

برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	بنیاد	1
1	برقی بار، برقی رو اور برقی دباؤ	1.1
6	قانون اوہم	1.2
8	توانائی اور طاقت	1.3
15	برقی پڑے	1.4
15	غیر تابع منبع	1.4.1
17	تابع منبع	1.4.2
27	مزا جتنی ادوار	2
27	قانون اوہم	2.1
35	قوانین کرخوف	2.2
51	سلسلہ وار جڑے پڑوں میں رو	2.3
52	تقسیم دباؤ	2.4
55	متعدد سلسلہ وار مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت	2.5
58	سلسلہ وار متعدد منبع دباؤ اور مزاحمت	2.6
59	متوازی جڑے مزاحمت پر یکساں دباؤ پایا جاتا ہے	2.7
61	تقسیم رو اور متعدد متوازی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت	2.8
68	سلسلہ وار اور متوازی مزاحمت	2.9
73	تخصیص مزاحمت	2.10
76	سلسلہ وار اور متوازی مزاحمتوں کے ادوار کا حل	2.11
84	ستارہ-تکون تبادلہ	2.12
91	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	2.13
101	ترکیب جوڑ اور دائری ترکیب	3
101	تجزیہ جوڑ	3.1
104	غیر تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار	3.2
117	تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار	3.3
123	غیر تابع منبع دباؤ استعمال کرنے والے ادوار	3.4

132	تابع منبع دباو استعمال کرنے والے ادوار	3.5
139	دائری تجزیہ	3.6
140	غیر تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	3.7
148	غیر تابع منبع رواستعمال کرنے والے ادوار	3.8
154	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	3.9
158	دائری ترکیب اور ترکیب جوڑ کا موازنہ	3.10

161	حسابی ایپلیفائر	4
171	کامل حسابی ایپلیفائر	4.1
171	منفی ایپلیفائر	4.2
174	مثبت ایپلیفائر	4.3
176	مستقام کار	4.4
176	منفی کار	4.5
178	جمع کار	4.6
181	متوازن اور غیر متوازن صورت	4.7
185	موازنہ کار	4.8
185	آلاتی ایپلیفائر	4.9

187	مسئلے	5
187	مساوی دور	5.1
187	مسئلہ خطیت	5.2
191	مسئلہ نفاذ	5.3
201	مساوی ادوار	5.4
206	مسئلہ تھون، مسئلہ نارٹن اور مسئلہ متبادلہ منبع	5.5
225	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	5.6
231	تابع منبع اور غیر تابع منبع دونوں استعمال کرنے والے ادوار	5.7
239	زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ	5.8

247	برق گیر اور امالہ گیر	6
247	برق گیر	6.1
261	امالہ گیر	6.2
270	برق گیر اور امالہ گیر کے خصوصیات	6.3
273	سلسلہ وار جڑے برق گیر	6.4
277	متوازی جڑے برق گیر	6.5
281	سلسلہ وار امالہ گیر	6.6
283	متوازی امالہ گیر	6.7
287	حسابی ایپلیفائر کے RC ادوار	6.8
288	تفرق کار	6.9

293	عارضی رد عمل	7
293	تعارف	7.1
293	ایک درجی ادوار	7.2

295	7.2.1	رد عمل کی عمومی مساوات	
321	7.3	دھڑکن	
328	7.4	دو درجی ادوار	
359	8	برقرار حالت بدلتی رو	
359	8.1	مخلوط اعداد	
364	8.2	سائن نمائندہ	
371	8.3	سائن نمائندہ اور مخلوط جبری تفاعل	
378	8.4	دوری سمتیہ	
383	8.5	مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر کے انفرادی دوری سمتیہ تعلق	
390	8.6	برقی رکاوٹ اور برقی فراوانی	
403	8.7	دوری سمتیہ کے اشکال	
413	8.8	کرخوف مساوات	

باب 8

برقرار حالت بدلتی رو

جبری تفاعل میں یکدم تبدیلی سے دور عارضی حالت اختیار کرتا ہے۔ محدود قیمت کے وقتی مستقل کی صورت میں آخر کار عارضی دورانیہ گزر جاتا ہے اور دور ایک بار پھر برقرار حالت اختیار کر لیتا ہے۔ جبری تفاعل میں یکدم تبدیلی کی غیر موجودگی میں دور برقرار صورت میں رہتا ہے۔ اس باب میں ایسے ہی ادوار پر غور کیا جائے گا جن کے جبری تفاعل میں یکدم تبدیلی نہیں پائی جاتی۔ ایسی صورت میں جبری حل ہی مکمل حل ہو گا۔ اس باب میں مکمل حل سے مراد جبری حل ہو گا۔

8.1 مخلوط اعداد

حقیقی¹ عدد اور خیالی² عدد کے مجموعے کو مخلوط³ عدد کہتے ہیں۔ مخلوط اعداد کو مخلوط سطح⁴ پر دکھایا جاتا ہے۔ مخلوط سطح پر افقی محدود حقیقی اعداد کو ظاہر کرتا ہے جبکہ عمودی محدود خیالی اعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

real number¹
imaginary number²
complex number³
complex plane⁴

شکل 8.1- الف میں مخلوط عدد $3 + j2$ دکھایا گیا ہے۔ اسی شکل میں ایک مستطیل بھی دکھایا گیا ہے۔ اس عدد کے حقیقی اور خیالی اجزاء مستطیل کے اطراف ہیں۔ یوں مخلوط عدد کو حقیقی اور خیالی اجزاء کے مجموعے یعنی $3 + j2$ کے طرز پر لکھنے کو مستطیلی طرز⁵ کہتے ہیں۔

شکل 8.1- الف میں مخلوط نقطہ $(3 + j2)$ سے محد کے مرکز $(0,0)$ تک لکیر کھینچی گئی ہے۔ اس لکیر کی لمبائی r کو مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$r = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح افقی محد سے لکیر تک کا زاویہ درج ذیل ہو گا۔

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2}{3} = 33.69^\circ$$

شکل 8.1- ب میں اسی مخلوط عدد کو r/θ کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ مخلوط عدد کو حیصے اور زاویے سے ظاہر کرنے کو زاویائی طرز⁶ کہتے ہیں۔

کسی بھی مخلوط عدد m کو

$$(8.1) \quad m = x + jy \quad \text{مستطیل طرز}$$

یا

$$(8.2) \quad m = r/\theta \quad \text{زاویائی طرز}$$

میں لکھا جاسکتا ہے جہاں مستطیلی طرز سے زاویائی طرز درج ذیل طریقے سے حاصل کی جاتی ہے

$$(8.3) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

جبکہ زاویائی طرز سے مستطیل طرز درج ذیل سے حاصل کی جاتی ہے۔

$$(8.4) \quad x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ب) مخلوط عدد لکھنے کی زاویائی طرز۔

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(الف) مخلوط عدد لکھنے کی مستطیل طرز۔

شکل 8.1: مخلوط اعداد کو لکھنے کے طریقے۔

مخلوط اعداد کو جمع، منفی، ضرب اور تقسیم کرنے کی چند مثالیں دیکھتے ہیں۔

مثال 8.1: مخلوط اعداد $a = 2 + j3$ اور $b = 4 + j5$ دیے گئے ہیں۔ درج ذیل حاصل کریں۔

$$a + b, \quad a - b, \quad ab, \quad \frac{a}{b}$$

حل: مخلوط اعداد جمع (منفی) کرتے وقت حقیقی اجزاء کو علیحدہ جمع (منفی) کیا جاتا ہے اور خیالی اجزاء کو علیحدہ جمع (منفی) کیا جاتا ہے۔

$$a + b = (2 + j3) + (4 + j5) = (2 + 4) + j(3 + 5) = 6 + j8$$

$$a - b = (2 + j3) - (4 + j5) = (2 - 4) + j(3 - 5) = -2 - j2$$

مخلوط اعداد کو ضرب دیتے ہوئے $j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ لکھا جاتا ہے۔

$$ab = (2 + j3)(4 + j5) = 8 + j10 + j12 + j^2 15 = (8 - 15) + j(10 + 12) = -7 + j22$$

مخلوط اعداد کو تقسیم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{2 + j3}{4 + j5} \\ &= \left(\frac{2 + j3}{4 + j5} \right) \left(\frac{4 - j5}{4 - j5} \right) \\ &= \frac{8 - j10 + j12 - j^2 15}{4^2 - (j5)^2} \\ &= \frac{23 + j2}{16 + 25} \\ &= \frac{23}{41} + j \frac{2}{41} \\ &= 0.56098 + j0.04878 \end{aligned}$$

مثال 8.2: گزشتہ مثال میں مخلوط اعداد کو زاویائی طرز پر لکھتے ہوئے ab اور $\frac{a}{b}$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 8.3 استعمال کرتے ہوئے $a = 2 + j3$ کا جیٹ اور زاویہ حاصل کرتے ہیں۔

$$r_a = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\theta_a = \tan^{-1} \frac{3}{2} = 56.31^\circ$$

یوں

$$a = \sqrt{13}/56.31^\circ$$

لکھا جائے گا۔ اسی طرح $b = 4 + j5$ کا جیٹ اور زاویہ حاصل کرتے ہوئے

$$r_b = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$$

$$\theta_b = \tan^{-1} \frac{5}{4} = 51.34^\circ$$

درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$b = \sqrt{41}/51.34^\circ$$

اس طرح

$$\begin{aligned} ab &= \left(\sqrt{13}/56.31^\circ \right) \left(\sqrt{41}/51.34^\circ \right) \\ &= \sqrt{13}\sqrt{41}/56.31^\circ + 51.34^\circ \\ &= \sqrt{533}/107.65^\circ \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{\sqrt{13}/56.31^\circ}{\sqrt{41}/51.34^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{41}}/56.31^\circ - 51.34^\circ \\ &= \sqrt{\frac{13}{41}}/4.97^\circ \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

ان جوابات کو مستطیلی طرز میں درج ذیل لکھا جائے گا جو گزشتہ مثال کے جوابات ہیں۔

$$ab = \sqrt{533} \cos 107.65^\circ + j\sqrt{533} \sin 107.65^\circ = -7 + j22$$

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{13}{41}} \cos 4.97^\circ + j\sqrt{\frac{13}{41}} \sin 4.97^\circ = 0.56098 + j0.04878$$

ہم نے دیکھا کہ زاویائی طرز میں لکھا مخلوط عدد $a = r/\theta$ مستطیل طرز میں بھی لکھا جاسکتا ہے یعنی

$$(8.5) \quad a = r/\theta = r \cos \theta + jr \sin \theta$$

یولر مساوات⁷ درج ذیل ہے۔

$$(8.6) \quad e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

مندرجہ بالا دو مساوات کو ملاتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(8.7) \quad r/\theta = re^{j\theta} = r (\cos \theta + j \sin \theta)$$

مثال 8.3: مخلوط عدد $m = 5 - j12$ کو زاویائی طرز میں لکھیں۔

حل: مساوات 8.3 کے استعمال سے درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$r = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-12}{5} = -67.38^\circ$$

لہذا درج ذیل لکھے جاسکتے ہیں۔

$$m = 13e^{-j67.38^\circ}$$

$$m = 13/\underline{-67.38^\circ}$$

8.2 سائن نمائندگی

سائن نمائندگی⁸ سے مراد سائن تفاعل $\sin \theta$ اور کوسائن تفاعل $\cos \theta$ ہیں۔ شکل 8.2-الف میں رداس A_0 کے گول دائرے پر ایک نقطہ یکساں رفتار کے ساتھ، گھڑی کی گردش کی الٹ سمت میں، حرکت کر رہا ہے۔ یہ دائرہ کارڈیسی محدود⁹ کے مرکز $(0,0)$ پر پایا جاتا ہے۔ لمحہ t پر زاویہ θ کی قیمت θ کے برابر ہے۔ نقطے سے x محدود پر عمودی کثیر محدود کو $x(t)$ پر ٹکراتی ہے جبکہ y محدود پر عمودی کثیر $y(t)$ پر ٹکراتی ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(8.8) \quad y(t) = A_0 \sin \theta$$

جہاں A_0 موج کی چوٹی ہے جسے موج کا محیط¹⁰ کہتے ہیں اور θ کو تفاعل کا دلیل¹²¹¹ کہتے ہیں۔ اس مساوات میں θ از خود وقت t پر منحصر ہے۔

گردش کرتا نقطہ ایک چکر میں 360° درجے کا زاویہ یعنی 2π ریڈین طے کرتا ہے۔ ایک چکر کاٹنے کے لئے درکار دورانیہ کو دوری عرصہ¹³ کہتے ہیں جسے T سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مشق 8.1: شکل 8.2-الف میں نقطہ ایک چکر 20 ms میں پورا کرتا ہے۔ یہ نقطہ ایک سینڈ میں کتنے چکر پورا کرے گا۔ یہ نقطہ ایک سینڈ میں کتنے ریڈین کا زاویہ طے کرتا ہے۔

جوابات: 50 چکر، $100\pi \text{ rad}$

اگر ایک چکر کاٹنے کے لئے T سینڈ کا وقت درکار ہو تب ایک سینڈ میں چکروں کی تعداد $\frac{1}{T}$ ہوگی جسے تعدد¹⁴ کہتے ہیں اور f سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$(8.9) \quad f = \frac{1}{T}$$

sinusoidal⁸

Cartesian coordinates⁹

amplitude¹⁰

¹¹ ایک ماہر ریاضی اپنی خیالی دنیا میں کوسائن $\cos \theta$ تفاعل کے ساتھ بحث میں مصروف ہوتا ہے۔ ماہر ریاضی تفاعل کو دلیل کے طور پر مقرر پیش کرتا ہے۔ تفاعل اس کا فوراً جواب اکائی دیتا ہے۔ ($\cos 0 = 1$)

argument¹²

time period¹³

frequency¹⁴

تعدد کی اکائی ہرتز¹⁵ ہے جسے Hz سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ایک چکر 2π ریڈین کو کہتے ہیں لہذا f چکر سے مراد $2\pi f$ ریڈین کا زاویہ ہے۔ یوں f تعدد پر گردش کرتا نقطہ ایک سیکنڈ میں $2\pi f$ ریڈین کا زاویہ طے کرے گا یعنی اس کی زاویائی رفتار¹⁶ کی قیمت $2\pi f$ ہوگی۔ زاویائی رفتار کو ω سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ اس کی اکائی ریڈین فی سیکنڈ rads^{-1} ہے۔

$$(8.10) \quad \omega = 2\pi f$$

زاویائی رفتار ω سے گردش کرتا ہوا نقطہ t سیکنڈ میں $2\pi ft$ ریڈین کا زاویہ طے کرے گا۔ یوں اگر $t = 0$ پر نقطہ عین x محدد کے مثبت حصے پر ہو تب لمحہ t پر

$$(8.11) \quad \theta = \omega t = 2\pi ft$$

لکھا جائے گا۔ یوں مساوات 8.8 کو

$$(8.12) \quad \begin{aligned} y(t) &= A_0 \sin 2\pi ft \\ &= A_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \\ &= A_0 \sin \omega t \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔

برقی میدان میں $y(t)$ وقت کے ساتھ بدلتے دباؤ یا وقت کے ساتھ بدلتی رو کو ظاہر کر سکتی ہے۔ مساوات 8.12 میں دیے تفاعل، جسے شکل 8.2-ب میں دکھایا گیا ہے، کا آزاد متغیر وقت t ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تفاعل ہر T سیکنڈ کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہے۔ اس حقیقت کو ریاضی میں درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$(8.13) \quad y(t + T) = y(t)$$

جس سے مراد یہ ہے کہ تفاعل کی قیمت لمحہ t اور لمحہ $t + T$ پر برابر ہیں۔

مساوات 8.12 کے خط کو ωt کے ساتھ بھی کھینچا جاسکتا ہے۔ ایسا ہی شکل 8.2-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ یہ تفاعل ہر 2π ریڈین کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہے۔

¹⁵Hertz
¹⁶angular speed

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and'tikz/external/mode=list

الف

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and'tikz/external/mode=list
(پ)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and'tikz/external/mode=list
(ب)

شکل 8.2: سائن موج۔

مشق 8.2: شکل 8.2-الف میں گردش کرتا نقطہ 0.2 s میں 40° کا زاویہ طے کرتا ہے۔ زاویائی رفتار، تعدد اور دوری عرصہ دریافت کریں۔

جوابات: $T = \frac{5}{9} \text{ s}$ ، $f = 1.8 \text{ Hz}$ ، $\omega = \frac{10\pi}{9} \text{ rad s}^{-1}$

شکل 8.3 میں عمومی صورت حال دکھائی گئی ہے جہاں ω زاویائی رفتار سے گردش کرتا نقطہ، لمحہ $t = 0$ پر زاویہ α پر پایا جاتا ہے۔ یہ نقطہ وقت t کے دوران ωt زاویہ طے کرتے ہوئے $\theta = \omega t + \alpha$ پہنچ جائے گا لہذا اس کے لئے

$$(8.14) \quad y(t) = A_0 \sin(\omega t + \alpha)$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں α کو زاویائی ہٹاو¹⁷ کہتے ہیں۔ اس مساوات کا دلیل $\omega t + \alpha$ ہے۔ شکل 8.3-ب میں مساوات 8.12 اور مساوات 8.14 کو دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ان مساوات میں α زاویائی فرق¹⁸ پایا جاتا ہے۔ مساوات 8.12 سے مساوات 8.14 α ریڈین آگے¹⁹ ہے۔ یہ بھی کہا جاسکتا ہے کہ مساوات 8.14 سے مساوات 8.12 α ریڈین پیچھے²⁰ ہے۔ ایک ہی تعدد کے دو تفاعل

$$(8.15) \quad \begin{aligned} y_1(t) &= A_{01} \sin(\omega t + \alpha) \\ y_2(t) &= A_{02} \sin(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

میں $y_1(t)$ تفاعل $y_2(t)$ سے $\alpha - \beta$ ریڈین آگے ہے۔ ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ $y_2(t)$ تفاعل $y_1(t)$ سے $\beta - \alpha$ ریڈین آگے ہے یا کہ $y_1(t)$ تفاعل $y_2(t)$ سے $\beta - \alpha$ ریڈین پیچھے ہے۔ اگر $\alpha = \beta$ ہو تب تفاعل ہم زاویہ²¹ کہلاتے ہیں جبکہ $\alpha \neq \beta$ کی صورت میں تفاعل الگ زاویہ²² کہلاتے ہیں۔

phase angle¹⁷
phase difference¹⁸
lead¹⁹
lag²⁰
in phase²¹
out of phase²²

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list
(ب) زاویائی ہٹاؤ۔

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list
(الف)

شکل 8.3: لمحہ $t = 0$ پر زاویہ α ہے۔

زاویائی ہٹاؤ کو عموماً درجوں میں بیان کیا جاتا ہے لہذا $\alpha = \frac{\pi}{4}$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(8.16) \quad y(t) = A_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = A_0 \sin(\omega t + 45^\circ)$$

باضابطہ طور پر چونکہ ωt کی قیمت ریڈیئن میں ہے لہذا α کی قیمت بھی ریڈیئن میں ہونا لازم ہے لہذا تفاعل لکھنے کا صحیح طریقہ $y(t) = A_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ ہی ہے لیکن زاویائی ہٹاؤ کو درجوں میں لکھنے کی روایت نہایت مقبول ہے لہذا اس کتاب میں بھی اس روایت کو برقرار رکھا جائے گا۔ مساوات 8.16 میں 45° لکھتے ہوئے زیر بالا میں درجے کی علامت ($^\circ$) استعمال کی گئی ہے جبکہ $\frac{\pi}{4}$ پر کوئی علامت نہیں لگائی گئی۔ اسی علامت سے ریڈیئن یا درجوں کی پہچان کی جاتی ہے۔

مثال 8.4: مساوات $y_1(t) = 15 \sin(100t + 60^\circ)$ اور $y_2(t) = 22 \sin(200t + 0.2\pi)$ کی قیمت $t = 25 \text{ ms}$ پر دریافت کریں۔

حل: پہلی تفاعل میں 50° کا زاویائی ہٹاؤ $\frac{60^\circ}{180^\circ} \times \pi = \frac{\pi}{3}$ ریڈیئن کے برابر ہے۔ یوں لمحہ $t = 25 \text{ ms}$ پر

$$y_1(0.025) = 15 \sin\left(100 \times 25 \times 10^{-3} + \frac{\pi}{3}\right) = -5.918619766$$

اور

$$y_2(0.025) = 22 \sin(200 \times 0.025 + 0.2\pi) = -13.39917888$$

حاصل ہوتے ہیں۔

اگرچہ اب تک کی بحث میں ہم نے سائن تفاعل استعمال کیا، ہم اس کی جگہ کو سائن تفاعل بھی استعمال کر سکتے تھے۔ ان دو تفاعل کی صورت بالکل یکساں ہے پس دونوں میں 90° کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔

$$(8.17) \quad \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega t$$

$$(8.18) \quad \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \omega t$$

سائن نما تفاعل کے دلیل کے ساتھ 2π ریڈین یا 360° کا مضرب جمع کرنے سے تفاعل کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔

$$(8.19) \quad \cos(\omega t + \alpha + 2\pi n) = \cos(\omega t + \alpha) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(8.20) \quad \sin(\omega t + \alpha + 2\pi n) = \sin(\omega t + \alpha) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

دو سائن نما تفاعل میں زاویائی فرق تین شرائط پورا کرنے کے بعد دریافت کیا جاسکتا ہے۔ پہلی شرط یہ ہے کہ دونوں تفاعل کی تعدد برابر ہو۔ دوسری شرط یہ ہے کہ دونوں کو سائن تفاعل اور یا پھر دونوں کو کو سائن تفاعل کی صورت میں لکھا جائے۔ تیسری اور آخری شرط یہ ہے کہ دوسری شرط میں لکھے گئے تفاعل کے حیطے مثبت ہوں۔ درج ذیل مماثل ان شرائط کو پورا کرنے میں مدد دیتے ہیں۔

$$(8.21) \quad -\sin(\omega t + \alpha) = \sin(\omega t + \alpha \pm 180^\circ)$$

$$(8.22) \quad -\cos(\omega t + \alpha) = \cos(\omega t + \alpha \pm 180^\circ)$$

ان کے علاوہ درج ذیل مماثل بھی نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔

$$(8.23) \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$(8.24) \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

ایک آخری تفاعل جس کا ذکر ضروری ہے درج ذیل ہے۔

$$(8.25) \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

مثال 8.5: درج ذیل تفاعل کے خط کھینچیں۔

$$v(t) = 1 \cos(\omega t + 60^\circ) \cdot$$

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ب)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ت)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(الف)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(پ)

شکل 8.4: مثال 8.5 کے خط۔

$$v(t) = 1 \cos(\omega t + 240^\circ) \bullet$$

$$v(t) = 1 \cos(\omega t - 300^\circ) \bullet$$

حل: شکل 8.4-الف میں $v(\omega t) = 1 \cos \omega t$ کا خط دکھایا گیا ہے۔ اس کو افقی محور پر 60° درجے بائیں منتقل کرنے سے $v(\omega t) = 1 \cos(\omega t + 60^\circ)$ کا خط حاصل ہوتا ہے جسے شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔ ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$v(\omega t) = 1 \cos(\omega t + 240^\circ) = 1 \cos(\omega t + 60^\circ + 180^\circ) = -1 \cos(\omega t + 60^\circ)$$

جہاں مساوات 8.22 کا استعمال کیا گیا ہے۔ درج بالا مساوات کو شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ شکل-ب کا منفی ہے۔ اسی طرح مساوات 8.19 کی مدد سے

$$v(\omega t) = 1 \cos(\omega t - 300^\circ) = 1 \cos(\omega t - 300^\circ + 360^\circ) = 1 \cos(\omega t + 60^\circ)$$

لکھتے ہوئے شکل-ت حاصل ہوتی ہے جو عین شکل-ب ہی ہے۔

مثال 8.6: درج ذیل امواج کی تعدد ہرٹز میں حاصل کریں۔ امواج کے مابین زاویائی فرق دریافت کریں۔ یہ بھی بتلائیں کہ کونسی موج آگے ہے۔

$$v_1(\omega t) = 100 \sin(400t - 30^\circ)$$

$$v_2(\omega t) = -250 \cos(400t + 0.2\pi)$$

حل: ان امواج میں $\omega = 400 \text{ rad s}^{-1}$ ہے لہذا

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{400}{2\pi} = 63.66 \text{ Hz}$$

ہو گا۔ زاویائی فرق دریافت کرنے کی خاطر دونوں امواج کو مثبت حیٹے کے کوسائن موج کی صورت میں لکھتے ہیں۔ ساتھ ہی ساتھ ان کے زاویائی ہٹاؤ کو درجوں میں لکھتے ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned} v_1(\omega t) &= 100 \sin(400t - 30^\circ) \\ &= 100 \cos(400t - 30^\circ - 90^\circ) \\ &= 100 \cos(400t - 120^\circ) \\ &= 100 \cos(400t + 240^\circ) \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں آخری قدم پر مساوات 8.19 کا استعمال کیا گیا۔ اسی طرح

$$\begin{aligned} v_2(\omega t) &= -250 \cos(400t + 0.2\pi) \\ &= 250 \cos(400t + 0.2\pi + \pi) \\ &= 250 \cos(400t + 216^\circ) \end{aligned}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے جہاں آخری قدم پر 1.2π ریڈیئن کو 216° درجے لکھا گیا ہے۔ ان امواج کے مابین

$$240^\circ - 216^\circ = 24^\circ$$

کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے اور موج $v_1(\omega t)$ آگے ہے۔

مشق 8.3: ایک دور میں درج ذیل تین رو پائے جاتے ہیں۔

$$\begin{aligned} i_1(1) &= 30 \cos(100\pi t + 30^\circ) \\ i_2(2) &= 55 \sin(100\pi t + 40^\circ) \\ i_3(t) &= 20 \sin(100\pi t + 60^\circ) \end{aligned}$$

i_2 سے i_1 کتنی آگے ہے اور i_3 سے i_1 کتنی پیچھے ہے۔

جوابات: 80° ، -60° یا 300°

[[make'and'/tikz/external/mode=listToDueDiscardedImage]]

شکل 8.5: مثال 8.7 کا دور۔

8.3 سائنس نما اور مخلوط جبری تفاعل

گزشتہ باب میں دور پر مستقل جبری تفاعل مسلط کرتے ہوئے، دور کا جبری رد عمل بھی مستقل قیمت کا حاصل ہوا۔ تفرقی مساوات کا جبری رد عمل، مسلط جبری تفاعل اور اس کے تمام بلند درجی تفرق کا مجموعہ ہوتا ہے۔ یوں دور پر جبری دباؤ $v(t) = \sin \omega t$ مسلط کرنے سے رو کا جبری رد عمل $i(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$ متوقع ہوگا۔ پس جبری رد عمل کے مستقل c_1 اور c_2 معلوم کرنا باقی ہے۔

مثال 8.7: شکل 8.5 میں رو $i_J(t)$ حاصل کریں۔

حل: دور کی تفرقی مساوات لکھتے ہیں۔

$$(8.26) \quad Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = V_0 \cos \omega t$$

دور پر مسلط جبری تفاعل اور اس تفاعل کے تمام بلند درجی تفرق کا مجموعہ جبری حل کے برابر ہوگا۔

$$i_J(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

اس جبری حل کو مساوات 8.26 میں پُر کرتے ہوئے c_1 اور c_2 مستقل دریافت کرتے ہیں۔

$$R(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) + L(-c_1 \omega \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t) = V_0 \cos \omega t$$

درج بالا مساوات میں دونوں اطراف $\cos \omega t$ کے عددی سر برابر ہوں گے۔ اسی طرح دونوں اطراف $\sin \omega t$ کے عددی سر برابر ہوں گے۔

$$c_1 R + c_2 \omega L = V_0$$

$$-c_1 \omega L + c_2 R = 0$$

ان ہمزاد مساوات کو c_1 اور c_2 کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$c_1 = \frac{RV_0}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$c_2 = \frac{\omega LV_0}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

لہذا جبری حل

$$(8.27) \quad i_I(t) = \frac{RV_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{\omega LV_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t$$

ہوگا۔

مثال 8.8: درج بالا مثال میں $\omega = 10 \text{ krad s}^{-1}$ اور $V_0 = 310 \text{ V}$ ، $L = 5 \text{ mH}$ ، $R = 100 \Omega$ کی صورت میں جبری حل کو مساوات 8.24 کی مدد سے $i(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi)$ کے طرز پر لکھیں۔

حل: مساوات 8.27 میں دی گئی قیمتیں پُر کرنے سے

$$i_I(t) = \frac{100 \times 310}{100^2 + (10\,000 \times 0.005)^2} \cos \omega t + \frac{10\,000 \times 0.005 \times 310}{100^2 + (10\,000 \times 0.005)^2} \sin \omega t$$

یعنی درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(8.28) \quad i_I(t) = 2.48 \cos \omega t + 1.24 \sin \omega t$$

مساوات 8.24 سے جبری حل کی درکار صورت کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(8.29) \quad i(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi) = I_0 \cos \phi \cos \omega t + I_0 \sin \phi \sin \omega t$$

مساوات 8.28 میں $\cos \omega t$ اور $\sin \omega t$ کے عددی سر کو مساوات 8.29 کے عددی سر کے برابر پُر کرتے ہیں۔

$$(8.30) \quad I_0 \cos \phi = 2.48$$

$$(8.31) \quad I_0 \sin \phi = 1.24$$

ان ہمزاد مساوات کے مربع جمع کرتے ہوئے

$$I_0^2 \cos^2 \phi + I_0^2 \sin^2 \phi = 2.48^2 + 1.24^2$$

ملتا ہے جس میں مساوات 8.25 کے استعمال سے $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ پُر کرتے ہوئے

$$I_0 = \sqrt{2.48^2 + 1.24^2} = 2.7727$$

میتا ہے۔ اسی طرح مساوات 8.31 کو مساوات 8.30 سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{1.24}{2.48} = \tan \phi$$

یعنی

$$\phi = \tan^{-1} \frac{1.24}{2.48} = \underline{26.6^\circ}$$

میتا ہے۔ یوں جبری حل درج ذیل لکھا جائے گا

$$(8.32) \quad i_I(t) = 2.77 \cos(\omega t - 26.6^\circ) = 2.77 \cos(10\,000t - 26.6^\circ)$$

جہاں سے ظاہر ہے کہ دباؤ سے رو 26.6° درجے پیچھے ہے۔ مخلوط جبری حل درج ذیل لکھا جائے گا جس کا حقیقی جزو درج بالا مساوات ہے۔

$$(8.33) \quad i_M(t) = 2.77e^{j(10\,000t - 26.6^\circ)}$$

مثال 8.9: مثال 8.8 کے طرز پر مثال 8.7 میں حاصل کئے گئے جبری حل کو $i_I(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi)$ کی صورت میں لکھیں۔

حل: مساوات 8.27 میں $\cos \omega t$ اور $\sin \omega t$ کے عددی سر کو مساوات 8.29 میں $\cos \omega t$ اور $\sin \omega t$ کے عددی سر کے برابر پُر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$I_0 \cos \phi = \frac{RV_0}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$I_0 \sin \phi = \frac{\omega LV_0}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

ان ہمزا مساوات میں دوسری مساوات کو پہلی سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \tan \phi = \frac{\omega L}{R}$$

یعنی

$$(8.34) \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

ماتا ہے جبکہ دونوں ہمزاد مساوات کے مربع کا مجموعہ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} I_0^2 \cos^2 \phi + I_0^2 \sin^2 \phi &= I_0^2 = \left(\frac{RV_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega LV_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 \\ &= \frac{(R^2 + \omega^2 L^2) V_0^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} \\ &= \frac{V_0^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \end{aligned}$$

یعنی

$$(8.35) \quad I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

ماتا ہے۔ یوں جبری حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(8.36) \quad i_I(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right)$$

مساوات 8.36 سے ظاہر ہے کہ $L = 0$ کی صورت میں $\phi = 0$ ہوگا لہذا دباو اور رو ہم زاویہ ہوں گے جبکہ $R = 0$ کی صورت میں $\phi = 90^\circ$ ہوگا لہذا دباو سے رو 90° درجے پیچھے ہوگی۔ مزاحمت اور امالہ کے دیگر قیمتوں کی صورت میں دباو سے رو 0° تا 90° کے مابین کسی مخصوص درجے پر پیچھے رہے گی۔ اسی لئے مزاحمت اور امالہ کے ادوار کو پیچھے رہنے والے ادوار کہا جاتا ہے۔

سلسلہ وار جڑے مزاحمت اور امالہ کے دور کا حل آپ نے دیکھا۔ یقیناً اس دور کا حل سلسلہ وار جڑے دو عدد مزاحمتی دور کے حل سے کئی گنا مشکل تھا۔ آپ خود تصور کر سکتے ہیں کہ زیادہ تعداد کے پرزوں کا دور حل کرنا کتنا مشکل ہوگا۔ اسی مشکل کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم مخلوط تفاعل²³ کو پیش کرتے ہیں جس سے ادوار کا حل انتہائی آسان ثابت ہوتا ہے۔

مخلوط تعامل اور سائنس نما تعامل کا تعلق یولر مساوات²⁴

$$(8.37) \quad e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad \text{یولر مساوات}$$

دیتی ہے جہاں $j = \sqrt{-1}$ خیالی عدد ہے۔ یولر مساوات میں $\cos \omega t$ حقیقی²⁵ مقدار اور $\sin \omega t$ خیالی²⁶ مقدار ہیں۔

حقیقی دنیا میں مخلوط جبری تعامل نہیں پایا جاتا۔ اس کے باوجود، دور پر سائنس نما جبری تعامل کی جگہ مخلوط جبری تعامل مسلط کرتے ہوئے مخلوط حل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مخلوط جبری تعامل کو حقیقی جبری تعامل اور خیالی جبری تعامل کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ خطی ادوار میں مسئلہ نفاذ کے تحت تمام جبری تعامل کی علیحدہ علیحدہ اثرات کا مجموعہ لیا جاسکتا ہے۔ یوں جبری تعامل کے حقیقی جزو سے حل کا حقیقی جزو جبکہ جبری تعامل کے خیالی جزو سے حل کا خیالی جزو حاصل ہو گا۔ یوں مخلوط حل کے خیالی جزو کو رد کرتے ہوئے حقیقی جزو کو سائنس نما تعامل کا رد عمل تسلیم کیا جاتا ہے۔ اس ترکیب کو مثال کی مدد سے زیادہ آسانی سے سمجھا جاسکتا ہے۔

مثال 8.10: شکل 8.5 میں حقیقی جبری تعامل $V_0 \cos \omega t$ کی جگہ مخلوط جبری تعامل نسب کرتے ہوئے حقیقی $i(t)$ کے لئے حل کریں۔

حل: حقیقی جبری تعامل $v(t) = V_0 \cos \omega t$ کی جگہ دور میں مخلوط جبری تعامل $v(t) = V_0 e^{j\omega t}$ نسب کرتے ہوئے کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = V_0 e^{j\omega t}$$

جبری تعامل $e^{j\omega t}$ کا تفرق $j\omega e^{j\omega t}$ بھی جبری تعامل ہی ہے لہذا درج بالا مساوات کا مخلوط حل $i_M(t) = I_0 e^{j\omega t}$ فرض کرتے ہیں جہاں I_0 نامعلوم مخلوط مستقل ہے۔ اس حل کو درج بالا مساوات میں پُر کرتے ہوئے

$$RI_0 e^{j\omega t} + L \frac{d}{dt} (I_0 e^{j\omega t}) = V_0 e^{j\omega t}$$

درکار تفرق کے بعد

$$(8.38) \quad RI_0 e^{j\omega t} + j\omega LI_0 e^{j\omega t} = V_0 e^{j\omega t}$$

Euler's equation²⁴
real²⁵
imaginary²⁶

ملتا ہے جس کے دونوں اطراف کو $e^{j\omega t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(8.39) \quad RI_0 + j\omega LI_0 = V_0$$

اس سے I_0 حاصل کرتے ہیں۔

$$(8.40) \quad I_0 = \frac{V_0}{R + j\omega L}$$

یوں مخلوط رو درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$(8.41) \quad \begin{aligned} i_M(t) &= I_0 e^{j\omega t} \\ &= \frac{V_0 e^{j\omega t}}{R + j\omega L} \end{aligned}$$

ہمیں اس کا حقیقی جزو درکار ہے۔ یولر مساوات کی مدد سے درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$i_M(t) = \frac{V_0(\cos \omega t + j \sin \omega t)}{R + j\omega L}$$

دائیں ہاتھ کسر کے بالائی اور نچلے حصے کو $R - j\omega L$ سے ضرب دیتے ہیں

$$\begin{aligned} i_M(t) &= \frac{V_0(\cos \omega t + j \sin \omega t)(R - j\omega L)}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)} \\ &= \frac{V_0(R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t) + jV_0(R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2} \end{aligned}$$

جہاں دوسرا قدم ترتیب دینے ہوئے لکھا گیا ہے۔ اس کا حقیقی جزو درکار حل ہے

$$(8.42) \quad i(t) = \frac{V_0(R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

جو عین مساوات 8.27 ہی ہے۔

ہم مساوات 8.40 کے مخلوط مستقل I_0 کو زاویائی شکل میں لکھ کر بھی آگے بڑھ سکتے ہیں۔ مخلوط مستقل کو درج ذیل لکھا

جاسکتا ہے

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{V_0}{R + j\omega L} \\
 &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \angle \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}} \\
 &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}} \\
 &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-j \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}}
 \end{aligned}$$

جہاں دوسری قدم پر کسر کے نچلی حصے کو مساوات 8.3 کی مدد سے زاویائی صورت میں لکھا گیا ہے اور تیسری قدم پر پولر مساوات کا استعمال کیا گیا ہے۔ زاویہ $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$ کو شکل 8.6 میں دکھایا گیا ہے۔ یوں مخلوط رو درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$\begin{aligned}
 i_M &= I_0 e^{j\omega t} \\
 &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R})}
 \end{aligned}$$

اس مساوات میں $\tan^{-1} \frac{\omega L}{R} = \theta$ لکھتے ہوئے حقیقی جزو لے کر حقیقی رو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\omega t - \theta)} \Big|_{\text{حقیقی}} \\
 &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \theta) \\
 &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} (\cos \omega t \cos \theta + \sin \omega t \sin \theta)
 \end{aligned}$$

شکل 8.6 سے $\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ اور $\sin \theta = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ پُر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left(\cos \omega t \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} + \sin \omega t \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \right) \\
 &= \frac{V_0 (R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2}
 \end{aligned}$$

[[make'and'/tikz/external/mode=listToDueDiscardedImage]]

شکل 8.6: مثال 8.10 کا شکل۔

8.4 دوری سمتیہ

درج بالا حصے میں ہم نے دیکھا کہ حقیقی جبری تفاعل کی جگہ مخلوط جبری تفاعل نسب کرتے ہوئے مخلوط حل حاصل کیا جا سکتا ہے جس کا حقیقی جزو حقیقی جبری رد عمل ہو گا۔ اس ترکیب کو مثال 8.10 میں استعمال کیا گیا جہاں مساوات 8.38 کو $e^{j\omega t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات 8.39 حاصل کی گئی۔ مساوات 8.39 سے I_0 حاصل کی گئی جسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے مخلوط حل حاصل کیا گیا۔ مخلوط حل کا حقیقی جزو یعنی مساوات 8.42 درکار جواب ہے۔ مثال 8.8 میں مخصوص قیمتیں استعمال کرتے ہوئے مخلوط رو کو مساوات 8.33 میں پیش کیا گیا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جزو $e^{j\omega t}$ جوں کا توں مخلوط جبری تفاعل اور مخلوط جبری حل میں پایا جاتا ہے۔

حقیقت میں کسی بھی خطی دور پر مخلوط جبری تفاعل مثلاً

$$(8.43) \quad v_M = V_0 e^{j\omega t}$$

مسلط کرنے سے دور میں تمام رد کی صورت $i_M(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ اور دباؤ کی صورت $v_M(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ ہو گی جہاں تمام رد اور دباؤ کی تعدد ω جبکہ ان کے انفرادی حیثے مختلف ہوں گے۔ ان کے انفرادی زاویہ ہٹاؤ بھی مختلف ہوں گے۔ یہاں حیثہ حقیقی مقدار ہے۔

یوں تعدد جانتے ہوئے کسی بھی مخلوط تفاعل مثلاً مخلوط رو کو اس کے حیثے I_0 اور زاویائی ہٹاؤ ϕ سے مکمل طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ مخلوط تفاعل مثلاً

$$(8.44) \quad i_M(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

سے حقیقی تفاعل درج ذیل

$$(8.45) \quad i(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi)} \Big|_{\text{حقیقی}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں I_0 حقیقی مقدار ہے اور زیر نوشت میں لفظ "حقیقی" لکھنے کا مطلب ہے کہ اس تفاعل کا حقیقی جزو لیا جائے یعنی

$$(8.46) \quad i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$$

مساوات 8.45 حقیقی رو دیتی ہے۔ اس طرز کے تمام مساوات میں $e^{j\omega t}$ پایا جاتا ہے اور مساوات کا حقیقی جزو ہی حقیقی مقدار ہوتا ہے۔ یوں ایسے مساوات میں لفظ "حقیقی" اور $e^{j\omega t}$ کو ذہن میں رکھتے ہوئے انہیں لکھنے سے گریز کیا جاتا ہے۔ مساوات 8.45 میں ایسا ہی کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا

$$\hat{I} = I_0 e^{j\phi} \quad (8.47)$$

جہاں رو کو ٹوپی والے بڑے حرف سے ظاہر کیا گیا ہے۔ دباؤ کی صورت میں تفاعل کو \hat{V} لکھا جاتا۔ ٹوپی والے بڑے حرف سے ظاہر کردہ تفاعل کو $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر حقیقی جزو لینے سے حقیقی تفاعل حاصل کیا جاتا ہے۔

مساوات 8.47 کا صفحہ 363 پر مساوات 8.7 سے موازنہ کریں۔ ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے \hat{I} مخلوط عدد کو ظاہر کرتا ہے۔ اگرچہ مساوات 8.47 درحقیقت میں مساوات 8.45 کو چھوٹا لکھنے کا طریقہ ہے لہذا \hat{I} مخلوط عدد کو ظاہر نہیں کرتا لیکن دیکھا یہ گیا ہے کہ \hat{I} کو مخلوط عدد تصور کر لینے سے ہمارے لئے آسانی پیدا ہوتی ہے۔ آئیں \hat{V} کو مخلوط عدد فرض کرتے ہوئے اس کو مخلوط سطح پر ظاہر کریں۔

مثال 8.11: مخلوط دباؤ $v_M(t) = 50e^{j(100\pi t - 35^\circ)}$ سے \hat{V} حاصل کرتے ہوئے \hat{V} کو مخلوط سطح پر دکھائیں۔
حل: مخلوط دباؤ سے حقیقی دباؤ لکھتے ہیں۔

$$v(t) = 50e^{j(100\pi t - 35^\circ)} \Big|_{\text{حقیقی}}$$

اس مساوات کی تعدد $(\omega = 100\pi)$ کو ذہن نشین کرتے ہوئے لفظ "حقیقی" اور $e^{j100\pi t}$ لکھنے سے گریز کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا

$$\begin{aligned} \hat{V} &= 50e^{-j35^\circ} \\ &= 50 \angle -35^\circ \end{aligned}$$

جسے شکل 8.7 میں مخلوط سطح پر دکھایا گیا ہے۔ حقیقی محدود سے گھڑی کی گردش کی جانب مثبت زاویہ ناپا جاتا ہے لہذا منفی زاویے کو گھڑی کی گردش کے الٹ جانب دکھایا گیا ہے۔ مخلوط اعداد اور \hat{V} میں فرق رکھنے کی خاطر \hat{V} کو مخلوط سطح پر تیر کی نشان سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 8.11 میں \hat{V} کو مخلوط سطح پر تیر کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے جسے دیکھ کر یوں معلوم ہوتا ہے جیسے \hat{V} ایک سمتیہ ہے۔ اسی حقیقت کی بنا پر \hat{V} یا \hat{I} کو دوری سمتیہ²⁷ کہتے ہیں اور شکل 8.7 کو دوری سمتیہ شکل²⁸ کہتے ہیں۔

[[make'and'/tikz/external/mode=listToDueDiscardedImage]]

شکل 8.7: مثال 8.11 کی دوری سمتیہ۔

مخلوط عدد لکھنے کے تمام طرز پر دوری سمتیہ کو لکھا جاتا ہے لہذا درج ذیل لکھنا ممکن ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{I} &= I_0 e^{j\phi} \\ (8.48) \quad &= I_0 / \phi \\ &= I_x + jI_y\end{aligned}$$

دوری سمتیہ کا حیث حقیقی اور مثبت مقدار ہوتا ہے۔ یوں درج بالا مساوات میں I_0 حقیقی مثبت مقدار ہے۔

مساوات 8.46 کو تفاعل کی وقتی دائرہ کار²⁹ صورت کہتے ہیں جبکہ مساوات 8.48 کو تفاعل کی تعددی دائرہ کار³⁰ صورت کہتے ہیں۔

مثال 8.12: درج ذیل تفاعل کے دوری سمتیہ دریافت کریں۔

$$v_1(t) = 20 \cos(100t + 30^\circ), \quad v_2(t) = -40 \sin(310t - 40^\circ), \quad i(t) = 22 \cos(\omega t + 0.2\pi)$$

حل: دباؤ $v_1(t)$ کو مخلوط تفاعل کا حقیقی جزو لکھ کر

$$v_1(t) = 20 e^{j(100t + 30^\circ)} \Big|_{\text{حقیقی}}$$

تعدد کو ذہن نشین کرتے ہوئے، e^{j100t} نہ لکھتے ہوئے اور زیر نوشت میں لفظ "حقیقی" نہ لکھتے ہوئے دوری سمتیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\hat{V}_1 = 20 e^{j30^\circ} = 20 / 30^\circ$$

اسی طرح $v_2(t)$ کو \cos کی صورت میں یوں لکھتے ہیں کہ حیث مثبت لکھا جائے۔

$$v_2 = -40 \sin(310t - 40^\circ) = 40 \cos(310t - 40^\circ + 90^\circ) = 40 \cos(310t + 50^\circ)$$

اس کو مخلوط تفاعل کا حقیقی جزو لکھتے ہیں۔

$$v_2 = 40e^{j(310t+50^\circ)} \Big|_{\text{حقیقی}}$$

اس مساوات کے زیر نوشت میں لفظ "حقیقی" نہ لکھتے ہوئے اور ساتھ ہی ساتھ e^{j310t} نہ لکھتے ہوئے دوری سمتیہ حاصل ہوتی ہے یعنی

$$\hat{V}_2 = 40e^{j50^\circ}$$

جس کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\hat{V}_2 = 40/\underline{50^\circ}$$

رو کو بھی مخلوط تفاعل کا حقیقی جزو لکھ کر

$$i(t) = 22e^{j(\omega t+0.2\pi)} \Big|_{\text{حقیقی}}$$

دوری سمتیہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{I} = 22e^{j0.2\pi} = 22/\underline{0.2\pi}$$

مشق 8.4: درج ذیل کو تعددی دائرہ کار میں لکھیں جہاں $\omega = 400 \text{ rad s}^{-1}$ ہے۔

$$\hat{I} = 35/\underline{44^\circ}, \quad \hat{V} = 12e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad \hat{I} = 33/\underline{-77^\circ}$$

جوابات: $v(t) = 12 \cos(400t + \frac{\pi}{4})$ ، $i(t) = 35 \cos(400t + 44^\circ)$ ،
 $i(t) = 33 \cos(400t - 77^\circ)$

[[make'and'/tikz/external/mode=listToDueDiscardedImage]]

شکل 8.8: دوری سمتیات کے اشکال۔

شکل 8.8 میں $\hat{I} = 25/20^\circ$ اور $\hat{V} = 30e^{j55^\circ}$ کھینچے گئے ہیں جہاں سے دوری سمتیات کا زاویائی تعلق بھی ظاہر ہوتا ہے۔ شکل 8.8 میں دباؤ سے رو 33° درجے پیچھے ہے۔

کسی بھی حقیقی تفاعل مثلاً حقیقی دباؤ کو $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ صورت میں لکھتے ہوئے جہاں V_0 مثبت حقیقی مقدار ہو، V_0 اور ϕ استعمال کرتے ہوئے دوری سمتیہ فوراً

$$\hat{V} = V_0/\phi \quad (8.49)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 8.13: درج ذیل کے دوری سمتیات فوراً لکھیں۔

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 20 \cos(132t - 27^\circ) \\ v_1(t) &= -100 \cos(20t - 60^\circ) \\ i_2(t) &= -90 \sin(450t - 100^\circ) \end{aligned}$$

حل: رو i_1 میں $I_0 = 20$ اور $\phi = -27^\circ$ ہے لہذا درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\hat{I}_1 = 20/-27^\circ$$

دباؤ کا حیث منفی ہے لہذا مثبت حیثہ حاصل کرنے کی خاطر دباؤ کو درج ذیل لکھتے ہیں

$$v_1(t) = 100 \cos(20t - 60^\circ + 180^\circ) = 100 \cos(20t + 120^\circ)$$

جس سے دوری سمتیہ درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\hat{V}_1 = 100/120^\circ$$

رو $i_2(t)$ کو $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$i_2(t) = 90 \cos(450t - 100^\circ + 90^\circ) = 90 \cos(450t - 10^\circ)$$

یوں دوری سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\hat{I}_2 = 90/-10^\circ$$

8.5 مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر کے انفرادی دوری سمتی تعلق

شکل 8.9 پر نظر رکھتے ہوئے پڑھیں۔ مزاحمت R پر مخلوط دباؤ $v(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi_v)}$ مسلط کرنے سے مزاحمت میں مخلوط رو $i(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi_i)}$ گزرے گی۔ اوہم کے قانون کے تحت

$$V_0 e^{j(\omega t + \phi_v)} = R I_0 e^{j(\omega t + \phi_i)}$$

یعنی

$$V_0 e^{j\phi_v} = R I_0 e^{j\phi_i}$$

ہوگا۔ اس کو دوری سمتیہ کی صورت میں

$$(8.50) \quad \hat{V} = R \hat{I}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$\hat{V} = V_0 e^{j\phi_v}$$

$$\hat{I} = I_0 e^{j\phi_i}$$

یعنی

$$(8.51) \quad \begin{aligned} \hat{V} &= V_0 / \phi_v \\ \hat{I} &= I_0 / \phi_i \end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔ اس طرح مساوات 8.50 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$V_0 / \phi_v = R I_0 / \phi_i$$

یاد رہے کہ دوری سمتیات میں V_0 اور I_0 حقیقی اور مثبت مقدار ہیں۔ درج بالا مساوات میں بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ کے مخلوط اعداد صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب ان کے حیطے برابر ہوں اور ان کے زاویے برابر ہوں

یعنی

$$(8.52) \quad \begin{aligned} V_0 &= I_0 R \\ \phi_v &= \phi_i \end{aligned}$$

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ب)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ت)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(الف)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(پ)

شکل 8.9: مزاحمت کے دباؤ اور رو کے تعددی اور وقتی تعامل۔

اس طرح مزاحمت کی رو اور دباؤ ہم زاویہ ہیں۔ مساوات 8.52 کی مدد سے مساوات 8.51 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{V} &= V_0 / \phi_v \\ \hat{I} &= \frac{V_0}{R} / \phi_v\end{aligned}\quad (8.53)$$

شکل 8.9-پ میں مزاحمت کے \hat{I} اور \hat{V} دوری سمتیات دکھائے گئے ہیں جو تعددی تعامل ہیں جبکہ شکل 8.9-ت میں مزاحمت کے $i(t)$ اور $v(t)$ دکھائے گئے ہیں جو وقتی تعامل ہیں۔

مثال 8.14: شکل 8.9-ب میں 10Ω کے مزاحمت پر $v(t) = 22 \cos(30t - 66^\circ)$ دباؤ مسلط کی گئی ہے۔ مزاحمت کے رو کو وقتی دائرہ کار میں لکھیں۔ رو کی تعددی دائرہ کار صورت شکل 8.9-الف سے دریافت کریں۔

حل: اوہم کے قانون کی مدد سے رو کی وقتی دائرہ کار صورت معلوم کرتے ہیں۔

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{22 \cos(30t - 66^\circ)}{10} = 2.2 \cos(30t - 66^\circ) \text{ A}$$

آئیں اب رو کی تعددی دائرہ کار صورت حاصل کرتے ہیں۔ دوری دباؤ

$$\hat{V} = 22 / -66^\circ \text{ V}$$

ہے لہذا دوری رو درج ذیل ہوگی۔

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{R} = \frac{22 / -66^\circ}{10} = 2.2 / -66^\circ \text{ A}$$

مشق 8.5: بارہ اوہم کے مزاحمت میں دوری رو $\hat{I} = 37/43^\circ \text{ A}$ ہے جبکہ تعدد $\omega = 172 \text{ rad s}^{-1}$ ہے۔ دباؤ کی وقتی دائرہ کار صورت لکھیں۔

جواب: $v(t) = 444 \cos(172t + 43^\circ) \text{ V}$

شکل 8.10 پر نظر رکھتے ہوئے پڑھیں۔ امالہ گیر کے دباؤ اور رو کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$(8.54) \quad v = L \frac{di(t)}{dt}$$

امالہ گیر پر مخلوط دباؤ $v(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi_v)}$ مسلط کرنے سے اس میں مخلوط رو $i(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi_i)}$ پیدا ہو گی۔ ان قیمتوں کو درج بالا مساوات میں پُر کرنے سے

$$\begin{aligned} V_0 e^{j(\omega t + \phi_v)} &= L \frac{d}{dt} [I_0 e^{j(\omega t + \phi_i)}] \\ &= j\omega L I_0 e^{j(\omega t + \phi_i)} \end{aligned}$$

یعنی

$$V_0 e^{j\phi_v} = j\omega L I_0 e^{j\phi_i}$$

ملتا ہے جو دوری مساوات ہے۔ یہ دوری مساوات درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$(8.55) \quad \hat{V} = j\omega L \hat{I}$$

آپ نے دیکھا کہ مساوات 8.54 جو تفرقی اور وقتی مساوات ہے سے مساوات 8.55 حاصل ہوتا ہے جو تعددی اور الجبرائی مساوات ہے۔ دوری سمتیات کی مدد سے تفرقی مساوات سے الجبرائی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ الجبرائی مساوات حل کرنا نہایت آسان ہوتا ہے جبکہ تفرقی مساوات کو حل کرنا دشوار ہوتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ دوری سمتیات اتنے مقبول ہیں۔

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ب)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ت)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(الف)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(پ)

شکل 8.10: امالہ کے دباؤ اور رو کے تعددی اور وقتی تقابل۔

آپ جانتے ہیں کہ

$$(8.56) \quad \angle 90^\circ = e^{j90^\circ} = \cos 90^\circ + j \sin 90^\circ = j$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات 8.55 کو

$$\hat{V} = \omega L \hat{I} e^{j90^\circ}$$

یعنی

$$(8.57) \quad V_0 e^{j\phi_v} = \omega L I_0 e^{j(\phi_i + 90^\circ)}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 8.57 میں دونوں ہاتھ کے مخلوط اعداد صرف اور صرف اس وقت برابر ہوں گے جب ان کے حیٹے برابر ہوں اور ان کے زاویے برابر ہوں لہذا اس مساوات کے تحت

$$(8.58) \quad \begin{aligned} V_0 &= \omega L I_0 \\ \phi_v &= \phi_i + 90^\circ \end{aligned}$$

ہوں گے۔ یوں دباؤ کا زاویہ، رو کے زاویے سے 90° درجے زیادہ ہے لہذا رو سے دباؤ 90° درجے آگے ہے یا دباؤ سے رو 90° پیچھے ہے۔ شکل 8.10-پ میں دوری سمتیت دکھائے گئے ہیں جہاں دباؤ سے رو 90° درجے پیچھے دکھایا گیا ہے۔

مساوات 8.57 سے وقتی مساوات درج ذیل لکھی جائے گی جہاں مساوات 8.58 کے تحت $\phi_v = \phi_i + 90^\circ$ ہو گا۔

$$(8.59) \quad V_0 \cos(\omega t + \phi_v) = \omega L I_0 \cos(\omega t + \phi_i + 90^\circ)$$

درج بالا مساوات میں دیے دباؤ اور رو کو شکل 8.10-ت میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 8.15: شکل 8.10 میں 4 mH امالہ گیر پر $v(t) = 12 \cos(1000t + 22^\circ)$ دباو مسلط کی جاتی ہے۔ امالہ گیر کی رو دریافت کریں۔

حل: دوری سمتیہ دباو درج ذیل ہے۔

$$\hat{V} = 12/22^\circ$$

مساوات 8.55 کی مدد سے دوری سمتیہ رو حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \frac{\hat{V}}{j\omega L} \\ &= \frac{12/22^\circ}{j1000 \times 0.004} \\ &= \frac{12/22^\circ}{4/90^\circ} \\ &= 3/-68^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

جہاں مساوات 8.56 کا استعمال کرتے ہوئے $j = 90^\circ$ لکھا گیا ہے۔ یوں رو کی وقتی دائرہ کار صورت درج ذیل ہو گی۔

$$i(t) = 3 \cos(1000t - 68^\circ) \text{ A}$$

مشق 8.6: امالہ کی قیمت 10 mH جبکہ اس میں رو $\hat{I} = 8/44^\circ$ کی تعدد 500 rad s^{-1} ہے۔ دباو کی وقتی دائرہ کار صورت دریافت کریں۔

$$v(t) = 40 \cos(500t + 134^\circ) \text{ V} \text{ جواب:}$$

شکل 8.11 پر نظر رکھتے ہوئے پڑھیں جہاں برق گیر پر دباؤ $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi_v)$ مسلط کی گئی ہے۔ برق گیر کی تفرقی مساوات

$$(8.60) \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

میں مخلوط دباؤ اور مخلوط رو پڑ کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} I_0 e^{j(\omega t + \phi_i)} &= C \frac{d}{dt} [V_0 e^{j(\omega t + \phi_v)}] \\ &= j\omega C V_0 e^{j(\omega t + \phi_v)} \end{aligned}$$

یعنی

$$I_0 e^{j\phi_i} = j\omega C V_0 e^{j\phi_v}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو دوری سمتیہ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(8.61) \quad \hat{I} = j\omega C \hat{V}$$

مساوات 8.60 برق گیر کی تفرقی مساوات ہے جبکہ مساوات 8.61 برق گیر کی الجبرائی مساوات ہے۔

مساوات 8.61 میں $j = e^{j90^\circ}$ لکھنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(8.62) \quad I_0 e^{j\phi_i} = \omega C V_0 e^{j(\phi_v + 90^\circ)}$$

اس مساوات کے دونوں اطراف صرف اور صرف اس صورت برابر ہو سکتے ہیں جب دونوں اطراف کے حیطے برابر ہوں اور ان کے زاویے برابر ہوں۔

$$(8.63) \quad \begin{aligned} I_0 &= \omega C V_0 \\ \phi_i &= \phi_v + 90^\circ \end{aligned}$$

درج بالا مساوات کے تحت دباؤ سے رو 90° درجے آگے ہے۔

مساوات 8.62 سے وقتی دائرہ کار صورت لکھتے ہیں جہاں درج بالا مساوات کے تحت $\phi_i = \phi_v + 90^\circ$ ہو گا۔

$$(8.64) \quad I_0 \cos(\omega t + \phi_i) = \omega C V_0 \cos(\omega t + \phi_v + 90^\circ)$$

شکل 8.11-پ میں دوری سمتیات دکھائے گئے ہیں جبکہ شکل-ت میں دباؤ اور رو کی وقتی دائرہ کار صورت دکھائی گئی ہے۔

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ب)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ت)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(الف)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(پ)

شکل 8.11: برق گیر کے دباؤ اور رو کے تعددی اور وقتی تفاعل۔

مثال 8.16: شکل 8.11 میں $100 \mu\text{F}$ برق گیر پر $v(t) = 7 \cos(5000t - 60^\circ) \text{ V}$ کا دباؤ مسلط کیا گیا ہے۔ رو حاصل کریں۔

حل: مسلط دباؤ کی دوری سمتیہ لکھتے ہیں۔

$$\hat{V} = 7 \angle -60^\circ$$

یوں رو درج ذیل ہوگی

$$\begin{aligned} \hat{I} &= j\omega C \hat{V} \\ &= j5000 \times 100 \times 10^{-6} 7 \angle -60^\circ \\ &= 3.5 \angle -60^\circ + 90^\circ \\ &= 3.5 \angle 30^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

جس کی وقتی دائرہ کار صورت درج ذیل ہے۔

$$i(t) = 3.5 \cos(5000t + 30^\circ) \text{ A}$$

مشق 8.7: شکل 8.11 میں $330 \mu\text{F}$ برق گیر کی رو $\hat{I} = 11 \angle -12^\circ \text{ A}$ ہے۔ رو کی تعدد 6000 Hz ہے۔ دباؤ کی وقتی دائرہ کار صورت حاصل کریں۔

$$v(t) = 0.884 \cos(12000\pi t - 102^\circ) \text{ V} \text{ : جواب}$$

8.6 برقی رکاوٹ اور برقی فراوانی

قانون اوہم کے تحت برقی مزاحمت کو $R = \frac{V}{I}$ لکھا جاسکتا ہے۔ بالکل اسی طرح، شکل 8.12 میں دوری سمتیہ دباؤ اور دوری سمتیہ رو کی شرح کو برقی رکاوٹ³¹ کہتے ہیں اور Z سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$Z = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} \quad (8.65)$$

برقی رکاوٹ کو عموماً رکاوٹ کہا جاتا ہے۔ چونکہ \hat{V} اور \hat{I} مخلوط اعداد ہیں لہذا Z بھی مخلوط عدد ہو گا۔

$$Z = \frac{V_0/\phi_v}{I_0/\phi_i} = \frac{V_0}{I_0} \frac{\phi_i}{\phi_v - \phi_i} = Z_0 \frac{\phi_z}{\phi_z} \quad (8.66)$$

چونکہ دباؤ اور رو کی شرح کو اوہم Ω میں ناپتے ہیں لہذا رکاوٹ کی اکائی بھی اوہم ہے۔ یوں بدلتی رو دور کی رکاوٹ ایک سمتی رو دور کی مزاحمت کی مانند ہے۔ رکاوٹ کو مستطیل طرز میں بھی لکھا جاسکتا ہے

$$Z(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (8.67)$$

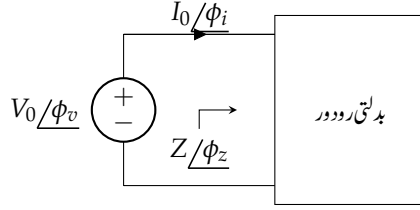
جہاں R حقیقی جزو یعنی مزاحمت³² ہے جبکہ X خیالی جزو یعنی متعاملیت³³ ہے۔ رکاوٹ مخلوط عدد ہے ناکہ دوری سمتیہ چونکہ دوری سمتیہ سائن متفاعل کو ظاہر کرتی ہے جبکہ رکاوٹ سائن متفاعل نہیں ہے۔

کسی بھی مخلوط عدد کی طرح، رکاوٹ کو بھی مستطیل طرز اور زاویائی طرز میں لکھا جاسکتا ہے

$$Z = Z/\phi_z = R + jX \quad (8.68)$$

جہاں ایک طرز سے دوسری طرز میں متبادلہ درج ذیل مساوات سے کیا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} R &= Z \cos \phi_z \\ X &= Z \sin \phi_z \end{aligned} \quad \text{زاویائی سے مستطیل طرز} \quad (8.69)$$



شکل 8.12: برقی رکاوٹ کی تعریف۔

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \quad (8.70)$$

$$\phi_z = \tan^{-1} \frac{X}{R} \quad \text{مستطیل سے زاویائی طرز}$$

مساوات 8.65 رکاوٹ کی تعریف ہے۔ اسے استعمال کرتے ہوئے مساوات 8.50، مساوات 8.55 اور مساوات 8.61 سے بالترتیب مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر کی رکاوٹ لکھتے ہیں۔

$$Z_R = R$$

$$Z_L = j\omega L = jX_L$$

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = -jX_C \quad (8.71)$$

درج بالا میں برق گیر کی رکاوٹ لکھتے ہوئے $\frac{1}{j} = \frac{1 \times j}{j \times j} = \frac{j}{-1} = -j$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ یوں امالی متعاملیت اور برق گیری متعاملیت درج ذیل ہیں۔

$$X_L = \omega L$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (8.72)$$

مشق 8.8: مزاحمت $R = 30 \Omega$ ، امالہ $L = 20 \text{ mH}$ اور برق گیر $C = 2000 \mu\text{F}$ کی رکاوٹ 100 rad s^{-1} ، 1000 rad s^{-1} اور 9000 Hz تعدد پر دریافت کریں۔

جوابات: پہلی تعدد پر $Z_C = -j5 \Omega$ ، $Z_L = j2 \Omega$ ، $Z_R = 30 \Omega$ ہیں۔
دوسری تعدد پر $Z_C = -j0.5 \Omega$ ، $Z_L = j20 \Omega$ ، $Z_R = 30 \Omega$ ہیں۔

تیسری تعدد پر $Z_C = -j0.00884 \Omega$ ، $Z_L = j1131 \Omega$ ، $Z_R = 30 \Omega$ ہیں۔

قوانین کرخوف وقتی دائرہ کار کے علاوہ تعددی دائرہ کار میں بھی لاگو ہوتے ہیں۔ صفحہ 55 پر حصہ 2.5 میں سلسلہ وار جڑے مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت مساوات 2.33 میں حاصل کیا گیا۔ اسی طرح صفحہ 61 پر حصہ 2.8 میں متعدد مساوی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت مساوات 2.47 میں پیش کیا گیا۔ بالکل اسی طرح متعدد سلسلہ وار جڑے رکاوٹ اور متعدد متوازی رکاوٹ کے مساوی رکاوٹ حاصل کی جاسکتی ہے۔ مشتق میں آپ سے ایسا ہی کرنے کو کہا گیا ہے۔

مساوات 8.73 متعدد سلسلہ وار رکاوٹ کی مساوی رکاوٹ دیتی ہے جبکہ مساوات 8.74 متعدد متوازی رکاوٹوں کی مساوی رکاوٹ دیتی ہے۔

$$(8.73) \quad Z_s = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots + Z_n \quad \text{سلسلہ وار رکاوٹوں کا مساوی رکاوٹ}$$

$$(8.74) \quad \frac{1}{Z_m} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots + \frac{1}{Z_n} \quad \text{متوازی رکاوٹوں کا مساوی رکاوٹ}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات ہو بہو مزاحمتوں کی مساوات کی طرح ہیں۔

مشتق 8.9: صفحہ 56 پر شکل 2.23 میں سلسلہ وار مزاحمت جڑے دکھائے گئے ہیں۔ مزاحمتوں کی جگہ رکاوٹ نسب کرتے ہوئے، مخلوط دباؤ اور مخلوط رو کے استعمال سے مساوی رکاوٹ کی مساوات حاصل کریں۔ اسی طرح متعدد رکاوٹوں کو متوازی جوڑتے ہوئے ان کا مساوی رکاوٹ حاصل کریں۔

جوابات: مساوات 8.73 اور مساوات 8.74

مثال 8.17: متعدد برق گیر سلسلہ وار جڑے ہیں۔ ان کی انفرادی رکاوٹیں استعمال کرتے ہوئے مساوی رکاوٹ حاصل کریں۔ مساوی رکاوٹ سے مساوی برقی گیر دریافت کریں۔

حل: برقی گیر C_1 تا C_n کی ω تعدد پر رکاوٹیں $\frac{1}{j\omega C_1}$ ، $\frac{1}{j\omega C_2}$ ، \dots ، $\frac{1}{j\omega C_n}$ ہوں گی۔ ان کے مساوی برقی گیر کو C_s کہتے ہوئے مساوی رکاوٹ $\frac{1}{j\omega C_s}$ لکھا جائے گا۔ یوں مساوات 8.73 کے تحت درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{1}{j\omega C_s} = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{1}{j\omega C_3} + \dots + \frac{1}{j\omega C_n}$$

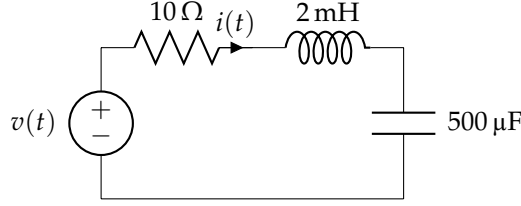
اس مساوات کے دونوں اطراف کو $j\omega$ سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے جو عین مساوات 6.22 ہی ہے۔

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

مشق 8.10: متعدد برقی گیر متوازی جڑے ہیں۔ ان کی رکاوٹیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 8.74 کی مدد سے ان کا مساوی رکاوٹ حاصل کریں۔ مساوی رکاوٹ سے مساوی برقی گیر کی مساوات حاصل کریں۔ متعدد متوازی برقی گیر کا مساوی برقی گیر مساوات 6.25 دیتی ہے۔

مشق 8.11: متعدد امالہ گیر متوازی جڑے ہیں۔ ان کی رکاوٹیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 8.74 کی مدد سے ان کا مساوی رکاوٹ حاصل کریں۔ مساوی رکاوٹ سے مساوی امالہ گیر کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: صفحہ 284 پر مساوات 6.29



شکل 8.13: مثال 8.13 کا دور۔

مثق 8.12: متعدد امالہ گیر سلسلہ جڑے ہیں۔ ان کی رکاوٹیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 8.73 کی مدد سے ان کا مساوی رکاوٹ حاصل کریں۔ مساوی رکاوٹ سے مساوی امالہ گیر کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: صفحہ 281 پر مساوات 6.27

مثال 8.18: شکل 8.13 میں منبع دباؤ کو درپیش مساوی رکاوٹ 50 Hz اور 2000 rad s^{-1} تعدد پر دریافت کریں۔ دباؤ $v(t) = 30 \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ V}$ کی صورت میں دونوں تعدد پر وقتی دائرہ کار میں رو دریافت کریں۔

حل: مساوات 8.71 سے انفرادی پرزوں کی رکاوٹ 50 Hz تعدد پر حاصل کرتے ہیں۔

$$Z_R = 10 \Omega$$

$$Z_L = j2\pi \times 50 \times 2 \times 10^{-3} = j0.6283 \Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j2\pi \times 50 \times 500 \times 10^{-6}} = -j6.3662 \Omega$$

چونکہ تمام پرزے سلسلہ وار جڑے ہیں لہذا ان کا مساوی رکاوٹ درج ذیل ہوگا۔

$$Z_s = 10 + j0.6283 - j6.3662 = 10 - j5.7379 \Omega$$

دباؤ کو دوری سمتیہ صورت میں لکھتے ہوئے تعددی دائرہ کار میں رو حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z_s} = \frac{30/45^\circ}{10 - j5.7379} = \frac{30/45^\circ}{11.5292/-29.85^\circ} = 2.6/74.85^\circ \text{ A}$$

اس سے وقتی دائرہ کار میں رو لکھتے ہیں۔

$$i(t) = 2.6 \cos(100\pi t + 74.85^\circ) \text{ A}$$

اب 2000 rad s^{-1} پر قیمتیں دریافت کرتے ہیں۔ انفرادی رکاوٹ درج ذیل ہیں

$$Z_R = 10 \Omega$$

$$Z_L = j2000 \times 2 \times 10^{-3} = j4 \Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j2000 \times 500 \times 10^{-6}} = -j1 \Omega$$

جن سے مساوی رکاوٹ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$Z_s = 10 + j4 - j1 = 10 + j3 = 10.44/16.7^\circ \Omega$$

یوں دوری رو درج ذیل ہوگی

$$\hat{I} = \frac{30/45^\circ}{10.44/16.7^\circ} = 2.87/28.3^\circ$$

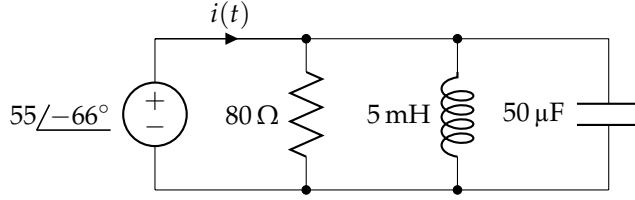
جس سے وقتی دائرہ کار میں رو لکھتے ہیں۔

$$i(t) = 2.87 \cos(2000t + 28.3^\circ) \text{ A}$$

آپ نے دیکھا کہ 50 Hz پر کل رکاوٹ برق گیر کی خاصیت رکھتا ہے یعنی $Z = R - jX$ لکھا جاتا ہے جبکہ 2000 rad s^{-1} پر $Z = R + jX$ لکھا جاتا ہے جو امالی خاصیت کو ظاہر کرتا ہے۔

مشق 8.13: شکل 8.14 میں وقتی دائرہ کار میں رو حاصل کریں۔ تعدد 1000 rad s^{-1} ہے۔

جواب: $8.28 \cos(1000t - 151.23^\circ) \text{ A}$



شکل 8.14: مشق 8.13 کا دور۔

بدلتی روادوار میں برقی رکاوٹ Z کے علاوہ برقی فراوانی Y ³⁴ بھی نہایت اہم ثابت ہوتی ہے۔ رکاوٹ کے بالعکس تناسب کو فراوانی کہتے ہیں۔

$$(8.75) \quad Y = \frac{1}{Z}$$

مخلوط رکاوٹ کی صورت میں فراوانی بھی مخلوط ہوگی۔ فراوانی کو یمنز S میں ناپا جاتا ہے۔ فراوانی کو مستطیل طرز درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$(8.76) \quad Y = G + jB$$

جہاں G کو ایصالیت³⁵ اور B کو تاثیریت³⁶ کہتے ہیں۔

رکاوٹ سے فراوانی کے اجزاء درج ذیل مساوات سے شروع کرتے ہوئے

$$(8.77) \quad G + jB = \frac{1}{R + jX}$$

حاصل کی جاسکتی ہے یعنی

$$(8.78) \quad G = \frac{R}{R^2 + X^2}$$

$$B = \frac{-X}{R^2 + X^2}$$

اسی طرح فراوانی کے اجزاء سے رکاوٹ کے اجزاء درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$(8.79) \quad R = \frac{G}{G^2 + B^2}$$

$$X = \frac{-B}{G^2 + B^2}$$

admittance³⁴
conductance³⁵
susceptance³⁶

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مخلوط رکاوٹ کی صورت میں G اور R آپس میں بالعکس متناسب نہیں ہیں۔ اسی طرح B اور X بھی آپس میں بالعکس متناسب نہیں ہیں۔ اگر رکاوٹ میں $X = 0$ ہو تب $G = \frac{1}{R}$ ہو گا۔

انفرادی پوزوں کی فراوانی درج ذیل ہے۔

$$(8.80) \quad \begin{aligned} Y_R &= \frac{1}{R} = G \\ Y_L \frac{1}{j\omega L} &= \frac{1}{\omega L} \angle -90^\circ \\ Y_C &= j\omega C = \omega C \angle 90^\circ \end{aligned}$$

جہاں انفرادی مزاحمت کی صورت میں $\frac{1}{R} = G$ لکھا گیا ہے۔

تو انہیں کر خوف فراوانی پر بھی لاگو ہوتے ہیں لہذا باب دوم کی طرز پر سلسلہ وار اور متوازی جڑے فراوانی کی مساوی فراوانی بالترتیب درج ذیل مساوات سے حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$(8.81) \quad \frac{1}{Z_s} = \frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2} + \frac{1}{Y_3} + \dots + \frac{1}{Y_n} \quad \text{سلسلہ وار جڑے}$$

$$(8.82) \quad Y_m = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots + Y_n \quad \text{متوازی جڑے}$$

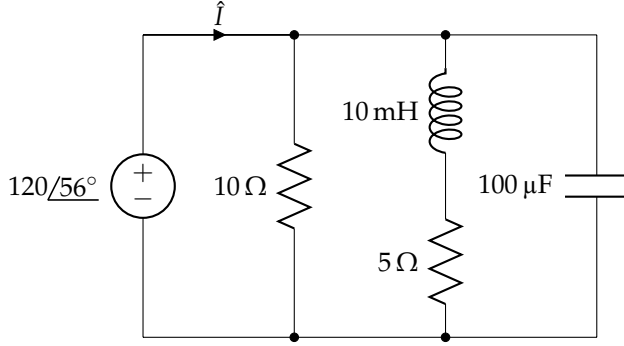
مثال 8.19: شکل 8.15 میں منبع کے متوازی جڑے دور کی فراوانی 500 rad s^{-1} پر دریافت کرتے ہوئے رو \hat{I} حاصل کریں۔

حل: دور میں تین متوازی حصوں کے انفرادی رکاوٹ لکھتے ہیں۔

$$Z_1 = 10 \Omega$$

$$Z_2 = 5 + j500 \times 10 \times 10^{-3} = 5 + j5 \Omega$$

$$Z_3 = \frac{1}{j500 \times 100 \times 10^{-6}} = -j20 \Omega$$



شکل 8.15: مثال 8.19 کا دور۔

یوں تینوں حصوں کے فراوانی درج ذیل ہو گی۔

$$Y_1 = \frac{1}{10} = 0.1 \text{ S}$$

$$Y_2 = \frac{1}{5 + j5} = 0.1 - j0.1 \text{ S}$$

$$Y_3 = \frac{1}{-j20} = j0.05 \text{ S}$$

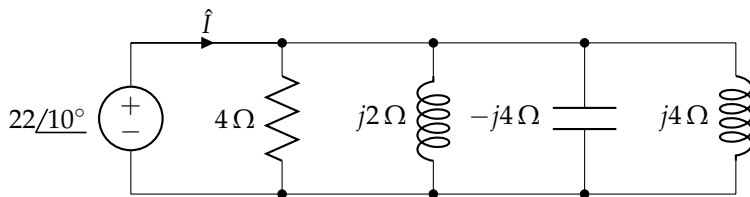
یوں تینوں حصوں کو متوازی جوڑنے سے درج ذیل مساوی فراوانی حاصل ہو گی

$$Y_m = (0.1) + (0.1 - j0.1) + (j0.05) = 0.2 - j0.05 \text{ S}$$

جسے استعمال کرتے ہوئے رو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \mathbf{Y} \hat{V} \\ &= (0.2 - j0.05)(120\angle 56^\circ) \\ &= 24.74\angle 41.96^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

مشق 8.14: شکل 8.16 میں منبع کے متوازی دور کی فراوانی دریافت کرتے ہوئے \hat{I} حاصل کریں۔



شکل 8.16: مشق 8.14 کا دور۔

جواب: $12.298 / -53.4^\circ \text{ A}$

آئیں مختلف انداز میں جڑے متعدد پرزوں کی مساوی رکاوٹ حاصل کرنا ایک مثال کی مدد سے سیکھیں۔ مساوی رکاوٹ حاصل کرنے کا عمل بالکل ویسا ہی ہے جیسا مزاحمتی دور کا مساوی مزاحمت حاصل کرنے کا عمل۔ مزاحمتی دور میں حقیقی اعداد استعمال ہوتے ہیں جبکہ رکاوٹی دور میں مخلوط اعداد استعمال ہوتے ہیں۔

مثال 8.20: شکل 8.17-الف میں متعدد پرزے مختلف طرز پر جڑے دکھائے گئے ہیں۔ دور کے دو سروں پر مساوی رکاوٹ Z دریافت کریں۔

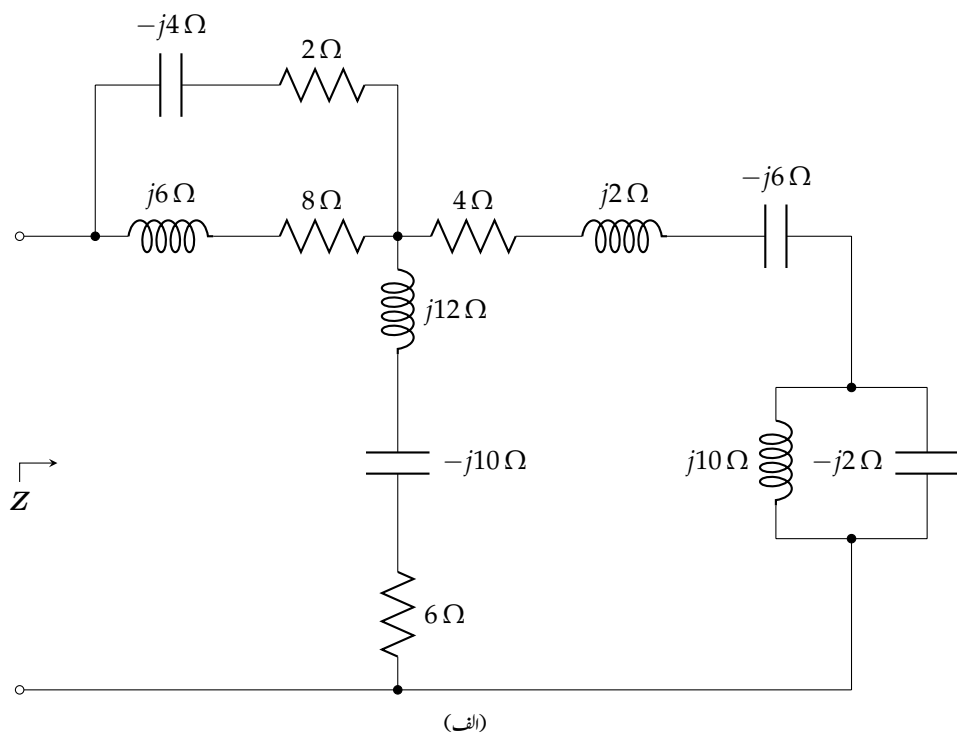
حل: شکل 8.17-ب میں دور کے مختلف حصوں کی نشاندہی کی گئی ہے جن کا مساوی رکاوٹ آسانی سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ان حصوں کی رکاوٹ دریافت کرتے ہیں۔

$$Z_1 = 8 + j6 \Omega$$

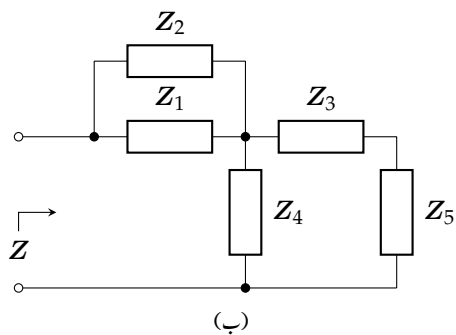
$$Z_2 = 2 - j4 \Omega$$

$$Z_3 = 4 + j2 - j6 = 4 - j4 \Omega$$

$$Z_4 = 6 - j10 + j12 = 6 + j2 \Omega$$



(الف)



(ب)

شکل 8.17: مثال 8.20، دور

اور

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Z_5} &= \frac{1}{j10} + \frac{1}{-j2} \\
 &= \frac{1}{j10} - \frac{1}{j2} \\
 &= \frac{j2 - j10}{(j10)(j2)} \\
 &= \frac{-j8}{-20} \text{ S}
 \end{aligned}$$

سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$Z_5 = \frac{20}{j8} = -j\frac{5}{2} \Omega$$

رکاوٹ Z_3 اور Z_5 سلسلہ وار چڑے ہیں لہذا ان کا مساوی رکاوٹ درج ذیل ہوگا۔

$$Z_{35} = Z_3 + Z_5 = 4 - j4 - j\frac{5}{2} = 4 - j7.5 \Omega$$

اب Z_4 اور Z_{35} متوازی ہیں لہذا ان رکاوٹ کی فراوانی دریافت کرتے ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned}
 Y_4 &= \frac{1}{Z_4} \\
 &= \frac{1}{6 + j2} \\
 &= \left(\frac{1}{6 + j2} \right) \left(\frac{6 - j2}{6 - j2} \right) \\
 &= \frac{6 - j2}{36 + 4} \\
 &= 0.15 - j0.05
 \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}
 Y_{35} &= \frac{1}{Z_{35}} \\
 &= \frac{1}{4 - j7.5} \\
 &= \frac{4 + j7.5}{4^2 + 7.5^2} \\
 &= 0.05536 + j0.10381
 \end{aligned}$$

حاصل کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} Y_{435} &= Y_4 + Y_{35} \\ &= 0.15 - j0.05 + 0.05536 + j0.10381 \\ &= 0.20536 + j0.05381 \text{ S} \end{aligned}$$

جس سے

$$\begin{aligned} Z_{435} &= \frac{1}{Y_{435}} \\ &= \frac{1}{0.20536 + j0.05381} \\ &= 4.55665 - j1.19397 \Omega \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جو متوازی جڑے Z_4 اور Z_{35} کا مساوی رکاوٹ ہے۔ رکاوٹ Z_1 اور Z_2 متوازی جڑے ہیں۔ ان کا مساوی رکاوٹ درج ذیل ہوگا۔

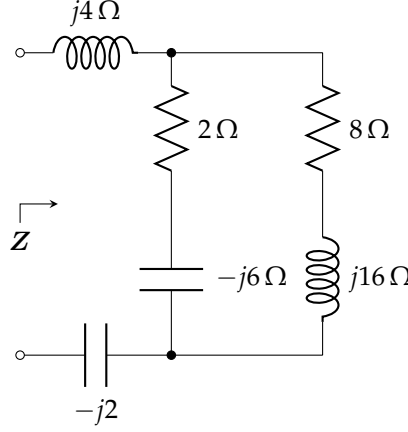
$$\begin{aligned} Z_{12} &= \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ &= \frac{(8 + j6)(2 - j4)}{(8 + j6) + (2 - j4)} \\ &= 3.46154 - j2.69231 \Omega \end{aligned}$$

یوں شکل 8.17 میں دیے دور کا مساوی مزاحمت درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned} Z &= Z_{12} + Z_{435} \\ &= 3.46154 - j2.69231 + 4.55665 - j1.19397 \\ &= 8.01819 - j3.88628 \Omega \end{aligned}$$

مشق 8.15: شکل 8.18 میں Z حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } Z = \frac{24}{5} - j\frac{22}{5} \Omega$$



شکل 8.18: مشق 8.15 کا دور۔

8.7 دوری سمتیات کے اشکال

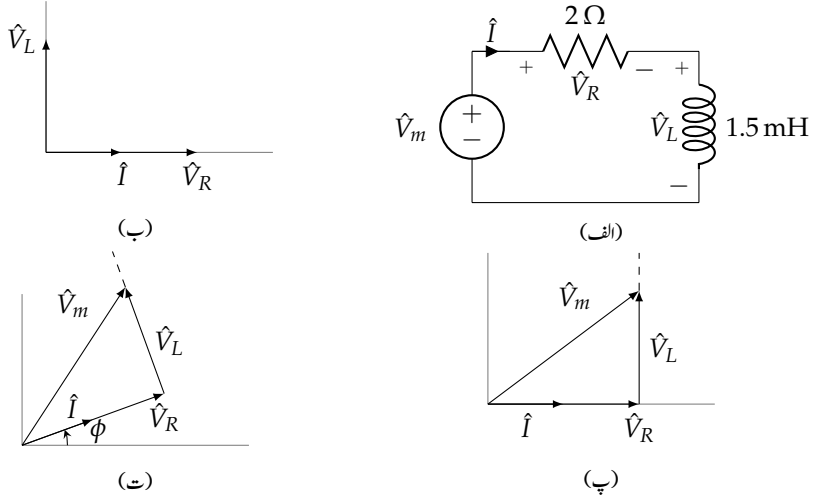
رکاوٹ کی قیمت تعدد پر منحصر ہوتی ہے۔ یوں دور میں رواور دباؤ کا دار و مدار بھی تعدد پر ہوگا۔ دوری سمتی اشکال کی مدد سے رواور دباؤ پر تعدد کے اثر پر غور کرنے میں مدد ملتی ہے۔ آئیں اس پر چند مثال دیکھیں۔

مثال 8.21: شکل 8.19 میں \hat{V}_L ، \hat{V}_R ، \hat{I} اور \hat{V}_m کے دوری سمتیہ مختلف تعدد پر کھینچیں۔ تعدد $\omega = 1000 \text{ rad s}^{-1}$ پر $\hat{I} = 5\angle 0^\circ \text{ A}$ کی صورت میں \hat{V}_m حاصل کریں۔

حل: دوری سمتیات کے خط کسی ایک دوری سمتیہ کے حوالے سے کھینچے جاتے ہیں۔ ہم \hat{I} کو حوالہ سمتیہ تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ مزید، ہم اس دوری سمتیہ کو صفر زاویے پر تصور کرتے ہیں یعنی ہم $\hat{I} = I_0\angle 0^\circ$ تصور کرتے ہیں۔ تعدد ω پر مزاحمتی رکاوٹ $Z_R = R$ جبکہ امالی رکاوٹ $Z_L = \omega L\angle 90^\circ$ ہوگی لہذا ان پرزوں پر دباؤ درج ذیل ہوگا۔

$$\hat{V}_R = \hat{I}Z_R = I_0R\angle 0^\circ$$

$$\hat{V}_L = \hat{I}Z_L = I_0\omega L\angle 90^\circ$$



شکل 8.19: مثال 8.21 کے اشکال۔

یوں مزاحمت پر دباؤ عین رو کے ہم زاویہ ہے جبکہ امالہ پر دباؤ، رو سے 90° آگے ہے۔ شکل 8.19-ب میں ان دوری سمتیات کو دکھایا گیا ہے۔ چونکہ مزاحمتی رکاوٹ کی قیمت پر تعدد کا کوئی اثر نہیں لہذا V_R کی قیمت اور زاویہ تعدد تبدیل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتے۔ اس کے برعکس امالی رکاوٹ تعدد کے راست متناسب ہے لہذا تعدد بڑھانے سے Z_L کی قیمت بڑھے گی اور یوں V_L کا حیطہ بھی بڑھے گا جبکہ اس کا زاویہ جوں کا توں رہے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\omega = 0 \text{ rad s}^{-1}$ پر V_L کی قیمت صفر ہوگی جبکہ تعدد بڑھانے سے V_L کی نوک خیالی محدود رہتے ہوئے مرکز سے دور ہوگی۔

شکل 8.19-الف سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

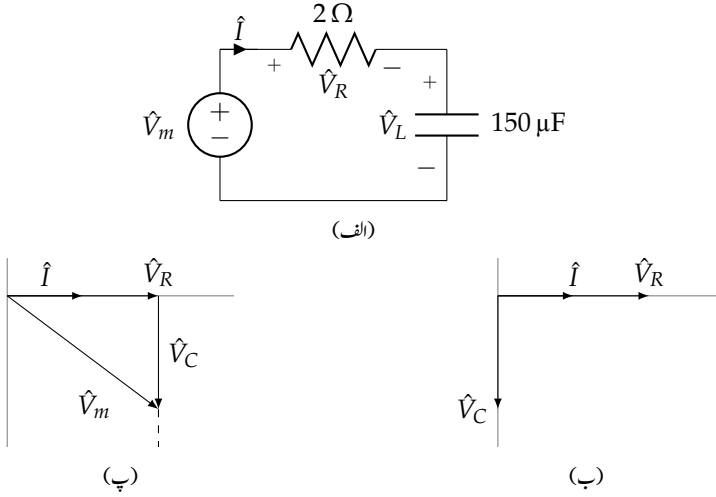
$$\hat{V}_m = \hat{V}_R + \hat{V}_L$$

شکل 8.19-پ میں اس سمتی جمع کو دکھایا گیا ہے جہاں دم سے سر جوڑنے کا طریقہ استعمال کیا گیا ہے۔ تعدد کو کم یا زیادہ کرنے سے V_L کا حیطہ کم اور زیادہ ہوگا لہذا شکل میں \hat{V}_m کی نوک نقطہ دار لکیر پر حرکت کرے گی۔ صفر تعدد کی صورت میں $\hat{V}_m = \hat{V}_R$ ہوگا جبکہ لامتناہی تعدد پر \hat{V}_m کا زاویہ تقریباً 90° ہوگا۔

$\omega = 1000 \text{ rad s}^{-1}$ اور $\hat{I} = 5\angle 0^\circ \text{ A}$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\hat{V}_R = \hat{I}Z_R = (5\angle 0^\circ)(2) = 10\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\hat{V}_L = \hat{I}Z_L = (5\angle 0^\circ)(1000 \times 1.5 \times 10^{-3}) = 7.5\angle 90^\circ \text{ V}$$



شکل 8.20: مثال 8.22 کے اشکال۔

جس سے منبع کا دباو درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{V}_m &= 10/0^\circ + 7.5/90^\circ \\ &= 10 + j7.5 \\ &= 12.5/36.87^\circ\end{aligned}$$

یہی جواب شکل 8.19-پ سے بھی تریسی طریقے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ حوالہ دوری سمتیہ کا زاویہ صفر درجے رکھنا ضروری نہیں ہے۔ ہم $\hat{I} = I_0/\phi$ لے سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں تمام سمتیات اسی زاویے سے گھوم جائیں گے۔ شکل 8.19-ت میں ایسا ہی دکھایا گیا ہے۔

مثال 8.22: شکل 8.20 میں \hat{I} ، \hat{V}_R ، \hat{V}_L اور \hat{V}_m کے دوری سمتیہ مختلف تعدد پر کھینچیں۔

حل: رو کو حوالہ لیتے ہیں۔ یوں $\hat{I} = I_0/0^\circ$ ہو گا۔ تعدد ω پر مزاحمتی رکاوٹ $Z_R = R$ جبکہ برق گیر کی رکاوٹ $Z_C = \frac{1}{\omega C}/-90^\circ$ ہو گی لہذا ان پر زوں پر دباو درج ذیل ہو گا۔

$$\hat{V}_R = \hat{I} Z_R = I_0 R/0^\circ$$

$$\hat{V}_C = \hat{I} Z_C = \frac{I_0}{\omega C}/-90^\circ$$

یوں مزاحمت پر دباو عین رو کے ہم زاویہ ہے جبکہ برق گیر پر دباو، رو سے 90° پیچھے ہے۔ شکل 8.20-ب میں ان دوری سمتیات کو دکھایا گیا ہے۔ چونکہ مزاحمتی رکاوٹ کی قیمت پر تعدد کا کوئی اثر نہیں لہذا \hat{V}_R کی قیمت اور زاویہ تعدد تبدیل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتے۔ اس کے برعکس برق گیر رکاوٹ تعدد کے بالعکس متناسب ہے لہذا تعدد بڑھانے سے Z_C کی قیمت کم ہو گی اور یوں \hat{V}_C کا حیثہ بھی کم ہو گا جبکہ اس کا زاویہ جوں کا توں رہے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لامتناہی تعدد پر \hat{V}_C کی قیمت صفر ہو گی جبکہ تعدد کم کرنے سے \hat{V}_C کی نوک خیالی محدود پر رہتے ہوئے مرکز سے دور ہو گی۔

شکل 8.20-الف سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\hat{V}_m = \hat{V}_R + \hat{V}_C$$

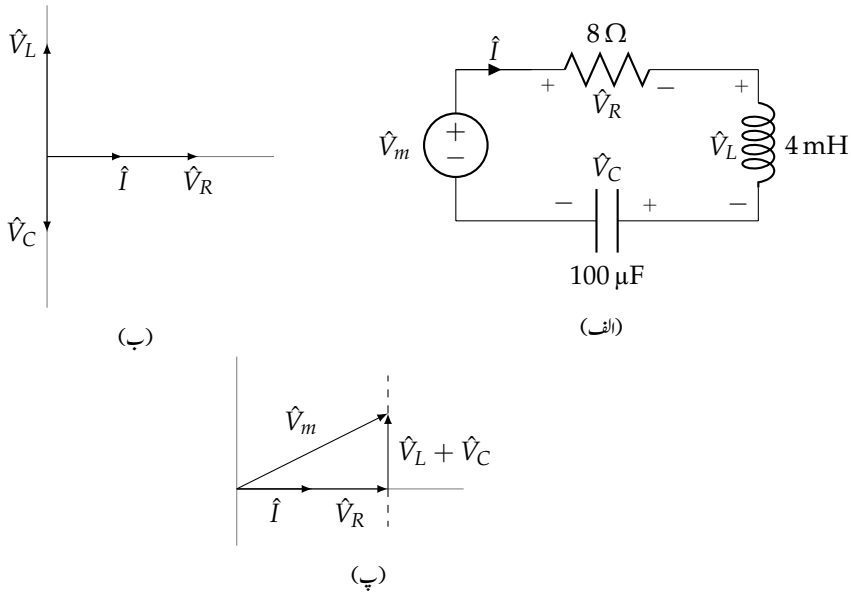
شکل 8.20-پ میں اس سمتی جمع کو دکھایا گیا ہے جہاں دم سے سر جوڑنے کا طریقہ استعمال کیا گیا ہے۔ تعدد کو کم یا زیادہ کرنے سے \hat{V}_C کا حیثہ زیادہ اور کم ہو گا لہذا شکل میں \hat{V}_m کی نوک نقطہ دار لکیر پر حرکت کرے گی۔ لامتناہی تعدد کی صورت میں $\hat{V}_m = \hat{V}_R$ ہو گا جبکہ صفر تعدد پر \hat{V}_m کا زاویہ تقریباً -90° ہو گا۔

مثال 8.23: شکل 8.21-الف میں دکھائے دور کے \hat{I} ، \hat{V}_R ، \hat{V}_L ، \hat{V}_C اور \hat{V}_m دوری سمتیہ مختلف تعدد پر کھینچیں۔

حل: یہاں بھی رو کو حوالہ دوری سمتیہ $\hat{I} = I_0/0^\circ A$ تصور کرتے ہیں۔ مزاحمت کا دباو اسی سمت میں ہو گا جبکہ امالہ کا دباو 90° آگے اور برق گیر کا دباو 90° پیچھے ہو گا۔ شکل 8.21-ب میں انہیں دکھایا گیا ہے۔

جن تعدد پر $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ ہو، ان تعدد پر امالہ کا دباو، برق گیر کے دباو سے زیادہ ہو گا لہذا $\hat{V}_L + \hat{V}_C$ کا زاویہ 90° ہو گا یعنی ان کا مجموعی تاثیر امالی ہو گا۔ شکل 8.21-پ میں ایسی ہی تعدد پر درج ذیل سمتیہ مجموعہ دکھایا گیا ہے۔

$$\hat{V}_m = \hat{V}_R + \hat{V}_L + \hat{V}_C$$



شکل 8.21: مثال 8.23 کے اشکال۔

جس تعدد پر $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ ہو یعنی $(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}})$ اس تعدد پر $V_L + V_C = 0$ ہو گا لہذا درج بالا مجموعے سے $V_m = V_R$ حاصل ہو گا۔ تعدد ω_0 سلسلہ وار جڑے LC کی قدرتی تعدد یا اس کی گھمکی تعدد³⁷ کہلاتی ہے۔ تعدد کم اور زیادہ کرنے سے V_m کی نوک نقطہ دار لکیر پر حرکت کرتی ہے۔ عین ω_0 پر $V_m = V_R$ ہو گا۔ گھمکی تعدد سے زیادہ تعدد پر V_m کی نوک، نقطہ دار لکیر پر رہتے ہوئے، افقی محدود سے اوپر ہوگی جبکہ ω_0 سے کم تعدد پر V_m کی نوک، نقطہ دار لکیر پر رہتے ہوئے، افقی محدود سے نیچے ہوگی۔ شکل 8.21-پ گھمکی تعدد سے زیادہ تعدد کی صورت حال دکھا رہا ہے۔

مثال 8.24: گزشتہ مثال میں $V_m = 120/40^\circ \text{ V}$ ہے۔ شکل 8.21-الف میں پروزوں کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے $\omega = 1000 \text{ rad s}^{-1}$ پر V_m اور I دوری سمتیوں کے خط کھینچیں۔

³⁷ resonant frequency

حل: اس مرتبہ ہم \hat{V}_m کو حوالہ لیتے ہیں۔ دی گئی تعدد پر درج ذیل ہوگا۔

$$Z_R = 8 \Omega$$

$$Z_L = 1000 \times 0.004 / 90^\circ = 4 / 90^\circ \Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{1000 \times 100 \times 10^{-6}} / -90^\circ = 10 / -90^\circ \Omega$$

شکل 8.21- الف کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\hat{V}_m = \hat{V}_R + \hat{V}_L + \hat{V}_C$$

جس میں قیمتیں پُر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} 120 / 40^\circ &= \hat{I} Z_R + \hat{I} Z_L + \hat{I} Z_C \\ &= \hat{I} (8 + 4 / 90^\circ + 10 / -90^\circ) \\ &= \hat{I} (8 + j4 - j10) \\ &= \hat{I} (8 - j6) \\ &= \hat{I} (10 / -36.87^\circ) \end{aligned}$$

ملتا ہے۔ اس مساوات سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \frac{120 / 40^\circ}{10 / -36.87^\circ} \\ &= 12 / 76.87^\circ \end{aligned}$$

\hat{V}_m اور \hat{I} کو شکل 8.22- الف میں دکھایا گیا ہے جہاں حیطوں کو درست تناسب سے نہیں دکھایا گیا ہے۔

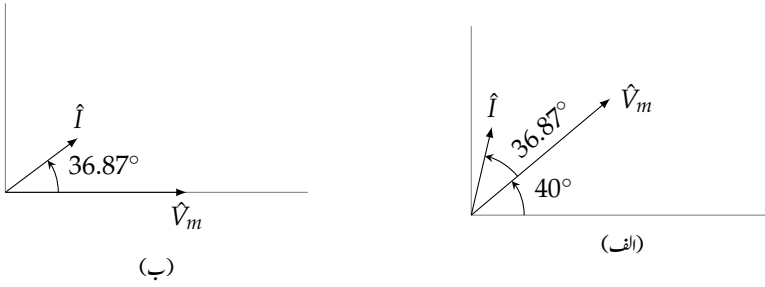
دور کی قدرتی تعدد درج ذیل ہے

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0.004 \times 100 \times 10^{-6}}} = 1581 \text{ rad s}^{-1}$$

جبکہ دور کو 1000 rad s^{-1} پر حل کیا گیا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ دور برق گیر تاثیر رکھتا ہے اور رو منبع کے دباؤ سے 37.87° درجے آگے ہے۔ عین قدرتی تعدد پر

$$Z_L = j1581 \times 0.004 = 6.32 / 90^\circ \Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{j1581 \times 100 \times 10^{-6}} = 6.32 / -90^\circ \Omega$$



شکل 8.22: مثال 8.24 کے دوری سمتیوں کے خط۔

حاصل ہوتے ہیں۔

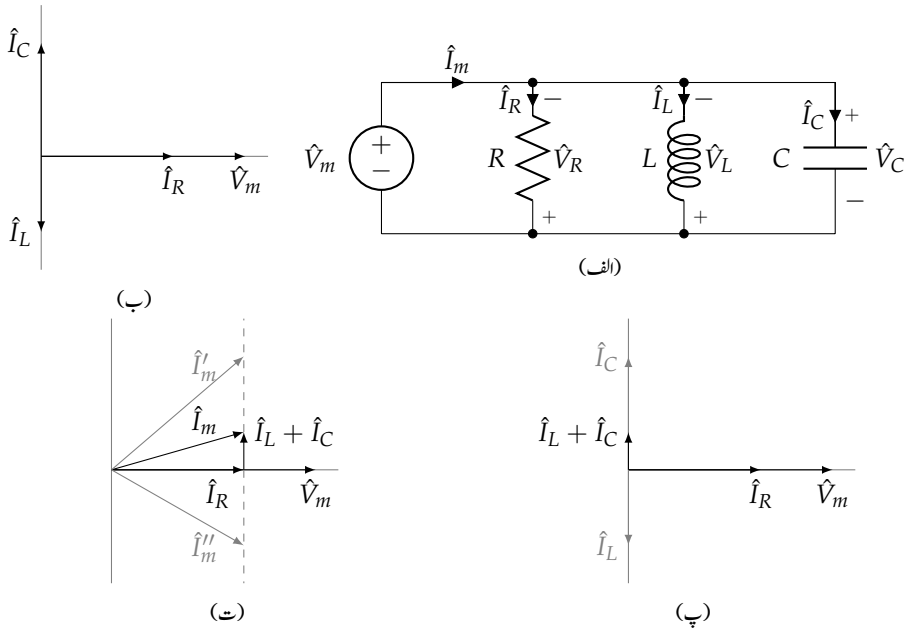
عموماً حوالہ دوری سمتیہ کا زاویہ 0° رکھا جاتا ہے۔ یوں اگر ہم منبع دباؤ کا زاویہ 40° کی جگہ 0° چنتے تب $\hat{V}_m = 120/0^\circ$ لکھا جاتا اور روج ذیل حاصل ہوتی۔

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}_m}{Z} = \frac{120/0^\circ}{10/-36.87^\circ} = 12/36.87^\circ \text{ A}$$

انہیں شکل 8.22-ب میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شکل-الف کو گھڑی کے گردش کی سمت میں 40° گھمانے سے شکل-ب ملتا ہے۔ یوں حوالہ سمتیہ کا زاویہ تبدیل کرنے سے تمام دوری سمتیہ کی شکل گھوم جاتی ہے، البتہ انفرادی دوری سمتیات کے تعلق پر کوئی فرق نہیں پڑتا۔ یوں شکل-الف اور شکل-ب دونوں میں رو 36.87° درجے دباؤ سے آگے ہے۔

مثال 8.25: شکل 8.23 کے دور میں دیے تمام دوری سمتیات کے خط کھینچیں۔

حل: دباؤ \hat{V}_m کو حوالہ دوری سمتیہ لیتے ہوئے اس کا زاویہ صفر درجے چنتے ہیں۔ تینوں پرزوں پر \hat{V}_m دباؤ پایا جاتا ہے



شکل 8.23: مثال 8.25 کے اشکال۔

لہذا ان کی انفرادی رو درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_R &= \frac{\hat{V}_m}{Z_R} = \frac{V_m/0^\circ}{R} = \frac{V_m}{R} \angle 0^\circ \\ \hat{I}_L &= \frac{\hat{V}_m}{Z_L} = \frac{V_m/0^\circ}{\omega L/90^\circ} = \frac{V_m}{\omega L} \angle -90^\circ \\ \hat{I}_C &= \frac{\hat{V}_m}{Z_C} = \frac{V_m/0^\circ}{\frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ} = \omega C V_m \angle 90^\circ\end{aligned}$$

انہیں شکل 8.23-ب میں دکھایا گیا ہے۔

قدرتی تعدد $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ پر امالی رکاوٹ اور برق گیری رکاوٹ کے مقدار برابر ($\omega L = \frac{1}{\omega C}$) ہوتے ہیں۔ قدرتی تعدد پر $\hat{I}_m = \hat{I}_R$ ہو گا۔ قدرتی تعدد سے زیادہ تعدد پر $Z_L > Z_C$ لہذا $I_C > I_L$ ہو گا۔ اس صورت حال کو شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔

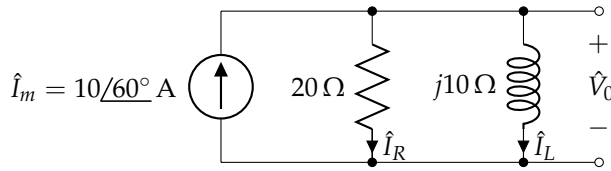
کرخوف قانون رو سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\hat{I}_m = \hat{I}_R + \hat{I}_L + \hat{I}_C$$

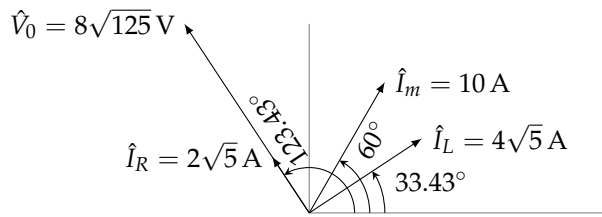
جسے $\omega > \omega_0$ کی صورت میں شکل-ت میں دکھایا گیا ہے۔ تعدد مزید بڑھانے سے \hat{I}_m کی نوک نقطہ دار لکیر پر رہتے ہوئے افقی محد سے مزید دور ہو گی۔ دوری سمتیہ \hat{I}_m' ایسی صورت کو ظاہر کرتی ہے۔

قدرتی تعدد سے کم تعدد ($\omega < \omega_0$) پر $Z_C > Z_L$ اور $I_L > I_C$ ہو گا لہذا دوری سمتیہ کی نوک نقطہ دار لکیر پر افقی محد سے نیچے کی طرف ہو گی۔ دوری سمتیہ \hat{I}_m'' ایسی صورت کو ظاہر کرتی ہے۔

مشق 8.16: شکل 8.24-الف میں تمام رو اور دباؤ کے دوری سمتیات کے خط کھینچیں۔ تقسیم رو کا کلیہ استعمال کیا جاسکتا ہے۔ جواب کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔

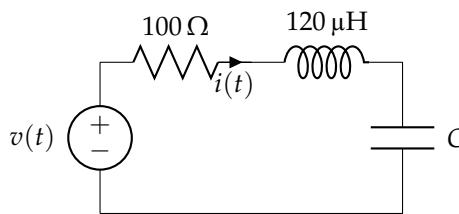


(الف)



(ب)

شکل 8.24: مشتق 8.16 کے اشکال۔



شکل 8.25: مشتق 8.17 کا دور۔

مشق 8.17: شکل 8.25 میں برق گیر کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر $v(t) = 120 \cos(5500t - 30^\circ) \text{ V}$ اور $i(t)$ ہم زاویہ ہوں گے۔ اس تعدد پر $i(t)$ دریافت کریں۔

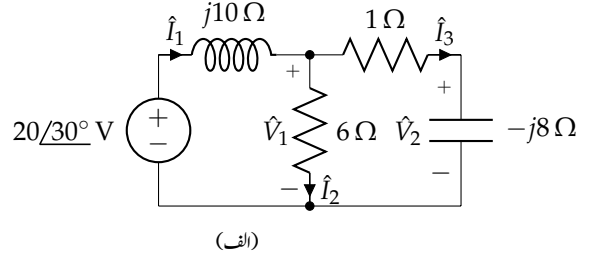
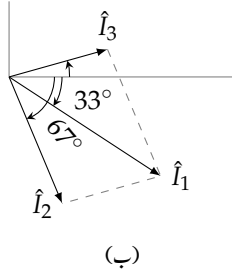
جواب: $i(t) = 1.2 \cos(5500t - 30^\circ) \text{ A}$ ، $C = 275.48 \mu\text{F}$

8.8 کرخوف مساوات

یک سمتی روادوار کو کرخوف کے قوانین سے حل کرنا ہم گزشتہ بابوں میں دیکھ چکے ہیں۔ قوانین کرخوف دوری سمتیات پر بھی لاگو ہوتے ہیں۔ یوں بدلتی روادوار کو کرخوف مساوات سے بالکل یک سمتی روادوار کی طرح حل کیا جاسکتا ہے۔ یک سمتی روادوار حل کرنے کے تمام ترکیب یعنی مسئلہ تھونن، مسئلہ نارٹن، مسئلہ متبادلہ منبع، مسئلہ نفاذ، تقسیم روادور تقسیم دباو کو بدلتی روادوار حل کرنے کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔ بدلتی روادوار کی صورت میں مخلوط الجبرا کا استعمال کیا جاتا ہے۔ گزشتہ حصے میں ہم نے چند سادہ مثال اسی طرح حل کئے۔ انہیں نسبتاً مشکل ادوار حل کریں۔ متعدد منبع کی صورت میں دوری سمتیات کی ترکیب صرف اس صورت میں قابل استعمال ہوگی جب تمام منبع کی تعدد یکساں ہو البتہ ان کے انفرادی زاویے مختلف ہو سکتے ہیں۔

مثال 8.26: شکل 8.26 میں تمام نامعلوم دباو اور روادور دریافت کریں۔

حل: ہم پہلے منبع سے جڑی کل رکاوٹ حاصل کرتے ہوئے \hat{I}_1 دریافت کرتے ہیں جسے جانتے ہوئے $j2\Omega$ امالہ کا دباو حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس دباو کو \hat{V}_m سے منفی کرتے ہوئے \hat{V}_1 حاصل کیا جائے گا۔ اب \hat{V}_1 جانتے ہوئے \hat{I}_2 حاصل کیا جاسکتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے $\hat{I}_3 = \hat{I}_1 - \hat{I}_2$ لکھا جاسکتا ہے۔ آخر میں $\hat{V}_2 = \hat{I}_3(-j8)$ لکھتے ہوئے برق گیر کا دباو حاصل کیا جائے گا۔



شکل 8.26: مثال 8.26 کے اشکال۔

منبع کو درج ذیل رکاوٹ نظر آتی ہے۔

$$\begin{aligned}
 Z &= j10 + \frac{6(1 - j8)}{6 + 1 - j8} \\
 &= j10 + \frac{6 - j48}{7 - j8} \\
 &= j10 + \left(\frac{6 - j48}{7 - j8} \right) \left(\frac{7 + j8}{7 + j8} \right) \\
 &= j10 + \frac{426 - j288}{113} \\
 &= 3.7699 + j7.4513 \\
 &= 8.3507 / 63.163^\circ \Omega
 \end{aligned}$$

یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned}
 \hat{I}_1 &= \frac{\hat{V}_m}{Z} \\
 &= \frac{20 / 30^\circ}{8.3507 / 63.163^\circ} \\
 &= 2.395 / -33.163^\circ \text{ A}
 \end{aligned}$$

جس سے \hat{V}_1 حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \hat{V}_1 &= \hat{V}_m - \hat{I}_1(j2) \\
 &= 20 / 30^\circ - (2.395 / -33.163^\circ)(2 / 90^\circ) \\
 &= 4.219 - j10.049 \\
 &= 10.8987 / -67.224^\circ \text{ V}
 \end{aligned}$$

آپ \hat{V}_1 کو یوں بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{V}_1 &= \frac{6(1-j8)}{6+1-j8} \hat{I}_1 \\ &= 10.8987 / -67.224^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

اس کے علاوہ \hat{V}_1 کو تقسیم دباؤ کے کلیے سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی

$$\begin{aligned}\hat{V}_1 &= \left(\frac{\frac{6(1-j8)}{6+1-j8}}{j10 + \frac{6(1-j8)}{6+1-j8}} \right) 20 / 30^\circ \\ &= 10.8987 / -67.224^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

دباؤ \hat{V}_1 جانتے ہوئے \hat{I}_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_2 &= \frac{\hat{V}_1}{6} \\ &= \frac{10.8987 / -67.224^\circ}{6} \\ &= 1.816 / -67.224^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

یوں \hat{I}_3 درج ذیل ہوگا۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_3 &= \hat{I}_1 - \hat{I}_2 \\ &= 2.395 / -33.163^\circ - 1.816 / -67.224^\circ \\ &= (2.005 - j1.310) - (0.703 - j1.675) \\ &= 1.302 + j0.365 \\ &= 1.352 / 15.65^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

آپ \hat{I}_3 کو درج ذیل سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_3 &= \frac{\hat{V}_1}{1-j8} \\ &= 1.352 / 15.65^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

برق گیر کا دباؤ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{V}_2 &= \hat{I}_3 (-j8) \\ &= (1.352 / 15.65^\circ) (8 / -90^\circ) \\ &= 10.816 / -74.35^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

اس دباؤ کو تقسیم دباؤ کے کلیے سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی

$$\begin{aligned}\hat{V}_2 &= \left(\frac{-j8}{1-j8} \right) \hat{V}_1 \\ &= 10.816 / -74.35^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

اس کے علاوہ 1Ω مزاحمت میں \hat{I}_3 گزرتی ہے۔ یوں \hat{V}_1 سے اس مزاحمت کی دباؤ منفی کرنے سے بھی برق گیر کا دباؤ حاصل کیا جاسکتا ہے یعنی

$$\begin{aligned}\hat{V}_2 &= \hat{V}_1 - (\hat{I}_3)(1) \\ &= 10.816 / -74.35^\circ \text{ V}\end{aligned}$$

آپ نے دیکھا کہ آپ اپنے مرضی کی کوئی بھی ترکیب استعمال کرتے ہوئے جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔ شکل-ب میں دوری رو دکھائے گئے ہیں جہاں نقطہ دار لکیر قانون متوازی الاضلاع سے $\hat{I}_1 = \hat{I}_2 + \hat{I}_3$ دکھاتی ہے۔
