برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 13

لاپلاس بدل

13.1 تعریف

کسی تفاعل $f(t)$ کا **لاپلاس بدل**[1] درج ذیل مساوات دیتا ہے

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathrm{F}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{13.1}$$

جہاں s **مخلوط تعدد**[2] ہے

$$s = \sigma + j\omega \tag{13.2}$$

اور تفاعل $f(t)$ کی قیمت $t < 0$ پر صفر کے برابر ہے۔

$$f(t) = 0 \quad t < 0 \tag{13.3}$$

لاپلاس بدل سے ادوار کا حل $t \geq 0$ کے لئے حاصل کیا جاتا ہے جبکہ $t < 0$ کو ابتدائی حالت میں سمایا جاتا ہے۔

کسی تفاعل کا لاپلاس بدل اس صورت پایا جاتا ہے جب تفاعل درج ذیل شرط پر پورا اترتا ہو جہاں σ کوئی مثبت قیمت ہے۔

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t}\left|f(t)\right|\mathrm{d}t < \infty \tag{13.4}$$

---

[1] Laplace transform
[2] complex frequency

لاپلاس بدل کے حصول میں $e^{-\sigma t}$ کے ارتکازی جزو کی بنا کئی ایسے کئی اہم تفاعل کے لاپلاس بدل پائے جاتے ہیں جن کے **فوریئر بدل**[3] نہیں پائے جاتے۔ برقی ادوار میں ایسے تفاعل استعمال کئے جاتے ہیں جن کے لاپلاس بدل پائے جاتے ہوں۔

الٹ لاپلاس بدل[4] درج ذیل مساوات دیتی ہے

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\mathrm{F}(s)\right] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_1 - j\omega}^{\sigma + j\omega} \mathrm{F}(s)e^{st}\,\mathrm{d}s \tag{13.5}$$

جہاں σ_1 حقیقی ہے اور اس کی قیمت مساوات 13.4 کے σ سے زیادہ ہے یعنی $\sigma_1 > \sigma$ ہے۔

لاپلاس بدل آسانی سے حاصل ہوتا ہے جبکہ الٹ لاپلاس بدل مشکل سے حاصل ہوتا ہے۔ ہم کئی تفاعل کے لاپلاس بدل حاصل کرتے ہوئے انہیں جدول میں جوڑیوں کی صورت میں لکھیں گے اور الٹ بدل کو اسی جدول سے دیکھ کر حاصل کریں گے۔ کسی بھی وقتی تفاعل $f(t)$ کا منفرد لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s)$ پایا جاتا ہے لہٰذا دو مختلف وقتی تفاعل $f_1(t)$ اور $f_2(t)$ کے لاپلاس بدل کسی بھی صورت میں یکساں نہیں ہو سکتے ہیں۔ یوں کسی بھی لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s)$ کو سادہ ترین اجزاء میں تقسیم کرتے ہوئے ان کے الٹ بدل کو جدول سے پڑھا جاتا ہے۔ تمام اجزاء کے الٹ لاپلاس بدل کا مجموعہ درکار وقتی تفاعل ہو گا۔ ہم لاپلاس بدل کو **جزوی کسری پھیلاو**[5] کے ذریعہ اجزاء میں تقسیم کریں گے۔

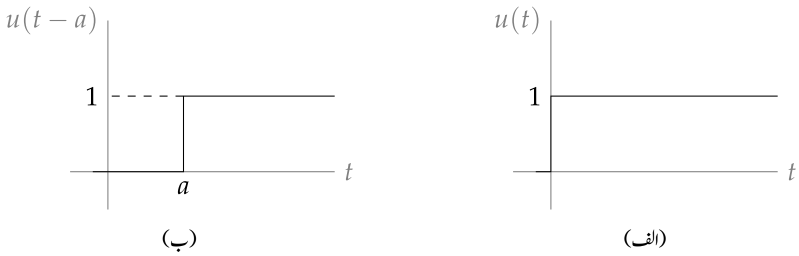
13.2 تفاعل یکتائی

برقی ادوار میں **اکائی سیڑھی تفاعل**[6] $u(t)$ اور **اکائی جھٹکا تفاعل**[7] $\sigma(t)$ نہایت اہم ہیں۔ ایسے تفاعل جو یا تو خود کہیں غیر متناہی ہوں اور یا ان کا تفرق کہیں غیر متناہی ہو کو **یکتائی تفاعل**[8] کہتا ہے۔ اکائی سیڑھی تفاعل اور اکائی جھٹکا تفاعل یکتائی تفاعل ہیں۔ اکائی سیڑھی تفاعل پر صفحہ 321 پر حصہ 7.3 میں ہم غور کر چکے ہیں۔

شکل 13.1-الف میں دکھایا گیا اکائی سیڑھی تفاعل درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{13.6}$$

[3] Fourier transform
[4] inverse Laplace transform
[5] partial fraction expansion
[6] unit step function
[7] unit impulse function
[8] singularity function



شکل 13.1: اکائی سیڑھی تفاعل۔

اکائی سیڑھی تفاعل $u(t)$ ، جیسے باب 7 میں ذکر کیا گیا، لمحہ $t = 0\,\mathrm{s}$ پر سوئچ چالو کرتے ہوئے دور پر $1\,\mathrm{V}$ یا $1\,\mathrm{A}$ لاگو کرنے کے مترادف ہے۔آئیں شکل 13.1-الف میں دکھائے گئے اکائی سیڑھی تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

مثال 13.1: شکل 13.1 کے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: مساوات 13.1 کے استعمال سے شکل-الف کا لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[u(t)] &= \int_0^\infty u(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^\infty 1e^{-st}\,\mathrm{d}t\\
&= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty\\
&= \frac{e^{-\infty s}-e^{-0s}}{-s}\\
&= \frac{1}{s}\qquad \sigma > 0
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں آخری قدم پر $\sigma > 0$ کی بنا $e^{-\infty s} = 0$ لکھا گیا ہے۔اس طرح اکائی سیڑھی تفاعل کا لاپلاس بدل درج ذیل ہے۔

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathrm{F}(s) = \frac{1}{s} \tag{13.7}$$

شکل 13.1-ب میں وقت کے لحاظ سے منتقل ہوا اکائی سیڑھی تفاعل دکھایا گیا ہے جس کو **وقتی منقولہ اکائی سیڑھی تفاعل**[9] کہتے ہیں۔آئیں اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[u(t-a)] &= \int_0^\infty u(t-a)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^a 0e^{-st}\,\mathrm{d}t + \int_a^\infty 1e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_a^\infty \\
&= \frac{e^{-as}}{s} \qquad \sigma > 0
\end{aligned}
$$

اس طرح وقتی منقولہ اکائی سیڑھی تفاعل کا لاپلاس بدل درج ذیل ہے۔

$$\mathcal{L}[u(t-a)] = F(s) = \frac{e^{-as}}{s} \tag{13.8}$$

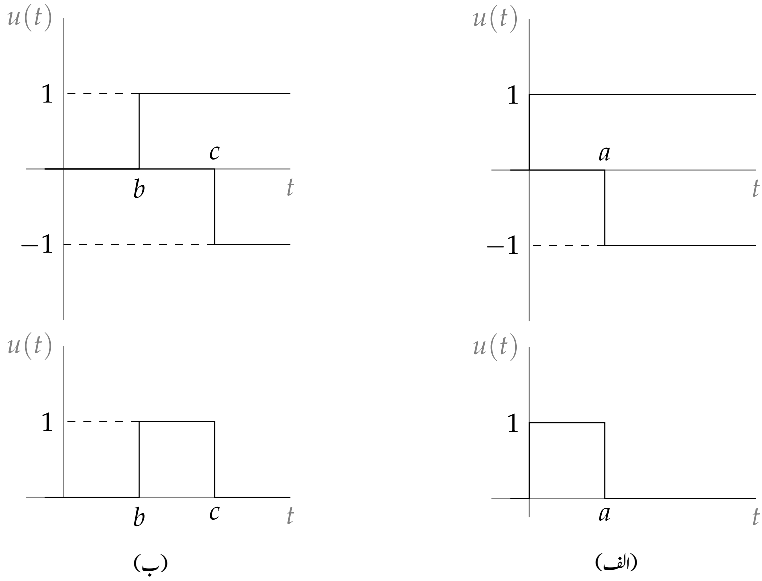
مثال 13.2: شکل 13.2-الف میں دو عدد اکائی سیڑھی تفاعل سے دھڑکن کا حصول دکھایا گیا ہے۔دھڑکن کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔شکل-ب میں وقت کے لحاظ سے منتقل شدہ دھڑکن دکھائی گئی ہے۔اس کا بھی لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: شکل 13.2-الف کے دھڑکن کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < a \\ 0 & t > a \end{cases} \tag{13.9}$$

---

[9] time-shifted unit step function



شکل 13.2: مثال 13.2 کے اشکال۔

لہٰذا لاپلاس تکمل درج ذیل ہو گا

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^a 1e^{-st}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1-e^{-as}}{s} \qquad \sigma > 0
\end{aligned}
$$

یعنی دھڑکن کا لاپلاس بدل

$$
\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1-e^{-as}}{s} \tag{13.10}
$$

ہو گا۔ شکل 13.2-ب کے تفاعل کو اکائی سیڑھی تفاعل کا مجموعہ لکھتے ہوئے

$$
f(t) = u(t-b) - u(t-c)
$$

لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$
\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[u(t-b)] - \mathcal{L}[u(t-c)]
$$

مساوات 13.8 کے استعمال سے درج بالا کو

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathrm{F}(s) = \frac{e^{-bs} - e^{-cs}}{s} \tag{13.11}$$

لکھ سکتے ہیں۔

شکل 13.3-الف کے مستطیل کی چوڑائی a اور لمبائی $\frac{1}{a}$ ہے لہٰذا اس کا رقبہ $(a \times \frac{1}{a} = 1)$ اکائی کے برابر ہے۔ مستطیل کی چوڑائی لا متناہی کم $(a \to 0)$ کرنے سے اس کی لمبائی لا متناہی بڑھ $(\frac{1}{a} \to \infty)$ جائے گی البتہ اس کا رقبہ اکائی ہی رہے گا۔ایسا مستطیل جس کی چوڑائی صفر کے قریب تر اور رقبہ اکائی ہو کو **اکائی جھٹکا تفاعل**[10] تصور کیا جا سکتا ہے۔لمحہ t_0 پر پائے جانے والے اکائی جھٹکا تفاعل کو $\delta(t - t_0)$ لکھا جاتا ہے جس کو ترسیمی طور پر شکل 13.3-ب میں دکھایا گیا ہے۔اکائی جھٹکا تفاعل کو کوئی دیگر تفاعل سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

اکائی جھٹکا تفاعل کو الجبرائی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} &\delta(t - t_0) = 0 \quad t \neq t_0 \\ &\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t = 1 \quad \epsilon > 0 \end{aligned} \tag{13.12}$$

اکائی جھٹکے کی قیمت لمحہ $t = t_0$ پر غیر معین ہے جبکہ اس لمحے کے علاوہ اس کی قیمت صفر کے برابر ہے البتہ جھٹکے کا رقبہ اکائی ہے۔ جھٹکے کے رقبے کو تفاعل کا زور بھی کہتے ہیں۔

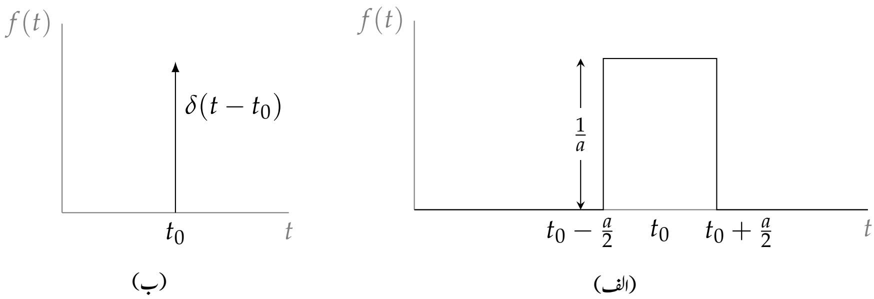
اکائی جھٹکا تفاعل کی ایک اہم خاصیت جسے خاصیت نمونہ بندی[11] کہتے ہیں کو درج ذیل تکمل سے سمجھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t &= \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} f(t_0)\delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t \\ &= f(t_0)\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t \\ &= f(t_0) \end{aligned}$$

جہاں $t_0 - \epsilon$ تا $t_0 + \epsilon$ کے علاوہ $\delta(t - t_0) = 0$ ہے لہٰذا تکمل کے حدود یہی کر دیے گئے ہیں۔چونکہ $\epsilon \to 0$ ہے لہٰذا ان حدود کے مابین کسی بھی تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کو نظر انداز کرتے ہوئے تفاعل کی قیمت $f(t_0)$

---

[10] unit impulse function
[11] sampling property



شکل 13.3: اکائی جھٹکا تفاعل۔

لی جا سکتی ہے۔ غیر تغیر $f(t_0)$ کو تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔ یوں ہمارے پاس صرف $\delta(t-t_0)$ کا تکمل رہ جاتا ہے جو مساوات 13.12 کے تحت اکائی کے برابر ہے۔ درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں سے واضح ہے کہ اکائی جھٹکا تفاعل $f(t)$ کا نمونہ $t=t_0$ پر حاصل کرتا ہے۔

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t-t_0) = \begin{cases} f(t_0) & t_1 < t_0 < t_2 \\ 0 & t_0 < t_1,\, t_0 > t_2 \end{cases} \tag{13.13}$$

اگرچہ حقیقی دنیا میں ہم لمحاتی طور پر لامحدود قیمت کا دباو یا رو کسی دور پر لاگو نہیں کر سکتے ہیں لہٰذا حقیقی دنیا میں اکائی جھٹکا تفاعل نہیں پایا جاتا ہے۔ اس کے باوجود یہ ایک اہم تفاعل ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے الجبرائی طور پر مختلف اعمال کا مطالعہ ممکن بنایا جاتا ہے۔ مثال کے طور پر آسمانی بجلی کو اکائی جھٹکا تصور کیا جا سکتا ہے۔ اسی طرح آواز کو عددی صورت میں تبدیل کرنے کے عمل پر غور کے لئے اس تفاعل کا سہارا لیا جاتا ہے۔ **مماثل سے عددی مبادل کار**[12] کی مدد سے مماثل اشارے کو عددی صورت میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ انسانی کان 20 Hz تا 20 kHz تک کی آواز سن سکتا ہے۔ **اصول نی کوسٹ**[13] کے تحت کسی بھی اشارے کی مکمل معلومات برقرار رکھنے کی خاطر اشارے کی بلند تر تعدد کی دگنی تعدد پر نمونہ حاصل کرنا ضروری ہے۔ یہی وجہ ہے کہ انسانی آواز کے عددی نمونے 44.1 kHz پر حاصل کئے جاتے ہیں۔

مثال 13.3: اکائی جھٹکا تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

---

[12] analog to digital converter, ADC
[13] Nyquist criterion

حل: لاپلاس تکمل لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] &= \int_0^\infty \delta(t-t_0)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \delta(t-t_0)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= e^{-st_0}\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t \\
&= e^{-st_0}
\end{aligned}$$

اس جواب کو مساوات 13.13 میں دی گئی خاصیت نمونہ بندی کی مدد سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = \int_0^\infty \delta(t-t_0)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

میں $f(t) = e^{-st}$ تصور کرتے ہوئے خاصیت نمونہ بندی استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = \mathrm{F}(s) = e^{-st_0} \tag{13.14}$$

چونکہ $e^{-0s} = 1$ کے برابر ہے لہٰذا درج بالا سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathrm{F}(s) = 1 \tag{13.15}$$

13.3 لاپلاس بدل کی جوڑیاں

آئیں کئی اہم لاپلاس بدل کی جوڑیاں حاصل کریں۔

مثال 13.4: تفاعل $f(t) = 1$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: لاپلاس تکمل لکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[1] &= \int_0^\infty 1e^{-st}\,\mathrm{d}t\\ &= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty\\ &= \frac{1}{s}\end{aligned}$$

مثال 13.5: تفاعل $f(t) = t$ کا لاپلاس بدل دریافت کریں۔

حل: لاپلاس تکمل استعمال کرتے ہیں۔

$$\mathrm{F}(s) = \int_0^\infty te^{-st}\,\mathrm{d}t$$

تکمل کو ٹکڑوں میں حاصل کرنے کی خاطر ہم

$$\begin{aligned}u &= t\\ \mathrm{d}v &= e^{-st}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

لیتے ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u &= \mathrm{d}t\\ v &= \int e^{-st}\,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-st}}{-s}\end{aligned}$$

ہو گا لہٰذا

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(s) &= -\frac{t}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{s^2} \quad \sigma > 0\end{aligned} \tag{13.16}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مثال 13.6: تفاعل e^{at} کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل:

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(s) &= \int_0^\infty e^{at} e^{-st} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} \, \mathrm{d}t \\
&= \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^\infty \qquad \sigma > 0 \\
&= \frac{1}{s-a}
\end{aligned}$$

مثال 13.7: تفاعل $\cos \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: کوسائن کو $\frac{e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$ لکھتے ہوئے لاپلاس تکمل حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(s) &= \int_0^\infty \frac{e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} e^{-st} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-(s-j\omega)t} + e^{-(s+j\omega)t}}{2} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) \qquad \sigma > 0 \\
&= \frac{s}{s^2 + \omega^2}
\end{aligned}$$

مثال 13.8: تفاعل $\sin \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: سائن کو $\frac{e^{+j\omega t}-e^{-j\omega t}}{j2}$ لکھتے ہوئے لاپلاس تکمل حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(s) &= \int_0^\infty \frac{e^{+j\omega t}-e^{-j\omega t}}{j2} e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-(s-j\omega)t}-e^{-(s+j\omega)t}}{j2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{j2}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right) \qquad \sigma > 0 \\
&= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

جدول میں کئی لاپلاس بدل کی جوڑیاں پیش کی گئی ہیں۔