

عددی ادوار
تخلیق و تجزیہ

خالد حسان یوسفزئی

khalidyousafzai@hotmail.com

۱۹ مئی ۲۰۲۳

عنوان

vii

دیباچہ

ix

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

۱	۱	شنائی نظام
۱	۱.۱	اعشاری نظام گنتی
۳	۱.۲	ہشتمی نظام گنتی
۳	۱.۳	شنائی نظام گنتی
۵	۱.۴	اعشاری نظام سے شنائی نظام میں تبادلہ
۷	۱.۵	اساس سولہ (سادس عشری) نظام گنتی
۹	۱.۶	اساس دو کا اساس آٹھ میں تبادلہ
۹	۱.۷	اساس دو کا اساس سولہ میں تبادلہ
۹	۱.۸	اساس آٹھ اور اساس سولہ سے اساس دو میں تبادلہ
۱۱	۲	بنیادی حساب
۱۲	۲.۱	شنائی نظام میں اعداد منفی کرنا
۱۲	۲.۲	اسی تکملہ یا r کا تکملہ
۱۴	۲.۳	اساس منفی ایک تکملہ یا $(r - 1)$ کا تکملہ
۱۵	۲.۴	دو اعداد کی منفی بذریعہ اسی تکملہ
۱۷	۲.۵	دو اعداد کی منفی بذریعہ اساس منفی ایک کا تکملہ
۱۹	۲.۶	مثبت اور منفی اعداد
۲۱	۲.۷	علامت دار و تکملہ نظام
۲۳	۳	بوولین الجبرا
۲۳	۳.۱	بوولین الجبرا کے بنیادی تصورات
۲۴	۳.۱.۱	منطقی ضرب
۲۵	۳.۱.۲	منطقی جمع

۲۷	منطقی نفی	۳.۱.۳
۲۷	منطقی بلا شرکت جمع	۳.۱.۴
۲۸	منطقی ضد بلا شرکت جمع	۳.۱.۵
۲۸	برقی تاروں میں جوڑ کی وضاحت	۳.۲
۲۹	عددی گیٹ	۳.۳
۲۹	ضرب گیٹ	۳.۳.۱
۳۰	جمع گیٹ	۳.۳.۲
۳۱	نفی گیٹ	۳.۳.۳
۳۱	متعدد مداحل گیٹ	۳.۳.۴
۳۳	ضرب متمم گیٹ اور جمع متمم گیٹ	۳.۳.۵
۳۶	بلا شرکت جمع گیٹ اور بلا شرکت جمع متمم گیٹ	۳.۳.۶
۳۸	گیٹوں کے برقی خواص	۳.۴
۳۹	مسحکم کار	۳.۴.۱
۴۱	مخلوط ادوار	۳.۴.۲
۴۳	بوولین تفعل کا تخمینہ	۳.۵
۴۳	بوولین تفعل کا تخمینہ	۳.۵.۱
۴۵	قوسین میں بند بوولین تفعل	۳.۶
۴۷	بوولین الجبر کے بنیادی قوانین	۳.۷
۵۱	ڈی مارگن کے کلیات	۳.۸
۵۴	حبڑواں بوولین تفعل	۳.۹
۵۴	ارکان ضرب کے مجموعہ کی ترکیب	۳.۱۰
۵۸	ارکان جمع کی ضرب کی ترکیب	۳.۱۱
۶۲	مجموعہ ارکان ضرب اور ضرب ارکان جمع کے مابین تبادلہ	۳.۱۲
۶۳	ضرب و جمع دورے متمم ضرب و متمم ضرب دور کا حصول	۳.۱۳
۶۵	جمع و ضرب دورے متمم جمع و متمم جمع دور کا حصول	۳.۱۴
۶۶	علامتی روپ یا رموز	۳.۱۵
۶۶	ایک رموز اور عالمی رموز	۳.۱۵.۱
۶۸	اعشاری اعداد کے شنائی رموز	۳.۱۵.۲
۶۸	گرے رموز	۳.۱۵.۳
۷۱	کارناف نقش حیات	۴
۷۱	کارناف نقشے کا بنیادی خاکہ	۴.۱
۷۳	کارناف نقشے کی بھرائی	۴.۲
۷۳	کارناف نقشے سے تفعل کی سادہ مساوات کا حصول	۴.۳
۷۵	دو آزاد متغیر تفعل	۴.۳.۱
۷۸	تین متغیر تفعل	۴.۳.۲
۸۱	چار متغیر تفعل	۴.۳.۳
۸۳	سادہ مساوات سے تفعل کے ارکان ضرب کا حصول	۴.۳.۴
۸۳	ضرب ارکان جمع کے روپ میں سادہ مساوات	۴.۴
۸۵	غیر دلچسپ حال	۴.۵

۵	ترکیبی منطق اور ترتیبی ادوار	۸۷
۵.۱	شنائی جمع کار اور شنائی منفی کار	۸۷
۵.۱.۱	نصف جمع کار	۸۸
۵.۱.۲	مکمل جمع کار	۹۰
۵.۱.۳	منفی کار	۹۲
۵.۱.۴	اعشاری جمع کار	۹۶
۵.۲	شنائی ضرب کار	۹۹
۵.۳	شناخت کار	۱۰۰
۵.۴	شناخت کار کی مدد سے تقاعیل کا حصول	۱۰۸
۵.۵	داخلی منتخب کار اور خارجی منتخب کار	۱۱۱
۵.۵.۱	خارجی منتخب کار	۱۱۱
۵.۵.۲	داخلی منتخب کار	۱۱۲
۵.۵.۳	داخلی منتخب کار سے تقاعیل کا حصول	۱۱۳
۵.۶	متوازی شنائی ضرب کار	۱۱۵
۶	معاصر ترتیبی منطق اور ادوار	۱۱۹
۶.۱	گیٹوں کے اوقات کار	۱۲۰
۶.۲	پلٹ کار	۱۲۱
۶.۳	ساعت	۱۲۵
۶.۴	متمم ضرب گیٹ ایس آر پلٹ کار	۱۲۶
۶.۴.۱	غیر فعال مد داخل پلٹ کار، حال برقرار رکھتا ہے	۱۲۶
۶.۴.۲	مد داخل S فعال کرنے سے پلٹ کار بلند حال اختیار کرتا ہے	۱۲۸
۶.۴.۳	مد داخل R فعال کرنے سے پلٹ کار پست حال اختیار کرتا ہے	۱۲۸
۶.۴.۴	حال دوڑ	۱۲۹
۶.۵	زیادہ مد داخل پلٹ کار	۱۲۹
۶.۶	متابیل محاذ و معذور پلٹ کار	۱۳۰
۶.۷	آفت اعلاام پلٹ کار	۱۳۲
۶.۸	ڈی پلٹ کار	۱۳۵
۶.۸.۱	آفت اعلاام پلٹ کار سے حاصل کردہ ڈی پلٹ کار	۱۳۵
۶.۹	ڈی پلٹ کار	۱۳۷
۶.۱۰	جے کے پلٹ کار	۱۴۰
۶.۱۰.۱	ٹی پلٹ کار	۱۴۳
۶.۱۱	شنائی گنت کار	۱۴۴
۶.۱۲	سلسلہ وار شنائی جمع کار	۱۴۵
۶.۱۳	معاصر ترتیبی ادوار کا تجزیہ	۱۴۶
۶.۱۳.۱	مساوات حال	۱۴۶
۶.۱۳.۲	جدول حال	۱۴۷
۶.۱۳.۳	حک کہ حال	۱۴۸
۶.۱۳.۴	ڈی پلٹ کار پر مبنی ترتیبی دور	۱۴۸
۶.۱۳.۵	جے کے پلٹ کار پر مبنی ترتیبی دور	۱۴۹

۱۵۳	۶.۱۳.۶ ٹی پلٹ کار کی مدد سے ترتیبی دور کا جائزہ	
۱۵۴	۶.۱۳.۷ میلی اور نمونہ	
۱۵۵	۶.۱۳.۸ حال اور ان کی مقرری	
۱۵۶	۶.۱۵ معاصر ترتیبی ادوار کی بناوٹ	

۱۶۱	۷ دفتر	
۱۶۳	۷.۱ سلمہ وار دفتر	
۱۶۳	۷.۱.۱ دائیں انتقال دفتر	
۱۶۳	۷.۱.۲ بائیں انتقال دفتر	
۱۶۴	۷.۱.۳ دائیں و بائیں انتقال دفتر	
۱۶۴	۷.۲ متوازی بھرائی دفتر	
۱۶۵	۷.۳ عالمگیر دفتر	

دیباچہ

یہ کتاب اس عزم سے لکھی گئی ہے کہ یہ ایک دن برقی انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر پڑھائی جائے گی۔ امید کی جاتی ہے کہ اب بھی طلبہ و طالبات اس سے استفادہ حاصل کر سکیں گے۔ میں ڈاکٹر محمد اشرف عطا (ہلال امتیاز، ستارہ امتیاز) کا خصوصی طور پر نہایت مشکور و ممنون ہوں جنہوں نے اپنے مصروفیات سے وقت نکال کر اس کتاب کو پڑھ کر نہ صرف درست کیا بلکہ بہت سارے تکنیکی اصلاحات بھی فراہم کئے۔ میں امید رکھتا ہوں کہ مجھے آئندہ بھی ان کی مدد حاصل ہوگی۔

میں یہاں کامیٹ کے طلبہ و طالبات کا بھی شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جنہوں نے اس کتاب کو بار بار پڑھ کر غلطیوں کی نشاندہی کی۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ وہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور اس میں غلطیوں کی نشاندہی میرے ای میل پتہ پر کریں۔

حنا خان پوسٹل 5 مئی 2013

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومت پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔ پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلب و طالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلب و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلب و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلب و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلب و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چٹائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظام اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظام تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلب و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہوگی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن حوالہ اردو زبان میں انجینئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجینئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلب و مطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔ میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سرزد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

حنالد حنان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب ۱

شنائی نظام

۱.۱ اعشاری نظام گنتی

روزِ سرہ زندگی میں اعشاری نظام گنتی استعمال ہوتا ہے، جو 0 تا 9 کے ہندسوں پر مبنی ہے۔ کسی بھی گنتی کے نظام میں کل علامات کی تعداد کو اس نظام کی اساس کہتے ہیں۔ اعشاری نظام میں 0 تا 9، یعنی دس 10 علامات ہیں، یوں اعشاری نظام کی اساس دس ہے اور اس کو اساس 10 کا نظام کہتے ہیں۔

مساوات ۱.۱ میں 538.72 کو اعشاری نظام میں لکھتے ہوئے زیرِ نوشتہ میں 10 لکھا گیا ہے، جو اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ یہ عدد اساس دس کے نظام میں لکھا گیا ہے۔ اس کتاب میں چونکہ کئی نظام گنتی استعمال ہوں گے، لہذا جہاں مستن سے واضح نہ ہو وہاں اعداد کے ساتھ ان کی اساس زیرِ نوشتہ میں لکھی جائے گی۔

$$(۱.۱) \quad 538.72_{10}$$

اس نظام میں اعشاریہ کی بائیں جانب پہلا ہندسہ اکائی وزن رکھتا ہے، دوسرا دہائی، تیسرا سینکڑا، وغیرہ۔ یوں مساوات ۱.۲ میں دیے گئے ہندسوں میں 8 کا مطلب $8_{10} = 8 \times 1 = 8 \times 10^0 = 8$ ہے، جبکہ 3 کا مطلب $30_{10} = 3 \times 10^1 = 30$ اور 5 کا $500_{10} = 5 \times 10^2 = 500$ ہے۔ اسی طرح اعشاریہ کے دائیں جانب پہلے ہندسے کا وزن ایک بڑے دس ہے، دوسرے ہندسے کا ایک بڑے سو، اور تیسرے ہندسے کا ایک بڑے ہزار، وغیرہ۔ یوں اس عدد میں 7 دراصل $0.7_{10} = 7 \times 10^{-1} = 0.7$ جبکہ 2 دراصل $0.02_{10} = 2 \times 10^{-2} = 0.02$ ہے۔

$$(۱.۲) \quad 538.72_{10} = (5 \times 10^2) + (3 \times 10^1) + (8 \times 10^0) + (7 \times 10^{-1}) + (2 \times 10^{-2})$$

باب ۱. ششائی نظام

$$\begin{array}{l}
 x_2 = 5 \\
 x_1 = 3 \\
 x_0 = 8 \\
 x_{-1} = 7 \\
 x_{-2} = 2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 x = 538.72_{10} \\
 \begin{array}{c}
 | \quad | \quad | \quad | \quad | \\
 x = x_2 x_1 x_0 . x_{-1} x_{-2}
 \end{array}
 \end{array}$$

شکل ۱.۱: عدد کے ہندسوں کو پکارنے کا طریقہ کار۔

اس حقیقت کو درج ذیل عمومی روپ میں لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 (1.3) \quad & \cdots a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0 + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2} \cdots \\
 & = (\cdots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots)_{10}
 \end{aligned}$$

عدد 538.72_{10} کو x لیتے ہوئے، شکل ۱.۱ میں اس کے مختلف ہندسوں کو پکارنے کا طریقہ دکھایا گیا ہے، جس کے تحت 5 کو x_2 جبکہ 3 کو x_3 کہیں گے، وغیرہ۔

اس طرح کسی بھی عدد میں بائیں جانب ہندسے کا رتبہ دائیں جانب ہندسے کے رتبہ سے بلند ہو گا۔ مساوات ۱.۱ میں بلند تر رتبے کا ہندسہ 5 ہے، جبکہ کم تر رتبے کا ہندسہ 6 ہے۔

مساوات ۱.۴ میں سات کو تین مختلف طریقوں سے لکھا گیا ہے۔ روزمرہ زندگی میں سات سات پہلی طرز پر لکھا جاتا ہے۔ یوں کاغذ پر لکھتے ہوئے کسی بھی عدد کے بائیں جانب صفر نہیں لکھے جاتے اور عدد کے بائیں جانب کاغذ کو خالی چھوڑا جاتا ہے۔ یہاں یہ بات سمجھنا ضروری ہے کہ روزمرہ زندگی میں اعداد لکھتے وقت ان کی لمبائی یا ان میں کل ہندسوں کی تعداد پہلے سے متعین نہیں کی جاتی۔ کمپیوٹر میں چیزیں کچھ مختلف ہیں، جہاں صرف صفر 0 اور ایک 1 کا وجود ممکن ہے۔ کسی مقام پر اگر 1 نہیں لکھا ہو تو اس پر 0 لکھا ہو گا۔ یوں کسی بھی عدد کے بائیں جانب خالی جگہ کا کمپیوٹر میں کوئی مطلب نہیں۔ یہاں 0 یا 1 کا ہونا ضروری ہے۔ کمپیوٹر میں ہر قسم کی معلومات لکھنے سے پہلے اس بات کا فیصلہ کیا جاتا ہے کہ اسے لکھنے کی حنا طر کتنی جگہ درکار ہوگی۔ یوں اگر عدد کو لکھنے کی حنا طر تین ہندسوں کے لکھے جانے کے برابر جگہ مختص کی گئی ہو تو اس تمام جگہ کو ہر صورت استعمال کرنا ہو گا، مثلاً سات کو 7 کی بجائے 007 لکھنا ہو گا۔

$$\begin{array}{c}
 7_{10} \\
 07_{10} \\
 007_{10}
 \end{array}
 \quad (1.4)$$

اعشاری نظام میں گنتی 0_{10} سے شروع ہوتی ہے اور بتدریج بڑھتے ہوئے 9_{10} تک پہنچتی ہے۔ اس دوران دہائی، سینکڑا، وغیرہ کے مقام پر صفر رہتا ہے اور انہیں عام طور نہیں لکھا جاتا۔ گنتی نو تک پہنچنے کے بعد دہائی، یعنی 10^1 ، وزن رکھنے والے مقام پر 0 کی بجائے 1 لکھا جاتا ہے اور اکائی، یعنی 10^0 ، وزن رکھنے والے مقام پر دوبارہ 0 تا 9 گنتی کی جاتی ہے۔

اگر آپ کو اس پیراگراف کی سمجھ نہیں آئی تو اسے دوبارہ پڑھیں۔ اس میں سادہ گنتی کی وضاحت کی گئی ہے۔

اعشاری نظام میں اگر اعداد کو ایک ہندسے تک محدود کر دیا جائے تو اس میں 0_{10} سے 9_{10} تک گنتی ممکن ہوگی۔ اگر اعداد کو دو ہندسوں تک محدود کر دیا جائے، یعنی اس میں زیادہ سے زیادہ دو ہندسے ہوں، تب 00_{10} سے 99_{10} تک گنتی ممکن ہوگی، اسی طرح تین ہندسوں تک کے عدد استعمال کرنے سے 000_{10} سے 999_{10} تک گنتی کی جاسکتی ہے، وغیرہ۔

۱.۲ ہشتی نظام گنتی

ہشتی نظام 0 تا 7 ہندسوں پر مبنی ہے۔ اس نظام میں آٹھ ہندسے ہیں لہذا یہ اساس آٹھ نظام ہے۔ بالکل اعشاری نظام کی طرح، اس نظام میں اعداد لکھتے ہوئے اعشاریہ کے بائیں جانب پہلے ہندسے کا وزن $8^0 = 1_{10}$ ، دوسرے ہندسے کا $8_{10} = 8^1$ ، تیسرے کا $64_{10} = 8^2$ ، وغیرہ، جبکہ اعشاریہ کے دائیں جانب پہلے ہندسے کا وزن $0.125_{10} = 8^{-1}$ ، دوسرے کا $0.015625_{10} = 8^{-2}$ ہوگا، وغیرہ۔

$$\begin{aligned} 538.72_8 &= [(5 \times 8^2) + (3 \times 8^1) + (8 \times 8^0) + (7 \times 8^{-1}) + (2 \times 8^{-2})]_{10} \\ (1.5) \quad &= [(5 \times 64) + (3 \times 8) + (8 \times 1) + (7 \times 0.125) + (2 \times 0.015625)]_{10} \\ &= [320 + 24 + 8 + 0.875 + 0.03125]_{10} \\ &= 352.90625_{10} \end{aligned}$$

ہشتی نظام گنتی کے لئے مساوات ۱.۳ اور ج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(1.4) \quad \dots a_2 \times 8^2 + a_1 \times 8^1 + a_0 \times 8^0 + a_{-1} \times 8^{-1} + a_{-2} \times 8^{-2} \dots = (\dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots)_8$$

ہشتی نظام میں دیے گئے عدد کو اعشاری نظام میں تبدیل کرنا مساوات ۱.۵ میں دکھایا گیا ہے۔ ہشتی عدد کے زیر نوشت میں 8 اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ یہ عدد ہشتی نظام میں لکھا گیا ہے۔

اس نظام میں گنتی 0 سے شروع ہوتی ہے، 7 تک پہنچنے کے بعد 8^1 وزن رکھنے والے مقام پر 0 کی بجائے 1 لکھا جاتا ہے اور 8^0 وزن رکھنے والے مقام پر دوبارہ 0 سے 7 کی گنتی شروع ہوتی ہے۔

۱.۳ شنائی نظام گنتی

مائکرو کنٹرولر کی دنیا میں شنائی نظام گنتی استعمال ہوتا ہے۔ شنائی نظام دو ہندسوں، 0 اور 1، پر مبنی ہے، لہذا یہ اساس دو کا نظام ہے۔ اس نظام میں گنتی 0 سے شروع ہوتی ہے، 1 تک پہنچنے کے بعد 2^1 وزن رکھنے

والی مقام پر 0 کی بجائے 1 لکھا جاتا ہے، اور 2^0 وزن رکھنے والے مقام پر دوبارہ 0 سے 1 گنتی شروع ہوتی ہے۔ اس نظام میں گنتی کو مساوات ۱.۷ میں دکھایا گیا ہے، جہاں زیر نوشتہ میں اسس لکھنے سے گریز کیا گیا ہے۔ موازنہ کے لئے اعشاری گنتی بھی پیش کی گئی ہے۔

0 =	0	16 =	10000
1 =	1	17 =	10001
2 =	10	18 =	10010
3 =	11	19 =	10011
4 =	100	20 =	10100
5 =	101	21 =	10101
6 =	110	22 =	10110
7 =	111	23 =	10111
8 =	1000	24 =	11000
9 =	1001	25 =	11001
10 =	1010	26 =	11010
11 =	1011	27 =	11011
12 =	1100	28 =	11100
13 =	1101	29 =	11101
14 =	1110	30 =	11110
15 =	1111	31 =	11111

اس نظام میں اعداد لکھتے ہوئے اعشاریہ کے بائیں جانب پہلے ہندسے کا وزن $10 = 2^0$ ہوگا، دوسرے ہندسے کا $20 = 2^1$ ، تیسرے کا $40 = 2^2$ ، وغیرہ، جبکہ اعشاریہ کے دائیں جانب پہلے ہندسے کا وزن $0.5 = 2^{-1}$ ، دوسرے کا $0.25 = 2^{-2}$ ہوگا۔

ثنائى نظام گنتى کے لئے ی مساوات ۱.۸ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(1.8) \quad \dots b_2 \times 2^2 + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0 + b_{-1} \times 2^{-1} + b_{-2} \times 2^{-2} \dots$$

$$= (\dots b_2 b_1 b_0 . b_{-1} b_{-2} \dots)_2$$

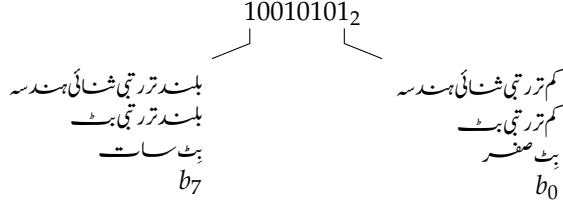
مساوات ۱.۹ میں ثنائى نظام میں دیے گئے عدد کو اعشارى نظام میں تبدیل کرنا دکھایا گیا ہے۔ ثنائى عدد کے زیر نوشتہ میں 2 اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ یہ عدد ثنائى نظام میں لکھا گیا ہے۔

$$(1.9) \quad 1011.1_2 = [(1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0) + (1 \times 2^{-1})]_{10}$$

$$= [(1 \times 8) + (0 \times 4) + (1 \times 2) + (1 \times 1) + (1 \times 0.5)]_{10}$$

$$= [8 + 0 + 2 + 1 + 0.5]_{10}$$

$$= 11.5_{10}$$



شکل ۱.۲: بلند تر اور کم تر ترتیبی ہندسے۔

شمائی عدد کے ہندسوں کو پکارنے کا طریقہ شکل ۱.۲ میں دکھایا گیا ہے۔ شمائی عدد کے دائیں ترین ہندسے کو کم تر ترتیبی ہٹ یا کم تر ترتیبی شمائی ہندسہ یا ہٹ b_0 کہیں گے؛ اس سے اگلے کو ہٹ ایک یا ہٹ b_1 اور اس سے اگلے کو ہٹ دو یا ہٹ b_2 ، وغیرہ؛ جبکہ بائیں ترین ہندسے کو بلند تر ترتیبی شمائی ہندسہ یا بلند تر ترتیبی ہٹ یا (موجودہ مثال میں) ہٹ سات یا ہٹ b_7 کہیں گے۔

اگر دیے گئے شمائی عدد کے اعشاریہ کے دائیں جانب کچھ نہ ہو، تب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے:

$$(1.10) \quad 1011_2 = (2^3 + 2^1 + 2^0)_{10} = (8 + 2 + 1)_{10} = 11_{10}$$

جو ہندسے 1 ہیں، ان کے وزن جمع کیے جاتے ہیں۔

چار ہندسوں کا شمائی عدد 0000_2 تا 1111_2 گنتی کر سکتا ہے؛ اس سے بڑا عدد لکھنے کے لئے چار سے زیادہ ہندسے درکار ہوں گے۔ مائکرو کنٹرولر آٹھ شمائی ہندسوں کے اعداد استعمال کرتا ہے جو 00000000_2 تا 11111111_2 ، یعنی 0 تا 255_{10} ظاہر کر سکتے ہیں۔

روزمرہ زندگی میں اعشاری نظام گنتی استعمال کرتے ہوئے اعداد لکھتے ہوئے ان کی بائیں جانب اضافی صفر نہیں لکھے جاتے، یعنی 27_{10} کو 0027_{10} نہیں لکھا جاتا۔ کمپیوٹر کی دنیا میں اعداد عموماً آٹھ ہندسوں پر مشتمل شمائی عدد کی صورت میں لکھے جاتے ہیں؛ آٹھ سے کم شمائی ہندسوں پر مشتمل اعداد لکھتے ہوئے، بائیں جانب اضافی صفر لکھ کر انہیں آٹھ ہندسوں کی صورت دی جاتی ہے۔ یوں 27_{10} کو ہم 101011_2 کی بجائے 00101011_2 لکھیں گے۔

۱.۴ اعشاری نظام سے شمائی نظام میں تبادلہ

اعشاری نظام میں دیے گئے عدد کو شمائی نظام میں لکھنے کی خاطر اس عدد کو بار بار 2 سے تقسیم کریں، حتیٰ کہ یہ مزید تقسیم نہ ہو سکے۔ ہر مرتبہ تقسیم کے بعد حاصل باقی لیں؛ پہلے حاصل باقی کو شمائی عدد کے سب سے کم وزن کے مقام پر لکھیں؛ اگلے حاصل باقی کو اس سے دگنے وزن کے مقام پر لکھیں؛ اسی طرح آخری حاصل باقی کو سب سے زیادہ وزن کے مقام پر لکھیں۔ یوں شمائی عدد حاصل ہوگا۔ یہ طریقہ استعمال کرتے ہوئے 121_{10} کو شمائی لکھائی میں لکھتے ہیں۔

- 121 کو 2 سے تقسیم کرنے سے حاصل تقسیم 60 اور باقی 1 ملتا ہے۔
 60 کو 2 سے تقسیم کرنے سے حاصل تقسیم 30 اور باقی 0 ملتا ہے۔
 30 کو 2 سے تقسیم کرنے سے حاصل تقسیم 15 اور باقی 0 ملتا ہے۔
 15 کو 2 سے تقسیم کرنے سے حاصل تقسیم 7 اور باقی 1 ملتا ہے۔
 7 کو 2 سے تقسیم کرنے سے حاصل تقسیم 3 اور باقی 1 ملتا ہے۔
 3 کو 2 سے تقسیم کرنے سے حاصل تقسیم 1 اور باقی 1 ملتا ہے۔
 1 کو 2 سے تقسیم کرنے سے حاصل تقسیم 0 اور باقی 1 ملتا ہے۔

اب سب سے آخری ”باقی“ کو سب سے زیادہ وزن کے معتام پر اور سب سے پہلے ”باقی“ کو سب سے کم وزن کے معتام پر لکھتے ہیں۔ یوں 1111001_2 حاصل ہوگا، لہذا

$$121_{10} = 1111001_2$$

ہوگا جہاں سات ثنائی ہندسے استعمال کیے گئے ہیں۔ اپنی تسلی کے لئے اس عدد کو واپس اعشاری نظام میں منتقل کرتے ہیں۔

$$1111001_2 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^0 = 64 + 32 + 16 + 8 + 1 = 121_{10}$$

اس طریقہ کار کی بہتر صورت پیش کرتے ہیں۔

2	121	
	60	1
	30	0
	15	0
	7	1
	3	1
	1	1
	0	1

عدد میں اعشاریہ کے بائیں جانب حصہ کو صحیح، جبکہ دائیں حصہ کو حصہ مکور یا کسری کہتے ہیں۔

$$\overbrace{xxxxxx}^{\text{صحیح}} . \underbrace{yyyyyy}_{\text{حصہ مکور}}$$

یوں 121.6875 میں 121 عدد صحیح اور 6875 عدد مکور ہے۔

عشری عدد کے صحیح حصہ کو ثنائی نظام میں تبدیل کرنا آپ سیکھ چکے؛ حصہ مکور تبدیل کرنے کا طریقہ ذرہ مختلف ہے۔ آئیں یہ عمل سیکھیں۔

حصہ مکور کو بار بار 2 سے ضرب دیں۔ اگر حاصل ضرب کے اعشاریہ کے بائیں جانب 1 حاصل ہو تو اس کو حاصل ضرب سے ہٹا کر شنائی عدد کے دائیں جانب منسلک کریں ورنہ شنائی عدد کے دائیں جانب 0 منسلک کریں۔ اس عمل کو ایک مثال کی مدد سے سیکھتے ہیں۔

ثنائی	
0.1	$2 \times 0.6875 = 1.375$
0.10	$2 \times 0.3750 = 0.750$
0.101	$2 \times 0.7500 = 1.500$
0.1011	$2 \times 0.5000 = 1.000$

یوں $0.6875_{10} = 0.1011_2$ ہوگا؛ آخر میں دونوں حصوں کو ملا کر شنائی عدد حاصل کرتے ہیں۔

$$121.6875_{10} = 111001.1011_2$$

۱.۵ اساس سولہ (سادس عشری) نظام گنتی

اساس سولہ کے نظام میں اعداد کی سولہ علامتیں ہیں۔ ان میں پہلی دس علامتیں 0 تا 9 ہیں، جبکہ باقی علامتیں، بڑی لکھائی میں انگریزی حروف تہجی کے پہلے چھ حروف یعنی A ، B ، C ، D ، E اور F ہیں۔ علامت A دس (10_{10}) کو ظاہر کرتی ہے، یعنی $A = 10_{10}$ ہے، جبکہ B گیارہ کو، $B = 11_{10}$ ، اور اسی طرح چلتے ہوئے F پندرہ کو ظاہر کرتی ہے۔ مساوات ۱.۱۱ میں مختلف نظام دیے گئے ہیں۔ انہیں سمجھنے بغیر

آگے ہر گزمت بڑھیں۔

$$\begin{aligned}
 00_{10} &= 00_8 = 0000_2 = 0_{16} \\
 01_{10} &= 01_8 = 0001_2 = 1_{16} \\
 02_{10} &= 02_8 = 0010_2 = 2_{16} \\
 03_{10} &= 03_8 = 0011_2 = 3_{16} \\
 04_{10} &= 04_8 = 0100_2 = 4_{16} \\
 05_{10} &= 05_8 = 0101_2 = 5_{16} \\
 06_{10} &= 06_8 = 0110_2 = 6_{16} \\
 07_{10} &= 07_8 = 0111_2 = 7_{16} \\
 08_{10} &= 10_8 = 1000_2 = 8_{16} \\
 09_{10} &= 11_8 = 1001_2 = 9_{16} \\
 10_{10} &= 12_8 = 1010_2 = A_{16} \\
 11_{10} &= 13_8 = 1011_2 = B_{16} \\
 12_{10} &= 14_8 = 1100_2 = C_{16} \\
 13_{10} &= 15_8 = 1101_2 = D_{16} \\
 14_{10} &= 16_8 = 1110_2 = E_{16} \\
 15_{10} &= 17_8 = 1111_2 = F_{16}
 \end{aligned}$$

اس نظام میں اشاریہ کی بائیں جانب پہلے ہندسے کا وزن $16^0 = 1_{10}$ ، دوسرے کا $16^1 = 16_{10}$ ، اور تیسرے کا $16^2 = 256_{10}$ ہوگا۔

مسوات ۱.۱۲ میں سادس عشری یا اس سولہ نظام میں دیے گئے عدد کو اعشاری نظام میں تبدیل کرنا دکھایا گیا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے $A = 10_{10}$ اور $C = 12_{10}$ لئے گئے۔

$$\begin{aligned}
 3AC.8_{16} &= (3 \times 16^2)_{10} + (10 \times 16^1)_{10} + (12 \times 16^0)_{10} + (8 \times 16^{-1})_{10} \\
 &= (3 \times 256)_{10} + (10 \times 16)_{10} + (12 \times 1)_{10} + (8 \times 0.0625)_{10} \\
 &= (768 + 160 + 12 + 0.5)_{10} \\
 &= 940.5_{10}
 \end{aligned}$$

مسوات ۱.۳ اس سولہ کے لئے درج ذیل ہوگی۔

$$\begin{aligned}
 (1.13) \quad \dots a_2 \times 16^2 + a_1 \times 16^1 + a_0 \times 16^0 + a_{-1} \times 16^{-1} + a_{-2} \times 16^{-2} \dots \\
 = (\dots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \dots)_{16}
 \end{aligned}$$

۱.۶ اساس دو کا اساس آٹھ میں تبادلہ

مساوات ۱.۱۴ میں بائیں ہاتھ شنائی عدد دیا گیا ہے۔ اعشاریہ سے شروع کرتے ہوئے، اعشاریہ کی دونوں جانب تین تین ہندسوں کے گروہ میں، اس شنائی عدد کو لکھیں۔ اعشاریہ کی بائیں جانب اگر آخر میں تین ہندسوں کا گروہ پورا نہ ہو تو بائیں اضافی صفر منسلک کر کے تین ہندسوں کا گروہ پورا کریں؛ اسی طرح اعشاریہ کی دائیں جانب اگر آخر میں تین ہندسوں کا گروہ پورا نہ ہو تو دائیں اضافی صفر منسلک کر کے تین ہندسوں کا گروہ پورا کریں۔ اب مساوات ۱.۱۱ کی مدد سے ان تین تین کے گروہ کی جگہ ان کا مساوی اساس آٹھ ہندسہ لکھیں۔ مساوات ۱.۱۴ میں یوں دو مقامات پر 100_2 کی جگہ 4_8 لکھا گیا، جبکہ 101_2 کی جگہ 5_8 ، اور 001_2 کی جگہ 1_8 لکھا گیا ہے۔ اس طرح اس عدد کو اساس آٹھ میں منتقل کیا گیا۔ یاد رہے، اعشاریہ اپنی جگہ برقرار رکھتا ہے۔

$$\begin{aligned} 1101100.1_2 &= (001\ 101\ 100.100)_2 \\ (1.14) \quad &= (1\ 5\ 4.4)_8 \\ &= 154.4_8 \end{aligned}$$

۱.۷ اساس دو کا اساس سولہ میں تبادلہ

شنائی عدد کو اساس سولہ میں لکھنے کی خاطر شنائی عدد کو اعشاریہ سے شروع کرتے ہوئے اعشاریہ کی دونوں جانب چار چار ہندسوں کے گروہ میں لکھیں۔ اگر اعشاریہ کی بائیں جانب آخر میں چار ہندسوں کا گروہ پورا نہ ہو تو عدد کی بائیں جانب اضافی صفر منسلک کر کے چار ہندسوں کا گروہ پورا کریں؛ اسی طرح اگر اعشاریہ کی دائیں جانب آخر میں چار ہندسوں کا گروہ پورا نہ ہو تو دائیں جانب اضافی صفر منسلک کر کے گروہ پورا کریں۔ اب مساوات ۱.۱۱ کی مدد سے ان چار چار کے گروہ کی جگہ ان کی مساوی اساس سولہ کا ہندسہ لکھیں۔ یوں مساوات ۱.۱۵ میں 1000_2 کی جگہ 8_{16} لکھ کر، 1100_2 کی جگہ C_{16} ، اور 0110_2 کی جگہ 6_{16} لکھ کر اساس سولہ میں مساوی عدد حاصل کیا گیا۔ یاد رہے کہ اعشاریہ اپنی جگہ برقرار رکھتا ہے۔

$$\begin{aligned} 1101100.1_2 &= (0110\ 1100.1000)_2 \\ (1.15) \quad &= (6\ C\ .\ 8)_{16} \\ &= 6C.8_{16} \end{aligned}$$

۱.۸ اساس آٹھ اور اساس سولہ سے اساس دو میں تبادلہ

انہیں طریقوں کو الٹ استعمال کرتے ہوئے اساس آٹھ اور اساس سولہ کے اعداد باآسانی اساس دو میں لکھ جاسکتے ہیں۔ مساوات ۱.۱۶ میں اساس آٹھ:

$$\begin{aligned} 372.5_8 &= (3\ 7\ 2.5)_8 \\ (1.16) \quad &= (011\ 111\ 010.101)_2 \\ &= 011111010.101_2 \end{aligned}$$

اور مساوات ۱.۱۷ میں اساس سولہ کو شنائی عدد کی صورت میں لکھنا دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} 9A2F.7_{16} &= (\begin{matrix} 9 & A & 2 & F & . & 7 \end{matrix})_{16} \\ (1.17) \quad &= (1001 \ 1010 \ 0010 \ 1111 \ . \ 0111)_2 \\ &= (1001101000101111.0111)_2 \end{aligned}$$

ہم نے دیکھا کہ شنائی عدد کے ہندسوں کو تین تین کے گروہ میں لکھنے سے اساس آٹھ اور چار چار کے گروہ میں لکھنے سے اساس سولہ عدد حاصل کیا جاسکتا ہے۔ آئیں درج بالا مساوات میں حاصل شنائی عدد سے اساس آٹھ اور اساس سولہ اعداد حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} 1001101000101111.0111_2 &= (001 \ 001 \ 101 \ 000 \ 101 \ 111 \ . \ 011 \ 100)_2 \\ &= (\begin{matrix} 1 & 1 & 5 & 0 & 5 & 7 & . & 3 & 4 \end{matrix})_8 \\ &= 115057.34_8 \\ 1001101000101111.0111_2 &= (1001 \ 1010 \ 0010 \ 1111 \ . \ 0111)_2 \\ &= (\begin{matrix} 9 & A & 2 & F & . & 7 \end{matrix})_{16} \\ &= 9A2F.7_{16} \end{aligned}$$

مساوات ۱.۱۶ اور مساوات ۱.۱۷ کی آخری لکیریوں میں شنائی اعداد کو دیکھتے ہوئے بہت جلد ان ان اکتا جاتا ہے، البتہ، انہیں مساوات میں جہاں شنائی اعداد گروہ کی صورت میں لکھے گئے ہیں، وہاں انہیں سمجھنا آسان ہے۔ یہی وجہ ہے کہ شنائی اعداد بالخصوص اور دیگر اعداد بالعموم گروہی صورت میں لکھے جاتے ہیں۔

ایک ہندسے پر مبنی شنائی عدد کو شنائی ہندسہ یا بٹ کہتے ہیں؛ آٹھ شنائی ہندسوں،، یعنی آٹھ بٹ، کے گروہ کو ہشتی شنائی عدد یا بائٹ کہتے ہیں۔ بائٹ کو عموماً چار چار شنائی اعداد کے گروہ میں لکھا جاتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۱۷ میں دو بائٹ ہیں۔ اسی مساوات کو الٹ چلاتے ہوئے یہ واضح ہے کہ ہشتی شنائی عدد کو چار چار شنائی اعداد کے گروہ میں لکھ کر انہیں جلد اساس سولہ میں لکھا جاسکتا ہے۔

باب ۲

بنیادی حساب

شرائی نظام میں حساب بالکل اسی طرح کیا جاتا ہے جس طرح اعشاری نظام میں۔ چند مثالوں کے مطالعہ سے وضاحت ہوگی۔

شرائی نظام میں اعداد کا مجموعہ اعشاری نظام میں دو اعداد کے مجموعے سے سمجھا جاسکتا ہے۔ اعشاری نظام کی مندرجہ ذیل مثال پر غور کریں جس میں 37.5 اور 29.6 جمع کیے گئے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 11 \\ 37.5 \\ +29.6 \\ \hline 67.1 \end{array}$$

آپ نے دیکھا کہ حاصل (1) کو (بائیں) زیادہ وزنی مقام پر منتقل کیا گیا۔ یہی شرائی جمع میں کیا جائے گا۔ شرائی نظام میں صرف دو ہندسے، 0 اور 1، پائے جاتے ہیں جن کی چار ممکنہ مجموعے درج ذیل ہیں۔

1	1	0	0
1	1	0	0
+1	+0	+1	+0
<hr/>	<hr/>	<hr/>	<hr/>
10	01	01	00

پہلی تین جمع میں حاصل 0 جبکہ آخری میں حاصل 1 ہے۔

آئیں، زیادہ شنائی ہندسوں کے اعداد کی جمع کی مثالیں دیکھیں؛ ان کی اعشاری نظام میں جمع بھی دی گئی ہیں۔

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 13 \\
 +09 \\
 \hline
 22_{10}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1 \quad 1 \\
 1101 \\
 +1001 \\
 \hline
 10110_2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 3 \\
 +2 \\
 \hline
 5_{10}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1 \\
 11 \\
 +10 \\
 \hline
 101_2
 \end{array}$$

دائیں ہاتھ شنائی 11 اور 10 جمع کر کے 101_2 حاصل کیا گیا جو اعشاری نظام میں $5 = 3 + 2$ ہوگا، جبکہ بائیں ہاتھ شنائی 1101 اور 1001 جمع کر کے 10110_2 حاصل کیا گیا جو اعشاری نظام میں $22 = 13 + 9$ کے مترادف ہے۔

آخر میں، کسری اعداد کی جمع کی ایک مثال دیکھتے ہیں۔

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 5.75 \\
 +3.50 \\
 \hline
 9.25_{10}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 111 \\
 101.11 \\
 +11.10 \\
 \hline
 1001.01_2
 \end{array}$$

۲.۱ شنائی نظام میں اعداد منفی کرنا

دوہٹ (شنائی عدد) منفی کرنے کے درج ذیل چار ممکنات پائے جاتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 0 - 0 &= 0 \\
 1 - 0 &= 1 \\
 1 - 1 &= 0 \\
 0 - 1 &= 1 \quad (\text{ادھار ایک})
 \end{aligned}$$

ی آخری مساوات میں منہرے ایک اس صورت منفی کیا دکھایا گیا ہے جب ادھار 1 لینا ممکن ہو۔ ایک اور مثال دیکھتے ہیں۔

$$\begin{array}{r}
 6.25 \\
 -5.50 \\
 \hline
 0.75_{10}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 110.01 \\
 -101.1 \\
 \hline
 0.11_2
 \end{array}$$

شنائی منفی کی چند مثالیں حل کر کے اعشاری منفی سے ان کی تصدیق کریں۔ ایسا کرنے سے زیادہ وضاحت ہوگی۔

۲.۲ اسی تکملہ یا r کا تکملہ

کسی بھی اسی نظام میں، ہندسہ کو اساس (r) ، سے منفی کرنے سے ہندسے کا اسی تکملہ (یا r کا تکملہ) حاصل ہوگا۔ یوں، ہندسہ اور ہندسے کے اسی تکملہ کا مجموعہ اساس کے برابر ہوگا۔ مثلاً، اعشاری نظام میں

3 کا اسی تکملہ $10 - 3 = 7$ ، جبکہ 7 کا اسی تکملہ 3 اور ان دونوں کا مجموعہ $3 + 7 = 10$ اعشاری نظام کے اساس کے برابر ہے۔ اسی طرح 5 کا اسی تکملہ 5، اور 9 کا اسی تکملہ 1 ہوگا۔

درج بالا مثالوں سے واضح ہے کہ کسی بھی ہندسہ (مثلاً 3) کے اسی تکملہ (یعنی 7) کا اسی تکملہ وہی ہندسہ (یعنی 3) ہوگا۔ اسی تکملہ کے تصور کو ایک سے زائد ہندسوں پر مبنی عدد تک وسعت دیتے ہیں۔ اساس r کے اعدادی نظام میں عدد N ، جو n ہندسوں پر مبنی ہو، کے اسی تکملہ (یا r کے تکملہ) سے مراد عدد $r^n - N$ ہوگا۔ اساس دس کے اسی تکملہ کو عام طور 10 کا تکملہ کہتے ہیں۔ اسی طرح اساس دو کے تکملہ کو 2 کا تکملہ کہتے ہیں۔

اعشاری نظام میں عدد 10^n کے سب سے وزنی ہندسے کی قیمت 1 ہوگی، اور اس کی دائیں جانب 0 قیمت کے n ہندسے ہوں گے۔

$$10^2 = 100_{10}$$

$$(۲.۱) \quad 10^5 = 100000_{10}$$

$$10^7 = 10000000_{10}$$

اعشاری نظام کی اساس $r = 10$ ہے۔ اس نظام میں عدد N ، جس میں n ہندسے ہوں، کے اسی تکملہ (یعنی 10 کے تکملہ) سے مراد عدد $10^n - N$ ہوگا۔ یوں $N = 5391$ جس میں چار ہندسے ($n = 4$) ہیں، کا 10 کا تکملہ درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۲) \quad (10^4 - 5391)_{10} = (10000 - 5391)_{10} = 4609_{10}$$

اسی طرح عدد 320753 جس میں 6 ہندسے ہیں کا اسی تکملہ:

$$(۲.۳) \quad (10^6 - 320753)_{10} = (1000000 - 320753)_{10} = 679247_{10}$$

اور 679247 کا 2 کا تکملہ درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۴) \quad (10^6 - 679247)_{10} = (1000000 - 679247)_{10} = 320753_{10}$$

ہر عدد N کے اسی تکملہ کا اسی تکملہ وہی عدد N ہوگا۔ اس کا ثبوت کچھ یوں ہے: عددی N کا اسی تکملہ $r^n - N$ اور عدد $r^n - N$ کا اسی تکملہ $r^n - (r^n - N)$ یعنی N ہوگا۔

شنائی نظام کی اساس 2 ہے لہذا n ہندسوں پر مبنی شنائی عدد N کے 2 کا تکملہ (یعنی اسی تکملہ) $2^n - N$ ہوگا۔

شنائی نظام میں عدد 10^n کے سب سے وزنی ہندسے کی قیمت 1 ہوگی، اور اس کی دائیں جانب 0 قیمت کے n ہندسے ہوں گے۔

$$2^2 = 100_2$$

$$(۲.۵) \quad 2^5 = 100000_2$$

$$2^7 = 10000000_2$$

یوں 1011_2 اور 10001_2 کے 2 کے تکملہ بالترتیب درج ذیل ہوں گے۔

$$(2^4 - 1011)_2 = (10000 - 1011)_2 = 0101_2$$

$$(2^5 - 10001)_2 = (100000 - 10001)_2 = 01111_2$$

(۲.۶)

۲.۳ اساس منفی ایک تکملہ یا $(r - 1)$ کا تکملہ

اساس r کے نظام میں، عدد N کے اساس منفی ایک $(r - 1)$ کے تکملہ سے مراد $r^n - 1 - N$ ہے۔ اعشاری نظام میں اساس منفی ایک کے تکملہ کو عموماً 9 کا تکملہ (نو کا تکملہ) اور شنائی نظام میں اسے 1 کا تکملہ (ایک کا تکملہ) کہتے ہیں۔

اعشاری نظام میں 376 اور 7852 کے 9 کے تکملہ، بالترتیب مندرجہ ذیل ہوں گے۔

$$10^3 - 1 - 376 = 1000 - 1 - 376$$

$$= 999 - 376$$

$$= 623_{10}$$

$$10^4 - 1 - 7852 = 10000 - 1 - 7852$$

$$= 9999 - 7852$$

$$= 2147_{10}$$

(۲.۷)

اعشاری نظام میں عدد $10^n - 1$ ، n ہندسوں پر مشتمل ہوگا، جہاں ہر ہندسے کی قیمت 9 ہوگی۔

$$10^3 - 1 = 1000 - 1 = 999_{10}$$

$$10^6 - 1 = 1000000 - 1 = 999999_{10}$$

$$10^8 - 1 = 100000000 - 1 = 99999999_{10}$$

(۲.۸)

شنائی نظام میں عدد $2^n - 1$ ، n ہندسوں پر مشتمل ہوگا، جہاں ہر ہندسے کی قیمت 1 ہوگی۔

$$2^3 - 1 = 1000 - 1 = 111_2$$

$$2^5 - 1 = 100000 - 1 = 11111_2$$

$$2^8 - 1 = 100000000 - 1 = 11111111_2$$

(۲.۹)

شنائی نظام میں 1001_2 اور 101110_2 کے 1 کے تکملہ، بالترتیب، درج ذیل ہوں گے۔

$$2^4 - 1 - 1001 = 1111 - 1001 = 0110_2$$

$$2^6 - 1 - 101110 = 111111 - 101110 = 010001_2$$

(۲.۱۰)

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شنائی عدد 0 کا ”ایک کا تکملہ“، شنائی عدد 1 ہوگا، اور اسی طرح عدد 1 کا ”ایک کا تکملہ“، شنائی عدد 0 ہوگا۔ ہم کہتے ہیں 0 کا متمم 1 اور 1 کا متمم 0 ہے۔

ثنائی عدد N کا اساس منفی ایک کا تکملہ، \bar{N} سے ظاہر کیا جاتا ہے لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\bar{1}_2 &= 0_2 \\ \bar{0}_2 &= 1_2 \\ (2.11) \quad \overline{1001}_2 &= 0110_2 \\ \overline{101110}_2 &= 010001_2\end{aligned}$$

ان دو مثالوں سے ایک اہم حقیقت واضح ہوتا ہے: ثنائی عدد میں ہر ہندسے کا متمم لینے سے (یعنی ہر 0 کو 1 اور ہر 1 کو 0 کرنے سے) اس کا ایک کا تکملہ یا متمم حاصل ہوگا۔

ثنائی عدد کے ہر ہٹے کا متمم لینے سے عدد کا 1 کا تکملہ (یعنی متمم) حاصل ہوگا۔

اساس r نظام میں r کے تکملہ سے مراد $r^n - 1$ اور $(r - 1)$ کے تکملہ سے مراد $r^2 - 1 - N$ ہے، لہذا $(r - 1)$ کے تکملہ کے ساتھ 1 جمع کر کے r کا تکملہ حاصل کیا جاسکتا ہے، یعنی عدد کے متمم کے ساتھ 1 جمع کر کے 2 کا تکملہ حاصل ہوگا۔ اس طرح اسی تکملہ کا حصول عموماً زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

مثلاً ۲.۶ میں دیے گئے اعداد کے 2 کے تکملہ ہم اس طریقہ سے حاصل کرتے ہیں۔
چونکہ $1011 = \overline{0100}$ ہے لہذا 1011 کا اسی تکملہ $0101 + 1 = 0100$ ہوگا۔ اسی طرح 10001 کے متمم 01110 کے ساتھ 1 جمع کرنے سے اس کا اسی تکملہ $01111 + 1 = 01110$ حاصل ہوگا۔

۲.۴ دو اعداد کی منفی بذریعہ اسی تکملہ

متمم و کاغذ کے ساتھ، M سے N منفی کرنا چھوٹی جماعتوں میں سکھایا جاتا ہے۔ برقیات میں تکملہ کی مدد سے دو اعداد منفی کیے جاتے ہیں، جہاں دونوں اعداد میں ہندسوں کی تعداد برابر ہونا لازم ہے۔ اسی تکملہ کی مدد سے $M - N$ مندرجہ ذیل طریقہ کار سے حاصل کیا جاتا ہے۔

• دونوں اعداد میں ہندسوں کی تعداد برابر کرنے کی خاطر، کم ہندسوں والے عدد کی بائیں جانب (درکار تعداد کی) اضافی صفریں چسپاں کریں۔ فرض کریں اب ہر عدد میں n ہندسے پائے جاتے ہیں۔

• M کے ساتھ N کا اسی تکملہ جمع کر کے مجموعہ $M + r^n - N$ حاصل کریں۔

• M کی قیمت N کی قیمت سے زیادہ ہونے کی صورت میں، آخری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا ہوگا، جس کی بنیاد مجموعہ $n + 1$ ہندسوں پر مشتمل ہوگا اور اس کا بائیں ہندسہ 1 ہوگا۔ اس بائیں ہندسے کو (یعنی حاصل 1 کو) نظر انداز کریں؛ باقی n ہندسوں پر مبنی عدد اصل جواب ہوگا۔

• M کی قیمت N کی قیمت سے کم ہونے کی صورت میں، آخری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا نہیں ہوگا؛ مجموعہ منفی عدد کو ظاہر کرے گا، اور n ہندسوں پر مبنی ہوگا۔ مجموعہ کا اسی تکملہ لے کر اس کی بائیں جانب منفی علامت منسلک کر کے جواب حاصل ہوگا۔

ان دونوں صورتوں کی وضاحت مثالوں سے ہوگی۔

مثال ۲.۱: اعشاری اعداد کا حاصل منفی $974 - 7852$ دس کے تکملہ کی مدد سے دریافت کریں۔

باب ۲: بنیادی حساب

جواب: یہاں بڑا عدد 7852 چار ہندسوں پر مشتمل ہے، لہذا اچھوٹا عدد 0974 لکھیں اور $n = 4$ لیں۔ یوں 0974 کا اسی نمبر 9026 = 10000 - 0974 ہوگا، جس کو 7852 کے ساتھ جمع کرنے سے 5 ہندسوں کا مجموعہ $9026 + 7852 = 16878$ حاصل ہوگا۔ چونکہ یہ عدد 5 ہندسوں پر مشتمل ہے، لہذا بائیں ہندسے کو نظر انداز کرتے ہوئے 6878 کو جواب تسلیم کرتے ہیں۔ (ہم درحقیقت آخری ہندسوں کی جمع سے پیدا حاصل 1 کو رد کرتے ہیں۔ چونکہ یہ مجموعہ میں بائیں ترین مقام پر اترتا ہے لہذا مجموعہ کا بائیں ہندسہ رد کر کے جواب حاصل ہوگا۔)

$$\begin{array}{r}
 \text{حاصل 1 کو نظر انداز کر کے} \\
 \text{6878 کو جواب تسلیم کرتے ہیں}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 1 \\
 7852 \\
 +9026 \\
 \hline
 16878
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 10000 \\
 -0974 \\
 \hline
 9026
 \end{array}$$

□

مثال ۲.۲: دس کے نمبر کی مدد سے $974 - 7852$ حاصل کریں۔

جواب: عدد 7852 کے اسی نمبر 2148 = 10000 - 7852 کا 0974 کے ساتھ مجموعہ لیتے ہوئے: $0974 + 2148 = 3122$ آخری حاصل 1 نہیں پیدا ہوتا، لہذا یہ مجموعہ 4 ہندسوں پر مشتمل ہے؛ اس کے اسی نمبر 6878 = 10000 - 3122 کے ساتھ منفی علامت چسپاں کرتے ہوئے 6878 - کو جواب تسلیم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r}
 \text{جواب} \\
 -6878
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 10000 \\
 -3122 \\
 \hline
 6878
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 0974 \\
 +2148 \\
 \hline
 3122
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 10000 \\
 -7852 \\
 \hline
 2148
 \end{array}$$

□

ثنائی اعداد بھی بالکل اسی طرح منفی کیے جاتے ہیں۔ ان کی بھی دو مثالیں پیش کرتے ہیں۔

مثال ۲.۳: اسی نمبر کی مدد سے مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

$$(i) 1011_2 - 11001_2 \text{ اور } (ب) 1011_2 - 11001_2$$

جواب: (i) چونکہ $11001_2 = 00110$ ہے، لہذا دو کا نمبر $00111 + 1 = 00110$ ہوگا۔ اس کو دوسرے عدد 01011_2 (جس کی بائیں جانب اضافی 0 چسپاں کر کے ہندسوں کی تعداد پوری کی گئی) کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r}
 01011 \\
 +00111 \\
 \hline
 10010
 \end{array}$$

بائیں آخری ہندسوں کو جمع کرتے ہوئے حاصل 1 پیدا نہیں ہوا، لہذا اس کا 2 کا تکملہ لینا ہوگا۔ چونکہ $10010 = 01101$ ہے لہذا اسی تکملہ $01110 = 01101 + 1$ ہوگا، جس کی بائیں جانب منفی علامت چسپاں کر کے نتیجہ 01110_2 حاصل کرتے ہیں۔

جواب: (ب) یہاں ایک عدد پانچ ہندسوں پر مشتمل ہے، لہذا دوسرے عدد میں بھی پانچ ہندسے پورے کیے جائیں گے۔ یوں 1011 کو 01011 لکھ کر، اس کے متم $10100 = 01011$ سے عدد کا اسی تکملہ $10100 + 1 = 10101$ حاصل کر کے، دوسرے عدد کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 1 \\ 11001 \\ + 10101 \\ \hline 101110 \end{array}$$

آخری ہندسے جمع کرتے ہوئے حاصل 1 پیدا ہوا جس کو نظر انداز کر کے باقی مجموعہ، 01110_2 ، کو نتیجہ تسلیم کرتے ہیں۔ □

۲.۵ دو اعداد کی منفی بذریعہ اساس منفی ایک کا تکملہ

اساس منفی ایک تکملہ کی مدد سے بھی $M - N$ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس کا طریقہ کار درج ذیل ہے جہاں دونوں اعداد میں ہندسوں کی تعداد برابر ہونا لازم ہے۔

• دونوں اعداد میں ہندسوں کی تعداد برابر کرنے کی خاطر، کم ہندسوں والے عدد کی بائیں جانب (درکار تعداد کی) اضافی صفریں چسپاں کریں۔ فرض کریں اب ہر عدد میں n ہندسے پائے جاتے ہیں۔

• M کے ساتھ N کا اساس منفی ایک کا تکملہ جمع کر کے مجموعہ $M + 2^n - 1 - N$ حاصل کریں۔

• M کی قیمت N کی قیمت سے زیادہ ہونے کی صورت میں، آخری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا ہوگا، جس کی بنیاد مجموعہ $n + 1$ ہندسوں پر مشتمل ہوگا اور اس کا بائیں ہندسہ 1 ہوگا۔ اس بائیں ہندسے کو (یعنی حاصل 1 کو) نظر انداز کرنے کی بجائے، مجموعہ سے خارج کر کے، 1 وزن مختص کریں اور n ہندسوں کے باقی مجموعہ کے ساتھ جمع کر کے جواب حاصل کریں۔ اس عمل کو واپس آخری حاصل ایک کہتے ہیں۔

• M کی قیمت N کی قیمت سے کم ہونے کی صورت میں، آخری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا نہیں ہوگا، مجموعہ منفی عدد کو ظاہر کرے گا، اور n ہندسوں پر مبنی ہوگا۔ مجموعہ کا اساس منفی ایک کا تکملہ لے کر اس کی بائیں جانب منفی علامت منسلک کر کے جواب حاصل ہوگا۔

ان دونوں صورتوں کی وضاحت مثالوں سے ہوگی۔

مثال ۲.۴: نو کا تکملہ استعمال کرتے ہوئے $974 - 7852$ حاصل کریں۔

جواب: عدد 974 کے بائیں 0 چسپاں کر کے اس میں ہندسوں کی تعداد پوری کریں اور 7852 کے اسس منفی ایک کے تکرار $2147 = 9999 - 7852$ کے ساتھ جمع کریں۔

$$\begin{array}{r} 2147 \\ +0974 \\ \hline 3121 \end{array}$$

آخری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا نہیں ہوا، لہذا مجموعہ چار ہندسوں پر مشتمل ہے۔ اس کے اسس منفی ایک کے تکرار $6878 = 9999 - 3121$ کے بائیں منفی علامت منسلک کر کے جواب 6878 - حاصل کرتے ہیں۔ □

مثال ۲.۵: نوکا تکرار استعمال کرتے ہوئے $974 - 7852$ حاصل کریں۔

جواب: چھوٹے عدد 974 میں ہندسوں کی تعداد پوری کر کے اس کے اسس منفی ایک کے تکرار $9999 - 9025 = 974$ کو 7852 کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 1 \\ 7852 \\ +9025 \\ \hline 16877 \end{array}$$

آخری (بائیں) ہندسے جمع کرتے ہوئے حاصل 1 پیدا ہوا جس کی بنیاد مجموعہ 5 ہندسوں پر مشتمل ہے۔ ہم اس حاصل 1 کو وزن 1 مختص کر کے باقی 4 ہندسوں پر مبنی مجموعہ 6877 کے ساتھ جمع کر کے جواب 6878 = 6877 + 1 حاصل کرتے ہیں۔ □

اب ہم ثنائی اعداد کی مثال لیتے ہیں۔

مثال ۲.۶: مندرجہ ذیل کو 1 کے تکرار کی مدد سے حل کریں۔

$$(i) 11011_2 - 101110_2, (b) 101110_2 - 11011_2$$

حل: (i) منفی ہونے والے عدد میں ہندسوں کی تعداد پوری کر کے اس کا متکم:

$$\overline{011011} = 100100$$

دوسرے عدد کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 1 \\ 101110 \\ +100100 \\ \hline 1010010 \end{array}$$

آخری حاصل 1 کو باقی عدد سے علیحدہ کر کے اسے 1 کا وزن مختص کر کے (یعنی اس کو اکائی تصور کر کے)، دائیں چھ ہندسوں پر مشتمل مجموعہ 010010 کے ساتھ جمع کرتے ہوئے جواب حاصل کرتے ہیں۔

$$010010$$

$$+1$$

$$\hline 010011$$

(ب) متمم $010001 = \overline{101110}$ کو دوسرے عدد کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$010001$$

$$+011011$$

$$\hline 101100$$

چونکہ آخری حاصل صفر ہے، لہذا مجموعہ کے متمم $010011 = \overline{101100}$ کے ساتھ منفی کی علامت چسپاں کر کے جواب $010011_2 -$ حاصل کرتے ہیں۔ □

۲.۶ مثبت اور منفی اعداد

روزمرہ زندگی میں مثبت اعداد لکھتے ہوئے انہیں بغیر کسی علامت کے، یا مثبت علامت (+) کے ساتھ لکھا جاتا ہے، البتہ منفی اعداد کے ساتھ منفی علامت (-) ضرور لکھی جاتی ہے۔ یوں درج ذیل اعداد درست لکھے گئے ہیں۔

$$+3025, \quad 3025, \quad -3025$$

کسی بھی عدد کے مثبت یا منفی ہونے کو اس عدد کی علامت کہتے ہیں۔ یوں، وہ اعداد جو مثبت علامت (+) یا منفی علامت (-) رکھتے ہوں علامت دار اعداد کہلاتے ہیں، اور جن کی علامت نہ ہو بے علامت اعداد کہلاتے ہیں۔ اعداد کو ان کی علامت اور قدر سے ظاہر کرنے کو علامت دار قدر اظہار کہتے ہیں۔

کمپیوٹر شنائی اعداد، 0 اور 1، استعمال کرتا ہے، اور ہر معلومات کو انہیں سے ظاہر کرتا ہے۔ روایتاً مثبت علامت (+) کو 0 (صفر) اور منفی علامت (-) کو 1 (ایک) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ علامت عدد کی بائیں جانب لکھی جاتی ہے۔ یوں $5_{10} +$ کو چار شنائی ہندسوں سے ظاہر کرتے ہوئے، بائیں ہندسہ مثبت علامت (+) کو جبکہ باقی تین ہندسے 5 کو ظاہر کریں گے۔ اسی طرح $5_{10} -$ کو آٹھ شنائی ہندسوں سے ظاہر کرتے ہوئے، بائیں ہندسہ منفی علامت (-) کو جبکہ باقی سات ہندسے 5 کو ظاہر کریں گے۔

$$\underbrace{0}_{+} \underbrace{101}_{5_{10}} \quad \underbrace{1}_{-} \underbrace{0000101}_{5_{10}}$$

ایک دلچسپ حقیقت پر غور کریں۔ اگر ہم 1101_2 میں بائیں ہندسہ علامت تصور کریں تب یہ $5_{10} -$ کو ظاہر کرے گا، لیکن اگر ہم چاروں ہندسوں کو ایک عدد تصور کریں تب یہ D_{16} یا 13_{10} کو ظاہر کرتا ہے۔

جدول ۲.۱: چار ہندسوں کے علامت دار اعداد

علامت دار	شرائی
$+7_{10}$	0111_2
$+6_{10}$	0110_2
$+5_{10}$	0101_2
$+4_{10}$	0100_2
$+3_{10}$	0011_2
$+2_{10}$	0010_2
$+1_{10}$	0001_2
$+0_{10}$	0000_2
-0_{10}	1000_2
-1_{10}	1001_2
-2_{10}	1010_2
-3_{10}	1011_2
-4_{10}	1100_2
-5_{10}	1101_2
-6_{10}	1110_2
-7_{10}	1111_2

یہ جاننا ضروری ہے، آیشنائی اعداد کا بایاں ہندسہ علامت کو ظاہر کرتا ہے یا یہ عدد کا حصہ ہے؛ یہ فیصلہ اعداد استعمال کرنے والے پر ہے۔ کمپیوٹر استعمال کرتے وقت آپ فیصلہ کرتے ہیں کہ علامت دار یا بے علامت (غیر علامت دار) اعداد استعمال کریں گے۔ جدول ۲.۱ میں چار شنائی ہندسوں پر مشتمل علامت دار اعداد دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ صفر کو دو مختلف طریقوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے، ان میں ایک مثبت اور دوسرا منفی ہے!

اس جدول میں چار شنائی ہندسوں سے اعداد لکھے گئے؛ کمپیوٹر میں اعداد، عموماً، ایک بائٹ استعمال کرتے ہوئے لکھا جاتا ہے۔ ایک بائٹ 8 شنائی ہندسوں کو کہتے ہیں۔ علامت دار اعداد کو بائٹ میں لکھتے ہوئے، دائیں سے بائیں کی رفتار سے لکھا جاتا ہے؛ روزمرہ زندگی میں صفر کو ہم مثبت تصور کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 00000101_2 &= +5_{10} \\
 01111111_2 &= +127_{10} \\
 10000101_2 &= -5_{10} \\
 11111111_2 &= -127_{10} \\
 00000000_2 &= +0_{10} \\
 10000000_2 &= -0_{10}
 \end{aligned}$$

ان اعداد میں بھی مثبت اور منفی صفر پایا گیا؛ روزمرہ زندگی میں صفر کو ہم مثبت تصور کرتے ہیں۔

جدول ۲.۲: علامت دار ایک کا تکملہ اور دو کا تکملہ اعداد

اعشاری عدد	علامت دار وتر	علامت دار ایک کا تکملہ	علامت دار دو کا تکملہ
+7	0111	0111	0111
+6	0110	0110	0110
+5	0101	0101	0101
+4	0100	0100	0100
+3	0011	0011	0011
+2	0010	0010	0010
+1	0001	0001	0001
+0	0000	0000	0000
-0	1000	1111	نہیں پایا جاتا
-1	1001	1110	1111
-2	1010	1101	1110
-3	1011	1100	1101
-4	1100	1011	1100
-5	1101	1010	1011
-6	1110	1001	1010
-7	1111	1000	1001
-8	نہیں پایا جاتا	نہیں پایا جاتا	1000

انتہا کچھ کہنے کے بعد آپ کو بتاتا چلوں کہ، کمپیوٹر میں منفی اعداد کو علامت دار وتر اظہار میں نہیں بلکہ علامت دار و 1 کے تکملہ یا علامت دار و 2 کے تکملہ نظام میں رکھا اور استعمال کیا جاتا ہے۔ اگلے حصہ میں ان نظام پر غور ہوگا۔

۲.۷. علامت دار و تکملہ نظام

کمپیوٹر میں عددی برقیات کی مدد سے اعداد جمع یا منفی کیے جاتے ہیں۔ یہ اعمال اسی تکملہ یا اساس منفی ایک کا تکملہ (حصہ ۲.۴ اور حصہ ۲.۵ دیکھیں) استعمال کرتے ہوئے زیادہ خوش اسلوبی سے سرانجام دیے جاتے ہیں۔

کمپیوٹر چونکہ شنائی اعداد استعمال کرتا ہے، لہذا اس میں منفی اعداد 1 کے تکملہ یا 2 کے تکملہ میں لکھے جاتے ہیں۔ جدول ۲.۲ میں چار شنائی ہندسی (چار بٹ) علامت دار اعداد کا 1 کا تکملہ اور 2 کا تکملہ روپ پیش کیا گیا ہے۔

جدول ۲.۲ سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مثبت عدد، شنائی ہندسوں میں ایک ہی طریقہ سے لکھا جاتا ہے، جبکہ منفی عدد تین طریقوں سے لکھا جاسکتا ہے۔ یوں تینوں طریقوں میں مثبت عدد کو سادہ شنائی عدد لکھیں۔

مثبت عدد x کی علامت دار روپ میں علامتی ہٹ 0 سے 1 کرنے سے x کا علامت دار روپ حاصل ہوگا۔ یوں -5 کو علامت دار روپ میں لکھنے کی خاطر $+5$ کو علامت دار روپ 0101_2 میں لکھ کر علامتی ہٹ 1 کرنے سے -5 کی علامت دار روپ 1101_2 حاصل ہوگی۔

منفی عدد x کو علامت دار ایک کے تکملہ روپ میں لکھنے کی خاطر x کو علامت دار شنائی عدد (یعنی سادہ شنائی روپ میں) لکھ کر اس کا 1 کا تکملہ لیں۔ یاد رہے کہ 1 کا تکملہ حاصل کرتے ہوئے شنائی عدد کے ہر ہندسہ (بج علامتی ہٹ) کا متمم لینا ہوگا۔ یوں -5 کو علامت دار ایک کے تکملہ روپ میں لکھنے کی خاطر $+5$ کو 0101_2 لکھ کر متمم لیں جو درکار روپ 1010_2 دے گا۔

منفی عدد x کو علامت دار دو کے تکملہ روپ میں لکھنے کی خاطر x کو علامت دار شنائی عدد (یعنی سادہ شنائی روپ میں) لکھ کر اس کا 2 کا تکملہ لیں۔ یاد رہے کہ 2 کا تکملہ حاصل کرتے ہوئے شنائی عدد کے ہر ہندسہ (بج علامتی ہٹ) کا متمم لینا ہوگا۔ یوں -5 کو علامت دار دو کے تکملہ روپ میں لکھنے کی خاطر $+5$ کو 0101_2 لکھ کر دو کا تکملہ لیں جو درکار روپ 1011_2 دے گا۔

باب ۳

بوولین الجبرا

بوولین الجبرا انگلستان کے ریاضی دان جارج بوولی کے نام سے جانا جاتا ہے، جنہوں نے اس الجبرا کو دریافت کیا۔ بوولین الجبرا ذہنی سوچ یعنی منطق کو الجبرائی روپ میں لکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ اس لئے حیرانی کی بات نہیں کہ کمپیوٹر اسی کو استعمال کرتا ہے۔

۳.۱ بوولین الجبرا کے بنیادی تصورات

عام الجبرا میں متغیرات استعمال کرتے ہوئے تصور کیا جاتا ہے کہ ان کی قیمت کچھ بھی ہو سکتی ہے۔ مثلاً، $z = f(x, y)$ ، جہاں x اور y آزاد متغیرات جبکہ z تابع متغیر ہے، میں متغیرات کی چند ممکنہ قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	y	z
0	0	0
1	2	5
2	1	4
3	2	7
2	2	6
3	1	5

اس تفاعل جس کو ایک نامکمل جدول کے روپ میں پیش کیا گیا ہے کا الجبرائی روپ درج ذیل ہے۔

$$z = x + 2y$$

اس کے برعکس، بوولین الجبرا میں متغیرات کی صرف دو ممکنہ قیمتیں ہیں۔ ان دو قیمتوں کو عموماً 0 (صفر) اور 1 (ایک) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ بوولین تفاعل کی چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

X	Y	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

جدول ۳.۱: دو متغیر منطقی ضرب

۳.۱.۱ منطقی ضرب

تصور کریں X اور Y آزاد بولین متغیرات ہیں، جبکہ Z ان کا تابع بولین متغیر $Z = f(X, Y)$ ہے۔ چونکہ X بولین متغیر ہے، لہذا اس کی ممکنہ قیمتیں صرف 0 اور 1 ہیں۔ اسی طرح Y بھی بولین متغیر ہے، لہذا اس کی قیمت بھی صرف 0 اور 1 ہو سکتی ہے۔ تابع متغیر Z بھی بولین متغیر ہے۔ اس طرح اگرچہ اس کی قیمت X اور Y کی تابع ہے، اس کے باوجود Z کی قیمت صرف 0 یا 1 ہی ہو سکتا ہے۔ متغیرات X اور Y درج ذیل چار ممکنہ ترتیب میں پائے جاسکتے ہیں۔

X	Y
0	0
0	1
1	0
1	1

ان چار ممکنہ صورتوں میں Z کی قیمت 0 یا 1 ہوگی۔

آئیے، جدول ۳.۱ میں پیش کیے گئے منطقی تفاعل پر غور کرتے ہیں جس کی تمام ممکنہ قیمتیں اس جدول میں دی گئی ہیں۔ اس مثال میں تابع متغیر Z کی قیمت صرف اس وقت 1 ہے جب X اور Y دونوں کی قیمت 1 ہے۔ یہی قیمتیں X اور Y کی سادہ ضرب $X \cdot Y$ سے بھی حاصل ہوتی ہیں (ذیل دیکھیں)۔

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

اسی کی بنا پر جدول ۳.۱ میں پیش تفاعل عمل (اور عمل) کو بولین ضرب یا منطقی ضرب کہتے ہیں۔ بولین ضرب کو آزاد متغیرات کے درمیان نقطہ ” \cdot “ سے یا آزاد متغیرات کو قریب قریب لکھنے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں بولین ضرب درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$Z = X \cdot Y$$

(۳.۱)

$$Z = XY \quad (\text{بولین ضرب})$$

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

جدول ۳.۲: تین متغیر بوولین ضرب

منطقی ضرب کے تصور کو وسعت دے کر متعدد آزاد متغیرات کے لئے بیان کیا جاسکتا ہے۔ منطقی ضرب کی عمومی تعریف پیش کرتے ہیں۔

تعریف: منطقی ضرب اس صورت 1 دیا جب تمام آزاد متغیرات کی قیمت 1 ہو۔

□

جدول ۳.۶ کو مثال بناتے ہیں۔ اس طرح کے جدول میں آزاد متغیرات کی تمام ممکنات لکھنے (یعنی آزاد متغیرات کے حانے پر کرنے) کی حنا طر مداحل XY کو شنائی عدد کے ہندے تصور کر کے، جدول کے مطلوبہ حانوں میں صفر (00) تا تین (11) گنتی لکھیں۔ یوں پہلے صف میں XY کی جگہ 00، دوسری صف میں 01، تیسرے صف میں 10 اور آخری صف میں 11 لکھا جائے گا۔

تین آزاد متغیرات کے منطقی ضرب تفاعل $Z = ABC$ کو جدول ۳.۲ میں پیش کیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جدول کے تین مداحل کے حانوں میں صفر (000) تا سات (111) گنتی لکھی گئی ہے (جو تین ہندسوں کے شنائی اعداد ہیں)۔

۳.۱.۲ منطقی جمع

دو آزاد متغیرات کے بوولین تفاعل کی ایک اور مثال لیتے ہیں جس کو جدول ۳.۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ اب Z اس صورت 1 کے برابر ہے جب X یا Y یا دونوں کی قیمت 1 ہو۔ اس بوولین عمل کو بوولین جمع یا منطقی جمع کہتے ہیں۔

آزاد متغیرات X اور Y کا (روزمرہ) سادہ الجبرائی مجموعہ $S = X + Y$ کو جدول ۳.۴ میں پیش کیا گیا ہے۔

جدول ۳.۳ اور جدول ۳.۴ کے اولین تین نتائج ایک جیسے ہیں۔ اس مشابہت کی بنا جدول ۳.۳ میں دیے گئے بوولین تفاعل کو بوولین جمع یا منطقی جمع کہتے ہیں اور اس بوولین تفاعل کو جمع کے نشان “+” سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں

X	Y	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	2

جدول ۳.۴: دو شنائی اعداد کا سادہ مجموعہ

X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

جدول ۳.۳: دو متغیر منطقی جمع

X	Z
0	1
1	0

جدول ۳.۶: منطقی منفی یا متمم

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

جدول ۳.۵: تین متغیر منطقی جمع

جدول ۳.۳ میں پیش بولین جمع تفاعل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(۳.۲) \quad Z = X + Y \quad (\text{بولین جمع})$$

یہ بولین تفاعل کی مساوات ہے جس کو عام الجبرائی جمع ہرگز نہ سمجھا جائے۔ بالخصوص، بولین جمع کرتے وقت یاد رہے کہ $1 + 1 = 1$ ہے۔

بولین جمع کے تصور کو وسعت دے کر متعدد آزاد متغیرات کے لئے بیان کیا جاسکتا ہے۔ بولین جمع کی عمومی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: منطقی جمع اس صورت 1 دیگا جب آزاد متغیرات میں کم سے کم ایک متغیر کی قیمت 1 ہو۔

□

تین متغیر منطقی جمع تفاعل $Z = A + B + C$ جدول ۳.۵ میں پیش کیا گیا ہے۔ یاد رہے کہ تین آزاد متغیرات کے منطقی جمع کا الجبرائی جمع کے ساتھ کوئی تعلق نہیں۔ یہاں جمع کی علامت بولین جمع کو ظاہر کرتی ہے لہذا یہاں $1 + 1 + 1 = 1$ ہوگا۔

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

جدول ۸.۳: تین متغیر بولین بلا شرکت جمع

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

جدول ۷.۳: دو متغیر منطقی بلا شرکت جمع

۳.۱.۳ منطقی غنی

بولین تفاعل $Z = f(X)$ کی تیسری مثال لیتے ہیں جہاں آزاد متغیر X اور تابع متغیر Z کا تعلق جدول ۳.۶ میں پیش کیا گیا ہے۔

اس تفاعل کو بولین غنی کہتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درحقیقت، تابع متغیر Z ، آزاد متغیر کا متمم ہے۔ یوں بولین غنی درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۳) \quad Z = \overline{X} \quad (\text{بولین غنی یا متمم})$$

بولین غنی صرف ایک آزاد متغیر کے لئے بیان کیا جاسکتا ہے، اور اس کی تعریف درج ذیل ہے۔
تعریف: بولین غنی آزاد متغیر کا متمم دیتا ہے۔

□

۳.۱.۴ منطقی بلا شرکت جمع

دو آزاد متغیرات کا ایسا بولین تفاعل جدول ۷.۳ میں دکھایا گیا ہے، جس کا تابع متغیر اس صورت 1 ہے جب صرف ایک آزاد متغیر 1 ہو۔ یہ دو متغیر بولین بلا شرکت جمع ہے۔ اس تصور کو متعدد آزاد متغیرات تک وسعت دے کر بیان کرتے ہیں۔

تعریف: طاق تعداد کے آزاد متغیرات 1 ہونے کی صورت میں بولین بلا شرکت کا تابع متغیر 1 ہوگا۔

□

تین آزاد متغیر بلا شرکت جمع تفاعل کو جدول ۸.۳ میں پیش کیا گیا ہے۔

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

جدول ۳.۱۰: تین متغیر بولین ضد بلا شرکت جمع

جدول ۳.۹: دو متغیر منطقی ضد بلا شرکت جمع

دو اور تین آزاد متغیر بولین بلا شرکت کی مساوات درج ذیل ہوں گی۔

$$\begin{aligned} Z &= A \oplus B & (\text{دو آزاد متغیر بلا شرکت جمع}) \\ Z &= A \oplus B \oplus C & (\text{تین آزاد متغیر بلا شرکت جمع}) \end{aligned} \quad (۳.۴)$$

۳.۱.۵ منطقی ضد بلا شرکت جمع

بولین بلا شرکت جمع تفاعل کا ثقی (یعنی متمم) لینے سے بولین ضد بلا شرکت جمع حاصل ہوگا، جو دو اور تین آزاد متغیرات کے لئے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} Z &= \overline{A \oplus B} \\ Z &= \overline{A \oplus B \oplus C} \end{aligned} \quad (\text{تین متغیر منطقی ضد بلا شرکت جمع}) \quad (۳.۵)$$

جدول ۳.۷ اور جدول ۳.۸ میں تابع متغیر ثقی کرنے سے بالترتیب دو اور تین بولین ضد بلا شرکت تفاعل حاصل ہوں گے جنہیں جدول ۳.۹ اور جدول ۳.۱۰ میں پیش کیا گیا ہے۔

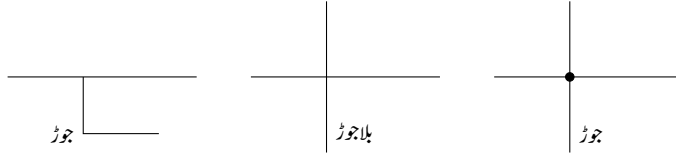
۳.۲ برقی تاروں میں جوڑ کی وضاحت

شکل ۳.۱ پر غور کریں جس میں برقی تاروں کے بیچ جوڑ کی وضاحت کی گئی ہے۔

جہاں ایک تار دوسری تار کے اوپر سے گزرتی ہو اور دونوں آپس میں جھڑی ہوں، وہاں جوڑ کے مقام پر نقطے کا نشان لگایا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں انہیں ایک تار تصور کیا جائے۔

جہاں تاریں آپس میں جھڑی نہ ہوں وہاں انہیں بغیر نقطے کے نشان سے ایک دوسری کے اوپر سے گزرتا دکھایا جاتا ہے۔ نقطے کے نشان کی غیور موجودگی میں ان تاروں کو دو علیحدہ اور بلا جوڑ تاریں سمجھا جائے۔

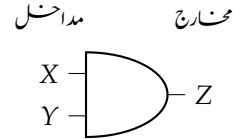
تیسری صورت بھی شکل میں دکھائی گئی ہے جہاں عنط فنی کا امکان نہیں پایا جاتا۔ اس میں ایک تار کا سر دوسری تار پر ختم ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں انہیں ایک تار تصور کیا جائے (یعنی یہ دونوں آپس میں جھڑی ہیں)۔



شکل ۳.۱: تاروں کے بیچ برقی جوڑ۔

X	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
Y	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
Z	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0

شکل ۳.۳: ضرب گیٹ کی کارکردگی۔



شکل ۳.۲: دو مداحصل ضرب گیٹ۔

۳.۳ عددی گیٹ

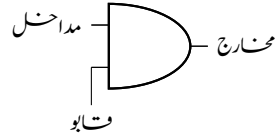
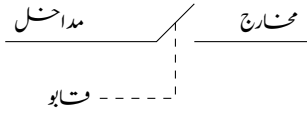
بوولین الجبرا کے تین اہم ترین تفاعل پر حصہ ۳.۱ میں غور کیا گیا۔ یہ تفاعلات عددی برقیات میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں، جہاں انہیں عددی ادوار کی مدد سے جامہ پہنایا جاتا ہے۔ یہ مخصوص عددی ادوار، عددی گیٹ کہلاتے ہیں۔

۳.۳.۱ ضرب گیٹ

منطقی (بوولین) ضرب تفاعل کو ضرب گیٹ سے عملی جامہ پہنایا جاتا ہے، جو شکل ۳.۲ میں دکھایا گیا ہے۔ آزاد متغیرات X اور Y، ضرب گیٹ کی بائیں جانب ہیں جبکہ تابع متغیر، Z، دائیں جانب ہے۔ آزاد متغیرات کو مداحصل جبکہ تابع متغیر کو مخارج کہتے ہیں۔ دو متغیر ضرب گیٹ (دو مداحصل ضرب گیٹ) کے دو مداحصل اور ایک مخارج ہوگا۔ یہ گیٹ، ضرب تفاعل کے جدول کو مطمئن کرتا ہے۔

شکل ۳.۳ میں دو مداحصل ضرب گیٹ کی کارکردگی ترسیم کی گئی ہے، جہاں 0 کو پست اور 1 کو بلند لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مخارج صرف اور صرف اس صورت بلند ہوتا ہے جب ضرب گیٹ کے تمام مداحصل بلند ہوں۔ ہم 0 کو پست اور 1 کو بلند بھی پکارتے ہیں۔ اس شکل میں مداحصل کو کسی خاص ترتیب سے تبدیل نہیں کیا گیا۔

ضرب گیٹ کو شکل ۳.۴ میں بطور عددی گیٹ یا عددی سوچ دکھایا گیا ہے جہاں ایک داخلي پنیہ کو فت ابو پنیہ کا نام دیا گیا ہے جبکہ دوسرے کو (اب بھی) مداحصل کہا گیا ہے۔ ضرب گیٹ کے جدول سے واضح ہے کہ جب تک فت ابو پنیہ 0 ہو، خارجی پنیہ 0 رہتا ہے۔ اس صورت میں مداحصل پر موجود مواد، خارجی پنیہ تک نہیں پہنچ سکتا، یعنی اس پر 0 یا 1 کا مخارج پر کوئی اثر نہیں ہوتا؛ ہم کہتے ہیں فت ابو پنیہ نے ضرب گیٹ کو معذور کر دیا۔ اس کے برعکس اگر فت ابو پنیہ 1 ہو تب خارجی پنیہ پر وہی کچھ ہوگا جو مداحصل پر ہوگا؛ ہم کہتے ہیں ضرب گیٹ محاذ کر دیا گیا ہے۔ فت ابو پنیہ پر ایک یا صفر سے داخلي اشارہ (مواد) کو خارجی پنیہ تک پہنچنا، ممکن یا ناممکن بنایا جاسکتا



شکل ۴: ضرب گیٹ بطور سوچ یا ایک بٹ گیٹ۔

	معذور			مجاز				معذور				
فتابو	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
مداخل	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
مخرج	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0

شکل ۵: ضرب گیٹ کی کارکردگی۔

ہے۔ یوں یہ ایک دروازے کی طرح کام کرتا ہے، جس کی بنا پر یہ گیٹ کہلاتا ہے۔ فتابو پنیا کو، معذور اور مجاز بنانے والا پنیا بھی کہتے ہیں۔ شکل ۵: ۳ میں ضرب گیٹ کی کارکردگی دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ صرف مجاز صورت میں مواد مخرج تک پہنچ پاتا ہے؛ معذور صورت میں مخرج ہمیشہ پست رہے گا۔

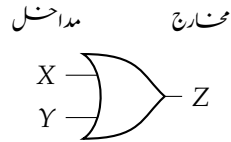
۳.۳.۲ جمع گیٹ

منطقی جمع (بولین جمع) تفاعل کو جمع گیٹ سے عملی جامع پہنایا جاتا ہے۔ دو مداخل جمع گیٹ شکل ۶: ۳ میں دکھایا گیا ہے۔ یہ گیٹ، جمع تفاعل کے جدول کو مطمئن کرتا ہے۔

جمع گیٹ کی کارکردگی شکل ۷: ۳ میں ترسیم کی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں، جمع گیٹ کا مخرج اس صورت بلند ہوگا جب کوئی مداخل بلند ہو۔

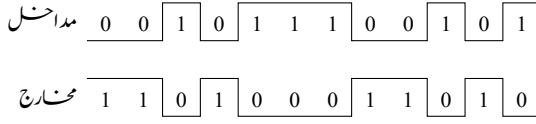
جمع گیٹ میں اگر ایک پنیا کو فتابو پنیا سمجھا جائے تو پست فتابو، گیٹ کو مجاز بنا کر، داخلی مواد کو مخرج تک پہنچنے کی اجازت دیتا ہے، جبکہ بلند فتابو کی صورت میں مخرج لازمًا بلند رہتا ہے۔

X	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
Y	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
Z	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0

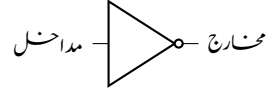


شکل ۷: ۳: جمع گیٹ کی کارکردگی۔

شکل ۶: ۳: دو مداخل جمع گیٹ۔



شکل ۹: نفی گیٹ کی کارکردگی۔



شکل ۸: نفی گیٹ

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

شکل ۱۱: تین مداخل جمع گیٹ۔

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

شکل ۱۰: تین مداخل ضرب گیٹ۔

۳.۳.۳ نفی گیٹ

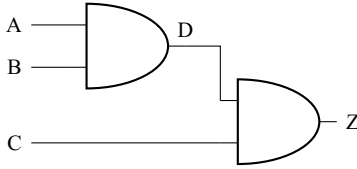
نفی تقاعسل کو نفی گیٹ سے عملی جامع پہنایا جاتا ہے، جس کی علامت شکل ۸.۳ میں دکھائی گئی ہے، اور جو مواد کو مخارج تک پہنچنے سے روک نہ پانے کے باوجود (نفی) ”گیٹ“ کہلاتا ہے۔ اس کی کارکردگی شکل ۹.۳ میں ترسیم کی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں، نفی گیٹ کا مخارج اس کے مداخل کا اُلٹ ہوگا۔ یہ گیٹ، نفی تقاعسل کے جدول کو مطمئن کرتا ہے۔

نفی تقاعسل ایک آزاد اور ایک تابع متغیر رکھتا ہے، لہذا نفی گیٹ کا ایک مداخل اور ایک مخارج ہوگا۔

۳.۳.۴ متعدد مداخل گیٹ

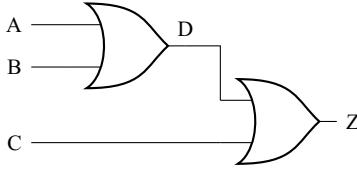
ضرب گیٹ اور جمع گیٹ کے متعدد مداخل ہو سکتے ہیں (تاہم، ان کا مخارج ایک ہوگا)۔ شکل ۱۰.۳ میں تین مداخل ضرب گیٹ اور جدول، اور شکل ۱۱.۳ میں تین مداخل جمع گیٹ اور جدول دکھائے گئے ہیں، جہاں A، B، اور C مداخل جبکہ Z مخارج ہے۔ ضرب گیٹ کا مخارج اس صورت بلند ہوگا جب تمام مداخل بلند ہوں، جبکہ جمع گیٹ کا مخارج اس صورت بلند ہوگا جب کوئی بھی مداخل بلند ہو۔

شکل ۱۲.۳ میں دو ضرب گیٹ یوں جوڑے گئے ہیں کہ ایک کا مخارج دوسرے کے مداخل سے جڑا ہے۔ ساتھ ہی اس دور کا پولین جدول دیا گیا ہے۔ پہلے جدول استعمال کیے بغیر اس دور کو سمجھنے کی کوشش کرتے ہیں۔ مخارج Z اس صورت بلند ہوگا جب دائیں گیٹ کے مداخل C اور D دونوں بلند ہوں لیکن D بلند ہونے کے لئے ضروری ہے کہ بائیں گیٹ کے مداخل A اور B دونوں بلند ہوں۔ یوں A، B، C اور D بلند ہونے کی صورت میں مخارج Z بلند ہوگا؛ یہی تین مداخل ضرب گیٹ کی خاصیت ہے۔



A	B	C	D	Z
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

شکل ۱۲: دو مداحل ضرب گیٹ سے تین مداحل ضرب گیٹ کا حصول۔



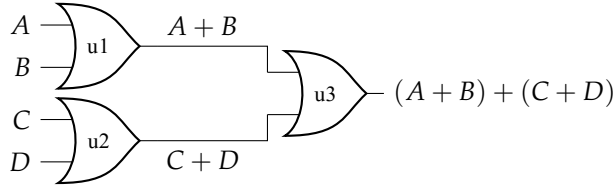
A	B	C	D	Z
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

شکل ۱۳: دو مداحل جمع گیٹ سے تین مداحل جمع گیٹ کا حصول۔

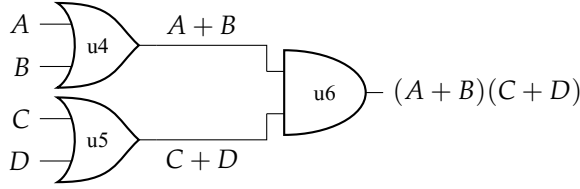
آئیں اب جدول کو سمجھتے ہیں۔ تین مداحل ABC کے حنائوں کو تین ہندسوں کے شنائی اعداد 000 تا 111 سے پڑ کریں۔ اس کے بعد بائیں ضرب گیٹ کے محارج D کے حنائے پڑ کریں۔ یاد رہے کہ یہ صرف A اور B پر منحصر ہے اور صرف اس صورت بلند ہوگا جب یہ دونوں بلند ہوں، جو آخری دو صفوں میں ہوگا۔ اس کے بعد دائیں ضرب گیٹ کے محارج Z کے حنائے پڑ کریں۔ یہ صرف C اور D پر منحصر ہے، اور بلند صرف اس صورت ہوگا جب یہ دونوں بلند ہوں۔

ان نتائج کا جدول ۳.۱۰ میں پیش تین مداحل ضرب گیٹ کے جدول کے ساتھ کریں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شکل ۳.۱۲ میں دونوں ضرب گیٹ مل کر تین مداحل ضرب گیٹ کا کردار ادا کرتے ہیں۔ یوں دوداخلی ضرب گیٹوں کی مدد سے زیادہ مداحل کا ضرب گیٹ حاصل کیا جاسکتا ہے۔

شکل ۳.۱۳ میں دو مداحل جمع گیٹوں سے تین مداحل جمع گیٹ کا حصول دکھایا گیا ہے۔ یہاں Z صرف اس صورت پرست ہوگا جب دائیں گیٹ کے دونوں مداحل، C اور D، پرست ہوں لیکن D صرف اس صورت پرست ہو سکتا ہے جب بائیں گیٹ کے مداحل، A اور B، پرست ہوں۔ یوں Z صرف اس صورت پرست ہوگا جب A، B، اور C پرست ہوں، جو تین مداحل جمع گیٹ کی خاصیت ہے۔



(i)



(ب)

شکل ۳.۱۴: جمع اور ضرب گیٹ کے ادوار۔

جمع گیٹ اور ضرب گیٹ پر مبنی، شکل ۳.۱۴ میں دکھائے گئے ادوار کو مثال بن کر، عددی ادوار حل کرنا سیکھتے ہیں۔

شکل ۳.۱۴-الف سے آغاز کرتے ہیں جہاں گیٹوں کو $u1$ ، $u2$ ، اور $u3$ کے نام دیے گئے ہیں۔ جمع گیٹ $u1$ اور $u2$ کے حنارج پنے، جمع گیٹ $u3$ کے داخلہ پنیوں سے جڑے ہیں۔ چونکہ $u1$ کا محنارج $A + B$ اور $u2$ کا محنارج $C + D$ دیگا، لہذا $u3$ کا محنارج $(A + B) + (C + D)$ یعنی $A + B + C + D$ دیگا۔

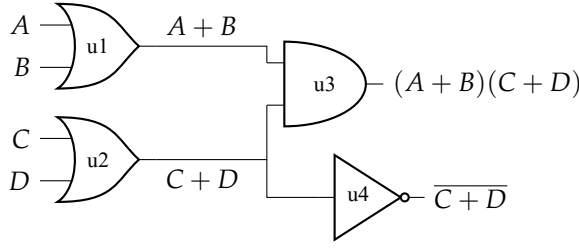
آئیں اب شکل ۳.۱۴-ب حل ہیں۔ یہاں $u4$ اور $u5$ کے محنارج بالترتیب $A + B$ اور $C + D$ دیں گے۔ چونکہ $u6$ ضرب گیٹ ہے، لہذا اس کا محنارج $(A + B)(C + D)$ دیگا۔

شکل ۳.۱۵-الف میں $u2$ کا محنارج $u3$ کے مداحل اور $u4$ کے مداحل کے ساتھ جڑا ہے۔ گیٹ $u1$ اور $u2$ کے محنارج بالترتیب $A + B$ اور $C + D$ ہیں۔ گیٹ $u3$ کا محنارج $(A + B)(C + D)$ اور $u4$ کا محنارج $\overline{C + D}$ ہوگا۔

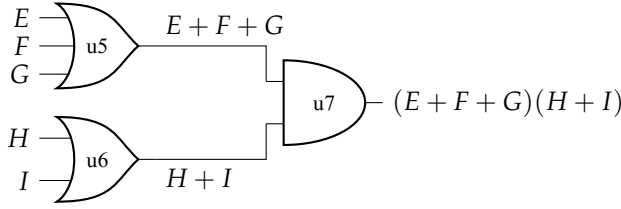
آپ شکل ۳.۱۵-ب کا حل، شکل کو دیکھ کر سمجھ سکتے ہیں۔

۳.۳.۵ ضرب متمم گیٹ اور جمع متمم گیٹ

شکل ۳.۱۶-الف میں تین مداحل ضرب گیٹ کا محنارج ABC ہوگا، جو منفی گیٹ کا مداحل ہے، لہذا منفی گیٹ کا محنارج $Z = \overline{ABC}$ ہوگا۔ ضرب گیٹ کے محنارج کا متمم اتنی اہمیت رکھتا ہے کہ اس کے لئے علیحدہ گیٹ بنایا گیا ہے، جسے ضرب متمم گیٹ (یا ضرب گیٹ) کہتے ہیں اور جو شکل-ب میں (تین مداحل کے لئے) دکھایا گیا ہے۔ ضرب گیٹ کے جدول کا متمم لینے سے ضرب متمم گیٹ کا جدول حاصل ہوگا جو اسی شکل میں پیش کیا گیا ہے۔



(i)



(ب)

شکل ۱۵. ۳: گیتوں کا دو سرا دور۔

دو مداحل ضرب متمم گیت کی مساوات درج ذیل ہوگی، جہاں X اور Y مداحل جبکہ Z محارج ہے۔

$$(۳.۶) \quad Z = \overline{XY} = \overline{X} + \overline{Y} \quad (\text{ضرب متمم})$$

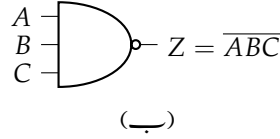
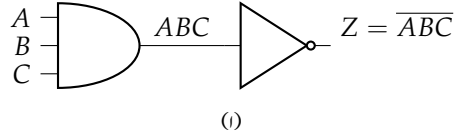
شکل ۱۷. ۳-الف میں تین مداحل جمع گیت کا محارج $A + B + C$ ہوگا، جو منفی گیت کا مداحل ہے، لہذا منفی گیت کا محارج $Z = \overline{A + B + C}$ ہوگا۔ جمع گیت کے محارج کا متمم اتنی اہمیت رکھتا ہے کہ اس کے لئے علیحدہ گیت بنایا گیا ہے، جسے جمع متمم گیت (یا ضد جمع گیت) کہتے ہیں اور جو شکل-ب میں (تین مداحل کے لئے) دکھایا گیا ہے۔ جمع گیت کے جدول کا متمم لینے سے جمع متمم گیت کا جدول حاصل ہوگا جو اسی شکل میں پیش کیا گیا ہے۔

دو مداحل جمع متمم گیت کی مساوات درج ذیل ہوگی، جہاں X اور Y مداحل جبکہ Z محارج ہے۔

$$(۳.۷) \quad Z = \overline{\overline{X} + \overline{Y}} = \overline{X} \cdot \overline{Y} \quad (\text{جمع متمم})$$

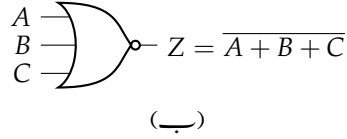
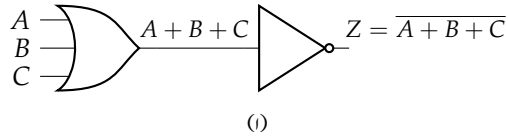
شکل ۱۸. ۳-ب میں ضرب متمم اور جمع متمم گیت سے منفی گیت کا حصول دکھایا گیا ہے۔ ضرب متمم کے دونوں مداحل کو آپس میں جوڑا گیا ہے، لہذا دونوں مداحل پر X ہوگا۔ یوں محارج $Z = \overline{X \cdot X}$ یعنی $Z = \overline{X}$ ہوگا؛ یہاں اس حقیقت کو استعمال کیا گیا ہے کہ اگر $X = 0$ ہو تب $X \cdot X = 0$ ہوگا، اور اگر $X = 1$ ہو تب $X \cdot X = 1$ ہوگا؛ لہذا $X \cdot X = X$ لکھا جاسکتا ہے۔ منفی گیت کا محارج بھی یہی ($Z = \overline{X}$) دیا، لہذا ضرب متمم گیت کے دونوں مداحل آپس میں جوڑنے سے منفی گیت کی کارکردگی حاصل ہوگی۔ اسی طرح (تسلی کر لیں کہ) جمع گیت کے مداحل آپس میں جوڑنے سے بھی منفی گیت حاصل ہوگا۔

A	B	C	Z
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

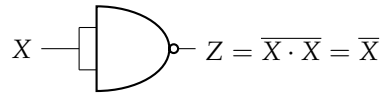
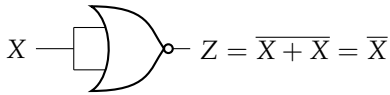


شکل ۱۶: ضرب، متمم گیت یا ضد ضرب گیت۔

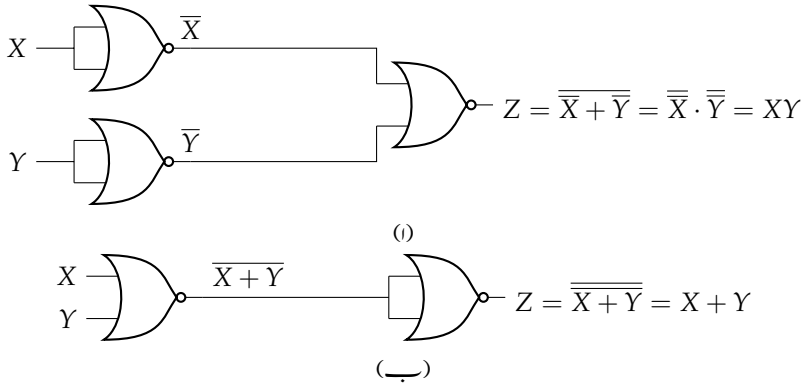
A	B	C	Z
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0



شکل ۱۷: جمع، متمم گیت یا ضد جمع گیت۔



شکل ۱۸: ضرب، متمم اور جمع متمم گیت سے منفی گیت کا حصول۔



شکل ۳.۱۹: جمع متمم سے (ا) ضرب گیٹ اور (ب) جمع گیٹ کا حصول۔

شکل ۳.۱۹-الف میں تین جمع متمم گیٹ یوں جوڑے گئے ہیں کہ $Z = XY$ حاصل ہو، جو ضرب گیٹ کی کارکردگی ہے۔ یوں جمع متمم گیٹوں سے ضرب گیٹ حاصل ہوگا۔

شکل ۳.۱۹-ب میں جمع گیٹ کا حصول دکھایا گیا ہے۔ اس کا محارج $Z = X + Y$ ہے۔

شکل ۳.۲۰ میں ضرب متمم گیٹ سے (ا) جمع گیٹ اور (ب) ضرب گیٹ کا حصول دکھایا گیا ہے۔

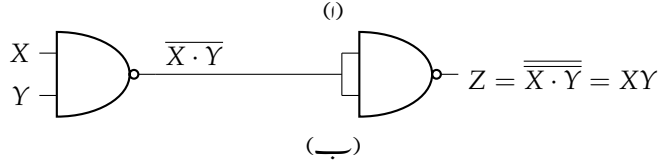
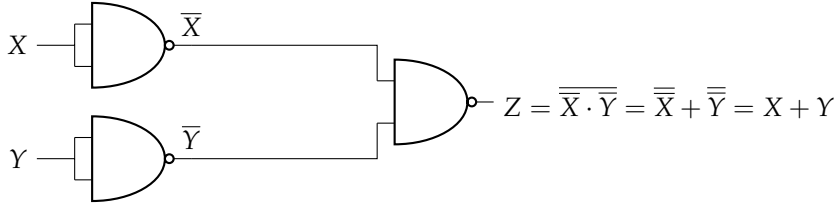
۳.۳.۶ بلا شرکت جمع گیٹ اور بلا شرکت جمع متمم گیٹ

بلا شرکت جمع تفعل کو بلا شرکت جمع گیٹ سے حاصل کیا جاتا ہے جس کا جدول اور علامت، شکل ۳.۲۱-الف میں پیش کیے گئے ہیں۔ اسی طرح بلا شرکت جمع متمم (یا ضد بلا شرکت جمع) تفعل کو بلا شرکت جمع متمم گیٹ (یعنی ضد بلا شرکت جمع گیٹ) کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے جس کا جدول اور علامت، شکل-ب میں پیش کیے گئے ہیں۔

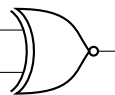
بلا شرکت جمع گیٹ کے محارج کے ساتھ نفی گیٹ منسلک کرنے سے بلا شرکت جمع متمم گیٹ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ بلا شرکت جمع گیٹ کی کارکردگی شکل ۳.۲۲ میں دکھائی گئی ہے، جہاں X اور Y مداحل جبکہ Z محارج ہے۔

تین مداحل بلا شرکت جمع گیٹ کا محارج حاصل کرنے کے لئے اس کے کسی دو مداحل کا بلا شرکت جمع حاصل کریں اور حاصل جواب کا تیسرے مداحل کے ساتھ بلا شرکت جمع لیں۔ یہی بلا شرکت جمع ہوگا۔ متعدد مداحل بلا شرکت جمع گیٹ کا محارج اس صورت میں ہوگا جب بلند مداحل کی تعداد طاق ہو۔

آپ سے گزارش ہے کہ مذکورہ بالا تفعلات اور گیٹوں کو اچھی طرح سمجھیں اور ذہن نشین کریں۔

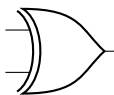


شکل ۳.۲۰: ضرب متمم سے (i) جمع گیٹ اور (ب) ضرب گیٹ کا حصول۔



A	B	C	Z
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

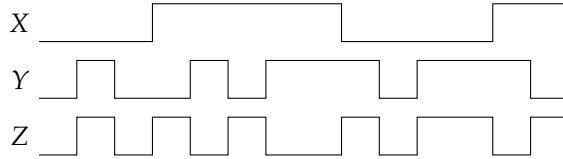
(ب)



A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

(i)

شکل ۳.۲۱: (i) بلا شرکت جمع گیٹ اور (ب) بلا شرکت جمع متمم گیٹ۔



شکل ۳.۲۲: بلا شرکت جمع گیٹ کی کارکردگی۔

۳.۴ گیتوں کے برقی خواص

گیت (کا محارج) اس صورت بلند تصور کیا جاتا ہے جب اس (کے محارج پنی) کا محارجی دباؤ ایک مخصوص قیمت یا اس سے زیادہ ہو۔ یہ قیمت بلند محارجی برقی دباؤ V_{OH} کہلاتی ہے۔ بلند صورت میں گیت محارج پنی پر ایک مخصوص قیمت تک برقی رو محارج (مہیا) کر سکتا ہے، جو گیت کا بلند محارجی برقی رو I_{OH} کہلاتا ہے۔

گیت (کا محارج) اس صورت پست تصور کیا جاتا ہے جب اس (کے محارج پنی) کا محارجی دباؤ ایک مخصوص قیمت یا اس سے کم ہو۔ یہ قیمت پست محارجی برقی دباؤ V_{OL} کہلاتی ہے۔ پست گیت، محارج پنی پر ایک مخصوص قیمت تک برقی رو جذب کر سکتا ہے، جو گیت کا پست محارجی برقی رو I_{OL} کہلاتا ہے۔

گیت ایک مخصوص قیمت اور اس سے زیادہ داخل برقی دباؤ کو بلند تصور کرتا ہے۔ اس برقی دباؤ کو بلند داخل برقی دباؤ V_{IH} کہتے ہیں۔ گیت کے کسی ایک مد داخل کو بلند کرنے کی خاطر درکار برقی رو کو بلند داخل برقی رو I_{IH} کہتے ہیں۔

گیت ایک مخصوص قیمت اور اس سے کم داخل برقی دباؤ کو پست تصور کرتا ہے۔ اس قیمت کو پست داخل برقی دباؤ V_{IL} کہتے ہیں۔ گیت کے کسی ایک مد داخل کو پست کرنے کی خاطر درکار برقی رو کو پست داخل برقی رو I_{IL} کہتے ہیں۔

گیتوں کو آپس میں برقی تاروں سے جوڑا جاتا ہے۔ کبھی کبھار ان تاروں میں، بجائے استعمال پر پائے جانے والے تغیر پذیر برقی و مقناطیسی میدان کی وجہ سے، غیر ضروری اور ناپسندیدہ برقی دباؤ پیدا ہوتا ہے جسے برقی شور کہتے ہیں۔ ایک گیت کے پست محارجی برقی دباؤ کے ساتھ یہ شور جمع ہو کر اگلے گیت کے پست داخل برقی دباؤ سے تباہ کر سکتا ہے۔ اسی طرح برقی شور بلند محارجی برقی دباؤ سے نفی ہو کر بلند داخل برقی دباؤ سے کم ہو سکتا ہے۔ ان دونوں صورتوں میں اگلا گیت غیر متوقع نتائج دے گا۔

بلند محارجی برقی دباؤ کی قیمت، بلند داخل برقی دباؤ کی قیمت سے زیادہ ہوتی ہے۔ ان کے فرق کو بلند شور گنجائش V_{NH} کہتے ہیں (شکل ۳.۲۳، دیکھیں)۔

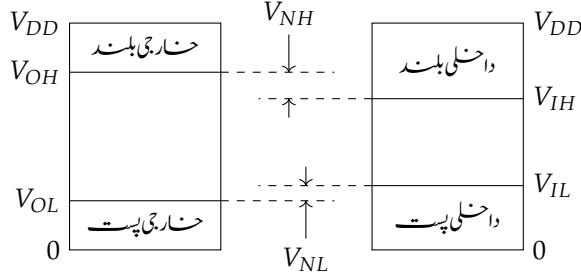
$$(۳.۸) \quad V_{NH} = V_{OH} - V_{IH}$$

پست محارجی برقی دباؤ کی قیمت، پست داخل برقی دباؤ کی قیمت سے کم ہوتی ہے۔ ان کے فرق کو پست شور گنجائش V_{NL} کہتے ہیں۔

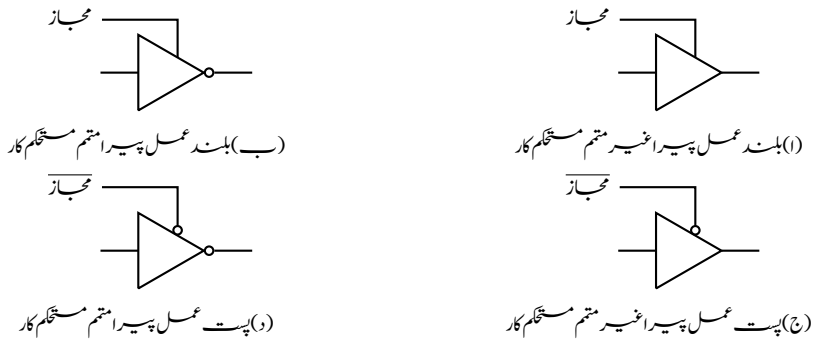
$$(۳.۹) \quad V_{NL} = V_{IL} - V_{OL}$$

شکل ۳.۲۳ میں V_{DD} گیت کو مہیا کردہ برقی دباؤ ہے جسے اس کتاب میں مثبت پانچ وولٹ (5 V) تصور کیا گیا ہے جبکہ 0 سے مراد مندر وولٹ برقی دباؤ (یعنی برقی زمین) ہے۔

پست داخل برقی دباؤ اور بلند داخل برقی دباؤ کے بیچ سمیت (V_{IH} تا V_{IL}) معنی نہیں رکھتا اور غیر متوقع صورت پیدا کر سکتا ہے، لہذا عددی اشارات اس خط کو استعمال نہیں کرتے۔ گیت اپنے محارج کو تب تک بلند رکھ سکتا ہے جب تک یہ (اپنی) بلند محارجی برقی رو حد یا اس سے کم برقی رو مہیا کرتا ہو۔ اسی طرح گیت اپنے محارج کو تب تک پست رکھ سکتا ہے جب تک گیت (اپنی) پست محارجی برقی رو حد یا اس سے کم رو جذب کرے۔ ایسے مقام پر جہاں گیت ان حدود کے اندر رہ سکے، ایسا تو ناگیت نسب کیا جائے گا جو زیادہ برقی رو محارجی (اور) جذب کر سکے۔ یہ تو ناگیت، مستحکم کار کہلاتا ہے، جس پر اب غور کرتے ہیں۔



شکل ۳.۲۳: شور کی گنجائش کا تعین۔



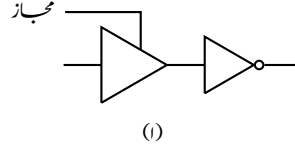
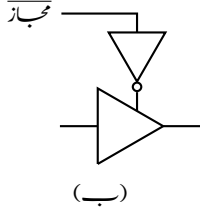
شکل ۳.۲۴: محباز و معذور صلاحیت کے مستحکم کار۔

۳.۴.۱ مستحکم کار

جیسا ذکر ہو، مستحکم کار وہ توانا گیٹ ہے جو زیادہ برقی رو خارج اور جذب کر سکتا ہے۔ اسے عموماً اس مقام پر نسب کیا جاتا ہے جہاں درکار برقی رو عام گیٹ کے برقی رو کی حدود سے تجاوز کرتا ہو۔ عموماً مستحکم کار محباز و معذور ہونے کی صلاحیت بھی رکھتا ہے۔

مستحکم کار کی مختلف اقسام کی علامتیں شکل ۳.۲۴ میں دکھائی گئی ہیں۔ محباز کردہ مستحکم کار، داخلی مواد کو خارج کرتا ہے جبکہ معذور کردہ مستحکم کار منقطع سوچ کی طرح دونوں اطراف کے ادوار منقطع کرتا ہے۔ معذور مستحکم کار ”زیادہ رکاوٹی حال“ اختیار کرتے ہوئے 0 اور 1 خارج کرتا ہے۔

محباز و معذور صلاحیت کے مستحکم کار بطور برقی سوچ کام کرتے ہیں۔ شکل ۳.۲۴-۱ اور ب کے مستحکم کار کو منقطع کرنے کی خاطر ”محباز“ کو پست کیا جائے گا، جبکہ اسے بلند کرنے سے مستحکم کار محباز ہو کر مداحل کے مواد کو محارج تک پہنچائے گا۔ شکل-ج اور د میں مستحکم کار کے محارج کو مداحل سے منقطع کرنے کی خاطر محباز برقی اشارہ کو بلند کیا جائے گا، جبکہ انہیں جوڑنے کی خاطر اس برقی اشارے کو پست کیا جائے گا۔ مزید، شکل ب اور د



شکل ۳.۲۵: نفی گیٹ استعمال کرنے سے دیگر مستحکم کار حاصل کیے جاتے ہیں۔

میں محراز پر داخلی اشارے کا متم حاصل ہوگا۔ انہیں وجوہات کی بنا پر شکل ۳.۲۴- اکا دور بلند علی پیرا غیر متم مستحکم کار، شکل- ب بلند علی پیرا متم مستحکم کار^۲، شکل- ج پلٹ علی پیرا غیر متم مستحکم کار^۳، اور شکل- د پلٹ علی پیرا متم مستحکم کار^۴ کہلاتے ہیں۔

شکل ۳.۲۴- الف کے مستحکم کار کے محراز کو نفی گیٹ سے منسلک کر کے شکل- ب کا مستحکم کار حاصل ہوگا (شکل ۳.۲۵- الف دیکھیں) جس کا محراز داخلی اشارے کا متم ہوگا۔ اسی طرح شکل ۳.۲۴- الف کے فتاویٰ اشارہ (محراز) سے پہلے نفی گیٹ نصب کرنے سے شکل- ج حاصل ہوگا (شکل ۳.۲۵- ب دیکھیں)۔ شکل ۳.۲۴- الف کے فتاویٰ اشارہ (محراز) سے پہلے اور محراز کے بعد نفی گیٹ نصب کرنے سے شکل- د حاصل ہوگا۔

بلند علی پیرا غیر متم مستحکم کار (شکل ۳.۲۴- الف) کی کارکردگی جدول ۳.۱۱- الف میں پیش کی گئی ہے۔ غیر محراز مستحکم کار کا محراز ”بلند رکاوٹی حال“ میں ہوگا۔ جدول- الف کی اولین دو صف اس صورت کو ظاہر کرتی ہیں؛ چونکہ غیر محراز حال میں مداحصل کی قیمت نتائج پر اثر انداز نہیں ہوتی، انہیں جدول میں x سے ظاہر کیا جاتا ہے (جدول- ب دیکھیں)؛ جہاں x ”غیر دلچسپ“ قیمتوں کو ظاہر کرتا ہے (جن کا 0 یا 1 ہونے کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا)۔

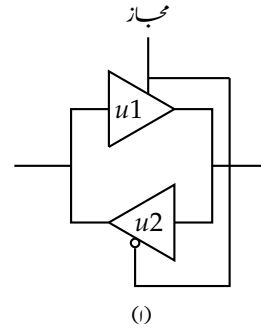
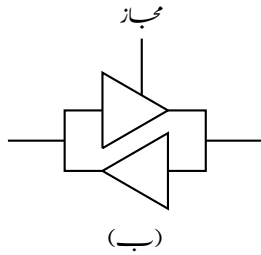
جدول سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ”محراز“ کو پلٹ (0) کرنے سے مستحکم کار بلند رکاوٹی حال اختیار کر کے، محراز سے جڑے ادوار پر کسی قسم کا اثر نہیں رکھتا۔ محراز بلند (1) کرنے سے محراز پر وہی مواد محراز ہوگا جو مداحصل پر مہیا کیا جائے۔

مستحکم کار داخلی جانب سے خارجی جانب مواد منتقل کرتا ہے۔ جہاں دو ادوار کے مابین دونوں جانب مواد کی ترسیل درکار ہو، وہاں دو مستحکم کار آپس میں متوازی الٹ جوڑے جاتے ہیں، شکل ۳.۲۶- الف دیکھیں۔ اس کو دو طرفہ مستحکم کار کہتے ہیں۔ شکل- ب میں اس کی علامت پیش کی گئی ہے۔ بلند ”محراز“ کی صورت میں $u1$ محراز اور $u2$ معذور ہوگا بلکہ مواد بائیں سے دائیں منتقل ہوگا، جبکہ پلٹ ”محراز“ کی صورت میں $u2$ محراز اور $u1$

active high non inverting buffer^۱
active high inverting buffer^۲
active low non inverting buffer^۳
active low inverting buffer^۴

جدول ۱۱: بلند عمل پیرا غیر متمم مستحکم کار کی کارکردگی۔

(ب)			(i)		
مخارج	مداحصل	مجاز	مخارج	مداحصل	مجاز
بلند رکاوٹی حال	x	0	بلند رکاوٹی حال	0	0
0	0	1	بلند رکاوٹی حال	1	0
1	1	1	0	0	1
			1	1	1



شکل ۲۶: ۳.۲: دو طرفہ مستحکم کار۔

معذور ہو گا لہذا مواد دائیں سے بائیں منتقل ہو گا۔

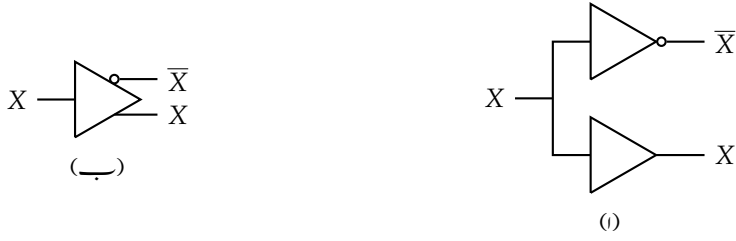
اسی طرح متمم دو طرفہ مستحکم کار بھی بنایا جاتا ہے، جو مواد کا متمم حناج کرے گا۔

مستحکم کار اور متمم مستحکم کار کے مداحصل آپس میں جوڑنے سے ان کے مخارج پر تفاد حاصل کیے جاسکتے ہیں؛ شکل ۳.۲-الف دیکھیں۔ شکل-ب میں اس کی علامت پیش کی گئی ہے۔

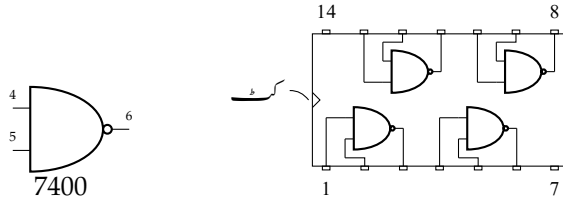
۳.۴.۲ مخلوط ادوار

عام دستیاب ضرب متمم گیٹ شکل ۳.۲۸ میں دکھایا گیا ہے۔ برقیاتی ادوار، عموماً، اسی طرح ڈبلی میں بند دستیاب ہوں گے جنہیں مخلوط دور کہتے ہیں۔ مخلوط ادوار پر مخلوط دور کا اعدادی نام مثلاً 7400 درج ہو گا؛ اس عدد کے ہندسوں کے نیچے یا اطراف پر حروف بھی ہوں گے جو اضافی معلومات فراہم کرتے ہیں۔ ساتھ ہی ڈبلی پر دوسرا عدد مخلوط دور تیار کرنے کی تاریخ دے گا۔ مثلاً یہاں دوسرے عدد کے مطابق یہ مخلوط دور سن 1976 کے پینتالیسویں (45) ہفتے میں کارخانے میں تیار کیا گیا۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، اس مخلوط دور میں چار ضرب متمم گیٹ موجود ہیں۔

ڈبلی پر ”کٹ“ کے نشان سے گھڑی مخالف رخ پیٹے گئے جاتے ہیں۔ گیٹ کی علامت میں پیٹے پر لکھا عدد ڈبلی



شکل ۳.۲: اشارہ اور اشارے کا متمم دیتا مستحکم کار۔



شکل ۳.۲۸: مخلوط دور 7400

میں اس پنیے کا مقام دیتا ہے۔ یوں گیٹ کے حنا جی پنیے پر 6 اس پنیے کا ڈبی میں مقام دیتا ہے۔ گیٹ کا حنا کہ بناتے وقت اس کے متریب مخلوط دور کا نام (یا نمبر جو یہاں 7400 ہے) بھی لکھا جاتا ہے۔ چند مخلوط ادوار درج ذیل ہیں۔

نام	گیٹ	ڈبی میں گیٹوں کی تعداد
7400	دومدا حنا ضرب متمم	4
7402	دومدا حنا جمع متمم	4
7404	نئی	6
7406	متمم مستحکم کار	6
7408	دومدا حنا ضرب	4

مشق ۱.۳: انٹرنیٹ سے مندرجہ بالا تمام مخلوط ادوار کے معلوماتی صفحات حاصل کریں اور ان میں علیحدہ علیحدہ گیٹوں کے مقام دریافت کریں۔ معلوماتی صفحات میں بکشرت مواد موجود ہوگا جنہیں دیکھ کر پریشان مت ہوں۔

آپ نے کئی مخلوط ادوار جدول ۳.۲۸ میں دیکھے جن کے نمبر 74 سے شروع ہوئے۔ دراصل $74xx$ مخلوط ادوار کا ایک سلسلہ ہے جس میں جیسے جیسے نئے ادوار بنائے گئے، انہیں شامل کیا گیا۔ ان اعداد ($74xx$) کا از خود کوئی مطلب نہیں۔ اسی طرح کا دوسرا سلسلہ $40xx$ پکارا جاتا ہے، جس میں تمام مخلوط ادوار کے نمبر 40 سے شروع ہوتے ہیں۔

مخلوط ادوار سے کارکردگی حاصل کرنے کے لئے ان کو برقی دباؤ مہیا کرنا لازم ہے۔ سلسلہ 7400 کے تمام مخلوط ادوار مثبت یک سمتی پانچ وولٹ ($5V$) پر کام کرتے ہیں۔ شکل ۳.۲۸ میں دکھائے گئے مخلوط دور کو یک سمتی برقی دباؤ پنیا سات (7) اور چودہ (14) پر مہیا کیا جائے گا، جہاں پنیا 14 مثبت ہوگا۔ جن دوپنیوں پر مخلوط دور کو برقی طاقت مہیا کی جاتی ہے، انہیں طاقت پنیے کہتے ہیں۔

مشق ۳.۲: انٹرنیٹ سے سلسلہ $40xx$ میں دستیاب چار مداخلت ضرب گیر مخلوط دور کا نمبر دریافت کریں۔ اس مخلوط دور کو کتنا برقی دباؤ درکار ہوگا؟

۳.۵ بولین تفاعل کا تخمینہ

منطقی ضرب، جمع، منفی تفاعل کے جدول آپ نے دیکھے۔ منطقی تفاعل کے جدول کو اس کتاب میں منطقی جدول کہ جائے گا۔ منطقی تفاعل کا تخمینہ لگانے میں منطقی جدول نہایت کارآمد ثابت ہوگا۔ بولین تفاعل کا تخمینہ لگاتے وقت (اس کے) آزاد بولین متغیرات کی تمام ممکن قیمتوں کو ترتیب وار لکھ کر تفاعل حل کیا جائے گا۔

۳.۵.۱ بولین تفاعل کا تخمینہ

بولین تفاعل کا تخمینہ لگانے کی خاطر ہم بولین تفاعل $Z = A + B\bar{C}$ کو مثال لیتے ہیں۔ اس تفاعل کے تین آزاد متغیرات ہیں، لہذا تین ہندسوں کے تمام شنائی اعداد لکھ کر آزاد متغیرات کی تمام ممکن ترتیب کا جدول لکھتے ہیں۔

A	B	C
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

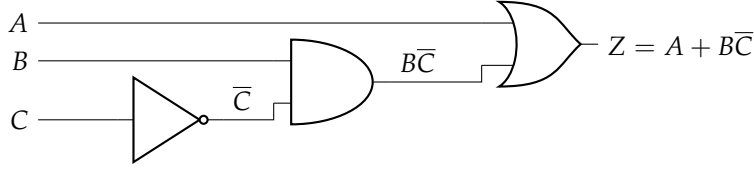
تفاعل میں C کی بجائے \bar{C} استعمال ہوا ہے، لہذا جدول میں \bar{C} خانہ شامل کرتے ہیں۔ پہلی صف میں $ABC = 000$ ہے؛ یوں C کی قیمت 0 لہذا \bar{C} کی قیمت 1 ہوگی، جس کو نئی قطار میں بطور پہلا جزو درج کرتے ہیں۔ یاد رہے کہ C اور \bar{C} ایک ہی متغیر کے دو پہلو ہیں، لہذا متغیرات کی تعداد تین رہے گی۔

A	B	C	\bar{C}
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

تفاعل کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر B اور \bar{C} کا منطقی ضرب $B\bar{C}$ درکار ہے، لہذا صف در صف B اور \bar{C} کی (مطابقتی قیمتوں کی) منطقی ضرب لے کر نئی قطار میں (مطابقتی صف میں) درج کرتے ہیں۔

A	B	C	\bar{C}	$B\bar{C}$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

اب بولین تفاعل $A + B\bar{C}$ کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ جدول میں ایک نیا خانہ شامل کرتے ہیں، جس میں A اور $B\bar{C}$ کا منطقی جمع درج کیا جائے گا۔



شکل ۳.۲۹: تفاعل $A + B\bar{C}$ کو عددی دور۔

A	B	C	\bar{C}	$B\bar{C}$	$A + B\bar{C}$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

اس جدول میں دایاں حسانہ (قطار) دیے گئے بولین تفاعل کی قیمت دیتا ہے۔ یہ آزاد متغیرات کی تین ممکنہ قیمتوں کے لئے 0 اور باقی تمام کے لئے 1 کے برابر ہے۔ اس تفاعل کا منطقی گیتوں کے ذریعہ حصول شکل ۳.۲۹ میں دکھایا گیا ہے۔

درج بالا جدول میں کسی بھی صف میں A ، B ، اور C کی قیمتیں اس دور (شکل ۳.۲۹) کو مہیا کرنے سے دور، اسی صف میں دی گئی، تفاعل کی قیمت دے گا۔ یوں پہلی صف میں $A = 0$ ، $B = 0$ ، اور $C = 0$ کے لئے دور $Z = 0$ دے گا۔ تیسری صف میں $A = 0$ ، $B = 1$ ، اور $C = 0$ ہیں جن کے لئے، عین جدول کے مطابق، $Z = 1$ حاصل ہوگا۔

۳.۶ توسین میں بند بولین تفاعل

روزمرہ الجبرا کی طرح بولین الجبرا میں بھی توسین میں بند تفاعل پہلے حل کئے جاتے ہیں۔

مثال ۳.۱: تفاعل $\bar{A} + B(\bar{B} + A)$ حل کریں۔

حل: تفاعل میں دو آزاد متغیرات ہیں لہذا دو ہندسوں پر مسخنی شنائی گسنتی لکھ کر آزاد متغیرات کی تمام ترتیب حاصل ہوں گی۔

A	B
0	0
0	1
1	0
1	1

تفاعل میں دونوں متغیرات کے متہم استعمال ہوئے ہیں لہذا جدول میں ان کے حنائے بنائے ہیں۔

A	B	\bar{A}	\bar{B}
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0

اب قوسین میں بند حصہ $(\bar{B} + A)$ کا حنائے بنائے ہیں۔

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$(\bar{B} + A)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

اس کے ساتھ $B(\bar{B} + A)$ کا حنائے بنائے ہیں۔ یہ حنائے جدول میں دیے $(\bar{B} + A)$ اور B کے مطابقتی اجزاء کی منطقی ضرب سے حاصل ہوگا۔

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$(\bar{B} + A)$	$B(\bar{B} + A)$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1

اب ہم مکمل بولین تفاعل کی قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔ تفاعل $\bar{A} + B(\bar{B} + A)$ حاصل کرنے کی حنائے $B(\bar{B} + A)$ اور \bar{A} کا منطقی جمع حاصل کرنا ہوگا۔

A	B	\bar{A}	\bar{B}	$(\bar{B} + A)$	$B(\bar{B} + A)$	$\bar{A} + B(\bar{B} + A)$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1



۳.۷. بولین الجبرا کے بنیادی قوانین

بولین الجبرا کے پانچ بنیادی قوانین مندرجہ ذیل ہیں۔

۱ اگر $X \neq 0$ ہو تب $X = 1$ ہوگا، اور

۲ اگر $X \neq 1$ ہو تب $X = 0$ ہوگا۔

۳ منطقی جمع

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = 1$$

۴ منطقی ضرب

$$0 \cdot 0 = 0$$

$$0 \cdot 1 = 0$$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

۵ منطقی نفی

$$\overline{0} = 1$$

$$\overline{1} = 0$$

اگرچہ یہ پانچ قوانین نہایت سادہ معلوم ہوتے ہیں، ان سے مکمل بولین الجبرا اخذ کیا جاسکتا ہے۔ بولین الجبرا کے چند قوانین جدول ۳.۱۲- الف اور ب میں پیش کیے گئے ہیں۔ یہ تمام درج بالا پانچ بنیادی قوانین سے اخذ کیے جاسکتے ہیں۔

بولین مساوات ثابت کرنے کا ایک اہم طریقہ بولین جدول سے اخذ کرنے کا طریقہ کہلاتا ہے۔ آئیں، درج بالا میں سے چند قوانین اس طریقہ سے حاصل کریں۔

مثال ۳.۲: جدول ۳.۱۲- الف کی شق 1 کو بولین جدول کی مدد سے ثابت کریں۔

حل: اس شق کے بائیں ہاتھ، X واحد متغیر ہے۔ اس کے بولین جدول میں دو اندراج 0 اور 1 ہوں گے، جو ایک ہندسی ثنائی عدد کی تمام ممکن قیمتیں ہیں۔

جدول ۱۲: ۳: بولین الجبرا کے چند بنیادی قوانین۔

(ب) دوسرا پہلو۔		(۱) پہلا پہلو۔	
شرق	مساوات	شرق	مساوات
1	$1 + X = 1$	1	$0 \cdot X = 0$
2	$0 + X = X$	2	$1 \cdot X = X$
3	$X + \bar{X} = 1$	3	$X \cdot \bar{X} = 0$
4	$X + X = X$	4	$X \cdot X = X$
5	$X + Y = Y + X$	5	$X \cdot Y = Y \cdot X$
6	$(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$	6	$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$
7	$X(X + Y) = X$	7	$X + XY = X$
8	$X + XY = X$	8	$X(X + Y) = X$
9	$XY + XZ = X(Y + Z)$	9	$(X + Y)(X + Z) = X + YZ$
10	$X(\bar{X} + Y) = XY$	10	$X + \bar{X}Y = X + Y$
11	$(X + Y)(Y + Z)(\bar{Y} + Z) = (X + Y)Z$	11	$XY + YZ + \bar{Y}Z = XY + Z$
12	$X + YZ = (X + Y)(X + Z)$	12	$X(Y + Z) = XY + XZ$
13	$\bar{\bar{X}} = X$	13	$\bar{\bar{X}} = X$

X
0
1

اس میں $0 \cdot X$ کا خائن شامل کرتے ہیں، جس میں $0 \cdot 0 = 0$ اور $0 \cdot 1 = 0$ درج ہوں گے۔

X	$0 \cdot X$
0	0
1	0

اس جدول کی دائیں قطار کہتی ہے کہ $0 \cdot X$ ہمیشہ 0 ہوگا۔ ہم یہی ثابت کرنا چاہتے تھے۔ □

اس طرح کے سوال، جن میں ایک متغیر X کو مستقل عدد C سے منطقی ضرب دینا ہو، کی قدم با قدم ترکیب دیکھتے ہیں۔ متغیر X کے تمام ممکنہ قیمتوں کے جدول میں مستقل C کی قطار شامل کریں۔ موجودہ مثال میں مستقل 0 ہے، لہذا C کی قطار میں تمام اندراج کی قیمت 0 ہوگی۔

C	X
0	0
0	1

اب $0 \cdot X$ کی قطار شامل کریں۔

C	X	$C \cdot X$
0	0	0
0	1	0

ہم دیکھتے ہیں کہ $C \cdot X$ ہمیشہ 0 ہے، لہذا $0 \cdot X = 0$ ہوگا۔

مثال ۳.۳: جدول ۳.۱۲-الف کی شق 2 کو بولین جدول سے ثابت کریں۔

حل: اس شق کے بائیں ہاتھ X واحد متغیرہ، جبکہ 1 مستقل ہے۔ متغیرہ کا بولین جدول لکھتے ہیں؛ ساتھ ہی مستقل 1 کی قطار بھی شامل کرتے ہیں، جس کے تمام اندراج کی قیمت 1 ہوگی۔ آخر میں $1 \cdot X$ کی قطار شامل کرتے ہیں۔

1	X	$1 \cdot X$
1	0	0
1	1	1

ہم دیکھتے ہیں کہ $1 \cdot X$ اور X کی مطابقتی قیمتیں ہمیشہ ایک جیسی ہیں، لہذا اثبات ہوا کہ $1 \cdot X = X$ ہوگا۔ □

مثال ۳.۴: $X \cdot \bar{X} = 0$ ثابت کریں۔ حل:

X	\bar{X}	$X \cdot \bar{X}$
0	1	0
1	0	0

□

مثال ۳.۵: ثابت کرتے ہیں کہ $X \cdot X = X$ ہے۔ اگر $X = 0$ ہو تب $X \cdot X = 0 \cdot 0 = 0$ ہوگا جو X کے برابر ہے۔ اسی طرح $X = 1$ کی صورت میں $X \cdot X = 1 \cdot 1 = 1$ ہوگا جو X کے برابر ہے۔ ہن نے دیکھا کہ X کی تمام قیمتوں کے لئے یہ فقرہ درست ہے۔ □

مثال ۳.۶: فقرہ $\bar{\bar{X}} = X$ ثابت کریں۔ حل:

X	\bar{X}	$\bar{\bar{X}}$
0	1	0
1	0	1

□

مثال ۷.۳: ثابت کریں کہ $(0 + X = X)$ ہوگا۔ حل:

0	X	$0 + X$
0	0	0
0	1	1

□

دائیں دو قطار ایک جیسے ہیں لہذا ثبوت پورا ہوا۔

مثال ۸.۳: $(1 + X = 1)$ ثابت کریں۔ حل:

1	X	$1 + X$
1	0	1
1	1	1

□

دائیں دو قطار ایک جیسے ہیں لہذا ثبوت پورا ہوتا ہے۔

مثال ۹.۳: فترہ $X + Y = Y + X$ ثابت کریں۔ حل:

X	Y	$X + Y$	$Y + X$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

□

دائیں دو قطار ایک جیسے ہیں لہذا ثبوت پورا ہوتا ہے۔

مثال ۱۰.۳: ثابت کریں کہ $X(Y + Z) = XY + XZ$ ہوگا۔ حل:

X	Y	Z	$Y + Z$	XY	XZ	$X(Y + Z)$	$XY + XZ$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

□

دائیں دو قطار ایک جیسے ہیں لہذا ثبوت پورا ہوا۔

مثال ۳.۱۱: ثابت کریں $X + XY = X$ ہوگا۔

حل: اس کو بولین جدول کے بجائے بولین الجبرا کی مدد سے حل کرتے ہیں۔ ہم مساوات کے بائیں ہاتھ کو $XZ + XY$ لکھ سکتے ہیں جہاں $Z = 1$ ہوگا۔ یوں جدول ۳.۱۲-الف کی شق 12 کے تحت درج ذیل ہوگا، جہاں Z کی قیمت 1 لی گئی ہے۔

$$X + XY = X(1 + Y)$$

جدول ۳.۱۲-ب کی شق 1 کے تحت $1 + Y = 1$ ہوگا، لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$X + XY = X(1 + Y) = X \cdot 1 = X$$

□ جہاں آخری قدم پر جدول ۳.۱۲-الف کی شق 2 استعمال کی گئی۔

جدول ۳.۱۲-الف کی شق 5 کو متعدد متغیرات تک وسعت دی جاسکتی ہے۔ تین متغیرات کے لئے درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} ABC &= BAC \\ &= BCA \\ &= CBA \\ &= CAB \end{aligned}$$

اس طرح جدول ۳.۱۲-ب کی شق 5 کو بھی دو سے زیادہ متغیرات کے لئے وسعت دی جاسکتی ہے۔ تین متغیرات کے لئے، یہ شق درج ذیل صورتیں اختیار کرتی ہے۔

$$\begin{aligned} A + B + C &= B + A + C \\ &= B + C + A \\ &= C + B + A \\ &= C + A + B \end{aligned}$$

۳.۸ ڈی مارگن کے کلیات

دونہایت اہم قوانین جنہیں ڈی مارگن کے کلیات (یا ڈی مارگن کے مسائل) کہتے ہیں مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} \overline{X + Y} &= \overline{X} \cdot \overline{Y} \\ \overline{X \cdot Y} &= \overline{X} + \overline{Y} \end{aligned} \quad (3.10)$$

ان دو مسائل کو بولین جدول کی مدد سے ثابت کرتے ہیں۔ ڈی مارگن کے پہلے مسئلہ $\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$ کا ثبوت درج ذیل ہے۔

X	Y	\bar{X}	\bar{Y}	$X + Y$	$\overline{X + Y}$	$\overline{X \cdot Y}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

ڈی مارگن کے دوسرے مسئلہ $\overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$ کا ثبوت درج ذیل ہے۔

X	Y	\bar{X}	\bar{Y}	$X \cdot Y$	$\overline{X \cdot Y}$	$\overline{X} + \overline{Y}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

ڈی مارگن کے مسائل منطقی جمع کو منطقی ضرب میں اور منطقی ضرب کو منطقی جمع میں تبدیل کرتے ہیں، اور بولین تفسیر حاصل کرنے میں مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

مثال کے طور پر، جداول ۳.۱۲-الف کی پہلی شق $0 \cdot X = 0$ کا متمم لیتے ہیں۔

$$\overline{0 \cdot X} = \overline{0}$$

بائیں ہاتھ ڈی مارگن کا دوسرا مسئلہ لاگو کرتے ہیں۔

$$\overline{0} + \overline{X} = \overline{0}$$

مزید، چونکہ 0 کا متمم 1 ہے، یعنی $\overline{0} = 1$ ہوگا، لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$1 + \overline{X} = 1$$

اس مساوات میں \overline{X} کو بولین متغیرہ Z تصور کیا جاسکتا ہے۔ ہوں درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$1 + Z = 1$$

اس کا جدول ۳.۱۲-ب کی شق 1 سے موازنہ کریں۔ متغیرہ کے نام مختلف ہونے کے علاوہ دونوں یکساں ہیں۔

ڈی مارگن مسائل کی مدد سے ہم نے دیکھا کہ

$$0 \cdot X = 0$$

اور

$$1 + X = 1$$

درحقیقت ایک ہی تفاعل کے دو پہلو ہیں۔

$$(0 \cdot X = 0) \Leftrightarrow (1 + X = 1) \quad (\text{مثالہ})$$

اس مسئلہ کو ڈی مارگن کے پہلے مسئلہ کی مدد سے بھی دیکھا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم بولین تفاعل $1 + X = 1$ کے دونوں اطراف کا متمم لیتے ہیں۔

$$\overline{1 + X} = \overline{1}$$

بائیں ہاتھ ڈی مارگن کا پہلا مسئلہ لاگو کرتے ہیں۔

$$\overline{1} \cdot \overline{X} = \overline{1}$$

اب $\overline{1}$ کی جگہ 0 ڈالتے ہیں۔

$$0 \cdot \overline{X} = 0$$

یہ مساوات کسی بھی متغیرہ \overline{X} کے لئے درست ہے۔ اس متغیرہ کو ہم Z بھی پکار سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$0 \cdot Z = 0$$

ہم دیکھتے ہیں کہ یہ بالکل $0 \cdot X = 0$ کی طرح ہے۔ مقرر صرف متغیرہ کے نام کا ہے۔ لہذا اثبات ہوا کہ $1 + X = 1$ اور $0 \cdot X = 0$ ایک ہی تفاعل کے دو پہلو ہیں۔

مثال ۱۲: ثابت کریں کہ $1 \cdot X = X$ اور $0 + X = X$ ایک ہی تفاعل کی دو شکلیں ہیں۔

حل: $1 \cdot X = X$ کے دونوں اطراف کا متمم لیتے ہیں۔

$$\overline{1 \cdot X} = \overline{X}$$

بائیں ہاتھ ڈی مارگن کا دوسرا قانون لاگو کرتے ہیں

$$\overline{1} + \overline{X} = \overline{X}$$

اور $\overline{1}$ کی جگہ 0 پُر کرتے ہیں۔

$$0 + \overline{X} = \overline{X}$$

متغیرہ \overline{X} کو نینے نام Z سے پکارتے ہیں۔

$$0 + Z = Z$$

یہ مساوات کہتی ہے کہ صفر جمع ایک بولین متغیرہ اس متغیرہ کے برابر ہوگا۔ یوں ثابت ہوا کہ $1 \cdot X = X$ اور $0 + X = X$ مثلاً ہیں۔

□

آپ اسی مثال کو پچھلی مثال کی طرح الٹ رخ میں ثابت کریں۔

مثال ۳.۱۳: بولین تفاعل $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$ کا مثلاً ڈی مارگن کے قانون لاگو کر کے حاصل کریں۔

حل: دئے گئے تفاعل کے دونوں اطراف کا متمم لیتے ہیں۔

$$\overline{(X \cdot Y) \cdot Z} = \overline{X \cdot (Y \cdot Z)}$$

دونوں اطراف ڈی مارگن کا دوسرا قانون لاگو کرتے ہیں۔

$$(\overline{X \cdot Y}) \cdot \overline{Z} = \overline{X} \cdot (\overline{Y \cdot Z})$$

ڈی مارگن کا قانون استعمال کرتے وقت قوسین میں بند حصہ کو ایک متغیرہ تصور کیا گیا۔ دونوں اطراف قوسین میں بند تفاعل پر دوبارہ ڈی مارگن کا دوسرا قانون لاگو کرتے ہیں۔

$$(\overline{X} + \overline{Y}) \cdot \overline{Z} = \overline{X} \cdot (\overline{Y} + \overline{Z})$$

یہاں تینوں متغیرات کے متمم لکھے گئے ہیں۔ ہم انہیں تین نئے ناموں سے پکار سکتے ہیں، مثلاً، \overline{X} کو A پکارتے ہیں، \overline{Y} کو B اور \overline{Z} کو C ، لہذا درج ذیل لکھا جائے گا، جو متغیرات کے نام مختلف ہونے کے علاوہ، جدول ۳.۱۲-ب کی شق 6 ہے۔

$$(A + B) \cdot C = A \cdot (B + C)$$

□

۳.۹ حبڑواں بولین تفاعل

گزشتہ حصہ میں دیکھا گیا کہ بولین تفاعل کے دو پہلو ہوتے ہیں۔ یوں کسی بولین تفاعل کو ثابت کرتے ہی اس کا حبڑواں تفاعل فوراً لکھا جاسکتا ہے۔ جدول ۳.۱۲-الف اور ب میں اس طرح کے حبڑواں بولین تفاعل پیش کیے گئے ہیں۔ ان جدول میں آخری شق کے علاوہ ہر شق ایک تفاعل کے دو پہلو پیش کرتا ہے۔ مثلاً، جدول-الف کی شق 7 کا دوسرا پہلو جدول-ب کی شق 7 دے گا۔

۳.۱۰ ارکان ضرب کے مجموعہ کی ترکیب

منطقی مسئلہ کو بولین تفاعل کی صورت میں لکھنا مندرجہ ذیل مثال سے باآسانی سمجھا جاسکتا ہے۔

جدول ۳.۱۳: تفاعل کا جدول (برائے حصہ ۳.۱۰)

A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

فرض کریں، ایک تفاعل جس کے آزاد متغیرات A اور B، جبکہ تابع متغیر C ہے، اس صورت بلند ہوتا ہے جب $A = 0$ اور $B = 1$ ہو، یا جب $A = 1$ اور $B = 1$ ہو۔

ان معلومات کو جدول ۳.۱۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ جدول میں ”ارکان ضرب“ کی قطار شامل کریں۔ اس قطار کے ہر خانے میں اسی صف کے آزاد متغیرہ پرست ہونے کی صورت میں متغیرہ کا متمم اور بلند صورت میں متغیرہ بذات خود درج کیا جائے گا۔ اس عمل کو سمجھنے کی خاطر، جدول کی پہلی صف پر توجہ رکھیں۔ یہاں $A = 0$ اور $B = 0$ ہے، لہذا پہلی صف میں رکن ضرب $\overline{A}\overline{B}$ ہوگا۔ دوسری صف میں $A = 0$ اور $B = 1$ ہیں، لہذا دوسری صف میں $\overline{A}B$ درج ہوگا۔

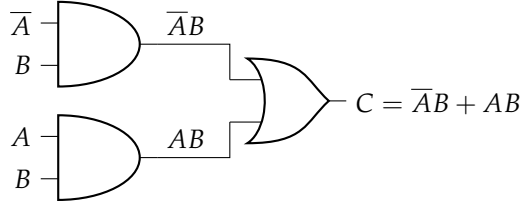
A	B	C	ارکان ضرب
0	0	0	$\overline{A}\overline{B}$
0	1	1	$\overline{A}B$
1	0	0	$A\overline{B}$
1	1	1	AB

تفاعل کے جدول کے اٹھ تمام ارکان ضرب کا مجموعہ لیں جن کے صف میں تابع متغیرہ C کی قیمت 1 ہو۔ یہ مجموعہ تابع متغیرہ کے برابر ہوگا۔ اس طرح تفاعل لکھنے کو ارکان ضرب کے مجموعہ کی ترکیب کہتے ہیں۔ (اس کو مجموعہ ارکان ضرب بھی پکار سکتے ہیں)۔
یوں درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(3.11) \quad C = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B + A\overline{B} + AB \quad (\text{ارکان ضرب کا مجموعہ})$$

ساوات ۳.۱۱ میں حاصل تفاعل کا منطقی دور شکل ۳.۲۰ میں دکھایا گیا ہے۔

ارکان ضرب کے مجموعہ سے حاصل مساوات ہر صورت ضرب گیٹوں کی ایک قطار (یا صف) اور ایک جمع گیٹ سے حاصل کی جاسکتی ہے (جہاں فرض کیا جاتا ہے کہ، آزاد متغیرات کے ساتھ ان کے متمم بھی میسر ہیں)۔ ایسا دور ضرب و جمع کہلائے گا۔



شکل ۳.۳۰: ارکان ضرب کے مجموعہ (مساوات ۳.۱۱) کا منطقی دور۔

مساوات ۳.۱۱ اور شکل ۳.۳۰ کی درستگی کی تصدیق بولین جدول سے کرتے ہیں (جدول میں موازنے کے لئے C کا حسانہ بھی پیش کیا گیا ہے)۔

A	B	C	\bar{A}	$\bar{A}B$	AB	$\bar{A}B + AB$
0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1

اس جدول کا دایاں قطار C کے برابر ہے۔

مساوات ۳.۱۱ لکھنے کا دوسرا انداز جو نہایت مقبول ہے سمجھنے کی خاطر تفاعل کے جدول میں ”ارکان ضرب“ کے علاوہ ایک نئی قطار (m) شامل کرتے ہیں۔

A	B	C	ارکان ضرب	m
0	0	0	$\bar{A}\bar{B}$	m_0
0	1	1	$\bar{A}B$	m_1
1	0	0	$A\bar{B}$	m_2
1	1	1	AB	m_3

نئی قطار میں m ارکان ضرب کو ظاہر کرتا ہے، لہذا تفاعل عمل C کی مساوات لکھتے ہوئے $\bar{A}B$ کی بجائے m_1 اور AB کی بجائے m_3 لکھتے ہیں۔ یوں مساوات ۳.۱۱ سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
 C &= \bar{A}B + AB \\
 &= m_1 + m_3 \\
 &= \sum(m_1, m_3) \\
 &= \sum(1, 3)
 \end{aligned}$$

(۳.۱۲)

ارکان ضرب روایتاً (چھوٹی لکھائی میں) m_x لکھے جاتے ہیں، جہاں زیر نوشت x جدول میں مطابقتی صف کے آزاد متغیرات کو نشانہ عدد (کے ہندسے) سمجھ کر، برابر کا اشاری عدد لیا جاتا ہے۔

مثال ۳.۱۴: درج ذیل بولین جدول سے بولین تفاعل کی مساوات حاصل کریں۔

A	B	C	Z
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

حل: جدول میں Z تابع متغیر ہے۔ جدول کی دائیں جانب ارکان ضرب کی قطار شامل کرتے ہیں۔

A	B	C	Z	ارکان ضرب	m
0	0	0	1	$\overline{A} \overline{B} \overline{C}$	m_0
0	0	1	0	$\overline{A} \overline{B} C$	m_1
0	1	0	1	$\overline{A} B \overline{C}$	m_2
0	1	1	1	$\overline{A} B C$	m_3
1	0	0	0	$A \overline{B} \overline{C}$	m_4
1	0	1	0	$A \overline{B} C$	m_5
1	1	0	1	$A B \overline{C}$	m_6
1	1	1	1	$A B C$	m_7

اُن ارکان ضرب کا مجموعہ لیتے ہیں جن کی صف میں متغیرہ کی قیمت 1 ہے۔

$$Z = \overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{A} B \overline{C} + \overline{A} B C + A B \overline{C} + A B C$$

یہ دیے گئے تفاعل کی مساوات ہے جس کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$Z = \sum (m_0, m_2, m_3, m_6, m_7)$$

جدول ۳.۱۲ میں دیے گئے قوانین استعمال کرتے ہوئے مساوات کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 Z &= \overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{A} B \overline{C} + \overline{A} B C + A B \overline{C} + A B C \\
 &= \overline{A} (\overline{B} + B) \overline{C} + \overline{A} B C + A B (\overline{C} + C) \\
 &= \overline{A} (1) \overline{C} + \overline{A} B C + A B (1) \\
 &= \overline{A} (\overline{C} + B C) + A B \\
 &= \overline{A} (\overline{C} + B) + A B \\
 &= \overline{A} \overline{C} + \overline{A} B + A B \\
 &= \overline{A} \overline{C} + (\overline{A} + A) B \\
 &= \overline{A} \overline{C} + B
 \end{aligned}$$

یہ دیے گئے بولین جدول کی سادہ ترین مساوات ہے۔ اس کا بولین جدول لکھ کر آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ اصل تفعل ہی ہے۔ □

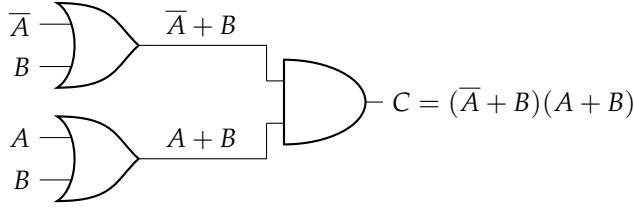
۳.۱۱ ارکان جمع کی ضرب کی ترکیب

گزشتہ حصہ میں بولین جدول سے تفعل کا مساواتی روپ حاصل کیا گیا، جہاں ان صفوں کے ارکان ضرب کا مجموعہ لیا گیا جن میں تابع متغیرات کی قیمت 1 تھی۔ انہیں اب ”ارکان جمع“ لکھنا اور ان سے تفعل کی مساوات حاصل کرنا سیکھیں۔

حصہ ۳.۱۰ میں مستقل جدول ۳.۱۳ کو مثال بناتے ہوئے اس میں ارکان ضرب کی بجائے ارکان جمع کی قطار شامل کرتے ہیں۔ ارکان جمع لکھتے ہوئے، مطابقتی آزاد متغیرہ پرست ہونے کی صورت میں متغیرہ بذات خود اور بلند صورت میں متغیرہ کا متمم جمع کیا جاتا ہے۔ اس عمل کو سمجھنے کی خاطر، جدول کی پہلی صف پر توجہ رکھیں۔ یہاں $A = 0$ اور $B = 0$ ہے، لہذا پہلی صف میں رکن جمع $A + B$ ہوگا۔ دوسری صف میں $A = 0$ اور $B = 1$ ہیں، لہذا دوسری صف میں $A + \overline{B}$ درج ہوگا۔

A	B	C	ارکان جمع
0	0	0	$A + B$
0	1	1	$A + \overline{B}$
1	0	0	$\overline{A} + B$
1	1	1	$\overline{A} + \overline{B}$

تفعل کے جدول کے اضع تمام ارکان جمع کا حاصل ضرب لیں جن کے صف میں تفعل کے تابع متغیرہ C کی قیمت 0 ہو۔ یہ حاصل ضرب تابع متغیرہ کے برابر ہوگا۔ اس طرح تفعل لکھنے کو ارکان جمع کی ضرب کی ترکیب کہتے ہیں (اس کو حاصل ضرب ارکان جمع بھی کہا جاسکتا ہے)۔



شکل ۳.۳۱: ارکان جمع کی ضرب سے حاصل دور (مساوات ۳.۱۳)۔

یوں درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(۳.۱۳) \quad C = (A + B)(\bar{A} + B) \quad (\text{ارکان جمع کی ضرب})$$

ارکان جمع کی ضرب سے حاصل مساوات کو ہر صورت جمع گیٹوں کی ایک قطار (یا صنف) اور ایک ضرب گیٹ سے حاصل کیا جاسکتا ہے (جہاں مندرجہ کیا جاتا ہے کہ، آزاد متغیرات کے ساتھ ان کے متمم بھی میسر ہیں)۔ یوں بنائے گئے دور کو جمع و ضرب کہتے ہیں۔

مساوات ۳.۱۳ میں حاصل دور شکل ۳.۳۱ میں پیش کیا گیا ہے۔

مساوات ۳.۱۳ لکھنے کا دوسرا انداز جو نہایت مقبول ہے سمجھنے کی خاطر تفہیم کے جدول میں ”ارکان جمع“ کے علاوہ، بڑی لکھائی میں ایک نئی قطار (M) شامل کرتے ہیں، جو ارکان جمع کو ظاہر کرتا ہے۔

A	B	C	ارکان جمع	M
0	0	0	$\bar{A}\bar{B}$	M_0
0	1	1	$\bar{A}B$	M_1
1	0	0	$A\bar{B}$	M_2
1	1	1	AB	M_3

یوں مساوات ۳.۱۳ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$(۳.۱۴) \quad C = (A + B)(\bar{A} + B) = M_0M_2 = \prod(M_0, M_2) = \prod(0, 2)$$

مثال ۳.۱۵: ڈی مارگن کے کلیات استعمال کرتے ہوئے مجموعہ ارکان ضرب سے ارکان جمع کی ترکیب حاصل کریں۔

حل: ہم حصہ ۳.۱۰ میں مستعمل جدول ۳.۱۳ کو مثال بن کر اس میں \bar{C} اور ارکان ضرب کی قطاریں شامل کرتے ہیں۔

A	B	C	\bar{C}	ارکان ضرب
0	0	0	1	$\bar{A}\bar{B}$
0	1	1	0	$\bar{A}B$
1	0	0	1	$A\bar{B}$
1	1	1	0	AB

ہم \bar{C} کے لئے ارکان ضرب کا مجموعہ لکھ کر (یعنی ان ارکان ضرب کا مجموعہ جن کے صف میں \bar{C} کی قیمت 1 ہو):

$$\bar{C} = \bar{A}\bar{B} + A\bar{B}$$

دونوں اطراف کا متمم لے کر C کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\bar{\bar{C}} = C = \overline{\bar{A}\bar{B} + A\bar{B}}$$

ڈی مارگن کلیات بار بار استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} C &= \overline{\bar{A}\bar{B} + A\bar{B}} \\ &= (\overline{\bar{A}\bar{B}})(\overline{A\bar{B}}) \\ &= (\bar{\bar{A}} + \bar{\bar{B}})(\bar{A} + \bar{\bar{B}}) \\ &= (A + B)(\bar{A} + B) \end{aligned}$$

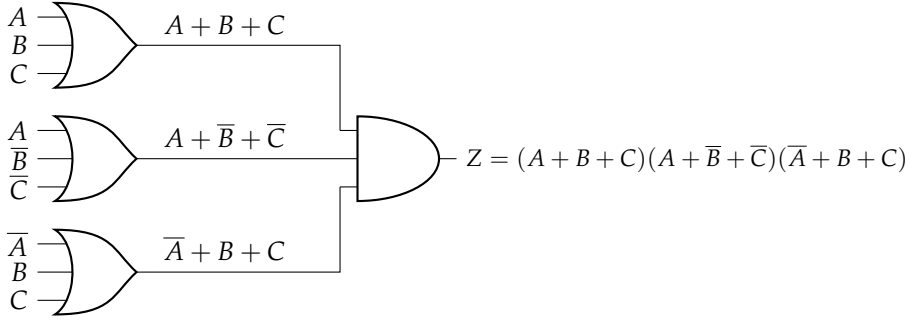
(۳.۱۵)

اس نتیجے کا مساوات ۳.۱۳ کے ساتھ موازنہ کریں۔ پس ثابت ہوا کہ مجموعہ ارکان ضرب سے ارکان جمع کی ضرب حاصل کی جاسکتی ہے۔ □

مثال ۳.۱۶: درج ذیل بولین جدول سے (۱) ارکان جمع کی ضرب، (ب) ارکان ضرب کا مجموعہ لے کر تقاسل کی مساوات حاصل کریں۔ دونوں نتائج کے ادوار دکھائیں۔

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

حل: جدول میں ارکان جمع اور ارکان ضرب کی قطاریں شامل کرتے ہیں۔



شکل ۳.۳۲: جمع و ضرب دور (مساوات ۳.۱۶)۔

A	B	C	Z	ارکان جمع	ارکان ضرب
0	0	0	0	$A + B + C$	$\overline{A} \overline{B} \overline{C}$
0	0	1	1	$A + B + \overline{C}$	$\overline{A} \overline{B} C$
0	1	0	1	$A + \overline{B} + C$	$\overline{A} B \overline{C}$
0	1	1	0	$A + \overline{B} + \overline{C}$	$\overline{A} B C$
1	0	0	0	$\overline{A} + B + C$	$A \overline{B} \overline{C}$
1	0	1	1	$\overline{A} + B + \overline{C}$	$A \overline{B} C$
1	1	0	1	$\overline{A} + \overline{B} + C$	$A B \overline{C}$
1	1	1	1	$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$	$A B C$

(۱) جن صفوں میں نتائج متغیرہ Z کی قیمت 0 ہے ان صفوں کے ارکان جمع کی ضرب مطلوب نتیجہ ہوگا۔

$$Z = (A + B + C)(A + \overline{B} + \overline{C})(\overline{A} + B + C) \quad (۳.۱۶)$$

اس کو درج ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$Z = M_0 M_3 M_4 = \prod (M_0, M_3, M_4)$$

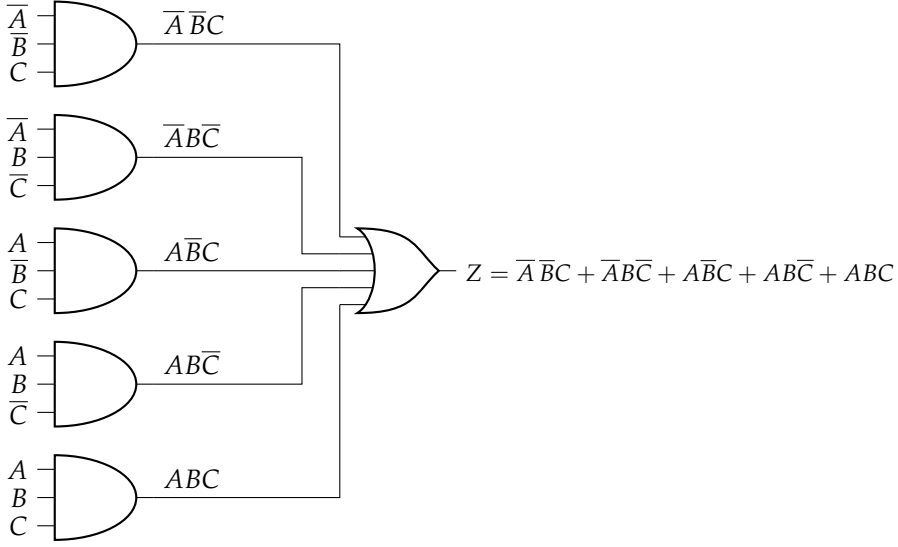
مساوات ۳.۱۶ میں حاصل نتیجہ کا جمع و ضرب دور شکل ۳.۳۲ میں پیش کیا گیا ہے۔ (ب) جدول کے ارکان ضرب کا مجموعہ لے کر ضرب دور حاصل کرتے ہیں۔

$$Z = \overline{A} \overline{B} C + \overline{A} B \overline{C} + A \overline{B} C + A B \overline{C} + A B C \quad (۳.۱۷)$$

□

اس دور کو شکل ۳.۳۳ میں پیش کیا گیا ہے۔

اس مثال میں ایک ہی تفاعل کے دو ادوار، شکل ۳.۳۲ اور شکل ۳.۳۳ پیش کیے گئے۔ پہلے دور میں تین جمع اور ایک ضرب گیٹ استعمال ہوا، جبکہ دوسرے میں پانچ ضرب اور ایک جمع گیٹ استعمال ہوا۔ (جیسا ہم ذکر کر چکے



شکل ۳.۳۳: ضرب و جمع دور (مساوات ۳.۱۷)۔

ہیں، ارکان جمع کی ضرب سے حاصل دور جمع گیٹوں کی قطار اور ایک ضرب گیٹ سے بنے گا۔ ارکان ضرب کے مجموعہ سے حاصل دور ضرب گیٹوں کی قطار اور ایک جمع گیٹ سے حاصل ہو گا۔ یوں اس تفاعل کو ضرب ارکان جمع سے حاصل کرنے میں کم منطقی گیٹ استعمال ہوئے۔ یاد رہے کہ ضرب ارکان جمع اور مجموعہ ارکان ضرب منطقی طور پر ایک ہیں۔

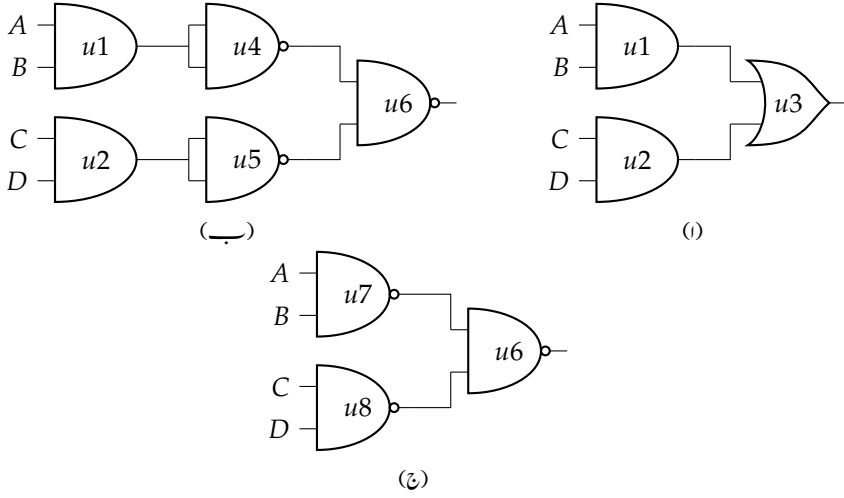
۳.۱۲ مجموعہ ارکان ضرب اور ضرب ارکان جمع کے مابین تبادلہ

ہم نے مثال ۳.۱۶ میں تفاعل کی مساواتیں، مجموعہ ارکان ضرب اور ضرب ارکان جمع کی صورت میں، حاصل کیں، جنہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$Z = m_1 + m_2 + m_5 + m_6 + m_7 = \sum(1, 2, 5, 6, 7)$$

$$Z = M_0 M_3 M_4 = \prod(0, 3, 4)$$

مجموعہ ارکان ضرب میں پہلا، دوسرا، پانچواں، چھٹا اور ساتواں رکن ضرب استعمال ہوا جبکہ صفرواں، تیسرا اور چوتھا رکن غیر متعمل رہے۔ ضرب ارکان جمع میں پہلا، دوسرا، پانچواں، چھٹا اور ساتواں رکن جمع غیر متعمل، جبکہ صفرواں، تیسرا اور چوتھا رکن استعمال ہوا۔ یہ ایک عمومی حقیقت ہے جسے استعمال کر کے تفاعل کی مساوات کو ایک روپ سے دوسرے روپ میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ ارکان جمع سے ارکان ضرب یا ارکان ضرب سے ارکان جمع کے روپ میں مساوات حاصل کرتے ہوئے پہلے روپ میں غیر متعمل ارکان، دوسرے روپ میں استعمال ہوں گے۔



شکل ۳.۱۳: ارکان ضرب کے مجموعے سے متم ضرب و متم ضرب دور کا حصول۔

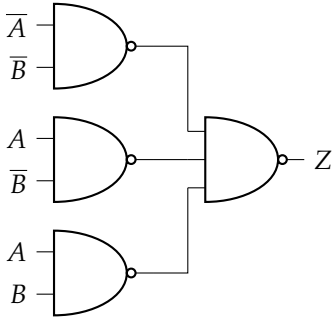
۳.۱۳ ضرب و جمع دور سے متم ضرب و متم ضرب دور کا حصول

کسی بھی یوولین تفاعل کو مجموعہ ارکان ضرب کی صورت میں بیان کیا جاسکتا ہے، جس کو ضرب گیٹوں کی قطار اور ایک جمع گیٹ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ شکل ۳.۱۳-الف میں تفاعل $AB + CD$ کا مجموعہ ارکان ضرب دور دکھایا گیا ہے۔ جمع گیٹ $u3$ کی جگہ شکل ۳.۲۰-الف کا مادی دور نصب کرتے ہوئے شکل-ب حاصل ہوگا (جہاں $u3$ کی جگہ $u4$ ، $u5$ اور $u6$ استعمال کیے گئے)۔ شکل ۳.۱۸ میں متم ضرب گیٹ بطور منفی گیٹ دکھایا گیا ہے۔ یوں ضرب گیٹ (مثلاً $u1$) اور منفی گیٹ (مثلاً $u4$) جس کو منفی گیٹ تصور کرتے ہیں) کی جگہ (شکل ۳.۱۶ دیکھیں) متم ضرب گیٹ (مثلاً $u7$) استعمال کرتے ہوئے شکل-ج حاصل ہوگا، جو صرف متم ضرب گیٹوں پر مشتمل ہے؛ یہ متم ضرب و متم ضرب دور کہلاتا ہے۔

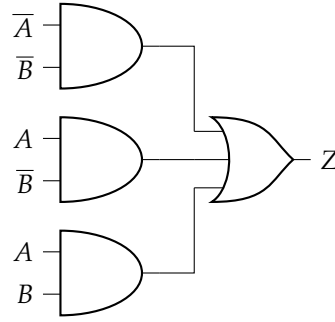
آپ نے دیکھا کہ شکل ۳.۱۳-الف کے ضرب و جمع دور میں تمام گیٹ تبدیل کر کے متم ضرب گیٹ نسب کرنے سے شکل-ج کا متم ضرب و متم ضرب دور حاصل ہوگا۔ یہ ایک اہم اور عمومی مشاہدہ ہے۔ یاد رہے کہ مجموعہ ارکان ضرب کے ضرب و جمع دور میں ضرب گیٹوں کی قطار اور ایک جمع گیٹ ہوگا۔

ضرب و جمع دور کے شکلوں و صورتوں تبدیل کیے بغیر تمام گیٹوں کی جگہ متم ضرب گیٹے نسب کرنے سے متم ضرب و متم ضرب دور حاصل ہوگا۔

سیکان کی فی مربع سٹی میٹرپستری پر بہت بڑی تعداد میں گیٹ بنائے جاسکتے ہیں اور یہ تعداد دن بادل بڑھتی



(ب)



(i)

شکل ۳.۳۵: ضرب و جمع کے متم ضرب و متم ضرب (مثال ۳.۱۷)۔

چپلی حبار ہی ہے۔ سیکان کی پستری پر ایک ہی قسم کے گیٹ نہ جتا زیادہ آسانی اور بہتر بنائے جاسکتے ہیں۔ یوں کسی بھی تفاعل کو ضرب و جمع کی بجائے متم ضرب و متم ضرب دور سے حاصل کرنا زیادہ سودمند ثابت ہوگا۔ اسی وجہ سے وسیع پیمانے کی مخلوط برقیات میں متم ضرب گیٹ نہایت مقبول ہیں۔

مثال ۳.۱۷: مندرجہ ذیل تفاعل کا متم ضرب و متم ضرب دور حاصل کریں۔

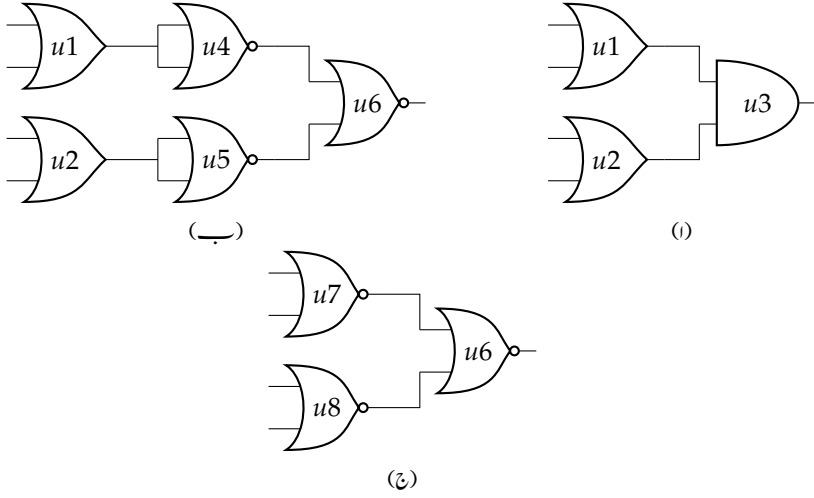
A	B	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

حل: تفاعل کا مجموعہ ارکان ضرب لکھنے کی غرض سے جدول میں ارکان ضرب کی قطار شامل کرتے ہیں۔

A	B	Z	ارکان ضرب
0	0	1	$\overline{A}\overline{B}$
0	1	0	$\overline{A}B$
1	0	1	$A\overline{B}$
1	1	1	AB

یوں $Z = \overline{A}\overline{B} + \overline{A}B + A\overline{B} + AB$ ہوگا، جو شکل ۳.۳۵-الف میں پیش ہے۔ تمام گیٹوں کی جگہ متم ضرب گیٹ نصب کرنے سے متم ضرب و متم ضرب دور حاصل ہوگا جو شکل-ب میں پیش ہے۔

□



شکل ۳.۳۶: جمع و ضرب دور سے متمم جمع و متمم جمع۔

۳.۱۴ جمع و ضرب دور سے متمم جمع و متمم جمع دور کا حصول

تفاعل کے ارکان جمع کی ضرب سے حاصل جمع و ضرب دور میں تمام گیٹوں کی جگہ متمم جمع گیٹ نصب کرنے سے تفاعل کا متمم جمع و متمم جمع دور حاصل ہوگا۔

شکل ۳.۳۶ میں جمع و ضرب دور سے وندم با وندم متمم جمع و متمم جمع دور کا حصول دکھایا گیا ہے۔ پہلی وندم میں، شکل-الف کے ضرب گیٹ u3 کی جگہ (شکل ۳.۱۹-الف کی مدد سے) مساوی جمع متمم گیٹ u4، u5، u6 نسب کیے گئے۔ اس کے بعد (شکل ۳.۱۸ کی مدد سے) u4، اور u5 کو نفی گیٹ مان کر، u1 اور u4 جوڑی کی جگہ متمم جمع u7 جبکہ، u2 اور u5 جوڑی کی جگہ متمم جمع u8 نسب کیا گیا۔ یوں شکل ۳.۳۶-ج کا متمم جمع و متمم جمع دور حاصل کیا گیا۔

شکل ۳.۳۶-الف کے جمع و ضرب دور کی شکل و صورت تبدیل کیے بغیر تمام گیٹ کی جگہ متمم جمع نسب کرنے سے شکل-ج حاصل ہوگا۔ یہ ایک اہم اور عمومی مشاہدہ ہے۔ یاد رہے کہ ضرب ارکان مجموعہ سے حاصل جمع و ضرب دور میں جمع گیٹوں کی قطار اور ایک ضرب گیٹ ہوگا۔

جمع و ضرب دور کے شکل و صورت تبدیل کیے بغیر تمام گیٹوں کی جگہ متمم جمع گیٹ نسب کرنے سے متمم جمع و متمم جمع دور حاصل ہوگا۔

جدول ۳.۱۴: تین بٹ رموز۔

تین بٹ رموز
000
001
010
011
100
101
110
111

۳.۱۵ علامتی روپ یارموز

عموماً زبانوں میں الفاظ یا معلومات کی لکھائی اس زبان کے حروف تہجی میں کی جاتی ہے۔ حروف تہجی کو سلسلہ وار اس طرح جوڑا جاتا ہے کہ ان کی آوازیں مل کر لفظ کی آواز پیدا کریں، مگر چینی زبان مختلف ہے۔ چینی زبان ایک علامتی زبان ہے جس میں ہر لفظ کی اپنی علامت یارمز ہے۔ حروف تہجی پر مبنی لکھائی، یہ حروف سیکھنے کے بعد، کوئی بھی پڑھ سکتا ہے، جبکہ رمزی لکھائی میں کسی بھی رمز کا استعمال اس وقت ممکن ہوگا جب تمام لوگ اس رمز پر متفق ہوں۔ کمپیوٹر اس لحاظ سے چینی زبان سے مشابہت رکھتا ہے، اور معلومات کو رمزی روپ میں رکھتا ہے۔

متمل وکانغذ سے انسان کسی بھی شکل کی لکیر بن کر اسے ایک علامت یارمز تصور کر سکتا ہے۔ کمپیوٹر کی دنیا میں ایسا کرنا ممکن نہیں۔ کمپیوٹر صرف 0 اور 1 جانتا ہے، لہذا اس میں رموز بھی 0 اور 1 مختلف ترتیب سے جوڑ کر بنائے جاتے ہیں۔ مثلاً، تین بٹ استعمال کر کے جدول ۳.۱۴ میں پیش رموز ممکن ہوں گے۔ یوں تین بٹ استعمال کر کے آٹھ رموز تفصیل دیے جاسکتے ہیں، جنہیں آٹھ مختلف اشیاء یا معلومات کی پہچان کے لئے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ تین بٹ استعمال کرتے ہوئے، اس سے زیادہ رموز ممکن نہیں۔ آٹھ بٹ میں $2^8 = 256$ رموز ممکن ہیں۔

۳.۱۵.۱ ایسکی رموز اور عالمی رموز

ابتداء میں، کمپیوٹر استعمال کی خاطر لاطینی حروف تہجی اور اعشاری گنتی کے رموز طے کیے گئے۔ ایک بانٹ پر مبنی رموز جو نہایت مقبول ہوئے، ایسکی^۹ رموز کہلاتے ہیں۔ لاطینی حروف تہجی اور اعشاری ہندسوں کے رموز جدول ۳.۱۵ میں پیش کیے گئے ہیں۔ ایسکی رموز میں بڑے حرف A کو 01000001₂ یعنی 16₁₆ اور صفر کو 00110000₂ (30₁₆) کے رموز مختص کیے گئے۔ یوں، اس نظام کو استعمال کرتے ہوئے کمپیوٹر A کو 01000001₂ سے، اور صفر کو 00110000₂ سے ظاہر کرے گا۔ یاد رہے کہ، اس طرح کے نظام میں جدول دیکھ کر رموز کی معنی اخذ کی جائے گی۔

^۹code
ascii codes

جدول ۳.۱۵: ایسکی رموز

ایسکی رموز	لاطینی حروف یا هندی
01000001_2	A
01000010_2	B
01000011_2	C
01000100_2	D
\vdots	\vdots
01011000_2	X
01011001_2	Y
01011010_2	Z
01100001_2	a
01100010_2	b
01100011_2	c
\vdots	\vdots
01111010_2	z
00110000_2	0_{10}
00110001_2	1_{10}
00110010_2	2_{10}
\vdots	\vdots
00111000_2	8_{10}
00111001_2	9_{10}

جدول ۱۶: ۳: اعشاری اعداد کے چارہٹ شنائی رموز۔

اعشاری اعداد	شنائی رموز اعشاریہ
0	0000
1	0001
2	0010
3	0011
4	0100
5	0101
6	0110
7	0111
8	1000
9	1001

ایک بائٹ میں $2^{00000000}$ سے $2^{11111111}$ تک 256_{10} مختلف رموز ہو گے، جو ایک محدود تعداد ہے۔ جیسے جیسے دنیا کی مختلف زبان بولنے والوں کے ہاں کمپیوٹر کا استعمال رائج ہوا، ایسی رموز کے (محدود) رموز کم پڑ گئے۔ موجودہ دور میں عالمی رموز "رائج" ہے، جس میں دنیا کی تمام زبانوں (بشمول اردو، پشتو، بلوچی، سندھی، وغیرہ) کے حروف تہجی کے رموز موجود ہیں۔ اس نظام میں ہر رمز چار بائٹ کا ہے۔ یہ کتاب عالمی رموز میں تفصیل دی گئی ہے۔ اس نظام میں ریاضیات اور سائنس کے دیگر مضامین میں درکار علامتیں بھی ڈھالی جاسکتی ہیں۔ امید یہی ہے کہ یہ نظام آنے والے زمانے میں درکار ضروریات پوری کرے گا۔

۳.۱۵.۲ اعشاری اعداد کے شنائی رموز

کمپیوٹر کی مادری زبان شنائی ہے، جبکہ انسان اعشاری نظام استعمال کرتا ہے۔ اعشاری گنتی کے کئی رموز زیر استعمال ہیں، جن میں سے ایک شنائی رموز اعشاریہ^۲ ہے۔ اعشاری گنتی کے کل دس رموز ہیں۔ جدول ۱۷: ۳: میں تین ہٹ رمز دکھائے گئے جو کل آٹھ ہیں۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے اعشاری گنتی کے دس ہندسوں کو ظاہر نہیں کیا جاسکتا۔ اس کے برعکس چارہٹ کل سولہ رموز دیں گے، جنہیں اعشاری گنتی کے دس ہندسوں کے رموز کے طور پر استعمال کیا جاسکتا ہے۔ جدول ۱۶: ۳: میں چارہٹ پر مبنی ابتدائی دس علامتیں استعمال کرتے ہوئے اعشاری گنتی کے ہندسوں کے رموز پیش کیے گئے ہیں۔ آخری چھ علامتیں زیر استعمال نہیں۔ یہ شنائی رموز اعشاریہ کہلاتے ہیں۔

۳.۱۵.۳ گرے رموز

اس نظام میں اعشاری ہندسوں کے رموز یوں رکھے گئے کہ کسی بھی دو متواتر اعشاری ہندسوں کے رموز میں صرف ایک ہٹ کا فرق ہو۔ جدول ۱۷: ۳: چارہٹ گرے رموز پیش کرتا ہے۔

^۱ uni code
^۲ binary coded decimal (BCD)

جدول ۳.۱۷: اعشاری اعداد کے چار بٹ گرے رموز۔

اعشاری اعداد	چار بٹ گرے رموز
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100
8	1100
9	1101
10	1111
11	1110
12	1010
13	1011
14	1001
15	1000

طبعی متغیرات کو عددی روپیہ میں، عموماً، گرے رموز میں لکھا جاتا ہے۔ اس کی افادیت ایک مثال سے سمجھتے ہیں۔

تصور کریں کہ ایک بڑھتے ہوئے فاصلے کو چار بٹ کے عام شنائی نظام میں ناپا جاتا ہے۔ یوں 0111_2 کے بعد 1000_2 آئے گا۔ اب تصور کریں کسی وجہ سے، اس چار بٹ شنائی عدد کا بلند رتبہ بٹ نسبتاً جلدی 0 سے 1 میں تبدیل ہوتا ہو۔ یوں ایک لمحے کے لئے 0111_2 کے بعد 1111_2 پڑھا جائے گا، جس کے بعد اصل عدد 1000_2 آجائے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک لمحے کے لئے فاصلہ غلط پڑھا جائے گا، جس سے مسائل کھڑے ہو سکتے ہیں۔ اس کے برعکس اگر گرے رمز استعمال کیا جائے تب 0100 کے بعد 1100 پڑھا جائے گا جو درست قیمت ہے۔

باب ۴

کارناف نقشہ جات

بودیلین جدول سے کسی بھی تفاعل کی مساوات بذریعہ مجموعہ ارکان ضرب یا ضرب ارکان جمع حاصل کر کے اسے گیٹوں کی مدد سے جامہ پہنایا جاسکتا ہے۔ عموماً، اس مساوات میں گیٹوں کی تعداد اور فی گیٹ مداحل کی تعداد کم کی جاسکتی ہے۔ کم مداحل کے، کم تعداد گیٹ استعمال کرنے سے عددی دور پر کم لاگت آئے گی۔ تفاعل کی سادہ صورت بودیلین منطق سے حاصل کی جاسکتی ہے، البتہ ایک نہایت عمدہ اور سادہ طریقہ کار جسے کارناف نقشہ جات کی ترکیب کہتے ہیں، استعمال کیا جاتا ہے۔ اس باب میں اس ترکیب پر غور کیا جائے گا۔ یہ ترکیب چار اور چار سے کم آزاد متغیرات کے تفاعل کی سادہ صورت حاصل کرنے میں نہایت آسان ثابت ہوگا۔

۴.۱ کارناف نقشے کا بنیادی خاکہ

دو آزاد متغیر تفاعل $F(x, y)$ کے بودیلین جدول میں چار مختلف ارکان ضرب ہوں گے، جنہیں جدول ۴.۱ میں پیش کیا گیا ہے۔ اس کے کارناف نقشے میں چار خانے ہوں گے، جہاں ایک خانہ ایک رکن ضرب کو ظاہر کرتا ہے۔ کارناف نقشے میں ان چار خانوں کی ترتیب، شکل ۴.۱-الف میں دکھائی گئی ہے، جہاں بالائی صف میں $x = 0$ جبکہ نچلی صف میں $x = 1$ ہے؛ یہ قیمتیں صفوں کے بائیں طرف، خانوں سے باہر، لکھی گئی ہیں۔ اسی طرح بائیں قطار میں $y = 0$ جبکہ دائیں قطار میں $y = 1$ ہے؛ یہ قیمتیں خانوں سے باہر، قطاروں کے اوپر جانب لکھی گئی ہیں۔ یوں بالائی صف اور دائیں قطار کے مشترک خانے میں $x = 0$ اور $y = 1$ ہے۔ اس خانے کے آزاد متغیرات کی ثنائی قیمتوں کو اکٹھے 01 لکھیں۔ یہ خانہ رکن ضرب $\bar{x}y$ کو ظاہر کرتا ہے، لہذا اس خانے میں $\bar{x}y$ (شکل-الف) یا m_1 (شکل-ب) لکھا جائے گا۔ باقی خانوں میں اسی طرح اندراج کیے جاتے ہیں۔ شکل ۴.۳ میں اسی طرز پر چار آزاد متغیر تفاعل کارناف نقشے میں خانہ m_{11} کی نشاندہی کی گئی ہے۔

تین آزاد متغیر تفاعل $F(x, y, z)$ کے آٹھ ارکان ضرب ہوں گے۔ انہیں شکل ۴.۲ کے کارناف نقشے میں دکھایا

جدول ۴.۱: دو متغیر ارکان ضرب۔

x	y		
0	0	$\bar{x}\bar{y}$	m_0
0	1	$\bar{x}y$	m_1
1	0	$x\bar{y}$	m_2
1	1	xy	m_3

	y	
x		
	0	m_0
	1	m_1
	0	m_2
	1	m_3

(ب)

	y	
x		
	0	1
0	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$
1	$x\bar{y}$	xy

اس صف میں $x = 0$ ہے

اس قطار میں $y = 1$ ہے

(۱)

شکل ۴.۱: دو آزاد متغیر کارنانف نقشے کی بنیادی صورت۔

گیا ہے۔ اس شکل میں دو صف اور چار قطار ہیں۔ صفوں کا تعین x کی قیمت، جبکہ قطاروں کا تعین yz کی قیمت کرتی ہے۔ ان قیمتوں کو (شنائی گشتی کے روپ میں نہیں بلکہ) گرے رمز میں لکھا جاتا ہے۔ یوں، بائیں ہاتھ سے شروع کر کے، پہلی قطار میں yz کی قیمت 00، دوسری میں 01، تیسری میں 11 جبکہ آخری قطار میں 10 ہوگی۔

چار آزاد متغیر تفاعل $F(w, x, y, z)$ کے سولہ ارکان ضرب ہوں گے، جنہیں چار صف اور چار قطار کے کارنانف کے نقشے میں سوایا جاسکتا ہے۔ شکل ۴.۳ میں ایسا کارنانف نقشہ دکھایا گیا ہے۔ یہاں صفوں کا تعین

	yz				
		00	01	11	10
x					
	0	m_0	m_1	m_3	m_2
	1	m_4	m_5	m_7	m_6

شکل ۴.۲: تین متغیر کارنانف نقشے کی بنیادی صورت۔

wx \ yz				
	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

شکل ۴.۳: چار متغیر کارنائف نقشے کی بنیادی صورت۔

wx کی قیمت، جبکہ قطاروں کا تسعین yz کی قیمت کرتی ہیں۔ ان قیمتوں کو گرے رمز میں لکھ کر خانوں کی پہچان کی جاتی ہے۔

اب تک آپ پر واضح ہو چکا ہو گا کہ کارنائف نقشے بناتے ہوئے صفوں اور قطاروں کو گرے رمز میں رکھا جاتا ہے۔ چار سے زیادہ متغیرات کے کارنائف نقشوں کا استعمال نسبتاً پیچیدہ ہوتا ہے، لہذا ان سے تفاسل کا سادہ روپ عموماً کمپیوٹر کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔

۴.۲ کارنائف نقشے کی بھرائی

بوولین جدول سے کارنائف نقشے کی بھرائی نہایت آسان اور سیدھا عمل ہے۔ بوولین جدول کی جن صفوں میں تفاسل کی قیمت 1 ہو، ان کے مطابق (کارنائف نقشے کے) خانوں میں 1 پر کریں؛ باقی خانوں میں 0 پر کریں۔ شکل ۴.۴-الف میں دو آزاد متغیر تفاسل $F = \sum(m_0, m_1)$ کے لئے یہ عمل دکھایا گیا ہے۔ شکل-ج میں تفاسل کا کارنائف کا نقشہ پر کیا ہوا دکھایا گیا ہے۔ تفاسل کو مجموعہ ارکان ضرب کے روپ میں لکھنے سے کارنائف نقشہ میں پُر کئے جانے والے خانوں کی نشاندہی ہوتی ہے۔

تین آزاد متغیر تفاسل $F = \sum(m_3, m_5, m_6, m_7)$ کی مثال شکل ۴.۵ میں پیش کی گئی ہیں۔

۴.۳ کارنائف نقشے سے تفاسل کی سادہ مساوات کا حصول

کارنائف نقشے میں متربی خانوں سے مراد ایسے 2^n خانے ہیں جنہیں مربع یا مستطیل میں گھیرا جا سکے؛ یہاں n کی قیمت 1، 2، 3، وغیرہ ہو سکتی ہے۔ یوں 2، 4، 8، وغیرہ، ایسے خانے جنہیں مربع یا مستطیل میں گھیرا جا سکے متربی خانے کہلائیں گے۔ کوئی بھی خانہ (یا خانے) ایک سے زیادہ مربع یا مستطیل کا حصہ بن سکتا ہے (سکتے ہیں)۔

متربی خانوں میں تفاسل کی قیمت 1 ہونے کی صورت میں، ان خانوں کے ارکان ضرب کا مجموعہ بوولین

x	y	F	ارکان ضرب
0	0	1	m_0
0	1	1	m_1
1	0	0	m_2
1	1	0	m_3

$$F = \sum(m_0, m_1)$$

(د)

	y	0	1
x	0	1	1
	1	0	0

(ج)

	y	0	1
x	0	m_0	m_1
	1	m_2	m_3

(ب)

شکل ۴.۴: دو متغیر تقابل کارٹائف نقشے کی بھرائی۔

x	y	z	F	ارکان ضرب
0	0	0	0	m_0
0	0	1	0	m_1
0	1	0	0	m_2
0	1	1	1	m_3
1	0	0	0	m_4
1	0	1	1	m_5
1	1	0	1	m_6
1	1	1	1	m_7

$$F = \sum(m_3, m_5, m_6, m_7)$$

(د)

	yz	00	01	11	10
x	0	0	0	1	0
	1	0	1	1	1

(ج)

	yz	00	01	11	10
x	0	m_0	m_1	m_3	m_2
	1	m_4	m_5	m_7	m_6

(ب)

شکل ۴.۵: تین متغیر کارٹائف نقشے کی بھرائی۔

قوانین سے حل کر کے سادہ ترین رکن ضرب حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یہ رکن ان مترہبی خانوں کے ارکان ضرب میں مشترک حصے پر مشتمل ہوگا۔

دو مترہبی بلند خانوں (جن میں تفاعل کی قیمت 1 ہوگی، کے ارکان ضرب کے مجموعہ) سے حاصل، سادہ ترین رکن ضرب میں آزاد متغیرات کی تعداد، تفاعل میں آزاد متغیرات کی تعداد سے ایک کم ہوگی۔ اسی طرح، چار بلند مترہبی خانوں سے حاصل، سادہ ترین رکن ضرب میں آزاد متغیرات کی تعداد، تفاعل میں آزاد متغیرات کی تعداد سے دو کم ہوگی۔ آٹھ مترہبی بلند خانوں سے حاصل، سادہ ترین رکن ضرب میں آزاد متغیرات کی تعداد، تفاعل میں آزاد متغیرات کی تعداد سے چار کم ہوگی۔

مترہبی خانے گھیرتے وقت یہ کوشش ہونی چاہئے کہ بڑے سے بڑا مربع یا مستطیل بنے۔ ایسا کرنے سے سادہ ترین رکن ضرب حاصل ہوگا۔ عموماً، مترہبی خانوں کو ایک سے زیادہ طریقوں سے گھیرا جاسکتا ہے، جن سے تفاعل کی مختلف سادہ صورتیں حاصل ہوں گی۔

اب ہم چند مثالوں کی مدد سے اس طریقہ کار کو سیکھتے ہیں۔

۳.۴.۱ دو آزاد متغیر تفاعل

دو متغیر تفاعل کے کارناف نقشے میں m_0 اور m_1 مترہبی خانے ہوں گے۔ اسی طرح m_0 اور m_2 بھی مترہبی خانے ہوں گے، جبکہ m_1 اور m_2 مترہبی خانے نہیں ہوں گے۔

شکل ۳.۶ میں دو متغیر تفاعل اور اس کا کارناف نقشہ دیا گیا ہے۔ کارناف نقشے میں خانوں سے اوپر، متغیر y کی ممکن قیمتوں 0 اور 1 کی بجائے بالترتیب \bar{y} اور y لکھا گیا ہے (یعنی 1 کی جگہ متغیر لکھا گیا ہے جبکہ 0 کی جگہ متغیر لکھ کر اس پر لکیر لگائی گئی ہے جو پست متغیر کو ظاہر کرتا ہے)۔ اسی طرح خانوں کے بائیں جانب \bar{x} اور x لکھا گیا ہے۔

کارناف نقشے کے دو مترہبی خانوں میں تفاعل کی قیمت 1 ہے، جنہیں نقطہ دار مستطیل میں گھیرا گیا ہے۔ شکل-د میں ان خانوں کے ارکان ضرب کے مجموعہ کو بولین قوانین سے حل کر کے سادہ رکن حاصل کیا گیا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ان خانوں کے ارکان ضرب کے مجموعہ سے ایک متغیر رکن حاصل ہوتا ہے؛ یعنی دو متغیر تفاعل کی صورت میں دو خانوں سے ایک متغیر رکن حاصل ہوا۔

یہی مساوات، شکل-ج کے کارناف نقشے میں نقطہ دار مستطیل میں گھیرے، دو مترہبی خانوں کو دیکھ کر لکھی جاسکتی ہے۔ نقطہ دار مستطیل میں گھیرے دو مترہبی خانوں کے ارکان ضرب $\bar{x}\bar{y}$ اور $x\bar{y}$ ہیں۔ ان ارکان ضرب میں \bar{x} مشترک ہے، جبکہ ایک رکن میں \bar{y} اور دوسرے میں y ہے۔ یوں، نقطہ دار مستطیل میں گھیرے ارکان ضرب میں وہ حصہ جو مشترک ہو مطلوب سادہ رکن ہوگا۔ (غیر مشترک حصہ رد کرنا، شکل-د میں $\bar{y} + y = 1$ کے مترادف ہے)۔ چونکہ ان خانوں کے علاوہ تمام خانوں میں 0 ہے لہذا یہی رکن تفاعل کی مساوات $(F = \bar{x})$ ہوگی۔

شکل ۳.۷ میں ایک تفاعل کا جدول دیا گیا ہے جس میں مترہبی خانوں کے ارکان ضرب $\bar{x}\bar{y}$ اور $x\bar{y}$ میں \bar{y} مشترک ہے۔ چونکہ باقی خانوں میں 0 ہے، لہذا اس تفاعل کی سادہ مساوات $F = \bar{y}$ ہوگی۔

شکل ۳.۸ کے تفاعل کے ارکان ضرب $x\bar{y}$ اور xy میں x مشترک ہے (شکل-ج دیکھیں)۔ چونکہ باقی

$$\begin{aligned}
 F &= \bar{x}\bar{y} + \bar{x}y \\
 &= \bar{x}(\bar{y} + y) \\
 &= \bar{x}(1) \\
 &= \bar{x}
 \end{aligned}$$

(د)

	\bar{y}	y
\bar{x}	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$
x		

(ج)

	\bar{y}	y
\bar{x}	1	1
x	0	0

(ب)

x	y	F	
0	0	1	m_0
0	1	1	m_1
1	0	0	m_2
1	1	0	m_3

(ا)

شکل ۴.۶: مترسبی بلند خانوں سے سادہ رکن ضرب کا حصول۔

$$\begin{aligned}
 F &= \bar{x}\bar{y} + x\bar{y} \\
 &= (\bar{x} + x)\bar{y} \\
 &= (1)\bar{y} \\
 &= \bar{y}
 \end{aligned}$$

(ج)

	\bar{y}	y
\bar{x}	$\bar{x}\bar{y}$	
x	$x\bar{y}$	

(ب)

	\bar{y}	y
\bar{x}	1	0
x	1	0

(ا)

شکل ۴.۷: مترسبی بلند خانوں سے سادہ رکن ضرب کا حصول۔

خانوں میں تفاعل کی قیمت 0 ہے لہذا تفاعل کے ارکان ضرب کا مجموعہ اسی رکن کے برابر ہوگا۔ یوں اس کی مساوات $F = x$ ہوگی۔

شکل ۴.۹ میں ایک ہی خانے کو دو مترسبی خانوں کے ساتھ باری باری جوڑتے ہوئے سادہ مساوات حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔ آئیں اس مساوات کو بوبولین منطق کی مدد سے حاصل

یہ دو مختلف ہیں

$\bar{x}\bar{y}$, $x\bar{y}$

لکھائی میں x مشترک ہے

(ج)

	\bar{y}	y
\bar{x}		
x	$x\bar{y}$	xy

(ب)

	\bar{y}	y
\bar{x}	0	0
x	1	1

(ا)

شکل ۴.۸: مترسبی بلند خانوں سے سادہ رکن ضرب کا حصول۔

$\bar{x}\bar{y}$ اور $\bar{x}y$ لکھنے میں \bar{x} مشترک ہے،

$x\bar{y}$ اور $x\bar{y}$ لکھنے میں \bar{y} مشترک ہے،

لہذا مساوات $F = \bar{x} + \bar{y}$ ہوگی۔

	\bar{y}	y
\bar{x}	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$
x	$x\bar{y}$	xy

	\bar{y}	y
\bar{x}	1	1
x	1	0

شکل ۹: متربی بلند خانوں سے سادہ رکن کا حصول۔

$F = 1$

	\bar{y}	y
\bar{x}	$\bar{x}\bar{y}$	$\bar{x}y$
x	$x\bar{y}$	xy

	\bar{y}	y
\bar{x}	1	1
x	1	1

شکل ۱۰: چار متربی خانوں سے سادہ رکن 1 حاصل ہوگا۔

کریں۔ مساوات کو ارکان ضرب کا مجموعہ لکھ کر اس کی سادہ روپ اخذ کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
 F &= x\bar{y} + \bar{x}\bar{y} + \bar{x}y \\
 &= x\bar{y} + \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y} + \bar{x}y \\
 &= (x + \bar{x})\bar{y} + \bar{x}(\bar{y} + y) \\
 &= (1)\bar{y} + \bar{x}(1) \\
 &= \bar{y} + \bar{x}
 \end{aligned}$$

جہاں، دوسرے قدم پر جدول ۳.۱۲-ب کی شق 4 (صفحہ ۴۸) استعمال کرتے ہوئے $\bar{x}\bar{y} = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}\bar{y}$ لکھا گیا۔

شکل ۱۰ میں چار متربی خانے ایک مستطیل میں گھیرے جاسکتے ہیں۔ ایسی صورت میں تفاعل ہمیشہ بلند (1) رہے گا لہذا اس کی مساوات $F = 1$ ہوگی۔

شکل ۱۱ میں متربی خانے نہیں پائے جاتے، لہذا ارکان ضرب کے مجموعہ کو مزید سادہ نہیں بنایا جاسکتا۔ جب بھی کوئی خانہ کسی مستطیل میں شامل نہ ہو، اس کا رکن ضرب جوں کا توں مجموعہ (اور مساوات) میں رہے گا۔

مشق ۱: ارکان ضرب کے مجموعہ کی سادہ صورت بودیلین قوانین سے حاصل کر کے ثابت کریں کہ شکل ۱۰ مشق ۴.۱۰

	\bar{y}	y
\bar{x}		$\bar{x}y$
x	$x\bar{y}$	

$$F = x\bar{y} + \bar{x}y$$

شکل ۴.۱۱: وتریبی خانے نہیں پائے جاتے۔

	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$	yz	$y\bar{z}$
\bar{x}	0	0	1	0
x	0	1	1	1

$$F = \sum(m_3, m_5, m_6, m_7)$$

$$F(x, y, z) = xy + yz + xz$$

شکل ۴.۱۲: تین متغیر تفاعل کے کارٹانف نقشے سے سادہ مساوات کا حصول۔

میں تفاعل کی سادہ مساوات $F = 1$ ہے۔

مشق ۴.۲: رکن ضرب نہ ہونے کی صورت میں ثابت کریں کہ تفاعل کی مساوات $F = 0$ ہوگی۔

شکل ۴.۱۱ میں ایسا تفاعل دیا گیا ہے جس کے خانے کسی مربع یا مستطیل میں نہیں گھیرے جاسکتے۔ ایسے تفاعل کی مساوات کو سادہ نہیں بنایا جاسکتا۔

۴.۳.۲ تین متغیر تفاعل

تین متغیر تفاعل اور اس کا کارٹانف نقشہ شکل ۴.۱۲ میں دکھایا گیا ہے۔ کارٹانف نقشے میں دو وتریبی خانوں کو گھیرنے والے تین مستطیل بنائے گئے ہیں۔ یاد رہے، مستطیل یوں بنانا لازمی ہے کہ اس میں 2^n خانے سموئے جائیں، جہاں n عدد صحیح ہے۔ یوں تین خانوں کو گھیرنے کی اجازت نہیں۔

درمیانی مستطیل m_3 اور m_7 گھیرتا ہے۔ ان خانوں کے ارکان ضرب میں x کی قیمت تبدیل ہوتی ہے، جبکہ yz

دونوں میں مشترک ہے۔ یوں ان کا سادہ رکن yz ہوگا۔ باقی دو مستطیل سے xy اور xz حاصل ہوگا۔ یوں تفاعل کی سادہ مساوات ان کا مجموعہ $(F = xy + yz + xz)$ ہوگا۔ اس مساوات کو ارکان ضرب کے مجموعہ سے بولین قوانین کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں (جو آپ کو اگلی مشق میں کرنا ہوگا)۔

$$F(x, y, z) = \sum(m_3, m_5, m_6, m_7)$$

(۴.۱) تفصیلی ارکان ضرب کا مجموعہ $= \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz$

سادہ ارکان ضرب کا مجموعہ $= xy + yz + xz$

اس مساوات کی دوسری لکیر میں، ارکان ضرب تمام آزاد متغیرات پر مشتمل ہیں۔ اس طرح کے رکن ضرب کو تفصیلی رکن ضرب کہتے ہیں۔ مساوات کی تیسری لکیر کے ارکان ضرب میں، آزاد متغیرات کی تعداد کم ہے۔ اس طرح کے رکن ضرب کو سادہ رکن ضرب کہتے ہیں۔ اس کتاب میں، عموماً، دونوں اقسام رکن ضرب پکارے جائیں گے۔ امید کی جاتی ہے، متن سے مطلوب مطلب واضح ہوگا؛ جہاں ایسا نہ ہو، وہاں انہیں مکمل نام سے پکارا جائے گا۔

مشق ۴.۳: بولین الجبرا استعمال کر کے مساوات ۴.۱ کی دوسری لکیر سے تیسری لکیر حاصل کریں۔ ساتھ ہی تسلی کر لیں کہ آپ شکل ۴.۱۲ کے کارنارف نقشے سے سادہ ارکان ضرب حاصل کرنا چاہتے ہیں۔

شکل ۴.۱۳ میں تین متغیر کارنارف نقشہ پیش کیا گیا ہے۔ نقشے میں $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ اور m_0 کا مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} m_0 + m_2 &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} \\ &= \bar{x}\bar{z}(\bar{y} + y) \\ &= \bar{x}\bar{z} \end{aligned}$$

ان تین متغیر ارکان ضرب کے مجموعہ سے دو متغیر رکن ضرب حاصل ہوا۔ یوں m_0 اور m_2 حانوں کو مترہی حانے تصور کرنا ہوگا۔ آئیں اس پر تفصیل سے گفتگو کریں۔

کارنارف نقشے کے بایاں اور دایاں قطار کے حانوں کو مترہی تصور کریں۔ تصور میں اس کاغذ کو، جس پر کارنارف نقشہ بنا ہو، یوں گول کریں کہ کاغذ کا بایاں اور دایاں کنارہ آپس مل جائیں۔ اب پہلی اور آخری قطار کے حانے مترہی ہوں گے۔ اسی طرح، دو سے زیادہ صفوں کی صورت میں، نچلی اور بالائی صف کے حانے مترہی ہوں گے۔ تصور میں کاغذ کو یوں لپیٹیں کہ اس کا نچلا کنارہ بالائی کنارے سے جاملے۔ یوں ان صفوں کے حانوں کو مترہی تصور کیا جاسکتا ہے۔

شکل ۴.۱۳ میں m_0 اور m_2 کو مستطیل میں گھیرا دکھایا گیا ہے۔ (تصور کریں کہ لپیٹے گئے کاغذ پر ان حانوں کو مستطیل میں گھیرنے کے بعد، کاغذ کو دوبارہ سیدھا کیا گیا ہے؛ یوں مستطیل دو ٹکڑوں میں نظر آئے

$$F = \sum(m_0, m_2, m_5, m_7)$$

$$F(x, y, z) = \bar{x}\bar{z} + xz$$

	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$	yz	$y\bar{z}$
\bar{x}	1	0	0	1
x	0	1	1	0

شکل ۴.۱۳: کارٹانف نقشے کے اطراف آپس میں ملائیں۔

شکل ۴.۱۴: چار متربی خانے۔

شکل ۴.۱۳: کارٹانف نقشے کے اطراف آپس میں ملائیں۔

چار کونے

\bar{x}	\bar{y}	\bar{z}
x	\bar{y}	\bar{z}
\bar{x}	y	\bar{z}
x	y	\bar{z}

	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$	yz	$y\bar{z}$
\bar{x}	1	0	1	1
x	1	0	1	1

شکل ۴.۱۴: چار متربی خانے۔

گ۔) ان خانوں میں $\bar{x}\bar{z}$ مشترک ہے، جو ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔ خانہ m_5 اور m_7 میں xz مشترک ہے۔ یوں تفاعل کی سادہ مساوات ان سادہ ارکان کا مجموعہ $F = \bar{x}\bar{z} + xz$ ہو گا۔

شکل ۴.۱۴ میں تین متغیر کارٹانف نقشے دیا گیا ہے، جس میں چار متربی خانوں کے دو سرے بنائے گئے ہیں۔ آپ کارٹانف نقشے کو دیکھ کر تفاعل کی سادہ مساوات لکھ سکتے ہیں۔ (اگر آپ ایسا نہیں کر سکتے، تیار ہو جائیں! اگلی مشق میں یہی کہنے کو کہا گیا ہے۔)

مشق ۴.۴: شکل ۴.۱۴ میں دئے تفاعل کی سادہ مساوات کارٹانف نقشے سے حاصل کریں۔ اسی مساوات کو بودیلین الجبرا کی مدد سے حاصل کریں۔ شکل میں چار کونوں کا مشترک حصہ (\bar{z}) دکھایا گیا ہے۔

$$F(w, x, y, z) = wx + \bar{z}$$

	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$	yz	$y\bar{z}$
$\bar{w}\bar{x}$	1			1
$\bar{w}x$	1			1
$w\bar{x}$	1	1	1	1
wx	1			1

شکل ۴.۱۵: چار متغیر نقشہ (برائے مثال ۴.۱)

۴.۳.۳ چار متغیر تفاعل

چار آزاد متغیر تفاعل کے سولہ ارکان ضرب ہوں گے۔ اس کے کارناف نقشے میں متربی حنائوں کو پہچانے کی خاطر نقشے کو ایسی سطح پر بنوا تصور کریں کہ نقشے کی دایاں قطار نقشے کی بائیں قطار سے جھڑا ہو۔ اسی طرح نقشے کی بالائی صف اور نچلی صف سے آپس میں جھڑے ہوں۔ یوں m_4 خانہ m_6 خانے سے جھڑتا ہے، اور m_1 خانہ m_9 خانے سے جھڑتا ہے۔

اس نقشے میں دو، چار، آٹھ اور سولہ متربی حنائے بنانا ممکن ہے۔ دو متربی حنائوں کے ارکان ضرب کا مجموعہ ایک رکن ضرب دے گا، جس میں تین متغیرات ہوں گے۔ چار متربی حنائوں کے ارکان ضرب کا مجموعہ ایک رکن ضرب دے گا، جس میں دو آزاد متغیرات ہوں گے۔ آٹھ متربی حنائوں کے ارکان ضرب کا مجموعہ ایک رکن ضرب دے گا، جس میں ایک متغیر ہوگا، جبکہ سولہ متربی حنائوں کے ارکان ضرب کا مجموعہ 1 کے برابر ہوگا۔

چار متغیر کارناف نقشوں کی چند مثالیں دیکھتے ہیں۔

مثال ۴.۱: درج ذیل تفاعل کی سادہ مساوات شکل ۴.۱۵ میں پیش کی گئی ہے۔

$$F(w, x, y, z) = \sum(m_0, m_2, m_4, m_6, m_8, m_{10}, m_{12}, m_{13}, m_{14}, m_{15})$$

□

مثال ۴.۲: درج ذیل تفاعلات کی سادہ مساوات حاصل کریں۔

$$F(w, x, y, z) = \sum(m_0, m_5, m_7, m_{10}, m_{11}, m_{13}, m_{15})$$

$$F(w, x, y, z) = \sum(m_0, m_2, m_8, m_{10})$$

باب ۴. کارٹائف نقش حیات

	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$	yz	$y\bar{z}$
$\bar{w}\bar{x}$	1			1
$\bar{w}x$				
wx				
$w\bar{x}$	1			1

$$F(w, x, y, z) = \bar{x}\bar{z}$$

(ب)

	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$	yz	$y\bar{z}$
$\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}x$	1			
$\bar{w}\bar{x}$		1	1	
wx		1	1	
$w\bar{x}$			1	1

$$F(w, x, y, z) = \bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z} + xz + w\bar{x}y$$

(ا)

شکل ۴.۱۶: چار متغیر نقش (برائے مثال ۴.۲)

حل: پہلا تفاعل شکل ۴.۱۶-الف میں دکھایا گیا ہے، جہاں چار متغیر ہی خانے سادہ رکن ضرب (xz) ، جبکہ دو متغیر ہی خانے $w\bar{x}y$ رکن ضرب دیں گے، اور ایک خانہ جو کسی کے متغیر نہیں پایا جاتا رکن $\bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ دے گا۔ یوں تفاعل کی سادہ مساوات ان ارکان کا مجموعہ $F = \bar{w}\bar{x}\bar{y}\bar{z} + xz + w\bar{x}y$ ہوگا۔

دو تفاعل شکل ۴.۱۶-ب میں پیش کیا گیا ہے، جہاں چار کونوں کو متغیر ہی تصور کریں، جو رکن $\bar{x}\bar{z}$ دیں گے۔ یہی اس تفاعل کی سادہ مساوات $F = \bar{x}\bar{z}$ ہے۔ □

مشق ۴.۵: شکل ۴.۱۶-ب کے چار خانوں کے ارکان ضرب کے مجموعہ کا سادہ روپ، بولین قوانین کی مدد سے حاصل کر کے ثابت کریں کہ یہ متغیر ہی خانے ہیں۔

مثال ۴.۳: تین آزاد متغیرات کے بلا شرکت گیٹ کا کارٹائف نقش حاصل کریں۔

حل: شکل ۴.۱۷ میں نقش پیش ہے۔ اس میں متغیر ہی خانے نہیں پائے جاتے، لہذا اس کی مساوات مزید سادہ نہیں بنائی جاسکتی۔ □

	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$	$y\bar{z}$	yz
\bar{x}		1		1
x	1		1	

$$F(x, y, z) = x \oplus y \oplus z$$

شکل ۴.۱۷: تین متغیر بلا شرکت گیت کا نقشہ (برائے مثال ۴.۳)

	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$	$y\bar{z}$	yz
\bar{x}	1		1	1
x			1	1

$$F(x, y, z) = \sum(m_0, m_2, m_3, m_6, m_7)$$

شکل ۴.۱۸: سادہ مساوات سے ارکان ضرب کے مجموعہ کا حصول (مثال ۴.۴)

۴.۳.۴ سادہ مساوات سے تفاعل کے ارکان ضرب کا حصول

کسی بھی تفاعل کی سادہ مساوات کا حصول بذریعہ کارنارف نقشہ آپ نے دیکھا۔ اس حصے میں اس طریقہ کار کو اُلٹ چلا کر تفاعل کی سادہ مساوات سے ارکان ضرب کا مجموعہ حاصل کیا جائے گا۔ یہ ترکیب مثال سے بہتر سمجھ آئی گی۔

مثال ۴.۴: درج ذیل سادہ مساوات سے تفاعل کے ارکان ضرب کا مجموعہ دریافت کریں۔

$$F(x, y, z) = y + \bar{x}\bar{z}$$

حل: شکل ۴.۱۸ میں سادہ مساوات سے کارنارف نقشہ حاصل کیا گیا، جس سے مجموعہ ارکان ضرب لکھا گیا۔ □

۴.۴ ضرب ارکان جمع کے روپ میں سادہ مساوات

کارنارف نقشے کے ان خانوں میں 1 پُر کیا جاتا ہے جن میں تفاعل کے بولین جدول میں ارکان ضرب کی قیمت 1 ہو۔ تفاعل کے متمم کے بولین جدول میں جہاں پہلے 0 تھ اب وہاں 1 ہوگا۔ اس جدول کے کارنارف نقشے سے ارکان ضرب کے مجموعے کی مساوات، تفاعل کے متمم کی سادہ مساوات ہوگی۔ یہ مساوات مجموعہ ارکان ضرب کے روپ میں ہوگی، جس کا متمم لے کر اصل تفاعل کی (ضرب ارکان جمع کے روپ میں) سادہ مساوات حاصل ہوگی۔ ایک مثال سے اس بات کی وضاحت کرتے ہیں۔

	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$	yz	$y\bar{z}$
\bar{x}	0	0	1	1
x	1	1	0	0

$$F = \bar{x}y + x\bar{y} \quad (\text{ب})$$

	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$	yz	$y\bar{z}$
\bar{x}	1	1	0	0
x	0	0	1	1

$$\bar{F} = \bar{x}\bar{y} + xy \quad (\text{ج})$$

x	y	z	F	\bar{F}
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

(د)

شکل ۴.۱۹: مجموعہ ارکان ضرب اور ضرب ارکان جمع کے روپ میں سادہ مساوات (مثال ۴.۵)۔

مثال ۴.۵: مندرجہ ذیل تفاعل کے مجموعہ ارکان ضرب اور ضرب ارکان جمع کی سادہ مساوات حاصل کریں۔

$$F(x, y, z) = \sum(m_2, m_3, m_4, m_5)$$

حل: شکل ۴.۱۹-الف میں تفاعل اور اس کے متمم کا جدول پیش کیا گیا ہے۔ شکل-ب میں تفاعل کی مساوات، ارکان ضرب کے مجموعہ کی صورت میں دی گئی ہے۔ شکل-ج میں دی گئی مساوات، تفاعل کے متمم کی ہے، جس کا متمم لے کر (اور پوولین کلیات استعمال کر کے) تفاعل کے ارکان جمع کی ضرب کی (درج ذیل) سادہ مساوات حاصل ہوگی۔

$$\begin{aligned}
 F = \bar{\bar{F}} &= \overline{\bar{x}\bar{y} + xy} \\
 &= (\bar{\bar{x}\bar{y}})(\overline{xy}) \\
 &= (\bar{\bar{x}} + \bar{\bar{y}})(\bar{x} + \bar{y}) \\
 &= (x + y)(\bar{x} + \bar{y})
 \end{aligned}$$

□

	\bar{y}	y
\bar{x}	1	0
x	d	1

$$F = x + \bar{y}$$

(ج)

	\bar{y}	y
\bar{x}	1	0
x	d	1

$$F = \bar{y} + x$$

(ب)

x	y	F	\bar{F}
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	d	d
1	1	1	0

(۱)

شکل ۴.۲۰: غیر دلچسپ حال (مثال ۴.۶)۔

۴.۵ غیر دلچسپ حال

ہم نے اب تک جتنے تفاعل دیکھے، ان میں مداحل کی تمام صورتوں کے مطابقتی مخارج دستیاب اور ضروری تھے۔ بعض اوقات مداحل کی چند قیمتیں ممکن نہیں ہوں گی یا ان کے مطابقتی مخارج استعمال نہیں ہوں گے۔ مداحل کے ان قیمتوں کو غیر دلچسپ حال کہتے ہیں۔

تفاعل کی سادہ مساوات حاصل کرتے وقت، کارناف نقشے کے غیر دلچسپ حال حانوں میں 0 یا 1 کی بجائے d درج کیا جاتا ہے۔ ممبری خانے گھیرتے وقت۔ اگر کسی غیر ضروری خانے میں 1 تصور کرنے سے زیادہ سادہ مساوات حاصل ہو تو اس خانے میں 1 تصور کیا جاتا ہے، اور اگر اس میں 0 تصور کرنے سے زیادہ سادہ مساوات حاصل ہوتی ہے تو اس میں 0 تصور کیا جاتا ہے۔

مثال ۴.۶: درج ذیل تفاعل کی سادہ مساوات، مجموعہ ارکان ضرب اور ضرب ارکان جمع کے روپ میں حاصل کریں۔

$$F(x, y) = \sum(m_0, m_3)$$

$$d(x, y) = \sum(m_2)$$

حل: تفاعل کا ایک حال غیر دلچسپ ہے۔ شکل ۴.۲۰ میں تفاعل کا بولین جدول اور کارناف نقشے دکھائے گئے ہیں۔ مجموعہ ارکان ضرب کے روپ میں سادہ مساوات حاصل کرتے وقت غیر دلچسپ خانے کی قیمت 1 تصور کرنے سے (زیادہ) سادہ مساوات حاصل ہوگی (شکل-ب)۔ ضرب ارکان جمع کے روپ میں بھی غیر دلچسپ خانے کی قیمت 1 تصور کرنے سے (زیادہ) سادہ مساوات حاصل ہوگی (شکل-ج)۔ □

مثال ۴.۷: درج ذیل تفاعل کی سادہ مساوات حاصل کریں۔

$$F(w, x, y, z) = \sum(m_0, m_2, m_8, m_9, m_{12}, m_{13}, m_{15})$$

$$d(w, x, y, z) = \sum(m_1, m_3, m_{11})$$

	$\bar{y}\bar{z}$	$\bar{y}z$	yz	$y\bar{z}$
$\bar{w}\bar{x}$	1	d	d	1
$\bar{w}x$		d		
wx	1	1		
$w\bar{x}$	1	1	d	

$F(w, x, y, z) = w\bar{y} + \bar{w}\bar{x}$

شکل ۴.۲۱: غیر دلچسپ حالات (مثال ۴.۷)۔

حل: شکل ۴.۲۱ میں کارٹانف نقش پیش کیا گیا ہے۔ سادہ مساوات کے حصول میں (بالائی صف کے) دو غیر دلچسپ خانوں کی قیمت 1، جبکہ باقی دو غیر دلچسپ خانوں کی قیمت 0 تصور کی گئی۔ کارٹانف نقشے میں 0 کو \square نظر پوش کیا گیا ہے۔ تفاعل کی مساوات شکل میں دی گئی ہے۔

باب ۵

ترکیبی منطق اور ترتیبی ادوار

ترکیبی منطق^۱ سے مراد وہ منطق ہے جس میں محارج موجودہ مداحخل پر منحصر ہو؛ یعنی، کسی بھی لمحہ پر تقاعسل کا محارج، اُسی لمحہ کے مداحخل پر منحصر ہوگا۔ ایسے تقاعسل کو ترکیبی ادوار سے حابم عمل پہنایا جاتا ہے، جو شنائی گیٹ سے حاصل کئے جاتے ہیں۔ اس باب میں ترکیبی ادوار پر غور کیا جائے گا۔

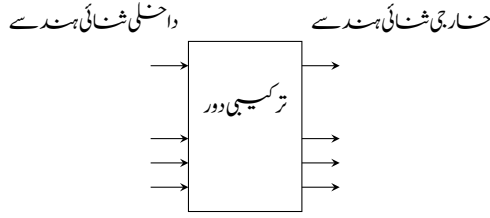
اس کے برعکس، ترتیبی منطق^۲ سے مراد وہ منطق ہے جس میں محارج موجودہ اور ماضی مداحخل پر منحصر ہو؛ یعنی، کسی بھی لمحہ پر تقاعسل کا محارج، گزرے اور موجودہ مداحخل پر منحصر ہوگا۔ ترتیبی منطق کو ترتیبی ادوار سے حابم عمل پہنایا جاتا ہے، جن پر اگلے باب میں غور کیا جائے گا۔

کسی بھی ترکیبی دور کو شکل ۱.۵ کی ڈیہ شکل^۳ سے ظاہر کیا جاسکتا ہے، جہاں مداحخل شنائی ہندسوں (مداحخل پٹ) کو بائیں جبکہ محارج شنائی ہندسوں کو دائیں ہاتھ رکھا جاتا ہے۔

۵.۱ شنائی جمع کار اور شنائی منفی کار

دو اعداد کو جمع یا منفی کرنا بنیادی حاب کا حصہ ہے۔ آئیں دو پٹ جمع کرنے والے دور پر غور کریں۔

combinational logic^۱
sequential logic^۲
box diagram^۳



شکل ۵.۱: ترکیبی دور کی ڈب شکل۔

۵.۱.۱ نصف جمع کار

ایک ہٹ کی قیمت صرف 0 یا 1 ہو سکتی ہے، لہذا دو ہٹ جمع کرتے ہوئے درج ذیل چار (شنائی) صورتیں پیدا ہوں گی۔ (اس باب میں شنائی ہندسے اور اعداد استعمال ہوں گے؛ زیر نوشتہ 2 لکھ کر وضاحت نہیں کی جائے گی۔)

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 1 &= 1 \\ 1 + 0 &= 1 \\ 1 + 1 &= 10 \end{aligned}$$

اس مساوات میں دو ہٹ جمع کئے گئے، لہذا مداحصل کی تعداد دو ہوگی۔ مساوات میں اگر چہ پہلے تین جوابات ایک ہٹ ہیں، لیکن آخری جواب دو ہٹ ہے۔ یوں، تمام صورتوں سے نیچے کی خاطر، جوابات دو ہٹ تصور کیے جائیں گے، اور ذیل لکھنا بہتر ہوگا:

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 00 \\ 0 + 1 &= 01 \\ 1 + 0 &= 01 \\ 1 + 1 &= 10 \end{aligned}$$

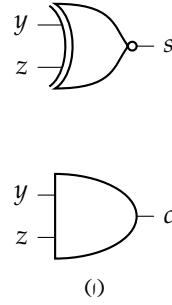
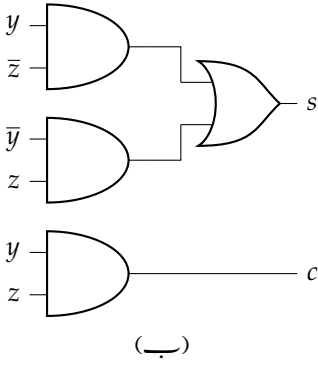
جس سے واضح ہے کہ جواب دو ہٹ ہیں۔ یوں، دو ہٹ جمع کرنے والے دور کے دو مداحصل اور دو مختارج ہوں گے۔ مداحصل کو y اور z ، جبکہ مختارج کو s اور c لکھ کر درج بالا مساوات کو جدول ۵.۱ میں پیش کیا گیا ہے، جس سے تفاسلات c اور s کی مساوات، مجموعہ ارکان ضرب کے روپ میں حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} c &= yz \\ s &= \bar{y}z + y\bar{z} \end{aligned} \quad (۵.۱)$$

ان تفاسلات کے (دو مختلف اتمام کے) ادوار شکل ۵.۲ میں پیش کیے گئے ہیں، جو نصف جمع کار کہلاتے ہیں۔ اس نام کی وضاحت اگلے حصہ میں ہوگی۔

جدول ۱.۵: دو بیت جمع

y	z	c	s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



شکل ۲.۵: نصف جمع کار

جدول ۵.۲: مکمل جمع کار

x	y	z	c	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

۵.۱.۲ مکمل جمع کار

آئیں، ایک سے زیادہ ہٹ شائی اعداد $y = 111_2$ اور $z = 11_2$ کے مجموعے کا حصول دیکھتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 11 \\ 111 \\ + 11 \\ \hline 1010 \end{array}$$

پہلے قدم پر کم تر ترتیبی ہٹ y_0 اور z_0 کو نصف جمع کار حل کر سکتا ہے، لیکن اگلے قدم پر ہٹ y_1 اور z_1 جمع کرتے ہوئے گزشتہ قدم کا حاصل ۵ (1) بھی جمع کرنا ہوگا۔

ظاہر ہوا، دو اعداد جمع کرنے کی خاطر ایسا دور درکار ہوگا جو تین ہٹ جمع کر سکے۔ آئیں ایسا دور دیکھتے ہیں۔

اس دور کے مداحل x ، y اور z جبکہ محارج c اور s لیتے ہوئے (جہاں x پچھلے قدم کا حاصل ہوگا) جدول ۵.۲ لکھتے ہیں۔

جدول سے c اور s کے تفاعلات کی مساوات، مجموعہ ارکان ضرب کے روپ میں حاصل کرتے ہیں۔ یاد رہے جدول میں تین آزاد اور دو تابع متغیرات ہیں۔ ایک تابع متغیرہ کی مساوات حاصل کرتے وقت دوسرے تابع متغیرہ کو نظر انداز کریں۔ یوں c کی مساوات حاصل کرتے وقت تین مداحل x ، y ، اور z پر نظر رکھتے ہوئے c کے ارکان ضرب کا مجموعہ لیں۔ شکل ۵.۳ میں کارناف نقشوں سے ان تفاعلات کی (درج ذیل) سادہ مساوات حاصل کی گئی ہیں۔

$$\begin{aligned} c &= xz + xy + yz \\ s &= x \oplus y \oplus z \end{aligned} \quad (۵.۲)$$

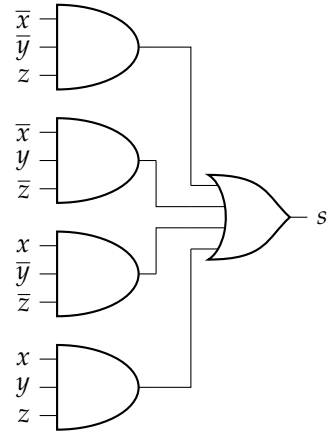
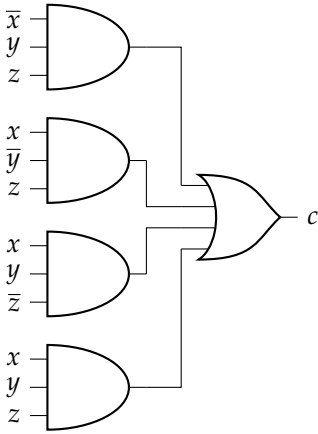
$x \backslash yz$	00	01	11	10
0		1		1
1	1		1	

$s = x \oplus y \oplus z$

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0			1	
1		1	1	1

$c = xz + xy + yz$

شکل ۵.۳: مکمل جمع کار



شکل ۵.۴: مکمل جمع کار (مساوات ۵.۳)

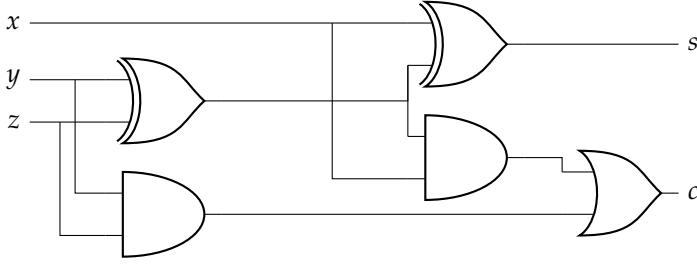
کارٹانف نقشہ استعمال کیے بغیر جدول ۵.۲ سے ان تقاضات کی مساوات، مجموعہ ارکان ضرب کے روپ میں لکھتے ہیں۔

$$(۵.۳) \quad \begin{aligned} c &= \bar{x}yz + x\bar{y}z + xy\bar{z} + xyz \\ s &= \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xyz \end{aligned}$$

انہیں شکل ۵.۴ میں عملی جامہ پہنایا گیا ہے۔

درج بالا پہلی مساوات کے درمیانے دو اجزاء کا مجموعہ $x(\bar{y}z + y\bar{z})$ جبکہ باقی اجزاء کا $(\bar{x} + x)yz$ ہے، لہذا c کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} c &= (\bar{x} + x)yz + x(\bar{y}z + y\bar{z}) \\ &= yz + x(y \oplus z) \end{aligned}$$



شکل ۵.۵: مکمل جمع کار کا بہتر دور (مسوات ۵.۴)

اس کو مساوات ۵.۲ میں پیش s کے ساتھ اکٹھا لکھتے ہیں۔

$$(۵.۴) \quad \left. \begin{aligned} c &= yz + x(y \oplus z) \\ s &= x \oplus y \oplus z \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{مکمل جمع کار کی} \\ \text{بہتر مساوات} \end{array}$$

ان تقاضات کو شکل ۵.۵ میں پیش کیا گیا ہے، جو شکل ۵.۴ سے بہتر (چھوٹا) ہے۔ مساوات ۵.۴ میں دیے s سے ارکان ضرب کا مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

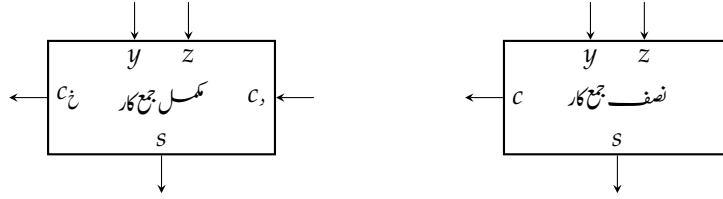
$$\begin{aligned} s &= x \oplus (y \oplus z) \\ &= x \oplus (y\bar{z} + \bar{y}z) \\ &= x(\overline{y\bar{z} + \bar{y}z}) + \bar{x}(y\bar{z} + \bar{y}z) \\ &= x(\overline{y\bar{z}})(\overline{\bar{y}z}) + \bar{x}(y\bar{z} + \bar{y}z) \\ &= x(\bar{y} + z)(y + \bar{z}) + \bar{x}(y\bar{z} + \bar{y}z) \\ &= x(yz + \bar{y}\bar{z}) + \bar{x}(y\bar{z} + \bar{y}z) \\ &= xyz + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z \end{aligned}$$

شکل ۵.۵ مکمل جمع کار کہلاتا ہے، لہذا شکل ۵.۲ کو نصف جمع کار کہیں گے۔

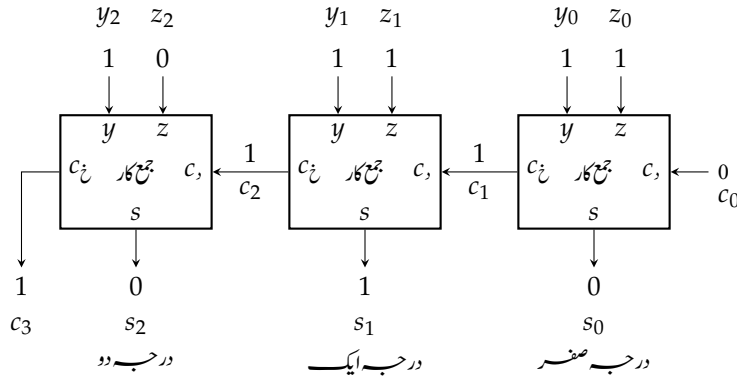
جدول ۵.۲ میں y اور z ثنائی ہندسوں کے ساتھ گزشتہ قدم کا حاصل x جمع کیا گیا۔ شکل ۵.۶ میں نصف جمع کار اور مکمل جمع کار کی علامت پیش ہیں۔ مکمل جمع کار میں گزشتہ قدم سے داخلہ حاصل^۸ کو c، جبکہ اس قدم کے خارجہ حاصل^۹ کو c سے ظاہر کیا گیا۔

آئیں $y = 111_2$ اور $z = 11_2$ کا مجموعہ مکمل جمع کار کی مدد سے حاصل کریں۔ سب سے پہلے دونوں اعداد کو تین ثنائی ہندسوں میں لکھیں، لہذا $z = 011_2$ ہوگا۔ شکل ۵.۵ میں مطلوب تین درجی، تین بٹ جمع کار پیش کیا

^۸ full adder
^۹ half adder
carry in
carry out



شکل ۵.۶: نصف جمع کار اور مکمل جمع کار کی علامتیں۔



شکل ۵.۷: تین درجی، تین بٹ جمع کار

گیا ہے، جہاں مکمل جمع کار کو مختصراً ”جمع کار“ کہا گیا ہے۔ شنائی عدد $y_2y_1y_0 = 111$ اور $y = 111$ اور $z = z_2z_1z_0 = 011$ ہیں۔ یوں کم رتبہ بٹ کے مکمل جمع کار کو دونوں اعداد کے کم رتبہ ہندسے، $y_0 = 1$ اور $z_0 = 1$ ، منراہم کیے جائیں گے، اور ساتھ ہی چونکہ پہلے قدم میں کوئی ”داخلی حاصل“ نہیں ہوگا لہذا داخلی حاصل $c_0 = 0$ منراہم کیا جائے گا۔ اگلے قدم میں جمع کار کو $y_1 = 1$ اور $z_1 = 1$ کے ساتھ پہلے قدم کا حاصل c_1 بطور داخلی حاصل، منراہم کیا جائے گا، جبکہ آخری جمع کار کو $y_2 = 1$ اور $z_2 = 0$ کے ساتھ گزشتہ قدم کا حاصل c_2 منراہم کیا جائے گا۔ تین بٹ جمع کار، ان اعداد کا مجموعہ $c_3s_2s_1s_0 = 1010_2$ دے گا۔

$$\begin{array}{r} 111 \\ 111 \\ + 011 \\ \hline 1010 \end{array}$$

شکل ۵.۸ میں چونکہ درج صفر کا داخلی حاصل ہمیشہ 0 ہوگا لہذا یہاں مکمل جمع کار کی بجائے نصف جمع کار بھی

استعمال کیا جاسکتا تھا۔ ایسا کرتے ہوئے c_0 مندر اہم کرنے کی ضرورت نہیں ہوگی۔

زیادہ بٹ اعداد کے مجموعہ کے لئے شکل ۷.۵ میں بائیں جانب مزید مکمل جمع کار کا اضافہ کیا جائے گا۔ یوں 8 بٹ (یعنی ایک بائٹ) اعداد کا مجموعہ آٹھ درجی جمع کار دے گا، جو 8 مکمل جمع کار پر مشتمل ہوگا، جبکہ 64 بٹ اعداد کے مجموعہ کے لئے 64 مکمل جمع کار پر مشتمل 64 بٹ جمع کار درکار ہوگا۔

مشق ۵.۱: مخلوط دور 74283 چار بٹ مکمل جمع کار ہے (صفحہ ۴۳ پر مخلوط ادوار کے سلسلہ $74xxx$ کے بارے میں دوبارہ پڑھیں)۔ اس کے معلوماتی صفحات انٹرنیٹ^{۱۰} سے حاصل کریں۔ اس مخلوط دور کو استعمال کرتے ہوئے 8 بٹ کے دو شناختی اعداد جمع کریں۔

۵.۱.۳ منفی کار

شناختی اعداد کو کمپیوٹر دو کے تکملہ کی مدد سے منفی کرتا ہے۔ دو کا تکملہ استعمال کرتے ہوئے شناختی اعداد منفی کرنے کے عمل پر دوبارہ نظر ڈالتے ہیں۔ یاد رہے، بلند ترز تہی بٹ کی جمع سے پیدا، آخری حاصل منسلک کیا جاتا ہے، جبکہ اس کی غیر موجودگی میں نتیجہ کا دو کا تکملہ لیا جاتا ہے۔

شناختی عدد کے اس منفی ایک تکملہ (یا متمم) کے ساتھ 1 جمع کرنے سے عدد کا اسی تکملہ حاصل ہوگا۔ عدد کا متمم حاصل کرنے کی خاطر عدد کے ہر بٹ کا متمم لیا جاتا ہے۔ بٹ کا متمم بذریعہ نفی گیٹ لیا جاسکتا ہے۔

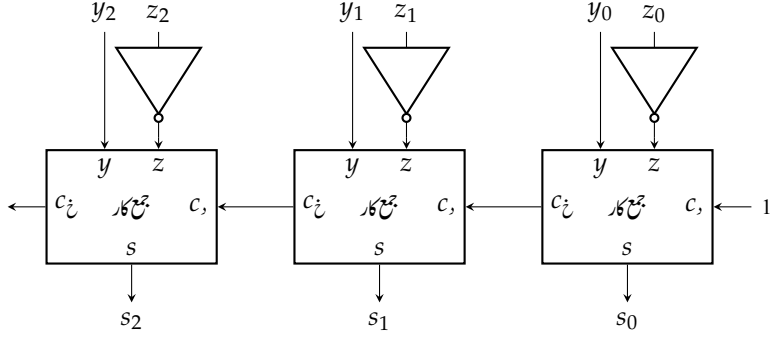
تین بٹ شناختی اعداد y اور z سے $(y - z)$ حاصل کرنے کے لئے z کے متمم کے ساتھ 1 اور y جمع کرنا ہوگا۔ شکل ۵.۸ میں اس عمل کو عملی جامہ پہنایا گیا ہے، جہاں نفی گیٹ استعمال کر کے z کا متمم (یا ایک کا تکملہ) حاصل کیا گیا، اور ساتھ 1 جمع کرنے کی خاطر درجہ صفر کو داخلی حاصل 1 مندر اہم کیا گیا۔

شکل ۷.۵ اور شکل ۵.۸ دونوں میں مکمل جمع کار استعمال ہوئے۔ شکل ۷.۵ کے ساتھ نفی گیٹ منسلک کر کے اور داخلی حاصل c_0 کو 0 کی بجائے 1 رکھنے سے شکل ۵.۸ حاصل ہوگا۔ جمع اور منفی اعمال ایک ہی دور سے بھی حاصل کیے جاسکتے ہیں۔ ایسا دور جسے جمع و منفی کار کہتے ہیں شکل ۵.۹ میں پیش ہے۔

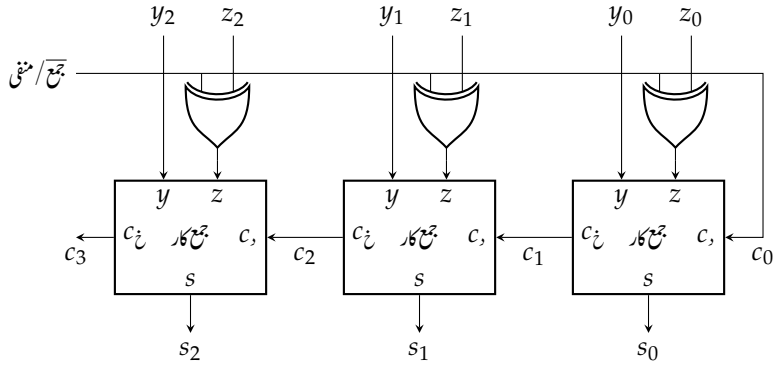
اس شکل میں بلاشرکت جمع گیٹ استعمال کیا گیا، اور فتاوا اشارہ جمع/منفی کا اضافہ کیا گیا۔ اس فتاوا اشارہ کی کارکردگی پر غور کرتے ہیں۔ جب جمع/منفی اشارہ پست (0) ہو بلاشرکت جمع گیٹ عدد z جوں کا توں مکمل جمع کار تک پہنچائے گا، اور ساتھ ہی $c_0 = 0$ ہوگا؛ لہذا یہ دور تین بٹ جمع کار کی حیثیت سے کام کرے گا۔

اس کے برعکس، جمع/منفی اشارہ بلند (1) ہو بلاشرکت جمع گیٹ عدد z کا متمم \bar{z} مکمل جمع کار تک پہنچائے گا، اور ساتھ ہی $c_0 = 1$ ہوگا؛ لہذا یہ دور تین بٹ منفی کار کی حیثیت سے کام کرے گا۔

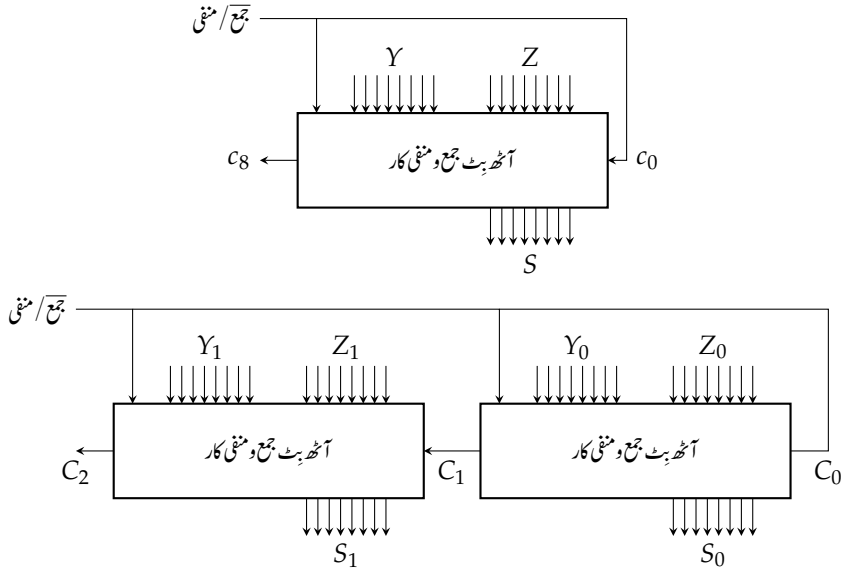
^{۱۰} انٹرنیٹ میں 74283 datasheet تلاش کریں۔



شکل ۵.۸: تین درجی، تین بیت منفی کار



شکل ۵.۹: تین بیت جمع و منفی کار



شکل ۵.۱۰: ایک اور دو بائٹ جمع و منفی کار

متابو اشارہ کے نام میں ”منفی“ اور ”لکھ کر یہ“ واضح کی گیا ہے کہ اشارہ بلند ہونے کی صورت میں منفی کار اور پرست ہونے کی صورت میں جمع کار حاصل ہوگا۔

آٹھ بٹ جمع و منفی کار کو ایک بائٹ جمع و منفی کار کہتے ہیں۔ شکل ۵.۱۰ میں ایک بائٹ اور دو بائٹ جمع و منفی کار دکھائے گئے ہیں۔ اس کے بائیں جانب مزید درج بات جوڑ کر متعدد بائٹ کا دور بنایا جاسکتا ہے۔ یہاں Y_0 پہلے بائٹ (یعنی بٹ y_0 تا y_7) کو، Y_1 اگلے بائٹ (یعنی بٹ y_8 تا y_{14}) کو ظاہر کرتا ہے، جبکہ C_2 سے سرآمد دوسرے بائٹ کی جمع کا خارجی حاصل ہے۔

۵.۱.۴ اعشاری جمع کار

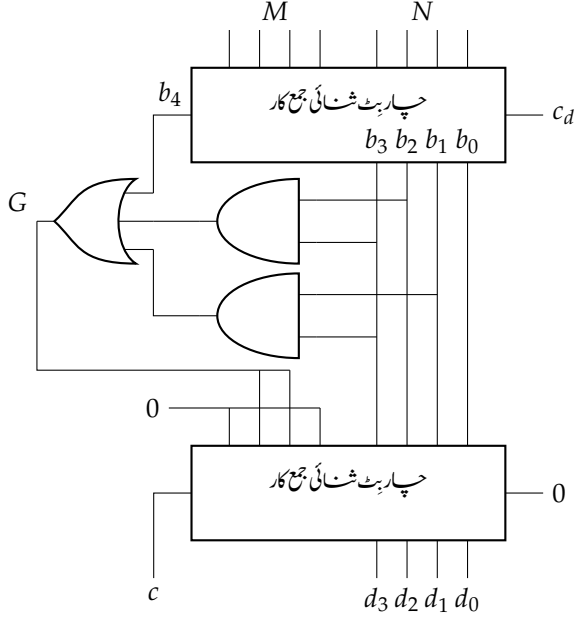
جیسا پہلے ذکر ہوا، اعشاری اعداد کو ثنائی مرموز اعشاریہ^{۱۱} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایسا مکمل جمع کار بناتے ہیں جو دو اعشاری ہندسوں M ، N اور داخلی حاصل c_d کو جمع کرتا ہو۔ چونکہ اعشاری ہندسے 0 تا 9، جبکہ داخلی حاصل 0 یا 1 ہو سکتا ہے، لہذا اس جمع کار کے جواب $(M + N + c_d)$ کی قیمت $(0 + 0 + 0 = 0)$ تا $(9 + 9 + 1 = 19)$ ہوگی، جنہیں اعشاری، ثنائی مرموز اعشاریہ اور ثنائی روپ میں جدول ۵.۳ میں پیش کیا گیا ہے۔

جدول میں، چار بٹ ثنائی روپ میں خارجی حاصل کو b_4 ، جبکہ ثنائی مرموز اعشاریہ میں خارجی حاصل کو c سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ان طریقوں میں 0 تا 9 جوابات ایک چیمے، جبکہ 10 تا 19 ایک دوسرے سے مختلف لکھے جاتے ہیں۔ یوں اگر چار بٹ ثنائی جمع کار استعمال ہو اور جواب 0 تا 9 ہو تب یہی جواب بطور

^{۱۱}binary coded decimal (BCD)

جدول ۵.۳: اعشاری جمع کار کے مطلوبہ جواب

ششائی					ششائی مسر موز اعشاریہ					اعشاری
b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	c	d_3	d_2	d_1	d_0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	2
0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	3
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	4
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	5
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	6
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	7
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	8
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	9
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	10
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	11
0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	12
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	13
0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	14
0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	15
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	16
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	17
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	18
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	19



شکل ۵.۱۱: ۴-بیتی مسر موز اعشاریہ روپ میں اعشاری جمع کار

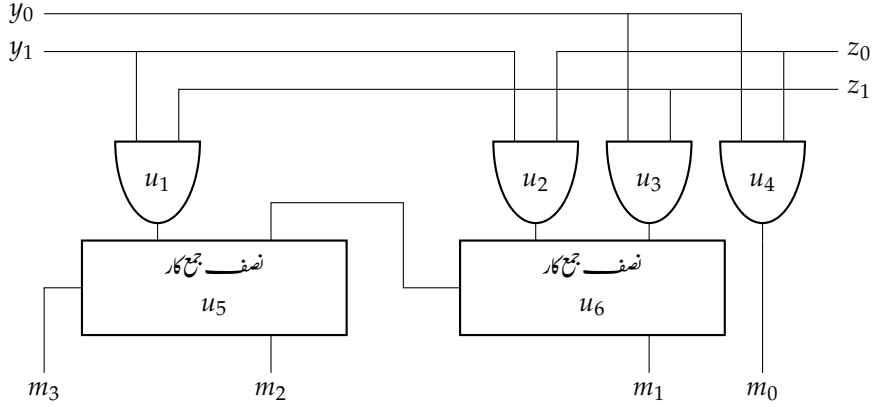
۴-بیتی مسر موز اعشاریہ جواب متابل مقبول ہوگا، البتہ ۹ سے بڑے ۴-بیتی جواب کو ۴-بیتی مسر موز اعشاریہ جواب تسلیم نہیں کیا جاسکتا۔ آئیں دیکھتے ہیں ایسی صورت میں کیا کیا جاسکتا ہے۔

یہاں ایک دلچسپ حقیقت پر غور کرتے ہیں۔ نامتابل مقبول ۴-بیتی جواب کے ساتھ 0110_2 ۴-بیتی طور جمع کرنے سے درست ۴-بیتی مسر موز اعشاریہ جواب حاصل ہوگا۔ مثلاً، 01010_2 کے ساتھ 0110_2 جمع کرنے سے 10000_2 حاصل ہوگا، جو ۴-بیتی مسر موز اعشاریہ میں درست جواب ہے۔ یوں ۰ تا ۹ ۴-بیتی جوابات کو جوں کا توں، جبکہ ان سے بڑے جوابات کے ساتھ 0110_2 ۴-بیتی طور جمع کر کے ۴-بیتی مسر موز اعشاریہ جواب حاصل کیے جاسکتے ہیں۔

جدول سے واضح ہے کہ جب ۴-بیتی جمع کار کے جواب میں خرابی حاصل b_4 بلند ہو، اس جواب کو ۴-بیتی مسر موز اعشاریہ جواب تسلیم نہیں کیا جاسکتا؛ اس کے علاوہ جب b_3 کے ساتھ b_2 یا b_1 بھی بلند ہو تب بھی جواب کو ۴-بیتی مسر موز اعشاریہ تسلیم نہیں کیا جاسکتا۔ ان حقائق کو درج ذیل بولین مساوات بیان کرتی ہے، جہاں نامتابل مقبول جواب کی صورت میں G بلند ہوگا۔

$$(۵.۵) \quad G = b_4 + b_3b_2 + b_3b_1$$

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ۴-بیتی جمع کار کی مدد سے ۴-بیتی مسر موز اعشاریہ جمع کار کا حصول شکل ۵.۱۱ میں دکھایا گیا ہے۔ اگر G پست ہو تب خپلا جمع کار بالائی جمع کار کے جواب کے ساتھ ۰ جمع کر کے اسی جواب کو خارج کرتا



شکل ۵.۱۲: دوہٹ شنائی ضرب کار

ہے، جبکہ G بسند ہونے کی صورت میں ساتھ 0110_2 جمع کر کے درست شنائی مرموز اعشاریہ حناج کرتا ہے۔

۵.۲ شنائی ضرب کار

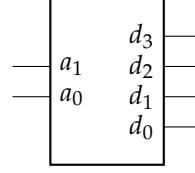
شنائی ضرب بالکل اعشاری ضرب کی طرح کی جاتی ہے۔ دوہٹ شنائی اعداد y اور z کو قلم و کاغذ کی طرز پر ضرب کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc}
 z_1 & z_0 \\
 y_1 & y_0 \\
 \hline
 y_0 z_1 & y_0 z_0 \\
 y_1 z_1 & y_1 z_0 \\
 \hline
 m_3 & m_2 & m_1 & m_0
 \end{array}
 \end{array}$$

اس مساوات سے حاصل دوہٹ شنائی ضرب کار شکل ۵.۱۲ میں پیش ہے۔ زیادہ ہٹ کے ضرب کار بھی اسی طرح تشکیل دیے جاتے ہیں۔

درج بالا قلم و کاغذ کی طرز پر ضرب میں کسٹریٹ $m_0 = y_0 z_0$ ہے جو شکل میں جمع گیٹ u_4 دیتا ہے۔ اگلا ہٹ m_1 ہے جو $y_0 z_1$ اور $y_1 z_0$ کو جمع کر کے حاصل ہو گا۔ جمع گیٹ u_3 ہمیں $y_0 z_1$ جبکہ u_2 ہمیں $y_1 z_0$ دیتا ہے، جنہیں دایاں نصف جمع کار u_6 آپس میں جمع کر کے m_1 اور حاصل (اگر موجود ہو) دیتا ہے۔ اس حاصل کو $y_1 z_1$ (جو گیٹ u_1 سے ملتا ہے) کے ساتھ بایاں نصف جمع کار u_5 ملا کر m_2 اور حاصل m_3 دیگا۔

داخلی بٹ		خارجی بٹ			
a_0	a_1	d_3	d_2	d_1	d_0
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0



شکل ۵.۱۳: دو سے چار شناخت کار

مشق ۵.۲: ثنائی اعداد 11_2 اور 10_0 جمع کرنے کے قدم شکل ۵.۱۲ کے دور میں کرتے ہوئے دکھائیں۔

مشق ۵.۳: انٹرنیٹ سے 74284 مخلوط دور کے معلوماتی صفحات حاصل کریں۔ یہ مخلوط دور کیا کام سرانجام دیتا ہے؟

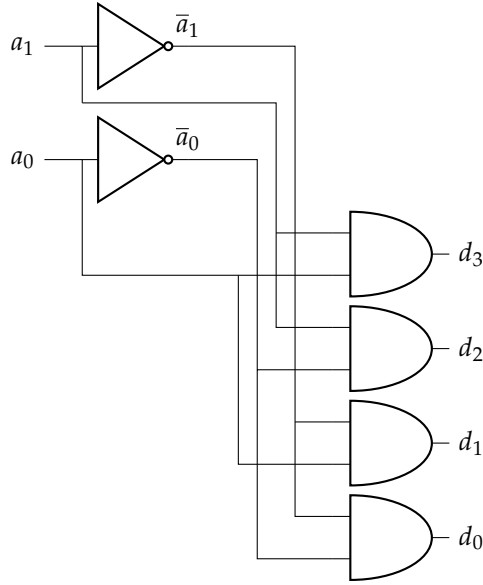
۵.۳ شناخت کار

دو بٹ چار علامتوں (2^2) کو ظاہر کر سکتا ہے، جبکہ n بٹ 2^n علامتوں کو ظاہر کر سکتا ہے۔ ایسا دور جو n مداحل کو دیکھ 2^n منفرد مخارج میں سے ایک چُن کے شناخت کار^{۱۲} کہلاتا ہے۔ اگر شناخت کار کے n مداحل کے تمام ترتیب زیر استعمال بدلائے گئے ہوں، تب اس کے مخارج 2^n سے کم ہوں گے۔ شکل ۵.۱۳ میں دو سے چار شناخت کار کی علامت اور کارکردگی کا جدول پیش ہیں۔ داخلی بٹوں کی ہر منفرد ترتیب، خارجی بٹوں میں سے ایک منفرد بٹ منتخب کرتی ہے۔ یہاں چنی گئی بٹ بلسند کی گئی ہے، شناخت کار یوں بھی تشکیل دی جاسکتی ہے کہ منتخب بٹ پست ہو۔

مداحل 00 (جدول کی پہلی صفحہ) کرنے سے چار مخارج میں سے ایک، یعنی d_0 کی شناخت ہوتی ہے۔ اسی طرح 01 مخارج d_1 کی، 10 مخارج d_2 کی، اور 11 مخارج d_3 کی شناخت کرتے ہیں۔

اگر d چار مختلف جگہیں، مثلاً، چار گلیاں، یا چار مکان، تصور کی جائیں، تب a ان کا پست ہوگا، جس کے ذریعہ ان تک پہنچنا ممکن ہوگا۔ اسی مشابہت سے a کو پست کے بڑے پستے^{۱۳} یا صرف پستے^{۱۴} کہتے ہیں۔ عددی برقیات

decoder^{۱۲}
address bits^{۱۳}
address^{۱۴}



شکل ۵.۱۴: دو باحپار شناخت کار

میں اس طرح جگہ تعین کرنے والے ”پتے کے بٹوں“ کا استعمال عام ہے اور انہیں، عموماً، a سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

کسی بھی پتے کو اعشاری روپ میں لکھیں؛ یہی مقام منتخب ہوگا۔ یوں 101_2 پتے مقام 5_{10} یعنی d_5 منتخب کرے گا۔

شکل ۵.۱۳ میں دیے جدول کو مخارج کے لئے حل کر کے درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$d_0 = \bar{a}_1 \bar{a}_0$$

$$d_1 = \bar{a}_1 a_0$$

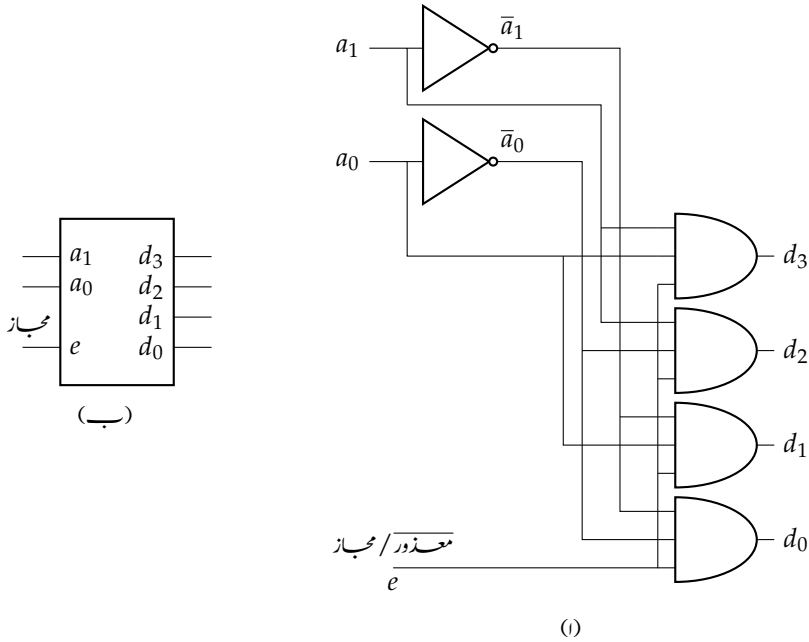
$$d_2 = a_1 \bar{a}_0$$

$$d_3 = a_1 a_0$$

شکل ۵.۱۴ میں ان مساوات سے حاصل دو باحپار (2×4) شناختی کار پیش^{۱۵} ہے، جس کے داخلی پٹ کی تعداد دو (2)، جبکہ خارجی پٹ کی تعداد چار (4) ہے۔

شکل ۵.۱۴ میں پیش شناخت کار کے تمام ضرب گیتوں کے ساتھ اضافی فتاویٰ مداحل جوڑ کر مجباز و معذور صلاحیت کا (2×4) شناخت کار حاصل ہوگا، جو شکل ۵.۱۵ میں پیش ہے۔ شناخت کار، بلند فتاویٰ اشارہ (e) کی صورت میں، شناخت کرنے کا مجباز ہوگا، پست اشارے کی صورت میں شناخت کار معذور ہوگا اور

^{۱۵} decoder



شکل ۵.۱۵: محباز و معذور صلاحیت کا دو باحبار شناخت کار

اس کے تمام مخارج پرست ہوں گے۔ شکل-ب میں اس کی علامت پیش کی گئی ہے، جہاں فتاویٰ اشارہ کو مختصراً ”محباز“ کہا گیا ہے۔

جدول ۵.۴-الف میں محباز و معذور صلاحیت کے شناخت کار کی کارکردگی پیش کی گئی ہے۔ اس جدول کو مختصراً جدول-ب کی صورت میں پیش کیا جاتا ہے، جہاں پہلی صف میں فتاویٰ اشارہ پرست (0 = e) ہے لہذا a₀ اور a₁ کی قیمتیں اہمیت نہیں رکھتی؛ یوں پہلی صف میں a₀ اور a₁ کی قیمت x لکھی جاتی ہے۔

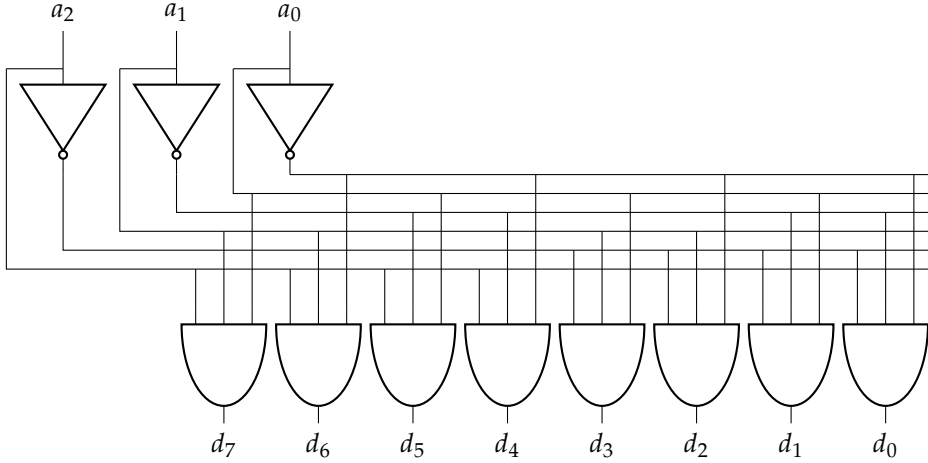
تین با آٹھ (3 × 8) شناخت کار کا دور حاصل کرنے کی خاطر، تین مداحل کا ایسا جدول لکھتے ہیں جس میں مداحل کی ہر ترتیب ایک منفرد مخارج منتخب کرے (جدول ۵.۵ دیکھیں)۔ چونکہ چٹا گیب مخارج بلند ہوگا، لہذا ایسا شناخت کار، بلند عمل پیرا کہلاتا ہے۔ مخارج تقاعلات کی مساوات، مجموعہ ارکان ضرب کی صورت

جدول ۵.۴: محباز و معذور صلاحیت کاشت ناخت کار

(ب)							(۱)						
e	a_1	a_0	d_3	d_2	d_1	d_0	e	a_1	a_0	d_3	d_2	d_1	d_0
0	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0

جدول ۵.۵: بلند عمل پیرا، تین با آژنه شناخت کار

a_2	a_1	a_0	d_7	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0



شکل ۵.۱۶: بلند عمل پیرا، تین با آٹھ (3×8) شناخت کار

میں حاصل کرتے ہیں۔

$$d_0 = \bar{a}_2 \bar{a}_1 \bar{a}_0$$

$$d_1 = \bar{a}_2 \bar{a}_1 a_0$$

$$d_2 = \bar{a}_2 a_1 \bar{a}_0$$

$$d_3 = \bar{a}_2 a_1 a_0$$

$$d_4 = a_2 \bar{a}_1 \bar{a}_0$$

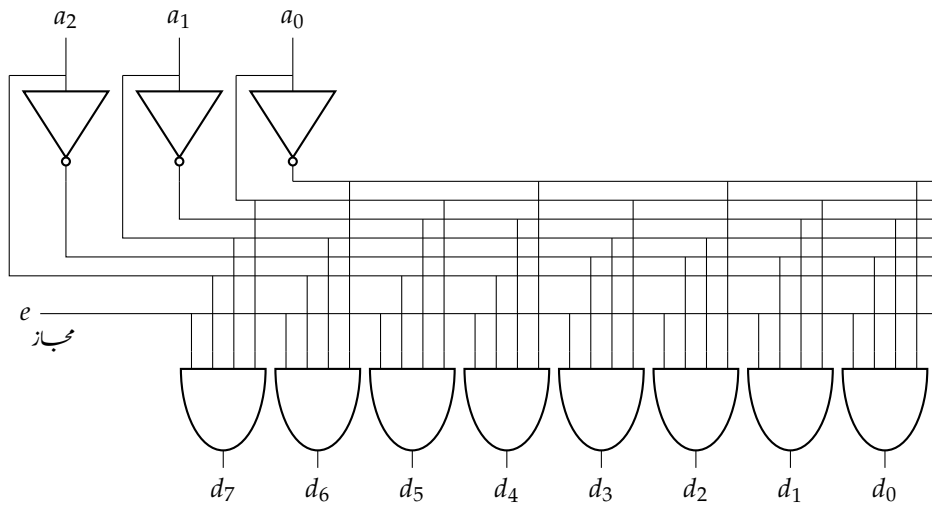
$$d_5 = a_2 \bar{a}_1 a_0$$

$$d_6 = a_2 a_1 \bar{a}_0$$

$$d_7 = a_2 a_1 a_0$$

ان تفاعلات سے حاصل، بلند عمل پیرا، تین با آٹھ (3×8) شناخت کار شکل ۵.۱۶ میں پیش ہے۔

اس میں مجاز مداحل کا اضافہ کرنے سے مجاز و معذور صلاحیت، بلند عمل پیرا، تین با آٹھ شناخت کار حاصل ہو گا جو شکل ۵.۱۷ میں پیش ہے۔ مجاز بلند ہونے کی صورت میں شناخت کار کام کرے گا، جبکہ پست مجاز کی صورت میں تمام مخارج پست رہیں گے؛ ہم کہتے ہیں یہ بلند مجاز شناخت کار ہے۔ جدول ۵.۶ میں اس کی کارکردگی پیش کی گئی ہے۔ پہلی صف میں e پست ہے، لہذا، شناخت کار معذور ہو گا، اور اس کے تین مداحل a_0 ، a_1 ، اور a_2 کی قیمتیں اہمیت نہیں رکھتی؛ اسی لئے انہیں x لکھا گیا ہے جو 0 یا 1 ہو سکتا ہے۔ یہ (پہلی) صف درحقیقت، $a_2 a_1 a_0$ کی آٹھ (8) قیمتوں، 000₂ تا 111₂، لہذا، آٹھ صفوں کو ظاہر کرتی ہے۔



شکل ۵.۱: بلند مجاز، بلند عمل پیرا، تین با آخه شناخت کار

جدول ۵.۶: بلند مجاز، بلند عمل پیرا، تین با آخه شناخت کار

e	a_2	a_1	a_0	d_7	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0
0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

جدول ۵۔۷: پست محباز، پست عمل پیرا، تین با آٹھ شناخت کار

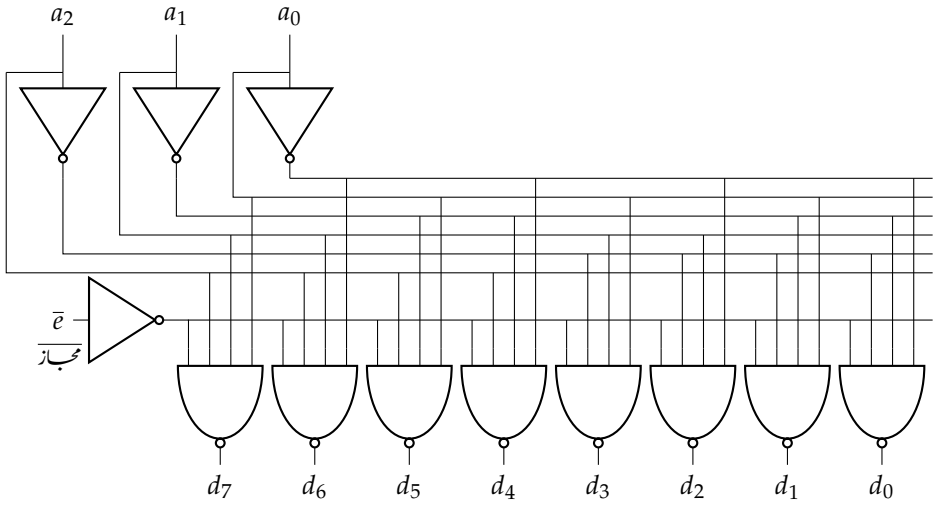
\bar{e}	a_2	a_1	a_0	\bar{y}_7	\bar{y}_6	\bar{y}_5	\bar{y}_4	\bar{y}_3	\bar{y}_2	\bar{y}_1	\bar{y}_0
1	x	x	x	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1

مشق ۵.۴: شکل ۵.۱۷ میں دایاں جمع گیٹ کا محارج کیا ہے؟ باقی محارج بھی شکل سے حاصل کریں۔ کیا یہ جدول ۵.۵ پر پورا اترتے ہیں؟

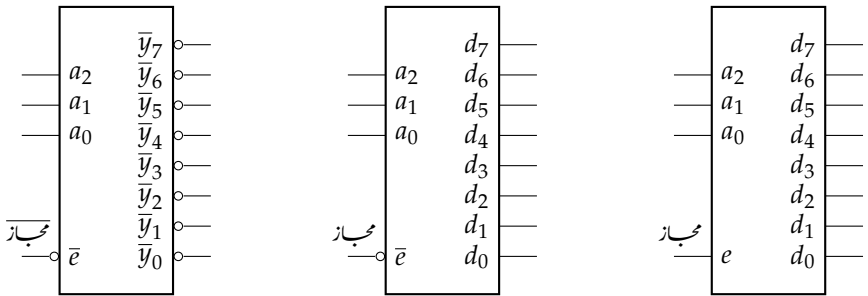
بعض اوقات، ایسے شناخت کار کی ضرورت پیش آتی ہے جس کا چنا گیا محارج پست ہو۔ ایسا شناخت کار، پستے عمل پیرا^{۱۸} کہلاتا ہے۔ جدول ۵.۷ میں ایسا پست عمل پیرا، تین با آٹھ شناخت کار پیش ہے، جو تباہ اشارہ محباز پست ہونے کی صورت میں کام کرتا ہے؛ ہم کہتے ہیں یہ پستے مجاز^{۱۹} ہے۔ روایتاً، پست عمل پیرا محارج کو \bar{y}_0 سے ظاہر کیا جاتا ہے، جہاں ہٹ پر ”لکیر“ اس بات کی یاد دہانی کراتی ہے کہ چنا گیا محارج پست ہو گا۔ تباہ اشارہ پر بھی ”لکیر“ کھینچی گئی ہے (\bar{e}) جو اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ شناخت کار اس صورت کام کرے گا جب تباہ اشارہ پست کیا جائے۔ شکل ۵.۱۸ میں اس کا دور پیش ہے، جو شکل ۵.۱۷ میں ضرب گیٹ کی جگہ متم ضرب گیٹ ڈالنے سے، اور تباہ اشارہ کے ساتھ نفی گیٹ منسلک کرنے سے حاصل ہوگا۔

شکل ۵.۱۹ میں تین با آٹھ شناخت کار کی علامتیں پیش ہیں۔ شکل-الف میں بلند محباز، بلند عمل پیرا، شکل-ب میں پست محباز، بلند عمل پیرا اور شکل-ج میں پست محباز، پست عمل پیرا روپ دکھائے گئے ہیں۔ ان علامتوں میں خارجی پینوں پر گول دائرہ اس بات کی یقین دہانی کراتا ہے کہ منتخب ہونے کی صورت میں یہ ہٹ پست ہوگی۔ اسی طرح تباہ ہٹ پر گول دائرہ یاد دہانی کراتا ہے کہ شناخت کار صرف اس صورت محباز ہوگا جب یہ اشارہ پست ہو۔

^{۱۸} active low
^{۱۹} active low



شکل ۵.۱۸: پست مجاز، پست عمل پیرا، تین با آخه شناخت کار



(ا) بلند مجاز، بلند عمل پیرا (ب) پست مجاز، بلند عمل پیرا (ج) پست مجاز، پست عمل پیرا

شکل ۵.۱۹: تین با آخه شناخت کار کی مختلف اقام کی علامتیں۔

جدول ۵.۸: مکمل جمع کار کی کارکردگی (برائے مثال ۵.۸)

x_0	y_0	c_0	c_1	s_0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

مشق ۵.۵: انٹرینیٹ سے 3×8 پست عمل پیرا شناخت کار کے مخلوط دور 74138 کے معلوماتی صفحات حاصل کریں۔ اس مخلوط دور کا ”دورانیہ رد عمل“ کتنا ہے؟

۵.۴ شناخت کار کی مدد سے تفعل کا حصول

ہر تفعل کی مساوات، ارکان ضرب کے مجموعہ کے روپ میں حاصل کی جاسکتی ہے۔ چونکہ شناخت کار تمام ممکنہ ارکان ضرب فراہم کرتا ہے، لہذا اس کے ساتھ جمع گیٹ جوڑ کر تفعل کو عملی جامہ پہنایا جاسکتا ہے۔ یہ طریقہ کار ایک مثال کی مدد سے سیکھتے ہیں۔

مثال ۵.۱: مکمل جمع کار کو شناخت کار کی مدد سے ارکان ضرب استعمال کرتے ہوئے حاصل کریں۔

حل: مکمل جمع کار کی کارکردگی جدول ۵.۸ میں پیش ہے، جہاں ہٹ x_0 اور y_0 کے ساتھ داخلی حاصل c_0 جمع ہو کر s_0 اور خارجی حاصل c_1 پیدا ہوگا۔

اس جدول سے درج ذیل مساوات حاصل ہوتی ہیں۔

$$\begin{aligned} c_1 &= \bar{x}_0 y_0 c_0 + x_0 \bar{y}_0 c_0 + x_0 y_0 \bar{c}_0 + x_0 y_0 c_0 \\ s_0 &= \bar{x}_0 \bar{y}_0 c_0 + \bar{x}_0 y_0 \bar{c}_0 + x_0 \bar{y}_0 \bar{c}_0 + x_0 y_0 c_0 \end{aligned} \quad (5.1)$$

تین سے آٹھ شناخت کار جدول ۵.۹ میں پیش ہے، جہاں خارجی ہٹ کو مطابقتی ارکان ضرب لکھا گیا ہے۔ یوں درج

جدول ۵.۹: تین با آٹھ شناخت کار ارکان ضرب دیتا ہے (برائے مثال ۵.۱)

x_0	y_0	c_0	m_7	m_6	m_5	m_4	m_3	m_2	m_1	m_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
 m_7 &= x_0 y_0 c_0 \\
 m_6 &= x_0 y_0 \bar{c}_0 \\
 m_5 &= x_0 \bar{y}_0 c_0 \\
 m_4 &= x_0 \bar{y}_0 \bar{c}_0 \\
 m_3 &= \bar{x}_0 y_0 c_0 \\
 m_2 &= \bar{x}_0 y_0 \bar{c}_0 \\
 m_1 &= \bar{x}_0 \bar{y}_0 c_0 \\
 m_0 &= \bar{x}_0 \bar{y}_0 \bar{c}_0
 \end{aligned}
 \tag{۵.۷}$$

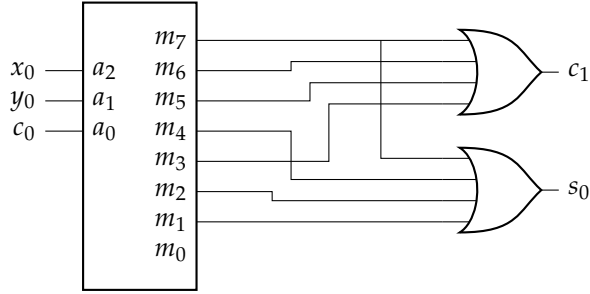
مساوات ۵.۷ کو دیکھتے ہوئے مساوات ۵.۶ درج ذیل لکھی جاسکتی ہیں، جن سے مکمل جمع کار کا شکل ۵.۲۰ حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned}
 c_1 &= m_3 + m_5 + m_6 + m_7 = \sum(m_3, m_5, m_6, m_7) \\
 s_0 &= m_1 + m_2 + m_4 + m_7 = \sum(m_1, m_2, m_4, m_7)
 \end{aligned}
 \tag{۵.۸}$$

یہ تمام عمل نہایت آسان بنایا جاسکتا ہے اگر جدول ۵.۸ میں ارکان ضرب کا خانہ بنایا جائے (جدول ۵.۱۰ دیکھیں)۔ اس طرز پر جدول لکھ کر تفاعل کی مساوات، ارکان ضرب کے روپ میں حاصل کی جاسکتی ہے۔ اس جدول کو دیکھ کر مطلوب جواب فوراً لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \sum(m_3, m_5, m_6, m_7) \\
 s_0 &= \sum(m_1, m_2, m_4, m_7)
 \end{aligned}$$

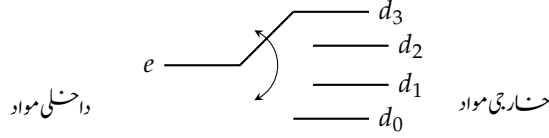
□



شکل ۵.۲۰: شناخت کار کی مدد سے مکمل جمع کار کا حصول

جدول ۵.۱۰: مکمل جمع کار کے ارکان ضرب (برائے مثال ۵.۱)

x_0	y_0	c_0	c_1	s_0	m
0	0	0	0	0	m_0
0	0	1	0	1	m_1
0	1	0	0	1	m_2
0	1	1	1	0	m_3
1	0	0	0	1	m_4
1	0	1	1	0	m_5
1	1	0	1	0	m_6
1	1	1	1	1	m_7



شکل ۵.۲۱: ایک سے چار خارجی منتخب کار کا تصور۔

۵.۵ داخلی منتخب کار اور خارجی منتخب کار

ایسا دور جو اگلوتے مداحنل پر مہیا شنائی مواد کو 2^n مخارج میں کسی بھی ایک پر بھیج کے خارج منتخب کار کہلاتا ہے۔
مطلوبہ مخارج کی نشاندہی n بٹ پتہ کرتا ہے۔

ایسا دور جو 2^n مداحنل میں کسی بھی ایک پر مہیا شنائی مواد کو اگلوتے مخارج پر بھیج کے داخل منتخب کار کہلاتا ہے۔
مطلوبہ مداحنل کی نشاندہی n بٹ پتہ کرتا ہے۔

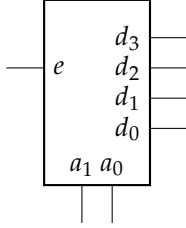
۵.۵.۱ خارجی منتخب کار

شکل ۵.۲۱ میں خارجی منتخب کار کا تصور پیش کیا گیا ہے، جہاں مداحنل e پر آمد شنائی مواد کو، پٹی سوچ کے ذریعہ،
چار مختلف خارجی راستوں بھیجا جاسکتا ہے۔

محاذ و معذور صلاحیت کا شناخت کار بھی یہ کام سرانجام دے سکتا ہے۔ یہ دیکھنے کی خاطر جدول ۵.۴ کو
یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

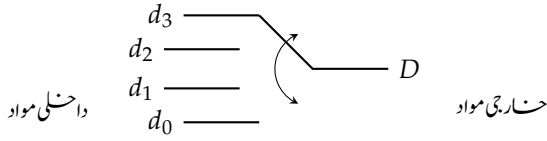
e	a_1	a_0	d_3	d_2	d_1	d_0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0

جدول میں $a_1 a_0$ کو دو بٹ پتہ، e کو داخلی مواد، اور d_0 تا d_3 کو چار مخارج راستے تصور کریں۔ جدول کی پہلی اور
پانچویں صف پر نظر رکھیں، جہاں $a_1 a_0$ دو بٹ پتہ 00 ہے، جو مخارج d_0 منتخب کرے گا۔ پہلی صف میں
داخلی مواد 0 جبکہ پانچویں صف میں 1 ہے۔ مخارج d_0 کی مطابقتی قیمتیں یہی ہیں۔ پہلی صف میں d_0 کی قیمت



e	a_1	a_0	d_3	d_2	d_1	d_0
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

شکل ۵.۲۲: ایک سے چار (1×4) خارجی منتخب کار



شکل ۵.۲۳: ایک داخلی منتخب کار کا تصور۔

0 جبکہ پانچویں صف میں اس کی قیمت 1 ہے۔ غیر منتخب مخارج پست رہیں گے۔

باقی تین پتے 01، 10، اور 11 بالترتیب d_1 ، d_2 ، اور d_3 منتخب کرتے ہیں۔ تسلی کر لیں کہ منتخب مخارج پر وہی مواد ہے جو مد داخل e پر ہے۔

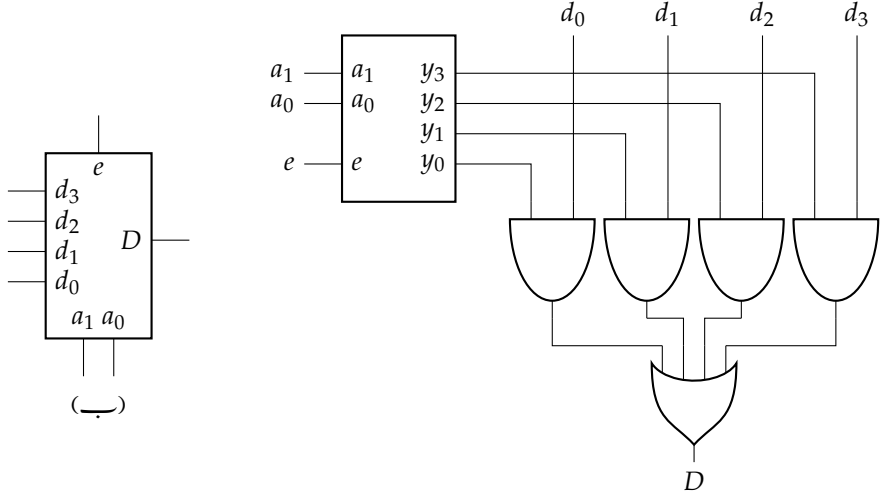
اس جدول میں صفوں کی ترتیب نو کر کے شکل ۵.۲۲ میں پیش جدول کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے، جو اس کی کار کردگی، طور خارجی منتخب کار واضح کرتا ہے۔ اس شکل میں (1×4) منتخب کار کی علامت بھی پیش ہے۔

۵.۵.۲ داخلی منتخب کار

شکل ۵.۲۳ میں داخلی منتخب کار کا تصور پیش کیا گیا ہے، جہاں پچی سوئچ کے ذریعہ d_0 تا d_3 میں سے ایک کا مواد مخارج منتقل کیا جاسکتا ہے۔

داخلی منتخب کار کو شناخت کار کی مدد سے شکل ۵.۲۴ میں حاصل کیا گیا ہے؛ شکل-ب میں اس کی علامت پیش ہے۔ یہاں محباز و معذور صلاحیت کا شناخت کار استعمال کر کے محباز و معذور صلاحیت کا داخلی منتخب کار حاصل کیا گیا۔ ایسا شناخت کار جس میں فتابو اشارہ نہ ہو، استعمال کرتے ہوئے حاصل داخلی منتخب کار میں بھی محباز و معذور فتابو اشارہ نہیں ہوگا۔

محباز کردہ شناخت کار 00 پتے کی صورت میں y_0 بلند کرے گا، جبکہ y_1 ، y_2 اور y_3 پست رہیں گے۔ یوں دائیں تین ضرب گیٹ پست رہیں گے، جبکہ بائیں گیٹ d_0 خارج کرے گا۔ یوں جمع گیٹ بھی d_0 خارج کرے گا۔ فتابو



(i)

شکل ۵.۲۴: چارے ایک (4 × 1) داخلی منتخب کار۔

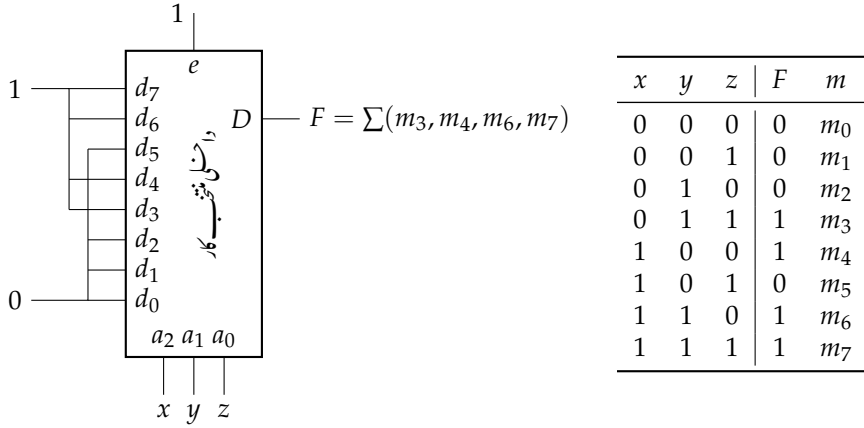
اشارہ e پست کرنے سے داخلی شناخت کار معذور ہوگا اور 0 خارج کرے گا۔

تسل کر لیں کہ محال میں، پست کے دوپٹ a0 اور a1، چار مداحسل d0 تا d1، میں سے ایک کو منتخب کر کے خارج کرتا ہے۔

مشق ۵.۶: انٹرنیٹ سے 74153 کے معلوماتی صفحات حاصل کریں۔ یہ مخلوط دور کیا کام سرانجام دیتا ہے؟

۵.۵.۳ داخلی منتخب کار سے تفاعسل کا حصول

شناخت کار کے ساتھ جمع گیٹ جوڑ کر مجموعہ ارکان ضرب کے روپ میں تفاعسل کا حصول آپ دیکھ چکے۔ داخلی منتخب کار میں شناخت کار اور جمع گیٹ دونوں موجود ہیں (شکل ۵.۲۴ دیکھیں)۔ یوں n پست ہٹ کا $2^n \times 1$ داخلی منتخب کار سے n آزاد متغیر تفاعسل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس عمل کو ایک مثال کی مدد سے سمجھتے ہیں۔



شکل ۵.۲۵: داخلی منتخب کار سے تفاعل کا حصول (برائے مثال ۵.۲)

مثال ۵.۲: درج ذیل تفاعل 1×8 داخلی منتخب کار سے حاصل کریں۔

$$F(x, y, z) = \sum(m_3, m_4, m_6, m_7)$$

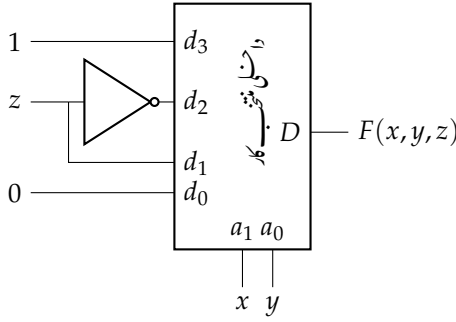
حل: اس تفاعل کا جدول شکل ۵.۲۵ میں پیش ہے۔ تفاعل کے تین آزاد متغیرات xyz کو 1×8 داخلی منتخب کار کے تین پست بٹ تصور کر کے، داخلی منتخب کار کے آٹھ مداخل d_0 تا d_7 میں سے d_3 ، d_4 ، d_6 ، اور d_7 کو بلند، جبکہ باقی کو پست رکھ کر تفاعل حاصل ہوگا، جو شکل ۵.۲۵ میں پیش ہے۔ داخلی منتخب کار کو محباز ($e = 1$) رکھا گیا ہے۔

یوں پست 000، 001، 010، اور 101 کی صورت میں داخلی منتخب کار بالترتیب d_0 ، d_1 ، d_2 ، اور d_5 پر منراہم مواد خارج کرے گا؛ ان تمام کو پست رکھ کر درکار تفاعل کی پست صورت حاصل ہوگی۔ اسی طرح پست 011، 100، 110، اور 111 کی صورت میں بالترتیب d_3 ، d_4 ، d_6 ، اور d_7 کے مواد خارج ہوں گے؛ انہیں بلند رکھ کر تفاعل کی بلند صورت حاصل ہوگی۔ کسی ایک لمحہ پر پست صرف ایک قیمت رکھ سکتا ہے۔ □

n آزاد متغیر تفاعل، $(n - 1)$ پست بٹ کے داخلی منتخب کار سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یہاں کوئی بھی $(n - 1)$ متغیرات بطور داخلی منتخب کار کے پست استعمال ہوں گے، جبکہ ایک متغیر بطور مداخل استعمال ہوگا۔ ایک مثال کی مدد سے ایسا کرنا سیکھتے ہیں۔

مثال ۵.۳: درج بالا مثال میں دیا گیا تفاعل $F(x, y, z) = \sum(m_3, m_4, m_6, m_7)$ دو پست بٹ کے 4×1 داخلی منتخب کار سے حاصل کریں۔

حل: شکل ۵.۲۶ میں تفاعل کا جدول ایک نئے انداز میں لکھا گیا ہے۔ آزاد متغیرات xy کے دائیں کھڑی لکیر کھینچ گئی، اور xy کی قیمت کے مطابق جدول کے چار حصے کیے گئے۔ پہلے (بالائی) حصے میں (جہاں



x	y	z	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

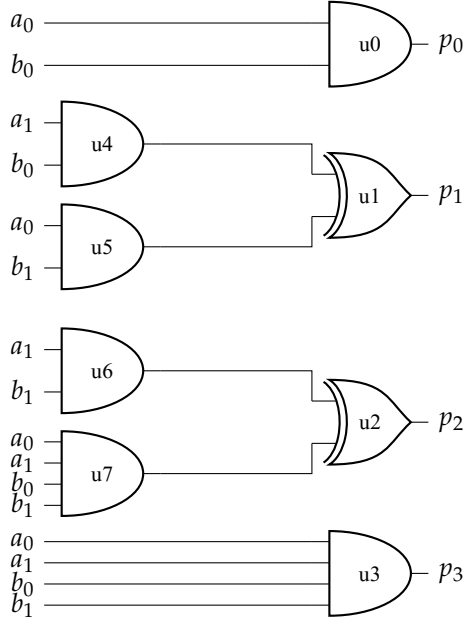
شکل ۵.۲۶: داخلی منتخب کارے تفاعل کا حصول (برائے مثال ۵.۳)

۰۰ $xy =$ ہے) تفاعل F کی قیمت بدستور ۰ ہے، لہذا اس حصے کے اضافی قطار میں $F = 0$ لکھا گیا۔ دوسرے حصے (۰۱ $xy =$) کی دونوں صفوں میں z کی قیمت اور تفاعل F کی قیمت برابر ہیں، لہذا یہاں $F = z$ لکھا گیا۔ تیسرے حصے (۱۰ $xy =$) میں z اور F کی قیمتیں آپ میں متم ہیں، لہذا یہاں $F = \bar{z}$ لکھا گیا ہے۔ آخری حصے (۱۱ $xy =$) میں تفاعل بدستور بلند ہے، لہذا یہاں $F = 1$ لکھا گیا۔

شکل ۵.۲۶ میں اس جدول سے حاصل دور دکھایا گیا ہے، جہاں (مجاز و معذور صلاحیت نہ رکھنے والا) 4×1 داخلی منتخب کار استعمال کیا گیا۔ پتہ $xy = 00$ کی صورت میں داخلی منتخب کار مداحل d_0 کا مواد حنارن کرے گا۔ یوں d_0 پر ۰ مہیا کر کے اس صورت میں تفاعل کی درست قیمت حاصل کی گئی۔ اسی طرح $xy = 01$ کی صورت میں d_1 کا مواد حنارن کیا جائے گا، لہذا یہاں متغیر z منراہم کر کے تفاعل کی درست قیمت حاصل کی گئی۔ اسی طرح $xy = 10$ کی صورت میں d_2 کا مواد حنارن کیا جائے گا، لہذا یہاں \bar{z} منراہم کر کے تفاعل کی درست قیمت حاصل کی گئی، اور آخر میں $xy = 11$ کی صورت میں تفاعل بدستور بلند رہتا ہے، لہذا d_3 پر ۱ مہیا کیا گیا۔ □

۵.۶ متوازی شنائی ضرب کار

حسابی اعمال میں ضرب کار کردار کلیدی ہے۔ شنائی اعداد کی ضرب کار عمل بالکل اعشاری اعداد کی ضرب کی طرح ہے۔ دو پٹ شنائی اعداد a اور b کی ضرب درج ذیل ہے، جہاں ان شنائی اعداد کو $a_1 a_0$ اور $b_1 b_0$ لکھا گیا ہے۔



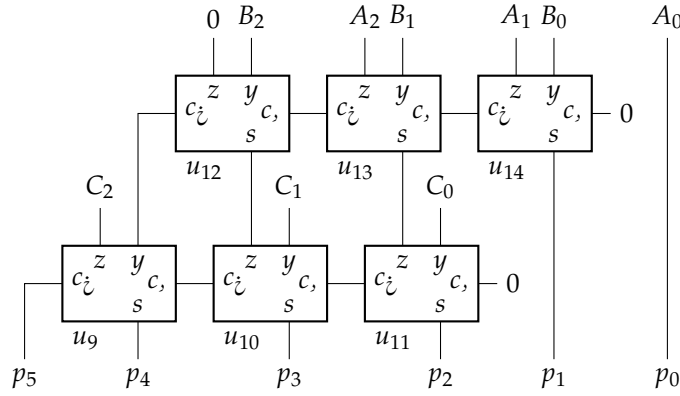
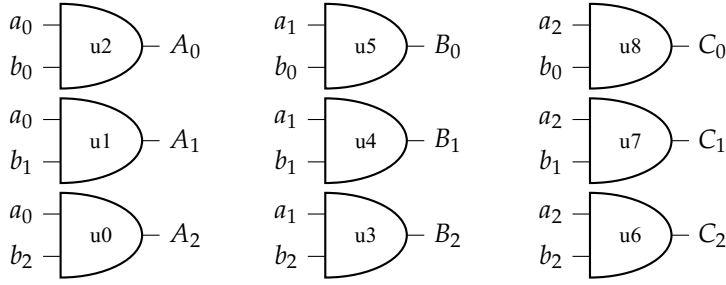
شکل ۵.۲: دو بٹ شناختی متوازی ضرب کار

	b_1	b_0
	a_1	a_0
	$a_0 b_1$	$a_0 b_0$
$a_1 b_1$	$a_1 b_0$	
p_3	p_2	p_1
		p_0

یہاں درج ذیل ہوں گے، جنہیں شناختی جمع کار کی مساوات ۵.۱ کی مدد سے حاصل کیا گیا، اور جن سے شکل ۵.۲ میں پیش، دو بٹ متوازی شناختی ضرب کار حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned}
 p_0 &= a_0 b_0 \\
 p_1 &= (a_1 b_0) \oplus (a_0 b_1) \\
 p_2 &= (a_1 b_1) \oplus (a_1 b_0 a_0 b_1) \\
 p_3 &= a_1 b_1 a_1 b_0 a_0 b_1 = a_1 a_0 b_1 b_0
 \end{aligned}$$

اگرچہ زیادہ بٹ ضرب کار اس طریقہ کار سے تشکیل دیے جاسکتے ہیں؛ بد قسمتی سے، اعداد کے بٹ کی تعداد بڑھانے سے ضرب کار میں درکار گیٹوں کی تعداد بہت تیزی سے بڑھتی ہے (محض آٹھ یا سولہ بٹ ضرب کار میں بھی



شکل ۵.۲۸: تین بٹ شنائی ضرب کار

مستعمل گیدٹوں کی تعداد بہت زیادہ ہوگی، لہذا ایسا کرنا مہنگا ثابت ہوگا۔ عموماً زیادہ بٹ کے ضرب کار مکمل جمع کار کی مدد سے حاصل کیے جاتے ہیں۔ اس طریقہ کو تین بٹ شنائی اعداد کی ضرب کو مثال بنا کر دیکھتے ہیں۔

تین بٹ اعداد $b_2 b_1 b_0$ اور $a_2 a_1 a_0$ کی ضرب درج ذیل ہے، جس سے شکل ۵.۲۸ میں پیش تین بٹ شنائی ضرب کار حاصل ہوگا۔ اس طریقہ کار سے باآسانی زیادہ بٹ کے شنائی ضرب کار بنائے جاسکتے ہیں۔

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{r}
 b_2 \quad b_1 \quad b_0 \\
 a_2 \quad a_1 \quad a_0 \\
 \hline
 a_0 b_2 \quad a_0 b_1 \quad a_0 b_0 \\
 a_1 b_2 \quad a_1 b_1 \quad a_1 b_0 \\
 a_2 b_2 \quad a_2 b_1 \quad a_2 b_0 \\
 \hline
 p_5 \quad p_4 \quad p_3 \quad p_2 \quad p_1 \quad p_0
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (5.9)$$

اس شکل میں 9 ضرب گیت اور 6 مکمل جمع کار مستعمل ہیں۔ ضرب گیت u_1 مداحصل a_0 اور b_1 کا منطقی

ضرب $A_1 = a_0 b_1$ دے گا، جو مکمل جمع کار u_{14} کا z مداحل ہے۔ شکل میں u_1 کے مخارج سے u_{14} کے z مداحل تک تار نظر پوش کرتے ہوئے دونوں کو ایک نام (A_1) سے چکارا گیا ہے۔ دو نقطوں کو ایک نام سے چکارنا، دونوں کو آپس میں تار سے جوڑنے کے مترادف ہے۔

باب ۶

معاصر ترتیبی منطق اور ادوار

منطق میں، عموماً، دو متضاد صورتیں سامنے آتی ہیں، مثلاً، بلند اور پست، صادق اور کاذب، صادق اور کاذب، وغیرہ؛ جنہیں عددی برقیات میں 1 اور 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں، اگر بلند کو 1 سے ظاہر کیا جائے، تب پست کو 0 ظاہر کرے گا، اور اگر بلند کو 0 سے ظاہر کیا جائے، تب پست کو 1 سے ظاہر کیا جائے گا۔ اگر صادق کو 1 سے ظاہر کیا جائے، تب کاذب کو 0 ظاہر کرے گا۔ اگر صادق کو 1 سے ظاہر کیا جائے، تب کاذب کو 0 ظاہر کرے گا۔ اس کتاب میں بلند یا صادق کو 1 جبکہ پست یا کاذب کو 0 سے ظاہر کیا جائے گا۔

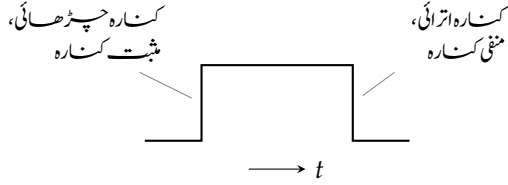
عددی برقیات میں 1 کو مثبت پانچ وولٹ (5 V) اور 0 کو صفر وولٹ (0 V) کے برقی دباؤ سے ظاہر کرنے کو مثبت منطق نظام کہتے ہیں۔ اس کتاب میں یہی نظام استعمال ہوگا۔

ہم اس کو الٹ کر کے 1 کو صفر وولٹ (0 V) اور 0 کو مثبت پانچ وولٹ (5 V) سے ظاہر کر سکتے ہیں، جو منفی منطق نظام کہلاتا ہے۔

اب تک، ہم شنائی گئیوں کا مطالعہ کرتے رہے ہیں، جن کا محارج اسی لمحہ تبدیل ہو جاتا ہے جس لمحے ان کے مداحل تبدیل ہوں۔ عددی برقیات میں ادوار کی ایک اہم قسم ایسی ہے، جو مداحل تبدیل ہونے کے باوجود، محارج کو اپنے حال میں برقرار رکھ سکتی ہے۔ اس قسم کے ادوار پلٹے کار کہلاتے ہیں، جن کے دو متضاد محارج ہوں گے۔

پلٹے کار ایک شنائی ہندسہ (ایک بٹ) ذخیرہ کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے، لہذا اس کو حافظہ^۳ کے طور استعمال کیا جاسکتا ہے۔ پلٹے کار استعمال کرتے ہوئے گنتے کار^۵، وغیرہ تشکیل دیے جاتے ہیں۔ اس باب میں پلٹے کار اور اس پر مبنی معاصر ادوار پر غور کیا جائے گا۔ معاصر ادوار وہ ادوار ہیں جن کے تمام حصے قدم ملا کر چلتے ہیں۔

positive logic system^۱
negative logic system^۲
flip flop^۴
memory^۳
counter^۵



شکل ۶.۱: کسارہ چڑھائی اور کسارہ اترائی

۶.۱ گیٹوں کے اوقات کار

شنائی ادوار کی کارکردگی پر تبصرہ کرنے سے پہلے چند تکنیکی اصطلاحات جاننا ضروری ہے۔ شکل ۶.۱ میں گیٹ کا مخارج بلند ہو کر دوبارہ پست ہوتا دکھایا گیا، جہاں (وقت t کے ساتھ دائیں رخ چلتے ہوئے) پہلے کسارے کو کنارہ چڑھائی^۱ یا مثبت کسارہ^۲، جبکہ دوسرے کو کنارہ اترائی^۳ یا منفی کسارہ^۴ کہا گیا۔ مخارج کا حال یکدم تبدیل ہوتا دکھایا گیا، جو درست نہیں۔

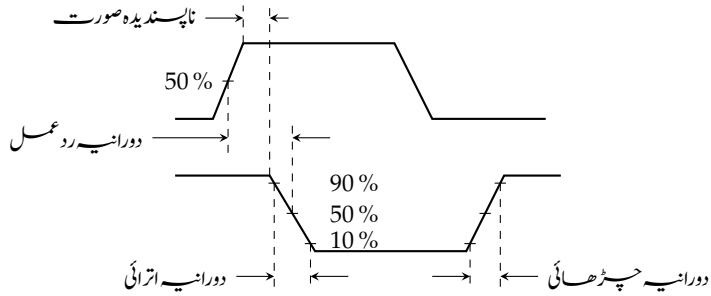
برقیاتی گیٹ نہایت نچست ہوتے ہیں، جو مخارج کو پست سے بلند یا بلند سے پست بہت کم دورانیوں میں کرتے ہیں۔ یہ دورانیے کم ضرور، لیکن صفر نہیں ہوتے۔ برقی اشارہ، روشنی کی رفتار سے بھی سفر کرتے ہوئے، داخلی پنیاسے خارجی پنیے تک، متبادل پیا وقت میں پہنچے گا۔ منفی گیٹ مشال بنا کر حقیقی دورانیوں پر غور کرتے ہیں (جو باقی گیٹوں کے لئے بھی درست ہوگا)۔ اشکال پر غور کے دوران یاد رکھیں، وقت بائیں سے دائیں رخ ہوگا، اور تمام معلومات اس حقیقت کو ذہن میں رکھتے ہوئے پیش کی جائیں گی۔

شکل ۶.۲ میں منفی گیٹ کا مداحل (بالائی ترسیم) اور مخارج (نچلی ترسیم) ایک وقت دکھائے گئے ہیں، جہاں دورانیوں کو بڑھا چڑھا کر پیش کیا گیا ہے۔

بلند سے پست حال پہنچنے کے دورانیہ کو دورانیہ اترائی^۵ اور پست سے بلند پہنچنے کے دورانیہ کو دورانیہ چڑھائی^۶ کہتے ہیں۔ ان دورانیوں کی پیمائش کی وضاحت شکل میں کی گئی ہے۔ داخلی برقی اشارہ بھی کسی گیٹ سے آتا ہوگا، لہذا یہ بھی پست سے بلند یا بلند سے پست ہونے میں وقت گزارے گا۔

مداحل تبدیل ہوتے ہی مخارج تبدیل نہیں ہو جاتا، بلکہ کچھ دیریوں محسوس ہوتا ہے جیسے مداحل کا مخارج پر کوئی اثر نہیں۔ مداحل کے کسارہ چڑھائی پر غور کریں۔ مداحل کے بلند ہونے کے باوجود، مخارج کچھ دیر بلند رہتا ہے۔ یہ نا متبادل قبول صورت حال ہے، جس پر عددی ادوار کے تفکیک کے دوران نظر رکھنی ضروری ہے۔ مداحل بلند ہونے کے کچھ وقفہ بعد مخارج نیا حال اختیار کرتا ہے۔ اس وقفہ کو دورانیہ رد عمل^۷ کہتے ہیں۔ دورانیہ رد عمل ناپنے کی

- rising edge^۱
- positive going edge^۲
- falling edge^۳
- negative going edge^۴
- fall time^۵
- rise time^۶
- propagation delay^۷



شکل ۶.۲: مخفی گیٹ کے دورانیے

وضاحت شکل میں کی گئی ہے۔ برقیاتی گیٹوں کے دورانیہ اترائی، دورانیہ چپڑھائی، اور دورانیہ رد عمل، عموماً، چند نینوسیکنڈ ہوں گے۔

کارخانے میں گیٹ سازی کے دوران، اجزاء میں معمولی سے معمولی منرق کی بنا (ایک قسم کے دو) گیٹوں کے دورانیے کبھی ایک جیسے نہیں ہوں گے۔ ان میں 10^{-9} سیکنڈ کا نہیں تو 10^{-12} سیکنڈ کا منرق ضرور ہوگا، جو عمر رسیدگی کے ساتھ اور استعمال کے حالات (درجہ حرارت، نمی، دباؤ، وغیرہ) سے تبدیل ہوں گے۔

مشق ۶.۱: انٹرینیٹ سے $74xx$ اور $74Hxx$ سلسلہ کے دورانیوں میں منرق دریافت کریں۔

۶.۲ پلٹ کار

شکل ۶.۳ میں ایچ آر^{۱۳} پلٹ کار کا دور اور جدول پیش ہیں۔ پلٹ کار کو، روایتاً، مداحخل کے نام^{۱۴} سے پکارا جاتا ہے، جو یہاں لاطینی حروف ”ایس“^{۱۵} اور ”آر“^{۱۶} ہیں۔ پلٹ کار کے دو متضاد مخارج ہوں گے، جنہیں Q اور \bar{Q} سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں، اگر مخارج Q کی قیمت 1 ہو، تب مخارج \bar{Q} کی قیمت 0 ہوگی، اور اگر $Q = 0$ ہو تب $\bar{Q} = 1$ ہوگا۔

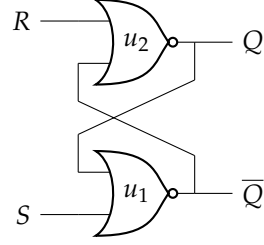
شکل ۶.۳ میں متمم جمع گیٹ u_1 کا مخارج، متمم جمع گیٹ u_2 کا ایک مداحخل، اور u_2 کا مخارج، u_1 کا ایک مداحخل ہے۔ متمم جمع u_1 کے مخارج پر نظر رکھیں؛ یہ مخارج، u_2 کا ایک مداحخل ہے، لہذا اس کے مخارج پر

Set-Reset Flip Flop, (SR FF)^{۱۷}

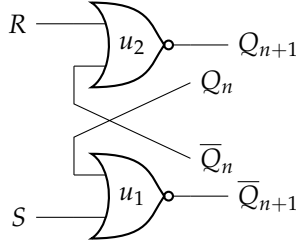
^{۱۳} پلٹ کار کے مداحخل انگریزی الفاظ Set اور Reset کے سرحرف S اور R ہیں۔

^{۱۵} S
^{۱۶} R

S	R	Q_{n+1}	\bar{Q}_{n+1}	
0	0	Q_n	\bar{Q}_n	برقرار حال
0	1	0	1	پست حال
1	0	1	0	بلند حال
1	1	?	?	ممنوع حال



شکل ۶.۳: بلند فعال مداحصل ایس آر پلٹ کار



شکل ۶.۴: موجودہ مخارج سے اگلے مخارج کا حصول۔

اثر انداز ہوگا؛ لیکن u_2 کا مخارج u_1 کا ایک مداحصل ہے، جو u_1 کے مخارج پر اثر انداز ہوگا؛ یوں u_1 کا مخارج، خود پر اثر انداز ہوگا! اس عمل کو بازری^{۱۷} کہتے ہیں۔

ایسا اشارہ، مثلاً \bar{Q} ، جو خود پر اثر انداز ہو بازری^{۱۸} اشارہ کہلاتا ہے۔

یہاں Q اور \bar{Q} دونوں بطور بازری اشارات استعمال کیے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ Q کی قیمت جاننے کے لئے \bar{Q} کی قیمت معلوم ہونا ضروری ہے، لیکن \bar{Q} کی قیمت صرف اس صورت معلوم ہو سکتی ہے جب Q کی قیمت معلوم ہو! آئیں اس پلٹ کار کا جدول حاصل کریں۔

ہم پلٹ کار کے (n قدم گزرنے کے بعد) موجودہ مخارج کو Q_n اور \bar{Q}_n لکھتے ہیں۔ اب (بازری) مداحصل Q_n ، \bar{Q}_n اور سادہ مداحصل S ، R کو دیکھتے ہوئے ($n + 1$ واں قدم گزرنے کے بعد) متوقع مخارج حاصل کرتے ہیں، جنہیں ہم Q_{n+1} اور \bar{Q}_{n+1} لکھتے ہیں۔ اس کی تصوراتی صورت شکل ۶.۴ میں پیش ہے۔

شکل ۶.۴ میں بالائی گیٹ (u_2) کے اگلے مخارج Q_{n+1} کو موجودہ مداحصل R اور \bar{Q} کے روپ میں لکھتے ہیں۔

$$(۶.۱) \quad Q_{n+1} = R + \bar{Q}_n$$

جیسا آپ نے شکل ۶.۲ میں دیکھا، گیٹ کا مخارج، دورانیہ رد عمل گزرنے کے بعد، مداحصل کے تحت حال

جدول ۶.۱: لیس آر پلٹ کار (ساوات ۶.۳ اور مساوات ۶.۴)

S	R	Q_n	\overline{Q}_{n+1}
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

(ب)

S	R	Q_n	Q_{n+1}
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

(ا)

اختیار کرتا ہے۔ یوں موجودہ \overline{Q}_n اور مداحصل R جب نئی قیمت اختیار کریں، گیٹ کچھ دیر بعد نئی قیمت Q_{n+1} اختیار کرتا ہے۔

نچلی گیٹ (u_1) کے محارج کی مساوات درج ذیل ہوگی۔ یہ گیٹ بھی مداحصل تبدیل ہونے کے کچھ دیر بعد محارج تبدیل کرے گا۔

$$(۶.۲) \quad \overline{Q}_{n+1} = \overline{S + Q_n}$$

بالائی گیٹ کی خارجی مساوات حاصل کرنے کی عنصر سے مساوات ۶.۲ کو مساوات ۶.۱ میں ڈال کر مسئلہ ڈی مارگن سے حل کرتے ہیں۔

$$(۶.۳) \quad \begin{aligned} Q_{n+1} &= \overline{R + (\overline{S + Q_n})} \\ &= \overline{\overline{R}(\overline{S + Q_n})} \\ &= \overline{\overline{R}(S + Q_n)} \end{aligned}$$

مساوات ۶.۳ میں دائیں ہاتھ کے تین متغیرات S ، R ، اور Q_n کو آزاد متغیرات تصور کر کے تابع متغیر Q_{n+1} کو جدول ۶.۱-الف میں پیش کیا گیا ہے۔ (متغیر R مساوات میں \overline{R} کے روپ میں موجود ہے۔)

اسی طرح شکل ۶.۴ میں نچلی گیٹ کی خارجی مساوات حاصل کرنے کی عنصر سے مساوات ۶.۱ کو مساوات ۶.۲ میں ڈال کر مسئلہ ڈی مارگن سے حل کرتے ہیں۔

$$(۶.۴) \quad \begin{aligned} \overline{Q}_{n+1} &= \overline{S + (\overline{R + Q_n})} \\ &= \overline{\overline{S}(R + \overline{Q_n})} \\ &= \overline{\overline{S}(R + \overline{Q_n})} \end{aligned}$$

۶.۴ مساوت میں متغیرات S ، R ، اور Q_n آزاد متغیرات تصور کر کے تابع متغیر \bar{Q}_{n+1} کو جدول ۶.۱ ا-ب میں پیش کیا گیا ہے۔ (متغیر S اور Q_n مساوات میں بالترتیب \bar{S} اور Q_n کے روپ میں موجود ہیں۔)

جدول ۶.۱-الف اور ب کو S اور R کی قیمتوں کے لحاظ سے چار حصوں میں تقسیم کیا گیا۔ پہلے حصے میں $S = 0$ اور $R = 0$ ہے، جبکہ Q_{n+1} کی قیمت Q_n کے برابر ہے۔ ہم کہتے ہیں، مداحل $S = 0$ اور $R = 0$ کی صورت میں ایس آر پلٹ کار ”برقرار حال“ ہوگا۔ جدول-ب میں \bar{Q}_{n+1} کی قیمت، جدول-الف میں Q_{n+1} کی قیمت کی متمم ہے۔ ہم چاہتے بھی یہی ہیں (کہ پلٹ کار کے دو مخارج آپس میں متضاد ہوں)۔

دوسرے حصے میں $S = 0$ اور $R = 1$ ہے، جبکہ Q_{n+1} پست ہوگا۔ ہم کہتے ہیں، ان مداحل کے لئے ایس آر پلٹ کار ”پست حال“ ہوگا۔ یہاں بھی (جدول-الف اور ب کے تحت) نئے مخارج ایک دوسرے کے متضاد ہیں۔

تیسرے حصے میں $S = 1$ اور $R = 0$ ہے، جبکہ پلٹ کار ”بلند حال“ ہے۔

چوتھے حصے میں $S = 1$ اور $R = 1$ ہے، جبکہ جدول کے تحت Q_{n+1} اور \bar{Q}_{n+1} دونوں پست ہیں، جو ہم نہیں چاہتے، ہم کہتے ہیں پلٹ کار ”ممنوع حال“ (میں) ہے۔ پلٹ کار کی صحیح کارکردگی کے لئے یہ مداحل ”ممنوعہ“ قرار دیے جاتے ہیں۔ یوں S اور R اکٹھے بلند نہیں کیے جاتے۔

ان حقائق کو شکل ۶.۳ کے جدول میں پیش کیا گیا (جو پلٹ کار کا جدول لکھنے کا درست طریقہ ہے)، جہاں آخری صف میں ؟ لکھ کر واضح کیا جاتا ہے کہ ان صف کے مداحل استعمال نہ کیے جائیں۔

ایس آر پلٹ کار کے کارکردگی

SR	Q_{n+1}	
00	Q_n	برقرار حال
01	0	پست حال
10	1	بلند حال
11	?	ممنوع حال

پلٹ کار کی بات کرتے وقت Q کی قیمت کو پلٹ کار کا حال^{۱۹} کہتے ہیں۔ یوں $Q = 1$ کی صورت میں پلٹ کار بلند حال^{۲۰} یا صادق حال^{۲۱}، جبکہ $Q = 0$ کی صورت میں پست حال^{۲۲} یا کاذب حال^{۲۳} کہلائے گا۔

جدول سے ظاہر ہے کہ جب S بلند ہو، پلٹ کار بلند حال اختیار کرتا ہے۔ یوں، مداحل S ، بلند صورت میں فعال^{۲۴} ہوگا۔ وہ مداحل جو بلند صورت میں فعال ہو، بلند فعال^{۲۵} مداحل کہلاتا ہے۔ وہ مداحل جو پست صورت میں فعال ہو، پست فعال^{۲۶} کہلاتا ہے۔ جب بلند فعال مداحل، پست ہو، مثلاً، $S = 0$ ، ہم کہتے ہیں یہ غیر

state^{۱۹}
high state^{۲۰}
true state^{۲۱}
low state^{۲۲}
false state^{۲۳}
active^{۲۴}
active high^{۲۵}
active low^{۲۶}

فعال^{۲۷} (حال میں) ہے۔ یوں اس پلٹ کار کا بہتر نام **بلند فعال مدخل** **الیز** آر پلٹے کار ہوگا۔

پلٹ کار خود اس صورت فعال کہلاتا ہے جب $Q = 1$ ہو۔ پست فعال مدخل اور مخارج (\bar{Q}) کے نام پر لکیر کھینچ کر اس کی پست فعال حیثیت واضح کی جاتی ہے؛ مزید، پلٹ کار کی علامت میں پست فعال (مدخل اور مخارج) ہینوں پر گول دائرہ لگایا جاتا ہے، جو ان کا پست فعال پن ظاہر کرتا ہے (شکل ۶.۷ دیکھیں)۔

پلٹ کار کے دونوں مدخل عام طور غیر فعال رکھے جائیں گے؛ یوں موجودہ پلٹ کار کے مدخل پست رکھے جائیں گے۔ پلٹ کار بلند (صادق) حال کرنے کے لئے S اشارہ ایک لمحہ کے لئے بلند (فعال) کر کے والپس پست (غیر فعال) کیا جاتا ہے۔ پہلے سے بلند حال پلٹ کار، اسی حال میں رہے گا، جبکہ پست پلٹ کار، اشارہ ملتے ہی بلند حال اختیار کرے گا۔

اسی طرح پلٹ کار کاذب (پست) حال کرنے کے لئے R اشارہ لمحاتی فعال کیا جاتا ہے۔

مدخل S کو فعال^{۲۸} کار^{۲۹} مدخل کہہ سکتے ہیں۔

آپ نے دیکھا، پلٹ کار درحقیقت مدخل کا (بلند یا پست) حال محفوظ کرتا ہے۔ یوں اگر مدخل اشارہ لمحاتی فعال ہونے کے بعد غیر فعال ہو جائے، پلٹ کار (اگلے نئے اشارے تک) اس کا حال محفوظ رکھتا ہے۔

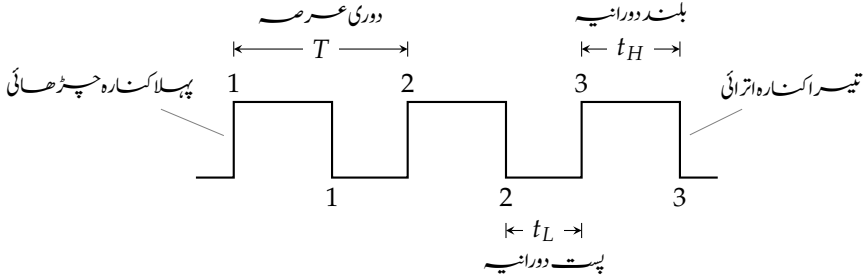
۶.۳. ساعت

عددی ادوار کی ایک قسم جو ہم عصر^{۳۰} ادوار کہلاتے ہیں، عموماً، مقررہ دورانیے کا مسلسل دہرائی اشارہ درکار ہوگا، جو ساعت^{۳۱} کہلاتا ہے۔ ساعت اشارہ شکل ۶.۵ میں پیش ہے۔ اگرچہ اس طرح کی اشکال میں دورانیہ چپڑھائی اور دورانیہ اترائی نہیں دکھائے جاتے، امید کی جاتی ہے کہ آپ ان کی موجودگی ہر وقت ذہن میں رکھیں گے۔

ہم عصر عددی دور، مہیا کردہ ساعت کے تعدد^{۳۲} کی رفتار سے چلتا ہے، اور اس کے مختلف حصے، ساعت کے کنارہ اترائی یا کنارہ چپڑھائی پر بیک وقت حال تبدیل کرتے ہیں۔ گویا، ہم عصر دور ساعت کے ساتھ قدم ملا کر چلتا ہے۔

شکل ۶.۵ میں اوپر جانب کنارہ چپڑھائی کی گنتی، جبکہ نیچے جانب کنارہ اترائی کی گنتی دی گئی ہے۔ ساتھ ہی، دور^{۳۳} عرصہ^{۳۴}، بلند دورانیہ^{۳۵} اور پست دورانیہ^{۳۶} کی بھی وضاحت کی گئی ہے، جنہیں بالترتیب T ، t_H ، اور t_L سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں $T = t_H + t_L$ ہوگا۔ ساعت کے بلند اور پست دورانیے برابر بھی ہو سکتے ہیں۔ ہمیشہ کی

inactive^{۲۷}
set input^{۲۸}
reset or clear input^{۲۹}
synchronous^{۳۰}
clock^{۳۱}
frequency^{۳۲}
time period^{۳۳}
high time, ON time^{۳۴}
low time, OFF time^{۳۵}



شکل ۶.۵: ساعت

طرح، تعدد f اور دوری عرصہ T کا تعلق درج ذیل ہے، جہاں T کی اکائی "سیکنڈ" اور f کی اکائی ہرٹز^{۳۶} ہے

$$f = \frac{1}{T}$$

ساعتی اشارہ مختصر اُسامعتیے پر کارا جاتا ہے۔ ساعت سے مراد متواتر تبدیل ہوتا اشارہ، یا اس کا بلند، یا پست دورانیہ، یا چڑھائی یا اترائی کنارہ ہوگا۔ متن سے اس کا مطلوب مطلب واضح ہوگا۔ جہاں غلط فہمی کا امکان ہو، وہاں وضاحت کی جائے گی۔

۶.۴ متم ضرب گیٹ ایس آر پلٹ کار

شکل ۶.۶ میں متم ضرب گیٹ پر مبنی پستے فعال مدخل ایس آر پلٹ کار^{۳۷} دکھایا گیا ہے۔ شکل ۶.۷ میں بلند فعال مدخل اور پست فعال مدخل ایس آر پلٹ کار کی علامتیں پیش ہیں۔ پست فعال اشارات، کے نام پر لکیر (\bar{Q} ، \bar{S}) اور ان کے پنیوں پر گول دائرے ان کے پست فعال پن ظاہر کرتے ہیں۔

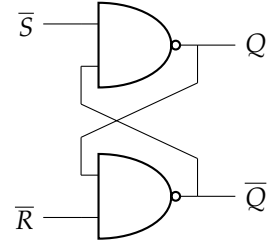
پلٹ کار کے محسار Q اور \bar{Q} آپس میں متضاد (آلٹ) حال رہتے ہیں۔ انہیں اس پلٹ کار کی کارکردگی، دوسرے نقطہ نظر سے دیکھیں۔

۶.۴.۱ غیر فعال مدخل پلٹ کار، حال برقرار رکھتا ہے

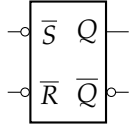
فرض کریں پستے ایس آر پلٹ کار کے مدخل غیر فعال ہیں، یعنی $Q = 0$ ، $\bar{Q} = 1$ ، $\bar{S} = 1$ اور $\bar{R} = 1$ ہیں (شکل ۶.۸-الف)۔ یوں، بالائی متم ضرب گیٹ کے مدخل 1 اور 1 ہیں، لہذا اس کا مدخل 0 ہوگا، جو وہ پہلے سے ہے۔ اسی طرح نیچے متم ضرب گیٹ کے مدخل 0 اور 1 ہیں، لہذا اس کا محسار 1 ہوگا، جو وہ پہلے سے ہے۔

^{۳۶}Hertz, Hz
^{۳۷}active low inputs SR flip flop

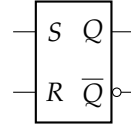
\bar{S}	\bar{R}	Q_{n+1}	\bar{Q}_{n+1}	
0	0	?	?	منوعہ حال
0	1	1	0	بلند حال
1	0	0	1	پست حال
1	1	Q_n	\bar{Q}_n	برقرار حال



شکل ۶.۶: پست فعال مداحل ایس آر پلٹ کار

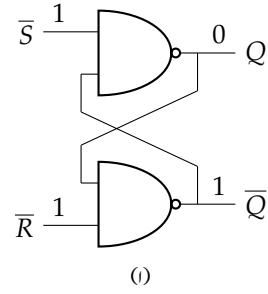
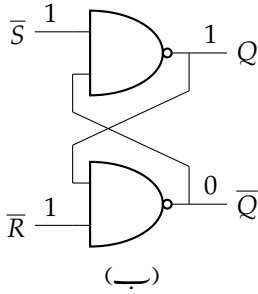


(ب) پست فعال مداحل ایس آر پلٹ کار

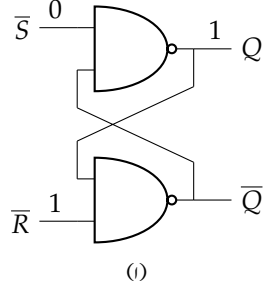
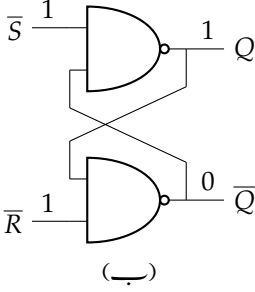


(i) بلند فعال مداحل ایس آر پلٹ کار

شکل ۶.۷: ایس آر پلٹ کار کی دو علامتیں



شکل ۶.۸: غیر فعال مداحل کی صورت میں پلٹ کار اپنا حال برقرار رکھتی ہے۔



شکل ۶.۹: ایک لمحے کے لئے \bar{S} فعال کیا گیا ہے۔

معرض کریں بلند پلٹ کار کے مداحل غیر فعال ہیں، یعنی $Q = 1$ ، $\bar{Q} = 0$ ، $\bar{S} = 1$ اور $\bar{R} = 1$ ہیں (شکل ۶.۸-ب)۔ یوں بالائی متم ضرب گیٹ کے مداحل 1 اور 0 ہیں، لہذا اس کا مداحل 1 ہوگا، جو وہ پہلے سے ہے۔ اسی طرح نیچے متم ضرب گیٹ کے مداحل 1 اور 1 ہیں، لہذا اس کا مخارج 0 ہوگا، جو وہ پہلے سے ہے۔

شکل ۶.۸ کی دونوں صورتوں پر غور کرنے سے معلوم ہوا کہ غیر فعال مداخل کے صورتے میں پلٹے کار اپنا حال برقرار رکھتا ہے۔ شکل ۶.۶ میں جدول کی آخری صف اس حقیقت کو بیان کرتی ہے، جہاں (اکاحال) Q_{n+1} موجودہ Q_n کے برابر ہوگا۔

۶.۴.۲ مداحل S فعال کرنے سے پلٹ کار بلند حال اختیار کرتا ہے

تصور کریں ایس آر پلٹ کار کا مداحل \bar{S} ، ایک لمحے فعال کرنے کے بعد دوبارہ غیر فعال کیا جاتا ہے، یعنی لمحاتی طور $\bar{S} = 0$ کیا جاتا ہے۔ شکل ۶.۹-الف میں وہ لمحے پیش ہے جب $\bar{S} = 0$ (فعال) ہے۔ بالائی متم ضرب گیٹ کا کوئی مداحل پست ہونے کی صورت میں اس کا مخارج بلند ہوگا، لہذا $\bar{S} = 0$ کی صورت میں بالائی گیٹ کا مخارج بلند ہوگا، جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے (پلٹ کار کے دونوں گیٹوں کی گزشتہ قیمتیں اس حقیقت پر اثر انداز نہیں ہوں گی)۔ یوں نیچے گیٹ کے دونوں مداحل بلند، لہذا مخارج پست $\bar{Q} = 0$ ہوگا۔ مداحل واپس غیر فعال $\bar{S} = 1$ کرنے سے شکل-ب ملتی ہے، لہذا پلٹ کار کا حال ($Q = 1$ اور $\bar{Q} = 0$) برقرار رہے گا۔ یوں مداخل \bar{S} فعال کرنے سے ایس آر پلٹ کار بلند حال اختیار کرتا ہے۔

۶.۴.۳ مداحل \bar{R} فعال کرنے سے پلٹ کار پست حال اختیار کرتا ہے

درج ذیل مشق میں آپ سے یہی ثابت کرنے کی درخواست کی گئی ہے۔

مشق ۶.۲: ثابت کریں کہ $\bar{S} = 1$ رکھتے ہوئے، لمحاتی طور $\bar{R} = 0$ کرنے سے ایس آر پلٹ کار پست حال اختیار کرتا ہے۔

۶.۴.۴ حال دوڑ

ایس آر پلٹ کار کے دونوں مداحصل بیک وقت پست کرنے کی اجازت نہیں، چونکہ ایسی صورت میں پلٹ کار غیر یقینی حال اختیار کرتا ہے۔ دیکھتے ہیں، ایسا کیوں ہوگا۔

شکل ۶.۶ پر نظر رکھتے ہوئے آگے بڑھیں۔ تصور کریں پلٹ کار کے دونوں مداحصل بیک وقت پست (فعال) کرنے کے بعد دوبارہ بلند (غیر فعال) کیے جاتے ہیں۔ ایسا کرنے کے بعد ہم جاننا چاہتے ہیں پلٹ کار کس حال ہوگا۔

دونوں مداحصل بیک وقت پست کرنے سے (بالائی اور نچلے متم ضرب گیٹ کے محارج بلند ہوں گے، لہذا) پلٹ کار کے دونوں محارج بیک وقت بلند ہوں گے، جو ناقابل قبول صورت ہے: پلٹ کار کے محارج Q اور \bar{Q} کا آپس میں متضاد رہنا ضروری ہے۔

دونوں مداحصل بیک وقت یکدم واپس بلند کرنے سے گیٹوں کے محارج (یکدم حال تبدیل نہیں کرتے، صفحہ ۱۲۱ پر شکل ۶.۲ دیکھیں، بلکہ) نئے حال کی طرف روانہ ہوتے ہیں، لیکن، جب تک ان کے محارج نئے حال اختیار نہیں کرتے، دونوں گیٹوں کے دونوں مداحصل بلند ہوں گے (مثلاً S بلند کر دیا گیا ہے، اور فی الحال Q نئے حال تک نہیں پہنچا، لہذا اب بھی بلند ہے؛ یوں بالائی گیٹ کے دونوں مداحصل بلند ہیں)۔ دونوں گیٹ، پست حال کی طرف گامزن ہوں گے۔ گیٹوں کے دورانیوں میں مندرجہ (جو وقت اور حالات کے ساتھ تبدیل ہو سکتے ہیں) کی بنا، ایک گیٹ (جو ہم نہیں جاننے کوں ہوگا) نئے پست حال تک، دوسرے گیٹ سے پہلے پہنچ کر (دوسرے گیٹ کا مداحصل ہونے کی وجہ سے) دوسرے گیٹ کو بلند رہنے پر مجبور کرے گا۔ یوں اگرچہ پلٹ کار کے دونوں مداحصل غیر فعال کرنے سے پلٹ کار کے محارج آپس میں تضاد ہیں، تاہم، ہم جاننے سے متاثر ہیں آیا پلٹ کار بلند یا پست حال ہوگا۔ ایس آر پلٹ کار کے دونوں مداحصل فعال کرنے کے بعد دوبارہ بیک وقت غیر فعال کرنے سے پلٹ کار کا حال، متم ضرب گیٹوں کے بیچ نئے حال تک پہنچنے کے دوڑ پر منحصر ہے۔ اسی لئے اس کو **حال دوڑ** کہتے ہیں۔ ہم پلٹ کار کو حال دوڑ میں ڈالنے سے گریز کرتے ہیں۔ حال دوڑ پر حصہ 3.1.11 میں تفصیل سے غور کیا جائے گا۔

شکل ۶.۱۰ میں پیش جدول کی پہلے صف میں پلٹ کار بلند ($Q = 1$) اور مداحصل غیر فعال ہیں۔ صف در صف نیچے چلتے ہوئے دیکھیں، مداحصل تبدیل کرنے سے پلٹ کار کیا حال اختیار کرتا ہے۔ (مداحصل کسی خاص ترتیب سے نہیں، بلکہ پلٹ کار کی کارکردگی کی ایک مثال دیکھنے کی غرض سے تبدیل کیے گئے۔)

مثبت منطقی نظام استعمال کرتے ہوئے، (1) کو 5V، جبکہ (0) کو 0V سے ظاہر کیا جائے گا۔ یوں مداحصل ایس کی فعال صورت $\bar{S} = 0$ کو 0V، جبکہ غیر فعال صورت $\bar{S} = 1$ کو 5V سے ظاہر کیا جائے گا۔ اسی طرح $Q = 0$ کو 0V اور $Q = 1$ کو 5V سے ظاہر کیا جائے گا۔ ایسا کرتے ہوئے شکل ۶.۱۰ میں پیش جدول سے اسی شکل میں پیش ترسیات حاصل ہوں گی، جہاں موازنہ کے لئے \bar{Q} بھی پیش ہے۔

۶.۵ زیادہ مداحصل پلٹ کار

پلٹ کار کے مداحصل دو سے زیادہ ہو سکتے ہیں، جیسا شکل ۶.۱۱ میں دکھایا گیا ہے۔ یہاں بلند کار مداحصل کی تعداد دو ہے، جنہیں \bar{S}_a اور \bar{S}_b کہا گیا ہے، جبکہ پست کار مداحصل ایک ہے۔ عام طور تینوں مداحصل بلند (غیر فعال) رکھے جائیں گے۔ پلٹ کار بلند حال کرنے کی خاطر \bar{S}_a یا \bar{S}_b یا دونوں کو ایک لمحہ کے لئے پست

حالت	\bar{S}	\bar{R}	Q
بند	1	1	1
بند رہے گا	0	1	1
برقرار	1	1	1
بند رہے گا	0	1	1
پست	1	0	0
پست رہے گا	1	0	0
برقرار	1	1	0
پست رہے گا	1	0	0
برقرار	1	1	0
برقرار	1	1	0
بند	0	1	1
برقرار	1	1	1

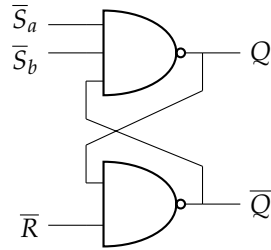
شکل ۶.۱۰: ایس آر پلٹ کار کے استعمال کا جدول اور ترتیبات۔

(فعال) کیا جائے گا، جبکہ پلٹ کار پست حال کرنے کی خاطر \bar{R} ایک لمحہ کے لئے فعال کیا جائے گا۔ حال دوڑ سے بچنے کے لئے ضروری ہے کہ \bar{R} کے ساتھ باقی دو مداحل میں سے کوئی ایک (یادوںوں) اکٹھے فعال نہ کیا جائے۔

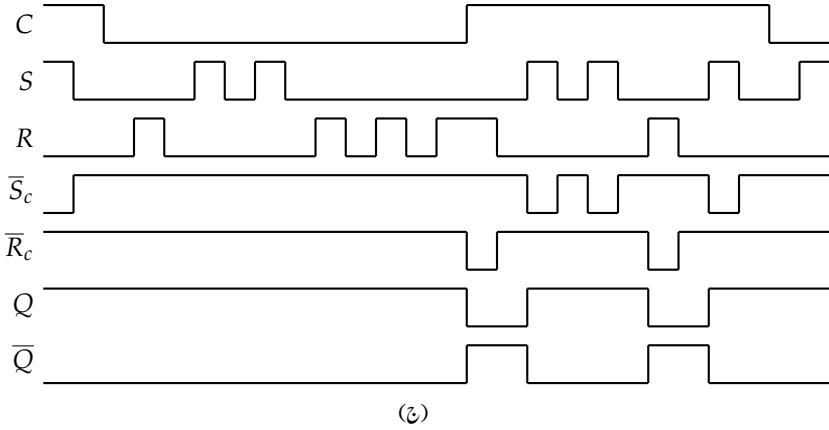
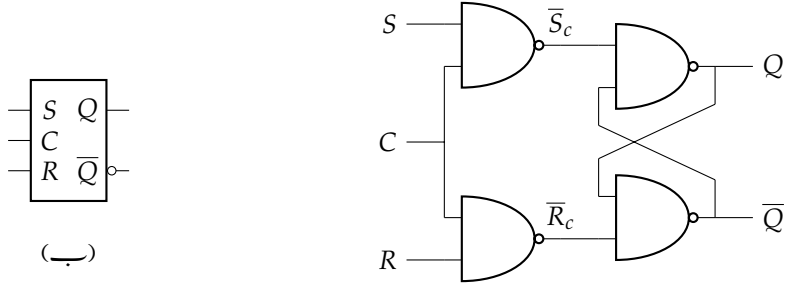
۶.۶ قابل محبازو معذور پلٹ کار

شکل ۶.۱۰ کی ترتیبات سے واضح ہے، مداحل تبدیل کرتے ہی پلٹ کار نیا حال اختیار کرتا ہے۔ اس حصہ میں ایسی پلٹ کار پر غور کیا جائے گا جس کے مداحل کو پلٹ کار کے حال پر اثر انداز ہونے سے روکا جاسکتا ہو۔ شکل ۶.۱۲ الف پر غور کریں جہاں دو متمم ضرب گیٹ کے اضافہ سے قابل واپس پلٹ کار حاصل کیا گیا، جس کے (بند فعال)

\bar{S}_a	\bar{S}_b	\bar{R}	Q_{n+1}	\bar{Q}_{n+1}
0	0	0	?	?
0	0	1	1	0
0	1	0	?	?
0	1	1	1	0
1	0	0	?	?
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	Q_n	\bar{Q}_n



شکل ۶.۱۱: زیادہ مداحل ایس آر پلٹ کار



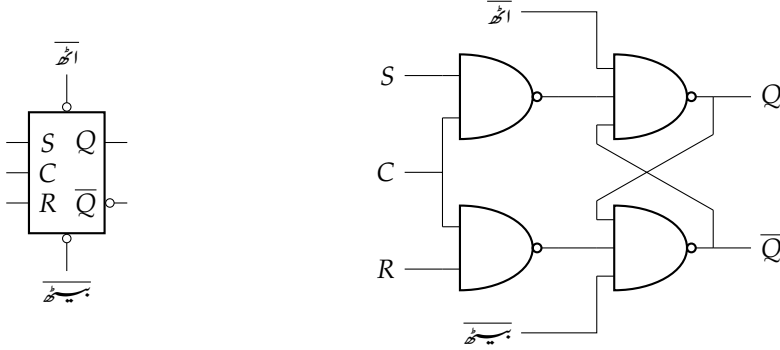
شکل ۶.۱۲: مجاز و معذور بلند فعال مداحصل ایس آر پلٹ کار

مداحصل S اور R ہیں، جنہیں عام طور غیر فعال (پست) رکھا جاتا ہے۔ پلٹ کار کی علامت شکل-ب بھی پیش ہے۔

اضافی گیٹ کے مختار ج کو \bar{S}_C اور \bar{R}_C کہا گیا، جبکہ گیٹوں کو فتابوکار اشارہ C مضراہم کیا گیا۔ مجاز و معذور بنانے والافتابوکار اشارہ C پست (معذور) کرنے سے S اور R مداحصل معذور ہوتے ہیں، \bar{S}_C اور \bar{R}_C بلند رہتے ہیں، اور پلٹ کار اپنا حال برقرار رکھتی ہے۔ فتابوکار اشارہ بلند (مجاز) کرنے سے پلٹ کار کے مداحصل S اور R مجاز ہو کر پلٹ کار کے حال پر اثر انداز ہوتے ہیں۔

شکل-ج میں مجاز و معذور فتابوکار اشارہ C کی کارکردگی واضح کی گئی۔ جب تک یہ اشارہ پست (معذور) رہے، \bar{S}_C اور \bar{R}_C بلند ہیں۔ اشارہ C بلند کرنے کے بعد S اور R پلٹ کار کا حال تبدیل کرنے کے قابل ہیں۔ یہ پلٹ کار مجاز و معذور بلند فعال مداحصل ایس آر پلٹے کار کہلاتا ہے۔

بعض اوقات، پلٹ کار کے عمومی مداحصل استعمال کیے بغیر، ہم پلٹ کار کا حال خود تعین کرنا چاہتے ہیں۔ عموماً، پلٹ کار کا ابتدائی حال منتخب کرنے کے لئے ایسا کرنا درکار ہوگا۔ شکل ۶.۱۳ میں دو مزید مداحصل، اٹھ اور بیٹھ،



شکل ۶.۱۳: ۱: ۱۳ بیٹھ صلاحیت پلٹ کار

مہیا کئے گئے ہیں، جنہیں پست کر کے پلٹ کار کو بالترتیب زبردستی بلند اور پست کیا جاسکتا ہے۔

۶.۷ آف غلام پلٹ کار

گزشتہ حصہ میں محباز و معذور بلند فعال مداحل ایس آر پلٹ کار پر غور کیا گیا۔ شکل ۶.۱۴ میں ایسے دو پلٹ کار (پہلا آف اور دوسرا غلام کہلاتا ہے) اور ایک منفی گیٹ سے آف غلام پلٹ کار^{۳۹} تشکیل دیا گیا۔ آف کے محارج، غلام کے مداحل ہیں۔ مزید C پر اشارہ ساعت^{۴۰} مہیا کیا گیا ہے۔

جتنی دیر ساعت (C) بلند رہے، آف کے مداحل محباز، لہذا محارج Q اور Q-bar قابل تبدیل ہوں گے۔ غلام کو C کا متمم C-bar محباز و معذور بناتا ہے، لہذا جتنی دیر آف محباز ہو، غلام معذور (لہذا برقرار حال) ہوگا۔

جس لمحہ ساعت پست ہو، آف اسی لمحہ کے حال میں رہ جائے گا، اور غلام محباز ہو کر فوراً آف کے محارج کے مطابق حال اختیار کر لے گا۔ یوں، غلام ہر وقت آف کی پیروی کرتا ہے۔ جتنی دیر ساعت پست رہے، Q اور Q-bar تبدیل نہیں ہو سکتے، لہذا غلام حال تبدیل نہیں کرے گا۔

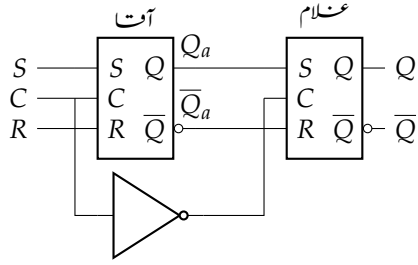
آپ دیکھ سکتے ہیں، غلام پلٹ کار صرف اور صرف ساعت (C) کے کنارہ اترائی پر حال تبدیل کرتا ہے، جس کی وجہ سے یہ کنارہ اترائی پر عمل کار آف غلام پلٹ کار^{۴۱} کہلاتا ہے۔ ساعت کے کنارہ اترائی پر تیسرے نشان اس حقیقت کو ظاہر کرتا ہے۔ ساعت کا کنارہ (اترائی)، پلٹ کار کی لیلی^{۴۲} ہے، جسے پست کرنے سے، پلٹ کار داخلی اشارے کا عکس لیتا ہے۔

master slave flip flop^{۳۹}

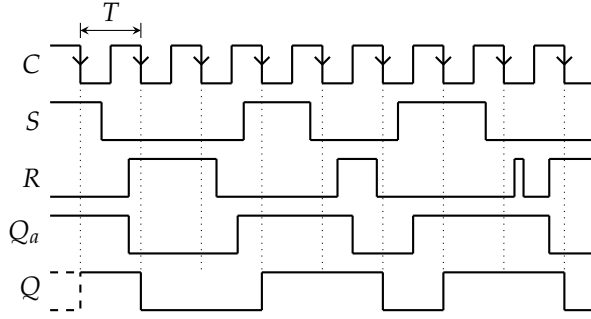
clock^{۴۰}

negative edge triggered Master Slave flip flop^{۴۱}

trigger^{۴۲}



(۱)



(ب)

شکل ۶.۱۳: ساعت کے کنارہ اترائی پر عمل کار آفت اعلاام پلٹ کار

جدول ۶.۲: کنارہ اترائی پر عمل کار آفت غلام پلٹ کار

C	S	R	Q_{n+1}	\overline{Q}_{n+1}
0	x	x	Q_n	\overline{Q}_n
1	x	x	Q_n	\overline{Q}_n
↓	0	0	Q_n	\overline{Q}_n
↓	0	1	0	1
↓	1	0	1	0
↓	1	1	?	?

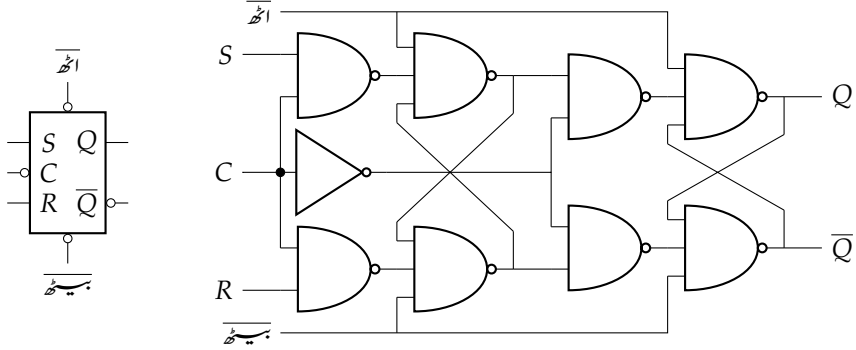
پلٹ کار کو پہلی مرتبہ برقی طاقت مندرام کرنے سے، حال دوڑ پیدا ہوگی جس کے اختتام پر پلٹ کار بلند یا پست ہوگا۔ شکل میں پہلے کنارہ اترائی سے قبل Q مبہم دکھایا گیا ہے (سایہ دار حصہ)، جو اس حقیقت کو ظاہر کرتا ہے۔ ساعت کے اول کنارہ اترائی پر فعال S کے تحت آفت غلام پلٹ کار یقینی طور پر بلند حال اختیار کرتا ہے۔ (شکل ۶.۱۳ میں اٹھ بیٹھتے اشارات اس طرح مبہم صورت سے نمٹنے کے لئے ہیں۔)

شکل ۶.۱۴ میں ساعت کے آٹھویں کنارہ اترائی کے بعد پست ساعت کے دوران R بلند ہو کر واپس پست ہوتا ہے، جو آفت غلام پلٹ کار کو پست کرنے میں ہرگز کامیاب نہیں ہوگا۔ پلٹ کار کو بلند یا پست کرنے کے لئے، ضروری ہے کہ داخلی اشارات S اور R کسی مخصوص دورانیے سے زیادہ وقت کے لئے فعال ہوں۔ داخلی اشارہ اس صورت کو رد ادا کرتا ہے، جب بلند ساعت اس کا عکس محفوظ کر لے۔ ساعت کے پست دورانیہ t_L (شکل ۶.۱۵) سے زیادہ دیر فعال رہنے والا مداحخل اشارہ، ساعت کے کنارہ اترائی کے فوراً بعد فعال ہونے کی صورت میں بھی ساعت کی آگلی بلندی تک فعال رہے گا، لہذا آفت غلام پلٹ کار اس پر ضرور عمل کرے گا۔ البتہ، ایسی صورت میں عین ممکن ہے، کنارہ اترائی پر کوئی مداحخل فعال نہ ہو (شکل ۶.۱۴ میں چھٹا کنارہ اترائی دیکھیں)، لہذا، عین کنارہ اترائی کے لمحہ موجود مداحخل کا حال محفوظ کرنے کے لئے ضروری ہے کہ مداحخل کم از کم ایک دوری عرصہ (T) دورانیے کے لئے فعال رہے (تسلی کر لیں، اگر یقین نہیں)۔ حصہ ۶.۹ میں ایسی پلٹ کار پیش کیا جائے گا، جس کے مداحخل پر کم از کم ایک دوری عرصہ فعال رہنے کی شرط مسلط نہیں۔

جدول ۶.۲ میں کنارہ اترائی پر عمل کار آفت غلام پلٹ کار پیش ہے، جہاں ساعت کے کنارہ اترائی پر پلٹ کار (نیا) حال اختیار کرتا ہے۔ بلند اور پست ساعت کے دوران، پلٹ کار حال برقرار رکھتا ہے۔

بعض اوقات، پلٹ کار کا حال، کنارہ ساعت کا انتظار کیے بغیر، تبدیل کرنا درکار ہوگا۔ شکل ۶.۱۵ میں (درکار مقامات پر تین مداحخل متمم ضرب گیٹ استعمال کرتے ہوئے) آفت غلام پلٹ کار میں پست فعال مداحخل اٹھ اور بیٹھ کا اضافہ کر کے ایسی پلٹ کار تشکیل دیا گیا ہے۔ (برقی تاروں کی تعداد بہت بڑھ گئی ہے۔ بہتر ہوگا صفحہ ۲۹ پر شکل ۱۳.۱ ایک مرتبہ دوبارہ دیکھیں)۔ عام طوراً انہیں غیر فعال رکھا جائے گا، البتہ، جب ضرورت پیش آئے، انہیں استعمال کرتے ہوئے، ساعت کے کنارہ اترائی کا انتظار کیے بغیر، پلٹ کار کا حال مرضی کے مطابق منتخب کیا جاسکے گا۔

شکل میں منفی کنارے پر عمل کرنے، اور اٹھ بیٹھ صلاحیت کے، آفت غلام پلٹ کار کی علامت بھی پیش ہے، جہاں



شکل ۶.۱۵: بیٹھ صلاحیت رکھنے اور منفی کنارے پر عمل کرنے والا آفت اعلام پلٹ کار

ساعت (C) پر گول دائرہ منفی، اور نکلون کنارے کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں اس سے مسرہ ”ساعت کے منفی کنارے پر عمل پیرا ہونا“ کیا جائے گا۔

۶.۸ ڈی پلٹ کار

۶.۸.۱ آفت اعلام پلٹ کار سے حاصل کردہ ڈی پلٹ کار

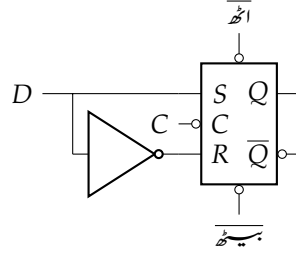
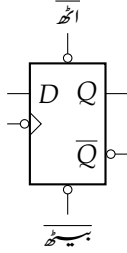
آفت اعلام پلٹ کار کے ساتھ منفی گیٹ منسلک کر کے ڈی پلٹے کار^{۳۳} حاصل کیا جاتا ہے، جو شکل ۶.۱۶ میں پیش ہے۔ پلٹ کار کی علامت میں C واضح طور نہیں لکھا گیا، چونکہ علامت پر داخلی جانب گول دائرہ اور نکلون ساعت کے منفی کنارہ کو ظاہر کرتے ہیں (مثبت کنارہ، صرف نکلون سے ظاہر کیا جاتا ہے)۔ مداحل D پر کم از کم ایک دوری عرصہ (T) بلند یا پست رہنے کی شرط ملط ہے۔

پلٹ کار کی کارکردگی کا جدول بھی شکل ۶.۱۶ میں پیش ہے، جس کے تحت، بلند یا پست ساعت کے دوران، مداحل D، پلٹ کار کے حال پر اثر انداز نہیں ہوگا۔ پلٹ کار (صرف) ساعت کے کنارہ اترائی پر D دیکھ کر (نیا) حال اختیار کرتا ہے۔ یوں اس کا نام کنارہ اترائی پر عمل کار ڈی پلٹے کار^{۳۴} ہوگا۔ ساعت کو منفی گیٹ سے گزار کر کنارہ چڑھائی پر عمل کار ڈی پلٹے کار^{۳۵} حاصل ہوگا۔

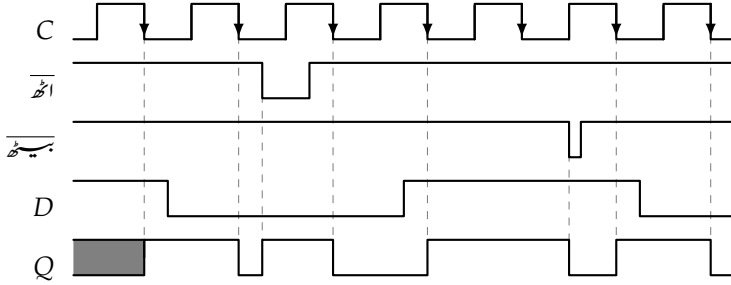
شکل ۶.۱۷ میں ڈی پلٹ کار کی کارکردگی کی مثال پیش ہے۔ آفت اعلام پلٹ کار کے R مداحل سے چھٹکارا حاصل کرنے کی بدولت، ڈی پلٹ کار کسی صورت ”حال دوڑ“ سے دوچار نہیں ہوگا۔ ساعت کے اول کنارہ اترائی سے قبل، پلٹ کار کا حال مبہم ہے، جس کو سیاہ کر کے (بلند و پست دونوں) دکھایا گیا ہے۔

^{۳۳} D FF^{۳۳}
negative edge triggered, D flip flop^{۳۳}
^{۳۴} positive edge triggered, D flip flop^{۳۴}

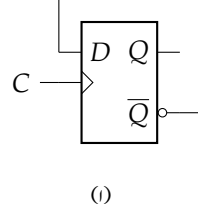
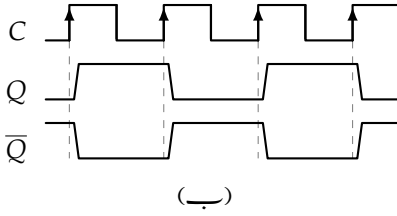
C	D	Q_{n+1}
0	x	Q_n
1	x	Q_n
↓	0	0
↓	1	1



شکل ۶.۱۶: آؤت غلام سے حاصل ڈی پلٹ کار



شکل ۶.۱۷: کنارہ اترائی پر عمل کار ڈی پلٹ کار کی کارکردگی کی مثال



شکل ۶.۱۸: تعدد دو سے تقسیم کیا گیا

شکل ۶.۱۸ میں کنارہ چڑھائی پر عمل کارڈی پلٹ کار کا \bar{Q} مداحخل D سے جوڑ کر، پلٹ کار کو ساعت (C) منراہم کی گئی۔ شکل-ب میں ساعت کے اول کنارہ چپڑھائی پر توجہ دیں۔ یہاں $\bar{Q} = 1$ ہے، لہذا D بلند ہو گا اور ساعت کے کنارہ چپڑھائی پر پلٹ کار اس کا عکس محفوظ کرتے ہوئے بلند حال اختیار کرتی ہے۔ پلٹ کار کا مخرج \bar{Q} کچھ دیر بعد نیا حال $\bar{Q} = 0$ اختیار کرے گا، لیکن اس وقت تک ساعت کا کنارہ گزر چکا ہو گا۔ ساعت کے اگلے کنارہ چپڑھائی پر $\bar{Q} = 0$ دیکھ کر پلٹ کار پست ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ Q (یا \bar{Q}) کا تعدد ساعت کے تعدد کا نصف ہے۔

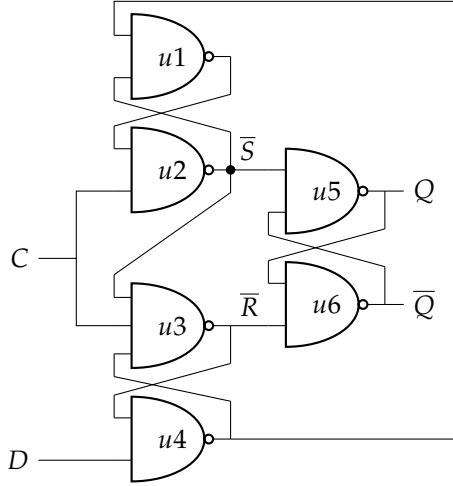
کنارہ اترائی پر عمل کار پلٹ کار کے استعمال میں اس بات کو یقینی بنانا ضروری ہے کہ مداحخل، ساعت کے کنارہ اترائی کے دوران، تبدیل نہ ہو۔ حقیقتاً، کنارہ اترائی کے آغاز سے چند لمحات قبل سے لے کر، کنارہ گزرنے کے چند لمحات بعد تک، مداحخل D کار پر متراہم ایک حال میں رہنا ضروری ہے۔ ان لمحات کو بالستریب دورانیہ تیاری^{۳۶} اور دورانیہ ٹھیراؤ^{۳۷} کہتے ہیں۔ دورانیہ تیاری اور دورانیہ ٹھیراؤ کی معلومات پلٹ کار کے تحقیق کار مہیا کرتے ہیں۔ کنارہ چپڑھائی پر عمل کار پلٹ کار کی صورت میں مداحخل کو دوران چپڑھائی تبدیل نہیں ہونے دیا جاتا۔

۶.۹ ڈی پلٹ کار

گزشتہ حصہ میں آفت اعلاام پلٹ کار سے ڈی پلٹ کار حاصل کیا گیا، جس کے مداحخل پر، کم از کم ایک دوری عرصہ دورانیہ کے لئے حال برقرار رکھنے کی شرط مسلط ہے۔ شکل ۶.۱۹ میں نسبتاً بہتر، (کنارہ چپڑھائی پر عمل کار) ڈی پلٹ کار پیش ہے، جو واقعہً، ساعت کے کنارہ چپڑھائی پر (نیا) حال اختیار کرتا ہے، اور جو وسیع پیمانہ مخلوط ادوار^{۳۸} میں باکشرت مستعمل ہے۔

اس پلٹ کار کی بناوٹ میں تین ایس آر پلٹ کار مستعمل ہیں۔ گیٹ $u1$ ، $u2$ ایک ایس آر، گیٹ $u3$ ، $u4$ دوسرا، اور گیٹ $u5$ ، $u6$ تیسرا ایس آر پلٹ کار تشکیل دیتے ہیں۔ تیسرا ایس آر پلٹ کار خارجہ جی ہے جو \bar{S} اور \bar{R} کے مطابق مخرج Q اور \bar{Q} منراہم کرتا ہے۔ برقرار حال کے لئے $\bar{S} = 1$ اور $\bar{R} = 1$ درکار ہے، $\bar{S} = 0$ اور $\bar{R} = 1$ بلند حال، جبکہ $\bar{S} = 1$ اور $\bar{R} = 0$ پست حال دے گا، اور $\bar{S} = 0$ اور $\bar{R} = 0$ ممنوعہ ہے۔ مداحخل \bar{S} اور \bar{R} باقی دو ایس آر پلٹ کار پر منحصر ہیں، جنہیں بیرونی اشارات D (مواد) اور C (ساعت)

^{۳۶} setup time
^{۳۷} hold time
^{۳۸} very large scale integration (VLSI)

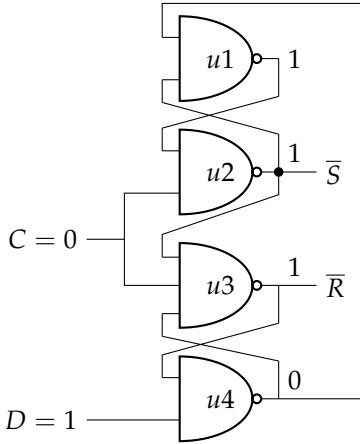


شکل ۶.۱۹: کنسارہ چپڑھائی پر عمل کارڈی پلٹ کار

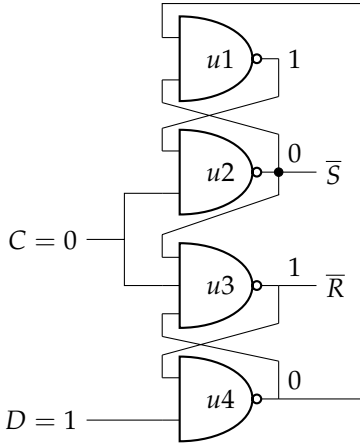
تعیین کرتے ہے۔

شکل ۶.۲۰ میں دور کی کارکردگی کی وضاحت کی گئی ہے، جہاں صرف گیٹ $u1$ تا $u4$ کو دکھاتے ہوئے تمام (چپار) ممکنہ صورتیں پیش کی گئی ہیں۔ گیٹ $u2$ اور $u3$ کے محارج \bar{S} اور \bar{R} شکل ۶.۱۹ کے گیٹ $u5$ اور $u6$ کے ساتھ جڑے ہیں، جو ڈی پلٹ کار کے محارج Q اور \bar{Q} مہیا کرتے ہیں۔ شکل ۶.۲۰ الف اور ب میں پست ساعت $(C = 0)$ کی صورت میں $D = 1$ اور $D = 0$ کے لئے گیٹوں کے شنائی محارج پیش ہیں۔ دونوں اشکال میں $C = 0$ کی بدولت $u2$ اور $u3$ کے محارج D کی قیمت سے قطع نظر، بلند ہوں گے، لہذا $\bar{S} = 1$ اور $\bar{R} = 1$ ہوگا، جس کے تحت $u5$ ، $u6$ (پر مبنی تیسرا) پلٹ کار بر مقرر حال ہوگا۔ جب $D = 0$ ہو، $u4$ کا محارج 1 ہوگا، جو $u2$ کے بلند محارج کے ساتھ مل کر $u1$ کا محارج 0 کرے گا۔ جب $D = 1$ ہو، (چونکہ $u3$ بلند ہے لہذا) $u4$ پست (0) ہوگا، جس کی بنا پر $u1$ بلند (1) ہوگا۔ ساعت 0 کی صورت میں، جو D سے قطع نظر ڈی پلٹ کار بر مقرر حال رکھتا ہے، یہی دو ممکنات پائے جاتے ہیں۔

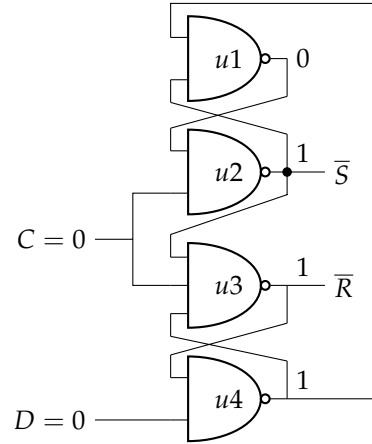
کنسارہ چپڑھائی سے قبل ایک غیر مبہم وقت کے لئے، جو دورانیہ تیاری کہلاتا ہے، مداحل D کی قیمت لازماً مستقل رکھنی ہوگی۔ دورانیہ تیاری گیٹ $u1$ اور $u4$ کے دورانیہ رد عمل کا مجموعہ ہے، چونکہ D میں تبدیلی ان گیٹوں کے محارج پر اثر انداز ہوتی ہے۔ اب فرض کریں دورانیہ تیاری میں D تبدیل نہیں ہوتا، جبکہ ساعت (پست حال سے) بلند (1) ہوتا ہے۔ یہ صورت شکل ۶.۲۰ ج اور د میں پیش ہے۔ اگر $C = 1$ ہونے کے لئے $D = 0$ ہو، تب $\bar{S} = 1$ رہتا ہے، جبکہ \bar{R} تبدیل ہو کر 0 ہو جائے گا (شکل ج-ک یوں (شکل ۶.۱۹ میں) ڈی پلٹ کار کا محارج Q پست (0) حال اختیار کرے گا۔ اب اگر $C = 1$ (یعنی بلند حال) کے دوران، D کی قیمت تبدیل ہو، \bar{R} کی بدولت جو 0 ہے $u4$ بلند (1) رہے گا۔ گیٹ $u4$ صرف اس وقت حال تبدیل کر سکتا ہے جب ساعت دوبارہ پست (0) ہو؛ لیکن اس وقت \bar{S} اور \bar{R} دونوں 1 ہوں گے، جو ڈی پلٹ کار بر مقرر حال ہو گا۔ البتہ، ساعت کے کنسارہ چپڑھائی کے بعد ایک غیر مبہم دورانیہ کے لئے، جو دورانیہ تھیراؤ کہلاتا ہے، D



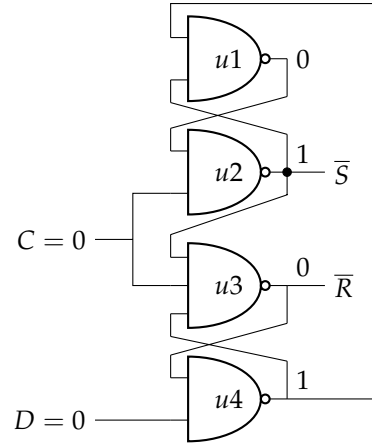
(ب) پلٹ مواد، پلٹ ساعت



(د) پلٹ مواد، پلٹ ساعت



(i) پلٹ مواد، پلٹ ساعت



(ج) پلٹ مواد، پلٹ ساعت

شکل ۶.۲۰: کنسارہ چپڑھائی پر عمل کارڈی پلٹ کار کی کارکردگی۔

کی قیمت تبدیل نہیں ہونی چاہیے۔ دورانیہ ٹھیسراؤ گیٹ $u3$ کے دورانیہ رد عمل کے برابر ہے، چونکہ D کی قیمت سے قطع نظر، $u4$ کا محارج 1 پر رکھنے کے لئے \bar{R} کا 0 ہونا لازمی ہے۔

اگر $C = 1$ ہونے کے لمحے پر $D = 1$ ہو، تب \bar{S} تبدیل ہو کر 0 ہوگا، جبکہ R کی قیمت 1 رہے گی (مشکل-۵)، جس کی بنا پر (شکل ۶.۱۹ میں) ڈی پلٹ کار کا محارج Q بلند (1) ہوگا۔ بلند ساعت ($C = 1$) کے دوران، D کی تبدیلی \bar{S} اور \bar{R} پر اثر انداز نہیں ہوگی، چونکہ \bar{S} پست (0) ہے جو $u1$ کو 1 رکھے گا۔ جب C واپس 0 ہو، \bar{S} اور \bar{R} دونوں 1 حال اختیار کر کے Q برقرار رکھیں گے۔

خلاصہ کچھ یوں ہے۔ ساعت کے کنارہ چپڑھائی پر D کی قیمت Q کو متاثر ہوتی ہے۔ بلند ساعت کے دوران D میں تبدیلیاں Q پر اثر انداز نہیں ہوتیں۔ مزید، ساعت کا کنارہ اترائی اور پست ساعت، Q پر اثر انداز نہیں ہوتے۔

اشارہ $D = 0$ گیٹ $u4$ اور $u1$ سے گزر کر $u1$ کو پست کرتا ہے، جو $u2$ کو بلند کیے رکھتا ہے۔ یوں ساعت کے کنارہ چپڑھائی سے ($u4$ اور $u1$ کے مجموعی دورانیہ رد عمل کے برابر وقفہ) دورانیہ تیاری کے برابر وقت قبل، ضروری ہے کہ D کی قیمت مستقل صورت اختیار کر لے۔ اسی طرح $\bar{R} = 0$ جو (D کی قیمت سے قطع نظر) $u4$ کو بلند کیے رکھتا ہے، کے لئے ضروری ہے کہ D کی قیمت کنارہ چپڑھائی کے بعد دورانیہ ٹھیسراؤ ($u3$ کے دورانیہ رد عمل کے برابر ہے) کے لئے تبدیل نہ ہو۔

آفت اعلام پلٹ کار کی طرح، کنارہ پر عمل کار پلٹ کار، ترتیبی ادوار میں بازی کے مسائل سے چھٹکارا دیتا ہے۔ اس قسم کا ڈی پلٹ کار استعمال کرتے وقت دورانیہ تیاری اور دورانیہ ٹھیسراؤ پر توجہ دینی ہوگی۔

ترتیبی ادوار میں مختلف پلٹ کار استعمال کرتے وقت، اس بات کو یقینی بنائیں کہ تمام پلٹ کار بیک وقت (یعنی تمام پلٹ کار ساعت کے کنارہ اترائی پر یا تمام پلٹ کار کنارہ چپڑھائی پر) حال تبدیل کرتے ہوں۔ وہ پلٹ کار جو منتخب کنارہ کے مختلف کنارے پر حال تبدیل کرتے ہوں، کی ساعت نفی گیٹ سے گزار کر، منتخب کنارے کے ہم عصر بنایا جاسکتا ہے۔

مشق ۶.۳: انٹرنیٹ سے ڈی پلٹ کار کے معلوماتی صفحات اتاریں۔ (i) اس مخلوط دور میں کتنے ڈی پلٹ کار ہیں؟ (ب) یہ پلٹ کار ساعت کے کس کنارے پر عمل کار ہے؟

۶.۱۰ جے کے پلٹ کار

ڈی پلٹ کار استعمال کر کے مختلف اقسام کے پلٹ کار تفصیل دیے جاسکتے ہیں، جن میں جے کے پلٹے کار^۹ اور ٹی پلٹے کار^{۱۰} بہت مقبول ہیں۔ ساعت کے کنارہ چپڑھائی پر عمل کار جے کے پلٹ کار کی بناوٹ شکل ۶.۲۱

JK FF^۹
T FF^{۱۰}

میں، اور کار کردگی جدول ۶.۳-ب میں پیش ہے۔ کنارہ اترائی پر عمل کار جے کے پلٹ کار بھی پایا جاتا ہے۔

شکل میں مداحل D ذیل ہوگا، جہاں پلٹ کار کے موجودہ محارج Q_n اور \bar{Q}_n لکھے گئے ہیں۔

$$(۶.۶) \quad D = J\bar{Q}_n + \bar{K}Q_n$$

ساعت کے اگلے کنارہ چپڑھائی پر ڈی پلٹ کار اس مداحل کے تحت حال اختیار کرتا ہے، لہذا جے کے پلٹ کار کی کار کردگی کی مساوات درج ذیل ہوگی، جہاں موجودہ محارج Q_n اور اگلا Q_{n+1} ہے۔

$$(۶.۷) \quad Q_{n+1} = J\bar{Q}_n + \bar{K}Q_n$$

مساوات ۶.۶ کو جدول ۶.۳-الف میں پیش کیا گیا ہے۔ جدول کی پہلی صف میں پلٹ کار کا موجودہ حال $Q_n = 0$ ، اور مداحل $J = 0$ اور $K = 0$ ہیں، لہذا مساوات ۶.۶ کے تحت $D = 0$ ہوگا۔ یوں ساعت کے اگلے کنارہ چپڑھائی پر پلٹ کار پست حال اختیار کرتے ہوئے موجودہ حال برقرار رکھتا ہے۔ جدول کی دوسری صف میں موجودہ حال $Q_n = 1$ جبکہ مداحل $J = 0$ اور $K = 0$ ہیں، جن سے $D = 1$ حاصل ہوگا، لہذا ساعت کے اگلے کنارہ چپڑھائی پر پلٹ کار بلند حال اختیار کرتے ہوئے موجودہ حال برقرار رکھتا ہے۔

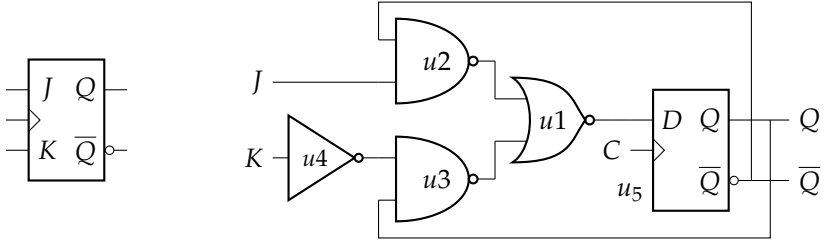
آپ نے دیکھا کہ $K = 0$ ، $J = 0$ کی صورت میں پلٹ کار برقرار حال $(Q_{n+1} = Q_n)$ ہوگا۔ جدول کے اضافی خانے میں یہ معلومات درج کی گئی ہے۔ تسلی کر لیں (اگلے مشق میں ایسا کرنے کو کہا گیا ہے) کہ جدول میں D اور Q_{n+1} کی تمام معلومات مساوات ۶.۶ کے عین مطابق ہیں۔ اس جدول کی بہتر صورت جدول-ب ہے، جہاں غیر ضروری معلومات روپوش کی گئی، اور کنارہ چپڑھائی کی معلومات منراہم کی گئی۔

جے کے پلٹ کار کے کار کردگی درج ذیل ہے۔

JK	Q_{n+1}	
00	Q_n	برقرار حال
01	0	پست حال
10	1	بلند حال
11	\bar{Q}_n	متمم حال

اس مساوات کی پہلی تین صورتوں میں، J اور K بالترتیب S اور R مداحل کا کردار ادا کرتے ہیں، یعنی فعال J ، پلٹ کار کو (ساعت کے عمل کار کنارہ پر) بلند حال، اور فعال K اسے پست حال کرتا ہے۔ البتہ یہاں دونوں مداحل فعال ہونے کی اجازت ہے، جو حال متمم کرتے ہیں۔ دونوں مداحل غیر فعال ہونے کی صورت میں پلٹ کار موجودہ حال برقرار رکھتا ہے۔

مشق ۶.۴: جدول ۶.۳-الف اور ب کی تصدیق کریں۔



شکل ۶.۲۱: جے کے پلٹ کار کی بساؤٹ اور علامت۔

جدول ۶.۳: کنسارہ چپڑھائی پر عمل کار جے کے پلٹ کار

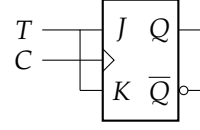
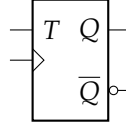
(ب)

C	J	K	Q_{n+1}
↑	0	0	Q_n
↑	0	1	0
↑	1	0	1
↑	1	1	\bar{Q}_n

(i)

J	K	Q_n	D	Q_{n+1}
0	0	0	0	Q_n
0	0	1	1	Q_n
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	\bar{Q}_n
1	1	1	0	\bar{Q}_n

C	T	Q_{n+1}
0	x	Q_n
1	x	Q_n
↑	0	$\overline{Q_n}$
↑	1	$\overline{Q_n}$



شکل ۶.۲۲: ٹی پلٹ کار کی بساؤٹ اور علامت

۶.۱۰.۱ ٹی پلٹ کار

جے کے پلٹ کار کے دونوں مداحل آپس میں جوڑنے سے ٹی پلٹے کار حاصل ہوگا، جو شکل ۶.۲۲ میں بج علامت اور جدول پیش ہے۔

پست مداحل ($T = 0$) کی صورت میں ٹی پلٹ کار برقرار حال رہے گا، جبکہ بلند مداحل ($T = 1$) کی صورت میں ساعت کے کنارہ چپڑھائی پر متمم حال اختیار کرے گی۔ یوں بلند T کی صورت میں بلند پلٹ کار اگلے کنارہ چپڑھائی پر پست ہوگا، جبکہ پست پلٹ کار اگلے کنارہ چپڑھائی پر بلند ہوگا۔

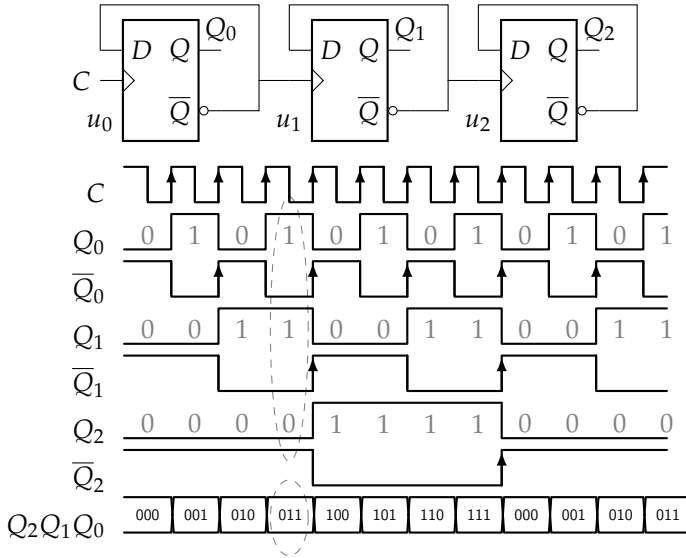
ٹی پلٹ کار کی مساوات، جے کے پلٹ کار کی مساوات ۶.۷ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 Q_{n+1} &= J\overline{Q_n} + \overline{K}Q_n \\
 &= T\overline{Q_n} + \overline{T}Q_n \\
 &= T \oplus Q_n
 \end{aligned}
 \tag{۶.۹}$$

مساوات کے حصول میں J اور K دونوں کی جگہ T استعمال کیا گیا۔

مشق ۶.۵: ٹی پلٹ کار کے جدول کی تصدیق کریں۔

مشق ۶.۶: انٹرنیٹ سے 74xx اور 40xx سلسلہ میں جے کے اور ٹی پلٹ کار تلاش کریں۔



شکل ۶.۲۳: تین ہندسی شنائی گنت کار

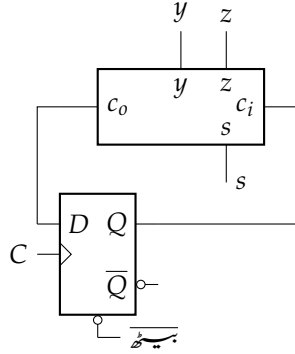
۶.۱۱ شنائی گنت کار

شکل ۶.۱۸ میں پیش دور تین مرتبہ استعمال کر کے شکل ۶.۲۳ حاصل ہو گا۔ بائیں جانب سے اول پلٹ کار (u_0) کا مخرج Q_0 ، دوم پلٹ کار کا مخرج Q_1 اور u_2 کا مخرج Q_2 پکارا گیا ہے۔

پلٹ کار u_0 ساعت (C) کا تعدد 2 سے تقسیم کرتا ہے۔ اس کے دونوں مخرج شکل میں پیش ہیں، جو ساعت کے کنارہ چڑھائی پر حال تبدیل کرتے ہیں، اور جن کا تعدد C کے تعدد کا نصف ہے۔ اشارہ \overline{Q}_0 پلٹ کار u_1 کو بطور ساعت مہیا کیا گیا ہے، جس کو u_1 دو سے تقسیم کرتا ہے۔ یوں Q_1 کا تعدد C کے تعدد سے 4 گنا کم ہو گا۔ پلٹ کار u_1 کا مخرج \overline{Q}_1 ، تیسرے پلٹ کار کی ساعت ہے جو اسے 2 سے تقسیم کرے گا، لہذا Q_2 کا تعدد C کے تعدد سے 8 گنا کم ہو گا۔

پلٹ کار کے مخرج، شنائی عدد کے تین ہندسے تصور کر کے، $Q_2Q_1Q_0$ روپ میں لکھیں۔ شکل ۶.۲۳ کے آخری صف میں یہ عدد پیش ہے، جہاں تینوں پلٹ کار ابتدائی طور پر 0 تصور کیے گئے۔ نقطہ دار گھیرے میں $Q_0 = 1$ (بلند)، $Q_1 = 1$ (بلند)، اور $Q_2 = 0$ (پست) ہیں جنہیں $Q_2Q_1Q_0 = 011$ لکھا پیش کیا گیا ہے، جو اعشاری تین کے برابر ہے۔ یہ دور ساعت کا کنارہ چڑھائی، (تین ہندسی شنائی عدد کے روپ میں) گنتا ہے، جس کی بنا پر اس کا نام **تین ہندسی، شنائی گنت کار** ^{۵۲} ہے۔

گنت کار صفر (000_2) تا سات (111_2) (یعنی آٹھ، 2^3 ، کنارے) گنتی کرنے کے بعد دوبارہ صفر (000_2)



شکل ۶.۲۳: سلسلہ وار شنائی جمع کار

سے شروع کرتا ہے۔ ساعت C کی بجائے گنت کار کو کوئی بھی عددی اشارہ گنتی کے لئے مندر اہم کیا جاسکتا ہے۔ گنت کار اشارے کے کنارہ چپڑھائی کی گنتی کر کے نتیجہ مہیا کرے گا۔

ڈی پلسٹ کار کی تعداد 4 کر کے، سولہ ($2^4 = 16$) کنارے گنتی کے متابل گنت کار بنایا جاسکتا ہے جو مندر (0000_2) تا پندرہ (1111_2) گنتی کرے گا۔ یوں n پلسٹ کار پر مشتمل شنائی گنت کار 2^n کنارے گنتی کے متابل ہو گا۔

۶.۱۲ سلسلہ وار شنائی جمع کار

شکل ۶.۲۳ میں مکمل جمع کار (u_1) اور ڈی پلسٹ کار (u_2) کی مدد سے اصطلاحاً سلسلہ وار شنائی جمع کار^{۵۳} تشکیل دیا گیا ہے (مکمل جمع کار کی ڈب علامت کو یوں بنایا گیا ہے کہ دور میں صفائی پیدا ہو)۔ مکمل جمع کار کو جمع کرنے والے دو شنائی اعداد x اور y سلسلہ وار مندر اہم کئے جاتے ہیں۔ کمتر ترتیبی بٹ سے شروع کر کے ساعت کے ہر کنارہ چپڑھائی پر دونوں اعداد کے اگلے بٹ مندر اہم کئے جاتے ہیں۔ کسی بھی قدم پر ڈی پلسٹ کار حاصل جمع (یعنی مکمل جمع کا خارجی حاصل) ذخیرہ کر کے اگلے قدم پر مکمل جمع کو بطور داخلی حاصل مہیا کرتا ہے۔ مجموعہ کے حصول سے قبل ڈی پلسٹ کار زبردستی پست کیا جاتا ہے تاکہ پہلا داخلی حاصل مندر ہو۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ s پر سلسلہ وار دونوں شنائی اعداد کا مجموعہ خارج ہو گا۔

اس باب کے آخر میں آپ سے گزارش کی جائے گی کہ سلسلہ وار شنائی جمع کار استعمال کرتے ہوئے دو شنائی اعداد جمع کریں۔

۶.۱۳ معاصر ترتیبی ادوار کا تجزیہ

ساعت پر عمل کار، پلٹ کار پر مبنی ادوار معاصر ترتیبی ادوار^{۵۴} کہلاتے ہیں، جو پلٹ کار کے موجودہ حال اور مداحل دیکھ کر نئے حال اختیار کرتے ہیں۔ معاصر ترتیبی ادوار، عموماً، کنارہ ساعت کے ساتھ قدم ملا کر چلتے ہیں۔ ہم زیادہ تر کنارہ ساعت پر عمل کار ترتیبی ادوار پر تبصرہ کریں گے (جو مستن سے واضح ہوگا)۔ معاصر ترتیبی ادوار میں ترکیبی حصے کا موجود ہونا لازم نہیں۔

کنارہ پر عمل کار معاصر ترتیبی ادوار کنارہ ساعت پر نیا حال اختیار کرتے ہیں۔ موجودہ حال نئے حال پر اثر انداز ہو سکتا ہے، لہذا نئے حال دریافت کرتے وقت موجودہ حال (کو بھی) مداحل تصور کریں۔ ترکیبی ادوار کی طرح ترتیبی ادوار کا جدول، جو جدول^{۵۵} کہلاتا ہے، نئے حال دریافت کرنے میں مددگار ثابت ہوگا۔ نیا حال مساوات^{۵۶} سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ دونوں طریقوں پر غور مثالوں کی مدد سے کرتے ہیں۔

۶.۱۳.۱ مساوات حال

دور کے موجودہ حال اور موجودہ مداحل کے روپ میں، مساوات حال دور کے اگلے حال بیان کرتی ہیں۔ کنارہ ساعت پر دور اگلے (نئے) حال اختیار کرتا ہے۔ یوں، ساعت کے n کنارے گزرنے کے بعد حال کو موجودہ حال تصور کر کے، اس کے لئے اشاریہ n استعمال کرتے ہوئے، مثلاً $Q(n)$ ، اگلا حال $Q(n+1)$ ہوگا۔

شکل ۶.۲۵ مثال بنا کر آگے بڑھتے ہیں، جہاں کنارہ چپڑھائی پر عمل کار ڈی پلٹ کار مستعمل ہیں۔ موجودہ مداحل $x(n)$ جبکہ موجودہ مخارج $Q_0(n)$ اور $Q_1(n)$ ہیں۔ ان تینوں کو مداحل تصور کر کے D_0 کی ترکیبی مساوات لکھتے ہیں۔ ضرب گیٹ u_4 کا مخارج xQ_0 اور u_5 کا $x\bar{Q}_1$ ہے، جو متمم جمع u_3 کے مداحل ہیں، لہذا (بالائی پلٹ کار کا مداحل) D_0 جو u_3 کا مخارج ہے، ان کے منطقی جمع کا متمم ہوگا۔

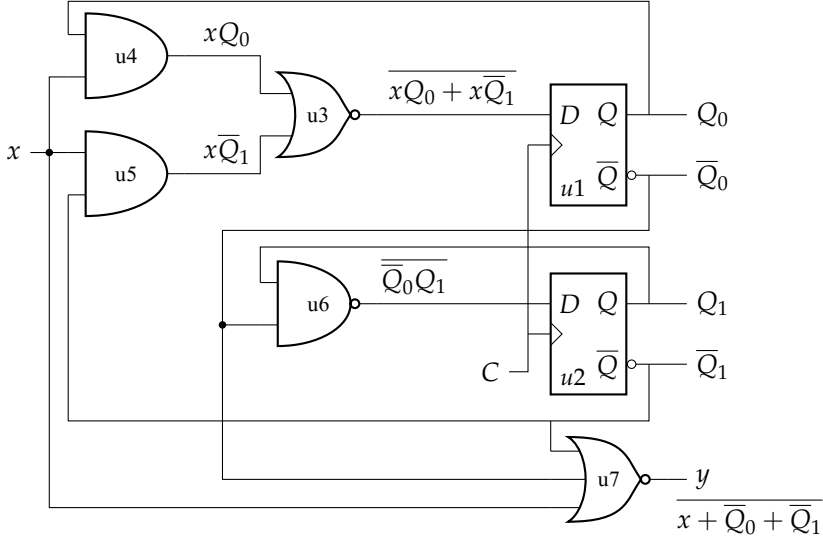
$$D_0(n) = \overline{x(n)Q_0(n) + x(n)\bar{Q}_1(n)}$$

اس مساوات میں ہر جزو کے ساتھ (n) چسپاں کر کے واضح کیا گیا کہ یہ موجودہ متغیرات ہیں۔ ساعت کے کنارہ چپڑھائی پر u_1 اس مساوات کے مطابق اگلا حال اختیار کرے گا۔ یوں، نیا حال $Q_0(n+1)$ درج ذیل ہوگا۔

$$(۶.۱۰) \quad Q_0(n+1) = \overline{x(n)Q_0(n) + x(n)\bar{Q}_1(n)}$$

اسی طرح متمم ضرب u_6 کے مداحل \bar{Q}_0 ، Q_1 ، لہذا مخارج \bar{Q}_0Q_1 ہوگا، جو پلٹ کار u_2 کا مداحل D_1 ہے۔ یوں اس پلٹ کار کا اگلا حال درج ذیل ہوگا۔

$$(۶.۱۱) \quad Q_1(n+1) = \overline{\bar{Q}_0(n)Q_1(n)}$$



شکل ۶.۲۵: ترتیبی دور کی بطور مثال

تیسرا مخارج y ہے جو متمم جمع $u7$ کا مخارج $x + \overline{Q_0} + \overline{Q_1}$ ہے، اور جو سماعت کا تابع نہیں، لہذا y صرف موجودہ حال اور مداحصل پر منحصر ہے، یعنی یہ ہر صورت موجودہ مخارج ہوگا۔

(۶.۱۲)

$$y(n) = x(n) + \overline{Q_0}(n) + \overline{Q_1}(n)$$

مسوات ۶.۱۰ تا ۶.۱۲ میں بار بار (n) اور $(n+1)$ لکھنے سے گریز کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$Q_0 = \overline{xQ_0 + xQ_1}$$

(۶.۱۳)

$$Q_1 = \overline{Q_0Q_1}$$

$$y = x + \overline{Q_0} + \overline{Q_1}$$

۶.۱۳.۲ جدول حال

معاصر حال جدول میں لکھے جاسکتے ہیں۔ شکل ۶.۲۵ کی مثال آگے بڑھاتے ہوئے مسوات ۶.۱۳ سے جدول لکھتے ہیں۔ موجودہ مداحصل (x) اور موجودہ حال (Q_1, Q_0) آزاد متغیرات، جبکہ اگلے مخارج اور حال تابع متغیرات تصور کریں۔ یوں $x(n)$ ، $Q_0(n)$ ، اور $Q_1(n)$ آزاد متغیر تصور کر کے ان کی تمام ترتیب (2_000) تا (1112) لکھیں۔ مسوات ۶.۱۳ سے ہر ترتیب کے مطابق اگلے حال $Q_0(n+1)$ ، $Q_1(n+1)$ ، اور اگلے مخارج $y(n)$ حاصل کر کے جدول میں درج کریں۔ یوں جدول ۶.۴ حاصل ہوگا، جو جدول حال کہلاتا ہے۔

state table^{۵۷}

جدول ۶.۴: جدول حال (برائے مساوات ۶.۱۳)

موجودہ حال	اگلا حال		موجودہ مخارج	
	$x = 0$	$x = 1$	$x = 0$	$x = 1$
$Q_1 Q_0$	$Q_1 Q_0$	$Q_1 Q_0$	y	y
00	11	10	0	0
01	11	10	0	0
10	01	01	0	0
11	11	10	1	0

۶.۱۳.۳ حنا کہ حال

جدول حال میں موجود معلومات کا حنا کہ بنایا جاسکتا ہے جو ناکہ $Q_1 Q_0$ کہلاتا ہے۔ جدول ۶.۴ کا حنا کہ حال شکل ۶.۲۶ میں پیش ہے۔

حنا کہ حال میں دور کا حال گول دائروں سے ظاہر کیا جاتا ہے، جبکہ موجودہ حال سے اگلے حال منتقلی تیردار لکیر سے ظاہر کی جاتی ہے، جس کی دم موجودہ حال پر اور سر اگلے حال پر رکھا جاتا ہے۔ تیردار لکیر پر دو اعداد لکھے جاتے ہیں، جن کے بیچ ترچھی لکیر کھینچی جاتی ہے۔ وہ داخلی قیمت جو انتقال کا سبب بنتی ہے، ترچھی لکیر کے اوپر اور موجودہ مخارج نیچے لکھا جاتا ہے۔

شکل ۶.۲۵ کے ترتیبی دور میں دو پلسٹ کار مستعمل ہیں، جن کا حال $Q_1 Q_0$ لکھ کر 00، 01، 10، اور 11 ممکن حال ہیں۔ حال 00 سے 10 انتقال کی تیردار لکیر پر 1/0 لکھا گیا ہے، جس کے تحت انتقال $x = 1$ کی بدولت پیش آیا اور $y = 0$ ہے۔

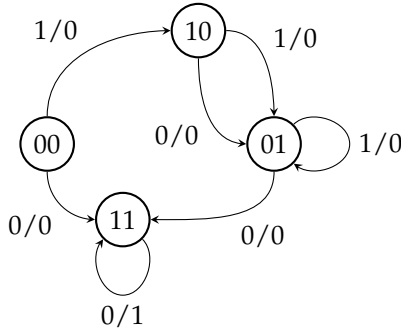
حنا کہ حال دیکھ کر کئی حقائق با آسانی واضح ہوں گے۔ مثلاً، حنا کہ دیکھ کر واضح ہے یہ دور کسی دوسرے حال سے 00 منتقل نہیں ہوگا؛ حال 10 سے یہ اگلے قدم میں 01 منتقل ہوگا، جس کے بعد جب تک $x = 1$ رہے حال تبدیل نہیں ہوگا اور $x = 0$ کرنے سے حال 11 حاصل ہوگا، جس سے نکلنے کا کوئی راستہ موجود نہیں۔

حنا کہ حال اور جدول حال ایک ہی معلومات دو مختلف طریقوں سے پیش کرتے ہیں۔ دونوں میں پیش معلومات ہر طرح یکساں ہے۔

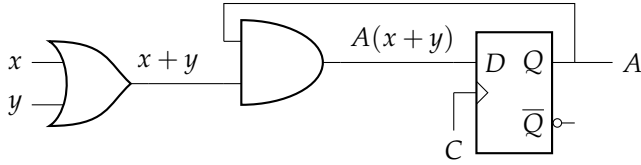
۶.۱۳.۴ ڈی پلسٹ کار پر مبنی ترتیبی دور

ترتیبی ادوار کے حل کی مزید مثالوں پر غور کرتے ہیں۔ پہلی مثال ڈی پلسٹ کار پر مبنی ہے جو شکل ۶.۲۷ میں پیش ہے۔ دور میں ایک پلسٹ کار پایا جاتا ہے جس کا مخارج A لکھ کر، مداحصل $A(x + y)$ ہوگا۔

ساعت کے کنارہ چڑھائی پر ڈی پلسٹ کار مداحصل کے تحت نیا حال اختیار کرتا ہے، لہذا اگلے حال کی



شکل ۶.۲۶: حنا کے حال (برائے شکل ۶.۲۵)



شکل ۶.۲۷: ڈی پلٹ کار پر مبنی ترتیبی دور۔

مساوات درج ذیل ہوگی

$$A(n+1) = A(n)(x(n) + y(n))$$

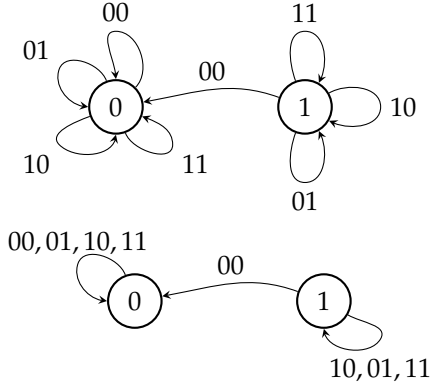
جس کی سادہ صورت ذیل ہے۔

$$A = A(x + y)$$

اس مساوات کے نتائج شکل ۶.۲۸ میں جدول میں پیش ہیں۔ حنا کے حال اور اس کا سادہ روپ (نچلا حنا) بھی شکل پیش ہیں۔ پلٹ کار کے حال 0 اور 1 دائروں میں رکھے گئے ہیں، جبکہ ان کے بیچ انتقال تیردار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ تیردار لکیروں پر مداحل xy کی موجودہ قیمتیں لکھی گئی ہیں۔ ایک ہی حال میں رہنے کے تمام امکانات کو اکٹھا بھی لکھا جا سکتا ہے، جیسے نچلے حنا کے میں کیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ حال 1 سے 0 اس وقت انتقال ہوگا جب مداحل 00 ہو۔ باقی تمام حال میں پلٹ کار موجودہ حال برقرار رکھتا ہے۔ مزید، حال 0 سے حال 1 منتقلی کا کوئی راستہ موجود نہیں۔

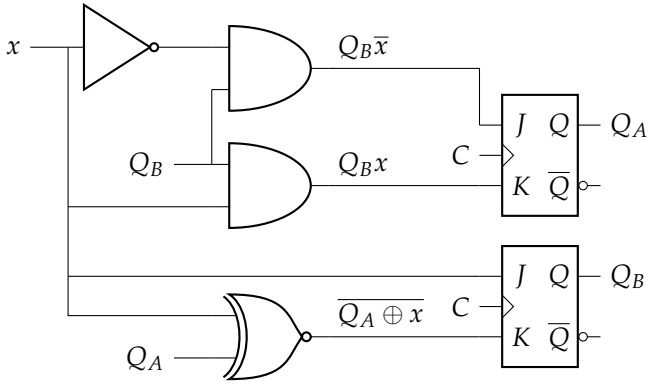
۶.۱۳.۵ جے کے پلٹ کار پر مبنی ترتیبی دور

شکل ۶.۲۹ میں جے کے پلٹ کار پر مبنی ترتیبی دور پیش ہے۔ بالا پلٹ کار کا حال Q_A اور مداحل J_A ، K_A ہیں، جبکہ زیریں پلٹ کار کا حال Q_B اور مداحل J_B ، K_B ہیں۔



موجودہ			اگلا
A	x	y	A
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

شکل ۶.۲۸: جدول حال اور حتمی حال (برائے شکل ۶.۲۷)



شکل ۶.۲۹: جے کے پلسٹ کار پر مبنی ترتیبی دور

دور میں متمم بلاشرکت جمع گیٹ کا ایک مداحل Q_A ہے جو بالائی پلٹ کار کا موجودہ حال ہے۔ پلٹ کار کے مخارج سے گیٹ کے مداحل تک تاریکینچے کی بجائے دونوں کا نام (Q_A) رکھا گیا ہے۔ جب بھی دو معتمامات کا ایک نام رکھا جائے، انہیں آپس میں برقی طور حبڑا تصور کریں۔ یوں، دونوں ضرب گیٹ کا ایک ایک مداحل زیریں پلٹ کار کے مخارج سے حبڑا ہے۔

مداحل کی مساوات ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} J_A &= \bar{x}Q_B \\ K_A &= xQ_B \\ J_B &= x \\ K_B &= \overline{x \oplus Q_A} \end{aligned} \quad (۶.۱۴)$$

ان مساوات سے جدول ۶.۵ حاصل ہوگا، جس سے اضافی مواد نکال کر جدول حال حاصل ہوگا (شکل ۶.۳۰)۔ جدول حال سے حاصل حنا کہ حال بھی شکل میں پیش ہے۔

مساوات ۶.۱۳ سے جدول ۶.۵ لکھتے ہوئے موجودہ حال Q_A ، Q_B اور مداحل x کی تمام مکانات 000_2 تا 111_2 لکھیں (جدول میں بائیں ہاتھ تین قطاریں)۔ ہر صف کے لئے پلٹ کار کے مطابق موجودہ مداحل J_A ، K_A ، J_B ، اور K_B مساوات ۶.۱۴ سے حاصل کریں۔ یوں پہلی صف کے لئے، جہاں موجودہ قیمتیں $Q_A = 0$ ، $Q_B = 0$ ، اور $x = 0$ ہیں، درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} J_A &= \bar{x}Q_B = \bar{0} \cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0 \\ K_A &= xQ_B = 0 \cdot 0 = 0 \\ J_B &= x = 0 \\ K_B &= \overline{x \oplus Q_A} = \overline{0 \oplus 0} = \bar{0} = 1 \end{aligned}$$

انہیں جدول کی پہلی صف میں درج کریں۔ پلٹ کار کے موجودہ مداحل جانتے ہوئے ساعت کے اگلے کنارہ چپڑھائی پر اگلے حال مساوات ۶.۴ ($Q(n+1) = J\bar{Q}_n + \bar{K}Q_n$) یا مساوات ۶.۸ سے

$$\begin{aligned} Q_A &= J_A\bar{Q}_A + \bar{K}_A Q_A = 0 \cdot \bar{0} + \bar{0} \cdot 0 = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 + 0 = 0 \\ Q_B &= J_B\bar{Q}_B + \bar{K}_B Q_B = 0 \cdot \bar{0} + \bar{1} \cdot 0 = \end{aligned}$$

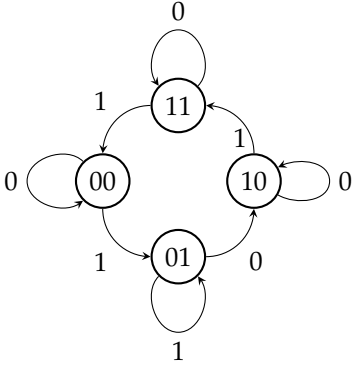
حاصل کر کے جدول کی پہلی صف میں درج کریں۔ باقی صف کے لئے مواد حاصل کے جدول بھریں۔ آپ J اور K کی مساوات استعمال کر کے بھی Q تلاش کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} Q_A(n+1) &= J_A\bar{Q}_A + \bar{K}_A Q_A = (\bar{x}Q_B)\bar{Q}_A + (\overline{xQ_B})Q_A \\ Q_B(n+1) &= J_B\bar{Q}_B + \bar{K}_B Q_B = x\bar{Q}_B + (\overline{x \oplus Q_A})Q_B \end{aligned}$$

حنا کہ حال (شکل ۶.۳۰) پر توجہ دیں۔ حال 00 سے 01 اور یہاں سے 10 اور اس کے بعد 11 حبا یا حاسکتا ہے، جس کے بعد دوبارہ 00 سے پوری کہانی شروع ہوگی۔ یہ 00 تا 11 شنائی گنت کار معلوم ہوتا ہے۔ ماسوائے

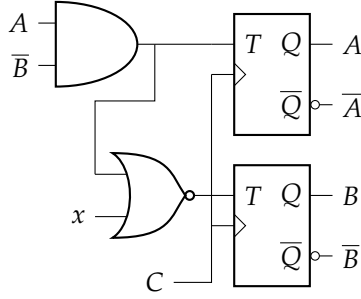
جدول ۶.۵: جے کے پلٹ کار دور کی مساوات ۶.۱۳ سے حاصل جدول

موجودہ مداحل اور حال			پلٹ کار کے مداحل				اگلے حال	
Q_A	Q_B	x	J_A	K_A	J_B	K_B	Q_A	Q_B
0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0	0



موجودہ حال	اگلے حال	
	$x = 0$	$x = 1$
$Q_A Q_B$	$Q_A Q_B$	$Q_A Q_B$
00	00	01
01	10	01
10	10	11
11	11	00

شکل ۶.۳۰: جدول حال اور حال کہ حال برائے شکل ۶.۲۹



شکل ۶.۳۱: ٹی پلٹ کار پر مبنی ترتیبی دور

حال 11 کے، ہر مرتبہ x تبدیل کرنے سے حال تبدیل ہوگا۔ یوں 00 میں جب تک $x = 0$ رہے، دور اسی حال میں رہتا ہے، البتہ x بلند کرنے سے 01 حال حاصل ہوگا، جہاں اس وقت تک رہا جائے گا جب تک $x = 1$ رہے۔

۶.۱۳.۶ ٹی پلٹ کار کی مدد سے ترتیبی دور کا حبابزہ

شکل ۶.۳۱ میں ٹی پلٹ کار پر مبنی دور پیش ہے۔ پلٹ کار کے حال A اور B سے ظاہر کیے گئے ہیں۔ یوں پہلے پلٹ کار کا مداحل T_A اور دوسرے کا T_B ہے۔

پلٹ کار کا اگلا حال مساوات ۶.۹ سے ملتا ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$Q_{n+1} = T \oplus Q_n$$

موجودہ ضرورت کے تحت مساوات سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= T_A \oplus A = T_A \bar{A} + \bar{T}_A A \\ B_{n+1} &= T_B \oplus B = T_B \bar{B} + \bar{T}_B B \end{aligned} \quad (۶.۱۵)$$

پلٹ کار کے مداحل کی مساوات شکل ۶.۳۱ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} T_A &= A\bar{B} \\ T_B &= \overline{A\bar{B} + x} \end{aligned}$$

ان مساوات کو مساوات ۶.۱۵ میں ڈالنے سے پلٹ کار کے حال کی مساواتیں حاصل ہوں گی:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= (A\bar{B}) \oplus A \\ B_{n+1} &= (\overline{A\bar{B} + x}) \oplus B \end{aligned}$$

جدول ۶.۶: ٹی پلٹ کار دور (شکل ۶.۳۱) کا جدول حال

(۱)

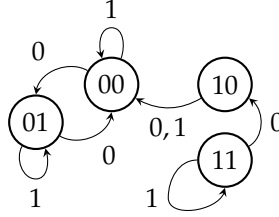
(ب)			(۱)					
			موجودہ مواد			اگلا حال		مدا حاصل
موجودہ	اگلا حال		A	B	x	A	B	T _A T _B
	x = 0	x = 1						
AB	AB	AB						
00	01	00	0	0	0	0	1	0 1
01	00	01	0	0	1	0	0	0 0
10	00	00	0	1	0	0	0	0 1
11	10	11	0	1	1	0	1	0 0
			1	0	0	0	0	1 0
			1	0	1	0	0	1 0
			1	1	0	1	0	0 1
			1	1	1	1	1	0 0

جن سے جدول ۶.۶-الف ملتا ہے۔ مدا حاصل x اور موجودہ حال A اور B کو پہلی تین قطاروں میں لکھا گیا ہے۔ ان کی تمام ترتیب (000₂ تا 111₂) پہلی تین قطاروں میں بھر کر، ہر صف کے لئے مطابقتی موجودہ مدا حاصل حاصل کیے جاتے ہیں، جنہیں دائیں قطاروں میں لکھا گیا ہے۔ موجودہ مدا حاصل سے ساعت کے اگلے کنارہ چپڑھائی پر اگلے حال حاصل ہوں گے۔ جدول ۶.۶-الف سے جدول-ب لکھا جاسکتا ہے، جو جدول حال کہلاتا ہے۔

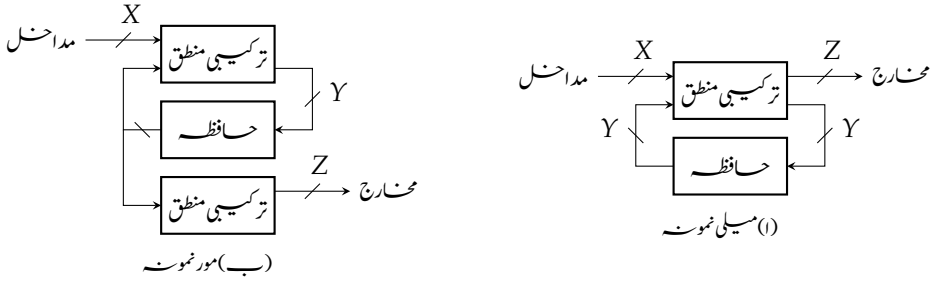
جدول حال کے مواد کو حنا کہ حال کی صورت میں شکل ۶.۳۲ میں پیش کیا گیا ہے۔ جدول ۶.۶-ب میں AB کو ساتھ ساتھ لکھ کر ایک حال تصور کریں۔ یوں 00، 01، 10، اور 11 حال ممکن ہیں۔ حنا کہ حال میں حال کو گول دائرہ میں لکھا جاتا ہے، اور ایک حال سے دوسرے حال (یا اسی حال) انتقال کو تیر دار لکیر سے ظاہر کیا جاتا ہے، جن پر آزاد مدا حاصل (x) کی وہ قیمت درج کی جاتی ہے، جو انتقال کا سبب بنتی ہے۔ مثلاً، جدول-ب کی پہلی صف میں موجودہ حال 00 ہے؛ اب $x = 1$ کی صورت میں دور اسی حال (00) میں رہتا ہے، جس کو حنا کہ حال میں 00 حال سے ابتدا اور اختتام کرنے والی تیر دار لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے، جس پر 1 لکھا گیا ہے؛ البتہ $x = 0$ کی صورت میں دور حال 01 اختیار کرتا ہے، جس کو 00 سے 01 جانے والی تیر دار لکیر ظاہر کرتی ہے، جس پر 0 لکھا گیا ہے۔

۶.۱۴ میلی اور مُور نمونہ

ترتیبی دور میں مدا حاصل، محسار ج اور اندرونی حال پائے جاتے ہیں۔ ترتیبی ادوار کے دو نمونے پائے جاتے ہیں، جنہیں میلی نمونہ^{۵۹} اور مُور نمونہ^{۶۰} کہتے ہیں۔ میلی نمونہ میں محسار ج کا دار و مدار موجودہ مدا حاصل اور موجودہ اندرونی حال پر، جبکہ مُور نمونہ میں صرف موجودہ حال پر ہوگا۔ یہ دو نمونے شکل ۶.۳۳ میں پیش ہیں۔



شکل ۶.۳۲: خنکہ حال برائے شکل ۶.۳۱ اور جدول ۶.۶



شکل ۶.۳۳: مور اور میلی نمونے

ان اشکال میں مداحل تیر دار لکیر پر ترجمی لکیر کھینچ کر X لکھا گیا ہے، جو مداحل شنائی ہندسوں (بٹ) کی تعداد بیان کرتا ہے۔ یوں $X = 8$ کی صورت میں ایک ایک بٹ کے آٹھ مداحل ہوں گے۔ حافظہ کے مداحل اور مخارج کی تعداد برابر ہوگی، لہذا اس کے مداحل (یا مخارج) پر Y لکھنے کے بعد مخارج (یا مداحل) پر صرف ترجمی لکیر کھینچنا کافی ہوگا۔

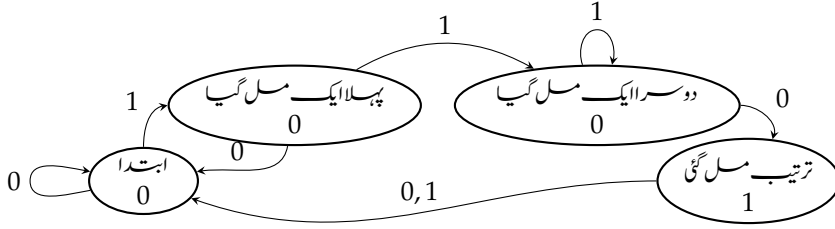
۶.۱۴.۱ حال اور ان کی مقرری

حصہ ۶.۱۳.۳ میں خنکہ حال پر غور کیا گیا۔ ان خنکوں میں پلٹ کار کے مخارج کی بجائے دیگر ناموں سے حال ظاہر کر کے خنکہ حال سمجھنا آسان بنایا جاسکتا ہے (درج ذیل مثال دیکھیں)۔

مثال ۶.۱: ایسے ایک مداحل، ایک مخارج معاصر ترتیبی دور کا خنکہ حال تیار کریں، جو 110_2 مداحل کے حصول پر 1 خنکہ حال بناتا ہو۔ بلند رتی بٹ پہلا بٹ تصور کریں۔ ایسے دور کو ترتیبی شناخت^{۱۱} کہتے ہیں۔

حل: شکل ۶.۳۴ میں خنکہ حال پیش ہے، جسے دیکھ کر دور کی کارکردگی سمجھنا آسان ہے۔ دائرے میں حال کا نام، اور نام کے نیچے 0 یا 1 موجودہ مخارج ظاہر کرتا ہے۔

□



شکل ۶.۳۴: حال کو الفاظ سے پکار کر حنا کہ بہتر سمجھ آتا ہے (مثال ۶.۱)

۶.۱۵ معاصر ترتیبی ادوار کی بناوٹ

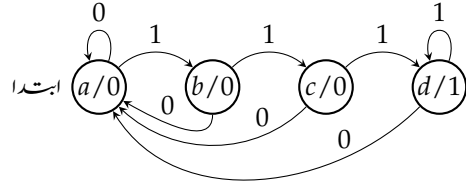
گزشتہ حصے میں مختلف اقسام کے پلسٹ کار استعمال کر کے معاصر ترتیبی ادوار تشکیل دیے گئے۔ ان ادوار کے حصول کا باضابطہ طریقہ کار درج ذیل ہے۔

۱. مسئلہ کے بیان سے حنا کہ حال تیار کریں۔
۲. درکار حال کی تعداد کم کریں۔
۳. ہر حال (کو ظاہر کرنے) کی منفرد شنائی قیمت منتخب کریں۔
۴. جدول حال حاصل کریں۔
۵. پلسٹ کار (کی قسم) کا انتخاب کریں۔
۶. پلسٹ کار کی داخلی اور خارجی سادہ ترین مساوات حاصل کریں۔
۷. ان مساوات سے معاصر ترتیبی دور تشکیل دیں۔

مثال ۶.۲: ایسا معاصر ترتیب شناس تشکیل دیں جو تین متواتر 1 مداحصل کے حصول پر 1 خارج کرے۔

حل: ترتیب شناس کی کارکردگی کے بیان سے شکل ۶.۳۵ کا حنا کہ حال کھینچا جاتا ہے۔ گول دائروں میں ترتیبی لکیر سے اوپر حال کا نام اور نیچے مخارج کی قیمت لکھی گئی ہے۔ شناس کا ابتدائی حال a اور مخارج پست (0) ہے۔ پہلے 1 کی وصولی کے بعد حال b اور مخارج پست ہوگا۔ دوسرے 1 کے بعد حال c اور مخارج پست، تیسرے 1 کے بعد حال d اور مخارج بلند ہوگا۔ مزید 1 ملنے سے شناس حال d میں رہتے ہوئے مخارج بلند رکھتا ہے۔ کسی بھی موقع پر 0 کا حصول، شناس کو واپس ابتدائی حال a منتقل کرتا ہے۔ حنا کہ حال سے حاصل جدول، شکل ۶.۳۵ میں پیش ہے، جس میں بائیں ہاتھ موجودہ مداحصل اور موجودہ حال، جبکہ دائیں ہاتھ اگلا حال اور موجودہ مخارج درج ہیں۔

موجودہ مداخلت حالت	اگلا مداخلت حالت	موجودہ مخرج حالت
a	0	a
a	1	b
b	0	a
b	1	c
c	0	a
c	1	d
d	0	a
d	1	d



شکل ۶.۳۵: ترتیب شناس کا حاکم حالت (مثال ۶.۲)

حاکم حالت سے واضح ہے کہ حالت کی تعداد چار ہے، جنہیں دو بٹ کا شنائی عدد دیکھ کر سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} a &= 00 \\ b &= 01 \\ c &= 10 \\ d &= 11 \end{aligned}$$

(۶.۱۶)

(آپ کوئی دوسری انتخاب کر سکتے ہیں۔ مشق ۶.۷ دیکھیں۔) دو بٹ کے لئے دو پلٹ کار درکار ہوں گے۔ ہم ڈی پلٹ کار منتخب کر کے، ان کے مخارج A اور B، اور مداحل D_A اور D_B لکھتے ہیں۔ شنائی علامت استعمال کرتے ہوئے شکل ۶.۳۵ میں پیش جدول دوبارہ جدول ۶.۷ میں پیش کیا گیا ہے، جس سے ڈی پلٹ کار کی درج ذیل مساوات اخذ ہوتی ہیں۔

$$\begin{aligned} A(n+1) &= D_A(A, B, x) = \sum (3, 5, 7) \\ B(n+1) &= D_B(A, B, x) = \sum (1, 5, 7) \\ y(A, B, x) &= \sum (6, 7) \end{aligned}$$

جدول ۶.۷ سے شکل ۶.۳۶ کے کارنائف نقشے بنا کر درج ذیل سادہ مساوات حاصل ہوتی ہیں، جن سے شکل ۶.۳۷ حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} D_A &= Ax + Bx \\ D_B &= Ax + \overline{B}x \\ y &= AB \end{aligned}$$

ترتیب شناس ابتدائی پست حالت میں، سیٹھ اشارہ کی مدد سے لایا جاتا ہے، جو شکل میں نہیں دکھایا گیا۔

جدول ۶.۷: ترتیب شناس کا جدول حال

موجودہ			اگلا		موجودہ
A	B	x	A	B	y
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1

AB	x	
	0	1
00	0	0
01	0	0
11	1	1
10	0	0

$y = AB$

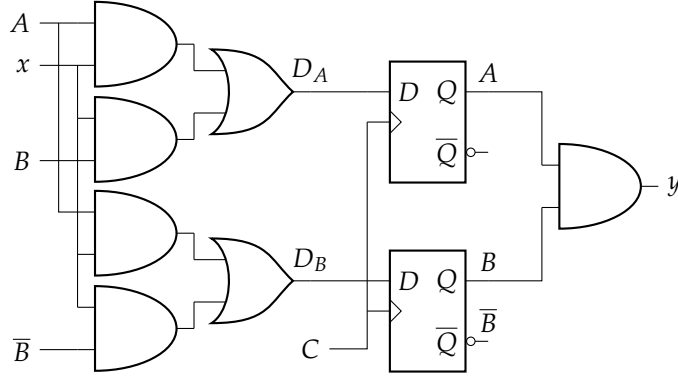
AB	x	
	0	1
00	0	1
01	0	0
11	0	1
10	0	1

$D_B = xA + x\bar{B}$

AB	x	
	0	1
00	0	0
01	0	1
11	0	1
10	0	1

$D_A = xA + xB$

شکل ۶.۳۶: کارنائف نقشے برائے مثال ۶.۲



شکل ۶.۳۷: ترتیب شناس (مثال ۶.۲)

□

مشق ۶.۷: مساوات ۶.۱۶ میں حال کے اظہار کا ایک انتخاب دکھایا گیا ہے۔ آپ کوئی دوسرا انتخاب کر سکتے ہیں، مثلاً $a = 01$ ، $b = 10$ ، $c = 11$ ، اور $d = 00$ جس سے دوسرا دور حاصل ہوگا۔ یہ دور حاصل کریں۔

باب ۷

دفتر

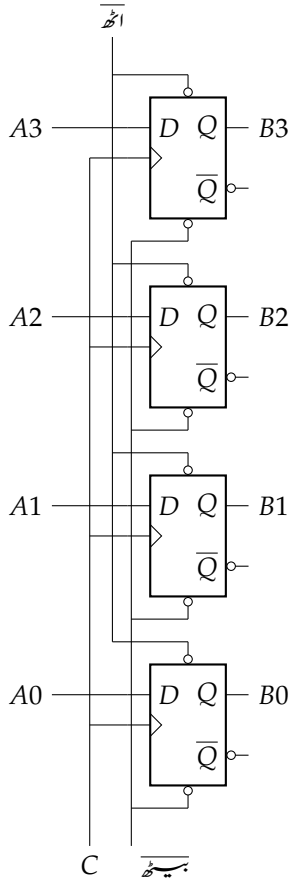
ایک پلٹ کار ایک شنائی ہند سے (ہٹ) کی معلومات ذخیرہ کر سکتا ہے۔ آٹھ ہٹ معلومات ذخیرہ کرنے کے لئے آٹھ پلٹ کار درکار ہوں گے۔ دفتر اے سراد وہ دور ہے جو معلومات ذخیرہ، اور ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتا ہو۔ یوں، n ہٹ دفتر سے مراد n پلٹ کار پر مبنی وہ دور ہوگا، جو n ہٹ ذخیرہ اور منتقل کر کے معلومات کے انتقال کا انداز (سلسلہ وار یا متوازی) دور کے ترکیبی حصہ پر منحصر ہوگا۔

سادہ ترین چار ہٹ دفتر شکل ۱.۷ میں پیش ہے۔ شکل -الف میں مداخل A جبکہ مخارج B ہے۔ مداخل کے چار ہٹ A_0 ، A_1 ، A_2 ، اور A_3 ، جبکہ مخارج کے چار ہٹ B_0 ، B_1 ، B_2 ، اور B_3 ہیں۔

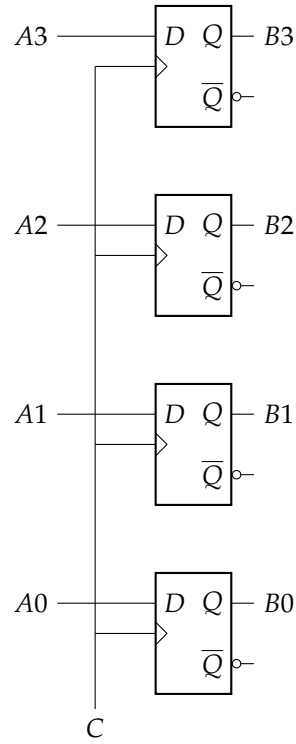
ساعت کے کنارہ چپڑھائی پر داخلی چار ہٹ پلٹ کار کو منتقل ہو جاتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں دفتر میں مواد کا اندراج ہو گیا، یا مواد دفتر میں درج ہو گیا، یا مواد دفتر میں لکھ لیا گیا۔ ساعت کے اگلے کنارہ چپڑھائی تک یہ چار ہٹ معلومات دفتر میں محفوظ، اور مخارج پر دستیاب ہوگی۔

شکل ۱.۷-ب میں بلند اور پست صلاحیت کا پلٹ کار استعمال کیا گیا۔ یوں، ساعت کے کنارہ چپڑھائی کا انتظار کیے بغیر، تمام خارجی ہٹ زبردستی بلند یا پست کیے جاسکتے ہیں۔ زبردستی پست کرنے سے دفتر صاف ہو کر 0000_2 ، جبکہ زبردستی بلند کرنے سے 1111_2 حنا راج کرتا ہے۔

اس دور میں پلٹ کار کی تعداد n کر کے n ہٹ دفتر تشکیل دیا جاسکتا ہے۔ ہر ہٹ کا متم بھی دفتر کے مخارج سے دستیاب ہوگا۔ یوں B_0 کا متم \bar{B}_0 مطابقتی پلٹ کار کے \bar{Q} سے دستیاب ہوگا۔

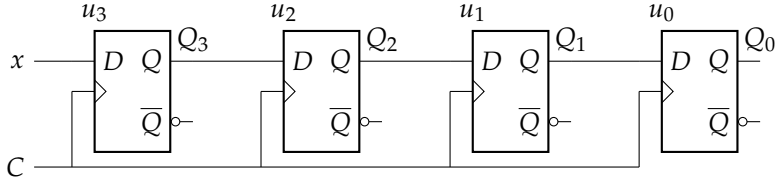


(ب)



(i)

شکل ۱.۷: چار بیت دفتر



شکل ۷.۲: دائیں انتقال دفتر

۷.۱ سلسلہ وار دفتر

۷.۱.۱ دائیں انتقال دفتر

شکل ۷.۲ میں (سلسلہ وار) دائیں انتقال دفتر پیش ہے، جہاں (متواتر) ایک پلٹ کار کا محارج، دوسرے کامدا حاصل ہے، اور شنائی مواد، x ، بائیں (جانب) سے مہیا کیا گیا ہے۔ شکل میں زبردستی پست پن نہیں دکھایا گیا تا کہ اصل مضمون پر توجہ رہے، تاہم تصور کریں ساعت کے پہلے کنارہ چڑھائی سے قبل، تمام پلٹ کار زبردستی پست کیے گئے۔

ساعت کے پہلے کنارہ چڑھائی پر u_0 کو $Q_1 = 0$ ، u_1 کو $Q_2 = 0$ ، u_2 کو $Q_3 = 0$ اور u_4 کو $x = 1$ مواد منراہم ہے، جنہیں پلٹ کار، ساعت کے کنارہ چڑھائی پر، محارج منتقل کرتے ہیں۔ یوں پہلے کنارہ چڑھائی گزرنے کے بعد $Q_0 = 0$ ، $Q_1 = 0$ ، $Q_2 = 0$ اور $Q_3 = 1$ ہوگا۔ یاد رہے، ساعت کے کنارہ چڑھائی کے دوران، پلٹ کار گزشتہ حال میں رہتا ہے، اور نیا مواد کنارہ گزرنے کے بعد محارج کو پہنچتا ہے۔ آپ نے دیکھا، یہ دور، مواد کی دائیں رخ نقل مکانی کرتا ہے، جس کی وجہ سے اس کو دائیں انتقال دفتر کہتے ہیں۔

ساعت کے دوسرے کنارہ چڑھائی کے وقت، u_0 کو $Q_1 = 0$ ، u_1 کو $Q_2 = 0$ ، u_2 کو $Q_3 = 1$ ، اور u_4 کو x (جو 0 یا 1 ہوگا) مواد منراہم ہے، لہذا ساعت کا دوسرا کنارہ چڑھائی گزرنے کے بعد $Q_0 = 0$ ، $Q_1 = 0$ ، $Q_2 = 1$ اور $Q_3 = x$ ہوگا۔

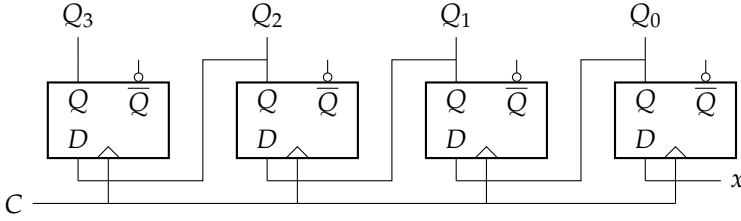
دور کو سلسلہ وار منراہم بائیں سے مواد، سلسلہ وار دائیں پلٹ کے محارج Q_0 سے اسی ترتیب میں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

۷.۱.۲ بائیں انتقال دفتر

شکل ۷.۳ میں (سلسلہ وار) بائیں انتقال دفتر دکھایا گیا ہے، جو مواد کی بائیں نقل مکانی کرتا ہے۔ اس کی بناوٹ بالکل دائیں انتقال دفتر کی طرح ہے۔ منرق صرف اتنا ہے، بائیں انتقال دفتر میں دایاں پلٹ کار کا محارج پڑوسی دایاں پلٹ کار کامدا حاصل ہے۔

ساعت کے کنارہ چڑھائی پر دایاں پلٹ کار منراہم کردہ مواد x کی نقل حاصل کر کے Q_0 پر محارج کرتا ہے۔

shift right register^r
shift left register^r



شکل ۷.۳: بائیں انتقال دفتر

اگلے کنارہ پر یہ مواد Q_1 کو منتقل ہوگا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہاں مواد دائیں سے منراہم کیا گیا ہے، جو دور میں سے گزرتے ہوئے بائیں منتقل ہوگا۔

۷.۱.۳ دائیں و بائیں انتقال دفتر

شکل ۷.۴ میں (سلسلہ وار) بائیں و دائیں انتقال دفتر پیش ہے جو مواد کی بائیں یا دائیں نقل مکانی کی صلاحیت رکھتا ہے۔ محتاج Q_2 پلٹ کار کے مداحل D اور اس سے منسلک جمع گیٹ اور (دو) ضرب گیٹ پر توجہ رکھیں۔ و تابو اشارہ (بائیں / دائیں) بلند ہونے کی صورت میں، دایاں ضرب گیٹ معذور جبکہ بائیاں محباز ہو کر، جمع گیٹ تک Q_3 پہنچاتے ہیں جو D پر دستیاب، اور ساعت کے اگلے کنارہ چپڑھائی پر پلٹ کار میں درج ہو کر بطور Q_2 خارج ہوگا۔ یوں مواد Q_3 سے Q_2 یعنی دائیں منتقل ہوا۔ اس کے برعکس و تابو اشارہ پرست ہونے کی صورت میں، دایاں ضرب گیٹ محباز اور بائیاں معذور ہو کر، جمع گیٹ تک Q_1 پر موجود مواد پہنچاتے ہیں، جو آخر کار Q_2 پہنچتا ہے، اور یوں مواد بائیں منتقل ہوتا ہے۔

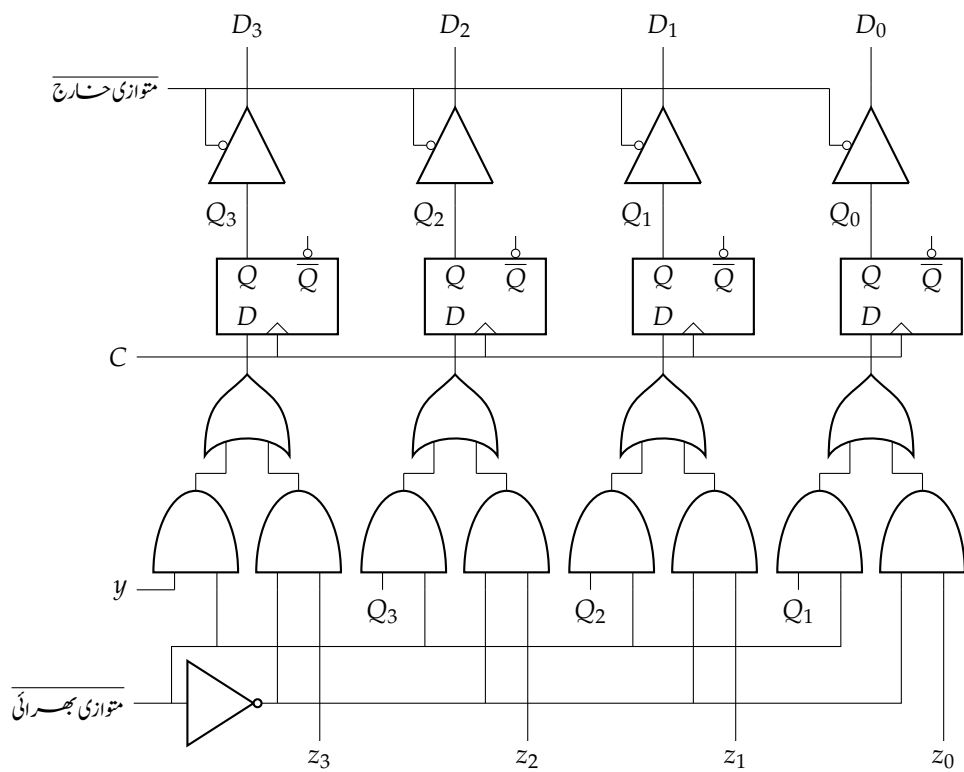
بائیں ترین پلٹ کار کو سیرونی مواد y جبکہ دائیں ترین کو x منراہم کیا گیا ہے۔ و تابو اشارہ ان میں سے ایک منتخب کرتا ہے جو مطلوب سمت (بائیں یا دائیں) منتقل ہوگا۔

بائیں نقل مکانی کے دوران x پر میسر مواد ساعت کے کنارہ چپڑھائی پر Q_0 پہنچتا ہے۔ اگلے کنارہ پر یہی مواد Q_1 ، اس سے اگلے پر Q_2 اور آخر میں Q_3 پہنچتا ہے۔ دائیں نقل مکانی کی صورت میں y پر موجود مواد الٹ رخ Q_3 سے نقل مکانی کرتا ہے۔

۷.۲ متوازی بھرائی دفتر

بعض اوقات، دفتر میں بیک وقت مواد چپڑھانے کی ضرورت پیش آتی ہے۔ شکل ۷.۵ میں دائیں انتقال، متوازی بھرائی دفتر پیش ہے، جس میں متوازی مواد بیک وقت چپڑھانا ممکن ہے۔ یہ مختصر متوازی دائیں انتقال دفتر کہلاتا ہے۔

پلٹ کار کو جمع گیٹ معلومات منراہم کرتا ہے جس کو دو ضرب گیٹ مواد منراہم کرتے ہیں۔ و تابو اشارہ



شکل ۷.۵: متوازی داین انتقال دفتر

جباتا ہے۔ شکل میں چار یکساں حصے ہیں۔ ان میں سے دائیں جانب حصہ پر غور کرتے ہیں۔ بقایا حصے بھی بالکل اسی طرح کام کرتے ہیں۔

اس حصہ میں پلٹ کار کی داخلی طرف چار سے ایک منتخب کنندہ جوڑا گیا ہے۔ پتے کے دوپٹ اور اس کے مداحل میں سے ایک کو چن کر حنا رچی پن پر حنا رچ کرتا ہے۔ منتخب ہونے والا مداحل جدول سے یوں حاصل ہوگا۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ پچھلی صورت منتخب ہو کر پلٹ کار کے مداحل پر مہیا ہو جائے گا اور اگلے کنارہ ساعت یہی مواد پلٹ کار کے حنا رچی پن پر حنا رچ ہو جائے گا۔ اس طرح دفتر اپنی حالت برقرار رکھے گا اور مواد کسی بھی جانب حرکت نہیں کرے گا۔ اسی طرح پتہ ہونے کی صورت پلٹ کار کو مہیا ہو جائے گا اور ساعت کے اگلے کنارہ یہی پلٹ کار کے حنا رچ پر نمودار ہو جائے گا۔ چونکہ متوازی مہیا کردہ مواد ہے لہذا اس صورت متوازی مواد دفتر میں چڑھ جائے گا۔ پتہ پلٹ کار کو مہیا ہو جائے گا۔ یوں ساعت کے اگلے کنارے موجود ہا اگلے کے طور نمودار ہو جائے گا۔ یعنی اس مرتبہ دفتر مواد کو دائیں جانب منتقل کرے گا۔ پتہ کو صورت سلسلہ واد مہیا کردہ مواد منتخب ہو گا اور ساعت کے اگلے کنارے پر پلٹ کار کی حنا رچ چھینچ جائے گا۔ اس مرتبہ دفتر مواد کو بائیں جانب منتقل کر رہا ہے۔ اس تمام تجربہ کو بقایا چار حصوں پر لاگو کر کے نتیجہ کو جدول کی شکل میں یوں لکھا جاسکتا ہے۔

مشق: انٹرنیٹ سے عالم گیر دفتر کے معلوماتی صفحات حاصل کریں۔ (۱) یہ کتنے پٹ کا عالم گیر دفتر ہے۔ (ب) اسے استعمال کرتے ہوئے سولہ پٹ عالم گیر دفتر حاصل کریں۔

4.7 سالہ وار شنائی جمع کار صفحہ 258 پر شکل 25.6 میں سلسلہ وار شنائی جمع کار دکھایا گیا ہے۔ اسی کو استعمال کرتے ہوئے شکل 7.7 میں زیادہ پٹ کا سلسلہ وار شنائی جمع کار دکھایا گیا ہے۔ اس شکل میں پٹ کے دو عدد متوازی لکھائی و پڑھائی کے صلاحیت والے دائیں انتہا ل دفتر 16 استعمال کئے گئے ہیں جنہیں دفتر-۱ اور دفتر-ب کہا گیا ہے۔ مجموعہ حاصل کرنے سے قبل، یعنی ساعت کے پہلے کنارہ سے قبل، دفتر-۱ میں شنائی عدد جبکہ دفتر-ب میں شنائی عدد متوازی طور منتقل کئے جاتے ہیں اور زبردستی پست اشارہ کو لحنائی طور پست کر کے ڈی پلٹ کار کو پست کر دیا جاتا ہے تاکہ مکمل جمع کار کے داخلی حاصل کی قیمت ہو۔ شکل میں متوازی چڑھائی نہیں دکھائی گئی تاکہ اصل موضوع پر توجہ رہے۔ مکمل جمع کار ان دو شنائی اعداد کے کم ترتیب والے پٹ اور داخلی حاصل کو جمع کر کے جمع اور حنا رچی حاصل حنا رچ کرتا ہے۔ ساعت کے پہلے کنارے پر کو ڈی پلٹ کار محفوظ کر کے اسے مکمل جمع کار کو اگلے شنائی پٹ جمع کرتے وقت بطور داخلی حاصل منراہم کرتا ہے جبکہ دفتر-۱ اور دفتر-ب اسے اگلے درجے کے پٹ منراہم کرتے ہیں۔ جھکو اس شکل میں دفتر-۱ کو سلسلہ وار مداحل کے طور مہیا کیا گیا ہے۔ یوں جیسے جیسے اس دفتر سے شنائی عدد دائیں جانب حنا رچ ہوتا ہے ویسے ویسے اس کی جگہ دو اعداد کا مجموعہ جگہ لیتا ہے۔ ساعت کے کنارے گزرنے کے بعد دو شنائی اعداد کا مجموعہ دفتر-۱ میں محفوظ ہوتا ہے جہاں سے اسے متوازی پڑھا جاسکتا ہے جبکہ مجموعہ کا آخری حاصل مکمل جمع کار کے حنا رچے پڑھا جاسکتا ہے۔

جوابات

