور اس نقطے پر مماس ترسیم کریں۔

ھ. x_0 سے x کی بڑی اور چھوٹی قیمتیں جزو (ج) میں پر کریں۔ کیا کلیہ اور ترسیم ایک جیسا مطلب پیش کرتے ہیں؟

و. جزو (ج) میں حاصل کیا گیا کلیہ ترسیم کریں۔ اس کی قیمتیں منفی، مثبت یا صفر ہونے کا کیا مطلب ہے؟ کیا جزو (ا) کی ترسیم کے ساتھ اس کا کوئی مطلب بنتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۶۰: $f(x) = x^3 + x^2 - x, \quad x_0 = 1$

سوال ۳.۶۱: $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}, \quad x_0 = 1$

سوال ۳.۶۲: $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}, \quad x_0 = 2$

سوال ۳.۶۳: $f(x) = \frac{x-1}{3x^2+1}, \quad x_0 = -1$

سوال ۳.۶۴: $f(x) = \sin 2x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

سوال ۳.۶۵: $f(x) = x^2 \cos x, \quad x_0 = \frac{\pi}{4}$

۳.۲ قواعد تفرق

اس حصے میں تفرق کی تعریف استعمال کیے بغیر تفاعل کا تفرق حاصل کرنا سکھایا جائے گا۔

طاقت، مجموعے اور تفریق

تفرق کا پہلا قاعدہ یہ ہے کہ مستقل کا تفرق صفر کے برابر ہے۔

قاعدہ ۳.۱: **مستقل کا تفرق**
اگر c مستقل ہو تب $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} c = 0$ ہو گا۔

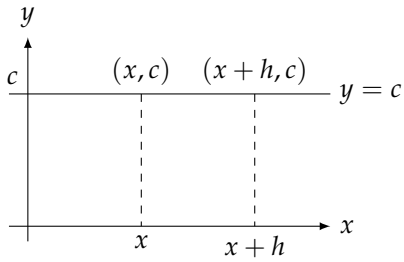
مثال ۳.۱: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(8) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{3}) = 0$ □

ثبوت قاعدہ: ہم تفرق کی تعریف استعمال کرتے ہوئے $f(x) = c$ کا تفرق حاصل کرتے ہیں (شکل ۳.۲۷)۔ ہر x پر درج ذیل ہو گا۔

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

□

اگلا قاعدہ ہمیں x^n کا تفرق دیتا ہے جہاں n مثبت عدد صحیح ہے۔



شکل ۳.۲۷: مستقل کا تفرق صفر ہو گا۔

قاعدہ ۳.۲: **قاعدہ طاقت برائے مثبت عدد صحیح**
اگر n مثبت عدد صحیح ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$$

قاعدہ طاقت استعمال کرتے ہوئے ہم طاقت n سے 1 منفی کرتے ہوئے جواب کو n سے ضرب دیتے ہیں۔

مثال ۳.۲:

f	x	x^2	x^3	x^4	$\cdots$
f'	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	$\cdots$

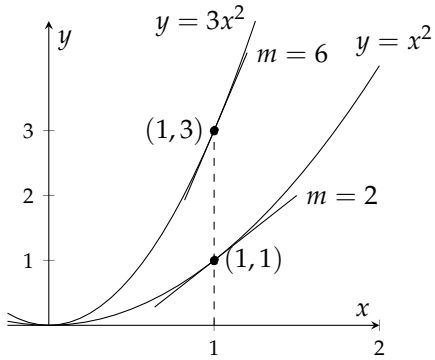
□

ثبوت قاعدہ: اگر $f(x) = x^n$ ہو تب $f(x+h) = (x+h)^n$ ہو گا۔ چونکہ n مثبت عدد صحیح ہے ہم درج ذیل حقیقت

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1+a^{n-2}b} + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

استعمال کرتے ہوئے تفریقی حاصل تقسیم کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔ ہم $a = x+h$ اور $b = x$ لیتے ہیں۔ یوں $h = a - b$ ہو گا۔ اس طرح

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \frac{(h)[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} \\
&= (x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \cdots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}
\end{aligned}$$



شکل ۳.۲۸: ترسیم برائے مثال ۳.۳

لکھا جا سکتا ہے جو n ارکان پر مشتمل ہے اور $h \to 0$ کرتے ہوئے ہر رکن کا حد x^{n-1} ہے۔ یوں درج ذیل نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = nx^{n-1}$$

□

اگلا قاعدہ کہتا ہے کہ قابل تفرق تفاعل کو مستقل سے ضرب دینے سے حاصل تفاعل کا تفرق بھی اس مستقل سے ضرب ہو گا۔

قاعدہ ۳.۳: **قاعدہ مستقل مضرب**
اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور c ایک مستقل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cu) = c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

بالخصوص مثبت عدد صحیح n کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(cx^n) = cnx^{n-1}$$

مثال ۳.۳: تفرقی کلیہ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x^2) = 3\cdot 2x = 6x$ کہتی ہے کہ y محور کو 3 سے ضرب دیتے ہوئے ترسیم $y = x^2$ کی پیمائش تبدیل کرنے سے ہر نقطے کی ڈھلوان 3 سے ضرب ہو گی (شکل ۳.۲۸)۔ □

مثال ۳.۴: قابل تفرق تفاعل کے منفی کا تفرق اس تفاعل کے تفرق کا منفی ہو گا۔ قاعدہ ۳.۳ میں $c = -1$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-1 \cdot u) = -1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u) = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

ثبوت قاعدہ: (قاعدہ ۳.۳)

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}cu &= \lim_{h\to 0}\frac{cu(x+h)-cu(x)}{h} && f(x) = cu(x) \text{ کے تفرق کی تعریف} \\
&= c\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} && \text{تحدیدی خاصیت} \\
&= c\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} && u \text{ قابل تفرق ہے}
\end{aligned}$$

□

اگلا قاعدہ کہتا ہے کہ دو قابل تفرق تفاعل کے مجموعے کا تفرق ان کے انفرادی تفرق کا مجموعہ ہو گا۔

قاعدہ ۳.۴: **قاعدہ مجموعہ**
اگر u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا مجموعہ $u + v$ ہر اس نقطے پر قابل تفرق ہو گا جہاں u اور v دونوں قابل تفرق ہوں۔ ایسے نقطے پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u+v) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

قاعدہ مجموعہ اور قاعدہ مستقل مضرب کو ملا کر مساوی **تفریقی قاعدہ** حاصل ہو گا جس کے تحت دو قابل تفرق تفاعل کے حاصل تفریق کا تفرق ان کے تفرق کا تفریق ہو گا:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u-v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[u+(-1)v] = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + (-1)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

قاعدہ مجموعہ کو وسعت دے کر دو سے زیادہ تفاعل کے لئے بھی استعمال کیا جا سکتا ہے بس اتنا ضروری ہے کہ مجموعہ میں ارکان کی تعداد متناہی ہو۔ اگر $u_1, u_2, \cdots, u_n$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ بھی قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1+u_2+\cdots+u_n) = \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x} + \cdots + \frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}x}$$

مثال ۳.۵:

(ا) $y = x^4 + 12x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(12x) = 4x^3 + 12$$

(ب) $y = x^3 + \frac{4}{3}x^2 - 5x + 1$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}x^3 + \frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3}x^2\right) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(1)\\ &= 3x^2 + \frac{4}{3}\cdot 2x - 5 + 0\\ &= 3x^2 + \frac{8}{3}x - 5\end{aligned}$$

□

آپ نے اس مثال میں دیکھا کہ کسی بھی کثیر رکنی کا جزو در جزو تفرق لیا جا سکتا ہے۔

ثبوت قاعدہ: (قاعدہ ۳.۴) ہم تفرق کی تعریف کو $f(x) = u(x) + v(x)$ پر لاگو کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[u(x) + v(x)] &= \lim_{h\to 0}\frac{[u(x+h) + v(x+h)] - [u(x) + v(x)]}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{v(x+h) - v(x)}{h}\\ &= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\end{aligned}$$

□

دو سے زیادہ تفاعل کے مجموعہ کے لئے ثبوت

ہم درج ذیل فقرے کو ریاضی ماخوذ[9] کی مدد سے ثابت کرتے ہیں۔

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_n}{dx} \tag{۳.۱}$$

جیسا اوپر ثابت کیا گیا درج بالا فقرہ $n = 2$ کے لئے درست ہے۔ یہ ریاضی ماخوذ کا پہلا قدم ہے۔

دوسرے قدم میں ہم نے ثابت کرنا ہو گا کہ اگر یہ فقرہ کسی بھی مثبت عدد صحیح $n = k$ (جہاں $k \geq n_0 = 2$ ہے) کے لئے درست ہے تب یہ $n = k + 1$ کے لئے بھی درست ہو گا۔ فرض کریں کہ

$$\frac{d}{dx}(u_1 + u_2 + \cdots + u_k) = \frac{du_1}{dx} + \frac{du_2}{dx} + \cdots + \frac{du_k}{dx}$$

[9] mathematical induction

ہے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\underbrace{u_1+u_2+\cdots+u_k}_{\text{اس مجموعہ کو } u \text{ کہیں}}+\underbrace{u_{k+1}}_{\text{اس کو } v \text{ کہیں}})\\
&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u_1+u_2+\cdots+u_k)+\frac{\mathrm{d}u_{k+1}}{\mathrm{d}x}\\
&=\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}x}+\cdots+\frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}x}+\frac{\mathrm{d}u_{k+1}}{\mathrm{d}x}
\end{aligned}$$

اس قدم کی تکمیل ہر عدد صحیح $n \geq 2$ کے لئے قاعدہ ۳.۴ کی درستگی کی تصدیق کرتا ہے۔

مثال ۳.۶: کیا منحنی $y = x^4 - 2x^2 + 2$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر پایا جاتا ہے تب کہاں پایا جاتا ہے؟

حل: افقی مماس وہاں ہو گا جہاں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ صفر کے برابر ہو۔ ان نقطوں کو حاصل کرنے کے لئے ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ معلوم کرتے ہیں

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^4-2x^2+2)=4x^3-4x$$

اور اس کے بعد مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$ کو x کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
4x^3-4x&=0\\
4x(x^2-1)&=0\\
x&=0,1,-1
\end{aligned}$$

منحنی $y = x^4 - 2x^2 + 2$ کا افقی مماس $x = 0, 1, -1$ پر پایا جاتا ہے جہاں منحنی کے مطابق نقطے $(-1,1)$ ، $(1,1)$ ، $(0,2)$ ہیں (شکل ۳.۲۹)۔ □

حاصل ضرب اور حاصل تقسیم

اگرچہ دو تفاعل کے مجموعہ کا تفرق ان تفاعل کے تفرق کا مجموعہ ہے، دو تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق ان تفاعل کے تفرق کا حاصل ضرب نہیں ہو گا۔ مثال کے طور پر

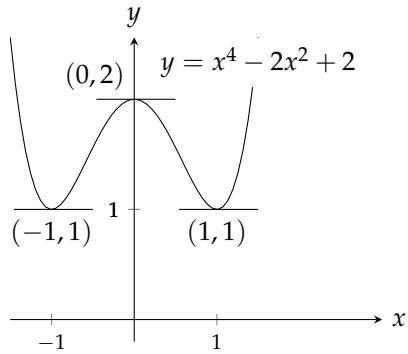
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\cdot x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)=2x \quad \text{ہے جبکہ} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)=1\cdot 1=1 \quad \text{ہو گا۔}$$

دو تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق دو حاصل ضرب کا مجموعہ ہو گا۔

قاعدہ ۳.۵: **قاعدہ حاصل ضرب**

اگر u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا حاصل ضرب uv بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا جس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv)=u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$



شکل ۳.۲۹: افقی مماس (مثال ۳.۶)

حاصل ضرب uv کا تفرق u ضرب v کا تفرق جمع v ضرب u کا تفرق ہوگا۔ اس کو $(uv)' = uv' + vu'$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

ثبوت قاعدہ: تفرق کی تعریف کے تحت

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}$$

ہوگا جس کو u اور v کے تفریقی حاصل تقسیم کی صورت میں لکھنے کی خاطر ہم شمار کنندہ میں $u(x+h)v(x)$ جمع اور منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h} \right] \\
&= \lim_{h\to 0} u(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h}
\end{aligned}$$

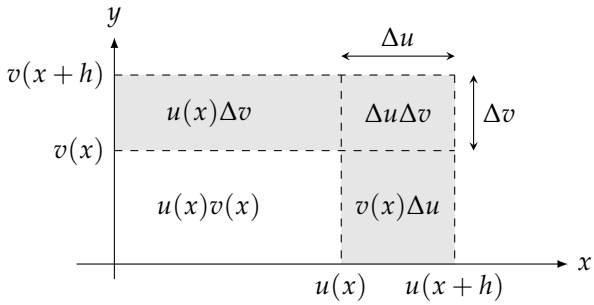
چونکہ x پر u قابل تفرق ہے لہٰذا $h \to 0$ کرنے سے $u(x+h) \to u(x)$ ہوگا۔ دو کسر کی تحدیدی قیمتیں x پر $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ اور $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ ہیں۔ مختصراً درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

قاعدہ حاصل ضرب کی تصور کشی

اگر $u(x)$ اور $v(x)$ مثبت ہوں اور x بڑھنے سے بڑھتے ہوں تب $h > 0$ کی صورت میں شکل ۳.۳۰ حاصل ہوگا۔ $u(x)$ اور $v(x)$



شکل ۳.۳۰: قاعدہ حاصل ضرب کی تصور کشی۔

بڑھنے سے رقبہ میں اضافہ

$$u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x) = u(x+h)\Delta v + v(x+h)\Delta u - \Delta u \Delta v$$

ہو گا جس کو ہلکا سیاہ رنگ دیا گیا ہے۔ اس مساوات کے دونوں اطراف کو h سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} = u(x+h)\frac{\Delta v}{h} + v(x+h)\frac{\Delta u}{h} - \Delta u \frac{\Delta v}{h}$$

حاصل ہو گا۔ اب $h \to 0^+$ کرنے سے $\Delta u \cdot \frac{\Delta v}{h} \to 0 \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0$ ہو گا لہٰذا درج ذیل باقی رہ جاتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

مثال ۳.۷: تفاعل $y = (x^2+1)(x^3+3)$ کا تفرق تلاش کریں۔
حل: قاعدہ حاصل ضرب میں $u = x^2+1$ اور $v = x^3+3$ لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(x^2+1)(x^3+3)] &= (x^2+1)(3x^2) + (x^3+3)(2x)\\ &= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x\\ &= 5x^4 + 3x^2 + 6x\end{aligned}$$

□

اس مثال میں قوسین کھول کر تفرق لینا غالباً زیادہ بہتر ہوتا۔ ایسا کرنے سے

$$\begin{aligned}y &= (x^2+1)(x^3+3) = x^5 + x^3 + 3x^2 + 3\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 5x^4 + 3x^2 + 6x\end{aligned}$$

ملتا ہے جو مثال ۷.۳ میں حاصل جواب کی تصدیق کرتا ہے۔

بعض اوقات آپ دیکھیں گے کہ قاعدہ حاصل ضرب استعمال کرنا ضروری ہو گا یا نسبتاً زیادہ آسان ہو گا۔ درج ذیل مثال میں ہمارے پاس صرف اعدادی قیمتیں ہیں جن سے ہمیں جواب حاصل کرنا ہے۔

مثال ۸.۳: فرض کریں کہ $y = uv$ تفاعل u اور v کا حاصل ضرب ہے۔ درج ذیل استعمال کرتے ہوئے $y'(2)$ تلاش کریں۔

$$u(2) = 3, \quad u'(2) = -4, \quad v(2) = 1, \quad v'(2) = 2$$

حل: قاعدہ حاصل ضرب کی درج ذیل صورت

$$y' = (uv)' = uv' + vu'$$

استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y'(2) &= u(2)v'(2) + v(2)u'(2) \\ &= (3)(2) + (1)(-4) = 6 - 4 = 2 \end{aligned}$$

□

حاصل تقسیم

جیسا تفاعل کے حاصل ضرب کا تفرق ان کے تفرق کا حاصل ضرب نہیں تھا اسی طرح تفاعل کے حاصل تقسیم کا تفرق ان کے تفرق کا حاصل تقسیم نہیں ہو گا۔ درج ذیل قاعدہ اس کا حل دیتا ہے۔

قاعدہ ۶.۳: **قاعدہ حاصل تقسیم**

اگر $u(x)$ اور $v()$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب ان کا حاصل تقسیم $\frac{u}{v}$ بھی x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{v^2}$$

ثبوت قاعدہ:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{v(x)u(x+h) - u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)} \end{aligned}$$

اس آخری کسر کو یوں تبدیل کرتے ہیں کہ اس میں u اور v کے تفریقی حاصل تقسیم پائے جاتے ہوں۔ایسا کرنے کی خاطر شمار کنندہ میں $v(x)u(x)$ جمع اور منفی کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)u(x+h)-v(x)u(x)+v(x)u(x)-u(x)v(x+h)}{hv(x+h)v(x)}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}-u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}\end{aligned}$$

شمار کنندہ اور نسب نما میں حد لینے سے قاعدہ حاصل تقسیم حاصل ہوتا ہے۔

□

مثال ۳.۹: تفاعل $y=\frac{t^2-1}{t^2+1}$ کا تفرق تلاش کریں۔
حل: ہم $u=t^2-1$ اور $v=t^2+1$ لیتے ہوئے قاعدہ حاصل تقسیم استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{(t^2+1)\cdot 2t-(t^2-1)\cdot 2t}{(t^2+1)^2} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=2t,\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=2t\right)\\ &= \frac{2t^3+2t-2t^3+2t}{(t^2+1)^2}\\ &= \frac{4t}{(t^2+1)^2}\end{aligned}$$

□

منفی عدد صحیح کے لئے طاقتی قاعدہ

منفی عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ اور مثبت عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ ایک ہیں۔

قاعدہ ۳.۷: منفی عدد صحیح کا طاقتی قاعدہ
اگر n منفی عدد صحیح اور $x\neq 0$ ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n)=nx^{n-1}$$

ثبوت قاعدہ: ہم قاعدہ حاصل تقسیم کو استعمال کر کے اس قاعدہ کو ثابت کرتے ہیں۔ اگر n منفی عدد صحیح ہو تب $-n = m$ مثبت عدد صحیح ہو گا۔ یوں $x^n = x^{-m} = \frac{1}{x^m}$ ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x^m}\right) \\
&= \frac{x^m \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1) - 1 \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^m)}{(x^m)^2} && \text{قاعدہ حاصل تقسیم جس میں } u = 1 \text{ اور } v = x^m \text{ ہیں} \\
&= \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} && \text{چونکہ } m > 0 \text{ ہے لہٰذا } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^m) = mx^{m-1} \text{ ہو گا} \\
&= -mx^{-m-1} \\
&= nx^{n-1} && \text{چونکہ } -m = n \text{ ہے}
\end{aligned}$$

□

مثال ۳.۱۰:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-1}) = (-1)x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{4}{x^3}\right) &= 4\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{-3}) = 4(-3)x^{-4} = -\frac{12}{x^4}
\end{aligned}$$

□

مثال ۳.۱۱: منحنی $y = x + \frac{2}{x}$ کا نقطہ $(1,3)$ پر مماس کی مساوات تلاش کریں۔

حل: منحنی کی ڈھلوان کی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{2}{x^2}$$

ہے جس کی قیمت نقطہ $x = 1$ پر

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1} = \left[1 - \frac{2}{x^2}\right]_{x=1} = 1 - 2 = -1$$

ہو گی۔ نقطہ $(1,3)$ پر ڈھلوان $m = -1$ کے خط کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
y - 3 &= (-1)(x - 1) && \text{نقطہ-ڈھلوان مساوات} \\
y &= -x + 1 + 3 \\
y &= -x + 4
\end{aligned}$$

□

قاعدہ کا انتخاب

تفرق کے حصول میں موزوں قاعدے کا انتخاب حساب آسان بنا سکتا ہے۔ درج ذیل مثال اس کی وضاحت کرتا ہے۔

مثال ۳.۱۲: قاعدہ حاصل تقسیم استعمال کرنے کی بجائے

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4}$$

کے شمار کنندہ میں قوسین کھول کر x^4 سے تقسیم کرتے ہیں

$$y = \frac{(x-1)(x^2-2x)}{x^4} = \frac{x^3-3x^2+2x}{x^4} = x^{-1}-3x^{-2}+2x^{-3}$$

اور قاعدہ مجموعہ اور قاعدہ طاقت استعمال کرتے ہوئے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -x^{-2}-3(-2)x^{-3}+2(-3)x^{-4}\\ &= -\frac{1}{x^2}+\frac{6}{x^3}-\frac{6}{x^4}\end{aligned}$$

□

دور تبی اور بلند رتبی تفرق

تفرق $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو x کے لحاظ سے y کا رتبہ **اول تفرق**[10] یا **یک رتبی تفرق** یا مختصراً **پہلا تفرق**[11] کہتے ہیں۔ یہ تفرق از خود x کے لحاظ سے قابل تفرق ہو سکتا ہے۔ اگر ایسا ہو تب تفرق

$$y'' = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$$

کو x کے لحاظ سے y کا رتبہ **دوم تفرق**[12] یا **دو رتبی تفرق** یا مختصراً **دوسرا تفرق**[13] کہتے ہیں۔

دور تبی تفرق کی علامت $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ میں شمار کنندہ میں d جبکہ نسب نما میں x کی طاقت 2 لکھی جاتی ہے۔ درج بالا مساوات میں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ سے مراد تفرقی علامتوں کا ضرب نہیں ہے بلکہ یہ تفرق کے تفرق کو ظاہر کرتی ہے۔

---

[10] first order derivative
[11] first derivative
[12] second order derivative
[13] second derivative

اگر y'' قبل تفرق ہو تب اس کے تفرق $y''' = \frac{\mathrm{d}y''}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$ کو x کے لحاظ سے y کا **رتبہ سوم تفرق** یا **سہ رتبی تفرق** یا **تیسرا تفرق** یا مختصراً **تیسرا تفرق** کہتے ہیں۔ اسی طرح بڑھتے ہوئے

$$y^{(n)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y^{(n-1)}$$

کو x کے لحاظ سے y کا **رتبہ** n **تفرق** یا n **رتبی تفرق** یا n **واں تفرق** کہیں گے جہاں n مثبت عدد صحیح ہے۔ آپ نے دیکھا کہ بلند رتبی تفرق کو قوسین میں بند y کا طاقت لکھا جاتا ہے۔

مثال ۳.۱۳: تفاعل $y = x^3 - 3x^2 + 2$ کے پہلے چار تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} y' &= 3x^2 - 6x \\ y'' &= 6x - 6 \\ y''' &= 6 \\ y^{(4)} &= 0 \end{aligned}$$

چونکہ $y^{(4)} = 0$ ہے اور صفر ایک مستقل ہے لہٰذا اس کا تفرق درحقیقت صفر (یعنی مستال) کا تفرق ہو گا جو صفر ہی ہے۔ یوں اس تفاعل کے ہر رتبے کا تفرق پایا جاتا ہے۔ اس کا چار رتبی اور اس سے بلند تمام تفرق صفر کے برابر ہیں۔ □

سوالات

تفرق کا حساب

سوال ۳.۱ تا سوال ۳.۱۲ میں تفاعل کا رتبہ اول اور رتبہ دوم تفرق حاصل کریں۔

سوال ۳.۱: $y = -x^2 + 3$

سوال ۳.۲: $y = x^2 + x + 8$

سوال ۳.۳: $s = 5t^3 - 3t^5$

سوال ۳.۴: $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$

سوال ۳.۵: $y = \frac{4x^3}{3} - x$

سوال ۳.۶: $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}$

سوال ۳.۷: $w = 3z^{-2} - \frac{1}{z}$

سوال ۳.۸: $s = -2t^{-1} + \frac{4}{t^2}$

سوال ۳.۹: $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$

سوال ۳.۱۰: $y = 4 - 2x - x^{-3}$

سوال ۳.۱۱: $r = \frac{1}{3s^2} - \frac{5}{2s}$

سوال ۳.۱۲: $r = \frac{12}{\theta} - \frac{4}{\theta^3} + \frac{1}{\theta^4}$

سوال ۳.۱۳ تا سوال ۳.۱۶ میں (ا) y' کو قاعدہ حاصل ضرب کی مدد سے حاصل کریں اور (ب) قوسین کو کھول کر سادہ ارکان حاصل کرتے ہوئے دوبارہ تفرق حاصل کریں۔

سوال ۳.۱۳: $y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$

سوال ۳.۱۴: $y = (x - 1)(x^2 + x + 1)$

سوال ۳.۱۵: $y = (x^2 + 1)\left(x + 5 + \frac{1}{x}\right)$

سوال ۳.۱۶: $y = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x - \frac{1}{x} + 1\right)$

سوال ۳.۱۷ تا سوال ۳.۲۸ میں تفاعل کا تفرق تلاش کریں۔

سوال ۳.۱۷: $y = \frac{2x+5}{3x-2}$

سوال ۳.۱۸: $z = \frac{2x+1}{x^2-1}$

سوال ۳.۱۹: $g(x) = \frac{x^2-4}{x+0.5}$

سوال ۳.۲۰: $f(t) = \frac{t^2-1}{t^2+t-2}$

سوال ۳.۲۱: $v = (1 - t)(1 + t^2)^{-1}$

سوال ۳.۲۲: $w = (2x - 7)^{-1}(x + 5)$

سوال ۳.۲۳: $f(s) = \frac{\sqrt{s}-1}{\sqrt{s}+1}$

سوال ۳.۲۴: $u = \frac{5x+1}{2\sqrt{x}}$

سوال ۳.۲۵: $v = \frac{1+x-4\sqrt{x}}{x}$

سوال ۳.۲۶: $r = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$

سوال ۳.۲۷: $y = \frac{1}{(x^2-1)(x^2+x+1)}$

سوال ۳.۲۸: $y = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)}$

سوال ۳.۲۹: تفاعل $y = \frac{x^4}{2} - \frac{3}{2}x^2 - x$ کے تمام بلند رتبی تفرق تلاش کریں۔

سوال ۳.۳۰: تفاعل $y = \frac{x^5}{120}$ کے تمام بلند رتبی تفرق تلاش کریں۔

سوال ۳.۳۱ تا سوال ۳.۳۸ میں یک رتبی اور دو رتبی تفرق تلاش کریں۔

سوال ۳.۳۱: $y = \frac{x^3+7}{x}$

سوال ۳.۳۲: $s = \frac{t^2+5t-1}{t^2}$

سوال ۳.۳۳: $r = \frac{(\theta-1)(\theta^2+\theta+1)}{\theta^3}$

سوال ۳.۳۴: $u = \frac{(x^2+x)(x^2-x+1)}{x^4}$

سوال ۳.۳۵: $w = \left(\frac{1+3z}{3z}\right)(3-z)$

سوال ۳.۳۶: $w = (z+1)(z-1)(z^2+1)$

سوال ۳.۳۷: $p = \left(\frac{q^2+3}{12q}\right)\left(\frac{q^4-1}{q^3}\right)$

سوال ۳.۳۸: $p = \frac{q^2+3}{(q-1)^3+(q+1)^3}$

اعدادی قیمتوں کا استعمال

سوال ۳.۳۹: فرض کریں کہ u اور v متغیر x کے تفاعل ہیں جو $x = 0$ پر قابل تفرق ہیں۔ مزید ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہے۔

$$u(0) = 5, \quad u'(0) = -3, \quad v(0) = -1, \quad v'(0) = 2$$

$x = 0$ پر درج ذیل تفرق تلاش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{u}\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7v-2u)$$

سوال ۳.۴۰: فرض کریں کہ u اور v متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ مزید ہمیں درج ذیل معلومات دی گئی ہے۔

$$u(1) = 2, \quad u'(1) = 0, \quad v(1) = 5, \quad v'(1) = -1$$

$x = 1$ پر درج ذیل تفرق تلاش کریں۔

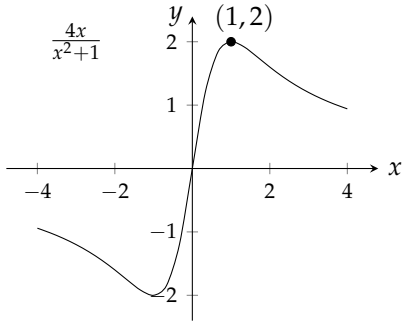
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{u}{v}\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{v}{u}\right), \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7v-2u)$$

ڈھلوان اور مماس

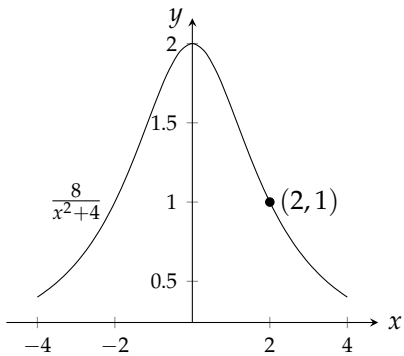
سوال ۳.۴۱: (ا) نقطہ $(2,1)$ پر منحنی $y = x^3 - 4x + 1$ کے مماس کے قائمہ کی مساوات تلاش کریں۔ (ب) منحنی کی کم تر ڈھلوان کتنی اور کس نقطے پر ہے؟ (ج) جس نقطے پر منحنی کے مماس کی ڈھلوان 8 ہے وہاں مماس کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۳.۴۲: (ا) منحنی $y = x^3 - 3x - 2$ کے افقی مماسوں کی مساواتیں تلاش کریں۔ مماسی نقطے پر مماس کے قائمہ کی مساواتیں بھی تلاش کریں۔(ب) منحنی کی کم تر ڈھلوان کیا ہے اور کس نقطے پر ہے؟ اس نقطے پر مماس کے قائمہ کی مساوات تلاش کریں۔

سوال ۳.۴۳: مبدا اور $(1,2)$ پر منحنی $y = \frac{4x}{x^2+1}$ کے مماسوں کی مساواتیں تلاش کریں۔



سوال ۳.۴۴: نقطہ $(2,1)$ پر $y = \frac{8}{x^2+4}$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔



سوال ۳.۴۵: منحنی $y = ax^2 + bx + c$ نقطہ $(1,2)$ سے گزرتی ہے اور مبدا پر خط $y = x$ کا مماس ہے۔ a ، b اور c تلاش کریں۔

سوال ۳.۴۶: نقطہ $(1,0)$ پر $y = x^2 + ax + b$ اور $y = cx - x^2$ کا مشترک مماس پایا جاتا ہے۔ a ، b اور c تلاش کریں۔

سوال ۳.۴۷: (ا) نقطہ $(-1,0)$ پر منحنی $y = x^3 - x$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔(ب) کمپیوٹر پر منحنی اور مماس کو ترسیم کریں۔ مماس اس منحنی کو دوسرے نقطہ پر قطع کرتا ہے۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے اس نقطے کے محدد کا اندازہ لگائیں۔(ج) مماس اور منحنی کو اکٹھے حل کرتے ہوئے اس نقطے کی تصدیق کریں۔

سوال ۳.۴۸: (ا) مبدا پر منحنی $y = x^3 - 6x^2 + 5x$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔(ب) منحنی اور مماس کو کمپیوٹر پر ایک ساتھ ترسیم کریں۔ مماس اس منحنی کو دوسرے نقطے پر قطع کرتا ہے۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے اس نقطے کے محدد کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔(ج) مماس اور منحنی کو اکٹھے حل کرتے ہوئے اس نقطے کی تصدیق کریں۔

طبیعی استعمال

سوال ۳.۴۹: دباؤ اور حجم بند ڈبہ میں مستقل درجہ حرارت T پر گیس کا حجم H اور دباو P درج ذیل کلیہ کو مطمئن کرتے ہیں جہاں a ، b اور c مستقل ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}H}$ تلاش کریں۔

$$P = \frac{nRT}{H - nb} - \frac{an^2}{H^2}$$

سوال ۳.۵۰: دوا کو جسم کا رد عمل دوا کو جسم کے رد عمل کو عموماً درج ذیل کلیہ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں C مثبت مستقل ہے جبکہ M خون میں جذب دوا کی مقدار ہے۔

$$R = M^2\left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$$

اگر رد عمل فشار خون کی تبدیلی ہو تب R کو ملی میٹر پارہ میں ناپا جاتا ہے۔ اگر رد عمل درجہ حرارت میں تبدیلی ہو تب R کو کیلون میں ناپا جاتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}M}$ تلاش کریں۔ یہ تفرق جو M کا تفاعل ہے، دوا کی مقدار میں تبدیلی کو جسم کی **حساسیت**[۱۴] کہلاتا ہے۔ سوال ۳.۵۳ میں ہم دوا کی وہ مقدار معلوم کریں گے جس کو جسم زیادہ سے زیادہ حساس ہو۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۳.۵۱: فرض کریں کہ قاعدہ حاصل ضرب میں v کی قیمت مستقل c ہو۔ کیا اس سے قاعدہ مضرب مستقل حاصل کیا جا سکتا ہے؟

سوال ۳.۵۲: قاعدہ بالعکس تناسب

(ا) **قاعدہ بالعکس تناسب**[۱۵] کہتا ہے کہ جس نقطے پر تفاعل $v(x)$ قابل تفرق ہو اس نقطے پر

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{v}\right) = -\frac{1}{v^2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

ہو گا۔ دکھائیں کہ قاعدہ بالعکس تناسب در حقیقت قاعدہ حاصل تقسیم کی ایک مخصوص صورت ہے۔ (ب) دکھائیں کہ قاعدہ بالعکس تناسب اور قاعدہ حاصل ضرب کو ملا کر قاعدہ حاصل تقسیم اخذ کیا جا سکتا ہے۔

سوال ۳.۵۳: مثبت عدد صحیح کا دوسرا ثبوت الجبرائی کلیہ

$$cx^n - c^n = (x - c)(x^{n-1} + x^{n-2}c + \cdots + xc^{n-2} + c^{n-1})$$

اور صفحہ ۳.۲ پر دیا گیا کلیہ تفرق (مساوات ۳.۲)

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

---

[۱۴] sensitivity
[۱۵] reciprocal rule

استعمال کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$ حاصل کریں۔

سوال ۳.۵۴: قاعدہ حاصل ضرب کی عمومی صورت قاعدہ حاصل ضرب متغیر x کے قابل تفرق تفاعل u اور v کے لئے درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(uv) = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

(ا) متغیر x کے قابل تفرق تین تفاعل کے حاصل ضرب uvw کے لئے کلیہ کیا ہو گا؟ (ب) متغیر x کے قابل تفرق چار تفاعل کے حاصل ضرب $u_1u_2u_3u_4$ کے لئے کلیہ کیا ہو گا؟ (ج) متغیر x کے قابل تفرق متناہی تعداد تفاعل کے حاصل ضرب $u_1u_2\cdots u_n$ کے لئے کلیہ کیا ہو گا؟

سوال ۳.۵۵: $x^{3/2}$ کو $x \cdot x^{1/2}$ لکھ کر قاعدہ حاصل ضرب استعمال کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{3/2})$ حاصل کریں۔ جواب کو ناطق عدد ضرب x کا ناطق طاقت لکھیں۔ جزو (ب) اور (ج) کو بھی اسی طرح حل کریں۔ (ب) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{5/2})$ تلاش کریں۔ (ج) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{7/2})$ تلاش کریں۔ (د) درج بالا تین جزو میں آپ کیا نقش دیکھتے ہیں۔ ناطق طاقتیں حصہ ۳.۶ کا ایک موضوع ہے۔

۳.۳ تبدیلی کی شرح

اس حصے میں ہم تبدیلی کی شرح پر تفرق کی مدد سے غور کریں گے۔ وقت کے لحاظ سے فاصلہ میں تبدیلی کی مثالیں سستی رفتار اور اسراع ہیں۔ ہم وقت کے علاوہ دیگر متغیر کے لحاظ سے بھی تبدیلی پر غور کر سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر حکیم جاننا چاہے گا کہ دوا میں معمولی تبدیلی سے مریض کی حالت پر کیا اثر ہو گا۔ ماہر اقتصادیات جاننا چاہے گا کہ سرمایہ کاری میں معمولی تبدیلی سے اقتصادی ترقی پر کتنا اثر پایا جائے گا۔ ان سوالات کو موزوں متغیر کے لحاظ سے تفرق کی صورت میں ظاہر کیا جائے گا۔

اوسط اور لمحاتی شرح تبدیلی

ہم کسی دورانیہ پر اوسط شرح تبدیلی سے شروع کرتے ہیں۔ اس دورانیے کو صفر کے نزدیک تر کرنے سے حاصل شرح تبدیلی کی حد کو تفاعل کا تفرق کہتے ہیں۔

تعریف: x کے لحاظ سے وقفہ x_0 تا $x_0 + h$ پر تفاعل $f(x)$ کی **اوسط شرح تبدیلی** سے مراد

$$\text{اوسط شرح تبدیلی} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

ہے۔ x کے لحاظ سے x_0 پر f کی **(لمحاتی) شرح تبدیلی**

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

کو کہتے ہیں بشرطیکہ یہ حد موجود ہو۔

□

روایتی طور پر اگر x وقت کو ظاہر نہ کرتا ہو تب بھی لفظ لمحاتی استعمال کیا جاتا ہے۔ عموماً کو مختصراً کہتے ہیں۔

مثال ۳.۱: دائرے کے رقبہ S اور رداس r کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$S = \pi r^2$$

رقبے کی شرح تبدیلی $r = 0.1\,\mathrm{m}$ پر کیا ہو گی؟
حل: رداس کے لحاظ سے رقبے کی (لمحاتی) شرح تبدیلی

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 2\pi r$$

ہے۔ یوں $r = 0.1\,\mathrm{m}$ کی صورت میں r تبدیل کرنے سے رقبہ تبدیل ہونے کی شرح $0.2\pi\,\mathrm{m}^2/\mathrm{m}$ ہو گی۔ یوں اس رداس پر رداس میں Δr میٹر چھوٹی تبدیلی سے رقبے میں $0.2\pi\Delta r$ مربع میٹر تبدیلی رونما ہو گی۔ □

لکیر پر حرکت۔ ہٹاو، سمتی رفتار، رفتار اور اسراع

فرض کریں کہ محوری خط (جس کو ہم s محور کہتے ہیں) پر ایک جسم یوں حرکت کرتا ہے کہ اس محور پر مقام s اور وقت t کا تعلق

$$s = f(t)$$

ہے۔ دورانیہ t تا $t + \Delta t$ میں جسم کا **ہٹاو**[۱۶]

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

ہو گا (شکل ۳.۳۱) اور اس کی **اوسط سمتی رفتار**[۱۷]

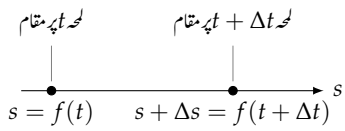
$$v_{\text{اوسط}} = \frac{\text{ہٹاو}}{\text{دورانیہ}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ہو گی۔ ٹھیک لمحہ t پر جسم کی سمتی رفتار جاننے کی خاطر ہم $\Delta t \to 0$ کرتے ہوئے دورانیہ t تا $t + \Delta t$ پر اوسط سمتی رفتار کا حد تلاش کرتے ہیں۔ یہ حد t کے لحاظ سے f کا تفرق ہے۔

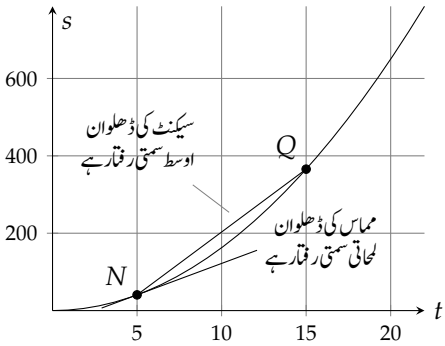
تعریف: جسم کی (لمحاتی) سمتی رفتار وقت کے لحاظ سے تعین گر تفاعل $s = f(t)$ کا تفرق ہو گا۔ لمحہ t پر سمتی رفتار درج ذیل ہو گی۔

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

□



شکل ۳.۳۱: محور پر حرکت کرتے جسم کا t اور $t+\Delta t$ پر مقام



شکل ۳.۳۲: فاصلہ بالمقابل وقت برائے مثال ۳.۲

مثال ۳.۲: ایک گاڑھی کی فاصلہ (میٹر) بالمقابل وقت (سیکنڈ) ترسیم کو شکل ۳.۳۲ میں دکھایا گیا ہے۔ سیکنٹ NQ کی ڈھلوان دورانیہ $t = 5\,\mathrm{s}$ تا $15\,\mathrm{s}$ کے لئے اوسط سمتی رفتار ہے جو $32.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ یعنی $117\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کے برابر ہے۔ لمحہ $t = 5\,\mathrm{s}$ پر مماس کی ڈھلوان اس لمحہ پر لمحاتی سمتی رفتار $16.25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ یعنی $58.5\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ دیتی ہے۔ □

مقدار معلوم روپ

اگر x اور y دونوں متغیر t کے تفاعل ہوں تب $(x(t), y(t))$ کی ترسیم **مقدار معلوم ترسیم**[۱۸] کہلاتی ہے۔ منحنی $y = f(x)$ کی **مقدار معلوم روپ**[۱۹] حاصل کرنے کی خاطر ہم $x = t$ اور $y = f(t)$ لیں گے۔ چند منحنیات کی مقدار معلوم روپ درج ذیل ہے۔

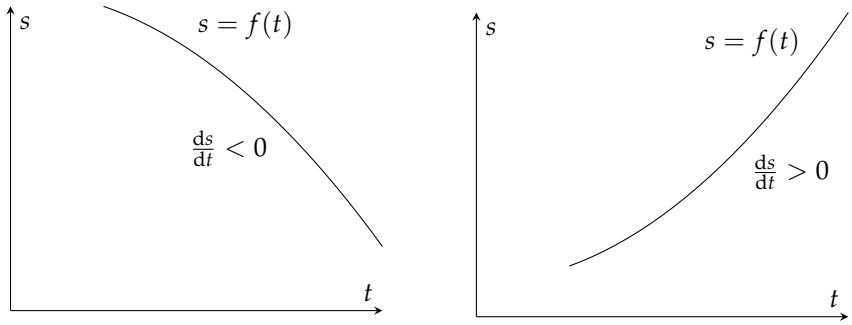
تفاعل	مقدار معلوم روپ
$y = x^2$ (y متغیر x کا تفاعل ہے)	$x(t) = t, y(t) = t^2, -\infty < t < \infty$
$x^2 + y^2 = 4$ (y متغیر x کا تفاعل نہیں ہے)	$x(t) = 2\cos t, y(t) = 2\sin t, 0 \le t \le 2\pi$

سمتی رفتار ہمیں فاصلہ طے کرنے کی شرح کے ساتھ ساتھ حرکت کی سمت بھی دیتی ہے۔ اگر جسم آگے (بڑھتے s) کی طرف حرکت کرتا ہو تب سمتی رفتار مثبت ہو گا؛ اگر جسم پیچھے (گھٹے s) کی طرف حرکت کرتا ہو تب سمتی رفتار منفی ہو گا (شکل ۳.۳۳)۔ سمتی رفتار ایک جسم کتنا تیز فاصلہ طے کرتا ہے۔ اس کے علاوہ ہمیں حرکت کرنے کی سمت کی معلومات بھی

سمتی رفتار کی مطلق قیمت کو **رفتار**[۲۰] کہتے ہیں جو مثبت مقدار ہے۔ اگر آپ اپنے گھر سے دوست کے گھر تک $60\,\mathrm{km}$ کی سمتی رفتار سے گاڑھی چلائیں اور وہاں سے واپسی پر اسی رفتار سے آئیں تو واپسی پر گاڑھی کی سمتی رفتار $-60\,\mathrm{km}$ ہو گی لیکن گاڑھی کا رفتار پیما واپسی پر بھی $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ دکھائے گا چونکہ وہ رفتار ناپتا ہے نا کہ سمتی رفتار۔

---

[۱۶] displacement
[۱۷] average velocity
[۱۸] parametric curve
[۱۹] parametric representation
[۲۰] speed



(ا) بڑھتا s مثبت سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ دیگا۔ (ب) گھٹتا s منفی سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ دیگا۔

شکل ۳.۳۳

تعریف: سمتی رفتار کی مطلق قیمت کو **رفتار**[۲۱] کہتے ہیں۔

$$\text{رفتار} = \left|v(t)\right| = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$$

□

جس شرح سے ایک جسم کی سمتی رفتار تبدیل ہوتی ہے اس کو جسم کی **اسراع** کہتے ہیں۔

تعریف: وقت کے لحاظ سے سمتی رفتار کا تفرق **اسراع**[۲۲] کہلاتا ہے۔ اگر لمحہ t پر ایک جسم کا مقام $s = f(t)$ ہو تب t پر اس جسم کی اسراع درج ذیل ہو گی۔

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$$

□

ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کرتے ہوئے سطح زمین کے قریب ساکن حال سے گرتے ہوئے کسی بھی جسم سے اس کی وضاحت کی جا سکتی ہے۔ ایسے جسم پر صرف کشش ثقل عمل کرتا ہے اور جسم کی حرکت کو **آزادانہ گرنا**[۲۳] کہتے ہیں۔ آزادی سے گرتا ہوا جسم دورانیہ t میں

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

---

[۲۱] speed
[۲۲] acceleration
[۲۳] free fall

فاصلہ طے کرتا ہے جہاں مستقل $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ سطح زمین کے قریب کشش زمین کی بنا اسراع ہے۔ خلا میں ہوا کی غیر موجودگی کی بنا ہوا کی مزاحمت نہیں پائے جاتی ہے اور ہر جسم اس کے تحت حرکت کرتی ہے۔ زمین کے قریب ہوا کی موجودگی میں ہر کثیف، بھاری جسم مثلاً اینٹ، پتھر، وغیرہ کی حرکت، ابتدائی چند سیکنڈ کے لئے جب تک ہوا کی مزاحمت قابل نظر انداز ہو، اس مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔

اسراع کی اکائی $\mathrm{m\,s^{-2}}$ میٹر فی مربع سیکنڈ پڑھی جاتی ہے۔

یہ مساوات ہمیں آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی رفتار اور مقام کے بارے میں معلومات فراہم کرتی ہے۔

مثال ۳.۳: لمحہ $t = 0$ پر ٹھوس جسم کو ساکن حال سے گرنے کے لئے چھوڑا جاتا ہے۔
(ا) پہلے 2 سیکنڈوں میں جسم کتنا فاصلہ طے کرتا ہے۔ (ب) اس لمحہ پر جسم کی رفتار اور اسراع کتنی ہوں گی؟
حل: (ا) پہلے دو سیکنڈوں میں جسم درج ذیل فاصلہ طے کرتا ہے۔

$$s(2) = \frac{1}{2}(9.8)(2^2) = 19.6\,\mathrm{m}$$

(ب) لمحہ t پر رفتار $v(t)$ اور اسراع $a(t)$

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 9.8t, \quad a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 9.8$$

ہوں گے۔ یوں $t = 2\,\mathrm{s}$ پر رفتار اور اسراع درج ذیل ہوں گے۔

$$v(2) = 9.8(2) = 19.6\,\mathrm{m}, \quad a(2) = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

آپ نے دیکھا کہ اسراع a کی قیمت وقت t کا تابع نہیں ہے۔ □

مثال ۳.۴: ایک جسم کو $49\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی ابتدائی رفتار کے ساتھ سیدھا اوپر پھینکا جاتا ہے۔ لمحہ t پر جسم کی بلندی $s = 49 - \frac{1}{2}gt^2$ ہو گی (شکل ۳.۳۴)۔

ا. جسم کس بلندی تک پہنچ پائے گا؟

ب. اوپر جاتے ہوئے $102.9\,\mathrm{m}$ کی بلندی پر جسم کی سمتی رفتار کیا ہو گی؟ نیچے آتے ہوئے اتنی ہی بلندی پر سمتی رفتار کیا ہو گی؟

ج. حرکت کے دوران کسی بھی لمحہ t پر جسم کی اسراع کتنی ہو گی؟

د. جسم زمین پر کب گرے گا؟

حل:

ا. ہم محددی نظام یوں منتخب کرتے ہیں سطح زمین سے فاصلہ مثبت ہو۔ یوں بلندی s مثبت مقدار ہو گی، ابتدائی رفتار مثبت ہو گی جبکہ اسراع جو نیچے رخ عمل کرتا ہے منفی ہو گا۔ اوپر جاتے ہوئے سمتی رفتار مثبت جبکہ نیچے گرتے ہوئے سمتی رفتار منفی ہو گی۔ بلند ترین مقام پر سمتی رفتار صفر ہو گی۔ اب کسی بھی لمحہ پر سمتی رفتار

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 49 - gt$$

ہو گی۔ رفتار اس لمحہ پر صفر ہو گا جب

$$49 - 9.8t = 0, \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{49}{9.8} = 5\,\mathrm{s}$$

ہو۔ لمحہ $t = 5\,\mathrm{s}$ پر جسم کی بلندی درج ذیل ہو گی۔

$$s(5) = 49(5) - \frac{1}{2}(9.8)(5^2) = 122.5\,\mathrm{m}$$

ب. جسم کی رفتار $100\,\mathrm{m}$ پر حاصل کرنے کی خاطر ہم اس بلندی پر لمحہ t تلاش کرتے ہیں۔

$$102.9 = 49t - 4.9t^2, \quad \Longrightarrow \quad t = 3\,\mathrm{s},\, 7\,\mathrm{s}$$

یوں 3 سیکنڈوں میں جسم $102.9\,\mathrm{m}$ بلندی تک پہنچتا ہے جبکہ واپس گرتے ہوئے اسی بلندی پر یہ 7 سیکنڈ بعد ہوتا ہے۔ ان لمحات پر جسم کی سمتی رفتار حاصل کرتے ہیں۔

$$v(3) = 49 - 9.8(3) = 19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad v(7) = 49 - 9.8(7) = -19.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

آپ نے دیکھا کہ دونوں لمحات پر جسم کی رفتار ایک جیسی ہے۔

ج. جسم کی اسراع تلاش کرتے ہیں۔

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -g = -9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

جسم کی اسراع مسلسل $-9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ رہتی ہے۔ اوپر جاتے ہوئے یہ سمتی رفتار کو گھٹاتی ہے جبکہ نیچے گرتے کے دوران یہ سمتی رفتار میں اضافہ پیدا کرتا ہے۔

د. جس اس لمحہ زمین پر ہو گا جب $s = 0$ ہو یعنی:

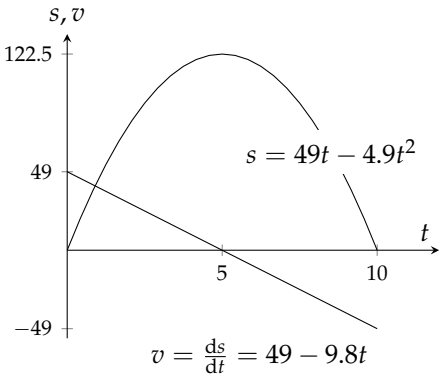
$$49t - 4.9t^2 = 0, \quad \Longrightarrow \quad t(49 - 4.9t) = 0, \quad \Longrightarrow \quad t = 0\,\mathrm{s},\, 10\,\mathrm{s}$$

یوں ابتدائی لمحے پر جسم زمین پر ہو گا اور ٹھیک 10 سیکنڈ بعد یہ واپس زمین پر گرتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ اوپر جانے کا دورانیہ اور نیچے گرنے کا دورانیہ ایک جیسے ہیں۔

□

فنیات انتصابی لکیر پر حرکت کی نقل
مقدار معلوم مساوات

$$x(t) = c, \quad y(t) = f(t)$$



شکل ۳.۳۴: بلندی اور سمتی رفتار (برائے مثال ۳.۴)

کو کمپیوٹر پر **نقطہ ترسیم**[۲۴] کریں جو لمحہ t پر نقطہ $(x(t), y(t))$ دکھائے گی۔ نقطہ ترسیم لمحہ بالمحہ صورت حال دکھاتی ہے۔ یوں اگر $f(t)$ جسم کی بلندی کو ظاہر کرتا ہو تب $(x(t), y(t)) = (c, f(t))$ کی لمحاتی ترسیم جسم کی حقیقی حرکت دکھائے گی۔ مثال ۳.۴ کے لئے اس لمحاتی ترسیم کو پہلے $0 \leq t \leq 5$ اور بعد میں $0 \leq t \leq 10$ وقفے پر دیکھیں۔

دوسرا تجربہ کرنے کی خاطر مقدار معلوم مساوات

$$x(t) = t, \quad y(t) = 49t - 4.9t^2$$

کو نقطہ ترسیم کریں۔

حساسیت

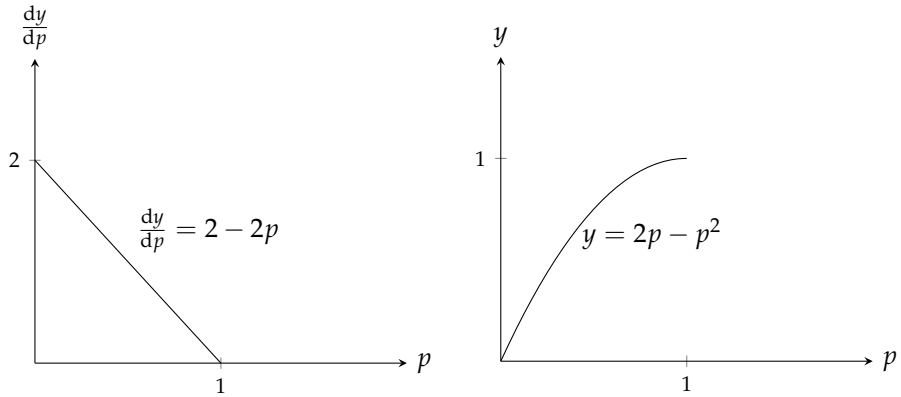
اگر x میں چھوٹی تبدیلی سے تفاعل $f(x)$ میں بڑی تبدیلی رونما ہوتی ہو تب ہم کہتے ہیں کہ x میں تبدیلی کے لئے تفاعل نسبتاً زیادہ **حساس**[۲۵] ہے۔ تفرق $f'(x)$ تفاعل $f(x)$ کی **حساسیت**[۲۶] کی ناپ ہے۔

مثال ۳.۵: تبدیلی کے لئے حساسیت

آسٹریا کے گرگریوہان مینڈل (1822-1884) نے مٹر پر تجربہ کرتے ہوئے **جنیات**[۲۷] کے میدان کی بنیاد ڈالی۔ ان کے نتائج کے مطابق اگر ہموار جلد والے (**غالب**[۲۸]) مٹروں کے **جین**[۲۹] کی تعدد p ہو (جہاں p کی قیمت 0 تا 1 ہو سکتی ہے) اور غیر ہموار جلد والے (**مغلوب**[۳۰]) مٹروں کی جین کی

---

[۲۴] dot graph
[۲۵] sensitive
[۲۶] sensitivity
[۲۷] genetics
[۲۸] dominant
[۲۹] gene
[۳۰] recessive



(ب)حساسیت

(ا)ہموار جلد مٹروں کی تناسب $y = 2p - p^2$

شکل ۳.۳۵: مینڈل کے تجربہ نے جنیات کی بنیاد رکھی۔

تعدد $(1 - p)$ ہوتب مٹروں کی آبادی میں ہموار جلد مٹروں کی تناسب

$$y = 2p(1 - p) + p^2 = 2p - p^2$$

ہے۔

y بالمقابل p کی ترسیم کے مطابق جب p کی قیمت کم ہوتب y زیادہ حساس ہوگا(شکل ۳.۳۵-ا)۔ تفاعل y کے تفرق $\frac{dy}{dp}$ کی ترسیم سے بھی یہی ظاہر ہوتا ہے۔جب p کی قیمت 0 کے قریب ہوتب $\frac{dy}{dp}$ کی قیمت 2 کے قریب ہے اور جب p کی قیمت 1 کے قریب ہوتب $\frac{dy}{dp}$ کی قیمت 0 کے قریب ہے(شکل ۳.۳۵-ب)۔ □

جیسے تفرق کی بات کرتے ہوئے سمتی رفتار اور اسراع کی اصطلاحات استعمال کی جاتی ہیں، اقتصادیات کی میدان میں ہم **حاشیہ**[۳۱] کی بات کرتے ہیں۔

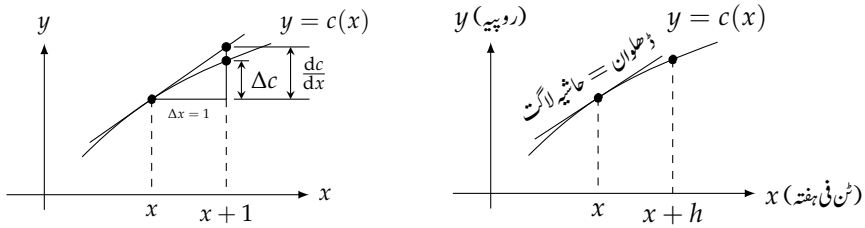
عمل پیداوار میں اشیاء پیدا کرنے کی لاگت $c(x)$ متغیر x کا تفاعل ہے جہاں پیدا کردہ اشیاء کی تعداد x ہے۔ **حاشیہ لاگت پیداوار**[۳۲] سے مراد پیداوار کے لحاظ سے لاگت کی شرح تبدیلی $\frac{dc}{dx}$ ہے۔

مثال کے طور پر ایک ہفتہ میں x ٹن[۳۳] فولاد پیدا کرنے پر $c(x)$ روپیہ لاگت آتی ہے۔اب $x + h$ ٹن فولاد پیدا کرنے پر زیادہ لاگت آئے گی اور لاگت میں اضافہ (تبدیلی) کو h سے تقسیم کرنے سے فی ہفتہ فی ٹن لاگت میں اوسط اضافہ ہوگا۔

$$\frac{c(x+h) - c(x)}{h} = \text{ہفتہ میں } h \text{ ٹن اضافی فولاد پیدا کرنے سے لاگت میں اوسط اضافہ}$$

---

[۳۱] marginals
[۳۲] marginal cost of production
[۳۳] tonne, $1000\,\mathrm{kg}$



(ا) ہفتہ وار پیداوار بالمقابل لاگت

(ب) $\Delta x = 1$ اضافی پیداوار کی اضافی لاگت Δc تقریباً $\frac{dc}{dx}$ کے برابر ہے۔

شکل ۳.۳۶: حاشیہ لاگت پیداوار

فی ہفتہ موجودہ پیداوار x ٹن ہونے کی صورت میں $h \to 0$ کرتے ہوئے اس نسبت کا حد اضافی فولاد پیدا کرنے کی حاشیہ لاگت دے گی (شکل ۳.۳۶-ا)۔

$$\frac{dc}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{c(x+h) - c(x)}{h} = \text{حاشیہ لاگت پیداوار}$$

بعض اوقات ہم اضافی ایک اکائی پیداوار کی اضافی لاگت

$$\frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c(x+1) - c(x)}{1}$$

کو ہی حاشیہ لاگت پیداوار کہتے ہیں جو x پر $\frac{dc}{dx}$ کی تخمین ہے۔ یہ قابل قبول اس لئے ہے کہ x کے نزدیک c کی ڈھلوان میں تبدیلی زیادہ نہیں ہوتی ہے لہٰذا یہاں $\Delta x = 1$ لیتے ہوئے حاصل سیکنٹ کی ڈھلوان کی قیمت حد $\frac{dc}{dx}$ کے قیمت کے بہت قریب ہوگی۔ عملاً x کی بڑی قیمتوں کے لئے یہ تخمین قابل قبول ہوگی (شکل ۳.۳۶-ب)۔

مثال ۳.۶: حاشیہ لاگت فرض کریں کہ x اشیاء پیدا کرنے پر

$$c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

روپیہ لاگت آتی ہے جب x کی قیمت 8 تا 30 ہو۔ ابھی آپ روزانہ 10 اشیاء پیدا کرتے ہیں۔ روزانہ ایک اضافی شہ پیدا کرنے پر کتنی اضافی لاگت آئے گی؟

حل: دس اشیاء بناتے ہوئے مزید ایک شہ پیدا کرنے پر تقریباً $c'(10)$ اضافی لاگت آئے گی

$$c'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 - 6x^2 + 15x) = 3x^2 - 12x + 15$$
$$c'(10) = 3(100) - 12(10) + 15 = 195$$

جو 195 روپیہ کے برابر ہے۔ □

اگرچہ حقیقی اعمال کے کلیات عموماً نہیں پائے جاتے ہیں، نظریہ اقتصادیات ہمیں متوقع نتائج جاننے میں مدد کرتا ہے۔ یہ نظریہ جن تفاعل کا ذکر کرتا ہے انہیں عموماً موزوں وقفہ پر کم درجے کی کثیر رکنیوں سے ظاہر کرنا ممکن ہوتا ہے۔ کبھی کثیر رکنی عموماً اس قابل ہوتی ہے کہ پیچیدہ مسئلے کو ظاہر کر سکے اور کبھی کثیر رکنی کا استعمال زیادہ مشکل بھی نہیں ہوتا ہے۔

مثال ۳.۷: حاشیہ شرح ٹیکس
اگر آپ نی موجودہ آمدن پر حاشیہ شرح ٹیکس $28\,\%$ ہو اور آپ کی آمدنی میں 10000 روپیہ کا اضافہ ہو تب آپ کو اضافی 2800 روپیہ ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ $28\,\%$ حاشیہ ٹیکس کا یہ ہرگز مطلب نہیں ہے کہ آپ کو اپنی آمدن کا $28\,\%$ بطور ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ اس کا مطلب صرف یہ ہے کہ آپ کی موجودہ آمدنی I پر آمدنی بڑھنے کے لحاظ سے ٹیکس کی شرح $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}I} = 0.28$ ہے۔ آپ کو ہر اضافی ایک روپیہ کی آمدن پر 0.28 روپیہ ٹیکس ادا کرنا ہو گا۔ اب ظاہر ہے کہ اگر آپ کی آمدن بہت بڑھ جائے تب آپ ٹیکس کے نئے قالب میں شامل ہوں جائیں گے جہاں حاشیہ شرح ٹیکس غالباً زیادہ ہو گا۔ □

مثال ۳.۸: حاشیہ اگر x ہزار مٹھائی فروخت کرنے سے

$$r(x) = x^3 - 3x^2 + 12x$$

آمدنی حاصل ہو جہاں $5 \leq x \leq 20$ ہے تب 10 ہزار مٹھائی فروخت کرتے ہوئے حاشیہ آمدنی

$$r'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3 - 3x^2 + 12x) = 3x^2 - 6x + 12$$

ہو گی۔ حاشیہ لاگت کی طرح ایک اضافی اکائی فروخت کرنے سے آمدنی میں اضافہ کو حاشیہ آمدنی پیش کرتی ہے۔ اگر آپ 10 ہزار مٹھائیاں فی ہفتہ فروخت کر رہے ہوں تب فی ہفتہ 11 ہزار مٹھائیاں فروخت کرنے سے آپ کی آمدنی میں درج ذیل روپیہ اضافہ متوقع ہو گا۔

$$r'(10) = 3(100) - 6(10) + 12 = 252$$

□

سوالات

محددی لکیر پر حرکت

سوال ۳.۱ تا سوال ۳.۶ میں $a \leq t \leq b$ کے لئے $s = f(t)$ محددی لکیر پر ایک جسم کا مقام دیتی ہے جہاں t کی اکائی سیکنڈ اور s کی اکائی میٹر ہے۔

ا. دیے گئے وقفے پر جسم کا ہٹاو اور سمتی رفتار حاصل کریں۔

ب. اس وقفے کے آخری سروں پر جسم کی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔

ج. جسم کب حرکت کی سمت تبدیل کرتا ہے (اگر ایسا کرتا ہو)؟

سوال ۳.۱: چاند پر آزادانہ گرنا $s = 0.8t^2, \quad 0 \leq t \leq 10$

سوال ۳.۲: مریخ پر آزادانہ گرنا $s = 1.86t^2, \quad 0 \leq t \leq 0.5$

سوال ۳.۳: $s = -t^3 + 3t^2 - 3t, \quad 0 \leq t \leq 3$

سوال ۳.۴: $s = \frac{t^4}{4} - t^3 + t^2, \quad 0 \leq t \leq 2$

سوال۳.۵: $s = \frac{25}{t^2} - \frac{5}{t}, \quad 1 \le t \le 5$

سوال۳.۶: $s = \frac{25}{t+5}, \quad -4 \le t \le 0$

سوال۳.۷: s محور پر لمحہ t پر ایک جسم کا مقام $s = t^3 - 6t^2 + 9t$ ہے۔(ا)ان نقطوں پر اس جسم کی اسراع تلاش کریں جن پر جسم کی سمتی رفتار صفر ہو گی۔(ب)جب جسم کی اسراع صفر ہو اس لمحے پر اس جسم کی رفتار کیا ہو گی؟(ج)لمحہ $t = 0$ تا $t = 2$ کے دوران یہ جسم کل کتنا فاصلہ طے کرتی ہے۔

سوال۳.۸: وقت $t \ge 0$ پر s محور پر حرکت کرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار $v = t^2 - 4t + 3$ ہے۔(ا) جسم کی اسراع وہاں تلاش کریں جہاں جسم کی سمتی رفتار صفر ہے۔(ب) جسم کب آگے رخ اور کب پیچھے رخ حرکت کرتی ہے؟(ج) جسم کی سمتی رفتار کب بڑھتی اور کب گھٹتی ہے؟

آزادانہ گرنا

سوال۳.۹: مریخ اور مشتری کی سطح کے قریب آزادانہ گرنے کے مساوات بالترتیب $s = 1.86t^2$ اور $s = 11.44t^2$ ہیں جہاں t کی اکائی سیکنڈ اور s کی اکائی میٹر ہے۔ساکن حال سے گرتے ہوئے کتنے وقت میں (مریخ اور مشتری میں) ایک جسم کی رفتار $27.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ یعنی تقریباً $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہو گی؟

سوال۳.۱۰: سطح چاند سے انتصابی رخ $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکا گیا پتھر t سیکنڈوں میں $s = 24t - 0.8t^2$ میٹر بلندی پر پہنچے گا۔

ا. لمحہ t پر پتھر کی اسراع کیا ہو گی؟(یہ اسراع چاند پر کشش ثقل کی اسراع ہو گی۔)

ب. پتھر بلند ترین مقام تک کتنے دورانیے میں پہنچے گا؟

ج. پتھر کتنی بلندی تک پہنچ پائے گا؟

د. بلند ترین مقام کی نصف تک پتھر کتنی دیر میں پہنچے گا؟

ھ. پتھر کتنے وقت میں سطح چاند پر گرے گا؟

سوال۳.۱۱: سطح زمین پر ہوا کی غیر موجودگی میں سوال ۳.۱۰ کا پتھر t سیکنڈوں میں $s = 24t - 4.9t^2$ بلندی پر ہو گا۔

ا. لمحہ t پر پتھر کی اسراع کیا ہو گی؟(یہ اسراع چاند پر کشش ثقل کی اسراع ہو گی۔)

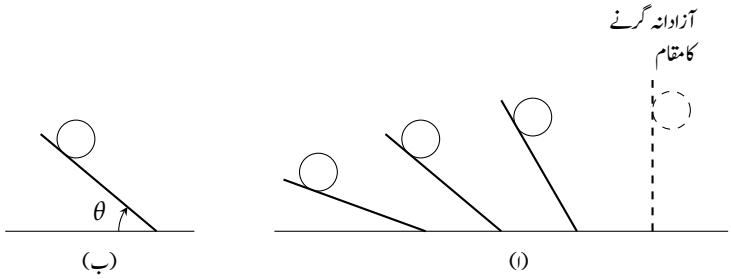
ب. پتھر بلند ترین مقام تک کتنے دورانیے میں پہنچے گا؟

ج. پتھر کتنی بلندی تک پہنچ پائے گا؟

د. بلند ترین مقام کی نصف تک پتھر کتنی دیر میں پہنچے گا؟

ھ. پتھر کتنے وقت میں سطح چاند پر گرے گا؟

سوال ۳.۱۲: ہوا سے خالی ایک دنیا پر ایک ٹھوس جسم کو انتصابی رخ $15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی ابتدائی رفتار سے پھینکا گیا۔اس دنیا کے سطح پر ثقلی اسراع $g_s\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہونے کی بنا t سیکنڈوں میں جسم $s = 15t - \frac{1}{2}g_s t^2$ میٹر بلندی تک پہنچے گا۔یہ جسم بلند ترین مقام تک 20 سیکنڈوں میں پہنچتا ہے۔اس دنیا میں ثقلی اسراع کتنی ہے؟



شکل ۳.۳۷: گلیلو کا تجربہ برائے آزادانہ گرنا(سوال ۳.۱۵)

سوال ۳.۱۳: چاند پر ایک بندوق کو احتصابی رخ چلایا گیا۔ بندوق کی گولی t سیکنڈوں میں $s = 300t - 4.9t^2$ میٹر بلندی پر ہو گی۔ چاند پر یہی گولی t سیکنڈ بعد $s = 300t - 0.8t^2$ میٹر بلندی پر ہو گی۔ دونوں صورتوں میں گولی کتنی دیر بعد سطح پر گرے گی؟

سوال ۳.۱۴: مشتری پر ہوا کی غیر موجودگی میں یہی گولی t سیکنڈ بعد $s = 300t - 11.44t^2$ میٹر بلندی پر ہو گی جبکہ مریخ پر یہ $s = 300t - 1.86t^2$ میٹر کی بلندی پر ہو گی۔ دونوں صورتوں میں گولی کتنے بلندی تک پہنچے گی؟

سوال ۳.۱۵: گلیلو کا کلیہ برائے آزادانہ گرنا ایک پٹی کو مختلف زاویوں پر رکھتے ہوئے گلیلو نے اس پر گیند کی سمتی رفتار کو ناپتے ہوئے کلیہ اخذ کیا جس کی تحدیدی صورت سے آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار کا کلیہ حاصل کرنا مقصد تھا(شکل ۳.۳۷)۔ گلیلو نے دیکھا کہ حرکت کے شروع سے t سیکنڈ بعد سمتی رفتار کی قیمت t کے راست متناسب ہے یعنی $v = kt$ لکھا جا سکتا ہے۔ مستقل k کی قیمت کا دارومدار پٹی کی ڈھلوان پر ہے۔

موجودہ علامتیت استعمال کرتے ہوئے (شکل ۳.۳۷-ب) درحقیقت گلیلو نے درج ذیل کلیہ حاصل کیا تھا جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔

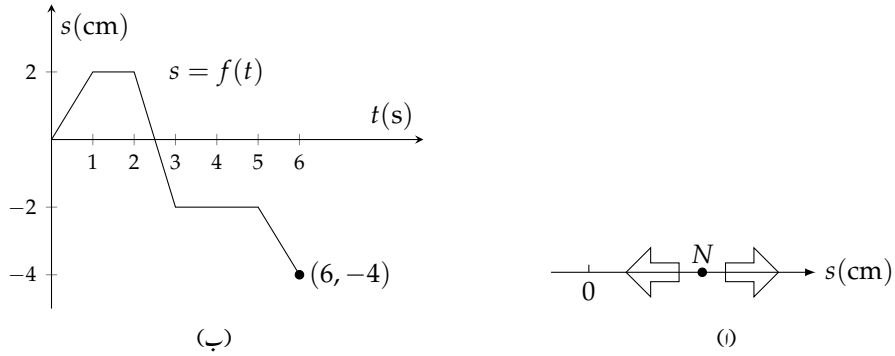
$$v = (9.8 \sin\theta)t$$

(ا) آزادانہ گرتے ہوئے گیند کی رفتار کیا ہو گی؟ (ب) سطح زمین کے قریب جسم کی اسراع کیا ہو گی؟

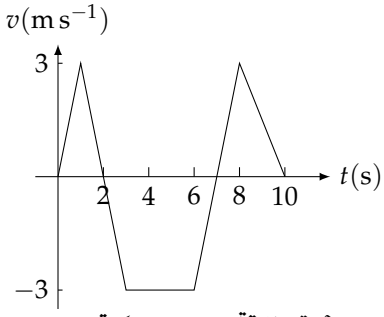
سوال ۳.۱۶: پی سا اگر گلیلو پی سا سے توپ کی گولی 55 m بلندی سے گرنے دیتا تب t سیکنڈ بعد سطح زمین سے اس کی بلندی $s = 55 - 4.9t^2$ ہوتی۔ (ا) لمحہ t پر توپ کی گولی کی سمتی رفتار، رفتار اور اسراع کیا ہوتے؟ (ب) یہ زمین تک کتنی دیر میں پہنچتا؟ (ج) زمین پر پہنچنے کے لمحہ پر اس کی سمتی رفتار کیا ہوتی؟

ترسیم سے حرکت کے بارے میں معلومات اخذ کرنا

سوال ۳.۱۷: ایک محوری لکیر پر ایک جسم کی سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = f(t)$ کو درج ذیل شکل میں ترسیم کیا گیا ہے۔



شکل ۳.۳۸: محوری لکیر پر حرکت (سوال ۳.۱۸)

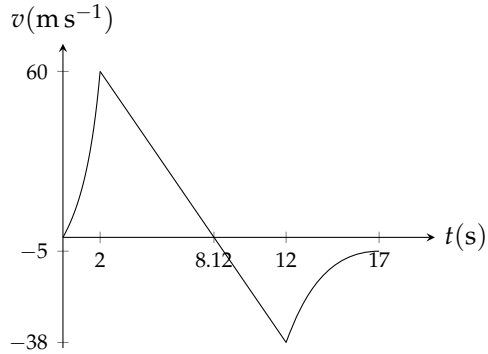


(ا) جسم کب سمت حرکت تبدیل کرتی ہے؟ (ب) کب جسم تقریباً مستقل رفتار سے حرکت کرتی ہے؟ (ج) دورانیہ $0 \leq t \leq 10$ کے لئے جسم کی رفتار ترسیم کریں۔ (د) جسم کی اسراع (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔

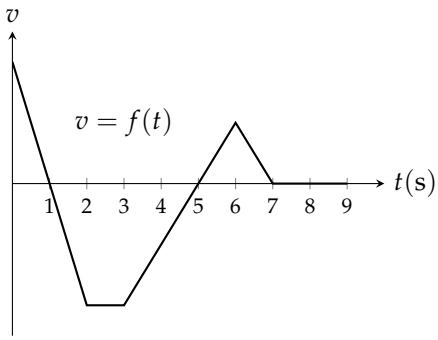
سوال ۳.۱۸: ایک محوری لکیر پر نقطہ N حرکت کرتا ہے۔ اس نقطے کا مقام بالمقابل وقت بھی ترسیم کیا گیا ہے (شکل ۳.۳۸)۔ (ا) N کب بائیں رخ حرکت کرتا ہے؟ کب دائیں رخ حرکت کرتا ہے؟ کب ساکن ہے؟ (ب) اس کی سمتی رفتار اور رفتار (جہاں معین ہوں) ترسیم کریں۔

سوال ۳.۱۹: راکٹ میں چند سیکنڈوں کے لئے ایندھن ہوتا ہے جو اس کو کسی خاص بلندی تک پہنچاتا ہے جس کے بعد راکٹ کچھ دیر تک مزید بلند ہو کر واپس زمین کی جانب گرتا ہے۔ گرنے کے چند لمحات بعد خود کار پیراشوٹ کھلتا ہے جو راکٹ کو حفاظت کے ساتھ نہایت آہستہ زمین تک پہنچاتا ہے۔ ایک راکٹ کی حرکت کو شکل ۳.۳۹ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ (ا) ایندھن ختم ہونے کے لمحہ راکت کی رفتار کتنی تھی؟ (ب) ایندھن کتنے سیکنڈوں تک کے لئے تھا؟ (ج) راکٹ کب بلند ترین مقام تک پہنچا اور بلند ترین مقام پر اس کی رفتار کتنی تھی؟ (د) پیراشوٹ کب کھلا اور اس لمحہ پر راکٹ کی رفتار کتنی تھی؟ (ہ) پیراشوٹ کھلنے سے پہلے راکٹ کتنی دیر تک گرتا رہا؟ (و) راکٹ کی اسراع کب زیادہ سے زیادہ تھی؟ (ز) اسراع کب مستقل تھی اور اس کی قیمت کیا تھی؟

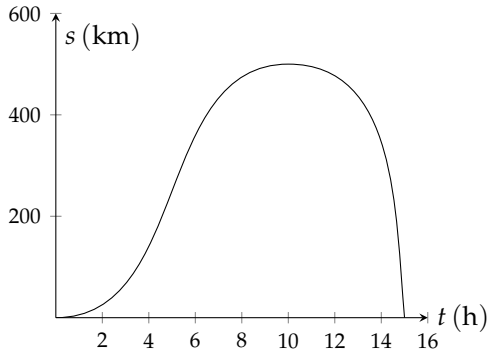
سوال ۳.۲۰: محوری لکیر پر ایک جسم کی رفتار $v = f(t)$ شکل ۳.۴۰ ترسیم کی گئی ہے۔ (ا) کب جسم آگے حرکت، پیچھے حرکت کرتی ہے؟ اس کی رفتار کب تیز؟ کب کم ہوتی ہے؟ (ب) جسم کی اسراع کب مثبت؟ کب منفی؟ اور کب صفر ہے؟ (ج) جسم کی رفتار زیادہ سے زیادہ کب ہوتی ہے؟ (د) کم جسم لمحہ سے زیادہ دورانیے کے لئے ساکن رہتا ہے؟



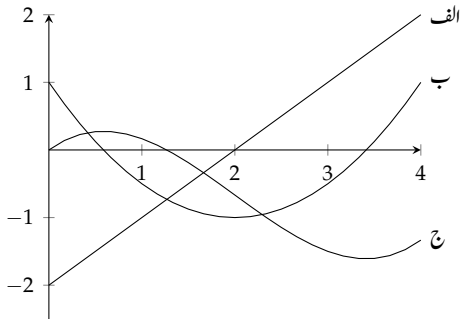
شکل ۳.۳۹: راکٹ کی حرکت (سوال ۳.۱۹)



شکل ۳.۴۰: جسم کی حرکت (سوال ۳.۲۰)



شکل ۳.۴۱: ٹرک کی حرکت (سوال ۳.۲۱)



شکل ۳.۴۲: اشکال برائے سوال ۳.۲۲

سوال ۳.۲۱: ایک ٹرک $t = 0$ پر اڈے سے نکل کر دوسرے شہر مال پہنچا کر 15 گھنٹوں بعد اڈے پر واپس پہنچتا ہے۔اس کے مقام بالمقابل کا شکل ۳.۴۱ میں دکھایا گیا ہے۔مثال ۳.۴ کی طرح $0 \leq t \leq 15$ کے لئے ٹرک کی سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ترسیم کریں۔اسی طریقے کو دہراتے ہوئے سمتی رفتار کی ترسیم سے ٹرک کی اسراع $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ ترسیم کریں۔

سوال ۳.۲۲: ایک جسم کا فاصل s، رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ اور اسراع $a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ بالمقابل وقت t کو شکل ۳.۴۲ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ان میں کون سا ترسیم کون سا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

اقتصادیات

سوال ۳.۲۳: حاشیہ لاگت فرض کریں کہ x مشینوں کو پیدا کرنے پر $c(x) = 2000 + 100x - 0.1x^2$ روپیہ لاگت آتی ہے۔(ا) پہلے 100 مشینوں کی اوسط لاگت کیا ہو گی؟ (ب) اگر 100 پیدا کیے جا رہے ہوں تب حاشیہ لاگت کیا ہو گی؟ (ج) دکھائیں کہ 100 مشین پیدا کرنے کے بعد ایک اضافی مشین پیدا کرنے پر لاگت تقریباً حاشیہ لاگت کے برابر ہے۔

سوال ۳.۲۴: حاشیہ آمدنی۔ فرض کریں کہ x کرسیاں فروخت کرنے سے $r(x) = 2000(1 - \frac{1}{x+1})$ روپیہ آمدنی ہوتی ہے۔(ا) x کرسیوں کی فروخت پر حاشیہ آمدنی کیا ہو گی؟(ب) فی ہفتہ 5 کرسیوں کی بجائے 6 کرسیاں فروخت کرنے سے آمدنی میں اضافہ کو $r'(x)$ سے حاصل کریں۔(ج) $x \to \infty$ کرتے ہوئے تفاعل $r'(x)$ کے حد کی قیمت تلاش کریں۔اس قیمت کا کیا مطلب ہو گا؟

مزید استعمال

سوال ۳.۲۵: جرثوموں پر تجربہ کے دوران ان کی خراک میں جرثومہ مار دوا ملائی گئی۔ جرثوموں کی تعداد کچھ دیر تک بڑھتی رہی جس کے بعد ان کی تعداد کم ہونا شروع ہوئی۔ لمحہ t پر ان کی تعداد $b(t) = 10^6 + 10^4 t - 10^3 t^2$ تھی جہاں t کی اکائی گھنٹہ ہے۔شرح نمو کو(ا) $t = 0$ ؛(ب) $t = 5$ ؛اور $t = 10$ پر تلاش کریں۔

سوال ۳.۲۶: لمحہ t پر ایک ٹینکی سے پانی کا انخلا $Q(t) = 200(30 - t^2)$ لٹر ہے جہاں t کی اکائی منٹ ہے۔دس منٹ بعد پانی کی انخلا کی شرح کیا ہے؟ پہلے دس منٹوں میں اوسط شرح اخراج کتنی ہے؟

سوال ۳.۲۷: ٹینکی کو خالی کرنے کے لئے گھر کے نلکے کھولے جاتے ہیں۔ نلکے کھولنے کے t منٹوں بعد ٹینکی میں پانی کی گہرائی $y = 150(1 - \frac{t}{60})^2$ سنٹی میٹر ہے۔(ا) لمحہ t پر ٹینکی سے پانی کی انخلا $\frac{dy}{dt}$ کیا ہو گی؟(ب) پانی کی گہرائی کب زیادہ سے زیادہ تیزی سے کم ہوتی ہے؟ کب کم سے کم تیزی سے گہرائی گھٹتی ہے؟ ان لمحات پر $\frac{dy}{dt}$ کی قیمت کیا ہے؟(ج) y اور $\frac{dy}{dt}$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں اور $\frac{dy}{dt}$ کی علامت اور قیمتوں کے ساتھ y کے تعلق پر تبصرہ کریں۔

سوال ۳.۲۸: گول غبارے کا حجم $H = \frac{4}{3}\pi r^3$ رداس r کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔(ا) رداس کے ساتھ حجم کی تبدیلی کی شرح $r = 10\,\text{cm}$ پر کیا ہو گی؟(ب) اگر رداس $10\,\text{cm}$ سے $12\,\text{cm}$ ہو تب حجم میں تبدیلی کتنی ہو گی؟

سوال ۳.۲۹: پرواز سے پہلے ہوائی جہاز زمین پر دوڑ کر ایک مخصوص رفتار تک پہنچتا ہے۔ زمین پر دوڑ کے دوران ایک جہاز $D = \frac{10}{9}t^2$ فاصلہ طے کرتا ہے جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔اڑنے کے لئے درکار رفتار $200\,\text{km}\,\text{h}^{-1}$ ہے۔ جہاز کتنے وقت میں اڑ پاتا ہے اور اڑنے سے پہلے یہ زمین پر کتنا فاصلہ طے کرتا ہے؟

سوال ۳.۳۰: جزیرہ ہوائی کی آتش فشاں پہاڑی 1959 نومبر کے مہینے میں جزیرہ ہوائی کے ایک آتش فشاں پھٹ پڑا اور ہوا میں $580\,\text{m}$ کی بلندی تک لاوا اگلنے لگا جو عالمی رکارڈ ہے۔لاوا کی ابتدائی رفتار کتنی تھی؟

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۳.۳۱ تا سوال ۳.۳۴ میں s محور پر حرکت کرتے ہوئے جسم کا مقام لمحہ t پر تعین گر تفاعل $s = f(t)$ دیتا ہے۔اس تفاعل کو سمتی رفتار تفاعل $v = \frac{ds}{dt} = f'(t)$ اور تفاعل اسراع $a = \frac{dv}{dt} = f''(t)$ کے ساتھ اکٹھے ترسیم کریں۔ v اور a کی قیمتوں اور علامت کے لحاظ سے s کے رویہ پر بحث کریں۔ بحث میں درج ذیل شامل کریں۔

ا. کب جسم لحاتی طور پر ساکن ہے؟

ب. کب جسم بائیں (یا نیچے) اور کب یہ دائیں (یا اوپر) رخ حرکت کرتا ہے؟

ج. یہ سمت کو کب تبدیل کرتا ہے؟

د. اس کی رفتار کب بڑھتی اور کب گھٹتی ہے؟

ھ. یہ کب تیز تر اور کب آہستہ تر حرکت کرتا ہے؟

و. مبدا سے جسم دور ترین کب ہوتا ہے؟

سوال ۳.۳۱: $s = 200t - 16t^2, \quad 0 \le t \le 12.5$

سوال ۳.۳۲: $s = t^2 - 3t + 2, \quad 0 \le t \le 5$

سوال ۳.۳۳: $s = t^3 - 6t^2 + 7t, \quad 0 \le t \le 4$

سوال ۳.۳۴: $s = 4 - 7t + 6t^2, \quad 0 \le t \le 4$

۳.۴ تکونیاتی تفاعل کا تفرق

بہت سارے طبعی اعمال، مثلاً برقناطیسی امواج، دل کی دھڑکن، موسم، وغیرہ، دوری ہوتے ہیں۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ہر دوری تفاعل جو ہم حقیقت میں استعمال ہوتا ہو کوسائن اور کوسائن تفاعل کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں تبدیلی پر غور کرنے میں سائن اور کوسائن تفاعل اہم کردار ادا کرتے ہیں۔ اس حصے میں چھ تکونیاتی تفاعل کا تفرق کرنا سکھایا جائے گا۔

چند اہم حد

ہم سب سے پہلے چند عدم مساوات اور حد پیش کرتے ہیں۔ زاویوں کی پیائش ریڈیئن میں ہے۔

مسئلہ ۳: اگر θ کی پیائش ریڈیئن میں ہو تب درج ذیل ہوں گے۔

$$-|\theta| < \sin\theta|\theta| \quad \text{اور} \quad -|\theta| < 1 - \cos\theta < |\theta|$$

ثبوت: ان عدم مساوات کو ثابت کرنے کے لئے ہم شکل ۳.۴۳ پر غور کرتے ہیں جہاں θ ربع اول میں واقع ہے لہٰذا اکائی دائرے کے قوس NA کی لمبائی $|\theta|$ ہو گی۔ چونکہ (سیدھی) قطع AN کی لمبائی قوس AN کی لمبائی θ سے کم ہے لہٰذا قائمہ مثلث ANQ میں مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

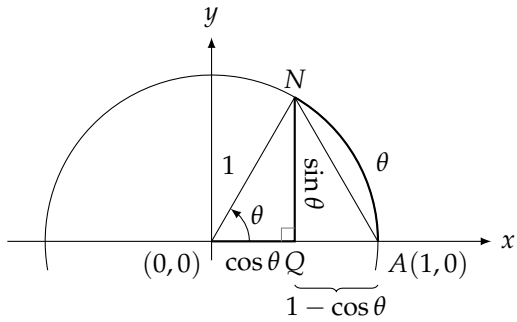
$$\sin^2\theta + (1 - \cos\theta)^2 = (AN)^2 < \theta^2$$

لکھا جا سکتا ہے۔ چونکہ مربع کی قیمت مثبت ہوتی ہے لہٰذا بائیں طرف دونوں اجزاء مثبت ہیں۔ دو مثبت قیمتوں کا مجموعہ دونوں کے انفرادی قیمت سے زیادہ ہوتی ہے لہٰذا

$$\sin^2\theta < \theta^2, \quad (1 - \cos\theta)^2 < \theta^2$$

لکھے جا سکتے ہیں جن کا جذر لینے سے

$$|\sin\theta| < |\theta|, \quad |1 - \cos\theta| < |\theta|$$



شکل ۳.۴۳: اس شکل کی جیومیٹری، جس میں $\theta > 0$ ہے، سے عدم مساوات $\sin^2\theta + (1-\cos\theta)^2 < \theta^2$ لکھی جا سکتی ہے۔

یعنی

$$-|\theta| < \sin\theta < |\theta|\,, \quad -|\theta| < 1-\cos\theta < |\theta|$$

حاصل ہوتے ہیں۔

□

مثال ۳.۱: دکھائیں کہ $\theta = 0$ پر $\sin\theta$ اور $\cos\theta$ استمراری ہیں یعنی:

$$\lim_{\theta\to 0}\sin\theta = 0, \quad \lim_{\theta\to 0}\cos\theta = 1$$

حل: $\theta \to 0$ کرنے سے $|\theta|$ اور $-|\theta|$ دونوں صفر کے نزدیک تر ہوتے ہیں۔ یوں مسئلہ ۳ اور مسئلہ پیچ سے مذکورہ بالا حد ثابت ہوتے ہیں۔ □

تفاعل $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ جہاں θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہے کو شکل ۳.۴۴ میں ترسیم کیا گیا ہے جس کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے $\theta = 0$ پر قابل ہٹاؤ عدم استمرار پایا جاتا ہے۔ اس شکل کے مطابق $\lim_{\theta\to 0} f(\theta) = 1$ ہو گا۔

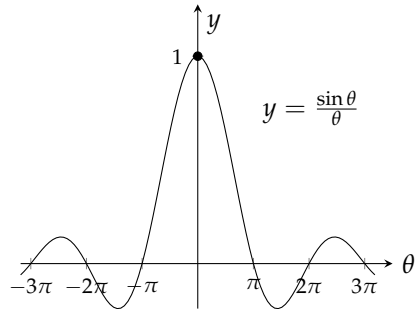
مسئلہ ۴:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1 \qquad (\theta \text{ کی پیمائش ریڈیئن میں ہے}) \tag{۳.۱}$$

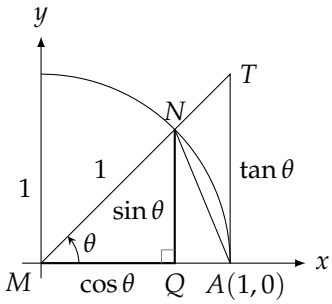
ثبوت: ہم بائیں ہاتھ حد اور دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرتے ہیں۔ یوں دو طرفہ حد بھی 1 ہو گا۔

دائیں ہاتھ حد کو 1 کے برابر ثابت کرنے کی خاطر ہم θ کی قیمت مثبت اور $\frac{\pi}{2}$ سے کم رکھتے ہیں (شکل ۳.۴۵)۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$\Delta MAN \text{ رقبہ} < MAN \text{ رقبہ خط} < \Delta MAT \text{ رقبہ}$$



شکل ۴.۳.۴۴: تفاعل $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ جہاں θ کی پیمائش ریڈیئن میں ہے۔



شکل ۴.۳.۴۵: برائے مسئلہ ۴

ہے۔ان رقبوں کو θ کی صورت

$$\Delta MAN \text{ رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{عمود} = \frac{1}{2}(1)(\sin\theta) = \frac{1}{2}\sin\theta$$
$$MAN \text{ رقبہ خطہ} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(1)^2\theta = \frac{\theta}{2}$$
$$\Delta MAT \text{ رقبہ} = \frac{1}{2} \times \text{قاعدہ} \times \text{عمود} = \frac{1}{2}(1)(\tan\theta) = \frac{1}{2}\tan\theta$$

میں لکھتے ہوئے درج ذیل تعلق حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{2}\sin\theta < \frac{1}{2}\theta < \frac{1}{2}\tan\theta$$

جس کو $\frac{1}{2}\sin\theta$ سے تقسیم کرنے سے

$$1 < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

حاصل ہو گا۔اس کا مقلوب لیتے ہیں جس سے عدم مساوات کی علامتیں الٹ ہوتی ہیں۔

$$1 > \frac{\sin\theta}{\theta} > \cos\theta$$

چونکہ $\lim_{\theta\to 0^+}\cos\theta = 1$ ہے لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{\theta\to 0^+}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

آخر میں دھیان رہے کہ $\sin\theta$ اور θ دونوں طاق تفاعل ہیں لہٰذا $f(\theta) = \frac{\sin\theta}{\theta}$ جفت تفاعل ہو گا جس کا ترسیم y محور کے دونوں اطراف یکساں ہو گا (شکل ۳.۴۴)۔ اس تشاکلی کی بنا بائیں ہاتھ حد بھی موجود ہو گا اور اس کی قیمت بھی 1 ہو گی۔

$$\lim_{\theta\to 0^-} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1 = \lim_{\theta\to 0^+} \frac{\sin\theta}{\theta}$$

یوں صفحہ ۱۳۲ پر مسئلہ ۵ کے تحت $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ ہو گا۔

□

مسئلہ ۴ کو قواعد حد اور معلوم تکونیاتی مماثل کے ساتھ ملاتے ہوئے دیگر تکونیاتی حد تلاش کیے جا سکتے ہیں۔

مثال ۳.۲: دکھائیں کہ $\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$ ہے۔

حل: نصف زاویہ کلیہ استعمال کرتے ہوئے $\cos h = 1 - 2\sin^2\frac{h}{2}$ لکھتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h\to 0} -\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{h} \\
&= -\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta}\sin\theta \qquad (\theta = \frac{h}{2}) \\
&= -(1)(0) = 0
\end{aligned}$$

□

سائن تفاعل کا تفرق

تفاعل $y = \sin\theta$ کا تفرق جاننے کی خاطر ہم مثال ۳.۲ کے حد اور مسئلہ ۴ کو کلیہ

$$\sin(x+h) = \sin x\cos h + \cos x\sin h$$

کے ساتھ ملا کر حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\sin x\cos h+\cos x\sin h)-\sin x}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sin x(\cos h-1)+\cos x\sin h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\sin x\cdot\frac{\cos h-1}{h}\right)+\lim_{h\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{\sin h}{h}\right)\\
&= \sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}+\cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\
&= \sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1\\
&= \cos x
\end{aligned}$$

یوں سائن تفاعل کا تفرق کوسائن تفاعل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)=\cos x$$

مثال ۳.۳:

ا.

$$y=x^2-\sin x:\quad \begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=2x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)\quad \text{(قاعدہ فرق)}\\ &=2x-\cos x\end{aligned}$$

ب.

$$y=x^2\sin x:\quad \begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=x^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)+2x\sin x\quad \text{(قاعدہ حاصل ضرب)}\\ &=x^2\cos x+2x\sin x\end{aligned}$$

ج.

$$y=\frac{\sin x}{x}:\quad \begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}&=\frac{x\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)-\sin x\cdot 1}{x^2}\quad \text{قاعدہ حاصل تقسیم}\\ &=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\end{aligned}$$

□

آپ نے دیکھا کہ اگر زاویہ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو تب $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ ہوتا ہے اور $\sin x$ کا تفرق $\cos x$ ہوتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ احصاء کی میدان میں زاویہ کو درجات کی بجائے ریڈیئن میں ناپا جاتا ہے۔

کوسائن کا تفرق

کوسائن کا تفرق حاصل کرنے کی خاطر ہمیں کلیہ

$$\cos(x+h) = \cos x\cos h - \sin x\sin h$$

استعمال کرنا ہو گا۔

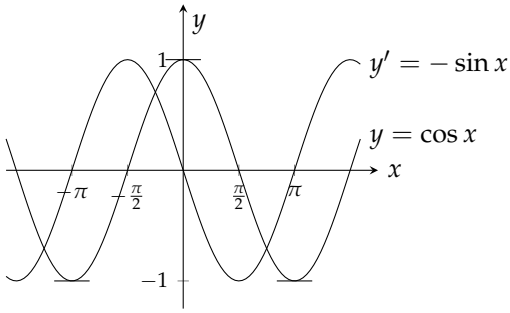
$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\cos x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} && \text{(تفرق کی تعریف)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(\cos x\cos h - \sin x\sin h)-\cos x}{h}\\
&= \lim_{g\to 0}\frac{\cos x(\cos h-1)-\sin x\sin h}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\cos x\cdot\frac{\cos h-1}{h} - \lim_{h\to 0}\sin x\cdot\frac{\sin h}{h}\\
&= \cos x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} - \sin x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\\
&= \cos x\cdot 0 - \sin x\cdot 1 && \text{(مثال ۳.۲ اور مسئلہ ۴)}\\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

یوں کوسائن کا تفرق منفی سائن ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$$

درج بالا تعلق کو شکل ۳.۴۶ میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جہاں کوسائن تفاعل کی ڈھلوان صفر ہے (یعنی $x = -\pi, 0, \pi$) وہاں اس کا تفرق یعنی $y' = -\sin x$ کی قیمت صفر ہے۔ اسی طرح جہاں کوسائن تفاعل کی ڈھلوان زیادہ سے زیادہ بڑھتی یا گھٹتی ہے (مثلاً بالترتیب $x = -\frac{\pi}{2}$ اور $x = \frac{\pi}{2}$ پر) وہاں اس کے تفرق کی (بالترتیب مثبت اور منفی) چوٹی پائی جاتی ہے۔

مثال ۳.۴:



شکل ۴.۳.۶: تفاعل $y = \cos x$ کی ڈھلوان تفاعل $y' = -\sin x$ دیتی ہے۔

ا.

$$\begin{aligned} y &= 5x + \cos x \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) \\ &= 5 - \sin x \end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned} y &= \sin x \cos x \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \sin x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) + \cos x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) \quad \text{(قاعدہ حاصل ضرب)} \\ &= \sin x(-\sin x) + \cos x(\cos x) \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned} y &= \frac{\cos x}{1 - \sin x} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{(1 - \sin x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) - \cos x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)^2} \quad \text{(قاعدہ حاصل تقسیم)} \\ &= \frac{(1 - \sin x)(-\sin x) - \cos x(0 - \cos x)}{(1 - \sin x)^2} \\ &= \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} \qquad (\sin^2 x + \cos^2 x = 1) \\ &= \frac{1}{1 - \sin x} \end{aligned}$$

□

سادہ ہارمونی حرکت

ایک اسپرنگ سے لٹکائے گئے جسم کو نیچے کھینچ کر چھوڑنے سے یہ جسم اوپر نیچے دہراتا ہوا حرکت کرتا ہے جو سادہ ہارمونی حرکت کی ایک مثال ہے۔ اگلے مثال میں قوت روک (مثلاً مزاحمت) سے پاک حرکت پر غور کیا گیا ہے۔

مثال ۳.۵: ایک اسپرنگ سے لٹکائے گئے جسم کو لمحہ $t = 0$ پر ساکن حال سے 5 اکائی نیچے کھینچ کر چھوڑا کر اوپر نیچے حرکت کرنے دیا جاتا ہے۔ لمحہ پر اس جسم کا مقام

$$s = 5\cos t$$

ہے۔ جسم کی سمتی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔

حل:

$$s = 5\cos t$$ ہم مقام

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5\cos t) = 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos t) = -5\sin t$$ سے سمتی رفتار

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-5\sin t) = -5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin t) = -5\cos t$$ اور اسراع حاصل کرتے ہیں

□

درج بالا مثال میں حاصل مساواتوں سے ہم درج ذیل اخذ کرتے ہیں۔

۱. وقت گزرنے کے ساتھ ساتھ s محور پر جسم $s = 5$ اور $s = -5$ کے بیچ حرکت کرتا ہے۔ حرکت کا حیطہ 5 ہے جبکہ اس کی تعدد 2π ہے جو $\cos t$ کی تعدد ہے۔

۲. تفاعل $\sin t$ کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس لمحہ پر ہو گی جب $\cos t = 0$ ہو گا۔ یوں جسم کی رفتار $|v| = 5|\sin t|$ اس لمحہ پر زیادہ سے زیادہ ہو گی جب $\cos t = 0$ ہو یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام سے گزرتا ہے۔

جسم کی رفتار اس لمحہ صفر ہوتی ہے جب $\sin t = 0$ ہو جو حرکت کے وقفہ کے آخری نقطوں پر ہوتا ہے یعنی جب $\cos t = \mp 1$ ہوتا ہے۔

۳. جسم کی اسراع $a = -5\cos t$ اس لمحہ صفر ہوتی ہے جب $\cos t = 0$ ہو گا یعنی جب جسم ساکن حال کے مقام پر ہو۔ کسی بھی دوسرے مقام پر اسپرنگ یا تو جسم کو دھکیل رہا ہو گا اور یا اس کو روکنے کی کوشش کر رہا ہو گا۔ اسراع کی مطلق قیمت مبدا سے دور ترین نقطے پر زیادہ سے زیادہ ہو گی جہاں $\cos t = \mp 1$ ہو گا۔

جھٹکا

اسراع میں یکدم تبدیلی کو ''جھٹکا'' کہتے ہیں۔ جھٹکے سے مراد زیادہ اسراع نہیں ہے بلکہ اس سے مراد اسراع میں یکدم تبدیلی ہے۔ گاڑی میں سواری کے دوران گلاس سے پانی جھٹکا کی وجہ سے گرتا ہے۔ تفرق $\frac{\mathrm{d}^3 s}{\mathrm{d}t^3}$ جھٹکا پیدا کرتا ہے۔

تعریف: اسراع کے تفرق کو جھٹکا[۳۴] کہتے ہیں۔ اگر لمحہ t پر ایک جسم کا مقام $s = f(t)$ ہو تب لمحہ t پر اس کو جھٹکا درج ذیل ہو گا۔

$$j = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^3 s}{\mathrm{d}t^3}$$

□

بعض لوگوں کی طبیعت گاڑی میں صفر کرنے سے خراب ہوتی ہے۔ اس کی وجہ اسراع میں غیر متوقع تبدیلیاں ہیں۔ یوں سڑک پر نظر رکھنے سے اسراع میں تبدیلی زیادہ غیر متوقع نہیں ہوتی ہے جس کی وجہ سے سوار کی طبیعت بھی کم خراب ہوتی ہے۔

مثال ۳.۶:

ا. مستقل ثقلی اسراع $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ کا جھٹکا صفر ہو گا:

$$j = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = 0$$

اسی لئے ایک جگہ بیٹھ کر ہماری طبیعت خراب نہیں ہوتی ہے۔

ب. مثال ۳.۵ کی سادہ ہارمونی حرکت کا جھٹکا

$$\begin{aligned} j = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-5\cos t) \\ &= 5\sin t \end{aligned}$$

ہو گا جس کی زیادہ سے زیادہ مطلق قیمت اس لمحہ پر ہو گی جب $\sin t = \mp 1$ ہو جو مبدا پر ہو گا جہاں اسراع کی سمت تبدیل ہوتی ہے۔

□

دیگر بنیادی تفاعل کے تفرق

چونکہ $\sin x$ اور $\cos x$ متغیر x کے قابل تفرق تفاعل ہیں لہٰذا ان سے متعلقہ درج ذیل تفاعل ہر اس x پر قابل تفرق ہوں گے جہاں یہ معین ہوں۔

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

---

[۳۴] jerk

ان کے تفرق، جو درج ذیل ہیں، کو قاعدہ حاصل تقسیم سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) &= \sec^2 x \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cot x) &= -\csc^2 x \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x) &= \sec x \tan x \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\csc x) &= -\csc x \cot x
\end{aligned} \tag{۳.۲}$$

درج بالا حاصل کرنے کی ترکیب کو دیکھنے کی خاطر ہم $\tan x$ اور $\sec x$ کے تفرق لینا دکھاتے ہیں۔ سوال ۳.۶۷ اور سوال ۳.۶۸ میں آپ کو باقی تعلق حاصل کرنے کو کہا گیا ہے۔

مثال ۳.۷: $y = \tan x$ کا تفرق تلاش کریں۔
حل:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) &= \frac{\cos x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) - \sin x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)}{\cos^2 x} && \text{(قاعدہ حاصل تقسیم)} \\
&= \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

□

مثال ۳.۸: اگر $y = \sec x$ ہو تب y'' تلاش کریں۔
حل:

$$\begin{aligned}
y &= \sec x \\
y' &= \sec x \tan x && \text{(مساوات ۳.۲)} \\
y'' &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x \tan x) \\
&= \sec x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan x) + \tan x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec x) && \text{(قاعدہ حاصل ضرب)} \\
&= \sec x(\sec^2 x) + \tan x(\sec x \tan x) \\
&= \sec^3 x + \sec x \tan^2 x
\end{aligned}$$

□

مثال ۳.۹:

ا.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x+\cot x) = 3 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cot x) = 3 - \csc^2 x$$

ب.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2}{\sin x}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2\csc x) = 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\csc x)\\ &= 2(-\csc x\cot x) = -2\csc x\cot x\end{aligned}$$

□

تکونیاتی تفاعل کی استمرار

چونکہ چھ بنیادی تکونیات تفاعل اپنے پورے دائرہ کار میں قابل تفرق ہیں لہٰذا مسئلہ ا کے تحت یہ اپنے پورے دائرہ کار میں استمراری بھی ہوں گے۔ اس کا مطلب ہے کہ $\sin x$ اور $\cos x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں، $\tan x$ اور $\sec x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں ماسوائے جب x کی قیمت $\frac{\pi}{2}$ کا عددی صحیح مضرب ہو، $\csc x$ اور $\cot x$ تمام x کے لئے استمراری ہیں ماسوائے جب x کی قیمت π کا عدد صحیح مضرب ہو۔ ہر ان تفاعل کے لئے جہاں $f(c)$ معین ہو وہاں $\lim_{x\to c} f(x) = f(x)$ ہو گا۔ نتیجتاً ہم تکونیاتی تفاعل کے کئی الجبرائی ملاپ کے حد بلاواسطہ پر کرنے سے حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال ۳.۱۰: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+\sec x}}{\cos(\pi-\tan x)} = \frac{\sqrt{2+\sec 0}}{\cos(\pi-\tan 0)} = \frac{\sqrt{2+1}}{\cos(\pi-0)} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ □

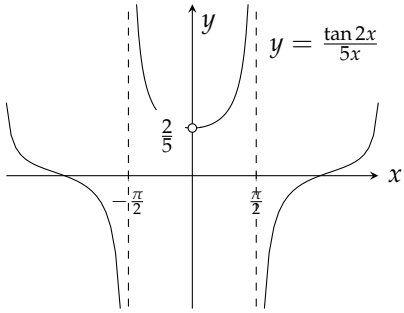
مسئلہ ۴ کی مدد سے دیگر حد کی تلاش

θ کو جس طرح بھی ظاہر کیا جائے مساوات $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ مطمئن ہو گی۔ یوں درج ذیل ہوں گے

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,\ \theta = x;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x} = 1,\ \theta = 7x;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{2x}{3}}{\frac{2x}{3}} = 1,\ \theta = \frac{2x}{3}$$

جہاں $x \to 0$ کرنا $\theta \to 0$ کے مترادف ہے۔ یہ جانتے ہوئے اور زاویہ کو ریڈیئن میں ناپتے ہوئے ہم متعلقہ حد تلاش کر سکتے ہیں۔

مثال ۳.۱۱:



شکل ۳.۴۷: ترسیم برائے مثال ۳.۱۱

ا.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(2/5)\cdot\sin 2x}{(2/5)\cdot 5x} \qquad \text{(تفاعل کو مسئلہ ۴ کی درکار صورت میں لکھا گیا ہے)}\\ &= \frac{2}{5}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\\ &= \frac{2}{5}\cdot 1 = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{5x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{5x}\cdot\frac{1}{\cos 2x}\right) \qquad \left(\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right)\\ &= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{5x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\right)\\ &= \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{\cos 0}\right) = \frac{2}{5}\end{aligned}$$

شکل ۳.۴۷ سے رجوع کریں۔ □

مثال ۳.۱۲: درج ذیل میں $\theta = t - \frac{\pi}{2}$ لے کر حل حاصل کیا گیا ہے۔ یوں $t \to \frac{\pi}{2}$ سے مراد $\theta \to 0$ ہوگا۔

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(t-\frac{\pi}{2})}{t-\frac{\pi}{2}} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

□

احصاء کی میدان کے علاوہ تفاعل $\frac{\sin x}{x}$ دیگر میدانوں مثلاً کوانٹم میکانیات، برقی انجینئری، وغیرہ میں بھی پایا جاتا ہے۔

سوالات

سوال ۳.۱ تا سوال ۳.۱۲ میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۱: $y = -10x + 3\cos x$

سوال ۳.۲: $y = \frac{2}{x} + 3\sin x$

سوال ۳.۳: $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$

سوال ۳.۴: $y = x^2 \cot x - \frac{1}{x^2}$

سوال ۳.۵: $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$

سوال ۳.۶: $y = (\sin x + \cos x)\sec x$

سوال ۳.۷: $y = \frac{\cot x}{1+\cot x}$

سوال ۳.۸: $y = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

سوال ۳.۹: $y = \frac{4}{\cos x} + \frac{1}{\tan x}$

سوال ۳.۱۰: $y = \frac{\cos x}{x} + \frac{x}{\cos x}$

سوال ۳.۱۱: $y = x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x$

سوال ۳.۱۲: $y = x^2 \cos x - 2x\sin x - 2\cos x$

سوال ۳.۱۳ تا سوال ۳.۱۶ میں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۱۳: $s = \tan t - t$

سوال ۳.۱۴: $s = t^2 - \sec t + 1$

سوال ۳.۱۵: $s = \frac{1+\csc t}{1-\csc t}$

سوال ۳.۱۶: $s = \frac{\sin t}{1-\cos t}$

سوال ۳.۱۷ تا سوال ۳.۲۰ میں $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۱۷: $r = 4 - \theta^2 \sin\theta$

سوال ۳.۱۸: $r = \theta\sin\theta + \cos\theta$

سوال ۳.۱۹: $r = \sec\theta\csc\theta$

سوال ۳.۲۰: $r = (1 + \sec\theta)\sin\theta$

سوال ۳.۲۱ تا سوال ۳.۲۴ میں $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q}$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۲۱: $p = 5 + \frac{1}{\cot q}$

سوال ۳.۲۲: $p = (1 + \csc q) \cos q$

سوال ۳.۲۳: $p = \frac{\sin q + \cos q}{\cos q}$

سوال ۳.۲۴: $p = \frac{\tan q}{1 + \tan q}$

سوال ۳.۲۵: (ا) $y = \csc x$ اور (ب) $y = \sec x$ کے لئے y'' تلاش کریں۔

سوال ۳.۲۶: (ا) $y = -2 \sin x$ اور (ب) $y = 9 \cos x$ کے لئے $y^{(4)} = \frac{\mathrm{d}^4 y}{\mathrm{d}x^4}$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۲۷ تا سوال ۳.۳۲ میں حد تلاش کریں۔

سوال ۳.۲۷: $\lim\limits_{x \to 2} \sin\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)$

سوال ۳.۲۸: $\lim\limits_{x \to \pi/6} \sqrt{1 + \cos(\pi \csc x)}$

سوال ۳.۲۹: $\lim\limits_{x \to 0} \sec\left[\cos x + \pi \tan\left(\frac{\pi}{4 \sec x}\right) - 1\right]$

سوال ۳.۳۰: $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{\pi + \tan x}{\tan x - 2 \sec x}$

سوال ۳.۳۱: $\lim\limits_{t \to 0} \tan\left(1 - \frac{\sin t}{t}\right)$

سوال ۳.۳۲: $\lim\limits_{\theta \to 0} \cos\left(\frac{\pi\theta}{\sin \theta}\right)$

سوال ۳.۳۳ تا سوال ۳.۴۸ میں حد تلاش کریں۔

سوال ۳.۳۳: $\lim\limits_{\theta \to 0} \frac{\sin \sqrt{2}\theta}{\sqrt{2}\theta}$

سوال ۳.۳۴: $\lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin kt}{t}, \quad (k = \text{مستقل})$

سوال ۳.۳۵: $\lim\limits_{y \to 0} \frac{\sin 3y}{4y}$

سوال ۳.۳۶: $\lim\limits_{h \to 0^-} \frac{h}{\sin 3h}$

سوال ۳.۳۷: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{x}$

سوال ۳.۳۸: $\lim\limits_{t \to 0} \frac{2t}{\tan t}$

سوال ۳.۳۹: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \csc 2x}{\cos 5x}$

سوال ۳.۴۰: $\lim\limits_{x \to 0} 6x^2 \cot x \csc 2x$

سوال ۳.۴۱: $\lim_{x\to 0} \frac{x+x\cos x}{\sin x \cos x}$

سوال ۳.۴۲: $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x+\sin x}{2x}$

سوال ۳.۴۳: $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(1-\cos t)}{1-\cos t}$

سوال ۳.۴۴: $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(\sin h)}{\sin h}$

سوال ۳.۴۵: $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\sin 2\theta}$

سوال ۳.۴۶: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 4x}$

سوال ۳.۴۷: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 3x}{\sin 8x}$

سوال ۳.۴۸: $\lim_{y\to 0} \frac{\sin 3y \cot 5y}{y \cot 4y}$

مماسی خطوط

سوال ۳.۴۹ تا سوال ۳.۵۲ میں دیے گئے دائرہ کار پر تفاعل ترسیم کریں اور دیے گئے نقطوں پر تفاعل کے مماس بھی ساتھ ہی ترسیم کریں۔ تفاعل اور مماس کی مساواتوں کو اپنے اپنے ترسیم کے قریب لکھیں۔

سوال ۳.۴۹: $y = \sin x,\ -3\pi/2 \le x \le 2\pi,\ x = -\pi, 0, 2\pi$

سوال ۳.۵۰: $y = \tan x,\ -\pi/2 < x < \pi/2,\ x = -\pi/3, 0, \pi/3$

سوال ۳.۵۱: $y = \sec x,\ -\pi/2 < x < \pi/2,\ x = -\pi/3, \pi/4$

سوال ۳.۵۲: $y = 1 + \cos x,\ -3\pi/2 \le x \le 2\pi,\ x = -\pi/3, 3\pi/2$

کیا سوال ۳.۵۳ تا سوال ۳.۵۶ کا دائرہ کار $0 \le x \le 2\pi$ میں کوئی افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اگر ہاں، تو کہاں؟ اگر نہیں تو کیوں نہیں؟ ہو سکتا ہے کہ کمپیوٹر پر تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے آپ کو مدد ملے۔

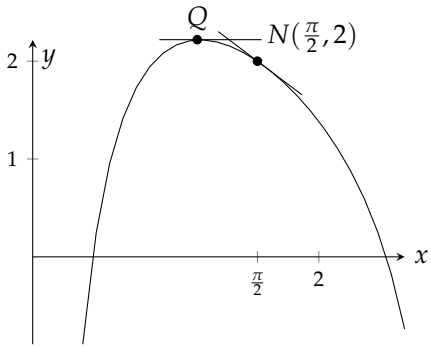
سوال ۳.۵۳: $y = x + \sin x$

سوال ۳.۵۴: $y = 2x + \sin x$

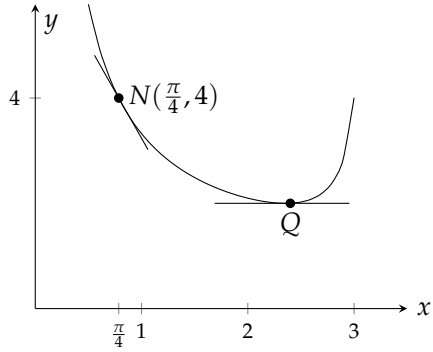
سوال ۳.۵۵: $y = x - \cot x$

سوال ۳.۵۶: $y = x + 2\cos x$

سوال ۳.۵۷: منحنی $y = \tan x$ پر $-\pi/2 < x < \pi/2$ کے بیچ وہ تمام نقطے تلاش کریں جہاں مماس خط $y = 2x$ کے متوازی ہے۔ منحنی اور ان مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔



شکل ۳.۴۸: تفاعل $y = 4 + \cot x - 2\csc x$ کی منحنی (سوال ۳.۵۹)



شکل ۳.۴۹: تفاعل $y = 1 + \sqrt{2}\csc x + \cot x$ کی منحنی (سوال ۳.۶۰)

سوال ۳.۵۸: منحنی $y = \cot x,\ 0 < x < \pi$ پر وہ تمام نقطے تلاش کریں جہاں مماس خط $y = -x$ کے متوازی ہے۔ منحنی اور مماس کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال ۳.۵۹: نقطہ N اور نقطہ Q پر شکل ۳.۴۸ کی منحنی کی مماس کی مساواتیں حاصل کریں۔ Q پر مماس افقی ہے۔

سوال ۳.۶۰: نقطہ N اور نقطہ Q پر شکل ۳.۴۹ کی منحنی کی مماس کی مساواتیں حاصل کریں۔ Q پر مماس افقی ہے۔

سادہ ہارمونی حرکت

سوال ۳.۶۱ تا سوال ۳.۶۱ میں محوری لکیر s پر ایک جسم کا مقام $s = f(t)$ دیا گیا ہے جہاں فاصلے کی اکائی میٹر اور وقت کی اکائی سیکنڈ ہے۔ لمحہ $t = \pi/4$ سیکنڈ پر جسم کی سمتی رفتار، رفتار، اسراع اور جھٹکا تلاش کریں۔

سوال ۳.۶۱: $s = 2 - 2\sin t$

سوال ۳.۶۲: $s = \sin t + \cos t$

نظریہ اور مزید مثالیں

سوال ۳.۶۳: کیا c کی کوئی قیمت درج ذیل تفاعل کو $x = 0$ پر استمراری بنا سکتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 3x}{x^2}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

سوال ۳.۶۴: کیا b کی کوئی قیمت درج ذیل تفاعل کو $x = 0$ پر (ا) استمراری (ب) قابل تفرق بنا سکتی ہے؟ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

$$g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, x \geq 0 \end{cases}$$

سوال ۳.۶۵: $\frac{\mathrm{d}^{999}}{\mathrm{d}x^{999}}(\cos x)$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۶۶: $\frac{\mathrm{d}^{725}}{\mathrm{d}x^{725}}(\sin x)$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۶۷: x کے لحاظ سے (ا) $\sec x$ اور (ب) $\csc x$ کے تفرق کا کلیہ اخذ کریں

سوال ۳.۶۸: x کے لحاظ سے $\cot x$ کے تفرق کا کلیہ اخذ کریں

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۳.۶۹: $-\pi \leq x \leq 2\pi$ کے لئے $y = \cos x$ ترسیم کریں۔ ساتھ ہی $h = 1, 0.5, 0.3, 0.1$ لیتے ہوئے درج ذیل ترسیم کریں۔

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$$

اب $h = -1, -0.5, -0.3$ کے لئے اس کو ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ $h \to 0^+$ اور $h \to 0^-$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟ کیا ہو رہا ہے؟

سوال ۳.۷۰: وسطی فرق حاصل تقسیم **وسطی تفریقی حاصل تقسیم**[۳۵]

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

کو اعدادی تراکیب میں $f'(x)$ کی تخمین کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ اگر $f'(x)$ موجود ہو تب $h \to 0$ کرتے ہوئے یہ تفاعل کا تفرق دیتی ہے جو h کی کسی بھی قیمت کے لئے عموماً **فرمٹے تفریقی حاصل تقسیم**[۳۶]

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

سے بہتر ہوتا ہے (شکل ۳.۵۰)۔ (ا) یہ دیکھنے کی خاطر کہ $f(x) = \sin x$ کا وسطی تفریقی حاصل تقسیم کتنا تیزی سے $f'(x) = \cos x$ تک پہنچتا ہے، $h = 1, 0.5, 0.3$ لیتے ہوئے وقفہ $[-\pi, 2\pi]$ پر $y = \cos x$ اور

$$y = \frac{\sin(x+h) - \sin(x-h)}{2h}$$

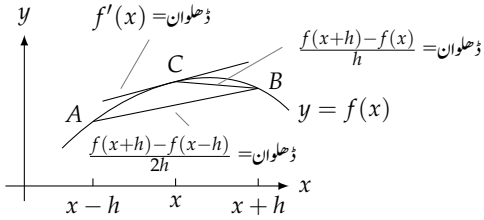
کو اکٹھے ترسیم کریں۔ سوال ۳.۶۹ میں h کی انہیں قیمتوں کے ترسیمات کے ساتھ موازنہ کریں۔

(ب) یہ دیکھنے کی خاطر کہ $f(x) = \cos x$ کا وسطی تفریقی حاصل تقسیم کتنا تیزی سے $f'(x) = -\sin x$ تک پہنچتا ہے، $h = 1, 0.5, 0.3$ لیتے ہوئے وقفہ $[-\pi, 2\pi]$ پر $y = -\sin x$ اور

$$y = \frac{\cos(x+h) - \cos(x-h)}{2h}$$

---

[۳۵] centered difference quotient
[۳۶] Fermat's difference quotient



شکل ۳.۵۰: فرمٹ تفریقی حاصل تقسیم سے وسطی تفریقی حاصل تقسیم بہتر ڈھلوان دیتا ہے۔

کو اکٹھے ترسیم کریں۔ سوال ۳.۶۹ میں h کی انہیں قیمتوں کے ترسیمات کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۳.۷۱: وسطی تفریقی حاصل تقسیم کے لئے انتباہ بعض اوقات x پر ناقابل تفرق $f(x)$ کے لئے بھی وسطی تفریقی حاصل تقسیم

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$$

کا $h \to 0$ کرتے ہوئے حد موجود ہو سکتا ہے۔ مثال کے طور پر $f(x) = |x|$ لیں اور

$$\lim_{h\to 0} \frac{|0+h| - |0-h|}{2h}$$

کا حساب لگائیں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ حد موجود ہے اگرچہ $x = 0$ پر $f(x) = |x|$ کا تفرق غیر موجود ہے۔

سوال ۳.۷۲: دائرہ کار $(-\pi/2, \pi/2)$ پر $y = \tan x$ اور اس کا تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کیا ترسیم کا (ا) کم ترین ڈھلوان (ب) زیادہ سے زیادہ ڈھلوان پایا جاتا ہے؟ کیا ڈھلوان کبھی منفی بھی ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۷۳: دائرہ کار $0 < x < \pi$ پر $y = \cot x$ اور اس کا تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ کیا ترسیم کا (ا) کم ترین ڈھلوان (ب) زیادہ سے زیادہ ڈھلوان پایا جاتا ہے؟ کیا ڈھلوان کبھی مثبت بھی ہوتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۷۴: وقفہ $-2 \le x \le 2$ پر $y = \frac{\sin x}{x}$، $y = \frac{\sin 2x}{x}$ اور $y = \frac{\sin 4x}{x}$ کو اکٹھے ترسیم کریں۔ y محور کو یہ ترسیمات کہاں کہاں قطع کرتا نظر آتی ہیں؟ کیا یہ ترسیمات محور کو حقیقتاً قطع کرتی ہیں؟ $x \to 0$ کرتے ہوئے آپ $y = \frac{\sin 5x}{x}$ اور $y = \frac{\sin(-3x)}{x}$ کی ترسیمات سے کیا توقع کرتے ہیں؟ اور کیوں؟ k کی مزید مختلف قیمتوں کے لئے $y = \frac{\sin kx}{x}$ سے کیا توقع کیا جا سکتا ہے؟ اپنے جوابات کی وجوہات پیش کریں۔

سوال ۳.۷۵: درجات بالمقابل ریڈیئن x کو درجات میں ناپتے ہوئے $\sin x$ اور $\cos x$ کی تفرق پر غور کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کرتے ہیں۔

ا. زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے کمپیوٹر پر

$$f(h) = \frac{\sin h}{h}$$

ترسیم کرتے ہوئے $\lim_{h\to 0} f(h)$ کا اندازہ لگائیں۔ اس اندازے کا $\frac{\pi}{180}$ کے ساتھ موازنہ کریں۔ کیا اس حد کی قیمت $\frac{\pi}{180}$ کے برابر ہونے کی کوئی وجہ پیش کی جا سکتی ہے۔

ب. زاویہ کو درجات میں ہی رکھتے ہوئے درج ذیل کا اندازہ لگائیں۔

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h}$$

ج. اب $\sin x$ کے تفرق کو دوبارہ دیکھیں۔ زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے اس عمل سے گزرتے ہوئے $\sin x$ کا تفرق حاصل کریں۔

د. اسی طرح زاویہ کو درجات میں رکھتے ہوئے $\cos x$ کے تفرق کا عمل استعمال کرتے ہوئے $\cos x$ کے تفرق کا کلیہ حاصل کریں۔

ھ. بلند رتبی تفرق لیتے ہوئے زاویہ کو درجات میں رکھنے کے مسئلے جلد سامنے آتے ہیں۔ $y=\sin x$ اور $y=\cos x$ کے لئے y'' اور y''' تلاش کریں۔

۳.۵ زنجیری قاعدہ

ہم $\sin x$ اور x^2-4 کا تفرق لینا جانتے ہیں۔ مرکب تفاعل مثلاً $\sin(x^2-4)$ کا تفرق **زنجیری قاعدہ**[۳۷] کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے جس کے تحت قابل تفرق تفاعل کے مرکب کا تفرق ان کے انفرادی تفرق کا حاصل ضرب ہو گا۔ احصاء میں تفرق کے حصول کے لئے زنجیری قاعدہ غالباً سب سے زیادہ استعمال کیا جاتا ہے۔ اس حصے میں زنجیری قاعدہ اور اس کی استعمال پر غور کیا جائے گا۔ شروع چند مثالوں سے کرتے ہیں۔

مثال ۳.۱: تفاعل $y=6x-10=2(3x-5)$ حقیقتاً تفاعل $y=2u$ اور $u=3x-5$ کا مرکب ہے۔ ان تینوں تفاعل کے تفرق کا آپس میں تعلق کیا ہے؟

حل: ان تفاعل کے تفرق حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=6,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=2,\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3$$

چونکہ $6=2\cdot 3$ ہے لہٰذا اس مثال میں درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

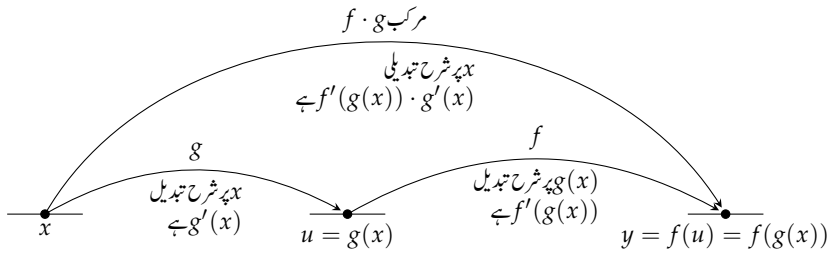
کیا تعلق

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

ایک اتفاق ہے؟ اگر ہم تفرق کو شرح تبدیلی تصور کریں اور $y=f(u)$ ، $u=g(x)$ ہوں تب اگر u سے y دگنا تبدیل ہوتا ہو اور x سے y تین گنا تبدیل ہوتا ہو تب ہم توقع کریں گے کہ x سے y چھ گنا تبدیل ہو گا۔

---

[۳۷] chain rule



شکل ۳.۵۱: $g(x)$ پر f کے تفرق اور x پر g کے تفرق کا حاصل ضرب x پر مرکب $f \cdot g$ کا تفرق دے گا۔

آئیں دوسرا تفاعل لے کر دیکھیں۔

مثال ۳.۲: $y = 9x^4 + 6x^2 + 1 = (3x^2+1)^2$ کو $y = u^2$ اور $u = 3x^2 + 1$ کا مرکب لکھا جا سکتا ہے۔ تفرق لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 2u \cdot 6x \\ &= 2(3x^2+1) \cdot 6x \\ &= 36x^3 + 12x\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(9x^4 + 6x^2 + 1) \\ &= 36x^3 + 12x\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں اور ایک بار پھر درج ذیل لکھنا ممکن ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

□

x پر مرکب تفاعل $f(g(x))$ کا تفرق $g(x)$ پر f کا تفرق اور x پر g کے تفرق کا حاصل ضرب ہے۔ اس کو زنجیری قاعدہ کہتے ہیں (شکل ۳.۵۱)۔

مسئلہ ۵: **زنجیری قاعدہ**

اگر $u = g(x)$ پر $f(u)$ قابل تفرق ہو اور x پر $g(x)$ قابل تفرق ہو تب x پر مرکب تفاعل

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

قابل تفرق ہو گا اور

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{۳.۱}$$

ہو گا۔ لیبنٹز طرز لکھائی میں اگر $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ ہوں تب

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{۳.۲}$$

ہو گا جہاں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$ کو $u = g(x)$ پر حاصل کیا جاتا ہے۔

زنجیری قاعدہ کو

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

لکھ کر $\Delta x \to 0$ کرتے ہوئے حد لینے سے زنجیری قاعدے کو ثابت نہیں کیا جا سکتا ہے چونکہ عین ممکن ہے کہ x میں تبدیلی سے u میں تبدیلی Δu صفر ہو۔ زنجیری قاعدہ ثابت کرنے کی خاطر ہمیں حصہ ۴.۷ میں پیش کیے گئے تصورات کی ضرورت ہو گی۔ یہ ثبوت اس وقت پیش کیا جائے گا جب ہم اس کو سمجھنے کے قابل ہوں۔

مثال ۳.۳: $y = \sqrt{x^2+1}$ کا تفرق تلاش کریں۔

حل: یہاں $y = f(g(x))$ یعنی $u = x^2+1$ اور $f(u) = \sqrt{u}$ ہیں۔ چونکہ f اور g کے تفرق

$$f'(u) = \frac{1}{2\sqrt{u}}, \quad g'(x) = 2x$$

ہیں لہٰذا زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (2x) \\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

□

باہر، اندر قاعدہ

اگر $y = f(g(x))$ ہو تب مساوات ۳.۲ درج ذیل کہتی ہے

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'[g(x)] \cdot g'(x) \tag{۳.۳}$$

جہاں دائیں طرف f کی اندرون کو نظر انداز کر کے جوں کا توں رکھ کر f کا تفرق لے کر اس کو f کی اندرون کے تفرق کے ساتھ ضرب کیا جاتا ہے۔ یوں پہلے بیرونی تفاعل کا تفرق اور بعد میں اندرونی تفاعل کا تفرق لیا جاتا ہے۔

مثال ۳.۴:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\overbrace{\sin}^{\text{بیرونی}}\underbrace{(x^2+x)}_{\text{اندرونی}} = \overbrace{\cos}^{\text{تفرق بیرونی}}\underbrace{(x^2+x)}_{\text{اندرونی نظر انداز}}\cdot\underbrace{(2x+1)}_{\text{تفرق اندرونی}}$$

□

زنجیری قاعدہ کا بار بار اطلاق

بعض اوقات ہم زنجیری قاعدہ کو دو یا دو سے زیادہ مرتبہ استعمال کرتے ہوئے تفاعل کا تفرق حاصل کرتے ہیں۔ درج ذیل مثال میں ایسا ہی کیا گیا ہے۔

مثال ۳.۵: $g(t) = \tan(5-\sin 2t)$ کا تفرق تلاش کریں۔

$$\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tan(5-\sin 2t)) \\
&= \sec^2(5-\sin 2t)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(5-\sin 2t) && u=5-\sin 2t \text{ لے کر } \tan u \text{ کا تفرق} \\
&= \sec^2(5-\sin 2t)\cdot(0-(\cos 2t)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t)) && u=2t \text{ لے کر } 5-\sin u \text{ کا تفرق} \\
&= \sec^2(5-\sin 2t)\cdot(-\cos 2t)\cdot 2 \\
&= -2(\cos 2t)\sec^2(5-\sin 2t)
\end{aligned}$$

□

زنجیری قاعدہ پر مبنی تفرق کے کلیات

تفرق کے حصول کے کئی کلیات میں زنجیری قاعدہ در ساختہ موجود ہوتا ہے۔ اگر f متغیر u کا قابل تفرق تفاعل ہو اور u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو تب $y=f(u)$ کو زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

میں پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(u) = f'(u)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

مثال کے طور پر اگر u تغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور $y = u^n$ ہو جہاں n عدد صحیح ہے تب زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u^n)\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\\ &= nu^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\end{aligned}$$

قاعدہ ۳.۸: **طاقت کا زنجیری قاعدہ**

اگر $u(x)$ قابل تفرق ہو اور n عدد صحیح ہو تب u^n قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u^n = nu^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{۳.۴}$$

مثال ۳.۶:

ا.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^5 x &= 5\sin^4 x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)\\ &= 5\sin^4 x\cos x\end{aligned}$$

ب.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x+1)^{-3} &= -3(2x+1)^{-4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x+1)\\ &= -3(2x+1)^{-4}(2)\\ &= -6(2x+1)^{-4}\end{aligned}$$

ج.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^3-x^4)^7 &= 7(5x^3-x^4)^6\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5x^3-x^4)\\ &= 7(5x^3-x^4)^6(5\cdot 3x^2-4x^3)\\ &= 7(5x^3-x^4)^6(15x^2-4x^3)\end{aligned}$$

د.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{3x-2}\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x-2)^{-1}\\ &= -1(3x-2)^{-2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x-2)\\ &= -1(3x-2)^{-2}(3)\\ &= -\frac{3}{(3x-2)^2}\end{aligned}$$

□

درج بالا مثال میں تفاعل $\sin^5 x$ استعمال کیا گیا جو $(\sin x)^5$ لکھنے کا مختصر طریقہ ہے۔

مثال ۳.۷: درجات بالمقابل ریڈیئن

یہ یاد رکھنا ضروری ہے کہ $\sin x$ کا تفرق اس صورت $\cos x$ ہو گا جب زاویہ کی پیمائش ریڈیئن میں ہو نا کہ درجات میں۔ زنجیری قاعدہ ان دونوں میں فرق کو سمجھنے میں مدد دیتا ہے۔ چونکہ ریڈیئن $180^\circ = \pi$ ہوتا ہے لہٰذا ریڈیئن $x^\circ = \frac{\pi x}{180}$ ہو گا اور زنجیری قاعدہ کے تحت

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x^\circ) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(\tfrac{\pi x}{180}) = \tfrac{\pi}{180}\cos(\tfrac{\pi x}{180}) = \tfrac{\pi}{180}\cos(x^\circ)$$

ہو گا۔ اسی طرح $\cos(x^\circ)$ کا تفرق $-\frac{\pi}{180}\sin(x^\circ)$ ہو گا۔

زاویہ کی پیمائش درجات میں رکھنے سے سائن اور کوسائن کی ایک مرتبہ تفرق میں تنگ کرنے والا $\frac{\pi}{180}$ کا جزو آن پڑتا ہے جو زیادہ مرتبہ تفرق کی صورت میں مصیبت بن جاتا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زاویہ کی ناپ ریڈیئن میں رکھنے سے ہماری زندگی زیادہ آسان ہو گی۔ □

مثال ۳.۸: برف کے مکعب کا پگھلنا برف کا مکعب کتنی دیر میں پگھلے گا؟

حل: ہم پہلے اس مسئلے کا ریاضی نمونہ بناتے ہیں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ پگھلنے سے مکعب کی شکل تبدیل نہیں ہوتی ہے۔ یوں اگر مکعب کے کنارے کی لمبائی s ہو تب اس کا حجم $H = s^3$ ہو گا۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ s اور H متغیر t (وقت) کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ مکعب کے حجم میں کمی مکعب کی سطح کے راست متناسب ہے۔ یہ مفروضہ اس لئے قابل قبول ہو گا کہ مکعب پگھلنے کی وجہ مکعب میں داخل حراری توانائی ہے جو مکعب کی سطح سے مکعب میں داخلی ہوتی ہے۔ یوں سطح کا رقبہ تبدیل کرنے سے حجم میں کمی کی رفتار تبدیل ہو گی۔ ریاضی کی زبان میں ہم

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s} = -k(6s^2), \qquad k > 0$$

لکھتے ہیں جہاں منفی کی علامت حجم میں کمی کو ظاہر کرتی ہے۔ تناسب کا مستقل k مثبت مقدار ہے (جو حقیقتاً کئی عوامل مثلاً ارد گرد کی ہوا، ہوا کا درجہ حرارت، رطوبت اور سورج کی روشنی وغیرہ پر منحصر ہو گا)۔

آخر میں ہمیں مزید (کم سے کم) ایک معلومات کی ضرورت ہے: کتنی دیر میں مکعب کا کتنا حصہ پگھلتا ہے؟ ہمیں ایک یا ایک سے زیادہ مشاہدہ کر کے یہ معلومات حاصل کرنی ہو گی۔ فی الحال ہم فرض کرتے ہیں کہ پہلے ایک گھنٹہ میں ایک چوتھائی حجم پگھل جاتا ہے۔ ابتدائی حجم کو H_0 لیتے ہوئے ریاضی کی زبان میں اس کو

لکھتے ہیں۔

$$H = s^3, \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -k(6s^2)$$
$$H = H_0 \quad \text{پر} \quad t = 0$$
$$H = \frac{3}{4}H_0 \quad \text{پر} \quad t = 1\,\mathrm{h}$$

اب ہمیں $H = 0$ پر t تلاش کرنا ہو گا۔
ہم $H = s^3$ کا تفرق زنجیری قاعدہ سے t کے لحاظ سے حاصل کر کے

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 3s^2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

تبدیلی کی شرح $-k(6s^2)$ کے برابر پر کرتے ہوئے

$$3s^2\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -6ks^2$$
$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -2k$$

حاصل کرتے ہیں۔اطراف کی لمبائی مستقل شرح $2k$ سے کم ہو رہی ہے۔یوں اگر اطراف کی ابتدائی لمبائی s_0 ہو تب ایک گھنٹہ بعد لمبائی $s_1 = s_0 - 2k$ ہو گی جس سے

$$2k = s_0 - s_1$$

لکھا جا سکتا ہے۔پگھلنے کا وقت $2kt = s_0$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی:

$$t_{\text{پگھلنا}} = \frac{s_0}{2k} = \frac{s_0}{s_0 - s_1} = \frac{1}{1 - \frac{s_1}{s_0}}$$

ہم جانتے ہیں کہ

$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{(\frac{3}{4}V_0)^{1/3}}{V_0^{1/3}} = (\tfrac{3}{4})^{1/3} \approx 0.91$$

ہے لہٰذا پگھلنے کے لئے درکار وقت درج ذیل ہو گا۔

$$t_{\text{پگھلنا}} = \frac{1}{1 - 0.91} \approx 11\,\mathrm{h}$$

آپ نے دیکھا کہ اگر $\frac{1}{4}$ حجم پہلے 1 گھنٹہ میں پگھلتا ہو تب باقی حجم کو پگھلنے کے لئے تقریباً 10 گھنٹے درکار ہوں گے۔ □

اگر ہم سائنسدان ہوتے تب ہمارا اگلا قدم اس ریاضی نمونے کی درستگی کی تصدیق ہوتی۔ ہم برف کے کئی مکعب لے کر ان کا مشاہدہ کرتے اور دیکھتے کہ ریاضی نمونہ کتنا قریبی نتائج دیتا ہے اور اس کو مزید بہتر کس طرح بنایا جا سکتا ہے۔

سوالات

سوال ۳.۱ تا سوال ۳.۸ میں $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ دیے گئے ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(g(x))g'(x)$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۱: $y = 6u - 9, \quad u = \frac{1}{2}x^4$

سوال ۳.۲: $y = 2u^3, \quad u = 8x - 1$

سوال ۳.۳: $y = \sin u, \quad u = 3x + 1$

سوال ۳.۴: $y = \cos u, \quad u = -\frac{x}{3}$

سوال ۳.۵: $y = \cos u, \quad u = \sin x$

سوال ۳.۶: $y = \sin u, \quad u = x - \cos x$

سوال ۳.۷: $y = \tan u, \quad u = 10x - 5$

سوال ۳.۸: $y = -\sec u, \quad u = x^2 + 7x$

سوال ۳.۹ تا سوال ۳.۱۸ میں تفاعل کو $y = f(u)$ اور $u = g(x)$ صورت میں لکھ کر $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۹: $y = (2x + 1)^{-7}$

سوال ۳.۱۰: $y = (4 - 3x)^9$

سوال ۳.۱۱: $y = (1 - \frac{x}{7})^{-7}$

سوال ۳.۱۲: $y = (\frac{x}{2} - 1)^{-10}$

سوال ۳.۱۳: $y = (\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x})^4$

سوال ۳.۱۴: $y = (\frac{x}{5} + \frac{1}{5x})^5$

سوال ۳.۱۵: $y = \sec(\tan x)$

سوال ۳.۱۶: $y = \cos(\pi - \frac{1}{x})$

سوال ۳.۱۷: $y = \sin^3 x$

سوال ۳.۱۸: $y = 5\cos^{-4} x$

سوال ۳.۱۹ تا سوال ۳.۳۸ میں تفاعل کا تفرق تلاش کریں۔

سوال ۳.۱۹: $p = \sqrt{3 - t}$

سوال ۳.۲۰: $q = \sqrt{2r - r^2}$

سوال ۳.۲۱: $s = \frac{4}{3\pi}\sin 3t + \frac{4}{5\pi}\cos 5t$

سوال ۳.۲۲: $s = \sin(\frac{3\pi t}{2}) + \cos(\frac{3\pi t}{2})$

سوال ۳.۲۳: $r = (\csc\theta + \cot\theta)^{-1}$

سوال ۳.۲۴: $r = -(\sec\theta + \tan\theta)^{-1}$

سوال ۳.۲۵: $y = x^2 \sin^4 x + x\cos^{-2} x$

سوال ۳.۲۶: $y = \frac{1}{x}\sin^{-5} x - \frac{x}{3}\cos^3 x$

سوال ۳.۲۷: $y = \frac{1}{21}(3x-2)^7 + (4 - \frac{1}{2x^2})^{-1}$

سوال ۳.۲۸: $y = (5-2x)^{-3} + \frac{1}{8}(\frac{2}{x}+1)^4$

سوال ۳.۲۹: $y = (4x+3)^4(x+1)^{-3}$

سوال ۳.۳۰: $y = (2x-5)^{-1}(x^2-5x)^6$

سوال ۳.۳۱: $h(x) = x\tan(2\sqrt{x}) + 7$

سوال ۳.۳۲: $k(x) = x^2\sec(\frac{1}{x})$

سوال ۳.۳۳: $f(\theta) = (\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta})^2$

سوال ۳.۳۴: $g(t) = (\frac{1+\cot t}{\sin t})^{-1}$

سوال ۳.۳۵: $r = \sin(\theta^2)\cos(2\theta)$

سوال ۳.۳۶: $r = \sec\sqrt{\theta}\tan(\frac{1}{\theta})$

سوال ۳.۳۷: $q = \sin(\frac{t}{\sqrt{t+1}})$

سوال ۳.۳۸: $q = \cot(\frac{\sin t}{t})$

سوال ۳.۳۹ تا سوال ۳.۴۸ میں $\frac{dy}{dt}$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۳۹: $y = \sin^2(\pi t - 2)$

سوال ۳.۴۰: $y = \sec^2 \pi t$

سوال ۳.۴۱: $y = (1+\cos 2t)^{-4}$

سوال ۳.۴۲: $y = (1+\cot(\frac{t}{2}))^{-2}$

سوال ۳.۴۳: $y = \sin(\cos(2t-5))$

سوال ۳.۴۴: $y = \cos(5\sin(\frac{t}{3}))$

سوال ۳.۴۵: $y = (1+\tan^4(\frac{t}{12}))^3$

سوال ۳.۴۶: $y = \frac{1}{6}(1+\cos^2(7t))^3$

سوال ۳.۴۷: $y = \sqrt{1+\cos(t^2)}$

سوال ۳.۴۸: $y = 4\sin(\sqrt{1+\sqrt{t}})$

سوال ۳.۴۹ تا سوال ۳.۵۲ میں y'' تلاش کریں۔

سوال ۳.۴۹: $y = (1+\frac{1}{x})^3$

سوال ۳.۵۰: $y = (1-\sqrt{x})^{-1}$

سوال ۳.۵۱: $y = \frac{1}{9}\cot(3x-1)$

سوال ۳.۵۲: $y = 9\tan(\frac{x}{3})$

تفرق کی اعدادی قیمتوں کا حصول

سوال ۳.۵۳ تا سوال ۳.۵۸ میں x کی دی گئی قیمت پر $(f\circ g)'$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۵۳: $f(u) = u^5+1, \quad u = g(x) = \sqrt{x}, \quad x = 1$

سوال ۳.۵۴: $f(u) = 1-\frac{1}{u}, \quad u = g(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x = -1$

سوال ۳.۵۵: $f(u) = \cot\frac{\pi u}{10}, \quad u = g(x) = 5\sqrt{x}, \quad x = 1$

سوال ۳.۵۶: $f(u) = u+\frac{1}{\cos^2 u}, \quad u = g(x) = \pi x, \quad x = \frac{1}{4}$

سوال ۳.۵۷: $f(u) = \frac{2u}{u^2+1}, \quad u = g(x) = 10x^2+x+1, \quad x = 0$

سوال ۳.۵۸: $f(u) = (\frac{u-1}{u+1})^2, \quad u = g(x) = \frac{1}{x^2}-1, \quad x = -1$

سوال ۳.۵۹: فرض کریں کہ تفاعل f اور g اور x کے لحاظ سے ان کے تفرق کا $x = 2$ اور $x = 3$ پر قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
2	8	2	$\frac{1}{3}$	-3
3	3	-4	2π	5

درج ذیل میں دیے گئے x پر تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

ا. $2f(x),\ x = 2$

ب. $f(x)+g(x),\ x = 3$

ج. $f(x)\cdot g(x),\ x = 3$

د. $f(x)/g(x),\ x = 2$

ھ. $f(g(x)),\ x = 2$

و. $\sqrt{f(x)},\ x = 2$

ز. $1/g^2(x),\ x = 3$

ح. $\sqrt{f^2(x)+g^2(x)},\ x = 2$

سوال ۳.۶۰: فرض کریں کہ تفاعل f اور g اور x کے لحاظ سے ان کے تفرق کا $x = 0$ اور $x = 1$ پر قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
0	1	1	5	1/3
1	3	−4	−1/3	−8/3

درج ذیل میں دیے گئے x پر تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کریں۔

ا. $5f(x) - g(x),\ x = 1$

ب. $f(x)g^3(x),\ x = 0$

ج. $\frac{f(x)}{g(x)+1},\ x = 1$

د. $f(g(x)),\ x = 0$

ھ. x=0 g(f(x)),

و. $(x^{11} + f(x))^{-2},\ x = 1$

ز. x=0 f(x+g(x)),

سوال ۳.۶۱: اگر $s = \cos\theta$ اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 5$ ہوں تب $\theta = 3\pi/2$ پر $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۶۲: اگر $y = x^2 + 7x - 5$ اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{3}$ ہوں تب $x = 1$ پر $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

مرکب کے کئی صورتیں

اگر مرکب تفاعل کو مختلف انداز میں لکھنا ممکن ہو تب کیا ہو گا؟ کیا ہر صورت سے ایک جیسا تفرق حاصل ہو گا؟ زنجیری قاعدہ کہتا ہے کہ ایسا ہی ہو گا۔ اگلے دو سوالات میں اس عمل کو دیکھیں۔

سوال ۳.۶۳: تفاعل $y = x$ کو درج ذیل کا مرکب لکھتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

ا. $y = \frac{u}{5} + 7, \quad u = 5x - 35$

ب. $y = 1 + \frac{1}{u}, \quad u = \frac{1}{x-1}$

سوال ۳.۶۴: تفاعل $y = x^{3/2}$ کو درج ذیل کا مرکب لکھتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

ا. $y = u^3, \quad u = \sqrt{x}$

ب. $y = \sqrt{u}, \quad u = x^3$

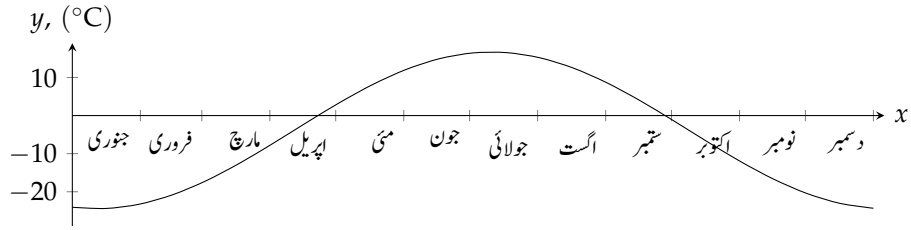
مماس اور ڈھلوان

سوال ۳.۶۵:

ا. $x = 1$ پر منحنی $y = 2\tan(\pi x/4)$ کے مماس کی مساوات تلاش کریں۔

ب. وقفہ $-2 < x < 2$ پر منحنی کی ڈھلوان کی کم سے کم قیمت کیا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۶۶:



شکل ۳.۵۲: اوسط درجہ حرارت

ا. مبدا پر $y = \sin 2x$ اور $y = -\sin\frac{x}{2}$ کے مماس کی مساواتیں تلاش کریں۔ کیا ان مماس کا آپس میں کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ب. کیا مبدا پر $y = \sin mx$ اور $y = -\sin\frac{x}{m}$ کی مماسوں کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے جہاں مستقل $m \neq 0$ ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ج. کسی بھی دیے گئے m کے لئے $y = \sin mx$ اور $y = -\sin\frac{x}{m}$ کی زیادہ سے زیادہ ڈھلوان کیا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

د. وقفہ $[0, 2\pi]$ پر تفاعل $y = \sin x$ ایک چکر پورا کرتا ہے، تفاعل $y = \sin 2x$ دو چکر پورے کرتا ہے، تفاعل $y = \sin\frac{x}{2}$ آدھا چکر پورا کرتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ کیا اس وقفے پر تفاعل $y = \sin mx$ کے مکمل چکر اور مبدا پر تفاعل کی ڈھلوان کا آپس میں کوئی تعلق ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

نظریہ، مثالیں اور استعمال

سوال ۳.۶۷: مشین کا بہت تیز چلنا ایک گاڑی کی انجن کا پسٹن[۳۸] اوپر نیچے دوری حرکت کرتا ہے جس کو

$$s = A\cos(2\pi bt)$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں لمحہ t پر پسٹن کا مقام s ہے جبکہ A اور b مثبت مستقل ہیں۔ حرکت کا حیطہ A اور اس کی تعدد (ایک سیکنڈ میں اوپر نیچے حرکت کی گنتی) b ہے۔ تعدد دگنا کرنے سے پسٹن کی سمتی رفتار، اسراع اور جھٹکا پر کیا اثر ہو گا؟ (یہ جاننے کے بعد آپ سمجھ سکتے ہیں کہ مشین تیز چلانے سے کیوں خراب ہوتی ہے۔)

سوال ۳.۶۸: قطب شمالی کے نزدیک ایلاسکا کے ایک شہر میں درجہ حرارت ایلاسکا[۳۹] کے ایک شہر میں پورے سال کے ہر دن کے اوسط درجہ حرارت کو شکل ۳.۵۲ میں ترسیم کیا گیا ہے جس کو درج ذیل تفاعل سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

$$y = 20.56\sin\left[\frac{2\pi}{365}(x - 101)\right] - 3.89$$

---

[۳۸] piston
[۳۹] alaska

ا. کس دن درجہ حرارت تیز ترین تبدیل ہوتا ہے؟

ب. ایک دن میں درجہ حرارت کی زیادہ سے زیادہ تبدیلی کتنی ہے؟

سوال ۳.۶۹: محور لکیر پر ایک جسم کا مقام $s = \sqrt{1+4t}$ ہے جہاں t کی اکائی سیکنڈ اور s کی اکائی میٹر ہے۔ لمحہ $t = 6\,\mathrm{s}$ پر اس جسم کی سمتی رفتار اور اسراع کیا ہیں؟

سوال ۳.۷۰: ساکن حال کے t سیکنڈ بعد ایک گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار $v = k\sqrt{s}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے جہاں k مستقل اور ساکن مقام سے فاصلہ s ہے۔ دکھائیں کہ جسم کی اسراع مستقل ہے۔

سوال ۳.۷۱: زمین کی فضا میں داخل ہونے والے شہاب ثاقب کی سمتی رفتار $\sqrt{s}$ کے بالعکس متناسب ہے جہاں زمین کی وسط سے شہاب ثاقب کا فاصلہ s ہے۔ دکھائیں کہ شہاب ثاقب کی اسراع s^2 کے بالعکس متناسب ہے۔

سوال ۳.۷۲: x محور پر حرکت کرنے والے ایک ذرہ کی سمتی رفتار $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x)$ ہے۔ دکھائیں کہ اس ذرہ کی اسراع $f(x)f'(x)$ ہے۔

سوال ۳.۷۳: لٹکن کا دوری عرصہ بالمقابل درجہ حرارت ایک لٹکن جس کی لمبائی L ہو کا دوری عرصہ $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ہو گا جہاں لٹکن کے مقام پر ثقلی اسراع کو g سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یہاں T کی اکائی سیکنڈ اور L کی اکائی میٹر ہے۔ اگر لٹکن کسی دھات سے بنا ہو تب اس کی لمبائی درجہ حرارت کے ساتھ درج ذیل کلیہ کے تحت تبدیل ہو گی

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}u} = kL$$

جہاں درجہ حرارت کو u سے ظاہر کیا گیا ہے اور k مستقل ہے۔ دکھائیں کہ حرارت کے ساتھ دوری عرصہ تبدیل ہونے کی شرح $\frac{kT}{2}$ ہو گی۔

سوال ۳.۷۴: اگر $f(x) = x^2$ اور $g(x) = |x|$ ہوں تب مرکبات

$$(f \circ g)(x) = |x|^2 = x^2 \quad \text{اور} \quad (g \circ f)(x) = \left|x^2\right| = x^2$$

دونوں $x = 0$ پر قابل تفرق ہیں اگرچہ $x = 0$ پر g از خود قابل تفرق نہیں ہے۔ کیا یہ زنجیری قاعدہ کے مترادف ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

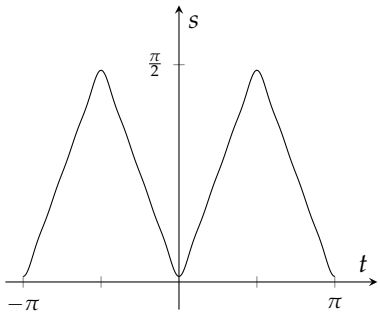
سوال ۳.۷۵: فرض کریں $x = 1$ پر $u = g(x)$ قابل تفرق ہے اور $u = g(1)$ پر $y = f(u)$ قابل تفرق ہے۔ اگر $x = 1$ پر $y = f(g(x))$ کے منحنی کا مماس افقی ہو تب کیا $x = 1$ پر g کے مماس یا $u = g(1)$ پر f کے مماس کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۷۶: فرض کریں کہ $x = -5$ پر $u = g(x)$ قابل تفرق ہے اور $u = g(-5)$ پر $y = f(u)$ قابل تفرق ہے اور $(f \circ g)'(-5)$ منفی ہے۔ کیا $g'(-5)$ اور $f'(g(-5))$ کی قیمتوں کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے۔

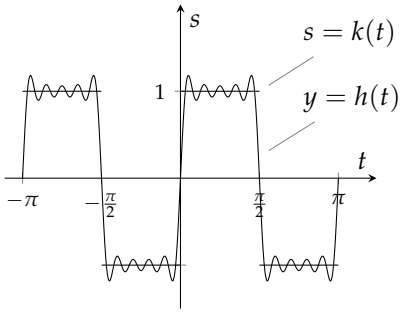
زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اگلے دو سوالات میں دیے گئے تفاعل x^n کے لئے دکھائیں کہ طاقتی قاعدہ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^n = nx^{n-1}$ مطمئن ہوتا ہے۔

سوال ۳.۷۷: $x^{1/4} = \sqrt{\sqrt{x}}$

سوال ۳.۷۸: $x^{3/4} = \sqrt{x\sqrt{x}}$



شکل ۳.۵۳: دندان موج کا کثیر رکنی سے اظہار (سوال ۳.۸۰)



شکل ۳.۵۴: سیڑھی تفاعل $s = k(t)$ کا $s = h(t)$ کثیر رکنی سے اظہار (سوال ۳.۸۱)

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۳.۷۹: $y = \sin 2x$ کا تفرق وقفہ $-2 \leq x \leq 3.5$ کے لئے تفاعل $y = 2\cos 2x$ ترسیم کریں۔ ساتھ ہی $h = 1, 0.5, 0.2$ کے لئے

$$y = \frac{\sin 3(x+h) - \sin 2x}{h}$$

ترسیم کریں۔ کی دیگر (بشمول منفی) قیمتوں کے لئے بھی اس کو ترسیم کریں۔ $h \to 0$ کرتے ہوئے آپ کیا دیکھتے ہیں؟ اس کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۸۰: درج ذیل کثیر رکنی کو شکل ۳.۵۳ میں دکھایا گیا ہے جو وقفہ $[-\pi, \pi]$ پر تقریباً دندان موج $s = g(t)$ نظر آتا ہے۔

$$s = f(t) = 0.78540 - 0.63662\cos 2t - 0.07074\cos 6t - 0.02546\cos 10t - 0.01299\cos 14t$$

جہاں دندان موج معین ہو وہاں اس کثیر رکنی کا تفرق دندان موج کی تفرق کو کتنا خوش اسلوبی سے ظاہر کرتا ہے؟ یہ معلوم کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

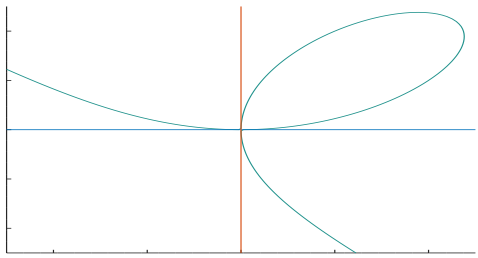
ا. وقفہ $[-\pi, \pi]$ پر $\frac{dg}{dt}$ (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔

ب. $\frac{df}{dt}$ تلاش کر کے ترسیم کریں۔

ج. کہاں پر $\frac{dg}{dt}$ کو $\frac{df}{dt}$ بہتر ظاہر کرتا ہے؟ کہاں خراب ترین ظاہر کرتا ہے؟ تکونیاتی تفاعل سے عموماً مختلف تفاعل کو ظاہر کیا جاتا ہے البتہ جیسے اگلا سوال میں ظاہر ہو گا اصل تفاعل کے تفرق کو عموماً ان کثیر رکنی کے تفرق سے ظاہر نہیں کیا جا سکتا ہے۔

سوال ۳.۸۱: گزشتہ سوال میں دندان موج کو کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا جہاں ہم نے دیکھا کہ دندان موج کے تفرق کو اس کثیر رکنی کا تفرق ظاہر کرتا ہے۔ آئیں اب ایسا تفاعل دیکھیں جس کو کثیر رکنی سے ظاہر کیا جا سکتا ہے البتہ تفاعل کے تفرق کو اس کثیر رکنی کا تفرق ظاہر نہیں کرتا ہے۔ شکل ۳.۵۴ میں سیڑھی تفاعل کو درج ذیل کثیر رکنی سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$s = h(t) = 1.2732\sin 2t + 0.4244\sin 6t + 0.25465\sin 10t + 0.18186\sin 14t + 0.14147\sin 18t$$



شکل ۳.۵۵: خفی منحنی $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ جس کو پتا بھی کہتے ہیں۔

آئیں دیکھتے ہیں کہ کثیر رکنی کا تفرق ہر گز سیڑھی تفاعل کا تفرق نہیں دیتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ $[-\pi, \pi]$ پر $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}$ (جہاں معین ہو) ترسیم کریں۔

ب. $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ ترسیم کریں۔

ج. نتائج کو دیکھ کر آپ کیا کہیں گے؟

۳.۶ خفی تفرق اور ناطق قوت نما

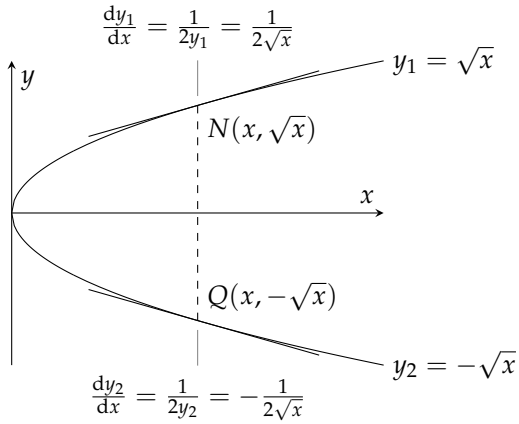
بعض اوقات مساوات $F(x, y) = 0$ کو $y = f(x)$ روپ میں لکھنا ممکن نہیں ہوتا ہے۔ اس کے باوجود ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو خفی تفرق سے حاصل کر سکتے ہیں۔ اس حصہ میں اس ترکیب پر غور کیا جائے گا اور اس کے ذریعہ طاقتی قاعدہ کو وسعت دیتے ہوئے تمام ناطق تفاعل کو شامل کیا جائے گا۔

خفی تفرق

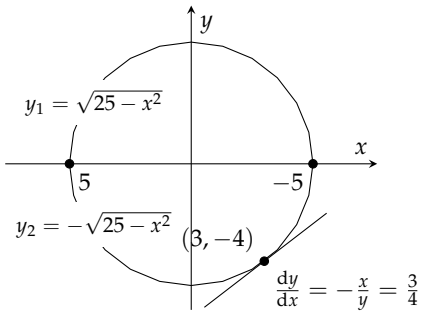
چونکہ مساوات $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ درحقیقت تین تفاعل $y = f_1(x)$ ، $y = f_2(x)$ اور $y = f_3(x)$ کا ملاپ ہے جو ماسوائے نقطہ M اور A کے قابل تفرق ہیں لہٰذا اس کے ترسیم کا تقریباً ہر نقطے پر اچھی طرح معین ڈھلوان پایا جاتا ہے (شکل ۳.۵۵)۔ خفی تفاعل کا تفرق لینے کی خاطر y کو x کا تفاعل تصور کرتے ہوئے قواعد برائے قوت نما، طاقت، مجموعہ، تفریق، حاصل ضرب، حاصل تقسیم اور زنجیری قاعدہ زیر استعمال لائے جاتے ہیں۔ اس کے بعد $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کے لئے حل کرتے ہوئے کسی بھی نقطہ (x, y) پر تفرق حاصل کیا جا سکتا ہے۔

اس ترکیب کو **خفی تفرق**[۴۰] کہتے ہیں۔

[۴۰] implicit differentiation



شکل ۳.۵۶: ترسیم برائے مثال ۳.۱



شکل ۳.۵۷: ترسیم برائے مثال ۳.۲

مثال ۳.۱: $y^2 = x$ ہے۔ $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں۔

حل: مساوات $y^2 = x$ درحقیقت دو تفاعل $y_1 = \sqrt{x}$ اور $y_2 = -\sqrt{x}$ کو ظاہر کرتی ہے جہاں جذر کی مثبت قیمت لی جاتی ہے۔ ہم $x > 0$ کے لئے ان دونوں تفاعل کا تفرق لینا جانتے ہیں۔

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

آئیں اب اس مساوات کو دو تفاعل میں تقسیم کیے بغیر اس کا تفرق حاصل کریں۔ ہم y کو x کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق زنجیری قاعدہ سے حاصل کرتے ہیں۔ یوں $f(x) = y^2$ لکھ کر $\frac{df}{dx} = 2y$ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا

$$\begin{aligned} y^2 &= x \\ 2y\frac{dy}{dx} &= 1 \qquad \text{زنجیری قاعدہ} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2y} \end{aligned}$$

ہو گا۔ یہ کلیہ دونوں صریح تفاعل $y_1 = \sqrt{x}$ اور $y_2 = -\sqrt{x}$ کا تفرق دیتا ہے۔

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2y_1} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{1}{2y_2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

□

مثال ۳.۲: نقطہ $(3, -4)$ پر دائرہ $x^2 + y^2 = 25$ کی ڈھلوان تلاش کریں (شکل ۳.۵۷)۔

حل: دائرہ درحقیقت دو قابل تفرق تفاعل $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ اور $y_2 = -\sqrt{25 - x^2}$ کو ظاہر کرتا ہے۔ نقطہ $(3, -4)$

تفاعل y_2 پر پایا جاتا ہے لہٰذا ہم صریحاً ڈھلوان تلاش کر سکتے ہیں:

$$\left.\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}\right|_{x=3} = -\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} = -\frac{-6}{2\sqrt{25-9}} = \frac{3}{4} \tag{۳.۱}$$

ہم دائرے کی مساوات کا x کے لحاظ سے خفی تفرق

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(25) \\
2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 0 \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{x}{y}
\end{aligned}$$

لے کر $(3, -4)$ پر ڈھلوان کی قیمت تلاش کر سکتے ہیں۔

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(3,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

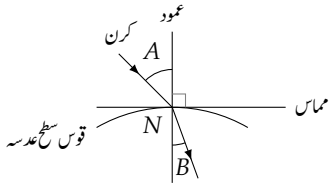
دھیان رہے کہ مساوات ۳.۱ صرف x محور کے نیچے جوابات دیتی ہے جبکہ درج بالا تمام نقطوں پر قابل استعمال ہے۔ خفی تفرق کی قیمت عموماً x اور y دونوں پر منحصر ہوتی ہے جبکہ صریحاً حاصل تفرق کے کلیہ میں صرف x درکار ہوگا۔ □

دیگر خفی تفاعل کا تفرق بھی درج بالا دو مثالوں کی طرح حاصل کی جاتی ہے۔ ہم y کو x کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف تفرق کے قواعد استعمال کرتے ہیں۔

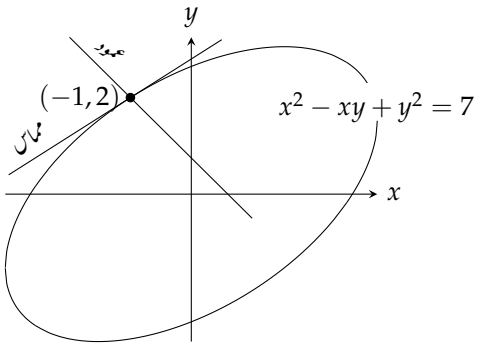
مثال ۳.۳: $2y = x^2 + \sin y$ کے لئے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
2y &= x^2 + \sin y \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 + \sin y) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin y) \\
2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x + \cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \\
2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 2x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(2 - \cos y) &= 2x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{2x}{2 - \cos y}
\end{aligned}$$



شکل ۳.۵۸: عدسہ میں کرن داخل ہوتے ہوئے عمود کی طرف جھکتی ہے۔



شکل ۳.۵۹: ترسیمات برائے مثال ۳.۴

□

خفی تفرق چار اقدام پر مشتمل ہے۔

۱. y کو x کا قابل تفرق تفاعل تصور کرتے ہوئے مساوات کے دونوں اطراف کو تفرق کے قواعد کے مطابق تفرق کریں۔

۲. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ والے اجزاء کو ایک طرف اکٹھا کریں۔

۳. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو تجزی کریں۔

۴. $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کے لئے حل کریں۔

عدسہ، مماس اور عمودی خطوط

روشنی کی کرن عدسہ میں نقطہ N پر داخل ہوتے ہوئے سمت تبدیل کرتی ہے (شکل ۳.۵۸)۔ مماس کے ساتھ قائمہ خط کو عمودی خط کہتے ہیں۔

تعریف: نقطہ N پر منحنی کے مماس کے ساتھ قائمہ خط کو **عمودی**[۴۱] کہتے ہیں۔ اس خط کو N پر منحنی کا **عمود** کہتے ہیں۔

□

عدسہ کی سطح پر تبصرہ عموماً دو درجی منحنیات کی مدد سے کیا جاتا ہے۔ ان منحنیات کے مماس اور عمود کو خفی تفرق سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال ۳.۴: نقطہ $(-1,2)$ پر منحنی $x^2 - xy + y^2 = 7$ کا مماس اور عمود تلاش کریں (شکل ۳.۵۹)۔

---

[۴۱] normal

حل: ہم خفی تفرق سے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
x^2 - xy + y^2 &= 7 \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xy) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(7) \\
2x - (x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}) + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 0 \\
(2y - x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y - 2x \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{y-2x}{2y-x}
\end{aligned}$$

نقطہ $(x, y) = (-1, 2)$ پر ڈھلوان حاصل کرنے کی خاطر درج بالا میں پر کرتے ہیں۔

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(-1,2)} = \left.\frac{y-2x}{2y-x}\right|_{(-1,2)} = \frac{2-2(-1)}{2(2)-(-1)} = \frac{4}{5}$$

$(-1, 2)$ پر مماس کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
y &= 2 + \frac{4}{5}(x - (-1)) \\
y &= \frac{4}{5} + \frac{14}{5}
\end{aligned}$$

اسی طرح منحنی کا عمود نقطہ $(-1, 2)$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
y &= 2 - \frac{5}{4}(x - (-1)) \\
y &= -\frac{5}{4} + \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

□

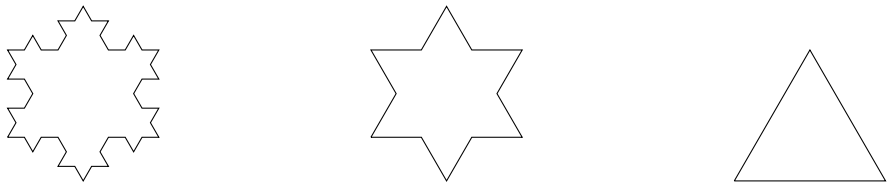
برف کی روئی

ہلگے ون کوچ[۴۲] کے منحنیات جنہیں برف کی روئی کہتے ہیں شکل ۳.۶۰ میں دکھائے گئے ہیں۔ شکل-۱ میں مساوی الاضلاع مثلث سے شروع کرتے ہیں جس کو ہم منحنی C_1 کہتے ہیں۔ ہر ضلع کے وسط پر باہر رخ مثلث الاضلاع بنا کر درمیانے $\frac{1}{3}$ ضلع کو مٹائیں۔ یوں منحنی C_2 حاصل ہو گی۔ اسی عمل کو دہراتے ہوئے لامتناہی منحنیات بنائی جا سکتی ہیں۔ ان منحنیات کی تحدیدی صورت C_n کو **برف کی روئی**[۴۳] کہتے ہیں، جہاں عدد n لامتناہی تک پہنچتا ہے۔

---

[۴۲] کیا. پیش کو منحنیات ان میں 1904 نے دان ریاضی کے سونزرلینڈ

[۴۳] snow flake



(ا) منحنی C_1 (ب) منحنی C_2 (ج) منحنی C_3

شکل ۳.۶۰: برف کی روئی۔

برف کی روئی بہت زیادہ غیر ہموار ہے لہٰذا کسی بھی نقطہ پر اس کا مماس حاصل کرنا ممکن نہیں ہو گا۔ اس کا مطلب ہے کہ تفاعل $F(x,y) = 0$ جو برف کی روئی کو ظاہر کرتا ہے، نا y کو x کا قابل تفرق تفاعل اور نا ہی x کو y کا قابل تفرق تفاعل ظاہر کرتا ہے۔ برف کی روئی پر صفحہ ۵۸۷ پر دوبارہ غور کیا جائے گا جہاں لمبائی قوس کی بات کی جائے گی۔

خفی تفرق سے بلند رتبی تفرق کا حصول

خفی تفرق سے بلند رتبی تفرق حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال ۳.۵: $2x^3 - 3y^2 = 7$ کے لئے $\frac{d^2y}{dx^2}$ تلاش کریں۔

حل: ہم دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق حاصل کرتے ہوئے پہلے $\frac{dy}{dx}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
2x^3 - 3y^2 &= 7 \\
\frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(3y^2) &= \frac{d}{dx}(7) \\
6x62 - 6yy' &= 0 \\
x^2 - yy' &= 0 \\
y' &= \frac{x^2}{y} \qquad (\text{اگر } y \neq 0)
\end{aligned}$$

ہم اب مساوات $x^2 - yy' = 0$ کا تفرق لیتے ہوئے y'' حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(yy') &= \frac{d}{dx}(0) \\
2x - y'y' - yy'' &= 0 \\
yy'' &= 2x - (y')^2 \\
y'' &= \frac{2x}{y} - \frac{(y')^2}{y} \qquad (\text{اگر } y \neq 0)
\end{aligned}$$

ہم آخر میں $y' = \frac{x^2}{y}$ پر کرتے ہوئے x اور y کی روپ میں y'' حاصل کرتے ہیں۔

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{(x^2/y)^2}{y} = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3} \qquad (\text{اگر } y \neq 0)$$

□

قابل تفرق تفاعل کے ناطق طاقت

ہم جانتے ہیں کہ طاقتی قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = nx^{n-1}$$

عدد صحیح n کے لئے درست ہے۔ ہم اب دکھاتے ہیں کہ یہ قاعدہ کسی بھی ناطق عدد کے لئے درست ہے۔

مسئلہ ۶: **ناطق طاقت کے لئے طاقتی قاعدہ**
اگر ناطق عدد ہو تب x^{n-1} کے دائرہ کار کے ہر اندرونی نقطہ x پر x^n قابل تفرق ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = nx^{n-1}$$

ثبوت: فرض کریں p اور q عدد صحیح ہیں جہاں $q > 0$ اور $y = \sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$ ہے۔ تب

$$y^q = x^p$$

ہو گا۔ یہ مساوات اور کے طاقتوں کا ملاپ ہے لہٰذا (اس حصہ کے ابتدا میں اعلیٰ مسئلہ کے تحت) y متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا۔ چونکہ p اور q عدد صحیح ہیں (جن کے لئے ہمارے پاس قاعدہ طاقت ہے) ہم خفی مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لے سکتے ہیں:

$$qy^{q-1}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = px^{p-1}$$

اب اگر $y \neq 0$ ہو تب دونوں اطراف کو qy^{q-1} سے تقسیم کیا جا سکتا ہے:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{px^{p-1}}{qy^{q-1}} \\
&= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{(x^{(p/q)})^{q-1}} \\
&= \frac{p}{q} \cdot \frac{x^{p-1}}{x^{p-p/q}} \\
&= \frac{p}{q} \cdot x^{(p-1)-(p-p/q)} \\
&= \frac{p}{q} \cdot x^{(p/q)-1}
\end{aligned}$$

یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مثال ۳.۶:

ا.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$ تفاعل $x \geq 0$ جبکہ تفرق $x > 0$ کے لئے معین ہے

ب.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{1/5}) = \frac{1}{5}x^{-4/5}$$ تفاعل تمام x جبکہ تفرق $x \neq 0$ کے لئے معین ہے

□

طاقتی قاعدہ کی ایک روپ جس میں زنجیری قاعدہ ضم ہے کہتا ہے کہ اگر n ناطق عدد ہو اور x پر u قابل تفرق ہو اور $(u(x))^{n-1}$ معین ہو تب x پر u^n قابل تفرق ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u^n = nu^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{۳.۲}$$

مثال ۳.۷:

ا.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-x^2)^{1/4} = \frac{1}{4}(1-x^2)^{-3/4}(-2x)$$

تفاعل وقفہ $[-1,1]$ جبکہ تفرق وقفہ $(-1,1)$ پر معین ہے۔

ب.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)^{-1/5} &= -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x)\\ &= -\frac{1}{5}(\cos x)^{-6/5}(-\sin x)\\ &= \frac{1}{5}\sin x(\cos x)^{-6/5}\end{aligned}$$

□

سوالات

ناطق طاقتوں کا تفرق

سوال ۳.۱ تا سوال ۳.۱۰ میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۱: $y = x^{9/4}$

سوال ۳.۲: $y = x^{-3/5}$

سوال ۳.۳: $y = \sqrt[3]{2x}$

سوال ۳.۴: $y = \sqrt[4]{5x}$

سوال ۳.۵: $y = 7\sqrt{x+6}$

سوال ۳.۶: $y = -2\sqrt{x-1}$

سوال ۳.۷: $y = (2x+5)^{-1/2}$

سوال ۳.۸: $y = (1-6x)^{2/3}$

سوال ۳.۹: $y = x(x^2+1)^{1/2}$

سوال ۳.۱۰: $y = x(x^2+1)^{-1/2}$

سوال ۳.۱۱ تا سوال ۳.۱۸ میں پہلا تفرق تلاش کریں۔

سوال ۳.۱۱: $s = \sqrt[7]{t^2}$

سوال ۳.۱۲: $r = \sqrt[4]{\theta^{-3}}$

سوال ۳.۱۳: $y = \sin[(2t+5)^{-2/3}]$

سوال ۳.۱۴: $z = \cos[(1-6t)^{2/3}]$

سوال ۳.۱۵: $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{x}}$

سوال ۳.۱۶: $g(x) = 2(2x^{-1/2}+1)^{-1/3}$

سوال ۳.۱۷: $h(\theta) = \sqrt[3]{1+\cos(2\theta)}$

سوال ۳.۱۸: $k(\theta) = (\sin(\theta+5))^{5/4}$

خفی تفرق

سوال ۳.۱۹ تا سوال ۳.۳۲ میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو خفی تفرق کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال ۳.۱۹: $x^2y + xy^2 = 6$

سوال ۳.۲۰: $x^3 + y^3 = 18xy$

سوال ۳.۲۱: $2xy + y^2 = x + y$

سوال ۳.۲۲: $x^3 - xy + y^3 = 1$

سوال ۳.۲۳: $x^2(x-y)^2 = x^2 - y^2$

سوال ۳.۲۴: $(3xy+7)^2 = 6y$

سوال ۳.۲۵: $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

سوال ۳.۲۶: $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

سوال ۳.۲۷: $x = \tan y$

سوال ۳.۲۸: $x = \sin y$

سوال ۳.۲۹: $x + \tan(xy) = 0$

سوال ۳.۳۰: $x + \sin y = xy$

سوال ۳.۳۱: $y\sin(\frac{1}{y}) = 1 - xy$

سوال ۳.۳۲: $y^2\cos(\frac{1}{y}) = 2x + 2y$

سوال ۳.۳۳ تا سوال ۳.۳۶ میں $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۳۳: $\theta^{1/2} + r^{1/2} = 1$

سوال ۳.۳۴: $r - 2\sqrt{\theta} = \frac{3}{2}\theta^{2/3} + \frac{4}{3}\theta^{3/4}$

سوال ۳.۳۵: $\sin(r\theta) = \frac{1}{2}$

سوال ۳.۳۶: $\cos r + \cos\theta = r\theta$

بلند رتبی تفرق

سوال ۳.۳۷ تا سوال ۳.۴۲ میں خفی تفرق کی مدد سے پہلے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ اور بعد میں $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ تلاش کریں۔

سوال ۳.۳۷: $x^2 + y^2 = 1$

سوال ۳.۳۸: $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

سوال ۳.۳۹: $y^2 = x^2 + 2x$

سوال ۳.۴۰: $y^2 - 2x = 1 - 2y$

سوال ۳.۴۱: $2\sqrt{y} = x - y$

سوال ۳.۴۲: $xy + y^2 = 1$

سوال ۳.۴۳: نقطہ $(2,2)$ پر $x^3 + y^3 = 16$ کے لئے $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۳.۴۴: نقطہ $(0,-1)$ پر $xy + y^2 = 1$ کے لئے $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$ کی قیمت تلاش کریں۔

ڈھلوان، مماس اور عمود

سوال ۳.۴۵ تا سوال ۳.۴۶ میں دیے گئے نقطوں پر منحنی کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال ۳.۴۵: $y^2 + x^2 = y^4 - 2x, \quad (-2,1), (-2,-1)$

سوال ۳.۴۶: $(x^2 + y^2)^2 = (x - y)^2, \quad (1,0), (1,-1)$

سوال ۳.۴۷ تا سوال ۳.۵۶ میں تصدیق کریں کہ دیا گیا نقطہ منحنی پر پایا جاتا ہے اور اس نقطے پر منحنی کے مماس اور عمود کی مساواتیں تلاش کریں۔

سوال ۳.۴۷: $x^2 + xy - y^2 = 1, \quad (2,3)$

سوال ۳.۴۸: $x^2 + y^2 = 25, \quad (3,-4)$

سوال ۳.۴۹: $x^2y^2 = 9, \quad (-1,3)$

سوال ۳.۵۰: $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0, \quad (-2,1)$

سوال ۳.۵۱: $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0, \quad (-1,0)$

سوال ۳.۵۲: $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 5, \quad (\sqrt{3},2)$

سوال ۳.۵۳: $2xy + \pi \sin y = 2\pi, \quad (1,\pi/2)$

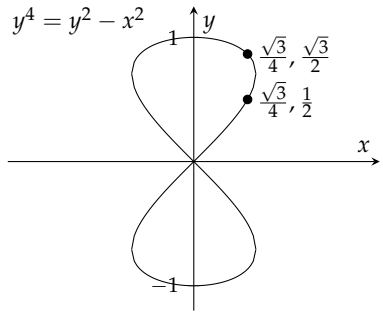
سوال ۳.۵۴: $x \sin 2y = y \cos 2x, \quad (\pi/4,\pi/2)$

سوال ۳.۵۵: $y = 2\sin(\pi x - y), \quad (1,0)$

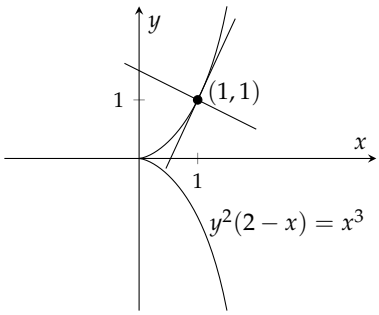
سوال ۳.۵۶: $x^2 \cos^2 y - \sin y = 0, \quad (0,\pi)$

سوال ۳.۵۷: x محور کو $x^2 + xy + y^2 = 7$ دو نقطوں پر قطع کرتی ہے۔ ان نقطوں کو تلاش کریں اور دکھائیں کہ ان نقطوں پر منحنی کے مماس آپس میں متوازی ہیں۔ ان مماس کی ڈھلوان کیا ہو گی؟

سوال ۳.۵۸: منحنی $x^2 + y^2 + xy = 7$ پر وہ نقطے تلاش کریں جہاں (ا) مماس x محور کے متوازی ہے، (ب) مماس y محور کے متوازی ہے۔ دوسرے جزو میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ غیر معین جبکہ $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ معین ہے۔ ان نقطوں پر $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ کی قیمت کیا ہو گی؟



شکل ۳.۶۱: منحنی آٹھ (سوال ۳.۵۹)



شکل ۳.۶۲: منحنی برائے سوال ۳.۶۰

سوال ۳.۵۹: منحنی آٹھ نقطہ $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ اور $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ پر $y^4 = y^2 - x^2$ کی ڈھلوان تلاش کریں (شکل ۳.۶۱)۔

سوال ۳.۶۰: نقطہ $(1,1)$ پر $y^2(2-x) = x^3$ کے مماس اور عمود کی مساواتیں تلاش کریں (شکل ۳.۶۲)۔

سوال ۳.۶۱: چار نقطوں $(-3,2)$ ، $(-3,-2)$ ، $(3,2)$ اور $(3,-2)$ پر $y^4 - 4y^2 = x^4 - 9x^2$ کی ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال ۳.۶۲:

ا. نقطہ $(4,2)$ اور $(2,4)$ پر پتا $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ کی ڈھلوان تلاش کریں (شکل ۳.۵۵)۔

ب. مبدا کے علاوہ پتے کا مماس کس نقطے پر افقی ہے؟

ج. کس نقطے پر پتے کا مماس انتصابی ہے؟

نظریہ اور مثالیں

سوال ۳.۶۳: اگر $f''(x) = x^{-1/3}$ ہو تب درج ذیل میں سے کون سے درست ہوں گے؟

ا. $f(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} - 3$

ب. $f(x) = \frac{9}{10}x^{5/3} - 7$

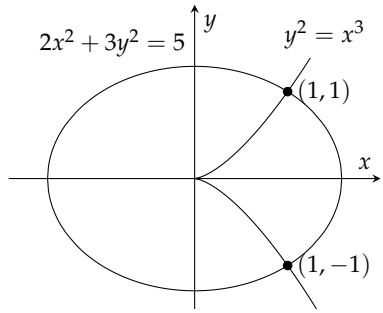
ج. $f'''(x) = -\frac{1}{3}x^{-4/3}$

د. $f'(x) = \frac{3}{2}x^{2/3} + 6$

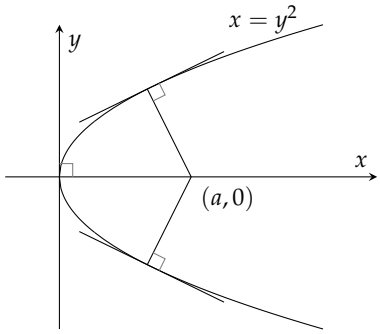
سوال ۳.۶۴: کیا نقطہ $(1,1)$ اور $(1,-1)$ پر $2x^2 + 3y^2 = 5$ اور $y^2 = x^3$ کے مماس میں کوئی خاصیت پائی جاتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں (شکل ۳.۶۳)۔

سوال ۳.۶۵: نقطہ $(1,1)$ پر منحنی $x^2 + 2xy - 3y^2 = 0$ کا مماس اس منحنی کو کس دوسرے نقطے پر قطع کرتا ہے؟

سوال ۳.۶۶: منحنی $xy + 2x - y = 0$ کا ایسا عمود تلاش کریں جو $2x + y = 0$ کے متوازی ہو۔



شکل ۳.۶۳: ترسیم برائے سوال ۳.۶۴



شکل ۳.۶۴: منحنی برائے سوال ۳.۶۷

سوال ۳.۶۷: دکھائیں کہ اگر نقطہ $(a, 0)$ سے قطع مکافی $x = y^2$ تک تین عمود بنانا ممکن ہو تب $a > \frac{1}{2}$ ہوگا۔ تیسرا عمود x محور ہے۔ a کی کس قیمت کے لئے باقی دو عمود آپس میں قائمہ الزاویہ ہیں (شکل ۳.۶۴)؟

سوال ۳.۶۸: مثال ۳.۶ اور مثال ۳.۷-۱ میں کس جیومیٹری کی بنا دائرہ کار کے حدود تعین ہوتے ہیں؟

سوال ۳.۶۹ اور سوال ۳.۷۰ میں پہلے y کو x کا تفاعل تصور کرتے ہوئے $\frac{dy}{dx}$ تلاش کریں اور اس کے بعد x کو y کا تفاعل تصور کرتے ہوئے $\frac{dx}{dy}$ تلاش کریں۔ کیا $\frac{dy}{dx}$ اور $\frac{dx}{dy}$ کا آپس میں کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ کیا آپ اس تعلق کو منحنی کی ترسیم کی مدد سے جیومیٹری کے ذریعہ سمجھا سکتے ہیں؟

سوال ۳.۶۹: $xy^3 + x^2y = 6$

سوال ۳.۷۰: $x^3 + y^2 = \sin^2 y$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۳.۷۱:

ا. منحنی $x^4 + 4y^2 = 1$ کا $\frac{dy}{dx}$ عمومی طریقہ اور مخفی طریقہ سے حاصل کریں۔ کیا دونوں جوابات ایک دوسرے جیسے ہیں؟

ب. مساوات $x^4 + 4y^2 = 1$ کو y کے لئے حل کرتے ہوئے تمام حاصل تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے $x^4 + 4y^2 = 1$ کی مکمل ترسیم کھینچیں۔ اب ساتھ ہی ان تفاعل کے یک رتبی تفرق کی ترسیم بھی شامل کریں۔ کیا $x^4 + 4y^2 = 1$ کی ترسیم کو دیکھ کر آپ اس کے تفرق کی صورت کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ کیا مساوات کے تفرق کی تقسیم کو دیکھ کر آپ مساوات کی صورت کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۷۲:

ا. $(x-2)^2 + y^2 = 4$ کا تفرق $\frac{dy}{dx}$ دو طریقوں سے تلاش کریں۔ پہلی بار مساوات کو y کے لئے حل کرتے ہوئے تفرق حاصل کریں جبکہ دوسری بار خفی طریقہ استعمال کریں۔ کیا دونوں بار ایک جیسے جوابات حاصل ہوتے ہیں؟

ب. $(x-2)^2 + y^2 = 4$ کو y کے لئے حل کریں۔ تمام حاصل تفاعل کا ترسیم کھینچ کر مساوات $(x-2)^2 + y^2 = 4$ کی مکمل ترسیم حاصل کریں۔ اب تفاعل کے یک رتبی تفرق کا ترسیم بھی شامل کریں۔ کیا آپ مساوات کی ترسیم کو دیکھ کر اس کے تفرق کی ترسیم کا اندازہ لگا سکتے

تھے؟ کیا آپ تفرق کی ترسیم کو دیکھ کر مساوات کی ترسیم کا اندازہ لگا سکتے تھے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳.۷۳ تا سوال ۳.۸۰ میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. کمپیوٹر پر مساوات کو ترسیم کریں۔ تصدیق کریں کہ نقطہ N مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

ب. مخفی طریقہ سے تفرق $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کا کلیہ حاصل کرتے ہوئے نقطہ N پر اس کی قیمت تلاش کریں۔

ج. N پر ڈھلوان کی قیمت استعمال کرتے ہوئے اس نقطے پر مماس کی مساوات حاصل کریں۔ مماس اور مساوات کو اکٹھے ترسیم کریں۔

سوال ۳.۷۳: $x^3 - xy + y^3 = 7, \quad N(2,1)$

سوال ۳.۷۴: $x^5 + y^3x + yx^2 + y^4 = 4, \quad N(1,1)$

سوال ۳.۷۵: $y^2 + y = \frac{2+x}{1-x}, \quad N(0,1)$

سوال ۳.۷۶: $y^3 + \cos(xy) = x^2, \quad N(1,0)$

سوال ۳.۷۷: $x + \tan(\frac{y}{x}) = 2, \quad N(1,\pi/2)$

سوال ۳.۷۸: $xy^3 + \tan(x+y) = 1, \quad N(\pi/4,0)$

سوال ۳.۷۹: $2y^2 + (xy)^{1/3} = x^2 + 2, \quad N(1,1)$

سوال ۳.۸۰: $x\sqrt{1+2y} + y = x^2, \quad N(1,0)$

۳.۷ دیگر شرح تبدیلی

ٹینکی سے $3000\ \mathrm{L\ min^{-1}}$ پانی کے انعکاس سے ٹینکی میں پانی کی گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟ اس طرح کے سوالات میں ہم اس شرح کو معلوم کرنا چاہتے ہیں جس کو ہم ناپ نہیں سکتے ہیں۔ قابل ناپ شرح استعمال کرتے ہوئے یہ معلومات حاصل کی جاتی ہے۔

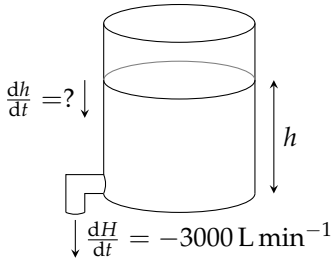
مثال ۳.۱: انعکاس

$3000\ \mathrm{L\ min^{-1}}$ کی شرح سے انعکاس کی صورت میں ٹینکی میں پانی کی گہرائی کم ہونے کی شرح جاننے کی خاطر ہم رداس r کی ٹینکی لیتے ہیں جس میں پانی کی گہرائی h ہے۔ یوں پانی کا حجم $H = \pi r^2 h$ ہو گا جہاں حجم کو H سے ظاہر کیا گیا ہے (شکل ۳.۶۵)۔ اب ہمیں انعکاس

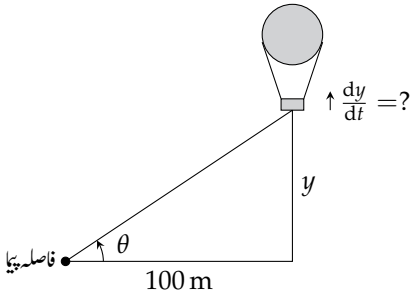
$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = -3000$$

بتلایا گیا ہے جہاں t وقت کو ظاہر کرتی ہے اور وقت کے ساتھ حجم کم ہونے کو منفی کی علامت سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ہمیں

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$$



شکل ۳.۶۵: پانی کی ٹینکی (مثال ۳.۱)



شکل ۳.۶۶: غبارہ (مثال ۳.۲)

تلاش کرنا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں H اور h کا تعلق مساوات کی صورت میں لکھنا ہو گا۔ یہ مساوات متغیرات کی اکائیوں پر منحصر ہو گی۔ یوں حجم کو لٹر جبکہ رداس اور گہرائی کو میٹر میں رکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$H = 1000\pi r^2 h$$

یاد رہے کہ ایک مربع میٹر میں 1000 لٹر ہوتے ہیں۔ دونوں اطراف کا وقت کے ساتھ تفرق لیتے ہیں

$$\frac{dH}{dt} = 1000\pi r^2 \frac{dh}{dt}$$

جہاں دائیں جانب r مستقل ہے۔ اس میں $\frac{dH}{dt}$ کی معلوم قیمت پر کرتے ہوئے نامعلوم شرح $\frac{dh}{dt}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-3000}{1000\pi r^2} = -\frac{3}{\pi r^2}$$

پانی کی گہرائی $\frac{3}{\pi r^2}$ میٹر فی منٹ کی شرح سے کم ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ شرح رداس پر منحصر ہے۔ کم رداس کی صورت میں شرح زیادہ اور زیادہ رداس کی صورت میں شرح کم ہو گی۔ مثلاً $r = 1\,\mathrm{m}$ اور $r = 10\,\mathrm{m}$ کی صورت میں شرح درج ذیل ہوں گی۔

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{\pi} \approx -0.95\,\mathrm{m\,min^{-1}} = -95\,\mathrm{cm\,min^{-1}} \qquad (r = 1\,\mathrm{m})$$
$$\frac{dh}{dt} = -\frac{3}{100\pi} \approx -0.0095\,\mathrm{m\,min^{-1}} = -0.95\,\mathrm{cm\,min^{-1}} \qquad (r = 10\,\mathrm{m})$$

□

مثال ۳.۲: غبارہ کی اڑان گرم ہوا کا غبارہ زمین سے سیدھا آسمان کی طرف اٹھتا ہے (شکل ۳.۶۶)۔ غبارے کی نقطہ اڑان سے 100 m دور واقع فاصلہ پیما[۴۴] سے غبارے پر نظر رکھی جاتی ہے۔ جس لمحہ فاصلہ پیما کا زاویہ صعود $\frac{\pi}{4}$ تھا اس لمحہ زاویہ کی تبدیلی کی شرح $0.14\,\mathrm{rad\,min^{-1}}$ تھی۔ اس لمحہ پر

[۴۴] range finder

غبارہ کس رفتار سے اوپر جا رہا تھا؟

حل: ہم اس کا جواب چھ قدموں میں دیتے ہیں۔

پہلا قدم: موقع کی تصور کشی کریں اور متغیرات کی نشاندہی کریں۔ تصویر میں متغیرات θ اور y درج ذیل ہیں جو بالترتیب فاصلہ پیما کا زاویہ صعود اور غبارے کی بلندی کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہم وقت کو t سے ظاہر کرتے ہیں اور فرض کرتے ہیں کہ θ اور y متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ فاصلہ پیما سے غبارے کے ابتدائی مقام تک فاصلہ 100 m ہے جس کر متغیر سے ظاہر کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

دوسرا قدم: ان معلومات کو الجبرائی روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0.14\,\mathrm{rad\,min^{-1}} \qquad (\theta = \tfrac{\pi}{4})$$

تیسرا قدم: جو ہم سے پوچھا گیا ہے اس کو لکھیں۔ ہم سے $\theta = \pi/4$ کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ پوچھا گیا ہے۔

چوتھا قدم: متغیرات θ اور y کا آپس میں تعلق لکھیں۔

$$\frac{y}{100} = \tan\theta \quad \Longrightarrow \quad y = 100\tan\theta$$

پانچواں قدم: زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے t کے لحاظ سے تفرق حاصل کریں جو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ (درکار معلومات) اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ (معلوم معلومات) کے بیچ تعلق دیگا۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 100\sec^2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

چھٹا قدم: $\theta = \frac{\pi}{4}$ اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0.14$ پر کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت تلاش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 100(\sec\tfrac{\pi}{4})^2(0.14) = 28\,\mathrm{m\,min^{-1}}$$

□

اس طرح کے مسائل حل کرنے کا لائحہ عمل

- مسئلے کی تصور کشی کریں۔ وقت کو t سے ظاہر کریں اور تمام متغیرات کو t کے قابل تفرق تفاعل تصور کریں۔
- اعدادی معلومات کو منتخب کردہ متغیرات کی روپ میں لکھیں۔
- مطلوبہ شرح یا متغیر کو لکھیں (جو شرح کی صورت میں عموماً تفرق کی روپ میں ہوگا)۔
- متغیرات کا آپس میں تعلق لکھیں۔ کئی بار آپ کو دو یا دو سے زیادہ مساواتوں کو اکٹھے کرتے ہوئے ایک مساوات حاصل کرنا ہوگا۔
- اس کا t کے لحاظ سے تفرق لیں۔ اس کے بعد درکار شرح کو باقی متغیرات (جن کی قیمتیں آپ جانتے ہیں) کی صورت میں لکھیں۔

- معلوم معلومات کو پر کرتے ہوئے نامعلوم شرح کی قیمت دریافت کریں۔

مثال ۳.۳: پولیس ایک گاڑی کا پیچھا کر رہی ہے۔ جب چوک سے پولیس کی گاڑی کا فاصلہ $0.6\,\mathrm{km}$ اور بھاگنے والی گاڑی کا فاصلہ $0.8\,\mathrm{km}$ ہے اس لمحہ پر دونوں گاڑیوں کے بیچ فاصلہ $20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ سے بڑھ رہا ہے۔ پولیس کی گاڑی کی رفتار $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہونے کی صورت میں بھاگنے والی گاڑی کی رفتار کیا ہو گی؟

حل: ہم مذکورہ بالا اقدام پر چلتے ہوئے مسئلے کو حل کرتے ہیں۔

پہلا قدم: تصویر اور متغیرات۔ ہم کارتیسی محدد پر تصویر کشی کرتے ہیں۔ چوک کو مبدا پر رکھتے ہوئے بھاگنے والی گاڑی کو x محور جبکہ پولیس کی گاڑی کو y محور پر رکھتے ہیں۔ وقت کو t سے ظاہر کرتے ہوئے لمحہ t پر بھاگنے والی گاڑی کا مقام x، پولیس کی گاڑی کا مقام y اور دونوں گاڑیوں کے بیچ فاصلہ s ہے۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ x ، y اور s متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔

دوسرا قدم: اعدادی معلومات۔ لمحہ t پر درج ذیل ہمیں معلوم ہے۔

$$x = 0.8\,\mathrm{km}, \quad y = 0.6\,\mathrm{km}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -60\,\mathrm{km\,h^{-1}}, \quad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اس لئے منفی ہے کہ پولیس کی گاڑی مبدا کی طرف یعنی گھٹتی y رخ چل رہی ہے۔

تیسرا قدم: ہمیں $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرنا ہے۔

چوتھا قدم: مسئلہ فیثاغورث کے تحت متغیرات کا تعلق $s^2 = x^2 + y^2$ ہے۔

پانچواں قدم: زنجیری قاعدہ کی مدد سے t کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
2s\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= 2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{s}\left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)
\end{aligned}$$

چھٹا قدم: $x = 0.8$ ، $y = 0.6$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -60$ اور $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 20$ پر کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت معلوم کریں۔

$$\begin{aligned}
20 &= \frac{1}{\sqrt{0.8^2+0.6^2}}\left(0.8\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 0.6(-60)\right)\\
20 &= 0.8\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - 36\\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= \frac{20+36}{0.8} = 70
\end{aligned}$$

اس لمحہ پر بھاگنے والی گاڑی کی رفتار $70\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہے۔

□

مثال ۳.۴: پانی کی مخروطی ٹینکی $9\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{min}^{-1}$ شرح سے بھری جاتی ہے۔ مخروط کے قاعدہ کا رداس $5\,\mathrm{m}$، اس کا قد $10\,\mathrm{m}$ ہے اور اس کی نوک نیچے جانب ہے۔ جس لمحہ پانی کی گہرائی $6\,\mathrm{m}$ ہو اس لمحہ گہرائی کس شرح سے بڑھتی ہے؟

حل: ہم مذکورہ بالا اقدام پر چلتے ہوئے اس مسئلہ کو حل کرتے ہیں۔

پہلا قدم: تصویر کشی اور متغیرات۔ نیم بھری ٹینکی کی شکل بناتے ہیں۔ اس مسئلے کے متغیرات درج ذیل ہیں۔

H : لمحہ t (منٹ) پر ٹینکی میں پانی کا حجم (مربع میٹر)۔

x : لمحہ t (منٹ) پر پانی کی سطح کا رداس (میٹر)۔

y : لمحہ t (منٹ) پر پانی کی گہرائی (میٹر)۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ H ، x اور y متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ ٹینکی کی جسامت مستقل مقدار ہے۔

دوسرا قدم: اعدادی معلومات۔ لمحہ t پر ہمیں درج ذیل معلوم ہے۔

$$y = 6\,\mathrm{m}, \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 9\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{min}^{-1}$$

تیسرا قدم: ہمیں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرنا ہے۔

چوتھا قدم: متغیرات کا آپس میں تعلق:

$$H = \frac{1}{3}\pi x^2 y$$

چونکہ لمحہ t پر ہمیں x اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کے بارے میں معلومات فراہم نہیں کی گئی ہے لہٰذا ہمیں x سے چھٹکارا حاصل کرنا ہو گا۔ تشابہ مثلثات استعمال کرتے ہوئے شکل سے

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{y}{2}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

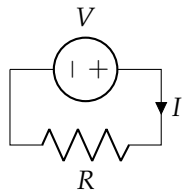
$$H = \frac{1}{3}\pi(\tfrac{y}{2})^2 y = \frac{\pi}{12}y^3$$

پانچواں قدم: t کے لحاظ سے تفرق۔ درج بالا مساوات کا تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{12}\cdot 3y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi}{4}y^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

اس کو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{\pi y^2}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$$



شکل ۳.۶۷: برقی دور برائے سوال ۳.۵

چھٹا قدم: دی گئی معلومات یعنی $y = 6$ اور $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 9$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{4}{\pi(6^2)} \cdot 9 = \frac{1}{\pi} \approx 0.32\,\mathrm{m\,min^{-1}}$$

اس لمحے پر پانی کی گہرائی $0.32\,\mathrm{m\,min^{-1}}$ سے بڑھ رہی ہے۔ □

سوالات

سوال ۳.۱: فرض کریں کہ دائرے کا رداس r اور رقبہ $S = \pi r^2$ وقت t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق لکھیں۔

سوال ۳.۲: فرض کریں کرہ کا رداس r اور سطحی رقبہ $S = \frac{4}{3}\pi r^2$ وقت t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق لکھیں۔

سوال ۳.۳: بیلن کے رداس r، قد h اور حجم H کا تعلق $H = \pi r^2 h$ ہے۔

ا. r کو مستقل تصور کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں تعلق تلاش کریں۔

ب. h کو مستقل تصور کرتے ہوئے $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں تعلق تلاش کریں۔

ج. اگر نا r اور نا h مستقل ہوں تب $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہو گا؟

سوال ۳.۴: سیدھا کھڑے مخروط جس کا رداس r اور قد h ہوں کا حجم $H = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ہو گا۔

ا. مستقل r کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

ب. مستقل h کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

ج. غیر مستقل h اور r کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

سوال ۳.۵: مزاحمت R میں برقی رو I اور برقی دباو V کا تعلق $V = IR$ ہے (شکل ۳.۶۷ میں دکھایا گیا برقی دور)۔ فرض کریں کہ برقی دباو $1\,\mathrm{V\,s^{-1}}$ سے بڑھ رہا ہو جبکہ برقی رو $\frac{1}{3}\,\mathrm{A\,s^{-1}}$ سے گھٹ رہی ہے۔

ا. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت کیا ہے؟

ب. $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت کیا ہے؟

ج. $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہے؟

د. جب $V = 12$ وولٹ اور $I = 2$ ایمپیئر ہوں تب $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ کیا ہوگا؟ کیا R بڑھ رہا ہوگا یا گھٹ رہا ہوگا؟

سوال ۳.۶: برقی دور میں طاقت P ، مزاحمت R اور برقی رو i کا تعلق $P = i^2R$ ہے۔ طاقت، مزاحمت اور برقی رو کی اکائیاں بالترتیب واٹ (W) ، اوہم Ω اور ایمپیئر (A) ہیں۔

ا. $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق کیا ہے جہاں P ، R اور i میں سے کوئی بھی مستقل نہیں ہے۔

ب. مستقل P کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ کا کیا تعلق ہے؟

سوال ۳.۷: کارتیسی محدد میں نقطہ $(x, 0)$ اور $(0, y)$ کے بیچ فاصلہ $s = \sqrt{x^2 + y^2}$ ہے۔ وقت کو t سے ظاہر کریں۔

ا. مستقل y کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق کیا ہوگا؟

ب. اگر x اور y دونوں متغیر ہوں تب $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کا $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کے ساتھ کیا تعلق ہوگا؟

ج. مستقل s کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کا کیا تعلق ہوگا؟

سوال ۳.۸: مستطیل ڈبے کے اطراف کی لمبائیاں x ، y اور z ہیں۔ ڈبے کے وتر کی لمبائی $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ہوگی۔

ا. فرض کریں x ، y اور z مستقل نہیں ہیں۔ $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہوگا؟

ب. مستقل x کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہوگا؟

ج. مستقل x کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ کا آپس میں کیا تعلق ہوگا؟

سوال ۳.۹: ایک مثلث جس کے ضلع a اور b جن کے بیچ زاویہ θ ہو کا رقبہ $S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$ ہوگا۔

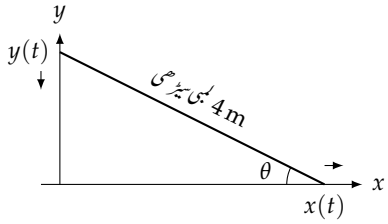
ا. مستقل a اور b کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق کیا ہوگا؟

ب. مستقل b کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق کیا ہوگا؟

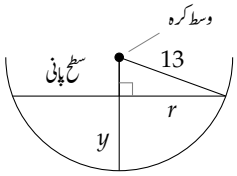
ج. a ، b اور θ غیر مستقل ہونے کی صورت میں $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ کا تعلق کیا ہوگا؟

سوال ۳.۱۰: دھاتی دائری تختہ جس کا رداس r ہے جس سے اس کا رداس $0.01\ \mathrm{cm\ min^{-1}}$ کی شرح سے بڑھتا ہے۔ جب رداس $50\ \mathrm{cm}$ ہو تب تختے کا رقبہ کس شرح سے بڑھتا ہے۔

سوال ۳.۱۱: مستطیل کی لمبائی l اور چوڑائی w کی شرح تبدیلی $2\ \mathrm{cm\ s^{-1}}$ اور $2\ \mathrm{cm\ s^{-1}}$ ہیں۔ جب $l = 12\ \mathrm{cm}$ اور $w = 5\ \mathrm{cm}$ ہو تب شرح تبدیلی (ا) رقبہ، (ب) محیط، (ج) وتر کیا ہوں گے؟ ان میں سے کون سے بڑھ رہے ہیں اور کون سے گھٹ رہے ہیں؟



شکل ۳.۶۸: دیوار کے ساتھ سیڑھی (سوال ۳.۱۳)



شکل ۳.۶۹: نصف کرہ ٹینکی (سوال ۳.۱۹)

سوال ۳.۱۲: مستطیل ڈبے کے ضلع کی لمبائیاں x ، y اور z ہیں۔ان کی شرح تبدیلی

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -2\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

ہیں۔جس لمحہ $x = 4$ ، $y = 3$ اور $z = 2$ ہوں اس لمحہ ڈبے کے (ا) حجم، (ب) سطحی رقبہ، (ج) وتر $s = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ کی تبدیلی کی شرح کیا ہو گی؟

سوال ۳.۱۳: دیوار کے ساتھ لگی 4 m لمبی سیڑھی زمین پر پھسلنے لگتی ہے (شکل ۳.۶۸)۔جس لمحہ زمین پر دیوار سے سیڑھی کا فاصلہ 3 m ہو اس لمحہ پر سیڑھی کا یہ سر $0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی شرح سے حرکت کر رہا ہے۔

ا. اس لمحے پر سیڑھی کا بالائی سر کس رفتار سے حرکت کرتا ہے؟

ب. سیڑھی، زمین اور دیوار ایک مثلث بناتے ہیں۔اس لمحے پر اس مثلث کا رقبہ کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟

ج. اس لمحے پر سیڑھی اور زمین کے بیچ زاویہ θ کس شرح سے تبدیل ہو رہا ہے؟

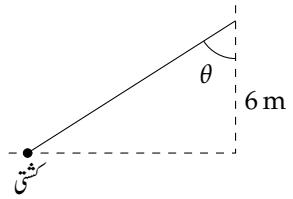
سوال ۳.۱۴: دو ہوائی جہاز 7000 m کی بلند پر آپس میں قائمہ راستوں پر سفر کر رہے ہیں۔ان کے راستے نقطہ M پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔جہاز الف کی رفتار $1000\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ جبکہ جہاز ب کی رفتار $850\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہے۔جس لمحہ M سے الف کا فاصلہ 50 km اور ب کا فاصلہ 100 km ہو، ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال ۳.۱۵: ایک لڑکی 300 m بلند پتنگ اڑا رہی ہے۔ہوا پتنگ کو افقی رخ $25\,\mathrm{m\,min^{-1}}$ کی رفتار سے حرکت دے رہی ہے۔اگر لڑکی سے پتنگ کا فاصلہ 500 m ہو تب لڑکی کس رفتار سے پتنگ کو ڈوری دے رہی ہے؟

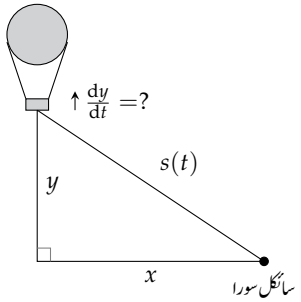
سوال ۳.۱۶: پرانے انجن کی بیلن کو خراد کی مشین سے کھلا کر کے اس میں نیا پسٹن ڈالا جاتا ہے۔خراد کی مشین بیلن کا رداس ہر تین منٹ میں $25\,\mu\mathrm{m}$ بڑھاتی ہے۔جب رداس 9.8 cm ہو اس لمحہ بیلن کا حجم کس شرح سے بڑھتا ہے؟

سوال ۳.۱۷: ریت کو $10\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ سے ڈھیر پر ڈالا جاتا ہے۔ڈھیر کی اونچائی ہر وقت قاعدہ کے قطر کی $\frac{3}{8}$ ہوتی ہے۔جب ڈھیر 4 m اونچا ہو اس لمحہ ڈھیر کی (ا) اونچائی (ب) رداس کس شرح سے تبدیل ہو رہے ہیں؟ جواب $\mathrm{cm\,s^{-1}}$ میں دیں۔

سوال ۳.۱۸: مخروطی شکل کی ٹینکی جس کی اونچائی 6 m اور رداس 45 m ہیں سے پانی کو $50\,\mathrm{m^3\,min^{-1}}$ کی شرح سے نکالا جاتا ہے۔مخروط کی نوک نیچے جانب ہے۔(ا) جب پانی 5 m گہرا ہو تب پانی کی گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟ (ب) اس لمحے پر پانی کی سطح کا رداس کس شرح سے تبدیل ہو گا؟ جواب $\mathrm{cm\,s^{-1}}$ میں دیں۔



شکل ۳.۷۰: کشتی کو بندرگاہ میں کھینچا جاتا ہے (سوال ۳.۲۲)



شکل ۳.۷۱: غبارہ کے نیچے سے گاڑی گزرتی ہے (سوال ۳.۲۳)

سوال ۳.۱۹: نصف کرہ جس کا رداس $R = 13\,\mathrm{m}$ ہے سے پانی کا انعکاس $6\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{min}^{-1}$ کی شرح سے کیا جاتا ہے (شکل ۳.۶۹)۔ پانی کا حجم $H = \frac{\pi}{3}y^2(3R - y)$ ہے جہاں y پانی کی گہرائی ہے۔

ا. جب پانی کی گہرائی $8\,\mathrm{m}$ ہو تب گہرائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟

ب. جب پانی کی گہرائی y ہو تب پانی کی سطح کا رداس کیا ہو گا؟

ج. جب پانی $8\,\mathrm{m}$ گہرا ہو تب رداس کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال ۳.۲۰: ہوا میں پانی کے باریک قطرے ہمیں دھند کی صورت میں نظر آتے ہیں۔ فرض کریں یہ قطرے کرہ نما ہیں اور ان کی سطح پر مزید پانی جمع ہوتا رہتا ہے جس کی مقدار سطحی رقبے کے راست متناسب ہے۔ دکھائیں کہ قطرے کا رداس مستقل شرح سے تبدیل ہوتا ہے۔

سوال ۳.۲۱: ایک غبارے میں $100\pi\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{min}^{-1}$ کی شرح سے ہیلیم[۴۵] گیس بھری جاتی ہے۔ جب غبارے کا رداس $5\,\mathrm{m}$ ہو تب اس کا رداس کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟ اس لمحے پر غبارے کا حجم کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال ۳.۲۲: ایک چھوٹی کشتی کو پانی کی سطح سے $6\,\mathrm{m}$ اونچائی سے بندرگاہ کی طرح کھینچا جاتا ہے (شکل ۳.۷۰)۔ رسی کو $2\,\mathrm{m\,s}^{-1}$ کی رفتار کھینچا جاتا ہے۔ (ا) جب رسی کی لمبائی $10\,\mathrm{m}$ ہو تب کشتی کتنی تیز حرکت کرتی ہے۔ (ب) اس لمحے پر زاویہ θ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

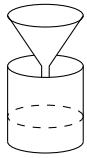
سوال ۳.۲۳: ایک غبارہ سیدھا اوپر رخ $1\,\mathrm{m\,s}^{-1}$ سے حرکت کرتا ہے۔ جب یہ $65\,\mathrm{m}$ بلندی پر پہنچتا ہے ٹھیک اسی لمحہ اس کے بالکل نیچے سڑک پر ایک گاڑی $17\,\mathrm{m\,s}^{-1}$ کی رفتار سے چلتے ہوئے گزرتی ہے (شکل ۳.۷۱)۔ تین سیکنڈ بعد غبارے اور گاڑی کے بیچ فاصلہ کس شرح سے بڑھتا ہے؟

سوال ۳.۲۴: مخروط چھلنی میں بیک وقت چائے ڈالی جاتی ہے جہاں سے چائے گزر کر پیالے میں $10\,\mathrm{cm}^3\,\mathrm{min}^{-1}$ کی شرح سے بھری جاتی ہے (شکل ۳.۷۲)۔ (ا) چھلنی میں چائے کی گہرائی $5\,\mathrm{cm}$ ہونے کے لمحے پر پیالے میں چائے کی گہرائی کس شرح سے بڑھتی ہے؟ (ب) اس لمحہ پر مخروط میں چائے کی گہرائی کس شرح سے کم ہوتی ہے؟

سوال ۳.۲۵: اخراج قلب جرمنی کے اڈولف فک نے 1860 کی دہائی میں دل سے گزرتے ہوئے خون کی شرح ناپنے کا طریقہ ایجاد کیا جو آج بھی زیر استعمال ہے۔ اس وقت اس جملے کو پڑھتے ہوئے آپ کا دل تقریباً $7\,\mathrm{L\,min}^{-1}$ خون خارج کر رہا ہو گا جبکہ بالکل آرام سے بیٹھ کر $6\,\mathrm{L\,min}^{-1}$

---

[۴۵] helium



شکل ۳.۷۲: مخروط چھلنی (سوال ۳.۲۴)

اخراج متوقع ہے۔ بہت لمبی دوڑ لگانے والے کھلاڑی کا قلب $30\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ تک خون خارج کر سکتا ہے۔

قلب کے اخراج کا حساب

$$y = \frac{Q}{D}$$

سے کیا جا سکتا ہے جہاں سانس سے خارج CO_2 کی ملی لٹر فی منٹ میں مقدار کو Q سے ظاہر کیا گیا ہے جبکہ پھیپھڑوں کو فراہم خون میں CO_2 کی کثافت $\mathrm{mL/L}$ اور پھیپھڑوں سے خارج خون میں CO_2 کی کثافت کے فرق کو D سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یوں $Q = 223\,\mathrm{mL/min}$ اور $D = 97 - 56 = 41\,\mathrm{mL/L}$ کی صورت میں

$$y = \frac{223\,\mathrm{mL/min}}{41\,\mathrm{mL/L}} \approx 5.68\,\mathrm{L/min}$$

ہو گا جو آرام سے بیٹھے شخص کے قلب کے اخراج کے کافی قریب ہے۔

فرض کریں کہ ہم جانتے ہیں کہ جب $Q = 233$ اور $D = 41$ ہوں تب D کی قیمت 2 اکائی فی منٹ سے گھٹ رہی ہے جبکہ Q میں کوئی تبدیلی نہیں پائی جاتی ہے۔ قلب کے اخراج کو کیا ہو رہا ہے؟

سوال ۳.۲۶: لاگت، آمدنی اور منافع۔ ایک ادارہ x اشیاء کو $c(x)$ لاگت، $r(x)$ آمدنی اور $p(x) = r(x) - c(x)$ منافع کے ساتھ تیار کر سکتا ہے (تمام اعداد و شمار کو 1000 سے ضرب کریں)۔ x اور $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ کی درج ذیل قیمتوں کے لئے $\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}$ ، $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$ کا حساب کریں۔

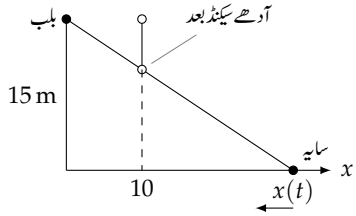
ا.

$$r(x) = 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x; \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0.1, \quad x = 2$$

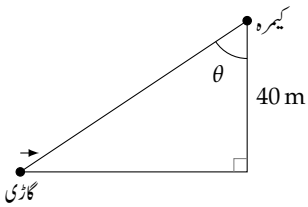
ب.

$$r(x) = 70x, \quad c(x) = x63 - 6x62 + \frac{45}{x}; \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0.05, \quad x = 1.5$$

سوال ۳.۲۷: قطع مکافی پر حرکت۔ ایک ذرہ قطع مکافی $y = x^2$ پر ربع اول میں یوں حرکت کرتا ہے کہ اس کا x محدد $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی شرح سے بڑھتا جاتا ہے۔ مبدا سے ذرہ تک خط، x محور کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے۔ جب $x = 3\,\mathrm{m}$ ہو تب θ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟



شکل ۳.۷۳: گیند کا سایہ (سوال ۳.۳۱)



شکل ۳.۷۴: گاڑی کی ویڈیو (سوال ۳.۳۲)

سوال ۳.۲۸: دوسرا قطع مکافی۔ ایک ذرہ دائیں سے بائیں جانب قطع مکافی $y = \sqrt{-x}$ پر یوں حرکت کرتا ہے کہ اس کا x محدد $\frac{8}{\mathrm{m\,s^{-1}}}$ سے گھٹتا ہے۔ مبدا سے ذرہ تک خط، x محور کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے۔ جب $x = -4\,\mathrm{m}$ ہو تب θ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال ۳.۲۹: مستوی پر حرکت۔ کارتیسی محدد پر حرکت کرتے ہوئے ذرہ کے تعین گر x اور y محدد وقت t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ اگر $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ اور $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہوں تب مبدا سے ذرے کا فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال ۳.۳۰: حرکت پذیر سایہ۔ $2\,\mathrm{m}$ قد کا ایک شخص گلی میں روشنی کے کھمبے کی طرف $1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے چل رہا ہے۔ کھمبے میں نسب بلب زمین سے $5\,\mathrm{m}$ بلندی پر ہے۔ جب شخص کھمبے سے $4\,\mathrm{m}$ فاصلے پر ہو، اس کا سایہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟

سوال ۳.۳۱: دوسرا حرکت کرتا سایہ۔ کھمبے پر بلب $15\,\mathrm{m}$ بلندی پر نسب ہے۔ کھمبے سے $10\,\mathrm{m}$ فاصلے پر اتنی ہی بلندی سے ایک گیند کو زمین پر گرنے دیا جاتا ہے (شکل ۳.۷۳)۔ آدھے سیکنڈ بعد زمین پر گیند کا سایہ کس رفتار سے حرکت کرے گا؟ ($g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$)

سوال ۳.۳۲: آپ $80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ رفتار سے چلتی ہوئی گاڑی سے $150\,\mathrm{m}$ کے فاصلے پر $40\,\mathrm{m}$ کی بلندی سے گاڑی کی ویڈیو[۴۶] بنا رہے ہیں جو سیدھی آپ کی طرف آ رہی ہے (شکل ۳.۷۴)۔ اس لمحے پر کیمرے کا زاویہ میلان سے شرح سے تبدیل ہو گا؟ دو سیکنڈ بعد یہ شرح کیا ہو گی؟

سوال ۳.۳۳: برف کی پگھلتی تہہ۔ ایک لوہے کا کرہ جس کا رداس $0.1\,\mathrm{m}$ ہے پر برف کی یکساں موٹائی کی تہہ جمائی جاتی ہے جو $10\,\mathrm{cm^3\,s^{-1}}$ کی شرح سے پگھلتی ہے۔ جس لمحے پر تہہ کو موٹائی $2\,\mathrm{cm}$ ہو اس لمحے پر تہہ کی موٹائی کس شرح سے تبدیل ہو گی؟

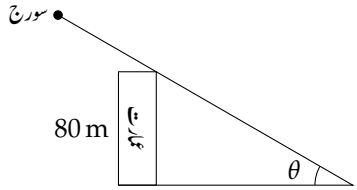
سوال ۳.۳۴: موٹروے پولیس۔ $1\,\mathrm{km}$ بلندی پر ایک جہاز پشاور سے اسلام آباد کی موٹروے کے ٹھیک اوپر $500\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے پرواز کرتے ہوئے موٹروے پر سامنے سے آمد گاڑی کا فاصلہ $5\,\mathrm{km}$ ناپتا ہے جو اس لمحے پر $100\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی شرح سے گھٹ رہا ہے۔ گاڑی کی رفتار تلاش کریں۔

سوال ۳.۳۵: عمارت کا سایہ۔ سال کے کسی ایک دن سورج $80\,\mathrm{m}$ بلند عمارت کے ٹھیک اوپر سے گزرتا ہے (شکل ۳.۷۵)۔ جب عمارت کا سایہ ہموار زمین پر $60\,\mathrm{m}$ ہو، سایے کے سر سے سورج تک کا خط زمین کے ساتھ زاویہ θ بناتا ہے جو اس لمحہ $0.27^\circ/\mathrm{min}$ کی شرح سے تبدیل ہوتا ہے۔ سایے کی لمبائی کس شرح سے گھٹتی ہے؟ جواب $\mathrm{cm/min}$ میں دیں اور ریڈیئن کا استعمال کرنا نہ بھولیں۔

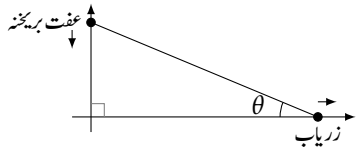
سوال ۳.۳۶: چال قدمی۔ ایک چوراہے پر دو سڑک 90° زاویے سے آپس میں ملتے ہیں۔ ایک سڑک پر عفت بریخنہ چوراہے کی جانب $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے بڑھتی ہے جبکہ دوسری سڑک پر اس کا چھوٹا بھائی زریاب خان $1.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے چوراہے سے دور چلا جاتا ہے (شکل ۳.۷۶)۔ جب عفت بریخنہ اور زریاب خان چوراہے سے بالترتیب $20\,\mathrm{m}$ اور $15\,\mathrm{m}$ کے فاصلے پر ہوں، زاویہ θ کی شرح تبدیلی کیا ہو گی؟

---

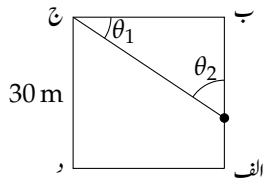
[۴۶] video



شکل ۳.۷۵: عمارت کا سایہ (سوال ۳.۳۵)



شکل ۳.۷۶: عفت اور زریاب کی چال قدمی (سوال ۳.۳۶)



شکل ۳.۷۷: بچوں کا کھیل (سوال ۳.۳۷)

سوال ۳.۳۷: بچوں کا کھیل۔ ایک کھیل میں کھلاڑی ابتدائی نقطہ الف سے دوڑ کر گھری کی الٹ رخ چوکور راہ پر $6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے چکر لگاتا ہے۔ چوکور کے اطراف کی لمبائی $30\,\mathrm{m}$ ہے (شکل ۳.۷۷)۔

ا. جب کھلاڑی ابتدائی نقطہ الف سے $10\,\mathrm{m}$ فاصلے پر ہو، اس کا نقطہ ج سے فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہوتا ہے؟

ب. اس لمحے پر زاویہ θ_1 اور θ_2 کس شرح سے تبدیل ہوتے ہیں؟

سوال ۳.۳۸: ایک گھڑی کے سیکنڈوں کی سوئی کی لمبائی $20\,\mathrm{cm}$ ہے۔ جب یہ سوئی چار بجے پر ہو اس لمحہ بارہ بجے کی نشان سے اس کا فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہوگا؟

سوال ۳.۳۹: بحری جہاز۔ نقطہ M سے دو بحری جہاز آپس میں 120° کا زاویہ بناتے ہوئے روانہ ہوتے ہیں۔ جہاز الف کی رفتار $28\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہے جبکہ جہاز ب کی رفتار $20\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہے۔ ایک گھنٹہ بعد ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہوگا؟

جوابات

حصہ ۳.۱ صفحہ ۱۸۸

۳.۱) $-2x, 6, 0, -2$

۳.۳) $-\frac{2}{t^3}, 2, -\frac{1}{4}, -\frac{2}{3\sqrt{3}}$

۳.۵) $\frac{3}{2\sqrt{3\theta}}, \frac{3}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}$

۳.۷) $6x^2$

۳.۹) $\frac{1}{(2t+1)^2}$

۳.۱۱) $-\frac{1}{2(q+1)\sqrt{q+1}}$

۳.۱۳) $1-\frac{9}{x^2}, 0$

۳.۱۵) $3t^2-2t, 5$

۳.۱۷) $\frac{-4}{(x-2)\sqrt{x-2}}, y-4=-\frac{1}{2}(x-6)$

۳.۱۹) 6

۳.۲۱) $\frac{1}{8}$

۳.۲۳) -1

۳.۲۵) $-\frac{1}{4}$

۳.۲۷) شکل ۳.۱۲-ب

۳.۲۸) شکل ۳.۱۲-د

۳.۲۹) شکل ۳.۱۲-ج

۳.۳۰) شکل ۳.۱۲-ا

۳.۳۱) (ا) $x=0,1,4$ ؛(ب)شکل ۳.۱۶

۳.۳۳) چونکہ $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1$ جبکہ $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$ ہے لہٰذا $x=0$ پر $f(x)$ نا قابل تفرق ہے۔

۳.۳۵) چونکہ $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = 2$ جبکہ $\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \frac{1}{2}$ ہے لہٰذا $x=1$ پر $f(x)$ نا قابل تفرق ہے۔

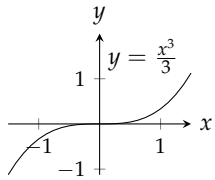
۳.۳۷) (ا) $-3 \le x \le 2$ (ب)کوئی نہیں(ج)کوئی نہیں۔

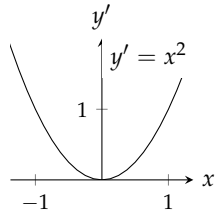
۳.۳۹) (ا) $-3 \le x < 0, 0 < x \le 3$ (ب)کوئی نہیں(ج) $x=0$

۳.۴۱) (ا) $-1 \le x < 0, 0 < x \le 2$ (ب) $x=0$ (ج)کوئی نہیں۔

۳.۴۳) (ا) $y' = -2x$ (ج) $x<0, x=0, x>0$ (د) $-\infty < x < 0, 0 < x < \infty$

۳.۴۵) (ا) $y' = x^2$ ،(ب)





(ج) $x \neq 0$ ، $x=0$ ،کوئی نہیں،(د) $-\infty < x < \infty$ ،کوئی نہیں۔

۳.۴۷) $y' = 3x^2$ کبھی بھی منفی نہیں ہوگا۔

۳.۴۹) ہاں، $y+16 = -(x-3)$ نقطہ $(3,-16)$ پر مماس ہے۔

۳.۵۱) نہیں،چونکہ تفاعل $y = \lfloor x \rfloor$ متوسط قیمت خاصیت پر پورا نہیں اترتا ہے۔

۳.۵۳) ہاں؛ $(-f)'(x) = -(f'(x))$

۳.۵۵) $g(t) = mt$ اور $h(t) = t$ کے لئے $\lim_{t\to 0} \frac{g(t)}{h(t)} = m$ ہوگا جو غیر صفر ہو سکتا ہے۔

حصہ ۳.۲ صفحہ ۲۰۷

۳.۱) $y' = -2x, \quad y'' = -2$

۳.۳) $s' = 15t^2 - 15t^4, \quad s'' = 30t - 60t^3$

۳.۵) $y' = 4x^2 - 1, \quad y'' = 8x$

۳.۷) $w' = -6z^{-3} + \frac{1}{z^2}, \quad w'' = 18z^{-4} - \frac{2}{z^3}$

۳.۹) $y' = 12x - 10 + 10x^{-3},$
$y'' = 12 - 30x^{-4}$

۳.۱۱) $r' = -\frac{2}{3s^3} + \frac{5}{2s^2}, \quad r'' = \frac{2}{s^4} - \frac{5}{s^3}$

۳.۱۳) $y' = -5x^4 + 12x^2 - 2x - 3$

۳.۱۵) $y' = 3x^2 + 10x + 2 - \frac{1}{x^2}$

۳.۱۷) $y' = \frac{-19}{(3x-2)^2}$

۳.۱۹) $g'(x) = \frac{x^2+x+4}{(x+0.5)^2}$

۳.۲۱) $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{t^2-2t-1}{(1+t^2)^2}$

۳.۲۳) $f'(s) = \frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)^2}$

۳.۲۵) $v' = -\frac{1}{x^2} + 2x^{-3/2}$

۳.۲۷) $y' = \frac{-4x^3-3x^2+1}{(x^2-1)^2(x^2+x+1)^2}$

۳.۲۹) $y' = 2x^3 - 3x - 1, y'' = 6x^2 - 3,$
$y''' = 12x, y^{(4)} = 12$ جبکہ تمام $n \geq 5$ کے لئے
$y^{(n)} = 0$

۳.۳۱) $y' = 2x - 7x^{-2}, \quad y'' = 2 + 14x^{-3}$

۳.۳۳) $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 3\theta^{-4}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\theta^2} = -12\theta^{-5}$

۳.۳۵) $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = -z^{-2} - 1, \quad \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} = 2z^{-3}$

۳.۳۷) $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}q} = \frac{1}{6}q + \frac{1}{6}q^{-3} + q^{-5},$
$\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}q^2} = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}q^{-4} - 5q^{-6}$

۳.۳۹) ا) 13 ، ب) -7 ، ج) $\frac{7}{25}$ ، د) 20

۳.۴۱) ا) $y = -\frac{x}{8} + \frac{5}{4}$ ، ب) $(0,1)$ پر $m = -4$ ،
ج) $y = 8x - 15$ ، $y = 8x + 17$

۳.۴۳) $y = 4x, \; y = 2$

۳.۴۵) $a = 1, \; b = 1, \; c = 0$

۳.۴۷) ا) $y = 2x + 2$ ، ج) $(2,6)$

۳.۴۹) $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}H} = -\frac{nRT}{(H-nb)^2} + \frac{2an^2}{H^3}$

۳.۵۱) قاعدہ حاصل ضرب اب مستقل مضرب کا قاعدہ ہو گا، لہٰذا دوسرا قاعدہ پہلے قاعدے میں موجود ہے۔

۳.۵۵) ا) $\frac{3}{2}x^{1/2}$ ، ب) $\frac{5}{2}x^{3/2}$ ، ج) $\frac{7}{2}x^{5/2}$ ،
د) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{n/2}) = \frac{n}{2}x^{(n/2)-1}$

حصہ ۳.۳ صفحہ ۲۲۱

۳.۱) ا) $80\,\mathrm{m}$ ، ب) $8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ، $0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ؛ $16\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
ج) $1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ، $1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ سمت تبدیلی نہیں ہوتی

۳.۳) ا) $-9\,\mathrm{m}$ ، ب) $-3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ، $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
ج) $-12\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ، $6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ؛ $12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سمت تبدیلی نہیں ہوتی

۳.۵) ا) $-20\,\mathrm{m}$ ، ب) $-5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ، $45\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
ج) $\frac{4}{25}\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ، $140\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ؛ $0.2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سمت تبدیل نہیں ہوتی

۳.۷) ا) $a(1) = -6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ، $a(3) = 6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
ب) $v(2) = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ج) $6\,\mathrm{m}$

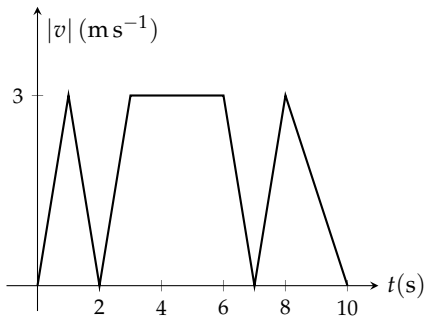
۳.۹) مریخ: $7.5\,\mathrm{s}$ ، مشتری: $1.2\,\mathrm{s}$

۳.۱۱) ا) $9.8t\,\mathrm{m\,s^{-1}} - 2.4$ ، ب) $-9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$
ج) $29.4\,\mathrm{m}$ د) 0.7 سیکنڈ اوپر جانب اور 4.2 سیکنڈ نیچے رخ د) $4.9\,\mathrm{s}$

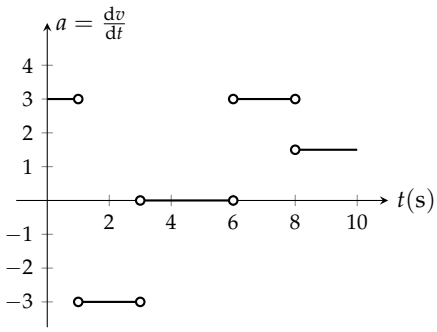
۳.۱۳) چاند پر 320 سیکنڈ، زمین پر 52 سیکنڈ؛ چاند پر 20287 میٹر، زمین پر 3297 میٹر

۳.۱۵) ا) $9.8t\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ب) $9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

۳.۱۷) ا) $t = 2, t = 7$ ب) $3 \leq t \leq 6$
ج)



د)



۳.۱۹) (ا) $60\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (ب) $2\,\mathrm{s}$
(ج) $t = 8.12\,\mathrm{s}$ ، $v = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
(د) $12\,\mathrm{s}$ ، $v = -38\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
(ہ) $10\,\mathrm{s}$ (و) لمحہ $t = 2\,\mathrm{s}$ پر
(ز) $2\,\mathrm{s}$ تا $12\,\mathrm{s}$

۳.۲۲) مقام بالمقابل وقت شکل-ج، رفتار بالمقابل وقت شکل-ب اور اسراع بالمقابل وقت شکل-ا ہیں۔

۳.۲۳) (ا) 110 روپیہ فی مشین (ب) 80 روپیہ (ج) 79.9 روپیہ

۳.۲۵) (ا) 10^4 جرثومیں فی گھنٹہ؛ (ب) 0 جرثومیں فی گھنٹہ؛ (ج) -10^4 جرثومیں فی گھنٹہ

۳.۲۷) (ا) $5(\frac{t}{60} - 1)$ (ب) $t = 0$ پر گہرائی تیز ترین گھٹتی ہے جب شرح $\frac{dy}{dt} = -5$ ہے اور $t = 60$ پر گھٹنے کی کم تر شرح $\frac{dy}{dt} = 0$ ہو گی۔

۳.۲۹) جہاز 25 سیکنڈ بعد اڑتا ہے اور جس دوران یہ 694 m فاصلہ طے کرتا ہے۔

۳.۳۲) (ا) $t = 6.25\,\mathrm{s}$؛ (ب) $[0, 6.25)$ پر اوپر رخ اور $(6.25, 12.5]$ پر نیچے رخ؛ (ج) $t = 6.25\,\mathrm{s}$؛ (د) $[0, 6.25)$ پر رفتار بڑھتی ہے جبکہ $(6.25, 12.5]$ پر رفتار گھٹتی ہے؛ (ہ) $t = 6.25$ پر تیز تر اور $t = 0, 12.5$ پر آہستہ ترین؛ (و) $t = 6.25\,\mathrm{s}$

۳.۳۴) (ا) $t = \frac{6\mp\sqrt{15}}{3}$؛ (ب) $\left(\frac{6-\sqrt{15}}{3}, \frac{6+\sqrt{15}}{3}\right)$ پر بائیں رخ اور $[0, \frac{6-\sqrt{15}}{3}) \cup (\frac{6+\sqrt{15}}{3}, 4]$ پر دائیں رخ؛ (ج) $t = \frac{6\mp\sqrt{15}}{3}$؛ (د) $(\frac{6-\sqrt{15}}{3}, 2) \cup (\frac{6+\sqrt{15}}{3}, 4]$ پر رفتار بڑھتی ہے جبکہ $[0, \frac{6-\sqrt{15}}{3}) \cup (2, \frac{6+\sqrt{15}}{3})$ پر رفتار گھٹتی ہے؛ (ہ) $t = 0, 4$ پر تیز ترین اور $t = \frac{6\mp\sqrt{15}}{3}$ پر آہستہ ترین؛ (و) $t = \frac{6+\sqrt{15}}{3}$

حصہ ۳.۴ صفحہ ۲۳۸

۳.۱) $y' = -10 - 3\sin x$

۳.۳) $y' = -\csc x \cot x - \frac{2}{\sqrt{x}}$

۳.۵) $y' = 0$

۳.۷) $\frac{-\csc^2 x}{(1+\cot x)^2}$

۳.۹) $4\tan x \sec x - \csc^2 x$

۳.۱۱) $x^2 \cos x$

۳.۱۳) $\sec^2 t - 1$

۳.۱۵) $\frac{-2\csc t \cot t}{(1-\csc t)^2}$

۳.۱۷) $-\theta(\theta\cos\theta + 2\sin\theta)$

۳.۱۹) $\sec\theta\csc\theta(\tan\theta - \cot\theta) = \sec^2\theta - \csc^2\theta$

۳.۲۱) $\sec^2 q$

۳.۲۳) $\sec^2 q$

۳.۲۵) (ا) $2\csc^3 x - \csc x$ (ب) $2\sec^3 x - \sec x$

۳.۲۷) 0

۳.۲۹) -1

۳.۳۱) 0

۳.۳۳) 1

۳.۳۵) $3/4$

۳.۳۷) 2

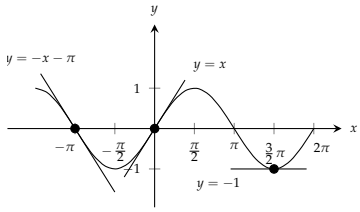
۳.۳۹) $1/2$

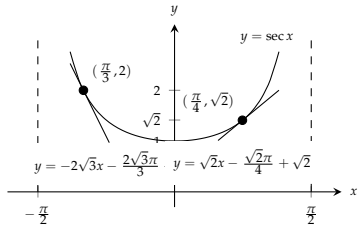
۳.۴۱) 2

۳.۴۳) 1

۳.۴۵) $1/2$

۳.۴۷) $3/8$

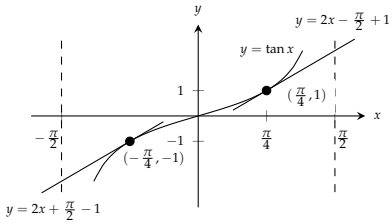




۳.۵۳) ہاں، نقطہ $x = \pi$ پر

۳.۵۵) نہیں

۳.۵۷) $(-\pi/4, -1); (\pi/4, 1)$



۳.۵۹) (ا) $y = -x + \pi/2 + 2$ ، (ب) $y = 4 - \sqrt{3}$

۳.۶۱) $-\sqrt{2}\mathrm{m\,s^{-1}}, \sqrt{2}\mathrm{m\,s^{-1}}, \sqrt{2}\mathrm{m\,s^{-2}}, \sqrt{2}\mathrm{m\,s^{-3}}$

۳.۶۳) $c = 9$

۳.۶۵) $\sin x$

حصہ ۳.۵ صفحہ ۲۵۱

۳.۱) $12x^3$

۳.۳) $3\cos(3x+1)$

۳.۵) $-\sin(\sin x)\cos x$

۳.۷) $10\sec^2(10x-5)$

۳.۹) $u = 2x+1$ لیتے ہوئے $y = u^5$ اور $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 5u^4 \cdot 2 = 10(2x+1)^4$ ہوگا۔

۳.۱۱) $u = (1-x/7)$ لے کر، $y = u^{-7}$، $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = -7u^{-8}\cdot(\frac{1}{7}) = (1-x/7)^{-8}$

۳.۱۳) $u = x^2/8 + x - 1/x$ لے کر، $y = u^4$، $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 4(x^2/8+x-1/x)^3(x/4+1+1/x^2)$

۳.۱۵) $u = \tan x$ لے کر $y = \sec u$ اور $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = (\sec u \tan u)(\sec^2 x) = \sec(\tan x)\tan(\tan x)\sec^2 x$

۳.۱۷) $u = \sin x$ لے کر $y = u^3$ اور $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = 3u^2\cos x = 3\sin^2 x\cos x$

۳.۱۹) $-\frac{1}{2\sqrt{3-t}}$

۳.۲۱) $\frac{4}{\pi}(\cos 3t - \sin 5t)$

۳.۲۳) $\frac{\csc\theta}{\cot\theta+\csc\theta}$

۳.۲۵) $2x\sin^4 x + 4x^2\sin^3 x\cos x + \cos^{-2} x + 2x\cos^{-3} x\sin x$

۳.۲۷) $(3x-2)^6 - \frac{1}{x^3(4-\frac{1}{2x^2})^2}$

۳.۲۹) $\frac{(4x+3)^3(4x+7)}{(x+1)^4}$

۳.۳۱) $\sqrt{x}\sec^2(2\sqrt{x}) + \tan(2\sqrt{x})$

۳.۳۳) $\frac{2\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2}$

۳.۳۵) $\frac{dr}{d\theta} = -2\sin(\theta^2)\sin 2\theta + 2\theta\cos(2\theta)\cos(\theta^2)$

۳.۳۷) $\frac{dq}{dt} = (\frac{t+2}{2(t+1)^{3/2}})\cos(\frac{t}{\sqrt{t+1}})$

۳.۳۹) $2\pi\sin(\pi t-2)\cos(\pi t-2)$

۳.۴۱) $\frac{8\sin 2t}{(1+\cos 2t)^5}$

۳.۴۳) $-2\cos(\cos(2t-5))\sin(2t-5)$

۳.۴۵) $(1+\tan^4(\frac{t}{12}))^2(\tan^3(\frac{t}{12})\sec^2(\frac{t}{12}))$

۳.۴۷) $\frac{-t\sin(t^2)}{\sqrt{1+\cos(t^2)}}$

۳.۴۹) $\frac{6}{x^3}(1+\frac{1}{x})(1+\frac{2}{x})$

۳.۵۱) $2\csc^2(3x-1)\cot(3x-1)$

۳.۵۳) $\frac{5}{2}$

۳.۵۵) $-\pi/4$

۳.۵۷) 0

۳.۵۹) (ا) $2/3$، (ب) 5، (ج) 2π، (د) -8π، $37/6$، (ہ) -1، (و) $\frac{\sqrt{2}}{24}$، (ز) $5/32$، (ح) $\frac{-5}{3\sqrt{17}}$

۳.۶۱) 5

۳.۶۳) (ا) 1، (ب) 1

۳.۶۵) (ا) $y = \pi x + 2 - \pi$، (ب) $\pi/2$

۳.۶۷) سستی رفتار دگنی، اسراع چار گنا اور جھٹکا آٹھ گنا ہو جاتا ہے۔

۳.۶۹) $v = 0.4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $a = -\frac{4}{125}\mathrm{m\,s^{-2}}$

حصہ ۳.۶ صفحہ ۲۶۷

۳.۱) $\frac{9}{4}x^{5/4}$

۳.۳) $\frac{2^{1/3}}{3x^{2/3}}$

۳.۵) $\frac{7}{2(x+6)^{1/2}}$

۳.۷) $-(2x+5)^{-3/2}$

۳.۹) $\frac{2x^2+1}{(x^2+1)^{1/2}}$

۳.۱۱) $\frac{ds}{dt} = \frac{2}{7}t^{-5/7}$

۳.۱۳) $\frac{dy}{dt} = -\frac{4}{3}(2t+5)^{-5/3}\cos[(2t+5)^{-2/3}]$

۳.۱۵) $f'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x(1-\sqrt{x})}}$

۳.۱۷) $h'(\theta) = -\frac{2}{3}(\sin 2\theta)(1+\cos 2\theta)^{-2/3}$

۳.۱۹) $\frac{-2xy-y^2}{x^2+2xy}$

۳.۲۱) $\frac{1-2y}{2x+2y-1}$

۳.۲۳) $\frac{-2x^3+3x^2y-xy^2+x}{x^2y-x^3+y}$

۳.۲۵) $\frac{1}{y(x+1)^2}$

۳.۲۷) $\cos^2 y$

۳.۲۹) $\frac{-\cos^2(xy)-y}{x}$

۳.۳۱) $\frac{-y^2}{y\sin(\frac{1}{y})-\cos(\frac{1}{y})+xy}$

۳.۳۳) $-\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\theta}}$

۳.۳۵) $\frac{-r}{\theta}$

۳.۳۷) $y' = -\frac{x}{y}$, $y'' = \frac{-y^2-x^2}{y^3}$

۳.۳۹) $y' = \frac{x+1}{y}$, $y'' = \frac{y^2-(x+1)^2}{y^3}$

۳.۴۱) $y' = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}+1}$, $y'' = \frac{1}{2(\sqrt{y}+1)^3}$

۳.۴۳) -2

۳.۴۵) $(-2,1) : m = -1$, $(-2,-1) : m = 1$

۳.۴۷) (ا) $y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}$، (ب) $y = -\frac{4}{7}x + \frac{29}{7}$

۳.۴۹) (ا) $y = 3x + 6$، (ب) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}$

۳.۵۱) (ا) $y = \frac{6}{7}x + \frac{6}{7}$، (ب) $y = -\frac{7}{6}x - \frac{7}{6}$

۳.۵۳) (ا) $y = -\frac{\pi}{2}x + \pi$، (ب) $y = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}$

۳.۵۵) (ا) $y = 2\pi x - 2\pi$، (ب) $y = -\frac{x}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}$

۳.۵۷) نقطہ $(-\sqrt{7}, 0)$ اور $\sqrt{7}, 0$، ڈھلوان: -2

۳.۵۹) $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ پر

$m = -1$، $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}\right)$ پر $m = \sqrt{3}$

۳.۶۱) $(-3, 2) : m = -\frac{27}{8}; (-3, -2) : m = \frac{27}{8}; (3, 2) : m = \frac{27}{8};$

$(3, -2) : m = -\frac{27}{8}$

۳.۶۳) (ا) غلط، (ب) درست، (ج) درست، (د) درست

۳.۶۵) $(3, -1)$

۳.۶۹) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^3+2xy}{x^2+3xy^2}$,

$\frac{dx}{dy} = -\frac{x^2+3xy^2}{y^3+2xy}$, $\frac{dx}{dy} = -\frac{1}{dy/dx}$

حصہ ۳.۷ صفحہ ۲۷۷

۳.۱) $\frac{dS}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$

۳.۳) (ا) $\frac{dH}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$، (ب) $\frac{dH}{dt} = 2\pi r h \frac{dr}{dt}$،

(ج) $\frac{dH}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt} + 2\pi r h \frac{dr}{dt}$

۳.۵) (ا) $1\,\mathrm{V\,s^{-1}}$، (ب) $-\frac{1}{3}\,\mathrm{A\,s^{-1}}$،

(ج) $\frac{dR}{dt} = \frac{1}{I}\left(\frac{dV}{dt} - \frac{V}{I}\frac{dI}{dt}\right)$، (د) $\frac{3}{2}\,\Omega\,\mathrm{s^{-1}}$،

مزاحمت بڑھ رہی ہے۔

۳.۷) (ا) $\frac{dS}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dx}{dt}$،

(ب) $\frac{dS}{dt} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dx}{dt} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{dy}{dt}$،

(ج) $\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}$

۳.۹) (ا) $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$،

(ب) $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}b\sin\theta\frac{da}{dt}$،

(ج) $\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}ab\cos\theta\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}b\sin\theta\frac{da}{dt} + \frac{1}{2}a\sin\theta\frac{db}{dt}$

۳.۱۱) (ا) $14\,\mathrm{cm^2\,s^{-1}}$ سے بڑھتا ہے؛

(ب) $0\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$، مستقل؛

(ج) $-\frac{14}{13}\,\mathrm{cm\,s^{-1}}$، گھٹ رہا ہے۔

۳.۱۳) (ا) $\frac{-3\sqrt{7}}{14}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، (ب) $\frac{-\sqrt{7}}{14}\,\mathrm{m^2\,s^{-1}}$

۳.۱۵) $20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

۳.۱۷) (ا) $\frac{dh}{dt} = 11.19\,\mathrm{cm\,min^{-1}}$،

(ب) $\frac{dr}{dt} = 14.92\,\mathrm{cm\,min^{-1}}$

۳.۱۹) (ا) $-\frac{1}{24\pi}\,\mathrm{m\,min^{-1}}$، (ب) $r = \sqrt{26y - y^2}\,\mathrm{m}$،

(ج) $\frac{dr}{dt} = -\frac{5}{288\pi}\,\mathrm{m\,min^{-1}}$

۳.۲۱) $1\,\mathrm{m/min}$، $40\pi\,\mathrm{m^2\,min^{-1}}$

۳.۲۳) $11\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

۳.۲۵) $\frac{466}{1681}\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ سے بڑھ رہا ہے۔

۳.۲۷) $1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

۳.۲۹) $-5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

۳.۳۱) $490\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

۳.۳۳) $\frac{dS}{dt} = 1.66\,\mathrm{cm^2}$, $\frac{dr}{dt} = 55\,\mathrm{\mu m\,s^{-1}}$

۳.۳۵) $58.9\,\mathrm{cm/min}$

۳.۳۷) (ا) $\frac{-12}{\sqrt{13}}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$، (ب) $\frac{d\theta_1}{dt} = -0.138\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$،

$\frac{d\theta_2}{dt} = 0.138\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

۳.۳۹) $4\sqrt{109}\,\mathrm{km\,h^{-1}}$