

برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	بنیاد	1
1	برقی بار، برقی رو اور برقی دباؤ	1.1
6	قانون اوہم	1.2
8	توانائی اور طاقت	1.3
15	برقی پڑے	1.4
15	غیر تابع منبع	1.4.1
17	تابع منبع	1.4.2
27	مزا جتنی ادوار	2
27	قانون اوہم	2.1
35	قوانین کرخوف	2.2
51	سلسلہ وار جڑے پڑوں میں رو	2.3
52	تقسیم دباؤ	2.4
55	متعدد سلسلہ وار مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت	2.5
58	سلسلہ وار متعدد منبع دباؤ اور مزاحمت	2.6
59	متوازی جڑے مزاحمت پر یکساں دباؤ پایا جاتا ہے	2.7
61	تقسیم رو اور متعدد متوازی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت	2.8
68	سلسلہ وار اور متوازی مزاحمت	2.9
73	تخصیص مزاحمت	2.10
76	سلسلہ وار اور متوازی مزاحمتوں کے ادوار کا حل	2.11
84	ستارہ-تکون تبادلہ	2.12
91	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	2.13
101	ترکیب جوڑ اور دائری ترکیب	3
101	تجزیہ جوڑ	3.1
104	غیر تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار	3.2
117	تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار	3.3
123	غیر تابع منبع دباؤ استعمال کرنے والے ادوار	3.4

132	تابع منبع دباو استعمال کرنے والے ادوار	3.5
139	دائری تجزیہ	3.6
140	غیر تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	3.7
148	غیر تابع منبع رواستعمال کرنے والے ادوار	3.8
154	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	3.9
158	دائری ترکیب اور ترکیب جوڑ کا موازنہ	3.10

161	حسابی ایپلیفائر	4
171	کامل حسابی ایپلیفائر	4.1
171	منفی ایپلیفائر	4.2
174	مثبت ایپلیفائر	4.3
176	مستقام کار	4.4
176	منفی کار	4.5
178	جمع کار	4.6
181	متوازن اور غیر متوازن صورت	4.7
185	موازنہ کار	4.8
185	آلاتی ایپلیفائر	4.9

187	مسئلے	5
187	مساوی دور	5.1
187	مسئلہ خطیت	5.2
191	مسئلہ نفاذ	5.3
201	مساوی ادوار	5.4
206	مسئلہ تھون، مسئلہ نارٹن اور مسئلہ متبادلہ منبع	5.5
225	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	5.6
231	تابع منبع اور غیر تابع منبع دونوں استعمال کرنے والے ادوار	5.7
239	زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ	5.8

247	برق گیر اور امالہ گیر	6
247	برق گیر	6.1
261	امالہ گیر	6.2
270	برق گیر اور امالہ گیر کے خصوصیات	6.3
273	سلسلہ وار جڑے برق گیر	6.4
277	متوازی جڑے برق گیر	6.5
281	سلسلہ وار امالہ گیر	6.6
283	متوازی امالہ گیر	6.7
287	حسابی ایپلیفائر کے RC ادوار	6.8
288	تفرق کار	6.9

293	عارضی رد عمل	7
293	تعارف	7.1
293	ایک درجی ادوار	7.2

295	7.2.1 رد عمل کی عمومی مساوات
321	7.3 دھڑکن
328	7.4 دو درجی ادوار
359	8 تجزیہ برقرار حال
359	8.1 مخلوط اعداد
364	8.2 سائن نمائندگی
373	8.3 سائن نما اور مخلوط جبری تفاعل
381	8.4 دوری سمتیہ
386	8.5 مزاحمت، امالہ گیر اور برقی گیر کے انفرادی دوری سمتیہ تعلق
396	8.6 برقی رکاوٹ اور برقی فراوانی
409	8.7 دوری سمتیہ کے اشکال
419	8.8 کر خوف مساوات
424	8.9 تجزیاتی تراکیب
443	9 برقرار برقی طاقت
443	9.1 لمبائی طاقت
446	9.2 اوسط طاقت
453	9.3 زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ
463	9.4 موثر قیمت
472	9.5 جزو طاقت
476	9.6 مخلوط طاقت
484	9.7 جزو طاقت کی درستی
489	9.8 برقی چھٹکا
491	9.9 نم زمین
492	9.10 ایک دور کا نظام
497	9.11 حفاظتی تدابیر
499	10 مقناطیسی جڑے ادوار
499	10.1 مشترکہ امالہ
517	10.2 مشترکہ امالہ میں توانائی کا ذخیرہ
523	10.3 کامل ٹرانسفارمر
547	11 تین دوری نظام
547	11.1 تین دوری ستارہ دیاو
553	11.2 ستارہ ستارہ (YY) جوڑ
561	11.3 تین دوری ٹکونی (Δ) دیاو
566	11.4 ٹکونی بوجھ
571	11.5 طاقت کے کلیات
580	11.6 جزو طاقت کی درستی

585	12	تعددی رد عمل
596	12.1	جال
598	12.2	صفر اور قطب
601	12.3	سائن نما تعددی تجزیہ
601	12.3.1	یوڈا خطوط
622	12.4	گمکی ادوار
656	12.5	چیلنی
669	13	لاپلاس بدل
669	13.1	تعاریف
670	13.2	تفاعل کیتائی
677	13.3	لاپلاس بدل کی جوڑیاں
681	13.4	خواص البدل
686	13.5	الٹ لاپلاس بدل کا حصول
687	13.5.1	جزوی کسری پھیلاؤ
698	13.6	تکمل الجھاؤ
702	13.7	مسئلہ ابتدائی قیمت اور مسئلہ اختتامی قیمت
707	14	ادوار کا حل بذریعہ لاپلاس بدل
707	14.1	ادوار کا حل
709	14.2	پرزوں کے مساوی لاپلاسی ادوار
713	14.3	تجزیاتی تراکیب
733	14.4	تبادلی تفاعل جال
745	14.5	ترسیم قطبین و صفر اور یوڈا خط
747	14.6	برقرار حال رد عمل
757	15	فوریئر تجزیہ
777	15.1	تشاکل تفاعل

باب 15

فوریر تجزیہ

دوری تفاعل¹ سے مراد وہ تفاعل ہے جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہے جہاں T_0 دوری عرصہ² کہلاتی ہے۔

$$(15.1) \quad f(t) = f(t + nT_0), \quad n = \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$$

درج بالا مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی لمحہ t پر دوری تفاعل کی قیمت $f(t)$ اور اس لمحے سے T_0 وقت بعد تفاعل کی قیمت $f(t + T_0)$ برابر ہیں۔ شکل 15.1 میں اس کی وضاحت کی گئی ہے۔ دوری عرصے کو سیکنڈ (s) میں ناپا جاتا ہے۔ دوری عرصہ T_0 اور تعدد f_0 کا تعلق درج ذیل ہے جہاں تعدد کو ہرٹز³ (Hz) میں ناپا جاتا ہے۔

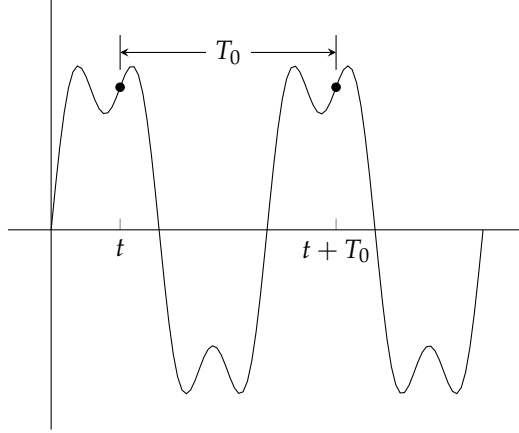
$$(15.2) \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

زاویائی تعدد ω_0 اور تعدد f_0 کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$(15.3) \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$

زاویائی تعدد کو ریڈین فی سیکنڈ (rad s^{-1}) میں ناپا جاتا ہے۔ شکل 15.2 میں چند دوری امواج⁴ دکھائے گئے ہیں۔

periodic function¹
time period²
Hertz, Hz³
periodic wave⁴



شکل 15.1: دوری عرصہ۔

کسی بھی دوری تقابل کو بطور درج ذیل فوریئر تسلسل⁵ لکھا⁶ جاسکتا ہے

$$\begin{aligned}
 f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \\
 (15.4) \quad &= a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos(2\omega_0 t) + a_3 \cos(3\omega_0 t) + \dots \\
 &\quad + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin(2\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t) + \dots
 \end{aligned}$$

جہاں a_0 ، a_1 ، a_2 ، b_1 وغیرہ تسلسل کے عددی سر⁷ کہلاتے ہیں۔ فوریئر تسلسل کی اوسط قیمت a_0 کے برابر ہے۔ ایک دوری عرصہ T_0 میں $\cos \omega_0 t$ یا $\sin \omega_0 t$ کی ایک لہر، $\cos(2\omega_0 t)$ یا $\sin(2\omega_0 t)$ کی دو لہریں اور $\cos(m\omega_0 t)$ یا $\sin(m\omega_0 t)$ کی m لہریں پوری آتی ہیں۔ اس حقیقت کو شکل 15.3 میں دکھایا گیا ہے جہاں وضاحت کی خاطر امواج کے حیطے مختلف رکھے گئے ہیں۔ فوریئر تسلسل میں $a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t$ بنیادی رکن⁸ یا پہلا ہارمونی رکن کہلاتا ہے، $a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t)$ دوسرا ہارمونی رکن⁹ کہلاتا ہے، $a_m \cos(m\omega_0 t) + b_m \sin(m\omega_0 t)$ تیسرا ہارمونی رکن اور اسی طرح $a_3 \cos(3\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t)$ ایم ہارمونی رکن کہلاتا ہے۔ ہم یہاں اصل رک کر چند حقائق اور نکلمات پر غور کرتے ہیں جو فوریئر تسلسل میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

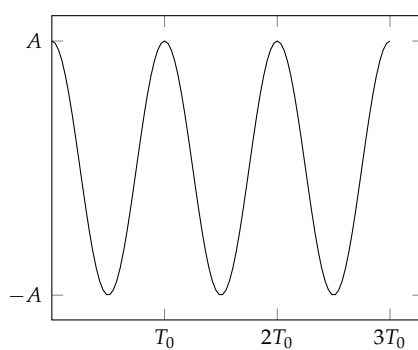
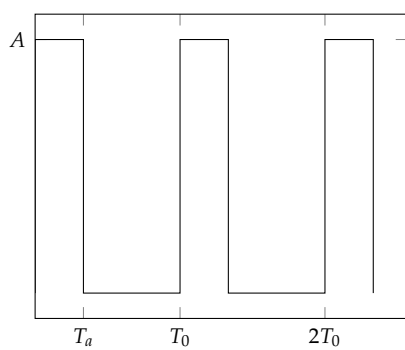
⁵ Fourier series

⁶ جیمز پیٹ یوسف فوریئر نے حرارتی توانائی کے بہاؤ پر غور کے دوران اس تسلسل کو دریافت کیا۔

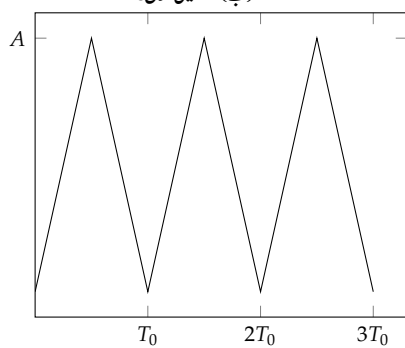
⁷ coefficients

⁸ fundamental component

⁹ second harmonic

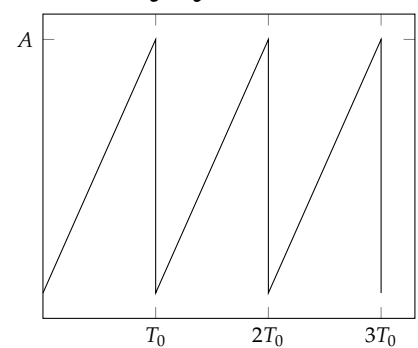


(ب) مستطیل موج۔



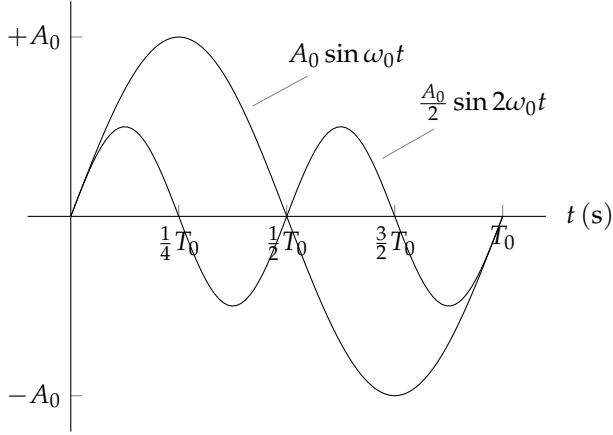
(ت) تکیونی موج۔

(الف) سائن نمائوج۔



(پ) دندان موج۔

شکل 15.2: چند دوری امواج۔



شکل 15.3: ایک دوری عرصہ میں فوریئر تسلسل کے ارکان کی تعداد۔

آپ دو سمتیوں کے نقطہ ضرب¹⁰ سے خوب واقف ہیں۔ سمتیہ A اور B کا نقطہ ضرب یا غیر سمتی ضرب¹¹ درج ذیل ہے جہاں دونوں سمتیوں کے مابین زاویہ θ ہے۔

$$(15.5) \quad A \cdot B = AB \cos \theta$$

آپس میں عمودی¹² سمتیوں کے مابین $\theta = 90^\circ$ ہونے کی بدولت $A \cdot B = 0$ ہوتا ہے جبکہ کسی بھی سمتیہ کے خود نقطہ ضرب کا جذر اس کے حیظے کے برابر ہوتا ہے۔

$$(15.6) \quad |A| = \sqrt{A \cdot A}$$

اسی سوچ کے ساتھ تفاعل کا نقطہ ضرب بیان کیا جاتا ہے۔

اگر تفاعل $f(t) \neq 0$ اور $g(t) \neq 0$ کے حاصل ضرب کا تکمل $a \leq t \leq b$ فاصلے پر صفر کے برابر ہو

$$(15.7) \quad \int_a^b f(t)g(t) dt = 0$$

تو $a \leq t \leq b$ فاصلے پر ان تفاعل کو آپس میں عمودی تصور کیا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ دونوں تفاعل از خود غیر سمتی¹³ اور غیر صفر ہیں۔

¹⁰ dot product

¹¹ scalar product

¹² orthogonal

¹³ scalar

کسی بھی مقدار کا مربع مثبت ہوتا ہے لہذا تفاعل کا مربع $f^2(t)$ ہر نقطے پر مثبت ہوگا۔ فاصلہ $a \leq t \leq b$ پر تفاعل کے معیار¹⁴ $\|f(t)\|$ سے مراد

$$(15.8) \quad \|f(t)\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}$$

ہے۔

مثال 15.1: ثابت کریں کہ $0 \leq t \leq T_0$ فاصلے پر $\cos(m\omega_0 t)$ اور $\cos(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی ہیں جہاں $m = 1, 2, 3, \dots$ اور $n = 1, 2, 3, \dots$ ممکن ہیں لیکن $m \neq n$ ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا مکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt &= \int_0^{T_0} \frac{\cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right] + \cos\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2} dt \\ &= \frac{\sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} \Bigg|_0^{T_0} \\ &= \frac{\sin[(m+n)2\pi]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin[(m-n)2\pi]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} \\ &\quad - \frac{\sin[(m+n)0]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin[(m-n)0]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} \end{aligned}$$

چونکہ m اور n عدد صحیح ہیں لہذا $m+n$ اور $m-n$ بھی عدد صحیح ہوں گے لہذا $\sin[(m+n)2\pi] = 0$ اور $\sin[(m-n)2\pi] = 0$ ہوں گے۔ اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(15.9) \quad \int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad (m \neq n)$$

مثال 15.2: ثابت کریں کہ $0 \leq t \leq T_0$ فاصلے پر $\sin(m\omega_0 t)$ اور $\sin(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی ہیں جہاں $m = 1, 2, 3, \dots$ اور $n = 1, 2, 3, \dots$ ممکن ہیں لیکن $m \neq n$ ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا مکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt &= \int_0^{T_0} \frac{\cos\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right] - \cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2} dt \\ &= \frac{\sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} \Bigg|_0^{T_0} \\ &= \frac{\sin[(m-n)2\pi]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin[(m+n)2\pi]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} \\ &\quad - \frac{\sin[(m-n)0]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin[(m+n)0]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} \end{aligned}$$

چونکہ m اور n عدد صحیح ہیں لہذا $m+n$ اور $m-n$ بھی عدد صحیح ہوں گے لہذا $\sin[(m+n)2\pi] = 0$ اور $\sin[(m-n)2\pi] = 0$ ہوں گے۔ اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(15.10) \quad \int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = 0 \quad (m \neq n)$$

مثال 15.3: ثابت کریں کہ $0 \leq t \leq T_0$ فاصلے پر $\sin(n\omega_0 t)$ اور $\cos(m\omega_0 t)$ آپس میں عمودی ہیں جہاں $m = 1, 2, 3, \dots$ اور $n = 1, 2, 3, \dots$ ممکن ہیں۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \sin \left[(m+n) \frac{2\pi}{T_0} t \right] - \sin \left[(m-n) \frac{2\pi}{T_0} t \right] dt \\
 &= -\frac{\cos \left[(m+n) \frac{2\pi}{T_0} t \right]}{2(m+n) \frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\cos \left[(m-n) \frac{2\pi}{T_0} t \right]}{2(m-n) \frac{2\pi}{T_0}} \Bigg|_0^{T_0} \\
 &= -\frac{\cos[(m+n)2\pi]}{2(m+n) \frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\cos[(m-n)2\pi]}{2(m-n) \frac{2\pi}{T_0}} \\
 &\quad + \frac{\cos[(m+n)0]}{2(m+n) \frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\cos[(m-n)0]}{2(m-n) \frac{2\pi}{T_0}}
 \end{aligned}$$

چونکہ m اور n عدد صحیح ہیں لہذا $m+n$ اور $m-n$ بھی عدد صحیح ہوں گے لہذا $\cos(m+n)2\pi = 1$ اور $\cos(m-n)2\pi = 1$ ہوں گے۔ اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(15.11) \quad \int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = 0 \quad (m \neq n)$$

مثال 15.4: تفاعل $f(t) = \cos(m\omega_0 t)$ کا معیار $0 \leq t \leq T_0$ فاصلے پر حاصل کریں جہاں $m = 1, 2, 3, \dots$ ممکن ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر معیار کو مکمل سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \|f(t)\|^2 &= \int_0^{T_0} \cos^2\left(m \frac{2\pi}{T_0} t\right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \left[1 + \cos\left(2m \frac{2\pi}{T_0} t\right)\right] dt \\
 &= \frac{t}{2} + \frac{\sin\left(2m \frac{2\pi}{T_0} t\right)}{4m \frac{2\pi}{T_0}} \Bigg|_0^{T_0} \\
 &= \frac{T_0}{2} + \frac{\sin 4m\pi}{4m \frac{2\pi}{T_0}} - \frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4m \frac{2\pi}{T_0}} \\
 &= \frac{T_0}{2}
 \end{aligned}$$

دونوں اطراف کا جذر لیتے ہوئے $0 \leq t \leq T_0$ فاصلے پر معیار ملتا ہے۔

$$(15.12) \quad \|\cos(m\omega_0 t)\| = \sqrt{\int_0^{T_0} \cos^2(m\omega_0 t) dt} = \sqrt{\frac{T_0}{2}}$$

مشق 15.1: تفاعل $f(t) = \sin m\omega_0 t$ کا معیار $0 \leq t \leq T_0$ فاصلے پر درج ذیل ہے جہاں $m = 1, 2, 3, \dots$ ممکن ہے۔ اس معیار کو حاصل کریں۔

$$(15.13) \quad \|\sin(m\omega_0 t)\| = \sqrt{\int_0^{T_0} \sin^2(m\omega_0 t) dt} = \sqrt{\frac{T_0}{2}}$$

مشق 15.2: درج ذیل دو مساوات کو ثابت کریں جہاں $m = 1, 2, 3, \dots$ ممکن ہے۔

$$(15.14) \quad \int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) dt = 0$$

$$(15.15) \quad \int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t) dt = 0$$

مساوات 15.9، مساوات 15.10 اور مساوات 15.11 مل کر ثابت کرتے ہیں کہ فوریر تسلسل میں استعمال ہونے والا ہر تفاعل بقایا تمام تفاعل کے ساتھ $0 \leq t \leq T_0$ فاصلے پر عمودی ہے۔ یوں $\cos 3\omega_0 t$ کو مثال بناتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ $\sin(3\omega_0 t)$ ، $\sin(2\omega_0 t)$ ، $\sin(\omega_0 t)$ ، $\cos(4\omega_0 t)$ ، $\cos(2\omega_0 t)$ ، $\cos(\omega_0 t)$ وغیرہ کے ساتھ عمودی ہے۔

درج بالا کھمبات حاصل کرنے کے بعد اصل مضمون یعنی فوریر تسلسل پر دوبارہ آتے ہیں۔ مساوات 15.9 تا مساوات 15.15 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.4 کے عددی سر $a_0, a_1, a_2, b_1, \dots$ حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ انہیں ایسا ہی کریں۔

عددی سر a_0 کی قیمت دریافت کرنے کی خاطر ہم مساوات 15.4 کا مکمل $0 \leq t \leq T_0$ فاصلے پر لیتے ہیں

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} f(t) dt &= \int_0^{T_0} a_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) dt \\ &= a_0 T_0 \end{aligned}$$

جہاں مساوات 15.14 اور مساوات 15.15 کو استعمال کرتے ہوئے مجموعے میں دیے تمام مکمل کو صفر کے برابر پر کیا گیا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(15.16) \quad a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt$$

مساوات 15.16 کہتا ہے کہ a_0 تفاعل $f(t)$ کی اوسط قیمت ہے۔

عددی سر a_m حاصل کرنے کی خاطر مساوات 15.4 کے دونوں اطراف کو $\cos(m\omega_0 t)$ سے ضرب دیتے ہوئے ایک دوری عرصے پر مکمل کرتے ہیں۔ ہم مکمل کو $0 \leq t \leq T_0$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$(15.17) \quad \int_0^{T_0} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt = \int_0^{T_0} a_0 \cos(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} a_n \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} b_n \sin(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt$$

دائیں ہاتھ پہلا مکمل مساوات 15.14 کی بنا صفر کے برابر ہے جبکہ مساوات 15.11 کے تحت تیسرا مکمل صفر کے برابر ہے۔ انہیں دوسرے مکمل پر غور کریں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} a_n \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = \int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) [a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \dots + a_{m-1} \cos[(m-1)\omega_0 t] + a_m \cos(m\omega_0 t) + \dots] dt$$

اب اگر $n \neq m$ ہو تب مساوات 15.9 کے تحت مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ البتہ $n = m$ کی صورت میں مساوات 15.12 کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_0^{T_0} a_m \cos^2(m\omega_0 t) dt = a_m \frac{T_0}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان قیمتوں کو مساوات 15.17 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(15.18) \quad a_m = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt$$

عددی سر b_m حاصل کرنے کی خاطر مساوات 15.4 کے دونوں اطراف کو $\sin(m\omega_0 t)$ سے ضرب دیتے ہوئے

ایک دوری عرصے پر مکمل کرتے ہیں۔ ہم مکمل کو $0 \leq t \leq T_0$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$(15.19) \quad \int_0^{T_0} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt = \int_0^{T_0} a_0 \sin(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} a_n \cos(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} b_n \sin(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt$$

دائیں ہاتھ پہلا مکمل مساوات 15.15 کی بنا صفر کے برابر ہے جبکہ مساوات 15.11 کے تحت دوسرا مکمل صفر کے برابر ہے۔ آئیں تیسرے مکمل پر غور کریں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} b_n \sin(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt = \int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t) [b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots + b_{m-1} \sin[(m-1)\omega_0 t] + b_m \sin(m\omega_0 t) + \dots] dt$$

اب اگر $n \neq m$ ہو تب مساوات 15.10 کے تحت مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ البتہ $n = m$ کی صورت میں مساوات 15.13 کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_0^{T_0} b_m \sin^2(m\omega_0 t) dt = b_m \frac{T_0}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان قیمتوں کو مساوات 15.17 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(15.20) \quad b_m = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt$$

مساوات 15.16، مساوات 15.18 اور مساوات 15.20 فوریز مکمل کے عددی سر دیئے ہیں۔ انہیں یہاں اکٹھے پیش کرتے ہیں۔

$$(15.21) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt \\ a_m &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt \\ b_m &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

مثال 15.5: شکل 15.4-الف میں دکھائے گئے دندان موج کا فوریرس تسلسل حاصل کریں۔ دو، پانچ اور پچاس فوریرس ارکان استعمال کرتے ہوئے موج کا خط کھینچیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موج کا دوری عرصہ $T_0 = 3 \text{ s}$ ہے۔

حل: شکل میں دکھائی گئی موج $(0, 0)$ سے $(3, 1)$ تک بالکل سیدھی لکیر کی مانند ہے جس کی ڈھلوان

$$\text{ڈھلوان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{3 - 0} = \frac{1}{3}$$

ہے لہذا اس سیدھے حصے کی مساوات درج ذیل لکھی جاسکتی ہے جہاں لکیر پر کسی بھی نقطے کے کارتمی محدود مساوات میں پر کرنے سے c کی قیمت حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$y = \frac{x}{3} + c$$

ہم درج بالا میں $(0, 0)$ پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{0}{3} + c$$

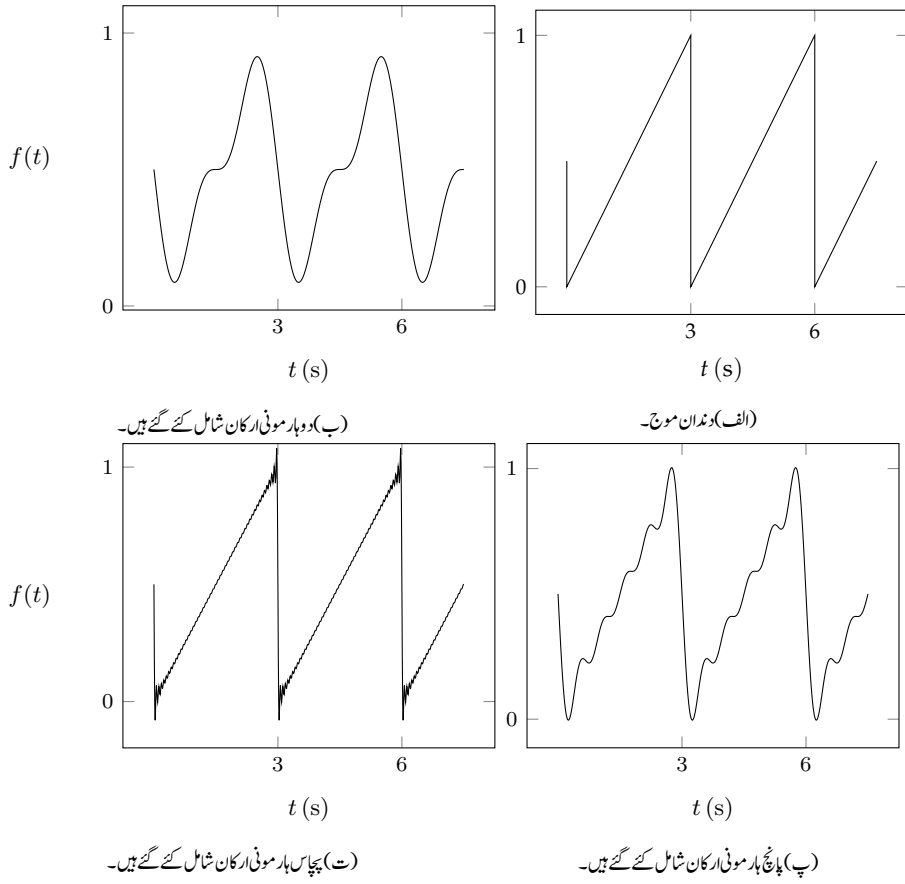
$c = 0$ حاصل کرتے ہیں لہذا سیدھی حصے کی مساوات $y = \frac{x}{3}$ یعنی

$$(15.22) \quad f(t) = \frac{t}{3}$$

ہے جہاں کارتمی نظام کے x محور پر t اور y محور پر $f(t)$ پر کئے گئے ہیں۔

مساوات 15.21 سے فوریرس تسلسل کے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 \frac{t}{3} dt \\ &= \frac{1}{3} \frac{t^2}{2} \Big|_0^3 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



شکل 15.4: مثال 15.5 کی دندان موج۔

چونکہ a_0 تفاعل کی اوسط قیمت کے برابر ہے لہذا یہی جواب تکلون کے رقبہ $\frac{3}{2} = 1 \times 3 \times \frac{1}{2}$ اور قاعدہ 3 سے حاصل کی جاسکتی ہے یعنی

$$\text{اوسط} = \frac{\text{رقبہ}}{\text{قاعدہ}} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

عددی سر a_m حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 \frac{t}{3} \cos\left(m \frac{2\pi}{3} t\right) dt \\ &= \frac{2}{9} t \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3} mt\right)}{\frac{2\pi}{3} m} + \frac{2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} mt\right)}{9 \left(\frac{2\pi}{3} m\right)^2} \Bigg|_0^3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

اس کا مطلب ہے کہ دندان موج کی فوریئر تسلسل میں کوئی کوسائن تفاعل نہیں پایا جاتا۔

عددی سر b_m حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 \frac{t}{3} \sin\left(m \frac{2\pi}{3} t\right) dt \\ &= -\frac{2}{9} t \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3} mt\right)}{\frac{2\pi}{3} m} + \frac{2 \sin\left(\frac{2\pi}{3} mt\right)}{9 \left(\frac{2\pi}{3} m\right)^2} \Bigg|_0^3 \\ &= -\frac{1}{m\pi} \end{aligned}$$

یوں $m = 1, 2, 3, \dots$ پر کرتے ہوئے عددی سر حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{\pi} \\ b_2 &= -\frac{1}{2\pi} \\ b_3 &= -\frac{1}{3\pi} \\ &\vdots \end{aligned}$$

لہذا فوریر تسلسل درج ذیل لکھی جائے گی۔

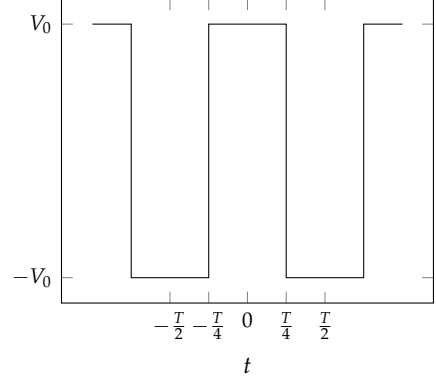
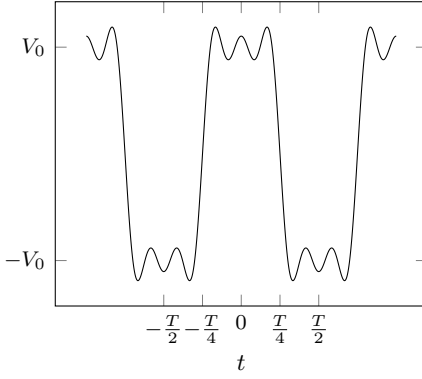
$$(15.23) \quad f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left[\sin \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \dots \right]$$

شکل 15.4-ب میں مساوات 15.23 کو $m = 2$ تک استعمال کرتے ہوئے خط کھینچا گیا ہے۔ شکل-پ میں پانچ ہارمونی ارکان استعمال کئے گئے ہیں جبکہ شکل-ت میں پچاس ہارمونی ارکان استعمال کئے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ارکان بڑھانے سے اصل موج کے قریب تر خط حاصل کیا جاسکتا ہے۔

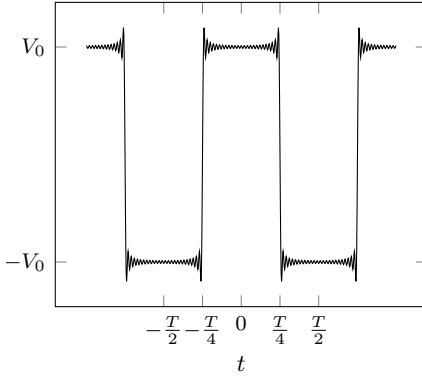
مثال 15.6: آئیں شکل 15.5-الف میں دکھائے گئے دوری مستطیل موج کا فوریر تسلسل حاصل کریں۔

حل: افقی محور کے دونوں اطراف برابر موج پائی جاتی ہے لہذا اس کی اوسط قیمت صفر ہوگی اور یوں $a_0 = 0$ ہوگا۔ آئیں یہی جواب مساوات 15.21 سے حاصل کریں۔ اس مرتبہ ہم دوری عرصے کو $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ لیتے ہیں۔ شکل کو دیکھ معلوم ہوتا ہے کہ $-\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4}$ تقابل کی قیمت V_0 ہے جبکہ $-\frac{T}{2} \leq t \leq -\frac{T}{4}$ اور $\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2}$ پر تقابل کی قیمت $-V_0$ ہے۔

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \left(-V_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} dt + V_0 \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} dt - V_0 \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} dt \right) \\ &= \frac{1}{T} \left[-V_0 \left(-\frac{T}{4} + \frac{T}{2} \right) + V_0 \left(\frac{T}{4} + \frac{T}{4} \right) - V_0 \left(\frac{T}{2} - \frac{T}{4} \right) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

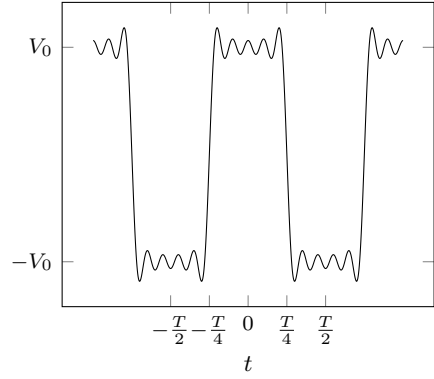


(ب) ایک، تین اور پانچ ہارمونک ارکان کا مجموعہ یعنی $m = 5$ ہے۔



(ت) تک ارکان کا مجموعہ۔ $m = 49$

(الف) مستطیل موج۔



(پ) تک ارکان کا مجموعہ۔ $m = 9$

شکل 15.5: مثال 15.6 کی مستطیل موج۔

کوسائن کے عددی سر a_m کو مساوات 15.21 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔ مستقل V_0 کو مکمل کے باہر لکھا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}
 a_m &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(m\omega_0 t) dt \\
 &= -\frac{2}{T} V_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} \cos\left(\frac{2\pi m}{T} t\right) dt + \frac{2}{T} V_0 \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos\left(\frac{2\pi m}{T} t\right) dt - \frac{2}{T} V_0 \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi m}{T} t\right) dt \\
 &= -\frac{2V_0}{T} \frac{\sin\left(\frac{2\pi m}{T} t\right)}{\frac{2\pi m}{T}} \Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} + \frac{2V_0}{T} \frac{\sin\left(\frac{2\pi m}{T} t\right)}{\frac{2\pi m}{T}} \Bigg|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - \frac{2V_0}{T} \frac{\sin\left(\frac{2\pi m}{T} t\right)}{\frac{2\pi m}{T}} \Bigg|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{4V_0}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

اس سے درج ذیل عددی سر لکھے جاسکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{4V_0}{1\pi} \sin\left(\frac{1\pi}{2}\right) = \frac{4V_0}{\pi} \\
 a_2 &= \frac{4V_0}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) = 0 \\
 a_3 &= \frac{4V_0}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{4V_0}{3\pi} \\
 a_4 &= \frac{4V_0}{4\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{2}\right) = 0 \\
 a_5 &= \frac{4V_0}{5\pi} \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{4V_0}{5\pi} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

سائن کے عددی سر b_m کو مساوات 15.21 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔ مستقل V_0 کو مکمل کے باہر لکھا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}
 b_m &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(m\omega_0 t) dt \\
 &= -\frac{2}{T} V_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} \sin\left(\frac{2\pi m}{T} t\right) dt + \frac{2}{T} V_0 \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \sin\left(\frac{2\pi m}{T} t\right) dt - \frac{2}{T} V_0 \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi m}{T} t\right) dt \\
 &= \frac{2V_0}{T} \frac{\cos\left(\frac{2\pi m}{T} t\right)}{\frac{2\pi m}{T}} \Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} - \frac{2V_0}{T} \frac{\cos\left(\frac{2\pi m}{T} t\right)}{\frac{2\pi m}{T}} \Bigg|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} + \frac{2V_0}{T} \frac{\cos\left(\frac{2\pi m}{T} t\right)}{\frac{2\pi m}{T}} \Bigg|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

اس معلومات کو استعمال کرتے ہوئے مستطیل موج کی فوریر مساوات لکھتے ہیں۔

(15.24)

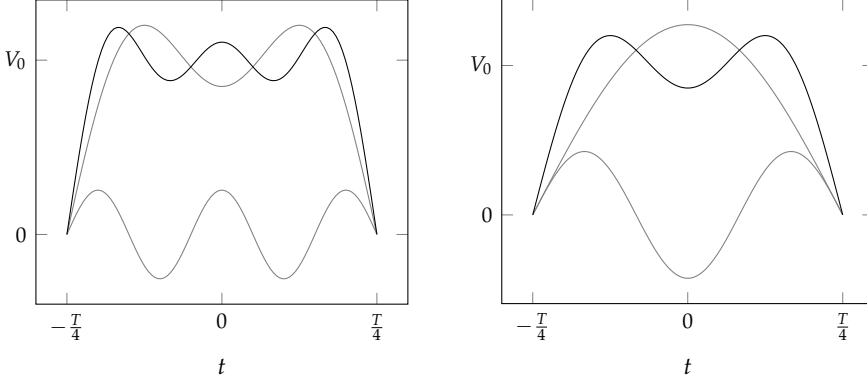
$$f(t) = \frac{4V_0}{\pi} \left[\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_0 t) - \frac{1}{7} \cos(7\omega_0 t) + \dots \right]$$

مختلف تعداد میں فوریر تسلسل کے ارکان شامل کرتے ہوئے تفاعل کو شکل 15.5-ب تا شکل 15.5-ت میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 15.6 میں مستطیل موج کی فوریر تسلسل حاصل کی گئی۔ انہیں تسلسل کے ایک رکن سے شروع کرتے ہوئے دیکھیں کہ اس میں مزید ارکان شامل کرتے ہوئے مستطیل موج کیسے حاصل ہوتی ہے۔ شکل 15.6-الف میں مساوات 15.24 کا پہلا ہارمونیک رکن $\frac{4V_0}{\pi} \cos \omega_0 t$ اور تیسرا ہارمونیک رکن $-\frac{4V_0}{3\pi} \cos(3\omega_0 t)$ ہلکی سیاہی میں دکھائے گئے ہیں۔ دونوں سائن نما صورت رکھتے ہیں جس کا مستطیل سے دور دور تک کوئی واسطہ نہیں ہے۔ اسی شکل میں دونوں کے مجموعے کو گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دو سائن نما امواج مل کر ایسی شکل بناتے ہیں جو مستطیل زیادہ اور سائن نما کم نظر آتا ہے۔ مستطیل موج کی چوٹی V_0 ہے جبکہ پہلے ہارمونیک رکن کی چوٹی $\frac{4V_0}{\pi} = 1.27V_0$ ہے۔ تیسرا ہارمونیک رکن اس چوٹی کو نیچے کھینچتا ہے۔ اسی طرح مستطیل موج $\pm \frac{T}{4}$ پر یکدم قیمت تبدیل کرتی ہے جبکہ پہلا ہارمونیک جزو نہایت صبر و تحمل کے ساتھ منفی چوٹی سے مثبت چوٹی اور مثبت چوٹی سے منفی چوٹی پہنچتی ہے۔ یہاں بھی تیسرا ہارمونیک رکن پہلے رکن کے اطراف کو کھینچ کر ان کی ڈھلوان بڑھاتی ہے۔

شکل 15.6-الف میں تیسرا رکن زیادہ جزبات میں آکر پہلی رکن کی چوٹی ضرورت سے زیادہ نیچے کھینچ دیتا ہے۔ شکل-ب میں پہلے اور تیسرے ارکان سے حاصل موج کو ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ پانچویں رکن کو بھی ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ ان کے مجموعے کو گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں پانچواں رکن ضرورت سے زیادہ نیچے کھینچی گئی چوٹی کو معمولی اٹھاتا ہے تاکہ یہ V_0 کے قریب ہو جائے۔ اسی طرح یہ رکن بھی موج کے اطراف کی ڈھلوان بڑھاتا ہے۔ فوریر تسلسل کے بقایا ارکان بھی اسی طرح مدد کرتے ہوئے اطراف کو زیادہ عمودی اور چوٹی کو بالکل چمکی بنانے میں مدد دیتے ہیں حتیٰ کہ ہمیں بالکل مستطیل موج نظر آتی ہے۔

شکل 15.5-ب، پ اور ت میں آپ دیکھتے ہیں کہ فوریر تسلسل سے حاصل موج $\pm \frac{T}{4}$ پر درکار قیمت سے تجاوز کرتے ہوئے آگے نکل جاتی ہے۔ تسلسل میں ارکان کی تعداد بڑھانے سے ان تجاوزات کا خاتمہ نہیں ہوتا۔



(الف) پہلا اور تیسرا ہارمونی رکن مل کر مستطیل صورت بنانے کی کوشش کرتے ہیں۔ (ب) پہلے، تیسرا اور پانچواں ہارمونی رکان مل کر مستطیل شکل بناتے ہیں۔

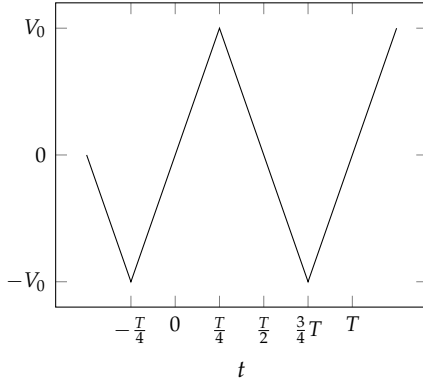
شکل 15.6: بتدریج زیادہ رکان شامل کرتے ہوئے مستطیل موج کی صورت ابھرتے ہوئے دیکھتے ہیں۔

مشق 15.3: شکل 15.7-الف میں دکھائے گئے مستطیل موج کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

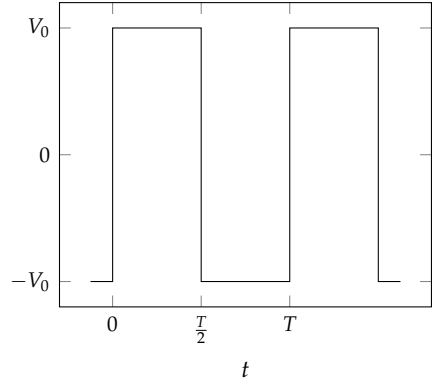
$$f(t) = \frac{4V}{\pi} \left[\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right] \text{ جواب:}$$

مشق 15.4: شکل 15.7-ب میں دکھائے گئے تکوئی موج کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔ پہلے $-\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4}$ اور $\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4}$ سیدھے حصوں کے مساوات حاصل کریں۔

$$\text{حل: } f_1(t) = \frac{4V_0}{T}t, \quad f_2(t) = 2V_0(1 - 2\frac{t}{T}), \quad f(t) = \frac{8V_0}{\pi^2} \left[\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{3^2} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} \sin(5\omega_0 t) - \dots \right]$$

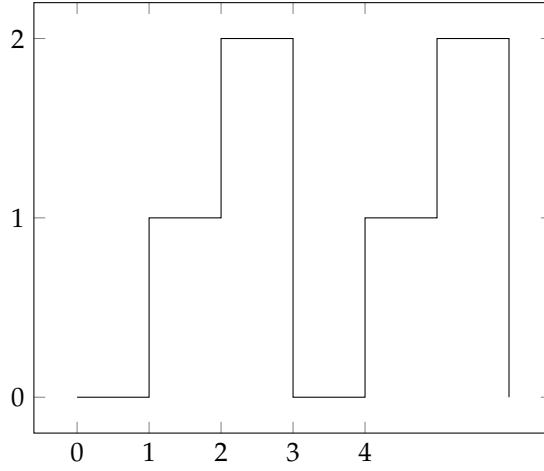


(ب) تگونی موج۔



(الف) مستطیل موج۔

شکل 15.7: مشتق 15.3 اور مشتق 15.4 کے امواج۔



شکل 15.8: مشتق 15.5 کا تعامل۔

مشق 15.5: شکل 15.8 میں دیے تفاضل کی فوریر تسلسل حاصل کریں۔

جواب:

$$1 - \frac{3}{\pi} \left[\sin \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{4} \sin(4\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega_0 t) + \dots \right]$$

15.1 تشاگل تفاضل

آپ نے مختلف تفاضل کے فوریر تسلسل دیکھے۔ ان میں کئی ایسے تھے جن کے یا تمام a_m اور یا تمام b_m صفر کے برابر تھے۔ انہیں اس کی وجہ سمجھیں اور کلمات حل کرنے سے پہلے یہ دریافت کرنا سیکھیں کہ آیا فوریر تسلسل میں a_m اور یا تمام b_m صفر کے برابر ہوں گے۔ فوریر تسلسل کے ارکان کا دار و مدار تفاضل کی شکل و صورت پر ہے۔ تین قسم کے تشاگل تفاضل پائے جاتے ہیں۔ ان پر باری باری غور کرتے ہیں۔

15.1.1 جفت تفاضل تشاگل

جفت تفاضل سے مراد ایسا تفاضل ہے جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہو۔

$$(15.25) \quad f(t) = f(-t)$$

جفت تفاضل عمودی محور کے دونوں اطراف یکساں دکھائی دیتا ہے۔ جفت تفاضل کی اہم مثال $\cos(n\omega_0 t)$ ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ ہوتا ہے لہذا یہ جفت تفاضل ہے۔

