

عددی ادوار
تخلیق و تجزیہ

خالد حسان یوسفزئی

khalidyousafzai@hotmail.com

۵/ اپریل ۲۰۲۳

عنوان

ویبا

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

۱	۱.۱	اعشاری نظام گنتی	۱
۲	۱.۲	ہشتمی نظام گنتی	۲
۳	۱.۳	شانئی نظام گنتی	۳
۵	۱.۴	اعشاری نظام سے شانئی نظام میں تبادلہ	۵
۷	۱.۵	اساس سولہ کا (سادس عشری) نظام گنتی	۷
۸	۱.۶	اساس دو کا اساس آٹھ میں تبادلہ	۸
۸	۱.۷	اساس دو کا اساس سولہ میں تبادلہ	۸
۹	۱.۸	اساس آٹھ اور اساس سولہ سے اساس دو میں تبادلہ	۹
۱۱	۲.۱	بنیادی حساب	۱۱
۱۲	۲.۲	شانئی نظام میں اعداد منفی کرنا	۱۲
۱۲	۲.۳	اسی تکملہ یا تکملہ r	۱۲
۱۳	۲.۴	اساس منفی ایک تکملہ یا تکملہ $(r-1)$	۱۳
۱۵	۲.۵	دو اعداد کی منفی بذریعہ اسی تکملہ	۱۵
۱۷	۲.۶	دو اعداد کی منفی بذریعہ اساس منفی ایک تکملہ	۱۷
۱۹	۲.۷	ثبوت اور منفی اعداد	۱۹
۲۱	۲.۸	علامت دار و تکملہ نظام	۲۱
۲۳	۳.۱	بوولین الجبرا	۲۳
۲۳	۳.۱.۱	بوولین الجبرا کے بنیادی تصورات	۲۳
۲۴	۳.۱.۲	منطقی ضرب	۲۴
۲۵	۳.۱.۲	منطقی جمع	۲۵

۲۶	منطقی نفی	۳.۱.۳
۲۷	منطقی بلا شرکت جمع	۳.۱.۴
۲۸	منطقی ضد بلا شرکت جمع	۳.۱.۵
۲۸	برقی تاروں میں جوڑ کی وضاحت	۳.۲
۲۹	عدد کی گیت	۳.۳
۲۹	ضرب گیت	۳.۳.۱
۲۹	جمع گیت	۳.۳.۲
۳۱	نفی گیت	۳.۳.۳
۳۱	متعدد مداحل گیت	۳.۳.۴
۳۲	ضرب متمم گیت اور جمع متمم گیت	۳.۳.۵

باب ۲

بنیادی حساب

ثنائی نظام میں حساب بالکل اسی طرح کیا جاتا ہے جس طرح اعشاری نظام میں۔ چند مثالوں کے مطالعہ سے وضاحت ہوگی۔

ثنائی نظام میں اعداد مجموعہ اعشاری نظام میں دو اعداد کے مجموعہ سے سمجھا جا سکتا ہے۔ اعشاری نظام کی مندرجہ ذیل مثال پر غور کریں جس میں 37.5 اور 29.6 جمع کیے گئے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 11 \\ 37.5 \\ +29.6 \\ \hline 67.1 \end{array}$$

آپ نے دیکھا کہ حاصل (1) کو (بائیں) زیادہ وزنی مقام پر منتقل کیا گیا۔ یہی ثنائی جمع میں کیا جائے گا۔ ثنائی نظام میں صرف دو ہندسے، 0 اور 1، پائے جاتے ہیں جن کی چار ممکنہ جمع درج ذیل ہیں۔

1	1	0	0
1	1	0	0
+1	+0	+1	+0
11	01	01	00

پہلی تین جمع میں حاصل 0 جبکہ آخری میں حاصل 1 ہے۔

آئیں، زیادہ شنائی ہندسوں کے اعداد کی جمع کی مثالیں دیکھیں؛ ان کی اعشاری نظام میں جمع بھی دی گئی ہیں۔

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 13 \\
 +09 \\
 \hline
 22_{10}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1 \quad 1 \\
 1101 \\
 +1001 \\
 \hline
 10110_2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 3 \\
 +2 \\
 \hline
 5_{10}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 1 \\
 11 \\
 +10 \\
 \hline
 101_2
 \end{array}$$

دائیں ہاتھ شنائی 11 اور 10 جمع کر کے 101_2 حاصل کیا گیا جو اعشاری نظام میں $5 = 3 + 2$ ہوگا، جبکہ بائیں ہاتھ شنائی 1101 اور 1001 جمع کر کے 10110_2 حاصل کیا گیا جو اعشاری نظام میں $22 = 13 + 9$ کے مترادف ہے۔

آخر میں، کسری اعداد کی جمع کی ایک مثال دیکھتے ہیں۔

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 5.75 \\
 +3.50 \\
 \hline
 9.25_{10}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 111 \\
 101.11 \\
 +11.10 \\
 \hline
 1001.01_2
 \end{array}$$

۲.۱ شنائی نظام میں اعداد منفی کرنا

دوہٹ (شنائی عدد) منفی کرنے کے درج ذیل چار ممکنات پائے جاتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 0 - 0 &= 0 \\
 1 - 0 &= 1 \\
 1 - 1 &= 0 \\
 0 - 1 &= 1 \quad (\text{ادھار ایک})
 \end{aligned}$$

ی آخری مساوات میں منہرے ایک اس صورت منفی کیا دکھایا گیا ہے جب ادھار 1 لینا ممکن ہو۔ ایک اور مثال دیکھتے ہیں۔

$$\begin{array}{r}
 6.25 \\
 -5.50 \\
 \hline
 0.75_{10}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 110.01 \\
 -101.1 \\
 \hline
 0.11_2
 \end{array}$$

شنائی منفی کی چند مثالیں حل کر کے اعشاری منفی سے ان کی تصدیق کریں۔ ایسا کرنے سے زیادہ وضاحت ہوگی۔

۲.۲ اسی تکملہ یا تکملہ ۲

کسی بھی اسی نظام میں، ہندسہ کو اساس، (r) ، سے منفی کرنے سے ہندسے کا اسی تکملہ (یا تکملہ r) حاصل ہوگا۔ یوں، ہندسہ اور ہندسے کے اسی تکملہ کا مجموعہ اساس کے برابر ہوگا۔ مثلاً، اعشاری نظام میں

3 کا اسی تکملہ $10 - 3 = 7$ ، جبکہ 7 کا اسی تکملہ 3 اور ان دونوں کا مجموعہ $3 + 7 = 10$ اعشاری نظام کے اساس کے برابر ہے۔ اسی طرح 5 کا اسی تکملہ 5، اور 9 کا اسی تکملہ 1 ہوگا۔

درج بالا مثالوں سے واضح ہے کہ کسی بھی ہندسہ (مثلاً 3) کے اسی تکملہ (یعنی 7) کا اسی تکملہ وہی ہندسہ (یعنی 3) ہوگا۔ اسی تکملہ کے تصور کو ایک سے زائد ہندسوں پر مبنی عدد تک وسعت دیتے ہیں۔ اساس r کے اعدادی نظام میں عدد N ، جو n ہندسوں پر مبنی ہو، کے اسی تکملہ (یا تکملہ r) سے مراد عدد $r^n - N$ ہوگا۔ اساس دس کے اسی تکملہ کو عام طور تکملہ 10 کہتے ہیں۔ اسی طرح اساس دو کے تکملہ کو تکملہ 2 کہتے ہیں۔ اعشاری نظام میں عدد 10^n کے سب سے وزنی ہندسے کی قیمت 1 ہوگی، اور اس کی دائیں جانب 0 قیمت کے n ہندسے ہوں گے۔

$$10^2 = 100_{10}$$

$$(۲.۱) \quad 10^5 = 100000_{10}$$

$$10^7 = 10000000_{10}$$

اعشاری نظام کی اساس $r = 10$ ہے۔ اس نظام میں عدد N ، جس میں n ہندسے ہوں، کے اسی تکملہ (یعنی تکملہ 10) سے مراد عدد $10^n - N$ ہوگا۔ یوں $N = 5391$ جس میں چار ہندسے ($n = 4$) ہیں، کا تکملہ 10 درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۲) \quad (10^4 - 5391)_{10} = (10000 - 5391)_{10} = 4609_{10}$$

اسی طرح عدد 320753 جس میں 6 ہندسے ہیں کا اسی تکملہ:

$$(۲.۳) \quad (10^6 - 320753)_{10} = (1000000 - 320753)_{10} = 679247_{10}$$

اور 679247 کا تکملہ 2 درج ذیل ہوگا۔

$$(۲.۴) \quad (10^6 - 679247)_{10} = (1000000 - 679247)_{10} = 320753_{10}$$

ہر عدد N کے اسی تکملہ کا اسی تکملہ وہی عدد N ہوگا۔ اس کا ثبوت کچھ یوں ہے: عددی N کا اسی تکملہ $r^n - N$ اور عدد $r^n - N$ کا اسی تکملہ $(r^n - (r^n - N))$ یعنی N ہوگا۔

شنائی نظام کی اساس 2 ہے لہذا n ہندسوں پر مبنی شنائی عدد N کا تکملہ 2 (یعنی اسی تکملہ) $2^n - N$ ہوگا۔

شنائی نظام میں عدد 10^n کے سب سے وزنی ہندسے کی قیمت 1 ہوگی، اور اس کی دائیں جانب 0 قیمت کے n ہندسے ہوں گے۔

$$2^2 = 100_2$$

$$(۲.۵) \quad 2^5 = 100000_2$$

$$2^7 = 10000000_2$$

یوں 1011_2 اور 10001_2 کے مکملہ 2 بالترتیب درج ذیل ہوں گے۔

$$(2.۶) \quad \begin{aligned} (2^4 - 1011)_2 &= (10000 - 1011)_2 = 0101_2 \\ (2^5 - 10001)_2 &= (100000 - 10001)_2 = 01111_2 \end{aligned}$$

۲.۳ اساس منفی ایک مکملہ یا مکملہ $(r - 1)$

اساس r کے نظام میں، عدد N کے اساس منفی ایک $(r - 1)$ مکملہ سے مراد $r^n - 1 - N$ ہے۔ اعشاری نظام میں اساس منفی ایک مکملہ کو عموماً مکملہ 9 اور شنائی نظام میں اسے مکملہ 1 کہتے ہیں۔ اعشاری نظام میں 376 اور 7852 کے مکملہ 9، بالترتیب مندرجہ ذیل ہوں گے۔

$$(2.۷) \quad \begin{aligned} 10^3 - 1 - 376 &= 1000 - 1 - 376 \\ &= 999 - 376 \\ &= 623_{10} \\ 10^4 - 1 - 7852 &= 10000 - 1 - 7852 \\ &= 9999 - 7852 \\ &= 2147_{10} \end{aligned}$$

اعشاری نظام میں عدد $10^n - 1$ ، n ہندسوں پر مشتمل ہوگا، جہاں ہر ہندسے کی قیمت 9 ہوگی۔

$$(2.۸) \quad \begin{aligned} 10^3 - 1 &= 1000 - 1 = 999_{10} \\ 10^6 - 1 &= 1000000 - 1 = 999999_{10} \\ 10^8 - 1 &= 100000000 - 1 = 99999999_{10} \end{aligned}$$

شنائی نظام میں عدد $2^n - 1$ ، n ہندسوں پر مشتمل ہوگا، جہاں ہر ہندسے کی قیمت 1 ہوگی۔

$$(2.۹) \quad \begin{aligned} 2^3 - 1 &= 1000 - 1 = 111_2 \\ 2^5 - 1 &= 100000 - 1 = 11111_2 \\ 2^8 - 1 &= 100000000 - 1 = 11111111_2 \end{aligned}$$

شنائی نظام میں 1001_2 اور 101110_2 کے مکملہ 1، بالترتیب، درج ذیل ہوں گے۔

$$(2.۱۰) \quad \begin{aligned} 2^4 - 1 - 1001 &= 1111 - 1001 = 0110_2 \\ 2^6 - 1 - 101110 &= 111111 - 101110 = 010001_2 \end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شنائی عدد 0 (صفر) کا مکملہ 1، شنائی عدد 1 (ایک) ہوگا، اور اسی طرح 1 کا مکملہ 1، شنائی عدد 0 ہوگا۔ ہم کہتے ہیں 0 کا متمم 1 اور 1 کا متمم 0 ہے۔

ثنائی عدد N کا اساس منفی ایک تکملہ، \bar{N} سے ظاہر کیا جاتا ہے لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\bar{1}_2 &= 0_2 \\ \bar{0}_2 &= 1_2 \\ (۲.۱۱) \quad \overline{1001}_2 &= 0110_2 \\ \overline{101110}_2 &= 010001_2\end{aligned}$$

ان دو مثالوں سے ایک اہم حقیقت واضح ہوتا ہے: ثنائی عدد میں ہر ہندسے کا متمم لینے سے (یعنی ہر 0 کو 1 اور ہر 1 کو 0 کرنے سے) اس کا تکملہ 1 یا متمم حاصل ہوگا۔

ثنائی عدد کے ہر ہٹے کا متمم لینے سے عدد کا تکملہ 1 (یعنی متمم) حاصل ہوگا۔

اساس r نظام میں تکملہ r سے مراد $r^n - N$ اور تکملہ $(r - 1)$ سے مراد $r^2 - 1 - N$ ہے، لہذا تکملہ $(r - 1)$ کے ساتھ 1 جمع کر کے تکملہ r حاصل کیا جاسکتا ہے، یعنی عدد کے متمم کے ساتھ 1 جمع کر کے تکملہ 2 حاصل ہوگا۔ اس طرح اسی تکملہ کا حصول عموماً زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ مساوات ۲.۶ میں دیے گئے اعداد کے تکملہ 2 ہم اس طریقہ سے حاصل کرتے ہیں۔

چونکہ $\overline{1011} = 0100$ ہے لہذا 1011 کا اسی تکملہ $0101 + 1 = 0100$ ہوگا۔ اسی طرح 10001 کے متمم 01110 کے ساتھ 1 جمع کرنے سے اس کا اسی تکملہ $01111 + 1 = 01110$ حاصل ہوگا۔

۲.۴ دو اعداد کی منفی بذریعہ اسی تکملہ

متمم و کاغذ کے ساتھ، M سے N منفی کرنا چھوٹی جماعتوں میں سکھایا جاتا ہے۔ برقیات میں تکملہ کی مدد سے دو اعداد منفی کیے جاتے ہیں، جہاں دونوں اعداد میں ہندسوں کی تعداد برابر ہونا لازم ہے۔ اسی تکملہ کی مدد سے $M - N$ مندرجہ ذیل طریقہ کار سے حاصل کیا جاتا ہے۔

• دونوں اعداد میں ہندسوں کی تعداد برابر کرنے کی خاطر، کم ہندسوں والے عدد کی بائیں جانب (درکار تعداد کی) اضافی صفریں چسپاں کریں۔ فرض کریں اب ہر عدد میں n ہندسے پائے جاتے ہیں۔

• M کے ساتھ N کا اسی تکملہ جمع کر کے مجموعہ $M + r^n - N$ حاصل کریں۔

• M کی قیمت N کی قیمت سے زیادہ ہونے کی صورت میں، آخری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا ہوگا، جس کی بنیاد مجموعہ $n + 1$ ہندسوں پر مشتمل ہوگا اور اس کا بائیں ہندسہ 1 ہوگا۔ اس بائیں ہندسے کو (یعنی حاصل 1 کو) نظر انداز کریں؛ باقی n ہندسوں پر مبنی عدد اصل جواب ہوگا۔

• M کی قیمت N کی قیمت سے کم ہونے کی صورت میں، آخری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا نہیں ہوگا؛ مجموعہ منفی عدد کو ظاہر کرے گا، اور n ہندسوں پر مبنی ہوگا۔ مجموعہ کا اسی تکملہ لے کر اس کی بائیں جانب منفی علامت منسلک کر کے جواب حاصل ہوگا۔

ان دونوں صورتوں کی وضاحت مثالوں سے ہوگی۔

مثال ۲.۱: تکملہ 10 کی مدد سے اعشاری اعداد کا حاصل منفی $974 - 7852$ دریافت کریں۔

باب ۲: بنیادی حساب

جواب: یہاں بڑا عدد 7852 چار ہندسوں پر مشتمل ہے، لہذا اچھوٹا عدد 0974 لکھیں اور $4 = n$ لیں۔ یوں 0974 کا اسی نمبر 9026 = 10000 - 0974 ہوگا، جس کو 7852 کے ساتھ جمع کرنے سے 5 ہندسوں کا مجموعہ $9026 + 7852 = 16878$ حاصل ہوگا۔ چونکہ یہ عدد 5 ہندسوں پر مشتمل ہے، لہذا بائیں ہندسے کو نظر انداز کرتے ہوئے 6878 کو جواب تسلیم کرتے ہیں۔ (ہم درحقیقت آخری ہندسوں کی جمع سے پیدا حاصل 1 کو رد کرتے ہیں۔ چونکہ یہ مجموعہ میں بائیں ترین مقام پر اترتا ہے لہذا مجموعہ کا بائیں ہندسہ رد کر کے جواب حاصل ہوگا۔)

$$\begin{array}{r}
 \text{حاصل 1 کو نظر انداز کر کے} \\
 \text{6878 کو جواب تسلیم کرتے ہیں}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 1 \\
 7852 \\
 +9026 \\
 \hline
 16878
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 10000 \\
 -0974 \\
 \hline
 9026
 \end{array}$$

□

مثال ۲.۲: نمبر 10 کی مدد سے 974 - 7852 حاصل کریں۔

جواب: عدد 7852 کے اسی نمبر 2148 = 10000 - 7852 کا 0974 کے ساتھ مجموعہ لیتے ہوئے: $0974 + 2148 = 3122$ آخری حاصل 1 نہیں پیدا ہوتا، لہذا یہ مجموعہ 4 ہندسوں پر مشتمل ہے؛ اس کے اسی نمبر 6878 = 10000 - 3122 کے ساتھ منفی علامت چسپاں کرتے ہوئے 6878 - کو جواب تسلیم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r}
 \text{جواب} \\
 -6878
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 10000 \\
 -3122 \\
 \hline
 6878
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 0974 \\
 +2148 \\
 \hline
 3122
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 10000 \\
 -7852 \\
 \hline
 2148
 \end{array}$$

□

ثنائی اعداد بھی بالکل اسی طرح منفی کیے جاتے ہیں۔ ان کی بھی دو مثالیں پیش کرتے ہیں۔

مثال ۲.۳: اسی نمبر کی مدد سے مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

$$11001_2 - 1011_2 \text{ اور } (ب) 1011_2 - 11001_2$$

جواب: (ا) چونکہ $11001 = 00110$ ہے، لہذا نمبر دو 00111 + 1 = 00110 ہوگا۔ اس کو دوسرے عدد 01011₂ (جس کی بائیں جانب اضافی 0 چسپاں کر کے ہندسوں کی تعداد پوری کی گئی) کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r}
 01011 \\
 +00111 \\
 \hline
 10010
 \end{array}$$

بائیں آخیری ہندسوں کو جمع کرتے ہوئے حاصل 1 پیدا نہیں ہوا، لہذا اس کا تکملہ 2 لینا ہوگا۔ چونکہ $10010 = 01101$ ہے لہذا اسی تکملہ $01110 = 01101 + 1$ ہوگا، جس کی بائیں جانب منفی علامت چسپاں کر کے نتیجہ 01110_2 حاصل کرتے ہیں۔

جواب: (ب) یہاں ایک عدد پانچ ہندسوں پر مشتمل ہے، لہذا دوسرے عدد میں بھی پانچ ہندسے پورے کیے جائیں گے۔ یوں 1011 کو 01011 لکھ کر، اس کے متم $10100 = 01011$ سے عدد کا اسی تکملہ $10100 + 1 = 10101$ حاصل کر کے، دوسرے عدد کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 1 \\ 11001 \\ + 10101 \\ \hline 101110 \end{array}$$

آخیری ہندسے جمع کرتے ہوئے حاصل 1 پیدا ہوا جس کو نظر انداز کر کے باقی مجموعہ، 01110_2 ، کو نتیجہ تسلیم کرتے ہیں۔ □

۲.۵ دو اعداد کی منفی بذریعہ اساس منفی ایک تکملہ

اساس منفی ایک تکملہ کی مدد سے بھی $M - N$ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس کا طریقہ کار درج ذیل ہے جہاں دونوں اعداد میں ہندسوں کی تعداد برابر ہونا لازم ہے۔

• دونوں اعداد میں ہندسوں کی تعداد برابر کرنے کی خاطر، کم ہندسوں والے عدد کی بائیں جانب (درکار تعداد کی) اضافی صفریں چسپاں کریں۔ فرض کریں اب ہر عدد میں n ہندسے پائے جاتے ہیں۔

• M کے ساتھ N کا اساس منفی ایک تکملہ جمع کر کے مجموعہ $M + 2^n - 1 - N$ حاصل کریں۔

• M کی قیمت N کی قیمت سے زیادہ ہونے کی صورت میں، آخیری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا ہوگا، جس کی بنیاد مجموعہ $n + 1$ ہندسوں پر مشتمل ہوگا اور اس کا بائیں ہندسہ 1 ہوگا۔ اس بائیں ہندسے کو (یعنی حاصل 1 کو) نظر انداز کرنے کی بجائے، مجموعہ سے خارج کر کے، 1 وزن مختص کریں اور n ہندسوں کے باقی مجموعہ کے ساتھ جمع کر کے جواب حاصل کریں۔ اس عمل کو واپس آخیری حاصل ایک کہتے ہیں۔

• M کی قیمت N کی قیمت سے کم ہونے کی صورت میں، آخیری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا نہیں ہوگا؛ مجموعہ منفی عدد کو ظاہر کرے گا، اور n ہندسوں پر مبنی ہوگا۔ مجموعہ کا اساس منفی ایک تکملہ لے کر اس کی بائیں جانب منفی علامت منسلک کر کے جواب حاصل ہوگا۔

ان دونوں صورتوں کی وضاحت مثالوں سے ہوگی۔

مثال ۲.۴: تکملہ 9 استعمال کرتے ہوئے $7852 - 974$ حاصل کریں۔

باب ۲: بنیادی حساب

جواب: عدد 974 کے بائیں 0 چسپاں کر کے اس میں ہندسوں کی تعداد پوری کریں اور 7852 کے اسس منفی ایک نکلہ $2147 = 9999 - 7852$ کے ساتھ جمع کریں۔

$$\begin{array}{r} 2147 \\ +0974 \\ \hline 3121 \end{array}$$

آخری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا نہیں ہوا، لہذا مجموعہ چار ہندسوں پر مشتمل ہے۔ اس کا اسس منفی ایک نکلہ $6878 = 9999 - 3121$ کے بائیں منفی علامت منسلک کر کے جواب -6878 حاصل کرتے ہیں۔ □

مثال ۲.۵: نکلہ 9 استعمال کرتے ہوئے $974 - 7852$ حاصل کریں۔

جواب: چھوٹے عدد 974 میں ہندسوں کی تعداد پوری کر کے اس کے اسس منفی ایک نکلہ $9025 = 9999 - 0974$ کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 1 \\ 7852 \\ +9025 \\ \hline 16877 \end{array}$$

آخری (بائیں) ہندسے جمع کرتے ہوئے حاصل 1 پیدا ہوا جس کی بنیاد مجموعہ 5 ہندسوں پر مشتمل ہے۔ ہم اس حاصل 1 کو وزن 1 مختص کر کے باقی 4 ہندسوں پر مبنی مجموعہ 6877 کے ساتھ جمع کر کے جواب $6878 = 6877 + 1$ حاصل کرتے ہیں۔ □

اب ہم ثنائی اعداد کی مثال لیتے ہیں۔

مثال ۲.۶: مندرجہ ذیل کو نکلہ 1 کی مدد سے حل کریں۔

$$(i) 11011_2 - 101110_2, (b) 101110_2 - 11011_2$$

حل: (i) منفی ہونے والے عدد میں ہندسوں کی تعداد پوری کر کے اس کا متمم:

$$\overline{011011} = 100100$$

دوسرے عدد کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 1 \\ 101110 \\ +100100 \\ \hline 1010010 \end{array}$$

آخری حاصل 1 کو باقی عدد سے علیحدہ کر کے اسے 1 کا وزن مختص کر کے (یعنی اس کو اکائی تصور کر کے)، دائیں چھ ہندسوں پر مشتمل مجموعہ 010010 کے ساتھ جمع کرتے ہوئے جواب حاصل کرتے ہیں۔

$$010010$$

$$+1$$

$$\hline 010011$$

(ب) متمم $010001 = \overline{101110}$ کو دوسرے عدد کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$010001$$

$$+011011$$

$$\hline 101100$$

چونکہ آخری حاصل صفر ہے، لہذا مجموعہ کے متمم $010011 = \overline{101100}$ کے ساتھ منفی کی علامت چسپاں کر کے جواب $010011_2 -$ حاصل کرتے ہیں۔ □

۲.۶ مثبت اور منفی اعداد

روزمرہ زندگی میں مثبت اعداد لکھتے ہوئے انہیں بغیر کسی علامت کے، یا مثبت علامت (+) کے ساتھ لکھا جاتا ہے، البتہ منفی اعداد کے ساتھ منفی علامت (-) ضرور لکھی جاتی ہے۔ یوں درج ذیل اعداد درست لکھے گئے ہیں۔

$$+3025, \quad 3025, \quad -3025$$

کسی بھی عدد کے مثبت یا منفی ہونے کو اس عدد کی علامت کہتے ہیں۔ یوں، وہ اعداد جو مثبت علامت (+) یا منفی علامت (-) رکھتے ہوں علامت دار اعداد کہلاتے ہیں، اور جن کی علامت نہ ہو بے علامت اعداد کہلاتے ہیں۔ اعداد کو ان کی علامت اور قدر سے ظاہر کرنے کو علامت دار قدر اظہار کہتے ہیں۔

کمپیوٹر شائی اعداد، 0 اور 1، استعمال کرتا ہے، اور ہر معلومات کو انہیں سے ظاہر کرتا ہے۔ روایتاً مثبت علامت (+) کو 0 (صفر) اور منفی علامت (-) کو 1 (ایک) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ علامت عدد کی بائیں جانب لکھی جاتی ہے۔ یوں $5_{10} +$ کو چار شائی ہندسوں سے ظاہر کرتے ہوئے، بائیں ہندسہ مثبت علامت (+) کو جبکہ باقی تین ہندسے 5 کو ظاہر کریں گے۔ اسی طرح $5_{10} -$ کو آٹھ شائی ہندسوں سے ظاہر کرتے ہوئے، بائیں ہندسہ منفی علامت (-) کو جبکہ باقی سات ہندسے 5 کو ظاہر کریں گے۔

$$\underbrace{0}_{+} \underbrace{101}_{5_{10}} \quad \underbrace{1}_{-} \underbrace{0000101}_{5_{10}}$$

ایک دلچسپ حقیقت پر غور کریں۔ اگر ہم 1101_2 میں بائیں ہندسہ علامت تصور کریں تب یہ $5_{10} -$ کو ظاہر کرے گا، لیکن اگر ہم چاروں ہندسوں کو ایک عدد تصور کریں تب یہ D_{16} یا 13_{10} کو ظاہر کرتا ہے۔

جدول ۲.۱: چار ہندسوں کے علامت دار اعداد

علامت دار	شنائی
$+7_{10}$	0111_2
$+6_{10}$	0110_2
$+5_{10}$	0101_2
$+4_{10}$	0100_2
$+3_{10}$	0011_2
$+2_{10}$	0010_2
$+1_{10}$	0001_2
$+0_{10}$	0000_2
-0_{10}	1000_2
-1_{10}	1001_2
-2_{10}	1010_2
-3_{10}	1011_2
-4_{10}	1100_2
-5_{10}	1101_2
-6_{10}	1110_2
-7_{10}	1111_2

یہ جاننا ضروری ہے، آیشنائی اعداد کا بایاں ہندسہ علامت کو ظاہر کرتا ہے یا یہ عدد کا حصہ ہے؛ یہ فیصلہ اعداد استعمال کرنے والے پر ہے۔ کمپیوٹر استعمال کرتے وقت آپ فیصلہ کرتے ہیں کہ علامت دار یا بے علامت (غیر علامت دار) اعداد استعمال کریں گے۔ جدول ۲.۱ میں چار شنائی ہندسوں پر مشتمل علامت دار اعداد دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ صفر کو دو مختلف طریقوں سے ظاہر کیا جاسکتا ہے، ان میں ایک مثبت اور دوسرا منفی ہے!

اس جدول میں چار شنائی ہندسوں سے اعداد لکھے گئے؛ کمپیوٹر میں اعداد، عموماً، ایک بائٹ استعمال کرتے ہوئے لکھا جاتا ہے۔ ایک بائٹ 8 شنائی ہندسوں کو کہتے ہیں۔ علامت دار اعداد کو بائٹ میں لکھتے ہوئے، دائیں سات ہندسے عدد کی قدر جبکہ بایاں آخری ہندسہ اس کی علامت ظاہر کرے گا۔

$$\begin{aligned}
 00000101_2 &= +5_{10} \\
 01111111_2 &= +127_{10} \\
 10000101_2 &= -5_{10} \\
 11111111_2 &= -127_{10} \\
 00000000_2 &= +0_{10} \\
 10000000_2 &= -0_{10}
 \end{aligned}$$

ان اعداد میں بھی مثبت اور منفی صفر پایا گیا؛ روزمرہ زندگی میں صفر کو ہم مثبت تصور کرتے ہیں۔

جدول ۲.۲: علامت دار تکملہ ایک اور تکملہ دو اعداد

اعشاری عدد	علامت دار وتر	علامت دار تکملہ ایک	علامت دار تکملہ دو
+7	0111	0111	0111
+6	0110	0110	0110
+5	0101	0101	0101
+4	0100	0100	0100
+3	0011	0011	0011
+2	0010	0010	0010
+1	0001	0001	0001
+0	0000	0000	0000
-0	1000	1111	نہیں پایا جاتا
-1	1001	1110	1111
-2	1010	1101	1110
-3	1011	1100	1101
-4	1100	1011	1100
-5	1101	1010	1011
-6	1110	1001	1010
-7	1111	1000	1001
-8	نہیں پایا جاتا	نہیں پایا جاتا	1000

انتہا کچھ کہنے کے بعد آپ کو بتاتا چیلوں کہ، کمپیوٹر میں منفی اعداد کو علامت دار وتر اظہار میں نہیں بلکہ علامت دار و تکملہ 1 یا علامت دار و تکملہ 2 نظام میں رکھا اور استعمال کیا جاتا ہے۔ اگلے حصہ میں ان نظام پر غور ہوگا۔

۲.۷. علامت دار و تکملہ نظام

کمپیوٹر میں عددی برقیات کی مدد سے اعداد جمع یا منفی کیے جاتے ہیں۔ یہ اعمال اسی تکملہ یا اساس منفی ایک تکملہ (حصہ ۲.۴ اور حصہ ۲.۵ دیکھیں) استعمال کرتے ہوئے زیادہ خوش اسلوبی سے سرانجام دیے جاتے ہیں۔

کمپیوٹر چونکہ شنائی اعداد استعمال کرتا ہے، لہذا اس میں منفی اعداد تکملہ 1 یا تکملہ 2 میں لکھے جاتے ہیں۔ جدول ۲.۲ میں چار شنائی ہندسی (چار بٹ) علامت دار اعداد کی تکملہ 1 اور تکملہ 2 روپ پیش کی گئی ہے۔

جدول ۲.۲ سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مثبت عدد، شنائی ہندسوں میں ایک ہی طریقہ سے لکھا جاتا ہے، جبکہ منفی عدد تین طریقوں سے لکھا جاسکتا ہے۔ یوں تینوں طریقوں میں مثبت عدد کو سادہ شنائی عدد لکھیں۔

مثبت عدد x کی علامت دار روپ میں علامتی ہٹ 0 سے 1 کرنے سے x - کو علامت دار روپ حاصل ہوگا۔ پوں 5- کو علامت دار روپ میں لکھنے کی خاطر 5+ کو علامت دار روپ 0101₂ میں لکھ کر علامتی ہٹ 1 کرنے سے 5- کی علامت دار روپ 1101₂ حاصل ہوگی۔

منفی عدد x - کو علامت دار تکملہ ایک روپ میں لکھنے کی خاطر x + کو علامت دار شنائی عدد (یعنی سادہ شنائی روپ میں) لکھ کر اس کا تکملہ 1 لیں۔ یاد رہے کہ تکملہ 1 حاصل کرتے ہوئے شنائی عدد کے ہر ہندسہ (بج علامتی ہٹ) کا متمم لینا ہوگا۔ پوں 5- کو علامت دار تکملہ ایک روپ میں لکھنے کی خاطر 5+ کو 0101₂ لکھ کر متمم لیں جو درکار روپ 1010₂ دے گا۔

منفی عدد x - کو علامت دار تکملہ دو روپ میں لکھنے کی خاطر x + کو علامت دار شنائی عدد (یعنی سادہ شنائی روپ میں) لکھ کر اس کا تکملہ 2 لیں۔ یاد رہے کہ تکملہ 2 حاصل کرتے ہوئے شنائی عدد کے ہر ہندسہ (بج علامتی ہٹ) کا متمم لینا ہوگا۔ پوں 5- کو علامت دار تکملہ دو روپ میں لکھنے کی خاطر 5+ کو 0101₂ لکھ کر تکملہ دو لیں جو درکار روپ 1011₂ دے گا۔

باب ۳

بوولین الجبرا

بوولین الجبرا انگلستان کے ریاضی دان جارج بوولی کے نام سے جانا جاتا ہے، جنہوں نے اس الجبرا کو دریافت کیا۔ بوولین الجبرا ذہنی سوچ یعنی منطق کو الجبرائی روپ میں لکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ اس لئے حیرانی کی بات نہیں کہ کمپیوٹر اسی کو استعمال کرتا ہے۔

۳.۱ بوولین الجبرا کے بنیادی تصورات

عام الجبرا میں متغیرات استعمال کرتے ہوئے تصور کیا جاتا ہے کہ ان کی قیمت کچھ بھی ہو سکتی ہے۔ مثلاً، تفاعل $z = f(x, y)$ ، جہاں x اور y آزاد متغیرات جبکہ z تابع متغیر ہے، میں متغیرات کی چند ممکنہ قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	y	z
0	0	0
1	2	5
2	1	4
3	2	7
2	2	6
3	1	5

اس تفاعل جس کو ایک نامکمل جدول کے روپ میں پیش کیا گیا ہے کا الجبرائی روپ درج ذیل ہے۔

$$z = x + 2y$$

اس کے برعکس، بوولین الجبرا میں متغیرات کی صرف دو ممکنہ قیمتیں ہیں۔ ان دو قیمتوں کو عموماً 0 (صفر) اور 1 (ایک) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ بوولین تفاعل کی چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

X	Y	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

جدول ۳.۱: دو متغیر منطقی ضرب

۳.۱.۱ منطقی ضرب

تصور کریں X اور Y آزاد بولین متغیرات ہیں، جبکہ Z ان کا تابع بولین متغیر $Z = f(X, Y)$ ہے۔ چونکہ X بولین متغیر ہے، لہذا اس کی ممکنہ قیمتیں صرف 0 اور 1 ہیں۔ اسی طرح Y بھی بولین متغیر ہے، لہذا اس کی قیمت بھی صرف 0 اور 1 ہو سکتی ہے۔ تابع متغیر Z بھی بولین متغیر ہے۔ اس طرح اگرچہ اس کی قیمت X اور Y کی تابع ہے، اس کے باوجود Z کی قیمت صرف 0 یا 1 ہی ہو سکتا ہے۔ متغیرات X اور Y درج ذیل چار ممکنہ ترتیب میں پائے جاسکتے ہیں۔

X	Y
0	0
0	1
1	0
1	1

ان چار ممکنہ صورتوں میں Z کی قیمت 0 یا 1 ہوگی۔

آئیے، جدول ۳.۱ میں پیش کیے گئے منطقی تفاعل پر غور کرتے ہیں جس کی تمام ممکنہ قیمتیں اس جدول میں دی گئی ہیں۔ اس مثال میں تابع متغیر Z کی قیمت صرف اس وقت 1 ہے جب X اور Y دونوں کی قیمت 1 ہے۔ یہی قیمتیں X اور Y کی سادہ ضرب $X \cdot Y$ سے بھی حاصل ہوتی ہیں (ذیل دیکھیں)۔

$$\begin{aligned} 0 \cdot 0 &= 0 \\ 0 \cdot 1 &= 0 \\ 1 \cdot 0 &= 0 \\ 1 \cdot 1 &= 1 \end{aligned}$$

اسی کی بنا پر جدول ۳.۱ میں پیش تفاعل (اور عمل) کو بولین ضرب یا منطقی ضرب کہتے ہیں۔ بولین ضرب کو آزاد متغیرات کے درمیان نقطہ ” \cdot “ سے یا آزاد متغیرات کو متغیرات کو متغیرات کے قریب قریب لکھنے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں بولین ضرب درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned} Z &= X \cdot Y \\ Z &= XY \quad (\text{بولین ضرب}) \end{aligned} \quad (۳.۱)$$

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

جدول ۳.۲: تین متغیر بوولین ضرب

X	Y	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	2

X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

جدول ۳.۳: دو شناختی اعداد کا سادہ مجموعہ

جدول ۳.۳: دو متغیر منطقی جمع

منطقی ضرب کے تصور کو وسعت دے کر متعدد آزاد متغیرات کے لئے بیان کیا جاسکتا ہے۔ منطقی ضرب کی عمومی تعریف پیش کرتے ہیں۔

تعریف: منطقی ضرب اس صورت 1 دیگا جب تمام آزاد متغیرات کی قیمت 1 ہو۔

□

جدول ۳.۵ کو مثال بناتے ہیں۔ اس طرح کے جدول میں آزاد متغیرات کی تمام ممکنات لکھنے (یعنی آزاد متغیرات کے خانے پر کرنے) کی خاطر مداحصل XY کو شناختی عدد کے ہندسے تصور کر کے، جدول کے مطلوبہ خانوں میں صفر (00) تا تین (11) گنتی لکھیں۔ یوں پہلے صف میں XY کی جگہ 00، دوسری صف میں 01، تیسری صف میں 10 اور آخری صف میں 11 لکھا جائے گا۔

تین آزاد متغیرات کے منطقی ضرب تفاعل $Z = ABC$ کو جدول ۳.۲ میں پیش کیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جدول کے تین مداحصل کے خانوں میں صفر (000) تا سات (111) گنتی لکھی گئی ہے (جو تین ہندسوں کے شناختی اعداد ہیں)۔

۳.۱.۲ منطقی جمع

دو آزاد متغیرات کے بوولین تفاعل کی ایک اور مثال لیتے ہیں جس کو جدول ۳.۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ اب Z اس صورت 1 کے برابر ہے جب X یا Y دونوں کی قیمت 1 ہو۔ اس بوولین عمل کو بوولین جمع یا منطقی جمع کہتے

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

جدول ۳.۵: تین متغیر منطقی جمع

X	Z
0	1
1	0

جدول ۳.۶: منطقی منفی یا متمم

ہیں۔

آزاد متغیرات X اور Y کا (روزمرہ) سادہ الجبرائی مجموعہ $S = X + Y$ جدول ۳.۴ میں پیش کیا گیا ہے۔

جدول ۳.۳ اور جدول ۳.۴ کے اولین تین نتائج ایک جیسے ہیں۔ اس مشابہت کی بنا جدول ۳.۳ میں دیے گئے بولین تفاعل کو بولین جمع یا منطقی جمع کہتے ہیں اور اس بولین تفاعل کو جمع کے نشان “+” سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں جدول ۳.۳ میں پیش بولین جمع تفاعل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(3.2) \quad Z = X + Y \quad (\text{بولین جمع})$$

یہ بولین تفاعل کی مساوات ہے جس کو عام الجبرائی جمع ہرگز نہ سمجھا جائے۔ بالخصوص، بولین جمع کرتے وقت یاد رہے کہ $1 + 1 = 1$ ہے۔

بولین جمع کے تصور کو وسعت دے کر متعدد آزاد متغیرات کے لئے بیان کیا جاسکتا ہے۔ بولین جمع کی عمومی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: منطقی جمع اس صورت 1 دیا جب آزاد متغیرات میں کم سے کم ایک متغیر کی قیمت 1 ہو۔

□

تین متغیر منطقی جمع تفاعل $Z = A + B + C$ جدول ۳.۵ میں پیش کیا گیا ہے۔ یاد رہے کہ تین آزاد متغیرات کے منطقی جمع کا الجبرائی جمع کے ساتھ کوئی تعلق نہیں۔ یہاں جمع کی علامت بولین جمع کو ظاہر کرتی ہے لہذا یہاں $1 + 1 + 1 = 1$ ہوگا۔

۳.۱.۳ منطقی منفی

بولین تفاعل $Z = f(X)$ کی تیسری مثال لیتے ہیں جہاں آزاد متغیر X اور تابع متغیر Z کا تعلق جدول ۳.۶ میں پیش کیا گیا ہے۔

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

جدول ۸.۳: تین متغیر بولین بلاشرکت جمع

جدول ۷.۳: دو متغیر منطقی بلاشرکت جمع

اس تفاعل کو بولین نفی کہتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درحقیقت، تابع متغیر Z، آزاد متغیر کا متمم ہے۔ یوں بولین نفی درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(۳.۳) \quad Z = \overline{X} \quad (\text{بولین نفی یا متمم})$$

بولین نفی صرف ایک آزاد متغیر کے لئے بیان کیا جاسکتا ہے، اور اس کی تعریف درج ذیل ہے۔
تعریف: بولین نفی آزاد متغیر کا متمم دیتا ہے۔

□

۳.۱.۴ منطقی بلاشرکت جمع

دو آزاد متغیرات کا ایسا بولین تفاعل جدول ۷.۳ میں دکھایا گیا ہے، جس کا تابع متغیر اس صورت 1 ہے جب صرف ایک آزاد متغیر 1 ہو۔ یہ دو متغیر بولین بلاشرکت جمع ہے۔ اس تصور کو متعدد آزاد متغیرات تک وسعت دے کر بیان کرتے ہیں۔

تعریف: طاق تعداد کے آزاد متغیرات 1 ہونے کی صورت میں بولین بلاشرکت کا تابع متغیر 1 ہوگا۔

□

تین آزاد متغیر بلاشرکت جمع تفاعل کو جدول ۸.۳ میں پیش کیا گیا ہے۔

دو اور تین آزاد متغیر بولین بلاشرکت کی مساوات درج ذیل ہوں گی۔

$$(۳.۴) \quad \begin{aligned} Z &= A \oplus B & (\text{دو آزاد متغیر بلاشرکت جمع}) \\ Z &= A \oplus B \oplus C & (\text{تین آزاد متغیر بلاشرکت جمع}) \end{aligned}$$

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

جدول ۳.۱۰: تین متغیر بولین ضد بلا شرکت جمع

جدول ۳.۹: دو متغیر منطقی ضد بلا شرکت جمع

۳.۱.۵ منطقی ضد بلا شرکت جمع

بولین بلا شرکت جمع تفاعل کا منفی (یعنی متمم) لینے سے بولین ضد بلا شرکت جمع حاصل ہوگا، جو دو اور تین آزاد متغیرات کے لئے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$(۳.۵) \quad Z = \overline{A \oplus B}$$

$$Z = \overline{A \oplus B \oplus C} \quad (\text{تین متغیر منطقی ضد بلا شرکت جمع})$$

جدول ۳.۷ اور جدول ۳.۸ میں تابع متغیر منفی کرنے سے بالترتیب دو اور تین بولین ضد بلا شرکت تفاعل حاصل ہوں گے جنہیں جدول ۳.۹ اور جدول ۳.۱۰ میں پیش کیا گیا ہے۔

۳.۲ برقی تاروں میں جوڑ کی وضاحت

درج ذیل شکل پر غور کریں جس میں دو برقی تاروں کے بیچ جوڑ کی وضاحت کی گئی ہے۔

جہاں ایک تار دوسری تار کے اوپر سے گزرتی ہو اور دونوں آپس میں جھڑی ہوں، وہاں جوڑ کے مقام پر نقطے کا نشان لگایا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں انہیں ایک تار تصور کیا جائے۔

جہاں تاریں آپس میں جھڑی نہ ہوں وہاں انہیں بغیر نقطے کے نشان سے ایک دوسری کے اوپر سے گزرتا دکھایا جاتا ہے۔ نقطے کے نشان کی غیر موجودگی میں ان تاروں کو دو علیحدہ اور بلا جوڑ تاریں سمجھا جائے۔

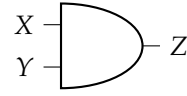
تیسری صورت بھی شکل میں دکھائی گئی ہے جہاں عنسل فنی کا امکان نہیں پایا جاتا۔ اس میں ایک تار کا سر دوسری تار پر ختم ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں انہیں ایک تار تصور کیا جائے (یعنی یہ دونوں آپس میں جھڑی ہیں)۔



X	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
Y	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
Z	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0

شکل ۲.۳: ضرب گیٹ کی کارکردگی۔

مداخلت مخرج



شکل ۱.۳: دو مداخلت ضرب گیٹ۔

۳.۳ عددی گیٹ

بوولین الجبرا کے تین اہم ترین تفاعل پر حصہ ۳.۱ میں غور کیا گیا۔ یہ تفاعل عددی برقیات میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں، جہاں انہیں عددی ادوار کی مدد سے جامہ پہنایا جاتا ہے۔ یہ مخصوص عددی ادوار، عددی گیٹ کہلاتے ہیں۔

۳.۳.۱ ضرب گیٹ

منطقی (بوولین) ضرب تفاعل کو ضرب گیٹ سے حاصل کیا جاتا ہے، جو شکل ۳.۱ میں دکھایا گیا ہے۔ آزاد متغیرات، X اور Y، ضرب گیٹ کی بائیں جانب ہیں جبکہ تابع متغیر، Z، دائیں جانب ہے۔ آزاد متغیرات کو مداخلت جبکہ تابع متغیر کو مخرج کہتے ہیں۔ دو متغیر ضرب گیٹ (دو مداخلت ضرب گیٹ) کے دو مداخلت اور ایک مخرج ہوگا۔

شکل ۳.۲ میں دو مداخلت ضرب گیٹ کی کارکردگی ترسیم کی گئی ہے، جہاں 0 کو پست اور 1 کو بلند لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مخرج صرف اور صرف اُس صورت بلند ہوتا ہے جب ضرب گیٹ کے تمام مداخلت بلند ہوں۔ ہم 0 کو پست اور 1 کو بلند بھی پکارتے ہیں۔ اس شکل میں مداخلت کو کسی خاص ترتیب سے تبدیل نہیں کیا گیا۔

ضرب گیٹ کو شکل ۳.۳ میں بطور عددی گیٹ یا عددی سوئچ دکھایا گیا ہے جہاں ایک مداخلت کو فتابو پینا کا نام دیا گیا ہے جبکہ دوسرے کو (اب بھی) مداخلت کہا گیا ہے۔ ضرب گیٹ کے جدول سے واضح ہے کہ جب فتابو پینا 0 ہو، مخرجی پینا 0 رہتا ہے۔ اس صورت میں مداخلت پر موجود مواد، مخرجی پینا تک نہیں پہنچ سکتا، یعنی اس پر 0 یا 1 کا مخرج پر کوئی اثر نہیں ہوتا؛ ہم کہتے ہیں فتابو پینا نے ضرب گیٹ کو معذور کر دیا۔ اس کے برعکس اگر فتابو پینا 1 ہو تب مخرجی پینا پر وہی کچھ ہوگا جو مداخلت پر ہوگا؛ ہم کہتے ہیں ضرب گیٹ محباز کر دیا گیا ہے۔ فتابو پینا پر ایک یا صفر سے مداخلت اشارہ (مواد) کو مخرجی پینا تک پہنچنا، ممکن یا ناممکن بنایا جاسکتا ہے۔ یوں یہ ایک دروازے کی طرح کام کرتا ہے، جس کی بنیاد پر یہ گیٹ کہلاتا ہے۔ فتابو پینا کو، معذور اور محباز بنانے والا پینا بھی کہتے ہیں۔ شکل ۳.۴ میں ضرب گیٹ کی کارکردگی دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ صرف محباز صورت میں مواد مخرج تک پہنچ پاتا ہے؛ معذور صورت میں مخرج ہمیشہ پست رہے گا۔

۳.۳.۲ جمع گیٹ

منطقی جمع (بوولین جمع) تفاعل کو جمع گیٹ سے حاصل کیا جاتا ہے۔ دو مداخلت جمع گیٹ شکل ۳.۵ میں دکھایا گیا ہے۔



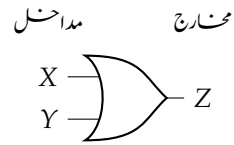
شکل ۳.۳: ضرب گیت بطور سوئچ یا ایک ہٹ گیت۔

	معذور			مجاز				معذور				
فتابو	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
مداخل	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
مخارج	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0

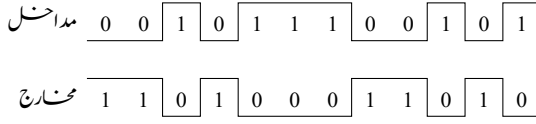
شکل ۳.۴: ضرب گیت کی کارکردگی۔

X	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
Y	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0
Z	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0

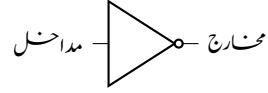
شکل ۳.۶: جمع گیت کی کارکردگی۔



شکل ۳.۵: دو مداخل جمع گیت۔



شکل ۸.۳: منفی گیٹ کی کارکردگی۔



شکل ۷.۳: منفی گیٹ

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

شکل ۹.۳: تین مداخل ضرب گیٹ اور تین مداخل جمع گیٹ۔

جمع گیٹ کی کارکردگی شکل ۶.۳ میں ترسیم کی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں، جمع گیٹ کا مخارج اس صورت بلند ہوگا جب کوئی مداخل بلند ہو۔

جمع گیٹ میں اگر ایک پینا کو فتا پونیا سمجھا جائے تو پست فتا بو گیٹ کو محباز بنا کر، داخلی مواد کو مخارج تک پہنچنے کی اجازت دیتا ہے، جبکہ بلند فتا بو کی صورت میں مخارج لازماً بلند رہتا ہے۔

۳.۳.۳ منفی گیٹ

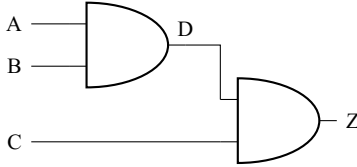
منفی تفاعل کو منفی گیٹ سے حاصل کیا جاتا ہے، جس کی علامت شکل ۷.۳ میں دکھائی گئی ہے، اور جو مواد کو مخارج تک پہنچنے سے روک نہ پانے کے باوجود (منفی) گیٹ کہلاتا ہے۔ اس کی کارکردگی شکل ۸.۳ میں ترسیم کی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں، منفی گیٹ کا مخارج اس کے مداخل کا الٹ ہوگا۔

منفی تفاعل ایک آزاد اور ایک تابع متغیر رکھتا ہے، لہذا منفی گیٹ کا ایک مداخل اور ایک مخارج ہوگا۔

۳.۳.۴ متعدد مداخل گیٹ

ضرب گیٹ اور جمع گیٹ کے متعدد مداخل ہو سکتے ہیں (تاہم، ان کا مخارج ایک ہوگا)۔ شکل ۹.۳ میں تین مداخل کا ضرب اور جمع گیٹ، اور ان کے جدول دکھائے گئے ہیں۔ ضرب گیٹ کا مخارج اس صورت بلند ہوگا جب تمام مداخل بلند ہوں، جبکہ جمع گیٹ کا مخارج اس صورت بلند ہوگا جب کوئی بھی مداخل بلند ہو۔

A	B	C	D	Z
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1



شکل ۱۰: ۳: دو مداحخل ضرب گیٹ سے تین مداحخل ضرب گیٹ کا حصول۔

شکل ۱۰: ۳ میں دو ضرب گیٹ یوں جوڑے گئے ہیں کہ ایک کا مداحخل دوسرے کے مداحخل سے حبڑا ہے۔ ساتھ ہی اس دور کا بولین جدول دیا گیا ہے۔ پہلے جدول استعمال کیے بغیر اس دور کو سمجھنے کی کوشش کرتے ہیں۔ مداحخل Z اس صورت بلند ہوگا جب دائیں گیٹ کے مداحخل C اور D دونوں بلند ہوں لیکن D بلند ہونے کے لئے ضروری ہے کہ بائیں گیٹ کے مداحخل A اور B دونوں بلند ہوں۔ یوں A، B اور C بلند ہونے کی صورت میں مداحخل Z بلند ہوگا؛ یہی تین مداحخل ضرب گیٹ کی خاصیت ہے۔

آئیں اب جدول کو سمجھتے ہیں۔ تین مداحخل ABC کے خانوں کو تین ہندسوں کے شمائی اعداد 000 تا 111 سے پُر کریں۔ اس کے بعد بائیں ضرب گیٹ کے مداحخل D کے خانے پُر کریں۔ یاد رہے کہ یہ صرف A اور B پر منحصر ہے اور صرف اس صورت بلند ہوگا جب یہ دونوں بلند ہوں، جو آخری دو صفوں میں ہوگا۔ اس کے بعد دائیں ضرب گیٹ کے مداحخل Z کے خانے پُر کریں۔ یہ صرف C اور D پر منحصر ہے، اور بلند صرف اس صورت بلند ہوگا جب یہ دونوں بلند ہوں۔

ان نتائج کا جدول ۳: ۹ میں پیش تین مداحخل ضرب گیٹ کے جدول کے ساتھ کریں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شکل ۱۰: ۳ میں دونوں ضرب گیٹ مل کر تین مداحخل ضرب گیٹ کا کردار ادا کرتے ہیں۔ یوں دوداخلی ضرب گیٹ کی مدد سے زیادہ مداحخل کا ضرب گیٹ حاصل کیا جاسکتا ہے۔

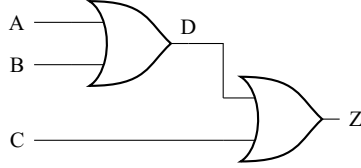
شکل ۱۱: ۳ میں دو مداحخل جمع گیٹوں سے تین مداحخل جمع گیٹ کا حصول دکھایا گیا ہے۔ یہاں Z صرف اس صورت پست ہوگا جب دائیں گیٹ کے دونوں مداحخل، C اور D، پست ہوں لیکن D صرف اس صورت پست ہو سکتا ہے جب بائیں گیٹ کے مداحخل، A اور B، پست ہوں۔ یوں Z صرف اس صورت پست ہوگا جب A، B، اور C پست ہوں، جو تین مداحخل جمع گیٹ کی خاصیت ہے۔

جمع گیٹ اور ضرب گیٹ پر مبنی، شکل ۱۲: ۳ میں دکھائے گئے ادوار کو مثال بن کر، عددی ادوار حل کرنا سیکھتے ہیں۔

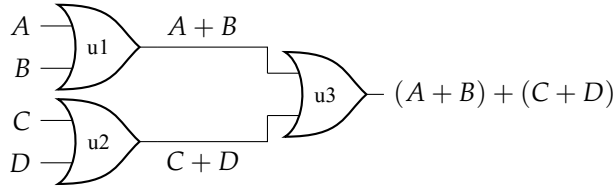
شکل ۱۲: ۳- الف سے آغاز کرتے ہیں جہاں گیٹوں کو u_1 ، u_2 ، اور u_3 کے نام دیے گئے ہیں۔ جمع گیٹ u_1 اور u_2 کے مداحخلی پنیوں سے حبڑے ہیں۔ چونکہ u_1 کا مداحخل $A + B$ اور u_2 کا مداحخل $C + D$ دیا، لہذا u_3 کا مداحخل $(A + B) + (C + D)$ یعنی $A + B + C + D$ دیا۔

آئیں اب شکل ۱۲: ۳- ب حل ہیں۔ یہاں u_4 اور u_5 کے مداحخل بالترتیب $A + B$ اور $C + D$ دیں گے۔

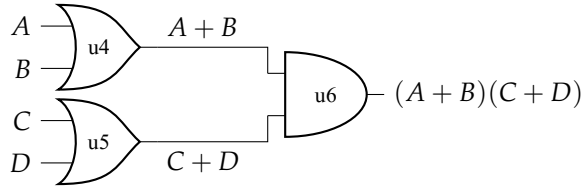
A	B	C	D	Z
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1



شکل ۱۱.۳: دو مدار حاصل جمع گیٹ سے تین مدار حاصل جمع گیٹ کا حصول۔

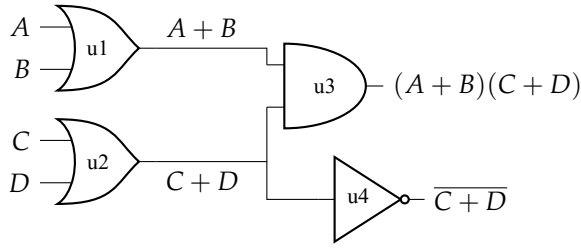


(i)

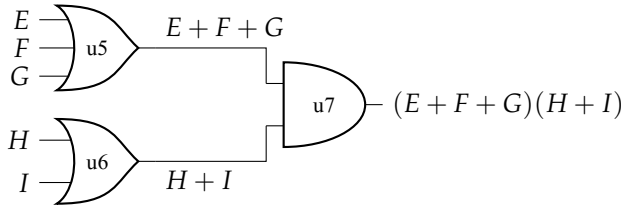


(ب)

شکل ۱۲.۳: جمع اور ضرب گیٹ کے ادوار۔



(i)



(ب)

شکل ۱۳.۳: گیٹوں کا دوسرا دور۔

چونکہ $u6$ ضرب گیٹ ہے، لہذا اس کا مخرج $(A+B)(C+D)$ دیگا۔

شکل ۱۳.۳-الف میں $u2$ کا مخرج $u3$ کے مداحصل اور $u4$ کے مداحصل کے ساتھ جڑا ہے۔ گیٹ $u1$ اور $u2$ کے مخرج بالترتیب $A+B$ اور $C+D$ ہیں۔ گیٹ $u3$ کا مخرج $(A+B)(C+D)$ اور $u4$ کا مخرج $\overline{C+D}$ ہوگا۔

آپ شکل ۱۳.۳-ب کا حل، شکل کو دیکھ کر سمجھ سکتے ہیں۔

۳.۳.۵ ضرب متمم گیٹ اور جمع متمم گیٹ

شکل ۱۴.۳-الف میں تین مداحصل ضرب گیٹ کا مخرج ABC ہوگا، جو منفی گیٹ کا مداحصل ہے، لہذا منفی گیٹ کا مخرج $Z = \overline{ABC}$ ہوگا۔ ضرب گیٹ کے مخرج کا متمم اتنی اہمیت رکھتا ہے کہ اس کے لئے علیحدہ گیٹ بنایا گیا ہے، جسے ضرب متمم گیٹ (یا ضد ضرب گیٹ) کہتے ہیں اور جو شکل-ب میں (تین مداحصل کے لئے) دکھایا گیا ہے۔

یوں دو مداحصل ضرب متمم گیٹ کی مساوات درج ذیل ہوگی، جہاں X اور Y مداحصل جبکہ Z مخرج ہے۔

$$(۳.۶) \quad Z = \overline{XY} = \overline{X} + \overline{Y} \quad (\text{ضرب متمم})$$

ضرب گیٹ کے جدول کا متمم لینے سے ضرب متمم گیٹ کا جدول حاصل ہوگا جو جدول ۱۱.۳ میں پیش کیا گیا ہے۔

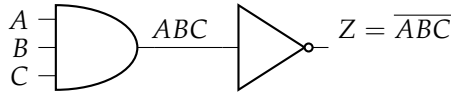
شکل ۱۵.۳-الف میں تین مداحصل جمع گیٹ کا مخرج $A+B+C$ ہوگا، جو منفی گیٹ کا مداحصل ہے، لہذا منفی

جدول ۱۱: تین مداحل ضرب متمم۔

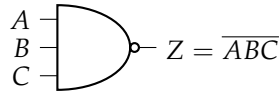
A	B	C	Z
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

جدول ۱۲: تین مداحل جمع متمم۔

A	B	C	Z
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

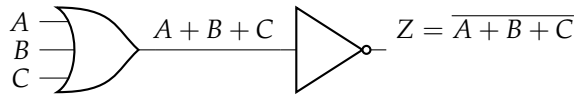


(i)

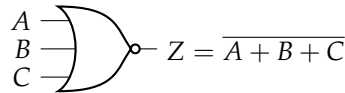


(ب)

شکل ۱۴: ضرب متمم گیت یا ضد ضرب گیت۔



(i)



(ب)

شکل ۱۵: جمع متمم گیت یا ضد جمع گیت۔

گیٹ کا مخارج $Z = \overline{A + B + C}$ ہوگا۔ جمع گیٹ کے مخارج کا متمم اتنی اہمیت رکھتا ہے کہ اس کے لئے علیحدہ گیٹ بنایا گیا ہے، جسے جمع متمم گیٹ (یا ضد جمع گیٹ) کہتے ہیں اور جو شکل-ب میں (تین مداحصل کے لئے) دکھایا گیا ہے۔

یوں دو مداحصل جمع متمم گیٹ کی مساوات درج ذیل ہوگی، جہاں X اور Y مداحصل جبکہ Z مخارج ہے۔

$$(۳.۷) \quad Z = \overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y} \quad (\text{جمع متمم})$$

جمع گیٹ کے جدول کا متمم لینے سے جمع متمم گیٹ کا جدول حاصل ہوگا جو جدول ۳.۱۲ میں پیش کیا گیا ہے۔

اسی طرح شکل 15.3 میں تین داخلی نفی۔ ضرب گیٹ دکھایا گیا ہے جسے نفی اور ضرب کے لفظ جوڑ کر نفی۔ ضرب گیٹ 15 کا نام دیا گیا ہے۔ بالکل ضرب اور جمع گیٹوں کی طرح یہ دو قسم کے گیٹ بھی دو، تین یا ان سے زیادہ مداحصل والے ہو سکتے ہیں۔

کسی بھی نفی۔ جمع گیٹ کی مخارج صرف اسی صورت میں ہوتا ہے جب اس کے تمام مداخلوں جبکہ کسی بھی نفی۔ ضرب گیٹ کی مخارج اس وقت تک رہتا ہے جب تک اس کے تمام مداخل نہ ہوں۔

شکل 16.3 میں باری باری نفی۔ جمع گیٹ اور نفی۔ ضرب گیٹ کی مدد سے نفی گیٹ کا عمل حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔ یوں نفی گیٹ کی جگہ نفی۔ جمع گیٹ استعمال کیا جاسکتا ہے یا پھر اس کی جگہ نفی۔ ضرب گیٹ استعمال کیا جاسکتا ہے۔ اسی طرح شکل 17.3 میں نفی۔ جمع گیٹ کی مدد سے جمع گیٹ اور ضرب گیٹ کا عمل حاصل کیا گیا ہے جبکہ شکل 18.3 میں نفی۔ ضرب گیٹ استعمال کرتے ہوئے جمع گیٹ اور ضرب گیٹ کا عمل حاصل کیا گیا ہے۔

اس شکل میں ضرب گیٹ بنا۔ تہ وقت بائیں جانب سب سے نیچے نفی۔ جمع گیٹ کے دونوں مداحصل آپس میں جوڑ کر انہیں متغیر سے منسلک کیا گیا ہے۔

اس حصہ کے شروع میں دیکھا گیا کہ جمع، ضرب اور نفی گیٹوں کی مدد سے نفی۔ جمع گیٹ اور نفی۔ ضرب گیٹ حاصل کئے جاسکتے ہیں جبکہ اس حصہ کے آخر میں نفی۔ جمع گیٹوں اور نفی۔ ضرب گیٹوں کی مدد سے نفی گیٹ، جمع گیٹ اور ضرب گیٹ حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔

5.3.3 بلاشرکت جمع گیٹ اور نفی بلاشرکت جمع گیٹ بلاشرکت جمع تفاعل کو بلاشرکت جمع گیٹ 16 سے حاصل کیا جاتا ہے جس کی علامت شکل 19.3 (i) میں دکھائی گئی ہے۔ اسی طرح بلاشرکت تفاعل کو نفی بلاشرکت جمع گیٹ 17 کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے جس کی علامت شکل (ب) میں دکھائی گئی ہے۔ بلاشرکت جمع گیٹ کی مخارج کے ساتھ نفی گیٹ منسلک کرنے سے بلاشرکت نفی۔ جمع گیٹ حاصل کیا جاسکتا ہے۔ بلاشرکت گیٹ کی کارکردگی ترسیم کے شکل میں شکل 20.3 میں دکھائی گئی ہے۔

تین مداحصل والے بلاشرکت جمع گیٹ کا مخارج حاصل کرتے وقت اس کے کسی دو مداحصل کا بلاشرکت جمع حاصل کریں اور حاصل جواب کا تیسرے مداحصل کے ساتھ بلاشرکت جمع حاصل کریں۔ یہی ان تین مداحصل کا بلاشرکت جمع ہے۔ مساوات 19.3 میں تین مداحصل والے بلاشرکت جمع گیٹ کا یوولین جدول دکھایا گیا ہے۔ جیسے آپ اس جدول سے دیکھ سکتے ہیں، کسی بھی بلاشرکت جمع گیٹ کا مخارج اس صورت میں ہوتا ہے جب اس کے بلند مداحصل کی تعداد طاق ہو۔

طلبہ سے گزارش کی جاتی ہے کہ وہ یہاں زک کران اعمال کو اچھی طرح سمجھ لیں۔

جوابات

