احصاء اور تحلیلی ہندسہ

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۲۵ جون ۲۰۲۶

عنوان

۱ ابتدائی معلومات ۱
۱.۱ حقیقی اعداد اور حقیقی خط ۱
۱.۲ محدد، خطوط اور بڑھوتری ۱۳
۱.۳ تفاعل ۲۸
۱.۴ ترسیم کی منتقلی ۴۸
۱.۵ تکونیاتی تفاعل ۶۵

۲ حدود اور استمرار ۸۵
۲.۱ تبدیلی کی شرح اور حد ۸۵
۲.۲ حد تلاش کرنے کے قواعد ۱۰۰
۲.۳ مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف ۱۱۲
۲.۴ تصور حد کی توسیع ۱۳۰
۲.۵ استمرار ۱۴۸
۲.۶ مماسی خط ۱۶۴

۳ تفرق ۱۷۷
۳.۱ تفاعل کا تفرق ۱۷۷
۳.۲ قواعد تفرق ۱۹۶
۳.۳ تبدیلی کی شرح ۲۱۳
۳.۴ تکونیاتی تفاعل کا تفرق ۲۲۹
۳.۵ زنجیری قاعدہ ۲۴۷
۳.۶ خفی تفرق اور ناطق قوت نما ۲۶۲
۳.۷ دیگر شرح تبدیلی ۲۷۷

۴ تفرق کا استعمال ۲۸۹
۴.۱ تفاعل کی انتہائی قیمتیں ۲۸۹
۴.۲ مسئلہ اوسط قیمت ۳۰۲
۴.۳ مقامی انتہائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پرکھ ۳۱۵

۴.۳.۱ پرکھ ۳۱۶
۴.۴ y' اور y'' کے ساتھ ترسیم ۳۲۵
۴.۵ $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء ۳۴۷
۴.۶ بہترین بنانا ۳۷۱
۴.۷ خط بندی اور تفرقات ۳۹۲
۴.۸ ترکیب نیوٹن ۴۱۲

۵ تکمل ۴۲۳
۵.۱ غیر قطعی تکملات ۴۲۳
۵.۲ تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی ۴۳۴
۵.۳ تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق ۴۴۸
۵.۴ اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ ۴۵۹
۵.۵ ریمان مجموعے اور قطعی تکملات ۴۷۵
۵.۶ خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ ۵۰۰
۵.۷ بنیادی مسئلہ ۵۱۵
۵.۸ قطعی تکمل میں بدل ۵۳۳
۵.۹ اعدادی تکمل ۵۳۹
۵.۱۰ قاعدہ ذوزنقہ ۵۳۹

۶ تکمل کا استعمال ۵۵۷
۶.۱ منحنیات کے بیچ رقبہ ۵۵۷
۶.۱.۱ تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد ۵۶۱
۶.۲ ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش ۵۷۱
۶.۳ اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا ۵۷۸
۶.۴ نلکی چھلے ۵۹۱
۶.۵ مستوی منحنیات کی لمبائیاں ۶۰۳
۶.۶ سطح طواف کا رقبہ ۶۱۲
۶.۷ معیار اثر اور مرکز کمیت ۶۲۳
۶.۷.۱ وسطانی مرکز ۶۳۴
۶.۸ کام ۶۳۹
۶.۹ فشار سیال اور قوت سیال ۶۵۲
۶.۱۰ بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال ۶۶۰

۷ ماورائی تفاعل ۶۷۳
۷.۱ الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات ۶۷۴
۷.۲ قدرتی لوگارتھم ۶۹۰
۷.۳ قوت نمائی تفاعل ۷۰۶
۷.۴ a^x اور $\log_a x$ ۷۱۹
۷.۵ افزائش اور تنزل ۷۲۸

۷.۶ قاعدہ لھوپیٹال ۷۴۰
۷.۷ اضافی شرح نمو ۷۵۴
۷.۷.۱ ترتیبی اور ثنائی تلاش ۷۵۹
۷.۸ الٹ تکونیاتی تفاعل ۷۶۴
۷.۹ الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل ۷۷۹
۷.۱۰ ہذلولی تفاعل ۷۹۴
۷.۱۱ یک رتبی تفرقی مساوات ۸۱۳
۷.۱۲ یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان ۸۳۰

۸ تکمل کے طریقے ۸۳۹
۸.۱ تکمل کے بنیادی کلیات ۸۳۹
۸.۲ تکمل بالحصص ۸۵۳
۸.۲.۱ بار بار استعمال ۸۵۷
۸.۳ جزوی کسر ۸۶۶
۸.۴ تکونیاتی بدل ۸۷۹
۸.۵ جدول تکمل اور کمپیوٹر ۸۸۹
۸.۶ غیر مناسب تکمل ۹۰۴

۹ لامتناہی تسلسل ۹۲۷
۹.۱ اعداد کی ترتیب کی حد ۹۲۷
۹.۲ ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے ۹۴۳
۹.۳ لامتناہی تسلسل ۹۵۸
۹.۴ غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پرکھ ۹۷۵
۹.۵ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ ۹۸۵
۹.۶ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ ۹۹۴
۹.۷ بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز ۱۰۰۴
۹.۸ طاقتی تسلسل ۱۰۱۷
۹.۹ ٹیلر اور مکلارن تسلسل ۱۰۳۲
۹.۱۰ ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ خلل کے اندازے ۱۰۴۱
۹.۱۱ طاقتی تسلسل کے استعمال ۱۰۵۸

۱۰ مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد ۱۰۷۵
۱۰.۱ مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں ۱۰۷۵
۱۰.۲ سنک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی ۱۰۹۸
۱۰.۳ دو درجی مساوات اور گھومنا ۱۱۰۶
۱۰.۴ مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول ۱۱۱۸
۱۰.۵ احصاء اور مقدار معلوم منحنیات ۱۱۳۳
۱۰.۶ قطبی محدد ۱۱۴۶

۱۰.۷ قطبی محدد میں ترسیم ۱۱۵۶
۱۰.۸ مخروط حصوں کے قطبی مساوات ۱۱۶۸
۱۰.۸.۱ دائرے ۱۱۶۹
۱۰.۹ قطبی محدد میں تکمل ۱۱۸۲

۱۱ سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری ۱۱۹۵
۱۱.۱ مستوی میں سمتیات ۱۱۹۵
۱۱.۲ کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات ۱۲۱۰
۱۱.۲.۱ کرہ ۱۲۱۷
۱۱.۳ ضرب نقطہ ۱۲۲۵
۱۱.۳.۱ حساب ۱۲۲۶
۱۱.۴ صلیبی ضرب ۱۲۳۸
۱۱.۵ فضا میں خطوط اور مستویات ۱۲۵۲
۱۱.۶ نلکی اور مربع سطحیں ۱۲۶۴
۱۱.۷ نلکی اور کروی محدد ۱۲۸۰

۱۲ سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت ۱۲۹۱
۱۲.۱ سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات ۱۲۹۱
۱۲.۲ گولا کی حرکت کی نمونہ کشی ۱۳۱۲
۱۲.۳ لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ۱۳۲۰
۱۲.۴ انحنا، مروڑ اور TNB چھوکٹ ۱۳۲۷
۱۲.۵ فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت ۱۳۴۸

۱۳ کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات ۱۳۶۳
۱۳.۱ کثیر متغیرات کے تفاعل ۱۳۶۳
۱۳.۲ حد اور استمرار ۱۳۷۶
۱۳.۳ جزوی تفرقات ۱۳۸۹
۱۳.۴ تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات ۱۴۰۵
۱۳.۵ زنجیری قاعدہ ۱۴۲۰
۱۳.۶ پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات ۱۴۳۳
۱۳.۷ رخی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں ۱۴۳۹
۱۳.۸ انتہائی قیمتیں اور نقاط زین ۱۴۵۸
۱۳.۸.۱ نتیجہ ۱۴۶۶
۱۳.۹ لیگرینج ضاربین ۱۴۷۴
۱۳.۱۰ کلیہ ٹیلر ۱۴۸۹

۱۴ تکمل بالکثرت ۱۴۹۷
۱۴.۱ دوہرا تکملات ۱۴۹۷
۱۴.۲ رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت ۱۵۱۵

۱۴.۳ دوہرا تکملات کا قطبی روپ ۱۵۲۹
۱۴.۴ کار تیسی محدد میں تہرا تکمل ۱۵۳۹
۱۴.۵ تعین بعد میں کمیت اور معیار اثر ۱۵۵۲
۱۴.۶ نلکی اور کروی محدد میں تہرا تکمل ۱۵۶۱
۱۴.۷ تکملات بالکثرت میں بدل ۱۵۷۸

۱۵ سمتی میدان میں تکمل ۱۵۹۳
۱۵.۱ لکیری تکمل ۱۵۹۳
۱۵.۲ سمتی میدان، کام، دائری بہاؤ، اور بہاؤ ۱۶۰۳
۱۵.۳ راہ سے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان ۱۶۱۷
۱۵.۴ مستوی میں مسئلہ گرین ۱۶۲۹
۱۵.۵ سطحی رقبہ اور سطحی تکملات ۱۶۴۵
۱۵.۶ معلمی سطحیں ۱۶۵۸
۱۵.۷ مسئلہ سٹوکس ۱۶۷۳
۱۵.۷.۱ نظریہ اور مثالیں ۱۶۸۵
۱۵.۸ مسئلہ پھیلاؤ اور ایک مربوط نظریہ ۱۶۸۷
۱۵.۹ اضافی اور اعلیٰ مشتقیں ۱۷۱۱

دیباچہ ۱۷۱۵

میری پہلی کتاب کا دیباچہ ۱۷۱۵

جوابات ۱۷۱۵

ضمیمے ۱۷۱۵

ا ریاضیاتی ترغیب ۱۷۱۷

ب تحدیدی مسائل کے ثبوت ۱۷۲۳

ج مخلوط اعداد ۱۷۲۹

د ضمیمہ چار ۱۷۴۷

ھ ضمیمہ پانچ ۱۷۴۹

و ضمیمہ چھ ۱۷۵۱

ز ضمیمہ سات ۱۷۵۳

ح ضمیمہ آٹھ ۱۷۵۵

ط ضمیمہ نو ۱۷۵۷

ي تکملات کا مختصر جدول ۱۷۵۹

جوابات

ضمیمہ ج

مخلوط اعداد

مخلوط اعداد سے مراد $a + ib$ روپ کا اظہار ہے جہاں a اور b حقیقی اعداد ہیں اور i جذر $\sqrt{-1}$ کی علامت ہے۔ حقیقی اعداد کا نظام تخلیق دینے میں جدوجہد درکار تھی جس کے مختلف مراحل پر اس ضمیمے میں غور کیا جائے گا۔ یہ جاننے کے بعد مخلوط اعداد کا نظام عجیب نظر نہیں آئے گا۔

حقیقی اعداد کا ارتقا

اعدادی نظام کے ارتقا میں پہلا قدم گنتی کے اعداد $1, 2, 3, \cdots$ کی پہچان تھی جنہیں ہم اب **قدرتی اعداد**[1] یا **مثبت عدد صحیح**[2] کہتے ہیں۔ نظام کے اندر رہتے ہوئے ان اعداد کو استعمال کر کے چند بنیادی حسابی عملیات ممکن ہیں۔ یعنی مثبت اعداد صحیح کا نظام جمع اور ضرب کے عمل کے لحاظ سے **بند**[3] نظام ہے۔ اس سے ہمارا مراد یہ ہے کہ اگر m اور n مثبت عدد صحیح ہوں تب درج ذیل بھی مثبت عدد صحیح ہوں گے۔

$$m + n = p \quad \text{اور} \quad mn = q \tag{۱}$$

مساوات ۱ کی دونوں مساواتوں میں بائیں ہاتھ دو عدد صحیح جانتے ہوئے ہم مطابقتی دائیں ہاتھ کے عدد صحیح دریافت کر سکتے ہیں۔ بعض اوقات مثبت عدد صحیح m اور p جانتے ہوئے ہم ایسا مثبت عدد صحیح n تلاش کر سکتے ہیں کہ $m + n = p$ ہو۔ مثال کے طور ہم $3 + n = 7$ کو حل کر کے ہم مثبت عدد صحیح n تلاش کر سکتے ہیں۔ اس کے برعکس $7 + n = 3$ کو حل کر کے ہم ایسا n دریافت نہیں کر سکتے جو مثبت عدد صحیح ہو۔ اس مثال سے واضح ہے کہ مثبت عدد صحیح نظام زیادہ کارآمد نہیں اور اس کو وسیع بنانے کی ضرورت ہے۔

منفی اعداد صحیح اور عدد صفر کی ایجاد نے $7 + n = 3$ طرز کی مساوات حل کرنا ممکن بنایا۔ ایسی تہذیب میں، جو تمام **عدد صحیح**[4]

$$\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{۲}$$

---

natural numbers[1]
positive integers[2]
closed[3]
integers[4]

جانتی ہو، ایک پڑھا لکھا شخص مساوات $m + n = p$ میں دو عدد صحیح جانتے ہوئے نامعلوم عدد صحیح تلاش کر سکتا ہے۔

فرض کریں یہ پڑھا لکھا شخص مساوات ۲ میں دیے گئے اعداد استعمال کر کے ضرب کرنا بھی جانتا ہے۔ اگر m اور q معلوم ہو، وہ دیکھے گا کہ بعض اوقات n تلاش کرنا ممکن ہوتا ہے اور بعض اوقات ناممکن۔ اگر یہ شخص قابل اور ذہین ہو، ممکن ہے وہ اعداد کے نظام کو مزید وسعت دے کر عدد صحیح m اور n کی مرتب جوڑیاں m/n ، جس کو ہم کسر کہتے ہیں، متعارف کرے۔ عدد صفر خصوصی خواص رکھتا ہے جو کچھ عرصہ کے لئے مسئلے پیدا کر سکتا ہے، لیکن وہ جلد اس نتیجے پر پہنچ پائیں گے کہ m/n طرز کی تمام جوڑیاں کارآمد ہیں تاہم جن کے نسب نما میں صفر ہو انہیں عددی نظام میں شامل نہیں کیا جائے۔ یہ مجموع، جو **ناطق اعداد**[5] کہلاتا ہے، نظام میں کسی بھی دو اعداد پر حساب کی درج ذیل **ناطق عملیات**[6] ممکن بناتا ہے، تاہم صفر سے تقسیم کرنا ممکن نہیں۔

۱. ا) جمع
ب) منفی

۲. ا) ضرب
ب) تقسیم

اکائی مربع کا ہندسہ (شکل 2) اور مسئلہ فیثاغورث سے ہم جانتے ہیں کہ وہ ہندسی بناوٹ کی مدد سے لمبائی کی کسی بنیادی اکائی کے لحاظ سے $\sqrt{2}$ اکائی لمبائی کی لکیر کھینچ سکتے تھے۔ یوں ہم کہہ سکتے ہیں کہ ہندسی بناوٹ سے وہ درج ذیل مساوات حل کر سکتے تھے۔

$$x^2 = 2$$

تاہم ان کو معلوم ہوا کہ $\sqrt{2}$ لمبائی کی لکیر اور 1 لمبائی کی لکیر متبائن مقادیر ہیں۔ یعنی $\sqrt{2}/1$ کو کسی دوسری زیادہ بنیادی اکائی لمبائی کے دو عدد صحیح مضرب کی نسبت نہیں لکھا جا سکتا۔ یوں ایک پڑھا لکھا شخص مساوات $x^2 = 2$ کا حل ناطق عدد کی صورت میں دریافت نہیں کر سکتا تھا۔

ایسا کوئی ناطق عدد نہیں پایا جاتا جس کا مربع 2 ہو۔ یہ جاننے کے لئے کہ ایسا کیوں کر ہے، فرض کریں کہ ایسا ناطق عدد پایا جاتا ہے۔ یوں ہم ایسے دو عدد صحیح p اور q دریافت کر سکیں گے جن کا 1 کے علاوہ کوئی مشترک جزو ضربی نہ ہو اور جو درج ذیل کو مطمئن کرتے ہوں۔

$$p^2 = 2q^2 \tag{۳}$$

چونکہ p اور q عدد صحیح ہیں، p کو جفت ہونا ہو گا ورنہ اس کا اپنے ساتھ حاصل ضرب طاق ہو گا۔ علامتوں میں $p = 2p_1$ ہو گا جہاں p_1 عدد صحیح ہے۔ یوں $2p_1^2 = q^2$ لکھا جا سکتا ہے جس کے تحت q کو جفت ہونا ہو گا مثلاً $q = 2q_1^2$ جہاں q_1 عدد صحیح ہے۔ اس طرح 2 کو p اور q دونوں کا جزو ضربی ہونا ہو گا، لیکن ہم نے p اور q کا انتخاب اس طرح کیا تھا کہ 1 کے علاوہ ان کا کوئی مشترک جزو ضربی نہ ہو۔ لہٰذا ایسا کوئی ناطق عدد نہیں پایا جاتا جس کا مربع 2 ہو۔

اگرچہ پڑھا لکھا شخص مساوات $x^2 = 2$ کو حل نہیں کر سکتا تاہم وہ ناطق اعداد کی ترتیب

$$\frac{1}{1}, \frac{7}{5}, \frac{41}{29}, \frac{239}{169}, \ldots \tag{۴}$$

وضع کر سکتا تھا جن کے مربع درج ذیل ترتیب دیتے ہیں

$$\frac{1}{1}, \frac{49}{25}, \frac{1681}{841}, \frac{57121}{28561}, \ldots \tag{۵}$$

---

[5] rational numbers
[6] rational operations

جس کی حد 2 پر مرکوز ہے۔اس حقیقت کی وجہ سے انہیں ناطق اعداد کی ترتیب کی حد کا تصور واضح ہوا۔ اگر ہم اس حقیقت کو مان لیں کہ اوپر سے محدود بڑھتی ترتیب ہر صورت ایک حد پر مرکوز ہو گی اور ہم دیکھیں کہ (۴) میں دی گئی ترتیب یہ خواص رکھتی ہے تب ہم چاہیں گے کہ یہ حد L ہو۔ ترتیب ۵ کو دیکھ کر اس کا یہ مطلب بھی ہے کہ $L^2 = 2$ ہو گا لہٰذا L ناطق عدد نہیں ہو سکتا۔ ناطق اعداد کے ساتھ ناطق اعداد کی تمام بڑھتی محدود ترتیبات کی حدیں شامل کرنے سے ہمیں تمام حقیقی اعداد کا نظام ملتا ہے۔ یہاں لفظ حقیقی اس نظام کو کسی بھی لحاظ سے ریاضی کے دیگر نظام سے زیادہ یا کم حقیقی نہیں بناتا۔ یہ محض ایک نام ہے جو اس نظام کو دیا گیا ہے۔

مخلوط اعداد

ہم نے حقیقی اعداد کا نظام بنتے دیکھا۔ درحقیقت اس نظام کے ارتقا میں تین مراحل دیکھے گئے۔

۱. پہلے عددی نظام کی ایجاد: تمام عدد صحیح کا سلسلہ سادہ گنتی سے حاصل کیا۔

۲. دوسرے عددی نظام کی ایجاد: ناطق اعداد $m/n!$ کا سلسلہ اعداد صحیح سے حاصل کیا گیا۔

۳. تیسرے عددی نظام کی ایجاد: حقیقی اعداد x کا سلسلہ ناطق اعداد اسے حاصل کیا گیا۔

عددی نظام کی ایجادات درجائی ہیں۔ ہر نئے نظام میں گزشتہ نظام شامل ہیں۔ ہر نیا نظام زیادہ وسیع ہے اور اس نظام میں رہتے ہوئے مزید ریاضیاتی عمل ممکن ہیں۔

۱. تمام اعداد صحیح کے نظام میں درج ذیل روپ کی تمام مساوات حل کی جا سکتی ہیں جہاں a عدد صحیح ہے۔

$$x + a = 0 \tag{۶}$$

۲. تمام ناطق اعداد کے نظام میں درج ذیل روپ کی مساوات حل کی جا سکتی ہیں جہاں a اور b ناطق اعداد ہیں اور $a \neq 0$ ہے۔

$$ax + b = 0 \tag{۷}$$

۳. تمام حقیقی اعداد کے نظام میں مساوات ۶ اور مساوات ۷ کے علاوہ تمام دو درجی مساوات

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{۸}$$

حل کرنا ممکن ہے، جہاں $a \neq 0$ اور $b^2 - 4ac \geq 0$ ہیں۔

آپ غالباً درج ذیل کلیہ جانتے ہیں جو مساوات ۸ کا حل دیتا ہے۔

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{۹}$$

آپ یقیناً یہ بھی جانتے ہوں گے جب مفرق[۷]، $d = b^2 - 4ac$، منفی ہو، مساوات ۹ کا حل کسی بھی مذکورہ بالا اعدادی نظام میں نہیں پایا جاتا۔ درحقیقت، مذکورہ بالا ایجاد شدہ اعداد نظام کے اندر رہتے ہوئے، درج ذیل نہایت سادہ دو درجی مساوات کا حل ممکن نہیں۔

$$x^2 + 1 = 0$$

---

[۷] discriminant

اس طرح ہم چوتھا عددی نظام ایجاد کرتے ہیں، جو تمام مخلوط اعداد $a + ib$ پر مشتمل ہے۔ ہم علامت i کو رد کر کے علامت (a, b) استعمال کر سکتے ہیں، جہاں ہم عدد صحیح a اور b کی جوڑی کی بات کریں گے۔ الجبرائی عمل میں a اور b کے ساتھ مختلف برتاؤ کیا جاتا ہے لہٰذا قوسین میں ان کی ترتیب تبدیل نہیں کی جا سکتی۔ یوں ہم کہہ سکتے ہیں کہ مخلوط عددی نظام، اعداد صحیح کی تمام مرتب جوڑیوں (a, b) پر مشتمل ہے اور جوڑیوں کی مساویت، مجموعہ، فرق، ضرب، وغیرہ درج ذیل قواعد کے تحت ہیں۔ درج ذیل بحث میں (a, b) اور $a + ib$ علامتیت دونوں استعمال کی گئی ہے۔ ہم a کو مخلوط عدد (a, b) کا **حقیقی جزو**[8] اور b کو اس کا **خیالی جزو**[9] کہتے ہیں۔

ہم درج ذیل متعارف کرتے ہیں۔

مساویت

دو مخلوط اعداد $a + ib$ اور $c + id$ صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر:

$$a + ib = c + id$$

ہوں گے جب $a = c$ اور $b = d$ ہو۔

دو مخلوط اعداد (a, b) اور (c, d) صرف اور صرف اس صورت ایک دوسرے کے برابر ہوں گے جب $a = c$ اور $b = d$ ہو۔

جمع

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

دو مخلوط اعداد (a, b) اور (c, d) کا مجموعہ مخلوط عدد $(a + c, b + d)$ ہو گا۔

ضرب

$$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

دو مخلوط اعداد (a, b) اور (c, d) کا حاصل ضرب مخلوط عدد $(ac - bd, ad + bc)$ ہو گا۔

ان تمام مخلوط اعداد (a, b) کا سلسلہ جن میں دوسرا عدد b صفر ہو حقیقی اعداد a کے سلسلہ کے تمام خواص رکھتا ہے۔ مثال کے طور پر $(a, 0)$ اور $(b, 0)$ کا مجموعہ اور حاصل ضرب درج ذیل ہوں گے

$$(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$$
$$(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0)$$

جو اسی قسم کے اعداد ہیں اور ان کا خیالی جزو صفر ہے۔ اسی طرح "حقیقی عدد" $(a, 0)$ اور مخلوط عدد (c, d) کو آپس میں ضرب کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(a, 0) \cdot (c, d) = (ac, ad) = a(c, d)$$

بالخصوص، مخلوط عددی نظام میں مخلوط عدد $(0, 0)$ صفر کا کردار اور مخلوط عدد $(1, 0)$ اکائی کا کردار ادا کرتا ہے۔

جوڑی عدد $(0, 1)$، جس کا حقیقی جزو صفر اور خیالی جزو ایک کے برابر ہے، کی خاصیت یہ ہے کہ اس کے مربع:

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

میں حقیقی جزو منفی ایک اور خیالی جزو صفر کے برابر ہے۔ یوں، مخلوط اعداد (a, b) کے نظام میں ایسا عدد $x = (0, 1)$ پایا جاتا ہے جس کے مربع کو اکائی $(1, 0)$ کے ساتھ جمع کرنے سے صفر $(0, 0)$ حاصل ہوتا ہے (ذیل دیکھیں)۔

$$(0, 1)^2 + (1, 0) = (0, 0)$$

---

[8] real part
[9] imaginary part

یوں اس نئے عددی نظام میں درج ذیل مساوات کا حل $x = (0,1)$ ہے۔

$$x^2 + 1 = 0$$

آپ غالباً (a,b) کے لحاظ سے $a + ib$ کی علامت سے زیادہ واقف ہیں۔ مرتب جوڑیوں کے ریاضی قواعد کے تحت درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1)$$

اور چونکہ $(1,0)$ کا رویہ اکائی کی طرح اور $(0,1)$ کا رویہ منفی ایک کے جذر کی طرح ہے لہٰذا (a,b) کی جگہ $a + ib$ لکھنے میں جھجک محسوس نہ کریں، جس میں b کے ساتھ چسپاں i یقینی بناتا ہے کہ خیالی جزو کی درست نشاندہی ہو۔ ہم جب چاہیں $a + ib$ کی جگہ (a,b) یا (a,b) کی جگہ $a + ib$ لکھ سکتے ہیں۔ مخلوط عددی نظام (a,b) میں رائج الجبرائی قواعد جاننے کے بعد یاد رہے کہ علامت $(0,1) = i$ کسی بھی لحاظ سے علامت $(1,0)$ سے کم حقیقی نہیں ہے۔ پس ایک کو حقیقی اور دوسرے کو خیالی نام دیا گیا ہے۔

مخلوط اعداد کے کسی بھی ناطق ملاپ کو واحد ایک مخلوط عدد میں سمیٹنے کے لئے بنیادی الجبرا کے قواعد استعمال کریں اور جہاں i^2 ہو وہاں -1 لکھیں۔ یاد رہے کہ مخلوط عدد $(0,0) = 0 + i0$ سے تقسیم کی اجازت نہیں۔ اگر $a + ib \neq 0$ ہو تب تقسیم کا عمل درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{c+id}{a+ib} = \frac{(c+id)(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{(ac+bd)+i(ad-bc)}{a^2+b^2}$$

نتیجہ مخلوط عدد $x + iy$ ہے جہاں x اور y درج ذیل ہیں

$$x = \frac{ac+bd}{a^2+b^2}, \quad y = \frac{ad-bc}{a^2+b^2}$$

جہاں $a + ib = (a,b) \neq (0,0)$ کی وجہ سے $a^2 + b^2 \neq 0$ ہو گا۔

نسب نما کو ضارب $a - ib$ سے ضرب دے کر نسب نما میں i سے چھٹکارہ حاصل کیا گیا۔ اس ضارب کو $a + ib$ کا **مخلوط جوڑی دار**[۱۰] کہتے ہیں۔ روایتی طور پر مخلوط عدد z کے مخلوط جوڑی دار کو $\bar{z}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$z = a + ib, \quad \bar{z} = a - ib$$

کسر $(c+id)/(a+ib)$ کے شمار کنندہ اور نسب نما کو مخلوط جوڑی دار سے ضرب دینے سے نسب نما ہر صورت حقیقی عدد میں تبدیل ہو گا۔

مثال ج.۱:

ا. $$(2+3i) + (6-2i) = (2+6) + (3-2)i = 8 + i$$

ب. $$(2+3i) - (6-2i) = (2-6) + (3-(-2))i = -4 + 5i$$

ج. $$\begin{aligned}(2+3i)(6-2i) &= (2)(6) + (2)(-2i) + (3i)(6) + (3i)(-2i) \\ &= 12 - 4i + 18i - 6i^2 = 12 + 14i + 6 = 18 + 14i\end{aligned}$$

---

[۱۰] complex conjugate

د.
$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{6-2i} &= \left(\frac{2+3i}{6-2i}\right)\left(\frac{6+2i}{6+2i}\right)\\ &= \frac{12+4i+18i+6i^2}{36+12i-12i-4i^2}\\ &= \frac{6+22i}{40} = \frac{3}{20}+\frac{11}{20}i\end{aligned}$$

□

اعگن خاکے

مخلوط عدد $z = x + iy$ کا ہندسی اظہار درج ذیل دو طریقوں سے کیا جاتا ہے۔

ا. اس کو مستوی xy میں نقطہ $P(x, y)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ب. اس کو مستوی xy میں مبدا سے نقطہ P تک سمتیہ $\overrightarrow{OP}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔