عددی ادوار

تخلیق و تجزیہ

خالد خان یوسفزئی

khalidyousafzai@hotmail.com

۱۸؍جون ۲۰۲۳

عنوان

دیباچہ

یہ کتاب اس عزم سے لکھی گئی ہے کہ یہ ایک دن برقی انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر پڑھائی جائے گی۔امید کی جاتی ہے کہ اب بھی طلبہ و طالبات اس سے استفادہ حاصل کر سکیں گے۔ میں ڈاکٹر محمد اشرف عطا (ہلالِ امتیاز، ستارہِ امتیاز) کا خصوصی طور پر نہایت مشکور و ممنون ہوں جنہوں نے اپنے مصروفیات سے وقت نکال کر اس کتاب کو پڑھ کر نہ صرف درست کیا بلکہ بہت سارے تکنیکی اصطلاحات بھی فراہم کئے۔ میں امید رکھتا ہوں کہ مجھے آئندہ بھی ان کی مدد حاصل ہو گی۔

میں یہاں کامسیٹ کے طلبہ وطالبات کا بھی شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جنہوں نے اس کتاب کو بار بار پڑھ کر غلطیوں کی نشاندہی کی۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ وہ اس کتاب کو زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچائیں اور اس میں غلطیوں کی نشاندہی میرے ای میل پتہ پر کریں۔

خالد خان یوسفزئی 5 فروری 2013

میری پہلی کتاب کا دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔ امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔ دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔ انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ وطالبات استفادہ کرتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ وطالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان از خود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔ یہ طلبہ وطالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم وملک کی بھرپور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ ایسے طلبہ وطالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔ کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔ میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔ آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ وطالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔ کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال ہونے والے تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔ جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روزمرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔ تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئی ہے۔ اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔ یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔ اردو زبان میں برقی انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ وطالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای-میل پر کریں۔ میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی سر زد ہوئی ہیں البتہ انہیں درست کرنے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے۔ میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔

میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی

28 اکتوبر 2011

باب ۱

ثنائی نظام

۱.۱ اعشاری نظامِ گنتی

روز مرہ زندگی میں اعشاری نظامِ گنتی استعمال ہوتا ہے، جو 0 تا 9 کے ہندسوں پر مبنی ہے۔ کسی بھی گنتی کے نظام میں کل علامات کی تعداد کو اس نظام کی اساس کہتے ہیں۔ اعشاری نظام میں 0 تا 9 ، یعنی دس 10 علامات ہیں، یوں اعشاری نظام کی اساس دس ہے اور اس کو اساس 10 کا نظام کہتے ہیں۔

مساوات ۱.۱ میں 538.72 کو اعشاری نظام میں لکھتے ہوئے زیر نوشت میں 10 لکھا گیا ہے، جو اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ یہ عدد اساس دس کے نظام میں لکھا گیا ہے۔ اس کتاب میں چونکہ کئی نظامِ گنتی استعمال ہوں گے، لہٰذا جہاں متن سے واضح نہ ہو وہاں اعداد کے ساتھ ان کی اساس زیر نوشت میں لکھی جائے گی۔

$$538.72_{10} \tag{۱.۱}$$

اس نظام میں اعشاریہ کی بائیں جانب پہلا ہندسہ اکائی وزن رکھتا ہے، دوسرا دہائی، تیسرا سینکڑا، وغیرہ۔ یوں مساوات ۱.۲ میں دیے گئے ہندسوں میں 8 کا مطلب $8_{10} = 1 \times 8 = 8 \times 10^0$ ہے، جبکہ 3 کا مطلب $30_{10} = 3 \times 10^1$ اور 5 کا $500_{10} = 5 \times 10^2$ ہے۔ اسی طرح اعشاریہ کے دائیں جانب پہلے ہندسے کا وزن ایک بٹہ دس ہے، دوسرے ہندسے کا ایک بٹہ سو، اور تیسرے ہندسے کا ایک بٹہ ہزار، وغیرہ۔ یوں اس عدد میں 7 دراصل $0.7_{10} = 7 \times 10^{-1}$ جبکہ 2 دراصل $0.02_{10} = 2 \times 10^{-2}$ ہے۔

$$538.72_{10} = (5 \times 10^2) + (3 \times 10^1) + (8 \times 10^0) + (7 \times 10^{-1}) + (2 \times 10^{-2}) \tag{۱.۲}$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &= 5 \\
x_1 &= 3 \\
x_0 &= 8 \\
x_{-1} &= 7 \\
x_{-2} &= 2
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
x &= 538.72_{10} \\
x &= x_2\,x_1\,x_0\,.\,x_{-1}\,x_{-2}
\end{aligned}
$$

شکل ۱.۱: عدد کے ہندسوں کو پکارنے کا طریقہ کار۔

اس حقیقت کو درج ذیل عمومی روپ میں لکھ سکتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\cdots\, a_2 \times 10^2 + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0 + a_{-1} \times 10^{-1} + a_{-2} \times 10^{-2}\, \cdots \\
= (\cdots a_2 a_1 a_0\,.\,a_{-1} a_{-2} \cdots)_{10}
\end{aligned} \tag{۱.۳}
$$

عدد 538.72_{10} کو x لیتے ہوئے، شکل ۱.۱ میں اس کے مختلف ہندسوں کو پکارنے کا طریقہ دکھایا گیا ہے، جس کے تحت 5 کو x_2 جبکہ 3 کو x_3 کہیں گے، وغیرہ۔

اس طرح کسی بھی عدد میں بائیں جانب ہندسے کا رتبہ دائیں جانب ہندسے کے رتبہ سے بلند ہو گا۔ مساوات ۱.۱ میں بلند تر رتبے کا ہندسہ 5 ہے، جبکہ کم تر رتبے کا ہندسہ 6 ہے۔

مساوات ۱.۴ میں سات کو تین مختلف طریقوں سے لکھا گیا ہے۔ روز مرہ زندگی میں سات پہلی طرز پر لکھا جاتا ہے۔ یوں کاغذ پر لکھتے ہوئے کسی بھی عدد کے بائیں جانب صفر نہیں لکھے جاتے اور عدد کے بائیں جانب کاغذ کو خالی چھوڑا جاتا ہے۔ یہاں یہ بات سمجھنا ضروری ہے کہ روز مرہ زندگی میں اعداد لکھتے وقت ان کی لمبائی یا ان میں کُل ہندسوں کی تعداد پہلے سے متعین نہیں کی جاتی۔ کمپیوٹر میں چیزیں کچھ مختلف ہیں، جہاں صرف صفر 0 اور ایک 1 کا وجود ممکن ہے۔ کسی مقام پر اگر 1 نہیں لکھا ہو تو اس پر 0 لکھا ہو گا۔ یوں کسی بھی عدد کے بائیں جانب خالی جگہ کا کمپیوٹر میں کوئی مطلب نہیں۔ یہاں 0 یا 1 کا ہونا ضروری ہے۔ کمپیوٹر میں ہر قسم کی معلومات لکھنے سے پہلے اس بات کا فیصلہ کیا جاتا ہے کہ اسے لکھنے کی خاطر کتنی جگہ درکار ہو گی۔ یوں اگر عدد کو لکھنے کی خاطر تین ہندسوں کے لکھے جانے کے برابر جگہ مختص کی گئی ہو تو اس تمام جگہ کو ہر صورت استعمال کرنا ہو گا، مثلاً سات کو 7 کی بجائے 007 لکھنا ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
7_{10} \\
07_{10} \\
007_{10}
\end{aligned} \tag{۱.۴}
$$

اعشاری نظام میں گنتی 0_{10} سے شروع ہوتی ہے اور بتدریج بڑھتے ہوئے 9_{10} تک پہنچتی ہے۔ اس دوران دہائی، سینکڑا، وغیرہ کے مقام پر صفر رہتا ہے اور انہیں عام طور نہیں لکھا جاتا۔ گنتی نو تک پہنچنے کے بعد دہائی، یعنی 10^1، وزن رکھنے والے مقام پر 0 کی بجائے 1 لکھا جاتا ہے اور اکائی، یعنی 10^0، وزن رکھنے والے مقام پر دوبارہ 0 تا 9 گنتی کی جاتی ہے۔

اگر آپ کو اس پیراگراف کی سمجھ نہیں آئی تو اسے دوبارہ پڑھیں۔ اس میں سادہ گنتی کی وضاحت کی گئی ہے۔

اعشاری نظام میں اگر اعداد کو ایک ہندسے تک محدود کر دیا جائے تو اس میں 0_{10} سے 9_{10} تک گنتی ممکن ہو گی۔ اگر اعداد کو دو ہندسوں تک محدود کر دیا جائے، یعنی اس میں زیادہ سے زیادہ دو ہندسے ہوں، تب 00_{10} سے 99_{10} تک گنتی ممکن ہو گی، اسی طرح تین ہندسوں تک کے عدد استعمال کرنے سے 000_{10} سے 999_{10} تک گنتی کی جا سکتی ہے، وغیرہ۔

۱.۲ ہشتمی نظام گنتی

ہشتمی نظام 0 تا 7 ہندسوں پر مبنی ہے۔ اس نظام میں آٹھ ہندسے ہیں لہٰذا یہ اساس آٹھ نظام ہے۔ بالکل اعشاری نظام کی طرح، اس نظام میں اعداد لکھتے ہوئے اعشاریہ کے بائیں جانب پہلے ہندسے کا وزن $8^0 = 1_{10}$، دوسرے ہندسے کا $8^1 = 8_{10}$، تیسرے کا $8^2 = 64_{10}$، وغیرہ، جبکہ اعشاریہ کے دائیں جانب پہلے ہندسے کا وزن $8^{-1} = 0.125_{10}$، دوسرے کا $8^{-2} = 0.015625_{10}$ ہو گا، وغیرہ۔

$$
\begin{aligned}
538.72_8 &= [(5 \times 8^2) + (3 \times 8^1) + (8 \times 8^0) + (7 \times 8^{-1}) + (2 \times 8^{-2})]_{10} \\
&= [(5 \times 64) + (3 \times 8) + (8 \times 1) + (7 \times 0.125) + (2 \times 0.015625)]_{10} \\
&= [320 + 24 + 8 + 0.875 + 0.03125]_{10} \\
&= 352.90625_{10}
\end{aligned} \tag{۱.۵}
$$

ہشتمی نظام گنتی کے لئے مساوات ۱.۳ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
\cdots\ a_2 \times 8^2 + a_1 \times 8^1 + a_0 \times 8^0 + a_{-1} \times 8^{-1} + a_{-2} \times 8^{-2}\ \cdots \\
= (\cdots a_2 a_1 a_0 . a_{-1} a_{-2} \cdots)_8
\end{aligned} \tag{۱.۶}
$$

ہشتمی نظام میں دیے گئے عدد کو اعشاری نظام میں تبدیل کرنا مساوات ۱.۵ میں دکھایا گیا ہے۔ ہشتمی عدد کے زیر نوشت میں 8 اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ یہ عدد ہشتمی نظام میں لکھا گیا ہے۔

اس نظام میں گنتی 0 سے شروع ہوتی ہے، 7 تک پہنچنے کے بعد 8^1 وزن رکھنے والے مقام پر 0 کی بجائے 1 لکھا جاتا ہے اور 8^0 وزن رکھنے والے مقام پر دوبارہ 0 سے 7 کی گنتی شروع ہوتی ہے۔

۱.۳ ثنائی نظام گنتی

مائکروکنٹرولر کی دنیا میں ثنائی نظام گنتی استعمال ہوتا ہے۔ ثنائی نظام دو ہندسوں، 0 اور 1، پر مبنی ہے، لہٰذا یہ اساس دو کا نظام ہے۔ اس نظام میں گنتی 0 سے شروع ہوتی ہے، 1 تک پہنچنے کے بعد 2^1 وزن رکھنے

والی مقام پر 0 کی بجائے 1 لکھا جاتا ہے، اور 2^0 وزن رکھنے والے مقام پر دوبارہ 0 سے 1 گنتی شروع ہوتی ہے۔ اس نظام میں گنتی کو مساوات ۱.۷ میں دکھایا گیا ہے، جہاں زیر نوشت میں اساس لکھنے سے گریز کیا گیا ہے۔ موازنہ کے لئے اعشاری گنتی بھی پیش کی گئی ہے۔

$$
\begin{aligned}
0 &= 0 & \qquad 16 &= 10000\\
1 &= 1 & 17 &= 10001\\
2 &= 10 & 18 &= 10010\\
3 &= 11 & 19 &= 10011\\
4 &= 100 & 20 &= 10100\\
5 &= 101 & 21 &= 10101\\
6 &= 110 & 22 &= 10110\\
7 &= 111 & 23 &= 10111\\
8 &= 1000 & 24 &= 11000\\
9 &= 1001 & 25 &= 11001\\
10 &= 1010 & 26 &= 11010\\
11 &= 1011 & 27 &= 11011\\
12 &= 1100 & 28 &= 11100\\
13 &= 1101 & 29 &= 11101\\
14 &= 1110 & 30 &= 11110\\
15 &= 1111 & 31 &= 11111
\end{aligned}
\tag{۱.۷}
$$

اس نظام میں اعداد لکھتے ہوئے اعشاریہ کے بائیں جانب پہلے ہندسے کا وزن $1_{10} = 2^0$ ہو گا، دوسرے ہندسے کا $2_{10} = 2^1$، تیسرے کا $4_{10} = 2^2$، وغیرہ، جبکہ اعشاریہ کے دائیں جانب پہلے ہندسے کا وزن $0.5_{10} = 2^{-1}$، دوسرے کا $0.25_{10} = 2^{-2}$ ہو گا۔

شنائی نظام گنتی کے لئے ی مساوات ۱.۳ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
\cdots b_2 \times 2^2 + b_1 \times 2^1 + b_0 \times 2^0 + b_{-1} \times 2^{-1} + b_{-2} \times 2^{-2} \cdots \\
= (\cdots b_2 b_1 b_0 \,.\, b_{-1} b_{-2} \cdots)_2
\end{aligned}
\tag{۱.۸}
$$

مساوات ۱.۹ میں شنائی نظام میں دیے گئے عدد کو اعشاری نظام میں تبدیل کرنا دکھایا گیا ہے۔ شنائی عدد کے زیر نوشت میں 2 اس بات کی یاد دہانی کراتا ہے کہ یہ عدد شنائی نظام میں لکھا گیا ہے۔

$$
\begin{aligned}
1011.1_2 &= [(1 \times 2^3) + (0 \times 2^2) + (1 \times 2^1) + (1 \times 2^0) + (1 \times 2^{-1})]_{10}\\
&= [(1 \times 8) + (0 \times 4) + (1 \times 2) + (1 \times 1) + (1 \times 0.5)]_{10}\\
&= [8 + 0 + 2 + 1 + 0.5]_{10}\\
&= 11.5_{10}
\end{aligned}
\tag{۱.۹}
$$

10010101_2

بلند ترتیبی شنائی ہندسہ — کم ترتیبی شنائی ہندسہ
بلند ترتیبی بٹ — کم ترتیبی بٹ
بٹ سات — بٹ صفر
b_7 — b_0

شکل ۱.۲: بلند تر اور کم ترتیبی ہندسے۔

شنائی عدد کے ہندسوں کو پکارنے کا طریقہ شکل ۱.۲ میں دکھایا گیا ہے۔ شنائی عدد کے دائیں ترین ہندسے کو کم ترتیبی بِٹ یا کم ترتیبی شنائی ہندسہ یا بِٹ صفر یا بِٹ b_0 کہیں گے؛ اس سے اگلے کو بِٹ ایک یا بِٹ b_1 اور اس سے اگلے کو بِٹ دو یا بِٹ b_2، وغیرہ؛ جبکہ بائیں ترین ہندسے کو بلند ترتیبی شنائی ہندسہ یا بلند ترتیبی بِٹ یا (موجودہ مثال میں) بِٹ سات یا بِٹ b_7 کہیں گے۔

اگر دیے گئے شنائی عدد کے اعشاریہ کے دائیں جانب کچھ نہ ہو، تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے:

$$1011_2 = (2^3 + 2^1 + 2^0)_{10} = (8 + 2 + 1)_{10} = 11_{10} \tag{۱.۱۰}$$

جو ہندسے 1 ہیں، ان کے وزن جمع کیے جاتے ہیں۔

چار ہندسوں کا شنائی عدد 0000_2 تا 1111_2 گنتی کر سکتا ہے؛ اس سے بڑا عدد لکھنے کے لئے چار سے زیادہ ہندسے درکار ہوں گے۔ مائکرو کنٹرولر آٹھ شنائی ہندسوں کے اعداد استعمال کرتا ہے جو 00000000_2 تا 11111111_2، یعنی 0_{10} تا 255_{10} ظاہر کر سکتے ہیں۔

روزمرہ زندگی میں اعشاری نظامِ گنتی استعمال کرتے ہوئے اعداد لکھتے ہوئے ان کی بائیں جانب اضافی صفر نہیں لکھے جاتے، یعنی 27_{10} کو 0027_{10} نہیں لکھا جاتا۔ کمپیوٹر کی دنیا میں اعداد عموماً آٹھ ہندسوں پر مبنی شنائی عدد کی صورت میں لکھے جاتے ہیں؛ آٹھ سے کم شنائی ہندسوں پر مبنی اعداد لکھتے ہوئے، بائیں جانب اضافی صفر لکھ کر انہیں آٹھ ہندسوں کی صورت دی جاتی ہے۔ یوں 27_{10} کو ہم 101011_2 کی بجائے 00101011_2 لکھیں گے۔

۱.۴ اعشاری نظام سے شنائی نظام میں تبادلہ

اعشاری نظام میں دیے گئے عدد کو شنائی نظام میں لکھنے کی خاطر اس عدد کو بار بار 2 سے تقسیم کریں، حتیٰ کہ یہ مزید تقسیم نہ ہو سکے۔ ہر مرتبہ تقسیم کے بعد حاصل باقی لیں؛ پہلے حاصل باقی کو شنائی عدد کے سب سے کم وزن کے مقام پر لکھیں؛ اگلے حاصل باقی کو اس سے دگنے وزن کے مقام پر لکھیں؛ اسی طرح آخری حاصل باقی کو سب سے زیادہ وزن کے مقام پر لکھیں۔ یوں شنائی عدد حاصل ہو گا۔ یہ طریقہ استعمال کرتے ہوئے 121_{10} کو شنائی لکھائی میں لکھتے ہیں۔

121 کو 2 سے تقسیم کرنے سے حاصل تقسیم 60 اور باقی 1 ملتا ہے۔
60 کو 2 سے تقسیم کرنے سے حاصل تقسیم 30 اور باقی 0 ملتا ہے۔
30 کو 2 سے تقسیم کرنے سے حاصل تقسیم 15 اور باقی 0 ملتا ہے۔
15 کو 2 سے تقسیم کرنے سے حاصل تقسیم 7 اور باقی 1 ملتا ہے۔
7 کو 2 سے تقسیم کرنے سے حاصل تقسیم 3 اور باقی 1 ملتا ہے۔
3 کو 2 سے تقسیم کرنے سے حاصل تقسیم 1 اور باقی 1 ملتا ہے۔
1 کو 2 سے تقسیم کرنے سے حاصل تقسیم 0 اور باقی 1 ملتا ہے۔

اب سب سے آخری "باقی" کو سب سے زیادہ وزن کے مقام پر اور سب سے پہلے "باقی" کو سب سے کم وزن کے مقام پر لکھتے ہیں۔ یوں 1111001_2 حاصل ہو گا، لہٰذا

$$121_{10} = 1111001_2$$

ہو گا جہاں سات شنائی ہندسے استعمال کیے گئے ہیں۔ اپنی تسلی کے لئے اس عدد کو واپس اعشاری نظام میں منتقل کرتے ہیں۔

$$1111001_2 = 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^0 = 64 + 32 + 16 + 8 + 1 = 121_{10}$$

اس طریقہ کار کی بہتر صورت پیش کرتے ہیں۔

2	121	
	60	1
	30	0
	15	0
	7	1
	3	1
	1	1
	0	1

عدد میں اعشاریہ کے بائیں جانب حصہ کو حصہ صحیح، جبکہ دائیں حصہ کو حصہ مسکور یا کسری کہتے ہیں۔

$$\overbrace{xxxxxx}^{\text{حصہ صحیح}} \, . \, \underbrace{yyyyyy}_{\text{حصہ مسکور}}$$

یوں 121.6875 میں 121 عدد صحیح اور 6875 عدد مسکور ہے۔

عشری عدد کے صحیح حصہ کو شنائی نظام میں تبدیل کرنا آپ سیکھ چکے؛ حصہ مسکور تبدیل کرنے کا طریقہ ذرہ مختلف ہے۔ آئیں یہ عمل سیکھیں۔

حصہ مکور کو بار بار 2 سے ضرب دیں۔ اگر حاصل ضرب کے اعشاریہ کے بائیں جانب 1 حاصل ہو تو اس کو حاصل ضرب سے ہٹا کر شنائی عدد کے دائیں جانب منسلک کریں ورنہ شنائی عدد کے دائیں جانب 0 منسلک کریں۔ اس عمل کو ایک مثال کی مدد سے سیکھتے ہیں۔

	شنائی
$2 \times 0.6875 = 1.375$	0.1
$2 \times 0.3750 = 0.750$	0.10
$2 \times 0.7500 = 1.500$	0.101
$2 \times 0.5000 = 1.000$	0.1011

یوں $0.6875_{10} = 0.1011_2$ ہو گا؛ آخر میں دونوں حصوں کو ملا کر شنائی عدد حاصل کرتے ہیں۔

$$121.6875_{10} = 111001.1011_2$$

۱.۵ اساس سولہ (سادس عشری) نظام گنتی

اساس سولہ کے نظام میں اعداد کی سولہ علامتیں ہیں۔ ان میں پہلی دس علامتیں 0 تا 9 ہیں، جبکہ باقی علامتیں، بڑی لکھائی میں انگریزی حروف تہجی کے پہلے چھ حروف یعنی A ، B ، C ، D ، E اور F ہیں۔ علامت A دس (10_{10}) کو ظاہر کرتی ہے، یعنی $10_{10} = A$ ہے، جبکہ B گیارہ کو، $B = 11_{10}$ ، اور اسی طرح چلتے ہوئے F پندرہ کو ظاہر کرتی ہے۔ مساوات ۱.۱۱ میں مختلف نظام دیے گئے ہیں۔ انہیں سمجھے بغیر

آگے ہرگز مت بڑھیں۔

$$
\begin{aligned}
00_{10} &= 00_8 = 0000_2 = 0_{16}\\
01_{10} &= 01_8 = 0001_2 = 1_{16}\\
02_{10} &= 02_8 = 0010_2 = 2_{16}\\
03_{10} &= 03_8 = 0011_2 = 3_{16}\\
04_{10} &= 04_8 = 0100_2 = 4_{16}\\
05_{10} &= 05_8 = 0101_2 = 5_{16}\\
06_{10} &= 06_8 = 0110_2 = 6_{16}\\
07_{10} &= 07_8 = 0111_2 = 7_{16}\\
08_{10} &= 10_8 = 1000_2 = 8_{16}\\
09_{10} &= 11_8 = 1001_2 = 9_{16}\\
10_{10} &= 12_8 = 1010_2 = A_{16}\\
11_{10} &= 13_8 = 1011_2 = B_{16}\\
12_{10} &= 14_8 = 1100_2 = C_{16}\\
13_{10} &= 15_8 = 1101_2 = D_{16}\\
14_{10} &= 16_8 = 1110_2 = E_{16}\\
15_{10} &= 17_8 = 1111_2 = F_{16}
\end{aligned} \tag{۱.۱۱}
$$

اس نظام میں اشاریہ کی بائیں جانب پہلے ہندسے کا وزن $16^0 = 1_{10}$، دوسرے کا $16^1 = 16_{10}$، اور تیسرے کا $16^2 = 256_{10}$ ہو گا۔

مساوات ۱.۱۲ میں سادس عشری یا اساس سولہ نظام میں دیے گئے عدد کو اعشاری نظام میں تبدیل کرنا دکھایا گیا ہے۔ ایسا کرتے ہوئے $A = 10_{10}$ اور $C = 12_{10}$ لئے گئے۔

$$
\begin{aligned}
3AC.8_{16} &= (3\times 16^2)_{10} + (10\times 16^1)_{10} + (12\times 16^0)_{10} + (8\times 16^{-1})_{10}\\
&= (3\times 256)_{10} + (10\times 16)_{10} + (12\times 1)_{10} + (8\times 0.0625)_{10}\\
&= (768+160+12+0.5)_{10}\\
&= 940.5_{10}
\end{aligned} \tag{۱.۱۲}
$$

مساوات ۱.۱۳ اساس سولہ کے لئے درج ذیل ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
\cdots a_2\times 16^2 + a_1\times 16^1 + a_0\times 16^0 + a_{-1}\times 16^{-1} + a_{-2}\times 16^{-2}\ \cdots\\
= (\cdots a_2a_1a_0\,.\,a_{-1}a_{-2}\cdots)_{16}
\end{aligned} \tag{۱.۱۳}
$$

۱.۶ اساس دو کا اساس آٹھ میں تبادلہ

مساوات ۱.۱۴ میں بائیں ہاتھ شنائی عدد دیا گیا ہے۔ اعشاریہ سے شروع کرتے ہوئے، اعشاریہ کی دونوں جانب تین تین ہندسوں کے گروہ میں، اس شنائی عدد کو لکھیں۔ اعشاریہ کی بائیں جانب اگر آخر میں تین ہندسوں کا گروہ پورا نہ ہو تو بائیں اضافی صفر منسلک کر کے تین ہندسوں کا گروہ پورا کریں؛ اسی طرح اعشاریہ کی دائیں جانب اگر آخر میں تین ہندسوں کا گروہ پورا نہ ہو تو دائیں جانب اضافی صفر منسلک کر کے تین ہندسوں کا گروہ پورا کریں۔ اب مساوات ۱.۱۱ کی مدد سے ان تین تین کے گروہ کی جگہ ان کا مساوی اساس آٹھ ہندسہ لکھیں۔ مساوات ۱.۱۴ میں یوں دو مقامات پر 100_2 کی جگہ 4_8 لکھا گیا، جبکہ 101_2 کی جگہ 5_8، اور 001_2 کی جگہ 1_8 لکھا گیا ہے۔ اس طرح اس عدد کو اساس آٹھ میں منتقل کیا گیا۔ یاد رہے، اعشاریہ اپنی جگہ برقرار رکھتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
1101100.1_2 &= (001\ 101\ 100\,.\,100)_2 \\
&= (\ 1 \quad 5 \quad 4\ \ .\ \ 4)_8 \\
&= 154.4_8
\end{aligned}
\tag{۱.۱۴}
$$

۱.۷ اساس دو کا اساس سولہ میں تبادلہ

شنائی عدد کو اساس سولہ میں لکھنے کی خاطر شنائی عدد کو اعشاریہ سے شروع کرتے ہوئے اعشاریہ کی دونوں جانب چار چار ہندسوں کے گروہ میں لکھیں۔ اگر اعشاریہ کی بائیں جانب آخر میں چار ہندسوں کا گروہ پورا نہ ہو تو عدد کی بائیں جانب اضافی صفر منسلک کر کے چار ہندسوں کا گروہ پورا کریں؛ اسی طرح اگر اعشاریہ کی دائیں جانب آخر میں چار ہندسوں کا گروہ پورا نہ ہوں تو دائیں جانب اضافی صفر منسلک کر کے گروہ پورا کریں۔ اب مساوات ۱.۱۱ کی مدد سے ان چار چار کے گروہ کی جگہ ان کی مساوی اساس سولہ کا ہندسہ لکھیں۔ یوں مساوات ۱.۱۵ میں 1000_2 کی جگہ 8_{16} لکھ کر، 1100_2 کی جگہ C_{16}، اور 0110_2 کی جگہ 6_{16} لکھ کر اساس سولہ میں مساوی عدد حاصل کیا گیا۔ یاد رہے کہ اعشاریہ اپنی جگہ برقرار رکھتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
1101100.1_2 &= (0110\ 1100\,.\,1000)_2 \\
&= (\ 6 \quad C \quad . \quad 8)_{16} \\
&= 6C.8_{16}
\end{aligned}
\tag{۱.۱۵}
$$

۱.۸ اساس آٹھ اور اساس سولہ سے اساس دو میں تبادلہ

انہیں طریقوں کو الٹ استعمال کرتے ہوئے اساس آٹھ اور اساس سولہ کے اعداد با آسانی اساس دو میں لکھے جا سکتے ہیں۔ مساوات ۱.۱۶ میں اساس آٹھ:

$$
\begin{aligned}
372.5_8 &= (3 \qquad 7 \qquad 2\ \ .\ \ 5)_8 \\
&= (011 \quad 111 \quad 010\ .\ 101)_2 \\
&= 011111010.101_2
\end{aligned}
\tag{۱.۱۶}
$$

اور مساوات ۱.۱۷ میں اساس سولہ کو شنائی عدد کی صورت میں لکھ کر دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} 9A2F.7_{16} &= (\quad 9 \qquad A \qquad 2 \qquad F \quad . \quad 7)_{16} \\ &= (1001 \quad 1010 \quad 0010 \quad 1111 \quad . \quad 0111)_2 \\ &= (1001101000101111.0111)_2 \end{aligned} \tag{۱.۱۷}$$

ہم نے دیکھا کہ شنائی عدد کے ہندسوں کو تین تین کے گروہ میں لکھنے سے اساس آٹھ اور چار چار کے گروہ میں لکھنے سے اساس سولہ عدد حاصل کیا جا سکتا ہے۔ آئیں درج بالا مساوات میں حاصل شنائی عدد سے اساس آٹھ اور اساس سولہ اعداد حاصل کریں۔

$$\begin{aligned} 1001101000101111.0111_2 &= (001 \quad 001 \quad 101 \quad 000 \quad 101 \quad 111 \;.\; 011 \quad 100)_2 \\ &= (\;1 \qquad 1 \qquad 5 \qquad 0 \qquad 5 \qquad 7 \;.\; 3 \qquad 4)_8 \\ &= 115057.34_8 \\ 1001101000101111.0111_2 &= (1001 \quad 1010 \quad 0010 \quad 1111 \;.\; 0111)_2 \\ &= (\;9 \qquad A \qquad 2 \qquad F \;.\; 7)_{16} \\ &= 9A2F.7_{16} \end{aligned}$$

مساوات ۱.۱۶ اور مساوات ۱.۱۷ کی آخری لکیروں میں شنائی اعداد کو دیکھتے ہوئے بہت جلد انسان اکتا جاتا ہے، البتہ، انہیں مساوات میں جہاں شنائی اعداد گروہ کی صورت میں لکھے گئے ہیں، وہاں انہیں سمجھنا آسان ہے۔ یہی وجہ ہے کہ شنائی اعداد بالخصوص اور دیگر اعداد بالعموم گروہی صورت میں لکھے جاتے ہیں۔

ایک ہندسے پر مبنی شنائی عدد کو شنائی ہندسہ یا بِٹ کہتے ہیں؛ آٹھ شنائی ہندسوں،، یعنی آٹھ بِٹ، کے گروہ کو ہشتمی شنائی عدد یا بائٹ کہتے ہیں۔ بائٹ کو عموماً چار چار شنائی اعداد کے گروہ میں لکھا جاتا ہے۔ یوں مساوات ۱.۱۷ میں دو بائٹ ہیں۔ اسی مساوات کو الٹ چلاتے ہوئے یہ واضح ہے کہ ہشتمی شنائی عدد کو چار چار شنائی اعداد کے گروہ میں لکھ کر انہیں جلد اساس سولہ میں لکھا جا سکتا ہے۔

باب ۲

بنیادی حساب

شنائی نظام میں حساب بالکل اسی طرح کیا جاتا ہے جس طرح اعشاری نظام میں۔چند مثالوں کے مطالعہ سے وضاحت ہو گی۔

شنائی نظام میں اعداد کا مجموعہ اعشاری نظام میں دو اعداد کے مجموعہ سے سمجھا جا سکتا ہے۔اعشاری نظام کی مندرجہ ذیل مثال پر غور کریں جس میں 37.5 اور 29.6 جمع کیے گئے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 11 \\ 37.5 \\ +29.6 \\ \hline 67.1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 37.5 \\ +29.6 \\ \hline 67.1 \end{array}$$

آپ نے دیکھا کہ حاصل (1) کو (بائیں) زیادہ وزنی مقام پر منتقل کیا گیا۔یہی شنائی جمع میں کیا جائے گا۔شنائی نظام میں صرف دو ہندسے، 0 اور 1 ،پائے جاتے ہیں جن کی چار ممکنہ مجموعے درج ذیل ہیں۔

$$\begin{array}{r} 0 \\ +0 \\ \hline 00 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 1 \\ +1 \\ \hline 10 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ +0 \\ \hline 01 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ +1 \\ \hline 01 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ +0 \\ \hline 00 \end{array}$$

پہلی تین جمع میں حاصل 0 جبکہ آخری میں حاصل 1 ہے۔

آئیں، زیادہ شنائی ہندسوں کے اعداد کی جمع کی مثالیں دیکھیں؛ ان کی اعشاری نظام میں جمع بھی دی گئی ہیں۔

$$\begin{array}{r} 1 \\ 11 \\ +10 \\ \hline 101_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ +2 \\ \hline 5_{10} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 11 \\ 1101 \\ +1001 \\ \hline 10110_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 13 \\ +09 \\ \hline 22_{10} \end{array}$$

دائیں ہاتھ شنائی 11 اور 10 جمع کر کے 101_2 حاصل کیا گیا جو اعشاری نظام میں $5 = 2 + 3$ ہوگا، جبکہ بائیں ہاتھ شنائی 1101 اور 1001 جمع کر کے 10110_2 حاصل کیا گیا جو اعشاری نظام میں $22 = 9 + 13$ کے مترادف ہے۔

آخر میں، کسری اعداد کی جمع کی ایک مثال دیکھتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 111 \\ 101.11 \\ +\ \ 11.10 \\ \hline 1001.01_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 5.75 \\ +3.50 \\ \hline 9.25_{10} \end{array}$$

۲.۱ شنائی نظام میں اعداد منفی کرنا

دوبٹ (شنائی عدد) منفی کرنے کے درج ذیل چار ممکنات پائے جاتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 0 - 0 &= 0 \\ 1 - 0 &= 1 \\ 1 - 1 &= 0 \\ 0 - 1 &= 1 \quad \text{(ادھار ایک)} \end{aligned}$$

ی آخری مساوات میں صفر سے ایک اس صورت منفی کیا دکھایا گیا ہے جب ادھار 1 لینا ممکن ہو۔ ایک اور مثال دیکھتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 110.01 \\ -101.1 \\ \hline 0.11_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 6.25 \\ -5.50 \\ \hline 0.75_{10} \end{array}$$

شنائی منفی کی چند مثالیں حل کر کے اعشاری منفی سے ان کی تصدیق کریں۔ ایسا کرنے سے زیادہ وضاحت ہو گی۔

۲.۲ اساسی تکملہ یا r کا تکملہ

کسی بھی اساسی نظام میں، ہندسہ کو اساس، (r)، سے منفی کرنے سے ہندسے کا اساسی تکملہ (یا r کا تکملہ) حاصل ہو گا۔ یوں، ہندسہ اور ہندسے کے اساسی تکملہ کا مجموعہ اساس کے برابر ہو گا۔ مثلاً، اعشاری نظام میں 3 کا اساسی تکملہ $7 = 3 - 10$، جبکہ 7 کا اساسی تکملہ 3 اور ان دونوں کا مجموعہ $10 = 7 + 3$ اعشاری نظام کے اساس کے برابر ہے۔ اسی طرح 5 کا اساسی تکملہ 5، اور 9 کا اساسی تکملہ 1 ہو گا۔

درج بالا مثالوں سے واضح ہے کہ کسی بھی ہندسہ (مثلاً 3) کے اساسی تکملہ (یعنی 7) کا اساسی تکملہ وہی ہندسہ (یعنی 3) ہو گا۔

اساسی تکملہ کے تصور کو ایک سے زائد ہندسوں پر مبنی عدد تک وسعت دیتے ہیں۔ اساس r کے اعدادی نظام میں عدد N، جو n ہندسوں پر مبنی ہو، کے اساسی تکملہ (یا r کے تکملہ) سے مراد عدد $r^n - N$ ہو گا۔

اساس دس کے اساسی تکملہ کو عام طور 10 کا تکملہ کہتے ہیں۔ اسی طرح اساس دو کے تکملہ کو 2 کا تکملہ کہتے ہیں۔

اعشاری نظام میں عدد 10^n کے سب سے وزنی ہندسے کی قیمت 1 ہو گی، اور اس کی دائیں جانب 0 قیمت کے n ہندسے ہوں گے۔

$$\begin{aligned} 10^2 &= 100_{10} \\ 10^5 &= 100000_{10} \\ 10^7 &= 10000000_{10} \end{aligned} \tag{۲.۱}$$

اعشاری نظام کی اساس $10 = r$ ہے۔ اس نظام میں عدد N، جس میں n ہندسے ہوں، کے اساسی تکملہ (یعنی 10 کے تکملہ) سے مراد عدد $10^n - N$ ہو گا۔ یوں $N = 5391$ جس میں چار ہندسے $(n = 4)$ ہیں، کا 10 کا تکملہ درج ذیل ہو گا۔

$$(10^4 - 5391)_{10} = (10000 - 5391)_{10} = 4609_{10} \tag{۲.۲}$$

اسی طرح عدد 320753 جس میں 6 ہندسے ہیں کا اساسی تکملہ:

$$(10^6 - 320753)_{10} = (1000000 - 320753)_{10} = 679247_{10} \tag{۲.۳}$$

اور 679247 کا 2 کا تکملہ درج ذیل ہو گا۔

$$(10^6 - 679247)_{10} = (1000000 - 679247)_{10} = 320753_{10} \tag{۲.۴}$$

ہر عدد N کے اساسی تکملہ کا اساسی تکملہ وہی عدد N ہو گا۔ اس کا ثبوت کچھ یوں ہے: عددی N کا اساسی تکملہ $r^n - N$ اور عدد $r^n - N$ کا اساسی تکملہ $(r^n - N) - r^n$ یعنی N ہو گا۔

شنائی نظام کی اساس 2 ہے لہٰذا n ہندسوں پر مبنی شنائی عدد N کے 2 کا تکملہ (یعنی اساسی تکملہ) $2^n - N$ ہو گا۔

شنائی نظام میں عدد 10^n کے سب سے وزنی ہندسے کی قیمت 1 ہو گی، اور اس کی دائیں جانب 0 قیمت کے n ہندسے ہوں گے۔

$$
\begin{aligned}
2^2 &= 100_2 \\
2^5 &= 100000_2 \\
2^7 &= 10000000_2
\end{aligned}
\tag{۲.۵}
$$

یوں 1011_2 اور 10001_2 کے 2 کے تکملہ بالترتیب درج ذیل ہوں گے۔

$$
\begin{aligned}
(2^4 - 1011)_2 &= (10000 - 1011)_2 = 0101_2 \\
(2^5 - 10001)_2 &= (100000 - 10001)_2 = 01111_2
\end{aligned}
\tag{۲.۶}
$$

۲.۳ اساس منفی ایک تکملہ یا $(r-1)$ کا تکملہ

اساس r کے نظام میں، عدد N کے اساس منفی ایک ($r-1$) کے تکملہ سے مراد $r^n - 1 - N$ ہے۔ اعشاری نظام میں اساس منفی ایک کے تکملہ کو عموماً 9 کا تکملہ (نو کا تکملہ) اور شنائی نظام میں اسے 1 کا تکملہ (ایک کا تکملہ) کہتے ہیں۔

اعشاری نظام میں 376 اور 7852 کے 9 کے تکملہ، بالترتیب مندرجہ ذیل ہوں گے۔

$$
\begin{aligned}
10^3 - 1 - 376 &= 1000 - 1 - 376 \\
&= 999 - 376 \\
&= 623_{10} \\
10^4 - 1 - 7852 &= 10000 - 1 - 7852 \\
&= 9999 - 7852 \\
&= 2147_{10}
\end{aligned}
\tag{۲.۷}
$$

اعشاری نظام میں عدد $10^n - 1$ ، n ہندسوں پر مشتمل ہو گا، جہاں ہر ہندسے کی قیمت 9 ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
10^3 - 1 &= 1000 - 1 = 999_{10} \\
10^6 - 1 &= 1000000 - 1 = 999999_{10} \\
10^8 - 1 &= 100000000 - 1 = 99999999_{10}
\end{aligned}
\tag{۲.۸}
$$

شنائی نظام میں عدد $2^n - 1$ ، n ہندسوں پر مشتمل ہو گا، جہاں ہر ہندسے کی قیمت 1 ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
2^3 - 1 &= 1000 - 1 = 111_2 \\
2^5 - 1 &= 100000 - 1 = 11111_2 \\
2^8 - 1 &= 100000000 - 1 = 11111111_2
\end{aligned}
\tag{۲.۹}
$$

شنائی نظام میں 1001_2 اور 101110_2 کے 1 کے تکملہ، بالترتیب، درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}2^4 - 1 - 1001 &= 1111 - 1001 = 0110_2\\ 2^6 - 1 - 101110 &= 111111 - 101110 = 010001_2\end{aligned} \tag{۲.۱۰}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شنائی عدد 0 کا "ایک کا تکملہ"، شنائی عدد 1 ہوگا، اور اسی طرح عدد 1 کا "ایک کا تکملہ"، شنائی عدد 0 ہوگا۔ ہم کہتے ہیں 0 کا متمم 1 اور 1 کا متمم 0 ہے۔

شنائی عدد N کا اساس منفی ایک کا تکملہ، $\overline{N}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\overline{1}_2 &= 0_2\\ \overline{0}_2 &= 1_2\\ \overline{1001}_2 &= 0110_2\\ \overline{101110}_2 &= 010001_2\end{aligned} \tag{۲.۱۱}$$

ان دو مثالوں سے ایک اہم حقیقت واضح ہوتا ہے: شنائی عدد میں ہر ہندسے کا متمم لینے سے (یعنی ہر 0 کو 1، اور ہر 1 کو 0 کرنے سے) اس کا ایک کا تکملہ یا متمم حاصل ہوگا۔

شنائی عدد کے ہر بٹ کا متمم لینے سے عدد کا 1 کا تکملہ (یعنی متمم) حاصل ہوگا۔

اساس r نظام میں r کے تکملہ سے مراد $r^n - N$ اور $(r-1)$ کے تکملہ سے مراد $r^2 - 1 - N$ ہے، لہٰذا $(r - 1)$ کے تکملہ کے ساتھ 1 جمع کر کے r کا تکملہ حاصل کیا جا سکتا ہے، یعنی عدد کے متمم کے ساتھ 1 جمع کر کے 2 کا تکملہ حاصل ہوگا۔ اس طرح اساسی تکملہ کا حصول عموماً زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ مساوات ۲.۶ میں دیے گئے اعداد کے 2 کے تکملہ ہم اس طریقہ سے حاصل کرتے ہیں۔

چونکہ $0100 = \overline{1011}$ ہے لہٰذا 1011 کا اساسی تکملہ $0101 = 0100 + 1$ ہوگا۔ اسی طرح 10001 کے متمم 01110 کے ساتھ 1 جمع کرنے سے اس کا اساسی تکملہ $01111 = 01110 + 1$ حاصل ہوگا۔

۲.۴ دو اعداد کی منفی بذریعہ اساسی تکملہ

قلم و کاغذ کے ساتھ، M سے N منفی کرنا چھوٹی جماعتوں میں سکھایا جاتا ہے۔ برقیات میں تکملہ کی مدد سے دو اعداد منفی کیے جاتے ہیں، جہاں دونوں اعداد میں ہندسوں کی تعداد برابر ہونا لازم ہے۔ اساسی تکملہ کی مدد سے $M - N$ مندرجہ ذیل طریقہ کار سے حاصل کیا جاتا ہے۔

- دونوں اعداد میں ہندسوں کی تعداد برابر کرنے کی خاطر، کم ہندسوں والے عدد کی بائیں جانب (درکار تعداد کی) اضافی صفریں چسپاں کریں۔ فرض کریں اب ہر عدد میں n ہندسے پائے جاتے ہیں۔
- M کے ساتھ N کا اساسی تکملہ جمع کر کے **مجموعہ** $M + r^n - N$ حاصل کریں۔
- M کی قیمت N کی قیمت سے زیادہ ہونے کی صورت میں، آخری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا ہوگا، جس کی بنا پر مجموعہ $n + 1$ ہندسوں پر مشتمل ہوگا اور اس کا بایاں ہندسہ 1 ہوگا۔ اس بائیں ہندسے کو (یعنی حاصل 1 کو) نظر انداز کریں؛ باقی n ہندسوں پر مبنی عدد اصل جواب ہوگا۔

- M کی قیمت N کی قیمت سے کم ہونے کی صورت میں، آخری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا **نہیں** ہو گا؛ مجموعہ منفی عدد کو ظاہر کرے گا، اور n ہندسوں پر مبنی ہو گا۔ مجموعے کا اساسی تکملہ لے کر اس کی بائیں جانب منفی علامت منسلک کرکے جواب حاصل ہو گا۔

ان دونوں صورتوں کی وضاحت مثالوں سے ہو گی۔

مثال ۲.۱: اعشاری اعداد کا حاصل منفی $7852 - 974$ دس کے تکملہ کی مدد سے دریافت کریں۔

جواب: یہاں بڑا عدد 7852 چار ہندسوں پر مبنی ہے، لہٰذا چھوٹا عدد 0974 لکھیں اور $n = 4$ لیں۔ یوں 0974 کا اساسی تکملہ $10000 - 0974 = 9026$ ہو گا، جس کو 7852 کے ساتھ جمع کرنے سے 5 ہندسوں کا مجموعہ $7852 + 9026 = 16878$ حاصل ہو گا۔ چونکہ یہ عدد 5 ہندسوں پر مبنی ہے، لہٰذا بائیں ہندسے کو نظر انداز کرتے ہوئے 6878 کو جواب تسلیم کرتے ہیں۔ (ہم درحقیقت آخری ہندسوں کی جمع سے پیدا حاصل 1 کو رد کرتے ہیں۔ چونکہ یہ مجموعہ میں بائیں ترین مقام پر اترتا ہے لہٰذا مجموعہ کا بایاں ہندسہ رد کرکے جواب حاصل ہو گا۔)

$$\begin{array}{r} 10000 \\ -0974 \\ \hline 9026 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 7852 \\ +9026 \\ \hline 16878 \end{array}$$

حاصل 1 کو نظر انداز کر کے 6878 کو جواب تسلیم کرتے ہیں

□

مثال ۲.۲: دس کے تکملہ کی مدد سے $974 - 7852$ حاصل کریں۔

جواب: عدد 7852 کے اساسی تکملہ $10000 - 7852 = 2148$ کا 0974 کے ساتھ مجموعہ لیتے ہوئے: $0974 + 2148 = 3122$ آخری حاصل 1 نہیں پیدا ہوتا، لہٰذا یہ مجموعہ 4 ہندسوں پر مشتمل ہے؛ اس کے اساسی تکملہ $10000 - 3122 = 6878$ کے ساتھ منفی علامت چسپاں کرتے ہوئے -6878 کو جواب تسلیم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 10000 \\ -7852 \\ \hline 2148 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0974 \\ +2148 \\ \hline 3122 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10000 \\ -3122 \\ \hline 6878 \end{array}$$

جواب
-6878

□

ثنائی اعداد بھی بالکل اسی طرح منفی کیے جاتے ہیں۔ ان کی بھی دو مثالیں پیش کرتے ہیں۔

مثال ۲.۳: اساسی تکملہ کی مدد سے مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

(ا) $1011_2 - 11001_2$ اور (ب) $11001_2 - 1011_2$

جواب: (ا) چونکہ $\overline{11001} = 00110$ ہے، لہٰذا دو کا تکملہ $00110 + 1 = 00111$ ہو گا۔ اس کو دوسرے عدد 01011_2 (جس کی بائیں جانب اضافی 0 چسپاں کر کے ہندسوں کی تعداد پوری کی گئی) کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 01011 \\ +00111 \\ \hline 10010 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 01011 \\ +00111 \\ \hline 10010 \end{array}$$

بائیں آخری ہندسوں کو جمع کرتے ہوئے حاصل 1 پیدا نہیں ہوا، لہٰذا اس کا 2 کا تکملہ لینا ہو گا۔ چونکہ $\overline{10010} = 01101$ ہے لہٰذا اساسی تکملہ $01101 + 1 = 01110$ ہو گا، جس کی بائیں جانب منفی علامت چسپاں کر کے نتیجہ -01110_2 حاصل کرتے ہیں۔

جواب: (ب) یہاں ایک عدد پانچ ہندسوں پر مشتمل ہے، لہٰذا دوسرے عدد میں بھی پانچ ہندسے پورے کیے جائیں گے۔ یوں 1011 کو 01011 لکھ کر، اس کے متمم $\overline{01011} = 10100$ سے عدد کا اساسی تکملہ $10100 + 1 = 10101$ حاصل کر کے، دوسرے عدد کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 1 \\ 11001 \\ +10101 \\ \hline 101110 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 11001 \\ +10101 \\ \hline 101110 \end{array}$$

آخری ہندسے سے جمع کرتے ہوئے حاصل 1 پیدا ہوا جس کو نظر انداز کر کے باقی مجموعہ، 01110_2، کو نتیجہ تسلیم کرتے ہیں۔ □

۲.۵ دو اعداد کی منفی بذریعہ اساس منفی ایک کا تکملہ

اساس منفی ایک تکملہ کی مدد سے بھی $M - N$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس کا طریقہ کار درج ذیل ہے جہاں دونوں اعداد میں ہندسوں کی تعداد برابر ہونا لازم ہے۔

- دونوں اعداد میں ہندسوں کی تعداد برابر کرنے کی خاطر، کم ہندسوں والے عدد کی بائیں جانب (درکار تعداد کی) اضافی صفر یں چسپاں کریں۔ فرض کریں اب ہر عدد میں n ہندسے پائے جاتے ہیں۔
- M کے ساتھ N کا اساس منفی ایک کا تکملہ جمع کر کے **مجموعہ** $M + r^n - 1 - N$ حاصل کریں۔
- M کی قیمت N کی قیمت سے زیادہ ہونے کی صورت میں، آخری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا ہو گا، جس کی بنا پر مجموعہ $1 + n$ ہندسوں پر مشتمل ہو گا اور اس کا بایاں ہندسہ 1 ہو گا۔ اس بائیں ہندسے کو (یعنی حاصل 1 کو) نظر انداز کرنے کی بجائے، مجموعہ سے خارج کر کے، 1 وزن مختص کریں

اور n ہندسوں کے باقی مجموعہ کے ساتھ جمع کر کے جواب حاصل کریں۔ اس عمل کو واپسیں آخری حاصل ایک کہتے ہیں۔

- M کی قیمت N کی قیمت سے کم ہونے کی صورت میں، آخری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا **نہیں** ہو گا؛ مجموعہ منفی عدد کو ظاہر کرے گا، اور n ہندسوں پر مبنی ہو گا۔ مجموعے کا اساس منفی ایک کا تکملہ لے کر اس کی بائیں جانب منفی علامت منسلک کر کے جواب حاصل ہو گا۔

ان دونوں صورتوں کی وضاحت مثالوں سے ہو گی۔

مثال ۲.۴: نو کا تکملہ استعمال کرتے ہوئے $7852 - 974$ حاصل کریں۔

جواب: عدد 974 کے بائیں 0 چسپاں کر کے اس میں ہندسوں کی تعداد پوری کریں اور 7852 کے اساس منفی ایک کے تکملہ $9999 - 7852 = 2147$ کے ساتھ جمع کریں۔

$$\begin{array}{r} 2147\\ +0974\\ \hline 3121 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2147\\ +0974\\ \hline 3121 \end{array}$$

آخری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا نہیں ہوا، لہٰذا مجموعہ چار ہندسوں پر مشتمل ہے۔ اس کے اساس منفی ایک کے تکملہ $9999 - 3121 = 6878$ کے بائیں منفی علامت منسلک کر کے جواب -6878 حاصل کرتے ہیں۔ □

مثال ۲.۵: نو کا تکملہ استعمال کرتے ہوئے $974 - 7852$ حاصل کریں۔

جواب چھوٹے عدد 974 میں ہندسوں کی تعداد پوری کر کے اس کے اساس منفی ایک کے تکملہ $9999 - 0974 = 9025$ کو 7852 کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 1\\ 7852\\ +9025\\ \hline 16877 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\\ 7852\\ +9025\\ \hline 16877 \end{array}$$

آخری (بائیں) ہندسے جمع کرتے ہوئے حاصل 1 پیدا ہوا جس کی بنا پر مجموعہ 5 ہندسوں پر مشتمل ہے۔ ہم اس حاصل 1 کو وزن 1 مختص کر کے باقی 4 ہندسوں پر مبنی مجموعہ 6877 کے ساتھ جمع کر کے جواب $6877 + 1 = 6878$ حاصل کرتے ہیں۔ □

اب ہم ثنائی اعداد کی مثال لیتے ہیں۔

مثال ۲.۶: مندرجہ ذیل کو 1 کے تکملہ کی مدد سے حل کریں۔

(ا) $101110_2 - 11011_2$، (ب) $11011_2 - 101110_2$

حل: (ا) منفی ہونے والے عدد میں ہندسوں کی تعداد پوری کر کے اس کا متمم:

$$\overline{011011} = 100100$$

دوسرے عدد کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 1 \\ 101110 \\ +100100 \\ \hline 1010010 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 101110 \\ +100100 \\ \hline 1010010 \end{array}$$

آخری حاصل 1 کو باقی عدد سے علیحدہ کر کے اسے 1 کا وزن مختص کر کے (یعنی اس کو اکائی تصور کر کے)، دائیں چھ ہندسوں پر مشتمل مجموعہ 010010 کے ساتھ جمع کرتے ہوئے جواب حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 010010 \\ +1 \\ \hline 010011 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 010010 \\ +1 \\ \hline 010011 \end{array}$$

(ب) متمم $\overline{101110} = 010001$ کو دوسرے عدد کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 010001 \\ +011011 \\ \hline 101100 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 010001 \\ +011011 \\ \hline 101100 \end{array}$$

چونکہ آخری حاصل صفر ہے، لہٰذا مجموعے کے متمم $010011 = \overline{101100}$ کے ساتھ منفی کی علامت چسپاں کر کے جواب -010011_2 حاصل کرتے ہیں۔ □

۲.۶ مثبت اور منفی اعداد

روز مرہ زندگی میں مثبت اعداد لکھتے ہوئے انہیں بغیر کسی علامت کے، یا مثبت علامت $(+)$ کے ساتھ لکھا جاتا ہے، البتہ منفی اعداد کے ساتھ منفی علامت $(-)$ ضرور لکھی جاتی ہے۔ یوں درج ذیل اعداد درست لکھے

گئے ہیں۔

$$+3025, \qquad 3025, \qquad -3025$$

کسی بھی عدد کے مثبت یا منفی ہونے کو اس عدد کی علامت کہتے ہیں۔ یوں، وہ اعداد جو مثبت علامت $(+)$ یا منفی علامت $(-)$ رکھتے ہوں علامت دار اعداد کہلاتے ہیں، اور جن کی علامت نہ ہو بے علامت اعداد کہلاتے ہیں۔ اعداد کو ان کی علامت اور قدر سے ظاہر کرنے کو علامت دار قدر اظہار کہتے ہیں۔

کمپیوٹر شنائی اعداد، 0 اور 1 ، استعمال کرتا ہے، اور ہر معلومات کو انہیں سے ظاہر کرتا ہے۔ روایتاً مثبت علامت $(+)$ کو 0 (صفر) اور منفی علامت $(-)$ کو 1 (ایک) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ علامت عدد کی بائیں جانب لکھی جاتی ہے۔ یوں $+5_{10}$ کو چار شنائی ہندسوں سے ظاہر کرتے ہوئے، بایاں ہندسہ مثبت علامت $(+)$ کو جبکہ باقی تین ہندسے 5 کو ظاہر کریں گے۔ اسی طرح -5_{10} کو آٹھ شنائی ہندسوں سے ظاہر کرتے ہوئے، بایاں ہندسہ منفی علامت $(-)$ کو جبکہ باقی سات ہندسے 5 کو ظاہر کریں گے۔

$$\underbrace{0}_{+}\underbrace{1\ 0\ 1}_{5_{10}} \qquad \underbrace{1}_{-}\underbrace{0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1}_{5_{10}}$$

ایک دلچسپ حقیقت پر غور کریں۔ اگر ہم 1101_2 میں بایاں ہندسہ علامت تصور کریں تب یہ -5_{10} کو ظاہر کرے گا، لیکن اگر ہم چاروں ہندسوں کو ایک عدد تصور کریں تب یہ D_{16} یا 13_{10} کو ظاہر کرتا ہے۔

یہ جاننا ضروری ہے، آیا شنائی اعداد کا بایاں ہندسہ علامت کو ظاہر کرتا ہے یا یہ عدد کا حصہ ہے؛ یہ فیصلہ اعداد استعمال کرنے والے پر ہے۔ کمپیوٹر استعمال کرتے وقت آپ فیصلہ کرتے ہیں کہ علامت دار یا بے علامت (غیر علامت دار) اعداد استعمال کریں گے۔ جدول ۲.۱ میں چار شنائی ہندسوں پر مشتمل علامت دار اعداد دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ صفر کو دو مختلف طریقوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے، ان میں ایک مثبت اور دوسرا منفی ہے!

اس جدول میں چار شنائی ہندسوں سے اعداد لکھے گئے؛ کمپیوٹر میں اعداد، عموماً، ایک بائٹ استعمال کرتے ہوئے لکھا جاتا ہے۔ ایک بائٹ 8 شنائی ہندسوں کو کہتے ہیں۔ علامت دار اعداد کو بائٹ میں لکھتے ہوئے، دائیں سات ہندسے عدد کی قدر جبکہ بایاں آخری ہندسہ اس کی علامت ظاہر کرے گا۔

$$\begin{aligned}
00000101_2 &= +5_{10}\\
01111111_2 &= +127_{10}\\
10000101_2 &= -5_{10}\\
11111111_2 &= -127_{10}\\
00000000_2 &= +0_{10}\\
10000000_2 &= -0_{10}
\end{aligned}$$

ان اعداد میں بھی مثبت اور منفی صفر پایا گیا؛ روزمرہ زندگی میں صفر کو ہم مثبت تصور کرتے ہیں۔

جدول ۱.۲: چار ہندسوں کے علامت دار اعداد

ثنائی	علامت دار
0111_2	$+7_{10}$
0110_2	$+6_{10}$
0101_2	$+5_{10}$
0100_2	$+4_{10}$
0011_2	$+3_{10}$
0010_2	$+2_{10}$
0001_2	$+1_{10}$
0000_2	$+0_{10}$
1000_2	-0_{10}
1001_2	-1_{10}
1010_2	-2_{10}
1011_2	-3_{10}
1100_2	-4_{10}
1101_2	-5_{10}
1110_2	-6_{10}
1111_2	-7_{10}

جدول ۲.۲: علامت دار ایک کا تکملہ اور دو کا تکملہ اعداد

اعشاری عدد	علامت دار قدر	علامت دار ایک کا تکملہ	علامت دار دو کا تکملہ
+7	0111	0111	0111
+6	0110	0110	0110
+5	0101	0101	0101
+4	0100	0100	0100
+3	0011	0011	0011
+2	0010	0010	0010
+1	0001	0001	0001
+0	0000	0000	0000
−0	1000	1111	نہیں پایا جاتا
−1	1001	1110	1111
−2	1010	1101	1110
−3	1011	1100	1101
−4	1100	1011	1100
−5	1101	1010	1011
−6	1110	1001	1010
−7	1111	1000	1001
−8	نہیں پایا جاتا	نہیں پایا جاتا	1000

اتنا کچھ کہنے کے بعد آپ کو بتاتا چلوں کہ، کمپیوٹر میں منفی اعداد کو علامت دار قدر اظہار میں نہیں بلکہ علامت دار 1 کے تکملہ یا علامت دار 2 کے تکملہ نظام میں رکھا اور استعمال کیا جاتا ہے۔ اگلے حصہ میں ان نظام پر غور ہو گا۔

۲.۷ علامت دار تکملہ نظام

کمپیوٹر میں عددی برقیات کی مدد سے اعداد جمع یا منفی کیے جاتے ہیں۔ یہ اعمال اساسی تکملہ یا اساس منفی ایک کا تکملہ (حصہ ۲.۴ اور حصہ ۲.۵ دیکھیں) استعمال کرتے ہوئے زیادہ خوش اسلوبی سے سر انجام دیے جاتے ہیں۔

کمپیوٹر چونکہ ثنائی اعداد استعمال کرتا ہے، لہٰذا اس میں منفی اعداد 1 کے تکملہ یا 2 کے تکملہ میں لکھے جاتے ہیں۔ جدول ۲.۲ میں چار ثنائی ہندسی (چار بِٹ) علامت دار اعداد کا 1 کا تکملہ اور 2 کا تکملہ روپ پیش کیا گیا ہے۔

جدول ۲.۲ سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مثبت عدد، ثنائی ہندسوں میں ایک ہی طریقہ سے لکھا جاتا ہے، جبکہ منفی عدد تین طریقوں سے لکھا جا سکتا ہے۔ یوں تینوں طریقوں میں مثبت عدد کو سادہ ثنائی عدد لکھیں۔

مثبت عدد $+x$ کی علامت دار روپ میں علامتی بٹ 0 سے 1 کرنے سے $-x$ کا علامت دار روپ حاصل ہو گا۔ یوں -5 کو علامت دار روپ میں لکھنے کی خاطر $+5$ کو علامت دار روپ 0101_2 میں لکھ کر علامتی بٹ 1 کرنے سے -5 کی علامت دار روپ 1101_2 حاصل ہو گی۔

منفی عدد $-x$ کو علامت دار ایک کے تکملہ روپ میں لکھنے کی خاطر $+x$ کو علامت دار شنائی عدد (یعنی سادہ شنائی روپ میں) لکھ کر اس کا 1 کا تکملہ لیں۔ یاد رہے کہ 1 کا تکملہ حاصل کرتے ہوئے شنائی عدد کے ہر ہندسہ (بمع علامتی بٹ) کا متمم لینا ہو گا۔ یوں -5 کو علامت دار ایک کے تکملہ روپ میں لکھنے کی خاطر $+5$ کو 0101_2 لکھ کر متمم لیں جو درکار روپ 1010_2 دے گا۔

منفی عدد $-x$ کو علامت دار دو کے تکملہ روپ میں لکھنے کی خاطر $+x$ کو علامت دار شنائی عدد (یعنی سادہ شنائی روپ میں) لکھ کر اس کا 2 کا تکملہ لیں۔ یاد رہے کہ 2 کا تکملہ حاصل کرتے ہوئے شنائی عدد کے ہر ہندسہ (بمع علامتی بٹ) کا متمم لینا ہو گا۔ یوں -5 کو علامت دار دو کے تکملہ روپ میں لکھنے کی خاطر $+5$ کو 0101_2 لکھ کر دو کا تکملہ لیں جو درکار روپ 1011_2 دے گا۔

باب ۳

بوولین الجبرا

بوولین الجبرا انگلستان کے ریاضی دان جارج بوولی کے نام سے جانا جاتا ہے، جنہوں نے اس الجبرا کو دریافت کیا۔ بوولین الجبرا ذہنی سوچ یعنی منطق کو الجبرائی روپ میں لکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔اس لئے حیرانی کی بات نہیں کہ کمپیوٹر اسی کو استعمال کرتا ہے۔

۳.۱ بوولین الجبرا کے بنیادی تصورات

عام الجبرا میں متغیرات استعمال کرتے ہوئے تصور کیا جاتا ہے کہ ان کی قیمت کچھ بھی ہو سکتی ہے۔ مثلاً، تفاعل $z = f(x, y)$، جہاں x اور y آزاد متغیرات جبکہ z تابع متغیر ہے، میں متغیرات کی چند ممکنہ قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	y	z
0	0	0
1	2	5
2	1	4
3	2	7
2	2	6
3	1	5

اس تفاعل جس کو ایک نامکمل جدول کے روپ میں پیش کیا گیا ہے کا الجبرائی روپ درج ذیل ہے۔

$$z = x + 2y$$

اس کے برعکس، بوولین الجبرا میں متغیرات کی صرف دو ممکنہ قیمتیں ہیں۔ ان دو قیمتوں کو عموماً 0 (صفر) اور 1 (ایک) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ بوولین تفاعل کی چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

X	Y	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

جدول ۳.۱: دو متغیر منطقی ضرب

۳.۱.۱ منطقی ضرب

تصور کریں X اور Y آزاد بوولین متغیرات ہیں، جبکہ Z ان کا تابع بوولین متغیر $Z = f(X,Y)$ ہے۔ چونکہ X بوولین متغیر ہے، لہٰذا اس کی ممکنہ قیمتیں صرف 0 اور 1 ہیں۔ اسی طرح Y بھی بوولین متغیر ہے، لہٰذا اس کی قیمت بھی صرف 0 اور 1 ہو سکتی ہے۔ تابع متغیر Z بھی بوولین متغیر ہے۔ اس طرح اگرچہ اس کی قیمت X اور Y کی تابع ہے، اس کے باوجود Z کی قیمت صرف 0 یا 1 ہی ہو سکتا ہے۔ متغیرات X اور Y درج ذیل چار ممکنہ ترتیب میں پائے جا سکتے ہیں۔

X	Y
0	0
0	1
1	0
1	1

ان چار ممکنہ صورتوں میں Z کی قیمت 0 یا 1 ہو گی۔

آئیں، جدول ۳.۱ میں پیش کیے گئے منطقی تفاعل پر غور کرتے ہیں جس کی تمام ممکنہ قیمتیں اس جدول میں دی گئی ہیں۔ اس مثال میں تابع متغیر Z کی قیمت صرف اس وقت 1 ہے جب X اور Y دونوں کی قیمت 1 ہے۔ یہی قیمتیں X اور Y کی سادہ ضرب $X \cdot Y$ سے بھی حاصل ہوتی ہیں (ذیل دیکھیں)۔

$$
\begin{aligned}
0 \cdot 0 &= 0 \\
0 \cdot 1 &= 0 \\
1 \cdot 0 &= 0 \\
1 \cdot 1 &= 1
\end{aligned}
$$

اسی کی بنا پر جدول ۳.۱ میں پیش تفاعل (اور عمل) کو بوولین ضرب یا منطقی ضرب کہتے ہیں۔ بوولین ضرب کو آزاد متغیرات کے درمیان نقطہ " · " سے یا آزاد متغیرات کو قریب قریب لکھنے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں بوولین ضرب درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$
\begin{aligned}
Z &= X \cdot Y \\
Z &= XY \qquad \text{(بوولین ضرب)}
\end{aligned}
\tag{۳.۱}
$$

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

جدول ۳.۲: تین متغیر بوولین ضرب

منطقی ضرب کے تصور کو وسعت دے کر متعدد آزاد متغیرات کے لئے بیان کیا جا سکتا ہے۔ منطقی ضرب کی عمومی تعریف پیش کرتے ہیں۔

تعریف: منطقی ضرب اس صورت 1 دیگا جب تمام آزاد متغیرات کی قیمت 1 ہو۔

□

جدول ۳.۶ کو مثال بناتے ہیں۔ اس طرح کے جدول میں آزاد متغیرات کی تمام ممکنات لکھنے (یعنی آزاد متغیرات کے خانے پر کرنے) کی خاطر مداخل XY کو شنائی عدد کے ہندسے تصور کر کے، جدول کے مطلوب خانوں میں صفر (00) تا تین (11) گنتی لکھیں۔ یوں پہلے صف میں XY کی جگہ 00، دوسری صف میں 01، تیسرے میں 10 اور آخری میں 11 لکھا جائے گا۔

تین آزاد متغیرات کے منطقی ضرب تفاعل $Z = ABC$ کو جدول ۳.۲ میں پیش کیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جدول کے تین مداخل کے خانوں میں صفر (000) تا سات (111) گنتی لکھی گئی ہے (جو تین ہندسوں کے شنائی اعداد ہیں)۔

۳.۱.۲ منطقی جمع

دو آزاد متغیرات کے بوولین تفاعل کی ایک اور مثال لیتے ہیں جس کو جدول ۳.۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ اب Z اس صورت 1 کے برابر ہے جب X یا Y یا دونوں کی قیمت 1 ہو۔ اس بوولین عمل کو بوولین جمع یا منطقی جمع کہتے ہیں۔

آزاد متغیرات X اور Y کا (روزمرہ) سادہ الجبرائی مجموعہ $S = X + Y$ جدول ۳.۴ میں پیش کیا گیا ہے۔

جدول ۳.۳ اور جدول ۳.۴ کے اولین تین نتائج ایک جیسے ہیں۔ اس مشابہت کی بنا جدول ۳.۳ میں دیے گئے بوولین تفاعل کو بوولین جمع یا منطقی جمع کہتے ہیں اور اس بوولین تفاعل کو جمع کے نشان "$+$" سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں

X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

جدول ۳.۳: دو متغیر منطقی جمع

X	Y	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	2

جدول ۳.۴: دو شنائی اعداد کا سادہ مجموعہ

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

جدول ۳.۵: تین متغیر منطقی جمع

X	Z
0	1
1	0

جدول ۳.۶: منطقی نفی یا متمم

جدول ۳.۳ میں پیش بوولین جمع تفاعل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$Z = X + Y \qquad \text{(بوولین جمع)} \tag{۳.۲}$$

یہ بوولین تفاعل کی مساوات ہے جس کو عام الجبرائی جمع ہر گز نہ سمجھا جائے۔ بالخصوص، بوولین جمع کرتے وقت یاد رہے کہ $1 + 1 = 1$ ہے۔

بوولین جمع کے تصور کو وسعت دے کر متعدد آزاد متغیرات کے لئے بیان کیا جا سکتا ہے۔ بوولین جمع کی عمومی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: منطقی جمع اس صورت 1 دیگا جب آزاد متغیرات میں کم سے کم ایک متغیر کی قیمت 1 ہو۔

□

تین متغیر منطقی جمع تفاعل $Z = A + B + C$ جدول ۳.۵ میں پیش کیا گیا ہے۔ یاد رہے کہ تین آزاد متغیرات کے منطقی جمع کا الجبرائی جمع کے ساتھ کوئی تعلق نہیں۔ یہاں جمع کی علامت بوولین جمع کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا یہاں $1 + 1 + 1 = 1$ ہو گا۔

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

جدول ۳.۷: دو متغیر منطقی بلا شرکت جمع

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

جدول ۳.۸: تین متغیر بوولین بلا شرکت جمع

۳.۱.۳ منطقی نفی

بوولین تفاعل $Z = f(X)$ کی تیسری مثال لیتے ہیں جہاں آزاد متغیر X اور تابع متغیر Z کا تعلق جدول ۳.۶ میں پیش کیا گیا ہے۔

اس تفاعل کو بوولین نفی کہتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درحقیقت، تابع متغیر Z، آزاد متغیر کا متمم ہے۔ یوں بوولین نفی درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$Z = \overline{X} \qquad \text{(بوولین نفی یا متمم)} \tag{۳.۳}$$

بوولین نفی صرف ایک آزاد متغیر کے لئے بیان کیا جا سکتا ہے، اور اس کی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: بوولین نفی آزاد متغیر کا متمم دیتا ہے۔

□

۳.۱.۴ منطقی بلا شرکت جمع

دو آزاد متغیرات کا ایسا بوولین تفاعل جدول ۳.۷ میں دکھایا گیا ہے، جس کا تابع متغیر اس صورت 1 ہے جب صرف ایک آزاد متغیر 1 ہو۔ یہ دو متغیر بوولین بلا شرکت جمع ہے۔ اس تصور کو متعدد آزاد متغیرات تک وسعت دے کر بیان کرتے ہیں۔

تعریف: طاق تعداد کے آزاد متغیرات 1 ہونے کی صورت میں بوولین بلا شرکت کا تابع متغیر 1 ہو گا۔

□

تین آزاد متغیر بلا شرکت جمع تفاعل کو جدول ۳.۸ میں پیش کیا گیا ہے۔

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

جدول ۳.۹: دو متغیر منطقی ضد بلا شرکت جمع

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

جدول ۳.۱۰: تین متغیر بوولین ضد بلا شرکت جمع

دو اور تین آزاد متغیر بوولین بلا شرکت کی مساوات درج ذیل ہوں گی۔

$$
\begin{aligned}
Z &= A \oplus B && \text{(دو آزاد متغیر بلا شرکت جمع)}\\
Z &= A \oplus B \oplus C && \text{(تین آزاد متغیر بلا شرکت جمع)}
\end{aligned}
\tag{۳.۴}
$$

۳.۱.۵ منطقی ضد بلا شرکت جمع

بوولین بلا شرکت جمع تفاعل کا نفی (یعنی متمم) لینے سے بوولین ضد بلا شرکت جمع حاصل ہو گا، جو دو اور تین آزاد متغیرات کے لئے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
Z &= \overline{A \oplus B}\\
Z &= \overline{A \oplus B \oplus C} && \text{(تین متغیر منطقی ضد بلا شرکت جمع)}
\end{aligned}
\tag{۳.۵}
$$

جدول ۳.۷ اور جدول ۳.۸ میں تابع متغیر نفی کرنے سے بالترتیب دو اور تین بوولین ضد بلا شرکت تفاعل حاصل ہوں گے جنہیں جدول ۳.۹ اور جدول ۳.۱۰ میں پیش کیا گیا ہے۔

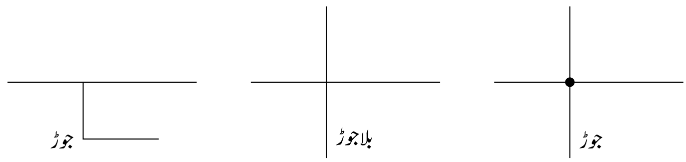
۳.۲ برقی تاروں میں جوڑ کی وضاحت

شکل ۳.۱ پر غور کریں جس میں برقی تاروں کے بیچ جوڑ کی وضاحت کی گئی ہے۔

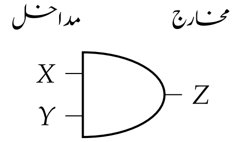
جہاں ایک تار دوسری تار کے اوپر سے گزرتی ہو اور دونوں آپس میں جڑی ہوں، وہاں جوڑ کے مقام پر نقطے کا نشان لگایا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں انہیں ایک تار تصور کیا جائے۔

جہاں تاریں آپس میں جڑی نہ ہوں وہاں انہیں بغیر نقطے کے نشان سے ایک دوسری کے اوپر سے گزرتا دکھایا جاتا ہے۔ نقطہ کے نشان کی غیر موجودگی میں ان تاروں کو دو علیحدہ اور بلا جوڑ تاریں سمجھا جائے۔

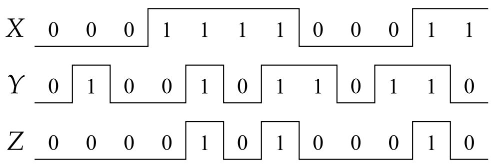
تیسری صورت بھی شکل میں دکھائی گئی ہے جہاں غلط فہمی کا امکان نہیں پایا جاتا۔ اس میں ایک تار کا سر دوسری تار پر ختم ہو تا ہے۔ ایسی صورت میں انہیں ایک تار تصور کیا جائے (یعنی یہ دونوں آپس میں جڑی ہیں)۔



شکل ۳.۱: تاروں کے بیچ برقی جوڑ۔



شکل ۳.۲: دو مداخل ضرب گیٹ۔



شکل ۳.۳: ضرب گیٹ کی کارکردگی۔

۳.۳ عددی گیٹ

بولین الجبرا کے تین اہم ترین تفاعل پر حصہ ۳.۱ میں غور کیا گیا۔ یہ تفاعلات عددی برقیات میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں، جہاں انہیں عددی ادوار کی مدد سے جامہ پہنایا جاتا ہے۔ یہ مخصوص عددی ادوار، عددی گیٹ کہلاتے ہیں۔

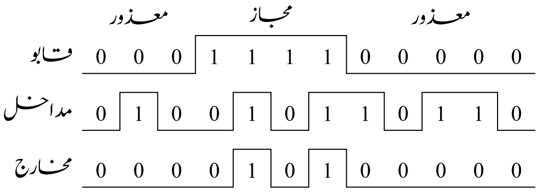
۳.۳.۱ ضرب گیٹ

منطقی (بولین) ضرب تفاعل کو ضرب گیٹ سے عملی جامع پہنایا جاتا ہے، جو شکل ۳.۲ میں دکھایا گیا ہے۔ آزاد متغیرات، X اور Y، ضرب گیٹ کی بائیں جانب ہیں جبکہ تابع متغیر، Z، دائیں جانب ہے۔ آزاد متغیرات کو مداخل جبکہ تابع متغیر کو مخارج کہتے ہیں۔ دو متغیر ضرب گیٹ (دو مداخل ضرب گیٹ) کے دو مداخل اور ایک مخارج ہو گا۔ یہ گیٹ، ضرب تفاعل کے جدول کو مطمئن کرتا ہے۔

شکل ۳.۳ میں دو مداخل ضرب گیٹ کی کارکردگی ترسیم کی گئی ہے، جہاں 0 کو پست اور 1 کو بلند لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مخارج صرف اور صرف اُس صورت بلند ہوتا ہے جب ضرب گیٹ کے تمام مداخل بلند ہوں۔ ہم 0 کو پست اور 1 کو بلند بھی پکارتے ہیں۔ اس شکل میں مداخل کو کسی خاص ترتیب سے تبدیل نہیں کیا گیا۔

ضرب گیٹ کو شکل ۳.۴ میں بطور عددی گیٹ یا عددی سوئچ دکھایا گیا ہے جہاں ایک داخلی پنیا کو قابو پنیا کا نام دیا گیا ہے جبکہ دوسرے کو (اب بھی) مداخل کہا گیا ہے۔ ضرب گیٹ کے جدول سے واضح ہے کہ جب تک قابو پنیا 0 ہو، خارجی پنیا 0 رہتا ہے۔ اس صورت میں مداخل پر موجود مواد، خارجی پنیا تک نہیں پہنچ سکتا، یعنی اس پر 0 یا 1 کا مخارج پر کوئی اثر نہیں ہوتا؛ ہم کہتے ہیں قابو پنیا نے ضرب گیٹ کو معذور کر دیا۔ اس کے برعکس اگر قابو پنیا 1 ہو تب خارجی پنیا پر وہی کچھ ہو گا جو مداخل پر ہو گا؛ ہم کہتے ہیں ضرب گیٹ مجاز کر دیا گیا ہے۔ قابو پنیا پر ایک یا صفر سے داخلی اشارہ (مواد) کو خارجی پنیا تک پہنچنا، ممکن یا ناممکن بنایا جا سکتا

شکل ۳.۴: ضرب گیٹ بطور سوئچ یا ایک بٹ گیٹ۔



شکل ۳.۵: ضرب گیٹ کی کارکردگی۔

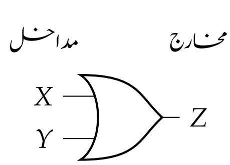
ہے۔ یوں یہ ایک دروازے کی طرح کام کرتا ہے، جس کی بنا پر یہ گیٹ کہلاتا ہے۔ قابو پنیا کو، معذور اور مجاز بنانے والا پنیا بھی کہتے ہیں۔ شکل ۳.۵ میں ضرب گیٹ کی کارکردگی دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ صرف مجاز صورت میں مواد مخارج تک پہنچ پاتا ہے؛ معذور صورت میں مخارج ہمیشہ پست رہے گا۔

۳.۳.۲ جمع گیٹ

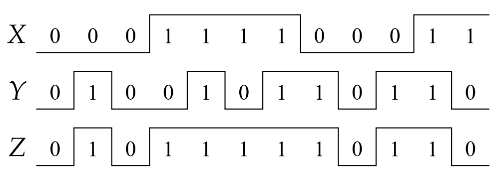
منطقی جمع (بوولین جمع) تفاعل کو جمع گیٹ سے عملی جامع پہنایا جاتا ہے۔ دو مداخل جمع گیٹ شکل ۳.۶ میں دکھایا گیا ہے۔ یہ گیٹ، جمع تفاعل کے جدول کو مطمئن کرتا ہے۔

جمع گیٹ کی کارکردگی شکل ۳.۷ میں ترسیم کی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں، جمع گیٹ کا مخارج اُس صورت بلند ہو گا جب کوئی مداخل بلند ہو۔

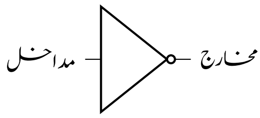
جمع گیٹ میں اگر ایک پنیا کو قابو پنیا سمجھا جائے تو پست قابو، گیٹ کو مجاز بنا کر، داخلی مواد کو مخارج تک پہنچنے کی اجازت دیتا ہے، جبکہ بلند قابو کی صورت میں مخارج لازماً بلند رہتا ہے۔



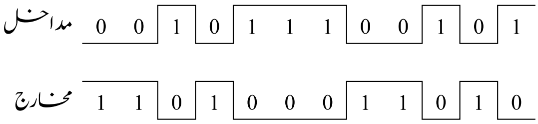
شکل ۳.۶: دو مداخل جمع گیٹ۔



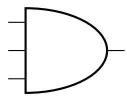
شکل ۳.۷: جمع گیٹ کی کارکردگی۔



شکل ۳.۸: نفی گیٹ

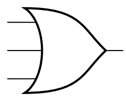


شکل ۳.۹: نفی گیٹ کی کارکردگی۔



A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

شکل ۳.۱۰: تین مداخل ضرب گیٹ۔



A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

شکل ۳.۱۱: تین مداخل جمع گیٹ۔

۳.۳.۳ نفی گیٹ

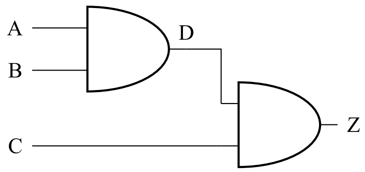
نفی تفاعل کو نفی گیٹ سے عملی جامع پہنایا جاتا ہے، جس کی علامت شکل ۳.۸ میں دکھائی گئی ہے، اور جو مواد کو مخارج تک پہنچنے سے روک نہ پانے کے باوجود (نفی) "گیٹ" کہلاتا ہے۔ اس کی کارکردگی شکل ۳.۹ میں ترسیم کی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں، نفی گیٹ کا مخارج اس کے مداخل کا اُلٹ ہو گا۔ یہ گیٹ، نفی تفاعل کے جدول کو مطمئن کرتا ہے۔

نفی تفاعل ایک آزاد اور ایک تابع متغیر رکھتا ہے، لہٰذا نفی گیٹ کا ایک مداخل اور ایک مخارج ہو گا۔

۳.۳.۴ متعدد مداخل گیٹ

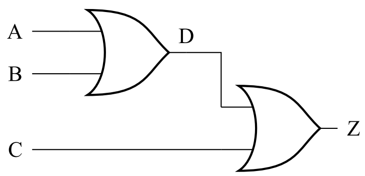
ضرب گیٹ اور جمع گیٹ کے متعدد مداخل ہو سکتے ہیں (تاہم، ان کا مخارج ایک ہو گا)۔ شکل ۳.۱۰ میں تین مداخل ضرب گیٹ اور جدول، اور شکل ۳.۱۱ میں تین مداخل جمع گیٹ اور جدول دکھائے گئے ہیں، جہاں A، B، اور C مداخل جبکہ Z مخارج ہے۔ ضرب گیٹ کا مخارج اس صورت بلند ہو گا جب تمام مداخل بلند ہوں، جبکہ جمع گیٹ کا مخارج اس صورت بلند ہو گا جب کوئی بھی مداخل بلند ہو۔

شکل ۳.۱۲ میں دو ضرب گیٹ یوں جوڑے گئے ہیں کہ ایک کا مخارج دوسرے کے مداخل سے جڑا ہے۔ ساتھ ہی اس دور کا بولین جدول دیا گیا ہے۔ پہلے جدول استعمال کیے بغیر اس دور کو سمجھنے کی کوشش کرتے ہیں۔ مخارج Z اس صورت بلند ہو گا جب دائیں گیٹ کے مداخل C اور D دونوں بلند ہوں لیکن D بلند ہونے کے لئے ضروری ہے کہ بائیں گیٹ کے مداخل A اور B دونوں بلند ہوں۔ یوں A، B اور C بلند ہونے کی صورت میں مخارج Z بلند ہو گا؛ یہی تین مداخل ضرب گیٹ کی خاصیت ہے۔



A	B	C	D	Z
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

شکل ۳.۱۲: دو مداخل ضرب گیٹ سے تین مداخل ضرب گیٹ کا حصول۔



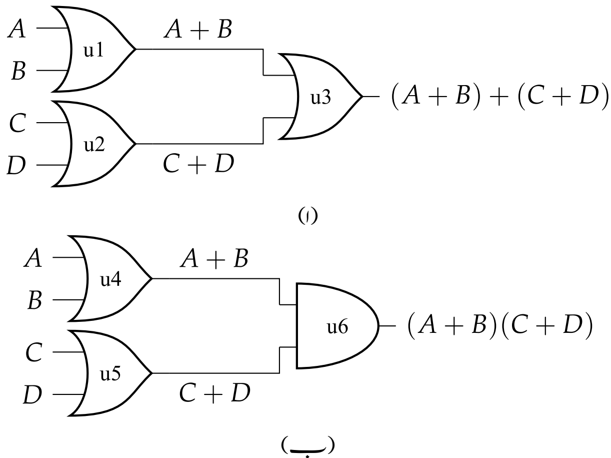
A	B	C	D	Z
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

شکل ۳.۱۳: دو مداخل جمع گیٹ سے تین مداخل جمع گیٹ کا حصول۔

آئیں اب جدول کو سمجھتے ہیں۔ تین مداخل ABC کے خانوں کو تین ہندسوں کے ثنائی اعداد 000 تا 111 سے پُر کریں۔ اس کے بعد بائیں ضرب گیٹ کے مخارج D کے خانے پُر کریں۔ یاد رہے کہ یہ صرف A اور B پر منحصر ہے اور صرف اس صورت بلند ہو گا جب یہ دونوں بلند ہوں، جو آخری دو صفوں میں ہو گا۔ اس کے بعد دائیں ضرب گیٹ کے مخارج Z کے خانے پُر کریں۔ یہ صرف C اور D پر منحصر ہے، اور بلند صرف اس صورت ہو گا جب یہ دونوں بلند ہوں۔

ان نتائج کا جدول ۳.۱۰ میں پیش تین مداخل ضرب گیٹ کے جدول کے ساتھ کریں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شکل ۳.۱۲ میں دونوں ضرب گیٹ مل کر تین مداخل ضرب گیٹ کا کردار ادا کرتے ہیں۔ یوں دو داخلی ضرب گیٹوں کی مدد سے زیادہ مداخل کا ضرب گیٹ حاصل کیا جا سکتا ہے۔

شکل ۳.۱۳ میں دو مداخل جمع گیٹوں سے تین مداخل جمع گیٹ کا حصول دکھایا گیا ہے۔ یہاں Z صرف اس صورت پست ہو گا جب دائیں گیٹ کے دونوں مداخل، C اور D، پست ہوں لیکن D صرف اس صورت پست ہو سکتا ہے جب بائیں گیٹ کے مداخل، A اور B، پست ہوں۔ یوں Z صرف اس صورت پست ہو گا جب A، B، اور C پست ہوں، جو تین مداخل جمع گیٹ کی خاصیت ہے۔



شکل ۳.۱۴: جمع اور ضرب گیٹ کے ادوار۔

جمع گیٹ اور ضرب گیٹ پر مبنی، شکل ۳.۱۴ میں دکھائے گئے ادوار کو مثال بنا کر، عددی ادوار حل کرنا سیکھتے ہیں۔

شکل ۳.۱۴-الف سے آغاز کرتے ہیں جہاں گیٹوں کو $u1$ ، $u2$ ، اور $u3$ کے نام دیے گئے ہیں۔ جمع گیٹ $u1$ اور $u2$ کے خارجی پنیے، جمع گیٹ $u3$ کے داخلی پنیوں سے جڑے ہیں۔ چونکہ $u1$ کا مخارج $A + B$ اور $u2$ کا مخارج $C + D$ دیگا، لہٰذا $u3$ کا مخارج $(A + B) + (C + D)$ یعنی $A + B + C + D$ دیگا۔

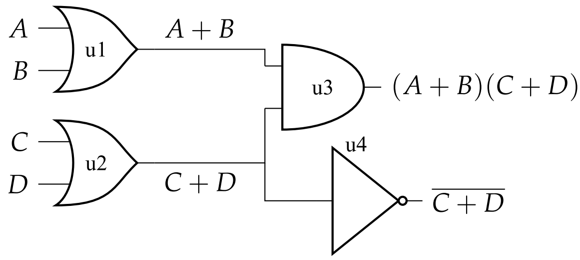
آئیں اب شکل ۳.۱۴-ب حل ہیں۔ یہاں $u4$ اور $u5$ کے مخارج بالترتیب $A + B$ اور $C + D$ دیں گے۔ چونکہ $u6$ ضرب گیٹ ہے، لہٰذا اس کا مخارج $(A + B)(C + D)$ دیگا۔

شکل ۳.۱۵-الف میں $u2$ کا مخارج $u3$ کے مداخل اور $u4$ کے مداخل کے ساتھ جڑا ہے۔ گیٹ $u1$ اور $u2$ کے مخارج بالترتیب $A + B$ اور $C + D$ ہیں۔ گیٹ $u3$ کا مخارج $(A + B)(C + D)$ اور $u4$ کا مخارج $\overline{C + D}$ ہوگا۔

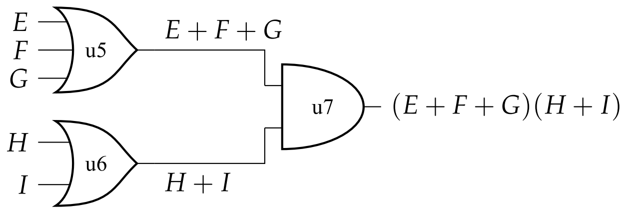
آپ شکل ۳.۱۵-ب کا حل، شکل کو دیکھ کر سمجھ سکتے ہیں۔

۳.۳.۵ ضرب متمم گیٹ اور جمع متمم گیٹ

شکل ۳.۱۶-الف میں تین مداخل ضرب گیٹ کا مخارج ABC ہوگا، جو نفی گیٹ کا مداخل ہے، لہٰذا نفی گیٹ کا مخارج $Z = \overline{ABC}$ ہوگا۔ ضرب گیٹ کے مخارج کا متمم اتنی اہمیت رکھتا ہے کہ اس کے لئے علیحدہ گیٹ بنایا گیا ہے، جسے ضرب متمم گیٹ (یا ضد ضرب گیٹ) کہتے ہیں اور جو شکل-ب میں (تین مداخل کے لئے) دکھایا گیا ہے۔ ضرب گیٹ کے جدول کا متمم لینے سے ضرب متمم گیٹ کا جدول حاصل ہوگا جو اسی شکل میں پیش کیا گیا ہے۔



(ا)



(ب)

شکل ۳.۱۵: گیٹوں کا دوسرا دور۔

دو مداخل ضرب متمم گیٹ کی مساوات درج ذیل ہو گی، جہاں X اور Y مداخل جبکہ Z مخارج ہے۔

$$Z = \overline{XY} = \overline{X} + \overline{Y} \qquad \text{(ضرب متمم)} \tag{۳.۶}$$

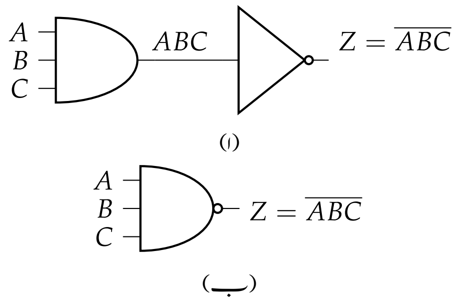
شکل ۳.۱۷-الف میں تین مداخل جمع گیٹ کا مخارج $A + B + C$ ہو گا، جو نفی گیٹ کا مداخل ہے، لہٰذا نفی گیٹ کا مخارج $Z = \overline{A + B + C}$ ہو گا۔ جمع گیٹ کے مخارج کا متمم اتنی اہمیت رکھتا ہے کہ اس کے لئے علیحدہ گیٹ بنایا گیا ہے، جسے جمع متمم گیٹ (یا ضد جمع گیٹ) کہتے ہیں اور جو شکل-ب میں (تین مداخل کے لئے) دکھایا گیا ہے۔ جمع گیٹ کے جدول کا متمم لینے سے جمع متمم گیٹ کا جدول حاصل ہو گا جو اسی شکل میں پیش کیا گیا ہے۔

دو مداخل جمع متمم گیٹ کی مساوات درج ذیل ہو گی، جہاں X اور Y مداخل جبکہ Z مخارج ہے۔

$$Z = \overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y} \qquad \text{(جمع متمم)} \tag{۳.۷}$$

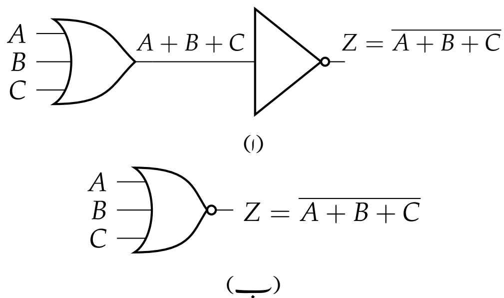
شکل ۳.۱۸ میں ضرب متمم اور جمع متمم گیٹ سے نفی گیٹ کا حصول دکھایا گیا ہے۔ ضرب متمم کے دونوں مداخل کو آپس میں جوڑا گیا ہے، لہٰذا دونوں مداخل پر X ہو گا۔ یوں مخارج $Z = \overline{X \cdot X}$ یعنی $Z = \overline{X}$ ہو گا؛ یہاں اس حقیقت کو استعمال کیا گیا ہے کہ اگر $X = 0$ ہو تب $X \cdot X$ بھی 0 ہو گا، اور اگر $X = 1$ ہو تب $X \cdot X$ بھی 1 ہو گا، لہٰذا $X = X \cdot X$ لکھا جا سکتا ہے۔ نفی گیٹ کا مخارج بھی یہی ($Z = \overline{X}$) دیگا، لہٰذا ضرب گیٹ کے دونوں مداخل آپس میں جوڑنے سے نفی گیٹ کی کارکردگی حاصل ہو گی۔ اسی طرح (تسلی کر لیں کہ) جمع گیٹ کے مداخل آپس میں جوڑنے سے بھی نفی گیٹ حاصل ہو گا۔

A	B	C	Z
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0



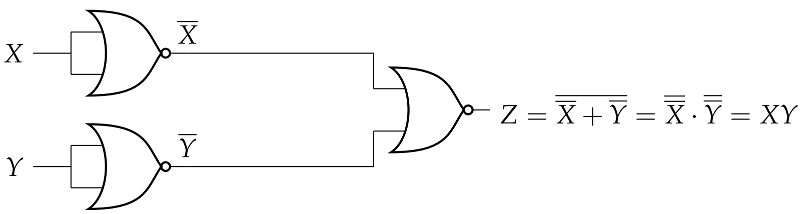
شکل ۳.۱۶: ضرب متمم گیٹ یا ضد ضرب گیٹ۔

A	B	C	Z
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

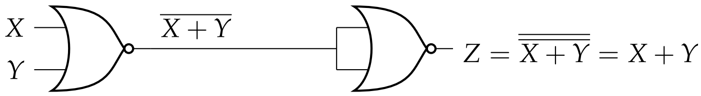


شکل ۳.۱۷: جمع متمم گیٹ یا ضد جمع گیٹ۔

شکل ۳.۱۸: ضرب متمم اور جمع متمم گیٹ سے نفی گیٹ کا حصول۔



(ا)



(ب)

شکل ۳.۱۹: جمع متمم سے (ا) ضرب گیٹ اور (ب) جمع گیٹ کا حصول۔

شکل ۳.۱۹-الف میں تین جمع متمم گیٹ یوں جوڑے گئے ہیں کہ $Z = XY$ حاصل ہو، جو ضرب گیٹ کی کارکردگی ہے۔ یوں جمع متمم گیٹوں سے ضرب گیٹ حاصل ہو گا۔

شکل ۳.۱۹-ب میں جمع گیٹ کا حصول دکھایا گیا ہے۔ اس کا مخارج $Z = X + Y$ ہے۔

شکل ۳.۲۰ میں ضرب متمم گیٹ سے (ا) جمع گیٹ اور (ب) ضرب گیٹ کا حصول دکھایا گیا ہے۔

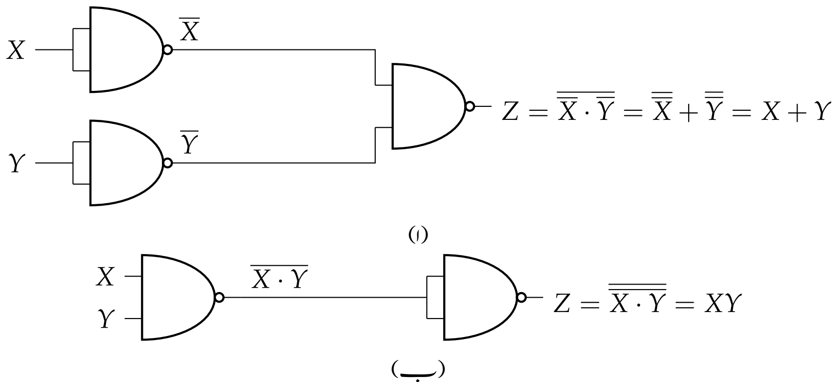
۳.۳.۶ بلا شرکت جمع گیٹ اور بلا شرکت جمع متمم گیٹ

بلا شرکت جمع تفاعل کو بلا شرکت جمع گیٹ سے حاصل کیا جاتا ہے جس کا جدول اور علامت، شکل ۳.۲۱-الف میں پیش کیے گئے ہیں۔ اسی طرح بلا شرکت جمع متمم (یا ضد بلا شرکت جمع) تفاعل کو بلا شرکت جمع متمم گیٹ (یعنی ضد بلا شرکت جمع گیٹ) کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے جس کا جدول اور علامت، شکل-ب میں پیش کیے گئے ہیں۔

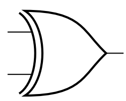
بلا شرکت جمع گیٹ کے مخارج کے ساتھ نفی گیٹ منسلک کرنے سے بلا شرکت جمع متمم گیٹ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ بلا شرکت جمع گیٹ کی کارکردگی شکل ۳.۲۲ میں دکھائی گئی ہے، جہاں X اور Y مداخل جبکہ Z مخارج ہے۔

تین مداخل بلا شرکت جمع گیٹ کا مخارج حاصل کرنے کے لئے اس کے کسی دو مداخل کا بلا شرکت جمع حاصل کریں اور حاصل جواب کا تیسرے مداخل کے ساتھ بلا شرکت جمع لیں۔ یہی بلا شرکت جمع ہو گا۔ متعدد مداخل بلا شرکت جمع گیٹ کا مخارج اُس صورت بلند ہو گا جب بلند مداخل کی تعداد طاق ہو۔

آپ سے گزارش ہے کہ مذکورہ بالا تفاعلات اور گیٹوں کو اچھی طرح سمجھیں اور ذہن نشین کریں۔

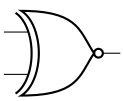


شکل ۳.۲۰: ضرب متمم سے (ا) جمع گیٹ اور (ب) ضرب گیٹ کا حصول۔



A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

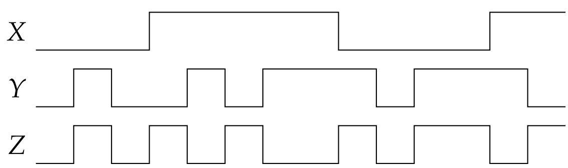
(ا)



A	B	C	Z
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

(ب)

شکل ۳.۲۱: (ا) بلا شرکت جمع گیٹ اور (ب) بلا شرکت جمع متمم گیٹ۔



شکل ۳.۲۲: بلا شرکت جمع گیٹ کی کارکردگی۔

۳.۴ گیٹوں کے برقی خواص

گیٹ (کا مخارج) اس صورت بلند تصور کیا جاتا ہے جب اس (کے مخارج پنیا) کا خارجی دباو ایک مخصوص قیمت یا اس سے زیادہ ہو۔ یہ قیمت بلند خارجی برقی دباو V_{OH} کہلاتی ہے۔ بلند صورت میں گیٹ مخارج پنیے پر ایک مخصوص قیمت تک برقی رو خارج (مہیا) کر سکتا ہے، جو گیٹ کا بلند خارجی برقی رو I_{OH} کہلاتا ہے۔

گیٹ (کا مخارج) اس صورت پست تصور کیا جاتا ہے جب اس (کے مخارج پنیا) کا خارجی دباو ایک مخصوص قیمت یا اس سے کم ہو۔ یہ قیمت پست خارجی برقی دباو V_{OL} کہلاتی ہے۔ پست گیٹ، مخارج پنیے پر ایک مخصوص قیمت تک برقی رو جذب کر سکتا ہے، جو گیٹ کا پست خارجی برقی رو I_{OL} کہلاتا ہے۔

گیٹ ایک مخصوص قیمت اور اس سے زیادہ داخلی برقی دباو کو بلند تصور کرتا ہے۔ اس برقی دباو کو بلند داخلی برقی دباو V_{IH} کہتے ہیں۔ گیٹ کے کسی ایک مداخل کو بلند کرنے کی خاطر درکار برقی رو کو بلند داخلی برقی رو I_{IH} کہتے ہیں۔

گیٹ ایک مخصوص قیمت اور اس سے کم داخلی برقی دباو کو پست تصور کرتا ہے۔ اس قیمت کو پست داخلی برقی دباو V_{IL} کہتے ہیں۔ گیٹ کے کسی ایک مداخل کو پست کرنے کی خاطر درکار برقی رو کو پست داخلی برقی رو I_{IL} کہتے ہیں۔

گیٹوں کو آپس میں برقی تاروں سے جوڑا جاتا ہے۔ کبھی کبھار ان تاروں میں، جائے استعمال پر پائے جانے والے تغیر پذیر برقی و مقناطیسی میدان کی وجہ سے، غیر ضروری اور ناپسندیدہ برقی دباو پیدا ہوتا ہے جسے برقی شور کہتے ہیں۔ ایک گیٹ کے پست خارجی برقی دباو کے ساتھ یہ شور جمع ہو کر اگلے گیٹ کے پست داخلی برقی دباو سے تجاوز کر سکتا ہے۔ اسی طرح برقی شور بلند خارجی برقی دباو سے نفی ہو کر بلند داخلی برقی دباو سے کم ہو سکتا ہے۔ ان دونوں صورتوں میں اگلا گیٹ غیر متوقع نتائج دیگا۔

بلند خارجی برقی دباو کی قیمت، بلند داخلی برقی دباو کی قیمت سے زیادہ ہوتی ہے۔ ان کے فرق کو بلند شور گنجائش V_{NH} کہتے ہیں (شکل ۳.۲۳ دیکھیں)۔

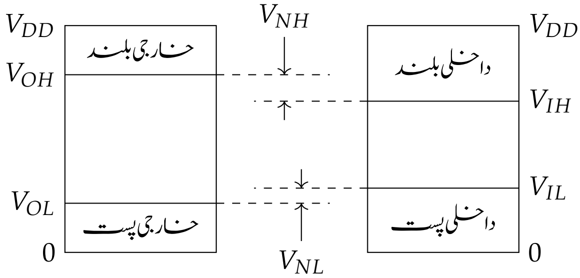
$$V_{NH} = V_{OH} - V_{IH} \tag{۳.۸}$$

پست خارجی برقی دباو کی قیمت، پست داخلی برقی دباو کی قیمت سے کم ہوتی ہے۔ ان کے فرق کو پست شور گنجائش V_{NL} کہتے ہیں۔

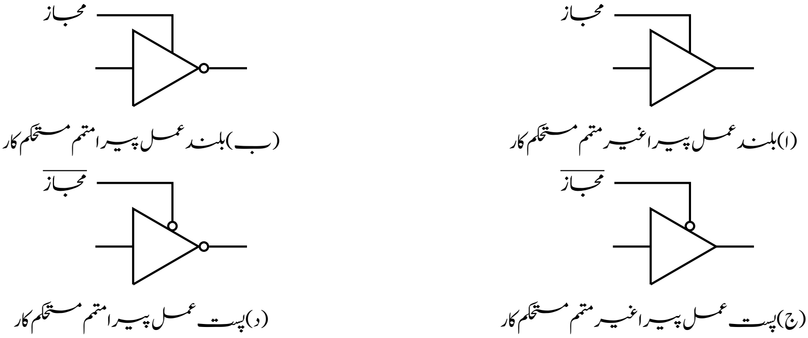
$$V_{NL} = V_{IL} - V_{OL} \tag{۳.۹}$$

شکل ۳.۲۳ میں V_{DD} گیٹ کو مہیا کردہ برقی دباو ہے جسے اس کتاب میں مثبت پانچ وولٹ $(5\,\mathrm{V})$ تصور کیا گیا ہے جبکہ 0 سے مراد صفر وولٹ برقی دباو (یعنی برقی زمین) ہے۔

پست داخلی برقی دباو اور بلند داخل برقی دباو کے بیچ سعت (V_{IL} تا V_{IH}) معنی نہیں رکھتا اور غیر متوقع صورت پیدا کر سکتا ہے، لہٰذا عددی اشارات اس خطہ کو استعمال نہیں کرتے۔ گیٹ اپنے مخارج کو تب تک بلند رکھ سکتا ہے جب تک یہ (اپنی) بلند خارجی برقی رو حد یا اس سے کم برقی رو مہیا کرتا ہو۔ اسی طرح گیٹ اپنے مخارج تب تک پست رکھ سکتا ہے جب تک گیٹ (اپنی) پست خارجی برقی رو حد یا اس سے کم رو جذب کرے۔ ایسے مقام پر جہاں گیٹ ان حدود کے اندر نہ رہ سکے، ایسا توانا گیٹ نسب کیا جائے گا جو زیادہ برقی رو خارج یا (اور) جذب کر سکے۔ یہ توانا گیٹ، مستحکم کار کہلاتا ہے، جس پر اب غور کرتے ہیں۔



شکل ۳.۲۳: شور کی گنجائش کا تخمینہ۔



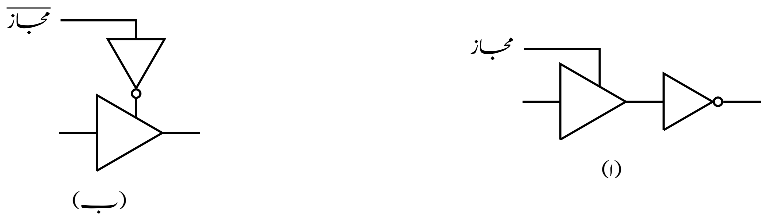
شکل ۳.۲۴: مجاز و معذور صلاحیت کے مستحکم کار۔

۳.۴.۱ مستحکم کار

جیسا ذکر ہو،ا مستحکم کار وہ توانا گیٹ ہے جو زیادہ برقی رو خارج اور جذب کر سکتا ہے۔ اسے عموماً اس مقام پر نسب کیا جاتا ہے جہاں درکار برقی رو عام گیٹ کے برقی رو کی حدود سے تجاوز کرتا ہو۔ عموماً مستحکم کار مجاز و معذور ہونے کی صلاحیت بھی رکھتا ہے۔

مستحکم کار کی مختلف اقسام کی علامتیں شکل ۳.۲۴ میں دکھائی گئی ہیں۔ مجاز کردہ مستحکم کار، داخلی مواد کو خارج کرتا ہے جبکہ معذور کردہ مستحکم کار منقطع سوئچ کی طرح دونوں اطراف کے ادوار منقطع کرتا ہے۔ معذور مستحکم کار "زیادہ رکاوٹی حال" اختیار کرتے ہوئے نہ 0 اور نہ 1 خارج کرتا ہے۔

مجاز و معذور صلاحیت کے مستحکم کار بطور برقی سوئچ کام کرتے ہیں۔ شکل ۳.۲۴-ا اور ب کے مستحکم کار کو منقطع کرنے کی خاطر "مجاز" کو پست کیا جائے گا، جبکہ اسے بلند کرنے سے مستحکم کار مجاز ہو کر مداخل کے مواد کو مخارج تک پہنچائے گا۔ شکل-ج اور د میں مستحکم کار کے مخارج کو مداخل سے منقطع کرنے کی خاطر $\overline{\text{مجاز}}$ برقی اشارہ کو بلند کیا جائے گا، جبکہ انہیں جوڑنے کی خاطر اس برقی اشارے کو پست کیا جائے گا۔ مزید، شکل ب اور د



شکل ۳.۲۵: نفی گیٹ استعمال کرنے سے دیگر مستحکم کار حاصل کیے جاتے ہیں۔

میں مخارج پر داخلی اشارے کا متمم حاصل ہو گا۔ انہیں وجوہات کی بنا پر شکل ۳.۲۴-ا کا دور **بلند عمل پیرا غیر متمم مستحکم کار**[1]، شکل-ب **بلند عمل پیرا متمم مستحکم کار**[2]، شکل-ج **پست عمل پیرا غیر متمم مستحکم کار**[3]، اور شکل-د **پست عمل پیرا متمم مستحکم کار**[4] کہلاتے ہیں۔

شکل ۳.۲۴-الف کے مستحکم کار کے مخارج کو نفی گیٹ سے منسلک کر کے شکل-ب کا مستحکم کار حاصل ہو گا (شکل ۳.۲۵-الف دیکھیں) جس کا مخارج داخلی اشارے کا متمم ہو گا۔ اسی طرح شکل ۳.۲۴-الف کے قابو اشارہ (مجاز) سے پہلے نفی گیٹ نسب کرنے سے شکل-ج حاصل ہو گا (شکل ۳.۲۵-ب دیکھیں)۔ شکل ۳.۲۴-الف کے قابو اشارہ (مجاز) سے پہلے اور مخارج کے بعد نفی گیٹ نسب کرنے سے شکل-د حاصل ہو گا۔

بلند عمل پیرا غیر متمم مستحکم کار (شکل ۳.۲۴-الف) کی کار کردگی جدول ۳.۱۱-الف میں پیش کی گئی ہے۔ غیر مجاز مستحکم کار کا مخارج "بلند رکاوٹی حال" میں ہو گا۔ جدول-الف کی اولین دو صف اس صورت کو ظاہر کرتی ہیں؛ چونکہ غیر مجاز حال میں مداخل کی قیمت نتائج پر اثر انداز نہیں ہوتی، انہیں جدول میں x سے ظاہر کیا جاتا ہے (جدول-ب دیکھیں)؛ جہاں x "غیر دلچسپ" قیمتوں کو ظاہر کرتا ہے (جن کا 0 یا 1 ہونے کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا)۔

جدول سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ "مجاز" کو پست (0) کرنے سے مستحکم کار بلند رکاوٹی حال اختیار کر کے، مخارج سے جڑے ادوار پر کسی قسم کا اثر نہیں رکھتا۔ مجاز بلند (1) کرنے سے مخارج پر وہی مواد خارج ہو گا جو مداخل پر مہیا کیا جائے۔

مستحکم کار داخلی جانب سے خارجی جانب مواد منتقل کرتا ہے۔ جہاں دو ادوار کے مابین دونوں جانب مواد کی ترسیل درکار ہو، وہاں دو مستحکم کار آپس میں متوازی اُلٹ جوڑے جاتے ہیں، شکل ۳.۲۶-الف دیکھیں۔ اس کو دو طرفہ مستحکم کار کہتے ہیں۔ شکل-ب میں اس کی علامت پیش کی گئی ہے۔ بلند "مجاز" کی صورت میں $u1$ مجاز اور $u2$ معذور ہو گا لہٰذا مواد بائیں سے دائیں منتقل ہو گا، جبکہ پست "مجاز" کی صورت میں $u2$ مجاز اور $u1$

---

[1] active high non inverting buffer
[2] active high inverting buffer
[3] active low non inverting buffer
[4] active low inverting buffer

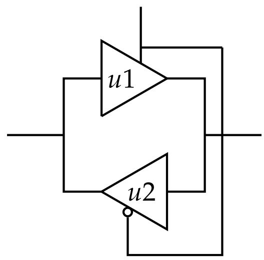
جدول ۳.۱۱: بلند عمل پیر اغیر متمم مستحکم کار کی کارکردگی۔

(ا)

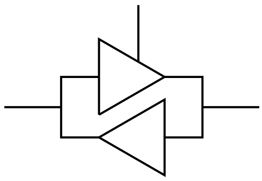
مخارج	مداخل	مجاز
بلند رکاوٹی حال	0	0
بلند رکاوٹی حال	1	0
0	0	1
1	1	1

(ب)

مخارج	مداخل	مجاز
بلند رکاوٹی حال	x	0
0	0	1
1	1	1



(ا)



(ب)

شکل ۳.۲۶: دوطرفہ مستحکم کار۔

معذور ہوگا لہٰذا مواد دائیں سے بائیں منتقل ہوگا۔

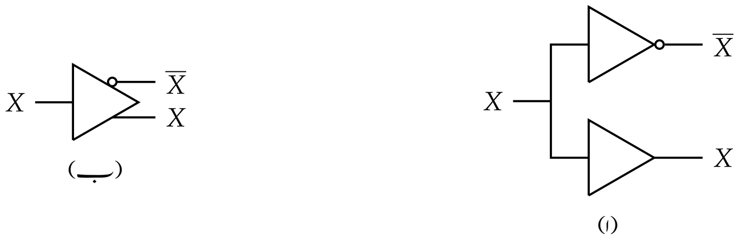
اسی طرح متمم دوطرفہ مستحکم کار بھی بنایا جاتا ہے، جو مواد کا متمم خارج کرے گا۔

مستحکم کار اور متمم مستحکم کار کے مداخل آپس میں جوڑنے سے ان کے مخارج پر تضاد حال حاصل کیے جا سکتے ہیں؛ شکل ۳.۲۷-الف دیکھیں۔ شکل-ب میں اس کی علامت پیش کی گئی ہے۔

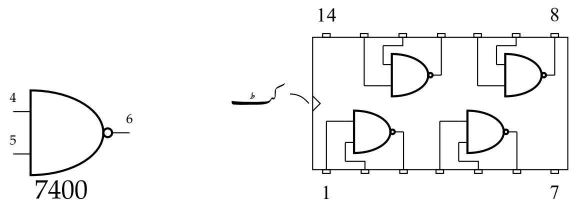
۳.۴.۲ مخلوط ادوار

عام دستیاب ضرب متمم گیٹ شکل ۳.۲۸ میں دکھایا گیا ہے۔ برقیاتی ادوار، عموماً، اسی طرح ڈبی میں بند دستیاب ہوں گے جنہیں مخلوط دور کہتے ہیں۔ مخلوط ادوار پر مخلوط دور کا اعدادی نام مثلاً 7400 درج ہوگا؛ اس عدد کے ہندسوں کے بیچ یا اطراف پر حروف بھی ہوں گے جو اضافی معلومات فراہم کرتے ہیں۔ ساتھ ہی ڈبی پر دوسرا عدد مخلوط دور تیار کرنے کی تاریخ دے گا۔ مثلاً یہاں دوسرے عدد کے مطابق یہ مخلوط دور سن 1976 کے پینتالیسویں (45) ہفتے میں کارخانے میں تیار کیا گیا۔ جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے، اس مخلوط دور میں چار ضرب متمم گیٹ موجود ہیں۔

ڈبی پر "کٹ" کے نشان سے گھڑی مخالف رخ پنیے گنے جاتے ہیں۔ گیٹ کی علامت میں پنیے پر لکھا عدد ڈبی



شکل ۳.۲۷: اشارہ اور اشارے کا متمم دیتا مستحکم کار۔



شکل ۳.۲۸: مخلوط دور 7400

میں اس پنیے کا مقام دیتا ہے۔ یوں گیٹ کے خارجی پنیے پر 6 اس پنیے کا ڈبی میں مقام دیتا ہے۔ گیٹ کا خاکہ بناتے وقت اس کے قریب مخلوط دور کا نام (یا نمبر جو یہاں 7400 ہے) بھی لکھا جاتا ہے۔

چند مخلوط ادوار درج ذیل ہیں۔

نام	گیٹ	ڈبی میں گیٹوں کی تعداد
7400	دو مداخل ضرب متمم	4
7402	دو مداخل جمع متمم	4
7404	نفی	6
7406	متمم مستحکم کار	6
7408	دو مداخل ضرب	4

مشق ۳.۱: انٹرنیٹ سے مندرجہ بالا تمام مخلوط ادوار کے **معلوماتی صفحات**[5] حاصل کریں اور ان میں علیحدہ علیحدہ گیٹوں کے مقام دریافت کریں۔ معلوماتی صفحات میں بکثرت مواد موجود ہو گا جنہیں دیکھ کر پریشان مت ہوں۔

---

[5] datasheet

آپ نے کئی مخلوط ادوار جدول ۳.۲۸ میں دیکھے جن کے نمبر 74 سے شروع ہوئے۔ دراصل $74xx$ مخلوط ادوار کا ایک سلسلہ ہے جس میں جیسے جیسے نئے ادوار بنائے گئے، انہیں شامل کیا گیا۔ ان اعداد $(74xx)$ کا از خود کوئی مطلب نہیں۔ اسی طرح کا دوسرا سلسلہ $40xx$ پکارا جاتا ہے، جس میں تمام مخلوط ادوار کے نمبر 40 سے شروع ہوتے ہیں۔

مخلوط ادوار سے کار کردگی حاصل کرنے کے لئے ان کو برقی دباو مہیا کرنا لازم ہے۔ سلسلہ 7400 کے تمام مخلوط ادوار مثبت یک سمتی پانچ وولٹ $(5\,\mathrm{V})$ پر کام کرتے ہیں۔ شکل ۳.۲۸ میں دکھائے گئے مخلوط دور کو یک سمتی برقی دباو پنیا سات (7) اور چودہ (14) پر مہیا کیا جائے گا، جہاں پنیا 14 مثبت ہو گا۔ جن دو پنیوں پر مخلوط دور کو برقی طاقت مہیا کی جاتی ہے، انہیں **طاقتی پنیے** کہتے ہیں۔

مشق ۳.۲: انٹرنیٹ سے سلسلہ $40xx$ میں دستیاب چار مداخل ضرب گیٹ مخلوط دور کا نمبر دریافت کریں۔ اس مخلوط دور کو کتنا برقی دباو درکار ہو گا؟

۳.۵ بوولین تفاعل کا تخمینہ

منطقی ضرب، جمع، نفی تفاعل کے جدول آپ نے دیکھے۔ منطقی تفاعل کے جدول کو اس کتاب میں منطقی جدول کہا جائے گا۔ منطقی تفاعل کا تخمینہ لگانے میں منطقی جدول نہایت کارآمد ثابت ہو گا۔ بوولین تفاعل کا تخمینہ لگاتے وقت (اس کے) آزاد بوولین متغیرات کی تمام ممکنہ قیمتوں کو ترتیب وار لکھ کر تفاعل حل کیا جائے گا۔

۳.۵.۱ بوولین تفاعل کا تخمینہ

بوولین تفاعل کا تخمینہ لگانے کی خاطر ہم بوولین تفاعل $Z = A + B\overline{C}$ کو مثال لیتے ہیں۔ اس تفاعل کے تین آزاد متغیرات ہیں، لہٰذا تین ہندسوں کے تمام ثنائی اعداد لکھ کر آزاد متغیرات کی تمام ممکنہ ترتیب کا جدول لکھتے ہیں۔

A	B	C
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

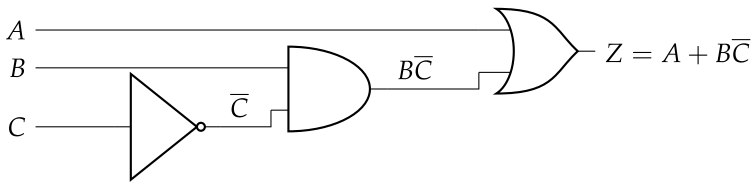
تفاعل میں C کی بجائے $\overline{C}$ استعمال ہوا ہے، لہذا جدول میں $\overline{C}$ خانہ شامل کرتے ہیں۔ پہلی صف میں $ABC = 000$ ہے؛ یوں C کی قیمت 0 لہذا $\overline{C}$ کی قیمت 1 ہو گی، جس کو نئی قطار میں بطور پہلا جزو درج کرتے ہیں۔ یاد رہے کہ C اور $\overline{C}$ ایک ہی متغیرہ کے دو پہلو ہیں، لہذا متغیرات کی تعداد تین رہے گی۔

A	B	C	$\overline{C}$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

تفاعل کی قیمت حاصل کرنے کی خاطر B اور $\overline{C}$ کا منطقی ضرب $B\overline{C}$ درکار ہے، لہذا صف در صف B اور $\overline{C}$ کی (مطابقتی قیمتوں کی) منطقی ضرب لے کر نئی قطار میں (مطابقتی صف میں) درج کرتے ہیں۔

A	B	C	$\overline{C}$	$B\overline{C}$
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0

اب بوولین تفاعل $A + B\overline{C}$ کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔ جدول میں ایک نیا خانہ شامل کرتے ہیں، جس میں A اور $B\overline{C}$ کا منطقی جمع درج کیا جائے گا۔



شکل ۳.۲۹: تفاعل $A + B\overline{C}$ کو عددی دور۔

A	B	C	$\overline{C}$	$B\overline{C}$	$A + B\overline{C}$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

اس جدول میں دایاں خانہ (قطار) دیے گئے بولین تفاعل کی قیمت دیتا ہے۔ یہ آزاد متغیرات کی تین ممکنہ قیمتوں کے لئے 0 اور باقی تمام کے لئے 1 کے برابر ہے۔ اس تفاعل کا منطقی گیٹوں کے ذریعہ حصول شکل ۳.۲۹ میں دکھایا گیا ہے۔

درج بالا جدول میں کسی بھی صف میں A، B، اور C کی قیمتیں اس دور (شکل ۳.۲۹) کو مہیا کرنے سے دور، اسی صف میں دی گئی، تفاعل کی قیمت دے گا۔ یوں پہلی صف میں $A = 0$، $B = 0$، اور $C = 0$ کے لئے دور $Z = 0$ دے گا۔ تیسری صف میں $A = 0$، $B = 1$، اور $C = 0$ ہیں جن کے لئے، عین جدول کے مطابق، $Z = 1$ حاصل ہو گا۔

۳.۶ قوسین میں بند بولین تفاعل

روزمرہ الجبرا کی طرح بولین الجبرا میں بھی قوسین میں بند تفاعل پہلے حل کئے جاتے ہیں۔

مثال ۳.۱: تفاعل $\overline{A} + B(\overline{B} + A)$ حل کریں۔

حل: تفاعل میں دو آزاد متغیرات ہیں لہٰذا دو ہندسوں پر مبنی شنائی گنتی لکھ کر آزاد متغیرات کی تمام ترتیب حاصل ہوں گی۔

A	B
0	0
0	1
1	0
1	1

تفاعل میں دونوں متغیرات کے متمم استعمال ہوئے ہیں لہٰذا جدول میں ان کے خانے بناتے ہیں۔

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	0	0

اب قوسین میں بند حصہ $(\overline{B}+A)$ کا خانہ بناتے ہیں۔

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$(\overline{B}+A)$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

اس کے ساتھ $B(\overline{B}+A)$ کا خانہ بناتے ہیں۔ یہ خانہ جدول میں دیے $(\overline{B}+A)$ اور B کے مطابقتی اجزاء کی منطقی ضرب سے حاصل ہوگا۔

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$(\overline{B}+A)$	$B(\overline{B}+A)$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0
1	1	0	0	1	1

اب ہم مکمل بوولین تفاعل کی قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔ تفاعل $\overline{A}+B(\overline{B}+A)$ حاصل کرنے کی خاطر $B(\overline{B}+A)$ اور $\overline{A}$ کا منطقی جمع حاصل کرنا ہوگا۔

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$(\overline{B}+A)$	$B(\overline{B}+A)$	$\overline{A}+B(\overline{B}+A)$
0	0	1	1	1	0	1
0	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1

□

۳.۷ بوولین الجبرا کے بنیادی قوانین

بوولین الجبرا کے پانچ بنیادی قوانین مندرجہ ذیل ہیں۔

۱ اگر $X \neq 0$ ہو تب $X = 1$ ہو گا، اور

۲ اگر $X \neq 1$ ہو تب $X = 0$ ہو گا۔

۳ منطقی جمع

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 1 &= 1 \\ 1 + 0 &= 1 \\ 1 + 1 &= 1 \end{aligned}$$

۴ منطقی ضرب

$$\begin{aligned} 0 \cdot 0 &= 0 \\ 0 \cdot 1 &= 0 \\ 1 \cdot 0 &= 0 \\ 1 \cdot 1 &= 1 \end{aligned}$$

۵ منطقی نفی

$$\begin{aligned} \overline{0} &= 1 \\ \overline{1} &= 0 \end{aligned}$$

اگرچہ یہ پانچ قوانین نہایت سادہ معلوم ہوتے ہیں، ان سے مکمل بوولین الجبرا اخذ کیا جا سکتا ہے۔ بوولین الجبرا کے چند قوانین جدول ۳.۱۲-الف اور ب میں پیش کیے گئے ہیں۔ یہ تمام درج بالا پانچ بنیادی قوانین سے اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

بوولین مساوات ثابت کرنے کا ایک اہم طریقہ بوولین جدول سے اخذ کرنے کا طریقہ کہلاتا ہے۔ آئیں، درج بالا میں سے چند قوانین اس طریقہ سے حاصل کریں۔

مثال ۳.۲: جدول ۳.۱۲-الف کی شق 1 کو بوولین جدول کی مدد سے ثابت کریں۔

حل: اس شق کے بائیں ہاتھ، X واحد متغیرہ ہے۔ اس کے بوولین جدول میں دو اندراج 0 اور 1 ہوں گے، جو ایک ہندسی شنائی عدد کی تمام ممکنہ قیمتیں ہیں۔

جدول ۳.۱۲: بوولین الجبرا کے چند بنیادی قوانین۔

(ا) پہلا پہلو۔

شق	مساوات
1	$0 \cdot X = 0$
2	$1 \cdot X = X$
3	$X \cdot \overline{X} = 0$
4	$X \cdot X = X$
5	$X \cdot Y = Y \cdot X$
6	$(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$
7	$X + XY = X$
8	$X(X + Y) = X$
9	$(X + Y)(X + Z) = X + YZ$
10	$X + \overline{X}Y = X + Y$
11	$XY + YZ + \overline{Y}Z = XY + Z$
12	$X(Y + Z) = XY + XZ$
13	$\overline{\overline{X}} = X$

(ب) دوسرا پہلو۔

شق	مساوات
1	$1 + X = 1$
2	$0 + X = X$
3	$X + \overline{X} = 1$
4	$X + X = X$
5	$X + Y = Y + X$
6	$(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$
7	$X(X + Y) = X$
8	$X + XY = X$
9	$XY + XZ = X(Y + Z)$
10	$X(\overline{X} + Y) = XY$
11	$(X + Y)(Y + Z)(\overline{Y} + Z) = (X + Y)Z$
12	$X + YZ = (X + Y)(X + Z)$
13	$\overline{\overline{X}} = X$

X
0
1

اس میں $0 \cdot X$ کا خانہ شامل کرتے ہیں، جس میں $0 \cdot 0 = 0$ اور $0 \cdot 1 = 0$ درج ہوں گے۔

X	$0 \cdot X$
0	0
1	0

اس جدول کی دائیں قطار کہتی ہے کہ $0 \cdot X$ ہمیشہ 0 ہو گا۔ ہم یہی ثابت کرنا چاہتے تھے۔ $\square$

اس طرح کے سوال، جن میں ایک متغیرہ X کو مستقل عدد C سے منطقی ضرب دینا ہو، کی قدم با قدم ترکیب دیکھتے ہیں۔ متغیرہ X کے تمام ممکنہ قیمتوں کے جدول میں مستقل C کی قطار شامل کریں۔ موجودہ مثال میں مستقل 0 ہے، لہٰذا C کی قطار میں تمام اندراج کی قیمت 0 ہو گی۔

C	X
0	0
0	1

اب $0 \cdot X$ کی قطار شامل کریں۔

C	X	$C \cdot X$
0	0	0
0	1	0

ہم دیکھتے ہیں کہ $C \cdot X$ ہمیشہ 0 ہے، لہٰذا $0 \cdot X = 0$ ہو گا۔

مثال ۳.۳: جدول ۳.۱۲-الف کی شق 2 کو بوولین جدول سے ثابت کریں۔

حل: اس شق کے بائیں ہاتھ X واحد متغیرہ، جبکہ 1 مستقل ہے۔ متغیرہ کا بوولین جدول لکھتے ہیں؛ ساتھ ہی مستقل 1 کی قطار بھی شامل کرتے ہیں، جس کے تمام اندراج کی قیمت 1 ہو گی۔ آخر میں $X \cdot 1$ کی قطار شامل کرتے ہیں۔

1	X
1	0
1	1

1	X	$1 \cdot X$
1	0	0
1	1	1

ہم دیکھتے ہیں کہ $1 \cdot X$ اور X کی مطابقتی قیمتیں ہمیشہ ایک جیسی ہیں، لہٰذا ثابت ہوا کہ $1 \cdot X = X$ ہو گا۔ □

مثال ۳.۴: $X \cdot \overline{X} = 0$ ثابت کریں۔ حل:

X	$\overline{X}$	$X \cdot \overline{X}$
0	1	0
1	0	0

□

مثال ۳.۵: ثابت کرتے ہیں کہ $X \cdot X = X$ ہے۔ اگر $X = 0$ ہو تب $X \cdot X = 0 \cdot 0 = 0$ ہو گا جو X کے برابر ہے۔ اسی طرح $X = 1$ کی صورت میں $X \cdot X = 1 \cdot 1 = 1$ ہو گا جو X کے برابر ہے۔ ہم نے دیکھا کہ X کی تمام قیمتوں کے لئے یہ فقرہ درست ہے۔ □

مثال ۳.۶: فقرہ $\overline{\overline{X}} = X$ ثابت کریں۔ حل:

X	$\overline{X}$	$\overline{\overline{X}}$
0	1	0
1	0	1

□

مثال ۳.۷: ثابت کریں کہ $(0 + X = X)$ ہو گا۔ حل:

0	X	$0+X$
0	0	0
0	1	1

دائیں دو قطار ایک جیسے ہیں لہٰذا ثبوت پورا ہوا۔ □

مثال ۳.۸: $(1 + X = 1)$ ثابت کریں۔ حل:

1	X	$1+X$
1	0	1
1	1	1

دائیں دو قطار ایک جیسے ہیں لہٰذا ثبوت پورا ہوتا ہے۔ □

مثال ۳.۹: فقرہ $X + Y = Y + X$ ثابت کریں۔ حل:

X	Y	$X+Y$	$Y+X$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

دائیں دو قطار ایک جیسے ہیں لہٰذا ثبوت پورا ہوتا ہے۔ □

مثال ۳.۱۰: ثابت کریں کہ $X(Y + Z) = XY + XZ$ ہو گا۔ حل:

X	Y	Z	$Y+Z$	XY	XZ	$X(Y+Z)$	$XY+XZ$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

دائیں دو قطار ایک جیسے ہیں لہٰذا ثبوت پورا ہوا۔ □

مثال ۳.۱۱: ثابت کریں $X + XY = X$ ہو گا۔

حل: اس کو بولین جدول کے بجائے بولین الجبرا کی مدد سے حل کرتے ہیں۔ ہم مساوات کے بائیں ہاتھ کو $XZ + XY$ لکھ سکتے ہیں جہاں $1 = Z$ ہو گا۔ یوں جدول ۳.۱۲-الف کی شق 12 کے تحت درج ذیل ہو گا، جہاں Z کی قیمت 1 لی گئی ہے۔

$$X + XY = X(1 + Y)$$

جدول ۳.۱۲-ب کی شق 1 کے تحت $1 + Y = 1$ ہو گا، لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$X + XY = X(1 + Y) = X \cdot 1 = X$$

جہاں آخری قدم پر جدول ۳.۱۲-الف کی شق 2 استعمال کی گئی۔ □

جدول ۳.۱۲-الف کی شق 5 کو متعدد متغیرات تک وسعت دی جا سکتی ہے۔ تین متغیرات کے لئے درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} ABC &= BAC \\ &= BCA \\ &= CBA \\ &= CAB \end{aligned}$$

اسی طرح جدول ۳.۱۲-ب کی شق 5 کو بھی دو سے زیادہ متغیرات کے لئے وسعت دی جا سکتی ہے۔ تین متغیرات کے لئے، یہ شق درج ذیل صورتیں اختیار کرتی ہے۔

$$\begin{aligned} A + B + C &= B + A + C \\ &= B + C + A \\ &= C + B + A \\ &= C + A + B \end{aligned}$$

۳.۸ ڈی مارگن کے کلیات

دو نہایت اہم قوانین جنہیں ڈی مارگن کے کلیات (یا ڈی مارگن کے مسائل) کہتے ہیں مندرجہ ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} \overline{X + Y} &= \overline{X} \cdot \overline{Y} \\ \overline{X \cdot Y} &= \overline{X} + \overline{Y} \end{aligned} \tag{۳.۱۰}$$

ان دو مسائل کو بولین جدول کی مدد سے ثابت کرتے ہیں۔ ڈی مارگن کے پہلے مسئلہ $\overline{X + Y} = \overline{X} \cdot \overline{Y}$ کا ثبوت درج ذیل ہے۔

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$X+Y$	$\overline{X+Y}$	$\overline{X}\cdot\overline{Y}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	0	0

ڈی مارگن کے دوسرے مسئلہ $\overline{X\cdot Y}=\overline{X}+\overline{Y}$ کا ثبوت درج ذیل ہے۔

X	Y	$\overline{X}$	$\overline{Y}$	$X\cdot Y$	$\overline{X\cdot Y}$	$\overline{X}+\overline{Y}$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

ڈی مارگن کے مسائل منطقی جمع کو منطقی ضرب میں اور منطقی ضرب کو منطقی جمع میں تبدیل کرتے ہیں، اور بوولین تفاعل حل کرنے میں مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

مثال کے طور پر، جدول ۳.۱۲-الف کی پہلی شق $0\cdot X=0$ کا متمم لیتے ہیں۔

$$\overline{0\cdot X}=\overline{0}$$

بائیں ہاتھ ڈی مارگن کا دوسرا مسئلہ لاگو کرتے ہیں۔

$$\overline{0}+\overline{X}=\overline{0}$$

مزید، چونکہ 0 کا متمم 1 ہے، یعنی $1=\overline{0}$ ہوگا، لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$1+\overline{X}=1$$

اس مساوات میں $\overline{X}$ کو بوولین متغیرہ Z تصور کیا جا سکتا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوگا۔

$$1+Z=1$$

اس کا جدول ۳.۱۲-ب کی شق 1 سے موازنہ کریں۔ متغیرہ کے نام مختلف ہونے کے علاوہ دونوں یکساں ہیں۔

ڈی مارگن مسائل کی مدد سے ہم نے دیکھا کہ

$$0\cdot X=0$$

اور

$$1+X=1$$

درحقیقت ایک ہی تفاعل کے دو پہلو ہیں۔

$$(0 \cdot X = 0) \Leftrightarrow (1 + X = 1) \qquad \text{(مماثلہ)}$$

اس مسئلہ کو ڈی مارگن کے پہلے مسئلہ کی مدد سے بھی دیکھا جا سکتا ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم بولین تفاعل $1 + X = 1$ کے دونوں اطراف کا متمم لیتے ہیں۔

$$\overline{1 + X} = \overline{1}$$

بائیں ہاتھ ڈی مارگن کا پہلا مسئلہ لاگو کرتے ہیں۔

$$\overline{1} \cdot \overline{X} = \overline{1}$$

اب $\overline{1}$ کی جگہ 0 ڈالتے ہیں۔

$$0 \cdot \overline{X} = 0$$

یہ مساوات کسی بھی متغیرہ $\overline{X}$ کے لئے درست ہے۔ اس متغیرہ کو ہم Z بھی پکار سکتے ہیں۔ ایسا کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$0 \cdot Z = 0$$

ہم دیکھتے ہیں کہ یہ بالکل $0 \cdot X = 0$ کی طرح ہے۔ فرق صرف متغیرہ کے نام کا ہے۔ لہٰذا ثابت ہوا کہ $1 + X = 1$ اور $0 \cdot X = 0$ ایک ہی تفاعل کے دو پہلو ہیں۔

مثال ۳.۱۲: ثابت کریں کہ $1 \cdot X = X$ اور $0 + X = X$ ایک ہی تفاعل کی دو شکلیں ہیں۔

حل: $1 \cdot X = X$ کے دونوں اطراف کا متمم لیتے ہیں۔

$$\overline{1 \cdot X} = \overline{X}$$

بائیں ہاتھ ڈی مارگن کا دوسرا قانون لاگو کرتے ہیں

$$\overline{1} + \overline{X} = \overline{X}$$

اور $\overline{1}$ کی جگہ 0 پُر کرتے ہیں۔

$$0 + \overline{X} = \overline{X}$$

متغیرہ $\overline{X}$ کو نیے نام Z سے پکارتے ہیں۔

$$0 + Z = Z$$

یہ مساوات کہتی ہے کہ صفر جمع ایک بوولین متغیرہ اس متغیرہ کے برابر ہوگا۔ یوں ثابت ہوا کہ $1 \cdot X = X$ اور $0 + X = X$ مماثلہ ہیں۔

آپ اسی مثال کو پچھلی مثال کی طرح اُلٹ رخ میں ثابت کریں۔ □

مثال ۳.۱۳: بوولین تفاعل $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$ کا مماثلہ ڈی مارگن کے قانون لاگو کر کے حاصل کریں۔

حل: دئے گئے تفاعل کے دونوں اطراف کا متمم لیتے ہیں۔

$$\overline{(X \cdot Y) \cdot Z} = \overline{X \cdot (Y \cdot Z)}$$

دونوں اطراف ڈی مارگن کا دوسرا قانون لاگو کرتے ہیں۔

$$(\overline{X \cdot Y}) + \overline{Z} = \overline{X} + (\overline{Y \cdot Z})$$

ڈی مارگن کا قانون استعمال کرتے وقت قوسین میں بند حصہ کو ایک متغیرہ تصور کیا گیا۔ دونوں اطراف قوسین میں بند تفاعل پر دوبارہ ڈی مارگن کا دوسرا قانون لاگو کرتے ہیں۔

$$(\overline{X} + \overline{Y}) + \overline{Z} = \overline{X} + (\overline{Y} + \overline{Z})$$

یہاں تینوں متغیرات کے متمم لکھے گئے ہیں۔ ہم انہیں تین نئے ناموں سے پکار سکتے ہیں، مثلاً، $\overline{X}$ کو A پکارتے ہیں، $\overline{Y}$ کو B اور $\overline{Z}$ کو C، لہٰذا درج ذیل لکھا جائے گا، جو متغیرات کے نام مختلف ہونے کے علاوہ، جدول ۳.۱۲-ب کی شِق 6 ہے۔

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

□

۳.۹ جڑواں بوولین تفاعل

گزشتہ حصہ میں دیکھا گیا کہ بوولین تفاعل کے دو پہلو ہوتے ہیں۔ یوں کسی بوولین تفاعل کو ثابت کرتے ہی اس کا جڑواں تفاعل فوراً لکھا جا سکتا ہے۔ جدول ۳.۱۲-الف اور ب میں اس طرح کے جڑواں بوولین تفاعل پیش کیے گئے ہیں۔ ان جدول میں آخری شِق کے علاوہ ہر شِق ایک تفاعل کے دو پہلو پیش کرتا ہے۔ مثلاً، جدول-الف کی شِق 7 کا دوسرا پہلو جدول-ب کی شِق 7 دے گا۔

۳.۱۰ ارکان ضرب کے مجموعہ کی ترکیب

منطقی مسئلہ کو بوولین تفاعل کی صورت میں لکھنا مندرجہ ذیل مثال سے باآسانی سمجھا جا سکتا ہے۔

جدول ۱۳.۳: تفاعل کا جدول (برائے حصہ ۱۰.۳)

A	B	C
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

فرض کریں، ایک تفاعل جس کے آزاد متغیرات A اور B، جبکہ تابع متغیرہ C ہے، اس صورت بلند ہوتا ہے جب $A = 0$ اور $B = 1$ ہو، یا جب $A = 1$ اور $B = 1$ ہو۔

ان معلومات کو جدول ۱۳.۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ جدول میں "ارکان ضرب" کی قطار شامل کریں۔ اس قطار کے ہر خانے میں اسی صف کے آزاد متغیرہ پست ہونے کی صورت میں متغیرہ کا متمم اور بلند صورت میں متغیرہ بذات خود درج کیا جائے گا۔ اس عمل کو سمجھنے کی خاطر، جدول کی پہلی صف پر توجہ رکھیں۔ یہاں $A = 0$ اور $B = 0$ ہے، لہٰذا پہلی صف میں رکن ضرب $\overline{A}\,\overline{B}$ ہو گا۔ دوسری صف میں $A = 0$ اور $B = 1$ ہیں، لہٰذا دوسری صف میں $\overline{A}B$ درج ہو گا۔

A	B	C	ارکان ضرب
0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}$
0	1	1	$\overline{A}B$
1	0	0	$A\overline{B}$
1	1	1	AB

تفاعل کے جدول کے ان تمام ارکان ضرب کا مجموعہ لیں جن کی صف میں تابع متغیرہ C کی قیمت 1 ہو۔ یہ مجموعہ تابع متغیرہ کے برابر ہو گا۔ اس طرح تفاعل لکھنے کو ارکان ضرب کے مجموعہ کی ترکیب کہتے ہیں۔ (اس کو مجموعہ ارکان ضرب بھی پکار سکتے ہیں۔)

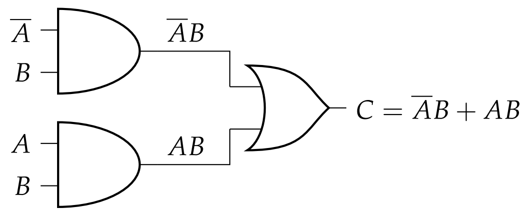
یوں درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$C = \overline{A}B + AB \qquad \text{(ارکان ضرب کا مجموعہ)} \tag{۳.۱۱}$$

مساوات ۱۱.۳ میں حاصل تفاعل کا منطقی دور شکل ۳۰.۳ میں دکھایا گیا ہے۔

ارکان ضرب کے مجموعہ سے حاصل مساوات ہر صورت ضرب گیٹوں کی ایک قطار (یا صف) اور ایک جمع گیٹ سے حاصل کی جا سکتی ہے (جہاں فرض کیا جاتا ہے کہ، آزاد متغیرات کے ساتھ ان کے متمم بھی میسر ہیں)۔ ایسا دور **ضرب و جمع**[۱] کہلائے گا۔

[۱] AND-OR



شکل ۳.۳۰: ارکان ضرب کے مجموعہ (مساوات ۳.۱۱) کا منطقی دور۔

مساوات ۳.۱۱ اور شکل ۳.۳۰ کی درستگی کی تصدیق بوولین جدول سے کرتے ہیں (جدول میں موازنے کے لئے C کا خانہ بھی پیش کیا گیا ہے)۔

A	B	C	$\overline{A}$	$\overline{A}B$	AB	$\overline{A}B + AB$
0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1

اس جدول کا دایاں قطار C کے برابر ہے۔

مساوات ۳.۱۱ لکھنے کا دوسرا انداز جو نہایت مقبول ہے سمجھنے کی خاطر تفاعل کے جدول میں "ارکان ضرب" کے علاوہ ایک نئی قطار (m) شامل کرتے ہیں۔

A	B	C	ارکان ضرب	m
0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}$	m_0
0	1	1	$\overline{A}B$	m_1
1	0	0	$A\overline{B}$	m_2
1	1	1	AB	m_3

نئی قطار میں m ارکان ضرب کو ظاہر کرتا ہے، لہٰذا تفاعل C کی مساوات لکھتے ہوئے $\overline{A}B$ کی بجائے m_1 اور AB کی بجائے m_3 لکھتے ہیں۔ یوں مساوات ۳.۱۱ سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
C &= \overline{A}B + AB \\
&= m_1 + m_3 \\
&= \sum(m_1, m_3) \\
&= \sum(1,3)
\end{aligned}
\tag{۳.۱۲}
$$

ارکان ضرب روایتاً (چھوٹی لکھائی میں) m_x لکھے جاتے ہیں، جہاں زیر نوشت x جدول میں مطابقتی صف کے آزاد متغیرات کو ثنائی عدد (کے ہندسے) سمجھ کر، برابر کا اعشاری عدد لیا جاتا ہے۔

مثال ۳.۱۴: درج ذیل بولین جدول سے بولین تفاعل کی مساوات حاصل کریں۔

A	B	C	Z
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

حل: جدول میں Z تابع متغیرہ ہے۔ جدول کی دائیں جانب ارکان ضرب کی قطار شامل کرتے ہیں۔

A	B	C	Z	ارکان ضرب	m
0	0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_0
0	0	1	0	$\overline{A}\,\overline{B}\,C$	m_1
0	1	0	1	$\overline{A}\,B\,\overline{C}$	m_2
0	1	1	1	$\overline{A}\,B\,C$	m_3
1	0	0	0	$A\,\overline{B}\,\overline{C}$	m_4
1	0	1	0	$A\,\overline{B}\,C$	m_5
1	1	0	1	$A\,B\,\overline{C}$	m_6
1	1	1	1	$A\,B\,C$	m_7

اُن ارکان ضرب کا مجموعہ لیتے ہیں جن کی صف میں تابع متغیرہ کی قیمت 1 ہے۔

$$Z = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,C + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C$$

یہ دیے گئے تفاعل کی مساوات ہے جس کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$Z = \sum(m_0, m_2, m_3, m_6, m_7)$$

جدول ۳.۱۲ میں دیے گئے قوانین استعمال کرتے ہوئے مساوات کی سادہ صورت حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
Z &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,\overline{C} + \overline{A}\,B\,C + A\,B\,\overline{C} + A\,B\,C \\
&= \overline{A}(\overline{B} + B)\overline{C} + \overline{A}BC + AB(\overline{C} + C) \\
&= \overline{A}(1)\overline{C} + \overline{A}BC + AB(1) \\
&= \overline{A}(\overline{C} + BC) + AB \\
&= \overline{A}(\overline{C} + B) + AB \\
&= \overline{A}\,\overline{C} + \overline{A}B + AB \\
&= \overline{A}\,\overline{C} + (\overline{A} + A)B \\
&= \overline{A}\,\overline{C} + B
\end{aligned}$$

یہ دیے گئے بوولین جدول کی سادہ ترین مساوات ہے۔ اس کا بوولین جدول لکھ کر آپ ثابت کر سکتے ہیں کہ یہ اصل تفاعل ہی ہے۔ □

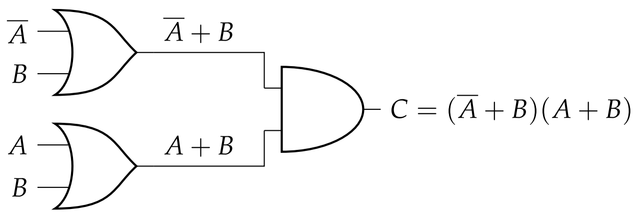
۳.۱۱ ارکان جمع کی ضرب کی ترکیب

گزشتہ حصہ میں بوولین جدول سے تفاعل کا مساواتی روپ حاصل کیا گیا، جہاں ان صفوں کے ارکان ضرب کا مجموعہ لیا گیا جن میں تابع متغیرات کی قیمت 1 تھی۔ آئیں اب "ارکان جمع" لکھنا اور ان سے تفاعل کی مساوات حاصل کرنا سیکھیں۔

حصہ ۳.۱۰ میں مستمل جدول ۳.۱۳ کو مثال بناتے ہوئے اس میں ارکان ضرب کی بجائے ارکان جمع کی قطار شامل کرتے ہیں۔ ارکان جمع لکھتے ہوئے، مطابقتی آزاد متغیرہ پست ہونے کی صورت میں متغیرہ بذات خود اور بلند صورت میں متغیرہ کا متمم جمع کیا جاتا ہے۔ اس عمل کو سمجھنے کی خاطر، جدول کی پہلی صف پر توجہ رکھیں۔ یہاں $A = 0$ اور $B = 0$ ہے، لہٰذا پہلی صف میں رکن جمع $A + B$ ہوگا۔ دوسری صف میں $A = 0$ اور $B = 1$ ہیں، لہٰذا دوسری صف میں $A + \overline{B}$ درج ہوگا۔

A	B	C	ارکان جمع
0	0	0	$A + B$
0	1	1	$A + \overline{B}$
1	0	0	$\overline{A} + B$
1	1	1	$\overline{A} + \overline{B}$

تفاعل کے جدول کے ان تمام ارکان جمع کا حاصل ضرب لیں جن کی صف میں تفاعل کے تابع متغیرہ C کی قیمت 0 ہو۔ یہ حاصل ضرب تابع متغیرہ کے برابر ہوگا۔ اس طرح تفاعل لکھنے کو ارکان جمع کی ضرب کی ترکیب کہتے ہیں (اس کو حاصل ضرب ارکان جمع بھی پکار سکتے ہیں)۔



شکل ۳.۳۱: ارکان جمع کی ضرب سے حاصل دور (مساوات ۳.۱۳)۔

یوں درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$C=(A+B)(\overline{A}+B)\quad(\text{ارکان جمع کی ضرب})\tag{۳.۱۳}$$

ارکان جمع کی ضرب سے حاصل مساوات کو ہر صورت جمع گیٹوں کی ایک قطار (یا صف) اور ایک ضرب گیٹ سے حاصل کیا جا سکتا ہے (جہاں فرض کیا جاتا ہے کہ، آزاد متغیرات کے ساتھ ان کے متمم بھی میسر ہیں)۔ یوں بنائے گئے دور کو **جمع و ضرب**[7] کہتے ہیں۔

مساوات ۳.۱۳ میں حاصل دور شکل ۳.۳۱ میں پیش کیا گیا ہے۔

مساوات ۳.۱۳ لکھنے کا دوسرا انداز جو نہایت مقبول ہے سمجھنے کی خاطر تفاعل کے جدول میں "ارکان جمع" کے علاوہ، بڑی لکھائی میں ایک نئی قطار (M) شامل کرتے ہیں، جو ارکان جمع کو ظاہر کرتا ہے۔

A	B	C	ارکان جمع	M
0	0	0	$\overline{A}\,\overline{B}$	M_0
0	1	1	$\overline{A}B$	M_1
1	0	0	$A\overline{B}$	M_2
1	1	1	AB	M_3

یوں مساوات ۳.۱۳ درج ذیل روپ اختیار کرتی ہے۔

$$C=(A+B)(\overline{A}+B)=M_0M_2=\prod(M_0,M_2)=\prod(0,2)\tag{۳.۱۴}$$

مثال ۳.۱۵: ڈی مارگن کے کلیات استعمال کرتے ہوئے مجموعہ ارکان ضرب سے ارکان جمع کی ضرب کی ترکیب حاصل کریں۔

حل: ہم حصہ ۳.۱۰ میں مستعمل جدول ۳.۱۳ کو مثال بنا کر اس میں $\overline{C}$ اور ارکان ضرب کی قطاریں شامل کرتے ہیں۔

[7]OR-AND

A	B	C	$\overline{C}$	ارکان ضرب
0	0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}$
0	1	1	0	$\overline{A}B$
1	0	0	1	$A\overline{B}$
1	1	1	0	AB

ہم $\overline{C}$ کے لئے ارکان ضرب کا مجموعہ لکھ کر (یعنی ان ارکان ضرب کا مجموعہ جن کے صف میں $\overline{C}$ کی قیمت 1 ہو):

$$\overline{C} = \overline{A}\,\overline{B} + A\,\overline{B}$$

دونوں اطراف کا متمم لے کر C کی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\overline{\overline{C}} = C = \overline{\overline{A}\,\overline{B} + A\,\overline{B}}$$

ڈی مارگن کلیات بار بار استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

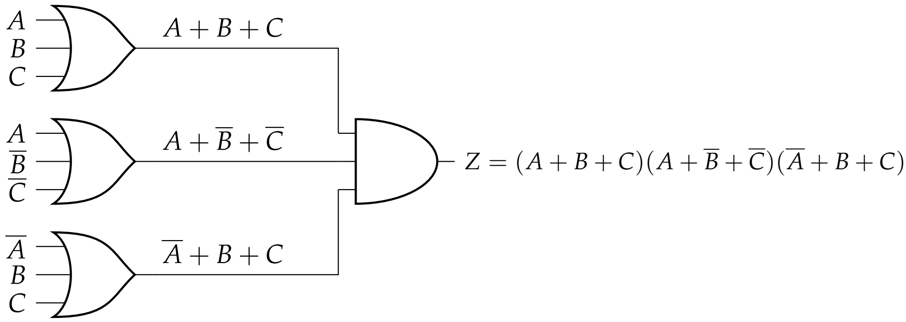
$$\begin{aligned} C &= \overline{\overline{A}\,\overline{B} + A\,\overline{B}} \\ &= (\overline{\overline{A}\,\overline{B}})(\overline{A\,\overline{B}}) \\ &= (\overline{\overline{A}} + \overline{\overline{B}})(\overline{A} + \overline{\overline{B}}) \\ &= (A + B)(\overline{A} + B) \end{aligned} \tag{۳.۱۵}$$

اس نتیجے کا مساوات ۳.۱۳ کے ساتھ موازنہ کریں۔ پس ثابت ہوا کہ مجموعہ ارکان ضرب سے ارکان جمع کی ضرب حاصل کی جا سکتی ہے۔ □

مثال ۳.۱۶: درج ذیل بوولین جدول سے (ا) ارکان جمع کی ضرب، (ب) ارکان ضرب کا مجموعہ لے کر تفاعل کی مساوات حاصل کریں۔ دونوں نتائج کے ادوار دکھائیں۔

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

حل: جدول میں ارکان جمع اور ارکان ضرب کی قطاریں شامل کرتے ہیں۔



شکل ۳۲.۳: جمع وضرب دور (مساوات ۱۶.۳)۔

A	B	C	Z	ارکان جمع	ارکان ضرب
0	0	0	0	$A+B+C$	$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$
0	0	1	1	$A+B+\overline{C}$	$\overline{A}\,\overline{B}\,C$
0	1	0	1	$A+\overline{B}+C$	$\overline{A}\,B\,\overline{C}$
0	1	1	0	$A+\overline{B}+\overline{C}$	$\overline{A}\,B\,C$
1	0	0	0	$\overline{A}+B+C$	$A\,\overline{B}\,\overline{C}$
1	0	1	1	$\overline{A}+B+\overline{C}$	$A\,\overline{B}\,C$
1	1	0	1	$\overline{A}+\overline{B}+C$	$A\,B\,\overline{C}$
1	1	1	1	$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$	$A\,B\,C$

(ا) جن صفوں میں تابع متغیرہ Z کی قیمت 0 ہے ان صفوں کے ارکان جمع کی ضرب مطلوبہ نتیجہ ہو گا۔

$$Z = (A+B+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+C) \tag{۳.۱۶}$$

اس کو درج ذیل بھی لکھ سکتے ہیں۔

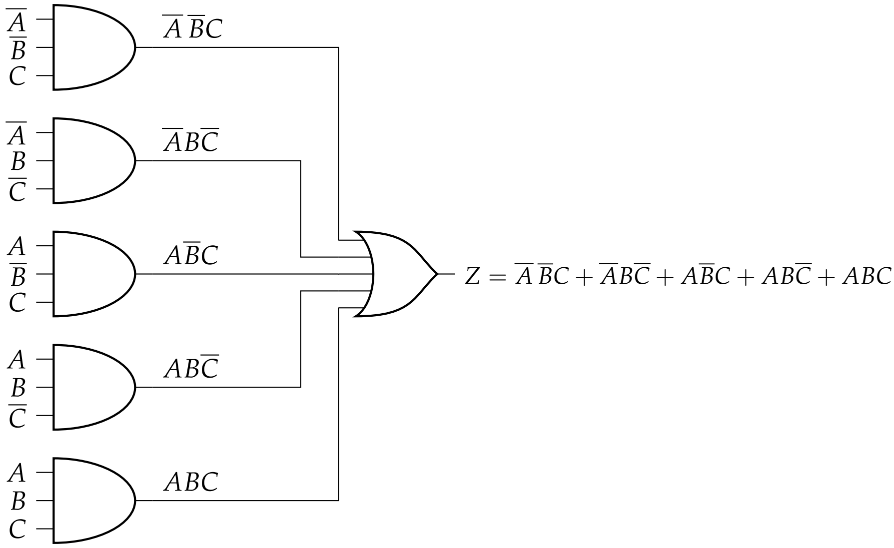
$$Z = M_0M_3M_4 = \prod(M_0, M_3, M_4)$$

مساوات ۱۶.۳ میں حاصل نتیجہ کا جمع وضرب دور شکل ۳۲.۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ (ب) جدول کے ارکان ضرب کا مجموعہ لے کر ضرب وجمع دور حاصل کرتے ہیں۔

$$Z = \overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC \tag{۳.۱۷}$$

اس دور کو شکل ۳۳.۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ □

اس مثال میں ایک ہی تفاعل کے دو ادوار، شکل ۳۲.۳ اور شکل ۳۳.۳ پیش کیے گئے۔ پہلے دور میں تین جمع اور ایک ضرب گیٹ استعمال ہوا، جبکہ دوسرے میں پانچ ضرب اور ایک جمع گیٹ استعمال ہوا۔ (جیسا ہم ذکر کر چکے



شکل ۳.۳۳: ضرب و جمع دور (مساوات ۳.۱۷)۔

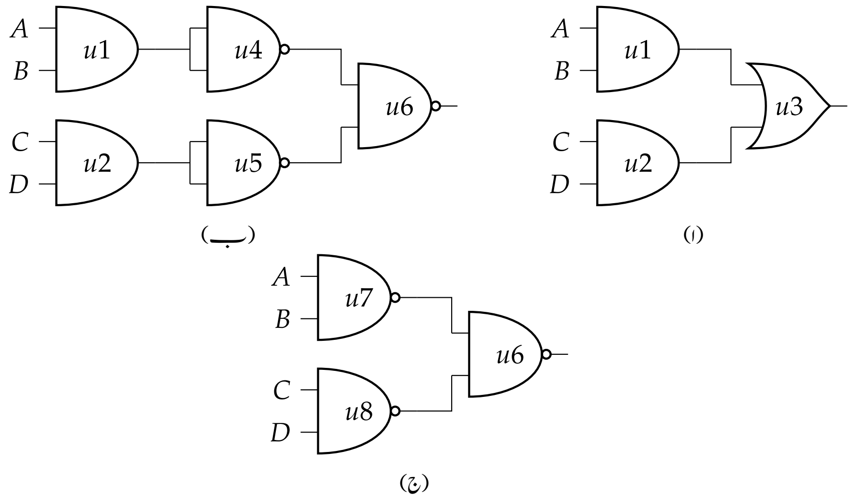
ہیں، ارکان جمع کی ضرب سے حاصل دور جمع گیٹوں کی قطار اور ایک ضرب گیٹ سے بنے گا۔ ارکان ضرب کے مجموعہ سے حاصل دور ضرب گیٹوں کی قطار اور ایک جمع گیٹ سے حاصل ہو گا۔) یوں اس تفاعل کو ضرب ارکان جمع سے حاصل کرنے میں کم منطقی گیٹ استعمال ہوئے۔ یاد رہے کہ ضرب ارکان جمع اور مجموعہ ارکان ضرب منطقی طور پر ایک ہیں۔

۳.۱۲ مجموعہ ارکان ضرب اور ضرب ارکان جمع کے مابین تبادلہ

ہم نے مثال ۳.۱۶ میں تفاعل کی مساواتیں، مجموعہ ارکان ضرب اور ضرب ارکان جمع کی صورت میں، حاصل کیں، جنہیں یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
Z &= m_1 + m_2 + m_5 + m_6 + m_7 = \sum(1,2,5,6,7) \\
Z &= M_0 M_3 M_4 = \prod(0,3,4)
\end{aligned}
$$

مجموعہ ارکان ضرب میں پہلا، دوسرا، پانچواں، چھٹا اور ساتواں رکن ضرب استعمال ہوا جبکہ صفرواں، تیسرا اور چوتھا رکن غیر مستعمل رہے۔ ضرب ارکان جمع میں پہلا، دوسرا، پانچواں، چھٹا اور ساتواں رکن جمع غیر مستعمل، جبکہ صفرواں، تیسرا اور چوتھا رکن استعمال ہوا۔ یہ ایک عمومی حقیقت ہے جسے استعمال کر کے تفاعل کی مساوات کو ایک روپ سے دوسرے روپ میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ ارکان جمع سے ارکان ضرب یا ارکان ضرب سے ارکان جمع کے روپ میں مساوات حاصل کرتے ہوئے پہلے روپ میں غیر مستعمل ارکان، دوسرے روپ میں استعمال ہوں گے۔



شکل ۳.۳۴: ارکان ضرب کے مجموعہ سے متمم ضرب ومتمم ضرب دور کا حصول۔

۳.۱۳ ضرب وجمع دور سے متمم ضرب ومتمم ضرب دور کا حصول

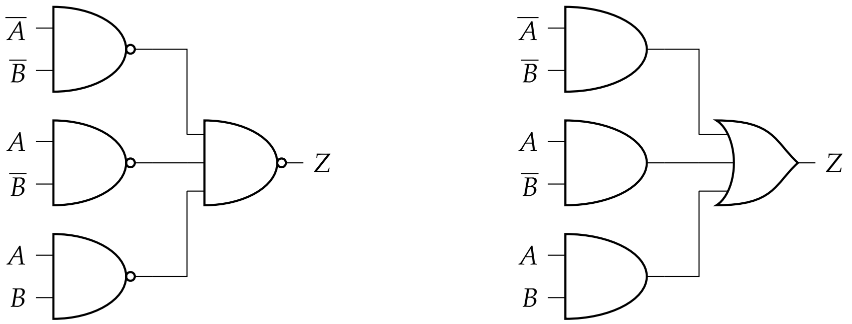
کسی بھی بولین تفاعل کو مجموعہ ارکان ضرب کی صورت میں بیان کیا جا سکتا ہے، جس کو ضرب گیٹوں کی قطار اور ایک جمع گیٹ سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ شکل ۳.۳۴-الف میں تفاعل $AB + CD$ کا مجموعہ ارکان ضرب دور دکھایا گیا ہے۔ جمع گیٹ $u3$ کی جگہ شکل ۳.۲۰-الف کا مساوی دور نصب کرتے ہوئے شکل-ب حاصل ہو گا (جہاں $u3$ کی جگہ $u4$ ، $u5$ اور $u6$ استعمال کیے گئے)۔ شکل ۳.۱۸ میں متمم ضرب گیٹ بطور نفی گیٹ دکھایا گیا ہے۔ یوں ضرب گیٹ (مثلاً $u1$) اور نفی گیٹ (مثلاً $u4$ جس کو نفی گیٹ تصور کرتے ہیں) کی جگہ (شکل ۳.۱۶ دیکھیں) متمم ضرب گیٹ (مثلاً $u7$) استعمال کرتے ہوئے شکل-ج حاصل ہو گا، جو صرف متمم ضرب گیٹوں پر مشتمل ہے؛ یہ **متمم ضرب و متمم ضرب**[8] دور کہلاتا ہے۔

آپ نے دیکھا کہ شکل ۳.۳۴-الف کے ضرب وجمع دور میں تمام گیٹ تبدیل کر کے متمم ضرب گیٹ نصب کرنے سے شکل-ج کا متمم ضرب ومتمم ضرب دور حاصل ہو گا۔ یہ ایک اہم اور عمومی مشاہدہ ہے۔ یاد رہے کہ مجموعہ ارکان ضرب کے ضرب وجمع دور میں ضرب گیٹوں کی قطار اور ایک جمع گیٹ ہو گا۔

ضرب وجمع دور کی شکل و صورت تبدیل کیے بغیر تمام گیٹوں کی جگہ متمم ضرب گیٹ نصب کرنے سے متمم ضرب ومتمم ضرب دور حاصل ہو گا۔

سلیکان کی فی مربع سنٹی میٹر پتری پر بہت بڑی تعداد میں گیٹ بنائے جا سکتے ہیں اور یہ تعداد دن بادن بڑھتی

[8]NAND-NAND



(ب) (ا)

شکل ۳.۳۵: ضرب و جمع سے متمم ضرب و متمم ضرب (مثال ۳.۱۷)۔

چلی جا رہی ہے۔ سلیکان کی پتری پر ایک ہی قسم کے گیٹ نسبتاً زیادہ آسانی اور بہتر بنائے جا سکتے ہیں۔ یوں کسی بھی تفاعل کو ضرب و جمع کی بجائے متمم ضرب و متمم ضرب دور سے حاصل کرنا زیادہ سود مند ثابت ہو گا۔ اسی وجہ سے وسیع پیمانے کی مخلوط برقیات میں متمم ضرب گیٹ نہایت مقبول ہیں۔

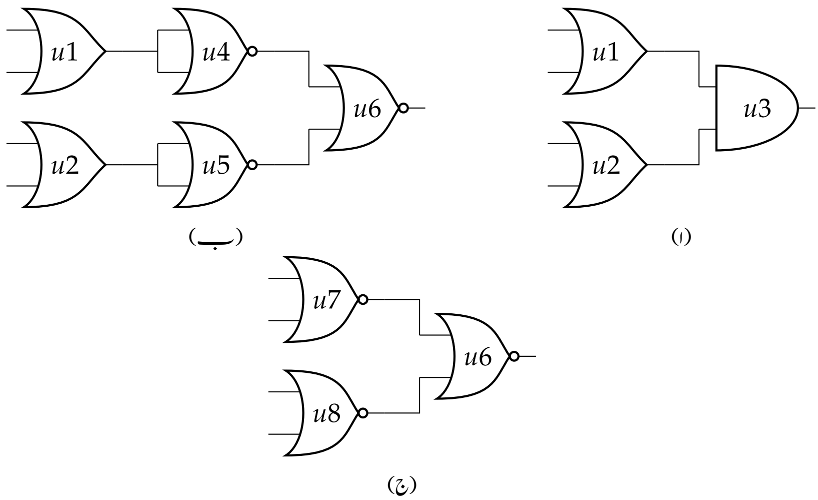
مثال ۳.۱۷: مندرجہ ذیل تفاعل کا متمم ضرب و متمم ضرب دور حاصل کریں۔

A	B	Z
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	1

حل: تفاعل کا مجموعہ ارکان ضرب لکھنے کی غرض سے جدول میں ارکان ضرب کی قطار شامل کرتے ہیں۔

A	B	Z	ارکان ضرب
0	0	1	$\overline{A}\,\overline{B}$
0	1	0	$\overline{A}\,B$
1	0	1	$A\,\overline{B}$
1	1	1	$A\,B$

یوں $Z=\overline{A}\,\overline{B}+A\overline{B}+AB$ ہو گا، جو شکل ۳.۳۵-الف میں پیش ہے۔ تمام گیٹوں کی جگہ متمم ضرب گیٹ نصب کرنے سے متمم ضرب و متمم ضرب دور حاصل ہو گا جو شکل-ب میں پیش ہے۔ □



شکل ۳.۳۶: جمع وضرب سے متمم جمع و متمم جمع۔

۳.۱۴ جمع وضرب دور سے متمم جمع و متمم جمع دور کا حصول

تفاعل کے ارکان جمع کی ضرب سے حاصل جمع وضرب دور میں تمام گیٹوں کی جگہ متمم جمع گیٹ نصب کرنے سے تفاعل کا متمم جمع و متمم جمع دور حاصل ہو گا۔

شکل ۳.۳۶ میں جمع وضرب دور سے قدم باقدم متمم جمع و متمم جمع دور کا حصول دکھایا گیا ہے۔ پہلی قدم میں، شکل-الف کے ضرب گیٹ $u3$ کی جگہ (شکل ۳.۱۹-الف کی مدد سے) مساوی جمع متمم گیٹ $u4$، $u5$، $u6$ نسب کیے گئے۔ اس کے بعد (شکل ۳.۱۸ کی مدد سے) $u4$، اور $u5$ کو نفی گیٹ مان کر، $u1$ اور $u4$ جوڑی کی جگہ متمم جمع $u7$ جبکہ، $u2$ اور $u5$ جوڑی کی جگہ متمم جمع $u8$ نسب کیا گیا۔ یوں شکل ۳.۳۶-ج کا متمم جمع و متمم جمع دور حاصل کیا گیا۔

شکل ۳.۳۶-الف کے جمع وضرب دور کی شکل و صورت تبدیل کیے بغیر تمام گیٹ کی جگہ متمم جمع نسب کرنے سے شکل-ج حاصل ہو گا۔ یہ ایک اہم اور عمومی مشاہدہ ہے۔ یاد رہے کہ ضرب ارکان مجموعہ سے حاصل جمع وضرب دور میں جمع گیٹوں کی قطار اور ایک ضرب گیٹ ہو گا۔

جمع وضرب دور کی شکل و صورت تبدیل کیے بغیر تمام گیٹوں کی جگہ متمم جمع گیٹ نسب کرنے سے متمم جمع و متمم جمع دور حاصل ہو گا۔

جدول ۳.۱۴: تین بِٹ رموز۔

تین بِٹ رموز
000
001
010
011
100
101
110
111

۳.۱۵ علامتی روپ یا رموز

عموماً زبانوں میں الفاظ یا معلومات کی لکھائی اس زبان کے حروف تہجی میں کی جاتی ہے۔ حروف تہجی کو سلسلہ وار اس طرح جوڑا جاتا ہے کہ ان کی آوازیں مل کر لفظ کی آواز پیدا کریں، مگر چینی زبان مختلف ہے۔ چینی زبان ایک علامتی زبان ہے جس میں ہر لفظ کی اپنی علامت یا رمز[9] ہے۔ حروف تہجی پر مبنی لکھائی، یہ حروف سیکھنے کے بعد، کوئی بھی پڑھ سکتا ہے، جبکہ رمزی لکھائی میں کسی بھی رمز کا استعمال اس وقت ممکن ہو گا جب تمام لوگ اس رمز پر متفق ہوں۔ کمپیوٹر اس لحاظ سے چینی زبان سے مشابہت رکھتا ہے، اور معلومات کو رمزی روپ میں رکھتا ہے۔

قلم و کاغذ سے انسان کسی بھی شکل کی لکیر بنا کر اسے ایک علامت یا رمز تصور کر سکتا ہے۔ کمپیوٹر کی دنیا میں ایسا کرنا ممکن نہیں۔ کمپیوٹر صرف 0 اور 1 جانتا ہے، لہٰذا اس میں رموز بھی 0 اور 1 مختلف ترتیب سے جوڑ کر بنائے جاتے ہیں۔ مثلاً، تین بِٹ استعمال کر کے جدول ۳.۱۴ میں پیش رموز ممکن ہوں گے۔ یوں تین بِٹ استعمال کر کے آٹھ رموز تشکیل دیے جا سکتے ہیں، جنہیں آٹھ مختلف اشیاء یا معلومات کی پہچان کے لئے استعمال کیا جا سکتا ہے۔ تین بِٹ استعمال کرتے ہوئے، اس سے زیادہ رموز ممکن نہیں۔ آٹھ بِٹ میں $256 = 2^8$ رمز ممکن ہیں۔

۳.۱۵.۱ ایسکی رموز اور عالمی رموز

ابتدا میں، کمپیوٹر استعمال کی خاطر لاطینی حروف تہجی اور اعشاری گنتی کے رمز طے کیے گئے۔ ایک بائٹ پر مبنی رموز جو نہایت مقبول ہوئے، **ایسکی رموز**[10] کہلاتے ہیں۔ لاطینی حروف تہجی اور اعشاری ہندسوں کے رموز جدول ۳.۱۵ میں پیش کیے گئے ہیں۔ ایسکی رموز میں بڑے حرف A کو 01000001_2 یعنی 41_{16} اور صفر کو 00110000_2 (30_{16}) کے رموز مختص کیے گئے۔ یوں، اس نظام کو استعمال کرتے ہوئے کمپیوٹر A کو 01000001_2 سے، اور صفر کو 00110000_2 سے ظاہر کرے گا۔ یاد رہے کہ، اس طرح کے نظام میں جدول دیکھ کر رمز کی معنی اخذ کی جائے گی۔

---

[9] code
[10] ascii codes

جدول ۱۵.۳: ایسکی رموز۔

لاطینی حرف یا ہندسہ	ایسکی رمز
A	01000001_2
B	01000010_2
C	01000011_2
D	01000100_2
$\vdots$	$\vdots$
X	01011000_2
Y	01011001_2
Z	01011010_2
a	01100001_2
b	01100010_2
c	01100011_2
$\vdots$	$\vdots$
z	01111010_2
0_{10}	00110000_2
1_{10}	00110001_2
2_{10}	00110010_2
$\vdots$	$\vdots$
8_{10}	00111000_2
9_{10}	00111001_2

جدول ۳.۱۶: اعشاری اعداد کے چار بٹ شنائی رموز۔

شنائی مرموز اعشاریہ	اعشاری اعداد
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9

ایک بائٹ میں 00000000_2 سے 11111111_2 تک 256_{10} مختلف رموز ہو گے، جو ایک محدود تعداد ہے۔ جیسے جیسے دنیا کی مختلف زبان بولنے والوں کے ہاں کمپیوٹر کا استعمال رائج ہوا، ایسکی رموز کے (محدود) رمز کم پڑ گئے۔ موجودہ دور میں **عالمی رموز**[11] رائج ہے، جس میں دنیا کی تمام زبانوں (بشمول اردو، پشتو، بلوچی، سندی، وغیرہ) کے حروف تہجی کے رموز موجود ہیں۔ اس نظام میں ہر رمز چار بائٹ کا ہے۔ یہ کتاب عالمی رموز میں تشکیل دی گئی ہے۔ اس نظام میں ریاضیات اور سائنس کے دیگر مضامین میں درکار علامتیں بھی ڈھالی جا سکتی ہیں۔ امید یہی ہے کہ یہ نظام آنے والے زمانے میں درکار ضروریات پوری کرے گا۔

۳.۱۵.۲ اعشاری اعداد کے شنائی رموز

کمپیوٹر کی مادری زبان شنائی ہے، جبکہ انسان اعشاری نظام استعمال کرتا ہے۔ اعشاری گنتی کے کئی رموز زیر استعمال ہیں، جن میں سے ایک **شنائی مرموز اعشاریہ**[12] ہے۔ اعشاری گنتی کے کل دس رموز ہیں۔ جدول ۳.۱۴ میں تین بٹ رمز دکھائے گئے جو کُل آٹھ ہیں۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے اعشاری گنتی کے دس ہندسوں کو ظاہر نہیں کیا جا سکتا۔ اس کے برعکس چار بٹ کل سولہ رمز دیں گے، جنہیں اعشاری گنتی کے دس ہندسوں کے رموز کے طور پر استعمال کیا جا سکتا ہے۔ جدول ۳.۱۶ میں چار بٹ پر مبنی ابتدائی دس علامتیں استعمال کرتے ہوئے اعشاری گنتی کے ہندسوں کے رموز پیش کیے گئے ہیں۔ آخری چھ علامتیں زیر استعمال نہیں۔ یہ **شنائی مرموز اعشاریہ** کہلاتے ہیں۔

۳.۱۵.۳ گرے رموز

اس نظام میں اعشاری ہندسوں کے رمز یوں رکھے گئے کہ کسی بھی دو متواتر اعشاری ہندسوں کے رمز میں صرف ایک بٹ کا فرق ہو۔ جدول ۳.۱۷ چار بٹ گرے رموز پیش کرتا ہے۔

[11] uni code
[12] binary coded decimal (BCD)

جدول ۳.۱۷: اعشاری اعداد کے چار بٹ گرے رموز۔

اعشاری اعداد	چار بٹ گرے رموز
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100
8	1100
9	1101
10	1111
11	1110
12	1010
13	1011
14	1001
15	1000

طبعی متغیرات کو عددی روپ میں، عموماً، گرے رموز میں لکھا جاتا ہے۔ اس کی افادیت ایک مثال سے سمجھتے ہیں۔

تصور کریں کہ ایک بڑھتے ہوئے فاصلے کو چار بٹ کے عام شنائی نظام میں ناپا جاتا ہے۔ یوں 0111_2 کے بعد 1000_2 آئے گا۔ اب تصور کریں کسی وجہ سے، اس چار بٹ شنائی عدد کا بلند رتبی بٹ نسبتاً جلدی 0 سے 1 میں تبدیل ہوتا ہو۔ یوں ایک لمحہ کے لئے 0111_2 کے بعد 1111_2 پڑھا جائے گا، جس کے بعد اصل عدد 1000_2 آجائے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ایک لمحے کے لئے فاصلہ غلط پڑھا جائے گا، جس سے مسائل کھڑے ہو سکتے ہیں۔ اس کے برعکس اگر گرے رمز استعمال کیا جائے تب 0100 کے بعد 1100 پڑھا جائے گا جو درست قیمت ہے۔

باب ۴

کارناف نقشہ جات

بولین جدول سے کسی بھی تفاعل کی مساوات بذریعہ مجموعہ ارکان ضرب یا ضرب ارکان جمع حاصل کر کے اسے گیٹوں کی مدد سے جامہ پہنایا جا سکتا ہے۔ عموماً، اس مساوات میں گیٹوں کی تعداد اور فی گیٹ مداخل کی تعداد کم کی جا سکتی ہے۔ کم مداخل کے، کم تعداد گیٹ استعمال کرنے سے عددی دور پر کم لاگت آئے گی۔ تفاعل کی سادہ صورت بولین منطق سے حاصل کی جا سکتی ہے، البتہ ایک نہایت عمدہ اور سادہ طریقہ کار جسے کارناف نقشہ جات کی ترکیب کہتے ہیں، استعمال کیا جاتا ہے۔ اس باب میں اس ترکیب پر غور کیا جائے گا۔ یہ ترکیب چار اور چار سے کم آزاد متغیرات کے تفاعل کی سادہ صورت حاصل کرنے میں نہایت آسان ثابت ہو گا۔

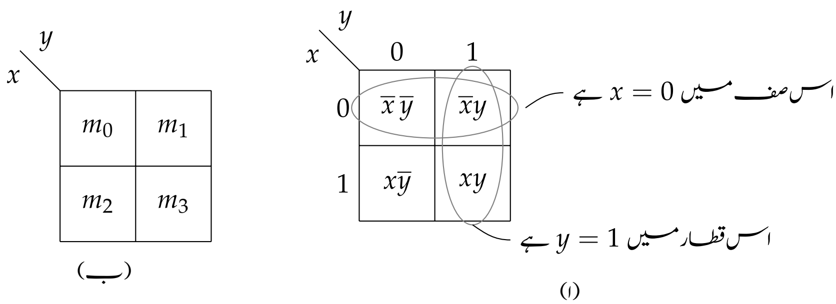
۴.۱ کارناف نقشے کا بنیادی خاکہ

دو آزاد متغیر تفاعل $F(x, y)$ کے بولین جدول میں چار مختلف ارکان ضرب ہوں گے، جنہیں جدول ۴.۱ میں پیش کیا گیا ہے۔ اس کے کارناف نقشے میں چار خانے ہوں گے، جہاں ایک خانہ ایک رکن ضرب کو ظاہر کرتا ہے۔ کارناف نقشے میں ان چار خانوں کی ترتیب، شکل ۴.۱-الف میں دکھائی گئی ہے، جہاں بالائی صف میں $x = 0$ جبکہ نچلی صف میں $x = 1$ ہے؛ یہ قیمتیں صفوں کے بائیں طرف، خانوں سے باہر، لکھی گئی ہیں۔ اسی طرح بائیں قطار میں $y = 0$ جبکہ دائیں قطار میں $y = 1$ ہے؛ یہ قیمتیں خانوں سے باہر، قطاروں کے اوپر جانب لکھی گئی ہیں۔ یوں بالائی صف اور دائیں قطار کے مشترکہ خانے میں $x = 0$ اور $y = 1$ ہے۔ اس خانے کے آزاد متغیرات کی ثنائی قیمتوں کو اکٹھے 01 لکھیں۔ یہ خانہ رکن ضرب $\overline{x}y$ کو ظاہر کرتا ہے، لہٰذا اس خانے میں $\overline{x}y$ (شکل-الف) یا m_1 (شکل-ب) لکھا جائے گا۔ باقی خانوں میں اسی طرح اندراج کیے جاتے ہیں۔ شکل ۴.۳ میں اسی طرز پر چار آزاد متغیر تفاعل کا کارناف نقشے میں خانہ m_{11} کی نشاندہی کی گئی ہے۔

تین آزاد متغیر تفاعل $F(x, y, z)$ کے آٹھ ارکان ضرب ہوں گے۔ انہیں شکل ۴.۲ کے کارناف نقشہ میں دکھایا

جدول ۴.۱: دو متغیر ارکان ضرب۔

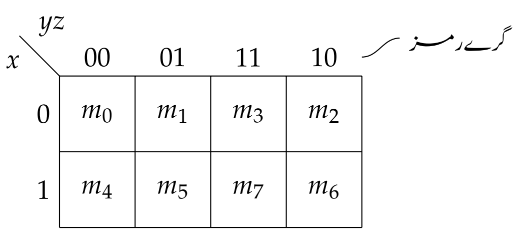
x	y		
0	0	$\bar{x}\bar{y}$	m_0
0	1	$\bar{x}y$	m_1
1	0	$x\bar{y}$	m_2
1	1	xy	m_3



شکل ۴.۱: دو آزاد متغیر کارناف نقشے کی بنیادی صورت۔

گیا ہے۔ اس شکل میں دو صف اور چار قطار ہیں۔ صفوں کا تعین x کی قیمت، جبکہ قطاروں کا تعین yz کی قیمت کرتی ہے۔ ان قیمتوں کو (ثنائی گنتی کے روپ میں نہیں بلکہ) گرے رمز میں لکھا جاتا ہے۔ یوں، بائیں ہاتھ سے شروع کر کے، پہلی قطار میں yz کی قیمت 00، دوسری میں 01، تیسری میں 11 جبکہ آخری قطار میں 10 ہو گی۔

چار آزاد متغیر تفاعل $F(w, x, y, z)$ کے سولہ ارکان ضرب ہوں گے، جنہیں چار صف اور چار قطار کے کارناف کے نقشے میں سمویا جا سکتا ہے۔ شکل ۴.۳ میں ایسا کارناف نقشہ دکھایا گیا ہے۔ یہاں صفوں کا تعین



شکل ۴.۲: تین متغیر کارناف نقشے کی بنیادی صورت۔

$wx \backslash yz$	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

شکل ۴.۳: چار متغیر کارناف نقشے کی بنیادی صورت۔

wx کی قیمت، جبکہ قطاروں کا تعین yz کی قیمت کرتی ہیں۔ ان قیمتوں کو گرے رمز میں لکھ کر خانوں کی پہچان کی جاتی ہے۔

اب تک آپ پر واضح ہو چکا ہو گا کہ کارناف نقشے بناتے ہوئے صفوں اور قطاروں کو گرے رمز میں میں رکھا جاتا ہے۔ چار سے زیادہ متغیرات کے کارناف نقشوں کا استعمال نسبتاً پیچیدہ ہوتا ہے، لہٰذا ان سے تفاعل کا سادہ روپ عموماً کمپیوٹر کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔

۴.۲ کارناف نقشے کی بھرائی

بولین جدول سے کارناف نقشے کی بھرائی نہایت آسان اور سیدھا عمل ہے۔ بولین جدول کی جن صفوں میں تفاعل کی قیمت 1 ہو، ان کے مطابقتی (کارناف نقشہ کے) خانوں میں 1 پُر کریں؛ باقی خانوں میں 0 پُر کریں۔ شکل ۴.۴-الف میں دو آزاد متغیر تفاعل $F = \sum(m_0, m_1)$ کے لئے یہ عمل دکھایا گیا ہے۔ شکل-ج میں تفاعل کا کارناف کا نقشہ پُر کیا ہوا دکھایا گیا ہے۔ تفاعل کو مجموعہ ارکان ضرب کے روپ میں لکھنے سے کارناف نقشہ میں پُر کئے جانے والے خانوں کی نشاندہی ہوتی ہے۔

تین آزاد متغیر تفاعل $F = \sum(m_3, m_5, m_6, m_7)$ کی مثال شکل ۴.۵ میں پیش کی گئی ہیں۔

۴.۳ کارناف نقشے سے تفاعل کی سادہ مساوات کا حصول

کارناف نقشے میں قریبی خانوں سے مراد ایسے 2^n خانے ہیں جنہیں مربع یا مستطیل میں گھیرا جا سکے؛ یہاں n کی قیمت 1، 2، 3، وغیرہ ہو سکتی ہے۔ یوں 2، 4، 8، وغیرہ، ایسے خانے جنہیں مربع یا مستطیل میں گھیرا جا سکے قریبی خانے کہلائیں گے۔ کوئی بھی خانہ (یا خانے) ایک سے زیادہ مربع یا مستطیل کا حصہ بن سکتا ہے (سکتے ہیں)۔

قریبی خانوں میں تفاعل کی قیمت 1 ہونے کی صورت میں، ان خانوں کے ارکان ضرب کا مجموعہ بولین

x	y	F	ارکان ضرب
0	0	1	m_0
0	1	1	m_1
1	0	0	m_2
1	1	0	m_3

$$F = \sum(m_0, m_1)$$

(ا)

$x \backslash y$	0	1
0	m_0	m_1
1	m_2	m_3

(ب)

$x \backslash y$	0	1
0	1	1
1	0	0

(ج)

شکل ۴.۴: دو متغیر تفاعل کارناف نقشے کی بھرائی۔

x	y	z	F	ارکان ضرب
0	0	0	0	m_0
0	0	1	0	m_1
0	1	0	0	m_2
0	1	1	1	m_3
1	0	0	0	m_4
1	0	1	1	m_5
1	1	0	1	m_6
1	1	1	1	m_7

$$F = \sum(m_3, m_5, m_6, m_7)$$

(ا)

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	m_0	m_1	m_3	m_2
1	m_4	m_5	m_7	m_6

(ب)

$x \backslash yz$	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

(ج)

شکل ۴.۵: تین متغیر کارناف نقشے کی بھرائی۔

قوانین سے حل کر کے سادہ ترین رکن ضرب حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یہ رکن ان قریبی خانوں کے ارکان ضرب میں مشترک حصے پر مشتمل ہو گا۔

دو قریبی بلند خانوں (جن میں تفاعل کی قیمت 1 ہو گی، کے ارکان ضرب کے مجموعہ) سے حاصل، سادہ ترین رکن ضرب میں آزاد متغیرات کی تعداد، تفاعل میں آزاد متغیرات کی تعداد سے ایک کم ہو گی۔ اسی طرح، چار بلند قریبی خانوں سے حاصل، سادہ ترین رکن ضرب میں آزاد متغیرات کی تعداد، تفاعل میں آزاد متغیرات کی تعداد سے دو کم ہو گی۔ آٹھ قریبی بلند خانوں سے حاصل، سادہ ترین رکن ضرب میں آزاد متغیرات کی تعداد، تفاعل میں آزاد متغیرات کی تعداد سے چار کم ہو گی۔

قریبی خانے گھیرتے وقت یہ کوشش ہونی چاہئے کہ بڑے سے بڑا مربع یا مستطیل بنے۔ ایسا کرنے سے سادہ ترین رکن ضرب حاصل ہو گا۔ عموماً، قریبی خانوں کو ایک سے زیادہ طریقوں سے گھیرا جا سکتا ہے، جن سے تفاعل کی مختلف سادہ صورتیں حاصل ہوں گی۔

اب ہم چند مثالوں کی مدد سے اس طریقہ کار کو سیکھتے ہیں۔

۴.۳.۱ دو آزاد متغیر تفاعل

دو متغیر تفاعل کے کارناف نقشہ میں m_0 اور m_1 قریبی خانے ہوں گے۔ اسی طرح m_0 اور m_2 بھی قریبی خانے ہوں گے، جبکہ m_1 اور m_2 قریبی خانے نہیں ہوں گے۔

شکل ۴.۶ میں دو متغیر تفاعل اور اس کا کارناف نقشہ دیا گیا ہے۔ کارناف نقشے میں خانوں سے اوپر، متغیر y کی ممکن قیمتوں 0 اور 1 کی بجائے بالترتیب $\overline{y}$ اور y لکھا گیا ہے (یعنی 1 کی جگہ متغیر لکھا گیا ہے جبکہ 0 کی جگہ متغیر لکھ کر اس پر لکیر لگائی گئی ہے جو پست متغیر کو ظاہر کرتا ہے)۔ اسی طرح خانوں کے بائیں جانب $\overline{x}$ اور x لکھا گیا ہے۔

کارناف نقشے کے دو قریبی خانوں میں تفاعل کی قیمت 1 ہے، جنہیں نقطہ دار مستطیل میں گھیرا گیا ہے۔ شکل-د میں ان خانوں کے ارکان ضرب کے مجموعے کو بولین قوانین سے حل کر کے سادہ رکن حاصل کیا گیا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ان خانوں کے ارکان ضرب کے مجموعے سے ایک متغیر رکن حاصل ہوتا ہے؛ یعنی دو متغیر تفاعل کی صورت میں دو خانوں سے ایک متغیر رکن حاصل ہوا۔

یہی مساوات، شکل-ج کے کارناف نقشے میں نقطہ دار مستطیل میں گھیرے، دو قریبی خانوں کو دیکھ کر لکھی جا سکتی ہے۔ نقطہ دار مستطیل میں گھیرے دو قریبی خانوں کے ارکان ضرب $\overline{x}\,\overline{y}$ اور $\overline{x}y$ ہیں۔ ان ارکان ضرب میں $\overline{x}$ مشترک ہے، جبکہ ایک رکن میں $\overline{y}$ اور دوسرے میں y ہے۔ یوں، نقطہ دار مستطیل میں گھیرے ارکان ضرب میں وہ حصہ جو مشترک ہو مطلوبہ سادہ رکن ہو گا۔ (غیر مشترک حصہ رد کرنا، شکل-د میں $1 = \overline{y} + y$ کے مترادف ہے۔) چونکہ ان خانوں کے علاوہ تمام خانوں میں 0 ہے لہٰذا یہی رکن تفاعل کی مساوات $(F = \overline{x})$ ہو گی۔

شکل ۴.۷ میں ایک تفاعل کا جدول دیا گیا ہے جس قریبی خانوں کے ارکان ضرب $\overline{x}\,\overline{y}$ اور $x\overline{y}$ میں $\overline{y}$ مشترک ہے۔ چونکہ باقی خانوں میں 0 ہے، لہٰذا اس تفاعل کی سادہ مساوات $F = \overline{y}$ ہو گی۔

شکل ۴.۸ کے تفاعل کے ارکان ضرب $x\overline{y}$ اور xy میں x مشترک ہے (شکل-ج دیکھیں)۔ چونکہ باقی

x	y	F	
0	0	1	m_0
0	1	1	m_1
1	0	0	m_2
1	1	0	m_3

(ا)

	$\overline{y}$	y
$\overline{x}$	1	1
x	0	0

(ب)

	$\overline{y}$	y
$\overline{x}$	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}y$
x		

(ج)

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}y \\
&= \overline{x}(\overline{y} + y) \\
&= \overline{x}(1) \\
&= \overline{x}
\end{aligned}
$$

(د)

شکل ۴.۶: قریبی بلند خانوں سے سادہ رکن ضرب کا حصول۔

	$\overline{y}$	y
$\overline{x}$	1	0
x	1	0

(ا)

	$\overline{y}$	y
$\overline{x}$	$\overline{x}\,\overline{y}$	
x	$x\overline{y}$	

(ب)

$$
\begin{aligned}
F &= \overline{x}\,\overline{y} + x\overline{y} \\
&= (\overline{x} + x)\overline{y} \\
&= (1)\overline{y} \\
&= \overline{y}
\end{aligned}
$$

(ج)

شکل ۴.۷: قریبی بلند خانوں سے سادہ رکن ضرب کا حصول۔

خانوں میں تفاعل کی قیمت 0 ہے لہٰذا تفاعل کے ارکان ضرب کا مجموعہ اسی رکن کے برابر ہو گا۔ یوں اس کی مساوات $F = x$ ہو گی۔

شکل ۴.۹ میں ایک ہی خانے کو دو قریبی خانوں کے ساتھ باری باری جوڑتے ہوئے سادہ مساوات $(F = \overline{x} + \overline{y})$ حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔ آئیں اس مساوات کو بولین منطق کی مدد سے حاصل

	$\overline{y}$	y
$\overline{x}$	0	0
x	1	1

(ا)

	$\overline{y}$	y
$\overline{x}$		
x	$x\overline{y}$	xy

(ب)

یہ دو مختلف ہیں

$x\overline{y},\quad xy$

لکھائی میں x مشترک ہے

(ج)

شکل ۴.۸: قریبی بلند خانوں سے سادہ رکن ضرب کا حصول۔

	$\overline{y}$	y
$\overline{x}$	1	1
x	1	0

	$\overline{y}$	y
$\overline{x}$	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}y$
x	$x\overline{y}$	

$\overline{x}\,\overline{y}$ اور $\overline{x}y$ لکھنے میں $\overline{x}$ مشترک ہے،

$\overline{x}\,\overline{y}$ اور $x\overline{y}$ لکھنے میں $\overline{y}$ مشترک ہے،

لہٰذا مساوات $F = \overline{x} + \overline{y}$ ہو گی۔

شکل ۴.۹: قریبی بلند خانوں سے سادہ رکن کا حصول۔

	$\overline{y}$	y
$\overline{x}$	1	1
x	1	1

	$\overline{y}$	y
$\overline{x}$	$\overline{x}\,\overline{y}$	$\overline{x}y$
x	$x\overline{y}$	xy

$F = 1$

شکل ۴.۱۰: چار قریبی خانوں سے سادہ رکن 1 حاصل ہو گا۔

کریں۔ مساوات کو ارکان ضرب کا مجموعہ لکھ کر اس کی سادہ روپ اخذ کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}
F &= x\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}y\\
&= x\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}y\\
&= (x+\overline{x})\overline{y} + \overline{x}(\overline{y}+y)\\
&= (1)\overline{y} + \overline{x}(1)\\
&= \overline{y} + \overline{x}
\end{aligned}$$

جہاں، دوسرے قدم پر جدول ۳.۱۲-ب کی شق 4 (صفحہ ۵۰) استعمال کرتے ہوئے $\overline{x}\,\overline{y} = \overline{x}\,\overline{y} + \overline{x}\,\overline{y}$ لکھا گیا۔

شکل ۴.۱۰ میں چار قریبی خانے ایک مستطیل میں گھیرے جا سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں تفاعل ہمیشہ بلند (1) رہے گا لہٰذا اس کی مساوات $F = 1$ ہو گی۔

شکل ۴.۱۱ میں قریبی خانے نہیں پائے جاتے، لہٰذا ارکان ضرب کے مجموعہ کو مزید سادہ نہیں بنایا جا سکتا۔ جب بھی کوئی خانہ کسی مستطیل میں شامل نہ ہو، اس کا رکن ضرب جوں کا توں مجموعہ (اور مساوات) میں رہے گا۔

مشق ۴.۱: ارکان ضرب کے مجموعہ کی سادہ صورت بولین قوانین سے حاصل کر کے ثابت کریں کہ شکل ۴.۱۰

$$F = x\overline{y} + \overline{x}y$$

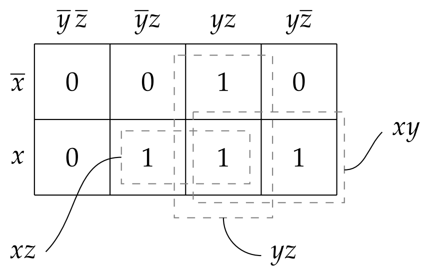
	$\overline{y}$	y
$\overline{x}$		$\overline{x}y$
x	$x\overline{y}$	

	$\overline{y}$	y
$\overline{x}$	0	1
x	1	0

شکل ۴.۱۱: قریبی خانے نہیں پائے جاتے۔

$$F = \sum(m_3, m_5, m_6, m_7)$$

$$F(x, y, z) = xy + yz + xz$$



شکل ۴.۱۲: تین متغیر تفاعل کے کارناف نقشے سے سادہ مساوات کا حصول۔

میں تفاعل کی سادہ مساوات $F = 1$ ہے۔

مشق ۴.۲: رکن ضرب نہ ہونے کی صورت میں ثابت کریں کہ تفاعل کی مساوات $F = 0$ ہوگی۔

شکل ۴.۱۱ میں ایسا تفاعل دیا گیا ہے جس کے خانے کسی مربع یا مستطیل میں نہیں گھیرے جا سکتے۔ ایسے تفاعل کی مساوات کو سادہ نہیں بنایا جا سکتا۔

۴.۳.۲ تین متغیر تفاعل

تین متغیر تفاعل اور اس کا کارناف نقشہ شکل ۴.۱۲ میں دکھایا گیا ہے۔ کارناف نقشے میں دو قریبی خانوں کو گھیرنے والے تین مستطیل بنائے گئے ہیں۔ یاد رہے، مستطیل یوں بنانا لازمی ہے کہ اس میں 2^n خانے سموئے جائیں، جہاں n عدد صحیح ہے۔ یوں تین خانوں کو گھیرنے کی اجازت نہیں۔

درمیانی مستطیل m_3 اور m_7 گھیرتا ہے۔ ان خانوں کے ارکان ضرب میں x کی قیمت تبدیل ہوتی ہے، جبکہ yz

دونوں میں مشترک ہے۔ یوں ان کا سادہ رکن yz ہو گا۔ باقی دو مستطیل سے xy اور xz حاصل ہو گا۔ یوں تفاعل کی سادہ مساوات ان کا مجموعہ $(F = xy + yz + xz)$ ہو گا۔ اس مساوات کو ارکان ضرب کے مجموعہ سے بولین قوانین کی مدد سے حاصل کر سکتے ہیں (جو آپ کو اگلی مشق میں کرنا ہو گا)۔

$$
\begin{aligned}
F(x,y,z) &= \sum(m_3, m_5, m_6, m_7) \\
&= \overline{x}yz + x\overline{y}z + xyz + xy\overline{z} \quad \text{(تفصیلی ارکان ضرب کا مجموعہ)} \\
&= xy + yz + xz \quad \text{(سادہ ارکان ضرب کا مجموعہ)}
\end{aligned}
\tag{۴.۱}
$$

اس مساوات کی دوسری لکیر میں، ارکان ضرب تمام آزاد متغیرات پر مشتمل ہیں۔ اس طرح کے رکن ضرب کو تفصیلی رکن ضرب کہتے ہیں۔ مساوات کی تیسری لکیر کے ارکان ضرب میں، آزاد متغیرات کی تعداد کم ہے۔ اس طرح کے رکن ضرب کو سادہ رکن ضرب کہتے ہیں۔ اس کتاب میں، عموماً، دونوں اقسام رکن ضرب پکارے جائیں گے۔ امید کی جاتی ہے، متن سے مطلوب مطلب واضح ہو گا؛ جہاں ایسا نہ ہو، وہاں انہیں مکمل نام سے پکارا جائے گا۔

مشق ۴.۳: بولین الجبرا استعمال کر کے مساوات ۴.۱ کی دوسری لکیر سے تیسری لکیر حاصل کریں۔ ساتھ ہی تسلی کر لیں کہ آپ شکل ۴.۱۲ کے کارناف نقشے سے سادہ ارکان ضرب حاصل کرنا جانتے ہیں۔

شکل ۴.۱۳ میں تین متغیر کارناف نقشہ پیش کیا گیا ہے۔ نقشے میں $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} = m_0$ اور $\overline{x}y\overline{z} = m_2$ کا مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
m_0 + m_2 &= \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} \\
&= \overline{x}\,\overline{z}(\overline{y} + y) \\
&= \overline{x}\,\overline{z}
\end{aligned}
$$

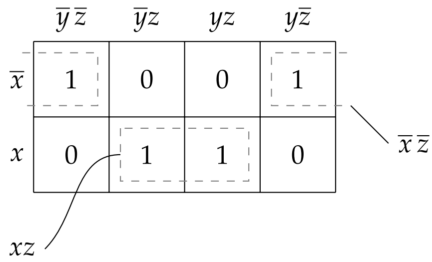
ان تین متغیر ارکان ضرب کے مجموعے سے دو متغیر رکن ضرب حاصل ہوا۔ یوں m_0 اور m_2 خانوں کو قریبی خانے تصور کرنا ہو گا۔ آئیں اس پر تفصیل سے گفتگو کریں۔

کارناف نقشے کے بایاں اور دایاں قطار کے خانوں کو قریبی تصور کریں۔ تصور میں اس کاغذ کو، جس پر کارناف نقشہ بنا ہو، یوں گول کریں کہ کاغذ کا بایاں اور دایاں کنارہ آپس مل جائیں۔ اب پہلی اور آخری قطار کے خانے قریبی ہوں گے۔ اسی طرح، دو سے زیادہ صفوں کی صورت میں، نچلی اور بالائی صف کے خانے قریبی ہوں گے۔ تصور میں کاغذ کو یوں لپیٹیں کہ اس کا نچلا کنارہ بالائی کنارے سے جا ملے۔ یوں ان صفوں کے خانوں کو قریبی تصور کیا جا سکتا ہے۔

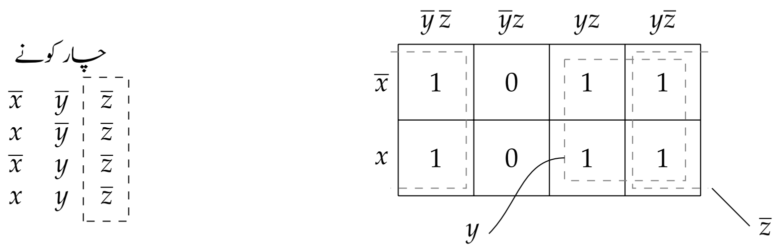
شکل ۴.۱۳ میں m_0 اور m_2 کو مستطیل میں گھیرا دکھایا گیا ہے۔ (تصور کریں کہ لپیٹے گئے کاغذ پر ان خانوں کو مستطیل میں گھیرنے کے بعد، کاغذ کو دوبارہ سیدھا کیا گیا ہے؛ یوں مستطیل دو ٹکڑوں میں نظر آئے

$$F = \sum(m_0, m_2, m_5, m_7)$$

$$F(x, y, z) = \overline{x}\,\overline{z} + xz$$



شکل ۴.۱۳: کارناف نقشے کے اطراف آپس میں ملائیں۔



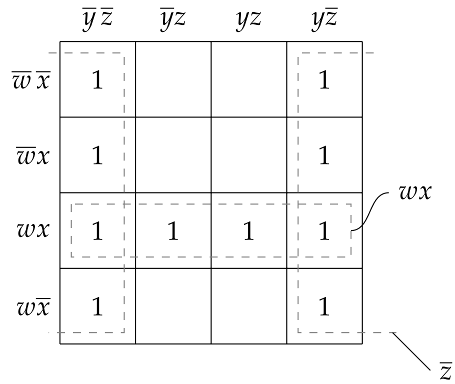
شکل ۴.۱۴: چار قریبی خانے۔

گا۔) ان خانوں میں $\overline{x}\,\overline{z}$ مشترک ہے، جو ہمارے توقع کے عین مطابق ہے۔ خانہ m_5 اور m_7 میں xz مشترک ہے۔ یوں تفاعل کی سادہ مساوات ان سادہ ارکان کا مجموعہ $F = \overline{x}\,\overline{z} + xz$ ہو گا۔

شکل ۴.۱۴ میں تین متغیر کارناف نقشہ دیا گیا ہے، جس میں چار قریبی خانوں کے دو مربع بنائے گئے ہیں۔ آپ کارناف نقشے کو دیکھ کر تفاعل کی سادہ مساوات لکھ سکتے ہیں۔ (اگر آپ ایسا نہیں کر سکتے، تیار ہو جائیں! اگلی مشق میں یہی کہنے کو کہا گیا ہے۔)

مشق ۴.۴: شکل ۴.۱۴ میں دئے تفاعل کی سادہ مساوات کارناف نقشے سے حاصل کریں۔ اسی مساوات کو بولین الجبرا کی مدد سے حاصل کریں۔ شکل میں چار کونوں کا مشترک حصہ $(\overline{z})$ دکھایا گیا ہے۔

$$F(w,x,y,z) = wx + \overline{z}$$



شکل ۴.۱۵: چار متغیر نقشہ (برائے مثال ۴.۱)

۴.۳.۳ چار متغیر تفاعل

چار آزاد متغیر تفاعل کے سولہ ارکان ضرب ہوں گے۔ اس کے کارناف نقشے میں قریبی خانوں کو پہچاننے کی خاطر نقشے کو ایسی سطح پر بنا ہوا تصور کریں کہ نقشے کی دایاں قطار نقشے کی بائیں قطار سے جڑا ہو۔ اسی طرح نقشے کی بالائی صف اور نچلی صف سے آپس میں جڑے ہوں۔ یوں m_4 خانہ m_6 خانے سے جڑتا ہے، اور m_1 خانہ m_9 خانے سے جڑتا ہے۔

اس نقشے میں دو، چار، آٹھ اور سولہ قریبی خانے بنانا ممکن ہے۔ دو قریبی خانوں کے ارکان ضرب کا مجموعہ ایک رکن ضرب دے گا، جس میں تین متغیرات ہوں گے۔ چار قریبی خانوں کے ارکان ضرب کا مجموعہ ایک رکن ضرب دے گا، جس میں دو آزاد متغیرات ہوں گے۔ آٹھ قریبی خانوں کے ارکان ضرب کا مجموعہ ایک رکن ضرب دے گا، جس میں ایک متغیر ہو گا، جبکہ سولہ قریبی خانوں کے ارکان ضرب کا مجموعہ 1 کے برابر ہو گا۔

چار متغیر کارناف نقشوں کی چند مثالیں دیکھتے ہیں۔

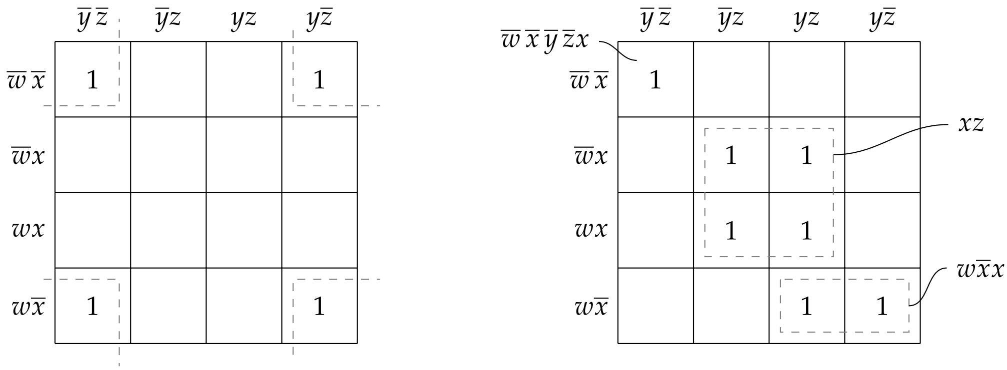
مثال ۴.۱: درج ذیل تفاعل کی سادہ مساوات شکل ۴.۱۵ میں پیش کی گئی ہے۔

$$F(w,x,y,z) = \sum(m_0, m_2, m_4, m_6, m_8, m_{10}, m_{12}, m_{13}, m_{14}, m_{15})$$

□

مثال ۴.۲: درج ذیل تفاعلات کی سادہ مساوات حاصل کریں۔

$$F(w,x,y,z) = \sum(m_0, m_5, m_7, m_{10}, m_{11}, m_{13}, m_{15})$$
$$F(w,x,y,z) = \sum(m_0, m_2, m_8, m_{10})$$



$$F(w,x,y,z) = \overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + xz + w\overline{x}y$$

(ا)

$$F(w,x,y,z) = \overline{x}\,\overline{z}$$

(ب)

شکل ۴.۱۶: چار متغیر نقشہ (برائے مثال ۴.۲)

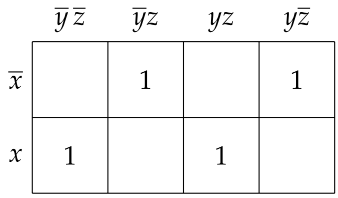
حل: پہلا تفاعل شکل ۴.۱۶-الف میں دکھایا گیا ہے، جہاں چار قریبی خانے سادہ رکن ضرب (xz)، جبکہ دو قریبی خانے $w\overline{x}y$ رکن ضرب دیں گے، اور ایک خانہ جو کسی کے قریب نہیں پایا جاتا رکن $\overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$ دے گا۔ یوں تفاعل کی سادہ مساوات ان ارکان کا مجموعہ $F = \overline{w}\,\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + xz + w\overline{x}y$ ہو گا۔

دوسرا تفاعل شکل ۴.۱۶-ب میں پیش کیا گیا ہے، جہاں چار کونوں کو قریبی تصور کریں، جو رکن $\overline{x}\,\overline{z}$ دیں گے۔ یہی اس تفاعل کی سادہ مساوات $F = \overline{x}\,\overline{z}$ ہے۔ □

مشق ۴.۵: شکل ۴.۱۶-ب کے چار خانوں کے ارکان ضرب کے مجموعہ کا سادہ روپ، بولین قوانین کی مدد سے حاصل کر کے ثابت کریں کہ یہ قریبی خانے ہیں۔

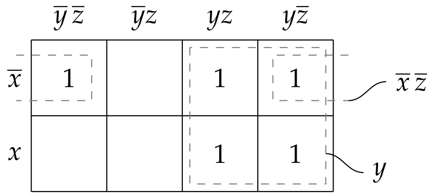
مثال ۴.۳: تین آزاد متغیرات کے بلا شرکت گیٹ کا کارناف نقشہ حاصل کریں۔

حل: شکل ۴.۱۷ میں نقشہ پیش ہے۔ اس میں قریب خانے نہیں پائے جاتے، لہٰذا اس کی مساوات مزید سادہ نہیں بنائی جا سکتی۔ □



$F(x,y,z) = x \oplus y \oplus z$

شکل ۴.۱۷: تین متغیر بلا شرکت گیٹ کا نقشہ (برائے مثال ۴.۳)



$F(x,y,z) = \sum(m_0, m_2, m_3, m_6, m_7)$

شکل ۴.۱۸: سادہ مساوات سے ارکان ضرب کے مجموعہ کا حصول (مثال ۴.۴)۔

۴.۳.۴ سادہ مساوات سے تفاعل کے ارکان ضرب کا حصول

کسی بھی تفاعل کی سادہ مساوات کا حصول بذریعہ کارناف نقشہ آپ نے دیکھا۔ اس حصے میں اس طریقہ کار کو اُلٹ چلا کر تفاعل کی سادہ مساوات سے ارکان ضرب کا مجموعہ حاصل کیا جائے گا۔ یہ ترکیب مثال سے بہتر سمجھ آئی گی۔

مثال ۴.۴: درج ذیل سادہ مساوات سے تفاعل کے ارکان ضرب کا مجموعہ دریافت کریں۔

$$F(x,y,z) = y + \overline{x}\,\overline{z}$$

حل: شکل ۴.۱۸ میں سادہ مساوات سے کارناف نقشہ حاصل کیا گیا، جس سے مجموعہ ارکان ضرب لکھا گیا۔ □

۴.۴ ضرب ارکان جمع کے روپ میں سادہ مساوات

کارناف نقشے کے ان خانوں میں 1 پُر کیا جاتا ہے جن میں تفاعل کے بولین جدول میں ارکان ضرب کی قیمت 1 ہو۔ تفاعل کے متمم کے بولین جدول میں جہاں پہلے 0 تھا اب وہاں 1 ہو گا۔ اس جدول کے کارناف نقشے سے ارکان ضرب کے مجموعے کی مساوات، تفاعل کے متمم کی سادہ مساوات ہو گی۔ یہ مساوات مجموعہ ارکان ضرب کے روپ میں ہو گی، جس کا متمم لے کر اصل تفاعل کی (ضرب ارکان جمع کے روپ میں) سادہ مساوات حاصل ہو گی۔ ایک مثال سے اس بات کی وضاحت کرتے ہیں۔

x	y	z	F	$\overline{F}$
0	0	0	0	1
0	0	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	0	1

(ا)

	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$	yz	$y\overline{z}$
$\overline{x}$	0	0	1	1
x	1	1	0	0

$F = \overline{x}y + x\overline{y}$ (ب)

	$\overline{y}\,\overline{z}$	$\overline{y}z$	yz	$y\overline{z}$
$\overline{x}$	1	1	0	0
x	0	0	1	1

$\overline{F} = \overline{x}\,\overline{y} + xy$ (ج)

شکل ۴.۱۹: مجموعہ ارکان ضرب اور ضرب ارکان جمع کے روپ میں سادہ مساوات (مثال ۴.۵)۔

مثال ۴.۵: مندرجہ ذیل تفاعل کے مجموعہ ارکان ضرب اور ضرب ارکان جمع کی سادہ مساوات حاصل کریں۔

$$F(x,y,z) = \sum(m_2, m_3, m_4, m_5)$$

حل: شکل ۴.۱۹-الف میں تفاعل اور اس کے متمم کا جدول پیش کیا گیا ہے۔ ، شکل-ب میں تفاعل کی مساوات، ارکان ضرب کے مجموعہ کی صورت میں دی گئی ہے۔ شکل-ج میں دی گئی مساوات، تفاعل کے متمم کی ہے، جس کا متمم لے کر (اور بولین کلیات استعمال کر کے) تفاعل کے ارکان جمع کی ضرب کی (درج ذیل) سادہ مساوات حاصل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
F = \overline{\overline{F}} &= \overline{\overline{x}\,\overline{y} + xy} \\
&= (\overline{\overline{x}\,\overline{y}})(\overline{xy}) \\
&= (\overline{\overline{x}} + \overline{\overline{y}})(\overline{x} + \overline{y}) \\
&= (x + y)(\overline{x} + \overline{y})
\end{aligned}$$

□

x	y	F	$\overline{F}$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	d	d
1	1	1	0

(ا)

	$\overline{y}$	y
$\overline{x}$	1	0
x	d	1

$F = \overline{y} + x$

(ب)

	$\overline{y}$	y
$\overline{x}$	1	0
x	d	1

$F = x + \overline{y}$

(ج)

شکل ۴.۲۰: غیر دلچسپ حال (مثال ۴.۶)۔

۴.۵ غیر دلچسپ حال

ہم نے اب تک جتنے تفاعل دیکھے، ان میں مداخل کی تمام صورتوں کے مطابقتی مخارج دستیاب اور ضروری تھے۔ بعض اوقات مداخل کی چند قیمتیں ممکن نہیں ہوں گی یا ان کے مطابقتی مخارج استعمال نہیں ہوں گے۔ مداخل کے ان قیمتوں کو غیر دلچسپ حال کہتے ہیں۔

تفاعل کی سادہ مساوات حاصل کرتے وقت، کارناف نقشے کے غیر دلچسپ حال خانوں میں 0 یا 1 کی بجائے d درج کیا جاتا ہے۔ قریبی خانے گھیرتے وقت اگر کسی غیر ضروری خانے میں 1 تصور کرنے سے زیادہ سادہ مساوات حاصل ہو تو اس خانے میں 1 تصور کیا جاتا ہے، اور اگر اس میں 0 تصور کرنے سے زیادہ سادہ مساوات حاصل ہوتی ہے تو اس میں 0 تصور کیا جاتا ہے۔

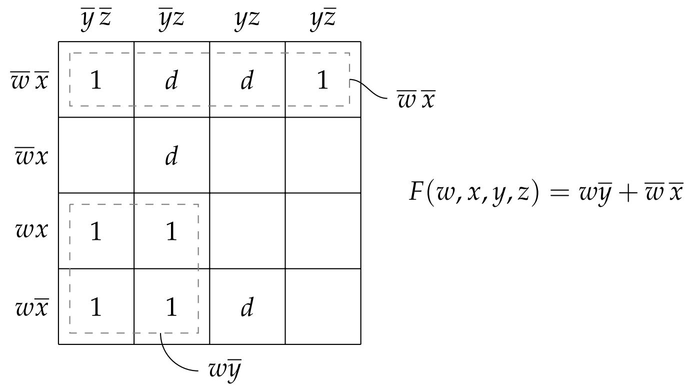
مثال ۴.۶: درج ذیل تفاعل کی سادہ مساوات، مجموعہ ارکان ضرب اور ضرب ارکان جمع کے روپ میں حاصل کریں۔

$$F(x,y) = \sum(m_0, m_3)$$
$$d(x,y) = \sum(m_2)$$

حل: تفاعل کا ایک حال غیر دلچسپ ہے۔ شکل ۴.۲۰ میں تفاعل کا بولین جدول اور کارناف نقشے دکھائے گئے ہیں۔ مجموعہ ارکان ضرب کے روپ میں سادہ مساوات حاصل کرتے وقت غیر دلچسپ خانے کی قیمت 1 تصور کرنے سے (زیادہ) سادہ مساوات حاصل ہو گی (شکل-ب)۔ ضرب ارکان جمع کے روپ میں بھی غیر دلچسپ خانے کی قیمت 1 تصور کرنے سے (زیادہ) سادہ مساوات حاصل ہو گی (شکل-ج)۔ □

مثال ۴.۷: درج ذیل تفاعل کی سادہ مساوات حاصل کریں۔

$$F(w,x,y,z) = \sum(m_0, m_2, m_8, m_9, m_{12}, m_{13}, m_{15})$$
$$d(w,x,y,z) = \sum(m_1, m_3, m_{11})$$



شکل ۴.۲۱: غیر دلچسپ حالات (مثال ۴.۷)۔

حل: شکل ۴.۲۱ میں کارناف نقشہ پیش کیا گیا ہے۔ سادہ مساوات کے حصول میں (بالائی صف کے) دو غیر دلچسپ خانوں کی قیمت 1، جبکہ باقی دو غیر دلچسپ خانوں کی قیمت 0 تصور کی گئی۔ کارناف نقشے میں 0 کو نظر پوش کیا گیا ہے۔ تفاعل کی مساوات شکل میں دی گئی ہے۔ □

باب ۵

ترکیبی منطق اور ترتیبی ادوار

ترکیبی منطق[۱] سے مراد وہ منطق ہے جس میں مخارج موجودہ مداخل پر منحصر ہو؛ یعنی، کسی بھی لمحہ پر تفاعل کا مخارج، اُسی لمحہ کے مداخل پر منحصر ہو گا۔ ایسے تفاعل کو ترکیبی ادوار سے جامہ عمل پہنایا جاتا ہے، جو ثنائی گیٹ سے حاصل کئے جاتے ہیں۔ اس باب میں ترکیبی ادوار پر غور کیا جائے گا۔

اس کے برعکس، **ترتیبی منطق**[۲] سے مراد وہ منطق ہے جس میں مخارج موجودہ اور ماضی مداخل پر منحصر ہو؛ یعنی، کسی بھی لمحہ پر تفاعل کا مخارج، گزرے اور موجودہ مداخل پر منحصر ہو گا۔ ترتیبی منطق کو ترتیبی ادوار سے جامہ عمل پہنایا جاتا ہے، جن پر اگلے باب میں غور کیا جائے گا۔

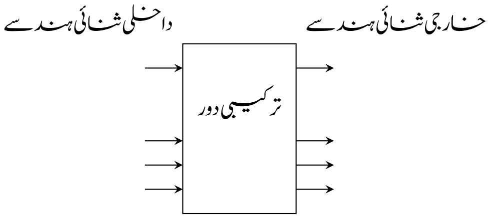
کسی بھی ترکیبی دور کو شکل ۵.۱ کی **ڈبہ شکل**[۳] سے ظاہر کیا جا سکتا ہے، جہاں مداخل ثنائی ہندسوں (مداخل بِٹ) کو بائیں جبکہ مخارج ثنائی ہندسوں کو دائیں ہاتھ رکھا جاتا ہے۔

۵.۱ ثنائی جمع کار اور ثنائی منفی کار

دو اعداد کو جمع یا منفی کرنا بنیادی حساب کا حصہ ہے۔ آئیں دو بِٹ جمع کرنے والے دور پر غور کریں۔

---

[۱] combinational logic
[۲] sequential logic
[۳] box diagram



شکل ۵.۱: ترکیبی دور کی ڈبہ شکل۔

۵.۱.۱ نصف جمع کار

ایک بٹ کی قیمت صرف 0 یا 1 ہو سکتی ہے، لہٰذا دو بٹ جمع کرتے ہوئے درج ذیل چار (شنائی) صورتیں پیدا ہوں گی۔ (اس باب میں شنائی ہندسے اور اعداد استعمال ہوں گے؛ زیر نوشت 2 لکھ کر وضاحت نہیں کی جائے گی۔)

$$\begin{aligned} 0+0&=0\\ 0+1&=1\\ 1+0&=1\\ 1+1&=10 \end{aligned}$$

اس مساوات میں دو بٹ جمع کئے گئے، لہٰذا مداخل کی تعداد دو ہو گی۔ مساوات میں اگرچہ پہلے تین جوابات ایک بٹ ہیں، لیکن آخری جواب دو بٹ ہے۔ یوں، تمام صورتوں سے نپٹنے کی خاطر، جوابات دو بٹ تصور کیے جائیں گے، اور ذیل لکھنا بہتر ہو گا:

$$\begin{aligned} 0+0&=00\\ 0+1&=01\\ 1+0&=01\\ 1+1&=10 \end{aligned}$$

جس سے واضح ہے کہ جواب دو بٹ ہیں۔ یوں، دو بٹ جمع کرنے والے دور کے دو مداخل اور دو مخارج ہوں گے۔

مداخل کو y اور z، جبکہ مخارج کو s اور c لکھ کر درج بالا مساوات کو جدول ۵.۱ میں پیش کیا گیا ہے، جس سے تفاعلات c اور s کی مساوات، مجموعہ ارکان ضرب کے روپ میں حاصل کرتے ہیں۔

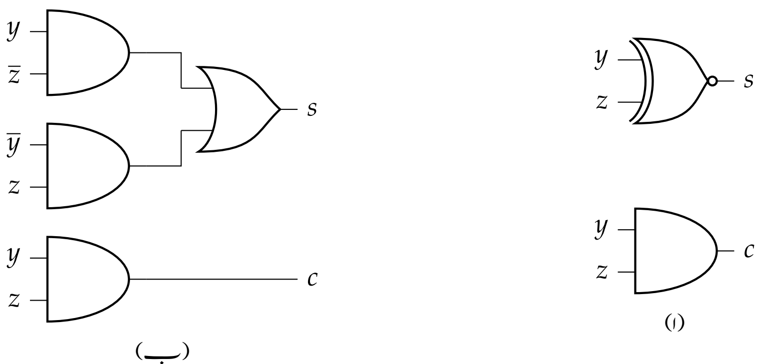
$$\begin{aligned} c&=yz\\ s&=\overline{y}z+y\overline{z} \end{aligned} \tag{۵.۱}$$

اِن تفاعلات کے (دو مختلف اقسام کے) ادوار شکل ۵.۲ میں پیش کیے گئے ہیں، جو **نصف جمع کار**[۴] کہلاتے ہیں۔ اس نام کی وضاحت اگلے حصے میں ہو گی۔

[۴] half adder

جدول ۵.۱: دو بِٹ جمع

y	z	c	s
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0



شکل ۵.۲: نصف جمع کار

جدول ۵.۲: مکمل جمع کار

x	y	z	c	s
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

۵.۱.۲ مکمل جمع کار

آئیں، ایک سے زیادہ بٹ ثنائی اعداد $y = 111_2$ اور $z = 11_2$ کے مجموعے کا حصول دیکھتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 11 \\ 111 \\ +\ 11 \\ \hline 1010 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 111 \\ +\ 11 \\ \hline 1010 \end{array}$$

پہلے قدم پر کم ترتیبی بٹ y_0 اور z_0 کو نصف جمع کار حل کر سکتا ہے، لیکن اگلے قدم پر بٹ y_1 اور z_1 جمع کرتے ہوئے گزشتہ قدم کا **حاصل**[۵] (1) بھی جمع کرنا ہوگا۔

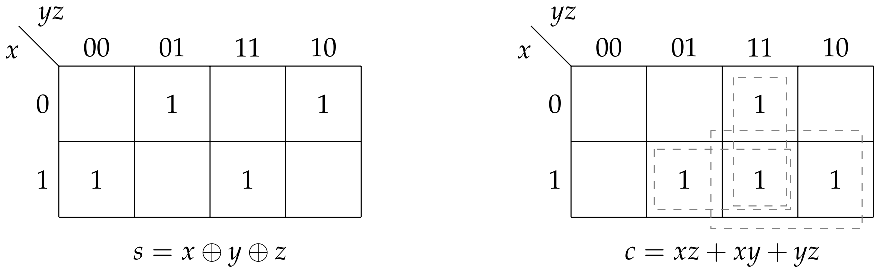
ظاہر ہوا، دو اعداد جمع کرنے کی خاطر ایسا دور درکار ہوگا جو تین بٹ جمع کر سکے۔ آئیں ایسا دور دیکھتے ہیں۔

اس دور کے مداخل x ، y اور z جبکہ مخارج c اور s لیتے ہوئے (جہاں x پچھلے قدم کا حاصل ہوگا) جدول ۵.۲ لکھتے ہیں۔

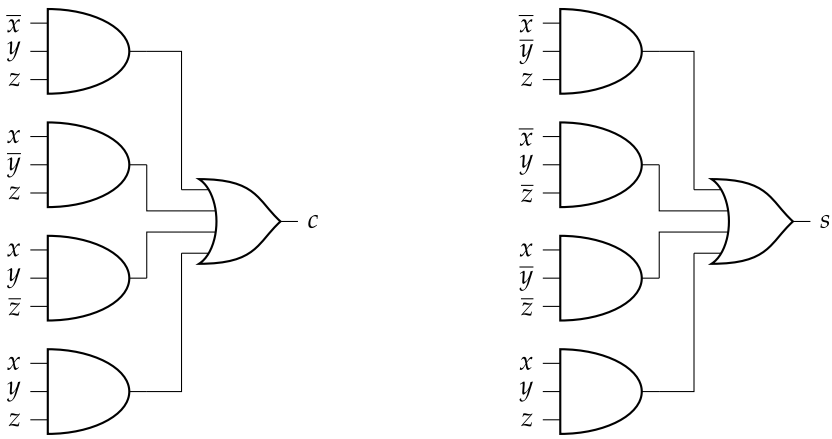
جدول سے c اور s کے تفاعلات کی مساوات، مجموعہ ارکان ضرب کے روپ میں حاصل کرتے ہیں۔ یاد رہے جدول میں تین آزاد اور دو تابع متغیرات ہیں۔ ایک تابع متغیرہ کی مساوات حاصل کرتے وقت دوسرے تابع متغیرہ کو نظر انداز کریں۔ یوں c کی مساوات حاصل کرتے وقت تین مداخل x ، y ، اور z پر نظر رکھتے ہوئے c کے ارکان ضرب کا مجموعہ لیں۔ شکل ۵.۳ میں کارناف نقشوں سے ان تفاعلات کی (درج ذیل) سادہ مساوات حاصل کی گئی ہیں۔

$$\begin{aligned} c &= xz + xy + yz \\ s &= x \oplus y \oplus z \end{aligned} \tag{۵.۲}$$

[۵] carry



شکل ۵.۳: مکمل جمع کار



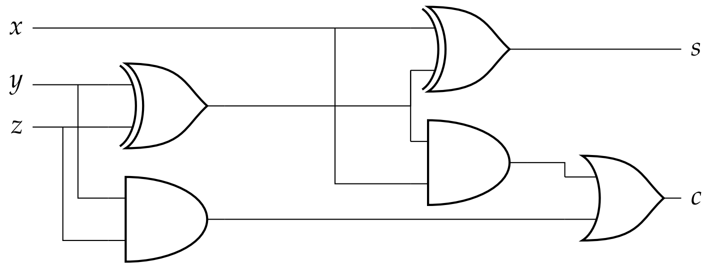
شکل ۵.۴: مکمل جمع کار (مساوات ۵.۳)

کارناف نقشہ استعمال کیے بغیر جدول ۵.۲ سے ان تفاعلات کی مساوات، مجموعہ ارکان ضرب کے روپ میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} c &= \overline{x}yz + x\overline{y}z + xy\overline{z} + xyz \\ s &= \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}y\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + xyz \end{aligned} \tag{۵.۳}$$

انہیں شکل ۵.۴ میں عملی جامہ پہنایا گیا ہے۔

درج بالا پہلی مساوات کے درمیانے دو اجزاء کا مجموعہ $x(\overline{y}z + y\overline{z})$ جبکہ باقی اجزاء کا $(\overline{x} + x)yz$ ہے،



شکل ۵.۵: مکمل جمع کار کا بہتر دور (مساوات ۵.۴)

لہٰذا c کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}c &= (\overline{x}+x)yz + x(\overline{y}z + y\overline{z})\\ &= yz + x(y\oplus z)\end{aligned}$$

اس کو مساوات ۵.۲ میں پیش s کے ساتھ اکٹھا لکھتے ہیں۔

$$\left.\begin{aligned}c &= yz + x(y\oplus z)\\ s &= x\oplus y\oplus z\end{aligned}\right\}\quad \text{مکمل جمع کار کی بہتر مساوات} \tag{۵.۴}$$

ان تفاعلات کو شکل ۵.۵ میں پیش کیا گیا ہے، جو شکل ۵.۴ سے بہتر (چھوٹا) ہے۔

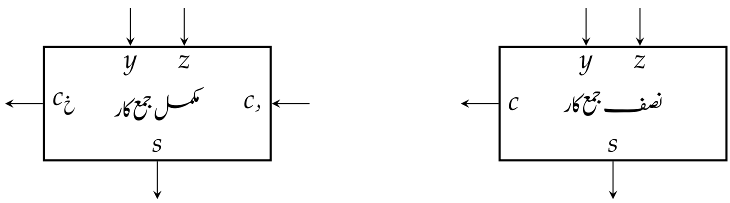
مساوات ۵.۴ میں دیے s سے ارکان ضرب کا مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}s &= x\oplus(y\oplus z)\\ &= x\oplus(y\overline{z}+\overline{y}z)\\ &= x(\overline{y\overline{z}+\overline{y}z}) + \overline{x}(y\overline{z}+\overline{y}z)\\ &= x(\overline{y\overline{z}})(\overline{\overline{y}z}) + \overline{x}(y\overline{z}+\overline{y}z)\\ &= x(\overline{y}+z)(y+\overline{z}) + \overline{x}(y\overline{z}+\overline{y}z)\\ &= x(yz+\overline{y}\,\overline{z}) + \overline{x}(y\overline{z}+\overline{y}z)\\ &= xyz + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}z\end{aligned}$$

شکل ۵.۵ **مکمل جمع کار**[۶] کہلاتا ہے، لہٰذا شکل ۵.۲ کو **نصف جمع کار**[۷] کہیں گے۔

جدول ۵.۲ میں y اور z ثنائی ہندسوں کے ساتھ گزشتہ قدم کا حاصل x جمع کیا گیا۔ شکل ۵.۶ میں نصف جمع کار اور مکمل جمع کار کی علامت پیش ہیں۔ مکمل جمع کار میں گزشتہ قدم سے **داخلی حاصل**[۸] کو c_i جبکہ اس

[۶] full adder
[۷] half adder
[۸] carry in



شکل ۵.۶: نصف جمع کار اور مکمل جمع کار کی علامتیں۔

قدم کے **خارجی حاصل**[۹] کو $c_{خ}$ سے ظاہر کیا گیا۔

آئیں $y = 111_2$ اور $z = 11_2$ کا مجموعہ مکمل جمع کار کی مدد سے حاصل کریں۔ سب سے پہلے دونوں اعداد کو تین شنائی ہندسوں میں لکھیں، لہٰذا $z = 011_2$ ہو گا۔ شکل ۵.۷ میں مطلوبہ تین درجی، تین بٹ جمع کار پیش کیا گیا ہے، جہاں مکمل جمع کار کو مختصراً "جمع کار" کہا گیا ہے۔ شنائی عدد $y_2y_1y_0 = 111 = y$ اور $z = z_2z_1z_0 = 011$ ہیں۔ یوں کم رتبی بٹ کے مکمل جمع کار کو دونوں اعداد کے کم رتبی ہندسے، $y_0 = 1$ اور $z_0 = 1$، فراہم کیے جائیں گے، اور ساتھ ہی چونکہ پہلے قدم میں کوئی "داخلی حاصل" نہیں ہو گا لہٰذا داخلی حاصل $c_0 = 0$ فراہم کیا جائے گا۔ اگلے قدم میں جمع کار کو $y_1 = 1$ اور $z = 1$ کے ساتھ پہلے قدم کا حاصل c_1 بطور داخلی حاصل، فراہم کیا جائے گا، جبکہ آخری جمع کار کو $y_2 = 1$ اور $z_2 = 0$ کے ساتھ گزشتہ قدم کا حاصل c_2 فراہم کیا جائے گا۔ تین بٹ جمع کار، ان اعداد کا مجموعہ $c_3s_2s_1s_0 = 1010_2$ دے گا۔

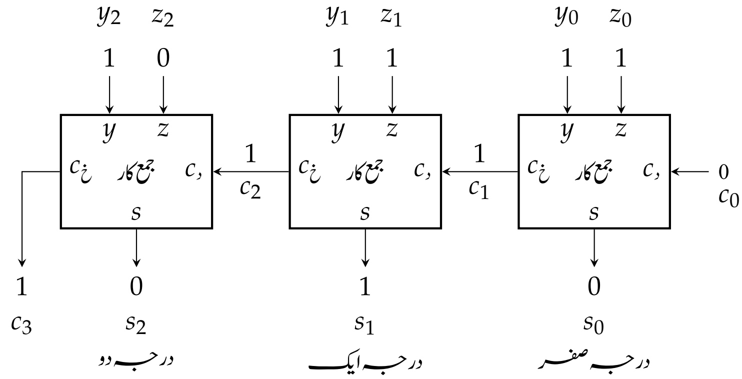
$$\begin{array}{r} 111 \\ 111 \\ +\ 011 \\ \hline 1010 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 111 \\ 111 \\ +\ 011 \\ \hline 1010 \end{array}$$

شکل ۵.۷ میں چونکہ درجہ صفر کا داخلی حاصل ہمیشہ 0 ہو گا لہٰذا یہاں مکمل جمع کار کی بجائے نصف جمع کار بھی استعمال کیا جا سکتا تھا۔ ایسا کرتے ہوئے c_0 فراہم کرنے کی ضرورت نہیں ہو گی۔

زیادہ بٹ اعداد کے مجموعہ کے لئے شکل ۵.۷ میں بائیں جانب مزید مکمل جمع کار کا اضافہ کیا جائے گا۔ یوں 8 بٹ (یعنی ایک بائٹ) اعداد کا مجموعہ آٹھ درجی جمع کار دے گا، جو 8 مکمل جمع کار پر مشتمل ہو گا، جبکہ 64 بٹ اعداد کے مجموعہ کے لئے 64 مکمل جمع کار پر مشتمل 64 بٹ جمع کار درکار ہو گا۔

[۹] carry out



شکل ۵.۷: تین درجی، تین بِٹ جمع کار

مشق ۵.۱: مخلوط دور 74283 چار بِٹ مکمل جمع کار ہے (صفحہ ۴۵ پر مخلوط ادوار کے سلسلہ $74xxx$ کے بارے میں دوبارہ پڑھیں)۔ اس کے معلوماتی صفحات انٹرنیٹ[10] سے حاصل کریں۔ اس مخلوط دور کو استعمال کرتے ہوئے 8 بٹ کے دو شنائی اعداد جمع کریں۔

۵.۱.۳ منفی کار

شنائی اعداد کو کمپیوٹر دو کے تکملہ کی مدد سے منفی کرتا ہے۔ دو کا تکملہ استعمال کرتے ہوئے شنائی اعداد منفی کرنے کے عمل پر دوبارہ نظر ڈالتے ہیں۔ یاد رہے، بلند ترتیبی بِٹ کی جمع سے پیدا، آخری حاصل ضائع کیا جاتا ہے، جبکہ اس کی غیر موجودگی میں نتیجے کا دو کا تکملہ لیا جاتا ہے۔

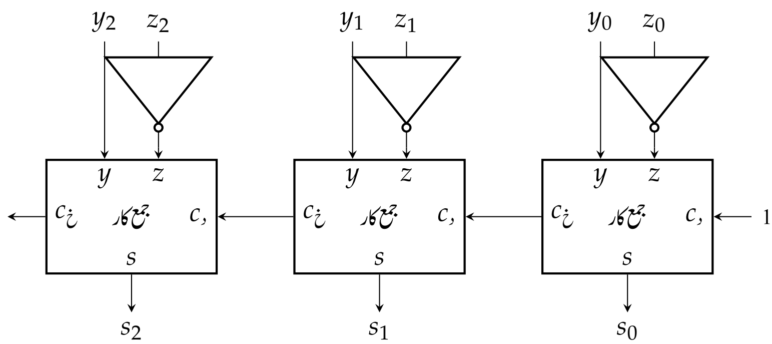
شنائی عدد کے اساس منفی ایک تکملہ (یا متمم) کے ساتھ 1 جمع کرنے سے عدد کا اساسی تکملہ حاصل ہو گا۔ عدد کا متمم حاصل کرنے کی خاطر عدد کے ہر بِٹ کا متمم لیا جاتا ہے۔ بِٹ کا متمم بذریعہ نفی گیٹ لیا جا سکتا ہے۔

تین بِٹ شنائی اعداد y اور z سے $(y-z)$ حاصل کرنے کے لئے z کے متمم کے ساتھ 1 اور y جمع کرنا ہو گا۔ شکل ۸.۵ میں اس عمل کو عملی جامہ پہنایا گیا ہے، جہاں نفی گیٹ استعمال کر کے z کا متمم (یا ایک کا تکملہ) حاصل کیا گیا، اور ساتھ 1 جمع کرنے کی خاطر درجہ صفر کو داخلی حاصل 1 فراہم کیا گیا۔

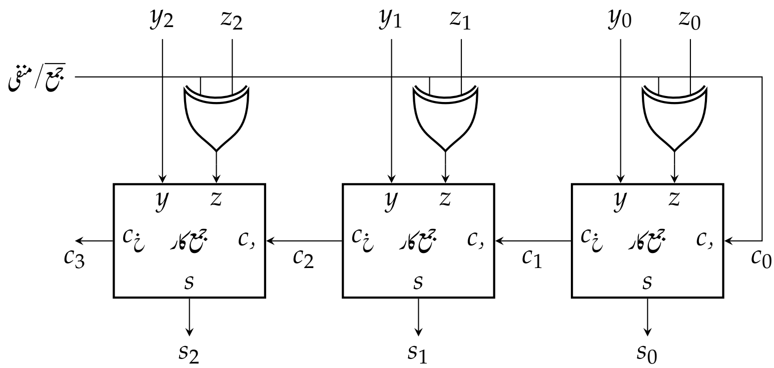
شکل ۵.۷ اور شکل ۸.۵ دونوں میں مکمل جمع کار استعمال ہوئے۔ شکل ۵.۷ کے ساتھ نفی گیٹ منسلک کر کے اور داخلی حاصل c_0 کو 0 کی بجائے 1 رکھنے سے شکل ۸.۵ حاصل ہو گا۔ جمع اور منفی اعمال ایک ہی دور سے بھی حاصل کیے جا سکتے ہیں۔ ایسا دور جسے جمع و منفی کار کہتے ہیں شکل ۹.۵ میں پیش ہے۔

---

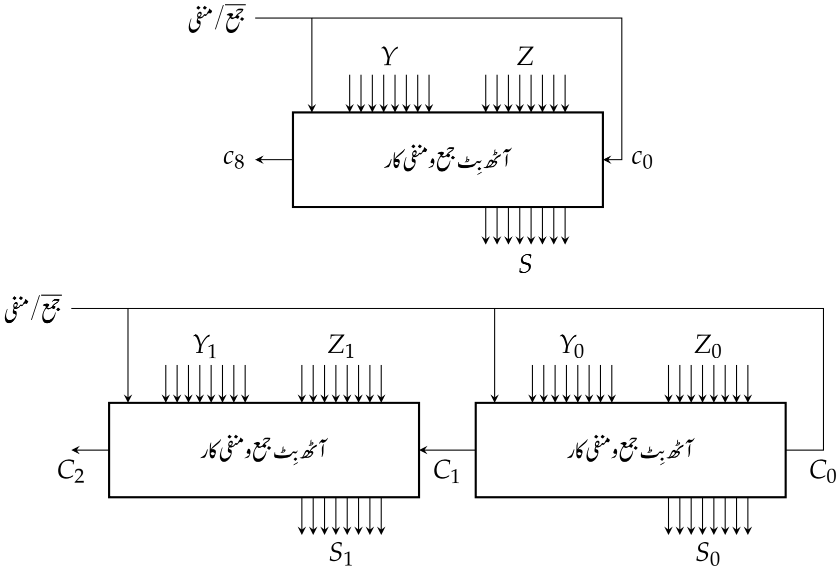
[10] انٹرنیٹ میں 74283 datasheet تلاش کریں۔



شکل ۵.۸: تین درجی، تین بِٹ منفی کار



شکل ۵.۹: تین بِٹ جمع و منفی کار



شکل ۵.۱۰: ایک اور دو بائٹ جمع و منفی کار

اس شکل میں بلا شرکت جمع گیٹ استعمال کیا گیا، اور قابو اشارہ جمع/منفی کا اضافہ کیا گیا۔ اس قابو اشارہ کی کارکردگی پر غور کرتے ہیں۔ جب جمع/منفی اشارہ پست (0) ہو بلا شرکت جمع گیٹ عدد z جوں کا توں مکمل جمع کار تک پہنچائے گا، اور ساتھ ہی $c_0 = 0$ ہو گا؛ لہٰذا یہ دور تین بِٹ جمع کار کی حیثیت سے کام کرے گا۔

اس کے برعکس، جمع/منفی اشارہ بلند (1) ہو بلا شرکت جمع گیٹ عدد z کا متمم $\overline{z}$ مکمل جمع کار تک پہنچائے گا، اور ساتھ ہی $c_0 = 1$ ہو گا؛ لہٰذا یہ دور تین بِٹ منفی کار کی حیثیت سے کام کرے گا۔

قابو اشارہ کے نام میں "منفی" اور "" لکھ کر یہ واضح کی گیا ہے کہ اشارہ بلند ہونے کی صورت میں منفی کار اور پست ہونے کی صورت میں جمع کار حاصل ہو گا۔

آٹھ بِٹ جمع و منفی کار کو ایک بائٹ جمع و منفی کار کہتے ہیں۔ شکل ۵.۱۰ میں ایک بائٹ اور دو بائٹ جمع و منفی کار دکھائے گئے ہیں۔ اس کے بائیں جانب مزید درجات جوڑ کر متعدد بائٹ کا دور بنایا جا سکتا ہے۔ یہاں Y_0 پہلے بائٹ (یعنی بِٹ y_0 تا y_7) کو، Y_1 اگلے بائٹ (یعنی بِٹ y_8 تا y_{14}) کو ظاہر کرتا ہے، جبکہ C_2 سے مراد دوسرے بائٹ کی جمع کا خارجی حاصل ہے۔

جدول ۵.۳: اعشاری جمع کار کے مطلوبہ جواب

شنائی					شنائی مرموز اعشاریہ					اعشاری
b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	c	d_3	d_2	d_1	d_0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	2
0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	3
0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	4
0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	5
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	6
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	7
0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	8
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	9
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	10
0	1	0	1	1	1	0	0	0	1	11
0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	12
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	13
0	1	1	1	0	1	0	1	0	0	14
0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	15
1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	16
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	17
1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	18
1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	19

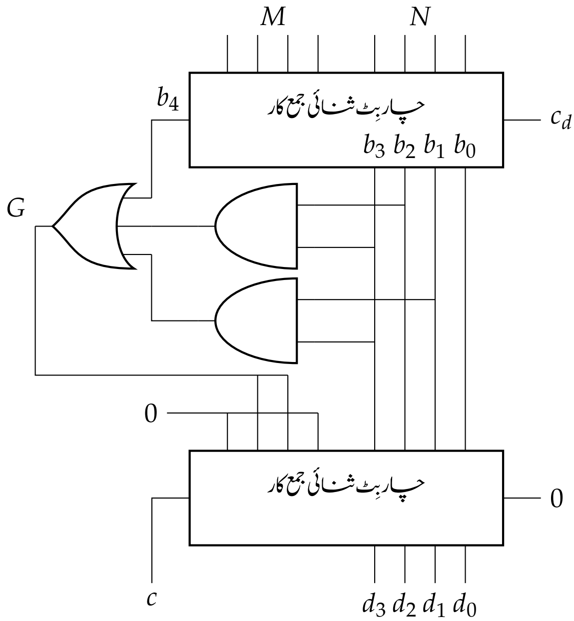
۵.۱.۴ اعشاری جمع کار

جیسا پہلے ذکر ہوا، اعشاری اعداد کو **شنائی مرموز اعشاریہ**[۱۱] سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ ایسا مکمل جمع کار بناتے ہیں جو دو اعشاری ہندسوں M ، N اور داخلی حاصل c_d کو جمع کرتا ہو۔ چونکہ اعشاری ہندسے 0 تا 9 ، جبکہ داخلی حاصل 0 یا 1 ہو سکتا ہے، لہٰذا اس جمع کار کے جواب $(M + N + c_d)$ کی قیمت $(0 + 0 + 0 = 0)$ تا $(9 + 9 + 1 = 19)$ ہو گی، جنہیں اعشاری، شنائی مرموز اعشاریہ اور شنائی روپ میں جدول ۵.۳ میں پیش کیا گیا ہے۔

جدول میں، چار بِٹ شنائی روپ میں خارجی حاصل کو b_4 ، جبکہ شنائی مرموز اعشاریہ میں خارجی حاصل کو c سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ان طریقوں میں 0 تا 9 جوابات ایک جیسے، جبکہ 10 تا 19 ایک دوسرے سے مختلف لکھے جاتے ہیں۔ یوں اگر چار بِٹ شنائی جمع کار استعمال ہو اور جواب 0 تا 9 ہو تب یہی جواب بطور شنائی مرموز اعشاریہ جواب قابل قبول ہو گا، البتہ 9 سے بڑے شنائی جواب کو شنائی مرموز اعشاریہ جواب تسلیم نہیں کیا جا سکتا۔ آئیں دیکھتے ہیں ایسی صورت میں کیا کیا جا سکتا ہے۔

---

[۱۱] binary coded decimal (BCD)



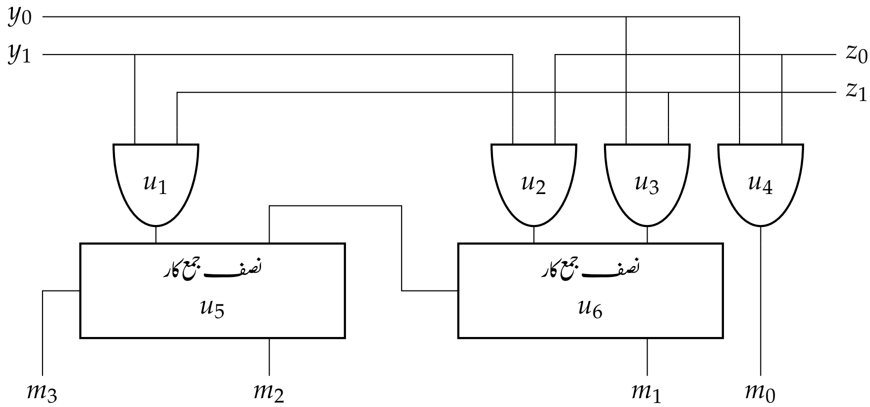
شکل ۵.۱۱: شنائی مرموز اعشاریہ روپ میں اعشاری جمع کار

یہاں ایک دلچسپ حقیقت پر غور کرتے ہیں۔ ناقابل قبول شنائی جواب کے ساتھ 0110_2 شنائی طور جمع کرنے سے درست شنائی مرموز اعشاریہ جواب حاصل ہو گا۔ مثلاً، 01010_2 کے ساتھ 0110_2 جمع کرنے سے 10000_2 حاصل ہو گا، جو شنائی مرموز اعشاریہ میں درست جواب ہے۔ یوں 0 تا 9 شنائی جوابات کو جوں کا توں، جبکہ ان سے بڑے جوابات کے ساتھ 0110_2 شنائی طور جمع کر کے شنائی مرموز اعشاریہ جواب حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

جدول سے واضح ہے کہ جب شنائی جمع کار کے جواب میں خارجی حاصل b_4 بلند ہو، اس جواب کو شنائی مرموز اعشاریہ جواب تسلیم نہیں کیا جا سکتا؛ اس کے علاوہ جب b_3 کے ساتھ b_2 یا b_1 بھی بلند ہو تب بھی جواب کو شنائی مرموز اعشاریہ تسلیم نہیں کیا جا سکتا۔ ان حقائق کو درج ذیل بولین مساوات بیان کرتی ہے، جہاں ناقابل قبول جواب کی صورت میں G بلند ہو گا۔

$$G = b_4 + b_3 b_2 + b_3 b_1 \tag{۵.۵}$$

اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے شنائی جمع کار کی مدد سے شنائی مرموز اعشاریہ جمع کار کا حصول شکل ۵.۱۱ میں دکھایا گیا ہے۔ اگر G پست ہو تب نچلا جمع کار بالائی جمع کار کے جواب کے ساتھ 0 جمع کر کے اسی جواب کو خارج کرتا ہے، جبکہ G بلند ہونے کی صورت میں ساتھ 0110_2 جمع کر کے درست شنائی مرموز اعشاریہ خارج کرتا ہے۔



شکل ۵.۱۲: دوبِٹ شنائی ضرب کار

۵.۲ شنائی ضرب کار

شنائی ضرب بالکل اعشاری ضرب کی طرح کی جاتی ہے۔ دوبِٹ شنائی اعداد y اور z کو قلم و کاغذ کی طرز پر ضرب کرتے ہیں۔

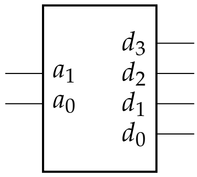
$$
\begin{array}{cccc}
 & & z_1 & z_0 \\
 & & y_1 & y_0 \\
\cline{3-4}
 & & y_0z_1 & y_0z_0 \\
 & y_1z_1 & y_1z_0 & \\
\hline
m_3 & m_2 & m_1 & m_0
\end{array}
$$

اس مساوات سے حاصل دوبِٹ شنائی ضرب کار شکل ۵.۱۲ میں پیش ہے۔ زیادہ بِٹ کے ضرب کار بھی اسی طرح تشکیل دیے جاتے ہیں۔

درج بالا قلم و کاغذ کی طرز پر ضرب میں کمتر بِٹ $y_0z_0 = m_0$ ہے جو شکل میں جمع گیٹ u_4 دیتا ہے۔ اگلا بِٹ m_1 ہے جو y_0z_1 اور y_1z_0 کو جمع کر کے حاصل ہو گا۔ جمع گیٹ u_3 ہمیں y_0z_1 جبکہ u_2 ہمیں y_1z_0 دیتا ہے، جنہیں دایاں نصف جمع کار u_6 آپس میں جمع کر کے m_1 اور حاصل (اگر موجود ہو) دیتا ہے۔ اس حاصل کو y_1z_1 (جو گیٹ u_1 سے ملتا ہے) کے ساتھ بایاں نصف جمع کار u_5 ملا کر m_2 اور حاصل m_3 دیگا۔

مشق ۵.۲: شنائی اعداد 11_2 اور 10_0 جمع کرنے کے قدم شکل ۵.۱۲ کے دور میں کرتے ہوئے دکھائیں۔

داخلی بٹ		خارجی بٹ			
a_0	a_0	d_3	d_2	d_1	d_0
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0



شکل ۵.۱۳: دو سے چار شناخت کار

مشق ۵.۳: انٹرنیٹ سے 74284 مخلوط دور کے معلوماتی صفحات حاصل کریں۔ یہ مخلوط دور کیا کام سر انجام دیتا ہے؟

۵.۳ شناخت کار

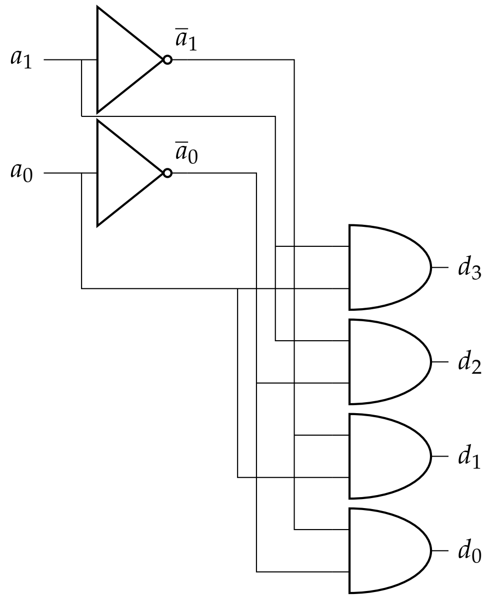
دو بٹ چار علامتوں (2^2) کو ظاہر کر سکتا ہے، جبکہ n بٹ 2^n علامتوں کو ظاہر کر سکتا ہے۔ ایسا دور جو n مداخل کو دیکھ 2^n منفرد مخارج میں سے ایک چُن سکے **شناخت کار**[12] کہلاتا ہے۔ اگر شناخت کار کے n مداخل کے تمام ترتیب زیر استعمال نہ لائے گئے ہوں، تب اس کے مخارج 2^n سے کم ہوں گے۔ شکل ۵.۱۳ میں دو سے چار شناخت کار کی علامت اور کارکردگی کا جدول پیش ہیں۔ داخلی بٹوں کی ہر منفرد ترتیب، خارجی بٹوں میں سے ایک منفرد بٹ منتخب کرتی ہے۔ یہاں چنی گئی بٹ بلند کی گئی ہے، شناخت کاریوں بھی تشکیل دی جا سکتی ہے کہ منتخب بٹ پست ہو۔

مداخل 00 (جدول کی پہلی صف) کرنے سے چار مخارج میں سے ایک، یعنی d_0 کی شناخت ہوتی ہے۔ اسی طرح 01 مخارج d_1 کی، 10 مخارج d_2 کی، اور 11 مخارج d_3 کی شناخت کرتے ہیں۔

اگر d چار مختلف جگہیں، مثلاً، چار گلیاں، یا چار مکان، تصور کی جائیں، تب a ان کا پتہ ہو گا، جس کے ذریعہ ان تک پہنچنا ممکن ہو گا۔ اسی مشابہت سے a کو **پتہ کے بٹے** یا **پتہ بٹے**[13] یا صرف **پتہ**[14] کہتے ہیں۔ عددی برقیات میں اس طرح جگہ تعین کرنے والے "پتہ کے بٹوں" کا استعمال عام ہے اور انہیں، عموماً، a سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

کسی بھی پتہ کو اعشاری روپ میں لکھیں؛ یہی مقام منتخب ہو گا۔ یوں 101_2 پتہ مقام 5_{10} یعنی d_5 منتخب کرے گا۔

[12] decoder
[13] address bits
[14] address



شکل ۵.۱۴: دو با چار شناخت کار

شکل ۵.۱۳ میں دیے جدول کو مخارج کے لئے حل کر کے درج ذیل حاصل ہوں گے۔

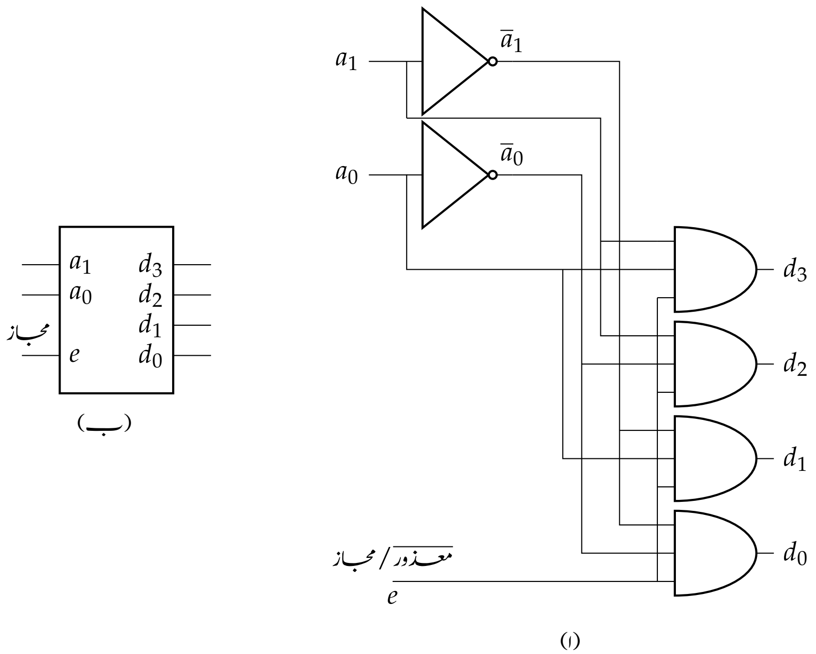
$$
\begin{aligned}
d_0 &= \bar{a}_1\bar{a}_0\\
d_1 &= \bar{a}_1 a_0\\
d_2 &= a_1\bar{a}_0\\
d_3 &= a_1 a_0
\end{aligned}
$$

شکل ۵.۱۴ میں ان مساوات سے حاصل دو با چار (4×2) **شناخت کار پیش**[۱۵] ہے، جس کے داخلی بِٹ کی تعداد دو (2) ، جبکہ خارجی بِٹ کی تعداد چار (4) ہے۔

شکل ۵.۱۴ میں پیش شناخت کار کے تمام ضرب گیٹوں کے ساتھ اضافی قابو مداخل جوڑ کر مجاز و معذور صلاحیت کا (4×2) شناخت کار حاصل ہو گا، جو شکل ۵.۱۵ میں پیش ہے۔ شناخت کار، بلند قابو اشارہ (e) کی صورت میں، شناخت کرنے کا مجاز ہو گا، پست اشارے کی صورت میں شناخت کار معذور ہو گا اور اس کے تمام مخارج پست ہوں گے۔ شکل-ب میں اس کی علامت پیش کی گئی ہے، جہاں قابو اشارہ کو مختصراً "مجاز" کہا گیا ہے۔

جدول ۵.۴-الف میں مجاز و معذور صلاحیت کے شناخت کار کی کارکردگی پیش کی گئی ہے۔ اس جدول

[۱۵]decoder



شکل ۵.۱۵: مجاز و معذور صلاحیت کا دو با چار شناخت کار

جدول ۵.۴: مجاز و معذور صلاحیت کا شناخت کار

(ا)

e	a_1	a_0	d_3	d_2	d_1	d_0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0

(ب)

e	a_1	a_0	d_3	d_2	d_1	d_0
0	x	x	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0

جدول ۵.۵: بلند عمل پیرا، تین با آٹھ شناخت کار

a_2	a_1	a_0	d_7	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

کو مختصراً جدول-ب کی صورت میں پیش کیا جاتا ہے، جہاں پہلی صف میں قابو اشارہ پست $(e = 0)$ ہے لہٰذا a_0 اور a_1 کی قیمتیں اہمیت نہیں رکھتی؛ یوں پہلی صف میں a_0 اور a_1 کی قیمت x لکھی جاتی ہے۔

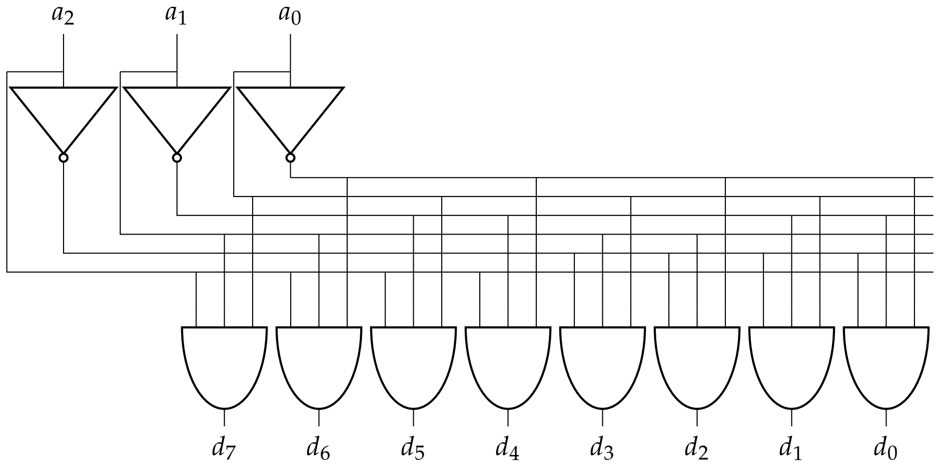
تین با آٹھ (3×8) شناخت کار کا دور حاصل کرنے کی خاطر، تین مداخل کا ایسا جدول لکھتے ہیں جس میں مداخل کی ہر ترتیب ایک منفرد مخارج منتخب کرے (جدول ۵.۵ دیکھیں)۔ چونکہ چُنا گیا مخارج بلند ہو گا، لہٰذا ایسا شناخت کار، **بلند عمل پیرا**[۱۶] کہلاتا ہے۔ مخارج تفاعلات کی مساوات، مجموعہ ارکان ضرب کی صورت میں حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
d_0 &= \overline{a}_2\overline{a}_1\overline{a}_0 \\
d_1 &= \overline{a}_2\overline{a}_1 a_0 \\
d_2 &= \overline{a}_2 a_1\overline{a}_0 \\
d_3 &= \overline{a}_2 a_1 a_0 \\
d_4 &= a_2\,\overline{a}_1\overline{a}_0 \\
d_5 &= a_2\,\overline{a}_1 a_0 \\
d_6 &= a_2\,a_1\,\overline{a}_0 \\
d_7 &= a_2\,a_1\,a_0
\end{aligned}
$$

ان تفاعلات سے حاصل، بلند عمل پیرا، تین با آٹھ (3×8) شناخت کار شکل ۵.۱۶ میں پیش ہے۔

اس میں مجاز مداخل کا اضافہ کرنے سے مجاز و معذور صلاحیت، بلند عمل پیرا، تین با آٹھ شناخت کار حاصل ہو گا جو شکل ۵.۱۷ میں پیش ہے۔ مجاز بلند ہونے کی صورت میں شناخت کار کام کرے گا، جبکہ پست مجاز کی صورت میں تمام مخارج پست رہیں گے؛ ہم کہتے ہیں یہ **بلند مجاز**[۱۷] شناخت کار ہے۔ جدول ۵.۶ میں اس کی کارکردگی پیش کی گئی ہے۔ پہلی صف میں e پست ہے، لہٰذا، شناخت کار معذور ہو گا، اور اس کے

[۱۶] active high
[۱۷] active high



شکل ۵.۱۶: بلند عمل پیرا، تین با آٹھ (3×8) شناخت کار

تین مداخل a_0 ، a_1 ، اور a_2 کی قیمتیں اہمیت نہیں رکھتی؛ اسی لئے انہیں x لکھا گیا ہے جو 0 یا 1 ہو سکتا ہے۔ یہ (پہلی) صف درحقیقت، $a_2a_1a_0$ کی آٹھ (8) قیمتوں، 000_2 تا 111_2 ، لہٰذا، آٹھ صفوں کو ظاہر کرتی ہے۔

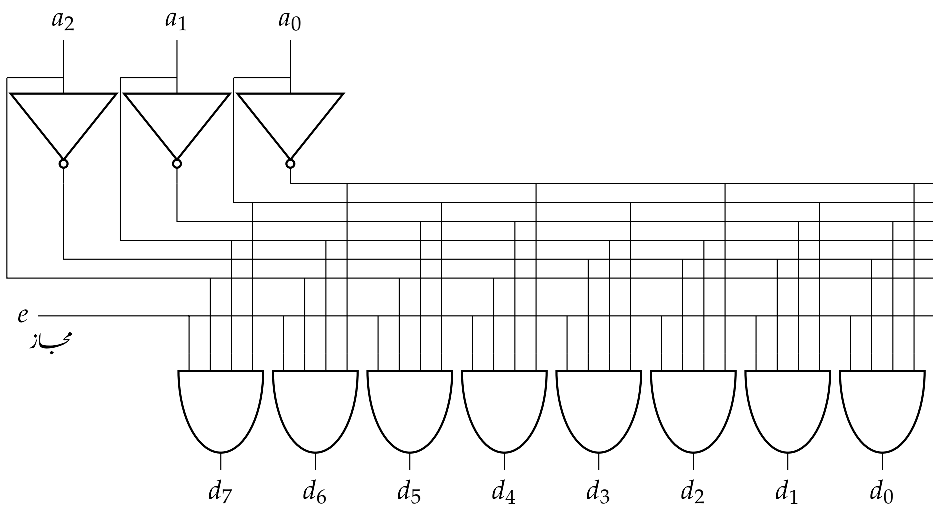
مشق ۵.۴: شکل ۵.۱۷ میں دایاں جمع گیٹ کا مخارج کیا ہے؟ باقی مخارج بھی شکل سے حاصل کریں۔ کیا یہ جدول ۵.۵ پر پورا اترتے ہیں؟

بعض اوقات، ایسے شناخت کار کی ضرورت پیش آتی ہے جس کا چنا گیا مخارج پست ہو۔ ایسا شناخت کار، **پست عمل پیرا**[18] کہلاتا ہے۔ جدول ۵.۷ میں ایسا پست عمل پیرا، تین با آٹھ شناخت کار پیش ہے، جو قابو اشارہ $\overline{\text{مجاز}}$ پست ہونے کی صورت میں کام کرتا ہے؛ ہم کہتے ہیں یہ **پست مجاز**[19] ہے۔ روایتاً، پست عمل پیرا مخارج کو $\overline{y}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے، جہاں بٹ پر "لکیر" اس بات کی یاد دہانی کراتی ہے کہ چنا گیا مخارج پست ہو گا۔ قابو اشارہ پر بھی "لکیر" کھینچی گئی ہے $(\overline{e})$ جو اس حقیقت کو ظاہر کرتی ہے کہ شناخت کار اس صورت کام کرے گا جب قابو اشارہ پست کیا جائے۔ شکل ۵.۱۸ میں اس کا دور پیش ہے، جو شکل ۵.۱۷ میں ضرب گیٹ کی جگہ متمم ضرب گیٹ ڈالنے سے، اور قابو اشارہ کے ساتھ نفی گیٹ منسلک کرنے سے حاصل ہو گا۔

شکل ۵.۱۹ میں تین با آٹھ شناخت کار کی علامتیں پیش ہیں۔ شکل-الف میں بلند مجاز، بلند عمل پیرا،

---

[18] active low
[19] active low



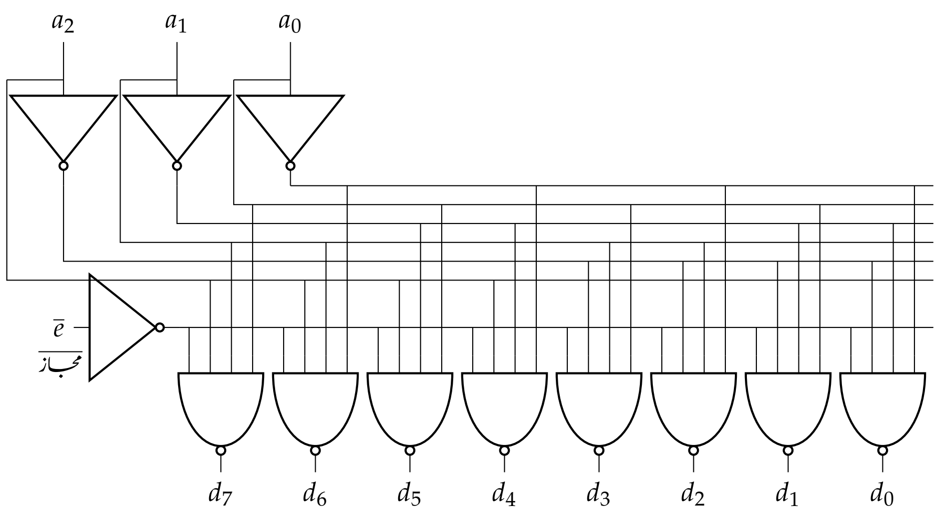
شکل ۵.۱۷: بلند مجاز، بلند عمل پیرا، تین با آٹھ شناخت کار

جدول ۵.۶: بلند مجاز، بلند عمل پیرا، تین با آٹھ شناخت کار

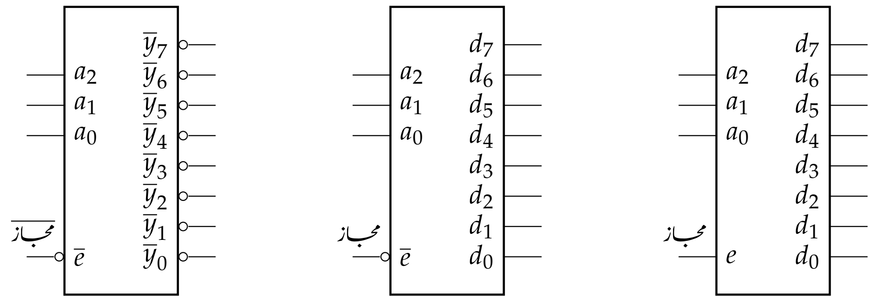
e	a_2	a_1	a_0	d_7	d_6	d_5	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0
0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

جدول ۵.۷: پست مجاز، پست عمل پیرا، تین با آٹھ شناخت کار

$\overline{e}$	a_2	a_1	a_0	$\overline{y}_7$	$\overline{y}_6$	$\overline{y}_5$	$\overline{y}_4$	$\overline{y}_3$	$\overline{y}_2$	$\overline{y}_1$	$\overline{y}_0$
1	x	x	x	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0
0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1



شکل ۵.۱۸: پست مجاز، پست عمل پیرا، تین با آٹھ شناخت کار



(ا) بلند مجاز، بلند عمل پیرا (ب) پست مجاز، بلند عمل پیرا (ج) پست مجاز، پست عمل پیرا

شکل ۵.۱۹: تین با آٹھ شناخت کار کی مختلف اقسام کی علامتیں۔

شکل-ب میں پست مجاز، بلند عمل پیرا اور شکل-ج میں پست مجاز، پست عمل پیرا روپ دکھائے گئے ہیں۔ ان علامتوں میں خارجی پنیوں پر گول دائرہ اس بات کی یقین دہانی کراتا ہے کہ منتخب ہونے کی صورت میں یہ بِٹ پست ہو گی۔ اسی طرح قابو بِٹ پر گول دائرہ یاد دہانی کراتا ہے کہ شناخت کار صرف اس صورت مجاز ہو گا جب یہ اشارہ پست ہو۔

مشق ۵.۵: انٹرنیٹ سے 3×8 پست عمل پیرا شناخت کار کے مخلوط دور 74138 کے معلوماتی صفحات حاصل کریں۔ اس مخلوط دور کا "دورانیہ رد عمل" کتنا ہے؟

۵.۴ شناخت کار کی مدد سے تفاعل کا حصول

ہر تفاعل کی مساوات، ارکان ضرب کے مجموعہ کے روپ میں حاصل کی جا سکتی ہے۔ چونکہ شناخت کار تمام ممکنہ ارکان ضرب فراہم کرتا ہے، لہٰذا اس کے ساتھ جمع گیٹ جوڑ کر تفاعل کو عملی جامہ پہنایا جا سکتا ہے۔ ی طریقہ کار ایک مثال کی مدد سے سیکھتے ہیں۔

مثال ۵.۱: مکمل جمع کار کو شناخت کار کی مدد سے ارکان ضرب استعمال کرتے ہوئے حاصل کریں۔

حل: مکمل جمع کار کی کارکردگی جدول ۵.۸ میں پیش ہے، جہاں بِٹ x_0 اور y_0 کے ساتھ داخلی حاصل c_0 جمع ہو کر s_0 اور خارجی حاصل c_1 پیدا ہو گا۔

جدول ۸.۵: مکمل جمع کار کی کارکردگی (برائے مثال ۸.۵)

x_0	y_0	c_0	c_1	s_0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	1	0
1	1	1	1	1

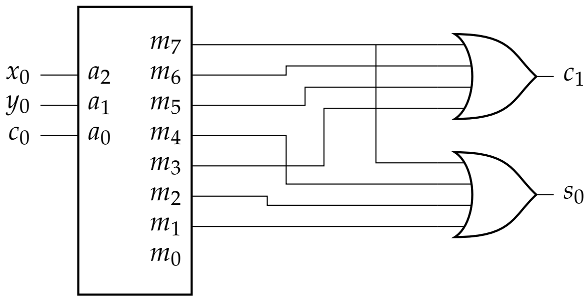
جدول ۹.۵: تین با آٹھ شناخت کار ارکان ضرب دیتا ہے (برائے مثال ۱.۵)

x_0	y_0	c_0	m_7	m_6	m_5	m_4	m_3	m_2	m_1	m_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

اس جدول سے درج ذیل مساوات حاصل ہوتی ہیں۔

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \overline{x}_0 y_0 c_0 + x_0 \overline{y}_0 c_0 + x_0 y_0 \overline{c}_0 + x_0 y_0 c_0 \\
s_0 &= \overline{x}_0\, \overline{y}_0 c_0 + \overline{x}_0 y_0 \overline{c}_0 + x_0 \overline{y}_0\, \overline{c}_0 + x_0 y_0 c_0
\end{aligned}
\tag{۵.۶}
$$

تین سے آٹھ شناخت کار جدول ۹.۵ میں پیش ہے، جہاں خارجی بٹ کو مطابقتی ارکان ضرب لکھا گیا ہے۔ یوں درج



شکل ۵.۲۰: شناخت کار کی مدد سے مکمل جمع کار کا حصول

ذیل ہوں گے۔

$$
\begin{aligned}
m_7 &= x_0 y_0 c_0 \\
m_6 &= x_0 y_0 \bar{c}_0 \\
m_5 &= x_0 \bar{y}_0 c_0 \\
m_4 &= x_0 \bar{y}_0 \bar{c}_0 \\
m_3 &= \bar{x}_0 y_0 c_0 \\
m_2 &= \bar{x}_0 y_0 \bar{c}_0 \\
m_1 &= \bar{x}_0 \bar{y}_0 c_0 \\
m_0 &= \bar{x}_0 \bar{y}_0 \bar{c}_0
\end{aligned} \tag{۵.۷}
$$

مساوات ۵.۷ کو دیکھتے ہوئے مساوات ۵.۶ درج ذیل لکھی جا سکتی ہیں، جن سے مکمل جمع کار کا شکل ۵.۲۰ حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
c_1 &= m_3 + m_5 + m_6 + m_7 = \sum(m_3, m_5, m_6, m_7) \\
s_0 &= m_1 + m_2 + m_4 + m_7 = \sum(m_1, m_2, m_4, m_7)
\end{aligned} \tag{۵.۸}
$$

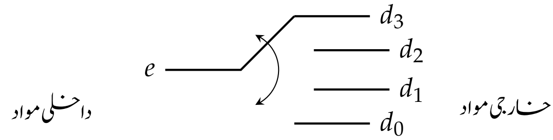
یہ تمام عمل نہایت آسان بنایا جا سکتا ہے اگر جدول ۵.۸ میں ارکان ضرب کا خانہ بنایا جائے (جدول ۵.۱۰ دیکھیں)۔ اس طرز پر جدول لکھ کر تفاعل کی مساوات، ارکان ضرب کے روپ میں حاصل کی جا سکتی ہے۔ اس جدول کو دیکھ کر مطلوبہ جواب فوراً لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \sum(m_3, m_5, m_6, m_7) \\
s_0 &= \sum(m_1, m_2, m_4, m_7)
\end{aligned}
$$

□

جدول ۵.۱۰: مکمل جمع کار کے ارکان ضرب (برائے مثال ۵.۱)

x_0	y_0	c_0	c_1	s_0	m
0	0	0	0	0	m_0
0	0	1	0	1	m_1
0	1	0	0	1	m_2
0	1	1	1	0	m_3
1	0	0	0	1	m_4
1	0	1	1	0	m_5
1	1	0	1	0	m_6
1	1	1	1	1	m_7



شکل ۵.۲۱: ایک سے چار خارجی منتخب کار کا تصور۔

۵.۵ داخلی منتخب کار اور خارجی منتخب کار

ایسا دور جو اکلوتے مداخل پر مہیا شنائی مواد کو 2^n مخارج میں کسی بھی ایک پر بھیج سکے **خارجی منتخب کار**[20] کہلاتا ہے۔ مطلوبہ مخارج کی نشاندہی n بٹ پتہ کرتا ہے۔

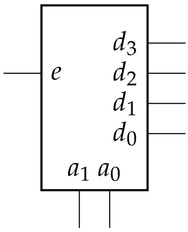
ایسا دور جو 2^n مداخل میں کسی بھی ایک پر مہیا شنائی مواد کو اکلوتے مخارج پر بھیج سکے **داخلی منتخب کار**[21] کہلاتا ہے۔ مطلوبہ مداخل کی نشاندہی n بٹ پتہ کرتا ہے۔

۵.۵.۱ خارجی منتخب کار

شکل ۵.۲۱ میں خارجی منتخب کار کا تصور پیش کیا گیا ہے، جہاں مداخل e پر آمد شنائی مواد کو، پیچی سوئچ کے ذریعہ، چار مختلف خارجی راستوں بھیجا جا سکتا ہے۔

مجاز و معذور صلاحیت کا شناخت کار بھی یہ کام سرانجام دے سکتا ہے۔ یہ دیکھنے کی خاطر جدول ۵.۴ کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

[20] demultiplexer
[21] multiplexer



e	a_1	a_0	d_3	d_2	d_1	d_0
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0

شکل ۵.۲۲: ایک سے چار (4×1) خارجی منتخب کار

e	a_1	a_0	d_3	d_2	d_1	d_0
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0

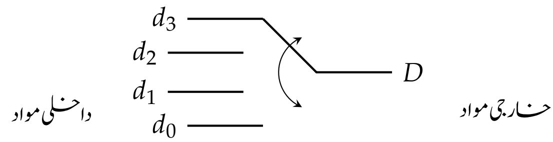
جدول میں a_1a_0 کو دو بِٹ پتہ، e کو داخلی مواد، اور d_0 تا d_3 کو چار مخارج راستے تصور کریں۔ جدول کی پہلی اور پانچویں صف پر نظر رکھیں، جہاں a_1a_0 دو بِٹ پتہ 00 ہے، جو مخارج d_0 منتخب کرے گا۔ پہلی صف میں داخلی مواد 0 جبکہ پانچویں صف میں 1 ہے۔ مخارج d_0 کی مطابقتی قیمتیں یہی ہیں۔ پہلی صف میں d_0 کی قیمت 0 جبکہ پانچویں صف میں اس کی قیمت 1 ہے۔ غیر منتخب مخارج پست رہیں گے۔

باقی تین پتے 01 ، 10 ، اور 11 بالترتیب d_1 ، d_2 ، اور d_3 منتخب کرتے ہیں۔ تسلی کر لیں کہ منتخب مخارج پر وہی مواد ہے جو مداخل e پر ہے۔

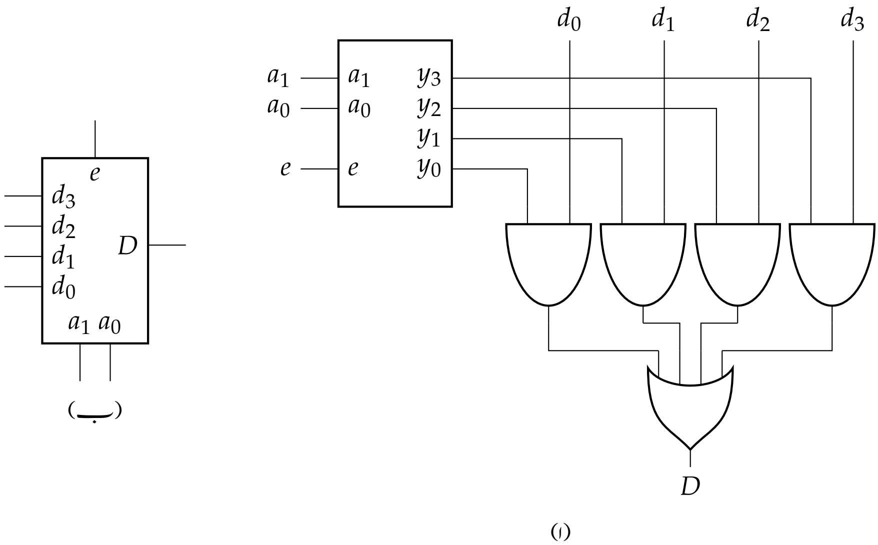
اس جدول میں صفوں کی ترتیب نو کر کے شکل ۵.۲۲ میں پیش جدول کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے، جو اس کی کارکردگی بطور خارجی منتخب کار واضح کرتا ہے۔ اس شکل میں (4×1) منتخب کار کی علامت بھی پیش ہے۔

۵.۵.۲ داخلی منتخب کار

شکل ۵.۲۳ میں داخلی منتخب کار کا تصور پیش کیا گیا ہے، جہاں پیچی سوئچ کے ذریعہ d_0 تا d_3 میں سے ایک کا مواد مخارج منتقل کیا جا سکتا ہے۔



شکل ۵.۲۳: چار سے ایک داخلی منتخب کار کا تصور۔

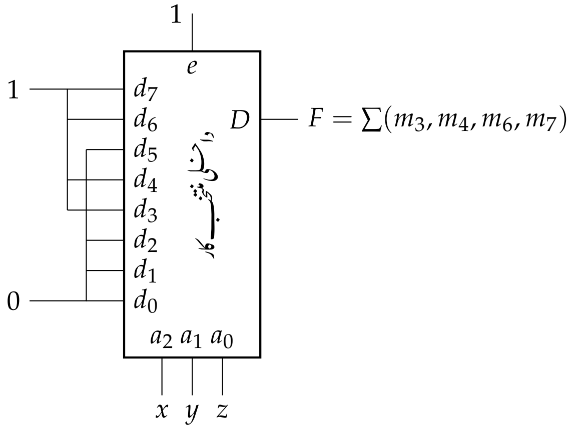


شکل ۵.۲۴: چار سے ایک (4×1) داخلی منتخب کار۔

داخلی منتخب کار کو شناخت کار کی مدد سے شکل ۵.۲۴ میں حاصل کیا گیا ہے؛ شکل-ب میں اس کی علامت پیش ہے۔ یہاں مجاز و معذور صلاحیت کا شناخت کار استعمال کر کے مجاز و معذور صلاحیت کا داخلی منتخب کار حاصل کیا گیا۔ ایسا شناخت کار جس میں قابو اشارہ نہ ہو، استعمال کرتے ہوئے حاصل داخلی منتخب کار میں بھی مجاز و معذور قابو اشارہ نہیں ہو گا۔

مجاز کردہ شناخت کار 00 پتہ کی صورت میں y_0 بلند کرے گا، جبکہ y_1 ، y_2 اور y_3 پست رہیں گے۔ یوں دائیں تین ضرب گیٹ پست رہیں گے، جبکہ بایاں گیٹ d_0 خارج کرے گا۔ یوں جمع گیٹ بھی d_0 خارج کرے گا۔ قابو اشارہ e پست کرنے سے داخلی شناخت کار معذور ہو گا اور 0 خارج کرے گا۔

تسلی کر لیں کہ مجاز حال میں، پتہ کے دو بِٹ a_0 اور a_1 ، چار مداخل d_0 تا d_1 ، میں سے ایک کو منتخب کر کے خارج کرتا ہے۔



x	y	z	F	m
0	0	0	0	m_0
0	0	1	0	m_1
0	1	0	0	m_2
0	1	1	1	m_3
1	0	0	1	m_4
1	0	1	0	m_5
1	1	0	1	m_6
1	1	1	1	m_7

شکل ۵.۲۵: داخلی منتخب کار سے تفاعل کا حصول (برائے مثال ۵.۲)

مشق ۵.۶: انٹرنیٹ سے 74153 کے معلوماتی صفحات حاصل کریں۔ یہ مخلوط دور کیا کام سرانجام دیتا ہے؟

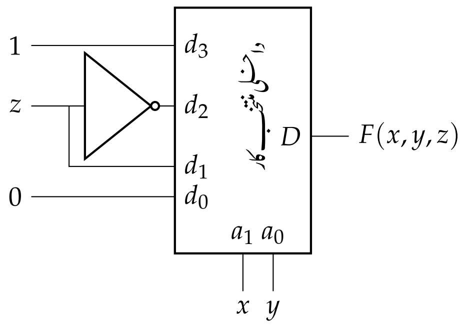
۵.۵.۳ داخلی منتخب کار سے تفاعل کا حصول

شناخت کار کے ساتھ جمع گیٹ جوڑ کر مجموعہ ارکان ضرب کے روپ میں تفاعل کا حصول آپ دیکھ چکے۔ داخلی منتخب کار میں شناخت کار اور جمع گیٹ دونوں موجود ہیں (شکل ۵.۲۴ دیکھیں)۔ یوں n پتہ بٹ کا $2^n \times 1$ داخلی منتخب کار سے n آزاد متغیر تفاعل حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس عمل کو ایک مثال کی مدد سے سمجھتے ہیں۔

مثال ۵.۲: درج ذیل تفاعل 8×1 داخلی منتخب کار سے حاصل کریں۔

$$F(x, y, z) = \sum(m_3, m_4, m_6, m_7)$$

حل: اس تفاعل کا جدول شکل ۵.۲۵ میں پیش ہے۔ تفاعل کے تین آزاد متغیرات xyz کو 8×1 داخلی منتخب کار کے تین پتہ بٹ تصور کر کے، داخلی منتخب کار کے آٹھ مداخل d_0 تا d_7 میں سے d_3، d_4، d_6، اور d_7 کو بلند، جبکہ باقی کو پست رکھ کر تفاعل حاصل ہو گا، جو شکل ۵.۲۵ میں پیش ہے۔ داخلی منتخب کار کو مجاز $(e = 1)$ رکھا گیا ہے۔



x	y	z	F	
0	0	0	0	$F=0$
0	0	1	0	
0	1	0	0	$F=z$
0	1	1	1	
1	0	0	1	$F=\overline{z}$
1	0	1	0	
1	1	0	1	$F=1$
1	1	1	1	

شکل ۵.۲۶: داخلی منتخب کار سے تفاعل کا حصول (برائے مثال ۵.۳)

یوں پتہ 000 ، 001 ، 010 ، اور 101 کی صورت میں داخلی منتخب کار بالترتیب d_0 ، d_1 ، d_2 ، اور d_5 پر فراہم مواد خارج کرے گا؛ ان تمام کو پست رکھ کر درکار تفاعل کی پست صورت حاصل ہو گی۔ اسی طرح پتہ 011 ، 100 ، 110 ، اور 11 کی صورت میں بالترتیب d_3 ، d_4 ، d_6 ، اور d_7 کے مواد خارج ہوں گے؛ انہیں بلند رکھ کر تفاعل کی بلند صورت حاصل ہو گی۔ کسی ایک لمحہ پر پتہ صرف ایک قیمت رکھ سکتا ہے۔ □

n آزاد متغیر تفاعل، $(n-1)$ پتہ بٹ کے داخلی منتخب کار سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یہاں کوئی بھی $(n-1)$ متغیرات بطور داخلی منتخب کار کے پتہ استعمال ہوں گے، جبکہ ایک متغیر بطور مداخل استعمال ہو گا۔ ایک مثال کی مدد سے ایسا کرنا سیکھتے ہیں۔

مثال ۵.۳: درج بالا مثال میں دیا گیا تفاعل $F(x,y,z)=\sum(m_3,m_4,m_6,m_7)$ دو پتہ بِٹ کے 4×1 داخلی منتخب کار سے حاصل کریں۔

حل: شکل ۵.۲۶ میں تفاعل کا جدول ایک نئے انداز میں لکھا گیا ہے۔ آزاد متغیرات xy کے دائیں کھڑی لکیر کھینچ گئی، اور xy کی قیمت کے مطابق جدول کے چار حصے کیے گئے۔ پہلے (بالائی) حصہ میں (جہاں $xy=00$ ہے) تفاعل F کی قیمت بدستور 0 ہے، لہٰذا اس حصہ کے اضافی قطار میں $F=0$ لکھا گیا۔ دوسرے حصے ($xy=01$) کی دونوں صفوں میں z کی قیمت اور تفاعل F کی قیمت برابر ہیں، لہٰذا یہاں $F=z$ لکھا گیا۔ تیسرے حصے ($xy=10$) میں z اور F کی قیمتیں آپس میں متمم ہیں، لہٰذا یہاں $F=\overline{z}$ لکھا گیا ہے۔ آخری حصہ ($xy=11$) میں تفاعل بدستور بلند رہے، لہٰذا یہاں $F=1$ لکھا گیا۔

شکل ۵.۲۶ میں اس جدول سے حاصل دور دکھایا گیا ہے، جہاں (مجاز و معذور صلاحیت نہ رکھنے والا) 4×1 داخلی منتخب کار استعمال کیا گیا۔ پتہ $xy=00$ کی صورت میں داخلی منتخب کار مداخل d_0 کا مواد خارج کرے گا۔ یوں d_0 پر 0 مہیا کر کے اس صورت میں تفاعل کی درست قیمت حاصل کی گئی۔ اسی طرح $xy=01$ کی صورت میں d_1 کا مواد خارج کیا جائے گا، لہٰذا یہاں متغیر z فراہم کر کے تفاعل کی درست قیمت حاصل کی گئی۔ اسی طرح $xy=10$ کی صورت میں d_2 کا مواد مخارج کیا جائے گا، لہٰذا

یہاں $\overline{z}$ فراہم کر کے تفاعل کی درست قیمت حاصل کی گئی، اور آخر میں $xy = 11$ کی صورت میں تفاعل بدستور بلند رہتا ہے، لہٰذا d_3 پر 1 مہیا کیا گیا۔ □

۵.۶ متوازی شنائی ضرب کار

حسابی اعمال میں ضرب کا کردار کلیدی ہے۔ شنائی اعداد کی ضرب کا عمل بالکل اعشاری اعداد کی ضرب کی طرح ہے۔ دو بِٹ شنائی اعداد a اور b کی ضرب درج ذیل ہے، جہاں ان شنائی اعداد کو a_1a_0 اور b_1b_0 لکھا گیا ہے۔

$$
\begin{array}{cccc}
 & & b_1 & b_0 \\
 & & a_1 & a_0 \\
\cline{3-4}
 & & a_0b_1 & a_0b_0 \\
 & a_1b_1 & a_1b_0 & \\
\hline
p_3 & p_2 & p_1 & p_0
\end{array}
$$

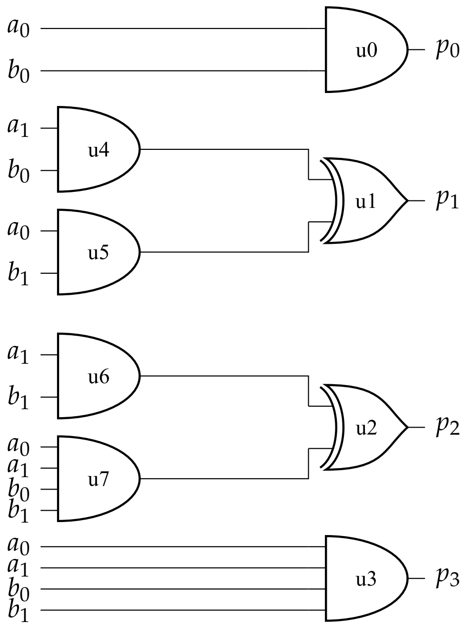
یہاں درج ذیل ہوں گے، جنہیں شنائی جمع کار کی مساوات ۵.۱ کی مدد سے حاصل کیا گیا، اور جن سے شکل ۲۷.۵ میں پیش، دو بِٹ متوازی شنائی ضرب کار حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
p_0 &= a_0b_0 \\
p_1 &= (a_1b_0) \oplus (a_0b_1) \\
p_2 &= (a_1b_1) \oplus (a_1b_0a_0b_1) \\
p_3 &= a_1b_1a_1b_0a_0b_1 = a_1a_0b_1b_0
\end{aligned}
$$

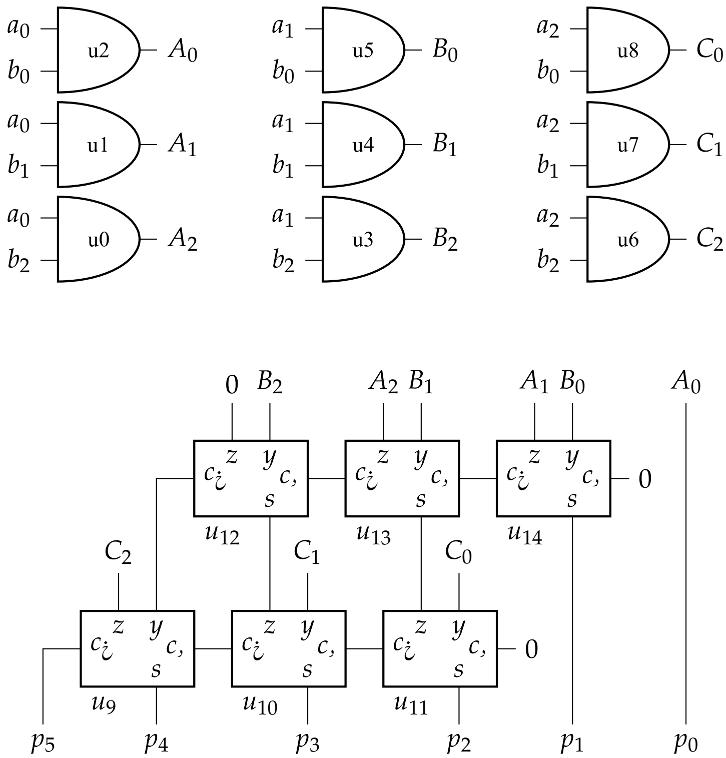
اگرچہ زیادہ بِٹ ضرب کار اس طریقہ کار سے تشکیل دیے جا سکتے ہیں؛ بد قسمتی سے، اعداد کے بِٹ کی تعداد بڑھانے سے ضرب کار میں درکار گیٹوں کی تعداد بہت تیزی سے بڑھتی ہے (محض آٹھ یا سولہ بِٹ ضرب کار میں بھی مستعمل گیٹوں کی تعداد بہت زیادہ ہو گی)، لہٰذا ایسا کرنا مہنگا ثابت ہو گا۔ عموماً زیادہ بِٹ کے ضرب کار مکمل جمع کار کی مدد سے حاصل کیے جاتے ہیں۔ اس طریقہ کو تین بِٹ شنائی اعداد کی ضرب کو مثال بنا کر سیکھتے ہیں۔

تین بِٹ اعداد $b_2b_1b_0$ اور $a_2a_1a_0$ کی ضرب درج ذیل ہے، جس سے شکل ۲۸.۵ میں پیش تین بِٹ شنائی ضرب کار حاصل ہو گا۔ اس طریقہ کار سے با آسانی زیادہ بِٹ کے شنائی ضرب کار بنائے جا سکتے ہیں۔

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & b_2 & b_1 & b_0 \\
 & & & a_2 & a_1 & a_0 \\
\cline{4-6}
 & & & a_0b_2 & a_0b_1 & a_0b_0 \\
 & & a_1b_2 & a_1b_1 & a_1b_0 & \\
 & a_2b_2 & a_2b_1 & a_2b_0 & & \\
\hline
p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0
\end{array}
\tag{۵.۹}
$$



شکل ۵.۲۷: دوبِٹ شنائی متوازی ضرب کار



شکل ۵.۲۸: تین بِٹ شنائی ضرب کار

اس شکل میں 9 ضرب گیٹ اور 6 مکمل جمع کار مستعمل ہیں۔ ضرب گیٹ u_1 مداخل a_0 اور b_1 کا منطقی ضرب $A_1 = a_0b_1$ دے گا، جو مکمل جمع کار u_{14} کا z مداخل ہے۔ شکل میں u_1 کے مخارج سے u_{14} کے z مداخل تک تار نظر پوش کرتے ہوئے دونوں کو ایک نام (A_1) سے پکارا گیا ہے۔ دو نقطوں کو ایک نام سے پکارنا، دونوں کو آپس میں تار سے جوڑنے کے مترادف ہے۔

باب ۶

معاصر ترتیبی منطق اور ادوار

منطق میں، عموماً، دو متضاد صورتیں سامنے آتی ہیں، مثلاً، بلند اور پست، صادق اور کاذب، صادق اور کاذب، وغیرہ؛ جنہیں عددی برقیات میں 1 اور 0 سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں، اگر بلند کو 1 سے ظاہر کیا جائے، تب پست کو 0 ظاہر کرے گا، اور اگر بلند کو 0 سے ظاہر کیا جائے، تب پست کو 1 سے ظاہر کیا جائے گا۔ اگر صادق کو 1 سے ظاہر کیا جائے، تب کاذب کو 0 ظاہر کرے گا۔ اگر صادق کو 1 سے ظاہر کیا جائے، تب کاذب کو 0 ظاہر کرے گا۔ اس کتاب میں بلند یا صادق کو 1 جبکہ پست یا کاذب کو 0 سے ظاہر کیا جائے گا۔

عددی برقیات میں 1 کو مثبت پانچ وولٹ $(5\,\mathrm{V})$ اور 0 کو صفر وولٹ $(0\,\mathrm{V})$ کے برقی دباؤ سے ظاہر کرنے کو **مثبت منطقی نظام**[۱] کہتے ہیں۔ اس کتاب میں یہی نظام استعمال ہوگا۔

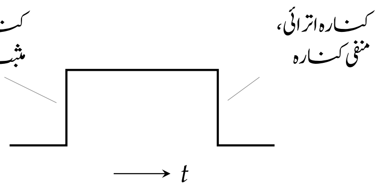
ہم اس کو اُلٹ کر کے 1 کو صفر وولٹ $(0\,\mathrm{V})$ اور 0 کو مثبت پانچ وولٹ $(5\,\mathrm{V})$ سے ظاہر کر سکتے ہیں، جو **منفی منطقی نظام**[۲] کہلاتا ہے۔

اب تک، ہم ثنائی گیٹوں کا مطالعہ کرتے رہے ہیں، جن کا مخارج اُسی لمحہ تبدیل ہو جاتا ہے جس لمحے ان کے مداخل تبدیل ہوں۔ عددی برقیات میں ادوار کی ایک اہم قسم ایسی ہے، جو مداخل تبدیل ہونے کے باوجود، مخارج کو اپنے حال میں برقرار رکھ سکتی ہے۔ اس قسم کے ادوار **پلٹ کار**[۳] کہلاتے ہیں، جن کے دو متضاد مخارج ہوں گے۔

پلٹ کار ایک ثنائی ہندسہ (ایک بٹ) ذخیرہ کرنے کی صلاحیت رکھتا ہے، لہٰذا اس کو **حافظہ**[۴] کے طور استعمال کیا جا سکتا ہے۔ پلٹ کار استعمال کرتے ہوئے **گنتی کار**[۵]، وغیرہ تشکیل دیے جاتے ہیں۔ اس باب میں پلٹ کار اور اس پر مبنی **معاصر ادوار** پر غور کیا جائے گا۔ معاصر ادوار وہ ادوار ہیں جن کے تمام حصے قدم ملا کر چلتے ہیں۔

---

[۱] positive logic system
[۲] negative logic system
[۳] flip flop
[۴] memory
[۵] counter



شکل ۶.۱: کنارہ چڑھائی اور کنارہ اترائی

۶.۱ گیٹوں کے اوقات کار

ثنائی ادوار کی کارکردگی پر تبصرہ کرنے سے پہلے چند تکنیکی اصطلاحات جاننا ضروری ہے۔ شکل ۶.۱ میں گیٹ کا مخارج بلند ہو کر دوبارہ پست ہوتا دکھایا گیا، جہاں (وقت t کے ساتھ دائیں رخ چلتے ہوئے) پہلے کنارے کو **کنارہ چڑھائی**[6] یا **مثبت کنارہ**[7]، جبکہ دوسرے کو **کنارہ اترائی**[8] یا **منفی کنارہ**[9] کہا گیا۔ مخارج کا حال یکدم تبدیل ہوتا دکھایا گیا، جو درست نہیں۔

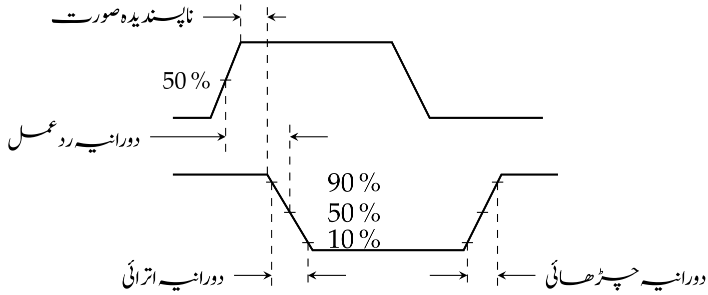
برقیاتی گیٹ نہایت چُست ہوتے ہیں، جو مخارج کو **پست** سے **بلند** یا **بلند** سے **پست** بہت کم دورانیوں میں کرتے ہیں۔ یہ دورانیے کم ضرور، لیکن صفر نہیں ہوتے۔ برقی اشارہ، روشنی کی رفتار سے بھی سفر کرتے ہوئے، داخلی پنیا سے خارجی پنیے تک، قابل پیما وقت میں پہنچے گا۔ نفی گیٹ مثال بنا کر حقیقی دورانیوں پر غور کرتے ہیں (جو باقی گیٹوں کے لئے بھی درست ہو گا)۔ اشکال پر غور کے دوران یاد رکھیں، وقت بائیں سے دائیں رخ ہو گا، اور تمام معلومات اس حقیقت کو ذہن میں رکھتے ہوئے پیش کی جائیں گی۔

شکل ۶.۲ میں نفی گیٹ کا مداخل (بالائی ترسیم) اور مخارج (نچلی ترسیم) بیک وقت دکھائے گئے ہیں، جہاں دورانیوں کو بڑھا چڑھا کر پیش کیا گیا ہے۔

بلند سے پست حال پہنچنے کے دورانیہ کو **دورانیہ اترائی**[10] اور پست سے بلند پہنچنے کے دورانیہ کو **دورانیہ چڑھائی**[11] کہتے ہیں۔ ان دورانیوں کی پیمائش کی وضاحت شکل میں کی گئی ہے۔ داخلی برقی اشارہ بھی کسی گیٹ سے آتا ہو گا، لہٰذا یہ بھی پست سے بلند یا بلند سے پست ہونے میں وقت گزارے گا۔

مداخل تبدیل ہوتے ہی مخارج تبدیل نہیں ہو جاتا، بلکہ کچھ دیر یوں محسوس ہوتا ہے جیسے مداخل کا مخارج پر کوئی اثر نہیں۔ مداخل کے کنارہ چڑھائی پر غور کریں۔ مداخل کے بلند ہونے کے باوجود، مخارج کچھ دیر بلند رہتا ہے۔ یہ ناقابل قبول صورت حال ہے، جس پر عددی ادوار کے تشکیل کے دوران نظر رکھنی ضروری ہے۔ مداخل بلند ہونے کے کچھ وقفہ بعد مخارج نیا حال اختیار کرتا ہے۔ اس وقفہ کو **دورانیہ رد عمل**[12] کہتے ہیں۔ دورانیہ رد عمل ناپنے کی

[6] rising edge
[7] positive going edge
[8] falling edge
[9] negative going edge
[10] fall time
[11] rise time
[12] propagation delay



شکل ۶.۲: نفی گیٹ کے دورانیے

وضاحت شکل میں کی گئی ہے۔ برقیاتی گیٹوں کے دورانیہ اترائی، دورانیہ چڑھائی، اور دورانیہ رد عمل، عموماً، چند نینو سیکنڈ ہوں گے۔

کارخانے میں گیٹ سازی کے دوران، اجزاء میں معمولی سے معمولی فرق کی بنا (ایک قسم کے دو) گیٹوں کے دورانیے کبھی ایک جیسے نہیں ہوں گے۔ ان میں 10^{-9} سیکنڈ کا نہیں تو 10^{-12} سیکنڈ کا فرق ضرور ہو گا، جو عمر رسیدگی کے ساتھ اور استعمال کے حالات (درجہ حرارت، نمی، دباو، وغیرہ) سے تبدیل ہوں گے۔

مشق ۶.۱: انٹرنیٹ سے $74xx$ اور $74Hxx$ سلسلہ کے دورانیوں میں فرق دریافت کریں۔

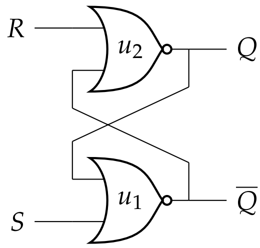
۶.۲ پلٹ کار

شکل ۶.۳ میں **ایس آر**[13] پلٹ کار کا دور اور جدول پیش ہیں۔ پلٹ کار کو، روایتاً، مداخل کے نام[14] سے پکارا جاتا ہے، جو یہاں لاطینی حروف "ایس"[15] اور "آر"[16] ہیں۔ پلٹ کار کے دو متضاد مخارج ہوں گے، جنہیں Q اور $\overline{Q}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں، اگر مخارج Q کی قیمت 1 ہو، تب مخارج $\overline{Q}$ کی قیمت 0 ہو گی، اور اگر $Q = 0$ ہو تب $\overline{Q} = 1$ ہو گا۔

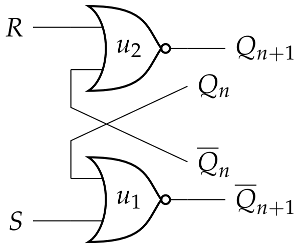
شکل ۶.۳ میں متمم جمع گیٹ u_1 کا مخارج، متمم جمع گیٹ u_2 کا ایک مداخل، اور u_2 کا مخارج، u_1 کا ایک مداخل ہے۔ متمم جمع u_1 کے مخارج پر نظر رکھیں؛ یہ مخارج، u_2 کا ایک مداخل ہے، لہٰذا اس کے مخارج پر

[13] Set-Reset Flip Flop, (SR FF)
[14] پلٹ کار کے مداخل انگریزی الفاظ Set اور Reset کے سر حرف S اور R ہیں۔
[15] S
[16] R

S	R	Q_{n+1}	$\overline{Q}_{n+1}$	
0	0	Q_n	$\overline{Q}_n$	برقرار حال
0	1	0	1	پست حال
1	0	1	0	بلند حال
1	1	?	?	ممنوعہ حال



شکل ۶.۳: بلند فعال مداخل ایس آر پلٹ کار



شکل ۶.۴: موجودہ مخارج سے اگلے مخارج کا حصول۔

اثر انداز ہو گا؛ لیکن u_2 کا مخارج u_1 کا ایک مداخل ہے، جو u_1 کے مخارج پر اثر انداز ہو گا؛ یوں u_1 کا مخارج، خود پر اثر انداز ہو گا! اس عمل کو **بازرسی**[17] کہتے ہیں۔

ایسا اشارہ، مثلاً $\overline{Q}$، جو خود پر اثر انداز ہو **بازرسی اشارہ**[18] کہلاتا ہے۔

یہاں Q اور $\overline{Q}$ دونوں بطور بازرسی اشارات استعمال کیے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ Q کی قیمت جاننے کے لئے $\overline{Q}$ کی قیمت معلوم ہونا ضروری ہے، لیکن $\overline{Q}$ کی قیمت صرف اس صورت معلوم ہو سکتی ہے جب Q کی قیمت معلوم ہو! آئیں اس پلٹ کار کا جدول حاصل کریں۔

ہم پلٹ کار کے (n قدم گزرنے کے بعد) موجودہ مخارج کو Q_n اور $\overline{Q}_n$ لکھتے ہیں۔ اب (بازرسی) مداخل Q_n، $\overline{Q}_n$ اور سادہ مداخل S، R کو دیکھتے ہوئے ($n+1$ واں قدم گزرنے کے بعد) متوقع مخارج حاصل کرتے ہیں، جنہیں ہم Q_{n+1} اور $\overline{Q}_{n+1}$ لکھتے ہیں۔ اس کی تصوراتی صورت شکل ۶.۴ میں پیش ہے۔

شکل ۶.۴ میں بالائی گیٹ (u_2) کے اگلے مخارج Q_{n+1} کو موجودہ مداخل R اور $\overline{Q}$ کے روپ میں لکھتے ہیں۔

$$Q_{n+1} = \overline{R + \overline{Q}_n} \tag{۶.۱}$$

جیسا آپ نے شکل ۶.۲ میں دیکھا، گیٹ کا مخارج، دورانیہ رد عمل گزرنے کے بعد، مداخل کے تحت حال

feedback[17]
feedback signal[18]

جدول ۶.۱: ایس آر پلٹ کار (مساوات ۶.۳ اور مساوات ۶.۴)

S	R	Q_n	Q_{n+1}
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

(ا)

S	R	Q_n	$\overline{Q}_{n+1}$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

(ب)

اختیار کرتا ہے۔یوں موجودہ $\overline{Q}_n$ اور مداخل R جب نئی قیمت اختیار کریں، گیٹ کچھ دیر بعد نئی قیمت Q_{n+1} اختیار کرتا ہے۔

نچلی گیٹ (u_1) کے مخارج کی مساوات درج ذیل ہو گی۔ یہ گیٹ بھی مداخل تبدیل ہونے کے کچھ دیر بعد مخارج تبدیل کرے گا۔

$$\overline{Q}_{n+1} = \overline{S + Q_n} \tag{۶.۲}$$

بالائی گیٹ کی خارجی مساوات حاصل کرنے کی غرض سے مساوات ۶.۲ کو مساوات ۶.۱ میں ڈال کر مسئلہ ڈی مارگن سے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= \overline{R + (\overline{S + Q_n})} \\ &= \overline{R}(\overline{\overline{S + Q_n}}) \\ &= \overline{R}(S + Q_n) \end{aligned} \tag{۶.۳}$$

مساوات ۶.۳ میں دائیں ہاتھ کے تین متغیرات S ، R ، اور Q_n کو آزاد متغیرات تصور کر کے تابع متغیر Q_{n+1} کو جدول ۶.۱-الف میں پیش کیا گیا ہے۔(متغیر R مساوات میں $\overline{R}$ کے روپ میں موجود ہے۔)

اسی طرح شکل ۶.۴ میں نچلی گیٹ کی خارجی مساوات حاصل کرنے کی غرض سے مساوات ۶.۱ کو مساوات ۶.۲ میں ڈال کر مسئلہ ڈی مارگن سے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{n+1} &= \overline{S + (\overline{R + \overline{Q}_n})} \\ &= \overline{S}(\overline{\overline{R + \overline{Q}_n}}) \\ &= \overline{S}(R + \overline{Q}_n) \end{aligned} \tag{۶.۴}$$

مساوات ۶.۴ میں متغیرات S ، R ، اور Q_n آزاد متغیرات تصور کر کے تابع متغیر $\overline{Q}_{n+1}$ کو جدول ۶.۱-ب میں پیش کیا گیا ہے۔(متغیر S اور Q_n مساوات میں بالترتیب $\overline{S}$ اور $\overline{Q}_n$ کے روپ میں موجود ہیں۔)

جدول ۶.۱-الف اور ب کو S اور R کی قیمتوں کے لحاظ سے چار حصوں میں تقسیم کیا گیا۔ پہلے حصہ میں $S = 0$ اور $R = 0$ ہے، جبکہ Q_{n+1} کی قیمت Q_n کے برابر ہے۔ ہم کہتے ہیں، مداخل $S = 0$ اور $R = 0$ کی صورت میں ایس آر پلٹ کار "برقرار حال" ہو گا۔ جدول-ب میں $\overline{Q}_{n+1}$ کی قیمت، جدول-الف میں Q_{n+1} کی قیمت کی متمم ہے۔ ہم چاہتے بھی یہی ہیں (کہ پلٹ کار کے دو مخارج آپس میں متضاد ہوں)۔

دوسرے حصہ میں $S = 0$ اور $R = 1$ ہے، جبکہ Q_{n+1} پست ہو گا۔ ہم کہتے ہیں، ان مداخل کے لئے ایس آر پلٹ کار "پست حال" ہو گا۔ یہاں بھی (جدول-الف اور ب کے تحت) نئے مخارج ایک دوسرے کے متضاد ہیں۔

تیسرے حصہ میں $S = 1$ اور $R = 0$ ہے، جبکہ پلٹ کار "بلند حال" ہے۔

چوتھے حصہ میں $S = 1$ اور $R = 1$ ہے، جبکہ جدول کے تحت Q_{n+1} اور $\overline{Q}_{n+1}$ دونوں پست ہیں، جو ہم نہیں چاہتے، ہم کہتے ہیں پلٹ کار "ممنوعہ حال" (میں) ہے۔ پلٹ کار کی صحیح کارکردگی کے لئے یہ مداخل "ممنوعہ" قرار دیے جاتے ہیں۔ یوں S اور R اکٹھے بلند نہیں کیے جاتے۔

ان حقائق کو شکل ۶.۳ کے جدول میں پیش کیا گیا (جو پلٹ کار کا جدول لکھنے کا درست طریقہ ہے)، جہاں آخری صف میں ? لکھ کر واضح کیا جاتا ہے کہ ان صف کے مداخل استعمال نہ کیے جائیں۔

ایس آر پلٹ کار کی کارکردگی

$$\begin{array}{c|cl} SR & Q_{n+1} & \\ \hline 00 & Q_n & \text{برقرار حال} \\ 01 & 0 & \text{پست حال} \\ 10 & 1 & \text{بلند حال} \\ 11 & ? & \text{ممنوعہ حال} \end{array} \tag{۶.۵}$$

پلٹ کار کی بات کرتے وقت Q کی قیمت کو پلٹ کار کا **حال**[۱۹] کہتے ہیں۔ یوں $Q = 1$ کی صورت میں پلٹ کار **بلند حال**[۲۰] یا **صادق حال**[۲۱]، جبکہ $Q = 0$ کی صورت میں **پست حال**[۲۲] یا **کاذب حال**[۲۳] کہلائے گا۔

جدول سے ظاہر ہے کہ جب S بلند ہو، پلٹ کار بلند حال اختیار کرتا ہے۔ یوں، مداخل S ، **بلند** صورت میں **فعال**[۲۴] ہو گا۔ وہ مداخل جو بلند صورت میں فعال ہو، **بلند فعال**[۲۵] مداخل کہلاتا ہے۔ وہ مداخل جو پست صورت میں فعال ہو، **پست فعال**[۲۶] کہلاتا ہے۔ جب بلند فعال مداخل، پست ہو، مثلاً، $S = 0$ ، ہم کہتے ہیں یہ **غیر**

---

[۱۹] state
[۲۰] high state
[۲۱] true state
[۲۲] low state
[۲۳] false state
[۲۴] active
[۲۵] active high
[۲۶] active low

فعال[۲۷] (حال میں) ہے۔ یوں اس پلٹ کار کا بہتر نام **بلند فعال مداخل ایس آر پلٹ کار** ہو گا۔

پلٹ کار خود اس صورت فعال کہلاتا ہے جب $Q = 1$ ہو۔ پست فعال مداخل اور مخارج ($\overline{Q}$) کے نام پر لکیر کھینچ کر اس کی پست فعال حیثیت واضح کی جاتی ہے؛ مزید، پلٹ کار کی علامت میں پست فعال (مداخل اور مخارج) پنیوں پر گول دائرہ لگایا جاتا ہے، جو ان کا پست فعال پن ظاہر کرتا ہے (شکل ۶.۷ دیکھیں)۔

پلٹ کار کے دونوں مداخل عام طور **غیر فعال** رکھے جائیں گے؛ یوں موجودہ پلٹ کار کے مداخل پست رکھے جائیں گے۔ پلٹ کار بلند (صادق) حال کرنے کے لئے S اشارہ ایک لمحہ کے لئے بلند (فعال) کر کے واپس پست (غیر فعال) کیا جاتا ہے۔ پہلے سے بلند حال پلٹ کار، اسی حال میں رہے گا، جبکہ پست پلٹ کار، اشارہ ملتے ہی بلند حال اختیار کرے گا۔

اسی طرح پلٹ کار کا ذب (پست) حال کرنے کے لئے R اشارہ لمحاتی فعال کیا جاتا ہے۔

مداخل S کو **فعال کار**[۲۸] مداخل جبکہ R کو **غیر فعال کار**[۲۹] مداخل کہہ سکتے ہیں۔

آپ نے دیکھا، پلٹ کار در حقیقت مداخل کا (بلند یا پست) حال محفوظ کرتا ہے۔ یوں اگر مداخل اشارہ لمحاتی فعال ہونے کے بعد غیر فعال ہو جائے، پلٹ کار (اگلے نئے اشارے تک) اس کا حال محفوظ رکھتا ہے۔

۶.۳ ساعت

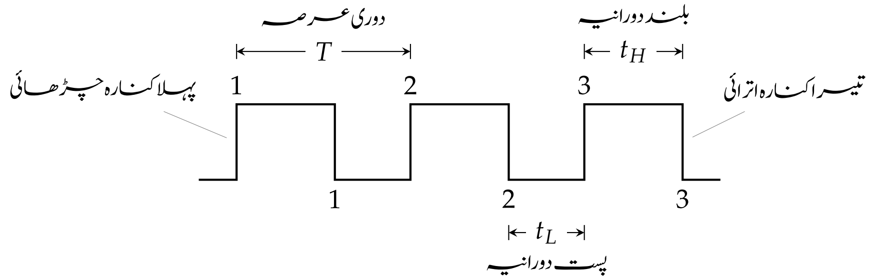
عددی ادوار کی ایک قسم جو ہم **عصر**[۳۰] ادوار کہلاتے ہیں کو، عموماً، مقررہ دورانیے کا مسلسل دہراتا داخلی اشارہ درکار ہو گا، جو **ساعت**[۳۱] کہلاتا ہے۔ ساعت اشارہ شکل ۶.۵ میں پیش ہے۔ اگرچہ اس طرح کی اشکال میں دورانیہ چڑھائی اور دورانیہ اترائی نہیں دکھائے جاتے، امید کی جاتی ہے کہ آپ ان کی موجودگی ہر وقت ذہن میں رکھیں گے۔

ہم عصر عددی دور، مہیا کردہ ساعت کے **تعدد**[۳۲] کی رفتار سے چلتا ہے، اور اس کے مختلف حصے، ساعت کے کنارہ اترائی یا کنارہ چڑھائی پر بیک وقت حال تبدیل کرتے ہیں۔ گویا، ہم عصر دور ساعت کے ساتھ قدم ملا کر چلتا ہے۔

شکل ۶.۵ میں اوپر جانب کنارہ چڑھائی کی گنتی، جبکہ نیچے جانب کنارہ اترائی کی گنتی دی گئی ہے۔ ساتھ ہی، **دوری عرصہ**[۳۳]، **بلند دورانیہ**[۳۴] اور **پست دورانیہ**[۳۵] کی بھی وضاحت کی گئی ہے، جنہیں بالترتیب T، t_H، اور t_L سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں $T = t_H + t_L$ ہو گا۔ ساعت کے بلند اور پست دورانیے برابر بھی ہو سکتے ہیں۔ ہمیشہ کی

---

[۲۷] inactive
[۲۸] set input
[۲۹] reset or clear input
[۳۰] synchronous
[۳۱] clock
[۳۲] frequency
[۳۳] time period
[۳۴] high time, ON time
[۳۵] low time, OFF time



شکل ۶.۵: ساعت

طرح، تعدد f اور دوری عرصہ T کا تعلق درج ذیل ہے، جہاں T کی اکائی "سیکنڈ" اور f کی اکائی ہرٹز[۳۶] ہے

$$f = \frac{1}{T}$$

ساعتی اشارہ مختصراً **ساعت** پکارا جاتا ہے۔ ساعت سے مراد متواتر تبدیل ہوتا اشارہ، یا اس کا بلند، یا پست دورانیہ، یا چڑھائی یا اترائی کنارہ ہو گا۔ متن سے اس کا مطلوبہ مطلب واضح ہو گا۔ جہاں غلط فہمی کا امکان ہو، وہاں وضاحت کی جائے گی۔

۶.۴ متمم ضرب گیٹ ایس آر پلٹ کار

شکل ۶.۶ میں متمم ضرب گیٹ پر مبنی **پست فعال مداخل ایس آر پلٹ کار**[۳۷] دکھایا گیا ہے۔ شکل ۶.۷ میں بلند فعال مداخل اور پست فعال مداخل ایس آر پلٹ کار کی علامتیں پیش ہیں۔ پست فعال اشارات، کے نام پر لکیر ($\overline{S}$ ، $\overline{Q}$) اور ان کے پنیوں پر گول دائرے ان کے پست فعال پن ظاہر کرتے ہیں۔

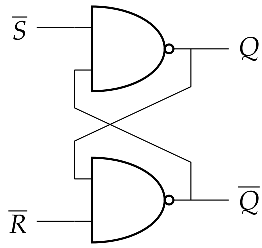
پلٹ کار کے مخارج Q اور $\overline{Q}$ آپس میں متضاد (اُلٹ) حال رہتے ہیں۔ آئیں اس پلٹ کار کی کارکردگی، دوسرے نقطہ نظر سے دیکھیں۔

۶.۴.۱ غیر فعال مداخل پلٹ کار، حال برقرار رکھتا ہے

فرض کریں پست ایس آر پلٹ کار کے مداخل **غیر فعال** ہیں، یعنی $Q = 0$ ، $\overline{Q} = 1$ ، $\overline{S} = 1$ اور $\overline{R} = 1$ ہیں (شکل ۶.۸-الف)۔ یوں، بالائی متمم ضرب گیٹ کے مداخل 1 اور 1 ہیں، لہٰذا اس کا مداخل 0 ہو گا، جو وہ پہلے سے ہے۔ اسی طرح نچلے متمم ضرب گیٹ کے مداخل 0 اور 1 ہیں، لہٰذا اس کا مخارج 1 ہو گا، جو وہ پہلے سے ہے۔

[۳۶] Hertz, Hz
[۳۷] active low inputs SR flip flop

$\overline{S}$	$\overline{R}$	Q_{n+1}	$\overline{Q}_{n+1}$	
0	0	?	?	ممنوعہ حال
0	1	1	0	بلند حال
1	0	0	1	پست حال
1	1	Q_n	$\overline{Q}_n$	برقرار حال

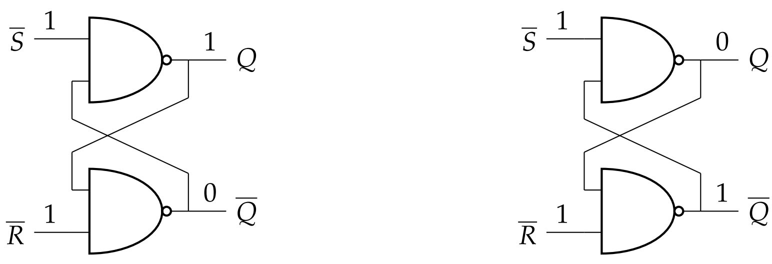


شکل ۶.۶: پست فعال مداخل ایس آر پلٹ کار

(ا) بلند فعال مداخل ایس آر پلٹ کار

(ب) پست فعال مداخل ایس آر پلٹ کار

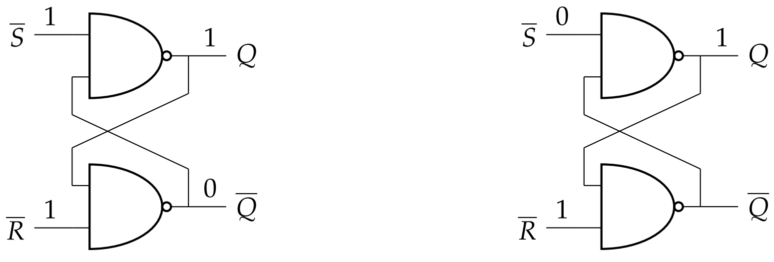
شکل ۶.۷: ایس آر پلٹ کار کی دو علامتیں



(ا)

(ب)

شکل ۶.۸: غیر فعال مداخل کی صورت میں پلٹ کار اپنا حال برقرار رکھتی ہے۔



شکل ۶.۹: ایک لمحے کے لئے $\overline{S}$ فعال کیا گیا ہے۔

فرض کریں **بلند پلٹ** کار کے مداخل **غیر فعال** ہیں، یعنی $Q = 1$، $\overline{Q} = 0$، $\overline{S} = 1$ اور $\overline{R} = 1$ ہیں (شکل ۶.۸-ب)۔ یوں بالائی متمم ضرب گیٹ کے مداخل 1 اور 0 ہیں، لہٰذا اس کا مداخل 1 ہو گا، جو وہ پہلے سے ہے۔ اسی طرح نچلے متمم ضرب گیٹ کے مداخل 1 اور 1 ہیں، لہٰذا اس کا مخارج 0 ہو گا، جو وہ پہلے سے ہے۔

شکل ۶.۸ کی دونوں صورتوں پر غور کرنے سے معلوم ہوا کہ **غیر فعال مداخل کی صورت میں پلٹ کار اپنا حال برقرار رکھتا ہے۔** شکل ۶.۶ میں جدول کی آخری صف اس حقیقت کو بیان کرتی ہے، جہاں (اگلا حال) Q_{n+1} موجودہ Q_n کے برابر ہو گا۔

۶.۴.۲ مداخل S فعال کرنے سے پلٹ کار بلند حال اختیار کرتا ہے

تصور کریں ایس آر پلٹ کار کا مداخل $\overline{S}$، ایک لمحہ فعال کرنے کے بعد دوبارہ غیر فعال کیا جاتا ہے، یعنی لمحاتی طور $\overline{S} = 0$ کیا جاتا ہے۔ شکل ۶.۹-الف میں وہ لمحہ پیش ہے جب $\overline{S} = 0$ (فعال) ہے۔ بالائی متمم ضرب گیٹ کا کوئی مداخل پست ہونے کی صورت میں اس کا مخارج بلند ہو گا، لہٰذا $\overline{S} = 0$ کی صورت میں بالائی گیٹ کا مخارج بلند ہو گا، جیسا شکل میں دکھایا گیا ہے (پلٹ کار کے دونوں گیٹوں کی گزشتہ قیمتیں اس حقیقت پر اثر انداز نہیں ہوں گی)۔ یوں نچلے گیٹ کے دونوں مداخل بلند، لہٰذا مخارج پست $\overline{Q} = 0$ ہو گا۔ مداخل واپس غیر فعال $\overline{S} = 1$ کرنے سے شکل-ب ملتی ہے، لہٰذا پلٹ کار کا حال ($Q = 1$ اور $\overline{Q} = 0$) برقرار رہے گا۔ یوں **مداخل $\overline{S}$ فعال کرنے سے ایس آر پلٹ کار بلند حال اختیار کرتا ہے۔**

۶.۴.۳ مداخل $\overline{R}$ فعال کرنے سے پلٹ کار پست حال اختیار کرتا ہے

درج ذیل مشق میں آپ سے یہی ثابت کرنے کی درخواست کی گئی ہے۔

مشق ۶.۲: ثابت کریں کہ $\overline{S} = 1$ رکھتے ہوئے، لمحاتی طور $\overline{R} = 0$ کرنے سے ایس آر پلٹ کار **پست حال** اختیار کرتا ہے۔

۶.۴.۴ حال دوڑ

ایس آر پلٹ کار کے دونوں مداخل بیک وقت پست کرنے کی اجازت نہیں، چونکہ ایسی صورت میں پلٹ کار غیر یقینی حال اختیار کرتا ہے۔ دیکھتے ہیں، ایسا کیوں ہو گا۔

شکل ۶.۱ پر نظر رکھتے ہوئے آگے بڑھیں۔ تصور کریں پلٹ کار کے دونوں مداخل بیک وقت پست (فعال) کرنے کے بعد دوبارہ بلند (غیر فعال) کیے جاتے ہیں۔ ایسا کرنے کے بعد ہم جاننا چاہتے ہیں پلٹ کار کس حال ہو گا۔

دونوں مداخل بیک وقت پست کرنے سے (بالائی اور نچلے متمم ضرب گیٹ کے مخارج بلند ہوں گے، لہٰذا) پلٹ کار کے دونوں مخارج بیک وقت بلند ہوں گے، جو ناقابل قبول صورت ہے: پلٹ کار کے مخارج Q اور $\overline{Q}$ کا آپس میں متضاد رہنا ضروری ہے۔

دونوں مداخل بیک وقت یکدم واپس بلند کرنے سے گیٹوں کے مخارج (یکدم حال تبدیل نہیں کرتے، صفحہ ۱۲۳ پر شکل ۶.۲ دیکھیں، بلکہ) نئے حال کی طرف روانہ ہوتے ہیں، لیکن، جب تک ان کے مخارج نئے حال اختیار نہیں کرتے، دونوں گیٹوں کے دونوں مداخل بلند ہوں گے (مثلاً $\overline{S}$ بلند کر دیا گیا ہے، اور فی الحال $\overline{Q}$ نئے حال تک نہیں پہنچا، لہٰذا یہ بھی بلند رہے؛ یوں بالائی گیٹ کے دونوں مداخل بلند ہیں)۔ دونوں گیٹ، پست حال کی طرف گامزن ہوں گے۔ گیٹوں کے دورانیوں میں فرق (جو وقت اور حالات کے ساتھ تبدیل ہو سکتے ہیں) کی بنا، ایک گیٹ (جو ہم نہیں جانتے کونسا ہو گا) نئے پست حال تک، دوسرے گیٹ سے پہلے پہنچ کر (دوسرے گیٹ کا مداخل ہونے کی وجہ سے) دوسرے گیٹ کو بلند رہنے پر مجبور کرے گا۔ یوں اگرچہ پلٹ کار کے دونوں مداخل غیر فعال کرنے سے پلٹ کار کے مخارج آپس میں تضاد ہیں، تاہم، ہم جاننے سے قاصر ہیں آیا پلٹ کار بلند یا پست حال ہو گا۔ ایس آر پلٹ کار کے دونوں مداخل فعال کرنے کے بعد دوبارہ بیک وقت غیر فعال کرنے سے پلٹ کار کا حال، متمم ضرب گیٹوں کے بیچ نئے حال تک پہنچنے کے دوڑ پر منحصر ہے۔ اسی لئے اس کو **حال دوڑ**[۳۸] کہتے ہیں۔ ہم پلٹ کار کو حال دوڑ میں ڈالنے سے گریز کرتے ہیں۔ حال دوڑ پر حصہ 3.1.11 میں تفصیل سے غور کیا جائے گا۔

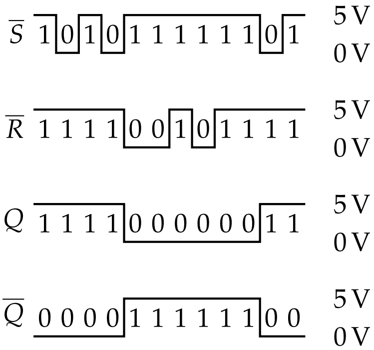
شکل ۶.۱۰ میں پیش جدول کی پہلی صف میں پلٹ کار بلند $(Q = 1)$ اور مداخل غیر فعال ہیں۔ صف در صف نیچے چلتے ہوئے دیکھیں، مداخل تبدیل کرنے سے پلٹ کار کیا حال اختیار کرتا ہے۔ (مداخل کسی خاص ترتیب سے نہیں، بلکہ پلٹ کار کی کارکردگی کی ایک مثال دیکھنے کی غرض سے تبدیل کیے گئے۔)

مثبت منطقی نظام استعمال کرتے ہوئے، (1) کو $5\,\mathrm{V}$، جبکہ (0) کو $0\,\mathrm{V}$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ یوں مداخل ایس کی فعال صورت $\overline{S} = 0$ کو $0\,\mathrm{V}$، جبکہ غیر فعال صورت $\overline{S} = 1$ کو $5\,\mathrm{V}$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ اسی طرح $Q = 0$ کو $0\,\mathrm{V}$ اور $Q = 1$ کو $5\,\mathrm{V}$ سے ظاہر کیا جائے گا۔ ایسا کرتے ہوئے شکل ۶.۱۰ میں پیش جدول سے اسی شکل میں پیش ترسیمات حاصل ہوں گی، جہاں موازنہ کے لئے $\overline{Q}$ بھی پیش ہے۔

۶.۵ زیادہ مداخل پلٹ کار

پلٹ کار کے مداخل دو سے زیادہ ہو سکتے ہیں، جیسا شکل ۶.۱۱ میں دکھایا گیا ہے۔ یہاں بلند کار مداخل کی تعداد دو ہے، جنہیں $\overline{S}_a$ اور $\overline{S}_b$ کہا گیا ہے، جبکہ پست کار مداخل ایک ہے۔ عام طور تینوں مداخل بلند (غیر فعال) رکھے جائیں گے۔ پلٹ کار بلند حال کرنے کی خاطر $\overline{S}_a$ یا $\overline{S}_b$ یا دونوں کو ایک لمحہ کے لئے پست

---
[۳۸] race condition



$\overline{S}$	$\overline{R}$	Q	حال
1	1	1	بلند
0	1	1	بلند رہے گا
1	1	1	برقرار
0	1	1	بلند رہے گا
1	0	0	پست
1	0	0	پست رہے گا
1	1	0	برقرار
1	0	0	پست رہے گا
1	1	0	برقرار
1	1	0	برقرار
0	1	1	بلند
1	1	1	برقرار

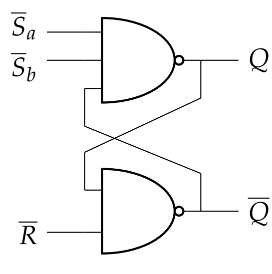
شکل ۶.۱۰: ایس آر پلٹ کار کے استعمال کا جدول اور ترسیمات۔

(فعال) کیا جائے گا، جبکہ پلٹ کار پست حال کرنے کی خاطر $\overline{R}$ ایک لمحے کے لئے فعال کیا جائے گا۔ حال دوڑ سے بچنے کے لئے ضروری ہے کہ $\overline{R}$ کے ساتھ باقی دو مداخل میں سے کوئی ایک (یا دونوں) اکٹھے فعال نہ کیا جائے۔

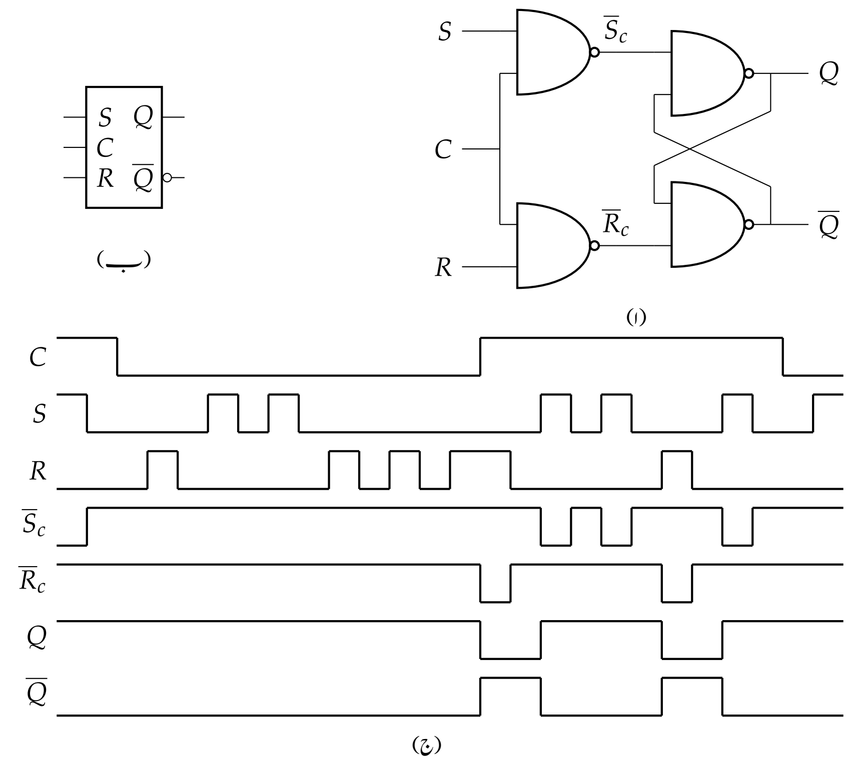
۶.۶ قابل مجاز و معذور پلٹ کار

شکل ۶.۱۰ کی ترسیمات سے واضح ہے، مداخل تبدیل کرتے ہی پلٹ کار نیا حال اختیار کرتا ہے۔ اس حصے میں ایسی پلٹ کار پر غور کیا جائے گا جس کے مداخل کو پلٹ کار کے حال پر اثر انداز ہونے سے روکا جا سکتا ہو۔ شکل ۶.۱۲ الف پر غور کریں جہاں دو متمم ضرب گیٹ کے اضافے سے قابل قابو پلٹ کار حاصل کیا گیا، جس کے (بلند فعال)

$\overline{S}_a$	$\overline{S}_b$	$\overline{R}$	Q_{n+1}	$\overline{Q}_{n+1}$
0	0	0	?	?
0	0	1	1	0
0	1	0	?	?
0	1	1	1	0
1	0	0	?	?
1	0	1	1	0
1	1	0	0	1
1	1	1	Q_n	$\overline{Q}_n$



شکل ۶.۱۱: زیادہ مداخل ایس آر پلٹ کار



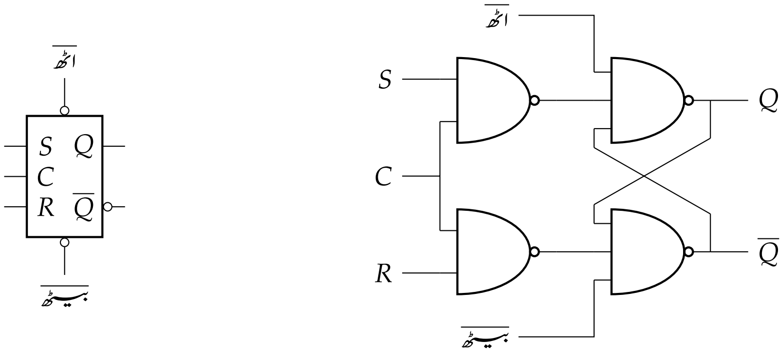
شکل ٦.١٢: مجاز و معذور بلند فعال مداخل ایس آر پلٹ کار

مداخل S اور R ہیں، جنہیں عام طور غیر فعال (پست) رکھا جاتا ہے۔ پلٹ کار کی علامت شکل-ب بھی پیش ہے۔

اضافی گیٹ کے مخارج کو $\overline{S}_c$ اور $\overline{R}_c$ کہا گیا، جبکہ گیٹوں کو قابو کار اشارہ C فراہم کیا گیا۔ مجاز و معذور بنانے والا قابو کار اشارہ C پست (معذور) کرنے سے S اور R مداخل معذور ہوتے ہیں، $\overline{S}_c$ اور $\overline{R}_c$ بلند رہتے ہیں، اور پلٹ کار اپنا حال برقرار رکھتی ہے۔ قابو کار اشارہ بلند (مجاز) کرنے سے پلٹ کار کے مداخل S اور R مجاز ہو کر پلٹ کار کے حال پر اثر انداز ہوتے ہیں۔

شکل-ج میں مجاز و معذور قابو کار اشارہ C کی کارکردگی واضح کی گئی۔ جب تک یہ اشارہ پست (معذور) رہے، $\overline{S}_c$ اور $\overline{R}_c$ بلند ہیں۔ اشارہ C بلند کرنے کے بعد S اور R پلٹ کار کا حال تبدیل کرنے کے قابل ہیں۔ یہ پلٹ کار **مجاز و معذور بلند فعال مداخل ایس آر پلٹ کار** کہلاتا ہے۔

بعض اوقات، پلٹ کار کے عمومی مداخل استعمال کیے بغیر، ہم پلٹ کار کا حال خود تعین کرنا چاہتے ہیں۔ عموماً، پلٹ کار کا ابتدائی حال منتخب کرنے کے لئے ایسا کرنا درکار ہوگا۔ شکل ٦.١٣ میں دو مزید مداخل، $\overline{\text{اٹھ}}$ اور $\overline{\text{بیٹھ}}$،



شکل ۶.۱۳: اٹھ بیٹھ صلاحیت پلٹ کار

مہیا کئے گئے ہیں، جنہیں پست کر کے پلٹ کار کو بالترتیب زبردستی بلند اور پست کیا جا سکتا ہے۔

۶.۷ آقا غلام پلٹ کار

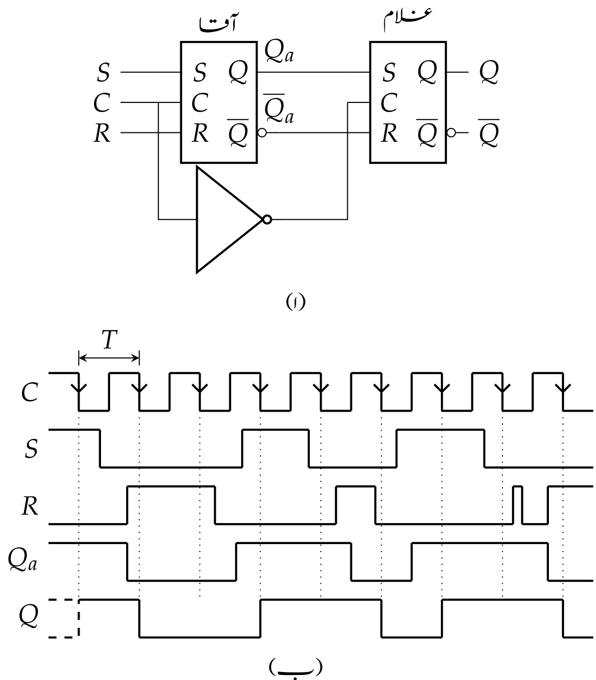
گزشتہ حصے میں مجاز و معذور بلند فعال مداخل ایس آر پلٹ کار پر غور کیا گیا۔ شکل ۶.۱۴ میں ایسے دو پلٹ کار (پہلا آقا اور دوسرا غلام کہلاتا ہے) اور ایک نفی گیٹ سے **آقا غلام پلٹ کار**[۳۹] تشکیل دیا گیا۔ آقا کے مخارج، غلام کے مداخل ہیں۔ مزید C پر اشارہ **ساعت**[۴۰] مہیا کیا گیا ہے۔

جتنی دیر ساعت (C) بلند رہے، آقا کے مداخل مجاز، لہٰذا مخارج Q_a اور $\overline{Q}_a$ قابل تبدیل ہوں گے۔ غلام کو C کا متمم $\overline{C}$ مجاز و معذور بناتا ہے، لہٰذا جتنی دیر آقا مجاز ہو، غلام معذور (لہٰذا برقرار حال) ہو گا۔

جس لمحہ ساعت پست ہو، آقا اسی لمحہ کے حال میں رہ جائے گا، اور غلام مجاز ہو کر فوراً آقا کے مخارج کے مطابق حال اختیار کر لے گا۔ یوں، غلام ہر وقت آقا کی پیروی کرتا ہے۔ جتنی دیر ساعت پست رہے، Q_a اور $\overline{Q}_a$ تبدیل نہیں ہو سکتے، لہٰذا غلام حال تبدیل نہیں کرے گا۔

آپ دیکھ سکتے ہیں، غلام پلٹ کار صرف اور صرف ساعت (C) کے کنارہ اترائی پر حال تبدیل کرتا ہے، جس کی وجہ سے یہ **کنارہ اترائی پر عمل کار آقا غلام پلٹ کار**[۴۱] کہلاتا ہے۔ ساعت کے کنارہ اترائی پر تیر کا نشان اس حقیقت کو ظاہر کرتا ہے۔ ساعت کا کنارہ (اترائی)، پلٹ کار کی **لبلبی**[۴۲] ہے، جسے پست کرنے سے، پلٹ کار داخلی اشارے کا عکس لیتا ہے۔

[۳۹] master slave flip flop
[۴۰] clock
[۴۱] negative edge triggered Master Slave flip flop
[۴۲] trigger



شکل ۶.۱۴: ساعت کے کنارہ اترائی پر عمل کار آقا غلام پلٹ کار

جدول ۶.۲: کنارہ اترائی پر عمل کار آقا غلام پلٹ کار

C	S	R	Q_{n+1}	$\overline{Q}_{n+1}$
0	x	x	Q_n	$\overline{Q}_n$
1	x	x	Q_n	$\overline{Q}_n$
$\downarrow$	0	0	Q_n	$\overline{Q}_n$
$\downarrow$	0	1	0	1
$\downarrow$	1	0	1	0
$\downarrow$	1	1	?	?

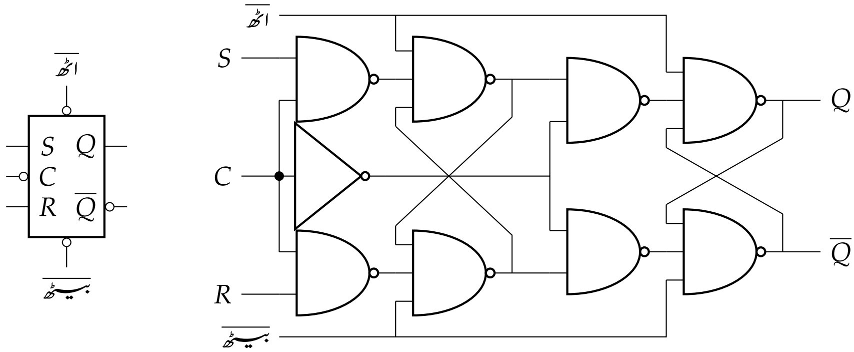
پلٹ کار کو پہلی مرتبہ برقی طاقت فراہم کرنے سے، حال دوڑ پیدا ہو گی جس کے اختتام پر پلٹ کار بلند یا پست ہو گا۔ شکل میں پہلے کنارہ اترائی سے قبل Q مبہم دکھایا گیا ہے (سایہ دار حصہ)، جو اس حقیقت کو ظاہر کرتا ہے۔ ساعت کے اول کنارہ اترائی پر فعال S کے تحت آقا غلام پلٹ کار یقینی طور پر بلند حال اختیار کرتا ہے۔ (شکل ۶.۱۳ میں اٹھ بیٹھ قابو اشارات اس طرح مبہم صورت سے نمٹنے کے لئے ہیں۔)

شکل ۶.۱۴ میں ساعت کے آٹھویں کنارہ اترائی کے بعد پست ساعت کے دوران R بلند ہو کر واپس پست ہوتا ہے، جو آقا غلام پلٹ کار کو پست کرنے میں ہر گز کامیاب نہیں ہو گا۔ پلٹ کار کو بلند یا پست کرنے کے لئے، ضروری ہے کہ داخلی اشارات S اور R کسی مخصوص دورانیے سے زیادہ وقت کے لئے فعال ہوں۔ داخلی اشارہ اس صورت کردار ادا کرتا ہے، جب بلند ساعت اس کا عکس محفوظ کر لے۔ ساعت کے پست دورانیہ t_L (شکل ۶.۵) سے زیادہ دیر فعال رہنے والا مداخل اشارہ، ساعت کے کنارہ اترائی کے فوراً بعد فعال ہونے کی صورت میں بھی ساعت کی اگلی بلندی تک فعال رہے گا، لہٰذا آقا غلام پلٹ کار اس پر ضرور عمل کرے گا۔ البتہ، ایسی صورت میں عین ممکن ہے، کنارہ اترائی پر کوئی مداخل فعال نہ ہو (شکل ۶.۱۴ میں چھٹا کنارہ اترائی دیکھیں)، لہٰذا، عین کنارہ اترائی کے لمحہ موجود مداخل کا حال محفوظ کرنے کے لئے ضروری ہے کہ مداخل کم از کم ایک دوری عرصہ (T) دورانیے کے لئے فعال رہے (تسلی کر لیں، اگر یقین نہیں)۔ حصہ ۶.۹ میں ایسی پلٹ کار پیش کیا جائے گا، جس کے مداخل پر کم از کم ایک دوری عرصہ فعال رہنے کی شرط مسلط نہیں۔

جدول ۶.۲ میں کنارہ اترائی پر عمل کار آقا غلام پلٹ کار پیش ہے، جہاں ساعت کے کنارہ اترائی پر پلٹ کار (نیا) حال اختیار کرتا ہے۔ بلند اور پست ساعت کے دوران، پلٹ کار حال برقرار رکھتا ہے۔

بعض اوقات، پلٹ کار کا حال، کنارہ ساعت کا انتظار کیے بغیر، تبدیل کرنا درکار ہو گا۔ شکل ۶.۱۵ میں (درکار مقامات پر تین مداخل متمم ضرب گیٹ استعمال کرتے ہوئے) آقا غلام پلٹ کار میں پست فعال مداخل $\overline{\text{اٹھ}}$ اور $\overline{\text{بیٹھ}}$ کا اضافہ کر کے ایسی پلٹ کار تشکیل دیا گیا ہے۔ (برقی تاروں کی تعداد بہت بڑھ گئی ہے۔ بہتر ہو گا صفحہ ۱۳۱ پر شکل ۶.۳ ایک مرتبہ دوبارہ دیکھیں۔) عام طور انہیں غیر فعال رکھا جائے گا، البتہ، جب ضرورت پیش آئے، انہیں استعمال کرتے ہوئے، ساعت کے کنارہ اترائی کا انتظار کیے بغیر، پلٹ کار کا حال مرضی کے مطابق منتخب کیا جا سکے گا۔

شکل میں **منفی کنارے پر عمل کرنے، اور اٹھ بیٹھ صلاحیت کے، آقا غلام پلٹے کار** کی علامت بھی پیش ہے، جہاں



شکل ۶.۱۵: اٹھ بیٹھ صلاحیت رکھنے اور منفی کنارے پر عمل کرنے والا آقا غلام پلٹ کار

ساعت (C) پر گول دائرہ **منفی**، اور تکون **کنارے** کو ظاہر کرتا ہے۔ یوں اس سے مراد "ساعت کے منفی کنارے پر عمل پیدا ہونا" لیا جائے گا۔

۶.۸ ڈی پلٹ کار

۶.۸.۱ آقا غلام پلٹ کار سے حاصل کردہ ڈی پلٹ کار

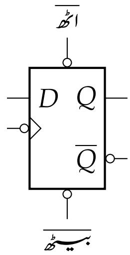
آقا غلام پلٹ کار کے ساتھ نفی گیٹ منسلک کر کے **ڈی پلٹ کار**[۴۳] حاصل کیا جاتا ہے، جو شکل ۶.۱۶ میں پیش ہے۔ پلٹ کار کی علامت میں C واضح طور نہیں لکھا گیا، چونکہ علامت پر داخلی جانب گول دائرہ اور تکون ساعت کے منفی کنارہ کو ظاہر کرتے ہیں (مثبت کنارہ، صرف تکون سے ظاہر کیا جاتا ہے)۔ مداخل D پر کم از کم ایک دوری عرصہ (T) بلند یا پست رہنے کی شرط مسلط ہے۔

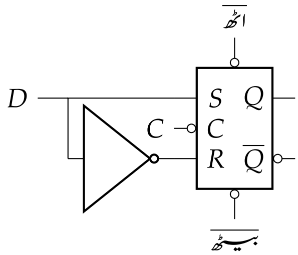
پلٹ کار کی کارکردگی کا جدول بھی شکل ۶.۱۶ میں پیش ہے، جس کے تحت، بلند یا پست ساعت کے دوران، مداخل D ، پلٹ کار کے حال پر اثر انداز نہیں ہوگا۔ پلٹ کار (صرف) ساعت کے کنارہ اترائی پر D دیکھ کر (نیا) حال اختیار کرتا ہے۔ یوں اس کا نام **کنارہ اترائی پر عمل کار ڈی پلٹ کار**[۴۴] ہوگا۔ ساعت کو نفی گیٹ سے گزار کر **کنارہ چڑھائی پر عمل کار ڈی پلٹ کار**[۴۵] حاصل ہوگا۔

شکل ۶.۱۷ میں ڈی پلٹ کار کی کارکردگی کی مثال پیش ہے۔ آقا غلام پلٹ کار کے R مداخل سے چھٹکارا حاصل کرنے کی بدولت، ڈی پلٹ کار کسی صورت "حال دوڑ" سے دوچار نہیں ہوگا۔ ساعت کے اول کنارہ اترائی سے قبل، پلٹ کار کا حال مبہم ہے، جس کو سیاہ کر کے (بلند و پست دونوں) دکھایا گیا ہے۔

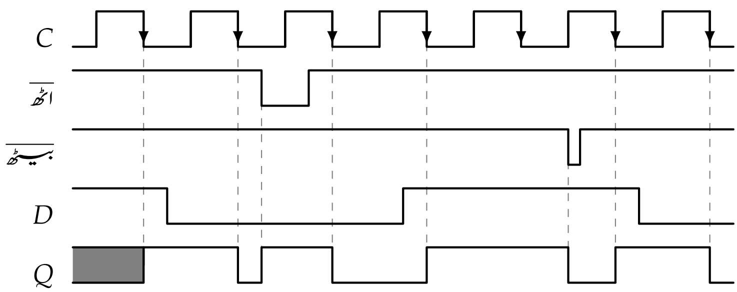
[۴۳] D FF
[۴۴] negative edge triggered, D flip flop
[۴۵] positive edge triggered, D flip flop

C	D	Q_{n+1}
0	x	Q_n
1	x	Q_n
$\downarrow$	0	0
$\downarrow$	1	1

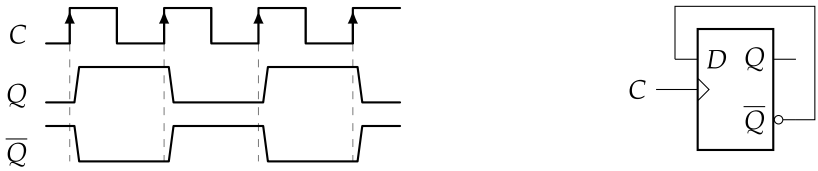




شکل ۶.۱۶: آقا غلام سے حاصل ڈی پلٹ کار



شکل ۶.۱۷: کنارہ اترائی پر عمل کار ڈی پلٹ کار کی کارکردگی کی مثال



(ب) (ا)

شکل ۶.۱۸: تعدد دو سے تقسیم کیا گیا

شکل ۶.۱۸ میں کنارہ چڑھائی پر عمل کار ڈی پلٹ کار کا $\overline{Q}$ مداخل D سے جوڑ کر، پلٹ کار کو ساعت (C) فراہم کی گئی۔ شکل-ب میں ساعت کے اول کنارہ چڑھائی پر توجہ دیں۔ یہاں $\overline{Q} = 1$ ہے، لہٰذا D بلند ہو گا اور ساعت کے کنارہ چڑھائی پر پلٹ کار اس کا عکس محفوظ کرتے ہوئے بلند حال اختیار کرتی ہے۔ پلٹ کار کا مخارج $\overline{Q}$ کچھ دیر بعد نیا حال $\overline{Q} = 0$ اختیار کرے گا، لیکن اس وقت تک ساعت کا کنارہ گزر چکا ہو گا۔ ساعت کے اگلے کنارہ چڑھائی پر $\overline{Q} = 0$ دیکھ کر پلٹ کار پست ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ Q (یا $\overline{Q}$) کا تعدد ساعت کے تعدد کا نصف ہے۔

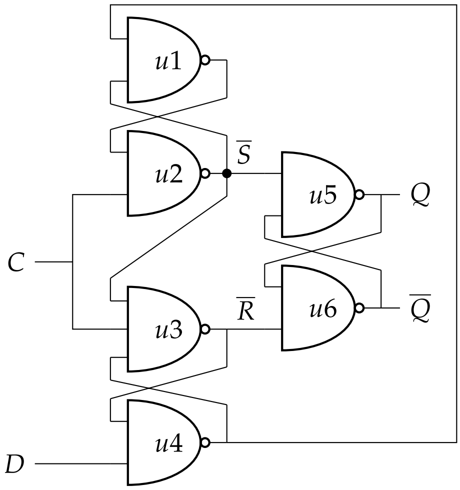
کنارہ اترائی پر عمل کار پلٹ کار کے استعمال میں اس بات کو یقینی بنانا ضروری ہے کہ مداخل، ساعت کے کنارہ اترائی کے دوران، تبدیل نہ ہو۔ حقیقتاً، کنارہ اترائی کے آغاز سے چند لمحات قبل سے لے کر، کنارہ گزرنے کے چند لمحات بعد تک، مداخل D کا برقرار ایک حال میں رہنا ضروری ہے۔ ان لمحات کو بالترتیب **دورانیہ تیاری**[۴۶] اور **دورانیہ ٹھہراؤ**[۴۷] کہتے ہیں۔ دورانیہ تیاری اور دورانیہ ٹھہراؤ کی معلومات پلٹ کار کے تخلیق کار مہیا کرتے ہیں۔ کنارہ چڑھائی پر عمل کار پلٹ کار کی صورت میں مداخل کو دوران چڑھائی تبدیل نہیں ہونے دیا جاتا۔

۶.۹ ڈی پلٹ کار

گزشتہ حصے میں آقا غلام پلٹ کار سے ڈی پلٹ کار حاصل کیا گیا، جس کے مداخل پر، کم از کم ایک دوری عرصہ دورانیہ کے لئے حال برقرار رکھنے کی شرط مسلط ہے۔ شکل ۶.۱۹ میں نسبتاً بہتر، (کنارہ چڑھائی پر عمل کار) ڈی پلٹ کار پیش ہے، جو **واقعی**، ساعت کے کنارہ چڑھائی پر (نیا) حال اختیار کرتا ہے، اور جو **وسیع پیمانہ مخلوط ادوار**[۴۸] میں باکثرت مستعمل ہے۔

اس پلٹ کار کی بناوٹ میں تین ایس آر پلٹ کار مستعمل ہیں۔ گیٹ $u1$ ، $u2$ ایک ایس آر، گیٹ $u3$ ، $u4$ دوسرا، اور گیٹ $u5$ ، $u6$ تیسرا ایس آر پلٹ کار تشکیل دیتے ہیں۔ تیسرا ایس آر پلٹ کار خارجی ہے جو $\overline{S}$ اور $\overline{R}$ کے مطابق مخارج Q اور $\overline{Q}$ فراہم کرتا ہے۔ برقرار حال کے لئے $\overline{S} = 1$ اور $\overline{R} = 1$ درکار ہے، $\overline{S} = 0$ اور $\overline{R} = 1$ بلند حال، جبکہ $\overline{S} = 1$ اور $\overline{R} = 0$ پست حال دے گا، اور $\overline{S} = 0$ اور $\overline{R} = 0$ ممنوعہ ہے۔ مداخل $\overline{S}$ اور $\overline{R}$ باقی دو ایس آر پلٹ کار پر منحصر ہیں، جنہیں بیرونی اشارات D (مواد) اور C (ساعت)

[۴۶] setup time
[۴۷] hold time
[۴۸] very large scale integration (VLSI)

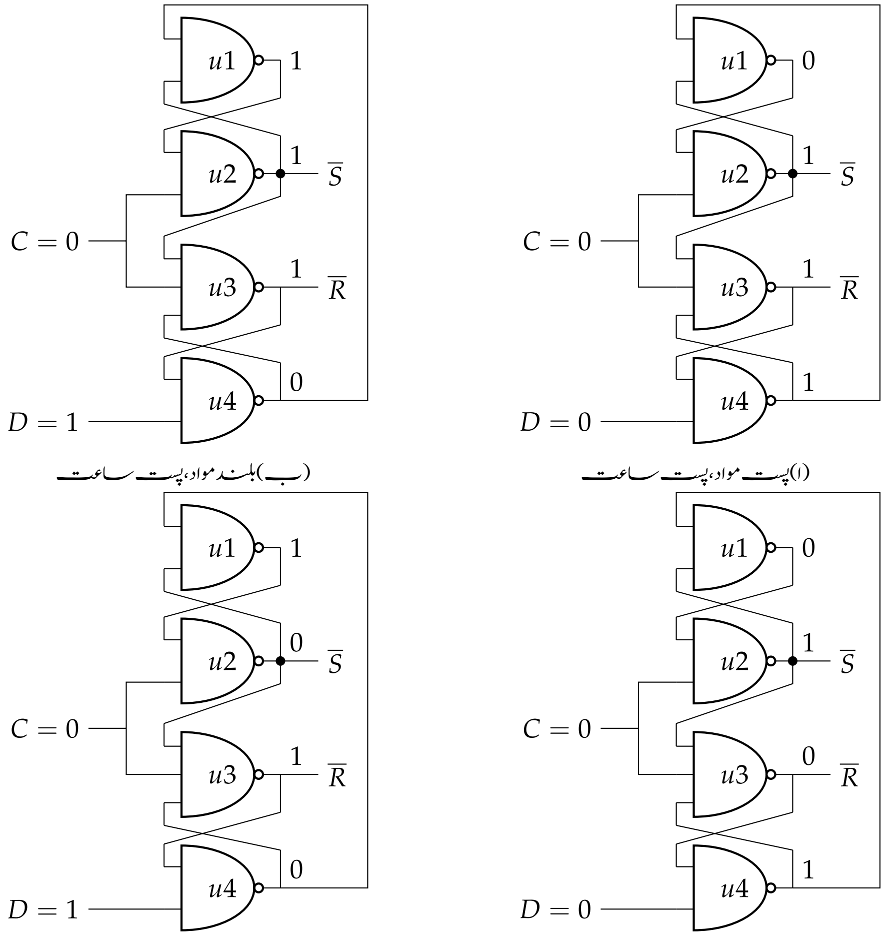


شکل ۶.۱۹: کنارہ چڑھائی پر عمل کار ڈی پلٹ کار

تعین کرتے ہے۔

شکل ۶.۲۰ میں دور کی کارکردگی کی وضاحت کی گئی ہے، جہاں صرف گیٹ $u1$ تا $u4$ کو دکھاتے ہوئے تمام (چار) ممکنہ صورتیں پیش کی گئی ہیں۔ گیٹ $u2$ اور $u3$ کے مخارج $\overline{S}$ اور $\overline{R}$ شکل ۶.۱۹ کے گیٹ $u5$ اور $u6$ کے ساتھ جڑے ہیں، جو ڈی پلٹ کار کے مخارج Q اور $\overline{Q}$ مہیا کرتے ہیں۔ شکل ۶.۲۰-الف اور ب میں پست ساعت $(C = 0)$ کی صورت میں $D = 0$ اور $D = 1$ کے لئے گیٹوں کے ثنائی مخارج پیش ہیں۔ دونوں اشکال میں $C = 0$ کی بدولت $u2$ اور $u3$ کے مخارج، D کی قیمت سے قطع نظر، بلند ہوں گے، لہٰذا $\overline{S} = 1$ اور $\overline{R} = 1$ ہوگا، جس کے تحت $u5$ ، $u6$ (پر مبنی تیسرا) پلٹ کار برقرار حال ہوگا۔ جب $D = 0$ ہو، $u4$ کا مخارج 1 ہوگا، جو ($u2$ کے بلند مخارج کے ساتھ مل کر) $u1$ کا مخارج 0 کرے گا۔ جب $D = 1$ ہو، (چونکہ $u3$ بلند ہے لہٰذا) $u4$ پست (0) ہوگا، جس کی بنا پر $u1$ بلند (1) ہوگا۔ ساعت 0 کی صورت میں، جو D سے قطع نظر ڈی پلٹ کار برقرار حال رکھتا ہے، یہی دو ممکنات پائے جاتے ہیں۔

کنارہ چڑھائی سے قبل ایک غیر مبہم وقت کے لئے، جو دورانیہ تیاری کہلاتا ہے، مداخل D کی قیمت لازماً مستقل رکھنی ہو گی۔ دورانیہ تیاری گیٹ $u4$ اور $u1$ کے دورانیہ رد عمل کا مجموعہ ہے، چونکہ D میں تبدیلی ان گیٹوں کے مخارج پر اثر انداز ہوتی ہے۔ اب فرض کریں دورانیہ تیاری میں D تبدیل نہیں ہوتا، جبکہ ساعت (پست حال سے) بلند (1) ہوتا ہے۔ یہ صورت شکل ۶.۲۰-ج اور د میں پیش ہے۔ اگر $C = 1$ ہونے کے لمحے پر $D = 0$ ہو، تب $\overline{S} = 1$ رہتا ہے، جبکہ $\overline{R}$ تبدیل ہو کر 0 ہو جائے گا (شکل-ج)۔ یوں (شکل ۶.۱۹ میں) ڈی پلٹ کار کا مخارج Q پست (0) حال اختیار کرے گا۔ اب اگر $C = 1$ (یعنی بلند حال) کے دوران، D کی قیمت تبدیل ہو، ($\overline{R}$ کی بدولت جو 0 ہے) $u4$ بلند (1) رہے گا۔ گیٹ $u4$ صرف اس وقت حال تبدیل کر سکتا ہے جب ساعت دوبارہ پست (0) ہو؛ لیکن اس وقت $\overline{S}$ اور $\overline{R}$ دونوں 1 ہوں گے، اور ڈی پلٹ کار برقرار حال ہو گا۔ البتہ، ساعت کے کنارہ چڑھائی کے بعد ایک غیر مبہم دورانیہ کے لئے، جو دورانیہ ٹھیراؤ کہلاتا ہے، D



(ا) پست مواد، پست ساعت

(ب) بلند مواد، پست ساعت

(ج) پست مواد، بلند ساعت

(د) بلند مواد، بلند ساعت

شکل ۶.۲۰: کنارہ چڑھائی پر عمل کار ڈی پلٹ کار کی کارکردگی۔

کی قیمت تبدیل نہیں ہونی چاہیے۔ دورانیہ ٹھیراؤ گیٹ $u3$ کے دورانیہ رد عمل کے برابر ہے، چونکہ، D کی قیمت سے قطع نظر، $u4$ کا مخارج 1 پر رکھنے کے لئے $\overline{R}$ کا 0 ہونا لازمی ہے۔

اگر $C = 1$ ہونے کے لمحے پر $D = 1$ ہو، تب $\overline{S}$ تبدیل ہو کر 0 ہو گا، جبکہ R کی قیمت 1 رہے گی (شکل-د)، جس کی بنا پر (شکل ۱۹.۶ میں) ڈی پلٹ کار کا مخارج Q بلند (1) ہو گا۔ بلند ساعت $(C = 1)$ کے دوران، D کی تبدیلی $\overline{S}$ اور $\overline{R}$ پر اثر انداز نہیں ہو گی، چونکہ $\overline{S}$ پست (0) ہے جو $u1$ کو 1 رکھے گا۔ جب C واپس 0 ہو، $\overline{S}$ اور $\overline{R}$ دونوں 1 حال اختیار کر کے Q برقرار رکھیں گے۔

خلاصہ کچھ یوں ہے۔ ساعت کے کنارہ چڑھائی پر D کی قیمت Q کو منتقل ہوتی ہے۔ بلند ساعت کے دوران D میں تبدیلیاں Q پر اثر انداز نہیں ہوتیں۔ مزید، ساعت کا کنارہ اترائی اور پست ساعت، Q پر اثر انداز نہیں ہوتے۔

اشارہ $D = 0$ گیٹ $u4$ اور $u1$ سے گزر کر $u1$ کو پست کرتا ہے، جو $u2$ کو بلند کیے رکھتا ہے۔ یوں ساعت کے کنارہ چڑھائی سے ($u4$ اور $u1$ کے مجموعی دورانیہ رد عمل کے برابر وقفہ) دورانیہ تیاری کے برابر وقت قبل، ضروری ہے کہ D کی قیمت مستقل صورت اختیار کر لے۔ اسی طرح $\overline{R} = 0$ جو (D کی قیمت سے قطع نظر) $u4$ کو بلند کیے رکھتا ہے، کے لئے ضروری ہے کہ D کی قیمت کنارہ چڑھائی کے بعد دورانیہ ٹھیراؤ (جو $u3$ کے دورانیہ رد عمل کے برابر ہے) کے لئے تبدیل نہ ہو۔

آقا غلام پلٹ کار کی طرح، کنارہ پر عمل کار پلٹ کار، ترتیبی ادوار میں باز رسی کے مسائل سے چھٹکارا دیتا ہے۔ اس قسم کا ڈی پلٹ کار استعمال کرتے وقت دورانیہ تیاری اور دورانیہ ٹھیراؤ پر توجہ دینی ہو گی۔

ترتیبی ادوار میں مختلف پلٹ کار استعمال کرتے وقت، اس بات کو یقینی بنائیں کہ تمام پلٹ کار بیک وقت (یعنی تمام پلٹ کار ساعت کے کنارہ اترائی پر یا تمام پلٹ کار کنارہ چڑھائی پر) حال تبدیل کرتے ہوں۔ وہ پلٹ کار جو منتخب کنارہ کے مخالف کنارے پر حال تبدیل کرتے ہوں، کی ساعت نفی گیٹ سے گزار کر، منتخب کنارے کے ہم عصر بنایا جا سکتا ہے۔

مشق ۶.۳: انٹرنیٹ سے ڈی پلٹ کار کے معلوماتی صفحات اتاریں۔ (ا) اس مخلوط دور میں کتنے ڈی پلٹ کار ہیں؟ (ب) یہ پلٹ کار ساعت کے کس کنارے پر عمل کار ہے؟

۶.۱۰ جے کے پلٹ کار

ڈی پلٹ کار استعمال کر کے مختلف اقسام کے پلٹ کار تشکیل دیے جا سکتے ہیں، جن میں **جے کے پلٹ کار**[۴۹] اور **ٹی پلٹ کار**[۵۰] بہت مقبول ہیں۔ ساعت کے کنارہ چڑھائی پر عمل کار جے کے پلٹ کار کی بناوٹ شکل ۲۱.۶

---

[۴۹] JK FF
[۵۰] T FF

مسیں، اور کارکردگی جدول ۶.۳-ب مسیں پیش ہے۔ کنارہ اترائی پر عمل کار جے کے پلٹ کار بھی پایا جاتا ہے۔
شکل مسیں مداخل D ذیل ہوگا، جہاں پلٹ کار کے موجودہ مخارج Q_n اور $\overline{Q}_n$ لکھے گئے ہیں۔

$$D = J\overline{Q}_n + \overline{K}Q_n \tag{۶.۶}$$

ساعت کے اگلے کنارہ چڑھائی پر ڈی پلٹ کار اس مداخل کے تحت حال اختیار کرتا ہے، لہٰذا جے کے پلٹ کار کی کارکردگی کی مساوات درج ذیل ہو گی، جہاں موجودہ مخارج Q_n اور اگلا Q_{n+1} ہے۔

$$Q_{n+1} = J\overline{Q}_n + \overline{K}Q_n \tag{۶.۷}$$

مساوات ۶.۶ کو جدول ۶.۳-الف مسیں پیش کیا گیا ہے۔ جدول کی پہلی صف مسیں پلٹ کار کا موجودہ حال $Q_n = 0$، اور مداخل $J = 0$ اور $K = 0$ ہیں، لہٰذا مساوات ۶.۶ کے تحت $D = 0$ ہوگا۔ یوں ساعت کے اگلے کنارہ چڑھائی پر پلٹ کار پست حال اختیار کرتے ہوئے موجودہ حال برقرار رکھتا ہے۔ جدول کی دوسری صف مسیں موجودہ حال $Q_n = 1$ جبکہ مداخل $J = 0$ اور $K = 0$ ہیں، جن سے $D = 1$ حاصل ہوگا، لہٰذا ساعت کے اگلے کنارہ چڑھائی پر پلٹ کار بلند حال اختیار کرتے ہوئے موجودہ حال برقرار رکھتا ہے۔

آپ نے دیکھا کہ $J = 0$، $K = 0$ کی صورت مسیں پلٹ کار برقرار حال $(Q_{n+1} = Q_n)$ ہوگا۔ جدول کے اضافی خانے مسیں سے معلومات درج کی گئی ہے۔ تسلی کر لیں (اگلے مشق مسیں ایسا کرنے کو کہا گیا ہے) کہ جدول مسیں D اور Q_{n+1} کی تمام معلومات مساوات ۶.۶ کے عین مطابق ہیں۔ اس جدول کی بہتر صورت جدول-ب ہے، جہاں غیر ضروری معلومات روپوشس کی گئی، اور کنارہ چڑھائی کی معلومات فراہم کی گئی۔

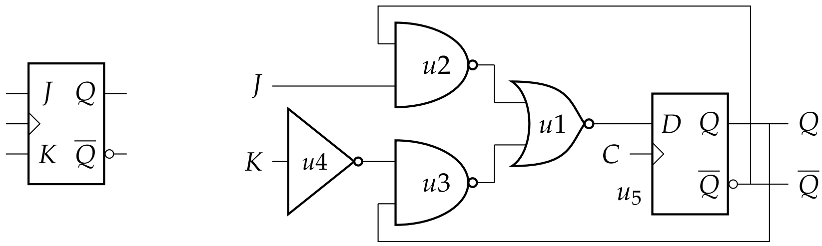
جے کے پلٹ کار کی کارکردگی درج ذیل ہے۔

(۶.۸)

JK	Q_{n+1}	
00	Q_n	برقرار حال
01	0	پست حال
10	1	بلند حال
11	$\overline{Q}_n$	متمم حال

اس مساوات کی پہلی تین صورتوں مسیں، J اور K بالترتیب S اور R مداخل کا کردار ادا کرتے ہیں، یعنی فعال J، پلٹ کار کو (ساعت کے عمل کار کنارہ پر) بلند حال، اور فعال K اسے پست حال کرتا ہے۔ البتہ یہاں دونوں مداخل فعال ہونے کی اجازت ہے، جو حال متمم کرتے ہیں۔ دونوں مداخل غیر فعال ہونے کی صورت مسیں پلٹ کار موجودہ حال برقرار رکھتا ہے۔

مشق ۶.۴: جدول ۶.۳-الف اور ب کی تصدیق کریں۔



شکل ۶.۲۱: جے کے پلٹ کار کی بناوٹ اور علامت۔

جدول ۶.۳: کنارہ چڑھائی پر عمل کار جے کے پلٹ کار

(ا)

J	K	Q_n	D	Q_{n+1}
0	0	0	0	Q_n
0	0	1	1	
0	1	0	0	0
0	1	1	0	
1	0	0	1	1
1	0	1	1	
1	1	0	1	$\overline{Q}_n$
1	1	1	0	

(ب)

C	J	K	Q_{n+1}	
$\uparrow$	0	0	Q_n	برقرار حال
$\uparrow$	0	1	0	پست حال
$\uparrow$	1	0	1	بلند حال
$\uparrow$	1	1	$\overline{Q}_n$	متمم حال

C	T	Q_{n+1}
0	x	Q_n
1	x	Q_n
$\uparrow$	0	Q_n
$\uparrow$	1	$\overline{Q}_n$

شکل ۶.۲۲: ٹی پلٹ کار کی بناوٹ اور علامت

۶.۱۰.۱ ٹی پلٹ کار

جے کے پلٹ کار کے دونوں مداخل آپس میں جوڑنے سے **ٹی پلٹ کار**[51] حاصل ہو گا، جو شکل ۶.۲۲ میں بمع علامت اور جدول پیش ہے۔

پست مداخل $(T = 0)$ کی صورت میں ٹی پلٹ کار برقرار حال رہے گا، جبکہ بلند مداخل $(T = 1)$ کی صورت میں ساعت کے کنارہ چڑھائی پر متمم حال اختیار کرے گی۔ یوں بلند T کی صورت میں بلند پلٹ کار اگلے کنارہ چڑھائی پر پست ہو گا، جبکہ پست پلٹ کار اگلے کنارہ چڑھائی پر بلند ہو گا۔

ٹی پلٹ کار کی مساوات، جے کے پلٹ کار کی مساوات ۶.۷ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= J\overline{Q}_n + \overline{K}Q_n \\ &= T\overline{Q}_n + \overline{T}Q_n \\ &= T \oplus Q_n \end{aligned} \qquad (۶.۹)$$

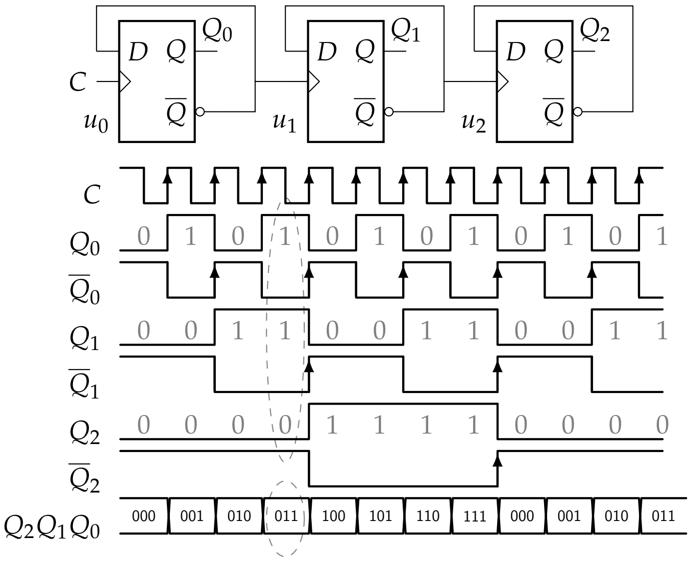
مساوات کے حصول میں J اور K دونوں کی جگہ T استعمال کیا گیا۔

مشق ۶.۵: ٹی پلٹ کار کے جدول کی تصدیق کریں۔

مشق ۶.۶: انٹرنیٹ سے $74xx$ اور $40xx$ سلسلہ میں جے کے اور ٹی پلٹ کار تلاش کریں۔

---

[51] TFF



شکل ۶.۲۳: تین ہندسی شنائی گنت کار

۶.۱۱ شنائی گنت کار

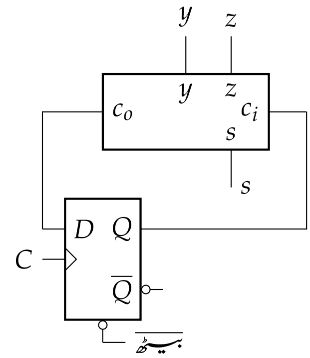
شکل ۶.۱۸ میں پیش دور تین مرتبہ استعمال کر کے شکل ۶.۲۳ حاصل ہو گا۔ بائیں جانب سے اول پلٹ کار (u_0) کا مخارج Q_0، دوم پلٹ کار کا مخارج Q_1 اور u_2 کا مخارج Q_2 پکارا گیا ہے۔

پلٹ کار u_0 ساعت (C) کا تعدد 2 سے تقسیم کرتا ہے۔ اس کے دونوں مخارج شکل میں پیش ہیں، جو ساعت کے کنارہ چڑھائی پر حال تبدیل کرتے ہیں، اور جن کا تعدد C کے تعدد کا نصف ہے۔ اشارہ $\overline{Q}_0$ پلٹ کار u_1 کو بطور ساعت مہیا کیا گیا ہے، جس کو u_1 دو سے تقسیم کرتا ہے۔ یوں Q_1 کا تعدد C کے تعدد سے 4 گنا کم ہو گا۔ پلٹ کار u_1 کا مخارج $\overline{Q}_1$، تیسرے پلٹ کار کی ساعت ہے جو اسے 2 سے تقسیم کرے گا، لہٰذا Q_2 کا تعدد C کے تعدد سے 8 گنا کم ہو گا۔

پلٹ کار کے مخارج، شنائی عدد کے تین ہندسے تصور کر کے، $Q_2Q_1Q_0$ روپ میں لکھیں۔ شکل ۶.۲۳ کے آخری صف میں یہ عدد پیش ہے، جہاں تینوں پلٹ کار ابتدائی طور پست تصور کیے گئے۔ نقطہ دار گھیرے میں $Q_0 = 1$ (بلند)، $Q_1 = 1$ (بلند)، اور $Q_2 = 0$ (پست) ہیں جنہیں $Q_2Q_1Q_0 = 011$ لکھا پیش کیا گیا ہے، جو اعشاری تین کے برابر ہے۔ یہ دور ساعت کا کنارہ چڑھائی، (تین ہندسی شنائی عدد کے روپ میں) گنتا ہے، جس کی بنا پر اس کا نام **تین ہندسی، شنائی گنت کار**[۵۲] ہے۔

گنت کار صفر (000_2) تا سات (111_2) (یعنی آٹھ، 2^3، کنارے) گنتی کرنے کے بعد دوبارہ صفر (000_2)

[۵۲] three bit binary counter



شکل ۶.۲۴: سلسلہ وار شنائی جمع کار

سے شروع کرتا ہے۔ ساعت C کی بجائے گنت کار کو کوئی بھی عددی اشارہ گنتی کے لئے فراہم کیا جا سکتا ہے۔ گنت کار اشارے کے کنارہ چڑھائی کی گنتی کر کے نتیجہ مہیا کرے گا۔

ڈی پلٹ کار کی تعداد 4 کر کے، سولہ $(16 = 2^4)$ کنارے گننے کے قابل گنت کار بنایا جا سکتا ہے جو صفر (0000_2) تا پندرہ (1111_2) گنتی کرے گا۔ یوں n پلٹ کار پر مشتمل شنائی گنت کار 2^n کنارے گننے کے قابل ہو گا۔

۶.۱۲ سلسلہ وار شنائی جمع کار

شکل ۶.۲۴ میں مکمل جمع کار (u_1) اور ڈی پلٹ کار (u_2) کی مدد سے اصطلاحاً سلسلہ وار شنائی جمع کار[۵۳] تشکیل دیا گیا ہے (مکمل جمع کار کی ڈبہ علامت کو یوں بنایا گیا ہے کہ دور میں صفائی پیدا ہو)۔ مکمل جمع کار کو جمع کرنے والے دو شنائی اعداد x اور y سلسلہ وار فراہم کئے جاتے ہیں۔ کمتر رتبی بٹ سے شروع کر کے ساعت کے ہر کنارہ چڑھائی پر دونوں اعداد کے اگلے بٹ فراہم کئے جاتے ہیں۔ کسی بھی قدم پر ڈی پلٹ کار حاصل جمع (یعنی مکمل جمع کا خارجی حاصل) ذخیرہ کر کے اگلے قدم پر مکمل جمع کو بطور داخلی حاصل مہیا کرتا ہے۔ مجموعہ کے حصول سے قبل ڈی پلٹ کار زبردستی پست کیا جاتا ہے تاکہ پہلا داخلی حاصل صفر ہو۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ s پر سلسلہ وار دونوں شنائی اعداد کا مجموعہ خارج ہو گا۔

اس باب کے آخر میں آپ سے گزارش کی جائے گی کہ سلسلہ وار شنائی جمع کار استعمال کرتے ہوئے دو شنائی اعداد جمع کریں۔

[۵۳] binary serial counter

۶.۱۳ معاصر ترتیبی ادوار کا تجزیہ

ساعت پر عمل کار، پلٹ کار پر مبنی ادوار **معاصر ترتیبی ادوار**[۵۴] کہلاتے ہیں، جو پلٹ کار کے موجودہ حال اور مداخل دیکھ کر نئے حال اختیار کرتے ہیں۔ معاصر ترتیبی ادوار، عموماً، کنارہ ساعت کے ساتھ قدم ملا کر چلتے ہیں۔ ہم زیادہ تر کنارہ ساعت پر عمل کار ترتیبی ادوار پر تبصرہ کریں گے (جو متن سے واضح ہو گا)۔ معاصر ترتیبی ادوار میں ترکیبی حصے کا موجود ہونا لازم نہیں۔

کنارہ پر عمل کار معاصر ترتیبی ادوار کنارہ ساعت پر نیا حال اختیار کرتے ہیں۔ موجودہ حال نئے حال پر اثر انداز ہو سکتا ہے، لہٰذا نئے حال دریافت کرتے وقت موجودہ حال (کو بھی) مداخل تصور کریں۔ ترکیبی ادوار کی طرح ترتیبی ادوار کا جدول، جو **جدول حال**[۵۵] کہلاتا ہے، نئے حال دریافت کرنے میں مددگار ثابت ہو گا۔ نیا حال **مساوات حال**[۵۶] سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ دونوں طریقوں پر غور مثالوں کی مدد سے کرتے ہیں۔

۶.۱۳.۱ مساوات حال

دور کے موجودہ حال اور موجودہ مداخل کے روپ میں، مساوات حال دور کے اگلے حال بیان کرتی ہیں۔ کنارہ ساعت پر دور اگلے (نئے) حال اختیار کرتا ہے۔ یوں، ساعت کے n کنارے گزرنے کے بعد حال کو موجودہ حال تصور کرکے، اس کے لئے اشاریہ n استعمال کرتے ہوئے، مثلاً $Q(n)$، اگلا حال $Q(n+1)$ ہو گا۔

شکل ۶.۲۵ مثال بنا کر آگے بڑھتے ہیں، جہاں کنارہ چڑھائی پر عمل کار ڈی پلٹ کار مستعمل ہیں۔ موجودہ مداخل $x(n)$ جبکہ موجودہ مخارج $Q_0(n)$ اور $Q_1(n)$ ہیں۔ ان تینوں کو مداخل تصور کر کے D_0 کی ترکیبی مساوات لکھتے ہیں۔ ضرب گیٹ $u4$ کا مخارج xQ_0 اور $u5$ کا $x\overline{Q}_1$ ہے، جو متمم جمع $u3$ کے مداخل ہیں، لہٰذا (بالائی پلٹ کار کا مداخل) D_0 جو $u3$ کا مخارج ہے، ان کے منطقی جمع کا متمم ہو گا۔

$$D_0(n) = \overline{x(n)Q_0(n) + x(n)\overline{Q}_1(n)}$$

اس مساوات میں ہر جزو کے ساتھ (n) چسپاں کر کے واضح کیا گیا کہ یہ موجودہ متغیرات ہیں۔ ساعت کے کنارہ چڑھائی پر ی $u1$ اس مساوات کے مطابق اگلا حال اختیار کرے گا۔ یوں، نیا حال $Q_0(n+1)$ درج ذیل ہو گا۔

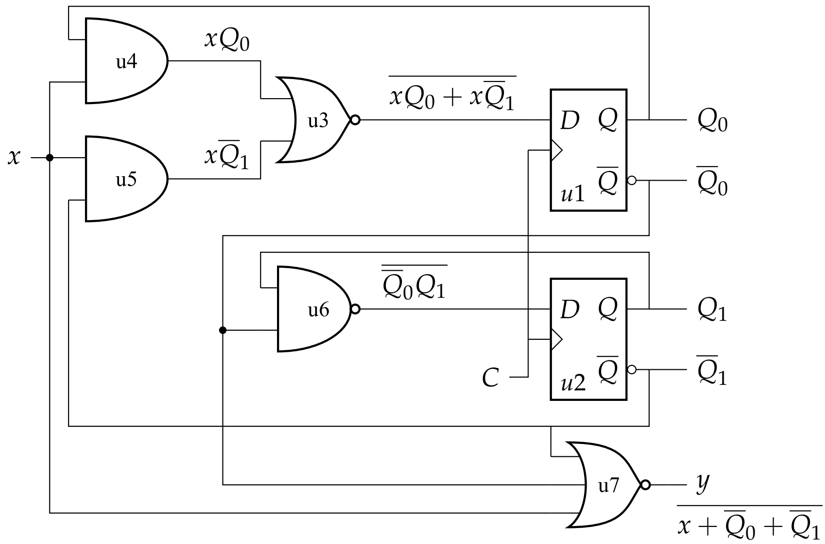
$$Q_0(n+1) = \overline{x(n)Q_0(n) + x(n)\overline{Q}_1(n)} \tag{۶.۱۰}$$

اسی طرح متمم ضرب $u6$ کے مداخل $\overline{Q}_0$ ، Q_1 لہٰذا مخارج $\overline{\overline{Q}_0 Q_1}$ ہو گا، جو پلٹ کار $u2$ کا مداخل D_1 ہے۔ یوں اس پلٹ کار کا اگلا حال درج ذیل ہو گا۔

$$Q_1(n+1) = \overline{\overline{Q}_0(n) Q_1(n)} \tag{۶.۱۱}$$

---

[۵۴] synchronous sequential circuits
[۵۵] state table
[۵۶] state equation



شکل ۶.۲۵: ترتیبی دور کی بطور مثال

تیسرا مخارج y ہے جو متمم جمع $u7$ کا مخارج $\overline{x + \overline{Q}_0 + \overline{Q}_1}$ ہے، اور جو ساعت کا تابع نہیں، لہٰذا y صرف موجودہ حال اور مداخل پر منحصر ہے، یعنی یہ ہر صورت موجودہ مخارج ہوگا۔

$$y(n) = \overline{x(n) + \overline{Q}_0(n) + \overline{Q}_1(n)} \tag{۶.۱۲}$$

مساوات ۶.۱۰ تا ۶.۱۲ میں بار بار (n) اور $(n+1)$ لکھنے سے گریز کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} Q_0 &= \overline{xQ_0 + x\overline{Q}_1} \\ Q_1 &= \overline{\overline{Q}_0 Q_1} \\ y &= \overline{x + \overline{Q}_0 + \overline{Q}_1} \end{aligned} \tag{۶.۱۳}$$

۶.۱۳.۲ جدول حال

معاصر حال جدول میں لکھے جا سکتے ہیں۔ شکل ۶.۲۵ کی مثال آگے بڑھاتے ہوئے مساوات ۶.۱۳ سے جدول لکھتے ہیں۔ موجودہ مداخل (x) اور موجودہ حال (Q_0 ، Q_1) آزاد متغیرات، جبکہ اگلے مخارج اور حال تابع متغیرات تصور کریں۔ یوں $x(n)$ ، $Q_0(n)$ ، اور $Q_1(n)$ آزاد متغیر تصور کر کے ان کی تمام ترتیب (000_2 تا 111_2) لکھیں۔ مساوات ۶.۱۳ سے ہر ترتیب کے مطابق اگلے حال $Q_0(n+1)$ ، $Q_1(n+1)$، اور اگلے مخارج $y(n)$ حاصل کر کے جدول میں درج کریں۔ یوں جدول ۶.۴ حاصل ہوگا، جو **جدول حال**[۵۴] کہلاتا ہے۔

[۵۴] state table

جدول ۶.۴: جدول حال (برائے مساوات ۶.۱۳)

موجودہ حال	اگلا حال		موجودہ مخارج	
	$x=0$	$x=1$	$x=0$	$x=1$
Q_1Q_0	Q_1Q_0	Q_1Q_0	y	y
00	11	10	0	0
01	11	10	0	0
10	01	01	0	0
11	11	10	1	0

۶.۱۳.۳ خاکہ حال

جدول حال میں موجود معلومات کا خاکہ بنایا جا سکتا ہے جو **خاکہ حال**[۵۸] کہلاتا ہے۔ جدول ۶.۴ کا خاکہ حال شکل ۶.۲۶ میں پیش ہے۔

خاکہ حال میں دور کا حال گول دائروں سے ظاہر کیا جاتا ہے، جبکہ موجودہ حال سے اگلے حال منتقلی تیر دار لکیر سے ظاہر کی جاتی ہے، جس کی دم موجودہ حال پر اور سر اگلے حال پر رکھا جاتا ہے۔ تیر دار لکیر پر دو اعداد لکھے جاتے ہیں، جن کے بیچ ترچھی لکیر کھینچی جاتی ہے۔ وہ داخلی قیمت جو انتقال کا سبب بنتی ہے، ترچھی لکیر کے اوپر اور موجودہ مخارج نیچے لکھا جاتا ہے۔

شکل ۶.۲۵ کے ترتیبی دور میں دو پلٹ کار مستعمل ہیں، جن کا حال Q_1Q_0 لکھ کر 00 ، 01 ، 10 ، اور 11 ممکن حال ہیں۔ حال 00 سے 10 انتقال کی تیر دار لکیر پر $1/0$ لکھا گیا ہے، جس کے تحت انتقال $x = 1$ کی بدولت پیش آیا اور $y = 0$ ہے۔

خاکہ حال دیکھ کر کئی حقائق با آسانی واضح ہوں گے۔ مثلاً، خاکہ دیکھ کر واضح ہے یہ دور کسی دوسرے حال سے 00 منتقل نہیں ہو گا؛ حال 10 سے یہ اگلے قدم میں 01 منتقل ہو گا، جس کے بعد جب تک $x = 1$ رہے حال تبدیل نہیں ہو گا اور $x = 0$ کرنے سے حال 11 حاصل ہو گا، جس سے نکلنے کا کوئی راستہ موجود نہیں۔

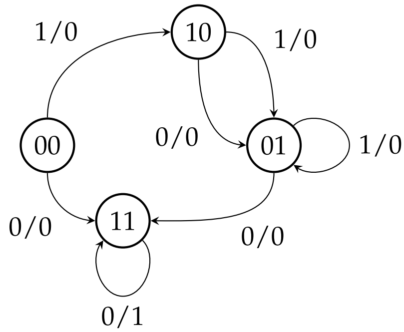
خاکہ حال اور جدول حال ایک ہی معلومات دو مختلف طریقوں سے پیش کرتے ہیں۔ دونوں میں پیش معلومات ہر طرح یکساں ہے۔

۶.۱۳.۴ ڈی پلٹ کار پر مبنی ترتیبی دور

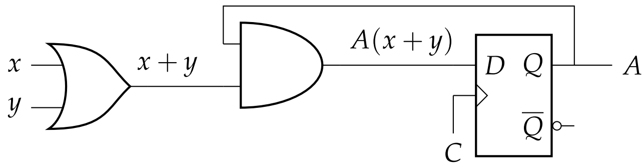
ترتیبی ادوار کے حل کی مزید مثالوں پر غور کرتے ہیں۔ پہلی مثال ڈی پلٹ کار پر مبنی ہے جو شکل ۶.۲۷ میں پیش ہے۔ دور میں ایک پلٹ کار پایا جاتا ہے جس کا مخارج A لکھ کر، مداخل $A(x+y)$ ہو گا۔

ساعت کے کنارہ چڑھائی پر ڈی پلٹ کار مداخل کے تحت نیا حال اختیار کرتا ہے، لہٰذا اگلے حال کی

---
[۵۸] state diagram



شکل ۶.۲۶: خاکہ حال (برائے شکل ۶.۲۵)



شکل ۶.۲۷: ڈی پلٹ کار پر مبنی ترتیبی دور۔

مساوات درج ذیل ہو گی

$$A(n+1) = A(n)(x(n) + y(n))$$

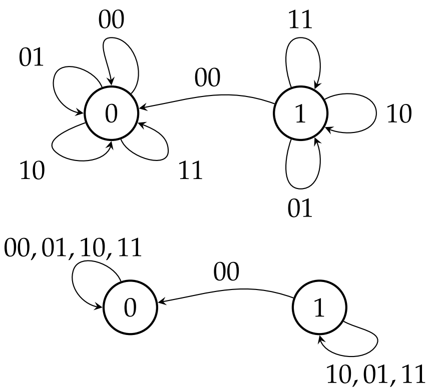
جس کی سادہ صورت ذیل ہے۔

$$A = A(x+y)$$

اس مساوات کے نتائج شکل ۶.۲۸ میں جدول میں پیش ہیں۔ خاکہ حال اور اس کا سادہ روپ (نچلا خاکہ) بھی شکل پیش ہیں۔ پلٹ کار کے حال 0 اور 1 دائروں میں رکھے گئے ہیں، جبکہ ان کے بیچ انتقال تیر دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ تیر دار لکیروں پر مداخل xy کی موجودہ قیمتیں لکھی گئی ہیں۔ ایک ہی حال میں رہنے کے تمام ممکنات کو اکٹھا بھی لکھا جا سکتا ہے، جیسے نچلے خاکہ میں کیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ حال 1 سے 0 اس وقت انتقال ہو گا جب مداخل 00 ہو۔ باقی تمام حال میں پلٹ کار موجودہ حال برقرار رکھتا ہے۔ مزید، حال 0 سے حال 1 منتقلی کا کوئی راستہ موجود نہیں۔

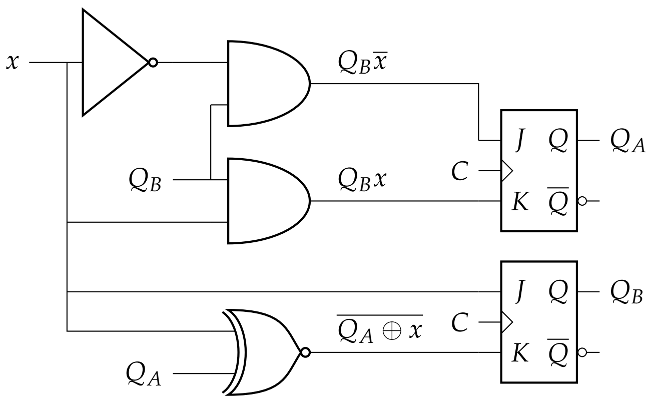
۶.۱۳.۵ جے کے پلٹ کار پر مبنی ترتیبی دور

شکل ۶.۲۹ میں جے کے پلٹ کار پر مبنی ترتیبی دور پیش ہے۔ بالا پلٹ کار کا حال Q_A اور مداخل J_A ، K_A ہیں، جبکہ زیریں پلٹ کار کا حال Q_B اور مداخل J_B ، K_B ہیں۔



موجودہ			اگلا
A	x	y	A
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

شکل ۶.۲۸: جدول حال اور خاکہ حال (برائے شکل ۶.۲۷)



شکل ۶.۲۹: جے کے پلٹ کار پر مبنی ترتیبی دور

دور میں متمم بلا شرکت جمع گیٹ کا ایک مداخل Q_A ہے جو بالائی پلٹ کار کا موجودہ حال ہے۔ پلٹ کار کے مخارج سے گیٹ کے مداخل تک تار کھینچنے کی بجائے دونوں کا نام (Q_A) رکھا گیا ہے۔ جب بھی دو مقامات کا ایک نام رکھا جائے، انہیں آپس میں برقی طور جڑا تصور کریں۔ یوں، دونوں ضرب گیٹ کا ایک ایک مداخل زیریں پلٹ کار کے مخارج سے جڑا ہے۔

مداخل کی مساوات ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
J_A &= \overline{x}Q_B \\
K_A &= xQ_B \\
J_B &= x \\
K_B &= \overline{x \oplus Q_A}
\end{aligned}
\tag{۶.۱۴}
$$

ان مساوات سے جدول ۶.۵ حاصل ہو گا، جس سے اضافی مواد نکال کر جدول حال حاصل ہو گا (شکل ۶.۳۰)۔ جدول حال سے حاصل خاکہ حال بھی شکل میں پیش ہے۔

مساوات ۶.۱۴ سے جدول ۶.۵ لکھتے ہوئے موجودہ حال Q_A ، Q_B اور مداخل x کی تمام ممکنات 000_2 تا 111_2 لکھیں (جدول میں بائیں ہاتھ تین قطاریں)۔ ہر صف کے لئے پلٹ کار کے مطابقتی موجودہ مداخل J_A ، K_A ، J_B ، اور K_B مساوات ۶.۱۴ سے حاصل کریں۔ یوں پہلی صف کے لئے، جہاں موجودہ قیمتیں $Q_A = 0$ ، $Q_B = 0$ ، اور $x = 0$ ہیں، درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
J_A &= \overline{x}Q_B = \overline{0}\cdot 0 = 1 \cdot 0 = 0 \\
K_A &= xQ_B = 0 \cdot 0 = 0 \\
J_B &= x = 0 \\
K_B &= \overline{x \oplus Q_A} = \overline{0 \oplus 0} = \overline{0} = 1
\end{aligned}
$$

انہیں جدول کی پہلی صف میں درج کریں۔ پلٹ کار کے موجودہ مداخل جانتے ہوئے ساعت کے اگلے کنارہ چڑھائی پر اگلے حال مساوات ۶.۷ $(Q(n+1) = J\overline{Q}_n + \overline{K}Q_n)$ یا مساوات ۶.۸ سے

$$
\begin{aligned}
Q_A &= J_A\overline{Q}_A + \overline{K}_AQ_A = 0\cdot\overline{0} + \overline{0}\cdot 0 = 0\cdot 1 + 1\cdot 0 = 0 + 0 = 0 \\
Q_B &= J_B\overline{Q}_B + \overline{K}_BQ_B = 0\cdot\overline{0} + \overline{1}\cdot 0 =
\end{aligned}
$$

حاصل کر کے جدول کی پہلی صف میں درج کریں۔ باقی صف کے لئے مواد حاصل کر کے جدول بھریں۔

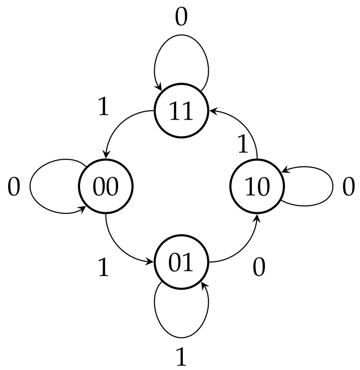
آپ J اور K کی مساوات استعمال کر کے بھی Q تلاش کر سکتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
Q_A(n+1) &= J_A\overline{Q}_A + \overline{K}_AQ_A = (\overline{x}Q_B)\overline{Q}_A + (\overline{xQ_B})Q_A \\
Q_B(n+1) &= J_B\overline{Q}_B + \overline{K}_BQ_B = x\overline{Q}_B + (\overline{\overline{x \oplus Q_A}})Q_B
\end{aligned}
$$

خاکہ حال (شکل ۶.۳۰) پر توجہ دیں۔ حال 00 سے 01 اور یہاں سے 10 اور اس کے بعد 11 جایا جا سکتا ہے، جس کے بعد دوبارہ 00 سے پوری کہانی شروع ہو گی۔ یہ 00 تا 11 ثنائی گنت کار معلوم ہوتا ہے۔ ماسوائے

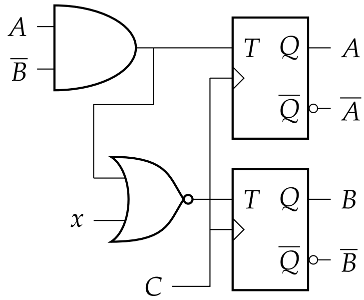
جدول ۶.۵: جے کے پلٹ کار دور کی مساوات ۶.۱۴ سے حاصل جدول

موجودہ مداخل اور حال			پلٹ کار کے مداخل				اگلے حال	
Q_A	Q_B	x	J_A	K_A	J_B	K_B	Q_A	Q_B
0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1	1	0	0



موجودہ حال	اگلا حال	
	$x=0$	$x=1$
Q_AQ_B	Q_AQ_B	Q_AQ_B
00	00	01
01	10	01
10	10	11
11	11	00

شکل ۶.۳۰: جدول حال اور خاکہ حال برائے شکل ۶.۲۹



شکل ۶.۳۱: ٹی پلٹ کار پر مبنی ترتیبی دور

حال 11 کے، ہر مرتبہ x تبدیل کرنے سے حال تبدیل ہو گا۔ یوں 00 میں جب تک $x = 0$ رہے، دور اسی حال میں رہتا ہے، البتہ x بلند کرنے سے 01 حال حاصل ہو گا، جہاں اس وقت تک رہا جائے گا جب تک $x = 1$ رہے۔

۶.۱۳.۶ ٹی پلٹ کار کی مدد سے ترتیبی دور کا جائزہ

شکل ۶.۳۱ میں ٹی پلٹ کار پر مبنی ترتیبی دور پیش ہے۔ پلٹ کار کے حال A اور B سے ظاہر کیے گئے ہیں۔ یوں پہلے پلٹ کار کا مداخل T_A اور دوسرے کا T_B ہے۔

پلٹ کار کا اگلا حال مساوات ۶.۹ سے ملتا ہے جسے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$Q_{n+1} = T \oplus Q_n$$

موجودہ ضرورت کے تحت مساوات سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= T_A \oplus A = T_A\overline{A} + \overline{T}_A A \\ B_{n+1} &= T_B \oplus B = T_B\overline{B} + \overline{T}_B B \end{aligned} \tag{۶.۱۵}$$

پلٹ کار کے مداخل کی مساوات شکل ۶.۳۱ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} T_A &= A\overline{B} \\ T_B &= \overline{A\overline{B} + x} \end{aligned}$$

ان مساوات کو مساوات ۶.۱۵ میں ڈالنے سے پلٹ کار کے حال کی مساواتیں حاصل ہوں گی:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= (A\overline{B}) \oplus A \\ B_{n+1} &= (\overline{A\overline{B} + x}) \oplus B \end{aligned}$$

جدول ۶.۶: ٹی پلٹ کار دور (شکل ۶.۳۱) کا جدول حال

(ا)

موجودہ مواد			اگلا حال		مداخل	
A	B	x	A	B	T_A	T_B
0	0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0

(ب)

موجودہ	اگلا حال	
	$x=0$	$x=1$
AB	AB	AB
00	01	00
01	00	01
10	00	00
11	10	11

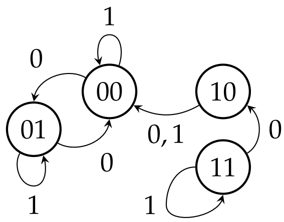
جن سے جدول ۶.۶-الف ملتا ہے۔ مداخل x اور موجودہ حال A اور B کو پہلی تین قطاروں میں لکھا گیا ہے۔ ان کی تمام ترتیب (000_2 تا 111_2) پہلی تین قطاروں میں بھر کر، ہر صف کے لئے مطابقتی موجودہ مداخل حاصل کیے جاتے ہیں، جنہیں دائیں قطاروں میں لکھا گیا ہے۔ موجودہ مداخل سے ساعت کے اگلے کنارہ چڑھائی پر اگلے حال حاصل ہوں گے۔ جدول ۶.۶-الف سے جدول-ب لکھا جا سکتا ہے، جو جدول حال کہلاتا ہے۔

جدول حال کے مواد کو خاکہ حال کی صورت میں شکل ۶.۳۲ میں پیش کیا گیا ہے۔ جدول ۶.۶-ب میں AB کو ساتھ ساتھ لکھ کر ایک حال تصور کریں۔ یوں 00 ، 01 ، 10 ،اور 11 حال ممکن ہیں۔ خاکہ حال میں حال کو گول دائرہ میں لکھا جاتا ہے، اور ایک حال سے دوسرے حال (یا اسی حال) انتقال کو تیر دار لکیر سے ظاہر کیا جاتا ہے، جن پر آزاد مداخل (x) کی وہ قیمت درج کی جاتی ہے، جو انتقال کا سبب بنتی ہے۔ مثلاً، جدول-ب کی پہلی صف میں موجودہ حال 00 ہے؛ اب $x = 1$ کی صورت میں دور اسی حال (00) میں رہتا ہے، جس کو خاکہ حال میں 00 حال سے ابتدا اور اختتام کرنے والی تیر دار لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے، جس پر 1 لکھا گیا ہے؛ البتہ $x = 0$ کی صورت میں دور حال 01 اختیار کرتا ہے، جس کو 00 سے 01 جانے والی تیر دار لکیر ظاہر کرتی ہے، جس پر 0 لکھا گیا ہے۔

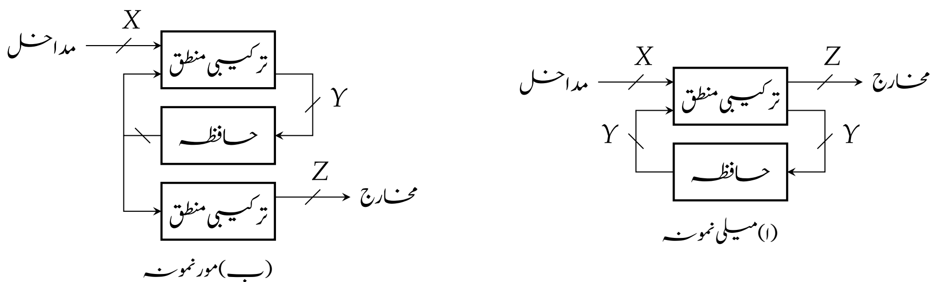
۶.۱۴ میلی اور مُور نمونے

ترتیبی دور میں مداخل، مخارج اور اندرونی حال پائے جاتے ہیں۔ ترتیبی ادوار کے دو نمونے پائے جاتے ہیں، جنہیں **میلی نمونہ**[۵۹] اور **مُور نمونہ**[۶۰] کہتے ہیں۔ میلی نمونے میں مخارج کا دارومدار موجودہ مداخل اور موجودہ اندرونی حال پر، جبکہ مُور نمونے میں صرف موجودہ حال پر ہوگا۔ یہ دو نمونے شکل ۶.۳۳ میں پیش ہیں۔

[۵۹] Mealy
[۶۰] Moore



شکل ۶.۳۲: خاکہ حال برائے شکل ۶.۳۱ اور جدول ۶.۶



شکل ۶.۳۳: مور اور میلی نمونے

ان اشکال میں مداخل تیر دار لکیر پر ترچھی لکیر کھینچ کر X لکھا گیا ہے، جو مداخل شنائی ہندسوں (بِٹ) کی تعداد بیان کرتا ہے۔ یوں $X = 8$ کی صورت میں ایک ایک بٹ کے آٹھ مداخل ہوں گے۔ حافظہ کے مداخل اور مخارج کی تعداد برابر ہو گی، لہٰذا اس کے مداخل (یا مخارج) پر Y لکھنے کے بعد مخارج (یا مداخل) پر صرف ترچھی لکیر کھینچنا کافی ہو گا۔

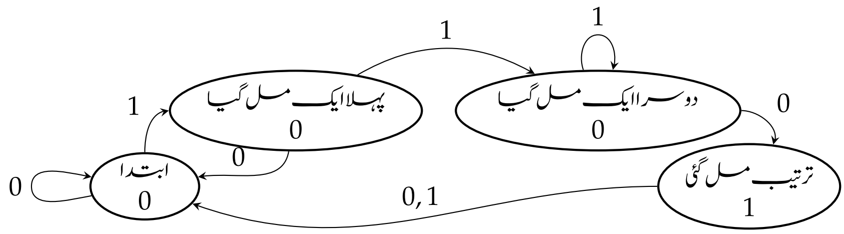
۶.۱۴.۱ حال اور ان کی مقرری

حصہ ۶.۱۳.۳ میں خاکہ حال پر غور کیا گیا۔ ان خاکوں میں پلٹ کار کے مخارج کی بجائے دیگر ناموں سے حال ظاہر کر کے خاکہ حال سمجھنا آسان بنایا جا سکتا ہے (درج ذیل مثال دیکھیں)۔

مثال ۶.۱: ایسے ایک مداخل، ایک مخارج معاصر ترتیبی دور کا خاکہ حال تیار کریں، جو 110_2 مداخل کے حصول پر 1 خارج کرتا ہو۔ بلند رتبی بٹ پہلا بِٹ تصور کریں۔ ایسے دور کو **ترتیب شناس**[۶۱] کہتے ہیں۔

حل: شکل ۶.۳۴ میں خاکہ حال پیش ہے، جسے دیکھ کر دور کی کارکردگی سمجھنا آسان ہے۔ دائرے میں حال کا نام، اور نام کے نیچے 0 یا 1 موجودہ مخارج ظاہر کرتا ہے۔ □

[۶۱] sequence detector



شکل ۶.۳۴: حال کو الفاظ سے پکار کر خاکہ بہتر سمجھ آتا ہے (مثال ۶.۱)

۶.۱۵ معاصر ترتیبی ادوار کی بناوٹ

گزشتہ حصے میں مختلف اقسام کے پلٹ کار استعمال کر کے معاصر ترتیبی ادوار تشکیل دیے گئے۔ ان ادوار کے حصول کا باضابطہ طریقہ کار درج ذیل ہے۔

۱. مسئلہ کے بیان سے خاکہ حال تیار کریں۔

۲. درکار حال کی تعداد کم کریں۔

۳. ہر حال (کو ظاہر کرنے) کی منفرد ثنائی قیمت منتخب کریں۔

۴. جدول حال حاصل کریں۔

۵. پلٹ کار (کی قسم) کا انتخاب کریں۔

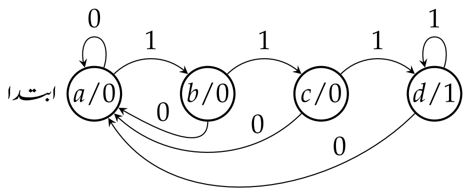
۶. پلٹ کار کی داخلی اور خارجی سادہ ترین مساوات حاصل کریں۔

۷. ان مساوات سے معاصر ترتیبی دور تشکیل دیں۔

مثال ۶.۲: ایسا معاصر ترتیب شناس تشکیل دیں جو تین متواتر 1 مداخل کے حصول پر 1 خارج کرے۔

حل: ترتیب شناس کی کارکردگی کے بیان سے شکل ۶.۳۵ کا خاکہ حال کھینچا جاتا ہے۔ گول دائروں میں ترچھی لکیر سے اوپر حال کا نام اور نیچے مخارج کی قیمت لکھی گئی ہے۔ شناس کا ابتدائی حال a اور مخارج پست (0) ہے۔ پہلے 1 کی وصولی کے بعد حال b اور مخارج پست ہو گا۔ دوسرے 1 کے بعد حال c اور مخارج پست، تیسرے 1 کے بعد حال d اور مخارج بلند ہو گا۔ مزید 1 ملنے سے شناس حال d میں رہتے ہوئے مخارج بلند رکھتا ہے۔ کسی بھی موقع پر 0 کا حصول، شناس کو واپس ابتدائی حال a منتقل کرتا ہے۔ خاکہ حال سے حاصل جدول، شکل ۶.۳۵ میں پیش ہے، جس میں بائیں ہاتھ موجودہ مداخل اور موجودہ حال، جبکہ دائیں ہاتھ اگلا حال اور موجودہ مخارج درج ہیں۔

موجودہ حال	موجودہ مداخل	اگلا حال	موجودہ مخارج
a	0	a	0
a	1	b	0
b	0	a	0
b	1	c	0
c	0	a	0
c	1	d	0
d	0	a	1
d	1	d	1



شکل ۶.۳۵: ترتیب شناس کا خاکہ حال (مثال ۶.۲)

خاکہ حال سے واضح ہے کہ حال کی تعداد چار ہے، جنہیں دو بٹ کا شنائی عدد ظاہر کر سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} a &= 00 \\ b &= 01 \\ c &= 10 \\ d &= 11 \end{aligned} \tag{۶.۱۶}$$

(آپ کوئی دوسری انتخاب کر سکتے ہیں۔ مشق ۶.۷ دیکھیں۔) دو بٹ کے لئے دو پلٹ کار درکار ہوں گے۔ ہم ڈی پلٹ کار منتخب کر کے، ان کے مخارج A اور B، اور مداخل D_A اور D_B لکھتے ہیں۔

شنائی علامت استعمال کرتے ہوئے شکل ۶.۳۵ میں پیش جدول دوبارہ جدول ۶.۷ میں پیش کیا گیا ہے، جس سے ڈی پلٹ کار کی درج ذیل مساوات اخذ ہوتی ہیں۔

$$\begin{aligned} A(n+1) = D_A(A,B,x) &= \sum(3,5,7) \\ B(n+1) = D_B(A,B,x) &= \sum(1,5,7) \\ y(A,B,x) &= \sum(6,7) \end{aligned}$$

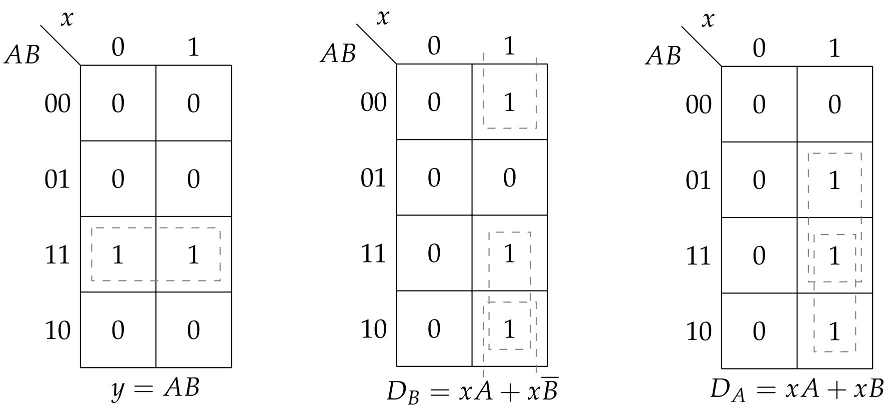
جدول ۶.۷ سے شکل ۶.۳۶ کے کارناف نقشے بنا کر درج ذیل سادہ مساوات حاصل ہوتی ہیں، جن سے شکل ۶.۳۷ حاصل ہوگا۔

$$\begin{aligned} D_A &= Ax + Bx \\ D_B &= Ax + \overline{B}x \\ y &= AB \end{aligned}$$

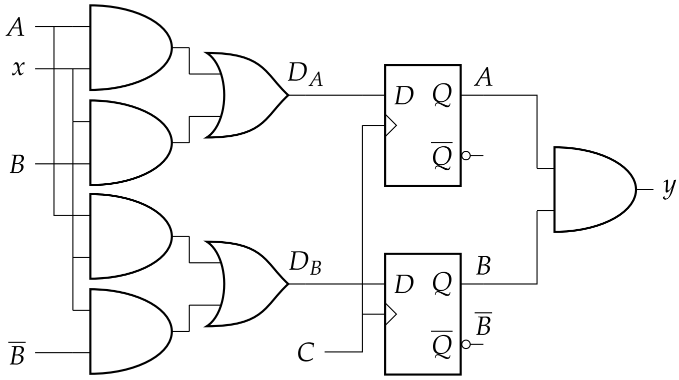
ترتیب شناس ابتدائی پست حال میں بیٹھ اشارہ کی مدد سے لایا جاتا ہے، جو شکل میں نہیں دکھایا گیا۔

جدول ۶.۷: ترتیب شناس کا جدول حال

موجودہ			اگلا		موجودہ
A	B	x	A	B	y
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1



شکل ۶.۳۶: کارناف نقشے برائے مثال ۶.۲



شکل ۶.۳۷: ترتیب شناس (مثال ۶.۲)

□

مشق ۶.۷: مساوات ۶.۱۶ میں حال کے اظہار کا ایک انتخاب دکھایا گیا ہے۔ آپ کوئی دوسرا انتخاب کر سکتے ہیں، مثلاً $a = 01$ ، $b = 10$ ، $c = 11$ ، اور $d = 00$ جس سے دوسرا دور حاصل ہو گا۔ یہ دور حاصل کریں۔

باب ۷

دفتر

ایک پلٹ کار ایک شنائی ہندسے (بِٹ) کی معلومات ذخیرہ کر سکتا ہے۔ آٹھ بِٹ معلومات ذخیرہ کرنے کے لئے آٹھ پلٹ کار درکار ہوں گے۔ **دفتر**[1] سے مراد وہ دور ہے جو معلومات ذخیرہ، اور ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے کی صلاحیت رکھتا ہو۔ یوں، n بِٹ دفتر سے مراد n پلٹ کار پر مبنی وہ دور ہو گا، جو n بِٹ ذخیرہ اور منتقل کر سکے۔ معلومات کے انتقال کا انداز (سلسلہ وار یا متوازی) دور کے ترکیبی حصہ پر منحصر ہو گا۔

سادہ ترین چار بِٹ دفتر شکل ۷.۱ میں پیش ہے۔ شکل-الف میں مداخل A جبکہ مخارج B ہے۔ مداخل کے چار بِٹ A_0 ، A_1 ، A_2 ، اور A_3 ، جبکہ مخارج کے چار بِٹ B_0 ، B_1 ، B_2 ، اور B_3 ہیں۔

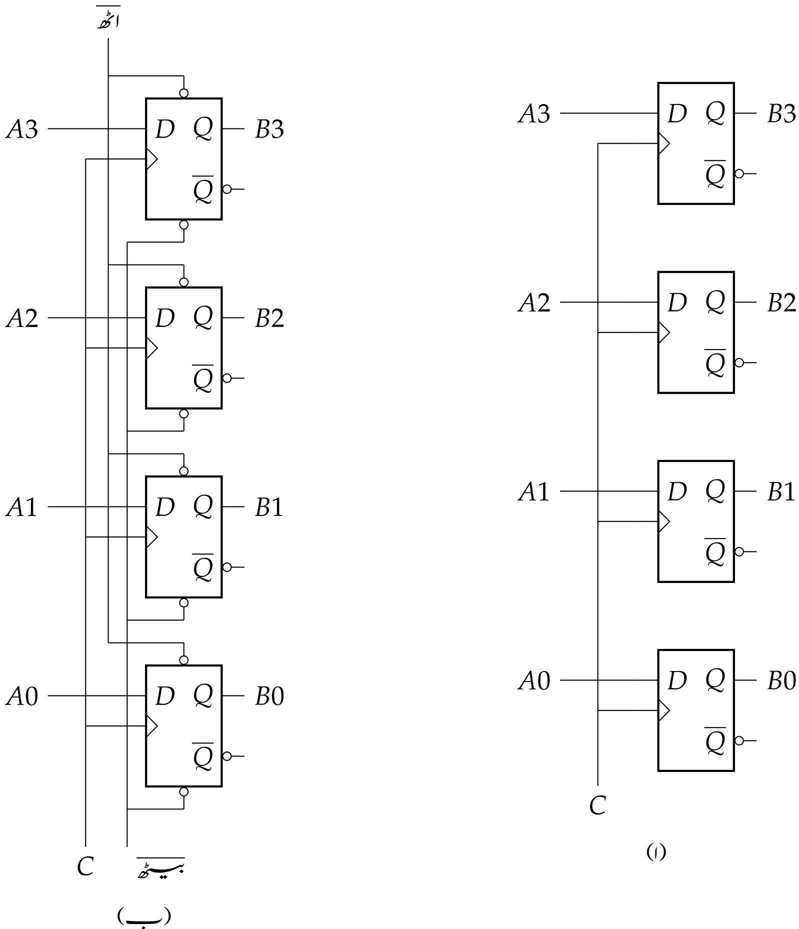
ساعت کے کنارہ چڑھائی پر داخلی چار بِٹ پلٹ کار کو منتقل ہو جاتے ہیں۔ ہم کہتے ہیں دفتر میں مواد کا اندراج ہو گیا، یا مواد دفتر میں درج ہو گیا، یا مواد دفتر میں لکھ لیا گیا۔ ساعت کے اگلے کنارہ چڑھائی تک یہ چار بِٹ معلومات دفتر میں محفوظ، اور مخارج پر دستیاب ہو گی۔

شکل ۷.۱-ب میں بلند اور پست صلاحیت کا پلٹ کار استعمال کیا گیا۔ یوں، ساعت کے کنارہ چڑھائی کا انتظار کیے بغیر، تمام خارجی بِٹ زبردستی بلند یا پست کیے جا سکتے ہیں۔ زبردستی پست کرنے سے دفتر صاف ہو کر 0000_2 ، جبکہ زبردستی بلند کرنے سے 1111_2 خارج کرتا ہے۔

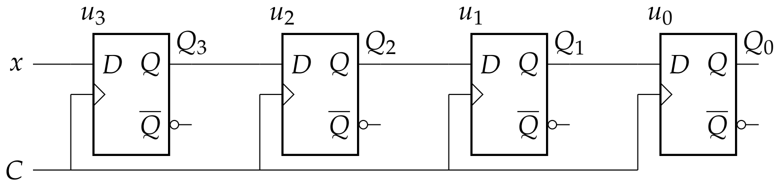
اس دور میں پلٹ کار کی تعداد n کر کے n بِٹ دفتر تشکیل دیا جا سکتا ہے۔ ہر بِٹ کا متمم بھی دفتر کے مخارج سے دستیاب ہو گا۔ یوں B_0 کا متمم $\overline{B}_0$ مطابقتی پلٹ کار کے $\overline{Q}$ سے دستیاب ہو گا۔

---

[1] register



شکل ۷.۱: چار بٹ دفتر۔



شکل ۲.۷: دائیں انتقال دفتر

۱.۷ سلسلہ وار دفتر

۱.۱.۷ دائیں انتقال دفتر

شکل ۲.۷ میں (سلسلہ وار) **دائیں انتقال دفتر**[۲] پیش ہے، جہاں (متواتر) ایک پلٹ کار کا مخارج، دوسرے کا مداخل ہے، اور ثنائی مواد، x، بائیں (جانب) سے مہیا کیا گیا ہے۔ شکل میں زبردستی پست پن نہیں دکھایا گیا تا کہ اصل مضمون پر توجہ رہے، تاہم تصور کریں ساعت کے پہلے کنارہ چڑھائی سے قبل، تمام پلٹ کار زبردستی پست کیے گئے۔

ساعت کے پہلے کنارہ چڑھائی پر u_0 کو $0 = Q_1$، u_1 کو $0 = Q_2$، u_2 کو $0 = Q_3$، اور u_4 کو $x = 1$ مواد فراہم ہے، جنہیں پلٹ کار، ساعت کے کنارہ چڑھائی پر، مخارج منتقل کرتے ہیں۔ یوں پہلے کنارہ چڑھائی گزرنے کے بعد $Q_0 = 0$، $Q_1 = 0$، $Q_2 = 0$، اور $Q_3 = 1$ ہوگا۔ یاد رہے، ساعت کے کنارہ چڑھائی کے دوران، پلٹ کار گزشتہ حال میں رہتا ہے، اور نیا مواد کنارہ گزرنے کے بعد مخارج کو پہنچتا ہے۔ آپ نے دیکھا، یہ دور، مواد کی دائیں رخ نقل مکانی کرتا ہے، جس کی وجہ سے اس کو **دائیں انتقال دفتر** کہتے ہیں۔

ساعت کے دوسرے کنارہ چڑھائی کے وقت، u_0 کو $Q_1 = 0$، u_1 کو $Q_2 = 0$، u_2 کو $Q_3 = 1$، اور u_4 کو x (جو 0 یا 1 ہوگا) مواد فراہم ہے، لہٰذا ساعت کا دوسرا کنارہ چڑھائی گزرنے کے بعد $Q_0 = 0$، $Q_1 = 0$، $Q_2 = 1$، اور $Q_3 = x$ ہوگا۔

دور کو سلسلہ وار فراہم بائیں سے مواد، سلسلہ وار دائیں پلٹ کے مخارج Q_0 سے اسی ترتیب میں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

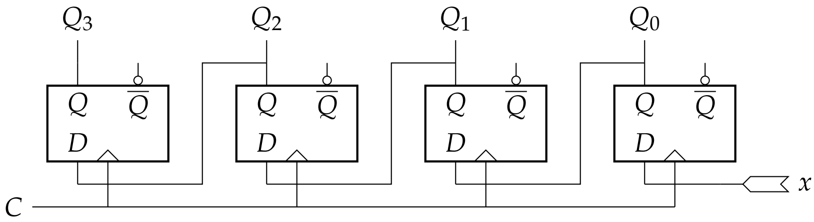
۲.۱.۷ بائیں انتقال دفتر

شکل ۳.۷ میں (سلسلہ وار) **بائیں انتقال دفتر**[۳] دکھایا گیا ہے، جو مواد کی بائیں نقل مکانی کرتا ہے۔ اس کی بناوٹ بالکل دائیں انتقال دفتر کی طرح ہے۔ فرق صرف اتنا ہے، بائیں انتقال دفتر میں دایاں پلٹ کار کا مخارج پڑوسی بایاں پلٹ کار کا مداخل ہے۔

ساعت کے کنارہ چڑھائی پر دایاں پلٹ کار فراہم کردہ مواد x کی نقل حاصل کر کے Q_0 پر خارج کرتا ہے۔

---

[۲] shift right register
[۳] shift left register



شکل ۷.۳: بائیں انتقال دفتر

اگلے کنارہ پر یہ مواد Q_1 کو منتقل ہو گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہاں مواد دائیں سے فراہم کیا گیا ہے، جو دور میں سے گزرتے ہوئے بائیں منتقل ہو گا۔

۷.۱.۳ دائیں و بائیں انتقال دفتر

شکل ۷.۴ میں (سلسلہ وار) بائیں و دائیں انتقال دفتر پیش ہے جو مواد کی بائیں یا دائیں نقل مکانی کی صلاحیت رکھتا ہے۔ مخارج Q_2 پلٹ کار کے مداخل D اور اس سے منسلک جمع گیٹ اور (دو) ضرب گیٹ پر توجہ رکھیں۔ قابو اشارہ (بائیں / دائیں) بلند ہونے کی صورت میں، دایاں ضرب گیٹ معذور جبکہ بایاں مجاز ہو کر، جمع گیٹ تک Q_3 پہنچاتے ہیں جو D پر دستیاب، اور ساعت کے اگلے کنارہ چڑھائی پر پلٹ کار میں درج ہو کر بطور Q_2 خارج ہو گا۔ یوں مواد Q_3 سے Q_2 یعنی دائیں منتقل ہوا۔ اس کے برعکس قابو اشارہ پست ہونے کی صورت میں، دایاں ضرب گیٹ مجاز اور بایاں معذور ہو کر، جمع گیٹ تک Q_1 پر موجود مواد پہنچاتے ہیں، جو آخر کار Q_2 پہنچتا ہے، اور یوں مواد بائیں منتقل ہوتا ہے۔

بائیں ترین پلٹ کار کو بیرونی مواد y جبکہ دائیں ترین کو x فراہم کیا گیا ہے۔ قابو اشارہ ان میں سے ایک منتخب کرتا ہے جو مطلوب سمت (بائیں یا دائیں) منتقل ہو گا۔

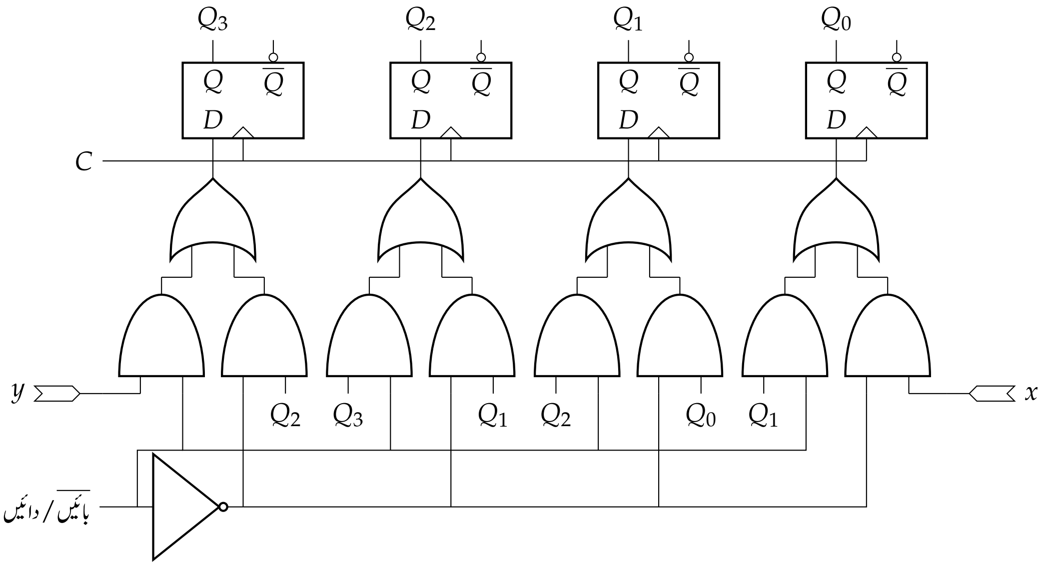
بائیں نقل مکانی کے دوران x پر میسر مواد ساعت کے کنارہ چڑھائی پر Q_0 پہنچتا ہے۔ اگلے کنارہ پر یہی مواد Q_1، اس سے اگلے پر Q_2 اور آخر میں Q_3 پہنچتا ہے۔ دائیں نقل مکانی کی صورت میں y پر موجود مواد الٹ رخ Q_3 سے Q_0 نقل مکانی کرتا ہے۔

۷.۲ متوازی بھرائی دفتر

بعض اوقات، دفتر میں بیک وقت مواد چڑھانے کی ضرورت پیش آتی ہے۔ شکل ۷.۵ میں **دائیں انتقال، متوازی بھرائی دفتر**[۴] پیش ہے، جس میں متوازی مواد بیک وقت چڑھانا ممکن ہے۔ یہ مختصراً **متوازی دائیں انتقال دفتر** کہلاتا ہے۔

پلٹ کار کو جمع گیٹ معلومات فراہم کرتا ہے جس کو دو ضرب گیٹ مواد فراہم کرتے ہیں۔ قابو اشارہ

[۴] parallel load, right shift register



شکل ۷.۴: بائیں و دائیں انتقال دفتر

$\overline{\text{متوازی بھرائی}}$ عام طور غیر فعال (بلند) رکھا جاتا ہے۔ یوں دایاں ضرب گیٹ معذور جبکہ بایاں گیٹ مجاز ہو کر، بائیں پلٹ کار کا مخارج، جمع گیٹ کے راستے پلٹ کار کو فراہم کرتا ہے، جو ساعت کے اگلے کنارہ چڑھائی پر پلٹ کار میں درج ہو گا۔

مواد z_0 تا z_3 پلٹ کار میں چڑھانے کے لئے $\overline{\text{متوازی بھرائی}}$ پست کیا جاتا ہے۔ یوں پلٹ کار کو مواد فراہم کرنے والا بایاں ضرب گیٹ معذور جبکہ دایاں مجاز ہو گا۔ مجاز گیٹ متوازی مواد کو جمع گیٹ کے راستہ پلٹ کار تک پہنچاتا ہے۔

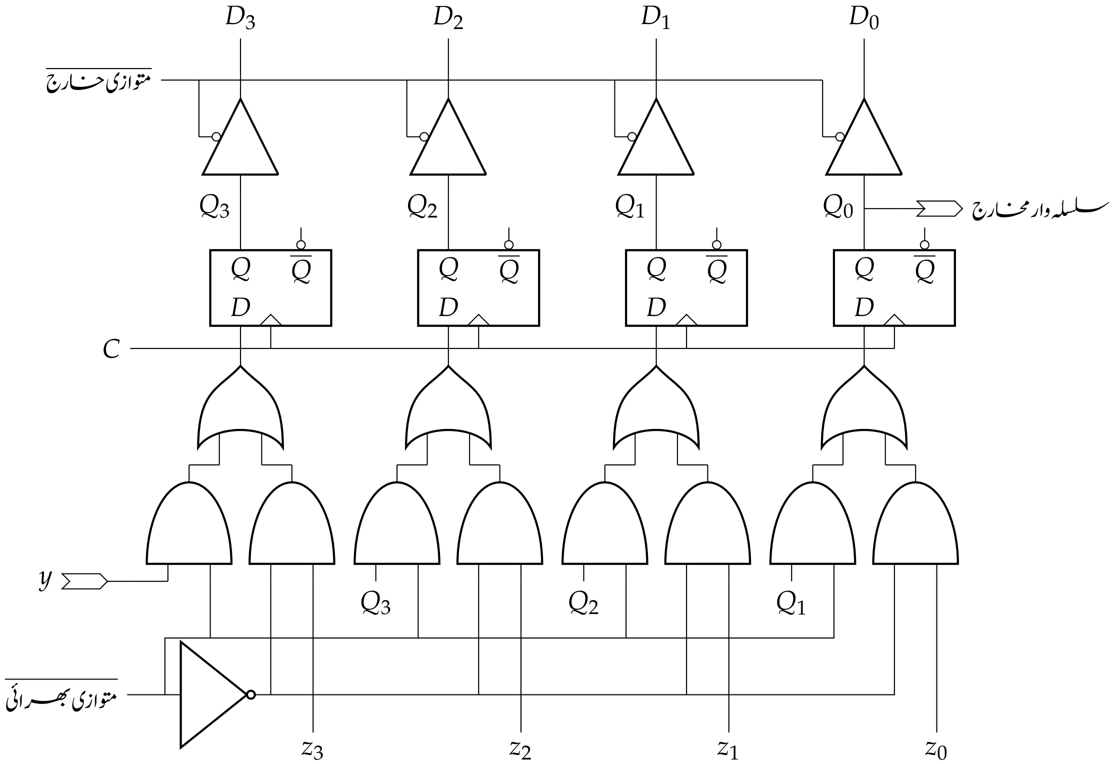
یوں پلٹ کار میں مواد سلسلہ وار (y) یا متوازی (z_0 تا z_3) بھرا جا سکتا ہے۔

شکل میں پلٹ کار کا مخارج، مجاز و معذور صلاحیت مستحکم کار سے منسلک کیا گیا ہے۔ قابو اشارہ $\overline{\text{متوازی خارج}}$ پست کر کے پلٹ کار کا مواد Q_0 تا Q_3 بطور D_0 تا D_3 حاصل کیا جا سکتا ہے۔ قابو اشارہ معذور (بلند) ہونے کی صورت میں مستحکم کار کا مخارج بلند رکاوٹ حال میں ہو گا۔

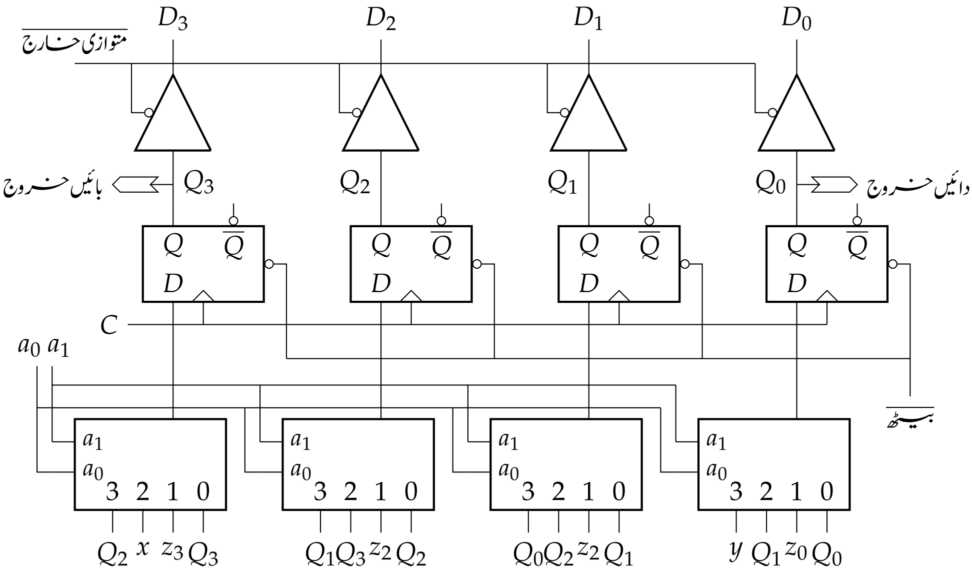
۷.۳ عالمگیر دفتر

اب تک مختلف صلاحیت کے دفتر پر غور ہوا، جن کی خوبیاں ایک دور میں سموئی جا سکتی ہیں۔ ایسا عالمگیر دفتر شکل ۷.۶ میں پیش ہے۔

بائیں انتقال کے وقت y مواد پر سلسلہ وار داخل 14 ہو کر آخر کار بائیں خروج سے سلالہ وار خارج 15 ہو جاتا ہے



شکل ۷.۵: متوازی دائیں انتقال دفتر



شکل ۷.۶: چار بِٹ عالمگیر دائیں انتقال دفتر

جبکہ دائیں جانب انتقال کے وقت مواد سے سلسلہ وار داخل ہوتا ہے اور آخر کار دائیں خروج سے سلسلہ وار خارج ہو جاتا ہے۔ شکل میں چار یکساں حصے ہیں۔ ان میں سے دائیں جانب حصہ پر غور کرتے ہیں۔ بقایا حصے بھی بالکل اسی طرح کام کرتے ہیں۔

اس حصہ میں پلٹ کار کی داخلی طرف چار سے ایک منتخب کنندہ جوڑا گیا ہے۔ پتہ کے دو بِٹ اور اس کے مداخل میں سے ایک کو چن کر خارجی پن پر خارج کرتا ہے۔ منتخب ہونے والا مداخل جدول سے یوں حاصل ہو گا۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ پہلی صورت منتخب ہو کر پلٹ کار کے مداخل پر مہیا ہو جائے گا اور اگلے کنارہ ساعت یہی مواد پلٹ کار کے خارجی پن پر خارج ہو جائے گا۔ اس طرح دفتر اپنی حالت برقرار رکھے گا اور مواد کسی بھی جانب حرکت نہیں کرے گا۔ اسی طرح پتہ ہونے کی صورت پلٹ کار کو مہیا ہو جائے گا اور ساعت کے اگلے کنارہ یہی پلٹ کار کے مخارج پر نمودار ہو جائے گا۔ چونکہ متوازی مہیا کردہ مواد ہے لہٰذا اس صورت متوازی مواد دفتر میں چڑھ جائے گا۔ پتہ سے پلٹ کار کو مہیا ہو جائے گا۔ یوں ساعت کے اگلے کنارے موجود ہا گلے کے طور نمودار ہو جائے گا۔ یعنی اس مرتبہ دفتر مواد کو دائیں جانب منتقل کرے گا۔ پتہ کو صورت سلسلہ وار مہیا کردہ مواد منتخب ہو گا اور ساعت کے اگلے کنارے پر پلٹ کار کی مخارج پہنچ جائے گا۔ اس مرتبہ دفتر مواد کو بائیں جانب منتقل کر رہا ہے۔ اس تمام تجزیہ کو بقایا چار حصوں پر لاگو کر کے نتیجہ کو جدول کی شکل میں یوں لکھا جا سکتا ہے۔

مشق: انٹرنیٹ سے عالمگیر دفتر کے معلوماتی صفحات حاصل کریں۔ (ا) یہ کتنے بِٹ کا عالمگیر دفتر ہے۔ (ب) اسے استعمال کرتے ہوئے سولہ بِٹ عالم گیر دفتر حاصل کریں۔

4.7 سلاله وار شنائی جمع کار صفحہ 258 پر شکل 25.6 میں سلسلہ وار شنائی جمع کار دکھایا گیا ہے۔ اسی کو استعمال کرتے ہوئے شکل 7.7 میں زیادہ بِٹ کا سلسلہ وار شنائی جمع کار دکھایا گیا ہے۔ اس شکل میں بِٹ کے دو عدد متوازی لکھائی و پڑھائی کے صلاحیت والے دائیں انتقال دفتر 16 استعمال کئے گئے ہیں جنہیں دفتر-ا اور دفتر-ب کہا گیا ہے۔ مجموعہ حاصل کرنے سے قبل، یعنی ساعت کے پہلے کنارہ سے قبل، دفتر-ا میں شنائی عدد جبکہ دفتر-ب میں شنائی عدد متوازی طور منتقل کئے جاتے ہیں اور زبردستی پست اشارہ کو لمحاتی طور پست کر کے ڈی پلٹ کار کو پست کر دیا جاتا ہے تاکہ مکمل جمع کار کے داخلی حاصل کی قیمتہو۔ شکل میں متوازی چڑھائی نہیں دکھائی گئی تاکہ اصل موضوع پر توجہ رہے۔ مکمل جمع کار ان دو شنائی اعداد کے کم تر رتبہ والے بِٹ اور داخلی حاصل کو جمع کر کے جمع اور خارجی حاصل خارج کرتا ہے۔ ساعت کے پہلے کنارے پر کو ڈی پلٹ کار محفوظ کر کے اسے مکمل جمع کار کو اگلے شنائی بِٹ جمع کرتے وقت بطور داخلی حاصل فراہم کرتا ہے جبکہ دفتر-ا اور دفتر-ب اسے اگلے درجے کے بِٹ فراہم کرتے ہیں۔ جمعکو اس شکل میں دفتر-ا کو سلسلہ وار مداخل کے طور مہیا کیا گیا ہے۔ یوں جیسے جیسے اس دفتر سے شنائی عدد دائیں جانب خارج ہوتا ہے ویسے ویسے اس کی جگہ دو اعداد کا مجموعہ جگہ لیتا ہے۔ ساعت کے کنارے گزرنے کے بعد دو شنائی اعداد کا مجموعہ دفتر-ا میں محفوظ ہوتا ہے جہاں سے اسے متوازی پڑھا جا سکتا ہے جبکہ مجموعہ کا آخری حاصل مکمل جمع کار کے مخارج سے پڑھا جا سکتا ہے۔

جوابات