

برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	بنیاد	1
1	برقی بار، برقی رواور برقی دباو	1.1
6	قانون اوہم	1.2
8	توانائی اور طاقت	1.3
15	برقی پڑے	1.4
15	غیر تابع منبع	1.4.1
17	تابع منبع	1.4.2
27	مزامتی ادوار	2
27	قانون اوہم	2.1
35	قوانین کر خوف	2.2
51	سلسلہ وار جڑے پڑوں میں رو	2.3
52	تقسیم دباو	2.4
55	متعدد سلسلہ وار مزاحمت	2.5
58	سلسلہ وار متعدد منبع دباو اور مزاحمت	2.6
59	متوازی جڑے مزاحمت پر یکساں دباو پایا جاتا ہے	2.7
61	تقسیم رو	2.8
68	سلسلہ وار اور متوازی مزاحمت	2.9
73	تخصیص مزاحمت	2.10
76	سلسلہ وار اور متوازی مزاحمتوں کے ادوار کا حل	2.11
84	ستارہ-تکون تبادلہ	2.12
91	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	2.13
101	ترکیب جوڑ اور دائری ترکیب	3
101	تجزیہ جوڑ	3.1
104	غیر تابع منبع رواستعمال کرنے والے ادوار	3.2
117	تابع منبع رواستعمال کرنے والے ادوار	3.3
123	غیر تابع منبع دباو استعمال کرنے والے ادوار	3.4

132	تابع منبع دباو استعمال کرنے والے ادوار	3.5
139	دائری تجزیہ	3.6
140	غیر تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	3.7
148	غیر تابع منبع رواستعمال کرنے والے ادوار	3.8
154	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	3.9
158	دائری ترکیب اور ترکیب جوڑ کا موازنہ	3.10
161	حسابی ایپلیفائر	4
171	کامل حسابی ایپلیفائر	4.1
171	منفی ایپلیفائر	4.2
174	مثبت ایپلیفائر	4.3
176	مستقام کار	4.4
176	منفی کار	4.5
178	جمع کار	4.6
181	متوازن اور غیر متوازن صورت	4.7
185	موازنہ کار	4.8
185	آلاتی ایپلیفائر	4.9
187	مسئلے	5
187	مساوی دور	5.1
187	مسئلہ خطیت	5.2
191	مسئلہ نفاذ	5.3
201	مساوی ادوار	5.4
206	مسئلہ تھون، مسئلہ نارٹن اور مسئلہ متبادلہ منبع	5.5
225	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	5.6
231	تابع منبع اور غیر تابع منبع دونوں استعمال کرنے والے ادوار	5.7
239	زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ	5.8
247	برق گیر اور امالہ گیر	6
247	برق گیر	6.1
261	امالہ گیر	6.2
270	برق گیر اور امالہ گیر کے خصوصیات	6.3
273	سلسلہ وار جڑے برق گیر	6.4
277	متوازی جڑے برق گیر	6.5
281	سلسلہ وار امالہ گیر	6.6
283	متوازی امالہ گیر	6.7
287	حسابی ایپلیفائر کے RC ادوار	6.8
288	تفرق کار	6.9
293	عارضی رد عمل	7
293	تعارف	7.1
293	ایک درجی ادوار	7.2

295	7.2.1	رد عمل کی عمومی مساوات	
321	7.3	دھڑکن	
328	7.4	دو درجی ادوار	
359	8	برقرار حالت بدلتی رو	
359	8.1	مخلوط اعداد	
364	8.2	سائن نمائندہ	
373	8.3	سائن نمائندہ اور مخلوط جبری تفاعل	
381	8.4	دوری سمتیہ	
386	8.5	مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر کے انفرادی دوری سمتیہ تعلق	
395	8.6	برقی رکاوٹ اور برقی فراوانی	

باب 8

برقرار حالت بدلتی رو

جبری تفاعل میں یکدم تبدیلی سے دور عارضی حالت اختیار کرتا ہے۔ محدود قیمت کے وقتی مستقل کی صورت میں آخر کار عارضی دورانیہ گزر جاتا ہے اور دور ایک بار پھر برقرار حالت اختیار کر لیتا ہے۔ جبری تفاعل میں یکدم تبدیلی کی غیر موجودگی میں دور برقرار صورت میں رہتا ہے۔ اس باب میں ایسے ہی ادوار پر غور کیا جائے گا جن کے جبری تفاعل میں یکدم تبدیلی نہیں پائی جاتی۔ ایسی صورت میں جبری حل ہی مکمل حل ہو گا۔ اس باب میں مکمل حل سے مراد جبری حل ہو گا۔

8.1 مخلوط اعداد

حقیقی¹ عدد اور خیالی² عدد کے مجموعے کو مخلوط³ عدد کہتے ہیں۔ مخلوط اعداد کو مخلوط سطح⁴ پر دکھایا جاتا ہے۔ مخلوط سطح پر افقی محدود حقیقی اعداد کو ظاہر کرتا ہے جبکہ عمودی محدود خیالی اعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

real number¹
imaginary number²
complex number³
complex plane⁴

شکل 8.1- الف میں مخلوط عدد $3 + j2$ دکھایا گیا ہے۔ اسی شکل میں ایک مستطیل بھی دکھایا گیا ہے۔ اس عدد کے حقیقی اور خیالی اجزاء مستطیل کے اطراف ہیں۔ یوں مخلوط عدد کو حقیقی اور خیالی اجزاء کے مجموعے یعنی $3 + j2$ کے طرز پر لکھنے کو مستطیلی طرز⁵ کہتے ہیں۔

شکل 8.1- الف میں مخلوط نقطہ $(3 + j2)$ سے محد کے مرکز $(0,0)$ تک لکیر کھینچی گئی ہے۔ اس لکیر کی لمبائی r کو مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$r = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ اسی طرح افقی محد سے لکیر تک کا زاویہ درج ذیل ہو گا۔

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2}{3} = 33.69^\circ$$

شکل 8.1- ب میں اسی مخلوط عدد کو r/θ کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ مخلوط عدد کو حیصے اور زاویے سے ظاہر کرنے کو زاویائی طرز⁶ کہتے ہیں۔

کسی بھی مخلوط عدد m کو

$$(8.1) \quad m = x + jy \quad \text{مستطیل طرز}$$

یا

$$(8.2) \quad m = r/\theta \quad \text{زاویائی طرز}$$

میں لکھا جاسکتا ہے جہاں مستطیلی طرز سے زاویائی طرز درج ذیل طریقے سے حاصل کی جاتی ہے

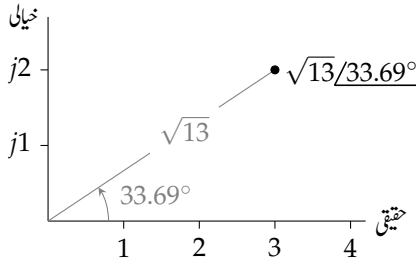
$$(8.3) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

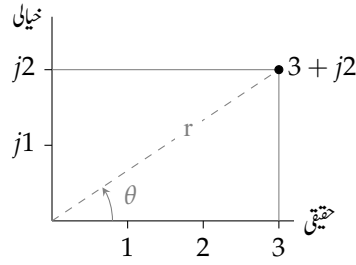
جبکہ زاویائی طرز سے مستطیل طرز درج ذیل سے حاصل کی جاتی ہے۔

$$(8.4) \quad x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$



(ب) مخلوط عدد لکھنے کی زاویائی طرز۔



(الف) مخلوط عدد لکھنے کی مستطیل طرز۔

شکل 8.1: مخلوط اعداد کو لکھنے کے طریقے۔

مخلوط اعداد کو جمع، منفی، ضرب اور تقسیم کرنے کی چند مثالیں دیکھتے ہیں۔

مثال 8.1: مخلوط اعداد $a = 2 + j3$ اور $b = 4 + j5$ دیے گئے ہیں۔ درج ذیل حاصل کریں۔

$$a + b, \quad a - b, \quad ab, \quad \frac{a}{b}$$

حل: مخلوط اعداد جمع (منفی) کرتے وقت حقیقی اجزاء کو علیحدہ جمع (منفی) کیا جاتا ہے اور خیالی اجزاء کو علیحدہ جمع (منفی) کیا جاتا ہے۔

$$a + b = (2 + j3) + (4 + j5) = (2 + 4) + j(3 + 5) = 6 + j8$$

$$a - b = (2 + j3) - (4 + j5) = (2 - 4) + j(3 - 5) = -2 - j2$$

مخلوط اعداد کو ضرب دیتے ہوئے $j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ لکھا جاتا ہے۔

$$ab = (2 + j3)(4 + j5) = 8 + j10 + j12 + j^2 15 = (8 - 15) + j(10 + 12) = -7 + j22$$

مخلوط اعداد کو تقسیم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{b} &= \frac{2 + j3}{4 + j5} \\
 &= \left(\frac{2 + j3}{4 + j5} \right) \left(\frac{4 - j5}{4 - j5} \right) \\
 &= \frac{8 - j10 + j12 - j^2 15}{4^2 - (j5)^2} \\
 &= \frac{23 + j2}{16 + 25} \\
 &= \frac{23}{41} + j \frac{2}{41} \\
 &= 0.56098 + j0.04878
 \end{aligned}$$

مثال 8.2: گزشتہ مثال میں مخلوط اعداد کو زاویائی طرز پر لکھتے ہوئے ab اور $\frac{a}{b}$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 8.3 استعمال کرتے ہوئے $a = 2 + j3$ کا جیٹھ اور زاویہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 r_a &= \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \\
 \theta_a &= \tan^{-1} \frac{3}{2} = 56.31^\circ
 \end{aligned}$$

یوں

$$a = \sqrt{13}/56.31^\circ$$

لکھا جائے گا۔ اسی طرح $b = 4 + j5$ کا جیٹھ اور زاویہ حاصل کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}
 r_b &= \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \\
 \theta_b &= \tan^{-1} \frac{5}{4} = 51.34^\circ
 \end{aligned}$$

درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$b = \sqrt{41}/51.34^\circ$$

اس طرح

$$\begin{aligned} ab &= \left(\sqrt{13}/56.31^\circ \right) \left(\sqrt{41}/51.34^\circ \right) \\ &= \sqrt{13}\sqrt{41}/56.31^\circ + 51.34^\circ \\ &= \sqrt{533}/107.65^\circ \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{\sqrt{13}/56.31^\circ}{\sqrt{41}/51.34^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{41}}/56.31^\circ - 51.34^\circ \\ &= \sqrt{\frac{13}{41}}/4.97^\circ \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

ان جوابات کو مستطیلی طرز میں درج ذیل لکھا جائے گا جو گزشتہ مثال کے جوابات ہیں۔

$$\begin{aligned} ab &= \sqrt{533} \cos 107.65^\circ + j\sqrt{533} \sin 107.65^\circ = -7 + j22 \\ \frac{a}{b} &= \sqrt{\frac{13}{41}} \cos 4.97^\circ + j\sqrt{\frac{13}{41}} \sin 4.97^\circ = 0.56098 + j0.04878 \end{aligned}$$

ہم نے دیکھا کہ زاویائی طرز میں لکھا مخلوط عدد $a = r/\theta$ مستطیل طرز میں بھی لکھا جاسکتا ہے یعنی

$$(8.5) \quad a = r/\theta = r \cos \theta + jr \sin \theta$$

یولر مساوات⁷ درج ذیل ہے۔

$$(8.6) \quad e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

مندرجہ بالا دو مساوات کو ملاتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(8.7) \quad r/\theta = re^{j\theta} = r (\cos \theta + j \sin \theta)$$

مثال 8.3: مخلوط عدد $m = 5 - j12$ کو زاویائی طرز میں لکھیں۔

حل: مساوات 8.3 کے استعمال سے درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$r = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{-12}{5} = -67.38^\circ$$

لہذا درج ذیل لکھے جاسکتے ہیں۔

$$m = 13e^{-j67.38^\circ}$$

$$m = 13/-67.38^\circ$$

8.2 سائن نما تفاعل

سائن نما⁸ تفاعل سے مراد سائن تفاعل $\sin \theta$ اور کوسائن تفاعل $\cos \theta$ ہیں۔ شکل 8.2-الف میں رداس A_0 کے گول دائرے پر ایک نقطہ یکساں رفتار کے ساتھ، گھڑی کی گردش کی الٹ سمت میں، حرکت کر رہا ہے۔ یہ دائرہ کارڈیسی محدود⁹ کے مرکز $(0,0)$ پر پایا جاتا ہے۔ لمحہ t پر زاویہ θ کی قیمت θ کے برابر ہے۔ نقطے سے x محدود پر عمودی لکیر محدود کو $x(t)$ پر ٹکراتی ہے جبکہ y محدود پر عمودی لکیر $y(t)$ پر ٹکراتی ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(8.8) \quad y(t) = A_0 \sin \theta$$

⁸ sinusoidal
⁹ Cartesian coordinates

جہاں A_0 موج کی چوٹی ہے جسے موج کا محیط¹⁰ کہتے ہیں اور θ کو تفاعل کا دلیل¹²¹¹ کہتے ہیں۔ اس مساوات میں θ از خود وقت t پر منحصر ہے۔

گردش کرتا نقطہ ایک چکر میں 360° درجے کا زاویہ یعنی 2π ریڈیئن طے کرتا ہے۔ ایک چکر کاٹنے کے لئے درکار دورانیے کو دوری عرصہ¹³ کہتے ہیں جسے T سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مشق 8.1: شکل 8.2-الف میں نقطہ ایک چکر 20 ms میں پورا کرتا ہے۔ یہ نقطہ ایک سیکنڈ میں کتنے چکر پورا کرے گا۔ یہ نقطہ ایک سیکنڈ میں کتنے ریڈیئن کا زاویہ طے کرتا ہے۔

جوابات: 50 چکر، $100\pi \text{ rad}$

اگر ایک چکر کاٹنے کے لئے T سیکنڈ کا وقت درکار ہو تب ایک سیکنڈ میں چکروں کی تعداد $\frac{1}{T}$ ہوگی جسے تعدد¹⁴ کہتے اور f سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$(8.9) \quad f = \frac{1}{T}$$

تعدد کی اکائی ہرتز¹⁵ ہے جسے Hz سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ایک چکر 2π ریڈیئن کو کہتے ہیں لہذا f چکر سے مراد $2\pi f$ ریڈیئن کا زاویہ ہے۔ یوں f تعدد پر گردش کرتا نقطہ ایک سیکنڈ میں $2\pi f$ ریڈیئن کا زاویہ طے کرے گا یعنی اس کی زاویائی رفتار¹⁶ کی قیمت $2\pi f$ ہوگی۔ زاویائی رفتار کو ω سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ اس کی اکائی ریڈیئن فی سیکنڈ rads^{-1} ہے۔

$$(8.10) \quad \omega = 2\pi f$$

¹⁰amplitude
¹¹ایک ماہر ریاضی اپنی خیالی دنیا میں کوسائن $\cos \theta$ تفاعل کے ساتھ بحث میں مصروف ہوتا ہے۔ ماہر ریاضی تفاعل کو دہلیں کے طور پر صفر پیش کرتا ہے۔ تفاعل اس کا فوراً جواب اکائی $(\cos 0 = 1)$ دیتا ہے۔
¹²argument
¹³time period
¹⁴frequency
¹⁵Hertz
¹⁶angular speed

زاویائی رفتار ω سے گردش کرتا ہوا نقطہ t سینڈ میں $2\pi ft$ ریڈین کا زاویہ طے کرے گا۔ یوں اگر $t = 0$ پر نقطہ عین x محدد کے مثبت حصے پر ہو تب لمحہ t پر

$$\theta = \omega t = 2\pi ft \quad (8.11)$$

لکھا جائے گا۔ یوں مساوات 8.8 کو

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 \sin 2\pi ft \\ &= A_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \\ &= A_0 \sin \omega t \end{aligned} \quad (8.12)$$

لکھا جاسکتا ہے۔

برقی میدان میں $y(t)$ وقت کے ساتھ بدلتے دباؤ یا وقت کے ساتھ بدلتی رو کو ظاہر کر سکتی ہے۔ مساوات 8.12 میں دیے تعامل، جسے شکل 8.2-ب میں دکھایا گیا ہے، کا آزاد متغیرہ وقت t ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تعامل ہر T سینڈ کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہے۔ اس حقیقت کو ریاضی میں درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$y(t + T) = y(t) \quad (8.13)$$

جس سے مراد یہ ہے کہ تعامل کی قیمت لمحہ t اور لمحہ $t + T$ پر برابر ہیں۔

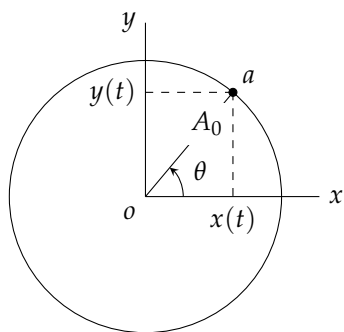
مساوات 8.12 کے خط کو ωt کے ساتھ بھی کھینچا جاسکتا ہے۔ ایسا ہی شکل 8.2-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ یہ تعامل ہر 2π ریڈین کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہے۔

مشق 8.2: شکل 8.2-الف میں گردش کرتا نقطہ 0.2 s میں 40° کا زاویہ طے کرتا ہے۔ زاویائی رفتار، تعدد اور دوری عرصہ دریافت کریں۔

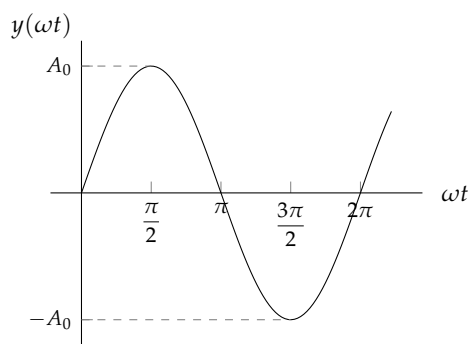
$$\text{جوابات: } T = \frac{5}{9} \text{ s}, f = 1.8 \text{ Hz}, \omega = \frac{10\pi}{9} \text{ rad s}^{-1}$$

شکل 8.3 میں عمومی صورت حال دکھائی گئی ہے جہاں ω زاویائی رفتار سے گردش کرتا نقطہ، لمحہ $t = 0$ پر زاویہ α پر پایا جاتا ہے۔ یہ نقطہ وقت t کے دوران ωt زاویہ طے کرتے ہوئے $\theta = \omega t + \alpha$ پہنچ جائے گا لہذا اس کے لئے

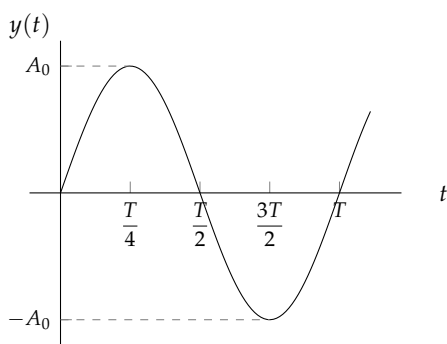
$$y(t) = A_0 \sin(\omega t + \alpha) \quad (8.14)$$



الف

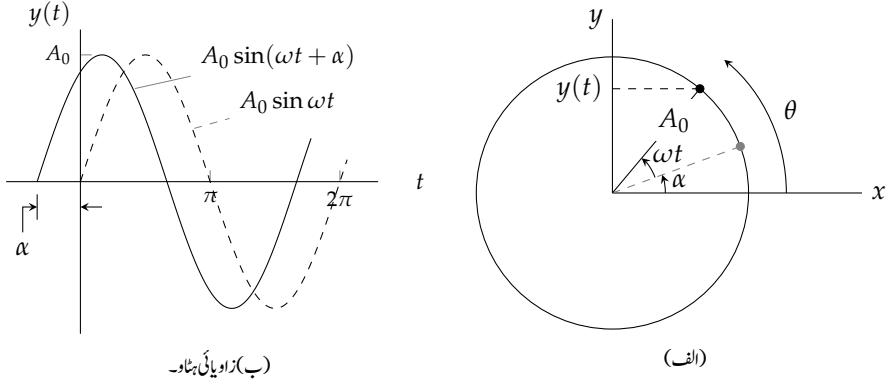


(پ)



(ب)

شکل 8.2: سائن موج۔



شکل 8.3: لمحہ $t = 0$ پر زاویہ α ہے۔

لکھا جاسکتا ہے جہاں α کو زاویائی ہٹاؤ¹⁷ کہتے ہیں۔ اس مساوات کا دلیل $\omega t + \alpha$ ہے۔ شکل 8.3-ب میں مساوات 8.12 اور مساوات 8.14 کو دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ان مساوات میں α زاویائی فرق¹⁸ پایا جاتا ہے۔ مساوات 8.12 سے مساوات 8.14 α ریڈین آگے¹⁹ ہے۔ یہ بھی کہا جاسکتا ہے کہ مساوات 8.14 سے مساوات 8.12 α ریڈین پیچھے²⁰ ہے۔ ایک ہی تعدد کے دو تفاعل

$$(8.15) \quad \begin{aligned} y_1(t) &= A_{01} \sin(\omega t + \alpha) \\ y_2(t) &= A_{02} \sin(\omega t + \beta) \end{aligned}$$

میں $y_1(t)$ تفاعل $y_2(t)$ سے $\alpha - \beta$ ریڈین آگے ہے۔ ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ $y_2(t)$ تفاعل $y_1(t)$ سے $\beta - \alpha$ ریڈین آگے ہے یا کہ $y_1(t)$ تفاعل $y_2(t)$ سے $\beta - \alpha$ ریڈین پیچھے ہے۔ اگر $\alpha = \beta$ ہو تب تفاعل ہم زاویہ²¹ کہلاتے ہیں جبکہ $\alpha \neq \beta$ کی صورت میں تفاعل الگ زاویہ²² کہلاتے ہیں۔

زاویائی ہٹاؤ کو عموماً درجوں میں بیان کیا جاتا ہے لہذا $\alpha = \frac{\pi}{4}$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(8.16) \quad y(t) = A_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = A_0 \sin(\omega t + 45^\circ)$$

¹⁷ phase angle

¹⁸ phase difference

¹⁹ lead

²⁰ lag

²¹ in phase

²² out of phase

باضابطہ طور پر چونکہ ωt کی قیمت ریڈیئن میں ہے لہذا α کی قیمت بھی ریڈیئن میں ہونا لازم ہے لہذا تفاعل لکھنے کا صحیح طریقہ $y(t) = A_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ ہی ہے لیکن زاویائی ہٹاؤ کو درجوں میں لکھنے کی روایت نہایت مقبول ہے لہذا اس کتاب میں بھی اس روایت کو برقرار رکھا جائے گا۔ مساوات 8.16 میں 45° لکھتے ہوئے زیر بالا میں درجے کی علامت ($^\circ$) استعمال کی گئی ہے جبکہ $\frac{\pi}{4}$ پر کوئی علامت نہیں لگائی گئی۔ اسی علامت سے ریڈیئن یا درجوں کی پہچان کی جاتی ہے۔

مثال 8.4: مساوات $y_1(t) = 15 \sin(100t + 60^\circ)$ اور $y_2(t) = 22 \sin(200t + 0.2\pi)$ کی قیمت $t = 25 \text{ ms}$ پر دریافت کریں۔

حل: پہلی تفاعل میں 50° کا زاویائی ہٹاؤ $\frac{60^\circ}{180^\circ} \times \pi = \frac{\pi}{3}$ ریڈیئن کے برابر ہے۔ یوں لمحہ $t = 25 \text{ ms}$ پر

$$y_1(0.025) = 15 \sin\left(100 \times 25 \times 10^{-3} + \frac{\pi}{3}\right) = -5.918619766$$

اور

$$y_2(0.025) = 22 \sin(200 \times 0.025 + 0.2\pi) = -13.39917888$$

حاصل ہوتے ہیں۔

اگرچہ اب تک کی بحث میں ہم نے سائن تفاعل استعمال کیا، ہم اس کی جگہ کو سائن تفاعل بھی استعمال کر سکتے تھے۔ ان دو تفاعل کی صورت بالکل یکساں ہے پس دونوں میں 90° کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔

$$(8.17) \quad \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \omega t$$

$$(8.18) \quad \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \omega t$$

سائن نما تفاعل کے دلیل کے ساتھ 2π ریڈیئن یا 360° کا مضرب جمع کرنے سے تفاعل کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔

$$(8.19) \quad \cos(\omega t + \alpha + 2\pi n) = \cos(\omega t + \alpha) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$(8.20) \quad \sin(\omega t + \alpha + 2\pi n) = \sin(\omega t + \alpha) \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

دو سائن نما تفاعل میں زاویائی فرق تین شرائط پورا کرنے کے بعد دریافت کیا جاسکتا ہے۔ پہلی شرط یہ ہے کہ دونوں تفاعل کی تعدد برابر ہو۔ دوسری شرط یہ ہے کہ دونوں کو سائن تفاعل اور یا پھر دونوں کو کو سائن تفاعل کی صورت میں لکھا جائے۔ تیسری اور آخری شرط یہ ہے کہ دوسری شرط میں لکھے گئے تفاعل کے حیطے مثبت ہوں۔ درج ذیل مماثل ان شرائط کو پورا کرنے میں مدد دیتے ہیں۔

$$(8.21) \quad -\sin(\omega t + \alpha) = \sin(\omega t + \alpha \pm 180^\circ)$$

$$(8.22) \quad -\cos(\omega t + \alpha) = \cos(\omega t + \alpha \pm 180^\circ)$$

ان کے علاوہ درج ذیل مماثل بھی نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔

$$(8.23) \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$(8.24) \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

ایک آخری تفاعل جس کا ذکر ضروری ہے درج ذیل ہے۔

$$(8.25) \quad \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

مثال 8.5: درج ذیل تفاعل کے خط کھینچیں۔

$$v(t) = 1 \cos(\omega t + 60^\circ) \bullet$$

$$v(t) = 1 \cos(\omega t + 240^\circ) \bullet$$

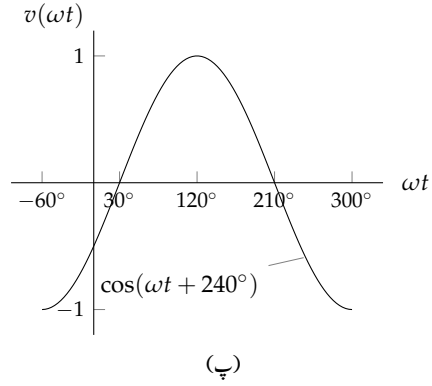
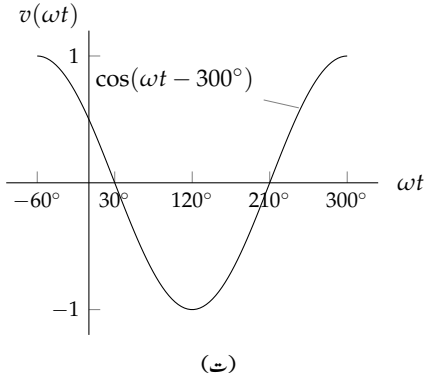
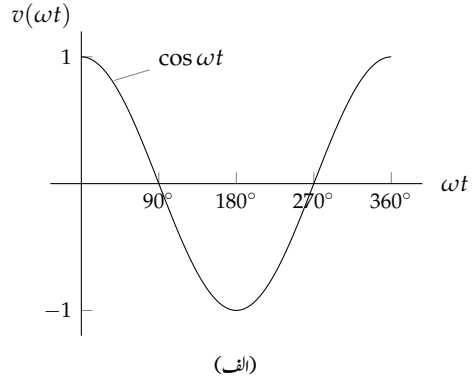
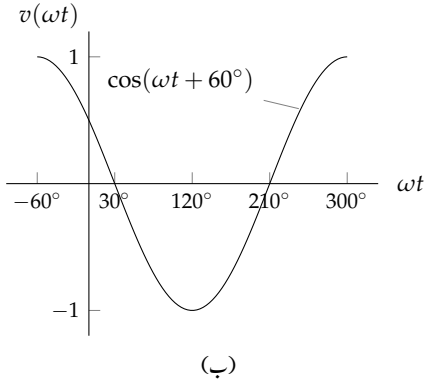
$$v(t) = 1 \cos(\omega t - 300^\circ) \bullet$$

حل: شکل 8.4-الف میں $v(\omega t) = 1 \cos \omega t$ کا خط دکھایا گیا ہے۔ اس کو افقی محور پر 60° درجے بائیں منتقل کرنے سے $v(\omega t) = 1 \cos(\omega t + 60^\circ)$ کا خط حاصل ہوتا ہے جسے شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔ ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$v(\omega t) = 1 \cos(\omega t + 240^\circ) = 1 \cos(\omega t + 60^\circ + 180^\circ) = -1 \cos(\omega t + 60^\circ)$$

جہاں مساوات 8.22 کا استعمال کیا گیا ہے۔ درج بالا مساوات کو شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ شکل-ب کا منفی ہے۔ اسی طرح مساوات 8.19 کی مدد سے

$$v(\omega t) = 1 \cos(\omega t - 300^\circ) = 1 \cos(\omega t - 300^\circ + 360^\circ) = 1 \cos(\omega t + 60^\circ)$$



شکل 8.4: مثال 8.5 کے خط۔

لکھتے ہوئے شکل-ت حاصل ہوتی ہے جو عین شکل-ب ہی ہے۔

مثال 8.6: درج ذیل امواج کی تعدد ہرٹز میں حاصل کریں۔ امواج کے مابین زاویائی فرق دریافت کریں۔ یہ بھی بتلائیں کہ کوئی موج آگے ہے۔

$$v_1(\omega t) = 100 \sin(400t - 30^\circ)$$

$$v_2(\omega t) = -250 \cos(400t + 0.2\pi)$$

حل: ان امواج میں $\omega = 400 \text{ rad s}^{-1}$ ہے لہذا

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{400}{2\pi} = 63.66 \text{ Hz}$$

ہوگا۔ زاویائی فرق دریافت کرنے کی خاطر دونوں امواج کو مثبت حیثے کے کوسائن موج کی صورت میں لکھتے ہیں۔ ساتھ ہی ساتھ ان کے زاویائی ہٹاؤ کو درجوں میں لکھتے ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned} v_1(\omega t) &= 100 \sin(400t - 30^\circ) \\ &= 100 \cos(400t - 30^\circ - 90^\circ) \\ &= 100 \cos(400t - 120^\circ) \\ &= 100 \cos(400t + 240^\circ) \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں آخری قدم پر مساوات 8.19 کا استعمال کیا گیا۔ اسی طرح

$$\begin{aligned} v_2(\omega t) &= -250 \cos(400t + 0.2\pi) \\ &= 250 \cos(400t + 0.2\pi + \pi) \\ &= 250 \cos(400t + 216^\circ) \end{aligned}$$

بھی لکھا جاسکتا ہے جہاں آخری قدم پر 1.2π ریڈیئن کو 216° درجے لکھا گیا ہے۔ ان امواج کے مابین

$$240^\circ - 216^\circ = 24^\circ$$

کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے اور موج $v_1(\omega t)$ آگے ہے۔

مشق 8.3: ایک دور میں درج ذیل تین روپائے جاتے ہیں۔

$$i_1(1) = 30 \cos(100\pi t + 30^\circ)$$

$$i_2(2) = 55 \sin(100\pi t + 40^\circ)$$

$$i_3(t) = 20 \sin(100\pi t + 60^\circ)$$

i_2 سے i_1 کتنی آگے ہے اور i_3 سے i_1 کتنی پیچھے ہے۔

جوابات: 80° ، -60° یا 300°

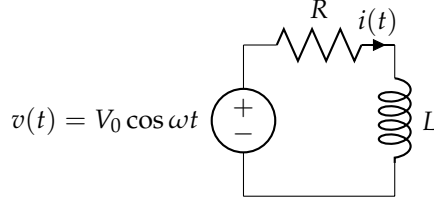
8.3 سائنس نما اور مخلوط جبری تفاعل

گزشتہ باب میں دور پر مستقل جبری تفاعل مسلط کرتے ہوئے، دور کا جبری رد عمل بھی مستقل قیمت کا حاصل ہوا۔ تفرقی مساوات کا جبری رد عمل، مسلط جبری تفاعل اور اس کے تمام بلند درجی تفرق کا مجموعہ ہوتا ہے۔ یوں دور پر جبری دباؤ $v(t) = \sin \omega t$ مسلط کرنے سے رو کا جبری رد عمل $i(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$ متوقع ہوگا۔ پس جبری رد عمل کے مستقل c_1 اور c_2 معلوم کرنا باقی ہے۔

مثال 8.7: شکل 8.5 میں رو $i_I(t)$ حاصل کریں۔

حل: دور کی تفرقی مساوات لکھتے ہیں۔

$$(8.26) \quad Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = V_0 \cos \omega t$$



شکل 8.5: مثال 8.7 کا دور۔

دور پر مسلط جبری تفاعل اور اس تفاعل کے تمام بلند درجی تفرق کا مجموعہ جبری حل کے برابر ہوگا۔

$$i_J(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

اس جبری حل کو مساوات 8.26 میں پُر کرتے ہوئے c_1 اور c_2 مستقل دریافت کرتے ہیں۔

$$R(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) + L(-c_1 \omega \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t) = V_0 \cos \omega t$$

درج بالا مساوات میں دونوں اطراف $\cos \omega t$ کے عددی سر برابر ہوں گے۔ اسی طرح دونوں اطراف $\sin \omega t$ کے عددی سر برابر ہوں گے۔

$$c_1 R + c_2 \omega L = V_0$$

$$-c_1 \omega L + c_2 R = 0$$

ان ہمزا مساوات کو c_1 اور c_2 کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$c_1 = \frac{RV_0}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$c_2 = \frac{\omega LV_0}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

لہذا جبری حل

$$(8.27) \quad i_J(t) = \frac{RV_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \cos \omega t + \frac{\omega LV_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \sin \omega t$$

ہوگا۔

مثال 8.8: درج بالا مثال میں $\omega = 10 \text{ krad s}^{-1}$ اور $V_0 = 310 \text{ V}$ ، $L = 5 \text{ mH}$ ، $R = 100 \Omega$ کی صورت میں جبری حل کو مساوات 8.24 کی مدد سے $i(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi)$ کے طرز پر لکھیں۔

حل: مساوات 8.27 میں دی گئی قیمتیں پُر کرنے سے

$$i_I(t) = \frac{100 \times 310}{100^2 + (10000 \times 0.005)^2} \cos \omega t + \frac{10000 \times 0.005 \times 310}{100^2 + (10000 \times 0.005)^2} \sin \omega t$$

یعنی درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(8.28) \quad i_I(t) = 2.48 \cos \omega t + 1.24 \sin \omega t$$

مساوات 8.24 سے جبری حل کی درکار صورت کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(8.29) \quad i(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi) = I_0 \cos \phi \cos \omega t + I_0 \sin \phi \sin \omega t$$

مساوات 8.28 میں $\cos \omega t$ اور $\sin \omega t$ کے عددی سر کو مساوات 8.29 کے عددی سر کے برابر پُر کرتے ہیں۔

$$(8.30) \quad I_0 \cos \phi = 2.48$$

$$(8.31) \quad I_0 \sin \phi = 1.24$$

ان ہمزاد مساوات کے مربع جمع کرتے ہوئے

$$I_0^2 \cos^2 \phi + I_0^2 \sin^2 \phi = 2.48^2 + 1.24^2$$

ملتا ہے جس میں مساوات 8.25 کے استعمال سے $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ پُر کرتے ہوئے

$$I_0 = \sqrt{2.48^2 + 1.24^2} = 2.7727$$

ملتا ہے۔ اسی طرح مساوات 8.31 کو مساوات 8.30 سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \frac{1.24}{2.48} = \tan \phi$$

یعنی

$$\phi = \tan^{-1} \frac{1.24}{2.48} = \underline{26.6^\circ}$$

ملتا ہے۔ یوں جبری حل درج ذیل لکھا جائے گا

$$(8.32) \quad i_J(t) = 2.77 \cos(\omega t - 26.6^\circ) = 2.77 \cos(10\,000t - 26.6^\circ)$$

جہاں سے ظاہر ہے کہ دباؤ سے رو 26.6° درجے پیچھے ہے۔ مخلوط جبری حل درج ذیل لکھا جائے گا جس کا حقیقی جزو درج بالا مساوات ہے۔

$$(8.33) \quad i_M(t) = 2.77e^{j(10\,000t - 26.6^\circ)}$$

مثال 8.9: مثال 8.8 کے طرز پر مثال 8.7 میں حاصل کئے گئے جبری حل کو $i_J(t) = I_0 \cos(\omega t - \phi)$ کی صورت میں لکھیں۔

حل: مساوات 8.27 میں $\cos \omega t$ اور $\sin \omega t$ کے عددی سر کو مساوات 8.29 میں $\cos \omega t$ اور $\sin \omega t$ کے عددی سر کے برابر پُر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$I_0 \cos \phi = \frac{RV_0}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$I_0 \sin \phi = \frac{\omega LV_0}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

ان ہمزاو مساوات میں دوسری مساوات کو پہلی سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\sin \phi}{\cos \phi} = \tan \phi = \frac{\omega L}{R}$$

یعنی

$$(8.34) \quad \phi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

ملتا ہے۔ جبکہ دونوں ہمزاد مساوات کے مربع کا مجموعہ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned} I_0^2 \cos^2 \phi + I_0^2 \sin^2 \phi &= I_0^2 = \left(\frac{RV_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 + \left(\frac{\omega LV_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \right)^2 \\ &= \frac{(R^2 + \omega^2 L^2) V_0^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)^2} \\ &= \frac{V_0^2}{R^2 + \omega^2 L^2} \end{aligned}$$

یعنی

$$(8.35) \quad I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

ملتا ہے۔ یوں جبری حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(8.36) \quad i_I(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos \left(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \right)$$

مساوات 8.36 سے ظاہر ہے کہ $L = 0$ کی صورت میں $\phi = 0$ ہو گا لہذا دباؤ اور رو ہم زاویہ ہوں گے جبکہ $R = 0$ کی صورت میں $\phi = 90^\circ$ ہو گا لہذا دباؤ سے رو 90° درجے پیچھے ہو گی۔ مزاحمت اور امالہ کے دیگر قیمتوں کی صورت میں دباؤ سے رو 0° تا 90° کے مابین کسی مخصوص درجے پر پیچھے رہے گی۔ اسی لئے مزاحمت اور امالہ کے ادوار کو پیچھے رہنے والے ادوار کہا جاتا ہے۔

سلسلہ وار جڑے مزاحمت اور امالہ کے دور کا حل آپ نے دیکھا۔ یقیناً اس دور کا حل سلسلہ وار جڑے دو عدد مزاحمتی دور کے حل سے کئی گنا مشکل تھا۔ آپ خود تصور کر سکتے ہیں کہ زیادہ تعداد کے پرزوں کا دور حل کرنا کتنا مشکل ہو گا۔ اسی مشکل کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم مخلوط تفاعل²³ کو پیش کرتے ہیں جس سے ادوار کا حل انتہائی آسان ثابت ہوتا ہے۔

مخلوط تفاعل اور سائن نما تفاعل کا تعلق یولر مساوات²⁴

$$(8.37) \quad e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad \text{یولر مساوات}$$

complex function²³
Euler's equation²⁴

دیتی ہے جہاں $j = \sqrt{-1}$ خیالی عدد ہے۔ یولر مساوات میں $\cos \omega t$ حقیقی²⁵ مقدار اور $\sin \omega t$ خیالی²⁶ مقدار ہیں۔

حقیقی دنیا میں مخلوط جبری تفاعل نہیں پایا جاتا۔ اس کے باوجود، دور پر سائن نما جبری تفاعل کی جگہ مخلوط جبری تفاعل مسلط کرتے ہوئے مخلوط حل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ مخلوط جبری تفاعل کو حقیقی جبری تفاعل اور خیالی جبری تفاعل کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ خطی ادوار میں مسئلہ نفاذ کے تحت تمام جبری تفاعل کی علیحدہ علیحدہ اثرات کا مجموعہ لیا جاسکتا ہے۔ یوں جبری تفاعل کے حقیقی جزو سے حل کا حقیقی جزو جبکہ جبری تفاعل کے خیالی جزو سے حل کا خیالی جزو حاصل ہوگا۔ یوں مخلوط حل کے خیالی جزو کو رد کرتے ہوئے حقیقی جزو کو سائن نما تفاعل کا رد عمل تسلیم کیا جاتا ہے۔ اس ترکیب کو مثال کی مدد سے زیادہ آسانی سے سمجھا جاسکتا ہے۔

مثال 8.10: شکل 8.5 میں حقیقی جبری تفاعل $V_0 \cos \omega t$ کی جگہ مخلوط جبری تفاعل نسب کرتے ہوئے حقیقی $i(t)$ کے لئے حل کریں۔

حل: حقیقی جبری تفاعل $v(t) = V_0 \cos \omega t$ کی جگہ دور میں مخلوط جبری تفاعل $v(t) = V_0 e^{j\omega t}$ نسب کرتے ہوئے کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} = V_0 e^{j\omega t}$$

جبری تفاعل $e^{j\omega t}$ کا تفرق $j\omega e^{j\omega t}$ بھی جبری تفاعل ہی ہے لہذا درج بالا مساوات کا مخلوط حل $i_M(t) = I_0 e^{j\omega t}$ فرض کرتے ہیں جہاں I_0 نامعلوم مخلوط مستقل ہے۔ اس حل کو درج بالا مساوات میں پُر کرتے ہوئے

$$RI_0 e^{j\omega t} + L \frac{d}{dt} (I_0 e^{j\omega t}) = V_0 e^{j\omega t}$$

درکار تفرق کے بعد

$$(8.38) \quad RI_0 e^{j\omega t} + j\omega LI_0 e^{j\omega t} = V_0 e^{j\omega t}$$

ملتا ہے جس کے دونوں اطراف کو $e^{j\omega t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(8.39) \quad RI_0 + j\omega LI_0 = V_0$$

اس سے I_0 حاصل کرتے ہیں۔

$$(8.40) \quad I_0 = \frac{V_0}{R + j\omega L}$$

یوں مخلوط رو درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$(8.41) \quad \begin{aligned} i_M(t) &= I_0 e^{j\omega t} \\ &= \frac{V_0 e^{j\omega t}}{R + j\omega L} \end{aligned}$$

ہمیں اس کا حقیقی جزو درکار ہے۔ یولر مساوات کی مدد سے درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$i_M(t) = \frac{V_0 (\cos \omega t + j \sin \omega t)}{R + j\omega L}$$

دائیں ہاتھ کسر کے بالائی اور نچلے حصے کو $R - j\omega L$ سے ضرب دیتے ہیں

$$\begin{aligned} i_M(t) &= \frac{V_0 (\cos \omega t + j \sin \omega t) (R - j\omega L)}{(R + j\omega L) (R - j\omega L)} \\ &= \frac{V_0 (R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t) + j V_0 (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2} \end{aligned}$$

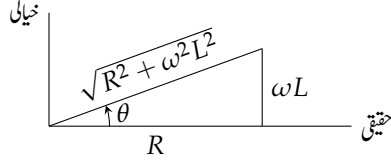
جہاں دوسرا قدم ترتیب دیتے ہوئے لکھا گیا ہے۔ اس کا حقیقی جزو درکار حل ہے

$$(8.42) \quad i(t) = \frac{V_0 (R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

جو عین مساوات 8.27 ہی ہے۔

ہم مساوات 8.40 کے مخلوط مستقل I_0 کو زاویائی شکل میں لکھ کر بھی آگے بڑھ سکتے ہیں۔ مخلوط مستقل کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} I_0 &= \frac{V_0}{R + j\omega L} \\ &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \angle \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}} \\ &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}} \\ &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{-j \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}} \end{aligned}$$



شکل 8.6: مثال 8.10 کا شکل۔

جہاں دوسری قدم پر کسر کے پٹخی حصے کو مساوات 8.3 کی مدد سے زاویائی صورت میں لکھا گیا ہے اور تیسری قدم پر یولر مساوات کا استعمال کیا گیا ہے۔ زاویہ $\theta = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$ کو شکل 8.6 میں دکھایا گیا ہے۔ یوں مخلوط رو درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$i_M = I_0 e^{j\omega t} \\ = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L}{R})}$$

اس مساوات میں $\tan^{-1} \frac{\omega L}{R} = \theta$ لکھتے ہوئے حقیقی جزو لے کر حقیقی رو حاصل کرتے ہیں۔

$$i(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} e^{j(\omega t - \theta)} \Big|_{\text{حقیقی}} \\ = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \theta) \\ = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} (\cos \omega t \cos \theta + \sin \omega t \sin \theta)$$

شکل 8.6 سے $\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ اور $\sin \theta = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ پُر کرتے ہوئے

$$i(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left(\cos \omega t \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} + \sin \omega t \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \right) \\ = \frac{V_0 (R \cos \omega t + \omega L \sin \omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

8.4 دوری سمتیہ

درج بالا حصے میں ہم نے دیکھا کہ حقیقی جبری تفاعل کی جگہ مخلوط جبری تفاعل نسب کرتے ہوئے مخلوط حل حاصل کیا جا سکتا ہے جس کا حقیقی جزو حقیقی جبری رد عمل ہو گا۔ اس ترکیب کو مثال 8.10 میں استعمال کیا گیا جہاں مساوات 8.38 کو $e^{j\omega t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات 8.39 حاصل کی گئی۔ مساوات 8.39 سے I_0 حاصل کی گئی جسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے مخلوط حل حاصل کیا گیا۔ مخلوط حل کا حقیقی جزو یعنی مساوات 8.42 درکار جواب ہے۔ مثال 8.8 میں مخصوص قیمتیں استعمال کرتے ہوئے مخلوط رو کو مساوات 8.33 میں پیش کیا گیا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جزو $e^{j\omega t}$ جوں کا توں مخلوط جبری تفاعل اور مخلوط جبری حل میں پایا جاتا ہے۔

حقیقت میں کسی بھی خطی دور پر مخلوط جبری تفاعل مثلاً

$$(8.43) \quad v_M = V_0 e^{j\omega t}$$

مسلط کرنے سے دور میں تمام رو کی صورت $i_M(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ اور دباؤ کی صورت $v_M(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi)}$ ہو گی جہاں تمام رواور دباؤ کی تعدد ω جبکہ ان کے انفرادی حیٹے I_0 یا V_0 اور زاویہ ہٹاؤ ϕ مختلف ہوں گے۔ یہاں حیٹہ حقیقی مقدار ہے۔

یوں تعدد جانتے ہوئے کسی بھی مخلوط تفاعل مثلاً مخلوط رو کو اس کے حیٹے I_0 اور زاویائی ہٹاؤ ϕ سے مکمل طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ مخلوط تفاعل مثلاً

$$(8.44) \quad i_M(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi)}$$

سے حقیقی تفاعل درج ذیل

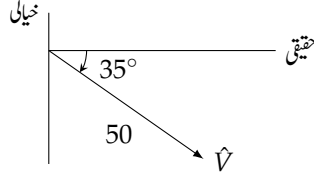
$$(8.45) \quad i(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi)} \Big|_{\text{حقیقی}}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں I_0 حقیقی مقدار ہے اور زیر نوشت میں لفظ "حقیقی" لکھنے کا مطلب ہے کہ اس تفاعل کا حقیقی جزو لیا جائے یعنی

$$(8.46) \quad i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$$

مساوات 8.45 حقیقی رو دیتی ہے۔ اس طرز کے تمام مساوات میں $e^{j\omega t}$ پایا جاتا ہے اور مساوات کا حقیقی جزو ہی حقیقی مقدار ہوتا ہے۔ یوں ایسے مساوات میں لفظ "حقیقی" اور $e^{j\omega t}$ کو ذہن میں رکھتے ہوئے انہیں لکھنے سے گریز کیا جاتا ہے۔ مساوات 8.45 میں ایسا ہی کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا

$$(8.47) \quad \hat{I} = I_0 e^{j\phi}$$



شکل 8.7: مثال 8.11 کی دوری سمتیہ۔

جہاں رو کو ٹوپی والے بڑے حرف سے ظاہر کیا گیا ہے۔ دباؤ کی صورت میں تفاعل کو \hat{V} لکھا جاتا۔ ٹوپی والے بڑے حرف سے ظاہر کردہ تفاعل کو $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر حقیقی جزو لینے سے حقیقی تفاعل حاصل کیا جاتا ہے۔

مساوات 8.47 کا صفحہ 364 پر مساوات 8.7 سے موازنہ کریں۔ ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے \hat{I} مخلوط عدد کو ظاہر کرتا ہے۔ اگرچہ مساوات 8.47 درحقیقت میں مساوات 8.45 کو چھوٹا لکھنے کا طریقہ ہے لہذا \hat{I} مخلوط عدد کو ظاہر نہیں کرتا لیکن دیکھا یہ گیا ہے کہ \hat{I} کو مخلوط عدد تصور کر لینے سے ہمارے لئے آسانی پیدا ہوتی ہے۔ آئیں \hat{V} کو مخلوط عدد فرض کرتے ہوئے اس کو مخلوط سطح پر ظاہر کریں۔

مثال 8.11: مخلوط دباؤ $v_M(t) = 50e^{j(100\pi t - 35^\circ)}$ سے \hat{V} حاصل کرتے ہوئے \hat{V} کو مخلوط سطح پر دکھائیں۔

حل: مخلوط دباؤ سے حقیقی دباؤ لکھتے ہیں۔

$$v(t) = 50e^{j(100\pi t - 35^\circ)} \Big|_{\text{حقیقی}}$$

اس مساوات کی تعدد $(\omega = 100\pi)$ کو ذہن نشین کرتے ہوئے لفظ "حقیقی" اور $e^{j100\pi t}$ لکھنے سے گریز کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا

$$\begin{aligned} \hat{V} &= 50e^{-j35^\circ} \\ &= 50 \angle -35^\circ \end{aligned}$$

جسے شکل 8.7 میں مخلوط سطح پر دکھایا گیا ہے۔ حقیقی محدّد سے گھڑی کی گردش کی جانب مثبت زاویہ ناپا جاتا ہے لہذا منفی زاویہ کو گھڑی کی گردش کے الٹ جانب دکھایا گیا ہے۔ مخلوط اعداد اور \hat{V} میں فرق رکھنے کی خاطر \hat{V} کو مخلوط سطح پر تیر کی نشان سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 8.11 میں \hat{V} کو مخلوط سطح پر تیر کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے جسے دیکھ کر یوں معلوم ہوتا ہے جیسے \hat{V} ایک سمتیہ ہے۔ اسی حقیقت کی بنا پر \hat{V} یا \hat{I} کو دوری سمتیہ²⁷ کہتے ہیں اور شکل 8.7 کو دوری سمتی شکل²⁸ کہتے ہیں۔

مخلوط عدد لکھنے کے تمام طرز پر دوری سمتیہ کو لکھا جاتا ہے لہذا درج ذیل لکھنا ممکن ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{I} &= I_0 e^{j\phi} \\ (8.48) \quad &= I_0 / \phi \\ &= I_x + jI_y\end{aligned}$$

دوری سمتیہ کا حیثہ حقیقی اور مثبت مقدار ہوتا ہے۔ یوں درج بالا مساوات میں I_0 حقیقی مثبت مقدار ہے۔

مساوات 8.46 طرز کو تفاعل کی وقتی صورت²⁹ کہتے ہیں جبکہ مساوات 8.48 طرز کو تفاعل کی تعددی صورت³⁰ کہتے ہیں۔

مثال 8.12: درج ذیل تفاعل کے دوری سمتیہ دریافت کریں۔

$$v_1(t) = 20 \cos(100t + 30^\circ), \quad v_2(t) = -40 \sin(310t - 40^\circ), \quad i(t) = 22 \cos(\omega t + 0.2\pi)$$

حل: دباؤ $v_1(t)$ کو مخلوط تفاعل کا حقیقی جزو لکھ کر

$$v_1(t) = 20e^{j(100t+30^\circ)} \Big|_{\text{حقیقی}}$$

تعدد کو ذہن نشین کرتے ہوئے، e^{j100t} نہ لکھتے ہوئے اور زیر نوشت میں لفظ "حقیقی" نہ لکھتے ہوئے دوری سمتیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\hat{V}_1 = 20e^{j30^\circ} = 20/30^\circ$$

²⁷ phasor
²⁸ phasor diagram
²⁹ time domain form
³⁰ frequency domain form

اسی طرح $v_2(t)$ کو \cos کی صورت میں یوں لکھتے ہیں کہ حیثہ مثبت لکھا جائے۔

$$v_2 = -40 \sin(310t - 40^\circ) = 40 \cos(310t - 40^\circ + 90^\circ) = 40 \cos(310t + 50^\circ)$$

اس کو مخلوط تفاعل کا حقیقی جزو لکھتے ہیں۔

$$v_2 = 40e^{j(310t+50^\circ)} \Big|_{\text{حقیقی}}$$

اس مساوات کے زیر نوشت میں لفظ "حقیقی" نہ لکھتے ہوئے اور ساتھ ہی ساتھ e^{j310t} نہ لکھتے ہوئے دوری سمتیہ حاصل ہوتی ہے یعنی

$$\hat{V}_2 = 40e^{j50^\circ}$$

جس کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\hat{V}_2 = 40/\underline{50^\circ}$$

رو کو بھی مخلوط تفاعل کا حقیقی جزو لکھ کر

$$i(t) = 22e^{j(\omega t + 0.2\pi)} \Big|_{\text{حقیقی}}$$

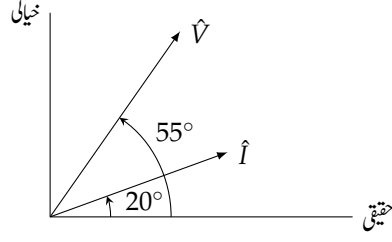
دوری سمتیہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{I} = 22e^{j0.2\pi} = 22/\underline{0.2\pi}$$

مشق 8.4: درج ذیل کو تعددی صورت میں لکھیں جہاں $\omega = 400 \text{ rad s}^{-1}$ ہے۔

$$\hat{I} = 35/\underline{44^\circ}, \quad \hat{V} = 12e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad \hat{I} = 33/\underline{-77^\circ}$$

جوابات: $v(t) = 12 \cos(400t + \frac{\pi}{4})$ ، $i(t) = 35 \cos(400t + 44^\circ)$ ،
 $i(t) = 33 \cos(400t - 77^\circ)$



شکل 8.8: دوری سمتیات۔

شکل 8.8 میں $\hat{I} = 25 \angle 20^\circ$ اور $\hat{V} = 30 \angle 55^\circ$ کھینچے گئے ہیں جہاں سے دوری سمتیات کا زاویائی تعلق بھی ظاہر ہوتا ہے۔ شکل 8.8 میں دباؤ سے رو 33° درجے پیچھے ہے۔

کسی بھی حقیقی تفاعل مثلاً حقیقی دباؤ کو $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi)$ صورت میں لکھتے ہوئے جہاں V_0 مثبت حقیقی مقدار ہو، V_0 اور ϕ استعمال کرتے ہوئے دوری سمتیہ فوراً

$$(8.49) \quad \hat{V} = V_0 \angle \phi$$

لکھا جاسکتا ہے۔

مثال 8.13: درج ذیل کے دوری سمتیات فوراً لکھیں۔

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 20 \cos(132t - 27^\circ) \\ v_1(t) &= -100 \cos(20t - 60^\circ) \\ i_2(t) &= -90 \sin(450t - 100^\circ) \end{aligned}$$

حل: رو i_1 میں $I_0 = 20$ اور $\phi = -27^\circ$ ہے لہذا درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\hat{I}_1 = 20 \angle -27^\circ$$

دباؤ کا حیط منفی ہے لہذا مثبت حیط حاصل کرنے کی خاطر دباؤ کو درج ذیل لکھتے ہیں

$$v_1(t) = 100 \cos(20t - 60^\circ + 180^\circ) = 100 \cos(20t + 120^\circ)$$

جس سے دوری سمتیہ درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\hat{V}_1 = 100/\underline{120^\circ}$$

رو $i_2(t)$ کو $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi)$ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$i_2(t) = 90 \cos(450t - 100^\circ + 90^\circ) = 90 \cos(450t - 10^\circ)$$

یوں دوری سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\hat{I}_2 = 90/\underline{-10^\circ}$$

8.5 مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر کے انفرادی دوری سمتیہ تعلق

شکل 8.9 پر نظر رکھتے ہوئے پڑھیں۔ مزاحمت R پر مخلوط دباؤ $v(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi_v)}$ مسلط کرنے سے مزاحمت میں مخلوط رو $i(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi_i)}$ گزرے گی۔ اوہم کے قانون کے تحت

$$V_0 e^{j(\omega t + \phi_v)} = R I_0 e^{j(\omega t + \phi_i)}$$

یعنی

$$V_0 e^{j\phi_v} = R I_0 e^{j\phi_i}$$

ہو گا۔ اس کو دوری سمتیہ کی صورت میں

$$(8.50) \quad \hat{V} = R \hat{I}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں

$$\hat{V} = V_0 e^{j\phi_v}$$

$$\hat{I} = I_0 e^{j\phi_i}$$

یعنی

$$(8.51) \quad \begin{aligned} \hat{V} &= V_0 / \phi_v \\ \hat{I} &= I_0 / \phi_i \end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔ اس طرح مساوات 8.50 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$V_0 / \phi_v = R I_0 / \phi_i$$

یاد رہے کہ دوری سمتیات میں V_0 اور I_0 حقیقی اور مثبت مقدار ہیں۔ درج بالا مساوات میں بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ کے مخلوط اعداد صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب ان کے حیطے برابر ہوں اور ان کے زاویے برابر ہوں یعنی

$$(8.52) \quad \begin{aligned} V_0 &= I_0 R \\ \phi_v &= \phi_i \end{aligned}$$

اس طرح مزاحمت کی روا اور دباؤ ہم زاویہ ہیں۔ مساوات 8.52 کی مدد سے مساوات 8.51 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں۔

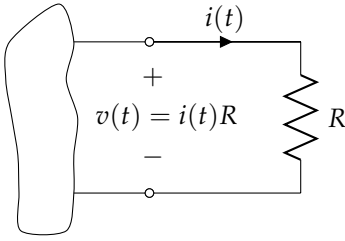
$$(8.53) \quad \begin{aligned} \hat{V} &= V_0 / \phi_v \\ \hat{I} &= \frac{V_0}{R} / \phi_v \end{aligned}$$

شکل 8.9-پ میں مزاحمت کے \hat{I} اور \hat{V} دوری سمتیات دکھائے گئے ہیں جو تعددی تفاعل ہیں جبکہ شکل 8.9-ت میں مزاحمت کے $i(t)$ اور $v(t)$ دکھائے گئے ہیں جو وقتی تفاعل ہیں۔

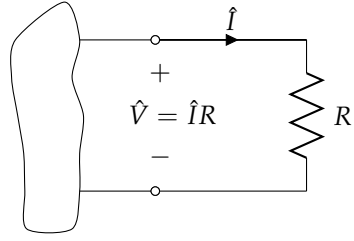
مثال 8.14: شکل 8.9-ب میں 10Ω کے مزاحمت پر $v(t) = 22 \cos(30t - 66^\circ)$ دباؤ مسلط کی گئی ہے۔ مزاحمت کے رو کی وقتی صورت دریافت کریں۔ رو کی تعددی صورت شکل 8.9-الف سے دریافت کریں۔

حل: اوہم کے قانون کی مدد سے رو کی وقتی صورت معلوم کرتے ہیں۔

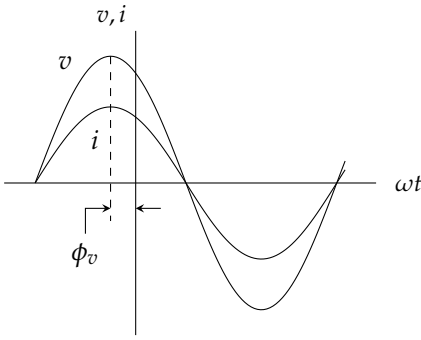
$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{22 \cos(30t - 66^\circ)}{10} = 2.2 \cos(30t - 66^\circ) \text{ A}$$



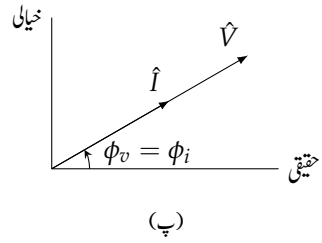
(ب)



(الف)



(ت)



(پ)

شکل 8.9: مزاحمت کے دباؤ اور رو کے تعددی اور وقتی تفاعل۔

8.5. مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر کے انفرادی دوری سمتی تعلق

آئیں اب رو کی تعددی صورت اختیار کرتے ہیں۔ دوری دباؤ

$$\hat{V} = 22/\underline{-66^\circ} \text{ V}$$

ہے لہذا دوری رو درج ذیل ہوگی۔

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{R} = \frac{22/\underline{-66^\circ}}{10} = 2.2/\underline{-66^\circ} \text{ A}$$

مشق 8.5: بارہ اوہم کے مزاحمت میں دوری رو $\hat{I} = 37/\underline{43^\circ} \text{ A}$ ہے جبکہ تعدد $\omega = 172 \text{ rad s}^{-1}$ ہے۔ دباؤ کی وقتی صورت لکھیں۔

$$v(t) = 444 \cos(172t + 43^\circ) \text{ V} \text{ جواب:}$$

شکل 8.10 پر نظر رکھتے ہوئے پڑھیں۔ امالہ گیر کے دباؤ اور رو کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$(8.54) \quad v = L \frac{di(t)}{dt}$$

امالہ گیر پر مخلوط دباؤ $v(t) = V_0 e^{j(\omega t + \phi_v)}$ مسلط کرنے سے اس میں مخلوط رو $i(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi_i)}$ پیدا ہو گی۔ ان قیمتوں کو درج بالا مساوات میں پُر کرنے سے

$$\begin{aligned} V_0 e^{j(\omega t + \phi_v)} &= L \frac{d}{dt} [I_0 e^{j(\omega t + \phi_i)}] \\ &= j\omega L I_0 e^{j(\omega t + \phi_i)} \end{aligned}$$

یعنی

$$V_0 e^{j\phi_v} = j\omega L I_0 e^{j\phi_i}$$

ملتا ہے جو دوری مساوات ہے۔ یہ دوری مساوات درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$\hat{V} = j\omega L \hat{I} \quad (8.55)$$

آپ نے دیکھا کہ مساوات 8.54 جو تفرقی اور وقتی مساوات ہے سے مساوات 8.55 حاصل ہوتا ہے جو تعدوی اور الجبرائی مساوات ہے۔ دوری سمتیات کی مدد سے تفرقی مساوات سے الجبرائی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ الجبرائی مساوات حل کرنا نہایت آسان ہوتا ہے جبکہ تفرقی مساوات کو حل کرنا دشوار ہوتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ دوری سمتیات اتنے مقبول ہیں۔

آپ جانتے ہیں کہ

$$\angle 90^\circ = e^{j90^\circ} = \cos 90^\circ + j \sin 90^\circ = j \quad (8.56)$$

لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات 8.55 کو

$$\hat{V} = \omega L \hat{I} e^{j90^\circ}$$

یعنی

$$V_0 e^{j\phi_v} = \omega L I_0 e^{j(\phi_i + 90^\circ)} \quad (8.57)$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 8.57 میں دونوں ہاتھ کے مخلوط اعداد صرف اور صرف اس وقت برابر ہوں گے جب ان کے حیظے برابر ہوں اور ان کے زاویے برابر ہوں لہذا اس مساوات کے تحت

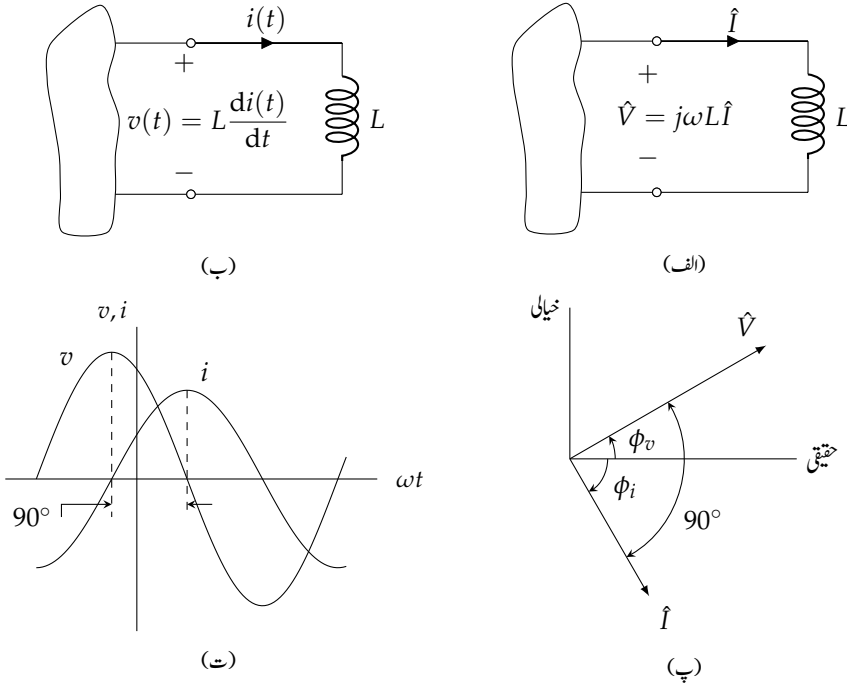
$$\begin{aligned} V_0 &= \omega L I_0 \\ \phi_v &= \phi_i + 90^\circ \end{aligned} \quad (8.58)$$

ہوں گے۔ یوں دباؤ کا زاویہ، رو کے زاویے سے 90° درجے زیادہ ہے لہذا رو سے دباؤ 90° درجے آگے ہے یا دباؤ سے رو 90° پیچھے ہے۔ شکل 8.10-پ میں دوری سمتیات دکھائے گئے ہیں جہاں دباؤ سے رو 90° درجے پیچھے دکھایا گیا ہے۔

مساوات 8.57 سے وقتی مساوات درج ذیل لکھی جائے گی جہاں مساوات 8.58 کے تحت $\phi_v = \phi_i + 90^\circ$ ہو گا۔

$$V_0 \cos(\omega t + \phi_v) = \omega L I_0 \cos(\omega t + \phi_i + 90^\circ) \quad (8.59)$$

درج بالا مساوات میں دیے دباؤ اور رو کو شکل 8.10-ت میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 8.10: امالہ کے دباؤ اور رو کے تعددی اور وقتی تفاعل۔

مثال 8.15: شکل 8.10 میں 4 mH امالہ گیر پر $v(t) = 12 \cos(1000t + 22^\circ)$ دباو مسلط کی جاتی ہے۔ امالہ گیر کی رو دریافت کریں۔

حل: دوری سمتیہ دباو درج ذیل ہے۔

$$\hat{V} = 12/22^\circ$$

مساوات 8.55 کی مدد سے دوری سمتیہ رو حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \frac{\hat{V}}{j\omega L} \\ &= \frac{12/22^\circ}{j1000 \times 0.004} \\ &= \frac{12/22^\circ}{4/90^\circ} \\ &= 3/-68^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

جہاں مساوات 8.56 کا استعمال کرتے ہوئے $j = 90^\circ$ لکھا گیا ہے۔ یوں رو کی وقتی صورت درج ذیل ہو گی۔

$$i(t) = 3 \cos(1000t - 68^\circ) \text{ A}$$

مشق 8.6: امالہ کی قیمت 10 mH جبکہ اس میں رو $\hat{I} = 8/44^\circ$ کی تعدد 500 rad s^{-1} ہے۔ دباو کی وقتی صورت دریافت کریں۔

$$v(t) = 40 \cos(500t + 134^\circ) \text{ V} \text{ جواب:}$$

شکل 8.11 پر نظر رکھتے ہوئے پڑھیں جہاں برق گیر پر دباو $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi_v)$ مسلط کی گئی ہے۔ برق گیر کی تفرقی مساوات

$$(8.60) \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

میں مخلوط دباو اور مخلوط رو پڑ کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} I_0 e^{j(\omega t + \phi_i)} &= C \frac{d}{dt} [V_0 e^{j(\omega t + \phi_v)}] \\ &= j\omega C V_0 e^{j(\omega t + \phi_v)} \end{aligned}$$

یعنی

$$I_0 e^{j\phi_i} = j\omega C e^{j\phi_v}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو دوری سمتیہ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$(8.61) \quad \hat{I} = j\omega C \hat{V}$$

مساوات 8.60 برق گیر کی تفرقی مساوات ہے جبکہ مساوات 8.61 برق گیر کی الجبرائی مساوات ہے۔

مساوات 8.61 میں $j = e^{j90^\circ}$ لکھنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$(8.62) \quad I_0 e^{j\phi_i} = \omega C e^{j(\phi_v + 90^\circ)}$$

اس مساوات کے دونوں اطراف صرف اور صرف اس صورت برابر ہو سکتے ہیں جب دونوں اطراف کے حیطے برابر ہوں اور ان کے زاویے برابر ہوں۔

$$(8.63) \quad \begin{aligned} I_0 &= \omega C V_0 \\ \phi_i &= \phi_v + 90^\circ \end{aligned}$$

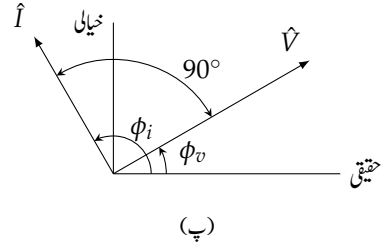
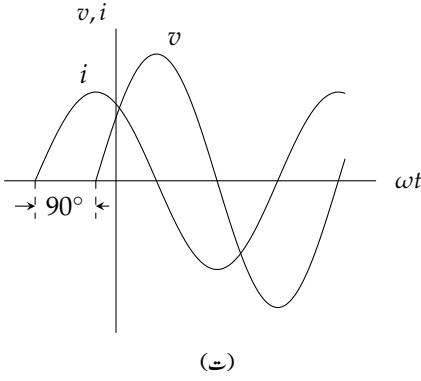
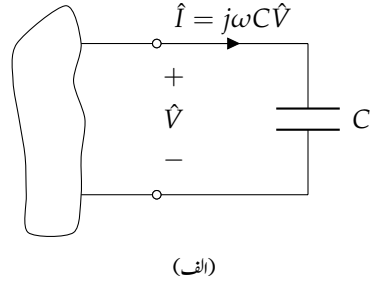
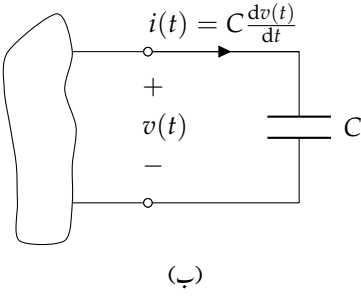
درج بالا مساوات کے تحت دباو سے رو 90° درجے آگے ہے۔

مساوات 8.62 سے وقتی صورت لکھتے ہیں جہاں درج بالا مساوات کے تحت $\phi_i = \phi_v + 90^\circ$ ہو گا۔

$$(8.64) \quad I_0 \cos(\omega t + \phi_i) = \omega C V_0 \cos(\omega t + \phi_v + 90^\circ)$$

شکل 8.11-پ میں دوری سمتیت دکھائے گئے ہیں جبکہ شکل-ت میں دباو اور رو کی وقتی صورت دکھائی گئی ہے۔

مثال 8.16: شکل 8.11 میں $100 \mu F$ برق گیر پر $v(t) = 7 \cos(5000t - 60^\circ) V$ کا دباو مسلط کیا گیا ہے۔ رو حاصل کریں۔



شکل 8.11: برقی گیر کے دباؤ اور رو کے تعددی اور وقتی تفاعل۔

حل: مسلط دباؤ کی دوری سمتیہ لکھتے ہیں۔

$$\hat{V} = 7 \angle -60^\circ$$

یوں رو درج ذیل ہوگی

$$\begin{aligned}\hat{I} &= j\omega C \hat{V} \\ &= j5000 \times 100 \times 10^{-6} 7 \angle -60^\circ \\ &= 3.5 \angle -60^\circ + 90^\circ \\ &= 3.5 \angle 30^\circ \text{ A}\end{aligned}$$

جس کی وقتی صورت درج ذیل ہے۔

$$i(t) = 3.5 \cos(5000t + 30^\circ) \text{ A}$$

مشق 8.7: شکل 8.11 میں $330 \mu\text{F}$ برقی گیر کی رو $\hat{I} = 11 \angle -12^\circ \text{ A}$ ہے۔ رو کی تعدد 6000 Hz ہے۔ دباؤ کی وقتی صورت حاصل کریں۔

$$v(t) = 0.884 \cos(12000\pi t - 102^\circ) \text{ V} \text{ جواب:}$$

8.6 برقی رکاوٹ اور برقی فراوانی

