احصاء اور تحلیلی ہندسہ

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۲۰ اگست ۲۰۲۶

عنوان

۱ ابتدائی معلومات ۱
۱.۱ حقیقی اعداد اور حقیقی خط ۱
۱.۲ محدد، خطوط اور بڑھوتری ۱۳
۱.۳ تفاعل ۲۷
۱.۴ ترسیم کی منتقلی ۴۴
۱.۵ تکونیاتی تفاعل ۶۰

۲ حدود اور استمرار ۷۹
۲.۱ تبدیلی کی شرح اور حد ۷۹
۲.۲ حد تلاش کرنے کے قواعد ۹۳
۲.۳ مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف ۱۰۴
۲.۴ تصور حد کی توسیع ۱۲۱
۲.۵ استمرار ۱۳۸
۲.۶ مماسی خط ۱۵۵

۳ تفرق ۱۶۷
۳.۱ تفاعل کا تفرق ۱۶۷
۳.۲ قواعد تفرق ۱۸۵
۳.۳ تبدیلی کی شرح ۲۰۲
۳.۴ تکونیاتی تفاعل کا تفرق ۲۱۷
۳.۵ زنجیری قاعدہ ۲۳۴
۳.۶ خفی تفرق اور ناطق قوت نما ۲۴۸
۳.۷ دیگر شرح تبدیلی ۲۶۲

۴ تفرق کا استعمال ۲۷۵
۴.۱ تفاعل کی انتہائی قیمتیں ۲۷۵
۴.۲ مسئلہ اوسط قیمت ۲۸۷
۴.۳ مقامی انتہائی قیمتوں کی یک رتبی تفرقی پرکھ ۳۰۰

۴.۴ y' اور y'' کے ساتھ ترسیم کرنا ۳۰۸
۴.۵ $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء ۳۲۶
۴.۶ بہترین بنانا ۳۴۸
۴.۷ خط بندی اور تفرقات ۳۶۸
۴.۸ ترکیب نیوٹن ۳۸۸

۵ تکمل ۳۹۹
۵.۱ غیر قطعی تکملات ۳۹۹
۵.۲ تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی ۴۱۰
۵.۳ تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدے کا الٹ اطلاق ۴۲۳
۵.۴ اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ ۴۳۴
۵.۵ ریمان مجموعے اور قطعی تکملات ۴۵۱
۵.۶ خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ ۴۷۴
۵.۷ بنیادی مسئلہ ۴۸۹
۵.۸ قطعی تکمل میں بدل ۵۰۶
۵.۹ اعدادی تکمل ۵۱۲

۶ تکمل کا استعمال ۵۲۹
۶.۱ منحنیات کے بیچ رقبہ ۵۲۹
۶.۲ ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش ۵۴۲
۶.۳ اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا ۵۴۹
۶.۴ نلکی چھلے ۵۶۳
۶.۵ مستوی منحنیات کی لمبائیاں ۵۷۴
۶.۶ سطح طواف کا رقبہ ۵۸۳
۶.۷ معیار اثر اور مرکز کمیت ۵۹۳
۶.۸ کام ۶۰۹
۶.۹ فشار سیال اور قوت سیال ۶۲۲
۶.۱۰ بنیادی نقش اور نمونہ سازی کے اطلاقات ۶۳۰

دیباچہ ۵۲۸

میری پہلی کتاب کا دیباچہ ۵۲۸

۷ ماورائی تفاعل ۶۴۳
۷.۱ الٹ تفاعل اور ان کے تفارق ۶۴۴
۷.۲ قدرتی لوگارتھم ۶۵۹
۷.۳ قوت نمائی تفاعل ۶۷۳
۷.۴ a^x اور $\log_a x$ ۶۸۵
۷.۵ افزائش اور تنزل ۶۹۵

۶۴ ۷.۶ قاعدہ لھوپیٹال ۷۰۸
۶۵ ۷.۷ اضافی شرح نمو ۷۲۱
۶۶ ۷.۸ الٹ تکونیاتی تفاعل ۷۳۰
۶۷ ۷.۹ الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل ۷۴۵
۶۸ ۷.۱۰ ہذلولی تفاعل ۷۵۹
۶۹ ۷.۱۱ یک رتبی تفرقی مساوات ۷۷۶
۷۰ ۷.۱۲ یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان ۷۹۳

۷۱ ۸ تکمل کے طریقے ۸۰۳
۷۲ ۸.۱ تکمل کے بنیادی کلیات ۸۰۳
۷۳ ۸.۲ تکمل بالحصص ۸۱۵
۷۴ ۸.۳ جزوی کسر ۸۲۸
۷۵ ۸.۴ تکونیاتی بدل ۸۴۱
۷۶ ۸.۵ جدول تکمل اور کمپیوٹر ۸۵۰
۷۷ ۸.۶ غیر مناسب تکمل ۸۶۴

۷۸ ۹ لامتناہی تسلسل ۸۸۷
۷۹ ۹.۱ اعداد کی ترتیب کی حد ۸۸۷
۸۰ ۹.۲ ترتیب کی حدیں تلاش کرنے کے مسئلے ۹۰۳
۸۱ ۹.۳ سوالات ۹۱۱
۸۲ ۹.۴ لامتناہی تسلسل ۹۱۶
۸۳ ۹.۵ غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پرکھ ۹۳۲
۸۴ ۹.۶ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ ۹۴۱
۸۵ ۹.۷ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ ۹۵۰
۸۶ ۹.۸ بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز ۹۶۰
۸۷ ۹.۹ طاقتی تسلسل ۹۷۲
۸۸ ۹.۱۰ ٹیلر اور مکلارن تسلسل ۹۸۶
۸۹ ۹.۱۱ ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ خلل کے اندازے ۹۹۵
۹۰ ۹.۱۲ طاقتی تسلسل کے استعمال ۱۰۱۱

۹۱ ۱۰ مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد ۱۰۲۹
۹۲ ۱۰.۱ مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں ۱۰۲۹
۹۳ ۱۰.۲ سنک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی ۱۰۴۹
۹۴ ۱۰.۳ دو درجی مساوات اور گھومنا ۱۰۵۷
۹۵ ۱۰.۴ مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول ۱۰۶۸
۹۶ ۱۰.۵ احصاء اور مقدار معلوم منحنیات ۱۰۸۱
۹۷ ۱۰.۶ قطبی محدد ۱۰۹۴
۹۸ ۱۰.۷ قطبی محدد میں ترسیم ۱۱۰۲

۹۹ ۱۰.۸ مخروط حصوں کے قطبی مساوات ۱۱۱۳
۱۰۰ ۱۰.۹ قطبی محدد میں تکمل ۱۱۲۷

۱۰۱ ۱۱ سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری ۱۱۳۹
۱۰۲ ۱۱.۱ مستوی میں سمتیات ۱۱۳۹
۱۰۳ ۱۱.۲ کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات ۱۱۵۳
۱۰۴ ۱۱.۳ ضرب نقطہ ۱۱۶۷
۱۰۵ ۱۱.۴ صلیبی ضرب ۱۱۷۹
۱۰۶ ۱۱.۵ فضا میں خطوط اور مستویات ۱۱۹۱
۱۰۷ ۱۱.۶ نلکی اور مربع سطحیں ۱۲۰۴
۱۰۸ ۱۱.۷ نلکی اور کروی محدد ۱۲۲۰

۱۰۹ ۱۲ سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت ۱۲۳۱
۱۱۰ ۱۲.۱ سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات ۱۲۳۱
۱۱۱ ۱۲.۲ گولا کی حرکت کی نمونہ کشی ۱۲۵۲
۱۱۲ ۱۲.۳ لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ۱۲۶۰
۱۱۳ ۱۲.۴ انحنا، مروڑ اور TNB چوکھٹ ۱۲۶۸
۱۱۴ ۱۲.۵ فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت ۱۲۸۸

۱۱۵ ۱۳ کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفارق ۱۳۰۱
۱۱۶ ۱۳.۱ کثیر متغیرات کے تفاعل ۱۳۰۱
۱۱۷ ۱۳.۲ حد اور استمرار ۱۳۱۴
۱۱۸ ۱۳.۳ جزوی تفارق ۱۳۲۷
۱۱۹ ۱۳.۴ تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات ۱۳۴۳
۱۲۰ ۱۳.۵ زنجیری قاعدہ ۱۳۵۸
۱۲۱ ۱۳.۶ پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرق ۱۳۷۱
۱۲۲ ۱۳.۷ رخی تفارق، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں ۱۳۷۸
۱۲۳ ۱۳.۸ انتہائی قیمتیں اور نقاط زین ۱۳۹۷
۱۲۴ ۱۳.۹ لیگرینج ضاربین ۱۴۱۲
۱۲۵ ۱۳.۱۰ کلیہ ٹیلر ۱۴۲۸

۱۲۶ ۱۴ تکمل بالکثرت ۱۴۳۵
۱۲۷ ۱۴.۱ دوہرا تکملات ۱۴۳۵
۱۲۸ ۱۴.۲ رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت ۱۴۵۳
۱۲۹ ۱۴.۳ دوہرا تکملات کا قطبی روپ ۱۴۶۷
۱۳۰ ۱۴.۴ کارتیسی محدد میں تہرا تکمل ۱۴۷۷
۱۳۱ ۱۴.۵ تعین بعد میں کمیت اور معیار اثر ۱۴۹۰
۱۳۲ ۱۴.۶ نلکی اور کروی محدد میں تہرا تکمل ۱۴۹۹
۱۳۳ ۱۴.۷ تکملات بالکثرت میں بدل ۱۵۱۷

۱۳۴ ۱۵ سمتی میدان میں تکمل ۱۵۳۱
۱۳۵ ۱۵.۱ لکیری تکمل ۱۵۳۱
۱۳۶ ۱۵.۲ سمتی میدان، کام، دائری بہاؤ، اور بہاؤ ۱۵۴۱
۱۳۷ ۱۵.۳ راہ سے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان ۱۵۵۶
۱۳۸ ۱۵.۴ مستوی میں مسئلہ گرین ۱۵۶۹
۱۳۹ ۱۵.۵ سطحی رقبہ اور سطحی تکملات ۱۵۹۰
۱۴۰ ۱۵.۶ مقدار معلوم سطحیں ۱۶۰۸
۱۴۱ ۱۵.۷ مسئلہ سٹوکس ۱۶۲۵
۱۴۲ ۱۵.۸ مسئلہ پھیلاؤ اور ایک مربوط نظریہ ۱۶۴۲

۱۴۳ ضمیمے ۱۶۷۴

۱۴۴ ا ریاضیاتی ترغیب ۱۶۷۵

۱۴۵ ب تحدیدی مسائل کے ثبوت ۱۶۸۱

۱۴۶ ج مخلوط اعداد ۱۶۸۷

۱۴۷ د سمسن کا ایک تہائی کا قاعدہ ۱۷۰۳

۱۴۸ ھ کوشی کا مسئلہ اوسط قیمت اور قاعدہ لھوپیٹال ے کا پائیدار روپ ۱۷۰۵

۱۴۹ و کثیر استعمال حدود ۱۷۰۹

۱۵۰ ز جزئیتی تقسیم کا قانون برائے سمتی ضرب ۱۷۱۱

۱۵۱ ح مقاطع اور کریمر کا قاعدہ ۱۷۱۵

۱۵۲ ط مسئلہ یولر اور مسئلہ بڑھوتری ۱۷۲۷

۱۵۳ ي تکملات کا مختصر جدول ۱۷۳۳

۱۵۴ جوابات ۱۷۴۵

۱۵۵ اشاریہ ۱۷۴۷

باب ۶

تکمل کا استعمال

مجموعی جائزہ ہم بہت سی معلومات کو تکمل کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں: منحنیات کے بیچ رقبہ، ٹھوس اجسام کے حجم اور سطحی رقبے، منحنیات کی لمبائیاں، زیر زمین موجود پانی کی نکاسی کے لیے درکار کام، سیلاب روک دروازوں پر اثر انداز قوتیں، ٹھوس اجسام کے نقطہ توازن کے محدد۔ ان تمام کو ہم بند وقفوں پر استمراری تفاعل کے ریمان مجموعوں کی حدوں یعنی تکمل سے ظاہر کر کے ان حدوں کو احصاء سے حل کرتے ہیں۔

عملی استعمال میں ان قطعی تکملات کو ایک مخصوص طرز سے لکھا جاتا ہے جس کو سیکھ کر بوقت ضرورت نئے تکمل لکھے جا سکتے ہیں۔ مخصوص عملی استعمال پر پہلے غور کیا جائے گا۔ اس کے بعد تکمل لکھنے کے طرز پر اور نئے تکمل لکھنے پر غور کیا جائے گا۔

۶.۱ منحنیات کے بیچ رقبہ

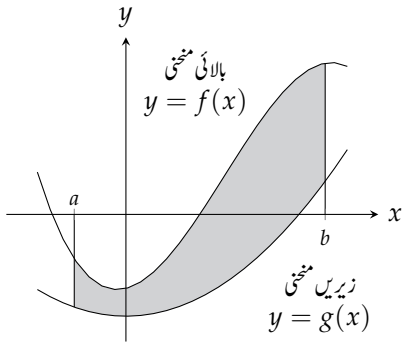
محددی مستوی میں خطے کی سرحدوں کو ظاہر کرنے والے تفاعل کے تکمل سے خطے کے رقبہ کا حصول اس حصے میں دکھایا جائے گا۔

بنیادی کلیہ بطور ریمان مجموعوں کی حد

فرض کریں ایک خطہ کی بالائی سرحد منحنی $y = f(x)$ اور زیریں سرحد منحنی $y = g(x)$ ہے جبکہ اس کی بائیں اور دائیں سرحد بالترتیب خط $x = a$ اور $x = b$ ہیں (شکل ۶.۱)۔ عین ممکن ہے کہ اس خطے کا رقبہ جیومیٹری سے حاصل کرنا ممکن ہو البتہ اختیاری استمراری f اور g کی صورت میں ہم عموماً رقبے کو تکمل سے حاصل کرتے ہیں۔

تکمل کی صورت دیکھنے کی خاطر ہم وقفہ $[a, b]$ پر خانہ بندی $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ کے تحت خطہ کو n انتصابی مستطیلوں میں تقسیم کرتے ہیں (شکل ۶.۲) جہاں k واں مستطیل کا رقبہ درج ذیل ہو گا (شکل ۶.۳)۔

$$\Delta S_k = \text{قد} \times \text{چوڑائی} = [f(c_k) - g(c_k)]\Delta x_k$$



شکل ۶.۱: منحنیات $y = f(x)$، $y = g(x)$ اور لکیر $x = a$، $x = b$ کے بیچ خطہ۔

۸۳۰۱ اس کے بعد ہم خطہ کے رقبے کو تخمیناً ان n مستطیل رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k \qquad \text{ریمان مجموعہ}$$

۸۳۰۲ چونکہ f اور g استمراری ہیں لہٰذا $\|P\| \to 0$ کرنے سے دائیں ہاتھ مجموعے کی حد $\int_a^b [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x$ ہو گی۔(ذیل دیکھیں۔)

$$S = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} [f(c_k) - g(c_k)] \Delta x_k = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$$

۸۳۰۳ تعریف: اگر پورے $[a, b]$ پر f اور g استمراری ہوں اور $f(x) \geq g(x)$ ہو تب a تا b منحنیات $f(x)$ اور $g(x)$ کے بیچ رقبہ
۸۳۰۴ a تا b متکمل $[f - g]$ کا (درج ذیل) تکمل ہو گا۔

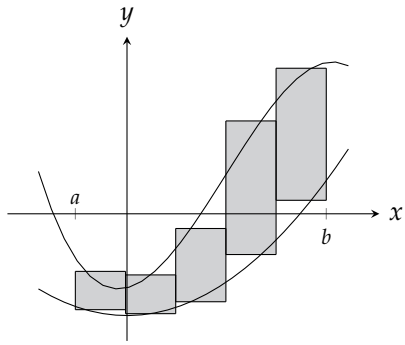
$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, \mathrm{d}x \tag{۱}$$

۸۳۰۵ □

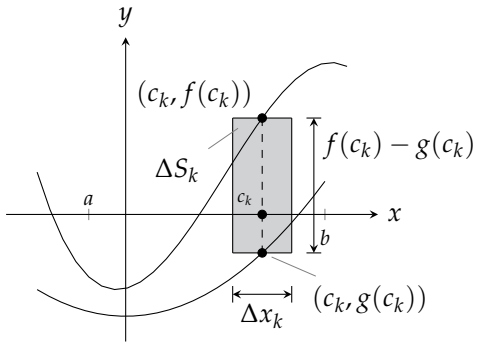
۸۳۰۶ مساوات ۱ کو استعمال کرنے کے لیے ہم درج ذیل اقدام اٹھاتے ہیں۔

۸۳۰۷ دو منحنیات کے بیچ رقبے کی تلاش

۸۳۰۸ ۱. منحنیات ترسیم کر کے ایک نمائندہ مستطیل بنائیں۔اس سے معلوم ہو گا کہ کونسی منحنی بالائی f اور کونسی زیریں g ہے۔اس سے تکمل کی حد تعین کرنے میں
۸۳۰۹ بھی مدد ملتی ہے۔



شکل ۶.۲: ہم خطہ کو تخمیناً محور x پر عمودی مستطیلوں کے برابر لیتے ہیں۔



شکل ۶.۳: k واں مستطیل کا قد $f(c_k) - g(c_k)$ اور اس کی چوڑائی Δx_k ہے لہٰذا اس کا رقبہ $\Delta S_k = (f(c_k) - g(c_k))\Delta x_k$ ہوگا۔

۲. تکمل کی حد تلاش کریں۔

۳. متکمل $f(x) - g(x)$ کا کلیہ لکھیں۔ اگر ممکن ہو اس کی سادہ صورت حاصل کریں۔

۴. متکمل $[f(x) - g(x)]$ کا تکمل a تا b حاصل کریں۔ قطعی تکمل سے حاصل عدد درکار رقبہ ہوگا۔

مثال ۶.۱: منحنیات $y = \sec^2 x$ اور $y = \sin x$ کے بیچ 0 تا $\frac{\pi}{4}$ رقبہ تلاش کریں۔

حل

پہلا قدم: ہم منحنیات ترسیم کر کے ایک نمائندہ مستطیل بناتے ہیں (شکل ۶.۴)۔ بالائی قوس $f(x) = \sec^2 x$ کی منحنی ہے جبکہ زیریں قوس $g(x) = \sin x$ کی منحنی ہے۔

دوسرا قدم: تکمل کی حدیں $a = 0$ اور $b = \frac{\pi}{4}$ دی گئی ہیں۔

تیسرا قدم: $f(x) - g(x) = \sec^x - \sin x$

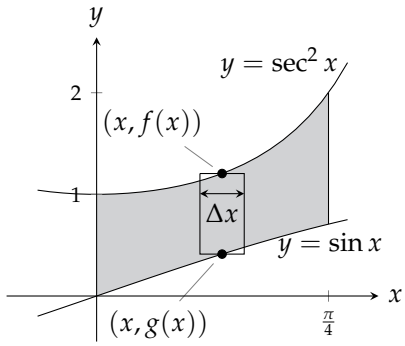
چوتھا قدم:

$$S = \int_0^{\pi/4} (\sec^2 x - \sin x)\,\mathrm{d}x = [\tan x + \cos x]_0^{\pi/4} = \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] - [0 + 1] = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

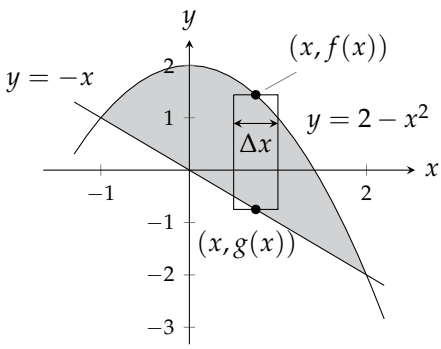
□

باہمی متقاطع منحنیات

جب ایک دوسرے کو قطع کرنے والی منحنیات کے بیچ خطہ واقع ہو تب نقاط تقاطع سے تکمل کی حدیں حاصل ہوں گی۔



شکل ۶.۴: خطہ برائے مثال ۶.۱



شکل ۶.۵: خطہ برائے مثال ۶.۲

۸۳۲۳ مثال ۶.۲: قطع مکافی $y = 2 - x^2$ اور لکیر $y = -x$ کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

۸۳۲۴ **حل**

۸۳۲۵ **پہلا قدم:** منحنیات ترسیم کرتے ہوئے نمائندہ مستطیل بنائیں (شکل ۶.۵)۔ بالائی اور زیریں منحنیات کی نشاندہی کریں۔ ہم $f(x) = 2 - x^2$

۸۳۲۶ اور $g(x) = -x$ لیتے ہیں۔ نقاط تقاطع کے x محدد تکمل کی حدیں ہوں گی۔

۸۳۲۷ **دوسرا قدم:** تکمل کی حدیں جاننے کے لیے ہم $y = 2 - x^2$ اور $y = -x$ کو ایک ساتھ x کے لیے حل کرتے ہیں۔

$f(x)$ اور $g(x)$ کو برابر ٹھہرائیں	$2 - x^2 = -x$
ایک جانب منتقلی	$x^2 - x - 2 = 0$
تجزی	$(x+1)(x-2) = 0$
حل	$x = -1, \quad x = 2$

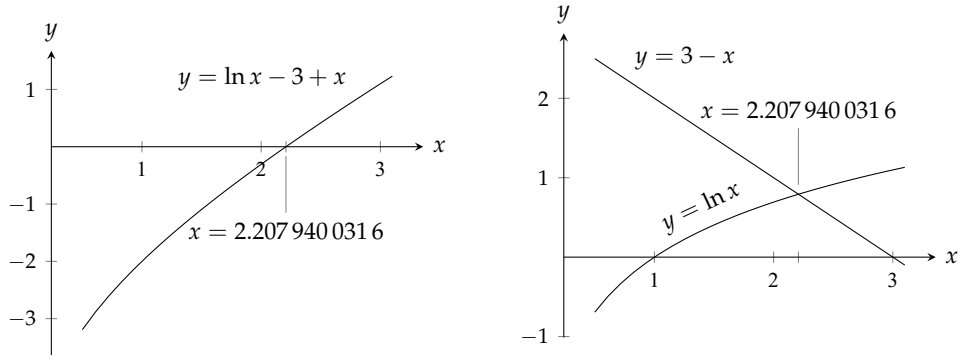
۸۳۲۸ خطہ $x = -1$ اور $x = 2$ کے بیچ واقع ہے۔

۸۳۲۹ **تیسرا قدم:** $f(x) - g(x) = (2 - x^2) - (-x) = 2 + x - x^2$

۸۳۳۰ **چوتھا قدم:**

$$\begin{aligned} S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} (2 + x - x^2)\,\mathrm{d}x &= \left[2x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2} \\ &= \left(4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \\ &= 6 + \frac{3}{2} - \frac{9}{3} = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

۸۳۳۱ □



(ا) نقطہ تقاطع (ب) جذر

شکل ۶.۶: تقاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کے حل کی تلاش۔

فنیات دو ترسیمات کا تقاطع

تکمل کے حصول میں بعض اوقات تکمل کی حد کی تلاش سب سے زیادہ تنگ کرنے والا عمل ثابت ہوتا ہے۔ انہیں معلوم کرنے کے لیے ہمیں یا تو ایک تقاعل کے جذر تلاش کرنے ہوتے ہیں اور یا دو منحنیات کے نقاط تقاطع۔

مساوات $f(x) = g(x)$ حل کرنے کے لیے ہم $y = f(x)$ اور $y = g(x)$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کرتے ہوئے نقاط تقاطع دیکھ کر معلوم کر سکتے ہیں۔ اس کے علاوہ ہم مساوات $f(x) - g(x) = 0$ کا جذر بھی کمپیوٹر کی مدد سے تلاش کر سکتے ہیں۔ ان دونوں تراکیب کو درج ذیل پر لاگو کر کے دیکھیں (شکل ۶.۶)۔

$$f(x) = \ln x, \quad g(x) = 3 - x$$

ایسی سرحدیں جن کے کلیات تبدیل ہوتے ہوں

اگر سرحد کا کلیہ ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر تبدیل ہوتا ہو تب ہم خطہ کو مطابقتی ذیلی خطوں میں تقسیم کر کے ہر ذیلی خطے پر انفرادی طور مساوات اکا اطلاق کرتے ہیں۔

مثال ۶.۳: ربع اول میں $y = \sqrt{x}$ کے نیچے اور $y = x - 2$ کے اوپر خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

حل

پہلا قدم: ترسیم (شکل ۶.۷) سے ہم دیکھتے ہیں کہ خطے کی بالائی سرحد $f(x) = \sqrt{x}$ ہے جبکہ $0 \leq x \leq 2$ پر اس کی نچلی سرحد $g(x) = 0$ اور $2 \leq x \leq 4$ پر نچلی سرحد $g(x) = x - 2$ ہے (نقطہ $x = 2$ پر $g(x)$ کے دونوں کلیات ایک سے ہیں)۔ ہم $x = 2$ پر خطہ کو دو ذیلی حصوں A اور B میں تقسیم کر کے دونوں ذیلی خطوں کے لیے نمائندہ مستطیل بناتے ہیں۔

۸۴۴۷ **دوسرا قدم:** خطہ A میں تکمل کی حدیں $a = 0$ اور $b = 2$ ہیں۔ خطہ B کی بائیں حد $a = 2$ ہے۔ اس کی دائیں حد جاننے کے لیے ہم
۸۴۴۸ مساوات $y = \sqrt{x}$ اور $y = x - 2$ کو ایک ساتھ حل کرتے ہیں۔

$\sqrt{x} = x - 2$	$f(x)$ اور $g(x)$ کو برابر ٹھہرائیں
$x = (x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$	مربع لیں
$x^2 - 5x + 4 = 0$	ایک جانب منتقلی
$(x-1)(x-4) = 0$	تجزی
$x = 1, \quad x = 4$	حل

۸۴۴۹ صرف $x = 4$ مساوات $\sqrt{x} = x - 2$ کو مطمئن کرتا ہے جبکہ مربع لینے کی وجہ سے اضافی حل $x = 1$ پیدا ہوا ہے جس کو رد کیا جاتا ہے۔
۸۴۵۰ یوں دائیں حد $b = 4$ ہے۔
۸۴۵۱ **تیسرا قدم:**

$$
\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= \sqrt{x} - 0 = \sqrt{x}, & 0 \le x \le 2 \\
f(x) - g(x) &= \sqrt{x} - (x-2) = \sqrt{x} - x + 2, & 2 \le x \le 4
\end{aligned}
$$

۸۴۵۲ **چوتھا قدم:** ہم خطہ A اور B کے رقبوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_2^4 \\
&= \frac{2}{3}(2)^{3/2} - 0 + \left(\frac{2}{3}(4)^{3/2} - 8 + 8\right) - \left(\frac{2}{3}(2)^{3/2} - 2 + 4\right) \\
&= \frac{2}{3}(8) - 2 = \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

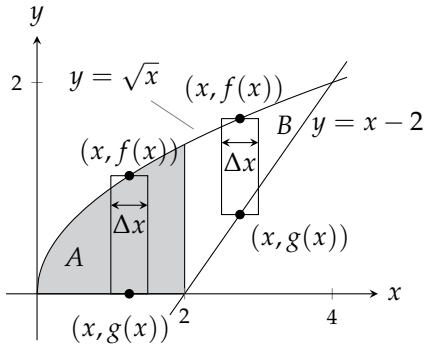
۸۴۵۳ □

۸۴۵۴ ## تکمل بلحاظ y

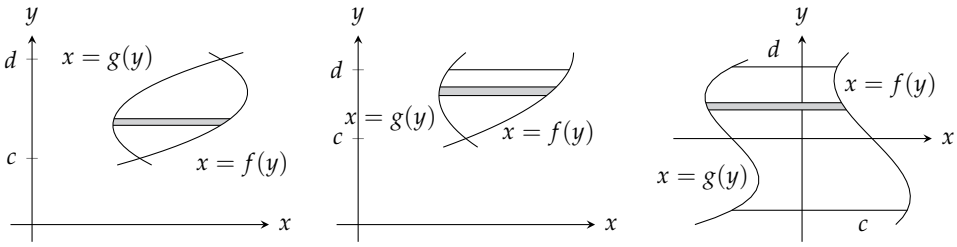
۸۴۵۵ اگر سرحد کی مساواتیں y کے تفاعل ہوں تب تخمینی مستطیل کو انتصابی کے بجائے افقی بنایا جاتا ہے اور (ذیل دیکھیں) بنیادی کلیہ میں x کی جگہ y پایا جائے گا
۸۴۵۶ (شکل ۶.۸)۔

$$
S = \int_c^d [f(y) - g(y)]\,\mathrm{d}y \tag{۲}
$$

۸۴۵۷



شکل ۶.۷: خطہ برائے مثال ۶.۳



شکل ۶.۸: ان اشکال میں دائیں سرحد f اور بائیں سرحد g ہو گی لہٰذا $f(y) - g(y)$ غیر منفی ہو گا۔

۸۳۵۸ مثال ۶.۴: درج بالا مثال ۶.۳ کو اس مرتبہ مساوات ۲ کی مدد سے حل کریں۔

۸۳۵۹ **حل**

۸۳۶۰ **پہلا قدم:** ہم خطہ ترسیم کر کے نمائندہ افقی مستطیل بناتے ہیں (شکل ۶.۸)۔ خطے کی دائیں سرحد لکیر $x = y + 2$ ہے لہٰذا $f(y) = y + 2$ ہو گا۔ خطے کی بائیں سرحد $x = y^2$ ہے لہٰذا $g(y) = y^2$ ہو گا۔

۸۳۶۱

۸۳۶۲ **دوسرا قدم:** تکمل کی زیریں حد $y = 0$ ہے۔ تکمل کی بالائی حد جاننے کے لیے ہم $x = y + 2$ اور $x = y^2$ کو y کے لیے حل کرتے

۸۳۶۳ ہیں۔

$$y + 2 = y^2 \qquad f \text{ کو } g \text{ کے برابر ٹھہرائیں}$$

$$y^2 - y - 2 = 0 \qquad \text{ایک ہاتھ منتقلی}$$

$$(y + 1)(y - 2) = 0 \qquad \text{تجزی}$$

$$y = -1, \quad y = 2 \qquad \text{حل}$$

۸۳۶۴ تکمل کی بالائی حد $y = 2$ ہے (چونکہ $y = -1$ افقی محور سے نیچے تفاعل کا نقطہ تقاطع دیتا ہے)۔

۸۳۶۵ **تیسرا قدم:**

$$f(y) - g(y) = y + 2 - y^2 = 2 + y - y^2$$

۸۳۶۶ **چوتھا قدم:**

$$\begin{aligned} S = \int_a^b [f(y) - g(y)]\,\mathrm{d}y &= \int_0^2 [2 + y - y^2]\,\mathrm{d}y \\ &= \left[2y + \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 \\ &= 4 + \frac{4}{2} - \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \end{aligned}$$

۸۳۶۷ یہ وہی جواب ہے جو مثال ۶.۳ میں حاصل کیا گیا۔ مثال ۶.۳ میں دو تکمل حل کرنے کی ضرورت پیش آئی جبکہ یہاں ایک تکمل سے رقبہ تلاش کرنا ممکن تھا۔ □

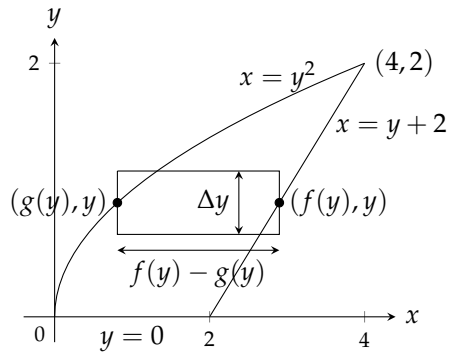
۸۳۶۸ **تکمل کے ساتھ جیومیٹریائی کلیات کا استعمال**

۸۳۶۹ تکمل اور جیومیٹریائی کلیات کو ملا کر رقبہ نسبتاً زیادہ جلد حاصل ہوتا ہے۔

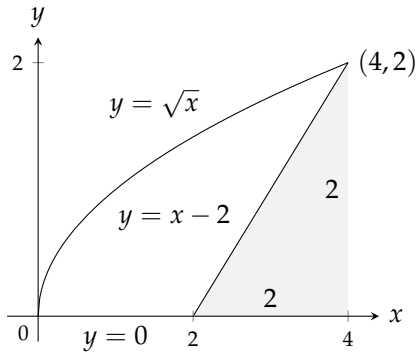
۸۳۷۰ مثال ۶.۵: مزید ایک مرتبہ مثال ۶.۳ میں دیے گئے خطے کا رقبہ تلاش کریں۔

۸۳۷۱ **حل**

۸۳۷۲ ہم محور x اور $y = \sqrt{x},\ 0 \le x \le 4$ کے بیچ رقبہ سے قاعدہ 2 اور قد 2 کے تکون کا رقبہ منفی کرتے ہوئے درکار خطے کا رقبہ تلاش کر سکتے



شکل ۶.۹: خطہ برائے مثال ۶.۴



شکل ۶.۱۰: بالائی منحنی کے نیچے خطہ سے تکون منفی کرنے سے رقبہ حاصل ہوگا۔

۸۴۳ ہیں۔

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}(2)(2) \\
&= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big]_0^4 - 2 \\
&= \frac{2}{3}(8) - 0 - 2 = \frac{10}{3}
\end{aligned}
$$

۸۴۴ □

۸۴۵ گزشتہ تین مثالوں میں آپ نے دیکھا کہ دو منحنیات کے بیچ رقبہ بعض اوقات x کے بجائے y کے ساتھ تکمل لے کر نسبتاً آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ اسی
۸۴۶ طرح بعض اوقات تکمل اور جیومیٹری کے کلیات کو ملا کر جلد جواب حاصل ہوتا ہے۔ یوں تکمل لکھنے سے پہلے مسئلے پر غور کرنا بہتر ہوگا۔

۸۴۷ **سوالات**

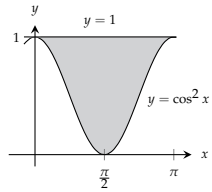
۸۴۸ سوال ۶.۱ تا سوال ۶.۸ میں سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

۸۴۹ سوال ۶.۱: سایہ دار خطہ شکل ۶.۱۱ جہاں سرحد $y = 1$ اور $y = \cos^2 x$ ہیں۔

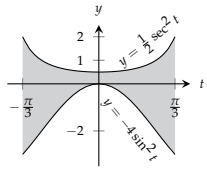
۸۵۰ سوال ۶.۲: سایہ دار خطہ شکل ۶.۱۲ جہاں سرحد $y = \frac{1}{2}\sec^2 t$ ، $y = -4\sin^2 t$ ، $y = -\frac{\pi}{3}$ اور $y = \frac{\pi}{3}$ ہیں۔

۸۵۱ سوال ۶.۳: سایہ دار خطہ شکل ۶.۱۳ جہاں سرحد $x = y^3$ اور $x = y^2$ ہیں۔

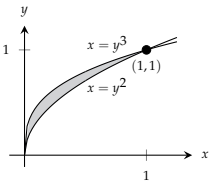
۸۵۲ سوال ۶.۴: سایہ دار خطہ شکل ۶.۱۴ جہاں سرحد $x = 12y^2 - 12y^3$ اور $x = 2y^2 - 2y$ ہیں۔



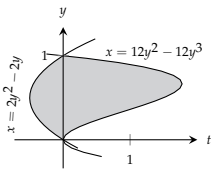
شکل ۶.۱۱



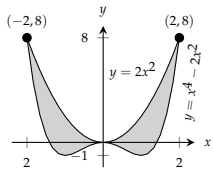
شکل ۶.۱۲



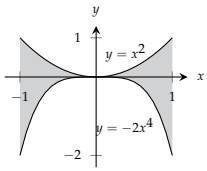
شکل ۶.۱۳



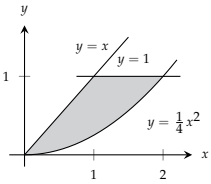
شکل ۶.۱۴



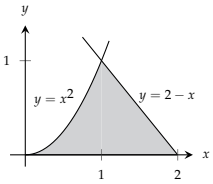
شکل ۶.۱۵



شکل ۶.۱۶



شکل ۶.۱۷



شکل ۶.۱۸

۸۳۸۳ سوال ۶.۵: سایہ دار خطہ شکل ۶.۱۵ جہاں سرحد $y = 2x^2$ اور $y = x^4 - 2x^2$ ہیں۔

۸۳۸۴ سوال ۶.۶: سایہ دار خطہ شکل ۶.۱۶ جہاں سرحد $y = x^2$ ، $y = -2x^4$ ، $x = -1$ اور $x = 1$ ہیں۔

۸۳۸۵ سوال ۶.۷: سایہ دار خطہ شکل ۶.۱۷ جہاں سرحد $y = 1$ ، $y = x$ اور $y = \frac{x^2}{4}$ ہیں۔

۸۳۸۶ سوال ۶.۸: سایہ دار خطہ شکل ۶.۱۸ جہاں سرحد $y = x^2$ ، $y = 2 - x$ اور $y = 0$ ہیں۔

۸۳۸۷

۸۳۸۸ سوال ۶.۹ تا سوال ۶.۱۲ میں کل سایہ دار رقبہ تلاش کریں۔

۸۳۸۹ سوال ۶.۹: سایہ دار رقبہ شکل ۶.۱۹ جہاں سرحد $y = x^2 - 4$ ، $y = -x^2 - 2x$ اور $x = -3$ ہیں۔

۸۳۹۰ سوال ۶.۱۰: سایہ دار رقبہ شکل ۶.۲۰ جہاں سرحد $y = -x^2 + 3x$ اور $y = 2x^3 - x^2 - 5x$ ہیں۔

۸۳۹۱ سوال ۶.۱۱: سایہ دار رقبہ شکل ۶.۲۱ جہاں سرحد $y = 4 - x^2$ ، $y = 2 - x$ ، $x = -2$ اور $x = 3$ ہیں۔

۸۳۹۲ سوال ۶.۱۲: سایہ دار رقبہ شکل ۶.۲۲ جہاں سرحد $y = \frac{x^3}{3} - x$ ، $y = \frac{x}{3}$ اور $x = 3$ ہیں۔

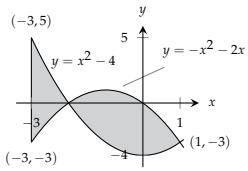
۸۳۹۳

۸۳۹۴ سوال ۶.۱۳ تا سوال ۶.۲۲ میں محیط خطے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔ خطے کا رقبہ دریافت کریں۔

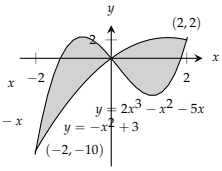
۸۳۹۵ سوال ۶.۱۳: $y = x^2 - 2, \quad y = 2$

۸۳۹۶ سوال ۶.۱۴: $y = 2x - x^2, \quad y = -3$

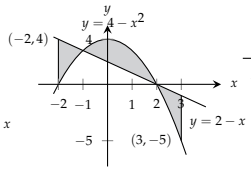
۸۳۹۷ سوال ۶.۱۵: $y = x^4, \quad y = 8x$



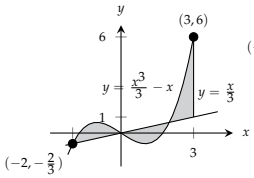
شکل ۶.۱۹



شکل ۶.۲۰



شکل ۶.۲۱



شکل ۶.۲۲

۸۴۹۸ سوال ۶.۱۶: $y = x^2 - 2x, \quad y = x$

۸۴۹۹ سوال ۶.۱۷: $y = x^2, \quad y = -x^2 + 4x$

۸۵۰۰ سوال ۶.۱۸: $y = 7 - 2x^2, \quad y = x^2 + 4$

۸۵۰۱ سوال ۶.۱۹: $y = x^4 - 4x^2 + 4, \quad y = x^2$

۸۵۰۲ سوال ۶.۲۰: $y = x\sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0, \quad y = 0$

۸۵۰۳ سوال ۶.۲۱: $y = \sqrt{|x|}, \quad 5y = x + 6$ کتنے نقاط تقاطع پائے جاتے ہیں؟

۸۵۰۴ سوال ۶.۲۲: $y = \left|x^2 - 4\right|, \quad y = \frac{x^2}{2} + 4$

۸۵۰۵

۸۵۰۶ سوال ۶.۲۳ تا سوال ۶.۳۰ میں دی گئی منحنیات اور لکیروں کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

۸۵۰۷ سوال ۶.۲۳: $x = 2y^2, \quad x = 0, \quad y = 3$

۸۵۰۸ سوال ۶.۲۴: $x = y^2, \quad x = y + 2$

۸۵۰۹ سوال ۶.۲۵: $y^2 - 4x = 4, \quad 4x - y = 16$

۸۵۱۰ سوال ۶.۲۶: $x - y^2 = 0, \quad x + 2y^2 = 3$

۸۵۱۱ سوال ۶.۲۷: $x + y^2 = 0, \quad x + 3y^2 = 2$

۸۵۱۲ سوال ۶.۲۸: $x - y^{2/3} = 0, \quad x + y^4 = 2$

۸۵۱۳ سوال ۶.۲۹: $x = y^2 - 1, \quad x = |y|\sqrt{1 - y^2}$

۸۵۱۴ سوال ۶.۳۰: $x = y^3 - y^2, \quad x = 2y$

۸۵۱۵

۸۵۱۶ سوال ۶.۳۱ تا سوال ۶.۳۴ میں محیط رقبہ تلاش کریں۔ رقبے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔

۸۵۱۷ سوال ۶.۳۱: $4x^2 + y = 4, \quad x^4 - y = 1$

۸۵۱۸ سوال ۶.۳۲: $x^3 - y = 0, \quad 3x^2 - y = 4$

سوال ۶.۳۳: $x + 4y^2 = 4 \quad x + y^4 = 1, \quad x \geq 0$

سوال ۶.۳۴: $x + y^2 = 3, \quad 4x + y^2 = 0$

سوال ۶.۳۵ تا سوال ۶.۴۲ میں محیط رقبے کی سرحدی منحنیات اور لکیریں دی گئی ہیں۔ رقبہ معلوم کریں۔

سوال ۶.۳۵: $y = 2\sin x, \quad y = \sin 2x, \quad 0 \leq x \leq \pi$

سوال ۶.۳۶: $y = 8\cos x, \quad y = \sec^2 x, \quad -\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$

سوال ۶.۳۷: $y = \cos(\frac{\pi x}{2}), \quad y = 1 - x^2$

سوال ۶.۳۸: $y = \sin(\frac{\pi x}{2}), \quad y = x$

سوال ۶.۳۹: $y = \sec^2 x, \quad y = \tan^2 x, \quad x = -\frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{\pi}{4}$

سوال ۶.۴۰: $x = \tan^2 y, \quad x = -\tan^2 y, \quad -\frac{\pi}{4} \leq y \leq \frac{\pi}{4}$

سوال ۶.۴۱: $x = 3\sin y\sqrt{\cos y}, \quad x = 0, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

سوال ۶.۴۲: $y = \sec^2(\frac{\pi x}{3}), \quad y = x^{1/3}, \quad -1 \leq x \leq 1$

سوال ۶.۴۳: ہوائی جہاز کے پنکھے کی طرح کا خطہ منحنیات $x - y^3 = 0$ اور $x - y = 0$ گھیرتی ہیں۔ اس خطے کا رقبہ دریافت کریں۔

سوال ۶.۴۴: پنکھا نما خطہ $x - y^{1/3} = 0$ اور $x - y^{1/5} = 0$ کے بیچ واقع ہے۔ اس خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال ۶.۴۵: ربع اول میں لکیر $y = x$، لکیر $x = 2$، منحنی $y = \frac{1}{x^2}$، اور محور x کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۶.۴۶: ربع اول میں بائیں جانب محور y اور دائیں جانب منحنیات $y = \sin x$ اور $y = \cos x$ تکون نما خطہ گھیرتے ہیں۔ اس کا رقبہ معلوم کریں۔

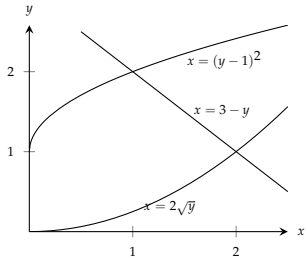
سوال ۶.۴۷: بالائی جانب لکیر $y = 4$ اور نیچے سے قطع مکافی $y = x^2$ میں محیط رقبہ کو افقی خط $y = c$ دو برابر ذیلی خطوں میں تقسیم کرتا ہے۔

ا. خطے کا خاکہ کھینچیں اور اس پر افقی لکیر $y = c$ اندازاً درست مقام پر بنائیں۔ قطع مکافی اور افقی لکیر جن نقطوں پر متقاطع ہیں، ان نقطوں کو c کے روپ میں دریافت کر کے خاکے پر دکھائیں۔

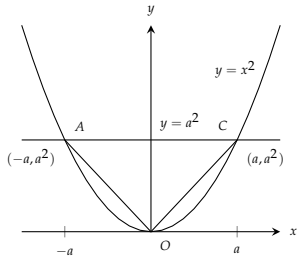
ب. y کے لحاظ سے تکمل لے کر c کی قیمت معلوم کریں۔ (تکمل کی حد میں c پایا جائے گا۔)

ج. x کے لحاظ سے تکمل لے کر c کی قیمت معلوم کریں۔ (اس مرتبہ c متکمل میں بھی پایا جائے گا۔)

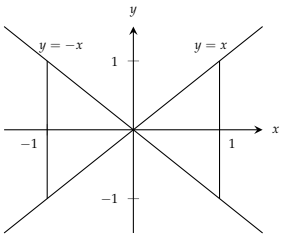
سوال ۶.۴۸: منحنی $y = 3 - x^2$ اور لکیر $y = -1$ کے بیچ رقبہ (ا) x کے لحاظ سے، (ب) y کے لحاظ سے تکمل لے کر معلوم کریں۔



شکل ۶.۲۳: خطہ برائے سوال ۶.۵۰



شکل ۶.۲۴: خطہ برائے سوال ۶.۵۱



شکل ۶.۲۵: خطہ برائے سوال ۶.۵۳

سوال ۶.۴۹: ربع اول میں بائیں جانب محور y، نیچے لکیر $y = \frac{x}{4}$، بالائی بائیں منحنی $y = 1 + \sqrt{x}$، اور بالائی دائیں منحنی $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ ایک رقبہ گھیرتے ہیں۔ رقبہ کو تلاش کریں۔

سوال ۶.۵۰: ربع اول میں بائیں جانب محور y، نیچے لکیر $x = 2\sqrt{y}$، بالائی بائیں منحنی $x = (y-1)^2$، اور بالائی دائیں منحنی $x = 3 - y$ ایک رقبہ گھیرتے ہیں۔ اس رقبہ کو تلاش کریں (شکل ۶.۲۳)۔

سوال ۶.۵۱: قطع مکافی $y = x^2$ میں محصور تکون AOB شکل ۶.۲۴ میں دکھایا گیا ہے۔ تکون کا بالائی ضلع لکیر $y = a^2$ ہے۔ تکون اور قطع مکافی کے رقبوں کی نسبت کی حد $a \to 0$ کر کے تلاش کریں۔

سوال ۶.۵۲: مثبت استمراری تفاعل f اور $a \le x \le b$ پر محور x کے بیچ رقبہ 4 ہے۔ منحنی $y = f(x)$ اور $y = 2f(x)$ کے بیچ $x = a$ تا $x = b$ رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۶.۵۳: درج ذیل میں سے کونسا مکمل شکل ۶.۲۵ میں دکھایا گیا رقبہ دیتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. $\int_{-1}^{1}(x - (-x))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 2x\,\mathrm{d}x$

ب. $\int_{-1}^{1}(-x - (x))\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} -2x\,\mathrm{d}x$

سوال ۶.۵۴: کیا استمراری تفاعل $y = f(x)$ اور $y = g(x)$ اور انتصابی لکیروں $x = a$ اور $x = b$ جہاں $a < b$ ہے کے بیچ رقبہ درج ذیل دیتا ہے؟ درست، کبھی کبھار درست، یا کبھی نہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x$$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۶.۵۵ تا سوال ۶.۵۸ میں مستوی میں منحنیات کے بیچ رقبہ تلاش کریں۔ جہاں منحنیات کے نقاط تقاطع تلاش کرنا دشوار ہو وہاں کمپیوٹر کا سہارا لیتے ہوئے درج ذیل اقدام سرانجام دیں۔

ا. منحنیات کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے خطہ کی عمومی صورت دیکھیں اور نقاط تقاطع کی تعداد جانیں۔

ب. نقاط تقاطع کو اعدادی تراکیب سے تلاش کریں۔

ج. یکے بعد دیگرے نقاط تقاطع کی جوڑیوں کے درمیان $\left|f(x)-g(x)\right|$ کا تکمل حل کریں۔

د. جزو-ج میں تکمل کی حاصل قیمتوں کا مجموعہ لیں۔

سوال ۶.۵۵: $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{3},\quad g(x)=x-1$

سوال ۶.۵۶: $f(x)=\frac{x^4}{2}-3x^3+10,\quad g(x)=8-12x$

سوال ۶.۵۷: $f(x)=x+\sin(2x),\quad g(x)=x^3$

سوال ۶.۵۸: $f(x)=x^2\cos x,\quad g(x)=x^3-x$

۶.۲ ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش

قوسی سرحد کے خطوں کے رقبہ عمودی تراش سے بیلنی حجم معلوم کرنے کے لیے رقبہ عمودی تراش کو بیلن کے قد سے ضرب دیا جاتا ہے۔ اس طرز کے بیلنی حجم سے دیگر اشکال کے خطوں کا حجم تلاش کیا جا سکتا ہے۔

ٹکیاں

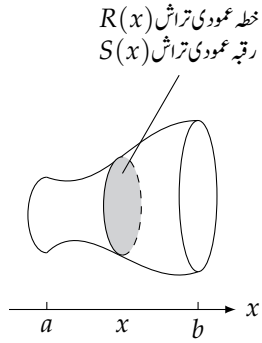
فرض کریں ہم شکل ۶.۲۶ میں دکھائے گئے ٹھوس جسم کا حجم دریافت کرنا چاہتے ہیں۔ بند وقفہ $[a,b]$ کے ہر نقطہ x پر جسم کی عمودی تراش خطہ $R(x)$ ہے جس کا رقبہ $S(x)$ ہے۔ یوں S متغیر x کا حقیقی قیمت تفاعل ہو گا۔ یہ x کا استراری تفاعل بھی ہو گا جس کو استعمال کرتے ہوئے ٹھوس جسم کے حجم کی تعریف پیش کی جا سکتی ہے، جو تکمل سے درج ذیل طریقے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

ہم محور x کے لحاظ سے وقفہ $[a,b]$ کی خانہ بندی کر کے جسم کو خانہ بندی کے نقاط پر محور x کے عمودی مستویات سے کتلوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ یوں نقطہ x_{k-1} اور x_k پر مستویات کے بیچ k واں کتلے کا حجم تقریباً اس بیلن جتنا ہو گا جو ان مستویات کے بیچ واقع ہے اور جس کی عمودی تراش خطہ $R(x_k)$ ہے (شکل ۶.۲۷)۔ اس بیلن کا حجم درج ذیل ہو گا۔

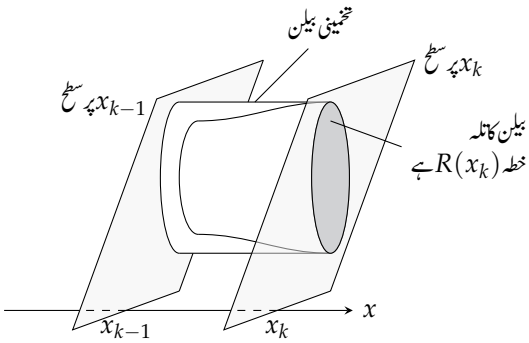
$$\begin{aligned} H_k &= \text{رقبہ تلہ} \times \text{قد} \\ &= S(x_k) \times (\text{فاصلہ کے بیچ } x_k \text{ اور } x_{k-1}) \\ &= S(x_k)\Delta x_k \end{aligned}$$

اس طرح تمام چھوٹے بیلنوں کے حجم کا مجموعہ تخمیناً ٹھوس جسم کا حجم ہو گا۔ (ذیل دیکھیں۔)

$$\sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x_k$$



شکل ۶.۲۶: عمودی تراش $R(x)$ کا رقبہ $S(x)$ متغیر x کا استمراری تفاعل ہونے کی صورت میں ہم ٹھوس جسم کا حجم $x = a$ تا $x = b$ تفاعل $S(x)$ کا تکمل لے کر حاصل کر سکتے ہیں۔



شکل ۶.۲۷: سطح x_{k-1} اور x_k کے بیچ تلا کو بڑا کر کے دکھایا گیا ہے اور ساتھ ہی تخمینی بیلن بھی دکھایا گیا ہے۔

۸۵۸۱ یہ وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل $S(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ جیسے جیسے $[a, b]$ کی خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب ہوتا جائے، ویسے
۸۵۸۲ ویسے یہ مجموعے اصل حجم کی بہتر سے بہتر عکاسی کریں گے۔ یوں ٹھوس جسم کے حجم کی تعریف ان مجموعوں کا تحدیدی تکمل ہو گا۔

۸۵۸۳ تعریف: ایسا ٹھوس جسم جس کا رقبہ عمودی تراش $S(x)$ قابل تکمل تفاعل ہو، اس کا $x = a$ سے $x = b$ تک حجم، تفاعل S کے $x = a$
۸۵۸۴ تا $x = b$ کے (درج ذیل) تکمل کے برابر ہو گا۔

$$H = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x \tag{۱}$$

۸۵۸۵ □

۸۵۸۶ مساوات ۱ استعمال کرنے کے لیے درج ذیل تین اقدامات کرنے ہوں گے۔

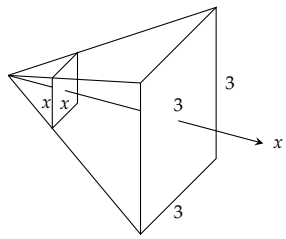
۸۵۸۷ ٹکیوں سے ٹھوس جسم کے حجم کی تلاش
۸۵۸۸

۸۵۸۹ ۱. ٹھوس جسم اور اس کی نمائندہ عمودی تراش کا خاکہ کھینچیں۔

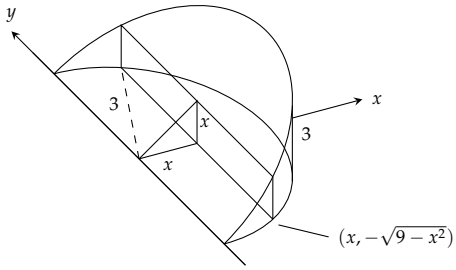
۸۵۹۰ ۲. رقبہ عمودی تراش $S(x)$ کا کلیہ اخذ کریں۔

۸۵۹۱ ۳. تکمل کی زیریں اور بالائی حد تلاش کریں۔

۸۵۹۲ ۴. حجم معلوم کرنے کی خاطر $S(x)$ کا تکمل حل کریں۔



شکل ۶.۲۸: ہرم (مثال ۶.۶)



شکل ۶.۲۹: قوسی پچر (مثال ۶.۷)

۸۵۹۳ **مثال ۶.۶:** ایک ہرم کا قد $3\,\mathrm{m}$ اور اس کے چوکور بنیاد کا ضلع $3\,\mathrm{m}$ ہے۔ ہرم کی چوٹی سے x میٹر نیچے ہرم کا رقبہ عمودی تراش چوکور ہو گا جس کا ضلع
۸۵۹۴ x میٹر ہو گا۔ اس ہرم کا حجم تلاش کریں۔

۸۵۹۵ **حل**

۸۵۹۶ **پہلا قدم:** خاکہ۔ ہم ہرم کی چوٹی کو مبدا پر رکھ کر ہرم کو محور x پر لیٹا ہوا بنا کر نمائندہ رقبہ عمودی تراش بناتے ہیں (شکل ۶.۲۸)۔

۸۵۹۷ **دوسرا قدم:** کلیہ برائے $S(x)$ ۔ چونکہ چوکور رقبہ عمودی تراش کا ضلع x میٹر ہے لہٰذا اس کا رقبہ عمودی تراش $S(x) = x^2$ ہو گا۔

۸۵۹۸ **تیسرا قدم:** تکمل کی حدیں۔ چوکور $x = 0$ تا $x = 3$ پائے جاتے ہیں لہٰذا $a = 0$ اور $b = 3$ ہوں گے۔

۸۵۹۹ **چوتھا قدم:** حجم۔

$$H = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^3 x^2\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^3 = 9$$

۸۶۰۰ یوں ہرم کا حجم $9\,\mathrm{m}^3$ ہو گا۔ □

۸۶۰۱ **مثال ۶.۷:** رداس 3 کے بیلن کو دو مستوی سے کاٹ کر قوسی پچر بنایا جاتا ہے۔ ایک مستوی بیلن کے محور پر عمودی ہے جبکہ دوسرا مستوی پہلے مستوی کو
۸۶۰۲ بیلن کے وسط پر 45° کے زاویے پر قطع کرتا ہے۔ پچر کا حجم تلاش کریں۔

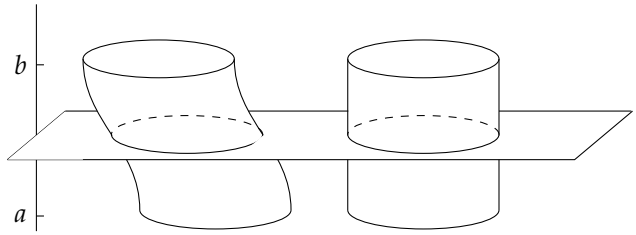
۸۶۰۳ **حل**

۸۶۰۴ **پہلا قدم:** خاکہ۔ ہم پچر اور نمائندہ عمودی تراش کا خاکہ بناتے ہیں (شکل ۶.۲۹)۔ عمودی تراش محور x کے عمودی ہے۔

۸۶۰۵ **دوسرا قدم:** کلیہ برائے $S(x)$ ۔ نقطہ x پر مستطیل عمودی تراش کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S(x) = (\text{قد})(\text{چوڑائی}) = (x)(2\sqrt{9-x^2}) = 2x\sqrt{9-x^2}$$

۸۶۰۶ **تیسرا قدم:** تکمل کی حدیں۔ مستطیل $x = 0$ تا $x = 3$ پائے جاتے ہیں۔



شکل ۶.۳۰: ان اجسام کے حجم برابر ہیں۔ آپ سکوں کو ایک دوسرے کے اوپر رکھ کر اس کو ثابت کر سکتے ہیں۔

۸۶۰۷ **چوتھا قدم:** حجم۔ درج ذیل میں $u = 9 - x^2$ لہٰذا $\mathrm{d}u = -2x\,\mathrm{d}x$ لے کر تکمل حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} H = \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^3 2x\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{3}(9-x^2)^{3/2}\Big|_0^3 \\ &= 0 + \frac{2}{3}(9)^{3/2} \\ &= 18 \end{aligned}$$

۸۶۰۸ □

۸۶۰۹ **مثال ۶.۸:** مسئلہ کوالیئرے[1]

۸۶۱۰ محور x پر واقع یکساں قد کے ایسے دو اجسام جن کے ہر x پر عمودی تراش کے رقبے برابر ہوں، ان کے حجم بھی برابر ہوں گے۔ یہ حقیقت مساوات اسے

۸۶۱۱ صاف ظاہر ہے چونکہ دونوں اجسام کے رقبہ عمودی تراش تفاعل $S(x)$ برابر ہیں (شکل ۶.۳۰)۔ □

۸۶۱۲ **سوالات**

۸۶۱۳ **رقبہ عمودی تراش**

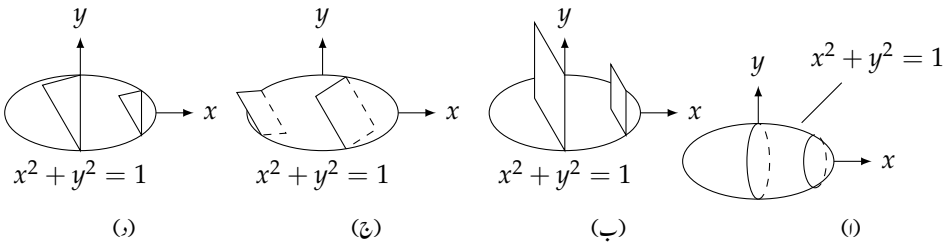
۸۶۱۴ سوال ۶.۵۹ اور سوال ۶.۶۰ میں محور x کے عمودی، ٹھوس جسم کے رقبہ عمودی تراش $S(x)$ کا کلیہ اخذ کریں۔

۸۶۱۵ **سوال ۶.۵۹:** ایک ٹھوس جسم $x = -1$ اور $x = 1$ پر محور x کے عمودی مستویات کے بیچ واقع ہے۔ محور x کے عمودی، جسم کے عمودی

۸۶۱۶ تراش رقبے، نصف دائرہ $y = -\sqrt{1-x^2}$ اور نصف دائرہ $y = \sqrt{1-x^2}$ کے بیچ واقع ہیں۔

۸۶۱۷ ا. عمودی تراش دائری اقراص ہیں جن کے قطر مستوی xy میں ہیں (شکل ۶.۳۱-ا)۔

[1] اطالوی ریاضی دان بوناونتورا کوالیئرے [1598-1647]



شکل ۶.۳۱: عمودی تراش برائے سوال ۶.۵۹

شکل ۶.۳۲: عمودی تراش برائے سوال ۶.۶۰

۸۶۱۸ ب. عمودی تراش چوکور ہیں جن کے قاعدے مستوی xy میں ہیں (شکل ۶.۳۱-ب)۔

۸۶۱۹ ج. عمودی تراش چوکور ہیں جن کے وتر مستوی xy میں ہیں۔ چوکور کے وتر کی لمبائی چوکور کے ضلع کے $\sqrt{2}$ گنّا ہوتی ہے (شکل ۶.۳۱-ج)۔

۸۶۲۰ د. عمودی تراش مساوی الاضلاع مثلث ہیں جن کے قاعدے مستوی xy میں ہیں (شکل ۶.۳۱-د)۔

۸۶۲۱

۸۶۲۲ سوال ۶.۶۰: ایک ٹھوس جسم $x = 0$ اور $x = 4$ پر محور x کے عمودی مستویات کے بیچ واقع ہے۔ جسم کے رقبہ عمودی تراش محور x کے

۸۶۲۳ عمودی، قطع مکافی $y = -\sqrt{x}$ اور قطع مکافی $y = \sqrt{x}$ کے بیچ واقع ہیں۔

۸۶۲۴ ا. عمودی تراش دائری اقراص ہیں جن کے قطر مستوی xy میں ہیں (شکل ۶.۳۲-ا)۔

۸۶۲۵ ب. عمودی تراش چوکور ہیں جن کے قاعدے مستوی xy میں ہیں (شکل ۶.۶۰-ب)۔

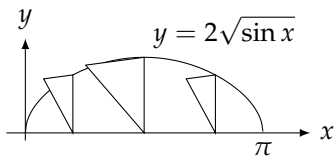
۸۶۲۶ ج. عمودی تراش چوکور ہیں جن کے وتر مستوی xy میں ہیں۔

۸۶۲۷ د. عمودی تراش مساوی الاضلاع مثلث ہیں جن کے قاعدے مستوی xy میں ہیں۔

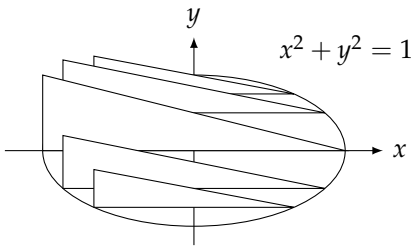
۸۶۲۸ ٹکیوں سے حجم کی تلاش

۸۶۲۹ سوال ۶.۶۱ تا سوال ۶.۷۰ میں دیے گئے ٹھوس اجسام کے حجم تلاش کریں۔

۸۶۳۰ سوال ۶.۶۱: ایک ٹھوس جسم $x = 0$ اور $x = 4$ پر محور x کے عمودی مستویات کے بیچ واقع ہے۔ جسم کی عمودی تراش کی صورت چوکور ہے جو



شکل ۶.۳۳: عمودی تراش (سوال ۶.۶۵)



شکل ۶.۳۴: عمودی تراش (سوال ۶.۶۸)

محور x کے عمودی ہیں اور جن کے وتر قطع مکافی $y = -\sqrt{x}$ سے قطع مکافی $y = \sqrt{x}$ تک ہیں۔

سوال ۶.۶۲: ایک ٹھوس جسم $x = -1$ اور $x = 1$ پر محور x کے عمودی مستویات کے بیچ واقع ہے۔ جسم کی عمودی تراش محور x کے عمودی ہیں جن کے قطر دائری اقراص ہیں جو قطع مکافی $y = x^2$ سے قطع مکافی $y = 2 - x^2$ تک ہیں۔

سوال ۶.۶۳: ایک ٹھوس جسم $x = -1$ اور $x = 1$ پر محور x کے عمودی مستویات کے بیچ واقع ہے۔ جسم کی چوکور عمودی تراش محور x کے عمودی ہیں جن کے قاعدوں کے کنارے نصف دائرہ $y = -\sqrt{1 - x^2}$ سے نصف دائرہ $y = \sqrt{1 - x^2}$ تک ہیں۔

سوال ۶.۶۴: ایک ٹھوس جسم $x = -1$ اور $x = 1$ پر محور x کے عمودی مستویات کے بیچ واقع ہے۔ جسم کی چوکور عمودی تراش محور x کے عمودی ہیں جن کے وتر نصف دائرہ $y = -\sqrt{1 - x^2}$ سے نصف دائرہ $y = \sqrt{1 - x^2}$ تک ہیں۔ چوکور کے وتر کی لمبائی چوکور کے ضلع کے $\sqrt{2}$ گنّا ہوتی ہے۔

سوال ۶.۶۵: ایک ٹھوس جسم کا قاعدہ منحنی $y = 2\sqrt{\sin x}$ اور محور x پر وقفہ $[0, \pi]$ کے بیچ واقع ہے۔ درج ذیل عمودی تراش محور x کے عمودی ہیں۔

ا. مساوی الاضلاع مثلث جن کے قاعدے محور x سے منحنی تک ہیں (شکل ۶.۳۳)۔

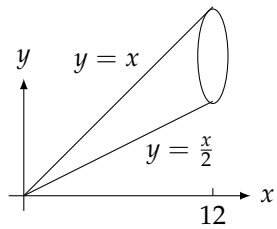
ب. انتصابی چوکور جن کے قاعدے محور x سے منحنی تک ہیں۔

سوال ۶.۶۶: ایک ٹھوس جسم $x = -\frac{\pi}{3}$ اور $x = \frac{\pi}{3}$ پر محور x کے عمودی مستویات کے بیچ واقع ہے۔ جسم کی عمودی تراش محور x کے عمودی ہیں جن کے خواص درج ذیل ہیں۔

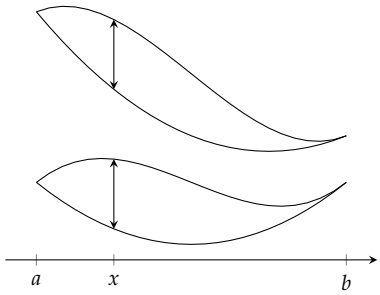
ا. دائری اقراص جن کے قطر $y = \tan x$ سے $y = \sec x$ تک ہیں۔

ب. انتصابی چوکور جن کے قاعدے $y = \tan x$ سے $y = \sec x$ تک ہیں۔

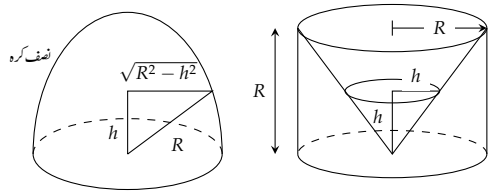
سوال ۶.۶۷: ایک ٹھوس جسم $y = 0$ اور $y = 2$ پر محور y کے عمودی مستویات کے بیچ واقع ہے۔ جسم کی دائری عمودی تراش محور y کے عمودی ہیں جن کے قطر محور y سے قطع مکافی $x = \sqrt{5}y^2$ تک ہیں۔



شکل ۶.۳۵: عمودی تراش (سوال ۶.۷۰)



شکل ۶.۳۶: وقفہ $[a, b]$ پر کسی بھی x پر دونوں خطوں کی چوڑائی ایک دوسرے جتنی ہے (مسئلہ کوالیئرے)۔



شکل ۶.۳۷: کرہ اور بیلن دونوں میں سے مخروط منفی کر کے دونوں صورتوں میں برابر حجم حاصل ہوتا ہے (سوال ۶.۷۲)۔

سوال ۶.۶۸: ایک ٹھوس جسم کا قاعدہ قرص $x^2 + y^2 \leq 1$ ہے۔ عمودی تراش $y = -1$ اور $y = 1$ کے بیچ محور y کے عمودی ہیں جو مساوی الساقین مثلث ہیں جن کا ایک ضلع قرص میں واقع ہے (شکل ۶.۳۴)۔

مسئلہ کوالیئرے

سوال ۶.۶۹: بلدار ٹھوس جسم

ایک چوکور جس کا ضلع s ہے لکیر L کے عمودی مستوی میں واقع ہے۔ چوکور کا ایک راس L پر واقع ہے۔ یہ چوکور L پر h فاصلہ طے کرنے کے دوران L کے گرد ایک چکر کاٹ کر پیچ دار ستون پیدا کرتا ہے جس کا رقبہ عمودی تراش چوکور ہو گا۔

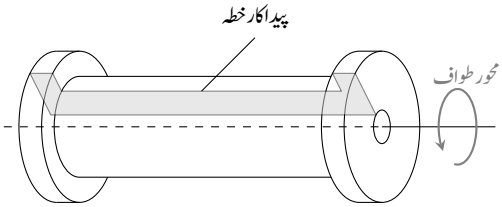
ا. پیچ دار ستون کا حجم تلاش کریں۔

ب. اگر چوکور ایک کے بجائے دو چکر کاٹتا تب حجم کتنا ہوتا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۶.۷۰: ایک ٹھوس جسم $x = 01$ اور $x = 12$ پر محور x کے عمودی مستویات کے بیچ واقع ہے۔ جسم کی عمودی تراش محور x کے عمودی ہیں جن کے قطر لکیر $y = \frac{x}{2}$ سے لکیر $y = x$ تک ہیں (شکل ۶.۳۵)۔ اس جسم کا حجم کیوں اس قائمہ مخروط جتنا ہو گا جس کا قد 12 اور جس کے قاعدے کا رداس 3 ہو؟

سوال ۶.۷۱: مسئلہ کوالیئرے کی ابتدائی صورت

کوالیئرے نے طالب علمی کے دوران دریافت کیا کہ اگر دو مستوی خطوں کو محور x کے یکساں وقفہ پر یوں رکھنا ممکن ہو کہ کسی بھی x پر دونوں خطوں کی



شکل ۶.۳۸: مستوی خطہ کو کسی محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔

چوڑائی یکساں ہو تب دونوں خطوں کا رقبہ یکساں ہو گا (شکل ۶.۳۶)۔ ٹھوس اجسام کے لیے کوالیئرے نے یہی مسئلہ کبھی ثابت نہیں کیا۔ اگر شکل ۶.۷۱ میں بالائی اور زیریں سرحدیں استراری تفاعل ہوں تب اس مسئلے کو ثابت کریں۔

سوال ۶.۷۲: نصف کرہ کا حجم بذریعہ مسئلہ کوالیئرے

نصف کرہ کا حجم $H = \frac{2}{3}\pi R^3$ ہے جہاں R رداس ہے۔ رداس R اور قد R کے قائمہ بیلن سے رداس R اور قد R کا قائمہ مخروط ہٹانے پر نصف کرہ کی عمودی تراش حاصل ہوتی ہے۔ مخروط کو نوک کے بل رکھا تصور کریں (شکل ۶.۳۷)۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے نصف کرہ کا حجم تلاش کریں۔

۶.۳ اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا

مستوی خطے کو کسی محور کے گرد گھمانے سے جسم **طواف**[۲] پیدا کیا جاتا ہے (شکل ۶.۳۸)۔ جسم طواف پیدا کرنے کے لیے گھمائے جانے والے مستوی خطے کو **پیدا کار خطہ**[۳] کہتے ہیں۔ جسم طواف کا حجم ٹکیوں کی ترکیب سے نہایت خوش اسلوبی سے حاصل ہوتا ہے۔

اگر ہم مستوی خطہ کو استراری تفاعل $y = R(x),\ a \leq x \leq b$ اور x کے بیچ خطہ سے ظاہر کر سکیں اور اگر محور x گھومنے کا محور (**محور طواف**[۴]) بھی ہو تب ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل طریقے سے حاصل کیا جا سکتا ہے (شکل ۶.۳۹)۔

محور طواف کے لحاظ سے عمودی تراش کا رداس $R(x)$ اور رقبہ درج ذیل ہو گا۔

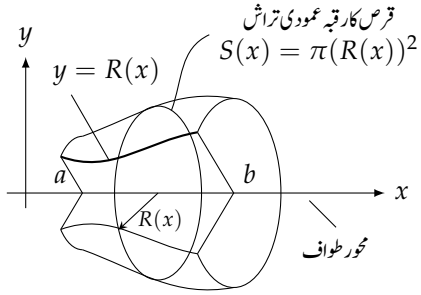
$$S(x) = \pi(\text{رداس})^2 = \pi[R(x)]^2$$

جسم کا حجم، $x = a$ تا $x = b$، تفاعل S کا تکمل ہو گا۔

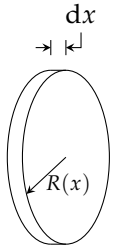
جسم طواف کا حجم (محور طواف محور x ہے)

---

[۲] solidofrevolution
[۳] generatingregion
[۴] axisofrevolution



(ا) استمراری تفاعل $y = R(x)$ کو $x = a$ تا $x = b$ محور x کے گرد گھمایا گیا ہے۔



(ب) قرص کا حجم $\mathrm{d}H = \pi(R(x))^2$ ہے۔

شکل ۶.۳۹: جسم طواف کے حجم کا حصول بذریعہ ترکیب قرص۔

۸۶۸۱ استمراری تفاعل $y = R(x),\ a \le x \le b$ کو محور x کے گرد گھمانے سے پیدا ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = \int_a^b \pi[\text{رداس}]^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b \pi[R(x)]^2\,\mathrm{d}x \tag{ا}$$

۸۶۸۲ مثال ۶.۹: منحنی $y = \sqrt{x},\ 0 \le x \le 4$ کو محور x کے گرد گھمانے سے ٹھوس جسم پیدا ہوتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

۸۶۸۳ **حل**

۸۶۸۴ ہم منحنی ترسیم کر کے ٹھوس جسم کا خاکہ بنا کر نمائندہ رداس بناتے ہیں (شکل ۶.۴۰)۔ حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} H &= \int_a^b \pi[R(x)]^2\,\mathrm{d}x && \text{مساوات ا} \\ &= \int_0^4 \pi[\sqrt{x}]^2\,\mathrm{d}x && R(x) = \sqrt{x} \\ &= \pi\int_0^4 x\,\mathrm{d}x = \pi\frac{x^2}{2}\bigg|_0^4 = \pi\frac{(4)^2}{2} = 8\pi \end{aligned}$$

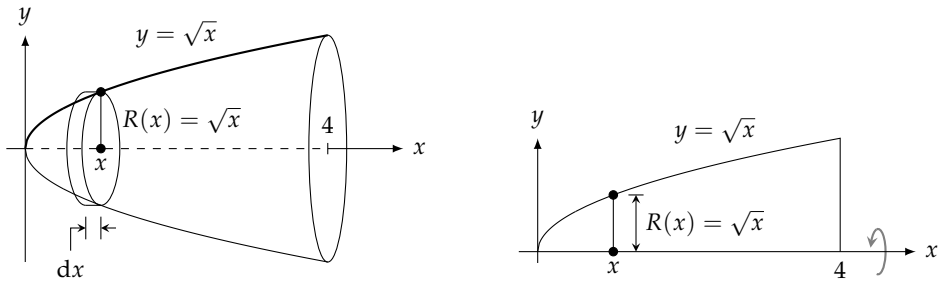
۸۶۸۵ □

۸۶۸۶ **مساوات ا سے حجم حاصل کرنے کا طریقہ**

۸۶۸۷

۸۶۸۸ ا. خطے کا خاکہ بنائیں اور رداس $R(x)$ کی نشاندہی کریں۔

۸۶۸۹ ب. یوں رقبہ عمودی تراش $\pi[R(x)]^2$ ہو گا۔



(ب) (ا)

شکل ۶.۴۰: مستوی خطہ اور جسم طواف (مثال ۶.۹)

۸۶۹۰ ج. رقبہ عمودی تراش کا مکمل حجم دیگا۔

۸۶۹۱ اگلی مثال میں محور طواف محور x نہیں ہے، لیکن حجم حاصل کرنے کا اصول تبدیل نہیں ہوتا: مکمل کی موزوں حد استعمال کریں۔

۸۶۹۲ مثال ۶.۱۰: تفاعل $y = \sqrt{x}$، لکیر $y = 1$، اور لکیر $x = 4$ کے بیچ خطہ کو لکیر $y = 1$ کے گرد گھما کر ٹھوس جسم پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم
۸۶۹۳ کا حجم تلاش کریں۔

۸۶۹۴ **حل**

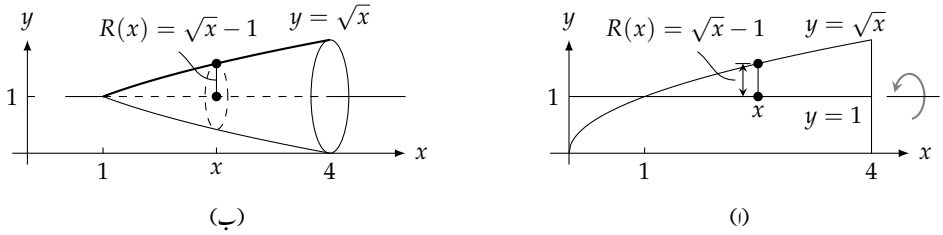
۸۶۹۵ ہم خطہ اور نمائندہ رداس بنا کر ٹھوس جسم کا خاکہ بناتے ہیں (شکل ۶.۴۱)۔ جسم کا حجم درج ذیل ہوگا۔

$$
\begin{aligned}
H &= \int_1^4 \pi [R(x)]^2 \, \mathrm{d}x && \text{مساوات ا} \\
&= \int_1^4 \pi [\sqrt{x} - 1]^2 \, \mathrm{d}x && R(x) = \sqrt{x} - 1 \\
&= \pi \int_1^4 [x - 2\sqrt{x} + 1] \, \mathrm{d}x \\
&= \pi \left[\frac{x^2}{2} - 2 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + x \right]_1^4 = \frac{7\pi}{6}
\end{aligned}
$$

۸۶۹۶ □

۸۶۹۷ منحنی $x = R(y),\ c \le y \le d$ کو محور y کے گرد گھما کر ٹھوس جسم پیدا ہوتا ہے جس کا حجم تلاش کرتے ہوئے مساوات ا میں x کی جگہ y
۸۶۹۸ لکھا جاتا ہے۔

۸۶۹۹ **جسم طواف کا حجم (محور طواف محور y ہے)**



شکل ۶.۴۱: مستوی خطہ اور جسم طواف (مثال ۶.۱۰)

۸۷۰۰ استمراری تفاعل $x = R(y),\ c \le y \le d$ کو محور y کے گرد گھمانے سے پیدا ٹھوس جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = \int_c^d \pi[\text{رداس}]^2\,\mathrm{d}x = \int_c^d \pi[R(y)]^2\,\mathrm{d}y \tag{۲}$$

۸۷۰۱ مثال ۶.۱۱: منحنی $x = \frac{2}{y},\ 1 \le y \le 4$ کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم دریافت کریں۔

۸۷۰۲ **حل**

۸۷۰۳ ہم منحنی ترسیم کر کے ٹھوس جسم کا خاکہ بنا کر نمائندہ قرص اور رداس کا نقش بناتے ہیں (شکل ۶.۴۲)۔ جسم کا حجم درج ذیل ہو گا۔

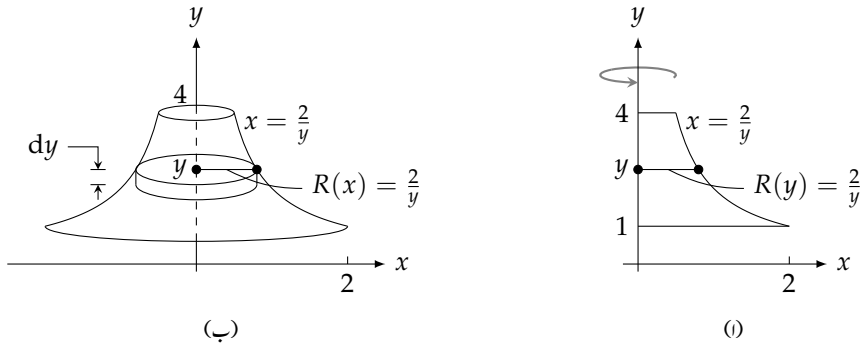
$$\begin{aligned} H &= \int_1^4 \pi[R(y)]^2\,\mathrm{d}y && \text{مساوات ۲} \\ &= \int_1^4 \pi\left(\frac{2}{y}\right)^2 \mathrm{d}y && R(y) = \frac{2}{y} \\ &= \pi\int_1^4 \frac{4}{y^2}\,\mathrm{d}y = 4\pi\Big[-\frac{1}{y}\Big]_1^4 = 4\pi\left[\frac{3}{4}\right] = 3\pi \end{aligned}$$

۸۷۰۴ □

۸۷۰۵ مثال ۶.۱۲: قطع مکافی $x = y^2 + 1$ اور لکیر $x = 3$ کے بیچ خطہ کو لکیر $x = 3$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم
۸۷۰۶ معلوم کریں۔

۸۷۰۷ **حل**

۸۷۰۸ ہم منحنی اور لکیر کے بیچ خطے کا خاکہ بنا کر جسم طواف کا خاکہ بناتے ہیں اور عمودی تراش کے نمائندہ رداس کی نشاندہی کرتے ہیں (شکل ۶.۴۳)۔ جسم کا حجم درج



شکل ۶.۴۲: مستوی خطہ، جسم طواف اور قرص (مثال ۶.۱۱)

۸۷۰۹ ذیل ہو گا۔

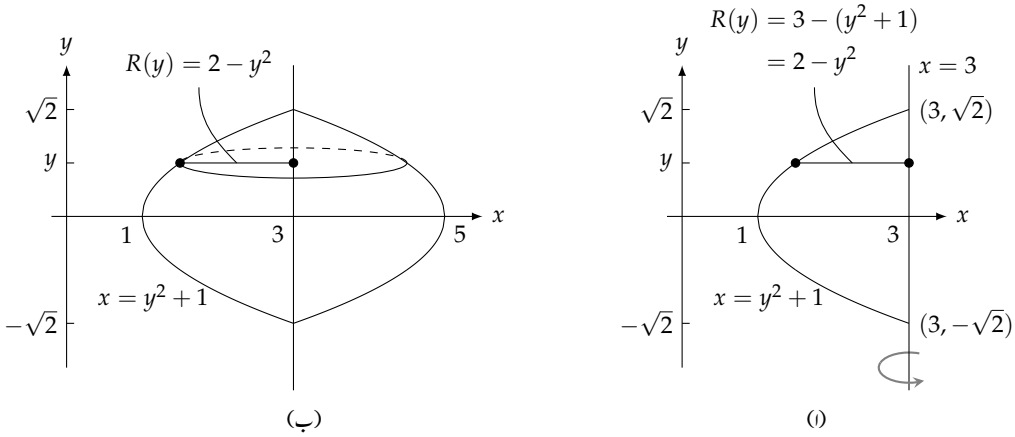
$$
\begin{aligned}
H &= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi [R(y)]^2 \, \mathrm{d}y && \text{مساوات ۲} \\
&= \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi [2 - y^2]^2 \, \mathrm{d}y && R(y) = 3 - (y^2 + 1) \\
&= \pi \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} [4 - 4y^2 + y^4] \, \mathrm{d}y \\
&= \pi \left[4y - \frac{4}{3} y^3 + \frac{y^5}{5} \right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}
\end{aligned}
$$

۸۷۱۰ □

۸۷۱۱ **ترکیب چھلا**

۸۷۱۲ اگر گھمایا جانے والا خطہ محور طواف کو قطع نہ کرتا ہو اور نہ ہی محور طواف کو مس کرتا ہو تب جسم طواف میں سوراخ پایا جائے گا (شکل ۶.۴۴)۔ ایسے جسم کا بیرونی
۸۷۱۳ رداس $R(x)$ اور اندرونی رداس $r(x)$ ہو گا۔ یوں اس کا رقبہ عمودی تراش درج ذیل ہو گا۔

$$S(x) = \pi[R(x)]^2 - \pi[r(x)]^2 = \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)$$



شکل ۶.۴۳: مستوی خطہ اور جسم طواف (مثال ۶.۱۲)

حجم تلاش کرنے کا کلیہ

۸۷۱۴
۸۷۱۵

$$H = \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,\mathrm{d}x \tag{۳}$$

۸۷۱۶ دھیان رہے کہ مساوات ۳ میں تفاعل $\pi(R^2 - r^2)$ کا تکمل لیا جاتا ہے نہ کہ تفاعل $\pi(R - r)^2$ کا۔ اگر پورے وقفہ $[a, b]$ پر اندرونی رداس
۸۷۱۷ صفر ہو تب درج بالا سے مساوات احاصل ہوتی ہے۔ یوں ترکیب ٹکیا در حقیقت ترکیب چھلا کی مخصوص صورت ہے۔

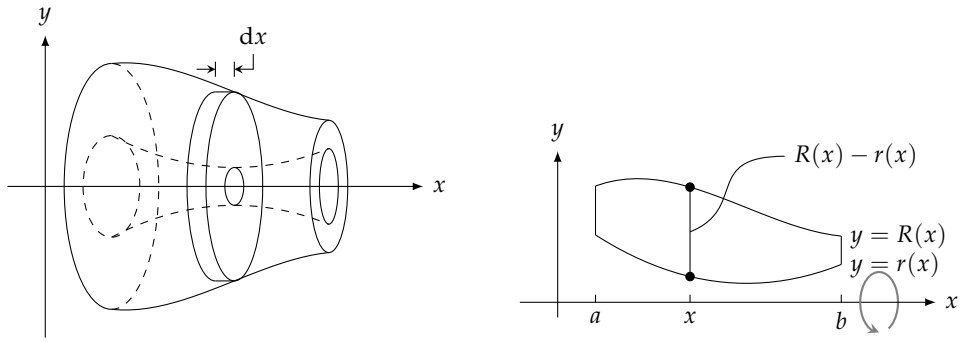
۸۷۱۸ **مثال ۶.۱۳:** منحنی $y = x^2 + 1$ اور لکیر $y = -x + 3$ کے بیچ خطہ کو محور x کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ ٹھوس
۸۷۱۹ جسم کا حجم تلاش کریں۔

۸۷۲۰ **حل**

۸۷۲۱ **پہلا قدم:** منحنی اور لکیر ترسیم کر کے خطے کا خاکہ بنا کر خطے پر محور طواف کے عمودی لکیر کھینچیں (شکل ۶.۴۵)۔

۸۷۲۲ **دوسرا قدم:** نقاط تقاطع سے تکمل کی حدیں تلاش کریں۔

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= -x + 3 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \\ (x + 2)(x - 1) &= 0 \\ x = -2, \quad x &= 1 \end{aligned}$$



(ب) (ا)

شکل ۶.۴۴: یہاں جسم طواف قرص کے بجائے چھلا نما ہے جس میں سوراخ پایا جاتا ہے لہٰذا تکمل $\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$ قدرے مختلف صورت اختیار کرتا ہے۔

۸۷۳ **تیسرا قدم:** بیرونی اور اندرونی رداس کی نشاندہی کریں۔

$$R(x) = -x + 3 \qquad \text{بیرونی رداس}$$
$$r(x) = x^2 + 1 \qquad \text{اندرونی رداس}$$

۸۷۴ **چوتھا قدم:** تکمل سے حجم حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} H &= \int_a^b \pi([R(x)]^2 - [r(x)]^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^1 \pi([-x+3]^2 - [x^2+1]^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^1 \pi(8 - 6x - x^2 - x^4)\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\left[8x - 3x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right]_{-2}^1 = \frac{117\pi}{5} \end{aligned}$$

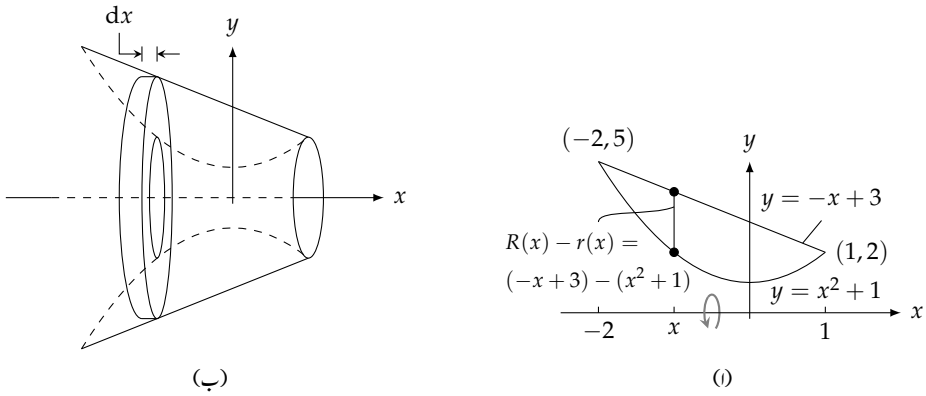
۸۷۵ □

۸۷۶ ## ترکیب چھلا سے حجم کی تلاش

۸۷۷

۸۷۸ ا. خطے کا خاکہ بنا کر اس پر محور طواف کے عمودی لکیری قطعہ کھینچیں۔ خطہ کو محور طواف کے گرد گھمانے سے یہ قطعہ نمائندہ عمودی تراش دے گا۔

۸۷۹ ب. تکمل کی حدیں دریافت کریں۔



شکل ۶.۴۵: مستوی خطہ اور چھلا نما جسم طواف (مثال ۶.۱۳)

۸۷۳۰ ج. عمودی تراش کے بیرونی اور اندرونی رداس کو لکیری قطعہ سے حاصل کریں۔

۸۷۳۱ د. تکمل کے ذریعہ حجم حاصل کریں۔

۸۷۳۲ اگر خطے کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جائے تب درج بالا اقدام استعمال کرتے ہوئے x کے بجائے y کے ساتھ تکمل لیں۔

۸۷۳۳ مثال ۶.۱۴: ربع اول میں قطع مکافی $y = x^2$ اور لکیر $y = 2x$ کے بیچ خطے کو y محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم
۸۷۳۴ معلوم کریں۔

۸۷۳۵ **حل**

۸۷۳۶ **پہلا قدم:** خطے کا خاکہ کھینچ کر خطہ پر محور طواف کے عمودی لکیری قطعہ بنائیں (شکل ۶.۴۶)۔ یہاں محور طواف محور y ہے۔

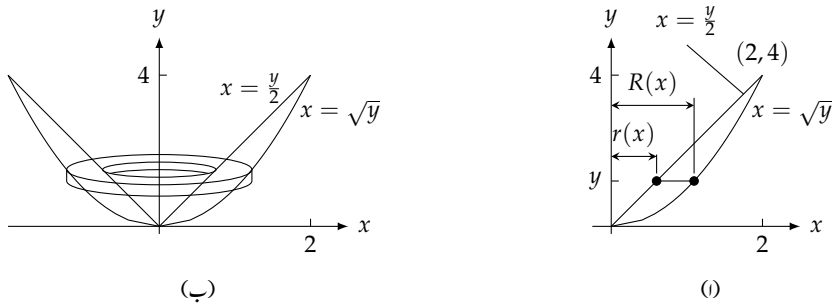
۸۷۳۷ **دوسرا قدم:** قطع مکافی اور لکیر ایک دوسرے کو $y = 0$ اور $y = 4$ پر قطع کرتے ہیں لہذا تکمل کی حدیں $c = 0$ اور $d = 4$ ہوں گی۔

۸۷۳۸ **تیسرا قدم:** رقبہ عمودی تراش کا بیرونی رداس $R(y) = \sqrt{y}$ اور اندرونی رداس $r(y) = \frac{y}{2}$ ہے۔

۸۷۳۹ **چوتھا قدم:** تکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
H &= \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^4 \pi\left([\sqrt{y}]^2 - [\tfrac{y}{2}]^2\right)\mathrm{d}y \\
&= \pi\int_0^4 \left(y - \frac{y^2}{4}\right)\mathrm{d}y = \pi\left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{8\pi}{3}
\end{aligned}
$$

۸۷۴۰ □



شکل ۶.۴۶: جسم طواف اور نمائندہ چھلا (مثال ۶.۱۴)

۸۷۴۱ مثال ۶.۱۵: ربع اول میں قطع مکافی $y = x^2$، لکیر $y = 1$، اور محور y کے بیچ خطہ کو لکیر $x = \frac{3}{2}$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا
۸۷۴۲ ہے۔ اس جسم کا حجم دریافت کریں۔

۸۷۴۳ **حل**

۸۷۴۴ **پہلا قدم:** خطہ کے خاکہ پر محور طواف $x = \frac{3}{2}$ کے عمودی، لکیری قطعہ بنائیں (شکل ۶.۴۷)۔

۸۷۴۵ **دوسرا قدم:** تکمل کی حدیں $y = 0$ اور $y = 1$ ہیں۔

۸۷۴۶ **تیسرا قدم:** عمودی تراش کا بیرونی رداس $R(y) = \frac{3}{2}$ اور اندرونی رداس $r(y) = \frac{3}{2} - \sqrt{y}$ ہے۔

۸۷۴۷ **چوتھا قدم:** تکمل سے حجم حاصل کرتے ہیں۔

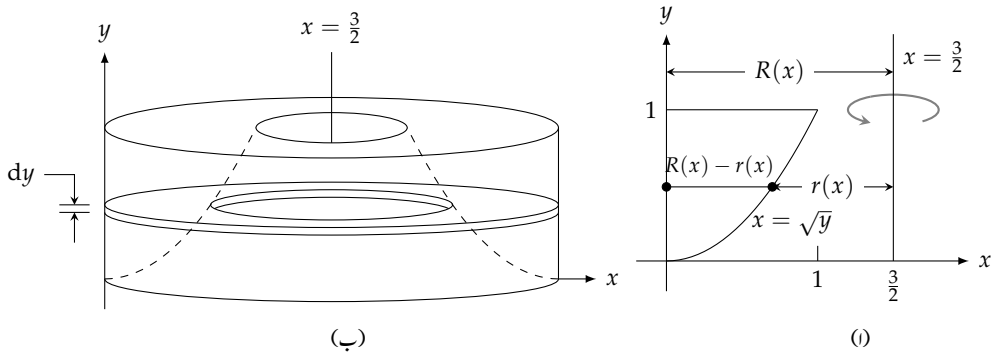
$$
\begin{aligned}
H &= \int_c^d \pi([R(y)]^2 - [r(y)]^2)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \pi([\tfrac{3}{2}]^2 - [\tfrac{3}{2} - \sqrt{y}]^2)\,\mathrm{d}y \\
&= \pi \int_0^1 (3\sqrt{y} - y)\,\mathrm{d}y = \pi\left[2y^{3/2} - \tfrac{y^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3\pi}{2}
\end{aligned}
$$

۸۷۴۸ □

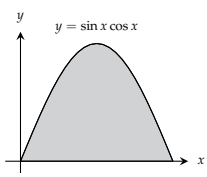
۸۷۴۹ **سوالات**

۸۷۵۰ **حجم بذریعہ ترکیب ٹکیا**

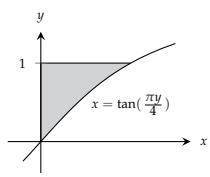
۸۷۵۱ سوال ۶.۷۳ تا سوال ۶.۷۶ میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم دریافت کریں۔



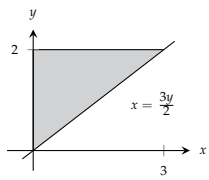
شکل ۶.۴۷: جسم طواف اور نمائندہ چھلا (مثال ۶.۱۵)



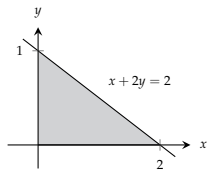
شکل ۶.۵۱



شکل ۶.۵۰



شکل ۶.۴۹



شکل ۶.۴۸

سوال ۶.۷۳: سایہ دار خطہ شکل ۶.۴۸ میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $x + 2y = 2$ ہے۔

سوال ۶.۷۴: سایہ دار خطہ شکل ۶.۴۹ میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $x = \frac{3y}{2}$ ہے۔

سوال ۶.۷۵: سایہ دار خطہ شکل ۶.۵۰ میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $x = \tan(\frac{\pi y}{4})$ ہے۔

سوال ۶.۷۶: سایہ دار خطہ شکل ۶.۵۱ میں دیا گیا ہے جہاں تفاعل $y = \sin x \cos x$ ہے۔

سوال ۶.۷۷ تا سوال ۶.۸۲ میں منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۶.۷۷: $y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 2$

سوال ۶.۷۸: $y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 2$

سوال ۶.۷۹: $y = \sqrt{9 - x^2}, \quad y = 0$

سوال ۶.۸۰: $y = x - x^2, \quad y = 0$

سوال ۶.۸۱: $y = \sqrt{\cos x}, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad x = 0, \quad y = 0$

سوال ۶.۸۲: $y = \sec x, \quad y = 0, \quad x = -\frac{\pi}{4}, \quad x = \frac{\pi}{4}$

سوال ۶.۸۳ اور سوال ۶.۸۴ میں خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ حاصل جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔

سوال ۶.۸۳: ربع اول میں خطے کا بالائی سرحد لکیر $y = \sqrt{2}$، زیریں سرحد منحنی $y = \sec x \tan x$ اور بایاں سرحد محور y ہیں۔ خطے کو لکیر $y = \sqrt{2}$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

سوال ۶.۸۴: ربع اول میں خطے کی بالائی سرحد لکیر $y = 2$، زیریں سرحد منحنی $y = \sec x \tan x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$، اور بائیں سرحد محور y ہے۔ خطے کو لکیر $y = 2$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

سوال ۶.۸۵ تا سوال ۶.۹۰ میں منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کو محور y کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم دریافت کریں۔

سوال ۶.۸۵: $x = \sqrt{5}y^2, \quad x = 0, \quad y = -1, \quad y = 1$

سوال ۶.۸۶: $x = y^{3/2}, \quad x = 0, \quad y = 2$

سوال ۶.۸۷: $x = \sqrt{2 \sin 2y}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, \quad x = 0$

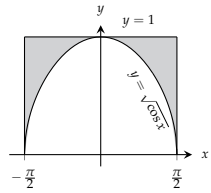
سوال ۶.۸۸: $x = \sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}}, \quad -2 \leq y \leq 0, \quad x = 0$

سوال ۶.۸۹: $x = \frac{2}{y+1}, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 3$

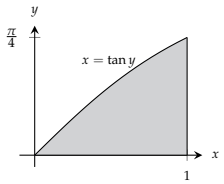
سوال ۶.۹۰: $x = \frac{\sqrt{2y}}{y^2+1}, \quad x = 0, \quad y = 1$

حجم بذریعہ ترکیب چھلا

سوال ۶.۹۱ اور سوال ۶.۹۱ میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔



شکل ۶.۵۲



شکل ۶.۵۳

۸۷۷۷ سوال ۶.۹۱: خطہ شکل ۶.۵۲ میں دکھایا گیا ہے۔

۸۷۷۸ سوال ۶.۹۲: خطہ شکل ۶.۵۳ میں دکھایا گیا ہے۔

۸۷۷۹

۸۷۸۰ سوال ۶.۹۳ تا سوال ۶.۱۰۰ میں دی گئی منحنیات اور لکیروں کے بیچ خطے کو محور x گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم تلاش کریں۔

۸۷۸۱ سوال ۶.۹۳: $y = x, \quad y = 1, \quad x = 0$

۸۷۸۲ سوال ۶.۹۴: $y = 2x, \quad y = x, \quad x = 1$

۸۷۸۳ سوال ۶.۹۵: $y = 2\sqrt{x}, \quad y = 2, \quad x = 0$

۸۷۸۴ سوال ۶.۹۶: $y = -\sqrt{x}, \quad y = -2, \quad x = 0$

۸۷۸۵ سوال ۶.۹۷: $y = x^2 + 1, \quad y = x + 3$

۸۷۸۶ سوال ۶.۹۸: $y = 4 - x^2, \quad y = 2 - x$

۸۷۸۷ سوال ۶.۹۹: $y = \sec x, \quad y = \sqrt{2}, \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$

۸۷۸۸ سوال ۶.۱۰۰: $y = \sec x, \quad y = \tan x, \quad x = 0, \quad x = 1$

۸۷۸۹

۸۷۹۰ سوال ۶.۱۰۱ تا سوال ۶.۱۰۶ میں خطے کو محور y کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔

۸۷۹۱ سوال ۶.۱۰۱: مثلث میں محیط خطہ جہاں مثلث کے راس $(1,0)$ ، $(2,1)$ ،اور $(1,1)$ ہیں۔

۸۷۹۲ سوال ۶.۱۰۲: مثلث جس کے راس $(0,1)$ ، $(1,0)$ ،اور $(1,1)$ ہیں میں محیط خطہ۔

۸۷۹۳ سوال ۶.۱۰۳: ربع اول میں خطہ جس کی بالائی سرحد قطع مکافی $y = x^2$ ،زیریں سرحد محور x ،اور دائیں سرحد لکیر $x = 2$ ہے۔

۸۷۹۴ سوال ۶.۱۰۴: خطہ کی بالائی سرحد منحنی $y = \sqrt{x}$ اور زیریں سرحد لکیر $y = x$ ہے۔

۸۷۹۵ سوال ۶.۱۰۵: ربع اول میں خطہ جس کی بائیں سرحد دائرہ $x^2 + y^2 = 3$ ،دائیں سرحد لکیر $x = \sqrt{3}$ ،اور بالائی سرحد لکیر $y = \sqrt{3}$ ہے۔

۸۷۹۶

۸۷۹۷ سوال ۶.۱۰۶: خطے کی بائیں سرحد لکیر $x = 4$ اور دائیں سرحد دائرہ $x^2 + y^2 = 25$ ہے۔

سوال ۶.۱۰۷ اور سوال ۶.۱۰۸ میں خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ جسم کا حجم معلوم کریں۔

سوال ۶.۱۰۷: ربع اول میں خطہ جس کی بالائی سرحد منحنی $y = x^2$ ، زیریں سرحد محور x ، اور دائیں سرحد لکیر $x = 1$ ہے۔ خطے کو لکیر $x = -1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

سوال ۶.۱۰۸: ربع دوم میں خطہ جس کی بالائی سرحد منحنی $y = -x^3$ ، زیریں سرحد محور x ، اور بائیں سرحد لکیر $x = -1$ ہے۔ خطے کو لکیر $x = -2$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

جسم طواف کے حجم

سوال ۶.۱۰۹: ایک خطہ جس کی سرحدیں $y = \sqrt{x}$ ، $y = 2$ ، اور $x = 0$ ہیں کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ ٹھوس جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔

ا. محور x ؛

ب. محور y ؛

ج. لکیر $y = 2$ ؛

د. لکیر $x = 4$

سوال ۶.۱۱۰: ایک تکونی خطہ جس کی سرحدیں $y = 2x$ ، $y = 0$ ، اور $x = 1$ ہیں کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

ا. لکیر $x = 1$ ؛

ب. لکیر $x = 2$

سوال ۶.۱۱۱: ایک خطہ جس کی سرحدیں قطع مکافی $y = x^2$ اور $y = 1$ ہیں کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

ا. لکیر $y = 1$ ؛

ب. لکیر $y = 2$ ؛

ج. لکیر $y = -1$

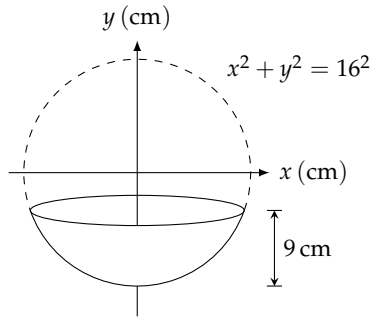
سوال ۶.۱۱۲: ایک مثلث جس کے راس $(0,0)$ ، $(b,0)$ ، اور $(0,h)$ ہیں میں محیط خطے کو درج ذیل کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ جسم طواف کا حجم تکمل کی مدد سے حاصل کریں۔

ا. محور x ؛

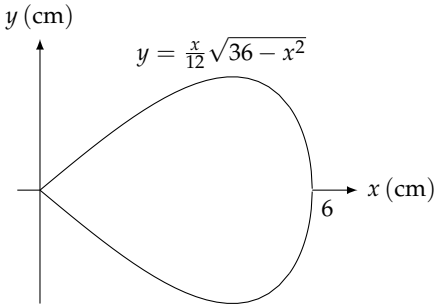
ب. محور y

سوال ۶.۱۱۳: ایک برتن کو رداس 16 cm کے کرہ کا حصہ تصور کیا جا سکتا ہے۔ برتن کی گہرائی 9 cm ہے۔ برتن کا حجم تکمل کی مدد سے دریافت کریں (شکل ۶.۵۴)۔

سوال ۶.۱۱۴: منحنی $y = \frac{x}{12}\sqrt{36 - x^2},\ 0 \le x \le 6\,\text{cm}$ کو محور x کے گرد گھما کر ناشپاتی نما پیتل کا گولہ بنایا جاتا ہے (شکل ۶.۵۵)۔ پیتل کی کثافت $8.5\,\text{g cm}^{-3}$ لیں۔ گولے کی کمیت کتنی ہو گی؟



شکل ۶.۵۴: کروی برتن (سوال ۶.۱۱۳)



شکل ۶.۵۵: ناشپاتی نما گولہ (سوال ۶.۱۱۴)

سوال ۶.۱۱۵: منحنی $y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi x$ کو لکیر $y = c$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے جہاں $0 \le c \le 1$ ہے۔

ا. ٹھوس جسم کی اقل حجم c کی کتنی قیمت پر حاصل ہو گی؟ اس اقل حجم کو تلاش کریں۔

ب. وقفہ $[0, 1]$ میں c کی کونسی قیمت اعظم حجم دے گی؟

ج. ٹھوس جسم کا حجم بالمقابل c کو پہلے $0 \le c \le 1$ کے لیے اور بعد میں بڑی قیمتوں کے لیے ترسیم کریں۔ جیسے جیسے c کی قیمت وقفہ $[0, 1]$ سے دور ہوتی جاتی ہے، جسم کے حجم کو کیا ہوتا ہے؟ کیا اس کا طبعی مطلب بنتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۶.۱۱۶: ہیلی کاپٹر کی پہنچ بڑھانے کی خاطر اس کے نیچے تیل کا اضافی حوض نسب کرنا مطلوب ہے۔ منحنی $y = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{3},\ -1 \le x \le 1$ کو محور x کے گرد گھما کر حوض بنایا جاتا ہے۔ اس حوض میں کتنے لٹر تیل آئے گا؟

سوال ۶.۱۱۷: اندرسہ کا حجم

دائری قرص $x^2 + y^2 \le a^2$ کو لکیر $y = b\ (b > a)$ کے گرد گھما کر **اندرسہ**[۵] پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کا حجم تلاش کریں۔ (اشارہ۔ $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi a^2}{2}$ ہو گا چونکہ یہ رداس a کے نصف دائرے کا رقبہ ہے۔)

سوال ۶.۱۱۸: (ا) نصف کروی برتن جس کا رداس a ہے میں پانی کی گہرائی h ہے۔ پانی کی مقدار معلوم کریں۔ (ب) نصف کروی حوض جس کا رداس $5\,\mathrm{m}$ ہے میں پانی داخل ہونے کی شرح $0.2\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-1}$ ہے۔ جس لمحہ پانی کی گہرائی $4\,\mathrm{m}$ ہو، اس لمحے پر گہرائی بڑھنے کی شرح کیا ہو گی؟

سوال ۶.۱۱۹: اس حصہ میں حجم کے تمام تعریف جیومیٹریائی تعریف کے عین مطابق ہیں۔

ا. نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کو محور x کے گرد گھما کر کرہ حاصل ہوتا ہے۔ قرص کے حجم کا کلیہ مساوات ۱ استعمال کرتے ہوئے کرہ کے حجم کا کلیہ $H = \frac{4}{3}\pi a^3$ حاصل کریں۔

ب. رداس r اور قد h کے قائمہ مخروط کا حجم احصاء کی مدد سے حاصل کریں۔

---

[۵] torus

(ا) (ب)

شکل ۶.۵۶: نلکی جسم طواف

۶.۴ نلکی چھلے

اجسام طواف کا حجم تلاش کرتے ہوئے بعض اوقات چھلا کے بجائے نلکی خول استعمال کرنا زیادہ بہتر ثابت ہوتا ہے (شکل ۶.۵۶)۔

نلکی کلیہ

فرض کریں ہم محور x اور وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل $y = f(x)$ کے بیچ خطے کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کرتے ہیں۔ ہمیں جسم طواف کا حجم درکار ہے۔ ہم وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی P پر منحصر مستطیلوں کو خطے کا تخمینی رقبہ لے سکتے ہیں۔ ایک نمائندہ مستطیل کی چوڑائی Δx_k اور قد $f(c_k)$ ہو گا، جہاں نمائندہ مستطیل کے قاعدے کا وسط c_k ہے (شکل ۶.۵۷)۔ ہم جیومیٹری سے جانتے ہیں کہ ایسے مستطیل کو محور y کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم

$$\Delta H_k = 2\pi \times \text{خول کا اوسط رداس} \times \text{خول کا قد} \times \text{موٹائی}$$

ہو گا جو موجودہ صورت میں درج ذیل ہو گا۔

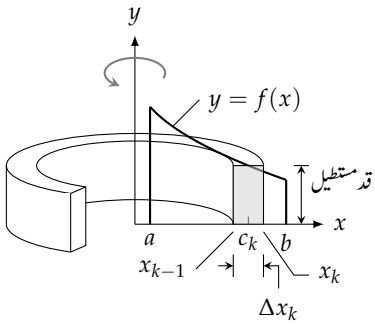
$$\Delta H_k = 2\pi c_k f(c_k) \Delta x_k$$

ہم P پر منحصر n مستطیلوں کو محور y کے گرد گھمانے سے حاصل حجم کے مجموعہ کو تخمیناً جسم طواف کا حجم لیتے ہیں۔

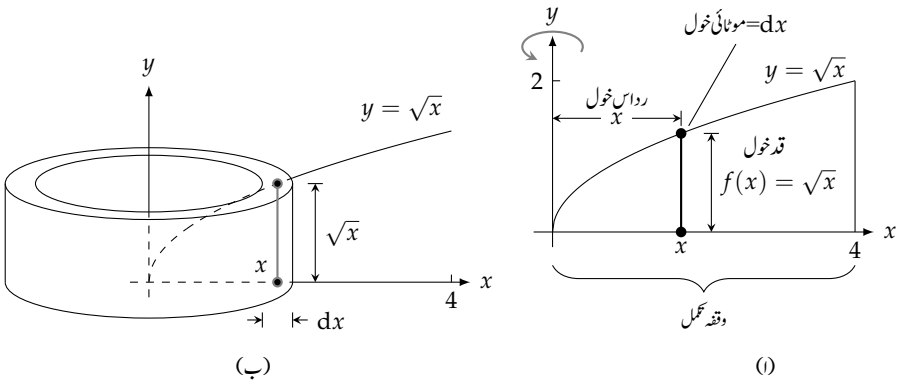
$$H \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta H_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi c_k f(c_k) \Delta x_k \qquad \text{ریمان مجموعہ}$$

$\|P\| \to 0$ کرتے ہوئے اس مجموعے کی حد ٹھوس جسم کا حجم ہو گی۔ (ذیل دیکھیں۔)

$$H = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} 2\pi c_k f(c_k) \Delta x_k = \int_a^b 2\pi x f(x)\, \mathrm{d}x$$



شکل ۶.۵۷: kویں مستطیل کو گھمانے سے حاصل نلکی خول۔



شکل ۶.۵۸: نلکی خول (مثال ۶.۱۶)

۸۸۵۴

۸۸۵۵ **کلیہ خول برائے y محور کے گرد طواف**

۸۸۵۶ استمراری تفاعل $y = f(x),\ 0 \le a \le x \le b$ اور محور x کے بیچ خطے کو محور y کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم درج ذیل ہو
۸۸۵۷ گا۔

$$H = \int_a^b 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}x = \int_a^b 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (ا)$$

۸۸۵۸ مثال ۶.۱۶: لکیر $x = 4$ اور محور x کے بیچ منحنی $y = \sqrt{x}$ کے قطعہ کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم
۸۸۵۹ تلاش کریں۔

۸۸۶۰ **حل**

۸۸۶۱ **پہلا قدم:** خطے کا خاکہ بنا کر محور گردش کے متوازی اس پر قطعہ دکھائیں۔ قطعہ کا قد (خول کا قد) اور محور گردش سے قطعہ کے فاصلہ (رداس خول) کی
۸۸۶۲ نشاندہی کریں۔ قطعہ کی چوڑائی $\mathrm{d}x$ خول کی چوڑائی ہو گی۔ ہم نے شکل ۶.۵۸ میں خول دکھایا ہے۔ آپ کو ایسا کرنے کی ضرورت نہیں۔
۸۸۶۳ **دوسرا قدم:** تکمل کی حدیں معلوم کریں۔ خطہ میں x کی قیمت a تا b تبدیل ہوتی ہے لہٰذا تکمل کی حدیں a اور b ہوں گی۔

$$\begin{aligned}
H &= \int_a^b 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}x && \text{مساوات ۱}\\
&= \int_0^4 2\pi(x)(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x && \text{جزو-۱ اور جزو-ب میں حاصل قیمتیں}\\
&= 2\pi\int_0^4 x^{3/2}\,\mathrm{d}x = 2\pi\left[\frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^4 = \frac{128\pi}{5}
\end{aligned}$$

۸۸۶۴ □

۸۸۶۵ محور y کے گرد خطہ گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم مساوات ۱ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اگر ہم خطے کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کریں
۸۸۶۶ تب حجم تلاش کرنے کی خاطر مساوات ۱ میں x کی جگہ y استعمال کیا جائے گا۔

۸۸۶۷ **کلیہ خول برائے محور x کے گرد طواف**
۸۸۶۸

$$H = \int_c^d 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}y = \int_c^d 2\pi y f(y)\,\mathrm{d}y \tag{۲}$$

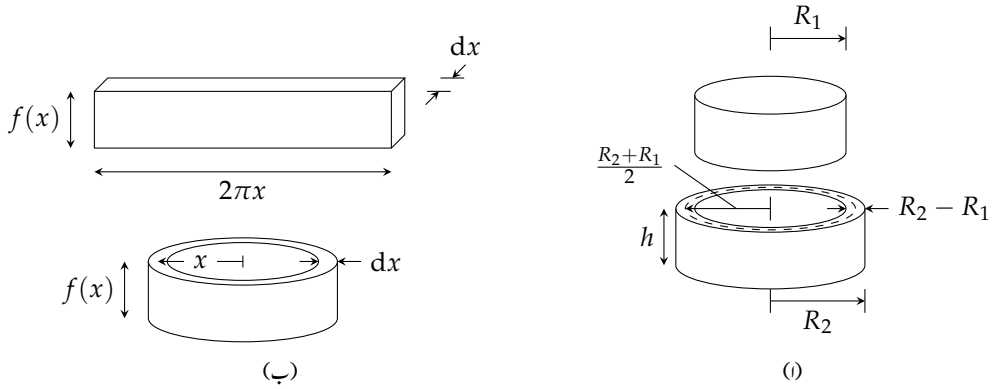
۸۸۶۹ درج بالا مساوات میں $f(y) > 0$ اور $0 \le c \le y \le d$ ہیں۔

۸۸۷۰ **خول کا جیومیٹریائی حجم**

۸۸۷۱ ایک ٹھوس بیلن جس کا رداس R_2 اور قد h ہو کا حجم $\pi R_2^2 h$ ہو گا۔ اگر اس جسم سے رداس R_1 کا ٹھوس بیلن کاٹا جائے تب حاصل خول کا حجم
۸۸۷۲ $\pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h$ ہو گا (شکل ۶.۵۹-ا) جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}
\text{حجم خول} &= \pi R_2^2 h - \pi R_1^2 h\\
&= \pi(R_2^2 - R_1^2)h\\
&= \pi(R_2 + R_1)(R_2 - R_1)h && R_2^2 - R_1^2 = (R_2 - R_1)(R_2 + R_1)\\
&= 2\pi\left(\tfrac{R_2+R_1}{2}\right)(R_2 - R_1)h && \text{2 سے ضرب اور تقسیم}\\
&= 2\pi(\text{رداس خول})(\text{موٹائی خول})(\text{قد خول})
\end{aligned}$$

۸۸۷۳ جہاں خول کا اوسط رداس $\frac{R_2+R_1}{2}$، خول کی موٹائی $R_2 - R_1 r$، اور خول کا قد h ہے۔



شکل ۶.۵۹: خول کا حجم۔

۸۸۷۴ ایک خول جس کا اوسط رداس x ، موٹائی $\mathrm{d}x$ ،اور قد $f(x)$ ہو کو شکل ۶.۵۹-ب میں کھول کر پٹی کی شکل دی گئی ہے۔ اس پٹی کا حجم درج ذیل ہو گا جو
۸۸۷۵ خول کے حجم کا کلیہ ہے (مساوات ۱ اور مساوات ۲ کو یاد رکھنے کا یہ بہترین طریقہ ہے)۔

$$\begin{aligned} H &= (\text{لمبائی}) \times (\text{چوڑائی}) \times (\text{موٹائی}) \\ &= 2\pi x f(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

۸۸۷۶ مثال ۶.۱۷: منحنی $y = \sqrt{x}$ ، لکیر $x = 4$ ،اور محور x کے بیچ خطے کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم
۸۸۷۷ تلاش کریں۔

۸۸۷۸ **حل**

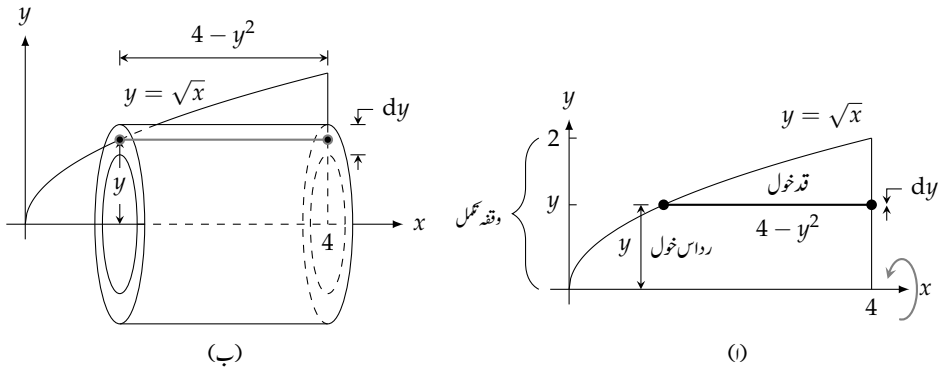
۸۸۷۹ **پہلا قدم:** خطے کا خاکہ بنائیں اور اس پر محور گردش کے متوازی قطعہ دکھائیں۔ قطعہ کی لمبائی (قد خول) اور محور طواف سے اس کے فاصلہ (رداس خول) کی
۸۸۸۰ نشاندہی کریں۔ قطعہ کی موٹائی، خول کی چوڑائی $\mathrm{d}y$ ہو گی۔ ہم نے شکل ۶.۶۰ میں محور y کے گرد بیلن دکھایا ہے۔ آپ کو ایسا بنانے کی ضرورت نہیں۔

۸۸۸۱ **دوسرا قدم:** تکمل کی حدیں معلوم کریں۔ چونکہ خطہ میں y کی قیمت $c = 0$ تا $d = 2$ ہو سکتی ہے لہٰذا یہی اس کی حدیں ہیں۔

۸۸۸۲ **تیسرا قدم:**

$$\begin{aligned} H &= \int_c^d 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}y && \text{مساوات ۲} \\ &= \int_0^2 2\pi(y)(4-y^2)\,\mathrm{d}y && \text{جزو-ا اور جزو-ب میں حاصل قیمتیں} \\ &= 2\pi\left[2y^2 - \frac{y^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi \end{aligned}$$

۸۸۸۳ یہ نتیجہ مثال ۶.۹ میں ترکیب قرص سے حاصل جواب کے عین مطابق ہے۔ □



شکل ۶.۶۰: محور x کے گرد طواف (مثال ۶.۱۷)

۸۸۸۴ **ترکیب خول کا استعمال**

۸۸۸۵ محور طواف (افقی یا انتصابی) جیسا بھی ہو ترکیب خول کے اقدام درج ذیل ہوں گے۔

۸۸۸۶ ا. خطے کا خاکہ بنا کر اس میں محور طواف کے متوازی قطعہ بنائیں۔ قطعہ کے قد یا لمبائی (قد خول)، محور طواف سے قطعہ کے فاصلہ (رداس خول) اور قطعہ کی
۸۸۸۷ موٹائی (چوڑائی خول) کی نشاندہی کریں۔

۸۸۸۸ ب. تکمل کی حدیں معلوم کریں

۸۸۸۹ ج. متکمل (2π) (رداس خول) (قد خول) کا موزوں متغیر (x یا y) کے ساتھ تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے حجم دریافت کریں۔

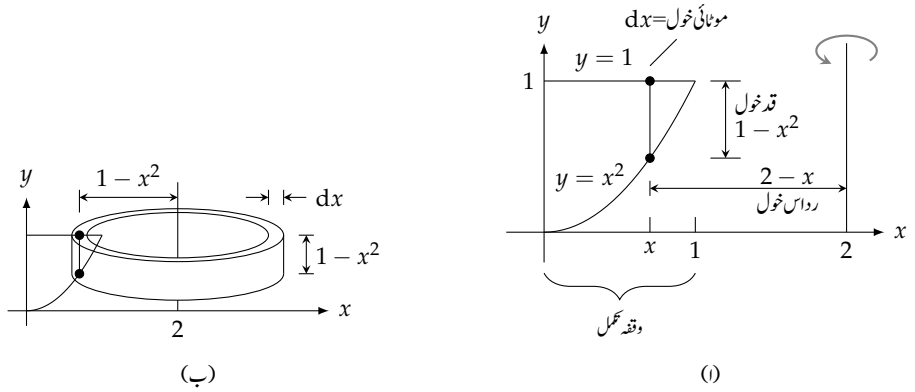
۸۸۹۰ اگلی مثال میں محور طواف افقی لکیر $x=2$ ہے۔

۸۸۹۱ مثال ۶.۱۸: ربع اول میں قطع مکافی $y=x^2$ ، لکیر $y=1$ ، اور محور y کے بیچ خطے کو محور طواف $x=2$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا
۸۸۹۲ جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

۸۸۹۳ **حل**

۸۸۹۴ **پہلا قدم:** خطے پر محور طواف کے متوازی قطعہ بنائیں۔ قطعہ کے قد (قد خول)، محور طواف سے قطعہ کے فاصلہ (رداس خول) اور قطعہ کی موٹائی (چوڑائی
۸۸۹۵ خول dx) کی نشاندہی کریں (شکل ۶.۶۱)۔ ہم نے خول بھی بنایا ہے۔ آپ کو ایسا کرنے کی ضرورت نہیں۔

۸۸۹۶ **دوسرا قدم:** تکمل کی حدیں $a=0$ اور $b=1$ ہیں۔



شکل ۶.۶۱: خطہ اور خول (مثال ۶.۱۸)

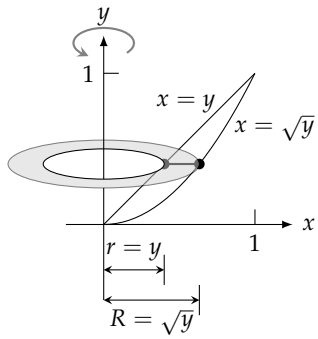
۸۸۹۷ **تیسرا قدم:**

$$
\begin{aligned}
H &= \int_a^b 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}x && \text{مساوات ا}\\
&= \int_0^1 2\pi(2-x)(1-x^2)\,\mathrm{d}x && \text{جزو-ا اور جزو-ب میں حاصل قیمتیں}\\
&= 2\pi\int_0^1 (2-x-2x^2+x^3)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{13\pi}{6}
\end{aligned}
$$

۸۸۹۸ □

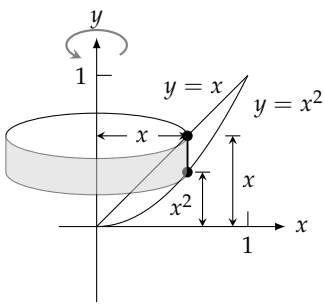
۸۸۹۹ تفاعل $y = x^2$ اور لکیر $y = x$ کے بیچ خطہ کو مثال بناتے ہوئے شکل ۶.۶۲ میں ترکیب چھلا اور ترکیب خول دونوں دکھائی گئی ہیں۔ شکل ۶.۶۲-ا اور
۸۹۰۰ ب میں محور y کے گرد خطہ گھمایا گیا ہے جبکہ شکل-ج اور د میں محور x کے گرد خطہ گھمایا گیا ہے۔ دونوں صورتوں میں حجم کو ترکیب چھلا اور ترکیب خول سے
۸۹۰۱ حل کیا گیا ہے۔ اس مخصوص خطے کے لیے دونوں محور طواف کے لیے دونوں تراکیب کارآمد ہیں لیکن ایسا ہر مرتبہ نہیں ہو گا۔ مثال کے طور پر محور y کے گرد
۸۹۰۲ گھماتے ہوئے ترکیب چھلا میں ہمیں y کے لحاظ سے تکمل حل کرنا ہو گا۔ البتہ عین ممکن ہے کہ متکمل کو y کی صورت میں لکھنا ممکن نہ ہو۔ ایسی صورت میں
۸۹۰۳ ہمیں ترکیب خول استعمال کرنی ہو گی جو ہمیں x کے لحاظ سے تکمل لینے کی اجازت دیگی۔

۸۹۰۴ ترکیب چھلا اور ترکیب خول سے ہر صورت یکساں حجم حاصل ہوں گے۔ ہم حصہ ۷.۱ کے سوال ۷.۵۲ میں ان کی برابری کو ثابت کر پائیں گے۔



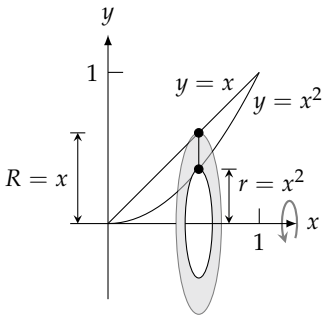
$$H = \int_{y=0}^{y=1} \pi[(\sqrt{y})^2 - (y)^2]\,\mathrm{d}y = \tfrac{\pi}{6}$$

(ا)



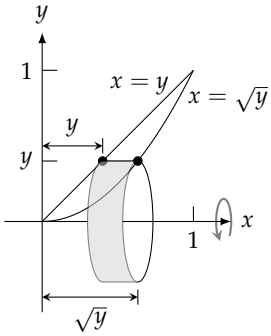
$$H = \int_{x=0}^{x=1} 2\pi(x)(x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{6}$$

(ب)



$$H = \int_{x=0}^{x=1} \pi[(x)^2 - (x^2)^2]\,\mathrm{d}x = \tfrac{2\pi}{15}$$

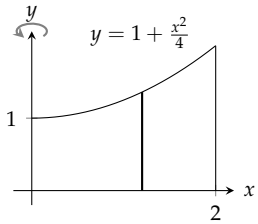
(ج)



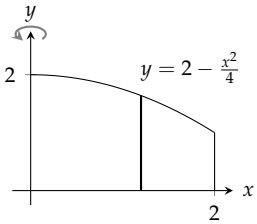
$$H = \int_{y=0}^{y=1} 2\pi(y)(\sqrt{y} - y)\,\mathrm{d}y = \tfrac{2\pi}{15}$$

(د)

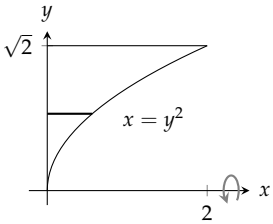
شکل ۶.۶۲



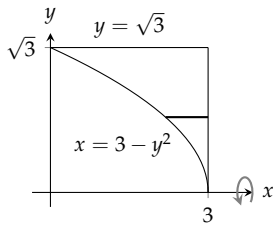
شکل ۶.۶۳



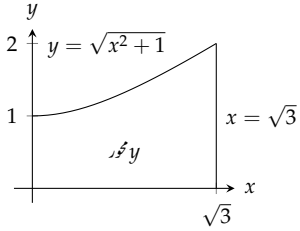
شکل ۶.۶۴



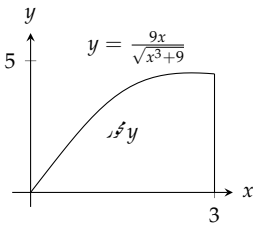
شکل ۶.۶۵



شکل ۶.۶۶



شکل ۶.۶۷



شکل ۶.۶۸

۸۹۰۵ **سوالات**

۸۹۰۶ سوال ۶.۱۲۰ تا سوال ۶.۱۲۵ میں خطے کو دکھائے گئے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ حاصل جسم طواف کا حجم ترکیب خول سے دریافت کریں۔

۸۹۰۷ سوال ۶.۱۲۰: خطہ شکل ۶.۶۳ میں دکھایا گیا ہے۔

۸۹۰۸ سوال ۶.۱۲۱: خطہ شکل ۶.۶۴ میں دکھایا گیا ہے۔

۸۹۰۹ سوال ۶.۱۲۲: خطہ شکل ۶.۶۵ میں دکھایا گیا ہے۔

۸۹۱۰ سوال ۶.۱۲۳: خطہ شکل ۶.۶۶ میں دکھایا گیا ہے۔

۸۹۱۱ سوال ۶.۱۲۴: خطہ شکل ۶.۶۷ میں دکھایا گیا ہے۔

۸۹۱۲ سوال ۶.۱۲۵: خطہ شکل ۶.۶۸ میں دکھایا گیا ہے۔

۸۹۱۳

۸۹۱۴ سوال ۶.۱۲۶ تا سوال ۶.۱۳۳ میں دی گئی منحنیات اور لکیروں میں محیط خطے کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم ترکیب خول
۸۹۱۵ سے تلاش کریں۔

۸۹۱۶ سوال ۶.۱۲۶: $y = x, \quad y = -\frac{x}{2}, \quad x = 2$

۸۹۱۷ سوال ۶.۱۲۷: $y = 2x, \quad y = \frac{x}{2}, \quad x = 1$

۸۹۱۸ سوال ۶.۱۲۸: $y = x^2, \quad y = 2 - x, \quad x = 0, (x \geq 0)$

۸۹۱۹ سوال ۶.۱۲۹: $y = 2 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = 0$

۸۹۲۰ سوال ۶.۱۳۰: $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad x = 4$

۸۹۲۱ سوال ۶.۱۳۱: $y = 2x - 1, \quad y = \sqrt{x}, \quad x = 0$

۸۹۲۲ سوال ۶.۱۳۲: $y = \frac{1}{x}, \quad y = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 2$

۸۹۲۳ سوال ۶.۱۳۳: $y = \frac{3}{2\sqrt{x}}, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 4$

۸۹۲۴ سوال ۶.۱۳۴ تا سوال ۶.۱۴۱ میں طواف جسم کا حجم ترکیب خول سے معلوم کریں۔ منحنیات اور لکیروں میں محیط رقبے کو محور y کے گرد گھمایا گیا ہے۔

۸۹۲۵ سوال ۶.۱۳۴: $x = \sqrt{y}, \quad x = -y, \quad y = 2$

۸۹۲۶ سوال ۶.۱۳۵: $x = y^2, \quad x = -y, \quad y = 2$

۸۹۲۷ سوال ۶.۱۳۶: $x = 2y - y^2, \quad x = 0$

۸۹۲۸ سوال ۶.۱۳۷: $x = 2y - y^2, \quad x = y$

۸۹۲۹ سوال ۶.۱۳۸: $y = |x|, \quad y = 1$

۸۹۳۰ سوال ۶.۱۳۹: $y = x, \quad y = 2x, \quad y = 2$

۸۹۳۱ سوال ۶.۱۴۰: $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad y = x - 2$

۸۹۳۲ سوال ۶.۱۴۱: $y = \sqrt{x}, \quad y = 0, \quad y = 2 - x$

۸۹۳۳

۸۹۳۴ سوال ۶.۱۴۲ اور سوال ۶.۱۴۳ میں سایہ دار خطے کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم ترکیب خول سے معلوم کریں۔

۸۹۳۵ سوال ۶.۱۴۲: خطے کو شکل ۶.۶۹ میں دکھایا گیا ہے۔

۸۹۳۶ ا. محور x کے گرد،

۸۹۳۷ ب. محور طواف لکیر $y = 1$ ہے،

۸۹۳۸ ج. محور طواف لکیر $y = \frac{8}{5}$ ہے،

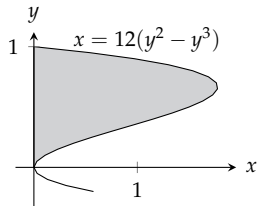
۸۹۳۹ د. لکیر $y = -\frac{2}{5}$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

۸۹۴۰ سوال ۶.۱۴۳: خطے کو شکل ۶.۷۰ میں دکھایا گیا ہے۔

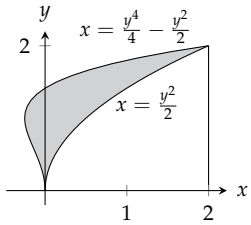
۸۹۴۱ ا. محور x کے گرد،

۸۹۴۲ ب. محور طواف لکیر $y = 2$ ہے،

۸۹۴۳ ج. محور طواف لکیر $y = 5$ ہے،



شکل ۶.۶۹



شکل ۶.۷۰

۸۹۴۴ د. لکیر $y = -\frac{5}{8}$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

۸۹۴۵

۸۹۴۶ سوال ۶.۱۴۴ تا سوال ۶.۱۴۴ میں خطوں کو محور طواف کے گرد گھما کر حاصل جسم طواف کا حجم معلوم کریں۔ آپ ترکیب چھلا یا ترکیب خول استعمال کر سکتے
۸۹۴۷ ہیں۔

۸۹۴۸ سوال ۶.۱۴۴: تکون جس کے راس $(1,1)$ ، $(1,2)$ ، اور $(2,2)$ ہیں۔ (ا) محور x کے گرد، (ب) محور y کے گرد، (ج) لکیر $x = \frac{10}{3}$
۸۹۴۹ کے گرد، اور (د) لکیر $y = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

۸۹۵۰ سوال ۶.۱۴۵: ربع اول میں منحنی $x = y - y^3$ اور محور y میں محیط خطہ کو (ا) محور x ، (ب) لکیر $y = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

۸۹۵۱ سوال ۶.۱۴۶: ربع اول میں $x = y - y^3$ ، $x = 1$ ، اور $y = 1$ میں محیط خطہ کو (ا) محور x ، (ب) محور y ، (ج) لکیر $x = 1$ ،
۸۹۵۲ اور (د) لکیر $y = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

۸۹۵۳ سوال ۶.۱۴۷: تکونی خطہ جس کی سرحد لکیر $2y = x + 4$ ، $y = x$ ، اور $x = 0$ ہیں کو (ا) محور x ، (ب) محور y ، (ج) لکیر $x = 4$ ، اور (د) لکیر $y = 8$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔
۸۹۵۴

۸۹۵۵ سوال ۶.۱۴۸: ربع اول میں $y = x^3$ ، $y = 4x$ کے بیچ خطہ کو (ا) محور x ، اور (ب) لکیر $y = 8$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

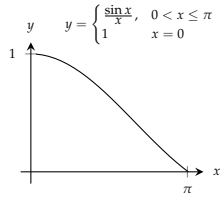
۸۹۵۶ سوال ۶.۱۴۹: سرحد $y = \sqrt{x}$ اور $y = \frac{x^2}{8}$ میں محیط خطہ کو (ا) محور x اور (ب) محور y کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

۸۹۵۷ سوال ۶.۱۵۰: سرحد $y = 2x - x^2$ اور $y = x$ میں محیط خطہ کو (ا) محور y اور (ب) لکیر $x = 1$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

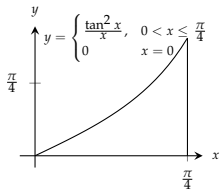
۸۹۵۸ سوال ۶.۱۵۱: منحنی $y = \sqrt{x}$ ، لکیر $y = 2$ ، اور $x = 0$ کے بیچ خطہ کو (ا) محور x ، (ب) محور y ، (ج) لکیر $x = 4$ ، (د) لکیر
۸۹۵۹ $y = 2$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔

۸۹۶۰ سوال ۶.۱۵۲: ربع اول میں بالائی جانب منحنی $y = x^{-1/4}$ ، بائیں جانب لکیر $x = \frac{1}{16}$ ، اور نچلی جانب لکیر $y = 1$ سے گھیرے گئے خطے
۸۹۶۱ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم (ا) ترکیب چھلا، (ب) ترکیب خول سے معلوم کریں۔

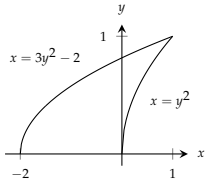
۸۹۶۲ سوال ۶.۱۵۳: ربع اول میں بالائی جانب منحنی $y = \sqrt{x}$ ، بائیں جانب لکیر $x = \frac{1}{4}$ ، اور نچلی جانب لکیر $y = 1$ سے گھیرے گئے خطے کو محور
۸۹۶۳ y کے گرد گھما کو جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم (ا) ترکیب چھلا، (ب) ترکیب خول سے معلوم کریں۔



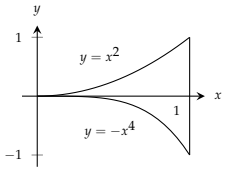
شکل ۶.۷۱



شکل ۶.۷۲



شکل ۶.۷۳



شکل ۶.۷۴

۸۹۶۴ سوال ۶.۱۵۴: درج ذیل تفاعل فرض کریں (شکل ۶.۷۱)۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \le \pi \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

۸۹۶۵ ا. دکھائیں کہ $xf(x) = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$ ہوگا۔

۸۹۶۶ ب. اس تفاعل کو محور y کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

۸۹۶۷ سوال ۶.۱۵۵: درج ذیل تفاعل فرض کریں (شکل ۶.۷۲)۔

$$G(x) = \begin{cases} \frac{\tan^2 x}{x}, & 0 < x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

۸۹۶۸ ا. دکھائیں کہ $xf(x) = \tan x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$ ہوگا۔

۸۹۶۹ ب. اس تفاعل کو محور y کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

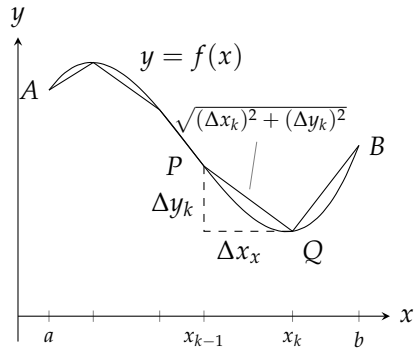
۸۹۷۰ سوال ۶.۱۵۶: محور x کے گرد شکل ۶.۷۳ میں دکھایا گیا خطہ گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ کس ترکیب (قرص، چھلا، خول) کو استعمال کرتے ہوئے
۸۹۷۱ جسم طواف کا حجم تلاش کیا جا سکتا ہے؟ ہر ترکیب میں کتنے تکمل حل کرنے ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۸۹۷۲ سوال ۶.۱۵۷: محور y کے گرد شکل ۶.۷۴ میں دکھایا گیا خطہ گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ کس ترکیب (قرص، چھلا، خول) کو استعمال کرتے ہوئے
۸۹۷۳ جسم طواف کا حجم تلاش کیا جا سکتا ہے؟ ہر ترکیب میں کتنے تکمل حل کرنے ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

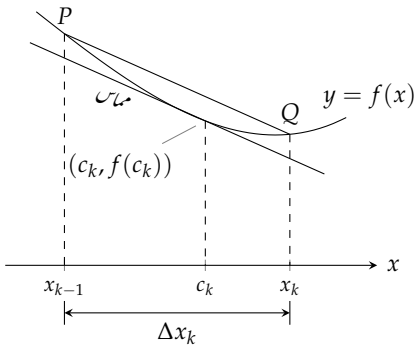
۸۹۷۴ سوال ۶.۱۵۸: فرض کریں وقفہ $x \ge 0$ پر تفاعل $f(x)$ غیر منفی اور استراری ہے۔ منحنی f، لکیر $x = b$، اور کارتیسی محدد کے بیچ خطہ کو
۸۹۷۵ محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے جہاں b کوئی مثبت عدد ہے۔ اس جسم طواف کا حجم $2\pi b^3$ ہے۔ تفاعل $f(x)$ دریافت کریں۔

۸۹۷۶

۸۹۷۷



شکل ۶.۷۵: منحنی AB کے قطعہ PQ کی لمبائی $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ ہو گی۔



شکل ۶.۷۶: نقطہ $(c_k, f(c_k))$ پر مماس اور قطعہ متوازی ہیں۔

۶.۵ مستوی منحنیات کی لمبائیاں

نقشہ پر سڑک کی لمبائی جاننے کی خاطر ہم فیتہ استعمال کرتے ہوئے نقشے پر سڑک کی منحنی پر قریب قریب نقطوں کے مابین قطعات کو سیدھا تصور کرتے ہوئے ان کی لمبائیوں کا مجموعہ لیتے ہیں۔ اس طرح اندازاً لمبائی کی درستگی کی حد قطعات کی تعداد اور ناپنے کی درستگی پر منحصر ہو گی۔

احصاء کو استعمال کرتے ہوئے ہم نقطوں کو قریب سے قریب رکھ کر بہتر نتائج حاصل کرتے ہیں۔ ان نقطوں کو سیدھے قطعات سے جوڑ کر کثیر الاضلاع حاصل ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ قطعات لینے سے کثیر الاضلاع کی لمبائی، اصل منحنی کی لمبائی کے زیادہ قریب ہو گی۔ کثیر الاضلاع کی لمبائی کی حد کو تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

بنیادی کلیہ

فرض کریں ہم $x = a$ سے $x = b$ تک منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی جاننا چاہتے ہیں۔ ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی عمومی طریقہ سے کر کے منحنی پر مطابقتی نقطوں کو سیدھے قطعات سے جوڑ کر کثیر الاضلاع بناتے ہیں جو اصل منحنی کو تخمیناً ظاہر کرتا ہے (شکل ۶.۷۵)۔ اگر ہم کثیر الاضلاع کی لمبائی کا کلیہ تلاش کر سکیں ہم اسی کلیہ کو منحنی کی لمبائی کے لیے استعمال کر سکتے ہیں۔

قطعہ PQ کی لمبائی $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$ ہو گی (شکل ۶.۷۵)۔ یوں منحنی کی لمبائی تخمیناً درج ذیل مجموعہ ہو گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \tag{۱}$$

وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی باریک کرنے سے حاصل مجموعہ تخمیناً زیادہ بہتر ہو گا۔ ہم دکھانا چاہیں گے کہ خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے مساوات ۱ کا مجموعہ قابل معلوم حد دیگا۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم مساوات ۱ کو ایسے روپ میں لکھتے ہیں کہ اس پر مسئلہ ۵.۱ (صفحہ ۴۵۷) کا اطلاق ہو۔ ہم تفرق کے مسئلہ اوسط قیمت سے شروع کرتے ہیں۔

۸۹۹۲ تعریف: ایسا تفاعل جس کا یک رتبی تفرق استمراری ہو **ہموار**[۶] کہلاتا ہے اور اس کی منحنی کو **ہموار منحنی**[۷] کہتے ہیں۔

۸۹۹۳ □

۸۹۹۴ اگر f ہموار ہو تب مسئلہ اوسط قیمت کے تحت P اور Q کے بیچ منحنی پر ایک ایسا نقطہ $(c_k, f(c_k))$ پایا جائے گا جہاں منحنی کا مماس قطعہ PQ کے
۸۹۹۵ متوازی ہو گا (شکل ۶.۷۶)۔ اس نقطہ پر درج ذیل ہو گا۔

$$f'(c_k) = \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}, \quad \Longrightarrow \Delta y_k = f'(c_k)\Delta x_k$$

۸۹۹۶ مساوات ۱ میں Δy_k کی اس قیمت کو پُر کرنے سے درج ذیل روپ ملتا ہے۔

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(c_k)\Delta x_k)^2} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\Delta x_k \qquad \text{ریمان مجموعہ}$$

۸۹۹۷ چونکہ $[a, b]$ پر $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ استمراری ہے لہٰذا خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے دائیں ہاتھ مجموعے کی حد
۸۹۹۸ $\int_a^b \sqrt{a + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$ ہو گی۔ ہم اس تکمل کی قیمت کو منحنی کی لمبائی کی تعریف مانتے ہیں۔

۸۹۹۹ تعریف: اگر $[a, b]$ پر f ہموار ہو تب a سے b تک منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \tag{۲}$$

۹۰۰۰ □

۹۰۰۱ مثال ۶.۱۹: درج ذیل منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

$$y = \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1, \quad 0 \le x \le 1$$

۹۰۰۲ **حل**

۹۰۰۳ ہم $a = 0$ ، $b = 1$، اور

$$\begin{aligned} y &= \frac{4\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - 1 \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = 2\sqrt{2}x^{1/2} \\ \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 &= \left(2\sqrt{2}x^{1/2}\right)^2 = 8x \end{aligned}$$

---

[۶] smooth
[۷] smoothcurve

۹۰۰۴ لیتے ہوئے مساوات ۲ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \int_0^1 \sqrt{1+8x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}(1+8x)^{3/2}\Big]_0^1 = \frac{13}{6} \end{aligned}$$

۹۰۰۵ □

۹۰۰۶ تفرق $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ میں عدم استمرار

۹۰۰۷ کبھی کبھار منحنی پر $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ غیر موجود لیکن $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ موجود ہو گا اور ہم x کو y کا تفاعل لکھ کر منحنی کی لمبائی مساوات ۲ کے درج ذیل مشابہ سے حاصل کر پاتے
۹۰۰۸ ہیں۔

۹۰۰۹ **منحنی $x = g(y),\ c \le y \le d$ کی لمبائی کا کلیہ**

$$L = \int_c^d \sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_c^d \sqrt{1+(g'(y))^2}\,\mathrm{d}y \tag{۳}$$

۹۰۱۰ مثال ۶.۲۰: منحنی $y = (\frac{x}{2})^{2/3}$ کی لمبائی $x = 0$ تا $x = 2$ معلوم کریں۔

۹۰۱۱ **حل**

۹۰۱۲ منحنی کا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^{1/3}$$

۹۰۱۳ نقطہ $x = 0$ پر غیر معین یعنی غیر موجود ہے لہٰذا منحنی کی لمبائی حاصل کرنے کے لیے مساوات ۲ ناقابل استعمال ہے۔

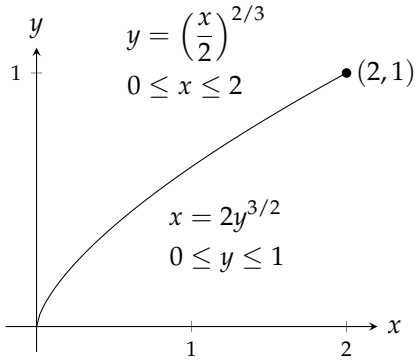
۹۰۱۴ ہمیں x کو y کی صورت میں لکھنا ہو گا (شکل ۶.۷۷):

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} \\ y^{3/2} &= \frac{x}{2} \\ x &= 2y^{3/2} \end{aligned}$$

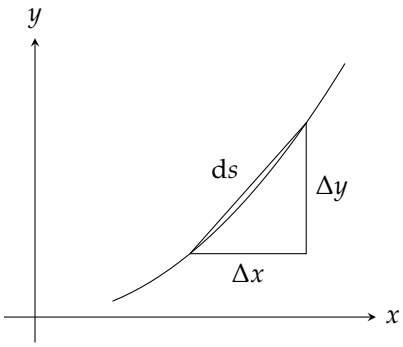
۹۰۱۵ یوں ہم دیکھتے ہیں کہ درکار منحنی کو تفاعل $x = 2y^{3/2}$ سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں منحنی کے سر $y = 0$ اور $y = 1$ پر ہوں گے۔

۹۰۱۶ اس کا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 2\left(\frac{3}{2}\right)y^{1/2} = 3y^{1/2}$$



شکل ۶.۷۷: منحنی برائے مثال ۶.۲۰



شکل ۶.۷۸: تعلق $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کا حصول۔

۹۰۱۷ وقفہ $[0, 1]$ پر استمراری ہے لہٰذا منحنی کی لمبائی کی خاطر مساوات ۳ قابل استعمال ہے۔

$$
\begin{aligned}
L &= \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \sqrt{1 + 9y}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3}(1 + 9y)^{3/2}\Big]_0^1 \\
&= \frac{2}{27}(10\sqrt{10} - 1) \approx 2.27
\end{aligned}
$$

۹۰۱۸ □

۹۰۱۹ **مختصر تفرقی کلیہ**

۹۰۲۰ لمبائی معلوم کرنے کی مساوات

$$
L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x, \quad L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y \tag{۴}
$$

۹۰۲۱ عموماً تفارق کے بجائے تفرقات میں لکھی جاتی ہے۔ ایسا باضابطہ طور پر کرنے کے لیے تفارق کو تفرقات کا حاصل تقسیم تصور کریں۔ یوں پہلے تکمل میں درج
۹۰۲۲ ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \frac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x^2} = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}
$$

دوسرے تکمل میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y=\sqrt{1+\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}y^2}}\,\mathrm{d}y=\sqrt{\mathrm{d}y^2+\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}y^2}\,\mathrm{d}y^2}=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$$

اس طرح مساوات ۴ میں دیے گئے دونوں تکمل درج ذیل (یک) تفرقی کلیہ کی صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$L=\int_a^b \sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} \tag{۵}$$

ظاہر ہے کہ $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ کو ایک ہی متغیر کے لحاظ سے لکھنا ضروری ہے اور مساوات ۵ میں دیا گیا تکمل حل کرنے کے لیے تکمل کی موزوں حدیں جاننا ضروری ہیں۔

ہم مساوات ۵ کو مزید چھوٹا کر سکتے ہیں۔ $\mathrm{d}x^2$ اور $\mathrm{d}y^2$ کو ایک چھوٹے مثلث کے اضلاع تصور کریں۔ مسئلہ فیثا غورث کے تحت اس مثلث کا وتر $\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$ ہو گا (شکل ۶.۷۸)۔ تفرقہ $\mathrm{d}s$ کو اب قوس کی تفرقی لمبائی تصور کیا جا سکتا ہے جس کی موزوں حدود کے درمیان تکمل لے کر قوس کی لمبائی دریافت کی جا سکتی ہے۔ مساوات ۵ میں $\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}$ کو $\mathrm{d}s$ لکھنے سے مساوات کو $\mathrm{d}s$ کا تکمل لکھا جا سکتا ہے۔

تعریف: لمبائی قوس کا تفرقہ اور قوس کی لمبائی کا تفرقی کلیہ درج ذیل ہیں۔

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2} \qquad \text{لمبائی قوس کا تفرقہ}$$

$$L=\int \mathrm{d}s \qquad \text{قوس کی لمبائی کا تفرقی کلیہ}$$

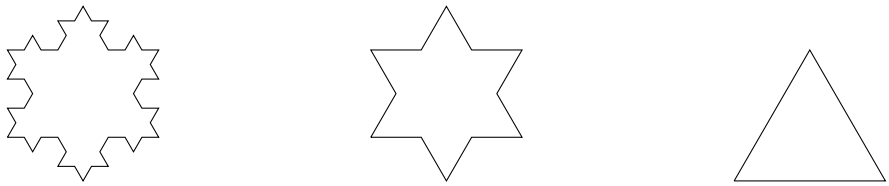
□

لا متناہی لمبائی کی منحنیات

برف کی روئی پر صفحہ ۲۵۳ پر غور کیا گیا۔ لا متناہی تکونی کثیر الاضلاع کی ترتیب $C_1, C_2, \cdots, C_n, \cdots$ کی تحدیدی صورت کو برف کی روئی K کہتے ہیں۔ شکل ۶.۷۹ میں اس ترتیب کی پہلی تین صورتیں دکھائی گئی ہیں۔ بناوٹ کے دوران ہر نیا متعارف کردہ راس بعد کے تمام منحنیات میں بطور راس پایا جاتا ہے اور تحدیدی منحنی K میں بطور نقطہ نظر آتا ہے۔ یوں ہر منحنی C از خود منحنی K کی تخمینی صورت ہو گی۔ یوں K کی لمبائی منحنیات C_n کی تحدیدی لمبائی کے برابر ہو گی۔ کم از کم، ہموار منحنیات کی لمبائی کی تعریف کے تحت، ایسا ہی ہونا چاہیے۔

آئیں C_n کی تحدیدی لمبائی تلاش کریں۔ اگر ابتدائی مثلث الاضلاع کے ضلع کی لمبائی 1 ہو تب C_1 کی کل لمبائی 3 ہو گی۔ C_1 سے C_2 حاصل کرتے ہوئے ہم C_1 کے ہر ضلع کی جگہ چار اضلاع بناتے ہیں جہاں ہر ضلع ابتدائی ضلعے کا $\frac{1}{3}$ واں حصہ ہے۔ یوں C_2 کی کل لمبائی $3\times 4\times\frac{1}{3}=3(\frac{4}{3})$ ہو گی۔ اسی طرح C_3 کی لمبائی حاصل کرنے کی خاطر ہمیں C_2 کی لمبائی کو $\frac{4}{3}$ سے ضرب دینا ہو گا۔ یہی عمل دہراتے ہوئے C_n کی کل لمبائی $3(\frac{4}{3})^{n-1}$ حاصل ہوتی ہے۔ ان نتائج کو یہاں پیش کرتے ہیں۔

شمار منحنی	1	2	3	$\cdots$	n	$\cdots$
کل لمبائی	3	$3(\frac{4}{3})$	$3(\frac{4}{3})^2$	$\cdots$	$3(\frac{4}{3})^{n-1}$	$\cdots$



(ا) منحنی C_1 (ب) منحنی C_2 (ج) منحنی C_3

شکل ۶.۷۹: برف کی روئی۔

منحنی C_{10} کی لمبائی تقریباً 40 ہے جبکہ C_{100} کی لمبائی 7 000 000 000 000 سے زیادہ ہے۔ لمبائی اتنی تیزی سے بڑھتی ہے کہ اس کی تحدیدی قیمت متناہی نہیں ہو سکتی۔ یوں برف کی روئی کی لمبائی نہیں پائی جاتی، یعنی، اس کی لمبائی لامتناہی ہے۔

لمبائی کی تعریف ہموار منحنیات کے لیے پیش کی گئی تھی جن کا ہر نقطے پر مماس استمراری مڑتا ہے۔ برف کی روئی اتنی ناہموار ہے کہ لمبائی کے کلیہ کا اس پر اطلاق کرنا ممکن نہیں۔

بنوامنڈلبرا کا نظریہ **گنج غیر ہموار منحنیات**[8] ایسی متعدد منحنیات پیش کرتا ہے جن کی لمبائی لامتناہی ہے۔ ایسی منحنیات کو بڑا کر کے دیکھنے سے یہ اتنی ہی غیر ہموار نظر آتی ہیں جتنی بغیر بڑا کیے نظر آتی ہیں۔ سمندر کے ساحل کی طرح ان منحنیات کو بھی بڑا کر کے ہموار نہیں بنایا جا سکتا۔

سوالات

قوس کی لمبائی کے تکمل کا حصول

سوال ۶.۱۵۹ تا سوال ۶.۱۶۶ میں

ا. لمبائی قوس کا تکمل لکھیں۔

ب. منحنی ترسیم کر کے دیکھیں کیسی لگتی ہے۔

ج. کمپیوٹر کی مدد سے تکمل کو اعدادی طریقہ سے حل کریں۔

سوال ۶.۱۵۹: $y = x^2, \quad -1 \le x \le 2$

سوال ۶.۱۶۰: $y = \tan x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le 0$

سوال ۶.۱۶۱: $x = \sin y, \quad 0 \le y \le \pi$

سوال ۶.۱۶۲: $x = \sqrt{1-y^2}, \quad -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$

سوال ۶.۱۶۳: $y^2 + 2y = 2x + 1$ نقطہ $(-1,-1)$ سے $(7,3)$ تک۔

سوال ۶.۱۶۴: $y = \sin x - x\cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

---

[8] fractals

۶۰۵۹ سوال ۶.۱۶۵: $y = \int_0^x \tan t \, \mathrm{d}t, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$

۶۰۶۰ سوال ۶.۱۶۶: $x = \int_0^y \sqrt{\sec^2 t - 1} \, \mathrm{d}t, \quad -\frac{\pi}{3} \le y \le \frac{\pi}{4}$

۶۰۶۱ **لمبائی قوس کا حصول**

۶۰۶۲ سوال ۶.۱۶۷ تا سوال ۶.۱۷۶ میں قوس کی لمبائی تلاش کریں۔ بہتر ہو گا کہ منحنیات کو ترسیم کر کے دیکھیں۔

۶۰۶۳ سوال ۶.۱۶۷: $x = 0$ سے $x = 3$ تک، $y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2}$

۶۰۶۴ سوال ۶.۱۶۸: $x = 0$ سے $x = 4$ تک، $y = x^{3/2}$

۶۰۶۵ سوال ۶.۱۶۹: $y = 1$ سے $y = 3$ تک، $x = \frac{y^3}{3} + \frac{1}{4y}$ (اشارہ۔ $1 + (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2$ مکمل مربع ہے۔)

۶۰۶۶ سوال ۶.۱۷۰: $y = 1$ سے $y = 9$ تک، $x = \frac{y^{3/2}}{3} - y^{1/2}$ (اشارہ۔ $1 + (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2$ مکمل مربع ہے۔)

۶۰۶۷ سوال ۶.۱۷۱: $y = 1$ سے $y = 2$ تک، $x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2}$ (اشارہ۔ $1 + (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2$ مکمل مربع ہے۔)

۶۰۶۸ سوال ۶.۱۷۲: $y = 2$ سے $y = 3$ تک، $x = \frac{y^3}{6} + \frac{1}{2y}$ (اشارہ۔ $1 + (\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y})^2$ مکمل مربع ہے۔)

۶۰۶۹ سوال ۶.۱۷۳: $y = \frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{3}{8}x^{2/3} + 5, \quad 1 \le x \le 8$

۶۰۷۰ سوال ۶.۱۷۴: $y = \frac{x^3}{3} + x^2 + x + \frac{1}{4x+4}, \quad 0 \le x \le 2$

۶۰۷۱ سوال ۶.۱۷۵: $x = \int_0^y \sqrt{\sec^4 t - 1} \, \mathrm{d}t, \quad -\frac{\pi}{4} \le y \le \frac{\pi}{4}$

۶۰۷۲ سوال ۶.۱۷۶: $y = \int_{-2}^x \sqrt{3t^4 - 1} \, \mathrm{d}t, \quad -2 \le x \le -1$

۶۰۷۳ سوال ۶.۱۷۷: (ا) نقطہ $(1,1)$ سے گزرتی ہوئی ایسی منحنی تلاش کریں جس کی لمبائی درج ذیل ہو (مساوات ۲)۔

$$L = \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} \, \mathrm{d}x$$

۶۰۷۴ (ب) ایسی کتنی منحنیات ہوں گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

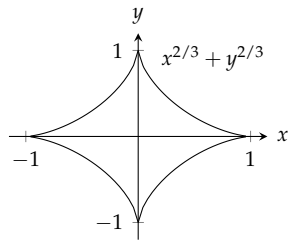
۶۰۷۵ سوال ۶.۱۷۸: (ا) نقطہ $(0,1)$ سے گزرتی ہوئی ایسی منحنی تلاش کریں جس کی لمبائی درج ذیل ہو (مساوات ۳)۔

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{y^4}} \, \mathrm{d}y$$

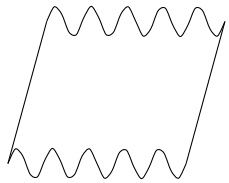
۶۰۷۶ (ب) ایسی کتنی منحنیات ہوں گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۶۰۷۷ سوال ۶.۱۷۹: $x = 0$ سے $x = \frac{\pi}{4}$ تک درج ذیل منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

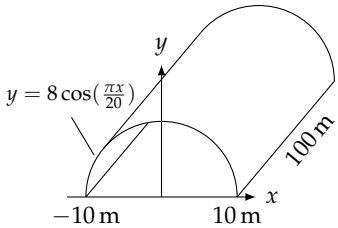
$$y = \int_0^x \sqrt{\cos 2t} \, \mathrm{d}t$$



شکل ۶.۸۰: ستارہ نما۔



شکل ۶.۸۱: نالیدار چادر۔



شکل ۶.۸۲: سرنگ۔

سوال ۶.۱۸۰: ستارہ نما کی لمبائی

مساوات $x^{2/3}+y^{2/3}=1$ خطوط کی ایک ایسی نسل کو ظاہر کرتی ہے جس کو ستارہ نما کہتے ہیں (شکل ۶.۸۰)۔ نصف ربع اول میں قوس کی لمبائی حاصل کر کے 8 سے ضرب دے کر کل لمبائی حاصل ہو گی۔ یوں $\frac{\sqrt{2}}{4} \le x \le 1$ پر منحنی $y=(1-x^{2/3})^{3/2}$ کی لمبائی حاصل کر کے 8 سے ضرب دیں۔

اعدادی تکمل

آپ سوچ رہے ہوں گے کہ اب تک لمبائی قوس میں زیادہ تر منحنیات کی مساواتیں کیوں پیچیدہ تھیں۔ اس کی وجہ لمبائی قوس کے تکمل میں $\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$ ہے جو عموماً مکمل مربع نہیں ہوتا اور جس کی وجہ سے متکمل کا ضد تفرق ہم حاصل نہیں کر پاتے۔ حقیقت میں عموماً یہی جذر غیر بنیادی تکمل کا باعث بنتا ہے۔ اسی لیے، سوال ۶.۱۸۱ اور سوال ۶.۱۸۲ کی طرح، لمبائی قوس اور سطحی رقبہ کے تکمل عموماً اعدادی طریقوں سے حل کیے جاتے ہیں۔

سوال ۶.۱۸۱: آپ کا ادارہ چھتوں کے لیے لوہے کی نالیدار چادریں بناتا ہے۔ نالیدار چادروں کی عمودی تراش درج ذیل کے مطابق درکار ہے (شکل ۶.۸۱)۔

$$y=\sin\frac{3\pi}{50}x, \quad 0\le x\le 50\,\text{cm}$$

مستوی چادر سے نالیدار چادر بناتے ہوئے چادر کی چوڑائی یا لمبائی تبدیل نہیں ہوتی۔ درکار مستوی چادر کی چوڑائی معلوم کریں۔ اعدادی تراکیب استعمال کرتے ہوئے سائن نما چادر کی لمبائی تین اعشاریہ تک تلاش کریں۔

سوال ۶.۱۸۲: آپ کے انجینئری ادارے کو سرنگ بنانے کا کام ملا ہے۔ سرنگ کی لمبائی 100 m جبکہ اس کی چوڑائی 20 m ہے (شکل ۶.۸۲)۔ سرنگ کی عمودی تراش $y=8\cos(\frac{\pi x}{20})$ کے مطابق ہے۔ مکمل ہونے کے بعد سرنگ کو اندر سے پانی روک مسالہ کیا جائے گا جس پر 2000 روپیہ فی مربع میٹر لاگت متوقع ہے۔ مسالہ کرنے پر کل کتنی لاگت آئے گی؟ (اشارہ۔ اعدادی طریقہ سے کوسائن تفاعل کی لمبائی دریافت کریں۔)

نظریہ اور مثالیں

سوال ۶.۱۸۳: کیا ایسی ہموار منحنی $y=f(x)$ ہو سکتی ہے جس کی وقفہ $0\le x\le a$ پر لمبائی $\sqrt{2}a$ ہو۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۶.۱۸۴: مماسی تیلیوں سے لمبائی قوس کے کلیہ کا حصول۔

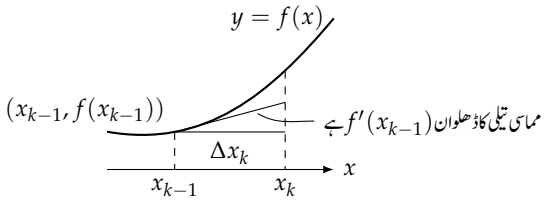
فرض کریں $[a,b]$ پر f ہموار ہے۔ وقفہ $[a,b]$ کی خانہ بندی کریں۔ ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1},x_k]$ میں نقطہ $(x_{k-1},f(x_{k-1}))$ پر مماسی

تیلی بنائیں (نیچے شکل دیکھیں)۔

ا. دکھائیں کہ ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ پر k ویں مماسی تیلی کی لمبائی $\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(x_{k-1})\Delta x_k)^2}$ ہے۔

ب. دکھائیں کہ a تا b منحنی $y = f(x)$ کی لمبائی L درج ذیل ہے۔

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (\text{ویں تیلی کی لمبائی } k) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x$$



کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۶.۱۸۵ تا سوال ۶.۱۹۰ میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدامات کریں۔

ا. منحنی ترسیم کریں۔ خانہ بندی کے نقطے $n = 2, 4, 8$ لیتے ہوتے تخمینی کثیر الاضلاع ترسیم کریں۔

ب. مطابقتی قطعات کی لمبائیوں کا مجموعہ لے کر قوس کی تخمینی لمبائی معلوم کریں۔

ج. تکمل سے قوس کی اصل لمبائی تلاش کریں۔ اصل لمبائی اور $n = 2, 4, 8$ لے کر حاصل تخمینی لمبائیوں کا موازنہ کریں۔ n بڑھانے سے تخمینی لمبائی اور اصل لمبائی کا مقابلہ کریں۔ اپنے جواب کی وضاحت کریں۔

سوال ۶.۱۸۵: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 \le x \le 1$

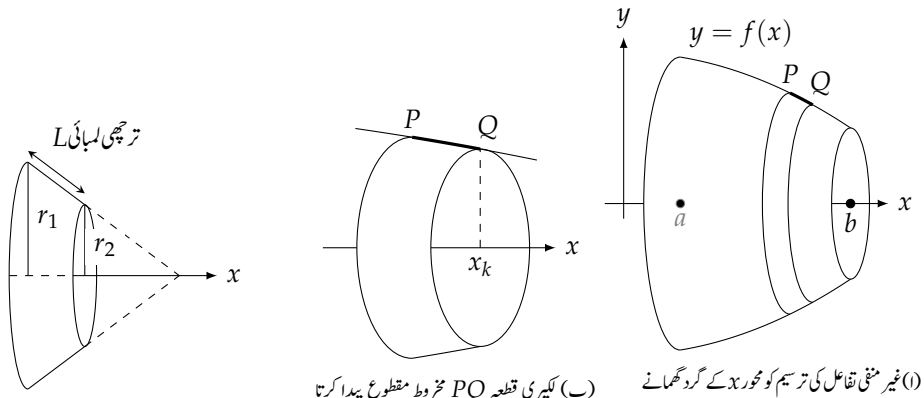
سوال ۶.۱۸۶: $f(x) = x^{1/3} + x^{2/3}, \quad 0 \le x \le 2$

سوال ۶.۱۸۷: $f(x) = \sin(\pi x^2), \quad 0 \le x \le \sqrt{2}$

سوال ۶.۱۸۸: $f(x) = x^2 \cos x, \quad 0 \le x \le \pi$

سوال ۶.۱۸۹: $f(x) = \frac{x-1}{4x^2+1}, \quad -\frac{1}{2} \le x \le 1$

سوال ۶.۱۹۰: $f(x) = x^3 - x^2, \quad -1 \le x \le 1$



(ا) غیر منفی تفاعل کی ترسیم کو محور x کے گرد گھمانے سے سطح طواف پیدا کیا گیا ہے۔

(ب) لکیری قطعہ PQ مخروط مقطوع پیدا کرتا ہے۔

(ج) مخروط مقطوع کے اہم متغیرات۔

شکل ۶.۸۳: سطح طواف کو قوس PQ سے پیدا پٹیوں کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

۶.۶ سطح طواف کا رقبہ

بچپن میں آپ نے دوستوں کے ساتھ مل کر رسّی گھماتے ہوئے رسّی کے اوپر سے چھلانگیں ضرور لگائی ہوں گی۔ یہ رسّی فضا میں پھیر کر ایک سطح بناتی ہے جس کو **سطح طواف**[9] کہتے ہیں۔ سطح طواف کا رقبہ رسّی کی لمبائی اور رسّی کے ہر حصے کے جھول پر منحصر ہو گا۔ اس حصہ میں سطح طواف کے رقبے اور سطح کو پیدا کرنے والی منحنی کی لمبائی اور جھول کے تعلق پر غور کیا جائے گا۔ زیادہ پیچیدہ سطحوں پر باب ۱۵ میں غور کیا جائے گا۔

بنیادی کلیہ

فرض کریں ہم غیر منفی تفاعل $y = f(x), a \leq x \leq b$ کو x محور کے گرد گھما کر پیدا ہونے والی سطح طواف کا سطحی رقبہ جاننا چاہتے ہیں۔ ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی کر کے نقاط خانہ بندی استعمال کرتے ہوئے ترسیم کو چھوٹے حصوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ شکل ۶.۸۳-ا میں نمائندہ حصہ PQ اور اس کی پیدا کردہ پٹی دکھائی گئی ہے۔

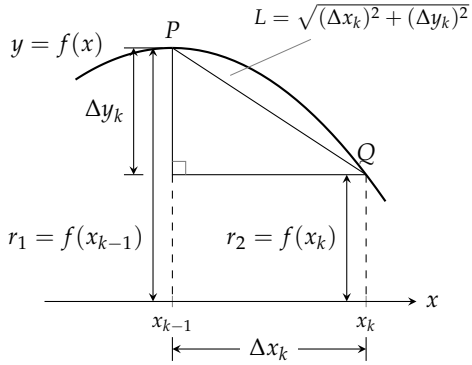
قوس PQ محور x کے گرد گھومتے ہوئے مخروط سطح پیدا کرتی ہے جس کو بڑا کر کے شکل ۶.۸۳-ب میں دکھایا گیا ہے۔ محور x اس مخروط سطح کا محور ہو گا۔ مخروط کے ایسے حصے کو **مخروط مقطوع**[10] کہتے ہیں۔ مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ، PQ کی پیدا کردہ پٹی کے رقبے کا تخمین ہو گا۔

مخروط مقطوع (شکل ۶.۸۳-ج) کا سطحی رقبہ 2π ضرب دونوں سروں کے رداس کی اوسط ضرب ترچھا قد کے برابر ہو گا۔

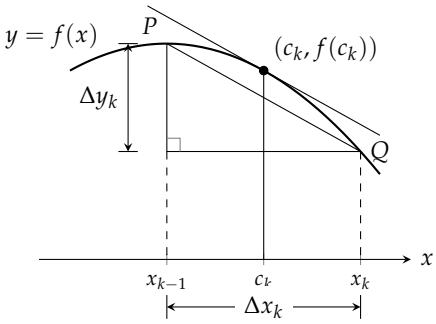
$$\text{مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ} = 2\pi \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot L = \pi(r_1 + r_2)L$$

---

[9] surfaceofrevolution
[10] frustum



شکل ۶.۸۴: لکیر اور قوس PQ کے ساتھ وابستہ متغیرات۔



شکل ۶.۸۵: خط مستقیم PQ اور نقطہ c_k پر مماس متوازی ہیں۔

۹۱۲۸ قطعہ PQ کے پیدا کردہ مخروط مقطوع (شکل ۶.۸۴) کے لیے اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{مخروط مقطوع کا سطحی رقبہ} = \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$$

۹۱۲۹ پوری سطح طواف کا رقبہ تخمیناً ایسے تمام چھوٹے قطعات کے پیدا کردہ مخروط مقطوع کے سطحی رقبوں کا مجموعہ کے ہو گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \tag{۱}$$

۹۱۳۰ ہم توقع کرتے ہیں کہ $[a, b]$ کی زیادہ باریک خانہ بندی سے تخمین بہتر ہو گی۔ ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے مساوات ۱
۹۱۳۱ میں دیا گیا مجموعہ قابل حل حد دیگا۔

۹۱۳۲ یہ دکھانے کی خاطر ہم مساوات ۱ کو وقفہ $[a, b]$ پر کسی تفاعل کا ریمان مجموعہ لکھتے ہیں۔ لمبائی قوس کے حصول کی طرح ہم تفارق کے مسئلہ اوسط قیمت کی
۹۱۳۳ طرف دیکھتے ہیں۔

۹۱۳۴ اگر f ہموار ہو تب مسئلہ اوسط قیمت کے تحت P اور Q کے بیچ ایسا نقطہ $(c_k, f(c_k))$ ضرور پایا جائے گا جہاں مماس قطعہ PQ کے متوازی ہو گا
۹۱۳۵ (شکل ۶.۸۵)۔ اس نقطے پر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f'(c_k) &= \frac{\Delta y_k}{\Delta x_k} \\ \Delta y_k &= f'(c_k)\Delta x_k \end{aligned}$$

۹۱۳۶ مساوات ۱ میں درج بالا Δy_k پُر کرتے ہیں۔

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \tag{۲}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \pi(f(x_{k-1}) + f(x_k))\sqrt{1 + (f'(c_k))^2}\Delta x_k$$

اب یہاں ایک بُری خبر اور ایک اچھی خبر ہے۔

بُری خبر یہ ہے کہ مساوات ۲ میں x_{k-1} ، x_k ،اور c_k ایک دوسرے سے مختلف ہیں اور انہیں ایک جیسا کسی صورت نہیں بنایا جا سکتا لہٰذا مساوات ۲ میں دیا گیا مجموعہ ریمان مجموعہ نہیں ہے۔ اچھی خبر یہ ہے کہ اس سے کوئی فرق نہیں پڑتا۔ اعلیٰ احصاء کا **مسئلہ بلس**[11] کہتا ہے کہ وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے مساوات ۲ میں دیا گیا مجموعہ درج ذیل پر مرکوز ہو گا

$$\int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

جو ہم چاہتے ہیں۔ یوں a تا b تفاعل f کی ترسیم کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کے رقبہ کی تعریف ہم اسی تکمل کو لیتے ہیں۔

تعریف: **محور x کے گرد سطح طواف کے رقبے کا کلیہ**

اگر $[a, b]$ پر تفاعل $f(x) \geq 0$ ہموار ہو تب تفاعل $y = f(x)$ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \int_a^b 2\pi y\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \tag{۳}$$

□

مساوات ۳ میں جذر وہی ہے جو پیدا کار منحنی کی لمبائی قوس کے کلیے میں پایا جاتا ہے۔

مثال ۶.۲۱: محور x کے گرد منحنی $y = 2\sqrt{x},\ 1 \leq x \leq 2$ گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل ۶.۸۶)۔ سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔

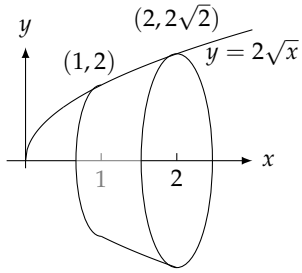
حل

ہم درج ذیل لیتے ہوئے

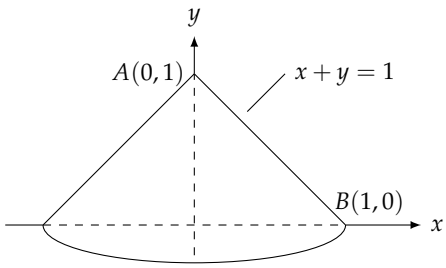
$$a = 1,\ b = 2,\ y = 2\sqrt{x},\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1 + \frac{1}{x}} = \sqrt{\frac{x+1}{x}} = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}$$

---

[11] Bliss'stheorem



شکل ۶.۸۶: سطح طواف برائے مثال ۶.۲۱



شکل ۶.۸۷: سطح طواف برائے مثال ۶.۲۲

۹۱۵۰ مساوات ۱۳ استعمال کرتے ہیں۔

$$S = \int_1^2 2\pi \cdot 2\sqrt{x}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 4\pi\int_1^2 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= 4\pi \cdot \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\Big]_1^2 = \frac{8\pi}{3}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$$

۹۱۵۱ □

۹۱۵۲ ## محور y کے گرد سطح طواف

۹۱۵۳ محور y کے گرد سطح طواف کے لیے ہم مساوات ۳ میں x اور y کی جگہیں آپس میں تبدیل کرتے ہیں۔

۹۱۵۴ ### محور y کے گرد سطح طواف کے رقبے کا کلیہ

۹۱۵۵ اگر $[c, d]$ پر $x = g(y) \geq 0$ ہموار ہو تب منحنی $x = g(y)$ کو محور y کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$S = \int_c^d 2\pi x\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_c^d 2\pi g(y)\sqrt{1 + (g'(y))^2}\,\mathrm{d}y \tag{۴}$$

۹۱۵۶ مثال ۶.۲۲: لکیری قطعہ $x = 1 - y,\ 0 \leq y \leq 1$ کو محور y کے گرد گھما کر مخروط حاصل کیا جاتا ہے (شکل ۶.۸۷)۔ اس کا رقبہ پہلو
۹۱۵۷ تلاش کریں۔

۹۱۵۸ ### حل

۹۱۵۹ یہ رقبہ جیومیٹری سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{رقبہ پہلو} = \frac{\text{قاعدے کا محیط}}{2} \times \text{ترچھا قد} = \pi\sqrt{2}$$

۹۱۶۰ آئیں درج ذیل لے کر

$$c = 0,\ d = 1,\ x = 1 - y,\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -1$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2} = \sqrt{1 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

۹۱۶۱ مساوات ۴ سے رقبہ حاصل کریں۔

$$S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 2\pi(1-y)\sqrt{2}\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\left[y - \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 2\pi\sqrt{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \pi\sqrt{2}$$

۹۱۶۲ دونوں نتائج یکساں ہیں، جیسا کہ ہونا چاہیے۔ □

۹۱۶۳ **مختصر تفرقی روپ**

۹۱۶۴ درج ذیل مساواتوں

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{اور} \quad S = \int_c^d 2\pi x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y$$

۹۱۶۵ کو عموماً قوس کی تفرقی لمبائی $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$S = \int_a^b 2\pi y\,\mathrm{d}s \quad \text{اور} \quad S = \int_c^d 2\pi x\,\mathrm{d}s$$

۹۱۶۶ بائیں مساوات میں محور x سے قطعہ $\mathrm{d}s$ تک فاصلہ y ہے۔ دائیں مساوات میں محور y سے قطعہ $\mathrm{d}s$ کا فاصلہ x ہے۔ ان دونوں کلیوں کو

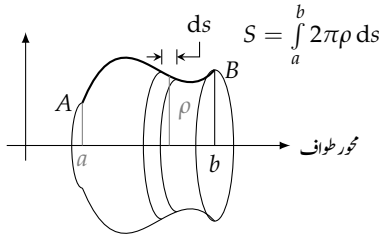
$$S = \int 2\pi(\text{رداس})(\text{چوڑائی پٹی}) = \int 2\pi\rho\,\mathrm{d}s$$

۹۱۶۷ لکھا جا سکتا ہے جہاں تفرقی لمبائی $\mathrm{d}s$ تک محور طواف سے فاصلہ ρ ہے (شکل ۶.۸۸)۔

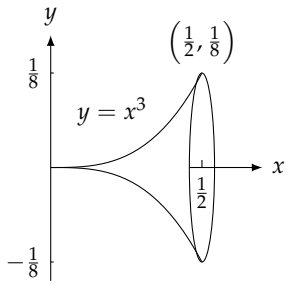
۹۱۶۸ **مختصر تفرقی روپ**

۹۱۶۹

$$S = \int 2\pi\rho\,\mathrm{d}s$$



شکل ۶.۸۸: قوس AB کو محور طواف کے گرد گھما کر حاصل سطح طواف کا رقبہ $\int_a^b 2\pi\rho \, ds$ ہو گا۔



شکل ۶.۸۹: قوس $y = x^3$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا گیا ہے۔

کسی مخصوص مسئلے میں آپ قوسچہ کی تفرقی لمبائی ds اور رداس ρ کو کسی مشترکہ متغیر کی صورت میں لکھ کر تکمل کی حدود بھی اسی متغیر کے روپ میں مہیا کریں گے۔

مثال ۶.۲۳: منحنی $y = x^3, 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل ۶.۸۹)۔ اس کا سطحی رقبہ معلوم کریں۔

حل

ہم مختصر تفرقی روپ سے شروع کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} S &= \int 2\pi\rho \, ds \\ &= \int 2\pi y \, ds \\ &= \int 2\pi y \sqrt{dx^2 + dy^2} \qquad\qquad ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} \end{aligned}$$

ہم نے فیصلہ کرنا ہو گا کہ آیا ds کو dx یا dy کے روپ میں لکھیں۔ منحنی کی مساوات $y = x^3$ سے dy کو dx کی صورت میں لکھنا زیادہ آسان ہے لہٰذا ہم درج ذیل استعمال کریں گے۔

$$y = x^3, \, dy = 3x^2 \, dx, \, \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + (3x^2 \, dx)^2} = \sqrt{1 + 9x^4} \, dx$$

۹۱۷۸ انہیں استعمال کرتے ہوئے تکمل کا متغیر x ہو گا۔

$$\begin{aligned}
S &= \int_{x=0}^{x=1/2} 2\pi y\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}\\
&= \int_0^{1/2} 2\pi x^3\sqrt{1+9x^4}\,\mathrm{d}x\\
&= 2\pi(\tfrac{1}{36})(\tfrac{2}{3})(1+9x^4)^{3/2}\Big]_0^{1/2}\\
&= \tfrac{\pi}{27}[(1+\tfrac{9}{16})^{3/2}-1]\\
&= \tfrac{\pi}{27}[(\tfrac{25}{16})^{3/2}-1]\\
&= \tfrac{\pi}{27}(\tfrac{125}{64}-1)\\
&= \tfrac{61\pi}{1728}
\end{aligned}$$

۹۱۷۹ □

۹۱۸۰ **سوالات**

۹۱۸۱ **سطحی رقبہ کے تکمل**

۹۱۸۲ سوال ۶.۱۹۱ تا سوال ۶.۱۹۸ میں درج ذیل اقدامات کریں۔

۹۱۸۳ ا. دی گئی منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف حاصل کیا جاتا ہے۔ اس کے سطحی رقبے کا تکمل لکھیں۔

۹۱۸۴ ب. منحنی کو ترسیم کر کے اس کی صورت دیکھیں۔ سطحی رقبہ بھی ترسیم کریں۔

۹۱۸۵ ج. کمپیوٹر کی مدد سے اس تکمل کو اعدادی طریقہ سے حل کریں۔

۹۱۸۶ سوال ۶.۱۹۱: محور x $\quad y=\tan x,\quad 0\le x\le \frac{\pi}{4};$

۹۱۸۷ سوال ۶.۱۹۲: محور x $\quad y=x^2,\quad 0\le x\le 2;$

۹۱۸۸ سوال ۶.۱۹۳: محور y $\quad xy=1,\quad 1\le y\le 2;$

۹۱۸۹ سوال ۶.۱۹۴: محور y $\quad x=\sin y,\quad 0\le y\le \pi;$

۹۱۹۰ سوال ۶.۱۹۵: محور x $\quad$ نقطہ $(4,1)$ سے $(1,4)$ تک; $\quad x^{1/2}+y^{1/2}=3,$

۹۱۹۱ سوال ۶.۱۹۶: محور y $\quad y+2\sqrt{y}=x,\quad 1\le y\le 2;$

۹۱۹۲ سوال ۶.۱۹۷: محور y $\quad x=\int_0^y \tan t\,\mathrm{d}t,\quad 0\le y\le \frac{\pi}{3};$

۹۱۹۳ سوال ۶.۱۹۸: محور x $\quad y=\int_1^x \sqrt{t^2-1}\,\mathrm{d}t,\quad 1\le x\le \sqrt{5};$

سطحی رقبہ کا حصول

سوال ۶.۱۹۹: لکیری قطعہ $y = \frac{x}{2},\ 0 \le x \le 4$ کو محور x کے گرد گھما کر مخروط پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (پہلو کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ (محیط تلہ)(ترچھا قد)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال ۶.۲۰۰: لکیری قطعہ $y = \frac{x}{2},\ 0 \le x \le 4$ کو محور y کے گرد گھما کر مخروط پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال ۶.۲۰۱: لکیری قطعہ $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2},\ 1 \le x \le 3$ کو محور x کے گرد گھما کر مخروط مقطوع پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (رقبہ مخروط مقطوع = $\pi\,(r_1 + r_2)$ (ترچھا قد)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال ۶.۲۰۲: لکیری قطعہ $y = \frac{x}{2} + \frac{1}{2},\ 1 \le x \le 3$ کو محور y کے گرد گھما کر مخروط مقطوع پیدا کیا جاتا ہے۔ اس کے پہلو کا رقبہ تکمل سے تلاش کریں۔ جیومیٹری کے کلیہ (رقبہ مخروط مقطوع = $\pi\,(r_1 + r_2)$ (ترچھا قد)) سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال ۶.۲۰۳ تا سوال ۶.۲۱۲ میں منحنی کو دیے گئے محور کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ سطح کا رقبہ معلوم کریں۔ بہتر ہو گا کہ آپ دیے گئے منحنی کو کمپیوٹر پر ترسیم کر کے منحنی کی صورت سیکھیں۔

سوال ۶.۲۰۳: محور x $\quad y = \frac{x^3}{9},\quad 0 \le x \le 2,$

سوال ۶.۲۰۴: محور x $\quad y = \sqrt{x},\quad \frac{3}{4} \le x \le \frac{15}{4},$

سوال ۶.۲۰۵: محور x $\quad y = \sqrt{2x - x^2},\quad 0.5 \le x \le 1.5,$

سوال ۶.۲۰۶: محور x $\quad y = \sqrt{x+1},\quad 1 \le x \le 5,$

سوال ۶.۲۰۷: محور y $\quad x = \frac{y^3}{3},\quad 0 \le y \le 1,$

سوال ۶.۲۰۸: محور y $\quad x = \frac{1}{3}y^{3/2} - y^{1/2},\quad 1 \le y \le 3,$

سوال ۶.۲۰۹: محور y $\quad x = 2\sqrt{4-y},\quad 0 \le y \le \frac{15}{4},$ (شکل ۶.۹۰)

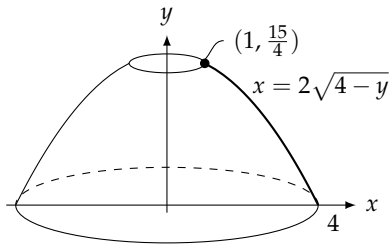
سوال ۶.۲۱۰: محور y $\quad x = \sqrt{2y-1},\quad \frac{5}{8} \le y \le 1,$ (شکل ۶.۹۱)

سوال ۶.۲۱۱: محور x $\quad x = \frac{y^4}{4} + \frac{1}{8y^2},\quad 1 \le y \le 2,$ (اشارہ۔ تکمل میں $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کو $\mathrm{d}y$ کی صورت میں لکھ کر $S = \int 2\pi y\,\mathrm{d}s$ میں موزوں حد لیتے ہوئے حل کریں۔)

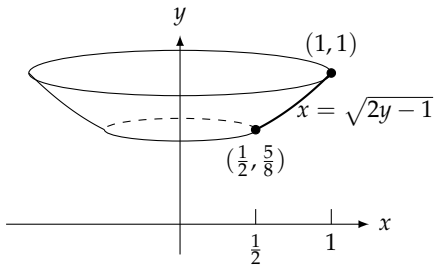
سوال ۶.۲۱۲: محور y $\quad y = \frac{1}{3}(x^2+2)^{3/2},\quad 0 \le x \le \sqrt{2},$ (اشارہ۔ تکمل میں $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$ کو $\mathrm{d}x$ کی صورت میں لکھ کر $S = \int 2\pi x\,\mathrm{d}s$ میں موزوں حد لیتے ہوئے حل کریں۔)

سوال ۶.۲۱۳: نئی تعریف کی پرکھ

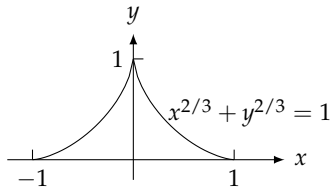
تفاعل $y = \sqrt{a^2 - x^2},\ -a \le x \le x$ کو محور x کے گرد گھمانے سے کروی سطح حاصل ہوتا ہے۔ دکھائیں کہ مساوات ۳ سے بھی رداس a کے کرہ کا سطحی رقبہ $4\pi a^2$ حاصل ہوتا ہے۔



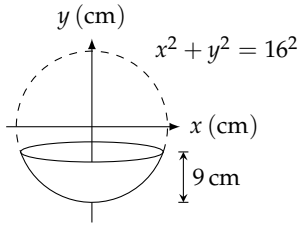
شکل ۶.۹۰



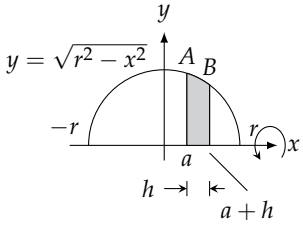
شکل ۶.۹۱



شکل ۶.۹۲



شکل ۶.۹۳



شکل ۶.۹۴

سوال ۶.۲۱۴: نئی تعریف کی پرکھ

لکیری قطعہ $y = \frac{r}{h}x,\ 0 \le x \le h$ کو محور x کے گرد گھمانے سے مخروط پیدا ہوتا ہے جس کے پہلو کا رقبہ $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$ ہوتا ہے جہاں مخروط کا قد h اور اس کے قاعدے کا رداس r ہے لہٰذا اس کا ترچھا قد $\sqrt{r^2+h^2}$ ہو گا۔ مکمل سے مخروط کے پہلو کا رقبہ دریافت کر کے اس کلیے کی تصدیق کریں۔

سوال ۶.۲۱۵: (ا) منحنی $y = \cos x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا ہوتا ہے۔ اس سطح طواف کے رقبہ کا تکمل لکھیں جس کو حل کرنا حصہ ۸.۴ میں سکھایا جائے گا۔ (ب) سطحی رقبے کو اعدادی طریقہ سے دریافت کریں۔

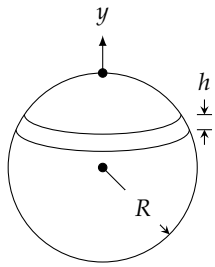
سوال ۶.۲۱۶: ستارہ نما کا سطحی رقبہ

ستارہ نما $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ کا وہ حصہ جو محور x سے اوپر واقع ہے کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل ۶.۹۲)۔ سطح طواف کا رقبہ معلوم کریں۔ (اشارہ۔ ربع اول میں منحنی کے حصہ $y = (1 - x^{2/3})^{3/2},\ 0 \le x \le 1$ کو محور x کے گرد گھما کر نتیجہ کو دگنا کریں۔)

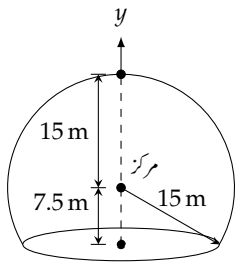
سوال ۶.۲۱۷: رنگ

ایک برتن کو رداس 16 cm کے کرہ کا حصہ تصور کیا جا سکتا ہے (شکل ۶.۹۳)۔ برتن کی گہرائی 9 cm ہے۔ برتن کو اندر اور باہر سے رنگ کرنا مطلوب ہے۔ کچے رنگ کی 0.5 mm موٹی تہہ برتن پر چھڑک کر پکائی جاتی ہے۔ پانچ ہزار برتن کے لیے درکار کچے رنگ کا حجم معلوم کریں۔ رنگ کے ضیاع کو نظر انداز کریں۔

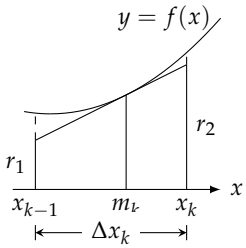
سوال ۶.۲۱۸: ڈبل روٹی کا کرارا حصہ



شکل ۶.۹۵



شکل ۶.۹۶



شکل ۶.۹۷

ڈبل روٹی اندر سے نرم اور باہر سے کرارا ہوتی ہے۔ کیا آپ جانتے ہیں کہ کروی ڈبل روٹی کے یکساں موٹے کتلوں میں ایک جتنا کرارا حصہ پایا جاتا ہے (شکل ۶.۹۴)؟ یہ دیکھنے کی خاطر نصف دائرہ $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ کو محور x کے گرد گھما کر کرہ بنائیں۔ فرض کریں محور x پر وقفہ h کے اوپر نصف دائرے کی قوس AB ہے۔ دکھائیں کہ نصف دائرے کو محور x کے گرد گھمانے سے AB سے حاصل رقبے کی قیمت h کے مقام پر منحصر نہیں۔ (کرارا رقبے کی قیمت h پر منحصر ہو گی۔)

سوال ۶.۲۱۹: دو متوازی سطحیں جن کے مابین فاصلہ h ہے، رداس R کے کروی سطح سے ایک پٹی کاٹتی ہیں (شکل ۶.۹۵)۔ دکھائیں کہ اس پٹی کا رقبہ $2\pi Rh$ ہو گا۔

سوال ۶.۲۲۰: موسمیاتی ریڈار کو شکل ۶.۹۶ میں دکھائے گئے گنبد میں رکھا گیا ہے۔ گنبد کا بیرونی رقبہ کتنا ہو گا؟ (قاعدہ کو شامل نہ کریں۔)

سوال ۶.۲۲۱: محور طواف کو قطع کرنے والی منحنیات سے حاصل سطح طواف

وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل f کو غیر منفی تصور کرتے ہوئے مساوات ۱۳ اخذ کی گئی۔ جہاں تفاعل محور طواف کو قطع کرتا ہو وہاں ہم مساوات ۳ کی جگہ درج ذیل مطلق قیمت کلیہ استعمال کرتے ہیں۔

$$S = \int 2\pi\rho \, \mathrm{ds} = \int 2\pi \left| f(x) \right| \mathrm{ds} \qquad (۵)$$

تفاعل $y = \frac{x^3}{9} - \sqrt{3}, -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل دوہرے مخروط کا سطحی رقبہ مساوات ۵ استعمال کرتے ہوئے دریافت کریں۔

سوال ۶.۲۲۲: قوس $y = \frac{x^3}{9} - \sqrt{3}, -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ مساوات ۵ میں مطلق کی علامت ہٹا کر سطحی رقبہ تلاش کرنے سے کیا ہو گا؟

اعدادی تکمل

سوال ۶.۲۲۳ تا سوال ۶.۲۲۳ میں محور x کے گرد دی گئی منحنیات گھمانے سے سطح طواف پیدا ہوں گی۔ ان سطح طواف کے رقبے اعدادی تراکیب سے 2 اعشاریہ درستگی تک معلوم کریں۔

سوال ۶.۲۲۳: $y = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi$

سوال ۶.۲۲۴: $y = \frac{x^2}{4}, \quad 0 \le x \le 2$

سوال ۶.۲۲۵: $y = x + \sin 2x, \quad -\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$

سوال ۶.۲۲۶: $y = \frac{x}{12}\sqrt{36 - x^2}, \quad 0 \le x \le 6$

سوال ۶.۲۲۷: سطحی رقبہ کا متبادل کلیہ

فرض کریں $[a, b]$ پر f ہموار ہے۔ وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کریں اور k واں ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ کے وسطی نقطہ $= m_k$ ($\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$) پر منحنی کا مماس خط کھینچیں (شکل ۶.۹۷)۔

ا. درج ذیل دکھائیں۔

$$r_1 = f(m_k) - f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2}, \quad r_2 = f(m_k) + f'(m_k)\frac{\Delta x_k}{2}$$

ب. دکھائیں کہ k واں ذیلی وقفہ میں مماسی قطعہ کی لمبائی $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (f'(m_k)\Delta x_k)^2}$ ہے۔

ج. دکھائیں کہ مماسی قطعہ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ پہلو $2\pi f(m_k)\sqrt{1 + (f'(m_k))^2}\Delta x_k$ ہو گا۔

د. دکھائیں کہ وقفہ $[a, b]$ پر $y = f(x)$ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل سطح طواف کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(\text{ویں مخروط مقطوع کا رقبہ پہلو } k) = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

۶.۷ معیار اثر اور مرکز کمیت

بہت سے ڈھانچے اور میکانی نظام ایسا برتاؤ کرتے ہیں جیسے ان کی کمیت ایک نقطے میں سموئی ہو، جس کو مرکز کمیت کہتے ہیں۔ اس نقطے کا مقام جاننا اہم ہے، جسے ریاضی کی مدد سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس باب میں یک بُعدی اور دو بُعدی اجسام پر توجہ دی جائے گی۔ تین بُعدی چیزوں پر باب ۱۴ میں غور کیا جائے گا۔

لکیر پر کمیت

ہم اپنا ریاضیاتی نمونہ مرحلہ وار تیار کرتے ہیں۔ ابتدائی مرحلے میں ہم استوار محور x پر کمیت m_1 ، m_2 ، اور m_3 تصور کرتے ہیں اور مبدا کو اس محور کا چول تصور کرتے ہیں۔ یہ نظام متوازن یا غیر متوازن ہو گا۔ توازن کا دارومدار کمیتوں کی مقدار اور ان کے مقامات پر ہے۔

ہر کمیت m_k پر نیچے رخ قوت $m_k g$ عمل کرتی ہے، جہاں g ثقلی اسراع ہے (قوت $m_k g$ کو کمیت m_k کا وزن کہتے ہیں)۔ ہر ایسی قوت محور کو مبدا کے گرد گھمانے کی کوشش کرتی ہے۔ گھومنے کے اس اثر کو **قوت مروڑ**[۱۲] کہتے ہیں۔ قوت $m_k g$ کو مبدا سے فاصلہ x_k سے ضرب دینے سے قوت مروڑ کی مقدار حاصل ہوتی ہے، جہاں فاصلہ مثبت یا منفی ممکن ہے۔ مبدا سے بائیں جانب کمیت منفی (گھڑی مخالف) قوت مروڑ پیدا کرتی ہے، جبکہ مبدا سے دائیں جانب کمیت مثبت (گھڑی رخ) قوت مروڑ پیدا کرتی ہے۔

قوت مروڑ کا مجموعہ، مبدا کے گرد نظام کے گھومنے کے رجحان کی ناپ ہے۔ اس مجموعے کو **نظام کی قوت مروڑ**[۱۳] کہتے ہیں۔

$$\text{نظام کی قوت مروڑ} = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 \qquad (۱)$$

نظام صرف اور صرف اس صورت متوازن ہو گا جب نظام کی قوت مروڑ صفر ہو۔

نظام کی قوت مروڑ کو

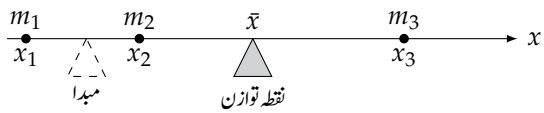
$$\underbrace{g}_{\text{خاصیت ماحول}} \underbrace{(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)}_{\text{خاصیت نظام}}$$

لکھا جا سکتا ہے، جہاں g اس ماحول کی خاصیت ہے جس میں نظام پایا جاتا ہے، جبکہ عدد $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$ نظام کی خاصیت ہے، جو ایک مستقل ہے اور نظام کو ایک ماحول سے دوسرے ماحول میں منتقل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتا۔

عدد $(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3)$ کو **مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر** کہتے ہیں جو انفرادی کمیت کے **معیارات اثر**[۱۴] $m_1 x_1$ ، $m_2 x_2$ ، اور $m_3 x_3$ کا مجموعہ ہے۔

$$M_0 = \text{مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر} = \sum m_k x_k$$

ہم نظام کو متوازن بنانے کی خاطر نظام کے چول کا مقام جاننا چاہتے ہیں، یعنی چول کو کس نقطہ $\bar{x}$ پر رکھنے سے نظام کی قوت مروڑ صفر ہو گی۔



اس مخصوص مقام پر چول رکھنے سے، چول کے لحاظ سے ہر ایک کمیت کی قوت مروڑ درج ذیل لکھی جا سکتی ہے، جہاں فاصلہ مثبت یا منفی ہو سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\text{m_k کا معیار اثر $\bar{x}$ کے لحاظ سے} &= (\text{m_k سے $\bar{x}$ کا فاصلہ})(\text{نیچے رخ قوت}) \\ &= (x_k - \bar{x}) m_k g\end{aligned}$$

---

[۱۲] torque
[۱۳] systemtorque
[۱۴] moments

۹۲۸۶ ان معیارات اثر کے مجموعے کو صفر کے برابر پُر کرنے سے ہمیں ایسی مساوات ملتی ہے جسے ہم $\bar{x}$ کے لیے حل کر سکتے ہیں۔(ذیل دیکھیں۔)

معیار اثر کا مجموعہ صفر ہے	$\sum(x_k - \bar{x})m_k g = 0$
مجموعہ کا قاعدہ مستقل مضرب	$g\sum(x_k - \bar{x})m_k = 0$
g سے تقسیم اور m_k پھیلایا گیا ہے	$\sum(m_k x_k - \bar{x}m_k) = 0$
مجموعہ کا قاعدہ فرق	$\sum m_k x_k - \sum \bar{x}m_k = 0$
مستقل مضرب قاعدہ اور منتقلی	$\sum m_k x_k = \bar{x}\sum m_k$
$\bar{x}$ کے لیے حل	$\bar{x} = \dfrac{\sum m_k x_k}{\sum m_k}$

۹۲۸۷ یہاں آخری مساوات کہتی ہے کہ $\bar{x}$ معلوم کرنے کے لیے مبدا کے لحاظ سے نظام کے معیار اثر کو نظام کی کل کمیت سے تقسیم کریں۔

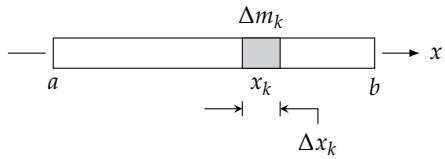
$$\bar{x} = \frac{\sum x_k m_k}{\sum m_k} = \frac{\text{مبدا کے لحاظ سے نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کمیت}}$$

۹۲۸۸ نقطہ $\bar{x}$ کو نظام کا **مرکز کمیت**[۱۵] کہتے ہیں۔

۹۲۸۹ تار اور پتلی سلاخ

۹۲۹۰ بہت سے مواقع پر ہمیں سلاخ یا پتلی پٹی کا مرکز کمیت جاننے کی ضرورت ہوتی ہے۔ایسی صورتوں میں اگر ہم کمیت کی تقسیم کو استمراری تفاعل کی صورت میں لکھ
۹۲۹۱ سکیں تب ہمارے کلیات میں جمع کے بجائے تکمل ہو گا۔اس پر اب بات کرتے ہیں۔

۹۲۹۲ فرض کریں ایک لمبی پٹی $x = a$ تا $x = b$ محور x پر واقع ہے۔ہم وقفہ $[a, b]$ پر پٹی کی خانہ بندی کر کے پٹی کو Δm_k کمیت کے چھوٹے
۹۲۹۳ چھوٹے ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ k واں ٹکڑے کی لمبائی Δx_k ہے اور یہ مبدا سے تقریباً x_k فاصلے پر واقع ہے۔اب تین چیزوں کا مشاہدہ کریں۔



۹۲۹۴

۹۲۹۵ اول، ہر کمیت Δm_k کو نقطہ x_k پر رکھنے سے پیدا نقطوی کمیتی نظام کا تقریباً وہی (درج ذیل) مرکز کمیت حاصل ہو گا جو پٹی کا مرکز کمیت $\bar{x}$ ہے۔

$$\bar{x} \approx \frac{\text{نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کمیت}}$$

---

[۱۵] centerofmass

دوم، مبدا کے لحاظ سے ہر ٹکڑے کا معیار اثر تخمیناً $x_k \Delta m_k$ ہو گا لہٰذا نظام کا معیار اثر تخمیناً تمام $x_k \Delta m_m$ کا مجموعہ ہو گا۔

$$\text{نظام کا معیار اثر} \approx \sum x_k \Delta m_k$$

سوم، اگر x_k پر پٹی کی کثافت $\delta(x_k)$ ہو، جہاں δ استراری ہے، (اور کثافت کی پیمائش کمیت فی لمبائی ہے) تب Δm_k تخمیناً $\delta(x_k)\Delta x_k$ ہو گا۔

$$\Delta m_k \approx \delta(x_k)\Delta x_k$$

ان تینوں مشاہدوں کو ملا کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\bar{x} \approx \frac{\text{نظام کا معیار اثر}}{\text{نظام کی کمیت}} \approx \frac{\sum x_k \Delta m_k}{\sum \Delta m_k} \approx \frac{\sum x_k \delta(x_k)\Delta x_k}{\sum \delta(x_k)\Delta x_k} \tag{۲}$$

مساوات ۲ کا آخری شمار کنندہ بند وقفہ $[a, b]$ پر استراری تفاعل $x\delta(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے جبکہ نسب نما اس وقفے پر تفاعل $\delta(x)$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ زیادہ باریک خانہ بندی سے مساوات ۲ میں تخمین بہتر ہوں گے لہٰذا ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x\delta(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \delta(x)\,\mathrm{d}x}$$

ہم $\bar{x}$ کو درج بالا کلیہ سے معلوم کرتے ہیں۔

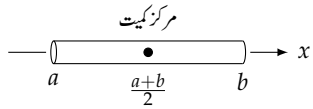
معیار اثر، کمیت، اور محور x پر کثافتی تفاعل $\delta(x)$ کی سلاخ یا پٹی کا مرکز کمیت

$$\begin{aligned} M_0 &= \int_a^b x\delta(x)\,\mathrm{d}x && \text{مبدا کے لحاظ سے معیار اثر} \\ M &= \int_a^b \delta(x)\,\mathrm{d}x && \text{کمیت} \\ \bar{x} &= \frac{M_0}{M} && \text{مرکز کمیت} \end{aligned} \tag{۳}$$

مساوات ۳ کے حصول میں کثافت کی بات کی گئی۔ عام طور پر کثافت سے مراد کمیت فی اکائی حجم ہوتا ہے البتہ بعض اوقات ہم وہ اکائیاں استعمال کرتے ہیں جن کی پیمائش نسبتاً زیادہ آسان ہو۔ یوں تار، سلاخ، اور پٹی کے لیے ہم کمیت فی اکائی لمبائی کو کثافت کہتے ہیں، جبکہ مستوی سطحوں کے لیے کمیت فی اکائی رقبہ کو کثافت کہتے ہیں۔

مثال ۶.۲۴: مستقل کثافت کی سلاخ یا پٹی

مستقل کثافت رکھنے والی سلاخ یا پٹی کا مرکز کمیت تلاش کریں۔



شکل ۶.۹۸: مستقل کثافت کی پتلی سیدھی سلاخ کا مرکز کمیت دونوں سروں کے وسطی نقطے پر ہو گا۔

شکل ۶.۹۹: متغیر موٹائی کی سیدھی سلاخ کو متغیر کثافت کی سیدھی سلاخ تصور کیا جا سکتا ہے۔

۹۳۱۰ **حل**

۹۳۱۱ ہم محور x پر $x = a$ سے $x = b$ کو سلاخ تصور کرتے ہیں (شکل ۶.۹۸)۔ چونکہ کثافت مستقل ہے لہٰذا اس کو تکمل کے باہر منتقل کیا جا سکتا
۹۳۱۲ ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$M_0 = \int_a^b \delta x \,\mathrm{d}x = \delta \int_a^b x \,\mathrm{d}x = \delta[\frac{x^2}{2}]_a^b = \frac{\delta}{2}(b^2 - a^2)$$
$$M = \int_a^b \delta \,\mathrm{d}x = \delta \int_a^b \mathrm{d}x = \delta[x]_a^b = \delta(b-a)$$
$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{\frac{\delta}{2}(b^2-a^2)}{\delta(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

۹۳۱۳ مستقل کثافت کی صورت میں مرکز کمیت سلاخ یا پٹی کے عین وسطی نقطے پر ہو گا۔ □

۹۳۱۴ مثال ۶.۲۵: متغیر کثافت

۹۳۱۵ ایک سلاخ جس کی لمبائی $10\,\mathrm{m}$ ہے بائیں سے دائیں چلتے ہوئے موٹی ہوتی جاتی ہے (شکل ۶.۹۹) لہٰذا اس کی کثافت مستقل ہونے کے بجائے $\delta(x) =$
۹۳۱۶ $1 + \frac{x}{10}\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ ہے۔ سلاخ کا مرکز کمیت معلوم کریں۔

۹۳۱۷ **حل**

۹۳۱۸ ہم مساوات ۱۳ استعمال کریں گے۔ مبدا کے لحاظ سے سلاخ کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

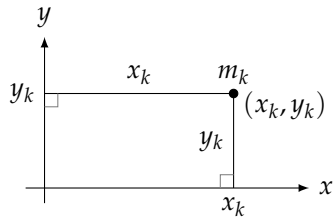
$$M_0 = \int_0^{10} x\delta(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10} x\left(1+\frac{x}{10}\right)\mathrm{d}x = \int_0^{10}\left(x+\frac{x^2}{10}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{30}\right]_0^{10} = 50 + \frac{100}{3} = \frac{250}{3}\,\mathrm{kg\,m}$$

۹۳۱۹ آپ نے دیکھا کہ معیار اثر کی اکائی $\mathrm{kg\,m}$ ہے۔ سلاخ کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

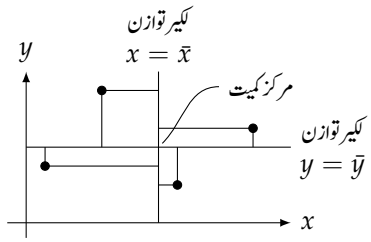
$$M = \int_0^{10} \delta(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{10}\left(1+\frac{x}{10}\right)\mathrm{d}x = \left[x+\frac{x^2}{20}\right]_0^{10} 10 + 5 = 15\,\mathrm{kg}$$

۹۳۲۰ مرکز کمیت درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{250}{3}\cdot\frac{1}{15} = \frac{50}{9} \approx 5.56\,\mathrm{m}$$



شکل ۶.۱۰۰: ہر کمیت m_k کا ہر محور کے لحاظ سے معیار اثر ہو گا۔



شکل ۶.۱۰۱: دو بُعدی کمیتوں کا جھرمٹ اپنے مرکز کمیت پر متوازن ہو گا۔

۹۳۲۱ □

۹۳۲۲ **مستوی پر کمیت کی تقسیم**

۹۳۲۳ فرض کریں ایک مستوی پر متناہی تعداد کی کمیتیں پائی جاتی ہیں۔ یوں نقطہ (x_k, y_k) پر کمیت m_k ہو گی (شکل ۶.۱۰۰)۔ اس نظام کی کمیت درج ذیل ہو
۹۳۲۴ گی۔

$$M = \sum m_k \qquad \text{نظام کی کمیت}$$

۹۳۲۵ ہر کمیت m_k کا دونوں محور کے لحاظ سے معیار اثر ہو گا۔ محور x کے لحاظ سے اس کا معیار اثر $m_k y_k$ ، جبکہ محور y کے لحاظ سے اس کا معیار اثر $m_k x_k$
۹۳۲۶ ہو گا۔ دونوں محور کے لحاظ سے پورے نظام کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_x = \sum m_k y_k \qquad \text{محور } x \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}$$
$$M_y = \sum m_k x_k \qquad \text{محور } y \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}$$

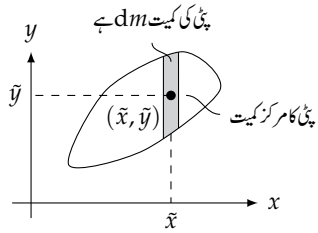
۹۳۲۷ نظام کے مرکز کمیت کا x محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \tag{۴}$$

۹۳۲۸ یک بُعدی صورت کی طرح $\bar{x}$ کی اس قیمت کے لیے نظام لکیر $x = \bar{x}$ پر توازن میں ہو گا (شکل ۶.۱۰۱)۔

۹۳۲۹ نظام کے مرکز کمیت کا y محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} \tag{۵}$$



شکل ۶.۱۰۲: چادر کو انتصابی پتلی پٹیوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ نمائندہ پٹی کا کسی ایک انفرادی محور کے لحاظ سے معیار اثر وہی ہو گا جو پٹی کی کمیت $\mathrm{d}m$ کو پٹی کے مرکز کمیت پر منجمد کرنے سے حاصل ہو گا۔

یک بُعدی صورت کی طرح $\bar{y}$ کی اس قیمت کے لیے نظام لکیر $y = \bar{y}$ پر توازن میں ہو گا۔ لکیر $y = \bar{y}$ کے لحاظ سے تمام قوت مروڑ ایک دوسرے کو منسوخ کر کے صفر قوت مروڑ پیدا کرتی ہیں۔ توازن کے اعتبار سے یوں معلوم ہوتا ہے جیسے نظام کی پوری کمیت نقطہ $(\bar{x}, \bar{y})$ میں سموئی ہوئی ہے۔ اس نقطے کو نظام کا **مرکز کمیت**[۱۶] کہتے ہیں۔

پتلی مسطح چادر

کئی مرتبہ ہمیں پتلی مسطح چادر کا مرکز کمیت درکار ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں ہم فرض کرتے ہیں کہ کمیت کی تقسیم استمراری ہے لہٰذا $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے کلیات میں متناہی مجموعوں کے بجائے تکمل پائے جاتے ہیں۔ آئیں اس پر غور کرتے ہیں۔ فرض کریں مستوی xy میں ایک پتلی چادر واقع ہے۔ چادر کو کسی ایک محور کے متوازی باریک پٹیوں میں تقسیم کریں (شکل ۶.۱۰۲ میں پٹیاں محور y کے متوازی ہیں)۔ کسی ایک نمائندہ پٹی کی کمیت کا مرکز $(\tilde{x}, \tilde{y})$ ہو گا۔ ہم پٹی کی کمیت Δm کو نقطہ $(\tilde{x}, \tilde{y})$ پر منجمد تصور کرتے ہیں۔ یوں محور y کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر $\tilde{x}\Delta m$ ہو گا، جبکہ محور x کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر $\tilde{y}\Delta m$ ہو گا۔ اس طرح مساوات ۴ اور مساوات ۵ درج ذیل صورت اختیار کرتی ہیں۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \tilde{x}\Delta m}{\sum \Delta m}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \tilde{y}\Delta m}{\sum \Delta m}$$

یک بُعدی صورت کی طرح یہاں بھی ریمان مجموعے پائے جاتے ہیں، جن کی قیمتیں، پٹی کی چوڑائی کو کم سے کم کرنے سے، قطعی تکملات کی قیمتیں ہوں گی۔ ان تکملات کو علامتی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}, \quad \bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}$$

---

[۱۶] centerofmass

مستوی xy میں باریک چادر کے معیار اثر، کمیت اور مرکز کمیت

$$
\begin{aligned}
M_x &= \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m && \text{محور } x \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}\\
M_y &= \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m && \text{محور } y \text{ کے لحاظ سے معیار اثر}\\
M &= \int \mathrm{d}m && \text{کمیت}\\
\bar{x} &= \frac{M_y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} && \text{مرکز کمیت}
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

ان تکملات کے حصول کے لیے ہم چادر کو محددی مستوی میں رکھ کر کسی ایک محدد کے متوازی ایک نمائندہ پٹی کا خاکہ بناتے ہیں۔ اس پٹی کی کمیت اور مرکز کمیت کے محدد $(\tilde{x}, \tilde{y})$ کو x اور y کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔ اس کے بعد ہم محددی مستوی میں چادر کے مقام کے اعتبار سے موزوں حدود کے بیچ $\tilde{y}\,\mathrm{d}m$ ، $\tilde{x}\,\mathrm{d}m$ ، اور $\mathrm{d}m$ کے تکملات لیتے ہیں۔

مثال ۶.۲۶: ایک تکونی چادر جس کو شکل ۶.۱۰۳-ا میں دکھایا گیا ہے کی مستقل کثافت $\delta = 3\,\mathrm{g\,cm^{-3}}$ ہے۔ (ا) محور y کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر M_y معلوم کریں۔ (ب) چادر کی کمیت M معلوم کریں۔ (ج) چادر کی کمیت کے مرکز کا $\bar{x}$ محدد معلوم کریں۔

حل

پہلی ترکیب: انتصابی پٹیاں (شکل ۶.۱۰۳-ب)

(ا) نمائندہ پٹی کے لیے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

مرکز کمیت: $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, y)$

چوڑائی: $\mathrm{d}x$

لمبائی: $2x$

کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}A = 3 \cdot 2x\,\mathrm{d}x = 6x\,\mathrm{d}x$

رقبہ: $\mathrm{d}S = 2x\,\mathrm{d}x$

مرکز کمیت کا محور y سے فاصلہ: $\tilde{x} = x$

یوں محور y کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\tilde{x}\,\mathrm{d}m = x \cdot 6x\,\mathrm{d}x = 6x^2\,\mathrm{d}x$$

ہو گا، لہٰذا پوری چادر کا محور y کے لحاظ سے معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_y = \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m = \int_0^1 6x^2\,\mathrm{d}x = 2x^3\Big]_0^1 = 2\,\mathrm{g\,cm}$$

(ب) چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_0^1 6x\,\mathrm{d}x = 3x^2\Big]_0^1 = 3\,\mathrm{g}$$

۳۶۰ (ج) چادر کے مرکز کمیت کا x محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\,\mathrm{g\,cm}}{3\,\mathrm{g}} = \frac{2}{3}, \mathrm{cm}$$

۳۶۱ **دوسری ترکیب:** افقی پٹیاں (شکل ۶.۱۰۳-ج)

۳۶۲ (ا) نمائندہ انتصابی پٹی کے مرکز کمیت کا y محدد y ہو گا:

$$\tilde{y} = y$$

۳۶۳ پٹی کے دائیں اور بائیں سروں کے وسط میں x محدد پایا جائے گا:

$$\tilde{x} = \frac{\frac{y}{2}+1}{2} = \frac{y}{4} + \frac{1}{2} = \frac{y+2}{4}$$

۳۶۴ اس کے علاوہ درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

۳۶۵ لمبائی: $1 - \frac{y}{2} = \frac{2-y}{2}$

۳۶۶ چوڑائی: $\mathrm{d}y$

۳۶۷ رقبہ: $\mathrm{d}S = \frac{2-y}{2}\,\mathrm{d}y$

۳۶۸ کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}S = 3 \cdot \frac{2-y}{2}\,\mathrm{d}y$

۳۶۹ مرکز کمیت کا محور y سے فاصلہ: $\tilde{x} = \frac{y+2}{4}$

۳۷۰ یوں محور y کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر

$$\tilde{x}\,\mathrm{d}m = \frac{y+2}{4} \cdot 3 \cdot \frac{2-y}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{3}{8}(4-y^2)\,\mathrm{d}y$$

۳۷۱ ہو گا اور محور y کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

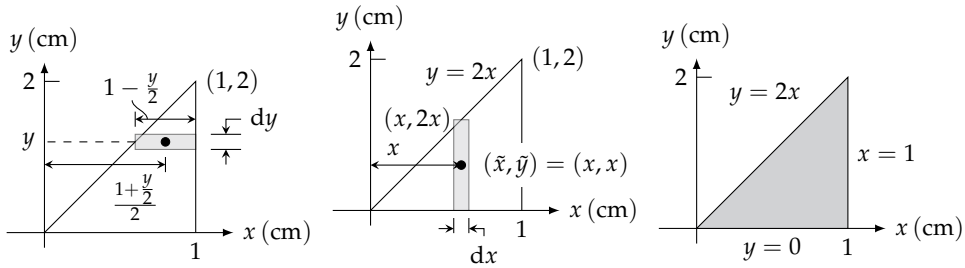
$$M_y = \int \tilde{x}\,\mathrm{d}m = \int_0^2 \frac{3}{8}(4-y^2)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{8}\left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{8}\left(\frac{16}{3}\right) = 2\,\mathrm{g\,cm}$$

۳۷۲ (ب) چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_0^2 \frac{3}{2}(2-y)\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}\left[2y - \frac{y^2}{2}\right]_0^2 = \frac{3}{2}(4-2) = 3\,\mathrm{g}$$

۳۷۳ (ج) چادر کے مرکز کمیت کا x محدد درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{2\,\mathrm{g\,cm}}{3\,\mathrm{g}} = \frac{2}{3}\,\mathrm{cm}$$



(ا) تکونی چادر۔ (ب) انتصابی پٹیاں۔ (ج) افقی پٹیاں۔

شکل ۶.۱۰۳: چادر برائے مثال ۶.۲۶

۹۳۷۴ ہم اسی طرح M_x اور $\bar{y}$ بھی تلاش کر سکتے ہیں۔ □

۹۳۷۵ اگر پتلی چادر میں کمیت کی تقسیم تشاکلی ہو تب کمیت کا مرکز محور تشاکل پر پایا جائے گا۔ اگر تشاکل کے دو محور پائے جاتے ہوں تب مرکز کمیت دونوں محور کے نقطہ
۹۳۷۶ تقاطع پر پایا جائے گا۔ یہ دو حقائق عموماً مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

۹۳۷۷ مثال ۶.۲۷: مستقل کثافت ایک پتلی چادر، جس کی کثافت مستقل δ ہے، کو بالائی طرف سے قطع مکافی $y = 4 - x^2$ اور زیریں طرف سے محور
۹۳۷۸ x گھیرتا ہے (شکل ۶.۱۰۴)۔ اس چادر کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

۹۳۷۹ **حل**

۹۳۸۰ چونکہ چادر کی کثافت مستقل ہے اور کمیت کی تقسیم محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے، لہٰذا مرکز کمیت محور y پر پایا جائے گا۔ یوں $\bar{x} = 0$ ہو گا۔ ہمیں صرف
۹۳۸۱ $\bar{y} = \frac{M_x}{M}$ معلوم کرنا ہے۔

۹۳۸۲ افقی پٹیاں لینے سے درج ذیل مشکل تکمل پیدا ہوتا ہے

$$M_x = \int_0^4 2\delta y\sqrt{4-y}\,\mathrm{d}y$$

۹۳۸۳ لہٰذا ہم انتصابی پٹیاں لے کر آگے بڑھتے ہیں۔ نمائندہ انتصابی پٹی کے لیے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

۹۳۸۴ مرکز کمیت: $(\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(x, \frac{4-x^2}{2}\right)$

۹۳۸۵ لمبائی: $4 - x^2$

۹۳۸۶ چوڑائی: $\mathrm{d}x$

۹۳۸۷ رقبہ: $\mathrm{d}S = (4 - x^2)\,\mathrm{d}x$

۹۳۸۸ کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}S = \delta(4 - x^2)\,\mathrm{d}x$

۹۳۸۹ مرکز کمیت کا محور x سے فاصلہ: $\tilde{y} = \frac{4-x^2}{2}$

۹۳۹۰ محور x کے لحاظ سے پٹی کا معیار اثر درج ذیل ہو گا

$$\tilde{y}\,\mathrm{d}m = \frac{4-x^2}{2}\cdot\delta(4-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{\delta}{2}(4-x^2)^2\,\mathrm{d}x$$

۹۳۹۱ لہٰذا محور y کے لحاظ سے چادر کا معیار اثر درج ذیل ہو گا۔

$$M_x = \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m = \int_{-2}^{2}\frac{\delta}{2}(4-x^2)\,\mathrm{d}x \tag{۷}$$

$$= \frac{\delta}{2}\int_{-2}^{2}(16-8x^2+x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{256}{15}\delta \tag{۸}$$

۹۳۹۲ چادر کی کمیت درج ذیل ہو گی۔

$$M = \int \mathrm{d}m = \int_{-2}^{2}\delta(4-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{32}{3}\delta \tag{۹}$$

۹۳۹۳ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{256}{15}\delta}{\frac{32}{3}\delta} = \frac{8}{5}$$

۹۳۹۴ چادر کی کمیت کا مرکز درج ذیل نقطہ ہو گا۔

$$(\bar{x},\bar{y}) = \left(0,\frac{8}{5}\right)$$

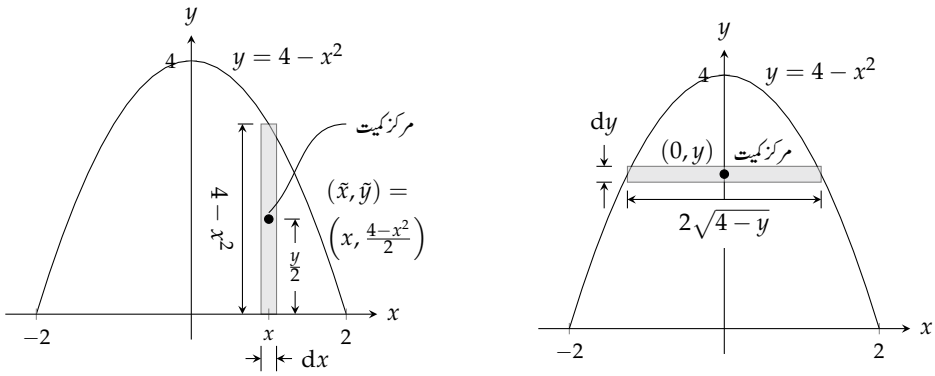
۹۳۹۵ □

۹۳۹۶ مثال ۶.۲۸: متغیر کثافت نقطہ (x,y) پر مثال ۶.۲۷ کی چادر کی کثافت $\delta = 2x^2$ لیتے ہوئے چادر کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔

۹۳۹۷ **حل**

۹۳۹۸ کمیت اب بھی محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ ہو گا۔ یوں $\delta = 2x^2$ کے لیے مساوات ۷ اور مساوات ۹ درج ذیل صورت اختیار کریں
۹۳۹۹ گے۔

$$\begin{aligned}
M_x &= \int \tilde{y}\,\mathrm{d}m = \int_{-2}^{2}\frac{\delta}{2}(4-x^2)^2\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}x^2(4-x^2)^2\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{-2}^{2}(16x^2-8x^4+x^6)\,\mathrm{d}x = \frac{2048}{105}\\
M &= \int \mathrm{d}m = \int_{-2}^{2}\delta(4-x^2)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2}2x^2(4-x^2)\,\mathrm{d}x\\
&= \int_{-2}^{2}(8x^2-2x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{256}{15}
\end{aligned}$$



(ب) انتصابی پٹیاں۔ (ا) افقی پٹیوں سے حاصل تکمل مشکل ثابت ہوتا ہے۔

شکل ۶.۱۰۴: چادر برائے مثال ۶.۲۷

۹۳۰۰ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{2048}{105} \cdot \frac{15}{256} = \frac{8}{7}$$

۹۳۰۱ چادر کی کمیت کا نیا مرکز درج ذیل ہو گا۔

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(0, \frac{8}{7}\right)$$

۹۳۰۲ □

۹۳۰۳ مثال ۶.۲۹: ایک تار، جس کی کثافت δ مستقل ہے، سے رداس a کا نصف دائرہ بنایا جاتا ہے۔ اس کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔

۹۳۰۴ **حل**

۹۳۰۵ ہم نصف دائرے کو تفاعل $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ سے ظاہر کرتے ہیں (شکل ۶.۱۰۵)۔ کمیت کی تقسیم محور y کے لحاظ سے تشاکلی ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ ہو
۹۳۰۶ گا۔ ہم تصور میں تار کو چھوٹے قطعات میں تقسیم کر کے $\bar{y}$ تلاش کرتے ہیں۔ نمائندہ قطعہ کے لیے درج ذیل ہو گا۔

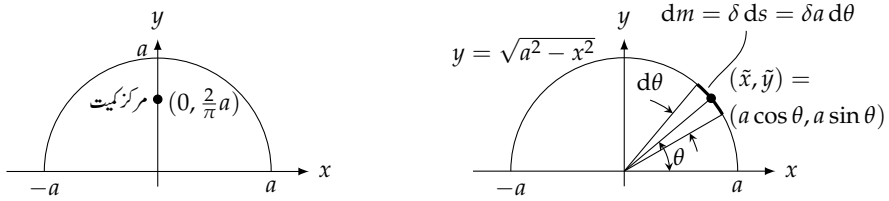
۹۳۰۷ لمبائی: $\mathrm{d}s = a\,\mathrm{d}\theta$

۹۳۰۸ کمیت: $\mathrm{d}m = \delta\,\mathrm{d}s = \delta a\,\mathrm{d}\theta$

۹۳۰۹ مرکز کمیت کا محور x سے فاصلہ: $\tilde{y} = a\sin\theta$

۹۳۱۰ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{\int \tilde{y}\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int_0^\pi a\sin\theta \cdot \delta a\,\mathrm{d}\theta}{\int_0^\pi \delta a\,\mathrm{d}\theta} = \frac{\delta a^2[-\cos\theta]_0^\pi}{\delta a\pi} = \frac{2}{\pi}a$$



(ب) مرکز کمیت تار پر نہیں پایا جاتا۔ (ا) مرکز کمیت کے حصول میں مستعمل متغیرات۔

شکل ۶.۱۰۵: نصف دائری تار (مثال ۶.۲۹)

مرکز کمیت $(0, 2a/\pi)$ ہوگا، جو مبدا سے تقریباً $\frac{2}{3}$ اوپر ہے۔ □

وسطانی مرکز

مستقل کثافت کی صورت میں $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے کلیات میں نسب نما اور شمار کنندہ میں پائے جانے والے δ ایک دوسرے کو منسوخ کرتے ہیں۔ یوں $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ کے نقطہ نظر سے δ کو شروع سے اکائی (1) تصور کیا جا سکتا ہے۔ مستقل کثافت کی صورت میں کسی چیز کی کمیت کا مرکز اس چیز کی شکل و صورت پر منحصر ہو گا نہ کہ اس مادّے پر جس سے یہ چیز بنی ہو۔ ایسی صورت میں مرکز کمیت کو عموماً **وسطانی مرکز**[۱۷] کہتے ہیں۔ یوں اگر آپ سے کہا جائے کہ تکون، مخروط، یا کرہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ آپ $\delta = 1$ لے کر معیار اثر کو کمیت سے تقسیم کر کے $\bar{x}$ اور $\bar{y}$ معلوم کریں۔

سوالات

پتلی سلاخ

سوال ۶.۲۲۸: ایک بچہ، جس کی کمیت 40 kg ہے، اور دوسرا بچہ، جس کی کمیت 50 kg ہے، ہنڈولا پر جھول رہے ہیں۔ اگر 40 kg بچہ چول سے 2 m فاصلے پر ہو، تب ہنڈولا کو متوازن رکھنے کی خاطر دوسرا بچہ چول سے دوسری جانب کتنے فاصلے پر ہو گا؟

سوال ۶.۲۲۹: ایک شہتیر کے سروں کو دو ترازوؤں پر رکھا جاتا ہے جو 100 kg اور 20 kg کی پیمائش دیتی ہیں۔ شہتیر کی کمیت کا مرکز کہاں ہو گا؟

سوال ۶.۲۳۰: لوہے کی ایک پتلی سلاخ کو وسط سے 90° زاویہ پر موڑ پر ڈھانچہ بنایا جاتا ہے (شکل ۶.۱۰۶)۔ ڈھانچے کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔ (اشارہ۔ انفرادی بازوؤں کے مراکز کمیت کہاں ہوں گے؟)

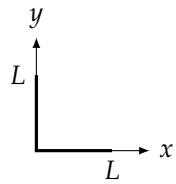
سوال ۶.۲۳۱: لوہے کی ایک پتلی سلاخ کو 90° پر موڑ کر ڈھانچہ بنایا جاتا ہے، جہاں ایک بازو کی لمبائی دوسرے بازو کی لمبائی سے دگنی ہے (شکل ۶.۱۰۷)۔ ڈھانچے کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔ (اشارہ۔ انفرادی بازوؤں کی کمیت کے مراکز کہاں ہوں گے؟)

سوال ۶.۲۳۲ تا سوال ۶.۲۳۹ میں محور x کے مختلف وقفوں پر واقع پتلی سلاخوں کے کثافتی تفاعل دیے گئے ہیں۔ مساوات ۱۳ استعمال کرتے ہوئے مبدا کے لحاظ سے سلاخ کا معیار اثر، کمیت، اور مرکز کمیت تلاش کریں۔

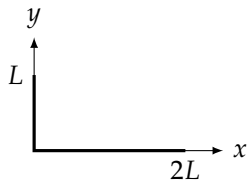
سوال ۶.۲۳۲: $\delta(x) = 4, \quad 0 \le x \le 2$

---

[۱۷] centroid



شکل ۶.۱۰۶: لوہے کا ڈھانچہ برائے سوال ۶.۲۳۰



شکل ۶.۱۰۷: ڈھانچہ برائے سوال ۶.۲۳۱

۹۳۲۹ سوال ۶.۲۳۳: $\delta(x) = 4, \quad 1 \le x \le 3$

۹۳۳۰ سوال ۶.۲۳۴: $\delta(x) = 1 + \frac{x}{3}, \quad 0 \le x \le 3$

۹۳۳۱ سوال ۶.۲۳۵: $\delta(x) = 2 - \frac{x}{4}, \quad 0 \le x \le 4$

۹۳۳۲ سوال ۶.۲۳۶: $\delta(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad 1 \le x \le 4$

۹۳۳۳ سوال ۶.۲۳۷: $\delta(x) = 3(x^{-3/2} + x^{-5/2}), \quad 0.25 \le x \le 1$

۹۳۳۴ سوال ۶.۲۳۸: $\delta(x) = \begin{cases} 2 - x, & 0 \le x \le 1 \\ x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

۹۳۳۵ سوال ۶.۲۳۹: $\delta(x) = \begin{cases} x + 1, & 0 \le x \le 1 \\ 2, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$

۹۳۳۶ **مستقل کثافت والے پتلی چادریں**

۹۳۳۷ سوال ۶.۲۴۰ تا سوال ۶.۲۵۱ میں وہ خطہ دیا گیا ہے جہاں مستقل کثافت δ کی پتلی چادر واقع ہے۔ چادر کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔

۹۳۳۸ سوال ۶.۲۴۰: قطع مکافی $y = x^2$ اور لکیر $y = 4$ میں محیط خطہ۔

۹۳۳۹ سوال ۶.۲۴۱: قطع مکافی $y = 25 - x^2$ اور محور x میں محیط خطہ۔

۹۳۴۰ سوال ۶.۲۴۲: قطع مکافی $y = x - x^2$ اور لکیر $y = -x$ میں محیط خطہ۔

۹۳۴۱ سوال ۶.۲۴۳: قطع مکافی $y = x^2 - 3$ اور $y = -2x^2$ میں محیط خطہ۔

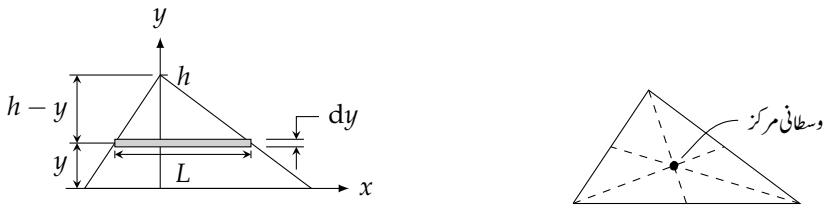
۹۳۴۲ سوال ۶.۲۴۴: محور y اور قطع مکافی $x = y - y^3, 0 \le y \le 1$ کے بیچ خطہ۔

۹۳۴۳ سوال ۶.۲۴۵: قطع مکافی $x = y^2 - y$ اور لکیر $y = x$ میں محیط خطہ۔

۹۳۴۴ سوال ۶.۲۴۶: محور x اور منحنی $y = \cos x, -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ کے بیچ خطہ۔

۹۳۴۵ سوال ۶.۲۴۷: محور x اور منحنی $y = \sec^2 x, -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$ کے بیچ خطہ۔

۹۳۴۶ سوال ۶.۲۴۸: قطع مکافی $y = 2x^2 - 4x$ اور $y = 2x - x^2$ میں محیط خطہ۔



(ا) تکون کا وسطانی مرکز۔ (ب) مرکز کمیت معلوم کرنے میں مستعمل متغیرات۔

شکل ۶.۱۰۸: تکون برائے سوال ۶.۲۵۶

سوال ۶.۲۴۹: (ا) ربع اول میں دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ کے اندر خطہ۔ (ب) محور x اور نصف دائرہ $y = \sqrt{9 - x^2}$ کے بیچ خطہ۔ جزو-ا کے نتیجہ کے ساتھ جواب کا موازنہ کریں۔

سوال ۶.۲۵۰: (ا) ربع اول میں لکیر $x = 3$، لکیر $y = 3$، اور دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ کے بیچ تکونی خطہ۔ (اشارہ۔ رقبے کو جیومیٹری کی مدد سے حاصل کریں۔)

سوال ۶.۲۵۱: وہ خطہ جس کی بالائی سرحد $y = \frac{1}{x^3}$، زیریں سرحد $y = -\frac{1}{x^3}$، بائیں سرحد $x = 1$، اور دائیں سرحد $x = a > 1$ ہیں۔ اس کے علاوہ $\lim_{a\to\infty} \bar{x}$ بھی معلوم کریں۔

متغیر کثافت کی پتلی چادریں

سوال ۶.۲۵۲: محور x اور منحنی $y = \frac{2}{x^2}$, $1 \leq x \leq 2$ کے بیچ چادر، جس کی نقطہ (x, y) پر کثافت $\delta(x) = x^2$ ہے، کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال ۶.۲۵۳: لکیر $y = x$ سے نیچے اور قطع مکافی $y = x^2$ سے اوپر پتلی چادر، جس کی نقطہ (x, y) پر کثافت $\delta(x) = 12x$ ہے، کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

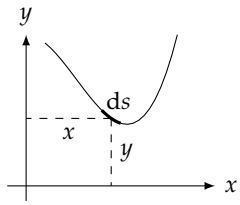
سوال ۶.۲۵۴: لکیر $x = 1$، لکیر $x = 4$، اور منحنی $y = \mp\frac{4}{\sqrt{x}}$ کے بیچ چادر کو محور y کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ (ا) اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) اگر نقطہ (x, y) پر چادر کی کثافت $\delta(x) = \frac{1}{x}$ ہو، تب چادر کی کمیت کتنی ہو گی؟ (ج) چادر کا خاکہ بنا کر اس پر چادر کی کمیت کا مرکز دکھائیں۔

سوال ۶.۲۵۵: منحنی $y = \frac{2}{x}$ اور محور x پر $x = 1$ تا $x = 4$ کے بیچ چادر کو محور x کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ (ا) اس ٹھوس جسم کا حجم تلاش کریں۔ (ب) اگر نقطہ (x, y) پر چادر کی کثافت $\delta(x) = \sqrt{x}$ ہو، تب چادر کی کمیت کتنی ہو گی؟ (ج) چادر کا خاکہ بنا کر اس پر چادر کی کمیت کا مرکز دکھائیں۔

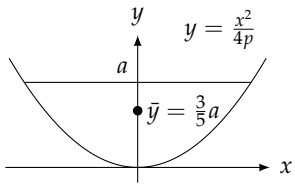
تکون کے وسطانی مراکز

سوال ۶.۲۵۶: تکون کے تین وسطانیوں کا نقطہ تقاطع تکون کا وسطانی مرکز ہو گا۔

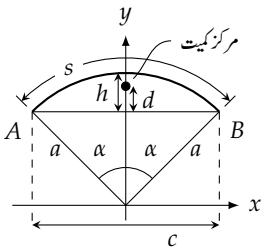
تکون کے راس سے، راس کے مخالف ضلع کے وسط تک، قطعہ کو وسطانیہ کہتے ہیں۔ آپ کو یاد ہو گا کہ ضلع سے $\frac{1}{3}$ فاصلے پر وسطانیے ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں (شکل ۶.۱۰۸)۔ دکھائیں کہ تکون کا وسطانی مرکز بھی اسی نقطہ پر واقع ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل اقدامات کریں۔



شکل ۶.۱۰۹: برائے سوال ۶.۲۶۶



شکل ۶.۱۱۰: برائے سوال ۶.۲۶۷



شکل ۶.۱۱۱: برائے سوال ۶.۲۶۸

۹۳۶۸ ا. تکون کے کسی ایک ضلع کو محور x پر رکھ کر اس میں نمائندہ افقی پٹی L لیں۔ کمیت $\mathrm{d}m$ کو L اور $\mathrm{d}y$ کی صورت میں لکھیں۔

۹۳۶۹ ب. تشابہ مثلثات کی مدد سے $L = \frac{b}{h}(h-y)$ لکھ کر $\mathrm{d}m$ کے کلیہ میں ڈالیں۔

۹۳۷۰ ج. دکھائیں کہ $\bar{y} = \frac{h}{3}$ ہوگا۔

۹۳۷۱ د. اسی دلیل کو باقی دو وسطانیوں پر بھی لاگو کریں۔

۹۳۷۲ سوال ۶.۲۵۷ تا سوال ۶.۲۶۱ میں مثلث کے راس دیے گئے ہیں۔ سوال ۶.۲۵۶ کا نتیجہ استعمال کر کر مثلث کا وسطانی مرکز دریافت کریں۔

۹۳۷۳ سوال ۶.۲۵۷: $(-1,0),\ (1,0),\ (0,3)$

۹۳۷۴ سوال ۶.۲۵۸: $(0,0),\ (1,0),\ (0,1)$

۹۳۷۵ سوال ۶.۲۵۹: $(0,0),\ (a,0),\ (0,a)$

۹۳۷۶ سوال ۶.۲۶۰: $(0,0),\ (a,0),\ (0,b)$

۹۳۷۷ سوال ۶.۲۶۱: $(0,0),\ (a,0),\ (\frac{a}{2},b)$

۹۳۷۸ **پتلا تار**

۹۳۷۹ سوال ۶.۲۶۲: مستقل کثافت کا تار منحنی $y = \sqrt{x}$ پر $x = 0$ سے $x = 2$ تک واقع ہے۔ محور x کے لحاظ سے اس تار کا معیار اثر تلاش
۹۳۸۰ کریں۔

۹۳۸۱ سوال ۶.۲۶۳: مستقل کثافت کا تار منحنی $y = x^3$ پر $x = 0$ سے $x = 1$ تک واقع ہے۔ محور x کے لحاظ سے اس تار کا معیار اثر تلاش
۹۳۸۲ کریں۔

۹۳۸۳ سوال ۶.۲۶۴: کثافت کو $\delta = k\sin\theta$ لیتے ہوئے، جہاں k مستقل ہے، مثال ۶.۲۹ کو دوبارہ حل کریں۔

۹۳۸۴ سوال ۶.۲۶۵: کثافت کو $\delta = 1 + k|\cos\theta|$ لیتے ہوئے، جہاں k مستقل ہے، مثال ۶.۲۹ کو دوبارہ حل کریں۔

۹۳۸۵ **کلیات انجینئری**

۹۳۸۶ سوال ۶.۲۶۶ تا سوال ۶.۲۶۹ میں دیے گئے فقروں اور کلیات کی تصدیق کریں۔

سوال ۶.۲۶۶: قابل تفرق مسطح منحنی کے وسطانی مراکز کے محدد درج ذیل ہوں گے (شکل ۶.۱۰۹)۔

$$\bar{x} = \frac{\int x\,\mathrm{d}s}{\text{لمبائی}}, \quad \bar{y} = \frac{\int y\,\mathrm{d}s}{\text{لمبائی}}$$

سوال ۶.۲۶۷: قوس $y = \frac{x^2}{4p}$ میں $p > 0$ کی قیمت جو بھی ہو، شکل ۶.۱۱۰ میں دکھائے گئے قطع مکافی خطہ کے وسطانی مرکز کا y محدد $\bar{y} = \frac{3}{5}a$ ہو گا۔

سوال ۶.۲۶۸: مستقل کثافت کے باریک تار سے، محور y کے لحاظ سے تشاکلی، دائری قوس بنائی جاتی ہے، جس کا مرکز مبدا پر ہے (شکل ۶.۱۱۱)۔ اس کے وسطانی مرکز کا y محدد $\bar{y} = \frac{a\sin\alpha}{\alpha} = \frac{ac}{s}$ ہو گا۔

سوال ۶.۲۶۹: گزشتہ سوال کو جاری رکھا گیا ہے

دکھائیں کہ جب α کی قیمت کم ہو تب وسطانی مرکز سے قطعہ AB تک فاصلہ d تقریباً $\frac{2h}{3}$ ہو گا۔ ایسا درج ذیل اقدامات سے ہو گا۔

۱. درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{d}{h} = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \alpha\cos\alpha} \tag{۱۰}$$

۲. درج ذیل تفاعل کو

$$f(\alpha) = \frac{\sin\alpha - \alpha\cos\alpha}{\alpha - \alpha\cos\alpha}$$

کمپیوٹر پر ترسیم کر کے بڑا کر کے دکھائیں کہ $\lim_{\alpha\to 0^+} f(\alpha) \approx \frac{2}{3}$ ہو گا۔ (حصہ ۷.۶ میں سوال ۷.۴۲۳ میں آپ اس کی تصدیق کر پائیں گے۔)

ب. آپ $\alpha = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ لے کر مساوات ۱۰ کا دایاں ہاتھ حل کر کے دیکھیں کہ 45° سے بڑے زاویوں کے لیے بھی خلل (یعنی d اور $\frac{2}{3}$ میں فرق) بہت کم ہے۔

۶.۸ کام

روزمرہ زندگی میں کام سے مراد وہ عمل ہے جو جسمانی یا ذہنی قوت سے سرانجام دیا جائے۔ سائنس میں کام کی تعریف اس سے مختلف ہے۔ اس حصہ میں کام کی سائنسی تعریف پیش کی جائے گی اور کام کی قیمت کا حصول سکھایا جائے گا۔

مستقل قوت اور کام

جب کوئی جسم، جس پر مستقل قوت F عمل کرتی ہو، قوت کی سمت میں سیدھی لکیر پر فاصلہ d طے کرے، تب ہم (سائنسی طور پر) کہتے ہیں کہ قوت F اس جسم پر (ذیل) کام W کرتی ہے۔

$$W = Fd \tag{۱}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سائنس میں لفظ "کام" کا معنی روزمرہ زندگی میں استعمال معنی سے مختلف ہے۔ اگر آپ کسی گاڑی کو سڑک پر دھکا لگا کر ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کریں تب آپ کی روزمرہ خیال کے مطابق آپ نے کام کیا اور مساوات ۱ کے تحت بھی آپ نے کام کیا۔ اس کے برعکس، اگر آپ پورا دن گاڑی کو دھکا لگاتے رہیں لیکن گاڑی اپنی جگہ سے حرکت نہ کرے، تب اگرچہ آپ کا خیال ہو گا کہ آپ نے بہت کام کیا لیکن مساوات ۱ کے تحت آپ نے کوئی کام نہیں کیا۔

مساوات ۱ سے واضح ہے کہ قوت کی اکائی کو فاصلے کی اکائی سے ضرب دینے سے کام کی اکائی حاصل ہو گی۔ بین الاقوامی نظام اکائی میں قوت کی اکائی نیوٹن N اور فاصلے کی اکائی میٹر m ہے، لہٰذا اس نظام میں کام کی اکائی نیوٹن میٹر $\mathrm{N \cdot m}$ ہو گی، جس کو خصوصی نام **جاول**[۱۸] دیا گیا ہے اور جس کو J سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال ۶.۳۰: فرض کریں آپ 80 kg کمیت کو 30 cm بلندی تک اٹھاتے ہیں۔ ایسا کرتے ہوئے آپ درج ذیل کام کرتے ہیں۔

$$W = Fd = (80)(9.8)(0.3) = 235.2\,\mathrm{J}$$

□

متغیر قوت اور کام

اگر آپ پانی کی ایسی بالٹی اٹھائیں جس سے پانی ٹپکتا ہو، تب لاگو قوت کی قیمت بلندی کے ساتھ تبدیل ہو گی۔ ایسی صورت میں قوت کا کلیہ $W = Fd$ تبدیل کرتے ہوئے تکمل کا استعمال ضروری ہو گا جو قوت کی تبدیلی کا حساب رکھ سکے۔

فرض کریں کہ محور x سے اس لکیر کو ظاہر کرنا ممکن ہے جس پر قوت عمل کرتی ہے اور قوت کی مقدار F کو فاصلہ x کا استمراری تفاعل تصور کیا جا سکتا ہے۔ ہم وقفہ $x = a$ تا $x = b$ پر قوت کا کام معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ ہم وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کرتے ہوئے ہر ذیلی وقفہ $[x_{k-1}, x_k]$ میں کوئی نقطہ c_k منتخب کرتے ہیں۔ اگر ذیلی وقفہ چھوٹا ہو، تب x_{k-1} سے x_k تک کے فاصلے میں استمراری قوت F کی تبدیلی (استمراری ہونے کی وجہ سے) بہت کم ہو گی، جسے رد کیا جا سکتا ہے۔ یوں x_{k-1} سے x_k تک حرکت کے دوران کام کی قیمت تخمیناً $F(c_k)\Delta x_k$ ہو گی۔ یوں درج ذیل ریمان مجموعہ $x = a$ سے $x = b$ تک قوت F کا کام دے گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} F(c_k)\Delta x_k \tag{۲}$$

ہم توقع کرتے ہیں کہ جیسے جیسے خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب پہنچتا ہو، ویسے ویسے یہ تخمین بہتر سے بہتر ہو گی، لہٰذا ہم $x = a$ سے $x = b$ تک F کے تکمل کو a سے b تک قوت F کے کام کی تعریف لیتے ہیں۔

---

[۱۸] joule

تعریف: محور x پر $x = a$ سے $x = b$ تک لاگو متغیر قوت $F(x)$ درج ذیل **کام** کرتی ہے۔

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \tag{۳}$$

□

کام کی اکائی **جاول** J ہے۔

مثال ۶.۳۱: قوت $F(x) = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{N}$ محور x پر $x = 1\,\mathrm{m}$ تا $x = 10\,\mathrm{m}$ عمل کرتی ہے۔ یہ قوت درج ذیل کام کرتی ہے۔

$$W = \int_1^{10} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\Big]_1^{10} = -\frac{1}{10} + 1 = 0.9\,\mathrm{J}$$

□

مثال ۶.۳۲: گاؤں میں کنویں سے پانی نکالنے کے لیے بوکا استعمال کیا جاتا ہے۔ کنویں کی گہرائی $20\,\mathrm{m}$، خالی بوکے کی کمیت $2\,\mathrm{kg}$، اور رسّی کی کمیت $0.1\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ ہے۔ بوکے میں ابتدائی طور پر $10\,\mathrm{L}$ پانی ہوتا ہے۔ چونکہ بوکے سے پانی رستا ہے، لہٰذا جتنی دیر میں بوکے کو نیچے سے اوپر کھینچا جاتا ہے اتنی دیر میں بوکا خالی ہو جاتا ہے۔ بوکا سے پانی کے اخراج کو مستقل تصور کریں۔ درج ذیل کام معلوم کریں۔

ا. صرف پانی بلند کرنے کا کام۔

ب. پانی اور بوکا بلند کرنے کا کام۔

ج. پانی، بوکا، اور رسّی بلند کرنا کا کام۔

حل

ا. صرف پانی: پانی اٹھانے کے لیے درکار قوت پانی کے وزن کے برابر ہو گی، جو ابتدا میں $(10)(9.8) = 98\,\mathrm{N}$ اور آخر میں صفر ہے۔ یوں مبدا کو کنویں کی تہہ میں رکھتے ہوئے قوت کو

$$F(x) = \underbrace{98}_{\text{ابتدائی وزن}}\underbrace{\left(\frac{20-x}{20}\right)}_{\text{اونچائی } x \text{ پر باقی تناسب}} = 98\left(1 - \frac{x}{20}\right) = 98 - 4.9x\,\mathrm{N}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا کام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{20} (98 - 4.9x)\,\mathrm{d}x = \left[98x - \frac{4.9x^2}{2}\right]_0^{20} = 1960 - 980 = 980\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

ب. صرف بوکا: صرف بوکا اٹھانے کے لیے درکار کام مساوات ۱ کے تحت $(2)(9.8)(20) = 392\,\mathrm{J}$ ہو گا۔ یوں پانی اور بوکا دونوں اٹھانے کے لیے درکار کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = 980 + 392 = 1372\,\mathrm{J}$$

ج. پانی، بوکا، اور رسّی: مبدا سے x بلندی پر پانی، بوکا، اور رسّی کی کمیت کو $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ سے ضرب دینے سے درج ذیل درکار قوت حاصل ہوتی ہے۔

$$F(x) = \underbrace{(98 - 4.9x)}_{\text{پانی کا متغیر وزن}} + \underbrace{(19.6)}_{\text{بوکا کا مستقل وزن}} + \underbrace{(0.1)(9.8)(20 - x)}_{\text{رسّی کا متغیر وزن}}$$

صرف رسّی کو اوپر کھینچنے کا کام درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{20} (0.1)(9.8)(20 - x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{20} (19.6 - 0.98x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[19.6x - \frac{0.98x^2}{2}\right]_0^{20} = 392 - 196 = 196\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

یوں پانی، بوکا، اور رسّی تینوں کو کھینچنے کے لیے درکار کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = 980 + 392 + 196 = 1568\,\mathrm{J}$$

□

قانون ہک برائے اسپرنگ

قانون ہک[19] کے تحت کسی بھی اسپرنگ کی قدرتی لمبائی کو تان کر یا دبا کر x اکائیاں تبدیل کرنے کے لیے درکار قوت F لمبائی x کے راست متناسب ہو گی۔

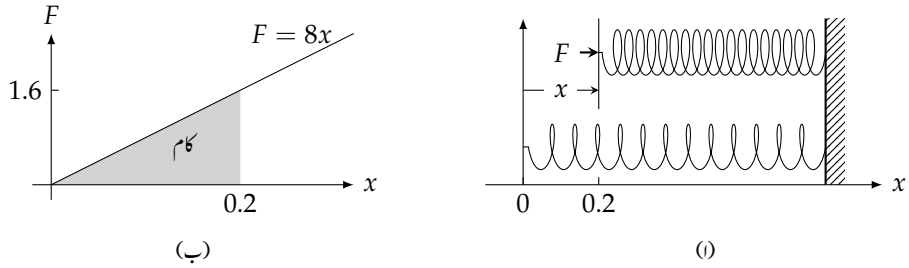
$$F = kx \qquad \text{قانون ہک} \qquad (۴)$$

مستقلہ اسپرنگ k جو اسپرنگ کی خاصیت ہے کو **مقیاس لچک**[20] کہتے ہیں۔ مقیاس لچک کو قوت فی اکائی لمبائی میں ناپا جاتا ہے۔ جب تک لاگو قوت اسپرنگ کے دھاتی تار کو بگاڑ نہ دے قانون ہک (مساوات ۴) بہترین نتائج دیتا ہے۔ اس حصہ میں ہم فرض کرتے ہیں کہ لاگو قوت اسپرنگ کو خراب نہیں کرتی۔

مثال ۶.۳۳: ایک اسپرنگ، جس کا مقیاس لچک $k = 8\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ ہے، کی لمبائی $1\,\mathrm{m}$ سے تبدیل کر کے $0.8\,\mathrm{m}$ کی جاتی ہے۔ درکار کام تلاش کریں۔

---

[19] Hooke'slaw
[20] springconstant



شکل ۶.۱۱۲: اسپرنگ کی لمبائی میں تبدیلی اور قوت کے درمیان راست تناسب ہے۔

حل

ہم اسپرنگ کو محور x پر پڑا ہوا تصور کرتے ہیں (شکل ۶.۱۱۲)۔ اسپرنگ کا ایک سرا مبدا پر ہے، جبکہ اس کا دوسرا سرا $x = 1$ پر باندھا گیا ہے۔ یوں ہم قوت کو $F = 8x$ لکھ سکتے ہیں، جہاں x کی قیمت 0 تا 0.2 m ہو گی۔ درکار کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = \int_0^{0.2} 8x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{8x^2}{2}\right]_0^{0.2} = 0.16\,\mathrm{J}$$

□

مثال ۶.۳۴: ایک اسپرنگ، جس کی قدرتی لمبائی 1 m ہے، کو 24 N قوت سے تان کر اس کی لمبائی 1.8 m کی جاتی ہے۔

ا. مقیاس لچک k تلاش کریں۔

ب. اسپرنگ کی لمبائی کو قدرتی لمبائی سے 2 m بڑھانے کے لیے درکار کام تلاش کریں۔

ج. اسپرنگ کی لمبائی میں 45 N کی قوت کتنی تبدیلی پیدا کرے گی؟

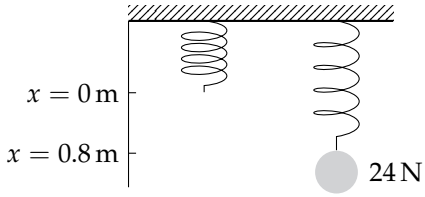
حل

ا. مقیاس لچک: قیاس لچک کو مساوات ۴ سے حاصل کرتے ہیں۔ اسپرنگ کی لمبائی میں تبدیلی 0.8 m ہے۔

$$24 = k(0.8) \qquad \Longrightarrow \; k = \frac{24}{0.8} = 30\,\mathrm{N\,m^{-1}}$$

ب. کام: ہم اسپرنگ کو چھت سے یوں آویزاں تصور کرتے ہیں کہ اس کا آزاد سرا $x = 0$ پر ہو (۶.۱۱۳)۔ اسپرنگ کی لمبائی کو اس کی قدرتی لمبائی سے x میٹر زیادہ کرنے کے لیے درکار قوت $F = kx$ ہو گی، جو اسپرنگ کو نیچے رخ کھینچے گی۔ یوں $x = 0$ سے $x = 2\,\mathrm{m}$ تک کھینچنے کے لیے کام درج ذیل ہو گا۔

$$W = \int_0^2 30x\,\mathrm{d}x = \left.\frac{30x^2}{2}\right]_0^2 = 60\,\mathrm{J}$$



شکل ۶.۱۱۳: قوت نے اسپرنگ کی لمبائی کو بڑھایا ہے۔

ج. لمبائی میں تبدیلی: ہم مساوات $F = 30x$ میں $F = 45$ ڈال کر x تلاش کرتے ہیں۔

$$45 = 30x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{45}{30} = 1.5\,\mathrm{m}$$

یوں اسپرنگ کی کل لمبائی $1 + 1.5 = 2.5\,\mathrm{m}$ ہو گی۔

□

پانی کی نکاسی

کسی برتن یا حوض سے پانی کی نکاسی کے لیے کتنا کام درکار ہو گا؟ ہم پانی کو افقی تہوں میں تقسیم کرتے ہوئے ایک ایک تہہ کو برتن سے باہر نکالتے ہیں۔ یوں، اگر تہہ کی موٹائی $\mathrm{d}y$ اور اس کا سطحی رقبہ S ہو، تب اس کی کمیت $\rho S\,\mathrm{d}y$ اور وزن $\rho Sg\,\mathrm{d}y$ ہو گا، جہاں پانی کی کثافت کو ρ اور کشش ثقل کو g سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اس تہہ کو بلندی h تک منتقل کرنے کے لیے $\mathrm{d}W = Fh = \rho Sgh\,\mathrm{d}y$ کام درکار ہو گا۔ یوں تمام تہوں کو نکالنے کے لیے درکار کام جاننے کے لیے تکمل حل کرنا ہو گا۔ اگلی مثال میں ایک ٹھوس مثال پیش کی گئی ہے۔

مثال ۶.۳۵: پانی سے بھرے ہوئے ایک بیلنی حوض کا رداس $5\,\mathrm{m}$ اور قد $h = 10\,\mathrm{m}$ ہے۔ پانی کو $14\,\mathrm{m}$ بلندی تک منتقل کرنے کے لیے کتنا کام کرنا ہو گا؟

حل

ہم حوض کو کار تیسی محدد پر تصور کرتے ہوئے وقفہ $[0, 10]$ کی خانہ بندی کر کے پانی کو تہہ در تہہ تقسیم کرتے ہیں (شکل ۶.۱۱۴)۔ سطح y اور سطح $y + \mathrm{d}y$ کے بیچ پانی کا حجم

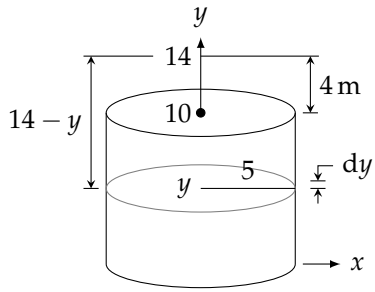
$$\Delta H = \pi(\text{رداس})^2(\text{موٹائی}) = \pi(5)^2\Delta y = 25\pi\Delta y\,\mathrm{m}^3$$

اور کمیت

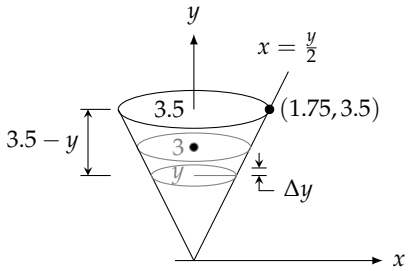
$$\mathrm{d}M = (\rho)(\Delta H) = (1000)(25\pi\Delta y) = 25\,000\pi\Delta y\,\mathrm{kg}$$

ہو گی، جہاں پانی کی کثافت $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔ اس تہہ پر کشش ثقل کی وجہ سے نیچے رخ قوت عمل کرے گی، لہٰذا اس تہہ کو اٹھانے کی خاطر تہہ کے وزن کے برابر (درج ذیل) قوت F درکار ہو گی۔

$$F = (g)(\mathrm{d}M) = (9.8)(25\,000\pi\Delta y) = 245\,000\pi\Delta y\,\mathrm{N}$$



شکل ۶.۱۱۴: بیلنی حوض (مثال ۶.۳۵)



شکل ۶.۱۱۵: زیتون تیل کا مخروط حوض (مثال ۶.۳۶)

۹۵۸۸ یوں اس تہہ کو y بلندی سے $14\,\mathrm{m}$ بلندی تک اٹھانے کے لیے درج ذیل کام کرنا ہو گا۔

$$\mathrm{d}W = (\text{قوت})(\text{فاصلہ}) = (245\,000\pi)(14-y)\Delta y\,\mathrm{J}$$

۹۵۸۹ تمام پانی کو اس بلندی تک اٹھانے کے لیے تخمیناً

$$W \approx \sum_0^{10} \Delta W = \sum_0^{10} \Delta y\,\mathrm{J}$$

۹۵۹۰ کام کرنا ہو گا، جو وقفہ $0 \leq y \leq 10$ پر تفاعل $245\,000\pi(14-y)$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ حوض خالی کرنے کے لیے درکار کام
۹۵۹۱ $\|P\| \to 0$ کی صورت میں اس ریمان مجموعے کی حد ہو گی۔

$$W = \int_0^{10} 245\,000\pi(14-y)\,\mathrm{d}y = 245\,000\pi \int_0^{10} (14-y)\,\mathrm{d}y$$
$$= 245\,000\pi\left[14y - \frac{y^2}{2}\right]_0^{10} = 245\,000\pi[90] \approx 69.3 \times 10^6\,\mathrm{J}$$

۹۵۹۲ ایک کلوواٹ طاقت کے بجلی کا پمپ ایک سیکنڈ میں $1000\,\mathrm{J}$ کام کرتا ہے۔ اس پمپ کو یہ حوض خالی کرنے کے لیے تقریباً 19 گھنٹے اور 15 منٹ کا وقت
۹۵۹۳ درکار ہو گا۔ □

۹۵۹۴ مثال ۶.۳۶: ایک مخروط حوض، جس کو شکل ۶.۱۱۵ میں دکھایا گیا ہے، کنارے سے $0.5\,\mathrm{m}$ نیچے تک زیتون کے تیل سے بھرا ہوا ہے۔ زیتون کے تیل
۹۵۹۵ کی کثافت $\rho = 930\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔ تیل کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لیے کتنا کام درکار ہو گا؟

۹۵۹۶ **حل**

۹۵۹۷ ہم وقفہ $[0, 3]$ کی خانہ بندی کرتے ہوئے، خانہ بندی کے نقطوں پر افقی سطحیں تصور کرتے ہوئے، تیل کو باریک تہوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ سطح y اور
۹۵۹۸ سطح $y + \Delta y$ کے بیچ تہہ کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$\Delta H = \pi(\text{رداس})^2(\text{موٹائی}) = \pi\left(\frac{y}{2}\right)^2 \Delta y = \frac{\pi}{4} y^2 \Delta y\,\mathrm{m}^3$$

اس تہہ کو اٹھانے کے لیے اس تہہ کے وزن کے برابر قوت $F(y)$ درکار ہو گی۔

$$F(y) = \rho g \Delta H = (930)(9.8)\left(\frac{\pi}{4}y^2\Delta y\right) = \frac{9114\pi}{4}y^2\Delta y\,\mathrm{N}$$

حوض کے کنارے سے اس تہہ تک کا فاصلہ $3.5 - y$ ہے، لہٰذا اس تہہ کو حوض کے کنارے تک اٹھانے کے لیے درج ذیل کام درکار ہو گا۔

$$\Delta W = \frac{9114\pi}{4}(3.5 - y)y^2\Delta y\,\mathrm{J}$$

$y = 0$ سے $y = 3$ تک تمام تہوں کو حوض کے کنارے تک اٹھانے کے لیے تخمیناً

$$W \approx \sum_{0}^{3} \frac{9114\pi}{4}(3.5 - y)y^2\Delta y\,\mathrm{J}$$

کام درکار ہو گا، جو وقفہ $[0, 3]$ پر تفاعل $\frac{9114\pi}{4}(3.5 - y)y^2$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ تیل کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لیے درکار کام، خانہ بندی کا معیار صفر تک کرنے سے حاصل، ریمان مجموعے کی حد ہو گا۔

$$\begin{aligned} W &= \int_0^3 \frac{9114\pi}{4}(3.5 - y)y^2\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{9114\pi}{4}\int_0^3 (3.5y^2 - y^3)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{9114\pi}{4}\left[\frac{3.5y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^3 \approx 80\,529\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

□

سوالات

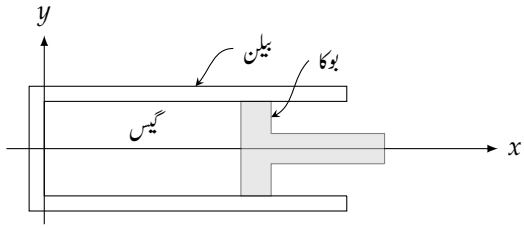
متغیر قوت کا کام

سوال ۶.۲۷۰: اگر مثال ۶.۳۲ میں بوکے کا حجم 20 L ہو لیکن اس میں سوراخ بھی بڑا ہو تا کہ اب بھی بوکے کو کنواں سے نکالتے ہوئے بوکا خالی ہو جاتا ہو۔ بوکے اور رسّی کی کمیت کو شامل نہ کرتے ہوئے بوکا نکالنے کے لیے درکار کام دریافت کریں۔ بوکے سے پانی کے اخراج کی شرح کو مستقل تصور کریں۔

سوال ۶.۲۷۱: فرض کریں مثال ۶.۳۲ میں بوکے کو اس رفتار سے اوپر کھینچا جاتا ہے کہ آخر میں بوکے میں 4 L پانی ہوتا ہے۔ پانی نکالنے میں کتنا کام درکار ہو گا؟ بوکا اور رسّی کی کمیت کو شامل نہ کریں اور بوکے سے پانی کے اخراج کی شرح کو مستقل تصور کریں۔

سوال ۶.۲۷۲: ایک کوہ پیما چٹان سے لٹکی ہوئی 50 m رسّی کو اوپر کھینچتا ہے۔ رسّی کا وزن $0.624\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ ہے۔ کتنا کام درکار ہو گا؟

سوال ۶.۲۷۳: ریت کو تھیلے میں ڈال کر 6 m بلند چھت تک برقرار رفتار سے کھینچ کر پہنچایا جاتا ہے۔ تھیلے میں سوراخ سے ریت کا اخراج ہوتا ہے جس کی شرح کو مستقل تصور کیا جا سکتا ہے۔ ابتدائی طور پر تھیلے میں 50 kg ریت ہوتی ہے جو آخر میں آدھی رہ جاتی ہے۔ رسّی اور تھیلے کی کمیت کو نظر انداز کرتے ہوئے درکار کام معلوم کریں۔



شکل ۶.۱۱۶: گاڑی کا انجن ایک بیلن پر مشتمل ہوتا ہے، جس میں بوکا چلتا ہے۔ بوکے کی حرکت سے گیس کا حجم اور دباو تبدیل ہوتے ہیں (سوال ۶.۲۷۶)۔

سوال ۶.۲۷۴: آج کل، بالخصوص بلند عمارتوں میں، سیڑھیوں کے ساتھ ساتھ **مصعد**[۲۱] بھی پائے جاتے ہیں۔ مصعد کو چھت پر رکھی ہوئی موٹر کی طاقت سے چلایا جاتا ہے۔ کئی لڑیوں پر مشتمل رسّی کی کثافت $6\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ ہونے کی صورت میں صرف رسّی کو زمین سے $60\,\mathrm{m}$ بلند عمارت کی چھت تک اٹھانے میں موٹر کتنا کام کرے گی؟

سوال ۶.۲۷۵: نقطہ $(x, 0)$ پر واقع ذرہ، جس کی کمیت m ہے، پر قوت $F = \frac{k}{x^2}$ عمل کرتی ہے، جہاں k مستقل ہے۔ یہ ذرہ سکون سے شروع کر کے نقطہ b سے نقطہ a پہنچتا ہے، جہاں $0 < a < b$ ہیں۔ اس ذرے پر کتنا کام ہوا؟

سوال ۶.۲۷۶: ایک بیلن، جس کا رقبہ عمودی تراش S ہے، میں موجود گیس پر میکانی دباو ڈالا جاتا ہے (شکل ۶.۱۱۶)۔ اگر گیس کا حجم V اور اس کا دباو p ہو، تب دکھائیں کہ گیس کو (p_1, V_1) حال سے (p_2, V_2) حال تک پہنچانے میں درج ذیل کام درکار ہو گا؟

$$W = \int_{(p_1,V_1)}^{(p_2,V_2)} p\,\mathrm{d}V$$

(اشارہ: شکل ۶.۱۱۶ کو دیکھ کر بوکے پر قوت کو $F = pS$ اور چھوٹے حجم کو $\mathrm{d}V = S\,\mathrm{d}x$ لکھا جا سکتا ہے۔)

سوال ۶.۲۷۷: اگر گیس کا ابتدائی حجم $V_1 = 1500\,\mathrm{cm^3}$، ابتدائی دباو $103\,360\,\mathrm{N\,m^{-2}}$، اور اختتامی حجم $200\,\mathrm{cm^3}$ ہو، تب سوال ۶.۲۷۶ کے تکمل سے کام دریافت کریں۔ یہاں آپ فرض کریں کہ گیس کا دباو ایک **حرارت ناگزر عمل**[۲۲] ہے، جس میں نظام اور ماحول کے درمیان حرارت کا تبادلہ نہیں ہوتا۔ حرارت ناگزر عمل کے قانون کے تحت $pV^{1.4} = c$ ہو گا، جہاں c مستقل ہے۔

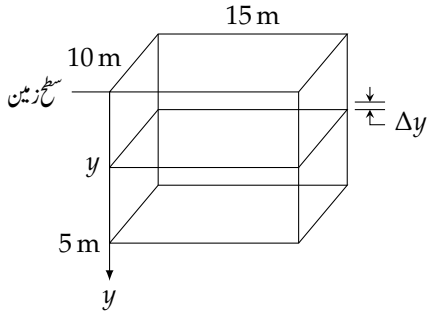
اسپرنگ

سوال ۶.۲۷۸: ایک اسپرنگ، جس کی قدرتی لمبائی $2\,\mathrm{m}$ ہے، کی لمبائی کو $5\,\mathrm{m}$ بنانے کے لیے درکار کام $1800\,\mathrm{J}$ ہے۔ اس اسپرنگ کا مقیاس لچک تلاش کریں۔

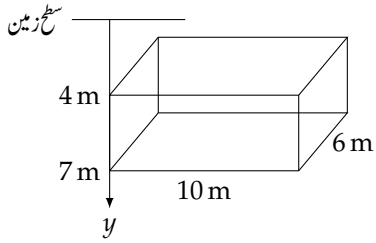
سوال ۶.۲۷۹: ایک اسپرنگ، جس کی قدرتی لمبائی $30\,\mathrm{cm}$ ہے، پر $400\,\mathrm{N}$ قوت لاگو کرتے ہوئے اس کو کھینچ کر $45\,\mathrm{cm}$ لمبائی تک پہنچایا جاتا ہے۔ (ا) مقیاس لچک تلاش کریں۔ (ب) اسپرنگ کی لمبائی کو $35\,\mathrm{cm}$ کرنے کے لیے کتنی قوت درکار ہو گی؟ (ج) قدرتی لمبائی سے $600\,\mathrm{N}$ قوت اسپرنگ کی لمبائی کو کتنا زیادہ کرتی ہے؟

---

[۲۱] lift
[۲۲] adiabaticprocess



شکل ۶.۱۱۷: زیر زمین حوض (سوال ۶.۲۸۴)



شکل ۶.۱۱۸: زیر زمین حوض (سوال ۶.۲۸۵)

سوال ۶.۲۸۰: ایک ربڑی پٹی کی لمبائی کو 2 N کی قوت 2 cm بڑھاتی ہے۔ ربڑی پٹی پر قانون ہک کا اطلاق ہوتا ہے۔ ربڑی پٹی کی لمبائی کو 4 N کی قوت کتنا بڑھائے گی اور یہ قوت کتنا کام کرے گی؟

سوال ۶.۲۸۱: اگر 90 N کی قوت اسپرنگ کی لمبائی کو قدرتی لمبائی سے 1 m زیادہ کرتی ہو، تب اسپرنگ کی قدرتی لمبائی سے اس کی لمبائی کو 5 m زیادہ کرنے کے لیے کتنا کام درکار ہو گا؟

سوال ۶.۲۸۲: ریل گاڑی کے ڈبوں پر نصب اسپرنگ ان ڈبوں کو ایک دوسرے سے دور رکھتے ہیں اور ان کے ٹکراؤ کو محفوظ بناتے ہیں۔ ایسا ایک اسپرنگ، جس کی قدرتی لمبائی 20 cm ہے، پر 100 000 N کی قوت لاگو کرنے سے اسپرنگ کی لمبائی 12 cm ہو جاتی ہے۔ (ا) اسپرنگ کا مقیاس پلک تلاش کریں۔ (ب) اسپرنگ کو پہلا cm دبانے کے لیے کتنا کام درکار ہو گا۔ اسے دوسرا سنٹی میٹر دبانے کے لیے کتنا کام درکار ہو گا؟

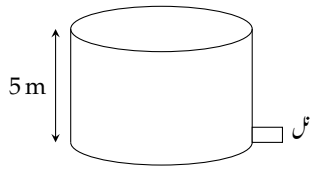
سوال ۶.۲۸۳: گھریلو استعمال کی ترازو پر 74 kg کا شخص کھڑا ہونے سے ترازو 1.5 mm دبتی ہے۔ فرض کریں کہ یہ ترازو قانون ہک کے تحت کام کرتی ہے۔ ایک شخص، جس کے ترازو پر کھڑا ہونے سے ترازو 3 mm دبتی ہو، کا وزن کتنا ہو گا؟

پانی کے نکاسی

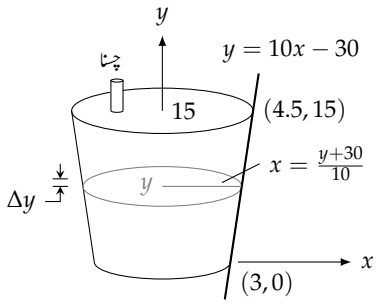
ثقلی اسراع کی قیمت عموماً $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ لی جاتی ہے۔ حقیقت میں سطح سمندر پر اس کی قیمت قطبین پر $9.832\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ اور عرضی خط استوا پر $9.780\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ ان دو قیمتوں میں فرق تقریباً 0.5 % ہے۔

سوال ۶.۲۸۴: بارانی علاقوں میں بارش کے پانی کو زیر زمین حوض میں ذخیرہ کیا جاتا ہے۔ زیر زمین حوض، جس کو شکل ۶.۱۱۷ میں دکھایا گیا ہے، پانی سے بھرا ہوا ہے۔ حوض کو خالی کرتے ہوئے پانی کو سطح زمین پر لایا جاتا ہے۔ (ا) حوض کو خالی کرنے کے لیے کتنا کام کرنا ہو گا؟ (ب) 0.25 kW کا پمپ حوض کو کتنی دیر میں خالی کرے گا؟ (ج) دکھائیں کہ ابتدائی 5 گھنٹوں میں تقریباً آدھا حوض خالی ہو جائے گا۔ (د) خط استوا پر جزو-ب کا جواب کیا ہو گا؟ قطبین پر یہ جواب کیا ہو گا؟

سوال ۶.۲۸۵: زیر زمین حوض، جس کو شکل ۶.۱۱۸ میں دکھایا گیا ہے، پانی سے بھرا ہوا ہے۔ حوض کا کنارہ سطح زمین سے 4 m نیچے ہے۔ حوض کو خالی کرتے ہوئے پانی کو سطح زمین پر لایا جاتا ہے۔ (ا) حوض کو خالی کرنے کے لیے کتنا کام کرنا ہو گا؟ (ب) 0.25 kW کا پمپ حوض کو کتنی دیر میں خالی کرے گا؟ (ج) آدھا حوض کتنی دیر میں خالی ہو گا؟ (پورا حوض خالی کرنے کے نصف دورانیہ سے کم وقت درکار ہو گا)۔ (د) خط استوا پر جزو-ب کا جواب کیا ہو گا؟ قطبین پر یہ جواب کیا ہو گا؟



شکل ۶.۱۱۹: بیلنی حوض (سوال ۶.۲۸۹)



شکل ۶.۱۲۰: مخروط مقطوع ڈبیا (پیمائش سنٹی میٹروں میں ہے۔)

سوال ۶.۲۸۶: اگر حوض کے کنارے سے 4 m بلند کے بجائے حوض کے کنارے تک پانی کو اٹھایا جائے تب مثال ۶.۳۵ میں کتنا کام درکار ہو گا؟

سوال ۶.۲۸۷: اگر مثال ۶.۳۵ میں حوض آدھا بھرا ہو، تب حوض کے کنارے سے 4 m بلندی تک پانی کو پہنچانے کے لیے کتنا کام کرنا ہو گا؟

سوال ۶.۲۸۸: ایک بیلنی حوض، جس کا رداس 4 m اور قد 10 m ہے، مٹی کے تیل سے بھرا ہوا ہے۔ مٹی کے تیل کی کثافت $0.81\ \mathrm{g\,cm^{-1}}$ ہے۔ تمام تیل کو حوض کے بالائی کنارے تک پمپ کرنے کے لیے کتنا کام کرنا ہو گا؟

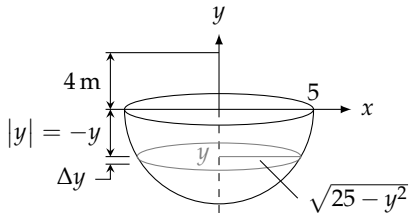
سوال ۶.۲۸۹: ایک حوض، جس کا قد 5 m ہے، سطح زمین پر پڑا ہوا ہے (شکل ۶.۱۱۹)۔ قدرتی پانی سطح زمین سے 7 m نیچے ہے۔ حوض کو اس پانی سے دو طرح بھرا جا سکتا ہے۔ (ا) پمپ کے خارجی پائپ کو حوض کے کنارے پر رکھ کر حوض کو بھرا جا سکتا ہے۔ (ب) حوض کے نچلے سر پر موجود نل کے ذریعے پانی کو حوض تک منتقل کیا جا سکتا ہے۔ دونوں تراکیب میں کون سی بہتر ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۶.۲۹۰: ایک مشروب، جس کی کثافت $0.769\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$ ہے، سے مخروط مقطوع ڈبیا بھری ہوئی ہے (۶.۱۲۰)۔ اس ڈبیا کا بالائی رداس 4.5 cm، زیریں رداس 3 cm، اور گہرائی 15 cm ہے۔ مشروب کو چنا کے ذریعہ پیا جاتا ہے جو ڈبیا کی بالائی سطح سے 2.5 cm باہر نکلا ہوا ہے۔ پورا مشروب پینے کے لیے کتنا کام کرنا ہو گا؟

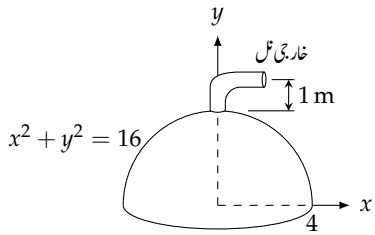
سوال ۶.۲۹۱: فرض کریں مثال ۶.۳۶ میں مخروط حوض دودھ سے بھرا ہوا ہے، جس کی کثافت $1032\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔ (ا) دودھ کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لیے کتنا کام درکار ہو گا؟ (ب) دودھ کو حوض کے کنارے سے 1 m بلندی تک پمپ کرنے کے لیے کتنا کام درکار ہو گا؟

سوال ۶.۲۹۲: **زنگ مزاحم فولاد**[۲۳] کا بڑا حوض بنانے کے لیے آپ منحنی $y = x^2, 0 \le x \le 4\ \mathrm{m}$ کو محور y کے گرد گھماتے ہیں۔ یہ حوض سمندری پانی سے بھرا ہوا ہے، جس کی کثافت تقریباً $10\,000\ \mathrm{N\,m^{-3}}$ ہے۔ حوض کو خالی کرنے کی خاطر پانی کو حوض کے کنارے تک پمپ کرنے کے لیے کتنا کام کرنا ہو گا؟

سوال ۶.۲۹۳: نصف کروی حوض، جس کا رداس 5 m ہے، پانی سے بھرا ہوا ہے (شکل ۶.۱۲۱)۔ پانی کو حوض کے بالائی کنارے سے 4 m بلندی تک پمپ کرنے کے لیے کتنا کام درکار ہو گا؟ پانی کی کثافت کو $9800\ \mathrm{N\,m^{-3}}$ لیں۔



شکل ۶.۱۲۱: نصف کروی حوض (سوال ۶.۲۹۳)



شکل ۶.۱۲۲: نصف کروی حوض (سوال ۶.۲۹۴)

سوال ۶.۲۹۴: **بنزین**[۲۴] سے بھرا ہوا نصف کروی حوض، جس کا رداس $4\,\mathrm{m}$ ہے، کو شکل ۶.۱۲۲ میں دکھایا گیا ہے۔ بنزین کی کثافت $876\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔ حوض کو خارجی نل، جو حوض کے بالائی سطح سے $1\,\mathrm{m}$ بلندی پر ہے، کے ذریعے خالی کرنے کے لیے کتنا کام کرنا ہوگا؟

سوال ۶.۲۹۵: آپ کے گاؤں میں پانی کی فراہمی کے لیے $8\,\mathrm{m}$ قد کا حوض تعمیر کیا جاتا ہے، جس کا تلا زمین سے $20\,\mathrm{m}$ بلندی پر ہے۔ زیر زمین پانی کی سطح $100\,\mathrm{m}$ نیچے ہے۔ پانی کو $10\,\mathrm{cm}$ رداس کے پائپ سے $3\,\mathrm{kW}$ پمپ کی مدد سے حوض کے تلے میں نل کے ذریعے بھرا جاتا ہے۔ خالی حوض کتنی دیر میں بھرے گا؟ (پائپ کو پانی سے بھرنے کے لیے درکار وقت کو نظر انداز کریں۔)

دیگر استعمال

سوال ۶.۲۹۶: مصنوعی سیارے کا خلائی مدار میں بھیجنا

کشش ثقل کی قیمت زمین کے مرکز سے فاصلہ r پر منحصر ہوتی ہے۔ کمیت m کے مصنوعی سیارے پر کشش ثقل درج ذیل ہوگی

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

جہاں زمین کی کمیت $M = 5.975 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ ہے، جبکہ تجاذبی مستقل $G = 6.6720 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ ہے۔ زمین کا رداس $6\,370\,000\,\mathrm{m}$ ہے۔ یوں سطح زمین سے $29\,410\,\mathrm{km}$ بلندی پر مدار تک $1000\,\mathrm{kg}$ مصنوعی سیارے کو منتقل کرنے کے لیے درج ذیل کام درکار ہوگا۔

$$W = \int_{6\,370\,000}^{35\,780\,000} \frac{1000MG}{r^2}\,\mathrm{d}r$$

حقیقت میں مصنوعی سیارہ ایک راکٹ پر نصب ہوگا، جس کو یہاں نظر انداز کیا گیا ہے۔ اس تکمل کی قیمت تلاش کریں۔ تکمل کی زیریں حد سطح زمین کو ظاہر کرتی ہے، جہاں سے سیارہ روانہ ہوگا۔

---

[۲۳] stainlessssteel
[۲۴] benzene

سوال ۶.۲۹۷: برقیوں (الیکٹرانوں) کو ایک دوسرے کے قریب لانا۔ دو برقیے، جن کے بیچ فاصلہ r ہو، کے مابین درج ذیل قوت دفع پائی جاتی ہے، جہاں $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$ برقی مستقل ہے اور $e = -1.602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ **برقیہ**[۲۵] **کا بار**[۲۶] ہے۔

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

ا. فرض کریں کہ ایک برقیہ نقطہ $(1,0)$ پر واقع ہے، جبکہ دوسرے برقیے کو محور x پر نقطہ $(-1,0)$ سے مبدا تک منتقل کیا جاتا ہے۔ ایسا کرنے کے لیے کتنا کام کرنا ہو گا؟

ب. فرض کریں ایک برقیہ $(1,0)$ اور دوسرا $(-1,0)$ پر واقع ہے۔ تیسرے برقیے کو $(5,0)$ سے $(3,0)$ تک منتقل کرنے کے لیے کتنی توانائی درکار ہو گی؟

کام اور حرکی توانائی

سوال ۶.۲۹۸: متغیر قوت $F(x)$ ایک جسم، جس کی کمیت m ہے، کو محور x پر x_1 سے x_2 تک منتقل کرتی ہے۔ جسم کی سمتی رفتار v کو $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ لکھا جا سکتا ہے۔ قانون نیوٹن $F = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ اور زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

کو استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ جسم کو x_1 سے x_2 منتقل کرنے میں درج ذیل کام درکار ہو گا

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

جہاں x_1 پر جسم کی رفتار v_1 اور x_2 پر اس کی رفتار v_2 ہے۔ طبیعیات میں $\frac{1}{2}mv^2$ کو رفتار v سے چلنے والے جسم کی **حرکی توانائی**[۲۷] کہتے ہیں۔ یوں کسی جسم کی حرکی توانائی میں تبدیلی اس جسم پر کیے گئے کام کے برابر ہو گی۔

سوال ۶.۲۹۹ تا سوال ۶.۳۰۵ میں سوال ۶.۲۹۸ کا نتیجہ استعمال کریں۔

سوال ۶.۲۹۹: ٹینس کا کھیل
ایک کھلاڑی 58 g کمیت کی گیند کو زور سے مار کر $175\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار تک پہنچاتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟

سوال ۶.۳۰۰: ایک گیند، جس کی کمیت 145 g ہو، کو کھلاڑی $145\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟

سوال ۶.۳۰۱: ایک سائیکل سوار بمع سائیکل کی کمیت 80 kg ہے۔ ساکن حالت سے $40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار تک پہنچنے کے لیے کتنی توانائی درکار ہو گی؟

---

[۲۵] electron
[۲۶] charge
[۲۷] kineticenergy

سوال ۶.۳۰۲: ایک گاڑی، جس کی کمیت 880 kg ہے، کی رفتار $40\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ سے بڑھ کر $60\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ کرنے کے لیے کتنی توانائی درکار ہو گی؟

سوال ۶.۳۰۳: فٹ بال
ایک فٹ بال، جس کی کمیت 430 g ہے، کو لات سے مار کر $95\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار تک پہنچایا جاتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟

سوال ۶.۳۰۴: ایک کھلاڑی بازو کے زور سے 180 g کمیت کی گیند کو $90\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکتا ہے۔ اس گیند پر کتنا کام کیا گیا؟

سوال ۶.۳۰۵: ایک اینٹ، جس کی کمیت 3.5 kg ہے، 4 m بلند چھت سے گرتی ہے۔ زمین پر پہنچنے کے لمحے پر اس کی حرکی توانائی کتنی ہو گی؟

۶.۹ فشار سیال اور قوت سیال

فشار p سے مراد وہ قوت ہے جو اکائی رقبہ پر عمل کرتی ہے۔ یوں اگر رقبہ S پر قوت F عمل کرتی ہو تب فشار p درج ذیل ہو گا۔

$$p = \frac{F}{S} \tag{۱}$$

مستقل گہرائی پر قوت سیال اور فشار سیال

شکل ۶.۱۲۳ میں ساکن سیال کو ایک برتن میں دکھایا گیا ہے، جہاں تل کا رقبہ S، سیال کی گہرائی h اور سیال کی کثافت ρ ہے۔ یوں سیال کا حجم Sh، کمیت ρSh، اور وزن $g\rho Sh$ ہو گا۔ سیال کے وزن کے برابر قوت $F = g\rho Sh$ رقبہ S پر عمل کرے گی۔ یوں اکائی رقبے پر قوت $g\rho h$ ہو گی، جس کو **فشار**[۲۸] p یا "دباو" کہتے ہیں۔

$$p = \rho g h \tag{۲}$$

فشار کی اکائی نیوٹن فی مربع میٹر $\mathrm{N\,m^{-2}}$ ہے۔ آپ نے دیکھا کہ فشار کی قیمت پر برتن کی صورت کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔

مستقل گہرائی کے رقبے S پر درج ذیل قوت پائی جائے گی۔

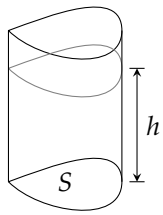
$$F = pS \tag{۳}$$

سیال میں h گہرائی پر کسی بھی رخ فشار کی قیمت مساوات ۲ دیتی ہے۔ یوں کسی بھی گہرائی پر افقی اور انتصابی دیواروں پر فشار کی قیمت ایک جیسی ہو گی۔

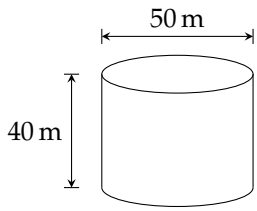
مثال ۶.۳۷: ایک بیلنی حوض میں پانی کی گہرائی 40 m ہے، جبکہ حوض کا رداس 25 m ہے (شکل ۶.۱۲۴)۔ حوض کے اطراف کی دیوار کی نچلی 1 m پٹی پر فشار سیال اور قوت سیال کتنا ہو گا؟ (پانی کی کثافت کو $\rho = 1000\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ لیں۔)

---

[۲۸] pressure



شکل ۶.۱۲۳: فشار سیال۔



شکل ۶.۱۲۴: بیلنی حوض برائے مثال ۶.۳۷

حل

اس ایک میٹر چوڑی پٹی کے نچلے کنارے پر فشار درج ذیل ہو گا۔

$$p = \rho g h = (1000)(9.8)(40) = 392\,000\,\mathrm{N\,m^{-2}}$$

ایک میٹر پٹی کا رقبہ

$$S = 2\pi r h = 2\pi(25)(1) = 50\pi\,\mathrm{m^2}$$

ہے لہٰذا اس پر کل قوت درج ذیل ہو گی۔

$$F = pS = (392000)(50\pi) = 61\,575\,216.01\,\mathrm{N}$$

□

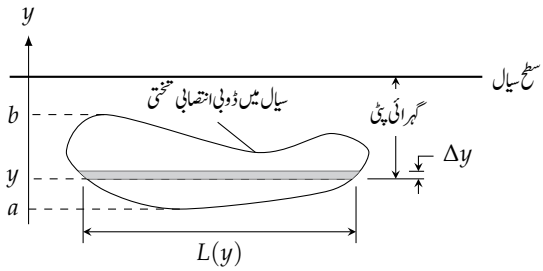
اس مثال میں پٹی کے نچلے حصے کی گہرائی 40 m اور بالائی حصے کی گہرائی 39 m تھی، لہٰذا ان پر فشار مختلف ہو گا۔ ہم نے اس حقیقت کو نظر انداز کیا۔ آئیں متغیر گہرائی کی صورت میں فشار پر غور کریں۔

متغیر گہرائی پر فشار

فرض کریں ہم کثافت ρ کے سیال میں ڈوبی ہوئی انتصابی تختی کی ایک طرف پر قوت سیال جاننا چاہتے ہیں۔ ہم تختی کو مستوی xy میں خطہ $y = a$ تا $y = b$ تصور کرتے ہیں (شکل ۶.۱۲۵)۔ ہم $[a, b]$ کی خانہ بندی کرتے ہیں۔ ہم اس خطہ کو نقاط خانہ بندی پر محور y کے عمودی فرضی سطحوں سے باریک افقی پٹیوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ ایک نمائندہ پٹی، جو y سے $y + \Delta y$ تک ہو، کی چوڑائی Δy ہو گی، جبکہ اس پٹی کے نچلے ضلع کی لمبائی $L(y)$ ہو گی۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ $L(y)$ متغیر y کا استمراری تفاعل ہے۔

نیچے سے اوپر چلتے ہوئے گہرائی کی تبدیلی سے پٹی پر فشار تبدیل ہوتا ہے۔ اب اگر پٹی کی چوڑائی بہت کم ہو، تب فشار کی اس تبدیلی کو رد کیا جا سکتا ہے اور ہم کہہ سکتے ہیں کہ پٹی پر ہر جگہ فشار وہی ہو گا جو پٹی کے نچلے کنارے پر ہے۔ یوں پٹی کی ایک طرف پر قوت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\Delta F &= (\text{رقبہ پٹی})(\text{پٹی کے نچلے کنارے پر فشار})\\ &= \rho g(\text{گہرائی پٹی})L(y)\Delta y\end{aligned}$$



شکل ۶.۱۲۵: ایک پتلی پٹی پر قوت سیال۔

پوری تختی پر قوت تخمیناً

$$\sum_a^b \Delta F = \sum_a^b \rho g(\text{گہرائی پٹی}) L(y) \Delta y \tag{۴}$$

ہو گی، جو $[a, b]$ پر استمراری تفاعل کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے یہ مجموعہ بہتر سے بہتر نتیجہ دے گا۔ ہم ان مجموعوں کی تحدیدی قیمت کو تختی پر قوت کی تعریف لیتے ہیں۔

تعریف: **تکمل برائے قوت سیال**

فرض کریں محور y پر $y = a$ سے $y = b$ تک کا خطہ، سیال میں ڈوبی ہوئی ایک تختی کو ظاہر کرتا ہے۔ مزید فرض کریں کہ y پر اس تختی کی سطح پر افقی پٹی کی بائیں سے دائیں لمبائی $L(y)$ ہے۔ اس تختی کی ایک طرف پر قوت سیال درج ذیل ہو گی۔

$$F = \int_a^b \rho g \cdot (\text{گہرائی پٹی}) \cdot L(y)\, \mathrm{d}y \tag{۵}$$

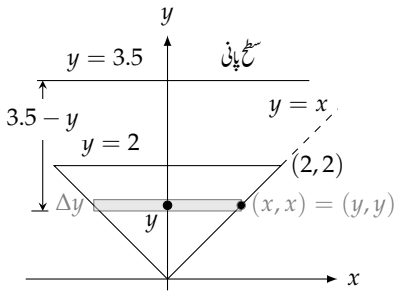
□

مثال ۶.۳۸: ایک مساوی الساقین مثلث تختی، جس کا قاعدہ $4\,\mathrm{m}$ اور قد $2\,\mathrm{m}$ ہے، پانی کے تالاب میں یوں ڈوبی ہوئی ہے کہ اس کا قاعدہ اوپر ہو۔ قاعدے پر پانی کی گہرائی $1.5\,\mathrm{m}$ ہے۔ تختی کی ایک طرف پر قوت تلاش کریں۔ (پانی کی کثافت کو $\rho = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ لیں۔)

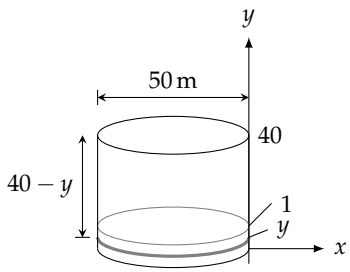
حل

ہم تختی کے نچلے راس کو محدد کے مبدا پر تصور کرتے ہیں (شکل ۶.۱۲۶)۔ یوں سطح پانی $y = 3.5$ پر ہو گی، جبکہ تختی کا بالائی کنارہ $y = 2$ پر ہو گا۔ تختی کا دایاں کنارہ $y = x$ اور بایاں کنارہ $y = -x$ ہو گا۔ یوں y پر پٹی کی لمبائی

$$L(y) = 2x = 2y$$



شکل ۶.۱۲۶: تختی پر قوت پانی (مثال ۶.۳۸)



شکل ۶.۱۲۷: بیلنی حوض برائے مثال ۶.۳۹

۹۷۵۰ اور پانی کی گہرائی $(3.5 - y)$ ہو گی۔ تختی کی ایک طرف پر پانی کی قوت درج ذیل ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
F &= \int_a^b \rho g(\text{گہرائی پٹی}) L(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 9800(3.5 - y)2y\,\mathrm{d}y \\
&= 9800 \int_0^2 (7y - 2y^2)\,\mathrm{d}y \\
&= 9800 \left[\frac{7y^2}{2} - \frac{2y^3}{3}\right]_0^2 = 84\,933\,\mathrm{N}
\end{aligned}
$$

۹۷۵۱ □

۹۷۵۲ **قوت سیال کا حصول**

۹۷۵۳ کسی بھی محددی نظام میں سیال میں ڈوبی ہوئی انتصابی تختی کی ایک طرف پر قوت سیال حاصل کرنے کے لیے درج ذیل اقدامات کریں۔

۹۷۵۴ ا. نمائندہ افقی پٹی کی لمبائی اور گہرائی کے عمومی کلیے تلاش کریں۔

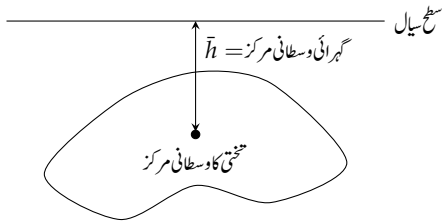
۹۷۵۵ ب. انہیں آپس میں ضرب دے کر سیال کی کثافت اور ثقلی مستقل $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ سے ضرب دے کر تکمل کو موزوں حدود کے بیچ حل کریں۔

۹۷۵۶ مثال ۶.۳۹: ہم اب مثال ۶.۳۷ میں بیلنی حوض کی نچلی ایک میٹر چوڑی پٹی پر قوت سیال کی بالکل درست قیمت معلوم کر سکتے ہیں۔

۹۷۵۷ ہم حوض کے تل کو $y = 0$ پر رکھتے ہیں (شکل ۶.۱۲۷)، جبکہ محدد y کو اوپر کے رخ رکھتے ہیں۔ ہم y پر نمائندہ افقی پٹی کے لیے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

۹۷۵۸ ا. گہرائی پٹی: $40 - y$

۹۷۵۹ ب. لمبائی پٹی: 50π



شکل ۶.۱۲۸: قوت سیال اور وسطانی مرکز۔

۹۷۶۰ یوں ایک میٹر چوڑی پٹی پر قوت درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} F &= \int_0^1 \rho g(\text{گہرائی})(\text{لمبائی})\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \rho g(40-y)(50\pi)\,\mathrm{d}y \\ &= 9800(50\pi)\int_0^1 (40-y)\,\mathrm{d}y = 60\,805\,525.81\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

۹۷۶۱ □

۹۷۶۲ اس مثال میں حاصل قوت مثال ۶.۳۷ سے کچھ کم ہے، جو متوقع تھا۔

۹۷۶۳ **قوت سیال اور وسطانی مرکز**

۹۷۶۴ اگر ہمیں سیال میں ڈوبی ہوئی انتصابی تختی کا وسطانی مرکز معلوم ہو، تب ہم اس تختی کی ایک طرف پر قوت سیال باآسانی معلوم کر سکتے ہیں (شکل ۶.۱۲۸)۔
۹۷۶۵ مساوات ۵ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} F &= \int_a^b \rho g \times (\text{گہرائی پٹی}) \times L(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \rho g \int_a^b (\text{گہرائی پٹی}) \times L(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \rho g \times (\text{تختی کے خطے کا سطح سیال پر لکیر کے لحاظ سے معیار اثر}) \\ &= \rho g \times (\text{تختی کے وسطانی مرکز کی گہرائی}) \times (\text{تختی کا رقبہ}) \end{aligned}$$

۹۷۶۶ **قوت سیال اور وسطانی مرکز**

۹۷۶۷ سیال میں ڈوبی ہوئی انتصابی تختی کی ایک طرف پر قوت سیال F معلوم کرنے کے لیے ρg ، تختی کے وسطانی مرکز کی گہرائی $\bar{h}$ ، اور تختی کے رقبہ S کا
۹۷۶۸ حاصل ضرب لیں۔

$$F = \rho g \bar{h} S \tag{۶}$$

مثال ۶.۴۰: ایک مثلث تختی پر قوت سیال کو مثال ۶.۳۸ میں تلاش کیا گیا۔ مساوات ۱۶ استعمال کرتے ہوئے اس کو دوبارہ تلاش کریں۔

حل

مثلث کا وسطانی مرکز محدد y پر تلا سے راس کی جانب ایک تہائی فاصلے پر واقع ہے (شکل ۶.۱۲۶)، لہٰذا $\bar{h} = 1.5 + 2/3 = \frac{13}{6}$ ہو گا۔ مثلث کا رقبہ معلوم کرتے ہیں۔

$$S = \frac{1}{2}(\text{قاعدہ})(\text{قد}) = \frac{1}{2}(4)(2) = 4$$

یوں تختی کی ایک طرف پر قوت درج ذیل ہو گی۔

$$F = \rho g \bar{h} S = (1000 \times 9.8)\left(\frac{13}{6}\right)(4) = 84\,933\,\text{N}$$

□

مساوات ۶ کہتی ہے کہ سیال میں ڈوبی ہوئی انتصابی تختی پر قوت سیال وہی ہو گی جو تختی کے پورے رقبے کو تختی کے وسطانی مرکز، جو $\bar{h}$ گہرائی پر ہے، منتقل کرنے سے حاصل ہو گی۔ عموماً اشکال کا وسطانی مرکز جدول سے دیکھا جا سکتا ہے اور یوں مساوات ۶ قوت سیال معلوم کرنے کا ایک آسان ذریعہ بنتا ہے۔ ظاہر ہے کہ وسطانی مرکز حاصل کرتے ہوئے کسی نے مساوات ۵ کے تکمل کی طرح کا تکمل حل کرتے ہوئے وسطانی مرکز حاصل کیا ہو گا۔ چونکہ اس وقت آپ سیکھ رہے ہیں، لہٰذا فی الحال قوت سیال دریافت کرنے کے لیے مسئلے کا خاکہ بنائیں اور مساوات ۱۵ استعمال کریں۔

سوالات

سوال ۶.۳۰۶: حوض کی اندرونی سطح پر مثال ۶.۳۷ میں کل قوت سیال کتنی ہو گی؟

سوال ۶.۳۰۷: اگر مثال ۶.۳۷ میں حوض نصف بھرا ہو، تب نچلی ایک میٹر پٹی پر قوت سیال کتنی ہو گی؟

سوال ۶.۳۰۸: مثلث تختی کی ایک طرف پر مثال ۶.۳۸ میں قوت سیال دریافت کی گئی۔ اس تختی پر شکل ۶.۱۲۹ کے محدد استعمال کرتے ہوئے قوت سیال دوبارہ معلوم کریں۔

سوال ۶.۳۰۹: مثلث تختی کی ایک طرف پر مثال ۶.۳۸ میں قوت سیال دریافت کیا گیا۔ اس تختی پر شکل ۶.۱۳۰ کے محدد استعمال کرتے ہوئے قوت سیال دوبارہ معلوم کریں۔

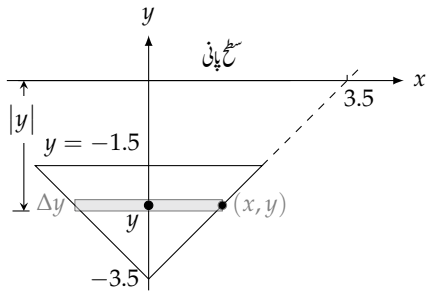
سوال ۶.۳۱۰: اگر مثال ۶.۳۸ میں تختی کو مزید دو میٹر نیچے منتقل کیا جائے، تب اس کی ایک طرف پر قوت سیال کتنی ہو گی؟

سوال ۶.۳۱۱: اگر مثال ۶.۳۸ میں تختی کو اتنا اوپر منتقل کیا جائے کہ اس کا تلا سطح پانی پر ہو، تب اس کی ایک طرف پر قوت سیال کتنی ہو گی؟

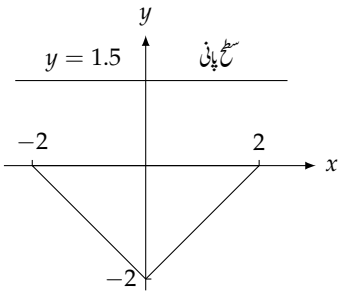
سوال ۶.۳۱۲: مساوی الساقین مثلث تختی کو شکل ۶.۱۳۱ میں دکھایا گیا ہے، جس کا قاعدہ سطح پانی سے 1 m نیچے ہے۔

ا. تختی کی ایک طرف پر قوت سیال تلاش کریں۔

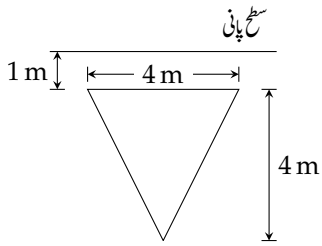
ب. اگر صاف پانی کے بجائے سمندری پانی ہو، تب قوت سیال کتنی ہو گی؟ سمندری پانی کی کثافت $1029\ \text{kg m}^{-3}$ ہے۔



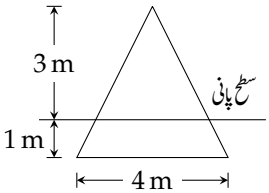
شکل ۶.۱۲۹: مثلث تختی (سوال ۶.۳۰۸)



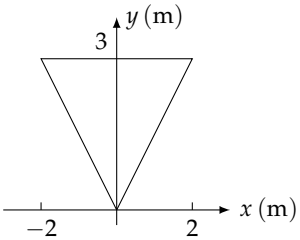
شکل ۶.۱۳۰: مثلث تختی (سوال ۶.۳۰۹)



شکل ۶.۱۳۱: مثلث الساقین (سوال ۶.۳۱۲)



شکل ۶.۱۳۲: مثلث الساقین (سوال ۶.۳۱۳)



شکل ۶.۱۳۳: مثلث الساقین (سوال ۶.۳۱۴)

سوال ۶.۳۱۳: اگر گزشتہ سوال میں تختی کو قاعدے کے گرد آدھا چکر گھمایا جائے، تب اس کا کچھ حصہ پانی سے باہر ہو گا (شکل ۶.۱۳۲)۔ اب تختی کی ایک طرف پر قوت سیال کتنی ہو گی؟

سوال ۶.۳۱۴: ایک حوض کی آمنے سامنے انتصابی دیواریں مساوی الساقین مثلث کی شکل کی ہیں (شکل ۶.۱۳۳)۔

ا. پانی سے بھرے ہوئے حوض کی ایک انتصابی دیوار پر قوت سیال تلاش کریں۔

ب. حوض کی انتصابی دیوار پر قوت کو آدھا کرنے کے لیے پانی کی سطح کو کتنا کم کرنا ہو گا؟

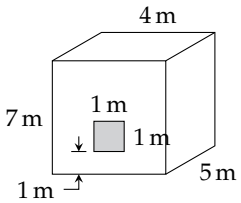
ج. کیا حوض کی لمبائی کا حوض کی انتصابی دیوار پر قوت سیال کا اثر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۶.۳۱۵: پانی کے حوض کی آمنے سامنے انتصابی دیواریں چوکور ہیں، جہاں چوکور کا ضلع 2 m ہے۔

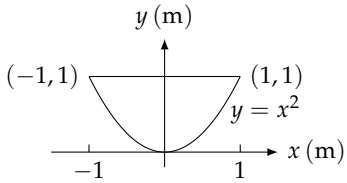
ا. پانی سے بھرے ہوئے حوض کی ایک انتصابی دیوار پر قوت سیال تلاش کریں۔

ب. حوض کی انتصابی دیوار پر قوت کو آدھا کرنے کے لیے پانی کی سطح کو کتنا کم کرنا ہو گا؟

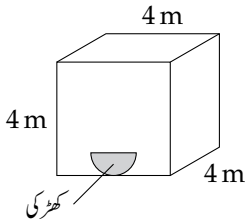
ج. کیا حوض کی لمبائی کا حوض کی انتصابی دیوار پر قوت سیال کا اثر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔



شکل ۶.۱۳۵: حوض میں چوکور کھڑکی (سوال ۶.۳۲۳)۔



(ب) قطع مکافی کھڑکی کی تفصیل۔



(ا) حوض میں کھڑکی۔

شکل ۶.۱۳۴: حوض میں قطع مکافی کھڑکی (سوال ۶.۳۲۲)

سوال ۶.۳۱۶: مچھلیاں دیکھنے کے لیے ایک مچھلی گھر کی دیوار میں 2 m چوڑا اور 1 m اونچا شیشہ نصب ہے۔ شیشے کا تل سطح پانی سے 1.25 m نیچے ہے۔ شیشے پر قوت پانی کتنی ہو گی۔ (سمندری پانی کی کثافت $1029\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔)

سوال ۶.۳۱۷: مچھلیوں کے حوض کا تل $1.5 \times 0.5\ \mathrm{m}$ اور اس کی گہرائی 0.75 m ہے۔ پانی کی سطح بالائی کنارے سے 5 cm نیچے ہے۔

ا. حوض کے اطراف پر قوت سیال دریافت کریں۔

ب. حوض کے تل پر قوت سیال دریافت کریں۔

سوال ۶.۳۱۸: دودھ کے ڈبے کا تل $10\ \mathrm{cm} \times 10$ اور اس کا قد 20 cm ہے۔ دودھ سے بھرے ہوئے ڈبے کی ایک طرف پر قوت سیال معلوم کریں۔ کثافت دودھ کو $1032\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ لیں۔

سوال ۶.۳۱۹: زیتون کے تیل کے ڈبے کا تل $14 \times 12\ \mathrm{cm}$ اور قد 26.5 cm ہے۔ بھرے ہوئے ڈبے کے تل اور ایک طرف پر قوت سیال تلاش کریں۔ زیتون کے تیل کی کثافت $930\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ لیں۔

سوال ۶.۳۲۰: ایک دائری تختی کا آدھا حصہ پانی میں انتصابی ڈوبا ہوا ہے۔ تختی کا رداس 0.25 m ہے۔ تختی کی ایک طرف پر قوت سیال تلاش کریں۔

سوال ۶.۳۲۱: دودھ کی فراہمی کے لیے ٹرک پر نصب 2 m قطر کا قائمہ بیلنی حوض افقی رکھ کر استعمال کیا جاتا ہے۔ آدھے بھرے حوض کے ایک دائری سرے پر قوت سیال تلاش کریں۔

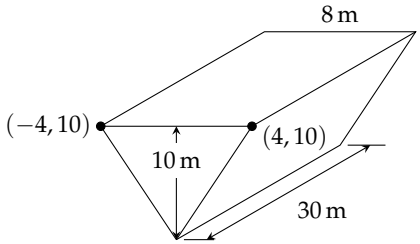
سوال ۶.۳۲۲: ایک مکعب حوض کی دیوار میں قطع مکافی کھڑکی دی گئی ہے، جو 150 000 N کی قوت برداشت کر سکتی ہے (شکل ۶.۱۳۴)۔ حوض میں $25\,000\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$ کثافت کا سیال بھرا جائے گا۔

ا. جب حوض میں سیال کی گہرائی 1.25 m ہو، تب کھڑکی پر قوت سیال کتنی ہو گی؟

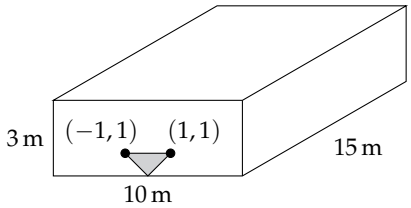
ب. حوض میں سیال کی کتنی گہرائی تک کھڑکی محفوظ ہو گی؟

سوال ۶.۳۲۳: پانی کے مکعب حوض کی دیوار میں $1\ \mathrm{m} \times 1$ چوکور کھڑکی دی گئی ہے، جو 40 000 N کی قوت برداشت کر سکتی ہے (شکل ۶.۱۳۵)۔

ا. اگر حوض میں پانی کی گہرائی 3 m ہو، تب کھڑکی پر قوت سیال کتنی ہو گی؟



شکل ۶.۱۳۶: حوض کے آخری سرے تکونی ہیں (سوال ۶.۳۲۴)۔



شکل ۶.۱۳۷: پانی کا مستطیل تالاب (سوال ۶.۳۲۵)

ب. حوض میں سیال کی کتنی گہرائی تک کھڑ کی محفوظ ہو گی؟

سوال ۶.۳۲۴: پانی کا حوض شکل ۶.۱۳۶ میں دکھایا گیا ہے۔ حوض کے آخری تکونی سرے $1\,200\,000\ \mathrm{N}$ قوت برداشت کر سکتے ہیں۔ حوض میں پانی کا وہ حجم تلاش کریں جس پر حوض کے تکونی سرے اپنی برداشت کی حد پر ہوں گے۔

سوال ۶.۳۲۵: ایک مستطیل تالاب شکل ۶.۱۳۷ میں دکھایا گیا ہے، جس کی ایک طرف میں تکونی کھڑ کی دی گئی ہے، جو $62\,000\ \mathrm{N}$ کی قوت برداشت کر سکتی ہے۔ خالی تالاب میں $10\ \mathrm{m^3\ h^{-1}}$ کی شرح سے پانی بھرا جا رہا ہے۔ تکونی کھڑ کی کتنی دیر میں اپنی برداشت کی حد پر ہو گی؟

سوال ۶.۳۲۶: ایک انتصابی تختی، جس کا قد a اور چوڑائی b ہے، کو کثافت ρ کے سیال میں ڈبویا جاتا ہے۔ تختی کا بالائی کنارہ سطح سیال پر ہے۔ تختی کے لمبے کنارے پر اوسط فشار سیال کتنا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۶.۳۲۷: دکھائیں کہ سوال ۶.۳۲۶ میں تختی کی ایک طرف پر قوت کی مقدار سوال ۶.۳۲۶ میں حاصل اوسط فشار اور تختی کے رقبے کا حاصل ضرب ہو گی۔

۶.۱۰ بنیادی نقش اور نمونہ سازی کے اطلاقات

اس باب میں ریمان مجموعے کے استعمال سے ہم نے مقداروں کا حساب کرنا سیکھا۔ یہ عمل درج ذیل تین اقدامات پر مشتمل ہے۔

ا. مطلوبہ مقدار کو ایک یا ایک سے زائد تفاعل سے ظاہر کیا جاتا ہے، جو بند وقفہ $[a, b]$ پر استمراری ہوں۔

ب. وقفہ $[a, b]$ کی خانہ بندی کر کے ہر ذیلی وقفے میں ایک نقطہ c_k منتخب کیا جاتا ہے۔ k ویں ذیلی وقفے کی لمبائی Δx_k ہو گی۔

مطلوبہ مقدار کی تخمینی قیمت کو مجموعے کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔

اس مجموعے کو وقفہ $[a, b]$ پر استمراری تفاعل کا ریمان مجموعہ کہا جاتا ہے۔

ج. خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے ریمان مجموعہ بہتر سے بہتر نتیجہ دے گا۔

ریمان مجموعے کی حد قطعی تکمل ہو گی۔

قطعی تکمل استعمال کرتے ہوئے مطلوبہ مقدار کا حساب لگایا جاتا ہے۔

درج بالا اقدام سے لکیر کی لمبائی، خطے کا رقبہ، اجسام کا حجم، کام، وغیرہ کا حساب ممکن ہے۔

حقیقت میں انجینئری، حیاتیات، علم کیمیا، اقتصادیات، ارضیات، طب، اور دیگر شعبوں میں ہزاروں کی تعداد میں مسائل کو ان اقدامات سے حل کیا جا سکتا ہے۔

اس حصے میں ان اقدامات پر دوبارہ غور کیا جائے گا اور کئی نئے تکمل متعارف کیے جائیں گے، جو ان اقدامات سے پیدا ہوتے ہیں۔

فاصلہ بالمقابل ہٹاؤ

اگر کسی محددی لکیر پر ایک جسم کا مقام تفاعل $s(t)$ دیتا ہو اور یہ جسم ایک ہی سمت میں حرکت کرتا ہو، تب $t = a$ سے $t = b$ تک جسم کے سمتی رفتار تفاعل $v(t)$ کا تکمل اس دورانیے میں طے شدہ فاصلہ دے گا۔ اگر جسم اس دورانیے میں سمت تبدیل کرتا ہو، تب طے شدہ فاصلہ حاصل کرنے کے لیے ہمیں جسم کی رفتار $|v(t)|$ کا تکمل لینا ہوگا۔ جسم کی سمتی رفتار کا تکمل جسم کا **ہٹاؤ**[29] $s(b) - s(a)$ دے گا، جو اس کے ابتدائی اور اختتامی مقامات کے بیچ فاصلہ ہے۔

یہ دیکھنے کے لیے ہم وقتی وقفہ $a \leq t \leq b$ کی خانہ بندی کرتے ہیں، جہاں k ویں ذیلی وقفے کی لمبائی Δt_k ہے۔ اگر Δt_k بہت کم ہو، تب دورانیہ t_{k-1} تا t_k میں جسم کی سمتی رفتار $v(t)$ میں تبدیلی قابل نظر انداز ہوگی، لہٰذا اس ذیلی وقفے کے دائیں سرے پر جسم کی سمتی رفتار $v(t_k)$ کو ذیلی وقفہ پر جسم کی سمتی رفتار تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں k ویں ذیلی وقفے کے دوران جسم کے مقام میں تبدیلی درج ذیل ہوگی۔

$$v(t_k)\Delta t_k$$

اگر $v(t_k)$ مثبت ہو، تب یہ تبدیلی مثبت ہوگی، اور اگر $v(t_k)$ منفی ہو تب، یہ تبدیلی منفی ہوگی۔ دونوں صورتوں میں k ویں ذیلی وقفے میں جسم

$$|v(t_k)|\,\Delta t_k$$

فاصلہ طے کرے گا۔ یوں پورے وقفے میں جسم کل درج ذیل فاصلہ طے کرے گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} |v(t_k)|\,\Delta t_k \tag{۱}$$

مساوات ۱ میں مجموعہ، وقفہ $[a, b]$ پر تفاعل رفتار $|v(t)|$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے یہ تخمینی مجموعہ بہتر سے بہتر نتیجہ دے گا۔ یوں ایسا معلوم ہوتا ہے کہ وقفہ $[a, b]$ میں جسم کا طے شدہ فاصلہ حاصل کرنے کے لیے درج ذیل تکمل استعمال کیا جا سکتا ہے۔

$$\text{طے شدہ فاصلہ} = \int_a^b |v(t)|\,\mathrm{d}t \tag{۲}$$

یہ ریاضیاتی نمونہ ہر موقع پر بالکل درست فاصلہ دیتا ہے۔

اگر ہم جاننا چاہتے ہیں کہ وقتی دورانیے کے اختتام پر ابتدائی مقام سے جسم کتنا دور ہوگا، تب ہم $v(t)$ کا تکمل، نہ کہ $|v(t)|$ کا تکمل لیں گے۔

---

[29] displacement

۹۸۶۰ آئیں دیکھیں ایسا کیوں ہو گا۔ فرض کریں کہ تفاعل $s(t)$ جسم کا مقام دیتا ہے اور F تفاعل v کا ضد تفرق ہے۔ تب

$$s(t) = F(t) + C$$

۹۸۶۱ ہو گا، جہاں C مستقل ہے۔ یوں لمحہ $t = a$ سے $t = b$ تک جسم کا ہٹاؤ

$$s(b) - s(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t$$

۹۸۶۲ ہو گا یعنی:

$$\text{ہٹاؤ} = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t \qquad (۳)$$

۹۸۶۳ مثال ۶.۴۱: ایک لکیر پر لمحہ $t = 0$ سے لمحہ $t = \frac{3\pi}{2}\,\mathrm{s}$ تک ایک جسم کی سمتی رفتار $v(t) = 5\cos t\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ یہ جسم کل کتنا
۹۸۶۴ فاصلہ طے کرتا ہے؟ اس کا کل ہٹاؤ کتنا ہو گا؟

۹۸۶۵ **حل**

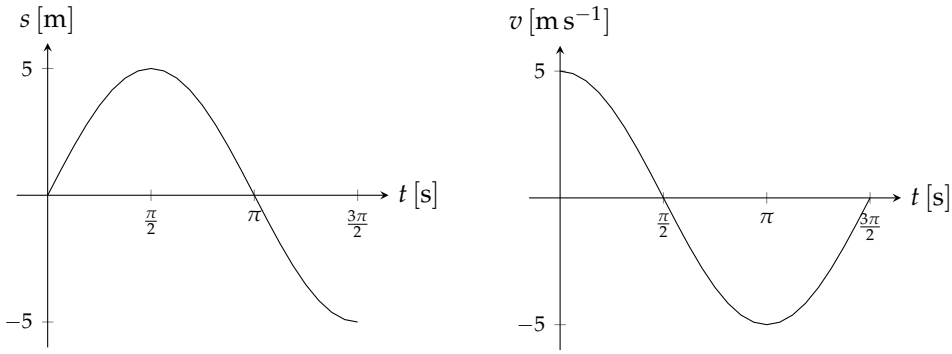
۹۸۶۶

$$\begin{aligned}
\text{طے شدہ فاصلہ} &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} |5\cos t|\,\mathrm{d}t \qquad \text{رفتار کا تکمل فاصلہ ہو گا}\\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\cos t\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-5\cos t)\,\mathrm{d}t\\
&= 5\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - 5\sin t\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\\
&= 5(1-0) - 5(-1-1) = 5 + 10 = 15\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

۹۸۶۷

$$\begin{aligned}
\text{ہٹاؤ} &= \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 5\cos t\,\mathrm{d}t \qquad \text{سمتی رفتار کا تکمل ہٹاؤ ہو گا}\\
&= 5\sin t\Big]_0^{\frac{3\pi}{2}} = 5(-1) - 5(0) = -5\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

۹۸۶۸ اس دورانیے میں جسم $5\,\mathrm{m}$ آگے اور $10\,\mathrm{m}$ پیچھے سفر کرتا ہے۔ یوں یہ $15\,\mathrm{m}$ فاصلہ طے کرتا ہے، جبکہ اس کا ہٹاؤ $-5\,\mathrm{m}$ ہو گا (شکل ۶.۱۳۸)۔
۹۸۶۹ □



(ب) ابتدائی نقطہ $s(0)$ سے جسم کا ہٹاؤ۔ (ا) سمتی رفتار تفاعل۔

شکل ۶.۱۳۸: سمتی رفتار تفاعل اور ہٹاؤ (مثال ۶.۴۱)

قاعدہ دو لس

آپ جانتے ہیں کہ چننے کے بعد سیب کا ذائقہ وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ سیب میں شکر وقت کے ساتھ نشاستے میں تبدیل ہوتی ہے۔ سیب میں نشاستے کی مقدار معلوم کرنے کے لیے ہم سیب کے ایک باریک کتلے کو خوردبین میں دیکھتے ہیں۔ نشاستہ کے ہر دانے کی سطح عمودی تراش میں خوردبین سے صاف نظر آتی ہے، لہٰذا کتلے کی سطح میں نشاستے کے رقبے اور عمودی تراش کے رقبے کا تناسب معلوم کیا جا سکتا ہے۔ یہ دو بُعدی تناسب سیب میں نشاستہ کے تین بُعدی تناسب کے برابر ہو گا۔ دو بُعدی اور تین بُعدی تناسب کی یکسانیت اوسط کی قیمت کے تصور پر مبنی ہے۔

فرض کریں ہم کسی ٹھوس جسم میں دانہ دار مادّہ کی تناسب جاننا چاہتے ہیں۔ ہم ٹھوس جسم سے موزوں نمونہ حاصل کرتے ہیں جس کو کاٹ کر ایک مکعب حاصل کیا جاتا ہے۔ اس مکعب کا ضلع L ہے۔ اس مکعب کو شکل ۶.۱۳۹ میں دکھایا گیا ہے جہاں مکعب کا ضلع محور x پر ہے۔ ہم وقفہ $[0, L]$ کے عمودی سطحوں سے اس مکعب کو کتلوں میں تقسیم کرتے ہیں۔ فرض کریں x پر دانہ دار مادے کے رقبے کا تناسب $r(x)$ ہے۔ فرض کریں کہ $r(x)$ متغیر x کا استمراری تفاعل ہے۔

اب وقفہ $[0, L]$ کی خانہ بندی کریں۔ نقاط خانہ بندی پر محور x کے عمودی سطحوں سے مکعب کو کتلوں میں تقسیم کریں۔ k ویں ذیلی وقفے کی لمبائی Δx_k ہو گی، جو نقطہ x_{k-1} اور نقطہ x_k پر موجود سطحوں کے بیچ فاصلہ ہے۔ اگر یہ سطحیں کافی قریب قریب ہوں، تب یہ دانوں کو بیلنی شکل میں کاٹیں گی۔ ان بیلنوں کا قاعدہ x_k پر ہو گا۔ ان سطحوں کے بیچ دانہ دار مادّہ کا حجمی تناسب وہی ہو گا جو x_k پر سطح میں دانہ دار مادّہ کا سطحی تناسب ہے، جو ان بیلنوں کے قاعدے کے برابر ہے، جو از خود تقریباً $r(x)$ ہو گا۔ یوں دو قریبی سطحوں کے بیچ دانہ دار مادّہ کی مقدار درج ذیل ہو گی۔

$$(\text{تناسب}) \times (\text{کتلے کا حجم}) = r(x)L^2\Delta x_k$$

پورے مکعب میں دانہ دار مادّے کی مقدار

$$\sum_{k=1}^{n} r(x)L^2\Delta x_k$$

ہو گی، جو وقفہ $[0, L]$ پر تفاعل $r(x)L^2$ کا ریمان مجموعہ ہے۔ ہم توقع کرتے ہیں کہ خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب تر کرنے سے یہ مجموعہ بہتر سے بہتر نتیجہ دے گا، لہٰذا درج ذیل تکمل، جو ریمان مجموعہ کی حد کو ظاہر کرتا ہے، مکعب میں دانہ دار مادّہ کی مقدار دے گا۔

$$\int_0^L r(x)L^2\,\mathrm{d}x$$

اس مقدار کو مکعب کے حجم L^3 سے تقسیم کرنے سے مکعب میں دانہ دار مادّہ کا تناسب حاصل ہو گا۔ اگر ہم نے موزوں نمونی مکعب منتخب کیا ہو تب پورے ٹھوس جس میں دانہ دار مادّہ کا تناسب وہی ہو گا جو اس نمونی مکعب میں ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\text{مکعب میں دانہ دار مادّے کا تناسب} &= \text{ٹھوس جسم میں دانہ دار مادّے کا تناسب}\\
&= \frac{\int_0^L r(x)L^2\,\mathrm{d}x}{L^3}\\
&= \frac{1}{L}\int_0^L r(x)\,\mathrm{d}x\\
&= \text{قیمت } r \text{ پر } [0, L] \text{ کی اوسط قیمت}\\
&= \text{نمائندہ سطح عمودی تراش میں دانہ دار مادے کا سطحی تناسب}
\end{aligned}$$

یہ **قاعدہ دولس**[۳۰] ہے، جسے فرانسیسی ماہر ارضیات اشیلہ ارنسٹ دولس $[1817 - 1881]$ نے دریافت کیا۔ یوں وقفہ $[0, L]$ پر $r(x)$ کی اوسط قیمت $\bar{r}$ سے ٹھوس جسم میں دانہ دار مادے کا تناسب حاصل ہو گا۔ حقیقت میں کئی رقبہ عمودی تراش پر $\bar{r}$ حاصل کر کے ان کی اوسط لی جاتی ہے۔

جناب دولس پتھر میں دانہ دار مادّے کے تناسب میں دلچسپی رکھتے تھے۔ وہ نمونی پتھر کی ایک سطح کو اچھی طرح چمکدار بنا کر سطح کے برابر مومی کاغذ کو چمکیلی سطح پر رکھ کر دانہ دار خطوں کی نشاندہی کرتے۔ کاغذ کا وزن کرنے کے بعد، دانہ دار خطوں کو کاغذ سے کاٹ کر کاغذ کا وزن دوبارہ کرتے۔ یوں دانہ دار خطوں کے رقبے کا تناسب حاصل کیا جاتا۔ یہ ترکیب آج بھی پٹرول کے تیل کی تلاش میں استعمال کی جاتی ہے۔

ناکارہ تکمل، ناکارہ نمونہ کشی

بعض اوقات ریمان مجموعے سے حاصل تکمل ہمارے کام آتا ہے اور بعض اوقات کسی کام کا نہیں ہوتا۔ اس کا دارومدار مسئلے کی نمونہ کشی پر ہوتا ہے۔ بعض طریقہ کار موزوں اور بعض غیر موزوں ہوتے ہیں۔ آئیں ایک غیر موزوں ریمان مجموعے کی مثال دیکھیں۔

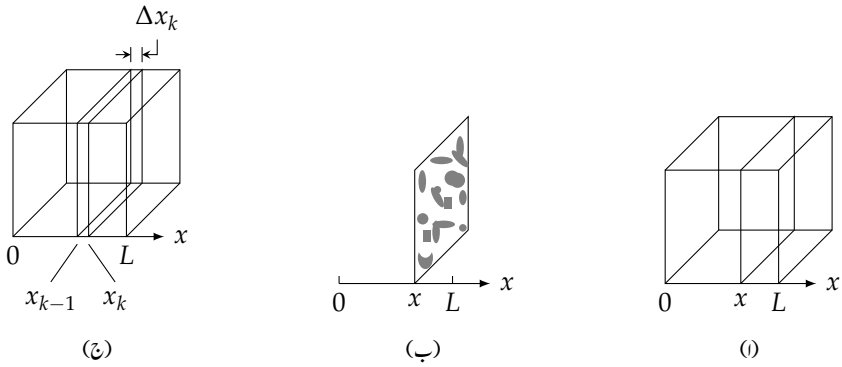
ہم شکل ۶.۱۴۰ میں سطحی رقبہ تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ مخروطی ٹکیاں لینے سے شکل ۶.۱۴۰-احاصل ہوتا ہے جس سے سطحی رقبے کا کلیہ

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \tag{۴}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یہ کلیہ ہر مرتبہ بالکل درست نتیجہ دیتا ہے، جو دیگر ذرائع سے حاصل معلومات کے عین مطابق ہوتا ہے۔

---

[۳۰] Delesse'srule



شکل ۶.۱۳۹: قاعدہ دولس کے مراحل۔

(ا) سطحی رقبہ مخروطی پٹیوں سے حاصل ہوتا ہے۔ (ب) سطحی رقبہ بیلنی پٹیوں سے حاصل نہیں ہوتا۔

شکل ۶.۱۴۰: مخروط پٹی لینے سے کارآمد تکمل جبکہ بیلنی پٹی سے غیر کارآمد تکمل حاصل ہو گا۔

۹۸۹۸ آئیں شکل ۶.۱۴۰-ب کی طرح بیلنی پٹیاں لے کر ریمان مجموعہ حاصل کر کے دیکھیں۔ یہ ریمان مجموعہ بھی مرتکز ہے جو درج ذیل نسبتاً آسان تکمل دیتا ہے۔

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\,\mathrm{d}x \tag{۵}$$

۹۸۹۹ ہم کہہ سکتے ہیں کہ حجم کی تلاش میں ہم نے بیلنی پٹیاں استعمال کیں، لہٰذا یہاں بھی ان کا استعمال درست ہو گا۔ حقیقت میں مساوات ۵ کوئی پیش گوئی نہیں کرتی
۹۹۰۰ اور نہ ہی اس سے کبھی درست نتائج حاصل ہوتے ہیں، جو دیگر تراکیب سے حاصل جوابات کے ساتھ مشابہت رکھتے ہوں۔ نمونہ کشی کے دوران موازنے کے
۹۹۰۱ قدم پر یہ کلیہ ناکام ثابت ہوتا ہے۔

۹۹۰۲ یاد رہے، اگر آپ ایک بہت اچھا نظر آنے والا تکمل حاصل کرنے میں کامیاب ہوں، تو اس کا ہرگز یہ مطلب نہیں کہ حاصل تکمل درست نتائج بھی دے گا۔ آپ
۹۹۰۳ کو تکمل کے نتائج کو پرکھنا بھی ہو گا۔

مسئلہ پاپس

سطح طواف کے رقبے اور جسم طواف کے حجم کا وسطانی مراکز کے ساتھ تعلق **مسئلہ پاپس**[۳۱] پیش کرتا ہے[۳۲]۔

مسئلہ ۶.۱: **مسئلہ پاپس برائے حجم** اگر مستوی خطے کو سطح مستوی میں موجود لکیر کے گرد گھمایا جائے، جہاں خطے کو لکیر قطع نہ کرتی ہو، تب جسم طواف کا حجم خطے کے رقبے اور ایک چکر کے دوران وسطانی نقطے کے طے کردہ فاصلے کے حاصل ضرب کے برابر ہو گا۔ اگر خطے کا رقبہ S اور وسطانی نقطے کا محور سے فاصلہ ρ ہو، تب جسم طواف کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = 2\pi\rho S \tag{۶}$$

ثبوت: ہم محور طواف کو محور x اور خطہ R کو ربع اول میں لیتے ہیں۔ ہم y پر، محور y کے عمودی، خطے کی عمودی تراش کی لمبائی کو $L(y)$ سے ظاہر کرتے ہیں (شکل ۶.۱۴۱)۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ $L(y)$ استراری ہے۔ اس خطے کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔

ہم نلکی خول کی ترکیب سے اس جسم طواف کا حجم تلاش کرتے ہیں۔

$$H = \int_c^d 2\pi(\text{رداس خول})(\text{قد خول})\,\mathrm{d}y = 2\pi\int_c^d yL(y)\,\mathrm{d}y \tag{۷}$$

خطہ R کے وسطانی مرکز کا y محدد $\bar{y}$ درج ذیل ہو گا

$$\bar{y} = \frac{1}{S}\int_c^d yL(y)\,\mathrm{d}y$$

جس کو مساوات ۷ کے آخری تکمل میں پُر کرنے سے $H = 2\pi\bar{y}S$ ملتا ہے۔ اس میں رداس $\bar{y}$ کو ρ سے ظاہر کرتے ہوئے $H = 2\pi\rho S$ حاصل ہوتا ہے۔

□

مثال ۶.۴۲: رداس a کے دائری قرص کو محور کے گرد گھما کر اندرسہ[۳۳] پیدا کیا جاتا ہے (شکل ۶.۱۴۲)۔ قرص کے مرکز اور محور کے بیچ فاصلہ $b \geq a$ ہے۔ اس اندرسے کا حجم درج ذیل ہو گا۔

$$H = 2\pi(b)(\pi a^2) = 2\pi^2 ba^2$$

□

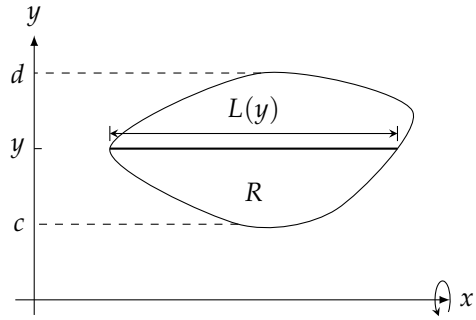
مثال ۶.۴۳: نصف کرہ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔

---

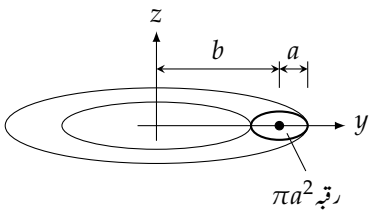
[۳۱] Pappus'stheorem

[۳۲] اسکندریا کا رہائشی قدیم یونانی ریاضی دان۔ مسائل پاپس تقریباً 1700 سال قدیم ہیں۔

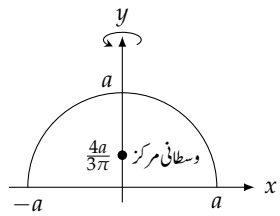
[۳۳] torus



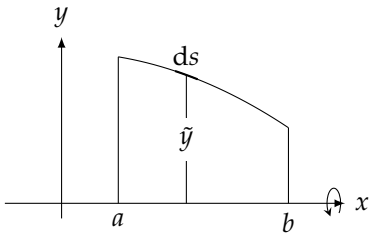
شکل ۶.۱۴۱: خطہ R کو ایک بار محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔



شکل ۶.۱۴۲: اندرسہ (مثال ۶.۴۲)



شکل ۶.۱۴۳: نصف کرہ کا وسطانی مرکز (مثال ۶.۴۳)



شکل ۶.۱۴۴: مسئلہ پاپس برائے سطحی رقبہ (مسئلہ ۶.۲)

حل

ربع اول میں محور x اور نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کے بیچ خطے کو محور y کے گرد گھمانے سے نصف کرہ حاصل ہوتا ہے (شکل ۶.۱۴۳)۔ تشاکل کی وجہ سے وسطانی مرکز کا $\bar{x} = 0$ ہو گا۔ مساوات ۶ میں ρ کی جگہ $\bar{y}$ لکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\bar{y} = \frac{H}{2\pi S} = \frac{\frac{2}{3}\pi a^3}{2\pi(\frac{1}{4}\pi a^2)} = \frac{4a}{3\pi}$$

□

مسئلہ ۶.۲: **مسئلہ پاپس برائے سطحی رقبہ**

اگر ایک ہموار مستوی منحنی کی قوس کو ایسی لکیر کے گرد ایک بار گھمایا جائے، جو اس قوس کو قطع نہ کرتی ہو، تب قوس کی لمبائی اور ایک چکر کے دوران قوس کے وسطانی مرکز کے طے شدہ فاصلے کے حاصل ضرب کو طواف قوس سے پیدا ہونے والے سطحے کا رقبہ کہیں گے۔ اگر محور طواف سے وسطانی مرکز کا فاصلہ ρ اور قوس کی لمبائی L ہو تب درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$S = 2\pi\rho L \tag{۸}$$

اس مسئلے کے ثبوت میں ہم فرض کرتے ہیں کہ محور طواف کو محور x سے ظاہر کیا جاسکتا ہے اور قوس کو متغیر x کا استمراری تفاعل تصور کیا جاسکتا ہے۔

ثبوت: ہم محور x کو محور طواف لیتے ہیں اور ربع اول میں $x = a$ تا $x = b$ تک قوس واقع ہے۔ اس قوس کے طواف سے درج ذیل رقبہ حاصل ہو گا۔

$$S = \int_{x=a}^{x=b} 2\pi y \, \mathrm{ds} = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} y \, \mathrm{ds} \tag{۹}$$

قوس کے وسطانی مرکز کا y محدد

$$\bar{y} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} \tilde{y} \, \mathrm{ds}}{\int_{x=a}^{x=b} \mathrm{ds}} = \frac{\int_{x=a}^{x=b} y \, \mathrm{ds}}{L}$$

ہو گا، جس کو مساوات ۹ کے آخری تکمل میں پُر کرنے سے $S = 2\pi\bar{y}L$ ملتا ہے۔ رداس $\bar{y}$ کو ρ سے ظاہر کرتے ہوئے $S = 2\pi\rho L$ حاصل ہوتا ہے۔

□

مثال ۶.۴۴: اندر سے کا سطحی رقبہ (مثال ۶.۴۲ میں) درج ذیل ہو گا۔

$$S = 2\pi(b)(2\pi a) = 4\pi^2 ba$$

□

سوالات

فاصلہ اور ہٹاؤ

سوال ۶.۳۲۸ تا سوال ۶.۳۳۵ میں ایک جسم محددی لکیر پر سمتی رفتار $v(t)$ سے حرکت کرتا ہے۔ (ا) سمتی رفتار کو ترسیم کر کے دیکھیں کہ یہ کہاں مثبت اور کہاں منفی ہے۔ (ب) اس کے بعد دیے گئے دورانیے میں طے شدہ فاصلہ تلاش کریں۔ (ج) جسم کا ہٹاؤ بھی تلاش کریں۔

سوال ۶.۳۲۸: $v(t) = 5\cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۶.۳۲۹: $v(t) = \sin \pi t, \quad 0 \le t \le 2$

سوال ۶.۳۳۰: $v(t) = 6\sin 3t, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

سوال ۶.۳۳۱: $v(t) = 4\cos 2t, \quad 0 \le t \le \pi$

سوال ۶.۳۳۲: $v(t) = 49 - 9.8t, \quad 0 \le t \le 10$

سوال ۶.۳۳۳: $v(t) = 8 - 1.6t, \quad 0 \leq t \leq 10$

سوال ۶.۳۳۴: $v(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t-1)(t-2), \quad 0 \leq t \leq 2$

سوال ۶.۳۳۵: $v(t) = 6t^2 - 18t + 12 = 6(t-1)(t-2), \quad 0 \leq t \leq 3$

سوال ۶.۳۳۶: تفاعل $s = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 8t$ محور s پر ایک جسم کا مقام دیتا ہے، جہاں $t \geq 0$ ہے۔ (t کی اکائی سیکنڈ s اور s کی اکائی میٹر m ہے۔)

ا. دکھائیں کہ $t = 0$ پر جسم دائیں رخ حرکت کرتا ہے۔

ب. کب جسم بائیں رخ حرکت کرتا ہے۔

ج. لمحہ $t = 3$ پر جسم کا مقام معلوم کریں۔

د. لمحہ $t = 3$ تک جسم نے کل کتنا فاصلہ طے کیا ہو گا؟

ھ. تفاعل s بالمقابل t ترسیم کریں اور جسم کے مقام کی ترسیم کے ساتھ اس کے تعلق پر تبصرہ کریں۔

سوال ۶.۳۳۷: تفاعل $s = -t^3 + 6t^2 - 9t$ محور s پر ایک جسم کا مقام دیتا ہے، جہاں $t \geq 0$ ہے۔ (t کی اکائی سیکنڈ s اور s کی اکائی میٹر m ہے۔)

ا. دکھائیں کہ $t = 0$ پر جسم بائیں رخ حرکت کرتا ہے۔

ب. کب جسم دائیں رخ حرکت کرتا ہے۔

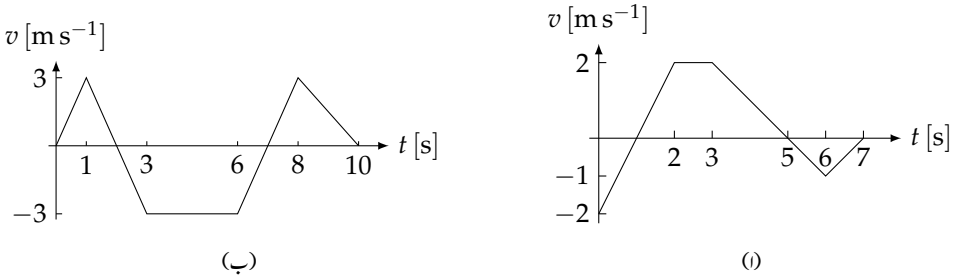
ج. کیا جسم کبھی مبدا کے دائیں جانب بھی ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

د. لمحہ $t = 3$ پر جسم کا مقام تلاش کریں۔

ھ. لمحہ $t = 3$ تک جسم نے کل کتنا فاصلہ طے کیا ہو گا؟

و. تفاعل s بالمقابل t ترسیم کریں اور جسم کے مقام کی ترسیم کے ساتھ اس کے تعلق پر تبصرہ کریں۔

سوال ۶.۳۳۸: دو اجسام محددی لکیر پر حرکت کرتے ہیں۔ ان اجسام کی سمتی رفتاروں کو شکل ۶.۱۴۵ میں دکھایا گیا ہے۔ دیے گئے وقفے کے لیے اجسام کتنا فاصلہ طے کرتے ہیں اور ان کا ہٹاؤ کتنا ہو گا؟



شکل ۶.۱۴۵: سمتی رفتار (سوال ۶.۳۳۸)

سوال ۶.۳۳۹: ایک نمونی ریل گاڑی کی 10 سیکنڈوں کے دوران پٹڑی پر آگے پیچھے حرکت درج ذیل ہے۔ قاعدہ سمسن سے کل فاصلہ اور ہٹاؤ تلاش کریں۔

سمتی رفتار	وقت	سمتی رفتار	وقت
−11	6	0	0
−6	7	12	1
2	8	22	2
6	9	10	3
0	10	−5	4
		−13	5

سطحی رقبے کی نمونہ کشی

سوال ۶.۳۴۰: لکیر $y = \frac{x}{\sqrt{3}},\ 0 \le x \le \sqrt{3}$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے جس کا رقبہ

$$\text{سطح طواف} = \frac{1}{2}(\text{تلا کا محیط})(\text{ترچھا قد}) = \frac{1}{2}(2\pi)(2) = 2\pi$$

ہونا چاہیے۔ مساوات ۵ میں $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3}}$ پُر کرنے سے کیا حاصل ہوتا ہے؟

سوال ۶.۳۴۱: بیلن وہ واحد شکل ہے جس کے لیے مساوات ۵ درست نتائج دیتی ہے۔ لکیر $y = r,\ 0 \le x \le h$ کو محور x کر گرد گھما کر سطح طواف پیدا کریں۔ دکھائیں کہ مساوات ۵ سے اس سطح طواف کا رقبہ $S = 2\pi rh$ حاصل ہوتا ہے۔

سوال ۶.۳۴۲: ہر وہ جسم جو مائع میں تیرتا ہو اپنی کمیت کے برابر مائع کی جگہ لیتا ہے (اصول آرشمیدسی)۔ یوں ہٹائے گئے مائع کی کمیت معلوم کر کے اس جسم کی کمیت معلوم کی جا سکتی ہے۔ ایک کشتی کی کمیت جاننے کی خاطر ہم خط آب[۳۴] کو 10 برابر حصوں میں تقسیم کر کے نقاط خانہ بندی پر کشتی کے ڈوبے ہوئے

[۳۴] waterline

حصے کا رقبہ عمودی تراش $S(x)$ معلوم کرتے ہیں۔ اس کے بعد قاعدہ سمسن استعمال کر کے $S(x)$ کے تکمل کی تخمین تلاش کرتے ہیں۔ نقاط خانہ بندی پر ڈوبے ہوئے رقبے $S(x)$ درج ذیل ہیں، جہاں نقطوں کے بیچ فاصلہ $1\,\mathrm{m}$ ہے اور رقبے کی اکائی m^2 ہے۔

نقطہ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
رقبہ	0	1.07	3.84	7.82	12.20	15.18	16.14	14.00	9.21	3.24	0

ا. ہٹائے گئے پانی کا حجم تلاش کریں۔

ب. یہ کشتی کتنی کمیت کا پانی ہٹاتی ہے؟ سمندری پانی کی کثافت $1029\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ ہے۔

مسئلہ پاپس

سوال ۶.۳۴۳: ایک چوکور خطے کے راس $(0,2)$ ، $(2,0)$ ، $(4,2)$ ، اور $(2,4)$ ہیں۔ اس خطہ کو محور x کے گرد گھما کر ایک ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم اور سطحی رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۶.۳۴۴: لکیر $2x + y = 6$ اور محددی لکیروں کے بیچ تکونی خطے کو لکیر $x = 5$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم مسئلہ پاپس کی مدد سے معلوم کریں۔ (جیسا آپ صفحہ ۶۰۷ پر سوال ۶.۲۵۶ میں دیکھ چکے ہیں، تکون کے تین وسطانیوں کا نقطہ تقاطع تکون کا وسطانی مرکز ہو گا اور یہ قاعدے کے وسطی نقطے سے مخالف راس کی جانب لکیر پر ایک تہائی فاصلے پر ہو گا۔)

سوال ۶.۳۴۵: دائرہ $(x-2)^2 + y^2 = 1$ کو محور y کے گرد گھما کر اندر سہ پیدا کیا جاتا ہے۔ اس اندر سے کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۶.۳۴۶: مسئلہ پاپس سے قائمہ دائری مخروط کا سطحی رقبہ پہلو تلاش کریں۔

سوال ۶.۳۴۷: رداس a کے کرہ کا سطحی رقبہ $4\pi a^2$ ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے مسئلہ پاپس سے نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کا وسطانی مرکز معلوم کریں۔

سوال ۶.۳۴۸: آپ نے سوال ۶.۳۴۷ میں دریافت کیا کہ نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کا وسطانی مرکز $(0, \frac{2a}{\pi})$ ہے۔ اس نصف دائرے کو لکیر $y = a$ کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ حاصل سطح طواف کا سطحی رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۶.۳۴۹: محور x اور $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ کے بیچ خطہ R کا رقبہ $\frac{1}{2}\pi ab$ ہے۔ خطہ R کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل جسم طواف کا حجم $\frac{4}{3}\pi ab^2$ ہے۔ خطہ R کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ a پر منحصر نہیں ہو گا۔

سوال ۶.۳۵۰: محور x اور نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کے بیچ خطے کا وسطانی مرکز $(0, \frac{4a}{3\pi})$ ہے (مثال ۶.۴۳)۔ اس خطے کو لکیر $y = -a$ کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم طواف کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۶.۳۵۱: لکیر $y = x - a$ کے گرد سوال ۶.۳۵۰ کا خطہ گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۶.۳۵۲: نصف دائرہ $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ کا وسطانی مرکز $(0, \frac{2a}{\pi})$ ہے۔ اس نصف دائرے کو لکیر $y = x - a$ کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس سطح طواف کا سطحی رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۶.۳۵۳: محور x کے لحاظ سے مثال ۶.۴۳ کے نصف دائری خطے کا معیار اثر تلاش کریں۔ اگر آپ پہلے سے جانتے ہوئے معلومات استعمال کریں، تب آپ کو تکمل لینے کی ضرورت پیش نہیں آئے گی۔

۲۶۵۴۷ جوابات

۲۶۵۴۸ حصہ ۶.۱ صفحہ ۵۳۷

۲۶۵۴۹ ۶.۱) $\frac{\pi}{2}$

۲۶۵۵۰ ۶.۳) $\frac{1}{12}$

۲۶۵۵۱ ۶.۵) $\frac{128}{15}$

۲۶۵۵۲ ۶.۷) $\frac{5}{6}$

۲۶۵۵۳ ۶.۹) $\frac{38}{3}$

۲۶۵۵۴ ۶.۱۱) $\frac{49}{6}$

۲۶۵۵۵ ۶.۱۳) $\frac{32}{3}$

۲۶۵۵۶ ۶.۱۵) $\frac{48}{5}$

۲۶۵۵۷ ۶.۱۷) $\frac{8}{3}$

۲۶۵۵۸ ۶.۱۹) 8

۲۶۵۵۹ ۶.۲۱) $\frac{5}{3}$ تین نقاط تقاطع پائے جاتے ہیں۔

۲۶۵۶۰ ۶.۲۳) 18

۲۶۵۶۱ ۶.۲۵) $\frac{243}{8}$

۲۶۵۶۲ ۶.۲۷) $\frac{8}{3}$

۲۶۵۶۳ ۶.۲۹) 2

۲۶۵۶۴ ۶.۳۱) $\frac{104}{15}$

۲۶۵۶۵ ۶.۳۳) $\frac{56}{15}$

۲۶۵۶۶ ۶.۳۵) 4

۲۶۵۶۷ ۶.۳۷) $\frac{4}{3} - \frac{4}{\pi}$

۲۶۵۶۸ ۶.۳۹) $\frac{\pi}{2}$

۲۶۵۶۹ ۶.۴۱) 2

۲۶۵۷۰ ۶.۴۳) $\frac{1}{2}$

۲۶۵۷۱ ۶.۴۵) 1

۲۶۵۷۲ ۶.۴۷) (ا) $(\mp\sqrt{c}, c)$، (ب) $c = 4^{2/3}$، (ج) $c=4^{2/3}$

۲۶۵۷۳ ۶.۴۹) $\frac{11}{3}$

۲۶۵۷۴ ۶.۵۱) $\frac{3}{4}$

۲۶۵۷۵ ۶.۵۳) کوئی نہیں

۲۶۵۷۶ حصہ ۶.۲ صفحہ ۵۴۵

۲۶۵۷۷ ۶.۵۹) (ا) $S(x) = \pi(1 - x^2)$،

۲۶۵۷۸ (ب) $S(x) = 4(1 - x^2)$،

۲۶۵۷۹ (ج) $S(x) = 2(1 - x^2)$،

۲۶۵۸۰ (د) $S(x) = \sqrt{3}(1 - x^2)$

۲۶۵۸۱ ۶.۶۱) 16

۲۶۵۸۲ ۶.۶۳) $\frac{16}{3}$

۲۶۵۸۳ ۶.۶۵) (ا) $2\sqrt{3}$، (ب) 8

۲۶۵۸۴ ۶.۶۷) 8π

۲۶۵۸۵ ۶.۶۹) (ا) s^2h، (ب) s^2h

۲۶۵۸۶ حصہ ۶.۳ صفحہ ۵۵۷

۲۶۵۸۷ ۶.۷۳) $\frac{2\pi}{3}$

۲۶۵۸۸ ۶.۷۵) $4 - \pi$

۲۶۵۸۹ ۶.۷۷) $\frac{32\pi}{5}$

۲۶۵۹۰ ۶.۷۹) 36π

۲۶۵۹۱ ۶.۸۱) π

۲۶۵۹۲ ۶.۸۳) $\pi\left(\frac{\pi}{2} + 2\sqrt{2} - \frac{11}{3}\right)$

۲۶۵۹۳ ۶.۸۵) 2π

۲۶۵۹۴ ۶.۸۷) 2π

۲۶۵۹۵ ۶.۸۹) 3π

۲۶۵۹۶ ۶.۹۱) $\pi^2 - 2\pi$

۲۶۵۹۷ ۶.۹۳) $\frac{2\pi}{3}$

۲۶۵۹۸ ۶.۹۵) 2π

۲۶۵۹۹ ۶.۹۷) $\frac{117\pi}{5}$

۲۶۶۰۰ ۶.۹۹) $\pi(\pi - 2)$

۲۶۶۰۱ ۶.۱۰۱) $\frac{4\pi}{3}$

۲۶۶۰۲ ۶.۱۰۳) 8π

۲۶۶۰۳ ۶.۱۰۵) $\sqrt{3}\pi$

۲۶۶۰۳ (۶.۱۰۷) $\frac{7\pi}{6}$

۲۶۶۰۵ (۶.۱۰۹) (ا) 8π، (ب) $\frac{32\pi}{5}$، (ج) $\frac{8\pi}{3}$، (د) $\frac{224\pi}{15}$

۲۶۶۰۶ (۶.۱۱۱) (ا) $\frac{16\pi}{15}$، (ب) $\frac{56\pi}{15}$، (ج) $\frac{64\pi}{15}$

۲۶۶۰۷ (۶.۱۱۳) $H = 1053\pi\,\mathrm{cm}^3$

۲۶۶۰۸ (۶.۱۱۵) (ا) $c = \frac{2}{\pi}$، (ب) $c = 0$

۲۶۶۰۹ (۶.۱۱۷) $H = 2a^2b\pi^2$

۲۶۶۱۰ (۶.۱۱۹) (ب) $H = \frac{\pi r^2 h}{3}$

۲۶۶۱۱ حصہ ۶.۴ صفحہ ۵۶۸

۲۶۶۱۲ (۶.۱۲۰) 6π

۲۶۶۱۳ (۶.۱۲۲) 2π

۲۶۶۱۴ (۶.۱۲۴) $\frac{14\pi}{3}$

۲۶۶۱۵ (۶.۱۲۶) 8π

۲۶۶۱۶ (۶.۱۲۸) $\frac{5\pi}{6}$

۲۶۶۱۷ (۶.۱۳۰) $\frac{128\pi}{5}$

۲۶۶۱۸ (۶.۱۳۲) 3π

۲۶۶۱۹ (۶.۱۳۴) $\frac{16\pi}{15}(3\sqrt{2}+5)$

۲۶۶۲۰ (۶.۱۳۶) $\frac{8\pi}{3}$

۲۶۶۲۱ (۶.۱۳۸) $\frac{4\pi}{3}$

۲۶۶۲۲ (۶.۱۴۰) $\frac{16\pi}{3}$

۲۶۶۲۳ (۶.۱۴۲) (ا) $\frac{6\pi}{5}$، (ب) $\frac{4\pi}{5}$، (ج) 2π، (د) 2π

۲۶۶۲۴ (۶.۱۴۴) (ا) $\frac{5\pi}{3}$، (ب) $\frac{4\pi}{3}$، (ج) 2π، (د) $\frac{2\pi}{3}$

۲۶۶۲۵ (۶.۱۴۶) (ا) $\frac{11\pi}{15}$، (ب) $\frac{97\pi}{105}$، (ج) $\frac{121\pi}{210}$، (د) $\frac{23\pi}{30}$

۲۶۶۲۶ (۶.۱۴۸) (ا) $\frac{512\pi}{21}$، (ب) $\frac{832\pi}{21}$

۲۶۶۲۷ (۶.۱۵۰) (ا) $\frac{\pi}{6}$، (ب) $\frac{\pi}{6}$

۲۶۶۲۸ (۶.۱۵۲) $\frac{9\pi}{16}$

۲۶۶۲۹ (۶.۱۵۴) (ب) 4π

۲۶۶۳۰ (۶.۱۵۶) قرص: دو تکمل؛ چھلا: دو تکمل؛ خول: ایک تکمل

۲۶۶۳۱ (۶.۱۵۸) $3x$

۲۶۶۳۲ حصہ ۶.۵ صفحہ ۵۷۹

۲۶۶۳۳ (۶.۱۵۹) (ا) $\int_{-1}^{2}\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$، (ج) ≈ 6.13

۲۶۶۳۴ (۶.۱۶۱) (ا) $\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 y}\,\mathrm{d}y$، (ج) ≈ 3.82

۲۶۶۳۵ (۶.۱۶۳) (ا) $\int_{-1}^{3}\sqrt{1+(y+1)^2}\,\mathrm{d}y$، (ج) ≈ 9.29

۲۶۶۳۶ (۶.۱۶۵) (ا) $\int_{0}^{\pi/6}\sec x\,\mathrm{d}x$، (ج) ≈ 0.55

۲۶۶۳۷ (۶.۱۶۷) 12

۲۶۶۳۸ (۶.۱۶۹) $\frac{53}{6}$

۲۶۶۳۹ (۶.۱۷۱) $\frac{123}{32}$

۲۶۶۴۰ (۶.۱۷۳) $\frac{99}{8}$

۲۶۶۴۱ (۶.۱۷۵) 2

۲۶۶۴۲ (۶.۱۷۷) (ا) $y = \sqrt{x}$ یا $y = -\sqrt{x}+2$، (ب) دو

۲۶۶۴۳ (۶.۱۷۹) 1

۲۶۶۴۴ (۶.۱۸۱) $50.44\,\mathrm{cm}$

۲۶۶۴۵ حصہ ۶.۶ صفحہ ۵۸۹

۲۶۶۴۶ (۶.۱۹۱) (ا) $2\pi\int_0^{\pi/4}\tan x\sqrt{1+\sec^4 x}\,\mathrm{d}x$،

۲۶۶۴۷ (ج) ≈ 3.84

۲۶۶۴۸ (۶.۱۹۳) (ا) $2\pi\int_1^2 \frac{1}{y}\sqrt{1+y^{-4}}\,\mathrm{d}y$، (ج) ≈ 5.02

۲۶۶۴۹ (۶.۱۹۵) (ا) $2\pi\int_0^4 (3-\sqrt{x})^2\sqrt{1+(1-3x^{-1/2})^2}\,\mathrm{d}x$،

۲۶۶۵۰ (ج) ≈ 63.37

۲۶۶۵۱ (۶.۱۹۷) (ا) $2\pi\int_0^{\pi/3}\left(\int_0^y \tan t\,\mathrm{d}t\right)\sec y\,\mathrm{d}y$،

۲۶۶۵۲ (ج) ≈ 2.08

۲۶۶۵۳ (۶.۱۹۹) $4\pi\sqrt{5}$

۲۶۶۵۴ (۶.۲۰۱) $3\pi\sqrt{5}$

۲۶۶۵۵ (۶.۲۰۳) $\frac{98\pi}{81}$

۲۶۶۵۶ (۶.۲۰۵) 2π

۲۶۶۵۷ (۶.۲۰۷) $\frac{\pi(\sqrt{8}-1)}{9}$

۲۶۶۵۸ (۶.۲۰۹) $\frac{35\pi\sqrt{5}}{3}$

۲۶۶۵۹ (۶.۲۱۱) $\frac{253\pi}{20}$

۲۶۶۶۰ (۶.۲۱۵) (ا) $2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\cos x)\sqrt{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$،

۲۶۶۶۱ (ب) ≈ 14.4236

۲۶۶۶۲ (۶.۲۱۷) $452.4\,\mathrm{L}$

۲۶۶۶۳ (۶.۲۲۱) $5\sqrt{2}\pi$

۲۶۶۶۴ (۶.۲۲۳) 14.4

۲۶۶۶۵ (۶.۲۲۵) 54.9

۲۶۶۶۶ حصہ ۶.۷ صفحہ ۶۰۵

۲۶۶۶۷ (۶.۲۲۸) $\frac{8}{5}\,\mathrm{m}$

۲۶۶۶۸ (۶.۲۳۰) $\left(\frac{L}{4}, \frac{L}{4}\right)$

۲۶۶۶۹ (۶.۲۳۲) $M_0 = 8,\ M = 8,\ \bar{x} = 1$

۲۶۶۷۰ (۶.۲۳۴) $M_0 = \frac{15}{2},\ M = \frac{9}{2},\ \bar{x} = \frac{5}{3}$

۲۶۶۷۱ (۶.۲۳۶) $M_0 = \frac{73}{6},\ M = 5,\ \bar{x} = \frac{73}{30}$

۲۶۶۷۲ (۶.۲۳۸) $M_0 = 3,\ M = 3,\ \bar{x} = 1$

۲۶۶۷۳ (۶.۲۴۰) $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = \frac{12}{5}$

۲۶۶۷۴ (۶.۲۴۲) $\bar{x} = 1,\ \bar{y} = -\frac{3}{5}$

۲۶۶۷۵ (۶.۲۴۴) $\bar{x} = \frac{16}{105},\ \bar{y} = \frac{8}{15}$

۲۶۶۷۶ (۶.۲۴۶) $\bar{x} = 0,\ \bar{y} = \frac{\pi}{8}$

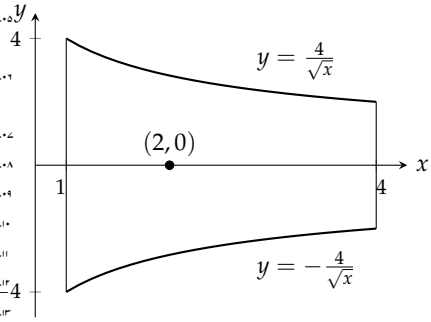
۲۶۶۷۷ (۶.۲۴۸) $\bar{x} = 1,\ \bar{y} - \frac{2}{5}$

۲۶۶۷۸ (۶.۲۵۰) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{4-\pi}$

۲۶۶۷۹ (۶.۲۵۲) $\bar{x} = \frac{3}{2},\ \bar{y} = \frac{1}{2}$

۲۶۶۸۰ (۶.۲۵۴) (الف) $\frac{224\pi}{3}$، (ب) $\bar{x} = 2,\ \bar{y} = 0$، (ج)

۲۶۶۸۱



۲۶۶۸۲

۲۶۶۸۳ (۶.۲۵۸) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{3}$

۲۶۶۸۴ (۶.۲۶۰) $\bar{x} = \frac{a}{3}, \bar{y} = \frac{b}{3}$

۲۶۶۸۵ (۶.۲۶۲) $\frac{13\delta}{6}$

۲۶۶۸۶ (۶.۲۶۴) $\bar{x} = 0, \bar{y} = \frac{a\pi}{4}$

۲۶۶۸۷ حصہ ۶.۸ صفحہ ۶۱۶

۲۶۶۸۸ (۶.۲۷۰) 1960 J

۲۶۶۸۹ (۶.۲۷۲) 780 J

۲۶۶۹۰ (۶.۲۷۴) 1764 J

۲۶۶۹۱ (۶.۲۷۸) $400\,\mathrm{N\,m^{-1}}$

۲۶۶۹۲ (۶.۲۸۰) 0.08 J ، 4 cm

۲۶۶۹۳ (۶.۲۸۲) (ا) $1.25 \times 10^6\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ ، (ب) 62.5 J؟

۲۶۶۹۴ 187.5 J

۲۶۶۹۵ (۶.۲۸۴) (ا) 18.375×10^6 J ، (ب) 20 گھنٹے اور 25 منٹ ، (ج)

۲۶۶۹۶ 20 گھنٹے اور 22.5 منٹ، 20 گھنٹے اور 29 منٹ۔

۲۶۶۹۷ (۶.۲۸۶) 38 484 510 J

۲۶۶۹۸ (۶.۲۸۸) 19.95×10^6 J

۲۶۶۹۹ (۶.۲۹۰) 0.43 J

۲۶۷۰۰ (۶.۲۹۲) 21 446 605.9 J

۲۶۷۰۱ (۶.۲۹۴) 4 027 512 J

۲۶۷۰۲ (۶.۲۹۶) 5.144×10^{10} J

۲۶۷۰۳ (۶.۳۰۰) 117.6 J

۲۶۷۰۴ (۶.۳۰۲) 67 901 J

۲۶۷۰۵ (۶.۳۰۴) 56.25 J

۲۶۷۰۶ حصہ ۶.۹ صفحہ ۶۲۷

۲۶۷۰۷ (۶.۳۰۶) 1.23×10^9 N

۲۶۷۰۸ (۶.۳۰۷) 6.08×10^7 N

۲۶۷۰۹ (۶.۳۱۰) 163 333 N

۲۶۷۱۰ (۶.۳۱۲) (ا) 182 933 N ، (ب) 188 238 N

۲۶۷۱۱ (۶.۳۱۴) (ا) 58 800 N ، (ب) 61.9 cm ، (ج) چونکہ فشار صرف

۲۶۷۱۲ گہرائی پر منحصر ہے لہٰذا المبائی کا قوت سیال پر کوئی اثر نہیں ہوگا۔

۲۶۷۱۳ (۶.۳۱۶) 15 126.3 N

۲۶۷۱۴ (۶.۳۱۸) 20.2 N

۲۶۷۱۵ (۶.۳۲۰) 102.08 N

۲۶۷۱۶ (۶.۳۲۲) (ا) 22 827 N ، (ب) 2.6544 m

۲۶۷۱۷ (۶.۳۲۴) $1133.77\,\mathrm{m^3}$

۲۶۷۱۸ (۶.۳۲۶) $\frac{wb}{2}$

۲۶۷۱۹ حصہ ۶.۱۰ صفحہ ۶۳۸

۲۶۷۲۰ (۶.۳۲۸) (ا) 20 m ، (ب) 0 m

۲۶۷۲۱ (۶.۳۳۰) (ا) 6 m ، (ب) 2 m

۲۶۷۲۲ (۶.۳۳۲) (ا) 245 m ، (ب) 0 m

۲۶۷۲۳ (۶.۳۳۴) (ا) 6 m ، (ب) 4 m

۲۶۷۲۴ (۶.۳۳۶) (ا) $2 < t < 4$ ، (ب) 6 m ، (ج) $\frac{22}{3}$ m

۲۶۷۲۵ (۶.۳۳۸) (ا) کل فاصلہ 7 ، ہٹاؤ 3 ؛ (ب) کل فاصلہ 19.5 ، ہٹاؤ -4.5

۲۶۷۲۶ (۶.۳۴۰) $\sqrt{3}\pi$

۲۶۷۲۷ (۶.۳۴۲) (ا) $82.67\,\mathrm{m^3}$ ، (ب) 85 071 kg

۲۶۷۲۸ (۶.۳۴۴) $H = 32\pi$ ، $S = 32\sqrt{2}\pi$

۲۶۷۲۹ (۶.۳۴۵) $4\pi^2$

۲۶۷۳۰ (۶.۳۴۷) $\bar{x} = 0$ ، $\bar{y} = \frac{2a}{\pi}$

۲۶۷۳۱ (۶.۳۴۹) $\bar{x} = 0$ ، $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$

۲۶۷۳۲ (۶.۳۵۱) $\frac{\sqrt{2}\pi a^3(4+3\pi)}{6}$

۲۶۷۳۳ (۶.۳۵۳) $\frac{2a^3}{3}$