برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 14

ادوار کا حل بذریعہ لاپلاس بدل

14.1 ادوار کا حل

لاپلاس بدل کا استعمال دیکھنے کی خاطر شکل 14.1 میں RL دور کو حل کرتے ہوئے $i(t)$ دریافت کرتے ہیں۔دور کی کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

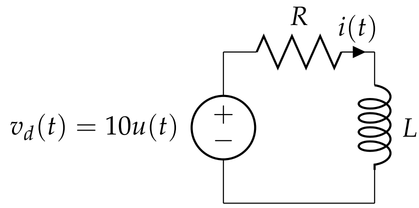
$$v_d(t) = i(t)R + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

اس دور کے فطری حل اور جبری حل کا مجموعہ درکار حل ہو گا۔لاپلاس بدل سے دور حل کرتے ہوئے مکمل حل ایک ہی بار میں حاصل ہوتا ہے۔درج بالا مساوات کے دونوں اطراف کا لاپلاس بدل لیتے ہیں۔

$$\mathcal{L}\left[10u(t)\right] = R\mathcal{L}[i(t)] + L\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right]$$

صفحہ 680 پر جدول 13.1 اور صفحہ 684 پر جدول 13.2 کی مدد لیتے ہیں۔

$$\frac{10}{s} = R\mathbf{I}(s) + L[s\mathbf{I}(s) - i(0)]$$



شکل 14.1: سلسلہ وار RL دور۔

چونکہ $i(0) = 0\,\text{A}$ ہے لٰہذا

$$\frac{10}{s} = R\mathrm{I}(s) + sL\mathrm{I}(s)$$

یعنی

$$\mathrm{I}(s) = \frac{10}{s(sL+R)}$$

یا

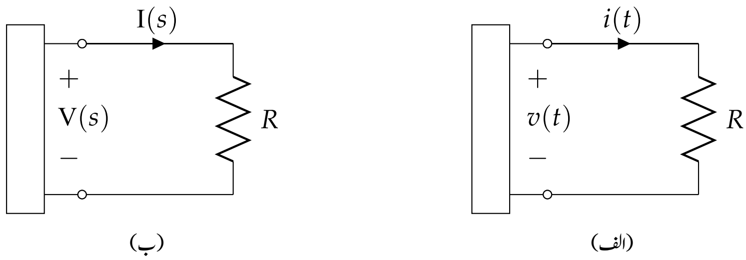
$$\mathrm{I}(s) = \frac{10}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں جزوی کسری پھیلاو لکھی گئی ہے۔ درج بالا سے وقتی تفاعل لکھتے ہیں۔

$$i(t) = \frac{10}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t)$$

آپ نے دیکھا کہ مکمل حل یک وقت حاصل ہوتا ہے۔ دور کی ابتدائی معلومات لاپلاس بدل لیتے وقت استعمال کی جاتی ہے۔

جیسا آپ نے دیکھا، لاپلاس بدل سے تفرقی و تکملی مساوات الجبرائی مساوات میں تبدیل ہو جاتی ہے جس سے درکار تفاعل کا لاپلاس بدل نہایت آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ حاصل تفاعل کا الٹ لاپلاس بدل وقتی تفاعل دیتا ہے۔ الٹ لاپلاس بدل جدول کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔



شکل 14.2: وقتی اور مخلوط تعددی دائرہ کار میں مزاحمت کا اظہار۔

14.2 پرزوں کے مساوی لاپلاسی ادوار

برقی پرزوں کی خصوصیات سے ان کے مساوی لاپلاسی ادوار حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ تمام پرزوں کے دباو بالمقابل رو تعلق لکھتے ہوئے انفعالی رائج سمت استعمال کئے گئے ہیں۔ مزاحمت کے دباو اور رو کا تعلق

$$v(t) = Ri(t) \tag{14.1}$$

ہے۔ دونوں اطراف کا لاپلاس بدل لیتے ہوئے اس تعلق کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathrm{V}(s) = R\mathrm{I}(s) \tag{14.2}$$

شکل 14.2 میں مزاحمت کے دباو بالمقابل کا تعلق وقتی دائرہ کار اور مخلوط تعددی دائرہ کار میں دکھائے گئے ہیں۔

برق گیر کے تعلقات

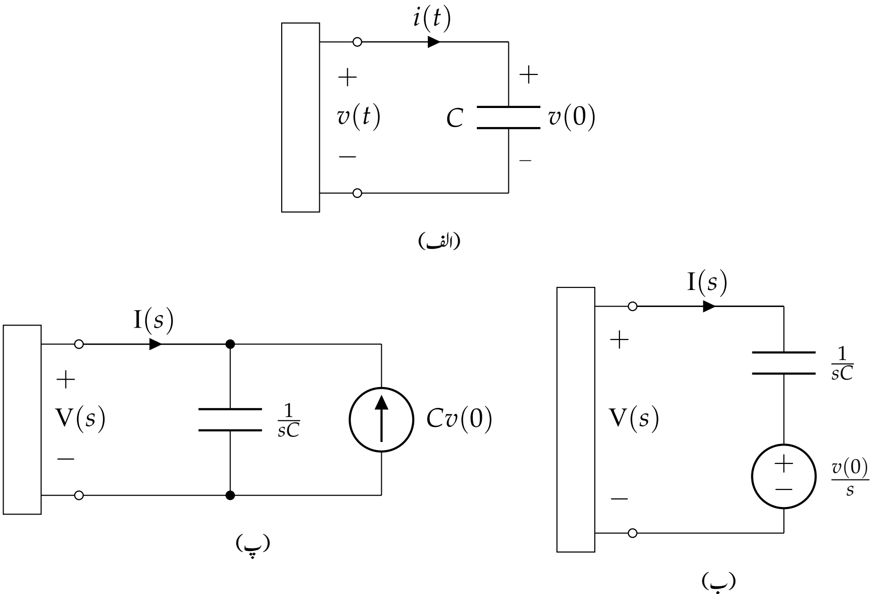
$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t + v(0) \tag{14.3}$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{14.4}$$

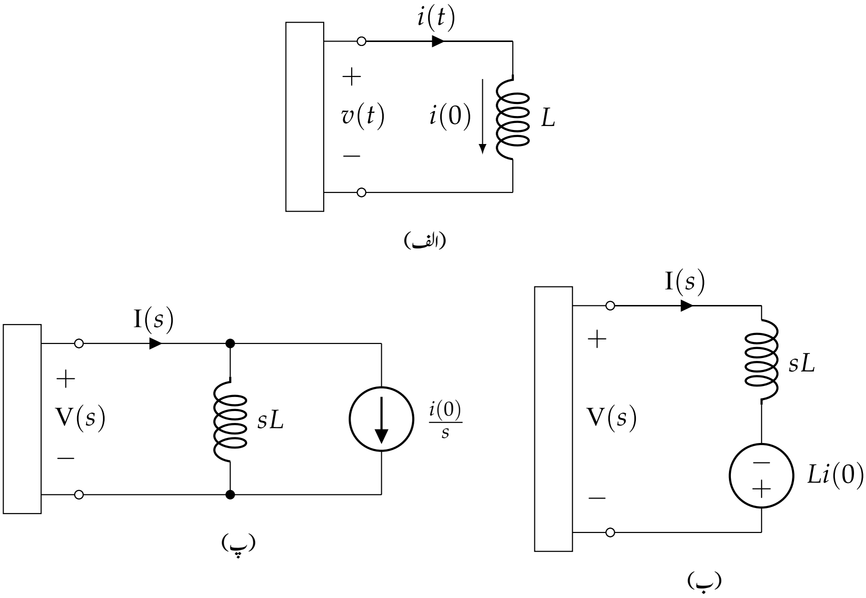
ہیں۔ دونوں اطراف کا لاپلاس بدل لیتے ہوئے مخلوط تعددی دائرہ کار میں تعلقات حاصل ہوتے ہیں جنہیں شکل 14.3 میں دکھایا گیا ہے۔ ابتدائی معومات سے پیدا منبع رو کی سمت اور منبع دباو کے قطب پر غور کریں۔ ابتدائی رو کی سمت الٹ کرنے یا ابتدائی دباو کے قطب الٹ کرنے سے پیدا منبع رو کی سمت اور منبع دباو کے قطب الٹ ہوں گے۔

$$\mathrm{V}(s) = \frac{\mathrm{I}(s)}{sC} + \frac{v(0)}{s} \tag{14.5}$$

$$\mathrm{I}(s) = sC\mathrm{V}(s) - Cv(0) \tag{14.6}$$



شکل 14.3: وقتی اور مخلوط تعددی دائرہ کار میں برق گیر کا اظہار۔



شکل 14.4: وقتی اور مخلوط تعددی دائرہ کار میں امالہ گیر کا اظہار۔

امالہ گیر کے تعلقات

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{14.7}$$

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t + i(0) \tag{14.8}$$

ہیں جن سے

$$\mathrm{V}(s) = sL\mathrm{I}(s) - Li(0) \tag{14.9}$$

$$\mathrm{I}(s) = \frac{\mathrm{V}(s)}{sL} + \frac{i(0)}{s} \tag{14.10}$$

حاصل ہوتے ہیں۔انہیں شکل 14.4 میں دکھایا گیا ہے۔ یہاں بھی ابتدائی معلومات سے پیدا منبع کا دارومدار ابتدائی رو کی سمت اور ابتدائی دباو کے قطب پر ہے۔

شکل میں دکھائے گئے مربوط لچھوں کے تعلق درج ذیل ہیں۔

$$v_1(t) = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} \tag{14.11}$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + M\frac{i_1(t)}{\mathrm{d}t} \tag{14.12}$$

یہی مساوات s دائرہ کار میں درج ذیل لکھے جائیں گے۔

$$\mathrm{V}_1(s) = sL_1\mathrm{I}_1(s) - L_1 i_1(0) + sM\mathrm{I}_2(s) - Mi_2(0) \tag{14.13}$$

$$\mathrm{V}_2(s) = sL_2\mathrm{I}_2(s) - L_2 i_2(0) + sM\mathrm{I}_1(s) - Mi_1(0) \tag{14.14}$$

تابع اور غیر تابع منبع دباو اور منبع رو کو بھی s دائرہ کار میں ظاہر کیا جا سکتا ہے

$$\mathrm{V}_1(s) = \mathcal{L}[v_1(t)] \tag{14.15}$$

$$\mathrm{I}_2(s) = \mathcal{L}[i_2(t)] \tag{14.16}$$

اور اگر $v_1(t) = A_r i_2(t)$ ہو جہاں A_r افزائش مزاحمت نما ہے تب

$$\mathrm{V}_1(s) = A_r\mathrm{I}_2(s) \tag{14.17}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

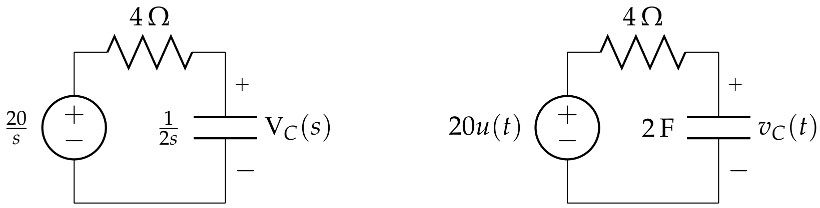
14.3 تجزیاتی تراکیب

درج بالا حصے میں ہم نے برقی پرزوں کے s دائرہ کار میں مساوی ادوار حاصل کئے۔انہیں استعمال کرتے ہوئے ادوار حل کئے جا سکتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل کرنا ہو گا۔

- ابتدائی حالت جاننے کے لئے $t < 0\,\mathrm{s}$ کے لئے دور حل کریں۔اگر $t < 0\,\mathrm{s}$ میں دور برقرار حالت میں ہو تب برق گیر کو کھلے سر اور امالہ گیر کو قصر دور تصور کرتے ہوئے ابتدائی رو اور ابتدائی دباو حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

- ابتدائی معلومات شامل کرتے ہوئے تمام پرزوں کی جگہ ان کے مساوی مخلوط تعددی دائرہ کار کے ادوار نسب کریں۔

- کسی بھی ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے دور کو حل کریں۔جوابات s دائرہ کار میں ہوں گے۔



(ب) (الف)

شکل 14.5: مثال 14.1 کا دور۔

- الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے وقتی دائرہ کار میں جوابات حاصل کریں۔

مثال 14.1: لاپلاس بدل کی مدد سے شکل 14.5-الف میں $v_C(t)$ حاصل کریں۔

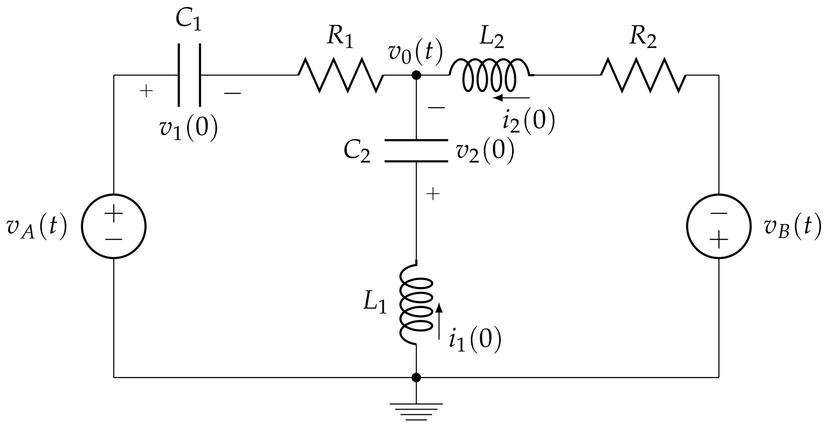
حل: ابتدائی دباو $v_C(0) = 0\,\mathrm{V}$ ہے۔ تمام پرزوں کی جگہ s دائرہ کار کے مساوی دور پر کرتے ہوئے شکل-ب حاصل ہوتا ہے۔ شکل-ب میں تقسیم دباو کے کلیے سے برق گیر کا دباو لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
V_C(s) &= \left(\frac{\frac{1}{2s}}{4+\frac{1}{2s}}\right)\frac{20}{s}\\
&= 20\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{8}}\right)
\end{aligned}
$$

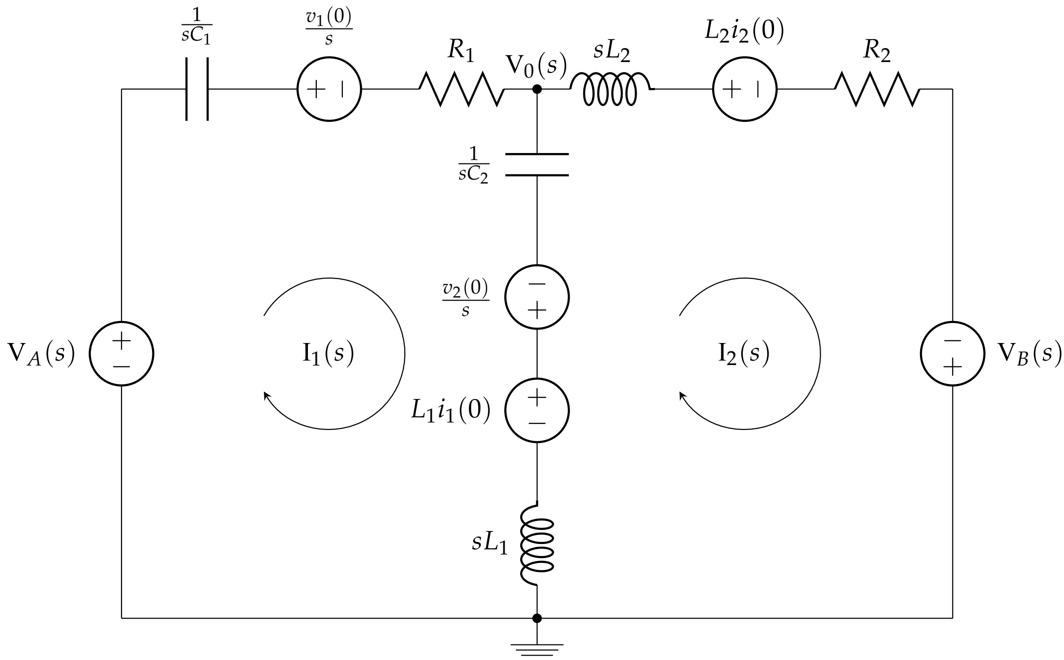
الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے $v_C(t)$ حاصل کرتے ہیں۔

$$
v_C(t) = 20\left(1-e^{-\frac{t}{8}}\right)u(t)
$$

مثال 14.2: شکل 14.6 کے دائری مساوات اور مساوات جوڑ لکھیں۔

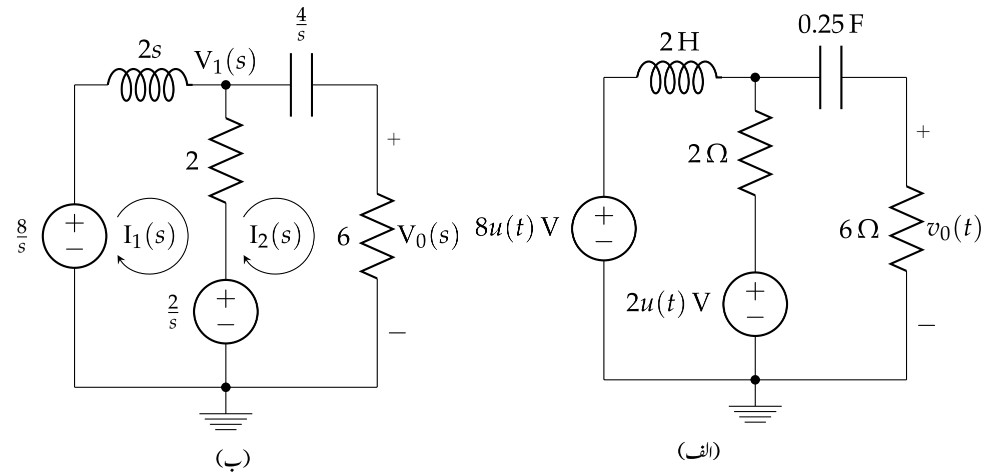


(الف)



(ب)

شکل 14.6: مثال 14.2 کا دور۔



شکل 14.7: مثال 14.3 کا دور۔

حل: لاپلاس بدل شکل 14.6-ب میں دکھایا گیا ہے جہاں سے کرخوف دائری مساوات لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{I}_1(s)\left[\frac{1}{sC_1}+R_1+\frac{1}{sC_2}+sL_1\right]-\mathrm{I}_2(s)\left[\frac{1}{sC_2}+sL_1\right]=\mathrm{V}_A(s)-\frac{v_1(0)}{s}+\frac{v_2(0)}{s}-L_1i_1(0)$$
$$-\mathrm{I}_1(s)\left[sL_1+\frac{1}{sC_2}\right]+\mathrm{I}_2(s)\left[sL_1+\frac{1}{sC_2}+sL_2+R_2\right]=\mathrm{V}_B(s)+L_1i_1(0)-\frac{v_2(0)}{s}-L_2i_2(0)$$

مساوات جوڑ لکھتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{V}_0(s)-\mathrm{V}_A(s)+\frac{v_1(0)}{s}}{R_1+\frac{1}{sC_1}}+\frac{\mathrm{V}_0(s)+\frac{v_2(0)}{s}-L_1i_1(0)}{\frac{1}{sC_2}+sL_1}+\frac{\mathrm{V}_0(s)-L_2i_2(0)+\mathrm{V}_B(s)}{sL_2+R_2}=0$$

مثال 14.3: شکل 14.7-الف میں دور دیا گیا ہے۔اس کو ہم دائری ترکیب، ترکیب جوڑ، مسئلہ نفاذ، تبادلہ منبع اور مسئلہ تھونن کی مدد سے حل کرتے ہیں۔

حل: لاپلاس مساوی شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔ ہم جوڑ $V_1(s)$ کو حاصل کرتے ہوئے $V_0(s)$ کو تقسیم دباو کے کلیے سے حاصل کریں گے۔ مساوات جوڑ لکھتے ہیں

$$\frac{V_1(s)-\frac{8}{s}}{2s}+\frac{V_1(s)-\frac{2}{s}}{2}+\frac{V_1(s)}{6+\frac{4}{s}}=0$$

جس سے

$$V_1(s)\left(\frac{1}{2s}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6+\frac{4}{s}}\right)=\frac{4}{s^2}+\frac{1}{s}$$

یعنی

$$V_1(s)=\frac{2(s+4)(3s+2)}{s(4s^2+5s+2)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ تقسیم دباو کے کلیے سے $V_0(s)$ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
V_0(s)&=\left(\frac{6}{6+\frac{4}{s}}\right)V_1(s)\\
&=\left(\frac{6s}{6s+4}\right)\left[\frac{2(s+4)(3s+2)}{s(4s^2+5s+2)}\right]\\
&=\frac{6(s+4)}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}$$

اس دباو کا جزوی کسری پھیلاو لکھتے ہوئے وقتی تفاعل حاصل کرنا ہو گا۔ میں یہاں گزارش کروں گا ہوں کہ آپ صفحہ 599 پر مثال 12.3 کو ضرور دیکھیں۔

$$\begin{aligned}
V_0(s)&=\frac{6(s+4)}{4(s^2+\frac{5}{4}s+\frac{1}{2})}\\
&=\frac{6(s+4)}{4(s+\frac{5}{8}+j\frac{\sqrt{7}}{8})(s+\frac{5}{8}-j\frac{\sqrt{7}}{8})}\\
&=\frac{K}{s+\frac{5}{8}+j\frac{\sqrt{7}}{8}}+\frac{K^*}{s+\frac{5}{8}-j\frac{\sqrt{7}}{8}}
\end{aligned}$$

مستقل K اور K^* حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
K &= \left.\frac{6(s+4)}{4(s+\frac{5}{8}-j\frac{\sqrt{7}}{8})}\right|_{s=-\frac{5}{8}-j\frac{\sqrt{7}}{8}} \\
&= \frac{3}{4}+j\frac{81}{4\sqrt{7}} \\
K^* &= \left.\frac{6(s+4)}{4(s+\frac{5}{8}+j\frac{\sqrt{7}}{8})}\right|_{s=-\frac{5}{8}+j\frac{\sqrt{7}}{8}} \\
&= \frac{3}{4}-j\frac{81}{4\sqrt{7}}
\end{aligned}
$$

یوں درج ذیل لکھا جائے گا۔

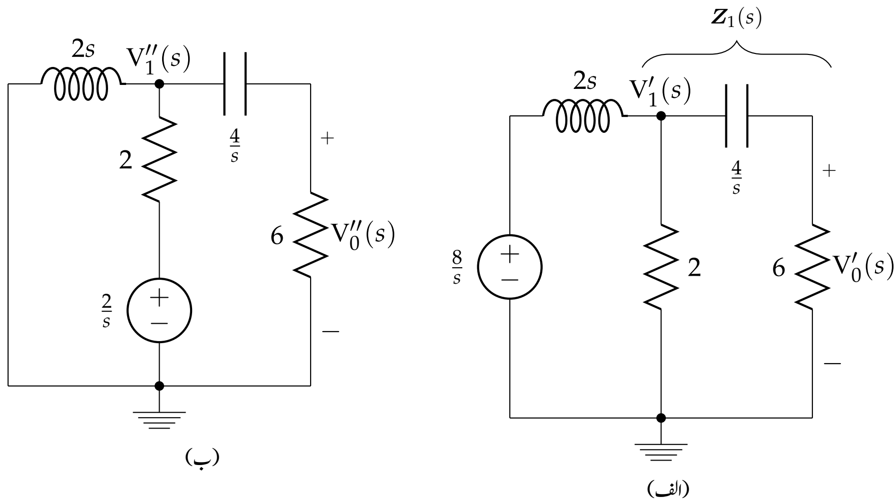
$$
\mathrm{V}_0(s) = \frac{\frac{3}{4}+j\frac{81}{4\sqrt{7}}}{s+\frac{5}{8}+j\frac{\sqrt{7}}{8}} + \frac{\frac{3}{4}-j\frac{81}{4\sqrt{7}}}{s+\frac{5}{8}-j\frac{\sqrt{7}}{8}}
$$

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
v_0(t) &= \left(\frac{3}{4}+j\frac{81}{4\sqrt{7}}\right)e^{-(\frac{5}{8}+j\frac{\sqrt{7}}{8})t} + \left(\frac{3}{4}-j\frac{81}{4\sqrt{7}}\right)e^{-(\frac{5}{8}-j\frac{\sqrt{7}}{8})t} \\
&= e^{-\frac{5}{8}t}\left[\frac{3}{4}\left(e^{-j\frac{\sqrt{7}}{8}t}+e^{j\frac{\sqrt{7}}{8}t}\right)+j\frac{81}{4\sqrt{7}}\left(e^{-j\frac{\sqrt{7}}{8}t}-e^{j\frac{\sqrt{7}}{8}t}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4}e^{-\frac{5}{8}t}\left[6\cos\left(\frac{\sqrt{7}t}{8}\right)+\frac{162}{\sqrt{7}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}t}{8}\right)\right] \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

آئیں یہی جواب دائری ترکیب سے حاصل کریں۔ دائری مساوات لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_1(s)\,(2s+2) - 2\mathrm{I}_2(s) &= \frac{8}{s}-\frac{2}{s} \\
-2\mathrm{I}_1(s) + \mathrm{I}_2(s)\left(2+\frac{4}{s}+6\right) &= \frac{2}{s}
\end{aligned}
$$



شکل 14.8: مسئلہ نفاذ سے حل کرتے ہوئے باری باری ایک ایک منبع کو نافذ کیا گیا ہے

ان ہمزاد مساوات کا حل درج ذیل ہے

$$\begin{aligned}
I_1(s) &= \frac{13s+6}{4s^3+5s^2+2s}\\
I_2(s) &= \frac{s+4}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}$$

جس سے خارجی دباو حاصل ہوتا ہے۔

$$V_0(s) = 6I_2(s) = \frac{6(s+4)}{4s^2+5s+2}$$

مسئلہ نفاذ سے اب اسی دور کو حل کرتے ہیں۔ شکل 14.8 میں باری باری ایک ایک منبع کو لاگو کیا گیا ہے۔ شکل 14.8-الف کو دیکھ کر $Z_1(s$ لکھتے ہیں۔

$$Z_1(s) = \frac{2(6+\frac{4}{s})}{2+6+\frac{4}{s}} = \frac{3s+2}{2s+1}$$

یوں تقسیم دباو کے کلیے سے $\mathrm{V}_1'(s)$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_1'(s) &= \left(\frac{\boldsymbol{Z}_1(s)}{2s+\boldsymbol{Z}_1(s)}\right)\frac{8}{s}\\
&= \left(\frac{\frac{3s+2}{2s+1}}{2s+\frac{3s+2}{2s+1}}\right)\frac{8}{s}\\
&= \frac{\frac{8}{s}(3s+2)}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}$$

تقسیم دباو کے کلیے کو دوبارہ استعمال کرتے ہوئے $\mathrm{V}_1'(s)$ سے $\mathrm{V}_0''(s)$ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_0'(s) &= \left(\frac{6}{6+\frac{4}{s}}\right)\mathrm{V}_1'(s)\\
&= \left(\frac{3s}{3s+2}\right)\frac{\frac{8}{s}(3s+2)}{4s^2+5s+2}\\
&= \frac{24}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}$$

اب شکل 14.8-ب سے دوسرے منبع سے پیدا $\mathrm{V}_0''(s)$ حاصل کرتے ہیں۔ یہاں $2s$ اور $\left(6+\frac{4}{s}\right)$ متوازی جڑے ہیں جن کے مساوی کو $\boldsymbol{Z}_2(s)$ کہہ کر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Z}_2(s) &= \frac{2s(6+\frac{4}{s})}{2s+6+\frac{4}{s}}\\
&= \frac{2s(3s+2)}{s^2+3s+2}
\end{aligned}$$

یوں تقسیم دباو کے کلیے سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_1''(s) &= \left(\frac{\boldsymbol{Z}_2(s)}{2+\boldsymbol{Z}_2(s)}\right)\frac{2}{s}\\
&= \left(\frac{\frac{2s(3s+2)}{s^2+3s+2}}{2+\frac{2s(3s+2)}{s^2+3s+2}}\right)\frac{2}{s}\\
&= \frac{2(3s+2)}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}$$

اور ایک مرتبہ دوبارہ تقسیم دباو سے

$$
\begin{aligned}
V_0''(s) &= \left(\frac{6}{6+\frac{4}{s}}\right) V_1''(s) \\
&= \left(\frac{3s}{3s+2}\right)\frac{2(3s+2)}{4s^2+5s+2} \\
&= \frac{6s}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں دونوں منبع کی موجودگی میں $V_0(s) = V_0'(s) + V_0''(s)$ ہو گا۔

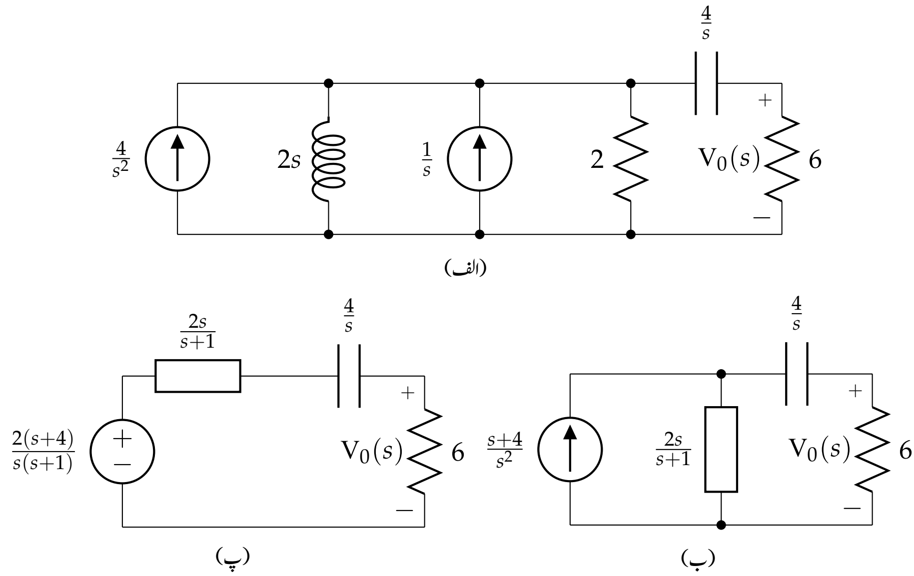
$$
\begin{aligned}
V_0(s) &= \frac{24}{4s^2+5s+2} + \frac{6s}{4s^2+5s+2} \\
&= \frac{6(s+4)}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}
$$

آئیں اب شکل 14.7-الف کو تبادلہ منبع سے حل کریں۔دونوں منبع دباو کے مساوی منبع رو نسب کرتے ہوئے شکل 14.9-الف ملتا ہے جہاں منبع دباو $\frac{8}{s}$ اور اس کے سلسلہ وار $2s$ کو منبع رو $\frac{4}{s^2} = \frac{8/s}{2s}$ جس کے متوازی $2s$ جڑا ہے میں تبدیل کیا گیا ہے۔اسی طرح منبع دباو $\frac{2}{s}$ اور سلسلہ وار 2 کو منبع رو $\frac{1}{s} = \frac{2/s}{2}$ میں تبدیل کیا گیا ہے جس کے متوازی 2 نسب ہے۔

شکل 14.9-الف میں متوازی جڑے منبع رو کا مساوی منبع رو $\frac{s+4}{s^2} = \frac{1}{s} + \frac{4}{s^2}$ ہے۔اسی طرح منبع کے متوازی 2 اور $2s$ مل کر $\frac{2s}{s+1} = \frac{2(2s)}{2+2s}$ دیتے ہیں۔یوں شکل-ب حاصل ہوتا ہے۔

شکل 14.9-ب میں منبع رو $\frac{s+4}{s^2}$ اور متوازی رکاوٹ $\frac{2s}{s+1}$ کو سلسلہ وار جڑے منبع دباو $\frac{2(s+4)}{s(s+1)} = \left(\frac{s+4}{s^2}\right)\left(\frac{2s}{s+1}\right)$ اور رکاوٹ $\frac{2s}{s+1}$ میں تبدیل کرتے ہوئے شکل-پ حاصل ہوتی ہے جس سے تقسیم دباو کے کلیے سے $V_0(s)$ لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
V_0(s) &= \left(\frac{6}{\frac{2s}{s+1}+\frac{4}{s}+6}\right)\frac{2(s+4)}{s(s+1)} \\
&= \frac{6(s+4)}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}
$$



شکل 14.9: منبع دباو کی جگہ منبع رو نسب کیا گیا ہے۔

مسئلہ تھونن سے حل کرنے کی خاطر شکل 14.7-الف میں سلسلہ وار جڑے $6\,\Omega$ اور $0.25\,\mathrm{F}$ کو بوجھ تصور کرتے ہوئے بقایا دور کا تھونن مساوی حاصل کرتے ہیں۔ تھونن دباو شکل 14.10-الف اور تھونن رکاوٹ شکل-ب سے حاصل کی جائے گی۔ شکل-الف سے درج ذیل لکھتے

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(s) &= \frac{\frac{8}{s}-\frac{2}{s}}{2s+2}\\
&= \frac{3}{s(s+1)}
\end{aligned}$$

ہوئے تھونن دباو حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_{\text{تھونن}} &= \frac{2}{s}+2\mathrm{I}(s)\\
&= \frac{2}{s}+\frac{6}{s(s+1)}\\
&= \frac{2(s+4)}{s+1}
\end{aligned}$$

شکل-ب سے تھونن رکاوٹ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z}_{\text{تھونن}} &= \frac{(2)(2s)}{2+2s} \\
&= \frac{2s}{s+1}
\end{aligned}
$$

تھونن دباو اور تھونن رکاوٹ استعمال کرتے ہوئے تھونن دور حاصل ہوتا ہے جس کے ساتھ بوجھ جوڑتے ہوئے شکل 14.10-پ حاصل ہوتی ہے جہاں سے تقسیم دباو کے کلیے سے $V_0(s)$ حاصل ہو گا۔

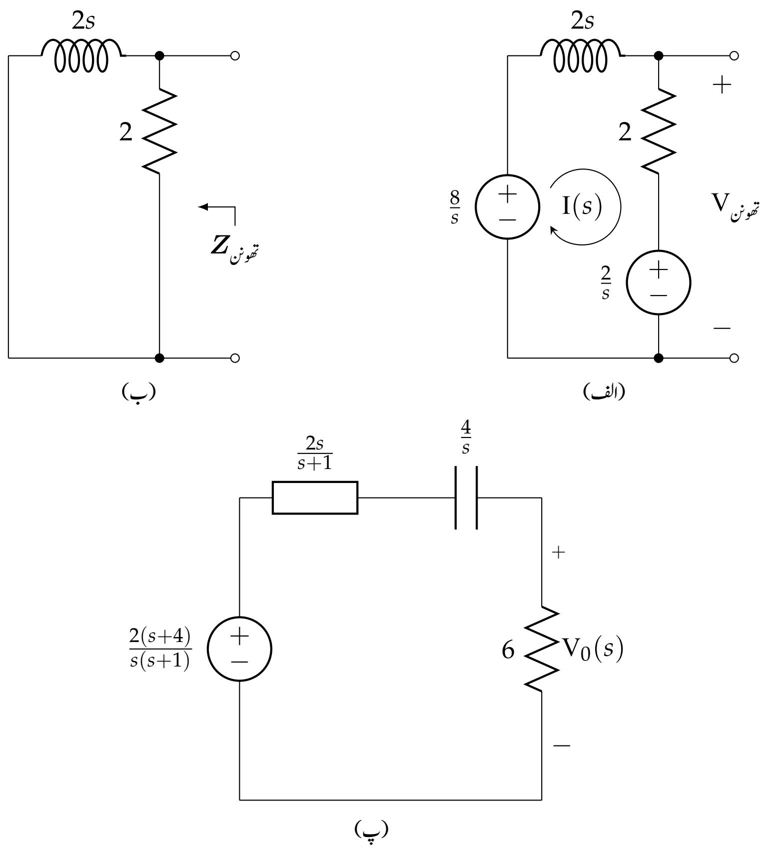
$$
\begin{aligned}
V_0(s) &= \left(\frac{6}{\frac{2s}{s+1}+\frac{4}{s}+6}\right)\frac{2(s+4)}{s(s+1)} \\
&= \frac{6(s+4)}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}
$$

مشق 14.1: شکل 14.7-الف کو مسئلہ نارٹن سے حل کریں۔

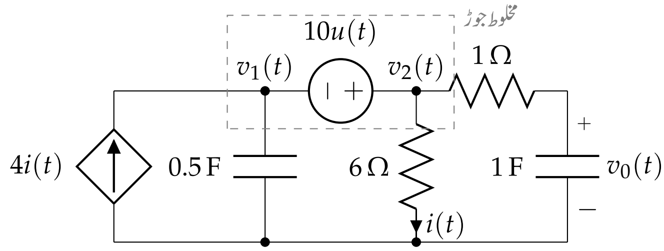
مثال 14.4: شکل 14.11-الف میں $v_0(t)$ دریافت کریں۔

حل: اگر $v_2(t)$ معلوم کیا جائے تو $v_0(t)$ کو تقسیم دباو کے کلیے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس دور میں مخلوط جوڑ پایا جاتا ہے لٰہذا مساوات جوڑ کی تعداد کم ہو گی۔ شکل-ب میں لاپلاس بدل دکھایا گیا ہے جس سے کرخوف مساوات جوڑ لکھتے ہیں

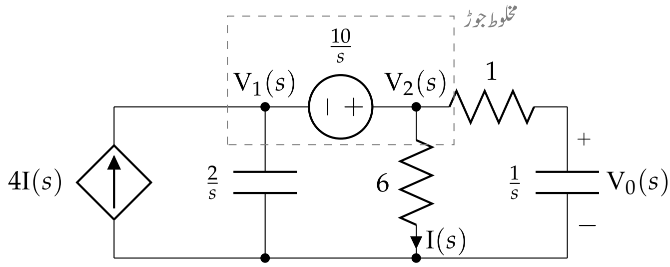
$$
\frac{V_2(s)}{6}+\frac{V_2(s)}{1+\frac{1}{s}}+\frac{V_2(s)-\frac{10}{s}}{\frac{2}{s}}-4I(s)=0
$$



شکل 14.10: مثال 14.3 کے دور کا تھونن سے حل۔



(الف)



(ب)

شکل 14.11: مثال 14.4 کا دور۔

جہاں

$$\mathrm{I}(s)=\frac{\mathrm{V}_2(s)}{6}$$

ہے لہٰذا

$$\frac{\mathrm{V}_2(s)}{6}+\frac{\mathrm{V}_2(s)}{1+\frac{1}{s}}+\frac{\mathrm{V}_2(s)-\frac{10}{s}}{\frac{2}{s}}-\frac{4\mathrm{V}_2(s)}{6}=0$$

یعنی

$$\frac{\mathrm{V}_2(s)}{6}+\frac{s\mathrm{V}_2(s)}{s+1}+\frac{s\mathrm{V}_2(s)-10}{2}-\frac{2\mathrm{V}_2(s)}{3}=0$$

یا

$$\mathrm{V}_2(s)=\frac{10(s+1)}{s^2+2s-1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ تقسیم دباو کے کلیے سے درکار جواب لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_0(s)&=\mathrm{V}_2(s)\left(\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}}\right)\\
&=\frac{10(s+1)}{s^2+2s-1}\left(\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}}\right)\\
&=\frac{10}{s^2+2s-1}
\end{aligned}$$

جزوی کسری پھیلاو حاصل کرتے ہوئے وقتی دائرہ کار میں دباو حاصل ہو گا۔ نسب نما کے جذر $-1\mp\sqrt{2}$ ہیں لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_0(s)&=\frac{10}{(s+1-\sqrt{2})(s+1+\sqrt{2})}\\
&=\frac{K_1}{s+1-\sqrt{2}}+\frac{K_2}{s+1+\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

جس سے

$$\begin{aligned} K_1 &= \left.\frac{10}{s+1+\sqrt{2}}\right|_{s=-1+\sqrt{2}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{2}} \\ K_2 &= \left.\frac{10}{s+1-\sqrt{2}}\right|_{s=-1-\sqrt{2}} \\ &= -\frac{5}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

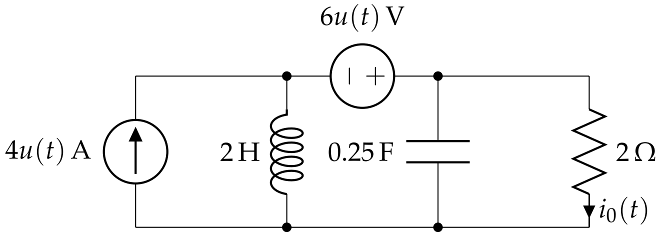
$$\mathrm{V}_0(s) = \frac{5}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{s+1-\sqrt{2}} - \frac{1}{s+1+\sqrt{2}}\right)$$

لکھ کر الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے درکار دباو حاصل ہو گا۔

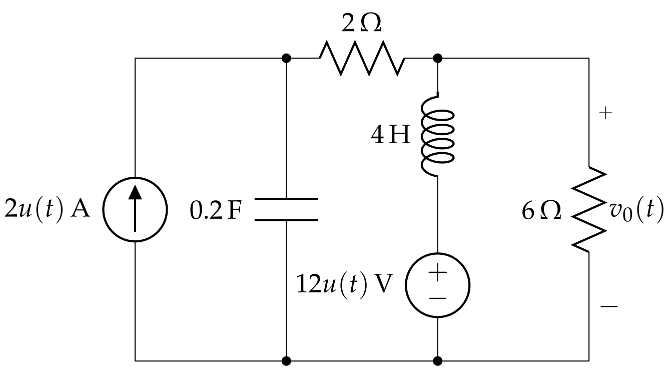
$$\begin{aligned} v_0(t) &= \frac{5}{\sqrt{2}}\left[e^{-(1-\sqrt{2})t} - e^{-(1+\sqrt{2})t}\right]u(t) \\ &= 5\sqrt{2}e^{-t}\sinh(\sqrt{2}t)u(t)\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

مشق 14.2: شکل 14.12 میں $i_0(t)$ بذریعہ مساوات جوڑ دریافت کریں۔

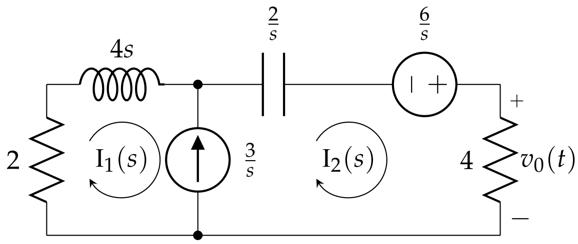
جواب: $i_0(t) = [e^{-t}(5\sin t - 3\cos t) + 3]u(t)\,\mathrm{A}$



شکل 14.12: مثال 14.2 کا دور



شکل 14.13: مثال 14.3 کا دور



شکل 14.14: مثال 14.4 اور مثال 14.5 کا دور۔

مشق 14.3: شکل 14.13 میں $v_0(t)$ بذریعہ مساوات جوڑ دریافت کریں۔

جواب: $v_0(t) = \left[e^{-\frac{t}{2}}\left(7.24\sin\frac{\sqrt{11}}{4}t - 12\cos\frac{\sqrt{11}}{4}t\right) + 12\right]u(t)\,\mathrm{V}$

مشق 14.4: شکل 14.14 میں $v_0(t)$ بذریعہ دائری مساوات دریافت کریں۔

جواب: $v_0(t) = 12e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{V}$

مشق 14.5: مسئلہ تھونن کی مدد سے شکل 14.14 میں $v_0(t)$ حاصل کریں۔

لاپلاس بدل کی مدد سے کچھ ادوار ہم حل کر چکے جن میں ابتدائی رو اور دباو صفر تھے۔ آئیں اب چند ایسے ادوار دیکھیں جن میں ابتدائی رو یا ابتدائی دباو پایا جاتا ہو۔ اس طرز کے ادوار ہم پہلے باب 7 میں حل کر چکے ہیں۔ اس باب کے شروع میں

ابتدائی رو اور ابتدائی دباو کو شامل کرتے ہوئے پرزوں کے لاپلاس بدل حاصل کئے گئے نہیں شکل 14.2، شکل 14.3 اور شکل 14.4 میں دکھایا گیا ہے۔انہیں کو استعمال کرتے ہوئے ادوار حل کئے جائیں گے۔

مثال 14.5: شکل 14.15 میں ازل سے ایک سوئچ منقطع اور ایک سوئچ چالو ہے۔عین $t = 0\,\mathrm{s}$ پر چالو سوئچ کو منقطع کر دیا جاتا ہے جبکہ منقطع سوئچ کو چالو کر دیا جاتا ہے۔لمحہ $t < 0$ پر دور کو حل کرتے ہوئے ابتدائی دباو اور ابتدائی رو حاصل کرتے ہوئے $t \geq 0$ پر $i_0(t)$ دریافت کریں۔

حل: لمحہ $t < 0$ پر برق گیر کو کھلے دور جبکہ امالہ گیر کو قصر دور تصور کرتے ہوئے شکل-ب حاصل ہوتا ہے جہاں سے امالہ گیر کی ابتدائی رو $i_L(0)$ اور برق گیر کا ابتدائی دباو $v_C(0)$ حاصل ہوتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
i_L(0) &= \frac{2}{4} = 0.5\,\mathrm{A}\\
v_C(0) &= 2\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

ابتدائی معلومات کو شامل کرتے ہوئے پرزوں کے لاپلاس مساوی دور پر کرنے سے لمحہ $t \geq 0$ کے لئے شکل حاصل ہوتا ہے۔مساوات جوڑ لکھتے ہیں

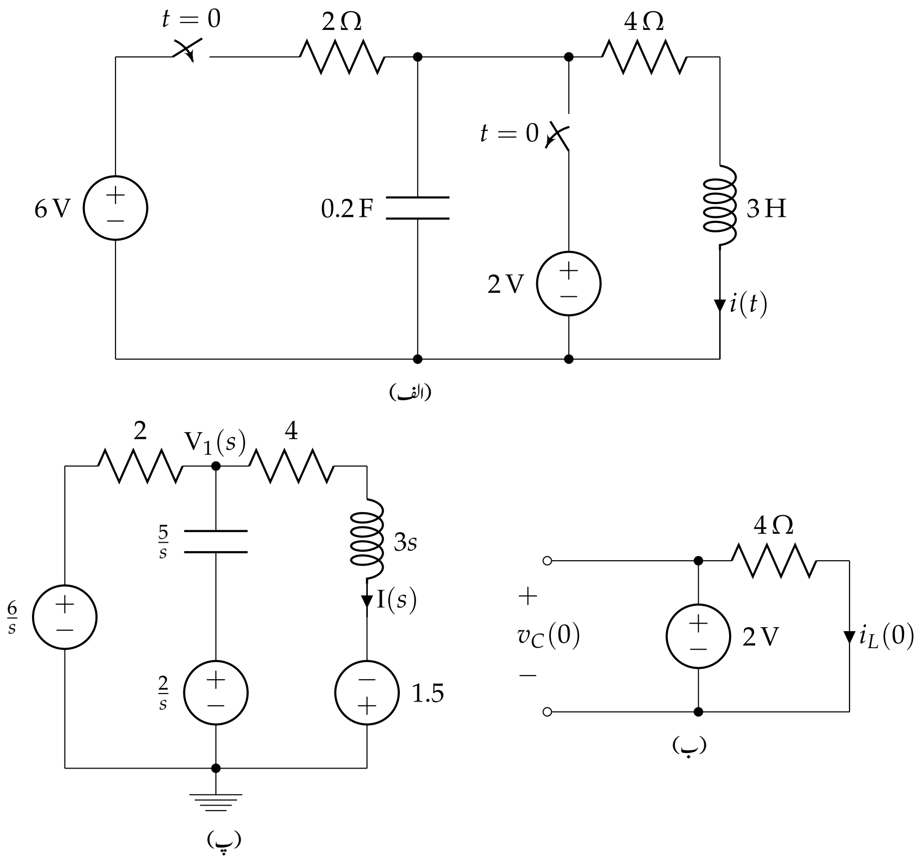
$$
\frac{\mathrm{V}_1(s) - \frac{6}{s}}{2} + \frac{\mathrm{V}_1(s) - \frac{2}{s}}{\frac{5}{s}} + \frac{\mathrm{V}_1(s) + 1.5}{3s} = 0
$$

جس سے

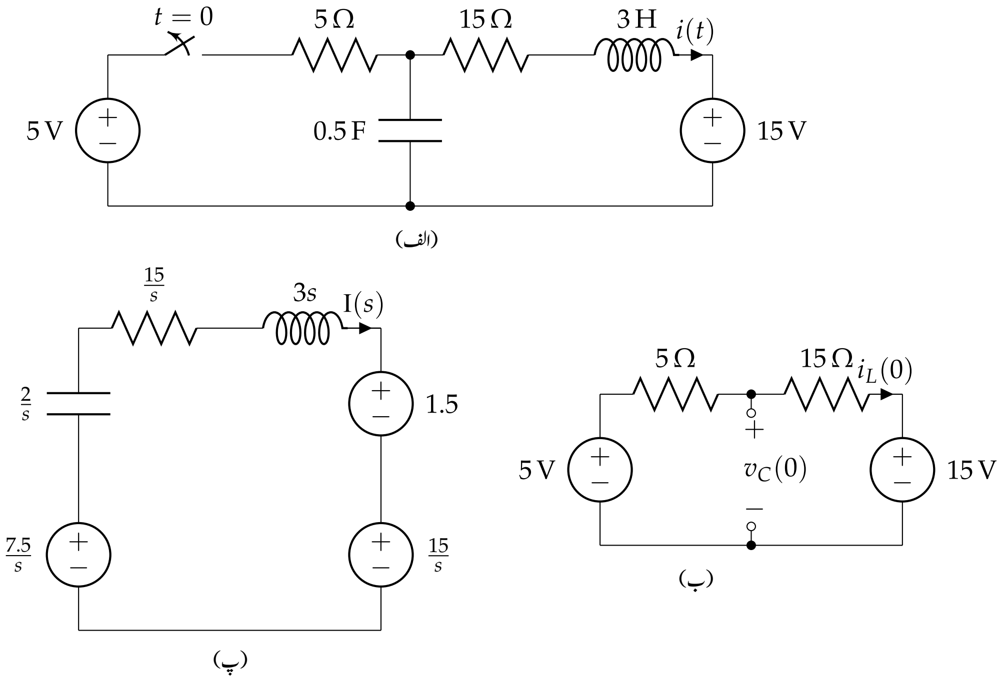
$$
\mathrm{V}_1(s) = \frac{12s^2 + 91s + 120}{s(6s^2 + 23s + 30)}
$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں رو درج ذیل ہے

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}(s) &= \frac{\mathrm{V}_1(s)}{3s + 4}\\
&= \frac{12s^2 + 91s + 120}{s(s + 4)(6s^2 + 23s + 30)}
\end{aligned}
$$



شکل 14.15: مثال 14.5 کا دور۔



شکل 14.16: مثال 14.6 کا دور۔

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$i(t)=\left[e^{-\frac{23}{12}t}\left(\frac{44}{\sqrt{191}}\sin\frac{\sqrt{191}t}{12}-2\cos\frac{\sqrt{191}t}{12}\right)+4\right]u(t)\,\mathrm{A}$$

مثال 14.6: شکل 14.16 میں ازل سے چالو سوئچ کو لمحہ پر منقطع کیا جاتا ہے۔ سوئچ منقطع ہونے کے بعد کی رو $i(t)$ دریافت کریں۔

حل: چالو سوئچ کی صورت میں برق گیر کو کھلا دور اور امالہ گیر کو قصر دور تصور کرتے ہوئے شکل-ب حاصل ہوتی ہے جہاں سے امالہ گیر کی ابتدائی رو $i_L(0)$ اور برق گیر کی ابتدائی دباو $v_C(0)$ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
i_L(0) &= \frac{10-20}{5+15} = -0.5\,\mathrm{A} \\
v_C(0) &= \frac{5\times 15 + 15\times 5}{5+15} = 7.5\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

ابتدائی معلومات کو استعمال کرتے ہوئے، سوئچ منقطع ہونے کے بعد کا لاپلاس بدل دور شکل-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں سے $\mathrm{I}(s)$ لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}(s) &= \frac{\frac{7.5}{s} - 1.5 - \frac{15}{s}}{\frac{2}{s} + 15 + 3s} \\
&= \frac{-(s+5)}{2(s^2+5s+\frac{2}{3})} \\
&= \frac{-(s+5)}{2(s+\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{201}}{6})(s+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{201}}{6})}
\end{aligned}
$$

اس کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$
i(t) = -e^{-\frac{5}{2}t}\left[\frac{45}{6\sqrt{201}}\sinh\left(\frac{\sqrt{201}t}{6}\right) + \frac{1}{2}\cosh\left(\frac{\sqrt{201}t}{6}\right)\right]u(t)\,\mathrm{A}
$$