احصاء اور تحلیلی ہندسہ

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۲۵ اگست ۲۰۲۶

عنوان

۱ ابتدائی معلومات ۱
۱.۱ حقیقی اعداد اور حقیقی خط ۱
۱.۲ محدد، خطوط اور بڑھوتری ۱۳
۱.۳ تفاعل ۲۷
۱.۴ ترسیم کی منتقلی ۴۴
۱.۵ تکونیاتی تفاعل ۶۰

۲ حدود اور استمرار ۷۹
۲.۱ تبدیلی کی شرح اور حد ۷۹
۲.۲ حد تلاش کرنے کے قواعد ۹۳
۲.۳ مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف ۱۰۴
۲.۴ تصور حد کی توسیع ۱۲۱
۲.۵ استمرار ۱۳۸
۲.۶ مماسی خط ۱۵۵

۳ تفرق ۱۶۷
۳.۱ تفاعل کا تفرق ۱۶۷
۳.۲ قواعد تفرق ۱۸۵
۳.۳ تبدیلی کی شرح ۲۰۲
۳.۴ تکونیاتی تفاعل کا تفرق ۲۱۷
۳.۵ زنجیری قاعدہ ۲۳۴
۳.۶ خفی تفرق اور ناطق قوت نما ۲۴۸
۳.۷ دیگر شرح تبدیلی ۲۶۲

۴ تفرق کا استعمال ۲۷۵
۴.۱ تفاعل کی انتہائی قیمتیں ۲۷۵
۴.۲ مسئلہ اوسط قیمت ۲۸۷
۴.۳ مقامی انتہائی قیمتوں کی یک رتبی تفرقی پرکھ ۳۰۰

۴.۴ y' اور y'' کے ساتھ ترسیم کرنا ۳۰۸
۴.۵ $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء ۳۲۶
۴.۶ بہترین بنانا ۳۴۸
۴.۷ خط بندی اور تفرقات ۳۶۸
۴.۸ ترکیب نیوٹن ۳۸۸

۵ تکمل ۳۹۹
۵.۱ غیر قطعی تکملات ۳۹۹
۵.۲ تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی ۴۱۰
۵.۳ تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدے کا الٹ اطلاق ۴۲۳
۵.۴ اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ ۴۳۴
۵.۵ ریمان مجموعے اور قطعی تکملات ۴۵۱
۵.۶ خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ ۴۷۴
۵.۷ بنیادی مسئلہ ۴۸۹
۵.۸ قطعی تکمل میں بدل ۵۰۶
۵.۹ اعدادی تکمل ۵۱۲

۶ تکمل کا استعمال ۵۲۹
۶.۱ منحنیات کے بیچ رقبہ ۵۲۹
۶.۲ ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش ۵۴۲
۶.۳ اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا ۵۴۹
۶.۴ نلکی چھلے ۵۶۳
۶.۵ مستوی منحنیات کی لمبائیاں ۵۷۴
۶.۶ سطح طواف کا رقبہ ۵۸۳
۶.۷ معیار اثر اور مرکز کمیت ۵۹۳
۶.۸ کام ۶۰۹
۶.۹ فشار سیال اور قوت سیال ۶۲۲
۶.۱۰ بنیادی نقش اور نمونہ سازی کے اطلاقات ۶۳۰

۷ ماورائی تفاعل ۶۴۳
۷.۱ معکوس تفاعلات اور ان کے تفارق ۶۴۴
۷.۲ قدرتی لوگارتھم ۶۵۹
۷.۳ قوت نمائی تفاعل ۶۷۴
۷.۴ a^x اور $\log_a x$ ۶۸۶
۷.۵ افزائش اور تنزل ۷۰۱
۷.۶ قاعدہ لھوپیٹال ۷۱۴
۷.۷ اضافی شرح نمو ۷۲۸
۷.۸ معکوس تکونیاتی تفاعل ۷۳۷
۷.۹ معکوس تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل ۷۵۱

۶۶ ۷.۱۰ ہذلولی تفاعل ۷۶۵
۶۷ ۷.۱۱ یک رتبی تفرقی مساوات ۷۸۲
۶۸ ۷.۱۲ یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان ۷۹۹

۶۹ دیباچہ ۶۴۳

۷۰ میری پہلی کتاب کا دیباچہ ۶۴۳

۷۱ ۸ تکمل کے طریقے ۸۰۹
۷۲ ۸.۱ تکمل کے بنیادی کلیات ۸۰۹
۷۳ ۸.۲ تکمل بالحصص ۸۲۱
۷۴ ۸.۳ جزوی کسر ۸۳۴
۷۵ ۸.۴ تکونیاتی بدل ۸۴۷
۷۶ ۸.۵ جدول تکمل اور کمپیوٹر ۸۵۶
۷۷ ۸.۶ غیر مناسب تکمل ۸۷۰

۷۸ ۹ لامتناہی تسلسل ۸۹۳
۷۹ ۹.۱ اعداد کی ترتیب کی حد ۸۹۳
۸۰ ۹.۲ ترتیب کی حدیں تلاش کرنے کے مسئلے ۹۰۹
۸۱ ۹.۳ سوالات ۹۱۷
۸۲ ۹.۴ لامتناہی تسلسل ۹۲۲
۸۳ ۹.۵ غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پرکھ ۹۳۸
۸۴ ۹.۶ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ ۹۴۷
۸۵ ۹.۷ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ ۹۵۶
۸۶ ۹.۸ بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز ۹۶۶
۸۷ ۹.۹ طاقتی تسلسل ۹۷۸
۸۸ ۹.۱۰ ٹیلر اور مکلارن تسلسل ۹۹۲
۸۹ ۹.۱۱ ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ خلل کے اندازے ۱۰۰۱
۹۰ ۹.۱۲ طاقتی تسلسل کے استعمال ۱۰۱۷

۹۱ ۱۰ مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد ۱۰۳۵
۹۲ ۱۰.۱ مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں ۱۰۳۵
۹۳ ۱۰.۲ سنک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی ۱۰۵۵
۹۴ ۱۰.۳ دو درجی مساوات اور گھومنا ۱۰۶۳
۹۵ ۱۰.۴ مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول ۱۰۷۴
۹۶ ۱۰.۵ احصاء اور مقدار معلوم منحنیات ۱۰۸۷
۹۷ ۱۰.۶ قطبی محدد ۱۱۰۰
۹۸ ۱۰.۷ قطبی محدد میں ترسیم ۱۱۰۸
۹۹ ۱۰.۸ مخروط حصوں کے قطبی مساوات ۱۱۱۹

۱۰۰ ۱۰.۹ قطبی محدد میں تکمل ۱۱۳۳

۱۰۱ ۱۱ سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری ۱۱۴۵
۱۰۲ ۱۱.۱ مستوی میں سمتیات ۱۱۴۵
۱۰۳ ۱۱.۲ کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات ۱۱۵۹
۱۰۴ ۱۱.۳ ضرب نقطہ ۱۱۷۳
۱۰۵ ۱۱.۴ صلیبی ضرب ۱۱۸۵
۱۰۶ ۱۱.۵ فضا میں خطوط اور مستویات ۱۱۹۷
۱۰۷ ۱۱.۶ نلکی اور مربع سطحیں ۱۲۱۰
۱۰۸ ۱۱.۷ نلکی اور کروی محدد ۱۲۲۶

۱۰۹ ۱۲ سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت ۱۲۳۷
۱۱۰ ۱۲.۱ سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات ۱۲۳۷
۱۱۱ ۱۲.۲ گولا کی حرکت کی نمونہ کشی ۱۲۵۸
۱۱۲ ۱۲.۳ لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ۱۲۶۶
۱۱۳ ۱۲.۴ انحنا، مروڑ اور TNB چوکھٹ ۱۲۷۴
۱۱۴ ۱۲.۵ فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت ۱۲۹۴

۱۱۵ ۱۳ کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفارق ۱۳۰۷
۱۱۶ ۱۳.۱ کثیر متغیرات کے تفاعل ۱۳۰۷
۱۱۷ ۱۳.۲ حد اور استمرار ۱۳۲۰
۱۱۸ ۱۳.۳ جزوی تفارق ۱۳۳۳
۱۱۹ ۱۳.۴ تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات ۱۳۴۹
۱۲۰ ۱۳.۵ زنجیری قاعدہ ۱۳۶۴
۱۲۱ ۱۳.۶ پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرق ۱۳۷۷
۱۲۲ ۱۳.۷ رخی تفارق، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں ۱۳۸۴
۱۲۳ ۱۳.۸ انتہائی قیمتیں اور نقاط زین ۱۴۰۳
۱۲۴ ۱۳.۹ لیگرینج ضاربین ۱۴۱۸
۱۲۵ ۱۳.۱۰ کلیہ ٹیلر ۱۴۳۴

۱۲۶ ۱۴ تکمل بالکثرت ۱۴۴۱
۱۲۷ ۱۴.۱ دوہرا تکملات ۱۴۴۱
۱۲۸ ۱۴.۲ رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت ۱۴۵۹
۱۲۹ ۱۴.۳ دوہرا تکملات کا قطبی روپ ۱۴۷۳
۱۳۰ ۱۴.۴ کارتیسی محدد میں تہرا تکمل ۱۴۸۳
۱۳۱ ۱۴.۵ تعین بعد میں کمیت اور معیار اثر ۱۴۹۶
۱۳۲ ۱۴.۶ نلکی اور کروی محدد میں تہرا تکمل ۱۵۰۵
۱۳۳ ۱۴.۷ تکملات بالکثرت میں بدل ۱۵۲۳

۱۳۴ ۱۵ سمتی میدان میں تکمل ۱۵۳۷
۱۳۵ ۱۵.۱ لکیری تکمل ۱۵۳۷
۱۳۶ ۱۵.۲ سمتی میدان، کام، دائری بہاؤ، اور بہاؤ ۱۵۴۷
۱۳۷ ۱۵.۳ راہ سے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان ۱۵۶۲
۱۳۸ ۱۵.۴ مستوی میں مسئلہ گرین ۱۵۷۵
۱۳۹ ۱۵.۵ سطحی رقبہ اور سطحی تکملات ۱۵۹۶
۱۴۰ ۱۵.۶ مقدار معلوم سطحیں ۱۶۱۴
۱۴۱ ۱۵.۷ مسئلہ سٹوکس ۱۶۳۱
۱۴۲ ۱۵.۸ مسئلہ پھیلاؤ اور ایک مربوط نظریہ ۱۶۴۸

۱۴۳ ضمیمے ۱۶۸۰

۱۴۴ ا ریاضیاتی ترغیب ۱۶۸۱

۱۴۵ ب تحدیدی مسائل کے ثبوت ۱۶۸۷

۱۴۶ ج مخلوط اعداد ۱۶۹۳

۱۴۷ د سمسن کا ایک تہائی کا قاعدہ ۱۷۰۹

۱۴۸ ھ کوشی کا مسئلہ اوسط قیمت اور قاعدہ لھوپیٹال ے کا پائیدار روپ ۱۷۱۱

۱۴۹ و کثیر استعمال حدود ۱۷۱۵

۱۵۰ ز جزئیتی تقسیم کا قانون برائے سمتی ضرب ۱۷۱۷

۱۵۱ ح مقاطع اور کریمر کا قاعدہ ۱۷۲۱

۱۵۲ ط مسئلہ یولر اور مسئلہ بڑھوتری ۱۷۳۳

۱۵۳ ي تکملات کا مختصر جدول ۱۷۳۹

۱۵۴ جوابات ۱۷۵۱

۱۵۵ اشاریہ ۱۷۵۷

باب ۷

ماورائی تفاعل

وہ تفاعل $y = f(x)$ جو درج ذیل روپ کی مساوات کو مطمئن کرتا ہو **الجبرائی**[1] کہلاتا ہے۔

$$P_n y^n + \cdots + P_1 y + P_0 = 0$$

اس مساوات میں تمام P متغیر x کے کثیر رکنی ہیں، جہاں کثیر رکنیوں کے عددی سر ناطق ہیں۔ یوں $y = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ایک الجبرائی تفاعل ہے، کیونکہ یہ مساوات $(x+1)y^2 - 1 = 0$ کو مطمئن کرتا ہے، جہاں $P_2 = x+1$ ، $P_1 = 0$ اور $P_0 = -1$ ہیں۔ کثیر رکنیوں اور ناطق عددی سروں والے ناطق تفاعل الجبرائی ہوں گے۔ اسی طرح الجبرائی تفاعلات کے مجموعے، حاصل ضرب، حاصل تقسیم، ناطق طاقتیں اور ناطق جذر بھی الجبرائی ہوں گے۔

وہ تفاعل جو الجبرائی نہیں ہوں **ماورائی**[2] کہلاتے ہیں۔ چھ بنیادی تکونیاتی تفاعل $\sin$ ، $\cos$ ، $\tan$ ، $\csc$ ، $\sec$ ، $\cot$ اور ان کے معکوس تفاعل ماورائی ہیں۔ اسی طرح قوت نمائی تفاعل اور لوگارتھمی تفاعل بھی ماورائی تفاعل ہیں۔

وہ اعداد جو ناطق عددی سر والے کثیر رکنی مساوات کو مطمئن کرتے ہوں **الجبرائی** کہلاتے ہیں۔ چونکہ $x + 2 = 0$ مساوات -2 کو مطمئن کرتا ہے، لہٰذا -2 الجبرائی عدد ہے۔ اسی طرح $\sqrt{3}$ مساوات $x^2 - 3 = 0$ کو مطمئن کرتا ہے، لہٰذا $\sqrt{3}$ بھی الجبرائی عدد ہے۔ وہ اعداد جو الجبرائی نہ ہوں، **ماورائی** کہلاتے ہیں۔ یوں e اور π ماورائی اعداد ہیں۔

ریاضیات میں بہت سے تفاعل ایک دوسرے کے معکوس ہوتے ہیں۔ غالباً سب سے زیادہ جانی پہچانی معکوس تفاعل کی جوڑی $\ln x$ اور e^x ہے۔ موزوں وقفہ پر پابند تکونیاتی تفاعل کے اہم معکوس پائے جاتے ہیں۔ پابند وقفہ پر تفاعل کو پابند شدہ تفاعل کہتے ہیں۔ اسی طرح لوگارتھمی اور قوت نمائی تفاعل کی دیگر معکوس جوڑیاں پائی جاتی ہیں۔ ہذلولی تفاعل اور ان کے معکوس تفاعل کا استعمال آویزاں رسّی، حرکی توانائی کی منتقلی، اور ہوا میں گرتے ہوئے جسم پر قوت رگڑ کے مسائل میں کام آتا ہے۔ اس باب میں ان تمام تفاعلات پر غور کیا جائے گا۔ ان مسائل کا بھی ذکر کیا جائے گا جنہیں حل کرنے میں یہ تفاعل مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

---

[1] algebraic
[2] transcendental

۷.۱ معکوس تفاعلات اور ان کے تفارق

اس حصہ میں ہم معکوس تفاعل کی تعریف پیش کرتے ہیں اور ان کے کلیات، ترسیمات، اور معکوس جوڑیوں کے تفرق پر غور کرتے ہیں۔

یک بہ یک تفاعل

تفاعل سے مراد وہ قاعدہ ہے جو اپنی دائرہ کار کے ہر نقطہ کو اپنی سعت میں ایک قیمت مختص کرتا ہو۔ بعض تفاعل ایک ہی قیمت کو ایک سے زیادہ نقطوں کے لیے مختص کرتے ہیں۔ یوں -1 کا مربع اور 1 کا مربع 1 ہے؛ اسی طرح $\frac{\pi}{3}$ اور $\frac{2\pi}{3}$ کا سائن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہے۔ اس کے برعکس دیگر تفاعل کسی ایک قیمت کو کبھی بھی دو مرتبہ مختص نہیں کرتے ہیں۔ مختلف اعداد کے مربع جذر اور اسی طرح مختلف اعداد کے مکعب بھی ہر صورت ایک دوسرے سے مختلف ہوتے ہیں۔ ایسا تفاعل جس کے انفرادی نقطوں پر منفرد قیمت ہو کو **یک بہ یک تفاعل**[۳] کہتے ہیں۔

تعریف: دائرہ کار D پر تفاعل $f(x)$ تب **یک بہ یک** ہو گا جب $x_1 \neq x_2$ کی صورت میں $f(x_1) \neq f(x_2)$ ہو۔

□

مثال ۷.۱: چونکہ کسی بھی غیر منفی اعداد کے لیے $x_1 \neq x_2$ کی صورت میں $\sqrt{x_1} \neq \sqrt{x_2}$ ہے لہٰذا $f(x) = \sqrt{x}$ غیر منفی اعداد کے کسی بھی دائرہ کار پر یک بہ یک تفاعل ہے۔ □

مثال ۷.۲: چونکہ $\sin(\frac{\pi}{6}) = \sin(\frac{5\pi}{6})$ ہے لہٰذا وقفہ $[0, \pi]$ پر $g(x) = \sin x$ یک بہ یک تفاعل نہیں۔ اس کے برعکس، ربع اول میں تمام زاویوں کے سائن مختلف ہیں لہٰذا وقفہ $[0, \frac{\pi}{2}]$ پر $g(x) = \sin x$ یک بہ یک تفاعل ہے۔ □

یک بہ یک تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم کسی بھی افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ قطع کرتی ہے۔ اگر کسی تفاعل کی ترسیم کسی افقی لکیر کو ایک سے زیادہ مرتبہ قطع کرتی ہو تب یہ تفاعل y کی اس قیمت کو ایک سے زیادہ مرتبہ اختیار کرتا ہے لہٰذا یہ یک بہ یک تفاعل نہیں ہو گا (شکل ۷.۱)۔

افقی لکیر کی پرکھ

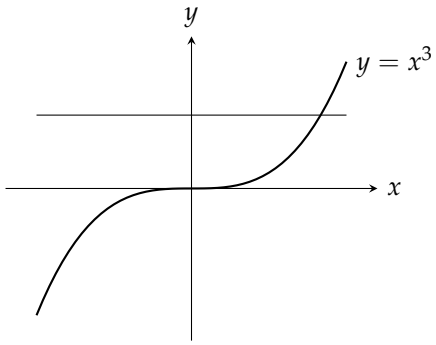
کوئی بھی تفاعل $y = f(x)$ صرف اور صرف اس صورت یک بہ یک تفاعل ہو گا جب اس کی ترسیم ہر افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ قطع کرتی ہو۔

معکوس

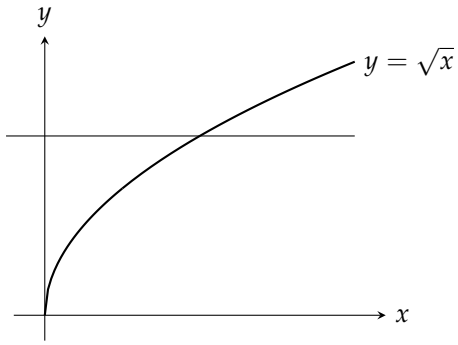
چونکہ یک بہ یک تفاعل کا ہر مخارج ایک انفرادی مداخل سے آتا ہے لہٰذا یک بہ یک تفاعل کو معکوس کرتے ہوئے ہر مخارج کو واپس اس مداخل پر بھیجا جا سکتا ہے جس سے یہ مخارج حاصل ہوتا ہے (شکل ۷.۲)۔ یک بہ یک تفاعل f کو معکوس کر کے جو تفاعل حاصل ہوتا ہے اس کو f کا **معکوس**[۴] کہتے ہیں، جس کو f^{-1} سے ظاہر کیا جاتا ہے، جہاں f^{-1} میں -1 کو طاقت نہ سمجھا جائے: یعنی $f(x)^{-1}$ سے مراد $\frac{1}{f(x)}$ نہیں۔ ہم f^{-1} کو "f کا معکوس" پڑھتے ہیں۔

---

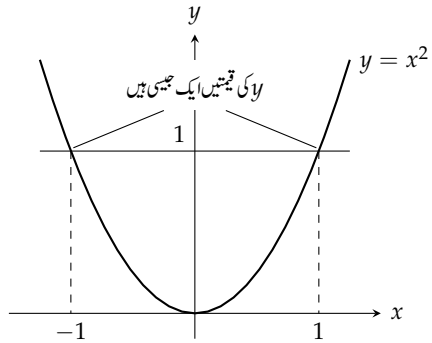
[۳] onetoonefunction
[۴] inverse



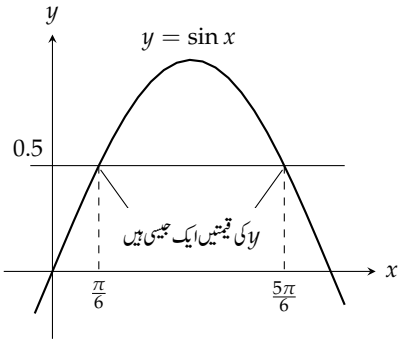
(ا) یک بہ یک تفاعل۔



(ب) یک بہ یک تفاعل۔

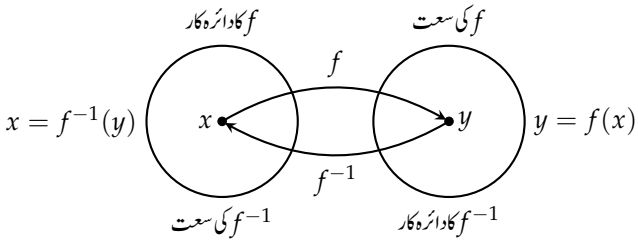


(ج) غیر یک بہ یک تفاعل۔



(د) غیر یک بہ یک تفاعل۔

شکل ۱.۷: یک بہ یک تفاعل کی ترسیم کسی بھی افقی لکیر کو زیادہ سے زیادہ ایک مرتبہ قطع کرتی ہے جبکہ غیر یک بہ یک تفاعل کی ترسیم، ایک یا ایک سے زیادہ افقی لکیروں کو ایک سے زیادہ مرتبہ قطع کرتی ہے۔



شکل ۲.۷: تفاعل f کا معکوس ہر مخارج کو واپس اس انفرادی مداخل پر بھیجتا ہے جہاں سے وہ آیا ہو۔

جیسا شکل ۷.۲ سے ظاہر ہے، f سے f^{-1} یا f^{-1} سے f حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یوں کسی بھی x کے لیے $f(x)$ حاصل کر کے اس $f(x)$ کا معکوس $f^{-1}(f(x))$ حاصل کیا جا سکتا ہے جو x ہو گا۔ تفاعل $f^{-1}(f(x))$ یا تفاعل $f(f^{-1}(x))$ میں x پُر کرنے سے واپس x ملتا ہے۔ ایسا تفاعل جو ہر عدد کو اسی عدد کے لیے مختص کرتا ہو **شناختی تفاعل**[5] کہلاتا ہے۔ یوں تفاعل f اور g کو ایک دوسرے کا معکوس تفاعل ہونے کے لیے پرکھا جا سکتا ہے۔ اگر $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$ ہو تب f اور g ایک دوسرے کے معکوس تفاعل ہوں گے ورنہ یہ ایک دوسرے کے معکوس تفاعل نہیں ہوں گے۔ اگر f اپنے دائرہ کار کا مکعب لیتا ہو تب g اس صورت f کا معکوس ہو گا جب g ہر قیمت کا مکعب جذر لیتا ہو، ورنہ یہ f کا معکوس نہیں ہو گا۔

تفاعل f اور g ایک دوسرے کے معکوس صرف اور صرف اس صورت ہوں گے جب

$$f(g(x)) = x \quad \text{اور} \quad g(f(x)) = x$$

ہوں۔ ایسی صورت میں $g = f^{-1}$ اور $f = g^{-1}$ ہوں گے۔

ایک تفاعل کا معکوس صرف اور صرف اس صورت ہو گا جب یہ یک بہ یک تفاعل ہو۔ یوں بڑھتے تفاعل کا معکوس تفاعل ہو گا اور گھٹتے تفاعل کا بھی معکوس تفاعل ہو گا۔ جن تفاعل کا تفرق مثبت ہو وہ اپنے دائرہ کار میں بڑھتے ہیں لہٰذا ان کا معکوس ہو گا (صفحہ ۲۹۴ پر مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ ۴.۳)۔ اسی طرح جن تفاعل کا تفرق منفی ہو وہ اپنے دائرہ کار میں گھٹتے ہیں لہٰذا ان کا بھی معکوس ہو گا۔

معکوس کی تلاش

تفاعل کے معکوس کی ترسیم کا تفاعل کی ترسیم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟ فرض کریں ایک تفاعل کی ترسیم شکل ۷.۳-الف کی طرح بڑھتی ہو، یعنی یہ بائیں سے دائیں اوپر اٹھتی ہو۔ کسی بھی x کے لیے ترسیم سے قیمت پڑھنے کے لیے ہم محور x پر نقطہ x سے شروع ہو کر محور y کے متوازی چل کر ترسیم تک پہنچتے ہیں اور یہاں سے محور x کے متوازی چل کر محور y تک پہنچ کر تفاعل کی قیمت y پڑھتے ہیں۔ ہم اس عمل کو معکوس کرتے ہوئے y سے شروع کرتے ہوئے x پڑھ سکتے ہیں (شکل ۷.۳-ب دیکھیں)۔

تفاعل f کی ترسیم حاصل کرنے کی خاطر ہم f^{-1} کی ترسیم میں مداخل مخارج جوڑیوں کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔ اس ترسیم کو عمومی طرز پر دکھانے کی خاطر ہمیں ان جوڑیوں کا 45° کی لکیر $y = x$ میں عکس لینا ہو گا اور ساتھ ہی حرف x اور حرف y کا ایک دوسرے کے ساتھ تبادلہ کرنا ہو گا۔ یوں غیر تابع متغیر، جس کو اب x کہتے ہیں، افقی محور پر دکھایا جائے گا اور تابع متغیر، جس کو اب y کہتے ہیں، کو انتصابی محور پر دکھایا جائے گا۔ تفاعل $f(x)$ اور $f^{-1}(x)$ کی ترسیمات لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہیں۔

شکل ۷.۳ میں f^{-1} کو متغیر x کا تفاعل لکھنا دکھایا گیا ہے جس کو درج ذیل بیان کیا جا سکتا ہے۔

ا. مساوات $y = f(x)$ کو x کے لیے حل کریں۔ یوں x کو y کی صورت میں لکھا جائے گا۔

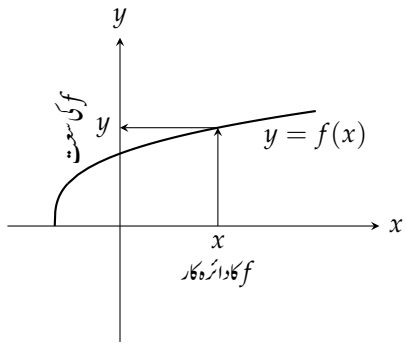
ب. جزو-ا میں حاصل مساوات میں x اور y کا آپس میں تبادلہ کریں۔ یوں حاصل کلیہ $y = f^{-1}(x)$ ہو گا۔

مثال ۷.۳: تفاعل $y = \frac{x}{2} + 1$ کا معکوس حاصل کریں جہاں غیر تابع متغیر x ہو۔

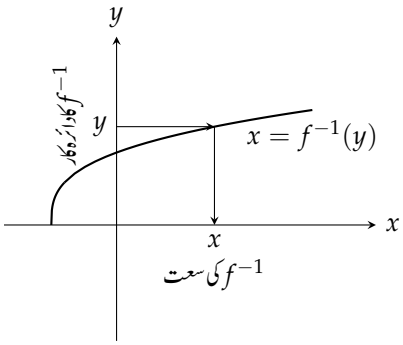
حل

---

[5] identityfunction

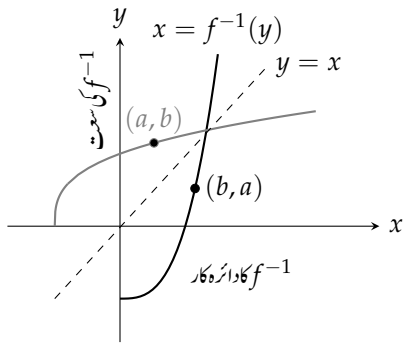


(ا) نقطہ x پر f کی قیمت جاننے کے لیے ہم x سے انتصابی رخ چلتے ہوئے ترسیم تک پہنچ کر افقی سمت محور y تک پہنچ کر درکار قیمت پڑھتے ہیں۔

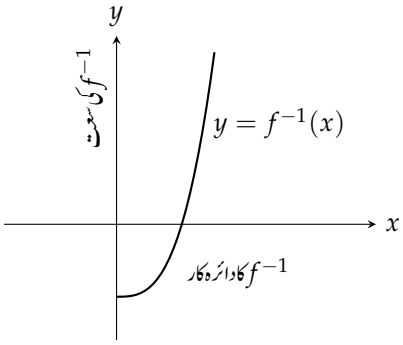


(ب)

تفاعل f کی ترسیم کو f^{-1} کی ترسیم تصور کیا جا سکتا ہے۔ وہ x جو y دیتا ہو کو تلاش کرنے کی خاطر، ہم y سے افقی رخ ترسیم تک اور یہاں سے انتصابی رخ محور x تک پہنچ کر درکار x پڑھتے ہیں۔ f کا دائرہ کار f^{-1} کی سعت ہو گا جبکہ f کی سعت f^{-1} کا دائرہ کار ہو گا۔



(ج) تفاعل f^{-1} کو ترسیم کرنے کی خاطر ہم f کا لکیر $y = x$ میں عکس لیتے ہیں۔



(د) آخر میں ہم حرف x اور حرف y کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔ یوں متغیر x کے تفاعل f^{-1} کی ترسیم حاصل ہوتی ہے۔

شکل ۷.۳: تفاعل f کے معکوس f^{-1} کی ترسیم۔

۱۰۰۸۴ قدم ۱: x کے لیے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= \frac{x}{2} + 1 \\ 2y &= x + 2 \\ x &= 2y - 2 \end{aligned}$$

۱۰۰۸۵ قدم ۲: حاصل مساوات میں x اور y کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔

$$y = 2x - 2$$

۱۰۰۸۶ یوں تفاعل $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ کا معکوس تفاعل $f^{-1}(x) = 2x - 2$ ہوگا۔

۱۰۰۸۷ اس کی تصدیق کرنے کی خاطر ہم دیکھتے ہیں کہ آیا دونوں مرکب تفاعل شناختی تفاعل دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x)) &= 2\left(\frac{x}{2} + 1\right) - 2 = x + 2 - 2 = x \\ f(f^{-1}(x)) &= \frac{1}{2}(2x - 2) + 1 = x - 1 + 1 = x \end{aligned}$$

۱۰۰۸۸ □

۱۰۰۸۹ مثال ۷.۴: تفاعل $y = x^2,\ x \geq 0$ کا معکوس تلاش کریں جہاں غیر تابع متغیر x ہو۔

۱۰۰۹۰ **حل**

۱۰۰۹۱ قدم ۱: دیے گئے مساوات کو حل کر کے x کو y کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ \sqrt{y} &= \sqrt{x^2} = |x| = x \qquad \text{ہوگا } |x| = x \text{ سے } x \geq 0 \text{ کی وجہ سے} \end{aligned}$$

۱۰۰۹۲ قدم ۲: حاصل نتیجہ میں x اور y کا آپس میں تبادلہ کرتے ہیں۔

$$y = \sqrt{x}$$

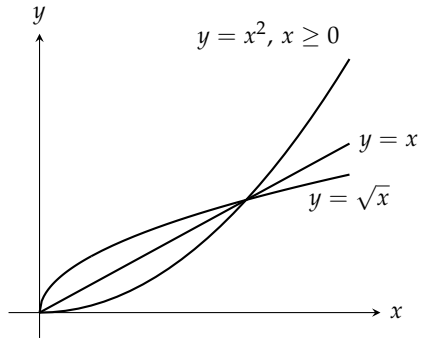
۱۰۰۹۳ یوں تفاعل $y = x^2,\ x \geq 0$ کا معکوس $y = \sqrt{x}$ ہوگا (شکل ۷.۴)۔

۱۰۰۹۴ دھیان رہے کہ پابند تفاعل $y = \sqrt{x},\ x \geq 0$ یک بہ یک تفاعل ہے لہٰذا اس کا معکوس پایا جاتا ہے، جبکہ تفاعل $y = x^2$ ایک غیر پابند تفاعل
۱۰۰۹۵ ہے جو یک بہ یک تفاعل نہیں، لہٰذا اس کا معکوس نہیں پایا جاتا۔ □

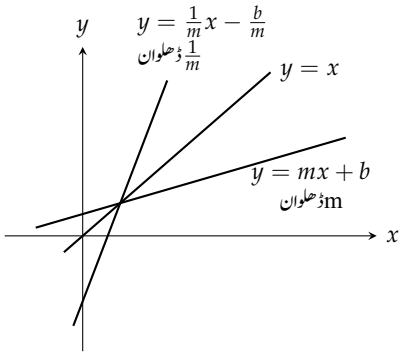
۱۰۰۹۶ **کمپیوٹر کا استعمال**

۱۰۰۹۷ تفاعل $y = f(x)$ کا معکوس تفاعل نہایت آسانی سے درج ذیل مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہوئے ترسیم کیا جا سکتا ہے۔

$$x(t) = f(t), \quad y(t) = t$$



شکل ۷.۴: تفاعل $y = \sqrt{x}$ اور $y = x^2,\ x \geq 0$ ایک دوسرے کے معکوس ہیں (مثال ۷.۴)۔



شکل ۷.۵: لکیر $y = x$ میں منعکس غیر انتصابی لکیروں کے ڈھلوان ایک دوسرے کے مقلوب ہوتے ہیں۔

۱۰۰۹۸ آپ درج ذیل استعمال کر کے تفاعل اور تفاعل کے معکوس کو ساتھ ساتھ ترسیم کر سکتے ہیں۔

$$x_1(t) = t, \quad y_1(t) = f(t) \qquad \text{تفاعل}$$
$$x_2(t) = f(t), \quad y_2(t) = t \qquad \text{تفاعل کا معکوس}$$

۱۰۰۹۹ اس سے بھی زیادہ بہتر ہو گا کہ تفاعل، تفاعل کا معکوس اور شناختی تفاعل $y = x$ کو ساتھ ساتھ ترسیم کریں جہاں شناختی تفاعل درج ذیل ہو گا۔

$$x_3(t) = t, \quad y_3(t) = t \qquad \text{شناختی تفاعل}$$

۱۰۱۰۰ تفاعل $y = \frac{x^5}{x^2+1}$ اور $y = x + \cos x$ کے ساتھ ان کے معکوس تفاعل اور شناختی تفاعل ایک ساتھ ترسیم کر کے دیکھیں۔ ترسیم میں محور x
۱۰۱۰۱ اور محور y کے اکائی فاصلے برابر نظر آنے چاہیے تاکہ لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تفاعل اور اس کا معکوس تشاکلی نظر آئے۔

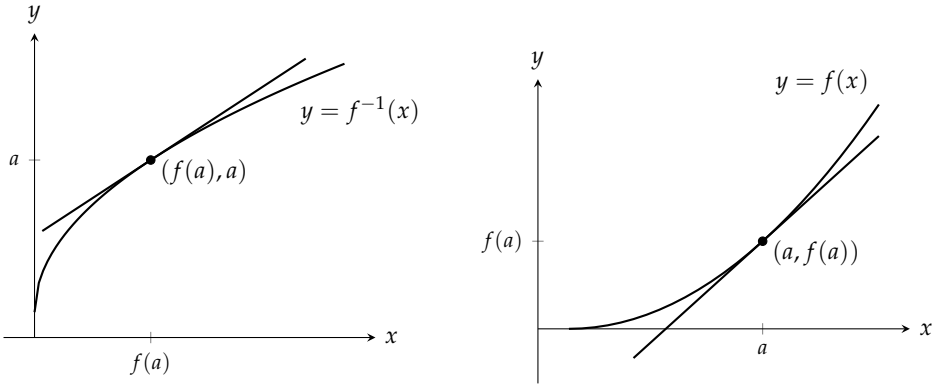
۱۰۱۰۲ قابل تفرق تفاعل کے معکوس کے تفرق

۱۰۱۰۳ تفاعل $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ اور اس کے معکوس $f^{-1}(x) = 2x - 2$ (مثال ۷.۳) کے تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x - 2) = 2$$

۱۰۱۰۴ یہ تفارق ایک دوسرے کے مقلوب ہیں۔ تفاعل f کی ترسیم لکیر $y = \frac{x}{2} + 1$ اور f^{-1} کی ترسیم لکیر $y = 2x - 2$ ہے۔ ان لکیروں کے
۱۰۱۰۵ ڈھلوان ایک دوسرے کے مقلوب ہیں (شکل ۷.۵)۔

۱۰۱۰۶ یہ نتیجہ کسی مخصوص تفاعل کے لیے نہیں۔ لکیر $y = x$ میں کسی بھی غیر افقی یا غیر انتصابی لکیر کے عکس کا ڈھلوان اس لکیر کے ڈھلوان کا مقلوب ہو گا۔ یوں
۱۰۱۰۷ اگر دی گئی لکیر کا ڈھلوان $m \neq 0$ (شکل ۷.۵) ہو تب منعکس لکیر کا ڈھلوان $\frac{1}{m}$ ہو گا (سوال ۷.۳۶)۔



شکل ۷.۶: معکوس تفاعل کے مطابقتی نقطوں پر ڈھلوان ایک دوسرے کے مقلوب $\left.\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}\right|_{f(a)} = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_a}$ ہوں گے۔

تفاعل اور اس کے معکوس کے ڈھلوانوں کا مقلوبی تعلق دیگر تفاعلات کو بھی مطمئن کرتا ہے۔ اگر نقطہ $(a, f(a))$ پر $y = f(x)$ کا ڈھلوان $f'(a) \neq 0$ ہو تب مطابقتی نقطہ $(f(a), a)$ پر $y = f^{-1}(x)$ کا ڈھلوان $\frac{1}{f'(a)}$ ہو گا (شکل ۷.۶)۔ یوں نقطہ $f(a)$ پر f^{-1} کا تفرق، نقطہ a پر f کے تفرق کا مقلوب ہو گا۔ یہ تعلق اس صورت درست ہو گا جب f درج ذیل مسئلہ میں پیش شرائط کو مطمئن کرتا ہو۔ یہ شرائط اعلیٰ احصاء سے حاصل ہوتی ہیں۔

مسئلہ ۷.۱: **معکوس تفاعل کے تفرق کا قاعدہ**

اگر وقفہ I کے ہر نقطہ پر f قابل تفرق ہو اور I پر $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ کبھی بھی صفر نہ ہو، تب وقفہ $f(I)$ کے ہر نقطہ پر f^{-1} قابل تفرق ہو گا۔ کسی ایک مخصوص نقطہ $f(a)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کا تفرق نقطہ a پر تفرق $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ کا مقلوب ہو گا۔

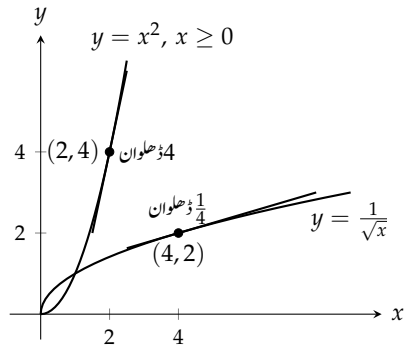
$$\left(\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}\right)_{x=f(a)} = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{x=a}} \tag{۱}$$

اس کو مختصراً درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

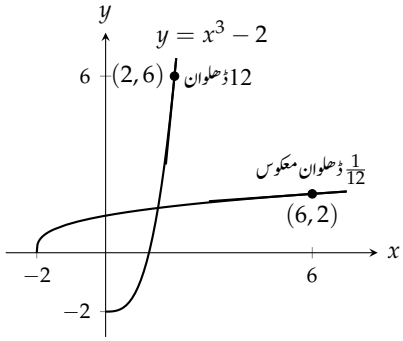
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f'} \tag{۲}$$

مثال ۷.۵: تفاعل $f(x) = x^2,\ x \geq 0$ اور اس کے معکوس $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ کے لیے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = 2x, \quad \frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ x > 0$$



شکل ۷.۷: نقطہ $(4,2)$ پر $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ کا تفرق نقطہ $(2,4)$ پر $f(x) = x^2$ کے تفرق کا مقلوب ہو گا (مثال ۷.۵)۔



شکل ۷.۸: نقطہ $x = 2$ پر $f(x) = x^3 - 2$ کا تفرق ہمیں نقطہ $x = 6$ پر f^{-1} کا تفرق دیتا ہے (مثال ۷.۶)۔

۱۰۱۱۸ نقطہ $(4,2)$ لکیر $y = x$ کی دوسری طرف نقطہ $(2,4)$ کا عکس ہے (شکل ۷.۷)۔ ان نقطوں پر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 2x = 2(2) = 4 \qquad \text{نقطہ } (2,4) \text{ پر}$$

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} = \frac{1}{\mathrm{d}f/\,\mathrm{d}x} \qquad \text{نقطہ } (4,2) \text{ پر}$$

۱۰۱۱۹ □

۱۰۱۲۰ بعض اوقات f^{-1} کا کلیہ نہ جانتے ہوئے بھی مساوات ۱ کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی مخصوص قیمتیں تلاش کی جا سکتی ہیں۔

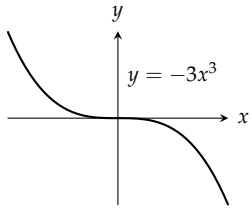
۱۰۱۲۱ مثال ۷.۶: مان لیں $f(x) = x^3 - 2$ ہے۔ $f^{-1}(x)$ کا کلیہ دریافت کیے بغیر نقطہ $x = 6 = f(2)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت تلاش
۱۰۱۲۲ کریں۔

۱۰۱۲۳ **حل** (شکل ۷.۸)

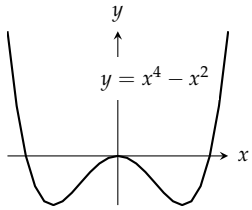
$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=2} = \left.3x^2\right|_{x=2} = 12$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=f(2)} = \frac{1}{12} \qquad \text{مساوات ۱}$$

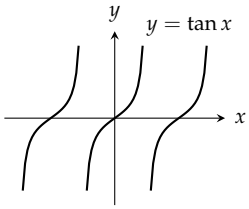
۱۰۱۲۴ □



شکل ۷.۹: ترسیم سوال ۷.۱



شکل ۷.۱۰: ترسیم سوال ۷.۲



شکل ۷.۱۱: ترسیم سوال ۷.۳

مسئلہ ۷.۱ کو ایک مختلف نقطہ نظر سے دیکھا جا سکتا ہے۔ اگر $x = a$ پر $y = f(x)$ قابل تفرق ہو اور ہم x کی قیمت میں معمولی تبدیلی $\mathrm{d}x$ لائیں تب y میں مطابقتی تبدیلی تخمیناً

$$\mathrm{d}y = f'(a)\,\mathrm{d}x$$

ہو گی۔ اس کا مطلب ہے کہ y کی تبدیلی، x کی تبدیلی کے تقریباً $f'(a)$ گنا ہو گی اور x کی تبدیلی، y کی تبدیلی کے تقریباً $\frac{1}{f'(a)}$ گنا ہو گی۔

سوالات

یک بہ یک تفاعل کی نشاندہی

سوال ۷.۱ تا سوال ۷.۶ میں تفاعل کی ترسیمات دی گئی ہیں۔ ان میں یک بہ یک تفاعل کی نشاندہی کریں۔

سوال ۷.۱: ترسیم شکل ۷.۹ میں دی گئی ہے۔

سوال ۷.۲: ترسیم شکل ۷.۱۰ میں دی گئی ہے۔

سوال ۷.۳: ترسیم شکل ۷.۱۱ میں دی گئی ہے۔

سوال ۷.۴: ترسیم شکل ۷.۱۲ میں دی گئی ہے۔

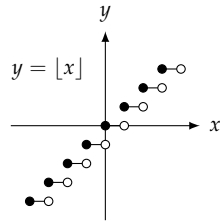
سوال ۷.۵: ترسیم شکل ۷.۱۳ میں دی گئی ہے۔

سوال ۷.۶: ترسیم شکل ۷.۱۴ میں دی گئی ہے۔

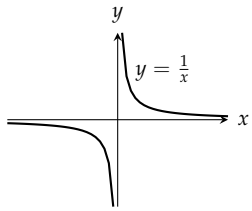
معکوس تفاعل کی ترسیم

سوال ۷.۷ تا سوال ۷.۱۰ میں $y = f(x)$ کی ترسیم دی گئی ہے۔ اس کو نقل کر کے لکیر $y = x$ بھی کھینچیں۔ لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکل استعمال کرتے ہوئے $y = f^{-1}(x)$ ترسیم کریں۔ (f^{-1} کا کلیہ معلوم کرنے کی ضرورت نہیں۔) f^{-1} کے دائرہ کار اور سعت کی نشاندہی کریں۔

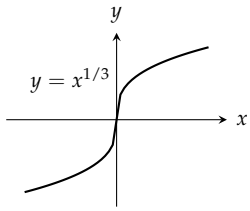
سوال ۷.۷: تفاعل کی ترسیم شکل ۷.۱۵ میں دی گئی ہے۔



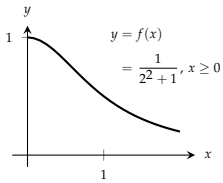
شکل ۷.۱۲: ترسیم سوال ۷.۴



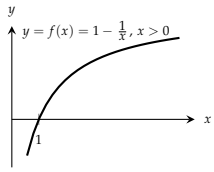
شکل ۷.۱۳: ترسیم سوال ۷.۵



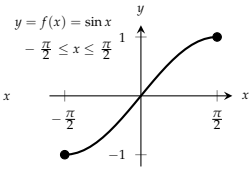
شکل ۷.۱۴: ترسیم سوال ۷.۶



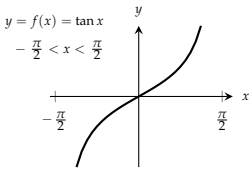
شکل ۷.۱۵: ترسیم سوال ۷.۷



شکل ۷.۱۶: ترسیم سوال ۷.۸



شکل ۷.۱۷: ترسیم سوال ۷.۹



شکل ۷.۱۸: ترسیم سوال ۷.۱۰

۱۰۱۴۳ سوال ۷.۸: تفاعل کی ترسیم شکل ۷.۱۶ میں دی گئی ہے۔

۱۰۱۴۴ سوال ۷.۹: تفاعل کی ترسیم شکل ۷.۱۷ میں دی گئی ہے۔

۱۰۱۴۵ سوال ۷.۱۰: تفاعل کی ترسیم شکل ۷.۱۸ میں دی گئی ہے۔

۱۰۱۴۶

۱۰۱۴۷ سوال ۷.۱۱: (ا) تفاعل $f(x) = \sqrt{1-x^2}, 0 \leq x \leq 1$ ترسیم کریں۔ اس ترسیم میں کون سا تشاکل پایا جاتا ہے؟ (ب) دکھائیں کہ
۱۰۱۴۸ f اپنا ہی معکوس ہے۔ (یاد رہے کہ $x \geq 0$ کی صورت میں $\sqrt{x^2} = x$ ہوتا ہے۔)

۱۰۱۴۹ سوال ۷.۱۲: (ا) تفاعل $f(x) = \frac{1}{x}$ ترسیم کریں۔ اس ترسیم میں کون سا تشاکل پایا جاتا ہے؟ (ب) دکھائیں کہ f اپنا ہی معکوس ہے۔

۱۰۱۵۰ معکوس تفاعل کے کلیات

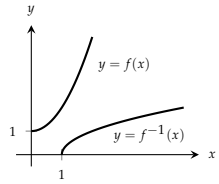
۱۰۱۵۱ سوال ۷.۱۳ تا سوال ۷.۱۸ میں تفاعل $y = f(x)$ کا کلیہ دیا گیا ہے۔ f اور f^{-1} کی ترسیمات بھی دکھائی گئی ہیں۔ f^{-1} کا کلیہ تلاش کریں۔

۱۰۱۵۲ سوال ۷.۱۳: $f(x) = x^2 + 1, \quad x \geq 0$ ترسیم شکل ۷.۱۹ میں دی گئی ہے۔

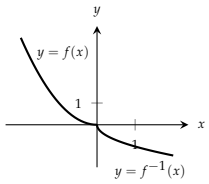
۱۰۱۵۳ سوال ۷.۱۴: $f(x) = x^2, \quad x \leq 0$ ترسیم شکل ۷.۲۰ میں دی گئی ہے۔

۱۰۱۵۴ سوال ۷.۱۵: $f(x) = x^3 - 1$ ترسیم شکل ۷.۲۱ میں دی گئی ہے۔

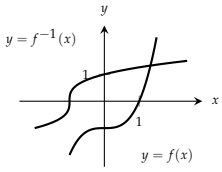
۱۰۱۵۵ سوال ۷.۱۶: $f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad x \geq 1$ ترسیم شکل ۷.۲۲ میں دی گئی ہے۔



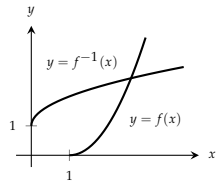
شکل ۷.۱۹: ترسیم سوال ۷.۱۳



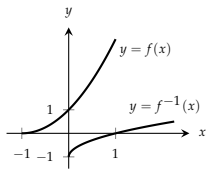
شکل ۷.۲۰: ترسیم سوال ۷.۱۴



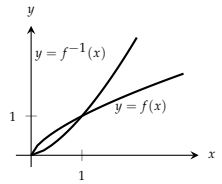
شکل ۷.۲۱: ترسیم سوال ۷.۱۵



شکل ۷.۲۲: ترسیم سوال ۷.۱۶



شکل ۷.۲۳: ترسیم سوال ۷.۱۷



شکل ۷.۲۴: ترسیم سوال ۷.۱۸

سوال ۷.۱۷: $f(x) = (x+1)^2, \quad x \geq -1$ ترسیم شکل ۷.۲۳ میں دی گئی ہے۔

سوال ۷.۱۸: $f(x) = x^{2/3}, \quad x \geq 0$ ترسیم شکل ۷.۲۴ میں دی گئی ہے۔

سوال ۷.۱۹ تا سوال ۷.۲۴ میں تفاعل $y = f(x)$ کا کلیہ دیا گیا ہے۔ f^{-1} دریافت کریں اور اس کے دائرہ کار اور سعت کی نشاندہی کریں۔ تصدیق کی خاطر دکھائیں کہ $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$ ہے۔

سوال ۷.۱۹: $f(x) = x^5$

سوال ۷.۲۰: $f(x) = x^4, \quad x \geq 0$

سوال ۷.۲۱: $f(x) = x^3 + 1$

سوال ۷.۲۲: $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{7}{2}$

سوال ۷.۲۳: $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0$

سوال ۷.۲۴: $f(x) = \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0$

معکوس تفاعل کے تفرق

سوال ۷.۲۵ تا سوال ۷.۲۸ میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. $f^{-1}(x)$ تلاش کریں۔

ب. f اور f^{-1} کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

ج. نقطہ $x = a$ پر $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ اور نقطہ $x = f(a)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت حاصل کریں۔ تصدیق کریں کہ ان نقطوں پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)}$ ہو گا۔

سوال ۷.۲۵: $f(x) = 2x + 3, \quad a = -1$

سوال ۷.۲۶: $f(x) = \frac{x}{5} + 7, \quad a = -1$

سوال ۷.۲۷: $f(x) = 5 - 4x, \quad a = \frac{1}{2}$

سوال ۷.۲۸: $f(x) = 2x^2, \quad x \geq 0, \quad a = 5$

سوال ۷.۲۹:

۱. دکھائیں کہ $f(x) = x^3$ اور $g(x) = \sqrt[3]{x}$ ایک دوسرے کے معکوس ہیں۔

۲. f اور g ترسیم کریں جس میں ان کے نقاط تقاطع $(1,1)$ اور $(-1,-1)$ نظر آئیں۔ آپ کو لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکل نظر آنا چاہیے۔

۳. نقاط $(1,1)$ اور $(-1,-1)$ پر f اور g کی ترسیمات کے مماس کا ڈھلوان تلاش کریں۔ (کل چار مماس۔)

۴. مبدا پر ان منحنیات کے مماس تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۰:

۱. دکھائیں کہ $h(x) = \frac{x^3}{4}$ اور $k(x) = (4x)^{1/3}$ ایک دوسرے کے معکوس ہیں۔

۲. h اور k ترسیم کریں جس میں ان کے نقاط تقاطع $(2,2)$ اور $(-2,-2)$ نظر آئیں۔ آپ کو لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکل نظر آنا چاہیے۔

۳. نقاط $(2,2)$ اور $(-2,-2)$ پر h اور k کی ترسیمات کے مماس کا ڈھلوان تلاش کریں۔ (کل چار مماس۔)

۴. مبدا پر ان منحنیات کے مماس تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۱: مان لیں $f(x) = x^3 - 3x^2 - 1,\ x \geq 2$ ہے۔ نقطہ $x = -1 = f(3)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۲: مان لیں $f(x) = x^2 - 4x - 5,\ x > 2$ ہے۔ نقطہ $x = 0 = f(5)$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۳: فرض کریں قابل تفرق تفاعل $y = f(x)$ کا معکوس پایا جاتا ہے اور f کی ترسیم نقطہ $(2,4)$ سے گزرتی ہے، جہاں اس کا ڈھلوان $\frac{1}{3}$ ہے۔ نقطہ $x = 4$ پر $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۴: فرض کریں قابل تفرق تفاعل $y = g(x)$ کا معکوس پایا جاتا ہے اور g کی ترسیم مبدا سے گزرتی ہے، جہاں اس کا ڈھلوان 2 ہے۔ مبدا پر g^{-1} کی ترسیم کا ڈھلوان تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۵:

ا. تفاعل $f(x) = mx$ کا معکوس تلاش کریں، جہاں m غیر صفر مستقل ہے۔

ب. تفاعل $y = f(x)$ کی ترسیم مبدا سے گزرتی لکیر ہے، جس کا ڈھلوان m غیر صفر ہے۔ اس تفاعل کے معکوس کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

سوال ۷.۳۶: دکھائیں کہ $f(x) = mx + b$، جہاں m اور b مستقل ہیں اور $m \neq 0$ ہے، کا معکوس ایک لکیر ہے جس کا ڈھلوان $\frac{1}{m}$ ہے اور جو محور y کو $-\frac{b}{m}$ پر قطع کرتی ہے۔

سوال ۷.۳۷:

ا. تفاعل $f(x) = x + 1$ کا معکوس تلاش کریں۔ f اور اس کا معکوس ایک ساتھ ترسیم کریں۔ لکیر $y = x$ کو بھی شامل کریں۔

ب. تفاعل $f(x) = x + b$ کا معکوس تلاش کریں جہاں b مستقل ہے۔ f^{-1} کی ترسیم کا f کی ترسیم کے ساتھ کیا تعلق ہے؟

ج. لکیر $y = x$ کے متوازی تفاعل کے معکوس کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہو گا؟

سوال ۷.۳۸:

ا. تفاعل $f(x) = -x + 1$ کا معکوس معلوم کریں۔ لکیر $y = -x + 1$ اور لکیر $y = x$ کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ ان لکیروں کے بیچ زاویہ کتنا ہے؟

ب. تفاعل $f(x) = -x + b$ کا معکوس معلوم کریں جہاں b مستقل ہے۔ لکیر $y = -x + b$ اور لکیر $y = x$ کے مابین زاویہ کتنا ہے؟

ج. لکیر $y = x$ کے عمودی تفاعل کے معکوس کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

بڑھتا ہوا اور گھٹتا ہوا تفاعل

سوال ۷.۳۹: اگر وقفہ I میں کسی دو نقطوں x_1 اور x_2 پر

$$x_2 > x_1 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) > f(x_1)$$

ہو تب I پر تفاعل $f(x)$ بڑھتا ہو گا (حصہ ۴.۲)۔ اسی طرح درج ذیل صورت میں I پر $f(x)$ گھٹتا ہو گا۔

$$x_2 > x_1 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) < f(x_1)$$

دکھائیں کہ بڑھتے تفاعل اور گھٹتے تفاعل یک بہ یک تفاعل ہیں یعنی دکھائیں کہ I میں کسی بھی دو نقطوں x_1 اور x_2 کے لیے $x_2 \neq x_1$ سے مراد $f(x_2) \neq f(x_1)$ ہو گا۔

سوال ۷.۴۰ تا سوال ۷.۴۴ میں سوال ۷.۳۹ کے نتائج استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ دیے گئے تفاعل کا اپنے وقفہ پر معکوس پایا جاتا ہے۔ مسئلہ ۷.۱ کی مدد سے $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x}$ کا کلیہ تلاش کریں۔

سوال ۷.۴۰: $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{5}{6}$

سوال ۷.۴۱: $f(x) = 27x^3$

سوال ۷.۴۲: $f(x) = 1 - 8x^3$

سوال ۷.۴۳: $f(x) = (1 - x)^3$

سوال ۷.۴۴: $f(x) = x^{5/3}$

نظریہ اور استعمال

سوال ۷.۴۵: اگر $f(x)$ یک بہ یک ہو تب $g(x) = -f(x)$ کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۷.۴۶: اگر $f(x)$ یک بہ یک اور غیر صفر ہو تب $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۷.۴۷: فرض کریں کہ g کی سعت، f کے دائرہ کار میں پائی جاتی ہے، لہٰذا مرکب تفاعل $f \circ g$ معین ہے۔ اگر f اور g یک بہ یک ہوں تب $f \circ g$ کے بارے میں کیا کہنا ممکن ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۷.۴۸: اگر مرکب تفاعل $f \circ g$ یک بہ یک ہو تب کیا g لازماً یک بہ یک ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۷.۴۹: فرض کریں وقفہ $[a, b]$ پر $f(x)$ مثبت، استمراری اور بڑھتا تفاعل ہے۔ ترسیم کی تاویل کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}\,\mathrm{d}x = bf(b) - af(a)$$

سوال ۷.۵۰: مستقل a ، b ، c ، اور d پر مسلط وہ شرائط تلاش کریں جو ناطق تفاعل

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

کا معکوس ممکن بناتی ہیں۔

سوال ۷.۵۱: اگر ہم $f^{-1}(x)$ کی جگہ $g(x)$ لکھیں تب مساوات ۱ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} \qquad \Longrightarrow g'(f(a)) \cdot f'(a) = 1$$

اس میں a کی جگہ x پُر کرنے سے

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

ملتا ہے جو زنجیری قاعدہ یاد دلاتی ہے۔ یقیناً درج بالا اور زنجیری قاعدہ کے بیچ تعلق پایا جاتا ہے۔

فرض کریں f اور g قابل تفرق اور ایک دوسرے کے معکوس ہیں لہٰذا $(f \circ g)(x) = x$ ہو گا۔ زنجیری قاعدہ استعمال کرتے ہوئے اس مساوات کے دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لے کر $(f \circ g)'(x)$ کو f اور g کے تفرق کی صورت میں لکھ کر دیکھیں کیا حاصل ہوتا ہے؟ (مسئلہ ۷.۱ کو دیکھنے کا یہ بھی ایک طریقہ ہے۔)

سوال ۷.۵۲: ترکیب چھلا اور ترکیب خول کی مساوات

فرض کریں وقفہ $a \leq x \leq b$ پر f قابل تفرق ہے جہاں $a > 0$ ہے اور f کا قابل تفرق معکوس f^{-1} پایا جاتا ہے۔ تفاعل f ، لکیر

$x = a$ اور لکیر $y = f(b)$ کے بیچ خطہ، کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کے حجم کے تکمل، جو ترکیب چھلا اور ترکیب خول دیتی ہیں، کی قیمتیں یکساں ہیں۔

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \left((f^{-1}(y))^2 - a^2\right) \mathrm{d}y = \int_a^b 2\pi x(f(b) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

اس مساوات کو ثابت کرنے کی خاطر درج ذیل متعارف کریں۔

$$C(t) = \int_{f(a)}^{f(t)} \pi\left((f^{-1}(y))^2 - a^2\right) \mathrm{d}y$$
$$K(t) = \int_a^t 2\pi x(f(t) - f(x))\,\mathrm{d}x$$

اس کے بعد دکھائیں کہ $[a, b]$ کے کسی نقطے پر $C(t)$ اور $K(t)$ کی قیمتیں ایک جیسی ہیں اور $[a, b]$ پر ان کے تفرق بھی ایک جیسے ہیں۔ صفحہ ۴۲۳ پر سوال ۵.۱۲۶ کے نتیجہ کے مطابق $[a, b]$ میں تمام t کے لیے $C(t) = K(t)$ ہوگا۔ بالخصوص $C(b) = K(b)$ ہوگا۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۷.۵۳ تا سوال ۷.۶۰ میں آپ چند تفاعل اور ان کے معکوس پر غور کریں گے۔ اس کے علاوہ دیے گئے نقطہ پر ان کے تفرق اور خطی تخمینی تفاعل پر غور کریں گے۔ ان سوالات میں درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دیے گئے وقفہ پر تفاعل $y = f(x)$ اور اس کا تفرق ترسیم کریں۔ آپ کیسے جانتے ہیں کہ اس وقفہ پر f یک بہ یک ہے؟

ب. مساوات $y = f(x)$ کو x کے لیے حل کر کے حاصل معکوس تفاعل کو g سے ظاہر کریں۔

ج. دیے گئے نقطہ $(x_0, f(x_0))$ پر f کے مماس کی مساوات دریافت کریں۔

د. لکیر $y = x$ کی دوسری جانب تشاکلی نقطہ $(f(x_0), x_0)$ پر g کے مماس کی مساوات دریافت کریں۔ مسئلہ ۷.۱ کی مدد سے اس مماسی لکیر کا ڈھلوان معلوم کریں۔

ھ. تفاعل f ، g ، لکیر $y = x$ ، دونوں مماسی خطوط، اور نقطہ $(x_0, f(x_0))$ اور $(f(x_0), x_0)$ کو جوڑنے والا سیدھا خط ترسیم کریں۔ آپ کو جو تشاکلی نظر آتی ہے اس پر تبصرہ کریں؟

سوال ۷.۵۳: $y = \sqrt{3x - 2}, \quad \frac{2}{3} \le x \le 4, \quad x_0 = 3$

سوال ۷.۵۴: $y = \frac{3x+2}{2x-11}, \quad -2 \le x \le 2, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

سوال ۷.۵۵: $y = \frac{4x}{x^2+1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

سوال ۷.۵۶: $y = \frac{x^3}{x^2+1}, \quad -1 \le x \le 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

سوال ۷.۵۷: $y = x^3 - 3x^2 - 1, \quad 2 \le x \le 5, \quad x_0 = \frac{27}{10}$

سوال ۷.۵۸: $y = 2 - x - x^3, \quad -2 \le x \le 2, \quad x_0 = \frac{3}{2}$

سوال ۷.۵۹: $y = e^x, \quad -3 \le x \le 5, \quad x_0 = 1$

سوال ۷.۶۰: $y = \sin x, \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}, \quad x_0 = 1$

سوال ۷.۶۱ اور سوال ۷.۶۲ میں درج بالا تمام اقدام بروئے کار لاتے ہوئے دیے گئے وقفہ پر خفی تفاعل کو حل کر کے $y = f(x)$ اور $x = f^{-1}(y)$ حاصل کریں۔

سوال ۷.۶۱: $y^{1/3} - 1 = (x+2)^3, \quad -5 \le x \le 5, \quad x_0 = -\frac{3}{2}$

سوال ۷.۶۲: $\cos y = x^{1/5}, \quad 0 \le x \le 1, \quad x_0 = \frac{1}{2}$

۷.۲ قدرتی لوگارتھم

ریاضیات اور سائنس میں تفاعل اور معکوس کی اہم ترین جوڑی قدرتی لوگارتھم $\ln x$ اور قوت نما تفاعل e^x کی جوڑی ہے۔ تفاعل e^x کی وضاحت $\ln x$ سے ہوتی ہے لہٰذا ہم پہلے $\ln x$ متعارف کرتے ہیں۔ شروع میں لوگارتھم کی اہمیت حساب میں آسانی پیدا کرنے کی وجہ سے سامنے آئی۔ سترھویں صدی میں لوگارتھم کی خوبیوں نے فلکی میکانیات کا حساب اور ساحل سے دور جہاز رانی ممکن بنایا۔ اگرچہ آج کل پیچیدہ حساب کمپیوٹر کی مدد سے کیا جاتا ہے، بہر حال لوگارتھم کی خوبیاں آج بھی اتنی ہی اہمیت رکھتی ہیں۔

قدرتی لوگارتھمی تفاعل

مثبت عدد x کے قدرتی لوگارتھم کو $\ln x$ لکھا جاتا ہے جس کی تعریف درج ذیل تکمل دیتا ہے۔

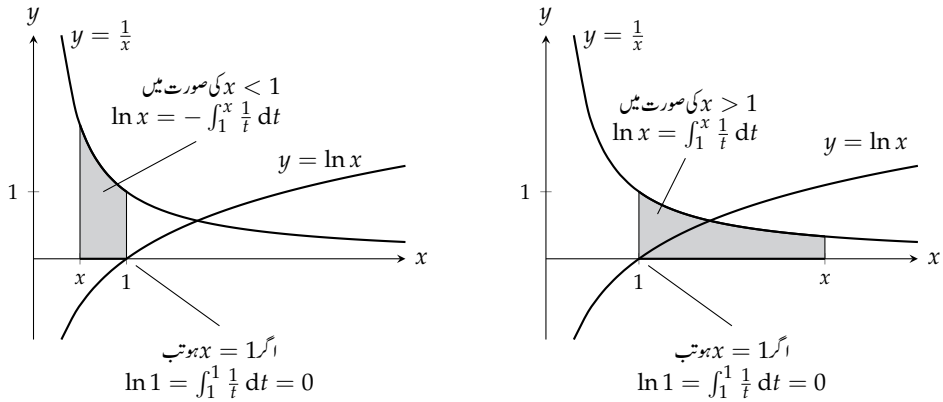
$$\ln x = \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0 \qquad \text{قدرتی لوگارتھمی تفاعل کی تعریف}$$

اگر $x > 1$ ہو تب $t = 1$ سے $t = x$ تک منحنی $y = \frac{1}{t}$ کے نیچے رقبہ $\ln x$ ہو گا (شکل ۷.۲۵)۔ اگر $0 < x < 1$ ہو تب x سے 1 تک منحنی $y = \frac{1}{t}$ کے نیچے رقبے کا منفی $\ln x$ ہو گا۔ قدرتی لوگارتھمی تفاعل وقفہ $x \le 0$ کے لیے غیر معین ہے۔ لوگارتھمی تفاعل کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \text{بالائی اور زیریں حد یکساں ہیں}$$

دھیان رہے کہ ہم شکل ۷.۲۵ میں $y = \frac{1}{x}$ ترسیم کرتے ہیں لیکن تکمل میں $y = \frac{1}{t}$ استعمال کرتے ہیں۔ ہر متغیر کو x لکھنے سے

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$



شکل ۷.۲۵: تفاعل $y = \frac{1}{x}$, $x > 0$ اور قدرتی لوگارتھمی تفاعل $y = \ln x$ کا تعلق۔ قدرتی لوگارتھمی تفاعل $x > 1$ کے لیے مثبت اور $x < 1$ کے لیے منفی ہے۔

۱۰۲۸۲ لکھا جائے گا جہاں x کے دو مختلف معنی ہیں۔ اسی لیے ہم تکمل میں متغیر کو تبدیل کرتے ہوئے t لکھتے ہیں۔

۱۰۲۸۳ x کی مختلف قیمتوں کے لیے تین اعشاریہ مقامات تک درست قدرتی لوگارتھمی قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	0	0.05	0.5	1	2	3	4	10
$\ln x$	غیر معین	-3.00	-0.69	0	0.69	1.10	1.39	2.30

۱۰۲۸۴ قدرتی لوگارتھمی تفاعل کا تفرق

۱۰۲۸۵ احصاء کے بنیادی مسئلہ کے جزو اول (مسئلہ ۵.۳) سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

۱۰۲۸۶ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا x کی ہر مثبت قیمت کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x}$$

۱۰۲۸۷ اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو اور u کی قیمتیں مثبت ہوں، تاکہ $\ln u$ معین ہو، تب تفاعل $y = \ln u$ پر زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

کے اطلاق سے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\ln u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

ملتا ہے، لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u = \frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad u > 0 \tag{۱}$$

مثال ۷.۷:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln 2x = \frac{1}{2x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x) = \frac{1}{2x}(2) = \frac{1}{x}$$

□

آپ نے مثال ۷.۷ میں دیکھا کہ تفاعل $y = \ln 2x$ کا تفرق وہی ہے جو تفاعل $y = \ln x$ کا ہے۔ درحقیقت کسی بھی تفاعل $y = \ln ax$ کے لیے درست ہے جہاں a کوئی عدد ہے:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln ax = \frac{1}{ax}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax) = \frac{1}{ax}(a) = \frac{1}{x} \tag{۲}$$

مثال ۷.۸: اگر مساوات ۱ میں $u = x^2 + 3$ پُر کیا جائے تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+3) = \frac{1}{x^2+3}\cdot 2x = \frac{2x}{x^2+3}$$

□

خواص لوگارتھم

کمپیوٹر کی ایجاد سے پہلے ریاضیات میں سب سے زیادہ آسانی لوگارتھم کی وجہ سے ہوئی[۶]۔ لوگارتھم کی وہ خوبیاں جن کی بدولت حساب میں آسانی پیدا ہوئی، جدول ۷.۱ میں دی گئی ہیں۔ ان خواص کی وجہ سے مثبت اعداد کے ضرب کی جگہ جمع اور مثبت اعداد کی تقسیم کی جگہ تفریق استعمال ہونے لگا۔ اس کے علاوہ طاقت کی جگہ ضرب استعمال کیا جانے لگا۔ وقتی طور پر ہم جزود میں طاقت n کو ناطق عدد تصور کرتے ہیں۔ اس کی وضاحت جزود کے ثبوت کے دوران ہو گی۔

[۶] اسکاچی ریاضی دان جان نیپر نے سولھویں صدی میں لوگارتھم ایجاد کیا۔ انہوں نے اپنی زندگی کے آخری بیس برس لوگارتھمی جدول مکمل کرنے میں صرف کیے

جدول ۷.۱: خواص قدرتی لوگارتھم

کسی بھی اعداد $a > 0$ اور $x > 0$ کے لیے۔		
ا)	قاعدہ ضرب	$\ln ax = \ln a + \ln x$
ب)	قاعدہ حاصل تقسیم	$\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$
ج)	قاعدہ مقلوب	$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$
د)	قاعدہ طاقت	$\ln x^n = n \ln x$

۱۰۳۰۰ مثال ۷.۹:

$$\ln 6 = \ln(2 \cdot 3) = \ln 2 + \ln 3 \qquad \text{ضرب}$$

$$\ln 4 - \ln 5 = \ln \frac{4}{5} = \ln 0.8 \qquad \text{حاصل تقسیم}$$

$$\ln \frac{1}{8} = -\ln 8 \qquad \text{مقلوب}$$

$$= -\ln 2^3 = -3 \ln 2 \qquad \text{طاقت}$$

۱۰۳۰۱ □

۱۰۳۰۲ مثال ۷.۱۰:

$$\ln 4 + \ln \sin x = \ln(4 \sin x) \qquad \text{ضرب}$$

$$\ln \frac{x+1}{2x-3} = \ln(x+1) - \ln(2x-3) \qquad \text{حاصل تقسیم}$$

$$\ln \sec x = \ln \frac{1}{\cos x} = -\ln \cos x \qquad \text{مقلوب}$$

$$\ln \sqrt[3]{x+1} = \ln(x+1)^{1/3} = \frac{1}{3} \ln(x+1) \qquad \text{طاقت}$$

۱۰۳۰۳ □

۱۰۳۰۴ ثبوت: برائے $\ln ax = \ln a + \ln x$

۱۰۳۰۵ اس کی دلیل عجیب اور عمدہ ہے۔ ہم دیکھتے ہیں کہ $\ln ax$ کا تفرق اور $\ln x$ کا تفرق یکساں ہیں (مساوات ۲)۔ مسئلہ اوسط قیمت کا ضمنی نتیجہ دوم (صفحہ

۱۰۳۰۶ ۲.۴) کہتا ہے کہ ان تفاعلات میں مستقل کا فرق ہو گا۔

$$\ln ax = \ln x + C \qquad C \text{ مستقل} \tag{۳}$$

۱۰۳۰۷ اب صرف یہ دکھانا باقی ہے کہ C اور $\ln a$ برابر ہیں۔

۱۰۳۰۸ مساوات ۳ x کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے درست ہے لہٰذا یہ $x = 1$ کے لیے بھی درست ہو گا۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \ln(a \cdot 1) &= \ln 1 + C \\ \ln a &= 0 + C && \ln 1 = 0 \\ C &= \ln a && \text{ترتیب دی گئی ہے} \end{aligned}$$

۱۰۳۰۹ مساوات ۳ میں $C = \ln a$ پُر کرنے سے ہمیں درکار تعلق حاصل ہوتا ہے۔

$$\ln ax = \ln a + \ln x \tag{۴}$$

۱۰۳۱۰ □

۱۰۳۱۱ ثبوت: برائے $\ln \frac{a}{x} = \ln a - \ln x$

۱۰۳۱۲ ہم مساوات ۴ کو دو مرتبہ استعمال کر کے ثبوت پیش کرتے ہیں۔ مساوات ۴ میں a کی جگہ $\frac{1}{x}$ پُر کرنے سے

$$\begin{aligned} \ln \frac{1}{x} + \ln x &= \ln \left(\frac{1}{x} \cdot x\right) \\ &= \ln 1 = 0 \end{aligned}$$

۱۰۳۱۳ ملتا ہے لہٰذا

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

۱۰۳۱۴ ہو گا۔ مساوات ۴ میں x کی جگہ $\frac{1}{x}$ پُر کرنے سے

$$\begin{aligned} \ln \frac{a}{x} &= \ln \left(a \cdot \frac{1}{x}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{x} \\ &= \ln a - \ln x \end{aligned}$$

۱۰۳۱۵ ملتا ہے۔

۱۰۳۱۶ □

۱۰۳۱۷ ثبوت: برائے $\ln x^n = n \ln x$ جہاں n ناطق ہے

۱۰۳۱۸ تمام مثبت x قیمتوں کے لیے درج ذیل ہوگا۔ (درج ذیل میں یاد رہے کہ ہم نے طاقتی قاعدہ صرف ناطق اعداد کے لیے ثابت کیا ہے۔)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x^n &= \frac{1}{x^n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) && \text{مساوات ا میں } u = x^n\\ &= \frac{1}{x^n}nx^{n-1} && \text{یہاں } n \text{ کا ناطق ہونا ضروری ہے}\\ &= n\cdot\frac{1}{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(n\ln x)\end{aligned}$$

۱۰۳۱۹ چونکہ $\ln x^n$ اور $n \ln x$ کے تفرق برابر ہیں لہٰذا

$$\ln x^n = n\ln x + C \qquad C \text{ مستقل}$$

۱۰۳۲۰ ہوگا جس میں $x = 1$ پُر کرنے سے $C = 0$ ملتا ہے۔

۱۰۳۲۱ □

۱۰۳۲۲ اگرچہ ہم نے غیر ناطق n کے لیے قاعدہ $\ln x^n = n \ln x$ ثابت نہیں کیا، یہ قاعدہ غیر ناطق اعداد کے لیے بھی درست ہے، لہٰذا اس کو بغیر فقر
۱۰۳۲۳ استعمال کریں۔

۱۰۳۲۴ $\ln x$ کی ترسیم اور سعت

۱۰۳۲۵ چونکہ $x > 0$ کے لیے $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$ ہے لہٰذا $\ln x$ متغیر x کا بڑھتا تفاعل ہے۔ اس کا دور تبی تفرق، $-\frac{1}{x^2}$، منفی ہے لہٰذا $\ln x$
۱۰۳۲۶ کی ترسیم نیچے مقعر ہے۔

۱۰۳۲۷ اعدادی تراکیب سے $\ln 2$ کی قیمت تقریباً 0.69 حاصل ہوتی ہے۔ یوں

$$\ln 2^n = n\ln 2 > n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{n}{2}$$

۱۰۳۲۸ اور

$$\ln 2^{-n} = -n\ln 2 < -n\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{n}{2}$$

۱۰۳۲۹ ہوں گے۔ ان سے درج ذیل اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

$$\lim_{x\to\infty}\ln x = \infty \quad \text{اور} \quad \lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$$

۱۰۳۳۰ $\ln x$ کا دائرہ کار مثبت حقیقی اعداد کا سلسلہ ہے، جبکہ $\ln x$ کی سعت پوری حقیقی لکیر ہے۔

لوگارتھمی تفرق

حاصل ضرب، حاصل تقسیم، اور طاقت پر مبنی مثبت تقاعل کا تفرق لینے سے پہلے تقاعل کا لوگارتھم لینا سود مند ثابت ہوتا ہے۔ لوگارتھم لیتے ہوئے ہم جدول ۷.۱ کے قواعد استعمال کرتے ہوئے تقاعل کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں، جس کا تفرق نسبتاً آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ اس عمل کو **لوگارتھمی تفرق**[۷] کہتے ہیں۔

مثال ۷.۱۱: تقاعل $y = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}$, $x > 1$ کے لیے $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ تلاش کریں۔

حل

ہم دونوں اطراف کا قدرتی لوگارتھم لے کر جدول ۷.۱ کے قواعد سے سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1} \\
&= \ln\left((x^2+1)(x+3)^{1/2}\right) - \ln(x-1) && \text{قاعدہ حاصل تقسیم} \\
&= \ln(x^2+1) + \ln(x+3)^{1/2} - \ln(x-1) && \text{قاعدہ ضرب} \\
&= \ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x+3) - \ln(x-1) && \text{قاعدہ طاقت}
\end{aligned}$$

اب ہم دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔ (بائیں ہاتھ مساوات ۱ استعمال کرتے ہیں۔)

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2+1}\cdot 2x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1}$$

اس کو $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کے لیے حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1}\right)$$

آخر میں ہم y کی قیمت پُر کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(x^2+1)(x+3)^{1/2}}{x-1}\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1}\right)$$

□

[۷] logarithmicdifferentiation

۱۰۳۴۲ تفاعل $y = f(x) > 0$ کا لوگارتھمی تفرق

۱۰۳۴۳ کسی بھی تفاعل کا لوگارتھمی تفرق درج ذیل اقدام سے حاصل ہو گا۔

$$\ln y = \ln f(x)$$ دونوں اطراف لوگارتھم لیں

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x))$$ دونوں اطراف تفرق لیں

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x))$$ بائیں ہاتھ مساوات ۱

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x))$$ $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کے لیے حل کریں

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln f(x))$$ $y = f(x)$ پُر کریں

۱۰۳۴۴ تکمل $\int \frac{\mathrm{d}u}{u}$

۱۰۳۴۵ مساوات ۱ سے تکمل کا کلیہ

$$\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln u + C \qquad (۵)$$

C مستقل

۱۰۳۴۶ ملتا ہے، جہاں u مثبت قابل تفرق تفاعل ہے۔ منفی u کی صورت میں کیا ہو گا؟ اگر u منفی ہو تب $-u$ مثبت ہو گا لہٰذا

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u &= \int \frac{1}{(-u)}\,\mathrm{d}(-u)\\ &= \ln(-u) + C \qquad (۶)\end{aligned}$$

مساوات ۵ میں u کی جگہ $-u$

۱۰۳۴۷ لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات ۵ اور مساوات ۶ میں دائیں ہاتھ کو $\ln|x| + C$ لکھا جا سکتا ہے۔ یوں دونوں مساوات کو

$$\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C \qquad (۷)$$

۱۰۳۴۸ میں ضم کیا جا سکتا ہے، جہاں u غیر صفر قابل تفرق تفاعل ہے۔

۱۰۳۴۹ ہم درج ذیل جانتے ہیں

$$\int u^n\,\mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

۱۰۳۵۰ اور $n = -1$ کے لیے مساوات ۷ کی طرف دیکھ سکتے ہیں۔

۱۰۳۵۱ مساوات ۷ کے تحت درج ذیل ہو گا

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\left|f(x)\right| + C$$

۱۰۳۵۲ جہاں $f(x)$ قابل تفرق تفاعل ہے، جس کی علامت پورے دائرہ کار پر تبدیل نہیں ہوتی۔

۱۰۳۵۳ مثال ۷.۱۲:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{2x}{x^2-5}\,\mathrm{d}x &= \int_{-5}^{-1} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u|\Big|_{-5}^{-1} && u = x^2-5\\ &= \ln|-1| - \ln|-5| = \ln 1 - \ln 5 = -\ln 5\end{aligned}$$

۱۰۳۵۴ □

۱۰۳۵۵ مثال ۷.۱۳:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4\cos\theta}{3+2\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta &= \int_1^5 \frac{2}{u}\,\mathrm{d}u && u = 3+2\sin\theta\\ &= 2\ln|u|\Big|_1^5\\ &= 2\ln|5| - 2\ln|1| = 2\ln 5\end{aligned}$$

۱۰۳۵۶ □

۱۰۳۵۷ $\tan x$ اور $\cot x$ کے تکمل

۱۰۳۵۸ ہمیں مساوات ۷ کی مدد سے $\tan x$ اور $\cot x$ کے تکمل لے سکتے ہیں۔ ٹینجنٹ کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \tan x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{-\mathrm{d}u}{u} && u = \cos x\\ &= -\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = -\ln|u| + C && \text{مساوات ۷}\\ &= -\ln|\cos x| + C = \ln\frac{1}{|\cos x|} + C && \text{قاعدہ مقلوب}\\ &= \ln|\sec x| + C\end{aligned}$$

۱۰۳۵۹ کوٹینجنٹ کے لیے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int \cot x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} && u = \sin x\\ &= \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C = -\ln|\csc x| + C\end{aligned}$$

۱۰۳۶۰ اس طرح درج ذیل کلیات حاصل ہوتے ہیں۔

$$\int \tan u \, \mathrm{d}u = -\ln|\cos u| + C = \ln|\sec u| + C$$
$$\int \cot u \, \mathrm{d}u = \ln|\sin u| + C = -\ln|\csc x| + C$$

۱۰۳۶۱ مثال ۷.۱۴:

$$\int_0^{\pi/6} \tan 2x \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/3} \tan u \cdot \frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \tan u \, \mathrm{d}u \qquad u = 2x$$
$$= \frac{1}{2}\ln|\sec u|\Big|_0^{\pi/3} = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$$

۱۰۳۶۲ □

۱۰۳۶۳ **سوالات**

۱۰۳۶۴ **لوگارتھم کے خواص**

۱۰۳۶۵ سوال ۷.۶۳: مندرجہ ذیل کو $\ln 2$ اور $\ln 3$ کی صورت میں لکھیں۔

۱۰۳۶۶ ا. $\ln 0.75$ ۱۰۳۶۸ ج. $\ln(1/2)$ ۱۰۳۷۰ ھ. $\ln 3\sqrt{2}$

۱۰۳۶۷ ب. $\ln(4/9)$ ۱۰۳۶۹ د. $\ln \sqrt[3]{9}$ ۱۰۳۷۱ و. $\ln \sqrt{13.5}$

۱۰۳۷۲ سوال ۷.۶۴: مندرجہ ذیل کو $\ln 5$ اور $\ln 7$ کی صورت میں لکھیں۔

۱۰۳۷۳ ا. $\ln(1/125)$ ۱۰۳۷۵ ج. $\ln 7\sqrt{7}$ ۱۰۳۷۷ ھ. $\ln 0.056$

۱۰۳۷۴ ب. $\ln 9.8$ ۱۰۳۷۶ د. $\ln 1225$ ۱۰۳۷۸ و. $\frac{\ln 35 + \ln(1/7)}{\ln 25}$

۱۰۳۷۹ سوال ۷.۶۵ اور سوال ۷.۶۶ میں خواص لوگارتھم کی مدد سے دی گئی ریاضیاتی عبارت کی سادہ صورت تلاش کریں۔

۱۰۳۸۰ سوال ۷.۶۵:

۱۰۳۸۱ ا. $\ln \sin\theta - \ln\left(\frac{\sin\theta}{5}\right)$ ۱۰۳۸۲ ب. $\ln(3x^2 - 9x) + \ln\left(\frac{1}{3x}\right)$ ج. $\frac{1}{2}\ln(4t^4) - \ln 2$

۱۰۳۸۳ سوال ۷.۶۶:

۱۰۳۸۵ ا. $\ln \sec\theta + \ln\cos\theta$

۱۰۳۸۶ ب. $\ln(8x+4) - 2\ln 2$

۱۰۳۸۷ ج. $3\ln\sqrt[3]{t^2-1} - \ln(t+1)$

۱۰۳۸۸ **لوگارتھم کے تفرق**

۱۰۳۸۹ سوال ۷.۶۷ تا سوال ۷.۹۸ میں x ، t ، یا θ کے لحاظ سے y کا تفرق لیں۔

۱۰۳۹۰ سوال ۷.۶۷: $y = \ln 3x$

۱۰۳۹۱ سوال ۷.۶۸: $y = \ln kx,$ k مستقل

۱۰۳۹۲ سوال ۷.۶۹: $y = \ln(t^2)$

۱۰۳۹۳ سوال ۷.۷۰: $y = \ln(t^{3/2})$

۱۰۳۹۴ سوال ۷.۷۱: $y = \ln\frac{3}{x}$

۱۰۳۹۵ سوال ۷.۷۲: $y = \ln\frac{10}{x}$

۱۰۳۹۶ سوال ۷.۷۳: $y = \ln(\theta+1)$

۱۰۳۹۷ سوال ۷.۷۴: $y = \ln(2\theta+2)$

۱۰۳۹۸ سوال ۷.۷۵: $y = \ln x^3$

۱۰۳۹۹ سوال ۷.۷۶: $y = (\ln x)^3$

۱۰۴۰۰ سوال ۷.۷۷: $y = t(\ln t)^2$

۱۰۴۰۱ سوال ۷.۷۸: $y = t\sqrt{\ln t}$

۱۰۴۰۲ سوال ۷.۷۹: $y = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}$

۱۰۴۰۳ سوال ۷.۸۰: $y = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9}$

۱۰۴۰۴ سوال ۷.۸۱: $y = \frac{\ln t}{t}$

۱۰۴۰۵ سوال ۷.۸۲: $y = \frac{1+\ln t}{t}$

۱۰۴۰۶ سوال ۷.۸۳: $y = \frac{\ln x}{1+\ln x}$

۱۰۴۰۷ سوال ۷.۸۴: $y = \frac{x\ln x}{1+\ln x}$

۱۰۴۰۸ سوال ۷.۸۵: $y = \ln(\ln x)$

۱۰۴۰۹ سوال ۷.۸۶: $y = \ln(\ln(\ln x))$

۱۰۴۱۰ سوال ۷.۸۷: $y = \theta(\sin(\ln\theta)) + \cos(\ln\theta)$

۱۰۴۱۱ سوال ۷.۸۸: $y = \ln(\sec\theta + \tan\theta)$

۱۰۴۱۲ سوال ۷.۸۹: $y = \ln \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$

۱۰۴۱۳ سوال ۷.۹۰: $y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

۱۰۴۱۴ سوال ۷.۹۱: $y = \frac{1+\ln t}{1-\ln t}$

۱۰۴۱۵ سوال ۷.۹۲: $y = \sqrt{\ln \sqrt{t}}$

۱۰۴۱۶ سوال ۷.۹۳: $y = \ln(\sec(\ln \theta))$

۱۰۴۱۷ سوال ۷.۹۴: $y = \ln \left(\frac{\sqrt{\sin \theta \cos \theta}}{1+2\ln \theta} \right)$

۱۰۴۱۸ سوال ۷.۹۵: $y = \ln \left(\frac{(x^2+1)^5}{\sqrt{1-x}} \right)$

۱۰۴۱۹ سوال ۷.۹۶: $y = \ln \sqrt{\frac{(x+1)^5}{(x+2)^{20}}}$

۱۰۴۲۰ سوال ۷.۹۷: $y = \int_{x^2/2}^{x^2} \ln \sqrt{t}\, \mathrm{d}t$

۱۰۴۲۱ سوال ۷.۹۸: $y = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \ln t\, \mathrm{d}t$

۱۰۴۲۲

۱۰۴۲۳ **لوگارتھمی تفرق**

۱۰۴۲۴ سوال ۷.۹۹ تا سوال ۷.۱۱۲ میں لوگارتھمی تفرق استعمال کرتے ہوئے y کا، دیے گئے آزاد متغیر کے لحاظ سے، تفرق لیں۔

۱۰۴۲۵ سوال ۷.۹۹: $y = \sqrt{x(x+1)}$

۱۰۴۲۶ سوال ۷.۱۰۰: $y = \sqrt{(x^2+1)(x-1)^2}$

۱۰۴۲۷ سوال ۷.۱۰۱: $y = \sqrt{\frac{t}{t+1}}$

۱۰۴۲۸ سوال ۷.۱۰۲: $y = \sqrt{\frac{1}{t(t+1)}}$

۱۰۴۲۹ سوال ۷.۱۰۳: $y = \sqrt{\theta+3} \sin \theta$

۱۰۴۳۰ سوال ۷.۱۰۴: $y = (\tan \theta)\sqrt{2\theta+1}$

۱۰۴۳۱ سوال ۷.۱۰۵: $y = t(t+1)(t+2)$

۱۰۴۳۲ سوال ۷.۱۰۶: $y = \frac{1}{t(t+1)(t+2)}$

۱۰۴۳۳ سوال ۷.۱۰۷: $y = \frac{\theta+5}{\theta \cos \theta}$

۱۰۴۳۴ سوال ۷.۱۰۸: $y = \frac{\theta \sin \theta}{\sqrt{\sec \theta}}$

۱۰۳۳۵ سوال ۷.۱۰۹: $y = \frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}}$

۱۰۳۳۶ سوال ۷.۱۱۰: $y = \sqrt{\frac{(x+1)^{10}}{(2x+1)^5}}$

۱۰۳۳۷ سوال ۷.۱۱۱: $y = \sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}}$

۱۰۳۳۸ سوال ۷.۱۱۲: $y = \sqrt[3]{\frac{x(x+1)(x-2)}{(x^2+1)(2x+3)}}$

۱۰۳۳۹

تکملہ

۱۰۳۴۰ سوال ۷.۱۱۳ تا سوال ۷.۱۳۰ میں تکمل حل کریں۔

۱۰۳۴۱ سوال ۷.۱۱۳: $\int_{-3}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{x}$

۱۰۳۴۲ سوال ۷.۱۱۴: $\int_{-1}^{0} \frac{3\,\mathrm{d}x}{3x-2}$

۱۰۳۴۳ سوال ۷.۱۱۵: $\int \frac{2y\,\mathrm{d}y}{y^2-25}$

۱۰۳۴۴ سوال ۷.۱۱۶: $\int \frac{8r\,\mathrm{d}r}{4r^2-5}$

۱۰۳۴۵ سوال ۷.۱۱۷: $\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{2-\cos t}\,\mathrm{d}t$

۱۰۳۴۶ سوال ۷.۱۱۸: $\int_0^{\pi/3} \frac{4\sin\theta}{1-4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$

۱۰۳۴۷ سوال ۷.۱۱۹: $\int_1^{2} \frac{2\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۰۳۴۸ سوال ۷.۱۲۰: $\int_2^{4} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

۱۰۳۴۹ سوال ۷.۱۲۱: $\int_2^{4} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$

۱۰۳۵۰ سوال ۷.۱۲۲: $\int_2^{16} \frac{\mathrm{d}x}{2x\sqrt{\ln x}}$

۱۰۳۵۱ سوال ۷.۱۲۳: $\int \frac{3\sec^2 t}{6+3\tan t}\,\mathrm{d}t$

۱۰۳۵۲ سوال ۷.۱۲۴: $\int \frac{\sec y\tan y}{2+\sec y}\,\mathrm{d}y$

۱۰۳۵۳ سوال ۷.۱۲۵: $\int_0^{\pi/2} \tan\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$

۱۰۳۵۴ سوال ۷.۱۲۶: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cot t\,\mathrm{d}t$

۱۰۳۵۵ سوال ۷.۱۲۷: $\int_{\pi/2}^{\pi} 2\cot\frac{\theta}{3}\,\mathrm{d}\theta$

۱۰۳۵۶ سوال ۷.۱۲۸: $\int_0^{\pi/12} 6\tan 3x\,\mathrm{d}x$

سوال ۷.۱۲۹: $\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sqrt{x}+2x}$

سوال ۷.۱۳۰: $\int \frac{\sec x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{\ln(\sec x+\tan x)}}$

نظریہ اور استعمال

سوال ۷.۱۳۱: درج ذیل کی مطلق انتہائی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\ln(\cos x), \quad [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ ب. $\cos(\ln x), \quad [\frac{1}{2}, 2]$

سوال ۷.۱۳۲: (ا) ثابت کریں کہ $x > 1$ کے لیے $f(x) = x - \ln x$ بڑھتا ہے۔ (ب) $x > 1$ کی صورت میں جزو-ا استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ $\ln x < x$ ہو گا۔

سوال ۷.۱۳۳: منحنی $y = \ln x$ اور $y = \ln 2x$ کے بیچ $x = 1$ تا $x = 5$ رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۷.۱۳۴: منحنی $y = \tan x$ اور محور x کے بیچ $x = -\frac{\pi}{4}$ تا $x = \frac{\pi}{3}$ رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۷.۱۳۵: ربع اول میں محددی لکیروں، منحنی $x = \frac{2}{\sqrt{y+1}}$، اور لکیر $y = 3$ کے بیچ موجود خطے کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۷.۱۳۶: منحنی $y = \sqrt{\cot x}$ اور محور x پر $x = \frac{\pi}{6}$ تا $x = \frac{\pi}{2}$ کے بیچ خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۷.۱۳۷: منحنی $y = \frac{1}{x^2}$ اور محور x پر $x = \frac{1}{2}$ تا $x = 2$ کے بیچ خطہ کو محور y کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۷.۱۳۸: منحنی $y = \frac{9x}{\sqrt{x^3+9}}$ اور محور x پر $x = 0$ تا $x = 3$ کے بیچ خطہ کو صفحہ ۵۷۰ پر سوال ۶.۱۲۵ میں محور y کے گرد گھما کر 36π حجم کا جسم طواف پیدا کیا گیا۔ اگر اس خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جائے تب اس جسم کا حجم کتنا ہو گا؟

سوال ۷.۱۳۹: درج ذیل منحنیات کی لمبائیاں تلاش کریں۔

ا. $y = \frac{x^2}{8} - \ln x, \quad 4 \le x \le 8$ ب. $x = (\frac{y}{4})^2 - 2\ln(\frac{y}{4}), \quad 4 \le y \le 12$

سوال ۷.۱۴۰: ایک منحنی کی $x = 1$ تا $x = 2$ لمبائی درج ذیل ہے۔ اس منحنی کو تلاش کریں۔

$$L = \int_1^2 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x$$

سوال ۷.۱۴۱: (ا) منحنی $y = \frac{1}{x}$ اور محور x پر $x = 1$ تا $x = 2$ کے بیچ خطے کا وسطانی مرکز دو اعشاریہ مقامات تک تلاش کریں۔ (ب) خطے کا خاکہ بنا کر وسطانی مرکز دکھائیں۔

سوال ۷.۱۴۲: (ا) ایک پتلی چادر جس کی کثافت مستقل ہے منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ اور محور x پر $x = 1$ تا $= 16$ کے بیچ پائی جاتی ہے۔ اس چادر کی کمیت کا مرکز تلاش کریں۔ (ب) اگر چادر کی کثافت $\delta(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ ہو تب اس کی کمیت کا مرکز کیا ہو گا؟

سوال ۷.۱۴۳ اور سوال ۷.۱۴۴ میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسائل کو حل کریں۔

سوال ۷.۱۴۳: $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{x}, \quad y(1) = 3$

سوال ۷.۱۴۴: $\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

سوال ۷.۱۴۵: نقطہ $x = 0$ پر $\ln(1+x)$ کی خط بندی کی خاطر $x = 1$ کے قریب x کی تخمین کے بجائے ہم $x = 0$ کے قریب $\ln(1+x)$ کی تخمین لیتے ہیں۔ اس طرح نسبتاً سادہ کلیہ حاصل ہوتا ہے۔ (ا) نقطہ $x = 0$ کے قریب $\ln(1+x) \approx x$ کی خط بندی کریں۔ (ب) وقفہ $[0, 0.1]$ پر $\ln(1+x)$ کے بجائے x استعمال کرنے سے پیدا خلل کو 5 اعشاریہ مقامات تک تلاش کریں۔ (ج) منحنی $y = \ln(1+x)$ اور $y = x$ کو ایک ساتھ وقفہ $[0, 0.5]$ پر ترسیم کریں۔ کس نقطہ پر خط بندی بہترین ہے؟ کمترین بہتر ہے؟ ترسیم سے خلل کی بالائی حد پڑھ کر تلاش کریں۔

سوال ۷.۱۴۶: اگرچہ چھوٹے وقفوں پر خط بندی، لوگارتھمی تفاعل کے لئے، بہترین نتائج دیتی ہے، مخصوص لوگارتھمی قیمتیں قاعدہ سمسن زیادہ بہتر دیتا ہے۔

یہ دیکھنے کی خاطر $\ln(1.2)$ اور $\ln(0.8)$ کی 5 اعشاریہ مقامات تک قیمتیں بالترتیب 0.18232 اور -0.22314 ہیں۔ ان قیمتوں کہ پہلے کلیہ $\ln(1+x) \approx x$ اور اور بعد میں $n = 2$ لیتے ہوئے قاعدہ سمسن سے حاصل کریں۔ (نتائج حیرت کن حد تک درست ہیں!)

سوال ۷.۱۴۷: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2)}{\ln x}$ کی قیمت تلاش کریں۔ اس نتیجہ کو عمومی بنائیں۔

سوال ۷.۱۴۸: کیا ہر نقطہ پر $y = \ln 3x$ اور $y = \ln 3x$ کے تفرق برابر ہو سکتے ہیں (تفرق لے کر دیکھیں)؟ تفاعل $y = \ln kx$ جہاں k مثبت مستقل ہے کے لیے کیا کہا جا سکتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۷.۱۴۹: تفاعل $\ln x$ ، $\ln 2x$ ، $\ln 4x$ ، $\ln 8x$ ، اور $\ln 16x$ کو $0 < x \leq 10$ کے لیے ترسیم کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟ وجہ بیان کریں۔

سوال ۷.۱۵۰: تفاعل $y = \ln|\sin x|$ کو ترسیم کر کے کمپیوٹر کے شیشہ پر $0 \leq x \leq 22$ اور $-2 \leq y \leq 0$ کے بیچ نتائج دیکھیں۔ آپ کو کیا نظر آتا ہے؟ وجہ بیان کریں۔ ترسیم میں محاریب الٹی کرنے کے لیے تفاعل میں کیا تبدیلی کرنی ہو گی؟

سوال ۷.۱۵۱: (ا) تفاعل $y = \sin x$ اور $y = \ln(a + \sin x)$ کو $a = 2, 4, 8, 20, 50$ کے لیے ایک ساتھ $0 \leq x \leq 23$ پر ترسیم کریں۔ (ب) a کی قیمت بڑھنے سے ترسیمات افقی صورت کیوں اختیار کرتی ہیں؟ (اشارہ۔ a کے لحاظ سے $|y'|$ کی بالائی حد تلاش کریں۔)

سوال ۷.۱۵۲: کیا $y = \sqrt{x} - \ln x,\ x > 0$ کا نقطہ تصریف پایا جاتا ہے؟ اس کا جواب (ا) ترسیم اور (ب) احصاء سے دیں۔

۷.۳ قوت نمائی تفاعل

جب مقدار y کی زمانی شرح تبدیلی مقدار کی موجودہ قدر y کے راست متناسب ہو، ہمارے پاس ایسا تفاعل ہے جو درج ذیل تفرقی مساوات کو مطمئن کرے گا۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky \qquad k \text{ مستقل}$$

اگر لمحہ $t = 0$ پر $y = y_0$ ہو، یہ تفاعل قوت نمائی تفاعل $y = y_0 e^{kt}$ ہو گا۔ اس حصہ میں قوت نمائی تفاعل کی تعریف (یہ $\ln x$ کا معکوس ہے) پیش کی جائے گی اور اس کی خصوصیات پر غور کیا جائے گا، جن کی بدولت قوت نمائی تفاعل ریاضیات اور اس کے اطلاق میں کثرت سے پایا جاتا ہے (حصہ ۷.۵)۔

$\ln x$ کا معکوس اور عدد e

تفاعل $\ln x$ متغیر x کا بڑھتا تفاعل ہے۔ $\ln x$ کا دائرہ کار $(0, \infty)$ اور سعت $(-\infty, \infty)$ ہے، جبکہ اس کا معکوس $\ln^{-1} x$ ہے، جس کا دائرہ کار $(-\infty, \infty)$ اور سعت $(0, \infty)$ ہے۔ لکیر $y = x$ میں $\ln x$ کا عکس تفاعل $\ln^{-1} x$ کی ترسیم دیتا ہے۔ آپ تصدیق کر سکتے ہیں کہ تفاعل $\ln^{-1} x$ کے لیے

$$\lim_{x\to\infty} \ln^{-1} x = \infty, \quad \lim_{x\to-\infty} \ln^{-1} x = 0$$

ہو گا۔ عدد $\ln^{-1} 1$ کو حرف e سے ظاہر کیا جاتا ہے (شکل ۷.۲۶)۔

تعریف:

$$e = \ln^{-1} 1$$

□

اگرچہ e ناطق عدد نہیں، ہم باب ۹ میں دیکھیں گے کہ درج ذیل کلیہ سے، کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے، ہم جتنے اعشاریہ تک اس کی قیمت چاہیں معلوم کر سکتے ہیں۔

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

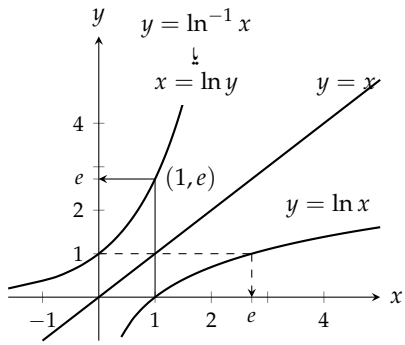
15 اعشاریہ تک e کی قیمت درج ذیل ہے۔

$$e = 2.718\,281\,828\,459\,045$$

تفاعل $y = e^x$

ہم معمول کی طرح e کو x کی ناطق طاقت (ذیل دیکھیں) تک لے جا سکتا ہیں۔

$$e^2 = e \cdot e, \quad e^{-2} = \frac{1}{e^2}, \quad e^{1/2} = \sqrt{e}$$



شکل ۷.۲۶: تفاعل $y \ln x$ اور تفاعل $y = \ln^{-1} x$۔ عدد e سے مراد $\ln^{-1} 1$ ہے۔

۱۰۵۲۷ چونکہ e مثبت ہے، لہٰذا e^x بھی مثبت ہو گا اور یوں e^x کا لوگارتھم بھی پایا جائے گا۔

$$\ln e^x = x \ln e = x \cdot 1 = x \tag{۱}$$

۱۰۵۲۸ چونکہ $\ln x$ یک بہ یک ہے اور $\ln(\ln^{-1} x) = x$ ہے لہٰذا مساوات ۱ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$e^x = \ln^{-1} x \qquad \text{ناطق } x \tag{۲}$$

۱۰۵۲۹ مساوات ۲ کی مدد سے e^x کی تعریف کو وسعت دے کر غیر ناطق x کو بھی شامل کیا جا سکتا ہے۔ x کی تمام قیمتوں کے لیے تفاعل $\ln^{-1} x$ معین
۱۰۵۳۰ ہے، لہٰذا ہم اس کو استعمال کرتے ہوئے e^x کو ان نقطوں پر بھی قیمت مختص کر سکتے ہیں جہاں پہلے e^x کی کوئی قیمت نہیں پائی جاتی تھی۔ اس طرح قوت نمائی
۱۰۵۳۱ تفاعل کی عالمگیر تعریف درج ذیل ہو گی۔

۱۰۵۳۲ تعریف: e^x
۱۰۵۳۳ ہر حقیقی عدد x کے لئے $e^x = \ln^{-1} x$ ہو گا۔

۱۰۵۳۴ □

۱۰۵۳۵ ایسی مساواتیں جن میں $\ln x$ اور e^x موجود ہوں

۱۰۵۳۶ چونکہ $\ln x$ اور e^x ایک دوسرے کے معکوس ہیں لہٰذا ان کی معکوس مساواتیں درج ذیل ہوں گی۔

$$e^{\ln x} = x \qquad \text{تمام } x > 0 \tag{۳}$$

$$\ln(e^x) = x, \qquad \text{تمام } x \tag{۴}$$

۱۰۵۳۷ اگلی مثال کے کچھ حصوں کو کیلکولیٹر سے حل کریں۔

۱۰۵۳۸ مثال ۷.۱۵:

۱۰۵۳۹ ا. $\ln e^2 = 2$,

۱۰۵۴۰ ب. $\ln e^{-1} = -1$,

۱۰۵۴۱ ج. $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$,

۱۰۵۴۲ د. $\ln e^{\sin x} = \sin x$,

۱۰۵۴۳ ھ. $e^{\ln 2} = 2$,

۱۰۵۴۴ و. $e^{\ln(x^2+1)} = x^2 + 1$,

۱۰۵۴۵ ز. $e^{3\ln 2} = e^{\ln 2^3} = e^{\ln 8} = 8$ ایک طریقہ

۱۰۵۴۶ ح. $e^{3\ln 2} = (e^{\ln 2})^3 = 2^3 = 8$ دوسرا طریقہ

۱۰۵۴۷ □

۱۰۵۴۸ مثال ۷.۱۶: مساوات $\ln y = 3t + 5$ میں y تلاش کریں۔

۱۰۵۴۹ **حل**

۱۰۵۵۰ دونوں اطراف کا قوت نما لیتے ہیں۔

$$e^{\ln y} = e^{3t+5}$$

$$y = e^{3t+5} \qquad \text{مساوات ۳}$$

۱۰۵۵۱ □

۱۰۵۵۲ مثال ۷.۱۷: اگر $e^{2k} = 10$ ہو، k کتنا ہو گا؟

۱۰۵۵۳ **حل**

۱۰۵۵۴ دونوں اطراف کا قدرتی لوگارتھم لیتے ہیں۔

$$e^{2k} = 10$$

$$\ln e^{2k} = \ln 10$$

$$2k = \ln 10 \qquad \text{مساوات ۴}$$

$$k = \frac{1}{2}\ln 10$$

۱۰۵۵۵ □

۱۰۵۵۶ **قواعد قوت نما**

۱۰۵۵۷ اگرچہ e^x کی پیش کردہ تعریف $\ln^{-1} x$ گول مول سی ہے، یہ قوت نما کے الجبرائی قواعد (جدول ۷.۲) کو مطمئن کرتا ہے۔

۱۰۵۵۸ ثبوت: **برائے قاعدہ-ا** اگر درج ذیل ہوں

$$y_1 = e^{x_1}, \quad y_2 = e^{x_2}$$

جدول ۷.۲: قواعد برائے e^x کے قوت نما

تمام x ، x_1 ،اور x_2 کے لئے	
ا)	$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$
ب)	$e^{-1} = \frac{1}{e^x}$
ج)	$\frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$
د)	$\left(e^{x_1}\right)^{x_2} = e^{x_1 x_2} = \left(e^{x_2}\right)^{x_1}$

۱۰۵۵۹ تب مساوات کے دونوں اطراف کے لوگارتھم لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} x_1 &= \ln y_1 \\ x_2 &= \ln y_2 \end{aligned}$$

۱۰۵۶۰ ہوں گے۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \ln y_1 + \ln y_2 \\ &= \ln y_1 y_2 && \text{قاعدہ ضرب} \\ e^{x_1+x_2} &= e^{\ln y_1 y_2} && \text{قوت نما} \\ &= y_1 y_2 && e^{\ln u} = u \\ &= e^{x_1} e^{x_2} \end{aligned}$$

۱۰۵۶۱ □

۱۰۵۶۲ قاعدہ-د کا ثبوت بھی اس سے ملتا جلتا ہے۔ قواعد-ب اور ج کو قاعدہ-ا سے حاصل کیا جا سکتا ہے (سوال ۷.۲۳۰)۔

۱۰۵۶۳ مثال ۷.۱۸:

$$\begin{aligned} e^{x+\ln 2} &= e^x \cdot e^{\ln 2} = 2e^x && \text{قاعدہ-ا} \\ e^{-\ln x} &= \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} && \text{قاعدہ-ب} \\ \frac{e^{2x}}{e} &= e^{2x-1} && \text{قاعدہ-ج} \\ \left(e^3\right)^x &= e^{3x} = \left(e^x\right)^3 && \text{قاعدہ-د} \end{aligned}$$

۱۰۵۶۴ □

۱۰۵۶۵ e^x کا تفرق اور تکمل

۱۰۵۶۶ قوت نمائی تفاعل ایک ایسے قابل تفرق تفاعل کا معکوس ہے جس کا تفرق کبھی بھی صفر نہیں ہوتا، لہٰذا قوت نمائی تفاعل بھی قابل تفرق ہو گا۔ $y = e^x$
۱۰۵۶۷ سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y = e^x$$

$$\ln y = x \qquad \text{دونوں اطراف لوگارتھم}$$

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 \qquad \text{دونوں اطراف } x \text{ کے لحاظ سے تفرق}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^x \qquad y \text{ کی جگہ } e^x$$

۱۰۵۶۸ یوں ثابت ہوتا ہے کہ e^x کا تفرق از خود e^x ہے۔

۱۰۵۶۹ ہم حصہ ۷.۵ میں دیکھیں گے کہ یہ خاصیت صرف e^x کا مستقل مضرب تفاعل رکھتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x \tag{۵}$$

۱۰۵۷۰ مثال ۷.۱۹:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(5e^x) = 5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = 5e^x$$

۱۰۵۷۱ □

۱۰۵۷۲ زنجیری قاعدہ مساوات ۵ کو وسعت دے کر عمومی روپ دیتا ہے۔ اگر u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^u = e^u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{۶}$$

۱۰۵۷۳ مثال ۷.۲۰:

(ا) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-x} = e^{-x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x) = e^{-x}(-1) = -e^{-x}$ مساوات ۶ میں $u = -x$

(ب) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{\sin x} = e^{\sin x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = e^{\sin x}\cdot\cos x$ مساوات ۶ میں $u = \sin x$

۱۰۵۷۴ □

۱۰۵۷۵ مساوات ۶ کا تکملی مساوی درج ذیل ہے جہاں C مستقل ہے۔

$$\int e^u \, \mathrm{d}u = e^u + C$$

۱۰۵۷۶ مثال ۷.۲۱:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} e^{3x} \, \mathrm{d}x &= \int_0^{\ln 8} e^u \cdot \frac{1}{3} \, \mathrm{d}u \qquad\qquad u = 3x \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{\ln 8} e^u \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{3} e^u \Big|_0^{\ln 8} \\
&= \frac{1}{3}[8-1] = \frac{7}{3}
\end{aligned}$$

۱۰۵۷۷ □

۱۰۵۷۸ مثال ۷.۲۲:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} e^{\sin x} \cos x \, \mathrm{d}x &= e^{\sin x}\Big|_0^{\pi/2} \qquad\qquad \text{مثال ۷.۲۰} \\
&= e^1 - e^0 = e - 1
\end{aligned}$$

۱۰۵۷۹ □

۱۰۵۸۰ مثال ۷.۲۳: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں۔

$$e^y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x, \quad x > \sqrt{3}, \quad y(2) = 0$$

۱۰۵۸۱ **حل**

۱۰۵۸۲ ہم دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تکمل لیتے ہیں۔

$$e^y = x^2 + C$$

۱۰۵۸۳ ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مستقل C دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
C &= e^0 - (2)^2 \\
&= 1 - 4 = -3
\end{aligned}$$

۱۰۵۸۴ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$e^y = x^2 - 3 \tag{۷}$$

۱۰۵۸۵ y تلاش کرنے کی خاطر ہم دونوں اطراف کا لوگارتھم لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \ln e^y &= \ln(x^2 - 3) \\ y &= \ln(x^2 - 3) \end{aligned} \tag{۸}$$

۱۰۵۸۶ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $x > \sqrt{3}$ کے لیے حل درست ہے۔

۱۰۵۸۷ تفرقی مساوات میں حل کو پُر کر کے تصدیق کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ مساوات ۷ اور مساوات ۸ کو تفرقی مساوات میں پُر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} e^y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= e^y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 - 3) \\ &= e^y \frac{2x}{x^2 - 3} \\ &= (x^2 - 3)\frac{2x}{x^2 - 3} \\ &= 2x \end{aligned}$$

۱۰۵۸۸ یوں تفرقی مساوات کو حاصل کیا گیا حل مطمئن کرتا ہے۔ □

۱۰۵۸۹ **سوالات**

۱۰۵۹۰ **قوت نما اور لوگارتھم کے ساتھ الجبرائی حساب**

۱۰۵۹۱ سوال ۷.۱۵۳ تا سوال ۷.۱۵۶ میں سادہ صورت دریافت کریں۔

۱۰۵۹۲ سوال ۷.۱۵۳: (ا) $e^{\ln 7.2}$، (ب) $e^{-\ln x^2}$، (ج) $e^{\ln x - \ln y}$

۱۰۵۹۳ سوال ۷.۱۵۴: (ا) $e^{\ln(x^2+y^2)}$، (ب) $e^{-\ln 0.3}$، (ج) $e^{\ln \pi x - \ln 2}$

۱۰۵۹۴ سوال ۷.۱۵۵: (ا) $2\ln\sqrt{e}$، (ب) $\ln(\ln e^e)$، (ج) $\ln(e^{-x^2-y^2})$

۱۰۵۹۵ سوال ۷.۱۵۶: (ا) $\ln(e^{\sec\theta})$، (ب) $\ln(e^{(e^x)})$، (ج) $\ln(e^{2\ln x})$

۱۰۵۹۶ **لوگارتھم یا قوت نمائی اجزاء والے مساوات کا حل**

۱۰۵۹۷ سوال ۷.۱۵۷ تا سوال ۷.۱۶۲ میں t یا x (جیسا موزوں ہو) کے لحاظ سے y کے لیے حل کریں۔

۱۰۵۹۸ سوال ۷.۱۵۷: $\ln y = 2t + 4$

۱۰۵۹۹ سوال ۷.۱۵۸: $\ln y = -t + 5$

۱۰۶۰۰ سوال ۷.۱۵۹: $\ln(y-40)=5t$

۱۰۶۰۱ سوال ۷.۱۶۰: $\ln(1-2y)=t$

۱۰۶۰۲ سوال ۷.۱۶۱: $\ln(y-1)-\ln 2=x+\ln x$

۱۰۶۰۳ سوال ۷.۱۶۲: $\ln(y^2-1)-\ln(y+1)=\ln(\sin x)$

۱۰۶۰۴ سوال ۷.۱۶۳ اور سوال ۷.۱۶۴ کو k کے لیے حل کریں۔

۱۰۶۰۵ سوال ۷.۱۶۳: (ا) $e^{2k}=4$، (ب) $100e^{10k}=200$، (ج) $e^{k/1000}=a$

۱۰۶۰۶ سوال ۷.۱۶۴: (ا) $e^{5k}=\frac{1}{4}$، (ب) $80e^{k}=1$،

۱۰۶۰۷ (ج) $e^{(\ln 0.8)k}=0.8$

۱۰۶۰۸ سوال ۷.۱۶۵ تا سوال ۷.۱۶۸ کو t کے لیے حل کریں۔

۱۰۶۰۹ سوال ۷.۱۶۵: (ا) $e^{-0.3t}=27$، (ب) $e^{kt}=\frac{1}{2}$، (ج) $e^{(\ln 0.2)t}=0.4$

۱۰۶۱۰ سوال ۷.۱۶۶: (ا) $e^{-0.01t}=1000$، (ب) $e^{kt}=\frac{1}{10}$، (ج) $e^{(\ln 2)t}=\frac{1}{2}$

۱۰۶۱۱ سوال ۷.۱۶۷: $e^{\sqrt{t}}=x^2$

۱۰۶۱۲ سوال ۷.۱۶۸: $e^{(x^2)}e(2x+1)=e^t$

۱۰۶۱۳ **تفارق**

۱۰۶۱۴ سوال ۷.۱۶۹ تا سوال ۷.۱۸۸ میں x ، t ، یا θ (جیسا موزوں ہو) کے لحاظ سے y کا تفرق تلاش کریں۔

۱۰۶۱۵ سوال ۷.۱۶۹: $y=e^{-5x}$

۱۰۶۱۶ سوال ۷.۱۷۰: $y=e^{2x/3}$

۱۰۶۱۷ سوال ۷.۱۷۱: $y=e^{5-7x}$

۱۰۶۱۸ سوال ۷.۱۷۲: $y=e^{4\sqrt{x}+x^2}$

۱۰۶۱۹ سوال ۷.۱۷۳: $y=xe^x-e^x$

۱۰۶۲۰ سوال ۷.۱۷۴: $y=(1+2x)e^{-2x}$

۱۰۶۲۱ سوال ۷.۱۷۵: $y=(x^2-2x+2)e^x$

۱۰۶۲۲ سوال ۷.۱۷۶: $y=(9x^2-6x+2)e^{3x}$

۱۰۶۲۳ سوال ۷.۱۷۷: $y=e^{\theta}(\sin\theta+\cos\theta)$

۱۰۶۲۴ سوال ۷.۱۷۸: $y=\ln(3\theta e^{-\theta})$

۱۰۶۲۵ سوال ۷.۱۷۹: $y=\cos(e^{-\theta^2})$

۱۰۶۲۶ سوال ۷.۱۸۰: $y=\theta^3e^{-2\theta}\cos 5\theta$

۱۰۶۲۷ سوال ۷.۱۸۱: $y=\ln(3te^{-t})$

۱۰۲۸ سوال ۷.۱۸۲: $y = \ln(2e^{-t}\sin t)$

۱۰۲۹ سوال ۷.۱۸۳: $y = \ln\left(\frac{e^{\theta}}{1+e^{\theta}}\right)$

۱۰۳۰ سوال ۷.۱۸۴: $y = \ln\left(\frac{\sqrt{\theta}}{1+\sqrt{\theta}}\right)$

۱۰۳۱ سوال ۷.۱۸۵: $y = e^{(\cos t + \ln t)}$

۱۰۳۲ سوال ۷.۱۸۶: $y = e^{\sin t}(\ln t^2 + 1)$

۱۰۳۳ سوال ۷.۱۸۷: $y = \int_0^{\ln x} \sin e^t \, \mathrm{d}t$

۱۰۳۴ سوال ۷.۱۸۸: $y = \int_{e^4\sqrt{x}}^{e^{2x}} \ln t \, \mathrm{d}t$

۱۰۳۵ سوال ۷.۱۸۹ تا سوال ۷.۱۹۲ میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

۱۰۳۶ سوال ۷.۱۸۹: $\ln y = e^y \sin x$

۱۰۳۷ سوال ۷.۱۹۰: $\ln xy = e^{x+y}$

۱۰۳۸ سوال ۷.۱۹۱: $e^{2x} = \sin(x+3y)$

۱۰۳۹ سوال ۷.۱۹۲: $\tan y = e^x + \ln x$

۱۰۴۰ **تکملات**

۱۰۴۱ سوال ۷.۱۹۳ تا سوال ۷.۲۱۴ میں تکمل حل کریں۔

۱۰۴۲ سوال ۷.۱۹۳: $\int (e^{ex} + 5e^{-x}) \, \mathrm{d}x$

۱۰۴۳ سوال ۷.۱۹۴: $\int (2e^x - 3e^{-2x}) \, \mathrm{d}x$

۱۰۴۴ سوال ۷.۱۹۵: $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x \, \mathrm{d}x$

۱۰۴۵ سوال ۷.۱۹۶: $\int_{-\ln 2}^{0} e^{-x} \, \mathrm{d}x$

۱۰۴۶ سوال ۷.۱۹۷: $\int 8e^{(x+1)} \, \mathrm{d}x$

۱۰۴۷ سوال ۷.۱۹۸: $\int 2e^{2x-1} \, \mathrm{d}x$

۱۰۴۸ سوال ۷.۱۹۹: $\int_{\ln 4}^{\ln 9} e^{x/2} \, \mathrm{d}x$

۱۰۴۹ سوال ۷.۲۰۰: $\int_0^{\ln 16} e^{x/4} \, \mathrm{d}x$

۱۰۵۰ سوال ۷.۲۰۱: $\int \frac{e^{\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} \, \mathrm{d}r$

۱۰۵۱ سوال ۷.۲۰۲: $\int \frac{e^{-\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} \, \mathrm{d}r$

۱۰۵۲ سوال ۷.۲۰۳: $\int 2te^{-t^2} \, \mathrm{d}t$

۱۰۶۵۳ سوال ۷.۲۰۴: $\int t^3 e^{t^4}\,\mathrm{d}t$

۱۰۶۵۴ سوال ۷.۲۰۵: $\int \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

۱۰۶۵۵ سوال ۷.۲۰۶: $\int \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\,\mathrm{d}x$

۱۰۶۵۶ سوال ۷.۲۰۷: $\int_0^{\pi/4} (1+e^{\tan\theta})\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$

۱۰۶۵۷ سوال ۷.۲۰۸: $\int_{\pi/4}^{\pi/2} (1+e^{\cot\theta})\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta$

۱۰۶۵۸ سوال ۷.۲۰۹: $\int e^{\sec\pi t}\sec\pi t\tan\pi t\,\mathrm{d}t$

۱۰۶۵۹ سوال ۷.۲۱۰: $\int e^{\csc(\pi+t)}\csc(\pi+t)\cot(\pi+t)\,\mathrm{d}t$

۱۰۶۶۰ سوال ۷.۲۱۱: $\int_{\ln(\pi/6)}^{\ln(\pi/2)} 2e^y\cos e^y\,\mathrm{d}y$

۱۰۶۶۱ سوال ۷.۲۱۲: $\int_0^{\sqrt{\ln\pi}} 2xe^{x^2}\cos(e^{x^2})\,\mathrm{d}x$

۱۰۶۶۲ سوال ۷.۲۱۳: $\int \frac{e^r}{1+e^r}\,\mathrm{d}r$

۱۰۶۶۳ سوال ۷.۲۱۴: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$

۱۰۶۶۴ **ابتدائی قیمت مسائل**

۱۰۶۶۵ سوال ۷.۲۱۵ تا سوال ۷.۲۱۸ میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

۱۰۶۶۶ سوال ۷.۲۱۵: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^t\sin(e^t-2), \quad y(\ln 2)=0$

۱۰۶۶۷ سوال ۷.۲۱۶: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = e^{-t}\sec^2(\pi e^{-t}), \quad y(\ln 4)=\frac{2}{\pi}$

۱۰۶۶۸ سوال ۷.۲۱۷: $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} = 2e^{-x}, \quad y(0)=1, \quad y'(0)=0$

۱۰۶۶۹ سوال ۷.۲۱۸: $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} = 1-e^{2t}, \quad y(1)=-1, \quad y'(1)=0$

۱۰۶۷۰ **نظریہ اور استعمال**

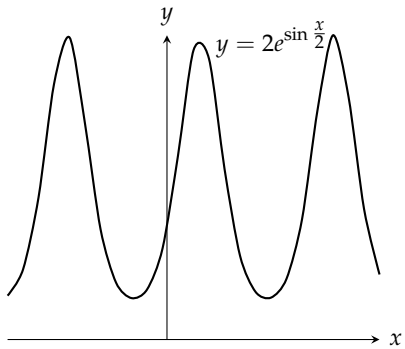
۱۰۶۷۱ سوال ۷.۲۱۹: وقفہ $[0,1]$ پر $f(x)=e^x-2x$ کی مطلق اعظم قیمت اور مطلق اقل قیمت تلاش کریں۔

۱۰۶۷۲ سوال ۷.۲۲۰: تفاعل $f(x)=2e^{\sin\frac{x}{2}}$ کی مطلق انتہا قیمتیں کیا اور کہاں ہیں (شکل ۷.۲۷)۔

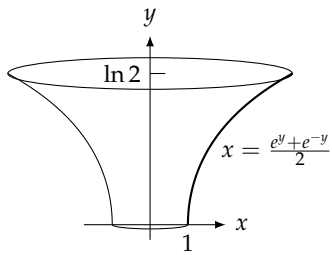
۱۰۶۷۳ سوال ۷.۲۲۱: تفاعل $f(x)=x^2\ln\frac{1}{x}$ کی مطلق اعظم قیمت تلاش کریں۔ یہ قیمت کہاں پائی جاتی ہے۔

۱۰۶۷۴ سوال ۷.۲۲۲: تفاعل $f(x)=(x-3)^2e^x$ اور اس کا یک رتبی تفرق ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' کی قیمت اور علامت کے لحاظ سے f

۱۰۶۷۵ کے رویے پر تبصرہ کریں۔ احصاء کی مدد سے ترسیم پر نمایاں نقطوں کی نشاندہی کریں۔



شکل ۷.۲۷: ترسیم برائے سوال ۷.۲۲۰



شکل ۷.۲۸: برائے سوال ۷.۲۲۶

سوال ۷.۲۲۳: ربع اول میں بالائی جانب قوس $y = e^{2x}$، نچلی جانب قوس $y = e^x$، اور دائیں جانب لکیر $x = \ln 3$ میں محیط تکونی رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۷.۲۲۴: ربع اول میں بالائی جانب قوس $y = e^{x/2}$، نچلی جانب قوس $y = e^{-x/2}$، اور دائیں جانب لکیر $x = 2\ln 2$ میں محیط تکونی رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۷.۲۲۵: مستوی xy میں مبدا سے گزرتی وہ قوس تلاش کریں جس کی لمبائی $x = 0$ سے $x = 1$ تک $L =$ $\int_0^1 \sqrt{1+\frac{e^x}{4}}\,\mathrm{d}x$ ہے۔

سوال ۷.۲۲۶: منحنی $x = \frac{e^y+e^{-y}}{2}, 0 \le y \le \ln 2$ کو محور y کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کی جاتی ہے (شکل ۷.۲۸)۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

سوال ۷.۲۲۷: (ا) دکھائیں $\int \ln x\,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$ ہوگا۔ (ب) وقفہ $[1,e]$ پر $\ln x$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال ۷.۲۲۸: وقفہ $[1,2]$ پر $f(x) = \frac{1}{x}$ کی اوسط قیمت تلاش کریں۔

سوال ۷.۲۲۹: نقطہ $x = 0$ پر e^x کی خط بندی

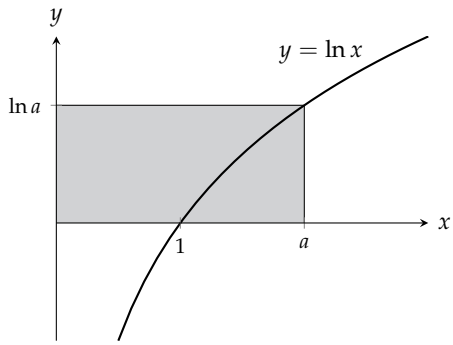
ا. نقطہ $x = 0$ پر خط بندی $e^x \approx 1 + x$ حاصل کریں۔

ب. وقفہ $[0, 0.2]$ پر e^x کی جگہ $1 + x$ استعمال کرنے سے پیدا خلل کو 5 اعشاریہ مقامات تک تلاش کریں۔

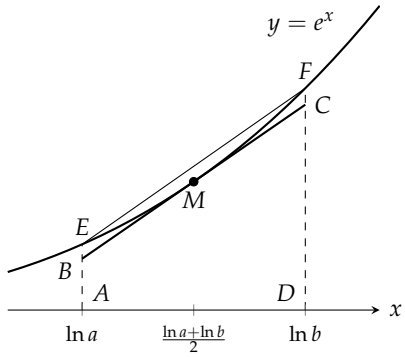
ج. وقفہ $-2 \le x \le 2$ پر e^x اور $1 + x$ کو ایک ساتھ کمپیوٹر پر ترسیم کریں۔ کس وقفہ پر تخمین زیادہ قیمت دیتی ہے؟ کم قیمت دیتی ہے؟

سوال ۷.۲۳۰: قواعد قوت نما

ا. مساوات $e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$ جس کو اس حصہ میں حاصل کیا گیا، سے شروع کر کے دکھائیں کہ کسی بھی حقیقی عدد x کے لیے $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ ہوگا۔ اس کے بعد کسی بھی دو اعداد x_1 اور x_2 کے لیے دکھائیں کہ $\frac{e_{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1-x_2}$ ہوگا۔



شکل ۷.۲۹: ترسیم برائے سوال ۷.۲۳۳



شکل ۷.۳۰: ترسیم برائے سوال ۷.۲۳۴

۱۰۶۹۵ ب. کسی بھی دو اعداد x_1 اور x_2 کے لیے دکھائیں کہ $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 x_2} = (e^{x_2})^{x_1}$ ہوگا۔

۱۰۶۹۶ سوال ۷.۲۳۱: e کا اعشاری اظہار

۱۰۶۹۷ مساوات $\ln x = 1$ کو حل کرتے ہوئے e کی قیمت اتنے اعشاریہ مقامات تک تلاش کریں جتنے تک آپ کا کیلکولیٹر استعمال کرتے ہوئے ممکن ہو۔

۱۰۶۹۸ سوال ۷.۲۳۲: $\ln x$ اور e^x کے مابین معکوس تعلق

۱۰۶۹۹ کیلکولیٹر استعمال کرتے ہوئے مرکبات $e^{\ln x}$ اور $\ln(e^x)$ کی قیمت تلاش کریں۔

۱۰۷۰۰ سوال ۷.۲۳۳: دکھائیں کہ کسی بھی عدد $a > 1$ کے لیے درج ذیل ہوگا (شکل ۷.۲۹)۔

$$\int_1 6a \ln x \, \mathrm{d}x + \int_0^{\ln a} e^y \, \mathrm{d}y = a \ln a$$

۱۰۷۰۱ سوال ۷.۲۳۴: تکونیاتی، لوگارتھمی، اور حسابی اوسط عدم مساوات

۱۰۷۰۲

۱۰۷۰۳ ا. دکھائیں کہ x کے ہر وقفہ پر e^x کی ترسیم اوپر کو مقعر ہے۔

۱۰۷۰۴ ب. اگر $0 < a < b$ ہو تب دکھائیں کہ درج ذیل ہوگا (شکل ۷.۳۰)۔

$$e^{(\ln a + \ln b)/2} \cdot (\ln b - \ln a) < \int_{\ln a}^{\ln b} e^x \, \mathrm{d}x < \frac{e^{\ln a} + e^{\ln b}}{2} \cdot (\ln b - \ln a)$$

۱۰۷۰۵ ج. جزو-ب کی عدم مساوات کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کی تصدیق کریں۔

$$\sqrt{ab} < \frac{b-1}{\ln b - \ln a} < \frac{a+b}{2}$$

۱۰۷۰۶ یہ عدم مساوات کہتی ہے کہ دو مثبت اعداد کی ہندسی اوسط ان کی لوگارتھمی اوسط سے کم ہوگی جو از خود ان کی حسابی اوسط سے کم ہوگی۔

۷.۴ a^x اور $\log_a x$

اب تک، ماسوائے e کے، ہم نے مثبت اعداد کو غیر ناطق طاقت دینا نہیں سیکھا۔ قوت نمائی تفاعل کی تعریف $e^x = \ln^{-1} x$، متغیر x کی تمام حقیقی قیمتوں، ناطق اور غیر ناطق، کے لیے درست ہے۔ اس حصہ میں ہم اس تعریف کو استعمال کر کے کسی بھی مثبت عدد کو کسی بھی ناطق یا غیر ناطق کی طاقت دینا سیکھ کر مثبت عدد a کے لیے قوت نمائی تفاعل $y = a^x$ کی تعریف پیش کریں گے۔ اس کے ساتھ ساتھ ہم تفرق کے طاقتی قاعدہ کو حتمی شکل دیں گے (جو تمام قوت نما کے لیے درست ہو گا) اور ایک تفاعل کو دوسرے تفاعل کی طاقت دیں گے مثلاً x^x اور $(\sin x)^{\tan x}$، وغیرہ۔

جیسا کہ e^x بہت سارے قوت نما تفاعل میں سے ایک ہے، اسی طرح $\ln x$ بھی بہت سارے لوگارتھمی تفاعل، جو تفاعل a^x کے معکوس ہیں، میں سے ایک ہے۔

تفاعل a^x

چونکہ کسی بھی مثبت عدد a کے لیے $a = e^{\ln a}$ ہوتا ہے، لہٰذا ہم a^x کو $(e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}$ تصور کر سکتے ہیں۔ یوں ہم درج ذیل تعریف پیش کرتے ہیں۔

تعریف: کسی بھی عدد $a > 0$ اور عدد x کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$a^x = e^{x \ln a} \tag{۱}$$

□

مثال ۷.۲۴:

$$\text{(ا)} \quad 2^{\sqrt{3}} = e^{\sqrt{3} \ln 2}$$
$$\text{(ب)} \quad 2^{\pi} = e^{\pi \ln 2}$$

□

تفاعل a^x قوت نما کے عمومی قواعد، جنہیں جدول ۷.۳ میں پیش کیا گیا ہے، کو مطمئن کرتا ہے۔ ہم ان قواعد کے ثبوت پیش نہیں کریں گے۔

جدول ۷.۳: قواعد برائے قوت نما

$a > 0$ ہے جبکہ x اور y کوئی بھی اعداد ہو سکتے ہیں	
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	ا)
$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	ب)
$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	ج)
$(a^x)^y = a^{xy} = (a^y)^x$	د)

۱۰۷۲۴ **قاعدہ طاقت (حتمی روپ)**

۱۰۷۲۵ ہم اب کسی بھی $x > 0$ اور حقیقی عدد n کے لئے x^n کی تعریف $x^n = e^{n \ln x}$ لے سکتے ہیں۔ یوں مساوات $\ln x^n = n \ln x$ میں
۱۰۷۲۶ n کا ناطق ہونا ضروری نہیں؛ جب تک $x > 0$ ہو یہ کوئی بھی عدد ہو سکتا ہے۔ ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \ln x^n &= \ln(e^{n \ln x}) = n \ln x \cdot \ln e && \text{چونکہ } \ln e^u = u \\ &= n \ln x \end{aligned}$$

۱۰۷۲۷ قاعدہ $a^x/a^y = a^{x-y}$ اور تعریف $x^n = e^{n \ln x}$ مل کر ہمیں قاعدہ طاقت کے تفرق کا حتمی روپ طے کرنے کے قابل بناتے ہیں۔ ہم x^n
۱۰۷۲۸ کا x کے لحاظ سے تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{n \ln x} && x^n,\ x > 0 \text{ کی تعریف} \\ &= e^{n \ln x} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \ln x) && e^u \text{ کے لئے زنجیری قاعدہ} \\ &= x^n \cdot \frac{n}{x} && \text{دوبارہ تعریف} \\ &= n x^{n-1} && \text{جدول ۷.۳ قاعدہ-ج} \end{aligned}$$

۱۰۷۲۹ مختصراً، جب تک $x > 0$ ہو درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^n = n x^{n-1}$$

۱۰۷۳۰ زنجیری قاعدہ اس مساوات کو وسعت دے کر طاقتی قاعدے کا حتمی روپ دیتا ہے۔

۱۰۷۳۱ **طاقتی قاعدہ (حتمی روپ)**

۱۰۷۳۲ اگر n حقیقی عدد ہو اور u متغیر x کا مثبت قابل تفرق تفاعل ہو، تب u^n متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u^n = nu^{n-1}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

۱۰۷۳۳ مثال ۷.۲۵:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,x^{\sqrt{2}-1} \quad (x > 0) \qquad \text{ا)}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x)^{\pi} = \pi(\sin x)^{\pi-1}\cos x \quad (\sin x > 0) \qquad \text{ب)}$$

۱۰۷۳۴ □

۱۰۷۳۵ a^x کا تفرق

۱۰۷۳۶ ہم تعریف $a^x = e^{x\ln a}$ سے آغاز کر کے تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x\ln a} = e^{x\ln a}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x\ln a) \qquad \text{زنجیری قاعدہ}\\ &= a^x\ln a\end{aligned}$$

۱۰۷۳۷ اگر $a > 0$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^x = a^x\ln a$$

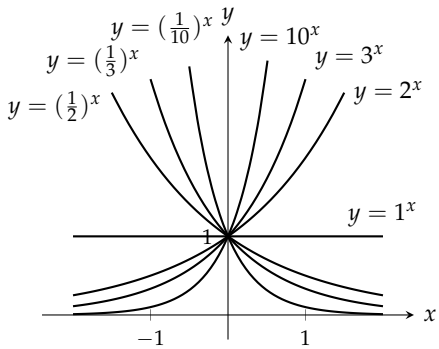
۱۰۷۳۸ زنجیری قاعدہ سے درج ذیل زیادہ عمومی روپ حاصل ہو گا۔

۱۰۷۳۹ اگر $a > 0$ ہو اور u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو، تب a^u متغیر x کا قابل تفرق تفاعل ہو گا اور اس کا تفرق درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}a^u = a^u\ln a\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \qquad (۲)$$

۱۰۷۴۰ مساوات ۲ دکھاتی ہے کیوں e^x احصاء میں پسندیدہ قوت نمائی تفاعل ہے۔ اگر $a = e$ ہو تب $\ln a = 1$ ہو گا اور مساوات ۲ درج ذیل سادہ صورت
۱۰۷۴۱ اختیار کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x\ln e = e^x$$



شکل ۷.۳۱: قوت نمائی تفاعل کی ترسیم اوپر کو مقعر ہو گی۔

۱۰۷۴۲ مثال ۷.۲۶:

ا) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}3^x = 3^x \ln 3$$

ب) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}3^{-x} = 3^{-x} \ln 3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-x) = -3^{-x} \ln 3$$

ج) $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}3^{3\sin x} = 3^{\sin x} \ln 3 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = 3^{\sin x}(\ln 3)\cos x$$

۱۰۷۴۳ □

۱۰۷۴۴ ہم مساوات ۲ سے دیکھتے ہیں کہ $\ln a > 0$ یعنی $a > 1$ کی صورت میں a^x کا تفرق مثبت ہو گا جبکہ $\ln a < 0$ یعنی $0 < a < 1$ کی
۱۰۷۴۵ صورت میں a^x کا تفرق منفی ہو گا۔ دونوں میں a^x یک بہ یک ہے۔ دہرا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(a^x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x \ln a) = (\ln a)^2 a^x$$

۱۰۷۴۶ تمام x کے لئے مثبت ہے، لہٰذا حقیقی اعداد کی لکیر پر a^x کی ترسیم اوپر کی طرف مقعر ہو گی (شکل ۷.۳۱)۔

۱۰۷۴۷ دیگر طاقتی تفاعل

۱۰۷۴۸ مثبت اعداد کو من مانی حقیقی طاقت تک اٹھانے کی صلاحیت ہمیں $x > 0$ کے لئے x^x اور $x^{\ln x}$ جیسے تفاعلات کی تعریف پیش کرنے کے قابل بناتی
۱۰۷۴۹ ہے۔ ایسے تفاعلات کا تفرق حاصل کرنے کے لئے ہم تفاعل کو e کی طاقت لکھتے ہیں۔

۱۰۷۵۰ مثال ۷.۲۷: اگر $y = x^x,\ x > 0$ ہو، $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ تلاش کریں۔

۱۰۷۵۱ **حل**

۱۰۷۵۲ تفاعل x^x کو e کی طاقت لکھیں۔

$$y = x^x = e^{x \ln x}$$ مساوات ۱ میں $a = x$ ہے

۱۰۷۵۳ اب سادہ تفرق لیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}c} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x \ln x} \\ &= e^{x \ln x} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x \ln x) \\ &= x^x \left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x\right) \\ &= x^x (1 + \ln x)\end{aligned}$$

۱۰۷۵۴ □

۱۰۷۵۵ a^u کا تکمل

۱۰۷۵۶ اگر $a \neq 1$ ہو، $\ln a \neq 0$ ہو گا، اور ہم مساوات ۲ کے دونوں اطراف $\ln a$ سے تقسیم کر سکتے ہیں۔ ایسا کر کے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$a^u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\ln a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^u)$$

۱۰۷۵۷ متغیر x کے لحاظ سے تکمل کرتے ہیں۔

$$\int a^u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\ln a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^u)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} \int \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^u)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a} a^u + C$$

۱۰۷۵۸ بائیں ہاتھ پہلے تکمل کو تفرقی روپ میں لکھ کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

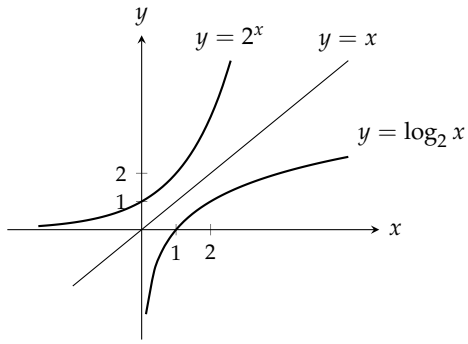
$$\int a^u\,\mathrm{d}u = \frac{a^u}{\ln a} + C \tag{۳}$$

۱۰۷۵۹ مثال ۷.۲۸:

$$\int 2^x\,\mathrm{d}x = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$ مساوات ۳ میں $a = 2,\ u = x$ ہیں

$$\begin{aligned}\int 2^{\sin x} \cos x\,\mathrm{d}x &= \int 2^u\,\mathrm{d}u = \frac{2^u}{\ln u} + C \\ &= \frac{2^{\sin x}}{\ln 2} + C\end{aligned}$$ مساوات ۳ میں $u = \sin x$ ہے

۱۰۷۶۰ □



شکل ۷.۳۲: تفاعل 2^x اور اس کے معکوس $\log_2 x$ کی ترسیمات۔

۱۰۷۶۱ **اساس a کا لوگارتھم**

۱۰۷۶۲ جیسا ہم دیکھ چکے ہیں، اگر a ماسوائے 1 کوئی مثبت عدد ہو، تب تفاعل a^x یک بہ یک ہو گا، اور ہر نقطے پر اس کا تفرق غیر صفر ہو گا۔ یوں اس کا قابل تفرق

۱۰۷۶۳ معکوس بھی ہو گا۔ ہم x کے اساس a لوگارتھم کو $\log_a x$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

۱۰۷۶۴ تعریف: کسی بھی مثبت عدد $a \neq 1$ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\log_a x = \text{معکوس } a^x$$

۱۰۷۶۵ □

۱۰۷۶۶ تفاعل $y = a^x$ کی ترسیم کا لکیر $y = x$ کی دوسری طرف عکس سے $y = \log_a x$ کی ترسیم حاصل کی جا سکتی ہے (شکل ۷.۳۲)۔

۱۰۷۶۷ چونکہ $\log_a x$ اور a^x ایک دوسرے کے معکوس ہیں لہٰذا درج ذیل مماثل تفاعل ہوں گے۔

۱۰۷۶۸ **a^x اور $\log_a x$ کی معکوس مساواتیں**

$$a^{\log_a x} = x \quad (x > 0) \tag{۴}$$

$$\log_a(a^x) = x \quad (\text{تمام } x) \tag{۵}$$

۱۰۷۶۹ مثال ۷.۲۹:

ا) $\log_2(2^5) = 5$

ب) $2^{\log_2(3)} = 3$

ج) $\log_{10}(10^{-7}) = -7$

د) $10^{\log_{10}(4)} = 4$

جدول ۷.۴: اساس a لوگارتھم کے خواص

		کسی بھی اعداد $x > 0$ اور $y > 0$ کے لئے
ا)	قاعدہ ضرب	$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
ب)	قاعدہ حاصل تقسیم	$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
ج)	قاعدہ مقلوب	$\log_a \frac{1}{y} = -\log_a y$
د)	قاعدہ طاقت	$\log_a x^y = y \log_a x$

۱۰۷۷۰ □

۱۰۷۷۱ $\log_a x$ کی قیمت کا حصول

۱۰۷۷۲ تفاعل $\log_a x$ کی قیمت تلاش کرتے وقت یاد رکھیں یہ تفاعل $\ln x$ کا مضرب ہے۔

$$\log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x = \frac{\ln x}{\ln a} \tag{۶}$$

۱۰۷۷۳ ہم مساوات ۶ کو مساوات ۴ سے اخذ کر سکتے ہیں۔

مساوات ۴	$a^{\log_a(x)} = x$
دونوں اطراف قدرتی لوگارتھم لیں	$\ln a^{\log_a(x)} = \ln x$
جدول ۷.۱ میں قاعدہ طاقت	$\log_a(x) \cdot \ln a = \ln x$
$\log_a x$ کے لئے حل کریں	$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

۱۰۷۷۴ مثال ۷.۳۰:

$$\log_{10} 2 = \frac{\ln 2}{\ln 10} \approx \frac{0.69315}{2.30259} \approx 0.30103$$

۱۰۷۷۵ □

۱۰۷۷۶ تفاعل $\log_a x$ کے ریاضیاتی خواص (جدول ۷.۴) وہی ہیں جو $\ln x$ کے ہیں۔ قدرتی لوگارتھم کے مطابق خواص کو $\ln a$ سے تقسیم کر کے انہیں اخذ
۱۰۷۷۷ کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر درج ذیل ہو گا۔

$$\ln xy = \ln x + \ln y \qquad \text{قدرتی لوگارتھم کا قاعدہ طاقت}$$

$$\frac{\ln xy}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} \qquad \ln a \text{ سے تقسیم}$$

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y \qquad \text{اساس } a \text{ کے لوگارتھم کا قاعدہ طاقت}$$

۱۰۷۷۸ $\log_a u$ کا تفرق

۱۰۷۷۹ اساس a کے لوگارتھم کا تفرق حاصل کرنے کی خاطر ہم اس کو پہلے قدرتی لوگارتھم کی صورت میں لکھتے ہیں۔ اگر u متغیر x کا مثبت قابل تفرق تفاعل ہو
۱۰۷۸۰ تب

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log_a u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln u}{\ln a}\right) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

۱۰۷۸۱ یعنی

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log_a u) = \frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{۷}$$

۱۰۷۸۲ ہو گا۔

۱۰۷۸۳ مثال ۷.۳۱:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_{10}(3x+1) = \frac{1}{\ln 10}\cdot\frac{1}{3x+1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x+1) = \frac{3}{(\ln 10)(3x+1)}$$

۱۰۷۸۴ □

۱۰۷۸۵ $\log_a x$ پر مشتمل تکملات

۱۰۷۸۶ جہاں اساس a کے لوگارتھم کا تکمل پایا جاتا ہو ہم اس کو پہلے قدرتی لوگارتھم کی صورت میں بدلتے ہیں۔

۱۰۷۸۷ مثال ۷.۳۲:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\log_2 x}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\ln 2}\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x && \log_2 x = \frac{\ln x}{\ln 2}\\
&= \frac{1}{\ln 2}\int u\,\mathrm{d}u && u = \ln x\\
&= \frac{1}{\ln 2}\frac{u^2}{2} + C\\
&= \frac{1}{\ln 2}\frac{(\ln x)^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2\ln 2} + C
\end{aligned}$$

□

اساس 10 کا لوگارتھم

اساس 10 کے لوگارتھم کو ہم عموماً $\log_{10}$ کے بجائے log لکھتے ہیں۔ اساس 10 کا لوگارتھم، جس کو **عام لوگارتھم**[8] کہتے ہیں، کئی سائنسی کلیات میں پایا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر، زلزلہ کی شدت کو عموماً اساس 10 کے لوگارتھمی **رکٹر پیمائش**[9] [10] میں پیش کیا جاتا ہے۔ رکٹر پیما کا کلیہ

$$\text{شدت } R = \log_{10}\left(\frac{a}{T}\right) + B$$

ہے، جہاں زلزلہ پیما کے مقام پر زمینی لرزش کا حیطہ a ہے، جس کو مائیکرو میٹر میں ناپا جاتا ہے، زلزلہ کی موج کا دوری عرصہ T ہے، جس کو سیکنڈ میں ناپا جاتا ہے، جبکہ B ایک تجربی جزو ہے، جو مرکز زلزلہ سے زلزلہ پیما تک پہنچنے میں شدت کی کمی کو ظاہر کرتا ہے۔

جاپان کے شہر ناگاساکی پر گرائے گئے ایٹمی بم نے 1.34×10^{14} J توانائی خارج کی، جو رکٹر پیما پر 5 کے برابر ہے۔ آج تک سب سے بڑا ایٹمی دھماکہ 7.1 شدت کا تھا، جس میں 2.09×10^{17} J توانائی خارج کی گئی۔ اکتوبر ۸ ۲۰۰۵ء کو آزاد کشمیر میں 7.6 شدت کا زلزلہ آیا، جس میں 1.585×10^{16} J توانائی خارج ہوئی۔

مثال ۷.۳۳: مرکز زلزلہ سے زلزلہ پیما تک فاصلہ 10 000 km ہے، جس کے لیے $B = 6.8$ ہو گا۔ مقام زلزلہ پیما پر زمین کی انتصابی حرکت 10 μm اور دوری عرصہ 1 s ہیں۔ زلزلہ کی شدت تلاش کریں۔

حل

$$R = \log_{10}\left(\frac{10}{1}\right) + 6.8 = 1 + 6.8 = 7.8$$

اتنی شدت کے زلزلے کے مرکز کے قریب تباہی کی توقع رکھیں۔ □

محلول کی **تیزابیت**[11] کو pH (**مخفف قوہ ہائیڈروجن**) میں ناپا جاتا ہے، جو اساس 10 کا لوگارتھمی پیمانہ ہے۔ محلول میں ہائیڈرونیم بار داریہ $[H_3O^+]$ کے گھناپن کے معکوس کا عام لوگارتھم اس محلول کی pH قیمت ہو گی۔

$$\text{pH} = \log_{10}\frac{1}{[H_3O^+]} = -\log_{10}[H_3O^+]$$

ہائیڈرونیم بار داریہ کے گھناپن کو مول فی لٹر (mol L^{-1}) میں ناپا جاتا ہے۔ تیزاب کی pH قیمت 7 سے کم جبکہ القلی کی 7 سے زیادہ ہوتی ہے۔ سرکہ کی pH قیمت 3 جبکہ مقطر پانی کی pH قیمت 7 ہوتی ہے۔ pH کا پیمانہ 0 سے 14 تک ہے۔ جدول ۷.۵ میں کئی غذاؤں کی pH قیمت دی گئی ہے۔

---

[8] commonlogarithm

[9] رکٹر پیمائش میں اکائی کا اضافہ حیطہ میں تقریباً 10 گنا اور توانائی میں تقریباً 31.623 گنا کا اضافہ ظاہر کرتا ہے۔

[10] Richterscale

[11] acidity

جدول ۷.۵: زیادہ تر غذائیں تیزابی ($\mathrm{pH} < 7$) ہوتی ہیں۔

غذا	pH
کیلا	$4.5 - 4.7$
چکوترہ	$3.0 - 3.3$
سنترا	$3.0 - 4.0$
لیموں	$1.8 - 2.0$
دودھ	$6.3 - 6.6$
مرچ	$5.1 - 5.7$

۱۰۸۰۷ لوگارتھم کے استعمال کی دوسری مثال ڈیسی بیل dB پیمانہ ہے، جو صدا کی بلندی کو ناپنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ اگر صدا کی شدت I واٹ فی مربع میٹر
۱۰۸۰۸ ہو تب

$$\text{سطح صدا} = 10\log_{10}(I \times 10^{12})\ \mathrm{dB} \tag{۸}$$

۱۰۸۰۹ ہو گی۔ جیسا اگلی مثال دکھاتی ہے، شدت صدا کو دگنا کرنے سے سطح صدا میں تقریباً 3 dB کا اضافہ ہوتا ہے۔

۱۰۸۱۰ مثال ۷.۳۴: صدا کی شدت کو دگنا کرنے سے سطح صدا میں کتنا اضافہ ہو گا؟

۱۰۸۱۱ **حل**

۱۰۸۱۲ مساوات ۸ کے تحت $2I$ شدت صدا کے لیے

$$\begin{aligned}
\text{دگنی شدت کی سطح صدا} &= 10\log_{10}(2I \times 10^{12}) && \text{مساوات ۸ میں } 2I \\
&= 10\log_{10} 2 + 10\log_{10}(I \times 10^{12}) \\
&= \text{اصل شدت کی سطح صدا} + 10\log_{10} 2 \\
&\approx \text{اصل شدت کی سطح صدا} + 3 && \log_{10} \approx 0.3
\end{aligned}$$

۱۰۸۱۳ ہو گا۔ □

۱۰۸۱۴ سطح صدا کی چند قیمتیں جدول ۷.۶ میں دی گئی ہیں۔

۱۰۸۱۵ **سوالات**

۱۰۸۱۶ **الجبرائی حساب**

۱۰۸۱۷ سوال ۷.۲۳۵ تا سوال ۷.۲۳۸ میں دی گئی ریاضیاتی عبارت کی سادہ صورت تلاش کریں۔

۱۰۸۱۸ سوال ۷.۲۳۵:

جدول ۷.۶: سطح صدا کی چند قیمتیں۔

سماعت کی کمتر سطح	0 dB
پتوں کا سرسرانا	10 dB
سرگوشی	20 dB
خاموش گاڑی	50 dB
عام بات چیت	65 dB
تین میٹر دور ہوائی برما	90 dB
کانوں میں درد	120 dB

۱۰۸۱۹ ا. $5^{\log_5 7}$

۱۰۸۲۰ ب. $8^{\log_8 \sqrt{2}}$

۱۰۸۲۱ ج. $1.3^{\log_{1.3} 75}$

۱۰۸۲۲ د. $\log_4 16$

۱۰۸۲۳ ھ. $\log_3 \sqrt{3}$

۱۰۸۲۴ و. $\log_4 \left(\frac{1}{4}\right)$

۱۰۸۲۵ سوال ۷.۲۳۶:

۱۰۸۲۶ ا. $2^{\log_2 3}$

۱۰۸۲۷ ب. $10^{\log_{10}(1/2)}$

۱۰۸۲۸ ج. $\pi^{\log_\pi 7}$

۱۰۸۲۹ د. $\log_{11} 121$

۱۰۸۳۰ ھ. $\log_{121} 11$

۱۰۸۳۱ و. $\log_3 \left(\frac{1}{9}\right)$

۱۰۸۳۲ سوال ۷.۲۳۷:

۱۰۸۳۳ ا. $2^{\log_4 x}$

۱۰۸۳۴ ب. $9^{\log 3x}$

۱۰۸۳۵ ج. $\log_2(e^{(\ln 2)(\sin x)})$

۱۰۸۳۶ سوال ۷.۲۳۸:

۱۰۸۳۷ ا. $25^{\log_5(3x^2)}$

۱۰۸۳۸ ب. $\log_e(e^x)$

۱۰۸۳۹ ج. $\log_4(2^{e^x \sin x})$

۱۰۸۴۰ سوال ۷.۲۳۹ اور سوال ۷.۲۴۰ میں نسبت کو قدرتی لوگارتھمی صورت میں لکھ کر سادہ صورت حاصل کریں۔

۱۰۸۴۱ سوال ۷.۲۳۹:

۱۰۸۴۲ ا. $\frac{\log_2 x}{\log_3 x}$

۱۰۸۴۳ ب. $\frac{\log_2 x}{\log_8 x}$

۱۰۸۴۴ ج. $\frac{\log_x a}{\log_{x^2} a}$

۱۰۸۴۵ سوال ۷.۲۴۰:

۱۰۸۳۶ ا. $\frac{\log_9 x}{\log_3 x}$ ۱۰۸۳۷ ب. $\frac{\log_{\sqrt{10}} x}{\log_{\sqrt{2}} x}$ ۱۰۸۳۸ ج. $\frac{\log_a b}{\log_b a}$

۱۰۸۳۹ سوال ۷.۲۴۱ تا سوال ۷.۲۴۴ میں دی گئی مساوات حل کریں۔

۱۰۸۵۰ سوال ۷.۲۴۱: $3^{\log_3(7)+2^{\log_2(5)}} = 5^{\log_5(x)}$

۱۰۸۵۱ سوال ۷.۲۴۲: $8^{\log_8(3)} - e^{\ln 5} = x^2 - 7^{\log_7(3x)}$

۱۰۸۵۲ سوال ۷.۲۴۳: $3^{\log_3(x^2)=5e^{\ln x}} - 3 \cdot 10^{\log_{10}(2)}$

۱۰۸۵۳ سوال ۷.۲۴۴: $\ln e + 4^{-2\log_4(x)} = \frac{1}{x}\log_{10}(100)$

۱۰۸۵۴ سوال ۷.۲۴۵ تا سوال ۷.۲۷۲ میں دیے گئے غیر تابع متغیر کے لحاظ سے y کا تفرق تلاش کریں۔

۱۰۸۵۵ سوال ۷.۲۴۵: $y = 2^x$

۱۰۸۵۶ سوال ۷.۲۴۶: $y = 3^{-x}$

۱۰۸۵۷ سوال ۷.۲۴۷: $y = 5^{\sqrt{s}}$

۱۰۸۵۸ سوال ۷.۲۴۸: $y = 2^{s^2}$

۱۰۸۵۹ سوال ۷.۲۴۹: $y = x^{\pi}$

۱۰۸۶۰ سوال ۷.۲۵۰: $y = t^{1-e}$

۱۰۸۶۱ سوال ۷.۲۵۱: $y = (\cos\theta)^{\sqrt{2}}$

۱۰۸۶۲ سوال ۷.۲۵۲: $y = (\ln\theta)^{\pi}$

۱۰۸۶۳ سوال ۷.۲۵۳: $y = 7\sec\theta\ln 7$

۱۰۸۶۴ سوال ۷.۲۵۴: $y = 3^{\tan\theta}\ln 3$

۱۰۸۶۵ سوال ۷.۲۵۵: $y = 2^{\sin 3t}$

۱۰۸۶۶ سوال ۷.۲۵۶: $y = 5^{-\cos 2t}$

۱۰۸۶۷ سوال ۷.۲۵۷: $y = \log_2 5\theta$

۱۰۸۶۸ سوال ۷.۲۵۸: $y = \log_3(1 + \theta\ln 3)$

۱۰۸۶۹ سوال ۷.۲۵۹: $y = \log_4 x + \log_4 x^2$

۱۰۸۷۰ سوال ۷.۲۶۰: $y = \log_{25} e^x - \log_5\sqrt{x}$

۱۰۸۷۱ سوال ۷.۲۶۱: $y = \log_2 r \cdot \log_4 r$

۱۰۸۷۲ سوال ۷.۲۶۲: $y = \log_3 r \cdot \log_9 r$

۱۰۸۷۳ سوال ۷.۲۶۳: $y = \log_3\left(\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\ln 3}\right)$

۱۰۸۷۴ سوال ۷.۲۶۴: $y = \log_5 \sqrt{(\frac{7x}{3x+2})^{\ln 5}}$

۱۰۸۷۵ سوال ۷.۲۶۵: $y = \theta \sin(\log_7 \theta)$

۱۰۸۷۶ سوال ۷.۲۶۶: $y = \log_7(\frac{\sin\theta\cos\theta}{e^\theta 2^\theta})$

۱۰۸۷۷ سوال ۷.۲۶۷: $y = \log_5 e^x$

۱۰۸۷۸ سوال ۷.۲۶۸: $y = \log_2(\frac{x^2e^2}{2\sqrt{x+1}})$

۱۰۸۷۹ سوال ۷.۲۶۹: $y = 3^{\log_2 t}$

۱۰۸۸۰ سوال ۷.۲۷۰: $y = 3\log_8(\log_2 t)$

۱۰۸۸۱ سوال ۷.۲۷۱: $y = \log_2(8t^{\ln 2})$

۱۰۸۸۲ سوال ۷.۲۷۲: $y = t\log_3(e^{(\sin t)(\ln 3)})$

۱۰۸۸۳ لوگارتھمی تفرق

۱۰۸۸۴ سوال ۷.۲۷۳ تا سوال ۷.۲۸۰ میں y کا لوگارتھمی تفرق دیے گئے غیر تابع متغیر کے لحاظ سے معلوم کریں۔

۱۰۸۸۵ سوال ۷.۲۷۳: $y = (x+1)^x$

۱۰۸۸۶ سوال ۷.۲۷۴: $y = x^{(x+1)}$

۱۰۸۸۷ سوال ۷.۲۷۵: $y = (\sqrt{t})^t$

۱۰۸۸۸ سوال ۷.۲۷۶: $y = t^{\sqrt{t}}$

۱۰۸۸۹ سوال ۷.۲۷۷: $y = (\sin x)^x$

۱۰۸۹۰ سوال ۷.۲۷۸: $y = x^{\sin x}$

۱۰۸۹۱ سوال ۷.۲۷۹: $y = x^{\ln x}$

۱۰۸۹۲ سوال ۷.۲۸۰: $y = (\ln x)^{\ln x}$

۱۰۸۹۳ تکمل

۱۰۸۹۴ سوال ۷.۲۸۱ تا سوال ۷.۲۹۰ میں تکمل تلاش کریں۔

۱۰۸۹۵ سوال ۷.۲۸۱: $\int 5^x \, dx$

۱۰۸۹۶ سوال ۷.۲۸۲: $\int (1.3)^x \, dx$

۱۰۸۹۷ سوال ۷.۲۸۳: $\int_0^1 2^{-\theta} \, d\theta$

۱۰۸۹۸ سوال ۷.۲۸۴: $\int_{-2}^0 5^{-\theta} \, d\theta$

۱۰۸۹۹ سوال ۷.۲۸۵: $\int_1^{\sqrt{2}} x2^{(x^2)}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۰۰ سوال ۷.۲۸۶: $\int_1^4 \frac{2^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۰۱ سوال ۷.۲۸۷: $\int_0^{\pi/2} 7^{\cos t}\sin t\,\mathrm{d}t$

۱۰۹۰۲ سوال ۷.۲۸۸: $\int_0^{\pi/4} \left(\frac{1}{3}\right)^{\tan t}\sec^2 t\,\mathrm{d}t$

۱۰۹۰۳ سوال ۷.۲۸۹: $\int_2^4 x^{2x}(1+\ln x)\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۰۴ سوال ۷.۲۹۰: $\int_1^2 \frac{2^{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۰۵ سوال ۷.۲۹۱ تا سوال ۷.۲۹۴ میں دیے گئے تکمل حل کریں۔

۱۰۹۰۶ سوال ۷.۲۹۱: $\int 3x^{\sqrt{3}}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۰۷ سوال ۷.۲۹۲: $\int x^{\sqrt{2}-1}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۰۸ سوال ۷.۲۹۳: $\int_0^3 (\sqrt{2}+1)x^{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۰۹ سوال ۷.۲۹۴: $\int_1^e x^{(\ln 2)-1}$

۱۰۹۱۰ سوال ۷.۲۹۵ تا سوال ۷.۳۰۴ میں دیے تکمل کو حل کریں۔

۱۰۹۱۱ سوال ۷.۲۹۵: $\int \frac{\log_{10} x}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۱۲ سوال ۷.۲۹۶: $\int_1^4 \frac{\log_2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۱۳ سوال ۷.۲۹۷: $\int_1^4 \frac{\ln 2\log_2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۱۴ سوال ۷.۲۹۸: $\int_1^e \frac{2\ln 10\log_{10} x}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۱۵ سوال ۷.۲۹۹: $\int_0^2 \frac{\log_2(x+2)}{x+2}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۱۶ سوال ۷.۳۰۰: $\int_{1/10}^{10} \frac{\log_{10}(10x)}{x}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۱۷ سوال ۷.۳۰۱: $\int_0^9 \frac{2\log_{10}(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۱۸ سوال ۷.۳۰۲: $\int_2^3 \frac{2\log_2(x-1)}{x-1}\,\mathrm{d}x$

۱۰۹۱۹ سوال ۷.۳۰۳: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\log_{10} x}$

۱۰۹۲۰ سوال ۷.۳۰۴: $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(\log_8 x)^2}$

سوال ۷.۳۰۵ تا سوال ۷.۳۰۸ میں تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۰۵: $\int_1^{\ln x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad x > 1$

سوال ۷.۳۰۶: $\int_1^{e^x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

سوال ۷.۳۰۷: $\int_1^{1/x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0$

سوال ۷.۳۰۸: $\frac{1}{\ln a}\int_1^{x} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t, \quad x > 0$

نظریہ اور استعمال

سوال ۷.۳۰۹: منحنی $y = \frac{2x}{1+x^2}$ اور محور x پر $-2 \le x \le 2$ کے بیچ خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال ۷.۳۱۰: منحنی $y = 2^{1-x}$ اور محور x پر $-1 \le x \le 1$ کے بیچ خطے کا رقبہ معلوم کریں۔

سوال ۷.۳۱۱: انسانی خون کا pH

انسانی خون کی pH قیمت 7.37 سے 7.44 تک ہوتی ہے۔ انسانی خون میں بار دار یہ $[\mathrm{H_3O^+}]$ کی مطابقتی حدود تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۱۲: دماغی سیال کا pH

دماغی سیال میں $[\mathrm{H_3O^+}]$ کا گھناپن تقریباً $4.8 \times 10^{-8}\ \mathrm{mol\,L^{-1}}$ ہے۔ اس سیال کا pH تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۱۳: صدا کو افزائش کار (ایمپلی فائر) k سے ضرب دے کر سطح صدا 10 dB بلند کرتا ہے۔ جزو ضربی k کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۱۴: ایک افزائش کار صدا کی شدت کو 10 سے ضرب دیتا ہے۔ صدا میں کتنے dB کا اضافہ پیدا ہو گا؟

سوال ۷.۳۱۵: کسی بھی محلول میں $[\mathrm{H_3O^+}]$ اور $[OH^-]$ کے گھناپن کا حاصل ضرب 10^{-14} ہوتا ہے۔

ا. $[\mathrm{H_3O^+}]$ کی کیا قیمت گھناپن کے مجموعہ $S = [\mathrm{H_3O^+}] + [\mathrm{OH^-}]$ کو اقل کرتی ہے؟

ب. اس محلول کا pH تلاش کریں جس میں S کی قیمت اقل ہو۔

ج. $[\mathrm{H_3O^+}]$ اور $[OH^-]$ کی کون سی نسبت S کو اقل بناتی ہے؟

سوال ۷.۳۱۶: کیا $\log_a b$ کی قیمت $\frac{1}{\log_b a}$ کے برابر ہو سکتی ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۷.۳۱۷: مساوات $x^2 = 2^x$ کے دو حل $x = 2$ اور $x = 4$ ہیں، جبکہ اس کا تیسرا حل بھی پایا جاتا ہے۔ ترسیم کی مدد سے تیسرا حل تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۱۸: کیا $x > 0$ کے لیے $x^{\ln 2}$ اور $2^{\ln x}$ برابر ہو سکتے ہیں؟ دونوں تفاعل ترسیم کرتے ہوئے بتائیں کیا ہوتا ہے۔

سوال ۷.۳۱۹: 2^x کی خط بندی

(ا) نقطہ $x = 0$ پر $f(x) = 2^x$ کی خط بندی دریافت کریں۔ اس کے بعد عددی سروں کو 2 اعشاریہ مقامات تک پورم پور کریں۔ (ب) وقفہ $-3 \le x \le 3$ اور وقفہ $-1 \le x \le 1$ کے لیے تفاعل اور خط بندی کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال ۷.۳۲۰: $f(x) = \log_3 x$ کی خط بندی

(ا) نقطہ $x = 3$ پر $f(x) = \log_3 x$ کی خط بندی تلاش کریں۔ اس کے بعد عددی سروں کو 2 اعشاریہ مقامات تک پورم پور کریں۔ (ب) وقفہ $0 \leq x \leq 8$ اور $2 \leq x \leq 4$ کے لیے تفاعل اور خط بندی کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔

دیگر اساس کے ساتھ حساب کتاب

سوال ۷.۳۲۱: عموماً کیلکولیٹروں میں $\log_{10} x$ اور $\ln x$ پائے جاتے ہیں۔ دیگر اساس کے لوگارتھم تلاش کرنے کی خاطر ہم درج ذیل مساوات استعمال کرتے ہیں۔

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\log_2 5 = \frac{\ln 5}{\ln 2} \approx 2.3219$$

کیلکولیٹر استعمال کرتے ہوئے 5 اعشاریہ مقامات کی درستگی تک (ا) $\log_3 8$، (ب) $\log_7 0.5$، (ج) $\log_{2_} 17$، (د) $\log_{0.5} 7$

تلاش کریں۔ درج ذیل معلومات استعمال کرتے ہوئے $\ln x$ تلاش کریں۔ (ہ) $\log_{10} x = 2.3$، (و) $\log_2 x = 1.4$، (ز) $\log_{10} x = -0.7$، (ح) $\log_2 x = -1.5$

سوال ۷.۳۲۲: تبدیلی پیمانہ

(ا) دکھائیں کہ اساس 10 لوگارتھم کو اساس 2 لوگارتھم میں تبدیل کرنے کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\log_2 x = \frac{\ln 10}{\ln 2} \log_{10} x$$

(ب) دکھائیں کہ اساس a لوگارتھم کو اساس b لوگارتھم میں تبدیل کرنے کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$\log_b x = \frac{\ln a}{\ln b} \log_a x$$

۷.۵ افزائش اور تنزل

اس حصے میں ہم قوت نما تبدیلی کا قاعدہ حاصل کریں گے۔ اس کے علاوہ ان عملی استعمال پر غور کیا جائے گا جن کی وجہ سے لوگارتھمی اور قوت نمائی تفاعل کی اہمیت ہے۔

قوت نما تبدیلی کا قاعدہ

فرض کریں ہم کسی مقدار y (جو سمتی رفتار، درجہ حرارت، برقی رو، یا کچھ اور ہو سکتا ہے) میں دلچسپی رکھتے ہیں، جس میں کسی بھی لمحہ t پر اضافہ یا کمی اس لمحہ موجود مقدار کے راست متناسب ہے۔ اگر ہمیں لمحہ $t = 0$ پر مقدار کی قیمت y_0 بھی معلوم ہو تب ہم درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کر کے متغیر t کا تفاعل y حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= ky && \text{تفرقی مساوات} \\ y &= y_0, \quad t = 0 && \text{ابتدائی معلومات} \end{aligned} \tag{۱}$$

اگر y مثبت ہو اور بڑھ رہا ہو تب k مثبت ہو گا اور مساوات ۱ کہتی ہے کہ اضافے کی شرح اب تک جمع شدہ مقدار کے راست متناسب ہے۔ اگر y منفی ہو اور گھٹ رہا ہو تب k منفی ہو گا اور مساوات ۱ کہتی ہے کہ تنزل کی شرح اب تک رہ گئی مقدار کے راست متناسب ہے۔

ہم دیکھ سکتے ہیں کہ مساوات ۱ کا ایک حل $y = 0$ ہے۔ غیر صفر حل حاصل کرنے کے لیے ہم مساوات ۱ کے دونوں اطراف کو y سے تقسیم کر کے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= k \\ \ln|y| &= kt + C && t \text{ کے لحاظ سے تکمل} \\ |y| &= e^{kt+C} && \text{قوت نما صورت} \\ |y| &= e^C \cdot e^{kt} && e^{a+b} = e^a \cdot e^b \\ y &= \mp e^C e^{kt} && \text{اگر } |y| = r \text{ ہو تب } y = \mp r \text{ ہو گا} \\ y &= Ae^{kt} && \text{مستقل } \mp e^C \text{ کو سادہ علامت } A \text{ سے ظاہر کرتے ہیں} \end{aligned}$$

ہم $\mp e^C$ کی تمام ممکنہ قیمتوں کے علاوہ 0 کو بھی A کی ممکنہ قیمت تصور کر کے، حل $y = 0$ کو بھی اس کلیہ میں شامل کر سکتے ہیں۔

ہم ابتدائی قیمت مسئلہ کے لیے A کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر $t = 0$ پر $y = y_0$ پُر کرتے ہیں۔

$$y_0 = Ae^{k \cdot 0} = A$$

یوں اس ابتدائی قیمت مسئلے کا حل $y = y_0 e^{kt}$ ہو گا۔

درج ذیل **قوت نما تبدیلی کا قاعدہ** ہے، جس میں k کو **شرح کا مستقل**[۱۲] کہتے ہیں۔

$$y = y_0 e^{kt}, \quad k > 0 \text{ اضافہ}, \quad k < 0 \text{ تنزل} \qquad \text{قوت نما تبدیلی کا قاعدہ} \tag{۲}$$

مساوات ۲ کا حصول ہم پر واضح کرتا ہے کہ صرف اور صرف قوت نما تفاعل کا ایک مستقل مضرب ہی خود کا تفرق ہو سکتا ہے۔

---

[۱۲] rateconstant

نمو آبادی

کوئی بھی آبادی (انسانی، نباتاتی، جراثیمی، وغیرہ) غیر استمراری تفاعل ہو گا چونکہ یہ صرف منفصل قیمتیں اختیار کرتی ہے۔ اس کے باوجود جب آبادی میں فردی تعداد بہت زیادہ ہو تب اس آبادی کو نہ صرف استمراری بلکہ قابل تفرق تفاعل سے ظاہر کرنا ممکن ہوتا ہے۔ اگر ہم فرض کریں کہ آبادی میں بچے پیدا کرنے والوں کا تناسب برقرار رہتا ہے تب کسی بھی لمحہ t پر بچوں کی پیدائشی شرح اس لمحے پر افراد کی تعداد $y(t)$ کے راست تناسب ہو گی۔ اگر ہم باہر سے آنے اور جانے والوں کو رد کریں اور ساتھ ہی مرنے والوں کی تعداد کو بھی رد کریں تب نمو آبادی کی شرح $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ پیدائشی شرح ky کے برابر ہو گی۔ یوں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky$ لہٰذا $y = y_0e^{kt}$ ہو گا۔ حقیقت میں کسی بھی آبادی پر دیگر عوامل بھی اثر انداز ہوں گے جن پر یہاں غور نہیں کیا جائے گا۔

مثال ۷.۳۵: بیماری پھیلنے کا ایک نمونہ فرض کرتا ہے کہ بیمار ہونے والوں کی شرح $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ اس وقت بیماروں کی تعداد y کے راست متناسب ہے۔ یوں جتنے زیادہ افراد کو بیماری لاحق ہو، بیماری اتنی زیادہ تیزی سے پھیلے گی۔

فرض کریں کہ ایک سال کے عرصہ میں کسی بیماری میں مبتلا افراد کی تعداد میں $20\,\%$ کمی رونما ہوتی ہے۔ اگر آج $10\,000$ افراد بیمار ہوں تب کتنے سالوں میں بیمار افراد کی تعداد 1000 ہو گی؟

حل

ہم مساوات $y = y_0e^{kt}$ استعمال کرتے ہیں۔ ہمیں تین چیزیں معلوم کرنی ہیں۔

ا. y_0 کی قیمت،

ب. k کی قیمت،

ج. $y = 1000$ کرنے کے لیے درکار t کی قیمت۔

پہلا قدم: y_0 کی قیمت: ہم آج کو لمحہ $t = 0$ لیتے ہیں۔ یوں $t = 0$ پر $y = 10\,000$ ہے۔ یوں ہماری مساوات درج ذیل ہے۔

$$y = 10\,000e^{kt}$$

دوسرا قدم: k کی قیمت: ایک سال کے بعد بیماروں کی تعداد، آج کی تعداد کے $80\,\%$ یعنی 8000 ہو گی۔ آئیں k حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} 8000 &= 10\,000e^{k(1)} \\ e^k &= 0.8 \\ \ln(e^k) &= \ln 0.8 \\ k &= \ln 0.8 \end{aligned}$$

یوں لمحہ t پر درج ذیل ہو گا۔

$$y = 10\,000e^{(\ln 0.8)t} \tag{۳}$$

۱۰۹۹۶ **تیسرا قدم:** t کی وہ قیمت جو $y = 1000$ دیتی ہے: ہم مساوات ۳ میں $y = 1000$ پُر کر کے t حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 1000 &= 10\,000e^{(\ln 0.8)t} \\ e^{(\ln 0.8)t} &= 0.1 \\ (\ln 0.8)t &= \ln 0.1 \\ t &= \frac{\ln 0.1}{\ln 0.8} \approx 10.32 \end{aligned}$$

۱۰۹۹۷ یوں بیماروں کی تعداد 1000 کرنے کے لیے ہمیں دس سال سے کچھ زیادہ انتظار کرنا ہو گا۔ □

۱۰۹۹۸ **مسلسل سود در سود**

۱۰۹۹۹ اگر آپ A_0 روپیہ کاروبار میں ڈالیں اور ایک سال میں اس سے r' روپیہ کمانے کی امید رکھتے ہوں، جہاں $r' = r \times A_0$ ہے، تب ایک سال کے
۱۱۰۰۰ آخر میں آپ کے پاس $A_0 + r' = A_0(1+r)$ روپیہ ہوں گے۔

۱۱۰۰۱ ربا پر کاروبار کرنے والا بنک ایک شخص کو A_0 روپیہ سود پر دیتا ہے۔ ایک سال بعد اس شخص پر $r \times A_0$ کا سود واجب الادا ہو گا لہٰذا ایک سال بعد اس
۱۱۰۰۲ شخص پر کل قرضہ $A_0 + rA_0 = A_0(1+r)$ ہو گا۔ ہم کہتے ہیں کہ سالانہ سود کی شرح r ہے۔ فرض کریں کہ یہ شخص سالانہ سود ادا نہیں
۱۱۰۰۳ کرتا۔ یوں دوسرے سال کی ابتدا میں اس شخص پر $A_0(1+r)$ قرضہ ہو گا اور بنک اگلے سال اس مقدار پر سود حاصل کرے گا۔ چونکہ سود کی شرح r
۱۱۰۰۴ ہے لہٰذا دوسرے سال اس شخص پر سود $r \times A_0(1+r)$ ہو گا اور دوسرے سال کے آخر میں اس پر کل قرضہ

$$A_0(1+r) + rA_0(1+r) = A_0(1+r)(1+r) = A_0(1+r)^2$$

۱۱۰۰۵ ہو گا۔ اسی طرح تین سال بعد قرضہ $A_0(1+r)^2 + rA_0(1+r)^2 = A_0(1+r)^3$ اور t سال بعد قرضہ

$$A_0(1+r)^t$$

۱۱۰۰۶ ہو گا۔

۱۱۰۰۷ اب بنک کہہ سکتا ہے کہ سال میں ایک بار کے بجائے وہ ماہوار $\frac{r}{12}$ شرح سے سود وصول کرے گا (جو ظاہری طور پر ربا کی وہی شرح معلوم ہوتی ہے)۔ یوں پہلے
۱۱۰۰۸ مہینے کے آخر میں واجب الادا ربا کی مقدار $\frac{r}{12}A_0$ اور قرضہ $A_t = A_0(1+\frac{r}{12})$ ہو گا۔ اسی طرح دوسرے مہینے کے آخر میں قرضہ $A_t =$
۱۱۰۰۹ $A_0(1+\frac{r}{12})^2$ ہو گا۔ ایک سال بعد قرضہ $A_t = A_0(1+\frac{r}{12})^{12}$ اور t سال بعد قرضہ $A_t = A_0(1+\frac{r}{12})^{12t}$ ہو گا،
۱۱۰۱۰ جس کو $A_t = A_0(1+\frac{r}{k})^{kt}$ لکھا جا سکتا ہے، جہاں $k = 12$ ہے۔

۱۱۰۱۱ یہ بنک ماہوار کے بجائے ہفتہ وار سود بھی وصول کر سکتا ہے۔ چونکہ سال میں 52 ہفتے ہوتے ہیں لہٰذا ایسی صورت میں $k = 52$ ہو گا اور t سال بعد قرضہ
۱۱۰۱۲ درج ذیل ہو گا۔

$$A_t = A_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}$$

سود پر چلنے والا بنک زیادہ سے زیادہ رہا حاصل کرنے کی خاطر، سال میں زیادہ سے زیادہ مرتبہ رہا حاصل کرنا چاہے گا۔ آئیں دیکھیں کہ $k \to \infty$ کرنے سے t سال بعد قرضہ کتنا ہو گا؟

$$\lim_{k\to\infty} A_t = \lim_{k\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}$$

اس مساوات میں $x = r/k$ لیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} A_t &= \lim_{x\to 0} A_0\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{rt}\\ &= A_0 e^{rt}\end{aligned}$$

درج بالا حد کے حصول میں ناقابل معلوم روپ 1^∞ حاصل ہوتا ہے۔ ایسی حد کی تلاش حصہ ۷.۶ میں سکھائی جائے گی جہاں مثال ۷.۴۹ میں آپ دیکھیں گے کہ چوکور قوسین میں بند مقدار کی حد e کے برابر ہے۔ یوں t سال بعد اس شخص پر قرضہ درج ذیل ہو گا۔

$$A(t) = A_0 e^{rt} \tag{۴}$$

اس کلیہ کے تحت رہا کو **مسلسل سود در سود**[۱۳] کہتے ہیں۔

مثال ۷.۳۶: آپ آج بنک سے مسلسل سود در سود کی سالانہ 15 % شرح پر 100 000 روپیہ حاصل کرتے ہیں۔ پانچ سال بعد آپ کو کتنی مقدار واپس کرنی ہو گی؟ اگر بنک سالانہ سود وصول کرتا ہو تب پانچ سال بعد قرضہ کتنا ہو گا؟

حل

ہم $A_0 = 100\,000$ ، $r = 0.15$ ، اور $t = 5$ لیتے ہوئے مساوات ۴ استعمال کرتے ہیں۔

$$A(5) = 100\,000e^{(0.15)(5)} = 211\,700$$

اگر بنک سال میں ایک مرتبہ رہا وصول کرے تب پانچ سال بعد آپ کو درج ذیل قرضہ دینا ہو گا۔

$$A(5) = 100\,000(1+0.15)^5 = 201\,136$$

□

مثال ۷.۳۷: سالانہ **افراط زر**[۱۴] سے مراد ایک سال میں روپیہ کی قدر میں کمی ہے۔ یوں 10 % افراط زر کا مطلب ہے کہ ایک سال بعد روپیہ کی قیمت 90 % ہو گی۔

ایک شخص 5 000 000 روپیہ بنک میں پانچ سال کے لیے جمع کرتا ہے۔ بنک ہر مہینہ اس شخص کو 40 000 روپیہ دیگا اور پانچ سال کے آخر میں اس کو پورے 5000000 روپیہ واپس کرے گا۔ اگر سالانہ افراط زر 12 % ہو تب اس شخص نے کیا پایا اور کیا کھویا؟

---

[۱۳] compoundcontinuousinterest
[۱۴] inflation

حل

پانچ سالوں میں بنک اس شخص کو

$$40\,000 \times 12 \times 5 = 2\,400\,000$$

روپیہ دیتا ہے۔ پانچ سال بعد شخص کو 5000000 روپیہ دیے جاتے ہیں جن کی اصل قدر

$$5\,000\,000 \times 0.88^5 = 2\,638\,660$$

ہو گی۔ یاد رہے کہ ہر مہینہ روپیہ کی قدر کم ہو گی لہٰذا پہلے مہینہ کے 40000 اور آخری مہینہ کے 40000 روپیہ کی قدر ایک جیسی نہیں ہوں گی۔ ہم حساب کو آسان بنانے کی خاطر تصور کرتے ہیں کہ اس شخص کو ماہوار کے بجائے ہر سال $40\,000 \times 12 = 480\,000$ روپیہ ملتے ہیں جن کی اصل قدر

$$\begin{aligned}
480\,000 \times 0.88^1 &= 422\,400\\
480\,000 \times 0.88^2 &= 371\,712\\
480\,000 \times 0.88^3 &= 327\,107\\
480\,000 \times 0.88^4 &= 287\,854\\
480\,000 \times 0.88^5 &= 253\,311
\end{aligned}$$

ہو گی، لہٰذا پانچ سال میں اس کو ماہوار دیے گئے رقم کی اصل قدر درج بالا کا مجموعہ 1 434 404 ہو گا۔

اس شخص کو کل $2\,638\,660 + 1\,434\,404 = 4\,073\,064$ قدر کے روپیہ واپس ہوتے ہیں۔ □

تابکاری

ایک ایٹم اپنی کمیت کا کچھ حصہ خارج کر کے دوسرے ایٹم میں تبدیل ہوتا ہے۔ اس عمل کو **تابکاری تحلیل**[۱۵] کہتے ہیں اور جس ایٹم نے مادّہ خارج کیا ہو اس کو **تابکار**[۱۶] کہتے ہیں۔ تابکار کاربن ۱۴ مادّہ خارج کر کے نائٹروجن میں تبدیل ہوتا ہے، ریڈیم تابکاری کے کئی مراحل سے گزر کر آخر کار سیسہ میں تبدیل ہوتا ہے۔

تجربہ سے دیکھا گیا ہے کہ اکائی وقت میں خارج ہونے والے ذرات کی تعداد، اس وقت تابکار ایٹموں کی تعداد کے تقریباً راست تناسب ہوتا ہے۔ یوں تابکار تحلیل کو مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky,\ k > 0$ سے ظاہر کیا جاتا ہے (یہاں $k\ (< 0)$ کی جگہ $-k\ (k > 0)$ استعمال کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے چونکہ اس طرح آپ دیکھ سکتے ہیں کہ y گھٹ رہا ہے)۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر تابکار ایٹموں کی تعداد y_0 ہو تب لمحہ t پر درج ذیل ہو گا۔

$$y = y_0 e^{-kt}, \quad k > 0 \qquad \text{مساوات تابکاری} \qquad (۵)$$

تابکاری کی شرح کو بغیر تجربہ بھی سمجھا جا سکتا ہے۔ فرض کریں تابکار عنصر کے ایک چھوٹے ٹکڑے سے، جس کی کمیت Δm ہے، فی سیکنڈ c ذرات خارج ہوتے ہیں۔ یوں ہم توقع کریں گے کہ اس کے کسی دوسرے ٹکڑے سے، جس کی کمیت Δm ہو، اسی شرح سے ذرات خارج ہوں گے۔ یوں دونوں ٹکڑوں

---

[۱۵] radioactivedecay
[۱۶] radioactive

کا مجموعی فی سیکنڈ اخراج دگنا ہو گا۔ دوسرے لفظوں میں، کمیت دگنی کرنے سے فی سیکنڈ ذرات کا اخراج دگنا ہو گا۔ اسی طرح n ٹکڑوں سے، جہاں ہر ٹکڑے کی انفرادی کمیت Δm ہو، فی سیکنڈ اخراج n گنا ہو گا۔ یوں ہم دیکھتے ہیں کہ فی سیکنڈ اخراج عین کمیت کے راست متناسب ہے، یعنی $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \propto y$ ہے۔

مثال ۷.۳۸: نصف حیات

کسی عنصر کے آدھے ایٹموں کو تابکاری کے ذریعہ تبدیل ہونے کے لیے درکار وقت کو اس عنصر کی **نصف حیات**[۱۷] کہتے ہیں۔ کسی بھی عنصر کی نصف حیات، ابتدائی ایٹموں کی تعداد پر نہیں بلکہ عنصر پر منحصر ہوتی ہے۔

یہ دیکھنے کی خاطر کہ ایسا کیوں ہوتا ہے ہم ایک عنصر کو لیتے ہیں جس میں لمحہ $t = 0$ پر y_0 ایٹم پائے جاتے ہوں۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ کتنے وقت کے بعد اس میں نصف یعنی $\frac{y_0}{2}$ ایٹم پائے جائیں گے۔ ہم مساوات ۱۵ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
y\frac{y_0}{2} &= y_0 e^{-kt} \\
e^{-kt} &= \frac{1}{2} \\
-kt &= \ln\frac{1}{2} = -\ln 2 \\
t &= \frac{\ln 2}{k}
\end{aligned}$$

اس دورانیہ $\left(t = \frac{\ln 2}{k}\right)$ کو نصف حیات کہتے ہیں، جو صرف k پر منحصر ہے نا کہ ابتدائی ایٹموں کی تعداد پر۔ □

$$\text{نصف حیات} = \frac{\ln 2}{k} \tag{۶}$$

ریڈان ۲۲۲ گیس کے لیے $k = 0.18$ دن ہے لہٰذا اس کی نصف حیات 3.8 دن ہو گی، جبکہ رات کی تاریکی میں نظر آنے کی خاطر گھڑیوں میں استعمال ہونے والے ریڈیم ۲۲۶ کا $k = 4.3 \times 10^{-4}$ سال ہے لہٰذا اس کی نصف حیات ۱۶۰۰ سال ہو گی۔

مثال ۷.۳۹: پولونیم ۲۱۰

پولونیم ۲۱۰ کی نصف حیات کو دنوں میں ناپا جاتا ہے۔ اگر آج، یعنی لمحہ $t = 0$ پر، پولونیم ۲۱۰ کے ایٹموں کی تعداد y_0 ہو تب t دنوں بعد اس کے ایٹموں کی تعداد $y = y_0 e^{-5\times10^{-3}t}$ ہو گی۔ اس عنصر کی نصف حیات تلاش کریں۔

حل

$$\begin{aligned}
\text{نصف حیات} &= \frac{\ln 2}{k} \\
&= \frac{\ln 2}{5\times10^{-3}} \\
&\approx 139\text{دن}
\end{aligned}$$

---

[۱۷] halflife

□

مثال ۷.۴۰: کاربن ۱۴ تعین زمان

کاربن ۱۴ جس کی نصف حیات 5700 سال ہے، کو عموماً قدیم اشیاء کی عمر معلوم کرنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے۔ ایک نمونہ میں 10 % تابکار کاربن کے ایٹم تبدیل ہو چکے ہیں۔ اس نمونے کی عمر تلاش کریں۔

حل

ہمیں پہلے k تلاش کرنا ہے۔ اس کے بعد ہم درکار وقت معلوم کریں گے۔ ہم مساوات ۱۵ استعمال کرتے ہیں۔ **پہلا قدم:** k کی تلاش۔

$$k = \frac{\ln 2}{} = \frac{\ln 2}{5700} \approx 1.2 \times 10^{-4}$$

دوسرا قدم: درکار وقت جس میں 90 % ایٹم باقی رہ جائے۔

$$\begin{aligned} 0.9y_0 &= y_0 e^{-\frac{\ln 2}{5700}t} \\ -\frac{\ln 2}{5700}t &= \ln 0.9 \\ t &= -\frac{5700(\ln 0.9)}{\ln 2} \approx 866 \text{ سال} \end{aligned}$$

نمونہ 866 سال پرانا ہے۔ □

کاربن ۱۴ کے علاوہ دیگر تابکار عناصر کو بھی تعین زمان کے لیے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ یورینیم (جس کی نصف حیات 4.5 ارب سال ہے) کو 2 ارب سال پرانے چٹانوں کے عمر تلاش کرنے کے لیے استعمال کیا گیا ہے۔

منتقلی حرارت: نیوٹن کا قانون ٹھنڈک

کوئی بھی گرم جسم کچھ دیر میں ٹھنڈا ہو کر ارد گرد ماحول کے درجہ حرارت پر آن پہنچتا ہے۔ جسم کے درجہ حرارت میں تبدیلی کی شرح، جسم اور ماحول کے درجہ حرارت میں فرق کے راست متناسب ہوتا ہے۔ اس حقیقت کو **نیوٹن کا قانون ٹھنڈک** کہتے ہیں۔

گر لمحہ t پر جسم کا درجہ حرارت متغیر T ہو اور ارد گرد ماحول کا درجہ حرارت مستقل T_S ہو تب

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - T_S) \tag{۷}$$

۱۱۰۷۴ ہو گا۔ اگر ہم $(T - T_S)$ کی جگہ y پر کریں تب

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(T - T_S) = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}T_S}{\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} - 0 && T_S \text{ مستقل} \\ &= \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}\end{aligned}$$

۱۱۰۷۵ ہو گا۔ یوں y کے لحاظ سے مساوات ۷ درج ذیل ہو گا

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky$$

۱۱۰۷۶ جس کا حل $y = y_0 e^{-kt}$ ہے۔ یوں **نیوٹن کا قانون ٹھنڈک**[۱۸]

$$T - T_S = (T_0 - T_S)e^{-kt} \qquad \text{نیوٹن کا قانون ٹھنڈک} \qquad (۸)$$

۱۱۰۷۷ ہو گا جہاں لمحہ $t = 0$ پر جسم کا درجہ حرارت T_S ہے۔

۱۱۰۷۸ مثال ۷.۴۱: ایک انڈے کو $98\,^\circ\mathrm{C}$ پر ابالنے کے بعد $18\,^\circ\mathrm{C}$ گرم پانی سے بھرے ہوئے بالٹی میں ڈالا جاتا ہے۔ پانچ منٹ گزرنے کے بعد انڈے
۱۱۰۷۹ کا درجہ حرارت $38\,^\circ\mathrm{C}$ ہوتا ہے۔ بالٹی میں پانی کے درجہ حرارت میں تبدیلی کو رد کریں۔ انڈا کتنی دیر میں $20\,^\circ\mathrm{C}$ تک پہنچے گا؟

۱۱۰۸۰ **حل**

۱۱۰۸۱ ہم پانچ منٹ بعد کی معلومات استعمال کرتے ہوئے پہلے k تلاش کرتے ہیں۔ مساوات ۸ کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$T = 18 + (98 - 18)e^{-kt} = 18 + 80e^{-kt}$$

۱۱۰۸۲ پانچ منٹ بعد $T = 38$ ہو گا جس سے

$$\begin{aligned}38 &= 18 + 80e^{-5k} \\ e^{-5k} &= \frac{1}{4} \\ -5k &= \ln\frac{1}{4} = -\ln 4 \\ k &= \frac{\ln 4}{5} = 0.2\ln 4 \approx 0.28\end{aligned}$$

---

[۱۸] newton'slawofcooling

۱۱۰۸۳ یوں لمحہ t پر $T = 18 + 80^{-(0.2\ln 4)t}$ ہوگا۔ ہمیں وہ t درکار ہے جس پر $T = 20$ ہوگا۔

$$\begin{aligned}
20 = 18 &= 80e^{-(0.2\ln 4)t} \\
80e^{-(0.2\ln 4)t} &= 2 \\
e^{-(0.2\ln 4)t} &= \frac{1}{40} \\
-(0.2\ln 4)t &= \ln\frac{1}{40} = -\ln 40 \\
t &= \frac{\ln 40}{0.2\ln 4} \approx 13\text{منٹ}
\end{aligned}$$

۱۱۰۸۴ بالٹی میں ڈالنے کے تقریباً 13 منٹ بعد انڈے کا درجہ حرارت $20\,^\circ\mathrm{C}$ ہوگا۔ □

۱۱۰۸۵ **سوالات**

۱۱۰۸۶ سوال ۷.۳۲۳: دانت کی جسامت

۱۱۰۸۷ انسانی دانت کی جسامت گھٹ رہی ہے۔ شمالی یورپ کے لوگوں کے دانتوں کی جسامت 1000 سال میں $1\,\%$ گھٹتی ہے۔

۱۱۰۸۸ ا. دانت کی جسامت کو y اور وقت کو t سے ظاہر کرتے ہوئے $t = 0$ پر y_0 اور $t = 1000$ پر $y = 0.99y_0$ لیتے ہوئے مساوات
۱۱۰۸۹ $y = y_0e^{kt}$ میں k تلاش کریں۔ k کی اس قیمت کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا جواب دیں۔

۱۱۰۹۰ ب. کتنے سالوں میں دانت کی جسامت موجودہ جسامت کے $90\,\%$ ہوگی؟

۱۱۰۹۱ ج. آج سے 20 000 سال بعد انسان کے دانت کی جسامت موجودہ جسامت کے لحاظ سے کتنی ہوگی؟

۱۱۰۹۲ سوال ۷.۳۲۴: فضائی دباو

۱۱۰۹۳ سطح سمندر سے h بلندی پر فضائی دباو p کی تبدیلی کی شرح $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h}$ عموماً p کی راست متناسب تصور کی جاتی ہے۔ سطح سمندر پر فضائی دباو
۱۱۰۹۴ $101\,293\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ اور $20\,\mathrm{km}$ بلند پر $9000\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ لیں۔

۱۱۰۹۵ ا. درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کریں اور دی گئی معلومات سے k دریافت کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}h} = kp, \quad k\text{مستقل} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$p = p_0, \quad h = 0 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

۱۱۰۹۶ ب. $h = 50\,\mathrm{km}$ پر فضائی دباو کتنا ہوگا؟

۱۱۰۹۷ ج. کتنی بلندی پر $p = 90\,000\,\mathrm{N\,m^{-2}}$ ہوگا؟

سوال ۷.۳۲۵: کیمیائی عمل

بعض کیمیائی اعمال میں اجزاء کی تبدیلی کی شرح اس لمحے پر موجود مواد کی مقدار پر منحصر ہوتی ہے۔ ایسی ایک کیمیائی عمل کو

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -0.6y$$

سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں مقدار y کو گرام اور وقت t کو گھنٹوں میں ناپا گیا ہے۔ اگر لمحہ $t = 0$ پر کیمیائی مواد کی مقدار $100\ \mathrm{g}$ ہو تب ایک گھنٹہ بعد اس کی کتنی مقدار پائی جائے گی؟

سوال ۷.۳۲۶: خام شکر کو ایک مرحلہ سے گزارا جاتا ہے جس میں شکر کے مالیکیول کی ساخت تبدیل ہوتی ہے۔ اس عمل کے شروع ہونے کے بعد کسی بھی لمحہ پر تبدیلی کی شرح، خام مال کی باقی مقدار کے راست تناسب ہوتی ہے۔ اگر $1000\ \mathrm{kg}$ خام مال سے شروع کرتے ہوئے ابتدائی 10 گھنٹوں بعد باقی خام مال کی مقدار $800\ \mathrm{kg}$ ہو تب مزید 14 گھنٹوں بعد خام مال کی مقدار کتنی ہو گی؟

سوال ۷.۳۲۷: زیر آب کام

سمندری پانی کی سطح سے x میٹر نیچے روشنی $L(x)$ درج ذیل تفرقی مساوات کو مطمئن کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = -kL$$

آپ تجربہ سے جانتے ہیں کہ سطح سے $6\ \mathrm{m}$ نیچے روشنی کی شدت آدھی ہے۔ آپ سطحی روشنی کے $\frac{1}{10}$ حصہ میں کام کر سکتے ہیں۔ یوں کتنی گہرائی تک آپ کام کر سکیں گے؟

سوال ۷.۳۲۸: برق گیر میں برقی دباو

برق گیر سے برقی نکاسی کی شرح اس پر موجود برقی دباو کے راست تناسب ہے۔ یوں t سیکنڈ بعد اس پر دباو V درج ذیل کلیہ کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{40}V$$

کتنی دیر میں برقی دباو کی قیمت ابتدائی قیمت کے $10\ \%$ ہو گی؟

سوال ۷.۳۲۹: ہیضہ کے جراثیم

فرض کریں ہیضہ کے جراثیم بغیر رکاوٹ قوت نمائی طور پر بڑھ سکتے ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر ایک جرثومہ ہوتا ہے۔ جرثومہ آدھا گھنٹہ میں ٹوٹ کر دو جرثوموں میں تبدیل ہوتا ہے۔ 24 گھنٹوں بعد کتنے جرثومے پائے جائیں گے؟ (اگرچہ بیمار شخص کی جسم میں ہر گھنٹہ متعدد جرثومے مارے جاتے ہیں۔ اس مثال سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ صبح ظاہری طور پر بالکل تندرست شخص، شام کو یک دم کیوں بہت سخت بیمار ہو سکتا ہے۔)

سوال ۷.۳۳۰: جراثیم کی نمو آبادی

تجربہ گاہ میں ایک قسم کی جرثوموں کو افزائش کے لیے بہترین ماحول مہیا کیا جاتا ہے تاکہ ان کی تعداد قوت نمائی بڑھ سکے۔ 3 گھنٹوں بعد جرثوموں کی تعداد 10 000 اور 5 گھنٹوں بعد ان کی تعداد 40 000 ہوتی ہے۔ ابتدائی جرثوموں کی تعداد دریافت کریں۔

سوال ۷.۳۳۱: بیماری کا پھیلانا (مثال ۷.۳۵)

فرض کریں کہ مثال ۷.۳۵ میں کسی بھی ایک سال میں بیمار افراد کی تعداد میں $25\ \%$ کمی رونما ہوتی ہے۔

ا. کتنے سالوں میں بیماروں کی تعداد 1000 ہو گی؟

ب. کتنے عرصہ میں بیماری کا خاتمہ ہو گا۔ (بیماروں کی تعداد ایک سے کم ہونے کو خاتمہ تصور کیا جاتا ہے۔)

سوال ۷.۳۳۲: پاکستان کی آبادی

پاکستان کی آبادی میں ۲۰۱۷ء میں ہر 8 سیکنڈوں میں ایک بچے کا اضافہ ہوا۔

ا. قوت نمائی اضافہ $y = y_0 e^{kt}$ تصور کریں جہاں t وقت کو اور y تعداد کو ظاہر کرتی ہے۔ وقت کو سالوں میں لیتے ہوئے k کی قیمت تلاش کریں۔

ب. 5 سال بعد پاکستان کی آبادی کتنی ہو گی؟

سوال ۷.۳۳۳: تیل میں کمی

فرض کریں تیل کی کنواں سے حاصل تیل میں ہر سال 10 % کمی رونما ہوتی ہے۔ کتنے سالوں میں حاصل تیل کی مقدار 20 % رہ جائے گی؟

سوال ۷.۳۳۴: قیمت میں چھوٹ

فروخت میں اضافہ پیدا کرنے کی خاطر آپ کا ادارہ قیمت میں چھوٹ کو خریداری کے ساتھ یوں منسلک کرتا ہے کہ ایک شے کی قیمت $p(x)$ خریدی گئی اشیاء کی تعداد کا تفاعل ہو۔ ہر اضافی ایک عدد خریداری پر مزید 1 % چھوٹ دی جاتی ہے۔ 100 عدد کی خریداری پر فی اکائی قیمت $p(100) = 20.09$ روپیہ ہے۔

ا. درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کر کے $p(x)$ تلاش کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{100}p \qquad \text{تفرقی مساوات}$$

$$p(100) = 20.09 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

ب. دس عدد اشیاء کی خریداری پر فی اکائی قیمت $p(10)$ تلاش کریں۔ اسی طرح 100 کی خریداری پر فی اکائی قیمت $p(100)$ تلاش کریں۔

ج. کیا 100 کی خریداری پر آمدنی $r(x) = x \cdot p(x)$ درحقیقت 90 کی خریداری پر آمدنی سے کم ہو گی؟ دکھائیں کہ حقیقت میں 100 کی خریداری پر آمدنی زیادہ سے زیادہ ہو گی۔

د. آمدنی $r(x) = x \cdot p(x)$ کو $0 \le x \le 200$ کے لیے ترسیم کریں۔

سوال ۷.۳۳۵: مسلسل سود در سود

آپ بنک سے A_0 روپیہ کا قرضہ لیتے ہیں جس پر آپ کو 4 % مسلسل سود در سود ادا کرنا ہو گا۔

ا. آپ کو 5 سال بعد کتنی رقم ادا کرنی ہو گی؟

ب. آپ کو کتنے سالوں میں دگنی رقم ادا کرنی ہو گی؟ کتنے سالوں میں تگنی رقم ادا کرنی ہو گا؟

سوال ۷.۳۳۶: اگر کسی رقم پر 100 % مسلسل سود در سود دیا جائے تب کتنے عرصہ میں رقم دگنی ہو گی؟ ایک سال میں سود کتنا ہو گا؟

سوال ۷.۳۳۷: ایک شخص نے بنک میں رقم کو 100 سال کے لیے جمع کیا۔ سو سال بعد اس کے خاندان کو 90 گنا رقم حاصل ہوتی ہے۔ مسلسل سود در سود کی شرح تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۳۸: ایک شخص نے بنک میں رقم کو 100 سال کے لیے جمع کیا۔ سو سال بعد اس کے خاندان کو 131 گنا رقم حاصل ہوتی ہے۔ مسلسل سود در سود کی شرح تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۳۹: ریڈان 222

ریڈان 222 گیس کی تابکاری تحلیل کا کلیہ $y = y_0 e^{-0.18t}$ ہے جہاں وقت t کو دنوں میں ناپا جاتا ہے۔ کتنے عرصہ میں ریڈان 222 کے کسی بھی نمونہ میں $90\,\%$ مواد باقی ہو گا؟

سوال ۷.۳۴۰: پولونیم 210

پولونیم 210 کی نصف حیات 139 دن ہے۔ اگر آپ کے پاس پولونیم 210 کے نمونہ میں $95\,\%$ مواد تابکاری کی وجہ سے تبدیل ہو جائے تب یہ نمونہ آپ کے کسی کام کا نہیں ہو گا۔ یہ نمونہ کتنے دنوں تک آپ کے کام کا ہو گا؟

سوال ۷.۳۴۱: تابکار مادّہ کی اوسط حیات

تابکاری تحلیل کی مساوات $y = y_0 e^{-kt}$ میں $\frac{1}{k}$ کو تابکار مرکزہ کی **اوسط حیات**[19] کہتے ہیں۔ ریڈان مرکزہ کی اوسط حیات تقریباً $\frac{1}{0.18} = 5.6$ دن ہے۔ کاربن 12 کی اوسط حیات تقریباً 8000 سال ہے۔ دکھائیں کہ کسی بھی تابکار مادّہ کی تین اوسط حیات کے برابر وقت میں $95\,\%$ مادّہ تبدیل ہو جائے گا۔ یوں نصف حیات سے آپ باآسانی معلوم کر سکتے ہیں کہ مادّہ کتنے عرصہ میں ختم ہو گا۔

سوال ۷.۳۴۲: کیلی فورنیم 252

کیلی فورنیم 252 کو ۱۹۵۰ میں ایجاد کیا گیا۔ اب تک مغربی دنیا میں اس عنصر کے صرف 8 g جمع کیے گئے ہیں۔ اس کی قیمت سونے سے 654 گنا زیادہ ہے۔ اس کی نصف حیات 2.645 سال ہے اور 1 μg کیلی فورنیم فی سیکنڈ 170×10^6 تعدیلی برقیہ خارج کرتا ہے۔

ا. تابکاری تحلیل کی مساوات میں اس عنصر کا k کتنا ہو گا؟

ب. اس عنصر کی اوسط حیات کتنی ہو گی؟ (سوال ۷.۳۴۱ سے رجوع کریں۔)

ج. کتنے عرصہ میں $95\,\%$ عنصر تابکاری تحلیل کی وجہ سے تبدیل ہو جائے گا؟

سوال ۷.۳۴۳: یخنی

ایک کمرہ جس کا درجہ حرارت $20\,^\circ\mathrm{C}$ ہے میں ایک پیالی یخنی کا درجہ حرارت دس منٹ میں $90\,^\circ\mathrm{C}$ سے گر کر $60\,^\circ\mathrm{C}$ ہوتا ہے۔ نیوٹن کا قانون ٹھنڈک استعمال کرتے ہوئے درج ذیل کا جواب دیں۔

ا. مزید کتنے وقت میں یخنی کا درجہ حرارت $35\,^\circ\mathrm{C}$ ہو گا؟

ب. اگر $90\,^\circ\mathrm{C}$ گرم یخنی کے پیالہ کو $-15\,^\circ\mathrm{C}$ کے ٹھنڈی فریج میں رکھا جائے تب اس کو $35\,^\circ\mathrm{C}$ تک ٹھنڈا ہونے میں کتنا وقت درکار ہو گا؟

سوال ۷.۳۴۴: نامعلوم درجہ حرارت والا شہتیر

المونیم کے شہتیر کو باہر سے اندر لایا جاتا ہے۔ اندر درجہ حرارت $20\,^\circ\mathrm{C}$ ہے جبکہ باہر موسم ٹھنڈا ہے۔ دس منٹ بعد شہتیر کا درجہ حرارت $2\,^\circ\mathrm{C}$ ہے جبکہ مزید دس منٹ بعد اس کا درجہ حرارت $10\,^\circ\mathrm{C}$ ہے۔ نیوٹن کا قانون ٹھنڈک استعمال کرتے ہوئے شہتیر کا ابتدائی درجی حرارت تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۴۵: ارد گرد ماحول کا درجہ حرارت نامعلوم

ایک جگ جو $46\,^\circ\mathrm{C}$ درجہ حرارت پانی سے بھرا ہوا ہے کو فریج میں رکھا جاتا ہے۔ دس منٹ بعد اس کا درجہ حرارت $39\,^\circ\mathrm{C}$ ہوتا ہے۔ مزید دس منٹ

[19] meanlife

بعد اس کا درجہ حرارت $33\,^\circ\mathrm{C}$ ہوتا ہے۔ نیوٹن کا قانون ٹھنڈک استعمال کرتے ہوئے فریج کا درجہ حرارت تلاش کریں۔

سوال ۷.۳۴۶: فضا میں کسی چیز کو ٹھنڈا کرنا

چاندی کے سلاخ کا موجودہ درجہ حرارت، کمرے کے درجہ حرارت سے $60\,^\circ\mathrm{C}$ زیادہ ہے۔ بیس منٹ پہلے اس کا درجہ حرارت، کمرے کے درجہ حرارت سے $70\,^\circ\mathrm{C}$ زیادہ تھا۔ (ا) پندرہ منٹ کے بعد اس کا درجہ حرارت، کمرے سے کتنا زیادہ ہو گا؟ (ب) دو گھنٹوں بعد کتنا ہو گا؟ (ج) کتنی دیر بعد کمرے سے سلاخ کا درجہ حرارت $10\,^\circ\mathrm{C}$ زیادہ ہو گا؟

سوال ۷.۳۴۷: آتش فشاں

زمانہ قدیم میں ایک آتش فشاں کے پھٹنے سے قریبی درخت جل جاتے ہیں اور آتش فشاں میں ایک جھیل بن جاتا ہے۔ اس جھیل میں موجود کوئلہ میں زندہ درختوں کے لحاظ سے $44.5\,\%$ کاربن 14 پایا جاتا ہے۔ یہ جھیل کتنا قدیم ہے؟

سوال ۷.۳۴۸: کاربنی تعین زمان کی حساسیت

آئیں دیکھیں کہ نمونہ میں پائے جانے والے کاربن کی مقدار میں معمولی خلل، نتائج میں کس قدر فرق پیدا کرتا ہے۔

ا. ایک **متحجر ہڈی**[20] ۲۰۰۰ میں دریافت کی گئی۔ اس میں ابتدائی کاربن 14 کا $17\,\%$ حصہ باقی تھا۔ یہ جانور کب زندہ تھا؟

ب. اگر جزو-ا میں $17\,\%$ کے بجائے $18\,\%$ حصہ باقی ہو تب کیا جواب ہو گا؟

ج. اگر جزو-ا میں $17\,\%$ کے بجائے $16\,\%$ حصہ باقی ہو تب کیا جواب ہو گا؟

سوال ۷.۳۴۹: جعلی تصویر

ایک تصویر جو ۱۶۳۲ اور ۱۶۷۵ کے درمیان بنائی گئی کی نقل میں کاربن 14 کی ابتدائی قیمت کا $99.5\,\%$ حصہ باقی ہے۔ یہ نقلی تصویر کتنی پرانی ہے؟

۷.۶ قاعدہ لھوپیٹال

ایسا کسر جس کا نسب نما اور شمار کنندہ دونوں تحدیدی نقطہ پر صفر کو پہنچتے ہوں، کی حد تلاش کرنے کا قاعدہ یعقوب برنولی نے دریافت کیا جس کو **قاعدہ لھوپیٹال** کہتے ہیں۔

غیر معین حاصل تقسیم

اگر نقطہ $x = a$ پر تفاعل $f(x)$ اور $g(x)$ کی قیمتیں صفر ہوں تب $x = a$ پر کرتے ہوئے $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ کا حصول ممکن نہیں ہو گا چونکہ ایسا کرنے سے $\frac{0}{0}$ ملتا ہے جو بے معنی ہے اور جس کو **غیر معین روپ**[21] کہتے ہیں۔ اب تک ہم دیکھ چکے ہیں کہ جو حد غیر معین روپ دیں ان کی حد

---

[20] fossilbone
[21] intermediateform

تلاش کرنی کبھی آسان اور کبھی مشکل ہوتی ہے۔ ہم نے حصہ ۳.۴ میں کافی محنت کے بعد $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ کی قیمت حاصل کی۔ اس کے برعکس تفرق کے حصول میں استعمال ہونے والا درج ذیل حد تلاش کرنے میں ہمیں کوئی دشواری پیش نہیں ہوئی،

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

اگرچہ اس حد میں $x=a$ پر کرنے سے ہر صورت $\frac{0}{0}$ حاصل ہوتا ہے۔ قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے ہم تفرق کے حصول میں حد کے استعمال سے استفادہ کرتے ہوئے ان حد کو تلاش کرتے ہیں جو غیر معین روپ کو جنم دیتے ہیں۔

مسئلہ ۷.۲: **قاعدہ لھوپیٹال (پہلی صورت)**

فرض کریں کہ $f(a)=g(a)=0$ ہے جبکہ $f'(a)$ اور $g'(a)$ موجود ہیں جہاں $g'(a)\neq 0$ ہے۔ تب درج ذیل ہوگا۔

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)} \tag{ا}$$

ثبوت: ہم $f'(a)$ اور $g'(a)$، جو از خود حد کو ظاہر کرتے ہیں، سے شروع کرتے ہوئے واپس چلتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}\frac{f'(a)}{g'(a)}&=\frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-0}{g(x)-0}\\&=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$$

□

قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہوئے f کے تفرق f' کو g کے تفرق g' سے تقسیم کریں۔ یاد رہے کہ $\frac{f}{g}$ کا تفرق $\left(\frac{f}{g}\right)'$ درست نتیجہ نہیں دیگا۔

مثال ۷.۴۲:

$$\text{(ا)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{3x-\sin x}{x}=\left.\frac{3-\cos x}{a}\right|_{x=0}=2$$

$$\text{(ب)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\left.\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1}\right|_{x=0}=\frac{1}{2}$$

$$\text{(ج)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left.\frac{1-\cos x}{3x^2}\right|_{x\to 0}=?$$ اب بھی $\frac{0}{0}$ ملتا ہے

۱۱۲۱۷ □

۱۱۲۱۸ ہم دیکھتے ہیں کہ مثال ۷.۴۲ کے جزو-ج میں قاعدہ لھوپیٹال کے استعمال کے باوجود $\frac{0}{0}$ حاصل ہوتا ہے۔ قاعدہ لھوپیٹال کی بہتر روپ کہتی ہے کہ جب تک ہمیں
۱۱۲۱۹ $\frac{0}{0}$ حاصل ہو ہم اس قاعدہ کو بار بار استعمال کر سکتے ہیں۔ یوں اس مثال کو حل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} && \text{اب بھی } \tfrac{0}{0} \text{ ملتا ہے}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x} && \text{اب بھی } \tfrac{0}{0} \text{ ملتا ہے}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} && \text{اس بار } \tfrac{0}{0} \text{ نہیں ملا}
\end{aligned}$$

۱۱۲۲۰ مسئلہ ۷.۳: **قاعدہ لھوپیٹال (بہتر روپ)**

۱۱۲۲۱ فرض کریں کہ $f(a) = g(a) = 0$ ہے جبکہ f اور g کھلے وقفہ I پر قابل تفرق ہیں۔ اس وقفہ پر نقطہ a پایا جاتا ہے۔ مزید فرض کریں کہ
۱۱۲۲۲ $x \neq a$ کی صورت میں I پر $g'(x) \neq 0$ ہے۔ تب درج ذیل ہو گا

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} \tag{۲}$$

۱۱۲۲۳ اگر دائیں ہاتھ حد موجود ہو یا یہ ∞ اور یا $-\infty$ ہو۔

۱۱۲۲۴

۱۱۲۲۵ اس مسئلے کا ثبوت کتاب کے آخر میں ضمیمہ میں پیش کیا گیا ہے۔

۱۱۲۲۶ مثال ۷.۴۳:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\frac{x}{2}}{x^2} && \frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}-\frac{1}{2}}{2x} && \frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to a}\frac{-\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}}{2} = -\frac{1}{8} && \text{نہیں ہے } \tfrac{0}{0}
\end{aligned}$$

۱۱۲۲۷ □

۱۱۲۲۸ قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہوئے جیسے $\frac{0}{0}$ سے کچھ ہٹ کر ملتا ہے آپ حد تلاش کر پائیں گے۔

۱۱۲۲۹ مثال ۷.۴۴:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2} && \text{ملتا ہے } \tfrac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+2x} = \frac{0}{1} = 0 && \text{نہیں ہے } \tfrac{0}{0}
\end{aligned}$$

اگر $\frac{0}{0}$ ملنے کے بعد رکنے کے بجائے ہم مزید ایک بار قاعدہ لھوپیٹال استعمال کریں تب ہمیں درج ذیل غلط نتیجہ حاصل ہو گا۔

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{1+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}$$

□

مثال ۷.۴۵:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^2} \qquad \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{2x}=\infty \qquad \frac{0}{0} \text{ نہیں ملا}$$

□

قاعدہ لھوپیٹال وہاں بھی قابل استعمال ہو گا جہاں غیر معین روپ $\frac{\infty}{\infty}$ ہو۔ اگر $x\to a$ کرنے سے $f(x)$ اور $g(x)$ دونوں لا متناہی تک پہنچتے ہوں تب اگر درج ذیل میں دایاں حد موجود ہو تب

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ہو گا۔ یہاں a از خود متناہی یا لا متناہی ہو سکتا ہے۔

مثال ۷.۴۶:

$$(\text{ا}) \quad \lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\sec x}{1+\tan x} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\sec x\tan x}{\sec^2 x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\sin x=1$$

$$(\text{ب}) \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0$$

□

غیر معین حاصل ضرب اور فرق

بعض اوقات ہم غیر معین روپ $0\cdot\infty$ اور $\infty-\infty$ کو الجبرا کی مدد سے $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ لکھ سکتے ہیں۔ یاد رہے کہ ہم یہ نہیں کہتے ہیں کہ عدد $0\cdot\infty$ یا $\infty-\infty$ موجود ہے اور نا ہی ہم کہتے ہیں کہ عدد $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ موجود ہے۔ یہ روپ کسی بھی عدد کو ظاہر نہیں کرتے ہیں بلکہ محض تفاعل کے رویہ کو بیان کرتے ہیں۔

۱۱۲۴۳ مثال ۷.۴۷:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0^+} x\cot x && \text{$0\cdot\infty$ کی وجہ سے $x\cot x$ کو مختلف روپ میں لکھیں}\\
&= \lim_{x\to 0^+} x\cdot\frac{1}{\tan x}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\tan x} && \text{اب $\frac{0}{0}$ ملتا ہے}\\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sec^2 x} = \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}$$

۱۱۲۴۴ □

۱۱۲۴۵ مثال ۷.۴۸: تلاش کریں: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$

۱۱۲۴۶ **حل**

۱۱۲۴۷ اگر $x\to 0^+$ ہو تب $\sin x\to 0^+$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\to\infty-\infty$$

۱۱۲۴۸ اسی طرح اگر $x\to 0^-$ ہو تب $\sin x\to 0^-$ اور درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=-\infty-(\infty)=-\infty+\infty$$

۱۱۲۴۹ دونوں صورتوں میں ہم حد جاننا ممکن نہیں ہے۔ ہمیں تفاعل کو نئی صورت

$$\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}=\frac{x-\sin x}{x\sin x}$$

۱۱۲۵۰ میں لکھ کر قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} && \frac{0}{0}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x} && \text{اب بھی $\frac{0}{0}$ ملتا ہے}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0
\end{aligned}$$

۱۱۲۵۱ □

ناقابل معلوم طاقت

بعض اوقات ایسے حد جو ناقابل معلوم روپ 1^∞ ، 0^0 یا ∞^0 دیتے ہوں کا لوگارتھم پہلے لینے سے حد تلاش کرنا ممکن ہو جاتا ہے۔ ہم قاعدہ لھوپیٹال سے لوگارتھم کی حد حاصل کر کے قوت نما سے اصل تفاعل کا رویہ جانتے ہیں۔

اگر $\lim_{x\to a} \ln f(x) = L$ ہو تب

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} e^{\ln f(x)} = e^L$$

ہو گا جہاں a متناہی یا لا متناہی ہو سکتا ہے۔

مثال ۷.۴۹: دکھائیں $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x} = e$

حل

حد تلاش کرنے سے ناقابل معلوم روپ 1^∞ حاصل ہوتا ہے لہٰذا ہم $f(x) = (1+x)^{1/x}$ لیتے ہوئے $\lim_{x\to 0^+} \ln f(x)$ تلاش کرتے ہیں۔ چونکہ

$$\ln f(x) = \ln(1+x)^{1/x} = \frac{1}{x}\ln(1+x)$$

ہے لہٰذا قاعدہ لھوپیٹال

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} && \frac{0}{0} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} \\
&= \frac{1}{1} = 1
\end{aligned}$$

دیگا۔ یوں اصل تفاعل کی حد درج ذیل ہو گی۔

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln f(x)} = e^1 = e$$

□

مثال ۷.۵۰: حد $\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ تلاش کریں۔

حل

حد کی تلاش ناقابل معلوم روپ ∞^0 دیتا ہے۔ ہم $f(x) = x^{1/x}$ لے کر $\lim_{x\to\infty} \ln f(x)$ تلاش کرتے ہیں۔ چونکہ

$$\ln f(x) = \ln x^{1/x} = \frac{\ln x}{x}$$

۱۱۳۶۷ ہے لہٰذا قاعدہ لھوپیٹال

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \ln f(z) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \qquad \frac{\infty}{\infty}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1}\\ &= \frac{0}{1} = 0\end{aligned}$$

۱۱۳۶۸ دیگا۔یوں اصل حد درج ذیل ہو گا۔

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim x \to \infty f(x) = \lim_{x\to\infty} e^{\ln f(x)} = e^0 = 1$$

۱۱۳۶۹ □

۱۱۳۷۰ **سوالات**

۱۱۳۷۱ **قاعدہ لھوپیٹال کا استعمال**

۱۱۳۷۲ سوال ۷.۳۵۰ تا سوال ۷.۳۹۱ میں قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہوئے حد تلاش کریں۔

۱۱۳۷۳ سوال ۷.۳۵۰: $\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^2-4}$

۱۱۳۷۴ سوال ۷.۳۵۱: $\lim_{x\to -5} \frac{x^2-25}{x+5}$

۱۱۳۷۵ سوال ۷.۳۵۲: $\lim_{t\to -3} \frac{t^3-4t+15}{t^2-t-12}$

۱۱۳۷۶ سوال ۷.۳۵۳: $\lim_{t\to 1} \frac{t^3-1}{4t^3-t-3}$

۱۱۳۷۷ سوال ۷.۳۵۴: $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2-3x}{7x^2+1}$

۱۱۳۷۸ سوال ۷.۳۵۵: $\lim_{x\to\infty} \frac{x-8x^2}{12x^2+5x}$

۱۱۳۷۹ سوال ۷.۳۵۶: $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t^2}{t}$

۱۱۳۸۰ سوال ۷.۳۵۷: $\lim_{t\to 0} \frac{\sin 5t}{t}$

۱۱۳۸۱ سوال ۷.۳۵۸: $\lim_{x\to 0} \frac{8x^2}{\cos x-1}$

۱۱۳۸۲ سوال ۷.۳۵۹: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x-x}{x^3}$

۱۱۲۸۳ سوال ۷.۳۶۰: $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\theta-\pi}{\cos(2\pi-\theta)}$

۱۱۲۸۴ سوال ۷.۳۶۱: $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{3}} \frac{3\theta+\pi}{\sin(\theta+\frac{\pi}{3})}$

۱۱۲۸۵ سوال ۷.۳۶۲: $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin\theta}{1+\cos 2\theta}$

۱۱۲۸۶ سوال ۷.۳۶۳: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x-\sin \pi x}$

۱۱۲۸۷ سوال ۷.۳۶۴: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\ln(\sec x)}$

۱۱۲۸۸ سوال ۷.۳۶۵: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\csc x)}{(x-\frac{\pi}{2})^2}$

۱۱۲۸۹ سوال ۷.۳۶۶: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t(1-\cos t)}{t-\sin t}$

۱۱۲۹۰ سوال ۷.۳۶۷: $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t\sin t}{1-\cos t}$

۱۱۲۹۱ سوال ۷.۳۶۸: $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sec x$

۱۱۲۹۲ سوال ۷.۳۶۹: $\lim\limits_{x\to(\frac{x}{2})^-} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x$

۱۱۲۹۳ سوال ۷.۳۷۰: $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{3^{\sin\theta}-1}{\theta}$

۱۱۲۹۴ سوال ۷.۳۷۱: $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{(\frac{1}{2})^{\theta}-1}{\theta}$

۱۱۲۹۵ سوال ۷.۳۷۲: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x2^x}{2^x-1}$

۱۱۲۹۶ سوال ۷.۳۷۳: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3^x-1}{2^x-1}$

۱۱۲۹۷ سوال ۷.۳۷۴: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\log_2 x}$

۱۱۲۹۸ سوال ۷.۳۷۵: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log_2 x}{\log_3(x+3)}$

۱۱۲۹۹ سوال ۷.۳۷۶: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2+2x)}{\ln x}$

۱۱۳۰۰ سوال ۷.۳۷۷: $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(e^x-1)}{\ln x}$

۱۱۳۰۱ سوال ۷.۳۷۸: $\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{5y+25}-5}{y}$

۱۱۳۰۲ سوال ۷.۳۷۹: $\lim_{y\to 0} \frac{\sqrt{ay+a^2}-a}{y}, \quad a > 0$

۱۱۳۰۳ سوال ۷.۳۸۰: $\lim_{x\to\infty} (\ln 2x - \ln(x+1))$

۱۱۳۰۴ سوال ۷.۳۸۱: $\lim_{x\to 0^+} (\ln x - \ln \sin x)$

۱۱۳۰۵ سوال ۷.۳۸۲: $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

۱۱۳۰۶ سوال ۷.۳۸۳: $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3x+1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$

۱۱۳۰۷ سوال ۷.۳۸۴: $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$

۱۱۳۰۸ سوال ۷.۳۸۵: $\lim_{x\to 0^+} (\csc x - \cot x + \cos x)$

۱۱۳۰۹ سوال ۷.۳۸۶: $\lim_{x\to\infty} \int_x^{2x} \frac{1}{t}\, dt$

۱۱۳۱۰ سوال ۷.۳۸۷: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x\ln x} \int_1^x \ln t\, dt$

۱۱۳۱۱ سوال ۷.۳۸۸: $\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{e^\theta - \theta - 1}$

۱۱۳۱۲ سوال ۷.۳۸۹: $\lim_{h\to 0} \frac{e^h - (1+h)}{h^2}$

۱۱۳۱۳ سوال ۷.۳۹۰: $\lim_{t\to\infty} \frac{e^t + t^2}{e^t - t}$

۱۱۳۱۴ سوال ۷.۳۹۱: $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x}$

۱۱۳۱۵ **حد جن میں اساس اور قوت نما پائے جاتے ہوں**

۱۱۳۱۶ سوال ۷.۳۹۲ تا سوال ۷.۴۰۱ میں حد تلاش کریں۔

۱۱۳۱۷ سوال ۷.۳۹۲: $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(1-x)}$

۱۱۳۱۸ سوال ۷.۳۹۳: $\lim_{x\to 1^+} x^{1/(x-1)}$

۱۱۳۱۹ سوال ۷.۳۹۴: $\lim_{x\to\infty} (\ln x)^{1/x}$

۱۱۳۲۰ سوال ۷.۳۹۵: $\lim_{x\to e^+} (\ln x)^{1/(x-e)}$

سوال ۷.۳۹۶: $\lim_{x\to 0^+} x^{-1/\ln x}$

سوال ۷.۳۹۷: $\lim_{x\to \infty} x^{1/\ln x}$

سوال ۷.۳۹۸: $\lim_{x\to \infty} (1+2x)^{1/(2\ln x)}$

سوال ۷.۳۹۹: $\lim_{x\to 0} (e^x+x)^{1/x}$

سوال ۷.۴۰۰: $\lim_{x\to 0^+} x^x$

سوال ۷.۴۰۱: $\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

نظریہ اور استعمال

سوال ۷.۴۰۲ تا سوال ۷.۴۰۵ میں قاعدہ لھوپیٹال سے حد تلاش کرنا ممکن نہیں ہو گا۔ آپ گول دائرے میں گھومتے رہیں گے۔ کسی دوسرے طریقہ سے حد تلاش کریں۔

سوال ۷.۴۰۲: $\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$

سوال ۷.۴۰۳: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\sin x}}$

سوال ۷.۴۰۴: $\lim_{x\to (\pi/2)^-} \frac{\sec x}{\tan x}$

سوال ۷.۴۰۵: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cot x}{\csc x}$

سوال ۷.۴۰۶: درج ذیل میں کون سا درست اور کون سا غلط ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-3} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{2x} = \frac{1}{6}$

ب. $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-3} = \frac{0}{6} = 0$

سوال ۷.۴۰۷: درج ذیل میں کون سا درست اور کون سا غلط ہے۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

ا. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{x^2-\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-2}{2x-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{2+\sin x} = \frac{2}{2+0} = 1$

ب. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-2x}{x^2-\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x-2}{2x-\cos x} = \frac{-2}{0-1} = 2$

سوال ۷.۴۰۸: درج ذیل میں صرف ایک درست ہے۔ اس کو تلاش کریں۔ باقی دو کیوں غلط ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ بیان کریں۔

ا. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0\cdot(-\infty) = 0$

ب. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0\cdot(-\infty) = -\infty$

۱۱۳۴۳ ج. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{(1/x)} = \frac{-\infty}{\infty} = -1$

۱۱۳۴۴ د. $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{(1/x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(1/x)}{(-1/x^2)} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$

۱۱۳۴۵ سوال ۷.۴۰۹: درج ذیل فرض کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

۱۱۳۴۶ دکھائیں کہ $\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 1$ مگر $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$ ہے۔ کیا یہ قاعدہ لھوپیٹال کی تردید کرتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۱۳۴۷ سوال ۷.۴۱۰: درج ذیل تفاعل کو $x = 0$ پر استمراری بنانے کے لیے درکار c کی قیمت تلاش کریں۔

$$f(x) = \begin{cases} \frac{9x-3\sin 3x}{5x^3}, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$$

۱۱۳۴۸ آپ کی منتخب کردہ c کی قیمت کیوں درست ہے؟

۱۱۳۴۹ سوال ۷.۴۱۱: درج ذیل تفاعل کو $\theta = 0$ پر دائیں سے استمراری بنانے کے لیے درکار c کی قیمت تلاش کریں۔

$$g(\theta) = \begin{cases} \frac{(\tan\theta)^2}{\sin(4\theta^2/\pi)}, & \theta \neq 0 \\ c, & \theta = 0 \end{cases}$$

۱۱۳۵۰ آپ کی منتخب کردہ c کی قیمت کیوں درست ہے؟

۱۱۳۵۱ سوال ۷.۴۱۲: مسلسل سود در سود کا کلیہ

۱۱۳۵۲ ہم نے حصہ ۷.۵ میں مسلسل سود در سود کا کلیہ $A(t) = A_0e^{rt}$ اخذ کرتے ہوئے درج ذیل دعویٰ کیا تھا۔

$$\lim_{k\to\infty} A_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = A_0e^{rt}$$

۱۱۳۵۳ یہ دعویٰ تب درست ہو گا جب درج ذیل درست ہو

$$\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt} = e^{rt}$$

۱۱۳۵۴ اور یہ اس صورت درست ہو گا جب درج ذیل ہو۔

$$\lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{r}{k}\right)^{k} = e^{r}$$

جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں، حد سے ناقابل معلوم روپ 1^∞ حاصل ہوتی ہے۔ قاعدہ لھوپیٹال سے حد کی تصدیق کریں۔

سوال ۷.۴۱۳: اگر $x > 0$ ہو تب درج ذیل کی اعظم قیمت (اگر پائی جاتی ہو تب) تلاش کریں۔

ا. $x^{1/x}$

ب. x^{1/x^2}

ج. n مثبت عدد صحیح ہے، x^{1/x^n}

د. دکھائیں کہ ہر مثبت عدد صحیح n کے لیے $\lim_{x\to\infty} x^{1/x^n} = 1$ ہوگا۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۷.۴۱۴: مستقل e کی قیمت کا تلاش

ا. قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

ب. تفاعل $f(x) = (1+1/x)^x$ کی قیمت $x = 10, 10^2, 10^3, \cdots$ کے لیے کیلکولیٹر کی مدد سے تلاش کرتے ہوئے دیکھیں کہ آپ اصل قیمت $e = 2.718\,281\,828\,459\,045\cdots$ کے کتنے قریب پہنچتے ہیں۔ اگرچہ ہم توقع کرتے ہیں کہ x کی قیمت بڑھانے سے زیادہ بہتر جواب حاصل ہوگا، بعض کیلکولیٹروں میں پورم پور خلل کی وجہ سے کسی مخصوص حد سے x کی قیمت بڑھنے کے بعد نتائج کم درست ہوں گے۔

ج. تفاعل $f(x) = (1+1/x)^x$ کو ترسیم کریں۔ یہاں بھی x کی زیادہ بڑی قیمت پر پورم پور خلل کی وجہ سے نتیجہ کم درست ہوگا۔

سوال ۷.۴۱۵: آئیں درج ذیل دو حد میں فرق پر غور کریں۔

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

ا. وقفہ $x \geq 0$ کے لیے درج ذیل تفاعل ترسیم کریں۔

$$f(x) = \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x, \quad g(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

تفاعل f کا رویہ اور g کا رویہ کیسا ہے؟ $\lim_{x\to\infty} f(x)$ کی قیمت کا اندازہ لگائیں۔

ب. قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے $\lim_{x\to\infty} f(x)$ کی حاصل کردہ قیمت کی تصدیق کریں۔

سوال ۷.۴۱۶: (ا) متغیر x کے کسی موزوں وسیع وقفہ پر $f(x) = x - \sqrt{x^2+x}$ ترسیم کرتے ہوئے درج ذیل حد کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔

$$\lim_{x\to\infty}(x - \sqrt{x^2+x})$$

(ب) قاعدہ لھوپیٹال سے اس حد کی تصدیق کریں۔ ایسا کرنے کے لیے پہلے $f(x)$ کو $\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x+\sqrt{x^2+x}}$ سے ضرب دے کر شمار کنندہ کی سادہ صورت حاصل کریں۔

سوال ۷.۴۱۷: درج ذیل کی اندازاً قیمت ترسیم کی مدد سے تلاش کریں۔ اس کی تصدیق قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے کریں۔

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}-3}$$

سوال ۷.۴۱۸: درج ذیل کی اندازاً قیمت ترسیم کی مدد سے تلاش کریں۔ اس کی تصدیق قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے کریں۔

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-(3x+1)\sqrt{x}+2}{x-1}$$

سوال ۷.۴۱۹: (ا) تفاعل $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x\ln x - x - \cos \pi x}$ کو $x = 1$ کے نزدیک ترسیم کرتے ہوئے درج ذیل کی اندازاً قیمت تلاش کریں۔ اس کی تصدیق قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے کریں۔

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x\ln x - x - \cos \pi x}$$

(ب) تفاعل $f(x)$ کو $0 < x \leq 11$ کے لیے ترسیم کریں۔

سوال ۷.۴۲۰: $(\sin x)^x$ کی $[0, \pi]$ تک استمراری توسیع

ا. وقفہ $0 \leq x \leq \pi$ پر $f(x) = (\sin x)^x$ ترسیم کریں۔ تفاعل f کو $x = 0$ پر استمراری بنانے کی خاطر آپ f کی کیا قیمت مقرر کریں گے؟

ب. جزو-ا میں اپنے جواب کی تصدیق کرنے کی خاطر قاعدہ لھوپیٹال سے $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ تلاش کریں۔

ج. وقفہ $[0, \pi]$ پر f کی اعظم قیمت ترسیم سے معلوم کریں۔ یہ قیمت کس نقطہ پر پائی جاتی ہے؟

د. جزو-ج میں اپنے جواب کو مزید بہتر بنانے کی خاطر f' کو ترسیم کر کے دیکھیں کہ یہ محور x کو کہاں قطع کرتا ہے۔ اپنے کام کو آسان بنانے کی خاطر آپ f' میں قوم نما حصہ کو رد کرتے ہوئے صرف اس حصہ کو ترسیم کر سکتے ہیں جس کا صفر پایا جاتا ہو۔

ھ. کی مزید بہتر اعظم قیمت جاننے کی خاطر مساوات $f' = 0$ کو اعدادی طریقہ سے حل کریں۔

و. جزو-ج، داورہ میں حاصل نقطوں پر f کی اعظم قیمت حاصل کریں۔ کون سی قیمت بہترین جواب ہے؟

سوال ۷.۴۲۱: تفاعل $f(x) = (\sin x)^{\tan x}$

ا. وقفہ $-7 \leq x \leq 7$ پر $f(x) = (\sin x)^{\tan x}$ ترسیم کریں۔ ترسیم میں درز کے بارے میں آپ کیا کہیں گے؟ یہ درز کتنے چوڑے ہیں؟

ب. اب وقفہ $0 \le x \le \pi$ پر f ترسیم کریں۔ اگرچہ نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر f ناقابل معلوم ہے اس کے باوجود ترسیم میں اس نقطہ پر درز نہیں پایا جاتا ہے۔ ایسا کیوں ہے؟ نقطہ $x = \frac{\pi}{2}$ پر ترسیم f کی کیا قیمت دیتا ہے؟ (اشارہ۔ قاعدہ لھوپیٹال استعمال کرتے ہوئے $x \to (\pi/2)^-$ اور $x = (\pi/2)^+$ کے لیے f کی حدیں تلاش کریں۔)

ج. جزو-ب کی ترسیم سے f کی اعظم اور اقل قیمت تلاش کریں اور وہ نقطے بھی تلاش کریں جہاں یہ قیمتیں پائی جاتی ہیں۔

سوال ۷.۴۲۲: x کی طاقتوں میں $\ln x$ کا مقام

درج ذیل کلیات کے سلسلہ میں درزوں

$$\int t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \frac{t^k}{k} + C, \quad k \neq 0 \tag{۳}$$

کو قدرتی لوگارتھم

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

بھرتا ہے لیکن ان کلیات کو دیکھ کر یہ کہنا ممکن نہیں ہوگا کہ قدرتی لوگارتھم ان میں صحیح بیٹھتا ہے۔ ہم مساوات ۳ میں سے ضد تفرق

$$\int_1^x t^{k-1}\,\mathrm{d}t = \frac{x^k - 1}{k}, \quad x > 0$$

کی ترسیم کا $\ln x$ کی ترسیم کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے اس عمل کو دیکھ سکتے ہیں۔

ا. وقفہ $0 \le x \le 50$ پر $k = \mp 1, \mp 0.5, \mp 0.1, \mp 0.05$ کے لیے $f(x) = \frac{x^k - 1}{k}$ ترسیم کریں۔ ان کے ساتھ $\ln x$ بھی ترسیم کریں۔

ب. درج ذیل دکھائیں۔

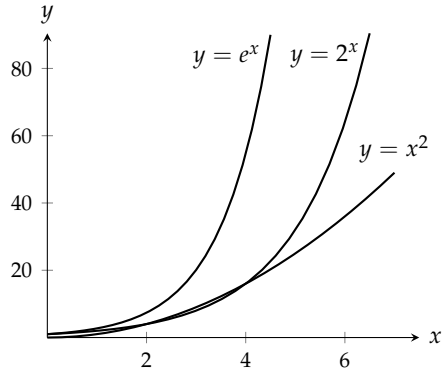
$$\lim_{k \to 0} \frac{x^k - 1}{k} = \ln x$$

سوال ۷.۴۲۳: تصدیق برائے سوال ۶.۲۶۹، حصہ ۶.۷

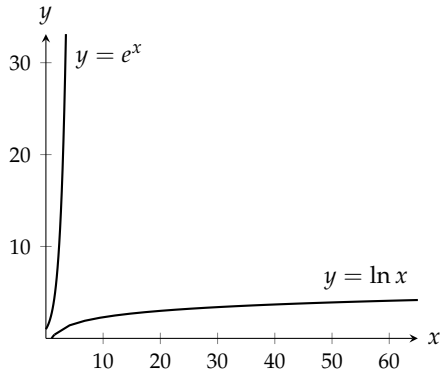
درج ذیل کی بہتر سے بہتر قیمت ترسیم کی مدد سے حاصل کریں۔

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \alpha \cos \alpha}$$

قاعدہ لھوپیٹال کی مدد سے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔



شکل ۷.۳۳: تفاعل $y = e^x$ ، $y = 2^x$ اور تفاعل $y = x^2$



شکل ۷.۳۴: تفاعل $y = e^x$ اور $y = \ln x$ کا موازنہ

۷.۷ اضافی شرح نمو

اس حصہ میں x کی بڑھتی قیمت پر x کے تفاعل کی شرح تبدیلی پر غور کیا جائے گا۔ ہم ان تفاعل پر غور کریں گے جو $x \to \infty$ کرنے سے آخر کار مثبت ہو کر مثبت ہی رہتے ہیں۔

اضافی شرح نمو

آپ نے دیکھا ہو گا کہ متغیر x بڑھانے سے کثیر رکنی اور ناطق تفاعل (جنہیں ہم نے باب ۴ میں ترسیم کیا تھا) کے لحاظ سے قوت نما تفاعل، مثلاً 2^x اور e^x ، زیادہ تیزی سے بڑھتے ہیں۔ قوت نما تفاعل یقیناً x کے لحاظ سے زیادہ تیزی سے بڑھتے ہیں۔ آپ شکل ۷.۳۳ میں دیکھ سکتے ہیں کہ x بڑھانے سے x^2 کے لحاظ سے 2^x زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔ درحقیقت $x \to \infty$ کرنے سے تفاعل 2^x اور e^x کے بڑھنے کی شرح، x کے کسی بھی طاقت (مثلاً $x^{1\,000\,000}$) کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی (سوال ۷.۴۴۲)۔

متغیر x بڑھاتے ہوئے تفاعل $y = e^x$ کے بڑھنے کی شرح کو سمجھنے کی خاطر تصور کریں کہ آپ اس تفاعل کو ترسیم کرتے ہیں جہاں محور کا پیمانہ 1 cm ہے۔ یوں $x = 1\,\text{cm}$ پر $y = e^1 \approx 3\,\text{cm}$ ہو گا۔ یوں $x = 6\,\text{cm}$ پر $y = e^6 \approx 403\,\text{cm}$ یعنی تقریباً 4 میٹر ہو گا جو کمرے کی چھت کے برابر ہو گا۔ اسی طرح $x = 10\,\text{cm}$ پر $y = e^{10} \approx 22\,026\,\text{cm}$ یعنی 220 m ہو گا جو شہر کے عموماً عمارتوں سے زیادہ بلند ہو گا۔ اگر $x = 24\,\text{cm}$ ہو تب y چاند تک آدھے فاصلہ سے زیادہ طے کر چکا ہو گا اور $x = 24\,\text{cm}$ پر y سورج کے قریب ترین ستارہ سے زیادہ دور ہو گا:

$$\begin{aligned} e^{43} &\approx 4.73 \times 10^{18}\,\text{cm} \\ &= 4.73 \times 10^{13}\,\text{km} \\ &\approx 5\text{نوری سال} \end{aligned}$$

اس کے باوجود محور x پر آپ مبدا سے صرف 43 cm فاصلہ پر ہوں گے۔

اس کے برعکس $x \to \infty$ کرنے سے لوگارتھمی تفاعل $y = \log_2 x$ اور $y = \ln x$ کے بڑھنے کی شرح x کے کسی بھی مثبت طاقت کے بڑھنے کی شرح سے کم ہو گی (سوال ۷.۴۴۴)۔ یوں محور کا پیمانہ 1 cm لیتے ہوئے مبدا سے صرف 43 cm بلندی تک پہنچنے کی خاطر آپ کو محور x پر 5 نوری سال دور جانا ہو گا (شکل ۷.۳۴)۔

قوت نما، کثیر رکنی اور لوگارتھمی تفاعل کا ایک دوسرے کے ساتھ مذکورہ بالا موازنہ کو زیادہ درستگی سے بیان کرنے کی خاطر ہم ایک تعریف پیش کرتے ہیں۔ جب ہم کہتے ہیں کہ $x \to \infty$ کرنے سے کسی بھی تفاعل $g(x)$ کے بڑھنے کی شرح سے تفاعل $f(x)$ کے بڑھنے کی شرح زیادہ ہے تب اس سے مراد درج ذیل ہو گا۔

تعریف: **$x \to \infty$ کرتے ہوئے بڑھنے کی شرح**
فرض کریں کافی بڑے x کے لیے $f(x)$ اور $g(x)$ مثبت ہیں۔

ا. اگر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

یا، اس کا مماثل

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

ہو تب $x \to \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح، g کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی۔ ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے g کے بڑھنے کی شرح، f کے بڑھنے کی شرح سے کم ہو گی۔

ب. اگر

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \neq 0 \qquad L \text{ غیر صفر اور متناہی ہے}$$

ہو تب $x \to \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح، g کے بڑھنے کی شرح کے برابر ہو گی۔

□

ان تعریف کے تحت تفاعل $y = 2x$ تفاعل $y = x$ سے زیادہ تیزی سے نہیں بڑھتا ہے۔ اس کی وجہ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2$$

ہے جو غیر صفر اور متناہی حد ہے۔ زیادہ تیزی سے بڑھنے کے عمومی مطلب کو ہم اس لیے نظر انداز کرتے ہیں کہ جب ہم کہیں کہ x کی بڑی قیمتوں کے لیے f کے بڑھنے کی شرح g کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہے تب اس سے مراد "x کی بڑی قیمتوں کے لیے f کے لحاظ سے g کی قیمت قابل نظر انداز ہے،" لینا چاہیے۔

۱۱۴۴۷ مثال ۷.۵۱: $x \to \infty$ کرتے ہوئے x^2 کے لحاظ سے e^x درج ذیل کی وجہ سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^2}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2x}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{2} = \infty$$

قاعدہ لھوپیٹال دو مرتبہ استعمال کیا گیا

۱۱۴۴۸ □

۱۱۴۴۹ مثال ۷.۵۲: (ا) $x \to \infty$ کرتے ہوئے 2^x کے لحاظ سے 3^x زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے چونکہ:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3^x}{2^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^x = \infty$$

۱۱۴۵۰ (ب) $x \to \infty$ کرتے ہوئے مختلف اساس کے قوت نما تفاعل کبھی بھی ایک شرح سے نہیں بڑھتے۔ اگر $a > b > 0$ ہو تب a^x کے بڑھنے کی
۱۱۴۵۱ شرح b^x کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی۔

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = \infty$$

۱۱۴۵۲ □

۱۱۴۵۳ مثال ۷.۵۳: $x \to \infty$ کرتے ہوئے x^2 کے بڑھنے کی شرح $\ln x$ کے بڑھنے کی شرح سے زیادہ ہو گی:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2^x}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1/x} = \lim_{x\to\infty} 2x^2 = \infty$$

۱۱۴۵۴ □

۱۱۴۵۵ مثال ۷.۵۴: $x \to \infty$ کرنے سے $\ln x$ کے بڑھنے کی شرح x کے بڑھنے کی شرح سے کم ہو گی:

$$\lim x \to \infty \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

۱۱۴۵۶ □

۱۱۴۵۷ مثال ۷.۵۵: قوت نما تفاعل کے برعکس $x \to \infty$ کرتے ہوئے مختلف اساس کے لوگارتھمی تفاعل ایک سی شرح سے بڑھتے ہیں:

$$\lim x \to \infty \frac{\log_a x}{\log_b x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x / \ln a}{\ln x / \ln b} = \frac{\ln b}{\ln a}$$

۱۱۴۵۸ یہ حد غیر صفر اور متناہی ہے۔ □

اگر $x \to \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح اور g کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے کے برابر ہو، اور $x \to \infty$ کرتے ہوئے gf کے بڑھنے کی شرح اور h کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے کے برابر ہو، تب $x \to \infty$ کرتے ہوئے f اور h کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے کے برابر ہو گی۔ اس کی وجہ

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} = L_1 \quad \text{اور} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{g}{h} = L_2$$

یعنی

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f}{h} = \lim_{x\to\infty} \frac{f}{g} \cdot \frac{g}{h} = L_1 L_2$$

ہے۔ اگر L_1 اور L_2 غیر صفر اور متناہی ہوں تب $L_1 L_2$ بھی غیر صفر اور متناہی ہو گا۔

مثال ۷.۵۶: دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\sqrt{x^2+5}$ اور $(2\sqrt{x}-1)^2$ کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے جتنی ہے۔

حل

ہم دکھاتے ہیں کہ دونوں تفاعل کے بڑھنے کی شرح رہی ہے جو تفاعل x کی ہے:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+5}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{1+\frac{5}{x^2}} = 1$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2\sqrt{x}-1)^2}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right)^2 = \lim_{x\to\infty} \left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = 4$$

یوں دونوں تفاعل کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے جتنے ہو گی۔ □

رتبہ اور "o" علامتیت

بڑے O اور چھوٹے o کی علامت کمپیوٹر سائنس میں عام استعمال ہوتی ہے۔ انہیں یہاں متعارف کیا جاتا ہے۔

تعریف: اگر $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ہو تب ہم کہتے ہیں کہ f کا رتبہ g سے کم ہے جس کو $f = o(g)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس کو "f ، g کا چھوٹا عددی o ہے" پڑھا جاتا ہے۔

□

یوں $x \to \infty$ کرتے ہوئے $f = o(g)$ سے مراد $x \to \infty$ کرتے ہوئے f کے بڑھنے کی شرح g سے کم ہے۔

مثال ۷.۵۷:

$$\ln x = o(x) \quad \text{پر} \quad x \to \infty \quad \text{لہٰذا} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{چونکہ}$$
$$x^2 = o(x^3+1) \quad \text{پر} \quad x \to \infty \quad \text{لہٰذا} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^3+1} = 0 \quad \text{چونکہ}$$

□

تعریف: فرض کریں کافی بڑے x پر $f(x)$ اور $g(x)$ مثبت ہیں۔ تب کافی بڑے x پر اگر کسی مثبت عدد صحیح M کے لیے

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq M$$

ہو تب $x \to \infty$ پر f کا رتبہ زیادہ سے زیادہ g کے رتبے جتنا ہو گا۔ اس کو ہم $f = O(g)$ سے ظاہر کرتے ہیں جس کو "f ، g کا بڑا O ہے" پڑھا جاتا ہے۔

□

مثال ۷.۵۸: چونکہ کافی بڑے x کے لیے $\frac{x+\sin x}{x} \leq 2$ ہے لہٰذا $x \to \infty$ پر $x + \sin x = O(x)$ ہو گا۔ □

مثال ۷.۵۹: $x \to \infty$ پر $\frac{e^x+x^2}{e^x} \to 1$ کی وجہ سے $x \to \infty$ پر $e^x + x^2 = O(e^x)$ ہو گا۔ اسی طرح $x \to \infty$ پر $\frac{x}{e^x} \to 0$ کی وجہ سے $x \to \infty$ پر $x = O(e^x)$ ہو گا۔ □

تعریف پر دوبارہ نظر دوڑاتے ہوئے آپ دیکھیں گے کہ کافی بڑے x پر مثبت تفاعل کے لیے $f = o(g)$ سے مراد $f = O(g)$ ہے۔ اس کے علاوہ اگر f اور g کے بڑھنے کی شرح ایک دوسرے جتنی ہو تب $f = O(g)$ اور $g = O(f)$ ہوں گے (سوال ۷.۴۳۴)۔

ترتیبی اور ثنائی تلاش

کمپیوٹر کسی لائحہ کار کے تحت قدم بقدم چل کر کوئی کام سرانجام دیتا ہے۔ اس لائحہ کار کو **کمپیوٹر الخوارزم**[۲۲] کہتے ہیں۔ اس لائحہ کار کی کارگزاری جاننے کی خاطر ماہرین عموماً اس کام کو سرانجام کرنے کے لیے درکار قدموں کی گنتی کرتے ہیں۔ ایک ہی کام سرانجام دینے کے دو مختلف لائحہ کار کی کارگزاری میں بہت زیادہ فرق ہو سکتا ہے جنہیں بڑے O علامتی روپ میں پیش کیا جاتا ہے۔ آئیں ایک مثال دیکھتے ہیں۔

ایک لغت میں کسی ایک حرف سے شروع ہونے والے الفاظ کی تعداد 26 000 ہے۔ آپ اس حرف سے شروع ہونے والے ایک لفظ کو دو طریقوں سے تلاش کر سکتے ہیں۔ پہلی ترکیب میں آپ پہلے لفظ سے شروع کرتے ہوئے یک بہ یک لفظ پڑھ کر درکار لفظ تک پہنچتے ہیں۔ اس ترکیب کو **ترتیبی تلاش**[۲۳] کہتے ہیں جو لغت میں ترتیب سے الفاظ لکھے گئے ہونے سے استفادہ نہیں کرتا ہے۔ اس ترتیب میں آپ ہر صورت لفظ تلاش کر پائیں گے (یا جان جائیں گے کہ یہ لفظ لغت میں موجود نہیں ہے) لیکن عین ممکن ہے کہ آپ کو 26 000 قدم چلنا پڑے۔

اس سے بہتر ترکیب میں آپ لغت کے عین وسط (ایک دو الفاظ آگے پیچھے ہو سکتے ہیں) میں ایک لفظ کو دیکھتے ہیں۔ چونکہ لغت میں الفاظ ترتیب سے ہیں لہٰذا آپ معلوم کر پائیں گے کہ آیا درکار لفظ پہلی نصف یا دوسری نصف حصہ میں ہے۔ لغت کی اس نصف حصہ کو رد کریں جس میں لفظ موجود نہیں ہے۔ یوں پہلی قدم میں 13 000 الفاظ سے چھٹکارا حاصل ہوتا ہے۔ اب منتخب حصہ کے نصف میں جا کر دیکھیں کہ درکار لفظ کس جانب پایا جاتا ہے۔ یوں دوسرے قدم میں

---

[۲۲] computeralgorithm
[۲۳] sequentialsearch

6500 الفاظ سے چھٹکارا حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح ہر قدم پر آدھے حصے کو رد کرتے ہوئے چلتے جائیں جب تک آپ درکار لفظ تلاش نہیں کر پاتے یا الفاظ ختم نہیں ہو جاتے۔ چونکہ

$$\frac{26000}{2^{15}} < 1$$

ہوتا ہے لہٰذا آپ کو زیادہ سے زیادہ 15 قدم چل کر درکار لفظ مل جائے گا یا آپ جان جائیں گے کہ یہ لفظ لغت میں موجود نہیں ہے۔ اس ترتیب کو **ثنائی تلاش**[۲۴] کہتے ہیں۔

ایک سلسلہ جس کی لمبائی n ہو میں کسی جزو کی تلاش کے لیے ترتیبی تلاش کو n قدم درکار ہو سکتے ہیں۔ اس کے برعکس ثنائی تلاش استعمال کرتے ہوئے اگر $2^{m-1} < n < 2^m$ ہو تب $m - 1 < \log_2 n \leq m$ ہو گا اور ایک لفظ تک پہنچنے کی خاطر زیادہ سے زیادہ $m = \lceil \log_2 n \rceil$ ($\log_2 n$ کا عدد صحیح چھت تفاعل) بار دو حصوں میں تقسیم کی ضرورت پیش آئے گی۔ یوں ثنائی تلاش میں $\log_2 n$ کے لگ بھگ قدم درکار ہوں گے۔

بڑے O روپ میں اس تمام کو نہایت خوش اسلوبی سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ترتیبی سلسلہ میں ترتیبی تلاش کو $O(n)$ کے لگ بھگ قدم درکار ہوں گے جبکہ ثنائی تلاش کو $O(\log_2 n)$ کے لگ بھگ قدم درکار ہوں گے۔ ہماری مثال میں ان دو میں بہت زیادہ فرق پایا جاتا ہے (26 000 بالمقابل 15) اور چونکہ $n \to \infty$ کرتے ہوئے $\log_2 n$ کے لحاظ سے n زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے لہٰذا n بڑھانے سے یہ فرق زیادہ بڑھے گا۔

سوالات

قوت نما e^x کے ساتھ موازنہ

سوال ۷.۴۲۴: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل e^x سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

ا. $x + 3$ ب. $x^3 + \sin^2 x$ ج. $\sqrt{x}$ د. 4^x ھ. $\left(\frac{3}{2}\right)^x$ و. $e^{x/2}$ ز. $\frac{e^x}{2}$ ح. $\log_{10} x$

سوال ۷.۴۲۵: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل e^x سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا e^x سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

ا. $10x^4 + 30x + 1$ ب. $x \ln x - x$ ج. $\sqrt{1 + x^4}$ د. $\left(\frac{5}{2}\right)^x$ ھ. e^{-x} و. xe^x ز. $e^{\cos x}$ ح. e^{x-1}

طاقت x^2 کے ساتھ موازنہ

سوال ۷.۴۲۶: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل x^2 سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 کی شرح سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

---

[۲۴] binarysearch

۱۱۵۳۲ ا. $x^2 + 4x$ ۱۱۵۳۴ ج. $\sqrt{x^4 + x^3}$ ۱۱۵۳۶ ھ. $x \ln x$ ۱۱۵۳۸ ز. $x^3 e^{-x}$

۱۱۵۳۳ ب. $x^5 - x^2$ ۱۱۵۳۵ د. $(x+3)^2$ ۱۱۵۳۷ و. 2^x ۱۱۵۳۹ ح. $8x^2$

۱۱۵۴۰ سوال ۷.۴۲۷: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل x^2 سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا x^2 کی شرح سے بڑھتا ہے؟
۱۱۵۴۱ کونسا x^2 سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

۱۱۵۴۲ ا. $x^2 + \sqrt{x}$ ۱۱۵۴۴ ج. $x^2 e^{-x}$ ۱۱۵۴۶ ھ. $x^3 - x^2$ ۱۱۵۴۸ ز. $(1.1)^x$

۱۱۵۴۳ ب. $10x^2$ ۱۱۵۴۵ د. $\log_{10}(x^2)$ ۱۱۵۴۷ و. $(\frac{1}{10})^x$ ۱۱۵۴۹ ح. $x^2 + 100x$

۱۱۵۵۰ لوگارتھم $\ln x$ کے ساتھ موازنہ

۱۱۵۵۱ سوال ۷.۴۲۸: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل $\ln x$ سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا $\ln x$ کی شرح سے بڑھتا
۱۱۵۵۲ ہے؟ کونسا $\ln x$ سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

۱۱۵۵۳ ا. $\log_3 x$ ۱۱۵۵۵ ج. $\ln \sqrt{x}$ ۱۱۵۵۷ ھ. x ۱۱۵۵۹ ز. $\frac{1}{x}$

۱۱۵۵۴ ب. $\ln 2x$ ۱۱۵۵۶ د. $\sqrt{x}$ ۱۱۵۵۸ و. $5 \ln x$ ۱۱۵۶۰ ح. e^x

۱۱۵۶۱ سوال ۷.۴۲۹: $x \to \infty$ کرتے ہوئے درج ذیل میں سے کونسا تفاعل $\ln x$ سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے؟ کونسا $\ln x$ کی شرح سے بڑھتا
۱۱۵۶۲ ہے؟ کونسا $\ln x$ سے کم تیزی سے بڑھتا ہے؟

۱۱۵۶۳ ا. $\log_2(x^2)$ ۱۱۵۶۵ ج. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ۱۱۵۶۷ ھ. $x - 2\ln x$ ۱۱۵۶۹ ز. $\ln(\ln x)$

۱۱۵۶۴ ب. $\log_{10} 10x$ ۱۱۵۶۶ د. $\frac{1}{x^2}$ ۱۱۵۶۸ و. e^{-x} ۱۱۵۷۰ ح. $\ln(2x+5)$

۱۱۵۷۱ شرح نمو کے لحاظ سے منظم کرنا

۱۱۵۷۲ سوال ۷.۴۳۰: $x \to \infty$ کرتے ہوئے شرح نمو کے لحاظ سے منظم کریں۔ کم تر شرح والے تفاعل کو پہلے لکھیں۔

۱۱۵۷۳ ا. e^x ۱۱۵۷۴ ب. x^x ۱۱۵۷۵ ج. $(\ln x)^x$ ۱۱۵۷۶ د. $e^{x/2}$

۱۱۵۷۷ سوال ۷.۴۳۱: $x \to \infty$ کرتے ہوئے شرح نمو کے لحاظ سے ترتیب دیں۔ کم تر شرح والے تفاعل کو پہلے لکھیں۔

۱۱۵۷۸ ا. 2^x ۱۱۵۷۹ ب. x^2 ۱۱۵۸۰ ج. $(\ln 2)^x$ ۱۱۵۸۱ د. e^x

۱۱۵۸۲ بڑا O اور چھوٹا o ، رتبہ

۱۱۵۸۳ سوال ۷.۴۳۲: $x \to \infty$ کرتے ہوئے کونسا درست اور کونسا غلط ہے؟

۱۱۵۸۴ ا. $x = o(x)$ ۱۱۵۸۷ د. $x = O(2x)$ ۱۱۵۹۰ ز. $\ln x = o(\ln 2x)$

۱۱۵۸۵ ب. $x = o(x+5)$ ۱۱۵۸۸ ھ. $e^x = o(e^{2x})$

۱۱۵۸۶ ج. $x = O(x+5)$ ۱۱۵۸۹ و. $x + \ln x = O(x)$ ۱۱۵۹۱ ح. $\sqrt{x^2+5} = O(x)$

۱۱۵۹۲ سوال ۷.۴۳۳: $x \to \infty$ کرتے ہوئے کونسا درست اور کونسا غلط ہے؟

۱۱۵۹۳ ا. $\frac{1}{x+3} = O(\frac{1}{x})$ ۱۱۵۹۵ ج. $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = o(\frac{1}{x})$ ۱۱۵۹۸ و. $x \ln x = o(x^2)$

۱۱۵۹۶ د. $2 + \cos x = O(2)$ ۱۱۵۹۹ ز. $\ln(\ln x) = O(\ln x)$

۱۱۵۹۴ ب. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = O(\frac{1}{x})$ ۱۱۵۹۷ ھ. $e^x + x = O(e^x)$ ۱۱۶۰۰ ح. $\ln x = o(\ln(x^2+1))$

۱۱۶۰۱ سوال ۷.۴۳۴: دکھائیں کہ اگر $x \to \infty$ کرنے سے $f(x)$ اور $g(x)$ کے بڑھنے کی شرح برابر ہو تب $f = O(g)$ اور $g =$
۱۱۶۰۲ $O(f)$ ہوں گے۔

۱۱۶۰۳ سوال ۷.۴۳۵: $x \to \infty$ کرتے ہوئے کب کثیر رکنی $f(x)$ کا رتبہ کثیر رکنی $g(x)$ کے رتبہ سے کم ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۱۶۰۴ سوال ۷.۴۳۶: $x \to \infty$ کرتے ہوئے کب کثیر رکنی $f(x)$ کا رتبہ زیادہ سے زیادہ کثیر رکنی $g(x)$ کے رتبہ کے برابر ہو گا؟ اپنے جواب کی
۱۱۶۰۵ وجہ پیش کریں۔

۱۱۶۰۶

۱۱۶۰۷ سوال ۷.۴۳۷: قاعدہ سمسن اور قاعدہ ذوزنقہ

۱۱۶۰۸ موجودہ حصہ میں پیش کی گئی تعریف کو زیادہ عمومی بنانے کی خاطر ہم اس میں $x \to \infty$ کی پابندی ختم کر کے اس کے بجائے $x \to a$ پر حد لیتے ہیں
۱۱۶۰۹ جہاں a حقیقی عدد ہے۔ دکھائیں کہ قاعدہ سمسن سے حاصل قطعی تکمل کی تخمین میں $h \to 0$ کرتے ہوئے خلل $O(h^4)$ ہو گا جبکہ قاعدہ ذوزنقہ سے
۱۱۶۱۰ حاصل تخمین میں خلل $O(h^2)$ ہو گا۔ یوں ان دو تراکیب کے نتائج کی درستگی کو اس طرح بھی بیان کیا جا سکتا ہے۔

۱۱۶۱۱ دیگر موازنے

۱۱۶۱۲ سوال ۷.۴۳۸: ناطق تفاعل کی حدوں کے بارے میں حصہ ۴.۵ میں حاصل نتیجہ ہمیں $x \to \infty$ کی صورت میں کثیر رکنی کی اضافی شرح نمو کے
۱۱۶۱۳ بارے میں کیا بتاتا ہے؟

۱۱۶۱۴

۱۱۶۱۵ سوال ۷.۴۳۹: کمپیوٹر ترسیم

۱۱۶۱۶ (ا) درج ذیل پر تحقیق کریں۔ اس کے بعد قاعدہ لھوپیٹال سے اس تحقیق سے حاصل معلومات کی وجہ بیان کریں۔

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+999)}{\ln x}$$

۱۱۶۱۷ (ب) دکھائیں کہ درج ذیل کی قیمت، مستقل a کی قیمت پر منحصر نہیں ہے۔ اس سے تفاعل $f(x) = \ln(x+a)$ اور $g(x) = \ln x$ کی
۱۱۶۱۸ اضافی شرح نمو کے بارے میں کیا کہا جا سکتا ہے؟

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+a)}{\ln x}$$

سوال ۷.۴۴۰: دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\sqrt{10x+1}$ اور $\sqrt{x+1}$ کی شرح نمو ایک دوسرے کے برابر ہیں۔ یہ دکھانے کی خاطر دکھائیں کہ دونوں تفاعل کی شرح نمو تفاعل $\sqrt{x}$ کی شرح نمو کے برابر ہے۔

سوال ۷.۴۴۱: دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\sqrt{x^4+x}$ اور $\sqrt{x^4-x^3}$ کی شرح نمو ایک دوسرے کے برابر ہیں۔ یہ دکھانے کی خاطر دکھائیں کہ دونوں تفاعل کی شرح نمو تفاعل x^2 کی شرح نمو کے برابر ہے۔

سوال ۷.۴۴۲: دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے e^x کی شرح نمو کسی بھی x^n کی شرح نمو سے زیادہ ہو گی، جہاں n کوئی بھی مثبت عدد صحیح ہو سکتا ہے، مثلاً $x^{1\,000\,000}$۔ (اشارہ۔ x^n کا n واں تفرق کیا ہے؟)

سوال ۷.۴۴۳: تفاعل e^x ہر کثیر رکنی سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے

دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے e^x کسی بھی کثیر رکنی $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ سے زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔

سوال ۷.۴۴۴:

ا. دکھائیں کہ کسی بھی مثبت عدد صحیح n کی صورت میں $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\ln x$ کی شرح نمو تفاعل $x^{1/n}$ (مثلاً $x^{1/1\,000\,000}$) کی شرح نمو سے کم ہو گی۔

ب. اگرچہ $x^{1/1\,000\,000}$ کی قیمت آخر کار $\ln x$ کی قیمت سے زیادہ ہو گی، وہاں تک پہنچنے کے لیے آپ کو محور x پر بہت دور جانا ہو گا۔ ایسا $x > 1$ تلاش کریں جس پر $x^{1/1\,000\,000} > \ln x$ ہو۔ دھیان رہے کہ $x > 1$ کی صورت میں مساوات $\ln x = x^{1/1\,000\,000}$ کو $\ln(\ln x) = \frac{\ln x}{1\,000\,000}$ بھی لکھا جا سکتا ہے۔

ج. تفاعل $x^{1/10}$ کو بھی $\ln x$ سے بڑھنے کے لیے بہت وقت درکار ہو گا۔ کیلکولیٹر استعمال کرتے ہوئے x کی وہ قیمت تلاش کریں جس پر $x^{1/10}$ کی ترسیم $\ln x$ کی ترسیم کو کٹ کرتی ہو یا جہاں $\ln x = 10\ln(\ln x)$ ہو۔

د. وہ نقطہ جس پر $\ln x = 10\ln(\ln x)$ ہو کے قریب اس مساوات کو کمپیوٹر پر ترسیم کر کے x تلاش کریں۔

سوال ۷.۴۴۵: تفاعل $\ln x$ کی شرح نمو ہر کثیر رکنی سے کم ہے

دکھائیں کہ $x \to \infty$ کرتے ہوئے $\ln x$ کی شرح نمو کسی بھی غیر مستقل کثیر رکنی سے کم ہو گی۔

الخوارزم اور تلاش

سوال ۷.۴۴۶: (ا) آپ کمپیوٹر کی مدد سے ایک کام سرانجام دینا چاہتے ہیں۔ آپ کے پاس تین الخوارزم موجود ہیں جن کے لیے کمپیوٹر کو درکار قدموں کی تعداد درج ذیل تفاعل دیتے ہیں۔ n کی بڑی قیمت کی صورت میں ان میں سے کونسا الخوارزم بہترین ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$n\log_2 n, \quad n^{3/2}, \quad n(\log_2 n)^2$$

(ب) جزو-الف میں دیے گئے تفاعل کو ایک ساتھ ترسیم کرتے ہوئے دیکھیں کونسا زیادہ تیزی سے بڑھتا ہے۔

سوال ۷.۴۴۷: درج ذیل تفاعل کے لیے سوال ۷.۴۴۶ کو دہرائیں۔

$$n, \quad \sqrt{n}\log_2 n, \quad (\log_2 n)^n$$

جدول ۷.۷: تکونیاتی تفاعل کو یک بہ یک بنانے کی خاطر دائرہ کار کو پابند کیا گیا ہے۔

تفاعل	دائرہ کار	سعت
$\sin x$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$[-1, 1]$
$\cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
$\tan x$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	$(-\infty, \infty)$
$\cot x$	$(0, \pi)$	$(-\infty, \infty)$
$\sec x$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\csc x$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

سوال ۷.۴۴۸: ایک مرتب سلسلہ جس میں دس لاکھ اجزاء پائے جاتے ہیں میں سے آپ کو ایک جزو تلاش کرنا ہے۔ ترتیبی تلاش کے لیے کتنے قدم درکار ہوں گے؟ ثنائی تلاش کے لیے کتنے قدم درکار ہوں گے؟

سوال ۷.۴۴۹: ایک مرتب سلسلہ میں 450 000 اجزاء پائے جاتے ہیں جن میں سے آپ کو ایک جزو کی تلاش ہے۔ ترتیبی تلاش اور ثنائی تلاش کرتے ہوئے کتنے قدم درکار ہوں گے؟

۷.۸ معکوس تکونیاتی تفاعل

معکوس تکونی تفاعل کی ضرورت اس وقت پیش آتی ہے جب ہم مثلث کے ضلع کو ناپ کر زاویہ تلاش کرنا چاہتے ہیں۔ یہ تفاعل اہم ضد تفرق بھی مہیا کرتے ہیں اور تفرقی مساوات کے حل میں عموماً پائے جاتے ہیں۔ اس حصہ میں ان تفاعل کی تعریف پیش کی جائے گی، ان کو ترسیم کرنا سکھایا جائے گا اور ان کی قیمت حاصل کرنا سکھایا جائے گا۔

معکوس تکونیاتی کی تعریف

چھ بنیادی تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں دہراتی ہیں لہٰذا یہ یک بہ یک تفاعل نہیں ہیں البتہ ان کے دائرہ کار کو ایسے وقفوں پر پابند کیا جا سکتا ہے جہاں یہ یک بہ یک ہوں (جدول ۷.۷)۔

۱۱۲۶۰ چونکہ پابند دائرہ کار والے تکونیاتی تفاعل یک بہ یک ہیں لہٰذا ان کے معکوس پائے جاتے ہیں جنہیں ظاہر کرنے کا طریقہ درج ذیل ہے۔

$$y = \sin^{-1} x$$
$$y = \cos^{-1} x$$
$$y = \tan^{-1} x$$
$$y = \cot^{-1} x$$
$$y = \sec^{-1} x$$
$$y = \csc^{-1} x$$

۱۱۲۶۱ ہم کہیں گے "x کا معکوس سائن y کے برابر ہے"، وغیرہ۔ یاد رہے کہ ان معکوس تفاعل میں -1 سے مراد معکوس تفاعل ہے اور لہٰذا اس کو ہر گز
۱۱۲۶۲ مقلوب تصور نہیں کیا جائے۔ مثال کے طور پر $\sin x$ کا مقلوب $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x} = \csc x$ ہو گا۔

۱۱۲۶۳ معکوس تکونیاتی تفاعل کے دائرہ کار یوں منتخب کیے جاتے ہیں کہ درج ذیل مطمئن ہوں۔

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}(\tfrac{1}{x}) \tag{۱}$$
$$\csc^{-1} x = \sin^{-1}(\tfrac{1}{x}) \tag{۲}$$
$$\cot^{-1} x = \tfrac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \tag{۳}$$

۱۱۲۶۴ ان تعلقات کو استعمال کر کے $\cos^{-1} x$ ، $\sin^{-1} x$ اور $\tan^{-1} x$ کی قیمتیں جانتے ہوئے ہم بالترتیب $\sec^{-1} x$ ، $\csc^{-1} x$ اور
۱۱۲۶۵ $\cot^{-1} x$ کی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں۔

۱۱۲۶۶ **معکوس سائن اور معکوس کوسائن**

۱۱۲۶۷ متغیر x کے معکوس سائن یعنی $\sin^{-1} x$ سے مراد وہ زاویہ ہے جس کا سائن x کے برابر ہو۔ اسی طرح $\cos^{-1} x$ سے مراد وہ زاویہ ہے جس کے
۱۱۲۶۸ کوسائن کی قیمت x ہو۔

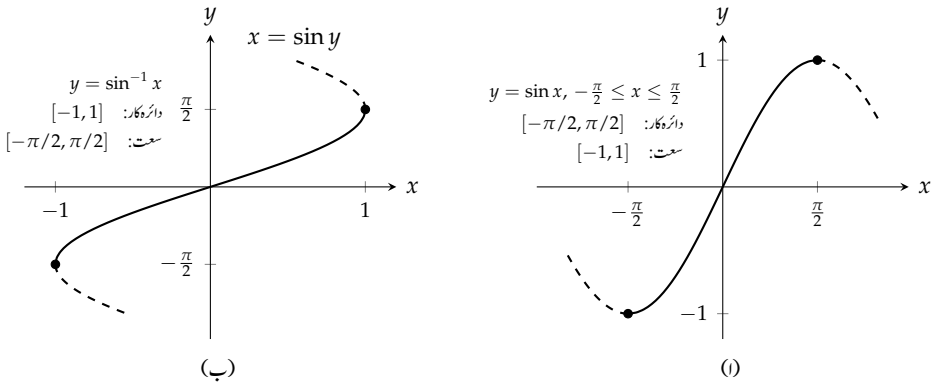
۱۱۲۶۹ تعریف: $y = \sin^{-1} x$ سے مراد وقفہ $[-\pi/2, \pi/2]$ میں وہ عدد y ہے جس کے لیے $\sin y = x$ ہو۔ اسی طرح $y =$
۱۱۲۷۰ $\cos^{-1} x$ سے مراد وقفہ $[0, \pi]$ میں وہ عدد y ہے جس کے لیے $\cos y = x$ ہو۔

۱۱۲۷۱ □

۱۱۲۷۲ تفاعل $y = \sin^{-1} x$ (شکل ۷.۳۵) کی ترسیم مبدا کے لحاظ سے تشاکلی ہے (اور عین $x = \sin y$ کی ترسیم پر پائی جاتی ہے)۔ یوں معکوس سائن
۱۱۲۷۳ طاق تفاعل ہے:

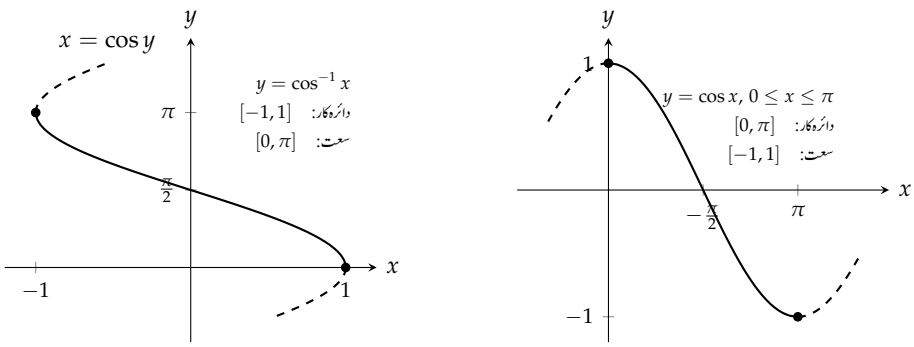
$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x \tag{۴}$$

۱۱۲۷۴ تفاعل $y = \cos^{-1} x$ (شکل ۷.۳۶) کی ترسیم میں ایسی کوئی تشاکلی نہیں پائی جاتی ہے۔



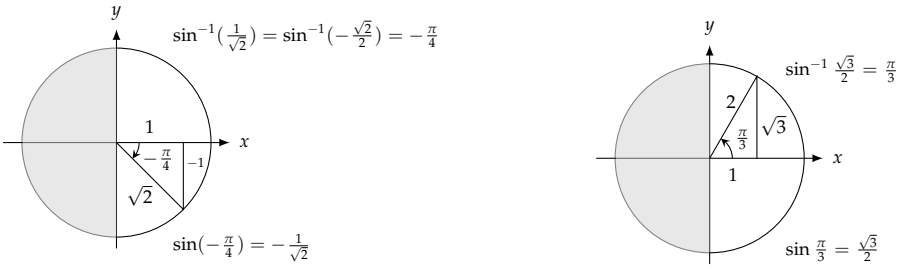
(ا) (ب)

شکل ۷.۳۵: ترسیمات برائے (ا) $y = \sin x,\ -\pi/2 \le x \le \pi/2$ اور (ب) معکوس سائن تفاعل $y = \sin^{-1} x$؛ لکیر $y = x$ میں عکس $\sin^{-1} x$ درحقیقت قوس $x = \sin y$ کا کچھ حصہ ہے۔

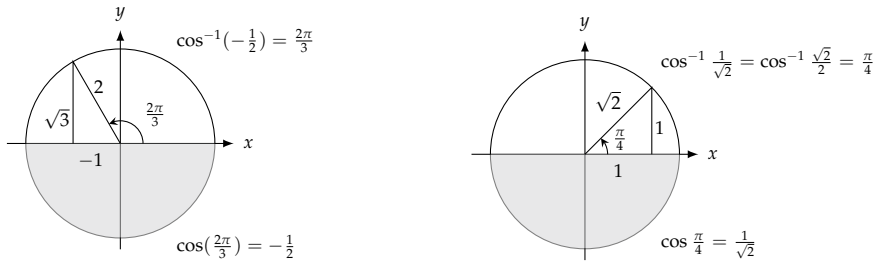


(ا) (ب)

شکل ۷.۳۶: ترسیمات برائے (ا) $y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi$ اور (ب) معکوس کوسائن تفاعل $y = \cos^{-1} x$؛ لکیر $y = x$ میں عکس $\cos^{-1} x$ درحقیقت قوس $x = \cos y$ کا کچھ حصہ ہے۔



شکل ۷.۳۷: سائن اور معکوس سائن کی مخصوص قیمتیں (مثال ۷.۶۰)۔



شکل ۷.۳۸: کوسائن اور معکوس سائن کی مخصوص قیمتیں (مثال ۷.۶۱)۔

مثال ۷.۶۰: تفاعل $\sin^{-1} x$ کی مخصوص قیمتیں

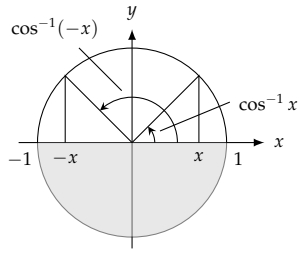
معکوس سائن کی مخصوص قیمتوں کو قائمہ مثلث سے شکل ۷.۶۰ میں حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔ اس طرح درج ذیل دیگر قیمتیں بھی حاصل کی جا سکتی ہیں۔ یاد رہے کہ $\sin^{-1} x$ کا سعت $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ہے لہٰذا زاویے ربع اول اور ربع چہارم میں پائے جائیں گے۔

x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\sin^{-1} x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$

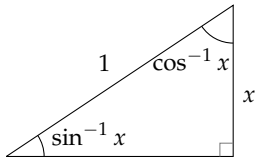
□

مثال ۷.۶۱: تفاعل $\cos^{-1} x$ کی مخصوص قیمتیں

معکوس کوسائن کی مخصوص قیمتوں کو قائمہ مثلث سے شکل ۷.۶۱ میں حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔ اس طرح درج ذیل دیگر قیمتیں بھی حاصل کی جا سکتی ہیں۔ یاد



شکل ۷.۳۹: $\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi$



شکل ۷.۴۰: $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

۱۱۶۸۳ رہے کہ $\cos^{-1} x$ کا سعت $[0, \pi]$ ہے لہٰذا زاویے ربع اول اور ربع دوم میں پائے جائیں گے۔

x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos^{-1} x$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

۱۱۶۸۴ □

۱۱۶۸۵ **تماثل جن میں معکوس سائن اور معکوس کوسائن پائے جاتے ہوں**

۱۱۶۸۶ ہم شکل ۷.۳۹ میں دیکھتے ہیں کہ x کا معکوس کوسائن تماثل

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1}(-x) = \pi \tag{۵}$$

۱۱۶۸۷ کو مطمئن کرتا ہے جس کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x \tag{۶}$$

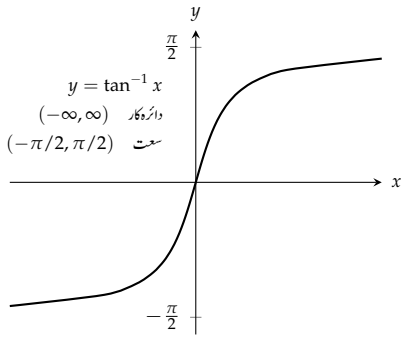
۱۱۶۸۸ اسی طرح شکل ۷.۴۰ میں مثلث کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} \tag{۷}$$

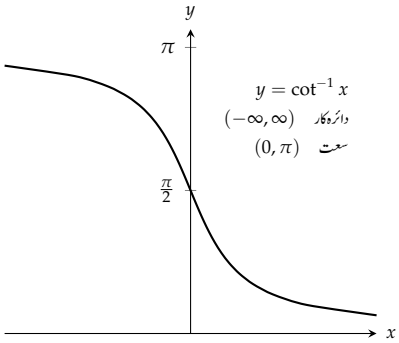
۱۱۶۸۹ اگرچہ شکل ۷.۴۰ میں دی گئی مثلث سے یہ ثابت نہیں کیا جا سکتا ہے لیکن مساوات ۷ وقفہ $[-1, 1]$ میں دیگر x کے لیے بھی درست ہے۔ یہ حقیقت
۱۱۶۹۰ مساوات ۴ اور مساوات ۶ کا نتیجہ ہے (سوال ۷.۵۰۴)۔

۱۱۶۹۱ **$\tan x$ ، $\cot x$ ، $\sec x$ اور $\csc x$ کے معکوس**

۱۱۶۹۲ متغیر x کا معکوس ٹینجنٹ وہ زاویہ ہو گا جس کا ٹینجنٹ x ہو۔ اسی طرح x کا معکوس کوٹینجنٹ وہ زاویہ ہو گا جس کا کوٹینجنٹ x ہو۔



شکل ۷.۴۱: ترسیم $y = \tan^{-1} x$



شکل ۷.۴۲: ترسیم $y = \cot^{-1} x$

تعریف: وقفہ $(-\pi/2, \pi/2)$ میں وہ عدد جس کا $\tan y = x$ ہو عدد $y = \tan^{-1} x$ ہو گا۔ اسی طرح وقفہ $(0, \pi)$ میں وہ عدد جس کا $\cot y = x$ ہو عدد $y = \cot^{-1} x$ ہو گا۔

□

ہم کھلا وقفہ لیتے ہیں تاکہ ان نقطوں سے نجات حاصل کر سکیں جن پر ٹینجنٹ اور کوٹینجنٹ غیر معین ہیں۔

تفاعل $y = \tan^{-1} x$ کی ترسیم تفاعل $x = \tan y$ کی ترسیم، جو مبدا کے لحاظ سے تشاکلی ہے، کا کچھ حصہ ہے لہٰذا یہ بھی مبدا کے لحاظ سے تشاکلی ہو گا (شکل ۷.۴۱)۔ الجبرائی طور پر اس سے مراد

$$\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x \tag{۸}$$

ہے، یعنی، معکوس ٹینجنٹ طاق تفاعل ہے۔ تفاعل $y = \cot^{-1} x$ کی ترسیم میں ایسی کوئی تشاکلی نہیں پائی جاتی ہے (شکل ۷.۴۲)۔

تفاعل $\sec x$ اور $\csc x$ کے پابند شدہ روپ کے معکوس کی ترسیمات کو بالترتیب شکل ۷.۴۳ اور شکل ۷.۴۴ میں دکھایا گیا ہے۔

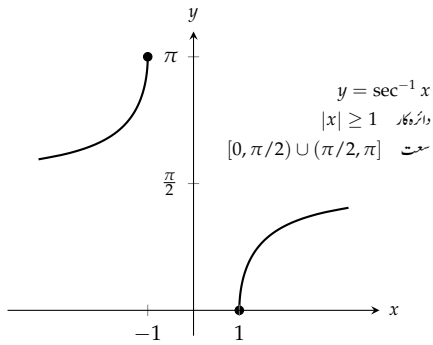
انتباہ: متغیر x کی منفی قیمتوں کے لیے $\sec^{-1} x$ کی تعریف پر اتفاق نہیں پایا جاتا ہے۔ ہم ربع دوم میں $\frac{\pi}{2}$ اور π کے بیچ زاویہ لیں گے۔ اس انتخاب کی وجہ سے $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$ ہو گا اور $\sec^{-1} x$ کے دائرہ کار کے ہر حصہ پر $\sec^{-1} x$ بڑھتا ہوا تفاعل ہو گا۔

مثال ۷.۶۲: معکوس کوٹینجنٹ $\tan^{-1} x$ کی مخصوص قیمتیں

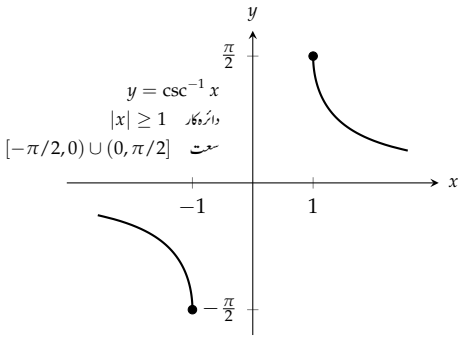
معکوس کوٹینجنٹ کی مخصوص قیمتوں کا حصول شکل ۷.۴۵ میں دکھایا گیا ہے۔ درج ذیل دیگر قیمتیں بھی اسی طرح حاصل کی جا سکتی ہیں۔

x	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$

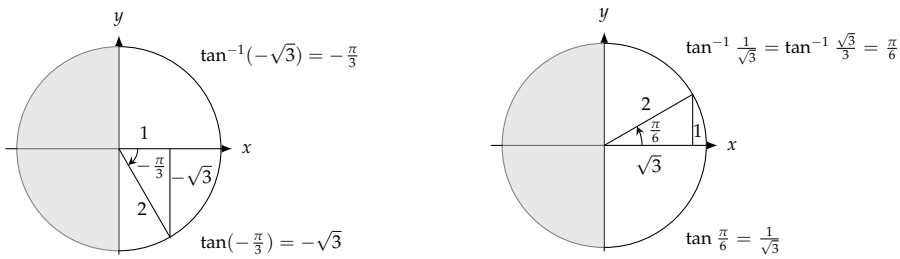
□



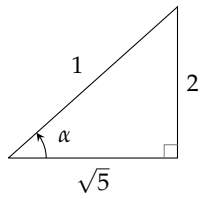
شکل ۷.۴۳: ترسیم $y = \sec^{-1} x$



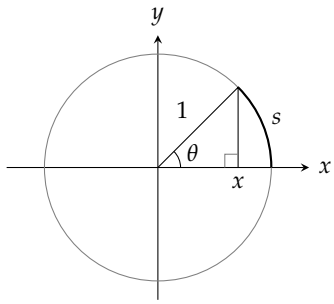
شکل ۷.۴۴: ترسیم $y = \csc^{-1} x$



شکل ۷.۴۵: معکوس کوٹینجنٹ کی مخصوص قیمتیں (مثال ۷.۶۲)۔



شکل ۷.۴۶: مثلث کی مدد سے زاویوں کا حصول (مثال ۷.۶۳)



شکل ۷.۴۷: اکائی دائرہ میں زاویہ $\theta = \cos^{-1} x$ مخالف قوس کی لمبائی s کے برابر ہو گا۔

۱۱۷۰۶ مثال ۷.۶۳: اگر $\alpha = \sin^{-1} \frac{2}{3}$ ہو تب $\cos \alpha$ ، $\tan \alpha$ ، $\sec \alpha$ ، $\csc \alpha$ اور $\cot \alpha$ کیا ہوں گے؟

۱۱۷۰۷ **حل**

۱۱۷۰۸ چونکہ $\alpha = \sin^{-1} \frac{2}{3}$ ہے لہٰذا ہم α کو قائمہ مثلث کا ایک زاویہ تصور کرتے ہیں جس کا مخالف ضلع 2 اور وتر 3 ہیں۔ مثلث کا تیسرا ضلع (قاعدہ)
۱۱۷۰۹ درج ذیل ہو گا (شکل ۷.۴۶)۔

$$\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$$ مسئلہ فیثاغورث

۱۱۷۱۰ ہم مثلث پر قاعدہ کی لمبائی لکھ کر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3},\ \tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}},\ \sec \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}},\ \csc \alpha = \frac{3}{2},\ \cot \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

۱۱۷۱۱ □

۱۱۷۱۲ رداس r کے دائرہ میں مرکز پر زاویہ θ اور قوس کی لمبائی s کا تعلق $s = r\theta$ ہے لہٰذا اکائی دائرہ میں $s = \theta$ ہو گا (شکل ۷.۴۷)۔ یوں متغیر x کا
۱۱۷۱۳ معکوس کوسائن $\cos^{-1} x$ زاویہ θ دیگا جس کی قیمت مخالف قوس کی لمبائی s کے برابر ہو گی۔ معکوس سائن کے لیے بھی اس قسم کا تعلق پایا جاتا ہے۔

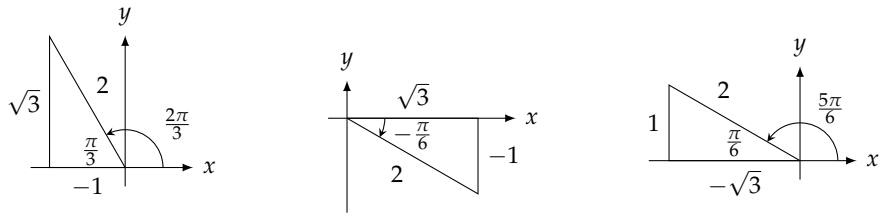
۱۱۷۱۴ مثال ۷.۶۴: $\cot\left(\sec^{-1}(-\frac{2}{\sqrt{3}}) + \csc^{-1}(-2)\right)$ کی قیمت تلاش کریں۔

۱۱۷۱۵ **حل**

۱۱۷۱۶ ہم اندر سے باہر کی جانب چلتے ہوئے زاویوں اور نسبتوں کو مثلثوں کی مدد سے ظاہر کریں گے۔

۱۱۷۱۷ **پہلا قدم:** سیکنٹ کی منفی قیمتیں ربع دوم کے زاویوں سے حاصل ہوں گی (شکل ۷.۴۸-ا):

$$\sec^{-1}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \sec^{-1}\left(\frac{2}{-\sqrt{3}}\right) = \frac{5\pi}{6}$$



(ا) $\sec(\frac{5\pi}{6}) = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ (ب) $\csc(-\frac{\pi}{6}) = -2$ (ج) $\cot(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

شکل ۷.۴۸: مثلث برائے مثال ۷.۶۴

(ا) (ب)

شکل ۷.۴۹: مثلث برائے مثال ۷.۶۵

۱۱۷۱۸ **دوسرا قدم:** کوسیکنٹ کی منفی قیمتیں ربع چہارم کے زاویوں سے حاصل ہوں گی (شکل ۷.۴۸-ب):

$$\csc^{-1}(-2) = \csc^{-1}\left(\frac{2}{-1}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

۱۱۷۱۹ **تیسرا قدم:** کوٹینجنٹ کی قیمتیں ربع چہارم سے حاصل ہو گی (شکل ۷.۶۴-ج):

$$\begin{aligned}\cot\left(\sec^{-1}(-\tfrac{2}{\sqrt{3}}) + \csc^{-1}(-2)\right) &= \cot\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right)\\ &= \cot\left(\frac{2\pi}{3}\right)\\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

۱۱۷۲۰ □

۱۱۷۲۱ **مثال ۷.۶۵:** $\sec\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\right)$ تلاش کریں۔

۱۱۷۲۲ **حل**

۱۱۷۲۳ ہم $\theta = \tan^{-1}(x/3)$ لے کر زاویہ θ کو قائمہ مثلث میں تصور کرتے ہیں (شکل ۷.۴۹-ا)۔ یوں

$$\tan\theta = \frac{\text{مخالف}}{\text{قریبی}} = \frac{x}{3}$$

۱۱۷۲۴ ہو گا۔ مثلث کا وتر

$$\sqrt{x^2+3^2} = \sqrt{x^2+9}$$

۱۱۷۲۵ ہو گا لہٰذا سیکنٹ کی قیمت درج ذیل ہو گی (شکل ۷.۴۹-ب)۔

$$\sec\left(\tan^{-1}\frac{x}{3}\right) = \sec\theta = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$$

۱۱۷۲۶ □

۱۱۷۲۷ **سوالات**

۱۱۷۲۸ **معکوس تکونیاتی تفاعل کی مخصوص قیمتیں**

۱۱۷۲۹ سوال ۷.۴۵۰ تا سوال ۷.۴۶۱ میں مثال ۷.۶۰ تا مثال ۷.۶۲ کی طرح حوالہ مثلث استعمال کرتے ہوئے زاویے تلاش کریں۔

۱۱۷۳۰ سوال ۷.۴۵۰: (ا) $\tan^{-1}1$، (ب) $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$، (ج) $\tan^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$

۱۱۷۳۱ سوال ۷.۴۵۱: (ا) $\tan^{-1}(-1)$، (ب) $\tan^{-1}\sqrt{3}$، (ج) $\tan^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{3}})$

۱۱۷۳۲ سوال ۷.۴۵۲: (ا) $\sin^{-1}(\frac{-1}{2})$، (ب) $\sin^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$، (ج) $\sin^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2})$

۱۱۷۳۳ سوال ۷.۴۵۳: (ا) $\sin^{-1}(\frac{1}{2})$، (ب) $\sin^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{2}})$، (ج) $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$

۱۱۷۳۴ سوال ۷.۴۵۴: (ا) $\cos^{-1}(\frac{1}{2})$، (ب) $\cos^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{2}})$، (ج) $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})$

۱۱۷۳۵ سوال ۷.۴۵۵: (ا) $\cos^{-1}(\frac{-1}{2})$، (ب) $\cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{2}})$، (ج) $\cos^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2})$

۱۱۷۳۶ سوال ۷.۴۵۶: (ا) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$، (ب) $\sec^{-1}(\frac{2}{\sqrt{3}})$، (ج) $\sec^{-1}(-2)$

۱۱۷۳۷ سوال ۷.۴۵۷: (ا) $\sec^{-1}(\sqrt{2})$، (ب) $\sec^{-1}(\frac{-2}{\sqrt{3}})$، (ج) $\sec^{-1}(2)$

۱۱۷۳۸ سوال ۷.۴۵۸: (ا) $\csc^{-1}(\sqrt{2})$، (ب) $\csc^{-1}(\frac{-2}{\sqrt{3}})$، (ج) $\csc^{-1}(2)$

۱۱۷۳۹ سوال ۷.۴۵۹: (ا) $\csc^{-1}(-\sqrt{2})$، (ب) $\csc^{-1}(\frac{2}{\sqrt{3}})$، (ج) $\csc^{-1}(-2)$

۱۱۷۴۰ سوال ۷.۴۶۰: (ا) $\cot^{-1}(-1)$، (ب) $\cot^{-1}\sqrt{3}$، (ج) $\cot^{-1}(\frac{-1}{\sqrt{3}})$

۱۱۷۴۱ سوال ۷.۴۶۱: (ا) $\cot^{-1}(1)$، (ب) $\cot^{-1}\sqrt{-3}$، (ج) $\cot^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}})$

۱۱۷۴۲ تکونیاتی تفاعل کی قیمتیں

۱۱۷۴۳ سوال ۷.۴۶۲: اگر $\alpha = \sin^{-1}(\frac{5}{13})$ ہو تب $\cos\alpha$ ، $\tan\alpha$ ، $\sec\alpha$ ، $\csc\alpha$ اور $\cot\alpha$ کیا ہوں گے؟

۱۱۷۴۴ سوال ۷.۴۶۳: اگر $\alpha = \tan^{-1}(\frac{4}{3})$ ہو تب $\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$ ، $\sec\alpha$ ، $\csc\alpha$ اور $\cot\alpha$ کیا ہوں گے؟

۱۱۷۴۵ سوال ۷.۴۶۴: اگر $\alpha = \sec^{-1}(-\sqrt{5})$ ہو تب $\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$ ، $\tan\alpha$ ، $\csc\alpha$ اور $\cot\alpha$ کیا ہوں گے؟

۱۱۷۴۶ سوال ۷.۴۶۵: اگر $\alpha = \sec^{-1}(\frac{-\sqrt{13}}{2})$ ہو تب $\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$ ، $\tan\alpha$ ، $\csc\alpha$ اور $\cot\alpha$ کیا ہوں گے؟

۱۱۷۴۷ تکونیاتی اور معکوس تکونیاتی اجزاء کی قیمتوں کا حصول

۱۱۷۴۸ سوال ۷.۴۶۶ تا سوال ۷.۴۷۷ میں درکار قیمت معلوم کریں۔

۱۱۷۴۹ سوال ۷.۴۶۶: $\sin\left(\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

۱۱۷۵۰ سوال ۷.۴۶۷: $\sec\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$

۱۱۷۵۱ سوال ۷.۴۶۸: $\tan\left(\sin^{-1}(-\frac{1}{2})\right)$

۱۱۷۵۲ سوال ۷.۴۶۹: $\cot\left(\sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})\right)$

۱۱۷۵۳ سوال ۷.۴۷۰: $\csc(\sec^{-1}2) + \cos(\tan^{-1}(-\sqrt{3}))$

۱۱۷۵۴ سوال ۷.۴۷۱: $\tan(\sec^{-1}1) + \sin(\csc^{-1}(-2))$

۱۱۷۵۵ سوال ۷.۴۷۲: $\sin\left(\sin^{-1}(-\frac{1}{2}) + \cos^{-1}(-\frac{1}{2})\right)$

۱۱۷۵۶ سوال ۷.۴۷۳: $\cot\left(\sin^{-1}(-\frac{1}{2}) - \sec^{-1}2\right)$

۱۱۷۵۷ سوال ۷.۴۷۴: $\sec(\tan^{-1}1 + \csc^{-1}1)$

۱۱۷۵۸ سوال ۷.۴۷۵: $\sec(\cot^{-1}\sqrt{3} + \csc^{-1}(-1))$

۱۱۷۵۹ سوال ۷.۴۷۶: $\sec^{-1}(\sec(-\frac{\pi}{6}))$ (جواب $-\frac{\pi}{6}$ نہیں ہے۔)

۱۱۷۶۰ سوال ۷.۴۷۷: $\cot^{-1}(\cot(-\frac{\pi}{4}))$

۱۱۷۶۱

۱۱۷۶۲ تکونیاتی فقرے

سوال ۷.۴۷۸ تا سوال ۷.۴۸۹ میں تکونیاتی فقروں کو حل کریں۔

سوال ۷.۴۷۸: $\sec(\tan^{-1}\frac{x}{2})$

سوال ۷.۴۷۹: $\sec(\tan^{-1}2x)$

سوال ۷.۴۸۰: $\tan(\sec^{-1}3y)$

سوال ۷.۴۸۱: $\tan(\sec^{-1}\frac{y}{5})$

سوال ۷.۴۸۲: $\cos(\sin^{-1}x)$

سوال ۷.۴۸۳: $\tan(\cos^{-1}x)$

سوال ۷.۴۸۴: $\sin(\tan^{-1}\sqrt{x^2-2x}),\quad x\geq 2$

سوال ۷.۴۸۵: $\sin(\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})$

سوال ۷.۴۸۶: $\cos(\sin^{-1}\frac{2y}{3})$

سوال ۷.۴۸۷: $\cos(\sin^{-1}\frac{y}{5})$

سوال ۷.۴۸۸: $\sin(\sec^{-1}\frac{x}{4})$

سوال ۷.۴۸۹: $\sin(\sec^{-1}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x})$

حد

سوال ۷.۴۹۰ تا سوال ۷.۴۹۷ میں حد تلاش کریں۔ جہاں شبہ ہو وہاں تفاعل کی ترسیم پر نظر ڈالیں۔

سوال ۷.۴۹۰: $\lim\limits_{x\to 1^-}\sin^{-1}x$

سوال ۷.۴۹۱: $\lim\limits_{x\to -1^+}\cos^{-1}x$

سوال ۷.۴۹۲: $\lim\limits_{x\to\infty}\tan^{-1}x$

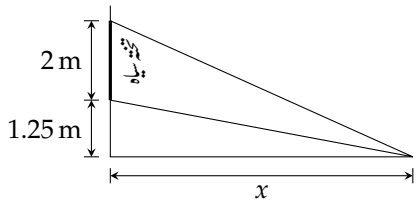
سوال ۷.۴۹۳: $\lim\limits_{x\to-\infty}\tan^{-1}x$

سوال ۷.۴۹۴: $\lim\limits_{x\to\infty}\sec^{-1}x$

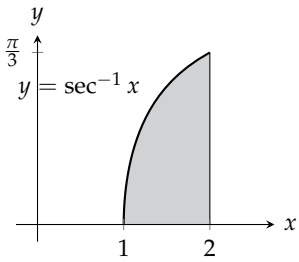
سوال ۷.۴۹۵: $\lim\limits_{x\to-\infty}\sec^{-1}x$

سوال ۷.۴۹۶: $\lim\limits_{x\to\infty}\csc^{-1}x$

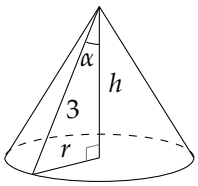
سوال ۷.۴۹۷: $\lim\limits_{x\to-\infty}\csc^{-1}x$



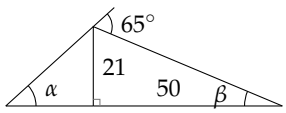
شکل ۷.۵۰: تدریسی کمرہ میں تختہ سیاہ (سوال ۷.۴۹۸)



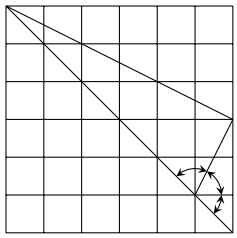
شکل ۷.۵۱: جسم طواف (سوال ۷.۴۹۹)



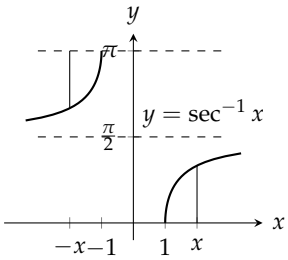
شکل ۷.۵۲: مخروط برائے سوال ۷.۵۰۰



شکل ۷.۵۳: برائے سوال ۷.۵۰۱



شکل ۷.۵۴: برائے سوال ۷.۵۰۲



شکل ۷.۵۵: ترسیم برائے سوال ۷.۵۰۳

نظریہ اور استعمال

سوال ۷.۴۹۸: آپ کے اسکول کے تدریسی کمروں میں لکھائی کا تختہ سیاہ[۲۵] زمین سے 1.25 m کی اونچائی سے شروع ہوتا ہے جبکہ اس کا قد 2 m میٹر ہے۔ آپ تختہ سیاہ سے x میٹر کے فاصلہ پر ہیں۔ دکھائیں کہ آپ کا دیکھنے کا زاویہ $\alpha = \cot^{-1}\frac{x}{3.25} - \cot^{-1}\frac{x}{1.25}$ ہے (شکل ۷.۵۰)۔

سوال ۷.۴۹۹: منحنی $y = \sec^{-1} x$ اور محور x پر $x = 1$ تا $x = 2$ کے بیچ خطہ کو محور y کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل ۷.۵۱)۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

سوال ۷.۵۰۰: ایک مخروط کا ترچھا قد 3 m ہے (شکل ۷.۵۲)۔ مخروط کا اعظم حجم کس زاویہ α پر حاصل ہوگا۔

سوال ۷.۵۰۱: زاویہ α کو شکل ۷.۵۳ میں دریافت کریں۔

سوال ۷.۵۰۲: آپ $\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 3 = \pi$ کی تصدیق شکل ۷.۵۴ کی مدد سے کر سکتے ہیں۔ ایسا کر کے دیکھیں۔

---

[۲۵] blackboard

سوال ۷.۵۰۳: (ا) تماثل $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$ کو شکل ۷.۵۵ کی مدد سے جیومیٹریائی طور پر اخذ کریں۔ (ب) اسی تماثل کو درج ذیل دو مساوات کی مدد سے تحلیلی طور پر اخذ کریں۔

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x \qquad \text{مساوات ۶}$$

$$\sec^{-1} x = \cos^{-1}(\tfrac{1}{x}) \qquad \text{مساوات ۱}$$

سوال ۷.۵۰۴: تماثل $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ کو $0 < x < 1$ کے لیے شکل ۷.۴۰ سے اخذ کیا گیا۔ اس کی تصدیق وقفہ $[-1, 1]$ کے باقی حصہ کے لیے کرنے کی خاطر $x = 1$ ، $x = 0$ اور $x = -1$ اس تماثل میں پر کر کے دیکھیں۔ اس کے بعد وقفہ $(-1, 0)$ میں x کے لیے اس کی تصدیق کی خاطر $x = -a,\ a > 0$ لیتے ہوئے مساوات ۴ اور مساوات ۶ کا اطلاق مجموعہ $\sin^{-1}(-a) + \cos^{-1}(-a)$ پر کریں۔

سوال ۷.۵۰۵: دکھائیں کہ مجموعہ $\tan^{-1} x + \tan^{-1}(\frac{1}{x})$ مستقل ہے۔

سوال ۷.۵۰۶ تا سوال ۷.۵۰۹ میں کون سے فقرے معین اور کون سے غیر معین ہیں؟

سوال ۷.۵۰۶: (ا) $\tan^{-1} 2$ ، (ب) $\cos^{-1} 2$

سوال ۷.۵۰۷: (ا) $\csc^{-1} \frac{1}{2}$ ، (ب) $\csc^{-1} 2$

سوال ۷.۵۰۸: (ا) $\sec^{-1} 0$ ، (ب) $\sin^{-1} \sqrt{2}$

سوال ۷.۵۰۹: (ا) $\cot^{-1}(-\frac{1}{2})$ ، (ب) $\cos^{-1}(-5)$

کیلکولیٹر استعمال کریں

سوال ۷.۵۱۰: درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\sec^{-1} 1.5$ ب. $\csc^{-1}(-1.5)$ ج. $\cot^{-1} 2$

سوال ۷.۵۱۱: درج ذیل کی قیمتیں تلاش کریں۔

ا. $\sec^{-1}(-3)$ ب. $\csc^{-1} 1.7$ ج. $\cot^{-1}(-2)$

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۷.۵۱۲ تا سوال ۷.۵۱۴ میں ہر ایک مرکب تفاعل کا دائرہ کار اور سعت تلاش کریں۔ ان مرکب تفاعل کو علیحدہ علیحدہ ترسیم کریں۔ کیا انفرادی ترسیمات معنی رکھتی ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔ اگر کوئی فرق نظر آئے، اس پر تبصرہ کریں۔

سوال ۷.۵۱۲: (ا) $y = \tan^{-1}(\tan x)$ ، (ب) $y = \tan(\tan^{-1} x)$

سوال ۷.۵۱۳: (ا) $y = \sin^{-1}(\sin x)$ ، (ب) $y = \sin(\sin^{-1} x)$

سوال ۷.۵۱۴: (ا) $y = \cos^{-1}(\cos x)$، (ب) $y = \cos(\cos^{-1} x)$

سوال ۷.۵۱۵: تفاعل $y = \sec(\sec^{-1} x) = \sec(\cos^{-1}(\frac{1}{x}))$ ترسیم کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟

سوال ۷.۵۱۶: تفاعل $y = \frac{4x}{x^2+1}$ ترسیم کریں۔ اس کے ساتھ $y = 2\sin(2\tan^{-1} x)$ بھی ترسیم کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟

سوال ۷.۵۱۷: ناطق تفاعل $y = \frac{2-x^2}{x^2}$ ترسیم کریں۔ اس کے ساتھ $y = \cos(2\sec^{-1} x)$ ترسیم کریں۔ آپ کیا دیکھتے ہیں؟

۷.۹ معکوس تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل

معکوس تکونیاتی تفاعل مختلف اقسام کے تفاعل، جو انجینئری، طبیعیات اور ریاضیات میں رونما ہوتے ہیں، کے ضد تفرق مہیا کرتے ہیں۔ اس حصہ میں ہم معکوس تکونیاتی تفاعل کے تفرق حاصل کرتے ہیں اور متعلقہ تکملات پر غور کرتے ہیں۔

مثال ۷.۶۶:

(ا)
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}(x^2) = \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

(ب)
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}\sqrt{x+1} &= \frac{1}{1+(\sqrt{x+1})^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x+1})\\ &= \frac{1}{x+2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(x+2)}\end{aligned}$$

(ج)
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^{-1}(-3x) &= \frac{1}{|-3x|\sqrt{(-3x)^2-1}}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-3x)\\ &= \frac{-3}{|3x|\sqrt{9x^2-1}} = \frac{-1}{|x|\sqrt{9x^2-1}}\end{aligned}$$

□

مثال ۷.۶۷:

$$\int_0^1 \frac{e^{\tan x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} e^u\,\mathrm{d}u \qquad u = \tan^{-1} u$$
$$= e^u\Big]_0^{\pi/4} = e^{\pi/4} - 1$$

□

۱۱۸۳۹ معکوس تکونیاتی تفاعل کے تفرق درج ذیل ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}(\sin^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1 \tag{۱}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\cos^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{\sqrt{1-u^2}}, \quad |u| < 1 \tag{۲}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\tan^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{1+u^2} \tag{۳}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\cot^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = -\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{1+u^2} \tag{۴}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\sec^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1 \tag{۵}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\csc^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{-\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{|u|\sqrt{u^2-1}}, \quad |u| > 1 \tag{۶}$$

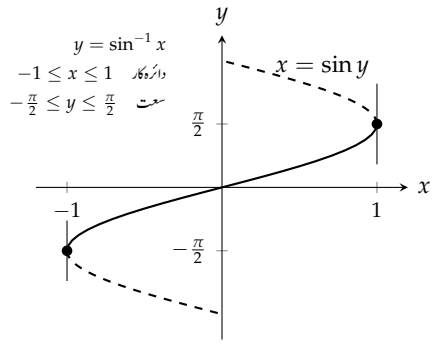
۱۱۸۴۰ آئیں مساوات ۱ اور مساوات ۵ کو حاصل کرتے ہیں۔ مساوات ۳ کو بھی اسی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مساوات ۲، مساوات ۴ اور مساوات ۶ کو موزوں تماثل
۱۱۸۴۱ تفرق کر کے حاصل کیا جا سکتا ہے (سوال ۷.۵۹۸ تا سوال ۷.۶۰۰)۔

۱۱۸۴۲ تفاعل $y = \sin^{-1} u$ کا تفرق

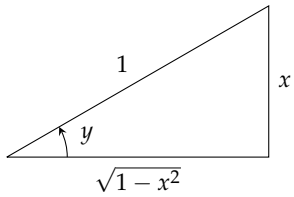
۱۱۸۴۳ ہم جانتے ہیں کہ وقفہ $-\frac{y}{2} < y < \frac{y}{2}$ میں تفاعل $x = \sin y$ قابل تفرق ہے اور اس کا تفرق، یعنی کوسائن، اس وقفہ پر مثبت ہے۔ یوں مسئلہ
۱۱۸۴۴ ۷.۱ ہمیں یقین دہانی کراتا ہے کہ پورے وقفہ $-1 < x < 1$ پر معکوس تفاعل $y = \sin^{-1} x$ قابل تفرق ہو گا۔ چونکہ نقطہ $x = 1$
۱۱۸۴۵ اور $x = -1$ پر اس کی ترسیم کے مماس انتصابی ہیں (شکل ۷.۵۶) لہٰذا ان نقطوں پر ہم معکوس تفاعل $y = \sin^{-1} x$ کو قابل تفرق تصور نہیں کر
۱۱۸۴۶ سکتے ہیں۔

۱۱۸۴۷ ہم $y = \sin^{-1} x$ کا تفرق درج ذیل طریقہ سے حاصل کرتے ہیں:

$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow \sin y = x$	$\sin y = x$
دونوں اطراف کا x کے لحاظ سے تفرق	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin y) = 1$
زنجیری قاعدہ	$\cos y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$
وقفہ پر $\cos y > 0$ ہے لہٰذا تقسیم کیا جا سکتا ہے	$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos y}$
شکل ۷.۵۷	$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



شکل ۷.۵۶: تفاعل $y = \sin^{-1} x$ کی ترسیم کے مماس نقطہ $x = -1$ اور $x = 1$ پر انتصابی ہیں۔



شکل ۷.۵۷: اس حوالہ مثلث میں $\sin y = \frac{x}{1} = x$ اور $\cos y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$ ہوگا۔

۱۱۸۴۸ یوں x کے لحاظ سے $y = \sin^{-1} x$ کو تفرق درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

۱۱۸۴۹ اگر x کے لحاظ سے u قابل تفرق تفاعل ہو تب $y = \sin^{-1} u$ کو زنجیری قاعدہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

۱۱۸۵۰ کے اطلاق سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \qquad |u| < 1$$

۱۱۸۵۱ تفاعل $y = \sec^{-1} u$ کا تفرق

۱۱۸۵۲ ہم $y = \sec^{-1} x, |x| > 1$ کا تفرق بھی اسی طرح حاصل کرتے ہیں۔

$$y = \sec^{-1} x \Leftrightarrow \sec y = x$$

$$\sec y = x$$

x کے لحاظ سے دونوں اطراف کا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec y) = 1$$

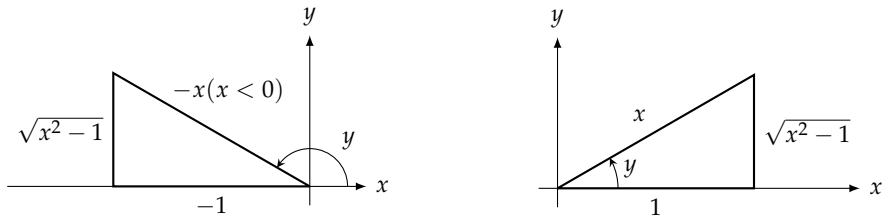
زنجیری قاعدہ

$$\sec y \tan y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sec y \tan y}$$

$$= \mp\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

شکل ۷.۵۸



شکل ۷.۵۸: دونوں ربع میں $\sin y = x$ ہے۔ ربع اول میں $\tan y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{1} = \sqrt{x^2-1}$ ہے جبکہ ربع دوم میں $\tan y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{(-1)} = -\sqrt{x^2-1}$ ہے۔

۱۱۸۵۳ درج بالا میں تیسرے قدم پر چونکہ $|x| > 1$ ہے لہٰذا y وقفہ $(0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$ میں پایا جائے گا جس کی وجہ سے

۱۱۸۵۴ $\sec y \tan y \neq 0$ ہو گا لہٰذا دونوں اطراف کو غیر صفر $\sec y \tan y$ سے تقسیم کیا جا سکتا ہے۔

۱۱۸۵۵ علامت کے بارے میں ہم کیا کر سکتے ہیں؟ ہم دیکھتے ہیں (شکل ۷.۵۹) کہ $|x| > 1$ کے لیے $y = \sec^{-1} x$ کی ترسیم کا ڈھلوان مثبت رہتا ہے

۱۱۸۵۶ لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec^{-1} x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & x > 1 \\ -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & x < -1 \end{cases} \tag{۷}$$

۱۱۸۵۷ مطلق قیمت استعمال کرتے ہوئے ہم مساوات ۷ کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad |x| > 1$$

۱۱۸۵۸ اگر $|u| > 1$ ہو اور x کا u قابل تفرق تفاعل ہو تب زنجیری قاعدہ کے استعمال سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sec^{-1} u) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \qquad |u| > 1$$

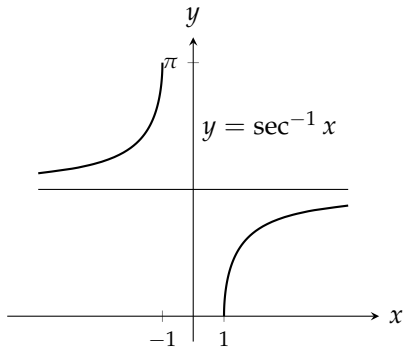
۱۱۸۵۹ کلیات تکمل

۱۱۸۶۰ ہم مساوات ۱، مساوات ۳ اور مساوات ۵ جہاں $a = 1$ ہے، سے تکمل کے درج ذیل تین اہم کلیات حاصل ہوتے ہیں جہاں $a \neq 0$ مستقل ہے۔

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\tfrac{u}{a}\right) + C \qquad u^2 < a^2 \text{ کے لیے درست ہے} \tag{۸}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\tfrac{u}{a}\right) + C \qquad \text{تمام } u \text{ کے لیے درست ہے} \tag{۹}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\tfrac{u}{a}\right| + C \qquad u^2 > a^2 \text{ کے لیے درست ہے} \tag{۱۰}$$



شکل ۷.۵۹: قوس $y = \sec^{-1} x$ کا ڈھلوان $x < -1$ اور $x > 1$ دونوں کے لیے مثبت ہے۔

۱۱۸۹۱ تکمل کے درج بالا کلیات کے دائیں ہاتھ کا تفرق لے کر ان کی تصدیق کی جا سکتی ہے۔

۱۱۸۹۲ مثال ۷.۶۸:

$$\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x)\Big]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2}$$

$$= \sin^{-1}(\tfrac{\sqrt{3}}{2}) - \sin^{-1}(\tfrac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12} \qquad \text{(ا)}$$

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \tan^{-1}(x)\Big]_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \qquad \text{(ب)}$$

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}(x)\Big]_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \qquad \text{(ج)}$$

۱۱۸۹۳ □

۱۱۸۹۴ مثال ۷.۶۹:

(ا) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(3)^2-x^2}} = \sin^{-1}(\tfrac{x}{3}) + C \qquad a = 3 \text{ اور } u = x \text{ مساوات ۸ میں}$$

(ب) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2-u^2}} \qquad a = \sqrt{3},\ u = 2x$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}(\tfrac{u}{a}) + C \qquad \text{مساوات ۸}$$

$$= \frac{1}{2}\sin^{-1}(\tfrac{2x}{\sqrt{3}}) + C$$

۱۱۸۶۵ □

۱۱۸۶۶ مثال ۷.۷۰: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-x^2}}$ کو حل کریں۔

۱۱۸۶۷ **حل**

۱۱۸۶۸ یہاں ریاضی فقرہ $\sqrt{4x-x^2}$ مساوات ۸ تا مساوات ۱۰ میں سے کسی بھی تکمل میں پائے جانے والے ریاضیاتی عبارت کی طرح نہیں ہے لہٰذا ہم اس کا
۱۱۸۶۹ مربع مکمل کرتے ہیں:

$$4x-x^2=-(x^2-4x)=-(x^2-4x+4)+4=3-(x-2)^2 \qquad \text{تکمیل مربع}$$

۱۱۸۷۰ اس کے بعد $a=2$ ، $u=x-2$ اور $\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$ لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4x-x^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-(x-2)^2}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^-u^2}} && a=2,\ u=x-2 \\
&= \sin^{-1}(\tfrac{u}{a})+C && \text{مساوات ۸} \\
&= \sin^{-1}(\tfrac{x-2}{2})+C
\end{aligned}$$

۱۱۸۷۱ □

۱۱۸۷۲ مثال ۷.۷۱:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{10+x^2} &= \frac{1}{\sqrt{10}}\tan^{-1}(\tfrac{x}{\sqrt{10}})+C && a=\sqrt{10},\ u=x,\ \text{مساوات ۹} \\
\int \frac{\mathrm{d}x}{7+3x^2} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2+u^2} && a=\sqrt{7},\ u=\sqrt{3}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{a}\tan^{-1}(\tfrac{u}{a})+C && \text{مساوات ۹} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{7}}\tan^{-1}(\tfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{7}})+C \\
&= \frac{1}{\sqrt{21}}\tan^{-1}(\tfrac{\sqrt{3}x}{\sqrt{7}})+C
\end{aligned}$$

۱۱۸۷۳ □

۱۱۸۷۴ مثال ۷.۷۲: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+2}$ حل کریں۔

۱۱۸۷۵ **حل**

۱۱۸۷۶ ہم ثنائی $4x^2 + 4x$ کا مربع مکمل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4x + 2 &= 4(x^2 + x) + 2 = 4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + 2 - \frac{4}{4} \\ &= 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 = (2x+1)^2 + 1 \end{aligned}$$

۱۱۸۷۷ اب $a = 1$ ، $u = 2x + 1$ ،اور $\frac{\mathrm{d}u}{2} = \mathrm{d}x$ پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2 + 4x + 2} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(2x+1)^2 + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + a^2} && a = 1, u = 2x + 1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\tfrac{u}{a}\right) + C && \text{مساوات ۹} \\ &= \frac{1}{2} \tan^{-1}(2x+1) && a = 1,\ u = 2x + 1 \end{aligned}$$

۱۱۸۷۸ □

۱۱۸۷۹ مثال ۷.۷۳: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2 - 5}}$ حل کریں۔

۱۱۸۸۰ **حل**

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4x^2 - 5}} &= \int \frac{\frac{\mathrm{d}u}{2}}{\frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2}} && u = 2x,\ a = \sqrt{5} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2 - a^2}} \\ &= \frac{1}{a} \sec^{-1}\left|\tfrac{u}{a}\right| + C && \text{مساوات ۱۰} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sec^{-1}\left(\frac{2|x|}{\sqrt{5}}\right) + C && a = \sqrt{5},\ u = 2x \end{aligned}$$

۱۱۸۸۱ □

۱۱۸۸۲ مثال ۷.۷۴: تکمل $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x} - 6}}$ حل کریں۔

۱۱۸۸۳ **حل**

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^{2x}-6}} &= \int \frac{\frac{\mathrm{d}u}{u}}{\sqrt{u^2-a^2}} && u = e^x,\ a = \sqrt{6} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{u^2-a^2}} \\
&= \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{u}{a}\right| + C && \text{مساوات ۱۰} \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}}\sec^{-1}\left(\frac{e^x}{\sqrt{6}}\right) + C
\end{aligned}$$

۱۱۸۸۴ □

۱۱۸۸۵ **سوالات**

۱۱۸۸۶ **تفرق کی تلاش**

۱۱۸۸۷ سوال ۷.۵۱۸ تا سوال ۷.۵۳۹ میں y کا تفرق موزوں متغیر کے لحاظ سے دریافت کریں۔

۱۱۸۸۸ سوال ۷.۵۱۸: $y = \cos^{-1}(x^2)$

۱۱۸۸۹ سوال ۷.۵۱۹: $y = \cos^{-1}(\frac{1}{x})$

۱۱۸۹۰ سوال ۷.۵۲۰: $y = \sin^{-1}\sqrt{2}t$

۱۱۸۹۱ سوال ۷.۵۲۱: $y = \sin^{-1}(1-t)$

۱۱۸۹۲ سوال ۷.۵۲۲: $y = \sec^{-1}(2s+1)$

۱۱۸۹۳ سوال ۷.۵۲۳: $y = \sec^{-1} 5s$

۱۱۸۹۴ سوال ۷.۵۲۴: $y = \csc^{-1}(x^2+1), \quad x > 0$

۱۱۸۹۵ سوال ۷.۵۲۵: $y = \csc^{-1}\frac{x}{2}$

۱۱۸۹۶ سوال ۷.۵۲۶: $y = \sec^{-1}\frac{1}{t}, \quad 0 < t < 1$

۱۱۸۹۷ سوال ۷.۵۲۷: $y = \sin^{-1}\frac{3}{t^2}$

۱۱۸۹۸ سوال ۷.۵۲۸: $y = \cot^{-1}\sqrt{t}$

۱۱۸۹۹ سوال ۷.۵۲۹: $y = \cot^{-1}\sqrt{t-1}$

۱۱۹۰۰ سوال ۷.۵۳۰: $y = \ln(\tan^{-1} x)$

۱۱۹۰۱ سوال ۷.۵۳۱: $y = \tan^{-1}(\ln x)$

سوال ۷.۵۳۲: $y = \csc^{-1}(e^t)$

سوال ۷.۵۳۳: $y = \cos^{-1}(e^{-t})$

سوال ۷.۵۳۴: $y = s\sqrt{1-s^2} + \cos^{-1} s$

سوال ۷.۵۳۵: $y = \sqrt{s^2-1} - \sec^{-1} s$

سوال ۷.۵۳۶: $y = \tan^{-1}\sqrt{x^2-1} + \csc^{-1} x, \quad x > 1$

سوال ۷.۵۳۷: $y = \cot^{-1}\frac{1}{x} - \tan^{-1} x$

سوال ۷.۵۳۸: $y = x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2}$

سوال ۷.۵۳۹: $y = \ln(x^2+4) - x\tan^{-1}(\frac{x}{2})$

تکمل کا حل

سوال ۷.۵۴۰ تا سوال ۷.۵۶۳ میں تکمل حل کریں۔

سوال ۷.۵۴۰: $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

سوال ۷.۵۴۱: $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

سوال ۷.۵۴۲: $\int \frac{dx}{17+x^2}$

سوال ۷.۵۴۳: $\int \frac{dx}{9+3x^2}$

سوال ۷.۵۴۴: $\int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2-2}}$

سوال ۷.۵۴۵: $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-4}}$

سوال ۷.۵۴۶: $\int_0^1 \frac{4\,ds}{\sqrt{4-s^2}}$

سوال ۷.۵۴۷: $\int_0^{\frac{3\sqrt{2}}{4}} \frac{ds}{\sqrt{9-4s^2}}$

سوال ۷.۵۴۸: $\int_0^2 \frac{dt}{8+2t^2}$

سوال ۷.۵۴۹: $\int_{-2}^2 \frac{dt}{4+3t^2}$

سوال ۷.۵۵۰: $\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dy}{y\sqrt{4y^2-1}}$

۱۱۹۲۴ سوال ۷.۵۵۱: $\int_{-\frac{2}{3}}^{-\frac{\sqrt{2}}{3}} \frac{\mathrm{d}y}{y\sqrt{9y^2-1}}$

۱۱۹۲۵ سوال ۷.۵۵۲: $\int \frac{3\,\mathrm{d}r}{\sqrt{1-4(r-1)^2}}$

۱۱۹۲۶ سوال ۷.۵۵۳: $\int \frac{6\,\mathrm{d}r}{\sqrt{4-(r+1)^2}}$

۱۱۹۲۷ سوال ۷.۵۵۴: $\int \frac{\mathrm{d}x}{2+(x-1)^2}$

۱۱۹۲۸ سوال ۷.۵۵۵: $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+(3x+1)^2}$

۱۱۹۲۹ سوال ۷.۵۵۶: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x-1)\sqrt{(2x-1)^2-4}}$

۱۱۹۳۰ سوال ۷.۵۵۷: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)\sqrt{(x+3)^2-25}}$

۱۱۹۳۱ سوال ۷.۵۵۸: $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{1+(\sin\theta)^2}$

۱۱۹۳۲ سوال ۷.۵۵۹: $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\csc^2 x\,\mathrm{d}x}{1+(\cot x)^2}$

۱۱۹۳۳ سوال ۷.۵۶۰: $\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{1+e^{2x}}$

۱۱۹۳۴ سوال ۷.۵۶۱: $\int_1^{e^{\pi/4}} \frac{4\,\mathrm{d}t}{t(1+\ln^2 t)}$

۱۱۹۳۵ سوال ۷.۵۶۲: $\int \frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^4}}$

۱۱۹۳۶ سوال ۷.۵۶۳: $\int \frac{\sec^2 y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\tan^2 y}}$

۱۱۹۳۷ **تکمل کا حل**

۱۱۹۳۸ سوال ۷.۵۶۴ تا سوال ۷.۵۷۳ حل کریں۔

۱۱۹۳۹ سوال ۷.۵۶۴: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$

۱۱۹۴۰ سوال ۷.۵۶۵: $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}}$

۱۱۹۴۱ سوال ۷.۵۶۶: $\int_{-1}^{0} \frac{6\,\mathrm{d}t}{\sqrt{3-2t-t^2}}$

۱۱۹۴۲ سوال ۷.۵۶۷: $\int_{1/2}^{1} \frac{6\,\mathrm{d}t}{\sqrt{3+4t-4t^2}}$

۱۱۹۴۳ سوال ۷.۵۶۸: $\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2-2y+5}$

۱۱۹۳۴ سوال ۷.۵۶۹: $\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2+6y+10}$

۱۱۹۳۵ سوال ۷.۵۷۰: $\int_1^2 \frac{8\,\mathrm{d}x}{x^2-2x+2}$

۱۱۹۳۶ سوال ۷.۵۷۱: $\int_2^4 \frac{2\,\mathrm{d}x}{x^2-6x+10}$

۱۱۹۳۷ سوال ۷.۵۷۲: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

۱۱۹۳۸ سوال ۷.۵۷۳: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-2)\sqrt{x^2-4x+3}}$

۱۱۹۳۹ سوال ۷.۵۷۴ تا سوال ۷.۵۸۱ میں دیے گئے تکمل حل کریں۔

۱۱۹۵۰ سوال ۷.۵۷۴: $\int \frac{e^{\sin^{-1} x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

۱۱۹۵۱ سوال ۷.۵۷۵: $\int \frac{e^{\cos^{-1} x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

۱۱۹۵۲ سوال ۷.۵۷۶: $\int \frac{(\sin^{-1} x)^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

۱۱۹۵۳ سوال ۷.۵۷۷: $\int \frac{\sqrt{\tan^{-1} x}\,\mathrm{d}x}{1+x^2}$

۱۱۹۵۴ سوال ۷.۵۷۸: $\int \frac{\mathrm{d}y}{(\tan^{-1} y)(1+y^2)}$

۱۱۹۵۵ سوال ۷.۵۷۹: $\int \frac{\mathrm{d}y}{(\sin^{-1} y)\sqrt{1-y^2}}$

۱۱۹۵۶ سوال ۷.۵۸۰: $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{\sec^2(\sec^{-1} x)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

۱۱۹۵۷ سوال ۷.۵۸۱: $\int \frac{\cos(\sec^{-1} x)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$

۱۱۹۵۸ **حد**

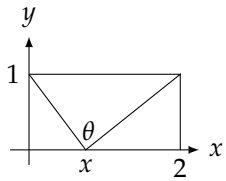
۱۱۹۵۹ سوال ۷.۵۸۲ تا سوال ۷.۵۸۵ میں حد تلاش کریں۔

۱۱۹۶۰ سوال ۷.۵۸۲: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^{-1} 5x}{x}$

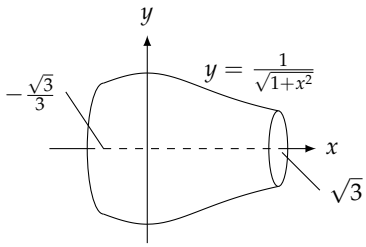
۱۱۹۶۱ سوال ۷.۵۸۳: $\lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sec^{-1} x}$

۱۱۹۶۲ سوال ۷.۵۸۴: $\lim_{x\to\infty} x\tan^{-1}\frac{2}{x}$

۱۱۹۶۳ سوال ۷.۵۸۵: $\lim_{x\to 0} \frac{2\tan^{-1} 3x^2}{7x^2}$



شکل ۷.۶۰: برائے سوال ۷.۵۹۵



شکل ۷.۶۱: برائے سوال ۷.۶۰۶

کلیات تکمل

سوال ۷.۵۸۶ تا سوال ۷.۵۸۹ میں دیے گئے تکمل کے کلیات کی تصدیق کریں۔

سوال ۷.۵۸۶: $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{\tan^{-1} x}{x} + C$

سوال ۷.۵۸۷: $\int x^3 \cos^{-1} 5x\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\cos^{-1} 5x + \frac{5}{4}\int \frac{x^4\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-25x^2}}$

سوال ۷.۵۸۸: $\int (\sin^{-1} x)^2\,\mathrm{d}x = x(\sin^{-1} x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2}\sin^{-1} x + C$

سوال ۷.۵۸۹: $\int \ln(a^2+x^2)\,\mathrm{d}x = x\ln(a^2+x^2) - 2x + 2a\tan^{-1}\frac{x}{a} + C$

ابتدائی قیمت مسائل

سوال ۷.۵۹۰ تا سوال ۷.۵۹۳ میں دیے گئے ابتدائی قیمت مسائل حل کریں

سوال ۷.۵۹۰: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = 0$

سوال ۷.۵۹۱: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2+1} - 1, \quad y(0) = 1$

سوال ۷.۵۹۲: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1, y(2) = \pi$

سوال ۷.۵۹۳: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}, \quad y(0) = 2$

نظریہ اور مثالیں

سوال ۷.۵۹۴: تدریسی کمرہ (سوال ۷.۴۹۸)

آپ اپنی کرسی کو تختہ سیاہ سے اتنی دور رکھنا چاہتے ہو کہ آپ کا دیکھنے کا زاویہ α اعظم ہو۔ آپ کی کرسی تختہ سیاہ سے کتنی دور ہونی چاہیے؟

سوال ۷.۵۹۵: متغیر x کو کونسی قیمت شکل ۷.۶۰ میں θ کو بڑے سے بڑا بناتی ہے؟ θ کی بڑی سے بڑی قیمت تلاش کریں۔ شروع اس سے کریں کہ $\theta = \pi - \cot^{-1} x - \cot^{-1}(2-x)$ ہو گا۔

۱۱۹۸۱ سوال ۷.۵۹۶: کیا درج ذیل تکمل-ا اور تکمل-ب دونوں درست ہو سکتے ہیں۔ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C \qquad \text{(ا)}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\int -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C \qquad \text{(ب)}$$

۱۱۹۸۲ سوال ۷.۵۹۷: کیا درج ذیل دونوں تکمل درست ہو سکتے ہیں؟ اپنی جواب کی وجہ پیش کریں۔

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\int -\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1} x + C$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1-(-u)^2}} \qquad x = -u \\
&= \int \frac{-\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} \\
&= \cos^{-1} u + C \\
&= \cos^{-1}(-x) + C
\end{aligned}$$

۱۱۹۸۳ سوال ۷.۵۹۸: درج ذیل تماثل استعمال کرتے ہوئے مساوات ۱ سے مساوات ۲ اخذ کریں۔

$$\cos^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} u$$

۱۱۹۸۴ سوال ۷.۵۹۹: درج ذیل تماثل استعمال کرتے ہوئے مساوات ۴ سے مساوات ۳ اخذ کریں۔

$$\cot^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} u$$

۱۱۹۸۵ سوال ۷.۶۰۰: درج ذیل تماثل استعمال کرتے ہوئے مساوات ۵ سے مساوات ۶ اخذ کریں۔

$$\csc^{-1} u = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1} u$$

۱۱۹۸۶ سوال ۷.۶۰۱: تفاعل $y = \tan^{-1} x$ کا تفرق

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}$$

۱۱۹۸۷ حاصل کرنے کی خاطر x کے لحاظ سے اس کے مساوی $\tan y = x$ کے دونوں اطراف کا تفرق لیں۔

۱۱۹۸۸ سوال ۷.۶۰۲: درج ذیل تفرق کو مسئلہ ۷.۱ کی مدد سے اخذ کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1$$

۱۱۹۸۹ سوال ۷.۶۰۳: درج ذیل تفرق کو مسئلہ ۷.۱ کی مدد سے اخذ کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}x = \frac{1}{1+x^2}$$

۱۱۹۹۰ سوال ۷.۶۰۴: درج ذیل دو تفاعل میں کیا خاصیت پائی جاتی ہے؟ اس پر تبصرہ کریں۔

$$f(x) = \sin^{-1}\frac{x-1}{x+1},\ x \geq 0 \quad \text{اور} \quad g(x) = 2\tan^{-1}\sqrt{x}$$

۱۱۹۹۱ سوال ۷.۶۰۵: درج ذیل دو تفاعل میں کیا خاصیت پائی جاتی ہے؟ اس پر تبصرہ کریں۔

$$f(x) = \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{اور} \quad g(x) = \tan^{-1}\frac{1}{x}$$

۱۱۹۹۲ سوال ۷.۶۰۶: محور x پر $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ تا $x = \sqrt{3}$ کے بیچ تفاعل $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ کو محور x کے گرد گھما کر ٹھوس جسم طواف پیدا کیا
۱۱۹۹۳ جاتا ہے (شکل ۷.۶۱)۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

۱۱۹۹۴ سوال ۷.۶۰۷: قوس $y = \sqrt{1-x^2},\ -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ کی لمبائی دریافت کریں۔

۱۱۹۹۵ کتلا سے حجم کی تلاش

۱۱۹۹۶ سوال ۷.۶۰۸ اور سوال ۷.۶۰۹ میں اجسام کی حجم تلاش کریں۔

۱۱۹۹۷ سوال ۷.۶۰۸: نقطہ $x = -1$ اور $x = 1$ پر محور x کے عمودی چادروں کے بیچ ٹھوس جسم پایا جاتا ہے۔ محور x کے عمودی جسم کا رقبہ عمودی
۱۱۹۹۸ تراش درج ذیل ہے۔

۱۱۹۹۹ ا. دائری رقبہ عمودی تراش کے قطر، منحنی $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ سے منحنی $y = -\frac{1}{1+x^2}$ تک ہیں۔

۱۲۰۰۰ ب. رقبہ عمودی تراش مربع شکل کا ہے جس کے کونے $y = -\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ اور $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ کو مس کرتے ہیں۔

۱۲۰۰۱ سوال ۷.۶۰۹: نقطہ $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ اور $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ پر محور x کے عمودی چادروں کے بیچ ٹھوس جسم پایا جاتا ہے۔ محور x کے عمودی جسم کا رقبہ
۱۲۰۰۲ عمودی تراش درج ذیل ہے۔

۱۲۰۰۳ ا. دائری رقبہ عمودی تراش کے قطر، محور x سے منحنی $y = \frac{2}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ تک ہیں۔

۱۲۰۰۴ ب. رقبہ عمودی تراش مربع شکل کا ہے جس کے وتر محور x سے منحنی $y = \frac{2}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ تک ہیں۔

کیلکولیٹر اور کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۷.۶۱۰: کیلکولیٹر
اعدادی تراکیب سے درج ذیل قیمت تلاش کریں۔ حوالہ کے لیے 5 مقامات تک درست قیمت $\sin^{-1} 0.6 = 0.643\,50$ ہے۔

$$\sin^{-1} 0.6 = \int_0^{0.6} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

سوال ۷.۶۱۱: اعدادی تراکیب سے درج ذیل قیمت تلاش کریں۔

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$

سوال ۷.۶۱۲: تفاعل $f(x) = \sin^{-1} x$ اور اس کے ابتدائی دو تفرق کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' اور f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ اور اس کی ترسیم کی صورت پر تبصرہ کریں۔

سوال ۷.۶۱۳: تفاعل $f(x) = \tan^{-1} x$ اور اس کے ابتدائی دو تفرق کو ایک ساتھ ترسیم کریں۔ f' اور f'' کی قیمتوں اور علامتوں کے لحاظ سے f کے رویہ اور اس کی ترسیم کی صورت پر تبصرہ کریں۔

۷.۱۰ ہذلولی تفاعل

ہر ایسا تفاعل f جس کے دائرہ کار کا وسط مبدا پر واقع ہو کو ایک جفت اور ایک طاق تفاعل کا مجموعہ لکھا جا سکتا ہے:

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x)+f(-x)}{2}}_{\text{جفت حصہ}} + \underbrace{\frac{f(x)-f(-x)}{2}}_{\text{طاق حصہ}}$$

یوں قوت نمائی تفاعل e^x کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$e^x = \underbrace{\frac{e^x+e^{-x}}{2}}_{\text{جفت حصہ}} + \underbrace{\frac{e^x-e^{-x}}{2}}_{\text{طاق حصہ}}$$

قوت نمائی تفاعل e^x کا جفت اور طاق حصہ، جنہیں بالترتیب x کا ہذلولی کوسائن اور ہذلولی سائن کہتے ہیں، از خود اہمیت کے حامل ہیں۔ یہ لچکدار ٹھوس مادّہ میں لہروں کی حرکت، کھمبوں کے بیچ برقی تاروں کا روپ، اور دھاتی **سرد کار**[۲۶] میں حرارتی کی تقسیم کو بیان کرتے ہیں۔

---

[۲۶] heatsink

جدول ۷.۸: چھ بنیادی ہذلولی تفاعل

$\cosh = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	x کا ہذلولی کوسائن
$\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	x کا ہذلولی سائن
$\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	x کا ہذلولی ٹینجنٹ
$\coth x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$	x کا ہذلولی کوٹینجنٹ
$\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x} = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$	x کا ہذلولی سیکنٹ
$\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\sinh x} = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$	x کا ہذلولی کوسیکنٹ

۱۲۰۲۰ تعریف اور تماثل

۱۲۰۲۱ ہذلولی کوسائن اور ہذلولی سائن کی تعریف جدول ۷.۸ کی پہلی دو مساواتیں پیش کرتی ہیں۔ اس جدول میں ہذلولی ٹینجنٹ، ہذلولی کوٹینجنٹ، ہذلولی سیکنٹ، اور
۱۲۰۲۲ ہذلولی کوسیکنٹ کی تعریف بھی پیش کی گئی ہیں۔ جیسا کہ ہم دیکھیں گے، ہذلولی تفاعل ان تکونیاتی تفاعل کے ساتھ کافی ملتے جلتے ہیں جن کے توسط سے ان کے نام
۱۲۰۲۳ رکھے گئے ہیں (سوال ۷.۶۹۹)۔ ہذلولی تفاعل کو شکل ۷.۶۲ میں ترسیم کیا گیا ہے۔

۱۲۰۲۴ تماثل

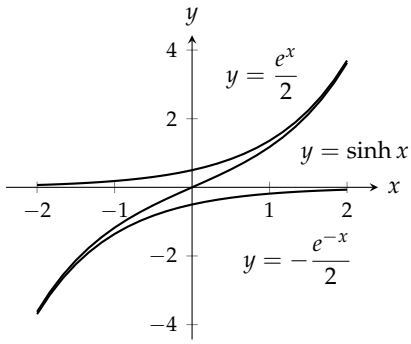
۱۲۰۲۵ ہذلولی تفاعل جدول ۷.۹ میں دی گئی تماثل کو مطمئن کرتے ہیں۔ ماسوائے علامت، ہم ان تماثل کو تکونیاتی تفاعل سے جانتے ہیں۔

۱۲۰۲۶ تفرق اور تکمل

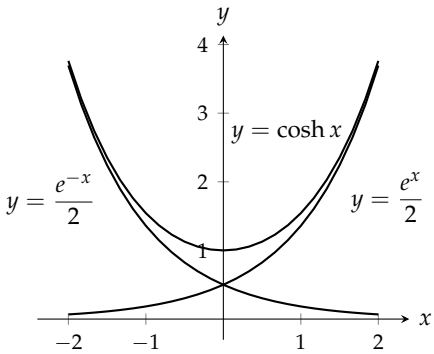
۱۲۰۲۷ چھ بنیادی ہذلولی تفاعل، قابل تفرق تفاعل e^x اور e^{-x} کے ناطق مجموعے ہیں، لہٰذا یہ ہر اس نقطہ پر قابل تفرق ہوں گے جس پر یہ معین ہوں۔ یہاں بھی
۱۲۰۲۸ تکونیاتی تفاعل کے ساتھ مشابہت نظر آتی ہے۔ جدول ۷.۱۰-ا کے کلیات تفرق سے جدول ۷.۱۰-ب کے کلیات تکمل حاصل ہوتے ہیں۔ تکونیاتی تفاعل کی
۱۲۰۲۹ طرح ہذلولی تفاعل کی قیمتوں کو بھی کیلکولیٹر سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

۱۲۰۳۰ مثال ۷.۷۵:

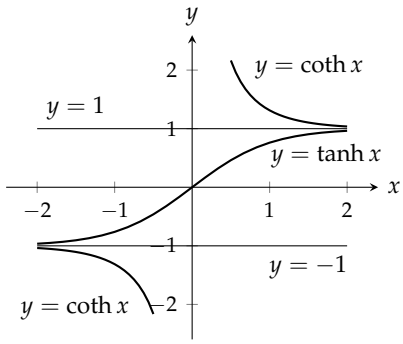
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\tanh\sqrt{1+t^2}) &= \operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sqrt{1+t^2})\\ &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}\end{aligned}$$



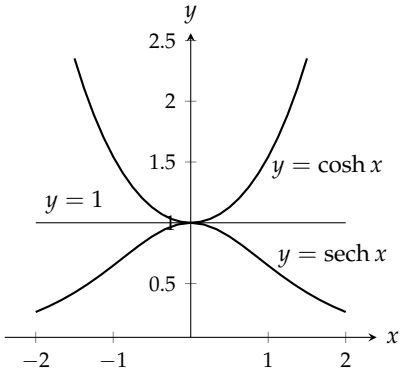
(ا) ہذلولی سائن اور اس کے قوت نما اجزاء۔



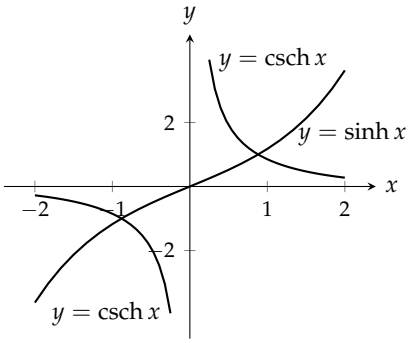
(ب) ہذلولی کوسائن اور اس کے قوت نما اجزاء۔



(ج) ہذلولی ٹینجنٹ اور ہذلولی کوٹینجنٹ۔



(د) ہذلولی کوسائن اور ہذلولی سیکنٹ۔



(ھ) ہذلولی سائن اور ہذلولی کوسیکنٹ۔

شکل ۷.۶۲: چھ بنیادی ہذلولی تفاعل۔

جدول ۷.۹: ہذلولی تفاعل کے تماثل۔

$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$
$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$
$\cosh^2 x = \dfrac{\cosh 2x + 1}{2}$
$\sinh^2 x = \dfrac{\cosh 2x - 1}{2}$
$\cosh^2 x - \sinh^2 = 1$
$\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$
$\coth^2 x = 1 + \operatorname{csch}^2 x$

جدول ۷.۱۰: ہذلولی تفاعل کے کلیات تفرق اور کلیات تکمل۔

(ا) ہذلولی تفاعل کے تفرق۔	(ب) ہذلولی تفاعل کے تکمل۔
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sinh u) = \cosh u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sinh u) = \cosh u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh u) = \sinh u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh u) = \sinh u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$	$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

۱۲۰۳۱ □

۱۲۰۳۲ مثال ۷.۷۶:

$$\int \coth 5x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\cosh 5x}{\sinh 5x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} \qquad u = \sinh 5x$$
$$= \frac{1}{5}\ln|u| + C = \frac{1}{5}\ln|\sinh 5x| + C$$

۱۲۰۳۳ □

۱۲۰۳۴ مثال ۷.۷۷:

جدول ۷.۹

$$\int_0^1 \sinh^2 x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\cosh 2x - 1}{2}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (\cosh 2x - 1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{\sinh 2x}{2} - x\right]_0^1$$
$$= \frac{\sinh 2}{4} - \frac{1}{2} \approx 0.406\,72$$

۱۲۰۳۵ □

۱۲۰۳۶ مثال ۷.۷۸:

$$\int_0^{\ln 2} 4e^x \sinh x \,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} 4e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} (2e^{2x} - 2)\,\mathrm{d}x$$
$$= \left[e^{2x} - 2x\right]_0^{\ln 2} = (e^{2\ln 2} - 2\ln 2) - (1 - 0)$$
$$= 4 - 2\ln 2 - 1$$
$$\approx 1.6137$$

۱۲۰۳۷ □

۱۲۰۳۸ معکوس ہذلولی تفاعل

۱۲۰۳۹ ہم چھ بنیادی ہذلولی تفاعل کو تکمل میں استعمال کرتے ہیں۔ چونکہ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sinh x) = \cosh x > 0$ لہٰذا x کے لحاظ سے ہذلولی سائن بڑھتا
۱۲۰۴۰ تفاعل ہے۔ ہم اس کے معکوس کو درج ذیل سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$y = \sinh^{-1} x$$

جدول ۷.۱۱: معکوس ہذلولی تفاعل کے چند کارآمد تماثل

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1} \tfrac{1}{x}$$

$$\operatorname{csch}^{-1} x = \sinh^{-1} \tfrac{1}{x}$$

$$\coth^{-1} x = \tanh^{-1} \tfrac{1}{x}$$

۱۲۰۴۱ وقفہ $-\infty < x < \infty$ میں ہر x کے لیے $y = \sinh^{-1} x$ کی قیمت وہ ہو گی جس کے ہذلولی سائن کی قیمت x ہو۔ تفاعل $y = \sinh x$
۱۲۰۴۲ اور $y = \sinh^{-1} x$ کے ترسیمات کو شکل ۷.۶۳-ا میں پیش کیا گیا ہے۔

۱۲۰۴۳ جیسا آپ شکل ۷.۶۲-ب میں دیکھ سکتے ہیں، تفاعل $y = \cosh x$ یک بہ یک نہیں ہے۔ البتہ اس کی پابند شدہ روپ $y = \cosh x,\ x \geq$
۱۲۰۴۴ 0 یک بہ یک ہے لہٰذا اس کا معکوس پایا جائے گا جس کو درج ذیل سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$y = \cosh^{-1} x$$

۱۲۰۴۵ متغیر $x \geq 1$ کے ہر قیمت کے لیے وقفہ $0 \leq y \leq \infty$ میں $y = \cosh^{-1} x$ ایک ایسا عدد ہو گا جس کے ہذلولی کوسائن کی قیمت x ہو
۱۲۰۴۶ گی۔ تفاعل $y = \cosh x,\ x \geq 0$ اور $y = \cosh^{-1} x$ کی ترسیمات کو شکل ۷.۶۳-ب میں دکھایا گیا ہے۔

۱۲۰۴۷ تفاعل $y = \cosh x$ کی طرح $y = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}$ بھی یک بہ یک نہیں ہے، البتہ x کو غیر منفی قیمتوں پر پابند کرنے سے $y =$
۱۲۰۴۸ $\operatorname{sech} x$ یک بہ یک ہوتا ہے جس کا معکوس پایا جائے گا۔ اس معکوس کو

$$y = \operatorname{sech}^{-1} x$$

۱۲۰۴۹ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ وقفہ $(0, 1]$ میں x کی ہر قیمت کے لیے $y = \operatorname{sech}^{-1} x$ وہ عدد ہو گا جس کا معکوس ہذلولی سیکنٹ x ہو گا۔

۱۲۰۵۰ ہذلولی کوسیکنٹ، ہذلولی ٹینجنٹ اور ہذلولی کوٹینجنٹ اپنے اپنے پابند دائرہ کار پر یک بہ یک ہیں، لہٰذا ان کے معکوس پائے جائیں گے، جنہیں

$$y = \operatorname{csch}^{-1} x, \quad y = \tanh^{-1} x, \quad y = \coth^{-1} x$$

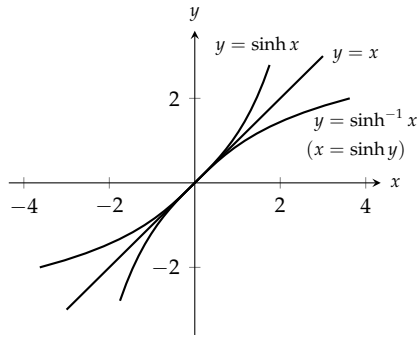
۱۲۰۵۱ سے ظاہر کیا گیا ہے اور جنہیں شکل ۷.۶۳-د، ہ، و میں ترسیم کیا گیا ہے۔

۱۲۰۵۲ کارآمد تماثل

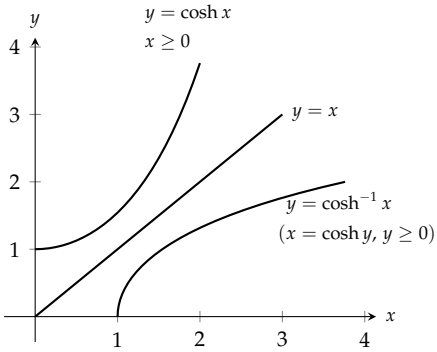
۱۲۰۵۳ چند کارآمد تماثل کو جدول ۷.۱۱ میں پیش کیا گیا ہے۔ تفاعل $\cosh^{-1} x$ ، $\sinh^{-1} x$ اور $\tanh^{-1} x$ کی قیمتیں جانتے ہوئے ان تماثل کے
۱۲۰۵۴ استعمال سے $\operatorname{sech}^{-1} x$ ، $\operatorname{csch}^{-1} x$ اور $\coth^{-1} x$ کی قیمتیں حاصل کی جا سکتی ہیں۔

۱۲۰۵۵ معکوس ہذلولی تفاعل کے تفرق اور تکمل

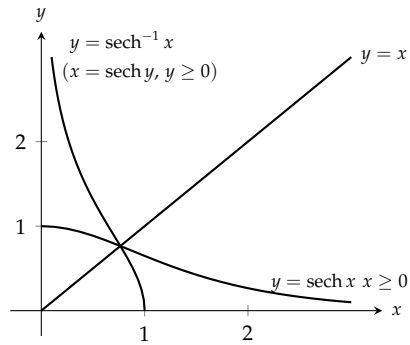
۱۲۰۵۶ معکوس ہذلولی تفاعل کا اہم ترین استعمال، تکمل کے ذریعہ جدول ۷.۱۲ میں کلیات تفرق سے کلیات تکمل کا حصول ہے۔



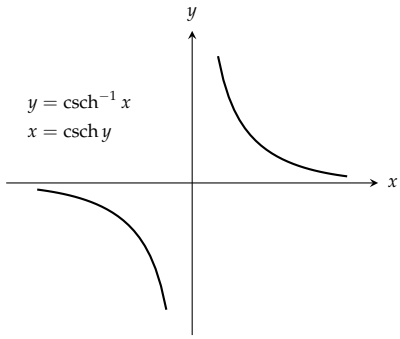
(ا) ہذلولی سائن اور معکوس ہذلولی سائن کے ترسیمات۔ یہ دونوں لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہیں۔



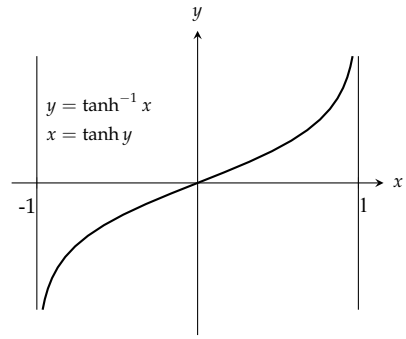
(ب) ہذلولی کوسائن اور معکوس ہذلولی کوسائن کے ترسیمات۔ یہ دونوں لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہیں۔



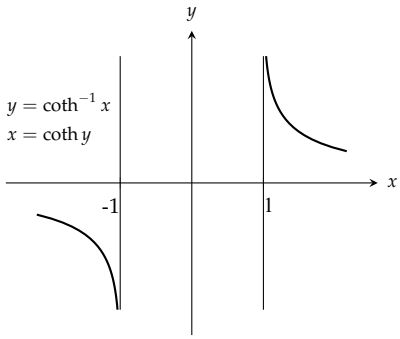
(ج) ہذلولی سیکنٹ اور معکوس ہذلولی سیکنٹ کے ترسیمات۔ یہ دونوں لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہیں۔



(د) معکوس ہذلولی کوسیکنٹ کی ترسیم۔



(ھ) معکوس ہذلولی ٹینجنٹ کی ترسیم۔



(و) معکوس ہذلولی کوٹینجنٹ کی ترسیم۔

شکل ۷.۶۳: چھ بنیادی ہذلولی تفاعل کے معکوس۔

جدول ۷.۱۲: معکوس ہذلولی تفاعل کے تفرق۔

$$\frac{\mathrm{d}(\sinh^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}(\cosh^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad u > 1$$
$$\frac{\mathrm{d}(\tanh^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad |u| < 1$$
$$\frac{\mathrm{d}(\coth^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad |u| > 1$$
$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{sech}^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad 0 < u < 1$$
$$\frac{\mathrm{d}(\mathrm{csch}^{-1} u)}{\mathrm{d}x} = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \quad u \neq 0$$

۱۲۰۵۷ تفاعل $\tanh^{-1} u$ اور $\coth^{-1} u$ کے تفرق پر $|u| < a$ اور $|u| > 1$ کی پابندی، ان تفاعل پر پابندی کی وجہ سے ہے (شکل ۷.۶۳-ہ،
۱۲۰۵۸ ودیکھیں)۔ کلیات تفرق کو کلیات تکمل میں تبدیل کرتے وقت $|u| < 1$ اور $|u| > 1$ میں امتیاز اہمیت حاصل کرتا ہے۔ اگر $|u| < 1$ ہو تب
۱۲۰۵۹ $\frac{1}{1-u^2}$ کا تکمل $\tanh^{-1} u + C$ ہوگا۔ اس کے برعکس $|u| > 1$ کی صورت میں تکمل $\coth^{-1} u + C$ ہوگا۔

۱۲۰۶۰ مثال ۷.۷۹: دکھائیں کہ اگر متغیر x کا u قابل تفرق تفاعل ہو اور جس کی قیمتیں 1 سے زیادہ ہوں تب درج ذیل ہوگا۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

۱۲۰۶۱ **حل**

۱۲۰۶۲ ہم پہلے عددی x>1 کی صورت میں $y = \cosh^{-1} x$ کا تفرق معلوم کرتے ہیں۔

$$y = \cosh^{-1} x$$
$$x = \cosh y \qquad \text{اس کا مساوی}$$
$$1 = \sinh y \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \qquad x \text{ کے لحاظ سے تفرق}$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sin y} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} \qquad x > 0,\ y > 0,\ \sinh y > 0$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \cosh y = x$$

۱۲۰۶۳ یوں $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ ہوگا۔ زنجیری قاعدہ سے درکار نتیجہ ملتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh^{-1} u) = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

جدول ۷.۱۳: وہ تکمل جو معکوس ہذلولی تفاعل دیتے ہیں۔

$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2+u^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right), \quad a > 0$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{u}{a}\right), \quad u > a > 0$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{a^2-u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\tanh^{-1}(\frac{u}{a}) + C & u^2 < a^2 \\ \frac{1}{a}\coth^{-1}(\frac{u}{a}) + C & u^2 > a^2 \end{cases}$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + C, \quad 0 < u < a$
$\int \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{a^2+u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\left\lvert\frac{u}{a}\right\rvert + C, \quad u \neq 0$

۱۳۰۶۴ □

۱۳۰۶۵ موزوں بدل استعمال کرتے ہوئے جدول ۷.۱۲ میں دیے گئے کلیات تفرق سے جدول ۷.۱۳ کے کلیات تکمل اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

۱۳۰۶۶ مثال ۷.۸۰: تکمل $\int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3+4x^2}}$ کی قیمت دریافت کریں۔

۱۳۰۶۷ **حل**

۱۳۰۶۸ قطعی تکمل درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned} \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3+4x^2}} &= \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{a^2+u^2}} \qquad\qquad u = 2x \\ &= \sinh^{-1}(\tfrac{u}{a}) + C \\ &= \sinh^{-1}(\tfrac{2x}{\sqrt{3}}) + C \end{aligned}$$

۱۳۰۶۹ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{3+4x^2}} &= \sinh^{-1}(\tfrac{2x}{\sqrt{3}})\Big]_0^1 = \sinh^{-1}(\tfrac{2}{\sqrt{3}}) - \sinh^{-1}(0) \\ &= \sinh^{-1}(\tfrac{2}{\sqrt{3}}) - 0 \approx 0.986\,65 \end{aligned}$$

۱۳۰۷۰ □

۱۲۰۷۱ سوالات

۱۲۰۷۲ **ہذلولی تفاعل کی قیمتیں اور تماثل**

۱۲۰۷۳ سوال ۷.۶۱۴ تا سوال ۷.۶۱۷ میں $\sinh x$ یا $\cosh x$ کی ایک قیمت دی گئی ہے۔ تماثل $\cosh^2 x - \sinh^2 = 1$ اور ہذلولی تفاعل کی

۱۲۰۷۴ تعریف استعمال کرتے ہوئے باقی پانچ ہذلولی تفاعل کی قیمتیں تلاش کریں۔

۱۲۰۷۵ سوال ۷.۶۱۴: $\sinh x = -\frac{3}{4}$

۱۲۰۷۶ سوال ۷.۶۱۵: $\sinh x = \frac{4}{3}$

۱۲۰۷۷ سوال ۷.۶۱۶: $\cosh x = \frac{17}{15}, \quad x > 0$

۱۲۰۷۸ سوال ۷.۶۱۷: $\cosh x = \frac{13}{5}, \quad x > 0$

۱۲۰۷۹ سوال ۷.۶۱۸ تا سوال ۷.۶۲۳ میں فقروں کو قوت نما کی روپ میں لکھ کر ان کی سادہ ترین صورت حاصل کریں۔

۱۲۰۸۰ سوال ۷.۶۱۸: $2\cosh(\ln x)$

۱۲۰۸۱ سوال ۷.۶۱۹: $\sinh(2\ln x)$

۱۲۰۸۲ سوال ۷.۶۲۰: $\cosh 5x + \sinh 5x$

۱۲۰۸۳ سوال ۷.۶۲۱: $\cosh 3x - \sinh 3x$

۱۲۰۸۴ سوال ۷.۶۲۲: $(\sinh x + \cosh x)^4$

۱۲۰۸۵ سوال ۷.۶۲۳: $\ln(\cosh x + \sinh x) + \ln(\cosh x - \sinh x)$

۱۲۰۸۶ سوال ۷.۶۲۴: درج ذیل تماثل

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

۱۲۰۸۷ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل دکھائیں۔

۱۲۰۸۸ ا. $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

۱۲۰۸۹ ب. $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$

۱۲۰۹۰ سوال ۷.۶۲۵: $\cosh x$ اور $\sinh x$ کی تعریف سے درج ذیل کی تصدیق کریں۔

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

۱۲۰۹۱ **تفرق**

۱۲۰۹۲ سوال ۷.۶۲۶ تا سوال ۷.۶۳۷ میں y کا تفرق موزوں متغیر کے لحاظ سے تلاش کریں۔

۱۲۰۹۳ سوال ۷.۶۲۶: $y = 6\sinh\frac{x}{3}$

۱۲۰۹۴ سوال ۷.۶۲۷: $y = \frac{1}{2}\sinh(2x+1)$

۱۲۰۹۵ سوال ۷.۶۲۸: $y = 2\sqrt{t}\tanh\sqrt{t}$

۱۲۰۹۶ سوال ۷.۶۲۹: $y = t^2\tanh\frac{1}{t}$

۱۲۰۹۷ سوال ۷.۶۳۰: $y = \ln(\operatorname{sech} z)$

۱۲۰۹۸ سوال ۷.۶۳۱: $y = \ln(\cosh z)$

۱۲۰۹۹ سوال ۷.۶۳۲: $y = \operatorname{sech}\theta(1 - \ln\operatorname{sech}\theta)$

۱۲۱۰۰ سوال ۷.۶۳۳: $y = \operatorname{csch}\theta(1 - \ln\operatorname{csch}\theta)$

۱۲۱۰۱ سوال ۷.۶۳۴: $y = \ln\cosh v - \frac{1}{2}\tanh^2 v$

۱۲۱۰۲ سوال ۷.۶۳۵: $y = \ln\sinh v - \frac{1}{2}\coth v$

۱۲۱۰۳ سوال ۷.۶۳۶: $y = (x^2+1)\operatorname{sech}(\ln x)$ اشارہ: تفرق سے پہلے قوت نما روپ میں لکھ کر سادہ صورت حاصل کریں۔

۱۲۱۰۴ سوال ۷.۶۳۷: $y = (4x^2-1)\operatorname{csch}(\ln 2x)$

۱۲۱۰۵ سوال ۷.۶۳۸ تا سوال ۷.۶۴۹ میں y کا تفرق موزوں متغیر کے لحاظ سے حاصل کریں۔

۱۲۱۰۶ سوال ۷.۶۳۸: $y = \sinh^{-1}\sqrt{x}$

۱۲۱۰۷ سوال ۷.۶۳۹: $y = \cosh^{-1} 2\sqrt{x+1}$

۱۲۱۰۸ سوال ۷.۶۴۰: $y = (1-\theta)\tanh^{-1}\theta$

۱۲۱۰۹ سوال ۷.۶۴۱: $y = (\theta^2+2\theta)\tanh^{-1}(\theta+1)$

۱۲۱۱۰ سوال ۷.۶۴۲: $y = (1-t)\coth^{-1}\sqrt{t}$

۱۲۱۱۱ سوال ۷.۶۴۳: $y = (1-t^2)\coth^{-1} t$

۱۲۱۱۲ سوال ۷.۶۴۴: $y = \cos^{-1} x - x\operatorname{sech}^{-1} x$

۱۲۱۱۳ سوال ۷.۶۴۵: $y = \ln x + \sqrt{1-x^2}\operatorname{sech}^{-1} x$

۱۲۱۱۴ سوال ۷.۶۴۶: $y = \operatorname{csch}^{-1}(\frac{1}{2})^\theta$

۱۲۱۱۵ سوال ۷.۶۴۷: $y = \operatorname{csch}^{-1} 2^\theta$

۱۲۱۱۶ سوال ۷.۶۴۸: $y = \sinh^{-1}(\tan x)$

۱۲۱۱۷ سوال ۷.۶۴۹: $y = \cosh^{-1}(\sec x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}$

۱۲۱۱۸

کلیات تکمل

سوال ۷.۶۵۰ تا سوال ۷.۶۵۳ میں دیے کلیات تکمل کی تصدیق کریں۔

سوال ۷.۶۵۰:

$$\int \operatorname{sech} x \, \mathrm{d}x = \tan^{-1}(\sinh x) + C$$

$$\int \operatorname{sech} x \, \mathrm{d}x = \sin^{-1}(\tanh x) + C$$

سوال ۷.۶۵۱: $\int x \operatorname{sech}^{-1} x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \operatorname{sech}^{-1} x - \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} + C$

سوال ۷.۶۵۲: $\int x \coth^{-1} x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2-1}{2} \coth^{-1} x + \frac{x}{2} + C$

سوال ۷.۶۵۳: $\int \tanh^{-1} x \, \mathrm{d}x = x \tanh^{-1} x + \frac{1}{2} \ln(1-x^2) + C$

غیر قطعی تکمل

سوال ۷.۶۵۴ تا سوال ۷.۶۶۳ میں تکمل حل کریں۔

سوال ۷.۶۵۴: $\int \sinh 2x \, \mathrm{d}x$

سوال ۷.۶۵۵: $\int \sinh \frac{x}{5} \, \mathrm{d}x$

سوال ۷.۶۵۶: $\int 6 \cosh(\frac{x}{2} - \ln 3) \, \mathrm{d}x$

سوال ۷.۶۵۷: $\int 4 \cosh(3x - \ln 2) \, \mathrm{d}x$

سوال ۷.۶۵۸: $\int \tanh \frac{x}{7} \, \mathrm{d}x$

سوال ۷.۶۵۹: $\int \coth \frac{\theta}{\sqrt{3}} \, \mathrm{d}\theta$

سوال ۷.۶۶۰: $\int \operatorname{sech}^2(x - \frac{1}{2}) \, \mathrm{d}x$

سوال ۷.۶۶۱: $\int \operatorname{csch}^2(5 - x) \, \mathrm{d}x$

سوال ۷.۶۶۲: $\int \frac{\operatorname{sech} \sqrt{t} \tanh \sqrt{t}}{\sqrt{t}} \, \mathrm{d}t$

سوال ۷.۶۶۳: $\int \frac{\operatorname{csch}(\ln t) \coth(\ln t)}{t} \, \mathrm{d}t$

قطعی تکمل

سوال ۷.۶۶۴ تا سوال ۷.۶۷۳ میں تکمل حل کریں۔

سوال ۷.۶۶۴: $\int_{\ln 2}^{\ln 4} \coth x \, \mathrm{d}x$

۱۴۱۴۱ سوال ۷.۶۶۵: $\int_0^{\ln 2} \tanh 2x \, dx$

۱۴۱۴۲ سوال ۷.۶۶۶: $\int_{-\ln 4}^{-\ln 2} 2e^{\theta} \cosh \theta \, d\theta$

۱۴۱۴۳ سوال ۷.۶۶۷: $\int_0^{\ln 2} 4e^{-\theta} \sinh \theta \, d\theta$

۱۴۱۴۴ سوال ۷.۶۶۸: $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cosh(\tan \theta) \sec^2 \theta \, d\theta$

۱۴۱۴۵ سوال ۷.۶۶۹: $\int_0^{\pi/2} 2 \sinh(\sin \theta) \cos \theta \, d\theta$

۱۴۱۴۶ سوال ۷.۶۷۰: $\int_1^2 \frac{\cosh(\ln t)}{t} \, dt$

۱۴۱۴۷ سوال ۷.۶۷۱: $\int_1^4 \frac{8 \cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx$

۱۴۱۴۸ سوال ۷.۶۷۲: $\int_{-\ln 2}^{0} \cosh^2(\frac{x}{2}) \, dx$

۱۴۱۴۹ سوال ۷.۶۷۳: $\int_0^{\ln 10} 4 \sinh^2(\frac{x}{2}) \, dx$

۱۴۱۵۰ معکوس ہذلولی تفاعل اور متعلقہ تکمل کی قیمت کا حصول

۱۴۱۵۱ ہذلولی تفاعل کو درج ذیل لوگارتھمی روپ میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad -\infty < x < \infty$$
$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \geq 1$$
$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1$$
$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}), \quad 0 < x \leq 1$$
$$\operatorname{csch}^{-1} x = \ln(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}), \quad x \neq 0$$
$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1$$

۱۴۱۵۲ درج بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے سوال ۷.۶۷۴ تا سوال ۷.۶۷۹ میں دیے اعداد کو لوگارتھمی روپ میں لکھیں۔

۱۴۱۵۳ سوال ۷.۶۷۴: $\sinh^{-1}(-\frac{5}{12})$

۱۴۱۵۴ سوال ۷.۶۷۵: $\cosh^{-1}(\frac{5}{3})$

۱۴۱۵۵ سوال ۷.۶۷۶: $\tanh^{-1}(-\frac{1}{2})$

۱۴۱۵۶ سوال ۷.۶۷۷: $\coth^{-1}(\frac{5}{4})$

سوال ۷.۶۷۸: $\operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$

سوال ۷.۶۷۹: $\operatorname{csch}^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

سوال ۷.۶۸۰ تا سوال ۷.۶۸۷ کو (ا) معکوس ہذلولی تفاعل (ب) قدرتی لوگارتھم کے روپ میں حل کریں۔

سوال ۷.۶۸۰: $\int_0^{2\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4+x^2}}$

سوال ۷.۶۸۱: $\int_0^{1/3} \frac{6\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+9x^2}}$

سوال ۷.۶۸۲: $\int_{5/4}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$

سوال ۷.۶۸۳: $\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$

سوال ۷.۶۸۴: $\int_{1/5}^{3/13} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-16x^2}}$

سوال ۷.۶۸۵: $\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{4+x^2}}$

سوال ۷.۶۸۶: $\int_0^{\pi} \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

سوال ۷.۶۸۷: $\int_1^{e} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+(\ln x)^2}}$

نظریہ اور استعمال

سوال ۷.۶۸۸: (ا) مبدا کے لحاظ سے تشاکلی وقفہ پر معین تفاعل f (یعنی ایسا تفاعل جو x پر معین ہونے کی صورت میں $-x$ پر بھی معین ہو) کے لیے درج ذیل دکھائیں۔

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} \qquad (ا)$$

اس کے بعد دکھائیں کہ $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ جفت اور $\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ طاق ہو گا۔ (ب) اگر f از خود جفت یا طاق ہو تح مساوات اکافی سادہ صورت اختیار کرتی ہے۔ ان نئی مساواتوں کو تلاش کریں۔ اپنے جوابات کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۷.۶۸۹: کلیہ $\sinh^{-1} x = \ln(x+\sqrt{x^2+1}),\ -\infty < x < \infty$ اخذ کریں۔ اس کلیہ میں جذر کے ساتھ منفی کے بجائے مثبت علامت کیوں استعمال ہوتا ہے؟

سوال ۷.۶۹۰: ایک جسم پر، جس کی کمیت m ہے، ساکن حال سے ثقلی کشش کی وجہ سے زمین کی طرف گرتے ہوئے سمتی رفتار v کے مربع کے متناسب ہوائی مزاحمت عمل کرتی ہے۔ یوں t سیکنڈ بعد اس جسم کی سمتی رفتار درج ذیل تفرقی مساوات کو مطمئن کرے گی،

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv^2$$

جہاں k ایک ایسا مستقل ہے جس کی قیمت کا دارومدار جسم کے **ہوائی حرکیات**[۲۷] کے خواص اور ہوا کی کثافت پر منحصر ہو گی۔ (ہم فرض کرتے ہیں کہ جسم زیادہ بلندی سے نہیں گرتا ہے۔ یوں ہوائی کثافت میں تبدیلی کو رد کیا جا سکتا ہے۔)

ا. دکھائیں کہ درج ذیل مساوات تفرقی مساوات اور ابتدائی معلومات ($t = 0$ پر $v = 0$) کو مطمئن کرتی ہے۔

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}} t\right)$$

ب. جسم کی تحدیدی سمتی رفتار $\lim_{t\to\infty} v$ تلاش کریں۔

ج. ایک **فضائی غوطہ باز**[۲۸] جس کی کمیت $70\,\mathrm{kg}$ ہو کے لیے $k = 0.23$ ہو گا۔ اس فضائی غوطہ باز کی تحدیدی سمتی رفتار کتنی ہو گی؟

سوال ۷.۶۹۱: فرض کریں ایک جسم محددی لکیر پر حرکت کرتی ہے۔ لمحہ t پر اس کا مقام

$$s = a\cos kt + b\sin kt \qquad (ا)$$
$$s = a\cosh kt + b\sinh kt \qquad (ب)$$

ہے۔ دکھائیں کہ دونوں صورتوں میں اس جسم کی اسراع $\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2}$ فاصلہ s کے راست متناسب ہو گی، البتہ پہلی صورت میں یہ مبدا کی جانب اور دوسری صورت میں مبدا سے دوری کے جانب ہو گی۔

سوال ۷.۶۹۲: ایک ٹریکٹر ٹرالی محور x پر چلتے ہوئے مبدا تک پہنچ کر محور y کے رخ مڑتی ہے۔ ٹرالی کے پہیوں سے ٹریکٹر تک فاصلہ کو اکائی تصور کریں۔ یوں جب ٹریکٹر کے پہیے $(1,0)$ پر ہوں تب ٹریکٹر مبدا پر ہو گا۔ جب ٹریکٹر مبدا سے محور y پر چلتا ہے، ٹرالی قوسی راہ $y = f(x)$ اختیار کرتی ہے۔ یہ قوس درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کا حل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{تفرقی مساوات}$$
$$y = 0, \quad x = 1 \qquad \text{ابتدائی معلومات}$$

اس ابتدائی قیمت مسئلہ کو حل کریں۔ (آپ کو معکوس بذلولی تفاعل درکار ہوں گے۔)

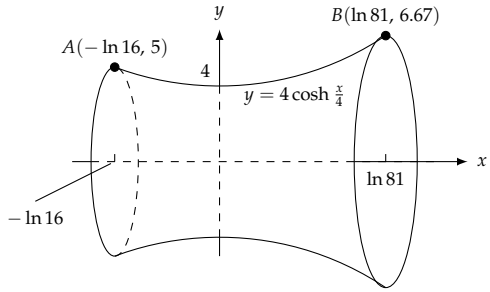
سوال ۷.۶۹۳: دکھائیں کہ ربع اول میں قوس $y = \frac{1}{a}\cosh ax$ اور محددی لکیروں اور لکیر $x = b$ کے بیچ رقبہ اس مستطیل کے رقبہ جتنا ہو گا جس کی چوڑائی $\frac{1}{a}$ اور لمبائی s ہو جہاں $x = 0$ سے $x = b$ تک قوس کی لمبائی s ہے۔

سوال ۷.۶۹۴: ربع اول میں بالائی طرف سے قوس $y = \cosh x$، زیریں طرف سے قوس $y = \sinh x$، بائیں سے محور y اور دائیں سے لکیر $x = 2$ کے بیچ خطے کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

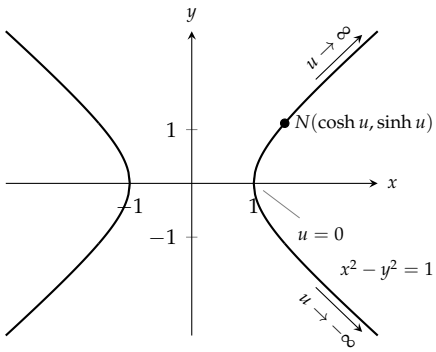
سوال ۷.۶۹۵: قوس $y = \operatorname{sech} x$، محور x اور لکیر $x = \mp \ln\sqrt{3}$ کے بیچ خطہ کو محور x کے گرد گھما کر جسم طواف پیدا کیا جاتا ہے۔ اس جسم کا حجم تلاش کریں۔

---

[۲۷] aerodynamics
[۲۸] skydiver



شکل ۷.۶۴: کمتر سطح (سوال ۷.۶۹۷)



شکل ۷.۶۵: قطع زائد تفاعل کے نام کی وجہ (سوال ۷.۶۹۹)

سوال ۷.۶۹۶: (ا) قوس $y = \frac{1}{2}\cosh 2x$ کی لمبائی $x = 0$ سے $x = \ln\sqrt{5}$ تک تلاش کریں۔ (ب) قوس $y = \frac{1}{a}\cosh ax$ کی لمبائی $x = 0$ سے $x = b > 0$ تک تلاش کریں۔

سوال ۷.۶۹۷: کمتر سطح

قوس $y = 4\cosh(\frac{x}{4}),\ -\ln 16 \le x \le \ln 81$ کو محور x کے گرد گھما کر سطح طواف پیدا کیا جاتا ہے (شکل ۷.۶۴)۔ سطح طواف کا رقبہ تلاش کریں۔

یہ ثابت کیا جا سکتا ہے نقطہ A اور B کے بیچ تمام قابل تفرق قوسین میں سب سے کم سطح طواف پیدا کرنے والی قوس $y = 4\cosh\frac{x}{4}$ ہے۔ یوں A اور b پر واقع سخت دائری تاروں کے بیچ صابن کے جھاگ کی سطح یہی قوسی صورت اپنائے گی۔

سوال ۷.۶۹۸: (ا) قوس $y = \cosh x,\ -\ln 2 \le x \le \ln 2$ کا وسطانی مرکز تلاش کریں۔ (ب) وسطانی مرکز کو 2 اعشاریہ مقامات تک درستگی تک تلاش کریں۔ اس منحنی کو ترسیم کرتے ہوئے وسطانی مرکز کی نشاندہی کریں۔

سوال ۷.۶۹۹: ہذلولی تفاعل کا نام

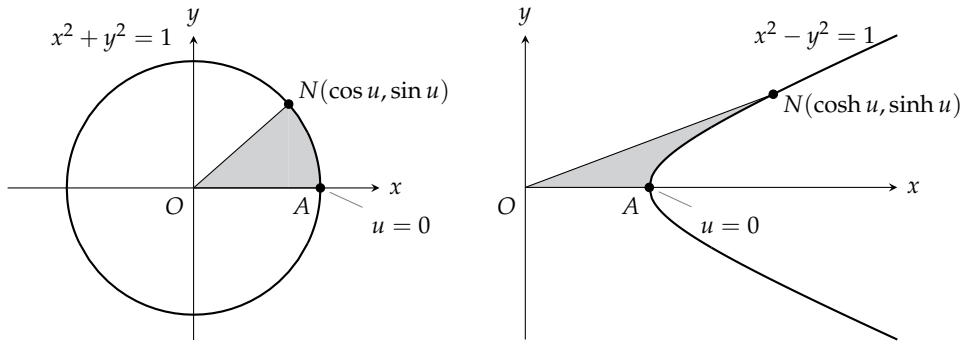
اکائی دائرہ پر نقطہ (x, y) کو تفاعل $x = \cos u$ اور $y = \sin u$ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح اکائی قطع زائد (جس کو ہذلولی تفاعل بھی کہتے ہیں) کے دائیں حصہ پر نقطہ (x, y) کو تفاعل $x = \cosh u$ اور $y = \sinh u$ سے حاصل کرنا ممکن ہے (شکل ۷.۶۵)۔ اسی لیے ان تفاعل کو قطع زائد تفاعل یا **ہذلولی تفاعل** کہتے ہیں۔

دائری تفاعل اور قطع زائد تفاعل کے بیچ دوسری مشابہت یہ ہے کہ قطع زائد $x^2 - y^2 = 1$ کے دائیں حصہ میں نقطہ $(\cosh u, \sinh u)$ کے متغیر u کی قیمت خطہ AON کے رقبے کی دگنا ہو گی (شکل ۷.۶۶)۔ اس کی تصدیق کرنے کی خاطر درج ذیل اقدام کریں۔

ا. دکھائیں کہ خطہ AON کا رقبہ $S(u) = \frac{1}{2}\cosh u \sinh u - \int_1^{\cosh u} \sqrt{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x$ ہو گا۔

ب. دکھائیں کہ جزو-امیں دی گئی مساوات کا u کے لحاظ سے تفرق $S'(u) = \frac{1}{2}$ ہو گا۔

ج. اس آخری مساوات کو $S(u)$ کے لیے حل کریں۔ $S(0)$ کی قیمت کتنی ہے؟ تکمل کے مستقل C کی قیمت کتنی ہو گی؟ مستقل C جانتے ہوئے حل $S(u)$ اور u کا تعلق بیان کریں۔



(ا) u کی قیمت سیاہ رقبے کی دگنی ہے۔ (ب) u کی قیمت سیاہ رقبے کی دگنی ہے۔

شکل ۷.۶۶: دائری تفاعل اور قطع زائد تفاعل کا ایک تعلق (سوال ۷.۶۹۹)۔

لٹکی ہوئی تار

سوال ۷.۷۰۰: فرض کریں دو کھمبوں کے بیچ بجلی کی تار لٹکی ہوئی ہے (شکل ۷.۶۷)۔ اس تار کی فی اکائی لمبائی کمیت m ہے اور تار کی سب سے کم اونچائی والے نقطہ پر افقی تناؤ H ہے۔ ہم محددیوں منتخب کرتے ہیں کہ قوسی تار کا نچلا حصہ مبدا سے $\frac{H}{mg}$ بلند ہو جہاں $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ ہے۔ ایسی صورت میں ہم دکھا سکتے ہیں کہ تار کی صورت ہذلولی کوسائن $y = \frac{H}{mg}\cosh\frac{mgx}{H}$ ہو گی۔ ایسی قوس کو **لیزم**[۲۹] کہتے ہیں۔

ا. تار کے کسی عمومی نقطہ $N(x, y)$ پر تناؤ T ہو گا جو قوس کو مماسی ہو گا۔ دکھائیں کہ اس نقطہ پر درج ذیل ہو گا۔

$$\tan\phi = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sinh\frac{mgx}{H}$$

ب. چونکہ تار ساکن ہے لہٰذا کسی بھی نقطہ پر افقی قوتوں کا مجموعہ صفر ہو گا اور اسی طرح انتصابی قوتوں کا مجموعہ بھی صفر ہو گا۔ یوں دکھائیں کہ $T = H$ اور $T = mgy$ ہو گا۔ یوں N پر تناؤ y لمبائی کی تار کا وزن ہو گا۔

سوال ۷.۷۰۱: لیزم (سوال ۷.۷۰۰ جاری)

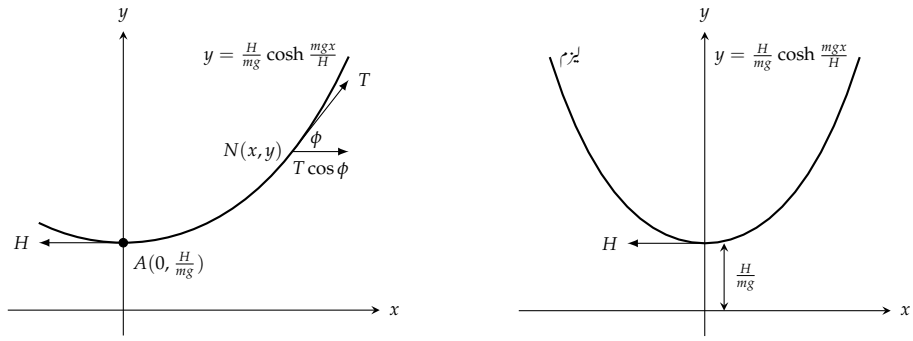
تار کی لمبائی $s = \frac{1}{a}\sinh x$ ہو گی (شکل ۷.۶۷) جہاں $a = \frac{mg}{H}$ ہو گا۔ دکھائیں کہ N کے محدد کو s کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے:

$$x = \frac{1}{a}\sinh^{-1} as, \quad y = \sqrt{s^2 + \frac{1}{a^2}}$$

سوال ۷.۷۰۲: جھول اور افقی تناؤ ایک تار جس کی لمبائی $10\,\mathrm{m}$ اور کمیت $0.6\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$ ہے کو ایک جتنے بلند کھمبوں کے سروں سے باندھا گیا ہے۔ کھمبوں کے بیچ فاصلہ $9\,\mathrm{m}$ ہے۔

---

[۲۹] catenary



(ب) عمومی نقطہ پر قوتیں۔ (ا) لیزم

شکل ۷.۶۷: لیزم برائے سوال ۷.۷۰۰ اور سوال ۷.۷۰۱

۱۲۲۲۶ ا. تار کو درج ذیل مساوات سے ظاہر کریں۔

$$y = \frac{1}{a}\cosh ax, \quad -5 \le x \le 5$$

۱۲۲۲۷ دکھائیں کہ a درج ذیل کو مطمئن کرتا ہے (سوال ۷.۷۰۱ کے نتائج استعمال کریں۔)

$$5a = \sinh 4.5a \tag{۲}$$

۱۲۲۲۸ ب. ترسیمات $y = 5a$ اور $y = \sinh 4.5a$ کا نقطہ تقاطع تلاش کرتے ہوئے جزو-اکا ترسیمی حل تلاش کریں۔

۱۲۲۲۹ ج. مساوات ۲ کا اعدادی حل تلاش کریں۔ اعدادی حل کا ترسیمی حل کے ساتھ موازنہ کریں۔

۱۲۲۳۰ د. تار کے کم تر بلند نقطہ پر افقی تناو معلوم کریں۔

۱۲۲۳۱ ھ. لیزم $y = \frac{1}{a}\cosh ax$ کو وقفہ $-5 \le x \le 5$ پر ترسیم کریں۔ تار میں جھول کا اندازہ لگائیں۔

۱۲۲۳۲

۱۲۲۳۳

۱۲۲۳۴ ۷.۱۱ یک رتبی تفرقی مساوات

۱۲۲۳۵ ہم نے ابتدائی قیمت مسئلہ $\frac{dy}{dt} = ky,\ y(0) = y_0$ کو حل کرتے ہوئے قوت نمائی تبدیلی $y = y_0 e^{kt}$ کا قاعدہ حصہ ۷.۵ میں دریافت
۱۲۲۳۶ کیا۔ جیسا کہ ہم نے دیکھا یہ مسئلہ نمو آبادی، تابکار تحلیل، انتقال حرارت اور دیگر اعمال کی نمونہ کشی کرتا ہے۔ اس حصہ میں ہم ابتدائی قیمت مسئلہ $\frac{dy}{dx} =$
۱۲۲۳۷ $f(x,y)$ پر غور کریں گے جہاں تفاعل f غیر تابع متغیر x اور تابع متغیر y کا تفاعل ہو گا۔ اس مساوات کے استعمال مزید زیادہ ہیں۔

۱۳۳۳۸ یک رتبی تفرقی مساوات

۱۳۳۳۹ درج ذیل مساوات جس میں $f(x,y)$ مستوی xy کے متغیرات x اور y پر مبنی تفاعل $f(x,y)$ ہے کو **یک رتبی**[30] تفرقی مساوات کہتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \tag{۱}$$

۱۳۳۴۰ اس مساوات کو ہم $y' = f(x,y)$ بھی لکھتے ہیں۔ متغیر x کے کسی وقفہ (جو لا متناہی ہو سکتا ہے) پر معین قابل تفرق تفاعل $y = y(x)$ جس
۱۳۳۴۱ کے لیے

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = f(x,y(x))$$

۱۳۳۴۲ ہو، مساوات کا **حل**[31] کہلاتا ہے۔ ابتدائی شرط $y(x_0) = y_0$ کا مطلب ہو گا کہ منحنی حل $y = y(x)$ نقطہ (x_0,y_0) سے گزرتی ہے۔
۱۳۳۴۳ دھیان رہے کہ اس تفرقی مساوات میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کا جزو ضربی 1 ہے۔

۱۳۳۴۴ مثال ۷.۸۱: درج ذیل تفرقی مساوات میں $f(x,y) = 1 - \frac{y}{x}$ ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{y}{x}$$

۱۳۳۴۵ □

۱۳۳۴۶ مثال ۷.۸۲: دکھائیں کہ ابتدائی قیمت مسئلہ

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - \frac{y}{x}, \quad y(2) = \frac{3}{2}$$

۱۳۳۴۷ کا حل درج ذیل تفاعل ہے۔

$$y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$$

۱۳۳۴۸ **حل**

۱۳۳۴۹ دیا گیا تفاعل ابتدائی شرط کو مطمئن کرتا ہے، یعنی:

$$y(2) = \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right)_{x=2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$$

---

[30] firstorder
[31] solution

۱۲۲۵۰ یہ دکھانے کی خاطر کہ دیا گیا تفاعل تفرقی مساوات کو بھی مطمئن کرتا ہے، ہم y کی جگہ $\frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ پر کر کے تصدیق کرتے ہیں کہ تفرقی مساوات کے دونوں
۱۲۲۵۱ اطراف یکساں ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2} && \text{بایاں ہاتھ} \\
1 - \frac{y}{x} &= 1 - \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{x}{2}\right) && \text{دایاں ہاتھ} \\
&= 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

۱۲۲۵۲ تفاعل $y = \frac{1}{x} + \frac{x}{2}$ ابتدائی شرط اور تفرقی مساوات کو مطمئن کرتا ہے لہٰذا یہ تفرقی مساوات کا حل ہو گا۔ □

۱۲۲۵۳ **قابل علیحدگی مساوات**

۱۲۲۵۴ اگر $f(x, y)$ کو x کے تفاعل اور y کے تفاعل کا حاصل ضرب لکھنا ممکن ہو تب تفرقی مساوات $y' = f(x, y)$ **قابل علیحدگی**[۳۲] کہلاتی
۱۲۲۵۵ ہے۔ ایسی صورت میں ہم تفرقی مساوات کو درج ذیل روپ میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)h(y)$$

۱۲۲۵۶ اگر $h(y) \neq 0$ ہو تب ہم دونوں اطراف کو h سے تقسیم اور $\mathrm{d}x$ سے ضرب کرتے ہوئے متغیرات کو علیحدہ کر سکتے ہیں:

$$\frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$$

۱۲۲۵۷ یوں y اجزاء اور $\mathrm{d}y$ بائیں ہاتھ جبکہ x اجزاء اور $\mathrm{d}x$ دائیں ہاتھ منتقل ہوتے ہیں۔ ہم دونوں اطراف کا تکمل لے کر

$$\int \frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

۱۲۲۵۸ حاصل کرتے ہیں۔ تکمل سے درکار حل حاصل ہوتا ہے جس میں y، متغیر x کا صریح تفاعل یا خفی تفاعل جمع مستقل ہو گا۔

۱۲۲۵۹ مثال ۷.۸۳: درج ذیل تفرقی مساوات کو حل کریں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1 + y^2)e^x$$

۱۲۲۶۰ **حل**

---

[۳۲] separable

۱۲۲۶۱ چونکہ $1 + y^2$ کبھی بھی صفر نہیں ہو سکتا ہے لہٰذا ہم متغیرات کی علیحدگی سے اس تفرقی مساوات کو حل کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= (1+x^2)e^x \\
\mathrm{d}y &= (1+y^2)e^x\,\mathrm{d}x && \text{دونوں اطراف کو } \mathrm{d}x \text{ سے ضرب دیں} \\
\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} &= e^x\,\mathrm{d}x && \text{دونوں اطراف کو } 1+y^2 \text{ سے تقسیم کریں} \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2} &= \int e^x\,\mathrm{d}x && \text{تکمل} \\
\tan^{-1} y &= e^x + C && \text{دونوں اطراف کے مستقل کو } C \text{ ظاہر کرتا ہے}
\end{aligned}$$

۱۲۲۶۲ مساوات $\tan^{-1} y = e^x + C$ میں y متغیر x کا خفی تفاعل ہے۔ ہم اس مساوات کو حل کر کے y کو x کے صریح تفاعل کی صورت میں لکھ
۱۲۲۶۳ سکتے ہیں۔ دونوں اطراف کا ٹینجنٹ لیتے ہیں:

$$\begin{aligned}
\tan(\tan^{-1} y) &= \tan(e^x + C) \\
y &= \tan(e^x + C)
\end{aligned}$$

۱۲۲۶۴ □

۱۲۲۶۵ **خطی یک رتبی مساوات**

۱۲۲۶۶ درج ذیل یک رتبی تفرق مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x) \tag{۲}$$

۱۲۲۶۷ جس میں P اور Q متغیر x کے تفاعل ہوں **خطی**[۳۳] یک رتبی مساوات کہلاتی ہے۔ مساوات ۲ اس کی **معیاری روپ**[۳۴] ہے۔ دھیان رہے کہ اس
۱۲۲۶۸ تفرقی مساوات میں $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ کا جزو ضربی 1 ہے۔

۱۲۲۶۹ مثال ۷.۸۴: درج ذیل کو معیاری روپ میں لکھیں۔

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + 3y, \quad x > 0$$

---

[۳۳] linear
[۳۴] standardform

۱۲۲۷۰ **حل**

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + 3y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + \frac{3}{x}y \qquad x \text{ سے تقسیم}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{3}{x}y = x \qquad \text{معیاری روپ؛ } P(x) = -\frac{3}{x} \text{ اور } Q(x) = x \text{ ہیں۔}$$

۱۲۲۷۱ □

۱۲۲۷۲ مثال ۷.۸۵: ہم نے حصہ ۷.۵ میں درج ذیل مساوات سے جرثوموں کی نمو، تابکار تحلیل اور تبدیلی حرارت کو ظاہر کیا۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = ky$$

۱۲۲۷۳ اس خطی یک رتبی تفرقی مساوات کی معیاری روپ درج ذیل ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - ky = 0 \qquad P(h) = -k,\ Q(x) = 0$$

۱۲۲۷۴ □

۱۲۲۷۵ ہم معیاری مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x) \tag{۳}$$

۱۲۲۷۶ کے دونوں اطراف کو اس مثبت تفاعل $v(x)$ سے ضرب دیتے ہیں جو بائیں ہاتھ کو حاصل ضرب $y \cdot v(x)$ کے تفرق میں تبدیل کرتا ہو۔ تفاعل
۱۲۲۷۷ $v(x)$ کو مساوات ۳ کا جزو **تکمل**[۳۵] کہتے ہیں۔ ہم بہت جلد $v(x)$ معلوم کرنا سکھائیں گے۔ پہلے $v(x)$ جانتے ہوئے تفرقی مساوات کے حل پر بات
۱۲۲۷۸ کرتے ہیں۔

[۳۵] integratingfactor

۱۳۲۷۹ آئیں دیکھتے ہیں کہ v سے ضرب دینا کیوں کارآمد ثابت ہوتا ہے:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x) \qquad \text{دی گئی معیاری مساوات}$$

$$v(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)v(x)y = v(x)Q(x) \qquad v(x)\text{ سے ضرب دیں}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v(x)\cdot y) = v(x)Q(x) \tag{۴}$$

$$v(x)\cdot y = \int v(x)Q(x)\,\mathrm{d}x \qquad x\text{ کے لحاظ سے تکمل}$$

$$y = \frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)\,\mathrm{d}x \qquad y\text{ کے لیے حل کریں}$$

۱۳۲۸۰ یاد رہے کہ $v(x)$ کا انتخاب یوں کیا جاتا ہے کہ $v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + Pvy = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(v\cdot y)$ ہو۔ درج بالا میں تیسرے قدم پر اسی حقیقت کو استعمال کیا گیا
۱۳۲۸۱ ہے۔ مساوات ۳ کا حل تفاعل $v(x)$ اور $Q(x)$ کی صورت میں مساوات ۴ دیتی ہے۔

۱۳۲۸۲ کیا $P(x)$ مساوات کے حل میں نہیں پایا جاتا ہے؟ درحقیقت $P(x)$ بالواسطہ طور پر حل میں پایا جاتا ہے۔ یہ $v(x)$ کے انتخاب میں شامل ہوتا ہے۔
۱۳۲۸۳ ہم $v(x)$ پر مسلط شرط سے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(vy) = v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + Pvy \qquad v\text{ پر مسلط شرط}$$

$$v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + Pvy \qquad \text{زنجیری قاعدہ}$$

$$y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = Pvy \qquad v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\text{ جزو کٹ جاتے ہیں}$$

۱۳۲۸۴ اس آخری مساوات کے دونوں اطراف کو y سے تقسیم کرتے ہوئے سے درج ذیل حاصل ہوگا جہاں تیسرے قدم پر $v > 0$ کی وجہ سے $\ln v$ میں
۱۳۲۸۵ مطلق قیمت کی علامت کی ضرورت پیش نہیں آتی۔

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = Pv$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} = P\,\mathrm{d}x \qquad \text{علیحدگی متغیرات}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}v}{v} = \int P\,\mathrm{d}x \qquad \text{تکمل} \tag{۵}$$

$$\ln v = \int P\,\mathrm{d}x$$

$$e^{\ln v} = e^{\int P\,\mathrm{d}x} \qquad \text{قوت نما}$$

$$v = e^{\int P\,\mathrm{d}x}$$

۱۳۲۸۶ یوں ایسا $v(x)$ جو مساوات ۵ کو مطمئن کرتا ہو ہمیں مساوات ۴ کے ذریعہ مساوات ۳ کا حل دیگا۔ ہمیں v کی عمومی ترین صورت کی ضرورت نہیں ہے بلکہ
۱۳۲۸۷ اس کی کوئی بھی صورت کافی ہے۔ یوں P کے تکمل $\int P\,\mathrm{d}x$ کی سادہ ترین صورت لینا زیادہ بہتر ہوگا۔

۱۲۲۸۸ مسئلہ ۷.۴: خطی یک رتبی تفرقی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x) \tag{۶}$$

۱۲۲۸۹ کا حل

$$y = \frac{1}{v(x)} \int v(x)Q(x)\,\mathrm{d}x \tag{۷}$$

۱۲۲۹۰ ہو گا جہاں

$$v(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} \tag{۸}$$

۱۲۲۹۱ ہے۔ تفاعل $v(x)$ کے کلیہ میں $P(x)$ کے ضد تفرق کی عمومی صورت کی ضرورت نہیں ہو گی بلکہ اس کا کوئی بھی ضد تفرق کارآمد ہو گا۔

۱۲۲۹۲

۱۲۲۹۳ **خطی یک رتبی تفرقی مساوات کو حل کرنے کے اقدام:**

۱۲۲۹۴ ا. مساوات کو معیاری روپ میں لکھ کر $P(x)$ اور $Q(x)$ معلوم کریں۔

۱۲۲۹۵ ب. $P(x)$ کا ضد تفرق معلوم کریں۔

۱۲۲۹۶ ج. جزو تکمل $v(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$ تلاش کریں۔

۱۲۲۹۷ د. مساوات ۷ کی مدد سے حل تلاش کریں۔

۱۲۲۹۸ مثال ۷.۸۶: درج ذیل مساوات کو حل کریں۔

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + 3y, \quad x > 0$$

۱۲۲۹۹ **حل**

۱۲۳۰۰ ہم اس مساوات کو چار قدموں میں حل کرتے ہیں۔

۱۲۳۰۱ **قدم اول:** مساوات کو معیاری روپ میں لکھ کر P اور Q کی نشاندہی کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{3}{x}y = x, \quad P(x) = -\frac{3}{x}, \quad Q(x) = x \qquad \text{مثال ۷.۸۴}$$

۱۲۳۰۲ **قدم دوم:** $P(x)$ کا (کوئی بھی) ضد تفرق تلاش کرتے ہیں۔

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x = \int -\frac{3}{x}\,\mathrm{d}x = -3\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -3\ln|x| = -3\ln x \qquad x > 0$$

۱۳۳۰۳ **قدم سوم:** جزو تکمل $v(x)$ کی تلاش۔

$$v(x) = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} = e^{-3\ln x} = e^{\ln x^{-3}} = \frac{1}{x^3} \qquad \text{مساوات ۸}$$

۱۳۳۰۴ **قدم چہارم:** حل کی تلاش۔

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{v(x)}\int v(x)Q(x)\,\mathrm{d}x && \text{مساوات ۷}\\
&= \frac{1}{(1/x^3)}\int \left(\frac{1}{x^3}\right)(x)\,\mathrm{d}x && \text{جزو-اتاج کی معلومات}\\
&= x^3\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\\
&= x^3\left(-\frac{1}{x}+\mathrm{C}\right) && \text{مستقل C مت بھولیں}\\
&= -x^2+\mathrm{C}x^3
\end{aligned}$$

۱۳۳۰۵ یوں حل $y = -x^2 + \mathrm{C}x^3,\ x > 0$ ہو گا۔ □

۱۳۳۰۶ مثال ۷.۸۷: درج ذیل مساوات کو حل کریں

$$xy' = x^2 + 3y, \quad x > 0$$

۱۳۳۰۷ جہاں ابتدائی معلومات $y(1) = 2$ دی گئی ہے۔

۱۳۳۰۸ **حل**

۱۳۳۰۹ ہم مثال ۷.۸۶ میں اس کا درج ذیل حل تلاش کر چکے ہیں۔

$$y = -x^2 + \mathrm{C}x^3, \quad x > 0$$

۱۳۳۱۰ ہم ابتدائی معلومات استعمال کرتے ہوئے مستقل C کی قیمت دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
y &= -x^2 + \mathrm{C}x^3\\
2 &= -(1)^2 + \mathrm{C}(1)^3\\
\mathrm{C} &= 2 + (1)^2 = 3
\end{aligned}$$

۱۳۳۱۱ یوں ابتدائی قیمت مسئلے کا حل تفاعل $y = -x^2 + 3x^3$ ہو گا۔ □

۱۲۳۱۲ سمتی رفتار کے متناسب مزاحمت

۱۲۳۱۳ بعض اوقات جب باقی قوتوں کو رد کرنا ممکن ہو، یہ کہنا درست ہو گا کہ حرکت کرتے ہوئے جسم پر لاگو مزاحمت اس کی سمتی رفتار کے راست متناسب ہو
۱۲۳۱۴ گی۔ ایک گاڑی جس کا انجن بند ہو اور یہ رک رہی ہو، ایسی ایک مثال ہے۔ ایسا جسم جتنا آہستہ چل رہا ہو، اس پر ہوائی مزاحمت اتنی کم ہو گی۔ اس عمل کو ریاضی کا
۱۲۳۱۵ جامہ پہنانے کی خاطر ہم جسم کو کمیت m سے ظاہر کرتے ہیں جو محددی لکیر پر حرکت کرتا ہے۔ لمحہ t پر اس جسم کی رفتار v اور مقام s ہوں گے۔ مزاحمتی
۱۲۳۱۶ قوت جسم کی سمتی رفتار کے معکوس رخ ہو گا لہٰذا ہم

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv \qquad\qquad k > 0$$

۱۲۳۱۷ لکھ سکتے ہیں جس کی معیاری روپ

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}v = 0$$

۱۲۳۱۸ ہو گی۔ فرض کریں لمحہ $t = 0$ پر جسم کی سمتی رفتار v_0 ہو تب ہم مسئلہ ۷.۴ کی مدد سے درج ذیل حل حاصل ہو گا (سوال ۷.۷۴۴)۔

$$v = v_0 e^{-(k/m)t} \tag{۹}$$

۱۲۳۱۹ ہم مساوات ۹ سے کیا سیکھ سکتے ہیں؟ ہم دیکھتے ہیں کہ اگر m بہت زیادہ ہو، مثلاً ریت سے بھرا ہوا ٹرک، تب اس جسم کو رکنے کے لیے بہت زیادہ وقت درکار ہو
۱۲۳۲۰ گا۔ اس کے علاوہ ہم اس مساوات کا تکمل لے کر طے شدہ فاصلہ s معلوم کر سکتے ہیں۔

۱۲۳۲۱ فرض کریں ایک جسم صرف ہوائی مزاحمت کی موجودگی میں رک رہا ہے اور یہ قوت جسم کی رفتار کے راست متناسب ہے۔ یہ جسم کتنا فاصلہ طے کرے گا؟ یہ
۱۲۳۲۲ جاننے کی خاطر ہم مساوات ۹ سے شروع کرتے ہوئے درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ حل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0 e^{-(k/m)t} \qquad\qquad s(0) = 0$$

۱۲۳۲۳ t کے لحاظ سے تکمل لے کر

$$s = -\frac{v_0 m}{k}e^{-(k/m)t} + C$$

۱۲۳۲۴ ملتا ہے جس میں $t = 0$ پر $s = 0$ پر کرتے ہوئے مستقل C کی قیمت جانتے ہیں۔

$$0 = -\frac{v_0 m}{k} + C \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{v_0 m}{k}$$

۱۲۳۲۵ اس جسم کا مقام لمحہ t پر

$$s(t) = -\frac{v_0 m}{k}e^{-(k/m)t} + \frac{v_0 m}{k} = \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-(k/m)t})$$

ہو گا۔ یہ جانے کے لیے کہ یہ جسم کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد رکے گا ہم $t \to \infty$ پر $s(t)$ کی حد تلاش کرتے ہیں۔ چونکہ $-\frac{k}{m} < 0$ ہے لہٰذا $t \to \infty$ کرنے سے $e^{-(k/m)t} \to 0$ ہو گا۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} s(t) &= \lim_{t\to\infty} \frac{v_0 m}{k}(1 - e^{-(k/m)t}) \\ &= \frac{v_0 m}{k}(1-0) = \frac{v_0 m}{k}\end{aligned}$$

یوں یہ جسم کو رکنے کے لیے درج ذیل فاصلہ درکار ہو گا۔

$$\text{طے فاصلہ} = \frac{v_0 m}{k} \tag{۱۰}$$

چونکہ صرف ریاضیات میں ہم وقت کو لا متناہی تک بڑھا سکتے ہیں لہٰذا یہ ایک فرضی فاصلہ ہے۔ حقیقی فاصل اس سے کم ہو گا۔ ہاں یہ درست ہو گا کہ بھاری جسم کو رکنے کے لیے زیادہ وقت درکار ہو گا اور یہ زیادہ دور تک چل کر رکے گا۔

مثال ۷.۸۸: برف پھسلن پر پھسلنے والے $80\,\mathrm{kg}$ شخص کے لیے مساوات ۹ میں $k = 4.4\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ ہو گا۔ یہ شخص $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار سے آہستہ ہو کر $0.25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ کی رفتار تک کتنی دیر میں پہنچے گا؟ اس دورانیے میں یہ شخص کتنا فاصلہ طے کرے گا؟

حل

ہم مساوات ۹ کو t کے لیے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}3e^{-4.4t/80} &= 0.25 \\ e^{-4.4t/80} &= \frac{1}{12} \\ -\frac{4.4t}{80} &= \ln(\frac{1}{12}) \\ t &= \frac{80}{4.4}\ln 12 \approx 45\,\mathrm{s}\end{aligned}$$

اس عرصہ میں طے فاصلہ کو مساوات ۱۰ سے حاصل کرتے ہیں۔

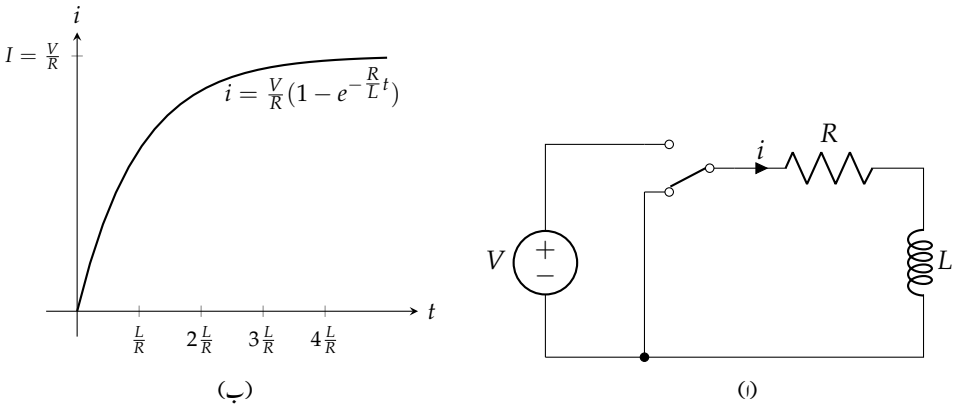
$$= \frac{v_0 m}{k} = \frac{(3)(80)}{4.4} \approx 55\,\mathrm{m}$$

□

RL ادوار

منبع دباو کے ساتھ لمحہ $t = 0$ پر مزاحمت R اور امالہ L کو سلسلہ وار جوڑا جاتا ہے (شکل ۷.۶۸)۔ امالہ کی اکائی ہینری H اور مزاحمت کی اکائی اہم Ω ہے۔ اس دور کو درج ذیل مساوات ظاہر کرتی ہے

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = V \tag{۱۱}$$



شکل ۷.۶۸: سلسلہ وار مزاحمت، امالہ برقی دور (مثال ۷.۸۹)

۱۳۳۴۰ جہاں t وقت کو، i برقی رو کو اور V لاگو برقی دباو کو ظاہر کرتی ہے۔ اس مساوات کو حل کرتے ہوئے لمحہ t پر برقی رو $i(t)$ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

۱۳۳۴۱ مثال ۷.۸۹: سلسلہ وار جڑے RL دور کو مساوات ۱۱ ظاہر کرتی ہے۔ اس کو حل کریں۔

۱۳۳۴۲ **حل**

۱۳۳۴۳ ہم اس مساوات کو معیاری روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L} \tag{۱۲}$$

۱۳۳۴۴ یوں مسئلہ ۷.۴ کے تحت حل درج ذیل ہو گا (سوال ۷.۷۵۶)۔

$$i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-\frac{R}{L}t} \tag{۱۳}$$

۱۳۳۴۵ چونکہ $-\frac{R}{L}$ نفی ہے لہٰذا $t \to \infty$ کرنے سے $e^{-(R/L)t} \to 0$ ہو گا۔ یوں

$$\lim_{t\to\infty} = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-(R/L)t}\right) = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}\cdot 0 = \frac{V}{R}$$

۱۳۳۴۶ ہو گا۔ یوں کسی بھی لمحہ پر برقی رو $\frac{V}{T}$ سے کم ہو گی لیکن جیسے جیسے وقت گزرتا ہے برقی رو برقرار حال قیمت $\frac{V}{R}$ تک پہنچتی ہے۔ درج ذیل مساوات کے تحت

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = V$$

۱۳۳۴۷ اگر $L = 0$ (امالہ کی غیر موجودگی) یا $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$ (برقرار حال) ہو تب اس دور میں $i = \frac{V}{R}$ ہو گا (شکل ۷.۶۸)۔

۱۳۳۴۸ مساوات ۱۳ در حقیقت دو مختلف حل کا مجموعہ ہے۔ اس کا پہلا جزو $\frac{V}{R}$ **برقرار حال حل** ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو $-\frac{V}{R}e^{-(R/L)t}$ **عارضی حال**

۱۳۳۴۹ **حل** ہے جو $t \to \infty$ کرنے سے صفر ہو گا۔ □

۱۳۳۵۰ **سوالات**

۱۳۳۵۱ **حل کی تصدیق**

۱۳۳۵۲ سوال ۷.۷۰۳ اور سوال ۷.۷۰۴ میں تصدیق کریں کہ ہر $y = f(x)$ دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہے۔

۱۳۳۵۳ سوال ۷.۷۰۳: $2y' + 3y = e^{-x}$

۱۳۳۵۴ (ا) $y = e^{-x}$، (ب) $y = e^{-x} + e^{-(3/2)x}$، (ج) $y = e^{-x} + Ce^{-(3/2)x}$

۱۳۳۵۵ سوال ۷.۷۰۴: $y' = y^2$؛

۱۳۳۵۶ (ا) $y = -\frac{1}{x}$، (ب) $y = -\frac{1}{x+3}$، (ج) $y = -\frac{1}{x+C}$

۱۳۳۵۷ سوال ۷.۷۰۵ اور سوال ۷.۷۰۶ میں تصدیق کریں کہ $y = f(x)$ دیے گئے تفرقی مساوات کا حل ہے۔

۱۳۳۵۸ سوال ۷.۷۰۵: $x^2y' + xy = e^x$ ، $y = \frac{1}{x}\int_1^x \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$

۱۳۳۵۹ سوال ۷.۷۰۶: $y' + \frac{2x^3}{1+x^4}y = 1$ ، $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}\int_1^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$

۱۳۳۶۰ سوال ۷.۷۰۷ تا سوال ۷.۷۱۰ میں ابتدائی قیمت مسئلے کے دیے گئے حل کی تصدیق کریں۔

۱۳۳۶۱ سوال ۷.۷۰۷: $y' + y = \frac{2}{1+4e^{2x}}, \quad y(-\ln 2) = \frac{\pi}{2}; \quad y = e^{-x}\tan^{-1}(2e^x)$

۱۳۳۶۲ سوال ۷.۷۰۸: $y' = e^{-x^2} - 2xy, \quad y(2) = 0; \quad y = (x-2)e^{-x^2}$

۱۳۳۶۳ سوال ۷.۷۰۹: $xy' + y = -\sin x, \quad x > 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 0; \quad y = \frac{\cos x}{x}$

۱۳۳۶۴ سوال ۷.۷۱۰: $x^2y' = xy - y^2, \quad x > 1, \quad y(e) = e; \quad y = \frac{x}{\ln x}$

۱۳۳۶۵ **قابل علیحدگی مساوات**

۱۳۳۶۶ سوال ۷.۷۱۱ تا سوال ۷.۷۱۶ میں دیے گئے تفرقی مساوات کو حل کریں۔

۱۳۳۶۷ سوال ۷.۷۱۱: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2(x + y^2x)$

۱۳۳۶۸ سوال ۷.۷۱۲: $(y+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y(x-1)$

۱۳۳۶۹ سوال ۷.۷۱۳: $2\sqrt{xy}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1, \quad x, y > 0$

۱۳۳۷۰ سوال ۷.۷۱۴: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2\sqrt{y}, \quad y > 0$

۱۳۳۷۱ سوال ۷.۷۱۵: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = e^{x-y}$

۱۳۳۷۲ سوال ۷.۷۱۶: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x^2+1}{xe^y}, \quad x > 0$

۱۳۳۷۳ **خطی یک رتبی مساوات**

۱۳۳۷۴ سوال ۷.۷۱۷ تا سوال ۷.۷۲۲ میں تفرقی مساوات حل کریں۔

۱۲۳۷۵ سوال ۷.۷۱۷: $x\frac{dy}{dx} + y = e^x, \quad x > 0$

۱۲۳۷۶ سوال ۷.۷۱۸: $e^x\frac{dy}{dx} + 2e^x y = 1$

۱۲۳۷۷ سوال ۷.۷۱۹: $xy' + 3y = \frac{\sin x}{x^2}, \quad x > 0$

۱۲۳۷۸ سوال ۷.۷۲۰: $y' + (\tan x)y = \cos^2 x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

۱۲۳۷۹ سوال ۷.۷۲۱: $x\frac{dy}{dx} + 2y = 1 - \frac{1}{x}, \quad x > 0$

۱۲۳۸۰ سوال ۷.۷۲۲: $(1+x)y' + y = \sqrt{x}$

۱۲۳۸۱ **یک رتبی مساوات**

۱۲۳۸۲ سوال ۷.۷۲۳ تا سوال ۷.۷۳۶ میں تفرقی مساوات حل کریں۔

۱۲۳۸۳ سوال ۷.۷۲۳: $2y' = e^{x/2} + y$

۱۲۳۸۴ سوال ۷.۷۲۴: $\sqrt{x}\frac{dy}{dx} = e^{y+\sqrt{x}}, \quad x > 0$

۱۲۳۸۵ سوال ۷.۷۲۵: $e^{2x}y' + 2e^{2x}y = 2x$

۱۲۳۸۶ سوال ۷.۷۲۶: $xy' - y = 2x\ln x$

۱۲۳۸۷ سوال ۷.۷۲۷: $\sec x\frac{dy}{dx} = e^{y+\sin x}$

۱۲۳۸۸ سوال ۷.۷۲۸: $x\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{x} - 2y, \quad x > 0$

۱۲۳۸۹ سوال ۷.۷۲۹: $(t-1)^3\frac{ds}{dt} + 4(t-1)^2 s = t+1, \quad t > 1$

۱۲۳۹۰ سوال ۷.۷۳۰: $(t+1)\frac{ds}{dt} + 2s = 3(t+1) + \frac{1}{(t+1)^2}, \quad t > -1$

۱۲۳۹۱ سوال ۷.۷۳۱: $(\sec^2\sqrt{x})\frac{dx}{dt} = \sqrt{x}$

۱۲۳۹۲ سوال ۷.۷۳۲: $\sin t - (x\cos^2 t)\frac{dx}{dt} = 0, \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

۱۲۳۹۳ سوال ۷.۷۳۳: $\sin\theta\frac{dr}{d\theta} + (\cos\theta)r = \tan\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

۱۲۳۹۴ سوال ۷.۷۳۴: $\tan\theta\frac{dr}{d\theta} + r = \sin^2\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

۱۲۳۹۵ سوال ۷.۷۳۵: $\cosh x\frac{dy}{dx} + (\sinh x)y = e^{-x}$

۱۲۳۹۶ سوال ۷.۷۳۶: $\sinh x\frac{dy}{dx} + 3(\cosh x)y = \cosh x\sinh x$

۱۲۳۹۷ **ابتدائی قیمت مسائل کا حل**

۱۲۳۹۸ سوال ۷.۷۳۷ تا سوال ۷.۷۴۲ میں ابتدائی قیمت مسائل حل کریں۔

۱۲۳۹۹ سوال ۷.۷۳۷: $\frac{dy}{dt} + 2y = 3; \quad y(0) = 1$

سوال ۷.۷۳۸: $t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 2y = t^3, \quad t > 0; \quad y(2) = 1$

سوال ۷.۷۳۹: $\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} + y = \sin\theta, \quad \theta > 0; \quad y(\pi/2) = 1$

سوال ۷.۷۴۰: $\theta\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta} - 2y = \theta^3\sec\theta\tan\theta, \quad \theta > 0; \quad y(\pi/3) = 2$

سوال ۷.۷۴۱: $(x+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2(x^2+x)y = \frac{e^{x^2}}{x+1}, \quad x > -1; \quad y(0) = 5$

سوال ۷.۷۴۲: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + xy = x, \quad y(0) = -6$

سوال ۷.۷۴۳: درج ذیل ابتدائی قیمت مساوات کو مسئلہ ۷.۴ سے حل کرتے ہوئے کیا حاصل ہوتا ہے۔ یہاں y متغیر t کا تفاعل ہے۔

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = ky, \quad$ مستقل $k; \quad y(0) = y_0$

سوال ۷.۷۴۴: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کو مسئلہ ۷.۴ کی مدد سے حل کریں جہاں v متغیر t کا تفاعل ہے۔

$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}v, \quad$ m اور k مستقل ہیں; $\quad v(0) = v_0$

نظریہ اور استعمال

سوال ۷.۷۴۵: کیا درج ذیل میں سے کوئی مساوات درست ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

(الف) $$x\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln|x| + C$$

(ب) $$x\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\ln|x| + Cx$$

سوال ۷.۷۴۶: کیا درج ذیل میں سے کوئی مساوات درست ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

(الف) $$\frac{1}{\cos x}\int\cos x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$$

(ب) $$\frac{1}{\cos x}\int\cos x\,\mathrm{d}x = \tan x + \frac{C}{\cos x}$$

سوال ۷.۷۴۷: شکر خون

ایک مریض کو مستقل شرح سے گلوکوز کی خوراک درون وریدی کھلائی جاتی ہے۔ وقت کے لحاظ سے خون میں گلوکوز کی ارتکاز $c(t)$ کو درج ذیل تفرقی مساوات سے ظاہر کیا جا سکتا ہے جہاں G ، V اور k مثبت مستقل ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = \frac{G}{100V} - kc$$

فی منٹ ملی گرام میں گلوکوز کی شرح G ہے جبکہ بدن میں خون کا حجم V لٹر ہے جو بالغ شخص کے لیے تقریباً 5 L ہو گا۔ ارتکاز $c(t)$ کو ملی گرام فی دس مربع سنٹی میٹر ناپا جاتا ہے۔ جزو $-kc$ کو اس لیے شامل کیا گیا ہے کہ گلوکوز مسلسل دیگر اجزاء میں تبدیل ہو گا اور اس تبدیلی کی شرح اس وقت پائے جانے

والی گلوکوز کے راست متناسب ہو گی۔(ا) $c(0)$ کو c_0 سے ظاہر کرتے ہوئے اس مساوات کو حل کریں۔(ب) برقرار حال ارتکاز $\lim_{t\to\infty} c(t)$ تلاش کریں۔

سوال ۷.۷۴۸: مسلسل سود در سود

آپ بنک سے 1000 روپیہ قرضہ لیتے ہیں اور ہر سال مزید 1000 روپیہ بنک سے قرض کرتے ہیں۔ آپ کو 10 % سالانہ مسلسل سود در سود دینا ہو گا۔ t سال بعد آپ کی واجب الادار قم x درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ دیتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1000 + 0.1x, \quad x(0) = 1000$$

(ا) اس مساوات کو حل کریں۔(ب) آپ کی واجب الادار قم کتنے سالوں میں 100 000 ہو گی؟

سوال ۷.۷۴۹: حوض خالی کرنے کے لیے درکار وقت

ایک پانی سے بھرے ہوئے انتصابی بیلنی حوض کی تہہ میں نصب نلکی کو کھول کر حوض خالی کا جاتا ہے۔ شروع میں پانی کی نکاسی تیز ہوتی ہے لیکن جیسے جیسے پانی کی سطح گرتی ہے، پانی کی نکاسی بھی آہستہ ہوتی جاتی ہے۔ ایسی صورت میں پانی کی گہرائی کی شرح تبدیلی، گہرائی y کے جذر کے راست متناسب ہوتی ہے:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -k\sqrt{y}$$

مستقل k کی قیمت ثقلی اسراع، نلکی کے سوراخ کی شکل اور حوض کے رقبہ عمودی تراش پر منحصر ہوتی ہے۔

فرض کریں t کو منٹوں میں ناپا جاتا ہے اور $k = \frac{1}{10}$ ہو۔ اگر پانی کی گہرائی 4 m ہو تب حوض کتنی دیر میں خالی ہو گا؟

سوال ۷.۷۵۰: گریزی رفتار

ہوا سے خالی چاند پر کمیت m کے جسم پر ثقلی قوت $F = -\frac{GMm}{s^2} = -\frac{GMm}{R^2}\frac{R^2}{s^2} = -\frac{mgR^2}{s^2}$ عمل کرتی ہے جہاں چاند کے مرکز سے جسم تک فاصلہ s اور چاند کا رداس R ہے (شکل ۷.۶۹)۔ چونکہ قوت F نیچے رخ عمل کرتا ہے لہٰذا اس کو منفی لکھا گیا ہے۔(ا) ایک جسم کو $t = 0$ پر سطح چاند سے v_0 رفتار کے ساتھ اوپر پھینکا جاتا ہے۔ قانون نیوٹن $F = ma$ استعمال کرتے ہوئے دکھائیں کہ مقام s پر جسم کی رفتار درج ذیل ہو گی۔

$$v^2 = \frac{2gR^2}{s} + v_0^2 - 2gR$$

یوں جب تک $v_0 \geq \sqrt{2gR}$ ہو، رفتار مثبت رہے گی۔ رفتار $v_0 = \sqrt{2gR}$ چاند کی **گریزی رفتار**[۳۶] کہلاتی ہے۔ جس جسم کو اس رفتار یا اس سے زیادہ رفتار سے سطح چاند سے اوپر پھینکا جائے، وہ جسم چاند پر واپس نہیں گرے گا۔(ب) دکھائیں کہ اگر $v_0 = \sqrt{2gR}$ ہو تب درج ذیل ہو گا۔

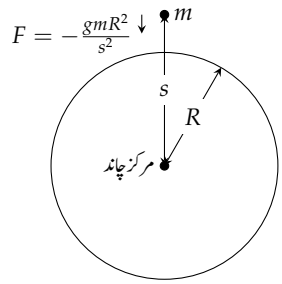
$$s = R\left(1 + \frac{3v_0}{2R}t\right)^{2/3}$$

سمتی رفتار کے راست مزاحمت

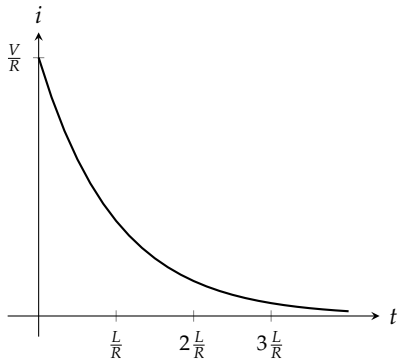
سوال ۷.۷۵۱: ایک سائکل سوار $21.6\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ رفتار سے چلتے ہوئے پیڈل گھمانا بند کرتا ہے۔ مساوات ۹ میں $k = \frac{20}{7}\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ لیں اور سائکل سوار کی کمیت 80 kg ہے۔(ا) سائکل سوار کتنا فاصلہ طے کر کے رکے گا۔(ب) کتنی دیر بعد سائکل سوار کی رفتار $0.5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ہو گی؟

---

escapevelocity[۳۶]



شکل ۷.۶۹: چاند پر قوت کشش



شکل ۷.۷۰: تنزل برقی رو (سوال ۷.۷۵۴)

سوال ۷.۷۵۲: ایک بحری جہاز جس کی کمیت $2.5 \times 10^7\,\mathrm{kg}$ ہے کے لیے مساوات ۹ میں $k = 44\,000\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$ ہے۔ اس بحری جہاز کی رفتار $24\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ ہوتی ہے جب اس کا انجن کام کرنا چھوڑ دیتا ہے۔ (ا) یہ بحری جہاز کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد رکے گا؟ (ب) اس کی رفتار کتنی دیر میں $0.25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ تک ہو گی؟

RL ادوار

سوال ۷.۷۵۳: سلسلہ وار RL دور میں برقی رو

ایک سلسلہ وار RL دور پر لمحہ $t = 0$ پر برقی دباولا گو کیا جاتا ہے۔ کتنی دیر میں برقرار حال برقی رو کی نصف قیمت تک دور میں برقی رو پہنچے گا؟ آپ دیکھیں گے کہ جواب کا دارومدار R اور L کی قیمتوں پر ہو گا نا کہ لاگو برقی دباو کی قیمت پر۔

سوال ۷.۷۵۴: تنزل برقی رو

سلسلہ وار RL دور میں ابتدائی طور پر I_0 برقی رو پائی جاتی ہے جو درج ذیل مساوات کے تحت وقت کے ساتھ گھٹتی ہے (شکل ۷.۷۰)۔

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0$$

(ا) اس مساوات کو برقی رو i کے لیے حل کریں۔ (ب) برقی رو کتنی دیر میں $\frac{I_0}{2}$ ہو گی؟ (ج) لمحہ $t = \frac{L}{R}$ پر i کتنا ہو گا۔

سوال ۷.۷۵۵: وقتی مستقل

مستقل $\frac{L}{R}$ کو مہندس RL دور کا **وقتی مستقل**[۳۷] کہتے ہیں۔ تقریباً 3 وقتی مستقل دورانیہ میں برقی رو برقرار حال قیمت کے 95 % قیمت تک پہنچ پاتا ہے۔ یوں وقتی مستقل سے ہم معلوم کر سکتے ہیں کہ دور کتنا جلدی برقرار حاصل اختیار کرے گا۔ (ا) مساوات ۱۳ میں لمحہ $t = 3\frac{L}{R}$ پر i تلاش کریں۔ یہ برقرار حال برقی رو کی 95 % قیمت ہو گی۔ (ب) لمحہ $t = 2\frac{L}{R}$ پر مساوات ۱۳ کتنی برقی رو دیتی ہے؟

---

[۳۷] timeconstant

سوال ۷.۷۵۶: آئیں مساوات ۱۳ حاصل کرتے ہیں۔

ا. مسئلہ ۷.۴ کی مدد سے دکھائیں کہ

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{V}{L}$$

کا حل درج ذیل ہے۔

$$i = \frac{V}{R} + Ce^{-(R/L)t}$$

ب. ابتدائی معلومات $i(0) = 0$ استعمال کرتے ہوئے مستقل C کی قیمت دریافت کریں۔ یوں مساوات ۱۳ حاصل ہوتی ہے۔

ج. دکھائیں کہ $i = \frac{V}{R}$ مساوات ۱۲ کا حل ہے اور درج ذیل $i = Ce^{-(R/L)t}$ کو مطمئن کرتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = 0$$

مرکب کے مسائل

ایک کیمیا جو مائع (یا گیس) کی صورت میں ہے کو ایک برتن میں ڈالا جاتا ہے جس میں پہلے سے کوئی مائع (یا گیس) موجود ہے اور عین ممکن ہے کہ اسی کیمیا کی مخصوص مقدار بھی اس برتن میں پہلے سے موجود ہو۔ مرکب کو مسلسل ہلا کر یکساں رکھتے ہوئے برتن سے اس کی نکاسی مستقل شرح سے کی جاتی ہے۔ ہم چاہتے ہیں کہ ہمیں برتن میں کیمیا کی لحاتی مقدار معلوم ہو۔ درج ذیل مساوات پر مبنی تفرقی مساوات اس عمل کو بیان کرتی ہے۔

$$\text{برتن میں کیمیا کی مقدار کی شرح تبدیلی} = (\text{کیمیا کی شرح آمد}) - (\text{کیمیا کی شرح اخراج}) \tag{۱۴}$$

گر لمحہ t پر برتن میں کیمیا کی مقدار $y(t)$ اور برتن میں مواد کا کل حجم $V(t)$ ہو تب کیمیا کے اخراج کی شرح درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned} \text{انعکاس کیمیا} &= \frac{y(t)}{V(t)} \cdot (\text{شرح انعکاس مائع}) \\ &= (\text{شرح انعکاس مائع}) \cdot (\text{لمحہ } t \text{ پر برتن میں ارتکاز}) \end{aligned} \tag{۱۵}$$

یوں مساوات ۱۴ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (\text{شرح آمد کیمیا}) - \frac{y(t)}{V(t)} \cdot (\text{شرح انعکاس مائع}) \tag{۱۶}$$

سوال ۷.۷۵۷: ایک حوض میں ابتدائی طور پر 500 لٹر نمکین پانی پایا جاتا ہے جس میں 25 kg نمک حل ہے۔ اس حوض میں $5\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ شرح سے نمکین پانی داخلی ہوتا ہے جس میں $0.4\,\mathrm{kg\,L^{-1}}$ نمک ملا ہوا ہے جبکہ حوض سے نمکین پانی کا انخلا $4\,\mathrm{L\,min^{-1}}$ ہے۔ حوض میں نمکین پانی کو مسلسل ہلا کر یکساں رکھا جات ہے۔

ا. حوض میں نمک داخل ہونے کی شرح ($\mathrm{kg\,min^{-1}}$) کیا ہے؟

ب. لمحہ t پر حوض میں نمکین پانی کا حجم کتنا ہے؟

ج. لمحہ t پر نمک کس شرح ($\mathrm{kg\,min^{-1}}$) سے حوض سے خارج ہوتا ہے؟

د. مرکب بنانے کے اس عمل کا ابتدائی قیمت مسئلہ لکھیں اور اس کو حل کریں۔

ھ. عمل شروع ہونے کے 25 منٹ بعد حوض میں نمک کا ارتکاز کتنا ہو گا؟

سوال ۷.۷۵۸: تیل صاف سازی کے کارخانہ میں ایک حوض میں $10\,000\ \mathrm{L}$ تیل پایا جاتا ہے جس میں ابتدائی طور پر $50\ \mathrm{kg}$ اضافی مادّہ شامل ہے۔ سردی کے موسم کی وجہ سے اس میں $0.4\ \mathrm{kg}$ فی لٹر اضافی مواد کو $200\ \mathrm{L\,min^{-1}}$ شامل کیا جاتا ہے۔ حوض میں تیل کو اچھی طرح ہلا کر یکساں رکھا جاتا ہے۔ حوض سے مرکب کے انعکاس کی شرح $225\ \mathrm{L\,min^{-1}}$ ہے۔ اس عمل کے شروع ہونے کے 20 منٹ بعد حوض میں اضافی مواد کی مقدار معلوم کریں۔

سوال ۷.۷۵۹: ایک حوض میں $500\ \mathrm{L}$ خالص پانی پایا جاتا ہے۔ ایک محلول جس میں $0.1\ \mathrm{kg\,L^{-1}}$ پایا کھاد پایا جاتا ہے کو $5\ \mathrm{L\,min^{-1}}$ شرح سے حوض میں شامل کیا جاتا ہے۔ حوض سے محلول کا انعکاس $15\ \mathrm{L\,min^{-1}}$ ہے۔ حوض میں کھاد کی اعظم مقدار معلوم کریں اور اس مقدار تک پہنچنے کے لیے درکار وقت معلوم کریں۔

سوال ۷.۷۶۰: دفتر کے ایک کمرے میں ابتدائی طور پر $150\ \mathrm{m^3}$ صاف ہوا پائی جاتی ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر قریبی کمرے میں موجود افسران سگریٹ نوشی شروع کرتے ہیں جس کی وجہ سے $4\ \%$ زہریلی کاربن مونو اکسائڈ $0.01\ \mathrm{m^3\,min^{-1}}$ شرح سے اس کمرے میں داخل ہوتی ہے جہاں ایک پنکھا پوری ہوا کو یکساں رکھتا ہے۔ اس کمرے سے ہوا کا انخلا $0.01\ \mathrm{m^3\,min^{-1}}$ ہے۔ اس کمرے میں کب زہریلی گیس $0.01\ \%$ ہو گی؟

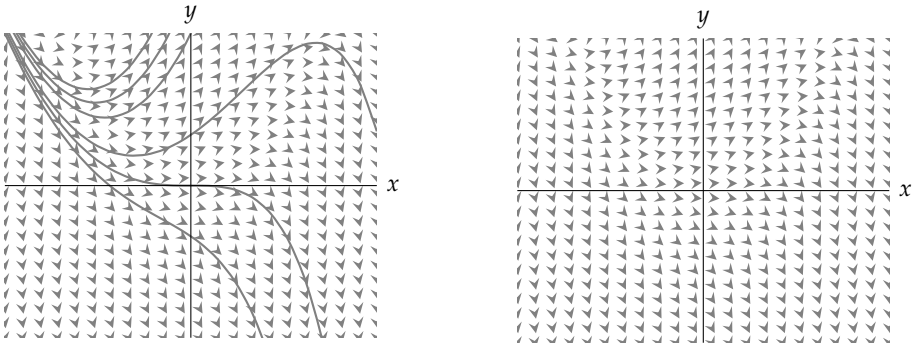
۷.۱۲ یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان

بعض اوقات ہم ابتدائی قیمت مسئلہ $y = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ کا بالکل درست حل معلوم نہیں کر سکتے ہیں یا نہیں کرنا چاہتے ہیں۔ ایسی صورت میں ہم عموماً کمپیوٹر استعمال کرتے ہوئے موزوں وقفہ پر ہر x کے لیے y کی تخمینی قیمت تلاش کر سکتے ہیں۔ ایسے حل کو ہم **اعدادی حل**[۳۸] کہتے ہیں اور اس حل کو حاصل کرنے کے طریقہ کو **اعدادی ترکیب**[۳۹] کہتے ہیں۔ اعدادی تراکیب عموماً بہت کم وقت میں درست نتائج دیتے ہیں اور جہاں بھی تحلیلی حل ناممکن، غیر ضروری یا پیچیدہ ہو، وہاں اعدادی تراکیب کو ترجیح دی جاتی ہے۔ اس حصہ میں ہم ایسے ایک ترکیب پر غور کرتے ہیں جس کو **ترکیب یولر**[۴۰] کہتے ہیں۔

میدان ڈھلوان

ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ تفرقی مساوات $y' = f(x, y)$ پر یہ شرط مسلط کرتی ہے کہ تفرقی مساوات کا حل نقطہ (x_0, y_0) سے گزرے گا اور اس نقطہ ہر حل کا ڈھلوان $f(x_0, y_0)$ ہو گا۔ ہم f کے دائرہ کار میں منتخب نقطوں (x, y) پر $f(x, y)$ ڈھلوان والے قلیل

[۳۸] numericalsolution
[۳۹] numericalmethod
[۴۰] Euler'method



(ا) میدان ڈھلوان (ب) میدان ڈھلوان پر مخصوص منحنی حل۔

شکل ۷.۷۱: تفرقی مساوات $y' = y - x^2$ کے میدان ڈھلوان پر منحنی حل ترسیم کی گئی ہیں۔ کمپیوٹر پر میدان ڈھلوان کو عموماً سمتیات سے ظاہر کیا جاتا ہے اگرچہ ڈھلوان سمتیہ نہیں ہے۔

سیدھے خطوط بنا کر اس ڈھلوان کو تصویری جامہ پہنا سکتے ہیں۔ نقطہ (x, y) سے گزرتے ہوئے حل کا ڈھلوان اس نقطہ پر بنائے گئے قلیل خط کے ڈھلوان کا برابر ہو گا لہٰذا یہ خط اس نقطہ پر حل کا مماس ہو گا۔ ہم ان مماس پر نظر دوڑا کر حل کے رویہ کو جان سکتے ہیں (شکل ۷.۷۱)۔

قلم و کاغذ کے ساتھ میدان ڈھلوان بنانا تھکا دینے والا کام ہے۔ اس کتاب میں تمام مثالوں میں میدان ڈھلوان کمپیوٹر کی مدد سے بنائے گئے۔ آئیں کمپیوٹر کی مدد سے منحنی حل کے حصول پر غور کریں۔

خط بندی کا استعمال

دیے گئے تفرقی مساوات $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ اور ابتدائی معلومات $y(x_0) = y_0$ سے ہم منحنی حل $y = y(x)$ کی تخمین درج ذیل خط بندی

$$L(x) = y(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

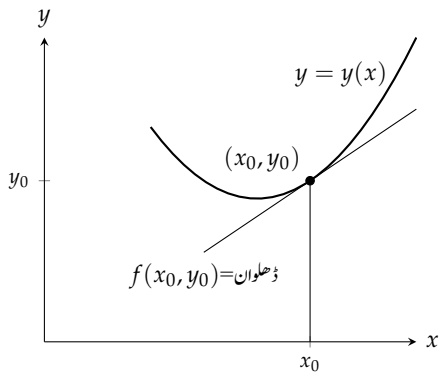
یا

$$L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$$

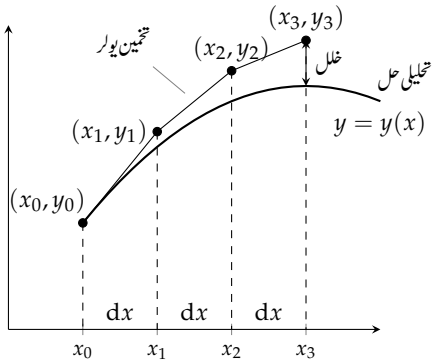
سے کر سکتے ہیں۔ x_0 کی بالکل پڑوس میں تفاعل $L(x)$ اصل حل $y(x)$ کا اچھا تخمین ہو گا (شکل ۷.۷۲)۔ ترکیب یولر میں اس طرح کے خط بندیوں کو آپس میں جوڑ کر زیادہ لمبے فاصلہ کے لیے حل تلاش کیا جاتا ہے۔ اب اس ترکیب پر غور کرتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ نقطہ (x_0, y_0) منحنی حل پر پایا جاتا ہے۔ فرض کریں ہم غیر تابع متغیر کی ایک نئی قیمت $x_0 = x_0 + \mathrm{d}x$ منتخب کرتے ہیں۔ اگر بڑھوتری $\mathrm{d}x$ بہت کم ہو تب

$$y_1 = L(x_1) = y_0 + f(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x$$



شکل ۷.۷۲: خط مماس کی مساوات $y = L(x) = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0)$ ہے۔



شکل ۷.۷۳: ترکیب یولر کی مدد سے ابتدائی قیمت مسئلہ $y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0$ کے ابتدائی تین نقطوں کا حصول۔ ہر قدم پر مجموعی خلل بڑھتا ہے۔

اصل حل $y = y(x_1)$ کا اچھا تخمین ہو گا۔ یوں نقطہ (x_0, y_0) سے، جو ٹھیک منحنی حل پر پایا جاتا ہے، ہم نقطہ (x_1, y_1) حاصل کر پائیں ہیں جو منحنی حل پر نقطہ $(x_1, y(x_1))$ کے بہت قریب ہو گا۔

نقطہ (x_1, y_1) اور ڈھلوان $f(x_1, y_1)$ لیتے ہوئے ہم دوسرا قدم لیتے ہیں۔ ہم $x_2 = x_1 + \mathrm{d}x$ لے کر

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\,\mathrm{d}x$$

سے، منحنی حل $y = y(x)$ کے ساتھ، دوسرا تخمینی نقطہ (x_2, y_2) حاصل کرتے ہیں (شکل ۷.۷۳)۔ اسی طرح چلتے ہوئے تیسرے قدم پر ہم نقطہ (x_2, y_2) اور ڈھلوان $f(x_2, y_2)$ سے

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\,\mathrm{d}x$$

حاصل کرتے ہیں، وغیرہ وغیرہ۔

مثال ۷.۹۰: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلے کے لیے ترکیب یولر کی مدد سے ابتدائی تین تخمین y_1 ، y_2 اور y_3 حاصل کریں۔

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

ابتدا $x_0 = 0$ سے کریں اور $\mathrm{d}x = 0.1$ لیں۔

حل

قدم اول:

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x \\ &= y_0 + (1 + y_0)\,\mathrm{d}x \\ &= 1 + (1 + 1)(0.1) = 1.2 \end{aligned}$$

۱۳۵۱۵ **قدم دوم:**

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\,\mathrm{d}x \\ &= y_1 + (1 + y_1)\,\mathrm{d}x \\ &= 1.2 + (1 + 1.2)(0.1) = 1.42 \end{aligned}$$

۱۳۵۱۶ **قدم سوم:**

$$\begin{aligned} y_3 &= y_2 + f(x_2, y_2)\,\mathrm{d}x \\ &= y_2 + (1 + y_2)\,\mathrm{d}x \\ &= 1.42 + (1 + 1.42)(0.1) = 1.662 \end{aligned}$$

۱۳۵۱۷ □

۱۳۵۱۸ **ترکیب یولر**

۱۳۵۱۹ ترکیب یولر سے ابتدائی قیمت مسئلہ

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

۱۳۵۲۰ کے حل کی تخمینی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اگر ہم غیر تابع متغیر کے منتخب کردہ قیمتوں کے بیچ یکساں فاصلہ رکھیں اور n عدد ایسے نقطے منتخب کریں تب درج ذیل
۱۳۵۲۱ ہوں گے۔

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + \mathrm{d}x \\ x_2 &= x_1 + \mathrm{d}x \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + \mathrm{d}x \end{aligned} \tag{۱}$$

۱۳۵۲۲ اس کے بعد ہم متواتر درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + f(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x \\ y_2 &= y_1 + f(x_1, y_1)\,\mathrm{d}x \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + f(x_{n-1}, y_{n-1})\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{۲}$$

۱۳۵۲۳ ہم قدموں کی تعداد n جتنی چاہیں رکھ سکتے ہیں، البتہ، n کو بہت بڑا رکھنے سے نتائج میں خلل جمع ہو گا۔

جدول ۷.۱۴: تحلیل حل اور ترکیب یولر سے حاصل تخمینی حل کا موازنہ (مثال ۷.۹۱)

x	تخمینی y	تحلیلی y	خلل = تخمینی y − تحلیلی y
0.0	1.0000	1.0000	0.0000
0.1	1.2000	1.2103	0.0103
0.2	1.4200	1.4428	0.0228
0.3	1.6620	1.6997	0.0377
0.4	1.9282	1.9836	0.0554
0.5	2.2210	2.2974	0.0764
0.6	2.5431	2.6442	0.1011
0.7	2.8974	3.0275	0.1301
0.8	3.2872	3.4511	0.1639
0.9	3.7159	3.9192	0.2033
1.0	4.1875	4.4366	0.2491

مثال ۷.۹۱: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ کے لیے وقفہ $0 \leq x \leq 1$ پر ترکیب یولر کی درستگی پر غور کریں۔

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

$x_0 = 0$ سے شروع کریں اور $\mathrm{d}x = 0.1$ لیں۔

حل

اس مسئلے کا بالکل درست تحلیلی حل $y = 2e^x - 1$ ہے۔ جدول ۷.۱۴ میں، مساوات ۱۱ اور مساوات ۱۲ استعمال کرتے ہوئے، ترکیب یولر سے حاصل 4 اعشاریہ مقامات تک درست تخمینی نتائج کا تحلیل حل کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔ دس قدم بعد $x = 1$ تک پہنچ کر ترکیب یولر سے حاصل تخمینی حل میں 5.6 % خلل پایا جاتا ہے۔ □

مثال ۷.۹۲: درج ذیل ابتدائی قیمت مسئلہ کے لیے وقفہ $0 \leq x \leq 1$ پر ترکیب یولر کی درستگی پر غور کریں۔

$$y' = 1 + y, \quad y(0) = 1$$

شروع $x_0 = 0$ سے کریں اور $\mathrm{d}x = 0.05$ لیں۔

حل

جدول ۷.۱۵ میں نتائج اور تحلیلی بالکل ٹھیک حل کے ساتھ موازنہ کیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قدموں کی تعداد 10 سے 20 کرنے سے خلل کم ہوتا ہے۔ اس مرتبہ $x = 1$ پر صرف 2.9 % خلل پایا جاتا ہے۔ □

ایسا معلوم ہوتا ہے کہ ترکیب یولر میں قدموں کی تعداد مزید بڑھا کر اس سے بھی بہتر نتیجہ حاصل ہو گا۔ حقیقت میں ایسا کرنے سے نا صرف کمپیوٹر کو حل حاصل کرنے میں زیادہ وقت درکار ہو گا بلکہ کمپیوٹر میں ہندسوں کی تعداد پر پابندی کی وجہ سے پیدا پورم پور خلل بڑھتا ہے۔

جدول ۷.۱۵: ترکیب یولر میں قدموں کی تعداد بڑھانے سے خلل میں کمی پیدا ہوتی ہے (مثال ۷.۹۲)۔

x	y تخمینی	y تحلیلی	خلل = y تخمینی − y تحلیلی
0.00	1.0000	1.0000	0.0000
0.05	1.1000	1.1025	0.0025
0.10	1.2050	1.2103	0.0053
0.15	1.3153	1.3237	0.0084
0.20	1.4310	1.4428	0.0118
0.25	1.5526	1.5681	0.0155
0.30	1.6802	1.6997	0.0195
0.35	1.8142	1.8381	0.0239
0.40	1.9549	1.9836	0.0287
0.45	2.1027	2.1366	0.0339
0.50	2.2578	2.2974	0.0396
0.55	2.4207	2.4665	0.0458
0.60	2.5917	2.6442	0.0525
0.65	2.7713	2.8311	0.0598
0.70	2.9599	3.0275	0.0676
0.75	3.1579	3.2340	0.0761
0.80	3.3657	3.4511	0.0854
0.85	3.5840	3.6793	0.0953
0.90	3.8132	3.9192	0.1060
0.95	4.0539	4.1714	0.1175
1.00	4.3066	4.4366	0.1300

خلل اور اس کو کم کرنے کے طریقوں پر یہاں غور نہیں کیا جائے گا۔ انہیں سمجھنے کے لیے مزید اعلیٰ درجے کی نصاب درکار ہو گی۔ ترکیب یولر سے زیادہ بہتر اعدادی تراکیب پائے جاتے ہیں جنہیں تفرقی مساوات پڑھنے کے دوران سیکھیں گے۔ اعدادی ترکیب میں قدموں کی تعداد اور خلل کے تعلق پر غور کرنے کے لیے آپ کو سوالات میں موقع ملے گا۔

سوالات

تخمین یولر

سوال ۷.۷۶۱ تا سوال ۷.۷۶۶ میں ترکیب یولر سے دیے گئے ابتدائی قیمت مسئلہ کے اولین تین تخمینی قیمتیں تلاش کریں۔ دیا گیا قدم استعمال کریں۔ مسئلے کا تحلیلی حل تلاش کریں اور اپنے تخمین کی درستگی پر غور کریں۔ اپنے نتائج کو 4 اعشاریہ مقامات تک درست رکھیں۔

سوال ۷.۷۶۱: $y' = 1 - \frac{y}{x}, \quad y(2) = -1, \quad \mathrm{d}x = 0.5$

سوال ۷.۷۶۲: $y' = x(1-y), \quad y(1) = 0, \quad \mathrm{d}x = 0.2$

سوال ۷.۷۶۳: $y' = 2xy + 2y, \quad y(0) = 3, \quad \mathrm{d}x = 0.2$

سوال ۷.۷۶۴: $y' = y^2(1+2x), \quad y(-1) = 1, \quad \mathrm{d}x = 0.5$

سوال ۷.۷۶۵: $y' = 2xe^{x^2}, \quad y(0) = 2, \quad \mathrm{d}x = 0.1$

سوال ۷.۷۶۶: $y' = y + e^x - 2, \quad y(0) = 2, \quad \mathrm{d}x = 0.5$

سوال ۷.۷۶۷: ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے $\mathrm{d}x = 0.2$ لے کر $y' = y,\ y(0) = 1$ کے لیے $y(1)$ تلاش کریں۔ $y(1)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت کتنی ہے؟

سوال ۷.۷۶۸: ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے $\mathrm{d}x = 0.2$ لے کر $y' = \frac{y}{x},\ y(1) = 2$ کے لیے $y(2)$ تلاش کریں۔ $y(2)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت کتنی ہے؟

سوال ۷.۷۶۹: ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے $\mathrm{d}x = 0.5$ لے کر $y' = \frac{y^2}{\sqrt{x}},\ y(1) = -1$ کے لیے $y(5)$ تلاش کریں۔ $y(5)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت کتنی ہے؟

سوال ۷.۷۷۰: ترکیب یولر استعمال کرتے ہوئے $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}$ لے کر $y' = y - e^{2x},\ y(0) = 1$ کے لیے $y(2)$ تلاش کریں۔ $y(2)$ کی ٹھیک ٹھیک قیمت کتنی ہے؟

میدان ڈھلوان

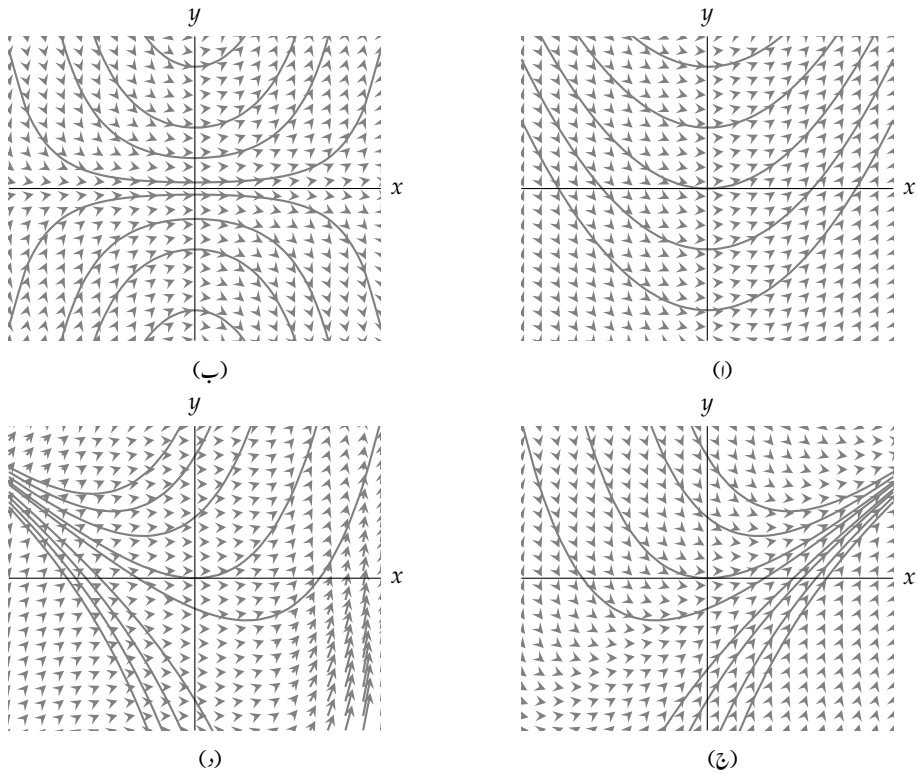
سوال ۷.۷۷۱ تا سوال ۷.۷۷۴ میں دیے گئے تفرقی مساوات کے منحنی حل اور میدان ڈھلوان کی نشاندہی شکل ۷.۴ میں کریں۔

سوال ۷.۷۷۱: $y' = xy$

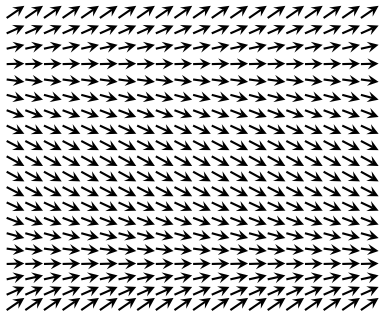
سوال ۷.۷۷۲: $y' = x + y$

سوال ۷.۷۷۳: $y' = x$

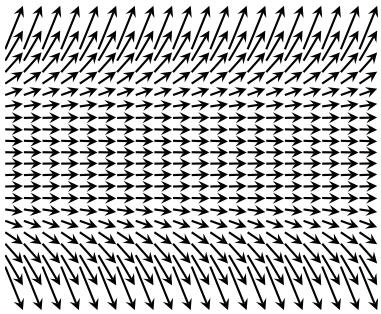
سوال ۷.۷۷۴: $y' = x - y$



شکل ۷.۷۴: میدان ڈھلوان برائے سوال ۷.۷۷۱ تا سوال ۷.۷۷۴



(ا)



(ب)

شکل ۷.۷۵: میدان ڈھلوان برائے سوال ۷.۷۷۵ اور سوال ۷.۷۷۶

۱۳۵۶۴ سوال ۷.۷۷۵ میں شکل ۷.۷۵-ا اور سوال ۷.۷۷۶ میں شکل ۷.۷۵-ب کے میدان ڈھلوان کی نقل اتار کر اس پر منحنی حل کا خاکہ بنائیں۔

۱۳۵۶۵ سوال ۷.۷۷۵: $y' = (y+2)(y-2)$

۱۳۵۶۶ سوال ۷.۷۷۶: $y' = y(y+1)(y-1)$

۱۳۵۶۷

۱۳۵۶۸ سوال ۷.۷۷۷ تا سوال ۷.۷۸۰ میں میدان ڈھلوان کا کچھ حصہ کھینچ کر دیے گئے نقطہ سے گزرتی ہوئی منحنی حل کا خاکہ بنائیں۔

۱۳۵۶۹ سوال ۷.۷۷۷: $y' = y$ اور نقاط (ا) $(0,1)$، (ب) $(0,2)$، (ج) $(0,-1)$

۱۳۵۷۰ سوال ۷.۷۷۸: $y' = 2(y-4)$ اور نقاط (ا) $(0,1)$، (ب) $(0,4)$، (ج) $(0,5)$

۱۳۵۷۱ سوال ۷.۷۷۹: $y' = y(2-y)$ اور نقاط (ا) $(0,1/2)$، (ب) $(0,3/2)$، (ج) $(0,2)$، (د) $(0,3)$

۱۳۵۷۲ سوال ۷.۷۸۰: $y' = y^2$ اور نقاط (ا) $(0,1)$، (ب) $(0,2)$، (ج) $(0,-1)$، (د) $(0,0)$

۱۳۵۷۳ **کمپیوٹر کا استعمال**

۱۳۵۷۴ سوال ۷.۷۸۱ تا سوال ۷.۷۸۴ میں دیے گئے تفرقی مساوات پر درج ذیل اقدام کرتے ہوئے ترسیمی غور کریں۔

۱۳۵۷۵ ا. دیے گئے تفرقی مساوات کا میدان ڈھلوان مستوی xy میں کھینچیں۔

۱۳۵۷۶ ب. تفرقی مساوات کا عمومی حل کمپیوٹر کے کسی ریاضی کے پروگرام کی مدد سے حاصل کریں۔

۱۳۵۷۷ ج. اختیاری مستقل $C = -2, -1, 0, 1, 2$ لیتے ہوئے منحنی حل کو میدان ڈھلوان کے اوپر ترسیم کریں۔

۱۳۵۷۸ د. دیے گئے مسئلے کا تحلیلی حل وقفہ $[0, b]$ پر تلاش کر کے ترسیم کریں۔

۱۳۵۷۹ ھ. دیے گئے وقفہ کو 4 ذیلی وقفوں میں تقسیم کرتے ہوئے یولر تخمین کو بھی میدان ڈھلوان کے اوپر ترسیم کریں۔

۱۳۵۸۰ و. جزو-ہ کو 8 ، 16 اور 32 ذیلی وقفوں کے لیے دوبارہ حل کر کے جزو-ہ کے نتائج کے اوپر ترسیم کریں۔

ز. نقطہ $x = b$ پر چاروں یولر تخمین میں خلل تلاش کریں۔ نتائج کی بہتری پر تبصرہ کریں۔

سوال ۷.۷۸۱: $y' = x + y,\ y(0) = -\frac{7}{10};\ -4 \le x \le 4,\ -4 \le y \le 4;\ b = 1$

سوال ۷.۷۸۲: $y' = -\frac{x}{y},\ y(0) = 2;\ -3 \le x \le 3,\ -3 \le y \le 3;\ b = 2$

سوال ۷.۷۸۳: $y' = y(2 - y),\ y(0) = \frac{1}{2};\ 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 3;\ b = 3$

سوال ۷.۷۸۴: $y' = (\sin x)(\sin y),\ y(0) = 2;\ -6 \le x \le 6,\ -6 \le y \le 6;\ b = \frac{3\pi}{2}$

سوال ۷.۷۸۵ اور سوال ۷.۷۸۶ کا بنیادی تفاعل کی صورت میں صریح حل نہیں پایا جاتا ہے۔ ان تفرقی مساوات پر ترسیمی غور کریں۔ مذکورہ بالا جزو-الف تا جزو-ز میں اعظم کرنے کی کوشش کریں۔

سوال ۷.۷۸۵: $y' = \cos(2x - y),\ y(0) = 2;\ 0 \le x \le 5,\ 0 \le y \le 5;\ y(2)$

سوال ۷.۷۸۶: $y' = y(\frac{1}{2} - \ln y),\ y(0) = \frac{1}{3},\ 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 3;\ y(3)$

سوال ۷.۷۸۷: ابتدائی قیمت مسئلہ $y' + y = f(x),\ y(0) = 0$ کا حل کمپیوٹر کی مدد سے حاصل کریں جہاں $f(x)$ درج ذیل ہے۔

(ا) $2x$، (ب) $\sin 2x$، (ج) $3e^{x/2}$، (د) $2e^{-x/2}\cos 2x$

تمام حل کا ایک دوسرے کے ساتھ موازنہ کرنے کی خاطر انہیں وقفہ $-2 \le x \le 6$ پر ایک ساتھ ترسیم کریں۔

سوال ۷.۷۸۸: (ا) درج ذیل تفرقی مساوات کے میدان ڈھلوان کا خاکہ وقفہ $-3 \le x \le 3,\ -3 \le y \le 3$ کے لیے کھینچیں۔

$$y' = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y - 1)}$$

(ب) متغیرات کی علیحدگی کے بعد کمپیوٹر کے ریاضی پروگرام کی مدد سے تکمل کرتے ہوئے خفی حل تلاش کریں۔ (ج) جزو-ب کے نتیجہ کو مستقل $C = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$ کے لیے ترسیم کریں۔ (د) اس حل کو ترسیم کریں جو ابتدائی شرط $y(0) = -1$ کو مطمئن کرتا ہو۔

جوابات

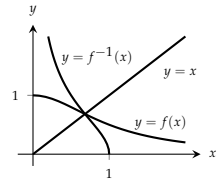
حصہ ۷.۱ صفحہ ۶۵۲

۷.۱) یک بہ یک

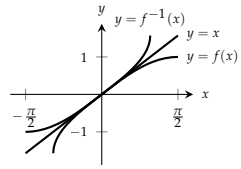
۷.۳) غیر یک بہ یک

۷.۵) یک بہ یک

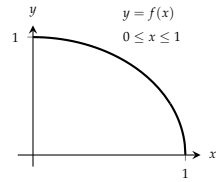
۷.۷) دائرہ کار $(0,1]$، سعت $[0,\infty)$



۷.۹) دائرہ کار $[-1,1]$، سعت $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$



۷.۱۱) لکیر $y = x$ کے لحاظ سے تشاکلی ہے۔



۷.۱۳) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

۷.۱۵) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

۷.۱۷) $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1$

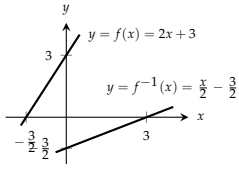
۷.۱۹) $f^{-1}(x) = \sqrt[5]{x}$ دائرہ کار $-\infty < x < \infty$، سعت $-\infty < y < \infty$

۷.۲۱) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ دائرہ کار $-\infty < x < \infty$، سعت $-\infty < y < \infty$

۷.۲۳) $f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ دائرہ کار $x > 0$، سعت $y > 0$

۷.۲۵) (ا) $f^{-1}(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$

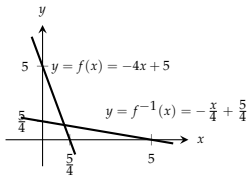
(ب)



(ج) $2, \frac{1}{2}$

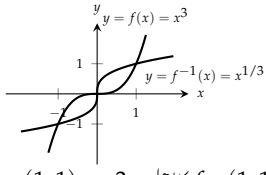
۷.۲۷) (ا) $f^{-1}(x) = -\frac{x}{4} + \frac{5}{4}$

(ب)



(ج) $-4, -\frac{1}{4}$

۷.۲۹) (ب)



(ج) $(1,1)$ پر f کا ڈھلوان 3 ہے؛ $(1,1)$ پر g کا ڈھلوان $\frac{1}{3}$ ہے؛ $-1,-1$ پر f کا ڈھلوان 3 اور $(-1,-1)$ پر g ڈھلوان $\frac{1}{3}$ ہے۔(د) $x = 0$ پر $y = x^3$ کا مماس

۲۶۶۵۱ $y = 0$ ہے؛ $x = 0$ پر $y = \sqrt[3]{x}$ کا مماس $y = 0$

۲۶۶۵۲ ہے۔

۲۶۶۵۳ (۷.۳۱ $\frac{1}{9}$

۲۶۶۵۴ (۷.۳۳ 3

۲۶۶۵۵ (۷.۳۵ (ا) $f^{-1}(x) = \frac{x}{m}$، (ب) f^{-1} کی ترسیم مبدا سے گزرتی

۲۶۶۵۶ ہے اور اس کا ڈھلوان $\frac{1}{m}$ ہے۔

۲۶۶۵۷ (۷.۳۷ (ا) $f^{-1}(x) = x - 1$، (ب) $f^{-1}(x) =$

۲۶۶۵۸ $x - b$، f^{-1} کی ترسیم f کی ترسیم کے متوازی ہے۔

۲۶۶۵۹ اور f کی ترسیمات لکیر $y = x$ کے مخالف اطراف میں اور اس لکیر

۲۶۶۶۰ سے برابر فاصلہ پر ہیں۔ (ج) ترسیمات ایک دوسرے کے متوازی ہوں

۲۶۶۶۱ گے اور لکیر $y = x$ کے مخالف اطراف اور برابر فاصلہ پر ہوں گے۔

۲۶۶۶۲ (۷.۴۱ بڑھتا، لہٰذا ایک بہ یک؛ $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{9}x^{-2/3}$

۲۶۶۶۳ (۷.۴۳ گھٹتا، لہٰذا ایک بہ یک؛ $\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{3}x^{-2/3}$

۲۶۶۶۴ حصہ ۷.۲ صفحہ ۶۶۸

۲۶۶۶۵ (۷.۶۳ (ا) $\ln 3 - 2\ln 2$، (ب) $2(\ln 2 - \ln 3)$، (ج)

۲۶۶۶۶ $-\ln 2$، (د) $\frac{2}{3}\ln 3$، (ہ) $\frac{1}{2}\ln 2 + \ln 3$؛ (و)

۲۶۶۶۷ $\frac{1}{2}(3\ln 3 - \ln 2)$

۲۶۶۶۸ (۷.۶۵ (ا) $\ln 5$، (ب) $\ln(x-3)$، (ج) $\ln(t^2)$

۲۶۶۶۹ (۷.۶۷ $\frac{1}{x}$

۲۶۶۷۰ (۷.۶۹ $\frac{2}{t}$

۲۶۶۷۱ (۷.۷۱ $-\frac{1}{x}$

۲۶۶۷۲ (۷.۷۳ $\frac{1}{\theta+1}$

۲۶۶۷۳ (۷.۷۵ $\frac{3}{x}$

۲۶۶۷۴ (۷.۷۷ $2\ln t + (\ln t)^2$

۲۶۶۷۵ (۷.۷۹ $x^3 \ln x$

۲۶۶۷۶ (۷.۸۱ $\frac{1-\ln t}{t^2}$

۲۶۶۷۷ (۷.۸۳ $\frac{1}{x(1+\ln x)^2}$

۲۶۶۷۸ (۷.۸۵ $\frac{1}{x\ln x}$

۲۶۶۷۹ (۷.۸۷ $2\cos(\ln\theta)$

۲۶۶۸۰ (۷.۸۹ $-\frac{3x+2}{2x(x+1)}$

۲۶۶۸۱ (۷.۹۱ $\frac{2}{t(1-\ln t)^2}$

۲۶۶۸۲ (۷.۹۳ $\frac{\tan(\ln\theta)}{\theta}$

۲۶۶۸۳ (۷.۹۵ $\frac{10x}{x^2+1} + \frac{1}{2(1-x)}$

۲۶۶۸۴ (۷.۹۷ $2x\ln|x| - x\ln\frac{|x|}{\sqrt{2}}$

۲۶۶۸۵ (۷.۹۹ $\frac{1}{2}\sqrt{x(x+1)}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}}$

۲۶۶۸۶ (۷.۱۰۱ $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{t}{t+1}}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{t}(t+1)^{3/2}}$

۲۶۶۸۷ (۷.۱۰۳ $\sqrt{\theta+3}(\sin\theta)\left(\frac{1}{2(\theta+3)} + \cot\theta\right)$

۲۶۶۸۸ (۷.۱۰۵ $t(t+1)(t+2)[\frac{1}{t} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t+2}] = 3t^2 + 6t + 2$

۲۶۶۸۹

۲۶۶۹۰ (۷.۱۰۷ $\frac{\theta+5}{\theta\cos\theta}[\frac{1}{\theta+5} - \frac{1}{\theta} + \tan\theta]$

۲۶۶۹۱ (۷.۱۰۹ $\frac{x\sqrt{x^2+1}}{(x+1)^{2/3}}[\frac{1}{x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{2}{3(x+1)}]$

۲۶۶۹۲ (۷.۱۱۱ $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - \frac{2x}{x^2+1}\right)$

۲۶۶۹۳ (۷.۱۱۳ $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

۲۶۶۹۴ (۷.۱۱۵ $\ln\left|y^2 - 25\right| + C$

۲۶۶۹۵ (۷.۱۱۷ $\ln 3$

۲۶۶۹۶ (۷.۱۱۹ $(\ln 2)^2$

۲۶۶۹۷ (۷.۱۲۱ $\frac{1}{\ln 4}$

۲۶۶۹۸ (۷.۱۲۳ $\ln|6 + 3\tan t| + C$

۲۶۶۹۹ (۷.۱۲۵ $\ln 2$

۲۶۷۰۰ (۷.۱۲۷ $\ln 27$

۲۶۷۰۱ (۷.۱۲۹ $\ln(1+\sqrt{x}) + C$

۲۶۷۰۲ (۷.۱۳۱ (ا) $x = 0$ پر بلند تر 0 اور $x = \frac{\pi}{3}$ پر کم تر $-\ln 2$؛

۲۶۷۰۳ (ب) $x = 1$ پر بلند تر 1 اور $x = \frac{1}{2}$ پر کم تر

۲۶۷۰۴ $\cos(\ln 2)$

۲۶۷۰۵ (۷.۱۳۳ $\ln 16$

۲۶۷۰۶ (۷.۱۳۵ $4\pi\ln 4$

۲۶۷۰۷ (۷.۱۳۷ $\pi\ln 16$

۲۶۷۰۸ (۷.۱۳۹ (ا) $6 + \ln 2$، (ب) $8 + \ln 9$

۲۶۷۰۹ (۷.۱۴۱ (ا) $\bar{x} \approx 1.44,\ \bar{y} \approx 0.36$

۲۶۷۱۰ (۷.۱۴۳ $y = x + \ln|x| + 2$

۲۶۷۱۱ (۷.۱۴۵ (ب) 0.00469

۲۶۷۱۲ (۷.۱۴۷ 2

۲۶۷۱۳ حصہ ۷.۳ صفحہ ۶۸۰

۲۶۷۱۴ (۷.۱۵۳ (ا) 7.2، (ب) $\frac{1}{x^2}$، (ج) $\frac{x}{y}$

۲۶۷۱۵ (۷.۱۵۵ (ا) 1، (ب) 1، (ج) $-x^2 - y^2$

۲۶۷۱۶ (۷.۱۵۷ e^{2t+4}

۲۶۷۱۷ (۷.۱۵۹ $e^{5t} + 40$

۲۶۷۱۸ (۷.۱۶۱ $y = 2xe^x + 1$

۲۶۷۱۹ (۷.۱۶۳ (ا) $k = \ln 2$، (ب) $k = \frac{1}{10}\ln 2$،

۲۶۷۲۰ (ج) $k = 1000\ln a$

۲۶۷۲۱ (۷.۱۶۵ (ا) $t = -10\ln 3$، (ب) $t = -\frac{\ln 2}{k}$،

۲۶۷۲۲ (ج) $t = \frac{\ln 0.4}{\ln 0.2}$

۲۶۷۲۳ (۷.۱۶۷ $4(\ln x)^2$

۲۶۷۲۴ (۷.۱۶۹ $-5e^{-5x}$

۲۶۷۲۵ (۷.۱۷۱ $-7e^{5-7x}$

۲۶۷۲۶ (۷.۱۷۳ xe^x

۲۶۷۲۷ (۷.۱۷۵ x^2e^x

۲۶۷۲۸ (۷.۱۷۷) $2e^{\theta}\cos\theta$

۲۶۷۲۹ (۷.۱۷۹) $2\theta e^{-\theta^2}\sin(e^{-\theta^2})$

۲۶۷۳۰ (۷.۱۸۱) $\frac{1-t}{t}$

۲۶۷۳۱ (۷.۱۸۳) $\frac{1}{1+e^{\theta}}$

۲۶۷۳۲ (۷.۱۸۵) $e^{\cos t}(1-t\sin t)$

۲۶۷۳۳ (۷.۱۸۷) $\frac{\sin x}{x}$

۲۶۷۳۴ (۷.۱۸۹) $\frac{ye^{y}\cos x}{1-ye^{y}\sin x}$

۲۶۷۳۵ (۷.۱۹۱) $\frac{2e^{2x}-\cos(x+3y)}{3\cos(x+3y)}$

۲۶۷۳۶ (۷.۱۹۳) $\frac{1}{3}e^{3x}-5e^{-x}+C$

۲۶۷۳۷ (۷.۱۹۵) 1

۲۶۷۳۸ (۷.۱۹۷) $8e^{x+1}+C$

۲۶۷۳۹ (۷.۱۹۹) 2

۲۶۷۴۰ (۷.۲۰۱) $2e^{\sqrt{r}}+C$

۲۶۷۴۱ (۷.۲۰۳) $-e^{-t^2}+C$

۲۶۷۴۲ (۷.۲۰۵) $-e^{1/x}+C$

۲۶۷۴۳ (۷.۲۰۷) e

۲۶۷۴۴ (۷.۲۰۹) $\frac{1}{\pi}e^{\sec\pi t}+C$

۲۶۷۴۵ (۷.۲۱۱) 1

۲۶۷۴۶ (۷.۲۱۳) $\ln(1+e^{r})+C$

۲۶۷۴۷ (۷.۲۱۵) $y=1-\cos(e^{t}-2)$

۲۶۷۴۸ (۷.۲۱۷) $y=2(e^{-x}+x)-1$

۲۶۷۴۹ (۷.۲۱۹) نقطہ $x=0$ پر مطلق اعظم 1؛ نقطہ $x=\ln 2$ پر مطلق اقل

۲۶۷۵۰ $2-2\ln 2$

۲۶۷۵۱ (۷.۲۲۱) $x=\frac{1}{\sqrt{e}}$ پر مطلق اعظم $\frac{1}{2e}$

۲۶۷۵۲ (۷.۲۲۳) 2

۲۶۷۵۳ (۷.۲۲۵) $y=e^{x/2}-1$

۲۶۷۵۴ (۷.۲۲۷) (ا) $\frac{d}{dx}(x\ln x-x+C)=x\cdot\frac{1}{x}+\ln x-1$

۲۶۷۵۵ $1+0=\ln x$، (ب) $\frac{1}{e-1}$

۲۶۷۵۶ (۷.۲۲۹) (ب) حتمی خلل تقریباً 0.02140

۲۶۷۵۷ (۷.۲۳۱) 2.718 281 83

۲۶۷۵۸ حصہ ۷.۴ صفحہ ۶۹۵

۲۶۷۵۹ (۷.۲۳۵) (ا) 7، (ب) $\sqrt{2}$، (ج) 75، (د) 2، (ھ) 0.5، (و) -1

۲۶۷۶۰ (۷.۲۳۷) (ا) $\sqrt{x}$، (ب) x^2، (ج) $\sin x$

۲۶۷۶۱ (۷.۲۳۹) (ا) $\frac{\ln 3}{\ln 2}$، (ب) 3، (ج) 2

۲۶۷۶۲ (۷.۲۴۱) $x=12$

۲۶۷۶۳ (۷.۲۴۳) $x=3$ یا $x=2$

۲۶۷۶۴ (۷.۲۴۵) $2^{x}\ln x$

۲۶۷۶۵ (۷.۲۴۷) $(\frac{\ln 5}{2\sqrt{s}})5^{\sqrt{s}}$

۲۶۷۶۶ (۷.۲۴۹) $\pi x^{\pi-1}$

۲۶۷۶۷ (۷.۲۵۱) $-\sqrt{2}\cos\theta^{(\sqrt{2}-1)}\sin\theta$

۲۶۷۶۸ (۷.۲۵۳) $7^{\sec\theta}(\ln 7)^2(\sec\theta\tan\theta)$

۲۶۷۶۹ (۷.۲۵۵) $(3\cos 3t)(2^{\sin 3t})\ln 2$

۲۶۷۷۰ (۷.۲۵۷) $\frac{1}{\theta\ln 2}$

۲۶۷۷۱ (۷.۲۵۹) $\frac{3}{x\ln 4}$

۲۶۷۷۲ (۷.۲۶۱) $\frac{2(\ln r)}{r(\ln 2)(\ln 4)}$

۲۶۷۷۳ (۷.۲۶۳) $\frac{-2}{(x+1)(x-1)}$

۲۶۷۷۴ (۷.۲۶۵) $\sin(\log_7\theta)+\frac{1}{\ln 7}\cos(\log_7\theta)$

۲۶۷۷۵ (۷.۲۶۷) $\frac{1}{\ln 5}$

۲۶۷۷۶ (۷.۲۶۹) $\frac{1}{t}(\log_2 3)3^{\log_2 t}$

۲۶۷۷۷ (۷.۲۷۱) $\frac{1}{t}$

۲۶۷۷۸ (۷.۲۷۳) $(x+1)^{x}(\frac{x}{x+1}+\ln(x+1))$

۲۶۷۷۹ (۷.۲۷۵) $(\sqrt{t})^{t}(\frac{\ln t}{2}+\frac{1}{2})$

۲۶۷۸۰ (۷.۲۷۷) $(\sin x)^{x}(\ln\sin x+x\cot x)$

۲۶۷۸۱ (۷.۲۷۹) $(x^{\ln x})(\frac{\ln x^2}{x})$

۲۶۷۸۲ (۷.۲۸۱) $\frac{5^{x}}{\ln 5}+C$

۲۶۷۸۳ (۷.۲۸۳) $\frac{1}{2\ln 2}$

۲۶۷۸۴ (۷.۲۸۵) $\frac{1}{\ln 2}$

۲۶۷۸۵ (۷.۲۸۷) $\frac{6}{\ln 7}$

۲۶۷۸۶ (۷.۲۸۹) 32760

۲۶۷۸۷ (۷.۲۹۱) $\frac{3x^{(\sqrt{3}+1)}}{\sqrt{3}+1}+C$

۲۶۷۸۸ (۷.۲۹۳) $3^{\sqrt{2}+1}$

۲۶۷۸۹ (۷.۲۹۵) $\frac{1}{\ln 10}(\frac{(\ln x)^2}{2})+C$

۲۶۷۹۰ (۷.۲۹۷) $2(\ln 2)^2$

۲۶۷۹۱ (۷.۲۹۹) $\frac{3\ln 2}{2}$

۲۶۷۹۲ (۷.۳۰۱) $\ln 10$

۲۶۷۹۳ (۷.۳۰۳) $(\ln 10)\ln|\ln x|+C$

۲۶۷۹۴ (۷.۳۰۵) $\ln(\ln x),\ x>1$

۲۶۷۹۵ (۷.۳۰۷) $-\ln x$

۲۶۷۹۶ (۷.۳۰۹) $2\ln 5$

۲۶۷۹۷ (۷.۳۱۱) $[10^{-7.44}, 10^{-7.37}]$

۲۶۷۹۸ (۷.۳۱۳) $k=10$

۲۶۷۹۹ (۷.۳۱۵) (ا) 10^{-7}، (ب) 7، (ج) $1:1$

۲۶۸۰۰ (۷.۳۱۷) $x\approx -0.76666$

۲۶۸۰۱ (۷.۳۱۹) (ا) $L(x)=1+(\ln 2)x\approx 0.69x+1$

۲۶۸۰۲ (۷.۳۲۱) (ا) 1.89279، (ب) -0.35621، (ج) 0.94575،

۲۶۸۰۳ (د) -2.80735، (ھ) 5.29595، (و) 0.97041،

۲۶۸۰۴ (ز) -1.03972، (ح) -1.61181

۲۶۸۰۵ حصہ ۷.۵ صفحہ ۷۱۰

۲۶۸۰۶ (۷.۳۲۳) (ا) $-0.000\,01$، (ب) 10.536 سال، (ج) 82 %

۲۶۸۰۷ (۷.۳۲۵) 54.88 g

۲۶۸۰۸ (۷.۳۲۷) 19.93 m

۲۶۸۰۹ (۷.۳۲۹) 2.8147497×10^{14}

۲۶۸۱۰ (۷.۳۳۱) (ا) 8 سال، (ب) 32.02 سال

۲۶۸۱۱ (۷.۳۳۳) 15.28 سال

۲۶۸۱۲ (۷.۳۳۵) (ا) $A_0e^{0.2}$، (ب) 17.33 سال، (ج) 27.74 سال

۲۶۸۱۳ (۷.۳۳۷) 4.50 %

۲۶۸۱۴ (۷.۳۳۹) 0.585 دن

۲۶۸۱۵ (۷.۳۴۳) (ا) 17.5 منٹ، (ب) 13.26 منٹ

۲۶۸۱۶ (۷.۳۴۵) $-3\,^\circ\mathrm{C}$

۲۶۸۱۷ (۷.۳۴۷) تقریباً 6658 سال

۲۶۸۱۸ (۷.۳۴۹) 41 سال پرانا

۲۶۸۱۹ حصہ ۷.۶ صفحہ ۷۲۰

۲۶۸۲۰ (۷.۳۵۰) $\frac{1}{4}$

۲۶۸۲۱ (۷.۳۵۲) $-\frac{23}{7}$

۲۶۸۲۲ (۷.۳۵۴) $\frac{5}{7}$

۲۶۸۲۳ (۷.۳۵۶) 0

۲۶۸۲۴ (۷.۳۵۸) -16

۲۶۸۲۵ (۷.۳۶۰) -2

۲۶۸۲۶ (۷.۳۶۲) $\frac{1}{4}$

۲۶۸۲۷ (۷.۳۶۴) 2

۲۶۸۲۸ (۷.۳۶۶) 3

۲۶۸۲۹ (۷.۳۶۸) -1

۲۶۸۳۰ (۷.۳۷۰) $\ln 3$

۲۶۸۳۱ (۷.۳۷۲) $\frac{1}{\ln 2}$

۲۶۸۳۲ (۷.۳۷۴) $\ln 2$

۲۶۸۳۳ (۷.۳۷۶) 1

۲۶۸۳۴ (۷.۳۷۸) $\frac{1}{2}$

۲۶۸۳۵ (۷.۳۸۰) $\ln 2$

۲۶۸۳۶ (۷.۳۸۲) 0

۲۶۸۳۷ (۷.۳۸۴) $-\frac{1}{2}$

۲۶۸۳۸ (۷.۳۸۶) $\ln 2$

۲۶۸۳۹ (۷.۳۸۸) -1

۲۶۸۴۰ (۷.۳۹۰) 1

۲۶۸۴۱ (۷.۳۹۲) $\frac{1}{e}$

۲۶۸۴۲ (۷.۳۹۴) 1

۲۶۸۴۳ (۷.۳۹۶) $\frac{1}{e}$

۲۶۸۴۴ (۷.۳۹۸) $e^{1/2}$

۲۶۸۴۵ (۷.۴۰۰) 1

۲۶۸۴۶ (۷.۴۰۲) 3

۲۶۸۴۷ (۷.۴۰۴) 1

۲۶۸۴۸ (۷.۴۰۶) (ب) درست

۲۶۸۴۹ (۷.۴۰۸) (و) درست

۲۶۸۵۰ (۷.۴۱۰) $c = \frac{25}{10}$

۲۶۸۵۱ حصہ ۷.۷ صفحہ ۷۳۳

۲۶۸۵۲ (۷.۴۲۴) (ا) آہستہ (ب) آہستہ (ج) آہستہ (د) تیز (ہ) آہستہ (و) آہستہ

۲۶۸۵۳ (ز) ایک سا (ح) آہستہ

۲۶۸۵۴ (۷.۴۲۶) (ا) ایک سا (ب) تیز (ج) ایک سا (د) ایک سا (ہ) آہستہ

۲۶۸۵۵ (و) تیز (ز) آہستہ (ح) ایک سا

۲۶۸۵۶ (۷.۴۲۸) (ا) ایک سا (ب) ایک سا (ج) ایک سا (د) تیز

۲۶۸۵۷ (ہ) تیز (و) ایک سا (ز) آہستہ (ح) تیز

۲۶۸۵۸ (۷.۴۳۰) د، ا، ج، ب

۲۶۸۵۹ (۷.۴۳۲) (ا) غلط (ب) غلط (ج) درست (د) درست

۲۶۸۶۰ (ہ) درست (و) درست (ز) غلط (ح) درست

۲۶۸۶۱ (۷.۴۳۶) جب f کا درجہ g کے درجہ سے کم یا اس کے برابر ہو۔

۲۶۸۶۲ (۷.۴۳۸) زیادہ درجے کی کثیر رکنی، کم درجے کی کثیر رکنی سے زیادہ تیز بڑھتی

۲۶۸۶۳ ہے۔ ایک سے درجہ کی کثیر رکنی کی شرح نمو برابر ہوتی ہے۔

۲۶۸۶۴ (۷.۴۴۴) (ب) $\ln(e^{17\,000\,000}) = 17\,000\,000 <$

۲۶۸۶۵ $(e^{17\times 10^6})^{1/10^6} = e^{17} \approx 24\,154\,952.75$

۲۶۸۶۶ (ج) $x \approx 3.4306311 \times 10^{15}$، (د) نقطہ تقاطع

۲۶۸۶۷ $x \approx 3.4306311 \times 10^{15}$ ہے۔

۲۶۸۶۸ (۷.۴۴۶) (ا) جو $O(n \log_2 n)$ قدم چلتا ہے۔

۲۶۸۶۹ (۷.۴۴۸) ترتیبی تلاش کو دس لاکھ قدم چلنا پڑھ سکتا ہے جبکہ ثنائی تلاش میں زیادہ

۲۶۸۷۰ سے زیادہ 20 قدم چلنا ہو گا۔

۲۶۸۷۱ حصہ ۷.۸ صفحہ ۷۴۶

۲۶۸۷۲ (۷.۴۵۰) (ا) $\frac{\pi}{4}$، (ب) $-\frac{\pi}{3}$، (ج) $\frac{\pi}{6}$

۲۶۸۷۳ (۷.۴۵۲) (ا) $-\frac{\pi}{6}$، (ب) $\frac{\pi}{4}$، (ج) $-\frac{\pi}{3}$

۲۶۸۷۴ (۷.۴۵۴) (ا) $\frac{\pi}{3}$، (ب) $\frac{3\pi}{4}$، (ج) $\frac{\pi}{6}$

۲۶۸۷۵ (۷.۴۵۶) (ا) $\frac{3\pi}{4}$، (ب) $\frac{\pi}{6}$، (ج) $\frac{2\pi}{3}$

۲۶۸۷۶ (۷.۴۵۸) (ا) $\frac{\pi}{4}$، (ب) $-\frac{\pi}{3}$، (ج) $\frac{\pi}{6}$

۲۶۸۷۷ (۷.۴۶۰) (ا) $\frac{3\pi}{4}$، (ب) $\frac{\pi}{6}$، (ج) $\frac{2\pi}{3}$

۲۶۸۷۸ (۷.۴۶۲) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\tan\alpha = \frac{5}{12}$,

۲۶۸۷۹ $\sec\alpha = \frac{13}{12}$, $\csc\alpha = \frac{13}{5}$, $\cot\alpha = \frac{12}{5}$

۲۶۸۸۰ (۷.۴۶۴) $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$,

۲۶۸۸۱ $\tan\alpha = -2$, $\csc\alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $\cot\alpha = -\frac{1}{2}$

۲۶۸۸۲ (۷.۴۶۶) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲۶۸۸۳ (۷.۴۶۸) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

۲۶۸۸۴ (۷.۴۷۰) $\frac{4+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$

۲۶۸۸۵ (۷.۴۷۲) 1

۲۶۸۸۶ (۷.۴۷۴) $-\sqrt{2}$

۲۶۸۸۷ (۷.۴۷۶) $\frac{\pi}{6}$

۲۶۸۸۸ (۷.۴۷۷) (جواب $-\frac{\pi}{4}$ نہیں ہے۔)

۲۶۸۸۹ (۷.۴۷۸) $\frac{\sqrt{x^2+4}}{2}$

۲۶۸۹۰ (۷.۴۸۰) $\sqrt{9y^2-1}$

۲۶۸۹۱ (۷.۴۸۲) $\sqrt{1-x^2}$

۲۶۸۹۲ (۷.۴۸۴) $\frac{\sqrt{x^2-2x}}{x-1}$

۲۶۸۹۳ (۷.۴۸۶) $\frac{\sqrt{9-4y^2}}{3}$

۲۶۸۹۴ (۷.۴۸۸) $\frac{\sqrt{x^2-16}}{x}$

۲۶۸۹۵ (۷.۴۹۰) $\frac{\pi}{2}$

۲۶۸۹۶ (۷.۴۹۲) $\frac{\pi}{2}$

۲۶۸۹۷ (۷.۴۹۴) $\frac{\pi}{2}$

۲۶۸۹۸ (۷.۴۹۶) 0

۲۶۸۹۹ (۷.۵۰۰) $\theta = \cos^{-1}(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx 54.7^\circ$

۲۶۹۰۰ (۷.۵۰۶) (ا) معین؛ ایسا زاویہ پایا جاتا ہے جس کا ٹینجنٹ 2 کے برابر ہے۔

۲۶۹۰۱ (ب) غیر معین؛ ایسا کوئی زاویہ نہیں پایا جاتا ہے جس کا کوسائن 2 کے

۲۶۹۰۲ برابر ہو۔

۲۶۹۰۳ (۷.۵۰۸) (ا) غیر معین؛ کسی زاویے کا سیکنٹ 0 نہیں ہے۔ (ب) غیر معین؛ کسی

۲۶۹۰۴ زاویے کا سائن $\sqrt{2}$ نہیں ہے۔

۲۶۹۰۵ (۷.۵۱۰) (ا) 0.84107، (ب) -0.72973، (ج) 0.46365

۲۶۹۰۶ (۷.۵۱۲) (ا) دائرہ کار: تمام حقیقی اعداد ماسوائے وہ جن کی روپ $\frac{\pi}{2} + k\pi$

۲۶۹۰۷ جہاں k عدد صحیح ہے؛ سعت: $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

۲۶۹۰۸ (ب) دائرہ کار: $-\infty < x < \infty$ ؛

۲۶۹۰۹ سعت $-\infty \leq y \leq \infty$

۲۶۹۱۰ (۷.۵۱۴) (ا) دائرہ کار: $-\infty < x < \infty$ ؛ سعت $0 \leq y \leq \pi$

۲۶۹۱۱ (ب) دائرہ کار: $-1 \leq x \leq 1$ ؛

۲۶۹۱۲ سعت $-1 \leq y \leq 1$

۲۶۹۱۳ (۷.۵۱۶) ترسیمات بالکل ایک سی ہیں۔

۲۶۹۱۴ حصہ ۷.۹ صفحہ ۷۵۸

۲۶۹۱۵ (۷.۵۱۸) $\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

۲۶۹۱۶ (۷.۵۲۰) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2t^2}}$

۲۶۹۱۷ (۷.۵۲۲) $\frac{1}{|2s+1|\sqrt{s^2+s}}$

۲۶۹۱۸ (۷.۵۲۴) $\frac{-2x}{(x^2+1)\sqrt{x^4+2x^2}}$

۲۶۹۱۹ (۷.۵۲۶) $\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}$

۲۶۹۲۰ (۷.۵۲۸) $\frac{-1}{2\sqrt{t}(1+t)}$

۲۶۹۲۱ (۷.۵۳۰) $\frac{1}{\tan^{-1}(x(1+x^2))}$

۲۶۹۲۲ (۷.۵۳۲) $\frac{-e^t}{|e^t|\sqrt{(e^t)^2-1}} = \frac{-1}{\sqrt{e^{2t}-1}}$

۲۶۹۲۳ (۷.۵۳۴) $\frac{-2s^2}{\sqrt{1-s^2}}$

۲۶۹۲۴ (۷.۵۳۶) 0

۲۶۹۲۵ (۷.۵۳۸) $\sin^{-1} x$

۲۶۹۲۶ (۷.۵۴۰) $\sin^{-1} \frac{x}{7} + C$

۲۶۹۲۷ (۷.۵۴۲) $\frac{1}{\sqrt{17}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{17}} + C$

۲۶۹۲۸ (۷.۵۴۴) $\frac{1}{\sqrt{2}} \sec^{-1}\left|\frac{5x}{\sqrt{2}}\right| + C$

۲۶۹۲۹ (۷.۵۴۶) $\frac{2\pi}{3}$

۲۶۹۳۰ (۷.۵۴۸) $\frac{\pi}{16}$

۲۶۹۳۱ (۷.۵۵۰) $-\frac{\pi}{12}$

۲۶۹۳۲ (۷.۵۵۲) $\frac{3}{2} \sin^{-1} 2(r-1) + C$

۲۶۹۳۳ (۷.۵۵۴) $\frac{\sqrt{2}}{2} \tan^{-1}(\frac{x-1}{\sqrt{2}}) + C$

۲۶۹۳۴ (۷.۵۵۶) $\frac{1}{4} \sec^{-1}\left|\frac{2x-1}{2}\right| + C$

۲۶۹۳۵ (۷.۵۵۸) π

۲۶۹۳۶ (۷.۵۶۰) $\frac{\pi}{12}$

۲۶۹۳۷ (۷.۵۶۲) $\frac{1}{2} \sin^{-1} y^2 + C$

۲۶۹۳۸ (۷.۵۶۴) $\sin^{-1}(x-2) + C$

۲۶۹۳۹ (۷.۵۶۶) π

۲۶۹۴۰ (۷.۵۶۸) $\frac{1}{2} \tan^{-1}(\frac{y-1}{2}) + C$

۲۶۹۴۱ (۷.۵۷۰) 2π

۲۶۹۴۲ (۷.۵۷۲) $\sec^{-1}|x+1| + C$

۲۶۹۴۳ (۷.۵۷۴) $e^{\sin^{-1} x} + C$

۲۶۹۴۴ (۷.۵۷۶) $\frac{1}{3}(\sin^{-1} x)^3 + C$

۲۶۹۴۵ (۷.۵۷۸) $\ln\left|\tan^{-1} y\right| + C$

۲۶۹۴۶ (۷.۵۸۰) $\sqrt{3} - 1$

۲۶۹۴۷ (۷.۵۸۲) 5

۲۶۹۴۸ (۷.۵۸۴) 2

۲۶۹۴۹ (۷.۵۹۰) $y = \sin^{-1}(x)$

۲۶۹۵۰ (۷.۵۹۲) $y = \sec^{-1}(x) + \frac{2\pi}{3}, \quad x > 1$

۲۶۹۵۱ (۷.۵۹۴) $3\sqrt{5}\,\mathrm{m}$

۲۶۹۵۲ (۷.۵۹۶) جی ہاں، $\sin^{-1}(x)$ اور $\cos^{-1}(x)$ میں فرق مستقل $\frac{\pi}{2}$

۲۶۹۵۳ ہے۔

۲۶۹۵۴ (۷.۶۰۶) $\frac{\pi^2}{2}$

۲۶۹۵۵ (۷.۶۰۸) (ا) $\frac{\pi^2}{2}$ (ب) 2π

۲۶۹۵۶ حصہ ۷.۱۰ صفحہ ۷۷۴

۲۶۹۵۷ (۷.۶۱۴) $\cosh x = \frac{5}{4}$, $\tanh x = -\frac{3}{5}$,

۲۶۹۵۸ $\coth x = -\frac{5}{3}$, $\operatorname{sech} x = \frac{4}{5}$,

۲۶۹۵۹ $\operatorname{csch} x = -\frac{4}{3}$

۲۶۹۶۰ (۷.۶۱۶) $\sinh x = \frac{8}{15}$, $\tanh x = \frac{8}{17}$,

۲۶۹۶۱ $\coth x = \frac{17}{8}$, $\operatorname{sech} x = \frac{15}{17}$,

۲۶۹۶۲ $\operatorname{csch} x = \frac{15}{8}$

۲۶۹۶۳ (۷.۶۱۸) $x + \frac{1}{x}$

۲۶۹۶۴ (۷.۶۲۰) e^{5x}

۲۶۹۶۵ (۷.۶۲۲) e^{4x}

۲۶۹۶۶ (۷.۶۲۶) $2\cosh\frac{x}{3}$

۲۶۹۶۷ (۷.۶۲۸) $\operatorname{sech}^2\sqrt{t}+\frac{\tanh\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$

۲۶۹۶۸ (۷.۶۳۰) $\coth z$

۲۶۹۶۹ (۷.۶۳۲) $(\ln\operatorname{sech}\theta)(\operatorname{sech}\theta\tanh\theta)$

۲۶۹۷۰ (۷.۶۳۴) $\tanh^3 v$

۲۶۹۷۱ (۷.۶۳۶) 2

۲۶۹۷۲ (۷.۶۳۸) $\frac{1}{2\sqrt{x(1+x)}}$

۲۶۹۷۳ (۷.۶۴۰) $\frac{1}{1+\theta}-\tanh^{-1}\theta$

۲۶۹۷۴ (۷.۶۴۲) $\frac{1}{2\sqrt{t}}-\coth^{-1}\sqrt{t}$

۲۶۹۷۵ (۷.۶۴۴) $-\operatorname{sech}^{-1}x$

۲۶۹۷۶ (۷.۶۴۶) $\frac{\ln 2}{\sqrt{1+(1/2)^{2\theta}}}$

۲۶۹۷۷ (۷.۶۴۸) $|\sec x|$

۲۶۹۷۸ (۷.۶۵۴) $\frac{\cosh 2x}{2}+C$

۲۶۹۷۹ (۷.۶۵۶) $12\sinh(\frac{x}{2}-\ln 3)+C$

۲۶۹۸۰ (۷.۶۵۸) $7\ln\left|e^{x/7}+e^{-x/7}\right|+C$

۲۶۹۸۱ (۷.۶۶۰) $\tanh(x-\frac{1}{2})+C$

۲۶۹۸۲ (۷.۶۶۲) $-2\operatorname{sech}\sqrt{t}+C$

۲۶۹۸۳ (۷.۶۶۴) $\ln\frac{5}{2}$

۲۶۹۸۴ (۷.۶۶۶) $\frac{3}{32}+\ln 2$

۲۶۹۸۵ (۷.۶۶۸) $e-e^{-1}$

۲۶۹۸۶ (۷.۶۷۰) $\frac{3}{4}$

۲۶۹۸۷ (۷.۶۷۲) $\frac{3}{8}+\ln\sqrt{2}$

۲۶۹۸۸ (۷.۶۷۴) $\ln\frac{2}{3}$

۲۶۹۸۹ (۷.۶۷۶) $-\frac{\ln 3}{2}$

۲۶۹۹۰ (۷.۶۷۸) $\ln 3$

۲۶۹۹۱ (۷.۶۸۰) (ا) $\sinh^{-1}(\sqrt{3})$ (ب) $\ln(\sqrt{3}+2)$

۲۶۹۹۲ (۷.۶۸۲) (ا) $\coth^{-1}(\frac{5}{4})$ − (ب) $\coth^{-1}(2)$

۲۶۹۹۳ $\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{3})$

۲۶۹۹۴ (۷.۶۸۴) (ا) $-\operatorname{sech}^{-1}(\frac{12}{13})+\operatorname{sech}^{-1}(\frac{4}{5})$

۲۶۹۹۵ (ب) $\ln(\frac{1+\sqrt{1-(12/13)^2}}{12/13})+\ln(\frac{1+\sqrt{1-(4/5)^2}}{4/5})=$

۲۶۹۹۶ $-\ln(\frac{3}{2})+\ln(2)=\ln(\frac{4}{3})$

۲۶۹۹۷ (۷.۶۸۶) (ا) 0 (ب) 0

۲۶۹۹۸ (۷.۶۸۸) (ب) $f(x)=\frac{2f(x)}{2}+0=f(x)$ ، $f(x)=$

۲۶۹۹۹ $0+\frac{2f(x)}{2}=f(x)$

۲۷۰۰۰ (۷.۶۹۰) (ب) $v=\sqrt{\frac{gm}{k}}$ ، (ج) $v=54.6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

۲۷۰۰۱ (۷.۶۹۲) $y=\operatorname{sech}^{-1}(x)-\sqrt{1-x^2}$

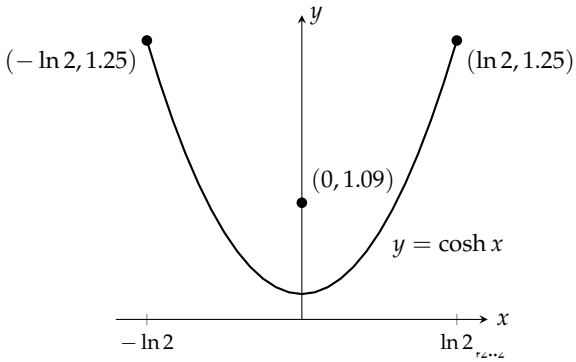
۲۷۰۰۲ (۷.۶۹۴) 2π

۲۷۰۰۳ (۷.۶۹۶) (ا) $\frac{6}{5}$ (ب) $\frac{\sinh ab}{a}$

۲۷۰۰۴ (۷.۶۹۸) (ا) $\bar{x}=0,\ \bar{y}=\frac{5}{8}+\frac{\ln 4}{3}\approx 1.09$

۲۷۰۰۵ (ب)

۲۷۰۰۶



۲۷۰۰۷

۲۷۰۰۸ (۷.۷۰۲) (ج) $a\approx 0.1785413$ (د) $32.93\,\mathrm{N}$

۲۷۰۰۹ حصہ ۷.۱۱ صفحہ ۷۹۳

۲۷۰۱۰ (۷.۷۱۱) $y=\tan(x^2+C)$

۲۷۰۱۱ (۷.۷۱۳) $\frac{2}{3}y^{3/2}-x^{1/2}=C$

۲۷۰۱۲ (۷.۷۱۵) $e^y-e^x=C$

۲۷۰۱۳ (۷.۷۱۷) $y=\frac{e^x+C}{x}$

۲۷۰۱۴ (۷.۷۱۹) $y=\frac{C-\cos x}{x^3},\ x>0$

۲۷۰۱۵ (۷.۷۲۱) $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{C}{x^2},\ x>0$

۲۷۰۱۶ (۷.۷۲۳) $y=\frac{1}{2}xe^{x/2}+Ce^{x/2}$

۲۷۰۱۷ (۷.۷۲۵) $y=x^2e^{-2x}+Ce^{-2x}$

۲۷۰۱۸ (۷.۷۲۷) $-e^{-y}-e^{\sin x}=C$

۲۷۰۱۹ (۷.۷۲۹) $s=\frac{t^3}{3(t-1)^4}-\frac{t}{(t-1)^4}+\frac{C}{(t-1)^4}$

۲۷۰۲۰ (۷.۷۳۱) $2\tan\sqrt{x}=t+C$

۲۷۰۲۱ (۷.۷۳۳) $r=\csc\theta(\ln|\sec\theta|+C)$

۲۷۰۲۲ (۷.۷۳۵) $y=-e^{-x}\operatorname{sech}x+C\operatorname{sech}x$

۲۷۰۲۳ (۷.۷۳۷) $y=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}$

۲۷۰۲۴ (۷.۷۳۹) $y=-\frac{1}{\theta}\cos\theta+\frac{\pi}{2\theta}$

۲۷۰۲۵ (۷.۷۴۱) $y=6e^{x^2}-\frac{e^{x^2}}{x+1}$

۲۷۰۲۶ (۷.۷۴۳) $y=y_0e^{kt}$

۲۷۰۲۷ (۷.۷۴۵) (الف) غلط (ب) درست

۲۷۰۲۸ (۷.۷۴۷) (ا) $c=\frac{G}{100Vk}+(c_0-\frac{G}{100Vk})e^{-kt}$ ، (ب)

۲۷۰۲۹ $\frac{G}{100Vk}$

۲۷۰۳۰ (۷.۷۴۹) 40 منٹ

۲۷۰۳۱ (۷.۷۵۱) (ا) $168\,\mathrm{m}$ ، (ب) تقریباً 70 سیکنڈ

۲۷۰۳۲ (۷.۷۵۳) $t = \frac{L}{R}\ln 2$ سیکنڈ بعد

۲۷۰۳۳ (۷.۷۵۵) (ا) $i = \frac{V}{R} - \frac{V}{R}e^{-3} \approx 0.95\frac{V}{R}$، (ب) 86 %

۲۷۰۳۴ (۷.۷۵۷) (ا) $2\,\mathrm{kg\,min^{-1}}$، (ب) $100 + t$ لٹر،

۲۷۰۳۵ (ج) $\frac{4y}{100+t}\,\mathrm{kg\,min^{-1}}$،

۲۷۰۳۶ (د) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2 - \frac{4y}{100+t}$، $y(0) = 25$،

۲۷۰۳۷ $y(t) = \frac{2}{5}(100+t) - \frac{15}{(1+t/100)^4}$،

۲۷۰۳۸ (ہ) $0.35\,\mathrm{kg\,L^{-1}}$

۲۷۰۳۹ حصہ ۷.۱۲ صفحہ ۸۰۵

۲۷۰۴۰ (۷.۷۶۱) $y_{\text{تحلیلی}} = \frac{x}{2} - \frac{4}{x}$, $y_1 = -0.25$,

$y_2 = 0.3$, $y_3 = 0.75$

۲۷۰۴۱

۲۷۰۴۲ (۷.۷۶۳) $y_{\text{تحلیلی}} = 3e^{x(x+2)}$, $y_1 = 4.2$,

$y_2 = 6.216$, $y_3 = 9.697$

۲۷۰۴۳

۲۷۰۴۴ (۷.۷۶۵) $y_{\text{تحلیلی}} = e^{x^2} + 1$, $y_1 = 2.0$,

$y_2 = 2.0202$, $y_3 = 2.0618$

۲۷۰۴۵

۲۷۰۴۶ (۷.۷۶۷) $y \approx 2.488\,32$، ٹھیک جواب e ہے۔

۲۷۰۴۷ (۷.۷۶۹) $y \approx -0.2272$،

۲۷۰۴۸ ٹھیک جواب $\frac{1}{1-2\sqrt{5}} \approx -0.2880$ ہے۔

۲۷۰۴۹ (۷.۷۷۱) ب

۲۷۰۵۰ (۷.۷۷۳) الف