احصاء اور تحلیلی ہندسہ

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۹ اگست ۲۰۲۶

عنوان

۱ ابتدائی معلومات ۱
۱.۱ حقیقی اعداد اور حقیقی خط ۱
۱.۲ محدد، خطوط اور بڑھوتری ۱۳
۱.۳ تفاعل ۲۷
۱.۴ ترسیم کی منتقلی ۴۴
۱.۵ تکونیاتی تفاعل ۶۰

۲ حدود اور استمرار ۷۹
۲.۱ تبدیلی کی شرح اور حد ۷۹
۲.۲ حد تلاش کرنے کے قواعد ۹۳
۲.۳ مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف ۱۰۴
۲.۴ تصور حد کی توسیع ۱۲۱
۲.۵ استمرار ۱۳۸
۲.۶ مماسی خط ۱۵۴

۳ تفرق ۱۶۷
۳.۱ تفاعل کا تفرق ۱۶۷
۳.۲ قواعد تفرق ۱۸۵
۳.۳ تبدیلی کی شرح ۲۰۲
۳.۴ تکونیاتی تفاعل کا تفرق ۲۱۷
۳.۵ زنجیری قاعدہ ۲۳۵
۳.۶ خفی تفرق اور ناطق قوت نما ۲۴۹
۳.۷ دیگر شرح تبدیلی ۲۶۲

۴ تفرق کا استعمال ۲۷۵
۴.۱ تفاعل کی انتہائی قیمتیں ۲۷۵
۴.۲ مسئلہ اوسط قیمت ۲۸۷
۴.۳ مقامی انتہائی قیمتوں کی یک رتبی تفرقی پرکھ ۳۰۰

۴.۴ y' اور y'' کے ساتھ ترسیم ۳۰۸
۴.۵ $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء ۳۲۵
۴.۶ بہترین بنانا ۳۴۷
۴.۷ خط بندی اور تفرقات ۳۶۷
۴.۸ ترکیب نیوٹن ۳۸۷

دیباچہ ۲۷۴

میری پہلی کتاب کا دیباچہ ۲۷۴

۵ تکمل ۳۹۹
۵.۱ غیر قطعی تکملات ۳۹۹
۵.۲ تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی ۴۱۰
۵.۳ تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق ۴۲۳
۵.۴ اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ ۴۳۳
۵.۵ ریمان مجموعے اور قطعی تکملات ۴۴۹
۵.۶ خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ ۴۷۳
۵.۷ بنیادی مسئلہ ۴۸۸
۵.۸ قطعی تکمل میں بدل ۵۰۵
۵.۹ اعدادی تکمل ۵۱۰

۶ تکمل کا استعمال ۵۲۷
۶.۱ منحنیات کے بیچ رقبہ ۵۲۷
۶.۲ ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش ۵۴۰
۶.۳ اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا ۵۴۷
۶.۴ نلکی چھلے ۵۶۰
۶.۵ مستوی منحنیات کی لمبائیاں ۵۷۰
۶.۶ سطح طواف کا رقبہ ۵۸۰
۶.۷ معیار اثر اور مرکز کمیت ۵۹۰
۶.۸ کام ۶۰۶
۶.۹ فشار سیال اور قوت سیال ۶۱۸
۶.۱۰ بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال ۶۲۶

۷ ماورائی تفاعل ۶۳۹
۷.۱ الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات ۶۴۰
۷.۲ قدرتی لوگارتھم ۶۵۵
۷.۳ قوت نمائی تفاعل ۶۶۹
۷.۴ a^x اور $\log_a x$ ۶۸۱
۷.۵ افزائش اور تنزل ۶۹۱

۶۴ ۷.۶ قاعدہ لھوپیٹال ۷۰۳
۶۵ ۷.۷ اضافی شرح نمو ۷۱۶
۶۶ ۷.۸ الٹ تکونیاتی تفاعل ۷۲۵
۶۷ ۷.۹ الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل ۷۴۰
۶۸ ۷.۱۰ ہذلولی تفاعل ۷۵۴
۶۹ ۷.۱۱ یک رتبی تفرقی مساوات ۷۷۱
۷۰ ۷.۱۲ یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان ۷۸۸

۷۱ ۸ تکمل کے طریقے ۷۹۷
۷۲ ۸.۱ تکمل کے بنیادی کلیات ۷۹۷
۷۳ ۸.۲ تکمل بالحصص ۸۰۹
۷۴ ۸.۳ جزوی کسر ۸۲۲
۷۵ ۸.۴ تکونیاتی بدل ۸۳۵
۷۶ ۸.۵ جدول تکمل اور کمپیوٹر ۸۴۴
۷۷ ۸.۶ غیر مناسب تکمل ۸۵۸

۷۸ ۹ لامتناہی تسلسل ۸۷۹
۷۹ ۹.۱ اعداد کی ترتیب کی حد ۸۷۹
۸۰ ۹.۲ ترتیب کی حدیں تلاش کرنے کے مسئلے ۸۹۵
۸۱ ۹.۳ سوالات ۹۰۳
۸۲ ۹.۴ لامتناہی تسلسل ۹۰۸
۸۳ ۹.۵ غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پرکھ ۹۲۴
۸۴ ۹.۶ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ ۹۳۳
۸۵ ۹.۷ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ ۹۴۲
۸۶ ۹.۸ بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز ۹۵۱
۸۷ ۹.۹ طاقتی تسلسل ۹۶۳
۸۸ ۹.۱۰ ٹیلر اور مکلارن تسلسل ۹۷۸
۸۹ ۹.۱۱ ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ خلل کے اندازے ۹۸۶
۹۰ ۹.۱۲ طاقتی تسلسل کے استعمال ۱۰۰۲

۹۱ ۱۰ مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد ۱۰۱۹
۹۲ ۱۰.۱ مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں ۱۰۱۹
۹۳ ۱۰.۲ سنک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی ۱۰۳۹
۹۴ ۱۰.۳ دو درجی مساوات اور گھومنا ۱۰۴۷
۹۵ ۱۰.۴ مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول ۱۰۵۸
۹۶ ۱۰.۵ احصاء اور مقدار معلوم منحنیات ۱۰۷۱
۹۷ ۱۰.۶ قطبی محدد ۱۰۸۳
۹۸ ۱۰.۷ قطبی محدد میں ترسیم ۱۰۹۲

۹۹ ۱۰.۸ مخروط حصوں کے قطبی مساوات ۱۱۰۲
۱۰۰ ۱۰.۹ قطبی محدد میں تکمل ۱۱۱۵

۱۰۱ ۱۱ سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری ۱۱۲۷
۱۰۲ ۱۱.۱ مستوی میں سمتیات ۱۱۲۷
۱۰۳ ۱۱.۲ کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات ۱۱۴۱
۱۰۴ ۱۱.۳ ضرب نقطہ ۱۱۵۵
۱۰۵ ۱۱.۴ صلیبی ضرب ۱۱۶۷
۱۰۶ ۱۱.۵ فضا میں خطوط اور مستویات ۱۱۷۹
۱۰۷ ۱۱.۶ نلکی اور مربع سطحیں ۱۱۹۱
۱۰۸ ۱۱.۷ نلکی اور کروی محدد ۱۲۰۷

۱۰۹ ۱۲ سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت ۱۲۱۷
۱۱۰ ۱۲.۱ سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات ۱۲۱۷
۱۱۱ ۱۲.۲ گولا کی حرکت کی نمونہ کشی ۱۲۳۸
۱۱۲ ۱۲.۳ لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ۱۲۴۶
۱۱۳ ۱۲.۴ انحنا، مروڑ اور TNB چوکھٹ ۱۲۵۴
۱۱۴ ۱۲.۵ فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت ۱۲۷۴

۱۱۵ ۱۳ کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات ۱۲۸۷
۱۱۶ ۱۳.۱ کثیر متغیرات کے تفاعل ۱۲۸۷
۱۱۷ ۱۳.۲ حد اور استمرار ۱۳۰۰
۱۱۸ ۱۳.۳ جزوی تفرقات ۱۳۱۳
۱۱۹ ۱۳.۴ تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات ۱۳۲۹
۱۲۰ ۱۳.۵ زنجیری قاعدہ ۱۳۴۴
۱۲۱ ۱۳.۶ پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرق ۱۳۵۷
۱۲۲ ۱۳.۷ رخی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں ۱۳۶۳
۱۲۳ ۱۳.۸ انتہائی قیمتیں اور نقاط زین ۱۳۸۲
۱۲۴ ۱۳.۹ لیگرینج ضاربین ۱۳۹۸
۱۲۵ ۱۳.۱۰ کلیہ ٹیلر ۱۴۱۴

۱۲۶ ۱۴ تکمل بالکثرت ۱۴۲۱
۱۲۷ ۱۴.۱ دوہرا تکملات ۱۴۲۱
۱۲۸ ۱۴.۲ رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت ۱۴۳۹
۱۲۹ ۱۴.۳ دوہرا تکملات کا قطبی روپ ۱۴۵۳
۱۳۰ ۱۴.۴ کارتیسی محدد میں تہرا تکمل ۱۴۶۳
۱۳۱ ۱۴.۵ تعین بعد میں کمیت اور معیار اثر ۱۴۷۶
۱۳۲ ۱۴.۶ نلکی اور کروی محدد میں تہرا تکمل ۱۴۸۵
۱۳۳ ۱۴.۷ تکملات بالکثرت میں بدل ۱۵۰۳

۱۳۴ ۱۵ سمتی میدان میں تکمل ۱۵۱۷
۱۳۵ ۱۵.۱ لکیری تکمل ۱۵۱۷
۱۳۶ ۱۵.۲ سمتی میدان، کام، دائری بہاؤ، اور بہاؤ ۱۵۲۷
۱۳۷ ۱۵.۳ راہ سے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان ۱۵۴۲
۱۳۸ ۱۵.۴ مستوی میں مسئلہ گرین ۱۵۵۴
۱۳۹ ۱۵.۵ سطحی رقبہ اور سطحی تکملات ۱۵۷۴
۱۴۰ ۱۵.۶ مقدار معلوم سطحیں ۱۵۹۲
۱۴۱ ۱۵.۷ مسئلہ سٹوکس ۱۶۰۹
۱۴۲ ۱۵.۸ مسئلہ پھیلاؤ اور ایک مربوط نظریہ ۱۶۲۵

۱۴۳ ضمیمے ۱۶۵۸

۱۴۴ ا ریاضیاتی ترغیب ۱۶۵۹

۱۴۵ ب تحدیدی مسائل کے ثبوت ۱۶۶۵

۱۴۶ ج مخلوط اعداد ۱۶۷۱

۱۴۷ د سمسن کا ایک تہائی کا قاعدہ ۱۶۸۷

۱۴۸ ھ کوشی کا مسئلہ اوسط قیمت اور قاعدہ لھوپیٹال ے کا پائیدار روپ ۱۶۸۹

۱۴۹ و کثیر استعمال حدود ۱۶۹۳

۱۵۰ ز جزئیتی تقسیم کا قانون برائے سمتی ضرب ۱۶۹۵

۱۵۱ ح مقاطع اور کریمر کا قاعدہ ۱۶۹۹

۱۵۲ ط مسئلہ یولر اور مسئلہ بڑھوتری ۱۷۱۱

۱۵۳ ي تکملات کا مختصر جدول ۱۷۱۷

۱۵۴ جوابات ۱۷۲۹

۱۵۵ اشاریہ ۱۷۳۹

باب ۴

تفرق کا استعمال

اس باب میں ہم تفرق سے نتائج اخذ کرنا سیکھیں گے۔ تفرق کی مدد سے تفاعل کی انتہائی قیمتیں حاصل کرتے ہوئے ان کی ترسیم کی اشکال کی پیش گوئی اور ان پر تجزیہ کرتے ہیں، پیچیدہ کلیات کی سادہ صورت اخذ کرتے ہیں، تفاعل کی پیمائشی خلل کو حساسیت پر غور کرتے ہیں اور تفاعل کے صفر کو اعدادی طریقوں سے حاصل کرتے ہیں۔ مسئلہ اوسط قیمت ان تمام کو ممکن بناتا ہے جس کا ایک منطقی نتیجہ تکملی احصاء (باب ۵) کی راہ ہموار کرتا ہے۔

۴.۱ تفاعل کی انتہائی قیمتیں

اس حصہ میں استمراری تفاعل کی انتہائی قیمتوں کا مقام اور اور ان کی پہچان سکھائی جائے گی۔

مسئلہ اقل و اعظم

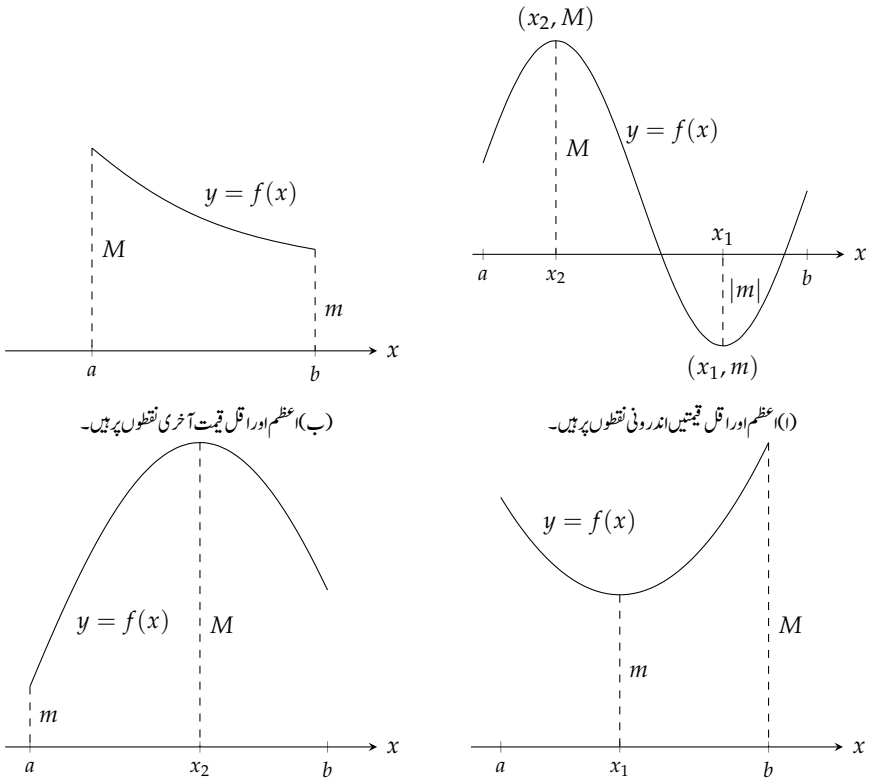
بند دائرہ کار کے ہر نقطہ پر استمراری تفاعل کی دائرہ کار پر مطلق اعظم قیمت اور مطلق اقل قیمت ہو گی جن پر ترسیم کھینچتے وقت نظر رکھا جاتا ہے۔ مسائل کے حل میں انتہائی قیمتوں کے کردار پر اس باب میں جبکہ تکمل احصاء کا نظریہ مرتب کرنے میں ان کے کردار پر اگلے دو ابواب میں غور کیا جائے گا۔

مسئلہ ۴.۱: استمراری تفاعل کا مسئلہ اقل و اعظم

بند دائرہ کار I کے ہر نقطہ پر استمراری تفاعل f کی I پر مطلق اعظم قیمت M اور مطلق اقل قیمت m پائی جائے گی۔ یعنی I میں ایسا x_1 اور x_2 پایا جائے گا کہ $f(x_1) = m$ اور $f(x_2) = M$ ہوں اور I میں تمام x کے لئے $m \leq f(x) \leq M$ ہو (شکل ۴.۱)۔

درج بالا مسئلے کے ثبوت کے لئے حقیقی اعدادی نظام کا تفصیلی علم ضروری ہے لہٰذا اس کا ثبوت پیش نہیں کیا جائے گا۔

مثال ۴.۱: وقفہ $[-\pi/2, \pi/2]$ پر تفاعل $f(x) = \cos x$ ایک مرتبہ اعظم قیمت 1 اور دو مرتبہ اقل قیمت 0 اختیار کرتا ہے۔ اسی وقفے پر تفاعل $g(x) = \sin x$ ایک مرتبہ اعظم قیمت 1 اور ایک مرتبہ اقل قیمت -1 اختیار کرتا ہے (شکل ۴.۲)۔ □



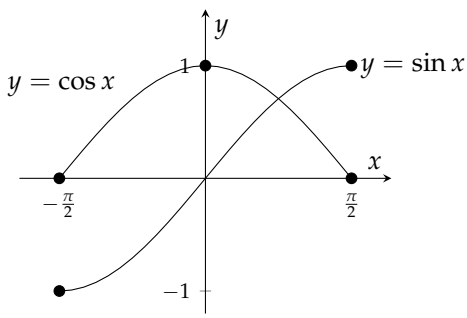
(ا) اعظم اور اقل قیمتیں اندرونی نقطوں پر ہیں۔

(ب) اعظم اور اقل قیمت آخری نقطوں پر ہیں۔

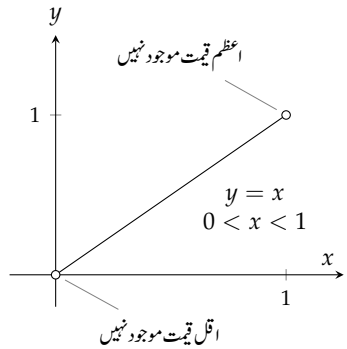
(ج) اقل قیمت اندرونی نقطہ پر جبکہ اعظم قیمت آخری نقطہ پر ہے۔

(د) اعظم قیمت اندرونی نقطہ پر جبکہ اقل قیمت آخری نقطہ پر ہے۔

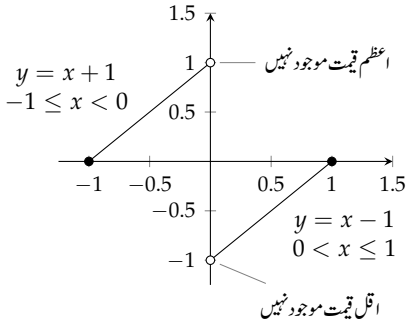
شکل ۱.۴: اعظم اور اقل قیمت کے نقطوں کے چند ممکنہ مقامات۔



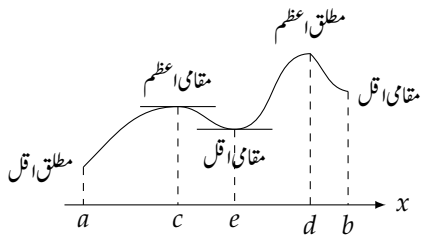
شکل ۲.۴: ترسیم برائے مثال ۱.۴



شکل ۳.۴: کھلے وقفہ پر اعظم اور اقل قیمتوں کا ہونا یقینی نہیں۔



شکل ۴.۴: واحد ایک نقطہ پر عدم استمرار کی وجہ سے اعظم اور اقل قیمتیں غیر یقینی ہو سکتی ہیں۔



شکل ۵.۴: مقامی اور مطلق انتہا۔

۴۴۲۱ جیسا شکل ۳.۴ اور شکل ۴.۴ واضح کرتی ہیں مسئلہ ۱.۴ میں دائرہ کار کا بند ہونا اور تفاعل کا استمراری ہونا لازمی ہے۔ ان کے بغیر مسئلے سے اخذ نتائج غلط ہو سکتے ہیں۔

۴۴۲۲ شکل ۴.۴ میں تفاعل

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

۴۴۲۳ دکھایا گیا ہے جو وقفہ $[-1, 1]$ پر استمراری ہے ماسوائے واحد نقطہ $x = 0$ پر، جس کی وجہ سے تفاعل کی نہ اعظم قیمت اور نہ ہی اقل قیمت پائی جاتی ہے۔

۴۴۲۴ **مقامی بالمقابل مطلق (عالمگیر) انتہا**

۴۴۲۵ شکل ۵.۴ میں تفاعل کے پانچ انتہائی نقطے دکھائے گئے ہیں تفاعل کی اقل قیمت نقطہ a پر ہے اگرچہ e پر بھی x کی مقامی قیمتوں کے لحاظ سے f کی قیمت کم
۴۴۲۶ ہے۔ نقطہ c پر تفاعل کی مقامی اعظم قیمت پائی جاتی ہے جبکہ d پر اس کی مطلق اعظم قیمت پائی جاتی ہے۔

۴۴۲۷ تعریف: **مطلق انتہائی قیمتیں**

۴۴۲۸ فرض کریں تفاعل f کا دائرہ کار D ہے۔ نقطہ c پر تفاعل f کی مطلق اعظم قیمت تب پائی جائے گی جب D میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو

$$f(x) \leq f(c)$$

۴۴۲۹ اور D میں c پر تب f کی مطلق اقل قیمت پائی جائے گی جب D میں تمام x کے لئے درج ذیل ہو۔

$$f(x) \geq f(c)$$

۴۴۳۰ □

۴۴۳۱ مطلق اعظم اور مطلق اقل کو مطلق **انتہا**[1] کہتے ہیں۔ انہیں **عالمگیر**[2] انتہا بھی کہتے ہیں۔

۴۴۳۲ ایک سے تفاعل، جنہیں ایک سا تعریفی قاعدہ بیان کرتا ہو، کی انتہا قیمتیں مختلف ہو سکتی ہیں۔ انتہا قیمتیں دائرہ کار پر بھی منحصر ہوں گی۔

۴۴۳۳ مثال ۴.۲:

	تعریفی تفاعل	دائرہ کار D	مطلق انتہا
(ا)	$y = x^2$	$(-\infty, \infty)$	مطلق اعظم نہیں ہے جبکہ $x = 0$ پر مطلق اقل قیمت 0 ہے
(ب)	$y = x^2$	$[0, 2]$	مطلق اعظم قیمت $x = 2$ پر 4 ہے جبکہ $x = 0$ پر مطلق اقل قیمت 0 ہے
(ج)	$y = x^2$	$(0, 2]$	مطلق اعظم قیمت $x = 2$ پر 4 ہے جبکہ مطلق اقل قیمت موجود نہیں
(د)	$y = x^2$	$(0, 2)$	کوئی مطلق قیمت نہیں پایا جاتا ہے

۴۴۳۴ شکل ۴.۶ دیکھیں۔ □

۴۴۳۵ تعریف: **مقامی انتہا قیمتیں**

۴۴۳۶ تفاعل f کا کھلے دائرہ کار D میں اندرونی نقطہ c پر اس صورت مقامی اعظم قیمت پائی جائے گی جب D میں کسی بھی کھلے وقفہ جس میں c پایا جاتا ہو میں
۴۴۳۷ تمام x کے لئے

$$f(x) \leq f(c)$$

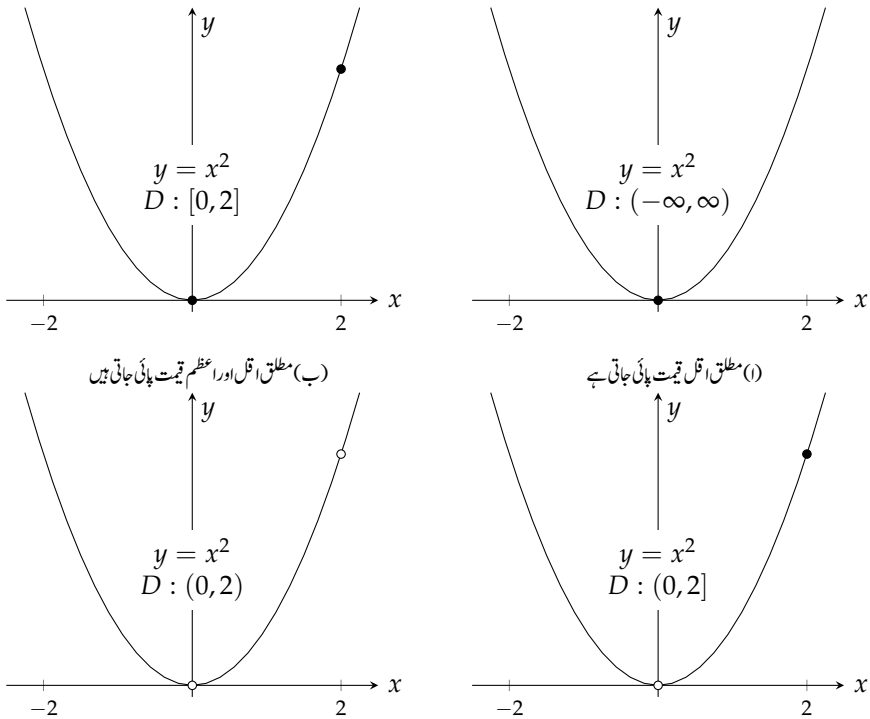
۴۴۳۸ ہو جبکہ (انہیں شرائط کے ساتھ) درج ذیل صورت میں اندرونی نقطہ c پر مقامی اعظم قیمت پائی جائے گی۔

$$f(x) \geq f(c)$$

۴۴۳۹ □

---

[1] extrema
[2] global



(ا) مطلق اقل قیمت پائی جاتی ہے

(ب) مطلق اقل اور اعظم قیمت پائی جاتی ہیں

(ج) مطلق اعظم قیمت پائی جاتی ہے

(د) نہ مطلق اعظم اور نہ مطلق اقل قیمت پائی جاتی ہے

شکل ۶.۴: مطلق قیمت اور دائرہ کار (مثال ۲.۴)۔

ہم مقامی انتہا کی تعریف کو وقفے کے آخری سروں تک وسعت دے سکتے ہیں۔ یوں آخری سر c پر مقامی انتہا سے مراد نصف کھلے وقفہ میں موزوں عدم مساوات کا مطمئن ہونا ہے۔ شکل ۴.۵ میں تفاعل f کی c اور d پر مقامی اعظم قیمتیں جبکہ a ، e ،اور b پر مقامی اقل قیمتیں پائی جاتی ہیں۔

مطلق اعظم قیمت بھی مقامی اعظم قیمت ہو گی۔ مطلق اعظم قیمت اپنے پڑوس میں بھی اعظم قیمت ہو گی۔ یوں تمام مقامی اعظم قیمتوں کے جدول میں مطلق اعظم قیمت (اگر موجود ہو) بھی پائی جائے گی۔ اسی طرح تمام مقامی اقل قیمتوں کے جدول میں مطلق اقل قیمت (اگر موجود ہو) بھی پائی جائے گی۔

انتہا کا حصول

جیسا درج ذیل مسئلہ سمجھاتا ہے تفاعل کی انتہا کے حصول کے لئے چند قیمتوں کی تحقیق ضروری ہو گی۔

مسئلہ ۴.۲: **یک رتبی مسئلہ برائے مقامی انتہا** فرض کریں تفاعل f کے دائرہ کار کے اندرونی نقطہ c پر f کی اقل یا اعظم قیمت پائی جاتی ہو اور c پر f' معین ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$f'(c) = 0$$

ثبوت: یہ دکھانے کی خاطر کہ مقامی انتہا پر $f'(c)$ کی قیمت صفر ہو گی ہم دکھاتے ہیں کہ $f'(c)$ مثبت نہیں ہو سکتا اور ساتھ ہی $f'(c)$ منفی نہیں ہو سکتا۔ صفر وہ واحد عدد ہے جو نہ مثبت اور نہ منفی ہے لہٰذا $f'(c)$ صفر ہو گا۔

فرض کریں c پر f کی مقامی اعظم قیمت پائی جاتی ہے (شکل ۴.۷)۔ یوں c کے قریبی پڑوس میں تمام x پر $f(x) - f(c) \leq 0$ ہو گا۔ چونکہ c اندرونی نقطہ ہے لہٰذا $f'(c)$ کی تعریف درج ذیل دو طرفہ حد ہو گی۔

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

اس کا مطلب ہے کہ $x = c$ پر دائیں ہاتھ حد اور بائیں ہاتھ حد دونوں موجود اور $f'(c)$ کے برابر ہیں۔ ان حد پر علیحدہ علیحدہ غور کرتے ہیں۔ چونکہ c کی دائیں جانب $x - c > 0$ اور $f(x) \leq f(c)$ ہیں لہٰذا

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \tag{۱}$$

ہو گا۔ اسی طرح c کی بائیں جانب $x - c < 0$ اور $f(x) \leq f(c)$ ہیں لہٰذا

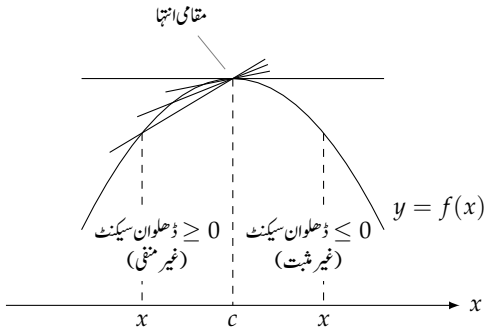
$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \tag{۲}$$

ہو گا۔ مساوات ۱ اور مساوات ۲ کو ملا کر $f'(c) = 0$ ملتا ہے۔

یوں مقامی اعظم قیمت کے لئے مسئلہ ثابت ہوا۔ مقامی اقل قیمت کے لئے مسئلہ ثابت کرنے کے لئے $f(x) \geq f(c)$ استعمال کرنا ہو گا جس سے مساوات ۱ اور مساوات ۲ کی عدم مساوات الٹ ہو جاتی ہیں۔

□

مسئلہ ۴.۲ کہتا ہے کہ اندرونی انتہا پر اگر تفرق معین ہو تب $f'(c) = 0$ ہو گا۔ یوں تفاعل کی انتہا (مقامی یا عالمگیر) صرف درج ذیل نقطوں پر ہو سکتی ہیں۔



شکل ۷.۴: مقامی اعظم قیمت c پر ہے۔ نقطہ c پر ڈھلوان بیک وقت غیر مثبت اور غیر منفی اعداد کی حد ہونے کی وجہ سے صفر ہو گا۔ (مسئلہ ۲.۴)

۱. اندرونی نقطہ جہاں $f' = 0$ ہو۔

۲. اندرونی نقطہ جہاں f' غیر معین ہو۔

۳. f کے دائرہ کار کے آخری سروں پر۔

درج ذیل تعریف ان نتائج کو مختصراً پیش کرنے میں مدد کرتی ہے۔

تعریف: تفاعل f کے دائرہ کار میں ایسا اندرونی نقطہ جہاں f' غیر معین یا صفر ہو کو **نقطہ فاصل**[۳] کہتے ہیں۔

□

خلاصہ

تفاعل کی انتہا قیمتیں صرف تفاعل کے دائرہ کار میں نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر پائی جا سکتی ہیں۔

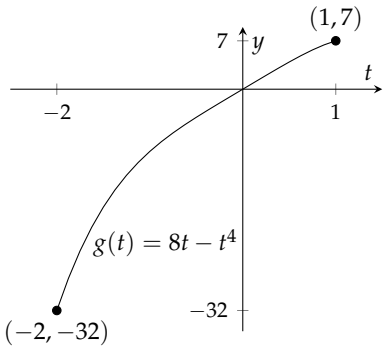
عموماً بند دائرہ کار پر تفاعل کی انتہا مطلوب ہو گی۔ مسئلہ ۱.۴ ہمیں یقین دلاتا ہے کہ ایسی قیمتیں موجود ہوں گی؛ مسئلہ ۲.۴ کہتا ہے کہ یہ صرف آخری نقطوں پر اور نقطہ فاصل پر پائی جائیں گی۔ اس قسم کے نقطے عموماً چند ہوں گے جن کی فہرست تیار کر کے دیکھا جا سکتا ہے کہ آیا نقطہ پر اعظم یا اقل قیمت پائی جاتی ہے۔

مثال ۳.۴: دائرہ کار $[-2, 1]$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کی مطلق اعظم اور مطلق اقل قیمتیں تلاش کریں۔

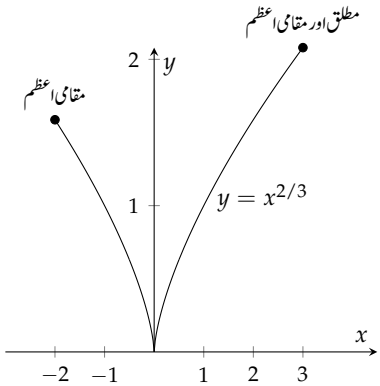
حل: تفاعل پورے دائرہ کار پر قابل تفرق ہے لہٰذا واحد نقطہ فاصل $f'(x) = 2x = 0$ یعنی $x = 0$ پر ہو گا۔ ہمیں تفاعل کی قیمتیں نقطہ فاصل $x = 0$ اور آخری نقطوں $x = -2$ اور $x = 1$ پر دیکھنی ہوں گی۔

نقطہ فاصل پر قیمت	$f(0) = 0$
آخری نقطہ پر قیمت	$f(-2) = 4$
آخری نقطہ پر قیمت	$f(1) = 1$

[۳] criticalpoint



شکل ۴.۸: ترسیم برائے مثال ۴.۴



شکل ۴.۹: ترسیم برائے مثال ۴.۵

۴۴۷۵ تفاعل کی مطلق اعظم قیمت 4 ہے جو نقطہ $x = -2$ پر پائی جاتی ہے جبکہ اس کی مطلق اقل قیمت 0 ہے جو نقطہ $x = 0$ پر پائی جاتی ہے۔ □

۴۴۷۶ مثال ۴.۴: دائرہ کار $[-2, 1]$ پر تفاعل $g(t) = 8t - t^4$ کی مطلق اعظم اور مطلق اقل قیمت تلاش کریں۔

۴۴۷۷ حل: تفرق پورے دائرہ کار پر قابل تفرق ہے لہٰذا نقطہ فاصل صرف وہاں ہو گا جہاں $g'(t) = 0$ ہو۔ اس مساوات کو حل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} g'(t) &= 8 - 4t^3 = 0 \\ t^3 &= 2 \\ t &= 2^{1/3} \end{aligned}$$

۴۴۷۸ ملتا ہے جو دائرہ کار کے اندر نہیں۔ یوں تفاعل کے مقامی انتہا قیمتیں آخری نقطوں پر پائی جائیں گی (شکل ۴.۸)۔

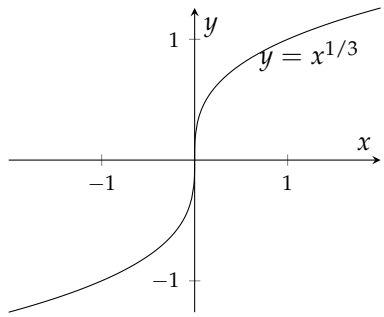
$$g(-2) = -32 \qquad \text{مطلق اقل قیمت}$$
$$g(1) = 7 \qquad \text{مطلق اعظم قیمت}$$

۴۴۷۹ □

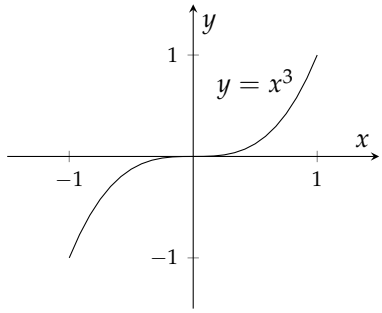
۴۴۸۰ مثال ۴.۵: تفاعل $h(x) = x^{2/3}$ کی $[-2, -3]$ پر مطلق انتہا تلاش کریں۔

۴۴۸۱ حل: یک رتبی تفرق

$$h'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3x^{1/3}}$$



شکل ۱۰.۴: نقطہ فاصل $x = 0$ پر انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی۔



شکل ۱۱.۴: $x = 0$ پر $y = x^3$ کی انتہا نہیں پائی جاتی اگرچہ اس نقطے پر $y' = 3x^2 = 0$ ہے۔

۴۳۸۲ کا صفر نہیں پایا جاتا البتہ $x = 0$ پر یہ غیر معین ہے۔ اس نقطہ پر اور آخری نقطوں $x = -2$ اور $x = 3$ پر تفاعل کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} h(0) &= 0 \\ h(-2) &= (-2)^{2/3} = 4^{1/3} \\ h(3) &= (3)^{2/3} = 9^{1/3} \end{aligned}$$

۴۳۸۳ مطلق اعظم قیمت $9^{1/3}$ ہے جو نقطہ $x = 3$ پر پائی جاتی ہے جبکہ مطلق اقل قیمت 0 ہے جو نقطہ $x = 0$ پر پائی جاتی ہے (شکل ۹.۴)۔ □

۴۳۸۴ اگرچہ تفاعل کی انتہا صرف نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر پائی جا سکتی ہیں، ضروری نہیں کہ ہر نقطہ فاصل یا ہر آخری نقطے پر انتہا قیمت پائی جاتی ہو۔ شکل ۱۰.۴ اور
۴۳۸۵ شکل ۱۱.۴ اندرونی نقطوں کے لئے اس حقیقت کی وضاحت کرتی ہے اور سوال ۳۴.۴ میں آپ سے ایسا تفاعل پیش کرنے کو کہا گیا ہے جو اپنے دائرہ کار کے آخری
۴۳۸۶ نقطوں پر انتہائی قیمت اختیار نہیں کرتا۔

۴۳۸۷ **سوالات**

۴۳۸۸ **ترسیم سے انتہائی نقطوں کا حصول**

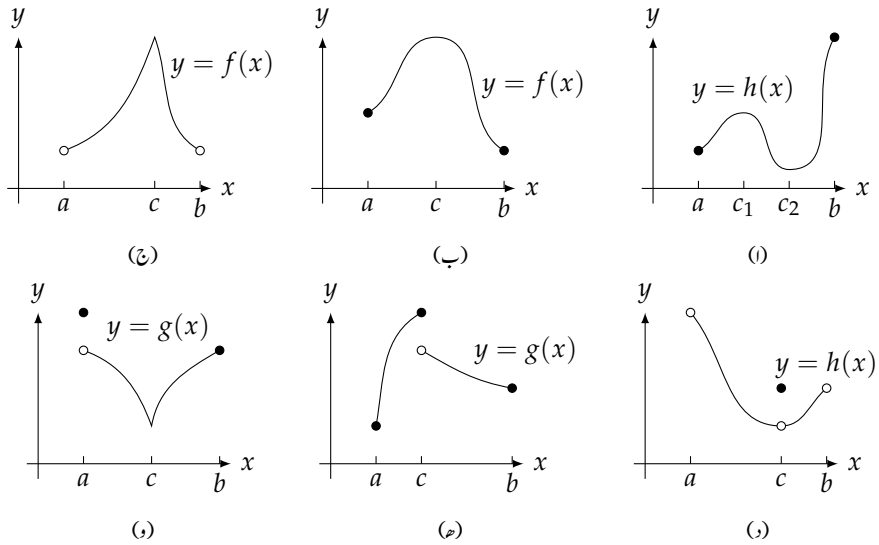
۴۳۸۹ کیا سوال ۱.۴ تا سوال ۶.۴ میں $[a, b]$ کے بیچ تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں پائی جاتی ہیں؟ بتائیں کہ آپ کے جواب اور مسئلہ ۱.۴ میں کس طرح تضاد نہیں پایا
۴۳۹۰ جاتا۔

۴۳۹۱ سوال ۱.۴: شکل ۱۲.۴-ا

۴۳۹۲ سوال ۲.۴: شکل ۱۲.۴-ب

۴۳۹۳ سوال ۳.۴: شکل ۱۲.۴-ج

۴۳۹۴ سوال ۴.۴: شکل ۱۲.۴-د



شکل ۴.۱۲: اشکال برائے سوال ۴.۱ تا سوال ۴.۶

۴۴۹۵ سوال ۴.۵: شکل ۴.۱۲-ھ

۴۴۹۶ سوال ۴.۶: شکل ۴.۱۲-و

۴۴۹۷

۴۴۹۸ **بند وقفہ پر مطلق انتہا**

۴۴۹۹ سوال ۴.۷ تا سوال ۴.۲۲ میں دیے وقفے پر تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔ تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے انتہائی نقطوں کی نشاندہی کریں۔

۴۵۰۰ سوال ۴.۷: $f(x) = \frac{2}{3}x - 5, \quad -2 \leq x \leq 3$

۴۵۰۱ سوال ۴.۸: $f(x) = -x - 4, \quad -4 \leq x \leq 1$

۴۵۰۲ سوال ۴.۹: $f(x) = x^2 - 1, \quad -1 \leq x \leq 2$

۴۵۰۳ سوال ۴.۱۰: $f(x) = 4 - x^2, \quad -3 \leq x \leq 1$

۴۵۰۴ سوال ۴.۱۱: $F(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad 0.5 \leq x \leq 2$

۴۵۰۵ سوال ۴.۱۲: $F(x) = -\frac{1}{x}, \quad -2 \leq x \leq -1$

۴۵۰۶ سوال ۴.۱۳: $h(x) = \sqrt[3]{x}, \quad -1 \leq x \leq 8$

۴۵۰۷ سوال ۴.۱۴: $h(x) = -3x^{2/3}, \quad -1 \leq x \leq 1$

سوال ۴.۱۵: $g(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad -2 \le x \le 1$

سوال ۴.۱۶: $g(x) = -\sqrt{5 - x^2}, \quad -\sqrt{5} \le x \le 0$

سوال ۴.۱۷: $f(\theta) = \sin\theta, \quad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{5\pi}{6}$

سوال ۴.۱۸: $f(x) = \tan\theta, \quad -\frac{\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

سوال ۴.۱۹: $g(x) = \csc x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$

سوال ۴.۲۰: $g(x) = \sec x, \quad -\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{6}$

سوال ۴.۲۱: $f(t) = 2 - |t|, \quad -1 \le t \le 3$

سوال ۴.۲۲: $f(t) = |t - 5|, \quad -4 \le t \le 7$

سوال ۴.۲۳ تا سوال ۴.۲۶ میں تفاعل کی مطلق اقل اور مطلق اعظم قیمتیں تلاش کریں۔ یہ قیمتیں کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟

سوال ۴.۲۳: $f(x) = x^{4/3}, \quad -1 \le x \le 8$

سوال ۴.۲۴: $f(x) = x^{5/3}, \quad -1 \le x \le 8$

سوال ۴.۲۵: $g(\theta) = \theta^{3/5}, \quad -32 \le \theta \le 1$

سوال ۴.۲۶: $h(\theta) = 3\theta^{2/3}, \quad -27 \le \theta \le 8$

دائرہ کار میں مقامی انتہا

سوال ۴.۲۷ تا سوال ۴.۳۰ میں دیے گئے دائرہ کار پر مقامی اعظم یا اقل قیمت تلاش کریں۔ یہ قیمتیں کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟ ان میں سے کون سی مطلق انتہائی قیمتیں ہیں؟

سوال ۴.۲۷:

ا. $f(x) = x^2 - 4, \quad -2 \le x \le 2$

ب. $g(x) = x^2 - 4, \quad -2 \le x < 2$

ج. $h(x) = x^2 - 4, \quad -2 < x < 2$

د. $k(x) = x^2 - 4, \quad -2 \le x < \infty$

ھ. $l(x) = x^2 - 4, \quad 0 < x < \infty$

سوال ۴.۲۸:

ا. $f(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 \le x \le 1$

ب. $g(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 < x \le 1$

ج. $h(x) = 2 - 2x^2, \quad -1 < x < 1$

د. $k(x) = 2 - 2x^2, \quad -\infty < x \le 1$

ھ. $l(x) = 2 - 2x^2, \quad -\infty < x < 0$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۴.۲۹: اگرچہ $x = 0$ پر $f(x) = |x|$ ناقابل تفرق ہے، نقطہ $x = 0$ پر f کی مطلق اقل قیمت پائی جاتی ہے۔ کیا یہ مسئلہ ۴.۲ کے متضاد ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۳۰: اگر تفاعل کے دائرہ کار کا آخری نقطہ c ہو تب مسئلہ ۴.۲ کیوں ناقابل استعمال ہو گا؟

سوال ۴.۳۱: اگر جفت تفاعل $f(x)$ کی مقامی اعظم قیمت $x = c$ پر پائی جاتی ہو تب $x = -c$ پر اس کی قیمت کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۳۲: اگر طاق تفاعل $g(x)$ کی مقامی اقل قیمت $x = c$ پر پائی جاتی ہو تب کیا $x = -c$ پر اس کی قیمت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۳۳: ہم جانتے ہیں کہ نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر تفاعل $f(x)$ کی قیمتوں کی جانچ پڑتال سے تفاعل کی انتہائی قیمتیں حاصل کی جا سکتی ہیں۔ کوئی بھی نقطہ فاصل یا آخری نقطہ نہ ہونے کی صورت میں کیا ہو گا؟ کیا ایسے تفاعل حقیقت میں پائے جاتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۳۴: وقفہ $[0, 1]$ پر ایسا معین تفاعل پیش کریں جس کا $x = 0$ پر نہ کوئی مقامی اعظم قیمت اور نہ ہی مقامی اقل قیمت پائی جاتی ہو۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۴.۳۵ تا سوال ۴.۴۰ میں درج ذیل اقدام سے دیے گئے بند وقفے میں تفاعل کی انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. وقفہ پر تفاعل تقسیم کرتے ہوئے اس کا رویہ دیکھیں۔

ب. وہ اندرونی نقطے تلاش کریں جہاں $f' = 0$ ہو۔ بعض اوقات f' ترسیم کرنا مددگار ثابت ہو گا۔

ج. وہ اندرونی نقطے تلاش کریں جہاں f' غیر موجود ہے۔

د. جزو (ب) اور (ج) میں حاصل تمام نقطوں کے علاوہ دائرہ کار کے آخری نقطوں پر تفاعل کی قیمتیں حاصل کریں۔

ھ. وقفہ پر تفاعل کی مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں اور وہ نقطے تلاش کریں جن پر یہ قیمتیں پائی جاتی ہوں۔

سوال ۴.۳۵: $f(x) = x^4 - 8x62 + 4x + 2, \quad [-\frac{20}{25}, \frac{64}{25}]$

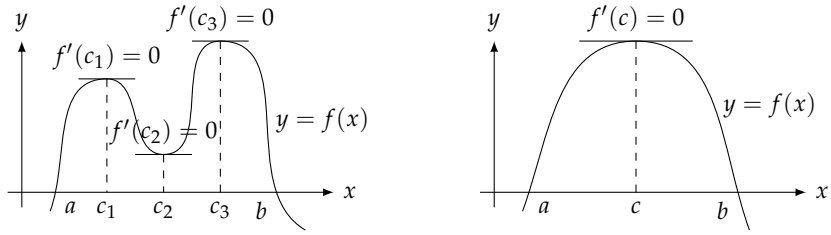
سوال ۴.۳۶: $f(x) = -x^4 + 4x^3 - 4x + 1, \quad [-\frac{3}{4}, 3]$

سوال ۴.۳۷: $f(x) = x^{2/3}(3 - x), \quad [-2, 2]$

سوال ۴.۳۸: $f(x) = 2 + 2x - 3x^{2/3}, \quad [-1, \frac{10}{3}]$

سوال ۴.۳۹: $f(x) = \sqrt{x} + \cos x, \quad [0, 2\pi]$

سوال ۴.۴۰: $f(x) = x^{3/4} - \sin x + \frac{1}{2}, \quad [0, 2\pi]$



شکل ۱۳.۴: مسئلہ رول کہتا ہے کہ جن نقطوں پر تفاعل x محور کو قطع کرتا ہے، ان کے بیچ ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر تفاعل کا تفرق صفر کے برابر ہو گا۔

۲.۴ مسئلہ اوسط قیمت

ہم جانتے ہیں کہ سطح زمین کے قریب ساکن حال (لمحہ $t = 0$) سے گرتا ہوا جسم ابتدائی t سیکنڈوں میں $s = 4.9t^2\,\mathrm{m}$ فاصلہ طے کرے گا۔ اس معلومات کو استعمال کرتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ لمحہ t پر جسم کی سمتی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی اور اسراع $a = \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہو گا۔ اب فرض کریں کہ ہمیں جسم کا اسراع معلوم ہے۔ کیا ہم الٹ چلتے ہوئے اس کی سمتی رفتار اور ہٹاو تلاش کر سکتے ہیں؟

ہم حقیقت میں جاننا چاہتے ہیں کہ دیا گیا تفرق کس تفاعل کا تفرق ہو گا۔ زیادہ عمومی سوال یہ ہو گا کہ کس قسم کے تفاعل کا تفرق مخصوص قسم کا ہو گا۔ کس تفاعل کا تفرق مثبت ہو گا، یا منفی ہو گا، یا ہر نقطے پر صفر ہو گا؟ ان سوالات کے جوابات کو مسئلہ اوسط قیمت سے اخذ کردہ ضمنی نتیجہ کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مسئلہ رول

جن دو نقطوں پر تفاعل $f(x)$ محور x کو قطع کرتا ہے اگر ان کے بیچ تفاعل قابل تفرق ہو تب $f(x)$ کی ترسیم کی جیومیٹری کو دیکھ کر ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ان نقطوں کے بیچ کم سے کم ایک ایسا نقطہ ضرور پایا جائے گا جس پر تفاعل کا مماس افقی ہو۔ مثل رول $(1652 - 1719)$ کا 300 سال پرانا **مسئلہ رول** ہمیں یقین دہانی کراتا ہے کہ حقیقتاً ایسا ہی ہو گا۔

مسئلہ ۳.۴: **مسئلہ رول**[۴]

فرض کریں بند وقفہ $[a, b]$ کے ہر نقطہ پر تفاعل $y = f(x)$ استمراری ہے اور وقفہ کے اندرون (a, b) کے ہر نقطہ پر تفاعل قابل تفرق ہے۔ اگر

$$f(a) = f(b) = 0$$

تب (a, b) میں کم سے کم ایسا ایک نقطہ c ہو گا جس پر درج ذیل ہو گا (شکل ۱۳.۴)۔

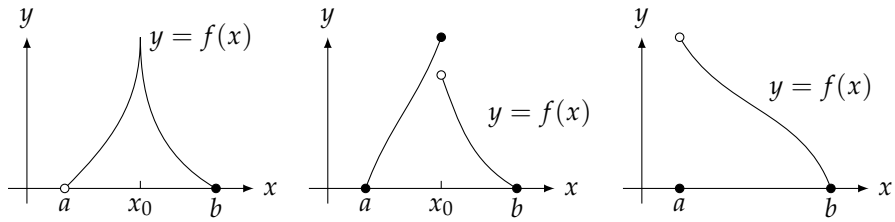
$$f'(c) = 0$$

ثبوت: چونکہ f استمراری ہے لہٰذا $[a, b]$ پر f کی مطلق اعظم اور مطلق اقل قیمتیں ہوں گی۔ یہ صرف درج ذیل نقطوں پر پائی جائیں گی۔

۱. ان اندرونی نقطوں پر جہاں f' ہو۔

---

[۴] Rolle'stheorem



(ا) ایک آخری نقطہ پر غیر استمراری

(ب) اندرونی نقطہ پر غیر استمراری

(ج) $[a,b]$ پر استمراری لیکن کسی اندرونی نقطہ پر نا قابل تفرق

شکل ۴.۱۴: کوئی افقی مماس نہیں پایا جاتا ہے۔

۲. ان اندرونی نقطوں پر جہاں f' غیر معین ہو۔

۳. تفاعل کے دائرہ کار کے آخری نقطوں پر جو موجودہ صورت میں a اور b ہیں۔

قیاس کے تحت ہر اندرونی نقطے پر f کا تفرق پایا جاتا ہے. یوں جزو (2) خارج ہوتا ہے۔

اگر وقفہ کے اندرونی نقطہ c پر تفاعل کی اعظم یا اقل قیمت پائی جاتی ہو تب مسئلہ ۴.۲ کے تحت $f'(c) = 0$ ہو گا جس سے مسئلہ رول کا نقطہ حاصل ہوتا ہے۔

اگر اعظم قیمت اور اقل قیمت دونوں a یا b پر پائی جاتی ہوں تب f مستقل ہو گا۔ یوں $f' = 0$ ہو گا لہٰذا وقفے کے کسی بھی نقطے کو c لیا جا سکتا ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

□

مسئلہ ۴.۳ میں دیے شرائط لازمی ہیں۔ اگر صرف ایک نقطے پر بھی یہ شرائط مطمئن نہ ہوتے ہوں تب ضروری نہیں کہ ترسیم کا افقی مماس پایا جاتا ہو (شکل ۴.۱۴)۔

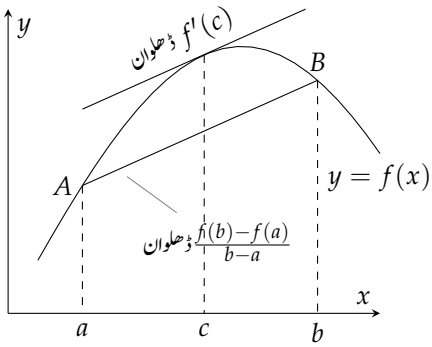
مثال ۴.۶: درج ذیل کثیر رکنی وقفہ $[-3,3]$ کے ہر نقطہ پر استمراری اور $(-3,3)$ کے ہر نقطہ پر قابل تفرق ہے۔

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x$$

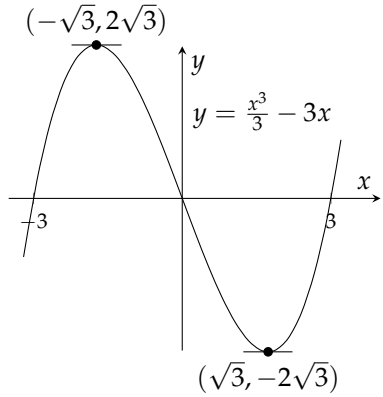
چونکہ $f(-3) = f(3) = 0$ ہے لہٰذا مسئلہ رول کے تحت $a = -3$ اور $b = 3$ کے بیچ کھلے وقفہ میں کم سے کم ایک نقطے پر $f' = 0$ ہو گا۔ حقیقتاً اس وقفے میں $f'(x) = x^2 - 3$ دو نقطوں $x = \sqrt{3}$ اور $x = -\sqrt{3}$ پر صفر کے برابر ہے (شکل ۴.۱۵)۔ □

مسئلہ اوسط قیمت

مسئلہ رول کی ترچھی صورت مسئلہ اوسط قیمت ہے (شکل ۴.۱۶)۔ وتری قطعہ AB کے متوازی نقطہ A اور B کے بیچ کہیں پر تفاعل کا ایسا مماس پایا جاتا ہے جس کا ڈھلوان وتری قطعہ کے ڈھلوان کا برابر ہو گا۔



شکل ۱۶.۴: جیومیٹریائی طور پر مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ A اور B کے بیچ کہیں پر تفاعل کا مماس قطعہ AB کے متوازی ہوگا۔



شکل ۱۵.۴: ترسیم برائے مثال ۶.۴

مسئلہ ۴.۴: **مسئلہ اوسط قیمت**[۵] فرض کریں بند وقفہ $[a, b]$ کے ہر نقطہ پر $y = f(x)$ استمراری ہے اور اس کے اندرون (a, b) کے ہر نقطہ پر f قابل تفرق ہے تب (a, b) میں کم سے کم ایک ایسا نقطہ پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \tag{۱}$$

ثبوت: ہم f کی ترسیم پر دو نقطوں $A(a, f(a))$ اور $B(b, f(b))$ کے بیچ سیدھی لکیر کھینچتے ہیں (شکل ۱۷.۴-ا)۔ یہ لکیر درج ذیل تفاعل کی ترسیم ہوگی۔

$$g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad \text{(نقطہ ڈھلوان صورت)} \tag{۲}$$

نقطہ x پر f اور g کے بیچ انتصابی فاصلہ

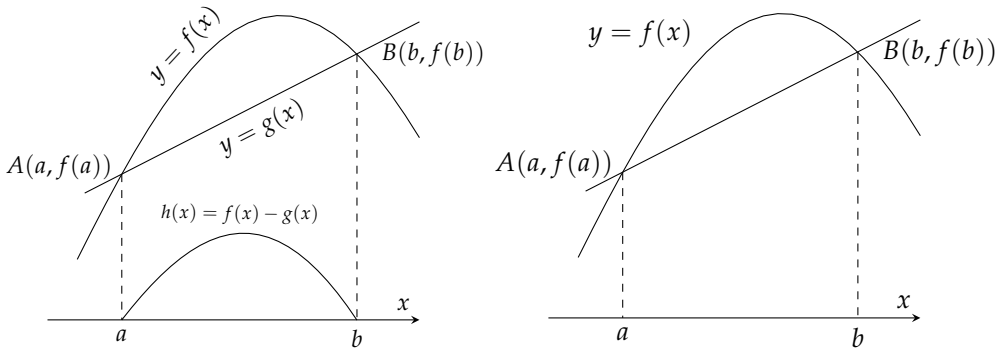
$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \end{aligned} \tag{۳}$$

ہوگا۔ شکل ۱۷.۴-ب میں f ، g ، اور h دکھائے گئے ہیں۔

تفاعل h وقفہ $[a, b]$ پر مسئلہ رول کو مطمئن کرتا ہے۔ تفاعل h وقفہ $[a, b]$ پر استمراری اور (a, b) پر قابل تفرق ہے (چونکہ اس وقفے پر f اور g استمراری اور قابل تفرق ہیں)۔ مزید چونکہ f اور g دونوں نقطہ A اور B سے گزرتے ہیں لہٰذا $h(a) = h(b) = 0$ ہے۔ یوں (a, b) میں کسی نقطہ c پر $h'(x) = 0$ ہوگا۔ یہ وہ نقطہ ہے جو ہمیں مساوات ا میں درکار ہے۔

---

[۵] meanvaluetheorem



(ب) $f(x)$ اور $g(x)$ کے بیچ افقی فاصلہ $h(x)$ ہے۔

(i) وقفہ $[a, b]$ پر f اور وتری قطعہ AB کی ترسیم۔

شکل ۴.۱۷: مسئلہ اوسط قیمت۔

۴۶۰۴ مساوات ۱ کی تصدیق کی خاطر ہم x کے لحاظ سے مساوات ۳ کے دونوں ہاتھ کا تفرق لے کر اس میں $x = c$ پُر کرتے ہیں۔

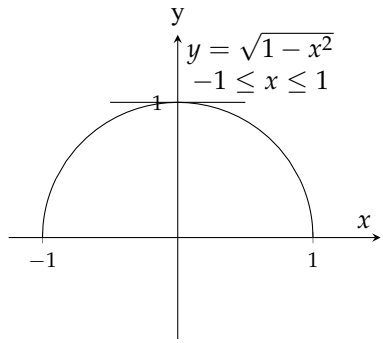
$$\begin{aligned}
h'(x) &= f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} && \text{(تفرق)} \\
h'(c) &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} && (x = c) \\
0 &= f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} && (h'(c) = 0) \\
f'(c) &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}
\end{aligned}$$

۴۶۰۵ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

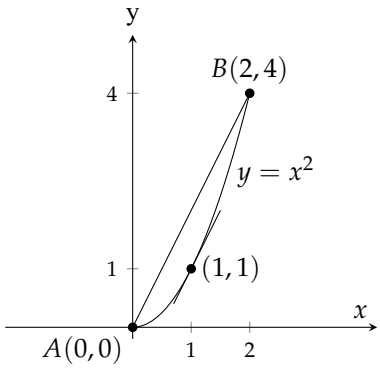
۴۶۰۶ □

۴۶۰۷ دھیان رہے کہ مسئلہ اوسط قیمت میں نقطہ a یا b پر f کا قابل تفرق ہونا ضروری نہیں البتہ ان نقطوں پر f کا استمراری ہونا کافی ہے (شکل ۴.۱۸)۔ ہم عموماً
۴۶۰۸ c کے بارے میں صرف اتنا ہی جانتے ہیں جتنا یہ مسئلہ ہمیں بتاتا ہے، یعنی کہ، c موجود ہے۔ اگلی مثال کی طرح بعض اوقات ہم c کو جان پاتے ہیں لیکن ایسا
۴۶۰۹ شاذ و نادر ہو گا۔

۴۶۱۰ مثال ۴.۷: وقفہ $0 \leq x \leq 2$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ استمراری اور $0 < x < 2$ پر قابل تفرق ہے (شکل ۴.۱۹)۔ چونکہ
۴۶۱۱ $f(0) = 0$ اور $f(2) = 4$ ہیں لہٰذا مسئلہ اوسط قیمت کے تحت اس وقفہ میں نقطہ c پر تفرق $f'(x) = 2x$ کی قیمت لازماً $\frac{4-0}{2-0} = 2$
۴۶۱۲ ہو گی۔ موجودہ مثال میں ہم $2x = 2$ کو حل کرتے ہوئے $x = c = 1$ حاصل کر پاتے ہیں۔ □



شکل۱۸.۴:اگرچہ $y = \sqrt{1-x^2}$ نقطہ -1 اور 1 پر نا قابل تفرق ہے یہ $[-1,1]$ پر مسئلہ اوسط قیمت کو مطمئن کرتا ہے۔



شکل۱۹.۴:نقطہ $c = 1$ پر مماس،وتری قطعہ AB کے متوازی ہے(مثال۷.۴)

طبعی تشریح

اگر ہم $[a,b]$ پر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ کو f کی اوسط تبدیلی اور $f'(c)$ کو لحاتی تبدیلی تصور کریں تب مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ کسی اندرونی نقطہ پر لحاتی تبدیلی ضرور پورے وقفہ پر اوسط تبدیلی کے برابر ہو گی۔

مثال۸.۴: ایک گاڑی ساکن حال سے شروع ہر کر 8 سیکنڈوں میں کل 120 میٹر فاصلہ طے کرتی ہے۔ان 8 سیکنڈوں کے لئے گاڑی کی اوسط رفتار $\frac{120}{8} = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔مسئلہ اوسط قیمت کہتا ہے کہ ان آٹھ سیکنڈوں میں کسی ایک لمحے رفتار بیاٹھیک یہی رفتار دکھائے گا۔ □

ضمنی نتائج اور چند جوابات

اس حصہ کے شروع میں ہم نے پوچھا، کس تفاعل کا تفرق صفر ہو گا۔مسئلہ اوسط قیمت کا پہلا ضمنی نتیجہ اس کا جواب دیتا ہے۔

ضمنی نتیجہ ۱.۴: **صفر تفرق کے تفاعلات مستقل ہوں گے**
اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر $f'(x) = 0$ ہو تب I میں تمام x پر $f(x) = C$ ہو گا جہاں C مستقل ہے۔

ہم جانتے ہیں کہ اگر وقفہ I پر تفاعل f کی قیمت مستقل ہو تب I پر f قابل تفرق ہو گا اور I میں تمام x پر $f'(x) = 0$ ہو گا۔ضمنی نتیجہ اس کا الٹ رخ پیش کرتا ہے۔

ثبوت ضمنی نتیجہ: ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ I پر f کی قیمت مستقل ہے۔ہم I میں ہر دو نقطوں x_1 اور x_2 پر $f(x_1) = f(x_2)$ دکھاتے ہوئے ایسا کرتے ہیں۔

فرض کریں x_1 اور x_2 وقفہ I میں کوئی بھی دو نقطے ہیں جن کی شمار بندی بائیں سے دائیں رخ ہے لہٰذا $x_1 < x_2$ ہو گا۔یوں $[x_1, x_2]$ پر

f مسئلہ اوسط قیمت کو مطمئن کرے گا۔ یہ $[x_1, x_2]$ کے ہر نقطہ پر قابل تفرق ہو گا لہٰذا یہ ہر اس نقطہ پر استمراری بھی ہو گا۔ یوں x_1 اور x_2 کے بیچ کسی نقطہ c پر

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

ہو گا۔ چونکہ پورے I پر $f' = 0$ ہے لہٰذا یہ مساوات درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c), \quad f(x_2) - f(x_1) = 0, \quad f(x_1) = f(x_2)$$

□

اس حصہ کے شروع میں ہم نے یہ بھی پوچھا کہ کیا الٹ چلتے ہوئے ہم اسراع سے رفتار اور ہٹاو تلاش کر سکتے ہیں۔ اس کا جواب اگلا ضمنی نتیجہ پیش کرتا ہے۔

ضمنی نتیجہ ۴.۲: **ایک سے تفرق والے تفاعل میں مستقل کا فرق ہو گا**
اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر $f'(x) = g'(x)$ ہو تب ایسا مستقل C موجود ہو گا کہ I میں تمام x پر $f(x) = g(x) + C$ ہو۔

ثبوت ضمنی نتیجہ: I میں ہر نقطہ پر تفاعل فرق $h = f - g$ کا تفرق

$$h'(x) = f'(x) - h'(x) = 0$$

ہو گا۔ یوں ضمنی نتیجہ ۴.۱ کے تحت I پر $h(x) = C$ ہو گا۔ یوں $f(x) - g(x) = C$ یا $f(x) = g(x) + C$ ہو گا۔

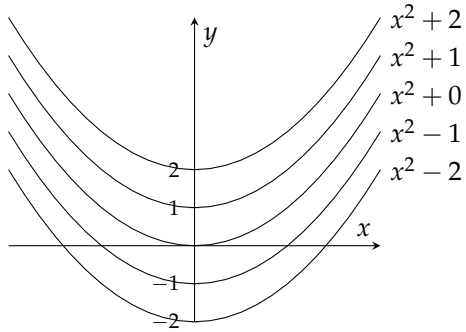
□

ضمنی نتیجہ ۴.۲ کہتا ہے کہ وقفہ پر دو تفاعل کے فرق کا تفرق صرف اس صورت صفر کے برابر ہو گا جب اس وقفہ پر ان تفاعل کا فرق ایک مستقل ہو۔ مثال کے طور پر ہم جانتے ہیں کہ $(-\infty, \infty)$ پر $f(x) = x^2$ کا تفرق $2x$ ہے۔ ایسا دوسرا تفاعل جس کا $(-\infty, \infty)$ پر تفرق $2x$ ہو کا کلیہ لازماً $x^2 + C$ ہو گا (شکل ۴.۲۰)۔

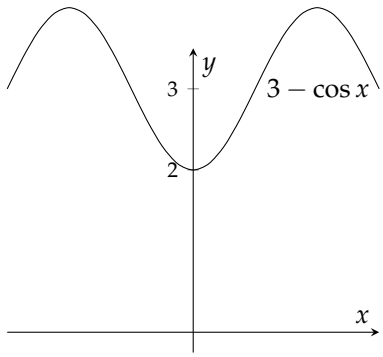
مثال ۴.۹: ایسا تفاعل $f(x)$ تلاش کریں جس کا تفرق $\sin x$ ہو اور جو نقطہ $(0, 2)$ سے گزرتا ہو۔
حل: چونکہ $g(x) = -\cos x$ کا تفرق بھی $\sin x$ ہے لہٰذا $f(x) = -\cos x + C$ ہو گا۔ دیا گیا نقطہ اس میں پُر کرتے ہوئے مستقل C حاصل کرتے ہیں۔

$$f(0) = -\cos(0) + C = 2 \quad \Longrightarrow \quad C = 3$$

یوں درکار تفاعل $f(x) = -\cos x + 3$ ہے (شکل ۴.۲۱)۔ □



شکل ۲۰.۴: ضمنی نتیجہ ۲.۴ کہتا ہے کہ ایک سے تفرق والے تفاعل میں صرف انتصابی فرق پایا جاتا ہے۔



شکل ۲۱.۴: ترسیم برائے مثال ۹.۴

۴۶۴۵ **اسراع سے سمتی رفتار اور ہٹاو کا حصول**

۴۶۴۶ سطح زمین کے قریب جہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے ساکن حال سے آزادانہ گرتے ہوئے جسم کی سمتی رفتار اور ہٹاو تلاش کرتے ہیں۔

۴۶۴۷ ہم جانتے ہیں کہ سمتی رفتار v ایسا تفاعل ہے جس کا تفرق 9.8 کے برابر ہے۔ ہم یہ جانتے ہیں کہ $g(t) = 9.8t$ کا تفرق 9.8 ہے لہٰذا ضمنی نتیجہ
۴۶۴۸ ۲.۴ کے تحت

$$v(t) = 9.8t + C$$

۴۶۴۹ ہو گا جہاں C مستقل ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر جسم ساکن ہو گا لہٰذا

$$v(0) = 9.8(0) + C \quad \Longrightarrow \quad C = 0$$

۴۶۵۰ ہو گا۔ یوں سمتی رفتار تفاعل $v(t) = 9.8t$ ہو گا۔ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ $h(t) = 4.9t^2$ کا تفرق $9.8t$ ہے لہٰذا ضمنی نتیجہ ۲.۴ کے تحت

$$s(t) = 4.9t^2 + C$$

۴۶۵۱ ہو گا جہاں C ایک مستقل ہے۔ چونکہ لمحہ $t = 0$ پر ہٹاو صفر ہے لہٰذا

$$s(0) = 4.9(0^2) + C = 0 \quad \Longrightarrow \quad C = 0$$

۴۶۵۲ یعنی $s(t) = 4.9t^2$ ہو گا۔

۴۶۵۳ کسی تفاعل کی شرح تبدیلی سے تفاعل حاصل کرنے کی صلاحیت، احصاء کی اہم ترین طاقت ہے۔ اس پر مزید بات اگلے باب میں کی جائے گی۔

۴۶۵۴ **بڑھتا تفاعل اور گھٹتا تفاعل**

۴۶۵۵ اس حصہ کے شروع میں ہم نے پوچھا کہ کس قسم کے تفاعل کا تفرق مثبت اور کس کا تفرق منفی ہو گا۔ مسئلہ اوسط قیمت کا تیسرا ضمنی نتیجہ جو اس کا جواب دیتا ہے
۴۶۵۶ کہتا ہے کہ بڑھتے ہوئے تفاعل کا تفرق مثبت اور گھٹتے ہوئے تفاعل کا تفرق منفی ہو گا۔

تعریف: فرض کریں وقفہ I پر تفاعل f معین ہے اور اس وقفہ پر x_1 اور x_2 کوئی دو نقطے ہیں۔

۱. اگر $x_1 < x_2$ کی صورت میں $f(x_1) < f(x_2)$ ہو تب I پر f **بڑھتا**[6] تفاعل کہلاتا ہے۔

۲. اگر $x_1 < x_2$ کی صورت میں $f(x_1) > f(x_2)$ ہو تب I پر f **گھٹتا**[7] تفاعل کہلاتا ہے۔

□

ضمنی نتیجہ ۴.۳: بڑھتے اور گھٹتے تفاعل کی پہلی تفرقی پرکھ

فرض کریں $[a,b]$ پر f استمراری اور (a,b) پر f قابل تفرق ہے۔

- اگر (a,b) کے ہر نقطہ پر $f' > 0$ ہو تب $[a,b]$ پر f بڑھتا ہے۔
- اگر (a,b) کے ہر نقطہ پر $f' < 0$ ہو تب $[a,b]$ پر f گھٹتا ہے۔

ثبوت ضمنی نتیجہ: فرض کریں $[a,b]$ میں x_1 اور x_2 کوئی دو نقطے ہیں جہاں $x_1 < x_2$ ہے۔ وقفہ $[x_1,x_2]$ پر مسئلہ اوسط قیمت تفاعل f کے لئے کہتا ہے کہ

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \tag{۴}$$

ہو گا جہاں x_1 اور x_2 کے بیچ c ایک موزوں نقطہ ہے۔ چونکہ $x_2 - x_1$ مثبت قیمت ہے لہٰذا مساوات ۴ کے دائیں ہاتھ کی علامت وہی ہو گی جو $f'(c)$ کی ہے۔ یوں (a,b) پر مثبت $f'(c)$ کی صورت میں $f(x_2) > f(x_1)$ ہو گا جبکہ (a,b) پر منفی $f'(c)$ کی صورت میں $f(x_1) < f(x_2)$ ہو گا۔

□

مثال ۴.۱۰: وقفہ $(-\infty,0)$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کا تفرق $f'(x) = 2x < 0$ ہے لہٰذا اس وقفے پر f گھٹے گا۔ وقفہ $(0,\infty)$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کا تفرق $f'(x) = 2x > 0$ ہے لہٰذا اس وقفے پر f بڑھے گا (شکل ۴.۲۲)۔ □

سوالات

مسئلہ اوسط قیمت میں c کی تلاش

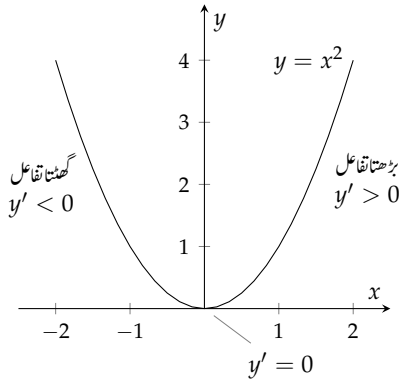
سوال ۴.۴۱ تا سوال ۴.۴۴ میں دیے وقفہ اور تفاعل کے لئے c کی ایسی قیمت تلاش کریں جو مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

کو مطمئن کرتی ہو۔

---

[6] increasing
[7] decreasing



شکل ۴.۲۲: ترسیم برائے مثال ۴.۱۰

سوال ۴.۴۱: $f(x) = x^2 + 2x - 1, \quad [0, 1]$

سوال ۴.۴۲: $f(x) = x^{2/3}, \quad [0, 1]$

سوال ۴.۴۳: $f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad [\frac{1}{2}, 2]$

سوال ۴.۴۴: $f(x) = \sqrt{x - 1}, \quad [1, 3]$

قیاس کی پرکھ اور استعمال

سوال ۴.۴۵ تا سوال ۴.۴۸ میں کون سے تفاعل دیے وقفہ پر مسئلہ اوسط قیمت کے قیاس کو مطمئن کرتے ہیں اور کون سے تفاعل ایسا نہیں کرتے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۴۵: $f(x) = x^{2/3}, \quad [-1, 8]$

سوال ۴.۴۶: $f(x) = x^{4/5}, \quad [0, 1]$

سوال ۴.۴۷: $f(x) = \sqrt{x(1 - x)}, \quad [0, 1]$

سوال ۴.۴۸:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & -\pi \leq x < 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

سوال ۴.۴۹: درج ذیل تفاعل $x = 0$ اور $x = 1$ پر صفر کے برابر اور $(0, 1)$ پر قابل تفرق ہے لیکن (a, b) پر اس کا تفرق کبھی بھی صفر نہیں۔

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

ایسا کیوں ممکن ہے؟ کیا مسئلہ رول نہیں کہتا کہ $(0, 1)$ پر کہیں نا کہیں تفرق صفر ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۵۰: وقفہ $[0,2]$ پر a ، m ،اور b کی کون سی قیمتوں کے لئے درج ذیل تفاعل مسئلہ اوسط قیمت کے قیاس کو مطمئن کرتا ہے؟

$$f(x) = \begin{cases} 3, & x = 0 \\ -x^2 + 3x + a, & 0 < x < 1 \\ mx + b, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

جذر (صفر)

سوال ۴.۵۱:

ا. باری باری درج ذیل کثیر رکنیوں کے صفر کو ایک لکیر پر ترسیم کریں۔ ساتھ ہی ان کے یک رتبی تفرق کے صفر بھی ترسیم کریں۔

ا. $y = x^2 - 4$

۲. $y = x^2 + 8x + 15$

۳. $y = x^3 - 3x^2 + 4 = (x+1)(x-2)^2$

۴. $y = x^3 - 33x^2 + 216x = x(x-9)(x-24)$

ب. مسئلہ رول کی مدد سے ثابت کریں کہ $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ کے ہر دو صفر کے بیچ $nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$ کا ایک صفر پایا جاتا ہے۔

سوال ۴.۵۲: فرض کریں وقفہ $[a,b]$ میں f''' استمراری ہے اور اس وقفہ پر f کے تین صفر پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ اس وقفہ پر f'' کا کم سے کم ایک صفر پایا جائے گا۔ اس نتیجہ کو عمومی بنائیں۔

سوال ۴.۵۳: دکھائیں کہ اگر پورے $[a,b]$ پر $f'' > 0$ ہو تب $[a,b]$ میں f' کا زیادہ سے زیادہ ایک صفر پایا جائے گا۔ اگر $[a,b]$ پر $f'' < 0$ ہو تب کیا ہو گا؟

سوال ۴.۵۴: دکھائیں کہ کعبی کثیر رکنی کے صفروں کی زیادہ سے زیادہ تعداد تین ممکن ہے۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۴.۵۵: دکھائیں کہ دو گھنٹوں کے سفر میں کسی لمحے پر گاڑی کا رفتار پیما ضرور دو گھنٹوں کی اوسط رفتار دکھائے گا۔

سوال ۴.۵۶: تبدیلی درجہ حرارت برف سے حرارت پیما کو نکال کر ابلتے ہوئے پانی میں رکھنے سے اس کا درجہ حرارت 14 سیکنڈوں میں $-19\,^\circ\mathrm{C}$ سے بڑھ کر $100\,^\circ\mathrm{C}$ ہو جاتا ہے۔ دکھائیں کہ اس دوران درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح کسی ایک لمحے پر ضرور $8.5\,^\circ\mathrm{C\,s^{-1}}$ ہو گی۔

سوال ۴.۵۷: فرض کریں وقفہ $[0,1]$ پر قابل تفرق تفاعل f کا تفرق کبھی صفر نہیں ہوتا۔ دکھائیں کہ $f(0 \neq f(1)$ ہو گا۔

سوال ۴.۵۸: دکھائیں a اور b کی کسی بھی قیمتوں کے لئے $|\sin b - \sin a| \leq |b - a|$ ہو گا۔

سوال ۴.۵۹: فرض کریں $[a,b]$ پر f قابل تفرق ہے اور $f(b) < f(a)$ ہے۔ کیا $[a,b]$ پر f' کی قیمت کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟

سوال ۴.۶۰: فرض کریں $[a,b]$ پر f اور g قابل تفرق ہیں اور $f(a)=g(a)$ اور $f(b)=g(b)$ ہیں۔ دکھائیں کہ a اور b کے بیچ کم سے کم ایسا ایک نقطہ پایا جاتا ہے جہاں f اور g کی ترسیمات کے مماس آپس میں متوازی ہیں۔

سوال ۴.۶۱: فرض کریں x کی ہر قیمت کے لئے f قابل تفرق ہے۔ مزید فرض کریں کہ $f(1)=1$ ہے اور $(-\infty,1)$ پر $f'<0$ ہے اور $(1,\infty)$ پر $f'>0$ ہے۔

ا. دکھائیں کہ تمام x پر $f(x)\geq 1$ ہوگا۔

ب. کیا $f'(1)=0$ لازماً ہوگا؟ وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۶۲: فرض کریں $f(x)=px^2+qx+r$ بند وقفہ $[a,b]$ پر معین ہے۔ دکھائیں کہ (a,b) میں ٹھیک ایک نقطہ c پر f مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجے پر پورا اترتا ہے۔

سوال ۴.۶۳: حیرت کن ترسیم درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x)=\sin x\sin(x+2)-\sin^2(x+1)$$

یہ ترسیم کیا کرتی ہے؟ یہ تفاعل اس طرح کا رویہ کیوں رکھتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۶۴: اگر دو تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی ترسیمات مستوی میں ایک ہی نقطہ سے شروع ہوتے ہوں اور ہر نقطہ پر ان کی شرح تبدیلی ایک سی ہو تب کیا یہ تفاعل بالکل ایک سے نہیں ہوں گے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۶۵:

ا. دکھائیں کہ تفاعل $g(x)=\frac{1}{x}$ اپنے دائرہ کار کے ہر وقفہ میں گھٹتا ہے۔

ب. اگر جزو (ا) کا نتیجہ درست ہو تب $g(1)=1$ کس طرح $g(-1)=-1$ سے بڑا ہو سکتا ہے؟

سوال ۴.۶۶: فرض کریں وقفہ $[a,b]$ میں تفاعل f معین ہے۔ درج ذیل کو مطمئن کرنے کی خاطر f پر کون سے شرائط لاگو کرنے ہوں گے

$$f'\text{ اقل}\leq\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leq f'\text{ اعظم}$$

جہاں اقل f' اور اعظم f' سے مراد $[a,b]$ پر بالترتیب f' کی اقل اور اعظم قیمت ہے۔

سوال ۴.۶۷: اگر $f'(x)=1/(1+x^4\cos x)$ پر $0\leq x\leq 0.1$ ہو اور $f(0)=1$ ہو تب سوال ۴.۶۶ کی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے $f(0.1)$ کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۴.۶۸: اگر $f'(x)=1/(1-x^4)$ پر $0\leq x\leq 0.1$ اور $f(0)=2$ ہو تب سوال ۴.۶۶ کی عدم مساوات استعمال کرتے ہوئے $f(0.1)$ کی تخمینی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۴.۶۹: ہندسی اوسط۔ دو مثبت اعداد a اور b کے **ہندسی اوسط**[8] سے مراد عدد $\sqrt{ab}$ ہے۔ دکھائیں کہ مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ میں مثبت اعداد کے وقفہ $[a,b]$ پر تفاعل $f(x)=\frac{1}{x}$ کے لئے c کی قیمت $\sqrt{ab}$ ہے۔

---

[8] geometricmean

سوال ۴.۷۰: حسابی اوسط۔ دو اعداد a اور b کا **حسابی اوسط**[9] $\frac{a+b}{2}$ ہے۔ دکھائیں کہ مسئلہ اوسط قیمت میں وقفہ $[a,b]$ پر تفاعل $f(x) = x^2$ کے لئے c کی قیمت $\frac{a+b}{2}$ ہو گی۔

تفرق سے تفاعل کا حصول

سوال ۴.۷۱: فرض کریں $f(-1) = 3$ اور تمام x کے لئے $f'(x) = 0$ ہے۔ کیا تمام x کے لئے $f(x) = 3$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۷۲: فرض کریں $f(0) = 5$ اور تمام x کے لئے $f'(x) = 2$ ہیں۔ کیا تمام x کے لئے $f(x) = 2x + 5$ ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۷۳: فرض کریں تمام x کے لئے $f'(0) = 2x$ ہے۔ درج ذیل صورتوں میں $f(2)$ تلاش کریں۔

ا. $f(0) = 0$ ب. $f(1) = 0$ ج. $f(-2) = 3$

سوال ۴.۷۴: جن تفاعل کا تفرق مستقل ہو ان کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۷۵ تا سوال ۴.۸۰ میں وہ تفاعل تلاش کریں جس کا تفرق دیا گیا ہے۔

سوال ۴.۷۵: (ا) $y' = x$، (ب) $y' = x^2$، (ج) $y' = x^3$

سوال ۴.۷۶: (ا) $y' = 2x$، (ب) $y' = 2x - 1$، (ج) $y' = 3x^2 + 2x - 1$

سوال ۴.۷۷: (ا) $y' = -\frac{1}{x^2}$، (ب) $y' = 1 - \frac{1}{x^2}$، (ج) $y' = 5 + \frac{1}{x^2}$

سوال ۴.۷۸: (ا) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$، (ب) $y' = \frac{1}{\sqrt{x}}$، (ج) $y' = 4x - \frac{1}{\sqrt{x}}$

سوال ۴.۷۹: (ا) $y' = \sin 2t$، (ب) $y' = \cos\frac{t}{2}$، (ج) $y' = \sin 2t + \cos\frac{t}{2}$

سوال ۴.۸۰: (ا) $y' = \sec^2\theta$، (ب) $y' = \sqrt{\theta}$، (ج) $y' = \sqrt{\theta} - \sec^2\theta$

سوال ۴.۸۱ تا سوال ۴.۸۴ میں وہ تفاعل تلاش کریں جس کا تفرق دیا گیا ہے اور جو دیے گئے نقطہ سے گزرتا ہے۔

سوال ۴.۸۱: $f'(x) = 2x - 1, \quad N(0,0)$

سوال ۴.۸۲: $g'(x) = \frac{1}{x^2} + 2x, \quad N(-1,1)$

سوال ۴.۸۳: $r'(\theta) = 8 - \csc^2\theta, \quad N(\frac{\pi}{4},0)$

سوال ۴.۸۴: $r'(t) = \sec t\tan t - 1, \quad N(0,0)$

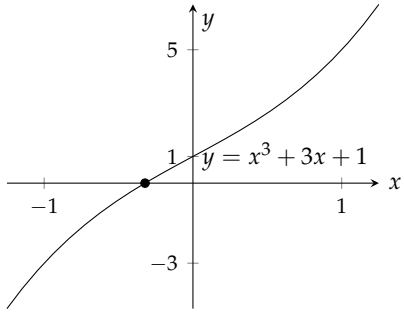
صفروں کی گنتی

مساوات $f(x) = 0$ کو اعدادی طریقہ سے حل کرنے سے پہلے ہم عموماً مطلوبہ وقفہ پر مساوات کے متوقع صفروں کی تعداد جاننا چاہتے ہیں۔ بعض اوقات ضمنی نتیجہ ۴.۳ کی مدد سے ایسا کرنا ممکن ہو گا۔

درج ذیل فرض کریں۔

---

[9] arithmeticmean



شکل ۴.۲۳: کثیر رکنی $y = x^3 + 3x + 1$ کا واحد صفر دکھایا گیا ہے۔

۴۷۶۶ ۱. $[a, b]$ پر f استمراری اور (a, b) پر قابل تفرق ہے۔

۴۷۶۷ ۲. $f(a)$ اور $f(b)$ کی علامتیں ایک دوسرے کی الٹ ہیں۔

۴۷۶۸ ۳. پورے (a, b) پر $f' > 0$ اور یا پورے (a, b) پر $f' < 0$ ہے۔

۴۷۶۹ تب a اور b کے بیچ f کا ٹھیک ایک صفر پایا جائے گا۔ چونکہ یہ پورے $[a, b]$ پر بڑھ رہا ہے اور یا پورے $[a, b]$ پر گھٹ رہا ہے لہٰذا
۴۷۷۰ یہ x محور کو ایک ہی مرتبہ قطع کر سکتا ہے۔ اس کے باوجود مسئلہ ۲.۹ کے تحت اس کا کم سے کم ایک صفر ہو گا۔ مثال کے طور پر $[-1, 1]$ پر
۴۷۷۱ $f(x) = x^3 + 3x + 1$ قابل تفرق ہے، $f(-1) = -3$ اور $f(1) = 5$ کی علامتیں ایک دوسرے کی الٹ ہیں،
۴۷۷۲ اور تمام x کے لئے $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ ہے لہٰذا $[-1, 1]$ پر f کا ٹھیک ایک صفر پایا جاتا ہے (شکل ۴.۲۳)۔

۴۷۷۳ سوال ۴.۸۵ تا سوال ۴.۹۲ میں دکھائیں کہ دیے گئے وقفہ پر تفاعل کا صرف ایک صفر پایا جاتا ہے۔

۴۷۷۴ سوال ۴.۸۵: $f(x) = x^4 + 3x + 1, \quad [-2, -1]$

۴۷۷۵ سوال ۴.۸۶: $f(x) = x^3 + \frac{4}{x^2} + 7, \quad (-\infty, 0)$

۴۷۷۶ سوال ۴.۸۷: $g(t) = \sqrt{t} + \sqrt{1+t} - 4, \quad (0, \infty)$

۴۷۷۷ سوال ۴.۸۸: $g(t) = \frac{1}{1-t} + \sqrt{1+t} - 3, \quad (-1, 1)$

۴۷۷۸ سوال ۴.۸۹: $r(\theta) = \theta + \sin^2(\frac{\theta}{3}) - 8, \quad (-\infty, \infty)$

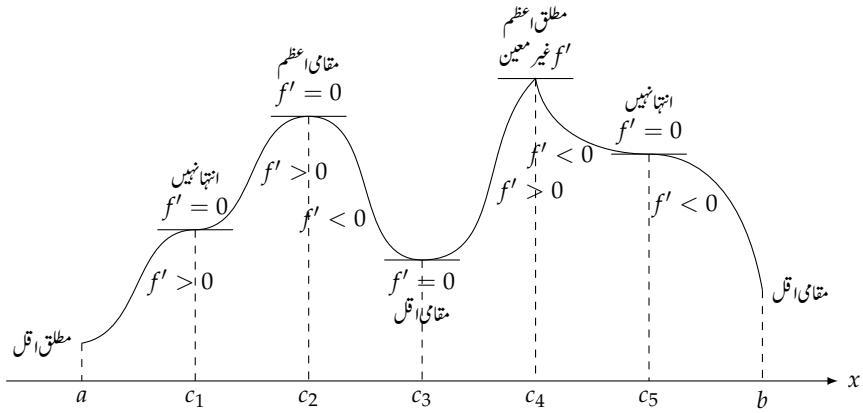
۴۷۷۹ سوال ۴.۹۰: $r(\theta) = 2\theta - \cos^2\theta + \sqrt{2}, \quad (-\infty, \infty)$

۴۷۸۰ سوال ۴.۹۱: $r(\theta) = \sec\theta - \frac{1}{\theta^3} + 5, \quad (0, \frac{\pi}{2})$

۴۷۸۱ سوال ۴.۹۲: $r(\theta) = \tan\theta - \cot\theta - \theta, \quad (0, \frac{\pi}{2})$

۴۷۸۲ **کمپیوٹر کا استعمال**

۴۷۸۳ سوال ۴.۹۳:



شکل ۴.۲۴: بعض نقطہ فاصل پر مقامی انتہا پائی جاتی ہے اور بعض پر نہیں۔

۴۷۸۴ ا. ایسی کثیر رکنی $f(x)$ تشکیل دیں جس کے صفر $x = -2, -1, 0, 1, 2$ پر پائے جاتے ہوں۔

۴۷۸۵ ب. $f(x)$ اور $f'(x)$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ آپ کو کیا خوبی نظر آتی ہے۔

۴۷۸۶ ج. کیا $g(x) = \sin x$ اور اس کا تفرق $g'(x)$ بھی ایسی خوبی رکھتے ہیں؟

۴۷۸۷

۴۷۸۸

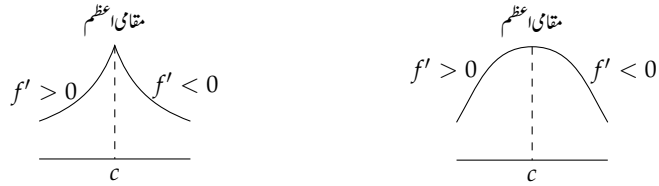
۴۷۸۹ ۴.۳ مقامی انتہائی قیمتوں کی یک رتبی تفرقی پرکھ

۴۷۹۰ اس حصے میں مقامی انتہائی قیمت کی موجودگی کے لئے تفاعل کے نقطہ فاصل کو پرکھنا دکھایا جائے گا۔

۴۷۹۱ پرکھ

۴۷۹۲ جیسا شکل ۴.۲۴ میں دکھایا گیا ہے تفاعل f کے بعض نقطہ فاصل پر تفاعل کی مقامی انتہا پائی جائے گی اور بعض پر نہیں۔ یہ راز نقطہ کے بالکل قریب f' کی
۴۷۹۳ علامت میں پوشیدہ ہے۔ جیسا جیسا x بائیں سے دائیں رخ بڑھتا ہے f کی قیمت وہاں بڑھتی ہے جہاں $f' > 0$ ہو اور f کی قیمت وہاں گھٹتی ہے جہاں
۴۷۹۴ $f' < 0$ ہو۔

۴۷۹۵ آپ (شکل ۴.۲۴ سے) دیکھ سکتے ہیں کہ جن نقطوں پر f کی قیمت اقل ہو، نقطہ کے قریبی بائیں وقفے پر $f' < 0$ جبکہ نقطہ کے قریبی دائیں وقفے پر
۴۷۹۶ $f' > 0$ ہو گا۔ (آخری نقطہ کی صورت میں نقطہ کے صرف ایک طرف پر f' کی قیمت دیکھی جا سکتی ہے۔) یوں مقامی اقل قیمت کے بالکل بائیں تفاعل کی
۴۷۹۷ قیمت گھٹتی ہے (یعنی ترسیم نیچے گرتی ہے) جبکہ اس نقطہ کے بالکل دائیں تفاعل کی قیمت بڑھتی ہے (یعنی ترسیم اوپر اٹھتی ہے)۔ اسی طرح مقامی اعظم نقطہ پر نقطہ
۴۷۹۸ کے قریبی بائیں وقفے پر $f' > 0$ جبکہ نقطہ کے قریبی دائیں وقفے پر $f' < 0$ ہو گا۔ یوں اس نقطہ کے بالکل بائیں تفاعل کی قیمت بڑھتی ہے (یعنی ترسیم



(ب) $f'(c)$ غیر معین (ا) $f'(c) = 0$

شکل ۴.۲۵: پرکھ برائے مقامی اعظم قیمت۔

۴۷۹۹ اوپر اٹھتی ہے) جبکہ اس نقطہ کے بالکل دائیں تفاعل کی قیمت گھٹتی ہے (یعنی ترسیم نیچے گرتی ہے)۔

۴۸۰۰ اس مشاہدہ سے مقامی انتہائی قیمت کی موجودگی کی پرکھ حاصل ہوتی ہے۔

۴۸۰۱ مسئلہ ۴.۵: **مقامی انتہائی قیمت کی یک رتبی تفرقی پرکھ**

۴۸۰۲ درج ذیل پرکھ استمراری تفاعل $f(x)$ کے لئے ہیں۔

۴۸۰۳ **نقطہ فاصلہ c پر:**

۴۸۰۴ ۱. اگر c پر f' کی علامت مثبت سے تبدیل ہو کر منفی ہو جائے ($x < c$ پر $f' > 0$ اور $x > c$ پر $f' < 0$) تب c پر f کی
۴۸۰۵ مقامی قیمت اعظم ہو گی (شکل ۴.۲۵)۔

۴۸۰۶ ۲. اگر c پر f' کی علامت منفی سے تبدیل ہو کر مثبت ہو جائے ($x < c$ پر $f' < 0$ اور $x > c$ پر $f' > 0$) تب c پر f کی
۴۸۰۷ مقامی قیمت اقل ہو گی (شکل ۴.۲۶)۔

۴۸۰۸ ۳. اگر c پر f' کی علامت تبدیل نہ ہو (c کے دونوں اطراف f' کی علامت ایک سی ہے) تب c پر f کی انتہائی قیمت نہیں پائی جاتی (شکل
۴۸۰۹ ۴.۲۷)۔

۴۸۱۰ **بائیں آخری نقطہ a پر:**

۴۸۱۱ اگر $x > a$ پر $f' < 0$ ($f' > 0$) ہو تب a پر f کا مقامی اعظم (مقامی اقل) نقطہ پایا جائے گا (شکل ۴.۲۸-ا،ب)۔

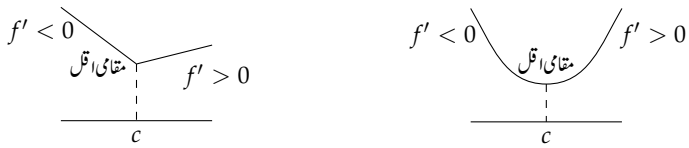
۴۸۱۲ **دائیں آخری نقطہ b پر:**

۴۸۱۳ اگر $x < b$ پر $f' < 0$ ($f' > 0$) ہو تب b پر f کا مقامی اقل (مقامی اعظم) نقطہ پایا جائے گا (شکل ۴.۲۸-ج،د)۔

۴۸۱۴

۴۸۱۵ مثال ۴.۱۱: درج ذیل تفاعل کے نقاط فاصل تلاش کریں۔

$$f(x) = x^{1/3}(x-4) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$

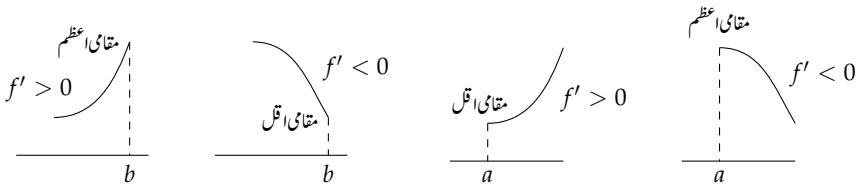


(ب) $f'(c)$ غیر معین (ا) $f'(c) = 0$

شکل ۴.۲۶: پرکھ برائے مقامی اقل قیمت۔

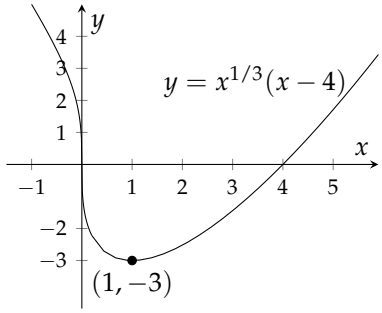
(ب) $f'(c)$ غیر معین (ا) $f'(c) = 0$

شکل ۴.۲۷: پرکھ برائے غیر موجودگی انتہا قیمت۔



(د) (ج) (ب) (ا)

شکل ۴.۲۸: پرکھ برائے بائیں اور دائیں نقطوں پر نقطہ انتہا۔



شکل ۴.۲۹: ترسیم برائے مثال ۴.۱۱

۴۸۱۶ ان وقفوں کی نشاندہی کریں جن پر f بڑھتا ہے اور جن پر f گھٹتا ہے۔ تفاعل کی مقامی اور مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

۴۸۱۷ حل: تفاعل تمام حقیقی اعداد کے لئے معین اور استمراری ہے (شکل ۴.۲۹)۔ یک رتبی تفرق

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{4/3} - 4x^{1/3}) = \frac{4}{3}x^{1/3} - \frac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \frac{4}{3}x^{-2/3}(x-1) = \frac{4(x-1)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

۴۸۱۸ ہے جو $x = 1$ پر صفر اور $x = 0$ پر غیر معین ہے۔ f کے دائرہ کار میں کوئی آخری نقطہ نہیں پایا جاتا لہٰذا نقاط فاصل $x = 0$ اور $x = 1$ وہ

۴۸۱۹ نقطے ہیں جہاں تفاعل کی انتہا قیمتیں ممکن ہیں۔

۴۸۲۰ یہ نقاط فاصل x محور کو ایسے حصوں میں تقسیم کرتے ہیں جن پر f' مثبت اور یا منفی ہے۔ نقطہ فاصل کے دونوں اطراف f کی علامتوں کو دیکھ کر ہم انتہا نقطہ

۴۸۲۱ کی نوعیت جان سکتے ہیں۔ وقفہ $(-\infty, 0)$ پر f گھٹتا ہے، وقفہ $(0, 1)$ پر گھٹتا اور وقفہ $(1, \infty)$ پر بڑھتا ہے۔ مسئلہ ۴.۵ کے تحت $x = 0$

۴۸۲۲ (جہاں f' کی علامت تبدیل نہیں ہوتی) پر کوئی انتہا نقطہ نہیں پایا جاتا جبکہ $x = 1$ (جہاں f' کی علامت منفی سے مثبت ہوتی ہے) پر مقامی اقل نقطہ پایا

۴۸۲۳ جائے گا (شکل ۴.۳۰)۔

۴۸۲۴ مقامی اقل قیمت $f(1) = 1^{1/3}(1-4) = -3$ ہے جو تفاعل کی مطلق اقل قیمت بھی ہے۔ □

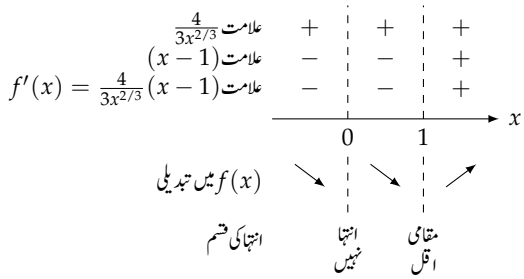
۴۸۲۵ مثال ۴.۱۲: درج ذیل کے لئے وہ وقفے تلاش کریں جہاں f گھٹتا ہو اور جہاں f بڑھتا ہو۔

$$g(x) = -x^3 + 12x + 5, \quad -3 \le x \le 3$$

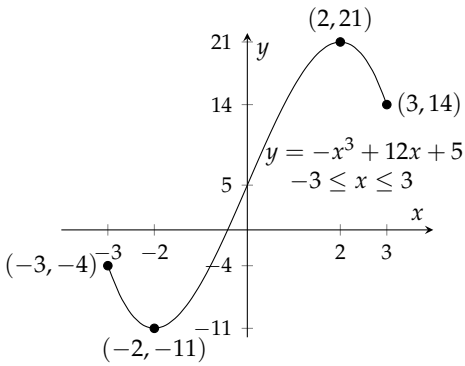
۴۸۲۶ تفاعل کی انتہا قیمتیں کیا ہیں اور کن نقطوں پر پائی جاتی ہیں؟

۴۸۲۷ حل: تفاعل اپنے دائرہ کار $[-3, 3]$ پر استمراری ہے (شکل ۴.۳۱)۔ اس کا یک رتبی تفرق

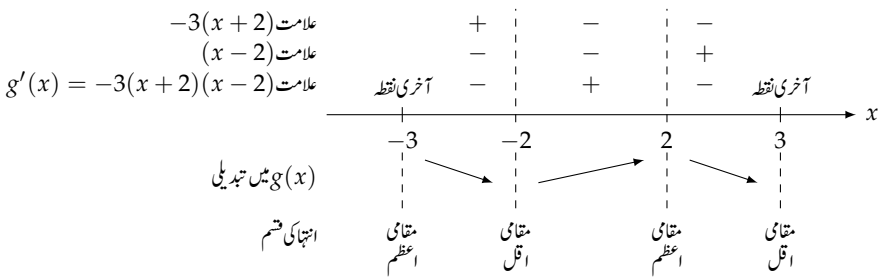
$$g'(x) = -3x^2 + 12 = -3(x^2 - 4) = -3(x+2)(x-2)$$



شکل ۴.۳۰: ترسیم برائے مثال ۴.۱۱



شکل ۴.۳۱: ترسیم برائے مثال ۴.۱۲



شکل ۴.۳۲: تفرق کی علامتوں سے تفاعل کا رویہ (مثال ۴.۱۲)

وقفہ $[-3,3]$ کے تمام نقطوں پر معین ہے، اور اس کی قیمت نقطہ $x = -2$ اور $x = 2$ پر صفر ہے۔ نقطہ فاصل دائرہ کار کو ان خطوں میں تقسیم کرتا ہے جن میں g' کی قیمت منفی یا مثبت ہے (شکل ۴.۳۲)۔ ہم g' کی علامتوں کو دیکھ کر مسئلہ ۴.۵ کی مدد سے تفاعل کا تجزیہ کرتے ہیں۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $x = -3$ اور $x = 2$ پر مقامی اعظم قیمتیں پائی جاتی ہیں جبکہ $x = -2$ اور $x = 3$ پر مقامی اقل قیمتیں پائی جاتی ہیں۔ ان نقطوں پر تفاعل $g(x) = -x^3 + 12x + 5$ کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$g(-3) = -4, \quad g(2) = 21 \qquad \text{مقامی اعظم}$$
$$g(-2) = -11, \quad g(3) = 14 \qquad \text{مقامی اقل}$$

چونکہ بند وقفہ پر تفاعل معین ہے لہٰذا $g(-2)$ مطلق اقل اور $g(2)$ مطلق اعظم قیمت ہے۔ □

سوالات

f' کی مدد سے f کا تجزیہ

سوال ۴.۹۴ تا سوال ۴.۱۰۱ میں تفاعل کا تفرق دیا گیا ہے۔ درج ذیل سوالات کے جواب دیں۔

ا. f کے نقاط فاصل کیا ہیں؟

ب. f کس وقفے پر بڑھتا اور کس وقفے پر گھٹتا ہے؟

ج. کن نقطوں پر تفاعل کی مقامی اقل قیمت یا مقامی اعظم قیمت پائی جاتی ہے؟

سوال ۴.۹۴: $f'(x) = x(x-1)$

سوال ۴.۹۵: $f'(x) = (x-1)(x+2)$

سوال ۴.۹۶: $f'(x) = (x-1)^2(x+2)$

سوال ۴.۹۷: $f'(x) = (x-1)^2(x+2)^2$

سوال ۴.۹۸: $f'(x) = (x-1)(x+2)(x-3)$

سوال ۴.۹۹: $f'(x) = (x-7)(x+1)(x+5)$

سوال ۴.۱۰۰: $f'(x) = x^{-1/3}(x+2)$

سوال ۴.۱۰۱: $f'(x) = x^{-1/2}(x-3)$

دیے گئے تفاعل کی انتہا

سوال ۴.۱۰۲ تا سوال ۴.۱۲۱ میں درج ذیل کریں۔

ا. وہ وقفے تلاش کریں جن پر تفاعل بڑھتا ہو اور وہ جن پر تفاعل گھٹتا ہو۔

ب. تفاعل کے مقامی انتہائی قیمتوں کی نشاندہی کریں اور جن نقطوں پر ایسا ہو ان کی بھی نشاندہی کریں۔

۴۸۵۱ ج. ان میں سے کون سی مطلق انتہائی قیمتیں ہیں (اگر ایسا ہو)؟

۴۸۵۲ سوال ۴.۱۰۲: $g(t) = -t^2 - 3t + 3$

۴۸۵۳ سوال ۴.۱۰۳: $g(t) = -3t^2 + 9t + 5$

۴۸۵۴ سوال ۴.۱۰۴: $h(x) = -x^3 + 2x^2$

۴۸۵۵ سوال ۴.۱۰۵: $h(x) = 2x^3 - 18x$

۴۸۵۶ سوال ۴.۱۰۶: $f(\theta) = 3\theta^2 - 4\theta^3$

۴۸۵۷ سوال ۴.۱۰۷: $f(\theta) = 6\theta - \theta^3$

۴۸۵۸ سوال ۴.۱۰۸: $f(r) = 3r^3 + 16r$

۴۸۵۹ سوال ۴.۱۰۹: $h(r) = (r+7)^3$

۴۸۶۰ سوال ۴.۱۱۰: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 16$

۴۸۶۱ سوال ۴.۱۱۱: $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$

۴۸۶۲ سوال ۴.۱۱۲: $H(t) = \frac{3}{2}t^4 - t^6$

۴۸۶۳ سوال ۴.۱۱۳: $K(t) = 15t^3 - t^5$

۴۸۶۴ سوال ۴.۱۱۴: $g(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

۴۸۶۵ سوال ۴.۱۱۵: $g(x) = x^2\sqrt{5 - x}$

۴۸۶۶ سوال ۴.۱۱۶: $f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}, \quad x \neq 2$

۴۸۶۷ سوال ۴.۱۱۷: $f(x) = \frac{x^3}{3x^2+1}$

۴۸۶۸ سوال ۴.۱۱۸: $f(x) = x^{1/3}(x+8)$

۴۸۶۹ سوال ۴.۱۱۹: $g(x) = x^{2/3}(x+5)$

۴۸۷۰ سوال ۴.۱۲۰: $h(x) = x^{1/3}(x^2-4)$

۴۸۷۱ سوال ۴.۱۲۱: $k(x) = x^{2/3}(x^2-4)$

۴۸۷۲ نصف کھلے وقفوں پر تفاعل کی انتہا

۴۸۷۳ سوال ۴.۱۲۲ تا سوال ۴.۱۲۹ میں درج ذیل کریں۔

۴۸۷۴ ا. دیے گئے وقفہ میں تفاعل کی مقامی انتہا تلاش کریں۔ ان نقطوں کی بھی نشاندہی کریں جہاں انتہا پائی جاتی ہو۔

۴۸۷۵ ب. کون سی انتہا مطلق ہیں (اگر ہوں)۔

۴۸۷۶ ج. کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے اپنے جوابات کی تصدیق کریں۔

۴۸۷۷ سوال ۴.۱۲۲: $f(x) = 2x - x^2, \quad -\infty < x \leq 2$

۴۸۷۸ سوال ۴.۱۲۳: $f(x) = (x+1)^2, \quad -\infty < x \leq 0$

۴۸۷۹ سوال ۴.۱۲۴: $g(x) = x^2 - 4x + 4, \quad 1 \leq x < \infty$

۴۸۸۰ سوال ۴.۱۲۵: $g(x) = -x^2 - 6x - 9, \quad -4 \leq x < \infty$

۴۸۸۱ سوال ۴.۱۲۶: $f(t) = 12t - t^3, \quad -3 \leq t < \infty$

۴۸۸۲ سوال ۴.۱۲۷: $f(t) = t^3 - 3t^2, \quad -\infty < t \leq 3$

۴۸۸۳ سوال ۴.۱۲۸: $h(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x, \quad 0 \leq x < \infty$

۴۸۸۴ سوال ۴.۱۲۹: $k(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, \quad -\infty < x \leq 0$

۴۸۸۵ **کمپیوٹر کا استعمال**

۴۸۸۶ سوال ۴.۱۳۰ تا سوال ۴.۱۳۳ میں درج ذیل کریں۔

۴۸۸۷ ا. دیے وقفے پر مقامی انتہا تلاش کریں اور اس نقطے کی نشاندہی کریں جس پر انتہا پائی جاتی ہو۔

۴۸۸۸ ب. تفاعل اور تفاعل کے تفرق کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f پر تبصرہ کریں۔

۴۸۸۹ سوال ۴.۱۳۰: $f(x) = \frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2}, \quad 0 \leq x \leq 2\pi$

۴۸۹۰ سوال ۴.۱۳۱: $f(x) = -2\cos x - \cos^2 x, \quad -\pi \leq x \leq \pi$

۴۸۹۱ سوال ۴.۱۳۲: $f(x) = \csc^2 x - 2\cot x, \quad 0 < x < \pi$

۴۸۹۲ سوال ۴.۱۳۳: $f(x) = \sec^2 x - 2\tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

۴۸۹۳ **نظریہ اور مثالیں**

۴۸۹۴ دکھائیں کہ سوال ۴.۱۳۴ اور سوال ۴.۱۳۵ میں دیے گئے θ پر مقامی انتہا پائی جاتی ہے۔ انتہا کی قسم دریافت کریں۔

۴۸۹۵ سوال ۴.۱۳۴: $h(\theta) = 3\cos\frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \theta = 0, 2\pi$

۴۸۹۶ سوال ۴.۱۳۵: $h(\theta) = 5\sin\frac{\theta}{2}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad \theta = 0, \pi$

۴۸۹۷ سوال ۴.۱۳۶: قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ نقطہ $(1,1)$ سے گزرتا ہے اور $f'(1) = 0$ ہے۔ درج ذیل پر پورا اترتا ہوا اس تفاعل کا

۴۸۹۸ خاکہ کھینچیں۔

۴۸۹۹ ا. $x < 1$ کے لئے $f'(x) > 0$ ہے اور $x > 1$ کے لئے $f'(x) < 0$ ہے۔

۴۹۰۰ ب. $x < 1$ کے لئے $f'(x) < 0$ ہے اور $x > 1$ کے لئے $f'(x) > 0$ ہے۔

۴۹۰۱ ج. $x \neq 1$ کے لئے $f'(x) > 0$ ہے۔

۴۹۰۲ د. $x \neq 1$ کے لئے $f'(x) < 0$ ہے

۴۹۰۳ سوال ۴.۱۳۷: قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ جو درج ذیل پر پورا اترتا ہے کا خاکہ بنائیں۔

ا. $(1,1)$ پر مقامی اقل قیمت اور $(3,3)$ پر مقامی اعظم قیمت ہے۔

ب. $(1,1)$ پر مقامی اعظم قیمت اور $(3,3)$ پر مقامی اقل قیمت ہے۔

ج. $(1,1)$ اور $(3,3)$ پر مقامی اعظم قیمتیں ہیں۔

د. $(1,1)$ اور $(3,3)$ پر مقامی اقل قیمتیں ہیں۔

سوال ۴.۱۳۸: درج ذیل استراری تفاعل $y = g(x)$ کا خاکہ بنائیں۔

ا. $g(2) = 2$ ہے، $x < 2$ کے لئے $0 < g' < 1$ ہے، $x \to 2^-$ کے لئے $g'(x) \to 1^-$ ، $x > 2$ کے لئے $-1 < g' < 0$ اور $x \to 2^+$ کے لئے $g'(x) \to -1^+$ ہے۔

ب. $g(2) = 2$ ہے، $x < 2$ کے لئے $g' < 0$ ، $x \to 2^-$ کے لئے $g' \to -\infty$ ، $x > 2$ کے لئے $g' > 0$ اور $x \to 2^+$ کے لئے $g'(x) \to \infty$ ہے۔

سوال ۴.۱۳۹: درج ذیل استراری تفاعل $y = h(x)$ کا خاکہ بنائیں۔

ا. $h(0) = 0$ ہے، تمام x کے لئے $-2 \le h(x) \le 2$ ، $x \to 0^-$ کے لئے $h'(x) \to \infty$ ، اور $x \to 0^+$ کے لئے $h'(x) \to -\infty$ ہے۔

ب. $h(0) = 0$ ہے، تمام x کے لئے $-2 \le h(x) \le 0$ ، $x \to 0^-$ کے لئے $h'(x) \to \infty$ ، اور $x \to 0^+$ کے لئے $h'(x) \to -\infty$ ہے۔

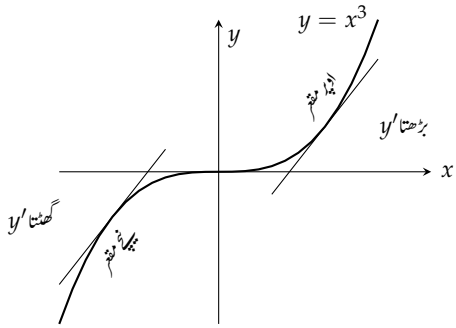
سوال ۴.۱۴۰: جب x بائیں سے دائیں جانب نقطہ $c = 2$ سے گزرے تب $f(x) = x^3 - 3x + 2$ کی ترسیم اوپر اٹھتی ہے یا نیچے گرتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۱۴۱: وہ وقفے تلاش کریں جن پر تفاعل $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، جہاں $a \neq 0$ ہے، بڑھتا ہے اور گھٹتا ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

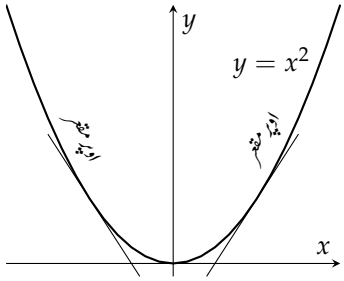
۴.۴ y' اور y'' کے ساتھ ترسیم کرنا

ہم نے حصہ ۴.۱ میں تفاعل کی انتہا قیمتوں کی تلاش میں یک رتبی تفرق کا کردار دیکھا۔ تفاعل کے نقاط انتہا صرف نقطہ فاصل اور تفاعل کے دائرہ کار کے آخری نقطوں پر پائے جاتے ہیں۔ ہم نے یہ بھی دیکھا کہ نقطہ فاصل پر نقطہ انتہا کی موجودگی لازمی نہیں۔ ہم نے حصہ ۴.۲ میں یہ بھی دیکھا کہ قابل تفرق تفاعل کی تقریباً تمام معلومات اس کے تفرق میں سمیٹی گئی ہیں۔ مکمل تفاعل کے حصول کے لئے ہمیں صرف کسی ایک نقطے پر تفاعل کی قیمت درکار ہوتی ہے۔ اگر تفاعل کا تفرق $2x$ ہے اور تفاعل مبدا سے گزرتا ہو تب تفاعل لازماً x^2 ہو گا۔ اگر تفاعل کا تفرق $2x$ ہو اور تفاعل نقطہ $(0,4)$ سے گزرتا ہو تب تفاعل لازماً $x^2 + 4$ ہو گا۔

ہم نے حصہ ۴.۳ میں نقطہ فاصل پر تفاعل کا رویہ جانتے ہوئے تفرق سے مزید معلومات حاصل کرنا سیکھا جس کے بعد ہم یہ جان سکے کہ آیا نقطہ فاصل پر حقیقتاً انتہا موجود ہے یا تفاعل مسلسل گھٹتا یا مسلسل بڑھتا جاتا ہے۔ موجودہ حصہ میں ہم دکھائیں گے کہ تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم کس طرح مڑتی یا واپس پلٹتی



شکل ۴.۳۳: $(-\infty, 0)$ پر $f(x) = x^3$ کی منحنی دائیں جھکتی ہے (نیچے مقعر ہے) جبکہ $(0, \infty)$ پر منحنی بائیں مڑتی ہے (اوپر مقعر)۔



شکل ۴.۳۴: ترسیم برائے مثال ۴.۱۳

ہے۔ ہم جانتے ہیں کہ یہ معلومات y' کے اندر ضرور پائی جائے گی۔ دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل کی صورت میں y' اور اس کا تفرق y'' مل کر تفاعل کی ترسیم کی صورت کے بارے میں معلومات فراہم کرتے ہیں۔ باب ۵ میں انہیں استعمال کرتے ہوئے تفرقی مساوات اور ابتدائی قیمت مسائل کے حل کو ترسیم کرنا سکھایا جائے گا۔

مقعر

x بڑھنے سے تفاعل $y = x^3$ کی ترسیم اوپر اٹھتی ہے لیکن $(-\infty, 0)$ اور $(0, \infty)$ پر اس کے حصے مختلف طریقوں سے مڑتے ہیں (شکل ۴.۳۳)۔ اگر ہم منحنی پر بائیں سے مبدا کی طرف گامزن ہوں تب منحنی ہمارے دائیں ہاتھ کی طرف جھکتی ہے اور اپنے مماس سے نیچے رہتی ہے۔ اس کے برعکس اگر ہم منحنی پر دائیں جانب مبدا سے دور چلیں تب منحنی ہمارے بائیں ہاتھ جھکتی ہے اور اپنے مماس کی بالائی طرف رہتی ہے۔

اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ ربع سوم میں بائیں سے مبدا کی طرف چلتے ہوئے مماس کا ڈھلوان گھٹتا ہے جبکہ ربع اول میں مبدا سے دائیں جانب چلتے ہوئے مماس کا ڈھلوان بڑھتا ہے۔

تعریف: قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم اس وقفہ پر **اوپر مقعر**[۱۰] ہو گی جہاں y' بڑھتا ہو اور اس وقفہ پر **نیچے مقعر**[۱۱] ہو گی جہاں y' گھٹتا ہو۔

□

اگر $y = f(x)$ کا دو رتبی تفرق موجود ہو تب ہم مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ ۳.۱۴ استعمال کرتے ہوئے اخذ کر سکتے ہیں کہ $y'' > 0$ کی صورت میں y' کی قیمت بڑھے گی اور $y'' < 0$ کی صورت میں y' کی قیمت گھٹے گی۔

مقعر کا دو رتبی تفرق پرکھ

---

[۱۰] concaveup
[۱۱] concavedown

فرض کریں وقفہ I پر $y = f(x)$ دو مرتبہ قابل تفرق ہے۔

ا. اگر I پر $y'' > 0$ ہو تب I پر f کی ترسیم اوپر مقعر ہو گی۔

ب. اگر I پر $y'' < 0$ ہو تب I پر f کی ترسیم نیچے مقعر ہو گی۔

مثال ۴.۱۳:

ا. $(-\infty, 0)$ پر تفاعل $y = x^3$ کا دور تبی تفرق $y'' = 6x < 0$ ہے لہٰذا اس کی ترسیم نیچے مقعر ہو گی جبکہ $(0, \infty)$ پر $y'' = 6x > 0$ ہے لہٰذا یہاں ترسیم اوپر مقعر ہو گی (شکل ۴.۳۳)۔

ب. چونکہ قطع مکافی $y = x^2$ کا دور تبی تفرق $y'' = 2 > 0$ ہے لہٰذا یہ ہر جگہ اوپر مقعر ہو گا (شکل ۴.۳۴)۔

□

نقطہ تصریف

ایک لکیر پر جسم کی حرکت کا مطالعہ کرنے کی خاطر ہم اس کا مقام بالمقابل وقت ترسیم کرتے ہیں۔ ایسا کرنے سے ہم وہ لمحہ تلاش کر سکتے ہیں جہاں جسم کی اسراع، جو دور تبی تفرق ہے، کی علامت تبدیل ہوتی ہے۔ ترسیم پر یہ وہ نقطہ ہو گا جہاں مقعر تبدیل ہوتا ہے۔

تعریف: وہ نقطہ جہاں تفاعل کا مماس پایا جاتا ہو اور جہاں مقعر کی علامت تبدیل ہوتی ہو **نقطہ تصریف**[۱۲] کہلاتا ہے۔

□

یوں نقطہ تصریف کی ایک طرف y'' مثبت اور دوسری طرف منفی ہو گا۔ عین نقطہ تصریف پر y'' کی قیمت یا (تفرق کی متوسط قیمت خاصیت کی بنا) صفر ہو گی اور یا y'' غیر معین ہو گا۔

دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل کی ترسیم کے نقطہ تصریف پر $y'' = 0$ ہو گا۔

مثال ۴.۱۴: سادہ ہارمونی حرکت

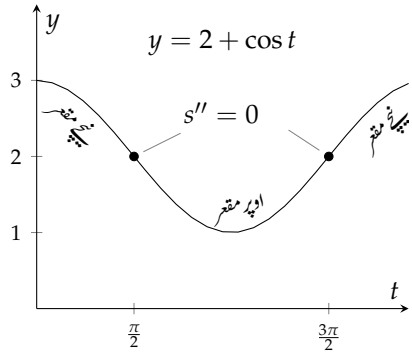
تفاعل $y = 2\cos t$ کی ترسیم نقطہ $t = \pi/2, 3\pi/2, \cdots$ پر مقعر کی علامت تبدیل ہوتی ہے جہاں اسراع $s'' = -\cos t$ صفر ہے (شکل ۴.۳۵)۔ □

مثال ۴.۱۵: نقطہ تصریف کا معاشیات میں بھی اہمیت ہے۔ فرض کریں کہ کسی چیز کی x اکائیاں پیدا کرنے پر $y = c(x)$ لاگت آتی ہے۔ جہاں حاشیہ لاگت پیداوار گھٹنے سے بڑھنا شروع ہوتی ہے یہ نقطہ تصریف N ہو گا (شکل ۴.۳۶)۔ □

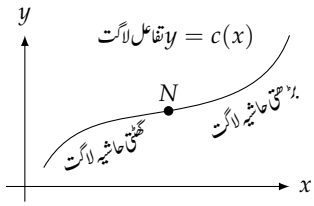
مثال ۴.۱۶: ایسا نقطہ تصریف جہاں y'' غیر موجود ہے۔

---

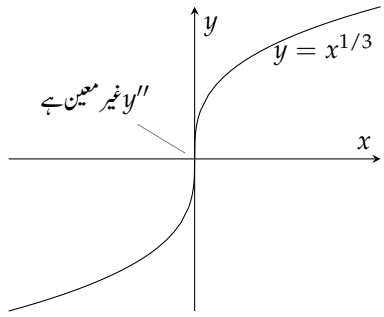
[۱۲] inflectionpoint



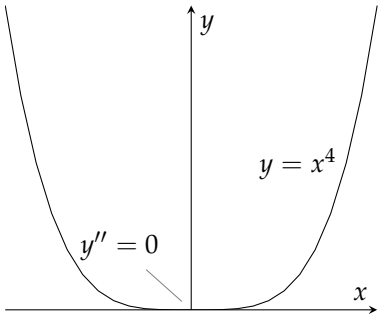
شکل ۴.۳۵: ترسیم برائے مثال ۴.۱۴



شکل ۴.۳۶: ترسیم برائے مثال ۴.۱۵



شکل ۴.۳۷: نقطہ تصریف پر y'' غیر معین ہے (مثال ۴.۱۶)



شکل ۴.۳۸: اگرچہ مبدا پر $y'' = 0$ ہے یہاں نقطہ تصریف نہیں پایا جاتا ہے (مثال ۴.۱۷)

۴۹۶۹ تفاعل $y = x^{1/3}$ کا نقطہ تصریف $x = 0$ پر ہے لیکن یہاں y'' غیر معین (لامتناہی) ہے (شکل ۴.۳۷)۔

$$y'' = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(x^{1/3}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\tfrac{1}{3}x^{-2/3}\right) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} = -\frac{2}{9x^{5/3}}$$

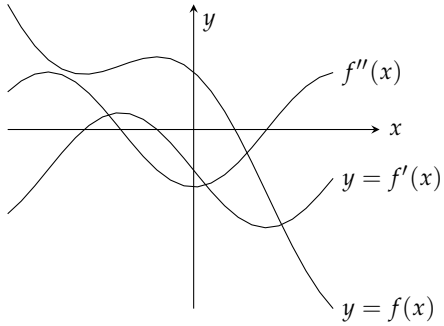
۴۹۷۰ □

۴۹۷۱ مثال ۴.۱۷: $y'' = 0$ ہے لیکن نقطہ تصریف نہیں ہے

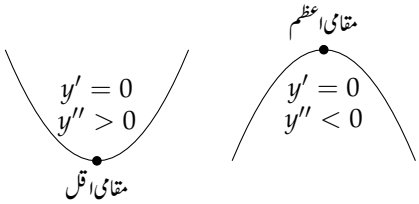
۴۹۷۲ تفاعل $y = x^4$ کا $x = 0$ پر $y'' = 12x^2 = 0$ پایا جاتا ہے لیکن یہاں y'' کی علامت تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا یہاں نقطہ تصریف نہیں پایا

۴۹۷۳ جاتا ہے۔ □

۴۹۷۴ **فنیات** تفاعل اور تفاعل کے تفرق کی ترسیم



شکل ۴.۳۹: تفاعل $y = f(x) = 2\cos x - \sqrt{2}x$ اور اس کے یک رتبی اور دو رتبی تفرق۔



شکل ۴.۴۰: دو رتبی تفرقی پرکھ برائے مقامی انتہا

کبھی کبھار تفاعل کی ترسیم سے نقطہ تصریف کی نشاندہی کرنا مشکل ہوتا ہے۔ $f(x) = 2\cos x - \sqrt{2}x$ کی $-4 \leq x \leq 3$ پر ترسیم کرتے ہوئے کوشش کر کے دیکھیں۔ اس کے ساتھ f' کی ترسیم شامل کرنے سے نقطہ تصریف کی پہچان میں کچھ بہتری آتی ہے۔ f کے ساتھ f'' ترسیم کرنے سے نقطہ تصریف پہچانے کا بہترین ثبوت ملتا ہے (شکل ۴.۳۹)۔ نقطہ تصریف پر f'' کی علامت تبدیل ہوتی ہے یعنی f'' محور x کو قطع کرتا ہے۔ f ، f' اور f'' تینوں کو ایک ساتھ ترسیم کرنا دلچسپ مشغلہ ہے۔

مقامی انتہائی قیمت کا دو رتبی تفرقی پرکھ

مقامی انتہا کا مقام تعین کرنے کی خاطر y' کی علامت کی تبدیلی کے بجائے درج ذیل پرکھ استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مقامی انتہا کا دو رتبی تفرقی پرکھ

- اگر $f'(c) = 0$ اور $f''(c) < 0$ ہوں تب $x = c$ پر مقامی اعظم قیمت پائی جائے گی (شکل ۴.۴۰)۔
- اگر $f'(c) = 0$ اور $f''(c) > 0$ ہوں تب $x = c$ پر مقامی اقل قیمت پائی جائے گی (شکل ۴.۴۰)۔

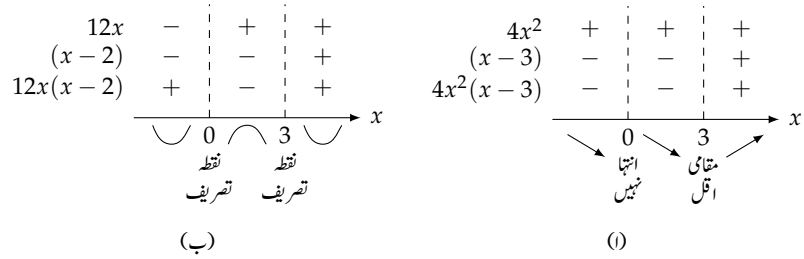
مذکورہ بالا پرکھ میں ہمیں صرف $x = c$ پر y'' درکار ہے نا کہ c پر کسی وقفہ پر۔ یوں پرکھ کا استعمال نہایت آسان ہے۔ $y'' = 0$ یا غیر معین y'' کی صورت میں پرکھ ہمیں مدد نہیں کر پاتا ہے۔ ایسی صورت میں ہمیں یک رتبی تفرق پرکھ استعمال کرنی ہو گی۔

y' اور y'' کی ترسیم ایک ساتھ

ہم نے اب تک جو کچھ سیکھا ہے اس کو استعمال کرتے ہوئے تفاعل ترسیم کرتے ہیں۔

مثال ۴.۱۸: قلم و کاغذ سے تفاعل کی ترسیم

تفاعل $y = x^4 - 4x^3 + 10$ ترسیم کریں۔



شکل ۴.۴۱: اشکال برائے مثال ۴.۱۸

حل: **پہلا قدم:** ہم y' اور y'' ڈھونڈتے ہیں۔

$$y = x^4 - 4x^3 + 10$$

$$y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$$ نقطہ فاصل $x = 0$ اور $x = 3$ ہیں

$$y'' = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$$ ممکنہ نقطہ تصریف $x = 0$ اور $x = 2$ ہیں

دوسرا قدم: اتار اور چڑھاو دیکھنے کے لئے y' کی علامتوں کو دیکھ کر y کا رویہ جانتے ہیں۔ $y' = 4x^2(x-3)$ میں $x = 0$ سے معمولی کم قیمت پر کرنے سے y' کی علامت منفی حاصل ہوتی ہے۔ اسی طرح اس سے معمولی زیادہ قیمت پر کرنے سے بھی منفی علامت حاصل ہوتی ہے۔ یوں نقطہ $x = 0$ پر y' کی علامت تبدیل نہیں ہوتی ہے لہٰذا یہاں کوئی مقامی انتہا نہیں پایا جاتا ہے۔ $y' = 4x^2(x-3)$ میں $x = 3$ سے معمولی کم قیمت پر کرنے سے y' کی منفی علامت جبکہ اس سے معمولی زیادہ قیمت پر کرنے سے مثبت علامت حاصل ہوتی ہے۔ یوں $x = 3$ پر y' کی علامت منفی سے تبدیل ہو کر مثبت ہوتی ہے۔ یوں $x = 3$ پر مقامی اقل قیمت پائی جاتی ہے (شکل ۴.۴۱-ا)۔

تیسرا قدم: نقطہ $x = 0$ اور $x = 2$ دونوں پر y'' کی علامت تبدیل ہوتی ہے لہٰذا یہ دونوں نقطہ تصریف ہیں (شکل ۴.۴۱-ب)۔

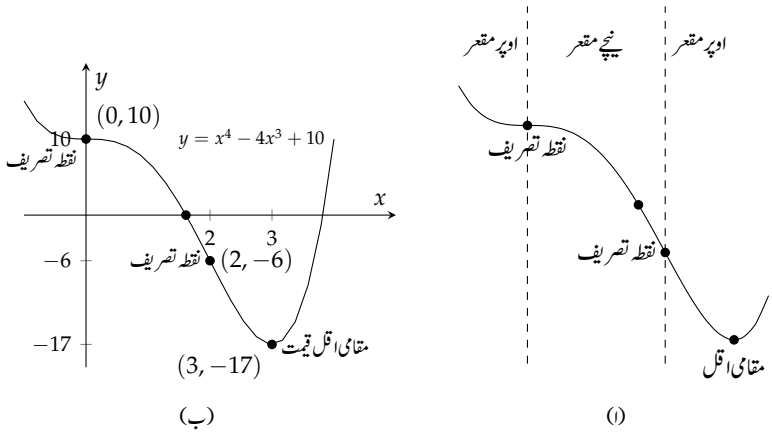
چوتھا قدم: دوسرے اور تیسرے قدم کی معلومات استعمال کرتے ہوئے ہر وقفہ پر تفاعل کا عمومی خاکہ کھینچیں۔ ان خاکوں کو اکٹھا کرتے ہوئے مکمل ترسیم کھینچیں (شکل ۴.۴۲-ا)۔

پانچواں قدم: (اگر موزوں ہو تب) ترسیم پر وہ نقطے ظاہر کریں جہاں یہ x اور y محور کو قطع کرتی ہے۔ اسی طرح وہ نقطے جہاں y' اور y'' صفر ہیں کی نشاندہی کریں۔ مقامی انتہائی نقطے اور نقطہ تصریف کی نشاندہی کریں۔ چوتھے قدم کی معلومات استعمال کرتے ہوئے مکمل ترسیم کھینچیں (شکل ۴.۴۲-ب)۔ □

$y = f(x)$ ترسیم کرنے کا لائحہ عمل

۱. y' اور y'' حاصل کریں۔

۲. منحنی کی اتار اور چڑھاو تعین کریں۔



شکل ۴.۴۲: اشکال برائے مثال ۴.۱۸

۵۰۰۷ ۳. منحنی کی مقعر کا تعین کریں۔

۵۰۰۸ ۴. اجمال کرتے ہوئے مختلف خطوں میں ترسیم کا عمومی خاکہ بنائیں۔

۵۰۰۹ ۵. ان اشکال کو ملا کر تفاعل ترسیم کریں۔

۵۰۱۰ مثال ۴.۱۹: تفاعل $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$ ترسیم کریں۔

۵۰۱۱ حل: **پہلا قدم:** y' اور y'' حاصل کرتے ہیں۔

$$y = x^{5/3} - 5x^{2/3} = x^{2/3}(x-5) \qquad \text{قاطع محدد } x = 0 \text{ اور } x = 5$$

$$y' = \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{10}{3}x^{-1/3} = \frac{5}{3}x^{-1/3}(x-2) \qquad \text{نقطہ فاصل } x = 0 \text{ اور } x = 2$$

$$y'' = \frac{10}{9}x^{-1/3} + \frac{10}{9}x^{-4/3} = \frac{10}{9}x^{-4/3}(x+1) \qquad \text{ممکنہ نقطہ تصریف } x = 0 \text{ اور } x = -1$$

۵۰۱۲ **دوسرا قدم:** اتار اور چڑھاو۔ (شکل ۴.۴۳)

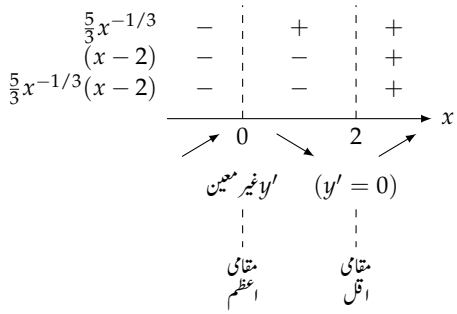
۵۰۱۳ **تیسرا قدم:** مقعر (شکل ۴.۴۴)

۵۰۱۴ y'' کی علامت کی نقش سے ہم دیکھتے ہیں کہ $x = -1$ پر نقطہ تصریف پایا جاتا ہے لیکن $x = 0$ پر نہیں پایا جاتا ہے۔ البتہ یہ جانتے ہوئے کہ

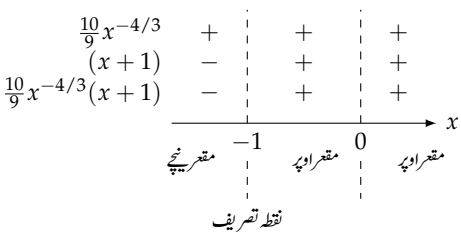
۵۰۱۵ ۱. تفاعل $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$ استمراری ہے۔

۵۰۱۶ ۲. $x \to 0^-$ کرنے سے $y' \to \infty$ اور $x \to 0^+$ کرنے سے $y' \to -\infty$ ہوتا ہے (دوسرے قدم میں y' کا کلیہ دیکھیں)۔

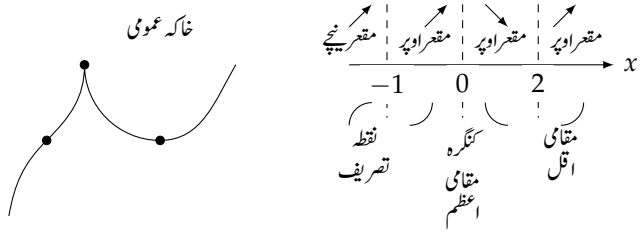
۵۰۱۷ ۳. $x = 3$ پر مقعر تبدیل نہ ہونے (تیسرا قدم) سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $x = 0$ پر کنگرہ پایا جاتا ہے۔



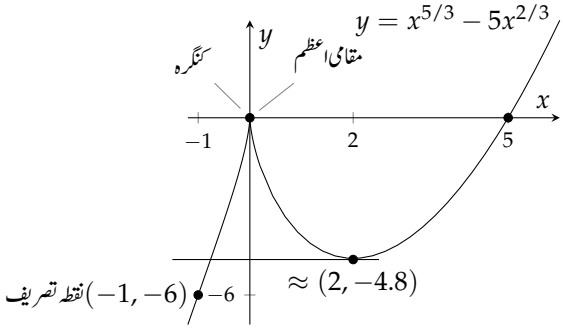
شکل ۴.۴۳: اتار اور چڑھاو (مثال ۴.۱۹)



شکل ۴.۴۴: مقعر (مثال ۴.۱۹)



شکل ۴.۴۵: اجمال اور خاکے (مثال ۴.۱۹)



شکل ۴.۴۶: تفاعل $y = x^{5/3} - 5x^{2/3}$ کی ترسیم (مثال ۴.۱۹)۔

۵۰۱۸ **چوتھا قدم:** اجمال (شکل ۴.۴۵)

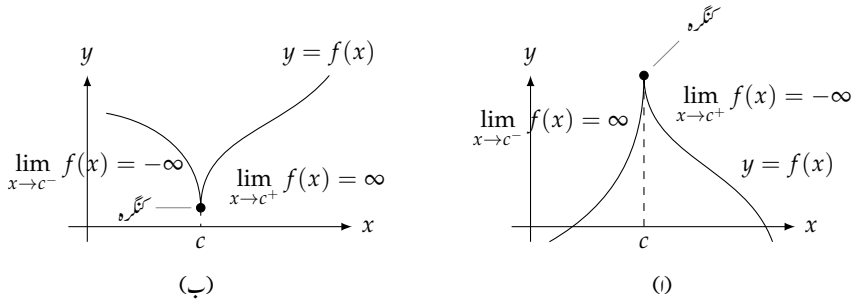
۵۰۱۹ **پانچواں قدم:** مخصوص نقطے اور ترسیم (شکل ۴.۴۶) □

۵۰۲۰ **کنگرہ**

۵۰۲۱ تفاعل $y = f(x)$ کا $x = c$ پر اس صورت کنگرہ پایا جاتا ہے جب x کے دونوں اطراف تفاعل کا مقعر ایک سا ہو اور یا (ا)
۵۰۲۲ $\lim_{x\to c^-} f'(x) = \infty$ اور $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$ ہوں (شکل ۴.۴۷-ا)، اور یا (ب) $\lim_{x\to c^-} f'(x) = -\infty$ اور $\lim_{x\to c^+} f(x) = \infty$ ہوں (شکل ۴.۴۷-ب)۔
۵۰۲۳

۵۰۲۴ **تفرق سے تفاعل کی معلومات کا حصول**

۵۰۲۵ آپ نے مثال ۴.۱۸ اور مثال ۴.۱۹ میں دیکھا کہ y' کو دیکھ کر قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کی تقریباً تمام اہم معلومات دریافت کی جا سکتی ہیں۔ ہم
۵۰۲۶ ترسیم کی اتار اور چڑھاو، اور مقامی انتہا جان سکتے ہیں۔ ہم y' کا تفرق لے کر اتار اور چڑھاو کے وقفوں میں تفاعل کی مقعر دریافت کر سکتے ہیں۔ ہم تفاعل کی
۵۰۲۷ ترسیم کی عمومی شکل جان سکتے ہیں۔ ہم صرف xy مستوی میں ترسیم کا مقام نہیں جان سکے ہیں۔ یہ معلومات مختلف x پر تفاعل کی مساوات کو حل کرتے



شکل ۴.۴۷: کنگرہ، مقامی اعظم یا مقامی اقل نقطہ ہو سکتا ہے۔

۵۰۲۸ ہوئے حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ حقیقت میں جیسا ہم نے حصہ ۴.۲ میں دیکھا، y' کے علاوہ ہمیں f کی قیمت صرف ایک نقطہ پر چاہیے۔

۵۰۲۹ شکل ۴.۴۸ میں تفرق اور ترسیم کے تعلق دکھائے گئے ہیں۔

۵۰۳۰ **سوالات**

۵۰۳۱ **ترسیم شدہ تفاعل کا تجزیہ**

۵۰۳۲ سوال ۴.۱۴۲ تا سوال ۴.۱۴۹ میں دیے ترسیم کی نقطہ تصریف، مقامی اقل اور مقامی اعظم نقطہ کی نشاندہی کریں۔ ان وقفوں کہ نشاندہی کریں جن پر ترسیم اوپر
۵۰۳۳ مقعر اور جن پر نیچے مقعر ہے۔

۵۰۳۴ سوال ۴.۱۴۲: $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$، شکل ۴.۴۹-ا

۵۰۳۵ سوال ۴.۱۴۳: $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 4$، شکل ۴.۴۹-ب

۵۰۳۶ سوال ۴.۱۴۴: $y = \frac{3}{4}(x^2 - 1)^{2/3}$، شکل ۴.۴۹-ج

۵۰۳۷ سوال ۴.۱۴۵: $y = \frac{9}{14}x^{1/3}(x^2 - 7)$، شکل ۴.۴۹-د

۵۰۳۸ سوال ۴.۱۴۶: $y = x + \sin 2x,\ -\frac{2\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$، شکل ۴.۵۰-ا

۵۰۳۹ سوال ۴.۱۴۷: $y = \tan x - 4x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$، شکل ۴.۵۰-ب

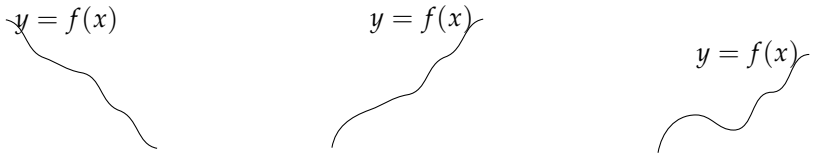
۵۰۴۰ سوال ۴.۱۴۸: $y = \sin|x|\ ,\ -2\pi \le x \le 2\pi$، شکل ۴.۵۰-ج

۵۰۴۱ سوال ۴.۱۴۹: $y = 2\cos x - \sqrt{2}x,\ -\pi \le x \le \frac{3\pi}{2}$، شکل ۴.۵۰-د

۵۰۴۲

۵۰۴۳ **مساوات کی ترسیم**

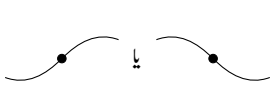
۵۰۴۴ صفحہ ۳۱۳ پر دیا گیا لائحہ عمل استعمال کرتے ہوئے سوال ۴.۱۵۰ تا سوال ۴.۱۸۱ میں دیا گیا مساوات ترسیم کریں۔ مقامی انتہا اور نقطہ تصریف کی نشاندہی کریں۔



(ا) قابل تفرق: ہموار اور جڑی۔ اتر، چڑھاو پایا جا سکتا ہے۔

(ب) $y' > 0$: بائیں سے دائیں چلتے ہوئے اوپر اٹھتی ہے۔ لہر پائے جا سکتے ہیں۔

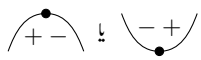
(ج) $y' < 0$: بائیں سے دائیں چلتے ہوئے نیچے اترتی ہے۔ لہر پائے جا سکتے ہیں۔



(د) $y'' > 0$: اوپر مقعر۔ لہر نہیں پایا جاتا۔ اوپر اٹھ سکتی ہے یا نیچے اتر سکتی ہے۔

(ھ) $y'' < 0$: نیچے مقعر۔ لہر نہیں پایا جاتا۔ اوپر اٹھ سکتی ہے یا نیچے اتر سکتی ہے۔

(و) y'' کی علامت تبدیل ہوتی ہے: نقطہ تصریف (اگر f دو مرتبہ قابل تفرق ہو)۔

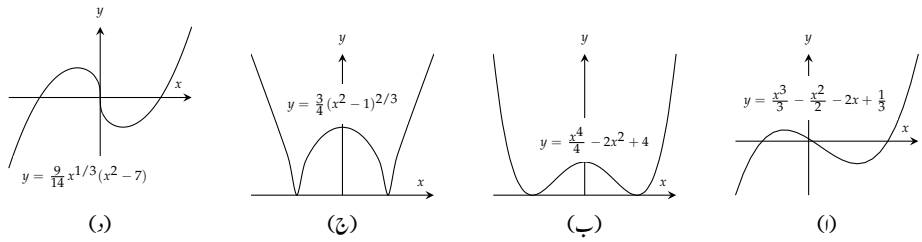


(ز) y' کی علامت تبدیل ہوتی ہے: مقامی اعظم یا مقامی اقل قیمت۔

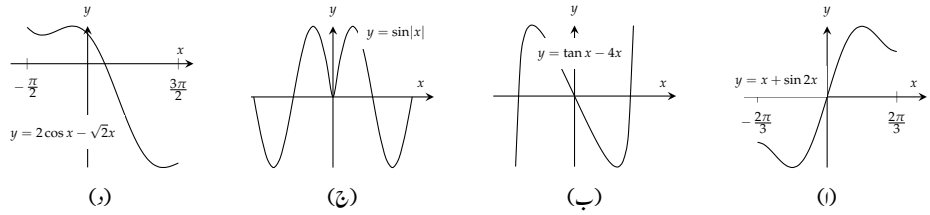
(ح) $y' = 0, y'' < 0$: مقامی اعظم قیمت۔

(ط) $y' = 0, y'' > 0$: مقامی اقل قیمت۔

شکل ۴.۴۸: ترسیم کے بارے میں تفرق کیا بتلاتا ہے۔



شکل ۴.۴۹: ترسیمات برائے سوال ۴.۱۴۲ تا سوال ۴.۱۴۵



شکل ۴.۵۰: ترسیمات برائے سوال ۴.۱۴۶ تا سوال ۴.۱۴۹

۵۰۴۵ سوال ۴.۱۵۰: $y = x^2 - 4x + 3$

۵۰۴۶ سوال ۴.۱۵۱: $y = 6 - 2x - x^2$

۵۰۴۷ سوال ۴.۱۵۲: $y = x^3 - 3x + 3$

۵۰۴۸ سوال ۴.۱۵۳: $y = x(6 - 2x)^2$

۵۰۴۹ سوال ۴.۱۵۴: $y = -2x^3 + 6x^2 - 3$

۵۰۵۰ سوال ۴.۱۵۵: $y = 1 - 9x - 6x^2 - x^3$

۵۰۵۱ سوال ۴.۱۵۶: $y = (x - 2)^3 + 1$

۵۰۵۲ سوال ۴.۱۵۷: $y = 1 - (x + 1)^3$

۵۰۵۳ سوال ۴.۱۵۸: $y = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$

۵۰۵۴ سوال ۴.۱۵۹: $y = -x^4 + 6x^2 - 4 = x^2(6 - x^2) - 4$

۵۰۵۵ سوال ۴.۱۶۰: $y = 4x^3 - x^4 = x^3(4 - x)$

۵۰۵۶ سوال ۴.۱۶۱: $y = x^4 + 2x^3 = x^3(x + 2)$

۵۰۵۷ سوال ۴.۱۶۲: $y = x^5 - 5x^4 = x^4(x - 5)$

۵۰۵۸ سوال ۴.۱۶۳: $y = x(\frac{x}{2} - 5)^4$

۵۰۵۹ سوال ۴.۱۶۴: $y = x + \sin x,\ 0 \leq x \leq 2\pi$

۵۰۶۰ سوال ۴.۱۶۵: $y = x - \sin x,\ 0 \leq x \leq 2\pi$

۵۰۶۱ سوال ۴.۱۶۶: $y = x^{1/5}$

۵۰۶۲ سوال ۴.۱۶۷: $y = x^{3/5}$

۵۰۶۳ سوال ۴.۱۶۸: $y = x^{2/5}$

۵۰۶۴ سوال ۴.۱۶۹: $y = x^{4/5}$

۵۰۶۵ سوال ۴.۱۷۰: $y = 2x - 3x^{2/3}$

۵۰۶۶ سوال ۴.۱۷۱: $y = 5x^{2/5} - 2x$

۵۰۶۷ سوال ۴.۱۷۲: $y = x^{2/3}(\frac{5}{2} - x)$

۵۰۶۸ سوال ۴.۱۷۳: $y = x^{2/3}(x - 5)$

۵۰۶۹ سوال ۴.۱۷۴: $y = x\sqrt{8 - x^2}$

۵۰۷۰ سوال ۴.۱۷۵: $y = (2 - x^2)^{3/2}$

۵۰۷۱ سوال ۴.۱۷۶: $y = \frac{x^2-3}{x-2},\ x \neq 2$

۵۰۷۲ سوال ۴.۱۷۷: $y = \frac{x^3}{3x^2+1}$

۵۰۷۳ سوال ۴.۱۷۸: $y = \left|x^2 - 1\right|$

۵۰۷۴ سوال ۴.۱۷۹: $y = \left|x^2 - 2x\right|$

۵۰۷۵ سوال ۴.۱۸۰: $y = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{-x}, & x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & x > 0 \end{cases}$

۵۰۷۶ سوال ۴.۱۸۱: $y = \sqrt{|x-4|}$

۵۰۷۷

۵۰۷۸ **y' سے تفاعل کی عمومی صورت کا خاکہ**

۵۰۷۹ سوال ۴.۱۸۲ تا سوال ۴.۲۰۳ میں استمراری تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق y' دیا گیا ہے۔ y'' تلاش کرتے ہوئے صفحہ ۳۱۳ پر دیا گیا لائحہ عمل استعمال

۵۰۸۰ کرتے ہوئے تفاعل کی عمومی صورت کا خاکہ بنائیں۔

۵۰۸۱ سوال ۴.۱۸۲: $y' = 2 + x - x^2$

۵۰۸۲ سوال ۴.۱۸۳: $y' = x^2 - x - 6$

۵۰۸۳ سوال ۴.۱۸۴: $y' = x(x-3)^2$

۵۰۸۴ سوال ۴.۱۸۵: $y' = x^2(2-x)$

۵۰۸۵ سوال ۴.۱۸۶: $y' = x(x^2 - 12)$

۵۰۸۶ سوال ۴.۱۸۷: $y' = (x-1)^2(2x+3)$

۵۰۸۷ سوال ۴.۱۸۸: $y' = (8x - 5x^2)(4-x)^2$

۵۰۸۸ سوال ۴.۱۸۹: $y' = (x^2 - 2x)(x-5)^2$

۵۰۸۹ سوال ۴.۱۹۰: $y' = \sec^2 x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

۵۰۹۰ سوال ۴.۱۹۱: $y' = \tan x,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

۵۰۹۱ سوال ۴.۱۹۲: $y' = \cot\frac{\theta}{2},\ 0 < \theta < 2\pi$

۵۰۹۲ سوال ۴.۱۹۳: $y' = \csc^2\frac{\theta}{2},\ 0 < \theta < 2\pi$

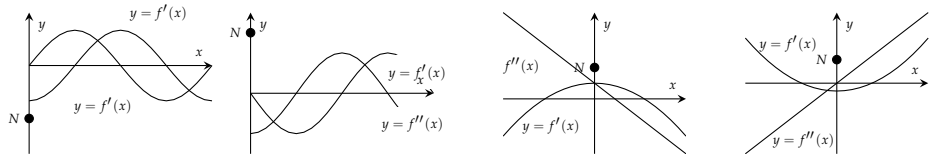
۵۰۹۳ سوال ۴.۱۹۴: $y' = \tan^2\theta - 1,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

۵۰۹۴ سوال ۴.۱۹۵: $y' = 1 - \cot^2\theta,\ 0 < \theta < \pi$

۵۰۹۵ سوال ۴.۱۹۶: $y' = \cos t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$

۵۰۹۶ سوال ۴.۱۹۷: $y' = \sin t,\ 0 \leq t \leq 2\pi$

۵۰۹۷ سوال ۴.۱۹۸: $y' = (x+1)^{-2/3}$



(د) (ج) (ب) (ا)

شکل ۴.۵۱: ترسیمات برائے سوال ۴.۲۰۴ تا سوال ۴.۲۰۷

سوال ۴.۱۹۹: $y' = (x-2)^{-1/3}$

سوال ۴.۲۰۰: $y' = x^{-2/3}(x-1)$

سوال ۴.۲۰۱: $y' = x^{-4/5}(x+1)$

سوال ۴.۲۰۲: $y' = 2|x| = \begin{cases} -2x, & x \leq 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$

سوال ۴.۲۰۳: $y' = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$

y' اور y'' سے y کا خاکہ بنانا

سوال ۴.۲۰۴ تا سوال ۴.۲۰۷ میں نقطہ N سے گزرتے ہوئے تفاعل $y = f(x)$ کے یک رتبی تفرق y' اور دو رتبی تفرق y'' کی ترسیم دی گئیں ہیں۔ ان کی نقل کر کے اس پر y کی تخمینی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔

سوال ۴.۲۰۴: ترسیمات شکل ۴.۵۱-ا میں دیے گئے ہیں۔

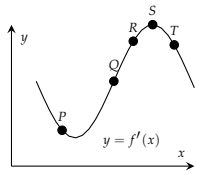
سوال ۴.۲۰۵: ترسیمات شکل ۴.۵۱-ب میں دیے گئے ہیں۔

سوال ۴.۲۰۶: ترسیمات شکل ۴.۵۱-ج میں دیے گئے ہیں۔

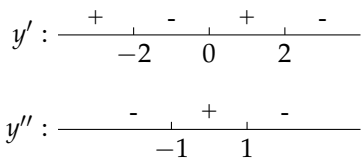
سوال ۴.۲۰۷: ترسیمات شکل ۴.۵۱-د میں دیے گئے ہیں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۴.۲۰۸: دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کو شکل ۴.۵۲ میں دکھایا گیا ہے۔ دیے گئے پانچ نقطوں پر بتائیں کہ y' اور y'' مثبت، منفی یا صفر ہیں۔



شکل ۵۲.۴: ترسیم برائے سوال ۴.۲۰۸



شکل ۵۳.۴: ترسیم برائے سوال ۴.۲۱۱

۵۱۱۵ سوال ۴.۲۰۹: درج ذیل پر پورا اترتا ہوا ہموار ترسیم کھینچیں۔

$$f(-2) = 8, \qquad f'(2) = f'(-2) = 0$$
$$f(0) = 4, \qquad f'(x) < 0, |x| < 2$$
$$f(2) = 0, \qquad f''(x) < 0,\ x < 0$$
$$f'(x) > 0, |x| > 2, \qquad f''(x) > 0,\ x > 0$$

۵۱۱۶ سوال ۴.۲۱۰: دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ جو درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو کو ترسیم کریں۔

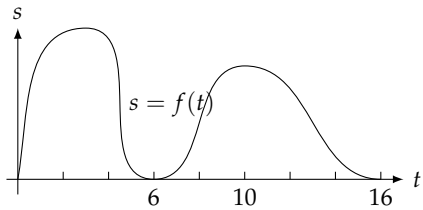
x	y	تفرق
$x < 2$		$y < 0,\ y'' > 0$
2	1	$y' = 0,\ y'' > 0$
$2 < x < 4$		$y' > 0,\ y'' > 0$
4	4	$y' > 0,\ y'' = 0$
$4 < x < 6$		$y' > 0,\ y'' < 0$
6	7	$y' = 0,\ y'' < 0$
$x > 6$		$y' < 0,\ y'' < 0$

۵۱۱۷ سوال ۴.۲۱۱: دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ جو نقطہ $(-2,2)$ ، $(-1,1)$ ، $(0,0)$ ، $(1,1)$ اور $(2,2)$ سے
۵۱۱۸ گزرتا ہے اور جس کے یک رتبی تفرق کی علامت کا نقش شکل ۵۳.۴ میں دیا گیا ہے کو ترسیم کریں۔

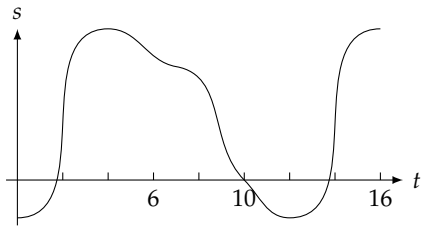
۵۱۱۹ سوال ۴.۲۱۲: سمتی رفتار اور اسراع
۵۱۲۰ محدد کی لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے جسم کا مقام بالمقابل وقت شکل ۵۴.۴ میں دکھایا گیا ہے۔(ا) جسم مبدا سے کب دور اور کب مبدا کی طرف حرکت
۵۱۲۱ کرتا ہے؟(ب) کب سمتی رفتار صفر ہے؟(ج) کب اسراع صفر ہے؟(د) کب اسراع مثبت اور کب منفی ہے؟

۵۱۲۲ سوال ۴.۲۱۳: سمتی رفتار اور اسراع
۵۱۲۳ محدد کی لکیر پر آگے پیچھے حرکت کرتے ہوئے جسم کا مقام بالمقابل وقت شکل ۵۵.۴ میں دکھایا گیا ہے۔(ا) جسم مبدا سے کب دور اور کب مبدا کی طرف حرکت
۵۱۲۴ کرتا ہے؟(ب) کب سمتی رفتار صفر ہے؟(ج) کب اسراع صفر ہے؟(د) کب اسراع مثبت اور کب منفی ہے؟

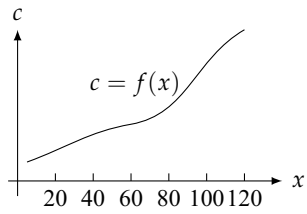
۵۱۲۵ سوال ۴.۲۱۴: حاشیہ لاگت
۵۱۲۶ x اشیاء پیدا کرنے پر لاگت $c = f(x)$ کو شکل ۵۶.۴ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ کتنی پیداوار پر حاشیہ لاگت گھٹنے سے بڑھنا شروع ہوتی ہے؟



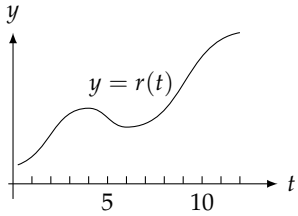
شکل ۴.۵۴: ترسیم برائے سوال ۴.۲۱۲



شکل ۴.۵۵: ترسیم برائے سوال ۴.۲۱۳



شکل ۴.۵۶: لاگت بالمقابل پیداوار (سوال ۴.۲۱۴)



شکل ۴.۵۷: آمدن بالمقابل سال (سوال ۴.۲۱۵)

سوال ۴.۲۱۵: ماہوار آمدنی $y = r(t)$ بالمقابل ماہ کو شکل ۴.۵۷ میں ترسیم کیا گیا ہے۔ کس دوران حاشیہ آمدنی بڑھ رہی ہے اور کب گھٹ رہی ہے؟

سوال ۴.۲۱۶: تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق درج ذیل ہے۔ کہاں مقامی اقل، مقامی اعظم یا نقطہ تصریف پایا جاتا ہے؟ (اشارہ: y' کی علامت کا نقش)

$$y' = (x-1)^2(x-2)$$

سوال ۴.۲۱۷: تفاعل $y = f(x)$ کا تفرق درج ذیل ہے۔ کہاں مقامی اقل، مقامی اعظم یا نقطہ تصریف پایا جاتا ہے؟ (اشارہ: y' کی علامت کا نقش)

$$y' = (x-1)^2(x-2)(x-4)$$

سوال ۴.۲۱۸: $x > 0$ کے لئے ایسا تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کریں جس کا $f(1) = 0$ اور $f'(x) = \frac{1}{x}$ ہے۔ کیا تفاعل کی مقعر کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۲۱۹: تفاعل $y = f(x)$ کا دوسرا تفرق استمراری اور غیر صفر ہے۔ کیا اس کی ترسیم کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۲۲۰: مستقل b ، c اور d کی صورت میں b کی کس قیمت کے لئے منحنی $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ کا نقطہ تصریف $x = 1$ پر پایا جائے گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۲۲۱: افقی مماس۔ درست یا غلط؟ سمجھائیں

۱. ہر ایسے کثیر رکنی جس میں سب سے زیادہ طاقت جفت ہو کا کم سے کم ایک افقی مماس پایا جاتا ہے۔

۲. ہر ایسے کثیر رکنی جس میں سب سے زیادہ طاقت طاق ہو کا کم سے کم ایک افقی مماس پایا جاتا ہے۔

سوال ۴.۲۲۲: قطع مکافی

۱. قطع مکافی $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ کا کنگرہ تلاش کریں۔

۲. قطع مکافی کب اوپر مقعر اور کب نیچے مقعر ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۲۲۳: کیا یہ درست ہے کہ دو مرتبہ قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کی مقعر ہر ایسے نقطہ پر تبدیل ہوتی ہے جہاں $f''(x) = 0$ ہو؟ اپنے جواب کہ وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۲۲۴: دو درجی منحنی۔ آپ دو درجی منحنی $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ کے نقطہ تصریف کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۲۲۵: کعبی منحنی۔ آپ کعبی منحنی $y = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$ کے نقطہ تصریف کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۴.۲۲۶ تا سوال ۴.۲۳۶ میں تفاعل کی ترسیم پر نقطہ تصریف (اگر موجود ہو)، مقامی اقل اور مقامی اعظم نقطے تلاش کریں۔ تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے ان نقطوں کی نشاندہی کریں۔ ساتھ ہی تفاعل کا یک رتبی تفرق اور دو رتبی تفرق بھی ترسیم کریں۔ جہاں یہ ترسیمات x محدد کو قطع کرتی ہیں، ان کا تفاعل کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ اس کے علاوہ تفرق کے تفاعل کی ترسیم کے ساتھ کیا تعلقات ہیں؟

سوال ۴.۲۲۶: $y = x^5 - 5x^4 - 240$

سوال ۴.۲۲۷: $y = x^3 - 12x^2$

سوال ۴.۲۲۸: $y = \frac{4}{5}x^5 + 16x^2 - 25$

سوال ۴.۲۲۹: $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 12x + 20$

سوال ۴.۲۳۰: تفاعل $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ اور اس کے پہلے دو تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' اور f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ پر بحث کریں۔

سوال ۴.۲۳۱: تفاعل $f(x) = x\cos x$ اور اس کے پہلے دو تفرق کو $0 \leq x \leq 2\pi$ کے لئے ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ پر بحث کریں۔

سوال ۴.۲۳۲:

۱. $k = 0$ اور اس کی قریبی مثبت اور منفی قیمتوں کے لئے $f(x) = x^3 + kx$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ k کی قیمت کی ترسیم کی صورت پر کیا اثر پایا جاتا ہے؟

۲. $f''(x)$ تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $f''(x)$ دو درجی مساوات ہے۔ $f''(x)$ کا ممیز تلاش کریں ($ax^2 + bx + c$ کا ممیز $b^2 - 4ac$ ہے)۔ k کی کن قیمتوں کے لئے ممیز مثبت ہے؟ صفر ہے؟ منفی ہے؟ k کی کن قیمتوں کے لئے $f'(x)$ کے صفروں کی تعداد دو ہے؟ ایک ہے؟ صفر ہے؟ اب بتائیں کہ k کی قیمت کا $f(x)$ کی ترسیم کی صورت کے ساتھ کیا تعلق ہے۔

۳. k کی دیگر قیمتوں کے ساتھ تجربہ کر کے دیکھیں۔ $k \to \infty$ اور $k \to -\infty$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟

سوال ۴.۲۳۳:

ا. $k = -4$ اور اس کے قریبی قیمتوں کے لئے ایک ساتھ $-1 \leq x \leq 4$ پر $f(x) = x^4 + kx^3 + 6x^2$ ترسیم کریں۔ k کی قیمت ترسیم کی صورت پر کس طرح اثر انداز ہوتی ہے؟

ب. $f''(x)$ تلاش کریں۔ آپ دیکھیں گے کہ $f''(x)$ دو درجی مساوات ہے۔ $f''(x)$ کا ممیز تلاش کریں ($ax^2 + bx + c$ کا ممیز $b^2 - 4ac$ ہے)۔ k کی کن قیمتوں کے لئے ممیز مثبت ہے؟ صفر ہے؟ منفی ہے؟ k کی کن قیمتوں کے لئے $f'(x)$ کے صفروں کی تعداد دو ہے؟ ایک ہے؟ صفر ہے؟ اب بتائیں کہ k کی قیمت کا $f(x)$ کی ترسیم کی صورت کے ساتھ کیا تعلق ہے۔

سوال ۴.۲۳۴:

ا. $-3 \leq x \leq 3$ کے لئے $y = x^{2/3}(x^2 - 2)$ ترسیم کریں۔ اس کے بعد احصاء کے استعمال سے مقعر، اٹھان اور نیچے گرنے کی تصدیق کریں۔ (ہو سکتا ہے کہ آپ کو کمپیوٹر میں $x^{2/3}$ کو $(x^2)^{1/3}$ لکھنا پڑے۔)

ب. کیا $x = 0$ پر منحنی کا کنگرہ پایا جاتا ہے یا صرف ایک کونا جس کے بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں؟

سوال ۴.۲۳۵:

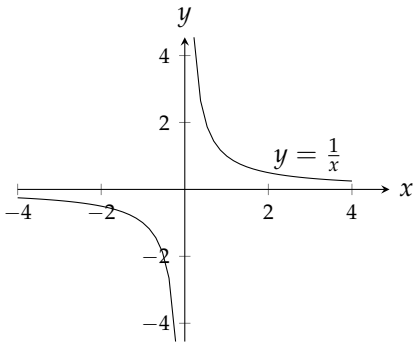
ا. $-0.5 \leq x \leq 1.5$ پر $y = 9x^{2/3}(x - 1)$ ترسیم کریں۔ اس کے بعد احصاء کی مدد سے مقعر، مقامی اقل اور مقامی اعظم نقطوں کی تصدیق کریں۔ مبدا کے بائیں جانب کون سی مقعر ہے؟ (ہو سکتا ہے کہ آپ کو کمپیوٹر میں $x^{2/3}$ کو $(x^2)^{1/3}$ لکھنا پڑے۔)

ب. کیا $x = 0$ پر ترسیم کا کنگرہ پایا جاتا ہے یا صرف ایک کونا جس کے بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ تفرق مختلف ہیں؟

سوال ۴.۲۳۶: کیا $x = -3$ کے قریب $y = x^2 + 3\sin 2x$ کا افقی مماس پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۴.۵ $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء

اس حصہ میں ناطق تفاعل (دو کثیر رکنیوں کے حاصل تقسیم) کے علاوہ دیگر تفاعل، جن کا $x \to \mp\infty$ پر دلچسپ حد ہو، کی ترسیمات پر متقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے غور کیا جائے گا۔



شکل ۵۸.۴: تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کی ترسیم۔

۵۱۹۰ $x \to \mp\infty$ پر حد

۵۱۹۱ تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ تمام $x \neq 0$ کے لئے معین ہے۔ مثبت اور بتدریج بڑھتی x کے لئے $\frac{1}{x}$ کی قیمت بتدریج گھٹے گی۔ منفی x جس کی مقدار
۵۱۹۲ بتدریج بڑھتی ہو کے لئے $\frac{1}{x}$ کی مقدار بتدریج گھٹے گی۔ ہم مختصراً کہتے ہیں کہ $x \to \mp\infty$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ کا حد 0 ہے۔

۵۱۹۳ تعریف:

۵۱۹۴ ۱. اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد M موجود ہو کہ تمام $x > M$ کے لئے $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ ہو یعنی

$$x > M \quad \Longrightarrow \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

۵۱۹۵ تب ہم کہتے ہیں کہ x لامتناہی تک پہنچنے پر $f(x)$ کا حد L ہے جس کو ہم

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

۵۱۹۶ لکھتے ہیں۔

۵۱۹۷ ۲. اگر ہر عدد $\epsilon > 0$ کے لئے ایسا مطابقتی عدد N موجود ہو کہ تمام $x < N$ کے لئے $\left|f(x) - L\right| < \epsilon$ ہو یعنی

$$x < N \quad \Longrightarrow \quad \left|f(x) - L\right| < \epsilon$$

۵۱۹۸ تب ہم کہتے ہیں کہ x منفی لامتناہی تک پہنچنے پر $f(x)$ کا حد L ہے جس کو ہم

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

۵۱۹۹ لکھتے ہیں۔

۵۲۰۰ □

لامتناہی کو ∞ سے ظاہر کیا جاتا ہے جو حقیقی عدد نہیں ہے لہٰذا اس کو حساب میں عام اعداد کی طرح استعمال نہیں کیا جا سکتا ہے۔

$x \to \mp\infty$ پر تفاعل کا حد تلاش کرنے کی حکمت عملی وہی ہے جو حصہ ۲.۲ میں استعمال کی گئی۔ وہاں ہم نے مستقل تفاعل $y = k$ اور مماثل تفاعل $y = x$ کی حدیں حاصل کیں۔ اس کے بعد الجبرائی ملاپ کا ایک مسئلہ استعمال کرتے ہوئے ان نتائج سے دیگر تفاعل کی حدیں حاصل کی گئیں۔ یہاں ابتدائی تفاعل کو $y = k$ اور $y = x$ کے بجائے $y = k$ اور $y = \frac{1}{x}$ لیتے ہوئے ہم یہی کچھ دوبارہ کرتے ہیں۔

باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے ہمیں درج ذیل ثابت کرنا ہوگا۔

$$\lim_{x\to\mp\infty} k = k, \quad \lim_{x\to\mp\infty} \frac{1}{x} = 0 \tag{۱}$$

ہم مستقل تفاعل کا حد سوال ۴.۳۲۳ اور سوال ۴.۳۲۴ کے لئے رکھتے ہیں جبکہ دوسرے تفاعل کو یہاں ثابت کرتے ہیں۔

مثال ۴.۲۰: درج ذیل دکھائیں۔

ا. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ ب. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

حل:

ا. فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا عدد M تلاش کرنے ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$x > M, \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

$M = \frac{1}{\epsilon}$ یا اس سے بڑا مثبت عدد منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ ثابت ہوتا ہے (شکل ۴.۵۹)۔

ب. فرض کریں $\epsilon > 0$ دیا گیا ہے۔ ہمیں ایسا عدد N تلاش کرنے ہے کہ تمام x کے لئے درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$x < N, \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - 0\right| = \left|\frac{1}{x}\right| < \epsilon$$

$N = -\frac{1}{\epsilon}$ یا $-\frac{1}{\epsilon}$ سے کم منتخب کرنے سے درج بالا مطمئن ہوتا ہے۔ یوں $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ ثابت ہوتا ہے (شکل ۴.۵۹)۔

□

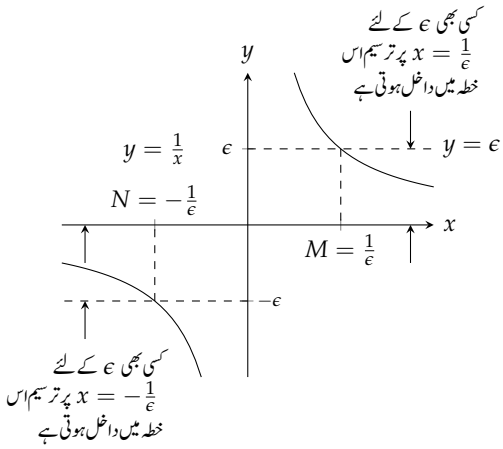
مساوات ۱ کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مسئلہ سے ہم دیگر حل تلاش کر سکتے ہیں۔

مسئلہ ۴.۶: $x \to \mp\infty$ پر حل کے خواص

اگر $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = L$ اور $\lim_{x\to\mp\infty} g(x) = M$ ہوں تب درج ذیل درست ہوں گے۔ (L اور M حقیقی اعداد ہیں۔)

قاعدہ مجموعہ: $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x) + g(x)] = L + M$

قاعدہ فرق: $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x) - g(x)] = L - M$



شکل ۴.۵۹: حد کی تلاش میں جیومیٹری (مثال ۴.۲۰)

۵۲۲۲ قاعدہ ضرب: $\lim_{x\to\mp\infty} f(x)\cdot g(x) = L\cdot M$

۵۲۲۳ قاعدہ ضرب مستقل: $\lim_{x\to\mp\infty} kf(x) = kL$

۵۲۲۴ قاعدہ حاصل تقسیم: $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

۵۲۲۵ قاعدہ طاقت: اگر m اور n عدد صحیح ہوں تب $\lim_{x\to\mp\infty}[f(x)]^{m/n} = L^{m/n}$

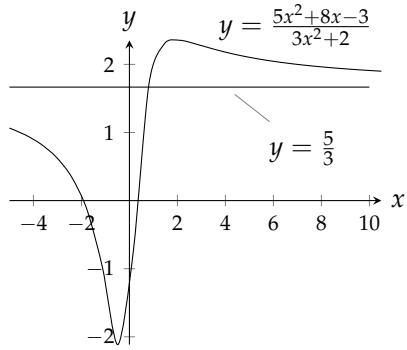
۵۲۲۶

۵۲۲۷ یہ خواص بالکل مسئلہ ۲.۱ (صفحہ ۹۳) میں دیے گئے خواص کی طرح ہیں اور انہیں ہم بالکل اسی طرح استعمال کرتے ہیں۔

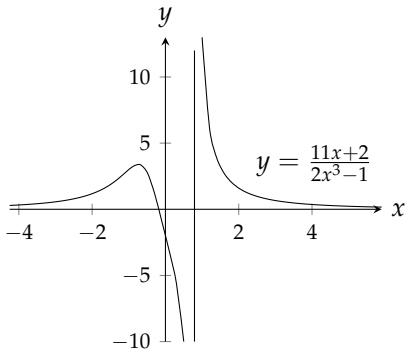
۵۲۲۸ مثال ۴.۲۱:

۱.

$$\lim_{x\to\infty}(5+\tfrac{1}{x}) = \lim_{x\to\infty} 5 + \lim_{x\to\infty}\tfrac{1}{x} \qquad \text{قاعدہ مجموعہ}$$
$$= 5 + 0 = 5 \qquad \text{معلوم قیمتیں}$$



شکل ۴.۶۰: ترسیم تفاعل اور حد (مثال ۴.۲۲)



شکل ۴.۶۱: ترسیم تفاعل اور حد (مثال ۴.۲۳)

ب.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} &= \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3}\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x} \\
&= \lim_{x\to-\infty} \pi\sqrt{3}\cdot \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} && \text{قاعدہ ضرب} \\
&= \pi\sqrt{3}\cdot 0\cdot 0 = 0 && \text{معلوم قیمتیں}
\end{aligned}$$

۵۲۲۹ □

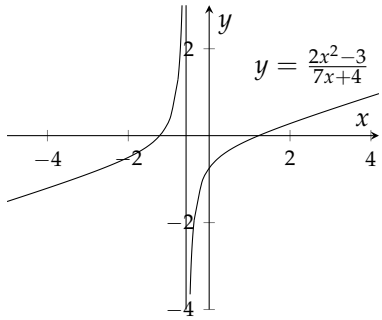
۵۲۳۰ مثال ۴.۲۲: شمار کنندہ اور نسب نما میں بلند تر طاقت ایک سے ہیں (شکل ۴.۶۰)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} &= \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}} && \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^2 \text{ سے تقسیم کریں} \\
&= \frac{5+0-0}{3+0} = \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

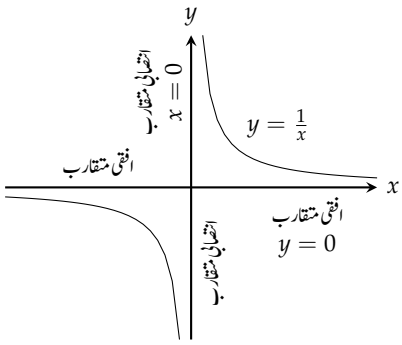
۵۲۳۱ □

۵۲۳۲ مثال ۴.۲۳: شمار کنندہ کی بلند ترین طاقت نسب نما کی بلند ترین طاقت سے کم ہے (شکل ۴.۶۱)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} && \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^3 \text{ سے تقسیم کریں} \\
&= \frac{0+0}{2-0} = 0
\end{aligned}$$



شکل ۴.۶۲: ترسیم برائے مثال ۴.۲۴



شکل ۴.۶۳: محدودی محور قطع زائد $y = \frac{1}{x}$ کے دونوں شاخوں کے متقارب ہیں۔

۵۲۳۳ □

۵۲۳۴ مثال ۴.۲۴: شمار کنندہ کی بلند ترین طاقت نسب نما کی بلند ترین طاقت سے زیادہ ہے۔ شکل ۴.۶۲

ا.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3}{7x+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-\frac{3}{x}}{7+\frac{4}{x}} \qquad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x \text{ سے تقسیم کریں}$$
$$= -\infty$$

ب.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-4x+\frac{7}{x}}{2-\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}} \qquad \text{شمار کنندہ اور نسب نما کو } x^2 \text{ سے تقسیم کریں}$$
$$= \frac{\infty}{2} = \infty$$

۵۲۳۵ □

۵۲۳۶ مثال ۴.۲۲ تا مثال ۴.۲۴ سے $x \to \mp\infty$ پر ناطق تفاعل کی حد حاصل کرنے کا ایک نقش ملتا ہے۔

۵۲۳۷ ا. اگر شمار کنندہ اور نسب نما کی بلند تر طاقت ایک سی ہو تب تفاعل کا حد بلند تر ارکان کی عددی سر کا حاصل تقسیم ہو گا۔

۵۲۳۸ ب. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے کم ہو تب تفاعل کا حد صفر ہو گا۔

۵۲۳۹ ج. اگر شمار کنندہ کی بلند تر طاقت نسب نما کی بلند تر طاقت سے زیادہ ہو تب تفاعل کا حد ∞ یا $-\infty$ ہو گا۔ حد کی علامت نسب نما اور شمار کنندہ کی علامتوں
۵۲۴۰ سے حاصل ہو گا۔

ناطق تفاعل کے لئے خلاصہ

ا. اگر درجہ f اور درجہ g ایک دوسرے کے برابر ہوں تب $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_n}$ یعنی f اور g کے اول عددی سروں کی نسبت کے برابر ہو گا۔

ب. اگر درجہ f درجہ g سے کم ہو تب $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ہو گا۔

ج. اگر درجہ f درجہ g سے زیادہ ہو تب $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \mp\infty$ ہو گا جہاں شمار کنندہ اور نسب نما کی علامتوں سے علامت تعین ہو گا۔

کثیر رکنی $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,\ a_n \neq 0$ کا اول عددی سر a_n ہے جو بلند تر طاقتی جزو کا عددی سر ہے۔

افقی اور انتصابی متقارب

اگر مبدا سے دور چلتے ہوئے ایک تفاعل اور کسی مقررہ لکیر کے درمیان فاصل صفر تک پہنچتا ہو تب ہم کہتے ہیں کہ ترسیم لکیر تک متقاربی پہنچتی ہے اور اس لکیر کو ترسیم کا **متقارب**[۱۳] کہتے ہیں۔

مثال ۴.۲۵: محددی محور تفاعل $y = \frac{1}{x}$ کے متقارب ہیں (شکل ۴.۶۳)۔ ترسیم کے دائیں حصے پر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

اور ترسیم کے بائیں حصے پر

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ہیں لہٰذا x محور $y = \frac{1}{x}$ کا متقارب ہے۔ اسی طرح اوپر اور نیچے

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty, \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

ہیں لہٰذا y محور بھی $y = \frac{1}{x}$ کا متقارب ہے۔

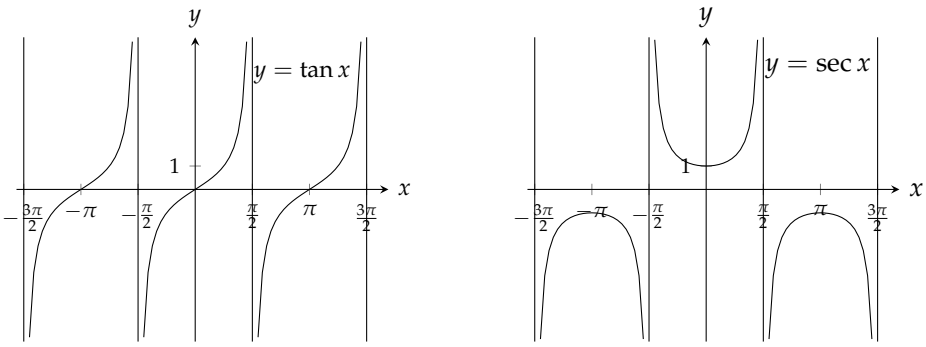
یاد رہے کہ $x = 0$ پر نسب نما صفر ہے لہٰذا تفاعل غیر معین ہے۔ □

تعریف: تفاعل $y = f(x)$ کا خط $y = b$ اس صورت افقی متقارب ہو گا جب

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$ ہو۔

---

[۱۳] asymptote



شکل ۴.۶۴: انتصابی متقارب (مثال ۴.۲۶)

۵۲۵۶ تفاعل $y = f(x)$ کا خط $x = a$ اس صورت انتصابی متقارب ہو گا جب

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \mp\infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \mp\infty \quad \text{ہو۔}$$

۵۲۵۷ □

۵۲۵۸ مثال ۴.۲۶: $\frac{\pi}{2}$ کے طاق عدد صحیح مضرب پر، جہاں $\cos x = 0$ ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتصابی متقارب پائے جاتے ہیں (شکل
۵۲۵۹ ۴.۶۴)۔

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

۵۲۶۰ π کے عدد صحیح مضرب پر، جہاں $\sin x = 0$ ہے، درج ذیل دونوں منحنیات کے انتصابی متقارب پائے جاتے ہیں (شکل ۴.۶۵)۔

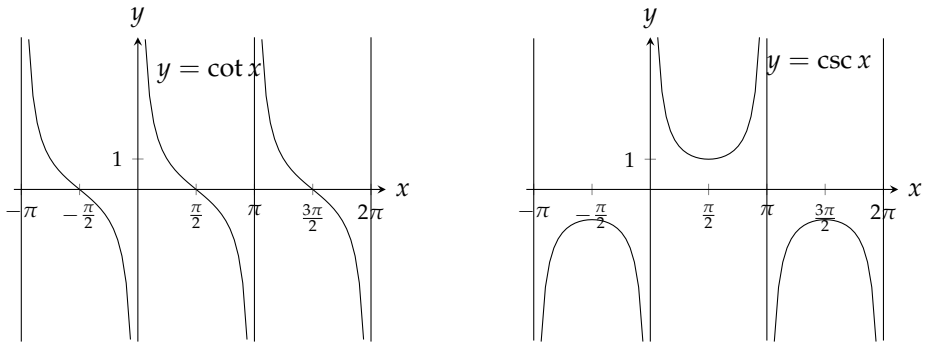
$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x}, \quad y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

۵۲۶۱ □

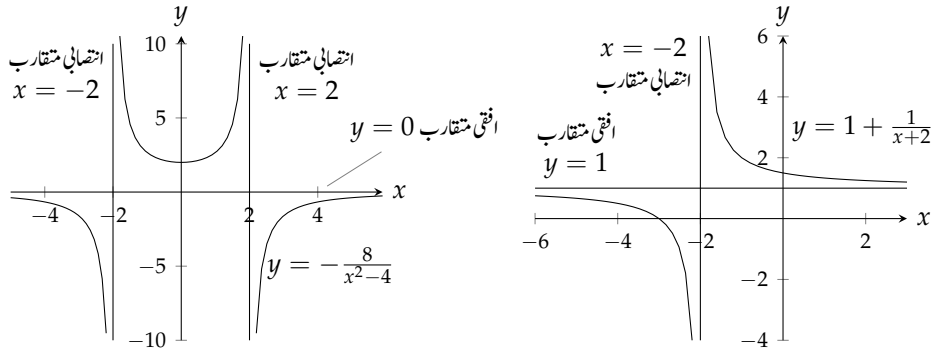
۵۲۶۲ مثال ۴.۲۷: درج ذیل ترسیم کے متقارب تلاش کریں۔

$$y = \frac{x+3}{x+2}$$

۵۲۶۳ حل: ہم $x \to \mp\infty$ پر اور $x \to -2$، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کا رویہ دیکھنا چاہتے ہیں۔ قلم و کاغذ استعمال کرتے ہوئے ہم $x + 3$
۵۲۶۴ کو $x + 2$ سے تقسیم کرتے ہیں۔



شکل ۴.۶۵: انتصابی متقارب (مثال ۴.۲۶)



شکل ۴.۶۶: انتصابی متقارب (مثال ۴.۲۷)

شکل ۴.۶۷: انتصابی متقارب (مثال ۴.۲۸)

۵۲۶۵

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline x+2 & x+3 \\ & -x-2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

۵۲۶۶ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y = \frac{x+3}{x+2} = \frac{x+2+1}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2}$$

۵۲۶۷ ہم دیکھتے ہیں کہ $\frac{1}{x}$ کی منحنی کو 1 اکائی اوپر اور 2 اکائیاں بائیں منتقل کرتے ہوئے درج بالا منحنی حاصل ہو گی۔ یوں محددی محور کے بجائے خط $y = 1$ اور
۵۲۶۸ خط $x = -2$ متقارب خط ہوں گے۔

۵۲۶۹ □

۵۲۷۰ مثال ۴.۲۸: درج ذیل ترسیم کا متقارب تلاش کریں۔

$$y = -\frac{8}{x^2 - 4}$$

۵۲۷۱ حل: ہم $x \to \mp\infty$ اور $x - \mp 2$ ، جہاں نسب نما صفر ہے، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

۵۲۷۲ چونکہ $\lim_{x\to\mp\infty} f(x) = 0$ لہٰذا افقی متقارب خط $y = 0$ ہے (شکل ۴.۶۷)۔ چونکہ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$ اور
۵۲۷۳ $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ سے $x = 2$ متقاربی خط حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح $x = -2$ بھی متقاربی خط حاصل ہو گا۔ □

۵۲۷۴ ایسا معلوم ہوتا ہے کہ جہاں ناطق تفاعل کا نسب نما صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی متقارب پایا جائے گا۔ یہ تقریباً درست ہے۔ حقیقت میں ناطق تفاعل کی کم تر جزو
۵۲۷۵ تک تخفیف شدہ صورت میں جہاں نسب نما کا صفر ہو وہاں تفاعل کا انتصابی متقارب پایا جائے گا۔

۵۲۷۶ مثال ۴.۲۹: نسب نما میں صفر پر قابل ہٹاؤ عدم استمرار درج ذیل کی ترسیم

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

۵۲۷۷ کا $x = -1$ پر انتصابی متقارب پایا جاتا ہے لیکن $x = 1$ پر نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$\frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

۵۲۷۸ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا عدم استمرار قابل ہٹاؤ ہے اور $x \to 1$ پر تفاعل کا حد $\frac{3}{2}$ ہے (شکل ۴.۶۸)۔ □

۵۲۷۹ مسئلہ ۴.۲ (صفحہ ۹۷ مسئلہ بیچ) بھی $x \to \mp\infty$ پر حد کے لئے قابل لاگو ہے۔ اس کی ایک مثال پیش کرتے ہیں۔

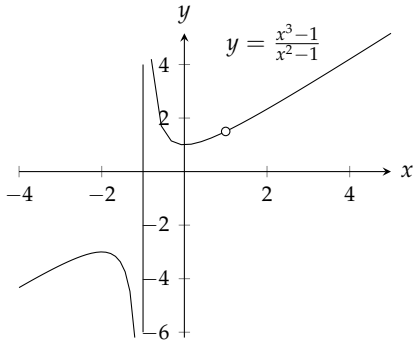
۵۲۸۰ مثال ۴.۳۰: مسئلہ بیچ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل منحنی کے متقارب تلاش کریں۔

$$y = 2 + \frac{\sin x}{x}$$

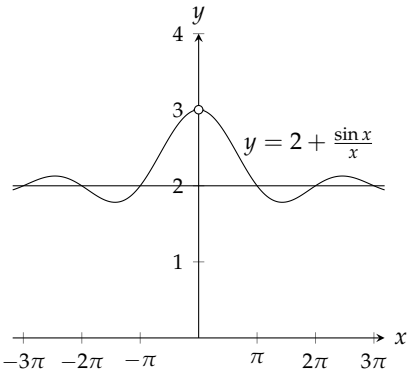
۵۲۸۱ حل: ہم $x \to 0$ جہاں نسب نما صفر ہو گا اور $x \to \mp\infty$ پر منحنی کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔

۵۲۸۲ ہم جانتے ہیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ہے لہٰذا مبدا پر کوئی متقارب نہیں پایا جاتا ہے۔ چونکہ

$$0 \le \left|\frac{\sin x}{x}\right| \le \left|\frac{1}{x}\right|$$



شکل ۴.۶۸: منحنی $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$ کی $x = 1$ پر عدم استمرار قابل ہٹاو ہے لہٰذا اس کی صرف $x = -1$ پر متقاربی خط ہو گا۔



شکل ۴.۶۹: منحنی اپنے متقاربی خط کو لا متناہی مرتبہ قطع کر سکتی ہے (مثال ۴.۳۰)۔

۵۲۸۳ اور $\lim_{x\to\mp\infty} \left|\frac{1}{x}\right| = 0$ ہے لہٰذا مسئلہ بیچ کے تحت $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ ہو گا۔ یوں

$$\lim_{x\to\mp\infty}(2 + \frac{\sin x}{x}) = 2 + 0 = 2$$

۵۲۸۴ ہو گا لہٰذا منحنی کے بائیں اور دائیں متقاربی خط $y = 2$ ہو گا (شکل ۴.۶۹)۔ □

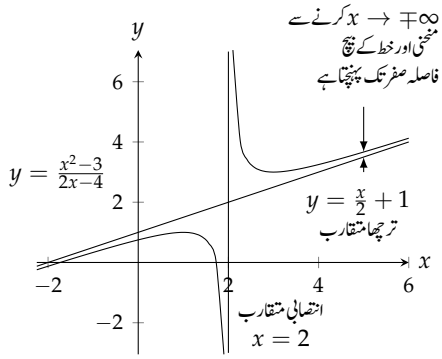
۵۲۸۵ ترچھے متقارب

۵۲۸۶ اگر شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجے سے ایک زیادہ ہو تب ترسیم کا ایک ترچھا متقارب پایا جائے گا جو نا افقی اور نا انتصابی ہو گا۔

۵۲۸۷ مثال ۴.۳۱: درج ذیل کے متقارب تلاش کریں۔

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

۵۲۸۸ حل: ہم $x \to \mp\infty$ اور $x \to 2$، جہاں نسب نما صفر ہو گا، پر ترسیم کے رویہ میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ ہم $x^2 - 3$ کو $2x - 4$ سے تقسیم
۵۲۸۹ کرتے ہیں۔



شکل ۴.۷۰: ترچھا متقارب (مثال ۴.۳۱)

۵۲۹۰

$$
\begin{array}{r|l}
 & \frac{1}{2}x + 1 \\
\hline
2x - 4 & x^2 \qquad\quad - 3 \\
 & -x^2 + 2x \\
\hline
 & \qquad 2x - 3 \\
 & \qquad -2x + 4 \\
\hline
 & \qquad\qquad 1
\end{array}
$$

۵۲۹۱ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{x^2-3}{2x-4} = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x-4}$$

۵۲۹۲ چونکہ $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$ اور $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$ ہیں لہٰذا $x = 2$ دو طرفہ متقارب ہے۔ $x \to \mp\infty$ پر

۵۲۹۳ حاصل تقسیم صفر تک پہنچتی اور $f(x) \to \frac{x}{2} + 1$ تک پہنچتی ہے۔ یوں $y = \frac{x}{2} + 1$ دونوں اطراف متقاربی خط ہے (شکل ۴.۷۰)۔ □

۵۲۹۴ **متقارب اور غالب اجزاء کی مدد سے ترسیم**

۵۲۹۵ درج ذیل تفاعل کے تمام مشاہدوں

$$f(x) = \frac{x^2-3}{2x-4}$$

۵۲۹۶ میں غالباً سب سے اہم مشاہدہ

$$f(x) = \frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2x-4}$$

۵۲۹۷ ہے جس سے درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

$$f(x) \approx \frac{x}{2} + 1 \qquad x \text{ کی بڑی قیمتوں کے لئے}$$

$$f(x) = \frac{1}{2x-4} \qquad 2 \text{ کے قریب } x \text{ کی قیمتوں کے لئے}$$

۵۲۹۸ بڑی x پر f کا رویہ $y = \frac{x}{2} + 1$ ہو گا جہاں $\frac{1}{2x-4}$ قابل نظر انداز ہو گا۔ $x = 2$ کے قریب $\frac{1}{2x-4}$ تفاعل f کا غالب جزو ہو گا لہٰذا
۵۲۹۹ $x = 2$ کے قریب f کا رویہ $\frac{1}{2x-4}$ کے رویے کی طرح ہو گا۔

۵۳۰۰ ہم کہتے ہیں کہ x کی بڑی مطلق مقدار پر $\frac{x}{2} + 1$ کا **غلبہ**[۱۴] ہے جبکہ $x = 2$ کے قریب $\frac{1}{2x-4}$ **غالب**[۱۵] ہے۔ تفاعل کا رویہ جاننے میں غالب
۵۳۰۱ اجزاء کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

۵۳۰۲ مثال ۴.۳۲: درج ذیل ترسیم کریں۔

$$y = \frac{x^3+1}{x}$$

۵۳۰۳ حل: ہم تشاکل، غالب اجزاء، متقارب، اتار، چڑھاو، انتہائی نقطے اور مقعر پر غور کرتے ہیں۔

۵۳۰۴ **پہلا قدم:** تشاکل۔ نہیں پایا جاتا ہے۔

۵۳۰۵ **دوسرا قدم:** غالب اجزاء اور متقارب۔ ہم ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$y = x^2 + \frac{1}{x} \tag{۲}$$

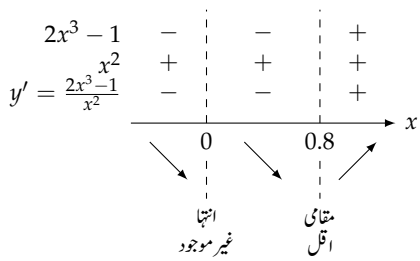
۵۳۰۶ $|x|$ کی بڑی قیمت کے لئے $y \approx x^2$ اور $x = 0$ کے قریب $y \approx \frac{1}{x}$ ہو گا۔ مساوات ۲ میں $x = 0$ پر انتصابی متقارب نظر آتا ہے جہاں
۵۳۰۷ نسب نما صفر ہو گا۔

۵۳۰۸ **تیسرا قدم:** انتہا، اتار اور چڑھاو۔ یک رتبی تفرق

$$y' = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3-1}{x^2}$$

۵۳۰۹ نقطہ $x = 0$ پر غیر معین ہے جبکہ درج ذیل پر صفر ہے۔

۵۳۱۰
$$\begin{aligned} 2x - \frac{1}{x^2} &= 0 \\ 2x^3 - 1 &= 0 \\ x^3 &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx 0.8 \end{aligned}$$



---

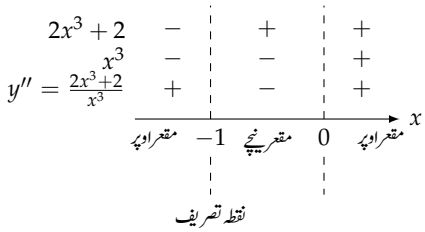
[۱۴] dominates
[۱۵] dominant

۵۳۱۱ **چوتھا قدم:** مقعر۔ دور تبی تفرق

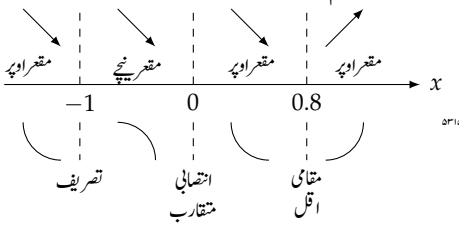
$$y'' = 2 + \frac{2}{x^3} = \frac{2x^3+2}{x^3}$$

۵۳۱۲ نقطہ $x = 0$ پر غیر معین ہے اور درج ذیل پر صفر ہے:

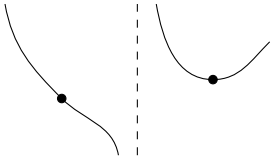
۵۳۱۳
$$\begin{aligned} 2 + \frac{2}{x^3} &= 0 \\ 2x^3 + 2 &= 0 \\ x^3 &= -1 \\ x &= -1 \end{aligned}$$



۵۳۱۴ **پانچواں قدم:** درج بالا معلومات کو اکٹھا کر کے ترسیم کا خاکہ بناتے ہیں۔

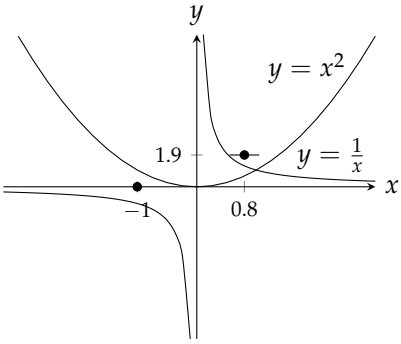


۵۳۱۵

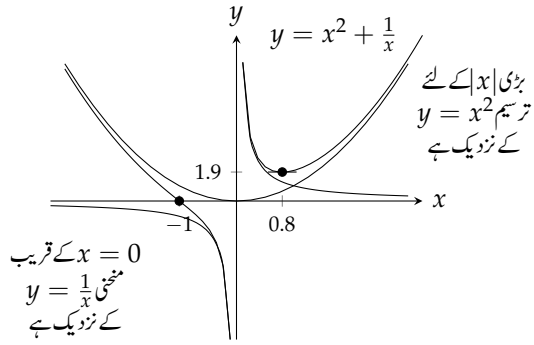


۵۳۱۶ **چھٹا قدم:** غالب اجزاء، قطع منحنی اور افقی مماس۔ اس سے منحنی کی ترسیم کھینچنے میں مدد ملتی ہے۔

۵۳۱۷



۵۳۱۸ **ساتواں قدم:** ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل کی ترسیم کھینچتے ہیں۔



□

تفاعل $y = f(x)$ ترسیم کرنے کا لائحہ عمل

۱. تشاکل کی نشاندہی کریں۔
کیا تفاعل طاق یا جفت ہے؟

۲. کیا معلوم تفاعل کو منتقل کرنے سے موجودہ تفاعل حاصل ہو گا؟

۳. غالب اجزاء تلاش کریں۔
ناطق تفاعل کو کثیر رکنی جمع حاصل تقسیم کی صورت میں لکھیں۔

۴. متقارب خطوط اور قابل ہٹاو عدم استمرار تلاش کریں۔
کیا کسی نقطے پر نسب نما صفر ہے؟
$x \to \mp\infty$ کرنے سے کیا ہوتا ہے؟

۵. f' حاصل کرتے ہوئے $f' = 0$ کو حل کریں۔ نقطہ فاصل اور وقفہ اتار اور وقفہ چڑھاو دریافت کریں۔

۶. f'' سے مقعر اور نقطہ تصریف معلوم کریں۔

۷. ترسیم کی عمومی صورت کا خاکہ بنائیں۔

۸. مخصوص نقطوں، مثلاً آخری نقطے، نقطہ فاصل، قاطع محدد، پر f کی قیمت تلاش کریں۔

۹. ان تمام معلومات کو مد نظر رکھتے ہوئے تفاعل ترسیم کریں۔

سوالات

$x \to \mp\infty$ پر حد کا حساب

سوال ۲۳۷.۴ تا سوال ۲۴۲.۴ میں (ا) $x \to \infty$ پر (ب) $x \to -\infty$ پر حد تلاش کریں۔ (کمپیوٹر پر تفاعل ترسیم کرتے ہوئے حد کی ذہنی تصویر بنانے میں مدد ملتی ہے۔)

۵۳۴۰ سوال ۴.۲۳۷: $f(x) = \frac{2}{x} - 3$

۵۳۴۱ سوال ۴.۲۳۸: $f(x) = \pi - \frac{2}{x^2}$

۵۳۴۲ سوال ۴.۲۳۹: $g(x) = \frac{1}{2+\frac{1}{x}}$

۵۳۴۳ سوال ۴.۲۴۰: $g(x) = \frac{1}{8-\frac{5}{x^2}}$

۵۳۴۴ سوال ۴.۲۴۱: $h(x) = \frac{-5+\frac{7}{x}}{3-\frac{1}{x^2}}$

۵۳۴۵ سوال ۴.۲۴۲: $h(x) = \frac{3-\frac{2}{x}}{4+\frac{\sqrt{2}}{x^2}}$

۵۳۴۶ سوال ۴.۲۴۳ تا سوال ۴.۲۴۶ میں حد تلاش کریں۔

۵۳۴۷ سوال ۴.۲۴۳: $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin 2x}{x}$

۵۳۴۸ سوال ۴.۲۴۴: $\lim_{\theta\to\infty} \frac{\cos\theta}{3\theta}$

۵۳۴۹ سوال ۴.۲۴۵: $\lim_{t\to-\infty} \frac{2-t+\sin t}{t+\cos t}$

۵۳۵۰ سوال ۴.۲۴۶: $\lim_{r\to\infty} \frac{r+\sin r}{2r+7-5\sin r}$

۵۳۵۱ **ناطق تفاعل کی حد**

۵۳۵۲ سوال ۴.۲۴۷ تا سوال ۴.۲۶۰ میں دیے ناطق تفاعل کی (ا) $x \to \infty$ اور (ب) $x \to -\infty$ پر حد تلاش کریں۔

۵۳۵۳ سوال ۴.۲۴۷: $f(x) = \frac{2x+3}{5x+7}$

۵۳۵۴ سوال ۴.۲۴۸: $f(x) = \frac{2x^3+7}{x^3-x^2+x+7}$

۵۳۵۵ سوال ۴.۲۴۹: $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$

۵۳۵۶ سوال ۴.۲۵۰: $f(x) = \frac{3x+7}{x^2-2}$

۵۳۵۷ سوال ۴.۲۵۱: $f(x) = \frac{1-12x^3}{4x^2+12}$

۵۳۵۸ سوال ۴.۲۵۲: $g(x) = \frac{1}{x^3-4x+1}$

۵۳۵۹ سوال ۴.۲۵۳: $h(x) = \frac{7x^3}{x^3-3x^2+6x}$

۵۳۶۰ سوال ۴.۲۵۴: $g(x) = \frac{3x^2-6x}{4x-8}$

سوال ۴.۲۵۵: $f(x) = \frac{2x^5+3}{-x^2+x}$

سوال ۴.۲۵۶: $g(x) = \frac{10x^5+x^4+31}{x^6}$

سوال ۴.۲۵۷: $g(x) = \frac{x^4}{x^3+1}$

سوال ۴.۲۵۸: $h(x) = \frac{9x^4+x}{2x^4+5x^2-x+6}$

سوال ۴.۲۵۹: $h(x) = \frac{-2x^3-2x+3}{3x^3+3x^2-5x}$

سوال ۴.۲۶۰: $h(x) = \frac{-x^4}{x^4-7x^3+7x^2+9}$

حد برائے غیر عدد صحیح طاقت یا منفی طاقت

ایسی نسبت جس کی نسب نما اور شمار کنندہ میں غیر عدد صحیح یا منفی طاقت پائی جاتی ہوں کی حد بالکل ناطق تفاعل کی حد کی طرح تلاش کی جاتی ہے۔ نسب نما میں x کی بلند تر طاقت سے نسب نما اور شمار کنندہ کو تقسیم کرتے ہوئے آگے بڑھیں۔ سوال ۴.۲۶۱ تا سوال ۴.۲۶۶ میں حد تلاش کریں۔

سوال ۴.۲۶۱: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}+x^{-1}}{3x-7}$

سوال ۴.۲۶۲: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$

سوال ۴.۲۶۳: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x}}$

سوال ۴.۲۶۴: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^{-1}+x^{-4}}{x^{-2}-x^{-3}}$

سوال ۴.۲۶۵: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^{5/3}-x^{1/3}+7}{x^{8/5}+3x+\sqrt{x}}$

سوال ۴.۲۶۶: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x}-5x+3}{2x+x^{2/3}-4}$

قیمتوں اور حد سے ترسیم کا حصول

سوال ۴.۲۶۷ تا سوال ۴.۲۷۰ میں دیے شرائط پر پورا اترتی ترسیم کا خاکہ بنائیں۔ ترسیم کا کلیہ درکار نہیں ہے لہٰذا کار تیسی محدد پر ایسی ترسیم کھینچیں جو دیے شرائط پر پورا اترتی ہو۔ (ان شرائط کو کئی ترسیمات مطمئن کر سکتی ہیں لہٰذا آپ کے ترسیمات دیے گئے جوابی ترسیمات سے مختلف ہو سکتی ہیں۔)

سوال ۴.۲۶۷: $f(0) = 0, f(1) = 2, f(-1) = -2, \lim\limits_{x\to-\infty} = -1, \lim\limits_{x\to\infty} = 1$

سوال ۴.۲۶۸: $f(0) = 0, \lim\limits_{x\to\mp\infty} f(x) = 0, \lim\limits_{x\to 0^+} = 2, \lim\limits_{x\to 0^-} = -2$

سوال ۴.۲۶۹: $f(0)=0, \lim_{x\to\mp\infty} f(x)=0, \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=\infty,$
$\lim_{x\to 1^+} f(x)=-\infty, \lim_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$

سوال ۴.۲۷۰: $f(2)=1, f(-1)=0, \lim_{x\to\infty} f(x)=0, \lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty,$
$\lim_{x\to 0^-} f(x)=-\infty, \lim_{x\to -\infty} f(x)=1$

تفاعل کی ایجاد

سوال ۴.۲۷۱ تا سوال ۴.۲۷۴ میں ایسا تفاعل تلاش کریں جو دیے گئے شرائط کو مطمئن کرتا ہو اور اس تفاعل کو ترسیم کریں۔ (چونکہ کئی تفاعل ان شرائط کو مطمئن کر سکتے ہیں لہذا آپ کے جوابات دیے گئے جوابات سے مختلف ہو سکتے ہیں۔ آپ ٹکڑوں میں تفاعل کے کلیات استعمال کر سکتے ہیں۔)

سوال ۴.۲۷۱: $\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=0, \lim_{x\to 2^-} f(x)=\infty, \lim_{x\to 2^+} f(x)=\infty$

سوال ۴.۲۷۲: $\lim_{x\to\mp\infty} g(x)=0, \lim_{x\to 3^-} g(x)=-\infty, \lim_{x\to 3^+} g(x)=\infty$

سوال ۴.۲۷۳: $\lim_{x\to -\infty} h(x)=-1, \lim_{x\to\infty} h(x)=1, \lim_{x\to 0^-} h(x)=-1, \lim_{x\to 0^+} h(x)=1$

سوال ۴.۲۷۴: $\lim_{x\to\mp\infty} k(x)=1, \lim_{x\to 1^-} k(x)=\infty, \lim_{x\to 1^+} (x)=-\infty$

ناطق تفاعل کی ترسیم

سوال ۴.۲۷۵ تا سوال ۴.۳۰۲ میں دیے گئے ناطق تفاعل ترسیم کریں۔ متقارب خطوط اور غالب اجزاء کی ترسیمات بھی شامل کریں۔

سوال ۴.۲۷۵: $y=\frac{1}{x-1}$

سوال ۴.۲۷۶: $y=\frac{1}{x+1}$

سوال ۴.۲۷۷: $y=\frac{1}{2x+4}$

سوال ۴.۲۷۸: $y=\frac{-3}{x-3}$

سوال ۴.۲۷۹: $y=\frac{x+3}{x+2}$

سوال ۴.۲۸۰: $y=\frac{2x}{x+1}$

سوال ۴.۲۸۱: $y=\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}$

سوال ۴.۲۸۲: $y=\frac{x^2-49}{x^2+5x-14}$

سوال ۴.۲۸۳: $y=\frac{x^2-1}{x}$

سوال ۴.۲۸۴: $y=\frac{x^2+4}{2x}$

۵۴۰۸ سوال ۴.۲۸۵: $y = \frac{x^4+1}{x^2}$

۵۴۰۹ سوال ۴.۲۸۶: $y = \frac{x^3+1}{x^2}$

۵۴۱۰ سوال ۴.۲۸۷: $y = \frac{1}{x^2-1}$

۵۴۱۱ سوال ۴.۲۸۸: $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

۵۴۱۲ سوال ۴.۲۸۹: $y = -\frac{x^2-2}{x^2-1}$

۵۴۱۳ سوال ۴.۲۹۰: $y = \frac{x^2-4}{x^2-2}$

۵۴۱۴ سوال ۴.۲۹۱: $y = \frac{x^2}{x-1}$

۵۴۱۵ سوال ۴.۲۹۲: $y = -\frac{x^2}{x+1}$

۵۴۱۶ سوال ۴.۲۹۳: $y = \frac{x^2-4}{x-1}$

۵۴۱۷ سوال ۴.۲۹۴: $y = -\frac{x^2-4}{x+1}$

۵۴۱۸ سوال ۴.۲۹۵: $y = \frac{x^2-x+1}{x-1}$

۵۴۱۹ سوال ۴.۲۹۶: $y = -\frac{x^2-x+1}{x-1}$

۵۴۲۰ سوال ۴.۲۹۷: $y = \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2+x-2}$

۵۴۲۱ سوال ۴.۲۹۸: $y = \frac{x^3+x-2}{x-x^2}$

۵۴۲۲ سوال ۴.۲۹۹: $y = \frac{x}{x^2-1}$

۵۴۲۳ سوال ۴.۳۰۰: $y = \frac{x-1}{x^2(x-2)}$

۵۴۲۴ سوال ۴.۳۰۱: $y = \frac{8}{x^2+4}$

۵۴۲۵ سوال ۴.۳۰۲: $y = \frac{4x}{x^2+4}$

۵۴۲۶ **کمپیوٹر کا استعمال**

۵۴۲۷ سوال ۴.۳۰۳ تا سوال ۴.۳۰۸ کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ تفاعل کے کلیہ اور ترسیم کا تعلق سمجھائیں۔

۵۴۲۸ سوال ۴.۳۰۳: $y = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

۵۴۲۹ سوال ۴.۳۰۴: $y = \frac{-1}{\sqrt{4-x^2}}$

۵۴۳۰ سوال ۴.۳۰۵: $y = x^{2/3} + \frac{1}{x^{1/3}}$

سوال ۴.۳۰۶: $y = 2\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} - 3$

سوال ۴.۳۰۷: $y = \sin(\frac{\pi}{x^2+1})$

سوال ۴.۳۰۸: $y = -\cos(\frac{\pi}{x^2+1})$

اجزاء کی ترسیمات

سوال ۴.۳۰۹ تا سوال ۴.۳۱۲ میں تفاعل کے اجزاء کو انفرادی ایک ساتھ ترسیم کریں۔ ان ترسیمات کو دیکھتے ہوئے تفاعل کا خاکہ کھینچیں۔

سوال ۴.۳۰۹: $y = \sec x + \frac{1}{x}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال ۴.۳۱۰: $y = \sec x - \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال ۴.۳۱۱: $y = \tan x + \frac{1}{x^2}, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

سوال ۴.۳۱۲: $y = \frac{1}{x} - \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۴.۳۱۳: $f(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2+1}$ لیں۔ دکھائیں کہ ایسا c پایا جاتا ہے کہ $f(c)$ کی قیمت درج ذیل ہو۔

ا. -2 ب. $\cos 3$ ج. $5\,000\,000$

سوال ۴.۳۱۴: $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-x})$ تلاش کریں۔

سوال ۴.۳۱۵: تشاکلی۔ فرض کریں وقفہ $x > 0$ پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔ وقفہ $x < 0$ پر تفاعل کا رویہ کیا ہو گا؟

سوال ۴.۳۱۶: تشاکلی۔ فرض کریں وقفہ $x < 0$ پر جفت تفاعل بڑھتا ہے۔ وقفہ $x > 0$ پر تفاعل کا رویہ کیا ہو گا؟

سوال ۴.۳۱۷: فرض کریں $f(x)$ اور $g(x)$ کثیر رکنی ہیں اور $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 2$ ہے۔ کیا $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ کے بارے میں کچھ اخذ کرنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ بین کریں۔

سوال ۴.۳۱۸: فرض کریں $f(x)$ اور $g(x)$ کثیر رکنی ہیں۔ اگر $g(x)$ کبھی بھی صفر نہیں ہو تب کیا $\frac{f(x)}{g(x)}$ کی ترسیم کا متقارب ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۳۱۹: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے افقی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۳۲۰: دیے گئے ناطق تفاعل کے کتنے انتصابی متقارب ہو سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۳۲۱:

ا. ایک ترسیم اپنے متقاربی خط کو قطع کر سکتی ہے۔ منحنی $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$ (مثال ۴.۳۰) متقاربی خط کو لامتناہی مرتبہ قطع کرتی ہے۔ دکھائیں کہ $x \to \infty$ پر اس ترسیم کا ڈھلوان متقاربی خط کے ڈھلوان تک پہنچتا ہے۔

ب. درج ذیل خواص رکھنے والے تفاعل $f(x)$ کی مثال پیش کریں۔

۵۴۵۸ ۱) $x > 0$ پر f قابل تفرق ہے۔

۵۴۵۹ ۲) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$

۵۴۶۰ ۳) $\lim_{x\to\infty} f'(x)$ غیر موجود ہے۔

۵۴۶۱ سوال ۴.۳۲۲: ہم درج ذیل تفاعل کی متقاربی خط تلاش کرنا چاہتے ہیں۔

$$y = \frac{x^2+3x+7}{x+2}$$

۵۴۶۲ ایسا کرنے کی خاطر ہم اس تفاعل کو کثیر رکنی اور حاصل تقسیم کا مجموعہ لکھتے ہیں

$$\frac{x^2+3x+7}{x+2} = x+1+\frac{5}{x+2}$$

۵۴۶۳ جس کی ترچھی متقارب $y = x+1$ ہے۔

۵۴۶۴ اگر ہم نسب نما اور شمار کنندہ کو x سے تقسیم کریں تب

$$\frac{x^2+3x+7}{x+2} = \frac{x+3+\frac{7}{x}}{1+\frac{2}{x}}$$

۵۴۶۵ ملتا ہے جس کی متقارب $y = x+3$ ہے۔

۵۴۶۶ ان میں سے کون کا خط متقارب ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۵۴۶۷ سوال ۴.۳۲۳ اور سوال ۴.۳۲۴ میں حد کی باضابطہ تعریف استعمال کرتے ہوئے $x \to \mp\infty$ پر دی گئی حد کی تصدیق کریں۔

۵۴۶۸ سوال ۴.۳۲۳: اگر f کی قیمت مستقل ہو $f(x) = k$ تب $\lim_{x\to\infty} f(x) = k$ ہو گا۔

۵۴۶۹ سوال ۴.۳۲۴: اگر f کی قیمت مستقل ہو $f(x) = k$ تب $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k$ ہو گا۔

۵۴۷۰ **کمپیوٹر ترسیمات کے مزید مشاہدے**

۵۴۷۱ سوال ۴.۳۲۵ تا سوال ۴.۳۲۸ میں تفاعل ترسیم کریں۔ ان تفاعل کے متقاربی خط تلاش کریں۔ متقاربی خط جہاں ہیں، اس کی وجہ پیش کریں۔

۵۴۷۲ سوال ۴.۳۲۵: $y = -\frac{x^2-4}{x+1}$

۵۴۷۳ سوال ۴.۳۲۶: $y = \frac{x^2+x-6}{2x-2}$

۵۴۷۴ سوال ۴.۳۲۷: $y = \frac{x^3-x^2-1}{x^2-1}$

۵۴۷۵ سوال ۴.۳۲۸: $y = \frac{x^3-2x^2+x+1}{x-x^2}$

۵۴۷۶ سوال ۴.۳۲۹ تا سوال ۴.۳۳۴ میں تفاعل کی ترسیم کے ساتھ غالب اجزاء بھی ترسیم کریں۔ تفاعل کی ترسیم اور غالب اجزاء کی ترسیمات کا تعلق بیان کریں۔

۵۴۷۷ سوال ۴.۳۲۹: $y = x^3 + \frac{3}{x}$

۵۴۷۸ سوال ۴.۳۳۰: $y = x^3 - \frac{3}{x}$

۵۴۷۹ سوال ۴.۳۳۱: $y = 2\sin x + \frac{1}{x}$

۵۴۸۰ سوال ۴.۳۳۲: $y = 2\cos x - \frac{1}{x}$

۵۴۸۱ سوال ۴.۳۳۳: $y = \frac{x^2}{2} + 3\sin 2x$

۵۴۸۲ سوال ۴.۳۳۴: $y = (x-1)^{11} + 2\sin 2\pi x$

۵۴۸۳ سوال ۴.۳۳۵ اور سوال ۴.۳۳۶ کا تفاعل ترسیم کریں۔ اس کے بعد درج ذیل کے جوابات دیں۔

۵۴۸۴ ا. $x \to 0^+$ اور $x \to 0^-$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

۵۴۸۵ ب. $x \to \mp\infty$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

۵۴۸۶ ج. $x \to 1$ اور $x \to -1$ پر ترسیم کا رویہ کیسا ہے؟

۵۴۸۷ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

۵۴۸۸ سوال ۴.۳۳۵: $y = \frac{3}{2}(x - \frac{1}{x})^{2/3}$

۵۴۸۹ سوال ۴.۳۳۶: $y = \frac{3}{2}(\frac{x}{x-1})^{2/3}$

۵۴۹۰ سوال ۴.۳۳۷: تفاعل $y = -\frac{x^3-2}{x^2+1}$ کو درج ذیل وقفوں پر ترسیم کریں۔

۵۴۹۱ ا. $-9 \le x \le 9$ ۵۴۹۲ ب. $-90 \le x \le 90$ ۵۴۹۳ ج. $-900 \le x \le 900$

۵۴۹۴ جزو-1 کی ترسیم بہترین ہو گی۔ جزو-ب میں مبدا کے قریب کچھ ہو گا جو بہتر نظر نہیں آئے گا جبکہ جزو-ج کی ترسیم عین $y = -x$ کی ترسیم نظر آئے گی۔
۵۴۹۵ ایسا کیوں ہے؟

۵۴۹۶ سوال ۴.۳۳۸: تفاعل $y = \frac{x^{2/3}}{x^2-1}$ کو وقفہ $-2 \le x \le 2$ پر ترسیم کریں۔ $x = -1$ اور $x = 1$ کے بیچ ترسیم نیچے مقعر نظر
۵۴۹۷ آئے گی اور مبدا پر کوئی کنگرہ نظر نہیں آئے گا۔ مبدا کے بالکل قریب وقفہ پر ترسیم کرتے ہوئے مبدا پر کنگرہ نمودار ہوتا ہے۔ پہلی ترسیم میں کنگرہ کیوں نظر نہیں
۵۴۹۸ آیا؟

۵۴۹۹ لامتناہی پر حد واضح کرنا

۵۵۰۰ بعض اوقات متغیرات کی تبدیلی سے ایسا تفاعل حاصل ہوتا ہے جس کی حد تلاش کرنا ہمیں آتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = \lim_{\theta\to 0^+} \sin\theta \qquad (\theta = \frac{1}{x})$$

۵۵۰۱ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لامتناہی پر حد کو یوں کمپیوٹر پر دیکھا جا سکتا ہے۔ سوال ۴.۳۳۴ تا سوال ۴.۳۳۹ میں یوں اس طرح کا طریقہ بیان کریں تاکہ ترسیم پر حد کو
۵۵۰۲ دیکھا جا سکے۔ ان حدود کو تلاش کریں۔

سوال ۴.۳۳۹: $\lim_{x\to\mp\infty} x\sin\frac{1}{x}$

سوال ۴.۳۴۰: $\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

سوال ۴.۳۴۱: $\lim_{x\to\mp\infty} \frac{3x+4}{2x-5}$

سوال ۴.۳۴۲: $\lim_{x\to\infty} (\frac{1}{x})^{1/x}$

سوال ۴.۳۴۳: $\lim_{x\to\mp\infty} (3+\frac{2}{x})(\cos\frac{1}{x})$

سوال ۴.۳۴۴: $\lim_{x\to\infty} (\frac{3}{x^2}-\cos\frac{1}{x})(1+\sin\frac{1}{x})$

۴.۶ بہترین بنانا

کسی چیز کو بہترین بنانے سے مراد اس چیز کی کسی خاصیت کو اقل یا اعظم بنانا ہے۔ تیل کے ڈبے کی کون سی شکل بنانے پر کم تر لاگت آتی ہے؟ 30 cm قطر لکڑ سے کتنی مضبوط ترین شہتیر حاصل کی جا سکتی ہے؟ حسابی نمونہ استعمال کرتے ہوئے اس طرز کے سوالات کے جواب حاصل کرنے کی خاطر ہم تفاعل کی اقل یا اعظم قیمت تلاش کرتے ہیں۔

کاروبار اور صنعتی مثالیں

مثال ۴.۳۳: دھاتی چادر کا استعمال

ایک چوکور چادر جس کا ضلع 30 cm ہے کے کونوں سے چھوٹے چوکور کاٹ کر، اطراف کو اوپر موڑتے ہوئے کھلا ڈبہ بنایا جاتا ہے۔ کونوں سے کس جسامت کے چوکور کاٹ کر زیادہ سے زیادہ حجم کا ڈبہ حاصل ہو گا؟

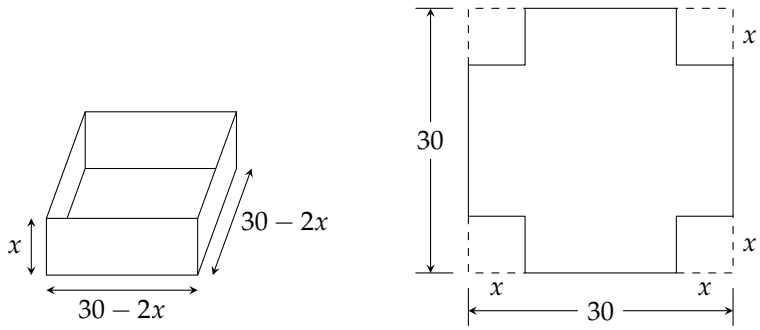
حل: شکل ۴.۷۱ میں کٹا ہوا چادر دکھایا گیا ہے۔ کٹے ہوئے چوکور کا ضلع x سنٹی میٹر ہے۔ یوں ڈبے کا حجم H مربع سنٹی میٹر

$$H(x) = x(30-2x)^2 = 4x^3 - 120x^2 + 900x$$

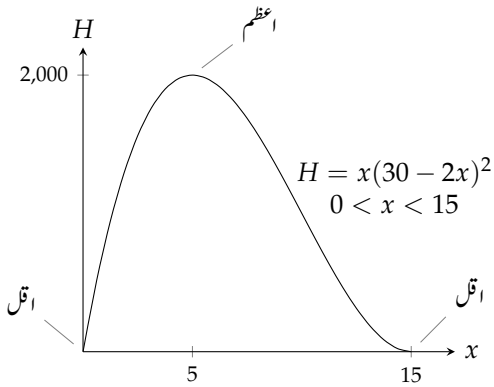
ہو گا۔ چونکہ چادر کے ضلع 30 cm ہے لہٰذا $0 \le x \le 15$ ہو گا جو تفاعل H کا دائرہ کار ہے۔

شکل ۴.۷۲ میں حجم بالمقابل x دکھایا گیا ہے جس کے تحت $x = 0$ اور $x = 15$ پر حجم صفر ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ حجم تلاش کرنے کی خطر x کے لحاظ سے H کے تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = 12x^2 - 240x + 900 = 12(x-15)(x-5) = 0,$$



شکل ۴.۷۱: چادر سے ڈبہ بنانا (مثال ۴.۳۳)۔



شکل ۴.۷۲: حجم بالمقابل x (مثال ۴.۳۳)۔

۵۵۲۳ یوں $x = 5$ اور $x = 15$ ملتا ہے جن میں سے صرف $x = 5$ دائرہ کار کے اندر پایا جاتا ہے۔ اس نقطہ فاصل اور دائرہ کار کے دو آخری نقطوں پر
۵۵۲۴ H کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

نقطہ فاصل	$H(5) = 2000,$
آخری نقطے	$H(0) = 0, \quad H(15) = 0$

۵۵۲۵ یوں اعظم حجم $2000\,\text{cm}^3$ ہے جو $5\,\text{cm}$ ضلع چوکور کاٹنے سے ملے گا۔ □

۵۵۲۶ مثال ۴.۳۴: بیلن
۵۵۲۷ آپ کو ایک لٹر تیل کا بلینی ڈبہ بنانے کو کہا گیا ہے۔ کم سے کم ٹین کی چادر استعمال کرتے ہوئے ڈبہ بنائیں۔

حل: ٹین ڈبے کی لمبائی h اور اس کا رداس r لیتے ہیں (شکل ۴.۷۳)۔ اگر h اور r کی ناپ سنٹی میٹر میں ہو تب

$$H = \pi r^2 * h = 1000 \qquad (\text{ایک لٹر} = 1000\,\text{cm}^3) \tag{۱}$$

درکار ہے۔ کم سے کم ٹین استعمال کرنے سے کیا مراد ہے؟ اس سے ایک مطلب ٹین کی موٹائی اور ڈبے کی تیاری میں ٹین کے ضیاع کو نظرانداز کرتے ہوئے کم سے کم چادر کا استعمال ہو سکتا ہے۔ (سوال ۴.۳۶۲ میں ٹین کے ضیاع کو شامل کیا گیا ہے۔) ہم یہی مطلب لیتے ہوئے حل کرتے ہیں۔ بیلن میں استعمال چادر کا سطحی رقبہ

$$S = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{بیلن کے دو سر}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{بیلنی دیوار}} \tag{۲}$$

ہے جس کو کم سے کم بنانا مقصود ہے اور ساتھ ہی ساتھ $\pi r^2 h = 1000$ کی شرط کو مطمئن کرنا ضروری ہے۔

مساوات ۲ میں دو آزاد متغیر ہیں۔ نقطہ فاصل معلوم کرنے کی خاطر ہمیں ایسا تفاعل چاہیے جس میں ایک آزاد متغیر ہو۔ ہم مساوات ۱ اور مساوات ۲ کو ملا کر ایک متغیر کو خارج کر سکتے ہیں۔

ہم مساوات ۱ کو h کے لئے حل کرتے ہوئے

$$h = \frac{1000}{\pi r^2}$$

اس کو مساوات ۲ میں پر کرتے ہوئے h سے چھٹکارہ حاصل کرتے ہیں۔

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{1000}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{2000}{r}$$

r کی چھوٹی قیمت کے لئے $\frac{2000}{r}$ جزو غالب ہو گا جس کی وجہ سے S کی قیمت بڑی ہو گی۔ ٹین کا ڈبہ نلکی یا پائپ نما ہو گا۔ r کی بڑی قیمت کے لئے $2\pi r^2$ جزو غالب ہو گا جس کی وجہ سے S کی قیمت بڑی ہو گی۔ ٹین کا ڈبہ چپٹی صورت کا ہو گا۔ r کی مذکورہ بالا قیمتوں کے بیچ کہیں سطحی رقبہ کم سے کم حاصل ہو گا۔

S اپنے پورے دائرہ کار $(0, r)$ میں قابل تفرق ہے لہٰذا اقل S قیمت تلاش کرنے کی خاطر اس کے تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہوئے نقطہ فاصل r کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi r^2 + \frac{2000}{r} && \\
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} &= 4\pi r - \frac{2000}{r^2} && \text{تفرق} \\
4\pi r - \frac{2000}{r^2} &= 0 && \text{تفرق کو صفر کے برابر پر کرتے ہیں} \\
4\pi r^3 &= 2000 && r\text{ کے لئے حل کریں} \\
r &= \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} && \text{نقطہ فاصل}
\end{aligned}$$

اگر دائرہ کار کے آخری سر پائے جاتے تب ہم نقطہ فاصل اور آخری سروں پر تفاعل کی قیمت حاصل کرتے ہوئے دیکھتے کہ S کی اقل قیمت کتنی ہے اور کہاں پائی جاتی ہے۔ چونکہ دائرہ کار بند وقفہ نہیں ہے لہٰذا اس کے آخری سر نہیں پائے جاتے ہیں لہٰذا ہمیں $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ کے قریب تفاعل کا رویہ دیکھنا ہوگا۔ ہم تفاعل کا دور تبی تفرق

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} = 4\pi r - \frac{2000}{r}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}r^2} = 4\pi + \frac{4000}{r^2}$$

پر غور کرتے ہیں جو S کی پورے دائرہ کار پر مثبت ہے (شکل ۴.۷۳)۔ یوں پورے دائرہ کار پر S کی ترسیم اوپر مقعر ہوگی اور $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ پر S کی قیمت کم سے کم ہوگی۔ جب

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$
$$h = \frac{1000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r$$

ہو۔ اس کے تحت کم سے کم ٹین کی چادر استعمال کرتے ہوئے ڈبہ بنانے کی خاطر ڈبے کی لمبائی اور قطر ایک دوسرے کے برابر ہونا ضروری ہے۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$r \approx 5.42\,\mathrm{cm}, \quad h \approx 10.84\,\mathrm{cm}$$

□

اقل اور اعظم قیمت مسائل حل کرنے کا لائحہ عمل

۱. مسئلہ پڑھیں۔ مسئلہ پڑھ کر دیکھیں کہ کون سی معلوم دی گئی ہے؟ کون سی نہیں دی گئی ہے؟ کیا مطلوب ہے؟

۲. تصویر بنائیں اور اہم حصوں کی نشاندہی کریں۔

۳. متغیرات متعارف کریں۔ تصویر اور مسئلہ میں ہر تعلق کو مساوات کی صورت میں لکھیں۔

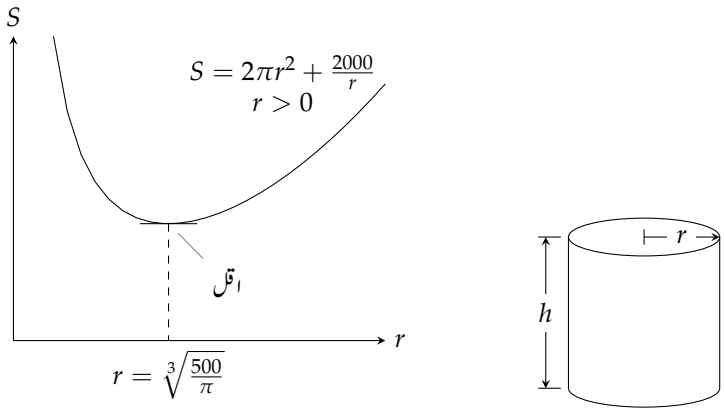
۴. نامعلوم متغیر کی نشاندہی کریں اور اس کی مساوات لکھیں۔ کوشش کریں کہ نامعلوم کو صرف ایک متغیر یا دو متغیرات کی صورت میں لکھیں۔ ایسا کرنے میں آپ کو کہیں مساوات سے باقی متغیرات خارج کرنے ہوں گے۔

۵. نقطہ فاصل اور آخری نقطوں کی جانچ۔ یک رتبی اور دور تبی تفرق سے نقطہ فاصل (جہاں $f' = 0$ یا غیر معین ہوگا) تلاش کریں اور تفاعل کا مقعر دریافت کریں۔

ریاضیات سے چند مثالیں

مثال ۴.۳۵: اعداد کا حاصل ضرب

ایسے دو مثبت اعداد تلاش کریں کی ان کا مجموعہ 20 اور حاصل ضرب زیادہ سے زیادہ ہو۔



شکل ۴.۷۳: ٹین کا ڈبہ (مثال ۴.۳۴)

۵۵۶۱ حل: اگر پہلا عدد x ہو تب دوسرا عدد $20 - x$ ہو گا اور ان کا حاصل ضرب

$$f(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

۵۵۶۲ ہو گا جو زیادہ سے زیادہ مطلوب ہے۔ f کا دائرہ کار بند وقفہ $0 \leq x \leq 20$ ہے۔

۵۵۶۳ ہم نقطہ فاصل اور آخری نقطوں پر f کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ یک رتبی تفرق

$$f'(x) = 20 - 2x$$

۵۵۶۴ پورے وقفہ $0 \leq x \leq 20$ پر معین ہے اور صرف $x = 10$ پر صفر ہے۔ اس نقطہ فاصل اور آخری سروں پر تفاعل کی قیمتیں

$$f(10) = 10(20 - 10) = 100$$
$$f(0) = 0, \quad f(20) = 0$$

۵۵۶۵ ہیں۔ یوں $f(10) = 100$ اعظم قیمت ہو گی اور درکار اعداد 10 اور $(20 - 10) = 10$ ہوں گے (شکل ۴.۷۴)۔ □

۵۵۶۶ مثال ۴.۳۶: جیومیٹری

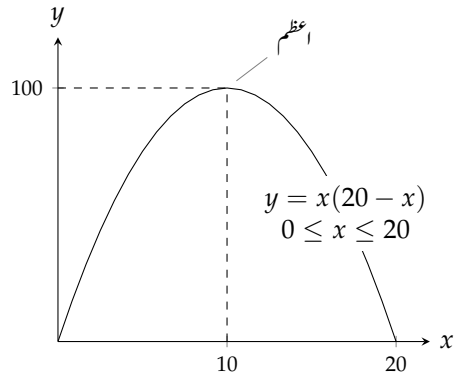
۵۵۶۷ رداس 2 کے نصف دائرے میں ایسا مستطیل بنانا ہے کہ اس کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو۔ مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کیا ہو گا اور اس کے اضلاع کیا ہوں گے؟

۵۵۶۸ حل: نصف دائرے کو کارتیسی محدد کے مبدا پر رکھتے ہوئے اس کے اندر مستطیل کو شکل ۴.۷۵ میں دکھایا گیا ہے۔ مستطیل کا نچلا دایاں کونا x پر ہے۔ ہم

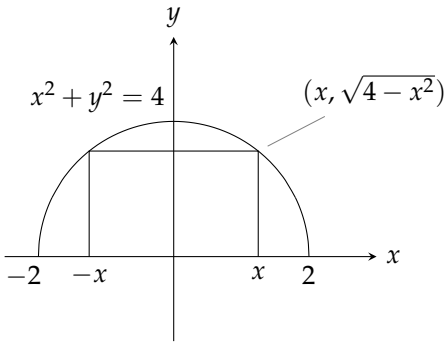
۵۵۶۹ مستطیل کے اضلاع اور رقبہ S کو x کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\text{لمبائی} : 2x, \quad \text{چوڑائی} : \sqrt{4 - x^2}, \quad \text{رقبہ} : 2x\sqrt{4 - x^2}$$

۵۵۷۰ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ x (مستطیل کا منتخب کونا) کی قیمت وقفہ $0 \leq x \leq 2$ میں پائی جاتی ہے۔



شکل ۴.۷۴: x اور $(20 - x)$ کے حاصل ضرب کی اعظم قیمت 100 ہے (مثال ۴.۳۵)۔



شکل ۴.۷۵: نصف دائرہ اور مستطیل (مثال ۴.۳۶)۔

۵۵۷۱ ہمیں استمراری تفاعل

$$S = 2x\sqrt{4 - x^2}$$

۵۵۷۲ کی مطلق اعظم قیمت وقفہ $[0, 2]$ پر تلاش کرنی ہے۔ ہم نقطہ فاصل اور دائرہ کار کے آخری نقطوں پر S کی قیمت معلوم کرتے ہیں۔ تفاعل S کا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2}$$

۵۵۷۳ نقطہ $x = 2$ پر غیر معین اور درج ذیل نقطوں پر صفر ہے۔

$$\begin{aligned}
\frac{-2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} + 2\sqrt{4 - x^2} &= 0 \\
-2x^2 + 2(4 - x^2) &= 0 && \text{دونوں اطراف کو } \sqrt{4 - x^2} \text{ سے ضرب دیں} \\
8 - 4x^2 &= 0 \\
x^2 &= 2 \\
x &= \mp\sqrt{2}
\end{aligned}$$

۵۵۷۴ $x = -\sqrt{2}$ اور $x = \sqrt{2}$ میں سے صرف $x = \sqrt{2}$ تفاعل کے دائرہ کار کے اندر پایا جاتا ہے لہٰذا یہ صفر نقطہ فاصل ہے۔ دائرہ کار کی آخری
۵۵۷۵ نقطوں اور اس اکلوتے نقطہ فاصل پر تفاعل کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
S(\sqrt{2}) &= 2\sqrt{2}\sqrt{4 - 2} = 4 && \text{نقطہ فاصل پر قیمت} \\
S(0) &= 0, \quad S(2) = 0 && \text{آخری نقطوں پر قیمت}
\end{aligned}$$

یوں مستطیل کا اعظم رقبہ 4 ہے جب اس کی لمبائی $2x = 2\sqrt{2}$ اور چوڑائی $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2}$ ہو گی۔ □

ہیئخ دفغما اور قانون ابن سھل

خلا میں روشنی کی رفتار $3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ ہوا میں روشنی کی رفتار اس سے معمولی کم ہے جبکہ کثیف ذریعہ مثلاً شیشہ میں اس کی رفتار مزید کم ہے (تقریباً اس کے $\frac{2}{3}$ تیز)۔

بصریات میں **اصول فغما**[۱۶] کہتا ہے کہ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک روشنی تیز ترین راستے سے پہنچتی ہے۔ اس مشاہدے کی مدد سے ہم ایک ذریعہ (مثلاً ہوا) میں نقطہ سے دوسرے ذریعہ (مثلاً پانی) میں نقطے تک روشنی کی راہ کی پیش گوئی کر سکتے ہیں۔

مثال ۴.۳۷: ہوا میں روشنی کی رفتار c_1 اور پانی میں روشنی کی رفتار c_2 لیتے ہوئے ہوا میں نقطہ A سے پانی میں نقطہ B تک روشنی کی راہ کی پیش گوئی کریں۔ ہوا اور پانی کا سرحد سیدھی سطح ہے۔

حل: ہم دونوں ذریعوں کے بیچ سرحد کو x محور پر رکھتے ہوئے A تا B وہ راہ تلاش کرتے ہیں جس پر چلتے ہوئے روشنی کو کم سے کم وقت درکار ہو گا (شکل ۴.۷۶)۔ ایک یکساں ذریعہ میں شعاع کی رفتار تبدیل نہیں ہوتی ہے لہٰذا اس میں کم سے کم وقت سے مراد کم سے کم فاصلہ ہے اور شعاع دو نقطوں کے بیچ سیدھے خط پر حرکت کرتی ہے۔ یوں A تا B راہ دو سیدھے خطوط پر مشتمل ہو گی۔ پہلا خط A سے N تک ہو گا اور دوسرا خط N سے B تک ہو گا۔ N وہ نقطہ ہے جہاں شعاع ایک ذریعہ سے دوسرے ذریعہ میں داخل ہوتی ہے۔ فاصل اور وقت کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\text{وقت} = \frac{\text{فاصلہ}}{\text{رفتار}}$$

یوں A سے N تک درکار وقت

$$t_1 = \frac{AN}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1}$$

اور N سے B تک درکار وقت

$$t_2 = \frac{NB}{c_2} = \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c_2}$$

ہو گا۔ A سے B تک پہنچنے کے لئے درکار کل وقت دونوں کا مجموعہ ہو گا۔

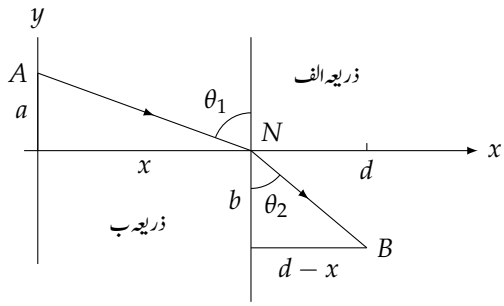
$$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{c_2} \tag{۳}$$

اس مساوات میں t متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے اور تفاعل کا دائرہ کار $[0, d]$ ہے۔ ہم اس بند دائرہ کار پر کم سے کم وقت معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ ہم تفرق

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{(d-x)}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} \tag{۴}$$

---

[۱۶] Fermat'sprinciple



شکل ۴.۷۶: ایک ذریعہ سے دوسرے ذریعہ میں داخل ہوتے ہوئے شعاع کی راہ (مثال ۴.۳۷)

۵۵۹۳ لیتے ہیں جس کو شکل ۴.۷۶ کی مدد سے θ_1 اور θ_2 کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin\theta_1}{c_1} - \frac{\sin\theta_2}{c_2} \tag{۵}$$

۵۵۹۴ مساوات ۴ سے ظاہر ہے کہ $x = 0$ پر $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} < 0$ اور $x = d$ پر $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} > 0$ ہو گا۔ یوں اندر نقطوں کے درمیان کسی نقطہ x_0 پر $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = 0$

۵۵۹۵ ہو گا۔ چونکہ $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$ مسلسل بڑھتا تفاعل ہے (سوال ۴.۳۹۶) لہٰذا صرف ایک ایسا نقطہ پایا جائے گا جس پر درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2} \tag{۶}$$

۵۵۹۶ مساوات ۶ کو **ابن سہل کا قانون انعطاف**[۱۷] کہتے ہیں[۱۸]۔ □

۵۵۹۷ معاشیات میں لاگت اور آمدنی

۵۵۹۸ نظریہ معاشیات میں احصاء کے اہم کردار ہے۔ اس کی دو مثالیں پیش کرتے ہیں۔ پہلی مثال لاگت، آمدنی اور منافع کے تعلق کے بارے میں ہے۔

۵۵۹۹ فرض کریں کہ

۵۶۰۰ x ارکان فروخت کرنے سے آمدنی $r(x)$ ہے۔

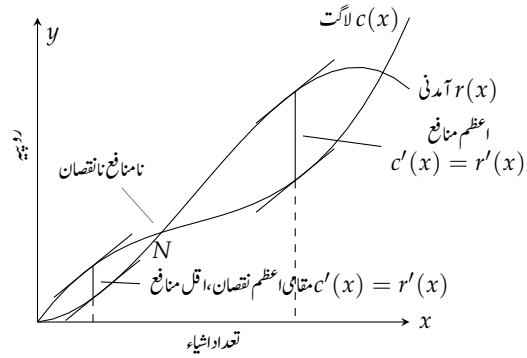
۵۶۰۱ x ارکان کی لاگت پیداوار $c(x)$ ہے۔

۵۶۰۲ x ارکان فروخت کرنے سے منافع $p(x) = r(x) - c(x)$ ہے۔

---

[۱۷] IbnSahl'slawofrelection

[۱۸] مغربی دنیا میں اس کو Snell'slaw کہتے ہیں۔



شکل ۷.۴.۷: عموماً تفاعل لاگت کا مقعر پہلے نیچے اور بعد میں اوپر ہوتا ہے۔ تفاعل لاگت تفاعل آمدنی کو نامنافع نانقصان کے نقطہ N پر قطع کرتا ہے۔ N کے بائیں خسارہ اور اس کے دائیں منافع ہو گا۔

۵۶۰۳ حاشیہ آمدنی اور حاشیہ لاگت پیداوار درج ذیل ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \text{حاشیہ آمدنی}$$
$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = \text{حاشیہ لاگت}$$

۵۶۰۴ ان تفرق کا آمدنی کے ساتھ تعلق کو درج ذیل مسئلہ پیش کرتا ہے۔

۵۶۰۵ مسئلہ ۷.۴.: زیادہ سے زیادہ منافع (اگر پایا جاتا ہو) اس صورت ہو گا جب حاشیہ لاگت پیداوار اور حاشیہ آمدنی ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

۵۶۰۶ ثبوت: ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام $x > 0$ پر $r(x)$ اور $c(x)$ قابل تفرق ہیں لہٰذا $p(x) = r(x) - c(x)$ کی اعظم قیمت (اگر
۵۶۰۷ پائی جاتی ہو) $p'(x) = 0$ پر پائی جائے گی۔ چونکہ $p'(x) = r'(x) - c'(x)$ ہے لہٰذا $p'(x) = 0$ سے مراد

$$r'(x) - c'(x) = 0, \quad \xRightarrow{\text{یعنی}} \quad r'(x) = c'(x)$$

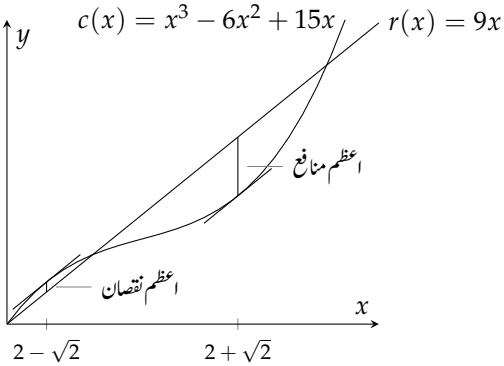
۵۶۰۸ ہے۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے (شکل ۷.۴.۷)۔

۵۶۰۹ □

۵۶۱۰ ہمیں مسئلہ ۷.۴. سے کیا ہدایت ملتی ہے؟ ایسی سطح پیداوار جہاں $p'(x) = 0$ ہو، پر اعظم منافع یا اعظم نقصان ہو گا۔ لیکن معاشی پیشنگوئی کرتے ہوئے
۵۶۱۱ پیداوار کی ان سطحوں پر نظر رکھیں جہاں حاشیہ لاگت اور حاشیہ آمدنی ایک دوسرے کے برابر ہوں۔ اگر اعظم منافع پایا جاتا ہو، وہ ان سطح پیداوار میں سے ایک پر
۵۶۱۲ ہو گا۔

۵۶۱۳ مثال ۳۸.۴.: لاگت اور آمدنی تفاعل درج ذیل ہیں

$$r(x) = 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$



شکل ۴.۷۸: لاگت بالمقابل منافع (مثال ۴.۳۸)

۵۶۱۴ جہاں تعداد پیداوار x ہے (x کی اکائی 1000 اشیاء ہے)۔ کیا ایسی سطح پیداوار پائی جاتی ہے جس پر منافع زیادہ سے زیادہ ہو گا؟ اگر ایسا ہو تب زیادہ سے زیادہ
۵۶۱۵ منافع کس سطح پیداوار پر ہو گا؟

۵۶۱۶ حل:

$$r(x) = 9x, \quad c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$$

r' اور c' تلاش کریں

$$r'(x) = 9, \quad c'(x) = 3x^2 - 12x + 15$$

ایک دوسرے کے برابر پر کریں

$$3x^2 - 12x + 15 = 9$$

ترتیب دیں

$$3x^2 - 12x + 6 = 0$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

دو درجی مساوات حل کریں

$$\begin{aligned} x &= \frac{4 \mp \sqrt{16 - 4 \cdot 2}}{2} \\ &= \frac{4 \mp \sqrt{2}}{2} \\ &= 2 \mp \sqrt{2} \end{aligned}$$

۵۶۱۷ اعظم منافع کا امکان $2 + \sqrt{2}$ یا $2 - \sqrt{2}$ سطح پیداوار پر حاصل ہو گا (شکل ۴.۷۸)۔ آپ دونوں نقطوں پر آمدنی کا حساب کر کے دیکھیں گے کہ
۵۶۱۸ $x = 2 + \sqrt{2}$ پر اعظم منافع حاصل ہو گا جبکہ $x = 2 - \sqrt{2}$ پر اعظم نقصان ہو گا۔ □

۵۶۱۹ بہترین سطح پیداوار کو اقل اوسط لاگت والی سطح پیداوار تصور کیا جا سکتا ہے۔ اگلے مسئلہ میں یہ سطح پیداوار حاصل کی گئی ہے۔

۵۶۲۰ مسئلہ ۴.۸: اوسط اقل لاگت پیداوار (اگر پائی جاتی ہو) اس سطح پیداوار پر ہو گی جس پر اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

۵۶۲۱ ثبوت: ہم فرض کرتے ہیں کہ

۵۲۲۲ $x > 0$ اشیاء کی لاگت پیداوار $c(x)$

۵۲۲۳ x اشیاء کی اوسط لاگت پیداوار $\frac{c(x)}{x}$

۵۲۲۴ قابل تفرق ہیں۔

۵۲۲۵ اگر لاگت کو کم سے کم کرنا ممکن ہو، یہ اس صورت ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{c(x)}{x}\right) &= 0 \\
\frac{xc'(x) - c(x)}{x^2} &= 0 && \text{قاعدہ حاصل تقسیم} \\
xc'(x) - c(x) &= 0 && x^2 \text{ سے ضرب دیں} \\
\underbrace{c'(x)}_{\text{حاشیہ لاگت}} &= \underbrace{\frac{c(x)}{x}}_{\text{اوسط لاگت}}
\end{aligned}$$

۵۲۲۶ □

۵۲۲۷ ہمیں دھیان سے مسئلہ ۸.۱۴ استعمال کرنا ہو گا جو یہ نہیں کہتا ہے کہ اقل اوسط لاگت کی سطح پیداوار موجود ہے بلکہ کہتا ہے کہ اگر ایسی سطح موجود ہو تب اس کو کہاں
۵۲۲۸ تلاش کرنا چاہیے۔ جہاں اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں وہاں دیکھیں کہ آیا اقل اوسط لاگت پائی جاتی ہے۔

۵۲۲۹ مثال ۴.۳۹: تفاعل لاگت $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ ہے (x کی اکائی 1000 اشیاء ہے)۔ کیا ایسی سطح پیداوار ہے جہاں اوسط لاگت
۵۲۳۰ کم سے کم ہو؟ اگر ایسا ہو تب اس سطح پیداوار کو تلاش کریں۔

۵۲۳۱ حل: ہم جہاں اوسط لاگت اور حاشیہ لاگت ایک دوسرے کے برابر ہوں، وہاں دیکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
c(x) &= x^3 - 6x^2 + 15x && \text{لاگت} \\
c'(x) &= 3x^2 - 12x + 15 && \text{حاشیہ لاگت} \\
\frac{c(x)}{x} &= x^2 - 6x + 15 && \text{اوسط لاگت} \\
3x^2 - 12x + 15 &= x^2 - 6x + 15 \\
2x^2 - 6x &= 0 \\
2x(x-3) &= 0 \\
x = 0, &\quad x = 3
\end{aligned}$$

۵۲۳۲ چونکہ $x > 0$ ہے لہٰذا اقل اوسط لاگت صرف $x = 3$ ہزار کی پیداوار پر ممکن ہے۔

ہم تفرق کو دیکھتے ہیں۔

$$\frac{c(x)}{x} = x^2 - 6x + 15 \qquad \text{اوسط لاگت}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{c(x)}{x}\right) = 2x - 6$$
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{c(x)}{x}\right) = 2 > 0$$

دور تبی تفرق مثبت ہے لہٰذا $x = 3$ پر مطلق اقل ہو گا۔ □

غیر مسلسل مظہر کا نمونہ بذریعہ تفرقی تفاعل

اگر آپ سوچ رہے ہوں کہ جب x عدد صحیح ہے (چونکہ مکمل اشیاء پیدا کیے جاتے ہیں) تب ہم لاگت اور آمدنی کو ظاہر کرنے کے لئے قابل تفرق تفاعل $c(x)$ اور $r(x)$ کس طرح استعمال کر سکتے ہیں۔ اس پر غور کرتے ہیں۔

جب x کی قیمت بڑی ہو تب ہم لاگت اور آمدنی کو ہموار منحنیات $c(x)$ اور $r(x)$ سے ظاہر کر سکتے ہیں جو نا صرف x کی عدد صحیح قیمتوں بالکل ان کے بیچ تمام قیمتوں پر قابل تفرق ہیں۔ ان قابل تفرق تفاعل، جو x کی عدد صحیح قیمتوں کے لئے لاگت اور آمدنی کو ظاہر کرتے ہیں، کی قیمتوں پر ہم احصاء کی مدد سے غور کر سکتے ہیں۔ یوں حاصل نتائج کو ہم حقیقی دنیا میں منتقل کرتے ہوئے امید کرتے ہیں کہ ہم اس سے فائدہ اٹھا سکیں۔ جب ہم ایسا کرتے ہوں، جیسا نظریہ معاشیات میں ہم نے کیا، ہم کہتے ہیں کہ یہ تفاعل حقیقت کا اچھا نمونہ ہے۔

ایسی صورتوں میں جب احصاء کہتا ہو کہ بہترین پیداوار x کی غیر عدد صحیح قیمت پر ہو گی، جیسا مثال ۴.۳۸ میں $x = 2 + \sqrt{2}$ ہزار کا جواب حاصل ہوا، تب ہم اس کا قریب ترین موزوں عدد صحیح لیتے ہیں۔ اگر ہم 20 اشیاء کو ڈبوں میں بند کرتے ہوں تب $x = 2 + \sqrt{2}$ ہزار کی صورت میں ہم 3410 یا 3420 لے سکتے ہیں۔

سوالات

ہر سوال کو حل کرنے سے پہلے بہتر ہو گا کہ موزوں دائرہ کار لیتے ہوئے تفاعل کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔

جیومیٹری کے مسائل

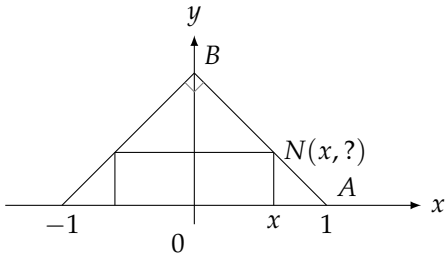
سوال ۴.۳۴۵: رداس r دائرہ کے محیط پر دو نقطوں سے وسط تک سیدھی لکیریں کھینچی جاتی ہیں۔ اس خطہ کے محیط کی لمبائی $(2r + s)$ ہے جو $100\,\mathrm{m}$ کے برابر ہے۔ r اور s کی کن قیمتوں سے خطے کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو گا؟

سوال ۴.۳۴۶: ایک قائمہ مثلث کا وتر $5\,\mathrm{cm}$ ہے۔ اس کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ممکن ہے؟

سوال ۴.۳۴۷: ایک مستطیل جس کا رقبہ $16\,\mathrm{cm}^2$ ہے کا کم سے کم محیط کتنا ہو گا؟

سوال ۴.۳۴۸: دکھائیں کہ ایک محیط کے تمام مستطیل میں اس کا رقبہ سب سے زیادہ ہو گا جو چوکور ہو۔

سوال ۴.۳۴۹: ایک قائمہ مساوی الساقین مثلث کا وتر 2 اکائیاں لمبا ہے۔ اس میں محصور مستطیل کو شکل ۴.۷۹ میں دکھایا گیا ہے۔



شکل ۴.۷۹: مثلث میں محصور مستطیل (سوال ۴.۳۴۹)

ا. N کے محدد کو x کی صورت میں لکھیں۔ (خط AB کی مساوات لکھ کر آپ ایسا کر سکتے ہیں۔)

ب. مستطیل کا رقبہ x کی صورت میں لکھیں۔

ج. مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ہو سکتا ہے؟

سوال ۴.۳۵۰: ایک مستطیل کا تلا x محور پر ہے جبکہ اس کے بالائی دور اس قطع مکافی $y = 12 - x^2$ پر ہیں۔ اس مستطیل کا زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ممکن ہے؟

سوال ۴.۳۵۱: آپ $15\,\text{cm} \times 8\,\text{cm}$ چادر کے کونوں سے چوکور چادر کاٹ کر کھلا مستطیل ڈبہ بنانا چاہتے ہیں۔ اس ڈبے کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتا ہے؟

سوال ۴.۳۵۲: آپ $(a, 0)$ سے $(0, b)$ تک لکیر کھینچ کر ربع اول میں بند خطہ بناتے ہیں۔ دکھائیں کہ اس خطے کا رقبہ اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو گا جب $a = b$ ہو۔

سوال ۴.۳۵۳: ایک دریا کے کنارے مستطیل رقبے کو تین اطراف سے $800\,\text{m}$ کل لمبائی کی دیوار سے گھیرا جاتا ہے۔ زیادہ سے زیادہ رقبہ کتنا ہو سکتا ہے؟

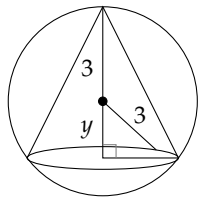
سوال ۴.۳۵۴: $216\,\text{m}^2$ مستطیل رقبے کو دھاتی تار سے گھیرا جاتا ہے۔ کسی ایک ضلع کے متوازی تار سے اس خطے کو دو برابر حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ کم سے کم تار استعمال کرنا مقصود ہے۔ مستطیل کی جسامت کیا ہونی چاہیے؟ تار کی کم سے کم لمبائی کیا ہو گی؟

سوال ۴.۳۵۵: کم ترین وزنی فولادی ٹینکی

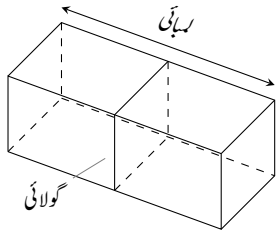
بغیر ڈھکن ٹینکی جس کا تلا چوکور ہو درکار ہے جس کا حجم $256\,\text{m}^3$ ہو۔ یہ ٹینکی $1\,\text{cm}$ موٹی فولادی چادر سے بنائی جائے گی۔ بطور انجنیئر آپ کا کام ہے کہ ہلکی ترین ٹینکی بنانے کے لئے ٹینکی کا اضلاع تلاش کریں۔ اضلاع کیا ہوں گے؟

سوال ۴.۳۵۶: بارش کا پانی

بارانی علاقے میں بارش کا پانی ذخیرہ کرنے کے لئے زمین کی کھدائی کر کے بغیر ڈھکن $1125\,\text{m}^3$ حجم کی ٹینکی بنائی جاتی ہے جس کا تلا چوکور ہے۔ ٹینکی کی گہرائی y میٹر جبکہ تلا کی ضلع کی لمبائی x میٹر ہے۔ ٹینکی کا تلا اور اطراف پر لاگت کے ساتھ ساتھ کھدائی کی لاگت بھی ہے جو حاصل ضرب xy کے راست متناسب ہے۔ اگر کل لاگت $c = 5(x^2 + 4xy) + 10xy$ ہو تب لاگت کو کم سے کم رکھنے کی خاطر x اور y کی ہوں گے؟



شکل ۴.۸۰: کرہ میں مخروط (سوال ۴.۳۵۸)



شکل ۴.۸۱: ڈبہ برائے سوال ۴.۳۶۳

سوال ۴.۳۵۷: ایک مستطیل اشتہار میں $50\ \text{cm}^2$ رقبے پر لکھائی ہو گی۔ بالائی اور نچلے جانب $4\ \text{cm}$ اور اطراف پر $2\ \text{cm}$ خالی جگہ ہو گی۔ کم سے کم کاغذ استعمال کرنے کے لئے مستطیل اشتہار کے اضلاع کیا ہوں گے؟

سوال ۴.۳۵۸: رداس $r = 3$ کی کرہ میں محصور دائری مخروط کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتا ہے (شکل ۴.۳۵۸)؟

سوال ۴.۳۵۹: ایک مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں a اور b ہیں جن کے بیچ زاویہ θ ہے۔ θ کی کون سے قیمت مثلث کا زیادہ سے زیادہ رقبہ دے گی۔ (اشارہ: $S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$)

سوال ۴.۳۶۰: ایک قائمہ مثلث کا وتر $\sqrt{5}$ ہے جبکہ اس کے باقی اضلاع x اور y ہیں۔ تفاعل $s = 2x + y$ کی اعظم قیمت تلاش کریں۔

سوال ۴.۳۶۱: $1000\ \text{cm}$ حجم کا بغیر ڈھکن قائمہ دائری بیلن بنایا جاتا ہے۔ کم سے کم بیلن کی جسامت تلاش کریں۔

سوال ۴.۳۶۲: $1000\ \text{cm}$ حجم کا قائمہ دائری بیلنی ڈبہ بنایا جاتا ہے۔ چادر سے بیلن کے اطراف کاٹتے ہوئے کوئی مال ضائع نہیں ہوتا ہے البتہ بالائی اور نچلے دائری حصے کو $2r \times 2r$ چوکور سے کاٹتے ہوئے مال ضائع ہوتا ہے۔ یوں ایک ڈبہ بنانے کے لئے $S = 8r^2 + 2\pi rh$ رقبے کی چادر درکار ہو گی نا کہ $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ (مثال ۴.۳۴)۔ مثال ۴.۳۴ میں کم سے کم لاگت کے لئے h اور r کا تعلق $h = 2r$ تھا۔ اب ان کا تعلق کیا ہو گا؟

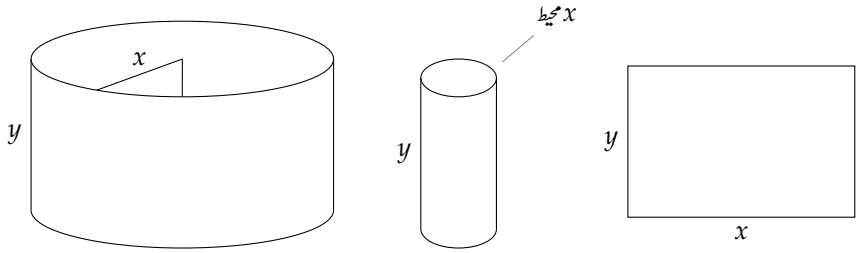
سوال ۴.۳۶۳: (ا) ایک مستطیل ڈبہ کی لمبائی اور گولائی کا مجموعہ $108\ \text{cm}$ ہے (شکل ۴.۸۱)۔ اس ڈبے کے سر چوکور ہیں۔ اس ڈبے کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتا ہے؟ (ب) اس ڈبے کی لمبائی بالمقابل حجم ترسیم کریں اور جزو-الف کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۴.۳۶۴: گزشتہ سوال میں چوکور سروں کے بجائے چوکور اطراف تصور کریں۔ یوں ڈبے کا حجم $h \times h \times w$ اور گولائی $2h + 2w$ ہو گی۔ اب ڈبے کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو گا؟

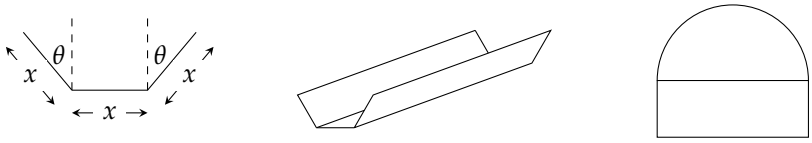
سوال ۴.۳۶۵: (ا) ایک مستطیل چادر جس کا محیط $36\ \text{cm}$ اور اضلاع x اور y ہیں کو گول کرتے ہوئے بیلن بنایا جاتا ہے جس کے سر کھلے ہیں۔ اس بیلن کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو سکتا ہے؟ (ب) اس مستطیل چادر کے ایک کنارے کو محور تصور کرتے ہوئے، چادر کو اس محور کے گرد گھمایا جاتا ہے جو خیالی بیلنی صورت بناتا ہے۔ اس بیلن کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ہو گا؟ (شکل ۴.۸۲)

سوال ۴.۳۶۶: ایک قائمہ مثلث کا وتر $\sqrt{3}$ ہے۔ اس کو ایک ضلع کے گرد گھما کر فرضی مخروط بنایا جاتا ہے۔ اس مخروط کا زیادہ سے زیادہ حجم کیا ممکن ہے اور اس کا رداس اور قد کیا ہوں گے؟

سوال ۴.۳۶۷: دائرہ بالمقابل چوکور



شکل ۴.۸۲: چادر اور بیلن (سوال ۴.۳۶۵)



شکل ۴.۸۳: کھڑکی (سوال ۴.۳۶۹)

شکل ۴.۸۴: پانی کی نالی (سوال ۴.۳۷۱)

ا. 4 m لمبی تار کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہوئے ایک چوکور اور ایک دائرہ بنایا جاتا ہے۔ ان ٹکڑوں کی لمبائیاں کیا ہوں گی کہ دائرے اور چوکور کا مجموعی رقبہ زیادہ سے زیادہ ہو؟

ب. چوکور اور دائرے کے مجموعی رقبے کو دائرے کی رداس کا تفاعل لکھ کر ترسیم کریں۔ جزوالف میں حاصل جواب کے ساتھ ہم آہنگی دیکھیں۔

ج. اب کل رقبے کو چوکور کے ضلع کی لمبائی کا تفاعل لکھ کر ترسیم کریں اور جزوالف میں حاصل جواب کے ساتھ ہم آہنگی دیکھیں۔

سوال ۴.۳۶۸: مکعب اور کرہ کی سطحی رقبوں کے مجموعے کو مستقل رکھیں۔ مکعب کے ضلع اور کرہ کے رداس کی کون سی نسبت (ا) اقل، (ب) زیادہ سے زیادہ مجموعی حجم دے گی؟

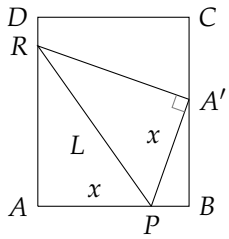
سوال ۴.۳۶۹: ایک مستطیل شیشہ کے اوپر نصف دائری شیشہ مل کر کھڑکی بناتے ہیں (شکل ۴.۸۳)۔ مستطیل شیشہ شفاف ہے جبکہ نصف دائری شیشہ ہلکا سیاہ ہے اور فی مربع رقبہ نصف روشنی کو گزرنے دیتا ہے۔ کھڑکی کا محیط مستقل ہے۔ زیادہ سے زیادہ روشنی کے لئے کھڑکی کی جسامت تلاش کریں۔

سوال ۴.۳۷۰: ایک بیلنی گودام تعمیر کرنی ہے جس کی چھت نصف کروی ہو گی۔ فی مربع سطحی رقبہ نصف کرہ پر لاگت بیلنی دیوار کی فی مربع سطحی رقبہ کی لاگت سے دگنی ہے۔ مستقل حجم کی صورت میں کم سے کم کل لاگت کے لئے گودام کی جسامت تلاش کریں۔ تعمیر میں نچلی سطح (زمین) پر لاگت اور ضیاع کو نظر انداز کریں۔

سوال ۴.۳۷۱: ایک پانی کی نالی تعمیر کرنی ہے جس کی جسامت شکل ۴.۸۴ میں دکھائی گئی ہے۔ صرف زاویہ θ متغیر ہے۔ زیادہ سے زیادہ حجم کے لئے θ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۴.۳۷۲: ایک مستطیل $8.5\,\text{cm} \times 11\,\text{cm}$ کاغذ کو مستوی پر رکھا جاتا ہے (شکل ۴.۸۵)۔ کونا A کو مخالف لمبے ضلع پر رکھ کر کاغذ کو چپٹا کیا جاتا ہے۔ لمبائی RP کو کم سے کم کرنا مقصود ہے۔

ا. کاغذ استعمال کرتے ہوئے اس لمبائی کو کم سے کم کریں۔



شکل ۴.۸۵: کاغذ برائے سوال ۴.۳۷۲

ب. دکھائیں $L^2 = \frac{2x^3}{2x-8.5}$

ج. x کی کون سی قیمت L^2 کو اقل بناتی ہے؟

د. x کی اقل قیمت کیا ہے؟

ھ. x بالمقابل L ترسیم کریں اور جزو-ب کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

طبعی استعمال

سوال ۴.۳۷۳: انتصابی حرکت کرتی ایک جسم کی اونچائی $s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0,\ g > 0$ ہے جہاں t سیکنڈوں اور s میٹروں میں ہے۔ جسم کی زیادہ سے زیادہ اونچائی کیا ہو گی؟

سوال ۴.۳۷۴: ایک عمارت سے $9\ \mathrm{m}$ کے فاصلے پر $2.5\ \mathrm{m}$ اونچی دیوار ہے۔ دیوار کی دوسری طرف سے عمارت تک سیڑھی لگائی جاتی ہے۔ سیڑھی کی کم سے کم لمبائی کیا ہو گی؟

سوال ۴.۳۷۵: شہتیر کہ مضبوطی لکڑی کی شہتیر کی مضبوطی M اس کی چوڑائی w ضرب مربع گہرائی d کے راست تناسب ہوتی ہے یعنی $M = kwd^2$ جہاں k تناسبی مستقل ہے۔

ا. $30\ \mathrm{cm}$ قطر کے لکڑے سے کس جسامت کی مضبوط سے مضبوط شہتیر حاصل کی جا سکتی ہے؟

ب. تناسبی مستقل کو $k = 1$ لیتے ہوئے M بالمقابل w ترسیم کریں۔ جزو-الف کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

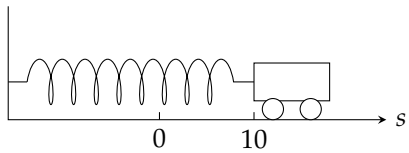
ج. تناسبی مستقل کو $k = 1$ لیتے ہوئے M بالمقابل d ترسیم کریں۔ جزو-الف کے جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ k تبدیل کرنے سے جواب پر کیا اثر ہو گا؟

سوال ۴.۳۷۶: شہتیر کی سختی شہتیر کی سختی S اس کی چوڑائی w ضرب مکعب گہرائی d کے راست تناسب ہوتی ہے یعنی $S = kwd^3$ جہاں k تناسبی مستقل ہے۔

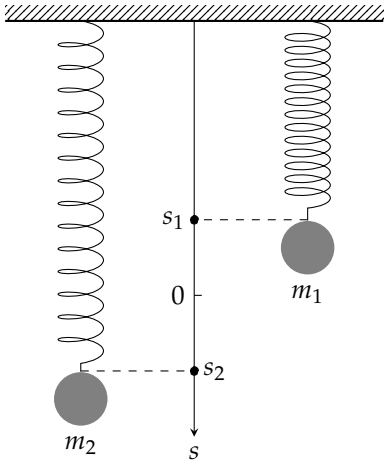
ا. $30\ \mathrm{cm}$ قطر کی لکڑے سے سخت سے سخت شہتیر حاصل کریں۔ شہتیر کی جسامت کیا ہو گی؟

ب. $k = 1$ لیتے ہوئے S بالمقابل w ترسیم کریں۔ جزو-الف میں حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

ج. $k = 1$ لیتے ہوئے S بالمقابل d ترسیم کریں۔ جزو-الف میں حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔ k تبدیل کرنے سے جواب پر کیا اثر ہو گا؟



شکل ۴.۸۶: افقی سطح پر ریڑھی کو دیوار کے ساتھ باندھا گیا ہے (سوال ۴.۳۷۸)



شکل ۴.۸۷: چھت سے آویزاں دو اسپرنگ (سوال ۴.۳۷۹)

سوال ۴.۳۷۷: لمحہ t پر ایک بلب میں برقی رو $i = 2\cos t + 2\sin t$ ہے۔ رو کی زیادہ سے زیادہ لمحاتی قیمت کیا ہو گی؟

سوال ۴.۳۷۸: بے رگڑ ریڑھی کو افقی مستوی پر رکھ کر اسپرنگ کے ذریعہ قریبی دیوار کے ساتھ باندھا جاتا ہے (شکل ۴.۸۶)۔ لمحہ $t = 0$ پر ساکن مقام سے اس کو $10\,\text{cm}$ دور کھینچ کر چھوڑا جاتا ہے تاکہ یہ 4 سیکنڈوں کے لئے مستوی پر آگے پیچھے حرکت کر سکے۔ لمحہ t پر اس کا مقام $s = 10\cos \pi t$ ہے۔

ا. ریڑھی کی زیادہ سے زیادہ رفتار کب اور کتنی ہو گی؟ تب ریڑھی کا مقام اور اس کی اسراع کیا ہو گی؟

ب. جس لمحہ ریڑھی کی اسراع زیادہ سے زیادہ ہو اس لمحہ ریڑھی کا مقام کیا ہو گا؟ تب اس کی رفتار کیا ہو گی؟

سوال ۴.۳۷۹: علیحدہ علیحدہ اسپرنگ کے ذریعہ چھت سے دو کمیتوں کو قریب قریب لٹکایا جاتا ہے (شکل ۴.۸۷)۔ ان کے مقام بالترتیب $s_1 = 2\sin t$ اور $s_2 = \sin 2t$ ہیں۔

ا. کس لمحہ کمیت ایک دوسرے کے قریب سے گزرتے ہیں؟ (اشارہ: $\sin 2t = 2\sin t\cos t$)

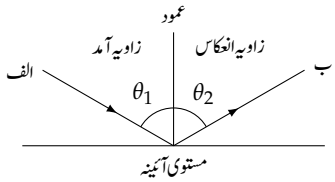
ب. وقفہ $0 \le t \le 2\pi$ کے دوران ان کے درمیان انتصابی فاصلہ زیادہ سے زیادہ کب اور کتنا ہو گی؟ (اشارہ: $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$)

سوال ۴.۳۸۰: s محور پر دو ذرات کے مقام $s_1 = \sin t$ اور $s_2 = \sin(t + \frac{\pi}{3})$ ہیں۔

ا. وقفہ $0 \le t \le 2\pi$ میں دونوں ذرات ایک دوسرے سے کم ملتے ہیں؟

ب. ذرات ایک دوسرے سے کب دور ترین ہوتے ہیں؟

ج. وقفہ $0 \le t \le 2\pi$ میں ان کے بیچ فاصلہ کی تبدیلی تیز ترین ہو گی؟



شکل ۴.۸۸: زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس ایک دوسرے کے برابر ہوں گے (سوال ۴.۳۸۳)

سوال ۴.۳۸۱: لمحہ t پر x محور پر ایک ذرے کا مقام $x = (t-1)(t-4)^4$ ہے۔

ا. ذرہ ساکن کب ہو گا؟

ب. کس وقفے کے دوران ذرہ بائیں رخ حرکت کرتا ہے؟

ج. بائیں رخ حرکت کرتے ہوئے ذرے کی تیز سے تیز رفتار کیا ہو گی؟

د. وقفہ $0 \leq t \leq 6$ کے لئے x بالمقابل t ترسیم کریں۔ اسی وقفہ کے لئے $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ بالمقابل t کو بھی ترسیم کریں۔ ترسیمات کا ایک دوسرے کے ساتھ اور حاصل جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۴.۳۸۲: دوپہر کے وقت $t = 0$ بحری جہاز ب کے عین شمال میں بحری جہاز الف موجود ہے۔ بحری جہاز الف $24\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے جنوب کی طرف رواں ہے جبکہ بحری جہاز ب مشرق کی طرف $16\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ کی رفتار سے رواں ہے۔

ا. ان کے بیچ فاصلہ s کو t کی صورت میں لکھیں جہاں s کلومیٹر اور t گھنٹوں میں ہے۔

ب. دوپہر کے وقت ان کے بیچ فاصلہ کس شرح سے تبدیل ہو گا؟ ایک گھنٹہ بعد یہ شرح کیا ہو گی؟

ج. اس دن حد نظر $10\,\mathrm{km}$ تھی۔ کیا ان بحری جہازوں نے ایک دوسرے کو دیکھا ہو گا؟

د. $0 \leq t \leq 3$ کے لئے s بالمقابل t اور $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ بالمقابل t ترسیم کریں۔ ترسیمات کا حاصل جوابات کے ساتھ موازنہ کریں۔

ھ. ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ربع اول میں $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کی ترسیم کا افقی متقارب پایا جاتا ہے۔ اس کا مطلب ہے کہ $t \to \infty$ کرنے سے $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ کی تحدیدی قیمت پائی جائے گی۔ اس حد کو تلاش کریں۔ اس حد کا انفرادی رفتاروں کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

سوال ۴.۳۸۳: بصریات میں **اصول فرما** کہتا ہے کہ ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک روشنی اس راستے سے پہنچتی ہے جس پر کم سے کم وقت درکار ہو۔ شکل ۴.۸۸ میں نقطہ الف سے شعاع خارج ہو کر آئینہ سے انعکاس کرتے ہوئے نقطہ ب تک پہنچتی ہے۔ دکھائیں کہ اگر شعاع اصول فرما کو مطمئن کرتا ہو تب زاویہ آمد اور زاویہ انعکاس ایک دوسرے کے برابر ہوں گے۔ (یہ نتیجہ بغیر احصاء کے خالصتاً جیومیٹری کی مدد سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔)

سوال ۴.۳۸۴: عمل انگیز: **عمل انگیز**[۱۹] اس مادہ کو کہتے ہیں جس کی موجودگی کیمیائی تعامل کی شرح پر اثر انداز ہوتی ہے اور جو خود جوں کا توں رہتا ہے۔ **خود عمل انگیز**[۲۰] کیمیائی تعامل اس کو کہتے ہیں جس میں حاصل کیمیا خود اس تعامل کے عمل انگیز ہوں۔ خود عمل انگیز کیمیائی تعامل کی ایک مثال $13\,^\circ\mathrm{C}$ سے

---

[۱۹] catalyst
[۲۰] autocatalyst

کم درجہ پر پڑا ہوا دھاتی ٹین کا کچھ عرصہ میں سفید برادہ میں تبدیل ہوتا ہے۔ یہ برادہ خود اس کیمیائی تعامل کا عمل انگیز ہے۔ اس قسم کے تعامل کی شرح شروع میں کم ہوتی ہے جو عمل انگیز پیدا ہونے کے بعد رفتار پکڑتی ہے اور آخر میں ابتدائی کیمیا کم ہونے کی وجہ سے دوبارہ آہستہ ہوتی ہے۔

اس قسم کے تعامل کی رفتار $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ ابتدائی مواد اور پیدا مواد کے حاصل ضرب کے راست متناسب ہو گی، یعنی

$$v = kx(a - x) = kax - kx^2$$

جہاں a مواد کی ابتدائی مقدار، x پیدا مواد کی مقدار اور k تناسبی مستقل ہے۔ x کی وہ قیمت تلاش کریں جو زیادہ سے زیادہ v دیگا؟ v کی اعظم قیمت کیا ہو گی؟

ریاضیاتی استعمال

سوال ۴.۳۸۵: کیا تفاعل $f(x) = x^2 - x + 1$ کبھی منفی بھی ہوتا ہے؟ تفصیل پیش کریں۔

سوال ۴.۳۸۶: آپ سے پوچھا گیا ہے کہ آیا تفاعل $f(x) = 3 + 4\cos x + \cos 2x$ کبھی منفی بھی ہوتا ہے۔

ا. سمجھائیں کہ آپ کو کیوں وقفہ $[0, 2\pi]$ میں x کی قیمتوں کے لئے تفاعل پر غور کرنا ہو گا۔

ب. کیا f کبھی منفی ہو گا؟ سمجھائیں۔

سوال ۴.۳۸۷: منحنی $y = \sqrt{x}$ پر نقطہ $(c, 0)$ کا قریب ترین نقطہ تلاش کریں۔ (ا) $c \geq \frac{1}{2}$ ہے، (ب) $c < \frac{1}{2}$ ہے۔

سوال ۴.۳۸۸: a کی کس قیمت کے لئے $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ کا (ا) $x = 2$ پر مقامی اقل قیمت ہو گی، (ب) $x = 1$ پر نقطہ تصریف ہو گا۔

سوال ۴.۳۸۹: a اور b کی کون سی قیمتوں کے لئے $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ کی (ا) $x = -1$ پر مقامی اعظم اور $x = 3$ پر مقامی اقل قیمت ہو گی، (ب) $x = 4$ پر مقامی اقل اور $x = 1$ پر نقطہ تصریف ہو گا۔

سوال ۴.۳۹۰: دکھائیں کہ a کی کسی بھی قیمت کے لئے $f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$ کی مقامی اقل قیمت نہیں پائی جاتی ہے۔

سوال ۴.۳۹۱:

ا. وقفہ $0 < x < \pi$ پر تفاعل $y = \cos x - \sqrt{2}\csc x$ کی مطلق اعظم قیمت پائی جاتی ہے۔ اس کو تلاش کریں۔

ب. تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۴.۳۹۲:

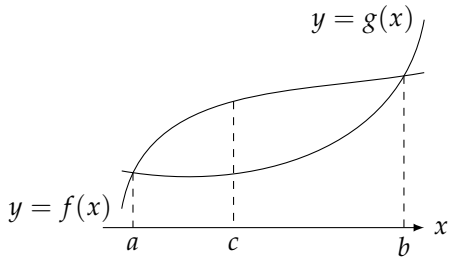
ا. وقفہ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ پر تفاعل $y = \tan x + 3\cot x$ کی مطلق اقل قیمت پائی جاتی ہے۔ اس کو تلاش کریں۔

ب. تفاعل کو ترسیم کرتے ہوئے حاصل جواب کے ساتھ موازنہ کریں۔

سوال ۴.۳۹۳: منحنی $y = \sqrt{x}$ نقطہ $(\frac{1}{2}, 16)$ کے کتنا نزدیک آتی ہے؟

سوال ۴.۳۹۴: فرض کریں کہ $f(x)$ اور $g(x)$ قابل تفرق ہیں جنہیں شکل ۴.۸۹ میں دکھایا گیا ہے۔ ان کے بیچ زیادہ سے زیادہ فاصلہ نقطہ $x = c$ پر پایا جاتا ہے۔ کیا اس نقطے پر ان تفاعل کے مماس میں کوئی خاص بات پائی جاتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۳۹۵: دکھائیں کہ مثبت عدد صحیح a ، b ، c اور d کی صورت میں $\frac{(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)(d^2+1)}{abcd} \geq 16$ ہو گا۔



شکل ۴.۸۹: ترسیمات برائے سوال ۴.۳۹۴

سوال ۴.۳۹۶: (مثال ۴.۳۷ کا $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$)

ا. دکھائیں کہ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$ متغیر x کا بڑھتا تفاعل ہے۔

ب. دکھائیں کہ $g(x) = \frac{d-x}{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$ متغیر x کا گھٹتا تفاعل ہے۔

ج. دکھائیں کہ $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{c_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$ متغیر x کا بڑھتا تفاعل ہے۔

دوا

سوال ۴.۳۹۷: حساسیت دوا۔ (سوال ۳.۱۱۵ دیکھیں)

دوا کی وہ مقدار جس کو جسم زیادہ سے زیادہ حساس ہو معلوم کرنے کی خاطر M کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر تفرق $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}M}$ کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی جہاں $R = M^2(\frac{C}{2} - \frac{M}{3})$ اور C مستقل ہے۔

سوال ۴.۳۹۸: کھانسی

ا. کھانسی کے دوران سانس کی نالی سکڑ کر ہوا کی رفتار کو تیز کرتی ہے۔ کیا سانس کی نالی اتنی سکڑتی ہے کہ ہوا کی رفتار زیادہ سے زیادہ ہو؟

سانس کی نالی کی لچک اور اس کی دیوار کا ہوا کی بہاو کو مزاحمت کی مناسب قیمتیں لیتے ہوئے ہوا کی اوسط رفتار v کو درج ذیل مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے

$$v = c(r_0 - r)r^2 \,\mathrm{cm\,s^{-1}}, \quad \frac{r_0}{2} \le r \le r_0$$

جہاں آرام کی صورت میں سانس کی نالی کا رداس r_0 سنٹی میٹر ہے اور c مثبت مستقل جس کی قیمت سانس کی لمبائی پر (بھی) منحصر ہے۔

دکھائیں کہ v کی اعظم قیمت $r = \frac{2}{3}r_0$ پر حاصل ہو گی یعنی جب سانس کی نالی 33 % سکڑے۔ کھانسی کے دوران سانس کی نالی کی ایکس رے ثابت کرتی ہے کہ کھانسی کے دوران سانس کی نالی اتنی ہی سکڑتی ہے۔

ب. $r_0 = 0.5$ اور $c = 1$ لیتے ہوئے وقفہ $0 \le r \le 0.5$ پر v ترسیم کریں۔ دیکھیں کہ آیا زیادہ سے زیادہ رفتار $r = \frac{2}{3}r_0$ پر نظر آتی ہے۔

اقتصادیات اور کاروبار

سوال ۴.۳۹۹: ایک قمیض تیار کرنے پر c روپیہ لاگت آتی ہے اور اس کی قیمت فروخت x روپیہ ہے۔ فروخت قمیضوں کی تعداد $n = \frac{a}{x-c} + \frac{b}{100-x}$ ہے جہاں a اور b مثبت مستقل ہیں۔ زیادہ سے زیادہ منافع کس قیمت فروخت پر ہو گا؟

سوال ۴.۴۰۰: آپ سیر و سیاحت کا کاروبار کرتے ہیں۔ آپ کی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

ا. اگر 50 افراد (جو اقل تعداد ہے) سیر و سیاحت پر جائیں تب ہر فرد 200 روپیہ ادا کرے گا۔

ب. 80 افراد کی حد تک ہر اضافی فرد کی صورت میں تمام افراد کو 2 روپیہ کم ادا کرنے ہوں گے۔

کل لاگت 6000 روپیہ کی مستقل مقدار اور فی فرد 32 روپیہ ہے۔ زیادہ سے زیادہ منافع کے لئے کتنے افراد درکار ہیں؟

سوال ۴.۴۰۱: انتظام تجارت مال کا ایک کلیہ کہتا ہے کہ مال کی فرمائش، ادائیگی اور رکھوالی پر فی ہفتہ $A(q) = \frac{km}{q} + cm + \frac{hq}{2}$ لاگت آتی ہے جہاں q کھیپ میں اشیاء کی تعداد ہے، k لمحہ فرمائش پر ادائیگی ہے (جو ہر فرمائش پر ادا کرنی ہو گی)، c فی رکن قیمت ہے، m ایک ہفتہ میں فروخت اشیاء کی تعداد ہے، اور h فی رکن ہفتہ وار رکھوالی کا خرچ ہے جس میں کرایہ وغیرہ شامل ہے۔ q کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $A(q)$ کی قیمت کم سے کم ہو گی۔

سوال ۴.۴۰۲: (تسلسل سوال ۴.۴۰۱)
خرچ ترسیل بعض اوقات کھیپ کی تعداد پر منحصر ہوتی ہے۔ جب ایسا ہو تب k کی جگہ $k + bq$ استعمال کیا جاتا ہے جہاں b مستقل ہے۔ اب کھیپ کی بہترین جسامت کیا ہو گی؟

سوال ۴.۴۰۳: اگر تفاعل لاگت $c(x) = x^3 - 6x^2 + 15x$ اور تفاعل آمدنی $r(x) = 6x$ ہوں تب دکھائیں کہ آپ نا منافع نا نقصان سے زیادہ بہتر صورت حاصل نہیں کر سکتے ہیں۔

سوال ۴.۴۰۴: فرض کریں x اشیاء کی پیداوار میں لاگت $c(x) = x^3 - 20x^2 + 20000x$ ہے۔ کتنی پیداوار اوسط لاگت پیداوار کو کم سے کم کرے گی؟

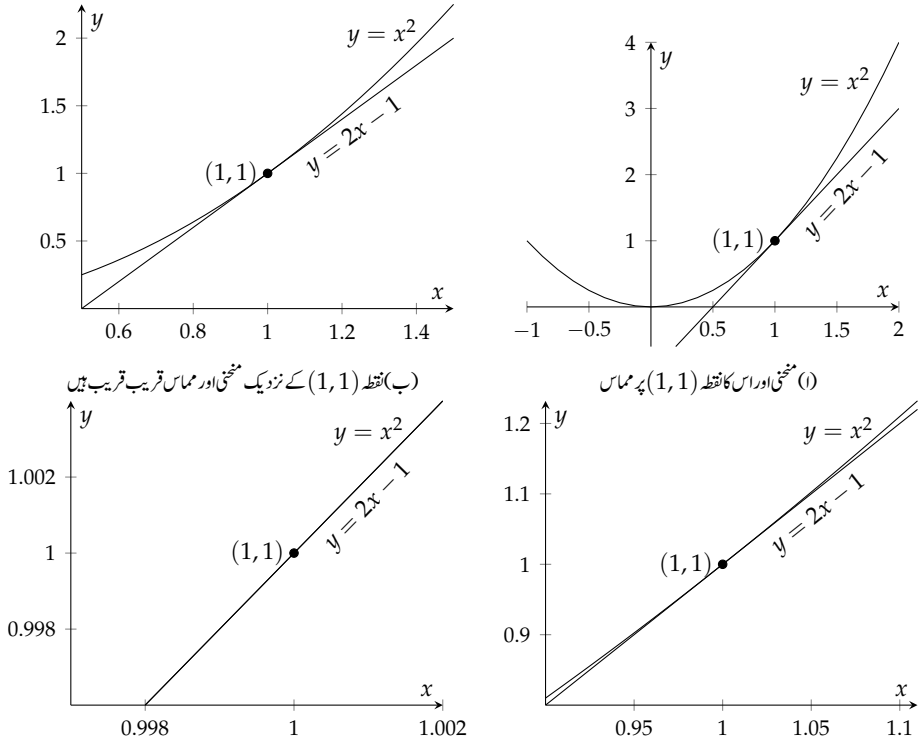
۴.۷ خط بندی اور تفرقات

بعض اوقات پیچیدہ تفاعل کو سادہ تخمینی تفاعل سے ظاہر کرتے ہوئے مخصوص موقعوں پر قابل قبول نتائج حاصل کرنا ممکن ہوتا ہے۔ ان سادہ تفاعل کے ساتھ کام کرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ اس حصہ میں مماس پر مبنی **خط بندی**[۲۱] پر غور کیا گیا ہے۔

ہم نئے متغیرات $\mathrm{d}x$ اور $\mathrm{d}y$ متعارف کرتے ہیں جو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کو نئی معنی دیں گے۔ ہم تجرباتی پیمائش میں خلل اور حساسیت کو $\mathrm{d}y$ سے ظاہر کریں گے۔

---

[۲۱] linearization



(ا) منحنی اور اس کا نقطہ $(1, 1)$ پر مماس

(ب) نقطہ $(1, 1)$ کے نزدیک منحنی اور مماس قریب قریب ہیں

(ج) دکھائے گئے وقفہ پر مماس اور منحنی بہت قریب ہیں

(د) دکھائے گئے وقفے پر منحنی اور مماس میں فرق کرنا مشکل ہے

شکل ۴.۹۰: قابل تفرق منحنی کو نقطہ مماس کے قریب تخمینی طور پر اس نقطے کے مماس سے ظاہر کیا جا سکتا ہے

خطی تخمین

آپ شکل ۴.۹۰ میں دیکھ سکتے ہیں کہ منحنی $y = f(x)$ کا مماس نقطہ مماس کے نزدیک منحنی کے قریب رہتا ہے۔ نقطہ مماس کے دونوں اطراف چھوٹے وقفہ پر مماس کی y قیمت کو منحنی کی y تخمینی قیمت تصور کیا جا سکتا ہے۔

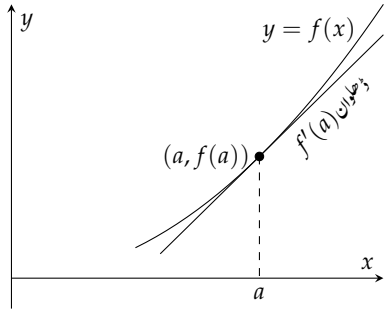
شکل ۴.۹۱ کی علامتیت استعمال کرتے ہوئے، نقطہ $(a, f(a))$ سے گزرتے ہوئے مماس کی نقطہ وڈھلوان مساوات

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

ہے۔ یوں مماس درج ذیل تفاعل

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

کی ترسیم ہے۔ جب تک یہ خط منحنی کے نزدیک رہے اس کو $f(x)$ کی تخمین تصور کیا جا سکتا ہے۔



شکل ۹۱.۴: نقطہ a پر تفاعل $f(x)$ کا مماس $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ ہو گا

۵۸۴۰ تعریف:

۵۸۴۱ اگر $x = a$ پر f قابل تفرق ہو تب تخمینی تفاعل

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) \tag{1}$$

۵۸۴۲ نقطہ a پر f کی **خط بندی**[۲۲] ہو گی۔ f کی درج ذیل تخمین L

$$f(x) \approx L(x)$$

۵۸۴۳ نقطہ a پر تفاعل f کی **معیاری خطی تخمین**[۲۳] ہے۔ نقطہ $x = a$ اس تخمین کا وسط[۲۴] ہے۔

۵۸۴۴ □

۵۸۴۵ مثال ۴۰.۴: $x = 0$ پر $f(x) = \sqrt{1+x}$ کی خط بندی تلاش کریں۔

۵۸۴۶ حل: ہم $a = 0$ پر مساوات ۱ کی درکار صورت حاصل کرتے ہیں جہاں

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

۵۸۴۷ لیتے ہوئے $f(0) = 1$ اور $f'(0) = \frac{1}{2}$ ہوں گے لہٰذا

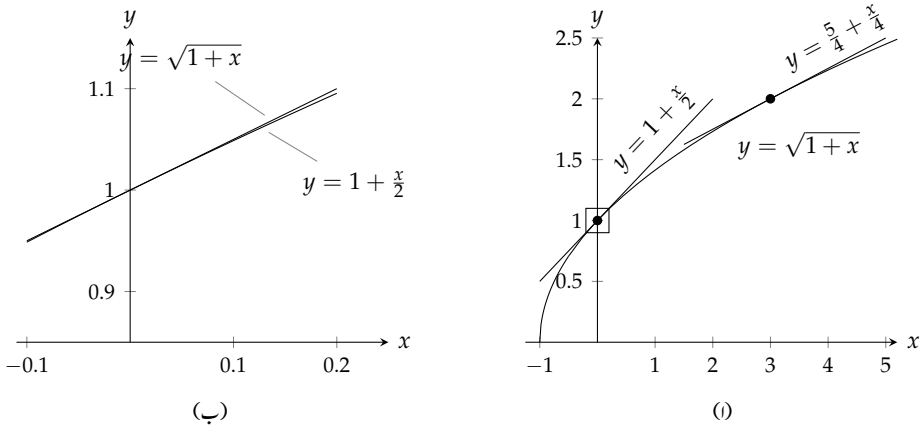
$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = 1 + \frac{1}{2}(x-0) = 1 + \frac{x}{2}$$

۵۸۴۸ ہو گا۔ شکل ۹۲.۴-الف میں منحنی اور مماس دکھائے گئے ہیں۔ شکل-۱ میں مماسی نقطہ کو ڈبہ میں دکھایا گیا ہے۔ اس ڈبے کو شکل-ب میں بڑا کر کے دکھایا گیا

۵۸۴۹ ہے۔ □

---

[۲۲] linearization
[۲۳] standardlinearapproximation
[۲۴] center



شکل ۴.۹۲: نقطہ $x = 0$ پر $y = \sqrt{1+x}$ اور اس کی خط بندی۔

۵۸۵۰ تخمین $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ (شکل ۴.۹۲-ب) سے درج ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10 \qquad \text{2 اعشاریہ درست}$$

$$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025 \qquad \text{3 اعشاریہ درست}$$

$$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250 \qquad \text{5 اعشاریہ درست}$$

۵۸۵۱ ان حساب سے اس غلط فہمی میں مبتلا مت ہونا کہ خط بندی استعمال کرتے ہوئے جو بھی کرنا ممکن ہو، کیلکولیٹر کا استعمال اس سے بہتر ہو گا۔ حقیقت میں ہم کبھی
۵۸۵۲ بھی خط بندی سے جذر تلاش نہیں کریں گے۔ خط بندی کی افادیت اس حقیقت میں ہے کہ وقفہ دلچسپی پر ہم پیچیدہ کلیہ کی جگہ سادہ کلیہ استعمال کر پاتے ہیں۔ اگر
۵۸۵۳ ہمیں 0 کے قریب x کی قیمتوں کے لئے $\sqrt{1+x}$ کے ساتھ کام کرنا ہو اور ہم معمولی خلل کو برداشت کر سکتے ہوں تب بہتر ہو گا کہ اس کے بجائے ہم
۵۸۵۴ $1 + \frac{x}{2}$ کے ساتھ کام کریں۔ ظاہر ہے ایسی صورت میں ہم جاننا چاہیں گے کہ ایسا کرنے سے کتنا خلل پیدا ہو گا۔ ایسے خلل پر باب ۹ میں غور کیا جائے گا۔

۵۸۵۵ وسط سے دور خط بندی میں خلل ناقابل نظر انداز ہو گا۔ یوں $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$ کو $x = 3$ کے نزدیک استعمال نہیں کیا جا سکتا ہے۔ آپ کو
۵۸۵۶ $x = 3$ پر نئی خط بندی حاصل کرنی ہو گی۔

۵۸۵۷ مثال ۴.۴۱: $x = 3$ پر تفاعل $f(x) = \sqrt{1+x}$ کی خط بندی حاصل کریں۔
۵۸۵۸ حل: ہم $a = 3$ پر مساوات ۱ کی درکار صورت حاصل کرتے ہیں جہاں

$$f(3) = 2, \quad f'(3) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}\Big|_{x=3} = \frac{1}{4}$$

۵۸۵۹ ہے لہٰذا

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{5}{4} + \frac{x}{4}$$

۵۸۶۰ ہو گا (شکل ۹۲.۴-۱)۔ اس خط بندی سے $x = 3.2$ پر

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{1+3.2} \approx \frac{5}{4} + \frac{3.2}{4} = 1.250 + 0.800 = 2.050$$

۵۸۶۱ حاصل ہوتا ہے جو بالکل درست جواب $\sqrt{4.2} \approx 2.04939$ سے 0.000 61 ہٹ کر ہے۔

۵۸۶۲ اگر ہم مثال ۴۰.۴ میں حاصل خط بندی استعمال کریں تب

$$\sqrt{+x} = \sqrt{1+3.2} \approx 1 + \frac{3.2}{2} = 1 + 1.6 = 2.6$$

۵۸۶۳ حاصل ہو گا جس میں 25 % خلل پایا جاتا ہے۔ □

۵۸۶۴ مثال ۴۲.۴: جذروں اور طاقتوں کے لئے اہم ترین خط بندی درج ذیل ہے (سوال ۴۲۴.۴)۔

$$(1+x)^k \approx 1 + kx \qquad x \approx 0 \text{؛} k \text{ کوئی عدد ہے} \tag{۲}$$

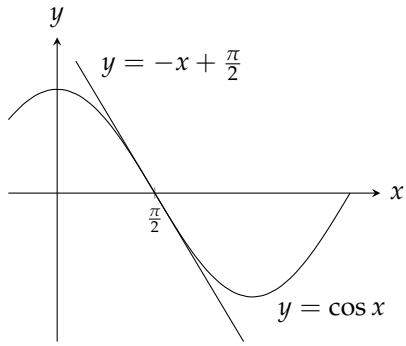
۵۸۶۵ $x = 0$ کے نزدیک یہ قابل قبول نتائج دیتا ہے اور یہ وسیع طور استعمال ہوتا ہے۔ □

۵۸۶۶ مساوات ۲ سے درج ذیل کلیات اخذ کیے جا سکتے ہیں جن کا وسط $x = 0$ ہے۔

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{x}{2} & k &= \frac{1}{2} \\
\frac{1}{1-x} &= (1-x)^{-1} \approx 1 + (-1)(-x) = 1 + x & k &= -1 \\
\sqrt[3]{1+5x^4} &= (1+5x^4)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}(5x^4) = 1 + \frac{5}{3}x^4 & k &= \frac{1}{3} \\
\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} &= (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + (-\tfrac{1}{2})(-x^2) = 1 + \frac{x^2}{2} & k &= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

۵۸۶۷ دیگر اہم خط بندی درج ذیل ہیں (اس حصہ کے آخر میں دیے سوالات میں آپ انہیں اخذ کریں گے) جن کا وسط $x = 0$ ہے۔

$$\begin{aligned}
\sin x &\approx x \\
\cos x &\approx 1 \\
\tan x &\approx x
\end{aligned}$$



شکل ۴.۹۳: کوسائن اور نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر اس کی خط بندی۔

مثال ۴.۴۳: $x = \frac{\pi}{2}$ پر $f(x) = \cos x$ کی خط بندی حاصل کریں۔

حل: درج ذیل

$$f(\tfrac{\pi}{2}) = \cos(\tfrac{\pi}{2}) = 0, \quad f'(\tfrac{\pi}{2}) = -\sin(\tfrac{\pi}{2}) = -1$$

لیتے ہوئے خط بندی درج ذیل ہو گی (شکل ۴.۹۳)۔

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a) = 0 + (-1)(x - \tfrac{\pi}{2}) = -x + \tfrac{\pi}{2}$$

□

تفرقات

تعریف:

فرض کریں $y = f(x)$ قابل تفرق تفاعل ہے۔ **تفرق** $\mathrm{d}x$ غیر تابع متغیر ہے۔ **تفرق** $\mathrm{d}y$ درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

□

عموماً تفرق $\mathrm{d}x$ غیر تابع متغیر میں تبدیلی Δx ہو گی۔ البتہ تعریف میں ہم $\mathrm{d}x$ پر یہ شرط لاگو نہیں کرتے ہیں۔ تفرق $\mathrm{d}y$ ہر صورت تابع ہو گا اور اس کی قیمت x اور $\mathrm{d}x$ پر منحصر ہو گی۔

مثال ۴.۴۴: $y = x^5 + 37x$ اور $y = \sin 3x$ کے لئے $\mathrm{d}y$ تلاش کریں۔

حل:

$$\mathrm{d}y = (5x^4 + 37)\,\mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}y = (3\cos 3x)\,\mathrm{d}x$$

۵۸۸۰ □

۵۸۸۱ اگر $\mathrm{d}x \neq 0$ ہو تب ہم مساوات $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$ کے دونوں اطراف کو $\mathrm{d}x$ سے تقسیم کر کے جانی پہچانی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

۵۸۸۲ حاصل کرتے ہیں۔ یہ مساوات کہتی ہے کہ $\mathrm{d}x \neq 0$ کی صورت میں $f'(x)$ تفرقات کا حاصل تقسیم ہو گا۔

۵۸۸۳ بعض اوقات ہم $\mathrm{d}f'(x)\,\mathrm{d}x$ کے بجائے

$$\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$$

۵۸۸۴ لکھتے ہیں اور $\mathrm{d}f$ کو f کا **تفرق** کہتے ہیں۔ مثال کے طور پر $f(x) = 3x^2 - 6$ کی صورت میں

$$\mathrm{d}f = \mathrm{d}(3x^2 - 6) = 6x\,\mathrm{d}x$$

۵۸۸۵ ہو گا۔

۵۸۸۶ تفرق کے ہر کلیہ مثلاً

$$\frac{\mathrm{d}(u+v)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

۵۸۸۷ کے دونوں اطراف کو $\mathrm{d}x$ سے ضرب دے کر مطابقتی تفرقی روپ

$$\mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$$

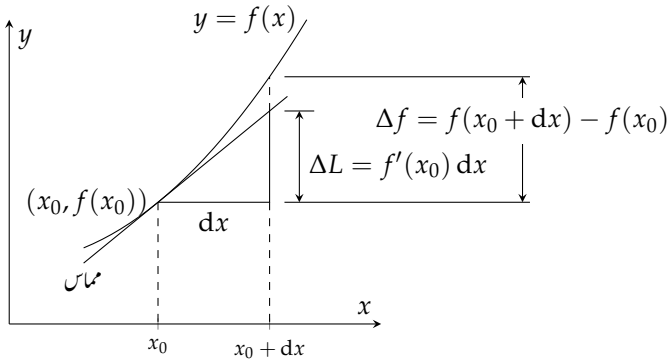
۵۸۸۸ حاصل ہو گی۔ چند تفرقی کلیات پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{d}c = 0, & \mathrm{d}(cu) = c\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(u+v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v, \\
\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\frac{u}{v}) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}, & \mathrm{d}(u^n) = nu^{n-1}\,\mathrm{d}u, \\
\mathrm{d}(\sin u) = \cos u\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\cos u) = -\sin u\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\tan u) = \sec^2 u\,\mathrm{d}u, \\
\mathrm{d}(\cot u) = -\csc^2 u\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\sec u) = \sec u \tan u\,\mathrm{d}u, & \mathrm{d}(\csc u) = -\csc u \cot u\,\mathrm{d}u
\end{array}$$

۵۸۸۹ مثال ۷.۴.۴۵:

$$\mathrm{d}(\tan 2x) = \sec^2(2x)\,\mathrm{d}(2x) = 2\sec^2 2x\,\mathrm{d}x$$
$$\mathrm{d}(\tfrac{x}{x+1}) = \frac{(x+1)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{x\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2}$$

۵۸۹۰ □



شکل ۴.۹۴: چھوٹے $\mathrm{d}x$ کی صورت میں f کی خط بندی تقریباً f میں تبدیلی کے برابر ہو گی۔

۵۸۹۱ تفرقات کی مدد سے تبدیلی کی اندازاً قیمت

۵۸۹۲ فرض کریں نقطہ x_0 پر قابل تفرق تفاعل $f(x)$ کی قیمت ہم جانتے ہیں۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ کسی نزدیک نقطہ $x_0 + \mathrm{d}x$ پر جانے سے تفاعل کی
۵۸۹۳ قیمت میں تبدیلی کتنی ہو گی۔ اگر $\mathrm{d}x$ نہایت کم ہو تب f اور x_0 پر اس کی خط بندی L ایک دوسرے کے برابر تبدیل ہوں گے۔ چونکہ L کا حساب
۵۸۹۴ زیادہ آسان ہے لہٰذا اس کی مدد لینا سود مند ثابت ہو گا۔

۵۸۹۵ شکل ۴.۹۴ میں دیے علامتوں کو استعمال کرتے ہوئے f میں تبدیلی لکھتے ہیں۔

$$\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$$

۵۸۹۶ L میں مطابقتی تبدیلی درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}\Delta L &= L(x_0 + \mathrm{d}x) - L(x_0)\\ &= \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)[(x_0 + \mathrm{d}x) - x_0]}_{L(x_0+\mathrm{d}x)} - \underbrace{f(x_0)}_{L(x_0)=f(x_0)}\\ &= f'(x_0)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

۵۸۹۷ تفرق $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ کا جیومیٹریائی مطلب پر غور کریں۔ جب $x = x_0$ پر $\mathrm{d}f$ کی قیمت حاصل کی جائے تب $\mathrm{d}f = \Delta L$ ہو گا یعنی
۵۸۹۸ خط بندی میں تبدیل $\mathrm{d}f$ کے برابر ہو گی۔ **تفرقی تبدیلی کی اندازاً قیمت**
۵۸۹۹ فرض کریں $x = x_0$ پر $f(x)$ قابل تفرق ہے۔ x کی قیمت x_0 سے $x_0 + \mathrm{d}x$ کرنے سے f میں تبدیلی تخمیناً درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$$

۵۹۰۰ مثال ۴.۴۶: ایک دائرے کا رداس $r_0 = 10\,\mathrm{cm}$ سے $10.1\,\mathrm{cm}$ کیا جاتا ہے۔ $\mathrm{d}S$ کا حساب کرتے ہوئے ہوئے اس کے رقبہ S میں
۵۹۰۱ تبدیلی حاصل کریں۔ اس کا موازنہ حقیقی تبدیلی ΔS کے ساتھ کریں۔

جدول ۱.۴: تبدیلی کے اظہار کے تین طریقے

	اصل	اندازاً
حتمی تبدیلی	$\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$	$\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$
اضافی تبدیلی	$\frac{\Delta f}{f(x_0)}$	$\frac{\mathrm{d}f}{f(x_0)}$
فی صد تبدیلی	$\frac{\Delta f}{f(x_0)} \times 100$	$\frac{\mathrm{d}f}{f(x_0)} \times 100$

۵۹۰۲ حل: چونکہ $S = \pi r^2$ ہے لہٰذا اندازاً تبدیلی

$$\mathrm{d}S = S'(r_0)\,\mathrm{d}r = 2\pi r_0\,\mathrm{d}r = 2\pi(10)(0.1) = 2\pi\,\mathrm{m}^2$$

۵۹۰۳ ہو گی۔ حقیقی تبدیل درج ذیل ہے۔

$$\Delta S = \pi(10.1)^2 - \pi(10)^2 = (102.01 - 100)\pi = \underbrace{2\pi}_{\mathrm{d}S} + \underbrace{0.01\pi}_{\text{خلل}}$$

۵۹۰۴ □

۵۹۰۵ **مطلق، اضافی، اور فی صد تبدیلی**

۵۹۰۶ x_0 سے نزدیک نقطہ $x_0 + \mathrm{d}x$ منتقل ہوتے ہوئے ہم f میں تبدیلی کو تین طریقوں سے ظاہر کر سکتے ہیں جنہیں جدول ۱.۴ میں دکھایا گیا ہے۔

۵۹۰۷ مثال ۷.۴: گزشتہ مثال میں فی صف اندازاً تبدیلی درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}S}{S(r_0)} \times 100 = \frac{2\pi}{100\pi} \times 100 = 2\,\%$$

۵۹۰۸ □

۵۹۰۹ مثال ۸.۴: زمین کا سطحی رقبہ

۵۹۱۰ زمین کو کرہ تصور کریں جس کا رداس $6371 \mp 0.1\,\mathrm{km}$ ہے۔ زمین کے رقبہ میں خلل کتنا ہو گا؟

۵۹۱۱ حل: رداس r کے کرہ کا سطحی رقبہ $S = 4\pi r^2$ ہوتا ہے۔ r میں خلل کی وجہ سے S میں خلل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r = 8\pi r\,\mathrm{d}r = 8\pi(6371)(0.1) = 16\,012\,\mathrm{km}^2$$

۵۹۱۲ □

۵۹۱۳ مثال ۴.۴۹: رداس r کے کرہ کا رقبہ $1\,\%$ درست حاصل کرنے کی خاطر اس کا رداس کتنا درست ناپنا ہو گا؟

۵۹۱۴ حل: ہم چاہتے ہیں کہ رداس میں تبدیلی اتنی کم ہو کہ درج ذیل مطمئن ہوتا ہو۔

$$|\Delta S| \leq \frac{S}{100} = \frac{4\pi r^2}{100}$$

۵۹۱۵ ہم اس عدم مساوات میں Δs کی جگہ

$$\mathrm{d}S = \left(\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r = 8\pi r\,\mathrm{d}r$$

۵۹۱۶ پر کرتے ہیں۔ یوں

$$|8\pi r\,\mathrm{d}r| \leq \frac{4\pi r^2}{100} \quad \Longrightarrow \quad |\mathrm{d}r| \leq \frac{1}{8\pi r}\cdot\frac{4\pi r^2}{100} = \frac{1}{2}\frac{r}{100}$$

۵۹۱۷ حاصل ہوتا ہے۔ یوں رداس میں خلل اصل رداس کے $0.5\,\%$ سے کم ہونا ضروری ہے۔ □

۵۹۱۸ مثال ۴.۵۰: بند شریانوں کا کھولنا (انجیوپلاسٹی[۲۵])

۵۹۱۹ جزوی طور پر بند شریانوں کی رداس کو بڑا کرتے ہوئے خون کی عمومی بہاو حاصل کی جا سکتی ہے۔ ۱۸۳۰ء کے لگ بھگ فرانس کے جین پوزوئے نے درج ذیل
۵۹۲۰ کلیہ اخذ کیا

$$H = kr^4 \qquad (k \text{ مستقل})$$

۵۹۲۱ جو مستقل دباو پر فی اکائی وقت میں ایک چھوٹی نالی میں حجم بہاو H دیتا ہے۔ اس نالی کا رداس r ہے۔ رداس $10\,\%$ بڑھانے سے بہاو پر کیا اثر ہو گا؟

۵۹۲۲ حل: r اور H کے تفرقات کا تعلق لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{d}H = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}r = 4kr^3\,\mathrm{d}r$$

۵۹۲۳ یوں

$$\frac{\mathrm{d}H}{H} = \frac{4kr^3\,\mathrm{d}r}{kr^4} = 4\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

۵۹۲۴ ہو گا یعنی H میں اضافی تبدیل r کی اضافی تبدیلی کے 4 گنا ہے۔ یوں r میں $10\,\%$ تبدیلی سے H میں $40\,\%$ تبدیلی پیدا ہو گی۔ □

---

[۲۵] angioplasty

حساسیت

مختلف x پر مساوات $\mathrm{d}f = f'(x)\,\mathrm{d}x$ ہمیں f کی حساسیت دیتی ہے۔ x پر f' کی قیمت جتنی زیادہ ہو، کسی بھی تبدیلی $\mathrm{d}x$ کے لئے f میں تبدیلی اتنی زیادہ ہو گی۔

مثال ۵۱.۴: آپ ایک پل کی اونچائی ناپنے کی خاطر ایک پتھر کو پانی میں گرا کر چھینٹوں کی آواز آنے تک وقت ناپتے ہیں۔ آپ $s = 4.9t^2$ استعمال کرتے ہیں۔ 0.1 سیکنڈ خلل کے لحاظ سے آپ کے جواب کی حساسیت کیا ہو گی؟

حل: مساوات $\mathrm{d}s = 9.8t\,\mathrm{d}t$ میں s کی قیمت کا دارومدار t پر ہے۔ اگر $t = 2$ ہو تب

$$\mathrm{d}s = 9.8(2)(0.1) = 1.96\,\mathrm{m}$$

ہو گا جبکہ تین سیکنڈ بعد $t = 5\,\mathrm{s}$ پر خلل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}s = 9.8(5)(0.1) = 4.9\,\mathrm{m}$$

□

تخمین $\Delta f \approx \mathrm{d}f$ میں خلل

فرض کریں $x = x_0$ پر $f(x)$ قابل تفرق ہے اور x میں تبدیلی Δx ہے۔ ہم $f(x)$ کی مطابقتی تبدیلی کو دو طریقوں سے بیان کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) && \text{اصل تبدیلی} \\ \mathrm{d} &= f'(x_0)\Delta x && \text{تفرقی اندازہ} \end{aligned}$$

$\mathrm{d}f$ اصل تبدیلی Δf کی کتنی قریبی تخمین ہے؟

ہم خلل تخمین کو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \text{خلل تخمین} &= \Delta f - \mathrm{d}f \\ &= \Delta f - f'(x_0)\Delta x \\ &= \underbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}_{\Delta f} - f'(x_0)\Delta x \\ &= \underbrace{\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)\right)}_{\text{اس حصہ کو } \epsilon \text{ کہیں}} \Delta x \\ &= \epsilon \cdot \Delta x \end{aligned}$$

$\Delta x \to 0$ کرنے سے $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ کی قیمت $f'(x_0)$ تک پہنچتی ہے ($f'(x_0)$ کی تعریف دوبارہ دیکھیں)۔ یوں قوسین میں بند قیمت نہایت چھوٹی ہو گی اور اسی لئے ہم اس کو ϵ لکھتے ہیں۔ درحقیقت $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon \to 0$ ہو گا جب Δx چھوٹا ہو تخمینی خلل $\epsilon\Delta x$

مزید چھوٹا ہو گا۔

$$\underbrace{\Delta f}_{\text{اصل تبدیلی}} = \underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{\text{اندازاً تبدیلی}} + \underbrace{\epsilon\Delta x}_{\text{خلل}}$$

اگرچہ ہمیں یہاں معلوم نہیں ہے کہ خلل کتنا چھوٹا ہو گا (جسے جاننے کے لئے ہمیں باب ۹ کا انتظار کرنا ہو گا) یہ ضروری ہے کہ اس مساوات کی صورت پر ہم غور کریں۔

اگر $x = x_0$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہو اور x کی قیمت x_0 سے تبدیل ہو کر $x_0 + \Delta x$ ہو جائے تب f میں تبدیلی Δy کی مساوات کی صورت

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \epsilon\Delta x \tag{۳}$$

ہو گی جہاں $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon \to 0$ ہو گا۔

خلل کی مساوات (مساوات ۳) کی صورت جانتے ہوئے ہم زنجیری تفرق کا قاعدہ ثابت کر سکتے ہیں۔

زنجیری تفرق کا ثبوت

زنجیری قاعدہ کے بارے میں ہم حصہ ۳.۵ میں بات کی گئی جہاں اس کا ثبوت پیش نہیں کیا گیا۔ آئیں مساوات ۳ کی مدد سے زنجیری قاعدے کا ثبوت پیش کریں۔

فرض کریں $f(u)$ متغیر u کا قابل تفرق تفاعل ہے اور $u = g(x)$ متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہے۔ ہم ثابت کرنا چاہیں گے کہ اگر x_0 پر g قابل تفرق ہو اور $g(x_0)$ پر f قابل تفرق ہو تب مرکب تفاعل x_0 پر قابل تفرق ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

فرض کریں x میں اضافہ Δx ہے اور فرض کریں کہ u اور y میں مطابقتی اضافے بالترتیب Δu اور Δy ہیں۔ جیسا آپ شکل ۴.۹۵ میں دیکھ سکتے ہیں

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

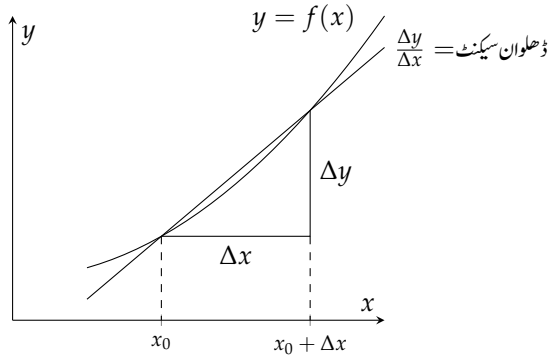
ہو گا لہٰذا ہم ثابت کرنا چاہیں گے کہ یہ حد $f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$ کے برابر ہو گا۔

مساوات ۳ کے تحت

$$\Delta u = g'(x_0)\Delta x + \epsilon_1\Delta x = (g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

ہو گا جہاں $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1 \to 0$ ہو گا۔ اسی طرح

$$\Delta y = f'(u_0)\Delta u + \epsilon_2\Delta u = (f'(u_0) + \epsilon_2)\Delta u$$



شکل ۴.۹۵: $x = x_0$ پر y کے تفرق سے مراد $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ہے۔

۵۹۵۵ ہوگا جہاں $\Delta u \to 0$ کرنے سے $\epsilon_2 \to 0$ ہوگا۔ Δu اور Δy کی مساواتوں کو ملا کر

$$\Delta y = (f'(u_0) + \epsilon_2)(g'(x_0) + \epsilon_1)\Delta x$$

۵۹۵۶ حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) + \epsilon_2 g'(x_0) + f'(u_0)\epsilon_1 + \epsilon_2\epsilon_1$$

۵۹۵۷ ہوگا۔ چونکہ $\Delta x \to 0$ کرنے سے $\epsilon_1 \to 0$ اور $\epsilon_2 \to 0$ ہوں گے لہٰذا دائیں ہاتھ تین اجزاء قابل نظر انداز ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u_0)g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

۵۹۵۸ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

۵۹۵۹ **کمیت کا توانائی میں تبادل**

۵۹۶۰ نیوٹن کا دوسرا قانون

$$F = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(mv) = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = ma$$

۵۹۶۱ کمیت کے اٹل ہونے پر مبنی ہے۔ جیسا آپ جانتے ہیں حقیقت میں کمیت کی قیمت سمتی رفتار پر منحصر ہے یعنی

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

۵۹۶۲ جہاں ساکن کمیت m_0 ہے اور روشنی کی رفتار $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہے۔ اگر کمیت کی سمتی رفتار v روشنی کی رفتار سے بہت کم ہو تب ہم
۵۹۶۳ تخمینی طور پر

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)$$

۵۹۶۴ لکھ سکتے ہیں۔ یوں

$$m = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx m_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right] = m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

۵۹۶۵ یعنی

$$m = m_0 + \frac{1}{2}m_0 v^2\left(\frac{1}{c^2}\right) \tag{۴}$$

۵۹۶۶ ہو گا۔ مساوات ۴ رفتار کی وجہ سے کمیت میں اضافہ بیان کرتی ہے۔

۵۹۶۷ طبیعیات نیوٹن میں $\frac{1}{2}m_0 v^2$ کو جسم کی حرکی توانائی کہتے ہیں اور اگر ہم مساوات ۴ کو

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0 v^2$$

۵۹۶۸ لکھیں تب

$$(m - m_0)c^2 \approx \frac{1}{2}m_0 v^2 = \frac{1}{2}m_0 v^2 - \frac{1}{2}m_0(0)^2 = \Delta(\text{حرکی توانائی})$$

۵۹۶۹ یعنی

$$(\Delta m)c^2 \approx \Delta(\text{حرکی توانائی}) \tag{۵}$$

۵۹۷۰ ہو گا۔ یوں صفر سمتی رفتار سے v سمتی رفتار تک پہنچنے سے حرکی توانائی میں تبدیلی تقریباً $(\Delta m)c^2$ ہو گی۔

۵۹۷۱ مساوات ۵ میں $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ پر کرتے ہوئے

$$\Delta(\text{حرکی توانائی}) \approx 90\,000\,000\,000\,000\,000\,\Delta m$$

۵۹۷۲ توانائی حاصل ہو گی جہاں کمیت کی اکائی kg اور توانائی کی اکائی جاول J ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کمیت میں معمولی تبدیلی سے توانائی میں بہت بڑی تبدیلی آتی
۵۹۷۳ ہے۔ 20 کلو ٹن ایٹمی بم میں ایک گرام سے کم کمیت توانائی میں تبدیل ہوتی ہے۔ 20 کلو ٹن ایٹمی بم سے مراد وہ ایٹمی بم ہے جو 20 000 ٹن یعنی $2 \times$
۵۹۷۴ 10^7 kg بارودی مواد (ٹی این ٹی[۲۶]) کے دھماکہ کے برابر توانائی خارج کرتا ہو۔

[۲۶] TNT, trinitrotoluene

سوالات

خط بندی کی تلاش

سوال ۴.۴۰۵ تا سوال ۴.۴۱۰ میں $x = a$ پر $f(x)$ کی خط بندی $L(x)$ تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۰۵: $f(x) = x^4, \quad x = 1$

سوال ۴.۴۰۶: $f(x) = x^{-1}, \quad x = 2$

سوال ۴.۴۰۷: $f(x) = x^3 - x, \quad x = 1$

سوال ۴.۴۰۸: $f(x) = x^3 - 2x + 3, \quad x = 2$

سوال ۴.۴۰۹: $f(x) = \sqrt{x}, \quad x = 4$

سوال ۴.۴۱۰: $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}, \quad x = -4$

آپ سوال ۴.۴۱۱ تا سوال ۴.۴۱۶ میں دیے تفاعل کی خط بندی استعمال کرنا چاہتے ہیں۔ بعد کا کام آسان بنانے کی خاطر آپ خط بندی کے وقفے کا وسط دیے گئے نقطہ x_0 کے نزدیک عدد صحیح پر رکھنا چاہیں گے جہاں تفاعل اور تفاعل کے تفرق کی قیمت تلاش کرنا زیادہ آسان ہو گا۔ خط بندی تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۱۱: $f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = 0.1$

سوال ۴.۴۱۲: $f(x) = x^{-1}, \quad x_0 = 0.6$

سوال ۴.۴۱۳: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3, \quad x_0 = -0.9$

سوال ۴.۴۱۴: $f(x) = 1 + x, \quad x_0 = 8.1$

سوال ۴.۴۱۵: $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x_0 = 8.5$

سوال ۴.۴۱۶: $f(x) = \frac{x}{x+1}, \quad x_0 = 1.3$

تکونیاتی تفاعل کی خط بندی

سوال ۴.۴۱۷ تا سوال ۴.۴۲۰ میں $x = a$ پر تفاعل f کی خط بندی تلاش کریں۔ دو مختلف نقطوں پر دو مختلف حد بندی درکار ہیں۔ تفاعل اور تفاعل کی خط بندی کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال ۴.۴۱۷: $f(x) = \sin x, \quad x = 0,\ x = \pi$

سوال ۴.۴۱۸: $f(x) = \cos x, \quad x = 0,\ x = -\frac{\pi}{2}$

سوال ۴.۴۱۹: $f(x) = \sec x, \quad x = 0,\ x = -\frac{\pi}{3}$

سوال ۴.۴۲۰: $f(x) = \tan x, \quad x = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$

تخمین $(1+x)^k \approx 1 + kx$

سوال ۴.۴۲۱: x کی قیمت صفر کے قریب لیتے ہوئے درج ذیل تفاعل کی خطی تخمین تلاش کریں۔ کلیہ $(1+x)^k \approx 1 + kx$ استعمال کریں۔

ا. $f(x) = (1+x)^2$ ج. $g(x) = \frac{2}{1-x}$ ھ. $h(x) = 3(1+x)^{\frac{1}{3}}$

ب. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^5}$ د. $g(x) = (1-x)^6$ و. $h(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

سوال ۴.۴۲۲: کیلکولیٹر سے تیز تخمین $(1+x)^k \approx 1 + kx$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل قیمتیں حاصل کریں۔

ا. $(1.0002)^{50}$ ب. $\sqrt[3]{1.009}$

سوال ۴.۴۲۳: $x = 0$ پر $f(x) = \sqrt{x+1} + \sin x$ کی خط بندی تلاش کریں۔اس کا $\sqrt{1+x}$ اور $\sin x$ کی انفرادی خط بندی کے ساتھ کیا رشتہ ہے؟

سوال ۴.۴۲۴: ہم طاقتی قاعدہ سے جانتے ہیں کہ تمام ناطق اعداد k کے لئے مساوات

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+x)^k = k(1+x)^{k-1}$$

مطمئن ہوتی ہے۔ہم باب ۷ میں دیکھیں گے کہ یہ مساوات غیر ناطق اعداد کے لئے بھی مطمئن ہوتی ہے۔یہی یہاں فرض کرتے ہوئے دکھائیں کہ $x = 0$ پر $f(x) = (1+k)^k$ کی خط بندی $L(x) = 1 + kx$ ہے۔

تفرقات

سوال ۴.۴۲۵ تا سوال ۴.۴۳۶ میں $\mathrm{d}y$ تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۲۵: $y = x^3 - 3\sqrt{x}$

سوال ۴.۴۲۶: $y = x\sqrt{1-x^2}$

سوال ۴.۴۲۷: $y = \frac{2x}{1+x^2}$

سوال ۴.۴۲۸: $y = \frac{2\sqrt{x}}{3(1+\sqrt{x})}$

سوال ۴.۴۲۹: $2y^{\frac{3}{2}} + xy - x = 0$

سوال ۴.۴۳۰: $xy^2 - 4x^{\frac{3}{2}} - y = 0$

سوال ۴.۴۳۱: $y = \sin(5\sqrt{x})$

سوال ۴.۴۳۲: $y = \cos(x^2)$

سوال ۴.۴۳۳: $y = 4\tan(\frac{x^3}{3})$

سوال ۴.۴۳۴: $y = \sec(x^2 - 1)$

سوال ۴.۴۳۵: $y = 3\csc(1 - 2\sqrt{x})$

سوال ۴.۴۳۶: $y = 2\cot(\frac{1}{\sqrt{x}})$

خلل تخمین

سوال ۴.۴۳۷ تا سوال ۴.۴۴۲ میں x کی قیمت x_0 سے $x_0 + \mathrm{d}x$ ہونے کی وجہ سے تفاعل $f(x)$ کی قیمت تبدیل ہوتی ہے۔ درج ذیل تلاش کریں (شکل ۴.۹۴)۔

ا. تبدیلی $\Delta f = f(x_0 + \mathrm{d}x) - f(x_0)$

ب. اندازاً تبدیلی $\mathrm{d}f = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$

ج. خلل تخمین $\left|\Delta f - \mathrm{d}f\right|$

سوال ۴.۴۳۷: $f(x) = x^2 + 2x,\ x_0 = 0,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال ۴.۴۳۸: $f(x) = 2x^2 + 4x - 3,\ x_0 = -1,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال ۴.۴۳۹: $f(x) = x^3 - x,\ x_0 = 1,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال ۴.۴۴۰: $f(x) = x^4,\ x_0 = 1,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال ۴.۴۴۱: $f(x) = x^{-1},\ x_0 = 0.5,\ \mathrm{d}x = 0.1$

سوال ۴.۴۴۲: $f(x) = x^3 - 2x + 3,\ x_0 = 2,\ \mathrm{d}x = 0.1$

تبدیلی کا تفرقی اندازہ

سوال ۴.۴۴۳ تا سوال ۴.۴۴۸ میں رقبہ یا حجم میں تبدیلی کی تفرقی صورت لکھیں۔

سوال ۴.۴۴۳: رداس r کے کرہ کے حجم $H = \frac{4}{3}\pi r^3$ میں تبدیلی جب رداس r_0 سے $r_0 + \mathrm{d}r$ ہوتا ہے۔

سوال ۴.۴۴۴: مکعب کے حجم $H = x^3$ میں تبدیلی جب اس کے ضلع کی لمبائی x_0 سے تبدیل ہو کر $x_0 + \mathrm{d}x$ ہوتی ہے۔

سوال ۴.۴۴۵: مکعب کی سطحی رقبہ $S = 6x^2$ میں تبدیلی جب اس کا ضلع x_0 سے $x_0 + \mathrm{d}x$ ہوتا ہے۔

سوال ۴.۴۴۶: قائمہ مخروط کا رقبہ پہلو $S = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$ جب رداس r_0 سے $r_0 + \mathrm{d}r$ ہوتا ہے جبکہ اس کی اونچائی h تبدیل نہیں ہوتی ہے۔

سوال ۴.۴۴۷: قائمہ بیلن کا حجم $H = \pi r^2 h$ جب اس کا رداس r_0 سے تبدیل ہو کر $r_0 + \mathrm{d}r$ ہو جبکہ اس کی لمبائی h تبدیل نہ ہو۔

سوال ۴.۴۴۸: قائمہ بیلن کا رقبہ پہلو $S = 2\pi rh$ جب اس کی لمبائی h_0 سے $h_0 + \mathrm{d}h$ ہو جائے جبکہ اس کا رداس تبدیل نہ ہو۔

استعمال

سوال ۴.۴۴۹: ایک دائرے کا رداس $2\,\mathrm{m}$ سے بڑھ کر $2.02\,\mathrm{m}$ ہو جاتا ہے۔

ا. رقبے میں تبدیلی تلاش کریں۔

ب. رقبہ میں تبدیلی اور ابتدائی رقبہ کے فی صد کی صورت میں لکھیں۔

سوال ۴.۴۵۰: ایک درخت کا قطر 30 cm تھا۔ اگلے سال اس کا محیط 2 cm بڑھ گیا۔ درخت کا قطر کتنا بڑھا؟ درخت کا رقبہ عمودی تراش کتنا بڑھا؟

سوال ۴.۴۵۱: ایک مکعب کی اضلاع کی لمبائی 10 cm ہے جس میں 1 % خلل متوقع ہے۔ اس کے حجم میں کتنا فی صد خلل ہو گا؟

سوال ۴.۴۵۲: ایک چوکور کے رقبہ میں 2 % سے کم خلل قابل قبول ہے۔ اس کے ضلع کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا؟

سوال ۴.۴۵۳: ایک کرہ کا قطر 100 ∓ 1 cm ناپا جاتا ہے۔ اس کو استعمال کرتے ہوئے کرہ کا حجم حاصل کیا جاتا ہے۔ حجم میں کتنا خلل متوقع ہے؟

سوال ۴.۴۵۴: ایک کرہ کے حجم میں 3 % تک خلل قابل قبول ہے۔ اس کے قطر کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا؟

سوال ۴.۴۵۵: ایک قائمہ بیلن کا رداس اور اس کی لمبائی ایک دوسرے کے برابر ہیں۔ یوں اس کا حجم πh^3 ہو گا۔ اس کے حجم میں 1 % خلل قابل قبول ہے۔ اس کی لمبائی کی پیمائش میں قابل قبول خلل کتنا ہو گا؟

سوال ۴.۴۵۶: ایک قائمہ ٹینکی کا قد 10 m ہے۔ اس کی پیمائش حجم اور اصل حجم میں 1 % کا فرق قابل قبول ہے۔ اس کے اندرونی قطر کی پیمائش میں کتنا خلل قابل قبول ہو گا۔

سوال ۴.۴۵۷: ایک دائری قرص کے رداس میں کتنا فرق $\mathrm{d}r$ قابل قبول ہو گا تاکہ اس کی کمیت میں فرق اصل کمیت کے $\frac{1}{1000}$ سے کم ہو۔ قرص کی موٹائی میں خلل کو نظر انداز کریں۔

سوال ۴.۴۵۸: خون کے بہاو میں 50 % اضافہ حاصل کرنے کی خاطر مثال ۴.۵۰ میں r کو کتنا فی صد بڑھانا ہو گا؟

سوال ۴.۴۵۹: دکھائیں کہ مثال ۴.۵۱ میں t میں 5 % خلل کی وجہ سے s میں 10 % خلل پیدا ہو گا۔

سوال ۴.۴۶۰: دل پر خلائی مشق کے اثرات

اکائی وقت میں دل درج ذیل

$$W = PV + \frac{V\delta v^2}{2g}$$

کام کرتا ہے جہاں W اکائی وقت میں کام ہے، P دباو خون ہے، V دل سے اکائی وقت میں خارج خون کا حجم ہے، δ خون کی کثافت ہے، v دل سے اخراج کے وقت خون کی اوسط رفتار ہے، اور g ثقلی اسراع ہے۔

مستقل P ، V δ اور v کی صورت میں W صرف g کا تفاعل ہو گا۔ ایسی صورت میں یہ مساوات درج ذیل سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔

$$W = a + \frac{b}{g} \qquad (a, b \text{ مستقل}) \tag{۶}$$

آپ چاند پر g میں تبدیلی $\mathrm{d}g$ اور زمین پر g میں اتنی ہی تبدیلی $\mathrm{d}g$ کا W پر اثر دیکھنا چاہتے ہیں۔ چاند پر $g = 1.6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ اور زمین پر $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہیں۔ مساوات ۶ سے چاند $\mathrm{d}W$ اور زمین $\mathrm{d}W$ کی نسبت حاصل کریں۔ نتیجہ کو دیکھ کر آپ کیا کہیں گے؟

سوال ۴.۴۶۱: مکعب کا حجم $H = x^3$ ہے۔ اس کے کنارے کی لمبائی میں Δx کے اضافہ سے حجم میں ΔH اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ اضافی حجم ΔH کا خاکہ بنا کر اس کو درج ذیل کا مجموعہ ظاہر کریں۔

ا. تین تختے جن کے اطراف x ، x اور Δx ہیں۔

ب. تین ڈنڈے جن کے اطراف x ، Δx اور Δx ہیں۔

ج. ایک مکعب جس کے اطراف Δ ، Δx اور Δx ہیں۔

تفرقی کلیہ $\mathrm{d}H = 3x^2\,\mathrm{d}x$ حجم میں تبدیلی کو تین تختوں کے حجم (جزو-ا) سے حاصل کرتی ہے۔

سوال ۴.۴۶۲: گھڑیال کی لٹکن کی لمبائی اٹل رکھنے کی خاطر اس کا درجہ حرارت برقرار رکھا جاتا ہے۔ لٹکن کا دوری عرصہ T لٹکن کی لمبائی L اور کروی اسراع g پر منحصر ہے۔ یوں سطح زمین پر گھڑیال کو ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے سے g کی مقامی قیمت میں معمولی تبدیل کی وجہ سے T میں معمولی تبدیلی پیدا ہو گی۔ ΔT پر نظر رکھنے سے g میں تبدیلی $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

ا. L کو اٹل اور g کو متغیر تصور کرتے ہوئے $\mathrm{d}T$ کی مساوات حاصل کر کے جزو-ب اور جزو-ج کے جوابات دیں۔

ب. g بڑھنے سے T بڑھتا ہے یا گھٹتا ہے؟ کیا گھڑیال کم وقت یا زیادہ وقت دے گا؟

ج. $100\,\mathrm{cm}$ لٹکن والے گھڑیال کو ایک مقام جہاں $g = 980\,\mathrm{cm\,s^{-2}}$ ہو سے دوسرے مقام پر منتقل کیا جاتا ہے جس کی وجہ سے دوری عرصہ $\Delta T = 0.001\,\mathrm{s}$ بڑھ جاتا ہے۔ $\mathrm{d}g$ حاصل کرتے ہوئے نئے مقام پر g کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۴.۴۶۳: درج ذیل دکھاتے ہوئے دکھائیں کہ مبدا پر $\sqrt{1+x}$ کی خط بندی $x \to 0$ کرنے سے بہتر ہو گی۔

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}}{1+\frac{x}{2}} = 1$$

سوال ۴.۴۶۴: درج ذیل دکھاتے ہوئے دکھائیں کہ مبدا پر $x \to 0$ کرنے سے $\tan x$ کی خط بندی بہتر ہو گی۔

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

سوال ۴.۴۶۵: فرض کریں تفاعل $f(x)$ کی ترسیم کا $x = a$ پر افقی مماس پایا جاتا ہے۔ کیا $x = a$ پر $f(x)$ کی خط بندی کے بارے میں کچھ کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۴۶۶: ڈھلوان سے تفرق کا حصول۔ قابل تفرق منحنی کو بڑا کرنے سے مقامی نقطے پر منحنی سیدھا خط نما نظر آتا ہے۔ اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کسی بھی نقطے پر منحنی کا تفرق ترسیم کا ڈھلوان ناپ کر حاصل کیا جا سکتا ہے۔

ا. یہ عمل دیکھنے کی خاطر $y = x^2$ کی ترسیم کو کمپیوٹر کے شیشے پر اتنا بڑا کریں کہ $x = 1$ پر ترسیم سیدھا خط نظر آتا ہو۔ $x = 1$ پر اس سیدھے خط کا ڈھلوان 2 ہو گا جو اس نقطے پر ترسیم کا تفرق ہو گا۔

ب. اب $y = e^x$ کی ترسیم کو باری باری $x = 0$ ، $x = 1$ اور $x = -1$ پر بڑا کر کے دیکھیں۔ ہر نقطے پر ترسیم کے ڈھلوان کا موازنہ اس نقطے پر e^x کی قیمت کے ساتھ کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟

سوال ۴.۴۶۷: نقاط تصریف پر خط بندی۔ جیسا شکل ۴.۹۳ سے واضح ہے، نقاط تصریف پر خط بندی بالخصوص بہتر بیٹھتی ہے۔اس کی وضاحت سوال ۹.۵۴۹ میں کی جائے گی۔ترسیم سے $x = 0$ اور $x = \sqrt{3}$ پر $f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$ کا ڈھلوان حاصل کریں۔

سوال ۴.۴۶۸: خط بندی بہترین خطی تخمین ہے۔(خط بندی استعمال کرنے کی وجہ۔) فرض کریں $x = a$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہے اور $g(x) = m(x-a) + c$ ایک خطی تفاعل ہے جہاں m اور c مستقل ہیں۔اگر $x = a$ کے نزدیک خلل $E(x) = f(x) - g(x)$ بہت کم ہو تب ہم خط بندی $L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ کے بجائے g کو بطور خطی تخمین استعمال کر سکتے ہیں۔دکھائیں کہ g پر درج ذیل شرائط لاگو کرنے سے $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ حاصل ہو گا۔

ا. $E(a) = 0$ $x = a$ پر تخمینی خلل صفر ہے

ب. $\lim_{x\to a} \frac{E(x)}{x-a} = 0$ $x - a$ کے لحاظ سے خلل قابل نظر انداز ہے۔

یوں خط بندی $L(x)$ وہ واحد خطی تخمین ہے جو $x = a$ پر صفر خلل دیتا ہے اور جس کا خلل $x - a$ کے لحاظ سے قابل نظر انداز ہے۔

سوال ۴.۴۶۹: کیلکولیٹر میں 2 کا ہندسہ لکھ کر بار بار جذر لیں۔آپ کیا ترتیب دیکھتے ہیں؟ بار بار $\sqrt[10]{\ }$ لینے سے کیا ترتیب دیکھنے کو ملتی ہے؟

سوال ۴.۴۷۰: گزشتہ سوال کو 2 کے بجائے 0.5 کے لئے دہرائیں۔اب کیا دیکھنے کو ملتا ہے؟ کیا 2 کی جگہ کوئی بھی مثبت عدد x استعمال کیا جا سکتا ہے؟ وجہ بیان کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۴.۴۷۱ تا ۴.۴۷۴ میں کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے وقفہ I پر تفاعل کے بجائے خط بندی استعمال کرتے ہوئے خلل کی مقدار کا اندازہ لگانا ہو گا۔درج ذیل اقدام کریں۔

ا. وقفہ I پر تفاعل f ترسیم کریں۔

ب. نقطہ $x = a$ پر تفاعل کی خط بندی L تلاش کریں۔

ج. f اور L کو ساتھ ساتھ ترسیم کریں۔

د. وقفہ I پر مطلق خلل $|f(x) - L(x)|$ ترسیم کر کے اس کی اعظم قیمت حاصل کریں۔

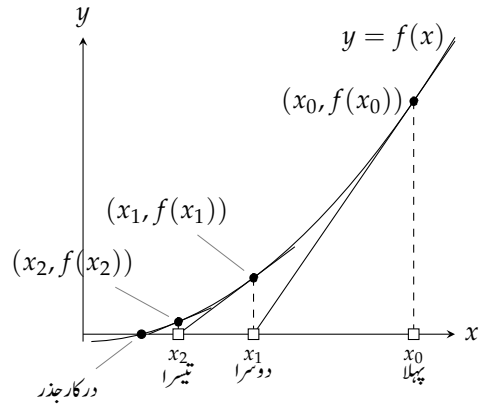
ھ. جزو-د کی ترسیم سے $\delta > 0$ کی اعظم قیمت تلاش کریں جو $|x-a| < \delta \implies |f(x) - L(x)| < \epsilon$ کو مطمئن کرتی ہو جہاں $\epsilon = 0.5, 0.1, 0.01$ لیں۔ترسیم کو دیکھ کر بتائیں آیا آپ کی تخمینی δ کی قیمتیں درست ہیں؟

سوال ۴.۴۷۱: $f(x) = x^3 + x^2 - 2x, \quad [-1, 2], \quad a = 1$

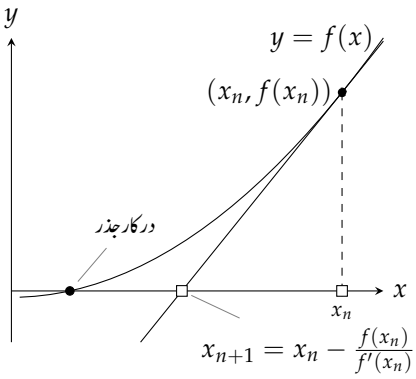
سوال ۴.۴۷۲: $f(x) = \frac{x-1}{4x^2+1}, \quad [-\frac{3}{4}, 1], \quad a = \frac{1}{2}$

سوال ۴.۴۷۳: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}(x-2), \quad [-2, 3], \quad a = 2$

سوال ۴.۴۷۴: $f(x) = \sqrt{x} - \sin x, \quad [0, 2\pi], \quad a = 2$



شکل ۴.۹۶: ترکیب نیوٹن ابتدائی قیاس x_0 سے شروع ہو کر (موزوں صورت میں) بتدریج بہتر جواب دیتی ہے۔



شکل ۴.۹۷: x_n سے منحنی تک جا کر مماس کے ساتھ ساتھ چلتے ہوئے x_{n+1} تک پہنچتے ہیں۔

۴.۸ ترکیب نیوٹن

ہم خطی اور دو درجی مساوات حل کرنے کے سادہ کلیات جانتے ہیں۔ تین درجی اور چار درجی مساوات حل کرنے کے نسبتاً مشکل کلیات بھی پائے جاتے ہیں۔ ناروے کے ریاضی دان نیلز ہنری ایبل (1829 – 1802) نے ثابت کیا کہ چار سے زیادہ درجے کی مساوات حل کرنے کا کوئی کلیہ نہیں پایا جاتا ہے۔

جب $f(x) = 0$ طرز کی مساوات کا بالکل درست حل حاصل کرنا ممکن نہ ہو تب ہم احصاء کے اعدادی طریقوں کو استعمال کرتے ہوئے حل کی تخمین حاصل کرتے ہیں۔ ترکیب نیوٹن ایسی ایک ترکیب ہے۔ اس ترکیب میں، جن نقطوں پر $f(x)$ صفر ہو ان نقطوں کے نزدیک $y = f(x)$ کو مماس سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یہاں بھی خط بندی کے ذریعہ مسائل حل کیے جاتے ہیں۔

نظریہ

ترکیب نیوٹن مساوات $f(x) = 0$ کے حل کی تخمینی قیمتوں کی ترتیب حاصل کرتا ہے جو اصل حل تک پہنچنے کی کوشش کرتا ہے۔ ہم اس ترتیب کا پہلا عدد x_0 منتخب کرتے ہیں۔ موزوں صورتوں میں یہ ترتیب قدم باقدم آگے بڑھتے ہوئے دیگر نقطے دیتا ہے۔ x_0 پر f کا مماس x محور کو ترتیب کے اگلے نقطہ x_1 پر قطع کرتا ہے (شکل ۴.۹۶)۔

ابتدائی نقطہ x_0 کو ترسیم دیکھ کر یا قیاساً منتخب کیا جا سکتا ہے۔ یہ ترکیب نقطہ $(x_0, f(x_0))$ پر تفاعل کے مماس کو تفاعل کا تخمین لیتے ہوئے مماس اور x محور کے مقطع کو x_1 کہتا ہے جو ترتیب کا دوسرا عدد ہو گا۔ x_1 عموماً x_0 سے بہتر حل ہو گا۔ اسی طرح نقطہ $(x_1, f(x_1))$ پر تفاعل کا مماس x محور کو x_2 پر قطع کرے گا جو ترتیب کا تیسرا عدد ہو گا۔ x_2 عموماً x_1 سے بہتر حل ہو گا۔ اسی طرح قدم باقدم چلتے ہوئے بہتر سے بہتر حل کی ترتیب حاصل کی جاتی ہے۔ یہ ترتیب اصل حل کے نزدیک سے نزدیک ہوتی چلی جاتی ہے۔ قابل قبول حل تک پہنچ کر ہم رک جاتے ہیں۔

۶۱۴۴ ہم یک بعد دیگرے تخمینی قیمتوں کے حصول کا کلیہ اخذ کر سکتے ہیں۔ دیے گئے تخمین x_n پر تفاعل کے مماس کی مساوات درج ذیل ہو گی

$$y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \tag{۱}$$

۶۱۴۵ جو x محور کو اس نقطے پر قطع کرے گا جہاں $y = 0$ ہو۔ مساوات ۱ میں $y = 0$ پر کرتے ہوئے نقطہ قطع یعنی اگلا نقطہ x_{n+1} حاصل کرتے ہیں

$$0 - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n) \quad \Longrightarrow \; x = x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

۶۱۴۶ جہاں $f'(x_n) \neq 0$ فرض کیا گیا ہے (شکل ۴.۹۷)۔

۶۱۴۷ **ترکیب نیوٹن کا لائحہ عمل**

۶۱۴۸

۶۱۴۹ ا. مساوات $f(x) = 0$ کے جذر کی قیمت قیاساً حاصل کریں۔ مساوات $y = f(x)$ کی ترسیم مددگار ثابت ہو گی۔

۶۱۵۰ ب. درج ذیل کلیہ استعمال کرتے ہوئے پہلی تخمین سے دوسری تخمین، دوسری تخمین سے تیسری تخمین، وغیرہ، حاصل کریں

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (f'(x_n) \neq 0) \tag{۲}$$

۶۱۵۱ جہاں نقطہ x_n پر تفاعل کا تفرق $f'(x_n)$ ہے۔

۶۱۵۲ ہم اپنی پہلی مثال میں $\sqrt{2}$ کا مثبت جذر مساوات $f(x) = x^2 - 2 = 0$ حل کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

۶۱۵۳ مثال ۴.۵۲: مساوات $f(x) = x^2 - 2 = 0$ کا مثبت جذر تلاش کریں۔

۶۱۵۴ حل: $f(x) = x^2 - 2$ اور $f'(x) = 2x$ لیتے ہوئے مساوات ۲ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}$$

۶۱۵۵ کم سے کم حساب و کتاب کی خاطر ہم اس مساوات کو درج ذیل روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \\ &= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \end{aligned}$$

۶۱۵۶ ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے مساوات

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

جدول ۲.۴: ابتدائی قیمت $x_0 = 1$ لیتے ہوئے $f(x) = x^3 - x - 1$ پر ترکیب نیوٹن کی اطلاق کے نتائج۔

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0	1	-1	2	1.5
1	1.5	0.875	5.75	1.347 826 087
2	1.347 826 087	0.100 682 173	4.449 905 482	1.325 200 399
3	1.325 200 399	0.002 058 362	4.268 468 293	1.324 718 174
4	1.324 718 174	0.000 000 924	4.264 634 722	1.324 717 957
5	1.324 717 957	-1.0437×10^{-9}	4.264 632 997	1.324 717 957

سے درج ذیل بتدریج بہتر تخمینی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

	خلل	درست ہندسوں کی تعداد
$x_0 = 1$	-0.41421	1
$x_1 = 1.5$	0.08579	1
$x_2 = 1.41667$	0.00246	3
$x_3 = 1.41422$	0.00001	5

□

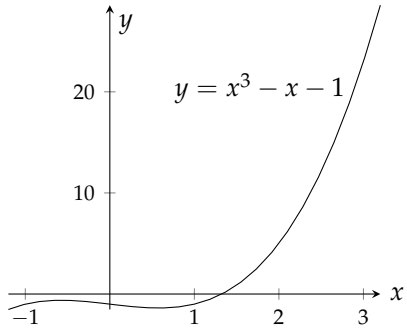
چونکہ ترکیب نیوٹن کی مرکوزیت بہت تیز ہے (جس پر جلد بات کی جائے گی) لہٰذا عموماً کیلکولیٹر جذر کا حصول ترکیب نیوٹن سے تلاش کرتے ہیں۔ اگر درج بالا جدول میں 5 کے بجائے 13 اعشاریہ درست ہندسے لیے جاتے تب اگلے قدم میں $\sqrt{2}$ کی قیمت 10 اعشاریہ درست حاصل ہوتی۔

مثال ۵۳.۴: اس نقطے کا x محدد تلاش کریں جس پر منحنی $y = x^3 - x$ افقی خط $y = 1$ کو قطع کرتی ہے۔

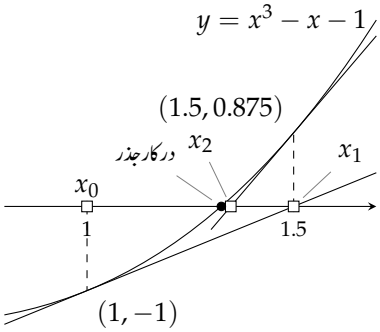
حل: منحنی اس خط کو اس نقطے پر قطع کرتی ہے جہاں $x^3 - x = 1$ یعنی $x^3 - x - 1 = 0$ ہو۔ کہاں $f(x) = x^3 - x - 1$ صفر ہو گا؟ شکل ۹۸.۴ میں ترسیم کا ایک جذر $x = 1$ اور $x = 2$ کے بیچ دیکھا جا سکتا ہے۔ ہم $x_0 = 1$ منتخب کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن کو f پر لاگو کرتے ہیں۔ نتائج جدول ۲.۴ اور شکل ۹۹.۴ میں دیے گئے ہیں۔ □

جیسا شکل ۱۰۰.۴ میں دکھایا گیا ہے ہم $B_0(3, 23)$ کو ابتدائی نقطہ منتخب کر سکتے تھے جہاں $x_0 = 3$ ہو گا۔ اگرچہ B_0 افقی محور سے بہت دور ہے لیکن $x_0 = 3$ پر منحنی کا مماس افقی محور کو $x_1 = 2.11$ پر قطع کرتا ہے جو x_0 سے بہتر نقطہ ہے۔ اب $f(x) = x^3 - x - 1$ اور $f'(x) = 3x^2 - 1$ لیتے ہوئے پہلے کی طرح مساوات ۲ کی بار بار استعمال سے چھٹے قدم پر 9 اعشاریہ جواب $x_6 = x_5 = 1.324\,717\,957$ حاصل ہو گا۔

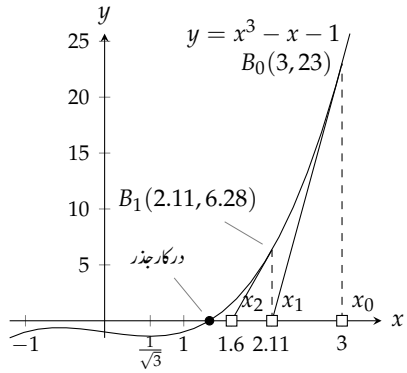
شکل ۱۰۰.۴ میں منحنی کا مقامی اعظم $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ اور مقامی اقل $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ پر پایا جاتا ہے۔ اگر ہم ان نقطوں کے بیچ ابتدائی نقطہ منتخب کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن استعمال کریں تب ہمیں اچھے نتائج حاصل نہیں ہوں گے۔ البتہ ہم $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ کے دائیں جانب کسی بھی نقطہ سے شروع کر سکتے ہیں۔ اگرچہ



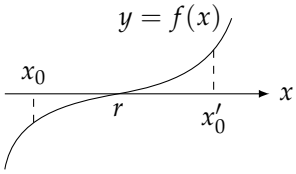
شکل ۴.۹۸: منحنی $f(x) = x^3 - x - 1$ محور x کو $x = 1$ اور $x = 2$ کے بیچ قطع کرتی ہے۔



شکل ۴.۹۹: جدول ۴.۲ کی پہلی تین قیمتیں۔



شکل ۴.۱۰۰: جذر حاصل کرنے کی خاطر $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ کے دائیں جانب کسی بھی نقطہ x_0 سے شروع کیا جا سکتا ہے۔



شکل ۴.۱۰۱: جذر r کے دونوں اطراف ابتدائی نقطہ لیتے ہوئے ترکیب نیوٹن r کو مرکوز ہو گا۔

ایسا کرنا بہتر نہیں ہو گا لیکن ہم B_0 سے بھی زیادہ دور، مثلاً $x_0 = 10$ کو، ابتدائی نقطہ منتخب کر سکتے ہیں۔ یوں زیادہ قدموں کے بعد اصل جواب حاصل ہو گا۔

ارتکاز عموماً یقینی ہو گا

ترکیب نیوٹن بہت تیزی سے مرکوز ہوتا ہے، لیکن چونکہ مرکوزیت لازمی نہیں ہوتی لہٰذا یہ دیکھنا لازمی ہو گا کہ آیا ترکیب مرتکز ہے یا نہیں۔ مرکوزیت یقینی بنانے کی خاطر ہم تفاعل ترسیم کر کے موزوں ابتدائی نقطہ x_0 منتخب کر سکتے ہیں۔ صفر کے قریب ہونے کو $|f(x_n)|$ کی قیمت سے دیکھا جا سکتا ہے جبکہ مرکوزیت کو $|x_n - x_{n+1}|$ سے پرکھا جا سکتا ہے۔

اس زمرے میں نظریہ بھی کچھ مدد مہیا کرتا ہے۔ اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ جذر r پر وقفہ (جس میں r پایا جاتا ہو) میں تمام x کے لئے

$$\left|\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}\right| < 1 \tag{۳}$$

کی صورت میں اس وقفہ کے اندر کسی بھی ابتدائی نقطہ x_0 کے لئے ترکیب مرتکز ہو گی۔ حقیقتاً اس مسئلے کا اطلاق مشکل ثابت ہوتا ہے لہٰذا $f(x_n)$ اور $|x_n - x_{n+1}|$ کی قیمتوں سے مرکوزیت دیکھی جاتی ہے۔

عدم مساوات ۳ مرکوزیت کے لئے **کافی** نا کہ لازمی شرط ہے۔ ایسی مثالیں پائی جاتی ہیں جہاں جذر r پر ایسا کوئی وقفہ نہیں پایا جاتا ہے جس پر عدم مساوات ۳ مطمئن ہوتی ہو لیکن ترکیب نیوٹن مرتکز ہوتی ہے۔ ایسے تمام وقفے پر ترکیب نیوٹن مرتکز ہو گی جس میں x_0 اور درکار جذر کے بیچ وقفے پر منحنی $y = f(x)$ محور x کی طرف محدب (جھکا) ہو (شکل ۴.۱۰۱)۔

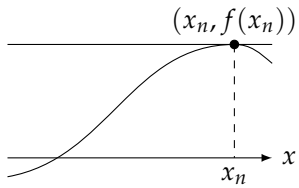
سازگار حالات میں ترکیب نیوٹن کی جذر r کو ارتکاز کی رفتار درج ذیل اعلیٰ احصاء کا کلیہ دیتا ہے

$$\underbrace{|x_{n+1} - r|}_{\text{خلل } e_{n+1}} \leq \frac{\text{اعظم } |f''|}{\text{اقل } |f'|}|x_n - r|^2 = c \cdot \underbrace{|x_n - r|^2}_{\text{خلل } e_n} \tag{۴}$$

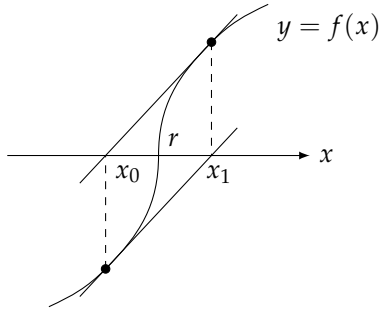
جہاں c مستقل ہے، اور اعظم قیمت اور اقل قیمت r پر وقفہ میں پائی جاتی اعظم اور اقل قیمتیں ہیں۔ درج بالا کلیہ کہتا ہے کہ قدم $n + 1$ میں خلل کی قیمت قدم n میں خلل کی قیمت کے مربع ضرب مستقل سے زیادہ نہیں ہو گی۔ اس بات کی گہرائی سمجھنے کی خاطر فرض کریں کہ $c \leq 1$ ہے اور $|x_n - r| < 10^{-3}$ ہے تب $|x_{n+1} - r| < 10^{-6}$ ہو گا۔ یوں ایک ہی قدم میں درستگی 3 اعشاریہ سے 6 اعشاریہ ہو گئی ہے۔ عدم مساوات ۳ اور عدم مساوات ۴ میں ہم فرض کرتے ہیں کہ f "اچھا" تفاعل ہے۔ عدم مساوات ۴ میں اس سے مراد ایسا تفاعل ہے جس کا r پر واحد ایک جذر پایا جاتا ہو لہٰذا $f'(r) \neq 0$ ہو گا۔ اگر r پر ایک سے زیادہ جذر پائے جاتے ہوں تب ارتکاز کی رفتار کم ہو سکتی ہے۔

لیکن چیزیں غلطی کی طرف جا سکتی ہیں

اگر $f'(x_n) = 0$ ہو تب x_n پر منحنی کا مماس x محور کو قطع نہیں کرے گا لہٰذا x_{n+1} ناقابل معلوم ہو گا اور ترکیب نیوٹن رک جائے گا (شکل ۴.۱۰۲)۔ ایسی صورت میں نئے ابتدائی نقطہ سے شروع کریں۔ اب عین ممکن ہے کہ f اور f' دونوں کا مشترک جذر پایا جاتا ہو۔ یہ جاننے کے لئے کہ آیا ایسا ہے آپ $f'(x) = 0$ کا حل تلاش کر کے ان قیمتوں پر f کی قیمتیں دیکھ سکتے ہیں یا f اور f' کو ایک ساتھ ترسیم کر سکتے ہیں۔



شکل ۴.۱۰۲: اگر $f'(x_n) = 0$ ہو تب نقطہ قطع نہیں پایا جاتا ہے لہٰذا ترکیب نیوٹن رک جاتی ہے اور x_{n+1} ناقابل معلوم ہو گا۔



شکل ۴.۱۰۳: ترکیب نیوٹن کی عدم مرکوزیت۔

۶۱۹۳ ترکیب نیوٹن بعض اوقات غیر مرتکز ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{r-x}, & x < r \\ \sqrt{x-r}, & x \geq r \end{cases}$$

۶۱۹۴ جس کو شکل ۴.۱۰۳ میں دکھایا گیا ہے لیتے ہیں۔ اگر ہم $x_0 = r - h$ سے شروع کریں تب $x_1 = r + h$ ہو گا اور ہر قدم پر یہی دو قیمتیں دہرائی
۶۱۹۵ جاتی ہیں۔ ہم جتنے قدم بھی لیں، حاصل تخمین ابتدائی قیاس سے زیادہ بہتر نہیں ہو گا۔

۶۱۹۶ اگر ترکیب نیوٹن مرتکز ہو تب ہم توقع کرتے ہیں کہ یہ جذر پر مرکوز ہو گا۔ حقیقت میں عموماً ایسا ہی ہو گا البتہ بعض اوقات یہ کسی ایسے نقطے پر مرکوز ہو گا جہاں
۶۱۹۷ کوئی جذر نہ پایا جائے گا۔ ہماری خوش قسمتی سے ایسے مواقع بہت کم پائے جاتے ہیں۔

۶۱۹۸ بعض اوقات آپ ایک جذر کو تلاش کرنا چاہیں گے جبکہ ترکیب نیوٹن کسی دوسرے جذر پر مرکوز ہو گا۔ شکل ۴.۱۰۴ میں ایسے دو مثالیں دی گئی ہیں۔

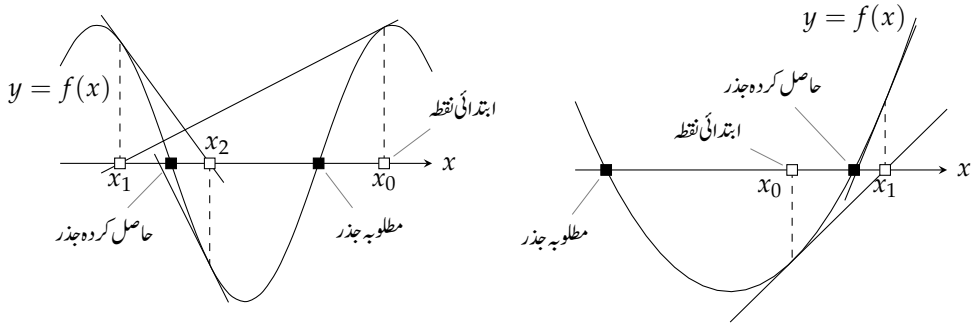
۶۱۹۹ ایسی صورت میں، کمپیوٹر پر تفاعل کی ترسیم یا احصاء کے تراکیب استعمال کرتے ہوئے درکار جذر کے قریب ابتدائی نقطہ تلاش کرتے ہوئے حل کریں۔ امید کی
۶۲۰۰ جاتی ہے کہ اس سے مسئلہ حل ہو جائے گا۔

۶۲۰۱ ترکیب نیوٹن میں ابتری

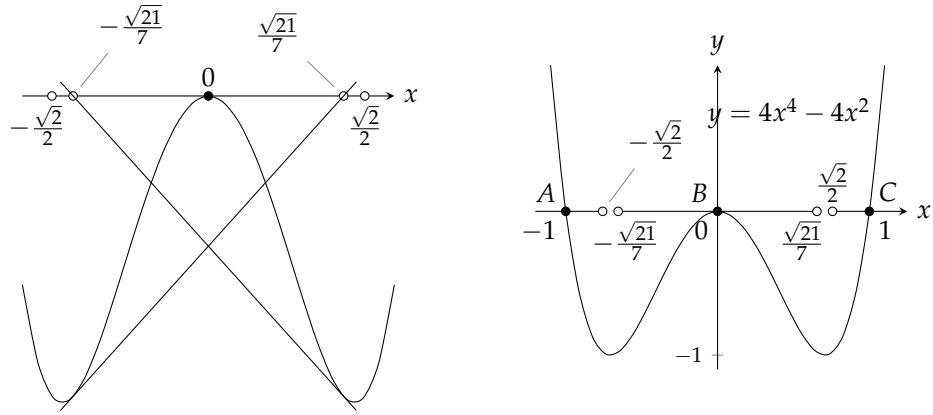
۶۲۰۲ ترکیب نیوٹن سے جذر کا حصول ابتری کا شکار ہو سکتا ہے یعنی کئی مساوات کے لئے حاصل جذر کی قیمت ابتدائی نقطے کی مقام کو بہت حساس ہو گی۔

۶۲۰۳ مساوات $4x^4 - 4x^2 = 0$ ایسی ایک مثال ہے جس کو شکل ۴.۱۰۵ میں دکھایا گیا ہے۔ وقفہ $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ ، $(-\frac{\sqrt{21}}{7}, \frac{\sqrt{21}}{7})$
۶۲۰۴ اور $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$ میں ابتدائی نقطہ منتخب کرنے سے بالترتیب جذر A ، B اور C ملتا ہے۔ نقطے $x = \mp\frac{\sqrt{21}}{7}$ ایک دوسرے کو دہراتے ہیں۔
۶۲۰۵ نقطہ $\frac{\sqrt{21}}{7}$ اور $\frac{\sqrt{2}}{2}$ کے بیچ نقطوں کے ایسے لامتناہی کھلے وقفے پائے جاتے ہیں جو جذر A کو کھینچے جاتے ہیں۔ ان وقفوں کے بیچ، نقطوں کے ایسے کھلے
۶۲۰۶ وقفے پائے جاتے ہیں جو جذر C کو کھینچے جاتے ہیں۔ ان کھلے وقفوں کے آخری سر (جن کی تعداد لامتناہی ہے) کوئی جذر نہیں دیتے ہیں بلکہ یہ ایک دوسرے کو
۶۲۰۷ دہراتے ہیں۔ یہی عمل وقفہ $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{21}}{7})$ میں بھی پایا جاتا ہے۔

۶۲۰۸ $\frac{\sqrt{21}}{7}$ اور $\frac{\sqrt{2}}{2}$ کے بیچ (یا $-\frac{\sqrt{21}}{7}$ اور $-\frac{\sqrt{2}}{2}$) کے بیچ ابتری کی بہترین مثال دیکھنے کو ملتی ہے۔ نقطہ $\frac{\sqrt{21}}{7}$ تک دائیں سے پہنچتے ہوئے ان نقطوں



شکل ۱۰۴.۴: ترکیب نیوٹن کسی دوسرے جذر پر مرکوز ہو سکتا ہے۔



شکل ۱۰۵.۴: ترکیب نیوٹن ابتری کا شکار ہے۔

کے بیچ فرق کرنا مشکل ہو جاتا ہے جو جذر A اور جذر C دیتے ہیں۔ نقطہ $\frac{\sqrt{21}}{7}$ کے ایک ہی طرف رہتے ہوئے انتہائی قریب قریب ایسے نقطے پائے جاتے ہیں جن سے حاصل جذر ایک دوسرے سے بہت دور پائے جاتے ہیں۔

سوالات

حصول جذر

سوال ۴.۴۷۵: $x_0 = -1$ لیتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے مساوات $x^2 + x - 1 = 0$ کا حل حاصل کریں۔ اب $x_0 = 1$ لیتے ہوئے دوسرا حل تلاش کریں۔ دونوں صورتوں میں x_2 تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۷۶: $x_0 = 0$ لیتے ہوئے $x^3 + 3x + 1 = 0$ کا ایک حقیقی حل ترکیب نیوٹن سے تلاش کریں۔ اس کے بعد x_2 تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۷۷: $x_0 = -1$ لیتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے تفاعل $f(x) = x^4 + x - 3$ کا بایاں صفر اور $x_0 = 1$ لیتے ہوئے اس کا دایاں صفر تلاش کریں۔ دونوں صورتوں میں x_2 تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۷۸: تفاعل $f(x) = 2x - x^2 + 1$ کے دونوں جذر ترکیب نیوٹن سے تلاش کریں۔ $x_0 = 0$ سے شروع کرتے ہوئے بائیں ہاتھ صفر اور $x_0 = 2$ سے شروع کرتے ہوئے دائیں ہاتھ صفر حاصل کریں۔ دونوں صورتوں میں x_2 تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۷۹: مساوات $x^4 - 2 = 0$ کو حل ترکیب نیوٹن سے کرتے ہوئے 2 کا مثبت چوتھا جذر تلاش کریں۔ ابتدائی نقطہ $x_0 = 1$ لیں۔ x_2 کیا ہو گا؟

سوال ۴.۴۸۰: مساوات $x^4 - 2 = 0$ کو حل کرتے ہوئے 2 کا منفی چوتھا جذر ترکیب نیوٹن سے تلاش کریں۔ ابتدائی نقطہ $x_0 = -1$ لیں۔ x_2 کیا ہو گا؟

سوال ۴.۴۸۱: x کی کس قیمت پر $\cos x = 2x$ ہو گا؟ کیلکولیٹر استعمال کریں۔

سوال ۴.۴۸۲: x کی کس قیمت پر $\cos x = -x$ ہو گا؟ کیلکولیٹر استعمال کریں۔

سوال ۴.۴۸۳: متوسط قیمت مسئلہ (صفحہ ۱۴۶) استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $f(x) = x^3 + 2x - 4$ کا ایک جذر $x = 1$ اور $x = 2$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔ اس جذر کو ترکیب نیوٹن کی مدد سے 5 اعشاریہ درستگی تک تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۸۴: π کی قیمت کا تخمینہ مساوات $\tan x = 0$ کے حل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ نقطہ $x_0 = 3$ سے شروع کرتے ہوئے ترکیب نیوٹن سے، کیلکولیٹر کے استعمال کے ساتھ، π کی قیمت جتنے اعشاریہ درستگی تک ممکن ہو حاصل کریں۔

نظریہ، مثالیں اور استعمال

سوال ۴.۴۸۵: فرض کریں آپ کا منتخب کردہ ابتدائی نقطہ مساوات $f(x) = 0$ کا حل ہوتا ہے۔ مزید فرض کریں کہ $f'(x_0)$ معین اور غیر صفر ہے۔ ایسی صورت میں x_1 اور دیگر تخمین کیا حاصل ہوں گے؟

سوال ۴.۴۸۶: آپ $\frac{\pi}{2}$ کی قیمت 5 اعشاریہ درست ترکیب نیوٹن سے $\cos x = 0$ حل کرتے ہوئے حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ کیا ابتدائی نقطہ کی کوئی اہمیت ہو گی؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۴.۴۸۷: ارتعاش۔ اگر $h > 0$ ہو تب ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $x_0 = h$ منتخب کرتے ہوئے درج ذیل تفاعل کے لئے $x_1 = -h$ حاصل ہو گا

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sqrt{-x}, & x < 0 \end{cases}$$

اور $x_0 = -h$ منتخب کرنے سے $x_1 = h$ حاصل ہو گا۔ اس مسئلے کی ترسیم کھینچ کر اس عمل کی وضاحت کریں۔

سوال ۴.۴۸۸: بگڑتی ہوئی تخمین تفاعل $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ کو ترکیب نیوٹن سے حل کریں۔ ابتدائی نقطہ $x_0 = 1$ لیتے ہوئے x_1 ، x_2 ، x_3 اور x_4 تلاش کریں۔ $|x_n|$ کا کلیہ کیا ہو گا؟ $n \to \infty$ کرنے سے $|x_n|$ کو کیا ہو گا؟ تصویر کشی کر کے وضاحت کریں۔

سوال ۴.۴۸۹: سمجھائیں کہ درج ذیل چار فقرے ایک ہی معلومات پوچھ رہی ہیں۔

ا. تفاعل $f(x) = x^3 - 3x - 1$ کا جذر تلاش کریں۔

ب. منحنی $y = x^3$ اور خط $y = 3x + 1$ کی نقطہ تقاطع کا x محدد تلاش کریں۔

ج. منحنی $y = x^3 - 3x$ جہاں $y = 1$ کو قطع کرتی ہے اس نقطے کا x محدد تلاش کریں۔

د. x کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - x + 5$ کا تفرق صفر ہو گا۔

سوال ۴.۴۹۰: ایک سیارے کا مقام تلاش کرنے کی خاطر ہمیں $x = 1 + 0.5 \sin x$ حل کرنا ہو گا۔ تفاعل $f(x) = x - 1 - 0.5 \sin x$ کو ترسیم کرتے ہوئے ایک جذر $x = 1.5$ کے قریب حاصل ہوتا ہے۔ اس نقطہ سے شروع کرتے ہوئے بہتر حل x_1 تلاش کریں۔ (5 اعشاریہ درست حل $x = 1.49870$ ہے۔)

سوال ۴.۴۹۱:

ا. ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے $f(x) = x^3 - 3x - 1$ کے دو منفی جذر 5 اعشاریہ درست تلاش کریں۔

ب. وقفہ $-2 \leq x \leq -2.5$ پر $f(x) = x^3 - 3x - 1$ کو کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ ترسیم کو جذر کے قریب بڑا کرتے ہوئے جذر کو 5 اعشاریہ درستگی تک تلاش کریں۔

ج. تفاعل $g(x) = 0.25x^4 - 1.5x^2 - x + 5$ کو ترسیم کریں۔ ترسیم کو بڑا کرتے ہوئے x کی 5 اعشاریہ درست وہ قیمت تلاش کریں جہاں ترسیم کا مماس افقی ہو۔

سوال ۴.۴۹۲: ترسیم $y = \tan x$ خط $y = 2x$ کو $x = 0$ اور $x = \frac{\pi}{2}$ کے بیچ قطع کرتی ہے۔ ترکیب نیوٹن سے نقطہ تقاطع تلاش کریں۔

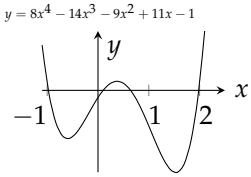
سوال ۴.۴۹۳: ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$ کے دو حقیقی جذر تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۹۴: $\sin 3x = 0.99 - x^2$ کے کتنے حل ہوں گے؟ ترکیب نیوٹن سے ان حل کو تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۹۵: کیا $\cos 3x$ کبھی x کو قطع کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ ترکیب نیوٹن استعمال کرتے ہوئے نقطہ تقاطع تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۹۶: تفاعل $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 1$ کے چار حقیقی صفر تلاش کریں۔

سوال ۴.۴۹۷: تجزی $8x^4 - 14x^3 - 9x^2 + 11x - 1 = 8(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)$ میں



r_1 ، r_2 ، r_3 اور r_4 تلاش کریں۔

جوابات

۲۶۰۹۶

۲۶۰۹۷ حصہ ۴.۱ صفحہ ۲۸۳

۲۶۰۹۸ ۴.۱) $x = c_2$ پر مطلق اقل؛ $x = b$ پر مطلق اعظم۔

۲۶۰۹۹ ۴.۳) $x = c$ پر مطلق اعظم؛ مطلق اقل غیر موجود۔

۲۶۱۰۰ ۴.۵) $x = a$ پر مطلق اقل؛ $x = c$ پر مطلق اعظم۔

۲۶۱۰۱ ۴.۷) $x = -3$ پر مطلق اعظم؛ $x = -\frac{19}{3}$ پر مطلق اقل۔

۲۶۱۰۲ ۴.۹) مطلق اعظم: 3 ، مطلق اقل: -1 ہے۔

۲۶۱۰۳ ۴.۱۱) مطلق اعظم: -0.25 ، مطلق اقل: -4 ہے۔

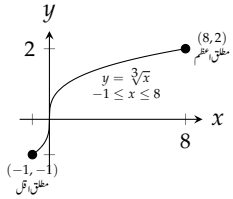
۲۶۱۰۴ ۴.۱۳) مطلق اعظم: 2 ، مطلق اقل: -1 ہے۔

۲۶۱۰۵ ۴.۱۵) مطلق اعظم: 2 ، مطلق اقل: 0 ہے۔

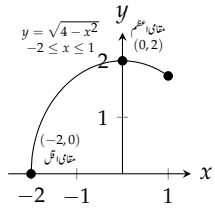
۲۶۱۰۶ ۴.۱۷) مطلق اعظم: 1 ، مطلق اقل: -1 ہے۔

۲۶۱۰۷ ۴.۱۹) مطلق اعظم: $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ، مطلق اقل: -1 ہے۔

۲۶۱۰۸

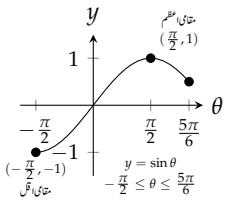


۲۶۱۰۹



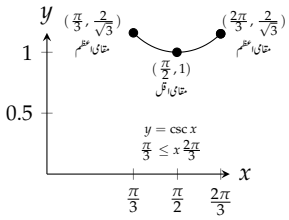
۲۶۱۱۰

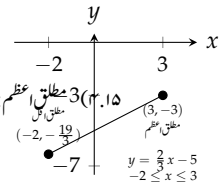
۲۶۱۱۱

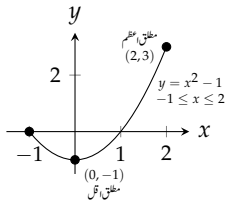


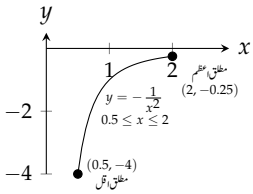
۲۶۱۱۲

۲۶۱۱۳

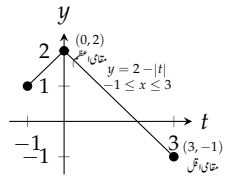








۴.۲۱) مطلق اعظم: 2 ، مطلق اقل: -1 ہے۔



۴.۲۳) $(0,8)$ پر بڑھتا ہے، $(-1,0)$ پر گھٹتا ہے، $x = 8$ پر مطلق اعظم 16 اور $x = 0$ پر مطلق اقل 0 ہے۔

۴.۲۵) $(-32,1)$ پر بڑھتا ہے، $\theta = 1$ پر مطلق اعظم 1 اور $\theta = -32$ پر مطلق اقل -8 ہے۔

۴.۲۷) (ا) $x = \mp 2$ پر مقامی اعظم 0 ہے، $x = 0$ پر مقامی اقل -4 ہے، مطلق اعظم 0 اور مطلق اقل -4 ہے۔ (ب) $x = -2$ پر مقامی اعظم 0 ہے، $x = 0$ پر مقامی اقل -4 ہے، مطلق اعظم 0 اور مطلق اقل -4 ہے۔ (ج) مقامی اعظم غیر موجود، $x = 0$ پر مقامی اقل -4 اور مطلق اقل -4 ہے۔ (د) $x = -2$ پر مقامی اعظم 0 ہے، $x = 0$ پر مقامی اقل -4 اور مطلق اقل -4 ہے۔ (ہ) مقامی انتہا غیر موجود، مطلق انتہا غیر موجود۔

۴.۲۹) ہاں

حصہ ۴.۲ صفحہ ۲۹۴

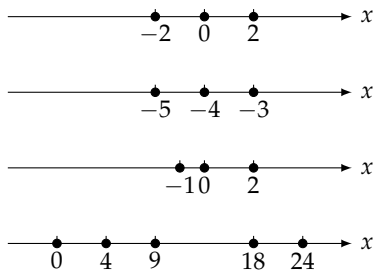
۴.۴۱) $\frac{1}{2}$

۴.۴۳) 1

۴.۴۵) نہیں کرتا؛ دائرہ کار کے اندرونی نقطہ $x = 0$ پر f ناقابل تفرق ہے۔

۴.۴۷) کرتا ہے۔

۴.۵۱) (ا)



۴.۶۷) $1.09999 \le f(0.1) \le 1.1$

۴.۷۱) ہاں

۴.۷۳) (ا) 4 ، (ب) 3 ، (ج) 3

۴.۷۵) (ا) $\frac{x^2}{2} + C$ ، (ب) $\frac{x^3}{3} + C$ ، (ج) $\frac{x^4}{4} + C$

۴.۷۷) (ا) $\frac{1}{x} + C$ ، (ب) $x + \frac{1}{x} + C$ ، (ج) $5x - \frac{1}{x} + C$

۴.۷۹) (ا) $-\frac{1}{2}\cos 2t + C$ ، (ب) $2\sin\frac{t}{2} + C$ ، (ج) $-\frac{1}{2}\cos 2t + 2\sin\frac{t}{2} + C$

۴.۸۱) $f(x) = x^2 - x$

۴.۸۳) $r(\theta) = 8\theta + \cot\theta - 2\pi - 1$

حصہ ۴.۳ صفحہ ۳۰۵

۴.۹۴) (ا) 0 ، 1 ؛ (ب) $(-\infty,0)$ اور $(1,\infty)$ پر بڑھتا ہے، $(0.1,c)$ پر گھٹتا ہے، مقامی اعظم $x = 0$ پر اور مقامی اقل $x = 1$ پر ہے۔

۴.۹۶) (ا) -2 ، 1 ؛ (ب) $(-2,1)$ اور $(1,\infty)$ پر بڑھتا، $-\infty, -2$ پر گھٹتا؛ (ج) مقامی اعظم غیر موجود، $(x = -2)$ پر مقامی اقل۔

۴.۹۸) (ا) -2 ، 1 ، 3 ؛ (ب) $(-2,1)$ اور $(3,\infty)$ پر بڑھتا، $(-\infty,-2)$ اور $(1,3)$ پر گھٹتا؛ (ج) $(x = 1)$ پر مقامی اعظم، $(x = -2)$ اور $x = 3$ پر مقامی اقل۔

۴.۱۰۰) (ا) -2 ، 0 ؛ (ب) $(-\infty,-2)$ اور $(0,\infty)$ پر بڑھتا، $(-2,0)$ پر گھٹتا؛ (ج) $(x = -2)$ مقامی اعظم، $(x = 0)$ پر مقامی اقل۔

۴.۱۰۲) (ا) 0 $(-\infty,-1.5)$ پر بڑھتا، $(-1.5,\infty)$ پر گھٹتا؛ (ب) $t = -1.5$ پر مقامی اعظم 5.25 ؛ (ج) $t = -1.5$ پر مطلق اعظم 5.25 ہے۔

۴.۱۰۴) (ا) $(-\infty,0)$ اور $(\frac{4}{3},\infty)$ پر گھٹتا، $(0,\frac{4}{3})$ پر بڑھتا؛ (ب) $x = 0$ پر مقامی اقل، $x = \frac{4}{3}$ پر مقامی اعظم $(\frac{4}{3},\frac{32}{27})$ ؛ (ج) مطلق انتہا غیر موجود۔

۴.۱۰۶) (ا) $(-\infty,0)$ اور $(\frac{1}{2},\infty)$ پر گھٹتا، $(0,\frac{1}{2})$ پر بڑھتا؛ (ب) $\theta = \frac{1}{2}$ پر مقامی اعظم $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ ؛ (ج) مطلق انتہا غیر موجود۔

۴.۱۰۸) (ا) $(-\infty,\infty)$ پر بڑھتا ہے یعنی کبھی کم نہیں ہوتا؛ (ب) مقامی انتہا غیر موجود؛ (ج) مطلق انتہا غیر موجود۔

۴.۱۱۰) (ا) $(-2,0)$ اور $(2,\infty)$ پر بڑھتا، $(-\infty,-2)$ اور $(0,2)$ پر گھٹتا؛ (ب) $x = 0$ پر مقامی اعظم 16 اور $x = \mp 2$ پر مقامی اقل 0 ؛ (ج) مطلق اعظم غیر موجود، $x = \mp 2$ پر مطلق اقل 0

۴.۱۱۲) (ا) $(-\infty,-1)$ اور $(0,1)$ پر بڑھتا، $(-1,0)$ اور $(1,\infty)$ پر گھٹتا؛ (ب) $x = \mp 1$ پر مقامی اعظم $(\mp 1, 0.5)$ ہے $x = 0$ پر مقامی اقل $(0,0)$ ہے؛ (ج) $x = \mp 1$ پر مطلق اعظم جبکہ مطلق اقل غیر موجود۔

۴.۱۱۴) (ا) $(-2\sqrt{2},-2)$ اور $(2,2\sqrt{2})$ پر گھٹتا $(-2,2)$ پر بڑھتا ہے؛(ب)مقامی اقل $g(-2)=-4$ ، $g(-2\sqrt{2}=0$ ؛مقامی اعظم $g(2\sqrt{2}=0$ ، $g(2)=4$ (ج) $x=2$ پر مطلق اعظم 4 اور $x=-2$ پر مطلق اقل -4 ہے۔

۴.۱۱۶) (ا) $(-\infty,1)$ پر بڑھتا $1<x<2$ اور $2<x<3$ پر گھٹتا ہے۔ $x=2$ پر غیر استراری اور $(3,\infty)$ پر بڑھتا ہے۔(ب) $x=3$ پر مقامی اقل $(3,6)$ اور $x=1$ پر مقامی اعظم $(1,2)$ ؛(ج)مطلق انتہا غیر موجود۔

۴.۱۱۸) (ا) $(-2,0)$ اور $(0,\infty)$ پر بڑھتا، $(-\infty,-2)$ پر گھٹتا؛(ب) $x=-2$ پر مقامی اقل $-6\sqrt[3]{2}$ ؛(ج)مطلق اعظم غیر موجود، $x=-2$ پر مطلق اقل $-6\sqrt[3]{2}$ ہے۔

۴.۱۲۰) (ا) $(-\infty,-\frac{2}{\sqrt{7}})$ اور $(\frac{2}{\sqrt{7}},\infty)$ پر بڑھتا، $(-\frac{2}{\sqrt{7}},\frac{2}{\sqrt{7}})$ پر گھٹتا؛(ب) $x=\frac{2}{\sqrt{7}}$ پر مقامی اعظم $\frac{24\sqrt[3]{2}}{7^{7/6}}\approx 3.12$ جبکہ $x=\frac{2}{\sqrt{7}}$ پر مقامی اقل $-\frac{24\sqrt[3]{2}}{7^{6}}\approx -3.12$ ہے؛(ج)مطلق انتہا غیر موجود۔

۴.۱۲۲) (ا) $x=1$ پر مقامی اعظم 1 اور $x=2$ پر مقامی اقل 0 ہے؛ (ب) $x=1$ پر مطلق اعظم 1 جبکہ مطلق اقل غیر موجود۔

۴.۱۲۴) (ا) $x=1$ پر مقامی اعظم 1 اور $x=2$ پر مقامی اقل 0 ہے؛ (ب)مطلق اعظم غیر موجود، $x=2$ پر مطلق اقل 0 ہے۔

۴.۱۲۶) (ا) $t=-3$ پر 9 اور $t=2$ پر 16 مقامی اعظم ہیں۔ $t=-2$ پر مقامی اقل -16 ہے۔(ب) $t=2$ پر مطلق اعظم 16 ؛مطلق اقل غیر موجود۔

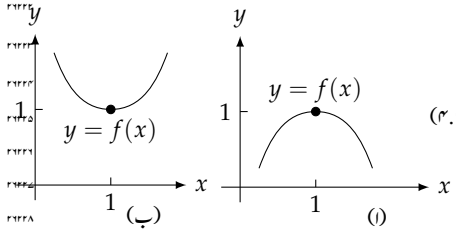
۴.۱۲۸) (ا) $x=0$ پر مقامی اقل 0 ؛(ب)مطلق اعظم غیر موجود؛ $x=0$ پر مطلق اقل 0 ہے۔

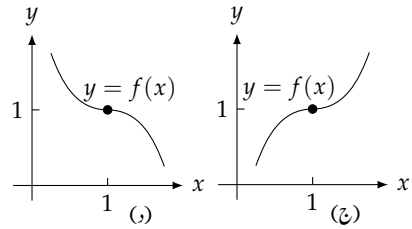
۴.۱۳۰) (ا) $x=\frac{2\pi}{3}$ پر مقامی اقل $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$ جبکہ $x=0$ پر مقامی اعظم 0 ہےاور $x=2\pi$ پر مقامی اعظم π ہے۔

۴.۱۳۲) (ا) $x=\frac{\pi}{4}$ پر مقامی اقل 0 ہے۔

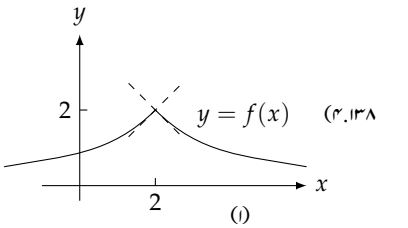
۴.۱۳۴) (ا) $\theta=0$ پر مقامی اعظم 3 اور $\theta=2\pi$ پر مقامی اقل -3 ہے۔

۴.۱۳۶)





۴.۱۳۸)



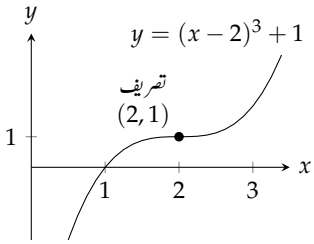
حصہ ۴.۴ صفحہ ۳۱۷

۴.۱۴۲) $x=-1$ پر $\frac{3}{2}$ مقامی اعظم، $x=2$ پر -3 مقامی اقل، نقطہ تصریف $(\frac{1}{2},-\frac{3}{4})$ ، چڑھاو $(-\infty,-1)$ اور $(2,\infty)$ پر، اتار $(-1,2)$ پر، اوپر مقعر $(\frac{1}{2},\infty)$ پر جبکہ نیچے مقعر $(-\infty,\frac{1}{2})$ پر۔

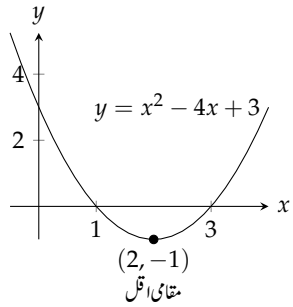
۴.۱۴۴) $x=0$ پر $\frac{3}{4}$ مقامی اعظم، $x=\mp 1$ پر 0 مقامی اقل، $(-\sqrt{3},\frac{3\sqrt[3]{4}}{4})$ اور $(\sqrt{3},\frac{3\sqrt[3]{4}}{4})$ پر نقطہ تصریف، چڑھاو $(-1,0)$ اور $(1,\infty)$ پر، اتار $(-\infty,-1)$ اور $(0,1)$ پر، $(-\infty,-\sqrt{3})$ ور $(\sqrt{3},\infty)$ پر مقعر اوپر، $(-\sqrt{3},3)$ پر مقعر نیچے۔

۴.۱۴۶) $x=-\frac{2\pi}{3}$ پر $-\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $x=\frac{\pi}{3}$ پر $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ مقامی اعظم، $x=-\frac{\pi}{3}$ پر $-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $x=\frac{2\pi}{3}$ پر $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$ مقامی اقل، $(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2})$ ، $(0,0)$ اور $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ پر نقطہ تصریف، $(-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{3})$ پر چڑھاو، $(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3})$ پر اتار، $(-\frac{\pi}{2},0)$ اور $(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3})$ پر مقعر اوپر، $(-\frac{2\pi}{3},-\frac{\pi}{2})$ اور $(0,\frac{\pi}{2})$ پر مقعر نیچے۔

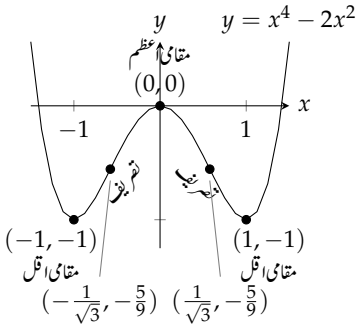
۴.۱۴۸) $x = -\frac{\pi}{2}$ اور $x = \frac{\pi}{2}$ پر 1 مقامی اعظم، $x = -2\pi$ ، $x = 0$ اور $x = 2\pi$ پر صفر، $x = -\frac{3\pi}{2}$ اور $x = \frac{3\pi}{2}$ پر -1 مقامی اقل، $(-\pi, 0)$ اور $(\pi, 0)$ نقطہ تصریف، $(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ ، $(0, \frac{\pi}{2})$ ۴.۱۵۶ پر چڑھاو، $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ پر اتار، $(-2\pi, -\frac{3\pi}{2})$ ، $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ اور $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ پر $(-2\pi, -\pi)$ اور $(\pi, 2\pi)$ پر مقعر اوپر، $(-\pi, \pi)$ پر مقعر نیچے۔



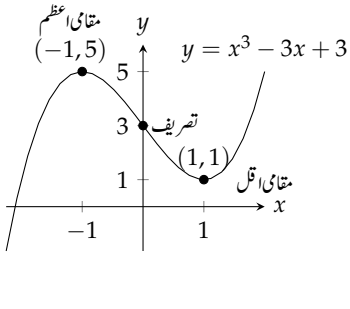
۴.۱۵۹



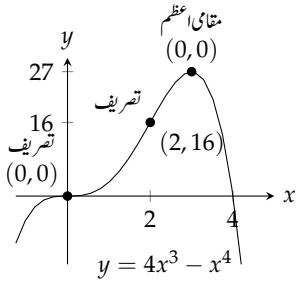
۴.۱۵۸



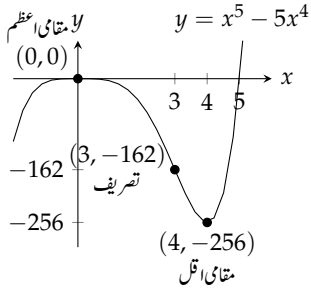
۴.۱۵۷



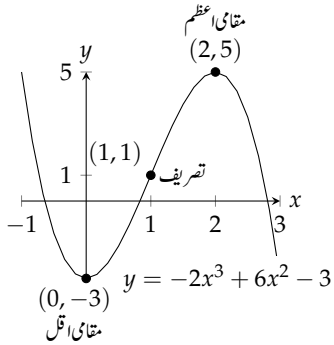
۴.۱۶۰



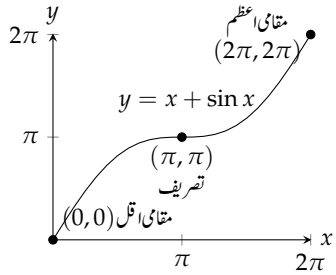
۴.۱۶۱



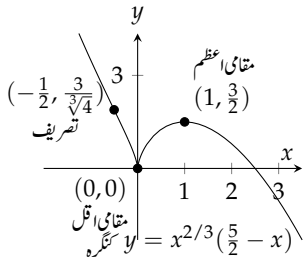
۴.۱۶۲



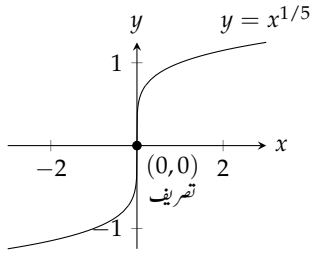
(۴.۱۶۴۰۲۲۳)



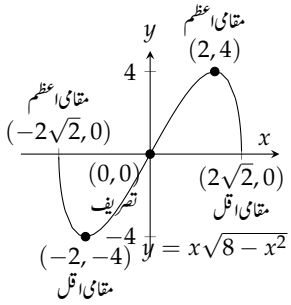
(۴.۱۷۴۰۲۲۳۷)



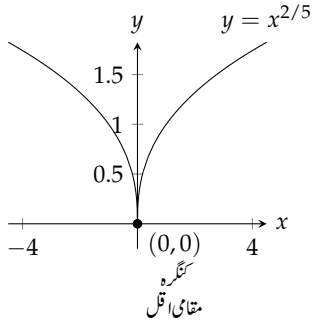
(۴.۱۶۶۰۲۲۳۴)



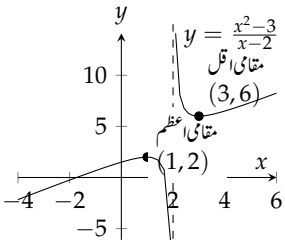
(۴.۱۷۴۰۲۲۳۸)



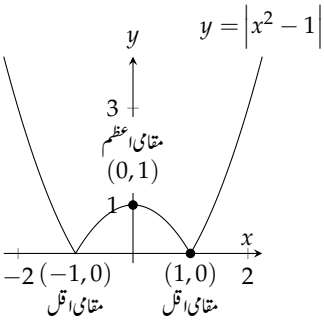
(۴.۱۶۸۰۲۲۳۵)



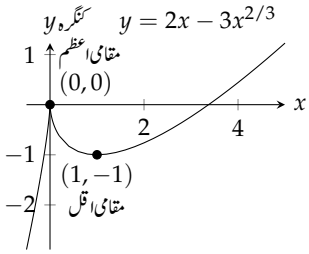
(۴.۱۷۶۰۲۲۳۹)



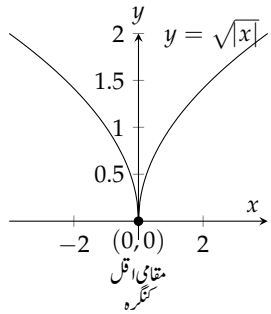
(۴.۱۷۸۰۲۲۵۰)



(۴.۱۷۹۰۲۲۳۶)

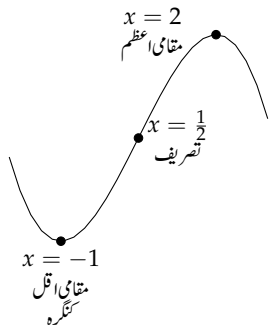


۲۶۲۵۱ (۴.۱۸۰



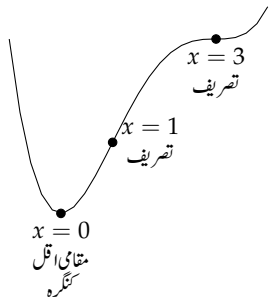
۲۶۲۵۲ (۴.۱۸۲ $y'' = 1 - 2x$

۲۶۲۵۳



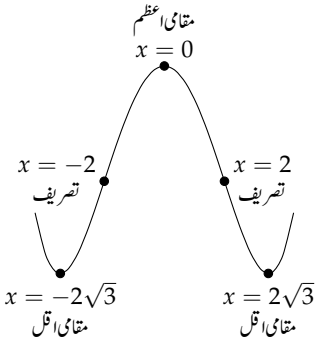
۲۶۲۵۴ (۴.۱۸۴ $y'' = 3(x-3)(x-1)$

۲۶۲۵۵



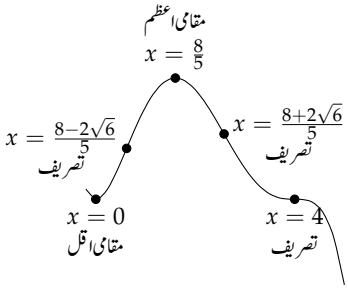
۲۶۲۵۶ (۴.۱۸۶ $y'' = 3(x-2)(x+2)$

۲۶۲۵۷



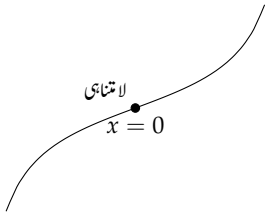
۲۶۲۵۸ (۴.۱۸۸ $y'' = 4(4-x)(5x^2 - 16x + 8)$

۲۶۲۵۹



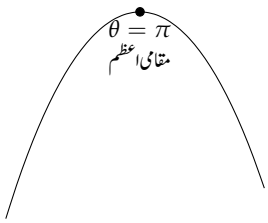
۲۶۲۶۰ (۴.۱۹۰ $y'' = 2\sec^2 x \tan x$

۲۶۲۶۱

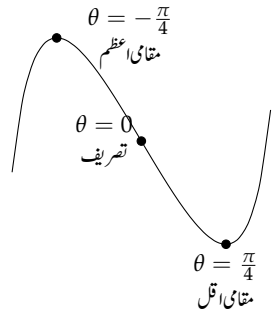


۲۶۲۶۲ (۴.۱۹۲ $y'' = -\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2 \frac{\theta}{2},\ 0 < \theta < 2\pi$

۲۶۲۶۳

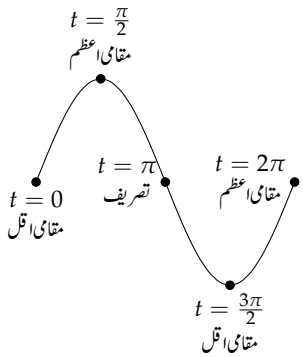


۲۶۲۶۴ (۴.۱۹۴ $y'' = 2\tan\theta\sec^2\theta,\ -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$



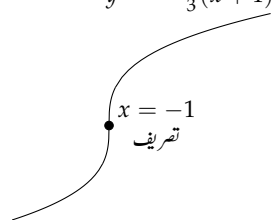
۲۶۲۶۵

۴.۱۹۶) $y'' = -\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ ۲۶۲۶۶



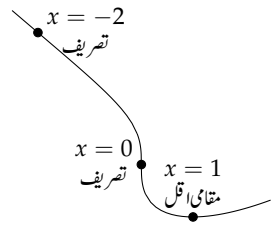
۲۶۲۶۷

۴.۱۹۸) $y'' = -\frac{2}{3}(x+1)^{-5/3}$ ۲۶۲۶۸



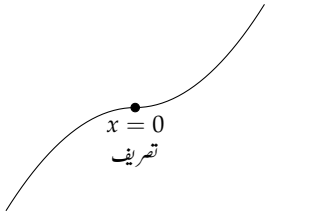
۲۶۲۶۹

۴.۲۰۰) $y'' = \frac{1}{3}x^{-2/3} + \frac{2}{3}x^{-5/3}$ ۲۶۲۷۰



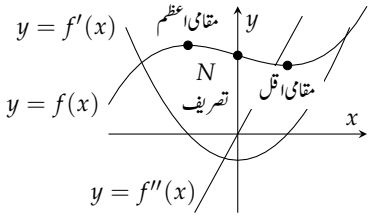
۲۶۲۷۱

۴.۲۰۲) $y'' = \begin{cases} -2, & x < 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$ ۲۶۲۷۲

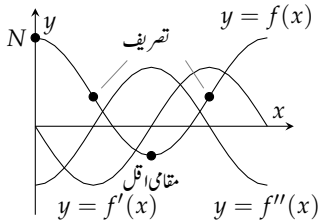


۲۶۲۷۳

۴.۲۰۴) ۲۶۲۷۴



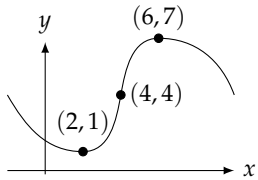
۴.۲۰۶) ۲۶۲۷۵



۴.۲۰۸)

	y'	y''
P	$-$	$+$
Q	$+$	0
R	$+$	$-$
S	0	$-$
T	$-$	$-$

۴.۲۱۰) ۲۶۲۷۶



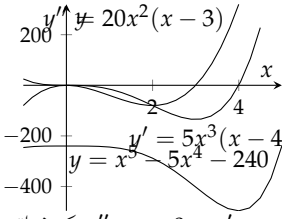
۴.۲۱۴) تقریباً 60 پیداوار پر۔ ۲۶۲۷۷

۴.۲۱۶) $x = 2$ پر مقامی اقل، $x = 1$ اور $x = \frac{5}{3}$ پر تصریف۔ ۲۶۲۷۸

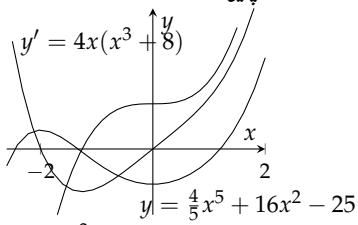
۴.۲۲۰) $b = -3$ ۲۶۲۷۹

۴.۲۲۲) (ا) $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$؛ (ب) $a > 0$ کی صورت میں اوپر ۲۶۲۸۰
مقعر جبکہ $a < 0$ کی صورت میں نیچے مقعر۔ ۲۶۲۸۱

۴.۲۲۶) $y' = 0$ اور $y'' = 0$ کے صفر بالترتیب نقطہ انتہا اور نقطہ ۲۶۲۸۲
تصریف ہیں۔ ۲۶۲۸۳

۲۶۳۸۴ 

۲۶۳۸۵ (۴.۲۲۸ $y' = 0$ اور $y'' = 0$ کے صفر بالترتیب نقطہ انتہا اور
۲۶۳۸۶ نقطہ تصریف ہیں۔ تصریف $x = -\sqrt[3]{2}$ پر اور مقامی اعظم
۲۶۳۸۷ $x = -2$ پر ہیں۔

۲۶۳۸۸ 

$y'' = 16(x^3+2)$

۲۶۳۸۹ (۴.۲۳۲ (ب) $f'(x) = 3x^2 + k; -12k$ ؛مثبت اگر $k <$
۲۶۳۹۰ 0 ، منفی اگر $k > 0$ ہو، 0 اگر $k = 0$ ہو؛ اگر $k < 0$ ہو
۲۶۳۹۱ تب f' کے دو صفر ہوں گے، 0 $k =$ کی صورت میں ایک صفر اور
۲۶۳۹۲ $k > 0$ کی صورت میں کوئی صفر نہیں ہو گا۔

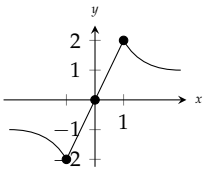
۲۶۳۹۳ (۴.۲۳۴ (ب) چونکہ $\lim_{x\to 0^-} y' = \infty$ اور
۲۶۳۹۴ $\lim_{x\to 0^+} y' = -\infty$ ہیں لہذا کنگرہ ہو گا۔

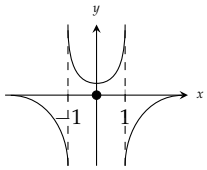
۲۶۳۹۵ (۴.۲۳۶ y' کی ترسیم $x = -3$ کے قریب محور کو قطع کرتی ہے لہذا
۲۶۳۹۶ $x = -3$ کے قریب y کا افقی مماس ہو گا۔

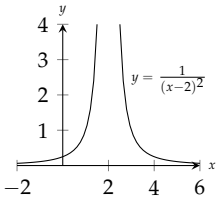
۲۶۳۹۷ حصہ ۴.۵ صفحہ ۳۳۹

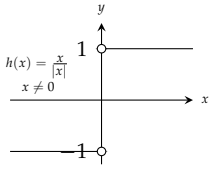
۲۶۳۹۸ (۴.۲۳۷ (ا) -3 ، (ب) -3
۲۶۳۹۹ (۴.۲۳۹ (ا) $\frac{1}{2}$ ، (ب) $\frac{1}{2}$
۲۶۴۰۰ (۴.۲۴۱ (ا) $-\frac{5}{3}$ ، (ب) $-\frac{5}{3}$
۲۶۴۰۱ (۴.۲۴۳ 0
۲۶۴۰۲ (۴.۲۴۵ -1
۲۶۴۰۳ (۴.۲۴۷ (ا) $\frac{2}{5}$ ، (ب) $\frac{2}{5}$
۲۶۴۰۴ (۴.۲۴۹ (ا) 0 ، (ب) 0
۲۶۴۰۵ (۴.۲۵۱ (ا) $-\infty$ ، (ب) ∞
۲۶۴۰۶ (۴.۲۵۳ (ا) 7 ، (ب) 7
۲۶۴۰۷ (۴.۲۵۵ (ا) $-\infty$ ، (ب) ∞
۲۶۴۰۸ (۴.۲۵۷ (ا) ∞ ، (ب) $-\infty$
۲۶۴۰۹ (۴.۲۵۹ (ا) $-\frac{2}{3}$ ، (ب) $-\frac{2}{3}$
۲۶۴۱۰ (۴.۲۶۱ 0
۲۶۴۱۱ (۴.۲۶۳ 1

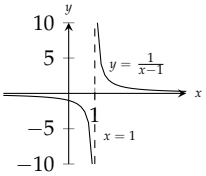
۲۶۴۱۲ (۴.۲۶۵ ∞

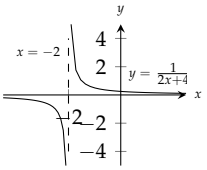
۲۶۴۱۳ (۴.۲۶۷ 

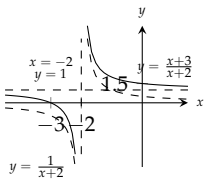
۲۶۴۱۴ (۴.۲۶۹ 

۲۶۴۱۵ (۴.۲۷۱ 

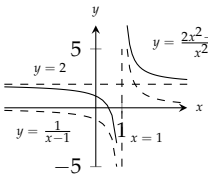
۲۶۴۱۶ (۴.۲۷۳ 

۲۶۴۱۷ (۴.۲۷۵ 

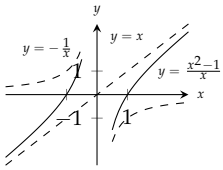
۲۶۴۱۸ (۴.۲۷۷ 

۲۶۴۱۹ (۴.۲۷۹ 

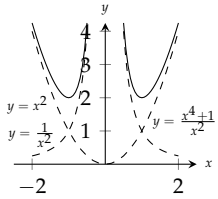
۲۳۲۰ (۴.۲۸۱



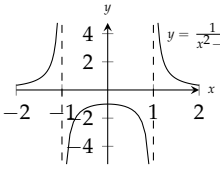
۲۳۲۱ (۴.۲۸۳



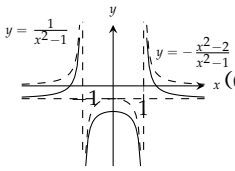
۲۳۲۲ (۴.۲۸۵



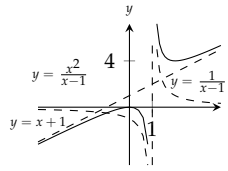
۲۳۲۳ (۴.۲۸۷



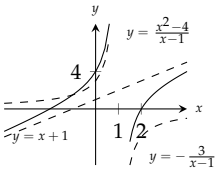
۲۳۲۴ (۴.۲۸۹



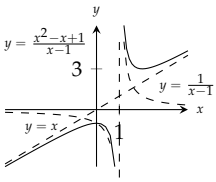
۲۳۲۵ (۴.۲۹۱



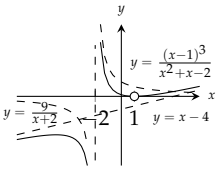
۲۳۲۶ (۴.۲۹۳



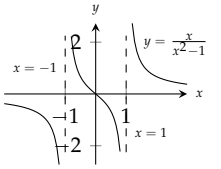
۲۳۲۷ (۴.۲۹۵



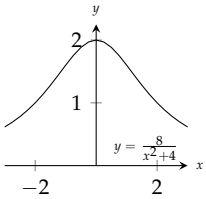
۲۳۲۸ (۴.۲۹۷



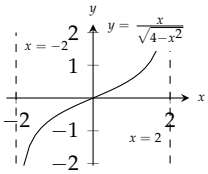
۲۳۲۹ (۴.۲۹۹



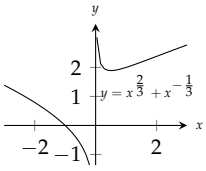
۲۳۳۰ (۴.۳۰۱



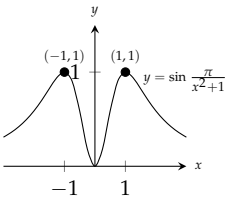
۲۳۳۱ (۴.۳۰۳



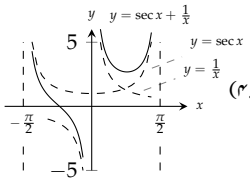
۲۳۳۲ (۴.۳۰۵



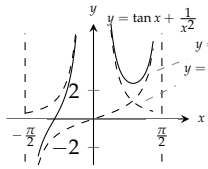
۲۳۳۳ (۴.۳۰۷



۲۳۳۳ (۴.۳۰۹



۲۳۳۴ (۴.۳۱۱



۲۳۳۶ (۴.۳۱۵ بڑھتا

۲۳۳۷ (۴.۳۱۹ 2

۲۳۳۸ (۴.۳۲۱ (ب) $f(x) = 2 + \frac{1}{x}\sin x^2$ ممکن ہے۔

۲۳۳۹ (۴.۳۲۵ $x = -1,\ y = 1 - x$

۲۳۴۰ (۴.۳۲۷ $x = 1,\ x = -1,\ y = x - 1$

۲۳۴۱ (۴.۳۳۵ (ا) $y \to \infty$، (ب) $y \to \infty$، (ج) $x = \mp 1$ پر

۲۳۴۲ کنگرہ

۲۳۴۳ (۴.۳۳۷ جزو-ج میں فاصلے اتنے زیادہ ہیں کہ چھوٹی حرکت نظر نہیں آتی ہے۔

۲۳۴۴ (۴.۳۳۹ 1

۲۳۴۵ (۴.۳۴۱ $\frac{3}{2}$

۲۳۴۶ (۴.۳۴۳ 3

۲۳۴۷ حصہ ۴.۶ صفحہ ۳۵۸

۲۳۴۸ (۴.۳۴۵ $r = 25\,\mathrm{m}, s = 50\,\mathrm{m}$

۲۳۴۹ (۴.۳۴۷ $16\,\mathrm{cm}$

۲۳۵۰ (۴.۳۴۹ (ا) $(x, 1-x)$، (ب) $A(x) = 2x(1-x)$

۲۳۵۱ (ج) $\frac{1}{2}$ مربع اکائیاں

۲۳۵۲ (۴.۳۵۱ $\frac{14}{3} \times \frac{35}{3} \times \frac{5}{3}\,\mathrm{cm}^3$

۲۳۵۳ (۴.۳۵۳ $80\,000\,\mathrm{m}^2$

۲۳۵۴ (۴.۳۵۵ $8 \times 8 \times 4\,\mathrm{m}^3$

۲۳۵۵ (۴.۳۵۷ $9\,\mathrm{cm} \times 18\,\mathrm{cm}$

۲۳۵۶ (۴.۳۵۹ $\frac{\pi}{2}$

۲۳۵۷ (۴.۳۶۱ $r = h = \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}}\,\mathrm{cm}$

۲۳۵۸ (۴.۳۶۳ $18\,\mathrm{cm} \times 18\,\mathrm{cm} \times 36\,\mathrm{cm}$

۲۳۵۹ (۴.۳۶۵ (ا) $12\,\mathrm{cm}$، $6\,\mathrm{cm}$؛ (ب) $12\,\mathrm{cm}$، $6\,\mathrm{cm}$

۲۳۶۰ (۴.۳۶۷ (ا) دائرے کا محیط $4\,\mathrm{m}$ ہے۔

۲۳۶۱ (۴.۳۶۹ اگر نصف دائرے کا رداس r، مستطیل کا قاعدہ $2r$ اور اس کی بلندی

۲۳۶۲ h ہوں تب $\frac{2r}{h} = \frac{8}{4+\pi}$ ہوگا۔

۲۳۶۳ (۴.۳۷۱ $\frac{\pi}{6}$

۲۳۶۴ (۴.۳۷۳ $\frac{v_0^2}{2g} + s_0$

۲۳۶۵ (۴.۳۷۵ (ا) $\frac{30}{\sqrt{3}}\,\mathrm{cm} \times \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathrm{cm}$

۲۳۶۶ (۴.۳۷۷ $2\sqrt{2}\,\mathrm{A}$

۲۳۶۷ (۴.۳۷۹ (ا) جب π کا عدد صحیح مضرب t ہو۔ (ب) $t = \frac{2\pi}{3}$، $t =$

۲۳۶۸ $t = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$، $\frac{4\pi}{3}$

۲۳۶۹ (۴.۳۸۱ (ا) $t = \frac{8}{5}$، $t = 4$؛ (ب) $\frac{8}{5} < t < 4$؛ (ج)

۲۳۷۰ $\frac{2187}{125}$ اکائی فی وقت

۲۳۷۱ (۴.۳۸۵ نہیں۔ تفاعل کی مطلق اقل قیمت $\frac{3}{4}$ ہے۔

۲۳۷۲ (۴.۳۸۷ (ا) $(c - \frac{1}{2}, \sqrt{c - \frac{1}{2}})$؛ (ب) $(0, 0)$

۲۳۷۳ (۴.۳۸۹ (ا) $a = -3, b = -9$؛ (ب) $a = -3, b =$

۲۳۷۴ -24

۲۳۷۵ (۴.۳۹۱ (ا) $y = -1$

۲۳۷۶ (۴.۳۹۳ $\frac{7\sqrt{17}}{2}$

۲۳۷۷ (۴.۳۹۷ $M = \frac{c}{2}$

۲۳۷۸ (۴.۳۹۹ $\frac{c}{2} + 50$

۲۳۷۹ (۴.۴۰۱ $\sqrt{\frac{2km}{h}}$

۲۳۸۰ حصہ ۴.۷ صفحہ ۳۸۰

۲۳۸۱ (۴.۴۰۵ $4x - 3$

۲۳۸۲ (۴.۴۰۷ $2x - 2$

۲۳۸۳ (۴.۴۰۹ $\frac{1}{4}x + 1$

۲۳۸۴ (۴.۴۱۱ $2x$

۲۳۸۵ (۴.۴۱۳ -5

۲۳۸۶ (۴.۴۱۵ $\frac{1}{12}x + \frac{4}{3}$

۲۳۸۷ (۴.۴۱۷ (ا) $L(x) = x$، (ب) $L(x) = \pi - x$

۲۳۸۸ (۴.۴۱۹ (ا) $L(x) = 1$،

۲۳۸۹ (ب) $L(x) = 2 - 2\sqrt{3}(x + \frac{\pi}{3})$

۲۳۹۰ (۴.۴۲۱ (ا) $1 + 2x$، (ب) $1 - 5x$، (ج) $2 + 2x$،

۲۳۹۱ (د) $1 - 6x$، (ھ) $3 + x$، (و) $1 - \frac{x}{2}$

۲۳۹۲ (۴.۴۲۳ $\frac{3}{2}x + 1$، ان کے مجموعے کے برابر ہے۔

۲۳۹۳ (۴.۴۲۵ $(3x^2 - \frac{3}{2\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x$

۲۳۹۴ (۴.۴۲۷ $\frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

۲۳۹۵ (۴.۴۲۹ $\frac{1-y}{3\sqrt{y}+x}\,\mathrm{d}x$

۲۳۹۶ (۴.۴۳۱ $\frac{5}{2\sqrt{x}}\cos(5\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

۲۳۹۷ (۴.۴۳۳ $(4x^2)\sec^2(\frac{x^3}{3})\,\mathrm{d}x$

۲۳۹۸ (۴.۴۳۵ $\frac{3}{\sqrt{x}}(\mathrm{cosec}(1 - 2\sqrt{x})\cot(1 - 2\sqrt{x}))\,\mathrm{d}x$

۲۳۹۹ (۴.۴۳۷ (ا) 0.21، (ب) 0.2، (ج) 0.01

۲۴۰۰ (۴.۴۳۹ (ا) 0.231، (ب) 0.2، (ج) 0.031

۲۴۰۱ (۴.۴۴۱ (ا) $-\frac{1}{3}$، (ب) $-\frac{2}{5}$، (ج) $\frac{1}{15}$

۲۴۰۲ (۴.۴۴۳ $\mathrm{d}H = 4\pi r_0^2\,\mathrm{d}r$

۲۶۳۰۳ (۴.۴۴۵) $\mathrm{d}S = 12x_0\,\mathrm{d}x$

۲۶۳۰۴ (۴.۴۴۷) $\mathrm{d}H = 2\pi r_0 h\,\mathrm{d}r$

۲۶۳۰۵ (۴.۴۴۹) ا) $0.08\pi\ \mathrm{m}^2$، ب) $3\,\%$

۲۶۳۰۶ (۴.۴۵۱) $3\,\%$

۲۶۳۰۷ (۴.۴۵۳) $3\,\%$

۲۶۳۰۸ (۴.۴۵۵) $\frac{1}{3}\,\%$

۲۶۳۰۹ (۴.۴۵۷) $0.05\,\%$

۲۶۳۱۰ (۴.۴۶۱) حجم $= (x+\Delta x)^3 = x^3 + 3x^2(\Delta x) +$

۲۶۳۱۱ $3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$

۲۶۳۱۲ (۴.۴۶۳) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}}{1+(x/2)} = \frac{\sqrt{1+0}}{1+(0/2)} = \frac{1}{1} = 1$

۲۶۳۱۳ حصہ ۴.۸ صفحہ ۳۹۴

۲۶۳۱۴ (۴.۴۷۵) $x_2 = \frac{13}{21}, -\frac{5}{3}$

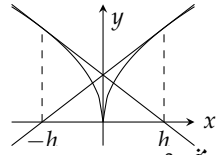
۲۶۳۱۵ (۴.۴۷۷) $x_2 = \frac{5763}{4945}, -\frac{51}{31}$

۲۶۳۱۶ (۴.۴۷۹) $x_2 = \frac{2387}{2000}$

۲۶۳۱۷ (۴.۴۸۱) $x \approx 0.45$

۲۶۳۱۸ (۴.۴۸۳) جذر 1.17951 ہے۔

۲۶۳۱۹ (۴.۴۸۷)



۲۶۳۲۰ (۴.۴۸۹) ا) منحنی $y = x^3$ اور $y = 3x + 1$ یا

۲۶۳۲۱ منحنی $y = x^3 - 3x$ اور $y = 1$ کے نقطہ تقاطع کی

قیمت وہی ہے جو جزو-ا کے جذر یا جزو-د کے حل کی ہیں۔

۲۶۳۲۳ ب) -1.53209 ، -0.34730

۲۶۳۲۴ (۴.۴۹۱) $-1.532\,09,\ -0.347\,30$

۲۶۳۲۵ (۴.۴۹۲) $1.165\,561\,185\,207\,211$

۲۶۳۲۶ (۴.۴۹۳) $0.630\,115\,396\,163\,843\,2,$

۲۶۳۲۷ $2.573\,271\,963\,535\,193$

۲۶۳۲۸ (۴.۴۹۴) $0.350\,035\,015,$

۲۶۳۲۹ $-\,1.026\,173\,161\,530\,1$

۲۶۳۳۰ (۴.۴۹۵) $0.390\,040\,316\,667\,547$

۲۶۳۳۱ (۴.۴۹۶) $\mp 1.306\,562\,964\,876\,4,$

۲۶۳۳۲ $\mp\,0.541\,196\,100\,146\,19$

۲۶۳۳۳ (۴.۴۹۷) $-0.976\,823\,589,\ 0.100\,363\,332,$

۲۶۳۳۴ $0.642\,746\,671,\ 1.983\,713\,87$