احصاء اور تحلیلی ہندسہ

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۲۸ جون ۲۰۲۶

عنوان

دیباچہ iv

میری پہلی کتاب کا دیباچہ iv

جوابات ۱

ضمیمے ۱

۱ مقاطع اور کریمر کا قاعدہ ۳

جوابات

ضمیمہ ۱

مقاطع اور کریمر کا قاعدہ

اعداد کی مستطیل ترتیب:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

قالب[1] کہلاتا ہے۔اس قالب میں دو صف اور تین قطار ہیں لہٰذا ہم A کو ۲ با ۳ قالب یا ۲ ضرب ۳ قالب کہتے ہیں۔ایک m با n قالب میں m صف اور n قطار ہوں گے،اور قالب کے i ویں صف اور j ویں قطار میں موجود **رکن**[2] (عدد) a_{ij} سے ظاہر کیا جائے گا۔یوں درج ذیل قالب

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

کے ارکان درج ذیل لکھے جائیں گے۔

$$\begin{aligned} a_{11}&=2, \quad a_{12}=1, \quad a_{13}=3, \\ a_{21}&=1, \quad a_{22}=0, \quad a_{23}=-2 \end{aligned}$$

جس قالب میں صفوں اور قطاروں کی تعداد برابر ہو **مکعب قالب**[3] کہلاتا ہے۔مکعب قالب جس میں صفوں کی تعداد اور قطاروں کی تعداد n ہو n **رتبی قالب**[4] کہلاتا ہے۔

---

[1] matrix
[2] element
[3] square matrix
[4] matrix of order n

ہر مکعب قالب A کے ساتھ ایک عدد وابستہ کیا جاتا ہے جو A کا **مقطع**[۵] کہلاتا اور "مقطع A" یا $|a_{ij}|$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مقطع کی قیمت قالب A کے ارکان سے درج ذیل عمل کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے۔ یک رتبی $n=1$ قالب اور دو رتبی قالب $n=2$ کے مقطع کی تعریف درج ذیل ہے۔

$$[a] \text{ مقطع } = a \tag{۱}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ مقطع } = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \tag{۲}$$

تین رتبی قالب کے مقطع کی تعریف درج ذیل ہے

$$A \text{ مقطع } = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ مقطع } = \begin{array}{c} \text{روپ کے تمام } \pm a_{1i}a_{2j}a_{3k} \\ \text{علامت دار حاصل ضرب کا مجموعہ} \end{array} \tag{۳}$$

جہاں i ، j ، k سے مراد 1 ، 2 ، 3 کی کسی ترتیب سے مرتب اجتماع ہے۔ ایسے $3!=6$ مرتب اجتماعات ہیں لہٰذا مجموعے میں چھ جزو ہوں گے۔ جب مرتب اجتماعات کا اشاریہ جفت ہو، علامت مثبت ہو گی اور جب طاق ہو علامت منفی ہو گی۔

تعریف: مرتب اجتماع کا اشاریہ

اعداد $1,2,3,\cdots,n$ کی دی گئی مرتب اجتماع کو $i_1,i_2,i_3,\cdots,i_n$ سے ظاہر کریں۔ اس نظم میں i_1 کے بعد آنے والے چند اعداد i_1 سے چھوٹے ہو سکتے ہیں۔ ایسے اعداد کی تعداد کو نظم میں i_1 سے متعلق **تعکیس کی تعداد**[۶] کہتے ہیں۔ اسی طرح نظم میں تمام دیگر i سے متعلق تعکیس کی تعداد ہو گی، جو نظم میں اس مخصوص i کے بعد ان اعداد کی تعداد ہو گی جو اس مخصوص عدد سے چھوٹے ہوں۔ تمام اشاریوں کے تعکیس کی تعداد کا مجموعہ مرتب اجتماع کا **اشاریہ**[۷] کہلاتا ہے۔

□

مثال ا.۱: عدد $n=5$ کی ایک مرتب اجتماع ذیل ہے

$$5 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \quad 2$$

جس میں پہلا رکن 5 ہے جس کے بعد آنے والے چاروں ارکان اس سے چھوٹے ہیں لہٰذا 5 سے متعلق تعکیس کی تعداد 4 ہے؛ دوسرا رکن 3 ہے اور اس کے بعد آنے والے دو ارکان اس سے چھوٹے ہیں لہٰذا 3 سے متعلق تعکیس کی تعداد 2 ہے؛ اگلا رکن 1 ہے جس کے بعد ایسا کوئی رکن نہیں آتا جو ایک سے چھوٹا ہو لہٰذا 1 سے متعلق تعکیس کی تعداد 0 ہے؛ اگلے دونوں ارکان سے متعلق انفرادی تعکیس کی تعداد 0 ہے؛ یوں اشاریہ $4+2=6$ ہو گا۔ □

---

[۵] determinant
[۶] number of inversions
[۷] index

اگلا جدول 1, 2, 3 کی مرتب اجتماعات، ہر مرتب اجتماع کا اشاریہ، اور مساوات ۳ کے مقطع میں علامت دار حاصل ضرب دیتا ہے۔

(۴)

علامت دار حاصل ضرب	اشاریہ	مرتب اجتماع		
$+a_{11}a_{22}a_{33}$	0	1	2	3
$-a_{11}a_{23}a_{32}$	1	1	3	2
$-a_{12}a_{21}a_{33}$	1	2	1	3
$+a_{12}a_{23}a_{31}$	2	2	3	1
$+a_{13}a_{21}a_{32}$	2	3	1	2
$-a_{13}a_{22}a_{31}$	3	3	2	1

ان چھ حاصل ضرب کا مجموعہ ذیل ہو گا۔

$$a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{۵}$$

درج ذیل کلیہ 3 با 3 مقطع کے حساب کو تین عدد 2 با 2 مقطع کے حساب میں تبدیل کرتا ہے۔

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{۶}$$

اصاغر اور ہمزاد اجزائے ضربی

مساوات ۶ کے دائیں ہاتھ دور تبی مقاطع کو ان ارکان کے **اصاغر**[۸] (صغیر مقطع کی مختصر اصطلاح) کہتے ہیں جن سے انہیں ضرب کیا گیا ہے۔ یوں

a_{11} کا اصغر $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ اور a_{12} کا اصغر $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$

ہو گا، وغیرہ۔ قالب A سے وہ صف اور قطار خارج کرنے کے بعد، جس میں رکن a_{ij} پایا جاتا ہو، حاصل قالب کا مقطع a_{ij} کا اصغر ہو گا۔

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ سے a_{22} کا اصغر $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ حاصل ہوتا ہے۔

---

[۸] minors

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}$ سے a_{23} کا اصغر $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ حاصل ہوتا ہے۔

رکن a_{ij} کا ہمزاد جزو ضربی A_{ij} حاصل کرنے کے لئے a_{ij} کے اصغر کو $(-1)^{i+j}$ سے ضرب دیں۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

جزو ضربی $(-1)^{i+j}$ اصغر کی علامت اس صورت تبدیل کرتا ہے جب $i+j$ طاق ہو۔ درج ذیل نقشہ اس کی وضاحت کرتا ہے۔

$$\begin{matrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{matrix}$$

اوپر بائیں کونے میں $i=1$ ، $j=1$ ہے لہٰذا $(-1)^{1+1}=+1$ ہے۔ اسی صف یا اسی قطار میں رہتے ہوئے اگلے خانے میں i یا j کی قیمت بڑھ کر 2 ہو جاتی ہے، تاہم i اور j دونوں کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی، اور یوں $(-1)^{1+2}=-1$ حاصل ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کسی ایک صف یا کسی ایک قطار میں رہ کر چلتے ہوئے ہر قدم پر علامت $+$ سے $-$ یا $-$ سے $+$ ہو گی۔

ہم مساوات ۶ کو ہمزاد اجزائے ضربی کے روپ میں درج لکھ سکتے ہیں۔

$$A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \tag{۷}$$