

برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	بنیاد	1
1	برقی بار، برقی رو اور برقی دباؤ	1.1
6	قانون اوہم	1.2
8	توانائی اور طاقت	1.3
15	برقی پڑے	1.4
15	غیر تابع منبع	1.4.1
17	تابع منبع	1.4.2
27	مزا جتنی ادوار	2
27	قانون اوہم	2.1
35	قوانین کرخوف	2.2
51	سلسلہ وار جڑے پڑوں میں رو	2.3
52	تقسیم دباؤ	2.4
55	متعدد سلسلہ وار مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت	2.5
58	سلسلہ وار متعدد منبع دباؤ اور مزاحمت	2.6
59	متوازی جڑے مزاحمت پر یکساں دباؤ پایا جاتا ہے	2.7
61	تقسیم رو اور متعدد متوازی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت	2.8
68	سلسلہ وار اور متوازی مزاحمت	2.9
73	تخصیص مزاحمت	2.10
76	سلسلہ وار اور متوازی مزاحمتوں کے ادوار کا حل	2.11
84	ستارہ-تکون تبادلہ	2.12
91	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	2.13
101	ترکیب جوڑ اور دائری ترکیب	3
101	تجزیہ جوڑ	3.1
104	غیر تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار	3.2
117	تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار	3.3
123	غیر تابع منبع دباؤ استعمال کرنے والے ادوار	3.4

132	تابع منبع دباو استعمال کرنے والے ادوار	3.5
139	دائری تجزیہ	3.6
140	غیر تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	3.7
148	غیر تابع منبع رواستعمال کرنے والے ادوار	3.8
154	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	3.9
158	دائری ترکیب اور ترکیب جوڑ کا موازنہ	3.10

161	حسابی ایپلیفائر	4
171	کامل حسابی ایپلیفائر	4.1
171	منفی ایپلیفائر	4.2
174	مثبت ایپلیفائر	4.3
176	مستقام کار	4.4
176	منفی کار	4.5
178	جمع کار	4.6
181	متوازن اور غیر متوازن صورت	4.7
185	موازنہ کار	4.8
185	آلاتی ایپلیفائر	4.9

187	مسئلے	5
187	مساوی دور	5.1
187	مسئلہ خطیت	5.2
191	مسئلہ نفاذ	5.3
201	مساوی ادوار	5.4
206	مسئلہ تھون، مسئلہ نارٹن اور مسئلہ متبادلہ منبع	5.5
225	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	5.6
231	تابع منبع اور غیر تابع منبع دونوں استعمال کرنے والے ادوار	5.7
239	زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ	5.8

247	برق گیر اور امالہ گیر	6
247	برق گیر	6.1
261	امالہ گیر	6.2
270	برق گیر اور امالہ گیر کے خصوصیات	6.3
273	سلسلہ وار جڑے برق گیر	6.4
277	متوازی جڑے برق گیر	6.5
281	سلسلہ وار امالہ گیر	6.6
283	متوازی امالہ گیر	6.7
287	حسابی ایپلیفائر کے RC ادوار	6.8
288	تفرق کار	6.9

293	عارضی رد عمل	7
293	تعارف	7.1
293	ایک درجی ادوار	7.2

295	7.2.1 رد عمل کی عمومی مساوات	
321	7.3 دھڑکن	
328	7.4 دو درجی ادوار	
359	8 برقرار حالت بدلتی رو	
359	8.1 مخلوط اعداد	
364	8.2 سائن نمائندگی	
373	8.3 سائن نماد اور مخلوط جبری تفاعل	
381	8.4 دوری سمتیہ	
386	8.5 مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر کے انفرادی دوری سمتیہ تعلق	
396	8.6 برقی رکاوٹ اور برقی فراوانی	
409	8.7 دوری سمتیہ کے اشکال	
419	8.8 کرخوف مساوات	
424	8.9 تجزیاتی تراکیب	
443	9 برقرار برقی طاقت	
443	9.1 لمبائی طاقت	
446	9.2 اوسط طاقت	
453	9.3 زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ	
463	9.4 موثر قیمت	
472	9.5 جزو طاقت	
473	9.6 مخلوط طاقت	

باب 9

برقرار برقی طاقت

9.1 لمحاتی طاقت

شکل 9.1 میں بوجھ Z کو بدلتی رو منبع طاقت فراہم کرتا ہے۔ اس عمومی دور کے برقرار دباؤ اور برقرار رو درج ذیل لکھے جاسکتے ہیں۔

$$(9.1) \quad \begin{aligned} v(t) &= V_0 \cos(\omega t + \phi_v) \\ i(t) &= I_0 \cos(\omega t + \phi_i) \end{aligned}$$

یوں کسی بھی لمحہ بوجھ کو منتقل طاقت درج ذیل ہوگا

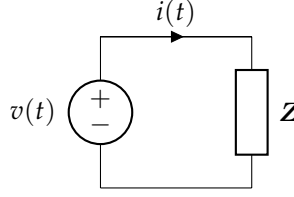
$$(9.2) \quad \begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) \\ &= V_0 I_0 \cos(\omega t + \phi_v) \cos(\omega t + \phi_i) \end{aligned}$$

جس میں

$$(9.3) \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

استعمال کرتے ہوئے

$$(9.4) \quad p(t) = \frac{V_0 I_0}{2} [\cos(\phi_v - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)]$$



شکل 9.1: بدلتی رو دور۔

ملتا ہے جہاں $\alpha = \omega t + \phi_v$ اور $\beta = \omega t + \phi_i$ لئے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لحاتی طاقت دو اجزاء کا مجموعہ ہے۔ پہلا جزو مستقل طاقت ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتا جبکہ دوسرا جزو دگنی تعدد کا بدلتی رو طاقت ہے۔

مثال 9.1: شکل 9.1 میں برقرار دباؤ $v(t) = 15 \cos(100t + 45^\circ) \text{ V}$ اور $Z = 5/20^\circ \Omega$ ہیں۔ بوجھ کو منتقل لحاتی طاقت دریافت کریں۔

حل: دوری سمتیات استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \frac{15/45^\circ}{5/20^\circ} \\ &= 3/25^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

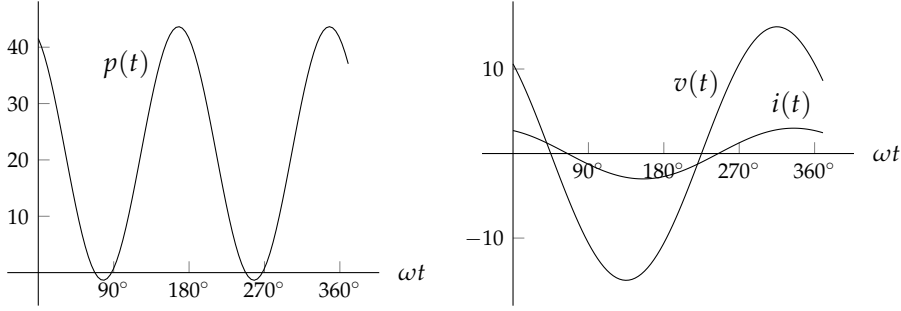
یعنی

$$i(t) = 3 \cos(100t + 25^\circ) \text{ A}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں مساوات 9.4 سے لحاتی طاقت درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$\begin{aligned} p(t) &= 22.5 [\cos 20^\circ + \cos(200t + 70^\circ)] \\ &= 21.143 + 22.5 \cos(200t + 70^\circ) \text{ W} \end{aligned}$$

دباؤ، رو اور طاقت کے خط شکل 9.2 میں دکھائے گئے ہیں۔ درج بالا مساوات میں 21.143 W مستقل طاقت ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتا جبکہ $22.5 \cos(200t + 70^\circ) \text{ W}$ بدلتی رو طاقت ہے جس کی تعدد 200 rad s^{-1} ہے۔



شکل 9.2: مثال 9.1 کے اشکال۔

مثال 9.2: شکل 9.1 میں $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi_v)$ V اور $Z = Z_0 / \phi_z \Omega$ ہیں۔ رو دریافت کریں۔

حل: دوری سمتیات استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \hat{i} &= \frac{V_0 / \phi_v}{Z_0 / \phi_z} \\ &= \frac{V_0}{Z_0} / \phi_v - \phi_z \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جس سے وقتی دائرہ کار میں رو درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$(9.5) \quad i(t) = \frac{V_0}{Z_0} \cos(\omega t + \phi_v - \phi_z)$$

مساوات 9.1 میں دیے عمومی رو کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ϕ_i درحقیقت میں $\phi_v - \phi_z$ کے برابر ہے جسے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(9.6) \quad \phi_v - \phi_i = \phi_z$$

9.2 اوسط طاقت

دہراتے تفاعل (مثلاً سائن نما تفاعل) کے ایک دوری عرصے پر مکمل کو دوری عرصے سے تقسیم کرنے سے تفاعل کی اوسط قیمت حاصل ہوتی ہے۔ یوں مساوات 9.1 میں دیے دباو اور رو کی صورت میں بوجھ کو منتقل اوسط طاقت درج ذیل ہوگی

$$(9.7) \quad P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt$$

$$= \frac{V_0 I_0}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(\omega t + \phi_v) \cos(\omega t + \phi_i) dt$$

جہاں t_0 کوئی بھی لمحہ ہو سکتا ہے جبکہ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ دباو یا رو کا دوری عرصہ ہے۔ حقیقت میں ہم ایک دوری عرصے کی بجائے n مکمل دوری عرصے پر مکمل لیتے ہوئے n دوری عرصے سے تقسیم کرتے ہوئے بھی اوسط قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔ یوں اوسط طاقت درج ذیل بھی لکھی جاسکتی ہے۔

$$(9.8) \quad P = \frac{V_0 I_0}{nT} \int_{t_0}^{t_0+nT} \cos(\omega t + \phi_v) \cos(\omega t + \phi_i) dt$$

مساوات 9.4 کی مدد سے مساوات 9.7 درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(9.9) \quad P = \frac{V_0 I_0}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} [\cos(\phi_v - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)] dt$$

$$= \frac{V_0 I_0}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(\phi_v - \phi_i) dt + \frac{V_0 I_0}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) dt$$

درج بالا مکمل کے دو اجزاء کو باری باری حل کرتے ہیں۔ پہلا جزو مستقل ہے لہذا اس کو مکمل کے باہر لکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \frac{V_0 I_0}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(\phi_v - \phi_i) dt &= \frac{V_0 I_0}{2T} \cos(\phi_v - \phi_i) \int_{t_0}^{t_0+T} dt \\ &= \frac{V_0 I_0}{2T} \cos(\phi_v - \phi_i) t \Big|_{t_0}^{t_0+T} \\ &= \frac{V_0 I_0}{2} \cos(\phi_v - \phi_i) \end{aligned}$$

اب مساوات 9.9 کے دوسرے جزو کو حل کرتے ہیں

$$\begin{aligned} \frac{V_0 I_0}{2T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i) dt &= \frac{V_0 I_0}{2T} \frac{\sin(2\omega t + \phi_v + \phi_i)}{2\omega} \Big|_{t_0}^{t_0+T} \\ &= 0 \end{aligned}$$

جہاں $\sin \alpha = \sin(\alpha + T)$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ یوں مساوات 9.9 سے درج ذیل اوسط طاقت حاصل ہوتا ہے۔

$$(9.10) \quad P = \frac{V_0 I_0}{2} \cos(\phi_v - \phi_i)$$

چونکہ $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ کے برابر ہے لہذا درج بالا مساوات میں کوسائن کا دلیل $\phi_i - \phi_v$ یا $\phi_v - \phi_i$ لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 9.6 کو استعمال کرتے ہوئے درج بالا مساوات کو دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$(9.11) \quad P = \frac{V_0 I_0}{2} \cos \phi_z$$

خالص مزاحمتی رکاوٹ $Z = R/0^\circ$ کا زاویہ ہٹاؤ 0° ہوتا ہے لہذا $\cos 0^\circ = 1$ لیتے ہوئے مزاحمتی بوجھ کا طاقت

$$(9.12) \quad P_{\text{مزاحمتی}} = \frac{V_0 I_0}{2}$$

ہوگا جہاں V_0 سے مراد مزاحمت کے دباؤ کا جیٹہ ہے۔ قانون اوہم سے درج بالا کو درج ذیل صورتوں میں بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$(9.13) \quad P_{\text{مزاحمتی}} = \frac{I_0^2 R}{2}$$

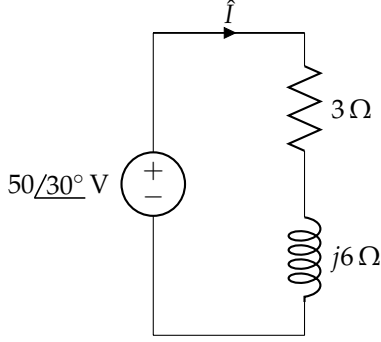
$$(9.14) \quad P_{\text{مزاحمتی}} = \frac{V_0^2}{2R}$$

درج بالا تینوں مساوات کا ایک سمتی رو میں مزاحمتی ضیاع کے مساوات کے ساتھ موازنہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ موجودہ تینوں مساوات کے نسب نما میں دو (2) کا اضافی عدد پایا جاتا ہے جس پر حصہ 9.4 میں تبصرہ کیا جائے گا۔

امالی متعاملیت کی رکاوٹ $Z_L = X_L/90^\circ$ جبکہ برق گیر متعاملیت کی رکاوٹ $Z_C = X_C/-90^\circ$ ہوتی ہے۔ چونکہ $\cos(\pm 90^\circ) = 0$ ہوتا ہے لہذا غیر مزاحمتی رکاوٹ کی طاقت صفر ہوگی۔

$$(9.15) \quad P_{\text{متغالی}} = 0$$

چونکہ خالص متعامل پرزوں کو صفر اوسط طاقت منتقل ہوتی ہے لہذا انہیں بے ضیاع پوزے¹ کہتے ہیں۔ دور کا متعامل حصہ، دوری عرصے کے کچھ حصے میں دور سے طاقت حاصل کرتے ہوئے ذخیرہ کرتا ہے جبکہ دوری عرصے کے کسی دوسرے حصے میں اسی طاقت کو دور کو واپس کرتا ہے۔



شکل 9.3: مثال 9.3 کا دور۔

مثال 9.3: شکل 9.3 میں رکاوٹ کی اوسط طاقت دریافت کریں۔

حل: رو درج ذیل ہے۔

$$\hat{I} = \frac{50\angle 30^\circ}{3 + j6} = \frac{50\angle 30^\circ}{\sqrt{45}\angle 63.435^\circ} = 7.454\angle -33.435^\circ \text{ A}$$

یوں

$$\begin{aligned} P &= \frac{V_0 I_0}{2} \cos(\phi_v - \phi_i) \\ &= \frac{(50)(7.454)}{2} \cos[30^\circ - (-33.435^\circ)] \\ &= 83.34 \text{ W} \end{aligned}$$

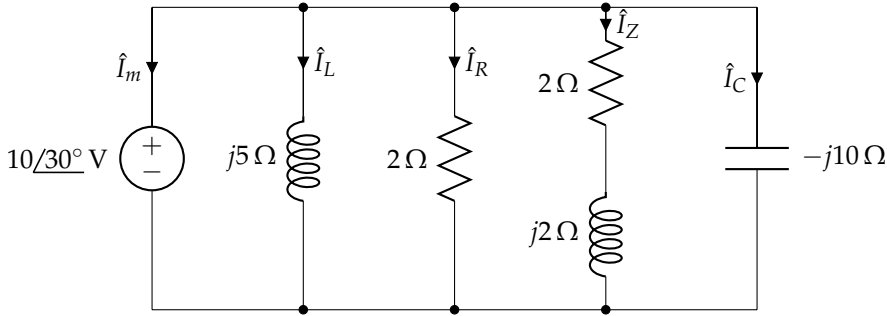
ہوگا۔ چونکہ طاقت صرف مزاحمت میں ضائع ہوتی ہے لہذا یہی جواب مساوات 9.12 سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے جہاں V_0 سے مراد مزاحمت کے دباؤ کا جیٹہ ہے۔ تقسیم دباؤ سے مزاحمت کا دباؤ درج ذیل ہے

$$\hat{V}_R = \left(\frac{3}{3 + j6} \right) 50\angle 30^\circ = 22.361\angle -33.435^\circ$$

جس سے مزاحمت کا اوسط طاقت درج ذیل ہوگا۔

$$P = \frac{V_0 I_0}{2} = \frac{(22.361)(7.454)}{2} = 83.34 \text{ W}$$

lossless components¹



شکل 9.4: مثال 9.4 کا دور۔

اسی طرح مساوات 9.13 اور مساوات 9.14 بھی استعمال کیے جاسکتے ہیں

$$P = \frac{I_0^2 R}{2} = \frac{(7.454^2)(3)}{2} = 83.34 \text{ W}$$

$$P = \frac{V_0^2}{2R} = \frac{(22.361^2)}{(2)(3)} = 83.34 \text{ W}$$

مثال 9.4: شکل 9.4 میں منبع دباؤ کا اوسط طاقت حاصل کریں۔ دور کے بقایا پرزوں کا اوسط طاقت بھی دریافت کریں۔

حل: پہلے تمام رو دریافت کرتے ہیں۔ شکل میں دباؤ کو دیکھتے ہوئے انفعالی رانج رو کے تحت رو کی سمتیں چننی گئی ہیں۔

$$\hat{I}_L = \frac{10\angle 30^\circ}{j5} = \frac{10\angle 30^\circ}{5\angle 90^\circ} = 2\angle -60^\circ$$

$$\hat{I}_R = \frac{10\angle 30^\circ}{2} = \frac{10\angle 30^\circ}{2\angle 0^\circ} = 5\angle 30^\circ$$

$$\hat{I}_Z = \frac{10\angle 30^\circ}{2 + j2} = \frac{10\angle 30^\circ}{\sqrt{8}\angle 45^\circ} = \frac{5}{\sqrt{2}}\angle -15^\circ$$

$$\hat{I}_C = \frac{10\angle 30^\circ}{-j10} = \frac{10\angle 30^\circ}{10\angle -90^\circ} = 1\angle 120^\circ$$

$$\hat{I}_m = -[\hat{I}_L + \hat{I}_R + \hat{I}_Z + \hat{I}_C] = 8.27647\angle -175.01689^\circ$$

یوں انفرادی شاخوں کے اوسط طاقت مساوات 9.10 یا مساوات 9.11 سے درج ذیل ہوں گے۔

$$P_L = \frac{(30)(2)}{2} \cos(90^\circ) = 0 \text{ W}$$

$$P_R = \frac{(30)(5)}{2} \cos(0^\circ) = 75 \text{ W}$$

$$P_Z = \frac{(30)(\frac{5}{\sqrt{2}})}{2} \cos(45^\circ) = 37.5 \text{ W}$$

$$P_C = \frac{(30)(1)}{2} \cos(90^\circ) = 0 \text{ W}$$

$$P_m = \frac{(30)(8.27647)}{2} \cos[(30^\circ + 175.01689^\circ)] = -112.5 \text{ W}$$

مثبت جواب طاقت کا ضیاع ہے جبکہ منفی جواب طاقت کی پیداوار ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ منبع کی طاقتی پیداوار 112.5 W ہے جو دور میں طاقت کے ضیاع

$$P_L + P_R + P_Z + P_C = 0 + 75 + 37.5 + 0 = 112.5 \text{ W}$$

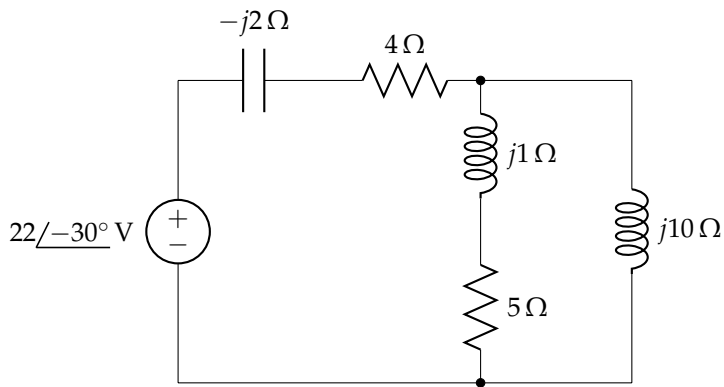
کے عین برابر ہے۔

مشق 9.1: شکل 9.5 کے تمام مزاحمتوں میں ضائع ہونے والا اوسط طاقت دریافت کریں۔

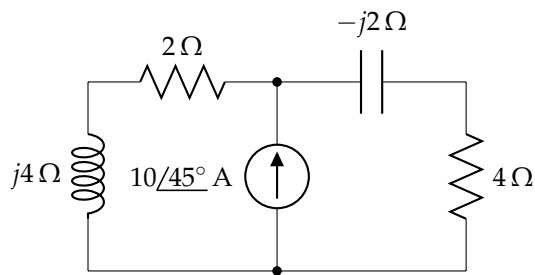
$$P_{5\Omega} = 14.975 \text{ W} , P_{4\Omega} = 17.491 \text{ W}$$

مشق 9.2: شکل 9.6 کے تمام مزاحمتوں میں ضائع ہونے والا اوسط طاقت دریافت کریں۔

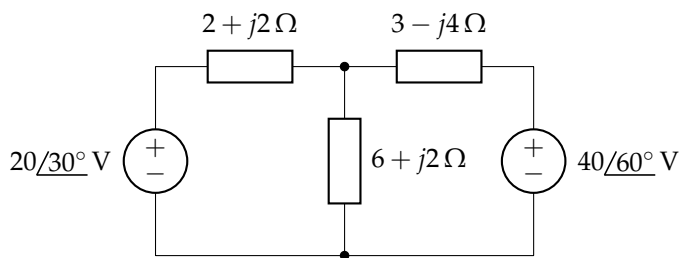
$$P_{4\Omega} = 100 \text{ W} , P_{2\Omega} = 50 \text{ W}$$



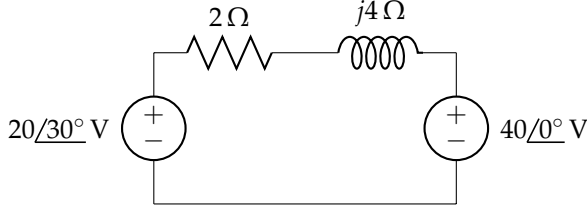
شکل 9.5: مشق 9.1 کا دور۔



شکل 9.6: مشق 9.2 کا دور۔



شکل 9.7: مشق 9.3 کا دور۔



شکل 9.8: مشق 9.4 کا دور۔

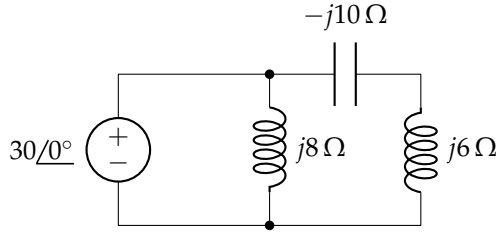
مشق 9.3: شکل 9.7 کے تمام مزاحمتوں میں ضائع ہونے والا اوسط طاقت دریافت کریں۔

جوابات: $P_{6\Omega} = 11.42 \text{ W}$ ، $P_{3\Omega} = 5.71 \text{ W}$ ، $P_{2\Omega} = 22.72 \text{ W}$

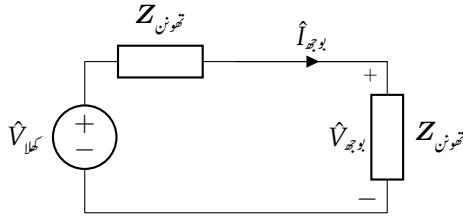
ایک سے زیادہ منبع کی صورت میں آپ کسی بھی ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے شاخوں کی رواں جوڑ کے دباؤ حاصل کرتے ہوئے طاقت دریافت کر سکتے ہیں۔ البتہ یاد رہے کہ ترکیب نفاذ سے طاقت کا تخمینہ نہیں لگایا جاسکتا چونکہ طاقت مربع دباؤ (یا مربع رواں) کا تعلق رکھتا ہے جو غیر خطی تعلق ہے۔

مشق 9.4: شکل 9.8 میں اوسط طاقت کی پیداوار اور ضیاع معلوم کریں۔

$P_{2\Omega} = 30.72 \text{ W}$ ، $P_{40\angle 0^\circ} = -5.36 \text{ W}$ ، $P_{20\angle 30^\circ} = -25.36 \text{ W}$



شکل 9.9: مشق 9.5 کا دور۔



شکل 9.10: زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ۔

مشق 9.5: شکل 9.9 میں اوسط طاقت کی پیداوار اور ضیاع معلوم کریں۔

جواب: اوسط طاقت کی پیداوار اور طاقت کا ضیاع صفر واٹ ہیں۔

9.3 زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ

یک سمتی روادوار میں ہم زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرنے کے مسئلے پر ہم حصہ 5.8 میں غور کر چکے ہیں۔ آپس بدلتی رو کی صورت میں اسی مسئلے پر دوبارہ غور کریں۔

کسی بھی دور کا تھون مساوی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ شکل 9.10 میں تھون مساوی دور کے ساتھ بوجھ جوڑا گیا ہے جہاں تھون دباؤ کو V_{kha} کہا گیا ہے۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ بوجھ کو کس صورت میں زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل ہوگا۔

شکل کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(9.16) \quad \hat{I}_{\text{بوجھ}} = \frac{\hat{V}_{\text{کھلا}}}{Z_{\text{تھون}} + Z_{\text{بوجھ}}}$$

جہاں

$$Z_{\text{تھون}} = R_{\text{تھون}} + jX_{\text{تھون}}$$

$$Z_{\text{بوجھ}} = R_{\text{بوجھ}} + jX_{\text{بوجھ}}$$

$$\hat{V}_{\text{کھلا}} = V_{\text{کھلا}} / \phi_{\text{کھلا}}$$

ہیں۔ درج بالا میں امالی رکاوٹ کی صورت میں X کی قیمت مثبت ہوگی جبکہ برق گیر رکاوٹ کی صورت میں اس کی قیمت منفی ہوگی۔ یوں مساوات 9.16 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\hat{I}_{\text{بوجھ}} = \frac{V_{\text{کھلا}} / \phi_{\text{کھلا}}}{R_{\text{تھون}} + jX_{\text{تھون}} + R_{\text{بوجھ}} + jX_{\text{بوجھ}}}$$

جس کی حتمی قیمت درج ذیل ہے۔

$$I_{\text{بوجھ}} = \frac{V_{\text{کھلا}}}{\sqrt{(R_{\text{تھون}} + R_{\text{بوجھ}})^2 + (X_{\text{تھون}} + X_{\text{بوجھ}})^2}}$$

بوجھ کو منتقل اوسط طاقت مساوات 9.13 کی مدد سے لکھتے ہیں۔

$$(9.17) \quad P_{\text{بوجھ}} = \frac{1}{2} I_{\text{بوجھ}}^2 R_{\text{بوجھ}} \\ = \frac{\frac{1}{2} V_{\text{کھلا}}^2 R_{\text{بوجھ}}}{(R_{\text{تھون}} + R_{\text{بوجھ}})^2 + (X_{\text{تھون}} + X_{\text{بوجھ}})^2}$$

ہم جانتے ہیں کہ X میں طاقت ضائع نہیں ہوتا لہذا اس کو اوسطاً صفر طاقت منتقل ہوتا ہے۔ درج بالا مساوات میں کسر کے نسب نما میں $X_{\text{تھون}} + X_{\text{بوجھ}}$ کی قیمت کم سے کم کرتے ہوئے طاقت بڑھائی جاسکتی ہے۔ درج ذیل صورت میں اس قیمت کو صفر بنایا جاسکتا ہے۔

$$(9.18) \quad X_{\text{بوجھ}} = -X_{\text{تھون}} \quad \text{بوجھ کو زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کا پہلا شرط}$$

مساوات 9.18 کے شرط پر پورا اترتے ہوئے مساوات 9.17 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(9.19) \quad P_{\text{بوجھ}} = \frac{V_{\text{کھلا}}^2 R_{\text{بوجھ}}}{2(R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}})^2}$$

آئیں جانتے ہیں کہ کس قیمت کے بوجھ R کو زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہوگی۔ یہ جاننے کے لئے درج بالا مساوات کے تفرق کو صفر کے برابر پڑھ کر دئے بوجھ R کی درکار قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{dP_{\text{بوجھ}}}{dR_{\text{بوجھ}}} = \frac{V_{\text{کھلا}}^2 (R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}})^2 - 2V_{\text{کھلا}}^2 R_{\text{بوجھ}} (R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}})}{2(R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}})^4} = 0$$

اس سے

$$(9.20) \quad R_{\text{بوجھ}} = R_{\text{تھونن}} \quad \text{بوجھ کو زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کا دوسرا شرط}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس نتیجے کے تحت بوجھ کو اس صورت زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہوگی جب بوجھ کی مزاحمت دور کے تھونن مزاحمت کے برابر ہو۔ مساوات 9.18 اور مساوات 9.20 کو استعمال کرتے ہوئے، بوجھ کو زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہونے کی شرط کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(9.21) \quad R_{\text{بوجھ}} + jX_{\text{بوجھ}} = R_{\text{تھونن}} - jX_{\text{تھونن}}$$

$$Z_{\text{بوجھ}} = Z_{\text{تھونن}}^*$$

مساوات 9.21 کی صورت میں زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت درج ذیل حاصل ہوگی۔

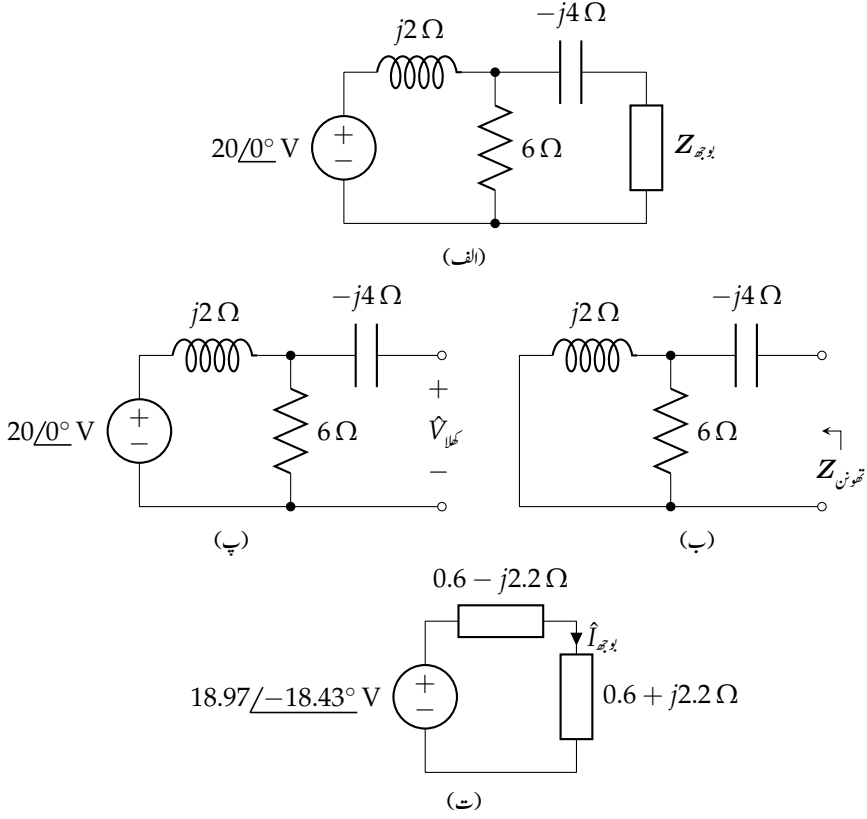
$$(9.22) \quad P_{\text{بلند تر}} = \frac{V_{\text{کھلا}}^2}{8R_{\text{بوجھ}}}$$

آخر میں یہ بھی بتلاتا چلوں کہ مزاحمتی بوجھ ($X_L = 0$) کی صورت میں مساوات 9.17 کے تفرق کو صفر

$$\frac{dP_{\text{بوجھ}}}{dR_{\text{بوجھ}}} = 0$$

کے برابر پڑھ کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(9.23) \quad R_{\text{بوجھ}} = \sqrt{R_{\text{تھونن}}^2 + X_{\text{تھونن}}^2}$$



شکل 9.11: مثال 9.5 کا دور۔

مثال 9.5: شکل 9.11 میں بوجھ کے رکاوٹ کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر بوجھ کو زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہو گا۔ اس طاقت کی قیمت بھی دریافت کریں۔

حل: سب سے پہلے بوجھ کو ہٹاتے ہوئے بقایا دور کا تھون مساوی حاصل کرنا ہو گا۔ شکل-ب میں منبع دباؤ کو قصر دور کیا گیا ہے تاکہ تھون مزاحمت حاصل کی جاسکے۔ اسی طرح شکل-پ میں کھلے دور دباؤ کی نشاندہی کی گئی ہے۔ شکل-ب تھون

رکاوٹ لکھتے ہیں۔

$$Z_{\text{تھون}} = -j4 + \frac{(6)(j2)}{6 + j2} = \frac{3}{5} - j\frac{11}{5} \Omega$$

یوں بوجھ کو زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کے لئے ضروری ہے کہ بوجھ کی رکاوٹ درج ذیل ہو۔

$$Z_{\text{بوجھ}} = \frac{3}{5} + j\frac{11}{5} \Omega$$

شکل-پ میں برق گیر میں صفر رو ہے لہذا اس پر دباؤ بھی صفر ہوگا۔ اس طرح مزاحمت پر دباؤ ہی تھون دباؤ ہے جسے تقسیم دباؤ کے کلیے سے لکھتے ہیں۔

$$\hat{V}_{\text{کھلا}} = \left(\frac{6}{6 + j2} \right) (20\angle 0^\circ) = 18.97\angle -18.43^\circ \text{ V}$$

شکل-ت میں تھون مساوی دور کو بوجھ کے ساتھ جوڑ کر دکھایا گیا ہے جہاں سے رو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \hat{I}_{\text{بوجھ}} &= \frac{18.97\angle -18.43^\circ}{\frac{3}{5} - j\frac{11}{5} + \frac{3}{5} + j\frac{11}{5}} \\ &= 15.81\angle -18.43^\circ \text{ A} \end{aligned}$$

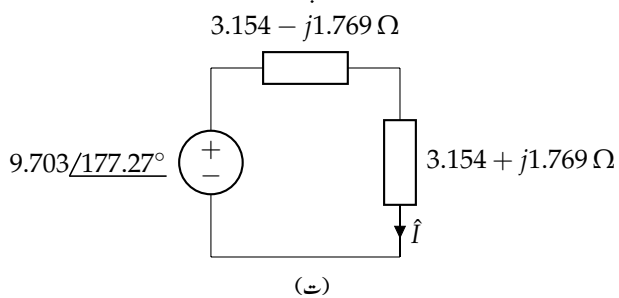
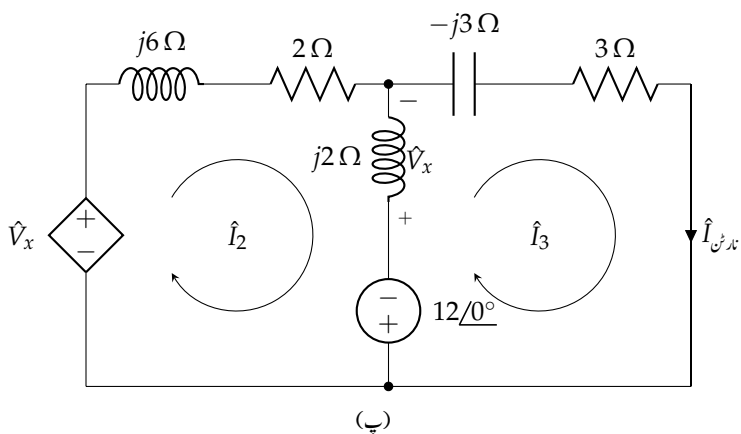
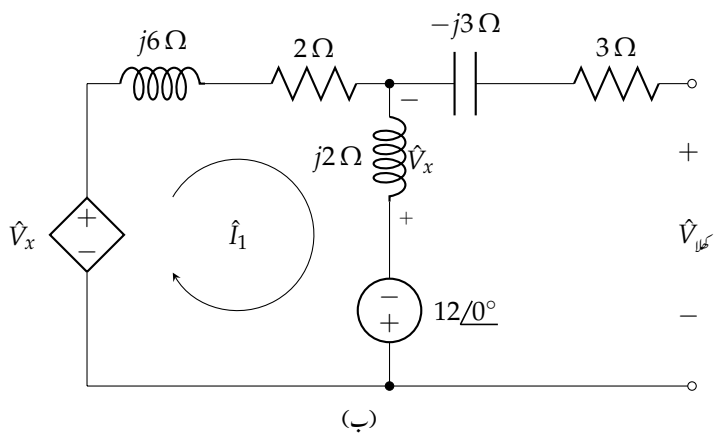
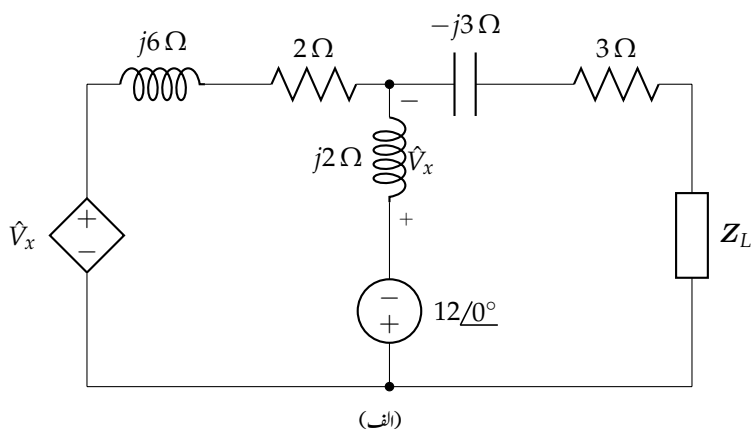
یوں بوجھ کو منتقل اوسط طاقت درج ذیل ہوگا۔

$$P_{\text{بوجھ}} = \frac{(15.81^2)(0.6)}{2} = 74.99 \text{ W}$$

مثال 9.6: شکل 9.12 میں بوجھ کے رکاوٹ Z_L کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر اس کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل ہوگا۔ اس طاقت کو تخمینہ بھی لگائیں۔

حل: بوجھ کے ساتھ جڑے دور کا تھون مساوی حاصل کرتے ہیں۔ شکل-ب سے نارٹن دباؤ $\hat{V}_{\text{کھلا}}$ حاصل ہوگا۔ شکل-ب کے بائیں دائرے کی مساوات لکھتے ہیں

$$\hat{V}_x + 12\angle 0^\circ = \hat{I}_1(j6 + 2 + j2)$$



جہاں

$$\hat{V}_x = -j2\hat{I}_1$$

کے برابر ہے۔ درج بالا دو مساوات کو حل کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_1 &= \frac{12/0^\circ}{2 + j10} \\ &= \frac{3}{13} - j\frac{15}{13} \\ &= 1.17669/\underline{-78.69^\circ} \text{ A}\end{aligned}$$

یوں تھون دباو درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\hat{V}_{\text{کھلا}} &= (j2)(\hat{I}_1) - 12/0^\circ \\ &= 9.703/\underline{177.27^\circ} \text{ V}\end{aligned}$$

شکل-پ سے نارٹن رو دریافت کرتے ہیں۔ دونوں دائروں کے کرخوف مساوات اور \hat{V}_x کی مساوات لکھتے ہیں

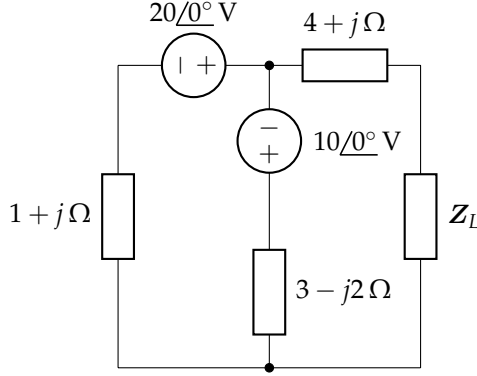
$$\begin{aligned}\hat{V}_x + 12 &= \hat{I}_2(j6 + 2 + j2) - \hat{I}_3(j2) \\ 12 + \hat{I}_3(j2 - j3 + 3) - \hat{I}_2(j2) &= 0 \\ \hat{V}_x &= (\hat{I}_3 - \hat{I}_2)(j2)\end{aligned}$$

درج بالا تین ہمزاد مساوات کو \hat{I}_3 کے لئے حل کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_3 = \hat{I}_{\text{نارٹن}} &= -\frac{12}{5} - j\frac{6}{5} \\ &= 2.683/\underline{-153.435^\circ} \text{ A}\end{aligned}$$

تھون دباو اور نارٹن رو سے تھون رکاوٹ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}Z_{\text{تھون}} &= \frac{\hat{V}_{\text{کھلا}}}{\hat{I}_{\text{نارٹن}}} \\ &= \frac{9.703/\underline{177.27^\circ}}{2.683/\underline{-153.435^\circ}} \\ &= 3.616/\underline{-29.291^\circ} \\ &= 3.154 - j1.769 \Omega\end{aligned}$$



شکل 9.13: مشق 9.6 کا دور۔

بوجھ کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنے کی خاطر بوجھ کے رکاوٹ کی درکار قیمت $Z_{بوجھ} = 3.154 + j1.769 \Omega$ ہے۔ شکل-ت میں تھوئن دور کے ساتھ بوجھ جڑا ہوا دکھایا گیا ہے جہاں سے بوجھ کی رو حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{I} = \frac{9.703/177.27^\circ}{3.154 - j1.769 + 3.154 + j1.769}$$

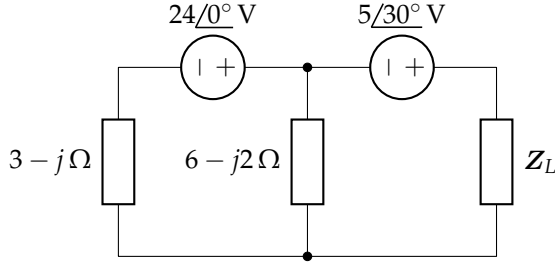
$$= 1.538/177.27^\circ \text{ A}$$

یوں بوجھ کو درج ذیل اوسط طاقت منتقل ہو گا۔

$$P_{بندتر} = \frac{(1.538^2)(3.154)}{2} = 3.73 \text{ W}$$

مشق 9.6: شکل 9.13 میں بوجھ Z_L کے رکاوٹ کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر بوجھ کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ منتقل اوسط طاقت کی قیمت بھی دریافت کریں۔

جوابات: $Z_L = 5.1 - j1.53 \Omega$ ، 7.18 W



شکل 9.14: مشق 9.7 کا دور۔

مشق 9.7: شکل 9.14 میں بوجھ Z_L کے رکاوٹ کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر بوجھ کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ منتقل اوسط طاقت کی قیمت بھی دریافت کریں۔

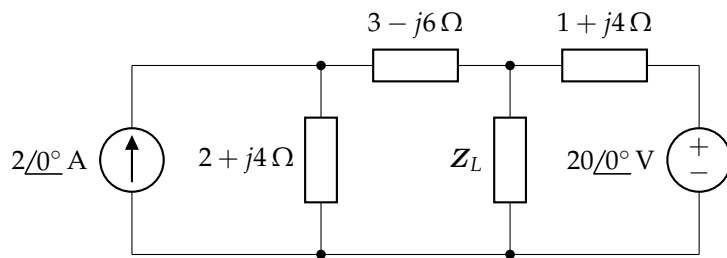
جوابات: $Z_L = 2 + j\frac{2}{3} \Omega$ ، 26.2 W

مشق 9.8: شکل 9.15 میں بوجھ Z_L کے رکاوٹ کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر بوجھ کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ منتقل اوسط طاقت کی قیمت بھی دریافت کریں۔

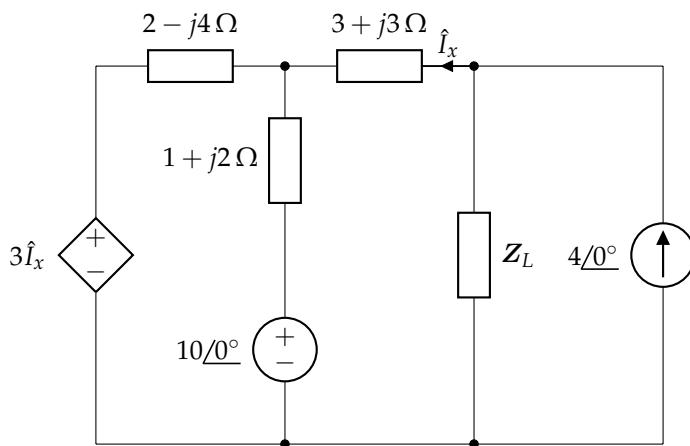
جوابات: $Z_L = 2.85 - j2.05 \Omega$ ، 5.96 W

مشق 9.9: شکل 9.16 میں بوجھ Z_L کے رکاوٹ کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر بوجھ کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ منتقل اوسط طاقت کی قیمت بھی دریافت کریں۔

جوابات: $Z_L = 5.077j6.385 \Omega$ ، 33.03 W



شکل 9.15: مشق 9.8 کا دور



شکل 9.16: مشق 9.9 کا دور

9.4 موثر قیمت

یک سمتی روادوار پر ہم تفصیلاً غور کر چکے ہیں جہاں ہم نے دیکھا کہ مزاحمت R میں ایک سمتی رو I کے گزرنے سے مزاحمت میں $I^2 R$ طاقت کا ضیاع ہوتا ہے۔ ایک سمتی رو کی مقدار تبدیل نہیں ہوتی لہذا مزاحمت کو ہر لمحہ برقرار $I^2 R$ طاقت فراہم ہوتا ہے۔ غیر تغیر طاقت کا اوسط بھی $I^2 R$ ہو گا۔ اس کے برعکس سائن نما رو کی صورت میں مزاحمت کو منتقل طاقت لمحہ بالمحہ تبدیل ہوتا ہے۔ یوں $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ A کی صورت میں لمحہ $t = 0$ پر مزاحمتی طاقت زیادہ سے زیادہ ہو گا جبکہ $t = \frac{\pi}{2\omega}$ پر مزاحمتی طاقت صفر کے برابر ہو گا۔ اسی اتار چڑھاؤ کی وجہ سے سائن نما رو کی صورت میں مزاحمت کو منتقل اوسط طاقت $\frac{I_0^2 R}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔ یوں I_0 حیطے کی سائن نما رو مزاحمت کو $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ قیمت کے ایک سمتی رو برابر طاقت فراہم کرتا ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ I_0 حیطے کی سائن نما رو کی موثر قیمت $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ ہے۔ اسی طرح کسی بھی شکل کی دہراتی ہوئی رو کی موثر قیمت I سے مراد وہ ایک سمتی رو ہے جو مزاحمت کو اس دہراتی ہوئی رو کے طاقت کے برابر طاقت منتقل کرتی ہو۔

ہم جانتے ہیں کہ رو $i(t)$ مزاحمت R کو $i^2(t)R$ لحاتی طاقت منتقل کرتی ہے۔ اگر اس رو کا دوری عرصہ T ہو تب مزاحمت کو اوسطاً

$$(9.24) \quad P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) R dt$$

طاقت منتقل ہو گا۔ ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ موثر I ایک سمتی رو اسی مزاحمت کو درج ذیل طاقت منتقل کرتی ہے۔

$$(9.25) \quad P = I_{\text{موثر}}^2 R$$

اگر مزاحمت کو دونوں رو ایک برابر طاقت منتقل کرتی ہوں تب درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$I_{\text{موثر}}^2 R = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) R dt$$

جس سے

$$(9.26) \quad I_{\text{موثر}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) dt}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 9.26 موثر رو I کی تعریف ہے۔

موثر دباؤ کو بھی اسی طرح حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مزاحمت R کے متوازی دباؤ $v(t)$ نسب کرنے سے مزاحمت کو لمحاتی طور پر $\frac{v^2(t)}{R}$ طاقت منتقل ہو گا۔ اگر دباؤ کا دوری عرصہ T ہو تب مزاحمت کو اوسطاً

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{v^2(t)}{R} dt \quad (9.27)$$

طاقت منتقل ہو گا۔ اسی مزاحمت کو یک سمتی دباؤ $V_{\text{موثر}}$ اوسطاً درج ذیل طاقت فراہم کرتا ہے۔

$$P = \frac{V_{\text{موثر}}^2}{R} \quad (9.28)$$

دونوں طاقت برابر ہونے کی صورت میں موثر دباؤ کی مساوات درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$V_{\text{موثر}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t) dt} \quad (9.29)$$

آئیں ان مساوات کی مدد سے چند امواج کی موثر قیمتیں دریافت کریں۔ درج بالا مساوات سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سائن نما موج کی موثر قیمت حاصل کرنے کی خاطر مربع حیثہ کی اوسط کا جذر لیا جاتا ہے۔ دباؤ اور رو کے موثر قیمتوں کو عموماً I_{rms} اور V_{rms} لکھا جاتا ہے۔ آخر میں یاد رہے کہ جذر کا مثبت جواب موثر قیمت لیا جاتا ہے۔

مثال 9.7: بدلتی رو $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ کی موثر قیمت I_{rms} دریافت کریں۔

حل: اس موج کا دوری عرصہ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ہے۔ مساوات 9.26 سے رو کی موثر قیمت حاصل کرتے ہیں۔ فی الحال جذر کی نشان سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر مساوات کا مربع لکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔

$$I_{rms}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt$$

یہاں $\cos^2 \alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$I_{rms}^2 = \frac{I_0^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2} dt + \frac{I_0^2}{T} \int_0^T \frac{\cos 2(\omega t + \phi)}{2} dt$$

جس میں دوسرا مکمل صفر کے برابر ہے۔ پہلا مکمل حل کرتے ہوئے

$$I_{rms}^2 = \frac{I_0^2}{T} \frac{1}{2} t \Big|_0^T$$

یعنی

$$(9.30) \quad I_{rms} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ چونکہ $\sin(\omega t + \phi) = \cos(\omega t + \phi - 90^\circ)$ لکھا جاسکتا ہے لہذا سائن موج کی موثر قیمت بھی درج بالا ہوگی۔ اسی طرح V_0 جیسے کے سائن نما دباؤ کی موثر قیمت درج ذیل ہوگی۔

$$(9.31) \quad V_{rms} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

مشق 9.10: درج بالا مثال میں دوسرے تھمیل کو حل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ صفر کے برابر ہے۔

مثال 9.8: ہمارے ملک پاکستان میں 50 Hz تعدد اور 220 V تا 240 V موثر قیمت کا سائن نما برقی دباؤ گھریلو صارفین کو مہیا کا جاتا ہے۔ دباؤ کا جیسے دریافت کرتے ہوئے موج کی مساوات لکھیں۔

حل: دباؤ کی موثر قیمت کو 230 V لیتے ہوئے مساوات 9.31 سے جیسے حاصل کرتے ہیں۔

$$(9.32) \quad V_0 = 230\sqrt{2} = 325 \text{ V}$$

یوں موج کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$(9.33) \quad v(t) = 230\sqrt{2} \cos(2\pi 50t) \text{ V}$$

اب تک ہم دباؤ یا رو کا حیطہ لیتے ہوئے ان کے دوری سمتیات لکھتے رہے ہیں مثلاً $\hat{V} = V_0/\phi^\circ V$ دوری سمتیہ V_0 حیطے اور ϕ زاویہ ہٹاؤ کے کو سائن دباؤ کو ظاہر کرتا ہے۔ ہم دوری سمتیات کو موثر قیمت کی صورت میں بھی لکھ سکتے ہیں۔ یوں $\hat{V}_{rms} = 230/\phi V$ میں $230 V$ دباؤ کے موثر قیمت کو ظاہر کرتی ہے جبکہ $\hat{V} = 325/\phi V$ میں $325 V$ دباؤ کا حیطہ ہے۔ تسلی کر لیں کہ یہ دونوں دوری سمتیات ایک ہی دباؤ کو ظاہر کرتی ہیں۔

دباؤ یا رو کی قیمتیں مختلف انداز میں بیان کی جاسکتی ہیں۔ مثلاً مساوات 9.33 میں دباؤ کی چوٹی V_p یا مثبت اور منفی چوٹیوں کے درمیان قیمت V_{pp} اور یا پھر دباؤ کی موثر قیمت V_{rms} بیان کی جاسکتی ہے۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$V_p = 325 V$$

$$V_{pp} = 650 V$$

$$V_{rms} = 230 V$$

بدلتی رو مشینوں کی دباؤ اور رو کی عموماً موثر قیمتیں بیان کی جاتی ہیں۔ یوں $230 V$ پر چلنے والا گھریلو پنکھا درحقیقت $230 V$ کے موثر دباؤ پر چلے گا۔ اس کتاب میں موثر قیمتیں استعمال کرتے ہوئے دباؤ اور رو کے ساتھ موثر (یا rms) لکھا جائے گا۔

سائن نماد دباؤ اور سائن نماد رو کی صورت میں مساوات 9.10 اوسط طاقت دیتی ہے۔ اس مساوات کو یہاں دوبارہ پیش کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$P = \frac{V_0 I_0}{2} \cos(\phi_v - \phi_i)$$

$$= \frac{V_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos(\phi_v - \phi_i)$$

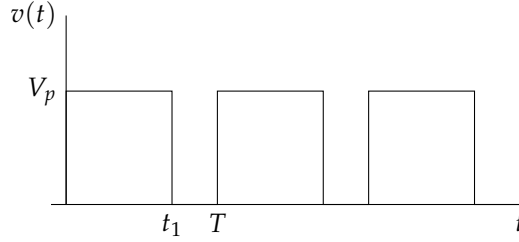
چونکہ $\frac{V_0}{\sqrt{2}}$ اور $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ بالترتیب موثر دباؤ V_{rms} اور موثر رو I_{rms} ہیں لہذا درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(9.34) \quad P = V_{rms} I_{rms} \cos(\phi_v - \phi_i)$$

اسی طرح مزاحمتی بوجھ کی صورت میں اوسط طاقت کے مساوات کو ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(9.35) \quad P = \frac{I_0^2 R}{2} = I_{rms}^2 R$$

$$(9.36) \quad P = \frac{V_0^2}{2R} = \frac{V_{rms}^2}{R}$$



شکل 9.17: مثال 9.9 کا دور۔

جو ہو بہو یک سمتی مساوات کی طرح ہیں۔ یہی حقیقت موثر قیمت کی مقبولیت کی وجہ بنی ہے۔

مثال 9.9: شکل 9.17 میں دیے دباؤ کی موثر قیمت دریافت کریں۔ اگر $D = 50\%$ اور $V_p = 60\text{ V}$ ہوں تب یہ دباؤ $200\ \Omega$ مزاحمت کو کتنی طاقت مہیا کر سکتا ہے اور مزاحمت کی موثر رو کیا ہوگی۔

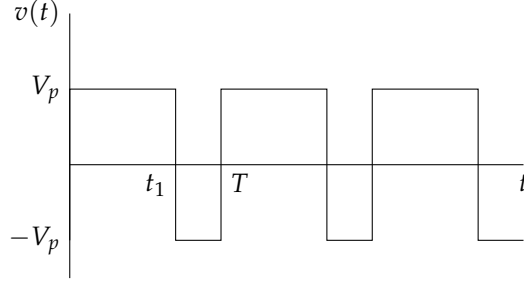
حل: یہاں دوری عرصہ T ہے جس میں t_1 مدت کے لئے دباؤ پایا جاتا ہے جبکہ $T - t_1$ مدت کے لئے دباؤ صفر کے برابر رہتا ہے۔ یوں فعال عرصہ $D = \frac{t_1}{T}$ ہے۔ مساوات 9.29 استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} V_{\text{موثر}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \left[\int_0^{t_1} V_p^2 dt + \int_{t_1}^T 0^2 dt \right]} \\ &= V_p \sqrt{\frac{t_1}{T}} \\ &= V_p \sqrt{D} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ فعال عرصے کی قیمت $0 < D < 1$ ممکن ہے جس سے V_{rms} کی قیمت 0 V تا $V_p\text{ V}$ ممکن ہے۔

دی گئی معلومات کے مطابق موثر دباؤ درج ذیل ہے

$$V_{rms} = 60\sqrt{0.5} = 42.4264\text{ V}$$



شکل 9.18: مثال 9.10 کا دور۔

جسے 200Ω کے متوازی لاگو کرنے سے مزاحمت کو درج ذیل طاقت مہیا ہوگی۔

$$P = \frac{V_{rms}^2}{R} = \frac{42.4264^2}{200} = 9 \text{ W}$$

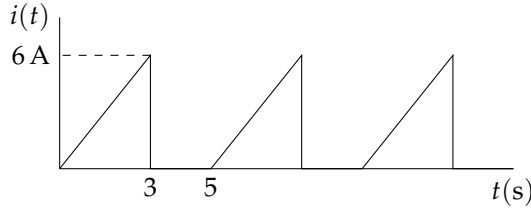
مزاحمت کی موثر رو درج ذیل ہوگی۔

$$I_{rms} = \frac{V_{rms}}{R} = \frac{42.4264}{200} = 0.212 \text{ A}$$

مثال 9.10: شکل 9.18 میں D کی قیمت 30 % ، 50 % اور 70 % کی صورت میں دباؤ کی موثر قیمت اور اوسط قیمت دریافت کریں جہاں $V_p = 10 \text{ V}$ ہے۔

حل: موثر قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} V_{\text{موثر}} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \left[\int_0^{t_1} V_p^2 dt + \int_{t_1}^T (-V_p)^2 dt \right]} \\ &= V_p \sqrt{\frac{t_1}{T} + \frac{T - t_1}{T}} \\ &= V_p \end{aligned}$$



شکل 9.19: مثال 9.11 کا دور۔

یوں دی گئی تینوں فعال عرصوں کے لئے موثر دباؤ 10 V حاصل ہوتا ہے۔

آئیں اب اوسط دباؤ حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}
 V_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{t_1} V_p dt + \int_{t_1}^T (-V_p) dt \right] \\
 &= V_p \left(\frac{2t_1 - T}{T} \right) \\
 &= V_p (2D - 1)
 \end{aligned}$$

فعال عرصے کی دی گئی قیمتوں پر اوسط دباؤ درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$V_{\text{اوسط}}(D = 0.3) = 10 [2(0.3) - 1] = -4 \text{ V}$$

$$V_{\text{اوسط}}(D = 0.5) = 10 [2(0.5) - 1] = 0 \text{ V}$$

$$V_{\text{اوسط}}(D = 0.7) = 10 [2(0.7) - 1] = 4 \text{ V}$$

مثال 9.11: شکل 9.19 میں روکی موثر قیمت دریافت کریں۔

حل: یہاں دباؤ مسلسل تبدیل ہو رہا ہے لہذا اس کے خط کی مساوات درکار ہوگی۔ دباؤ کا سیدھا خط $(0, 0)$ تا $(3, 6)$ خطی تفاعل ہے جس کی شرح ڈھال درج ذیل ہے۔

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 0}{3 - 0} = 2$$

کار تیزی محدود پر $(0, 0)$ سے گزرتے m شرح ڈھال کے خط کی مساوات $y = mx$ لکھی جاتی ہے لہذا دباؤ کے خط کی مساوات درج ذیل ہے۔

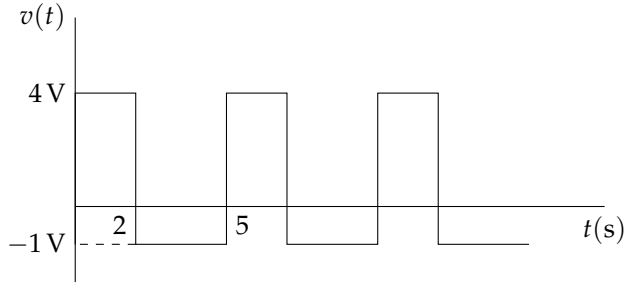
$$v(t) = 2t$$

موثر دباؤ درج ذیل ہے۔

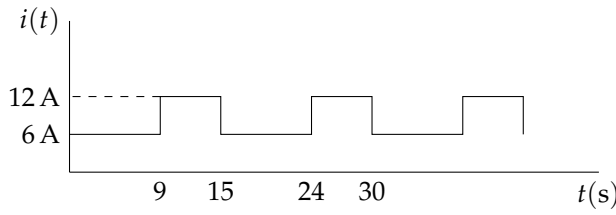
$$\begin{aligned} v_{rms} &= \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} \\ &= \sqrt{\frac{1}{5} \left[\int_0^3 (2t)^2 dt + \int_3^5 0^2 dt \right]} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{5} \right) \left(\frac{4}{3} \right) t^3 \Big|_0^3} \\ &= 2.68 \text{ V} \end{aligned}$$

مشق 9.11: شکل 9.20 میں دیے دباؤ کی موثر قیمت دریافت کریں۔

جواب: $\sqrt{7} \text{ V}$



شکل 9.20: مشق 9.11 کا دورہ۔



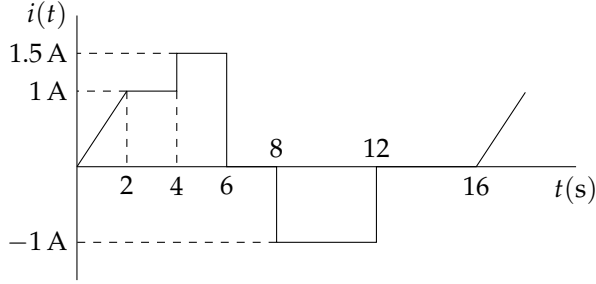
شکل 9.21: مشق 9.12 کا دورہ۔

مشق 9.12: شکل 9.21 میں 3Ω مزاحمت کی رود کھائی گئی ہے۔ مزاحمت میں اوسط طاقت کا ضیاع حاصل کریں۔

جواب: 237.6 W

مشق 9.13: شکل 9.22 میں 7Ω مزاحمت کی رود کھائی گئی ہے۔ مزاحمت میں اوسط طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔

جواب: 4.885 W



شکل 9.22: مشق 9.13 کا دور۔

9.5 جزو طاقت

مساوات 9.34 اوسط طاقت دیتی ہے۔

$$(9.37) \quad P = V_{rms} I_{rms} \cos(\phi_v - \phi_i)$$

اس مساوات میں $V_{rms} I_{rms}$ کے حاصل ضرب کو ظاہری طاقت² کہا جاتا ہے جبکہ P کو حقیقی طاقت³ کہا جاتا ہے۔ ظاہری طاقت کو وولٹ-ایمپیئر $V A$ میں ناپا جاتا ہے جبکہ حقیقی طاقت کو واٹ W میں ناپا جاتا ہے۔ ایسا کرنے سے ان میں فرق کرنا ممکن ہوتا ہے۔

حقیقی طاقت اور ظاہری طاقت کی شرح کو جزو طاقت⁴ pf کہا جاتا ہے۔ درج بالا مساوات کی مدد سے جزو طاقت کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(9.38) \quad \text{جزو طاقت} = \text{pf} = \frac{P}{V_{rms} I_{rms}} = \cos(\phi_v - \phi_i)$$

جہاں

$$(9.39) \quad \cos(\phi_v - \phi_i) = \cos \phi_z$$

کے برابر ہے۔ زاویہ $\phi_v - \phi_i$ درحقیقت بوجھ کے رکاوٹ کا زاویہ ہٹاؤ ϕ_z ہے اور اسے زاویہ جزو طاقت⁵ کہا جاتا ہے۔ چونکہ $\cos(\phi_v - \phi_i) = \cos(\phi_i - \phi_v)$ کے برابر ہے لہذا جزو طاقت کو امالی بوجھ کی صورت میں

apparent power²
real power³
power factor, pf⁴
power factor angle⁵

امالی جزو طاقت⁶ یا پیچھے جزو طاقت⁷ کہا جاتا ہے جبکہ برق گیر بوجھ کی صورت میں اس کو برق گیر جزو طاقت⁸ یا آگے جزو طاقت⁹ کہا جاتا ہے۔ اسی طرح امالی بوجھ کی صورت میں زاویہ جزو طاقت کو امالی زاویہ جزو طاقت یا پیچھے زاویہ جزو طاقت کہا جاتا ہے جبکہ برق گیر بوجھ کی صورت میں اس کو برق گیر زاویہ جزو طاقت یا آگے زاویہ جزو طاقت کہا جاتا ہے۔

مزاحمتی بوجھ کا $\phi_z = 0^\circ$ ہوتا ہے لہذا مزاحمتی بوجھ کا جزو طاقت $\cos \phi_z = 1$ ہو گا۔ امالہ گیر کا $\phi_z = 90^\circ$ ہے لہذا اس کا $\cos \phi_z = 0$ ہے۔ برق گیر کا $\phi_z = -90^\circ$ ہے لہذا اس کا $\cos \phi_z = 0$ ہے۔ مزاحمت اور امالہ گیر پر مبنی دور کے رکاوٹ کا زاویہ 0° تا 90° ممکن ہے لہذا ایسے دور کا امالی جزو طاقت 1 تا 0 ممکن ہے۔ اسی طرح برق گیر اور مزاحمت پر مبنی دور کے رکاوٹ کا زاویہ 0° تا -90° ممکن ہے لہذا ایسے دور کا برق گیر جزو طاقت 1 تا 0 ممکن ہے۔ مزاحمت، امالہ اور برق گیر پر مبنی دور کے رکاوٹ کا زاویہ -90° سے 0° تا 90° ممکن ہے لہذا ایسے دور کا جزو طاقت تینوں اقسام کا ممکن ہے۔

آگے زاویہ اور پیچھے زاویہ سے مراد دباؤ کے لہذا سے رو کا زاویہ ہے۔ چونکہ امالی دور میں دباؤ سے رو پیچھے رہتی ہے لہذا ایسے ادوار پیچھے ادوار کہلاتے ہیں اور ان کا زاویہ اور جزو طاقت بھی پیچھے کہلاتے ہیں۔ اس کے برعکس برق گیر دور میں دباؤ سے رو آگے رہتی ہے لہذا ان ادوار کو آگے ادوار کہتے ہیں اور ان کا زاویہ اور جزو طاقت بھی آگے کہلاتے ہیں۔ یوں امالی بوجھ $Z_L = 2 + j6$ کا زاویہ $\tan^{-1} \frac{6}{2} = 71.57^\circ$ اور پیچھے جزو طاقت $\cos 71.57^\circ = 0.316$ ہے۔ اسی طرح برق گیر بوجھ $Z_C = 3 - j4$ کا زاویہ $\tan^{-1} \left(-\frac{4}{3}\right) = -53.13^\circ$ اور آگے جزو طاقت $\cos(-53.13^\circ) = 0.6$ ہے۔

9.6 مخلوط طاقت

برقرار حال بدلتی رو طاقت پر غور کرنے کے لئے مخلوط طاقت¹⁰ کا جاننا ضروری ہے لہذا اس حصے میں مخلوط طاقت پر بحث کی جائے گی۔

inductive power factor⁶
lagging power factor⁷
capacitive power factor⁸
leading power factor⁹
complex power¹⁰

