برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 3

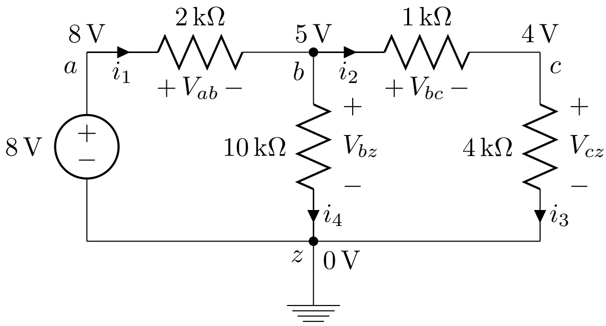
جوڑ اور دائری تجزیہ

گزشتہ باب میں سادہ ترین ادوار کو کرخوف قوانین سے حل کرنا دکھایا گیا۔اس باب میں متعدد جوڑ اور متعدد دائروں والے ادوار کو کرخوف قوانین سے حل کرنا دکھایا جائے گا۔ کرخوف قانون رو سے ہر جوڑ پر داخلی اور خارجی رو کے مجموعوں کو برابر پر کرتے ہوئے دور کے تمام جوڑوں پر دباو حاصل کیا جاتا ہے۔اس کے برعکس کرخوف قانون دباو کی مدد سے دور کے ہر دائرے میں دباو کے گھٹاو کے مجموعے کو دائرے میں دباو کے بڑھاو کے مجموعے کے برابر پر کرتے ہوئے تمام دائروں کی رو حاصل کی جاتی ہے۔ عموماً دور یا تو کرخوف قانون دباو اور یا کرخوف قانون رو سے زیادہ آسانی سے حل ہوتا ہے۔آسان طریقہ چننا اس باب میں سکھایا جائے گا۔

3.1 تجزیہ جوڑ

دور کو ترکیب جوڑ[1] سے حل کرتے ہوئے جوڑ کے دباو کو نامعلوم متغیرات چننا جاتا ہے۔ کسی ایک جوڑ کو حوالہ چنتے ہوئے بقایا جوڑ کے دباو اس جوڑ سے ناپے جاتے ہیں۔یوں جس جوڑ کو حوالہ چنا گیا ہو، اس کی دباو کو صفر وولٹ تصور کیا جاتا ہے اور اس جوڑ کو برقی زمین کہا جاتا ہے۔ عموماً اس جوڑ کو برقی زمین چنا جاتا ہے جس کے ساتھ سب سے زیادہ پرزے جڑے ہوں۔ عموماً آلات کو موصل ڈبوں میں بند رکھا جاتا ہے اور عام طور دور کے برقی زمین کو ڈبے کے ساتھ جوڑا جاتا ہے۔ایسی صورت میں ڈبے کی سطح بھی $0\,\mathrm{V}$ پر ہوتی ہے۔

[1] nodal analysis



شکل 3.1: دباو جوڑ سے باز و کی رو حاصل کی جا سکتی ہے۔

ہم دباو جوڑ کے متغیرات کو مثبت تصور کریں گے۔ حقیقی دباو کی قیمت زمین کی نسبت سے منفی ہونے کی صورت میں تجزیے سے منفی قیمت حاصل ہو گی۔

آئیں دباو جوڑ جاننے کی افادیت کو شکل 3.1 کی مدد سے جانیں۔اس دور میں a ، b ، c اور z جوڑ پائے جاتے ہیں۔ہم نے جوڑ z کو برقی زمین چنا ہے لہٰذا اس کی دباو $0\,\mathrm{V}$ ہے۔بقایا تین جوڑ کی دباو کو شکل میں دکھایا گیا ہے۔برقی زمین کو علامت سے ظاہر کیا گیا ہے۔

بالائی بائیں مزاحمت پر دباو درج ذیل پایا جاتا ہے

$$\begin{aligned}V_{ab} &= V_a - V_b\\ &= 8-5\\ &= 3\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

لہٰذا قانون اوہم سے مزاحمت میں رو درج ذیل حاصل کی جاتی ہے۔

$$\begin{aligned}i_1 &= \frac{V_{ab}}{2\,\mathrm{k\Omega}}\\ &= \frac{3}{2000}\\ &= 1.5\,\mathrm{mA}\end{aligned}$$

اسی طرح بالائی دائیں مزاحمت پر دباو درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned}V_{bc} &= V_b - V_c\\ &= 5-4\\ &= 1\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

جس سے رو

$$
\begin{aligned}
i_2 &= \frac{V_{bc}}{1\,\mathrm{k\Omega}} \\
&= \frac{1}{1000} \\
&= 1\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتی ہے۔درمیانے مزاحمت پر دباو اور اس کی رو درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
V_{bz} &= V_b - V_z \\
&= 5 - 0 \\
&= 5\,\mathrm{V} \\
i_4 &= \frac{V_{bz}}{10\,\mathrm{k\Omega}} \\
&= \frac{5}{10000} \\
&= 0.5\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

چونکہ $1\,\mathrm{k\Omega}$ اور $4\,\mathrm{k\Omega}$ سلسلہ وار جڑے ہیں لہٰذا $4\,\mathrm{k\Omega}$ میں بھی $1\,\mathrm{mA}$ رو پائی جائے گی۔آپ اسی قیمت کو دباو جوڑ سے بھی حاصل کر سکتے ہیں یعنی

$$
\begin{aligned}
V_{cz} &= V_c - V_z \\
&= 4 - 0 \\
&= 4\,\mathrm{V} \\
i_3 &= \frac{V_{cz}}{4\,\mathrm{k\Omega}} \\
&= \frac{4}{4000} \\
&= 1\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

یہاں اطمنان کر لیں کہ تمام جوڑوں پر آمدی رو اور خارجی رو برابر ہوں۔جوڑ b پر آمدی رو $1.5\,\mathrm{mA}$ ہے جو خارجی رو کے مجموعے $1\,\mathrm{mA} + 0.5\,\mathrm{mA}$ کے عین برابر ہے۔اسی طرح جوڑ c پر آمدی اور خارجی رو $1\,\mathrm{mA}$ ہیں۔جوڑ a پر کرخوف قانون رو سے منبع دباو کے مثبت سرے سے خارجی رو $1.5\,\mathrm{mA}$ حاصل ہوتی ہے۔

کسی بھی دو جوڑ m اور n کے مابین جڑی مزاحمت R_{mn} کی رو i_R قانون اوہم

$$
i_R = \frac{v_m - v_n}{R_{mn}} \tag{3.1}
$$

سے حاصل کی جاتی ہے۔

اب جب ہم دباو جوڑ کی افادیت جان چکے ہیں آئیں ترکیب جوڑ پر غور کریں۔اگر دور میں J جوڑ پائے جاتے ہوں تب ہمیں J دباو دریافت کرنے ہوں گے۔کسی ایک جوڑ کو زمین چنتے ہوئے اس کی دباو $0\,\mathrm{V}$ تصور کی جاتی ہے۔یوں بقایا $J-1$ جوڑ کی دباو کو نامعلوم متغیرات تصور کیا جاتا ہے۔ان $J-1$ جوڑ پر کرخوف قانون رو کا اطلاق کرتے ہوئے $J-1$ مساوات لکھے جاتے ہیں۔آپ جانتے ہیں ہیں کہ $J-1$ متغیرات معلوم کرنے کی خاطر $J-1$ ہمزاد مساوات درکار ہیں۔یوں ان $J-1$ ہمزاد مساوات کے حل سے تمام نامعلوم دباو جوڑ حاصل ہوتے ہیں۔کسی بھی جوڑ پر کرخوف کی مساوات لکھتے ہوئے جوڑ سے منسلک تمام بازو کی رو کو مساوات 3.1 کی طرز پر لکھا جاتا ہے۔یوں مزاحمت جانتے ہوئے، رو کو نامعلوم دباو کی صورت میں لکھا جاتا ہے۔اس طرح کرخوف قانون رو کی مساوات میں صرف نامعلوم دباو بطور متغیرات پائے جائیں گے۔

یاد رہے کہ برقی دباو دو نقطوں کے مابین ہوتا ہے۔کسی نقطے کی حتمی دباو کوئی معنی نہیں رکھتی۔جوڑ پر کرخوف قانون رو کی مساوات لکھتے ہوئے جوڑ کا دباو زمین کے حوالے سے ناپا جاتا ہے۔یوں شکل 3.1 میں جوڑ a کا دباو جوڑ z کے حوالے سے $8\,\mathrm{V}$ ہے اور جوڑ b کا دباو جوڑ z کے حوالے سے $5\,\mathrm{V}$ ہے۔اس کے برعکس جوڑ b کے حوالے سے جوڑ a کا دباو $3\,\mathrm{V}$ ہے جبکہ جوڑ a کے حوالے سے جوڑ c کا دباو $-4\,\mathrm{V}$ اور جوڑ z کا دباو $-8\,\mathrm{V}$ ہے۔

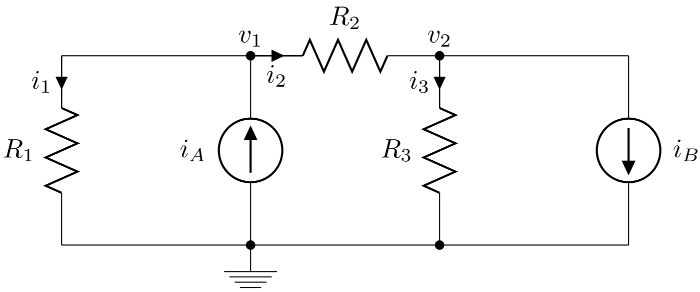
آئیں ترکیب جوڑ کو چند مثالوں کی مدد سے سیکھیں۔ہم آسان ترین مثال سے شروع کرتے ہوئے بتدریج مشکل مثال پیش کریں گے۔

3.2 غیر تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار

شکل 3.2 میں تین جوڑ والا دور دکھایا گیا ہے جن میں نچلے جوڑ کو زمین چنا گیا ہے۔بقایا دو جوڑ کے نامعلوم برقی دباو کو متغیرات v_1 اور v_2 ظاہر کرتے ہیں۔ہم تمام شاخوں میں رو کی سمت چنتے ہیں۔یوں i_1 کو بالائی بائیں جوڑ سے زمین کی جانب رواں چنا گیا ہے۔اسی طرح i_2 کو بالائی بائیں جوڑ سے بالائی دائیں جوڑ کی جانب رواں چنا گیا ہے جبکہ i_3 کو بالائی دائیں جوڑ سے زمین کی طرف رواں چنا گیا ہے۔

بالائی بائیں جوڑ پر کرخوف قانون رو کی مساوات لکھتے ہیں۔جوڑ سے خارجی رو کو مثبت اور داخلی رو کو منفی لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$i_1 - i_A + i_2 = 0 \tag{3.2}$$



شکل 3.2: تین جوڑ والا دور۔

قانون اوہم استعمال کرتے ہوئے اسے یوں

$$\frac{v_1}{R_1} - i_A + \frac{v_1 - v_2}{R_2} = 0$$

یا

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) v_1 - \frac{v_2}{R_2} = i_A \tag{3.3}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ بالائی دائیں جوڑ کے لئے

$$-i_2 + i_3 + i_B = 0 \tag{3.4}$$

اور

$$-\left(\frac{v_1 - v_2}{R_2}\right) + \frac{v_2}{R_3} + i_B = 0$$

یعنی

$$-\frac{v_1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) v_2 = -i_B \tag{3.5}$$

لکھا جائے گا۔ نچلے جوڑ یعنی برقی زمین پر کرخوف قانون رو کی مساوات لکھتے ہیں۔

$$-i_1 + i_A - i_3 - i_B = 0 \tag{3.6}$$

مساوات 3.2 اور مساوات 3.4 کے مجموعے کو منفی ایک سے ضرب دینے سے مساوات 3.6 حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 3.2، مساوات 3.4 اور مساوات 3.6 میں کسی بھی دو مساواتوں سے تیسری مساوات حاصل کی جا سکتی ہے۔ یوں ان میں

صرف دو عدد مساوات آزاد مساوات ہیں جبکہ تیسری مساوات تابع مساوات ہے۔ شکل 3.2 کے دور میں کل تین عدد جوڑ ہیں۔ آپ نے دیکھا کہ اس دور سے صرف دو عدد آزاد مساوات حاصل ہوتے ہیں یعنی $J = 3$ کی صورت میں $J - 1 = 2$ آزاد مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

مساوات 3.3 اور مساوات 3.5 کو ایک ساتھ لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)v_1-\frac{v_2}{R_2}&=i_A\\
-\frac{v_1}{R_2}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)v_2&=-i_B
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

مثال 3.1: شکل 3.2 میں $i_A = 2\,\mathrm{mA}$ ، $i_B = 5\,\mathrm{mA}$ ، $R_1 = 4\,\mathrm{k\Omega}$ ، $R_2 = 6\,\mathrm{k\Omega}$ اور $R_3 = 2\,\mathrm{k\Omega}$ ہیں۔ تمام جوڑ پر دباو اور تمام شاخوں میں رو حاصل کریں۔

حل: مساوات 3.7 میں قیمتیں پُر کرتے ہیں

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{4000}+\frac{1}{6000}\right)v_1-\frac{v_2}{6000}&=0.002\\
-\frac{v_1}{6000}+\left(\frac{1}{6000}+\frac{1}{2000}\right)v_2&=-0.005
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرنے سے

$$
\begin{aligned}
v_1&=2\,\mathrm{V}\\
v_2&=-7\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ دباو جوڑ جانتے ہوئے شاخوں کی رو قانون اوہم سے حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
i_1&=\frac{v_1}{R_1}=\frac{2}{4000}=0.5\,\mathrm{mA}\\
i_2&=\frac{v_1-v_2}{R_2}=\frac{2-(-7)}{6000}=1.5\,\mathrm{mA}\\
i_3&=\frac{v_2}{R_3}=\frac{-7}{2000}=-3.5\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

مساوات 3.7 کو قالبی مساوات[2] کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_A \\ -i_B \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

قالبی مساوات میں

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} \end{bmatrix} \\ \mathbf{V} &= \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{I} &= \begin{bmatrix} i_A \\ -i_B \end{bmatrix} \end{aligned}$$

لیتے ہوئے اسے یوں لکھا جا سکتا ہے

$$\mathbf{GV} = \mathbf{I}$$

جس سے

$$\mathbf{V} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{I}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} i_A \\ -i_B \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

لکھا جائے گا۔

آج کل کمپیوٹر کا زمانہ ہے۔ کمپیوٹر کی مدد سے قالبی مساوات نہایت آسانی سے حل کئے جا سکتے ہیں۔ آپ سے التماس ہے کہ کمپیوٹر پر قالبی مساوات حل کرنا سیکھیں۔

[2] matrix equation

مثال 3.2: درج بالا مثال میں تمام دباو جوڑ کو مساوات 3.10 کی مدد سے حل کریں۔

حل: مساوات 3.10 میں دی معلومات پر کرتے ہوئے لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2400} & -\frac{1}{6000} \\ -\frac{1}{6000} & \frac{1}{1500} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.002 \\ -0.005 \end{bmatrix}$$

قالب $\mathbf{G}$ کا ریاضی معکوس $\mathbf{G}^{-1}$ حاصل کرنے کی خاطر $\mathbf{G}$ کا شریک قالب $\mathbf{G}_{\text{شریک}}$

$$\mathbf{G}_{\text{شریک}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{1500} & \frac{1}{6000} \\ \frac{1}{6000} & \frac{1}{2400} \end{bmatrix}$$

اور قالب کی حتمی قیمت

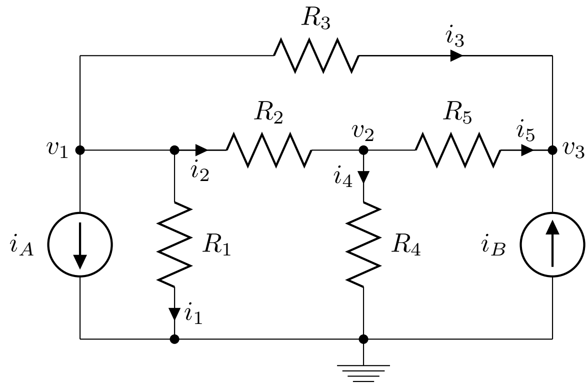
$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{1}{2400} & -\frac{1}{6000} \\ -\frac{1}{6000} & \frac{1}{1500} \end{vmatrix} &= \left(\frac{1}{2400}\right)\left(\frac{1}{1500}\right) - \left(-\frac{1}{6000}\right)\left(-\frac{1}{6000}\right) \\ &= \frac{1}{4 \times 10^6} \end{aligned}$$

درکار ہوں گے۔یوں

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} &= 4 \times 10^6 \begin{bmatrix} \frac{1}{1500} & \frac{1}{6000} \\ \frac{1}{6000} & \frac{1}{2400} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.002 \\ -0.005 \end{bmatrix} \\ &= 4 \times 10^6 \begin{bmatrix} 0.5 \times 10^{-6} \\ -1.75 \times 10^{-6} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں یعنی $v_1 = 2\,\mathrm{V}$ اور $v_2 = -7\,\mathrm{V}$ ہیں۔

آئیں شکل 3.3 کے کرخوف قانون رو کے مساوات لکھیں۔دور کے تمام شاخوں میں رو کی سمتیں چننی گئی ہیں۔نچلے جوڑ کو زمین چننا گیا ہے اور یہی حقیقت زمین کی علامت سے ظاہر کی گئی ہے۔دور میں کل چار $(J = 4)$ عدد جوڑ ہیں لہٰذا



شکل 3.3: چار جوڑ کے دور سے تین عدد آزاد مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

اس سے تین $(J-1=3)$ عدد آزاد مساوات حاصل کئے جائیں گے۔ پہلی جوڑ پر کرخوف قانون رو استعمال کرتے ہوئے

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_A = 0$$

لکھا جائے گا جہاں جوڑ سے خارج رو کو مثبت لکھا گیا ہے۔ انفرادی شاخ کی رو کو قانون اوہم سے پُر کرتے ہوئے

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} + \frac{v_1 - v_3}{R_3} + i_A = 0$$

یعنی

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) v_1 - \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_3}{R_3} = -i_A \tag{3.11}$$

حاصل ہوتا ہے۔ دوسرے جوڑ سے

$$-i_2 + i_4 + i_5 = 0$$

یعنی

$$-\left(\frac{v_1 - v_2}{R_2}\right) + \frac{v_2}{R_4} + \frac{v_2 - v_3}{R_5} = 0$$

یا

$$-\frac{v_1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) v_2 - \frac{v_3}{R_5} = 0 \tag{3.12}$$

حاصل ہوتا ہے۔ تیسری جوڑ سے

$$-i_3 - i_5 - i_B = 0$$

یعنی

$$-\left(\frac{v_1 - v_3}{R_3}\right) - \left(\frac{v_2 - v_3}{R_5}\right) - i_B = 0$$

یا

$$-\frac{v_1}{R_3} - \frac{v_2}{R_5} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) v_3 = i_B \tag{3.13}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات 3.11، مساوات 3.12 اور مساوات 3.13 کو اکٹھے لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) v_1 - \frac{v_2}{R_2} - \frac{v_3}{R_3} &= -i_A \\ -\frac{v_1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}\right) v_2 - \frac{v_3}{R_5} &= 0 \\ -\frac{v_1}{R_3} - \frac{v_2}{R_5} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5}\right) v_3 &= i_B\end{aligned} \tag{3.14}$$

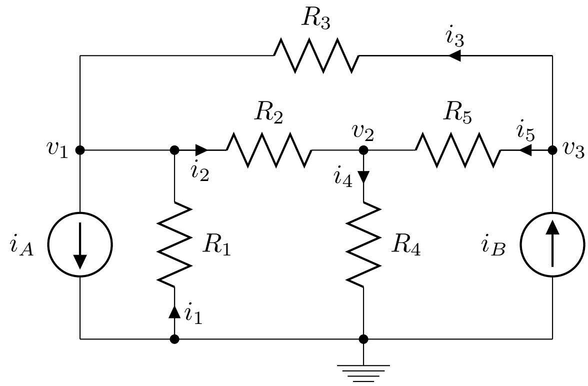
قالبی مساوات کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5} \\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i_A \\ 0 \\ i_B \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

مندرجہ بالا مساوات کا دایاں بازو منبع رو سے جوڑ میں داخل رو دیتی ہے جبکہ اس کا بایاں بازو جوڑ سے خارجی رو دیتی ہے۔

شکل 3.3 کو دوبارہ شکل 3.4 میں پیش کیا گیا ہے جہاں i_1 ، i_3 اور i_5 کی سمتیں گزشتہ سمتوں کے الٹ چُنی گئی ہیں۔ تین جوڑ کے مساوات درج ذیل لکھے جائیں گے۔

$$\begin{aligned} i_A - i_1 + i_2 - i_3 &= 0 \\ -i_2 + i_4 - i_5 &= 0 \\ i_3 + i_5 - i_B &= 0 \end{aligned}$$



شکل 3.4: مزاحمتوں اور آزاد منبع رو کی قالبی مساوات رو کی چنی سمتوں پر منحصر نہیں۔

شاخوں کی رو قانون اوہم سے پُر کرتے ہوئے درج بالا کو یوں لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
i_A-\left(\frac{0-v_1}{R_1}\right)+\frac{v_1-v_2}{R_2}-\left(\frac{v_3-v_1}{R_3}\right)&=0\\
-\left(\frac{v_1-v_2}{R_2}\right)+\frac{v_2}{R_4}-\left(\frac{v_3-v_2}{R_5}\right)&=0\\
\frac{v_3-v_1}{R_3}+\frac{v_3-v_2}{R_5}-i_B&=0
\end{aligned}
$$

جنہیں ترتیب دینے سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

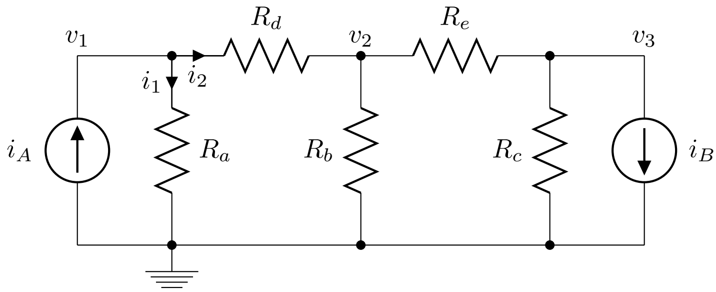
$$\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)v_1-\frac{v_2}{R_2}-\frac{v_3}{R_3}=-i_A \tag{3.16}$$

$$-\frac{v_1}{R_2}+\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)v_2-\frac{v_3}{R_5}=0 \tag{3.17}$$

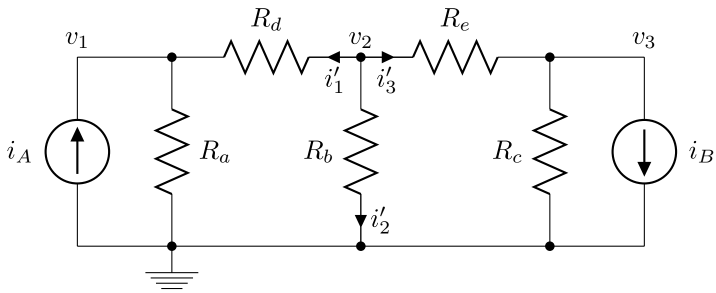
$$-\frac{v_1}{R_3}-\frac{v_2}{R_5}+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\right)v_3=i_B \tag{3.18}$$

اس کو قالبی مساوات کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_2} & -\frac{1}{R_3}\\ -\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5} & -\frac{1}{R_5}\\ -\frac{1}{R_3} & -\frac{1}{R_5} & \frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-i_A\\ 0\\ i_B\end{bmatrix} \tag{3.19}$$



(الف)



(ب)

شکل 3.5: تمام جوڑ پر مزاحمتی شاخوں میں رو کی سمت جوڑ سے خارج ہوتی تصور کر سکتے ہیں۔

مساوات 3.15 اور مساوات 3.19 بالکل یکساں ہیں۔یوں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ قابلی مساوات کا دارومدار شاخوں میں رو کی چننی گئی سمتوں پر منحصر نہیں ہوتا۔اس کتاب میں اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے ہم جوڑ پر کرخوف قانون رو کی مساوات لکھتے ہوئے مزاحمتی شاخوں میں رو کی سمت جوڑ سے خارج ہوتی تصور کریں گے۔آئیں اس ترکیب کو شکل 3.5 کی مدد سے سمجھیں۔

شکل 3.5-الف میں پہلے جوڑ پر تمام مزاحمتی شاخوں کی رو خارجی تصور کرتے ہوئے کرخوف قانون رو کے تحت خارجی رو کا مجموعہ داخلی رو کے مجموعے کے برابر پُر کرنے سے

$$i_1 + i_2 = i_A \tag{3.20}$$

یعنی

$$\frac{v_1}{R_a} + \frac{v_a - v_b}{R_d} = i_A \tag{3.21}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل 3.5-ب میں دوسرے جوڑ پر تمام مزاحمتی رو کی سمت خارجی تصور کی گئی ہیں یوں

$$i'_1 + i'_2 + i'_3 = 0 \tag{3.22}$$

یعنی

$$\frac{v_2 - v_1}{R_d} + \frac{v_2}{R_b} + \frac{v_2 - v_3}{R_e} = 0 \tag{3.23}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ تیسرے جوڑ پر یہی ترکیب استعمال کرتے ہیں۔ ہر جوڑ پر رو کی سمت شکل پر دکھانا ضروری نہیں ہے لہٰذا تیسرے جوڑ پر i''_1 اور i''_2 دکھانا ضروری نہیں ہے۔ ساتھ ہی ساتھ ہر مرتبہ مساوات 3.20 اور مساوات 3.22 کے طرز پر مساوات لکھنے کی بھی ضرورت نہیں ہے بلکہ دل ہی دل میں جوڑ پر تمام مزاحمتی شاخوں کی رو خارجی تصور کرتے ہوئے سیدھ و سیدھ مساوات 3.21 اور مساوات 3.23 کے طرز پر مساوات لکھے جا سکتے ہیں۔ تیسرے جوڑ پر ایسا ہی کرتے ہوئے درج ذیل مساوات لکھی جا سکتی ہے۔

$$\frac{v_3 - v_2}{R_e} + \frac{v_3}{R_c} + i_B = 0 \tag{3.24}$$

اس کتاب میں ہم مساوات 3.24 کی طرح جوڑ پر کرخوف قانون رو کے مساوات لکھیں گے۔

مساوات 3.19 اور مساوات 3.15 میں قالبِ موصلیت[3] G کے بالائی بائیں کونے سے نچلے دائیں کونے تک ترچھی لکیر کے بالائی اور نچلی اطراف پر یکساں رکن پائے جاتے ہیں۔ ایسا اتفاقی طور پر نہیں ہے بلکہ مزاحمتوں اور آزاد منبع رو پر مبنی کسی بھی دور کے G قالب کو تشاکل صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔ آئیں ان قالبوں پر مزید غور کریں۔

شکل 3.4 میں پہلے جوڑ کی دباو v_1، دوسرے جوڑ کی دباو v_2 اور تیسرے جوڑ کی دباو v_3 ہے۔ قالب میں بالائی یعنی پہلے صف کے رکن مساوات 3.16 سے حاصل کئے گئے۔ یہ مساوات پہلی جوڑ سے حاصل کی گئی ہے۔ اس جوڑ پر مزاحمت R_1، R_2 اور R_3 جڑے ہیں۔ ان مزاحمتوں کو متوازی جڑا تصور کرتے ہوئے مساوی مزاحمت R_{m1}

$$\frac{1}{R_{m1}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں $\frac{1}{R_{m1}}$ کو مساوی متوازی موصلیت G_{m1} کہا جاتا ہے۔ یوں قالب کے پہلے صف کا پہلا (بایاں) رکن پہلے جوڑ سے جڑے تمام مزاحمتوں کا مساوی متوازی موصلیت $\frac{1}{R_{m1}}$ ہے۔ اسی صف کا دوسرا رکن پہلے جوڑ

[3] conductance matrix

اور دوسرے جوڑ کے مابین جڑے مزاحمت کی موصلیت کا منفی $-\frac{1}{R_2}$ کے برابر ہے۔اسی طرح پہلے صف کا تیسرا رکن، پہلے جوڑ اور تیسرے جوڑ کے مابین جڑے موصلیت کے منفی $-\frac{1}{R_3}$ کے برابر ہے۔ قالب کے دوسرے صف کے ارکان مساوات 3.17 سے حاصل کئے گئے۔اس صف کا پہلا رکن پہلے اور دوسرے جوڑ کے مابین مساوی متوازی موصلیت کے منفی $-\frac{1}{R_2}$ کے برابر ہے۔صف کا دوسرا رکن دوسرے جوڑ پر تمام مزاحمتوں کا مساوی متوازی موصلیت $\frac{1}{R_{m2}}$

$$\frac{1}{R_{m2}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$$

ہے جبکہ صف کا تیسرا رکن دوسرے اور تیسرے جوڑ کے مابین موصلیت کے منفی $-\frac{1}{R_3}$ کے برابر ہے۔ قالب کا تیسرا صف بھی اسی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔ قالبی مساوات میں دائیں ہاتھ قالبِ رو[4] کے ارکان بالترتیب پہلے، دوسرے اور تیسرے جوڑ پر جڑے منبع رو سے جوڑ میں داخل ہوتی رو ہے۔ منبع رو کی غیر موجودگی میں قالب کے رکن کو صفر لکھا جاتا ہے۔ کسی بھی جوڑ پر ایک سے زیادہ منبع رو کی صورت میں جوڑ پر مجموعی داخلی رو، قالب کی رکن ہو گی۔ پہلی جوڑ پر منبع کی رو i_A ہے جو جوڑ سے خارجی جانب ہے لہٰذا اسے قالب رو میں $-i_A$ لکھا گیا ہے۔ دوسرے جوڑ پر کوئی منبع رو نسب نہیں لہٰذا قالب کا دوسرا رکن صفر ہے۔ تیسرے جوڑ پر منبع i_B کی رو جوڑ میں داخل ہوتی ہے لہٰذا قالب رو کا تیسرا رکن i_B ہے۔

ان معلومات کی مدد سے مزاحمت اور منبع رو پر مبنی $J+1$ جوڑ کے دور کی قالبی مساوات دور کو دیکھ کر درج ذیل صورت میں لکھی جا سکتی ہے

$$\begin{bmatrix} +G_{11} & -G_{12} & -G_{13} & \cdots & -G_{1J} \\ -G_{21} & +G_{22} & -G_{23} & \cdots & -G_{2J} \\ -G_{31} & -G_{32} & +G_{33} & \cdots & -G_{3J} \\ \vdots & & & & \\ -G_{J1} & -G_{J2} & -G_{J3} & \cdots & +G_{JJ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_J \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_J \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

جہاں G_{nn} سے مراد جوڑ n کے ساتھ منسلک تمام مزاحمتوں کی مساوی متوازی موصلیت جبکہ G_{nm} سے مراد جوڑ n اور m کے مابین مزاحمت کی موصلیت ہے۔ یہ مساوات لکھتے ہوئے جوڑ $J+1$ کو زمین چنا گیا ہے۔ اگر جوڑ n اور جوڑ m کے مابین مزاحمت R_{nm} جڑی ہو تب جوڑ m اور جوڑ n کے مابین بھی یہی مزاحمت جڑی ہو گی لہٰذا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ

$$G_{nm} = G_{mn} \tag{3.26}$$

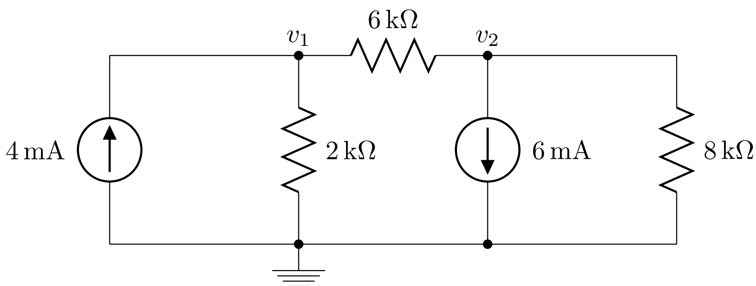
[4] current matrix

ہو گا اور یوں مساوات 3.25 کو درج ذیل صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{bmatrix}
+G_{11} & -G_{12} & -G_{13} & \cdots & -G_{1J} \\
-G_{12} & +G_{22} & -G_{23} & \cdots & -G_{2J} \\
-G_{13} & -G_{23} & +G_{33} & \cdots & -G_{3J} \\
\vdots & & & & \\
-G_{1J} & -G_{2J} & -G_{3J} & \cdots & +G_{JJ}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_J \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ \vdots \\ I_J \end{bmatrix}
\tag{3.27}
$$

جس میں $\mathbf{G}$ کا قالب تشاکل ہے۔

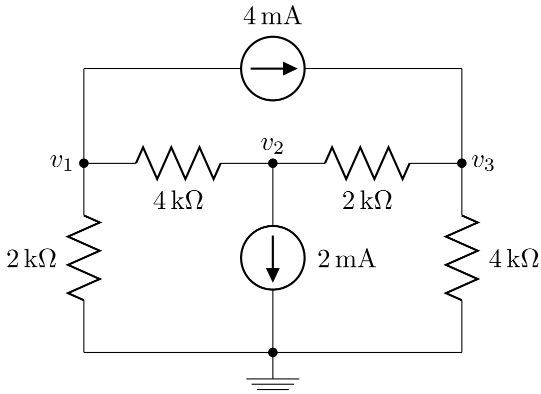
مشق 3.1: شکل 3.6 میں v_1 اور v_2 پر کرخوف قانون رو کے مساوات لکھتے ہوئے دور کی قالبی مساوات حاصل کریں۔ قالبی مساوات حل کرتے ہوئے نا معلوم دباو دریافت کریں۔



شکل 3.6: مشق 3.1 کا دور۔

جوابات: $v_1 = 1\,\mathrm{V}$ ، $v_2 = -20\,\mathrm{V}$

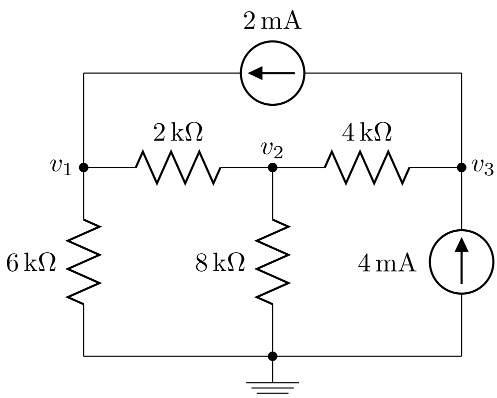
مشق 3.2: شکل 3.7 کی قالبی مساوات لکھتے ہوئے نا معلوم دباو حاصل کریں۔



شکل 3.7: مشق 3.2 کا دور۔

جوابات: $v_1 = -6\,\mathrm{V}$ ، $v_2 = -2\,\mathrm{V}$ ، $v_3 = 4\,\mathrm{V}$

مشق 3.3: شکل 3.8 کی قالبی مساوات لکھتے ہوئے نا معلوم دباو حاصل کریں۔



شکل 3.8: مشق 3.3 کا دور۔

جوابات: $v_1 = 13.5\,\mathrm{V}$ ، $v_2 = 14\,\mathrm{V}$ ، $v_3 = 22\,\mathrm{V}$

3.3 تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار

گزشتہ حصے میں ہم نے دیکھا کہ غیر تابع منبع رو اور مزاحمتوں کے ادوار سے تشاکل قالب موصلیت حاصل ہوتے ہے۔ شکل 3.9 میں تباع منبع رو استعمال کی گئی ہے۔ ہم دیکھیں گے کہ اس کا **G** قالب غیر تشاکل ہو گا۔ اس دور کے تین جوڑوں سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
-\beta i_0 + \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} &= 0\\
\frac{v_2 - v_1}{R_2} - i_A + \frac{v_2 - v_3}{R_4} &= 0\\
\frac{v_3}{R_3} + \beta i_0 + \frac{v_3 - v_2}{R_4} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

جہاں

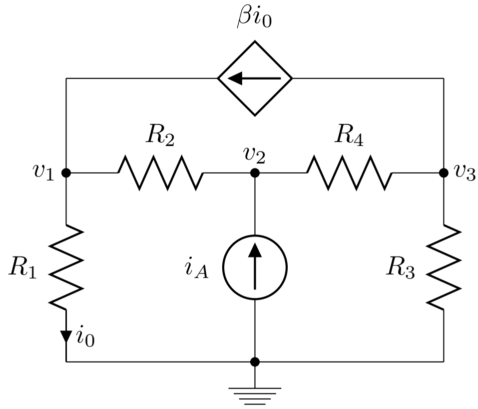
$$
i_0 = \frac{v_1}{R_1}
\tag{3.29}
$$

کے برابر ہے۔ مساوات 3.28 میں مساوات 3.29 پُر کرتے اور ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{\beta}{R_1}\right) v_1 - \frac{v_2}{R_2} &= 0\\
-\frac{v_1}{R_2} + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4}\right) v_2 - \frac{v_3}{R_4} &= i_A\\
\frac{\beta}{R_1} v_1 - \frac{v_2}{R_4} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}\right) v_3 &= 0
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

جسے قالبی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$
\begin{bmatrix}
\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{\beta}{R_1} & -\frac{1}{R_2} & 0\\
-\frac{1}{R_2} & \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} & -\frac{1}{R_4}\\
\frac{\beta}{R_1} & -\frac{1}{R_4} & \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0\\ i_A\\ 0 \end{bmatrix}
\tag{3.31}
$$



شکل 3.9: تابع منبع روسے غیر تشاکل قالب موصلیت حاصل ہوتا ہے۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ G قالب غیر تشاکل ہے۔

مثال 3.3: شکل 3.9 میں تمام جوڑ پر برقی دباو حاصل کریں۔ معلومات درج ذیل ہیں۔

$$R_1 = 2\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_2 = 4\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_4 = 2\,\mathrm{k\Omega}, \quad i_A = 10\,\mathrm{mA}, \quad \beta = 4$$

حل: درج بالا معلومات کو مساوات 3.31 میں پُر کرتے ہیں۔

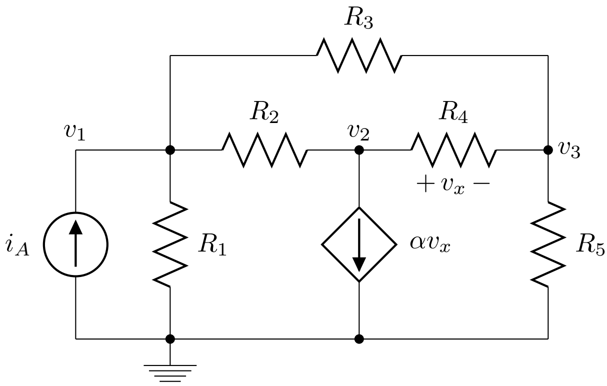
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2000} + \frac{1}{4000} - \frac{4}{2000} & -\frac{1}{4000} & 0 \\ -\frac{1}{4000} & \frac{1}{4000} + \frac{1}{2000} & -\frac{1}{2000} \\ \frac{\beta}{2000} & -\frac{1}{2000} & \frac{1}{1000} + \frac{1}{2000} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اس قالبی مساوات کو حل کرتے ہوئے اور یا تینوں ہمزاد مساوات کو کسی بھی طریقے سے حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} v_1 &= -4\,\mathrm{V} \\ v_2 &= 20\,\mathrm{V} \\ v_3 &= 12\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

مثال 3.4: شکل 3.10 میں تمام نامعلوم دباو حاصل کریں۔ دیگر معلومات درج ذیل ہیں۔

$$R_1 = 4\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_2 = 8\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_3 = 12\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_4 = 6\,\mathrm{k\Omega}, \quad R_5 = 2\,\mathrm{k\Omega}$$
$$i_A = 1\,\mathrm{mA}, \quad \alpha = 0.002$$



شکل 3.10: مثال 3.4 کا دور۔

حل: تمام جوڑ پر خارجی رو تصور کرتے ہوئے مساوات لکھتے ہیں۔

$$\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} + \frac{v_1 - v_3}{R_3} = i_A$$
$$\frac{v_2 - v_1}{R_2} + \alpha v_x + \frac{v_2 - v_3}{R_4} = 0$$
$$\frac{v_3 - v_1}{R_3} + \frac{v_3 - v_2}{R_4} + \frac{v_3}{R_5} = 0$$

اس میں $v_x = v_2 - v_3$ پُر کرتے اور مساوات کے اجزاء کو ترتیب دیتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right)v_1-\frac{v_2}{R_2}-\frac{v_3}{R_3}&=i_A\\
-\frac{v_1}{R_2}+\left(\frac{1}{R_2}+\alpha+\frac{1}{R_4}\right)v_2-(\alpha+\frac{1}{R_4})v_3&=0\\
-\frac{v_1}{R_3}-\frac{v_2}{R_4}+\left(\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}+\frac{1}{R_5}\right)v_3&=0
\end{aligned}
$$

دی گئی معلومات پُر کرتے ہیں

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{4000}+\frac{1}{8000}+\frac{1}{12000}\right)v_1-\frac{v_2}{8000}-\frac{v_3}{12000}&=0.001\\
-\frac{v_1}{8000}+\left(\frac{1}{8000}+0.002+\frac{1}{6000}\right)v_2-(0.002+\frac{1}{6000})v_3&=0\\
-\frac{v_1}{12000}-\frac{v_2}{6000}+\left(\frac{1}{12000}+\frac{1}{6000}+\frac{1}{2000}\right)v_3&=0
\end{aligned}
$$

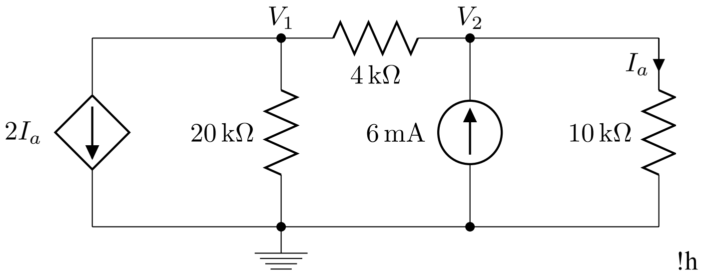
تینوں ہمزاد مساواتوں کو 1000 سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\frac{11v_1}{24}-\frac{v_2}{8}-\frac{v_3}{12}&=1\\
-\frac{v_1}{8}+\frac{55v_2}{24}-\frac{13v_3}{6}&=0\\
-\frac{v_1}{12}-\frac{v_2}{6}+\frac{3v_3}{4}&=0
\end{aligned}
$$

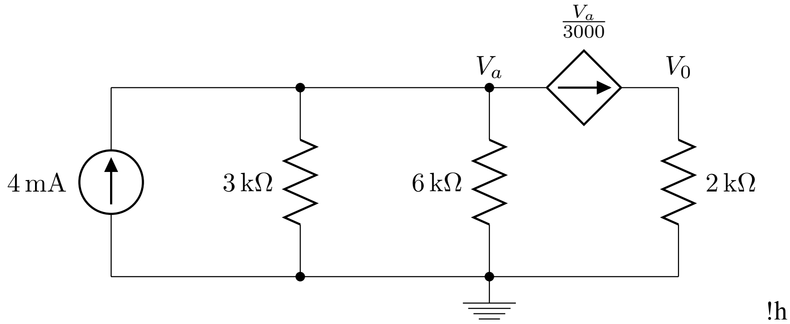
انہیں حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
v_1&=2.38\,\mathrm{V}\\
v_2&=0.48\,\mathrm{V}\\
v_3&=0.37\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

مشق 3.4: شکل 3.11 میں نامعلوم دباو جوڑ V_1 اور V_2 دریافت کریں۔



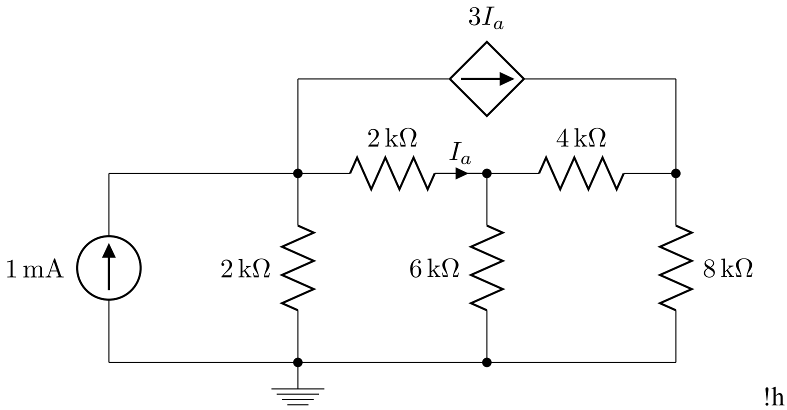
شکل 3.11: مشق 3.4 کا دور۔



شکل 3.12: مشق 3.5 کا دور۔

مشق 3.5: شکل 3.12 میں نامعلوم دباو جوڑ V_0 دریافت کریں۔

مشق 3.6: شکل 3.13 میں نامعلوم دباو جوڑ V_0 دریافت کریں۔



شکل 3.13: مشق 3.6 کا دور۔

3.4 غیر تابع منبع دباو استعمال کرنے والے ادوار

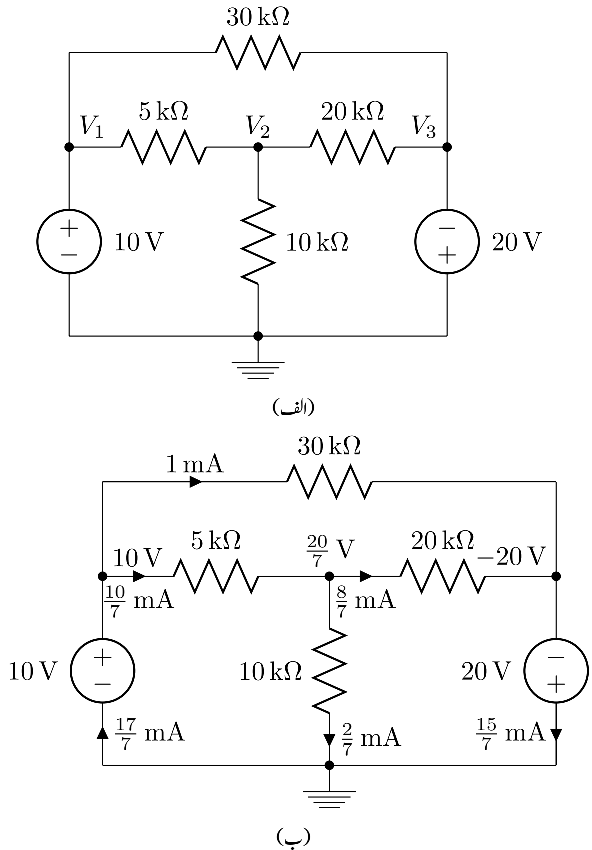
گزشتہ حصوں کی طرح اس حصے کو بھی سادہ ترین مثال سے شروع کرتے ہیں۔ بعد میں بتدریج مشکل مثال پیش کئے جائیں گے۔ سب سے پہلے ایک مثال کی مدد سے ایسے دور پر غور کرتے ہیں جس میں غیر تابع منبع دباو کا ایک سرا برقی زمین کے ساتھ جڑا ہو۔ ایسے ادوار نسبتاً آسانی سے حل ہوتے ہیں۔

مثال 3.5: شکل 3.14-الف کے دور میں دو عدد غیر تابع منبع دباو استعمال کئے گئے ہیں۔ دونوں منبع زمین کے ساتھ جڑے ہیں۔ بالائی بایاں جوڑ 10 V منبع دباو کے مثبت سرے کے ساتھ جڑا ہے جبکہ بالائی دایاں جوڑ 20 V منبع دباو کے منفی سرے کے ساتھ جڑا ہے لہٰذا

$$
\begin{aligned}
V_1 &= 10\,\mathrm{V} \\
V_2 &= -20\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

ہیں۔ بالائی درمیانے جوڑ پر کرخوف قانون رو کی مدد سے

$$\frac{V_2 - 10}{5000} + \frac{V_2}{10000} + \frac{V_2 - (-20)}{20000} = 0$$



شکل 3.14: مثال 3.5 کا دور۔

لکھا جا سکتا ہے جس سے

$$V_2 = \frac{20}{7}\,\mathrm{V}$$

حاصل ہوتا ہے۔

دباو جوڑ جاننے کے بعد تمام پرزوں میں رو دریافت کی جا سکتی ہے۔ یوں بالترتیب $5\,\mathrm{k\Omega}$ ، $10\,\mathrm{k\Omega}$ ، $20\,\mathrm{k\Omega}$ اور

$30\,\mathrm{k\Omega}$ کے مزاحمتوں میں اوہم کے قانون سے درج ذیل رو حاصل ہوتے ہیں

$$\frac{V_1 - V_2}{5000} = \frac{10 - \frac{20}{7}}{5000} = \frac{10}{7}\,\mathrm{mA}$$
$$\frac{V_2}{10000} = \frac{\frac{20}{7}}{10000} = \frac{2}{7}\,\mathrm{mA}$$
$$\frac{V_2 - V3}{20000} = \frac{\frac{20}{7} - (-20)}{20000} = \frac{8}{7}\,\mathrm{mA}$$
$$\frac{V_1 - V_3}{30000} = \frac{10 - (-20)}{30000} = 1\,\mathrm{mA}$$

جہاں تمام رو کی سمتیں بائیں سے دائیں جانب ہیں۔ جوڑ V_1 پر کرخوف قانون رو سے $10\,\mathrm{V}$ منبع کی خارجی رو درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$I_{10\,\mathrm{V}} = \frac{10}{7}\,\mathrm{mA} + 1\,\mathrm{mA} = \frac{17}{7}\,\mathrm{mA}$$

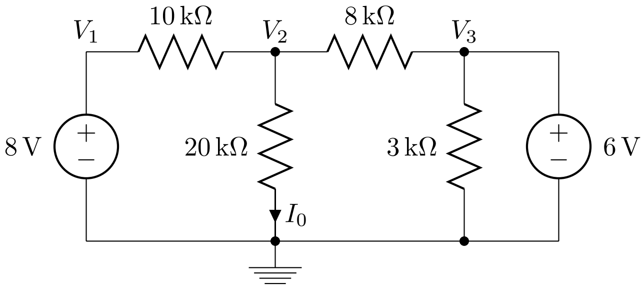
اسی طرح دائیں منبع دباو کے منفی سرے پر داخلی رو یا مثبت سرے سے خارجی رو درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$I_{20\,\mathrm{V}} = \frac{8}{7}\,\mathrm{mA} + 1\,\mathrm{mA} = \frac{15}{7}\,\mathrm{mA}$$

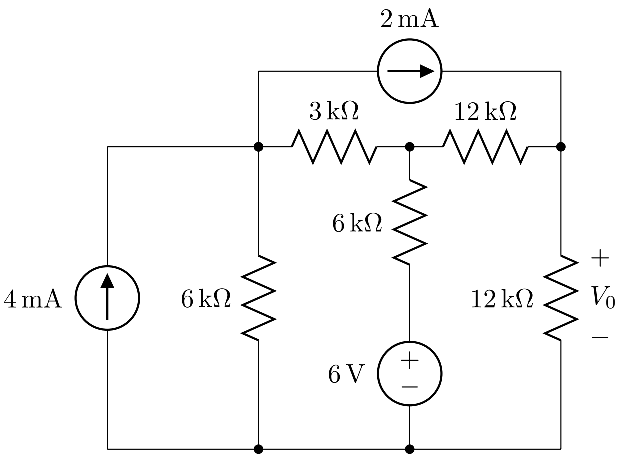
حاصل کردہ تمام رو کو شکل 3.14-ب میں دکھایا گیا ہے۔

مشق 3.7: شکل 3.15 میں I_0 حاصل کریں۔

مشق 3.8: شکل 3.16 میں V_0 دریافت کریں۔ یاد رہے کہ آپ کسی بھی جوڑ کو برقی زمین چن سکتے ہیں۔



شکل 3.15: مشق 3.7 کا دور۔



شکل 3.16: مشق 3.8 کا دور۔

آئیں اب ایسے دور کو حل کریں جس میں منبع دباو برقی زمین سے ہٹ کر دو جوڑوں کے درمیان جڑا ہو۔

مثال 3.6: شکل 3.17 میں $10\,\mathrm{V}$ کا منبع دباو زمین سے ہٹ کر دو جوڑوں کے درمیان نسب ہے۔ گزشتہ تمام مثالوں میں جوڑ پر رو یا تو منبع رو سے اخذ کی جا سکتیں تھیں اور یا انہیں مزاحمتی شاخ پر قانون اوہم لاگو کرتے ہوئے اخذ کیا جا سکتا تھا۔ موجودہ شکل میں جوڑ V_1 اور V_2 کے درمیان نہ تو منبع رو نسب ہے اور نہ ہی مزاحمت لہٰذا گزشتہ ترکیب یہاں قابل استعمال نہیں ہیں۔ آپ سے گزارش ہے کہ یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ دس وولٹ منبع دباو کی رو گزشتہ ترکیبوں سے دریافت نہیں کی جا سکتی۔

اب منبع دباو کی رو ہم نہ تو جانتے ہیں اور نہ ہی اسے کسی مساوات سے ظاہر کر سکتے ہیں لہٰذا جوڑ V_1 اور V_2 پر کرخوف قانون رو کے مساوات لکھنا ممکن نہیں ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ J متغیرات معلوم کرنے کی خاطر J ہمزاد مساوات درکار ہیں۔ آئیں دیکھیں کہ جوڑ V_1 اور V_2 پر کرخوف قانون رو نہ لکھ پانے کے باوجود ہم اتنی تعداد میں مساوات کس طرح لکھ پائیں گے۔

شکل 3.17-الف کو دیکھ کر

$$V_2 - V_1 = 10 \tag{3.32}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ اس کے علاوہ اسی شکل میں دکھائے شاخوں کے برقی رو استعمال کرتے ہوئے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$-8\,\mathrm{mA} + I_1 + I_m = 0 \tag{3.33}$$

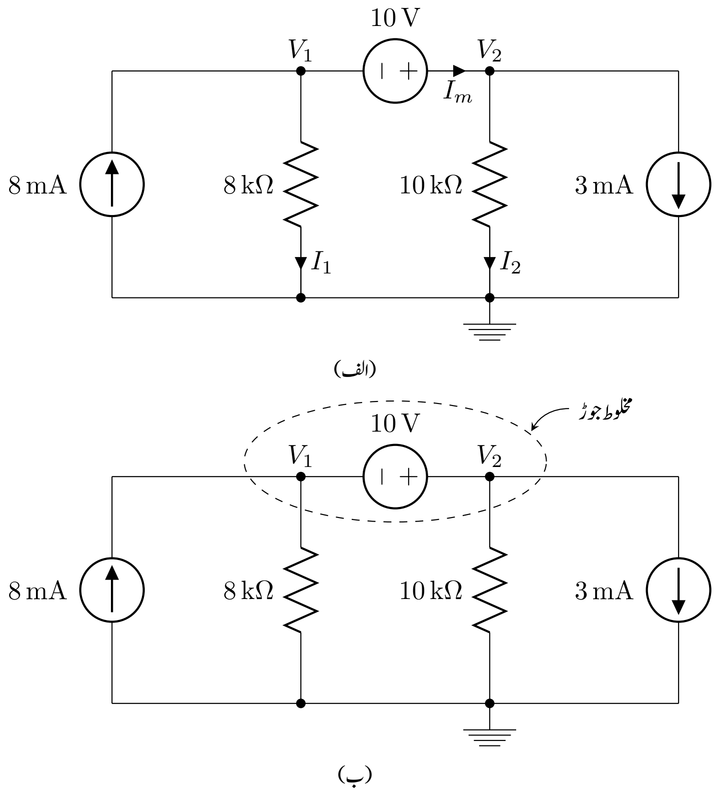
$$-I_m + I_2 + 3\,\mathrm{mA} = 0 \tag{3.34}$$

مساوات 3.33 اور مساوات 3.34 کے مجموعہ

$$-5\,\mathrm{mA} + I_1 + I_2 = 0 \tag{3.35}$$

میں قانون اوہم کے استعمال سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$-8\,\mathrm{mA} + \frac{V_1}{8\,\mathrm{k\Omega}} + \frac{V_2}{10\,\mathrm{k\Omega}} + 3\,\mathrm{mA} = 0 \tag{3.36}$$



شکل 3.17: مثال 3.6 کا دور۔

مساوات 3.32 اور مساوات 3.36 درکار ہمزاد مساوات ہیں جنہیں حل کرنے سے

$$
\begin{aligned}
V_1 &= 240\,\mathrm{V}\\
V_2 &= 250\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔

ہم پہلے دیکھ چکے ہیں کہ کسی بھی جوڑ پر کرخوف قانون رو لکھتے ہوئے تمام مزاحمتی شاخوں میں رو کی سمت خارجی تصور کی جا سکتی ہے۔ یہاں اس بات کا خیال رکھنا ضروری ہے کہ دو جوڑوں کے مابین نسب منبع دباو کی رو کو دونوں جوڑوں پر خارجی تصور نہیں کیا جا سکتا۔ منبع دباو کے رو کی کوئی بھی سمت چننے کے بعد دونوں جوڑوں پر کرخوف قانون رو لکھتے ہوئے منبع دباو کے رو کی سمت چننی گئی سمت ہی تصور کی جائے گی۔

مساوات 3.36 کے حصول میں ہمیں مساوات 3.33، مساوات 3.34 اور مساوات 3.35 بھی لکھنے پڑھ گئے۔ آئیں ان اضافی مساوات کے لکھنے سے چھٹکارا حاصل کریں۔

شکل 3.17-ب میں زمین سے ہٹ کر دو جوڑوں کے مابین نسب منبع دباو کے گرد نقطہ دار دائرہ کھینچا گیا ہے۔ اس بند دائرے کو **مخلوط جوڑ**[5] کہا جاتا ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ کرخوف قانون رو بند دائرے پر بھی لاگو ہوتا ہے لہٰذا اس بند دائرے میں مجموعی داخلی رو اور مجموعی خارجی رو برابر ہوں گے۔ شکل-ب میں مخلوط جوڑ سے تمام مزاحمتی شاخوں کے رو کی سمت خارجی تصور کرتے ہوئے

$$
-8\,\mathrm{mA} + \frac{V_1}{8\,\mathrm{k\Omega}} + \frac{V_2}{10\,\mathrm{k\Omega}} + 3\,\mathrm{mA} = 0 \tag{3.37}
$$

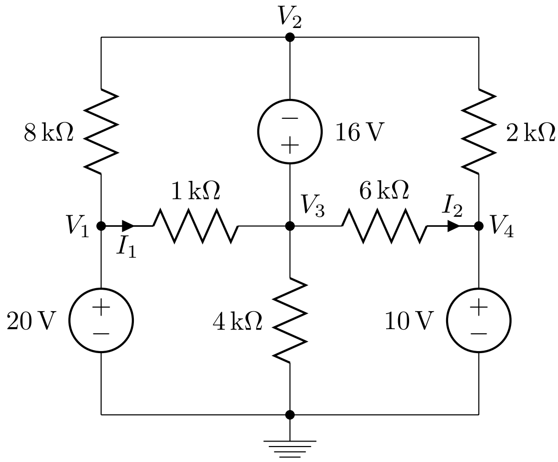
لکھا جا سکتا ہے جو مساوات 3.36 ہی ہے۔ یاد رہے کہ دور حل کرنے کی خاطر مخلوط جوڑ کے دونوں جانب دباو کا تعلق

$$
V_2 - V_1 = 10 \tag{3.38}
$$

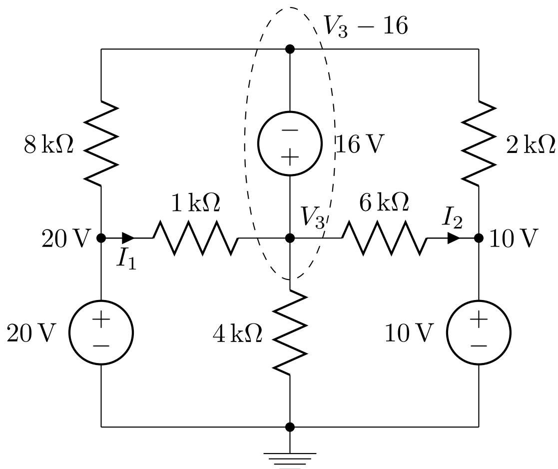
بھی درکار ہے۔

مثال 3.7: شکل 3.18-الف میں I_1 اور I_2 دریافت کریں۔

[5] super node



(الف)



(ب)

شکل 3.18: مثال 3.6 کا دور۔

حل: شکل 3.18-ب میں مخلوط جوڑ کو نقطہ دار دائرے میں گھیرا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ مخلوط جوڑ کے سروں کے مابین دباو کے تعلق

$$V_3 - V_2 = 16$$

کو استعمال کرتے ہوئے بالائی جوڑ کے دباو کو نچلے جوڑ کے دباو کی صورت میں

$$V_2 = V_3 - 16$$

لکھا گیا ہے۔ ہم بالائی جوڑ کے دباو کو V_2 ہی لکھتے ہوئے نچلے جوڑ کے دباو کو $V_3 = V_2 + 16$ لکھ سکتے تھے۔ شکل 3.18-ب کو دیکھ کر درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} V_1 &= 20\,\text{V} \\ V_4 &= 10\,\text{V} \end{aligned}$$

یوں صرف V_3 نامعلوم دباو ہے۔ کرخوف قانون رو استعمال کرتے ہوئے مخلوط جوڑ یعنی نقطہ دار دائرے کے لئے

$$\frac{(V_3-16)-20}{8\,\text{k}\Omega} + \frac{(V_3-16)-10}{2\,\text{k}\Omega} + \frac{V_3-20}{1\,\text{k}\Omega} + \frac{V_3-10}{6\,\text{k}\Omega} + \frac{V_3}{4\,\text{k}\Omega} = 0$$

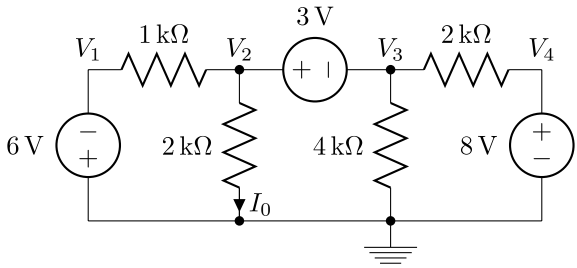
لکھا جا سکتا ہے جہاں تمام رو کی سمت خارجی چننی گئی ہے۔ اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$V_3 = 20\,\text{V}$$

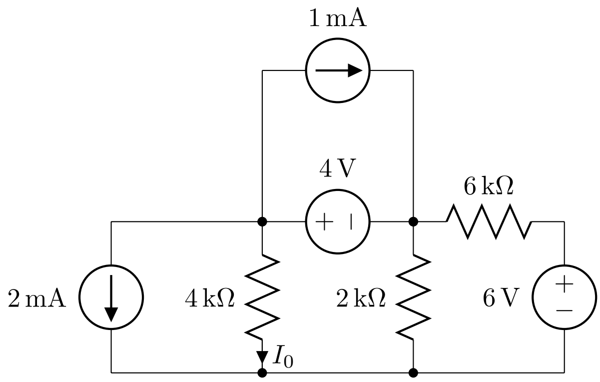
یوں درکار رو درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{V_1 - V_3}{1\,\text{k}\Omega} = \frac{20-20}{1\,\text{k}\Omega} = 0\,\text{A} \\ I_2 &= \frac{V_3 - V_4}{6\,\text{k}\Omega} = \frac{20-10}{6\,\text{k}\Omega} = \frac{5}{3}\,\text{mA} \end{aligned}$$

مشق 3.9: شکل 3.19 میں I_0 دریافت کریں۔



شکل 3.19: مشق 3.9 کا دور۔

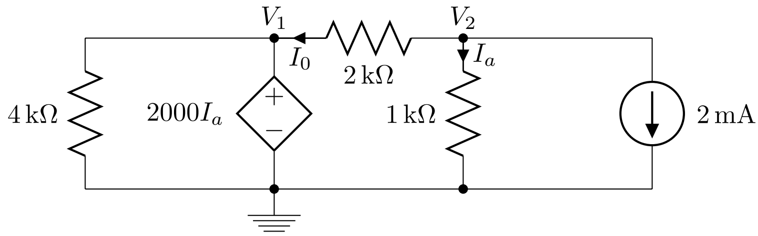


شکل 3.20: مشق 3.10 کا دور۔

جواب: $\frac{49}{18}$ mA

مشق 3.10: شکل 3.20 میں I_0 دریافت کریں۔

جواب: $\frac{5}{11}$ mA



شکل 3.21: مثال 3.8 کا دور۔

3.5 تابع منبع دباو استعمال کرنے والے ادوار

تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار کو بھی مندرجہ بالا طریقوں سے حل کیا جاتا ہے۔آئیں چند مثال دیکھیں۔

مثال 3.8: شکل 3.21 میں I_0 حاصل کریں۔

حل: چونکہ جوڑ V_1 تابع منبع دباو سے جڑا ہے لہٰذا

$$V_1 = 2000I_a$$

ہو گا جہاں

$$I_a = \frac{V_2}{1\,\mathrm{k\Omega}}$$

ہے۔ جوڑ V_2 پر کرخوف قانون رو سے درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$2\,\mathrm{mA} + \frac{V_2 - V_1}{2\,\mathrm{k\Omega}} + I_a = 0$$

انہیں حل کرنے سے

$$V_2 = -4\,\mathrm{V}$$
$$V_1 = -8\,\mathrm{V}$$
$$I_a = -4\,\mathrm{mA}$$

حاصل ہوتے ہیں للہذا

$$I_0 = \frac{(-4) - (-8)}{2\,\mathrm{k\Omega}} = 2\,\mathrm{mA}$$

ہو گی۔

مثال 3.9: شکل 3.22 میں تابع منبع مخلوط جوڑ کے مابین نسب ہے۔اس دور میں V_0 حاصل کریں۔

حل: شکل 3.22-ب میں جوڑ V_1 ، V_2 ، V_3 اور V_4 کی نشاندہی کی گئی ہے۔مخلوط جوڑ کے نچلے سرے پر V_1 دباو کی بدولت اس کے بالائی سرے پر $V_1 + 3V_a$ دباو لکھا گیا ہے۔مخلوط جوڑ پر کرخوف قانون رو سے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\frac{V_1 + 3V_a}{4000} - 0.002 + \frac{V_1}{2000} + \frac{V_1 - V_2}{6000} = 0$$

اسی طرح $V_4 = 5\,\mathrm{V}$ لیتے ہوئے بالترتیب V_2 اور V_3 جوڑ کے لئے کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں۔

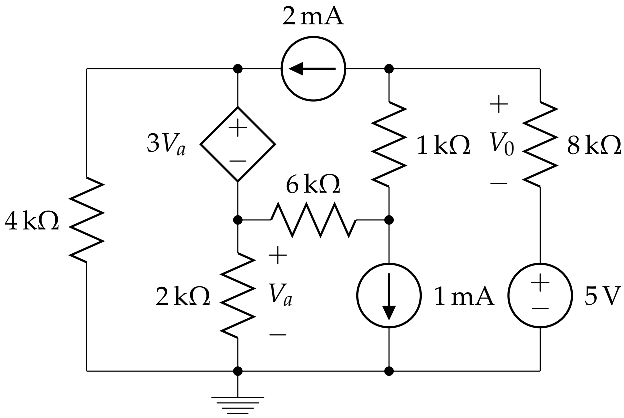
$$\begin{aligned}\frac{V_2 - V_1}{6000} + 0.001 + \frac{V_2 - V_3}{1000} &= 0\\ 0.002 + \frac{V_3 - V_2}{1000} + \frac{V_3 - 5}{8000} &= 0\end{aligned}$$

مخلوط جوڑ کے مساوات میں $V_a = V_1$ پر کرتے ہوئے مندرجہ بالا تین مساوات کو ایک ساتھ لکھتے ہیں۔

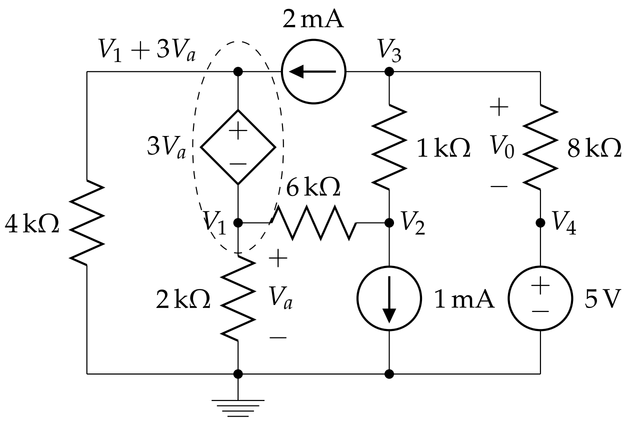
$$\begin{aligned}10V_1 - V_2 &= 12\\ -V_1 + 7V_2 - 6V_3 &= -6\\ -8V_2 + 9V_3 &= -11\end{aligned}$$

ان تین ہمزاد مساوات کو حل کرنے سے

$$\begin{aligned}V_1 &= \frac{20}{47}\,\mathrm{V}\\ V_2 &= -\frac{364}{47}\,\mathrm{V}\\ V_3 &= -\frac{381}{47}\,\mathrm{V}\end{aligned}$$



(الف)



(ب)

شکل 3.22: مثال 3.9 کا دور۔

حاصل ہوتا ہے۔ یوں

$$V_0 = V_3 - V_4 = -\frac{616}{47}\,\mathrm{V}$$

ہو گا۔

مثال 3.10: شکل 3.23-الف میں I_0 دریافت کریں۔

حل: شکل 3.23-ب میں نچلے جوڑ کو زمین چنتے ہوئے بقایا جوڑوں کی نشاندہی کی گئی ہے۔ مخلوط جوڑوں کو نقطہ دار چکور سے ظاہر کیا گیا ہے۔ یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ آپ مخلوط جوڑ کو پہچان سکتے ہیں۔ مخلوط جوڑ کے نچلے بائیں اور دائیں سروں کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} V_4 - V_2 &= 3V_b \\ V_5 - V_2 &= 4 \end{aligned}$$

جن سے

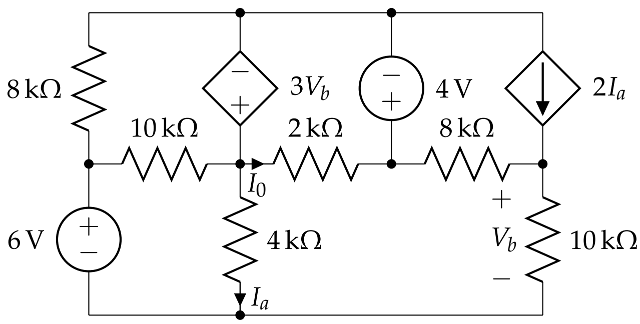
$$\begin{aligned} V_4 &= V_2 + 3V_b \\ V_5 &= V_2 + 4 \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے

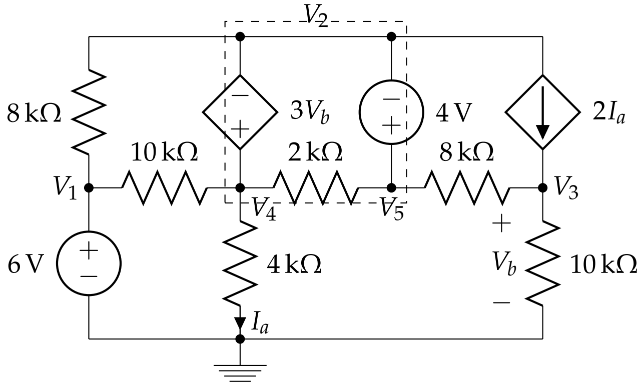
$$V_1 = 6$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ جوڑ V_2 اور V_3 کے کرخوف مساوات رو بالترتیب لکھتے ہیں جہاں V_2 کی مساوات در حقیقت مخلوط جوڑ کی مساوات رو ہے۔

$$\begin{aligned} \frac{V_2 - 6}{8000} + \frac{(V_2 + 3V_b) - 6}{10000} + \frac{(V_2 + 3V_b)}{4000} + \frac{(V_2 + 4) - V_3}{8000} + 2I_a &= 0 \\ -2I_a + \frac{V_3 - (V_2 + 4)}{8000} + \frac{V_3}{10000} &= 0 \end{aligned}$$



(الف)



(ب)

شکل 3.23: مثال 3.10 کا دور۔

مندرجہ بالا دو مساوات میں درج ذیل پر کرتے

$$V_b = V_3$$
$$I_a = \frac{V_2 + 3V_b}{4000} = \frac{V_2 + 3V_3}{4000}$$

ہوئے

$$\frac{V_2 - 6}{8000} + \frac{(V_2 + 3V_3) - 6}{10000} + \frac{(V_2 + 3V_3)}{4000} + \frac{(V_2 + 4) - V_3}{8000} + 2\left(\frac{V_2 + 3V_3}{4000}\right) = 0$$
$$-2\left(\frac{V_2 + 3V_3}{4000}\right) + \frac{V_3 - (V_2 + 4)}{8000} + \frac{V_3}{10000} = 0$$

یعنی

$$44V_2 + 97V_3 = 34$$
$$50V_2 + 102V_3 = -40$$

حاصل ہوتے ہیں جنہیں حل کرنے سے درج ذیل ملتے ہیں۔

$$V_2 = -\frac{3674}{181}\,\mathrm{V}$$
$$V_3 = \frac{1730}{181}\,\mathrm{V}$$

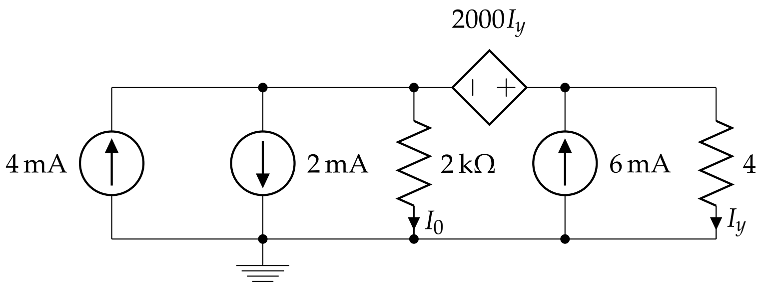
یوں

$$I_0 = \frac{V_4 - V_5}{2000} = \frac{149}{12}\,\mathrm{mA}$$

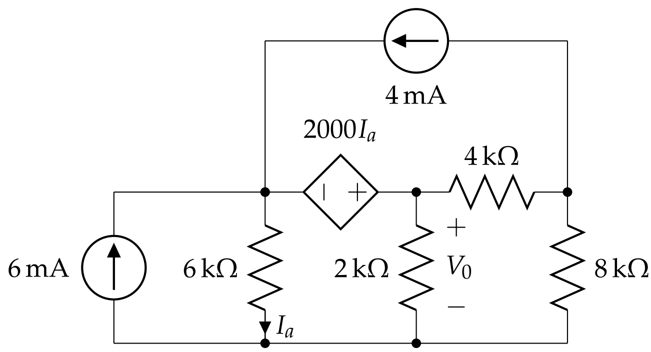
حاصل ہوتی ہے۔

مشق 3.11: شکل 3.24 میں I_0 حاصل کریں۔

جواب: $4\,\mathrm{mA}$



شکل 3.24: مشق 3.11 کا دور۔



شکل 3.25: مشق 3.12 کا دور۔

مشق 3.12: شکل 3.25 میں V_0 حاصل کریں۔

جواب: $\frac{176}{17}$ V

3.6 دائری تجزیہ

تجزیہ جوڑ میں نا معلوم متغیرات دباو جوڑ تھے جنہیں کرخوف قانون رو کی مدد سے حاصل کیا گیا۔جوڑ کے دباو جاننے کے بعد شاخوں کی رو کو قانون اوہم سے حاصل کیا گیا۔اس کے برعکس **دائری ترکیب**[6] میں کرخوف قانون دباو کی مدد سے **دائری رو**[7] دریافت کئے جاتے ہیں۔دائری رو جانتے ہوئے کسی بھی شاخ کا دباو قانون اوہم سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ایسا دور جس میں J جوڑ اور S شاخ پائے جاتے ہوں سے $S-J+1$ آزاد مساوات بذریعہ کرخوف قانون دباو حاصل کئے جا سکتے ہیں۔شکل 3.26 کو مثال بناتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ اس میں $J=5$ اور $S=8$ ہیں لہٰذا اس سے $8-5+1=4$ آزاد مساوات حاصل کئے جا سکتے ہیں جن سے دائری رو i_A ، i_B ، i_C اور i_D حاصل ہوں گے۔دائری رو جانتے ہوئے شاخوں کی رو درج ذیل لکھی جا سکتی ہیں۔

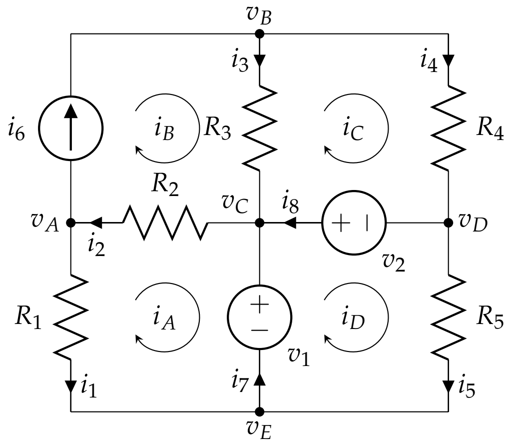
$$
\begin{aligned}
i_1 &= -i_A \\
i_2 &= i_B - i_A \\
i_3 &= i_B - i_C \\
i_4 &= i_C \\
i_5 &= i_D \\
i_6 &= i_B \\
i_7 &= i_D - i_A
\end{aligned}
$$

اس کتاب میں صرف **سطحی ادوار**[8] پر غور کیا جائے گا۔ سطحی دور سے مراد ایسا دور ہے جسے کاغذ پر یوں بنایا جا سکتا ہو کہ کوئی تار دوسری تار کو نہ کاٹے۔ سطحی ادوار میں دائروں کی نشاندہی نسبتاً آسان ہوتی ہے۔دائری ترکیب میں دائری رو یوں چُنی جاتی ہیں کہ تمام شاخوں سے کم از کم ایک دائری رو گزرے، مزید یہ کہ ہر دائری رو کم از کم ایک ایسے شاخ سے گزرے جس سے کوئی دوسری دائری رو نہ گزرتی ہو۔

آئیں دائری ترکیب کو چند مثالوں کی مدد سے سمجھیں۔

---

[6] loop analysis
[7] loop current
[8] planar circuits



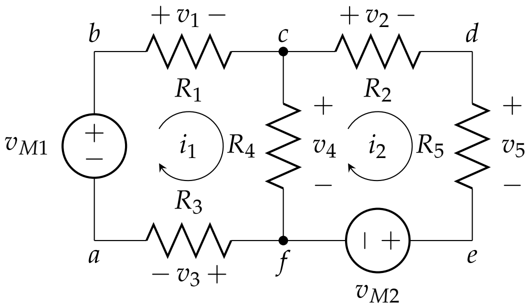
شکل 3.26: دائری ترکیب کی مثال۔

3.7 غیر تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار

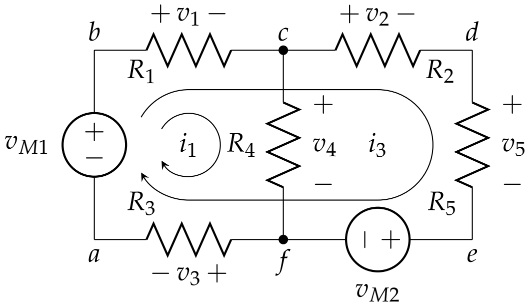
شکل 3.27 میں دو عدد غیر تابع منبع دباو استعمال کئے گئے ہیں۔اس دور میں سات شاخ اور چھ جوڑ ہیں لہٰذا دور میں تمام نا معلوم دائری رو دریافت کرنے کی خاطر $2 = 1 + 6 - 7$ غیر تابع مساوات درکار ہیں جنہیں کرخوف قانون دباو سے حاصل کیا جائے گا۔چونکہ دو عدد دائری رو درکار ہیں لہٰذا ہم دو عدد دائرے چنتے ہیں۔ہم ان دائروں کو مختلف انداز میں چن سکتے ہیں۔یوں ہم پہلا دائرہ $abcfa$ اور دوسرا دائرہ $cdefc$ چن سکتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے دائری رو i_1 اور i_2 ہوں گے جنہیں شکل 3.27-الف میں دکھایا گیا ہے۔ یہاں ہم نے دونوں دائری رو کو گھڑی کی سمت تصور کیا ہے۔حقیقت میں آپ دونوں رو کو گھڑی کے الٹ بھی تصور کر سکتے ہیں اور ایسا بھی کر سکتے ہیں کہ ایک دائری رو گھڑی کی سمت اور دوسری رو گھڑی کی الٹ تصور کی جائے۔ترکیب جوڑ کی طرح یہاں بھی اگر حقیقت میں کسی رو کی سمت تصور کردہ سمت کے الٹ ہو تو ایسی صورت میں رو کی قیمت منفی حاصل ہو گی۔اس کتاب میں ہم دائری رو کو گھڑی کی سمت ہی تصور کریں گے۔ اسی طرح ہم دو عدد دائرے یوں بھی چن سکتے ہیں کہ پہلا دائرہ $abcfa$ اور دوسرا دائرہ $abdea$ لیں جن سے شکل 3.27-ب میں دکھائے دائری رو ملتے ہیں۔ہم باری باری شکل 3.27-الف اور شکل 3.27-ب کو حل کرتے ہیں۔

شکل 3.27-الف میں دونوں دائروں پر کرخوف قانون دباو سے درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
-v_{M1} + v_1 + v_4 + v_3 &= 0 \\
-v_4 + v_2 + v_5 + v_{M2} &= 0
\end{aligned}
\tag{3.39}
$$



(الف)



(ب)

شکل 3.27: غیر تابع منبع دباو استعمال کرنے والا دور۔

قانون اوہم سے دباو شاخ درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں

$$
\begin{aligned}
v_1 &= i_1 R_1 \\
v_2 &= i_2 R_2 \\
v_3 &= i_1 R_3 \\
v_4 &= (i_1 - i_2) R_4 \\
v_5 &= i_2 R_5
\end{aligned}
$$

جنہیں مساوات 3.39 میں پر کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
i_1(R_1 + R_3 + R_4) - i_2 R_4 &= v_{M1} \\
-i_1 R_4 + i_2(R_2 + R_4 + R_5) &= -v_{M2}
\end{aligned}
$$

اس کو قالبی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$
\begin{bmatrix} R_1 + R_3 + R_4 & -R_4 \\ -R_4 & R_2 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{M1} \\ -v_{M2} \end{bmatrix} \tag{3.40}
$$

شکل 3.26 یا شکل 3.27-الف بالکل ماہی گیر کے جال کی مانند ہیں جسے مچھلیاں پکڑنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ان اشکال میں ہر خانے میں دائری رو چننی گئی ہے۔اس کے بر عکس شکل 3.27-ب میں i_3 کو یوں چنا گیا ہے کہ یہ i_1 کو بھی لپیٹتی ہے۔اس کتاب میں انفرادی خانے کی رو ہی چنتے ہوئے ادوار حل کئے جائیں گے۔

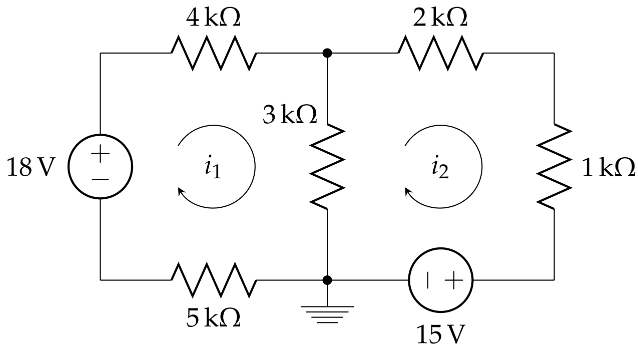
مثال 3.11: شکل 3.28-الف میں دائری رو دریافت کرتے ہوئے تمام شاخوں کی رو اور دباو حاصل کریں۔

حل: کرخوف قانون دباو کی مدد سے بالترتیب بائیں اور دائیں خانوں کے لئے درج ذیل لکھتے ہیں۔

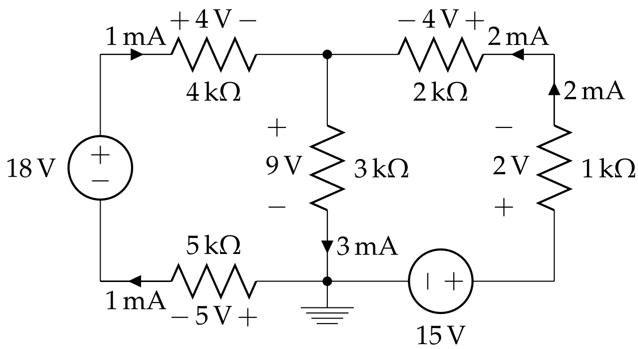
$$
\begin{aligned}
-18 + 4000 i_1 + 3000(i_1 - i_2) + 5000 i_1 &= \\
3000(i_2 - i_1) + 2000 i_2 + 1000 i_2 + 15 &= 0
\end{aligned}
$$

انہیں ترتیب دیتے ہوئے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
12000 i_1 - 3000 i_2 &= 18 \\
-3000 i_1 + 6000 i_2 &= -15
\end{aligned}
$$

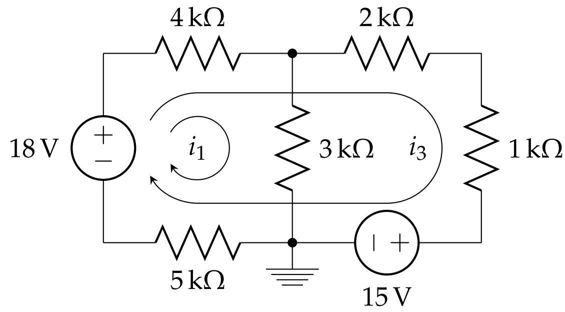


(الف)



(ب)

شکل 3.28: غیر تابع منبع دباو استعمال کرنے والا دور کی مثال۔



شکل 3.29: ہر خانے کی علیحدہ رو تصور نہیں کرتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

کسی بھی ترکیب سے ان ہمزاد مساوات کو حل کیا جا سکتا ہے۔حاصل جوابات درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} i_1 &= 1\,\text{mA} \\ i_2 &= -2\,\text{mA} \end{aligned}$$

چونکہ i_2 کی قیمت منفی ہے لہٰذا حقیقت میں دائیں خانے میں رو کی سمت چننی گئی سمت کے الٹ ہے۔ان قیمتوں کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔کسی بھی مزاحمت کا دباو قانون اوہم سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔تمام مزاحمتوں کے دباو شکل-ب میں دکھائے گئے ہیں۔امید کی جاتی ہے کہ آپ انہیں حاصل کر پائیں گے۔

مثال 3.12: شکل 3.29 کو حل کرتے ہوئے تمام شاخوں کی رو دریافت کریں۔

حل: بائیں خانے کے لئے کرخوف قانون دباو سے

$$-18 + 4000(i_1 + i_2) + 3000 i_1 + 5000(i_1 + i_2) = 0$$

لکھا جا سکتا ہے۔بیرونی دائرے کے لئے درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$-18 + 4000(i_1 + i_2) + 2000 i_2 + 1000 i_2 + 15 + 5000(i_1 + i_2) = 0$$

ان میں رو کو ترتیب سے لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
12000i_1 + 9000i_2 &= 18 \\
9000i_1 + 12000i_2 &= 3
\end{aligned}
$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتی ہیں۔

$$
\begin{aligned}
i_1 &= 3\,\mathrm{mA} \\
i_2 &= -2\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

آپ گزشتہ مثال کے جوابات کے ساتھ موازنہ کر سکتے ہیں مثلاً بالائی $4\,\mathrm{k\Omega}$ میں $3\,\mathrm{mA} - 2\,\mathrm{mA} = 1\,\mathrm{mA}$ اور درمیانے $3\,\mathrm{k\Omega}$ میں $3\,\mathrm{mA}$ رو پائے جاتے ہیں۔

مندرجہ بالا دو مثالوں میں ایک ہی دور میں دو مختلف طرز کے رو چنتے ہوئے حل کیا گیا۔دونوں حاصل جواب یکساں حاصل ہوئے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ حاصل جواب چننی گئی رو پر منحصر نہیں ہے۔

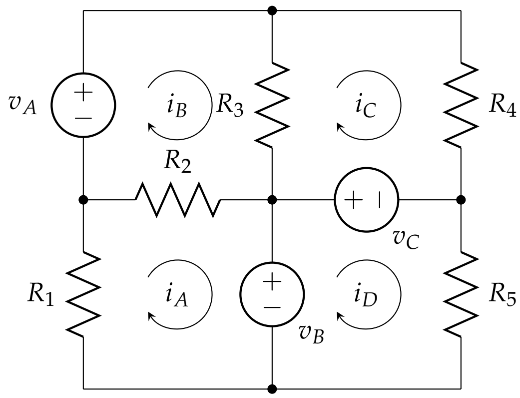
مثال 3.13: شکل 3.30 کے کرخوف مساوات دباو کو قالبی صورت میں لکھیں۔

حل: ہم بالترتیب i_A، i_B i_C اور i_D کو استعمال کرتے ہوئے درج ذیل مساوات لکھ سکتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
i_A R_1 + (i_A - i_B) R_2 + v_B &= 0 \\
-v_A + (i_B - i_C) R_3 + (i_B - i_A) R_2 &= 0 \\
(i_C - i_B) R_3 + i_C R_4 - v_C &= 0 \\
-v_B + v_C + i_D R_5 &= 0
\end{aligned}
$$

انہیں ترتیب دیتے ہوئے دوبارہ لکھتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
i_A (R_1 + R_2) - i_B R_2 &= -v_B \\
-i_A R_2 + i_B (R_2 + R_3) - i_C R_3 &= v_A \\
-i_B R_3 + i_C (R_3 + R_4) &= v_C \\
i_D R_5 &= v_B - v_C
\end{aligned}
$$



شکل 3.30: دائری ترکیب کی مثال۔

قالبی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3 & -R_3 & 0 \\ 0 & -R_3 & R_3+R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_D \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -v_B \\ v_A \\ v_C \\ v_B-v_C \end{bmatrix}
$$

مندرجہ بالا قالبی مساوات میں پہلی صف (یعنی بالائی صف) کا پہلا جزو (یعنی بایاں جزو) ان مزاحمتوں کا مجموعہ ہے جن سے i_A گزرتی ہے یعنی R_1+R_2 جبکہ اسی پہلی صف کا دوسرا جزو ان مزاحمتوں کے مجموعے کا منفی ہے جن سے i_A اور i_B دونوں گزرتی ہیں۔اسی طرح تیسرا جزو i_A اور i_C کا مشترکہ مزاحمتوں کا منفی ہے۔چونکہ موجودہ دور میں ایسا کوئی مزاحمت نہیں پایا جاتا جن سے i_A اور i_C دونوں گزرتی ہوں لٰہذا یہ جزو صفر کے برابر ہے۔اسی طرح پہلی صف کا چوتھا جزو i_A اور i_D کے مشترک مزاحمتوں کے مجموعے کے منفی کے برابر ہے جو موجودہ دور میں صفر کے برابر ہے۔ قالب کے دوسرے صف کا پہلا جزو i_B اور i_A کے مشترکہ مزاحمتوں کے مجموعے کا منفی ہے۔دوسرے صف کا دوسرا جزو ان مزاحمتوں کا مجموعہ ہے جن سے i_B گزرتی ہے جبکہ صف کا تیسرا جزو i_B اور i_C کے مشترک مزاحمتوں کے مجموعے کا منفی ہے۔اسی ترکیب سے تیسرا صف i_C کے مطابق اور چوتھا صف i_D کے مطابق لکھا جاتا ہے۔ قالبی مساوات کا دایاں ہاتھ بالترتیب i_A ، i_B ، i_C اور i_D کی سمت میں گھومتے ہوئے منبع دباو کے مجموعی دباو میں اضافے کے برابر ہے۔چونکہ i_A کی سمت میں گھومتے ہوئے صرف منبع v_B سے گزرا جاتا ہے اور گھومنے کی سمت

میں منبع کا دباو گھٹتا ہے لہٰذا قالبی مساوات کے بائیں ہاتھ پہلا جزو $-v_B$ لکھا جائے گا۔آپ سے گزارش ہے کہ یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ آپ قالبی مساوات کے تمام اجزاء یوں لکھ سکتے ہیں۔

اگر تمام خانوں میں، ایک ہی سمت میں گھومتی انفرادی دائری رو تصور کی جائے تب عمومی قالبی مساوات درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$
\begin{bmatrix}
R_{11} & -R_{12} & -R_{13} & \cdots - R_{1m} \\
-R_{21} & R_{22} & -R_{23} & \cdots - R_{2m} \\
-R_{31} & -R_{32} & R_{33} & \cdots - R_{3m} \\
\vdots & & & \\
-R_{m1} & -R_{m2} & -R_{m3} & \cdots R_{mm}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ \vdots \\ i_m \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix}
\tag{3.41}
$$

اس عمومی قالبی مساوات میں بائیں ہاتھ مزاحمتی قالب کے بالائی بائیں کونے سے نچلی دائیں کونے تک ترچھی لکیر پر پائے جانے والے اجزاء مثبت ہیں جبکہ بقایا تمام منفی ہیں۔اس مساوات میں R_{11} سے مراد ان مزاحمتوں کا مجموعہ ہے جن سے i_1 گزرتی ہے جبکہ R_{12} ان مزاحمتوں کا مجموعہ ہے جن سے i_1 اور i_2 دونوں گزرتی ہیں۔تمام خانوں میں رو کی سمت یکساں ہونے کی صورت میں دو پڑوسی خانوں کے مشترک شاخ میں پڑوسی رو الٹ سمت میں پائی جاتی ہے۔

مثال 3.14: شکل 3.31 میں نامعلوم رو حاصل کریں۔

حل: آئیں شکل کو دیکھ کر قالبی مساوات لکھیں۔

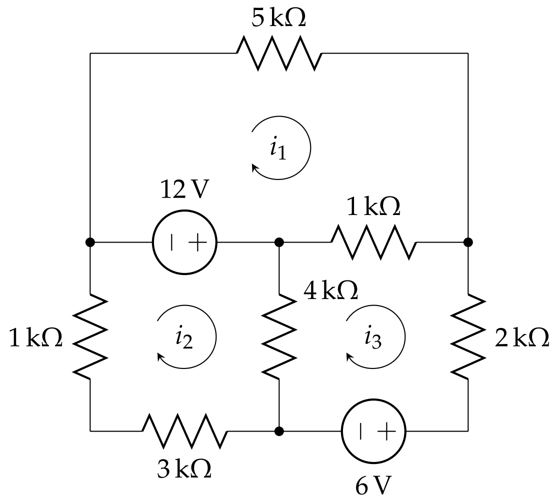
$$
\begin{bmatrix}
5\,\mathrm{k\Omega} + 1\,\mathrm{k\Omega} & 0 & -1\,\mathrm{k\Omega} \\
0 & 3\,\mathrm{k\Omega} + 1\,\mathrm{k\Omega} + 4\,\mathrm{k\Omega} & -4\,\mathrm{k\Omega} \\
-4\,\mathrm{k\Omega} & -1\,\mathrm{k\Omega} & 4\,\mathrm{k\Omega} + 1\,\mathrm{k\Omega} + 2\,\mathrm{k\Omega}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -12\,\mathrm{V} \\ 12\,\mathrm{V} \\ -6\,\mathrm{V} \end{bmatrix}
$$

اسے یوں لکھتے ہوئے

$$
\begin{bmatrix}
6000 & 0 & -1000 \\
0 & 8000 & -4000 \\
-4000 & -1000 & 7000
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} -12 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix}
$$

یہ عمومی قالبی مساوات

$$
\mathbf{RI} = \mathbf{V}
$$



شکل 3.31: مثال 3.14 کا دور۔

ہے جس کا حل

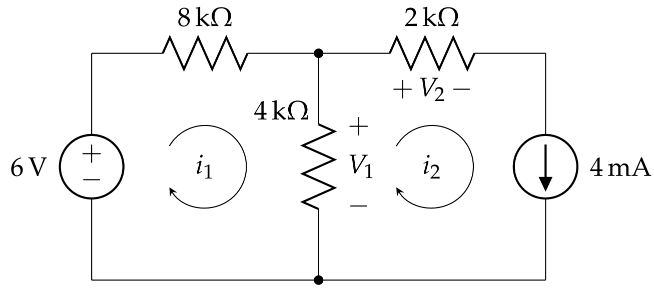
$$\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{V}$$

ہے۔ قالبی مساوات کو حل کرنے سے دائری رو درج ذیل حاصل ہوتی ہیں۔

$$\begin{aligned}
i_1 &= -\frac{33}{14}\,\text{mA} \\
i_2 &= \frac{3}{7}\,\text{mA} \\
i_3 &= \frac{15}{7}\,\text{mA}
\end{aligned}$$

3.8 غیر تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار

منبع دباو کی موجودگی سے ترکیب جوڑ کا استعمال نسبتاً آسان ہو جاتا ہے۔ بالکل اسی طرح منبع رو کی موجودگی سے دائری ترکیب کا استعمال نسبتاً آسان ہو جاتا ہے۔ آئیں یہ حقیقت چند مثال حل کرتے ہوئے دیکھیں۔



شکل 3.32: منبع رو سے دائری ترکیب نسبتاً آسان ہو جاتی ہے۔

مثال 3.15: شکل 3.32 میں V_1 اور V_2 دائری ترکیب استعمال کرتے ہوئے حاصل کریں۔

حل: ایسا معلوم ہوتا ہے کہ دو عدد نا معلوم دائری رو i_1 اور i_2 پائے جاتے ہیں۔ حقیقت میں i_2 منبع رو سے گزرتی ہے للہذا اس کی قیمت کا تعین منبع رو ہی کرتی ہے یعنی

$$i_2 = 4\,\mathrm{mA}$$

ہے۔ اس طرح بغیر حل کئے قانون اوہم کی مدد سے

$$V_2 = 2000 i_2 = 8\,\mathrm{V}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ بائیں خانے سے درج ذیل لکھا جاتا ہے

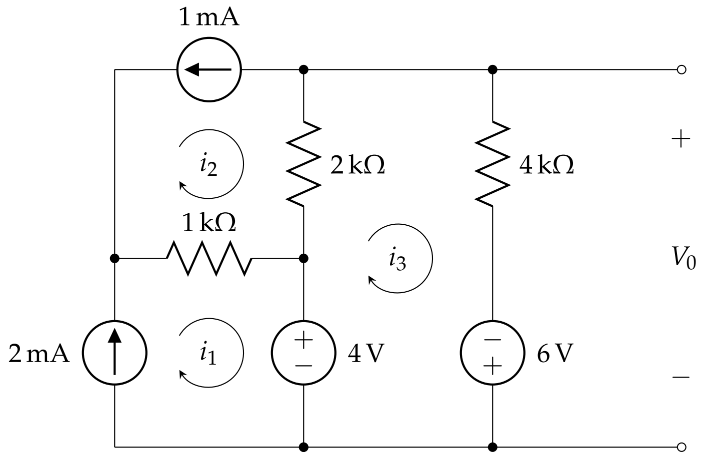
$$-6 + 8000 i_1 + 4000(i_1 - i_2) = 0$$

جس میں $i_2 = 4\,\mathrm{mA}$ پُر کرتے ہوئے

$$i_1 = \frac{11}{6}\,\mathrm{mA}$$

اور

$$V_1 = 4000(i_1 - i_2) = -\frac{26}{3}\,\mathrm{V}$$



شکل 3.33: زیادہ منبع رو سے دائری ترکیب زیادہ آسان ہو سکتی ہے۔

حاصل ہوتے ہیں۔

آپ نے دیکھا کہ ایک عدد منبع رو کی وجہ سے نا معلوم رو کی تعداد دو عدد سے کم ہر کر ایک عدد رہ گئی۔

مثال 3.16: شکل 3.33 میں V_0 دریافت کریں۔

حل: چونکہ i_1 اور i_2 منبع رو سے گزرتی ہیں لہٰذا ان کی قیمت لازمی طور پر انہیں منبع کی رو کے برابر ہوں گی۔ یاد رہے کہ منبع رو سے کسی اور قیمت کی رو نہیں گزر سکتی۔ یہی منبع رو کی تعریف ہے۔ یوں

$$
\begin{aligned}
i_1 &= 2\,\text{mA} \\
i_2 &= -1\,\text{mA}
\end{aligned}
$$

ہوں گے۔ یوں دور کو حل کرنے کی خاطر صرف ایک عدد مساوات دباو درکار ہے جسے i_3 کی مدد سے لکھتے ہیں۔

$$
-4 + 2000(i_3 - i_2) + 4000 i_3 - 6 = 0
$$

اس میں $i_2 = -1\,\text{mA}$ پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$i_3 = \frac{4}{3}\,\text{mA}$$

یوں شکل کو دیکھ کر درکار دباو لکھا جا سکتا ہے۔

$$V_0 = 4000 i_3 - 6 = -\frac{2}{3}\,\text{V}$$

مثال 3.17: شکل 3.34 میں I_0 حاصل کریں۔

حل: یہاں i_2 منبع رو سے گزرتی ہے لہٰذا

$$i_2 = 4\,\text{mA}$$

ہو گی۔ ہم اگر i_2 کو استعمال کرتے ہوئے کرخوف قانون دباو لکھنا چاہیں تو $6\,\text{mA}$ منبع سے گزرتے ہوئے دباو کی قیمت جاننے کا ہمارے پاس کوئی طریقہ موجود نہیں ہے۔ یہ مسئلہ i_3 کی صورت میں بھی درپیش ہے۔ ہاں ہم دیکھتے ہیں کہ اس منبع رو سے $6\,\text{mA}$ رو ہی گزر سکتی ہے لہٰذا

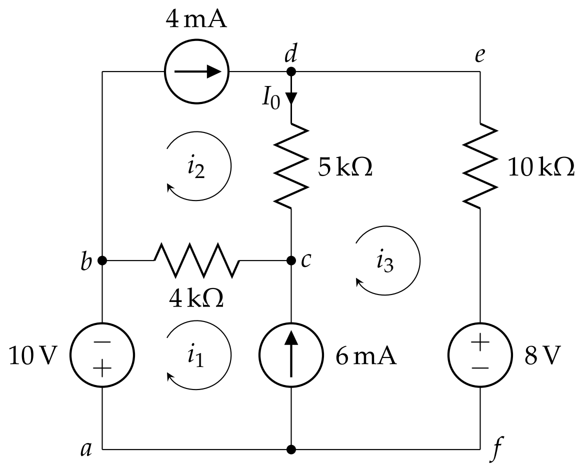
$$i_3 - i_1 = 6\,\text{mA} \tag{3.42}$$

ہو گا۔ چونکہ i_2 ہم پہلے ہی حاصل کر چکے ہیں لہٰذا i_1 اور i_3 جاننے کے لئے دو عدد ہمزاد مساوات درکار ہیں۔ مساوات 3.42 پہلی مساوات ہے۔ دوسری مساوات راہ $abcdefa$ پر کرخوف قانون دباو سے لکھتے ہیں۔

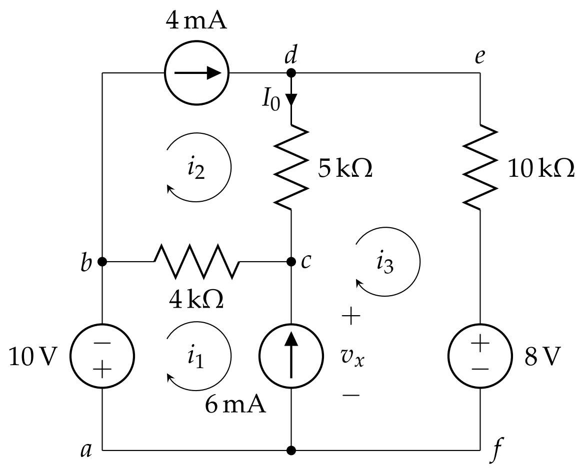
$$10 + 4000(i_1 - 4\,\text{mA}) + 5000(i_3 - 4\,\text{mA}) + 10000 i_3 + 8 = 0 \tag{3.43}$$

مندرجہ بالا دو ہمزاد مساوات حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$i_1 = -\frac{72}{19}\,\text{mA}$$
$$i_3 = \frac{42}{19}\,\text{mA}$$



(ا)



(ب)

شکل 3.34: مثال 3.17 کا دور۔

درکار رو حاصل کرتے ہیں۔

$$I_0 = i_2 - i_3 = \frac{34}{19}\,\mathrm{mA}$$

آئیں مساوات 3.43 کو اس طرح حاصل کرنا سیکھیں کہ راہ $abcdefa$ چننے کی ضرورت نہ ہو۔ چونکہ $6\,\mathrm{mA}$ منبع رو کا دباو نامعلوم ہے لہٰذا اسے v_x متغیرہ سے ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ شکل 3.34-ب میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ اسی شکل سے i_1 اور i_3 خانوں کے کرخوف قانون دباو سے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

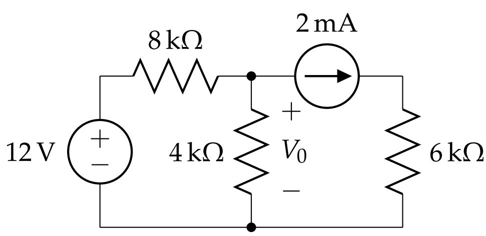
$$\begin{aligned} 10 + 4000(i_1 - 4\,\mathrm{mA}) + v_x &= 0 \\ -v_x + 5000(i_3 - 4\,\mathrm{mA}) + 10000i_3 + 8 &= 0 \end{aligned}$$

ان مساوات کا مجموعہ لینے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

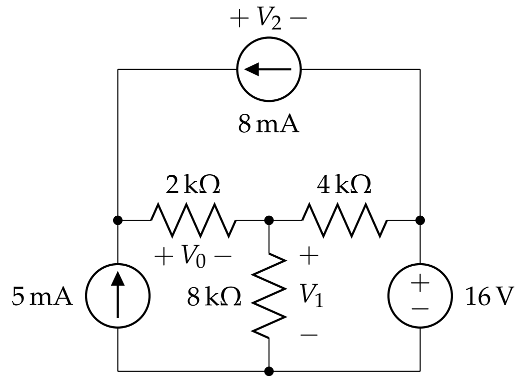
$$10 + 4000(i_1 - 4\,\mathrm{mA}) + 5000(i_3 - 4\,\mathrm{mA}) + 10000i_3 + 8 = 0 \tag{3.44}$$

مساوات 3.44 کا مساوات 3.43 کے ساتھ موازنہ کریں۔ دونوں بالکل یکساں ہیں۔

مشق 3.13: شکل 3.35 میں V_0 کو دائری ترکیب سے حاصل کریں۔



شکل 3.35: مشق 3.13 کا دور۔



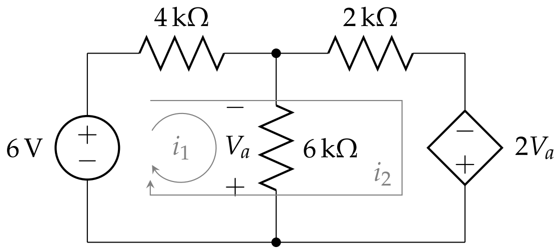
شکل 3.36: مشق 3.14 کا دور۔

مشق 3.14: شکل 3.36 میں V_0 ، V_1 اور V_2 حاصل کریں۔

جوابات: $26\,\mathrm{V}$ ، $\frac{136}{3}\,\mathrm{V}$ ، $\frac{166}{3}\,\mathrm{V}$

3.9 تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار

کرخوف کے مساوات کے نقطہ نظر سے تابع منبع اور آزاد منبع میں کوئی فرق نہیں پایا جاتا۔البتہ تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار کو حل کرتے ہوئے تابع منبع کی قابو مساوات[9] بھی درکار ہوتی ہے۔آئیں چند مثالوں کی مدد سے ایسے ادوار حل کرنا دیکھیں۔آسان ترین مثال سے شروع کرتے ہوئے بتدریج مشکل مثال حل کرتے ہیں۔



شکل 3.37: مثال 3.18 کا دور۔

مثال 3.18: شکل 3.37 میں V_a دریافت کریں۔

حل: کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
-6 + 4000(i_1 + i_2) - V_a &= 0 \\
-6 + 4000(i_1 + i_2) + 2000i_2 - 2V_a &= 0
\end{aligned}
$$

ان میں تابع منبع دباو کی قابو مساوات

$$V_a = -6000i_1$$

پُر کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

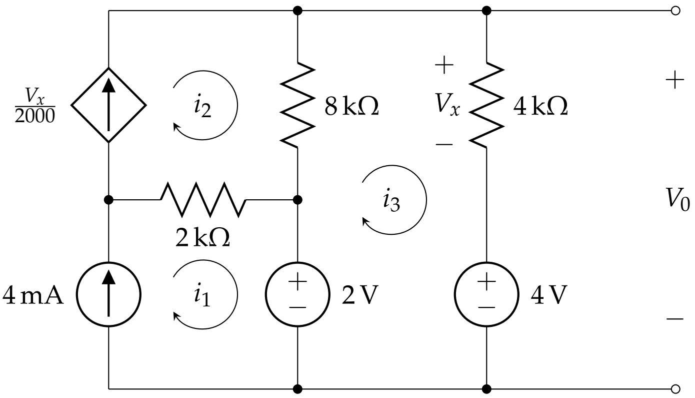
$$
\begin{aligned}
10000i_1 + 4000i_2 &= 6 \\
16000i_1 + 6000i_2 &= 6
\end{aligned}
$$

ان ہمزاد مساوات کا حل درج ذیل ہے۔

$$
\begin{aligned}
i_1 &= -3\,\mathrm{mA} \\
i_2 &= 9\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$

یوں درکار دباو درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$V_a = -6000(-0.003) = 18\,\mathrm{V}$$



شکل 3.38: مثال 3.19 کا دور۔

مثال 3.19: شکل 3.38 میں V_0 دریافت کریں۔

حل: چونکہ i_1 اور i_2 منبع رو سے گزرتی ہیں لہٰذا ان کی قیمت منبع رو کے برابر ہی ہو گی۔

$$i_1 = 4\,\mathrm{mA}$$
$$i_2 = \frac{V_x}{2000}$$

دائیں خانے کی مساوات لکھتے ہیں۔

$$-2 + 8000\left(i_3 - \frac{V_x}{2000}\right) + 4000 i_3 + 4 = 0$$

اس میں تابع منبع کی قابو مساوات

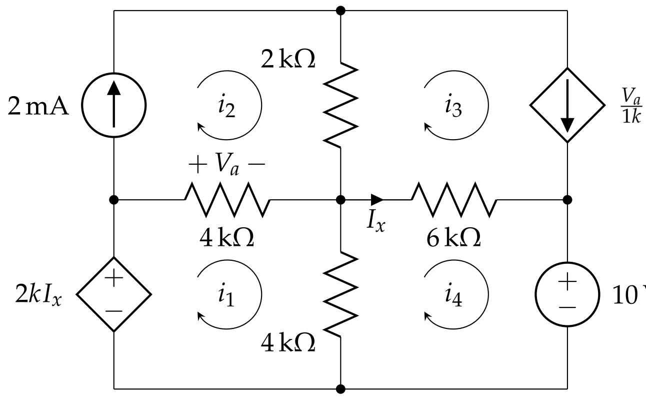
$$V_x = 4000 i_3$$

پُر کرتے

$$-2 + 8000\left(i_3 - \frac{4000 i_3}{2000}\right) + 4000 i_3 + 4 = 0$$

---

control equation[9]



شکل 3.39: مثال 3.20 کا دور۔

ہوئے حل کرنے سے

$$i_3 = 0.5\,\text{mA}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں درکار دباو درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$V_0 = 4000 i_3 + 4 = 6\,\text{V}$$

مثال 3.20: شکل 3.39 میں تمام خانوں کی رو دریافت کریں۔اس شکل میں رو قابو منبع دباو اور دباو قابو منبع رو استعمال کئے گئے ہیں۔

حل:چار خانوں کے مساوات درج ذیل ہیں

$$
\begin{aligned}
-2kI_x + 4k(i_1 - i_2) + 4k(i_1 - i_4) &= 0 \\
i_2 &= \frac{2}{1k} \\
i_3 &= \frac{V_a}{1k} \\
4k(i_4 - i_1) + 6k(i_4 - i_3) + 10 &= 0
\end{aligned}
$$

جن میں

$$
\begin{aligned}
V_a &= 4k(i_1 - i_2) \\
I_x &= i_4 - i_3
\end{aligned}
$$

پُر کرتے اور ترتیب دیتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
4i_1 - 2i_2 + i_3 - 3i_4 &= 0 \\
i_2 &= \frac{2}{1k} \\
-4i_1 + 4i_2 + i_3 &= 0 \\
2i_1 - 3i_3 + 5i_4 &= 5
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔ انہیں قالبی مساوات کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$
\begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{1k} \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}
$$

یہ قالبی مساوات $\mathbf{RI} = \mathbf{V}$ کی طرز کی ہے جس کا حل $\mathbf{I} = \mathbf{R^{-1}V}$ ہے۔ یوں خانوں کی رو درج ذیل حاصل ہوتی ہیں۔

$$
\begin{aligned}
i_1 &= 6.7\,\mathrm{mA} \\
i_1 &= 2\,\mathrm{mA} \\
i_1 &= 34.8\,\mathrm{mA} \\
i_1 &= 19.2\,\mathrm{mA}
\end{aligned}
$$