برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 12

تعددی ردعمل

گزشتہ بابوں میں ہم RLC ادوار کو حل کر چکے ہیں جہاں تعدد غیر متغیر تھی۔اس باب میں تعدد تبدیل کرتے ہوئے ادوار کا ردعمل بالمقابل تعدد دیکھا جائے گا۔آئیں شروع میں سادہ ترین پرزوں کا تعددی ردعمل دیکھیں۔سادہ ترین پرزے مزاحمت، امالہ اور برق گیر ہیں۔تعددی ردعمل دیکھتے ہوئے سائن نما اشارات زیر استعمال لائے جائیں گے۔

شکل 12.1-الف میں مزاحمت دکھایا گیا ہے۔مزاحمت کی رکاوٹ درج ذیل ہے۔

$$Z_R = R\underline{/0^\circ} \tag{12.1}$$

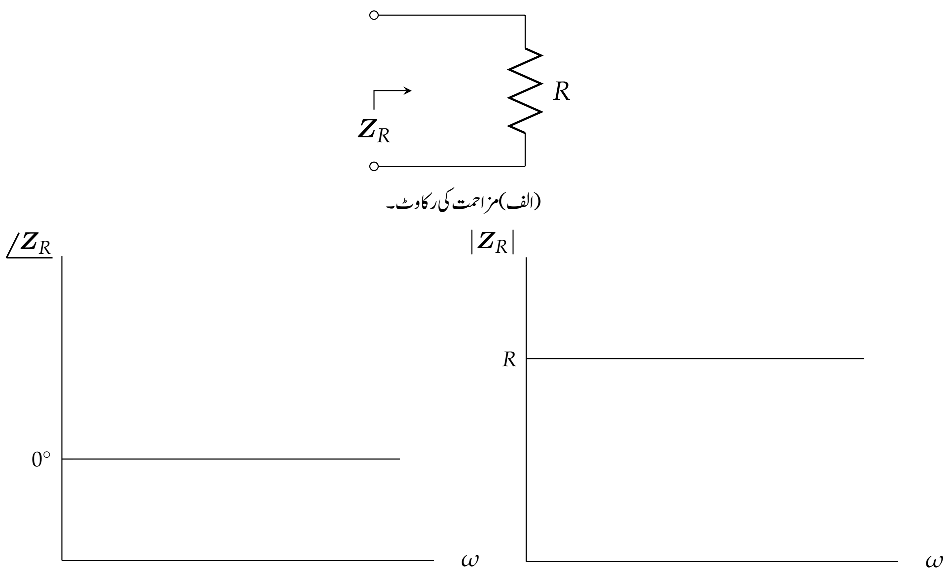
یوں مزاحمت کی رکاوٹ پر تعدد ω کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔مزاحمت کے رکاوٹ کی حتمی قیمت $|Z_R|$ تمام تعدد پر R کے برابر ہے جبکہ اس کا زاویائی ہٹاو $\underline{/Z_R}$ تمام تعدد پر صفر درجے رہتا ہے۔یہ حقائق شکل 12.1-ب اور شکل 12.1-پ میں دکھائے گئے ہیں۔

امالہ گیر کو شکل 12.2-الف میں دکھایا گیا ہے۔امالہ گیر کی رکاوٹ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{Z}_L = j\omega L = \omega L\underline{/90^\circ} \tag{12.2}$$

اس طرح امالہ گیر کے رکاوٹ کی حتمی قیمت تعدد بڑھانے سے بڑھتی ہے۔رکاوٹ کی مقدار کا تعدد کے ساتھ راست تناسبی رشتہ ہے۔

$$|\boldsymbol{Z}_L| = \omega L \tag{12.3}$$

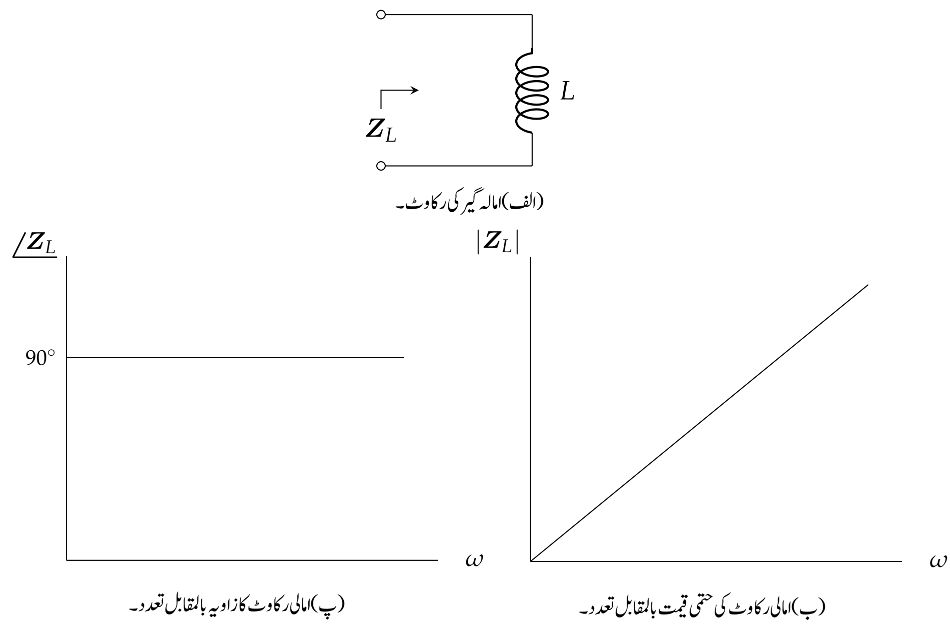


(الف) مزاحمت کی رکاوٹ۔

(ب) مزاحمتی رکاوٹ کی حتمی قیمت بالمقابل تعدد۔

(پ) مزاحمتی رکاوٹ کا زاویہ بالمقابل تعدد۔

شکل 12.1: مزاحمتی رکاوٹ کا تعدد ردعمل۔



شکل 12.2: امالی رکاوٹ کا تعدد رد عمل۔

صفر تعدد پر امالہ گیر کی رکاوٹ $0\,\Omega$ ہو جاتی ہے اور یہ قصر دور خاصیت رکھتا ہے جبکہ لا متناہی تعدد پر رکاوٹ کی مقدار لا متناہی ہو جاتی ہے اور امالہ گیر بطور کھلا دور عمل کرتا ہے۔امالی رکاوٹ کا زاویہ تمام تعدد پر $90°$ رہتا ہے۔

$$\underline{/Z_L} = 90° \tag{12.4}$$

شکل 12.2-ب اور شکل 12.2-پ میں ان حقائق کو دکھایا گیا ہے۔

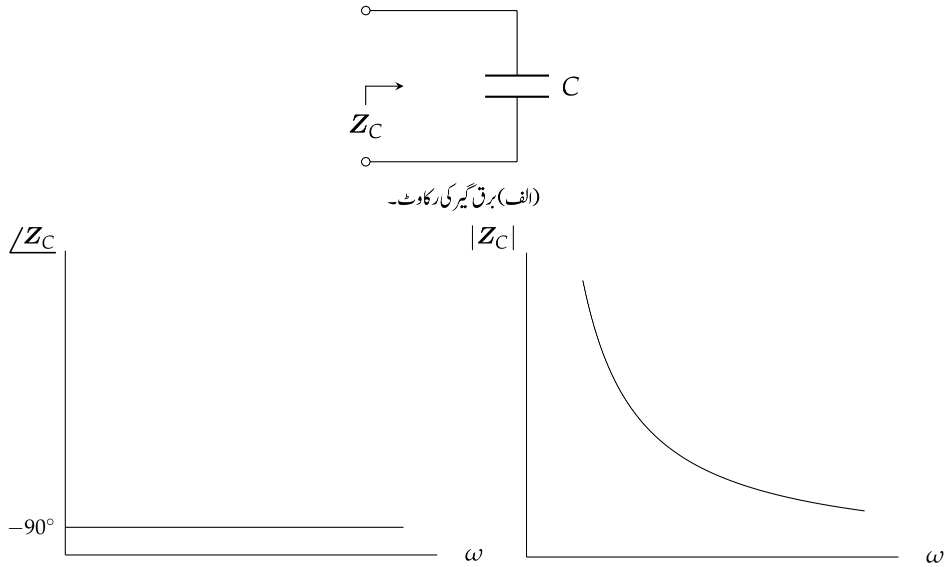
برق گیر کو شکل 12.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔برق گیر کی رکاوٹ درج ذیل ہے۔

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C}\underline{/-90°} \tag{12.5}$$

اس طرح برق گیر کے رکاوٹ کی مقدار کا تعدد کے ساتھ بالعکس متناسب کا رشتہ ہے جبکہ اس کا زاویہ تمام تعدد پر $-90°$ رہتا ہے۔

$$|Z_C| = \frac{1}{\omega C} \tag{12.6}$$

$$\underline{/Z_C} = -90° \tag{12.7}$$



(الف) برق گیر کی رکاوٹ۔

(ب) برق گیر رکاوٹ کی حتمی قیمت بالمقابل تعدد۔

(پ) برق گیر رکاوٹ کا زاویہ بالمقابل تعدد۔

شکل 12.3: برق گیر رکاوٹ کا تعدد ردعمل۔

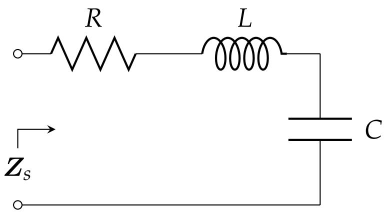
ان تعلقات کو شکل 12.3-ب اور شکل 12.3-پ میں دکھایا گیا ہے۔ صفر تعدد پر برق گیر کی رکاوٹ لامتناہی ہو جاتی ہے لہٰذا یہ بطور کھلا دور عمل کرتا ہے جبکہ لامتناہی تعدد پر رکاوٹ کی مقدار صفر ہو جاتی ہے اور یہ قصر دور کردار ادا کرتا ہے۔

سادہ ترین پرزوں کو نپٹانے کے بعد ذرہ مشکل ادوار دیکھتے ہیں۔ شکل میں مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر سلسلہ وار جڑے دکھائے گئے ہیں۔ان کی کل رکاوٹ Z_s لکھتے ہیں

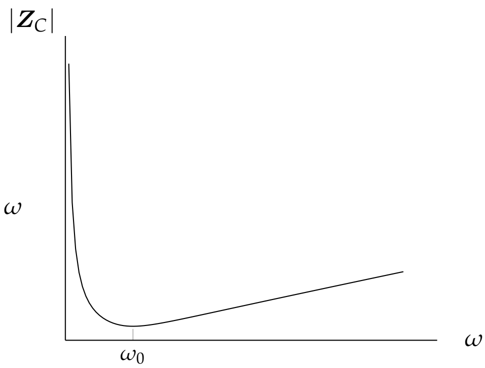
$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Z}_s &= \boldsymbol{Z}_R + \boldsymbol{Z}_L + \boldsymbol{Z}_C \\
&= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\
&= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)
\end{aligned}$$

اس تفاعل کو شکل 12.4-ب اور شکل 12.4-پ میں دکھایا گیا ہے۔

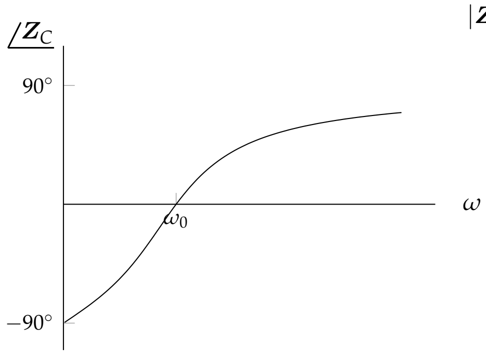
مثال 12.1: شکل 12.5-الف میں مزاحمت پر دباو حاصل کریں۔اس کے مقدار بالمقابل تعدد اور زاویہ بالمقابل تعدد کے



(الف) سلسلہ وار دور۔



(ب) مقدار بالمقابل تعدد۔



(پ) زاویہ بالمقابل تعدد۔

شکل 12.4: سلسلہ وار جڑے مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر کا تعدد رد عمل۔

خط کھینچیں۔

حل: دور سے مزاحمت کا دباو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\hat{V}_R = \frac{(4)(20\underline{/0^\circ})}{4 + j(2\pi f 0.15 - \frac{1}{2\pi f 0.004})}$$

جو مخلوط تفاعل ہے۔اس کی حتمی مقدار $\hat{V}_R$ بالمقابل تعدد f کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔اس ترسیم میں دونوں محور کی پیمائش **لاگ**[1] میں ہے۔اس طرز کے ترسیم کو **لاگ لاگ**[2] ترسیم کہا جاتا ہے۔مقدار بالمقابل تعدد کے خط عموماً لاگ لاگ محور پر دکھائے جاتے ہیں۔ زاویہ دباو $\underline{/\hat{V}_R}$ بالمقابل تعدد کو شکل-پ میں **نیم لاگ**[3] محور پر دکھایا گیا ہے۔کم تعدد پر دباو کا زاویہ $+90^\circ$ جبکہ بلند تعدد پر زاویہ -90° ہے۔

یہاں لاگ لاگ اور نیم لاگ محور پر قیمتیں پڑھنا سیکھ لیں چونکہ اس باب میں انہیں کا استعمال ہو گا۔یوں شکل 12.5-ب میں حتمی مقدار کی چوٹی 10^1 یعنی دس ہرٹز پر پائی جاتی ہے۔یہ چوٹی 10^1 یعنی دس وولٹ کو ظاہر کرتی ہے۔اسی طرح $10^2\,\text{Hz}$ یعنی سو ہرٹز پر دباو تقریباً $1.6\,\text{V}$ ہے۔

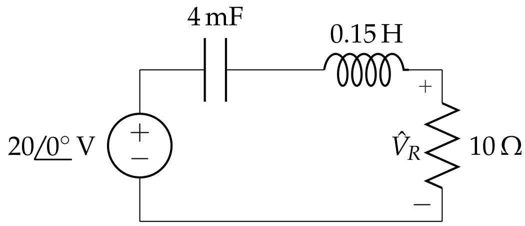
سمعی[4] اشارات کو **عددی صورت**[5] میں تبدیل کرتے ہوئے کمپیوٹر میں ذخیرہ کیا جاتا ہے۔انہیں کو دوبارہ **مماثل صورت**[6] میں تبدیل کرتے ہوئے سنا جا سکتا ہے۔آئیں ان اشارات پر ایک مثال دیکھیں۔

کمپیوٹر سے حاصل موسیقی کے مماثلی اشارات کی چوٹی $1.5\,\text{V}$ ہے۔ہم چاہتے ہیں کہ **سمعی دباو ایمپلیفائر**[7] استعمال کرتے ہوئے $8\,\Omega$ کے **سپیکر**[8] کو $10\,\text{W}$ طاقت فراہم کی جائے۔ان حقائق سے ایمپلیفائر کے داخلی مماثل اشارہ کی موثر قیمت حاصل کرتے ہیں۔

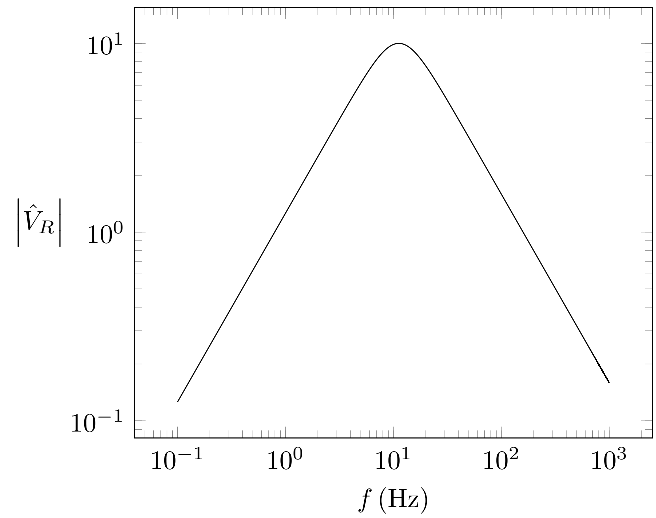
$$v_m = \frac{1.5}{\sqrt{2}} = 1.061\,\text{V}\,\text{rms}$$

---

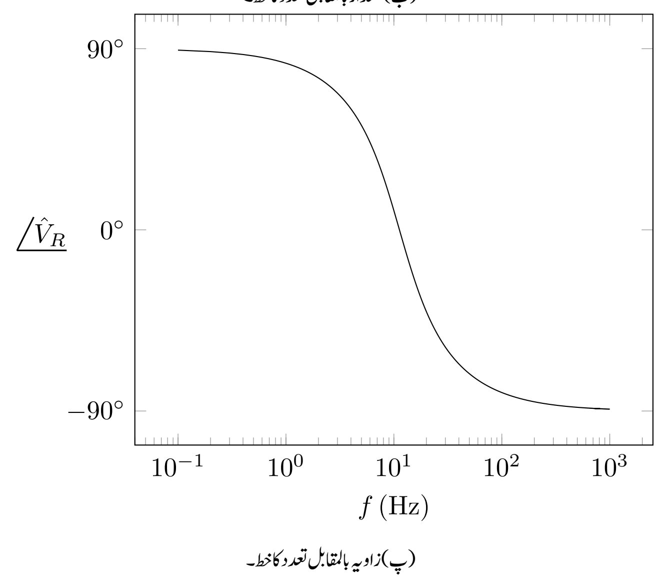
log[1]
log-log[2]
semilog[3]
audio[4]
digital form[5]
analog form[6]
voltage amplifier[7]
loud speaker[8]



(الف)



(ب) مقدار بالمقابل تعدد کا خط۔



(پ) زاویہ بالمقابل تعدد کا خط۔

شکل 12.5: مثال 12.1 کا دور۔

طاقت کے کلیے $P=\frac{V_{rms}^2}{R}$ سے آٹھ اوہم کے سپیکر کو دس واٹ طاقت کے لئے درکار موثر دباو حاصل کرتے ہیں۔

$$v_0=\sqrt{(10)(8)}=8.944\,\mathrm{V\,rms}$$

یوں ایمپلیفائر کی درکار افزائش دباو درج ذیل ہے۔

$$A_v=\frac{v_0}{v_m}=\frac{8.944}{1.061}=8.43\,\mathrm{V\,V^{-1}}$$

شکل 12.6-الف میں ایمپلیفائر اور سپیکر دکھائے گئے ہیں جہاں v_m کمپیوٹر سے حاصل مماثل سمعی اشارہ ہے اور $A_v=10.53\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ ۔انسان $20\,\mathrm{Hz}$ تا $20\,\mathrm{kHz}$ کے سمعی اشارات سن سکتا ہے لہٰذا ہمارے ایمپلیفائر کو اس **تعددی پٹی**[9] کے اشارات کا حیطہ بڑھانا ہو گا۔حیطہ بڑھاتے ہوئے اصل آواز کی خاصیت تبدیل نہیں ہونی چاہیے۔اگر پوری تعددی پٹی پر ایمپلیفائر کی افزائش کی قیمت یکساں ہو تب آواز کی خاصیت برقرار رہے گی۔یوں ہم چاہیں گے $20\,\mathrm{Hz}$ تا $20\,\mathrm{kHz}$ پر ایمپلیفائر کی افزائش $8.43\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ رہے۔ایمپلیفائر کے افزائش بالمقابل تعددی خط کو شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔

برق گیر کی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}_C=\frac{1}{j\omega C}$ لکھی جاتی ہے جس میں $j\omega=s$ پر کرتے ہوئے $\boldsymbol{Z}_C=\frac{1}{sC}$ لکھا جا سکتا ہے۔ایسا ہی کرتے ہوئے ایمپلیفائر کو دوبارہ شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔آپ میں سے کچھ طلبہ s کو پہچان گئے ہوں گے۔یہ **لاپلاس بدل**[10] کا متغیرہ ہے۔

آئیں شکل-ب کو حل کریں۔داخلی جانب بالائی جوڑ پر کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں

$$\frac{v_i-v_m}{R_m}+sC_iv_i+\frac{v_i}{R_i}=0$$

جس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

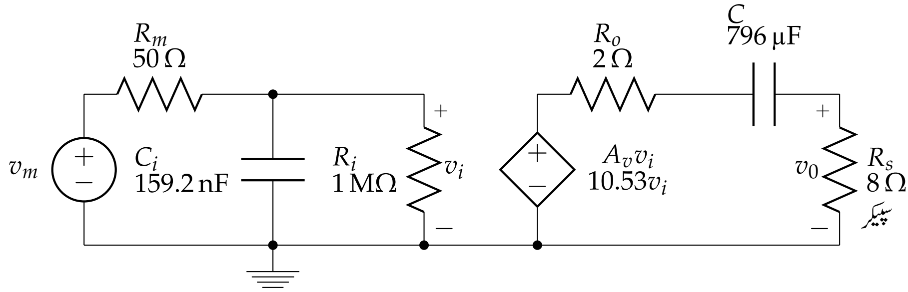
$$v_i\left(\frac{1}{R_m}+sC_i+\frac{1}{R_i}\right)=\frac{v_m}{R_m}$$

اس میں قوسین کے اندر مزاحمتوں کو قریب قریب لکھتے ہوئے v_i کے لئے حل کرتے ہیں۔

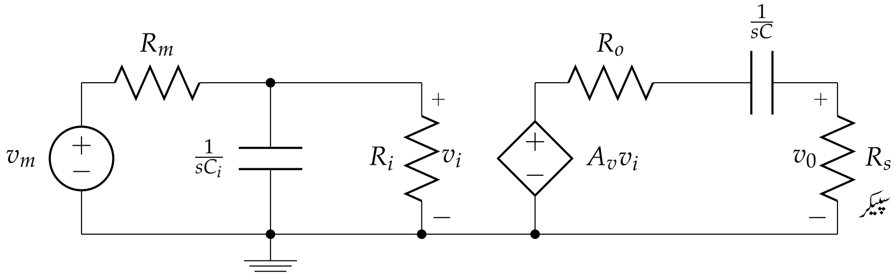
$$v_i=\frac{v_m}{R_m\left(\frac{1}{R_m}+\frac{1}{R_i}+sC_i\right)}$$

---

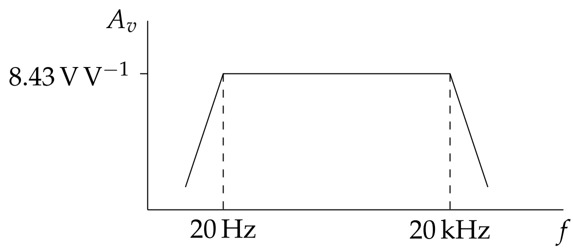
[9] frequency band
[10] Laplace transform



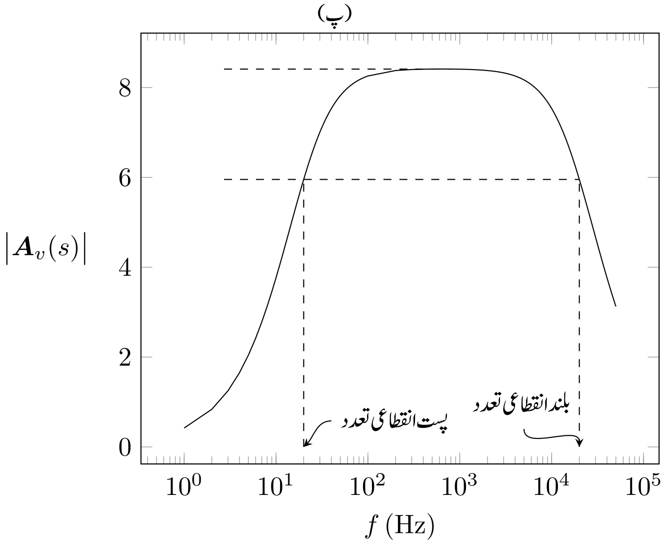
(الف)



(ب)



(پ)



(ت) ایمپلیفائر کی افزائش بالمقابل تعددی خط۔

شکل 12.6: ایمپلیفائر اور اس کی افزائش بالمقابل تعددی خط۔

شکل 12.6-ب کے دائیں جانب تقسیم دباو کے کلیے سے v_0 لکھتے ہیں۔

$$v_0 = \frac{A_v v_i R_s}{R_o + R_s + \frac{1}{sC}}$$

اس میں v_i کی قیمت پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
v_0 &= \left(\frac{A_v R_s}{R_o + R_s + \frac{1}{sC}}\right) \frac{v_m}{R_m\left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i} + sC_i\right)} \\
&= \left[\frac{sCR_sA_v}{1 + sC(R_o + R_s)}\right] \frac{v_m}{R_m\left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i}\right)\left(1 + \frac{sC_i}{\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i}}\right)} \\
&= \frac{R_sA_vv_m}{R_m\left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i}\right)} \left[\frac{sC}{1 + sC(R_o + R_s)}\right] \frac{1}{\left(1 + \frac{sC_i}{\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i}}\right)}
\end{aligned}$$

جہاں دوسری قدم پر دائیں نچلی قوسین سے $\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i}$ باہر نکالا گیا اور تیسری قدم پر اسی کو پہلی قوسین کا حصہ بنایا گیا۔اس مساوات میں

$$\begin{aligned}
\omega_{p1} &= \frac{1}{C(R_o + R_s)} \\
\omega_{p2} &= \frac{1}{C_i}\left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i}\right)
\end{aligned}$$

لکھتے ہوئے درج ذیل صاف ستھرا مساوات حاصل ہوتا ہے جہاں ω_{p1} اور ω_{p2} مساوات کے **قطب**[11] کہلاتے ہیں اور انہیں تعدد کی اکائی یعنی ہرٹز Hz یا ریڈیئن فی سیکنڈ $\mathrm{rad\,s^{-1}}$ میں ناپا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}_v(s) = \frac{v_0}{v_m} = \frac{R_sA_v}{R_m\left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i}\right)} \frac{sC}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{p1}}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_{p2}}\right)} \tag{12.8}$$

---

[11] pole

شکل-الف میں دی گئی مزاحمتوں اور برق گیروں کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\omega_{p1} = \frac{1}{796 \times 10^{-6}(2+8)} = 125.63\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$$
$$\omega_{p2} = \frac{1}{159.2 \times 10^{-9}}\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{1000000}\right) = 125.634\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$$
$$\frac{R_s A_v}{R_m\left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i}\right)} = \frac{8 \times 10.53}{50\left(\frac{1}{50} + \frac{1}{1000000}\right)} \approx 84.2$$

یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\boldsymbol{A}_v(s) = 84.2\frac{sC}{\left(1 + \frac{s}{125.63}\right)\left(1 + \frac{s}{125634}\right)} \tag{12.9}$$

آئیں اس میں واپس $s = j\omega = j2\pi f$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_v(s) &= 84.2\frac{j2\pi f \times 796 \times 10^{-6}}{\left(1 + \frac{j2\pi f}{125.63}\right)\left(1 + \frac{j2\pi f}{125634}\right)}\\ &= \frac{j0.421f}{\left(1 + \frac{jf}{20}\right)\left(1 + \frac{jf}{20000}\right)}\end{aligned} \tag{12.10}$$

اس کے حتمی قیمت $\left|\boldsymbol{A}_v(s)\right|$ بالمقابل تعدد f کو شکل 12.6-ت میں دکھایا گیا ہے۔

$$\left|\boldsymbol{A}_v(s)\right| = \frac{0.421f}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{20}\right)^2}\sqrt{1 + \left(\frac{f}{20000}\right)^2}}$$

شکل-ب میں $20\,\mathrm{Hz}$ کو **پست انقطاعی تعدد**[12] اور $20\,\mathrm{kHz}$ کو **بلند انقطاعی تعدد**[13] کہتے ہیں۔ انہیں **خط کے کونے کی تعدد**[14] بھی کہا جاتا ہے۔

شکل 12.6-ت میں انقطاعی تعدد کے مابین **درمیانی تعدد خطے**[15] میں ایمپلیفائر کی افزائش $8.41\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ ہے جو ہمیں درکار تھی۔ اس کو درمیانی تعدد پر افزائش کہتے ہیں۔ البتہ انقطاعی تعدد کے قریب ایمپلیفائر کی افزائش گھٹ جاتی

[12] low cut-off frequency
[13] high cut-off frequency
[14] corner frequencies
[15] mid-frequency range

ہے۔یوں پست اور بلند انقطاعی تعدد پر افزائش $5.95\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ ہے۔جس تعدد پر افزائش کی قیمت درمیانی تعدد کے افزائش کے $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا رہ جاتی ہے اس کو انقطاعی تعدد کہتے ہیں۔چونکہ طاقت $P=\frac{V_{\text{rms}}^2}{R}$ کے برابر ہے لہٰذا دباو کی قیمت $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا ہو جانے سے طاقت کی قیمت نصف ہو جاتی ہے۔یوں انقطاعی تعدد اس تعدد کو کہتے ہیں جس پر اشارے کی طاقت نصف رہ جاتی ہے۔ہمارے ایمپلیفائر کی درمیانی تعدد پر افزائش $8.41\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ ہے۔اس کا $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا $8.4\times\frac{1}{\sqrt{2}}=5.95\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ ہے۔

حقیقت میں پرزوں کی قیمتیں یوں رکھی جائیں گی کہ پست انقطاعی تعدد $20\,\mathrm{Hz}$ سے کئی گنا کم ہو اور اسی طرح بلند انقطاعی تعدد $20\,\mathrm{kHz}$ سے کئی گنا زیادہ ہو۔یوں حقیقی ایمپلیفائر میں آپ انقطاعی تعدد کو $2\,\mathrm{Hz}$ اور $200\,\mathrm{kHz}$ رکھیں گے تاکہ پوری تعددی پٹی پر ایمپلیفائر سے درکار افزائش میسر ہو۔

مساوات 12.10 میں درمیانی تعددی پٹی پر انقطاعی تعدد سے دور تعدد

$$20\,\mathrm{Hz}\ll f\ll 20\,000\,\mathrm{Hz}$$

کی صورت میں $1\ll\frac{f}{20}$ اور $\frac{f}{20000}\ll 1$ ہو گا۔یوں مساوات 12.10 کے بائیں قوسین میں $1+\frac{jf}{20}=\frac{jf}{20}$ اور دائیں قوسین میں $1+\frac{jf}{20000}=1$ لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو درمیانی تعدد پر افزائش ہے۔

$$\boldsymbol{A}_v(s)\approx\frac{j0.421f}{\left(\frac{jf}{20}\right)(1)}=8.42\qquad(20\,\mathrm{Hz}\ll f\ll 20\,\mathrm{kHz})$$

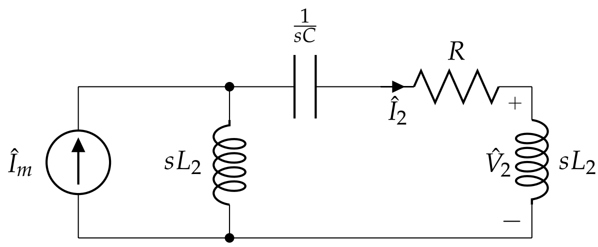
12.1 جال

کسی بھی دور میں متعدد پرزے اور تار پائے جاتے ہیں جسے پرزوں اور تاروں کا جال تصور کیا جا سکتا ہے۔یوں دور کو برقی جال یا صرف جال[16] بھی کہا جاتا ہے۔گزشتہ حصے میں ایمپلیفائر کی افزائش دباو $\boldsymbol{A}_v(s)$ کی بات کی گئی جو جال کے مختلف تفاعل $\boldsymbol{H}(s)$ میں سے ایک ہے۔جال میں کسی مقام پر ردعمل اور داخلی اشارے کی تناسب کو $\boldsymbol{H}(s)$ لکھا جاتا ہے۔چونکہ جال میں عموماً ردعمل کو اس مقام پر نہیں ناپا جاتا جس پر داخلی اشارہ لاگو کیا گیا ہو لہٰذا $\boldsymbol{H}(s)$ کو تبادلی تفاعل[17] کہا جاتا ہے۔داخلی اشارہ دباو یا رو کا ہو سکتا ہے۔اسی طرح ردعمل بھی دباو یا رو کی صورت میں ممکن ہے لہٰذا تبادلی تفاعل کے چار اقسام ممکنہ پائے جاتے ہیں جنہیں جدول 12.1 میں پیش کیا گیا ہے۔

[16] network
[17] transfer function

جدول 12.1: جال کے تبادلی تفاعل

داخلی	خارجی	تبادلی تفاعل	علامت
دباو	دباو	افزائش دباو	$\boldsymbol{A}_v(s)$
رو	رو	افزائش رو	$\boldsymbol{A}_i(s)$
دباو	رو	موصل نما افزائش	$\boldsymbol{A}_g(s)$
رو	دباو	دباو نما افزائش	$\boldsymbol{A}_r(s)$



شکل 12.7: مثال 12.2 کا دور۔

مثال 12.2: شکل 12.7 میں تبادلی تفاعل $\boldsymbol{A}_i(s)=\frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_m}$ اور $\boldsymbol{A}_r(s)=\frac{\hat{V}_2}{\hat{I}_m}$ حاصل کریں۔

حل: تقسیم رو کے کلیے سے درج ذیل لکھتے ہیں

$$\hat{I}_2=\frac{sL_1\hat{I}_m}{sL_1+\frac{1}{sC}+R+sL_2}$$

جس سے افزائش رو کی تفاعل لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}_i(s)=\frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_m}=\frac{s^2L_1C}{s^2(L_1+L_2)C+sRC+1}$$

رو $\hat{I}_2$ جانتے ہوئے $\hat{V}_2$ لکھتے ہیں

$$\begin{aligned}\hat{V}_2&=sL_2\hat{I}_2\\&=\frac{s^3L_1L_2C\hat{I}_m}{s^2(L_1+L_2)C+sRC+1}\end{aligned}$$

جس سے مزاحمت نما افزائش لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{A}_r(s)=\frac{\hat{V}_2}{\hat{I}_m}=\frac{s^3L_1L_2C}{s^2(L_1+L_2)C+sRC+1}$$

12.2 صفر اور قطب

درج بالا مثال میں ہم نے دیکھا کہ تبادلی تفاعل کو دو سلسلوں کا تناسب $\frac{A(s)}{B(s)}$ لکھا جا سکتا ہے جن کا متغیرہ s ہے۔چونکہ ادوار میں پرزوں کی قیمت اور تابع یا غیر تابع منبع کی قیمت حقیقی اعداد ہوتے ہیں لہٰذا ان سلسلوں کے سر حقیقی اعداد ہوں گے۔یوں کسی بھی جال کا تبادلی تفاعل درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{A(s)}{B(s)}=\frac{a_ms^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_2s^2+a_1s+a_0}{b_ns^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_2s^2+b_1s+b_0} \tag{12.11}$$

جہاں شمار کنندہ کثیر رکنی m درجے کا ہے جبکہ نسب نما کثیر رکنی n درجے کا ہے۔مساوات 12.11 کو بذریعہ تجزی درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \tag{12.12}$$

یہاں غور کریں کہ اگر $s=-z_1$ ہو تب $\boldsymbol{H}(s)=0$ ہو گا۔اسی طرح اگر $s=-z_2$ یا $s=-z_3$ ہو تو $\boldsymbol{H}(s)=0$ ہو گا۔یہی وجہ ہے کہ $-z_1$ تا $-z_m$ تفاعل کے صفر[18] کہلاتے ہیں۔اس کے برعکس اگر $s=-p_1$ ہو یا $s=-p_2$ ہو تب $\boldsymbol{H}(s)$ کی قیمت لامتناہی ہو گی۔اسی لئے $-p_1$ تا $-p_n$ تفاعل کے قطب[19] کہلاتے ہیں۔تفاعل کے صفر اور قطب مخلوط اعداد ہو سکتے ہیں۔مخلوط اعداد کی صورت میں ان کی جوڑیاں پائی جاتی ہیں جہاں جوڑی کے دونوں اعداد ایک دوسرے کے **جوڑی دار مخلوط**[20] ہوتے ہیں۔ایسی جوڑی کے قوسین ضرب کرنے سے حقیقی سر والے کثیر رکنی دیتے ہیں جو ادوار کو ظاہر کر سکتے ہیں۔مساوات 12.12 کسی بھی خطی اور وقت کے

---

[18] zeroes
[19] poles
[20] complex conjugate

ساتھ نہ بدلنے والے نظام کے تبادلی تفاعل لکھنے کا انتہائی اہم طریقہ ہے چونکہ اس کے قطبین کو دیکھ کر تفاعل کی خاصیت کے بارے میں جانا جا سکتا ہے۔ایسے نظام کے تبادلی تفاعل کو عموماً اسی صورت میں لکھا جاتا ہے۔

مساوات 12.12 میں شمار کنندہ سے z_1 تا z_m اور نسب نما سے p_1 تا p_n باہر نکالتے اور ترتیب دیتے ہوئے ذیل ملتا ہے

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{K(z_1z_2\cdots z_m)(1+\frac{s}{z_1})(1+\frac{s}{z_2})\cdots(1+\frac{s}{z_m})}{(p_1p_2\cdots p_n)(1+\frac{s}{p_1})(1+\frac{s}{p_2})\cdots(1+\frac{s}{p_n})}$$

جس میں $\frac{K(z_1z_2\cdots z_m)}{(p_1p_2\cdots p_n)}=K_0$ لکھتے ہوئے مساوات کی معیاری شکل ملتی ہے۔

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{K_0(1+\frac{s}{z_1})(1+\frac{s}{z_2})\cdots(1+\frac{s}{z_m})}{(1+\frac{s}{p_1})(1+\frac{s}{p_2})\cdots(1+\frac{s}{p_n})} \tag{12.13}$$

مثال 12.3: درج ذیل تفاعل کو اجزائے ضربی کی صورت میں لکھیں۔

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{5s+2}{2s^2+5s+3}$$

حل: نسب نما $2s^2+5s+3$ کے جذر $s_1=-1$ اور $s_2=-\frac{3}{2}$ ہیں۔آپ یہاں غلط فہمی[21] سے درج بالا کو $\frac{5s+2}{(s+1)(s+\frac{3}{2})}$ لکھ سکتے ہیں لیکن قوسین کو ضرب دیتے ہوئے واپس اصل تفاعل حاصل کرتے ہوئے $\frac{5s+2}{s^2+\frac{5}{2}s+\frac{3}{2}}$ حاصل ہوتا ہے جو درج بالا مساوات سے مختلف ہے۔ایسی غلطی سے بچنے کی خاطر پہلے دئے گئے تفاعل کے نسب نما اور شمار کنندہ کو یوں لکھیں کہ ان کے بلند تر درجہ s کا عددی سر اکائی کے برابر ہو۔

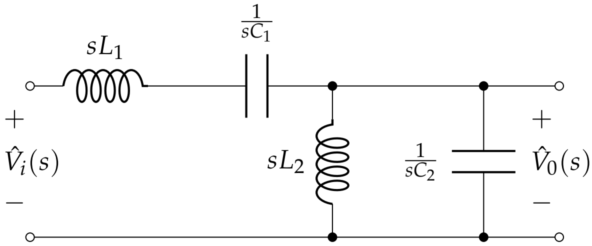
$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{5(s+\frac{2}{5})}{2\left(s^2+\frac{5}{2}s+\frac{3}{2}\right)}$$

نسب نما میں $s^2+\frac{5}{2}s+\frac{3}{2}$ کے جذر اب بھی $s_1=-1$ اور $s_2=-\frac{3}{2}$ ہیں لہٰذا درج بالا مساوات کو ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{5(s+\frac{2}{5})}{2(s+1)(s+\frac{3}{2})}$$

---

[21] میں یہ غلطی بار بار کر چکا ہوں۔



شکل 12.8: مثال 12.3 کا دور۔

مشق 12.1: شکل 12.6-الف کا تبادلی تفاعل مساوات 12.9 میں دیا گیا ہے۔ اس کے صفر اور قطب دریافت کریں۔

جوابات: $-z_1 = 0\,\mathrm{Hz}$ ، $-p_1 = -20\,\mathrm{Hz}$ ، $-p_2 = -20\,\mathrm{kHz}$

مشق 12.2: شکل 12.6-الف میں داخلی اشارے کو درپیش رکاوٹ دریافت کریں۔

جواب: $R_m + \frac{R_i}{1+sR_iC_i}$

مشق 12.3: شکل 12.8 میں تبادلی تفاعل $\frac{\hat{V}_0(s)}{\hat{V}_i(s)}$ حاصل کریں۔

جواب:

$$\frac{\hat{V}_0(s)}{\hat{V}_i(s)} = \frac{s^2L_2C_1}{s^4L_1L_2C_1C_2 + s^2(L_1C_1 + L_2C_2 + L_2C_1) + 1}$$

12.3 سائن نما تعددی تجزیہ

بعض اوقات ہم جال کو کسی مخصوص تعدد پر چلاتے ہیں۔اس کی مثال $50\,\mathrm{Hz}$ پر چلنے والا واپڈا کا نظام ہے۔اس کے برعکس کئی ادوار بدلتی تعدد پر استعمال کئے جاتے ہیں۔ سمعی ایمپلیفائر ایسا دور ہے جو $20\,\mathrm{Hz}$ تا $20\,\mathrm{kHz}$ کے تعدد پر چلایا جاتا ہے۔ ہم یہاں ادوار کی کارکردگی بالمقابل تعدد میں دلچسپی رکھتے ہیں۔تبادلی تفاعل مخلوط عدد ہے لہٰذا اس کو زاویائی طرز میں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{H}(\omega)=\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right|e^{j\phi(\omega)} \tag{12.14}$$

جہاں حتمی مقدار کا تفاعل $\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right|$ اور زاویائی تفاعل $\phi(\omega)$ دونوں تعدد پر منحصر ہیں۔ حتمی مقدار بالمقابل تعدد کے خط کو **مقداری خصلت**[22] اور زاویہ بالمقابل تعدد کے خط کو **زاویائی خصلت**[23] کہتے ہیں۔

12.3.1 بوڈا خطوط

افقی محور پر $\log_{10}\omega$ اور عمودی محور پر $20\log_{10}\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right|$ رکھنے سے **مقداری بوڈا خط**[24] ملتا[25] ہے۔ جیسے آپ آگے جا کر دیکھیں گے، تبادلی تفاعل کو دیکھ کر بوڈا خط کھینچا جاتا ہے۔یہی بوڈا خطوط کی مقبولیت کی وجہ ہے۔**تعدد تابع**[26] ادوار مثلاً ایمپلیفائر، چھلنی وغیرہ کے تجزیے اور تخلیق میں بوڈا خطوط نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔ مقداری بوڈا خط کے عمودی محور کی پیمائش **ڈیسی بیل**[27] dB میں کی جاتی ہے۔ڈیسی بیل کو بنیادی طور پر آواز کے طاقت کی تناسب ناپنے کے لئے استعمال کیا جاتا تھا جہاں دو طاقتوں کے تناسب کے لاگ $\log_{10}\frac{P_2}{P_1}$ کو **بیل**[28] میں ناپا جاتا تھا۔ جیسے ایک میٹر $1\,\mathrm{m}$ میں دس ڈیسی میٹر $10\,\mathrm{dm}$ ہوتے ہیں، اسی طرح ایک بیل میں دس ڈیسی بیل ہوتے ہیں لہٰذا ڈیسی بیل کا کلیہ درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\text{ڈیسی بیل میں طاقت کے تناسب کی پیمائش}=10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} \tag{12.15}$$

---

[22] magnitude characteristic
[23] phase characteristic
[24] Bode plots
[25] ہینڈرک واڈ بوڈا نے اس طرز کو دریافت کیا۔
[26] frequency dependent
[27] decibel
[28] Bell

اگر دونوں طاقت یکساں قیمت کے مزاحمت R کو مہیا کی جائے تب $P = I^2 R$ اور $P = \frac{V^2}{R}$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\text{ڈیسی بیل میں طاقت کے تناسب کی پیمائش} &= 10 \log_{10} \frac{\left|\hat{I}_2\right|^2 R}{\left|\hat{I}_1\right|^2 R} = 20 \log_{10} \frac{\left|\hat{I}_2\right|}{\left|\hat{I}_1\right|} \\
\text{ڈیسی بیل میں طاقت کے تناسب کی پیمائش} &= 10 \log_{10} \frac{\left|\hat{V}_2\right|^2 / R}{\left|\hat{V}_1\right|^2 / R} = 20 \log_{10} \frac{\left|\hat{V}_2\right|}{\left|\hat{V}_1\right|}
\end{aligned}
\tag{12.16}
$$

مساوات 12.16 میں دیے ڈیسی بیل کے کلیے اتنے مقبول ہوئے ہیں کہ غیر یکساں مزاحمت کی صورت میں بھی دباو کی تناسب یا رو کی تناسب کو انہیں کلیوں سے ڈیسی بیل میں ناپا جاتا ہے۔

مشق 12.4: ایک ایمپلیفائر کو $P_i = 10\,\mathrm{mW}$ طاقت کا داخلی اشارہ فراہم کیا جاتا ہے جبکہ ایمپلیفائر خارجی جانب سپیکر کو $P_o = 15\,\mathrm{W}$ طاقت فراہم کرتا ہے۔ایمپلیفائر کی افزائش طاقت $A_p = \frac{P_o}{P_i}$ کو ڈیسی بیل میں حاصل کریں۔

جواب: $A_p = 31.76\,\mathrm{dB}$

مشق 12.5: ایک ایمپلیفائر کی افزائش دباو $A_v = 22\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ ہے۔اس کی افزائش دباو کو ڈیسی بیل میں لکھیں۔

جواب: $A_v = 26.85\,\mathrm{dB}$

مشق 12.6: سلسلہ وار جڑے $414\,\Omega$ اور $1000\,\Omega$ مزاحمتوں کو $\hat{V}_i = 100\,\mathrm{V\,rms}$ کا داخلی اشارہ مہیا کیا جاتا ہے جبکہ $1\,\mathrm{k}\Omega$ پر خارجی اشارہ $\hat{V}_0$ ناپا جاتا ہے۔ جال کی افزائش دباو کو ڈیسی بیل میں دریافت کریں۔

جواب: خارجی دباو $\hat{V}_0 = \frac{100\times1000}{1000+414} = 70.72\,\mathrm{V\,rms}$ ہے جو داخلی دباو کے 0.7072 گنا ہے۔ دباو کی قیمت 0.7072 گنا ہونے سے طاقت کی قیمت 0.5 گنا رہ جاتی ہے جو $-3\,\mathrm{dB}$ کے برابر ہے۔

بوڈا مقداری خط کھینچنا چند مثالوں سے سیکھتے ہیں۔ پہلی مثال میں تبادلی تفاعل درج ذیل لیتے ہیں جس میں ایک عدد صفر پایا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{H}(\omega) = K(j\omega + z_1) \tag{12.17}$$

اس کو ترتیب دیتے ہوئے معیاری شکل میں لکھتے ہیں جہاں دوسری قدم پر $Kz_1 = K_0$ لکھا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\omega) &= Kz_1\left(1 + j\frac{\omega}{z_1}\right)\\ &= K_0\left(1 + j\frac{\omega}{z_1}\right)\end{aligned} \tag{12.18}$$

اس کی حتمی قیمت

$$\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| = K_0\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_1^2}} \tag{12.19}$$

کا $20\log_{10}\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right|$ لیتے ہیں

$$20\log_{10}\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| = 20\log_{10}K_0 + 20\log_{10}\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_1^2}} \tag{12.20}$$

جس میں $\log_{10}xy = \log_{10}x + \log_{10}y$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

مساوات 12.20 پر غور کریں۔ اس کا پہلا جزو ایک مستقل ہے جو تعدد پر منحصر نہیں ہے۔ اس کو شکل 12.9-الف میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات کے دوسرے جزو کو دو مختلف تعدد کے پٹیوں پر دیکھتے ہیں۔ اگر تعدد کی قیمت z_1 سے بہت کم ہو

یعنی $z_1 \ll \omega$ تب $1 \ll \frac{\omega^2}{z_1^2}$ ہو گا لہٰذا دوسرے جزو میں $\frac{\omega^2}{z_1^2}$ کو نظر انداز کیا جا سکتا ہے۔ایسا کرنے سے دوسرا جزو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں $\log_{10} 1 = 0$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{z_1^2}} \approx 20\log_{10}\sqrt{1+0} = 0\,\mathrm{dB}$$

شکل 12.9-الف میں z_1 سے بہت کم تعدد پر دوسرا جزو $0\,\mathrm{dB}$ کے برابر ہو گا۔نقطہ a پر $\omega = \frac{z_1}{100}$ ہے لہٰذا اس نقطے پر دوسرا جزو صفر ڈیسی بیل دکھایا گیا ہے۔اس نقطے کی نشاندہی دائرے سے کی گئی ہے۔اسی طرح نقطہ b پر $\omega = \frac{z_1}{10}$ ہے لہٰذا یہاں بھی دوسرا جزو صفر ڈیسی بیل کے برابر ہے۔

آئیں اب مساوات 12.20 کے دوسرے جزو کو z_1 سے بہت زیادہ تعدد پر دیکھیں۔اگر $\omega \gg z_1$ ہو تب اس جزو میں $\frac{\omega^2}{z_1^2} \gg 1$ ہو گا لہٰذا اس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{z_1^2}} \approx 20\log_{10}\sqrt{\frac{\omega^2}{z_1^2}} = 20\log_{10}\frac{\omega}{z_1}$$

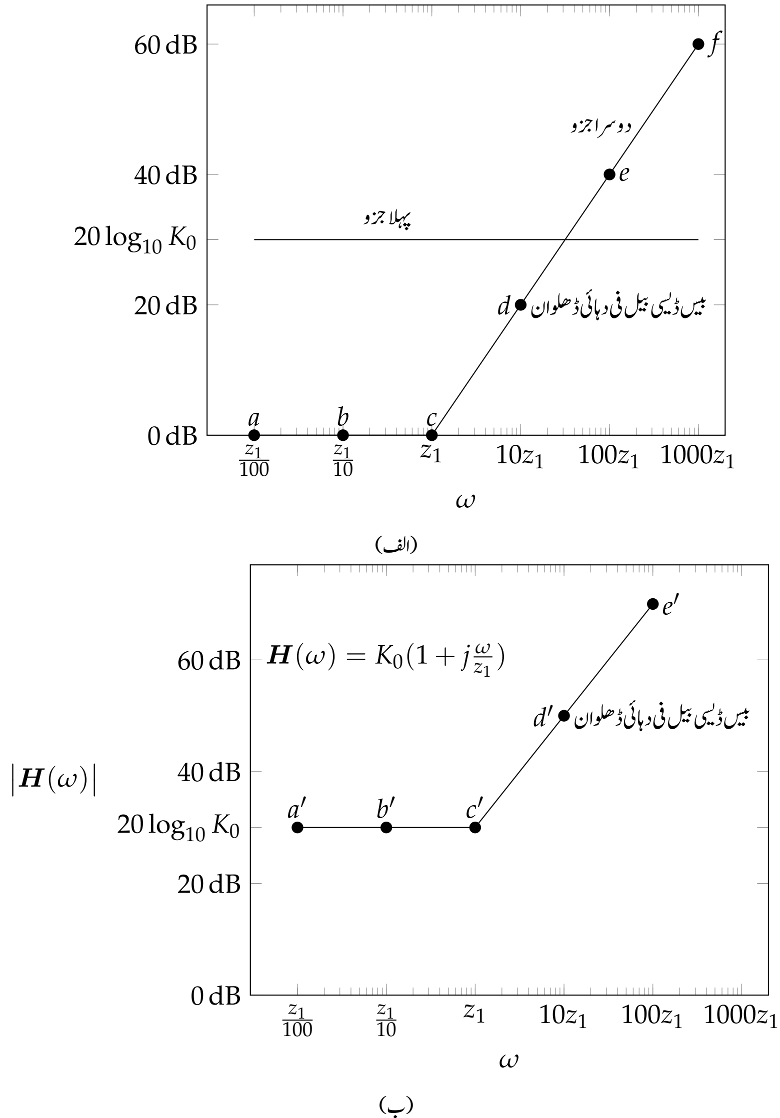
جس کی قیمت $\omega = z_1$ پر

$$20\log_{10}\frac{\omega}{z_1} = 20\log_{10}\frac{z_1}{z_1} = 20\log_{10} 1 = 0\,\mathrm{dB}$$

اور $\omega = 10z_1$ پر

$$20\log_{10}\frac{\omega}{z_1} = 20\log_{10}\frac{10z_1}{z_1} = 20\log_{10} 10 = 20\,\mathrm{dB}$$

حاصل ہوتی ہے۔ان قیمتوں کو شکل 12.9-الف میں نقطہ c اور d ظاہر کرتی ہیں۔اسی طرح $\omega = 100z_1$ اور $\omega = 1000z_1$ پر اس جزو کی قیمتیں $40\,\mathrm{dB}$ اور $60\,\mathrm{dB}$ حاصل ہوتی ہیں جنہیں شکل میں نقطہ e اور f ظاہر کرتے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\omega = z_1$ سے سیدھا خط نکلتا ہے جس کی قیمت $10z_1$ تعدد پر بڑھ کر $20\,\mathrm{dB}$ ہو جاتی ہے۔یوں نقطہ c پر تعدد z_1 کے برابر ہے اور مساوات 12.20 کے دوسرے جزو کی قیمت $0\,\mathrm{dB}$ ہے۔تعدد دس گنا یعنی $\omega = 10z_1$ کرنے سے اس جزو کی قیمت $20\,\mathrm{dB}$ ہو جاتی ہے جسے نقطہ d ظاہر کرتا ہے۔تعدد مزید دس گنا بڑھانے $\omega = 100z_1$ سے اس جزو کی قیمت مزید $20\,\mathrm{dB}$ بڑھ کر $40\,\mathrm{dB}$ ہو جاتی ہے جس سے نقطہ e حاصل ہوتا ہے۔ہم کہتے ہیں کہ $\omega = z_1$ تعدد سے شروع ہوتے اس خط کی ڈھلوان بیس ڈیسی بیل فی دہائی کے برابر ہے۔



شکل 12.9: ایک عدد صفر والے تبادلی تفاعل کا مقداری بوڈا خط۔

مساوات 12.20 کے اجزاء کا مجموعہ لیتے ہوئے شکل 12.9-ب حاصل ہوتا ہے۔ شکل-الف میں $\omega = \frac{z_1}{100}$ تعدد پر پہلا جزو $20\log_{10} K_0$ اور دوسرا جزو $0\,\text{dB}$ کے برابر ہے لہٰذا ان کا مجموعہ $20\log_{10} K_0'$ کے برابر ہو گا جسے شکل-ب میں نقطہ a' دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح بقایا تعدد پر مجموعہ لیتے ہوئے b' ، c' ، d' اور e' نقطے حاصل کئے جاتے ہیں۔

شکل 12.9-ب کو دیکھتے ہوئے درج بالا تمام قصے کا نچوڑ یہ ہے۔ صفر تعدد سے z_1 تعدد تک مساوات 12.18 کے تبادلی تفاعل کی مقدار $20\log_{10} K_0$ رہتی ہے جبکہ z_1 تعدد سے اس کی مقدار بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھنے شروع ہو جاتی ہے اور مسلسل اسی شرح سے بڑھتی ہے۔ یوں مساوات 12.20 سے K_0 اور z_1 حاصل کرتے ہوئے مقداری بوڈا خط کھینچا جا سکتا ہے۔

شکل 12.10 میں مساوات 12.20 کے دوسرے جزو $20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{z_1^2}}$ کو ہلکی سیاہی میں کھینچا گیا ہے اور ساتھ ہی اس کا بوڈا خط گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ آئیں دونوں کی قیمتیں کونے پر حاصل کریں۔ کونا $\omega = z_1$ پر پایا جاتا ہے جس پر اس جزو کی اصل قیمت درج ذیل ہے

$$20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{z_1^2}} = 20\log_{10}\sqrt{1+\frac{z_1^2}{z_1^2}} = 20\log_{10}\sqrt{2} = 3\,\text{dB} \tag{12.21}$$

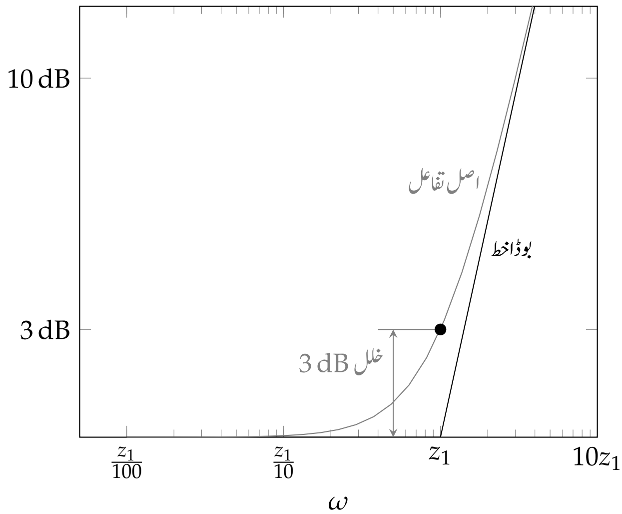
جبکہ بوڈا خط کی قیمت اس تعدد پر $0\,\text{dB}$ ہے۔ یوں بوڈا خط کے قیمت میں کونے پر $3\,\text{dB}$ کا خلل پایا جاتا ہے جو بوڈا خط اور اصل تفاعل کے قیمت میں زیادہ سے زیادہ فرق ہے۔ شکل 12.10 میں اس خلل کی وضاحت کی گئی ہے۔ اس شکل میں یہ بھی دیکھا جا سکتا ہے کہ کونے سے دس گنا کم تعدد $\omega = \frac{z_1}{10}$ یا دس گنا زیادہ تعدد $\omega = 10z_1$ پر اصل تفاعل اور بوڈا خط میں فرق قابل نظر انداز ہوتا ہے۔

آئیں اب درج ذیل تبادلی تفاعل لیتے ہیں جس میں ایک قطب پایا جاتا ہے۔

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{K}{j\omega + p_1} \tag{12.22}$$

اس کو ترتیب دے کر لکھتے ہیں جہاں $\frac{K}{p_1} = K_0$ لکھا گیا ہے۔

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{K}{p_1\left(1 + j\frac{\omega}{p_1}\right)} = \frac{K_0}{1 + j\frac{\omega}{p_1}} \tag{12.23}$$



شکل 12.10: کونے پر بوڈا خط میں 3 dB خلل پایا جاتا ہے۔

اس کی حتمی قیمت حاصل کرتے ہیں

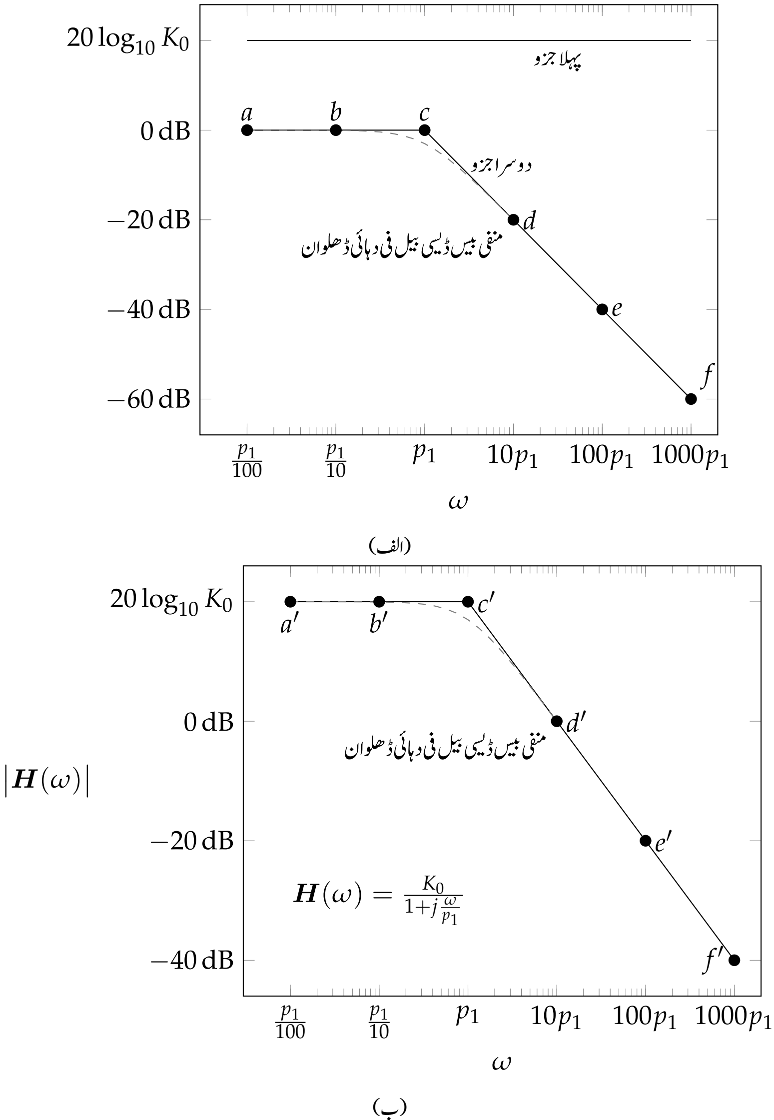
$$\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| = \frac{K_0}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{p_1^2}}} \tag{12.24}$$

جس کو $20\log_{10}\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right|$ صورت میں لکھتے ہیں

$$20\log_{10}\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| = 20\log_{10} K_0 - 20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{p_1^2}} \tag{12.25}$$

جہاں $\log_{10}\frac{x}{y} = \log_{10} x - \log_{10} y$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

مساوات 12.25 کے دو اجزاء پائے جاتے ہیں جنہیں شکل 12.11-الف میں دکھایا گیا ہے جبکہ ان کے مجموعے کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ p_1 سے کم تعدد پر تبادلی تفاعل کی حتمی قیمت $20\log_{10} K_0$ رہتی ہے جبکہ p_1 تعدد سے شروع ہو کر اس کی قیمت مسلسل منفی بیس ڈیسی بیل فی دہائی تبدیل ہوتی ہے۔ شکل-الف میں ہلکی سیاہی میں نقطہ دار لکیر سے اصل دوسرا جزو بھی دکھایا ہے جہاں بوڈا خط میں -3 dB کا خلل واضح ہے۔ شکل-ب میں پورا تفاعل اور پورے تفاعل کا بوڈا خط دکھائے گئے ہیں۔ بوڈا خط میں کونے پر منفی بیس ڈیسی بیل کا خلل پایا جاتا ہے۔ بوڈا



شکل 12.11: ایک عدد قطب والے تبادلی تفاعل کا مقداری بوڈا خط۔

خط اور اصل تفاعل میں زیادہ سے زیادہ خلل کونے پر پایا جاتا ہے۔اگر کونا تفاعل کے صفر پر ہو تب خلل $3\,\mathrm{dB}$ ہوتا ہے اور اگر کونا تفاعل کے قطب کی وجہ سے ہو تب خلل $-3\,\mathrm{dB}$ ہوتا ہے۔

مثال 12.4: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(\omega) = 10(j\omega + 10)$ کا بوڈا خط کھینچیں۔

حل:اس کو ترتیب دیتے ہوئے معیاری شکل میں لکھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{H}(\omega) = 100\left(1 + j\frac{\omega}{10}\right)$$

یوں نیم لاگ محور پر خط کھینچتے ہوئے $10\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ سے کم تعدد پر تفاعل کی حتمی قیمت $20\log_{10} 100 = 40\,\mathrm{dB}$ ہو گی جبکہ اس تعدد سے زیادہ تعدد پر حتمی قیمت بتدریج بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھے گی۔ان نتائج کو شکل 12.12 میں دکھایا گیا ہے۔نقطہ a پر تعدد $10\,\mathrm{radian/s}$ اور تفاعل کی حتمی قیمت $40\,\mathrm{dB}$ ہے۔تعدد کو دس گنا کرنے سے $\omega = 100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ حاصل ہوتا ہے جس پر تفاعل کی حتمی مقدار بڑھ کر $40\,\mathrm{dB} + 20\,\mathrm{dB} = 60\,\mathrm{dB}$ ہو جاتی ہے جسے نقطہ b سے ظاہر کیا گیا ہے۔ان دو نقطوں سے گزرتی سیدھی خط کھینچی گئی ہے جس کی ڈھلوان بیس ڈیسی بیل فی دہائی ہو گی۔

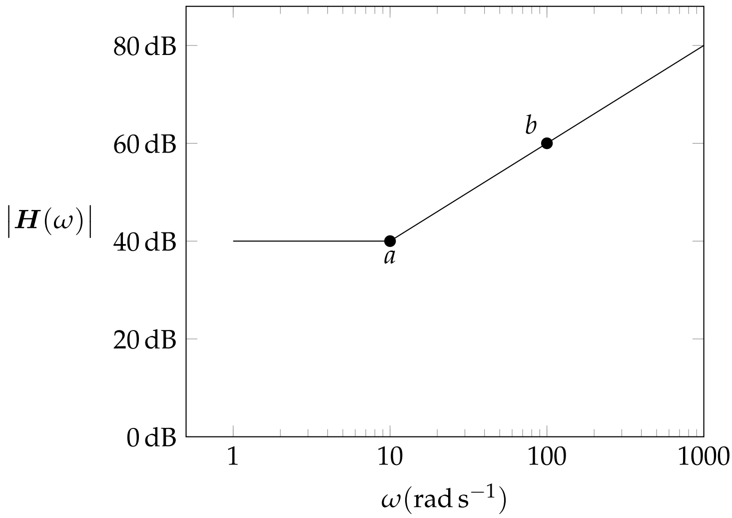
مثال 12.5: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{1000(j\omega+100)}{j\omega+10000}$ کا مقداری بوڈا خط کھینچیں۔

حل:اس کو معیاری شکل میں لکھتے ہوئے

$$\boldsymbol{H}(\omega) = 10\left(\frac{1 + j\frac{\omega}{100}}{1 + j\frac{\omega}{10000}}\right)$$

حتمی قیمت کو ڈیسی بیل میں لکھتے ہیں۔

$$20\log_{10}\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| = 20\log_{10} 10 + 20\log_{10}\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100^2}} - 20\log_{10}\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{10000^2}}$$



شکل 12.12: مثال 12.4 کا دور۔

درج بالا مساوات کے تینوں اجزاء کو شکل 12.13-الف میں اور ان کے مجموعے کو شکل 12.13-ب میں دکھایا گیا ہے۔ درج بالا مساوات کو دیکھ کر بوڈا مقداری خط کھینچا جاتا ہے جہاں $\omega = 100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ سے کم تعدد پر مقدار $20\log_{10} 10 = 20\,\mathrm{dB}$ ہے، ٹھیک $20\log_{10} 10 = 20\,\mathrm{dB}$ تعدد پر مقدار کی قیمت بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھنا شروع ہو جاتی ہے۔ تعدد $\omega = 10\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ سے زیادہ تعدد پر دوسرے جزو کے مثبت بیس ڈیسی بیل فی دہائی کو تیسرے جزو کا منفی بیس ڈیسی بیل فی دہائی مکمل طور پر ختم کرتا ہے لہٰذا بوڈا خط اسی قیمت پر برقرار رہتا ہے۔ شکل میں ہلکی سیاہی میں نقطہ دار لکیر سے اصل تفاعل کا خط بھی دکھایا گیا ہے جہاں بوڈا خط کے کونوں پر $\mp 3\,\mathrm{dB}$ خلل واضح ہے۔

آئیں اب تبادلی تفاعل کے **زاویائی بوڈا خط**[29] کھینچنا سیکھیں۔ ہم درج ذیل تفاعل کو مثال بناتے ہیں

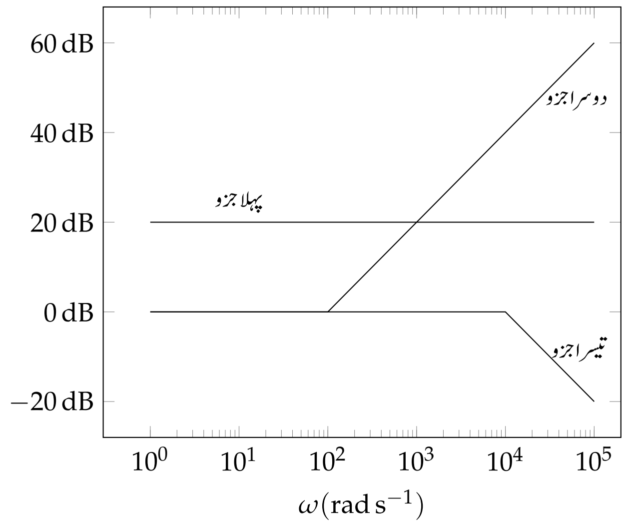
$$\boldsymbol{H}(\omega) = K_0 \left(1 + j\frac{\omega}{z_1}\right) \tag{12.26}$$

جس کا زاویہ ذیل ہے

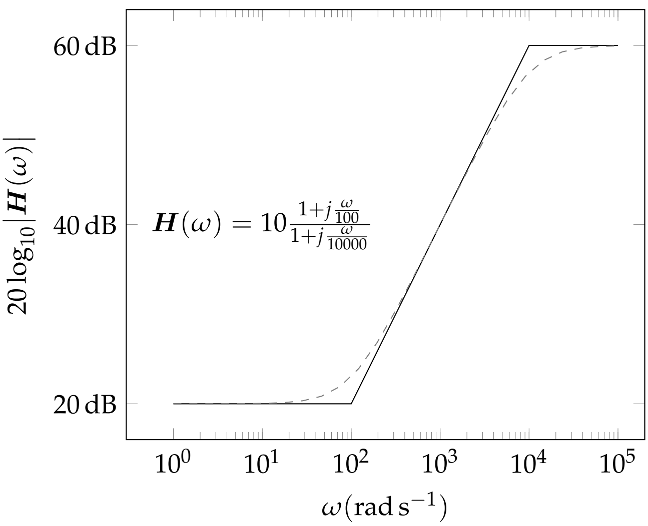
$$\underline{/\boldsymbol{H}(\omega)} = \underline{/\tan^{-1} \tfrac{\omega}{z_1}} \tag{12.27}$$

---

[29]Bode phase plot

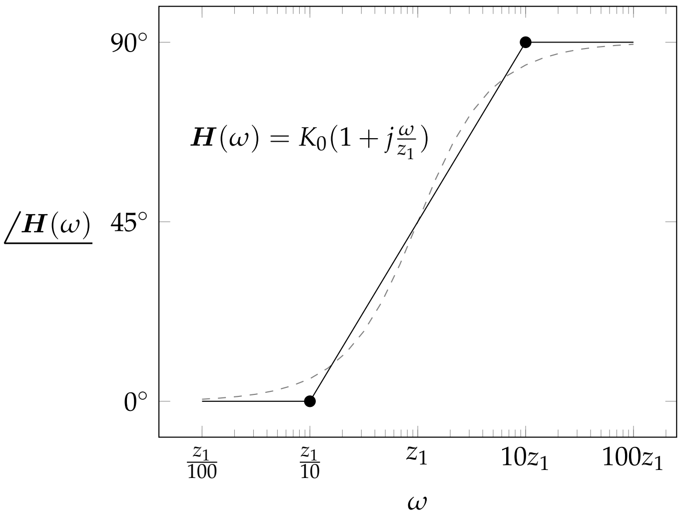


(الف)



(ب)

شکل 12.13: مثال 12.5 کا بوڈا خط۔



شکل 12.14: ایک صفر والے تفاعل کا زاویائی بوڈا خط۔

جس کو شکل 12.14 میں ہلکی سیاہی سے نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ عین کونے $(\omega = z_1)$ پر زاویہ

$$\angle \boldsymbol{H}(z_1) = \angle \tan^{-1} \frac{\omega}{z_1} = \angle \tan^{-1} \frac{z_1}{z_1} = \angle 45^\circ$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ کونے سے دس گنا زیادہ تعدد $(\omega = 10z_1)$ پر

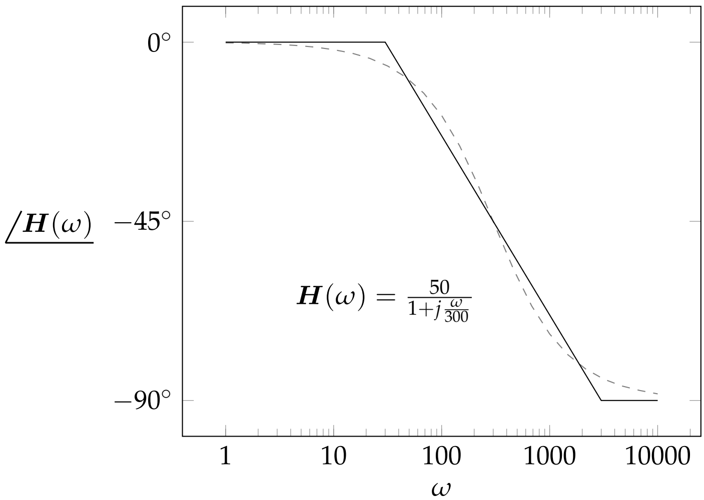
$$\angle \boldsymbol{H}(10z_1) = \angle \tan^{-1} \frac{10z_1}{z_1} = \angle 84.3^\circ$$

اور کونے سے دس گنا کم تعدد $(\omega = \frac{z_1}{10})$ پر

$$\angle \boldsymbol{H}(10z_1) = \angle \tan^{-1} \frac{\frac{z_1}{10}}{z_1} = \angle 5.7^\circ$$

زاویے حاصل ہوتے ہیں۔ بوڈا زاویائی خط میں اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کونے سے دس گنا کم تعدد $(\omega = \frac{z_1}{10})$ پر 0° اور کونے سے دس گنا زیادہ تعدد $(\omega = 10z_1)$ پر 90° چنتے ہوئے انہیں سیدھی لکیر سے ملایا جاتا ہے جبکہ $\omega < \frac{z_1}{10}$ پر زاویہ 0° اور $\omega > 10z_1$ پر زاویہ 90° رکھا جاتا ہے۔ شکل 12.14 میں سیدھے خطوط پر مبنی بوڈا زاویائی خط کو گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 12.6: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{50}{1+j\frac{\omega}{300}}$ کا زاویائی بوڈا خط کھینچیں۔



شکل 12.15: ایک قطب والے تفاعل کا بوڈا زاویائی خط۔

حل: اس تفاعل کا زاویہ ذیل ہے جہاں کونا $\omega = 300\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر پایا جاتا ہے۔

$$\angle \boldsymbol{H}(\omega) = \frac{1}{\angle \tan^{-1}\frac{\omega}{300}} = \angle -\tan^{-1}\frac{\omega}{300} \tag{12.28}$$

اس تفاعل کو شکل 12.15 میں ہلکی سیاہی میں نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔

بوڈا خط میں کونے سے دس گنا کم تعدد پر زاویہ 0° اور کونے سے دس گنا زیادہ تعدد پر زاویہ -90° چنتے ہوئے ان نقطوں کو سیدھے خط سے ملایا جاتا ہے۔ یوں $\omega = 30\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر 0° اور $\omega = 3000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر 90° چنتے ہوئے انہیں سیدھے لکیر سے ملایا گیا ہے۔ مزید $\omega = 30\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ سے کم تعدد پر زاویہ 0° ہی رکھا جاتا ہے جبکہ $\omega = 3000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ سے زیادہ تعدد پر زاویہ -90° رکھا جاتا ہے۔ بوڈا زاویائی خط کو شکل 12.15 میں گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔

یوں کونے ($\omega = 300\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$) پر، کونے سے دس گنا زیادہ تعدد ($\omega = 3000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$) پر اور کونے سے دس گنا کم تعدد ($\omega = 30\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$) پر زاویے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\angle \boldsymbol{H}(200) &= \angle -\tan^{-1}\tfrac{300}{300} = \angle -45^\circ\\
\angle \boldsymbol{H}(2000) &= \angle -\tan^{-1}\tfrac{3000}{300} = \angle -84.3^\circ\\
\angle \boldsymbol{H}(20) &= \angle -\tan^{-1}\tfrac{30}{300} = \angle -5.7^\circ
\end{aligned}$$

مثال 12.7: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{j20\omega(1+j\frac{\omega}{200})}{1+j\frac{\omega}{30\,000}}$ کا زاویائی بوڈا خط کھینچیں۔

حل: اس تفاعل کا زاویہ لکھتے ہیں۔

$$\underline{/\boldsymbol{H}(\omega)}=\underline{/90^\circ}+\underline{/\tan^{-1}\frac{\omega}{200}}-\underline{/\tan^{-1}\frac{\omega}{30\,000}}$$

شمار کنندہ میں $j20\omega=0+j20\omega$ لکھتے ہوئے زاویہ $\tan^{-1}\frac{j20\omega}{0}=90^\circ$ حاصل ہوتا ہے۔ دوسرا رکن $20\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر 0° اور $2\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ پر 90° جبکہ تیسرا رکن $300\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر 0° اور $300\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ پر -90° ہے۔ ان تمام ارکان کو شکل 12.16 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 12.8: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(\omega)=\frac{j10\omega}{(1+j\frac{\omega}{100})(1+j\frac{\omega}{10000})}$ کا مقداری بوڈا خط کھینچیں۔

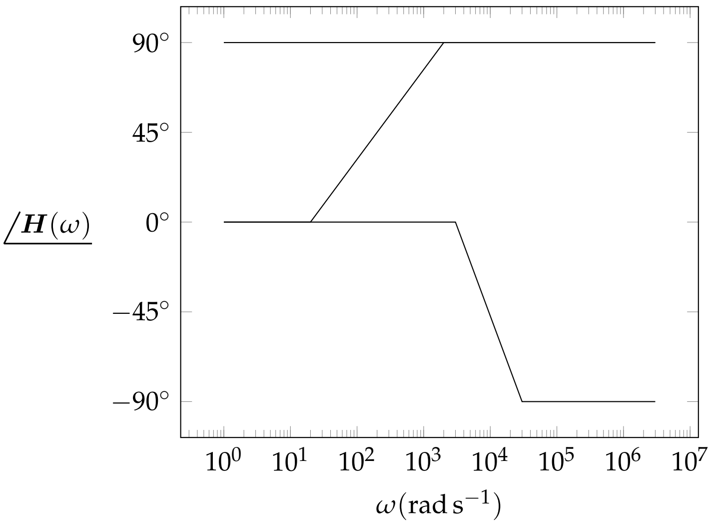
حل: اس تفاعل کی حتمی قیمت

$$\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right|=\frac{10\omega}{\sqrt{1+\frac{\omega^2}{100^2}}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{10000^2}}}$$

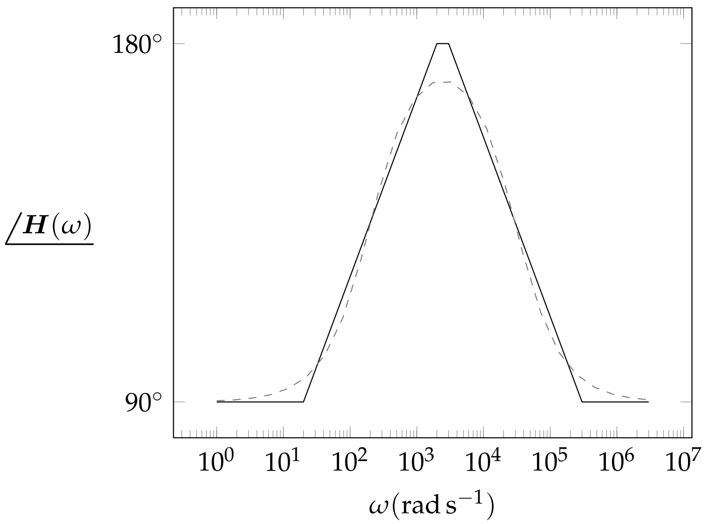
کو ڈیسی بیل میں لکھتے ہیں۔

$$20\log_{10}10+20\log_{10}\omega-20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{100^2}}-20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{10000^2}} \tag{12.29}$$

مساوات 12.29 کا پہلا رکن $20\,\mathrm{dB}$ کا مستقل ہے۔ اس کا دوسرا رکن $\omega=1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر $0\,\mathrm{dB}$ کے برابر ہے جبکہ اس تعدد سے زیادہ تعدد پر بتدریج بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھتا ہے۔ تیسرے اور چوتھے ارکان کے بوڈا خط بالترتیب

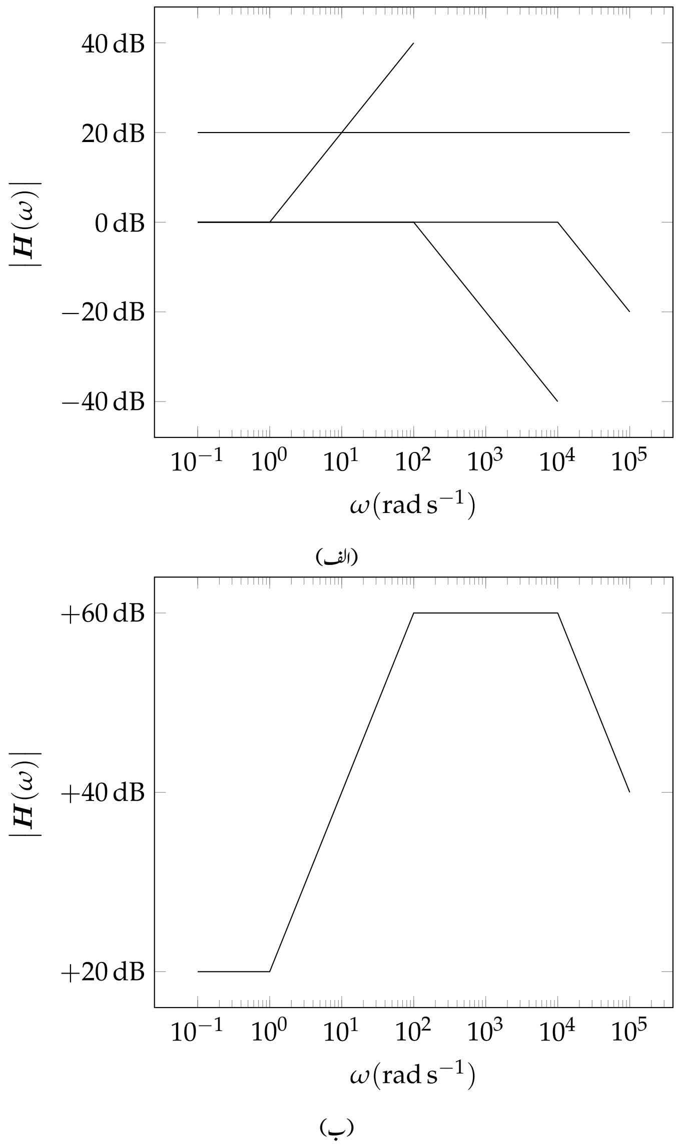


(الف)



(ب)

شکل 12.16: مثال 12.7 کا زاویائی بوڈا خط۔



شکل 12.17: ایک صفر اور دو قطب والے تفاعل کا بوڈا مقداری خط۔

$100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ اور $10\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ تعدد پر منفی بیس ڈیسی بیل فی دہائی گھٹنا شروع ہوتے ہیں۔ان تمام ارکان کو شکل 12.17-الف اور ان کا مجموعہ شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔

ہمیں عموماً درمیانی تعدد پر بوڈا خط میں زیادہ دلچسپی ہوتی ہے۔ایسی صورت میں بوڈا مقداری خط درمیانی تعدد $(100\,\mathrm{rad\,s^{-1}} < \omega < 10\,\mathrm{krad\,s^{-1}})$ سے شروع کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔دونوں کونوں سے دور یعنی $\omega \ll 10\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ اور $\omega \gg 100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر $1+\frac{\omega^2}{100^2} \approx \frac{\omega^2}{100^2}$ اور $1+\frac{\omega^2}{10000^2}=1$ لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| = \frac{10\omega}{\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{100^2}}\right)\left(\sqrt{1}\right)} = 1000$$

لہٰذا درمیانی تعددی پٹی پر ڈیسی بیل میں مقدار درج ذیل ہو گی

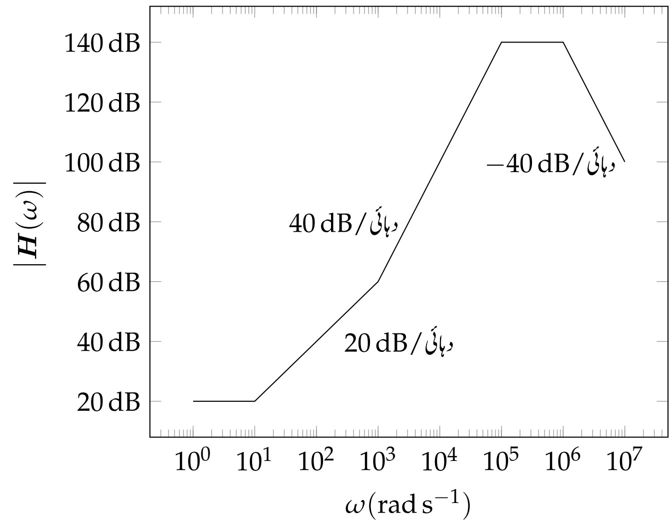
$$20\log_{10}\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| = 20\log_{10}1000 = 60\,\mathrm{dB}$$

جیسے شکل 12.17-ب میں $\omega = 100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ تا $10\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ دکھایا گیا ہے۔چونکہ حقیقت میں پست تعددی کونے سے کم تعدد پر مقدار مسلسل بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھتے ہوئے عین $\omega = 100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر $60\,\mathrm{dB}$ تک پہنچتی ہے لہٰذا پست تعددی کونے سے بیس ڈیسی بیل فی دہائی ڈھلوان کا خط کھینچیں۔اسی طرح بلند تعدد کونے پر بھی بیس ڈیسی بیل فی دہائی ڈھلوان کا خط کھینچیں۔یوں مکمل بوڈا خط حاصل ہو گا۔

مثال 12.9: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{10\left(1+j\frac{\omega}{10}\right)\left(1+j\frac{\omega}{1000}\right)}{\left(1+j\frac{\omega}{100\,000}\right)^2\left(1+j\frac{\omega}{1\,000\,000}\right)^2}$ کا مقداری بوڈا خط کھینچیں۔

حل: تفاول کی مقدار کو ڈیسی بیل میں لکھتے ہیں۔ان کا مجموعہ شکل 12.18 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}20\log_{10}\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| &= 20\log_{10}10 + 20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega}{10^2}} + 20\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{10^6}}\\ &\quad - 40\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{10^10}} - 40\log_{10}\sqrt{1+\frac{\omega^2}{10^{12}}}\end{aligned}$$



شکل 12.18: مثال 12.9 کا مقداری بوڈا خط۔

یہاں $10\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر درج بالا مساوات کا دوسرا جزو بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھنا شروع ہو جات ہے جبکہ تیسرا جزو اسی شرح سے $1000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر بڑھنا شروع ہوتا ہے۔یوں ان کا مجموعہ لیتے ہوئے $1000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ تعدد سے خط کی ڈھلوان $40\,\mathrm{dB}$ فی دہائی ہو گی۔اسی طرح $100\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ پر چھوتا جزو $40\,\mathrm{dB}$ فی دہائی سے گھٹنا شروع ہوتا ہے جو دوسرے اور تیسرے اجزاء کو ختم کرتا ہے لہٰذا بوڈا خط برقرار $140\,\mathrm{dB}$ پر رہتا ہے۔آخر کار $1\,\mathrm{Mrad\,s^{-1}}$ پر پانچواں جزو چالیس ڈیسی بیل فی دہائی سے گھٹنا شروع ہوتا ہے۔

تبادلی تفاعل کے صفر اور قطب مخلوط اعداد بھی ہو سکتے ہیں۔ایسی صورت میں ان کے جوڑی دار جوڑے پائے جاتے ہیں۔آئیں ان پر غور کریں۔تبادلی تفاعل

$$\boldsymbol{H}(s)=\frac{K}{(s+a)(s+b)}$$

کے قوسین کو ضرب دیتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(s) &= \frac{K}{s^2+s(a+b)+ab}\\ &= \frac{K}{ab[1+\frac{s(a+b)}{ab}+\frac{s^2}{ab}]}\end{aligned}$$

اس کو درج ذیل معیاری صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{H}(s) = \frac{K_0}{1+2\zeta(s\tau)+(s\tau)^2} \tag{12.30}$$

جہاں

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{\sqrt{ab}}\\ \zeta &= \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}\end{aligned}$$

کے برابر ہیں۔ مساوات 12.30 میں ζ کو **تقصیری تناسب**[30] کہتے ہیں۔

فرض کریں کہ ہمیں مساوات 12.30 دی گئی ہے اور ہم اس کے قطب جاننا چاہتے ہیں۔ قطب جاننے کے لئے نسب نما کے جذر حاصل کرنے ہوں گے جنہیں دو درجی مساوات کے کلیے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$s = \frac{-2\zeta\tau \mp \sqrt{4\zeta^2\tau^2-4\tau^2}}{2\tau^2}$$

جذر کی علامت کے اندر مقدار کی قیمت صفر سے زیادہ، صفر کے برابر یا صفر سے کم ممکن ہے یعنی

$$\begin{aligned}4\zeta^2\tau^2-4\tau^2 &> 0\\ 4\zeta^2\tau^2-4\tau^2 &= 0\\ 4\zeta^2\tau^2-4\tau^2 &< 0\end{aligned}$$

جن سے بالترتیب درج ذیل شرائط حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\zeta &> 1 \quad \text{حقیقی دو عدد مختلف قطب}\\ \zeta &= 1 \quad \text{حقیقی دو عدد یکساں قطب}\\ \zeta &< 1 \quad \text{جوڑی دار مخلوط قطب}\end{aligned} \tag{12.31}$$

[30] damping ration

تقصیری تناسب کی قیمت اکائی سے زیادہ یا اکائی کے برابر ہونے کی صورت میں حقیقی قطب پائے جاتے ہیں جن پر ہم غور کر چکے ہیں۔ آئیں مخلوط قطب پر غور کریں۔

مشق 12.7: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(s) = \frac{35}{4s^2+2s+1}$ کا τ اور ζ حاصل کریں۔اس تفاعل کے قطب بھی دریافت کریں۔تفاعل کو اجزائے ضربی کی صورت میں لکھیں۔

جواب: $\tau = 2$ ، $\zeta = 0.5$ ، $p_1 = -s_1 = \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{4}$ ، $p_2 = -s_2 = \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{4}$ ، $\boldsymbol{H}(s) = \frac{35}{(s+\frac{1}{4}+j\frac{\sqrt{3}}{4})(s+\frac{1}{4}-j\frac{\sqrt{3}}{4})}$

مساوات 12.30 میں $s = j\omega$ پر کر کے ترتیب دیتے ہوئے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\omega) &= \frac{K_0}{1+2\zeta(j\omega\tau)+(j\omega\tau)^2}\\ &= \frac{K_0}{1-\omega^2\tau^2+j2\zeta\omega\tau}\end{aligned}$$

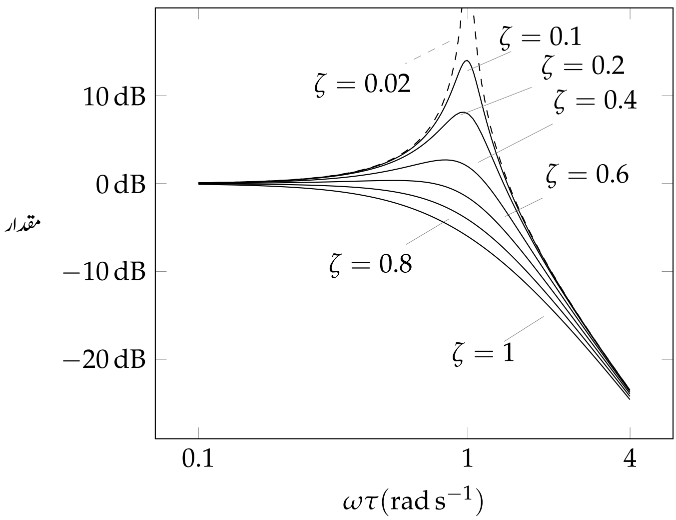
اس کی حتمی مقدار کو ڈیسی بیل میں لکھتے ہیں۔

$$20\log_{10}\left|\boldsymbol{H}(\omega)\right| = 20\log_{10}K_0 - 20\log_{10}\sqrt{(1-\omega^2\tau^2)^2+(2\zeta\omega\tau)^2} \tag{12.32}$$

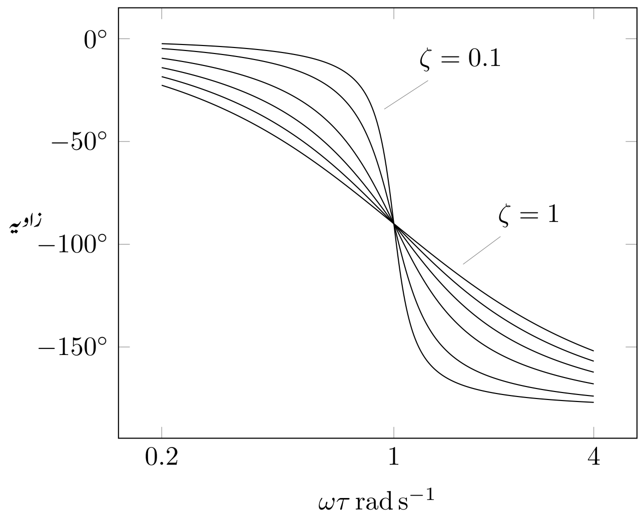
مساوات 12.32 کا پہلا جزو مستقل ہے جبکہ دوسرے جزو کی مقدار کا دارومدار تعدد کے علاوہ تقصیری تناسب پر بھی منحصر ہے۔ شکل 12.19-الف میں مختلف ζ کے لئے مساوات 12.32 کے دوسرے جزو کے خطوط دکھائے گئے ہیں۔اب تک ہم دیکھتے آرہے ہیں کہ قطب پر مقداری خط گھٹنے شروع ہوتا ہے لیکن یہاں ایسا نہیں ہو رہا ہے۔ مخلوط قطبین کی صورت میں مقداری خط گھٹنے سے پہلے بڑھتا ہے۔ بڑھنے کی مقدار کا دارومدار ζ پر ہے۔ تقصیری تناسب کی قیمت صفر $(\zeta = 0)$ ہونے کی صورت میں $\omega\tau = 1$ پر تفاعل بے قابو بڑھتا ہے۔ شکل میں $\zeta = 0.02$ کے خط کو نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ تقصیری تناسب کی قیمت صفر ہونا دور میں گونج یا گمک[31] کو ظاہر کرتی ہے۔

شکل 12.19-ب میں تبادلی تفاعل کا زاویائی خط $\zeta = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ کے لئے دکھایا گیا ہے۔

[31] resonance



(الف)



(ب)

شکل 12.19: مختلف تقصیری تناسب کے لئے مخلوط جوڑی دار قطب کے تفاعل کے خط۔

12.4 گمکی ادوار

سلسلہ وار گمک

شکل 12.20 میں سلسلہ وار دور دکھایا گیا ہے جس کی رکاوٹ

$$Z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) \tag{12.33}$$

ہے۔ قوسین کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں اس دور کی رکاوٹ حقیقی مقدار

$$Z(\omega) = R \tag{12.34}$$

یعنی مزاحمتی ہو گی۔ ایسا ایک مخصوص تعدد ω_0 پر ممکن ہے جسے قوسین صفر کے برابر پر کرنے

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

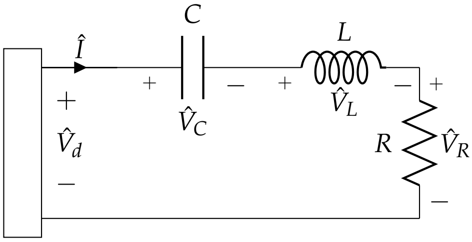
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{گمکی تعدد} \tag{12.35}$$

اس تعدد (ω_0) کو دور کی **گمکی تعدد**[32] کہتے ہیں اور اس تعدد پر دور گونجتا یا گمکتا ہے۔ ایسا دور جو گونج سکتا ہو کو **گمکی دور**[33] کہتے ہیں۔

گمکی تعدد پر امالی متعاملیت اور برق گیر متعاملیت برابر ہوتے ہیں۔ چونکہ سلسلہ وار دور میں یکساں رو پائی جاتی ہے لہٰذا گمکی تعدد پر امالی دباو اور برق گیر دباو مقدار میں برابر لیکن آپس میں $180°$ زاویے پر ہوں گے۔ زاویائی طور پر آپس میں بالکل الٹ ہونے کی بنا ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا اور یوں شکل 12.20 میں داخلی دباو $\hat{V}_d$ اور مزاحمتی دباو $\hat{V}_R$ برابر ہوں گے۔

---

resonant frequency[32]
resonant circuit[33]



شکل 12.20: سلسلہ وار RLC دور۔

گمکی تعدد سے ہٹ کر کسی بھی تعدد پر مساوات 12.33 کا خیالی جزو صفر کے برابر نہیں ہو گا لہٰذا رکاوٹ کی حتمی قیمت R سے زیادہ ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ گمکی تعدد پر رکاوٹ کی قیمت کم سے کم ہو گی اور رو کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی۔ گمکی تعدد پر دور میں رو اور داخلی دباو ہم زاویہ ہوں گے۔ گمکی تعدد سے کم تعدد پر برق گیر متعاملیت کی مقدار امالی متعاملیت کے مقدار سے زیادہ ہو گی لہٰذا سلسلہ وار رکاوٹ برق گیر خاصیت رکھے گا اور داخلی دباو سے رو آگے پائی جائے گی۔ اس کے برعکس گمکی تعدد سے زیادہ تعدد پر امالی متعاملیت کی مقدار برق گیر متعاملیت کی مقدار سے زیادہ ہو گی لہٰذا کل رکاوٹ امالی ہو گا اور داخلی دباو سے رو پیچھے ہو گی۔ رکاوٹ کی مقدار بالمقابل تعدد کو شکل 12.21 میں دکھایا گیا ہے۔

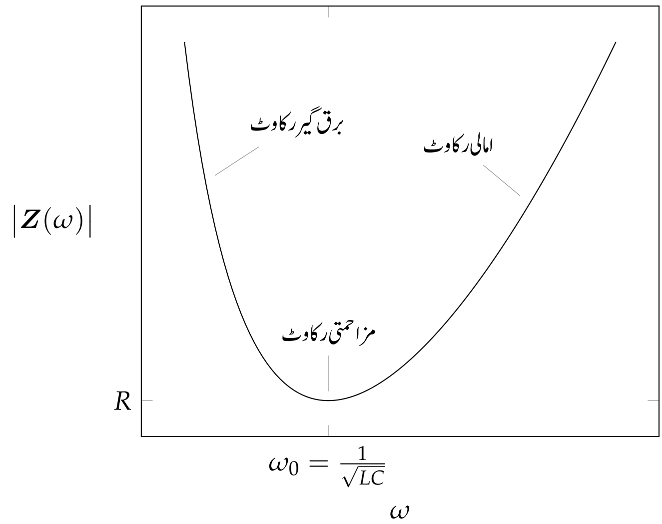
رو کے حوالے سے تینوں پرزوں کے دباو کے دوری سمتیات شکل 12.22 میں دکھائے گئے ہیں۔ گمکی تعدد سے کم تعدد پر برق گیر کا دباو امالہ گیر کے دباو سے زیادہ ہے لہٰذا داخلی دباو $\hat{V}_d$ سے رو آگے ہے۔ گمکی تعدد پر داخلی دباو اور رو ہم زاویہ ہیں جبکہ گمکی تعدد سے زیادہ تعدد پر امالہ کی متعاملیت برق گیر کے متعاملیت سے زیادہ ہے لہٰذا امالی دباو کی قیمت برق گیر دباو سے زیادہ ہے اور یوں داخلی دباو سے رو پیچھے ہے۔ داخلی دباو اور رو کے مابین زاویہ θ_z مساوات 12.33 میں دیے رکاوٹ کا زاویہ ہے۔

$$\theta_z = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \tag{12.36}$$

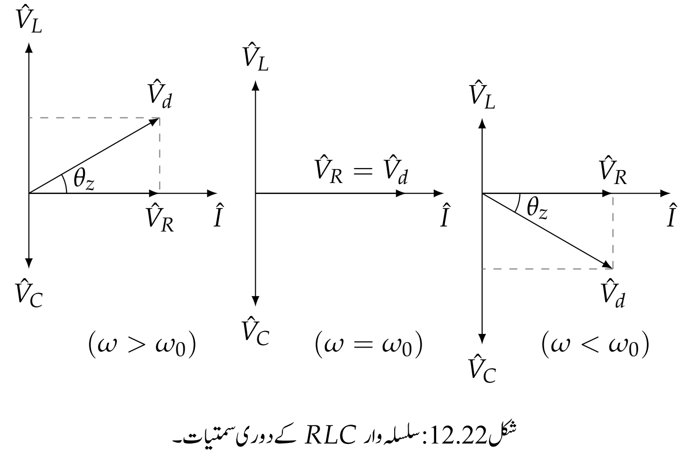
سلسلہ وار RLC دور کا **معیاری مستقل**[34] Q نہایت اہم مقدار ہے جس کی تعریف درج ذیل مساوات دیتی ہے۔

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{12.37}$$

quality factor[34]



شکل 12.21: سلسلہ وار RLC کی رکاوٹ بالمقابل تعدد کا خط۔



شکل 12.22: سلسلہ وار RLC کے دوری سمتیات۔

گمکی تعدد پر $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ ہوتا ہے لہٰذا رکاوٹ

$$\boldsymbol{Z} = R + j\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right) = R$$

ہو گا جس سے

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}_d}{\boldsymbol{Z}} = \frac{\hat{V}_d}{R}$$

اور

$$\begin{aligned}
\hat{V}_L &= j\omega_0 L\hat{I} = \frac{j\omega_0 L\hat{V}_d}{R} \\
\hat{V}_C &= \frac{\hat{I}}{j\omega C} = \frac{\hat{V}_d}{j\omega RC} \\
\hat{V}_R &= \hat{I}R = \hat{V}_d
\end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔درج بالا مساوات میں دونوں جانب حتمی قیمتیں لیتے ہوئے گمکی تعدد کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

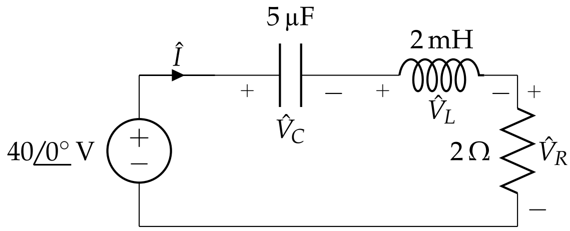
$$\begin{aligned}
V_L &= QV_d \\
V_C &= QV_d \\
V_R &= V_d
\end{aligned} \tag{12.38}$$

جہاں دباو کے حتمی قیمتوں کو V_L ، V_C ، V_R اور V_d لکھا گیا ہے۔مساوات 12.38 کے تحت گمکی تعدد پر امالی دباو اور برق گیر دباو کی قیمتیں داخلی دباو کے Q گنا ہوں گے۔یوں $Q > 1$ کی صورت میں امالی اور برق گیر دباو کی قیمت داخلی دباو سے زیادہ ہو گی۔

مثال 12.10: شکل 12.23 کے دور کی گمکی تعدد اور معیاری مستقل دریافت کریں۔ گمکی تعدد پر رو حاصل کرتے ہوئے تینوں پرزوں کے دباو حاصل کریں۔

حل: گمکی تعدد اور معیاری مستقل دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2\times 10^{-3}\times 5\times 10^{-6}}} = 10\,\mathrm{krad\,s^{-1}} \\
Q &= \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{10\,000\times 2\times 10^{-3}}{2} = 10
\end{aligned}$$



شکل 12.23: مثال 12.10 کا دور۔

گمکی تعدد پر رو حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{I}=\frac{40\underline{/0^\circ}}{2+j10000\times2\times10^{-3}-\frac{j}{10000\times5\times10^{-6}}}=20\underline{/0^\circ}\,\text{A}$$

چونکہ گمکی تعدد پر رکاوٹ مزاحمتی ہوتا ہے لہٰذا رو کو $i=\frac{40\underline{/0^\circ}}{2}=20\underline{/0^\circ}\,\text{A}$ سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

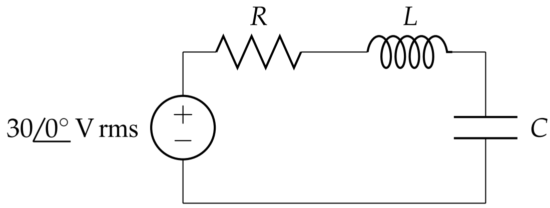
پرزوں کے دباو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\hat{V}_R&=\hat{I}R=(20\underline{/0^\circ})(2)=40\underline{/0^\circ}\,\text{V}\\
\hat{V}_L&=(j\omega_0L)\hat{I}=j10\,000\times2\times10^{-3}\times20\underline{/0^\circ}=400\underline{/90^\circ}\,\text{V}\\
\hat{V}_C&=\left(\frac{-j}{\omega_0C}\right)\hat{I}=\frac{-j\times20\underline{/0^\circ}}{10\,000\times5\times10^{-6}}=400\underline{/-90^\circ}\,\text{V}
\end{aligned}$$

دباو کے یہی جوابات مساوات 12.38 کی مدد سے بھی حاصل کئے جا سکتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned}
V_R&=V_d=40\,\text{V}\\
V_L&=QV_d=10\times40=400\,\text{V}\\
V_C&=QV_d=10\times40=400\,\text{V}
\end{aligned}$$

جہاں مزاحمتی دباو اور داخلی دباو ہم زاویہ ہیں جبکہ امالی دباو اور برق گیر دباو بالترتیب داخلی دباو سے 90° آگے اور پیچھے ہیں۔ اس مثال میں $Q=10$ ہے لہٰذا گمکی تعدد پر امالی اور برق گیر دباو کی قیمتیں داخلی دباو سے دس گنا زیادہ ہیں۔



شکل 12.24: مثال 12.11 اور مشق 12.8 کا دور۔

مثال 12.11: برق گیر استعمال کرتے ہوئے ضروری ہے کہ برق گیر کی استعداد سے تجاوز نہ کیا جائے۔ برق گیر پر اس کے استعداد سے زیادہ دباو ڈالنے سے برق گیر غیر فعال ہو جائے گا۔ برق گیر عموماً غیر فعال ہونے کی صورت میں خوفناک دھماکے سے پھٹتا ہے۔ جزو طاقت درست کرنے والے برق گیر یا کارخانوں میں دیگر استعمال ہونے والے بڑے جسامت کے برق گیر کا پھٹنا جان لیوا ثابت ہو سکتا ہے۔

آپ جانتے ہیں کہ تار لپیٹنے سے امالہ گیر بنایا جاتا ہے۔یوں نہ چاہتے ہوئے بھی امالہ گیر میں درکار امالی رکاوٹ کے ساتھ ساتھ غیر مطلوب مزاحمتی رکاوٹ بھی پایا جاتا ہے۔ شکل 12.24 میں ایسا ہی امالہ گیر اور برق گیر سلسلہ وار جوڑے گئے ہیں جہاں $L = 90\,\mathrm{mH}$ اور $C = 100\,\mathrm{\mu F}$ ہیں۔امالہ گیر کا معیاری مستقل $Q = 6$ ہے۔برق گیر پر گمکی تعدد پر دباو حاصل کریں۔

حل: معیاری مستقل کی قیمت سے گمکی تعدد پر برق گیر کا دباو درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$V_C = QV_d = 6 \times 30 = 180\,\mathrm{V\,rms}$$

یوں اس دور کو استعمال کرنے سے پہلے تسلی کر لیں کہ استعمال ہونے والے برق گیر کی استعداد کم از کم $180\,\mathrm{V\,rms}$ ہے۔

مشق 12.8: شکل 12.24 میں $C = 10\,\mu\text{F}$ ہے اور کمکی تعدد پر $I = 15\,\text{A rms}$ اور $V_C = 120\,\text{V rms}$ ہیں۔امالہ اور مزاحمت دریافت کریں۔

جوابات: $R = 2\,\Omega$ ، $L = 0.64\,\text{mH}$

مشق 12.9: سلسلہ وار RLC دور میں داخلی دباو $22\cos\omega t\,\text{V}$ ہے۔مزاحمت $2\,\Omega$ اور $L = 120\,\mu\text{H}$ ہے۔دور کی کمکی تعدد $f_0 = 10\,\text{kHz}$ کے لئے درکار برق گیر معلوم کریں۔دور میں f_0 ، $\frac{f_0}{2}$ اور $2f_0$ پر رو دریافت کریں۔

جوابات: $C = 2.11\,\mu\text{F}$ ، $11\cos(20000\pi t)\,\text{A}$ ، $1.92\cos(10000\pi + 80^\circ)\,\text{A}$ ، $1.92\cos(40000\pi - 80^\circ)\,\text{A}$

آئیں شکل 12.20 میں دکھائے گئے سلسلہ وار RLC دور میں $\frac{\hat{V}_R}{\hat{V}_d}$ تناسب کے لئے Q ، ω_0 اور ω پر مبنی عمومی مساوات حاصل کریں۔مساوات 12.37 سے $\frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0}$ اور $\frac{1}{RC} = Q\omega_0$ کو دور کے رکاوٹ میں پر کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z}(j\omega) &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\\
&= R\left[1 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)\right]\\
&= R\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]
\end{aligned}
$$

دور میں رو

$$
\begin{aligned}
\hat{I} &= \frac{\hat{V}_d}{Z}\\
&= \frac{\hat{V}_d}{R\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]}
\end{aligned}
$$

سے مزاحمتی دباو $\hat{V}_R = \hat{I}R$ لکھ کر دباو کا تناسب لکھتے ہیں

$$\frac{\hat{V}_R}{\hat{V}_d} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

جس کی حتمی مقدار $M(\omega)$ اور زاویہ $\phi(\omega)$ درج ذیل ہیں جنہیں شکل 12.25 میں دکھایا گیا ہے۔

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \tag{12.39}$$

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \tag{12.40}$$

مقدار بالمقابل تعدد کا خط **پٹی گزار چھلنی**[35] کی طرح ہے۔آئیں اس کے کونے دریافت کرتے ہیں۔کونوں پر طاقت کی قیمت نصف ہوتی ہے۔نصف طاقت $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کناروں پر پایا جاتا ہے یوں مساوات 12.39 میں $M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ پر کرنے سے کونوں کی تعدد (انقطاعی تعدد) دریافت کئے جا سکتے ہیں۔

$$\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

اس سے

$$Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \mp 1$$

یعنی

$$\omega = \mp\frac{\omega_0}{2Q} \mp \omega_0\sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} + 1}$$

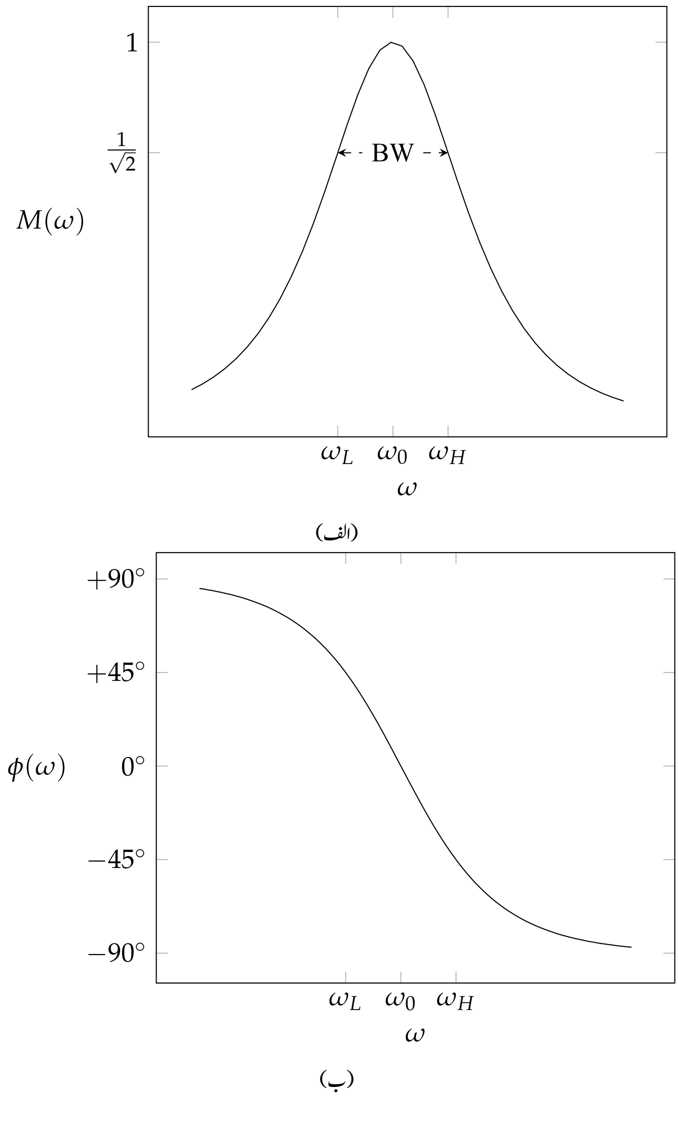
حاصل ہوتا ہے۔منفی تعدد کے جوابات رد کرتے ہوئے صرف مثبت جوابات تسلیم کرتے ہوئے درج ذیل کونے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\omega_L = \omega_0\left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} + 1}\right] \tag{12.41}$$

$$\omega_H = \omega_0\left[+\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} + 1}\right] \tag{12.42}$$

---

[35] band-pass filter



شکل 12.25: مقدار بالمقابل تعدد اور زاویہ بالمقابل تعدد کے خط۔

پست تعددی کونے ω_L اور بلند تعددی کونے ω_H کے مابین خطہ **عرض پٹی**[36] کہلاتا اور BW سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\text{BW} = \omega_H - \omega_L = \frac{\omega_0}{Q} \qquad \text{عرض پٹی} \tag{12.43}$$

عرض پٹی کے مساوات کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\text{BW} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{R}{L} \tag{12.44}$$

چونکہ کونوں پر طاقت گھٹ کر نصف رہ جاتا ہے اور نصف طاقت $-3\,\text{dB}$ کہلاتا ہے لہٰذا تعددی پٹی کو **تین ڈیسی بیل پٹی**[37] بھی کہتے ہیں۔

کونوں کے تعدد کو ضرب دینے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے لہٰذا گمکی تعدد دونوں انقطاعی تعدد کا ہندسی اوسط ہے۔

$$\omega_H \omega_L = \omega_0^2 \tag{12.45}$$

پست انقطاعی کونے پر زاویہ $45°$ ، بلند انقطاعی کونے پر $-45°$ اور گمکی تعدد پر $0°$ ہے۔

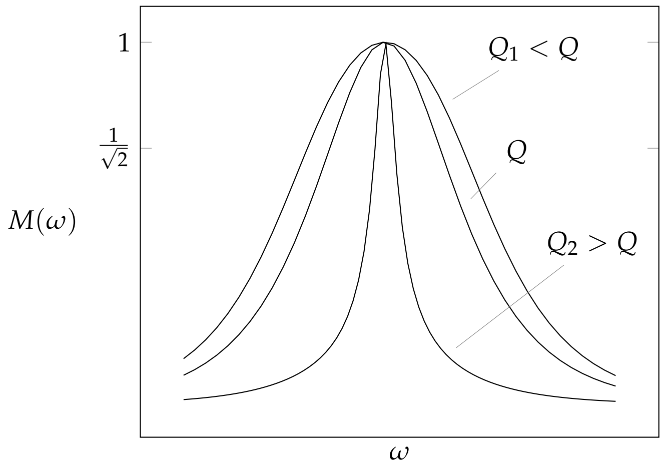
مشق 12.10: شکل 12.23 کے دور کی پست انقطاعی تعدد ω_L ، بلند انقطاعی تعدد ω_H اور عرض پٹی BW دریافت کریں۔

جوابات: $\omega_L = 9512\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ ، $\omega_H = 10\,512\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ ، $\text{BW} = 1000\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$

مساوات 12.37 کے تحت زیادہ Q کے لئے کم R درکار ہے اور مساوات 12.43 کے تحت تنگ عرض پٹی کے لئے زیادہ Q درکار ہے۔یوں تنگ Q کم R کی صورت میں حاصل ہو گا۔تنگ عرض پٹی کا دور نہایت عمدگی سی مخصوص تعدد کو چننے کی صلاحیت رکھتا ہے۔شکل 12.26 میں مختلف Q کے لئے مساوات 12.39 کو دکھایا گیا ہے۔داخلی اشارات سے صرف وہ اشارات خارجی جانب پہنچتے ہیں جو عرض پٹی پر پائے جاتے ہوں۔عرض پٹی سے باہر تعدد کے اشارات گھٹتے ہیں۔یوں RLC بطور پٹی گزار چھلنی کام کرتا ہے۔

---

[36] bandwidth
[37] 3 dB bandwidth



شکل 12.26: عرض پٹی بالمقابل معیاری مستقل۔

معیاری مستقل Q کو توانائی کے نقطہ نظر سے دیکھا جا سکتا ہے۔ شکل 12.27 پر غور کریں جہاں RLC کو گمکی تعدد کا اشارہ مہیا کیا گیا ہے۔ گمکی تعدد پر رکاوٹ $\boldsymbol{Z} = R$ ہوتی ہے لہٰذا $i(t) = \frac{V_m}{R} \cos \omega_0 t \,\mathrm{A}$ اور برق گیر کا دباو

$$\hat{V}_C = \frac{1}{j\omega_0 C} \hat{I} = \frac{1}{j\omega_0 t} \frac{V_m}{R} \angle 0^\circ = \frac{V_m}{\omega_0 RC} \angle -90^\circ$$

یعنی

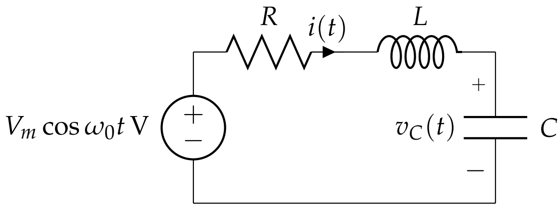
$$v_C(t) = \frac{V_m}{\omega_0 RC} \cos(\omega_0 t - 90^\circ) \,\mathrm{V} = \frac{V_m}{\omega_0 RC} \sin \omega_0 t \,\mathrm{V}$$

لکھا جائے گا۔ آپ کو یاد ہو گا کہ امالہ گیر میں $\frac{Li^2}{2}$ اور برق گیر میں $\frac{Cv^2}{2}$ توانائی ذخیرہ ہوتی ہے لہٰذا امالہ گیر کی توانائی

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} L \left(\frac{V_m}{R} \cos \omega_0 t \right)^2 = \frac{L V_m^2}{2R^2} \cos^2 \omega_0 t \,\mathrm{J} \tag{12.46}$$

اور برق گیر کی توانائی

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C v^2(t) = \frac{1}{2} C \left(\frac{V_m}{\omega_0 RC} \sin \omega_0 t \right)^2 = \frac{V_m^2}{2\omega_0^2 R^2 C} \sin^2 \omega_0 t \,\mathrm{J}$$



شکل 12.27: سلسلہ وار RLC کو گمکی تعدد کا اشارہ مہیا کیا گیا ہے۔

لکھی جائے گی۔ گمکی تعدد پر $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ہوتا ہے لہٰذا برق گیر کی توانائی کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$w_C(t) = \frac{V_m^2}{2\frac{1}{LC}R^2C}\sin^2\omega_0 t = \frac{LV_m^2}{2R^2}\sin^2\omega_0 t\,\mathrm{J} \tag{12.47}$$

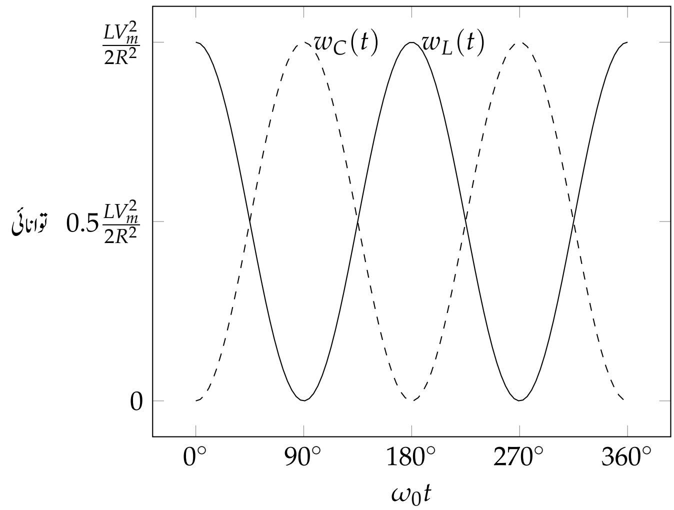
دور میں کل ذخیرہ توانائی ان دونوں کا مجموعہ ہے

$$\begin{aligned} w_{\text{ذخیرہ}} &= w_L(t) + w_C(t) \\ &= \frac{LV_m^2}{2R^2}\cos^2\omega_0 t + \frac{LV_m^2}{2R^2}\sin^2\omega_0 t \\ &= \frac{LV_m^2}{2R^2} \end{aligned} \tag{12.48}$$

جہاں آخری قدم پر $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔یوں دور میں کل ذخیرہ توانائی وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی اور اس کی مقدار اٹل ہے۔

مساوات 12.46 اور مساوات 12.47 کو شکل 12.28 میں دکھایا گیا ہے۔ان مساوات کے تحت امالہ گیر اور برق گیر میں ذخیرہ توانائی وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے جبکہ مساوات 12.48 کے تحت ان کا مجموعہ اٹل مقدار ہے۔یہ ایک دلچسپ صورت حال ہے۔لمحہ $\omega_0 t = 0^\circ$ پر امالہ گیر کی توانائی زیادہ سے زیادہ جبکہ برق گیر کی توانائی صفر ہوتی ہے۔اس کے برعکس $\omega_0 t = 90^\circ$ پر امالہ گیر کی توانائی صفر جبکہ برق گیر کی توانائی زیادہ سے زیادہ ہوتی ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جیسے جیسے ایک پرزے میں ذخیرہ توانائی گھٹتی ہے ویسے ویسے دوسرے پرزے میں ذخیرہ توانائی بڑھتی ہے۔ہر لمحہ ایک پرزے میں توانائی کی کمی دوسرے پرزے میں توانائی کے اضافے کے برابر ہوتی ہے۔

گمکی تعدد پر سلسلہ وار RLC میں کل $\frac{LV_m^2}{2R^2}$ توانائی ذخیرہ ہوتی ہے۔آئیں تعدد کے ایک چکر میں توانائی کا ضیاع $w_{\text{ضیاع}}$



شکل 12.28: ٹمکی دور میں توانائی کا تبادلہ۔

دریافت کریں۔ توانائی صرف مزاحمت میں ضائع ہوتی ہے۔

$$w_{\text{ضیاع}} = \int_0^T i^2(t) R \,\mathrm{d}t = \int_0^T \left(\frac{V_m}{R}\cos\omega_0 t\right)^2 R\,\mathrm{d}t = \frac{V_m^2 T}{2R}$$

کل ذخیرہ توانائی اور فی چکر توانائی کے ضیاع کا تناسب لکھتے ہیں۔

$$\frac{w_{\text{ذخیرہ}}}{w_{\text{ضیاع}}} = \frac{\frac{LV_m^2}{2R^2}}{\frac{V_m^2 T}{2R}} = \frac{L}{RT} = \frac{L}{R\frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{\omega_0 L}{2\pi R}$$

چونکہ $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو معیاری مستقل Q کی عمومی تعریف ہے۔

$$Q = 2\pi \frac{w_{\text{ذخیرہ}}}{w_{\text{ضیاع}}} \qquad \text{معیاری مستقل کی عمومی تعریف} \tag{12.49}$$

معیاری مستقل کی عمومی تعریف برقی میدان کے علاوہ میکانی میدان اور سمعی میدان میں بھی استعمال ہوتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کم مزاحمت ضیاع کے دور کا معیاری مستقل زیادہ ہو گا۔

مثال 12.12: سلسلہ وار RLC دور میں $R = 1\,\Omega$ ، $L = 2\,\mathrm{mH}$ اور $C = 20\,\mu\mathrm{F}$ ہیں۔دور کی ω_0 ، Q اور BW حاصل کریں۔مزاحمت کی قیمت $R = 0.1\,\Omega$ کرتے ہوئے تینوں قیمتیں دوبارہ حاصل کریں۔

حل: درکار قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2\times 10^{-3}\times 20\times 10^{-6}}} = 5000\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \\
Q &= \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{1}\sqrt{\frac{2\times 10^{-3}}{20\times 10^{-6}}} = 10 \\
\mathrm{BW} &= \frac{\omega_0}{Q} = \frac{5000}{10} = 500\,\mathrm{rad\,s^{-1}}
\end{aligned}
$$

مزاحمت کی قیمت دس گنا کم کرنے کے بعد تمام قیمتیں دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔چونکہ گمکی تعدد میں مزاحمت کا کوئی دخل نہیں ہے لہٰذا اس کی قیمت وہی رہے گی۔

$$
\begin{aligned}
Q &= \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{0.1}\sqrt{\frac{2\times 10^{-3}}{20\times 10^{-6}}} = 100 \\
\mathrm{BW} &= \frac{\omega_0}{Q} = \frac{5000}{100} = 50\,\mathrm{rad\,s^{-1}}
\end{aligned}
$$

مزاحمت کی قیمت دس گنا کم کرنے سے معیاری مستقل کی قیمت دس گنا بڑھتی ہے جبکہ عرض پٹی دس گنا کم ہوتی ہے۔

مشق 12.11: سلسلہ وار RLC دور میں $R = 2\,\Omega$ ، $L = 1\,\mathrm{mH}$ اور $C = 2\,\mu\mathrm{H}$ ہیں۔ گمکی تعدد، معیاری مستقل اور عرض پٹی دریافت کریں۔

جوابات: $\omega_0 = 22\,361\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $Q = 11.2$ ، $\mathrm{BW} = 2000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

مشق 12.12: سلسلہ وار RLC دور کا $R = 5\,\Omega$ ، $\omega_0 = 6\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ اور $\mathrm{BW} = 600\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہیں۔آپ سے گزارش ہے کہ L اور C دریافت کریں۔

جوابات: $L = 8.33\,\mathrm{mH}$ ، $C = 3.33\,\mathrm{\mu F}$

مثال 12.13: ایسا سلسلہ وار RLC دور تخلیق دیں کہ $\omega_0 = 1000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ اور $\mathrm{BW} = 80\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہوں۔

حل: گمکی تعدد اور عرض پٹی کے مساوات درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\
\mathrm{BW} &= \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{R}{L}
\end{aligned}
$$

ہم دیکھتے ہیں کہ درکار متغیرات تین جبکہ مساوات دو عدد ہیں۔ تخلیق کے دوران عموماً ایسی ہی مسائل درپیش آتے ہیں جہاں ممکنہ مساوات سے تمام جوابات حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا۔ایسے مسائل تجربے سے حل کئے جاتے ہیں۔ تجربے کی بنیاد پر کسی ایک متغیرہ کو چنتے ہوئے بقایا کو مساوات کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے۔اگر حاصل جوابات قابل قبول نہ ہوں تب متغیرہ کی قیمت تبدیل کرتے ہوئے دوبارہ حل کیا جاتا ہے۔یہ سلسلہ اس وقت تک جاری رکھا جاتا ہے جب تک قابل قبول جوابات حاصل نہ ہوں جائے۔

ہم برق گیر کی قیمت ایسی چنتے ہیں جو دستیاب ہو مثلاً $C = 10\,\mathrm{\mu F}$ لہٰذا درج ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{1000^2 \times 10 \times 10^{-6}} = 0.1\,\mathrm{H} \\
R &= (L)(\mathrm{BW}) = 0.1 \times 80 = 8\,\Omega
\end{aligned}
$$

مساوات 12.38 کے تحت سلسلہ وار RLC دور میں گمکی تعدد پر امالی دباو اور برق گیر دباو کی قیمتیں داخلی دباو کے Q گنا ہوتی ہیں۔ آئیں دیکھیں کہ آیا امالی دباو اور برق گیر دباو کی زیادہ سے زیادہ قیمت گمکی تعدد پر ہی پائی جاتی ہے یا کہ کسی دوسری تعدد پر۔ شکل 12.29 کو دیکھتے ہوئے برق گیر کا دباو لکھتے ہیں

$$\hat{V}_C = \left(\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}\right)\hat{V}_m$$

جس کو ترتیب دے کر ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\hat{V}_C = \frac{\hat{V}_m}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC} \tag{12.50}$$

اس کی حتمی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$\left|\hat{V}_C\right| = \frac{\left|\hat{V}_m\right|}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}} \tag{12.51}$$

زیادہ سے زیادہ $\left|\hat{V}_C\right|$ پر تعدد $\omega_{\text{بلند ترطاقت}}$ درج ذیل عمل

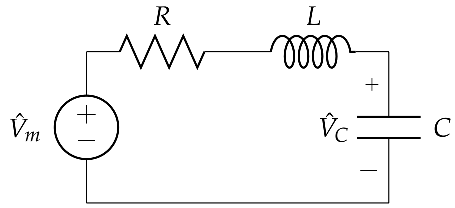
$$\frac{\mathrm{d}\left|\hat{V}_C\right|}{\mathrm{d}\omega} = 0$$

سے

$$\omega_{\text{بلند ترطاقت}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2}\left(\frac{R}{L}\right)^2} \tag{12.52}$$

حاصل ہوتی ہے جس میں $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ اور $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ پر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\omega_{\text{بلند ترطاقت}} &= \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2}\\ &= \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}\end{aligned} \tag{12.53}$$



شکل 12.29: برق گیر پر زیادہ سے زیادہ دباو۔

لکھا جا سکتا ہے۔درج بالا مساوات کے تحت زیادہ سے زیادہ دباو گمکی تعدد پر نہیں پایا جاتا اگرچہ Q کی قیمت زیادہ ہونے کی صورت میں درج بالا تعدد تقریباً گمکی تعدد ہی ہو گی۔مساوات 12.53 کو مساوات 12.51 میں پر کرتے ہوئے اور $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ اور $\omega_0^2 R^2 C^2 = \frac{1}{Q^2}$ استعمال کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ دباو کی قیمت حاصل ہوتی ہے

$$\left|\hat{V}_C\right|_{\text{بلند تر}} = \frac{Q\left|\hat{V}_m\right|}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} \tag{12.54}$$

جو $Q \gg 1$ کی صورت میں درج ذیل قیمت اختیار کرتا ہے۔

$$\left|\hat{V}_C\right|_{\text{بلند تر}} \approx Q\left|\hat{V}_m\right| \tag{12.55}$$

مثال 12.14: شکل 12.29 میں $L = 10\,\mathrm{mH}$ اور $C = 1\,\mathrm{\mu F}$ ہیں۔مزاحمت کی قیمت $50\,\Omega$ اور $1\,\Omega$ ہونے کی صورت میں ω_0 اور $\omega_{\text{بلند تر}}$ دریافت کریں۔

حل: گمکی تعدد پر مزاحمت کا کوئی اثر نہیں ہے۔

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10\times10^{-3}\times1\times10^{-6}}} = 10\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$$

مزاحمت $50\,\Omega$ کی صورت میں

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{10000\times10\times10^{-3}}{50} = 2$$

اور

$$
\begin{aligned}
\omega_{\text{بلند تر}} &= \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}\\
&= 10000\sqrt{1-\frac{1}{2\times 2^2}}\\
&= 9354\,\mathrm{rad\,s^{-1}}
\end{aligned}
$$

مزاحمت $1\,\Omega$ کی صورت میں

$$
Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{10000\times 10\times 10^{-3}}{1}=100
$$

اور

$$
\begin{aligned}
\omega_{\text{بلند تر}} &= \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}\\
&= 10000\sqrt{1-\frac{1}{2\times 100^2}}\\
&\approx 10\,000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔

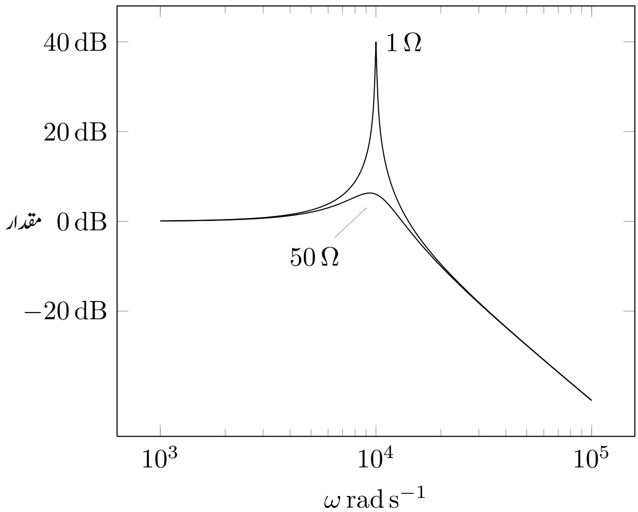
آئیں تبادلی تفاعل $\frac{\hat{V}_C}{\hat{V}_m}$ کے خطوط کھینچیں۔مساوات 12.50 سے $R=50\,\Omega$ کی صورت میں تبادلی تفاعل لکھتے ہیں۔

$$
\frac{\hat{V}_C}{\hat{V}_m}=\frac{1}{1-10^{-8}\omega^2+j50\times 10^{-6}\omega} \tag{12.56}
$$

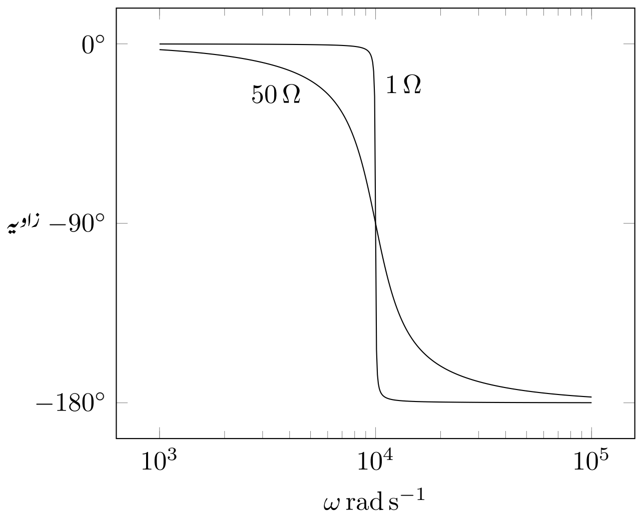
اسی طرح $R=1\,\Omega$ کی صورت میں تبادلی تفاعل لکھتے ہیں۔

$$
\frac{\hat{V}_C}{\hat{V}_m}=\frac{1}{1-10^{-8}\omega^2+j1\times 10^{-6}\omega} \tag{12.57}
$$

ان تبادلی تفاعل کو شکل 12.30 میں دکھایا گیا ہے۔آپ نے دیکھا کہ زیادہ Q والا جال باریک بینی سے تعدد چنتا ہے جبکہ کم Q والا جال اتنی باریک بینی سے تعدد نہیں چنتا ہے۔



(الف)



(ب)

شکل 12.30: مثال 12.14 کے خطوط۔

متوازی گمک

اب تک ہم سلسلہ وار RLC کے گمک پر غور کرتے رہے ہیں۔ حقیقت میں متوازی جڑے اور سلسلہ وار جڑے RLC میں مشابہت زیادہ اور فرق کم پایا جاتا ہے۔ شکل 12.31 میں متوازی RLC دکھایا گیا ہے جس کی کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \hat{I}_R + \hat{I}_L + \hat{I}_C \\ &= \frac{\hat{V}_d}{R} + j\omega C\hat{V}_d + \frac{\hat{V}_d}{j\omega L} \\ &= \hat{V}_d\left[G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right]\end{aligned} \tag{12.58}$$

جہاں آخری قدم پر $G = \frac{1}{R}$ لکھا گیا ہے۔ گمکی تعدد ω_0 پر رو کم سے کم ہو گی۔ کم سے کم رو $\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L}$ کی حالت میں حاصل ہوتی ہے جس سے گمکی تعدد حاصل ہوتی ہے۔

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{گمکی تعدد} \tag{12.59}$$

مساوات 12.35 میں سلسلہ وار RLC کی گمکی تعدد دی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سلسلہ وار RLC اور متوازی RLC کی گمکی تعدد یکساں ہے۔ گمکی تعدد پر رو درج ذیل ہو گی۔

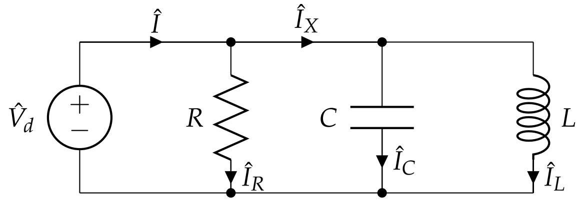
$$\hat{I} = G\hat{V}_d \tag{12.60}$$

دور کی داخلی فراوانی $\boldsymbol{Y}(j\omega)$ لکھتے ہیں

$$\boldsymbol{Y}(j\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} \tag{12.61}$$

جو گمکی تعدد پر درج ذیل ہو گی۔

$$\boldsymbol{Y}(j\omega_0) = R \tag{12.62}$$



شکل 12.31: متوازی RLC کی گمک۔

شکل 12.31 میں گمکی تعدد پر امالی اور برق گیر رو کا مجموعہ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\hat{I}_X &= \hat{I}_C + \hat{I}_L \\
&= j\hat{V}_d\left(\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L}\right) \\
&= 0\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

اس نتیجے کو سمجھنے کی خاطر شکل 12.32 میں دکھائے گئے متوازی جڑے امالہ گیر اور برق گیر کا مجموعی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}_0$ لکھتے ہیں

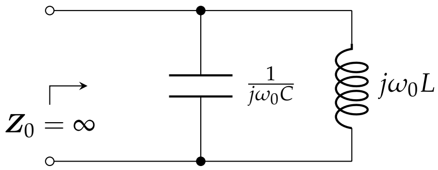
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\boldsymbol{Z}_0} &= j\omega_0 C + \frac{1}{j\omega L} \\
&= j\left(\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

جس سے رکاوٹ لامتناہی حاصل ہوتی ہے۔

$$
\boldsymbol{Z}_0 = \infty \tag{12.63}
$$

سلسلہ وار جڑے امالہ گیر اور برق گیر کی گمکی تعدد پر مجموعی رکاوٹ صفر ہوتی ہے جبکہ متوازی جڑے امالہ گیر اور برق گیر کی گمکی تعدد پر رکاوٹ لامتناہی ہوتی ہے۔ لامتناہی رکاوٹ میں رو کی قیمت صفر ہی متوقع ہے۔ اگرچہ گمکی تعدد پر امالہ گیر اور برق گیر کی مجموعی رو صفر کے برابر ہے، ان کی انفرادی رو ہرگز صفر نہیں ہے۔

$$
\begin{aligned}
\hat{I}_C &= j\omega_0 C\hat{V}_d \\
\hat{I}_L &= -j\frac{\hat{V}_d}{\omega_0 L}
\end{aligned}
$$



شکل 12.32: گمکی تعدد پر متوازی جڑے امالہ گیر اور برق گیر کی مجموعی رکاوٹ لامتناہی ہے۔

گمکی تعدد پر امالی رو اور برق گیر رو قیمت میں برابر لیکن زاویائی طور پر آپس میں الٹ قدم $(180°)$ ہوتی ہیں۔ شکل 12.31 میں گمکی تعدد پر رو $\hat{I} = G\hat{V}_d$ ہو گی۔ لامتناہی مزاحمت کی صورت میں $G = 0\,\mathrm{S}$ ہو گا لہٰذا ایسی صورت میں $\hat{I} = 0\,\mathrm{A}$ ہو گی جبکہ $\hat{I}_C$ اور $\hat{I}_L$ درج بالا مساوات کے تحت ہوں گی۔ یہاں بھی امالہ گیر اور برق گیر کے مابین توانائی کا تبادلہ ہوتا ہے۔ جیسے جیسے ایک میں توانائی گھٹتی ہے ویسے ویسے دوسرے میں توانائی کا اضافہ ہوتا ہے۔

مساوات 12.58 سے تبادلی تفاعل $\frac{\hat{I}}{\hat{V}_d}$ لکھتے ہیں۔

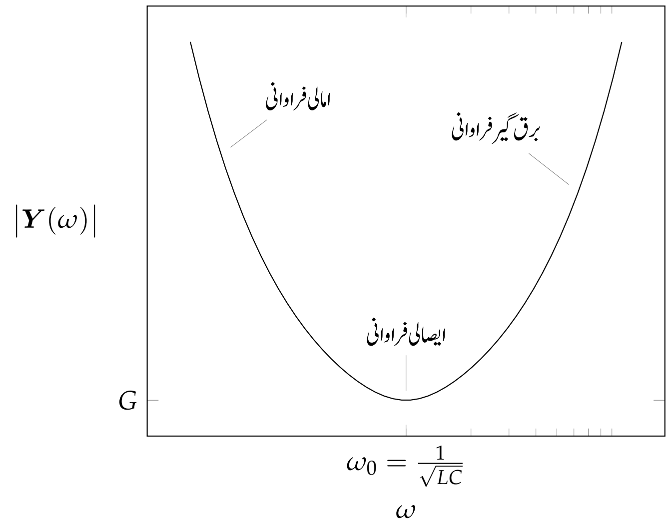
$$\frac{\hat{I}}{\hat{V}_d} = \boldsymbol{Y}(j\omega) = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) \tag{12.64}$$

شکل 12.33 میں اس تبادلی تفاعل کا حتمی قیمت بالمقابل تعدد خط دکھایا گیا ہے۔ گمکی تعدد پر امالی تاثیر زیادہ غالب ہے جبکہ زیادہ تعدد پر برق گیر تاثیر زیادہ غالب ہے۔ عین گمکی تعدد پر ایصالی فراوانی پائی جاتی ہے۔ شکل 12.34 میں داخلی دباو $\hat{V}_d$ کے حوالے سے متوازی RLC کے دوری سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ گمکی تعدد سے کم تعدد پر امالی رو غالب ہے لہٰذا داخلی دباو سے رو پیچھے ہے جبکہ گمکی تعدد سے زیادہ تعدد پر برق گیر رو زیادہ غالب ہے لہٰذا داخلی دباو سے رو آگے ہے۔ عین گمکی تعدد پر داخلی دباو اور رو ہم قدم ہیں۔

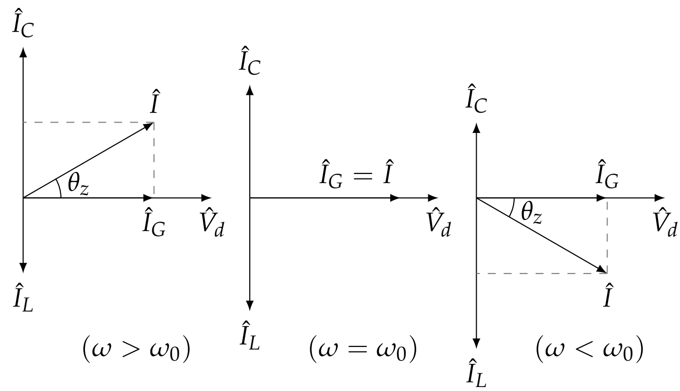
مساوات 12.49 میں معیاری مستقل کی عمومی تعریف بیان کی گئی ہے۔ آئیں اس کو استعمال کرتے ہوئے متوازی RLC دور کا Q دریافت کریں۔

شکل 12.31 میں داخلی دباو گمکی تعدد پر تصور کرتے ہوئے $\hat{V}_d = V_m\underline{/0°}\,\mathrm{V}$ یعنی $v_d = V_m \cos\omega_0 t\,\mathrm{V}$ فرض کریں۔ امالہ گیر کی رو

$$\hat{I}_L = \frac{\hat{V}_d}{j\omega_0 L} = \frac{V_m\underline{/0°}}{j\omega_0 L} = \frac{V_m}{\omega_0 L}\underline{/-90°} \tag{12.65}$$



شکل 12.33: فراوانی کی مقدار بالمقابل تعدد۔



شکل 12.34: متوازی RLC کے دوری سمتیات۔

یعنی

$$i_L(t) = \frac{V_m}{\omega_0 L}\cos(\omega_0 t - 90^\circ) = \frac{V_m}{\omega_0 L}\sin\omega_0 t\,\mathrm{A}$$

لکھی جائے گی۔ برق گیر اور مزاحمت کی رو درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_C &= \omega_0 C V_m \underline{/90^\circ}\,\mathrm{A}\\ \hat{I}_G &= G V_m \underline{/0^\circ}\,\mathrm{A}\end{aligned} \tag{12.66}$$

امالہ گیر میں ذخیرہ توانائی

$$w_L(t) = \frac{1}{2}Li_L^2(t) = \frac{1}{2}L\left(\frac{V_m}{\omega_0 L}\sin\omega_0 t\right)^2 = \frac{V_m^2}{2\omega_0^2 L}\sin^2\omega_0 t\,\mathrm{J} \tag{12.67}$$

اور برق گیر میں ذخیرہ توانائی

$$w_C(t) = \frac{1}{2}Cv_C^2(t) = \frac{1}{2}C\left(V_m\cos\omega_0 t\right)^2 = \frac{CV_m^2}{2}\cos^2\omega_0 t\,\mathrm{J}$$

لکھی جائے گی۔ گمکی تعدد پر $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ہوتا ہے لہٰذا امالہ گیر کی توانائی کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$w_L(t) = \frac{V_m^2}{2\frac{1}{LC}L}\sin^2\omega_0 t = \frac{CV_m^2}{2}\sin^2\omega_0 t\,\mathrm{J} \tag{12.68}$$

دور میں کل ذخیرہ توانائی ان دونوں کا مجموعہ ہے

$$\begin{aligned}w_{\text{ذخیرہ}} &= w_C(t) + w_L(t)\\ &= \frac{CV_m^2}{2}\cos^2\omega_0 t + \frac{CV_m^2}{2}\sin^2\omega_0 t\\ &= \frac{CV_m^2}{2}\end{aligned} \tag{12.69}$$

جہاں آخری قدم پر $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔یوں دور میں کل ذخیرہ توانائی وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی اور اس کی مقدار اٹل ہے۔

آئیں اب گمکی تعدد کے ایک چکر میں توانائی کا ضیاع دریافت کریں۔امالہ گیر اور برق گیر میں توانائی کا ضیاع ممکن نہیں ہے۔توانائی صرف G یعنی R میں ضائع ہو گی۔مزاحمت پر V_m حیطے کا دباو لاگو ہے جس کی موثر قیمت $\frac{V_m}{\sqrt{2}}$ ہے۔یوں مزاحمت میں طاقت ضیاع درج ذیل ہو گا۔

$$P_G = \frac{\left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right)^2}{R} = \frac{GV_m^2}{2}$$

گمکی تعدد پر ایک چکر کا دورانیہ $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ کے برابر ہے جس میں مزاحمتی ضیاع درج ذیل ہو گا۔

$$w_{\text{ضیاع}} = TP_G = \frac{2\pi GV_m^2}{2\omega_0} \tag{12.70}$$

مساوات 12.49 کو استعمال کرتے ہوئے متوازی RLC دور کا معیاری مستقل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
Q &= 2\pi \frac{w_{\text{ذخیرہ}}}{w_{\text{ضیاع}}} \\
&= 2\pi \frac{\frac{CV_m^2}{2}}{\frac{2\pi GV_m^2}{2\omega_0}} \\
&= \frac{\omega_0 C}{G}
\end{aligned}$$

گمکی تعدد پر $\omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L}$ ہوتا ہے لہٰذا متوازی RLC کے معیاری مستقل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 LG} \tag{12.71}$$

سلسلہ وار RLC کے Q کے ساتھ موازنہ کرنے سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ متوازی RLC کا Q اس کے بالعکس متناسب ہے۔

مساوات 12.65 اور مساوات 12.65 متوازی پرزوں کی رو دیتے ہیں جبکہ مساوات 12.60 منبع کی رو دیتی ہے۔ان نتائج سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
I_L &= QI \\
I_C &= QI \\
I_G &= I
\end{aligned} \tag{12.72}$$

یوں متوازی RLC دور میں رو کا کردار وہی ہے جو سلسلہ وار RLC میں دباو کا تھا۔ متوازی RLC میں $Q > 1$ کی صورت میں گمکی تعدد پر امالہ گیر اور برق گیر کو رو منبع کی رو سے زیادہ ہو گی۔

مثال 12.15: متوازی جڑے RLC میں $G = 0.01\,\mathrm{S}$ ، $L = 1\,\mathrm{mH}$ اور $C = 10\,\mathrm{\mu F}$ ہیں۔ اس کو گمکی تعدد پر $\hat{V}_d = 22\underline{/0^\circ}\,\mathrm{V}$ دباو فراہم کی جاتی ہے۔ گمکی تعدد اور پرزوں میں رو دریافت کریں۔

حل: گمکی تعدد دریافت کرتے ہیں۔

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \times 10 \times 10^{-6}}} = 10\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$$

یوں پرزوں کی رو درج ذیل ہو گی۔

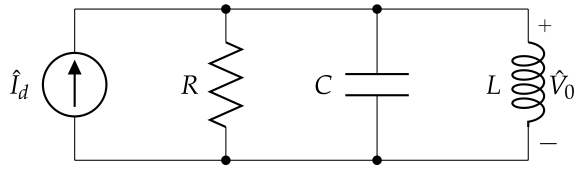
$$\begin{aligned}
\hat{I}_G &= G\hat{V}_d = 0.01 \times 22\underline{/0^\circ} = 0.22\underline{/0^\circ}\,\mathrm{A} \\
\hat{I}_L &= \frac{\hat{V}_d}{j\omega_0 L} = \frac{22\underline{/0^\circ}}{j10000 \times 0.001} = 2.2\underline{/-90^\circ}\,\mathrm{A} \\
\hat{I}_C &= j\omega_0 C\hat{V}_d = j10000 \times 10 \times 10^{-5} \times 22\underline{/0^\circ} = 2.2\underline{/90^\circ}\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

منبع کی روان تینوں کا مجموعہ ہو گا جو $\hat{I}_G$ کے برابر ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\hat{I} &= \hat{I}_G + \hat{I}_L + \hat{I}_C \\
&= 0.22\underline{/0^\circ}\,\mathrm{A} \\
&= \hat{I}_G
\end{aligned}$$

اس مثال میں امالی رو اور برق گیر رو کی قیمتیں منبع کی رو سے دس گنا زیادہ ہیں۔

مثال 12.16: شکل 12.35 میں متوازی RLC دور دیا گیا ہے۔ اس کا تبادلی تفاعل $\frac{\hat{V}}{\hat{I}}$ حاصل کرتے ہوئے نچلا اور بالائی کونا دریافت کریں۔ عرض پٹی بھی حاصل کریں۔



شکل 12.35: مثال 12.16 کا دور۔

حل: دور کی فراوانی

$$\boldsymbol{Y} = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

استعمال کرتے ہوئے خارجی دباو لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}\hat{V}_0 &= \frac{\hat{I}_d}{\boldsymbol{Y}} \\ &= \frac{\hat{I}_d}{G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})}\end{aligned}$$

تبادلی تفاعل حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\hat{V}_0}{\hat{I}_d} = \frac{1}{G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})} \tag{12.73}$$

تبادلی تفاعل عین گمکی تعدد پر زیادہ سے زیادہ ہوتا ہے۔یوں گمکی تعدد پر قوسین صفر کے برابر ہو گی جس سے گمکی تعدد لکھی جا سکتی ہے۔

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{12.74}$$

گمکی تعدد پر مساوات 12.73 میں قوسین صفر کے برابر ہے لہٰذا اس کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جو تفاعل کی زیادہ سے زیادہ قیمت ہے۔

$$\frac{\hat{V}_0}{\hat{I}_d} = \frac{1}{G} \tag{12.75}$$

گمکی تعدد پر تبادلی تفاعل کی مقدار زیادہ سے زیادہ مقدار کی $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا ہو گی۔یوں کونوں پر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{1}{\sqrt{G^2 + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}} = \left(\frac{1}{G}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \tag{12.76}$$

دونوں اطراف کا مربع لیتے اور ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$\omega^2 \mp \omega \frac{G}{C} - \frac{1}{LC} = 0 \tag{12.77}$$

جس کے مثبت تعددی جوابات لکھتے ہیں۔

$$\omega_L = -\frac{G}{2C} + \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \tag{12.78}$$

$$\omega_H = +\frac{G}{2C} + \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \tag{12.79}$$

ان کونوں سے عرض پٹی حاصل کرتے ہیں۔

$$\mathrm{BW} = \omega_H - \omega_L = \frac{G}{C} = \frac{1}{RC} \tag{12.80}$$

معیاری مستقل حاصل کرتے ہیں۔

$$Q = \frac{\omega_0}{\mathrm{BW}} = \frac{1}{G}\sqrt{\frac{C}{L}} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \tag{12.81}$$

گمکی تعدد، معیاری مستقل اور عرض پٹی کے مساوات استعمال کرتے ہوئے کونوں کی تعدد کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\omega_L = \omega_0 \left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} + 1}\right] \tag{12.82}$$

$$\omega_H = \omega_0 \left[+\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} + 1}\right] \tag{12.83}$$

مثال 12.17: متوازی RLC میں $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ ، $L = 1\,\mathrm{mH}$ اور $C = 20\,\mathrm{\mu F}$ ہیں۔ گمکی تعدد، معیاری مستقل اور عرض پٹی دریافت کریں۔

حل:

$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10^{-3} \times 20 \times 10^{-6}}} = 7071\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \\
Q &= R\sqrt{\frac{C}{L}} = 1000\sqrt{\frac{10^{-3}}{20 \times 10^{-6}}} = 141 \\
\mathrm{BW} &= \frac{1}{RC} = \frac{1}{1000 \times 20 \times 10^{-6}} = 50\,\mathrm{rad\,s^{-1}}
\end{aligned}
$$

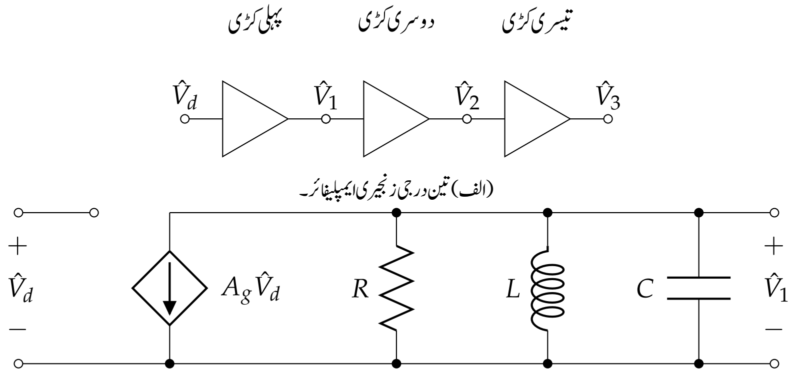
مثال 12.18: **برقناطیسی امواج**[38] کو اینٹینا[39] کے ذریعہ خلاء سے حاصل کرتے ہوئے **ہمسر ایمپلیفائر**[40] تک پہنچایا جاتا ہے۔ہمسر ایمپلیفائر مخصوص عرض پٹی کے اشارات کا حیطہ بڑھاتے ہوئے بقایا تعدد کے اشارات کو گھٹاتا ہے۔تعددی طور پر دو قریبی اشارات کو علیحدہ کرنے کے لئے ضروری ہے کہ ہمسر دور کی عرض پٹی اتنی تنگ ہو کہ اس میں سے صرف درکار اشارات گزر سکے۔ بعض اوقات ایک عدد RLC دور سے اشارات کو علیحدہ کرنا ممکن نہیں ہوتا۔ایسی صورت میں متعدد ہمسر ایمپلیفائر کو زنجیری جوڑا جاتا ہے جہاں پہلے ایمپلیفائر کا خارجی اشارہ دوسرے ایمپلیفائر کو بطور داخلی اشارہ مہیا کیا جاتا ہے۔آئیں دیکھیں کہ زنجیری ایمپلیفائر سے کیسے عرض پٹی مزید تنگ کی جاتی ہے۔

شکل 12.36-الف میں زنجیری ایمپلیفائر دکھایا گیا ہے۔داخلی اشارہ $\hat{V}_d$ زنجیری ایمپلیفائر کے پہلی کڑی کو مہیا کیا گیا ہے۔پہلی کڑی کا خارجی اشارہ $\hat{V}_1$ ہے جو دوسری کڑی کو بطور داخلی اشارہ مہیا کیا گیا ہے۔اسی طرح دوسری کڑی کا خارجی اشارہ $\hat{V}_2$ تیسری کڑی کو مہیا کیا گیا ہے۔ شکل-ب میں ایک عدد ہمسر ایمپلیفائر کا مساوی دور دکھایا گیا ہے۔ ہمسر ایمپلیفائر کے دور میں $\hat{I}_d = -A_g\hat{V}_1$ لینے سے شکل 12.35 حاصل ہوتا ہے لہٰذا مساوات 12.73 سے پہلے ہمسر ایمپلیفائر کے لئے

$$
\hat{V}_1 = \frac{-A_g\hat{V}_d}{G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})} \tag{12.84}
$$

---

electromagnetic waves[38]
antenna[39]
tuned amplifier[40]



(الف) تین درجی زنجیری ایمپلیفائر۔

(ب) زنجیری ایمپلیفائر کی ایک کڑی۔

شکل 12.36: زنجیری ہمسر ایمپلیفائر سے عرض پٹی تنگ کی جاتی ہے۔

لکھا جا سکتا ہے۔ پہلے ایمپلیفائر کا خارجی اشارہ $\hat{V}_1$ ہے جسے دوسرے ایمپلیفائر کو فراہم کیا جاتا ہے لہٰذا مساوات 12.73 کو دوبارہ استعمال کرتے ہوئے دوسری کڑی کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\hat{V}_2 = \frac{-A_g\hat{V}_1}{G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})}$$

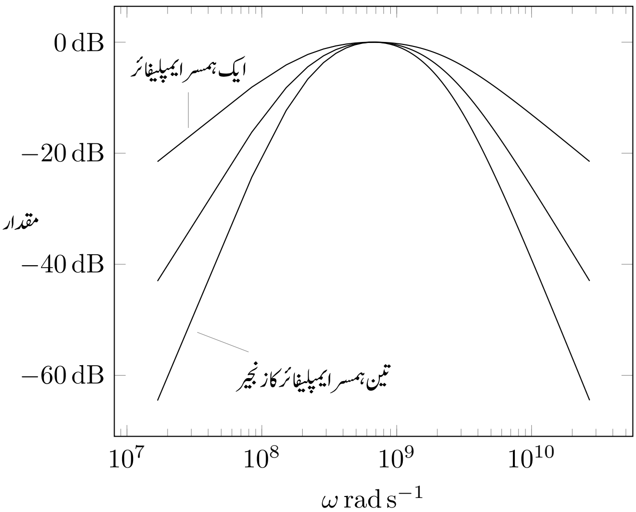
جس میں مساوات 12.84 سے $\hat{V}_1$ پر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\hat{V}_2 = \frac{(-A_g)^2\hat{V}_d}{\left[G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})\right]^2} \tag{12.85}$$

اسی طرح تیسری کڑی کے لئے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\hat{V}_3 = \frac{(-A_g)^3\hat{V}_d}{\left[G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})\right]^3} \tag{12.86}$$

ہمسر دور میں $A_g = 5\,\mathrm{mS}$ ، $R = 200\,\Omega$ ، $L = 2.2\,\mu\mathrm{H}$ اور $C = 5\,\mathrm{pF}$ لیتے ہوئے مساوات 12.84، مساوات 12.85 اور مساوات 12.86 کے مقداری خط شکل 12.37 میں کھینچے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ تعداد میں ہمسر ایمپلیفائر زنجیری جوڑنے سے عرض پٹی کم ہوتی ہے۔ اس مثال میں تمام ہمسر ایمپلیفائر کی گمکی تعدد پر افزائش دباو اکائی $\boldsymbol{A_v} = 1\,\mathrm{V\,V^{-1}}$ ہے۔ یہاں رک کر تسلی کر لیں کہ شکل 12.36 میں ایمپلیفائر کو استعمال کئے



شکل 12.37: زنجیری ایمپلیفائر سے عرض پٹی تنگ کرنے کا عمل۔

بغیر تین عدد متوازی RLC ادوار کو زنجیری جوڑنے سے مساوات 12.86 نہیں ملتی۔ بغیر ایمپلیفائر کے تین مزاحمت متوازی جڑ جاتے ہیں جن کا مجموعہ $\frac{R}{3}$ ہو گا۔ اسی طرح تین امالہ گیر متوازی جوڑنے سے $\frac{L}{3}$ ملتا ہے اور تین برق گیر متوازی جوڑنے سے $3C$ ملتا ہے۔ یوں صرف RLC زنجیری جوڑنے سے ایک عدد RLC ملتا ہے۔

مشق 12.13: متوازی RLC میں $1\,\mathrm{k\Omega}$ ، $L = 0.5\,\mathrm{mH}$ اور $C = 10\,\mathrm{\mu F}$ ہیں۔ گمکی تعدد، معیاری مستقل اور عرض پٹی دریافت کریں۔

جوابات: $\omega_0 = 14.142\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ ، $Q = 141.42$ ، $\mathrm{BW} = 100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

مشق 12.14: متوازی RLC میں $R = 4\,\mathrm{k\Omega}$ ، $\mathrm{BW} = 2\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ اور $Q = 80$ ہیں۔ گمکی تعدد ω_0 ، امالہ اور برق گیر دریافت کریں۔

جوابات: $\omega_0 = 160\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ ، $L = 0.31\,\mathrm{mH}$ ، $C = 0.125\,\mathrm{\mu F}$

عموماً امالہ گیر کی اندرونی مزاحمت کو نظر انداز نہیں کیا جا سکتا۔ متوازی جڑے امالہ گیر اور برق گیر کا بہتر مساوی دور شکل 12.38 میں دکھایا گیا ہے جس کی داخلی فراوانی درج ذیل ہے۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Y}(j\omega) &= j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} \\
&= j\omega C + \frac{R - j\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \\
&= \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)
\end{aligned}
$$

گمکی تعدد ω_0' پر فراوانی حقیقی مقدار ہو گی اور خیالی جزو صفر کے برابر ہو گا یعنی

$$
\omega_0' C - \frac{\omega_0' L}{R^2 + \omega_0'^2 L^2} = 0 \tag{12.87}
$$

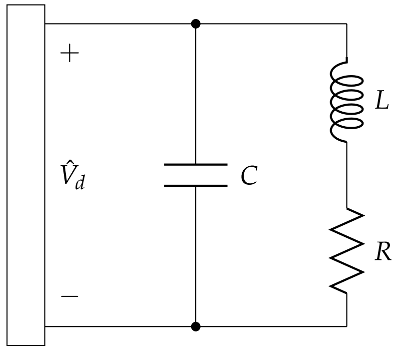
جس سے گمکی تعدد حاصل ہوتی ہے۔

$$
\omega_0' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \tag{12.88}
$$

مثال 12.19: شکل 12.38 میں $L = 5\,\mathrm{mH}$ اور $C = 2.2\,\mathrm{\mu F}$ ہیں۔ تعدد ω_0 اور ω_0' کو $R = 20\,\Omega$ اور $R = 0.5\,\Omega$ کے لئے حاصل کریں۔

حل: دی گئی معلومات سے

$$
\begin{aligned}
\omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5 \times 10^{-3} \times 2.2 \times 10^{-6}}} \\
&= 9535.6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}
\end{aligned}
$$



شکل 12.38: متوازی LC کا بہتر مساوی دور۔

حاصل ہوتا ہے۔ مزاحمت $R = 20\,\Omega$ کے لئے

$$
\begin{aligned}
\omega_0' &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{5\times 10^{-3}\times 2.2\times 10^{-6}} - \left(\frac{20}{5\times 10^{-3}}\right)^2} \\
&= 8655\,\mathrm{rad\,s^{-1}}
\end{aligned}
$$

اور مزاحمت $R = 0.5\,\Omega$ کے لئے

$$
\begin{aligned}
\omega_0' &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{5\times 10^{-3}\times 2.2\times 10^{-6}} - \left(\frac{0.5}{5\times 10^{-3}}\right)^2} \\
&= 9534.1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کم مزاحمت پر ω_0' اور ω_0 تقریباً برابر ہوتے ہیں۔

آئیں گمکی دور کی معلومات کو بوڈا خط کے ساتھ جوڑیں۔ سلسلہ وار RLC کی فراوانی درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}(j\omega) &= \frac{1}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \\ &= \frac{j\omega C}{(j\omega)^2 LC + j\omega RC + 1}\end{aligned} \tag{12.89}$$

مساوات 12.30 کا نسب نما بوڈا خط کا دو درجی جزو دیا گیا ہے

$$(j\omega\tau)^2 + 2\zeta(j\omega\tau) + 1$$

جہاں $\tau = \frac{1}{\omega_0}$ کے برابر ہے لہٰذا دو درجی جزو کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{(j\omega)^2}{\omega_0^2} + j\frac{2\zeta\omega}{\omega_0} + 1 \tag{12.90}$$

مساوات 12.90 کا مساوات 12.89 کے نسب نما سے موازنہ کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \\ \frac{2\zeta}{\omega_0} &= RC \\ \zeta &= \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}\end{aligned}$$

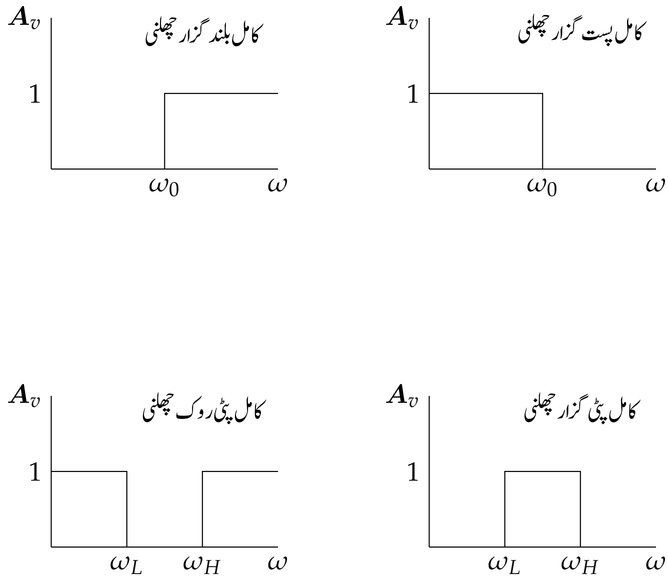
مساوات 12.37 سلسلہ وار RLC کا Q دیتی ہے

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{12.91}$$

لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$Q = \frac{1}{2\zeta} \tag{12.92}$$

مساوات 12.89 کا صفر $\omega = 0$ پر پایا جاتا ہے لہٰذا اس کے بوڈا خط کی ابتدائی ڈھلوان مثبت بیس ڈیسی بیل فی دہائی ہے۔اب Q کی مقدار درج بالا مساوات کے ذریعہ ζ سے بندھی ہے لہٰذا زیادہ ζ کی صورت میں Q کی قیمت کم ہو گی جبکہ کم ζ کی صورت میں Q کی قیمت زیادہ ہو گی۔ شکل 12.26 میں Q بالمقابل تعدد دکھایا گیا ہے جہاں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ زیادہ Q کی صورت میں عرض پٹی تنگ ہو جاتی ہے۔یہی اثر بوڈا خط میں ω_0 پر بطور چوٹی نظر آتا ہے۔

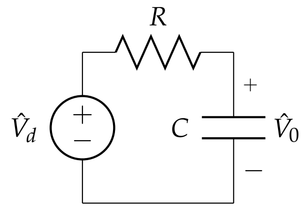


شکل 12.39: کامل چھلنیوں کے خط۔

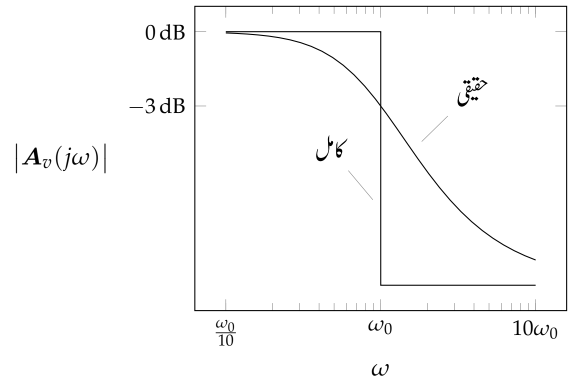
12.5 چھلنی

اشارات کو تعدد کی بنیاد پر علیحدہ کرنے کے لئے **چھلنی**[41] استعمال کی جاتی ہے۔ان میں پست گزار، بلند گزار، پٹی گزار اور پٹی روک چھلنی نہایت مقبول ہیں جن کے خط شکل 12.39 میں دکھائے گئے ہیں۔**پست گزار چھلنی**[42] کسی مخصوص تعدد ω_0 سے کم تعدد کے اشارات کو گزرنے دیتی ہے جبکہ بقایا تعدد کے اشارات کو روکتی ہے۔**بلند گزار چھلنی**[43] کسی مخصوص تعدد ω_0 سے زیادہ تعدد کے اشارات کو گزرنے دیتی ہے جبکہ بقایا تعدد کے اشارات کو روکتی ہے۔**پٹی گزار چھلنی**[44] کسی مخصوص تعددی پٹی ω_L تا ω_H کے اشارات کو گزرنے دیتی ہے جبکہ بقایا تعدد کے اشارات کو روکتی ہے۔**پٹی روک چھلنی**[45] کسی مخصوص تعددی پٹی ω_L تا ω_H کے اشارات کو روکتی ہے جبکہ بقایا تعدد کے اشارات کو گزرنے دیتی ہے۔

[41] filter
[42] low-pass filter
[43] high-pass filter
[44] band-pass filter
[45] band-stop filter



(الف) پست گزار چھلنی کا سادہ ترین دور۔



(ب) کامل اور حقیقی پست گزار چھلنی کے خط۔

شکل 12.40: پست گزار چھلنی۔

شکل 12.40-الف میں پست گزار چھلنی کا سادہ ترین دور دکھایا گیا ہے جس کی افزائش دباو $A_v = \frac{\hat{V}_0}{\hat{V}_d}$ درج ذیل ہے

$$
\begin{aligned}
A_v(j\omega) &= \frac{1}{1+j\omega RC} \\
&= \frac{1}{1+j\omega\tau}
\end{aligned}
$$

جہاں $RC = \tau$ **وقتی مستقل**[46] کہلاتا ہے۔افزائش دباو کی **مقداری خصلت**[47] اور **زاویائی خصلت**[48] لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
|A_v(\omega)| &= \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}} \\
\angle A_v(\omega) &= -\tan^{-1}\omega\tau
\end{aligned}
$$

شکل 12.40-ب میں کامل پست گزار چھلنی اور شکل-الف کے حقیقی چھلنی کے خط دکھائے گئے ہیں۔ اگرچہ ہم چاہتے ہیں کہ پست گزار چھلنی کسی مخصوص تعدد ω_0 سے کم تعدد کو جوں کا توں گزارے اور اس سے بلند تعدد کو قطعاً نہیں گزارے، حقیقی ادوار ایسا کرنے سے قاصر ہوتے ہیں۔کامل پست گزار چھلنی **انقطاعی تعدد**[49] ω_0 سے کم تعدد کو مکمل طور پر گزارتی ہے جبکہ اس سے زیادہ تعدد کو مکمل طور پر روکتی ہے۔ حقیقی پست گزار چھلنی بھی یہی کچھ کرتی ہے البتہ انقطاعی تعدد کے قریبی تعدد پر اس کی کارکردگی کامل نہیں ہوتی۔جیسا شکل-ب میں دکھایا گیا ہے، انقطاعی تعدد ω_0 پر

time constant[46]
magnitude characteristic[47]
phase characteristic[48]
cut-off frequency[49]

حقیقی پست گزار چھلنی کی افزائش دباو A_v تین ڈیسی بیل کم ہوتی ہے۔جیسا آپ نے بوڈا خطوط میں پڑھا تھا، انقطاعی تعدد کی تعریف یہ ہے کہ اس پر اشارے کی طاقت نصف ہو جائے۔اشارے کا حیطہ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا ہونے سے اس کی طاقت آدھی ہوتی ہے۔جیسا شکل-ب سے واضح ہے، انقطاعی تعدد سے دور تعدد پر حقیقی پست گزار چھلنی کی کارکردگی یقیناً قابل تعریف ہے۔انقطاعی تعدد سے دس گنا کم $\frac{\omega_0}{10}$ یا دس گنا زیادہ $10\omega_0$ تعدد پر اس کی کارکردگی تقریباً کامل چھلنی جیسے ہے۔

شکل 12.40-الف میں دئے پست گزار چھلنی کو اس طرح سمجھا جا سکتا ہے کہ کم تعدد پر برق گیر کی رکاوٹ زیادہ ہوتی ہے لہٰذا تقسیم دباو کے کلیے سے ظاہر ہے کہ برق گیر پر زیادہ دباو پایا جائے گا۔اس کے برعکس زیادہ تعدد پر برق گیر کی رکاوٹ کم ہوتی ہے لہٰذا تقسیم دباو کے کلیے کے تحت اس پر دباو گھٹ جائے گا۔انتہائی بلند تعدد پر برق گیر کی رکاوٹ انتہائی کم ہو گی اور اس پر دباو قابل نظر انداز ہو گا۔

شکل 12.41-الف میں بلند گزار چھلنی کا سادہ ترین دور دکھایا گیا ہے جس کی تبادلی تفاعل لکھتے ہیں جہاں $RC = \tau$ لکھا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_v(j\omega) &= \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} \\
&= \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC} \\
&= \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}
\end{aligned}$$

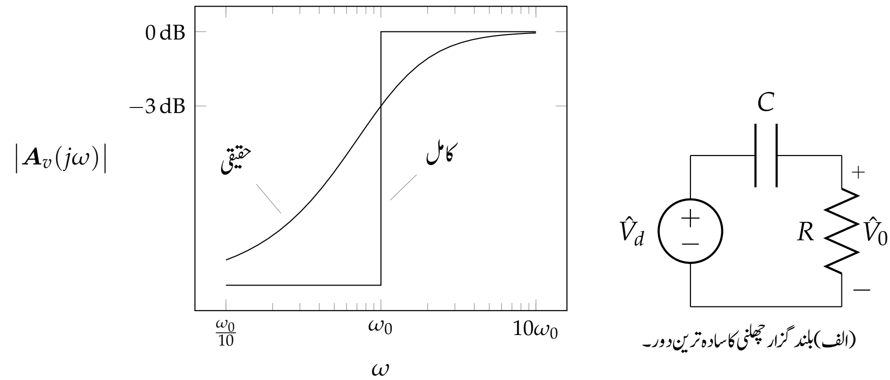
تبادلی تفاعل کی مقداری اور زاویائی تفاعل لکھتے ہیں۔

$$\left|\boldsymbol{A}_v(\omega)\right| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \tag{12.93}$$

$$\underline{/\boldsymbol{A}_v(\omega)} = 90^{-circ} - \tan^{-1}\omega\tau \tag{12.94}$$

شکل-ب میں تبادلی تفاعل کا مقداری خط دکھایا گیا ہے۔ساتھ ہی کامل بلند گزار چھلنی کا خط بھی دکھایا گیا ہے۔یہاں بھی حقیقی چھلنی کی افزائش دباو انقطاعی تعدد پر اشارے کی طاقت آدھی کرتی ہے۔

شکل 12.41-الف میں دئے بلند گزار چھلنی کو اس طرح سمجھا جا سکتا ہے کہ صفر تعدد کے قریب برق گیر کی رکاوٹ انتہائی زیادہ ہو گی لہٰذا تقسیم دباو کے کلیے سے ظاہر ہے کہ مزاحمت پر دباو انتہائی کم ہو گا۔اس کے برعکس انتہائی زیادہ تعدد پر برق گیر کی رکاوٹ انتہائی کم ہو گی لہٰذا تقسیم دباو کے کلیے کے تحت پورا دباو مزاحمت پر پایا جائے گا۔



(الف)بلند گزار چھلنی کا سادہ ترین دور۔

(ب)کامل اور حقیقی بلند گزار چھلنی کے خط۔

شکل 12.41: بلند گزار چھلنی۔

پٹی گزار چھلنی کا سادہ ترین دور شکل 12.42 میں دکھایا گیا ہے۔اس کی افزائش دباو لکھتے ہوئے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_v(j\omega) &= \frac{R}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}\\ &= \frac{\omega RC}{\omega RC+j(\omega^2 LC-1)}\end{aligned} \tag{12.95}$$

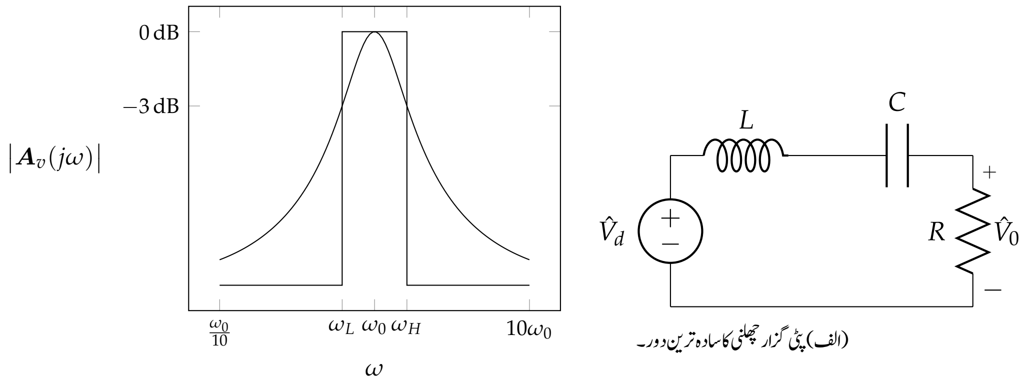
مقداری تفاعل لکھتے ہیں

$$\left|\boldsymbol{A}_v(\omega)\right| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega RC)^2+(\omega^2 LC-1)^2}} \tag{12.96}$$

جس کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔اس کی کارکردگی یوں سمجھی جا سکتی ہے کہ درمیانی تعدد یعنی گمکی تعدد ω_0 پر $\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$ ہوتا ہے لہٰذا داخلی اشارہ جوں کا توں مزاحمت پر پہنچتا ہے۔ گمکی تعدد سے بہت کم تعدد پر برق گیر کی رکاوٹ بہت بڑھ جاتی ہے لہٰذا تقسیم دباو کے کلیے سے ظاہر ہے کہ مزاحمت پر دباو بہت کم ہو گی۔اسی طرح گمکی تعدد سے بہت زیادہ تعدد پر امالی رکاوٹ کی قیمت بہت بڑھ جاتی ہے جس کی وجہ سے مزاحمت پر دباو بہت کم ہوتی ہے۔

مساوات 12.95 میں صرف ω متغیر مقدار ہے۔افزائش دباو کی زیادہ سے زیادہ قیمت اس تعدد ω_0 پر حاصل ہو گی جس پر نسب نما میں قوسین کی قیمت صفر کے برابر ہو یعنی

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{12.97}$$



(الف) پٹی گزار چھلنی کا سادہ ترین دور۔

(ب) کامل اور حقیقی پٹی گزار چھلنی کے خط۔

شکل 12.42: پٹی گزار چھلنی۔

اس تعدد پر $1\,\mathrm{V\,V^{-1}} = |A_v(\omega_0)|$ حاصل ہوتا ہے۔انقطاعی تعدد پر افزائش دباو $|A_v(\omega_0)|$ کے $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا ہو گی۔یوں مساوات 12.96 کو استعمال کرتے ہوئے انقطاعی تعدد کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\omega RC}{\sqrt{(\omega RC)^2+(\omega^2 LC-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

دونوں جانب مربع لیتے اور ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل

$$(\omega^2 LC-1)^2=(\omega RC)^2$$

یعنی

$$\omega^2 LC-1=\mp\omega RC$$

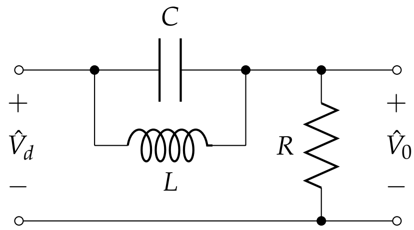
یا

$$\omega^2 LC\pm\omega RC-1=0$$

ملتا ہے۔اس دو درجی مساوات کے حل لکھتے ہیں

$$\omega_L=\frac{-\frac{R}{L}+\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2+\frac{1}{LC}}}{2} \tag{12.98}$$

$$\omega_H=\frac{+\frac{R}{L}+\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2+\frac{1}{LC}}}{2} \tag{12.99}$$



شکل 12.43: دندانہ چھلنی کی مدد سے 50 Hz سے چھٹکارا حاصل کیا جاتا ہے۔

جن سے پٹی گزار چھلنی کی عرض پٹی BW حاصل ہوتی ہے۔

$$\text{BW} = \omega_H - \omega_L = \frac{R}{L} \tag{12.100}$$

مثال 12.20: اگر آپ کو حساس اشارات کے ساتھ کام کرنا پڑے تو آپ دیکھیں گے کہ ان میں واپڈا کا 50 Hz پایا جاتا ہے جس سے چھٹکارا حاصل کرنا نہایت مشکل ہوتا ہے۔ موبائل ٹیلیفون کے زمانے سے پہلے زمینی تار والے ٹیلیفون استعمال کئے جاتے تھے جن کی تاروں میں عموماً 50 Hz کا غیر مطلوب اشارہ گھس جاتا تھا جو شہد کی مکھی کی طرح ہوں ہوں کرتا سنائی دیتا تھا۔

میری بیٹی عفت بریخنہ نے انجنیئرنگ کے آخری سال میں **برقی قلب نگار**[50] بنایا۔ انہیں مسلسل 50 Hz کے غیر مطلوب اشارے کا سامنہ کرنا پڑا۔ پچاس ہرٹز کے غیر مطلوب اشارے کی خاصیت یہ ہے کہ اس کی تعدد اٹل ہے۔ اس سے **دندانہ چھلنی**[51] کی مدد سے چھٹکارا حاصل کیا جاتا ہے۔ شکل میں دندانہ چھلنی کا دور دکھایا گیا ہے۔ تار کے ٹیلیفون میں R سپیکر کی مزاحمت ہو گی۔ برقی قلب نگار میں R اگلے دور کا داخلی تھونن مزاحمت ہو گا۔

متوازی امالہ گیر اور برق گیر کی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}$ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z} &= \frac{(j\omega L)(\frac{1}{j\omega C})}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}\\ &= \frac{\frac{L}{C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}\end{aligned}$$

---

[50] electrocardiogram, ecg
[51] notch filter

تقسیم دباو کے کلیے سے خارجی دباو لکھتے ہیں

$$\hat{V}_0 = \left(\frac{R}{R+Z}\right)\hat{V}_d = \frac{R\hat{V}_d}{R + \frac{\frac{L}{C}}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}}$$

جس سے درج ذیل تبادلی تفاعل حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\hat{V}_0}{\hat{V}_d} = \frac{(j\omega)^2 + \frac{1}{LC}}{(j\omega)^2 + \left(\frac{j\omega}{RC}\right) + \frac{1}{LC}}$$

غیر مطلوب اشارے سے چھٹکارے کے لئے ضروری ہے کہ $50\,\mathrm{Hz}$ یعنی $100\pi\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر تبادلی تفاعل صفر کے برابر ہو۔یوں تبادلی تفاعل کا شمار کنندہ اس تعدد پر صفر کے برابر درکار ہے جس سے درج ذیل شرط حاصل ہوتی ہے۔

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 100\pi \tag{12.101}$$

یوں برق گیر کی قیمت $100\,\mathrm{\mu F}$ چنتے ہوئے امالہ کی قیمت $101.3\,\mathrm{mH}$ حاصل ہوتی ہے۔دندانہ چھلنی کی کارکردگی دیکھنے کی خاطر داخلی اشارے $v_d(t)$ کو $50\,\mathrm{Hz}$ اور $1000\,\mathrm{Hz}$ کے سائن نما اشارات کا مجموعہ تصور کرتے ہیں۔

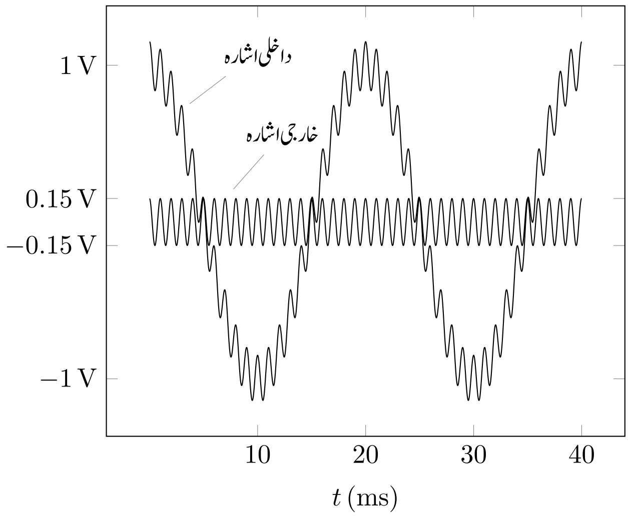
$$v_d(t) = 1\cos(2\pi 50t) + 0.15\cos(2\pi 1000t)$$

مزاحمت کو $32\,\Omega$ لیتے ہوئے شکل 12.44 میں داخلی اور خارجی اشارات دکھائے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $50\,\mathrm{Hz}$ سے مکمل چھٹکارا حاصل ہوا ہے۔

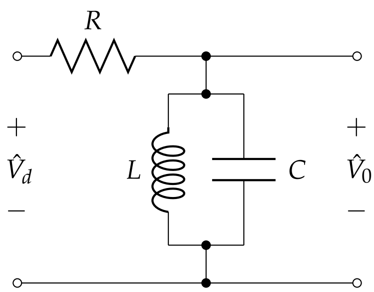
مشق 12.15: شکل 12.45 میں تبادلی تفاعل حاصل کرتے ہوئے چھلنی کی قسم دریافت کریں۔

جواب: یہ دندانہ گزار چھلنی ہے جو ایک مخصوص تعدد کو گزرنے دیتی ہے۔

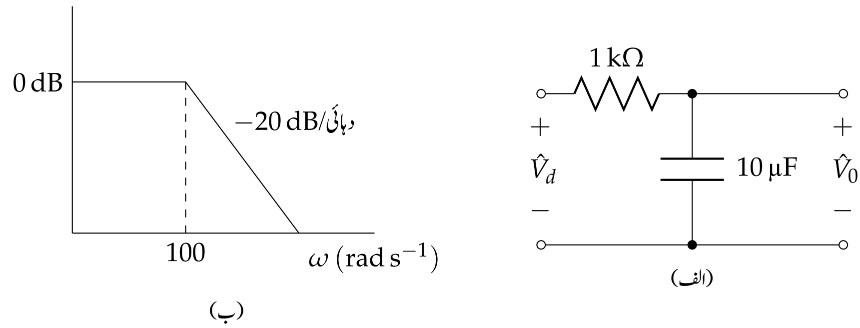
$$\frac{\hat{V}_0}{\hat{V}_d} = \frac{1}{1 + \frac{RC}{L}\left(j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right)}$$



شکل 12.44: دندانہ چھلنی کا داخلی اور خارجی اشارہ۔



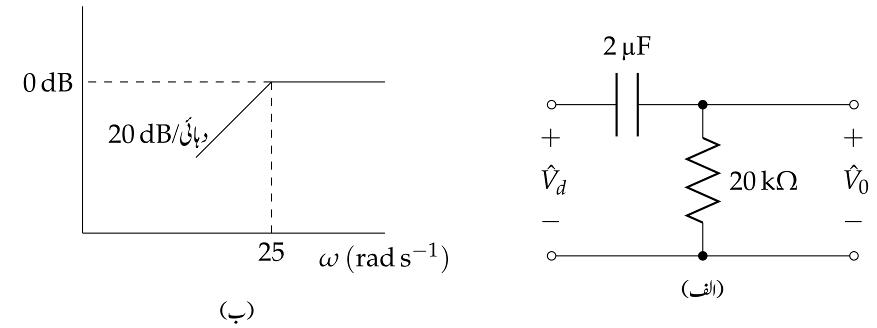
شکل 12.45: مشق 12.15 کی چھلنی۔



شکل 12.46: مشق 12.16 کی چھلنی۔

مشق 12.16: شکل 12.46 میں دکھائے چھلنی کا بوڈا مقداری خط کھینچیں۔

مشق 12.17: شکل 12.47 میں دکھائے چھلنی کا بوڈا مقداری خط کھینچیں۔



شکل 12.47: مشق 12.17 کی چھلنی۔

عامل چھلنی

گزشتہ حصے میں پست گزار، بلند گزار، پٹی گزار اور پٹی روک چھلنی پر غور کیا گیا جنہیں غیر عامل پرزوں یعنی مزاحمت، امالہ اور برق گیر سے تخلیق دیا گیا۔ان تمام چھلنیوں کو عامل پرزوں مثلاً حسابی ایمپلیفائر کی مدد سے بھی تخلیق دیا جا سکتا ہے۔عامل پرزے استعمال کرتے ہوئے اشارے کا حیطہ بڑھایا بھی جا سکتا ہے۔آئیں حسابی ایمپلیفائر سے انہیں تخلیق دیں۔

شکل 12.48-الف میں منفی ایمپلیفائر دکھایا گیا ہے جس کا تبادلی تفاعل درج ذیل ہے۔

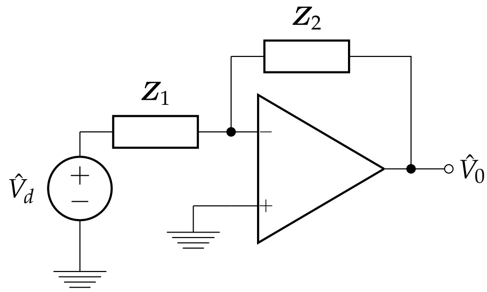
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_v(j\omega) &= \frac{\hat{V}_0}{\hat{V}_d} \\
&= -\frac{\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}_1}
\end{aligned}
$$

شکل 12.48-ب میں $\boldsymbol{Z}_1$ کی جگہ R_1 نسب کیا گیا ہے جبکہ $\boldsymbol{Z}_2$ کی جگہ مزاحمت R_2 اور برق گیر C متوازی جوڑے گئے ہیں لہٰذا

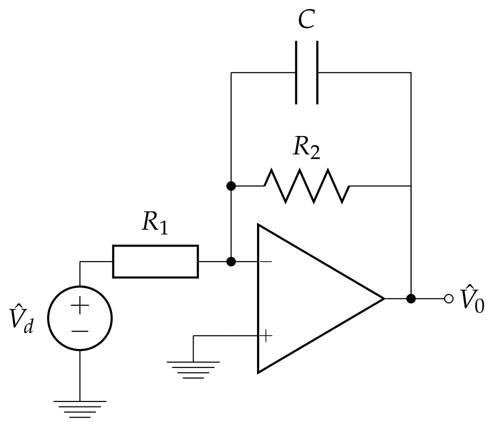
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z}_1 &= R_1 \\
\boldsymbol{Z}_2 &= \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C}
\end{aligned}
$$

ہوں گے جن سے تبادلی تفاعل درج ذیل ملتا ہے جو پست گزار چھلنی کا تفاعل ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ داخلی اشارے کا حیطہ $-\frac{R_2}{R_1}$ گنا بڑھایا گیا ہے اور انقطاعی تعدد $\omega_0 = \frac{1}{R_2 C}$ ہے۔

$$
\boldsymbol{A}_v(j\omega) = \frac{-\frac{R_2}{R_1}}{1 + j\omega R_2 C} \tag{12.102}
$$



(الف)



(ب)

شکل 12.48: منفی ایمپلیفائر۔

شکل 12.49-الف میں مثبت ایمپلیفائر دکھایا گیا ہے جس کا تبادلی تفاعل

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_v(j\omega) &= \frac{\hat{V}_0}{\hat{V}_d} \\ &= 1 + \frac{\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}_1}\end{aligned}$$

ہے۔ شکل 12.49-ب میں رکاوٹ کی جگہ نسب پرزے دکھائے گئے ہیں جہاں سے

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Z}_1 &= \frac{1}{j\omega C_1} \\ \boldsymbol{Z}_2 &= \frac{R}{1 + j\omega R C_2} \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ یوں تبادلی تفاعل درج ذیل ہو گا جہاں آخری قدم پر $\omega_1 = \frac{1}{R(C_1+C_2)}$ اور $\omega_2 = \frac{1}{RC_2}$ لکھے گئے ہیں۔ چونکہ $\omega_1 < \omega_2$ ہے لہٰذا یہ تفاعل بلند گزار چھلنی کا تفاعل ہے۔

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_v(j\omega) &= 1 + \frac{\frac{R}{1+j\omega RC_2}}{\frac{1}{j\omega C_1}} \\ &= \frac{1 + j\omega R(C_1 + C_2)}{1 + j\omega RC_2} \\ &= \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}} \end{aligned}$$

سوالات

سوال 12.1: شکل 12.50 میں داخلی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}(s)$ حاصل کریں۔

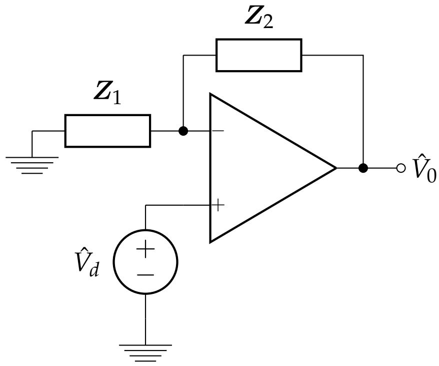
جواب: $\boldsymbol{Z}(s) = R_1 \frac{sR_2L}{S^2R_2LC+SL+R_2}$

سوال 12.2: شکل 12.51 میں داخلی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}(s)$ حاصل کریں۔

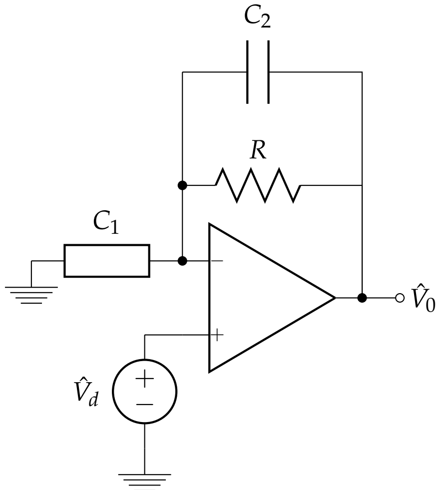
جواب: $\boldsymbol{Z}(s) = \frac{sL_1}{s^2L_1C_1+1} + \frac{s^2L_2C_2+1}{sC_2}$

سوال 12.3: شکل 12.51 میں تبادلی تفاعل $\frac{\mathrm{V}_0(s)}{\mathrm{V}_d(s)}$ لکھیں۔

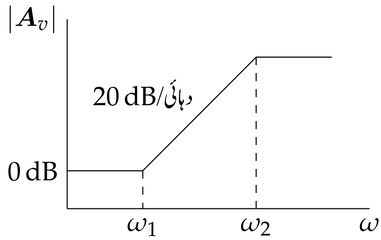
جواب: $\frac{\mathrm{V}_0(s)}{\mathrm{V}_d(s)} = \frac{s^4L_1L_2C_1C_2+s^2(L_1C_1+L_2C_2)+1}{s^4L_1L_2C_1C_2+s^2*(L_1C_1+L_2C_2+L_1C_2)+1}$



(الف)

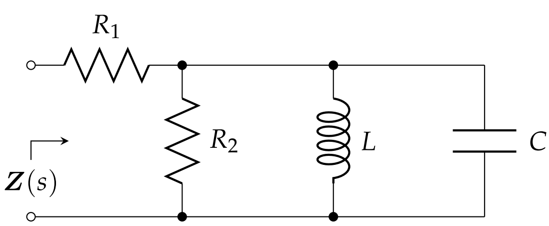


(ب)

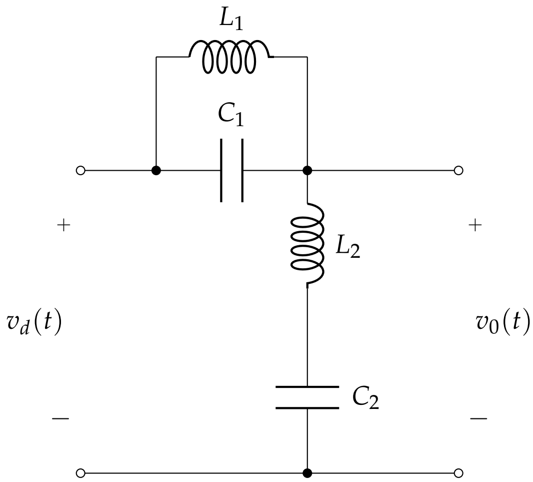


(پ)

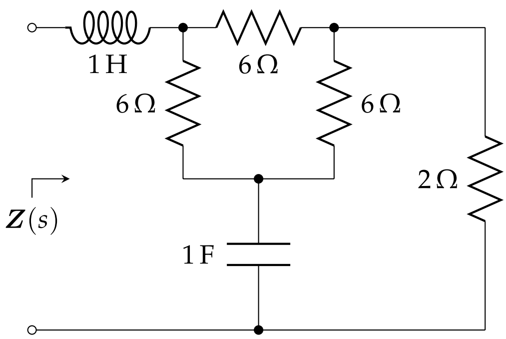
شکل 12.49: مثبت ایمپلیفائر۔



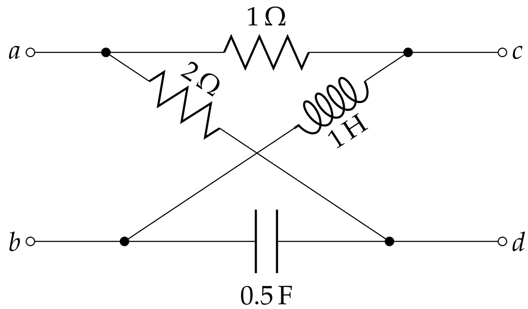
شکل 12.50: سوال 12.1 کا دور۔



شکل 12.51: سوال 12.2 اور سوال 12.3 کا دور۔



شکل 12.52: سوال 12.4 کا دور۔



شکل 12.53: سوال 12.5 کا دور۔

سوال 12.4: شکل 12.52 کی داخلی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}(s)$ دریافت کریں۔

جواب: $\boldsymbol{Z}(s)=\frac{6s^2+21s+6}{6s+1}$

سوال 12.5: شکل 12.53 میں c اور d کو کھلے سر رکھتے ہوئے a اور b کے مابین رکاوٹ دریافت کریں۔

جواب: $\boldsymbol{Z}=\frac{2s+2}{s+2}$

سوال 12.6: شکل 12.53 میں c اور d کو آپس میں قصر دور کرتے ہوئے a اور b کے مابین رکاوٹ دریافت کریں۔

جواب: $\boldsymbol{Z}:\frac{2s^2+6s+4}{3s^2+6}$

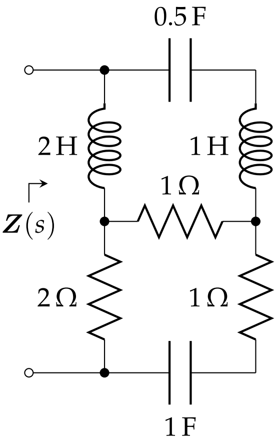
سوال 12.7: شکل 12.53 میں c اور d کے مابین $1\,\Omega$ مزاحمت نسب کرتے ہوئے a اور b کے مابین رکاوٹ دریافت کریں۔

جواب: $\boldsymbol{Z}(s)=\frac{4s^2+10s+6}{4s^2+3s+8}$

سوال 12.8: شکل 12.54 میں داخلی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}(s)$ دریافت کریں۔

جواب: $\boldsymbol{Z}(s)=\frac{8s^4+12s^3+26s^2+14s+4}{12s^3+6s^2+9s+2}$

سوال 12.9: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(j\omega)=\frac{1}{(j\omega+1)(0.1j\omega+1)}$ کا بوڈا خط کھینچیں۔



شکل 12.54: سوال 12.8 کا دور۔

سوال 12.10: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(j\omega)=\frac{100j\omega}{(j\omega+1)(j\omega+10)(j\omega+50)}$ کا بوڈا خط کھینچیں۔

سوال 12.11: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(j\omega)=\frac{100}{(j\omega)^2(j\omega+100)}$ کا بوڈا خط کھینچیں۔

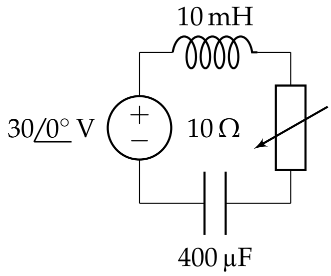
سوال 12.12: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(j\omega)=\frac{500(j\omega+2)(j\omega+100)}{-\omega^2(j\omega+1000)^2}$ کا بوڈا خط کھینچیں۔

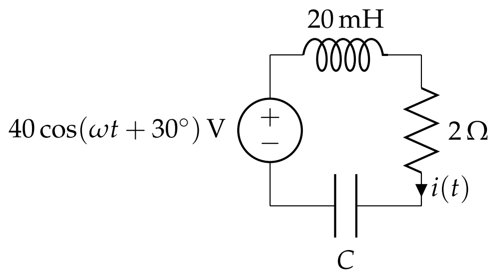
سوال 12.13: شکل 12.55-الف میں منبع کی تعدد ω قابل تبدیل ہے۔ دور کی قدرتی گمکی تعدد $500\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہونے کی صورت میں C کی قیمت کا تخمینہ لگائیں۔ قدرتی تعدد ω_0 پر دور میں رو $i(t)$ دریافت کریں۔ تعدد $2\omega_0$ اور $\frac{\omega_0}{2}$ پر بھی رو دریافت کریں۔

جوابات: $20\cos(500t+30^\circ)\,\mathrm{A}$ ، $2.640\cos(1000t-52.4^\circ)\,\mathrm{A}$ ، $2.640\cos(250t+112.4^\circ)\,\mathrm{A}$

سوال 12.14: شکل 12.55-ب میں عرض پٹی دریافت کریں۔ متغیر مزاحمت کی قیمت تبدیل کرتے ہوئے عرض پٹی آدھی کریں۔ مزاحمت کی قیمت کیا ہو گی؟

جوابات: $\mathrm{BW}=1000\,\mathrm{rad}$ ، $R=5\,\Omega$





شکل 12.55: سوال 12.13 اور سوال 12.13 کے ادوار۔

سوال 12.15: ایک سلسلہ وار RLC دور کی گمکی تعدد $\omega_0 = 2\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ ہے جبکہ $C = 40\,\mathrm{\mu F}$ اور گمکی تعدد پر کل رکاوٹ $2.2\,\Omega$ ہے۔ مزاحمت اور امالہ کی قیمت دریافت کریں۔ دور کی عرض پٹی اور معیاری مستقل بھی حاصل کریں۔

جوابات: $R = 2.2\,\Omega$ ، $L = 6.25\,\mathrm{mH}$ ، $\mathrm{BW} = 352\,\mathrm{rad}$ ، $Q = 5.682$

سوال 12.16: سلسلہ وار RLC دور کا معیاری مستقل 120 اور گمکی تعدد $15\,000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔ دور کی عرض پٹی، بلند انقطاعی تعدد اور پست انقطاعی تعدد دریافت کریں۔

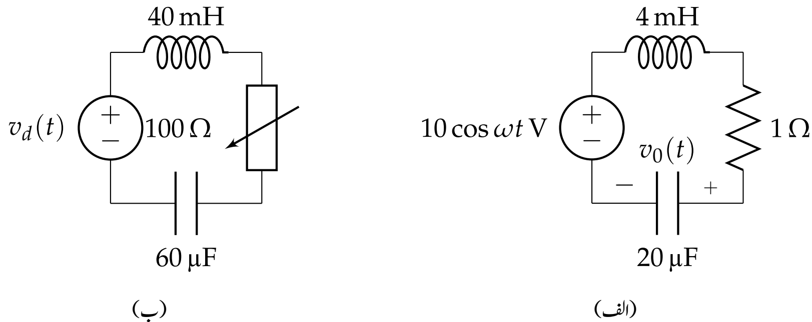
جوابات: $\mathrm{BW} = 125\,\mathrm{rad}$ ، $\omega_H = 15\,063\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $\omega_L = 14\,938\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

سوال 12.17: شکل 12.56-الف میں گمکی تعدد ω_0 ، معیاری مستقل Q ، عرض پٹی BW اور بلند انقطاعی تعدد ω_H حاصل کریں۔ زیادہ سے زیادہ $v_0(t)$ بھی دریافت کریں۔

جوابات: $\omega_0 = 3536\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $Q = 14.1$ ، $\mathrm{BW} = 250\,\mathrm{rad}$ ،
$\omega_H = 3663\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $v_{0\,\text{بلندتر}} = 141.51\,\mathrm{V}$

سوال 12.18: شکل 12.56-ب میں $v_d(t) = 20\cos\omega t\,\mathrm{V}$ ہے۔ قدرتی تعدد، معیاری مستقل، عرض پٹی اور گمکی تعدد پر دور میں طاقت کا ضیاع حاصل کریں۔

جوابات: $\omega_0 = 645\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $Q = 0.26$ ، $\mathrm{BW} = 2500\,\mathrm{rad}$ ، $p = 2\,\mathrm{W}$



شکل 12.56: سوال 12.17 اور سوال 12.18 کے ادوار۔

سوال 12.19: متوازی RLC کی گمکی تعدد $\omega_0 = 1000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ اور گمکی تعدد پر کل رکاوٹ $\boldsymbol{Z} = 10\,\Omega$ ہے۔ دور میں $C = 20\,\mu\mathrm{F}$ ہے۔ آپ سے گزارش ہے کہ L ، R ، Q اور BW دریافت کریں۔

جوابات: $L = 50\,\mathrm{mH}$ ، $R = 10\,\Omega$ ، $Q = 0.2$ ، $\mathrm{BW} = 5\,\mathrm{krad}$

سوال 12.20: متوازی RLC کی گمکی تعدد $10\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ اور گمکی تعدد پر فراوانی $\boldsymbol{Y} = 1\,\mathrm{mS}$ ہے۔ دور میں $C = 1.5\,\mu\mathrm{F}$ ہے۔ امالہ L اور مزاحمت R معلوم کریں۔

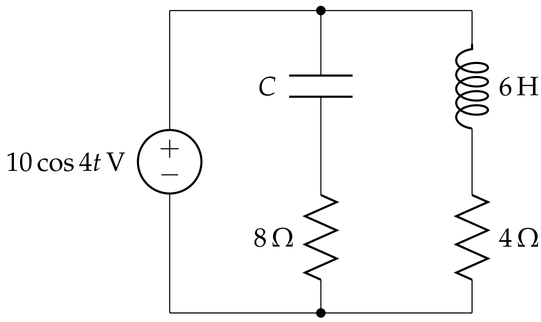
جوابات: $L = 6.67\,\mathrm{mH}$ ، $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$

سوال 12.21: متوازی RLC کو متغیر تعدد، $4\,\mathrm{A}$ کے منبع سے طاقت فراہم کیا گیا ہے۔ دور میں $R = 500\,\Omega$ ، $L = 80\,\mathrm{mH}$ اور $C = 10\,\mu\mathrm{F}$ ہیں۔ دور کی عرض پٹی، انقطاعی تعدد اور انقطاعی تعدد پر دور کا دباو حاصل کریں۔

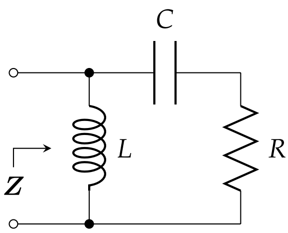
جوابات: $\mathrm{BW} = 200\,\mathrm{rad}$ ، $\omega_H = 1222\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $\omega_L = 1022\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $1414\,\mathrm{V}$ ، $1414\,\mathrm{V}$

سوال 12.22: ایک متوازی RLC دور کی گمکی تعدد $1\,\mathrm{Mrad\,s^{-1}}$ اور عرض پٹی $100\,\mathrm{rad}$ ہے۔ گمکی تعدد پر دور کی کل رکاوٹ $2000\,\Omega$ ہے۔ دور کی امالہ، برق گیر گنجائش اور معیاری مستقل دریافت کریں۔

جوابات: $L = 0.2\,\mu\mathrm{H}$ ، $C = 5\,\mu\mathrm{F}$ ، $Q = 10\,000$



شکل 12.57: سوال 12.24 کا دور۔



شکل 12.58: سوال 12.25 کا دور۔

سوال 12.23: $100\,\Omega$ ، $100\,\mu\mathrm{F}$ اور L کو متوازی جوڑا گیا ہے۔ دور کی گمکی تعدد $1000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔ دور کو $i_d(t) = \cos 1000t + \cos 1500t\,\mathrm{A}$ منبع سے طاقت مہیا کیا گیا ہے۔ امالہ L ، معیاری مستقل، عرض پٹی BW اور Q حاصل کریں۔ دور پر دباو $v_0(t)$ بھی حاصل کریں۔

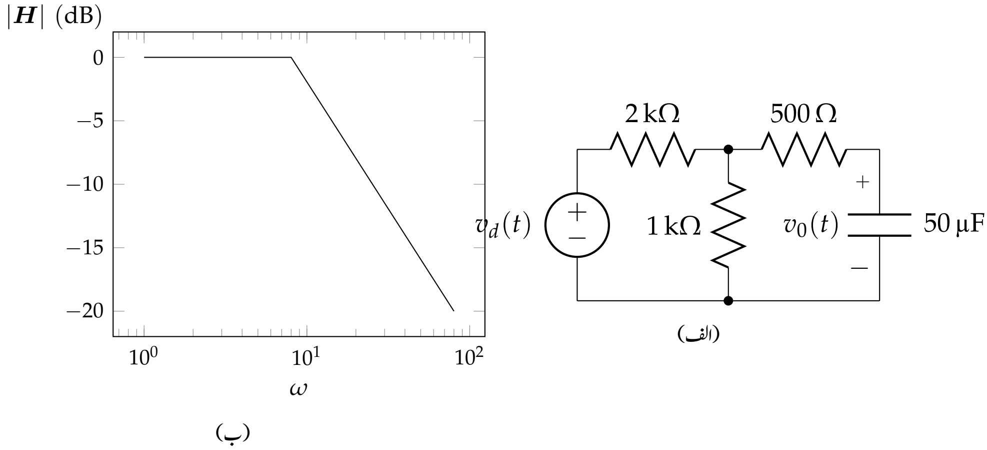
جوابات: $L = 10\,\mathrm{mH}$ ، $\mathrm{BW} = 100\,\mathrm{rad}$ ، $Q = 10$ ،
$v_0(t) = 100\cos 1000t + 11.9\cos(1500t - 83^\circ)\,\mathrm{V}$

سوال 12.24: شکل 12.57 میں گمکی تعدد پر ہے۔ برقی گیر گنجائش C دریافت کریں۔

جوابات: $C = \frac{37\mp\sqrt{793}}{768}\,\mathrm{F}$

سوال 12.25: شکل 12.58 کے گمکی تعدد کی مساوات حاصل کریں۔

جوابات: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{|C^2R^2 - CL|}}$



شکل 12.59: سوال 12.26 کا دور۔

سوال 12.26: شکل 12.59-الف کا تبادلی تفاعل $\frac{\mathrm{V}_0(j\omega)}{\mathrm{V}_d(j\omega)}$ لکھیں اور اس کا بوڈا مقداری خط کھینچیں۔

جواب: $\frac{\mathrm{V}_0(j\omega)}{\mathrm{V}_d(j\omega)} = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{8}}$ ، بوڈا مقداری خط شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔

سوال 12.27: شکل 12.60-الف کا تبادلی تفاعل $\frac{\mathrm{V}_0(\omega)}{\mathrm{V}_d(\omega)}$ لکھیں۔ چھلنی کی قسم لکھیں۔

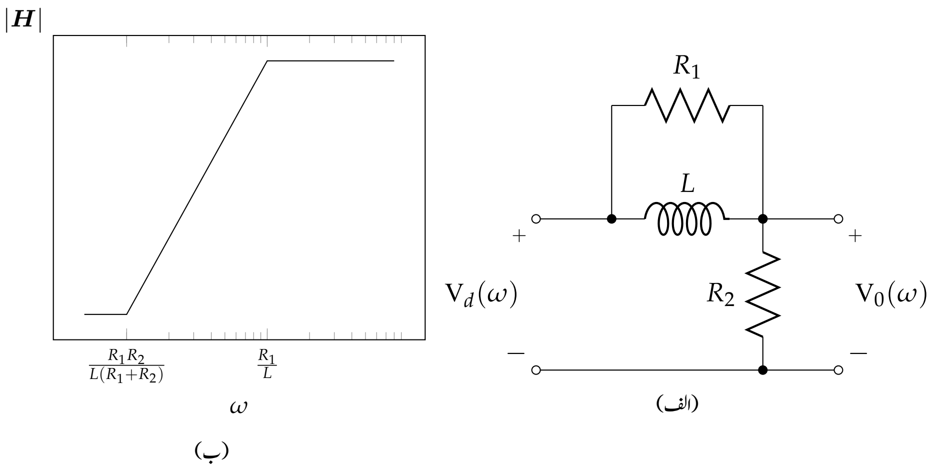
جواب: $\boldsymbol{H} = \frac{R_2 L(j\omega + \frac{R_1}{L})}{j\omega + \frac{R_1 R_2}{L(R_1+R_2)}}$، بلند گزار چھلنی۔

سوال 12.28: شکل 12.61 کا تبادلی تفاعل $\frac{\mathrm{V}_0(\omega)}{\mathrm{V}_d(\omega)}$ لکھیں۔

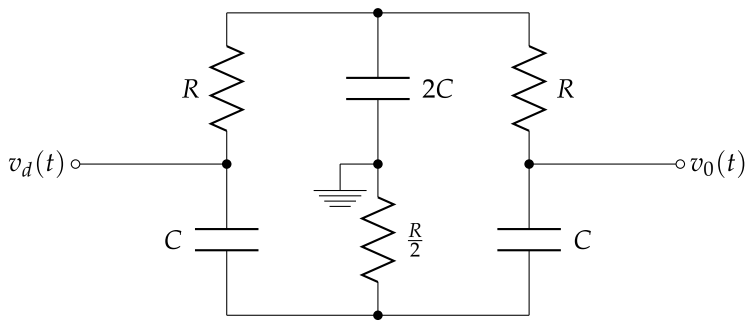
جواب: $\frac{-\omega^2 + \frac{1}{R^2C^2}}{-\omega^2 + \frac{j4\omega}{RC} + \frac{1}{R^2C^2}}$

سوال 12.29: شکل 12.62 کا تبادلی تفاعل $\frac{\mathrm{V}_0(\omega)}{\mathrm{V}_d(\omega)}$ لکھیں۔

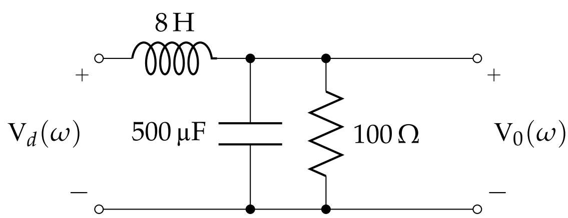
جواب: $\boldsymbol{H} = \frac{250}{-\omega^2 + j20\omega + 250}$



شکل 12.60: سوال 12.27 کا دور۔



شکل 12.61: سوال 12.28 کا دور۔



شکل 12.62: سوال 12.29 کا دور۔