برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 8

برقرار حالت بدلتی رو

جبری تفاعل میں یکدم تبدیلی سے دور عارضی حالت اختیار کرتا ہے۔محدود قیمت کے وقتی مستقل کی صورت میں آخر کار عارضی دورانیہ گزر جاتا ہے اور دور ایک بار پھر برقرار حالت اختیار کر لیتا ہے۔جبری تفاعل میں یکدم تبدیلی کی غیر موجودگی میں دور برقرار صورت میں رہتا ہے۔اس باب میں ایسے ہی ادوار پر غور کیا جائے گا جن کے جبری تفاعل میں یکدم تبدیلی نہیں پائی جاتی۔ایسی صورت میں جبری حل ہی مکمل حل ہو گا۔اس باب میں مکمل حل سے مراد جبری حل ہو گا۔

8.1 سائن نما تفاعل

سائن نما[1] تفاعل سے مراد **سائن تفاعل** $\sin\theta$ اور **کوسائن تفاعل** $\cos\theta$ ہیں۔شکل 8.1-الف میں رداس A_0 کے گول دائرے پر ایک نقطہ یکساں رفتار کے ساتھ، گھڑی کی گردش کی الٹ سمت میں، حرکت کر رہا ہے۔یہ دائرہ **کارتیسی محدد**[2] کے مرکز $(0,0)$ پر پایا جاتا ہے۔لمحہ t پر زاویہ $\measuredangle aox$ کی قیمت θ کے برابر ہے۔نقطے سے x محدد پر عمودی لکیر محدد کو $x(t)$ پر ٹکراتی ہے جبکہ y محدد پر عمودی لکیر $y(t)$ پر ٹکراتی ہے۔شکل کو دیکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y(t) = A_0 \sin\theta \tag{8.1}$$

[1] sinusoidal
[2] Cartesian coordinates

جہاں A_0 موج کی چوٹی ہے جسے موج کا **حیطہ**[3] کہتے ہیں اور θ کو تفاعل کا **دلیل**[5,4] کہتے ہیں۔اس مساوات میں θ از خود وقت t پر منحصر ہے۔

گردش کرتا نقطہ ایک چکر میں $360°$ درجے کا زاویہ یعنی 2π ریڈیئن طے کرتا ہے۔ایک چکر کاٹنے کے لئے درکار دورانیے کو **دوری عرصہ**[6] کہتے ہیں جسے T سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مشق 8.1: شکل 8.1-الف میں نقطہ ایک چکر $20\,\mathrm{ms}$ میں پورا کرتا ہے۔یہ نقطہ ایک سیکنڈ میں کتنے چکر پورا کرے گا۔یہ نقطہ ایک سیکنڈ میں کتنے ریڈیئن کا زاویہ طے کرتا ہے۔

جوابات: 50 چکر، $100\pi\,\mathrm{rad}$

اگر ایک چکر کاٹنے کے لئے T سیکنڈ کا وقت درکار ہو تب ایک سیکنڈ میں چکروں کی تعداد $\frac{1}{T}$ ہو گی جسے **تعدد**[7] کہتے اور f سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$f = \frac{1}{T} \tag{8.2}$$

تعدد کی اکائی **ہرٹز**[8] ہے جسے Hz سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ایک چکر 2π ریڈیئن کو کہتے ہیں لہٰذا f چکر سے مراد $2\pi f$ ریڈیئن کا زاویہ ہے۔یوں f تعدد پر گردش کرتا نقطہ ایک سیکنڈ میں $2\pi f$ ریڈیئن کا زاویہ طے کرے گا یعنی اس کی **زاویائی رفتار**[9] کی قیمت $2\pi f$ ہو گی۔زاویائی رفتار کو ω سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ اس کی اکائی ریڈیئن فی سیکنڈ $\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔

$$\omega = 2\pi f \tag{8.3}$$

---

[3] amplitude

[4] ایک ماہر ریاضی اپنی خیالی دنیا میں کوسائن $\cos\theta$ تفاعل کے ساتھ بحث میں مصروف ہوتا ہے۔ماہر ریاضی تفاعل کو دلیل کے طور پر صفر پیش کرتا ہے۔تفاعل اس کا فوراً جواب اکائی $(\cos 0 = 1)$ دیتا ہے۔

[5] argument

[6] time period

[7] frequency

[8] Hertz

[9] angular speed

زاویائی رفتار ω سے گردش کرتا ہوا نقطہ t سیکنڈ میں $2\pi f t$ ریڈیئن کا زاویہ طے کرے گا۔ یوں اگر $t = 0$ پر نقطہ عین x محدد کے مثبت حصے پر ہو تب لمحہ t پر

$$\theta = \omega t = 2\pi f t \tag{8.4}$$

لکھا جائے گا۔ یوں مساوات 8.1 کو

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 \sin 2\pi f t \\ &= A_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \\ &= A_0 \sin \omega t \end{aligned} \tag{8.5}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

برقی میدان میں $y(t)$ وقت کے ساتھ بدلتے دباو یا وقت کے ساتھ بدلتی رو کو ظاہر کر سکتی ہے۔ مساوات 8.5 میں دیے تفاعل، جسے شکل 8.1-ب میں دکھایا گیا ہے، کا آزاد متغیرہ وقت t ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تفاعل ہر T سیکنڈ کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہے۔ اس حقیقت کو ریاضی میں درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$y(t+T) = y(t) \tag{8.6}$$

جس سے مراد یہ ہے کہ تفاعل کی قیمت لمحہ t اور لمحہ $t+T$ پر برابر ہیں۔

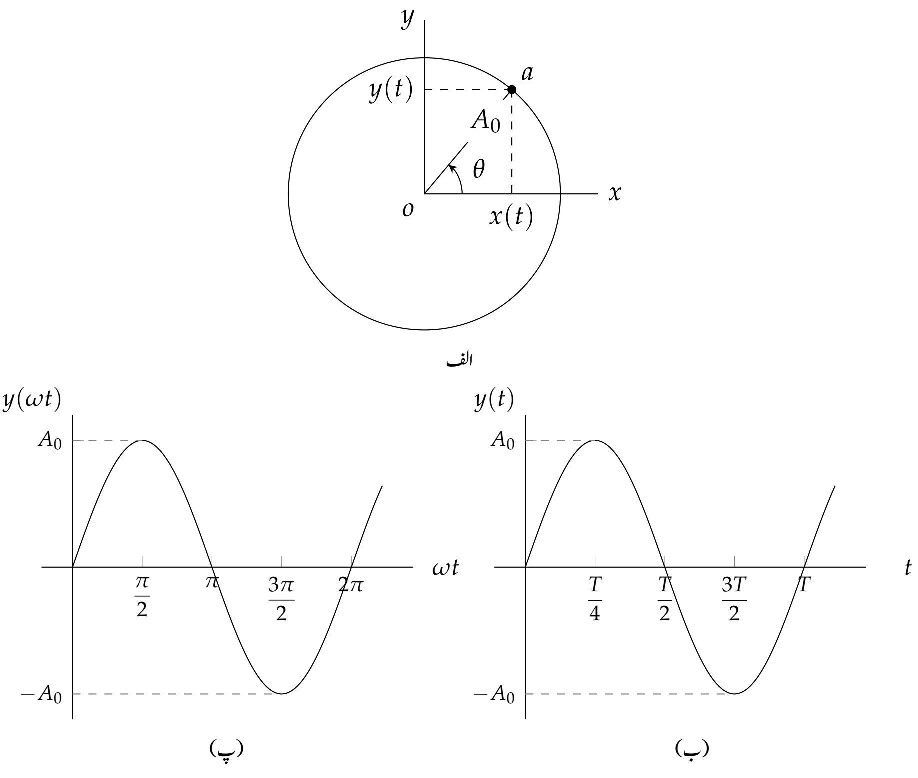
مساوات 8.5 کے خط کو ωt کے ساتھ بھی کھینچا جا سکتا ہے۔ ایسا ہی شکل 8.1-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ یہ تفاعل ہر 2π ریڈیئن کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہے۔

مشق 8.2: شکل 8.1-الف میں گردش کرتا نقطہ $0.2\,\mathrm{s}$ میں 40° کا زاویہ طے کرتا ہے۔ زاویائی رفتار، تعدد اور دوری عرصہ دریافت کریں۔

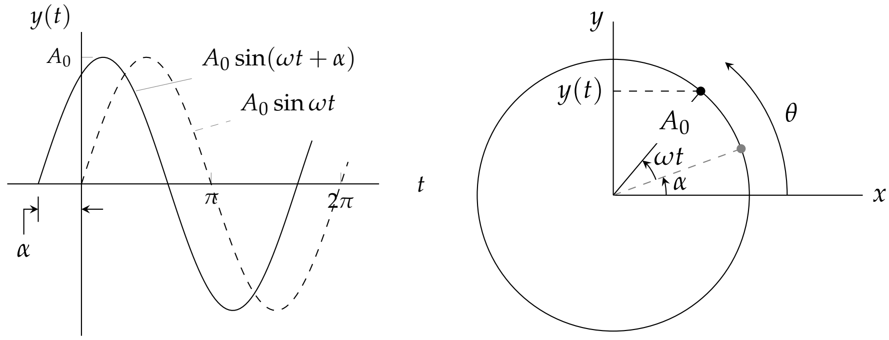
جوابات: $\omega = \frac{10\pi}{9}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $f = 1.8\,\mathrm{Hz}$ ، $T = \frac{5}{9}\,\mathrm{s}$

شکل 8.2 میں عمومی صورت حال دکھائی گئی ہے جہاں ω زاویائی رفتار سے گردش کرتا نقطہ، لمحہ $t = 0$ پر زاویہ α پر پایا جاتا ہے۔ یہ نقطہ وقت t کے دوران ωt زاویہ طے کرتے ہوئے $\theta = \omega t + \alpha$ پہنچ جائے گا لہٰذا اس کے لئے

$$y(t) = A_0 \sin(\omega t + \alpha) \tag{8.7}$$



شکل 8.1: سائن موج۔



(ب) زاویائی ہٹاو۔

(الف)

شکل 8.2: لمحہ $t = 0$ پر زاویہ α ہے۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں α کو زاویائی ہٹاو[10] کہتے ہیں۔اس مساوات کا دلیل $\omega t + \alpha$ ہے۔شکل 8.2-ب میں مساوات 8.5 اور مساوات 8.7 کو دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ان مساوات میں α زاویائی فرق[11] پایا جاتا ہے۔مساوات 8.5 سے مساوات 8.7 α ریڈیئن آگے[12] ہے۔یہ بھی کہا جا سکتا ہے کہ مساوات 8.7 سے مساوات 8.5 α ریڈیئن پیچھے[13] ہے۔ایک ہی تعدد کے دو تفاعل

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_{01}\sin(\omega t + \alpha) \\ y_2(t) &= A_{02}\sin(\omega t + \beta) \end{aligned} \tag{8.8}$$

میں $y_1(t)$ تفاعل $y_2(t)$ سے $\alpha - \beta$ ریڈیئن آگے ہے۔ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ $y_2(t)$ تفاعل $y_1(t)$ سے $\beta - \alpha$ ریڈیئن آگے ہے یا کہ $y_1(t)$ تفاعل $y_2(t)$ سے $\beta - \alpha$ ریڈیئن پیچھے ہے۔اگر $\alpha = \beta$ ہو تب تفاعل ہم زاویہ[14] کہلاتے ہیں جبکہ $\alpha \neq \beta$ کی صورت میں تفاعل الگ زاویہ[15] کہلاتے ہیں۔

زاویائی ہٹاو کو عموماً درجوں میں بیان کیا جاتا ہے لہٰذا $\alpha = \frac{\pi}{4}$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y(t) = A_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = A_0 \sin\left(\omega t + 45^\circ\right) \tag{8.9}$$

---

phase angle[10]
phase difference[11]
lead[12]
lag[13]
in phase[14]
out of phase[15]

باضابطہ طور پر چونکہ ωt کی قیمت ریڈیئن میں ہے لہٰذا α کی قیمت بھی ریڈیئن میں ہونا لازم ہے لہٰذا تفاعل لکھنے کا صحیح طریقہ $y(t) = A_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ ہی ہے لیکن زاویائی ہٹاو کو درجوں میں لکھنے کی روایت نہایت مقبول ہے لہٰذا اس کتاب میں بھی اس روایت کو برقرار رکھا جائے گا۔ مساوات 8.9 میں $45°$ لکھتے ہوئے زیر بالا میں درجے کی علامت $(°)$ استعمال کی گئی ہے جبکہ $\frac{\pi}{4}$ پر کوئی علامت نہیں لگائی گئی۔ اسی علامت سے ریڈیئن یا درجوں کی پہچان کی جاتی ہے۔

مثال 8.1: مساوات $y_1(t) = 15\sin(100t + 60°)$ اور $y_2(t) = 22\sin(200t + 0.2\pi)$ کی قیمت $t = 25\,\text{ms}$ پر دریافت کریں۔

حل: پہلی تفاعل میں $50°$ کا زاویائی ہٹاو $\frac{60°}{180°} \times \pi = \frac{\pi}{3}$ ریڈیئن کے برابر ہے۔ یوں لمحہ $t = 25\,\text{ms}$ پر

$$y_1(0.025) = 15\sin\left(100 \times 25 \times 10^{-3} + \frac{\pi}{3}\right) = -5.918619766$$

اور

$$y_2(0.025) = 22\sin(200 \times 0.025 + 0.2\pi) = -13.39917888$$

حاصل ہوتے ہیں۔

اگرچہ اب تک کی بحث میں ہم نے سائن تفاعل استعمال کیا، ہم اس کی جگہ کوسائن تفاعل بھی استعمال کر سکتے تھے۔ ان دو تفاعل کی صورت بالکل یکساں ہے پس دونوں میں $90°$ کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔

$$\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\omega t \tag{8.10}$$

$$\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\omega t \tag{8.11}$$

سائن نما تفاعل کے دلیل کے ساتھ 2π ریڈیئن یا $360°$ کا مضرب جمع کرنے سے تفاعل کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔

$$\cos(\omega t + \alpha + 2\pi n) = \cos(\omega t + \alpha) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{8.12}$$

$$\sin(\omega t + \alpha + 2\pi n) = \sin(\omega t + \alpha) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{8.13}$$

دو سائن نما تفاعل میں زاویائی فرق تین شرائط پورا کرنے کے بعد دریافت کیا جا سکتا ہے۔پہلی شرط یہ ہے کہ دونوں تفاعل کی تعدد برابر ہو۔دوسری شرط یہ ہے کہ دونوں کو سائن تفاعل اور یا پھر دونوں کو کوسائن تفاعل کی صورت میں لکھا جائے۔تیسری اور آخری شرط یہ ہے کہ دوسری شرط میں لکھے گئے تفاعل کے حیطے مثبت ہوں۔درج ذیل مماثل ان شرائط کو پورا کرنے میں مدد دیتے ہیں۔

$$-\sin(\omega t+\alpha)=\sin(\omega t+\alpha\pm 180^\circ) \tag{8.14}$$
$$-\cos(\omega t+\alpha)=\cos(\omega t+\alpha\pm 180^\circ) \tag{8.15}$$

ان کے علاوہ درج ذیل مماثل بھی نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \tag{8.16}$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \tag{8.17}$$

ایک آخری تفاعل جس کا ذکر ضروری ہے درج ذیل ہے۔

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \tag{8.18}$$

مثال 8.2: درج ذیل تفاعل کے خط کھینچیں۔

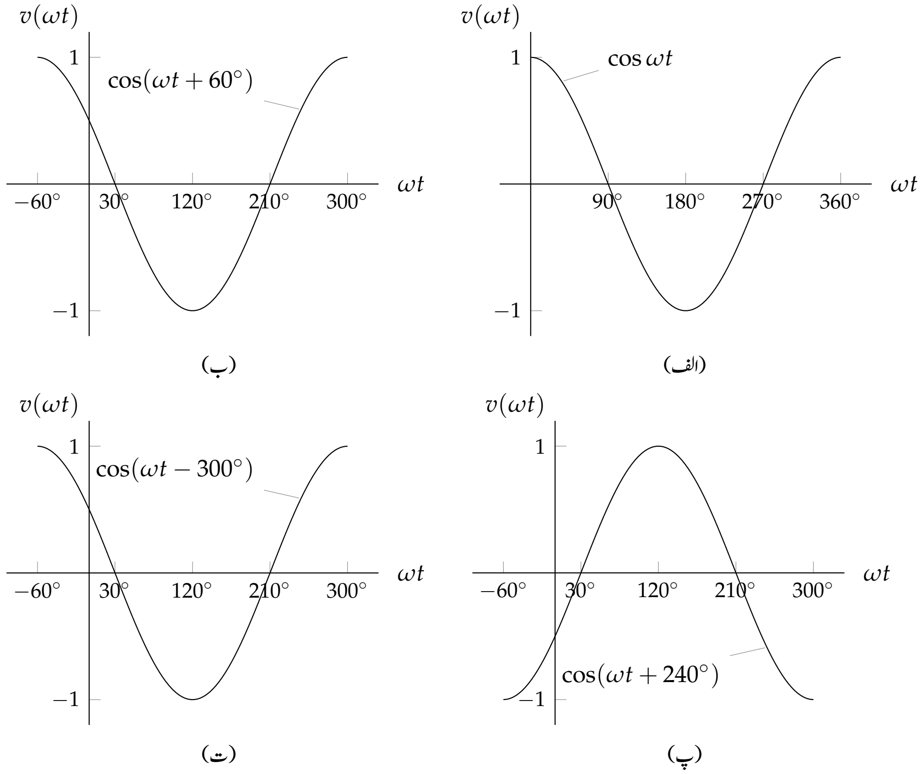
- $v(t)=1\cos(\omega t+60^\circ)$
- $v(t)=1\cos(\omega t+240^\circ)$
- $v(t)=1\cos(\omega t-300^\circ)$

حل: شکل 8.3-الف میں $v(\omega t)=1\cos\omega t$ کا خط دکھایا گیا ہے۔اس کو افقی محدد پر 60° درجے بائیں منتقل کرنے سے $v(\omega t)=1\cos(\omega t+60^\circ)$ کا خط حاصل ہوتا ہے جسے شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔ ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$v(\omega t)=1\cos(\omega t+240^\circ)=1\cos(\omega t+60^\circ+180^\circ)=-1\cos(\omega t+60^\circ)$$

جہاں مساوات 8.15 کا استعمال کیا گیا ہے۔درج بالا مساوات کو شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ شکل-ب کا منفی ہے۔اسی طرح مساوات 8.12 کی مدد سے

$$v(\omega t)=1\cos(\omega t-300^\circ)=1\cos(\omega t-300^\circ+360^\circ)=1\cos(\omega t+60^\circ)$$



شکل 8.3: مثال 8.2 کے خط۔

لکھتے ہوئے شکل-ت حاصل ہوتی ہے جو عین شکل-ب ہی ہے۔

مثال 8.3: درج ذیل امواج کی تعدد ہرٹز میں حاصل کریں۔ امواج کے مابین زاویائی فرق دریافت کریں۔ یہ بھی بتلائیں کہ کونسی موج آگے ہے۔

$$
\begin{aligned}
v_1(\omega t) &= 100\sin(400t - 30^\circ)\\
v_2(\omega t) &= -250\cos(400t + 0.2\pi)
\end{aligned}
$$

حل: ان امواج میں $\omega = 400\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے لہٰذا

$$
f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{400}{2\pi} = 63.66\,\mathrm{Hz}
$$

ہو گا۔ زاویائی فرق دریافت کرنے کی خاطر دونوں امواج کو مثبت حیطے کے کوسائن موج کی صورت میں لکھتے ہیں۔ ساتھ ہی ساتھ ان کے زاویائی ہٹاو کو درجوں میں لکھتے ہیں۔ یوں

$$
\begin{aligned}
v_1(\omega t) &= 100\sin(400t - 30^\circ)\\
&= 100\cos(400t - 30^\circ - 90^\circ)\\
&= 100\cos(400t - 120^\circ)\\
&= 100\cos(400t + 240^\circ)
\end{aligned}
$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں آخری قدم پر مساوات 8.12 کا استعمال کیا گیا۔ اسی طرح

$$
\begin{aligned}
v_2(\omega t) &= -250\cos(400t + 0.2\pi)\\
&= 250\cos(400t + 0.2\pi + \pi)\\
&= 250\cos(400t + 216^\circ)
\end{aligned}
$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں آخری قدم پر 1.2π ریڈیئن کو 216° درجے لکھا گیا ہے۔ ان امواج کے مابین

$$
240^\circ - 216^\circ = 24^\circ
$$

کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے اور موج $v_1(\omega t)$ آگے ہے۔

مشق 8.3: ایک دور میں درج ذیل تین رو پائے جاتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
i_1(1) &= 30\cos(100\pi t + 30^\circ)\\
i_2(2) &= 55\sin(100\pi t + 40^\circ)\\
i_3(t) &= 20\sin(100\pi t + 60^\circ)
\end{aligned}
$$

i_2 سے i_1 کتنی آگے ہے اور i_3 سے i_1 کتنی پیچھے ہے۔

جوابات: 80° ، -60° یا 300°

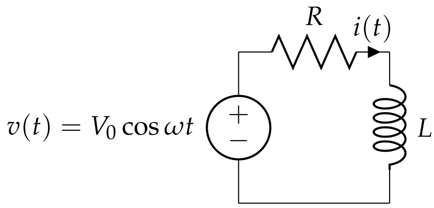
8.2 سائن نما اور مخلوط جبری تفاعل

گزشتہ باب میں دور پر مستقل جبری تفاعل مسلط کرتے ہوئے، دور کا جبری رد عمل بھی مستقل قیمت کا حاصل ہوا۔ تفرقی مساوات کا جبری رد عمل، مسلط جبری تفاعل اور اس کے تمام بلند درجی تفرق کا مجموعہ ہوتا ہے۔ یوں دور پر جبری دباو $v(t) = \sin\omega t$ مسلط کرنے سے رو کا جبری رد عمل $i(t) = c_1\sin\omega t + c_2\cos\omega t$ متوقع ہو گا۔ پس جبری رد عمل کے مستقل c_1 اور c_2 معلوم کرنا باقی ہے۔

مثال 8.4: شکل 8.4 میں رو $i_j(t)$ حاصل کریں۔

حل: دور کی تفرقی مساوات لکھتے ہیں۔

$$Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = V_0\cos\omega t \tag{8.19}$$



شکل 8.4: مثال 8.4 کا دور۔

دور پر مسلط جبری تفاعل اور اس تفاعل کے تمام بلند درجی تفرق کا مجموعہ جبری حل کے برابر ہو گا۔

$$i_j(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

اس جبری حل کو مساوات 8.19 میں پُر کرتے ہوئے c_1 اور c_2 مستقل دریافت کرتے ہیں۔

$$R(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) + L(-c_1 \omega \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t) = V_0 \cos \omega t$$

درج بالا مساوات میں دونوں اطراف $\cos \omega t$ کے عددی سر برابر ہوں گے۔اسی طرح دونوں اطراف $\sin \omega t$ کے عددی سر برابر ہوں گے۔

$$\begin{aligned} c_1 R + c_2 \omega L &= V_0 \\ -c_1 \omega L + c_2 R &= 0 \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو c_1 اور c_2 کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{RV_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ c_2 &= \frac{\omega L V_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \end{aligned}$$

لہٰذا جبری حل

$$i_j(t) = \frac{RV_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{\omega L V_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t \tag{8.20}$$

ہو گا۔

مثال 8.5: درج بالا مثال میں $R = 100\,\Omega$ ، $L = 5\,\mathrm{mH}$ ، $V_0 = 310\,\mathrm{V}$ اور $\omega = 10\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ کی صورت میں جبری حل کو مساوات 8.17 کی مدد سے $i(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi)$ کے طرز پر لکھیں۔

حل: مساوات 8.20 میں دی گئی قیمتیں پُر کرنے

$$i_j(t) = \frac{100 \times 310}{100^2 + (10000 \times 0.005)^2} \cos \omega t + \frac{10000 \times 0.005 \times 310}{100^2 + (10000 \times 0.005)^2} \sin \omega t$$

سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$i_j(t) = 2.48 \cos \omega t + 1.24 \sin \omega t \tag{8.21}$$

مساوات 8.17 سے جبری حل کی درکار صورت کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi) = I_0 \cos \phi \cos \omega t + I_0 \sin \phi \sin \omega t \tag{8.22}$$

مساوات 8.21 میں $\cos \omega t$ اور $\sin \omega t$ کے عددی سر کو مساوات 8.22 کے عددی سر کے برابر پُر کرتے ہیں۔

$$I_0 \cos \phi = 2.48 \tag{8.23}$$

$$I_0 \sin \phi = 1.24 \tag{8.24}$$

ان ہمزاد مساوات کے مربع جمع کرتے ہوئے

$$I_0^2 \cos^2 \phi + I_0^2 \sin^2 \phi = 2.48^2 + 1.24^2$$

ملتا ہے جس میں مساوات 8.18 کے استعمال سے $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ پُر کرتے ہوئے

$$I_0 = \sqrt{2.48^2 + 1.24^2} = 2.7727$$

ملتا ہے۔اسی طرح مساوات 8.24 کو مساوات 8.23 سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{1.24}{2.48} = \tan \phi$$

یعنی

$$\phi = \tan^{-1} \frac{1.24}{2.48} = \underline{/26.6^\circ}$$

ملتا ہے۔یوں جبری حل درج ذیل لکھا جائے گا

$$i_j(t) = 2.77\cos(\omega t - 26.6^\circ) = 2.77\cos(10000t - 26.6^\circ)$$

جہاں سے ظاہر ہے کہ دباو سے رو 26.6° درجے پیچھے ہے۔

مثال 8.6: مثال 8.5 کے طرز پر مثال 8.4 میں حاصل کئے گئے جبری حل کو $i_j(t) = I_0\cos(\omega t - \phi)$ کی صورت میں لکھیں۔

حل: مساوات 8.20 میں $\cos\omega t$ اور $\sin\omega t$ کے عددی سر کو مساوات 8.22 میں $\cos\omega t$ اور $\sin\omega t$ کے عددی سر کے برابر پُر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}
I_0\cos\phi &= \frac{RV_0}{R^2+\omega^2L^2}\\
I_0\sin\phi &= \frac{\omega LV_0}{R^2+\omega^2L^2}
\end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات میں دوسری مساوات کو پہلی سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \tan\phi = \frac{\omega L}{R}$$

یعنی

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R} \tag{8.25}$$

ملتا ہے جبکہ دونوں ہمزاد مساوات کے مربع کا مجموعہ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
I_0^2\cos^2\phi + I_0^2\sin^2\phi = I_0^2 &= \left(\frac{RV_0}{R^2+\omega^2L^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega LV_0}{R^2+\omega^2L^2}\right)^2\\
&= \frac{(R^2+\omega^2L^2)V_0^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2}\\
&= \frac{V_0^2}{R^2+\omega^2L^2}
\end{aligned}$$

یعنی

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \tag{8.26}$$

ملتا ہے۔یوں جبری حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$i_j(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right) \tag{8.27}$$

مساوات 8.27 سے ظاہر ہے کہ $L = 0$ کی صورت میں $\phi = 0$ ہو گا للذا دباو اور رو ہم زاویہ ہوں گے جبکہ $R = 0$ کی صورت میں $\phi = 90°$ ہو گا للذا دباو سے رو $90°$ درجے پیچھے ہو گی۔مزاحمت اور امالہ کے دیگر قیمتوں کی صورت میں دباو سے رو $0°$ تا $90°$ کے مابین کسی مخصوص درجے پر پیچھے رہے گی۔اسی لئے مزاحمت اور امالہ کے ادوار کو پیچھے رہنے والے ادوار کہا جاتا ہے۔

سلسلہ وار جڑے مزاحمت اور امالہ کے دور کا حل آپ نے دیکھا۔یقیناً اس دور کا حل سلسلہ وار جڑے دو عدد مزاحمتی دور کے حل سے کئی گنا مشکل تھا۔آپ خود تصور کر سکتے ہیں کہ زیادہ تعداد کے پرزوں کا دور حل کرنا کتنا مشکل ہو گا۔اسی مشکل کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم **مخلوط تفاعل**[16] کو پیش کرتے ہیں جس سے ادوار کا حل انتہائی آسان ثابت ہوتا ہے۔

مخلوط تفاعل اور سائن نما تفاعل کا تعلق **یولر مساوات**[17]

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t \qquad \text{یولر مساوات} \tag{8.28}$$

دیتی ہے جہاں $j = \sqrt{-1}$ خیالی عدد ہے۔یولر مساوات میں $\cos\omega t$ **حقیقی**[18] مقدار اور $\sin\omega t$ **خیالی**[19] مقدار ہیں۔

حقیقی دنیا میں مخلوط جبری تفاعل نہیں پایا جاتا۔اس کے باوجود، دور پر سائن نما جبری تفاعل کی جگہ مخلوط جبری تفاعل مسلط کرتے ہوئے مخلوط حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔مخلوط جبری تفاعل کو حقیقی جبری تفاعل اور خیالی جبری تفاعل کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔خطی ادوار میں مسئلہ نفاذ کے تحت تمام جبری تفاعل کی علیحدہ علیحدہ اثرات کا مجموعہ لیا جا سکتا ہے۔یوں جبری

---

[16] complex function
[17] Euler's equation
[18] real
[19] imaginary

تفاعل کے حقیقی جزو سے حل کا حقیقی جزو جبکہ جبری تفاعل کے خیالی جزو سے حل کا خیالی جزو حاصل ہو گا۔یوں مخلوط حل کے خیالی جزو کو رد کرتے ہوئے حقیقی جزو کو سائن نما تفاعل کا رد عمل تسلیم کیا جاتا ہے۔اس ترکیب کو مثال کی مدد سے زیادہ آسانی سے سمجھا جا سکتا ہے۔

مثال 8.7: شکل 8.4 میں حقیقی جبری تفاعل $V_0 \cos \omega t$ کی جگہ مخلوط جبری تفاعل نسب کرتے ہوئے حقیقی $i(t)$ کے لئے حل کریں۔

حل: جبری تفاعل $v(t) = V_0 \cos \omega t$ کی جگہ دور میں $v(t) = V_0 e^{j\omega t}$ نسب کرتے ہوئے کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = V_0 e^{j\omega t}$$

جبری تفاعل $e^{j\omega t}$ کا تفرق $j\omega e^{j\omega t}$ بھی جبری تفاعل ہی ہے لہٰذا درج بالا مساوات کا مخلوط حل $i_m(t) = I_0 e^{j\omega t}$ فرض کرتے ہیں جہاں I_0 نامعلوم مستقل ہے۔اس حل کو درج بالا مساوات میں پُر کرتے ہوئے

$$RI_0 e^{j\omega t} + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_0 e^{j\omega t}\right) = V_0 e^{j\omega t}$$

درکار تفرق کے بعد

$$RI_0 e^{j\omega t} + j\omega L I_0 e^{j\omega t} = V_0 e^{j\omega t}$$

ملتا ہے جس کے دونوں اطراف کو $e^{j\omega t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$RI_0 + j\omega L I_0 = V_0$$

اس سے I_0 حاصل کرتے ہیں۔

$$I_0 = \frac{V_0}{R + j\omega L}$$

یوں مخلوط رو درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned}
i_m(t) &= I_0 e^{j\omega t} \\
&= \frac{V_0 e^{j\omega t}}{R + j\omega L}
\end{aligned}$$

ہمیں اس کا حقیقی جزو درکار ہے۔ یولر مساوات کی مدد سے درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$i_m(t) = \frac{V_0(\cos\omega t + j\sin\omega t)}{R + j\omega L}$$

دائیں ہاتھ کسر کے بالائی اور نچلے حصے کو $R - j\omega t$ سے ضرب دیتے ہیں

$$\begin{aligned} i_m(t) &= \frac{V_0(\cos\omega t + j\sin\omega t)(R - j\omega L)}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)} \\ &= \frac{V_0(R\cos\omega t + \omega L\sin\omega t) + jV_0(R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2} \end{aligned}$$

جہاں دوسرا قدم ترتیب دیتے ہوئے لکھا گیا ہے۔ اس کا حقیقی جزو درکار حل ہے

$$i(t) = \frac{V_0(R\cos\omega t + \omega L\sin\omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2} \tag{8.29}$$

جو عین مساوات 8.20 ہی ہے۔

8.3 دوری سمتیہ