برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 3

جوڑ اور دائری تجزیہ

گزشتہ باب میں سادہ ترین ادوار کو کرخوف قوانین سے حل کرنا دکھایا گیا۔اس باب میں متعدد جوڑ اور متعدد دائروں والے ادوار کو کرخوف قوانین سے حل کرنا دکھایا جائے گا۔کرخوف قانون رو سے ہر جوڑ پر داخلی اور خارجی رو کے مجموعوں کو برابر پر کرتے ہوئے دور کے تمام جوڑوں پر دباو حاصل کیا جاتا ہے۔اس کے برعکس کرخوف قانون دباو کی مدد سے دور کے ہر دائرے میں دباو کے گھٹاو کے مجموعے کو دائرے میں دباو کے بڑھاو کے مجموعے کے برابر پر کرتے ہوئے تمام دائروں کی رو حاصل کی جاتی ہے۔عموماً دور یا تو کرخوف قانون دباو اور یا کرخوف قانون رو سے زیادہ آسانی سے حل ہوتا ہے۔آسان طریقہ چننا اس باب میں سکھایا جائے گا۔

3.1 تجزیہ جوڑ

دور کو ترکیب جوڑ[1] سے حل کرتے ہوئے جوڑ کے دباو کو نا معلوم متغیرات چننا جاتا ہے۔کسی ایک جوڑ کو حوالہ چنتے ہوئے بقایا جوڑ کے دباو اس جوڑ سے ناپے جاتے ہیں۔یوں جس جوڑ کو حوالہ چننا گیا ہو، اس کی دباو کو صفر وولٹ تصور کیا جاتا ہے اور اس جوڑ کو برقی زمین کہا جاتا ہے۔عموماً اس جوڑ کو برقی زمین چننا جاتا ہے جس کے ساتھ سب سے زیادہ پرزے جڑے ہوں۔عموماً آلات کو موصل ڈبوں میں بند رکھا جاتا ہے اور عام طور دور کے برقی زمین کو ڈبے کے ساتھ جوڑا جاتا ہے۔ایسی صورت میں ڈبے کی سطح بھی $0\,\mathrm{V}$ پر ہوتی ہے۔

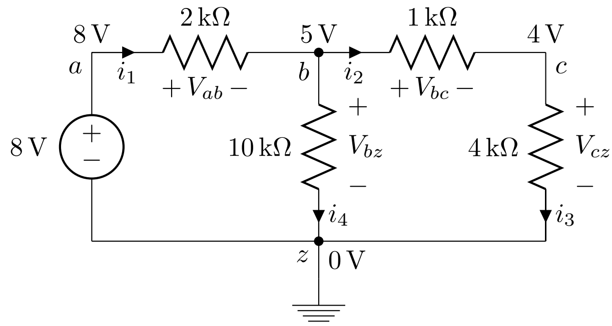
ہم دباو جوڑ کے متغیرات کو مثبت تصور کریں گے۔حقیقی دباو کی قیمت زمین کی نسبت سے منفی ہونے کی صورت میں تجزیے سے منفی قیمت حاصل ہو گی۔

آئیں دباو جوڑ جاننے کی افادیت کو شکل 3.1 کی مدد سے جانیں۔اس دور میں a ، b ، c اور z جوڑ پائے جاتے ہیں۔ہم نے جوڑ z کو برقی زمین چننا ہے لہٰذا اس کی دباو $0\,\mathrm{V}$ ہے۔بقایا تین جوڑ کی دباو کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔برقی زمین کو علامت سے ظاہر کیا گیا ہے۔

بالائی بائیں مزاحمت پر دباو درج ذیل پایا جاتا ہے

$$\begin{aligned}V_{ab} &= V_a - V_b\\ &= 8-5\\ &= 3\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

[1] nodal analysis



شکل 3.1: دباو جوڑ سے بازو کی رو حاصل کی جا سکتی ہے۔

لہٰذا قانون اوہم سے مزاحمت میں رو درج ذیل حاصل کی جاتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
i_1 &= \frac{V_{ab}}{2\,\mathrm{k\Omega}} \\
&= \frac{3}{2000} \\
&= 1.5\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

اسی طرح بالائی دائیں مزاحمت پر دباو درج ذیل ہو گا

$$
\begin{aligned}
V_{bc} &= V_b - V_c \\
&= 5 - 4 \\
&= 1\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

جس سے رو

$$
\begin{aligned}
i_2 &= \frac{V_{bc}}{1\,\mathrm{k\Omega}} \\
&= \frac{1}{1000} \\
&= 1\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتی ہے۔ درمیانے مزاحمت پر دباو اور اس کی رو درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
V_{bz} &= V_b - V_z \\
&= 5 - 0 \\
&= 5\,\mathrm{V} \\
i_4 &= \frac{V_{bz}}{10\,\mathrm{k\Omega}} \\
&= \frac{5}{10000} \\
&= 0.5\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

چونکہ $1\,\mathrm{k\Omega}$ اور $4\,\mathrm{k\Omega}$ سلسلہ وار جڑے ہیں لہٰذا $4\,\mathrm{k\Omega}$ میں بھی $1\,\mathrm{mA}$ رو پائی جائے گی۔ آپ اسی قیمت کو دباو جوڑ سے بھی حاصل کر سکتے

ہیں یعنی

$$
\begin{aligned}
V_{cz} &= V_c - V_z \\
&= 4 - 0 \\
&= 4\,\mathrm{V} \\
i_3 &= \frac{V_{cz}}{4\,\mathrm{k\Omega}} \\
&= \frac{4}{4000} \\
&= 1\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

یہاں اطمنان کر لیں کہ تمام جوڑوں پر آمدی رو اور خارجی رو برابر ہوں۔جوڑ b پر آمدی رو $1.5\,\mathrm{mA}$ ہے جو خارجی رو کے مجموعے $1\,\mathrm{mA} + 0.5\,\mathrm{mA}$ کے عین برابر ہے۔اسی طرح جوڑ c پر آمدی اور خارجی رو $1\,\mathrm{mA}$ ہیں۔جوڑ a پر کرخوف قانون رو سے منبع دباو کے مثبت سرے سے خارجی رو $1.5\,\mathrm{mA}$ حاصل ہوتی ہے۔

کسی بھی دو جوڑ m اور n کے مابین جڑی مزاحمت R_{mn} کی رو i_R قانون اوہم

$$
i_R = \frac{v_m - v_n}{R_{mn}} \tag{3.1}
$$

سے حاصل کی جاتی ہے۔

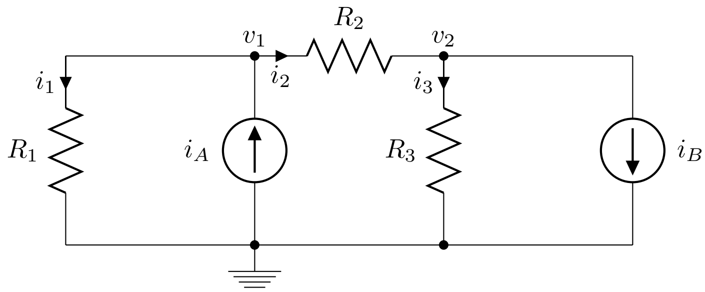
اب جب ہم دباو جوڑ کی افادیت جان چکے ہیں آئیں ترکیب جوڑ پر غور کریں۔اگر دور میں J جوڑ پائے جاتے ہوں تب ہمیں J دباو دریافت کرنے ہوں گے۔کسی ایک جوڑ کو زمین چنتے ہوئے اس کی دباو $0\,\mathrm{V}$ تصور کی جاتی ہے۔یوں بقایا $J-1$ جوڑ کی دباو کو نامعلوم متغیرات تصور کیا جاتا ہے۔ان $J-1$ جوڑ پر کرخوف قانون رو کا اطلاق کرتے ہوئے $J-1$ مساوات لکھے جاتے ہیں۔آپ جانتے ہیں ہیں کہ $J-1$ متغیرات معلوم کرنے کی خاطر $J-1$ ہمزاد مساوات درکار ہیں۔یوں ان $J-1$ ہمزاد مساوات کے حل سے تمام نامعلوم دباو جوڑ حاصل ہوتے ہیں۔کسی بھی جوڑ پر کرخوف کی مساوات لکھتے ہوئے جوڑ سے منسلک تمام بازو کی رو کو مساوات 3.1 کی طرز پر لکھا جاتا ہے۔یوں مزاحمت جانتے ہوئے، رو کو نامعلوم دباو کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔اس طرح کرخوف قانون رو کی مساوات میں صرف نامعلوم دباو بطور متغیرات پائے جائیں گے۔

یاد رہے کہ برقی دباو دو نقطوں کے مابین ہوتا ہے۔کسی نقطے کی حتمی دباو کوئی معنی نہیں رکھتی۔جوڑ پر کرخوف قانون رو کی مساوات لکھتے ہوئے جوڑ کا دباو زمین کے حوالے سے ناپا جاتا ہے۔یوں شکل 3.1 میں جوڑ a کا دباو جوڑ z کے حوالے سے $8\,\mathrm{V}$ ہے اور جوڑ b کا دباو جوڑ z کے حوالے سے $5\,\mathrm{V}$ ہے۔اس کے برعکس جوڑ b کے حوالے سے جوڑ a کا دباو $3\,\mathrm{V}$ ہے جبکہ جوڑ a کے حوالے سے جوڑ c کا دباو $-4\,\mathrm{V}$ اور جوڑ z کا دباو $-8\,\mathrm{V}$ ہے۔

آئیں ترکیب جوڑ کو چند مثالوں کی مدد سے سیکھیں۔ہم آسان ترین مثال سے شروع کرتے ہوئے بتدریج مشکل مثال پیش کریں گے۔

3.2 غیر تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار

شکل 3.2 میں تین جوڑ والا دور دکھایا گیا ہے جن میں نچلے جوڑ کو زمین چنا گیا ہے۔بقایا دو جوڑ کے نامعلوم برقی دباو کو متغیرات v_1 اور v_2 ظاہر کرتے ہیں۔ہم تمام شاخوں میں رو کی سمت چنتے ہیں۔یوں i_1 کو بالائی بائیں جوڑ سے زمین کی جانب رواں چنا گیا ہے۔اسی طرح i_2 کو بالائی بائیں جوڑ سے بالائی دائیں جوڑ کی جانب رواں چنا گیا ہے جبکہ i_3 کو بالائی دائیں جوڑ سے زمین کی طرف رواں چنا گیا ہے۔



شکل 3.2: تین جوڑ والا دور۔

بالائی بائیں جوڑ پر کرخوف قانون رو کی مساوات لکھتے ہیں۔ جوڑ سے خارجی رو کو مثبت اور داخلی رو کو منفی لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$i_1 - i_A + i_2 = 0 \tag{3.2}$$

قانون اوہم استعمال کرتے ہوئے اسے یوں

$$\frac{v_1}{R_1} - i_A + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0$$

یا

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_1 - \frac{v_2}{R_2} = i_A \tag{3.3}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ بالائی دائیں جوڑ کے لئے

$$-i_2 + i_3 + i_B = 0 \tag{3.4}$$

اور

$$-\left(\frac{v_1 - v_2}{R_2}\right) + \frac{v_2}{R_3} + i_B = 0$$

یعنی

$$-\frac{v_1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) v_2 = -i_B \tag{3.5}$$

لکھا جائے گا۔ نچلے جوڑ یعنی برقی زمین پر کرخوف قانون رو کی مساوات لکھتے ہیں۔

$$-i_1 + i_A - i_3 - i_B = 0 \tag{3.6}$$

مساوات 3.2 اور مساوات 3.4 کے مجموعے کو منفی ایک سے ضرب دینے سے مساوات 3.6 حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 3.2، مساوات 3.4 اور مساوات 3.6 میں کسی بھی دو مساواتوں سے تیسری مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں ان میں صرف دو عدد مساوات آزاد مساوات ہیں جبکہ تیسری مساوات تابع مساوات ہے۔ شکل 3.2 کے دور میں کل تین عدد جوڑ ہیں۔ آپ نے دیکھا کہ اس دور سے صرف دو عدد آزاد مساوات حاصل ہوتے ہیں یعنی $J = 3$ کی صورت میں $J - 1 = 2$ آزاد مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات 3.3 اور مساوات 3.5 کو ایک ساتھ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_1 - \frac{v_2}{R_2} &= i_A \\
-\frac{v_1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) v_2 &= -i_B
\end{aligned} \tag{3.7}$$

مثال 3.1: شکل 3.2 میں $i_A = 2\,\mathrm{mA}$ ، $i_B = 5\,\mathrm{mA}$ ، $R_1 = 4\,\mathrm{k\Omega}$ ، $R_2 = 6\,\mathrm{k\Omega}$ اور $R_3 = 2\,\mathrm{k\Omega}$ ہیں۔ تمام جوڑ پر دباو اور تمام شاخوں میں رو حاصل کریں۔

حل: مساوات 3.7 میں قیمتیں پُر کرتے ہیں

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{4000}+\frac{1}{6000}\right)v_1-\frac{v_2}{6000}&=0.002\\-\frac{v_1}{6000}+\left(\frac{1}{6000}+\frac{1}{2000}\right)v_2&=-0.005\end{aligned}\tag{3.8}$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرنے سے

$$\begin{aligned}v_1&=2\,\mathrm{V}\\v_2&=-7\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دباو جوڑ جانتے ہوئے شاخوں کی رو قانون اوہم سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}i_1&=\frac{v_1}{R_1}=\frac{2}{4000}=0.5\,\mathrm{mA}\\i_2&=\frac{v_1-v_2}{R_2}=\frac{2-(-7)}{6000}=1.5\,\mathrm{mA}\\i_3&=\frac{v_2}{R_3}=\frac{-7}{2000}=-3.5\,\mathrm{mA}\end{aligned}$$

مساوات 3.7 کو قالبی مساوات[2] کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2}\\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}i_A\\-i_B\end{bmatrix}\tag{3.9}$$

قالبی مساوات میں

$$\begin{aligned}\mathbf{G}&=\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2}\\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\end{bmatrix}\\\mathbf{V}&=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}\\\mathbf{I}&=\begin{bmatrix}i_A\\-i_B\end{bmatrix}\end{aligned}$$

لیتے ہوئے اسے یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\mathbf{GV}=\mathbf{I}$$

[2] matrix equation

جس سے

$$\mathbf{V} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{I}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i_A \\ -i_B \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

لکھا جائے گا۔

آج کل کمپیوٹر کا زمانہ ہے۔کمپیوٹر کی مدد سے قالبی مساوات نہایت آسانی سے حل کئے جا سکتے ہیں۔آپ سے التماس ہے کہ کمپیوٹر پر قالبی مساوات حل کرنا سیکھیں۔

مثال 3.2: درج بالا مثال میں تمام دباو جوڑ کو مساوات 3.10 کی مدد سے حل کریں۔

حل: مساوات 3.10 میں دی معلومات پر کرتے ہوئے لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2400} & -\frac{1}{6000} \\ -\frac{1}{6000} & \frac{1}{1500} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.002 \\ -0.005 \end{bmatrix}$$

قالب $\mathbf{G}$ کا ریاضی معکوس $\mathbf{G}^{-1}$ حاصل کرنے کی خاطر $\mathbf{G}$ کا شریک قالب $\mathbf{G}_{\text{شریک}}$

$$\mathbf{G}_{\text{شریک}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1500} & \frac{1}{6000} \\ \frac{1}{6000} & \frac{1}{2400} \end{bmatrix}$$

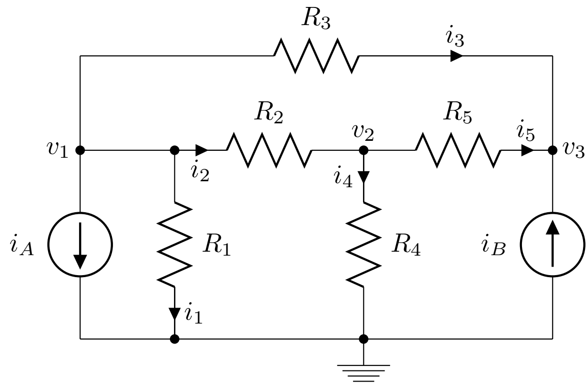
اور قالب کی حتمی قیمت

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{1}{2400} & -\frac{1}{6000} \\ -\frac{1}{6000} & \frac{1}{1500} \end{vmatrix} &= \left(\frac{1}{2400}\right)\left(\frac{1}{1500}\right) - \left(-\frac{1}{6000}\right)\left(-\frac{1}{6000}\right) \\ &= \frac{1}{4 \times 10^6} \end{aligned}$$

درکار ہوں گے۔یوں

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= 4 \times 10^6 \begin{bmatrix} \frac{1}{1500} & \frac{1}{6000} \\ \frac{1}{6000} & \frac{1}{2400} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.002 \\ -0.005 \end{bmatrix} \\ &= 4 \times 10^6 \begin{bmatrix} 0.5 \times 10^{-6} \\ -1.75 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں یعنی $v_1 = 2\,\mathrm{V}$ اور $v_2 = -7\,\mathrm{V}$ ہیں۔



شکل 3.3: چار جوڑ کے دور سے تین عدد آزاد مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

آئیں شکل 3.3 کے کرخوف قانون رو کے مساوات لکھیں۔دور کے تمام شاخوں میں رو کی سمتیں چننی گئی ہیں۔نچلے جوڑ کو زمین چنا گیا ہے اور یہی حقیقت زمین کی علامت سے ظاہر کی گئی ہے۔دور میں کل چار $(J = 4)$ عدد جوڑ ہیں لہٰذا اس سے تین $(J - 1 = 3)$ عدد آزاد مساوات حاصل کئے جائیں گے۔پہلی جوڑ پر کرخوف قانون رو استعمال کرتے ہوئے

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_A = 0$$

لکھا جائے گا جہاں جوڑ سے خارج رو کو مثبت لکھا گیا ہے۔انفرادی شاخ کی رو کو قانون اوہم سے پُر کرتے ہوئے

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} + \frac{v_1 - v_3}{R_3} + i_A = 0$$

یعنی

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) v_1 - \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_3}{R_3} = -i_A \tag{3.11}$$

حاصل ہوتا ہے۔دوسرے جوڑ سے

$$-i_2 + i_4 + i_5 = 0$$

یعنی

$$-\left(\frac{v_1 - v_2}{R_2}\right) + \frac{v_2}{R_4} + \frac{v_2 - v_3}{R_5} = 0$$

یا

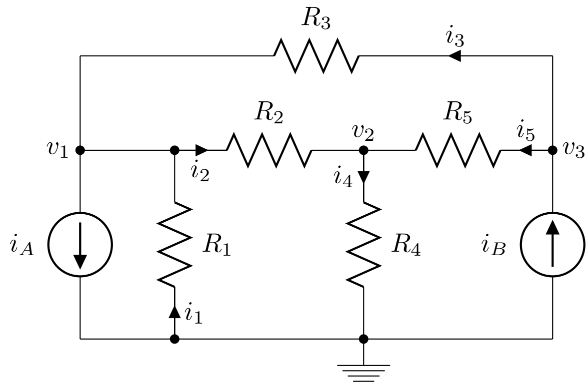
$$-\frac{v_1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) v_2 - \frac{v_3}{R_5} = 0 \tag{3.12}$$

حاصل ہوتا ہے۔تیسری جوڑ سے

$$-i_3 - i_5 - i_B = 0$$

یعنی

$$-\left(\frac{v_1 - v_3}{R_3}\right) - \left(\frac{v_2 - v_3}{R_5}\right) - i_B = 0$$



شکل 3.4: مزاحمتوں اور آزاد منبع رو کی قالبی مساوات رو کی چننی سمتوں پر منحصر نہیں۔

یا

$$-\frac{v_1}{R_3} - \frac{v_2}{R_5} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) v_3 = i_B \tag{3.13}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 3.11، مساوات 3.12 اور مساوات 3.13 کو اکٹھے لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) v_1 - \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_3}{R_3} &= -i_A \\
-\frac{v_1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) v_2 - \frac{v_3}{R_5} &= 0 \\
-\frac{v_1}{R_3} - \frac{v_2}{R_5} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) v_3 &= i_B
\end{aligned} \tag{3.14}$$

قالبی مساوات کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_A \\ 0 \\ i_B \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

مندرجہ بالا مساوات کا دایاں بازو منبع رو سے جوڑ میں داخل رو دیتی ہے جبکہ اس کا بایاں بازو جوڑ سے خارجی رو دیتی ہے۔

شکل 3.3 کو دوبارہ شکل 3.4 میں پیش کیا گیا ہے جہاں i_1 ، i_3 اور i_5 کی سمتیں گزشتہ سمتوں کے الٹ چننی گئی ہیں۔ تین جوڑ کے مساوات درج ذیل لکھے جائیں گے۔

$$\begin{aligned}
i_A - i_1 + i_2 - i_3 &= 0 \\
-i_2 + i_4 - i_5 &= 0 \\
i_3 + i_5 - i_B &= 0
\end{aligned}$$

شاخوں کی رو قانون اوہم سے پُر کرتے ہوئے درج بالا کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
i_A - \left(\frac{0-v_1}{R_1}\right) + \frac{v_1-v_2}{R_2} - \left(\frac{v_3-v_1}{R_3}\right) &= 0\\
-\left(\frac{v_1-v_2}{R_2}\right) + \frac{v_2}{R_4} - \left(\frac{v_3-v_2}{R_5}\right) &= 0\\
\frac{v_3-v_1}{R_3} + \frac{v_3-v_2}{R_5} - i_B &= 0
\end{aligned}
$$

جنہیں ترتیب دینے سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)v_1 - \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_3}{R_3} = -i_A \tag{3.16}$$

$$-\frac{v_1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)v_2 - \frac{v_3}{R_5} = 0 \tag{3.17}$$

$$-\frac{v_1}{R_3} - \frac{v_2}{R_5} + \left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right)v_3 = i_B \tag{3.18}$$

اس کو قالبی مساوات کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3}\\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5}\\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-i_A\\0\\i_B\end{bmatrix} \tag{3.19}$$

مساوات 3.15 اور مساوات 3.19 بالکل یکساں ہیں۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قالبی مساوات کا دارومدار شاخوں میں رو کی چننی گئی سمتوں پر منحصر نہیں ہوتا۔اس کتاب میں اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم جوڑ پر کرخوف قانون رو کی مساوات لکھتے ہوئے مزاحمتی شاخوں میں رو کی سمت جوڑ سے خارج ہوتی تصور کریں گے۔آئیں اس ترکیب کو شکل 3.5 کی مدد سے سمجھیں۔

شکل 3.5-الف میں پہلے جوڑ پر تمام مزاحمتی شاخوں کی رو خارجی تصور کرتے ہوئے کرخوف قانون رو کے تحت خارجی رو کا مجموعہ داخلی رو کے مجموعے کے برابر پُر کرنے سے

$$i_1 + i_2 = i_A \tag{3.20}$$

یعنی

$$\frac{v_1}{R_a} + \frac{v_a - v_b}{R_d} = i_A \tag{3.21}$$

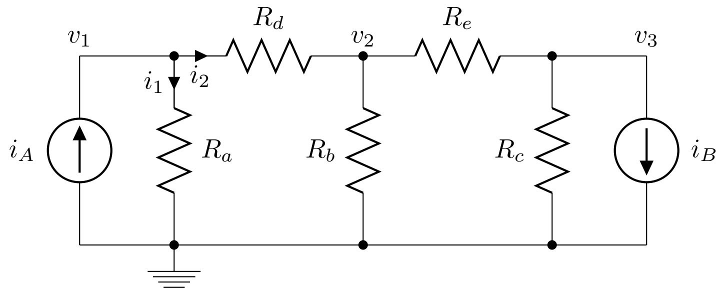
حاصل ہوتا ہے۔ شکل 3.5-ب میں دوسرے جوڑ پر تمام مزاحمتی رو کی سمت خارجی تصور کی گئی ہیں یوں

$$i'_1 + i'_2 + i'_3 = 0 \tag{3.22}$$

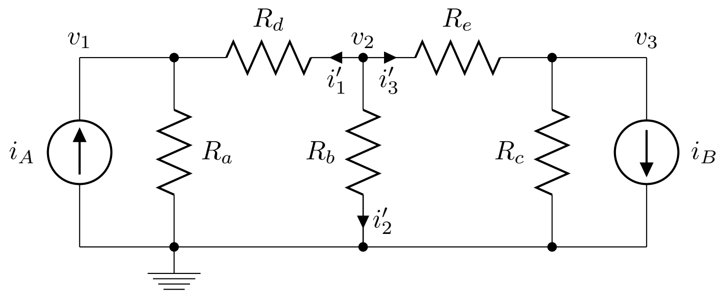
یعنی

$$\frac{v_2 - v_1}{R_d} + \frac{v_2}{R_b} + \frac{v_2 - v_3}{R_e} = 0 \tag{3.23}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ تیسرے جوڑ پر یہی ترکیب استعمال کرتے ہیں۔ہر جوڑ پر رو کی سمت شکل پر دکھانا ضروری نہیں ہے لہٰذا تیسرے جوڑ پر i''_1 اور i''_2 دکھانا ضروری نہیں ہے۔ساتھ ہی ساتھ ہر مرتبہ مساوات 3.20 اور مساوات 3.22 کے طرز پر مساوات لکھنے کی بھی ضرورت نہیں ہے بلکہ دل ہی دل میں



(الف)



(ب)

شکل 3.5: تمام جوڑ پر مزاحمتی شاخوں میں رو کی سمت جوڑ سے خارج ہوتی تصور کر سکتے ہیں۔

جوڑ پر تمام مزاحمتی شاخوں کی رو خارجی تصور کرتے ہوئے سیدھ و سیدھ مساوات 3.21 اور مساوات 3.23 کے طرز پر مساوات لکھے جا سکتے ہیں۔ تیسرے جوڑ پر ایسا ہی کرتے ہوئے درج ذیل مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$$\frac{v_3 - v_2}{R_e} + \frac{v_3}{R_c} + i_B = 0 \tag{3.24}$$

اس کتاب میں ہم مساوات 3.24 کی طرح جوڑ پر کرخوف قانون رو کے مساوات لکھیں گے۔

مساوات 3.19 اور مساوات 3.15 میں **قالبِ موصلیت**[3] G کے بالائی بائیں کونے سے نچلے دائیں کونے تک ترچھی لکیر کے بالائی اور نچلی اطراف پر یکساں رکن پائے جاتے ہیں۔ ایسا اتفاقی طور پر نہیں ہے بلکہ مزاحمتوں اور آزاد منبع رو پر مبنی کسی بھی دور کے G قالب کو تشاکل صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں ان قالبوں پر مزید غور کریں۔

شکل 3.4 میں پہلے جوڑ کی دباو v_1، دوسرے جوڑ کی دباو v_2 اور تیسرے جوڑ کی دباو v_3 ہے۔ قالب میں بالائی یعنی پہلے صف کے رکن مساوات 3.16 سے حاصل کئے گئے۔ یہ مساوات پہلی جوڑ سے حاصل کی گئی ہے۔ اس جوڑ پر مزاحمت R_1، R_2 اور R_3 جڑے ہیں۔ ان مزاحمتوں کو متوازی جڑا تصور کرتے ہوئے مساوی مزاحمت R_{m1}

$$\frac{1}{R_{m1}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں $\frac{1}{R_{m1}}$ کو مساوی متوازی موصلیت G_{m1} کہا جاتا ہے۔ یوں قالب کے پہلے صف کا پہلا (بایاں) رکن پہلے جوڑ سے جڑے تمام مزاحمتوں کا مساوی متوازی موصلیت $\frac{1}{R_{m1}}$ ہے۔ اسی صف کا دوسرا رکن پہلے جوڑ اور دوسرے جوڑ کے مابین جڑے مزاحمت کی موصلیت کا منفی $-\frac{1}{R_2}$ کے برابر ہے۔ اسی طرح پہلے صف کا تیسرا رکن، پہلے جوڑ اور تیسرے جوڑ کے مابین جڑے موصلیت کے منفی $-\frac{1}{R_3}$ کے برابر ہے۔ قالب کے

[3] conductance matrix

دوسرے صف کے ارکان مساوات 3.17 سے حاصل کئے گئے۔اس صف کا پہلا رکن پہلے اور دوسرے جوڑ کے مابین مساوی متوازی موصلیت کے منفی $-\frac{1}{R_2}$ کے برابر ہے۔صف کا دوسرا رکن دوسرے جوڑ پر تمام مزاحمتوں کا مساوی متوازی موصلیت $\frac{1}{R_{m2}}$

$$\frac{1}{R_{m2}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

ہے جبکہ صف کا تیسرا رکن دوسرے اور تیسرے جوڑ کے مابین موصلیت کے منفی $-\frac{1}{R_3}$ کے برابر ہے۔قالب کا تیسرا صف بھی اسی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔قالبی مساوات میں دائیں ہاتھ قالبِ رو[4] کے ارکان بالترتیب پہلے، دوسرے اور تیسرے جوڑ پر جڑے منبع رو سے جوڑ میں داخل ہوتی رو ہے۔منبع رو کی غیر موجودگی میں قالب کے رکن کو صفر لکھا جاتا ہے۔کسی بھی جوڑ پر ایک سے زیادہ منبع رو کی صورت میں جوڑ پر مجموعی داخلی رو، قالب کی رکن ہو گی۔پہلی جوڑ پر منبع کی رو i_A ہے جو جوڑ سے خارجی جانب ہے لہٰذا اسے قالب رو میں $-i_A$ لکھا گیا ہے۔دوسرے جوڑ پر کوئی منبع رو نسب نہیں لہٰذا قالب کا دوسرا رکن صفر ہے۔تیسرے جوڑ پر منبع i_B کی رو جوڑ میں داخل ہوتی ہے لہٰذا قالب رو کا تیسرا رکن i_B ہے۔

ان معلومات کی مدد سے مزاحمت اور منبع رو پر مبنی $J+1$ جوڑ کے دور کی قالبی مساوات دور کو دیکھ کر درج ذیل صورت میں لکھی جا سکتی ہے

$$\begin{bmatrix} +G_{11} & -G_{12} & -G_{13} & \cdots & -G_{1J} \\ -G_{21} & +G_{22} & -G_{23} & \cdots & -G_{2J} \\ -G_{31} & -G_{32} & +G_{33} & \cdots & -G_{3J} \\ \vdots & & & & \\ -G_{J1} & -G_{J2} & -G_{J3} & \cdots & +G_{JJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_J \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

جہاں G_{nn} سے مراد جوڑ n کے ساتھ منسلک تمام مزاحمتوں کی مساوی متوازی موصلیت جبکہ G_{nm} سے مراد جوڑ n اور m کے مابین مزاحمت کی موصلیت ہے۔یہ مساوات لکھتے ہوئے جوڑ $J+1$ کو زمین چننا گیا ہے۔اگر جوڑ n اور جوڑ m کے مابین مزاحمت R_{nm} جڑی ہو تب جوڑ m اور جوڑ n کے مابین بھی یہی مزاحمت جڑی ہو گی لہٰذا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$G_{nm} = G_{mn} \tag{3.26}$$

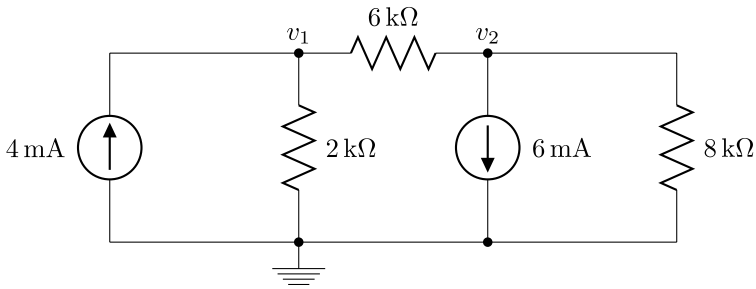
ہو گا اور یوں مساوات 3.25 کو درج ذیل صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{bmatrix} +G_{11} & -G_{12} & -G_{13} & \cdots & -G_{1J} \\ -G_{12} & +G_{22} & -G_{23} & \cdots & -G_{2J} \\ -G_{13} & -G_{23} & +G_{33} & \cdots & -G_{3J} \\ \vdots & & & & \\ -G_{1J} & -G_{2J} & -G_{3J} & \cdots & +G_{JJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_J \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

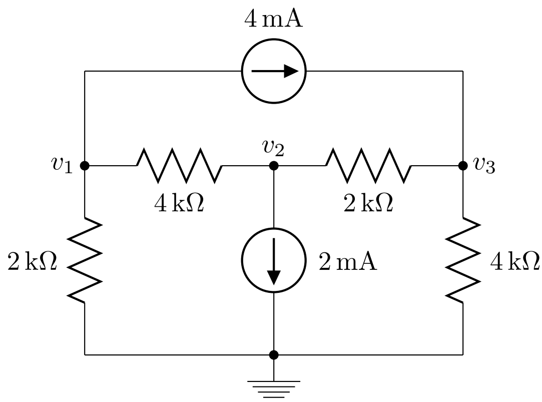
جس میں $\mathbf{G}$ کا قالب تشاکل ہے۔

مشق 3.1: شکل 3.6 میں v_1 اور v_2 پر کرخوف قانون رو کے مساوات لکھتے ہوئے دور کی قالبی مساوات حاصل کریں۔قالبی مساوات حل کرتے ہوئے نا معلوم دباو دریافت کریں۔

جوابات: $v_1 = 1\,\mathrm{V}$ ، $v_2 = -20\,\mathrm{V}$



شکل 3.6: مشق 3.1 کا دور۔



شکل 3.7: مشق 3.2 کا دور۔

مشق 3.2: شکل 3.7 کی قالبی مساوات لکھتے ہوئے نامعلوم دباو حاصل کریں۔

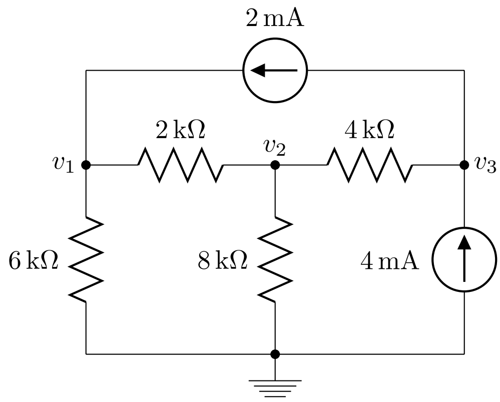
جوابات: $v_1 = -6\,\mathrm{V}$ ، $v_2 = -2\,\mathrm{V}$ ، $v_3 = 4\,\mathrm{V}$

مشق 3.3: شکل 3.8 کی قالبی مساوات لکھتے ہوئے نامعلوم دباو حاصل کریں۔

جوابات: $v_1 = 13.5\,\mathrm{V}$ ، $v_2 = 14\,\mathrm{V}$ ، $v_3 = 22\,\mathrm{V}$

---

current matrix[4]



شکل 3.8: مشق 3.3 کا دور۔

3.3 تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار

گزشتہ حصے میں ہم نے دیکھا کہ غیر تابع منبع رو اور مزاحمتوں کے ادوار سے تشاکل قالب موصلیت حاصل ہوتے ہے۔ شکل 3.9 میں تابع منبع رو استعمال کی گئی ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ اس کا G قالب غیر تشاکل ہو گا۔ اس دور کے تین جوڑوں سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}
-\beta i_0 + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} &= 0\\
\frac{v_2 - v_1}{R_2} - i_A + \frac{v_2 - v_3}{R_4} &= 0\\
\frac{v_3}{R_3} + \beta i_0 + \frac{v_3 - v_2}{R_4} &= 0
\end{aligned} \tag{3.28}$$

جہاں

$$i_0 = \frac{v_1}{R_1} \tag{3.29}$$

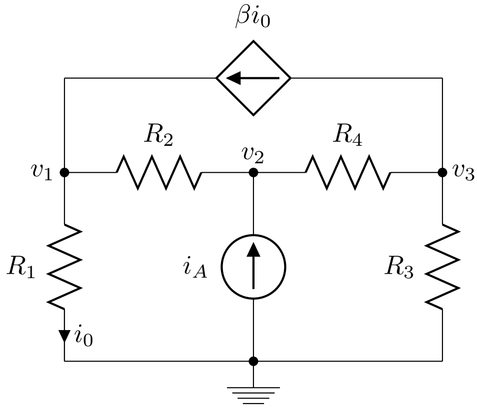
کے برابر ہے۔ مساوات 3.28 میں مساوات 3.29 پُر کرتے اور ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{\beta}{R_1}\right) v_1 - \frac{v_2}{R_2} &= 0\\
-\frac{v_1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) v_2 - \frac{v_3}{R_4} &= i_A\\
\frac{\beta}{R_1} v_1 - \frac{v_2}{R_4} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) v_3 &= 0
\end{aligned} \tag{3.30}$$

جسے قالبی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{\beta}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & 0\\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4}\\ \frac{\beta}{R_1} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ i_A\\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ G قالب غیر تشاکل ہے۔



شکل 3.9: تابع منبع رو سے غیر تشاکل قالب موصلیت حاصل ہوتا ہے۔

مثال 3.3: شکل 3.9 میں تمام جوڑ پر برقی دباو حاصل کریں۔ معلومات درج ذیل ہیں۔

$$R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_2 = 4\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_4 = 2\,\mathrm{k\Omega}, \quad i_A = 10\,\mathrm{mA}, \quad \beta = 4$$

حل: درج بالا معلومات کو مساوات 3.31 میں پُر کرتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2000} + \frac{1}{4000} - \frac{4}{2000} & -\frac{1}{4000} & 0 \\ -\frac{1}{4000} & \frac{1}{4000} + \frac{1}{2000} & -\frac{1}{2000} \\ \frac{\beta}{2000} & -\frac{1}{2000} & \frac{1}{1000} + \frac{1}{2000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اس قالبی مساوات کو حل کرتے ہوئے اور یا تینوں ہمزاد مساوات کو کسی بھی طریقے سے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

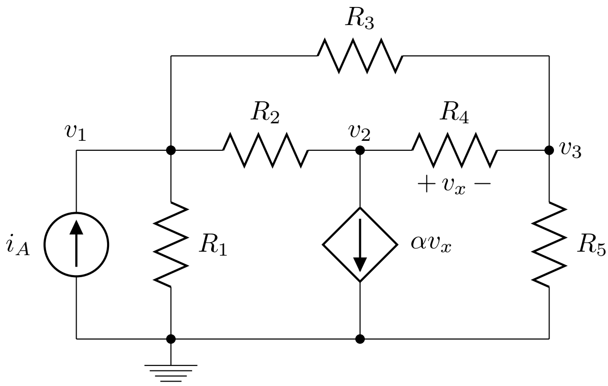
$$\begin{aligned} v_1 &= -4\,\mathrm{V} \\ v_2 &= 20\,\mathrm{V} \\ v_3 &= 12\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

مثال 3.4: شکل 3.10 میں تمام نامعلوم دباو حاصل کریں۔ دیگر معلومات درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} R_1 = 4\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_2 = 8\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_3 = 12\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_4 = 6\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_5 = 2\,\mathrm{k\Omega} \\ i_A = 1\,\mathrm{mA}, \quad \alpha = 0.002 \end{aligned}$$

حل: تمام جوڑ پر خارجی رو تصور کرتے ہوئے مساوات لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} + \frac{v_1 - v_3}{R_3} &= i_A \\ \frac{v_2 - v_1}{R_2} + \alpha v_x + \frac{v_2 - v_3}{R_4} &= 0 \\ \frac{v_3 - v_1}{R_3} + \frac{v_3 - v_2}{R_4} + \frac{v_3}{R_5} &= 0 \end{aligned}$$



شکل 3.10: مثال 3.4 کا دور۔

اس میں $v_x = v_2 - v_3$ پُر کرتے اور مساوات کے اجزاء کو ترتیب دیتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) v_1 - \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_3}{R_3} &= i_A \\
-\frac{v_1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_2} + \alpha + \frac{1}{R_4}\right) v_2 - (\alpha + \frac{1}{R_4}) v_3 &= 0 \\
-\frac{v_1}{R_3} - \frac{v_2}{R_4} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) v_3 &= 0
\end{aligned}
$$

دی گئی معلومات پُر کرتے ہیں

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{4000} + \frac{1}{8000} + \frac{1}{12000}\right) v_1 - \frac{v_2}{8000} - \frac{v_3}{12000} &= 0.001 \\
-\frac{v_1}{8000} + \left(\frac{1}{8000} + 0.002 + \frac{1}{6000}\right) v_2 - (0.002 + \frac{1}{6000}) v_3 &= 0 \\
-\frac{v_1}{12000} - \frac{v_2}{6000} + \left(\frac{1}{12000} + \frac{1}{6000} + \frac{1}{2000}\right) v_3 &= 0
\end{aligned}
$$

تینوں ہمزاد مساواتوں کو 1000 سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\frac{11v_1}{24} - \frac{v_2}{8} - \frac{v_3}{12} &= 1 \\
-\frac{v_1}{8} + \frac{55v_2}{24} - \frac{13v_3}{6} &= 0 \\
-\frac{v_1}{12} - \frac{v_2}{6} + \frac{3v_3}{4} &= 0
\end{aligned}
$$

انہیں حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
v_1 &= 2.38\,\mathrm{V} \\
v_2 &= 0.48\,\mathrm{V} \\
v_3 &= 0.37\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$