احصاء اور تحلیلی ہندسہ

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

۱۹ جون ۲۰۲۶

عنوان

۱ ابتدائی معلومات ۱
۱.۱ حقیقی اعداد اور حقیقی خط ۱
۱.۲ محدد، خطوط اور بڑھوتری ۱۳
۱.۳ تفاعل ۲۸
۱.۴ ترسیم کی منتقلی ۴۸
۱.۵ تکونیاتی تفاعل ۶۵

۲ حدود اور استمرار ۸۵
۲.۱ تبدیلی کی شرح اور حد ۸۵
۲.۲ حد تلاش کرنے کے قواعد ۱۰۰
۲.۳ مطلوبہ قیمتیں اور حد کی باضابطہ تعریف ۱۱۲
۲.۴ تصور حد کی توسیع ۱۳۰
۲.۵ استمرار ۱۴۸
۲.۶ مماسی خط ۱۶۴

۳ تفرق ۱۷۷
۳.۱ تفاعل کا تفرق ۱۷۷
۳.۲ قواعد تفرق ۱۹۶
۳.۳ تبدیلی کی شرح ۲۱۳
۳.۴ تکونیاتی تفاعل کا تفرق ۲۲۹
۳.۵ زنجیری قاعدہ ۲۴۷
۳.۶ خفی تفرق اور ناطق قوت نما ۲۶۲
۳.۷ دیگر شرح تبدیلی ۲۷۷

۴ تفرق کا استعمال ۲۸۹
۴.۱ تفاعل کی انتہائی قیمتیں ۲۸۹
۴.۲ مسئلہ اوسط قیمت ۳۰۲
۴.۳ مقامی انتہائی قیمتوں کا یک رتبی تفرقی پرکھ ۳۱۵

۴.۳.۱ پرکھ ۳۱۶
۴.۴ y' اور y'' کے ساتھ ترسیم ۳۲۵
۴.۵ $x \to \mp\infty$ پر حد، متقارب اور غالب اجزاء ۳۴۷
۴.۶ بہترین بنانا ۳۷۱
۴.۷ خط بندی اور تفرقات ۳۹۲
۴.۸ ترکیب نیوٹن ۴۱۲

۵ تکمل ۴۲۳
۵.۱ غیر قطعی تکملات ۴۲۳
۵.۲ تفرقی مساوات، ابتدائی قیمت مسئلے، اور ریاضیاتی نمونہ کشی ۴۳۴
۵.۳ تکمل بذریعہ ترکیب بدل۔ زنجیری قاعدہ کا الٹ اطلاق ۴۴۸
۵.۴ اندازہ بذریعہ متناہی مجموعہ ۴۵۹
۵.۵ ریمان مجموعے اور قطعی تکملات ۴۷۵
۵.۶ خصوصیات، رقبہ، اور اوسط قیمت مسئلہ ۵۰۰
۵.۷ بنیادی مسئلہ ۵۱۵
۵.۸ قطعی تکمل میں بدل ۵۳۳
۵.۹ اعدادی تکمل ۵۳۹
۵.۱۰ قاعدہ ذوزنقہ ۵۳۹

۶ تکمل کا استعمال ۵۵۷
۶.۱ منحنیات کے بیچ رقبہ ۵۵۷
۶.۱.۱ تبدیل ہوتے کلیات والا سرحد ۵۶۱
۶.۲ ٹکیاں کاٹ کر حجم کی تلاش ۵۷۱
۶.۳ اجسام طواف کے حجم۔ قرص اور چھلا ۵۷۸
۶.۴ نلکی چھلے ۵۹۱
۶.۵ مستوی منحنیات کی لمبائیاں ۶۰۳
۶.۶ سطح طواف کا رقبہ ۶۱۲
۶.۷ معیار اثر اور مرکز کمیت ۶۲۳
۶.۷.۱ وسطانی مرکز ۶۳۴
۶.۸ کام ۶۳۹
۶.۹ فشار سیال اور قوت سیال ۶۵۲
۶.۱۰ بنیادی نقش اور دیگر نمونی استعمال ۶۶۰

۷ ماورائی تفاعل ۶۷۳
۷.۱ الٹ تفاعل اور ان کے تفرقات ۶۷۴
۷.۲ قدرتی لوگارتھم ۶۹۰
۷.۳ قوت نمائی تفاعل ۷۰۶
۷.۴ a^x اور $\log_a x$ ۷۱۹
۷.۵ افزائش اور تنزل ۷۲۸

۷.۶ قاعدہ لھوپیٹال ۷۴۰
۷.۷ اضافی شرح نمو ۷۵۴
۷.۷.۱ ترتیبی اور ثنائی تلاش ۷۵۹
۷.۸ الٹ تکونیاتی تفاعل ۷۶۴
۷.۹ الٹ تکونیاتی تفاعل کے تفرق؛ تکمل ۷۷۹
۷.۱۰ ہذلولی تفاعل ۷۹۴
۷.۱۱ یک رتبی تفرقی مساوات ۸۱۳
۷.۱۲ یولر کی اعدادی ترکیب؛ میدان ڈھلوان ۸۳۰

۸ تکمل کے طریقے ۸۳۹
۸.۱ تکمل کے بنیادی کلیات ۸۳۹
۸.۲ تکمل بالحصص ۸۵۳
۸.۲.۱ بار بار استعمال ۸۵۷
۸.۳ جزوی کسر ۸۶۶
۸.۴ تکونیاتی بدل ۸۷۹
۸.۵ جدول تکمل اور کمپیوٹر ۸۸۹
۸.۶ غیر مناسب تکمل ۹۰۴

۹ لامتناہی تسلسل ۹۲۷
۹.۱ اعداد کی ترتیب کی حد ۹۲۷
۹.۲ ترتیب کے حد تلاش کرنے کے مسئلے ۹۴۳
۹.۳ لامتناہی تسلسل ۹۵۸
۹.۴ غیر منفی اجزاء والے تسلسل کا تکملی پرکھ ۹۷۵
۹.۵ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کے تقابلی پرکھ ۹۸۵
۹.۶ غیر منفی اجزاء کے تسلسل کا تناسبی اور جذری پرکھ ۹۹۴
۹.۷ بدلتا تسلسل، مطلق اور مشروط ارتکاز ۱۰۰۴
۹.۸ طاقتی تسلسل ۱۰۱۷
۹.۹ ٹیلر اور مکلارن تسلسل ۱۰۳۲
۹.۱۰ ٹیلر تسلسل کا ارتکاز؛ خلل کے اندازے ۱۰۴۱
۹.۱۱ طاقتی تسلسل کے استعمال ۱۰۵۸

۱۰ مخروطی حصے، منحنی مقدار معلوم اور قطبی محدد ۱۰۷۵
۱۰.۱ مخروطی حصے اور دو قدری مساواتیں ۱۰۷۵
۱۰.۲ سنک لے لحاظ سے مخروط حصوں کی جماعت بندی ۱۰۹۸
۱۰.۳ دو درجی مساوات اور گھومنا ۱۱۰۶
۱۰.۴ مستوی منحنیات کے مقدار معلوم روپ کا حصول ۱۱۱۸
۱۰.۵ احصاء اور مقدار معلوم منحنیات ۱۱۳۳
۱۰.۶ قطبی محدد ۱۱۴۶

۱۰.۷ قطبی محدد میں ترسیم ۱۱۵۶
۱۰.۸ مخروط حصوں کے قطبی مساوات ۱۱۶۸
۱۰.۸.۱ دائرے ۱۱۶۹
۱۰.۹ قطبی محدد میں تکمل ۱۱۸۲

۱۱ سمتیات اور خلا میں تحلیلی جیومیٹری ۱۱۹۵
۱۱.۱ مستوی میں سمتیات ۱۱۹۵
۱۱.۲ کارتیسی (مستطیل) محدد اور فضا میں سمتیات ۱۲۱۰
۱۱.۲.۱ کرہ ۱۲۱۷
۱۱.۳ ضرب نقطہ ۱۲۲۵
۱۱.۳.۱ حساب ۱۲۲۶
۱۱.۴ صلیبی ضرب ۱۲۳۸
۱۱.۵ فضا میں خطوط اور مستویات ۱۲۵۲
۱۱.۶ نلکی اور مربع سطحیں ۱۲۶۴
۱۱.۷ نلکی اور کروی محدد ۱۲۸۰

۱۲ سمتی قیمت تفاعل اور فضا میں حرکت ۱۲۹۱
۱۲.۱ سمتی قیمت تفاعل اور فضائی منحنیات ۱۲۹۱
۱۲.۲ گولا کی حرکت کی نمونہ کشی ۱۳۱۲
۱۲.۳ لمبائی قوس اور اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ ۱۳۲۰
۱۲.۴ انحنا، مروڑ اور TNB چھوکٹ ۱۳۲۷
۱۲.۵ فلکی سیاروں اور مصنوعی سیاروں کی حرکت ۱۳۴۸

۱۳ کثیر المتغیر تفاعل اور جزوی تفرقات ۱۳۶۳
۱۳.۱ کثیر متغیرات کے تفاعل ۱۳۶۳
۱۳.۲ حد اور استمرار ۱۳۷۶
۱۳.۳ جزوی تفرقات ۱۳۸۹
۱۳.۴ تفرق پذیری، خط بندی، اور تفرقات ۱۴۰۵
۱۳.۵ زنجیری قاعدہ ۱۴۲۰
۱۳.۶ پابند متغیرات کے تفاعل کے جزوی تفرقات ۱۴۳۳
۱۳.۷ رخی تفرقات، سمتیہ ڈھلوان، اور مماسی سطحیں ۱۴۳۹
۱۳.۸ انتہائی قیمتیں اور نقاط زین ۱۴۵۸
۱۳.۸.۱ نتیجہ ۱۴۶۶
۱۳.۹ لیگرینج ضاربین ۱۴۷۴
۱۳.۱۰ کلیہ ٹیلر ۱۴۸۹

۱۴ تکمل بالکثرت ۱۴۹۷
۱۴.۱ دوہرا تکملات ۱۴۹۷
۱۴.۲ رقبات، معیار اثر، اور مراکز کمیت ۱۵۱۵

۱۴.۳ دوہرا تکملات کا قطبی روپ ۱۵۲۹
۱۴.۴ کار تیسی محدد میں تہرا تکمل ۱۵۳۹
۱۴.۵ تعین بعد میں کمیت اور معیار اثر ۱۵۵۲
۱۴.۶ نلکی اور کروی محدد میں تہرا تکمل ۱۵۶۱
۱۴.۷ تکملات بالکثرت میں بدل ۱۵۷۸

۱۵ سمتی میدان میں تکمل ۱۵۹۳
۱۵.۱ لکیری تکمل ۱۵۹۳
۱۵.۲ سمتی میدان، کام، دائری بہاؤ، اور بہاؤ ۱۶۰۳
۱۵.۳ راہ سے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان ۱۶۱۷
۱۵.۴ مستوی میں مسئلہ گرین ۱۶۲۹
۱۵.۵ سطحی رقبہ اور سطحی تکملات ۱۶۴۵
۱۵.۶ معلمی سطحیں ۱۶۵۸
۱۵.۷ مسئلہ سٹوکس ۱۶۷۳
۱۵.۷.۱ نظریہ اور مثالیں ۱۶۸۵
۱۵.۸ مسئلہ پھیلاؤ اور ایک مربوط نظریہ ۱۶۸۷

دیباچہ ۱۵۹۳

میری پہلی کتاب کا دیباچہ ۱۵۹۳

جوابات ۱۶۹۹

ا ضمیمہ اول ۱۷۰۹

ب ضمیمہ دوم ۱۷۱۱

ج ضمیمہ تین ۱۷۱۳

د ضمیمہ چار ۱۷۱۵

ھ ضمیمہ پانچ ۱۷۱۷

و ضمیمہ چھ ۱۷۱۹

ز ضمیمہ سات ۱۷۲۱

ح ضمیمہ آٹھ ۱۷۲۳

ط ضمیمہ نو ۱۷۲۵

باب ۱۵

سمتی میدان میں تکمل

ایک جائزہ اس باب کا موضوع سمتی میدان میں تکمل ہے۔ اس باب کی ریاضی کو برقناطیسیت کے خواص بیان کرنے کے لئے، تاروں میں حرارت کے بہاؤ پر غور، اور مصنوعی سیارہ کو مدار میں منتقل کرنے کے لئے درکار توانائی کے حصول کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

۱۵.۱ لکیری تکمل

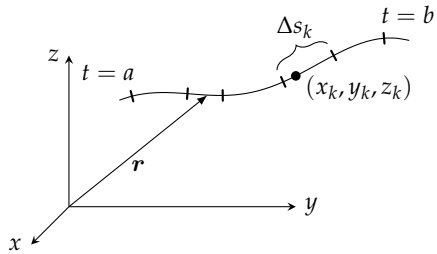
جب فضا میں تفاعل $f(x,y,z)$ کے دائرہ کار سے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k},\ a \leq t \leq b$ گزرے تب اس منحنی کے ساتھ چلتے ہوئے f کی قیمتیں مرکب تفاعل $f(g(t),h(t),k(t))$ دیگا۔ نقطہ a سے b تک لمبائی قوس کے لحاظ سے اس مرکب تفاعل کے تکمل کو قوس کے ساتھ f کا **لکیری تکمل**[1] کہتے ہیں۔ تین بعدی جیومیٹری کے باوجود، لکیری تکمل حقیقی اعداد کے وقفہ پر حقیقی قیمت تفاعل کا سادہ تفاعل ہو گا۔

لکیری تکمل کی اہمیت اس کے استعمال میں ہے۔ ان تکملات کی مدد سے ہم متغیر قوتوں کی فضا میں راہ پر کام اور قوس کے ساتھ یا سرحد پار کرتی سیال کی شرح بہاؤ کا حساب کرتے ہیں۔

تعریفات اور علامتیت

فرض کریں تفاعل $f(x,y,z)$ کے دائرہ کار میں منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k},\ a \leq t \leq b$ پائی جاتی ہے۔ ہم اس منحنی کی، متناہی تعداد کی قوسچوں میں، خانہ بندی کرتے ہیں (شکل ۱۵.۱)۔ ایک علامتی قوسچہ کی لمبائی Δs_k ہو گی۔ ہم ہر قوسچہ پر ایک نقطہ

[1] lineintegral



شکل ۱۵.۱: منحنی $\boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ کو $t = a$ اور $t = b$ کے بیچ قوسچوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ ایک علامتی قوسچہ کی لمبائی Δs_k ہے۔

(x_k, y_k, z_k) منتخب کر کے درج ذیل مجموعہ لیتے ہیں۔

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta s_k \tag{۱۵.۱}$$

اگر f استمراری ہو اور g ، h ، اور k کے اول تفرقات استمراری ہوں تب جیسے جیسے n بڑھایا جائے، Δs_k صفر تک پہنچے گی اور مساوات ۱۵.۱ کا مجموعہ ایک حد کو پہنچے گا۔ ہم اس حد کو a تا b **اس قوس پر** f **کا تکمل** کہتے ہیں۔ قوس کو C سے ظاہر کرتے ہوئے اس تکمل کو علامتی طور پر درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s \qquad \text{“}C \text{ پر } f \text{ کا تکمل”} \tag{۱۵.۲}$$

ہموار منحنیات پر تکمل کی قیمت کا حصول

اگر وقفہ $a \le t \le b$ پر $\boldsymbol{r}(t)$ ہموار ہو ($\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ استمراری ہو اور کبھی بھی $\mathbf{0}$ نہ ہو) تب ہم $\mathrm{d}s$ کو بیان کرنے کے لئے درج ذیل مساوات استعمال کر سکتے ہیں چونکہ اس سے $\mathrm{d}s = |\boldsymbol{v}(\tau)|\,\mathrm{d}t$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$s(t) = \int_a^t |\boldsymbol{v}(\tau)|\,\mathrm{d}\tau \qquad t_0 = a \text{ میں ۱۲.۲۰ کی مساوات حصہ ۱۲.۳}$$

اعلیٰ احصاء کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ ایسی صورت میں ہم درج ذیل طریقہ سے C پر f کے تکمل کی قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(g(t), h(t), k(t))|\boldsymbol{v}(t)|\,\mathrm{d}t$$

ہم جس مقدار معلوم روپ کو بھی استعمال کریں، جب تک زیر استعمال مقدار معلوم روپ ہموار ہو، یہ کلیہ ہمیں تکمل کی قیمت دیگا۔

لکیری تکمل کی قیمت کا حصول

منحنی C پر استمراری تفاعل f کا تکمل لینے کے لئے

ا. C کی مقدار معلوم روپ تلاش کریں:

$$\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b$$

ب. درج ذیل تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(g(t),h(t),k(t))\left|\boldsymbol{v}(t)\right|\mathrm{d}t \tag{۱۵.۳}$$

دھیان رہے کہ مستقل تفاعل $f = 1$ کی صورت میں مذکورہ بالا تکمل C کی لمبائی دیگا۔

مثال ۱۵.۱: مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک قطع پر $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$ تکمل کریں (شکل ۱۵.۲)۔

حل: ہم ذہن میں آنے والا سادہ ترین مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں

$$\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1$$

جس کی اجزاء کے اول تفرقات استمراری ہیں اور $\left|\boldsymbol{v}(t)\right| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$ کبھی بھی $\mathbf{0}$ نہیں ہو سکتا ہے لہٰذا یہ مقدار معلوم روپ ہموار ہے۔ یوں C پر f کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

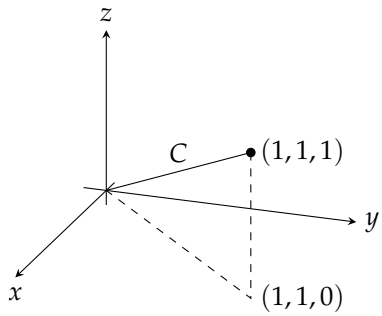
$$\begin{aligned}
\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 f(t,t,t)(\sqrt{3})\,\mathrm{d}t \qquad \text{مساوات ۱۵.۳} \\
&= \int_0^1 (t - 3t^2 + t)\sqrt{3}\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{3}\int_0^1 (2t - 3t^2)\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\left[t^2 - t^3\right]_0^1 = 0
\end{aligned}$$

□

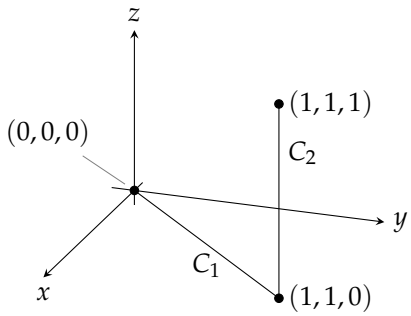
جمع پذیری

اگر متناہی تعداد کی منحنیات C_1 ، C_2 ، ۔ ۔ ۔ ، C_n کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر منحنی C حاصل کی جائے تب C پر تفاعل کا تکمل ان منحنیات پر تفاعل کے تکملات کا مجموعہ ہو گا:

$$\int_C f\,\mathrm{d}s = \int_{C_1} f\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f\,\mathrm{d}s + \cdots + \int_{C_n} f\,\mathrm{d}s \tag{۱۵.۴}$$



شکل ۱۵.۲: تکمل کی راہ (مثال ۱۵.۱)۔



شکل ۱۵.۳: تکمل کی راہ (مثال ۱۵.۲)۔

مثال ۱۵.۲: مبدا سے نقطہ $(1,1,1)$ تک راہ C_1 اور C_2 پر چل کر پہنچا جاتا ہے (شکل ۱۵.۳)۔ یوں C ان کا اشتراک $C_1 \cup C_2$ ہو گا۔ تفاعل $f(x,y,z) = x - 3y^2 + z$ کے تکمل کی قیمت $C_1 \cup C_2$ پر تلاش کریں۔

حل: ہم C_1 اور C_2 کے لئے، ذہن میں آنے والے سادہ ترین، مقدار معلوم روپ استعمال کرتے ہیں:

$$\begin{aligned} C_1: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 1; |\boldsymbol{v}| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ C_2: &\quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1; |\boldsymbol{v}| = \sqrt{0^2+0^2+1^2} = 1 \end{aligned}$$

ان مقدار معلوم روپ کے ساتھ درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_{C_1 \cup C_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s &= \int_{C_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s + \int_{C_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 f(t,t,0)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f(1,1,t)(1)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (t - 3t^2 + 0)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1 - 3 + t)(1)\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}\Big[\frac{t^2}{2} - t^3\Big]_0^1 + \Big[\frac{t^2}{2} - 2t\Big]_0^1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} \end{aligned} \qquad \text{مساوات ۱۵.۴}$$

□

یہاں مثال ۱۵.۱ اور مثال ۱۵.۲ کے نتائج پر غور کرتے ہیں۔ اول، دیکھیں کہ موزوں منحنی کے اجزاء f میں پر کرتے ہی t کے لحاظ سے ایک سادہ تکمل حاصل ہوتا ہے۔ دوم، $C_1 \cup C_2$ پر f کا تکمل لینے کے لئے C_1 اور C_2 پر f کے علیحدہ علیحدہ تکملات لے کر نتائج کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔ سوم، مثال ۱۵.۱ میں C اور مثال ۱۵.۲ میں $C_1 \cup C_2$ پر تکمل کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف تھے۔ عموماً تفاعل کے لئے دو نقطوں کے بیچ مختلف راہ پر تکملات کے نتائج ایک دوسرے سے مختلف ہوں گے۔ البتہ بعض تفاعل کے لئے تکمل کی قیمت پر راہ کا کوئی اثر نہیں ہوتا ہے۔

کمیت اور معیار اثر کا حساب

ہم اسپرنگ اور تار کو فضا میں ہموار منحنی پر استمراری کمیتی کثافت $\delta(x, y, z)$ کی تقسیم تصور کرتے ہیں۔ یوں اسپرنگ یا تار کی کمیت، مرکز کمیت، اور ان کے معیار اثر اور رداس دوار کا حساب درج ذیل کلیات سے کیا جائے گا۔ یہی کلیات باریک (پتلی) تار کے لئے بھی کارآمد ہوں گے۔

کمیت: $M = \int_S \delta(x, y, z)\, \mathrm{d}s$

محددی مستویات کے لحاظ سے اول معیار اثر:

$$M_{yz} = \int_C x\delta\, \mathrm{d}s, \quad M_{xz} = \int_C y\delta\, \mathrm{d}s, \quad M_{xy} = \int_C z\delta\, \mathrm{d}s$$

مرکز کمیت کے محدد:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$$

معیار اثر:

$$I_x = \int_C (y^2 + z^2)\delta\, \mathrm{d}s \qquad I_y = \int_C (x^2 + z^2)\delta\, \mathrm{d}s$$
$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)\delta\, \mathrm{d}s \qquad I_L = \int_C r^2\delta\, \mathrm{d}s$$

جہاں لکیر L سے نقطہ (x, y, z) تک فاصلہ $r(x, y, z)$ ہے۔

لکیر L کے لحاظ سے رداس دور: $R_L = \sqrt{\frac{I_L}{M}}$

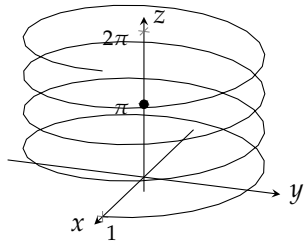
مثال ۱۵.۳: ایک اسپرنگ درج ذیل پیچدار منحنی کے ساتھ ساتھ پایا جاتا ہے (شکل ۱۵.۴)۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\,\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

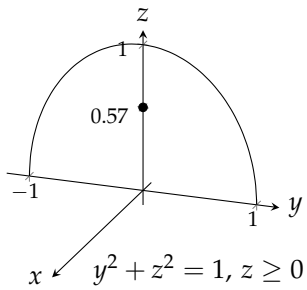
اس اسپرنگ کی کثافت مستقل تفاعل $\delta = 1$ ہے۔ اس اسپرنگ کی کمیت اور مرکز کمیت اور محور z کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار معلوم کریں۔

حل: ہم اسپرنگ کا خاکہ بناتے ہیں۔ تشاکلی کی بنا اس کا مرکز کمیت محور z پر نقطہ $(0, 0, \pi)$ پر پایا جائے گا۔ باقی حساب کے لئے ہم $|\boldsymbol{v}(t)|$ تلاش کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{v}(t)| &= \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} \\ &= \sqrt{(-4\sin 4t)^2 + (4\cos 4t)^2 + 1} = \sqrt{17}\end{aligned}$$



شکل ۱۵.۴: اسپرنگ برائے مثال ۱۵.۳



شکل ۱۵.۵: محراب کا مرکز کمیت (مثال ۱۵.۴)۔

اب مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
M &= \int_{\text{پیچدار}} \delta \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (1)\sqrt{17}\, \mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{17} \\
I_z &= \int_{\text{پیچدار}} (x^2 + y^2)\delta \, \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} (\cos^2 4t + \sin^2 4t)(1)(\sqrt{17})\, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{17}\, \mathrm{d}t = 2\pi\sqrt{17} \\
R_z &= \sqrt{\frac{I_z}{M}} = \sqrt{\frac{2\pi\sqrt{17}}{2\pi\sqrt{17}}} = 1
\end{aligned}
$$

دھیان رہے کہ محور z کے لحاظ سے رداس دوار عین اس بیلن کے رداس جتنا ہے جس پر اسپرنگ لپیٹا گیا ہے۔ □

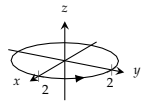
مثال ۱۵.۴: مستوی yz میں نصف دائرہ $y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$ پر ایک دبلا پتلا محراب پایا جاتا ہے (شکل ۱۵.۵)۔ محراب کے نقطہ (x, y, z) پر کثافت $\delta(x, y, z) = 2 - z$ ہے۔ محراب کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

حل: چونکہ یہ محراب مستوی yz میں پایا جاتا ہے اور محور z کے لحاظ سے اس کی کمیتی تقسیم دونوں اطراف یکساں ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ اور $\bar{y} = 0$ ہوں گے۔ ہم دائرہ کی مقدار معلوم روپ

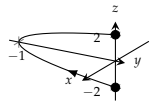
$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{j} + (\sin t)\boldsymbol{k},\ 0 \leq t \leq \pi$$

لکھتے ہوئے $\bar{z}$ دریافت کرتے ہیں۔ اس مقدار معلوم روپ کے لئے

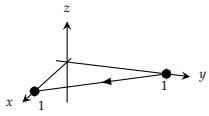
$$|\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{(0)^2 + (-\sin t)^2 + (\cos t)^2} = 1$$



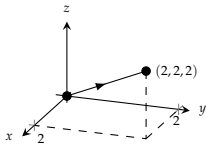
شکل ۱۵.۶



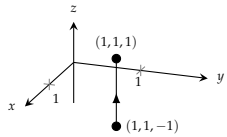
شکل ۱۵.۷



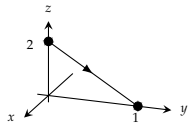
شکل ۱۵.۸



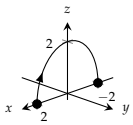
شکل ۱۵.۹



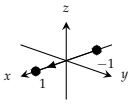
شکل ۱۵.۱۰



شکل ۱۵.۱۱



شکل ۱۵.۱۲



شکل ۱۵.۱۳

ہو گا۔ یوں مذکورہ بالا کلیات استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
M &= \int_C \delta \, \mathrm{d}s = \int_C (2-z) \, \mathrm{d}s = \int_0^\pi (2-\sin t) \, \mathrm{d}t = 2\pi - 2 \\
M_{xy} &= \int_0^C z\delta \, \mathrm{d}s = \int_C z(2-z) \, \mathrm{d}s = \int_0^\pi (\sin t)(2-\sin t) \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi (2\sin t - \sin^2 t) \, \mathrm{d}t = \frac{8-\pi}{2} \\
\bar{z} &= \frac{M_{xy}}{M} = \frac{8-\pi}{2} \cdot \frac{1}{2\pi - 2} \approx 0.57
\end{aligned}
$$

یوں مرکز کمیت تقریباً $(0, 0, 0.57)$ ہو گا۔ □

سوالات

سمتی مساوات کی ترسیمات

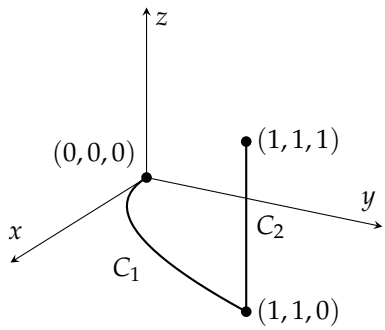
سوال ۱۵.۱ تا سوال ۱۵.۸ میں دی گئی مساوات کی مطابقتی ترسیم شکل ۱۵.۶ تا شکل ۱۵.۱۳ میں تلاش کریں۔ سوال ۱۵.۱: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (1-t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 1$

سوال ۱۵.۲: $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad -1 \le t \le 1$

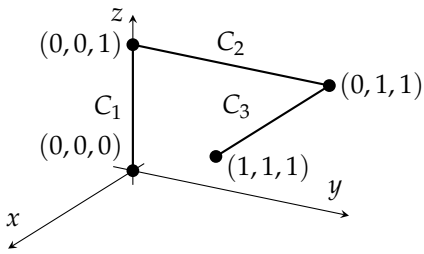
سوال ۱۵.۳: $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t)\boldsymbol{i} + (2\sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۵.۴: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i}, \quad -1 \le t \le 1$

سوال ۱۵.۵: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2$



شکل ۱۵.۱۴: راہ برائے تکمل (سوال ۱۵.۱۵)



شکل ۱۵.۱۵: ٹکڑوں میں خطی راہ برائے سوال ۱۵.۱۶

سوال ۱۵.۶: $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{j} + (2-2t)\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1$

سوال ۱۵.۷: $\boldsymbol{r}(t) = (t^2-1)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}, \quad -1 \le t \le 1$

سوال ۱۵.۸: $\boldsymbol{r}(t) = (2\cos t)\boldsymbol{i} + 2\sin t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le \pi$

فضائی منحنیات پر تکمل کی قیمت کا حصول

سوال ۱۵.۹: تکمل $\int_C (x+y)\,\mathrm{d}s$ کی قیمت حاصل کریں جہاں C نقطہ $(0,1,0)$ تا $(1,0,0)$ خط مستقیم $x = t$ ، $y = (1-t)$ ، $z = 0$ ہے۔

سوال ۱۵.۱۰: تکمل $\int_C (x-y+z-2)\,\mathrm{d}s$ کی قیمت حاصل کریں جہاں C نقطہ $(0,1,1)$ تا $(1,0,1)$ خط مستقیم $x = t$ ، $y = (1-t)$ ، $z = 1$ ہے۔

سوال ۱۵.۱۱: تکمل $\int_C (xy+y+z)\,\mathrm{d}s$ کی قیمت منحنی $\boldsymbol{r}(t) = 2t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + (2-2t)\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$ پر حاصل کریں۔

سوال ۱۵.۱۲: منحنی $\boldsymbol{r}(t) = 4\cos t\boldsymbol{i} + 4\sin t\boldsymbol{j} + 3t\boldsymbol{k},\ -2\pi \le t \le 2\pi$ پر تکمل $\int_C \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$ کی قیمت حاصل کریں۔

سوال ۱۵.۱۳: تفاعل $f(x,y,z) = x+y+z$ کا تکمل $(1,2,3)$ تا $(0,-1,1)$ خط مستقیم قطع پر تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۴: تفاعل $f(x,y,z) = \frac{\sqrt{3}}{x^2+y^2+z^2}$ کا تکمل منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 1 \le t \le \infty$ پر تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۵: تفاعل $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} - z^2$ کا تکمل $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ درج ذیل راہ پر چلتے ہوئے تلاش کریں (شکل ۱۵.۱۴)۔

$$C_1: \quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 1$$
$$C_2: \quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1$$

سوال۱۵.۱۶: تفاعل $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} - z^2$ کا تکمل $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ درج ذیل راہ پر چلتے ہوئے تلاش کریں (شکل ۱۵.۱۵)۔

$$\begin{aligned} C_1: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1 \\ C_2: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1 \\ C_3: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 1 \end{aligned}$$

سوال۱۵.۱۷: تفاعل $f(x,y,z) = \frac{x+y+z}{x^2+y^2+z^2}$ کا تکمل راہ $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 < a \le t \le b$ پر تلاش کریں۔

سوال۱۵.۱۸: تفاعل $f(x,y,z) = -\sqrt{x^2+z^2}$ کا تکمل درج ذیل دائری راہ پر تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

مسطح منحنیات پر لکیری تکملات

سوال۱۵.۱۹ تا سوال ۱۵.۲۲ میں f کا تکمل دی گئی منحنی پر تلاش کریں۔

سوال۱۵.۱۹: $f(x,y) = \frac{x^3}{y}, \quad C: y = \frac{x^2}{2}, \quad 0 \le x \le 2$

سوال۱۵.۲۰: $f(x,y) = \frac{x+y^2}{\sqrt{1+x^2}}, \quad C: y = \frac{x^2}{2},$ $(0,0)$ سے $(1,\frac{1}{2})$ تک

سوال۱۵.۲۱: $f(x,y) = x + y, \quad C: x^2 + y^2 = 4,$ ربع اول میں $(2,0)$ سے $(0,2)$ تک

سوال۱۵.۲۲: $f(x,y) = x^2 - y, \quad C: x^2 + y^2 = 4,$ ربع اول میں $(0,2)$ سے $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ تک

کمیت اور معیار اثر

سوال۱۵.۲۳: ایک پتلی تار جس کی کثافت $\delta = \frac{3}{2}t$ ہے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (t^2-1)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ اس تار کی کمیت تلاش کریں۔

سوال۱۵.۲۴: ایک پتلی تار جس کی کثافت $\delta(x,y,z) = 15\sqrt{y+2}$ ہے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (t^2-1)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k},\ -1 \le t \le 1$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ اس تار کا مرکز کمیت تلاش کریں۔ اس منحنی کو ترسیم کر کے اس پر مرکز کمیت دکھائیں۔

سوال۱۵.۲۵: منحنی $\boldsymbol{r}(t) = \sqrt{2}t\boldsymbol{j} + (4-t^2)\boldsymbol{k}\ 0 \le t \le 1$ کے ساتھ ساتھ ایک پتلی تار پائی جانے والی تار کی کثافت (ا) $\delta = 3t$، (ب) $\delta = 1$ ہے۔ اس تار کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

سوال۱۵.۲۶: ایک پتلی تار جس کی کثافت $\delta = 3\sqrt{5+t}$ ہے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}t^{3/2}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ اس تار کی کمیت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۷: مستوی xy میں دائرہ $x^2 + y^2 = a^2$ پر مستقل کثافت δ کی ایک پتلی تار پائی جاتی ہے۔ محور z کے لحاظ سے اس تار کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۸: مستوی yz میں لکیری قطع $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{j} + (2-2t)\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$ پر مستقل کثافت کی ایک پتلی تار پائی جاتی ہے۔ تینوں محددی محوروں کے لحاظ سے اس تار کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۹: مستقل کثافت δ کی ایک پتلی تار پیچدار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ (ا) I_z اور R_z تلاش کریں۔ (ب) فرض کریں مستقل کثافت δ کی ایک دوسری پتلی تار، جس کی لمبائی دگنی ہے ($0 \le t \le 4\pi$)، اسی منحنی $\boldsymbol{r}(t)$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ بغیر حل کیے بتلائیں کہ آیا اس تار کا جمودی معیار اثر اور رداس دوار پہلی تار سے مختلف ہوں گے؟ اب انہیں حل کر کے اپنے جواب کی تصدیق کریں۔

سوال ۱۵.۳۰: منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (t\cos t)\boldsymbol{i} + (t\sin t)\boldsymbol{j} + (\frac{2\sqrt{2}}{3})t^{3/2}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$ کے ساتھ ساتھ مستقل کثافت $\delta = 1$ کی ایک پتلی تار پائی جاتی ہے۔ اس کی $\bar{z}$ ، I_z اور R_z تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۱: I_z اور R_z مثال ۱۵.۴ کی محراب کے لئے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۲: ایک پتلی تار جس کی کثافت $\delta = \frac{1}{t+1}$ ہے منحنی $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}\boldsymbol{j} + \frac{t^2}{2}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2$ کے ساتھ ساتھ پائی جاتی ہے۔ اس تار کا مرکز کمیت اور محددی محوروں کے لحاظ سے جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

کمپیوٹر کا استعمال

سوال ۱۵.۳۳ تا سوال ۱۵.۳۶ میں کمپیوٹر پر درج ذیل اقدام سے تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

ا. راہ $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ کے لئے $\mathrm{d}s = |\boldsymbol{v}(t)|\,\mathrm{d}t$ دریافت کریں۔

ب. متکمل $f(g(t), h(t), k(t))|\boldsymbol{v}(t)|$ کو مقدار معلوم t کا تفاعل لکھیں۔

ج. تکمل $\int_C f\,\mathrm{d}s$ کی قیمت مساوات ۱۵.۳ کی مدد سے حاصل کریں۔

سوال ۱۵.۳۳: $f(x,y,z) = \sqrt{1 + 30x^2 + 10y};\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k},\quad 0 \le t \le 2$

سوال ۱۵.۳۴: $f(x,y,z) = \sqrt{1 + x^3 + 5y^3};\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + \frac{1}{3}t^2\boldsymbol{j} + \sqrt{t}\boldsymbol{k},\quad 0 \le t \le 2$

سوال ۱۵.۳۵: $f(x,y,z) = x\sqrt{y} - 3z^2;\ \boldsymbol{r}(t) = \cos 2t\boldsymbol{i} + \sin 2t\boldsymbol{j} + 5t\boldsymbol{k},\quad 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۵.۳۶: $f(x,y,z) = \left(1 + \frac{9}{4}z^{1/3}\right)^{1/4};\ \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t) = \cos 2t\boldsymbol{i} + \sin 2t\boldsymbol{j} + t^{5/2}\boldsymbol{k},\quad 0 \le t \le 2\pi$

۱۵.۲ سمتی میدان، کام، دائری بہاؤ، اور بہاؤ

ان طبیعی مظہر کے مطالعہ کے دوران، جنہیں سمتیات سے ظاہر کیا جاتا ہے، بند راہ پر تکملات کی بجائے سمتی میدان میں راہ پر تکملات استعمال کیے جاتے ہیں۔ متغیر قوت کے خلاف ایک مقام سے دوسری مقام کسی جسم کو منتقل کرنے (جیسا قوت ثقل کے خلاف خلاء میں سواری بھیجنے) یا سمتی میدان میں ایک جسم کو کسی راہ پر حرکت دینے (جیسا مسرع کسی ذرے کی توانائی بڑھاتا ہو) کے لئے درکار کام اس طرح کے تکملات سے حاصل کیے جاتے ہیں۔ منحنیات عبور کرتا ہوا سیال کے بہاؤ کی شرح بھی لکیری تکملات سے حاصل کی جاتی ہے۔

سمتی میدان

مستوی یا فضا میں دائرہ کار پر **سمتی میدان**[۲] سے مراد ایسا تفاعل ہے جو دائرہ کار کے ہر نقطہ کو ایک سمتیہ مختص کرتا ہو۔ سہ ابعادی سمتیات کے میدان کا ایک کلیہ درج ذیل ہو سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

استمراری جزوی تفاعل M ، N ، P کی صورت میں یہ میدان استمراری ہو گا، قابل تفرق M ، N ، P کی صورت میں یہ میدان قابل تفرق ہو گا، وغیرہ وغیرہ۔ دو ابعادی سمتیات کے میدان کا ایک کلیہ درج ذیل ہو سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{F}(x,y) = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$$

گول انداز کی گزرگاہ کے مستوی میں گزرگاہ کے ہر نقطہ کے ساتھ گول انداز کا سمتی رفتاری سمتیہ منسلک کرنے سے گزرگاہ کی ہمراہ دو ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ غیر سمتی تفاعل کے ہم قد سطح کے ہر نقطہ کے ساتھ تفاعل کا سمتیہ ڈھلوان منسلک کرنے سے سطح پر سہ ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ متحرک سیال کے ہر نقطہ کے ساتھ سمتی رفتاری سمتیہ منسلک کرنے سے فضا میں اس خطہ پر سہ ابعادی میدان حاصل ہو گا۔ بشمول ان کے چند میدان شکل ۱۵.۱۶ تا شکل ۱۵.۲۰ میں دکھائے گئے ہیں جہاں کچھ میدانوں کے کلیات بھی دیے گئے ہیں۔

وہ میدان ترسیم کرنے کے لئے جن کے کلیات معلوم ہوں، ہم دائرہ کار میں چند نقطے منتخب کر کے ان نقطوں پر نقطوں کے ساتھ منسلک سمتیات کا خاکہ بناتے ہیں۔ دھیان رہے کہ روایتی طور پر اس نقطہ پر، جہاں سمتی تفاعل کی قیمت حاصل کی گئی ہو، سمتیہ ظاہر کرنے والی تیر دار لکیر کی دم رکھی جاتی ہے نا کہ سر۔ تعین گر سمتیات (باب ۱۲) کے لئے ایسا نہیں کیا جاتا ہے بلکہ تعین گر سمتیات کو ظاہر کرنے والی تیر دار لکیر کی دم کو مبدا پر رکھا جاتا ہے جبکہ اس کا سر سیارہ یا گول انداز کے مقام پر رکھا جاتا ہے۔

میدان ڈھلوان

تعریف: قابل تفرق تفاعل $f(x,y,z)$ کے **میدان ڈھلوان**[۳] سے مراد سمتیات ڈھلوان

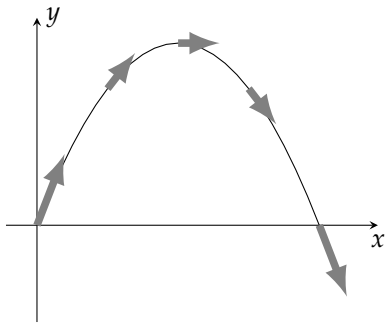
$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

کا میدان ہے۔

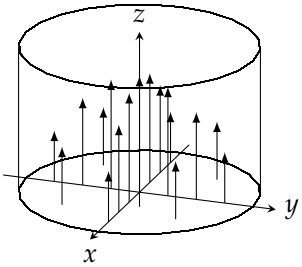
□

---

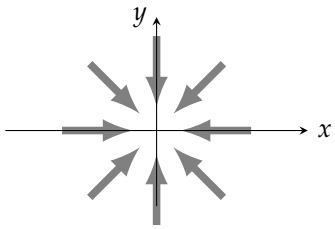
[۲] vectorfield
[۳] gradientfield



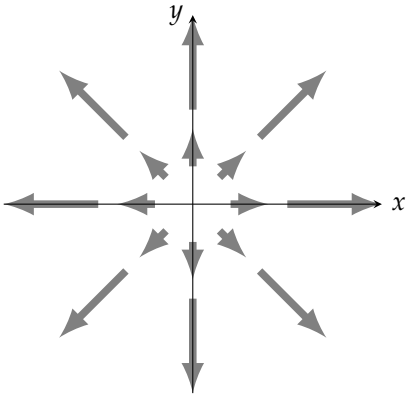
شکل ۱۵.۱۶: گول انداز کے سمتی رفتاری سمتیات $\boldsymbol{v}(t)$ سمتی میدان دیتے ہیں۔



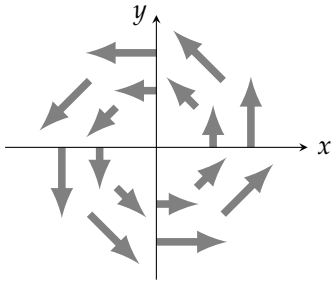
شکل ۱۵.۱۷: لمبی نالی میں سیال کی حرکت۔ سمتیات $\boldsymbol{v} = (a^2 - \rho^2)\boldsymbol{k}$ کی دم مستوی xy میں اور سر قطع مکافی $z = a^2 - \rho^2$ پر پائے جاتے ہیں۔



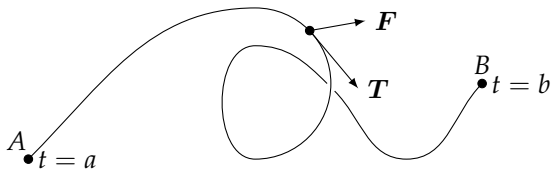
شکل ۱۵.۱۸: ثقلی میدان $\boldsymbol{F} = -\frac{GM(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ میں سمتیات۔



شکل ۱۵.۱۹: مستوی میں مختلف نقاط پر رداسی میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ جہاں تیر دار لکیر کی دم اس نقطہ پر رکھی جاتی ہے جہاں کا سمتیہ درکار ہو۔



شکل ۱۵.۲۰: اکائی سمتیات $\boldsymbol{F} = \frac{-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$ کا چکری میدان۔



شکل ۱۵.۲۱: ہموار راہ $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ پر A سے B تک استراری قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام $t = a$ تا $t = b$ راہ کی ہمراہ $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ کا تکمل ہو گا۔

مثال ۱۵.۱: تفاعل $f(x, y, z) = xyz$ کا میدان ڈھلوان تلاش کریں۔

حل: تفاعل f کے میدان ڈھلوان سے مراد میدان $\boldsymbol{F} = \nabla f = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ ہے۔ □

ہم دیکھیں گے کہ انجینئری، ریاضیات، طبیعیات، وغیرہ میں میدان ڈھلوان خصوصی اہمیت رکھتے ہیں۔

فضا میں منحنی کی ہمراہ قوت کا کیا ہوا کام

فرض کریں فضا کے ایک خطہ میں سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M(x, y, z)\boldsymbol{i} + N(x, y, z)\boldsymbol{j} + P(x, y, z)\boldsymbol{k}$ ایک قوت کو ظاہر کرتا ہے (یہ قوت ثقل یا کسی قسم کی برقناطیسی قوت ہو سکتی ہے) جبکہ اس خطہ میں درج ذیل ایک ہموار منحنی ہے۔

$$\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b$$

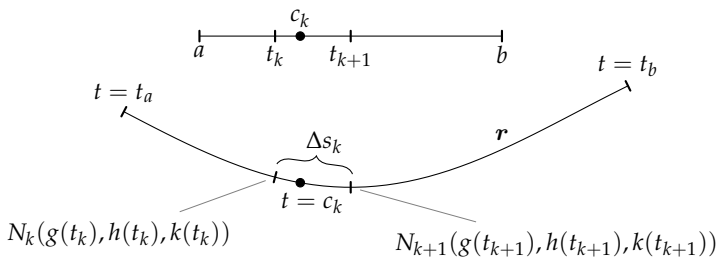
ایسی صورت میں منحنی پر $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$، اکائی مماسی سمتیہ کے رخ $\boldsymbol{F}$ کا غیر سمتی جزو، کے تکمل کو a تا b $\boldsymbol{F}$ کا کیا ہوا کام کہتے ہیں (شکل ۱۵.۲۱)۔

تعریف: ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ پر a تا b قوت $\boldsymbol{F} = M(x, y, z)\boldsymbol{i} + N(x, y, z)\boldsymbol{j} + P(x, y, z)\boldsymbol{k}$ کا کیا ہوا کام W درج ذیل ہو گا۔

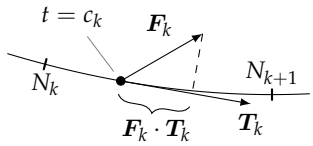
$$W = \int_{t=1}^{t=b} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}\, \mathrm{d}s \tag{۱۵.۵}$$

□

مثبت محور x رخ مقدار $F(x)$ کی استراری قوت کے کام کا کلیہ $W = \int_a^b F(x)\, \mathrm{d}x$ حصہ ۶.۸ میں اخذ کیا گیا۔ مساوات ۱۵.۵ کے حصول کے دلائل وہی ہیں۔ ہم منحنی کو چھوٹے قطعات میں تقسیم کر کے، ہر قطع پر کام کو تخمیناً مستقل قوت ضرب فاصلہ لے کر، نتائج کے مجموعہ کو منحنی پر کام کی تخمینی قیمت حاصل کرتے ہیں، اور قطعات کی تعداد زیادہ سے زیادہ کر کے ہر قطع کی لمبائی کم سے کم کرتے ہوئے، تخمینی مجموعات کی تحدیدی قیمت کو کام کی تعریف لیتے ہیں۔ یہ جاننے کے لئے کہ تحدیدی تکمل کی قیمت کیا ہو گی، ہم قطع $[a, b]$ کی خانہ بندی عمومی طرح کر کے ہر ذیلی قطع $[t_k, t_{k+1}]$ پر نقطہ c_k منتخب کرتے ہیں۔ قطع I کی خانہ بندی منحنی کی خانہ بندی تعین (پیدا) کرتی ہے، جہاں تعین گر سمتیہ $\boldsymbol{r}$ کا سر نقطہ N_k پر ہو گا اور ذیلی قطع



شکل ۱۵.۲۲: مقدار معلوم وقفہ $a \leq t \leq b$ کی ہر خانہ بندی منحنی $\boldsymbol{r} = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}$ کی خانہ بندی پیدا کرتی ہے۔



شکل ۱۵.۲۳: گزشتہ شکل کے قطع N_kN_{k+1} کو بڑا کر کے $t = c_k$ کے مطابق نقطہ پر اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ اور قوت سمتیہ $\boldsymbol{F}$ دکھائے گئے ہیں۔

N_kN_{k+1} کی لمبائی Δs_k ہو گی (شکل ۱۵.۲۲)۔ اگر منحنی پر $t = c_k$ کے مطابق نقطہ پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت $\boldsymbol{F}_k$ اور منحنی کا مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}_k$ ہو تب $t = c_k$ پر $\boldsymbol{T}$ کے رخ $\boldsymbol{F}$ کا غیر سمتی جزو $\boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{T}_k$ ہو گا (شکل ۱۵.۲۳)۔ منحنی کے قطع N_kN_{k+1} کی ہمراہ $\boldsymbol{F}$ کا کیا ہوا کام تخمیناً درج ذیل ہو گا۔

$$(\text{حرکت کے رخ قوت کا جزو}) \times (\text{طے فاصلہ}) = \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{T}_k \Delta s_k$$

منحنی کی ہمراہ $t = a$ تا $t = b$ کام تخمیناً درج ذیل ہو گا۔

$$\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{F}_k \cdot \boldsymbol{T}_k \Delta s_k$$

جیسا جیسا $[a, b]$ کے خانہ بندی کا معیار صفر کے قریب سے قریب ہوتا ہے، ویسے ویسے منحنی کی پیدا کردہ خانہ بندی کا معیار بھی صفر کے قریب سے قریب ہوتا ہے اور مجموعہ درج ذیل لکیری تکمل کو پہنچتا ہے۔

$$\int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T} \, \mathrm{ds}$$

اس تکمل سے حاصل عدد کی علامت، t بڑھانے سے حاصل پر چلنے کے، رخ پر منحصر ہو گی۔ منحنی پر چلنے کا رخ الٹ کرنے سے $\boldsymbol{T}$ کا رخ الٹ ہو گا جس کی بنا $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ اور تکمل کی علامت الٹ ہو گی۔

علامتیت اور قیمت کا حصول

تکمل کام (مساوات ۱۵.۵) کو لکھنے کے چھ طریقے درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s && \text{تعریف}\\
&= \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} && \text{مختصر تفریقی روپ}\\
&= \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t && \text{پھیلا کر } \mathrm{d}t \text{ شامل کیا گیا ہے}\\
&= \int_{t=a}^{t=b} \left(M\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}+N\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}+P\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t && \text{مقدار معلوم } t \text{ اور سمتی رفتار } \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \text{ اجا گر کیے گئے}\\
&= \int_{t=a}^{t=b} \left(M\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+N\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+P\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t && \text{جزوی تفاعل اجا گر کیے گئے}\\
&= \int_{t=a}^{t=b} M\,\mathrm{d}x+N\,\mathrm{d}y+P\,\mathrm{d}z && \mathrm{d}t \text{ منسوخ کر کے عمومی روپ حاصل کی گئی}
\end{aligned}
\tag{۱۵.۶}
$$

مساوات ۱۵.۶ کے کلیات کی قیمتوں کا حصول، بظاہر مختلف روپ کے باوجود، ایک ہی طرح کیا جاتا ہے۔

تکمل کام کی قیمت کا حصول

تکمل کام کی قیمت حاصل کرنے کے اقدام درج ذیل ہیں۔

۱. منحنی پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت مقدار معلوم t کے تفاعل کی روپ میں لکھیں۔

۲. تفرق $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ تلاش کریں۔

۳. $\boldsymbol{F}$ اور $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کا غیر سمتی ضرب لیں۔

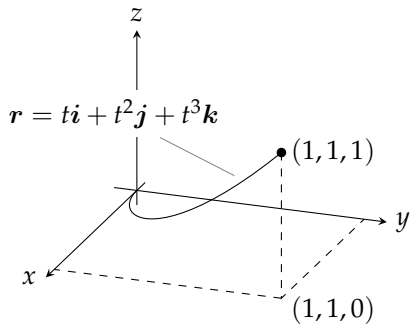
۴. $t=a$ سے $t=b$ تک تکمل کریں۔

مثال ۱۵.۲: منحنی $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k},\ 0\le t\le 1$ کی ہمراہ $(0,0,0)$ سے $(1,1,1)$ تک $\boldsymbol{F}=(y-x^2)\boldsymbol{i}+(z-y^2)\boldsymbol{j}+(x-z^2)\boldsymbol{k}$ کا کام تلاش کریں (شکل ۱۵.۲۴)۔

حل:

پہلا قدم: منحنی پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت کا حصول۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= (y-x^2)\boldsymbol{i}+(z-y^2)\boldsymbol{j}+(x-z^2)\boldsymbol{k}\\
&= (\underbrace{t^2-t^2}_{0})\boldsymbol{i}+(t^3-t^4)\boldsymbol{j}+(t-t^6)\boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$



شکل ۱۵.۲۴: منحنی برائے مثال ۱۵.۲

دوسرا قدم: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}$$

تیسرا قدم: $\boldsymbol{F}$ اور $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ کا غیر سمتی ضرب۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= [(t^3 - t^4)\boldsymbol{j} + (t - t^6)\boldsymbol{k}] \cdot (\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j} + 3t^2\boldsymbol{k}) \\ &= (t^3 - t^4)(2t) + (t - t^6)(3t^2) = 2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8\end{aligned}$$

چوتھا قدم: $t = 0$ تا $t = 1$ تکمل۔

$$\begin{aligned}\text{کام} = W &= \int_0^1 (2t^4 - 2t^5 + 3t^3 - 3t^8)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{2}{6}t^6 + \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{9}t^9\right]_0^1 = \frac{29}{60}\end{aligned}$$

□

تکمل ہمراہ بہاؤ اور دائری بہاؤ

فرض کریں $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ میدان قوت کی بجائے فضا کے ایک خطہ (مثلاً پانی سے چلنے والے جنریٹر کا چرخی خانہ یا سمندری طاس) میں بہتا ہوا سیال کے سمتی رفتاری میدان کو ظاہر کرتا ہے۔ ایسی صورت میں منحنی کی ہمراہ $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ کا تکمل، منحنی کی ہمراہ سیال کا بہاؤ دے گا۔

تعریف: استمراری سمتی رفتاری میدان کے دائرہ کار میں ہموار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k},\ a \le t \le b$ پر a

سے b تک $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}$ کا تکمل، $t=a$ سے $t=b$ تک منحنی کا ہمراہ بہاؤ دے گا:

$$\text{ہمراہ بہاؤ} = \int_a^b \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s \tag{۱۵.۷}$$

اس تکمل کو **تکمل ہمراہ بہاؤ**[۴] کہتے ہیں۔ بند منحنی کی صورت میں اس بہاؤ کو منحنی کے گرد منحنی کی ہمراہ **دائری بہاؤ**[۵] کہتے ہیں۔

□

تکمل ہمراہ بہاؤ کی قیمت بھی تکمل کام کی قیمت کی طرح حاصل کی جاتی ہے۔

مثال ۱۵.۳: ایک سیال کا سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$ ہے۔ درج ذیل پیچدار منحنی کے ساتھ ساتھ اس کی ہمراہ بہاؤ تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le \tfrac{\pi}{2}$$

حل:

پہلا قدم: منحنی پر $\boldsymbol{F}$ کی قیمت تلاش کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k} = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{k}$$

دوسرا قدم: $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$$

تیسرا قدم: غیر سمتی ضرب $\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} &= (\cos t)(-\sin t) + (t)(\cos t) + (\sin t)(1)\\ &= -\sin t\cos t + t\cos t + \sin t\end{aligned}$$

چوتھا قدم: $t=a$ تا $t-b$ تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\text{بہاؤ} &= \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2}(-\sin t\cos t + t\cos t + \sin t)\,\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{\cos^2 t}{2} + \sin t\right]_0^{\pi/2} = \left(0 + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + 0\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

□

---

[۴] flowintegral
[۵] circulation

مثال ۱۵.۴: میدان $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ کا دائرہ $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ کی ہمراہ دائرہ کے گرد دائری بہاؤ تلاش کریں۔

حل:

۱. دائرہ پر $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} = (\cos t - \sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}$ ہو گا۔

۲. $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = (-\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j}$

۳. $\boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = -\sin t \cos t + \underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{1}$

۴. دائری بہاؤ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\text{دائری بہاؤ} &= \int_0^{2\pi} \boldsymbol{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (1 - \sin t \cos t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[t - \frac{\sin^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi\end{aligned}$$

□

مستوی منحنی کو عبور کرتا ہوا بہاؤ

مستوی xy میں ہموار بند منحنی C میں محیط خطہ سے سیال کے اخراج و دخول کی شرح C پر $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ (منحنی کے بیرونی عمودی اکائی سمتیہ کے رخ رفتاری میدان کے غیر سمتی جزو) کے لکیری تکمل سے حاصل ہو گی۔ اس تکمل کی قیمت کو C عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ (**یا نفاذ**) کہتے ہیں۔ برقی یا مقناطیسی میدان $\boldsymbol{F}$ کی صورت میں بھی اس تکمل کی قیمت کو C عبور کرتا ہوا بہاؤ یا نفاذ کہیں گے اگرچہ ان میں کوئی بہتا ہوا سیال نہیں پایا جاتا ہے۔

تعریف: استمراری سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ کے دائرہ کار میں ہموار مسطح بند منحنی C جس کا بیرونی رخ عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہو کی صورت میں C کو عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کا **بہاؤ**[۶] درج ذیل تکمل دے گا۔

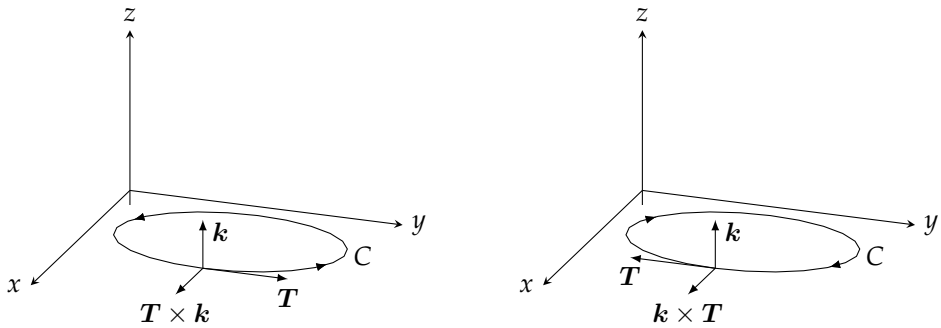
$$\text{C عبور کرتا ہوا } \boldsymbol{F} \text{ کا بہاؤ} = \int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s \tag{۱۵.۸}$$

□

منحنی کو عبور کرتے ہوئے بہاؤ (نفاذ) اور دائری بہاؤ میں فرق سے واقف ہونا ضروری ہے۔ منحنی C کو عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کے بہاؤ سے مراد منحنی پر $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ (منحنی کے بیرونی عمود کے رخ $\boldsymbol{F}$ کے غیر سمتی جزو) کا تکمل ہے۔ بند منحنی C کے گرد $\boldsymbol{F}$ کے دائری بہاؤ سے مراد منحنی پر $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{T}$ (منحنی کے اکائی مماس کے رخ $\boldsymbol{F}$ کے غیر سمتی جزو) کا تکمل ہے۔ منحنی عبور کرتا ہوا بہاؤ سے مراد $\boldsymbol{F}$ کے عمودی جزو کا تکمل جبکہ دائری بہاؤ سے مراد $\boldsymbol{F}$ کے مماسی جزو کا تکمل ہے۔ روزمرہ زندگی میں منحنی کو عبور کرتے ہوئے بہاؤ یعنی نفاذ کو مختصراً **بہاؤ** کہا جاتا ہے۔

---

[۶] flux



(ا) گھڑی وار حرکت کے لئے $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{T}$ باہر رخ ہو گا۔ (ب) خلاف گھڑی حرکت کے لئے $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k}$ باہر رخ ہو گا۔

شکل ۱۵.۲۵: ہموار منحنی C، جو بڑھتے t کی صورت میں مستوی xy میں خلاف گھڑی حرکت کرتی ہو، کا باہر رخ اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k}$ ہو گا۔

مساوات ۱۵.۸ کے تکمل کی قیمت معلوم کرنے کی خاطر ہم مقدار معلوم روپ

$$x = g(t), \quad y = h(t), \quad a \leq t \leq b$$

سے ابتدا کرتے ہیں۔ یوں t کی قیمت a سے b تک بڑھانے سے منحنی پر ایک سرے سے دوسرے سر تک ٹھیک ایک بار چلا جائے گا۔ منحنی کے اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{T}$ اور کارتیسی محددی نظام کے اکائی سمتیہ $\boldsymbol{k}$ کا سمتی ضرب منحنی کا بیرونی اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ دے گا۔ سوال پیدا ہوتا ہے کہ ایسے دو سمتی ضرب $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k}$ اور $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{T}$ پائے جاتے ہیں۔ ان میں کونسا بیرونی اکائی سمتیہ دے گا؟ مقدار معلوم t بڑھانے سے C پر چلنے کے رخ پر اس کا جواب منحصر ہو گا۔ اگر منحنی پر حرکت گھڑی وار ہو تب $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{T}$ بیرونی اکائی سمتیہ دے گا جبکہ خلاف گھڑی حرکت کی صورت میں $\boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k}$ بیرونی اکائی سمتیہ دے گا (شکل ۱۵.۲۵)۔ عموماً خلاف گھڑی حرکت کے لئے کلیات اخذ کیے جاتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k}$ ہو گا۔ اگرچہ مساوات ۱۵.۸ میں دیے گئے تکمل کی قیمت منحنی پر چلنے کے رخ پر منحصر نہیں ہے، ہم خلاف گھڑی حرکت تصور کرتے ہوئے مساوات ۱۵.۸ کو حل کرنے کے کلیات اخذ کرتے ہیں۔

ارکان کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{k} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}\right) \times \boldsymbol{k} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{i} - \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{j}$$

اگر $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ ہو تب

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = M(x,y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - N(x,y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$$

لہٰذا

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \int_C \left(M\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - N\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s$$

ہو گا جس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \oint_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x \tag{۱۵.۹}$$

یاد رہے کہ C پر خلاف گھڑی چلتے ہوئے بند تکمل $\oint$ کی قیمت حاصل کی جائے گی۔اس تکمل کے حصول کی خاطر ہم M ، $\mathrm{d}y$ ، N اور $\mathrm{d}x$ کو مقدار معلوم t کی روپ میں لکھ کر $t = a$ تا $t = b$ تکمل لیتے ہیں۔ہمیں بہاؤ(نفاذ) تلاش کرنے کے لئے $\boldsymbol{n}$ یا $\mathrm{d}s$ جاننے کی ضرورت پیش نہیں آتی ہے۔منحنی C پر خلاف گھڑی ٹھیک ایک بار چلتے ہوئے کوئی بھی ہموار مقدار معلوم روپ $x = g(t)$ ، $y = h(t)$ ،جہاں $a \le t \le b$ ہو،استعمال کیا جا سکتا ہے۔

مثال ۱۵.۵: مستوی xy میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کو پار کرتا ہوا $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ کا بہاؤ(نفاذ) تلاش کریں۔

حل: مقدار معلوم روپ $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ دائرے پر ٹھیک ایک بار چلتا ہے لہٰذا مساوات ۱۵.۹ حل کرنے کی خاطر درج ذیل لیے جا سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} M &= x - y = \cos t - \sin t, & \mathrm{d}y &= \mathrm{d}(\sin t) = \cos t\,\mathrm{d}t \\ N &= x = \cos t, & \mathrm{d}x &= \mathrm{d}(\cos t) = -\sin t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} &= \int_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - \sin t\cos t + \cos t\sin t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{مساوات ۱۵.۹} \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi \end{aligned}$$

دائرہ کو عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ π ہے۔چونکہ نتیجہ مثبت ہے لہٰذا دائرے سے کل بہاؤ کا رخ باہر کو ہو گا۔دائرے میں دخول کی صورت میں نتیجہ منفی ہوتا۔ □

سوالات

سمتی میدان اور میدان ڈھلوان

سوال ۱.۱۵ تا سوال ۱۵.۴ میں تفاعل کے میدان ڈھلوان تلاش کریں۔

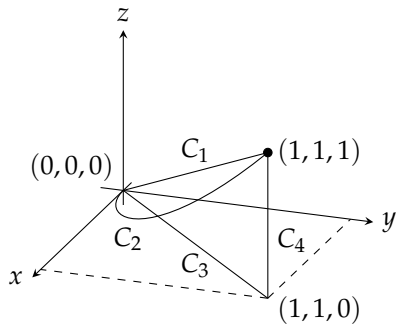
سوال ۱۵.۱: $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$

سوال ۱۵.۲: $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

سوال ۱۵.۳: $g(x,y,z) = e^z - \ln\sqrt{x^2+y^2}$

سوال ۱۵.۴: $g(x,y,z) = xy + yz + xz$

سوال ۱۵.۵: مستوی میں سمتی میدان کا ایسا کلیہ $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ پیش کریں کہ $\boldsymbol{F}$ کی مقدار مبدا سے (x,y) تک فاصلہ کے مربع کا بالعکس متناسب ہو اور $\boldsymbol{F}$ کا رخ مبدا کے رخ ہو۔(یہ میدان مبدا پر غیر معین ہے۔)



شکل ۱۵.۲۶

سوال ۱۵.۶: مستوی میں میدان کا ایسا کلیہ $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ پیش کریں کہ $(0,0)$ پر $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ ہو جبکہ کسی دوسرے نقطہ (a,b) پر $|\boldsymbol{F}| = \sqrt{a^2+b^2}$ اور دائرہ $x^2+y^2=a^2+b^2$ کو میدان گھڑی وار مماسی ہو۔

کام

سوال ۱۵.۷ تا سوال ۱۵.۱۲ میں $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام درج ذیل راہوں پر تلاش کریں (شکل ۱۵.۲۶)۔

ا. سیدھی لکیر $C_1:\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$

ب. قوسی راہ $C_2:\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^4\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$

ج. راہ $C_3 \cup C_4$ جو $(0,0,0)$ تا $(1,1,0)$ اور $(1,1,0)$ تا $(1,1,1)$ خطی قطعات پر مشتمل ہے۔

سوال ۱۵.۷: $\boldsymbol{F} = 3y\boldsymbol{i} + 2x\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۸: $\boldsymbol{F} = \frac{1}{1+x^2}\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۹: $\boldsymbol{F} = \sqrt{z}\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j} + \sqrt{y}\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۱۰: $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۱۱: $\boldsymbol{F} = (3x^2 - 3x)\boldsymbol{i} + 3z\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۱۲: $\boldsymbol{F} = (y+z)\boldsymbol{i} + (z+x)\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۱۳ تا سوال ۱۵.۱۶ میں بڑھتے t رخ $\boldsymbol{F}$ کا کام تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۳: $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - yz\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1$

سوال ۱۵.۱۴: $\boldsymbol{F} = 2y\boldsymbol{i} + 3x\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k},$
$\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + \frac{t}{6}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۵.۱۵: $\boldsymbol{F} = z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۵.۱۶: $\boldsymbol{F} = 6z\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + 12x\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = (\sin t)\boldsymbol{i} + (\cos t)\boldsymbol{j} + \frac{t}{6}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

لکیری تکمل اور مستوی میں سمتی میدان

سوال ۱۵.۱۷: نقطہ $(-1,1)$ سے $(2,4)$ تک منحنی $y = x^2$ پر $\int_C xy\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۸: ایک مثلث جس کے راس $(0,0)$ ، $(1,0)$ اور $(0,1)$ ہیں پر $\int_C (x-y)\,\mathrm{d}x + (x+y)\,\mathrm{d}y$ کی قیمت خلاف گھڑی چلتے ہوئے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۹: نقطہ $(4,2)$ سے $(1,-1)$ تک منحنی $x = y^2$ پر چلتے ہوئے سمتی میدان $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{j}$ کے لئے $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۰: نقطہ $(1,0)$ سے $(0,1)$ تک اکائی دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ پر خلاف گھڑی چلتے ہوئے سمتی میدان $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ کے لئے $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۱: نقطہ $(1,1)$ سے $(2,3)$ تک سیدھی لکیر پر قوت $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + (y-x)\boldsymbol{j}$ کا کام دریافت کریں۔

سوال ۱۵.۲۲: تفاعل $f(x,y) = (x+y)^2$ کی ڈھلوان کا کام دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ پر خلاف گھڑی نقطہ $(2,0)$ سے چلتے ہوئے ایک چکر کے لئے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۳: میدان $\boldsymbol{F}_1 = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{i}$ اور $\boldsymbol{F}_2 = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ کی دائری بہاؤ درج ذیل منحنیات کی ہمراہ تلاش کریں اور ان منحنیات کو عبور کرتا ہوا بہاؤ تلاش کریں۔

ا. دائرہ $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$

ب. ترخیم $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (4\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$

سوال ۱۵.۲۴: دائرہ $\boldsymbol{r}(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ کو عبور کرتا ہوا بہاؤ درج ذیل میدان کے لئے حاصل کریں۔

$$\boldsymbol{F}_1 = 2x\boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{F}_2 = 2x\boldsymbol{i} + (x-y)\boldsymbol{j}$$

سوال ۱۵.۲۵ تا سوال ۱۵.۲۸ میں نصف دائری قوس $\boldsymbol{r}_1(t) = (a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le \pi$ اور قطع $\boldsymbol{r}_2(t) = t\boldsymbol{i},\ -a \le t \le a$ پر مشتمل نصف دائری راہ کی ہمراہ بہاؤ اور اس کو عبور کرتا ہوا بہاؤ، میدان $\boldsymbol{F}$ کے لئے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۲۵: $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۲۶: $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۲۷: $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۲۸: $\boldsymbol{F} = -y^2\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۲۹: سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{F} = (x+y)\boldsymbol{i} - (x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ کے بہاؤ کے تکمل کی قیمت درج ذیل راہ کی ہمراہ مستوی xy میں نقطہ $(1,0)$ سے $(-1,0)$ تک تلاش کریں۔

ا. دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کا بالائی نصف حصہ۔

ب. نقطہ $(1,0)$ تا $(-1,0)$ لکیری قطع۔

ج. نقطہ $(1,0)$ تا $(0,-1)$ اور اس کے بعد $(0,-1)$ سے $(-1,0)$ تک لکیری قطع۔

سوال ۱۵.۳۰: ایک مثلث، جس کے راس $(1,0)$ ، $(0,1)$ اور $(-1,0)$ ہیں، سے خارجی بہاؤ سوال ۱۵.۲۹ کے میدان کے لئے تلاش کریں۔

مستوی میں میدان کی تلاش اور خاکہ

سوال ۱۵.۳۱: چکری میدان $\boldsymbol{F} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}$ بمع افقی اور انتصابی اجزاء کا خاکہ دائرہ $x^2 + y^2 = 4$ کے مختلف نقطوں پر بنائیں۔

سوال ۱۵.۳۲: رداسی میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ بمع افقی اور انتصابی اجزاء کا خاکہ دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کے مختلف نقطوں پر بنائیں۔

سوال ۱۵.۳۳: (ا) مستوی xy میں میدان $\boldsymbol{G} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ تلاش کریں جس کی قیمت نقطہ $(a,b) \neq (0,0)$ پر $\sqrt{a^2+b^2}$ ، رخ خلاف گھڑی اور دائرہ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ کو مماسی ہو۔ نقطہ $(0,0)$ پر میدان غیر معین ہے۔ (ب) میدان $\boldsymbol{G}$ اور چکری میدان $\boldsymbol{F} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}$ کے بیچ کیا تعلق پایا جاتا ہے؟

سوال ۱۵.۳۴: (ا) مستوی xy میں ایسا میدان $\boldsymbol{G} = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j}$ تلاش کریں جو $(a,b) \neq (0,0)$ پر دائرہ $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ کو مماسی ہو، اس کی مطلق قیمت اکائی ہو اور اس کا رخ گھڑی وار ہو۔ (ب) میدان $\boldsymbol{G}$ اور چکری میدان $\boldsymbol{F} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}$ کے بیچ کیا تعلق پایا جاتا ہے؟

سوال ۱۵.۳۵: مستوی xy میں ایسا میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ تلاش کریں جو $(x,y) \neq (0,0)$ پر مبدا کے رخ ہو اور اس کی مطلق قیمت اکائی ہو۔ نقطہ $(0,0)$ پر میدان غیر معین ہے۔

سوال ۱۵.۳۶: مستوی xy میں ایسا میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ تلاش کریں جو $(x,y) \neq (0,0)$ پر مبدا کے رخ ہو اور $|\boldsymbol{F}|$ کی قیمت (ا) مبدا سے (x,y) تک فاصلہ کے برابر ہو، (ب) مبدا سے (x,y) تک فاصلہ کے بالعکس متناسب ہو۔ نقطہ $(0,0)$ پر میدان غیر معین ہے۔

فضا میں راہ کی ہمراہ تکمل بہاؤ

سوال ۱۵.۳۷ تا سوال ۱۵.۴۰ میں فضا کے کسی خطہ میں سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{F}$ سیال کے بہاؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ دی گئی منحنی کی ہمراہ بہاؤ، بڑھتے t کے رخ تلاش کریں۔

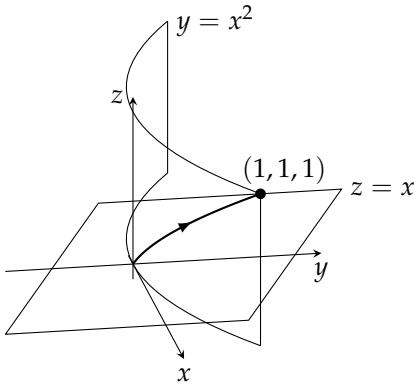
سوال ۱۵.۳۷: $\boldsymbol{F} = -4xy\boldsymbol{i} + 8y\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},\ 0 \leq t \leq 2$

سوال ۱۵.۳۸: $\boldsymbol{F} = x^2\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + y^2\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = 3t\boldsymbol{j} + 4t\boldsymbol{k},\ 0 \leq t \leq 1$

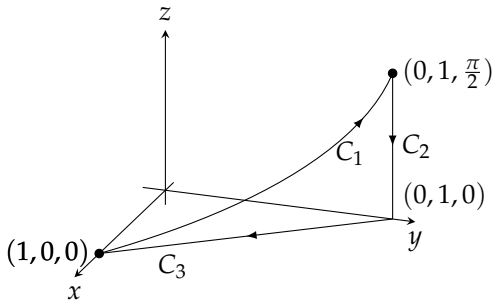
سوال ۱۵.۳۹: $\boldsymbol{F} = (x-z)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{k},\ 0 \leq t \leq \pi$

سوال ۱۵.۴۰: $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},$
$\boldsymbol{r}(t) = (-2\cos t)\boldsymbol{i} + (2\sin t)\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k},\ 0 \leq t \leq 2\pi$

سوال ۱۵.۴۱: بڑھتے t رخ چلتے ہوئے درج ذیل تین عدد بند راہ پر $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} + 2z\boldsymbol{j} + 2y\boldsymbol{k}$ کا دائری بہاؤ تلاش کریں (شکل ۱۵.۲۷)۔



شکل ۱۵.۲۸



شکل ۱۵.۲۷

$$
\begin{aligned}
C_1: &\quad \boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, && 0 \le t \le \tfrac{\pi}{2}\\
C_2: &\quad \boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{j} + \tfrac{\pi}{2}(1-t)\boldsymbol{k}, && 0 \le t \le 1\\
C_3: &\quad \boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + (1-t)\boldsymbol{j}, && 0 \le t \le 1
\end{aligned}
$$

سوال ۱۵.۴۲: مستوی $2x + 3y - z = 0$ اور بیلن $x^2 + y^2 = 12$ ایک دوسرے کو ترخیم C پر قطع کرتے ہیں۔ بغیر کوئی تکمل حل کیے دکھائیں کہ میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ کا C پر دونوں رخ چلتے ہوئے دائری بہاؤ صفر کے برابر ہے۔

سوال ۱۵.۴۳: فضا میں ایک سیال کے بہاؤ کا سمتی رفتار کا میدان $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - yz\boldsymbol{k}$ ہے۔ بیلن $y = x^2$ اور مستوی $z = x$ کی تقاطع لکیر کی ہمراہ نقطہ $(0,0,0)$ سے $(1,1,1)$ تک بہاؤ تلاش کریں (شکل ۱۵.۲۸)۔ (اشارہ: $t = x$ کو مقدار معلوم لیں۔)

سوال ۱۵.۴۴: میدان $\boldsymbol{F} = \nabla(xy^2z^3)$ کا بہاؤ درج ذیل کی ہمراہ تلاش کریں۔

ا. اوپر سے دیکھ کر گھڑی وار ایک بار چکر لگاتے ہوئے سوال ۱۵.۴۲ میں دی گئی C کی ہمراہ۔

ب. نقطہ $(1,1,1)$ تا $(2,1,-1)$ لکیری قطع کی ہمراہ۔

نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۵.۴۵: فرض کریں $a \le t \le b$ کے لئے $f(t)$ قابل تفرق اور مثبت ہے۔ مزید $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i}$ ہے جبکہ راہ $\boldsymbol{r}(t) = t\boldsymbol{i} + f(t)\boldsymbol{j},\ a \le t \le b$ کو C ظاہر کرتی ہے۔ کیا محور t، لکیر $t = a$، $t = b$ اور ترسیم f کے بیچ رقبہ اور تکمل کام $\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ کا ایک دوسرے کے ساتھ کوئی تعلق پایا جاتا ہے؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۵.۴۶: ایک ذرہ نقطہ $(a, f(a))$ سے $(b, f(b))$ تک ہموار منحنی $y = f(x)$ پر حرکت کرتا ہے۔ محرک قوت ہر نقطہ پر مبدا

سے دوری کے رخ ہے جبکہ اس کی مطلق قیمت مستقل k ہے۔ دکھائیں کہ یہ قوت درج ذیل کام کرتی ہے۔

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s = k\left[\sqrt{b^2+(f(b))^2}-\sqrt{a^2+(f(a))^2}\right]$$

کمپیوٹر کا استعمال سوال ۱۵.۴۷ تا سوال ۱۵.۵۲ میں کمپیوٹر کی مدد سے درج ذیل اقدام کرتے ہوئے دی گئی راہ پر قوت $\boldsymbol{F}$ کا کام تلاش کریں۔

ا. راہ $\boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i}+h(t)\boldsymbol{j}+k(t)\boldsymbol{k}$ کے لئے $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ تلاش کریں۔

ب. راہ کی ہمراہ قوت $\boldsymbol{F}$ کی قیمت تلاش کریں۔

ج. تکمل $\int_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۷: $\boldsymbol{F} = xy^6\boldsymbol{i}+3x(xy^5+2)\boldsymbol{j};\ \boldsymbol{r}(t) = 2\cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j},\ 0\le t\le 2\pi$

سوال ۱۵.۴۸: $\boldsymbol{F} = \frac{3}{1+x^2}\boldsymbol{i}+\frac{2}{1+y^2}aj;\ \boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j},\ 0\le t\le \pi$

سوال ۱۵.۴۹: $\boldsymbol{F} = (y+yz\cos xyz)\boldsymbol{i}+(x^2+xz\cos xyz)\boldsymbol{j}+(z+xy\cos xyz)\boldsymbol{k};$
$\boldsymbol{r}(t) = 2\cos t\boldsymbol{i}+3\sin t\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k},\ 0\le t\le 2\pi$

سوال ۱۵.۵۰: $\boldsymbol{F} = 2xy\boldsymbol{i}-y^2\boldsymbol{j}+ze^x\boldsymbol{k};$
$\boldsymbol{r}(t) = -t\boldsymbol{i}+\sqrt{t}\boldsymbol{j}+3t\boldsymbol{k},\ 0\le t\le 4$

سوال ۱۵.۵۱: $\boldsymbol{F} = (2y+\sin x)\boldsymbol{i}+(z^2+\frac{1}{3}\cos y)\boldsymbol{j}+x^4\boldsymbol{k};$
$\boldsymbol{r}(t) = \sin t\boldsymbol{i}+\cos t\boldsymbol{j}+\sin 2t\boldsymbol{k},\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

سوال ۱۵.۵۲: $\boldsymbol{F} = x^2y\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}x^3\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k};$
$\boldsymbol{r}(t) = \cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j}+(2\sin^2 t-1)\boldsymbol{k},\ 0\le t\le 2\pi$

۱۵.۳ راہ سے آزادی، تفاعل خفی توانائی، اور بقائی میدان

ثقلی اور برقی میدان میں کمیت یا بار کو ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ منتقل کرنے کے لئے درکار کام صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر منحصر ہوتا ہے نا کہ منتقلی کی راہ پر۔ اس حصہ میں تکمل کام کی راہ سے آزادی کے تصور پر غور کیا جائے گا اور ایسے میدانوں کی خواص پر غور کیا جائے گا جن میں تکمل کام کی قیمت راہ کے تابع نہیں ہوتا۔

راہ سے آزادی

فضا میں کھلا خطہ D پر معین میدان $\boldsymbol{F}$ ایک ذرہ کو D میں نقطہ A سے نقطہ B منتقل کرتا ہے۔ عموماً تکمل کام $\int \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت منتقلی کی راہ پر منحصر ہو گی، البتہ ایسے میدان پائے جاتے ہیں جن میں تکمل کام کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر منحصر ہو گی نا کہ منتقلی کی راہ پر۔ اگر D میں تمام A اور B کے لئے ایسا ہو تب یہ میدان بقائی میدان کہلائے گا اور ہم کہیں گے کہ D میں $\int \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ راہ سے آزاد ہے اور D پر $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے۔

تعریف: فضا میں کھلا خطہ D پر $\boldsymbol{F}$ کو ایک معین میدان لیتے ہوئے تصور کریں کہ D میں ہر دو نقطوں A اور B کے بیچ ہر ممکنہ راہ پر تکمل کام $\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت ایک جیسی ہے۔ تب تکمل $\int \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ خطہ D میں **راہ سے آزاد**[۷] ہو گا اور میدان $\boldsymbol{F}$ خطہ D پر **بقائی**[۸] ہو گا۔

□

عملی زندگی میں عموماً میدان $\boldsymbol{F}$ صرف اور صرف اس صورت بقائی ہو گا جب D پر $\boldsymbol{F} = \nabla f$ ہو جہاں f ایک غیر سمتی تفاعل ہے۔ ایسی صورت میں تفاعل f کو $\boldsymbol{F}$ کا مخفی قوہ تفاعل کہتے ہیں۔

تعریف: اگر D پر میدان $\boldsymbol{F}$ معین ہو اور $\boldsymbol{F} = \nabla f$ ہو جہاں f خطہ D پر ایک غیر سمتی تفاعل ہو تب f کو $\boldsymbol{F}$ کا **مخفی قوہ تفاعل**[۹] کہتے ہیں۔

□

برقی مخفی قوہ ایک غیر سمتی تفاعل ہے جس کا میدان ڈھلوان ایک برقی میدان ہوتا ہے۔ ثقلی مخفی قوہ ایک غیر سمتی تفاعل ہے جس کا میدان ڈھلوان ایک ثقلی میدان ہوتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ جیسا ہم اب دیکھیں گے، میدان $\boldsymbol{F}$ کا مخفی قوہ تفاعل f جاننے کے بعد $\boldsymbol{F}$ کی دائرہ کار میں تمام تکملات کام کی قیمتیں درج ذیل سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔

$$\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B \nabla f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(B) - f(A) \tag{۱۵.۱۰}$$

اگر آپ واحد متغیر کے تفرق f' کی طرح ∇f کو متعدد متغیرات کے تفاعل کے لئے فرض کریں تب مساوات ۱۵.۱۰ کو احصاء کے بنیادی کلیہ

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

کا مطابقتی سمتی احصاء کا کلیہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

بقائی میدان کی دیگر قابل ذکر خواص پر، آگے چلتے ہوئے ساتھ ساتھ، غور کیا جائے گا۔ مثلاً، D پر بقائی $\boldsymbol{F}$ کی صورت میں D میں ہر بند راہ پر تکمل کام صفر ہو گا۔ مساوات ۱۵.۱۰ اور اس کی مضمرات کی درستگی برقرار رکھنے کی خاطر ہمیں اس مساوات میں مستعمل منحنی، میدان، اور دائرہ کار پر شرائط مسلط کرنی ہوں گے۔

ہم فرض کرتے ہیں کہ تمام منحنیات **ٹکڑوں میں ہموار**[۱۰] ہیں، یعنی، انہیں متناہی تعداد کی ہموار منحنیات کو ایک دوسرے کے ساتھ جوڑ کر، حصہ ۱۲.۱ کی طرح، حاصل کیا گیا ہے۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{F}$ کے اجزاء کے یک رتبی استمراری تفرقات پائے جاتے ہیں۔ استمرار کی اس شرح کے بعد $\boldsymbol{F} = \nabla f$ کی صورت میں مخفی قوہ تفاعل f کے مدغم تفرقات ایک دوسرے کے برابر ہوں گے، جو بقائی میدان $\boldsymbol{F}$ کے خواص پر غور کے دوران آفشاں انگیز ثابت ہو گا۔

---

[۷] pathindependent
[۸] conservative
[۹] potentialfunction
[۱۰] piecewisesmooth

ہم فضا میں D کو ایک کھلا خطہ فرض کرتے ہیں۔ یوں D میں ہر نقطہ ایک ایسے گیند کے مرکز پر پایا جائے گا جو مکمل طور پر D میں پایا جاتا ہو۔ مزید ہم فرض کرتے ہیں کہ D **تعلق (دار)**[1] خطہ ہے۔ کھلا خطہ میں تعلق دار سے مراد ایسا خطہ ہے، جس میں ہر دو نقطوں کو ایک ایسی مسلسل راہ سے جوڑا جا سکتا ہے جو مکمل طور پر اس خطہ میں پائی جاتی ہو۔

بقائی میدان میں لکیری تکملات

بقائی میدان میں لکیری تکملات کی قیمتیں درج ذیل نتیجہ کی مدد سے باآسانی حاصل کی جا سکتی ہیں۔ اس نتیجہ کے تحت تکمل کی قیمت صرف ابتدائی اور اختتام نقطوں پر منحصر ہو گی نا کہ منتقلی کی راہ پر۔

مسئلہ ۱: **لکیری تکملات کا بنیادی مسئلہ**

۱. فرض کریں فضا میں کھلے تعلق دار خطہ D میں سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ کے اجزاء استمراری ہیں۔ تب صرف اور صرف اس صورت جب D میں تمام نقاط A اور B کے لئے تکمل $\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت، D کے اندر رہتے ہوئے A اور B کے بیچ تمام راہ سے آزاد ہو، ایسا قابل تفرق تفاعل f موجود ہو گا جو درج ذیل پر پورا اترتا ہو۔

$$\boldsymbol{F} = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

۲. اگر تکمل کی قیمت A اور B کے بیچ راہ سے آزاد ہو تب تکمل کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = f(B) - f(A)$$

ثبوت: **کہ $\boldsymbol{F} = \nabla f$ سے مراد تکمل کی قیمت کا راہ سے آزاد ہونا ہے**

فرض کریں D میں A اور B دو نقطے ہیں اور D میں A سے B تک ہموار راہ درج ذیل ہے۔

$$C: \quad \boldsymbol{r}(t) = g(t)\boldsymbol{i} + h(t)\boldsymbol{j} + k(t)\boldsymbol{k}, \quad a \le t \le b$$

منحنی کی ہمراہ t کے لحاظ سے C قابل تفرق ہے اور درج ذیل ہو گا۔

زنجیری قاعدہ

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\ &= \nabla f\cdot\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right) = \nabla f\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{۱۵.۱۱}$$

---

[1] connected"

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{t=a}^{t=b} \boldsymbol{F}\cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{مساوات ۱۵.۱۱}$$
$$= f(g(t),h(t),k(t))\Big]_a^b = f(B)-f(A)$$

اس طرح تکمل کام کی قیمت A اور B پر f کی قیمتوں پر منحصر ہو گی نا کہ ان کے بیچ راہ پر۔ یوں مسئلہ کے دوسرا جزو کے ساتھ ساتھ پہلا مضمر جزو بھی ثابت ہوتا ہے۔ ہم الٹ مضمر کا زیادہ پیچیدہ ثبوت پیش نہیں کرتے ہیں۔

□

مثال ۱۵.۱: نقاط $(-1,3,9)$ اور $(1,6,-4)$ کے بیچ ہموار منحنی C پر چلتے ہوئے درج ذیل بقائی میدان کا کم تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k} = \nabla(xyz)$$

حل: $f(x,y,z) = xyz$ لیتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B \nabla f\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{F} = \nabla f$$
$$= f(B)-f(A) \qquad \text{مسئلہ ا کا جزو دوم}$$
$$= xyz\big|_{(1,6,-4)} - xyz\big|_{(-1,3,9)}$$
$$= (1)(6)(-4) - (-1)(3)(9)$$
$$= -24 + 27 = 3$$

□

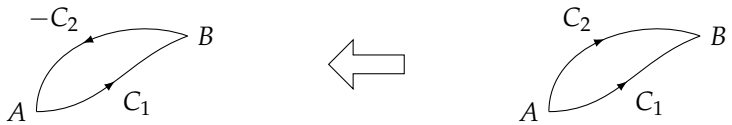
مسئلہ ۲: درج ذیل فقرے معادل ہیں۔

ا. خطہ D میں ہر بند راہ پر $\int \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$ ہے۔

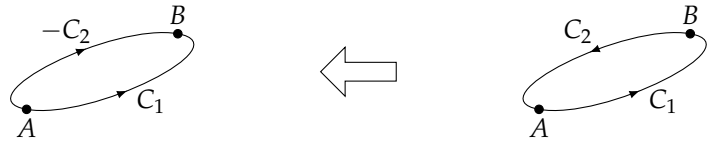
ب. خطہ D پر میدان $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے۔

ثبوت: جزو-ا
ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ D میں کسی بھی دو نقاط A اور B کے بیچ کسی بھی دو راہوں C_1 اور C_2 پر $\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کے تکملات کی قیمتیں ایک دوسرے جیسی ہوں گی۔ ہم شکل ۱۵.۲۹ میں C_2 کا رخ الٹ کر کے B سے A تک راہ کو $-C_2$ لکھتے ہیں۔ راہ C_1 اور راہ $-C_2$ مل کر بند راہ C دیتے ہیں۔ اب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_{C_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{-C_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$



شکل ۱۵.۲۹: دو نقطوں کے بیچ دو راہ میں سے ایک راہ کا رخ تبدیل کرتے ہوئے بند راہ حاصل کی جا سکتی ہے۔



شکل ۱۵.۳۰: بند راہ پر نقاط A اور B کی صورت میں ایک طرف راہ کا رخ تبدیل کر کے نقاط کے بیچ دو راہ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

یوں C_1 اور C_2 پر تکمل کی قیمتیں ایک دوسرے جیسی ہیں۔

□

ثبوت: جزو-ب

ہم دکھانا چاہتے ہیں کہ ہر بند راہ C پر $\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کا تکمل صفر ہے۔ ہم C پر کسی دو نقطوں A اور B کا انتخاب کر کے C کو دو ٹکڑوں میں تقسیم کرتے ہیں: نقطہ A سے B تک ٹکڑے کو C_1 اور نقطہ B سے A تک ٹکڑے کو C_2 لیتے ہوئے خلاف گھڑی تکمل درج ذیل ہو گا (شکل ۱۵.۳۰)۔

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} - \int_B^A \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

□

مسئلہ ۱ اور مسئلہ ۲ کے نتائج کو یکجا کرتے ہیں۔

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0 \text{ میں کسی بھی بند راہ پر } D \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{F} \text{ پر } D \text{ بقائی ہے} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{F} = \nabla f \text{ پر } D$$

یہ جانتے ہوئے کہ بقائی میدان میں لکیری تکملات کا حل کتنا آسان ہے، دو سوالات پیدا ہوتے ہیں:

۱. ہمیں کیسے جان سکتے ہیں کہ میدان $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے؟

۲. بقائی میدان $\boldsymbol{F}$ کا مطابقتی مخفی قوہ تفاعل f کیسے دریافت کیا جا سکتا ہے (جہاں $\boldsymbol{F} = \nabla f$ ہو گا)۔

بقائی میدان کا مخفی قوہ تفاعل کا حصول

بقائی میدان کا پرکھ درج ذیل ہے۔

بقائی میدان کا اجزائی پرکھ

میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$ جس کے اجزائی تفاعل کے استمراری یک رتبی جزوی تفرقات پائے جاتے ہوں صرف اور صرف اس صورت بقائی ہو گا جب درج ذیل مطمئن ہوں۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \text{اور} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \tag{۱۵.۱۲}$$

□

ثبوت پرکھ: ہم دکھاتے ہیں کہ بقائی $\boldsymbol{F}$ کے لئے مساوات ۱۵.۱۲ ہر صورت مطمئن ہو گا۔ ایسا مخفی قوہ تفاعل f پایا جائے گا جو درج ذیل کو مطمئن کرے گا۔

$$\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k} = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\
&= \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} && \text{استمراری ہونے کی بدولت مدغم جزوی تفرقات ایک دوسرے کے برابر ہوں گے} \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial z}
\end{aligned}$$

مساوات ۱۵.۱۲ کے باقی دو اجزاء بھی اسی طرح ثابت کیے جا سکتے ہیں۔

ثبوت کا دوسرا حصہ، جس سے مراد لیا جا سکتا ہے کہ مساوات ۱۵.۱۲ کہتی ہے کہ $\boldsymbol{F}$ بقائی ہو گا، مسئلہ سٹوکس کا نتیجہ ہے۔

□

یہ جانتے ہوئے کہ $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے، ہم عموماً مخفی قوہ تفاعل f دریافت کرنا چاہیں گے جو مساوات $\nabla f = \boldsymbol{F}$ یعنی

$$\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$$

کو f کے لئے حل کرنے سے حاصل ہو گا۔ ہم درج ذیل تین مساوات کا تکمل لے کر ایسا کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = P$$

مثال ۱۵.۲: دکھائیں کہ $\boldsymbol{F} = (e^x \cos y + yz)\boldsymbol{i} + (xz - e^x \sin y)\boldsymbol{j} + (xy + z)\boldsymbol{k}$ بقائی ہے اور اس کا مخفی قوہ تفاعل f تلاش کریں۔

حل: ہم مساوات ۱۵.۱۲ میں دی گئی پرکھ کا اطلاق

$$M = e^x \cos y + yz, \quad N = xz - e^x \sin y, \quad P = xy + z$$

پر کر کے درج ذیل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = y = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = z - e^x \sin y = \frac{\partial M}{\partial y}$$

یہ مساوات مل کر ہمیں بتاتے ہیں کہ ایسا f پایا جاتا ہے جو $\nabla f = \boldsymbol{F}$ کو مطمئن کرتا ہے۔

ہم درج ذیل مساواتوں کے تکملات سے f کو تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y + yz, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xz - e^x \sin y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = xy + z \tag{۱۵.۱۳}$$

ہم بائیں سے شروع کرتے ہوئے y اور z کو مستقل تصور کر کے پہلی مساوات کا تکمل x کے لحاظ سے لیتے ہیں:

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + g(y, z) \tag{۱۵.۱۴}$$

ہم نے تکمل کے مستقل کو $g(y, z)$ لکھا ہے چونکہ اس کی قیمت y اور z کے ساتھ تبدیل ہو سکتی ہے۔ اس مساوات سے ہم $\frac{\partial f}{\partial y}$ تلاش کر کے مساوات ۱۵.۱۳ میں دی گئی $\frac{\partial f}{\partial y}$ کے برابر ٹھراتے ہیں:

$$-e^x \sin y + xz + \frac{\partial g}{\partial y} = xz - e^x \sin y$$

یوں $\frac{\partial g}{\partial y} = 0$ ہو گا لہٰذا g کی قیمت صرف z پر منحصر ہو گی۔ اس طرح مساوات ۱۵.۱۴ درج ذیل روپ اختیار کرے گی۔

$$f(x, y, z) = e^x \cos y + xyz + h(z)$$

اس مساوات سے ہم $\frac{\partial f}{\partial z}$ معلوم کر کے مساوات ۱۵.۱۳ میں دی گئی $\frac{\partial f}{\partial z}$ کے برابر ٹھراتے ہیں:

$$xy + \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} = xy + z$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}z} = z \quad \text{یعنی}$$

متغیر z کے ساتھ تکمل لیتے ہیں:

$$h(z) == \frac{z^2}{2} + C$$

اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$f(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C$$

یوں مستقل C کی لامتناہی ممکنہ منفرد قیمتیں منتخب کر کے $\boldsymbol{F}$ کے لامتناہی تعداد کے مخفی قوہ تفاعل حاصل ہوں گے۔ □

مثال ۱۵.۳: دکھائیں کہ $\boldsymbol{F} = (2x-3)\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + (\cos z)\boldsymbol{k}$ غیر بقائی ہے۔

حل: ہم مساوات ۱۵.۱۲ میں دی گئی پرکھ استعمال کر کے

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\cos z) = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(-z) = -1$$

حاصل کرتے ہیں۔ یہ قیمتیں ایک دوسرے سے مختلف ہیں لہٰذا $\boldsymbol{F}$ غیر بقائی ہو گا۔ پرکھ کے باقی اجزاء کو دیکھنے کی ضرورت نہیں ہے۔ □

قطعی تفرقی روپ

جیسا ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے، تکمل کام اور تکمل دائری بہاؤ کا اظہار "تفرقی" روپ

$$\int_A^B M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z$$

میں کرنا زیادہ مناسب ثابت ہوتا ہے (حصہ ۱۵.۲)۔ جہاں $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z$ تفاعل f کا تفریقی روپ ہو وہاں ان تکملات کا حل نسبتاً آسان ہوتا ہے۔ چونکہ تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\int_A^B M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z &= \int_A^B \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z \\
&= \int_A^B \nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
&= f(B) - f(A) \qquad \text{مسئلہ ۱}
\end{aligned}$$

یوں واحد متغیر کے قابل تفرق تفاعل کی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\int_A^B \mathrm{d}f = f(B) - f(A)$$

تعریف: روپ $M(x,y,z)\,\mathrm{d}x + N(x,y,z)\,\mathrm{d}y + P(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ کو **تفرقی روپ**[۱۲] کہتے ہیں۔ فضا میں دائرہ کار D

[۱۲] differentialform

پر تفرقی روپ اس صورت قطعی تفرقی ہو گا جب پورے D میں کسی غیر سمتی تفاعل f درج ذیل کو مطمئن کرتا ہو۔

$$M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$$

□

دھیان رہے کہ D میں $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$ کی صورت میں D پر f کا میدان ڈھلوان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ ہو گا۔ اسی طرح اگر $\boldsymbol{F} = \nabla f$ ہو تب روپ $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$ قطعی تفرقی ہو گا۔ یوں $\boldsymbol{F}$ کے بقائی ہونا کا پرکھ ہی اس روپ کے قطعی تفرقی ہونے کا پرکھ ہو گا۔

قطعی تفرقی پرکھ برائے $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$

تفرقی روپ $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y + P\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$ صرف اور صرف درج ذیل صورت قطعی تفرقی ہو گا۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \text{اور} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \tag{۱۵.۱۵}$$

یہ اس بات کا معادل ہے کہ میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ بقائی ہے۔

□

مثال ۱۵.۴: دکھائیں کہ $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرقی ہے اور درج ذیل تکمل کی قیمت قطع $(1,1,1)$ تا $(2,3,-1)$ پر حاصل کریں۔

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}z$$

حل: ہم $M = y$ ، $N = x$ اور $P = 4$ لے کر مساوات ۱۵.۱۵ میں دیا گیا پرکھ بروئے کار لاتے ہیں۔

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1 = \frac{\partial M}{\partial y}$$

ان مساوات کے تحت $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرقی ہے لہٰذا

$$y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}z = \mathrm{d}f$$

ہو گا جہاں f کوئی غیر سمتی تفاعل ہے اور تکمل کی قیمت $f(2,3,-1) - f(1,1,1)$ ہو گی۔

ہم درج ذیل مساوات کے تکملات لیتے ہوئے تفاعل f تلاش کرتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 4 \tag{۱۵.۱۶}$$

بائیں ہاتھ سے پہلی مساوات کا تکمل درج ذیل دے گا۔

$$f(x,y,z) = xy + g(y,z) \tag{۱۵.۱۷}$$

اس کا y تفرق لے کر دوسری مساوات کے برابر ٹھراتے ہیں۔

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + \frac{\partial g}{\partial y} = x$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \quad \text{یعنی}$$

یہاں g صرف متغیر z پر منحصر ہے لہٰذا مساوات ۱۵.۱۷ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$f(x,y,z) = xy + h(z) \tag{۱۵.۱۸}$$

مساوات ۱۵.۱۶ کی تیسرے جزو کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 + \frac{\partial h}{\partial z} = 4$$
$$h(z) = 4z + C \quad \text{یعنی}$$

یوں

$$f(x,y,z) = xy + 4z + C$$

ہو گا اور تکمل کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$f(2,3,-1) - f(1,1,1) = 2 + C - (5 + C) = -3$$

□

سوالات

بقائی میدان کی پرکھ

سوال ۱۵.۱ تا سوال ۱۵.۶ میں کون سے میدان بقائی اور کون سے غیر بقائی ہیں؟

سوال ۱۵.۱: $\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۲: $\boldsymbol{F} = (y\sin z)\boldsymbol{i} + (x\sin z)\boldsymbol{j} + (xy\cos z)\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۳: $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + (x+z)\boldsymbol{j} - y\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۴: $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۵: $\boldsymbol{F} = (y + z + \boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۶: $\boldsymbol{F} = (e^x \cos y)\boldsymbol{i} - (e^x \sin y)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

مخفی قوہ تفاعل کی تلاش

سوال ۱۵.۷ تا سوال ۱۵.۱۲ میں میدان $\boldsymbol{F}$ کا مخفی قوہ تفاعل f تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۷: $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} + 3y\boldsymbol{j} + 4z\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۸: $\boldsymbol{F} = (y + z)\boldsymbol{i} + (x + z)\boldsymbol{j} + (x + y)\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۹: $\boldsymbol{F} = e^{y+2z}(\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 2x\boldsymbol{k})$

سوال ۱۵.۱۰: $\boldsymbol{F} = (y \sin z)\boldsymbol{i} + (x \sin z)\boldsymbol{j} + (xy \cos z)\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۱۱: $\boldsymbol{F} = (\ln x + \sec^2(x + y))\boldsymbol{i} + \left(\sec^2(x + y) + \frac{y}{y^2+z^2}\right)\boldsymbol{j} + \frac{z}{y^2+z^2}\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۱۲: $\boldsymbol{F} = \frac{y}{1+x^2y^2}\boldsymbol{i} + \left(\frac{x}{1+x^2y^2} + \frac{z}{\sqrt{1-y^2z^2}}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2z^2}} + \frac{1}{z}\right)\boldsymbol{k}$

لکیری تکملات کی قیمتوں کا حصول

سوال ۱۵.۱۳ تا سوال ۱۵.۲۲ میں دکھائیں کہ متکمل قطعی تفرق ہے۔ اس کے بعد لکیری تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

سوال ۱۵.۱۳: $\int_{(0,0,0)}^{(2,3,-6)} 2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2z\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۱۴: $\int_{(1,1,2)}^{(3,5,0)} yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۱۵: $\int_{(0,0,0)}^{(1,2,3)} 2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 - z^2)\,\mathrm{d}y - 2yz\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۱۶: $\int_{(0,0,0)}^{(3,3,1)} 2x\,\mathrm{d}x - y^2\,\mathrm{d}y - \frac{4}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۱۷: $\int_{(1,0,0)}^{(0,1,1)} \sin y \cos x\,\mathrm{d}x + \cos y \sin x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۱۸: $\int_{(0,2,1)}^{(1,\pi/2,2)} 2\cos y\,\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{y} - 2x \sin y\right)\mathrm{d}y + \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۱۹: $\int_{(1,1,1)}^{(1,2,3)} 3x^2\,\mathrm{d}x + \frac{z^2}{y}\,\mathrm{d}y + 2z \ln y\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۲۰: $\int_{(1,2,1)}^{(2,1,1)} (2x \ln y - yz)\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x^2}{y} - xz\right)\mathrm{d}y - xy\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۲۱: $\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} \frac{\mathrm{d}x}{y} + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y - \frac{y}{z^2}\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۲۲: $\int_{(-1,-1,-1)}^{(2,2,2)} \frac{2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2z\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$

سوال ۱۵.۲۳: نقطہ $(1,1,1)$ سے $(2,3,-1)$ تک قطع کی مقدار معلوم مساواتیں دریافت کر کے اس پر میدان $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$ کی لکیری تکمل

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,-1)} y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + 4\,\mathrm{d}z$$

کی قیمت تلاش کریں۔ چونکہ $\boldsymbol{F}$ بقائی میدان ہے لہٰذا تکمل کی قیمت راہ سے بے نیاز ہو گی۔ درج ذیل لکیری تکمل مثال ۱۵.۴

سوال ۱۵.۲۴: نقطہ $(0,0,0)$ سے $(0,3,4)$ تک قطع C کی ہمراہ درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں۔

$$\int_C x^2\,\mathrm{d}x + yz\,\mathrm{d}y + \frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}z$$

نظریہ، عملی استعمال اور مثالیں

دکھائیں کہ سوال ۱۵.۲۵ اور سوال ۱۵.۲۶ میں تکمل کی قیمت راہ A تا B پر منحصر نہیں ہے۔

سوال ۱۵.۲۵: $\int_A^B z^2\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y + 2xz\,\mathrm{d}z$

سوال ۱۵.۲۶: $\int_A^B \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

سوال ۱۵.۲۷ اور سوال ۱۵.۲۸ میں $\boldsymbol{F}$ کو ∇f روپ میں لکھیں۔

سوال ۱۵.۲۷: $\boldsymbol{F} = \frac{2x}{y}\boldsymbol{i} + \left(\frac{1-x^2}{y^2}\right)\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۲۸: $\boldsymbol{F} = (e^x \ln y)\boldsymbol{i} + \left(\frac{e^x}{y} + \sin z\right)\boldsymbol{j} + (y\cos z)\boldsymbol{k}$

سوال ۱۵.۲۹: نقطہ $(1,0,0)$ سے $(1,0,1)$ تک درج ذیل راہ کی ہمراہ $\boldsymbol{F} = (x^2+y)\boldsymbol{i} + (y^2+x)\boldsymbol{j} + ze^z\boldsymbol{k}$ کا کام تلاش کریں۔

ا. لکیری قطع $x = 1$ ، $y = 0$ ، $0 \le z \le 1$

ب. پیچدار منحنی $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j} + \frac{t}{2\pi}\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 2\pi$

ج. محور x پر $(1,0,0)$ سے $(0,0,0)$ کے بعد $(0,0,0)$ سے $(1,0,1)$ تک قطع مکافی $z = x^2,\ y = 0$

سوال ۱۵.۳۰: قوت $\boldsymbol{F} = e^{yz}\boldsymbol{i} + (xze^{yz} + z\cos y)\boldsymbol{j} + (xye^{yz} + \sin y)\boldsymbol{k}$ کا کام نقطہ $(1,0,1)$ تا $(1,\frac{\pi}{2},0)$ درج ذیل راہ کی ہمراہ تلاش کریں۔

ا. لکیری قطع $x = 1$ ، $y = \frac{\pi t}{2}$ ، $z = 1-t$ ، $0 \le t \le 1$

ب. نقطہ $(1,0,1)$ سے مبدا تک قطع اور اس کے بعد مبدا سے $(1,\frac{\pi}{2},0)$ تک قطع۔

ج. نقطہ $(1,0,1)$ تا $(1,0,0)$ قطع کے بعد محور x پر $(1,0,0)$ سے مبدا اور آخر میں قطع مکافی $y = \frac{\pi x^2}{2},\ z = 0$

سوال ۱۵.۳۱: مستوی xy میں $(-1,1)$ تا $(1,1)$ راہ C، نقطہ $(-1,1)$ تا $(0,0)$ اور نقطہ $(0,0)$ تا $(1,1)$ قطعات پر مشتمل ہے جبکہ $\boldsymbol{F} = \nabla(x^3y^2)$ ہے۔ تکمل $\int_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت درج ذیل دو طریقوں سے تلاش کریں۔

ا. راہ C کی مقدار معلوم روپ تلاش کریں۔ اس کو استعمال کر کے تکمل کی قیمت حاصل کریں۔

ب. اس حقیقت کو برائے کار لائیں کہ $\boldsymbol{F}$ کا مخفی قوہ تفاعل $f(x,y) = x^3y^2$ ہے۔

سوال ۱۵.۳۲: مستوی xy میں درج ذیل راہ C کی ہمراہ $\int_C 2x\cos y\,\mathrm{d}x - x^2\sin y\,\mathrm{d}y$ کی قیمت تلاش کریں۔

ا. نقطہ $(1,0)$ تا $(0,1)$ قطع مکافی $y = (x-1)^2$

ب. نقطہ $(-1,\pi)$ تا $(1,0)$ لکیری قطع

ج. ستارہ نما $\boldsymbol{r}(t) = (\cos^3 t)\boldsymbol{i} + (\sin^3 t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ پر نقطہ $(1,0)$ سے خلاف گھڑی واپس نقطہ $(1,0)$ تک۔

سوال ۱۵.۳۳: ثقلی میدان $\boldsymbol{F} = -GmM\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$ کا مخفی قوہ تفاعل تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۴: مبدا سے s_1 اور s_2 فاصلوں پر بالترتیب نقاط N_1 اور N_2 پائے جاتے ہیں۔ دکھائیں کہ سوال ۱۵.۳۳ کے ثقلی میدان میں N_1 سے N_2 تک ایک ذرہ کو منتقل کرنے کے لئے $GmM\left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}\right)$ کام درکار ہو گا۔

سوال ۱۵.۳۵: (ا) روپ $(ay^2 + 2czx)\,\mathrm{d}x + y(bx+cz)\,\mathrm{d}y + (ay^2+cx^2)\,\mathrm{d}z$ قطعی تفرقی ہونے کی صورت میں مستقل a، b اور c کا تعلق تلاش کریں۔ (ب) b اور c کی کن قیمتوں کے لئے درج ذیل میدان ڈھلوان ہو گا؟

$$\boldsymbol{F} = (y^2+2czx)\boldsymbol{i} + y(bx+cz)\boldsymbol{j} + (y^2+cx^2)\boldsymbol{k}$$

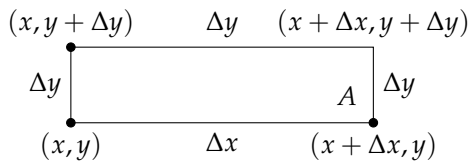
سوال ۱۵.۳۶: فرض کریں $\boldsymbol{F} = \nabla f$ بقائی سمتی میدان ہے اور $g(x,y,z) = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ ہے۔ دکھائیں کہ $\nabla g = \boldsymbol{F}$ ہو گا۔

سوال ۱۵.۳۷: آپ کو دو نقطوں کے بیچ وہ راہ تلاش کرنی ہے جس پر چلتے ہوئے $\boldsymbol{F}$ کم سے کم کام کرے گا۔ آپ جانتے ہیں کہ $\boldsymbol{F}$ بقائی ہے۔ آپ کا جواب کیا ہو گا؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

سوال ۱۵.۳۸: آپ تجرباتی طور جانتے ہیں کہ A سے B تک راہ C_1 کی ہمراہ $\boldsymbol{F}$ کا کام راہ C_2 کی ہمراہ کام کا نصف ہے۔ آپ $\boldsymbol{F}$ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟ اپنے جواب کی وجہ پیش کریں۔

۱۵.۴ مستوی میں مسئلہ گرین

ہم اب ایک ایسا مسئلہ پیش کرتے ہیں جو مستوی خطہ کی سرحد کی ہمراہ یا اس کو عبور کرتے ہوئے داب ناپذیر سیال کی بہاؤ اور خطہ کے اندر اس کی حرکت کے بیچ تعلق پیش کرتا ہے۔ پھیلاو اور گردش کے تصورات سیال کے سرحدی رویہ اور اندرونی رویہ کے بیچ تعلق پیش کرنا ممکن بناتے ہیں۔ سیال کی سمتی رفتار میدان کا پھیلاو کسی نقطہ پر خطہ میں سیال کے دخول یا خروج کی ناپ ہے جبکہ گردش اس نقطہ پر سیال کے گھومنے کی شرح کی ناپ ہے۔



شکل ۱۵.۳۱: نقطہ (x, y) پر سمتی میدان کی کثافت بہاؤ (پھیلاؤ) کی تعریف کے لئے درکار مستطیل۔

مسئلہ گرین کہتا ہے کہ، چند ایسے شرائط مطمئن ہونے کی صورت میں جو عملی استعمال میں عموماً پورے ہوتے ہیں، مستوی خطہ کی سرحد سے خارجی بہاؤ سرحد کے اندر میدان کے پھیلاو کے دوہرا تکمل کے برابر ہو گا۔ اس مسئلے کا دوسرا روپ کہتا ہے کہ خطہ کی سرحد کی ہمراہ خلاف گھڑی دائری بہاؤ اس خطہ میں میدان کی گردش کے دوہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

مسئلہ گرین، علم احصاء کے عظیم مسائل میں سے ایک ہے۔ یہ گہرا اور حیرت کن ہے اور اس کے دور رس نتائج پائے جاتے ہیں۔ خالص ریاضیات میں مسئلہ گرین کی اہمیت، احصاء کے بنیادی مسئلہ کے برابر ہے۔ عملی ریاضیات میں مسئلہ گرین کا تین ابعادی روپ برقی، مقناطیسی، اور سیالی حرکیات کے مسائل کا بنیاد مہیا کرتا ہے۔

ہم سیال کی حرکت کی سمتی رفتار میدان کی بات اس لئے کرتے ہیں کہ سیال کی حرکت کا ذہنی خاکہ بنانا آسان ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ مسئلہ گرین کسی بھی سمتی میدان، جو چند شرائط کو مطمئن کرتا ہو، کے لئے درست ہو گا۔ اس کی درستگی میدان کے کسی خصوصی طبیعی خاصیت کے ہونے پر منحصر نہیں ہے۔

نقطہ پر کثافت بہاؤ: پھیلاو

مسئلہ گرین کے لئے ہمیں دو نئے تصورات کی ضرورت پیش آتی ہے۔ پہلا تصور، ایک نقطہ پر سمتی میدان کی کثافت بہاؤ ہے جس کو ریاضیات میں سمتی میدان کا پھیلاو کہتے ہیں۔ اس کو حاصل کرنے کا طریقہ درج ذیل ہے۔

فرض کریں مستوی میں سمتی میدانی کا سیالی بہاؤ $\boldsymbol{F}(x, y) = M(x, y)\boldsymbol{i} + N(x, y)\boldsymbol{j}$ ہے اور خطہ R کے ہر نقطہ پر M اور N کے یک رتبی جزوی تفرقات استمراری ہیں۔ خطہ R میں (x, y) ایک نقطہ ہے اور A ایک ایسا چھوٹا مستطیل ہے جو مکمل طور پر R میں پایا جاتا ہے اور جس کا ایک راس (x, y) ہے (شکل ۱۵.۳۱)۔ اس مستطیل کے اطراف محددی محور کے متوازی ہیں اور ان کی لمبائیاں Δx اور Δy ہیں۔ مستطیل کی نچلی سرحد کو عبور کرتا ہوا خارجی سیال کی شرح تخمیناً نقطہ (x, y) پر باہر رخ عمودی سمتی رفتار کے غیر سمتی جزو ضرب لمبائی قطع کے برابر ہو گی:

$$\boldsymbol{F}(x, y) \cdot (-\boldsymbol{j})\Delta x = -N(x, y)\Delta x \tag{۱۵.۱۹}$$

یوں اگر سمتی رفتار کی اکائی میٹر فی سیکنڈ ہو تب خارجی شرح کی اکائی میٹر فی سیکنڈ ضرب میٹر یعنی مربع میٹر فی سیکنڈ ہو گی۔ باقی تین اطراف کے عمودی باہر رخ خارجی سیال کی شرح بھی اسی طرح حاصل کی جا سکتی ہیں۔ چاروں اطراف کے نتائج کو یہاں پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(x, y+\Delta y) \cdot \boldsymbol{j}\Delta x &= N(x, y+\Delta y)\Delta x && \text{بالا} \\
\boldsymbol{F}(x, y) \cdot (-\boldsymbol{j})\Delta x &= -N(x, y)\Delta x && \text{نچلا} \\
\boldsymbol{F}(x+\Delta x, y) \cdot \boldsymbol{i}\Delta y &= M(x+\Delta x, y)\Delta y && \text{دایاں} \\
\boldsymbol{F}(x, y) \cdot (-\boldsymbol{i})\Delta y &= -M(x, y)\Delta y && \text{بایاں}
\end{aligned} \tag{۱۵.۲۰}$$

مخالف اضلاع کی شرح کے مجموعات درج ذیل ہوں گے۔

$$[N(x, y+\Delta y) - N(x,y)]\Delta x \approx \left(\frac{\partial N}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \qquad \text{نچلا اور بالا} \tag{۱۵.۲۱}$$

$$[M(x+\Delta x, y) - M(x,y)]\Delta y \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y \qquad \text{دایاں اور بایاں} \tag{۱۵.۲۲}$$

مساوات ۱۵.۲۱ اور مساوات ۱۵.۲۲ کا مجموعہ کل اخراج دیگا:

$$\text{مستطیل کی سرحد کو عبور کرتا ہوا بہاؤ} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y \tag{۱۵.۲۳}$$

ہم اب $\Delta x \Delta y$ سے تقسیم کر کے بہاؤ فی اکائی رقبہ یعنی بہاؤ کی کثافت حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\text{مستطیل کی سرحد کو عبور کرتا ہوا بہاؤ}}{\text{مستطیل کا رقبہ}} \approx \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)$$

آخر میں ہم Δx اور Δy کو صفر تک پہنچا کر نقطہ (x, y) پر $\boldsymbol{F}$ کے کثافت بہاؤ کی تعریف اخذ کرتے ہیں۔

ریاضیات میں ہم کثافت بہاؤ کو $\boldsymbol{F}$ کا پھیلاو کہتے ہیں۔ میدان $\boldsymbol{F}$ کے پھیلاو کو ہم پھیلاو $\boldsymbol{F}$ لکھتے ہیں۔

تعریف: نقطہ (x, y) پر سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کا کثافت بہاؤ یا **پھیلاو**[۱۳] درج ذیل ہوگا۔

$$\boldsymbol{F}\text{ پھیلاو} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \tag{۱۵.۲۴}$$

□

اگر نقطہ (x_0, y_0) پر باریک سوراخ سے سیال خطہ میں داخل ہو تب اس سوراخ سے خطہ میں سیال پھیلے گا (جس کی بنا اس کو پھیلاؤ نام دیا گیا ہے)۔ چھوٹے مستطیل میں نقطہ (x_0, y_0) پر سوراخ سے خطہ میں سیال داخل ہونے کی صورت میں پھیلاو مثبت ہو گا جبکہ اس نقطہ پر سوراخ کے ذریعہ خطہ سے سیال کے اخراج کی صورت میں پھیلاو کی قیمت منفی ہو گی (شکل ۱۵.۳۲)۔

مثال ۱۵.۱: سمتی میدان $\boldsymbol{F}(x, y) = (x^2 - y)\boldsymbol{i} + (xy - y^2)\boldsymbol{j}$ کا پھیلاو تلاش کریں۔

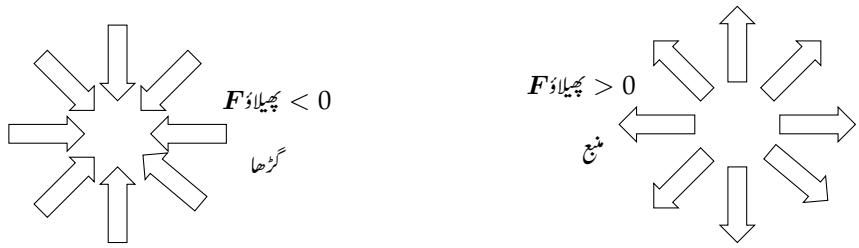
حل: ہم مساوات ۱۵.۲۴ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\text{ پھیلاو} &= \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 - y) + \frac{\partial}{\partial y}(xy - y^2)\\ &= 2x - x - 2y = 3x - 2y\end{aligned}$$

□

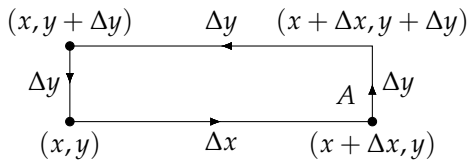
---

[۱۳] divergence



نقطہ (x_0, y_0) پر چھوٹے سوراخ کے ذریعہ خطہ سے سیال کا اخراج۔ نقطہ (x_0, y_0) پر چھوٹے سوراخ کے ذریعہ خطہ میں سیال کا دخول۔

شکل ۱۵.۳۲: داب ناپذیر سیال کے بہاؤ کی صورت میں مستوی خطہ کو پار کرتے ہوئے ''منبع'' پر، جہاں نظام میں سیال داخل ہو گا، پھیلاؤ مثبت ہو گا، جبکہ ''گڑھا'' پر، جہاں نظام سے سیال کا اخراج ہو گا، پھیلاؤ منفی ہو گا۔



شکل ۱۵.۳۳: نقطہ (x, y) پر کثافت دائری بہاؤ (گردش) کی تعریف کے لئے درکار مستطیل۔

ایک نقطہ پر کثافت دائری بہاؤ: گردش

مسئلہ گرین کے لئے درکار دوسرا نیا تصور ایک نقطہ پر سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کی کثافت دائری بہاؤ ہے جس کو ریاضیات میں $\boldsymbol{F}$ کی گردش کہتے ہیں۔ اس کو حاصل کرنے کی خاطر ہم وہی سمتی میدان

$$\boldsymbol{F}(x, y) = M(x, y)\boldsymbol{i} + N(x, y)\boldsymbol{j}$$

اور نقطہ (x, y) پر چھوٹا مستطیل رقبہ A لیتے ہیں۔ اس مستطیل کو شکل ۱۵.۳۳ میں دوبارہ پیش کیا گیا ہے۔

رقبہ A کے گرد خلاف گھڑی $\boldsymbol{F}$ کا دائری بہاؤ مستطیل A کی اطراف کی ہمراہ بہاؤ کی شرح کا مجموعہ ہو گا۔ اکائی مماسی سمتیہ $\boldsymbol{i}$ کے رخ سمتی رفتار $\boldsymbol{F}$ کا غیر سمتی جزو ضرب لمبائی قطع تخمیناً نچلے ضلع کی ہمراہ بہاؤ کے برابر ہو گا:

$$\boldsymbol{F}(x, y) \cdot \boldsymbol{i}\Delta x = M(x, y)\Delta x \tag{۱۵.۲۵}$$

باقی اطراف کی ہمراہ خلاف گھڑی بہاؤ اسی طرح حاصل کی جا سکتی ہیں۔ چاروں اضلاع کے نتائج درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(x, y + \Delta y) \cdot (-\boldsymbol{i})\Delta x &= -M(x, y + \Delta y)\Delta x && \text{بالا} \\
\boldsymbol{F}(x, y) \cdot \boldsymbol{i}\Delta x &= M(x, y)\Delta x && \text{نچلا} \\
\boldsymbol{F}(x + \Delta x, y) \cdot \boldsymbol{j}\Delta y &= N(x + \Delta x, y)\Delta y && \text{دایاں} \\
\boldsymbol{F}(x, y) \cdot (-\boldsymbol{j})\Delta y &= -N(x, y)\Delta y && \text{بایاں}
\end{aligned} \tag{۱۵.۲۶}$$

$\boldsymbol{F}$ گردش $(x_0, y_0) < 0$
گھڑی وار دائری بہاؤ

$\boldsymbol{F}$ گردش $(x_0, y_0) > 0$
خلاف گھڑی دائری بہاؤ

شکل ۱۵.۳۴: مستوی خطہ پر داب ناپذیر سیال کے بہاؤ میں کسی نقطہ پر سیال کے گھومنے کی شرح کی ناپ کو گردش کہتے ہیں۔ جن نقطوں پر سیال خلاف گھڑی گھومتا ہے ان نقطوں پر گردش مثبت ہو گی جبکہ جن نقطوں پر سیال کا گھماؤ گھڑی وار ہو وہاں گردش منفی ہو گی۔

ہم مخالف اطراف کے اجزاء کا مجموعہ لیتے ہیں۔

$$-[M(x, y + \Delta y) - M(x, y)]\Delta x \approx -\left(\frac{\partial M}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x \qquad \text{بالا اور نچلا} \tag{۱۵.۲۷}$$

$$[N(x + \Delta x, y) - N(x, y)]\Delta y \approx \left(\frac{\partial N}{\partial x}\Delta x\right)\Delta x \qquad \text{دایاں اور بایاں} \tag{۱۵.۲۸}$$

مساوات ۱۵.۲۷ اور مساوات ۱۵.۲۸ کے مجموعہ کو $\delta x \Delta y$ سے تقسیم کر کے مستطیل کی کثافت دائری بہاؤ کی تخمینی قیمت حاصل ہو گی:

$$\frac{\text{مستطیل کے گرد دائری بہاؤ}}{\text{مستطیل کا رقبہ}} \approx \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$$

آخر میں ہم Δx اور Δy کو صفر تک پہنچا کر نقطہ (x, y) پر $\boldsymbol{F}$ کی کثافت دائری بہاؤ کی تعریف اخذ کرتے ہیں جس کو ریاضیات میں $\boldsymbol{F}$ کی گردش کہتے ہیں۔

تعریف: نقطہ (x, y) پر سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کی کثافت دائری بہاؤ یا **گردش**[۱۴] درج ذیل ہو گی۔

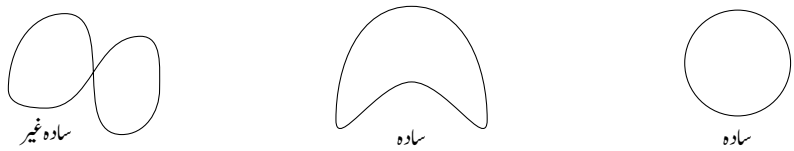
$$\boldsymbol{F} \text{ گردش} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \tag{۱۵.۲۹}$$

□

مستوی xy میں نہایت کم گہرائی کے رواں پانی میں نقطہ (x_0, y_0) پر گردش یا کثافت دائری بہاؤ، اس نقطہ پر نسب چرخی، جس کا محور مستوی کو عمودی ہو، کی حرکت کی رفتار اور رخ کی پیمائش ہو گی (شکل ۱۵.۳۴)۔

---

[۱۴] curl



شکل ۱۵.۳۵: مسئلہ گرین کے ثبوت میں ہم دو قسم کی بند منحنیات، سادہ اور غیر سادہ، میں فرق کرتے ہیں۔ سادہ منحنی اپنے آپ پر نہیں گزرتی۔ یوں دائرہ ایک سادہ منحنی ہے جبکہ "8" شکل کی منحنی غیر سادہ ہے۔

مثال ۱۵.۲: درج ذیل سمتی میدان کی گردش تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (x^2 - y)\boldsymbol{i} + (xy - y^2)\boldsymbol{j}$$

حل: ہم مساوات ۱۵.۲۹ استعمال کرتے ہیں۔

$$\text{گردش}\ \boldsymbol{F} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(xy - y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y) = y + 1$$

□

مستوی میں مسئلہ گرین

مسئلہ گرین کا ایک روپ کہتا ہے کہ موزوں حالات میں مستوی میں **سادہ**[۱۵] بند منحنی سے سمتی میدان کا خارجی بہاؤ، اس منحنی میں محیط خطہ پر میدان کے پھیلاو کے دہرا تکمل کے برابر ہو گا۔ مساوات ۱۵.۸ اور مساوات ۱۵.۹ میں بہاؤ کے کلیات پر دوبارہ نظر ڈالیں (شکل ۱۵.۳۵)۔

مسئلہ ۳: **مسئلہ گرین (پھیلاو و بہاؤ یا عمودی روپ)**

سادہ بند منحنی C سے میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کا اخراجی بہاؤ، C میں محیط خطہ R پر F کے پھیلاو کے دہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

$$\underbrace{\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S = \oint_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x}_{\text{اخراجی بہاؤ}} = \underbrace{\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial N}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}_{\text{تکمل پھیلاو}} \tag{۱۵.۳۰}$$

مسئلہ گرین کا دوسرا روپ کہتا ہے کہ ایک سادہ بند منحنی کی ہمراہ، خلاف گھڑی ایک میدان کا دائری بہاؤ، اس منحنی میں محیط خطہ پر میدان کی گردش کے دہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

---

[۱۵] simple

مسئلہ ۴: **مسئلہ گرین (دائری بہاؤ و گردش یا مماسی روپ)**
مستوی میں ایک سادہ بند منحنی C کی ہمراہ خلاف گھڑی، میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کی دائری بہاؤ، منحنی میں محیط خطہ R پر میدان کی گردش کے دہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s = \oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{۱۵.۳۱}$$

خلاف گھڑی دائری بہاؤ — تکمل گردش

□

میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کے لئے مساوات ۱۵.۷ میں دائری بہاؤ کے لئے دیا گیا تکمل درج ذیل معادل روپ اختیار کرے گا۔

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{T}\,\mathrm{d}s = \oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y$$

مسئلہ گرین کے دو روپ ایک دوسرے کے معادل ہیں۔ میدان $\boldsymbol{G}_1 = N\boldsymbol{i} - M\boldsymbol{j}$ پر مساوات ۱۵.۳۰ کا اطلاق مساوات ۱۵.۳۱ دے گی جبکہ میدان $\boldsymbol{G}_2 = -N\boldsymbol{i} + M\boldsymbol{j}$ پر مساوات ۱۵.۳۱ کا اطلاق مساوات ۱۵.۳۰ دے گی۔

مسئلہ گرین کے لئے ضروری ہے دو مفروضے مطمئن ہوتے ہوں۔ اول ہمیں M اور N پر ایسا شرائط مسلط کرنے ہوں گے کہ مسئلہ گرین میں پائے جانے والے تکملات موجود ہوں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ کسی ایسے کھلا خطہ، جس میں C اور R پائے جاتے ہوں، کے ہر نقطہ پر M اور N اور ان کے یک رتبی تفرقات استمراری ہوں گے۔ دوم، ہمیں منحنی C پر ہندسی شرائط مسلط کرنے ہوں گے۔ منحنی سادہ، بند اور ایسے ٹکڑوں پر مشتمل ہونی چاہیے جن کی ہمراہ M اور N قابل تکمل ہوں۔ ہم فرض کرتے ہیں کہ C ٹکڑوں میں ہموار ہے۔ ہم جو ثبوت مسئلہ گرین کے لئے پیش کرتے ہیں اس میں R کی شکل و صورت پر بھی شرائط مسلط کئے گئے ہیں۔ اعلیٰ نصاب کی کتب میں نسبتاً کم شرائط پر مبنی ثبوت موجود ہیں۔ آئیں پہلے چند مثالیں دیکھیں۔

مثال ۱۵.۳: مسئلہ گرین کے دونوں روپ کی تصدیق میدان

$$\boldsymbol{F}(x,y) = (x-y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$$

کے لئے اکائی دائرہ C میں محدود خطہ R پر کریں۔

$$C: \quad \boldsymbol{r}(t) = (\cos t)\boldsymbol{i} + (\sin t)\boldsymbol{j}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

حل: ہم پہلے تفاعلات، تفرق اور تفریق کو t کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$M = \cos t - \sin t, \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}(\cos t) = -\sin t\,\mathrm{d}t$$
$$N = \cos t, \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}(\sin t) = \cos t\,\mathrm{d}t$$
$$\frac{\partial M}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial N}{\partial y} = 0$$

مساوات ۱۵.۳۰ کے دو اطراف درج ذیل روپ اختیار کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\oint_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x &= \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)(\cos t\,\mathrm{d}t) - (\cos t)(-\sin t\,\mathrm{d}t) \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \pi \\
\iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_R (1+0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \text{اکائی دائرے کا رقبہ} = \pi
\end{aligned}$$

مساوات ۱۵.۳۱ کے دو اطراف درج ذیل روپ اختیار کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\oint_c M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y &= \int_{t=0}^{t=2\pi} (\cos t - \sin t)(-\sin t\,\mathrm{d}t) + (\cos t)(\cos t\,\mathrm{d}t) \\
&= \int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + 1)\,\mathrm{d}t = 2\pi \\
\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_R (1-(-1))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi
\end{aligned}$$

□

مسئلہ گرین استعمال کرتے ہوئے لکیری تکملات کی قیمت کا تلاش

ہم مختلف منحنی کے سر آپس میں جوڑ کر ایک بند منحنی C حاصل کر سکتے ہیں؛ منحنی C پر لکیری تکمل کی قیمت تلاش کرنے کا عمل لمبا ہو سکتا ہے؛ چونکہ اس میں C کے بہت سارے مختلف تکملات کی قیمت حاصل کرنی ہو گی۔ لیکن، اگر C ایسے خطہ R کی حد بندی کرتی ہو، جس پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہوتا ہو، ہم مسئلہ گرین استعمال کر کے C پر لکیری تکمل کو R پر دوہرا تکمل میں تبدیل کر سکتے ہیں۔

مثال ۱۵.۴: درج ذیل تکمل کی قیمت تلاش کریں

$$\oint_C xy\,\mathrm{d}y - y^2\,\mathrm{d}x$$

جہاں ربع اول میں لکیر $x = 1$ اور $y = 1$ چوکور C کاٹتی ہیں۔

حل: ہم مسئلہ گرین کے دو روپ میں سے کوئی ایک استعمال کر کے لکیری تکمل کو چوکور پر دوہرا تکمل میں تبدیل کر سکتے ہیں۔

۱. مساوات ۱۵.۳۰ استعمال کرتے ہیں: $M = xy$ ، $N = y^2$ لے کر، جہاں چوکور کی سرحد C اور اس کا اندرون R ہے، ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\oint_C xy\,\mathrm{d}y - y^2\,\mathrm{d}x &= \iint_R (y+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 3y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1 \Big[3xy\Big]_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y = \int_0^1 3y\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}y^2\Big]_0^1 = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

۲. مساوات ۱۵.۳۱ استعمال کرتے ہیں: $M = iy^2$ اور $N = xy$ لینے سے یہی نتیجہ حاصل ہو گا۔

$$\oint_C -y^2\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = \iint_R (y-(-2y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}$$

□

مثال ۱۵.۵: میدان $\boldsymbol{F}(x,y) = x\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j}$ کا اس چوکور سے خارجی بہاو تلاش کریں جس کو لکیریں $x = \pm 1$ اور $y = \pm 1$ گھیرتی ہیں۔

حل: لکیری تکمل سے بہاو حاصل کرنے کے لئے چار تکملات کی ضرورت پیش آئے گی؛ چوکور کے ہر ضلع کے لئے ایک تکمل کرنا ہو گا۔ مسئلہ گرین سے ہم لکیری تکمل کو ایک دہرا تکمل میں تبدیل کر سکتے ہیں۔ ہم $M = x$ ، $N = y^2$ ، چوکور C ، اور چوکور کا اندرون R لیتے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

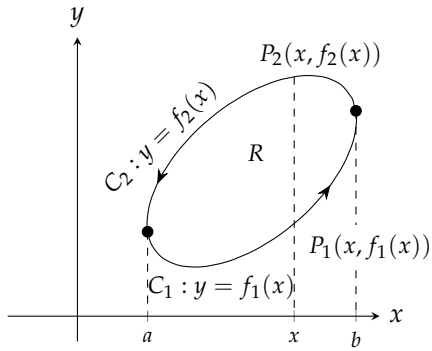
$$\begin{aligned}\text{بہاو} &= \oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \oint_C M\,\mathrm{d}y - N\,\mathrm{d}x\\ &= \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{(مسئلہ گرین)}\\ &= \int_{-1}^1\int_{-1}^1 (1+2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^1 \Big[x+2xy\Big]_{x=-1}^{x=1}\mathrm{d}y\\ &= \int_{-1}^1 (2+4y)\,\mathrm{d}y = \Big[2y+2y^2\Big]_{-1}^1 = 4\end{aligned}$$

□

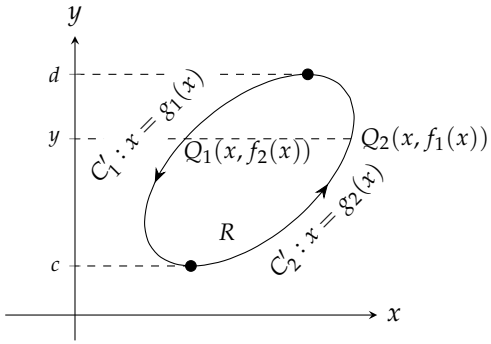
مسئلہ گرین کا ثبوت (خصوصی خطے)

فرض کریں مستوی xy میں C ایسی ہموار، سادہ، منحنی ہے جس کو محور کے متوازی کوئی لکیر دو سے زیادہ نقطوں پر نہیں کاٹتی۔ فرض کریں، منحنی C خطہ R گھیرتی ہے، اور ایسے کھلا خطہ میں جس میں C اور R دونوں پائے جاتے ہوں M ، N ، اور ان کے یک گنّا جزوی تفرق ہر نقطہ پر استمراری ہیں۔ ہم مسئلہ گرین کا دائری بہاو و گردش روپ:

$$\oint_C N\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{۱۵.۳۲}$$



شکل ۱۵.۳۶: منحنی C_1 جو $y = f_1(x)$ کی ترسیم ہے اور C_2 جو $y = f_2(x)$ کی ترسیم ہے، مل کر سرحدی منحنی C دیتی ہیں۔



شکل ۱۵.۳۷: منحنی C_1' جو $x = g_1(y)$ کی ترسیم ہے اور C_2' جو $x = g_2(y)$ کی ترسیم ہے، مل کر سرحدی منحنی C دیتی ہیں۔

==========

ثابت کرنا چاہتے ہیں۔ شکل ۱۵.۳۶ میں C دو سمت بند حصوں کا مجموعہ دکھایا گیا ہے۔

$$C_1 : y = f_1(x), \quad a \le x \le b, \qquad\qquad C_2 : y = f_2(x), \quad b \ge x \ge a$$

نقطہ a اور نقطہ b کے بیچ کسی بھی x کے لئے ہم $\frac{\partial M}{\partial y}$ کا تکمل y کے لحاظ سے $y = f_1(x)$ تا $y = f_2(x)$ لے سکتے ہیں، جو درج ذیل دیگا۔

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,\mathrm{d}y = M(x,y)\Big]_{y=f_1(x)}^{y=f_2(x)} = M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x)) \tag{۱۵.۳۳}$$

اس کو ہم x کے لحاظ سے a تا b تکمل کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))]\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_b^a M(x, f_2(x))\,\mathrm{d}x - \int_a^b M(x, f_1(x))\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{C_2} M\,\mathrm{d}x - \int_{C_1} M\,\mathrm{d}x \\
&= -\oint_C M\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C M\,\mathrm{d}x = \iint_R \left(-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{۱۵.۳۴}$$

مساوات ۱۵.۳۴ ہمیں مساوات ۱۵.۳۲ میں درکار نتائج کا نصف حصہ دیتی ہے۔ جیسا شکل ۱۵.۳۷ عندیہ دیتی ہے، اس کا دوسرا نصف حصہ، $\frac{\partial N}{\partial x}$ کا تکمل، پہلے x اور بعد میں y کے لحاظ سے، لے کر حاصل ہو گا۔ اس میں شکل ۱۵.۳۶ کی منحنی C کو درج ذیل دو سمت بند حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔

$$C_1' : x = g_1(y), \quad d \geq y \geq c \qquad \text{اور} \qquad C_2' : x = g_2(y), \quad c \leq y \leq d$$

اس دہرا تکمل کا نتیجہ درج ذیل ہے۔

$$\oint_C N\,\mathrm{d}y = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{۱۵.۳۵}$$

مساوات ۱۵.۳۴ اور مساوات ۱۵.۳۵ ملا کر مساوات ۱۵.۳۲ حاصل ہو گی۔ یوں ثبوت مکمل ہوتا ہے۔

دیگر خطوں کو ثبوت کی توسیع

شکل ۱۵.۳۸ میں لکیر $x = a$ ، $x = b$ ، $y = c$ ، اور $y = d$ مستطیل خطہ کی سرحد کو دو سے زیادہ نقطوں پر مس کرتی ہیں لہٰذا مسئلہ گرین کے ثبوت میں پیش دلائل اس مستطیل خطہ کے لئے قابل قبول نہیں۔ البتہ سرحد C کو چار سمت بند لکیری قطعات

$$\begin{aligned} C_1 :&\quad y = c, \quad a \leq x \leq b, \qquad & C_2 :&\quad x = b, \quad c \leq y \leq d, \\ C_3 :&\quad y = d, \quad b \geq x \geq a, \qquad & C_4 :&\quad x = a, \quad d \geq y \geq c, \end{aligned}$$

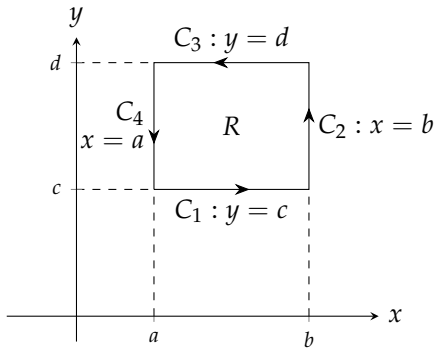
میں تقسیم کر کے ہم دلائل میں درج ذیل ترمیم کر سکتے ہیں۔

مساوات ۱۵.۳۵ کے ثبوت کی طرز پر چلتے ہوئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_c^d (N(b,y) - N(a,y))\,\mathrm{d}y \\ &= \int_c^d N(b,y)\,\mathrm{d}y + \int_d^c N(a,y))\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{C_2} N\,\mathrm{d}y + \int_{C_4} N\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{۱۵.۳۶}$$

اب C_1 اور C_3 پر y مستقل ہے، لہٰذا $\int_{C_1} N\,\mathrm{d}y = \int_{C_3} N\,\mathrm{d}y = 0$ ہو گا اور ہم مساوات ۱۵.۳۶ چھیڑے بغیر، اس کے کے دائیں ہاتھ $\int_{C_1} N\,\mathrm{d}y + \int_{C_3} N\,\mathrm{d}y$ جمع کر سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے درج ذیل ہو گا۔

$$\int_c^d \int_a^b \frac{\partial N}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_C N\,\mathrm{d}y \tag{۱۵.۳۷}$$



شکل ۱۵.۳۸: مستطیل کے لئے مسئلہ گرین کا ثبوت پیش کرنے کی خاطر ہم سرحد کو چار سمت بند لکیروں میں تقسیم کرتے ہیں۔

اسی طرح ہم درج ذیل دکھا سکتے ہیں۔

$$\int_a^b \int_c^d \frac{\partial M}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -\oint_C M\,\mathrm{d}x \tag{۱۵.۳۸}$$

مساوات ۱۵.۳۷ سے مساوات ۱۵.۳۸ منفی کر کے درج ذیل نتیجہ دوبارہ حاصل ہو گا۔

$$\oint_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{۱۵.۳۹}$$

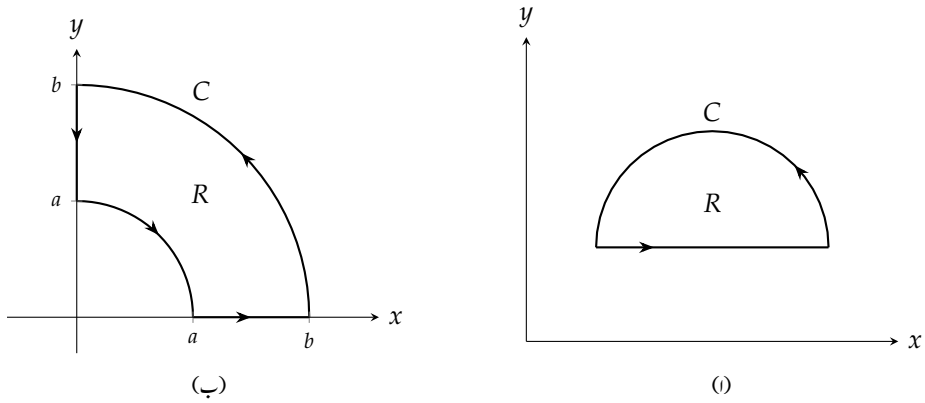
شکل ۱۵.۳۹ طرز کے خطوں کو بھی اتنی ہی آسانی سے نپٹا جا سکتا ہے۔ مساوات ۱۵.۳۲ کا اطلاق اب بھی ہو گا۔ شکل ۱۵.۴۰ میں گھوڑے کے نعل کی شکل کا خطہ R دکھایا گیا ہے؛ اور ہم دیکھتے ہیں کہ خطہ R_1 ، خطہ R_2 اور ان کی سرحد اکٹھا کرتے ہوئے مساوات ۱۵.۳۲ کا اطلاق ہو گا۔ مسئلہ گرین کا اطلاق C_1 ، R_1 اور C_2 ، R_2 پر ہو گا، جس سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int_{C_1} M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_{R_1} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$\int_{C_2} M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_{R_2} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

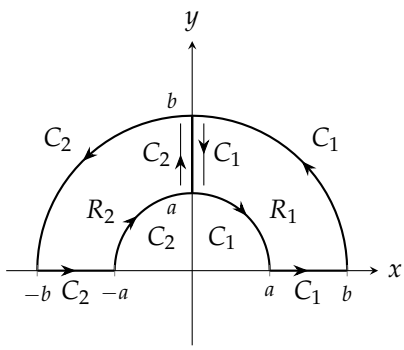
ان مساوات کو آپس میں جمع کرتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ محور y پر C_1 کے لئے b تا a لکیری تکمل کو C_2 پر اسی قطع پر لیکن مخالف رخ کا تکمل کاٹتا ہے۔ یوں ذیل ہو گا

$$\oint M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

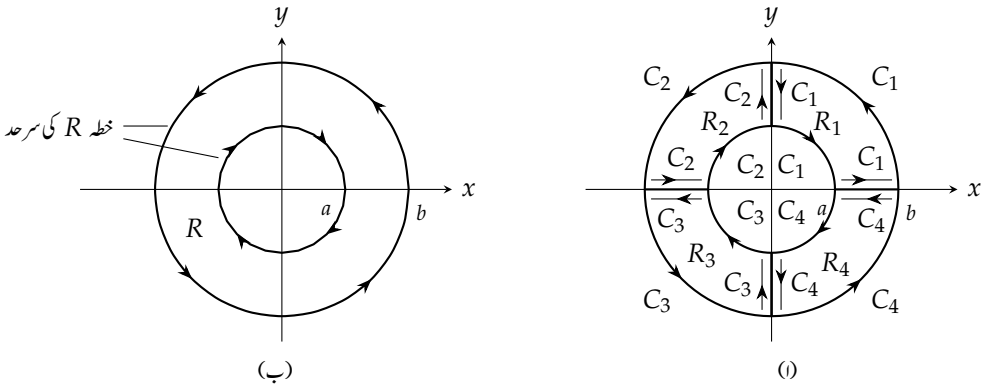
جہاں x محور کے دو قطعات $-b$ تا $-a$ اور a تا b اور دو نصف دائرے مل کر C دیتے ہیں، اور جہاں خطہ R منحنی C کے اندر پایا جاتا ہے۔



شکل ۱۵.۳۹: دیگر خطے جن پر مسئلہ گرین کا اطلاق ہو گا۔



شکل ۱۵.۴۰: خطہ R_1 اور R_2 کو ملا کر خطہ R حاصل کیا گیا ہے۔



شکل ۱۵.۴۱: خطہ R چار ٹکڑوں پر مشتمل ہے۔ نلکی محدد میں اندرونی دائرے کے لئے $r = a$ اور بیرونی کے لئے $r = b$ ہے جبکہ خطہ کے لئے $a \leq r \leq b$ ہے۔

مختلف سرحدوں پر لکیری تکملات جمع کر کے ایک سرحد پر تکمل کے حصول کی ترکیب کو متناہی تعداد کے ذیلی خطوں تک وسعت دی جا سکتی ہے۔ شکل ۱۵.۴۱-ا میں مخالف گھڑی سمت بند سرحد C_1 ربع اول میں واقع خطہ R_1 کو گھیرتی ہے۔ باقی تین ربعات کے لئے بھی ایسا ہو گا: خطہ R_i کی سرحد C_i ہو گی، جہاں $i = 1, 2, 3, 4$ ہے۔ مسئلہ گرین کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_{C_i} M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y = \iint_{R_i} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{۱۵.۴۰}$$

ہم $i = 1, 2, 3, 4$ کے لئے مساوات ۱۵.۴۰ کا مجموعہ لے کر شکل ۱۵.۴۱-ب حاصل کرتے ہیں۔

$$\oint_{r=b} (M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y) + \oint_{r=a} (M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y) = \iint_{a\leq r\leq b} \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{۱۵.۴۱}$$

مساوات ۱۵.۴۱ کہتی ہے، **چھلے دار**[۱۶] خطہ R پر $(\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$ کا دہرا تکمل، R کی مکمل سرحد پر چلتے ہوئے R بائیں ہاتھ رکھ کر $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y$ کے لکیری تکمل کے برابر ہو گا (شکل ۱۵.۴۱-ب)۔

مثال ۱۵.۶: چھلے دار خطہ $R : h^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 < h < 1$ (شکل ۱۵.۴۲) پر مسئلہ گرین (مساوات ۱۵.۳۱) کے دائری بہاو روپ کی تصدیق درج ذیل کے لئے کریں۔

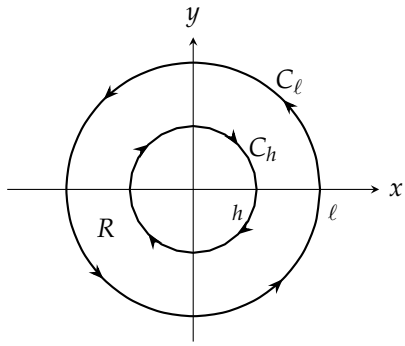
$$M = \frac{-y}{x^2 + y^2} \qquad N = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

حل: خطہ R کی سرحد دائرہ:

$$C_\ell : \quad x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

---

[۱۶] annular



شکل ۱۵.۴۲: دکھائی گئی سرحدوں کی ہمراہ تکمل لیتے ہوئے چھلادار خطہ R پر مسئلہ گرین کا اطلاق کیا جا سکتا ہے (مثال ۱۵.۶)۔

جس پر t بڑھانے سے ہم خلاف گھڑی گامزن ہوں گے، اور دائرہ:

$$C_h: \quad x = h\cos\theta, \quad y = -h\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

جس پر θ بڑھانے سے ہم گھڑی وار گامزن ہوں گے، پر مشتمل ہے۔ پورے خطہ R میں تفاعلات M ، N اور ان کے جزوی تفرق استمراری ہیں۔ مزید

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{(x^2+y^2)(-1)+y(2y)}{(x^2+y^2)^2}\\ &= \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial N}{\partial x}\end{aligned}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

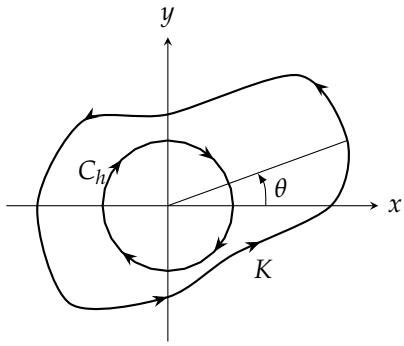
$$\iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_R 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

خطہ R کی سرحد پر $M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y$ کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\int_C M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y &= \oint_{C_1} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} + \oint_{C_h} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}\\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \frac{h^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}{h^2}\,\mathrm{d}\theta\\ &= 2\pi - 2\pi = 0\end{aligned}$$

□

چونکہ مثال ۱۵.۶ میں $(0,0)$ پر تفاعلات M اور N غیر استمراری ہیں لہٰذا دائرہ C_1 اور اس کے اندر خطہ پر مسئلہ گرین کا اطلاق نہیں ہو گا۔ ہمیں مبدا خارج (غیر شامل) کرنا ہو گا؛ ہم C_h کے اندر نقطے خارج کر کے ایسا کرتے ہیں۔



شکل ۱۵.۴۳: دائرہ C اور منحنی K کے بیچ خطہ۔

ہم مثال ۱۵.۶ میں دائرہ C_1 کی بجائے ایسی ترخیم یا سادہ بند منحنی K لے سکتے ہیں، جو C_h کو گھیرتی ہو (شکل ۱۵.۴۳)۔ نتیجہ اب بھی

$$\oint_K (M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y) + \oint_{C_h} (M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y) = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 0$$

ہو گا، جس سے کسی بھی ایسی منحنی K کے لئے درج ذیل حیرت کن نتیجہ اخذ ہوتا ہے۔

$$\oint_K (M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y) = 2\pi$$

قطبی محد داستعمال کر کے یہ نتیجہ سمجھا جا سکتا ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta & y &= r\sin\theta \\ \mathrm{d}x &= -r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta + \cos\theta\,\mathrm{d}r & \mathrm{d}y &= r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta + \sin\theta\,\mathrm{d}r \end{aligned}$$

لکھ کر درج ذیل ہو گا

$$\frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = \frac{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta}{r^2} = \mathrm{d}\theta \tag{۱۵.۴۲}$$

اور ایک مرتبہ K پر خلاف گھڑی چکر کاٹنے سے θ کی قیمت 2π بڑھتی ہے۔

سوالات

مسئلہ گرین کی تصدیق

سوال ۱۵.۱ تا سوال ۱۵.۴ میں میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j}$ کے لیے مساوات ۱۵.۳۰ اور مساوات ۱۵.۳۱ کے دونوں اطراف کی قیمتیں تلاش کر کے مسئلہ گرین کی تصدیق کریں۔ دونوں صورتوں میں تکمل کا دائرہ کار قرص $R : x^2 + y^2 \leq a^2$ اور محدود کار دائرہ $C : r = a$

$(a\cos t)\boldsymbol{i} + (a\sin t)\boldsymbol{j}, 0 \le t \le 2\pi$ لیں۔

سوال ۱۵.۱: $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۲: $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i}$

سوال ۱۵.۳: $\boldsymbol{F} = 2x\boldsymbol{i} - 3y\boldsymbol{j}$

سوال ۱۵.۴: $\boldsymbol{F} = -x^2y\boldsymbol{i} + xy^2\boldsymbol{j}$

خلاف گھڑی دائری بہاو اور باہر رخ بہاو

سوال ۱۵.۵ تا ۱۵.۱۰ میں میدان $\boldsymbol{F}$ اور منحنی C کے لیے مسئلہ گرین استعمال کر کے خلاف گھڑی دائری بہاو اور باہر رخ بہاو تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۵: $\boldsymbol{F} = (x-y)\boldsymbol{i} + (y-x)\boldsymbol{j}$ اور C کو چوکور $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۶: $\boldsymbol{F} = (x^2+4y)\boldsymbol{i} + (x+y^2)\boldsymbol{j}$ اور C کو چوکور $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۷: $\boldsymbol{F} = (y^2-x^2)\boldsymbol{i} + (x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ اور C کو مثلث $y = 0$ ، $x = 3$ ، $y = x$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۸: $\boldsymbol{F} = (x+y)\boldsymbol{i} - (x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ اور C کو مثلث $y = 0$ ، $x = 1$ ، $y = x$ محدود کرتا ہے۔

سوال ۱۵.۹: $\boldsymbol{F} = (x+e^x\sin y)\boldsymbol{i} + (x+e^x\cos y)\boldsymbol{j}$ اور C دو چشمہ $r^2 = \cos 2\theta$ کا دایاں ہاتھ گھیرے ہے۔

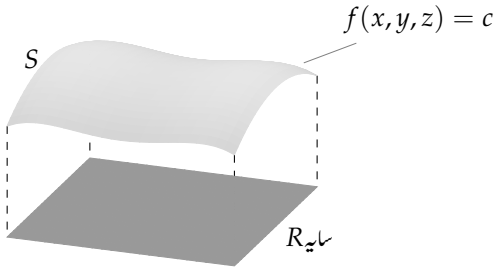
سوال ۱۵.۱۰: $\boldsymbol{F} = \left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)\boldsymbol{i} + \ln(x^2+y^2)\boldsymbol{j}$ اور C اس خطے کی سرحد ہے جس کو قطبی محدد عدم مساوات $1 \le r \le 2$ ، $0 \le \theta \le \pi$ تعین کرتی ہیں۔

۱۵.۵ سطحی رقبہ اور سطحی تکملات

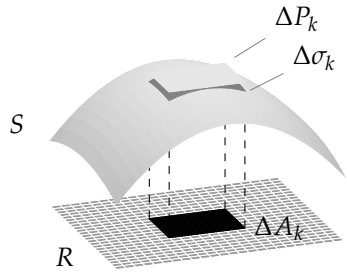
ہم مستوی میں خط پر تفاعل کا تکمل لینا جانتے ہیں لیکن ایسی صورت میں کیا ہو گا جب تفاعل ایک قوسی سطح پر پایا جاتا ہو؟ ایسی صورت میں تکمل کیسے حاصل ہو گا؟ ایسا تکمل، جو **سطحی تکمل**[۱۷] کہلاتا ہے، کی قیمت تلاش کرنے کی خاطر اس کو، سطح کے نیچے محدد ی مستوی پر (شکل ۱۵.۴۴)، دہرا تکمل کے روپ میں لکھا جاتا ہے۔ حصہ 14.7 اور حصہ 14.8 میں ہم دیکھیں گے کہ سطحی تکملات کی مدد سے مسئلہ گرین کو تین ابعاد میں عمومیت دی جا سکتی ہے۔

---

[۱۷] surfaceintegral



شکل ۱۵.۴۴: سطح S اور اس کے نیچے مستوی پر سطح کی تظلیل قائمہ R ۔آپ R کو مستوی پر S کا سایہ تصور کر سکتے ہو۔



شکل ۱۵.۴۵: مماسی چادر ΔP_k تخمیناً رقبہ ΔA_k سے اوپر سطحی رقبہ $\Delta\sigma_k$ کو ظاہر کرتی ہے۔

سطحی رقبہ کی تعریف

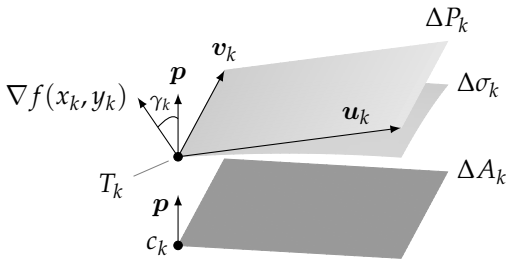
شکل ۱۵.۴۵ میں سطح S اور نیچے محددی مستوی میں اس کا "سایہ" خطہ R دکھایا گیا ہے۔ سطح کی تعریف مساوات $f(x,y,c)=c$ دیتی ہے۔ اگر سطح **ہموار**[۱۸] ہو (∇f استراری ہے اور S پر کہیں بھی صفر نہیں ہے)، ہم اس کے رقبہ کی تعریف اور قیمت R پر دہرا تکمل کی صورت میں کر سکتے ہیں۔

ہم خطہ R کی خانہ بندی چھوٹے چھوٹے مستطیلوں ΔA_k میں ہم یوں کرتے ہیں جیسے R پر تکمل کی تعریف پیش کرنا چاہتے ہوں۔ یہ S کے رقبہ کی تعریف پیش کرنے کا کا پہلا قدم ہے۔ ہر ایک ΔA کے بالکل اوپر کچھ بلندی پر سطح $\Delta\sigma_k$ پایا جاتا ہے، جس کو ہم مماسی سطح کے چھوٹے حصہ ΔP_k سے تخمین دے سکتے ہیں۔ اس کی وضاحت کرتے ہیں۔ رقبہ ΔA_k کے اگلے بائیں کونے C_k کے بالکل اوپر نقطہ $T_k(x_k,y_k,z_k)$ پر سطح کے مماس کا ΔP_k ایک ٹکڑا ہے۔ اگر مماسی سطح R کا متوازی ہو، تب ΔP_k رقبہ ΔA_k کا موافق ہو گا۔ بصورت دیگر، یہ ایک مستطیل ہو گا جس کا رقبہ ΔA_k کے رقبہ سے کچھ زیادہ ہو گا۔

شکل ۱۵.۴۶ میں $\Delta\sigma_k$ اور ΔP_k بڑھا چڑھا کر پیش کیے گئے ہیں، جہاں T_k پر ڈھلوان سمتیہ $\nabla f(x_k,y_k,z_k)$ اور R کا عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{p}$ بھی دکھائے گئے ہیں۔ اس شکل میں ∇f اور $\boldsymbol{p}$ کے بیچ زاویہ γ_k بھی دکھایا گیا ہے۔ اس شکل میں دیگر سمتیات $\boldsymbol{u}_k$ اور $\boldsymbol{v}_k$ مماسی مستوی میں ΔP_k کے کناروں پر پائے جاتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{u}_k\times\boldsymbol{v}_k$ اور ∇f دونوں مماسی مستوی کو عمودی ہیں۔ سمتیہ $\boldsymbol{u}_k$ اور سمتیہ $\boldsymbol{v}_k$ دونوں سمتیہ $\nabla f(x_k,y_k)$ کو عمودی ہوں گے۔

---

[۱۸] smooth



شکل ۱۵.۴۶: گزشتہ شکل کی تفصیل بڑی کر کے دکھائی گئی ہے۔ چونکہ سمتیہ $\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k$ (جو شکل میں نہیں دکھایا گیا) اور سمتیہ ∇f دونوں سطح ΔP_k کو عمودی ہیں لہٰذا یہ آپس میں متوازی ہوں گے۔

اعلیٰ سمتی ہندسہ سے ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی مستوی پر، جس کا عمود $\boldsymbol{p}$ ہو، ایسے مستطیل کی تظلیل کا رقبہ $|(\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k) \cdot \boldsymbol{p}|$ ہوگا جس کو $\boldsymbol{u}_k$ اور $\boldsymbol{v}_k$ تعین کرتے ہوں۔ یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$|(\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k) \cdot \boldsymbol{p}| = \Delta A_k \tag{۱۵.۴۳}$$

اب سمتی ضرب کی ایک خاصیت (جو صلیبی ضرب کی ایک حقیقت ہے) یہ ہے کہ $|\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k|$ رقبہ ΔP_k ہوگا، لہٰذا مساوات ۱۵.۴۳ ذیل روپ

$$\underbrace{|\boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k|}_{\Delta P_k} \underbrace{|\boldsymbol{p}|}_{1} \underbrace{|\cos(\text{یہ زاویہ کے بیچ } \boldsymbol{p} \text{ اور } \boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k)|}_{\substack{\text{چونکہ } \nabla f \text{ اور } \boldsymbol{u}_k \times \boldsymbol{v}_k \text{ دونوں مماسی مستوی کو} \\ \text{عمودی ہیں لہٰذا یہ } |\cos\gamma_k| \text{ کے برابر ہوگا}}} = \Delta A_k \tag{۱۵.۴۴}$$

یا

$$\Delta P_k |\cos\gamma_k| = \Delta A_k$$

اختیار کرتی ہے جو $\cos\gamma_k \neq 0$ کی صورت میں ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\Delta P_k = \frac{\Delta A_k}{|\cos\gamma_k|}$$

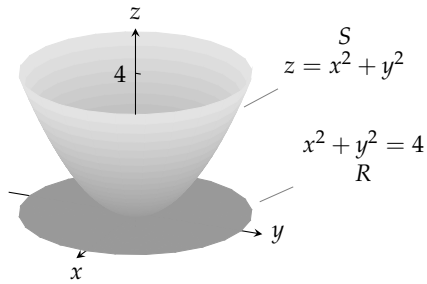
جب تک ∇f زمینی مستوی کو متوازی نہ ہو اور $\nabla f \cdot \boldsymbol{p} \neq 0$ ہو $\cos\gamma_k \neq 0$ ہوگا۔

چونکہ، سطحی ٹکڑے $\Delta\sigma_k$ جو مل کر رقبہ S دیتے ہیں، کو ΔP_k تخمیناً ظاہر کرتے ہیں، لہٰذا مجموعہ

$$\sum \Delta P_k = \sum \frac{\Delta A_k}{|\cos\gamma_k|} \tag{۱۵.۴۵}$$

سطحی رقبے S کا تخمین نظر آتا ہے۔ ہم یہ بھی دیکھ سکتے ہیں کہ خطہ R کو مزید چھوٹے خانوں میں تقسیم کرنے سے یہ تخمین بہتر ہوگی۔ درحقیقت، مساوات ۱۵.۴۵ کے دائیں ہاتھ مجموعہ دوہرا تکمل

$$\iint_R \frac{1}{|\cos\gamma|}\, \mathrm{d}A \tag{۱۵.۴۶}$$



شکل ۱۵.۴۷: اس قطع مکافی سطح کا رقبہ مثال ۱۵.۱ میں حاصل کیا گیا ہے۔

کے تخمینی مجموعے ہیں۔ اسی بنا پر جب بھی یہ تکمل موجود ہو ہم اسے S کے **رقبہ**[19] کی تعریف لیتے ہیں۔

عملی کلیہ

کسی بھی سطح $f(x,y,z) = c$ کے لیے $|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}| = |\nabla f||\boldsymbol{p}||\cos\gamma|$ ہو گا، لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے، جہاں اکائی سمتیہ کی مطلق قیمت 1 ہے ($|\boldsymbol{p}| = 1$)۔

$$\frac{1}{|\cos\gamma|} = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|}$$

اس کو مساوات ۱۵.۴۶ کے ساتھ ملا کر رقبے کا عملی کلیہ حاصل ہوتا ہے۔

سطحی رقبے کا کلیہ

بند اور محدود مستوی میں خطہ R پر سطح $f(x,y,z) = c$ کا رقبہ ذیل ہو گا

$$\text{سطحی رقبہ} = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \tag{۱۵.۴۷}$$

جہاں $\boldsymbol{p}$ خطہ R کا اکائی عمودی سمتیہ ہے اور $\nabla f \cdot \boldsymbol{p} \neq 0$ ہے۔

یوں ∇f کی قدر کو ∇f کے اس غیر سمتی عمودی جزو کی قدر سے تقسیم کر کے جو R کو عمودی ہو، خطہ R پر دوہرا تکمل لینے سے رقبہ حاصل ہو گا۔

ہم نے ∇f کو استمراری تصور کر کے اور پورے R پر $\nabla f \cdot \neq 0$ تصور کر کے مساوات ۱۵.۴۷ حاصل کی۔ جب بھی یہ تکمل موجود ہو، اس کی قیمت کو سطح $f(x,y,z) = c$ کے اس حصہ کے رقبے کی تعریف لی جاتی ہے جو R کے اوپر (بلندی پر) پایا جاتا ہو۔

مثال ۱۵.۱: قطع مکافی $x^2 + y^2 - z = 0$ کے نچلے حصے سے مستوی $z = 4$ ایک سطح کاٹتا ہے۔ اس سطح کا رقبہ تلاش کریں۔

---

[19] area

حل: ہم مستوی xy میں سطح S اور اس کے نیچے خطہ R کا خاکہ بناتے ہیں (شکل ۱۵.۴۷)۔ سطح S، ہم قد سطح $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z = 0$ کا حصہ ہے اور R، مستوی xy میں قرص $x^2 + y^2 \leq 4$ ہے۔ مستوی R کا اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$ ہے۔

سطح پر کسی بھی نقطہ x, y, z پر ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x^2 + y^2 - z \\
\nabla f &= 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k} \\
|\nabla f| &= \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (-1)^2} \\
&= \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \\
|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}| &= |\nabla f \cdot \boldsymbol{k}| = |-1| = 1
\end{aligned}$$

خطہ R میں $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ ہو گا، لہٰذا ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\text{سطحی رقبہ} &= \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A && \text{(مساوات ۱۵.۴۷)} \\
&= \iint_{x^2+y^2\leq 4} \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{4r^2+1}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta && \text{(قطبی محدد)} \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{12}(4r^2+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}(17^{\frac{3}{2}} - 1)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17} - 1)
\end{aligned}$$

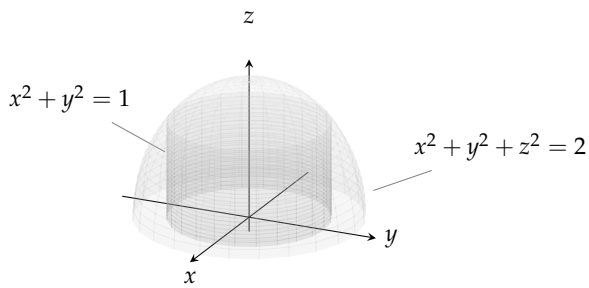
□

مثال ۱۵.۲: نصف کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2, z \geq 0$ سے بیلن $x^2 + y^2 = 1$ ایک ٹوپی کاٹتا ہے (شکل ۱۵.۴۸)۔ اس ٹوپی کا رقبہ تلاش کریں۔

حل: ٹوپی S، ہم قد سطح $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 2$ کا حصہ ہے۔ یہ ایک ایک مطابقت کے ساتھ مستوی xy میں قرص $R : x^2 + y^2 \leq 1$ پر تظلیل کرتا ہے۔ سمتیہ $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$ مستوی R کو عمودی ہے۔

سطح میں کسی بھی نقطے پر ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= x^2 + y^2 + z^2 \\
\nabla f &= 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k} \\
|\nabla f| &= 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{2} && \text{(چونکہ ٹوپی پر ہمیشہ } x^2 + y^2 + z^2 = 2 \text{ ہو گا)} \\
|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}| &= |\nabla f \cdot \boldsymbol{k}| = |2z| = 2z
\end{aligned}$$



شکل ۱۵.۴۸: کرہ سے بیلن ٹوپی کاٹتا ہے (مثال ۱۵.۲)۔

یوں ادرج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\text{سطحی رقبہ} = \iint_R \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A = \iint_R \frac{2\sqrt{2}}{2z}\,\mathrm{d}A = \sqrt{2}\iint_R \frac{\mathrm{d}A}{z} \tag{۱۵.۴۸}$$

یہاں z کا کیا کیا جائے؟

چونکہ z کرہ کی سطح پر ایک نقطے کا z محدد ہے، لہٰذا اس کو ہم x اور y کی صورت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$$

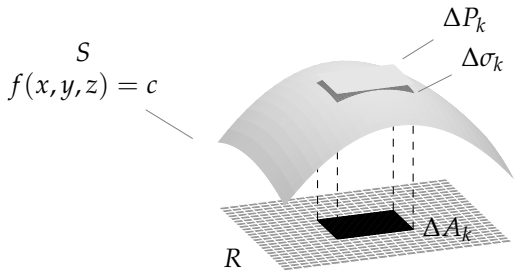
اس کو مساوات ۱۵.۴۸ میں ڈالتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\text{سطحی رقبہ} &= \sqrt{2}\iint_R \frac{\mathrm{d}A}{z} = \sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{\mathrm{d}A}{\sqrt{2-x^2-y^2}} \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}{\sqrt{2-r^2}} && \text{(قطبی محدد)} \\
&\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\Big[-(2-r^2)^{\frac{1}{2}}\Big]_{r=0}^{r=1}\mathrm{d}\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}(\sqrt{2}-1)\,\mathrm{d}\theta = 2\pi(2-\sqrt{2})
\end{aligned}$$

□

سطحی تکملات

سطحی رقبے کے حساب میں مستعمل تصورات بروئے کار لاتے ہوئے سطح پر تفاعل کے تکمل کا حصول سیکھتے ہیں۔



شکل ۱۵.۴۹: سطح پر کثافت بار جانتے ہوئے، سطحی تکمل میں ردوبدل کر کے، سطح پر کل بار دریافت کیا جا سکتا ہے۔

فرض کریں، سطح $f(x,y,z)=c$ پر برقی بار تقسیم ہے (شکل ۱۵.۴۹) اور S کے ہر نقطہ پر تفاعل $g(x,y,z)$ بار فی اکائی رقبہ (کثافت بار) دیتا ہے۔ ایسی صورت میں S پر کل بار کا حساب تکمل کی صورت میں درج ذیل طریقے سے لکھا جا سکتا ہے۔

ہم S کے نیچے، زمینی مستوی پر خطہ R کو چھوٹے چھوٹے مستطیلوں میں بالکل اسی طرح تقسیم کرتے ہیں جیسا S کا سطحی رقبہ تلاش کرنے کے لیے کیا جاتا ہے۔ ہر ایک ΔA_k کے بالکل اوپر کچھ بلندی پر سطح $\Delta\sigma_k$ پایا جاتا ہے، جس کو ہم مماسی مستوی پر مستطیلی ٹکڑا ΔP_k سے تخمین کرتے ہیں۔

ہم سطحی رقبے کی تعریف کے طرز پر چل رہے ہیں، تاہم یہاں ایک اضافی قدم لیتے ہیں: ہم (x_k,y_k,z_k) پر g کی قیمت معلوم کر کے رقبہ $\Delta\sigma_k$ پر کل بار کو تخمیناً حاصل ضرب $g(x_k,y_k,z_k)\Delta P_k$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس کی وجہ درج ذیل ہے: خطہ R کو کافی چھوٹے چھوٹے مستطیلوں میں تقسیم کرنے کی صورت میں پورے $\Delta\sigma_k$ پر g کی قیمت تقریباً مستقل ہو گی، اور ΔP_k تقریباً $\Delta\sigma_k$ کے کے برابر ہو گا۔ یوں S پر کل بار تخمیناً درج ذیل مجموعہ کے برابر ہو گا۔

$$\text{کل بار} = \approx \sum g(x_k,y_k,z_k)\Delta P_k = \sum g(x_k,y_k,z_k)\frac{\Delta A_k}{|\cos\gamma_k|} \tag{۱۵.۴۹}$$

اگر سطح S کو ظاہر کرنے والا تفاعل f اور اس کے یک رتبی جزوی تفرقات استمراری ہوں، اور S پر g استمراری ہو، تب R کی خانہ بندی ہمیشہ کی طرح نفیس بنانے سے مساوات ۱۵.۴۹ کے دائیں ہاتھ میں پیش مجموعے درج ذیل حد کو پہنچتے ہیں۔

$$\iint_R g(x,y,z)\frac{\mathrm{d}A}{|\cos\gamma|} = \iint g(x,y,z)\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \tag{۱۵.۵۰}$$

یہ حد سطح S پر g کا تکمل کہلاتا ہے، جس کو R پر دہرا تکمل لکھا اور حاصل کیا جاتا ہے۔ اس تکمل کی قیمت سطح S پر کل بار دے گی۔

اگر مساوات ۱۵.۵۰ کا تکمل موجود ہو، تب آپ توقع کر سکتے ہیں کہ مساوات ۱۵.۵۰ کا کلیہ سطح S پر کسی بھی تفاعل g کے تکمل کی تعریف ہے۔

تعریفات

اگر سطح S، جس کی تعریف مساوات $f(x,y,z) = c$ دیتی ہے، کا سایہ R ہو اور S کے تمام نقطوں پر g استمراری تفاعل ہو، S پر g کا **تکمل** درج ذیل ہو گا:

$$\iint g(x,y,z)\frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \tag{۱۵.۵۱}$$

جہاں $\boldsymbol{p}$ سایہ دار خطہ R کا اکائی عمودی سمتیہ ہے اور $\nabla f\cdot \boldsymbol{p} \neq 0$ ہے۔ اس تکمل کو **سطحی تکمل**[۲۰] کہتے ہیں۔

مختلف عملی استعمال میں مساوات ۱۵.۵۱ کا تکمل مختلف معنی رکھتا ہے۔ اگر g کی قیمت مستقل طور پر 1 ہو، تکمل S کا رقبہ دے گا۔ اگر g ایک باریک خول، جس کی شکل کا نمونہ S ہو، کی کمیتی کثافت ہو تب تکمل خول کی کمیت دے گا۔

الجبرائی خواص: سطحی رقبہ کی تفریق

ہم $(|\nabla f| / |\nabla f\cdot \boldsymbol{p}|)\,\mathrm{d}A$ کو $\mathrm{d}\sigma$ لکھ کر مساوات ۱۵.۵۱ کا تکمل مختصراً (درج ذیل) لکھ سکتے ہیں۔

سطحی رقبہ کی تفریق اور سطحی تکملات کا تفریقی روپ

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f\cdot \boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A \tag{۱۵.۵۲}$$

سطحی رقبے کی تفریق

$$\iint_S g\,\mathrm{d}\sigma$$

سطحی تکملات کا تفریقی کلیہ

سطحی تکملات دیگر دہرا تکملات کی طرح رویہ رکھتے ہیں: دو تفاعلات کا تکمل ان تفاعلات کے انفرادی تکملات کا مجموعہ ہو گا وغیرہ وغیرہ۔ دائرہ کار کی جمع پذیری خاصیت درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

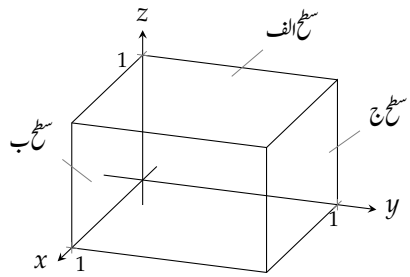
$$\iint_S g\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{S_1} g\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{S_2} g\,\mathrm{d}\sigma + \cdots + \iint_{S_n} g\,\mathrm{d}\sigma$$

کلیدی تصور یہ ہے کہ اگر S کو ہموار منحنیات، متناہی تعداد کی غیر منطبق، ہموار قطعات میں خانہ بند کرتی ہوں (یعنی اگر S **ٹکڑوں میں ہموار**[۲۱] ہو) تب قطعات پر تکملات کا مجموعہ S پر تکمل کے برابر ہو گا۔ یوں، مکعب کی سطح پر تفاعل کا تکمل، مکعب کی چھ سطحوں پر تکملات کا مجموعہ ہو گا۔

مثال ۱۵.۳: ربع اول سے مستویات $x = 1$، $y = 1$، اور $z = 1$ ایک مکعب کاٹتی ہیں (شکل ۱۵.۵۰)۔ اس مکعب کی سطح پر $g(x,y,z) = xyz$ کا تکمل لیں۔

---

[۲۰] surfaceintegral
[۲۱] piecewisesmooth



شکل ۱۵.۵۰: مکعب پر تفاعل کا تکمل حاصل کرنے کے لئے مکعب کے چھ اطراف پر تکمل لے کر نتائج جمع کریں (مثال ۱۵.۳)۔

حل: ہم باری باری مکعب کی چھ سطحوں پر xyz کا تکمل لے کر تمام نتائج کا مجموعہ لیتے ہیں۔ محددی مستویات میں پائے جانے والے اطراف میں $xyz = 0$ ہوگا، لہٰذا مکعب کی سطح پر تکمل گھٹ کر درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے۔

$$\iint_{\text{سطح مکعب}} xyz \, \mathrm{d}\sigma = \iint_{\text{سطح الف}} xyz \, \mathrm{d}\sigma + \iint_{\text{سطح ب}} xyz \, \mathrm{d}\sigma + \iint_{\text{سطح ج}} xyz \, \mathrm{d}\sigma$$

مستوی xy میں چوکور خطہ $R_{xy} : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ پر سطح الف کی مساوات $f(x,y,z) = z = 1$ ہے۔ اس سطح اور خطہ کے لیے ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}, \quad \nabla f = \boldsymbol{k}, \quad |\nabla f| = 1, \quad |\nabla f \cdot \boldsymbol{p}| &= |\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}| = 1, \\
\mathrm{d}\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \boldsymbol{p}|} \, \mathrm{d}A &= \frac{1}{1} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \\
xyz = xy(1) &= xy
\end{aligned}$$

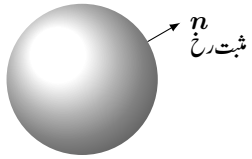
یوں ذیل ہوگا۔

$$\iint_{\text{سطح الف}} xyz \, \mathrm{d}\sigma = \iint_{R_{xy}} xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 xy \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y}{2} \, \mathrm{d}y = \frac{1}{4}$$

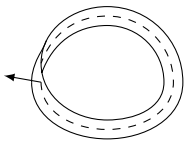
تشاکلیت کی بنا پر سطح ب اور ج پر xyz کے تکمل بھی $\frac{1}{4}$ دیں گے۔ یوں ذیل ہوگا۔

$$\iint_{\text{سطح مکعب}} xyz \, \mathrm{d}\sigma = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

□



شکل ۱۵.۵۱: ہموار بند سطح ہمیشہ قابل سمت بند ہو گی۔ ہر نقطے پر باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ مثبت رخ دیگا۔



شکل ۱۵.۵۲: موبیوس پٹی ناقابل سمت بند ہے۔

سمت بندی

وہ ہموار سطح S ، جس پر عمودی اکائی سمتیات کا ایسا میدان $\boldsymbol{n}$ متعارف کیا جا سکتا ہو جو مقام کے ساتھ استمراری تبدیل ہو، **قابل سمت بند**[۲۲] یا **دو طرفہ**[۲۳] کہلاتی ہے۔ قابل سمت بند سطح کا ہر ذیلی ٹکڑا قابل سمت بند ہو گا۔ کرہ اور فضا میں دیگر بند سطحیں (ایسی ہموار سطحیں جو ٹھوس اجسام کو احاطہ کرتی ہوں) قابل سمت بند ہوں گی۔ روایتاً $\boldsymbol{n}$ کا رخ بند سطح سے باہر کی طرف رکھا جاتا ہے۔

میدان $\boldsymbol{n}$ منتخب کرنے کے بعد ہم کہتے ہیں سطح **سمت بند**[۲۴] بنائی گئی ہے اور سطح بشمول عمودی میدان **سمت بند سطح**[۲۵] کہلاتی ہے۔ کسی بھی نقطے پر سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ، اس نقطے پر مثبت رخ کہلاتا ہے (شکل ۱۵.۵۱)۔

شکل ۱۵.۵۲ میں **موبیوس پٹی**[۲۶] دکھائے گئی ہے جو ناقابل سمت بند ہے۔ آپ کسی بھی نقطہ سے آغاز کر کے استمراری اکائی عمودی میدان بنانا شروع کریں۔ اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کو سطح پر استمراری حرکت دینے سے آپ ابتدائی نقطے تک یوں پہنچ سکتے ہیں کہ $\boldsymbol{n}$ کا رخ ابتدائی رخ کا مخالف ہو۔ ایک نقطے پر سمتیہ بیک وقت دو مخالف رخ نہیں ہو سکتا، اگرچہ استمراری میدان کی صورت میں موبیوس پٹی پر ایسا ہی ہونا چاہیے۔ یوں ہم اخذ کرتے ہیں کہ ایسا میدان موجود نہیں ہو گا۔

بہاؤ کا سطحی تکمل

فرض کریں قابل سمت بند سطح S پر استمراری سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ ہے، اور سطح پر منتخب اکائی عمودی میدان $\boldsymbol{n}$ ہے۔ ہم S پر $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ کے تکمل کو S پر مثبت رخ کا بہاؤ کہتے ہیں۔ یوں $\boldsymbol{n}$ کے رخ $\boldsymbol{F}$ کے غیر سمتی جزو کا S پر تکمل، سطح سے گزرتا بہاؤ دے گا۔

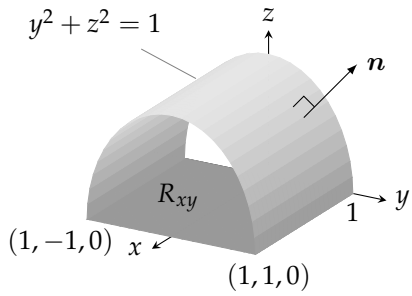
تعریف

قابل سمت بند سطح S کو پار کرتا، $\boldsymbol{n}$ کے رخ، تین ابعادی سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ درج ذیل کلیہ دے گا۔

$$\text{بہاؤ} = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \tag{۱۵.۵۳}$$

---

[۲۲] orientable
[۲۳] two-sided
[۲۴] oriented
[۲۵] orientedsurface
[۲۶] Mobiusband



شکل ۱۵.۵۳: سطح سے باہر رخ سمتی میدان کا بہاؤ (مثال ۱۵.۴)۔ زمینی رقبہ R_{xy} دو (2) کے برابر ہے۔

یہ تعریف مسطح منحنی C کو پار کرتے، دو ابعادی میدان $\boldsymbol{F}$ کے بہاؤ کی تعریف کے عین مطابق ہے۔ مستوی میں بہاؤ کو، منحنی C کو $\boldsymbol{F}$ کے عمودی غیر سمتی جزو کا تکمل:

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$$

ظاہر کرتا ہے۔

گر $\boldsymbol{F}$ تین ابعادی سیالی بہاؤ کا سمتی رفتار میدان ہو، تب S سے (گزرتا) $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ، منتخب مثبت رخ میں S سے گزرتے سیال کی خولص شرح دے گا۔ ایسے بہاؤ پر تفصیلاً تبصرہ حصہ 14.7 میں کیا جائے گا۔

اگر $\boldsymbol{S}$ ہم قد سطح $g(x,y,z)=c$ کا حصہ ہو، تب $\boldsymbol{n}$ درج ذیل میں سے، جو پسند کا رخ دیتا ہو، ہو گا۔

$$\boldsymbol{n}=\pm\frac{\nabla g}{|\nabla g|} \tag{۱۵.۵۴}$$

مطابقتی بہاؤ ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\text{بہاؤ} &= \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma && \text{(مساوات ۱۵.۵۳)}\\
&= \iint_R \left(\boldsymbol{F}\cdot\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g|}\right)\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A\\
&= \iint_R \boldsymbol{F}\cdot\frac{\pm\nabla g}{|\nabla g\cdot\boldsymbol{p}|}\,\mathrm{d}A && \text{(۱۵.۵۵)}
\end{aligned}$$

مثال ۱۵.۴: بیلن $y^2+z^2=1, z\geq 0$ سے مستویات $x=0$ اور $x=1$ سطح S کاٹتی ہیں (شکل ۱۵.۵۳)۔ سطح S سے باہر رخ $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ کا بہاؤ تلاش کریں۔

حل: سطح S پر باہر روح عمودی میدان $\boldsymbol{n}$ کو $g(x,y,z)=y^2+z^2$ کی ڈھلوان (ذیل دیکھیں) سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{n}=+\frac{\nabla g}{|\nabla g|}=\frac{2y\boldsymbol{j}+2z\boldsymbol{k}}{\sqrt{4y^2+4z^2}}=\frac{2yaj+2z\boldsymbol{k}}{2\sqrt{1}}=y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

چونکہ $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{k}$ ہے لہٰذا درج ذیل بھی ہوگا۔

$$\mathrm{d}\sigma=\frac{|\nabla g|}{|\nabla g\cdot\boldsymbol{k}|}\,\mathrm{d}A=\frac{2}{|2z|}\,\mathrm{d}A=\frac{1}{z}\,\mathrm{d}A$$

ہم $z\geq 0$ کے بنا مطلق قیمت کی علامت ہٹا سکتے ہیں۔

سطح پر $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}$ کی قیمت ذیل کلیہ دیگا، جہاں آخری قدم میں S پر $y^2+z^2=1$ ہوگا۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}&=(yz\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k})\cdot(y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\\&=y^2z+z^3=z(y^2+z^2)\\&=z\end{aligned}$$

یوں S سے $\boldsymbol{F}$ کا اخراجی بہاؤ ذیل ہوگا۔

$$\iint_S\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma=\iint_S(z)\left(\frac{1}{z}\,\mathrm{d}A\right)=\iint_{R_{xy}}\mathrm{d}A=\text{کارقبہ}\,R_{xy}=2$$

□

باریک خول کی کمیت اور معیار اثر

گھریلو برتن، ڈھول، اور دیگر باریک خول کو سطحوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ ان کی کمیت اور معیار اثر جدول ۱۵.۱ میں پیش کلیات سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔

مثال ۱۵.۵: رداس a اور مستقل کثافت δ کے باریک نصف کروی خول کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

حل: ہم خول کو نصف کرہ:

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2=a^2,\quad z\geq 0$$

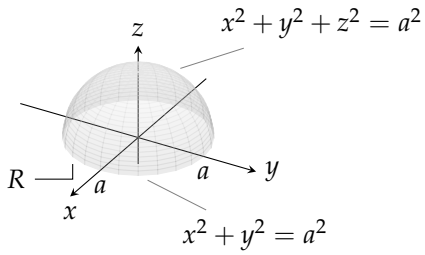
سے ظاہر کرتے ہیں (شکل ۱۵.۵۴)۔ محور z کے لحاظ سے سطح کی تشاکلی کی بنا پر $\overline{x}=\overline{y}=0$ ہوگا۔ کلیہ $\overline{z}=M_{xy}/M$ سے $\overline{z}$ تلاش کرنا باقی ہے۔

خول کی کمیت درج ذیل ہے۔

$$M=\iint_S\delta\,\mathrm{d}\sigma=\delta\iint_S\mathrm{d}\sigma=(\delta)(\text{کارقبہ},S)=2\pi a^2\delta$$

جدول ۱۵.۱: نہایت باریک خول کی کمیت اور معیار اثر

کمیت	$M = \iint_S \delta(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$ نقطہ (x,y,z) پر $\delta(x,y,z)$ کثافت (کمیت فی اکائی رقبہ) ہے
محددی مستویات کے لحاظ سے اول معیار اثر	$M_{yz} = \iint_S x\delta\,\mathrm{d}\sigma, \qquad M_{xz} = \iint_S y\delta\,\mathrm{d}\sigma, \qquad M_{xy} = \iint_S z\delta\,\mathrm{d}\sigma$
مرکز کمیت کے محدد	$\overline{x} = M_{yz}/M, \qquad \overline{y} = M_{xz}/M, \qquad \overline{z} = M_{xy}/M$
جمودی معیار اثر	$I_x = \iint_S (y^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}\sigma, \qquad I_y = \iint_S (x^2+z^2)\delta\,\mathrm{d}\sigma$ $I_z = \iint_S (x^2+y^2)\delta\,\mathrm{d}\sigma, \qquad I_L = \iint_S r^2\delta\,\mathrm{d}\sigma$ نقطہ (x,y,z) سے لکیر L کا فاصلہ $r(x,y,z)$ ہے
لکیر L کے لحاظ سے رداس دوار	$R_L = \sqrt{I_L/M}$



شکل ۱۵.۵۴: مستقل کمیتی کثافت کی باریک چادر کا نصف کروی خول (مثال ۱۵.۵)۔

M_{xy} کا تکمل تلاش کرنے کی خاطر $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{k}$ لیتے ہیں۔ یوں،

$$M_{xy} = \iint_S z\delta \, \mathrm{d}\sigma = \delta \iint_R z\frac{a}{z} \, \mathrm{d}\sigma = \delta a \iint_R \mathrm{d}A = \delta a(\pi a^2) = \delta \pi a^3$$

لہٰذا ذیل ہو گا۔

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{\pi a^3 \delta}{2\pi a^2 \delta} = \frac{a}{2}$$

خول کا مرکز کمیت نقطہ $(0, 0, a/2)$ پر ہو گا۔ □

۱۵.۶ معلمی سطحیں

ہم نے مستوی میں منحنیات کو تین مختلف طریقوں سے بیان کیا ہے:

صورت: صریح	$y = f(x)$
صورت: ضمنی	$F(x, y) = 0$
صورت: سمتی معلمی	$\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j}, \qquad a \le t \le b$

فضا میں سطحوں کے لیے بھی اسی طرح کی تعریفیں موجود ہیں:

صورت: صریح	$z = f(x, y)$
صورت: ضمنی	$F(x, y, z) = 0$

ایک معلمی صورت بھی موجود ہے جس میں سطح پر کسی نقطے کی جگہ کو دو متغیرات کے سمتی تفاعل کی صورت میں ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس حصہ میں ہم سطحی رقبہ اور سطحی تکملات کے مطالعہ کو ان سطحوں تک وسیع کریں گے جنہیں معلمی صورت میں بیان کیا گیا ہو۔

سطحوں کی معلمی نمائندگی

فرض کریں

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k} \tag{۱۵.۵۶}$$

ایک مسلسل سمتی تفاعل ہو جو uv مستوی کے ایک خطہ R پر معین ہو اور R کے داخلی حصے میں ایک ایک ہو (شکل 16.0)۔ ہم $\mathbf{r}$ کی سعت کو **سطح** S کہتے ہیں جس کی تعریف یا نقشہ کشی $\mathbf{r}$ کے ذریعہ کی جاتی ہے۔ مساوات (۱۵.۵۶) اور R کا دائرہ کار مل کر اس سطح کی ایک **معلمی روپ**[۲۷] تشکیل دیتے ہیں۔ متغیرات u اور v **معلمات**[۲۸] کہلاتے ہیں جبکہ R کو **معلمی دائرہ کار**[۲۹] کہا جاتا ہے۔

مباحثہ کو سادہ رکھنے کے لیے ہم فرض کرتے ہیں کہ R ایک مستطیل خطہ ہے جو درج ذیل عدم مساوات سے متعین ہوتا ہے:

$$a \leq u \leq b, \qquad c \leq v \leq d.$$

اس شرط سے کہ $\mathbf{r}$، R کے داخلی حصے میں ایک ایک ہو، یہ یقینی ہوتا ہے کہ سطح S خود کو قطع نہیں کرتی۔ دھیان رہے کہ مساوات (۱۵.۵۶) درج ذیل تین معلمی مساوات کی سمتی صورت ہے:

$$x = f(u,v), \qquad y = g(u,v), \qquad z = h(u,v).$$

مثال ۱۵.۱: مخروط کی معلمی نمائندگی

درج ذیل مخروط کی معلمی نمائندگی تلاش کریں۔

$$z = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad 0 \leq z \leq 1$$

□

حل یہاں نلکی محدد ہماری تمام ضروریات پوری کرتا ہے۔ مخروط پر ایک عمومی نقطہ (x,y,z) (شکل 16.51) کے لیے

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \quad z = \sqrt{x^2+y^2} = r$$

ہو گا جہاں درج ذیل ہو گا۔

$$0 \leq r \leq 1, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

---

[۲۷] parametrization
[۲۸] parameters
[۲۹] parameterdomain

مساوات (۱۵.۵۶) میں $u = r$ اور $v = \theta$ لینے سے درج ذیل معلمی نمائندگی حاصل ہوتی ہے۔

$$\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \quad 0 \le r \le 1, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

مثال ۱۵.۲: کرہ کی معلمی نمائندگی

کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ کی ایک معلمی نمائندگی تلاش کریں۔ □

حل کروی محدد میں عمومی نقطہ (x, y, z) کے لیے $x = a\sin\phi\cos\theta$، جبکہ $y = a\sin\phi\sin\theta$، اور $z = a\cos\phi$ ہو گا جہاں $0 \le \phi \le \pi$ اور $0 \le \theta \le 2\pi$ ہو گا (شکل 16.52)۔ مساوات (۱۵.۵۶) میں $u = \phi$ اور $v = \theta$ لینے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\phi,\theta) =& (a\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i} + (a\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j} + (a\cos\phi)\mathbf{k}\\ & 0 \le \phi \le \pi, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi\end{aligned}$$

مثال ۱۵.۳: اسطوانہ کی معلمی نمائندگی

درج ذیل اسطوانہ کی ایک معلمی نمائندگی تلاش کریں۔

$$x^2 + (y-3)^2 = 9, \qquad 0 \le z \le 5$$

□

حل نلکی محدد میں نقطہ (x, y, z) کے لیے $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z.$ ہو گا۔ اسطوانہ $x^2 + (y-3)^2 = 9$ (شکل 16.53) پر موجود نقاط کے لیے یہ مساوات xy مستوی میں اسطوانہ کے قاعدہ کی قطبی مساوات کے مترادف ہے:

$$\begin{aligned}x^2 + (y^2 - 6y + 9) &= 9\\ r^2 - 6r\sin\theta &= 0\end{aligned}$$

یا درج ذیل۔

$$r = 6\sin\theta, \qquad 0 \le \theta \le \pi$$

پس اسطوانہ پر ایک عمومی نقطہ کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta = 6\sin\theta\cos\theta = 3\sin 2\theta \\ y &= r\sin\theta = 6\sin^2\theta \\ z &= z. \end{aligned}$$

مساوات میں $u = \theta$ اور $v = z$ لینے سے درج ذیل معلمی نمائندگی حاصل ہوتی ہے۔

$$\mathbf{r}(\theta, z) = (3\sin 2\theta)\mathbf{i} + (6\sin^2\theta)\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le z \le 5.$$

سطحی رقبہ

ہم ایسا دوہرا تکمل حاصل کرنا چاہتے ہیں جس کے ذریعے خمیدہ سطح S کا رقبہ نکالا جا سکے، بشرطیکہ سطح کی معلمی نمائندگی درج ذیل ہو۔

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \qquad a \le u \le b, \qquad c \le v \le d.$$

اس کے لیے سطح کا ہموار ہونا ضروری ہے۔ ہمواری کی تعریف سمتی تفاعل $\mathbf{r}$ کے درج ذیل جزوی تفرقات پر مبنی ہے۔

$$\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial u}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial v}\mathbf{j} + \frac{\partial h}{\partial v}\mathbf{k}.$$

تعریف: ہموار معلمی سطح

معلمی سطح $\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}$ اس وقت ہموار کہلاتی ہے جب $\mathbf{r}_u$ اور $\mathbf{r}_v$ مسلسل ہوں اور معلمی دائرہ کار پر سمتیہ $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ کبھی صفر نہ ہو۔

ہمواری کی تعریف میں یہ شرط کہ سمتیہ $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ معلمی دائرہ کار پر کبھی صفر نہ ہو، اس بات کو یقینی بناتی ہے کہ سمتیات u اور v نہ صرف غیر صفر ہوں بلکہ کبھی ایک ہی خط پر بھی نہ ہوں، لہٰذا یہ ہمیشہ سطح کے لیے مماسی سطح تعین کرتے ہیں۔

اب R میں ایک چھوٹا مستطیل ΔA_{uv} لیں جس کے اطراف $u = u_0$، $u = u_0 + \Delta u$، $v = v_0$، اور $v = v_0 + \Delta v$ ہوں (شکل 16.54)۔ مستطیل ΔA_{uv} کا ہر پہلو سطح S پر ایک منحنی پر نقش ہو جاتا ہے، اور یہ چار منحنیات مل کر سطح پر ایک "چھوٹا خمیدہ رقبہ" ΔS_{uv} کے گرد گھیرا بناتی ہیں۔ شکل کے مطابق $v = v_0$ طرف منحنی C_1 پر نقش ہے، $u = u_0$ منحنی C_2 پر، اور ان کا مشترک راس (u_0, v_0) نقطہ P_0 پر نقش ہے۔

شکل 16.55 میں $\Delta\sigma_{uv}$ بڑا کر کے دکھایا گیا ہے۔ سمتیہ $\mathbf{r}_u(u_0, v_0)$ منحنی C_1 کو نقطہ P_0 کے مقام پر مماس ہے۔ اسی طرح $\mathbf{r}_v(u_0, v_0)$ منحنی C_2 کو نقطہ P_0 کے مقام پر مماس ہے۔ ان دونوں سمتیات کا صلیبی ضرب $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ نقطہ P_0 پر سطح کے عمود کا متوازی ہو گا۔ (یہاں ہم یہ مفروضہ استعمال کرتے ہیں کہ سطح S ہموار ہے، تاکہ یہ یقینی بنایا جا سکے کہ $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$ ہو۔)

ہم سطحی ٹکڑا $\Delta\sigma_{uv}$ کو مماسی مستوی پر موجود اس متوازی الاضلاع سے تخمین دیتے ہیں جس کے اطراف سمتیات $\Delta u\, \mathbf{r}_u$ اور $\Delta v\, \mathbf{r}_v$ ہیں (شکل 16.56)۔ اس متوازی الاضلاع کا رقبہ درج ذیل ہے۔

$$|\Delta u\, \mathbf{r}_u \times \Delta v\, \mathbf{r}_v| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, \Delta u\, \Delta v \tag{2}$$

مستوی uv میں R کی خانہ بندی چھوٹے مستطیل رقبوں ΔA_{uv} سے کر کے سطح S کی خانہ بندی پیدا کی جا سکتی ہے جو $\Delta\sigma_{uv}$ سطحی ٹکڑوں پر مبنی ہو گا۔ ہر سطحی ٹکڑے کے رقبے کو مساوات 2 سے تخمین دے کر ایسے تمام رقبے جمع کر کے S کا رقبہ تخمیناً درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\sum_u \sum_v |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, \Delta u\, \Delta v \tag{3}$$

اگر Δu اور Δv آزادانہ طور پر صفر کو پہنچتے ہو، $\boldsymbol{r}_u$ اور $\boldsymbol{r}_v$ کی استمرار اس بات کی ضمانت دیتا ہے کہ مساوات 3 میں دیا گیا مجموعہ دوہرا تکمل $\int_c^d \int_z^b |\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v$ کو پہنچے گا۔ یہی دوہرا تکمل سطح S کے رقبے کی تعریف ہے، اور یہ پچھلی تعریفوں کے ساتھ ہم آہنگ ہونے کے ساتھ ساتھ زیادہ عمومی ہے۔

تعریف:

ہموار سطح:

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u, v)\mathbf{i} + g(u, v)\mathbf{j} + h(u, v)\mathbf{k}, \qquad a \leq u \leq b, \quad c \leq v \leq d$$

کا رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$A = \int_c^d \int_a^b |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v \tag{4}$$

□

ہم $|\boldsymbol{r}_u \times \boldsymbol{r}_v|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ کی جگہ $\mathrm{d}\sigma$ لکھ کر اس تکمل کو مختصراً درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$A = \iint_S \mathrm{d}\sigma \qquad \mathrm{d}s = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v. \tag{5}$$

مثال ۱۵.۴: مخروط کا رقبہ

مثال 1 میں ہم مخروط کی درج ذیل مقدار معلوم صورت دریافت کر چکے ہیں۔

$$\mathbf{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\mathbf{i} + (r\sin\theta)\mathbf{j} + r\mathbf{k}, \qquad 0 \le r \le 1, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

مساوات 4 استعمال کرنے کے لیے ہم پہلے $\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= -(r\cos\theta)\mathbf{i} - (r\sin\theta)\mathbf{j} + (\underbrace{r\cos^2\theta + r\sin^2\theta}_{r})\mathbf{k}\end{aligned}$$

یوں $|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + r^2} = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2}r$ اور مخروط کا سطحی رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 |\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\theta|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \qquad u = r, v = \theta \text{ مساوات 4 میں} \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}\,r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}(2\pi) = \pi\sqrt{2} \quad \text{مربع اکائیاں}\end{aligned}$$

□

مثال ۱۵.۵: : سطحی رقبہ (کرہ)

اس کرہ کا سطحی رقبہ تلاش کریں جس کا رداس a ہو۔

حل ہم مثال 2 کی معلمی نمائندگی استعمال کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(\phi,\theta) =&(a\sin\phi\cos\theta)\mathbf{i}+(a\sin\phi\sin\theta)\mathbf{j}+(a\cos\phi)\mathbf{k}\\ &0\le\phi\le\pi,\qquad 0\le\theta\le 2\pi\end{aligned}$$

اب $\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta$ نکالتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a\cos\phi\cos\theta & a\cos\phi\sin\theta & -a\sin\phi\\ -a\sin\phi\sin\theta & a\sin\phi\cos\theta & 0\end{vmatrix}\\ &= (a^2\sin^2\phi\cos\theta)\mathbf{i}+(a^2\sin^2\phi\sin\theta)\mathbf{j}+(a^2\sin\phi\cos\phi)\mathbf{k}\end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{r}_\phi\times\mathbf{r}_\theta\right| &= \sqrt{a^4\sin^4\phi\cos^2\theta+a^4\sin^4\phi\sin^2\theta+a^4\sin^2\phi\cos^2\phi}\\ &= \sqrt{a^4\sin^4\phi+a^2\sin^2\phi\cos^2\phi}=\sqrt{a^4\sin^2\phi(\sin^2\phi+\cos^2\phi)}\\ &= a^2\sqrt{\sin^2\phi}=a^2\sin\phi.\end{aligned}$$

چونکہ $0\le\phi\le\pi$ پر $\sin\phi\ge 0$ ہو گا لہٰذا سطحی رقبہ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}A &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} a^2\sin\phi\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}\theta\\ &\int_0^{2\pi}\Big[-a^2\cos\phi\Big]_0^{\pi}\ \mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}2a^2\ \mathrm{d}\theta=4\pi a^2 \quad \text{مربع اکائیاں}\end{aligned}$$

یہ نتیجہ کرہ کے معلوم کلیہ کے مطابق ہے۔ □

سطحی تکملات

معلومی سطح کے رقبہ کا کلیہ حاصل کرنے کے بعد اب ہم تفاعل کا تکمل معلومی سطح پر کر سکتے ہیں۔

تعریف: سطحی تکمل برائے معلومی سطح

اگر سطح S استمراری ہو جس کا معلومی روپ

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u,v) =&f(u,v)\mathbf{i}+g(u,v)\mathbf{j}+h(u,v)\mathbf{k}\\ &a\le u\le b,\ c\le v\le d\end{aligned}$$

ہو، اور $G(x,y,z)$ ایک استراری تفاعل ہو جو S پر معین ہو، تب S پر G کا تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_S G(x,y,z)\ \mathrm{d}\sigma = \int_c^d \int_a^b G\Big(f(u,v), g(u,v), h(u,v)\Big)\ |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|\ \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v$$

□

مثال ۱۵.۶: معلمی روپ کی سطح پر تکمل

تفاعل $G(x,y,z) = x^2$ کا تکمل مخروطی سطح $z = \sqrt{x^2+y^2},\ 0 \le z \le 1$ پر معلوم کریں۔

حل: مثال 1 اور مثال 4 کا کام آگے بڑھاتے ہوئے $|\boldsymbol{r}_r \times \boldsymbol{r}_\theta| = \sqrt{2}r$ لے کر درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\iint_S x^2\ \mathrm{d}\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2\cos^2 u)(\sqrt{2}\,r)\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}u \qquad\qquad x = r\cos\theta \\
&= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\cos^2\theta\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\ \mathrm{d}\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

□

مثال ۱۵.۷: بہاؤ کی تلاش

قطع مکافی بیلن $y = x^2,\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 4$ سے $\boldsymbol{F} = yz\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k}$ کا باہر رخ گزرتا بہاؤ تلاش کریں (شکل 16.57)۔

حل: سطح پر $x = x$، $y = x^2$، اور $z = z$ ہیں لہٰذا معلمی روپ $\boldsymbol{r}(x,z) = x\boldsymbol{i} + x^2\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ ہو گا جہاں $0 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 4$ ہے۔

مماسی سمتیات کا صلیبی ضرب درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x\,\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

سطح پر باہر رخ عمودی سمتیہ درج ذیل ہے۔

$$\mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_z}{|\boldsymbol{r}_x \times \boldsymbol{r}_z|} = \frac{2x\,\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{4x^2+1}}$$

سطح پر $y = x^2$ ہے لہٰذا اس پر سمتیہ میدان درج ذیل ہو گا۔

$$\mathbf{F} = yz\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} - z^2\boldsymbol{k} = x^2z\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j} - z^2\,\mathbf{k}$$

یوں

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}((x^2z)(2x) + (x)(-1) + (-z^2)(0)) \\ &= \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2+1}}\end{aligned}$$

اور $\boldsymbol{F}$ کا سطح سے باہر رخ گزرتا بہاؤ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ \mathrm{d}\sigma &= \int_0^4\int_0^1 \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2+1}}\,|\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_z|\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}z \\ &= \int_0^4\int_0^1 \frac{2x^3z - x}{\sqrt{4x^2+1}}\sqrt{4x^2+1}\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}z \\ &= \int_0^4\int_0^1 (2x^3z - x)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z = \int_0^4 \left[\frac{x^4z}{2} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 \mathrm{d}z \\ &\int_0^4 \frac{z-1}{2}\ \mathrm{d}z = \frac{1}{4}(z-1)^2\Big]_0^4 \\ &= \frac{1}{4}(9) - \frac{1}{4}(1) = 2\end{aligned}$$

□

مثال ۱۵.۸: مرکز کمیت کی تلاش

مستقل کثافت δ کا باریک خول مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ سے مستویات $z = 1$ اور $z = 2$ کاٹتی ہیں (شکل 16.58)۔ اس خول کا مرکز کمیت تلاش کریں۔

حل:

محور z کے گرد سطح تشاکل ہے لہٰذا $\bar{x} = 0$ اور $\bar{y} = 0$ ہو گا۔ ہمیں $\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}$ تلاش کرنی ہے۔ مثال 1 اور مثال 4 کی طرح چلتے ہوئے

$$\mathbf{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\sin\theta\,\mathbf{j} + r\,\mathbf{k}, \quad 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

اور

$$|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta| = \sqrt{2}\, r$$

ہو گا۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
M &= \iint_S \delta \ \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \delta\sqrt{2}\, r \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\theta \\
&= \delta\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_1^2 \mathrm{d}\theta = \delta\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(2 - \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}\theta \\
&= \delta\sqrt{2} \left[\frac{3\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 3\pi\delta\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \iint_S \delta z \ \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \delta r\sqrt{2}\, r \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\theta \\
&= \delta\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \int_1^2 r^2 \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \delta\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 \mathrm{d}\theta \\
&= \delta\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{7}{3} \, \mathrm{d}\theta = \frac{14}{3}\pi\delta\sqrt{2}
\end{aligned}$$

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M} = \frac{14\pi\delta\sqrt{2}}{3(3\pi\delta\sqrt{2})} = \frac{14}{9}$$

خول کا مرکز کمیت نقطہ $\left(0, 0, \frac{14}{9}\right)$ پر پایا جاتا ہے۔ □

سوالات

سطح کے معلمی روپ کی تلاش

سوال 1 تا 16 میں دی گئی سطح کا معلمی روپ تلاش کریں۔ (درست جواب کے مختلف روپ ممکن ہیں لہٰذا آپ کے جواب کتاب میں دیے جواب سے مختلف ہو سکتے ہیں۔)

سوال ۱۵.۱: قطع مکافی سطح $z = x^2 + y^2,\ z \leq 4$

سوال ۱۵.۲: قطع مکافی سطح $z = 9 - x^2 - y^2,\ z \geq 0$

سوال ۱۵.۳: **مخروط مقطوع** ثُمن اول میں $z = 0$ اور $z = 3$ کے بیچ مخروط $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$

سوال ۱۵.۴: **مخروط مقطوع** مستوی $z = 2$ اور مستوی $z = 4$ کے بیچ مخروط $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$

سوال ۱۵.۵: **کروی ٹوپی** کروی ٹوپی جو $x^2+y^2+z^2 = 9$ سے مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ کاٹتا ہے۔

سوال ۱۵.۶: **کروی ٹوپی** ثُمن اول میں مستوی xy اور مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ کے بیچ کرہ $x^2+y^2+z^2 = 4$

سوال ۱۵.۷: **کروی پٹی** مستوی $z = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ اور مستوی $z = \frac{\sqrt{3}}{2}$ کے بیچ کروی پٹی $x^2+y^2+z^2 = 3$

سوال ۱۵.۸: **کروی ٹوپی** وہ بالائی کروی ٹوپی جو $x^2+y^2+z^2 = 8$ سے مستوی $z = -2$ کاٹتا ہے۔

سوال ۱۵.۹: **مستویات کے بیچ قطع مکافی بیلن** وہ حصہ جو قطع مکافی بیلن $z = 4 - y^2$ سے مستویات $x = 0, x = 2, z = 0$ کاٹتی ہیں۔

سوال ۱۵.۱۰: **مستویات کے بیچ قطع مکافی بیلن** قطع مکافی بیلن $y = x^2$ جو $z = 0, z = 3$ اور $y = 2$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔

سوال ۱۵.۱۱: **دائری بیلنی پٹی** مستوی $x = 0$ اور مستوی $x = 3$ کے بیچ بیلن $y^2+z^2 = 9$

سوال ۱۵.۱۲: **دائری بیلنی پٹی** مستوی xy سے اوپر مستوی $y = -2$ اور مستوی $y = 2$ کے بیچ بیلن $x^2+z^2 = 4$

سوال ۱۵.۱۳: **بیلن کے اندر ترچھا مستوی** درج ذیل بیلن کے اندر مستوی $x+y+z = 1$ کا ٹکڑا۔(الف) $x^2+y^2 = 9$ ، (ب) $y^2+z^2 = 9$

سوال ۱۵.۱۴: **بیلن کے اندر ترچھا مستوی** درج ذیل بیلن کے اندر مستوی $x-y+2z = 2$ کا ٹکڑا۔(الف) $x^2+z^2 = 3$ ،(ب) $y^2+z^2 = 2$

سوال ۱۵.۱۵: **دائری بیلنی پٹی** مستویات $y = 0$ اور $y = 3$ کے بیچ بیلن $(x-2)^2+z^2 = 4$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۱۶: **دائری بیلنی پٹی** مستویات $x = 0$ اور $x = 10$ کے بیچ بیلن $y^2+(z-5)^2 = 25$ کا ٹکڑا۔

معلمی روپ سطح کا رقبہ

سوال 17 تا 26 میں معلمی روپ استعمال کر کے سطح کے رقبے کو دوہرا تکمل لکھیں۔اس کے بعد تکمل کی قیمت تلاش کریں۔(تکمل لکھنے کے کئی درست طریقے ہیں لہٰذا آپ کا لکھا ہوا تکمل کتاب میں دیے جواب سے مختلف ہو سکتا ہے۔تاہم ان کی قیمت وہی ہونی چاہیے جو کتاب میں دی گئی ہے۔) سوال ۱۵.۱۷: **بیلن میں ترچھا مستوی** بیلن $x^2 = y^2 = 1$ کے اندر مستوی $y+2z = 2$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۱۸: **بیلن کے اندر مستوی** بیلن $x^2+y^2 = 4$ کے اندر مستوی $z = -x$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۱۹: **مخروط مقطوع** مستویات $z = 2$ اور $z = 6$ کے بیچ مخروط $z = 2\sqrt{2x^2 + y^2}$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۰: **مخروط مقطوع** مستویات $z = 1$ اور $z = 4/3$ کے بیچ مخروط $z = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{3}$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۱: **دائری بیلنی پٹی** مستویات $z = 1$ اور $z = 4$ کے بیچ مخروط $x^2 + y^2 = 1$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۲: **دائری بیلنی پٹی** مستویات $y = -1$ اور $y = 1$ کے بیچ مخروط $x^2 + z^2 = 10$ کا ٹکڑا۔

سوال ۱۵.۲۳: **قطع مکافی ٹوپی** وہ ٹوپی جو قطع مکافی $z = 2 - x^2 - y^2$ سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کاٹتا ہے۔

سوال ۱۵.۲۴: **قطع مکافی پٹی** قطع مکافی $z = x^2 + y^2$ کا وہ حصہ جو مستویات $z = 1$ اور $z = 4$ کے بیچ ہے۔

سوال ۱۵.۲۵: **کٹا ہوا کرہ** کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ کا وہ نچلا حصہ جو اس کرہ سے مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کاٹتا ہے۔

سوال ۱۵.۲۶: **کروی پٹی** مستویات $z = -1$ اور $z = \sqrt{3}$ کے بیچ کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کا ٹکڑا۔

معلمی سطح پر تکمل

سوال 27 تا 34 میں دیے گئے تفاعل کا تکمل دی گئی سطح پر حاصل کریں۔ سوال ۱۵.۲۷: **قطع مکافی بیلن** قطع مکافی بیلن $y = x^2,\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le z \le 3$ پر تفاعل $G(x, y, z) = x$

سوال ۱۵.۲۸: **دائری بیلن** بیلنی سطح $y^2 + z^1 = 4,\ z \ge 0,\ 1 \le x \le 4$ پر تفاعل $G(x, y, z) = z$

سوال ۱۵.۲۹: **کرہ** اکائی کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ پر $G(x, y, z) = x^2$

سوال ۱۵.۳۰: **نصف کرہ** نصف کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ z \ge 0$ پر $G(x, y, z) = z^2$

سوال ۱۵.۳۱: **مستوی کا ٹکڑا** تفاعل $F(x, y, z) = z - x$ مستوی $z = x + y + z = 4$ کے اس حصہ پر جو مستوی xy سے اوپر چکور $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$ پر پایا جاتا ہے۔

سوال ۱۵.۳۲: **مخروط** مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$، $0 \le z \le 1$ پر تفاعل $F(x, y, z) = z - x$

سوال ۱۵.۳۳: **قطع مکافی گنبد** قطع مکافی گنبد $z = 1 - x^2 - y^2,\ z \ge 0$ پر تفاعل $H(x, y, z) = x^2\sqrt{5 - 4z}$

سوال ۱۵.۳۴: **کروی ٹوپی** کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ کا وہ حصہ جو مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ سے اوپر پایا جاتا ہو اور تفاعل $H(x, y, z) = yz$

سطحی معلمی روپ اور بہاؤ

سوال 35تا44 میں معلمی روپ استعمال کرتے ہوئے دیے گئے رخ میں بہاؤ $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,d\sigma$ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۵: **قطع مکافی بیلن** قطع مکافی بیلن $z = 4 - y^2$ سے سطوح $x = 0$ ، $x = 1$ ،اور $z = 0$ جو سطح کاٹتی ہیں اس سے گزرتا باہر رخ (یعنی محور x سے عمودی دور جانب) بہاؤ میدان $\boldsymbol{F} = z^2\mathbf{i} + x\mathbf{j} - 3z\mathbf{k}$ کے لیے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۶: **قطع مکافی بیلن** قطع مکافی بیلن $y = x^2,\ -1 \le x \le 1$ سے سطوح $z = 0$ ،اور $z = 2$ سطح کاٹتی ہیں۔ اس سطح سے باہر رخ گزرتا بہاؤ (یعنی مستوی yz کو قائمہ) میدان $\boldsymbol{F} = x^2\mathbf{j} - xz\mathbf{k}$ کے لیے تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۳۷: **کرہ** مبدا سے دوری کی جانب، ثُمن اول میں موجود کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ کے حصہ سے، میدان $\boldsymbol{F} = z\mathbf{k}$ کا بہاؤ دریافت کریں۔

سوال ۱۵.۳۸: **کرہ** مبدا سے دوری کی جانب، کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ سے گزرتا بہاؤ، میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ کے لئے دریافت کریں۔

سوال ۱۵.۳۹: **مستوی** میدان $\boldsymbol{F} = 2xy\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$ کا اوپر کی سمت بہاؤ مستوی $x + y + z = 2a$ کے اس حصے پر تلاش کریں جو مستوی xy میں موجود چکور $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a$ کے اوپر پایا جاتا ہے۔

سوال ۱۵.۴۰: **بیلن** میدان $\boldsymbol{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ کا باہر کی سمت گزرتا بہاؤ بیلن $x^2 + y^2 = 1,\ 0 \le z \le a$ کے اس حصے کے لئے تلاش کریں جسے مستویات $z = 0$ اور $z = a$ گھیرتی ہیں۔

سوال ۱۵.۴۱: **مخروط** میدان $\boldsymbol{f} = xy\mathbf{i} - z\mathbf{k}$ کا مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2},\ 0 \le z \le 1$ سے باہر کی سمت (محور z سے عمودی دور) گزرتا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۲: **مخروط** میدان $\boldsymbol{F} = y^2\mathbf{i} + xz\mathbf{j} - \mathbf{k}$ کا مخروط $z = 2 - x^2 - y^2, 0 \le z \le 2$ سے باہر کی سمت (محور z سے عمودی دور) گزرتا بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۳: **مخروطی مقطوع** میدان $\boldsymbol{F} = -x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ کا مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ کے اس حصے سے باہر کی سمت (محور z سے عمودی دور) گزرتا بہاؤ تلاش کریں جو مستویات $z = 1$ اور $z = 2$ کے بیچ پایا جاتا ہے۔

سوال ۱۵.۴۴: **قطع مکافی جسم** میدان $\boldsymbol{F} = 4x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ کا مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ کے اس نچلے حصے سے باہر کی سمت (محور z سے عمودی دور) گزرتا بہاؤ تلاش کریں جو مستوی $z = 1$ کاٹتا ہے۔

معیار اثر اور کمیت

سوال ۱۵.۴۵: کرہ $x^2+y^2+z^2 = a^2$ کے اس حصے کا وسطانی مرکز تلاش کریں جو ثُمن اول میں موجود ہے۔

سوال ۱۵.۴۶: مستقل کثافت δ کی باریک موٹائی کا خول مستویات $z = 1$ اور $z = 2$ مخروط $x^2+y^2-z^2 = 0$ سے کاٹتی ہیں۔ اس خول کا مرکز کمیت اور محور z کے گرد جمودی معیار اثر اور رداس دوار تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۷: مستقل کثافت δ کے باریک کروی خول $x^2+y^2+z^2 = a^2$ کا محور z کے گرد جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۴۸: مستقل کثافت δ کے باریک مخروطی خول $z = \sqrt{x^2+y^2},\ 0 \le z \le 1$ کا محور z کے گرد جمودی معیار اثر تلاش کریں۔

معلمی سطوح کے مماسی مستویات

معلمی سطح $\boldsymbol{r}(u,v) = f(u,v)\boldsymbol{i} + g(u,v)\boldsymbol{a}_y + h(u,v)\boldsymbol{k}$ کے نقطہ $P_0(f(u_0,v_0), g(u_0,v_0), h(u_0,v_0))$ پر مماسی مستوی سے مراد وہ مستوی ہے جو نقطہ P_0 پر مماسی سمتیات $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0)$ اور $\boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$ کے صلیبی ضرب سمتیہ $\boldsymbol{r}_u(u_0,v_0) \times \boldsymbol{r}_v(u_0,v_0)$ کو عمودی ہو۔ سوال 49 تا 52 میں نقطہ P_0 پر سطح کے مماسی مستوی کی مساوات تلاش کریں۔ اس کے بعد سطح کی کارتیسی مساوات دریافت کر کے سطح اور مماسی مستوی دونوں کا خاکہ ایک ساتھ کھینچیں۔

سوال ۱۵.۴۹: **مخروط** مخروط $\mathbf{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\sin\theta\,\mathbf{j} + r\,\mathbf{k},\ r \ge 0,\quad 0 \le \theta \le 2\pi$ پر نقطہ $P_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ کے مقام پر، جو $(r,\theta) = (2, \pi/4)$ کے مطابق ہے۔

سوال ۱۵.۵۰: **نصف کرہ** نصف کرہ $\mathbf{r}(\phi,\theta) = 4\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + 4\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + 4\cos\phi\,\mathbf{k}$ جہاں $0 \le \phi \le \pi/2$ اور $0 \le \theta \le 2\pi$ ہیں اور نقطہ $P_0 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3})$ ہے، جو $(\phi,\theta) = (\pi/6, \pi/4)$ کے مطابق ہے۔

سوال ۱۵.۵۱: **دائروی بیلن** دائروی بیلن $\mathbf{r}(\theta,z) = 3\sin(2\theta)\,\mathbf{i} + 6\sin^2\theta\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k},\ 0 \le \theta \le \pi$ اور نقطہ $P_0 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{9}{2}, 0\right)$ ہے، جو $(\theta,z) = (\pi/3, 0)$ کے مطابق ہے (مثال 3 ملاحظہ کریں)۔

سوال ۱۵.۵۲: **قطع مکافی بیلن** قطع مکافی بیلن $\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - x^2\mathbf{k},\ -\infty < x < \infty,\ -\infty < y < \infty$ نقطہ $P_0 = (1, 2, -1)$ ہے، جو $(x,y) = (1,2)$ کے مطابق ہے۔

معلمی روپ کی مزید مثالیں

سوال ۱۵.۵۳:

(الف) محور z کے گرد مستوی xz میں دائرہ C کو خلا میں گھمانے سے اندرسہ حاصل ہو گا۔ (دکھائے گئے شکل سے رجوع کریں۔) اگر C کا رداس $r > 0$ اور مرکز $(R, 0, 0)$ ہو ثابت کریں کہ اندرسہ کا معلمی روپ درج ذیل ہے

$$\mathbf{r}(u, v) = (R + r\cos u)\cos v\,\mathbf{i} + (R + r\cos u)\sin v\,\mathbf{j} + r\sin u\,\mathbf{k}$$

جہاں $0 \le u \le 2\pi$ اور $0 \le v \le 2\pi$ ہیں۔

(ب) ثابت کریں کہ اندرسہ کا رقبہ $A = 4\pi^2 Rr$ ہے۔

سوال ۱۵.۵۴: **سطح طواف کا معلمی روپ** فرض کریں معلمی شدہ منحنی $C : (f(u), g(u))$ محور x کے گرد گھمائی جاتی ہے، جہاں $a \le u \le b$ پر $g(u) > 0$ ہے۔

(الف) دکھائیں کہ سطح طواف کا معلمی روپ درج ذیل ہو گا

$$\mathbf{r}(u, v) = f(u)\mathbf{i} + g(u)\cos v\,\mathbf{j} + g(u)\sin v\,\mathbf{k}$$

جہاں مستوی xy سے نقطہ $\boldsymbol{r}(u, v)$ تک زاویہ $0 \le v \le 2\pi$ ہے۔ (دی گئی شکل ملاحظہ کریں۔) دھیان دیں کہ $f(u)$ محور طواف کے ہمراہ فاصلے دیتا ہے اور $g(u)$ محور طواف سے فاصلے دیتا ہے۔

(ب) اس سطح کا معلمی روپ معلوم کریں جو منحنی $y \ge 0, x = y^2$ کو محور x کے گرد گھمانے سے حاصل ہو گا۔

سوال ۱۵.۵۵: **ترخیمی سطح کا معلمی روپ**

(الف) ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (حصہ 3.5 میں مثال 13) کا معلمی روپ درج ذیل ہے۔ $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ کردی محدد کے زاویات θ اور ϕ استعمال کرتے ہوئے ثابت کریں ترخیم $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ کا معلمی روپ درج ذیل ہے۔

$$\mathbf{r}(u, \phi) = a\cos u\cos\phi\,\mathbf{i} + b\sin u\cos\phi\,\mathbf{j} + c\sin\phi\,\mathbf{k}$$

(ب) ترخیمی سطح کے رقبے کا تکمل لکھیں، لیکن اسے حل نہ کریں۔

سوال ۱۵.۵۶: **یک ورقی قطع زائد سطح**

(الف) یک ورقی قطع زائد سطح $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ کا معلمی روپ دائرہ $x^2 + y^2 = r^2$ سے وابسطہ زاویہ θ اور ہذلولی تفاعل $r^2 - z^2 = 1$ سے وابسطہ ہذلولی مقدار معلوم u استعمال کر کے حاصل کریں۔ (حصہ 7.8 میں سوال 84 سے رجوع کریں۔)

(ب) جزو الف کے نتیجہ کو درج ذیل کے لئے عمومی بنائیں۔

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

سوال ۱۵.۵۷: **گزشتہ سوال کو آگے بڑھاتے ہیں۔** قطع زائد سطح $x^2 + y^2 - z^2 = 25$ کے مماسی مستوی کی کارتیسی مساوات اس نقطہ (x_0, y_0, z_0) پر تلاش کریں جہاں $x_0^2 + y_0^2 = 25$ ہو۔

سوال ۱۵.۵۸: **دو ورقی قطع زائد سطح** دو ورقی قطع زائد سطح $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ کا معلمی روپ تلاش کریں۔

۱۵.۷ مسئلہ سٹوکس

ہم نے حصہ 16.4 میں دیکھا، دو بعدی میدان $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j}$ میں نقطہ (x, y) پر کثافت دائری بہاؤ یا گردش کا جزو درج ذیل غیر سمتی مقدار $\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ بیان کرتا ہے۔ تین ابعاد میں مستوی میں نقطہ P کے گرد دائری بہاؤ کو سمتیہ کے ذریعے بیان کیا جاتا ہے۔ یہ سمتیہ اس مستوی کے عمود ہو گا جس میں دائری بہاؤ ہو (شکل 16.59)، اور سمتیہ کا رخ دائری بہاؤ کے خط کے ساتھ دائیں ہاتھ کا تعلق رکھے گا۔ سمتیہ کی لمبائی سیال کے گھومنے کی شرح ظاہر کرتی ہے، جو P کے لحاظ سے دائری بہاؤ کا مستوی جھکانے سے عموماً تبدیل ہو گی۔ ہم کیا دیکھتے ہیں کہ جب دائری بہاؤ کا سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ ہو، زیادہ سے زیادہ دائری بہاؤ کا سمتیہ درج ذیل **گردشی سمتیہ**[۳۰] ہو گا۔

$$\text{گردش}\,\mathbf{F} = \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} \tag{1}$$

یہ معلومات ہمیں **مسئلہ سٹوکس**[۳۱] دیتا ہے، جو مسئلہ گرین کے دائری بہاؤ و گردشی روپ کی تین بعدی وسعت ہے۔

دھیان رہے کہ $(\text{گردش}\,\mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}$ اور $\mathbf{F} = M(x, y)\mathbf{i} + N(x, y)\mathbf{j}$ کی صورت میں حصہ 16.4 میں پیش کی گئی تعریف بلا تضاد ہیں۔

مساوات 1 میں گردش $\boldsymbol{F}$ کا کلیہ عموماً درج ذیل علامتی عامل کے ذریعے لکھا جاتا ہے۔

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2}$$

(علامت ∇ کو ہم "ڈیل"[۳۲] پڑھتے ہیں۔) یہ عامل استعمال کر کے گردش $\boldsymbol{F}$[۳۳] کو ہم $\nabla \times \boldsymbol{F}$ لکھتے ہیں۔

---

[۳۰] curlvector
[۳۱] Stokes'Theorem
[۳۲] del
[۳۳] curl

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\
&= \boldsymbol{F}\text{گردش}
\end{aligned}
$$

مختصراً درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\mathbf{F}\text{گردش} = \nabla \times \mathbf{F} \tag{3}$$

مثال ۱۵.۱: **گردش F کی تلاش**

میدان $\mathbf{F} = (x^2 - y)\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ کی گردش تلاش کریں۔

حل:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}\text{گردش} &= \nabla \times \boldsymbol{F} \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 - y & 4z & x^2 \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y}(x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(4z)\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2 - y)\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(4z) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y)\right)\mathbf{k} \\
&= (0-4)\boldsymbol{i} - (2x - 0)\boldsymbol{j} + (0+1)\boldsymbol{k} \\
&= -4\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \mathbf{k}
\end{aligned}
$$

□

جیسا کہ ہم دیکھیں گے، عامل ∇ کے کئی دیگر استعمال پائے جاتے ہیں۔ مثلاً جب غیر سمتی تفاعل $f(x, y, z)$ پر لگایا جائے، یہ **ڈھلوان**[۳۴] دیگا۔

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \tag{۱۵.۵۷}$$

---

[۳۴] gradient

اسے ہم ''ڈھلوان f '' یا ''ڈیل f '' کہیں[۳۵] گے[۳۶]۔

مسئلہ سٹوکس

مسئلہ سٹوکس[۳۷] کہتا ہے کہ ایسی صورتوں میں جو عملاً عام طور پائی جاتی ہیں، فضا میں سمت بند سطح کی سرحد پر، سطح کے عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ لے لحاظ سے خلاف گھڑی رخ چلتے ہوئے (شکل 16.60)، سمتیہ میدان کا دائری بہاؤ اور سطح پر میدان کی گردش کے عمودی جزو کا تکمل برابر ہوں گے۔

مسئلہ ۵: **مسئلہ سٹوکس** سمت بند سطح S کی سرحد پر، سطح کے عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ لے لحاظ سے خلاف گھڑی چلتے ہوئے سمتیہ میدان $\boldsymbol{F} = M\boldsymbol{i} + N\boldsymbol{j} + P\boldsymbol{k}$ کا دائری بہاؤ S پر $\nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ کے تکمل کے برابر ہوگا۔

$$\underbrace{\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}}_{\text{خلاف گھڑی دائری بہاؤ}} = \underbrace{\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \ \mathrm{d}\sigma}_{\text{تکمل گردش}} \tag{4}$$

ہم مساوات 4 کو دیکھ کر کہہ سکتے ہیں کہ ایسی دو مختلف سمت بند سطحیں S_1 اور S_2 جن کی سرحد C ایک ہو، کے تکمل گردش برابر ہوں گے۔

$$\iint_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_1 \ \mathrm{d}\sigma = \iint_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}_2 \ \mathrm{d}\sigma$$

دونوں تکمل گردش اس لئے ایک دوسرے کے برابر ہوں گے کیونکہ دونوں مساوات 4 کے بائیں ہاتھ کے برابر ہیں، بشرطیکہ اکائی عمودی سمتیات $\boldsymbol{n}_1$ اور $\boldsymbol{n}_2$ سطوح کی درست سمت بندی کریں۔

مسئلہ سٹوکس میں موجود تکملات کی وجودیت یقینی بنانے کے لئے ضروری ہے کہ $\boldsymbol{F}$ ، C ، اور S پر ریاضیاتی شرائط مسلط ہوں گے۔ درکار عمومی شرائط کہتے ہیں کہ تمام تفاعل، سمتیہ میدان، اور ان کے تفرق استمراری ہوں۔

اگر C مستوی xy میں موجود، خلاف گھڑی سمت بند منحنی ہو، اور R مستوی xy میں ایک خطہ ہو جس کو C گھیرتی ہو، تب $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ اور درج ذیل ہوگا۔

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

---

[۳۵] gradf
[۳۶] delf
[۳۷] Stokes'Theorem

ان حالات میں مساوات سٹوکس درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

جو مسئلہ گرین میں موجود مساوات کی دائری بہاؤ و گردشی روپ ہے۔ اسی طرح انہیں قدموں پر الٹ چلتے ہوئے ہم مسئلہ گرین کے دائری بہاؤ و گردشی روپ کو دو بعدی میدان کے لئے درج ذیل ڈیل علامتیت میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_R (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}\ \mathrm{d}A \tag{5}$$

شکل 16.61 ملاحظہ کریں۔

مثال ۱۵.۲: **نصف کرہ کے لئے مساوات سٹوکس کی تصدیق**

نصف کرہ $S\ :\ x^2+y^2+z^2 = 9,\ z \geq 0$، اس کو گھیرتا دائرہ $C\ :\ x^2+y^2 = 9,\ z = 0$، اور میدان $\boldsymbol{F} = y\boldsymbol{i} - x\boldsymbol{j}$ کے لئے مساوات 4 کی قیمت تلاش کریں۔

حل: معلمی روپ $\boldsymbol{r}(\theta) = (3\cos\theta)\boldsymbol{i} + (3\sin\theta)\boldsymbol{j},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$ استعمال کرتے ہوئے اوپر سے نظارہ کرتے ہوئے C کے گرد خلاف گھڑی دائری بہاؤ تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{r} &= -3\sin\theta\ \mathrm{d}\theta\,\mathbf{i} + 3\cos\theta\ \mathrm{d}\theta\,\mathbf{j}\\
\mathbf{F} &= y\mathbf{i} - x\mathbf{j} = 3\sin\theta\,\mathbf{i} - 3\cos\theta\,\mathbf{j}\\
\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= -9\sin^2\theta\ \mathrm{d}\theta - 9\cos^2\theta\ \mathrm{d}\theta = -9\,\mathrm{d}\theta\\
\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} -9\ \mathrm{d}\theta = -18\pi
\end{aligned}$$

اب $\boldsymbol{F}$ کے لئے تکمل گردش تلاش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{F} &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\\
&= (0-0)\boldsymbol{i} + (0-0)\boldsymbol{j} + (-1-1)\boldsymbol{k} = -2\boldsymbol{k}\\
\boldsymbol{n} &= \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{3} && \text{بیرونی اکائی سمتیہ}\\
\mathrm{d}\sigma &= \frac{3}{z}\,\mathrm{d}A && \text{حصہ 16.5 کی مثال 5 میں } a = 3\\
\nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma &= -\frac{2z}{3}\frac{3}{z}\,\mathrm{d}A = -2\,\mathrm{d}A
\end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}\sigma = \iint_{x^2+y^2 \le 9} -2\ \mathrm{d}A = -18\pi$$

اس طرح دائرے کی ہمراہ دائری بہاو اور گردش کا تکمل نصف کرہ پر برابر ہیں، جیسا کہ ہونا چاہیے تھا۔ □

مثال ۱۵.۳: **دائری بہاؤ کی تلاش**

مستوی $z = 2$ مخروط $z = \sqrt{x^2+y^2}$ سے منحنی C پر ملتا ہے۔ اس منحنی پر، اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی (شکل 16.62)، میدان $\mathbf{F} = (x^2 - y)\mathbf{i} + 4z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ کا، دائری بہاؤ تلاش کریں۔

سطح: مسئلہ سٹوکس کے استعمال سے ہم دائری بہاؤ سطح پر تکمل سے حاصل کرتے ہیں۔ اوپر سے دیکھتے ہوئے C پر گھڑی خلاف چلنا اندرونی عمود $\boldsymbol{n}$ لینے کے مترادف ہے جس کا z جزو مثبت ہو گا۔

ہم مخروط کا معلمی روپ لکھتے ہیں۔

$$\mathbf{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\sin\theta\,\mathbf{j} + r\,\mathbf{k}, \quad 0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

اس طرح درج ذیل ہو گا۔

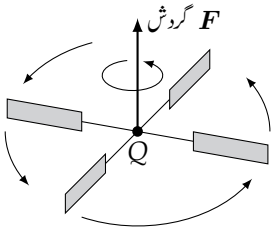
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{n} &= \frac{\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta}{|\mathbf{r}_r \times \mathbf{r}_\theta|} = \frac{-r\cos\theta\,\mathbf{i} - r\sin\theta\,\mathbf{j} + r\,\mathbf{k}}{r\sqrt{2}} && \text{حصہ 16.6 مثال 4} \\
&= \frac{-\cos\theta\,\mathbf{i} - \sin\theta\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{2}} \\
\mathrm{d}\sigma &= r\sqrt{2}\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta && \text{حصہ 16.6 مثال 4} \\
\nabla \times \mathbf{F} &= -4\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + \mathbf{k} && \text{مثال 1} \\
&= -4\mathbf{i} - 2r\cos\theta\,\mathbf{j} + \mathbf{k} && x = r\cos\theta
\end{aligned}$$

یوں

$$\begin{aligned}
(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(4\cos\theta + 2r\cos\theta\sin\theta + 1\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(4\cos\theta + r\sin 2\theta + 1\right)
\end{aligned}$$

اور دائری بہاؤ درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}\sigma && \text{مسئلہ سٹوکس مساوات 4} \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2}}\left(4\cos\theta + r\sin 2\theta + 1\right)\left(\sqrt{2}\,r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\theta\right) = 4\pi
\end{aligned}$$



□

$\nabla \times \boldsymbol{F}$ کی چپو چرخی سے تشبیہ

فرض کریں حرکت پذیر سیال کی رفتار $\boldsymbol{v}(x,y,z)$ اور نقطہ (x,y,z) پر اس کی کثافت $\delta(x,y,z)$ ہے۔ مزید فرض کریں $\boldsymbol{F} = \delta\boldsymbol{v}$ ہے۔ ایسی صورت میں بند منحنی C کی ہمراہ سیال کا دائری بہاؤ درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

مسئلہ سٹوکس کے مطابق یہ دائری بہاؤ، C میں محیط سطح S سے گزرتا $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کے بہاؤ کے برابر ہو گا۔

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\ d\delta$$

ہم $\boldsymbol{F}$ کے دائرہ کار میں اٹل نقطہ Q، اور اس نقطہ پر مخصوص سمت $\mathbf{u}$ منتخب کرتے ہیں۔ فرض کریں C ایک دائرہ ہے جس کا رداس ρ اور مرکز Q ہے اور جس کا مستوی $\boldsymbol{u}$ کو عمودی ہے۔ اگر Q پر $\nabla \times \boldsymbol{F}$ استمراری ہو، C میں محیط دائری قرص S پر $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کے $\boldsymbol{u}$ ویں جزو کی اوسط قیمت $\rho \to 0$ کی صورت میں Q پر $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کے $\boldsymbol{u}$ ویں جزو کو پہنچے گی۔

$$(\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{u})_Q = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{u}\ d\sigma$$

آخری مساوات میں سطحی تکمل کی جگہ دائری بہاؤ لکھ کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$(\nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{u})_Q = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{6}$$

مساوات 6 کے بائیں ہاتھ کی قیمت اس صورت زیادہ سے زیادہ ہو گی جب $\boldsymbol{u}$ کا رخ $\mathbf{F}\times\nabla$، $\mathbf{u}$ کی سمت میں ہو۔ چھوٹے ρ کے لئے مساوات 6 کے دائیں ہاتھ کا حد تخمیناً درج ذیل ہو گا، جو C کے ہمراہ دائری بہاؤ تقسیم رقبہ قرص (دائری بہاؤ کی کثافت) ہے۔

$$\frac{1}{\pi\rho^2}\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

فرض کریں Q پر رداس ρ کی چپو چرخی رکھی جاتی ہے جس کا دھرا $\boldsymbol{u}$ کے ہمراہ ہے۔ سیال کا C کے ہمراہ دائری بہاؤ چپو چرخی کے گھومنے کی رفتار پر اثر انداز ہو گا۔ جب دائری بہاؤ مکمل کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو اس صورت چپو چرخی تیز سے تیز گھومے گی؛ یوں جب دھرا $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کے رخ ہو، چپو چرخی تیز سے تیز گھومے گی (شکل 16.63)۔

مثال ۱۵.۴: **کثافت دائری بہاؤ اور $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کا تعلق**

اٹل کثافت کا سیال محور z کے گرد $\boldsymbol{v} = \omega(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})$ سمتی رفتار سے گھوم رہا ہے جہاں ω ایک مثبت مستقل جس کو گھومنے کا **زاویائی رفتار** کہتے ہیں (شکل 16.64)۔ اگر $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{v}$ ہو، $\nabla \times \boldsymbol{F}$ کیا ہو گا اور کثافت دائری بہاؤ کے ساتھ اس کا تعلق کیا ہو گا؟

حل: چونکہ $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{v} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$ ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial P}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \\ &= (0-0)\boldsymbol{i} + (0-0)\boldsymbol{j} + (\omega - (-\omega))\boldsymbol{k} = 2\omega\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

مسئلہ سٹوکس کے مطابق، رداس ρ کے دائرہ C کے ہمراہ، جو مستوی مثلاً مستوی xy میں قرص S کا احاطہ کرتا ہو، کے ہمراہ $\boldsymbol{F}$ کا دائری بہاؤ درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}\sigma = \iint_S 2\omega\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (2\omega)(\pi\rho^2)$$

یوں درج ذیل ہو گا جو $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{k}$ لیتے ہوئے مساوات 6 کے عین مطابق ہے۔

$$(\nabla \times \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{k} = 2\omega = \frac{1}{\pi\rho^2}\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

□

مثال ۱۵.۵: **مسئلہ سٹوکس کا اطلاق**

اوپر سے نظارہ کرتے ہوئے ثُمن اول میں واقع مستوی $2x + y + z = 2$ کے ٹکڑے کی سرحد C پر خلاف گھڑی چل کر $\int_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ کی قیمت مسئلہ سٹوکس استعمال کرتے ہوئے تلاش کریں، جہاں $\boldsymbol{F} = xz\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + 3xz\boldsymbol{k}$ ہے۔

حل: یہ مستوی تفاعل $f(x,y,z) = 2x + y + z$ کی ہم قد سطح $f(x,y,z) = 2$ ہے۔ اس کا اکائی عمودی سمتیہ

$$\boldsymbol{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}}{|2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})$$

سرحد C پر خلاف گھڑی حرکت کے مترادف ہے۔ مسئلہ سٹوکس استعمال کرنے کے لئے درج ذیل حاصل کرنے ہیں۔

$$\boldsymbol{F}\text{گردش} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & xy & 3xz \end{vmatrix} = (x-3z)\boldsymbol{j} + y\boldsymbol{k}$$

مستوی پر $z = 2 - 2x - y$ ہے لہٰذا

$$\nabla \times \mathbf{F} = (x - 3(2-2x-y))\mathbf{j} + y\mathbf{k} = (7x+3y-6)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$$

اور

$$(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}(7x+3y-6+y) = \frac{1}{\sqrt{6}}(7x+4y-6)$$

ہو گا۔ سطحی رقبے کا چھوٹا ٹکڑا درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{|\nabla f|}{|\nabla f \cdot \mathbf{k}|}\ \mathrm{d}A = \frac{\sqrt{6}}{1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{6}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

دائری بہاؤ درج ذیل ہو گا۔

مسئلہ سٹوکس، مساوات 4

$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \iint_S \nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}\sigma \\ &= \int_0^1 \int_0^{2-2x} \frac{1}{\sqrt{6}}(7x+4y-6)\sqrt{6}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = -1\end{aligned}$$

□

کثیر سطحی سطح کے لئے مسئلہ سٹوکس کا ثبوت

فرض کریں S کثیر سطحی سطح ہے جو محدود تعداد کے مسطح حصوں پر مشتمل ہے (مثلاً شکل 16.66)۔ ہم S کے علیحدہ علیحدہ حصوں پر مسئلہ گرین کا اطلاق کرتے ہیں۔ مستویات کی دو قسمیں ہیں۔

۱. وہ جو ہر طرف سے دوسرے حصوں سے گھیرا ہو۔

۲. وہ جن کا ایک یا ایک سے زیادہ اطراف کسی دوسرے حصے سے متصل نہ ہو۔

سطح S کی سرحد Δ قسم 2 مستویات کے ان کناروں پر مشتمل ہے جو دوسری مستویات سے متصل نہیں۔ شکل 16.66 میں مثلثات EAB ، BCE ، اور CDE سطح S کے کچھ حصے کو ظاہر کرتے ہیں جبکہ $ABCD$ سرحد Δ کے کچھ حصے کو ظاہر کرتا ہے۔ تینوں مثلثات پر بالترتیب مسئلہ گرین کا اطلاق کر کے نتائج جمع کر کے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\left(\oint_{EAB} + \oint_{BCE} + \oint_{CDE}\right) F \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \left(\iint_{EAB} + \iint_{BCE} + \iint_{CDE}\right) \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}\sigma \tag{7}$$

چونکہ مساوات 7 میں بائیں ہاتھ کے تین لکیری تکملات میں اندرونی (متصل مثلثات کے مشترک) اضلاع پر لکیری تکملات کے جوڑے ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں لہٰذا تینوں مل کر کنارہ $ABCDE$ پر واحد ایک تکمل دیتے ہیں۔ مثال کے طور پر مثلث ABE کے ضلع BE پر لکیری تکمل کی علامت $(\pm)$ مثلث EBC کے اسی ضلع پر لکیری تکمل کی علامت $(\mp)$ کا الٹ ہو گی۔ ضلع CE پر بھی ایسا ہو گا۔ یوں مساوات 7 درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$\oint_{ABCDE} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{ABCDE} \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$$

تمام اضلاع پر مسئلہ گرین کا اطلاق کر کے درج ذیل حاصل ہو گا جو درحقیقت کثیر سطحی سطح S کا مسئلہ سٹوکس ہے۔ مزید عمومی سطوح کے لئے ثبوت آپ کو اعلیٰ نصاب میں ملیں گے۔

$$\oint_{\Delta} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_{S} \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$$

مسئلہ سٹوکس برائے سوراخ دار سطوح

مسئلہ گرین کو وسعت دینے کے طرز پر مسئلہ سٹوکس کو ایسی سمت بند سطح S تک وسعت دی جا سکتی ہے جس میں ایک یا ایک سے زیادہ سوراخ ہوں (شکل 16.67)۔ سطح S پر $\nabla\times\boldsymbol{F}$ کے عمودی جزو کا سطح تکمل تمام سرحدی منحنیات پر $\boldsymbol{F}$ کے مماسی جزو کے لکیری تکملات کے مجموعہ کے برابر ہو گا، جہاں S کی سمت بندی کو مد نظر رکھ کر منحنیات پر چلنا ہو گا۔

ایک اہم تماثل

ریاضیات اور طبیعی سائنس میں درج ذیل تماثل بار بار پیش آتا ہے۔

$$\nabla\times\nabla f = \mathbf{0} \tag{8}$$

یہ تماثل جو ہر اس تفاعل $f(x,y,z)$ کے لئے کارآمد ہے جس کے دوہرے جزوی تفرق استمراری ہوں، کہتا ہے کہ تفاعل $f(x,y,z)$ کے ڈھلوان کی گردش صفر ہو گی۔ اس کا ثبوت درج ذیل ہے۔

$$\nabla\times\nabla f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = (f_{zy}-f_{yz})\mathbf{i} - (f_{zx}-f_{xz})\mathbf{j} + (f_{yx}-f_{xy})\mathbf{k}$$

ثانی جزوی تفرق استمراری ہونے کی صورت میں قوسین میں بند مختلف اقسام کے ثانی تفرق برابر ہوں گے (حصہ 14.3، مسئلہ 2) لہٰذا سمتیہ صفر ہو گا

بقائی میدان اور مسئلہ سٹوکس

ہم نے حصہ 16.3 میں دیکھا کہ کھلے خطہ D میں میدان $\boldsymbol{F}$ کا بقائی ہونا اس کے مترادف ہے کہ D میں ہر بند راہ پر $\boldsymbol{F}$ کا لکیری تکمل صفر ہو۔ یہ از خود، سادہ تعلق خطوں میں، اس کے مترادف ہے کہ $\nabla\times\boldsymbol{F}=\mathbf{0}$ ہو۔

مسئلہ ۶: $\nabla \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ اور بند حلقہ خاصیت کا تعلق

اگر خلا میں سادہ تعلق آزاد خطہ D کے ہر نقطہ پر $\nabla \times \boldsymbol{F} = \mathbf{0}$ ہو تب D میں ٹکڑوں میں ہموار بند راہ C پر درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$$

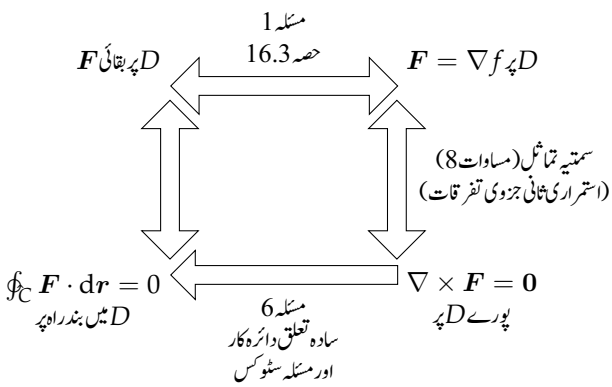
ثبوت: **خاکہ** مسئلہ 6 کا ثبوت عموماً دو مراحل میں کیا جاتا ہے۔ پہلا مرحلہ سادہ بند منحنیات کے لیے ہو گا۔ اعلیٰ ریاضیات کی ایک شاخ ربڑی ہندسہ[۳۸] کا ایک مسئلہ کہتا ہے کہ سادہ تعلق کھلے خطہ D میں ہر قابل تفرق سادہ بند منحنی C ایک ہموار دو طرفہ سطح S، جو D میں پائی جاتی ہو، کی سرحد ہو گی۔ یوں مسئلہ سٹوکس کے تحت درج ذیل ہو گا۔

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\ \mathrm{d}\sigma = 0$$

دوسرا مرحلہ اُن منحنیات کے لیے ہے جو خود کو کاٹتی ہیں، جیسے کہ شکل 16.68 میں دکھائی گئی ہے۔ ایسی منحنیات کو سادہ حلقات، جن کا احاطہ قابل سمت بند سطوح کرتی ہوں، میں تقسیم کر کے باری باری ایک ایک حلقہ پر مسئلہ سٹوکس کا اطلاق کر کے نتائج کا مجموعہ لیا جاتا ہے۔

□

تعلق دار، سادہ تعلق کھلے خطوں پر معین بقائی میدان کے لئے حاصل نتائج کا نچوڑ درج ذیل شکل میں پیش کیا گیا ہے۔



سوالات

مسئلہ سٹوکس کے ذریعہ دائری بہاؤ کی قیمت کا حصول

سوال 1 تا 6 میں مسئلہ سٹوکس استعمال کرتے ہوئے منحنی C کے ہمراہ دی گئی سمت میں میدان $\boldsymbol{F}$ کے دائری بہاؤ کی قیمت تلاش کریں۔

---

[۳۸] topology

سوال ۱۵.۱: $\boldsymbol{F} = x^2\,\boldsymbol{i} + 2x\,\boldsymbol{j} + z^2\,\boldsymbol{k}$
مستوی xy میں C ترخیم $4x^2 + y^2 = 4$ ہے جو اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی ہے۔

سوال ۱۵.۲: $\boldsymbol{F} = 2y\,\boldsymbol{i} + 3x\,\boldsymbol{j} - z^2\,\boldsymbol{k}$
مستوی xy میں C دائرہ $x^2 + y^2 = 9$ ہے جو اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی ہے۔

سوال ۱۵.۳: $\boldsymbol{F} = y\,\boldsymbol{i} + xz\,\boldsymbol{j} + x^2\,\boldsymbol{k}$
مستوی $x + y + z = 1$ سے شُمن اول مثلث کاٹتا ہے جس کی سرحد C ہے جو اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی ہے۔

سوال ۱۵.۴: $\boldsymbol{F} = (y^2 + z^2)\,\boldsymbol{i} + (x^2 + z^2)\,\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\,\boldsymbol{k}$
مستوی $x + y + z = 1$ سے شُمن اول مثلث کاٹتا ہے جس کی سرحد C ہے جو اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی ہے۔

سوال ۱۵.۵: $\boldsymbol{F} = (y^2 + z^2)\,\boldsymbol{i} + (x^2 + y^2)\,\boldsymbol{j} + (x^2 + y^2)\,\boldsymbol{k}$
مستوی xy میں خطوط $x = \pm 1$ اور $y = \pm 1$ ایک مربع C گھیرتے ہیں جو اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی ہے۔

سوال ۱۵.۶: $\boldsymbol{F} = x^2y^3\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + z\,\boldsymbol{k}$
بیلن $x^2 + y^2 = 4$ اور نصف کرہ $z \geq 0$ کے تقاطع سے حاصل منحنی C جو اوپر سے دیکھتے ہوئے خلاف گھڑی ہے۔ $x^2 + y^2 + z^2 = 16,$

گردش کا بہاؤ

سوال ۱۵.۷: بیضوی خول $S \;:\; 4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36,\ z \geq 0$ کا بیرونی اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے۔ میدان $\boldsymbol{F} = y\,\boldsymbol{i} + x^2\,\boldsymbol{j} + \left(x^2 + y^4\right)^{3/2} \sin\left(e^{\sqrt{xyz}}\right)\boldsymbol{k}$ کے لئے تکمل $\iint_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$ کی قیمت تلاش کریں۔ (اشارہ: بیضوی خول کے تل پر ایک معلمی روپ $x = 3\cos t$ ، $y = 2\sin t$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ ہے۔)

سوال ۱۵.۸: قطع مکافی خول $S \;:\; 4x^2 + y + z^2 = 4,\ y \geq 0$ کا بیرونی (مبدا سے دوری کی جانب) اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے۔ درج ذیل میدان

$$\boldsymbol{F} = \left(-z + \frac{1}{2+x}\right)\boldsymbol{i} + (\tan^{-1} y)\boldsymbol{j} + \left(x + \frac{1}{4+z}\right)\boldsymbol{k}$$

کے لئے تکمل $\iint_S \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$ کی قیمت تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۹: فرض کریں سطح S بیلن $x^2+y^2=a^2,\ 0\le z\le h$ اور اس کا بالائی ڈھکن $x^2+y^2\le a^2,\ z=h$ پر مشتمل ہے۔ میدان $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$ کے لئے سطح S سے $\nabla\times\mathbf{F}$ کا باہر رخ بہاؤ تلاش کریں۔

سوال ۱۵.۱۰: درج ذیل تکمل کا حساب کریں جہاں S نصف کرہ $x^2+y^2+z^2=1,\ z\ge 0$ ہے۔

$$\iint_S \Big(\nabla\times(y\mathbf{i})\Big)\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$$

سوال ۱۵.۱۱: **گردش F کا بہاؤ**

دکھائیں کہ ان تمام سمت بند سطوح S کے لئے، جو C کا احاطہ ہوں اور جن کا C پر مثبت رخ ایک ہو، درج ذیل تکمل کی قیمتیں برابر ہوں گی۔

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$$

سوال ۱۵.۱۲: فرض کریں $\mathbf{F}$ قابل سمت بند سمتی میدان ہے جو ایسے خطے پر معین ہے جس میں ایک ہموار بند سمت بند سطح S اور اس کا اندرونی حصہ شامل ہیں۔ سطح S پر اکائی عمودی سمتیہ میدان $\mathbf{n}$ ہے۔ مزید فرض کریں کہ S، دو سطحوں S_1 اور S_2 کا مجموعہ ہے جو آپس میں ایک ہموار سادہ بند منحنی C پر جڑی ہوئی ہیں۔ کیا درج ذیل کے بارے میں کچھ کہا جا سکتا ہے؟

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\ d\sigma$$

اپنے جواب کی وجوہات بیان کریں۔

معلمی سطوح کے لئے مسئلہ سٹوکس

سوال 13 تا 18 میں بیرونی سمت اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کے رخ، سطح S سے گزرتا میدان $\boldsymbol{F}$ کی گردش کے بہاؤ کی قیمت مسئلہ سٹوکس کا سطحی تکمل استعمال کر کے تلاش کریں۔ سوال ۱۵.۱۳: $\mathbf{F}=2z\mathbf{i}+3x\mathbf{j}+5y\mathbf{k}$

$$S:\quad \mathbf{r}(r,\theta)=r\cos\theta\,\mathbf{i}+r\sin\theta\,\mathbf{j}+(4-r^2)\mathbf{k},\qquad 0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

سوال ۱۵.۱۴: $\mathbf{F}=(y-z)\mathbf{i}+(z-x)\mathbf{j}+(x+z)\mathbf{k}$

$$S:\quad \mathbf{r}(r,\theta)=r\cos\theta\,\mathbf{i}+r\sin\theta\,\mathbf{j}+(9-r^2)\mathbf{k}\qquad 0\le r\le 3,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

سوال ۱۵.۱۵: $\mathbf{F} = x^2y\,\mathbf{i} + 2y^3z\,\mathbf{j} + 3z\,\mathbf{k}$

$$S: \quad \mathbf{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\sin\theta\,\mathbf{j} + r\,\mathbf{k}, \qquad 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

سوال ۱۵.۱۶: $\mathbf{F} = (x-y)\mathbf{i} + (y-z)\mathbf{j} + (z-x)\mathbf{k}$

$$S: \quad \mathbf{r}(r,\theta) = r\cos\theta\,\mathbf{i} + r\sin\theta\,\mathbf{j} + (5-r)\mathbf{k}, \qquad 0 \le r \le 5,\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

سوال ۱۵.۱۷: $\mathbf{F} = 3y\,\mathbf{i} + (5-2x)\mathbf{j} + (z^2-2)\mathbf{k}$

$$S: \quad \mathbf{r}(\phi,\theta) = \sqrt{3}\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + \sqrt{3}\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + \sqrt{3}\cos\phi\,\mathbf{k}$$

$$0 \le \phi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

سوال ۱۵.۱۸: $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x\mathbf{k}$

$$S: \quad \mathbf{r}(\phi,\theta) = 2\sin\phi\cos\theta\,\mathbf{i} + 2\sin\phi\sin\theta\,\mathbf{j} + 2\cos\phi\,\mathbf{k}$$

$$0 \le \phi \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le 2\pi$$

۱۵.۷.۱ نظریہ اور مثالیں

سوال ۱۵.۱۹: **صفر دائری بہاؤ** تماثل $\nabla \times \nabla f$ (مساوات 8) اور مسئلہ سٹوکس استعمال کرتے ہوئے دکھائی کہ فضا میں کسی بھی ہموار قابل سمت بند سطح کی سرحد کے ہمراہ درج ذیل میدان کا دائری بہاؤ صفر ہو گا۔

ا. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$

ب. $\mathbf{F} = \nabla(xy^2z^3)$

ج. $\mathbf{F} = \nabla \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$

د. $\mathbf{F} = \nabla f$

سوال ۱۵.۲۰: **صفر دائری بہاؤ** تفاعل $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ اور میدان $\mathbf{F} = \nabla f$ ہیں۔ درج ذیل طریقوں سے دکھائیں کہ مستوی xy میں دائرہ $x^2+y^2=a^2$ پر میدان کا گھڑی وار دائری بہاؤ صفر ہے۔

ا. دائرے پر $\boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ لیں جہاں $\mathbf{r}(t) = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j},\ 0 \le t \le 2\pi$ ہے۔

ب. مسئلہ سٹوکس کا استعمال کریں۔

سوال ۱۵.۲۱: مستوی $2x + 2y + z = 2$ میں C ایک سادہ بند ہموار منحنی ہے جس کی سمت بندی یہاں دکھائی گئی ہے۔ دکھائیں کہ درج ذیل کی قیمت C میں محیط خطے کے رقبے پر منحصر ہے نا کہ C کی شکل و صورت یا مقام پر۔

$$\oint_C (2y\,dx + 3z\,dy - x\,dz)$$

سوال ۱۵.۲۲: ثابت کریں اگر $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ہو تب $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ ہو گا۔

سوال ۱۵.۲۳: ایسا سمتی میدان معلوم کریں جس کے اجزاء دو مرتبہ قابل تفرق ہوں اور جس کی گردش $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ہو، یا ثابت کریں ایسا کوئی میدان موجود نہیں۔

سوال ۱۵.۲۴: کیا مسئلہ سٹوکس ایسے میدان میں گردش کے بارے میں کوئی خاص نتیجہ دیتا ہے جس کی گردش صفر ہو؟ اپنے جواب کی وجوہات بیان کریں۔

سوال ۱۵.۲۵: مستوی xy میں R ایسا خطہ ہے جس کو ٹکڑوں میں ہموار سادہ بند منحنی C گھیرتی ہے۔ فرض کریں محور x اور محور y کے لحاظ سے R کے جمود بالترتیب I_x اور I_y ہیں۔ درج ذیل تکمل کی قیمت I_x اور I_y کے روپ میں تلاش کریں جہاں $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ہے۔

$$\oint_C \nabla(r^4)\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s$$

سوال ۱۵.۲۶: **گردش صفر تاہم میدان غیر بقائی** دکھائیں کہ درج ذیل کی گردش صفر ہے

$$\boldsymbol{F} = \frac{-y}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

تاہم مستوی xy میں دائرہ $x^2 + y^2 = 1$ کو C لیتے ہوئے درج ذیل صفر نہیں۔

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

(میدان $\boldsymbol{F}$ کا دائرہ کار یہاں سادہ تعلق خطہ نہیں لہٰذا مسئلہ 6 کا اطلاق نہیں ہو گا۔ محور z کے ہمراہ میدان $\boldsymbol{F}$ معین نہیں لہٰذا ایسا کوئی طریقہ ممکن نہیں کہ $\boldsymbol{F}$ کے دائرہ کار سے باہر نکلے بغیر ہم C کو ایک نقطے میں سمیٹ لیں۔)

۱۵.۸ مسئلہ پھیلاؤ اور ایک مربوط نظریہ

مستوی میں مسئلہ گرین کہتا ہے کہ سادہ بند منحنی کے پار سمتی میدان کا خالص بیرونی بہاؤ منحنی میں محیط خطے پر میدان کے پھیلاؤ پر تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ تین ابعاد میں متعلقہ مسئلہ، جو مسئلہ پھیلاؤ کہلاتا ہے، کے تحت فضا میں بند سطح سے سمتیہ میدان کا باہر رخ گزرتا بہاؤ سطح میں محیط خطے پر میدان کے پھیلاؤ کے تکمل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس حصے میں ہم مسئلہ پھیلاؤ ثابت کرتے ہیں، اور دکھاتے ہیں یہ بہاؤ کی قیمت کی تلاش کیسے آسان بناتا ہے۔ ہم برقی میدان میں بہاؤ کا قانون گاوس اور ماقواحرکیات کی استمراری مساوات بھی اخذ کرتے ہیں۔ آخر میں ہم باب کے سمتی تکملی مسائل کو ایک بنیادی مسئلہ کے روپ میں پیش کرتے ہیں۔

تین ابعاد میں پھیلاؤ

سمتی میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y,z)\boldsymbol{i} + N(x,y,z)\boldsymbol{j} + P(x,y,z)\boldsymbol{k}$ کا **پھیلاؤ**[۳۹] درج ذیل غیر سمتی تفاعل ہو گا۔

$$\text{پھیلاؤ } \boldsymbol{F} = \nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \tag{1}$$

علامت ''پھیلاؤ $\boldsymbol{F}$'' کو ''F کا پھیلاؤ'' پڑھا جاتا ہے، جبکہ علامت ''$\nabla \cdot \boldsymbol{F}$'' کو ''ڈیل ایف'' پڑھا جاتا ہے۔

تین ابعاد میں پھیلاؤ $\boldsymbol{F}$ کا وہی طبیعی مفہوم ہے جو دو ابعاد میں ہے۔ اگر $\boldsymbol{F}$ سیال کے بہاؤ کا سمتی میدان رفتار ہو، نقطہ (x,y,z) پر بہاؤ $\boldsymbol{F}$ کی قیمت اس نقطے پر سیال کے دخول یا خروج کی شرح دے گا۔ پھیلاؤ سے مراد نقطے پر بہاؤ فی اکائی حجم یعنی کثافت بہاؤ ہے۔

مثال ۱۵.۱: **پھیلاؤ کی تلاش**

سمتی میدان $\boldsymbol{F} = 2xz\boldsymbol{i} - xy\boldsymbol{j} - z\boldsymbol{k}$ کا پھیلاو تلاش کریں۔

حل: سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کا پھیلاؤ درج ذیل ہے۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2xz) + \frac{\partial}{\partial y}(-xy) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 2z - x - 1$$

□

مسئلہ پھیلاؤ

مسئلہ پھیلاؤ کہتا ہے مناسب شرائط کے تحت، (باہر رخ سمت بند) بند سطح سے سمتی میدان کا باہر گزرتا بہاؤ سطح میں محیط خطہ پر میدان کے پھیلاؤ کے تہرا تکمل کے برابر ہو گا۔

مسئلہ ۷: **مسئلہ پھیلاؤ**

---

[۳۹] divergence

بند، سمت بند سطح S سے سمتی میدان $\boldsymbol{F}$ کا، سطح کے باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ کے رخ، گزرتا بہاؤ، سطح میں محیط خطہ D پر $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ کے تکمل کے برابر ہو گا۔

$$\underbrace{\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma}_{\text{باہر رخ بہاؤ}} = \underbrace{\iiint_D \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}H}_{\text{تکمل پھیلاؤ}} \tag{2}$$

مثال ۱۵.۲: کرہ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ پر سمتی میدان $\boldsymbol{F} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ کے لئے مساوات 2 کے دونوں اطراف حل کریں۔

حل: سطح S کا (درج ذیل) باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$ کے ڈھلوان سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{2(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k})}{\sqrt{4(x^2 + y^2 + z^2)}} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{a}$$

یوں درج ذیل ہو جہاں سطح پر $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ لیا گیا ہے۔

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{a} \, \mathrm{d}\sigma = \frac{a^2}{a} \, \mathrm{d}\sigma = a \, \mathrm{d}\sigma$$

لہٰذا مساوات 2 کا ایک ہاتھ ادرج ذیل ہو گا۔

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \iint_S a \, \mathrm{d}\sigma = a \iint_S \mathrm{d}\sigma = 4\pi a^3$$

میدان $\boldsymbol{F}$ کا پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3$$

لہٰذا مساوات 2 کا دوسرا ہاتھ ادرج ذیل ہو گا۔

$$\iiint_D \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}H = \iiint_D 3 \, \mathrm{d}H = 3\left(\frac{4}{3}\pi a^3\right) = 4\pi a^3$$

□

مثال ۱۵.۳: **بہاؤ کا حصول**

ثُمن اول سے مستویات $x = 1$ ، $y = 1$ ، اور $z = 1$ مکعب کاٹتی ہیں۔ سمتی میدان $\boldsymbol{F} = xy\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$ کا مکعب کی سطح سے باہر رخ گزرتا بہاؤ تلاش کریں۔

حل: مکعب کے چھ سطوح پر تکمل لے کر بہاؤ کی قیمت تلاش کرنے کی بجائے ہم پھیلاؤ

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(yz) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = y + z + x$$

کا تکمل مکعب کے اندرون پر لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \text{بہاؤ} &= \iint_{\text{کعبی سطوح}} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \iiint_{\text{کعبی اندرون}} \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}H \qquad \text{مسئلہ پھیلاو} \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + y + z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

□

مخصوص خطوں کے لئے مسئلہ پھیلاؤ کا ثبوت

ہم فرض کرتے ہیں کہ $\boldsymbol{F}$ کے اجزاء کے جزوی یک رتبی تفرق استمراری ہیں۔ ہم مزید فرض کرتے ہیں کہ خطہ D محدب ہے اور اس میں کوئی سوراخ یا بلبلا نہیں پایا جاتا، مثلاً ٹھوس مکعب، کرہ، یا تر خیمی جسم، اور S ٹکڑوں میں ہموار سطح ہے۔ اس کے ساتھ ساتھ ہم فرض کرتے ہیں کہ xy مستوی پر D کا تظلیل قائمہ R_{xy} ہے اور اس کے اندر xy مستوی کو ہر عمودی لکیر سطح S کو ٹھیک دو نقاط پر قطع کرتی ہے جس سے ہمیں درج ذیل دو سطوح ملتے ہیں

$$\begin{aligned} S_1 : \quad & z = f_1(x, y), \quad (x, y) \text{ تظلیل } R_{xy} \text{ میں ہیں} \\ S_2 : \quad & z = f_2(x, y), \quad (x, y) \text{ تظلیل } R_{xy} \text{ میں ہیں} \end{aligned}$$

جہاں $f_1 \leq f_2$ ہے۔ ہم اسی طرح کے مفروضے دیگر محددی سطوح پر D کے تظلیل قائمہ کے لئے فرض کرتے ہیں۔ شکل 16.69 دیکھیں۔

اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n} = n_1\boldsymbol{i} + n_2\boldsymbol{j} + n_3\boldsymbol{k}$ کے اجزاء زاویات α ، β ، اور γ کے کوسائن ہیں جو $\boldsymbol{n}$ اکائی سمتیات $\boldsymbol{i}$ ، $\boldsymbol{j}$ ، اور $\boldsymbol{k}$ کے ساتھ بناتا ہے (شکل 16.70)۔ تمام سمتیات اکائی ہونے کی وجہ سے ایسا ہے۔ یوں

$$\begin{aligned} n_1 &= \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{i} = |\boldsymbol{n}||\boldsymbol{i}| \cos\alpha = \cos\alpha \\ n_2 &= \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{j} = |\boldsymbol{n}||\boldsymbol{j}| \cos\beta = \cos\beta \\ n_3 &= \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{k} = |\boldsymbol{n}||\boldsymbol{k}| \cos\gamma = \cos\gamma \end{aligned}$$

لہٰذا

$$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha)\boldsymbol{i} + (\cos\beta)\boldsymbol{j} + (\cos\gamma)\boldsymbol{k}$$

اور درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma$$

اجزاء کے روپ میں مسئلہ پھیلاؤ کہتا ہے درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_S (M\cos\alpha + N\cos\beta + P\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_D \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

ہم درج ذیل تین مساویت ثابت کر کے مسئلہ ثابت کرتے ہیں۔

$$\iint_S M\cos\alpha\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_D \frac{\partial M}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{۱۵.۵۸}$$

$$\iint_S N\cos\beta\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_D \frac{\partial N}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{۱۵.۵۹}$$

$$\iint_S P\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{۱۵.۶۰}$$

مساوات ۶۰-۱۵ کا ثبوت ہم بائیں ہاتھ کے سطحی تکمل کو xy مستوی پر D کی قائمہ تظلیل پر دوہرے تکمل میں تبدیل کر کے مساوات ۱۵.۶۰ ثابت کرتے ہیں (شکل 16.71)۔ سطح S دو سطوح S_2 اور S_1 پر مشتمل ہے جہاں S_2 بالا حصہ ہے اور اس کی مساوات $z = f_2(x,y)$ ہے اور S_1 نچلا حصہ ہے اور اس کی مساوات $z = f_1(x,y)$ ہے۔ سطح S_2 پر باہر رخ عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ کا $\boldsymbol{k}$ جزو مثبت علامت رکھتا ہے اور چونکہ

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}A}{|\cos\gamma|} = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\cos\gamma}$$

ہے لہٰذا درج ذیل ہو گا (شکل 16.72 پر نظر ڈالیں)۔

$$\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

سطح S_1 پر $\boldsymbol{n}$ کا $\boldsymbol{k}$ جزو منفی علامت رکھتا ہے لہٰذا اس سطح پر درج ذیل ہو گا۔

$$\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma = -\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

یوں درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\iint_S P\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma &= \iint_{S_2} P\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{S_1} P\cos\gamma\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \iint_{R_{xy}} P(x,y,f_2(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{R_{xy}} P(x,y,f_1(x,y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{R_{xy}} [P(x,y,f_2(x,y)) - P(x,y,f_1(x,y))]\,\mathrm{d}\mathrm{d}y \\
&= \iint_{R_{xy}} \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_D \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

یوں مساوات ۱۵.۶۰ اثابت ہوا۔

مساوات ۱۵.۵۸ اور مساوات ۱۵.۵۹ کے ثبوت اسی طرز پر حاصل ہوں گے؛ یا مساوات ۱۵.۶۰ میں بالترتیب x ، y ، z ؛ M ، N ، P ؛ α ، β ، γ ایک دوسرے کی جگہ رکھ کر نتائج لکھیں۔

دیگر خطوں کے لئے مسئلہ پھیلاؤ

مسئلہ پھیلاؤ کو ایسے خطوں تک وسعت دی جا سکتی ہے جنہیں محدود تعداد کے مذکورہ سادہ قسم کے خطوں میں تقسیم کیا جا سکتا ہے یا ایسے خطوں تک جنہیں کسی طرح سادہ خطوں کی حد تصور کیا جا سکتا ہے۔ مثال کے طور پر، دو ہم مرکز کرّات کے بیچ خطہ D ہے جہاں D کے اندر اور اس کے تحدیدی سطوح پر $\boldsymbol{F}$ کے جزوی تفرق استمراری ہیں۔ استوائی مستوی پر D کو دو حصوں میں تقسیم کر کے دونوں نصف حصوں پر مسئلہ پھیلاؤ کا اطلاق کریں۔ نچلا نصف حصہ D_1 شکل 16.73 میں پیش کیا گیا ہے جس کی تحدیدی سطح S_1 ہے جو بیرونی کرہ، مسطح چھلا، اور اندرونی کرہ پر مشتمل ہے۔ مسئلہ پھیلاؤ درج ذیل کہتا ہے۔

$$\iint_{S_1} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_1\,\mathrm{d}\sigma_1 = \iiint_{D_1} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H_1 \tag{۱۵.۶۱}$$

اکائی عمودی سمتیہ $\boldsymbol{n}_1$ کا رخ نچلے نصف حصہ D_1 کے بیرونی سطح پر مبدا سے دور کی جانب ہے، چھلے پر یہ $\boldsymbol{k}$ کے برابر ہے، اور اندرونی سطح پر اس کا رخ مبدا کی جانب ہے۔ اس کے بعد D_2 اور اس کی سطح S_2 پر مسئلہ پھیلاؤ کا اطلاق کریں (شکل 16.74)۔

$$\iint_{S_2} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}_2\,\mathrm{d}\sigma_2 = \iiint_{D_2} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H_2 \tag{۱۵.۶۲}$$

بالائی نصف حصہ D_2 کی سطح S_2 پر چلتے ہوئے عمادی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}_2$ پر نظر رکھیں۔ بیرونی کرہ پر اس کا رخ مبدا سے دور جانب ہے، چھلا پر یہ $-\boldsymbol{k}$ کے برابر ہے، جبکہ اندرونی کرہ پر اس کا رخ مبدا کی جانب ہے۔ مساوات ۱۵.۶۱ اور مساوات ۱۵.۶۲ جمع کرتے ہوئے، چھلے پر $\boldsymbol{n}_1$ اور $\boldsymbol{n}_2$ کی علامتیں الٹ ہونے کی بنا، اس پر تکمل ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں۔ یوں درج ذیل نتیجہ حاصل ہو گا

$$\iint_{S} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_{D} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H$$

جہاں دو کرّات کے بیچ خطہ D ہے، D کی سرحد S دو کرّات پر مشتمل ہے، اور S پر D سے باہر رخ عمودی اکائی سمتیہ $\boldsymbol{n}$ ہے۔

مثال ۱۵.۴: **باہر رخ بہاؤ کا حصول**

خطہ $D:\ 0 < a^2 \le x^2+y^2+z^2 \le b^2$ کی سرحد کو عبور کرتا ہوا باہر رخ بہاؤ درج ذیل میدان کے لئے تلاش کریں۔

$$\boldsymbol{F} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{k}}{\rho^3}, \quad \rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

حل: خطہ D پر $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ کا تکمل ہمیں بہاؤ دیگا۔ درج ذیل لکھتے ہیں

$$\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\rho}$$
$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x\rho^{-3}) = \rho^{-3} - 3x\rho^{-4}\frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3x^2}{\rho^5}$$

اور اسی طرح درج ذیل بھی ہو گا۔

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3y^2}{\rho^5}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\rho^3} - \frac{3z^2}{\rho^5}$$

لہٰذا

$$\boldsymbol{F}\text{پھیلاؤ} = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3}{\rho^5}(x^2+y^2+z^2) = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3\rho^2}{\rho^5} = 0$$

اور درج ذیل ہو گا۔

$$\iiint_D \nabla \cdot \boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H = 0$$

اس طرح D پر $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ کا تکمل صفر ہے اور D کی سرحد کو باہر رخ عبور کرتا ہوا صافی بہاؤ صفر ہو گا۔ اس مثال سے مزید معلومات بھی حاصل ہوتی ہیں۔ اندرونی کرہ S_a کو پار کرتا ہوا جو بہاؤ D سے خارج ہوتا ہے کی علامت اس بہاؤ کے الٹ ہو گی جو بیرونی کرہ S_b کو عبور کرتا ہوا D سے خارج ہوتا ہے (یاد رہے ان بہاؤ کا مجموعہ صفر ہے)۔ یوں مبدا سے دوری کے رخ $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ جو S_a کو عبور کرتا ہے $\boldsymbol{F}$ کے اس بہاؤ کے برابر ہو گا جو مبدا سے دوری کے رخ S_b کو پار کرتا ہوا D سے خارج ہوتا ہے۔ یوں مبدا پر مرکوز کرہ کو عبور کرتا $\boldsymbol{F}$ کا بہاؤ کرہ کے رداس پر منحصر نہیں۔ یہ بہاؤ کتنا ہو گا؟

اس کی قیمت جاننے کی خاطر ہم بہاؤ کا تکمل حل کرتے ہیں۔ رداس a کے کرہ کا باہر رخ اکائی عمودی سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{n} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{a}$$

یوں کرہ پر

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} = \left(\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{a^3}\right)\cdot\left(\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{a}\right) = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^4} = \frac{a^2}{a^4} = \frac{1}{a^2}$$

لہٰذا درج ذیل ہو گا۔

$$\iint_{S_a} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{a^2}\iint_{S_a}\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{a^2}(4\pi a^2) = 4\pi$$

مبدا پر مرکوز ہر کرہ سے $\boldsymbol{F}$ کا باہر رخ بہاؤ 4π ہو گا۔ □

گاوس کا قانون: برقناطیسیت کے چار عظیم قوانین میں سے ایک

ابھی مثال ۱۵.۴ سے بہت کچھ سیکھا جا سکتا ہے۔ برقناطیسی نظریہ میں، مبدا پر موجود نقطی بار q درج ذیل برقی میدان پیدا کرتا ہے

$$\boldsymbol{E}(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{|\boldsymbol{r}|^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{\rho^3}$$

جہاں ϵ_0 طبیعی مستقل، $\boldsymbol{r}$ نقطہ (x, y, z) کا تعین گر سمتیہ، اور $\rho = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ہے۔ مثال ۱۵.۴ کی علامتیت میں اس کو لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\boldsymbol{F}$$

مثال ۱۵.۴ سے ہم دیکھتے ہیں کہ مبدا پر مرکوز ہر کرہ سے باہر رخ $\boldsymbol{E}$ کا بہاؤ q/ϵ_0 ہو گا، لیکن یہ نتیجہ صرف کرہ تک محدود نہیں۔ کسی بھی بند سطح S سے، جو مبدا کو گھیرتی ہو (اور جس پر مسئلہ پھیلاؤ کا اطلاق ہوتا ہو)، $\boldsymbol{E}$ کا باہر رخ بہاؤ q/ϵ_0 ہو گا۔ اس کی وجہ جاننے کی خاطر مبدا پر مرکوز اتنے بڑے کرہ S_a کا تصور کریں جو S کو گھیرتا ہو۔ جب $\rho > 0$ ہو درج ذیل ہو گا

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \nabla \cdot \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\boldsymbol{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\nabla \cdot \boldsymbol{F} = 0$$

جس کی وجہ سے S اور S_a کے بیچ خطہ D پر $\nabla \cdot \boldsymbol{E}$ کا تکمل صفر ہو گا۔ لہٰذا مسئلہ پھیلاؤ کے تحت

$$\iint_{D \text{ کی سرحد}} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = 0$$

ہو گا، اور مبدا سے دوری کے رخ S کو عبور کرتا ہوا $\boldsymbol{E}$ کا بہاؤ لازماً مبدا سے دوری کے رخ S_a کو عبور کرتے ہوئے $\boldsymbol{E}$ کے بہاؤ کے برابر ہو گا، جو q/ϵ_0 ہے۔ یہ فقرہ، جو قانون گاوس کہلاتا ہے، یہاں فرض کئے گئے بار سے زیادہ عمومی تقسیم بار کے لئے بھی درست ہے، جیسا آپ طبیعیات کے کسی بھی نصابی کتاب میں پڑھ سکتے ہیں۔

$$\iint_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad \text{قانون گاوس}$$

ماقواحرکیات کی استمراری مساوات

فرض کریں فضا میں خطہ D بند، سمت بند سطح S میں محدود ہے۔ اگر نقطہ (x, y, z) اور وقت t پر D میں بہتے ہوئے سیال کی سمتی رفتاری میدان $\boldsymbol{v}(x, y, z)$، اور کثافت $\delta = \delta(t, x, y, z)$ ہو، اور $\boldsymbol{F} = \delta\boldsymbol{v}$ ہو، تب ماقواحرکیات کی **استمراری مساوات**[۴۰] درج ذیل کہتی ہے۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} + \frac{\partial \delta}{\partial t} = 0$$

اگر ملوث تفاعلات کے یک رتبی جزوی تفرقات استمراری ہوں، یہ مساوات مسئلہ پھیلاؤ سے اخذ کی جا سکتی ہے۔ آئیں یہ عمل دیکھیں۔

درج ذیل تکمل، S کو عبور کرکے D سے کمیتی اخراج (اخراج اس لئے کہ $\boldsymbol{n}$ باہر رخ عمودی ہے) کی شرح دیتا ہے۔

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\sigma$$

---

[۴۰] continuityequation

اس کی وجہ جاننے کی خاطر، سطح پر رقبے کا ٹکڑا $\Delta\sigma$ لیں (شکل 16.75)۔ قلیل زمانی وقفہ Δt میں، اس ٹکڑے کو ΔH حجم عبور کرتا ہے جو تخمیناً اس بیلن کے حجم کے برابر ہو گا جس کا تل $\Delta\sigma$ اور لمبائی $(\boldsymbol{v}\Delta t)\cdot\boldsymbol{n}$ ہو، جہاں اس ٹکڑے کے کسی ایک نقطے پر سمتی رفتاری سمتیہ $\boldsymbol{v}$ ہے۔

$$\Delta H \approx \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\Delta\sigma\Delta t$$

اس حجم کی کمیت تقریباً

$$\Delta m \approx \delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\Delta\sigma\Delta t$$

ہو گی، لہٰذا سے اس ٹکڑے سے گزر کر D سے کمیت کے اخراج کی شرح تخمیناً درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} \approx \delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\Delta\sigma$$

اس سے درج ذیل تخمین لکھی جا سکتی ہے

$$\frac{\sum\Delta m}{\Delta t} \approx \sum\delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\Delta\sigma$$

جو S کو پار کرتے ہوئے کمیت کی تخمیناً اوسط شرح ظاہر کرتی ہے۔ آخر میں $\Delta\sigma \to 0$ اور $\Delta t \to 0$ لیتے ہوئے D سے S کی راہ سے اخراج کی لحاتی شرح:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \iint_S \delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

حاصل ہو گی جو اس مخصوص سیال کے لئے درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

اب فرض کریں سیال میں نقطہ Q پر مرکوز ٹھوس کرہ B رکھا جاتا ہے۔ کرہ B پر $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ کی اوسط قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{1}{B\text{ کا حجم}}\iiint_B \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H$$

پھیلاؤ کے استمرار کا ایک پہلو یہ ہے کہ B میں کسی ایک نقطہ P پر $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ کی قیمت یہی ہو گی۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}(\nabla\cdot\boldsymbol{F})_P &= \frac{1}{B\text{ کا حجم}}\iiint_B \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H = \frac{\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma}{B\text{ کا حجم}}\\ &= \frac{S\text{ سطح کے ذریعہ }B\text{ سے کمیتی اخراج کی شرح}}{B\text{ کا حجم}}\end{aligned} \tag{۱۵.۶۳}$$

دائیں ہاتھ کسر اکائی حجم میں کمیت کی کمی بیان کرتا ہے۔

اب مرکز Q کو ایک ہی مقام پر رکھتے ہوئے B کے رداس کو صفر کے قریب پہنچائیں۔ مساوات ۱۵.۶۳ کا بایاں ہاتھ $(\nabla \cdot \boldsymbol{F})_Q$ کو، جبکہ اس کا دایاں ہاتھ $(-\partial\delta/\partial t)_Q$ کو مرکوز ہو گا۔ ان دو حدوں کی مساویت ہمیں درج ذیل **استمراری مساوات**[41] دیتی ہے۔

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = -\frac{\partial \delta}{\partial t}$$

استمراری مساوات ہمیں $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ کا مفہوم دیتی ہے: کسی نقطے پر $\boldsymbol{F}$ کا پھیلاؤ اس نقطے پر سیال کی کثافت میں کمی کی شرح دیتا ہے۔

مسئلہ پھیلاؤ:

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}\sigma = \iiint_D \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}H$$

اب کہتا ہے کہ خطہ D میں کثافت کی صافی کمی کی وجہ کمیت کی سطح S سے دوسری جانب منتقلی ہے۔ یوں یہ مسئلہ کمیت کی بقا بیان کرتا ہے (سوال 31)۔

تکملی مسائل کی یکجائی

دو بعدی میدان $\boldsymbol{F} = M(x,y)\boldsymbol{i} + N(x,y)\boldsymbol{j}$ کو ایسا تین بعدی میدان تصور کر کے جس کا $\boldsymbol{k}$ جزو صفر ہو ہم

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = (\partial M/\partial x) + (\partial N/\partial y)$$

لکھ سکتے ہیں اور یوں مسئلہ گرین کا عمودی روپ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}s = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_R \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}A$$

اسی طرح $\nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{k} = (\partial N/\partial x) - (\partial M/\partial y)$ ہو گا لہٰذا مسئلہ گرین کا مماسی روپ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\oint_C \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \iint_R \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{k} \, \mathrm{d}A$$

مسئلہ گرین کی مساوات ڈیل علاقیت میں لکھ کر ان کا مسئلہ سٹوکس اور مسئلہ پھیلاؤ کے ساتھ تعلق افشا ہوتا ہے۔

---

[41] continuityequation

مسئلہ گرین کی تین ابعادی تعمیم

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}s = \iint_R \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}A \qquad \text{مسئلہ گرین کا عمودی روپ}$$

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma = \iiint_D \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}H \qquad \text{مسئلہ پھیلاؤ}$$

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_R \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{k}\,\mathrm{d}A \qquad \text{مسئلہ گرین کا مماسی روپ}$$

$$\oint_C \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_S \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma \qquad \text{مسئلہ سٹوکس}$$

مستوی میں چپٹی سطح پر مسئلہ گرین کے مماسی (گردش) روپ کو مسئلہ سٹوکس تین ابعادی فضا میں سطح پر عمومیت دیتا ہے۔ ہر ایک صورت میں، سطح کے اندرون پر گردش $\boldsymbol{F}$ کے عمودی جزو کا تکمل اور سرحد کے ہمراہ $\boldsymbol{F}$ کا دائری بہاؤ برابر ہو گا۔

اسی طرح دو ابعادی مستوی میں خطہ پر مسئلہ گرین کے عمودی (بہاؤ) روپ کو مسئلہ پھیلاؤ فضا میں تین ابعادی خطہ پر عمومیت دیتا ہے۔ ہر ایک صورت میں، خطے کے اندرون پر $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ کا تکمل، سرحد کو عبور کرتا ہوا میدان کے کل بہاؤ کے برابر ہو گا۔ ابھی مزید معلومات باقی ہے۔ ان تمام نتائج کو ایک بنیادی مسئلے کے مختلف روپ تصور کیا جا سکتا ہے۔ حصہ ۵.۷ میں تکمل کا بنیادی مسئلہ پیش کیا گیا جو کہتا ہے اگر (a,b) پر $f(x)$ قابل تفرق اور $[a,b]$ پر استمراری ہو تب درج ذیل ہو گا۔

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = f(b) - f(a)$$

اگر پورے $[a,b]$ پر $\boldsymbol{F} = f(x)\boldsymbol{i}$ ہو تب $(\mathrm{d}f/\mathrm{d}x) = \nabla\cdot\boldsymbol{F}$ ہو گا۔ اگر ہم سرحد $[a,b]$ پر عمودی اکائی سمتی میدان $\boldsymbol{n}$ متعارف کریں جو b پر $\boldsymbol{i}$ اور a پر $-\boldsymbol{i}$ ہو (شکل 16.76) تب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= f(b)\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i} + f(a)\boldsymbol{i}\cdot(-\boldsymbol{i}) \\ &= \boldsymbol{F}(b)\cdot\boldsymbol{n} + \boldsymbol{F}(a)\cdot\boldsymbol{n} \\ &= \boldsymbol{F}\text{ کا کل بہاؤ جو سرحد } [a,b] \text{ کو باہر رخ پار کرتا ہے} \end{aligned}$$

تکمل کا بنیادی مسئلہ یوں درج ذیل کہتا ہے۔

$$\boldsymbol{F}(b)\cdot\boldsymbol{n} + \boldsymbol{F}(a)\cdot\boldsymbol{n} = \int_{[a,b]} \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}x$$

تکمل کا بنیادی مسئلہ، مسئلہ گرین کا عمودی روپ، اور مسئلہ پھیلاؤ تینوں کہتے ہیں کہ تفرقی عامل $\nabla\cdot$ جو کسی خطے میں میدان $\boldsymbol{F}$ پر عمل کرتا ہو اس خطے کی سرحد پر میدان کے عمودی اجزاء کے مجموعے کے برابر ہو گا۔ (یہاں ہم مسئلہ گرین میں موجود لکیری تکمل اور مسئلہ پھیلاؤ میں موجود سطحی تکمل سے مراد سرحد پر ''مجموعہ'' لیتے ہیں۔)

مسئلہ سٹوکس اور مسئلہ گرین کا مماسی روپ دونوں کہتے ہیں جب چیزیں درست سمت بند ہوں، گردش میدان کے عمودی جزو کا تکمل اور سطح کی سرحد پر میدان کے مماسی اجزاء کا مجموعہ برابر ہوں گے۔

مفہوم کو اس طرح سمجھنے سے ایک مربوط اصول ابھرتا ہے جو درج ذیل بیان کیا جا سکتا ہے۔

خطے میں میدان پر عمل کرتے تفرقی عامل کا تکمل، خطے کی سرحد پر، عامل کے لحاظ سے موزوں، میدان کے اجزاء کے مجموعے کے برابر ہو گا۔

□

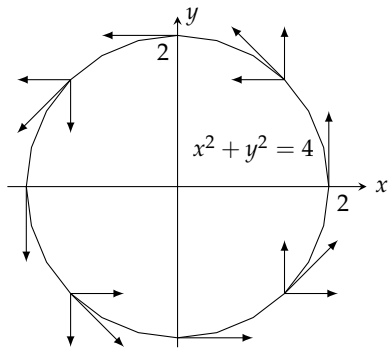
جوابات

حصہ ۱۵.۱ صفحہ ۱۵۹۹

۱۵.۱) شکل ۱۵.۸
۱۵.۲) شکل ۱۵.۱۰
۱۵.۳) شکل ۱۵.۶
۱۵.۴) شکل ۱۵.۱۳
۱۵.۵) شکل ۱۵.۹
۱۵.۶) شکل ۱۵.۱۱
۱۵.۷) شکل ۱۵.۷
۱۵.۸) شکل ۱۵.۱۲
۱۵.۹) $\sqrt{2}$
۱۵.۱۱) $\frac{13}{2}$
۱۵.۱۳) $3\sqrt{14}$
۱۵.۱۵) $\frac{1}{6}(5\sqrt{5}+9)$
۱۵.۱۷) $\sqrt{3}\ln\frac{b}{a}$
۱۵.۱۹) $\frac{10\sqrt{5}-2}{3}$
۱۵.۲۱) 8
۱۵.۲۳) $2\sqrt{2}-1$
۱۵.۲۵) (ا) $4\sqrt{2}-1$ ،(ب) $\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$
۱۵.۲۷) $R_z = a$ ، $I_z = 2\pi\delta a^3$
۱۵.۲۹) (ا) $I_z = 2\pi\sqrt{2}\delta$ ، $R_z = 1$ ؛
(ب) $I_z = 4\pi\sqrt{2}\delta$ ، $R_z = 1$
۱۵.۳۱) $I_z = 2\pi - 2$ ، $R_z = 1$

حصہ ۱۵.۲ صفحہ ۱۶۱۲

۱۵.۱) $\nabla f = \frac{-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}-z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$
۱۵.۳) $\nabla g = -\frac{2x}{x^2+y^2}\boldsymbol{i} - \frac{2y}{x^2+y^2}\boldsymbol{j} + e^z\boldsymbol{k}$
۱۵.۵) $\boldsymbol{F} = \frac{-kx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\boldsymbol{i} - \frac{ky}{(x^2+y^2)^{3/2}}\boldsymbol{j}, k > 0$
۱۵.۷) (ا) $\frac{9}{2}$ ،(ب) $\frac{13}{3}$ ،(ج) $\frac{9}{2}$
۱۵.۹) (ا) $\frac{1}{3}$ ،(ب) $-\frac{1}{5}$ ،(ج) 0
۱۵.۱۱) (ا) 2 ،(ب) $\frac{3}{2}$ ،(ج) $\frac{1}{2}$
۱۵.۱۳) $\frac{1}{2}$
۱۵.۱۵) $-\pi$
۱۵.۱۷) $\frac{207}{12}$
۱۵.۱۹) $-\frac{39}{2}$
۱۵.۲۱) $\frac{25}{6}$
۱۵.۲۳) (ا)دائری بہاؤ اول 0 ، دائری بہاؤ دوم 2π ، بہاؤ اول 2π ، بہاؤ دوم 0 ؛(ب)دائری بہاؤ اول 0 ، دائری بہاؤ دوم 8π ، بہاؤ اول 8π ، بہاؤ دوم 0
۱۵.۲۵) دائری بہاؤ 0 ، بہاؤ $a^2\pi$
۱۵.۲۷) دائری بہاؤ $a^2\pi$ ، بہاؤ 0
۱۵.۲۹) (ا) $-\frac{\pi}{2}$ ،(ب) 0 ،(ج) 1



۱۵.۳۱)

۱۵.۳۳) (ا) $\boldsymbol{G} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$ ،
(ب) $\boldsymbol{G} = \sqrt{x^2+y^2}\boldsymbol{F}$
۱۵.۳۵) $\boldsymbol{F} = \frac{-x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j}}{\sqrt{x^2+y^2}}$
۱۵.۳۷) 48
۱۵.۳۹) π

۱۵.۱۳) 49

۱۵.۱۵) -16

۱۵.۱۷) 1

۱۵.۱۹) $9\ln 2$

۱۵.۲۱) 0

۱۵.۲۳) -3

۱۵.۲۷) $\boldsymbol{F} = \nabla(\frac{x^2-1}{y})$

۱۵.۲۹) (ا) 1، (ب) 1، (ج) 1

۱۵.۳۱) (ا) 2، (ب) 2

۱۵.۳۳) $f(x,y,z) = \frac{GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$

۱۵.۳۵) (ا) $c = b = 2a$، (ب) $c = b = 2$

۱۵.۳۷) چونکہ میدان بقائی ہے لہٰذا کام راہ پر منحصر نہیں ہو گا۔

۱۵.۴۱) 0

۱۵.۴۳) $\frac{1}{2}$

حصہ ۱۵.۳ صفحہ ۱۶۲۶

۱۵.۱) بقائی

۱۵.۳) غیر بقائی

۱۵.۵) غیر بقائی

۱۵.۷) $f(x,y,z) = x^2 + \frac{3y^2}{2} + 2z^2 + C$

۱۵.۹) $f(x,y,z) = xe^{y+2z} + C$

۱۵.۱۱) $f(x,y,z) = x\ln x - x + \tan(x+y) + \frac{1}{2}\ln(y^2+z^2) + C$