عـــدد دی ادوار

تخلیق و تجـــزیـــہ

خـــالد خـــان یوسفزئی

khalidyousafzai@hotmail.com

۲/اپریل ۲۰۲۳

عنوان

باب ۲

بنیادی حساب

ثنائی نظام میں حساب بالکل اسی طرح کیا جاتا ہے جس طرح اعشاری نظام میں۔ چند مثالوں کے مطالعہ سے وضاحت ہو گی۔

ثنائی نظام میں اعداد جموعہ اعشاری نظام میں دو اعداد کے مجموعہ سے سمجھا جا سکتا ہے۔ اعشاری نظام کی مندرجہ ذیل مثال پر غور کریں جس میں 37.5 اور 29.6 جمع کیے گئے ہیں۔

$$
\begin{array}{r}
11 \\
37.5 \\
+29.6 \\
\hline
67.1
\end{array}
$$

آپ نے دیکھا کہ حاصل (1) کو (بائیں) زیادہ وزنی مقام پر منتقل کیا گیا۔ یہی ثنائی جمع میں کیا جائے گا۔ ثنائی نظام میں صرف دو ہندسے، 0 اور 1 ،پائے جاتے ہیں جن کی چار ممکنہ جمع درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{array}{r}
1 \\
1 \\
+1 \\
\hline
11
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
1 \\
+0 \\
\hline
01
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
0 \\
+1 \\
\hline
01
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
0 \\
+0 \\
\hline
00
\end{array}
$$

پہلی تین جمع میں حاصل 0 جبکہ آخری میں حاصل 1 ہے۔

آئیں، زیادہ شنائی ہندسوں کے اعداد کی جمع کی مثالیں دیکھیں؛ ان کی اعشاری نظام میں جمع بھی دی گئی ہیں۔

$$\begin{array}{r} 1 \\ 13 \\ +09 \\ \hline 22_{10} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1\ \ 1 \\ 1101 \\ +1001 \\ \hline 10110_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ 3 \\ +2 \\ \hline 5_{10} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 11 \\ +10 \\ \hline 101_2 \end{array}$$

دائیں ہاتھ شنائی 11 اور 10 جمع کرکے 101_2 حاصل کیا گیا جو اعشاری نظام میں $5 = 2 + 3$ ہوگا، جبکہ بائیں ہاتھ شنائی 1101 اور 1001 جمع کرکے 10110_2 حاصل کیا گیا جو اعشاری نظام میں $22 = 9 + 13$ کے مترادف ہے۔

آخر میں، کسری اعداد کی جمع کی ایک مثال دیکھتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 1 \\ 5.75 \\ +3.50 \\ \hline 9.25_{10} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 111 \\ 101.11 \\ +\ \ 11.10 \\ \hline 1001.01_2 \end{array}$$

۲.۱ شنائی نظام میں اعداد منفی کرنا

دوبِٹ (شنائی عدد) منفی کرنے کے درج ذیل چار ممکنات پائے جاتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 0 - 0 &= 0 \\ 1 - 0 &= 1 \\ 1 - 1 &= 0 \\ 0 - 1 &= 1 \quad \text{(ادھار ایک)} \end{aligned}$$

ی آخری مساوات میں صفر سے ایک اس صورت منفی کیا دکھایا گیا ہے جب ادھار 1 لینا ممکن ہو۔ ایک اور مثال دیکھتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 6.25 \\ -5.50 \\ \hline 0.75_{10} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 110.01 \\ -101.1 \\ \hline 0.11_2 \end{array}$$

شنائی منفی کی چند مثالیں حل کرکے اعشاری منفی سے ان کی تصدیق کریں۔ ایسا کرنے سے زیادہ وضاحت ہوگی۔

۲.۲ اساسی تکملہ یا تکملہ r

کسی بھی اساسی نظام میں، ہندسہ کو اساس ، (r) ، سے منفی کرنے سے ہندسے کا اساسی تکملہ (یا تکملہ r) حاصل ہوگا۔ یوں، ہندسہ اور ہندسے کے اساسی تکملہ کا مجموعہ اساس کے برابر ہوگا۔ مثلاً، اعشاری نظام میں

3 کا اساسی تکملہ $7 = 3 - 10$، جبکہ 7 کا اساسی تکملہ 3 اور ان دونوں کا مجموعہ $10 = 7 + 3$ اعشاری نظام کے اساس کے برابر ہے۔ اسی طرح 5 کا اساسی تکملہ 5، اور 9 کا اساسی تکملہ 1 ہو گا۔

درج بالا مثالوں سے واضح ہے کہ کسی بھی ہندسہ (مثلاً 3) کے اساسی تکملہ (یعنی 7) کا اساسی تکملہ وہی ہندسہ (یعنی 3) ہو گا۔

اساسی تکملہ کے تصور کو ایک سے زائد ہندسوں پر مبنی عدد تک وسعت دیتے ہیں۔ اساس r کے اعدادی نظام میں عدد N، جو n ہندسوں پر مبنی ہو، کے اساسی تکملہ (یا تکملہ r) سے مراد عدد $r^n - N$ ہو گا۔

اساس دس کے اساسی تکملہ کو عام طور تکملہ 10 کہتے ہیں۔ اسی طرح اساس دو کے تکملہ کو تکملہ 2 کہتے ہیں۔

اعشاری نظام میں عدد 10^n کے سب سے وزنی ہندسے کی قیمت 1 ہو گی، اور اس کی دائیں جانب 0 قیمت کے n ہندسے ہوں گے۔

$$
\begin{aligned}
10^2 &= 100_{10}\\
10^5 &= 100000_{10}\\
10^7 &= 10000000_{10}
\end{aligned}
\tag{۲.۱}
$$

اعشاری نظام کی اساس $r = 10$ ہے۔ اس نظام میں عدد N، جس میں n ہندسے ہوں، کے اساسی تکملہ (یعنی تکملہ 10) سے مراد عدد $10^n - N$ ہو گا۔ یوں $N = 5391$ جس میں چار ہندسے $(n = 4)$ ہیں، کا تکملہ 10 درج ذیل ہو گا۔

$$(10^4 - 5391)_{10} = (10000 - 5391)_{10} = 4609_{10} \tag{۲.۲}$$

اسی طرح عدد 320753 جس میں 6 ہندسے ہیں کا اساسی تکملہ:

$$(10^6 - 320753)_{10} = (1000000 - 320753)_{10} = 679247_{10} \tag{۲.۳}$$

اور 679247 کا تکملہ 2 درج ذیل ہو گا۔

$$(10^6 - 679247)_{10} = (1000000 - 679247)_{10} = 320753_{10} \tag{۲.۴}$$

ہر عدد N کے اساسی تکملہ کا اساسی تکملہ وہی عدد N ہو گا۔ اس کا ثبوت کچھ یوں ہے: عددی N کا اساسی تکملہ $r^n - N$ اور عدد $r^n - N$ کا اساسی تکملہ $r^n - (r^n - N)$ یعنی N ہو گا۔

شنائی نظام کی اساس 2 ہے لہٰذا n ہندسوں پر مبنی شنائی عدد N کا تکملہ 2 (یعنی اساسی تکملہ) $2^n - N$ ہو گا۔

شنائی نظام میں عدد 10^n کے سب سے وزنی ہندسے کی قیمت 1 ہو گی، اور اس کی دائیں جانب 0 قیمت کے n ہندسے ہوں گے۔

$$
\begin{aligned}
2^2 &= 100_2\\
2^5 &= 100000_2\\
2^7 &= 10000000_2
\end{aligned}
\tag{۲.۵}
$$

یوں 1011_2 اور 10001_2 کے تکملہ 2 بالترتیب درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}(2^4 - 1011)_2 &= (10000 - 1011)_2 = 0101_2\\(2^5 - 10001)_2 &= (100000 - 10001)_2 = 01111_2\end{aligned} \tag{۲.۶}$$

۲.۳ اساس منفی ایک تکملہ یا تکملہ $(r-1)$

اساس r کے نظام میں، عدد N کے اساس منفی ایک $(r-1)$ تکملہ سے مراد $r^n - 1 - N$ ہے۔ اعشاری نظام میں اساس منفی ایک تکملہ کو عموماً تکملہ 9 اور شنائی نظام میں اسے تکملہ 1 کہتے ہیں۔

اعشاری نظام میں 376 اور 7852 کے تکملہ 9، بالترتیب مندرجہ ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}10^3 - 1 - 376 &= 1000 - 1 - 376\\&= 999 - 376\\&= 623_{10}\\10^4 - 1 - 7852 &= 10000 - 1 - 7852\\&= 9999 - 7852\\&= 2147_{10}\end{aligned} \tag{۲.۷}$$

اعشاری نظام میں عدد $10^n - 1$، n ہندسوں پر مشتمل ہوگا، جہاں ہر ہندسے کی قیمت 9 ہوگی۔

$$\begin{aligned}10^3 - 1 &= 1000 - 1 = 999_{10}\\10^6 - 1 &= 1000000 - 1 = 999999_{10}\\10^8 - 1 &= 100000000 - 1 = 99999999_{10}\end{aligned} \tag{۲.۸}$$

شنائی نظام میں عدد $2^n - 1$، n ہندسوں پر مشتمل ہوگا، جہاں ہر ہندسے کی قیمت 1 ہوگی۔

$$\begin{aligned}2^3 - 1 &= 1000 - 1 = 111_2\\2^5 - 1 &= 100000 - 1 = 11111_2\\2^8 - 1 &= 100000000 - 1 = 11111111_2\end{aligned} \tag{۲.۹}$$

شنائی نظام میں 1001_2 اور 101110_2 کے تکملہ 1، بالترتیب، درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}2^4 - 1 - 1001 &= 1111 - 1001 = 0110_2\\2^6 - 1 - 101110 &= 111111 - 101110 = 010001_2\end{aligned} \tag{۲.۱۰}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شنائی عدد 0 (صفر) کا تکملہ 1، شنائی عدد 1 (ایک) ہوگا، اور اسی طرح 1 کا تکملہ 1، شنائی عدد 0 ہوگا۔ ہم کہتے ہیں 0 کا متمم 1 اور 1 کا متمم 0 ہے۔

شنائی عدد N کا اساس منفی ایک تکملہ، $\overline{N}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\overline{1}_2 &= 0_2\\
\overline{0}_2 &= 1_2\\
\overline{1001}_2 &= 0110_2\\
\overline{101110}_2 &= 010001_2
\end{aligned}
\tag{۲.۱۱}
$$

ان دو مثالوں سے ایک اہم حقیقت واضح ہوتا ہے: شنائی عدد میں ہر ہندسے کا متمم لینے سے (یعنی ہر 0 کو 1، اور ہر 1 کو 0 کرنے سے) اس کا تکملہ 1 یا متمم حاصل ہو گا۔

شنائی عدد کے ہر بٹ کا متمم لینے سے عدد کا تکملہ 1 (یعنی متمم) حاصل ہو گا۔

اساس r نظام میں تکملہ r سے مراد $r^n - N$ اور تکملہ $(r-1)$ سے مراد $r^2 - 1 - N$ ہے، لہٰذا تکملہ $(r-1)$ کے ساتھ 1 جمع کر کے تکملہ r حاصل کیا جا سکتا ہے، یعنی عدد کے متمم کے ساتھ 1 جمع کر کے تکملہ 2 حاصل ہو گا۔ اس طرح اساسی تکملہ کا حصول عموماً زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔ مساوات ۲.۶ میں دیے گئے اعداد کے تکملہ 2 ہم اس طریقہ سے حاصل کرتے ہیں۔

چونکہ $\overline{1011} = 0100$ ہے لہٰذا 1011 کا اساسی تکملہ $0101 = 1 + 0100$ ہو گا۔ اسی طرح 10001 کے متمم 01110 کے ساتھ 1 جمع کرنے سے اس کا اساسی تکملہ $01111 = 1 + 01110$ حاصل ہو گا۔

۲.۴ دو اعداد کی منفی بذریعہ اساسی تکملہ

قلم و کاغذ کے ساتھ، M سے N منفی کرنا چھوٹی جماعتوں میں سکھایا جاتا ہے۔ برقیات میں تکملہ کی مدد سے دو اعداد منفی کیے جاتے ہیں، جہاں دونوں اعداد میں ہندسوں کی تعداد برابر ہونا لازم ہے۔ اساسی تکملہ کی مدد سے $M - N$ مندرجہ ذیل طریقہ کار سے حاصل کیا جاتا ہے۔

- دونوں اعداد میں ہندسوں کی تعداد برابر کرنے کی خاطر، کم ہندسوں والے عدد کی بائیں جانب (درکار تعداد کی) اضافی صفریں چسپاں کریں۔ فرض کریں اب ہر عدد میں n ہندسے پائے جاتے ہیں۔
- M کے ساتھ N کا اساسی تکملہ جمع کر کے **مجموعہ** $M + r^n - N$ حاصل کریں۔
- M کی قیمت N کی قیمت سے زیادہ ہونے کی صورت میں، آخری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا ہو گا، جس کی بنا پر مجموعہ $n + 1$ ہندسوں پر مشتمل ہو گا اور اس کا بایاں ہندسہ 1 ہو گا۔ اس بائیں ہندسے کو (یعنی حاصل 1 کو) نظر انداز کریں؛ باقی n ہندسوں پر مبنی عدد اصل جواب ہو گا۔
- M کی قیمت N کی قیمت سے کم ہونے کی صورت میں، آخری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا **نہیں** ہو گا؛ مجموعہ منفی عدد کو ظاہر کرے گا، اور n ہندسوں پر مبنی ہو گا۔ مجموعے کا اساسی تکملہ لے کر اس کی بائیں جانب منفی علامت منسلک کر کے جواب حاصل ہو گا۔

ان دونوں صورتوں کی وضاحت مثالوں سے ہو گی۔

مثال ۲.۱: تکملہ 10 کی مدد سے اعشاری اعداد کا حاصل منفی $7852 - 974$ دریافت کریں۔

جواب: یہاں بڑا عدد 7852 چار ہندسوں پر مبنی ہے، لہٰذا چھوٹا عدد 0974 لکھیں اور $n = 4$ لیں۔ یوں 0974 کا اساسی تکملہ $10000 - 0974 = 9026$ ہوگا، جس کو 7852 کے ساتھ جمع کرنے سے 5 ہندسوں کا مجموعہ $7852 + 9026 = 16878$ حاصل ہوگا۔ چونکہ یہ عدد 5 ہندسوں پر مبنی ہے، لہٰذا بائیں ہندسے کو نظر انداز کرتے ہوئے 6878 کو جواب تسلیم کرتے ہیں۔ (ہم در حقیقت آخری ہندسوں کی جمع سے پیدا حاصل 1 کو رد کرتے ہیں۔ چونکہ یہ مجموعہ میں بائیں ترین مقام پر اترتا ہے لہٰذا مجموعہ کا بایاں ہندسہ رد کر کے جواب حاصل ہوگا۔)

$$\begin{array}{r} 10000 \\ -0974 \\ \hline 9026 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1 \\ 7852 \\ +9026 \\ \hline 16878 \end{array}$$

حاصل 1 کو نظر انداز کر کے
6878 کو جواب تسلیم کرتے ہیں

□

مثال ۲.۲: تکملہ 10 کی مدد سے $7852 - 974$ حاصل کریں۔

جواب: عدد 7852 کے اساسی تکملہ $2148 = 10000 - 7852$ کا 0974 کے ساتھ مجموعہ لیتے ہوئے: $3122 = 2148 + 0974$ آخری حاصل 1 نہیں پیدا ہوتا، لہٰذا یہ مجموعہ 4 ہندسوں پر مشتمل ہے؛ اس کے اساسی تکملہ $6878 = 10000 - 3122$ کے ساتھ منفی علامت چسپاں کرتے ہوئے -6878 کو جواب تسلیم کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 10000 \\ -7852 \\ \hline 2148 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0974 \\ +2148 \\ \hline 3122 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10000 \\ -3122 \\ \hline 6878 \end{array}$$

جواب
-6878

□

ثنائی اعداد بھی بالکل اسی طرح منفی کیے جاتے ہیں۔ ان کی بھی دو مثالیں پیش کرتے ہیں۔

مثال ۲.۳: اساسی تکملہ کی مدد سے مندرجہ ذیل حاصل کریں۔

(ا) $11001_2 - 1011_2$ اور (ب) $1011_2 - 11001_2$

جواب: (ا) چونکہ $\overline{11001} = 00110$ ہے، لہٰذا تکملہ دو $00110 + 1 = 00111$ ہوگا۔ اس کو دوسرے عدد 01011_2 (جس کی بائیں جانب اضافی 0 چسپاں کر کے ہندسوں کی تعداد پوری کی گئی) کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 01011 \\ +00111 \\ \hline 10010 \end{array}$$

بائیں آخری ہندسوں کو جمع کرتے ہوئے حاصل 1 پیدا نہیں ہوا، لہٰذا اس کا تکملہ 2 لینا ہوگا۔ چونکہ $\overline{10010} = 01101$ ہے لہٰذا اساسی تکملہ $01101 + 1 = 01110$ ہوگا، جس کی بائیں جانب منفی علامت چسپاں کرکے نتیجہ -01110_2 حاصل کرتے ہیں۔

جواب: (ب) یہاں ایک عدد پانچ ہندسوں پر مشتمل ہے، لہٰذا دوسرے عدد میں بھی پانچ ہندسے پورے کیے جائیں گے۔ یوں 1011 کو 01011 لکھ کر، اس کے متمم $10100 = \overline{01011}$ سے عدد کا اساسی تکملہ $10100 + 1 = 10101$ حاصل کرکے، دوسرے عدد کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 1 \\ 11001 \\ +10101 \\ \hline 101110 \end{array}$$

آخری ہندسے جمع کرتے ہوئے حاصل 1 پیدا ہوا جس کو نظرانداز کرکے باقی مجموعہ، 01110_2، کو نتیجہ تسلیم کرتے ہیں۔ □

۲.۵ دو اعداد کی منفی بذریعہ اساس منفی ایک تکملہ

اساس منفی ایک تکملہ کی مدد سے بھی $M - N$ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اس کا طریقہ کار درج ذیل ہے جہاں دونوں اعداد میں ہندسوں کی تعداد برابر ہونا لازم ہے۔

- دونوں اعداد میں ہندسوں کی تعداد برابر کرنے کی خاطر، کم ہندسوں والے عدد کی بائیں جانب (درکار تعداد کی) اضافی صفریں چسپاں کریں۔ فرض کریں اب ہر عدد میں n ہندسے پائے جاتے ہیں۔
- M کے ساتھ N کا اساس منفی ایک تکملہ جمع کرکے **مجموعہ** $M + r^n - 1 - N$ حاصل کریں۔
- M کی قیمت N کی قیمت سے زیادہ ہونے کی صورت میں، آخری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا ہوگا، جس کی بنا پہ مجموعہ $n + 1$ ہندسوں پر مشتمل ہوگا اور اس کا بایاں ہندسہ 1 ہوگا۔ اس بائیں ہندسے کو (یعنی حاصل 1 کو) نظرانداز کرنے کی بجائے، مجموعہ سے خارج کرکے، 1 وزن مختص کریں اور n ہندسوں کے باقی مجموعہ کے ساتھ جمع کرکے جواب حاصل کریں۔ اس عمل کو واپسی آخری حاصل ایک کہتے ہیں۔
- M کی قیمت N کی قیمت سے کم ہونے کی صورت میں، آخری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا **نہیں** ہوگا؛ مجموعہ منفی عدد کو ظاہر کرے گا، اور n ہندسوں پر مبنی ہوگا۔ مجموعے کا اساس منفی ایک تکملہ لے کر اس کی بائیں جانب منفی علامت منسلک کرکے جواب حاصل ہوگا۔

ان دونوں صورتوں کی وضاحت مثالوں سے ہوگی۔

مثال ۲.۴: تکملہ 9 استعمال کرتے ہوئے $7852 - 974$ حاصل کریں۔

جواب: عدد 974 کے بائیں 0 چسپاں کر کے اس میں ہندسوں کی تعداد پوری کریں اور 7852 کے اساس منفی ایک تکملہ $9999 - 7852 = 2147$ کے ساتھ جمع کریں۔

$$\begin{array}{r} 2147 \\ +0974 \\ \hline 3121 \end{array}$$

آخری (بائیں) ہندسے جمع کرنے سے حاصل 1 پیدا نہیں ہوا، لہٰذا مجموعہ چار ہندسوں پر مشتمل ہے۔ اس کا اساس منفی ایک تکملہ $9999 - 3121 = 6878$ کے بائیں منفی علامت منسلک کر کے جواب -6878 حاصل کرتے ہیں۔ □

مثال ۲.۵: تکملہ 9 استعمال کرتے ہوئے $7852 - 974$ حاصل کریں۔

جواب چھوٹے عدد 974 میں ہندسوں کی تعداد پوری کر کے اس کے اساس منفی ایک تکملہ $9999 - 0974 = 9025$ کو 7852 کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 1 \\ 7852 \\ +9025 \\ \hline 16877 \end{array}$$

آخری (بائیں) ہندسے جمع کرتے ہوئے حاصل 1 پیدا ہوا جس کی بنا پر مجموعہ 5 ہندسوں پر مشتمل ہے۔ ہم اس حاصل 1 کو وزن 1 مختص کر کے باقی 4 ہندسوں پر مبنی مجموعہ 6877 کے ساتھ جمع کر کے جواب $6877 + 1 = 6878$ حاصل کرتے ہیں۔ □

اب ہم ثنائی اعداد کی مثال لیتے ہیں۔

مثال ۲.۶: مندرجہ ذیل کو تکملہ 1 کی مدد سے حل کریں۔

(ا) $101110_2 - 11011_2$، (ب) $11011_2 - 101110_2$

حل: (ا) منفی ہونے والے عدد میں ہندسوں کی تعداد پوری کر کے اس کا متمم:

$$\overline{011011} = 100100$$

دوسرے عدد کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 1 \\ 101110 \\ +100100 \\ \hline 1010010 \end{array}$$

آخری حاصل 1 کو باقی عدد سے علیحدہ کر کے اسے 1 کا وزن مختص کر کے (یعنی اس کو اکائی تصور کر کے)، دائیں چھ ہندسوں پر مشتمل مجموعہ 010010 کے ساتھ جمع کرتے ہوئے جواب حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 010010 \\ +1 \\ \hline 010011 \end{array}$$

(ب) متمم $010001 = \overline{101110}$ کو دوسرے عدد کے ساتھ جمع کرتے ہیں۔

$$\begin{array}{r} 010001 \\ +011011 \\ \hline 101100 \end{array}$$

چونکہ آخری حاصل صفر ہے، لہٰذا مجموعے کے متمم $010011 \quad = \quad \overline{101100}$ کے ساتھ منفی کی علامت چسپاں کر کے جواب -010011_2 حاصل کرتے ہیں۔ $\square$

۲.٦ مثبت اور منفی اعداد

روز مرہ زندگی میں مثبت اعداد لکھتے ہوئے انہیں بغیر کسی علامت کے، یا مثبت علامت $(+)$ کے ساتھ لکھا جاتا ہے، البتہ منفی اعداد کے ساتھ منفی علامت $(-)$ ضرور لکھی جاتی ہے۔ یوں درج ذیل اعداد درست لکھے گئے ہیں۔

$$+3025, \qquad 3025, \qquad -3025$$

کسی بھی عدد کے مثبت یا منفی ہونے کو اس عدد کی علامت کہتے ہیں۔ یوں، وہ اعداد جو مثبت علامت $(+)$ یا منفی علامت $(-)$ رکھتے ہوں علامت دار اعداد کہلاتے ہیں، اور جن کی علامت نہ ہو بے علامت اعداد کہلاتے ہیں۔ اعداد کو ان کی علامت اور قدر سے ظاہر کرنے کو علامت دار قدر اظہار کہتے ہیں۔

کمپیوٹر شنائی اعداد، 0 اور 1، استعمال کرتا ہے، اور ہر معلومات کو انہیں سے ظاہر کرتا ہے۔ روایتاً مثبت علامت $(+)$ کو 0 (صفر) اور منفی علامت $(-)$ کو 1 (ایک) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ علامت عدد کی بائیں جانب لکھی جاتی ہے۔ یوں $+5_{10}$ کو چار شنائی ہندسوں سے ظاہر کرتے ہوئے، بایاں ہندسہ مثبت علامت $(+)$ کو جبکہ باقی تین ہندسے 5 کو ظاہر کریں گے۔ اسی طرح -5_{10} کو آٹھ شنائی ہندسوں سے ظاہر کرتے ہوئے، بایاں ہندسہ منفی علامت $(-)$ کو جبکہ باقی سات ہندسے 5 کو ظاہر کریں گے۔

$$\underbrace{0}_{+}\underbrace{1\ 0\ 1}_{5_{10}} \qquad \underbrace{1}_{-}\underbrace{0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1}_{5_{10}}$$

ایک دلچسپ حقیقت پر غور کریں۔ اگر ہم 1101_2 میں بایاں ہندسہ علامت تصور کریں تب یہ -5_{10} کو ظاہر کرے گا، لیکن اگر ہم چاروں ہندسوں کو ایک عدد تصور کریں تب یہ D_{16} یا 13_{10} کو ظاہر کرتا ہے۔

جدول ۲.۱: چار ہندسوں کے علامت دار اعداد

شنائی	علامت دار
0111_2	$+7_{10}$
0110_2	$+6_{10}$
0101_2	$+5_{10}$
0100_2	$+4_{10}$
0011_2	$+3_{10}$
0010_2	$+2_{10}$
0001_2	$+1_{10}$
0000_2	$+0_{10}$
1000_2	-0_{10}
1001_2	-1_{10}
1010_2	-2_{10}
1011_2	-3_{10}
1100_2	-4_{10}
1101_2	-5_{10}
1110_2	-6_{10}
1111_2	-7_{10}

یہ جاننا ضروری ہے، آیا شنائی اعداد کا بایاں ہندسہ علامت کو ظاہر کرتا ہے یا یہ عدد کا حصہ ہے؛ یہ فیصلہ اعداد استعمال کرنے والے پر ہے۔ کمپیوٹر استعمال کرتے وقت آپ فیصلہ کرتے ہیں کہ علامت دار یا بے علامت (غیر علامت دار) اعداد استعمال کریں گے۔ جدول ۲.۱ میں چار شنائی ہندسوں پر مشتمل علامت دار اعداد دکھائے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ صفر کو دو مختلف طریقوں سے ظاہر کیا جا سکتا ہے، ان میں ایک مثبت اور دوسرا منفی ہے!

اس جدول میں چار شنائی ہندسوں سے اعداد لکھے گئے؛ کمپیوٹر میں اعداد، عموماً، ایک بائٹ استعمال کرتے ہوئے لکھا جاتا ہے۔ ایک بائٹ 8 شنائی ہندسوں کو کہتے ہیں۔ علامت دار اعداد کو بائٹ میں لکھتے ہوئے، دائیں سات ہندسے عدد کی قدر جبکہ بایاں آخری ہندسہ اس کی علامت ظاہر کرے گا۔

$$
\begin{aligned}
00000101_2 &= +5_{10}\\
01111111_2 &= +127_{10}\\
10000101_2 &= -5_{10}\\
11111111_2 &= -127_{10}\\
00000000_2 &= +0_{10}\\
10000000_2 &= -0_{10}
\end{aligned}
$$

ان اعداد میں بھی مثبت اور منفی صفر پایا گیا؛ روزمرہ زندگی میں صفر کو ہم مثبت تصور کرتے ہیں۔

جدول ۲.۲: علامت دار تکملہ ایک اور تکملہ دو اعداد

اعشاری عدد	علامت دار قدر	علامت دار تکملہ ایک	علامت دار تکملہ دو
$+7$	0111	0111	0111
$+6$	0110	0110	0110
$+5$	0101	0101	0101
$+4$	0100	0100	0100
$+3$	0011	0011	0011
$+2$	0010	0010	0010
$+1$	0001	0001	0001
$+0$	0000	0000	0000
-0	1000	1111	نہیں پایا جاتا
-1	1001	1110	1111
-2	1010	1101	1110
-3	1011	1100	1101
-4	1100	1011	1100
-5	1101	1010	1011
-6	1110	1001	1010
-7	1111	1000	1001
-8	نہیں پایا جاتا	نہیں پایا جاتا	1000

اتنا کچھ کہنے کے بعد آپ کو بتاتا چلوں کہ، کمپیوٹر میں منفی اعداد کو علامت دار قدر اظہار میں نہیں بلکہ علامت دار و تکملہ 1 یا علامت دار و تکملہ 2 نظام میں رکھا اور استعمال کیا جاتا ہے۔ اگلے حصہ میں ان نظام پر غور ہو گا۔

۷.۲ علامت دار و تکملہ نظام

کمپیوٹر میں عددی برقیات کی مدد سے اعداد جمع یا منفی کیے جاتے ہیں۔ یہ اعمال اساسی تکملہ یا اساس منفی ایک تکملہ (حصہ ۴.۲ اور حصہ ۵.۲ دیکھیں) استعمال کرتے ہوئے زیادہ خوش اسلوبی سے سرانجام دیے جاتے ہیں۔

کمپیوٹر چونکہ ثنائی اعداد استعمال کرتا ہے، لہٰذا اس میں منفی اعداد تکملہ 1 یا تکملہ 2 میں لکھے جاتے ہیں۔ جدول ۲.۲ میں چار ثنائی ہندسی (چارِبٹ) علامت دار اعداد کی تکملہ 1 اور تکملہ 2 روپ پیش کی گئی ہے۔

جدول ۲.۲ سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مثبت عدد، ثنائی ہندسوں میں ایک ہی طریقہ سے لکھا جاتا ہے، جبکہ منفی عدد تین طریقوں سے لکھا جا سکتا ہے۔ یوں تینوں طریقوں میں مثبت عدد کو سادہ ثنائی عدد لکھیں۔

مثبت عدد $+x$ کی علامت دار روپ میں علامتی بٹ 0 سے 1 کرنے سے $-x$ کا علامت دار روپ حاصل ہو گا۔ یوں -5 کو علامت دار روپ میں لکھنے کی خاطر $+5$ کو علامت دار روپ 0101_2 میں لکھ کر علامتی بٹ 1 کرنے سے -5 کی علامت دار روپ 1101_2 حاصل ہو گی۔

منفی عدد $-x$ کو علامت دار تکملہ ایک روپ میں لکھنے کی خاطر $+x$ کو علامت دار شنائی عدد (یعنی سادہ شنائی روپ میں) لکھ کر اس کا تکملہ 1 لیں۔ یاد رہے کہ تکملہ 1 حاصل کرتے ہوئے شنائی عدد کے ہر ہندسہ (بمع علامتی بٹ) کا متمم لینا ہو گا۔ یوں -5 کو علامت دار تکملہ ایک روپ میں لکھنے کی خاطر $+5$ کو 0101_2 لکھ کر متمم لیں جو درکار روپ 1010_2 دے گا۔

منفی عدد $-x$ کو علامت دار تکملہ دو روپ میں لکھنے کی خاطر $+x$ کو علامت دار شنائی عدد (یعنی سادہ شنائی روپ میں) لکھ کر اس کا تکملہ 2 لیں۔ یاد رہے کہ تکملہ 2 حاصل کرتے ہوئے شنائی عدد کے ہر ہندسہ (بمع علامتی بٹ) کا متمم لینا ہو گا۔ یوں -5 کو علامت دار تکملہ دو روپ میں لکھنے کی خاطر $+5$ کو 0101_2 لکھ کر تکملہ دو لیں جو درکار روپ 1011_2 دے گا۔

باب ۳

بولین الجبرا

بولین الجبرا انگلستان کے ریاضی دان جارج بولی کے نام سے جانا جاتا ہے، جنہوں نے اس الجبرا کو دریافت کیا۔ بولین الجبرا ذہنی سوچ یعنی منطق کو الجبرائی روپ میں لکھنے کی صلاحیت رکھتی ہے۔ اس لئے حیرانی کی بات نہیں کہ کمپیوٹر اسی کو استعمال کرتا ہے۔

۳.۱ بولین الجبرا کے بنیادی تصورات

عام الجبرا میں متغیرات استعمال کرتے ہوئے تصور کیا جاتا ہے کہ ان کی قیمت کچھ بھی ہو سکتی ہے۔ مثلاً، تفاعل $z = f(x, y)$، جہاں x اور y آزاد متغیرات جبکہ z تابع متغیر ہے، میں متغیرات کی چند ممکنہ قیمتیں درج ذیل ہیں۔

x	y	z
0	0	0
1	2	5
2	1	4
3	2	7
2	2	6
3	1	5

اس تفاعل جس کو ایک نامکمل جدول کے روپ میں پیش کیا گیا ہے کا الجبرائی روپ درج ذیل ہے۔

$$z = x + 2y$$

اس کے برعکس، بولین الجبرا میں متغیرات کی صرف دو ممکنہ قیمتیں ہیں۔ ان دو قیمتوں کو عموماً 0 (صفر) اور 1 (ایک) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ بولین تفاعل کی چند مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

X	Y	Z
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

جدول ۳.۱: دو متغیر منطقی ضرب

۳.۱.۱ منطقی ضرب

تصور کریں X اور Y آزاد بوولین متغیرات ہیں، جبکہ Z ان کا تابع بوولین متغیر $Z = f(X,Y)$ ہے۔ چونکہ X بوولین متغیر ہے، لہٰذا اس کی ممکنہ قیمتیں صرف 0 اور 1 ہیں۔ اسی طرح Y بھی بوولین متغیر ہے، لہٰذا اس کی قیمت بھی صرف 0 اور 1 ہو سکتی ہے۔ تابع متغیر Z بھی بوولین متغیر ہے۔ اس طرح اگرچہ اس کی قیمت X اور Y کی تابع ہے، اس کے باوجود Z کی قیمت صرف 0 یا 1 ہی ہو سکتا ہے۔ متغیرات X اور Y درج ذیل چار ممکنہ ترتیب میں پائے جا سکتے ہیں۔

X	Y
0	0
0	1
1	0
1	1

ان چار ممکنہ صورتوں میں Z کی قیمت 0 یا 1 ہو گی۔

آئیں، جدول ۳.۱ میں پیش کیے گئے منطقی تفاعل پر غور کرتے ہیں جس کی تمام ممکنہ قیمتیں اس جدول میں دی گئی ہیں۔ اس مثال میں تابع متغیر Z کی قیمت صرف اس وقت 1 ہے جب X اور Y دونوں کی قیمت 1 ہے۔ یہی قیمتیں X اور Y کی سادہ ضرب $X \cdot Y$ سے بھی حاصل ہوتی ہیں (ذیل دیکھیں)۔

$$
\begin{aligned}
0 \cdot 0 &= 0 \\
0 \cdot 1 &= 0 \\
1 \cdot 0 &= 0 \\
1 \cdot 1 &= 1
\end{aligned}
$$

اسی کی بنا پر جدول ۳.۱ میں پیش تفاعل (اور عمل) کو بوولین ضرب یا منطقی ضرب کہتے ہیں۔ بوولین ضرب کو آزاد متغیرات کے درمیان نقطہ " · " سے یا آزاد متغیرات کو قریب قریب لکھنے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں بوولین ضرب درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$
\begin{aligned}
Z &= X \cdot Y \\
Z &= XY \qquad \text{(بوولین ضرب)}
\end{aligned} \tag{۳.۱}
$$

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

جدول ۳.۲: تین متغیر بولین ضرب

X	Y	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

جدول ۳.۳: دو متغیر منطقی جمع

X	Y	S
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	2

جدول ۳.۴: دو شنائی اعداد کا سادہ مجموعہ

منطقی ضرب کے تصور کو وسعت دے کر متعدد آزاد متغیرات کے لئے بیان کیا جا سکتا ہے۔ منطقی ضرب کی عمومی تعریف پیش کرتے ہیں۔

تعریف: منطقی ضرب اس صورت 1 دیگا جب تمام آزاد متغیرات کی قیمت 1 ہو۔

□

تین آزاد متغیرات کے منطقی ضرب تفاعل $Z = ABC$ کو جدول ۳.۲ میں پیش کیا گیا ہے۔

۳.۱.۲ منطقی جمع

دو آزاد متغیرات کے بولین تفاعل کی ایک اور مثال لیتے ہیں جس کو جدول ۳.۳ میں پیش کیا گیا ہے۔ اب Z اس صورت 1 کے برابر ہے جب X یا Y یا دونوں کی قیمت 1 ہو۔ اس بولین عمل کو بولین جمع یا منطقی جمع کہتے ہیں۔

آزاد متغیرات X اور Y کا (روزمرہ) سادہ الجبرائی مجموعہ $S = X + Y$ جدول ۳.۴ میں پیش کیا گیا ہے۔

جدول ۳.۳ اور جدول ۳.۴ کے اولین تین نتائج ایک جیسے ہیں۔ اس مشابہت کی بنا جدول ۳.۳ میں دیے گئے بولین تفاعل کو بولین جمع یا منطقی جمع کہتے ہیں اور اس بولین تفاعل کو جمع کے نشان " $+$ " سے ہی ظاہر کیا جاتا ہے۔ یوں

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

جدول ۳.۵: تین متغیر منطقی جمع

X	Z
0	1
1	0

جدول ۳.۶: منطقی نفی یا متمم

جدول ۳.۳ میں پیش بوولین جمع تفاعل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$Z = X + Y \quad \text{(بوولین جمع)} \tag{۳.۲}$$

یہ بوولین تفاعل کی مساوات ہے جس کو عام الجبرائی جمع ہر گز نہ سمجھا جائے۔ بالخصوص، بوولین جمع کرتے وقت یاد رہے کہ $1 + 1 = 1$ ہے۔

بوولین جمع کے تصور کو وسعت دے کر متعدد آزاد متغیرات کے لئے بیان کیا جا سکتا ہے۔ بوولین جمع کی عمومی تعریف درج ذیل ہے۔

تعریف: منطقی جمع اس صورت 1 دیگا جب آزاد متغیرات میں کم سے کم ایک متغیر کی قیمت 1 ہو۔

□

تین متغیر منطقی جمع تفاعل $Z = A + B + C$ جدول ۳.۵ میں پیش کیا گیا ہے۔ یاد رہے کہ تین آزاد متغیرات کے منطقی جمع کا الجبرائی جمع کے ساتھ کوئی تعلق نہیں۔ یہاں جمع کی علامت بوولین جمع کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا یہاں $1 + 1 + 1 = 1$ ہو گا۔

۳.۱.۳ منطقی نفی

بوولین تفاعل $Z = f(X)$ کی تیسری مثال لیتے ہیں جہاں آزاد متغیر X اور تابع متغیر Z کا تعلق جدول ۳.۶ میں پیش کیا گیا ہے۔

اس تفاعل کو بوولین نفی کہتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ در حقیقت، تابع متغیر Z، آزاد متغیر کا متمم ہے۔ یوں بوولین نفی درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$Z = \overline{X} \quad \text{(بوولین نفی یا متمم)} \tag{۳.۳}$$

بوولین نفی صرف ایک آزاد متغیر کے لئے بیان کیا جا سکتا ہے، اور اس کی تعریف درج ذیل ہے۔

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

جدول ۳.۸: تین متغیر بولین بلا شرکت جمع

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

جدول ۳.۷: دو متغیر منطقی بلا شرکت جمع

تعریف: بولین نفی آزاد متغیر کا متمم دیتا ہے۔

□

۳.۱.۴ منطقی بلا شرکت جمع

دو آزاد متغیرات کا ایسا بولین تفاعل جدول ۳.۷ میں دکھایا گیا ہے، جس کا تابع متغیر اس صورت 1 ہے جب صرف ایک آزاد متغیر 1 ہو۔ یہ دو متغیر بولین بلا شرکت جمع ہے۔ اس تصور کو متعدد آزاد متغیرات تک وسعت دے کر بیان کرتے ہیں۔

تعریف: طاق تعداد کے آزاد متغیرات 1 ہونے کی صورت میں بولین بلا شرکت کا تابع متغیر 1 ہو گا۔

□

تین آزاد متغیر بلا شرکت جمع تفاعل کو جدول ۳.۸ میں پیش کیا گیا ہے۔

دو اور تین آزاد متغیر بولین بلا شرکت کی مساوات درج ذیل ہوں گی۔

$$
\begin{aligned}
Z &= A \oplus B && \text{(دو آزاد متغیر بلا شرکت جمع)}\\
Z &= A \oplus B \oplus C && \text{(تین آزاد متغیر بلا شرکت جمع)}
\end{aligned}
\tag{۳.۴}
$$

۳.۱.۵ منطقی ضد بلا شرکت جمع

بولین بلا شرکت جمع تفاعل کا نفی (یعنی متمم) لینے سے بولین ضد بلا شرکت جمع حاصل ہو گا، جو دو اور تین آزاد متغیرات کے لئے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
Z &= \overline{A \oplus B}\\
Z &= \overline{A \oplus B \oplus C} && \text{(تین متغیر منطقی ضد بلا شرکت جمع)}
\end{aligned}
\tag{۳.۵}
$$

A	B	Z
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

جدول ۹.۳: دو متغیر منطقی ضد بلا شرکت جمع

A	B	C	Z
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

جدول ۱۰.۳: تین متغیر بوولین ضد بلا شرکت جمع

جدول ۷.۳ اور جدول ۸.۳ میں تابع متغیر نفی کرنے سے بالترتیب دو اور تین بوولین ضد بلا شرکت تفاعل حاصل ہوں گے جنہیں جدول ۹.۳ اور جدول ۱۰.۳ میں پیش کیا گیا ہے۔

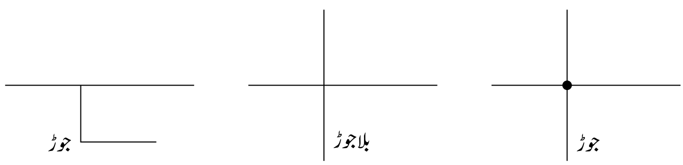
۳.۲ برقی تاروں میں جوڑ کی وضاحت

درج ذیل شکل پر غور کریں جس میں دو برقی تاروں کے بیچ جوڑ کی وضاحت کی گئی ہے۔

جہاں ایک تار دوسری تار کے اوپر سے گزرتی ہو اور دونوں آپس میں جڑی ہوں، وہاں جوڑ کے مقام پر نقطے کا نشان لگایا جاتا ہے۔ ایسی صورت میں انہیں ایک تار تصور کیا جائے۔

جہاں تاریں آپس میں جڑی نہ ہوں وہاں انہیں بغیر نقطے کے نشان سے ایک دوسری کے اوپر سے گزرتا دکھایا جاتا ہے۔ نقطے کے نشان کی غیر موجودگی میں ان تاروں کو دو علیحدہ اور بلا جوڑ تاریں سمجھا جائے۔

تیسری صورت بھی شکل میں دکھائی گئی ہے جہاں غلط فہمی کا امکان نہیں پایا جاتا۔ اس میں ایک تار کا سر دوسری تار پر ختم ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں انہیں ایک تار تصور کیا جائے (یعنی یہ دونوں آپس میں جڑی ہیں)۔



۳.۳ عددی گیٹ

بوولین الجبرا کے تین اہم ترین تفاعل پر حصہ ۱.۳ میں غور کیا گیا۔ یہ تفاعلات عددی برقیات میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں، جہاں انہیں عددی ادوار کی مدد سے جامہ عمل پہنایا جاتا ہے۔ یہ مخصوص عددی ادوار عددی گیٹ کہلاتے ہیں۔

۱.۳.۳ ضرب گیٹ

منطقی (بوولین) ضرب تفاعل کو ضرب گیٹ سے حاصل کیا جاتا ہے، جو شکل 2.3 میں دکھایا گیا ہے۔ آزاد متغیرات، X اور Y ،ضرب گیٹ کی بائیں جبکہ تابع متغیر دائیں جانب ہے۔ آزاد متغیرات کو مداخل جبکہ تابع متغیرات کو مخارج کہتے ہیں۔ دو متغیر ضرب گیٹ کے دو مداخل اور ایک مخارج ہوں گا۔

شکل 3.3 میں ضرب گیٹ کی کارکردگی ترسیم کی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مخارج صرف اور صرف اُس صورت بلند ہوتا ہے جب ضرب گیٹ کے تمام مداخل بلند ہوں۔ اس شکل میں مداخل کو کسی خاص ترتیب سے تبدیل نہیں کیا گیا ہے۔

ضرب گیٹ کو شکل 4.3 میں بطور عددی گیٹ دکھایا گیا ہے جہاں ایک داخلی پینا کو قابو پینا کا نام دیا گیا ہے جبکہ دوسرا مداخل کہلاتا ہے۔ ضرب گیٹ کے جدول سے واضح ہے کہ جب تک قابو پینا 0 ہو، خارجی پینا 0 رہتا ہے۔ اس صورت میں مداخل پر موجود مواد، خارجی پینا تک نہیں پہنچ سکتا، یعنی اس پر 0 یا 1 کرنے کا مخارج پر کوئی اثر نہیں ہوتا؛ ہم کہتے ہیں قابو پینا نے ضرب گیٹ کو معذور کر دیا۔ اس کے برعکس اگر قابو پینا 1 ہو تب خارجی پینا پر وہی کچھ ہو گا جو مداخل پر ہے؛ ہم کہتے ہیں ضرب گیٹ مجاز کر دیا گیا ہے۔ قابو پینا پر ایک یا صفر دینے سے داخلی اشارہ (مواد) کو خارجی پینا تک پہنچنا ممکن یا ناممکن بنایا جا سکتا ہے۔ یوں یہ ایک دروازے کی طرح کام کرتا ہے۔ اسی کی بنا سے یہ گیٹ کہلاتا ہے۔ قابو پینا کو معذور اور مجاز بنانے والا پینا بھی کہتے ہیں۔ شکل 5.3 میں اس گیٹ کی کارکردگی دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جب تک گیٹ کو معذور رکھا جائے اتنی دیر یہ مداخل کو روکے رکھتا ہے اور جیسے ہی گیٹ مجاز کیا جاتا ہے مداخل پر موجود اشارہ مخارج پر خارج ہوتا ہے۔

2.3.3 جمع گیٹ منطقی جمع یعنی بوولین جمع کے تفاعل کو جمع گیٹ 13 سے حاصل کیا جاتا ہے جسے شکل 6.3 میں دکھلایا گیا ہے۔

جمع گیٹ میں اگر ایک پینا کو قابو کی پینا سمجھا جائے تو قابو پینا پر صفر دینے سے داخلی مواد کا خارجی پینا تک پہنچنا ممکن بنایا جاتا ہے جبکہ اس پر ایک دینے سے یہ ناممکن بنایا جاتا ہے۔ جمع گیٹ کی کارکردگی شکل 7.3 میں گراف کے شکل میں دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جمع گیٹ کا مخارج اُس وقت بلند ہوتا ہے جب جمع گیٹ کے مداخل میں کم از کم ایک مداخل بلند ہو۔

3.3.3 نفی گیٹ نفی کے تفاعل کو نفی گیٹ سے حاصل کیا جاتا ہے جس کی علامت شکل 8.3 میں دکھائی گئی ہے۔

نفی تفاعل صرف ایک ہی آزاد اور ایک ہی تابع متغیرہ کے لئے ممکن ہے۔ اسی وجہ سے نفی گیٹ کا ایک ہی مداخل اور ایک ہی مخارج ہوتا ہے جبکہ ضرب گیٹ اور جمع گیٹ دو یا دو سے زیادہ مداخل کے بھی ہو سکتے ہیں۔ شکل 10.3 میں تین مداخل کے ضرب اور جمع گیٹ دکھائے گئے ہیں۔

نفی گیٹ کی کارکردگی شکل 9.3 میں گراف کے شکل میں دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ نفی گیٹ کا مخارج اس کے مداخل کے اُلٹ رہتا ہے۔

ضرب گیٹ کی مخارج اس وقت ایک برابر ہوتی ہے جب اس کے تمام مداخل ایک ہوں۔ جبکہ جمع گیٹ کی مخارج اس وقت ایک ہوتی ہے جب اس کے مداخل میں سے کوئی بھی مداخل ایک ہو۔

شکل 11.3 کے حصہ (ا) میں دو عدد ضرب گیٹ جوڑے گئے ہیں۔ ساتھ ہی اس دور کا بوولین جدول دیا گیا

ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ دور تین داخلی ضرب گیٹ کا کردار ادا کر رہا ہے۔ یوں دو داخلی ضرب گیٹوں کی مدد سے زیادہ مداخل کا ضرب گیٹ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح شکل کے حصہ (ب) میں تین داخلی جمع گیٹ کا حصول دکھایا گیا ہے۔ شکل 12.3 اور شکل 13.3 میں ان گیٹوں پر مبنی ادوار کے چند مثالیں اور ان کو حل کرنا دکھایا گیا ہے۔

شکل 12.3 میں سب سے اوپر دو جمع گیٹوں کی خارجی پیناوں کو اس کے سامنے ایک جمع گیٹ کی داخلی پیناوں سے لکیروں (تاروں) کے ذریعہ جوڑا گیا ہے۔ اس طرح کی لکیریں ایک خارجی پینا سے شروع اور ایک یا ایک سے زیادہ داخلی پیناوں پر ختم ہوتی ہیں۔ یوں جڑے تار خارجی پینا پر موجود سگنل یعنیا کو سامنے گیٹ کے داخلی پینا یا پیناوں تک پہنچاتی ہیں۔ اس طرح سب سے اوپر والی تار (لکیر) کا مطلب یہ ہوا کہ بائیں جانب جمع گیٹ کی مخارج یعنید ائیں جانب جمع گیٹ کی مداخل بن گئی ہے۔

اس شکل میں اوپر سے دوسرے گیٹ یعنی جمع گیٹ کی مخارج یعنید ائیں جانب ضرب گیٹ اور نفی گیٹ دونوں کی مداخل بنی ہے۔ 4.3.3 نفی۔جمع گیٹ اور نفی۔ضرب گیٹ شکل 14.3 (ا) میں تین داخلی نفی۔جمع گیٹ اور اس کا بوولین جدول دکھایا گیا ہے۔ شکل (ب) میں تین داخلی جمع گیٹ کے ساتھ نفی گیٹ جوڑا گیا ہے۔ ان جڑواں گیٹوں کے دور کا بوولین جدول بھی یہی حاصل ہوتا ہے گویا شکل کے دونوں حصے ایک ہی تفاعل کو ظاہر کرتے ہیں۔ اسی مشابہت سے نفی اور جمع گیٹوں کے نام جوڑ کر اس گیٹ کا نام نفی۔جمع گیٹ 14 رکھا گیا ہے۔

اسی طرح شکل 15.3 میں تین داخلی نفی۔ضرب گیٹ دکھایا گیا ہے جسے نفی اور ضرب کے لفظ جوڑ کر نفی۔ضرب گیٹ 15 کا نام دیا گیا ہے۔ بالکل ضرب اور جمع گیٹوں کی طرح یہ دو قسم کے گیٹ بھی دو، تین یا ان سے زیادہ مداخل والے ہو سکتے ہیں۔

کسی بھی نفی۔جمع گیٹ کی مخارج صرف اُسی صورت ہوتا ہے جب اس کے تمام مداخلہوں جبکہ کسی بھی نفی۔ضرب گیٹ کی مخارج اُس وقت تک رہتا ہے جب تک اس کے تمام مداخلنہ ہوں۔

شکل 16.3 میں باری باری نفی۔جمع گیٹ اور نفی۔ضرب گیٹ کی مدد سے نفی گیٹ کا عمل حاصل کرنا دکھایا گیا ہے۔ یوں نفی گیٹ کی جگہ نفی۔جمع گیٹ استعمال کیا جا سکتا ہے یا پھر اس کی جگہ نفی۔ضرب گیٹ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح شکل 17.3 میں نفی۔جمع گیٹ کی مدد سے جمع گیٹ اور ضرب گیٹ کا عمل حاصل کیا گیا ہے جبکہ شکل 18.3 میں نفی۔ضرب گیٹ استعمال کرتے ہوئے جمع گیٹ اور ضرب گیٹ کا عمل حاصل کیا گیا ہے۔

اس شکل میں ضرب گیٹ بناتے وقت بائیں جانب سب سے نیچے نفی۔جمع گیٹ کے دونوں مداخل آپس میں جوڑ کر انہیں متغیرہ سے منسلک کیا گیا ہے۔

اس حصہ کے شروع میں دیکھا گیا کہ جمع، ضرب اور نفی گیٹوں کی مدد سے نفی۔جمع گیٹ اور نفی۔ضرب گیٹ حاصل کئے جا سکتے ہیں جبکہ اس حصہ کے آخر میں نفی۔جمع گیٹوں اور نفی۔ضرب گیٹوں کی مدد سے نفی گیٹ، جمع گیٹ اور ضرب گیٹ حاصل کرنا دکھلایا گیا۔

5.3.3 بلا شرکت جمع گیٹ اور نفی بلا شرکت جمع گیٹ بلا شرکت جمع تفاعل کو بلا شرکت جمع گیٹ 16 سے حاصل کیا جاتا ہے جس کی علامت شکل 19.3 (ا) میں دکھائی گئی ہے۔ اسی طرح بلا شرکت نار تفاعل کو نفی بلا شرکت جمع گیٹ 17 کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے جس کی علامت شکل (ب) میں دکھائی گئی ہے۔ بلا شرکت جمع گیٹ کی مخارج کے ساتھ نفی گیٹ منسلک کرنے سے بلا شرکت نفی۔جمع گیٹ حاصل کیا جا سکتا ہے۔ بلا شرکت گیٹ کی کارکردگی گراف کے شکل میں شکل 20.3 میں دکھائی گئی ہے۔

تین مداخل والے بلا شرکت جمع گیٹ کا مخارج حاصل کرتے وقت اس کے کسی دو مداخل کا بلا شرکت جمع حاصل کریں اور حاصل جواب کا تیسرے مداخل کے ساتھ بلا شرکت جمع حاصل کریں۔ یہی ان تین مداخل کا بلا شرکت جمع ہے۔ مساوات 19.3 میں تین مداخل والے بلا شرکت جمع گیٹ کا بولین جدول دکھایا گیا ہے۔ جیسے آپ اس جدول سے دیکھ سکتے ہیں، کسی بھی بلا شرکت جمع گیٹ کا مخارج اُس صورت بلند ہوتا ہے جب اس کے بلند مداخل کی تعداد طاق ہو۔

(19.3)

طلبہ سے گزارش کی جاتی ہے کہ وہ یہاں رُک کر ان اعمال کو اچھی طرح سمجھ لیں۔

جوابات