احصاء اور تحلیلی ہندسہ

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۲۹ جولائی ۲۰۲۶

عنوان

۱ ابتدائی معلومات ۱
۱.۱ حقیقی اعداد اور حقیقی خط ۱
۱.۲ محدد، خطوط اور بڑھوتری ۱۳
۱.۳ تفاعل ۲۷
۱.۴ ترسیم کی منتقلی ۴۴
۱.۵ تکونیاتی تفاعل ۶۰

۲ حدود اور استمرار ۷۹
۲.۱ تبدیلی کی شرح اور حد ۷۹
۲.۲ حد تلاش کرنے کے قواعد ۹۳
۲.۳ مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف ۱۰۴
۲.۴ تصور حد کی توسیع ۱۲۱
۲.۵ استمرار ۱۳۷
۲.۶ مماسی خط ۱۵۴

۳ تفرق ۱۶۷
۳.۱ تفاعل کا تفرق ۱۶۷
۳.۲ قواعد تفرق ۱۸۵
۳.۳ تبدیلی کی شرح ۲۰۲
۳.۴ تکونیاتی تفاعل کا تفرق ۲۱۷
۳.۵ زنجیری قاعدہ ۲۳۵
۳.۶ خفی تفرق اور ناطق قوت نما ۲۴۹
۳.۷ دیگر شرح تبدیلی ۲۶۲

۴ تفرق کا استعمال ۲۷۵
۴.۱ تفاعل کی انتہائی قیمتیں ۲۷۵
۴.۲ مسئلہ اوسط قیمت ۲۸۷
۴.۳ مقامی انتہائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پرکھ ۳۰۰

۴.۴ y' اور y'' کے ساتھ ترسیم ۳۰۸
۴.۵ $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء ۳۲۶
۴.۶ بہترین بنانا ۳۴۷
۴.۷ خط بندی اور تفرقات ۳۶۷
۴.۸ ترکیب نیوٹن ۳۸۷

۵ تکمل ۳۹۷
۵.۱ غیر قطعی تکملات ۳۹۷
۵.۲ تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی ۴۰۸
۵.۳ تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق ۴۲۱
۵.۴ اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ ۴۳۱
۵.۵ ریمان مجموعے اور قطعی تکملات ۴۴۷
۵.۶ خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ ۴۷۱
۵.۷ بنیادی مسئلہ ۴۸۶
۵.۸ قطعی تکمل میں بدل ۵۰۳
۵.۹ اعدادی تکمل ۵۰۸

۶ تکمل کا استعمال ۵۲۵
۶.۱ منحنیات کے بیچ رقبہ ۵۲۵
۶.۲ ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش ۵۳۸
۶.۳ اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا ۵۴۵
۶.۴ نلکی چھلے ۵۵۸
۶.۵ مستوی منحنیات کی لمبائیاں ۵۶۸
۶.۶ سطح طواف کا رقبہ ۵۷۸
۶.۷ معیار اثر اور مرکز کمیت ۵۸۸
۶.۸ کام ۶۰۴
۶.۹ فشار سیال اور قوت سیال ۶۱۶
۶.۱۰ بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال ۶۲۴

۷ ماورائی تفاعل ۶۳۷
۷.۱ الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات ۶۳۸
۷.۲ قدرتی لوگارتھم ۶۵۳
۷.۳ قوت نمائی تفاعل ۶۶۷
۷.۴ a^x اور $\log_a x$ ۶۷۹
۷.۵ افزائش اور تنزل ۶۸۹
۷.۶ قاعدہ لھوپیٹال ۷۰۱
۷.۷ اضافی شرح نمو ۷۱۴
۷.۸ الٹ تکونیاتی تفاعل ۷۲۳
۷.۹ الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل ۷۳۷

۷.۱۰ ہذلولی تفاعل ۷۵۱
۷.۱۱ یک رتبی تفرقی مساوات ۷۶۸
۷.۱۲ یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان ۷۸۵

۸ تکمل کے طریقے ۷۹۵
۸.۱ تکمل کے بنیادی کلیات ۷۹۵
۸.۲ تکمل بالحصص ۸۰۷
۸.۳ جزوی کسر ۸۲۰
۸.۴ تکونیاتی بدل ۸۳۳
۸.۵ جدول تکمل اور کمپیوٹر ۸۴۲
۸.۶ غیر مناسب تکمل ۸۵۶

۹ لامتناہی تسلسل ۸۷۷
۹.۱ اعداد کی ترتیب کی حد ۸۷۷
۹.۲ ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے ۸۹۳
۹.۳ سوالات ۹۰۱
۹.۴ لامتناہی تسلسل ۹۰۶
۹.۵ غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پرکھ ۹۲۲
۹.۶ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ ۹۳۱
۹.۷ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ ۹۳۹
۹.۸ بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز ۹۴۹
۹.۹ طاقتی تسلسل ۹۶۱
۹.۱۰ ٹیلر اور مکلارن تسلسل ۹۷۵
۹.۱۱ ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ خلل کے اندازے ۹۸۴
۹.۱۲ طاقتی تسلسل کے استعمال ۹۹۹

۱۰ مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد ۱۰۱۵
۱۰.۱ مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں ۱۰۱۵
۱۰.۲ سنک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی ۱۰۳۵
۱۰.۳ دو درجی مساوات اور گھومنا ۱۰۴۳
۱۰.۴ مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول ۱۰۵۴
۱۰.۵ احصاء اور مقدار معلوم منحنیات ۱۰۶۷
۱۰.۶ قطبی محدد ۱۰۷۹
۱۰.۷ قطبی محدد میں ترسیم ۱۰۸۸
۱۰.۸ مخروط حصوں کے قطبی مساوات ۱۰۹۸
۱۰.۹ قطبی محدد میں تکمل ۱۱۱۱

۱۱ سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری ۱۱۲۳

۱۱.۱ مستوی میں سمتیات ۱۱۲۳
۱۱.۲ کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات ۱۱۳۷
۱۱.۳ ضرب نقطہ ۱۱۵۱
۱۱.۴ صلیبی ضرب ۱۱۶۳
۱۱.۵ فضا میں خطوط اور مستویات ۱۱۷۵
۱۱.۶ نلکی اور مربع سطحیں ۱۱۸۷
۱۱.۷ نلکی اور کروی محدد ۱۲۰۳

۱۲ سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت ۱۲۱۳
۱۲.۱ سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات ۱۲۱۳
۱۲.۲ گولا کی حرکت کی نمونہ کشی ۱۲۳۴
۱۲.۳ لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ۱۲۴۲
۱۲.۴ انحنا، مروڑ اور TNB چوکھٹ ۱۲۴۹
۱۲.۵ فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت ۱۲۷۰

دیباچہ ۱۲۱۳

میری پہلی کتاب کا دیباچہ ۱۲۱۳

۱۳ کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات ۱۲۸۳
۱۳.۱ کثیر متغیرات کے تفاعل ۱۲۸۳
۱۳.۲ حد اور استمرار ۱۲۹۶
۱۳.۳ جزوی تفرقات ۱۳۰۹
۱۳.۴ تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات ۱۳۲۵
۱۳.۵ زنجیری قاعدہ ۱۳۴۰
۱۳.۶ پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات ۱۳۵۳
۱۳.۷ رخی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں ۱۳۵۹
۱۳.۸ انتہائی قیمتیں اور نقاط زین ۱۳۷۸
۱۳.۹ لیگرینج ضاربین ۱۳۹۳
۱۳.۱۰ کلیہ ٹیلر ۱۴۰۹

۱۴ تکمل بالکثرت ۱۴۱۷
۱۴.۱ دوہرا تکملات ۱۴۱۷
۱۴.۲ رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت ۱۴۳۵
۱۴.۳ دوہرا تکملات کا قطبی روپ ۱۴۴۹
۱۴.۴ کارتیسی محدد میں تہرا تکمل ۱۴۵۹
۱۴.۵ تعین بعد میں کمیت اور معیار اثر ۱۴۷۲
۱۴.۶ نلکی اور کروی محدد میں تہرا تکمل ۱۴۸۱
۱۴.۷ تکملات بالکثرت میں بدل ۱۴۹۸

۱۵ سمتی میدان میں تکمل ۱۵۱۳
۱۵.۱ لکیری تکمل ۱۵۱۳
۱۵.۲ سمتی میدان، کام، دائری بہاؤ، اور بہاؤ ۱۵۲۳
۱۵.۳ راہ سے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان ۱۵۳۷
۱۵.۴ مستوی میں مسئلہ گرین ۱۵۵۰
۱۵.۵ سطحی رقبہ اور سطحی تکملات ۱۵۷۱
۱۵.۶ مقدار معلوم سطحیں ۱۵۸۹
۱۵.۷ مسئلہ سٹوکس ۱۶۰۶
۱۵.۸ مسئلہ پھیلاؤ اور ایک مربوط نظریہ ۱۶۲۲

ضمیمے ۱۶۵۴

ا ریاضیاتی ترغیب ۱۶۵۵

ب تحدیدی مسائل کے ثبوت ۱۶۶۱

ج مخلوط اعداد ۱۶۶۷

د سمسن کا ایک تہائی کا قاعدہ ۱۶۸۳

ھ کوشی کا مسئلہ اوسط قیمت اور قاعدہ لھوپیٹال ے کا پائیدار روپ ۱۶۸۵

و کثیر استعمال حدود ۱۶۸۹

ز جزئیتی تقسیم کا قانون برائے سمتی ضرب ۱۶۹۱

ح مقاطع اور کریمر کا قاعدہ ۱۶۹۵

ط مسئلہ یولر اور مسئلہ بڑھوتری ۱۷۰۷

ي تکملات کا مختصر جدول ۱۷۱۳

جوابات ۱۷۲۵

اشاریہ ۱۷۲۷

باب ۱۲

سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت

سرسری جائزہ جب کوئی جسم فضا میں حرکت کرتا ہو، مساوات $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ اور $z = h(t)$ جو اس جسم کے محدد کو بطور وقت کا تفاعل دیتی ہیں، اس جسم کی راہ اور حرکت کی مقدار معلوم مساوات ہوں گی۔ سمتیہ علامتیت کی مدد سے ہم انہیں ایک مساوات $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ کی صورت میں لکھ سکتے ہیں جو اس جسم کا مقام بطور وقت کا سمتی تفاعل دیتی ہے۔

اس باب میں ہم احصاء استعمال کرتے ہوئے حرکت پذیر اجسام کی راہ، سمتی رفتار اور اسراع پر غور کریں گے۔ ہم گولا، سیارہ اور مصنوعی سیارہ کی راہ اور حرکت کے عمومی سوالات کے جوابات جان سکے گے۔ آخر حصہ میں ہم نیوٹن کے قوانین اور تجاذب کی مدد سے سیاروں کی مدار کے قوانین کپلر دریافت کریں گے۔

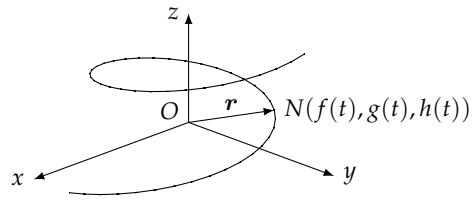
۱۲.۱ سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات

فضا میں متحرک ذرہ کی حرکت جاننے کی خاطر ہم مبدا سے اس ذرہ تک سمتیہ $\boldsymbol{r}$ لے کر $\boldsymbol{r}$ میں تبدیلی پر غور کرتے ہیں (شکل ۱۲.۱)۔ اگر اس ذرہ کے محدد مقام وقت کے ساتھ دو بار قابل تفرق ہوں، تب $\boldsymbol{r}$ بھی ایسا ہو گا، اور ہم کسی بھی لمحہ پر وقت کے لحاظ سے $\boldsymbol{r}$ کے تفرق لے کر اس ذرہ کی سمتی رفتار اور اسراع جان سکتے ہیں۔ اگر ہمیں اس ذرہ کی سمتیہ سمتی رفتار یا سمتیہ اسراع بطور وقت کے استمراری تفاعل معلوم ہو اور ہمیں ذرے کی ابتدائی مقام اور سمتیہ رفتار کے بارے میں معقول معلومات ہو، تب ہم تکمل کی مدد سے، وقت کا تفاعل $\boldsymbol{r}$ جان سکتے ہیں۔

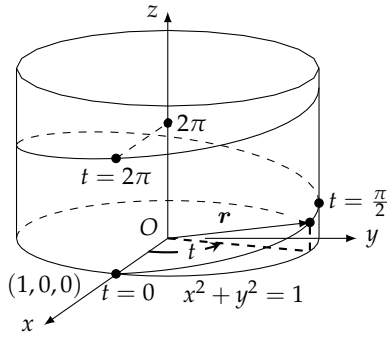
تعریف

جب وقفہ I کے دوران ایک ذرہ فضا میں حرکت کرتا ہو، ہم اس ذرہ کے محدد جو وقت کے تفاعل ہو گے کی تعریف درج ذیل کرتے ہیں۔

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t), \quad t \in I \tag{۱}$$



شکل ۱.۱۲: فضا میں متحرک ذرہ کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r} = \overrightarrow{ON}$ متغیر t کا تفاعل ہو گا۔



شکل ۲.۱۲: پیچدار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}$ کا بالائی نصف حصہ

نقاط $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t)),\ t \in I$ فضا میں وہ **منحنی** دیتے ہیں جنہیں ہم اس ذرے کی **راہ**[1] کہتے ہیں۔ مساوات ۱ اس منحنی کی **مقدار معلوم روپ** ہے۔ مبدا سے ذرے کے **مقام** $N(f(t), g(t), h(t))$ تک لمحہ t پر سمتیہ

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{ON} = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$$

اس ذرے کا **تعین گر سمتیہ**[2] ہے۔ تفاعل f ، g اور h تعین گر سمتیہ کے **اجزاء** ہیں۔ ذرے کی راہ سے مراد وقفہ t کے دوران $\boldsymbol{r}$ کی پیدا کردہ منحنی ہے۔

مساوات ۱ سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کی تعریف وقفہ I پر حقیقی متغیر t کی صورت میں دیتی ہے۔ زیادہ عمومی طور پر دائرہ کار، سلسلہ D ، پر **سمتی تفاعل**[3] یا **سمتی قیمت تفاعل**[4] سے مراد وہ قاعدہ ہو گا جو D کے ہر رکن کو فضا میں ایک سمتیہ مختص کرتا ہو۔ موجودہ استعمال میں دائرہ کار حقیقی اعداد کے وقفوں پر مشتمل ہوں گے۔ باب ۱۵ میں دائرہ کار، مستوی یا فضا میں خطوں پر مشتمل ہوں گے جہاں ہم سمتی تفاعل کو سمتی میدان کہیں گے۔

ہم حقیقی قیمت تفاعل کو **غیر سمتی تفاعل**[5] کہتے ہیں تاکہ ان میں اور سمتی تفاعل میں فرق کرنا ممکن ہو۔ سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کے اجزاء t کے غیر سمتی تفاعل ہیں۔ سمتی تفاعل کی تعریف اس کے ارکان تفاعل کی صورت میں دیتے وقت ہم فرض کرتے ہیں کہ سمتی تفاعل کا دائرہ کار ہی ارکان کے دائرہ کار ہیں۔

مثال ۱: پیچ دار تفاعل
تمام حقیقی متغیر t کے لئے سمتی تفاعل

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

---

[1] path
[2] positionvector
[3] vectorfunction
[4] vector-valuedfunction
[5] scalarfunctions

معین ہے اور $\boldsymbol{r}$ دائری نلکی $x^2 + y^2 = 1$ کے گرد لپٹ کر چلتا ہے (شکل ۱۲.۲)۔ سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ کے $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ اجزاء جو $\boldsymbol{r}$ کے سر کے x اور y محدد ہیں دائری نلکی کی مساوات

$$x^2 + y^2 = (\cos t)^2 + (\sin t)^2 = 1$$

کو مطمئن کرتے ہیں لہٰذا $\boldsymbol{r}$ اس نلکی پر پایا جاتا ہے۔ متغیر t بڑھنے $\boldsymbol{k}$ جزو بڑھتا ہے جس کی بنا منحنی اوپر بلند ہو گی۔ نلکی کے گرد ایک دائرہ $t = 2\pi$ پر مکمل ہو گا۔ درج ذیل مساوات پیچ دار تفاعل کی مقدار معلوم مساوات ہے، جہاں وقفہ $-\infty \leq t \leq \infty$ ہے۔

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

□

حد اور استمرار

ہم سمتی قیمت تفاعل کے حد کی تعریف حقیقی قیمت تفاعل کے حد کی طرح کرتے ہیں۔

تعریف: فرض کریں $\boldsymbol{r} = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ ایک سمتی تفاعل اور $\boldsymbol{L}$ ایک سمتیہ ہے۔ اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایک ایسا مطابقتی عدد $\delta > 0$ پایا جاتا ہو کہ تمام t کے لئے

$$0 < |t - t_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\boldsymbol{r}(t) - \boldsymbol{L}| < \epsilon$$

ہو تب ہم کہتے ہیں کہ جب t کی قیمت t_0 کے قریب تر ہو تب $\boldsymbol{r}$ کا حد[۶] $\boldsymbol{L}$ ہو گا جس کو درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{L}$$

□

اگر $\boldsymbol{L} = L_1\boldsymbol{i} + L_2\boldsymbol{j} + L_3\boldsymbol{k}$ ہو تب $\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{L}$ ٹھیک اس صورت ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L_1, \quad \lim_{t \to t_0} g(t) = L_2, \quad \lim_{t \to t_0} h(t) = L_3$$

درج ذیل مساوات سمتی تفاعل کا حد تلاش کرنے کی عملی ترکیب دیتی ہے۔

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \Big(\lim_{t \to t_0} f(t)\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\lim_{t \to t_0} g(t)\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\lim_{t \to t_0} h(t)\Big)\boldsymbol{k} \tag{۲}$$

---

[۶] limit

مثال ۲: اگر $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} &= \Big(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \cos t\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \sin t\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} t\Big)\boldsymbol{k}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j} + \frac{\pi}{4}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

□

ہم سمتی تفاعل کی استمرار کی تعریف حقیقی قیمت تفاعل کی استمرار کی تعریف کی طرح کرتے ہیں۔

تعریف: اگر $\boldsymbol{r}(t)$ کے دائرہ کار میں نقطہ t_0 پر $\lim_{t\to t_0} \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t_0)$ ہو تب $\boldsymbol{r}(t)$ اس **نقطہ پر استمراری**[۷] ہو گا۔ اگر اپنے پورے دائرہ کار میں ہر نقطہ پر $\boldsymbol{r}(t)$ استمراری ہو تب یہ تفاعل **استمراری**[۸] ہو گا۔

□

چونکہ حد کو اجزاء کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے لہٰذا سمتی تفاعل کو استمرار کے لئے پرکھنے کی خاطر ہم اس کے اجزاء پر نظر ڈالتے ہیں۔

ایک نقطہ پر ارکان کے استمرار کا پرکھ

نقطہ t_0 پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ اس صورت استمراری ہو گا جب t_0 پر f ، g اور h استمراری ہوں۔

مثال ۳: (ا) درج ذیل تفاعل اس لئے استمراری ہے کہ $\cos t$ ، $\sin t$ اور t استمراری ہیں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

(ب) درج ذیل تفاعل ہر عدد صحیح پر عدم استمراری ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + |t|\,\boldsymbol{k}$$

□

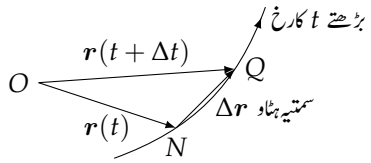
تفرقات اور حرکت

فرض کریں فضا میں ایک متحرک ذرہ جو ایک منحنی پر چل رہا ہو کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ ہو جہاں f ، g اور h متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہیں۔ ایسی صورت میں لمحات t اور $t + \Delta t$ پر اس ذرے کے مقام میں فرق

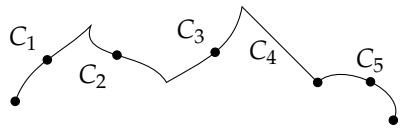
$$\Delta\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t + \Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$$

---

[۷] continuousatapoint
[۸] continuous



شکل ۱۲.۳: لمحات t اور $t + \Delta t$ کے بیچ ایک ذرے کا ہٹاو $\overrightarrow{NQ} = \Delta\boldsymbol{r}$ ہوگا۔ نیا سمتی مجموعہ $\boldsymbol{r}(t) + \Delta\boldsymbol{r}$، ذرے کا نیا مقام $\boldsymbol{r}(t+\Delta t)$ دے گا۔



شکل ۱۲.۴: پانچ ہموار منحنیات کو ساتھ ساتھ جوڑ کر ٹکڑوں میں ہموار منحنی حاصل کی گئی ہے۔

ہوگا جس کو اجزاء کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے (شکل ۱۲.۳)۔

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{r} &= \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)\\ &= [f(t+\Delta t)\boldsymbol{i} + g(t+\Delta t)\boldsymbol{j} + h(t+\Delta t)\boldsymbol{k}] - [f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}]\\ &= [f(t+\Delta t) - f(t)]\boldsymbol{i} + [g(t+\Delta t) - g(t)]\boldsymbol{j} + [h(t+\Delta t) - h(t)]\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

اب اگر Δt صفر کے قریب ہونے کی کوشش کرے تب تین اقدام بیکوقت ہوتے نظر آئیں گے۔ اول، منحنی پر چلتے ہوئے Q نقطہ N تک پہنچے گا۔ دوسرا، سیکنٹ خط NQ نقطہ N پر منحنی کے تحدیدی مماسی مقام پر پہنچے گا۔ تیسرا، حاصل تقسیم $\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}$ درج ذیل حد تک پہنچے گا۔

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t} &= \left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}\right]\boldsymbol{i} + \left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}\right]\boldsymbol{j}\\ &\quad + \left[\lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}\right]\boldsymbol{k}\\ &= \left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right]\boldsymbol{i} + \left[\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right]\boldsymbol{j} + \left[\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right]\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

یوں ماضی کے تجربات ہمیں درج ذیل تعریف تک پہنچاتے ہیں۔

تعریف: نقطہ t_0 پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ اس صورت قابل تفرق ہوگا جب t_0 پر f، g اور h قابل تفرق ہوں۔ اس طرح اگر $\boldsymbol{r}$ اپنے دائرہ کار میں ہر نقطہ پر قابل تفرق ہو تب $\boldsymbol{r}$ قابل تفرق ہوگا۔ کسی بھی نقطہ t پر جہاں $\boldsymbol{r}$ قابل تفرق ہو، اس کا تفرق درج ذیل سمتیہ ہوگا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

اگر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ استمراری اور کبھی بھی $\boldsymbol{0}$ نہ ہو، یعنی جب f، g اور h کے استمراری پہلے تفرق پائے جاتے ہوں اور جو بیکوقت 0 نہ ہوں، تب جس منحنی پر $\boldsymbol{r}$ چلتا ہو وہ **ہموار**[9] ہوگی۔

□

[9] smooth

سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ جب $\mathbf{0}$ سے مختلف ہو، یہ منحنی کا مماسی سمتیہ ہوگا۔ نقطہ $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ پر ایک منحنی کے **مماسی خط** سے مراد وہ خط ہے جو اس نقطہ سے گزرتا ہو اور جو t_0 پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کے متوازی ہو۔ ہم ہموار منحنی پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \neq \mathbf{0}$ کی شرط رکھ کر اس بات کو یقینی بناتے ہیں کہ ہر نقطہ پر منحنی کا مماس استمراری طور پر مڑے گا۔ ایک ہموار منحنی پر سخت موڑ نہیں پایا جاتا ہے اور نا ہی اس پر کوئی کنگرہ پایا جاتا ہے۔

ایک منحنی جو متناہی تعداد کی ہموار منحنیات (بغیر خالی فاصلہ چھوڑے، ساتھ ساتھ) ملا کر حاصل کی گئی ہو **ٹکڑوں میں ہموار**[10] کہلاتی ہے (شکل ۱۲.۴)۔

شکل ۱۲.۴ پر ایک بار دوبارہ نظر ڈالیں۔ ہم نے اس شکل کو مثبت Δt کے لئے بنایا لہٰذا $\Delta \boldsymbol{r}$ آگے چلنے کی طرف اشارہ کرے گا۔ سمتیہ $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ (جسے دکھایا نہیں گیا ہے اور) جس کا وہی رخ ہے جو $\Delta \boldsymbol{r}$ کا ہے بھی آگے کی رخ اشارہ کرے گا۔ اگر Δt منفی ہو تا تب $\Delta \boldsymbol{r}$ چلنے کے مخالف رخ اشارہ کرے گا البتہ حاصل تقسیم $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ جو $\Delta \boldsymbol{r}$ کا منفی غیر سمتی مضرب ہے اب بھی چلنے کے رخ اشارہ کرے گا۔ ہم نے دیکھا کہ $\Delta \boldsymbol{r}$ جس رخ بھی اشارہ کرتا ہو، $\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ ہر صورت چلنے کے رخ اشارہ کرتا ہے اور ہم توقع کرتے ہیں کہ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$ جب $\mathbf{0}$ نہ ہو، بھی ہر صورت چلنے کے رخ اشارہ کرے گا۔ اس طرح ایک ذرہ کی سمتی رفتار کو ہم $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ سے ظاہر کر سکتے ہیں۔ یہ چلنے کی رخ دیتا ہے اور اس کی شرح، وقت کے لحاظ سے مقام کی تبدیلی دیتا ہے۔ ایک ہموار منحنی کے لئے سمتی رفتار کبھی بھی صفر نہیں ہوگا؛ یہ ذرہ نا کبھی رکتا ہے اور نا ہی یہ واپسی اختیار کرتا ہے۔

تعریف: اگر فضا میں ہموار منحنی پر چلتے ہوئے ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہو تب

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

اس ذرے کی **سمتی رفتار**[11] ہوگی جو اس منحنی کو مماسی ہوگی۔ کسی بھی لمحہ t پر، $\boldsymbol{v}$ کا رخ **چلنے کا رخ** ہوگا، $\boldsymbol{v}$ کی مقدار اس ذرے کی رفتار ہوگی، اور تفرق $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$، جب پایا جاتا ہو، اس ذرے کی **اسراع**[12] ہوگی۔ مختصراً درج ذیل ہوگا۔

ا. مقام کا تفرق، سمتی رفتار ہوگا: $\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$

ب. سمتی رفتار کی مقدار، ذرے کی رفتار ہوگی: $\text{رفتار} = |\boldsymbol{v}|$

ج. سمتی رفتار کا تفرق، اسراع ہوگا: $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$

د. لمحہ t پر چلنے کا رخ سمتیہ $\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}$ دیگا۔

□

ہم متحرک ذرے کی سمتی رفتار کو اس کی رفتار اور رخ کا حاصل ضرب لکھ سکتے ہیں۔

$$\text{سمتی رفتار} = |\boldsymbol{v}| \left(\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right) = (\text{رفتار})(\text{رخ})$$

مثال ۴: لمحہ t پر ایک متحرک جسم کا مقام سمتیہ

$$\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$$

---

[10] piecewisesmooth
[11] velocity
[12] acceleration

دیتا ہے۔اس جسم کی رفتار اور رخ لمحہ $t = 2$ پر معلوم کریں۔ کس لمحہ پر (اگر کبھی ایسا ہو بھی) اس جسم کی سمتی رفتار اور اسراع آپس میں عمودی ہوں گے؟

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(t) &= (3\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -(3\sin t)\boldsymbol{i} + (3\cos t)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -(3\cos t)\boldsymbol{i} - (3\sin t)\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

لمحہ $t = 2$ پر اس جسم کی رفتار اور رخ درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
\left|\boldsymbol{v}(2)\right| &= \sqrt{(-3\sin 2)^2 + (-3\cos 2)^2 + (4)^2} = 5 && \text{رفتار} \\
\frac{\boldsymbol{v}(2)}{\left|\boldsymbol{v}(2)\right|} &= -\left(\frac{3}{5}\sin 2\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{3}{5}\cos 2\right)\boldsymbol{j} + \frac{4}{5}\boldsymbol{k} && \text{رخ}
\end{aligned}$$

جس لمحہ پر $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{a}$ ایک دوسرے کے عمودی ہوں اس لمحہ پر $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = 0$ ہوگا۔یوں

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a} = 9\sin t\cos t - 9\cos t\sin t + 4t = 4t = 0$$

سے $t = 0$ حاصل ہوتا ہے۔اس لمحہ پر سمتی رفتار اور اسراع ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔ □

قواعد تفرق

چونکہ سمتی تفاعل کے تفرقات جزو در جزو حاصل کرنا ممکن ہے لہٰذا سمتی تفاعل کے تفرقات کے قواعد کی نوعیت غیر سمتی تفاعل کے تفرقات کے قواعد کی طرح ہوگی۔

سمتی تفاعل کے تفرقات کے قواعد

قاعدہ مستقل تفاعل: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$ جہاں $\boldsymbol{C}$ ایک مستقل سمتیہ ہے۔

اگر $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ متغیر t کے قابل تفرق سمتی تفاعل ہوں اور f متغیر t کا قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہو تب

قاعدہ غیر سمتی مضرب: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(c\boldsymbol{u}) = c\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ جہاں c مستقل عدد ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\boldsymbol{u}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u} + f\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

قاعدہ مجموعہ: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

قاعدہ فرق: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

قاعدہ ضرب نقطہ: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

قاعدہ ضرب صلیبی: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$

قاعدہ زنجیر: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}$ جہاں $\boldsymbol{r}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے اور t متغیر s کا قابل تفرق تفرق ہے۔

صلیبی ضرب میں سمتیات کی ترتیب نہایت اہم ہے۔ یوں اگر بائیں ہاتھ $\boldsymbol{u}$ کے بعد $\boldsymbol{v}$ آئے، تب دائیں ہاتھ بھی $\boldsymbol{u}$ کے بعد $\boldsymbol{v}$ ہو گا۔ ایسا نہ کرنے سے قیمت کی علامت تبدیل ہو گی۔

ہم قاعدہ ضرب اور زنجیری قاعدہ کو ثابت کرتے ہیں۔ باقی ثبوت آپ کو مشق میں پیش کرنے ہوں گے۔

ثبوت: قاعدہ ضرب نقطہ
درج ذیل سمتیات فرض کریں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} &= u_1(t)\boldsymbol{i}+u_2(t)\boldsymbol{j}+u_3(t)\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{v} &= v_1(t)\boldsymbol{i}+v_2(t)\boldsymbol{j}+v_3(t)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)\\ &= \underbrace{u_1'v_1+u_2'v_2+u_3'v_3}_{\boldsymbol{u}'\cdot\boldsymbol{v}}+\underbrace{u_1v_1'+u_2v_2'+u_3v_3'}_{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}'}\end{aligned}$$

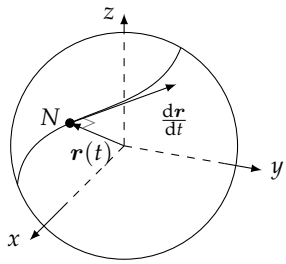
□

ثبوت: قاعدہ ضرب صلیبی
ہم غیر سمتی تفاعل کے قاعدہ ضرب کی طرح اس کو ثابت کرتے ہیں۔ تفرق کی تعریف کی رو سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v}) = \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+h)\times\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)-\boldsymbol{v}(t)}{h}$$

ہو گا۔ ہم شمار کنندہ کے ساتھ $\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+h)$ جمع اور منفی کرتے ہیں تاکہ درج بالا کو ایسی حاصل تقسیمات کی صورت میں لکھنا ممکن ہو جن میں $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ کے تفرقات پائے جاتے ہوں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+h)\times\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+h)+\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)\times\boldsymbol{v}(t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\boldsymbol{u}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)}{h}\times\boldsymbol{v}(t+h)+\boldsymbol{u}(t)\times\frac{\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{v}(t)}{h}\right]\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{u}(t+h)-\boldsymbol{u}(t)}{h}\times\lim_{h\to 0}\boldsymbol{v}(t+h)+\lim_{h\to 0}\boldsymbol{u}(t)\times\lim_{h\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+h)-\boldsymbol{v}(t)}{h}\end{aligned}$$



شکل ۱۲.۵: اگر ایک ذرہ ایک کرہ پر یوں حرکت کرتا ہو کہ اس کی مقام $\boldsymbol{r}$ وقت کا قابل تفرق تفاعل ہو، تب $\boldsymbol{r} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right) = 0$ ہو گا۔

آخری لکیر پر دونوں مساوات اس لئے ٹھیک ہیں کہ دو سمتیات کے سمتی ضرب کا حد، ان کے حدوں کا سمتی ضرب ہوتا ہے (سوال ۵۲)۔ چونکہ t پر $\boldsymbol{v}$ قابل تفرق لہٰذا استمراری ہے، اس لئے جیسے جیسے h کی قیمت صفر تک پہنچتی ہے ویسے ویسے $\boldsymbol{v}(t+h)$ کی قیمت $\boldsymbol{v}(t)$ تک پہنچتی ہے۔ ان دو حاصل تقسیم کی قیمتیں t پر $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$ اور $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$ تک پہنچتی ہیں۔ مختصراً درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

□

ثبوت: زنجیری قاعدہ

فرض کریں $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ متغیر t کا قابل تفرق سمتی تفاعل ہے اور t از خود کسی متغیر s کا قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہے۔ تب f ، g اور h متغیر s کے قابل تفرق تفاعل ہوں گے اور حقیقی قیمت تفاعل کے زنجیری قاعدہ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k} \\
&= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{k} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}
\end{aligned}$$

□

مستقل لمبائی کے سمتی تفاعل

ایک کرہ جس کا مرکز مبدا پر ہو، پر جو جسم حرکت کرتا ہو، اس جسم کے تعین گر سمتیہ کی لمبائی اس کرہ کے رداس جتنی ہو گی (شکل ۱۲.۵)۔ اس کا سمتی رفتار سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ ، جو حرکت کی راہ کو مماسی ہو گا، اس کرہ کو مماسی لہٰذا $\boldsymbol{r}$ کو قائمہ ہو گا۔ مستقل لمبائی والے قابل تفرق سمتی تفاعل کے لئے ہر بار ایسا ہی ہو گا۔ ایسا سمتیہ

اور اس کا پہلا تفرق ایک دوسرے کو عمودی ہوں گے۔ لمبائی مستقل ہونے کی بدولت، سمتیہ میں تبدیلی در حقیقت سمتیہ کے رخ میں تبدیلی ہو گی اور رخ کی یہ تبدیلی سمتی تفاعل کے ساتھ زاویہ قائمہ پر ہو گی۔

اگر $\boldsymbol{u}$ متغیر t کا قابل تفرق سمتی تفاعل ہو اور اس کی لمبائی اٹل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{۳}$$

□

یہ دیکھنے کی خاطر کہ مساوات ۳ کیوں درست ہے ہم فرض کرتے ہیں کہ سمتی تفاعل $\boldsymbol{u}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہے اور $|\boldsymbol{u}|$ ایک مستقل قیمت ہے۔ یوں $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = |\boldsymbol{u}|^2$ ایک مستقل ہو گا اور ہم اس مساوات کی دونوں اطراف کا تفرق لے کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\text{مستقل}) = 0 \\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= 0 && \text{قاعدہ ضرب نقطہ میں } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \text{ لیتے ہوئے} \\
2\boldsymbol{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= 0 && \text{ضرب نقطہ قابل تبادل ہے} \\
\boldsymbol{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= 0
\end{aligned}$$

مثال ۵: دکھائیں کہ درج ذیل سمتیہ کی لمبائی مستقل ہے اور اس سمتیہ کا تفرق اور $\boldsymbol{u}$ آپس میں عمودی ہیں۔

$$\boldsymbol{u}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + \sqrt{3}\boldsymbol{k}$$

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}(t) &= (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{k} + \sqrt{3}\boldsymbol{k} \\
|\boldsymbol{u}(t)| &= \sqrt{(\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{+3} = 2 \\
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j} \\
\boldsymbol{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} &= \sin t \cos t - \sin t \cos t = 0
\end{aligned}$$

□

سمتی تفاعل کے تکملات

اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر $\boldsymbol{r} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}$ ہو تب قابل تفرق سمتی تفاعل $\boldsymbol{R}(t)$، وقفہ I پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ کا الٹ تفرق ہو گا۔ اگر I پر $\boldsymbol{r}$ کا الٹ تفرق $\boldsymbol{R}$ ہو تب، ایک وقت میں ایک جزو کے ساتھ کام کرتے ہوئے، یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ I پر $\boldsymbol{r}$ کے الٹ تفرق کی صورت $\boldsymbol{R}+\boldsymbol{C}$ ہو گی جہاں $\boldsymbol{C}$ کوئی مستقل سمتیہ ہو گا (سوال ۵۶)۔ وقفہ I پر $\boldsymbol{r}$ کے الٹ تفرقات کا سلسلہ I پر $\boldsymbol{r}$ کا **غیر قطعی تکمل**[۱۳] ہو گا۔

تعریف: متغیر t کے لحاظ سے $\boldsymbol{r}$ کا غیر قطعی تکمل، $\boldsymbol{r}$ کے تمام الٹ تفرقات کا سلسلہ ہو گا، جس کو $\int \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اگر $\boldsymbol{r}$ کا الٹ تفرق $\boldsymbol{R}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{C} \qquad \boldsymbol{C} \text{ مستقل سمتیہ ہے}$$

□

غیر قطعی تکملات کے تمام حسابی اصول یہاں قابل اطلاق ہوں گے۔

مثال ۶:

$$\begin{aligned}\int ((\cos t)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}t &= \Big(\int \cos t\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\int \mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{j} - \Big(\int 2t\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{k}\\ &= (\sin t + \mathrm{C}_1)\boldsymbol{i} + (t + \mathrm{C}_2)\boldsymbol{j} - (t^2 + \mathrm{C}_3)\boldsymbol{k}\\ &= (\sin t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} - t^2\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C} \qquad \boldsymbol{C} = \mathrm{C}_1\boldsymbol{i} + \mathrm{C}_2\boldsymbol{j} - \mathrm{C}_3\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

غیر سمتی تفاعل کے تکمل کی طرح یہاں بھی، درمیانے دو قدم کے بغیر، آپ بائیں ہاتھ سے سیدھا نتیجہ لکھ سکتے ہیں۔ □

سمتی تفاعل کے قطعی تکمل کی تعریف اس کے اجزاء کی صورت میں کی جاتی ہے۔

تعریف: اگر وقفہ $[a,b]$ پر $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ کے اجزاء قابل تفرق ہوں تب اس وقفہ پر $\boldsymbol{r}$ بھی قابل تفرق ہو گا اور a تا b سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ کا قطعی تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \Big(\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{j} + \Big(\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{k}$$

□

قطعی تکملات کے تمام حسابی اصول یہاں قابل اطلاق ہوں گے (سوال ۵۴)۔

---

[۱۳] indefiniteintegral

مثال ۷:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi ((\cos t)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 2t\boldsymbol{k})\,\mathrm{d}t &= \Big(\int_0^\pi \cos t\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{i} + \Big(\int_0^\pi \mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{j} - \Big(\int_0^\pi 2t\,\mathrm{d}t\Big)\boldsymbol{k}\\ &= \Big[\sin t\Big]_0^\pi \boldsymbol{i} + \Big[t\Big]_0^\pi \boldsymbol{j} - \Big[t^2\Big]_0^\pi\\ &= [0-0]\boldsymbol{i} + [\pi - 0]\boldsymbol{j} - [\pi^2 - 0^2]\boldsymbol{k}\\ &= \pi\boldsymbol{j} - \pi^2\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

□

مثال ۸: ذرے کے ابتدائی مقام اور ابتدائی سمتی رفتار سے اس کے مقام کا حصول
فضا میں حرکت کرتے ہوئے ایک ذرے کا سمتی رفتار

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر اس ذرے کا مقام $\boldsymbol{r} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$ ہو تب لمحہ t پر اس کا مقام کیا ہو گا؟

حل: ہمیں درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرنا ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\boldsymbol{r}(0) = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k} \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

دونوں اطراف کا t کے لحاظ سے تکمل لے کر

$$\boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے تکمل کا مستقل $\boldsymbol{C}$ معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(\sin 0)\boldsymbol{i} + (\cos 0)\boldsymbol{j} + (0)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C} &= 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k} \qquad \boldsymbol{r}(0) = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{C} &= 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{C} &= 2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\end{aligned}$$

وقت t کے لحاظ سے ذرے کا مقام درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\sin t + 2)\boldsymbol{i} + (\cos t - 1)\boldsymbol{j} + (t+1)\boldsymbol{k}$$

حاصل نتیجہ کو پرکھنے کی خاطر ہم اس سے

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= (\cos t + 0)\boldsymbol{i} + (-\sin t - 0)\boldsymbol{j} + (1+0)\boldsymbol{k}\\ &= (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(0) &= (\sin 0 + 2)\boldsymbol{i} + (\cos 0 - 1)\boldsymbol{j} + (0+1)\boldsymbol{k} \\ &= 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k} \end{aligned}$$

حاصل کرتے ہیں۔ □

سوالات

مستوی xy میں حرکت

سوال ۱ تا سوال ۴ میں مستوی xy میں لمحہ t پر ایک ذرے کا مقام $\boldsymbol{r}(t)$ ہے۔ اس ذرے کی راہ کی ترسیم کے x اور y محدد کی مساواتیں تلاش کریں۔ اس کے بعد دیے گئے لمحہ پر ذرے کی سمتی رفتار اور اسراع سمتیات دریافت کریں۔

سوال ۱: $\boldsymbol{r}(t) = (t+1)\boldsymbol{i} + (t^2-1)\boldsymbol{j}, \quad t = 1$

سوال ۲: $\boldsymbol{r}(t) = (t^2+1)\boldsymbol{i} + (2t-1)\boldsymbol{j}, \quad t = \frac{1}{2}$

سوال ۳: $\boldsymbol{r}(t) = e^t\boldsymbol{i} + \frac{2}{9}e^{2t}\boldsymbol{j}, \quad t = \ln 3$

سوال ۴: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos 2t)\boldsymbol{i} + (3\sin 2t)\boldsymbol{j}, \quad t = 0$

سوال ۵ تا سوال ۸ میں مستوی xy میں مختلف منحنیات پر حرکت کرتے ہوئے ایک ذرے کا تعین گر سمتیہ دیا گیا ہے۔ دیے گئے لمحات پر اس ذرے کے سمتی رفتار اور اسراع کے سمتیات دریافت کریں۔ ان سمتیات کو منحنی پر ترسیم کریں۔

سوال ۵: دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر حرکت
$\boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}, \quad t = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$

سوال ۶: دائرہ $x^2 + y^2 = 16$ پر حرکت
$\boldsymbol{r}(t) = (4\cos\frac{t}{2})\boldsymbol{i} + (4\sin\frac{t}{2})\boldsymbol{j}, \quad t = \pi, \frac{3\pi}{2}$

سوال ۷: تدویر $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t$ پر حرکت
$\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j}, \quad t = \pi, \frac{3\pi}{2}$

سوال ۸: قطع مکافی $y = x^2 + 1$ پر حرکت
$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (t^2+1)\boldsymbol{j},\ t = -1, 0, 1$

فضا میں سمتی رفتار اور اسراع

سوال ۹ تا سوال ۱۴ میں لمحہ t پر ایک ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے۔ اس ذرے کی سمتی رفتار اور اسراع تلاش کریں۔ دئے گئے لمحہ پر اس کی رفتار اور رخ کی قیمت تلاش کریں۔ اس لمحہ پر ذرے کی سمتی رفتار کو رفتار اور رخ کا حاصل ضرب لکھیں۔

سوال ۹: $\boldsymbol{r}(t) = (t+1)\boldsymbol{i} + (t^2-1)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

سوال۱۰: $\boldsymbol{r}(t) = (1+t)\boldsymbol{i} + \frac{t^2}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{t^2}{3}\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

سوال۱۱: $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}, \quad t = \frac{\pi}{2}$

سوال۱۲: $\boldsymbol{r}(t) = (\sec t)\boldsymbol{i} + (\tan t)\boldsymbol{j} + \frac{4}{3}t\boldsymbol{k}, \quad t = \frac{\pi}{6}$

سوال۱۳: $\boldsymbol{r}(t) = (2\ln(t+1))\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

سوال۱۴: $\boldsymbol{r}(t) = (e^{-t})\boldsymbol{i} + (2\cos 3t)\boldsymbol{j} + (2\sin 3t)\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

سوال۱۵تاسوال۱۸میں لمحہ t پر فضا میں ایک ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر اس کی سمتی رفتار اور اسراع کے بیچ زاویہ تلاش کریں۔

سوال۱۵: $\boldsymbol{r}(t) = (3t+1)\boldsymbol{i} + \sqrt{3}t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}$

سوال۱۶: $\boldsymbol{r}(t) = (\frac{\sqrt{2}}{2}t)\boldsymbol{i} + (\frac{\sqrt{2}}{2}t - 16t^2)\boldsymbol{j}$

سوال۱۷: $\boldsymbol{r}(t) = (\ln(t^2+1))\boldsymbol{i} + (\tan^{-1} t)\boldsymbol{j} + \sqrt{t^2+1}\boldsymbol{k}$

سوال۱۸: $\boldsymbol{r}(t) = \frac{4}{9}(1+t)^{3/2}\boldsymbol{i} + \frac{4}{9}(1-t)^{3/2}\boldsymbol{j} + \frac{1}{3}t\boldsymbol{k}$

سوال۱۹اور سوال۲۰ میں لمحہ t پر فضا میں ایک ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ ہے۔ دیے گئے وقفہ میں وہ لمحہ یا لمحات تلاش کریں جن پر سمتی رفتار سمتیہ اور اسراع سمتیہ ایک دوسرے کے عمودی ہوں گے۔

سوال۱۹: $\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال۲۰: $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + (\cos t)\boldsymbol{k}, \quad t \ge 0$

سمتی قیمت تفاعل کا تکمل

سوال۲۱تاسوال۲۶ میں تکمل حاصل کریں۔

سوال۲۱: $\int_0^1 [t^3\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + (t+1)\boldsymbol{k}]\,\mathrm{d}t$

سوال۲۲: $\int_1^2 \left[(6-6t)\boldsymbol{i} + 3\sqrt{t}\boldsymbol{j} + \frac{4}{t^2}\boldsymbol{k}\right]\mathrm{d}t$

سوال۲۳: $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} [(\sin t)\boldsymbol{i} + (1+\cos t)\boldsymbol{j} + (\sec^2 t)\boldsymbol{k}]\,\mathrm{d}t$

سوال۲۴: $\int_0^{\pi/3} [(\sec t \tan t)\boldsymbol{i} + (\tan t)\boldsymbol{j} + (2\sin t\cos t)\boldsymbol{k}]\,\mathrm{d}t$

سوال۲۵: $\int_1^4 [\frac{1}{t}\boldsymbol{i} + \frac{1}{5-t}\boldsymbol{j} + \frac{1}{2t}\boldsymbol{k}]\,\mathrm{d}t$

سوال۲۶: $\int_0^1 [\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{3}}{1+t^2}\boldsymbol{k}]\,\mathrm{d}t$

سمتی تفاعل کے ابتدائی قیمت مسائل

سوال ۲۷ تا سوال ۳۲ میں t کے سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ کے ابتدائی قیمت مسائل دیے گئے ہیں۔ انہیں حل کریں۔

سوال ۲۷:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -t\boldsymbol{i} - t\boldsymbol{j} - t\boldsymbol{k} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k} \qquad \text{ابتدائی شرط}$$

سوال ۲۸:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (180t)\boldsymbol{i} + (180t - 16t^2)\boldsymbol{j} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\boldsymbol{r}(0) = 100\boldsymbol{j} \qquad \text{ابتدائی شرط}$$

سوال ۲۹:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \tfrac{3}{2}(t+1)^{1/2}\boldsymbol{i} + e^{-t}\boldsymbol{j} + \tfrac{1}{t+1}\boldsymbol{k} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{k} \qquad \text{ابتدائی شرط}$$

سوال ۳۰:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (t^3 + 4t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + 2t^2\boldsymbol{k} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\boldsymbol{r}(0) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} \qquad \text{ابتدائی شرط}$$

سوال ۳۱:

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -32\boldsymbol{k} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\boldsymbol{r}(0) = 100\boldsymbol{k} \qquad \text{ابتدائی شرائط}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 8\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}$$

سوال ۳۲:

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\boldsymbol{r}(0) = 10\boldsymbol{i} + 10\boldsymbol{j} + 10\boldsymbol{k} \qquad \text{ابتدائی شرائط}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \boldsymbol{0}$$

ہموار منحنیات کے مماسی خط

ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ کا $t = t_0$ پر مماسی خط نقطہ $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ سے گزرتا ہے اور، t_0 پر اس منحنی کے سمتی رفتار سمتیہ $\boldsymbol{v}(t_0)$، کا متوازی ہوتا ہے (متن میں بتایا گیا)۔ سوال ۳۳ تا سوال ۳۶ میں $t = t_0$ پر دیے گئے منحنی کے مماسی خط کی مقدار معلوم مساوات حاصل کریں۔

سوال ۳۳: $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (t^2 - \cos t)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}, \quad t_0 = 0$

سوال ۳۴: $\boldsymbol{r}(t) = (2\sin t)\boldsymbol{i} + (2\cos t)\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k}, \quad t_0 = 4\pi$

سوال ۳۵: $\boldsymbol{r}(t) = (a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}, \quad t_0 = 2\pi$

سوال ۳۶: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + (\sin 2t)\boldsymbol{k}, \quad t_0 = \frac{\pi}{2}$

دائری راہ پر حرکت

سوال ۳۷: اکائی دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر ایک ذرہ کے حرکت کو (ا) تا (د) میں دی گئی مساوات ظاہر کرتی ہیں۔ اگرچہ (ا) تا (د) میں ذرے کا راہ ایک ہے، ان راہ پر اس کا حرکی رویہ مختلف ہے۔ ہر راہ پر درج ذیل کے جوابات دیں۔

۱. کیا ذرے کی رفتار مستقل ہے؟ اگر ایسا ہو، تب اس کی رفتار کتنی ہے؟

۲. کیا ذرے کا سمتی رفتار سمتیہ اور اسراع آپس میں ہر جگہ عمودی ہیں؟

۳. کیا یہ ذرہ اکائی دائرے پر گھڑی کے رخ یا اس کے مخالف رخ گھومتا ہے؟

۴. کیا ذرہ نقطہ $(1, 0)$ سے ابتدا کرتا ہے؟

ا. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

ب. $\boldsymbol{r}(t) = \cos(2t)\boldsymbol{i} + \sin(2t)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

ج. $\boldsymbol{r}(t) = \cos(t - \pi/2)\boldsymbol{i} + \sin(t - \pi/2)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

د. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

ھ. $\boldsymbol{r}(t) = \cos(t^2)\boldsymbol{i} + \sin(t^2)\boldsymbol{j}, \quad t \geq 0$

سوال ۳۸: دکھائیں کہ درج ذیل ابتدائی قیمت سمتی قیمت تفاعل، مستوی $x + y - 2z = 2$ میں رداس 1 کے دائرہ پر حرکت کو ظاہر کرتا ہے جہاں دائرے کا مرکز $(2, 2, 1)$ ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + \cos t\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j}\right) + \sin t\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}\right)$$

خط مستقیم پر حرکت

سوال ۳۹: لمحہ $t = 0$ پر ایک ذرہ نقطہ $(1,2,3)$ پر واقع ہے۔ یہ خط مستقیم پر حرکت کرتا ہوا نقطہ $(4,1,4)$ پہنچتا ہے۔ اس کا رفتار $(1,2,3)$ پر 2 اور اس کی اسراع مستقل $3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ ہے۔ لمحہ t پر اس کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ دریافت کریں۔

سوال ۴۰: لمحہ $t = 0$ پر ایک ذرہ نقطہ $(1,-1,2)$ پر پایا جاتا ہے اور اس کا رفتار 2 ہے۔ یہ نقطہ $(3,0,3)$ کی طرف یکساں اسراع $2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ سے بڑھتا ہے۔ لمحہ t پر اس کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۴۱: ایک ذرہ قطع مکافی $y^2 = 2x$ کے بالائی حصہ پر بائیں سے دائیں رخ، 5 اکائیاں فی سیکنڈ کے مستقل رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ اس ذرہ کی سمتی رفتار اس لمحہ پر تلاش کریں جب یہ نقطہ $(2,2)$ سے گزرتا ہے۔

سوال ۴۲: ایک ذرہ مستوی xy میں ایک تدویر پر یوں حرکت کرتا ہے کہ لمحہ t اس کا تعین گر سمتیہ

$$\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j}$$

ہوتا ہے۔ $|\boldsymbol{r}|$ اور $|\boldsymbol{a}|$ کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمتیں تلاش کریں۔ (اشارہ: پہلے $|\boldsymbol{v}|^2$ اور $|\boldsymbol{a}|^2$ کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں اور بعد میں جذر لیں۔)

سوال ۴۳: ایک ذرہ مستوی yz میں ترخیم $\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$ پر یوں حرکت کرتا ہے کہ لمحہ t پر اس کا تعین گر سمتیہ

$$\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{j} + (2\sin t)\boldsymbol{k}$$

ہوتا ہے۔ $|\boldsymbol{r}|$ اور $|\boldsymbol{a}|$ کی کم سے کم اور زیادہ سے زیادہ قیمتیں تلاش کریں۔ (بالائی سوال میں اشارہ دیکھیں۔)

سوال ۴۴: مصنوعی سیارہ کا دائری مدار

ایک مصنوعی سیارہ جس کی کمیت m ہے ایک جسم جس کی کمیت M ہے کے گرد دائری مدار پر مستقل رفتار v سے طواف کرتا ہے۔ دائری مدار کا رداس r_0 ہے۔ اس مصنوعی سیارہ کے مدار کا دوری عرصہ T (ایک چکر کے لئے درکار وقت) درج ذیل اقدام کے ذریعہ تلاش کریں۔

ا. کمیت M کے جسم کو مبدا پر اور لمحہ $t = 0$ پر مصنوعی سیارہ کو محور x پر رکھیں۔ حرکت کو گھڑی کے رخ تصور کریں (شکل دیکھیں)۔ لمحہ t پر سیارہ کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ لیں۔ دکھائیں کہ $\theta = \frac{vt}{r_0}$ ہوگا لہٰذا درج ذیل ہوگا۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (r_0 \cos \tfrac{vt}{r_0})\boldsymbol{i} + (r_0 \sin \tfrac{vt}{r_0})\boldsymbol{j}$$

ب. سیارے کی اسراع معلوم کریں۔

ج. نیوٹن کے قانون تجاذب کے تحت سیارہ پر قوت درج ذیل ہوگی جہاں G تجاذب کا عالمگیر مستقل ہے۔

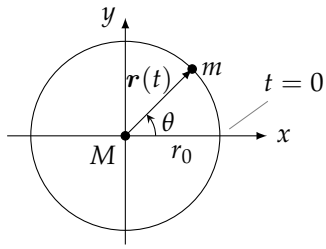
$$\boldsymbol{F} = \left(-\frac{GMm}{r_0^2}\right)\frac{\boldsymbol{r}}{r_0}$$

نیوٹن کے دوسرے قانون سے $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ ہوگا جس سے $v^2 = \frac{GM}{r_0}$ حاصل کریں۔

د. دکھائیں کہ T مساوات $vT = 2\pi r_0$ کو مطمئن کرتا ہے۔

ھ. جزو-ج اور جزو-د سے درج ذیل حاصل کریں جو دوری عرصہ کا مربع ہے۔

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r_0^3$$



سوال ۴۵: فرض کریں $\boldsymbol{v}$ متغیر t کا قابل تفرق سمتی تفاعل ہے۔ دکھائیں کہ اگر $\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = 0$ ہو تب $|\boldsymbol{v}|$ ایک مستقل ہو گا۔

سوال ۴۶: غیر سمتی سہ ضرب کا تفرق

ا. دکھائیں کہ اگر $\boldsymbol{u}$ ، $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{w}$ قابل تفرق سمتی تفاعل ہوں تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{w}}{\mathrm{d}t} \tag{۴}$$

ب. دکھائیں مساوات ۴ درج ذیل کا معادل ہے۔

(۵)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}v_3}{\mathrm{d}t} \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \frac{\mathrm{d}w_1}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}w_2}{\mathrm{d}t} & \frac{\mathrm{d}w_3}{\mathrm{d}t} \end{vmatrix}$$

مساوات ۵ کہتی ہے 3 ضرب 3 قابل تفرق مقطع کا تفرق ان تین مقطع کا مجموعہ ہو گا جو ایک وقت میں ایک صف کا تفرق لے کر حاصل کیے گئے ہوں۔ اس نتیجہ کو بلند رتبی مقطع تک وسعت دی جا سکتی ہے۔

سوال ۴۷: فرض کریں $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ ہو جہاں f ، g اور h قابل تین رتبی تفرق ہوں۔ مساوات ۴ یا مساوات ۵ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{r} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}\right) = \boldsymbol{r} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^3}\right) \tag{۶}$$

(اشارہ: بائیں ہاتھ تفرق لے کر ان سمتیات کی نشاندہی کریں جن کے حاصل ضرب صفر ہو۔)

سوال ۴۸: قاعدہ مستقل تفاعل
دکھائیں کہ اگر $\boldsymbol{u}$ ایک ایسا سمتی تفاعل ہو جس کی قیمت مستقل $\boldsymbol{C}$ ہو تب $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{0}$ ہو گا۔

سوال ۴۹: قواعد غیر سمتی ضرب

ا. دکھائیں اگر $\boldsymbol{u}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہو اور c کوئی حقیقی عدد ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}(c\boldsymbol{u})}{\mathrm{d}t} = c\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

ب. ثابت کریں کہ اگر t کا $\boldsymbol{u}$ قابل تفرق تفاعل ہو اور t کا f قابل تفرق غیر سمتی تفاعل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\boldsymbol{u}) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u} + f\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t}$$

سوال ۵۰: قواعد مجموعہ اور فرق
ثابت کریں کہ اگر $\boldsymbol{u}$ اور $\boldsymbol{v}$ متغیر t کے قابل تفرق تفاعل ہوں تب درج ذیل ہوں گے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

سوال ۵۱: ایک نقطہ پر استمرار کا پرکھ اجزاء
دکھائیں کہ سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ جس کو قاعدہ $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ بیان کرتا ہو نقطہ t_0 پر تب استمراری ہو گا جب f ، g اور h اس نقطہ پر استمراری ہوں۔

سوال ۵۲: سمتی تفاعل کے صلیبی ضرب کا حد
فرض کریں $\boldsymbol{r}_1(t) = f_1(t)\boldsymbol{i} + f_2(t)\boldsymbol{j} + f_3(t)\boldsymbol{k}$ ، $\boldsymbol{r}_2(t) = g_1(t)\boldsymbol{i} + g_2(t)\boldsymbol{j} + g_3(t)\boldsymbol{k}$ ، $\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_1(t) = \boldsymbol{A}$ اور $\lim_{t\to t_0}\boldsymbol{r}_2(t) = \boldsymbol{B}$ ہیں۔ صلیبی ضرب کا کلیہ مقطع اور غیر سمتی تفاعل کے لئے قاعدہ حد حاصل ضرب استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\lim_{t\to t_0}(\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)) = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$$

سوال ۵۳: قابل تفرق سمتی تفاعل استمراری ہوتے ہیں۔
دکھائیں کہ اگر $t = t_0$ پر $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ قابل تفرق ہو تب t_0 پر یہ استمراری بھی ہو گا۔

سوال ۵۴: قابل تکمل سمتی تفاعل کے درج ذیل خواص کی تصدیق کریں۔

ا. قاعدہ مستقل غیر سمتی مضرب:

$$\int_a^b k\boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = k\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t \qquad k \text{ کوئی مستقل ہے}$$

نفی کا قاعدہ $k = -1$ لے کر حاصل ہوگا:

$$\int_a^b (-\boldsymbol{r}(t))\,\mathrm{d}t = -\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t$$

ب. قواعد مجموعہ اور فرق:

$$\int_a^b (\boldsymbol{r}_1(t) \mp \boldsymbol{r}_2(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b \boldsymbol{r}_1(t)\,\mathrm{d}t \mp \int_a^b \boldsymbol{r}_2(t)\,\mathrm{d}t$$

ج. قاعدہ مستقل سمتیہ مضرب:

$$\int_a^b \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{C}\cdot\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \boldsymbol{C}\text{ کوئی سمتی مستقل ہے}$$

اور

$$\int_a^b \boldsymbol{C}\times\boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{C}\times\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \boldsymbol{C}\text{ کوئی سمتی مستقل ہے}$$

سوال ۵۵: غیر سمتی اور سمتی تفاعل کے حاصل ضرب

فرض کریں وقفہ $a \le t \le b$ پر غیر سمتی تفاعل $u(t)$ اور سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ معین ہیں۔

ا. دکھائیں کہ $[a,b]$ پر $u\boldsymbol{r}$ تب استمراری ہوگا جب $[a,b]$ پر u اور $\boldsymbol{r}$ استمراری ہوں۔

ب. اگر غیر سمتی تفاعل u اور سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}$ دونوں $[a,b]$ پر قابل تفرق ہوں تب دکھائیں کہ $[a,b]$ پر $u\boldsymbol{r}$ قابل تفرق ہوگا اور مزید درج ذیل بھی ہوگا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u\boldsymbol{r}) = u\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

سوال ۵۶: سمتی تفاعل کے الٹ تفرقات

ا. غیر سمتی تفاعل کے مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ 2 استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اگر وقفہ I پر دو سمتی تفاعل $\boldsymbol{R}_1(t)$ اور $\boldsymbol{R}_2(t)$ کے تفرقات متماثل ہوں تب پورے I پر ان تفاعل میں صرف ایک مستقل سمتی قیمت کا فرق ہوگا۔

ب. جزو-ا کا نتیجہ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ اگر I پر $\boldsymbol{r}(t)$ کا الٹ تفرق $\boldsymbol{R}(t)$ ہو تب I پر $\boldsymbol{r}$ کا ہر الٹ تفرق $\boldsymbol{R}(t) + \boldsymbol{C}$ کے برابر ہوگا جہاں $\boldsymbol{C}$ کوئی مستقل سمتیہ ہوگا۔

سوال ۵۷: احصاء کا بنیادی مسئلہ

احصاء کا بنیادی مسئلہ برائے حقیقی متغیر کا غیر سمتی تفاعل، حقیقی متغیر کے سمتی تفاعل کے لئے بھی کارآمد ہوگا۔ یہ ثابت کرنے کی خاطر غیر سمتی تفاعل کے لئے اس مسئلہ کو استعمال کر کے پہلے دکھائیں کہ اگر $a \le t \le b$ پر سمتی تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ استمراری ہو تب $[a,b]$ پر ہر نقطہ t کے لئے درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^t \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{r}(t)$$

اس کے بعد سوال ۵۶ کے جزو-ب کا نتیجہ استعمال کر کے دکھائیں کہ اگر $[a, b]$ پر $\boldsymbol{r}(t)$ کا $\boldsymbol{R}$ کوئی الٹ تفرق ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b \boldsymbol{r}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{R}(b) - \boldsymbol{R}(a)$$

کمپیوٹر کا استعمال

کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے سوال ۵۸ تا سوال ۶۱ میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کی فضائی راہ کی منحنی ترسیم کریں۔

ب. سمتی رفتار سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کے اجزاء تلاش کریں۔

ج. دیے گئے نقطہ t_0 پر سمتی رفتار $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت معلوم کر کے نقطہ $\boldsymbol{r}(t_0)$ پر مماسی خط کی مساوات تلاش کریں۔

د. دیے گئے وقفہ پر منحنی اور خط مماس ترسیم کریں۔

سوال ۵۸: $\boldsymbol{r}(t) = (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{i} + (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 6\pi,\ t_0 = \frac{3\pi}{2}$

سوال ۵۹: $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{2}t\boldsymbol{i} + e^t\boldsymbol{j} + e^{-t}\boldsymbol{k}, \quad -2 \le t \le 3,\ t_0 = 1$

سوال ۶۰: $\boldsymbol{r}(t) = (\sin 2t)\boldsymbol{i} + (\ln(1+t))\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 4\pi,\ t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال ۶۱: $\boldsymbol{r}(t) = (\ln(t^2+2))\boldsymbol{i} + (\tan^{-1} 3t)\boldsymbol{j} + \sqrt{t^2+1}\boldsymbol{k}, \quad -3 \le t \le 5,\ t_0 = 3$

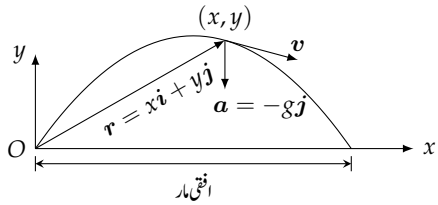
سوال ۶۲ اور سوال ۶۳ میں آپ a اور b کی قیمتیں تبدیل کرتے ہوئے پیچ دار منحنی

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos at)\boldsymbol{i} + (\sin at)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}$$

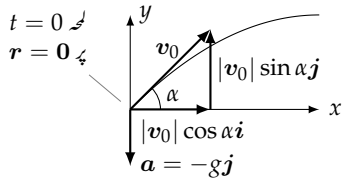
کے رویہ پر غور کریں گے۔ کمپیوٹر کو استعمال کریں۔

سوال ۶۲: وقفہ $0 \le t \le 4\pi$ کے لئے نقطہ $t = \frac{3\pi}{2}$ پر پیچ دار منحنی اور اس کا مماسی خط، $b = 1$ اور $a = 1, 2, 4, 6$ لیتے ہوئے ترسیم کریں۔ اپنے الفاظ میں بتلائیں کہ a کی قیمت ان مثبت قیمتوں پر بڑھانے سے منحنی کی ترسیم اور مماسی خط کے مقام پر کیا اثر پیدا ہوتا ہے۔

سوال ۶۳: وقفہ $0 \le t \le 4\pi$ کے لئے نقطہ $t = \frac{3\pi}{2}$ پر پیچ دار منحنی اور اس کا مماسی خط، $a = 1$ اور $b = 1/4, 1/2, 2, 4$ لیتے ہوئے ترسیم کریں۔ اپنے الفاظ میں بتلائیں کہ b کی قیمت ان مثبت قیمتوں پر بڑھانے سے منحنی کی ترسیم اور مماسی خط کے مقام پر کیا اثر پیدا ہوتا ہے۔



(ب) کچھ دیر بعد لمحہ t پر مقام، سمتی رفتار اور اسراع۔



(ا) لمحہ $t = 0$ پر مقام، سمتی رفتار اور اسراع۔

شکل ۱۲.۶: گولا کی مثالی پرواز۔

۱۲.۲ گولا کی حرکت کی نمونہ کشی

ایک گولا چلانے سے پہلے ہم جاننا چاہیں گے کہ آیا وہ حدف کو مار سکے گا (کیا حدف تک پہنچے گا)؟ یہ گولا کس بلندی تک پہنچے گا (کیا یہ پہاڑی کو پار کر پائے گا)؟ اور یہ حدف پر کتنی دیر میں پہنچے گا (نتائج کب حاصل ہوں گے)؟ یہ تمام معلومات گولے کی ابتدائی سمتیہ رفتار سے نیوٹن کے دوسرے قانون کی مدد سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔

گولا کی حرکت کی مقدار معلوم مثالی مساوات

حرکت گولا کی مثالی مساوات حاصل کرتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ یہ ایک ذرہ کی مانند مستوی میں حرکت کرتا ہے اور اس پر صرف مستقل قوت کشش سیدھا نیچے رخ عمل کرتی ہے۔ حقیقت میں یہ مفروضے درست نہیں ہیں۔ زمین گھومنے کی بنا گولے کے نیچے زمین حرکت میں ہوتی ہے، ہوائی رگڑ جو گولے کی رفتار اور بلندی پر منحصر ہے گولا پر عمل کرتی ہے، اور قوت کشش ایک مستقل نہیں ہے بلکہ اس کی قیمت گولا کی بلندی پر منحصر ہے۔ اگرچہ ان تمام کے اثرات کو بھی دیکھنا ہوگا، ہم یہاں انہیں نظر انداز کرتے ہیں۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ لمحہ $t = 0$ پر ابتدائی سمتیہ رفتار $\boldsymbol{v}_0$ کے ساتھ مبدا سے گولا ربع اول میں مارا جاتا ہے (شکل ۱۲.۶)۔ اگر افقی زمین کے ساتھ $\boldsymbol{v}_0$ کا زاویہ α ہو تب

$$\boldsymbol{v}_0 = (|\boldsymbol{v}_0| \cos\alpha)\boldsymbol{i} + (|\boldsymbol{v}_0| \sin\alpha)\boldsymbol{j} \tag{۱}$$

ہوگا۔ اس میں $|\boldsymbol{v}_0|$ کو سادہ علامت v_0 سے ظاہر کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{v}_0 = (v_0 \cos\alpha)\boldsymbol{i} + (v_0 \sin\alpha)\boldsymbol{j} \tag{۲}$$

گولا کا ابتدائی مقام درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{r}_0 = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} = \boldsymbol{0} \tag{۳}$$

نیوٹن کا دوسرا قانون برائے حرکت کے تحت کمیت ضرب اسراع یعنی $m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ عامل قوت کے برابر ہوگا جہاں لمحہ t پر گولے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$

ہے۔ اگر صرف قوت کشش $-mg\boldsymbol{j}$ عمل کرتی ہو تب

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -g\boldsymbol{j} \quad \text{یا} \quad m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -mg\boldsymbol{j} \tag{۴}$$

ہو گا۔ ہم درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کر کے متغیر t کا تفاعل $\boldsymbol{r}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -g\boldsymbol{j} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0,\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}_0 \quad \text{پر} \quad t = 0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

پہلا تکمل

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -(gt)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{v}_0$$

دیگا۔ دوسرا تکمل

$$\boldsymbol{r} = -\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{v}_0 t + \boldsymbol{r}_0$$

دیگا۔ ہم مساوات ۲ اور مساوات ۳ سے $\boldsymbol{v}_0$ اور $\boldsymbol{r}_0$ کی قیمتیں پر کر کے

$$\boldsymbol{r} = -\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{j} + \underbrace{(v_0\cos\alpha)t\boldsymbol{i} + (v_0\sin\alpha)t\boldsymbol{j}}_{\boldsymbol{v}_0 t} + \boldsymbol{0}$$

یعنی

$$\boldsymbol{r} = (v_0\cos\alpha)t\boldsymbol{i} + \left((v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2\right)\boldsymbol{j} \tag{۵}$$

حاصل کرتے ہیں۔

مساوات ۵ گولے کی مثالی حرکت کی سمتی مساوات ہے۔ زاویہ α گولا **چلانے کا زاویہ** ہے جبکہ v_0 اس کی **ابتدائی رفتار** ہے۔

مساوات ۵ درج ذیل دو غیر سمتی مساواتوں کے برابر ہے۔

$$x = (v_0\cos\alpha)t, \quad y = (v_0\sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{۶}$$

انہیں گولا کی مثالی پرواز کی مقدار معلوم مساوات کہتے ہیں۔ اگر وقت کو سیکنڈوں میں اور فاصلہ کو میٹروں میں ناپا جائے تب $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہو گا اور مساوات ۶ میں x اور y میٹر میں ہوں گے۔

مثال ۱: افقی میدان میں مبدا سے ایک گولا $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے 60° کے زاویہ پر داغا جاتا ہے۔ یہ گولا 10 سیکنڈ بعد کہاں ہو گا؟

حل: ہم $v_0 = 500$ ، $\alpha = 60$ ، $g = 9.8$ لیتے ہوئے مساوات ۱۶ استعمال کر کے لمحہ $t = 10$ پر گولے کا مقام معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
x &= (v_0 \cos\alpha)t = 500 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 = 2500\,\mathrm{m} \\
y &= (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \\
&= 500 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 10 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot (10)^2 \\
&= 2500\sqrt{3} - 490 \\
&\approx 3840\,\mathrm{m}
\end{aligned}$$

گولا چلانے کے دس سیکنڈ بعد 3840 میٹر کی بلندی پر حدف کی طرف 2500 میٹر دور ہو گا۔ □

بلندی، دورانیہ پرواز اور فاصلہ مار

ہم مساوات ۶ سے مثالی گولا کی پرواز کے بارے میں عموماً سوالات کے جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔

گولا اپنی بلند ترین مقام پر اس لمحہ پہنچتا ہے جب اس کی رفتار کا انتصابی حصہ صفر ہو:

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \quad \text{یعنی} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_0 \sin\alpha - gt = 0$$

اس لمحہ پر y کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$y_{\text{بلند تر}} = (v_0 \sin\alpha)\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} \tag{۷}$$

افقی میدان میں داغے گئے گولا کی پرواز کا دورانیہ جاننے کی خاطر ہم مساوات ۶ میں $y = 0$ پر کے t حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
(v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 &= 0 \\
t\left(v_0 \sin\alpha - \frac{1}{2}gt\right) &= 0 \\
t = 0, \quad t &= \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}
\end{aligned} \tag{۸}$$

چونکہ $t = 0$ وہ لمحہ ہے جب گولا داغا گیا لہٰذا $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ وہ لمحہ ہو گا جب گولا واپس زمین پر گرتا ہے۔

گولے کی مار R جاننے کی خاطر ہم مبدا سے گولا گرنے کے مقام تک فاصلہ معلوم کرتے ہیں۔ ہم $t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ پر x تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x &= (v_0 \cos\alpha)t \\ R &= (v_0 \cos\alpha)\left(\frac{2v_0 \sin\alpha}{g}\right) \\ &= \frac{v_0^2}{g}(2\sin\alpha\cos\alpha) = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha \end{aligned} \tag{۹}$$

زیادہ سے زیادہ فاصلہ مار $\sin 2\alpha = 1$ یعنی $\alpha = 45^\circ$ پر حاصل ہوگا۔

مثال ۲: افقی میدان میں مبدا سے ایک گولا $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے 60° کے زاویہ پر چلایا جاتا ہے۔ گولا کی زیادہ سے زیادہ بلندی، دورانیہ پرواز اور فاصلہ مار تلاش کریں (مثال ۱)۔

حل:

$$\begin{aligned} y_{\text{بلند تر}} &= \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g} && \text{زیادہ سے زیادہ بلندی (مساوات ۷)} \\ &= \frac{(500\sin 60^\circ)^2}{2(9.8)} \approx 9566\,\mathrm{m} \\ t &= \frac{2v_0 \sin\alpha}{g} && \text{دورانیہ پرواز (مساوات ۸)} \\ &= \frac{2(500)\sin 60^\circ}{9.8} \approx 88\,\mathrm{s} \\ R &= \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha && \text{فاصلہ مار (مساوات ۹)} \\ &= \frac{(500)^2 \sin 120^\circ}{9.8} \approx 22\,092\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

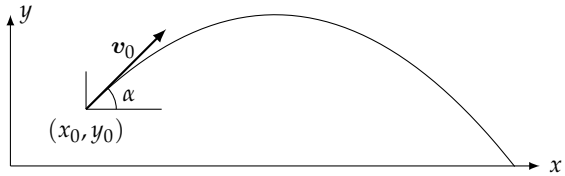
□

گولا کی مثالی پرواز قطع مکافی ہو گی

ہوائی رگڑ کو نظر انداز کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ مثالی پرواز، قطع مکافی راہ اپناتی ہے۔ مساوات ۶ کی ایک جزو سے $t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ حاصل کر کے دوسرے جزو میں پر کرتے ہوئے

$$y = -\left(\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\right)x^2 + (\tan\alpha)x$$

حاصل ہوتا ہے جس کی روپ $y = ax^2 + bx$ ہے جو ایک قطع مکافی کو ظاہر کرتی ہے۔



شکل ۱۲.۷: نقطہ (x_0, y_0) سے ابتدائی سمتی رفتار v_0 کے ساتھ مارے گئے گولا کی راہ۔

نقطہ (x_0, y_0) سے گولا چلانا

مبدا کی بجائے نقطہ (x_0, y_0) سے گولا چلانے سے مساوات ۶ کی جگہ درج ذیل مساوات حاصل ہوں گی (شکل ۱۲.۷) جنہیں آپ سوال ۱۹ میں حاصل کریں گے۔

$$x = x_0 + (v_0 \cos\alpha)t, \quad y = y_0 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{۱۰}$$

مثال ۳: ایک نشانہ باز 2 m بلندی سے 30 m دور درخت پر 20 m بلندی پر لگائی گئی نشانی کو تیر کا نشانہ بناتا ہے۔ تیر نشانہ پر عین اس لمحہ پہنچتا ہے جب اس کی بلندی زیادہ سے زیادہ ہو۔ (ا) ابتدائی رفتار v_0 اور زاویہ α کی صورت میں زیادہ سے زیادہ بلندی $y_{\text{بلند تر}}$ لکھیں۔ (ب) اگر $y_{\text{بلند تر}} = 20\,\text{m}$ ہو تب جزو-ا کے نتیجہ سے $v_0 \sin\alpha$ معلوم کریں۔ (ج) تیر 30 m افقی فاصلہ طے کر کے درخت تک پہنچتا ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے $v_0 \cos\alpha$ کی قیمت معلوم کریں۔ (د) تیر کا ابتدائی زاویہ تلاش کریں۔

حل: (ا) ہم نشانہ باز کو مبدا پر تصور کرتے ہیں۔ یوں $t = 0$ پر $x_0 = 0$ اور $y_0 = 2$ ہو گا لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} y &= y_0 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 && \text{مساوات ۱۰} \\ &= 2 + (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 && y_0 = 2 \end{aligned}$$

ہم $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$ سے وہ لمحہ t تلاش کرتے ہیں جب تیر زیادہ سے زیادہ بلندی پر ہو گا:

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

اس لمحہ پر y کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$y_{\text{بلند تر}} = 2 + (v_0 \sin\alpha)\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 = 2 + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2g}$$

(ب) ہم مساوات ۱۰ میں $g = 9.8$ اور $y_{\text{بلند تر}} = 20$ پر کر کے جزو-ا سے

$$20 = 2 + \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{2(9.8)}$$

یعنی

$$v_0 \sin\alpha = \sqrt{(18)(19.6)}$$

(ج) ہم جزو-ا میں حاصل زیادہ سے زیادہ بلندی تک پہنچنے کے لئے درکار وقت t اور افقی فاصلہ $x = 30\,\mathrm{m}$ مساوات ۱۰ میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x &= x_0(\cos\alpha)t && \text{مساوات ۱۰} \\ 30 &= 0 + (v_0\cos\alpha)t && x = 30,\ x_0 = 0 \\ &= (v_0\cos\alpha)\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right) && t = (v_0\sin\alpha)/g \end{aligned}$$

اس مساوات کو $v_0\cos\alpha$ کے حل کر کے اس میں جزو-ب کا نتیجہ پر کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$v_0\cos\alpha = \frac{30g}{v_0\sin\alpha}$$

(د) ہم جزو-ب اور جزو-ج سے

$$\tan\alpha = \frac{(18)(19.6)}{(30)(9.8)} \approx 0.876$$

یعنی

$$\alpha \approx \tan^{-1}(0.876) = 50.2^\circ$$

حاصل کرتے ہیں۔ □

سوالات

درج ذیل سوالات میں گولا کی حرکت کو مثالی تصور کیا جائے۔ تمام زاویات افقی میدان سے ناپے جائیں گے۔ جہاں اس کے برعکس ذکر نہ کیا گیا ہو، گولا کو مبدا سے افقی میدان میں چلایا جاتا ہے۔

سوال ۱: ایک گولا 60° زاویہ پر $840\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے داغا جاتا ہے۔ یہ حدف کے رخ کتنی دیر میں $21\,\mathrm{km}$ فاصلہ طے کرے گا؟

سوال ۲: ایک توپ کی زیادہ سے زیادہ فاصلہ مار $24.5\,\mathrm{km}$ ہے۔ اس کے نالی میں گولے کی رفتار معلوم کریں۔

سوال ۳: ایک گولا 45° زاویہ پر $500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے داغا جاتا ہے۔ (ا) اس کا فاصلہ مار کتنا ہو گا؟ (ب) افقی رخ $5\,\mathrm{km}$ فاصلہ پر گولا کتنا بلند ہو گا؟ (ج) یہ گولا کتنی بلندی تک پہنچے گا؟

سوال ۴: ایک گیند $10\,\mathrm{m}$ کی بلندی سے 30° زاویہ اور $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے پھینکی جاتی ہے۔ یہ گیند کب اور کتنے فاصلہ پر زمین کو مس کرے گی؟

سوال ۵: ایک کھلاڑی $7\,\mathrm{kg}$ کا گولا $2\,\mathrm{m}$ بلندی سے 45° زاویہ پر $13.4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے پھینکتا ہے۔ یہ گیند کتنی دیر بعد اور کتنے فاصلہ پر زمین پر گرے گی؟

سوال ۶: اگر سوال ۵ میں گیند 40° پر پھینکی جاتی تب یہ نسبتاً زیادہ دور گرتی۔ فاصلہ میں اضافہ کتنا ہو گا؟

سوال ۷: ایک گیند کو 45° زاویہ پر پھینکا جاتا ہے۔ یہ $10\,\mathrm{m}$ فاصلہ پر گرتا ہے۔ اس کی ابتدائی رفتار تلاش کریں۔ کن دو زاویات پر پھینکنے سے اس گیند کا فاصلہ مار $6\,\mathrm{m}$ ہو گا؟

سوال ۸: ٹیلی ویژن کے ٹیوب میں ایک الیکٹران $5 \times 10^6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے $40\,\mathrm{cm}$ دور ٹیلی ویژن کے شیشہ کے رخ افقی سمت خارج ہوتا ہے۔ یہ الیکٹران شیشہ پر لگنے سے پہلے کتنا نیچے گرتا ہے؟

سوال ۹: تجربہ گاہ میں گالف گیند کو پرکھنے کے دوران 100 داب[۱۴] کی گیند کو $160\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ رفتار پر چلتے ہوئے لاٹھ سے مار کر 9° زاویہ پر پھینکا جاتا ہے۔ یہ گیند $227\,\mathrm{m}$ دور گرتا ہے۔ گیند کی ابتدائی رفتار کتنی تھی؟

سوال ۱۰: ایک تماش گاہ میں ایک مسخرہ کو انسانی توپ سے $25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ رفتار سے داغا جاتا ہے۔ توقع کی جاتی ہے کہ یہ $60\,\mathrm{m}$ دور نرم گدی پر جا گرے گا۔ یہ تماش گاہ ایک بڑے کمرہ میں منعقد ہوتا ہے جس کی چھت $23\,\mathrm{m}$ بلند ہے۔ کیا مسخرہ کو یوں داغا جا سکتا ہے کہ یہ چھت کو نہ لگے؟ اگر ایسا ممکن ہو تب توپ کا زاویہ کتنا ہونا چاہیے؟

سوال ۱۱: ایک گالف گیند زمین سے 30° پر $35\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے روانہ ہوتا ہے۔ کیا یہ $45\,\mathrm{m}$ میٹر دور $15.2\,\mathrm{m}$ اونچے درخت کو پار کر پائے گا؟

سوال ۱۲: ایک گیند کو $15\,\mathrm{m}$ کی گہرائی سے 45° پر $40\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے اچھال کر میدان میں پھینکا جاتا ہے۔ یہ گیند کتنا افقی فاصلہ طے کر کے زمین پر گرے گا؟

سوال ۱۳: ایک گیند کو $2.5\,\mathrm{m}$ اونچائی سے 40° زاویہ سے نیچے میدان میں پھینکا جاتے ہے۔ یہ ٹھیک $65\,\mathrm{m}$ دور جا گرتا ہے۔ گیند کی ابتدائی رفتار کتنی تھی؟

سوال ۱۴: کرکٹ کا کھلاڑی گیند کو $50\,\mathrm{cm}$ اونچائی سے 30° زاویہ پر مارتا ہے۔ یہ گیند $90\,\mathrm{m}$ دور $12\,\mathrm{m}$ اونچی دیوار کو پار کرتی ہے۔ گیند کی ابتدائی رفتار تلاش کریں۔

سوال ۱۵: دکھائیں کہ زاویہ α اور زاویہ $90 - \alpha$ پر داغے گئے گولوں کا فاصلہ مار ایک دوسرے کے برابر ہے۔ (اگر ہوائی رگڑ کو شامل کیا جائے تب ایسا نہیں ہو گا۔)

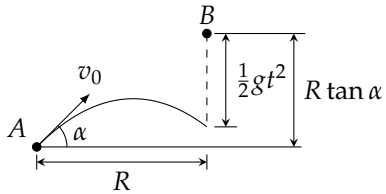
سوال ۱۶: ایک گولا کی ابتدائی رفتار $400\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ اس کا نشانہ $16\,\mathrm{km}$ دور ایک مورچا ہے۔ گولے کی ابتدائی دو ایسے زاویات تلاش کریں جن پر یہ نشانہ کو مار پائے گا۔

سوال ۱۷: دکھائیں کہ ابتدائی زاویہ تبدیل کیے بغیر ایک گولا کی ابتدائی رفتار دگنی کرنے سے اس کا فاصلہ مار 4 گنّا ہو گا۔ گولے کی زیادہ سے زیادہ اونچائی اور فاصلہ مار دگنی کرنے کے لئے اس کی ابتدائی رفتار کتنے فی صد بڑھانی ہو گی؟

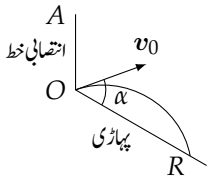
سوال ۱۸: دکھائیں کہ زیادہ سے زیادہ بلندی تک پہنچنے کے لئے درکار وقت کے نصف وقت میں گولا اس اونچائی کے $\frac{3}{4}$ تک پہنچ پاتا ہے۔

---

[۱۴] 100compression



شکل ۱۲.۸: دو گیند (سوال ۲۳)



شکل ۱۲.۹: پہاڑی سے گیند پھینکا جاتا ہے (سوال ۲۴)

سوال ۱۹: ابتدائی قیمت مسئلہ

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -g\boldsymbol{j} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$\boldsymbol{r} = x_0\boldsymbol{i} + y_0\boldsymbol{j} \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (v_0\cos\alpha)\boldsymbol{i} + (v_0\sin\alpha)\boldsymbol{j} \quad t = 0$$

کو مستوی میں سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کے لئے حل کرتے ہوئے مساوات ۱۰ حاصل کریں۔

سوال ۲۰: ابتدائی زاویہ $\alpha = 50.2^\circ$ لیتے ہوئے مثال ۳ میں تیر کی ابتدائی رفتار تلاش کریں۔

سوال ۲۱: مثال ۳ میں تیر کب نشانہ سے 2 m کے افقی فاصلہ پر ہوگا؟ اس لمحہ یہ کتنا بلند ہوگا؟

سوال ۲۲: ایک گیند کو 5 m کی بلندی سے سیدھا اوپر پھینکا جاتا ہے۔ یہ کتنی دیر بعد زمین پر گرے گا؟

سوال ۲۳: گیند A کو α زاویہ پر v_0 ابتدائی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ اسی لمحہ R افقی فاصلہ دور $R\tan\alpha$ اونچائی سے گیند B کو گرنے دیا جاتا ہے (شکل ۱۲.۸)۔ یہ دیکھا گیا ہے کہ یہ دونوں گیند کسی بھی v_0 کے لئے ایک دوسرے کو ٹکراتے ہیں۔ کیا یہ اتفاق ہے یا ایسا ہونا لازم ہے؟ جواب پیش کریں۔

سوال ۲۴: ایک گیند کو پہاڑی سے نیچے پھینکا جاتا ہے (شکل ۱۲.۹)۔ (ا) دکھائیں کہ زیادہ سے زیادہ فاصلہ طے کرنے کے لئے ابتدائی سمتی رفتار، زاویہ AOR کو نصف میں قطع کرتا ہو۔ (ب) اگر گیند کو پہاڑی پر اوپر پھینکا جائے تب زیادہ سے زیادہ فاصلہ طے کرنے کے لئے ابتدائی زاویہ کیا ہونا چاہیے؟

سوال ۲۵: مبدا سے لمحہ $t = 0$ پر $\boldsymbol{v}_0$ سمتی رفتار سے ایک مثالی گولا کو داغا جاتا ہے۔ قوت کشش کی بنا اس گولا کی نیچے رخ اسراع $\boldsymbol{a} = -g\boldsymbol{k}$ ہوگی۔ لمحہ پر گولے کی سمتی رفتار اور مقام تلاش کریں۔

سوال ۲۶: رفتار کی راست تناسب ہوائی مزاحمت

ایک گولا جس کی کمیت m اور ابتدائی رفتار $\boldsymbol{v}_0$ کو رفتار کی راست متناسب ہوائی مزاحمت کا سامنا ہے۔ گولے پر کل قوت $m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ درج ذیل مساوات کو مطمئن کرے گا جہاں k تناسبی مستقل ہے۔

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = -mg\boldsymbol{j} - k\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

دکھائیں کہ اس کا پہلا تکمل درج ذیل دے گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}_0 - gt\boldsymbol{j}$$

اس مساوات کو حل کریں۔ایسا کرنے کی خاطر مساوات کے دونوں اطراف کو $e^{(k/m)t}$ سے ضرب دیں۔بایاں ہاتھ اب ایک تفاعل کا تفرق ہو گا لہٰذا دونوں اطراف قابل تکمل ہوں گے۔اب دوسرا تکمل لیں۔تفاعل $e^{(k/m)t}$ کو اس تفرقی مساوات کا جزو تکمل کہتے ہیں۔

سوال ۲۷: ایک گولا کو زمین سے α زاویہ پر v_0 رفتار سے داغا جاتا ہے۔زاویہ α کو متغیر اور v_0 کو مستقل تصور کریں۔ہر $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ کے لئے ہمیں قطع مکافی راہ ملی ہے۔دکھائیں کہ مستوی میں زیادہ سے زیادہ اونچائی کے تمام نقطے درج ذیل ترخیم پر پائے جاتے ہیں جہاں $x \geq 0$ ہے۔

$$x^2 + 4\left(y - \frac{v_0^2}{4g}\right)^2 = \frac{v_0^4}{4g^2}$$

۱۲.۳ لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$

قابل تفرق منحنیات جن کا پہلا اور دوسرا استمراری تفرق پایا جاتا ہو خلاء میں حرکت کو ظاہر کرنے کے لئے اہم ہیں۔ان پر تفصیلاً غور کیا گیا ہے۔اس حصہ میں اور اگلے حصہ میں ہم ان کے چند ایسے خدوخال پر غور کریں گے جن کہ بنا ایسے منحنیات کی اہم ہیں۔

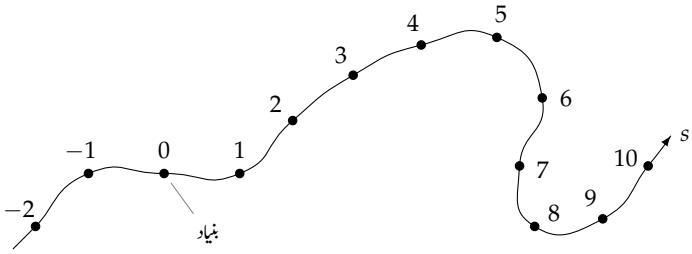
منحنی پر لمبائی قوس

ہموار فضائی منحنیات کی ایک خاص خاصیت یہ ہے کہ ان کی لمبائی قابل ناپ ہوتی ہے۔یوں ہم منحنی پر کسی نقطہ کو بنیاد تصور کرتے ہوئے، بنیاد سے کسی بھی نقطہ N تک منحنی پر فاصلہ s، سے نقطہ N کی نشاندہی کر سکتے ہیں (شکل ۱۲.۱۰)۔یہ محددی مستوی پر مبدا سے نقطہ کا فاصلہ دینے کے مترادف ہے۔متحرک جسم کی سمتی رفتار اور اسراع پر غور کے لئے وقت ایک فطری متغیر ہے جبکہ s منحنی کی صورت پر غور کرنے کے لئے ایک فطری متغیر ہے۔فضا میں حرکت پر غور کے دوران ان دونوں متغیرات کی ضرورت پیش آتی ہے۔

فضا میں ہموار منحنی پر فاصلہ ناپنے کی خاطر ہم مستوی میں منحنی کے کلیہ میں جزو z شامل کرتے ہیں۔

تعریف: ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k},\ a \leq t \leq b$ جس پر $t = a$ تا $t = b$ صرف ایک بار چلا جاتا ہو، کی لمبائی درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{۱}$$



شکل ۱۲.۱۰: ہموار منحنی پر بنیادی نقطہ سے فاصلہ کو پیمانہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

□

مستوی منحنیات کی طرح، ہم فضا میں منحنی کی لمبائی معلوم کرتے ہوئے منحنی کی کوئی بھی مقدار معلوم مساوات، جو دیے گئے شرائط کو پورا کرتے ہوں، استعمال کر سکتے ہیں۔ اس کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا۔

مساوات ۱ میں جذر، سمتی رفتار سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کی لمبائی $|\boldsymbol{v}|$ ہے۔ یوں لمبائی قوس کا کلیہ مختصراً

$$L = \int_a^b |\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}t \tag{۲}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مثال ۱: درج ذیل پیچ دار منحنی کے ایک چکر کی لمبائی تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

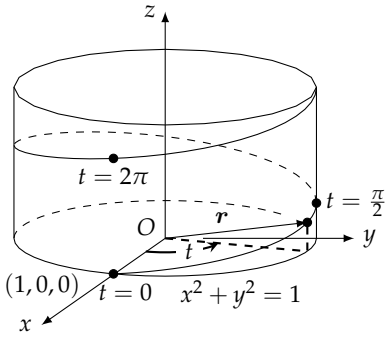
حل: پیچ دار منحنی $t = 0$ سے $t = 2\pi$ تک ایک چکر مکمل کرتی ہے (شکل ۱۲.۱۱)۔ اس حصہ کی لمبائی

$$\begin{aligned} L &= \int_a^b |\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

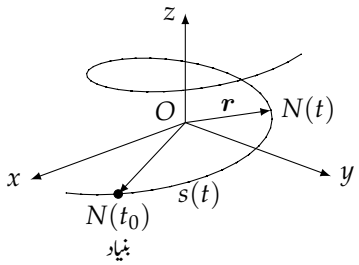
ہو گی جو مستوی xy میں اس دائرہ کے لمبائی کا $\sqrt{2}$ گنّا ہے جس پر پیچ دار منحنی کھڑی ہے۔ □

اگر ہم ہموار منحنی C، جس کی مقدار معلوم مساوات کا متغیر t ہو، پر نقطہ N_0 کو بنیادی نقطہ تصور کریں تب t کی ہر قیمت C پر ایک نقطہ $N(t) = (x(t), y(t), z(t))$ اور **سمتے بند فاصلہ**

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \big|\boldsymbol{v}(\tau)\big|\,\mathrm{d}\tau \tag{۳}$$



شکل ۱۱.۱۲: پیچ دار منحنی برائے مثال ۱



شکل ۱۲.۱۲: منحنی پر بنیاد $N(t_0)$ سے کسی نقطہ $N(t)$ تک فاصلہ $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{v}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau$ ہوگا۔

دے گی جو N_0 سے C پر چلتے ہوئے ناپا جائے گا (شکل ۱۲.۱۲)۔ اگر $t > t_0$ ہو تب $N(t_0)$ سے $N(t)$ تک فاصلہ $s(t)$ ہوگا۔ اگر $t < t_0$ ہو تب $s(t)$، فاصلہ کے نفی کا برابر ہوگا۔ کی ہر ایک قیمت پر ایک نقطہ تعین کرتی ہے لہٰذا یوں s کے لحاظ سے C کی مقدار معلوم روپ حاصل ہوتی ہے۔ ہم کو منحنی کا **مقدار معلوم لمبائی قوس** کہتے ہیں جس کی قیمت بڑھتے t کے رخ بڑھتی ہے۔

بنیاد $N(t_0)$ لیتے ہوئے مقدار معلوم لمبائی قوس

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2 + [z'(\tau)]^2}\,\mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{v}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \qquad (۴)$$

مثال ۲: اگر $t_0 = 0$ ہو تب پیچ دار منحنی

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

پر t_0 سے t تک چلتے ہوئے مقدار معلوم لمبائی قوس درج ذیل ہوگی۔

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^{t} |\boldsymbol{v}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau && \text{مساوات ۴} \\ &= \int_{0}^{t} \sqrt{2}\,\mathrm{d}\tau && \text{مساوات ۱ کی قیمتیں} \\ &= \sqrt{2}t \end{aligned}$$

یوں $s(2\pi) = 2\pi\sqrt{2}$، $s(-2\pi) = -2\pi\sqrt{2}$، وغیرہ، ہوں گے۔ □

مثال ۳: ایک لکیر پر لمبائی

دکھائیں اگر $\boldsymbol{u} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$ اکائی سمتیہ ہو، تب لکیر

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + tu_1)\boldsymbol{i} + (y_0 + tu_2)\boldsymbol{j} + (z_0 + tu_3)\boldsymbol{k}$$

پر، نقطہ $N_0(x_0, y_0, z_0)$ جہاں $t = 0$ ہو گا، سے سمت بند لمبائی از خود t کے برابر ہو گی۔

حل:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x_0 + tu_1)\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y_0 + tu_2)\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(z_0 + tu_3)\boldsymbol{k} = u_1\boldsymbol{i} + u_2\boldsymbol{j} + u_3\boldsymbol{k}$$

سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$s(t) = \int_0^t |\boldsymbol{v}|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t |\boldsymbol{u}|\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t 1\,\mathrm{d}\tau = t$$

□

ہموار منحنی پر رفتار

چونکہ مساوات ۴ میں جذر کے اندر تفرقات استراری (ہموار منحنی) ہیں احصاء کے بنیادی مسئلہ کے تحت s متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور یہ تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\boldsymbol{v}(t)| \tag{۵}$$

جیسا ہم توقع کریں گے، کسی بھی راہ پر ایک ذرے کی رفتار $\boldsymbol{v}$ کی مقدار ہوتی ہے۔

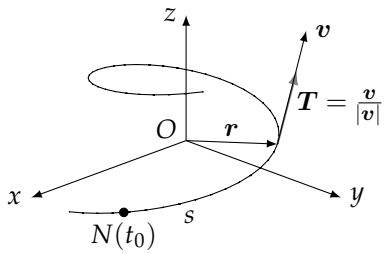
دھیان رہے کہ اگرچہ s تعین کرنے میں بنیادی نقطہ $N(t_0)$ کا کردار پایا جاتا ہے، $N(t_0)$ کا مساوات ۵ میں کوئی کردار نہیں پایا جاتا ہے۔ ایک راہ پر چلتے ہوئے جس رفتار سے ایک ذرہ فاصلہ طے کرتا ہے، اس کا بنیادی نقطہ کے ساتھ کوئی تعلق نہیں پایا جاتا ہے۔

ساتھ ہی اس بات کو ذہن نشین کریں کہ چونکہ تعریف کی رو سے ہموار منحنی کے لئے $|\boldsymbol{v}|$ غیر صفر ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} > 0$ ہو گا۔ ہم ایک بار دوبارہ دیکھتے ہیں کہ s متغیر t کا بڑھتا تفاعل ہے۔

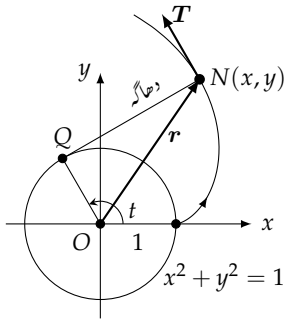
اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$

چونکہ زیر بحث منحنیات کے لئے $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} > 0$ ہے لہٰذا s ایک ایک مطابقت رکھتا ہے اور اس کا الٹ پایا جائے گا جو t کو بطور s کا قابل تفرق تفاعل دے گا (حصہ ۱.۷)۔ اس الٹ کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\mathrm{d}s/\,\mathrm{d}t} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|} \tag{۶}$$



شکل ۱۲.۱۳: ہم $\boldsymbol{v}$ کو $|\boldsymbol{v}|$ سے تقسیم کر کے مماسی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ حاصل کرتے ہیں۔



شکل ۱۲.۱۴: دائرہ پر لپٹے دھاگہ کو کھولتے ہوئے اس کا سر جس راہ پر چلتا ہو، وہ اس دائرے کا درپیچیدہ کہلاتا ہے۔ یہاں اکائی دائرہ مستوی xy میں ہے۔

یوں $\boldsymbol{r}$ متغیر s کا قابل تفرق تفاعل ہو گا جس کے تفرق کو زنجیری قاعدہ سے حاصل کیا جا سکتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{v}\frac{1}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \tag{۷}$$

مساوات ۷ کہتی ہے کہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ ایک اکائی سمتیہ ہے جو $\boldsymbol{v}$ کے رخ ہے۔ ہم $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ کو $\boldsymbol{r}$ کی منحنی راہ کا اکائی مماسی سمتیہ کہتے ہیں اور اس کو $\boldsymbol{T}$ سے ظاہر کرتے ہیں (شکل ۱۲.۱۳)۔

تعریف: قابل تفرق تفاعل $\boldsymbol{r}(t)$ کا اکائی مماسی سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s/\,\mathrm{d}t} = \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \tag{۸}$$

□

جہاں بھی $\boldsymbol{v}$ متغیر t کا قابل تفرق تفاعل ہو وہاں اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ بھی t کا قابل تفرق تفاعل ہو گا۔ جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے، فضا میں اجسام کی حرکت پر غور میں مستعمل، متحرک **حوالہ چوکھٹے**[۱۵]، کے تین اکائی سمتیات میں سے ایک اکائی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ہے۔

مثال ۴: درج ذیل پیچ دار منحنی کا اکائی مماسی سمتیہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$$

[۱۵] referenceframe

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= (-\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k} \\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2} = \sqrt{2} \\
\boldsymbol{T} &= \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = -\frac{\sin t}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} + \frac{\cos t}{\sqrt{2}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

□

مثال ۵: دائرہ کا درپیچیدہ (شکل ۱۲.۱۴)
درج ذیل پیچ دار منحنی کا اکائی مماسی سمتیہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j} \qquad t > 0$$

حل:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t + \sin t + t\cos t)\boldsymbol{i} + (\cos t - \cos t + t\sin t)\boldsymbol{j} \\
&= (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} \\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = \sqrt{t^2} = t \qquad \text{ہے } |t| = t \text{ کی بنا } t > 0 \\
\boldsymbol{T} &= \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{\boldsymbol{v}}{t} = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

□

مثال ۶: اکائی دائرہ

$$\boldsymbol{v} = (-\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}$$

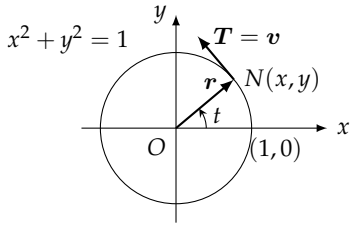
کے گرد گھڑی کے مخالف رخ حرکت

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}$$

کا اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{v}$ ہے (شکل ۱۲.۱۵)۔ □

سوالات

سوال ۱ تا سوال ۸ میں منحنی کا اکائی مماسی سمتیہ تلاش کریں۔ وقفہ پر منحنی کی لمبائی بھی دریافت کریں۔



شکل ۱۲.۱۵: حرکت $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}$ برائے مثال ۶

سوال ۱: $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t)\boldsymbol{i} + (2\sin t)\boldsymbol{j} + \sqrt{5}t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

سوال ۲: $\boldsymbol{r}(t) = (6\sin 2t)\boldsymbol{i} + (6\cos 2t)\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

سوال ۳: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}t^{3/2}\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 8$

سوال ۴: $\boldsymbol{r}(t) = (2+t)\boldsymbol{i} - (t+1)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 3$

سوال ۵: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{j} + (\sin^3 t)\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

سوال ۶: $\boldsymbol{r}(t) = 6t^3\boldsymbol{i} - 2t^3\boldsymbol{j} - 3t^3\boldsymbol{k}, \quad 1 \le t \le 2$

سوال ۷: $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

سوال ۸: $\boldsymbol{r}(t) = (t\sin t + \cos t)\boldsymbol{i} + (t\cos t - \sin t)\boldsymbol{j}, \quad \sqrt{2} \le t \le 2$

سوال ۹: مبدا سے بڑھتی لمبائی کے رخ درج ذیل منحنی پر مبدا سے 26π دور نقطہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (5\sin t)\boldsymbol{i} + (5\cos t)\boldsymbol{j} + 12t\boldsymbol{k}$$

سوال ۱۰: مبدا سے بڑھتی لمبائی کے مخالف رخ درج ذیل منحنی پر مبدا سے 13π دور نقطہ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (12\sin t)\boldsymbol{i} - (12\cos t)\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k}$$

سوال ۱۱ تا سوال ۱۴ میں $t = 0$ سے دور کسی نقطہ پر مقدار معلوم لمبائی قوس درج ذیل تکمل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے تلاش کریں۔

$$s = \int_0^t \left|\boldsymbol{v}(\tau)\right| \mathrm{d}\tau \qquad \text{مساوات ۳}$$

اس کے بعد دیے گئے وقفہ پر منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

سوال ۱۱: $\boldsymbol{r}(t) = (4\cos t)\boldsymbol{i} + (4\sin t)\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2$

سوال ۱۲: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}, \quad \frac{\pi}{2} \le t \le \pi$

سوال ۱۳: $\boldsymbol{r}(t) = (e^t \cos t)\boldsymbol{i} + (e^t \sin t)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}, \quad -\ln 4 \leq t \leq 0$

سوال ۱۴: $\boldsymbol{r}(t) = (1+2t)\boldsymbol{i} + (1+3t)\boldsymbol{j} + (6-6t)\boldsymbol{k}, \quad -1 \leq t \leq 0$

سوال ۱۵: نقطہ $(0,0,1)$ سے $(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$ تک درج ذیل منحنی کی لمبائی تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\sqrt{2}t)\boldsymbol{i} + (\sqrt{2}t)\boldsymbol{j} + (1-t^2)\boldsymbol{k}$$

سوال ۱۶: ہم نے مثال ۱ میں پیچ دار منحنی کے ایک چکر کی لمبائی $2\pi\sqrt{2}$ تلاش کی۔ ایک مربع جس کا ضلع 2π ہو کے وتر کی لمبائی بھی یہی ہو گی۔ دکھائیں کہ جس نلکی پر پیچ دار منحنی کا ایک چکر لپٹا گیا ہے، اس کو انتصابی کاٹ کر سیدھا کرنے سے یہی مربع حاصل ہو گا۔

سوال ۱۷:

ا. دکھائیں کہ $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + (1-\cos t)\boldsymbol{k}, \; 0 \leq t \leq 2\pi$ ایک ترخیم ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر دکھائیں کہ $\boldsymbol{r}$ قائمہ دائری نلکی اور ایک مستوی کا مطقاطع ہے۔ ان قائمہ دائری نلکی اور مستوی کی مساواتیں تلاش کریں۔

ب. نلکی پر ترخیم کا خاکہ کھینچیں اور اس پر نقاط $t = 0$ ، $t = \frac{\pi}{2}$ ، $t = \pi$ اور $t = \frac{3\pi}{2}$ پر اکائی مماسی سمتیات بنائیں۔

ج. دکھائیں کہ سمتیہ اسراع ہر صورت مستوی کو متوازی ہو گا (مستوی کے عمودی سمتیہ کو قائمہ ہو گا)۔ یوں اگر آپ اسراع کو ترخیم کے ساتھ جڑا دکھائیں تب یہ ترخیم کے مستوی میں پایا جائے گا۔ نقاط $t = 0$ ، $t = \frac{\pi}{2}$ ، $t = \pi$ اور $t = \frac{3\pi}{2}$ پر سمتیات اسراع کو خاکہ میں شامل کریں۔

د. ترخیم کی لمبائی کا تکمل لکھیں۔ اس تکمل کی قیمت تلاش کرنے کی کوشش نہ کریں چونکہ یہ ایک غیر بنیادی تکمل ہے۔

ھ. اعدادی ترکیبات سے ترخیم کی لمبائی دو اعشاریہ درست معلوم کریں۔

سوال ۱۸: لمبائی کی قیمت مقدار معلوم روپ پر منحصر نہیں ہے۔

یہ دکھانے کی خاطر کہ لمبائی کی قیمت مقدار معلوم روپ پر منحصر نہیں ہے، ہم پیچ دار منحنی کے ایک چکر کی لمبائی درج ذیل (مختلف) مقدار معلوم مساواتیں استعمال کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

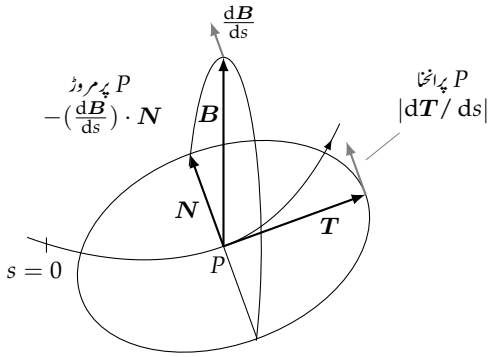
ا. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos 4t)\boldsymbol{i} + (\sin 4t)\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

ب. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos(t/2))\boldsymbol{i} + (\sin(t/2))\boldsymbol{j} + (t/2)\boldsymbol{k}, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$

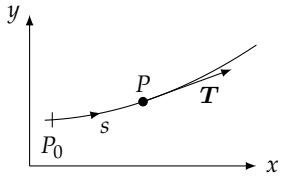
ج. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j} - t\boldsymbol{k}, \quad -2\pi \leq t \leq 0$

۱۲.۴ انحنا، مروڑ اور TNB چوکھٹ

اس حصہ میں ہم تین آپس میں عمودی اکائی سمتیات پر مبنی ایسا چوکھٹ متعارف کرتے ہیں جو فضا میں منحنی پر جسم کے ساتھ ساتھ چلتا ہو (شکل ۱۲.۱۶)۔ اس چوکھٹ کے تین سمتیات ہیں۔ پہلا اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ہے۔ دوسرا $\boldsymbol{N}$ ہے جو $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}s}$ کے رخ اکائی سمتیہ ہے۔ تیسرا اکائی سمتیہ $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$



شکل ۱۲.۱۶: ہر متحرک جسم کے ساتھ ایک TNB چوکھٹ سفر کرتا ہے جو اس کی راہ کا کردار بیان کرتا ہے۔



شکل ۱۲.۱۷: بڑھتی لمبائی قوس کے رخ چلتے ہوئے اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ مڑتا ہے۔ نقطہ P پر $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s|$ کی قیمت کو P پر منحنی کی انحنا کہتے ہیں۔

ہے۔ یہ سمتیات اور ان کے تفرقات اگر معلوم ہوں، فضا میں سواری کی سمت بندی اور اس کی راہ میں موڑ اور بل کے بارے میں مفید معلومات مہیا کرتے ہیں۔

مثال کے طور پر $\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}s}\right|$ ہمیں بتاتا ہے کہ راہ پر آگے چلتے ہوئے، سواری کی راہ کتنی دائیں یا بائیں مڑتی ہے؛ اسی لئے اس کو سواری کی راہ کی **انحنا**[۱۶] کہتے ہیں۔ عدد $-(\mathrm{d}\boldsymbol{B}/\,\mathrm{d}s)\cdot\boldsymbol{N}$ ہمیں بتاتا ہے کہ راہ پر آگے چلتے ہوئے، سواری کی راہ مستوی حرکت سے کتنی باہر مڑتی ہے یا بل کھاتی ہے؛ اس کو سواری کی راہ کی **مروڑ**[۱۷] کہتے ہیں۔ دوبارہ شکل ۱۲.۱۶ پر نظر ڈالیں۔ اگر قوسی راہ پر ایک ریل گاڑی، P، اوپر چڑھ رہی ہو تب فی اکائی فاصلہ اس کی سر بتی جتنی دائیں یا بائیں مڑتی ہو، یہ اس کی انحنا ہو گی۔ سمتیات $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ کے مستوی سے ریل گاڑی کا انجن جس شرح سے باہر نکلتا ہو، یہ اس کی مروڑ ہو گی۔

مستوی منحنی کی انحنا

جیسے جیسے ایک ذرہ مستوی منحنی میں حرکت کرتا ہے، منحنی کے مڑنے سے $\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}$ بھی مڑتا ہے۔ چونکہ $\boldsymbol{T}$ اکائی سمتیہ ہے لہٰذا اس کی لمبائی تبدیل نہیں ہوتی اور راہ پر چلتے ہوئے صرف اس کا رخ تبدیل ہوتا ہے۔ منحنی پر چلتے ہوئے اکائی فاصلہ پر $\boldsymbol{T}$ کی شرح تبدیلی کو انحنا کہتے ہیں (شکل ۱۲.۱۷)۔ انحنا کو روایتی طور پر یونانی حرف κ (کاپا) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

تعریف: ایک ہموار منحنی جس کا اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ہو، کا تفاعل انحنا درج ذیل ہو گا۔

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right|$$

□

اگر $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s|$ بڑی قیمت ہو تب نقطہ P سے گزرتے ہوئے ذرہ بہت تیزی سے مڑے گا اور P پر انحنا زیادہ ہو گی۔ اگر $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s|$ صفر کے

---

[۱۶] curvature
[۱۷] torsion

قریب ہو تب $\boldsymbol{T}$ کا رخ آہستہ تبدیل ہو گا اور P پر انحنا کم ہو گی۔ اس تعریف کو پرکھتے ہوئے ہم درج ذیل دو مثالوں میں دیکھتے ہیں کہ سیدھے خط اور دائروں کی انحنا مستقل ہو گی۔

مثال ۱: سیدھے لکیر کی انحنا صفر ہو گی

سیدھے لکیر پر اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کا رخ تبدیل نہیں ہوتا ہے لہٰذا اس کے اجزاء مستقل ہوں گے۔ یوں $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s| = |\boldsymbol{0}| = 0$ ہو گا (شکل ۱۲.۱۸)۔ □

مثال ۲: رداس a کے دائرے کی انحنا $\frac{1}{a}$ ہو گی

ہم دائرہ کی مقدار معلوم مساوات

$$\boldsymbol{r}(\theta) = (a\cos\theta)\boldsymbol{i} + (a\sin\theta)\boldsymbol{j}$$

میں $\theta = \frac{s}{a}$ پر کر کے اس کی لمبائی قوس s کے لحاظ سے مقدار معلوم روپ حاصل کرتے ہیں (شکل ۱۲.۱۹)۔

$$\boldsymbol{r} = (a\cos\frac{s}{a})\boldsymbol{i} + (a\sin\frac{s}{a})\boldsymbol{j}$$

یوں

$$\boldsymbol{T} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s} = (-\sin\frac{s}{a})\boldsymbol{i} + (\cos\frac{s}{a})\boldsymbol{j}$$

اور

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = (-\frac{1}{a}\cos\frac{s}{a})\boldsymbol{i} - (\frac{1}{a}\sin\frac{s}{a})\boldsymbol{j}$$

ہوں گے۔ اس طرح کسی بھی کے لئے درج ذیل ہو گا۔

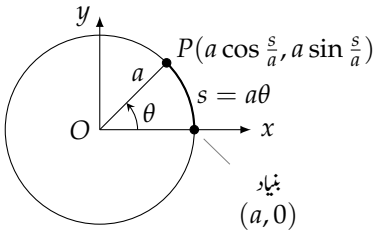
$$\begin{aligned}
\kappa &= \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right| \\
&= \sqrt{\frac{1}{a^2}\cos^2\frac{s}{a} + \frac{1}{a^2}\sin^2\frac{s}{a}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2}} = \frac{1}{|a|} = \frac{1}{a} \qquad a > 0 \text{ کی بنا } |a| = a \text{ ہو گا}
\end{aligned}$$

□

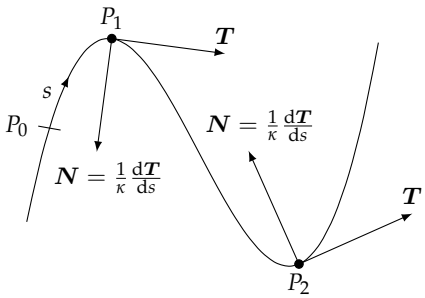
صدر اکائی عمودی سمتیہ

چونکہ $\boldsymbol{T}$ کی لمبائی اکائی ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ اور $\boldsymbol{T}$ آپس میں عمودی ہوں گے (حصہ ۱۲.۱)۔ یوں $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کو لمبائی κ سے تقسیم کرنے سے ایسا اکائی سمتیہ حاصل ہو گا جو $\boldsymbol{T}$ کو عمودی ہو گا (شکل ۱۲.۲۰)۔

شکل ۱۲.۱۸: سیدھے لکیر پر $\boldsymbol{T}$ کا رخ تبدیل نہیں ہوتا ہے لہٰذا اس کی انحنا $|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s|$ صفر ہو گی۔



شکل ۱۲.۱۹: دائرہ برائے مثال ۲



شکل ۱۲.۲۰: منحنی کا عمودی سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ ہر وقت اس رخ ہوتا ہے جس رخ $\boldsymbol{T}$ مڑتا ہو۔ سمتیہ $\boldsymbol{N}$ کا رخ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کا رخ ہے۔

تعریف: جس نقطہ پر $\kappa \neq 0$ ہو وہاں مستوی میں منحنی کا صدر اکائی سمتیہ $\boldsymbol{N}$ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$$

□

موڑ پر سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کا رخ اس جانب ہو گا جس جانب منحنی مڑتی ہو۔ یوں اگر بڑھتے فاصلہ کے رخ منہ کرتے ہوئے، اگر $\boldsymbol{T}$ گھڑی کے رخ مڑے تب سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کا رخ دائیں ہو گا اور اگر $\boldsymbol{T}$ گھڑی کے مخالف رخ مڑتی ہو تب اس کا رخ بائیں ہو گا۔ دوسرے لفظوں میں صدر عمودی سمتیہ $\boldsymbol{N}$ منحنی کے مقعر رخ ہو گا (شکل ۱۲.۲۰)۔ جس نقطہ پر $\kappa = 0$ ہو، وہاں کے بارے میں سوال ۱۰ میں غور کیا گیا ہے۔

تعریف کی رو سے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$ کی لمبائی قوس، مثبت $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کے لئے ہو گی لہٰذا $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|$ ہو گا اور زنجیری قاعدہ درج ذیل دے گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}s|} \\
&= \frac{(\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t)(\mathrm{d}t/\,\mathrm{d}s)}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t||\mathrm{d}t/\,\mathrm{d}s|} \\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|} \qquad (۱)
\end{aligned}$$

اس طرح ہم κ اور s حاصل کیے بغیر $\boldsymbol{N}$ حاصل کر سکتے ہیں۔

مثال ۳: درج ذیل دائری حرکت کے لئے $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ تلاش کریں۔

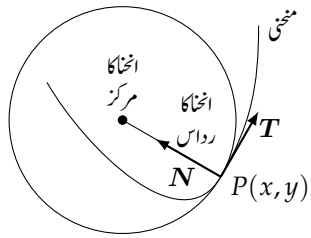
$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos 2t)\boldsymbol{i} + (\sin 2t)\boldsymbol{j}$$

حل: ہم پہلے $\boldsymbol{T}$ دریافت کرتے ہیں۔

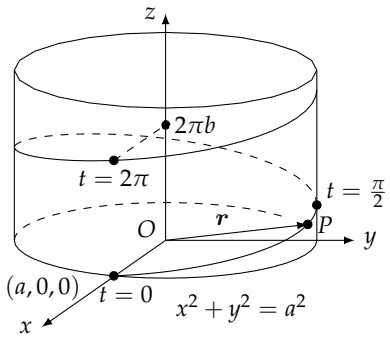
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= -(2\sin 2t)\boldsymbol{i} + (2\cos 2t)\boldsymbol{j}, \\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{4\sin^2 2t + 4\cos^2 2t} = 2, \\
\boldsymbol{T} &= \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} \\
&= -(\sin 2t)\boldsymbol{i} + (\cos 2t)\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

یوں

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} &= -(2\cos 2t)\boldsymbol{i} - (2\sin 2t)\boldsymbol{j}, \\
\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right| &= \sqrt{4\cos^2 2t + 4\sin^2 2t} = 2
\end{aligned}$$



شکل ۱۲.۲۱: نقطہ $P(x,y)$ پر دائرہ انحنا منحنی کے اندرونی رخ ہو گا۔



شکل ۱۲.۲۲: مثبت a ، b کے لئے

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}$$

اور درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{N} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|}\\ &= -(\cos 2t)\boldsymbol{i} - (\sin 2t)\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

□

انحنا کا دائرہ اور انحنا کا رداس

مستوی منحنی پر نقطہ P جہاں $\kappa \neq 0$ ہو، **دائرہ انحنا**[۱۸] سے مراد اس مستوی میں وہ دائرہ ہے جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

ا. نقطہ P پر یہ منحنی کا مماسی ہو (منحنی کا مماسی خط ہی اس کا مماسی خط ہے)؛

ب. نقطہ P پر اس کی انحنا اور منحنی کی انحنا ایک دوسرے کے برابر ہوں؛

ج. یہ منحنی کے اندرونی یعنی مقعر رخ پایا جائے (شکل ۱۲.۲۱)۔

نقطہ P پر منحنی کے **رداس انحنا**[۱۹] سے مراد اس نقطہ پر دائرہ انحنا کا رداس ہے، جو مثال ۲ کے مطابق درج ذیل ہو گا۔

$$\text{رداس انحنا} = \rho = \frac{1}{\kappa} \tag{۲}$$

رداس انحنا جاننے کے لئے ہم κ معلوم کر کے اس کا بالعکس متناسب لیتے ہیں۔ نقطہ P پر **مرکز انحنا**[۲۰] سے مراد یہاں کے دائرہ انحنا کا مرکز ہو گا۔

---

[۱۸] circleofcurvature
[۱۹] radiusofcurvature
[۲۰] centerofcurvature

فضائی منحنیات کی انحنا اور عمودی سمتیات

مستوی منحنیات کی طرح فضا میں ہموار منحنی کے لئے مقدار معلوم لمبائی قوس s، مماسی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ دیتا ہے۔ ہم اب بھی انحنا سے مراد

$$\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right| \tag{۳}$$

لیتے ہیں۔ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کو عمودی ہو گا اور ہم صدر اکائی عمودی سمتیہ سے مراد درج ذیل لیتے ہیں۔

$$\boldsymbol{N} = \frac{1}{\kappa}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|} \tag{۴}$$

مثال ۴: درج ذیل پیچ دار منحنی کی انحنا دریافت کریں (شکل ۱۲.۲۲)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}, \quad a, b \geq 0,\ a^2 + b^2 \neq 0$$

حل: ہم سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ سے $\boldsymbol{T}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) &= -(a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k} \\
|\boldsymbol{v}| &= \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2} \\
\boldsymbol{T} &= \frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[-(a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}]
\end{aligned}$$

اب زنجیری قاعدہ سے $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ حاصل کرتے ہیں۔

زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\boldsymbol{v}| \implies \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \\
&= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{v}|} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[-(a\cos t)\boldsymbol{i} - (a\sin t)\boldsymbol{j}]\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) \\
&= \frac{a}{a^2+b^2}[-(\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}]
\end{aligned}$$

اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\kappa &= \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right| \\
&= \frac{a}{a^2+b^2}\left|-(\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}\right| \\
&= \frac{a}{a^2+b^2}\sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \frac{a}{a^2+b^2}
\end{aligned} \tag{۵}$$

ہم مساوات ۵ سے دیکھتے ہیں کہ مستقل a کے لئے b بڑھانے سے انحنا کم ہوتی ہے۔ مستقل b کے لئے a کم کرنے سے بھی انحنا آخر کار انحنا کم کرتی ہے۔ ایک اسپرنگ کھینچنے سے سیدھا ہوتا ہے۔

اگر $b = 0$ ہو تب پیچ دار منحنی ایک دائرہ ہو گا جس کا رداس a اور انحنا $\frac{1}{a}$ ہو گی۔ اگر $a = 0$ ہو تب پیچ دار منحنی، محور z پر سیدھا خط ہو گا اور اس کی انحنا 0 ہو گی۔ □

مثال ۵: گزشتہ مثال میں منحنی کے لئے $\boldsymbol{N}$ تلاش کریں۔

حل:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[(a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}] \qquad \text{مثال ۴}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\boldsymbol{N} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|} \qquad \text{مساوات ۴}$$

$$= -\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}[(a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}]$$

$$= -(\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}$$

□

مروڑ اور دوہری عمودی سمتیہ

فضا میں منحنی کا **دوہری عمودی سمتیہ**[۲۱] $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}$ ہے جو $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ دونوں کو عمودی ہو گا (شکل ۱۲.۲۳)۔ سمتیات $\boldsymbol{T}$، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ مل کر دایاں ہاتھ، متحرک، سمتی چوکھٹ دیتے ہیں جو فضا میں سواری کی حرکت پر غور میں مددگار ثابت ہوتا ہے۔

سمتیات $\boldsymbol{T}$، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ کے لحاظ سے $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ کا رویہ کیسا ہو گا؟ حاصل صلیبی ضرب کے قاعدہ تفرق سے

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\times\boldsymbol{N} + \boldsymbol{T}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s}$$

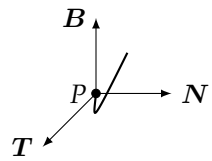
حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ $\boldsymbol{N}$ کا رخ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}$ کے رخ ہے لہذا $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\times\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$ ہو گا اور یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{T}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s} = \boldsymbol{T}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{N}}{\mathrm{d}s} \qquad (۶)$$

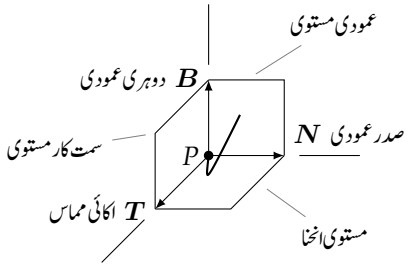
چونکہ حاصل صلیبی ضرب دونوں اجزاء کو عمودی ہوتا ہے لہذا $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کو عمودی ہو گا۔

---

[۲۱] binormalvector



شکل ۱۲.۲۳: سمتیات $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ (اسی ترتیب میں) فضا میں آپس میں عمودی اکائی سمتیات کا دایاں ہاتھ چوکھٹ دیتے ہیں۔



شکل ۱۲.۲۴: سمتیات $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ ، $\boldsymbol{B}$ کے پیدا تین مستوی کے نام۔

چونکہ $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{B}$ (جس کی لمبائی مستقل ہے) کو بھی عمودی ہے لہٰذا $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{T}$ کے مستوی کو $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ عمودی ہو گا۔ دوسرے لفظوں میں $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{N}$ کے متوازی ہو گا اور یوں $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ سمتیہ $\boldsymbol{N}$ کا مستقل مضرب ہو گا۔ اس حقیقت کو علامتی طور پر

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau \boldsymbol{N}$$

لکھا جاتا ہے جہاں منفی کی علامت روایتی ہے۔ غیر سمتی τ ، منحنی پر **مروڑ** کہلاتا ہے۔ دھیان رہے کہ

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N} = -\tau \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{N} = -\tau(1) = -\tau$$

کی بنا درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N}$$

تعریف: فرض کریں $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$ ہے۔ تب ہموار منحنی کا تفاعل **مروڑ**[۲۲] درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N}$$

□

انحنا κ کے برعکس جو کبھی منفی نہیں ہو سکتا ہے، مروڑ τ مثبت، منفی یا صفر ہو سکتا ہے۔

منحنیات $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ مل کر تین مستوی دیتے ہیں (شکل ۱۲.۲۴)۔ منحنی پر چلتے ہوئے نقطہ P پر عمودی مستوی کی مڑنے کی شرح کو انحنا $\kappa = \left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right|$ تصور کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح منحنی پر چلتے ہوئے نقطہ P پر $\boldsymbol{T}$ کے لحاظ سے سطح منحنی انحنا کی مڑنے کی شرح کو مروڑ $\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N}$ تصور کیا جا سکتا ہے۔ منحنی میں بل کی پیائش اس منحنی کی مروڑ ہو گی۔

---

[۲۲] torsion

اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء

قوت کشش، بریک یا انجن کی طاقت کی بنا کسی جسم کی اسراع کے مماسی جزو میں ہم عموماً دلچسپی رکھتے ہیں جو اس قوت کی بنا پیدا ہوتی ہے۔ ہم زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے $\boldsymbol{v}$ کے لئے

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{T}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

لکھ کر دونوں اطراف کا تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\boldsymbol{T}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\left(\kappa\boldsymbol{N}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\boldsymbol{N}
\end{aligned}$$

اس کو

$$\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{T} \tag{۷}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں اسراع کا غیر سمتی مماسی جزو a_T اور غیر سمتی عمودی جزو a_N درج ذیل ہوں گے۔

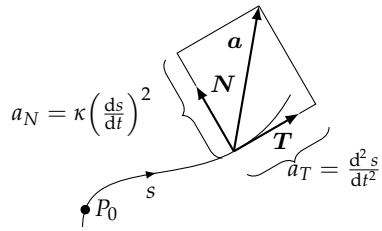
$$a_T = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\boldsymbol{v}|, \qquad a_N = \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \kappa|\boldsymbol{v}|^2 \tag{۸}$$

آپ نے دیکھا کہ مساوات ۷ میں $\boldsymbol{B}$ نہیں پایا جاتا ہے۔ ایک راہ جس پر ایک جسم چل رہا ہو جتنا بھی گھومتا ہو، اس پر اسراع ہر صورت $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ کے مستوی میں $\boldsymbol{B}$ کی عمودی پائی جائے گی۔ یہ مساوات ہمیں یہ بھی بتاتی ہے کہ کتنی اسراع حرکت کے مماسی رخ $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ اور کتنی اسراع حرکت کے عمودی رخ $\kappa(\mathrm{d}s/\,\mathrm{d}t)^2$ ہو گی (شکل ۱۲.۲۵)۔

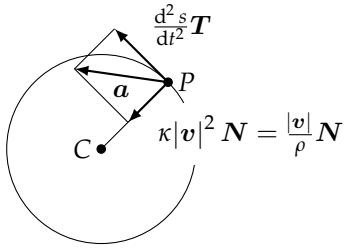
ہم مساوات ۸ سے کیا معلومات حاصل کر سکتے ہیں۔ تعریف کی رو سے، اسراع $\boldsymbol{a}$ سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ کی تبدیلی کی شرح ہو گی اور حرکت کے دوران سمتی رفتار کا رخ اور اس کی مقدار (لمبائی) تبدیل ہو گی۔ اسراع کا مماسی جزو a_T سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ کی لمبائی کی شرح تبدیلی دیتا ہے (یعنی رفتار میں تبدیلی)۔ عمودی جزو a_N ہمیں $\boldsymbol{v}$ کے رخ کی تبدیلی کی شرح دیتا ہے۔

دھیان رہے کہ a_N انحنا ضرب رفتار کا مربع ہو گا۔ اس سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ جب گاڑی تیز رفتار (زیادہ $|\boldsymbol{v}|$) سے چلتے ہوئے زیادہ جلدی مڑے (بڑی κ) تب ہمیں کیوں سیدھا بیٹھنے میں مشکل پیش آتی ہے۔ گاڑی کی رفتار دگنی کرنے سے آپ اسی انحنا کے لئے چار گنّا زیادہ عمودی اسراع محسوس کریں گے (شکل ۱۲.۲۶)۔

اگر ایک جسم مستقل رفتار سے چل رہی ہو تب $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ صفر ہو گا اور تمام اسراع $\boldsymbol{N}$ کے رخ، دائرے کے مرکز کے رخ ہو گا۔ اگر ایک جسم کی رفتار بڑھ یا گھٹ رہی ہو تب $\boldsymbol{a}$ کا غیر صفر مماسی جزو ہو گا۔



شکل ۱۲.۲۵: اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء۔ اسراع $\boldsymbol{a}$ ہر صورت $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ کے مستوی میں $\boldsymbol{B}$ کے عمودی پایا جاتا ہے۔



شکل ۱۲.۲۶: ایک جسم جس کی رفتار ایک دائری راہ پر گھڑی کے الٹ رخ چلتے ہوئے بڑھ رہی ہو کے اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء۔ دائرہ کا رداس ρ ہے۔

اسراع کا عمودی جزو a_N معلوم کرنے کی خاطر ہم عموماً کلیہ $a_N = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_T^2}$ استعمال کرتے ہیں جو a_N کے لئے مساوات $|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} = a_T^2 + a_N^2$ حل کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے ہم بغیر κ معلوم کیے، a_N معلوم کر سکتے ہیں۔

$$a_N = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_T^2} \tag{۹}$$

مثال ۶: درج ذیل حرکت کے لئے $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ حاصل کئے بغیر اسراع $\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N}$ روپ میں لکھیں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}, \quad t > 0$$

یہ راہ شکل ۱۲.۲۷ میں دکھائے دائرہ کا درپیچیدہ ہے۔

حل: ہم پہلے مساوات ۸ سے a_T حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{v} = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} \qquad \text{مثال ۵}$$

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t} = \sqrt{t^2} = |t| = t \qquad t > 0$$

$$a_T = \frac{d}{dt}|\boldsymbol{v}| = \frac{d}{dt}(t) = 1 \qquad \text{مساوات ۸}$$

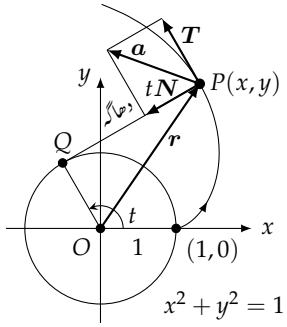
اب مساوات ۹ استعمال کرتے ہوئے a_N حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a} = (\cos t - t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t + t\cos t)\boldsymbol{j}$$

$$|\boldsymbol{a}|^2 = t^2 + 1 \qquad \text{کچھ الجبرا کے بعد}$$

$$a_N = \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2 - a_T^2}$$

$$= \sqrt{(t^2+1) - (1)} = \sqrt{t^2} = t$$



شکل ۱۲.۲۷: اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء (مثال ۶)

اس کے بعد ہم مساوات ۷ سے $\boldsymbol{a}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N} = (1)\boldsymbol{T} + (t)\boldsymbol{N} = \boldsymbol{T} + t\boldsymbol{N}$$

□

انحنا اور مروڑ کے کلیات

ہم اب ہموار منحنیات کے انحنا اور مروڑ تلاش کرنے کے چند کلیات پیش کرتے ہیں جو استعمال میں آسان ثابت ہوتے ہیں۔ مساوات ۷ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a} &= \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T}\right)\times\left[\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{T} + \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2\boldsymbol{N}\right] && \boldsymbol{v} = \tfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{T} \text{ مساوات ۸ سے} \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}\right)(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T}) + \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}) \\
&= \kappa\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^3\boldsymbol{B} && \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{T} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N} = \boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

یوں

$$|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}| = \kappa\left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|^3|\boldsymbol{B}| = \kappa|\boldsymbol{v}|^3 \qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\boldsymbol{v}| \text{ اور } |\boldsymbol{B}| = 1$$

ہو گا جس کو κ کے لئے حل کر کے درج ذیل کلیہ حاصل ہو گا۔

انحنا کا سمتی کلیہ

$$\kappa = \frac{|\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{v}|^3} \tag{۱۰}$$

مساوات ۱۰ ہمیں منحنی پر چلتے ہوئے سمتی رفتار جہاں $\boldsymbol{v}$ غیر صفر ہو اور اسراع کی کسی بھی روپ سے انحنا، جو منحنی کی جیومیٹریائی خاصیت ہے، دیتی ہے۔ ذرہ رک کر اس حیرت کن حقیقت پر غور کریں۔ منحنی پر حرکت کے کسی بھی کلیہ سے، چاہے حرکت کتنا بھی متغیر کیوں نہ ہو (جب تک $\boldsymbol{v}$ صفر نہ ہو)، ہم منحنی کی طبعی خاصیت دریافت کر سکتے ہیں جس کا ظاہری طور پر منحنی پر چلنے سے کوئی تعلق نہیں ہے۔

مروڑ کا ایک مقبول کلیہ جو اعلیٰ نصاب میں حاصل کیا جاتا ہے درج ذیل ہے جہاں ایک نقطہ، t کے لحاظ سے ایک تفرق کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$، $\ddot{x} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$ اور $\dddot{x} = \frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3}$ ہوں گے۔

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}|^2} \qquad \text{جہاں } \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0} \text{ ہو} \tag{۱۱}$$

یہ کلیہ $\boldsymbol{r}$ کے تفاعل اجزاء $x = f(t)$، $y = g(t)$ اور $z = h(t)$ سے مروڑ دیتا ہے۔ مقطع کا پہلا صف $\boldsymbol{v}$ سے، دوسرا صف $\boldsymbol{a}$ سے اور تیسرا صف $\dot{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}$ سے حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۷: درج ذیل پیچ دار کا κ اور τ مساوات ۱۰ اور مساوات ۱۱ سے حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}, \quad a, b \geq 0,\ a^2 + b^2 \neq 0$$

حل: ہم انحنا کو مساوات ۱۰ کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= -(a\sin t)\boldsymbol{i} + (a\cos t)\boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}, \\
\boldsymbol{a} &= -(a\cos t)\boldsymbol{i} - (a\sin t)\boldsymbol{j}, \\
\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} \\
&= (ab\sin t)\boldsymbol{i} - (ab\cos t)\boldsymbol{j} + a^2\boldsymbol{k}, \\
\kappa &= \frac{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{v}|^3} = \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^4}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{a}{a^2+b^2}
\end{aligned} \tag{۱۲}$$

مساوات ۱۲ اور مساوات ۵ جہاں ہم نے انحنا کو اس کی تعریف سے حاصل کیا، ایک جیسا نتیجہ دیتی ہیں۔

مروڑ کے لئے مساوات ۱۱ استعمال کرنے سے پہلے ہم مقطع کے اندراج تلاش کرتے ہیں۔ ہم $\boldsymbol{v}$ اور $\boldsymbol{a}$ جانتے ہیں لہٰذا

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t} = (a\sin t)\boldsymbol{i} - (a\cos t)\boldsymbol{j}$$

ہو گا۔ یوں مروڑ درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}|^2} = \frac{\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix}}{(a\sqrt{a^2+b^2})^2} \quad \text{مساوات ۱۲ کی قیمتیں}$$

$$= \frac{b(a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t)}{a^2(a^2+b^2)} \tag{۱۳}$$

$$= \frac{b}{a^2+b^2}$$

□

ہم مساوات ۱۳ سے دیکھتے ہیں کہ دائری نلکی پر پیچ دار راہ کا مروڑ مستقل ہو گا۔ در حقیقت فضا میں تمام منحنیات میں پیچ دار منحنی کی نشانی اس کی مستقل انحنا اور مستقل مروڑ ہیں۔

ڈی این اے[۲۳] زندگی کا بنیادی سالمہ ہے۔ یہ دو پیچ دار حصوں پر مشتمل ہوتی ہے جو ایک دوسرے کے گرد لپٹے ہوتے ہیں۔ لپٹی صورت کی بنا سالمہ بہت کم جگہ لیتی ہے اور خرابی کی صورت میں (مستقل انحنا اور مروڑ کی بنا) خراب حصہ کو سالماتی قینچی سے کاٹا جا سکتا ہے۔ سالماتی قینچی استعمال کرتے ہوئے سائنس دان امید رکھتے ہیں کہ وہ انسانیت کو ہر قسم کی بیماری سے نجات دے پائیں گے۔

فضا میں منحنیات کے کلیات

[۲۳] DNA

$\boldsymbol{T} = \dfrac{\boldsymbol{v}}{\lvert\boldsymbol{v}\rvert}$	اکائی مماسی سمتیہ
$\boldsymbol{N} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{\lvert\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t\rvert}$	صدر اکائی عمودی سمتیہ
$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$	دوہری عمودی سمتیہ
$\kappa = \left\lvert\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}}{\mathrm{d}s}\right\rvert = \dfrac{\lvert\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}\rvert}{\lvert\boldsymbol{v}\rvert^3}$	انحنا
$\tau = -\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N} = \dfrac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{\lvert\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{a}\rvert^2}$	مروڑ
$\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N}$	اسراع
$a_T = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lvert\boldsymbol{v}\rvert$	اسراع کا مماسی جزو
$a_N = \kappa\lvert\boldsymbol{v}\rvert^2 = \sqrt{\lvert\boldsymbol{a}\rvert - a_T^2}$	اسراع کا عمودی جزو

سوالات

مستوی منحنیات

سوال ۱ تا سوال ۴ میں مستوی منحنیات کا $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور κ تلاش کریں۔

سوال ۱: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (\ln\cos t)\boldsymbol{j}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

سوال ۲: $\boldsymbol{r}(t) = (\ln\sec t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j}, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

سوال ۳: $\boldsymbol{r}(t) = (2t+3)\boldsymbol{i} + (5-t^2)\boldsymbol{j}$

سوال ۴: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}, \quad t > 0$

سوال ۵ اور سوال ۶ میں $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ معلوم کیے بغیر $\boldsymbol{a}$ کو $\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N}$ روپ میں لکھیں۔

سوال ۵: $\boldsymbol{r}(t) = (2t+3)\boldsymbol{i} + (t^2-1)\boldsymbol{j}$

سوال ۶: $\boldsymbol{r}(t) = \ln(t^2+1)\boldsymbol{i} + (t - 2\tan^{-1} t)\boldsymbol{j}$

سوال ۷: مستوی xy میں تفاعل کی ترسیم کی انحنا کا کلیہ۔

ا. مستوی xy میں ترسیم $y = f(x)$ کی مقدار معلوم روپ $x = x,\ y = f(x)$ ہے اور سمتی کلیہ $\boldsymbol{r}(t) = x\boldsymbol{i} + f(x)\boldsymbol{j}$ ہوگا۔ اگر f دوبار قابل تفرق ہو تب اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

ب. جزو-ا میں κ کا کلیہ استعمال کرتے ہوئے $y = \ln(\cos x),\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ کی انحنا تلاش کریں۔ اپنے جواب کا سوال ا کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

ج. دکھائیں کہ نقطہ تصریف پر انحنا صفر ہو گی۔

سوال ۸: مستوی میں مقدار معلوم روپ میں دی گئی منحنی کی انحنا کا کلیہ

ا. دکھائیں کہ دوبار قابل تفرق تفاعل $x = f(t)$ ، $y = g(t)$ پر مبنی ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$ کی انحنا درج ذیل کلیہ دیتا ہے۔

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنیات کے انحنا تلاش کریں۔

ب. $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (\ln \sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 < t < \pi$

ج. $\boldsymbol{r}(t) = [\tan^{-1}(\sinh t)]\boldsymbol{i} + (\ln \cosh t)\boldsymbol{j}$

سوال ۹: مستوی منحنیات کے عمود

ا. دکھائیں کہ نقطہ $(f(t), g(t))$ پر منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$ کے عمودی سمتیات $\boldsymbol{n}(t) = -g'(t)\boldsymbol{i} + f'(t)\boldsymbol{j}$ اور $-n(t) = g'(t)\boldsymbol{i} - f'(t)\boldsymbol{j}$ ہیں۔ کسی مخصوص مستوی کا $\boldsymbol{N}$ تلاش کرنے کی خاطر ہم $\boldsymbol{n}$ اور $-\boldsymbol{n}$ میں جو مقعر رخ ہو کو منتخب کر کے اس سے اکائی سمتیہ حاصل کرتے ہیں (شکل ۱۲.۲۰)۔ یہ طریقہ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا $\boldsymbol{N}$ تلاش کریں۔

ب. $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + e^{2t}\boldsymbol{j}$

ج. $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{4 - t^2}\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j}, \quad -2 \le t \le 2$

سوال ۱۰:

ا. منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{t^3}{3}\boldsymbol{j}$ کا $\boldsymbol{N}$ وقفہ $t < 0$ اور وقفہ $t > 0$ پر سوال ۹ کے کلیہ سے حاصل کریں۔

ب. جزو-ا میں منحنی کے لئے

$$\boldsymbol{N} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t}{|\mathrm{d}\boldsymbol{T}/\,\mathrm{d}t|}, \quad t \neq 0$$

حاصل کریں۔ کیا $t = 0$ پر $\boldsymbol{N}$ موجود ہے؟ اس منحنی کو ترسیم کریں اور منفی سے مثبت جانب گزرتے ہوئے $\boldsymbol{N}$ کے رویہ پر تبصرہ کریں۔

فضائی منحنیات

سوال ۱۱ تا سوال ۱۸ میں فضائی منحنیات کا $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ ، $\boldsymbol{B}$ ، κ اور τ دریافت کریں۔

سوال ۱۱: $\boldsymbol{r}(t) = (3\sin t)\boldsymbol{i} + (3\cos t)\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k}$

سوال ۱۲: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$

سوال ۱۳: $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\boldsymbol{i} + (e^t\sin t)\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

سوال ۱۴: $\boldsymbol{r}(t) = (6\sin 2t)\boldsymbol{i} + (6\cos 2t)\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵: $\boldsymbol{r}(t) = \frac{t^3}{3}\boldsymbol{i} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{j}, \quad t > 0$

سوال ۱۶: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{i} + (\sin^3 t)\boldsymbol{j}, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$

سوال ۱۷: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (a\cosh\frac{t}{a})\boldsymbol{j}, \quad a > 0$

سوال ۱۸: $\boldsymbol{r}(t) = (\cosh t)\boldsymbol{i} - (\sinh t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$

سوال ۱۹ اور سوال ۲۰ میں $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ تلاش کیے بغیر $\boldsymbol{a}$ کو $\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N}$ روپ میں لکھیں۔

سوال ۱۹: $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}$

سوال ۲۰: $\boldsymbol{r}(t) = (1+3t)\boldsymbol{i} + (t-2)\boldsymbol{j} - 3t\boldsymbol{k}$

سوال ۲۱ اور سوال ۲۴ میں $\boldsymbol{T}$ اور $\boldsymbol{N}$ تلاش کیے بغیر، دیے گئے t پر $\boldsymbol{a}$ کو $\boldsymbol{a} = a_T\boldsymbol{T} + a_N\boldsymbol{N}$ روپ میں لکھیں۔

سوال ۲۱: $\boldsymbol{r}(t) = (t+1)\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad t = 1$

سوال ۲۲: $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + t^2\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

سوال ۲۳: $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + (t + \frac{t^3}{3})\boldsymbol{j} + (t - \frac{t^3}{3})\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

سوال ۲۴: $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\boldsymbol{i} + (e^t\sin t)\boldsymbol{j} + \sqrt{2}e^t\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

سوال ۲۵ اور سوال ۲۶ میں دیے گئے $\boldsymbol{r}$ پر $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ اور $\boldsymbol{B}$ معلوم کریں۔ اس کے بعد درپیچیدہ مستوی، عمودی مستوی اور سمت کار مستوی کی مساوات اس t پر حاصل کریں۔

سوال ۲۵: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \quad t = \frac{\pi}{4}$

سوال ۲۶: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad t = 0$

طبعی استعمال

سوال ۲۷: آپ کی گاڑی کا رفتار پیمایہ $60\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ دکھا رہا ہے۔ کیا آپ کی اسراع ممکن ہے؟ جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۲۸: کیا مستقل رفتار سے چلتے ہوئے ذرہ کی اسراع کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۲۹: ایک ذرہ کی اسراع پر لمحہ اس کی سمتی رفتار کے عمودی ہے۔ اس کی رفتار کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳۰: ایک جسم جس کی کمیت m ہے قطع مکافی $y = x^2$ پر مستقل رفتار $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ سے حرکت کرتا ہے۔ نقطہ $(0,0)$ اور نقطہ $(\sqrt{2},2)$ پر اسراع کی بدولت اس پر کتنی قوت ہو گی؟ اپنا جواب $\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{j}$ کی روپ میں لکھیں۔ (نیوٹن کا کلیہ $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ ذہن میں رکھیں۔)

سوال ۳۱: ایک منحنی پر کسی جسم کو مستقل رفتار سے حرکت دینے کے لئے درکار قوت، قوانین نیوٹن کے تحت، حرکت کی انحنا کی مستقل مضرب ہو گی۔ حساب سے دکھائیں کہ یہ فقرہ کیوں درست ہے۔

سوال ۳۲: دکھائیں اگر ایک ذرے کی اسراع کا عمودی جزو صفر ہو تب یہ متحرک ذرہ سیدھا حرکت کرے گا۔

انحنا پر مزید سوالات

سوال ۳۳: دکھائیں کہ قطع مکافی $y = ax^2,\ a \neq 0$ کی زیادہ سے زیادہ انحنا راس کی راس پر ہو گی جبکہ کسی بھی نقطہ پر کم سے کم انحنا نہیں ہو گی۔ (چونکہ منحنی کو فضا میں ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے یا گھمانے سے انحنا تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا یہ حقیقت کسی بھی قطع مکافی کے لئے درست ہو گا۔)

سوال ۳۴: دکھائیں کہ ترخیم $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ a > b > 0$ کی زیادہ سے زیادہ انحنا اس کی محور اکبر پر اور کم سے کم انحنا اس کی محور اصغر پر ہو گی۔ (گزشتہ سوال کی طرح یہ حقیقت بھی ہر ترخیم کے لئے درست ہو گا۔)

سوال ۳۵: پیچ دار منحنی کی زیادہ سے زیادہ انحنا

ہم نے مثال ۴ میں دیکھا کہ پیچ دار $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k},\ (a,b \geq 0)$ کی انحنا $\kappa = \frac{a}{a^2+b^2}$ ہو گی۔ کسی بھی b کے لئے زیادہ سے زیادہ انحنا کتنی ہو گی؟ اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۳۶: اگر آپ کو $|a_N|$ اور $|\boldsymbol{v}|$ معلوم ہوں تب کلیہ $a_N = \kappa|\boldsymbol{v}|^2$ سے انحنا حاصل کی جا سکتی ہے۔ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنی کی انحنا اور رداس انحنا دریافت کریں۔ (a_N اور $|\boldsymbol{v}|$ کی قیمتیں مثال ۶ سے لیں۔)

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}, \quad t > 0$$

سوال ۳۷: دکھائیں کہ درج ذیل خط کے لئے κ اور τ صفر ہوں گے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (x_0 + At)\boldsymbol{i} + (y_0 + Bt)\boldsymbol{j} + (z_0 + Ct)\boldsymbol{k}$$

سوال ۳۸: مکمل انحنا

ہم ایک منحنی پر $s = s_0$ سے $s = s_1 > s_0$ تک حصہ کی مکمل انحنا حاصل کرنے کی خاطر s_0 تا s_1 انحنا κ کا تکمل لیتے ہیں۔ اگر منحنی کا متغیر s

کی بجائے t ہو تب مکمل انحنا درج ذیل ہو گی، جہاں s_0 اور s_1 کے مطابقتی قیمتیں t_0 اور t_1 ہیں۔

$$K = \int_{s_0}^{s_1} \kappa \, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t_1} \kappa \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_1} \kappa |\boldsymbol{v}| \, \mathrm{d}t$$

وقفہ $0 \leq t \leq 4\pi$ پر پیچ دار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{i} + (3\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}$ کی مکمل انحنا معلوم کریں۔

سوال ۳۹: گزشتہ سوال جاری
درج ذیل منحنیات کی مکمل انحنا دریافت کریں۔

ا. $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t + t\sin t)\boldsymbol{i} + (\sin t - t\cos t)\boldsymbol{j}, \; a \leq t \leq b \; (a > 0)$ (انحنا معلوم کرنے کا آسان طریقہ سوال ۳۶ میں پیش کیا گیا ہے۔ مثال ۶ کی قیمتیں استعمال کریں۔)

ب. $y = x^2, \quad -\infty < x < \infty =$

سوال ۴۰:

ا. نقطہ $(\frac{\pi}{2}, 1)$ پر منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}$ کے دائرہ انحنا کی مساوات تلاش کریں۔ (یہ مستوی xy میں $y = \sin x$ کی مقدار معلوم روپ ہے۔)

ب. نقطہ $(0, -2)$ جہاں $t = 1$ ہے پر منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (2\ln t)\boldsymbol{i} - (t + \frac{1}{t})\boldsymbol{j}, \; e^{-2} \leq t \leq e^2$ کے دائرہ انحنا کی مساوات تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۴۱: مستوی منحنی $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j}$ جو کافی قابل تفرق ہو کی مروڑ کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴۲: پیچ دار کی مروڑ
ہم نے مثال ۷ میں دیکھا کہ پیچ دار

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}, \quad a, b \geq 0$$

کی انحنا $\frac{b}{a^2+b^2}$ ہے۔ کسی مستقل a کے لئے τ کی زیادہ سے زیادہ قیمت کیا ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴۳: صفر مروڑ کی قابل تفرق منحنیات مستویات میں پائی جاتی ہیں۔
صفر مروڑ کی قابل تفرق منحنیات مستویات میں پائی جاتی ہیں۔ یہ اس حقیقت کی ایک مخصوص صورت ہے کہ ایک ذرہ جس کی سمتی رفتار کسی مقررہ سمتیہ $\boldsymbol{C}$ کی عمودی ہو، ایسی مستوی میں حرکت کرتا ہے جو C کو عمودی ہو گا، اور یہ حقیقت از خود درج ذیل مسئلہ کا حل ہے۔

فرض کریں وقفہ $[a, b]$ میں تمام t پر $\boldsymbol{r}(t) = f(t)\boldsymbol{i} + g(t)\boldsymbol{j} + h(t)\boldsymbol{k}$ دو بار قابل تفرق ہو، اور $t = a$ پر $\boldsymbol{r} = 0$ ہو اور $[a, b]$ میں تمام t پر $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{k} = 0$ ہو تب $[a, b]$ میں تمام t پر $h(t) = 0$ ہو گا۔

اس مسئلہ کو حل کریں۔ (اشارہ: اسراع $\boldsymbol{a} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ سے شروع کریں اور ابتدائی معلومات الٹ رخ لاگو کریں۔)

سوال ۴۴: ایک کلیہ جو $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{v}$ سے τ حاصل کرتا ہے
اگر ہم تعریف $\tau = -\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} \cdot \boldsymbol{N}$ سے شروع کر کے $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s}$ کو زنجیری قاعدہ سے

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}$$

لکھیں تب ہمیں درج ذیل کلیہ حاصل ہو گا۔

$$\tau = -\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \boldsymbol{N}\right)$$

یہ کلیہ استعمال میں، اخذ کرنے میں اور بیان کرنے میں مساوات ۱۱ سے زیادہ آسان ہے۔ اس میں قباحت یہ ہے کہ کمپیوٹر کے بغیر اسے استعمال کرنے میں بہت زیادہ کام کرنا ہو گا۔ اس کلیہ کو استعمال کرتے ہوئے مثال ۷ میں پیچ دار کی مروڑ تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال مروڑ کا کلیہ

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

جسے ہم نے سوال ۷ میں اخذ کیا، دو بار قابل تفرق مستوی منحنی $y = f(x)$ کی انحنا κ کو x کا تفاعل دیتا ہے۔ سوال ۴۵ تا سوال ۴۸ میں دی گئی منحنیات کا تفاعل انحنا تلاش کریں۔ اس کے بعد دیے گئے وقفہ پر $\kappa(x)$ اور $f(x)$ کو ترسیم کریں۔ آپ چند دلچسپ حقائق دیکھیں گے۔

سوال ۴۵: $y = x^2, \quad -2 \le x \le 2$

سوال ۴۶: $y = \frac{x^4}{4}, \quad -2 \le x \le 2$

سوال ۴۷: $y = \sin x, \quad 0 \le x \le 2\pi$

سوال ۴۸: $y = e^x, \quad -1 \le x \le 2$

دائرہ انحنا

سوال ۴۹ تا سوال ۵۶ میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے مستوی منحنی میں نقطہ P پر، جہاں $\kappa \neq 0$ ہو، دائرہ انحنا پر غور کریں گے۔ کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دی گئی مستوی منحنی کی صورت دیکھنے کی خاطر دیے گئے وقفہ پر منحنی ترسیم کریں۔

ب. دیے گئے نقطہ t_0 پر منحنی کی انحنا κ کی قیمت سوال ۷ یا سوال ۸ میں دیے کلیہ سے معلوم کریں۔ اگر منحنی بطور تفاعل $y = f(x)$ دی گئی ہو تب اس کی مقدار معلوم روپ $x = t,\ y = f(t)$ استعمال کریں۔

ج. نقطہ t_0 پر اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{N}$ تلاش کریں۔ دھیان رہے کہ t_0 پر اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ کا گھڑی کے رخ یا گھڑی کے مخالف رخ گھومنا، $\boldsymbol{N}$ کے اجزاء کی علامتیں تعین کرتا ہے (سوال ۹)۔

د. اگر مبدا سے دائرہ انحنا کے مرکز (a,b) تک سمتیہ $\boldsymbol{C} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ ہو تب مرکز $\boldsymbol{C}$ درج ذیل سمتی مساوات سے معلوم کریں۔

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{r}(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)}\boldsymbol{N}(t_0)$$

منحنی پر نقطہ $P(x_0, y_0)$ تعین کر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t_0)$ دیتا ہے۔

ھ. دائرہ انحنا کی خفی مساوات $(y-b)^2 + (x-a)^2 = \frac{1}{\kappa^2}$ ترسیم کریں۔ اس کے بعد منحنی اور دائرہ انحنا کو اکٹھے ترسیم کریں۔ (قابل دید ترسیمات حاصل کرنے کی خاطر افقی اور انتصابی پیمائش برابر رکھتے ہوئے، آپ کو مختلف وقفوں پر ترسیم کرنا پڑ سکتا ہے۔)

سوال ۴۹: $\boldsymbol{r}(t) = (3\cos t)\boldsymbol{i} + (5\sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال ۵۰: $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{i} + (\sin^3 t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال ۵۱: $\boldsymbol{r}(t) = t^2\boldsymbol{i} + (t^3 - 3t)\boldsymbol{j}, \quad -4 \le t \le 4, \quad t_0 = \frac{3}{5}$

سوال ۵۲: $\boldsymbol{r}(t) = (t^3 - 2t^2 - t)\boldsymbol{i} + \frac{3t}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{j}, \quad -2 \le t \le 5, \quad t_0 = 1$

سوال ۵۳: $\boldsymbol{r}(t) = (2t - \sin t)\boldsymbol{i} + (2 - 2\cos t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 3\pi, \quad t_0 = \frac{3\pi}{2}$

سوال ۵۴: $\boldsymbol{r}(t) = (e^{-t}\cos t)\boldsymbol{i} + (e^{-t}\sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 6\pi, \quad t_0 = \frac{\pi}{4}$

سوال ۵۵: $y = x^2 - x, \quad -2 \le x \le 5, \quad x_0 = 1$

سوال ۵۶: $y = x(1-x)^{2/5}, \quad -1 \le x \le 2, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

انحنا، مروڑ اور TNB چوکھٹے

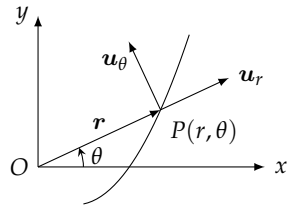
سوال ۵۷ تا سوال ۶۰ میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے دیے گئے نقطہ t پر چار اعشاریہ درستگی تک $\boldsymbol{v}$ ، $\boldsymbol{a}$ ، رفتار، $\boldsymbol{T}$ ، $\boldsymbol{N}$ ، $\boldsymbol{B}$ ، κ ، τ اور اسراع کے مماسی اور عمودی اجزاء تلاش کریں۔

سوال ۵۷: $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad t = \sqrt{3}$

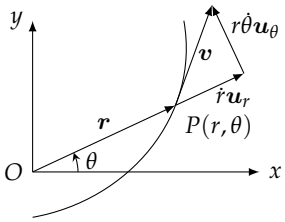
سوال ۵۸: $\boldsymbol{r}(t) = (e^t\cos t)\boldsymbol{i} + (e^t\sin t)\boldsymbol{j} + e^t\boldsymbol{k}, \quad t = \ln 2$

سوال ۵۹: $\boldsymbol{r}(t) = (t - \sin t)\boldsymbol{i} + (1 - \cos t)\boldsymbol{j} + \sqrt{-t}\boldsymbol{k}, \quad t = -3\pi$

سوال ۶۰: $\boldsymbol{r}(t) = (3t - t^2)\boldsymbol{i} + (3t^2)\boldsymbol{j} + (3t + t^3)\boldsymbol{k}, \quad t = 1$



شکل ۱۲.۲۸: نقطہ P کا قطبی محدد r سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کی مقدار ہو گی۔ یوں $\boldsymbol{u}_r$، جو $\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ ہے $\frac{\boldsymbol{r}}{r}$ ہو گا۔



شکل ۱۲.۲۹: قطبی محدد میں سمتی رفتار سمتیہ $\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta$ ہو گا۔

۱۲.۵ فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت

اس حصہ میں ہم قوانین نیوٹن اور قوت کشش کی مدد سے سیاروں کی حرکت کے قوانین کپلر اخذ کریں گے اور زمین کے گرد مصنوعی سیاروں کے مدار پر بحث کریں گے۔ قوانین نیوٹن سے قوانین کپلر کا حصول احصاء کی اہم کامیابی ہے۔ اس میں وہ سب کچھ درکار ہو گا جو ہم نے اب تک پڑھا ہے جیسا فضا میں سمتیات کا الجبرا اور جیومیٹری، سمتی تفاعل کا احصاء، تفرقی مساوات کے حل، ابتدائی قیمت مسائل اور ترخیمی حصوں کی قطبی محددی تشریح۔

قطبی اور نلکی محدد میں حرکت کی سمتی مساواتیں

ہم یہاں قطبی محدد کو r ، θ اور نلکی محدد کو r ، θ ، z لکھیں گے۔ ایک ذرہ قطبی محددی مستوی میں حرکت کرتا ہو، ہم اس کے مقام، سمتی رفتار اور اسراع کو متحرک اکائی سمتیات

$$\boldsymbol{u}_r = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{u}_\theta = -(\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\boldsymbol{j} \tag{۱}$$

کی روپ میں لکھتے ہیں (شکل ۱۲.۲۸)۔ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}_r$ کا رخ سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ کے رخ ہے لہٰذا $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r$ ہو گا۔ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}_\theta$ بڑھتے θ کے رخ یعنی سمتیہ $\boldsymbol{u}_r$ کو عمودی ہے۔

مساوات اسے ہمیں درج ذیل ملتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_r}{\mathrm{d}\theta} &= -(\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\boldsymbol{j} = \boldsymbol{u}_\theta \\ \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta} &= -(\cos\theta)\boldsymbol{i} - (\sin\theta)\boldsymbol{j} = -\boldsymbol{u}_r \end{aligned} \tag{۲}$$

ہم وقت کے لحاظ سے $\boldsymbol{u}_r$ اور $\boldsymbol{u}_\theta$ کی تبدیلی دیکھنے کی خاطر ان کا تفرق t کے لحاظ سے زنجیری قاعدہ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\dot{\boldsymbol{u}}_r = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_r}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = \dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta, \quad \dot{\boldsymbol{u}}_\theta = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta}\dot{\theta} = -\dot{\theta}\boldsymbol{u}_r \tag{۳}$$

یوں سمتی رفتار (شکل ۱۲.۲۹)

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\boldsymbol{u}_r) = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\boldsymbol{u}}_r = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta \tag{۴}$$

اور اسراع درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = (\ddot{r}\boldsymbol{u}_r + \dot{r}\dot{\boldsymbol{u}}_r) + (\dot{r}\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + r\ddot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\boldsymbol{u}}_\theta) \tag{۵}$$

جب $\dot{\boldsymbol{u}}_r$ اور $\dot{\boldsymbol{u}}_\theta$ کے حصول کے لئے مساوات ۱۳ استعمال کیا جائے اور اجزاء کو علیحدہ کیے جائیں تب اسراع کی مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta \tag{۶}$$

ہم مساوات $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r$ کے دائیں ہاتھ جزو $z\boldsymbol{k}$ جمع کر کے ان مساواتوں کو وسعت دے کر فضا میں حرکت کے لئے قابل استعمال بنا سکتے ہیں۔ یوں نکلی محدد میں درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r} &= r\boldsymbol{u}_r + z\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{v} &= \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + \dot{z}\boldsymbol{k} \\
\boldsymbol{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta + \ddot{z}\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{۷}$$

دھیان رہے کہ $z \neq 0$ کی صورت میں $|\boldsymbol{r}| = r$ ہو گا۔

سمتیات $\boldsymbol{u}_r$ ، $\boldsymbol{u}_\theta$ اور $\boldsymbol{k}$ دایاں ہاتھ چوکھٹ دیتے ہیں جس میں درج ذیل ہوں گے (شکل ۱۲.۳۰)۔

$$\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_\theta = \boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{u}_\theta \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{u}_r, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{u}_r = \boldsymbol{u}_\theta \tag{۸}$$

سیارے مستوی میں حرکت کرتے ہیں

نیوٹن کا قانون تجاذب کہتا ہے کہ اگر سورج کی کمیت M ، سیارہ کی کمیت m اور سورج کے کمیتی مرکز سے سیارہ کے کمیتی مرکز تک رداس سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہو تب سیارہ اور سورج کے بیچ قوت کشش $\boldsymbol{F}$ درج ذیل ہو گا (شکل ۱۲.۳۱) جہاں G (عالمگیر) **تجاذبی مستقل**[۲۴] کہلاتا ہے۔

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \tag{۹}$$

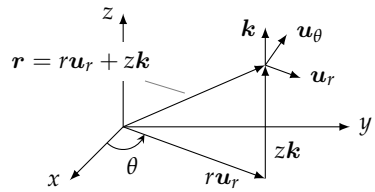
اگر قوت کی اکائی نیوٹن، کمیت کی اکائی کلو گرام اور فاصلہ کی اکائی میٹر ہو تب $G = 6.6720 \times 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$ ہو گا۔ نیوٹن کے دوسرے قانون $\boldsymbol{F} = m\ddot{\boldsymbol{r}}$ کو مساوات ۹ کے ساتھ ملا کر

$$\begin{aligned}
m\ddot{\boldsymbol{r}} &= -\frac{GMm}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \\
\ddot{\boldsymbol{r}} &= -\frac{GM}{|\boldsymbol{r}|^2}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

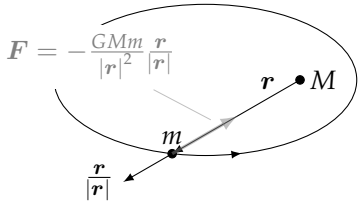
حاصل ہو گا۔ سیارہ ہر لمحہ سورج کی جانب اسراع پذیر ہے۔

---

[۲۴] gravitational constant



شکل ۱۲.۳۰: نلکی محدد میں تعین گر سمتیہ اور بنیادی اکائی سمتیات



شکل ۱۲.۳۱: قوت کشش دونوں کمیتوں کے بیچ سیدھے خط پر ہو گا۔

مساوات ۱۰ کہتی ہے کہ $\boldsymbol{r}$ کا غیر سمتی مضرب $\ddot{\boldsymbol{r}}$ ہے لہٰذا

$$\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0} \tag{۱۱}$$

ہو گا۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $\boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}}$ از خود $\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ کا تفرق ہے:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = \underbrace{\dot{\boldsymbol{r}} \times \dot{\boldsymbol{r}}}_{\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}} \tag{۱۲}$$

یوں مساوات ۱۱ درج ذیل کا معادل ہے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}) = \boldsymbol{0} \tag{۱۳}$$

جس کا تکمل

$$\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{C} \tag{۱۴}$$

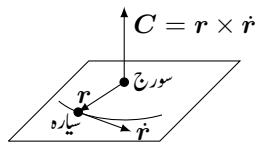
ہے جہاں $\boldsymbol{C}$ مستقل سمتیہ ہے۔

ہمیں مساوات ۱۴ بتاتی ہے کہ $\boldsymbol{r}$ اور $\dot{\boldsymbol{r}}$ ہر لمحہ ایک ایسے مستوی میں ہوں گے جو $\boldsymbol{C}$ کو عمودی ہو گا۔ یوں سورج کے مرکز سے گزرتی مستوی میں سیارے حرکت کرتے ہیں (شکل ۱۲.۳۲)۔

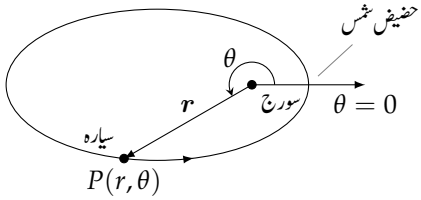
محدد اور ابتدائی معلومات

ہم نلکی محدد کے مرکز کو سورج کے کمیتی مرکز پر رکھتے ہیں اور سیارے کی حرکت کو قطبی محددی سطح لیتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{r}$ سیارے کا تعین گر سمتیہ ہو گا۔ یوں $|\boldsymbol{r}| = r$ اور $\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \boldsymbol{u}_r$ ہوں گے۔ ہم $\boldsymbol{C}$ کو محور z پر رکھتے ہیں لہٰذا $\boldsymbol{C}$ کا رخ $\boldsymbol{k}$ ہو گا۔ یوں $\boldsymbol{k}$ کا $\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ کے ساتھ وہی دائیں ہاتھ کا تعلق ہو گا جو اس کے ساتھ $\boldsymbol{C}$ کا ہے اور مثبت z محور سے دیکھتے ہوئے سیارہ گھڑی کے مخالف رخ گھومے گا۔ اس طرح t بڑھنے سے θ بڑھے گا لہٰذا تمام t کے لئے $\dot{\theta} > 0$ ہو گا۔ ہم اس لمحہ کو ابتدائی لمحہ منتخب کرتے ہیں جب سیارہ سورج کے قریب ترین ہو اور نلکی محدد کو (اگر ضرورت ہو) محور z کے گرد یوں گھماتے ہیں کہ ابتدائی لمحہ پر $\boldsymbol{r}$ اور ابتدائی شعاع ہم مکان ہوں۔ یوں ابتدائی شعاع سیارے کے **حضیض شمس**[۲۵] سے گزرے گا (شکل ۱۲.۳۳)۔

[۲۵] perihelion



شکل ۱۲.۳۲: سورج کے گرد سیارہ اس مستوی میں حرکت کرتا ہے جو $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ کو عمودی ہو اور سورج کے کمیتی مرکز سے گزرتا ہے۔



شکل ۱۲.۳۳: حرکت سیارہ کا محددی نظام۔اوپر سے دیکھتے ہوئے حرکت، $\dot{\theta} > 0$ کی بنا، گھڑی کے مخالف رخ ہے۔

اگر ہم وقت کی پیمائش یوں کریں کہ حضیض شمسی پر $t = 0$ ہو تب سیارے کی حرکت کی ابتدائی معلومات درج ذیل ہوں گی۔

ا. لمحہ $t = 0$ پر $r = r_0$ ہو گا جو کم سے کم رداس ہے،

ب. لمحہ $t = 0$ پر (r کی قیمت کم سے کم ہونے کی بنا) $\dot{r} = 0$ ہو گا،

ج. لمحہ $t = 0$ پر $\theta = 0$ ہو گا،

د. لمحہ $t = 0$ پر $|\boldsymbol{v}| = v_0$ ہو گا۔

مزید

$$
\begin{aligned}
v_0 &= |\boldsymbol{v}|_{t=0} \\
&= \left|\dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta\right|_{t=0} && \text{مساوات ۴} \\
&= \left|r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta\right|_{t=0} && \dot{r} = 0 \text{ پر } t = 0 \\
&= (\left|r\dot{\theta}\right| |\boldsymbol{u}_\theta|)_{t=0} \\
&= \left|r\dot{\theta}\right|_{t=0} && |\boldsymbol{u}_\theta| = 1 \\
&= (r\dot{\theta})_{t=0} && r \text{ اور } \dot{\theta} \text{ دونوں مثبت ہیں}
\end{aligned}
$$

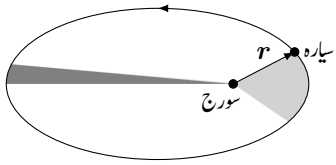
کی بنا ہم درج ذیل بھی جانتے ہیں۔

ھ. لمحہ $t = 0$ پر $r\dot{\theta} = v_0$ ہو گا۔

کپلر کا پہلا قانون (قانون مخروط حصہ)

کپلر کا پہلا قانون کہتا ہے کہ سیارے کی حرکت مخروطی ہے جس کے ایک ماسکہ پر سورج پایا جاتا ہے۔اس مخروط کی سنک

$$
e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \tag{۱۵}
$$



شکل ۱۲.۳۴: سورج اور سیارہ کے بیچ سیدھی لکیر مساوی اوقات میں مساوی رقبوں کو واضح کرتی ہے۔

اور قطبی مساوات درج ذیل ہے۔

$$r = \frac{(1+e)r_0}{1+e\cos\theta} \tag{۱۶}$$

کپلر کا دوسرا قانون (قانون یکساں رقبہ)

کپلر کا دوسرا قانون کہتا ہے کہ سورج سے سیارہ تک رداسی سمتیہ (جو ہمارے نمونہ میں $\boldsymbol{r}$ ہو گا) مساوی اوقات میں مساوی علاقوں کو واضح کرتا ہے (شکل ۱۲.۳۴)۔ اس قانون کو اخذ کرنے کی خاطر ہم مساوات ۱۴ استعمال کرتے ہوئے مساوات ۱۴ میں دی گئی حاصل صلیبی ضرب $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ کی قیمت معلوم کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{C} &= \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} \\
&= r\boldsymbol{u}_r \times (\dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta) && \text{مساوات ۴} \\
&= r\dot{r}\underbrace{(\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_r)}_{\boldsymbol{0}} + r(r\dot{\theta})\underbrace{(\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_\theta)}_{\boldsymbol{k}} \\
&= r(r\dot{\theta})\boldsymbol{k}
\end{aligned} \tag{۱۷}$$

لمحہ $t = 0$ پر اس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\boldsymbol{C} = [r(r\dot{\theta})]_{t=0}\boldsymbol{k} = r_0 v_0 \boldsymbol{k} \tag{۱۸}$$

مساوات ۱۷ میں $\boldsymbol{C}$ کی یہ قیمت پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$r^2\dot{\theta} = r_0 v_0 \quad \text{یعنی} \quad r_0 v_0 \boldsymbol{k} = r^2\dot{\theta}\boldsymbol{k} \tag{۱۹}$$

قطبی محدد میں تفرقی رقبہ درج ذیل لکھا جاتا ہے (حصہ ۱۰.۹)۔

$$\mathrm{d}S = \frac{1}{2}r^2\,\mathrm{d}\theta$$

یوں $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ کی قیمت ایک مستقل ہے:

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \frac{1}{2}r_0 v_0 \tag{۲۰}$$

جو کپلر کا دوسرا قانون ہے۔

زمین کے لئے r_0 تقریباً $1.5 \times 10^8\,\mathrm{km}$ ، v_0 تقریباً $30\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ ہے لہٰذا $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ تقریباً $2.25 \times 10^9\,\mathrm{km^2\,s^{-1}}$ ہو گا۔ یوں آپ کے دل کی ہر ایک دھڑکن میں زمین اپنے مدار میں $30\,\mathrm{km}$ فاصلہ طے کرتی ہے اور سورج سے زمین تک رداسی خط $2.25 \times 10^9\,\mathrm{km^2}$ رقبہ واضح کرتا ہے۔

کپلر کے پہلے قانون کا ثبوت

یہ دکھانے کی خاطر کہ سورج کے گرد سیارے کا مدار مخروطی ہوتا ہے جس کے ایک ماسکہ پر سورج واقع ہوتا ہے، ہمیں r کو متغیر θ کا تفاعل لکھنا ہو گا۔ ایسا کرنے کی خاطر ہمیں ایک لمبا حساب کرنا ہو گا۔

ہم وقتی طور پر $\dot{\theta}$ سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر مساوات ۶ اور مساوات ۱۰ میں $\boldsymbol{u}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}$ کے عددی سر ایک دوسرے کے برابر پر لکھ کر درج ذیل مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \tag{۲۱}$$

اس میں ہم مساوات ۱۹ سے $\dot{\theta}$ کی جگہ $\frac{r_0 v_0}{r^2}$ پر کر کے ترتیب دیتے ہوئے

$$\ddot{r} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2} \tag{۲۲}$$

حاصل کرتے ہیں۔ ہم متغیرات تبدیل کرتے ہوئے اس سے درجہ اول کی تفرقی مساوات حاصل کرتے ہیں۔ یوں زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے

$$p = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$$

لکھ کر مساوات ۲۲ درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r} = \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} - \frac{GM}{r^2} \tag{۲۳}$$

دونوں اطراف کو 2 سے ضرب کرتے ہوئے r کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔

$$p^2 = (\dot{r})^2 = -\frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} + \frac{2GM}{r} + C_1 \tag{۲۴}$$

لمحہ $t = 0$ پر ابتدائی معلومات $r = r_0$ اور $\dot{r} = 0$ سے C_1 کی قیمت تعین ہو گی۔

$$C_1 = v_0^2 - \frac{2GM}{r_0}$$

اس طرح مساوات ۲۴ کو ترتیب دینے کے بعد درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\dot{r}^2 = v_0^2\left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right) + 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \tag{۲۵}$$

مساوات ۲۱ سے مساوات ۲۵ حاصل کرنے میں ہم نے r کی دو درجی تفرقی مساوات سے r کی ایک درجی تفرقی مساوات حاصل کی۔ ہمیں اب θ کی روپ میں r کو لکھنا باقی ہے لہٰذا ہم θ کو دوبارہ مساوات میں لاتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر مساوات ۲۵ کے دونوں اطراف کو مساوات $r^2\dot{\theta} = r_0 v_0$ (مساوات ۱۹) کے مطابقتی اطراف سے تقسیم کر کے حقیقت $\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = \frac{\mathrm{d}r/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}$ بروئے کار لاتے ہوئے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{1}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2GM}{r_0^2 v_0^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \tag{۲۶}$$

$$= \frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2} + 2h\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \qquad h = \frac{GM}{r_0^2 v_0^2} \tag{۲۷}$$

اس کی مزید سادہ صورت حاصل کرنے کی خاطر ہم درج ذیل پر کرتے ہیں۔

$$u = \frac{1}{r}, \quad u_0 = \frac{1}{r_0}, \quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}, \quad \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = \frac{1}{r^4}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$$

یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta}\right)^2 = u_0^2 - u^2 + 2hu - 2hu_0 = (u_0 - h)^2 - (u - h)^2 \tag{۲۸}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = \mp\sqrt{(u_0 - h)^2 - (u - h)^2} \tag{۲۹}$$

ہمیں کس علامت کا انتخاب کرنا ہو گا؟ ہم جانتے ہیں کہ $\dot{\theta} = \frac{r_0 v_0}{r^2}$ مثبت ہے۔ ساتھ ہی $t = 0$ پر r کم سے کم قیمت سے شروع ہوتا ہے لہٰذا یہ یکدم گھٹ نہیں سکتا ہے، اور ابتدائی مثبت لمحات میں $\dot{r} \geq 0$ ہو گا لہٰذا

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} \leq 0 \quad \text{اور} \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} \geq 0$$

ہو گا۔ مساوات ۲۹ میں منفی علامت درست ہو گی۔ یہ جاننے کے بعد ہم مساوات ۲۹ کو ترتیب دے کر θ کے لحاظ سے دونوں اطراف اک تکمل لیتے ہیں۔

$$\frac{-1}{\sqrt{(u_0 - h)^2 - (u - h)^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\theta} = 1$$
$$\cos^{-1}\left(\frac{u - h}{u_0 - h}\right) = \theta + C_2 \tag{۳۰}$$

چونکہ $\theta = 0$ پر $u = u_0$ ہو گا اور $\cos^{-1}(1) = 0$ ہوتا ہے لہٰذا C_2 صفر ہو گا۔ یوں

$$\frac{u - h}{u_0 - h} = \cos\theta \tag{۳۱}$$

اور

$$\frac{1}{r} = u = h + (u_0 - h)\cos\theta \tag{۳۲}$$

ہو گا جس کو چند الجبرائی اقدام کے بعد

$$r = \frac{(1+e)r_0}{1+e\cos\theta} \tag{۳۳}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$e = \frac{1}{r_0 h} - 1 = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1 \tag{۳۴}$$

ہوں گے۔ مساوات ۳۳ اور مساوات ۳۴ مل کر کہتے ہیں کہ سیارے کی راہ مخروطی ہو گی جس کے ایک ماسکہ پر سورج ہو گا اور جس کی سنک $e = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1$ ہو گی۔ یہ قانون کپلر اول کی جدید مساوات ہے۔

کپلر کا تیسرا قانون (قانون وقت اور فاصلہ)

ایک سیارہ جتنے وقت T میں اپنے سورج کے گرد ایک چکر کاٹتا ہے، اس کو سیارہ کا **دوری عرصہ**[۲۶] کہتے ہیں۔ کپلر کا تیسرا قانون کہتا ہے کہ T اور سیارے کے مدار کے نصف محور اکبر a کے بیچ درج ذیل تعلق پایا جاتا ہے۔

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \tag{۳۵}$$

چونکہ کسی بھی شمسی نظام کے اندر اس مساوات کا دایاں ہاتھ ایک مستقل ہو گا لہٰذا اس نظام میں تمام سیاروں کے لئے T^2 اور a^3 کا تناسب یکساں ہو گا۔

کپلر کا تیسرا قانون ہمیں ہمارے نظام شمسی کی جسامت کی معلومات حاصل کرنے کا موقع دیتا ہے۔ ہم ہر ایک سیارے کے نصف محور اکبر کو فلکیاتی اکائیوں میں لکھ سکتے ہیں۔ زمین کے نصف محور اکبر کی لمبائی فلکیاتی اکائی کہلاتی ہے۔ ہم کسی بھی لمحہ تمام سیاروں کے بیچ فاصلوں کو بھی فلکیاتی اکائیوں میں لکھ سکتے ہیں۔ اب آخری کام، ان تمام فاصلوں میں کسی ایک کی لمبائی، کلومیٹروں میں معلوم کرنا رہ گیا ہے۔ زہرہ سے ٹکرانے کے بعد ریڈار کی واپس پلٹی موجوں سے ہم زمین اور زہرہ کے بیچ فاصلہ ناپ سکتے ہیں۔ اس قسم کے تجربات سے ہم اب جانتے ہیں کہ ایک فلکیاتی اکائی 149 597 870 km کے برابر ہے۔

ہم سیارے کے ترخیمی مدار میں گھیرے گئے رقبہ کے دو مختلف کلیات کو ملا کر کپلر کا تیسرا قانون اخذ کرتے ہیں:

$$\text{رقبہ} = \pi ab \qquad \text{کلیہ 1}$$

$$\text{رقبہ} = \int_0^T \mathrm{d}S \qquad \text{کلیہ 2}$$

$$= \int_0^T \frac{1}{2} r_0 v_0 \,\mathrm{d}t \qquad \text{مساوات ۲۰}$$

$$= \frac{1}{2} T r_0 v_0$$

---

[۲۶] orbitalperiod

ان دو مساوات کو ایک دوسرے کے مساوی رکھتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

ترخیم کے لئے $b = a\sqrt{1-e^2}$ ہوتا ہے

$$T = \frac{2\pi ab}{r_0 v_0} = \frac{2\pi a^2}{r_0 v_0}\sqrt{1-e^2} \qquad (۳۶)$$

ہمیں اب a اور e کو r_0 ، v_0 ، G اور M کی روپ میں لکھنا ہے۔ مساوات ۳۴ ہمیں e دیتی ہے جبکہ مساوات ۳۳ میں θ کو π کے برابر پر کرنے سے

$$r_{\text{بلند تر}} = r_0\frac{1+e}{1-e}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا a کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$2a = r_0 + r_{\text{بلند تر}} = \frac{2r_0}{1-e} = \frac{2r_0 GM}{2GM - r_0 v_0^2} \qquad (۳۷)$$

مساوات ۳۶ کے دونوں اطراف کا مربع لے کر اس میں مساوات ۳۴ اور مساوات ۳۷ کے نتائج پر کرنے سے کپلر کا تیسرا قانون حاصل ہو گا (سوال ۱۴)۔

مدار

اگرچہ کپلر نے یہ قوانین تجرباتی طور پر دریافت کیے، قوانین نیوٹن سے قوانین کپلر کے حصول کے بعد ہم جانتے ہیں کہ یہ قوانین ہر اس جسم پر لاگو ہوں گے جس پر بالعکس مربع قانون کے تحت قوت لاگو ہو۔ یہ سورج کے گرد ہالی دم دار ستارہ اور آئکارس سیارچہ کی مدار اور زمین کے گرد چاند کے مدار پر لاگو ہوں گے۔ اسی طرح یہ چاند کے گرد اپالو 8 کے خلائی جہاز کے مدار پر بھی لاگو ہوتے ہیں۔ ایٹم کے مرکزہ پر مارے گئے بار بردار ذرات قوانین کپلر کو مطمئن کرتے ہوئے قطع زائد راہوں پر فشاں ہوتے ہیں۔

جدول ۱.۱۲ میں نظام شمسی کے سیاروں کے مدار کی معلومات دی گئی ہے۔ مصنوعی سیاروں کے حاصل مواد سے ہم سمندروں میں پانی کی سطح میں فرق جان سکے اور بحر الکاہل میں دور ترین جزیروں کا درست مقام معلوم کر سکے۔ اس مواد سے ہمیں یہ بھی معلوم ہوا کہ سورج اور چاند کی قوت کشش زمین کے گرد مصنوعی سیاروں کے مدار پر اثر انداز ہوں گے اور شمسی اخراج اتنا دباو پیدا کرتا ہے کہ مدار کی شکل تبدیل ہو جائے۔

جدول ۲.۱۲ اور جدول ۳.۱۲ میں مزید مواد پیش کیا گیا ہے۔

سوالات

سوال ۱: سکائے لیب 4 کا نصف محور اکبر $a = 6808\ \text{km}$ ہے۔ کپلر کے تیسرے قانون میں زمین کی کمیت کو M لیتے ہوئے دوری عرصہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔ اس کا حساب لگائیں۔ جدول ۲.۱۲ میں دی گئی قیمت کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۲: حضیض شمسی پر سورج سے زمین کا فاصلہ تقریباً $149\,577\,000\ \text{km}$ ہوتا ہے اور سورج کے گرد زمین کے مدار کی سنک 0.0167 ہے۔ حضیض شمس پر زمین کی رفتار v_0 تلاش کریں (مساوات ۱۵ استعمال کریں)۔

سوال ۳: روس نے جولائی ۱۹۶۵ میں پروٹان 1، مصنوعی سیارہ مدار میں چھوڑا جس کی کمیت (چھوڑتے وقت) $12\,200\ \text{kg}$ ، بلندی حضیض $183\ \text{km}$ ، بلندی اوج $589\ \text{km}$ اور دوری عرصہ 92.25 منٹ تھا۔ زمین کی کمیت اور تجاذبی مستقل کی قیمتیں استعمال کر کے مساوات ۳۵ سے نصف محور اکبر a تلاش کریں۔ اس کا موازنہ اس عدد سے کریں جو حضیض اور اوج کے مجموعہ کے ساتھ زمین کا قطر جمع کرنے سے حاصل ہو گا۔

جدول ۱.۱۲: شمسی سیاروں کے a ، e اور T کی قیمتیں۔

سیارہ	نصف محور $a^{\dagger}$	سنک e	دوری عرصہ T
عطارہ	57.95	0.2056	87.967دن
زھرہ	108.11	0.0068	224.701دن
زمین	149.57	0.0167	365.256دن
مریخ	227.84	0.0934	1.8808سال
مشتری	778.14	0.0484	11.8613سال
زحل	1427.0	0.0543	29.4568سال
یورانس	2870.3	0.0460	84.0081سال
نیپچون	4499.9	0.0082	164.784سال
پلوٹو	5909	0.2481	248.35سال

† ملین کلومیٹر (10^6 km)

جدول ۲.۱۲: زمین کے گرد مصنوعی سیاروں کی معلومات

نام	پرواز	خلائی زندگی	کمیت	دوری عرصہ ††	حضیض †	اوج †	نصف محور اکبر †	سنک
سپٹنک 1	اکتوبر 1957	57.6دن	83.6	96.2	215	939	6955	0.052
ونگارڈ 1	مارچ 1958	300سال	1.47	138.5	649	4340	8872	0.208
سنکام 3	اگست 1964	$> 10^6$ سال	39	1436.2	35718	35903	42189	0.002
سکائے لیب 4	نومبر 1973	84.06دن	13980	93.11	422	437	6808	0.001
ٹائرس 11	اکتوبر 1978	500سال	734	102.12	850	866	7236	0.001
گوس 4	ستمبر 1980	$> 10^6$ سال	627	1436.2	35776	35800	42166	0.0003
انٹل سیٹ 5	دسمبر 1980	$> 10^6$ سال	1928	1417.67	35143	35707	41803	0.007

† کلومیٹر

†† منٹ

جدول ۳.۱۲: اعدادی مواد

تجاذبی مستقل	$6.6720 \times 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$
کمیت شمس	1.99×10^{30} kg
کمیت زمین	5.975×10^{24} kg
استوائی رداس زمین	6378.533 km
قطبی رداس زمین	6356.912 km
زمین کا ہم دوری عرصہ	1436.1 منٹ
زمین کا سورج کے گرد دوری عرصہ	365.256 دن (ایک سال)

سوال ۴: (ا) وائکنگ 1 مصنوعی سیارہ، جس کا دوری عرصہ 1639 منٹ تھا، نے اگست 1975 تا جون 1976 مریخ کا جائزہ کیا۔ مریخ کی کمیت 6.418×10^{23} kg لیتے ہوئے وائکنگ 1 کا نصف محور اکبر تلاش کریں۔ (ب) مریخ کی سطح سے وائکنگ 1 کا کم سے کم فاصلہ 1499 km اور زیادہ سے زیادہ فاصلہ 35 800 km تھا۔ ان حقائق اور جزو-ا میں حاصل نتائج کو استعمال کرتے ہوئے مریخ کے اوسط قطر کی اندازاً قیمت معلوم کریں۔

سوال ۵: وائکنگ 2 مصنوعی سیارہ نے ستمبر 1975 تا اگست 1976 مریخ کا جائزہ کیا۔ اس کے نصف محور اکبر 22 030 km تھا۔ اس کا دوری عرصہ دریافت کریں۔

سوال ۶: ہم عصر مدار

زمین کی استوائی مستوی میں کئی مصنوعی سیاروں کے مدار تقریباً دائری ہے اور ان کا دوری عرصہ عین ایک دن کے برابر ہے۔ یوں یہ بلندی پر رہتے ہوئے سطح زمین کے اوپر ساکن نظر آتے ہیں۔ ایسے مدار کو **ہم عصر مدار**[۲۷] کہتے ہیں۔

ا. ہم عصر مصنوعی سیارے کا نصف محور اکبر تقریباً کتنا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ب. زمین کی سطح سے ہم عصر مدار کتنی بلندی پر ہو گا؟

ج. جدول ۱۲.۲ میں دیے گئے مصنوعی سیاروں میں کس کا مدار تقریباً ہم عصر ہے؟

سوال ۷: مریخ کی کمیت 6.418×10^{23} kg ہے جبکہ مریخ کا ایک دن 1477.4 منٹ ہے۔ مریخ کے گرد مدار میں ایک مصنوعی سیارہ جس کا دوری عرصہ مریخی دن کے برابر ہو، سطح مریخ سے کتنی بلندی پر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۸: زمین کے گرد چاند کا دوری عرصہ $2.360\,55 \times 10^6$ سیکنڈ ہے۔ چاند کتنا دور ہے؟

سوال ۹: زمین کے گرد ایک مصنوعی سیارہ دائری مدار میں حرکت کرتا ہے۔ مصنوعی سیارے کی رفتار کو مدار کے رداس کا تفاعل لکھیں۔

سوال ۱۰: نظام شمسی میں سیاروں کا $\frac{T^2}{a^3}$ کتنا ہو گا؟ زمین کے گرد مصنوعی سیاروں کے لئے کتنا ہو گا؟ چاند کے گرد مصنوعی سیاروں کے لئے یہ کتنا ہو گا؟ (چاند کی کمیت 7.354×10^{22} kg ہے۔)

بغیر کیلکولیٹر استعمال کئے قلم و کاغذ سے حل کریں

سوال ۱۱: مساوات ۱۵ میں v_0 کی کس قیمت کے لئے مساوات ۱۶ کا مدار دائری ہو گا؟ ترخیمی ہو گا؟ قطع مکافی ہو گا؟ قطع زائد ہو گا؟

سوال ۱۲: دکھائیں کہ دائری مدار میں سیارہ یکساں رفتار سے حرکت کرتا ہے۔ (اشارہ: یہ قوانین کپلر کی بدولت ہو گا۔)

سوال ۱۳: فرض کریں ایک مستوی میں متحرک ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ ہے اور یہ سمتیہ $\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}$ کی شرح سے رقبہ واضح کرتا ہے۔ محدد متعارف کئے بغیر اور مطلوبہ تفرقات کی موجودگی تصور کرتے ہوئے، بڑھوتری اور حد پر مبنی درج ذیل مساوات کی جیومیٹریائی جواز پیش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}|$$

سوال ۱۴: کپلر کے تیسرے قانون کا اشتقاق پورا کریں (مساوات ۳۶ کے بعد حصہ۔)

---

[۲۷] geosynchronousorbit,geostationaryorbit

سوال ۱۵: کسی ستارہ کے گرد دو سیارے دائری مدار میں طواف کرتے ہیں۔ سیارہ A ستارے کے قریب ہے جبکہ سیارہ B ستارہ سے زیادہ فاصلہ پر ہے۔ فرض کریں لمحہ t پر ان کے مقام بالترتیب

$$\boldsymbol{r}_A(t) = 2\cos(2\pi t)\boldsymbol{i} + 2\sin(2\pi t)\boldsymbol{j}$$
$$\boldsymbol{r}_B(t) = 3\cos(\pi t)\boldsymbol{i} + 3\sin(\pi t)\boldsymbol{j}$$

ہیں جہاں ستارہ کا مقام مبدا ہے اور فاصلوں کو فلکیاتی اکائیوں میں ناپا گیا ہے۔ (دھیان رہے کہ سیارہ A کی رفتار سیارہ B سے زیادہ ہے۔)

سیارہ A پر رہائش پذیر لوگوں کا خیال ہے کہ ان کا سیارہ، ان کے شمسی نظام کا مرکز ہے۔

ا. سیارہ A کو نئی محددی نظام کا مبدا تصور کرتے ہوئے سیارہ B کے مقام کی مقدار معلوم مساوات تلاش کریں۔ اپنا جواب $\cos(\pi t)$ اور $\sin(\pi t)$ کی صورت میں لکھیں۔

ب. سیارہ A کو مبدا تصور کرتے ہوئے سیارہ B کی راہ ترسیم کریں۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ان لوگوں کو سیاروں کی حرکت سمجھنے میں کتنی دشواری ہو گی۔ کپلر سے پہلے یہی حال ہمارا تھا۔

سوال ۱۶: کپلر نے دریافت کیا کہ سورج کے گرد زمین ترخیمی راہ پر طواف کرتی ہے اور سورج اس کے ایک ماسکہ پر پایا جاتا ہے۔ سورج کے مرکز سے زمین کے مرکز تک لمحہ t پر تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}(t)$ لیں۔ زمین کے جنوبی قطب سے شمالی قطب تک سمتیہ $\boldsymbol{w}$ لیں۔ ہم جانتے ہیں کہ $\boldsymbol{w}$ مستقل ہے اور ترخیم کے مستوی کو عمودی نہیں ہے (زمین کا محور جھکا ہے)۔ سمتیات $\boldsymbol{w}$ اور $\boldsymbol{r}(t)$ کے روپ میں (ا) حضیض شمسی، (ب) اوج شمسی، (ج) اعتدالین (جب دن اور رات ایک دوسرے کے برابر ہوں)، (د) لمبا ترین دن (گرم ترین دن)، (ہ) چھوٹا ترین دن (سرد ترین دن) کے ریاضی معنی پیش کریں۔

نلکی محددی نظام

سوال ۱۷: نلکی محدد میں مقام اور حرکت کے اکائی سمتیات۔

فضا میں متحرک ذرے کا مقام نلکی محدد میں لکھتے ہوئے ہم

$$\boldsymbol{u}_r = \cos(\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{u}_\theta = -(\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta)\boldsymbol{j}$$

اور $\boldsymbol{k}$ اکائی سمتیات استعمال کرتے ہیں۔ یوں متحرک ذرے کا تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r} = r\boldsymbol{u}_r + z\boldsymbol{k}$ ہو گا جہاں r مبدا سے ذرے کا مثبت قطبی فاصلہ ہے۔

ا. دکھائیں کہ $\boldsymbol{u}_r$ ، $\boldsymbol{u}_\theta$ اور $\boldsymbol{k}$ ، اسی ترتیب میں، اکائی سمتیات کا دایاں ہاتھ چوکھٹ دیتے ہیں۔

ب. درج ذیل دکھائیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_r}{\mathrm{d}\theta} = \boldsymbol{u}_\theta, \quad \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_\theta}{\mathrm{d}\theta} = -\boldsymbol{u}_r$$

ج. یہ فرض کرتے ہوئے کہ t کے لحاظ سے درکار تفرقات موجود ہیں، $\boldsymbol{r}$ ، $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ اور $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}$ کو $\boldsymbol{u}_r$ ، $\boldsymbol{u}_\theta$ ، $\boldsymbol{k}$ ، $\dot{r}$ اور $\dot{\theta}$ کی صورت میں لکھیں۔ (نقطہ t کے لحاظ سے تفرق کو ظاہر کرتا ہے، لہٰذا $\dot{\boldsymbol{r}}$ سے مراد $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ اور $\ddot{\boldsymbol{r}}$ سے مراد $\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$ ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔) حصہ ۱۲.۵ میں ان کلیات کو اخذ کیا گیا ہے اور ساتھ ہی ان سمتیات کو فلکیاتی سیاروں کی حرکت بیان کرنے کے لئے استعمال کیا گیا ہے۔

سوال۱۸: نلکی محدد میں لمبائی قوس

ا. دکھائیں کہ $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ کو نلکی محدد میں بیان کرنے سے $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}z^2$ حاصل ہوتا ہے۔

ب. ایک ڈبے کے کناروں اور وتر کی صورت میں جزو-اکے نتیجہ کی تشریح کریں۔اس ڈبہ کا خاکہ بنائیں۔

ج. منحنی $r = e^\theta,\ z = e^\theta,\ 0 \le \theta \le \ln 8$ کی لمبائی جزو-اکے نتیجہ کی مدد سے حاصل کریں۔

کروی محددی نظام

سوال۱۹: مقام اور رفتار کے لئے مستعمل کروی محدد کے اکائی سمتیات

فضا میں نقطہ P کے کروی محددی محور r ، θ اور ϕ میں کسی دو کو مستقل رکھتے ہوئے تیسرے کو بڑھنے دیں۔ جس رخ P بڑھتا ہے اس رخ کا اکائی سمتیہ $\boldsymbol{u}$ لیں جس کے ساتھ مطابقتی زیر نوشت منسلک ہو۔ایسے تین اکائی سمتیات $\boldsymbol{u}_r$ ، $\boldsymbol{u}_\theta$ اور $\boldsymbol{u}_\phi$ ہوں گے۔

ا. $\boldsymbol{u}_r$ ، $\boldsymbol{u}_\theta$ اور $\boldsymbol{u}_\phi$ کو $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ اور $\boldsymbol{k}$ کی صورت میں لکھیں۔

ب. دکھائیں کہ $\boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_\theta = 0$ ہوگا۔

ج. دکھائیں کہ $\boldsymbol{u}_\theta = \boldsymbol{u}_r \times \boldsymbol{u}_\theta$ ہوگا۔

د. دکھائیں کہ $\boldsymbol{u}_r$ ، $\boldsymbol{u}_\theta$ اور $\boldsymbol{u}_\phi$ ،اسی ترتیب میں، آپس میں عمودی سمتیات کا دایاں ہاتھ چوکھٹ دیتے ہیں۔

سوال۲۰: کروی محدد میں لمبائی قوس

ا. دکھائیں کہ $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ کو کروی محدد میں بیان کرنے سے $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\,\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\phi^2$ حاصل ہوتا ہے۔

ب. ٹھوس کرہ سے کاٹے گئے ڈبے کے کناروں اور وتر کی صورت میں جزو-اکے نتیجہ کی تشریح کریں۔اس ڈبہ کا خاکہ بنائیں۔

ج. منحنی $r = 2e^\theta,\ \theta = \frac{\pi}{6},\ 0 \le \phi \le \ln 8$ کی لمبائی جزو-امیں حاصل نتیجہ کی مدد سے حاصل کریں۔

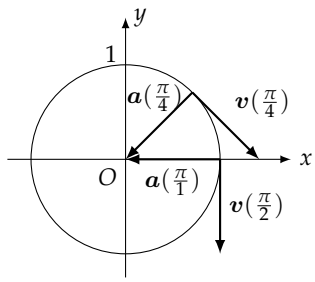
جوابات

حصہ ۱۲.۱ صفحہ ۱۲۲۵

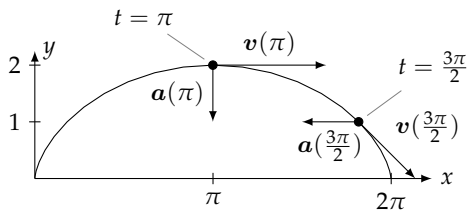
۱) $y = x^2 - 2x,\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{j}$

۳) $y = \frac{2}{9}x^2,\ \boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{i} + 8\boldsymbol{j}$

۵) $t = \frac{\pi}{4} : \boldsymbol{v} = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j};\ t = \frac{\pi}{2} : \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i}$



۷) $t = \pi : \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{j};\ t = \frac{3\pi}{2} : \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{i}$



۹) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{j};$ رفتار 3؛ رخ $\frac{1}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{1}) = 3(\frac{1}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k})$

۱۱) $\boldsymbol{v} = (-2\sin t)\boldsymbol{i} + (3\cos t)\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{a} = (-2\cos t)\boldsymbol{i} - (3\sin t)\boldsymbol{j};$ رفتار $2\sqrt{5};$ رخ $\frac{-1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{v}(\pi/2) = 2\sqrt{5}[-\frac{1}{\sqrt{5}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\boldsymbol{k}]$

۱۳) $\boldsymbol{v} = (\frac{2}{t+1})\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{a} = \frac{-2}{(t+1)^2}\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k};$ رفتار $\sqrt{6};$ رخ $\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k};\ \boldsymbol{v}(1) = \sqrt{6}(\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k})$

۱۵) $\frac{\pi}{2}$

۱۷) $\frac{\pi}{2}$

۱۹) $t = 0,\ \pi,\ 2\pi$

۲۱) $\frac{1}{4}\boldsymbol{i} + 7\boldsymbol{j} + \frac{3}{2}\boldsymbol{k}$

۲۳) $\frac{\pi + 2\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

۲۵) $(\ln 4)\boldsymbol{i} + (\ln 4)\boldsymbol{j} + (\ln 2)\boldsymbol{k}$

۲۷) $\boldsymbol{r}(t) = (\frac{-t^2}{2} + 1)\boldsymbol{i} + (\frac{-t^2}{2} + 2)\boldsymbol{j} + (\frac{-t^2}{2} + 3)\boldsymbol{k}$

۲۹) $\boldsymbol{r}(t) = ((t+1)^{3/2} - 1)\boldsymbol{i} + (-e^{-t} + 1)\boldsymbol{j} + (\ln(t+1) + 1)\boldsymbol{k}$

۳۱) $\boldsymbol{r}(t) = 8t\boldsymbol{i} + 8t\boldsymbol{j} + (-16t^2 + 100)\boldsymbol{k}$

۳۳) $x = t,\ y = -1,\ z = 1 + t$

۳۵) $x = at,\ y = a,\ z = 2\pi b + bt$

۳۷) ا)(1) مستقل رفتار 1 ؛(2) جی ہاں (3) گھڑی کے مخالف رخ (4) جی ہاں

ب)(1) مستقل رفتار 2 (2) جی ہاں (3) گھڑی کے مخالف رخ (4) جی ہاں

ج)(1) مستقل رفتار 1 (2) جی ہاں (3) گھڑی کے مخالف رخ (4) یہ $(1, 0)$ کی بجائے $(0, -1)$ سے ابتدا کرتا ہے

د)(1) مستقل رفتار 1 (2) جی ہاں (3) گھڑی کے رخ (4) جی ہاں

ہ)(1) متغیر رفتار (2) نہیں (3) گھڑی کے مخالف رخ (4) جی ہاں

۳۹) $\boldsymbol{r}(t) = (\frac{3}{2}t^2 + \frac{6}{\sqrt{11}}t + 1)\boldsymbol{i} - (\frac{1}{2}t^2 +$

$\frac{2}{\sqrt{11}}t - 2)\boldsymbol{j} + (\frac{1}{2}t^2 + \frac{2}{\sqrt{11}}t + 3)\boldsymbol{k} = (\frac{1}{2}t^2 + \frac{2t}{\sqrt{11}})(3\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) + (\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k})$

۴۱) $\boldsymbol{v}(t) = 2\sqrt{5}\boldsymbol{i} + \sqrt{5}\boldsymbol{j}$

۴۳) زیادہ سے زیادہ $|\boldsymbol{v}| = 3$، کم سے کم $|\boldsymbol{v}| = 2$، زیادہ سے زیادہ $|\boldsymbol{a}| = 3$، کم سے کم $|\boldsymbol{a}| = 2$

حصہ ۱۲.۲ صفحہ ۱۲۳۹

۱) $50\,\mathrm{s}$

۳) (ا) $72.2\,\mathrm{s}$، (ب) $25\,510\,\mathrm{m}$؛ (ج) $4020\,\mathrm{m}$، $6378\,\mathrm{m}$

۵) $t \approx 2.1257\,\mathrm{s}, \quad x \approx 20.14\,\mathrm{m}$

۷) $v_0 = 9.9\,\mathrm{m\,s^{-1}}, \alpha = 18.4^\circ, \alpha = 71.6^\circ$

۹) $174\,\mathrm{km\,h^{-1}}$

۱۱) گیند درخت کے پتوں کو چھوتا ہوا اسے پار کر پائے گا۔

۱۳) $24.87\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

۱۷) $141\,\%$

۲۱) 1.789 سیکنڈ، $19.92\,\mathrm{m}$

۲۵) $\boldsymbol{v}(t) = -gt\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{r}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\boldsymbol{k} + \boldsymbol{v}_0 t$

حصہ ۱۲.۳ صفحہ ۱۲۴۷

۱) $\boldsymbol{T} = (-\frac{2}{3}\sin t)\boldsymbol{i} + (\frac{2}{3}\cos t)\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{5}}{3}\boldsymbol{k}, \quad 3\pi$

۳) $\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t}}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{1+t}}\boldsymbol{k}, \quad \frac{52}{3}$

۵) $\boldsymbol{T} = -\cos t\boldsymbol{j} + \sin t\boldsymbol{k}, \quad \frac{3}{2}$

۷) $\boldsymbol{T} = (\frac{\cos t - t\sin t}{t+1})\boldsymbol{i} + (\frac{\sin t + t\cos t}{t+1})\boldsymbol{j} + (\frac{\sqrt{2}t^{1/2}}{t+1})\boldsymbol{k}, \quad \frac{\pi^2}{2} + \pi$

۹) $(0, 5, 24\pi)$

۱۱) $s(t) = 5t, \quad L = \frac{5\pi}{2}$

۱۳) $s(t) = \sqrt{3}e^t - \sqrt{3}, \quad L = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

۱۵) $\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$

۱۷) (ا) نکلی $x^2 + y^2 = 1$ اور مستوی $x + z = 1$

(ب) $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$

(ج) $L \approx 7.64$

حصہ ۱۲.۴ صفحہ ۱۲۶۳

۱) $\boldsymbol{T} = (\cos t)\boldsymbol{i} - (\sin t)\boldsymbol{j}, \boldsymbol{N} = (-\sin t)\boldsymbol{i} - (\cos t)\boldsymbol{j}, \kappa = \cos t$

۳) $\boldsymbol{T} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{i} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{j}, \boldsymbol{N} = \frac{-t}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{j}, \kappa = \frac{1}{2(\sqrt{1+t^2})^3}$

۵) $\boldsymbol{a} = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{T} + \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}\boldsymbol{N}$

۷) (ب) $\cos x$

۹) (ب) $\boldsymbol{N} = \frac{-2e^{2t}}{\sqrt{1+4e^{4t}}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{1+4e^{4t}}}\boldsymbol{j}$، (ج) $\boldsymbol{N} = -\frac{1}{2}(\sqrt{4-t^2}\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j})$

۱۱) $\boldsymbol{T} = \frac{3\cos t}{5}\boldsymbol{i} - \frac{3\sin t}{5}\boldsymbol{j} + \frac{4}{5}\boldsymbol{k}, \boldsymbol{N} = (-\sin t)\boldsymbol{i} - (\cos t)\boldsymbol{j}, \boldsymbol{B} = (\frac{4}{5}\cos t)\boldsymbol{i} - (\frac{4}{5}\sin t)\boldsymbol{j} - \frac{3}{5}\boldsymbol{k}, \kappa = \frac{3}{25}, \tau = -\frac{4}{25}$

۱۳) $\boldsymbol{T} = (\frac{\cos t - \sin t}{\sqrt{2}})\boldsymbol{i} + (\frac{\cos t + \sin t}{\sqrt{2}})\boldsymbol{j}, \boldsymbol{N} = (\frac{-\cos t - \sin t}{\sqrt{2}})\boldsymbol{i} + (\frac{-\sin t + \cos t}{\sqrt{2}})\boldsymbol{j}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{k}, \kappa = \frac{1}{e^t\sqrt{2}}, \tau = 0$

۱۵) $\boldsymbol{T} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\boldsymbol{j}, \boldsymbol{N} = \frac{\boldsymbol{i}}{\sqrt{t^2+1}} - \frac{t\boldsymbol{j}}{\sqrt{t^2+1}}, \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{k}, \kappa = \frac{1}{t(t^2+1)^{3/2}}, \tau = 0$

۱۷) $\boldsymbol{T} = (\operatorname{sech}\frac{t}{a})\boldsymbol{i} + (\tanh\frac{t}{a})\boldsymbol{j}, \boldsymbol{N} = (-\tanh\frac{t}{a})\boldsymbol{i} + (\operatorname{sech}\frac{t}{a})\boldsymbol{j}, \boldsymbol{B} = \boldsymbol{k}, \kappa = \frac{1}{a}\operatorname{sech}^2\frac{t}{a}, \tau = 0$

۱۹) $\boldsymbol{a} = |a|\,\boldsymbol{N}$

۲۱) (ا) $\boldsymbol{a}(1) = \frac{4}{3}\boldsymbol{T} + \frac{2\sqrt{5}}{3}\boldsymbol{N}$

۲۳) $\boldsymbol{a}(0) = 2\boldsymbol{N}$

۲۵) $\boldsymbol{r}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}, \boldsymbol{T}(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}, \boldsymbol{N}(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}, \boldsymbol{B}(\frac{\pi}{4}) = \boldsymbol{k};$
مستوی دائرہ انحنا $z = -1$ ہے؛ عمودی مستوی $-x + y = 0$ ہے؛ سمت کار مستوی $x + y = \sqrt{2}$ ہے۔

۲۷) جی ہاں۔ اگر گاڑی مڑتی سڑک $(\kappa \neq 0)$ پر چل رہی ہو تب $a_N = \kappa|\boldsymbol{v}|^2 \neq 0$ اور $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ ہوگا۔

۳۱) $|\boldsymbol{F}| = \kappa(m(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t})^2)$

۳۵) $\frac{1}{2b}$

۳۹) (ا) $b - a$، (ب) π

۴۵) $\kappa(x) = \frac{2}{(1+4x^2)^{3/2}}$

۴۷) $\kappa(x) = \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^{3/2}}$

۵۷) $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء: -1.8701، 0.7089، 1.0000؛ $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء: -1.6960، -2.0307، 0؛ رفتار 2.2361؛ $\boldsymbol{T}$ کے اجزاء: -0.8364، 0.3170، 0.4472؛ $\boldsymbol{N}$ کے اجزاء: -0.4143، -0.8998، -0.1369؛

$\boldsymbol{B}$ کے اجزاء: 0.3590 ، -0.2998 ، 0.8839 ؛ انحنا 0.5060 ؛ مروڑ 0.2813 ؛ اسراع کا مماسی جزو: 0.7746 ؛ اسراع کا عمودی جزو 2.5298 ؛

۵۹) $\boldsymbol{v}$ کے اجزاء: 2.0000 ، 0 ، 0.1629 ؛ $\boldsymbol{a}$ کے اجزاء: 0 ، -1.0000 ، 0.0086 ؛ رفتار 2.0066 ؛ $\boldsymbol{T}$ کے اجزاء: 0.9967 ، 0 ، 0.0812 ؛ $\boldsymbol{N}$ کے اجزاء: -0.0007 ، -1.0000 ، 0.0086 ؛ $\boldsymbol{B}$ کے اجزاء: 0.0812 ، -0.0086 ، -0.9967 ؛ انحنا 0.2484 ؛ مروڑ -0.0411 ؛ اسراع کا مماسی جزو: 0.0007 ؛ اسراع کا عمودی جزو 1.0000 ؛

حصہ ۱۲.۵ صفحہ ۱۲۷۸

۱) $T = 93.2\,\text{min}$

۳) $a = 6763\,\text{km}$

۵) $T = 1655\,\text{min}$

۷) $a = 20\,430\,\text{km}$

۹) $|v| = 1.9966 \times 10^7 r^{-1/2}\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$

۱۱) دائرہ: $v_0 = \sqrt{\frac{GM}{r_0}}$ ؛ ترخیم: $\sqrt{\frac{GM}{r_0}} < v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$ ؛ قطع مکافی: $v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$ ؛ قطع زائد: $v_0 > \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$

۱۵) (ا) $x(t) = 2 + (3 - 4\cos(\pi t))\cos(\pi t)$
$y(t) = (3 - 4\cos(\pi t))\sin(\pi t)$

۱۷) (ج) $\boldsymbol{v} = \dot{r}\boldsymbol{u}_r + r\dot{\theta}\boldsymbol{u}_\theta + \dot{z}\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\boldsymbol{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\boldsymbol{u}_\theta + \ddot{z}\boldsymbol{k}$

۱۹) (ا)
$$\boldsymbol{u}_r = \sin\theta\cos\phi\boldsymbol{i} + \sin\theta\sin\phi\boldsymbol{j} + \cos\theta\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{u}_\theta = \cos\theta\cos\phi\boldsymbol{i} + \cos\theta\sin\phi\boldsymbol{j} - \sin\theta\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{u}_\phi = -\sin\phi\boldsymbol{i} + \cos\phi\boldsymbol{j}$$

اشاریہ

binomial
series,1000
bound
leastupper,885
lower,890
upper,885
boundary,,3,12861287
point,1287
points,3
bounded,1286
fromabove,885
frombelow,890

cam,1090
cardioid,1089
catalyst,364
catenary,767
center,,46,3691015
ofcurvature,1254
centroid,,600,14431475
chainrule,235
chaostheory,178
charge
electron,615
circle,,461015
ofcurvature,1254
circulation,1529
closed,,3,1286,12871669
ball,1287
commutative,1153
non,1164
complexconjugate,1673

absolutevalue,,61675
acceleration,,2051218
adiabaticprocess,611
aerofoil,520
alaska,246
algebraic,637
algorithm,719
angioplasty,376
angleofinclination,18
annular,1562
aphelion,1105
area
defined,1573
Arganddiagrams,1674
argument,1675
aspectratio,14
astroid,1065
asymptote,331
asymptotes,1024
autocatalyst,364
average,,438478
axis,,491016
focal,1023
major,1020
minor,1020
negative-x,13
ofrevolution,546
positive-x,13

basic,1125
bifurcationvalue,892

crosssection,1188
curl,1554
equation,1607
curlvector,1606
curvature,1250
curve
integral,412
level,1288
simple,1554
cycloid,1058
cylinder,1188
cylindricalcoordinates,1203

dashpot,817
DeMoivre'stheorem,1678
decreasing,294
deltoid,1066
dependentvariable,28
derivative,,159167
directional,1360
first,196
firstorder,196
partial,,13101311
second,196
secondorder,196
descriminant,1382
difference
centeredquotient,233
differencequotient,159
Fermat's,233
differentiable,,1681325
differential,1330
equation,408
form,1545
total,1330
differentialequation
firstorder,769
linear,771
separable,770
solution,769
standardform,771
concave
down,309
up,309
conductivity,1640
conjugateexpression,96
connected,1539
conservative,1538
constant
arbitrary,398
gravitational,1271
rate,690
continuity
atapoint,1216
equation,1632
uniform,454
continuityequation,1631
continuous,,12161299
atapoint,1299
left,140
oninterval,145
right,140
continuousextension,144
contour
line,1289
convergence
interval,965
radius,965
convergent,,858881
absolute,951
conditional,952
converges,453
coordinate
axis,13
pair,13
x,13
y,13
coordinates
rectangular,1138
cosines
law,71
criticalpoint,281

extendedfunction,144
exterior,48
extrema,278

factorials,883
Fermat'sprinciple,353
Fibonaccinumbers,883
field
    vector,1523
finitesum,431
fixedpoint,,153898
flow
    integral,1529
flux,1530
    magnetic,1652
focal
    length,1016
focus,1016
fossilbone,700
fractals,574
freefall,205
frustum,578
function
    composite,34
    error,874
    greatestinteger,37
    hyperbolic,766
    identity,640
    integerceiling,38
    integerfloor,37
    leastinteger,37
    realvalued,1283
    sineintegral,874

Gammafunction,874
Gauss'law,1630
gene,208
generating
    curve,1188
    region,545
genetics,208
global,278

differentiation
    logarithmic,658
diffusivity
    constant,1640
direction
    cosines,1160
directrix,1016
discontinuity
    infinite,138
    jump,138
    oscillating,138
discriminant,,10481672
displacement,,203625
divergence,,15511623
divergent,,858881
domain,,281284
    natural,30
dominant,,208337
dominates,337

eccentricity,1035
electron,615
ellipse,1018
ellipsoid,1027
elliptic
    integral,1076
energy
    kinetic,615
energyfluxvector,1640
equation
    generallinear,22
    point-slope,21
    slope-intercept,22
error,1334
escapevelocity,782
Euler's
    constant,931
    formula,991
Euler'sformula,1675
Euler'smethod,785
even,35

positive,1669
integrable,453
integral
definite,453
double,1418
indefinite,,3981223
iterated,1421
line,1513
repeated,1421
triple,1459
integrand,398
integration
byparts,808
constantof,398
factor,772
tabular,814
variable,398
intercept
x,21
y,21
interest
continuouscompound,692
interior,,4,48,12861287
point,1287
points,4
intermediateform,701
intersection,9
interval,3
finite,3
infinite,3
inverse,638
involute,,10641643
irreducible,822
iteration
path,899

Jacobian,1499
determinant,1504
jerk,225
joule,,6041158

Lagrange
gradient
equation,1607
field,1523
graph,1288
dot,208
Green's
secondformula,1639
Greens'
firstformula,1639
gyration,1435
radius,1438

halfangleformulae,70
halflife,693
half-open,3
harmonic,1638
helium,270
hyperbola,1022
center,1023
hypocycloid,1065

IbnSahl'slaw,354
identityfunction,640
image,1499
pre,1499
imaginary
axis,1674
imaginarypart,1672
implicit
differentiation,249
increasing,294
increments,14
independentvariable,28
index
summation,448
inflation,692
initialpoint,1054
initialvalue
problem,408
instantaneous
rateofchange,82
integers,1669

mean,478
arithmetic,298
geometric,297
meanlife
nucleus,699
method
partialfractions,820
Picard's,898
minimax,1196
minimum
local,1382
minors,1700
Mobiusband,1580
molecule,832
moment
first,1438
polar,1439
second,1438

newton
lawofcooling,695
nonelementary,848
norm,452
normal,,2521132
number
inversions,1698
numbers
irrational,3
natural,,21669
rational,,31670
real,1
numerical
method,785
solution,785

octant,1138
first,1138
odd,35
onetoone,638
open,,3,12861287
ball,1287
operators,1412
multiplier,1398
multipliers'method,1398
law
conservationofmass,1639
Hooke's,607
parallelogram,1125
Leibniz's
formula,1007
lemniscate,1092
limit,,881,12151296
left-handed,121
right-handed,121
two-sided,121
limits,82
line
regression,1391
linear
equations,23
standardapproximation,369
linearapproximation
standard,1327
linearization,,3691327
Lissajousfigures,1077
logarithm
common,681

marginal
costofproduction,209
marginals,209
mass
center,593
centerof,590
mathematicalinduction,1657
matrix,1697
determinant,1698
element,1697
order,1697
square,1697
maxima,855
maximum
local,1382

point
boundary,1285
critical,1380
inflection,310
interior,,1381285
leftend,138
rightend,138
saddle,,13801382
pole,1079
potentialfunction,1538
pressure,616
product
cross,1163
property
intermediatevalue,147

quadrants,14
quadratic
approximation,983
curves,1043

radioactive,693
radioactivedecay,693
radius,,461015
ofcurvature,1254
range,,281284
rangefinder,263
rationaloperations,1670
real
axis,1674
line,1
valuedfunction,29
variables,29
realpart,1672
recessive,208
recursion
formula,883
reductionformulae,845
referenceframe,1246
removabel,138
revolution
surface,578

orbit
geostationary,1280
geosynchronous,1280
orbitalperiod,1277
orientable,1580
oriented,1580
orientedsurface,1580
origin,,131079
orthogonal,1154

Pappus
formula,1448
Pappus'sformula,1480
Pappus'stheorem,629
parabola,,17,491016
parameter,1054
interval,1054
parameterdomain,1590
parameters,1590
parametric
curve,204
equations,1054
representation,204
parametricform,1590
parametrization,1054
partialfractions,820
partition,450
path,1214
pathindependent,1538
perihelion,,11051272
period,68
periodic,67
permutation
index,1698
pH,682
piecewisesmooth,1578
piston,246
plane
xy,1138
planes
coordinate,1138

Maclaurin,977
nthterm,908
power,961
Taylor,976
sets,2
Simpson
rule,514
Simson'sone-thirdrule,1685
simulation,414
slope,17
smooth,,1068,12171571
curve,569
piecewise,1218
snowflake,253
solidofrevolution,545
solution
general,409
particular,409
speed,,204205
spherical
wedge,1485
sphericalcoordinates,1206
springconstant,607
stainlesssteel,614
standard
position,61
step
size,508
steps,508
Stokes
theorem,,16061608
streamlines,1570
subintervals,451
sum
lower,454
summation
lowerlimit,448
upperlimit,448
surface,,12881590
integral,1578
level,1290
Richterscale,681
Riemann
sum,452
root,147
rule
constantmultiple,187
Delesse's,628
differentialofconstant,185
power,186
product,190
quotient,193
reciprocal,201
sum,188

saddlepoint,1196
scalar,1124
functions,1214
product,1151
scalarmultiple,1124
search
binary,719
sequential,719
secant,80
sensitive,,208893
sensitivity,,201208
sequence,878
infinite,878
nondecreasing,885
nonincreasing,890
sub,884
tail,885
series
alternating,949
alternatingharmonic,949
center,961
coefficients,961
convergence,908
divergence,908
geometric,909
harmonic,923
infinite,907

binormal,1256
function,1214
length,1128
magnitude,1128
position,,11391214
product,1163
unit,1130
vector-valued
function,1214
velocity,1218
average,203
vertex,,491016
vertices,1023
voltage
peak,492
volume,1461

zero,147

surfaceintegral,1571

tangent,,821132
Taylor's
formula,985
terminalpoint,1054
terms,448
test
comparison,932
directcomparison,865
extrinsic,939
intrinsic,940
limitcomparison,865
theorem
meanvalue,289
perpendicularaxis,1439
Rolle's,287
sandwich,97
timeconstant,783
TNT,trinitrotoluene,380
topology,1617
torque,589
system,589
torsion,,12501257
torus,,557630
transcendental,637
treediagram,1341
two-sided,1580

unbounded,1286
union,9
unit
circle,60
unitcircle,16

variable
dependent,1284
dummy,457
independent,1284
input,1284
output,1284
vector,1123

آزادانہ گرنا،205

ابتدائی قیمت
مسئلہ،408
ابتدائی نقطہ،1054
اختتامی نقطہ،1054
ارتکاز
رداس،965
وقفہ،965
اساسی،1125
استمرار
نقطہ پر،1216
یکساں،454
استمراری،1216،1299
بائیں،140
دائیں،140
مساوات،1632
نقطہ پر،1299
وقفہ پر،145
استمراری توسیع،144
استمراری مساوات،1631
اسراع،205،1218
اشتراک،9
اصاغر،1700
اصول
فغما،353
اعداد
حقیقی،2
غیر ناطق،3
قدرتی،1669
مثبت عدد صحیح،1669
ناطق،3،1670
اعدادی
ترکیب،785
حل،785
اعداد ضربیہ،883
اگلن خاکے،1674
افراط زر،692
اکائی
دائرہ،60
اکائی دائرہ،16
الٹ،638
الجبرائی،637
الخوارزم
کمپیوٹر،719
انتہا،278
انجیو پلاسٹی،376
انحنا،1250
اندرسہ،557،630
اندرون،4،48،1286،1287
اندرونی
نقطہ،1287
اندرونی نقطے،4
اوج شمسی،1105
اوسط،438
حسابی،298
ہندسی،297
اوسط حیات
مرکزہ،699
اوسط قیمت،478
ایک ایک تفاعل،638
ایلاسکا،246

بار،615
بارودی مواد،380
برف
روئی،253
برقیہ
منفی،615
بڑھتا،294
بڑھوتری،14
بقائی،1538
بند،3،1286،1287،1669
گیند،1287
بہاؤ،1530
مقناطیسی،1652
بہاؤ حرسمتیہ،1640
بیرون،48

پرکھ
اندرونی،939،940
بلاواسطہ تقابلی،865

تقابل حد، 865
تقابلی، 932

تابع متغیر، 28
تابکار، 693
تابکاری تحلیل، 693
تخفیف
کلیات، 845
ناقابل، 822
تدویر، 1058
فلک، 1065
ترتیب، 878
ذیلی، 884
غیر بڑھتا، 890
لامتناہی، 878
نیچے سے محدود، 890
ترخیمی
مکمل، 1076
ترخیم، 1018
ترخیمی سطح، 1027
ترسیم، 1288
نقطہ، 208
ترکیب
پکاغ، 898
جزوی کسری، 820
ترکیب یولر، 785
تسلسل
ارتکاز، 908
انفراج، 908
بدلتا، 949
بدلتا ہارمونی، 949
ٹیلر، 976
ثنائی، 1000
جزو، 908
دم، 885
طاقتی، 961
غیر گھٹتا، 885
لامتناہی، 907
مکلارن، 977
ہارمونی، 923
ہندسی، 909
تعداد
تکعیس، 1698
تعلق
دار، 1539
تعین گر
سمتیہ، 1214
تفاعل
بڑا ترین عدد صحیح، 37
حقیقی قیمت، 1283
خلل، 874
سائن مکمل، 874
شناختی، 640
عددی صحیح چھت، 38
عددی صحیح زمین، 37
کم ترین عدد، 37
مرکب، 34
ہذلولی، 766
تفرق، 159، 167
این رتبی، 197
پہلا، 196
تین رتبی، 197
جزوی، 1310، 1311
دو رتبی، 196
دوسرا، 196
رتبہ اول، 196
رتبہ دوم، 196
رخی، 1360
قابل، 168، 1068
یک رتبی، 196
تفرقی
روپ، 1545
مساوات، 408
تفرقی مساوات
حل، 769
خطی، 771
قابل علیحدگی، 770
معیاری روپ، 771
یک رتبی، 769
تفریق، 1330

کل،1330
تفریقی
وسطی حاصل تقسیم،233
تقاطع،9
تکمل
اعادہ،1421
بارہا،1421
بالحصص،808
ترخیمی،1076
تہرا،1459
جدولی،814
جزو،772
دوہرا،1418
سطحی،1578
غیر بنیادی،848
غیر قطعی،398،1223
قابل،453
قطعی،453
کامستقل،398
لکیری،1513
متغیر،398
ہمراہ بہاؤ،1529
تکونی عدم مساوات،7
تلاش
ترتیبی،719
تناسب پہلو،14
توالی
راہ،899
کلیہ،883
توانائی
حرکی،615
تیزابیت،682

ٹکڑوں میں ہموار،1578
ٹیلر
کلیہ،985

ثمن،1138
پہلا،1138
ثنائی
تسلسل،1000
ثنائی تلاش،719

جاذب،817
جاول،604،1158
جذر،147
جزوی کسر،820
جسم طواف،545
جفت،35
جنیات،208
جوڑی دار تعلق،96
جھٹکا،225
جین،208

حل
عمومی،409
مخصوص،409
حد،82،881،1215،1296
بائیں ہاتھ،121
دائیں ہاتھ،121
دوطرفہ،121
حاشیہ،209
حاشیہ لاگت،210
حاشیہ لاگت پیداوار،209
حاصل تقسیم
تفریقی،159
حجریہ ہڈی،700
حجم،1461
حدبندی
بالائی،885
زیریں،890
کم سے کم بالائی،885
حرارت ناگزر عمل،611
حرکت
دواری،1435
حساس،208،893
حساسیت،201،208
حضیض شمس،1272
حضیض شمسی،1105
حقیقی
اعداد،1

خط، 1
قیمت تفاعل، 29
متغیرات، 29
محور، 1674
حقیقی جزو، 1672
حوالہ چھوکٹ، 1246

خط
ارتفاع، 1289
خاصیت
متوسط قیمت، 147
خانہ بندی، 450
خطی
مساوات، 23
معیاری تخمین، 369
خط بند
تفاعل، 1327
خط بندی، 369
خط رجعت، 1391
خطوط رو، 1570
خطی تخمین
معیاری، 1327
خفی
تفرق، 249
خلل، 1334
خیالی
محور، 1674
خیالی جزو، 1672

دائرہ، 46، 1015
انحنا، 1254
دائرہ کار، 28، 1284
قدرتی، 30
دائری بہاؤ، 1529
دباو، 616
چوٹی، 492
در پیچیدہ، 1643
در پیچیدہ، 1064
دلیل، 1675
دوار، 1435
رداس، 1438
دوچشمہ، 1092
دودرجی
تخمین، 983
منحنیات، 1043
دوری، 67
دوری عرصہ، 68، 1277
دوطرفہ، 1580
دولختی نقطہ، 892

راس، 49، 1016، 1023
راہ، 1214
راہ سے آزاد، 1538
ربڑی ہندسہ، 1617
ربعات، 14
رجعت
خط، 1391
رداس، 46، 1015
انحنا، 1254
دوار، 1438
رداس ارتکاز
صفر، 966
لامتناہی، 966
رفتار، 204، 205
رقبہ
تعریف، 1573
رکٹر پیمائش، 681
روک، 817
ریاضیاتی ترغیب، 1657
ریمان
مجموعہ، 452

زاویائی
رفتار، 1612
زاویہ میلان، 18
زنجیری قاعدہ، 235
زیادہ سے زیادہ
مقامی، 1382

سالمہ، 832
ستارہ نما، 1065
سٹوکس
مسئلہ، 1606، 1608

سرحد، 3، 1286، 1287
سرحدی
نقطہ، 1287
نقطے، 3
سطح، 1288، 1590
طواف، 578
سطحی تکمل، 1571
سعت، 28، 1284
سگما علامتی اظہار، 448
سلسلہ، 2
سمتی
تفاعل، 1214
ضرب، 1163
سمت بند، 1580
سمت بند سطح، 1580
سمتیہ، 1123
اساس، 1139
اکائی، 1130
تعین گر، 1139
دوہری عمودی، 1256
صفر، 1142
لمبائی، 1128
مقدار، 1128
سمتی رفتار، 1218
اوسط، 203
سمتی قیمت تفاعل، 1214
سمسن
ایک تہائی کا قاعدہ، 1685
قاعدہ، 514
سنک، 1035
سود در سود
مسلسل، 692
سیکنٹ، 80

شکل شجرہ، 1341
شناختی تفاعل، 640

صفر، 147
صلیبی
ضرب، 1163

ضرب
سمتی، 1163
صلیبی، 1163
غیر سمتی، 1151

طاقت
ہائیڈروجن، 682
طاق، 35
طاقتی تسلسل، 961
مرکز، 961
طواف
سطح، 578

عالمگیر، 278
عالمین، 1412
عدد صحیح، 1669
عددی سر، 961
عدم استمرار
ارتعاشی، 138
چھلانگ، 138
لامتناہی، 138
عکس، 1499
قبل، 1499
عمل انگیز، 364
خود، 364
عمودی، 252، 1132، 1154
تراش، 1188

غالب، 208، 337
غلبہ، 337
غیر بنیادی تکمل، 848
غیر تابع متغیر، 28
غیر سمتی، 1124
تفاعل، 1214
ضرب، 1151
مضرب، 1124
غیر محدود، 1286
غیر معین روپ، 701

فبونیکی اعداد، 883
فرمٹ تفریقی حاصل تقسیم، 233
فشار، 616

فلک تدویر، 1065
فولاد
بے زنگ، 614

قابل تبادل، 1153
نا، 1164
قابل تفرق، 1325
قابل سمت بند، 1580
قابل ہٹاو، 138
قاعدہ
بالعکس متناسب، 201
تفرق مستقل، 185
حاصل تقسیم، 193
حاصل ضرب، 190
دولس، 628
طاقت، 186
متوازی الاضلاع، 1125
مجموعہ، 188
مستقل مضرب، 187
قالب، 1697
رتبہ، 1697
رکن، 1697
مقطع، 1698
مکعب، 1697
قانون
بقا کمیت، 1639
ہک، 607
قانون انعطاف
ابن سھل، 354
قانون ٹھنڈک
نیوٹن، 695
قدم، 508
لمبائی، 508
قطع
ایکس، 21
وائے، 21
قطب، 1079
قطب نما، 1089
قطعی
تکمل، 453
قطع زائد، 1022
مرکز، 1023
قطع مکافی، 17، 49، 1016
قوت مروڑ، 589
نظام، 589

لساجس اشکال، 1077
لحاتی
شرح تبدیلی، 82
لوگارتھم
عام، 681
لوگارتھمی تفرق، 658
لیبنٹز
کلیہ، 1007
لیزم، 767
لیگرینج
ضارب، 1398
ضاربین کی ترکیب، 1398

ماسکہ، 1016، 1022
طول، 1016
ماورائی، 637
مبدا، 13، 1079
متغیر
تابع، 1284
خارجی، 1284
داخلی، 1284
غیر تابع، 1284
نقلی، 457
متقارب، 331، 1024
متکمل، 398
متناہی مجموعہ، 431
مثلثی، 1066
مجموعہ
ارکان، 448
زیریں، 454
مجموعی سلسلہ
اشاری، 448
بالائی حد، 448
زیریں حد، 448
محدد

ایکس، 13
مستطیل، 1138
وائے، 13
محددی جوڑی، 13
محددی محور، 13
محدود، 1286
اوپر سے، 885
محور، 49، 1016
اصغر، 1020
اکبر، 1020
طواف، 546
ماسکہ، 1023
مثبت ایکس، 13
منفی ایکس، 13
مخروط مقطوع، 578
مخفی قوہ تفاعل، 1538
مخلوط جوڑی دار، 1673
مدار
ہم عصر، 1280
مرتب اجتماع
اشاریہ، 1698
مرتکز، 858، 881
مشروط، 952
مطلق، 951
مرکز، 46، 1015
انحنا، 1254
کمیت، 593
وسطانی، 1443، 1475
مرکوز، 453
مروڑ، 1250، 1257
مساوات
ڈھلوان-قطع، 22
عمومی خطی، 22
نقطہ-ڈھلوان، 21
مستقل
اختیاری، 398
تجاذبی، 1271
شرحی، 690
مستقلہ اسپرنگ، 607
مستوی
ایکس وائے، 1138
محددی، 1138
مسئلہ
اوسط قیمت، 289
بیچ، 97
پاپس، 629
رول، 287
عمودی محور، 1439
مسئلہ ڈی موے ور، 1678
مطلق قیمت، 6، 1675
معیاری
مقام، 61
معیار، 452
معیار اثر
اول، 1438
دوم، 1438
قطبی، 1439
مغلوب، 208
مفرق، 1672
مقدار معلوم، 1054، 1590
ترسیم، 204
روپ، 204، 1214
روپ دینا، 1054
مساوات، 1054
وقفہ، 1054
مقدار معلوم روپ، 1590
مقدار معلوم کا دائرہ کار، 1590
مقررہ نقطہ، 153، 898
مقعر
اوپر، 309
نیچے، 309
مقیاس لچک، 607
مماس، 82، 157، 1132
ممیز، 1048، 1382
منحنی
تکمل، 412
حل، 412
سادہ، 1554
کمتر وقتی، 1059
یکساں وقتی، 1059
منفرج، 858، 881
موبیوس پٹی، 1580

موصلیت، 1640
میدان
ڈھلوان، 1523
سمتی، 1523
میکسما، 855

ناطق
عملیات، 1670
ناظمہ، 1016
نصف حیات، 693
نصف زاویہ
کلیات، 70
نصف کھلا، 3
نظریہ
ابتری، 178
نفاذ، 1530
نفوذیت
مستقل، 1640
نقطہ
اندرونی، 138، 1285
بائیں سر، 138
تصریف، 310
دائیں سر، 138
زین، 1380، 1382
سرحدی، 1285
فاصل، 1380
نقطہ زین، 1196
نقطہ فاصل، 281
نقل اتارنا، 414
نکلی، 1188
نکلی محدد، 1203

وسط، 369
وسطانی مرکز، 600
وسیع تفاعل، 144
وقتی مستقل، 783
وقفہ، 3
ذیلی، 451
لامتناہی، 3
متناہی، 3

پسٹن، 246
پھیلاؤ، 1623
پھیلاو، 1551
پیداکار
منحنی، 1188
پیداکار خطہ، 545
پیما
رکٹر، 681
فاصلہ، 263

چھلے دار، 1562

ڈھلوان، 17، 157
کلیہ، 1607

کروی
پچر، 1485
کروی محدد، 1206
کلیات
تخفیف، 845
کلیہ
پاپس، 1448، 1480
توالی، 883
کم زیادہ، 1196
کم سے کم
مقامی، 1382
کمیت، 1438
مرکز، 590
کوسائن
رخ، 1160
قاعدہ، 71
کھلا، 3، 1286، 1287
گیند، 1287
کیم، 1090

گاوس
کا قانون، 1630
گردش، 1554
کلیہ، 1607
گردشی سمتیہ، 1606
گریزی رفتار، 782
گرین
کلیہ اول، 1639

کلیہ دوم، 1639
گنج غیر ہموار منحنیات، 574
گھٹتا، 294
گیما تفاعل، 874

ہارمونی، 1638
ہم قد
سطح، 1290
منحنی، 1288
ہموار، 1068، 1217، 1571
ٹکڑوں میں، 1218
منحنی، 569
ہوائی پتر ا، 520
ہٹاو، 203، 625
ہیلیم، 270

یعقوبی، 1499
مقطع، 1504
یولر
کلیہ، 991، 1675
مستقل، 931