برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 13

لاپلاس بدل

13.1 تعریف

کسی تفاعل $f(t)$ کا **لاپلاس بدل**[1] درج ذیل مساوات دیتا ہے

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathrm{F}(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{13.1}$$

جہاں s **مخلوط تعدد**[2] ہے

$$s = \sigma + j\omega \tag{13.2}$$

اور تفاعل $f(t)$ کی قیمت $t < 0$ پر صفر کے برابر ہے۔

$$f(t) = 0 \quad t < 0 \tag{13.3}$$

لاپلاس بدل سے ادوار کا حل $t \geq 0$ کے لئے حاصل کیا جاتا ہے جبکہ $t < 0$ کو ابتدائی حالت میں سمویا جاتا ہے۔ لاپلاس بدل وقتی دائرہ کار میں تفاعل $f(t)$ کو تعددی دائرہ کار کے تفاعل $\mathrm{F}(s)$ میں تبدیل کرتی ہے۔

Laplace transform[1]
complex frequency[2]

کسی تفاعل کا لاپلاس بدل اس صورت پایا جاتا ہے جب تفاعل درج ذیل شرط پر پورا اترتا ہو جہاں σ کوئی مثبت قیمت ہے۔

$$\int_0^\infty e^{-\sigma t}\left|f(t)\right| \mathrm{d}t < \infty \tag{13.4}$$

لاپلاس بدل کے حصول میں $e^{-\sigma t}$ کے ارتکازی جزو کی بنا کئی ایسے کئی اہم تفاعل کے لاپلاس بدل پائے جاتے ہیں جن کے **فوریئر بدل**[3] نہیں پائے جاتے۔ برقی ادوار میں ایسے تفاعل استعمال کئے جاتے ہیں جن کے لاپلاس بدل پائے جاتے ہوں۔

الٹ لاپلاس بدل[4] درج ذیل مساوات دیتی ہے

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\mathrm{F}(s)\right] = f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_1 - j\omega}^{\sigma + j\omega} \mathrm{F}(s) e^{st}\,\mathrm{d}s \tag{13.5}$$

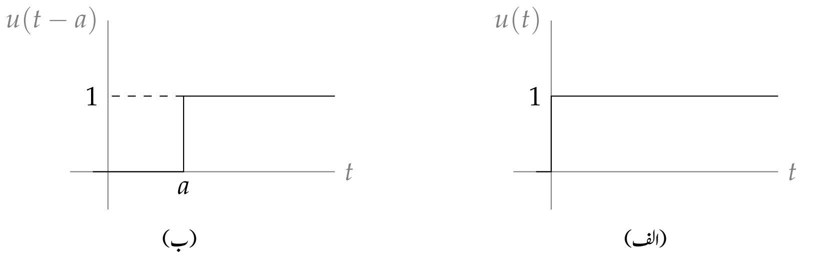
جہاں σ_1 حقیقی ہے اور اس کی قیمت مساوات 13.4 کے σ سے زیادہ ہے یعنی $\sigma_1 > \sigma$ ہے۔ الٹ لاپلاس بدل تعددی دائرہ کار میں تفاعل $\mathrm{F}(s)$ کو وقتی دائرہ کار کے تفاعل $f(t)$ میں تبدیل کرتی ہے۔

لاپلاس بدل آسانی سے حاصل ہوتا ہے جبکہ الٹ لاپلاس بدل مشکل سے حاصل ہوتا ہے۔ ہم کئی تفاعل کے لاپلاس بدل حاصل کرتے ہوئے انہیں جدول میں جوڑیوں کی صورت میں لکھیں گے اور الٹ بدل کو اسی جدول سے دیکھ کر حاصل کریں گے۔ کسی بھی وقتی تفاعل $f(t)$ کا منفرد لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s)$ پایا جاتا ہے لہٰذا دو مختلف وقتی تفاعل $f_1(t)$ اور $f_2(t)$ کے لاپلاس بدل کسی بھی صورت میں یکساں نہیں ہو سکتے ہیں۔ یوں کسی بھی لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s)$ کو سادہ ترین اجزاء میں تقسیم کرتے ہوئے ان کے الٹ بدل کو جدول سے پڑھا جاتا ہے۔ تمام اجزاء کے الٹ لاپلاس بدل کا مجموعہ درکار وقتی تفاعل ہو گا۔ ہم لاپلاس بدل کو **جزوی کسری پھیلاو**[5] کے ذریعہ اجزاء میں تقسیم کریں گے۔

13.2 تفاعل یکتائی

برقی ادوار میں **اکائی سیڑھی تفاعل**[6] $u(t)$ اور **اکائی ضرب تفاعل**[7] $\sigma(t)$ نہایت اہم ہیں۔ ایسے تفاعل جو یا تو خود کہیں غیر متناہی ہوں اور یا ان کا تفرق کہیں غیر متناہی ہو کو **یکتائی تفاعل**[8] کہتا ہے۔ اکائی سیڑھی تفاعل اور اکائی ضرب تفاعل یکتائی تفاعل ہیں۔ اکائی سیڑھی تفاعل پر صفحہ 321 پر حصہ 7.3 میں ہم غور کر چکے ہیں۔

Fourier transform[3]
inverse Laplace transform[4]
partial fraction expansion[5]
unit step function[6]
unit impulse function[7]
singularity function[8]



شکل 13.1: اکائی سیڑھی تفاعل۔

شکل 13.1-الف میں دکھایا گیا اکائی سیڑھی تفاعل درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases} \tag{13.6}$$

اکائی سیڑھی تفاعل $u(t)$ ، جیسے باب 7 میں ذکر کیا گیا، لمحہ $t=0\,\mathrm{s}$ پر سوئچ چالو کرتے ہوئے دور پر $1\,\mathrm{V}$ یا $1\,\mathrm{A}$ لاگو کرنے کے مترادف ہے۔ آئیں شکل 13.1-الف میں دکھائے گئے اکائی سیڑھی تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

مثال 13.1: شکل 13.1 کے تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: مساوات 13.1 کے استعمال سے شکل-الف کا لاپلاس بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[u(t)] &= \int_0^\infty u(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^\infty 1e^{-st}\,\mathrm{d}t\\
&= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^\infty\\
&= \frac{e^{-\infty s}-e^{-0s}}{-s}\\
&= \frac{1}{s} \quad \sigma>0
\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں آخری قدم پر $\sigma > 0$ کی بنا $e^{-\infty s} = 0$ لکھا گیا ہے۔اس طرح اکائی سیڑھی تفاعل کا لاپلاس بدل درج ذیل ہے۔

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathrm{F}(s) = \frac{1}{s} \tag{13.7}$$

شکل 13.1-ب میں وقت کے لحاظ سے منتقل ہوا اکائی سیڑھی تفاعل دکھایا گیا ہے جس کو **وقتی منقولہ اکائی سیڑھی تفاعل**[9] کہتے ہیں۔آئیں اس کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[u(t-a)] &= \int_0^\infty u(t-a)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^a 0e^{-st}\,\mathrm{d}t + \int_a^\infty 1e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= 0 + \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_a^\infty \\
&= \frac{e^{-as}}{s} \qquad \sigma > 0
\end{aligned}$$

اس طرح وقتی منقولہ اکائی سیڑھی تفاعل کا لاپلاس بدل درج ذیل ہے۔

$$\mathcal{L}[u(t-a)] = F(s) = \frac{e^{-as}}{s} \tag{13.8}$$

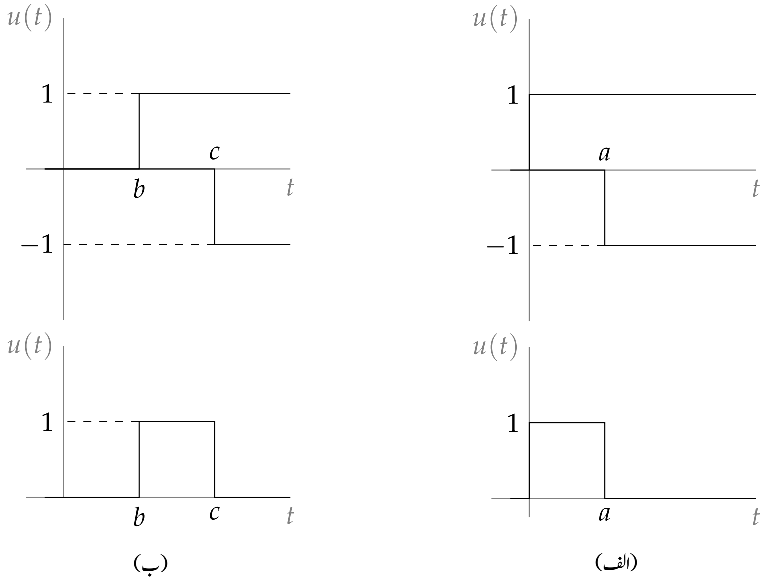
مثال 13.2: شکل 13.2-الف میں دو عدد اکائی سیڑھی تفاعل سے دھڑکن کا حصول دکھایا گیا ہے۔دھڑکن کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔شکل-ب میں وقت کے لحاظ سے منتقل شدہ دھڑکن دکھائی گئی ہے۔اس کا بھی لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: شکل 13.2-الف کے دھڑکن کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & 0 < t < a \\ 0 & t > a \end{cases} \tag{13.9}$$

---

[9] time-shifted unit step function



شکل 13.2: مثال 13.2 کے اشکال۔

لہذا لاپلاس تکمل درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^a 1e^{-st}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1-e^{-as}}{s}\qquad \sigma>0\end{aligned}$$

یعنی دھڑکن کا لاپلاس بدل

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1-e^{-as}}{s} \tag{13.10}$$

ہو گا۔ شکل 13.2-ب کے تفاعل کو اکائی سیڑھی تفاعل کا مجموعہ لکھتے ہوئے

$$f(t) = u(t-b) - u(t-c)$$

لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[u(t-b)] - \mathcal{L}[u(t-c)]$$

مساوات 13.8 کے استعمال سے درج بالا کو

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathrm{F}(s) = \frac{e^{-bs} - e^{-cs}}{s} \tag{13.11}$$

لکھ سکتے ہیں۔

اکائی ضرب تفاعل

شکل 13.3-الف کے مستطیل کی چوڑائی a اور لمبائی $\frac{1}{a}$ ہے لہٰذا اس کا رقبہ $(a \times \frac{1}{a} = 1)$ اکائی کے برابر ہے۔ مستطیل کی چوڑائی لا متناہی کم $(a \to 0)$ کرنے سے اس کی لمبائی لا متناہی بڑھ $(\frac{1}{a} \to \infty)$ جائے گی البتہ اس کا رقبہ اکائی ہی رہے گا۔ایسا مستطیل جس کی چوڑائی صفر کے قریب تر اور رقبہ اکائی ہو کو **اکائی ضرب تفاعل**[10] تصور کیا جا سکتا ہے۔لمحہ t_0 پر پائے جانے والے اکائی ضرب تفاعل کو $\delta(t - t_0)$ لکھا جاتا ہے جس کو ترسیمی طور پر شکل 13.3-ب میں دکھایا گیا ہے۔اکائی ضرب تفاعل کو کئی دیگر تفاعل سے بھی ظاہر کیا جا سکتا ہے۔

لکڑی پر کیل کو ہتھوڑی سے ضرب لگانے سے نہایت کم وقت کے لئے انتہائی زیادہ طاقت عمل میں آتا ہے اگرچہ ہتھوڑی کی توانائی محدود ہوتی ہے۔اگر ہتھوڑی کی توانائی ایک جاول ہوتی تو اس کو **اکائی ضرب تفاعل** تصور کیا جا سکتا ہے۔اسی مشابہت سے ہم ایسے تفاعل کو **اکائی ضرب تفاعل** کہیں گے۔

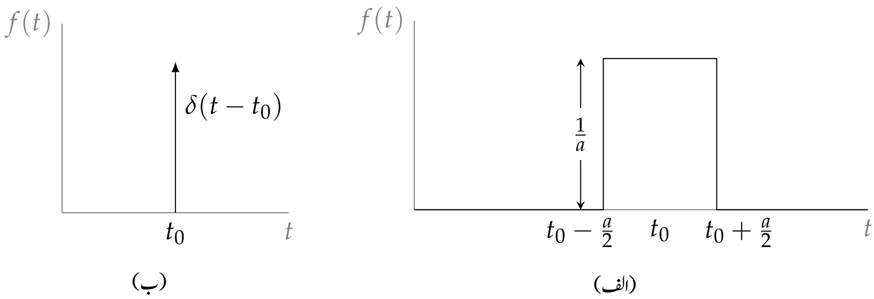
اکائی ضرب تفاعل کو الجبرائی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \delta(t - t_0) &= 0 \quad t \neq t_0 \\ \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \delta(t - t_0)\,\mathrm{d}t &= 1 \quad \epsilon > 0 \end{aligned} \tag{13.12}$$

اکائی جھٹکے کی قیمت لمحہ $t = t_0$ پر غیر معین ہے جبکہ اس لمحے کے علاوہ اس کی قیمت صفر کے برابر ہے البتہ جھٹکے کا رقبہ اکائی ہے۔ جھٹکے کے رقبے کو تفاعل کا زور بھی کہتے ہیں۔

---

[10] unit impulse function



شکل 13.3: اکائی ضرب تفاعل۔

اکائی ضرب تفاعل کی ایک اہم خاصیت جسے خاصیت نمونہ بندی[11] کہتے ہیں کو درج ذیل تکمل سے سمجھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(t)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t &= \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} f(t_0)\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t\\&= f(t_0)\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon}\delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t\\&= f(t_0)\end{aligned}$$

جہاں $t_0-\epsilon$ تا $t_0+\epsilon$ کے علاوہ $\delta(t-t_0)=0$ ہے لہٰذا تکمل کے حدود یہی کر دیے گئے ہیں۔چونکہ $\epsilon\to 0$ ہے لہٰذا ان حدود کے مابین کسی بھی تفاعل کی قیمت میں تبدیلی کو نظرانداز کرتے ہوئے تفاعل کی قیمت $f(t_0)$ لی جا سکتی ہے۔غیر تغیر $f(t_0)$ کو تکمل کے باہر لے جایا جا سکتا ہے۔یوں ہمارے پاس صرف $\delta(t-t_0)$ کا تکمل رہ جاتا ہے جو مساوات 13.12 کے تحت اکائی کے برابر ہے۔درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں سے واضح ہے کہ اکائی ضرب تفاعل $f(t)$ کا نمونہ $t=t_0$ پر حاصل کرتا ہے۔

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)\delta(t-t_0)=\begin{cases}f(t_0) & t_1<t_0<t_2\\0 & t_0<t_1,\, t_0>t_2\end{cases}\tag{13.13}$$

اگرچہ حقیقی دنیا میں ہم لمحاتی طور پر لامحدود قیمت کا دباو یا رو کسی دور پر لاگو نہیں کر سکتے ہیں لہٰذا حقیقی دنیا میں اکائی ضرب تفاعل نہیں پایا جاتا ہے۔اس کے باوجود یہ ایک اہم تفاعل ہے جس کو استعمال کرتے ہوئے الجبرائی طور پر مختلف اعمال کا مطالعہ ممکن بنایا جاتا ہے۔مثال کے طور پر آسمانی بجلی کو اکائی ضرب تصور کیا جا سکتا ہے۔اسی طرح آواز کو عددی

[11] sampling property

صورت میں تبدیل کرنے کے عمل پر غور کے لئے اس تفاعل کا سہارا لیا جاتا ہے۔ **مماثل سے عددی مبادل کار**[12] کی مدد سے مماثل اشارے کو عددی صورت میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ انسانی کان 20 Hz تا 20 kHz تک کی آواز سن سکتا ہے۔ **اصول نی کوسٹ**[13] کے تحت کسی بھی اشارے کی مکمل معلومات برقرار رکھنے کی خاطر اشارے کی بلند تر تعدد کی دگنی تعدد پر نمونہ حاصل کرنا ضروری ہے۔ یہی وجہ ہے کہ انسانی آواز کے عددی نمونے 44.1 kHz پر حاصل کئے جاتے ہیں۔

مثال 13.3: اکائی ضرب تفاعل کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: لاپلاس تکمل لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] &= \int_0^\infty \delta(t-t_0)e^{-st}\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \delta(t-t_0)e^{-st}\,\mathrm{d}t\\
&= e^{-st_0}\int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \delta(t-t_0)\,\mathrm{d}t\\
&= e^{-st_0}
\end{aligned}$$

اس جواب کو مساوات 13.13 میں دی گئی خاصیت نمونہ بندی کی مدد سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = \int_0^\infty \delta(t-t_0)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

میں $f(t) = e^{-st}$ تصور کرتے ہوئے خاصیت نمونہ بندی استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = \mathrm{F}(s) = e^{-st_0} \tag{13.14}$$

چونکہ $e^{-0s} = 1$ کے برابر ہے لہٰذا درج بالا سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathrm{F}(s) = 1 \tag{13.15}$$

---

[12] analog to digital converter, ADC
[13] Nyquist criterion

13.3 لاپلاس بدل کی جوڑیاں

آئیں کئی اہم لاپلاس بدل کی جوڑیاں حاصل کریں۔

مثال 13.4: تفاعل $f(t) = t$ کا لاپلاس بدل دریافت کریں۔

حل: لاپلاس تکمل استعمال کرتے ہیں۔

$$\mathrm{F}(s) = \int_0^\infty t e^{-st} \,\mathrm{d}t$$

تکمل کو ٹکڑوں میں حاصل کرنے کی خاطر ہم

$$\begin{aligned} u &= t \\ \mathrm{d}v &= e^{-st} \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

لیتے ہیں۔یوں

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \mathrm{d}t \\ v &= \int e^{-st} \,\mathrm{d}t = -\frac{e^{-st}}{-s} \end{aligned}$$

ہو گا لہٰذا

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(s) &= -\frac{t}{s}e^{-st}\bigg|_0^\infty + \int_0^\infty \frac{e^{-st}}{s} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{s^2} \quad \sigma > 0 \end{aligned} \tag{13.16}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مثال 13.5: تفاعل e^{at} کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل:

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty e^{at} e^{-st} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} \, \mathrm{d}t \\
&= \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^\infty \qquad \sigma > 0 \\
&= \frac{1}{s-a}
\end{aligned}
$$

مثال 13.6: تفاعل $\cos \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: کوسائن کو $\frac{e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$ لکھتے ہوئے لاپلاس تکمل حل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \int_0^\infty \frac{e^{+j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2} e^{-st} \, \mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-(s-j\omega)t} + e^{-(s+j\omega)t}}{2} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) \qquad \sigma > 0 \\
&= \frac{s}{s^2 + \omega^2}
\end{aligned}
$$

مثال 13.7: تفاعل $\sin \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: سائن کو $\frac{e^{+j\omega t}-e^{-j\omega t}}{j2}$ لکھتے ہوئے لاپلاس تکمل حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(s) &= \int_0^\infty \frac{e^{+j\omega t}-e^{-j\omega t}}{j2} e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{e^{-(s-j\omega)t}-e^{-(s+j\omega)t}}{j2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{j2}\left(\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right) \qquad \sigma > 0 \\
&= \frac{\omega}{s^2+\omega^2}
\end{aligned}$$

جدول 13.1 میں کئی لاپلاس بدل کی جوڑیاں پیش کی گئی ہیں۔

مشق 13.1: تفاعل $\cosh \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\mathrm{F}(s) = \frac{s}{s^2-\omega^2}$

مشق 13.2: تفاعل $\sinh \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\mathrm{F}(s) = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}$

جدول 13.1: لاپلاس بدل کی جوڑیاں۔

$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	e^{-st_0}
$u(t)$	$\frac{1}{s}$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$e^{\mp at}$	$\frac{1}{s\pm a}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

13.4 خواص البدل

لاپلاس بدل کے کئی مسئلوں پر اس حصے میں غور کیا جائے گا۔ یہ مسئلے لاپلاس بدل کے خصوصیات بیان کرتے ہیں اور ان کی مدد سے لاپلاس بدل کا حصول نہایت عمدگی کے ساتھ ممکن ہوتا ہے۔

متناسب وقت

مسئلہ متناسب وقت[14] کہتا ہے کہ

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a}\mathrm{F}\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0 \tag{13.17}$$

آئیں اس نتیجے کو لاپلاس تکمل کے ذریعہ حاصل کریں۔

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^\infty f(at)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

اس میں $\lambda = at$ لیتے ہوئے $\mathrm{d}\lambda = a\,\mathrm{d}t$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(at)] &= \int_0^\infty f(\lambda)e^{-\left(\frac{\lambda}{a}\right)s}\frac{\mathrm{d}\lambda}{a}\\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty f(\lambda)e^{-\left(\frac{s}{a}\right)\lambda}\,\mathrm{d}\lambda\\ &= \frac{1}{a}\mathrm{F}\left(\frac{s}{a}\right) \quad a > 0\end{aligned}$$

منتقلی وقت

مسئلہ منتقلی وقت[15] کہتا ہے کہ

$$\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] = e^{-t_0 s}\mathrm{F}(s) \quad t_0 \geq 0 \tag{13.18}$$

---

[14] time-scaling theorem
[15] time-shifting theorem

آئیں مسئلہ منقولہ وقت کو لاپلاس تکمل سے حاصل کریں۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] &= \int_0^\infty f(t-t_0)u(t-t_0)e^{-st}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{t_0}^\infty f(t-t_0)e^{-st}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

اب اگر ہم $\lambda = t - t_0$ لیں تو $\mathrm{d}\lambda = \mathrm{d}t$ ہو گا

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t-t_0)u(t-t_0)] &= \int_0^\infty f(\lambda)e^{-s(\lambda+t_0)}\,\mathrm{d}\lambda\\ &= e^{-t_0 s}\int_0^\infty f(\lambda)e^{-s\lambda}\,\mathrm{d}\lambda\\ &= e^{-t_0 s}\mathrm{F}(s)\end{aligned}$$

منتقلی تعدد

مسئلہ منتقلی تعدد[16] کہتا ہے کہ

$$\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \mathrm{F}(s+a) \tag{13.19}$$

یعنی تفاعل کو e^{-at} سے ضرب دینے سے لاپلاس بدل کی تعدد تبدیل ہو کر $s+a$ ہو جاتی ہے۔ اس مسئلے کو **مسئلہ ترمیم تعدد**[17] بھی کہتے ہیں۔

جدول 13.2 میں کئی مسئلے درج کئے گئے ہیں۔ آئیں ان کا استعمال دیکھیں۔

مثال 13.8: تفاعل $\sin\omega t$ کا لاپلاس بدل $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ہے۔ جدول 13.2 میں مسئلہ منتقلی تعدد کی مدد سے $e^{-at}\sin\omega t$ کا بدل دریافت کریں۔

---

[16] frequency-shifting theorem
[17] frequency modulation theorem

جدول 13.2: لاپلاس بدل کے مسئلے۔

مسئلہ	$f(t)$	$\mathrm{F}(s)$
جمع و منفی	$f_1(t)+f_2(2)$	$\mathrm{F}_1(s)+\mathrm{F}_2(s)$
تناسب مقدار	$Af(t)$	$A\mathrm{F}(s)$
تناسب وقت	$f(at)$	$\frac{1}{a}\mathrm{F}(\frac{s}{a}),\, a>0$
منتقلی وقت	$f(t-t_0)u(t-t_0),\, t_0>0$	$e^{-t_0 s}\mathrm{F}(s)$
منتقلی وقت	$f(t)u(t-t_0),\, t_0>0$	$e^{-t_0 s}\mathcal{L}[f(t+t_0)]$
منتقلی تعدد	$e^{-at}f(t)$	$\mathrm{F}(s+a)$
وقت سے ضرب	$tf(t)$	$-\frac{\mathrm{d}\mathrm{F}(s)}{\mathrm{d}s}$
وقت سے ضرب	$t^n f(t)$	$(-1)^n \frac{\mathrm{d}^n\mathrm{F}(s)}{\mathrm{d}s^n}$
وقت سے تقسیم	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty \mathrm{F}(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$
تفرق	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$s^n\mathrm{F}(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f^1(0)-\cdots-s^0 f^{n-1}(0)$
تکمل	$\int_0^t f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$	$\frac{\mathrm{F}(s)}{s}$
الجھاو	$\int_0^t f_1(\lambda)f_2(t-\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$	$\mathrm{F}_1(s)\mathrm{F}_2(s)$

حل: مسئلہ منتقلی تعدد کے تحت لاپلاس بدل میں s کی جگہ $s+a$ لکھا جائے گا لہٰذا جواب درج ذیل ہو گا۔

$$\mathcal{L}[e^{-at}\sin\omega t] = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

مثال 13.9: تفاعل e^{-at} کا لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s) = \frac{1}{s+a}$ ہے۔ مسئلہ ضرب وقت کی مدد سے te^{-at} کا لاپلاس بدل دریافت کریں۔

حل: مسئلہ ضرب وقت کے تحت

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[te^{-at}] &= -\frac{\mathrm{dF}(s)}{\mathrm{d}s}\\ &= \frac{1}{(s+a)^2}\end{aligned}$$

ہو گا۔

تفاعل $f(t) = 1$ کا لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s) = \frac{1}{s}$ ہے۔ مسئلہ ضرب وقت کی مدد سے تفاعل t کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

حل: مسئلہ ضرب وقت کے تحت جواب درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t] &= -\frac{\mathrm{dF}(s)}{\mathrm{d}s}\\ &= \frac{1}{s^2}\end{aligned}$$

مشق 13.3: تفاعل $\sin \omega t$ کا لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ ہے۔ مسئلہ ضرب وقت کی مدد سے تفاعل $t \sin \omega t$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}$

مشق 13.4: جدول 13.1 سے t اور e^{-2t} کے لاپلاس بدل دیکھتے ہوئے جدول 13.2 کی مدد سے $t^2(t+e^{-2t})$ کا لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $\frac{6}{s^4} + \frac{2}{(s+2)^3}$

مشق 13.5: جدول 13.1 سے $\sin \omega t$ کا بدل دیکھتے ہوئے جدول 13.2 میں دئے مسئلہ تفرق کی مدد سے $\cos \omega t$ کا لاپلاس بدل دریافت کریں۔

جواب: $\frac{s}{s^2+\omega^2}$

13.5 الٹ لاپلاس بدل کا حصول

برقی ادوار حل کرتے ہوئے ہمیں جن لاپلاس بدل سے واسطہ پڑتا ہے انہیں دو کثیر رکنی کے کسر کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathrm{F}(s) = \frac{\mathrm{P}(s)}{\mathrm{Q}(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} \tag{13.20}$$

شمار کنندہ $\mathrm{P}(s)$ کے جذر $-z_1$ تا $-z_m$ کو تفاعل کے صفر کہتے ہیں جبکہ نسب نما $\mathrm{Q}(s)$ کے جذر $-p_1$ تا $-p_n$ کو تفاعل کے قطب کہتے ہیں۔ اگر $n \le m$ ہو تب $\mathrm{P}(s)$ کو $\mathrm{Q}(s)$ سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\mathrm{F}(s) = \frac{\mathrm{P}(s)}{\mathrm{Q}(s)} = C_{m-n}s^{m-n} + \cdots + C_2 s^2 + C_1 s + C_0 + \frac{\mathrm{P}_1(s)}{\mathrm{Q}(s)} \tag{13.21}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ ہم $\frac{\mathrm{P}_1(s)}{\mathrm{Q}(s)}$ کی **جزوی کسری پھیلاو**[18] کرنا چاہتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر نسب نما $\mathrm{Q}(s)$ کے جذر پر غور کرنا ہو گا۔

13.5.1 جزوی کسری پھیلاو

- اگر $\mathrm{Q}(s)$ کے جذر سادہ ہوں تب $\frac{\mathrm{P}_1(s)}{\mathrm{Q}(s)}$ کو درج ذیل جزوی کسری صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{\mathrm{P}_1(s)}{\mathrm{Q}(s)} = \frac{K_1}{s+p_1} + \frac{K_2}{s+p_2} + \cdots + \frac{K_n}{s+p_n} \tag{13.22}$$

- اگر $\mathrm{Q}(s)$ کے جذر میں مخلوط اعداد پائے جاتے ہوں تو یہ جوڑی دار مخلوط اعداد کی صورت میں ہوں گے۔ یوں ہر جوڑی کے لئے درج ذیل لکھنا ممکن ہو گا جہاں K_1 اور K_1^* آپس میں جوڑی دار مخلوط اعداد ہیں۔

$$\frac{\mathrm{P}_1(s)}{\mathrm{Q}_1(s)(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)} = \frac{K_1}{s+\alpha-j\beta} + \frac{K_1^*}{s+\alpha+j\beta} + \cdots \tag{13.23}$$

[18] partial fraction expansion

• اگر $\mathrm{Q}(s)$ کے جذر میں ہم قطب r گنا پایا جاتا ہو تب اس قطب کی جزوی کسری پھیلاو درج ذیل ہو گی۔

$$\frac{\mathrm{P}_1(s)}{\mathrm{Q}_1(s)(s+p_1)^r}=\frac{K_1}{(s+p_1)}+\frac{K_2}{(s+p_1)^2}+\cdots+\frac{K_r}{(s+p_1)^r}+\cdots \tag{13.24}$$

لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s)$ کی جزوی کسری پھیلاو کے بعد علیحدہ علیحدہ کسر کا الٹ لاپلاس بدل جدول سے پڑھا جا سکتا ہے۔ تمام کسروں کے الٹ لاپلاس بدل کا مجموعہ $\mathrm{F}(s)$ کا الٹ لاپلاس بدل ہو گا۔

سادہ قطبین

سادہ قطبین کی صورت میں لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s)$ کا جزوی کسری پھیلاو درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{F}(s)=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}=\frac{\mathrm{P}}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}=\frac{K_1}{s+p_1}+\frac{K_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{K_n}{s+p_n}$$

مساوات کو $(s+p_i)$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$(s+p_1)\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}=\frac{\mathrm{P}}{(s+p_2)\cdots(s+p_n)}=K_1+\frac{(s+p_1)K_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{(s+p_1)K_n}{s+p_n}$$

اس میں $s=-p_1$ پر کرنے سے

$$\begin{aligned}(s+p_1)\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\bigg|_{s=-p_1}&=\frac{\mathrm{P}}{(-p_1+p_2)\cdots(-p_1+p_n)}\\&=K_1+\frac{(-p_1+p_1)K_2}{s+p_2}+\cdots+\frac{(-p_1+p_1)K_n}{s+p_n}\end{aligned}$$

یعنی

$$(s+p_1)\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\bigg|_{s=-p_1}=\frac{\mathrm{P}}{(-p_1+p_2)\cdots(-p_1+p_n)}=K_1$$

حاصل ہوتا ہے۔اسی طرح جزوی کسری پھیلاو کے بقایا مستقل درج ذیل مساوات سے حاصل کئے جا سکتے ہیں۔

$$K_i = (s+p_i)\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}\bigg|_{s=-p_i} = (s+p_i)\mathrm{F}\big|_{s=-p_i} \tag{13.25}$$

تمام K_i جانتے ہوئے الٹ لاپلاس بدل درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{L}^{-1}\mathrm{F}(s) = f(t) = \left(K_1e^{-p_1t} + K_2e^{-p_2t} + \cdots + K_ne^{-p_nt}\right)u(t) \tag{13.26}$$

مثال 13.10: لاپلاس تفاعل $\mathrm{F}(s) = \frac{10(s+2)}{(s+4)(s+6)}$ کے جزوی کسری پھیلاو حاصل کرتے ہوئے الٹ لاپلاس تفاعل $f(t)$ دریافت کریں۔

حل: نسب نما کے قطبین سادہ ہیں لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathrm{F}(s) = \frac{10(s+2)}{(s+4)(s+6)} = \frac{K_1}{s+4} + \frac{K_2}{s+6} \tag{13.27}$$

مستقل K_1 حاصل کرنے کی خاطر دونوں اطراف کو $(s+4)$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$\frac{10(s+2)}{(s+6)} = K_1 + \frac{K_2(s+4)}{s+6}$$

دونوں اطراف میں $s=-4$ پر کرتے

$$\frac{10(-4+2)}{(-4+6)} = K_1 + \frac{K_2(-4+4)}{s+6}$$

ہوئے K_1 کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$K_1 = -10$$

یہی طریقہ کار K_2 کے لئے بھی استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.27 کو $(s+6)$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$\frac{10(s+2)}{(s+4)} = \frac{K_1(s+6)}{s+4} + K_2$$

دونوں اطراف میں $s=-6$ پر کرتے ہیں۔

$$\frac{10(-6+2)}{(-6+4)}=\frac{K_1(-6+6)}{-6+4}+K_2$$

یوں K_2 حاصل ہوتا ہے۔

$$K_2=20$$

اس طرح مساوات 13.27 کے تفاعل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\mathrm{F}(s)=-\frac{10}{s+4}+\frac{20}{s+6}$$

جس کا الٹ لاپلاس لیتے ہوئے وقتی دائرہ کار میں تفاعل لکھتے ہیں۔

$$\mathcal{L}^{-1}\mathrm{F}(s)=f(t)=\left(-10e^{-4t}+20e^{-6t}\right)u(t)$$

مشق 13.6: تفاعل $\mathrm{F}(s)=\frac{5(s+6)}{(s+3)(s+5)}$ دیا گیا ہے۔اس کا الٹ لاپلاس تفاعل حاصل کریں۔

جواب: $f(t)=(\frac{15}{2}e^{-3t}-\frac{5}{2}e^{-5t})u(t)$

مشق 13.7: تفاعل $\mathrm{F}(s)=\frac{(s^2+5s+1)}{s(s+2)(s+3)}$ دیا گیا ہے۔اس کا الٹ لاپلاس تفاعل حاصل کریں۔

جواب: $f(t)=(\frac{1}{6}+\frac{7}{2}e^{-2t}-\frac{8}{3}e^{-3t})u(t)$

جوڑی دار مخلوط قطبین

فرض کریں کہ $\mathrm{F}(s)$ میں جوڑی دار مخلوط قطبین کی ایک جوڑی پائی جاتی ہے۔ایسی صورت میں $\mathrm{F}(s)$ کی جزوی کسری پھیلاو کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\mathrm{F}(s)=\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}_1(s+\alpha-j\beta)(s+\alpha+j\beta)}=\frac{K_1}{s+\alpha-j\beta}+\frac{K_1^*}{s+\alpha+j\beta}+\cdots$$

جہاں سادہ قطبین کی طرح K_1 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$(s+\alpha-j\beta)\mathrm{F}\big|_{s=-\alpha+j\beta}=K_1 \tag{13.28}$$

مستقل K_1^* کو بھی اسی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے البتہ ایسا کرنے کی ضرورت نہیں ہے چونکہ دونوں مستقل آپس میں جوڑی دار مخلوط اعداد ہیں۔اس طرح اگر $K_1=K\underline{/\theta}$ ہو تو $K_1^*=K\underline{/-\theta}$ ہو گا اور $\mathrm{F}(s)$ کا جزوی کسری پھیلاو درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(s)&=\frac{K\underline{/\theta}}{s+\alpha-j\beta}+\frac{K\underline{/-\theta}}{s+\alpha+j\beta}+\cdots\\&=\frac{Ke^{j\theta}}{s+\alpha-j\beta}+\frac{Ke^{-j\theta}}{s+\alpha+j\beta}+\cdots\end{aligned}$$

یوں وقتی دائرہ کار میں تفاعل درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned}f(t)=\mathcal{L}^{-1}\mathrm{F}(s)&=Ke^{j\theta}e^{-(\alpha-j\beta)t}+Ke^{-j\theta}e^{-(\alpha+j\beta)t}+\cdots\\&=Ke^{-\alpha t}\left(e^{j(\theta+\beta t)}+e^{-j(\theta+\beta t)}\right)+\cdots\\&=2Ke^{-\alpha t}\cos(\beta t+\theta)+\cdots\end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر $\frac{e^{+jx}+e^{-jx}}{2}=\cos x$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

مثال 13.11: درج ذیل لاپلاس تفاعل کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

$$\mathrm{F}(s)=\frac{10(s+4)}{s(s^2+2s+2)}$$

حل: اس تفاعل کے نسب نما میں s^2+2s+2 کے جذر $-1+j$ اور $-1-j$ ہیں لہٰذا تفاعل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathrm{F}(s)=\frac{10(s+4)}{s(s+1-j)(s+1+j)}$$

اس کی جزوی کسری پھیلاو لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{F}(s)=\frac{K_1}{s}+\frac{K_2}{s+1-j}+\frac{K_2^*}{s+1+j}$$

مساوات کے مستقل حاصل کرتے ہیں۔ پہلے K_1 حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}K_1&=\left.\frac{10(s+4)}{(s+1-j)(s+1+j)}\right|_{s=0}\\&=\frac{10(0+4)}{(0+1-j)(0+1+j)}\\&=20\end{aligned}$$

اسی طرح K_2 حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}K_2&=\left.\frac{10(s+4)}{s(s+1+j)}\right|_{s=-1+j}\\&=\frac{10(-1+j+4)}{(-1+j)(-1+j+1+j)}\\&=-10+j5\end{aligned}$$

ہم جانتے ہیں کہ K_2^* درج بالا کا جوڑی دار مخلوط عدد یعنی $K_2^*=-10-j5$ ہے۔ اس کے باوجود ہم اس کو حل کرتے ہوئے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}K_2^*&=\left.\frac{10(s+4)}{s(s+1-j)}\right|_{s=-1-j}\\&=\frac{10(-1-j+4)}{(-1-j)(-1-j+1-j)}\\&=-10-j5\end{aligned}$$

ان مستقل کو استعمال کرتے ہوئے $\mathrm{F}(s)$ کا جزوی کسری پھیلاو لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{F}(s)=\frac{20}{s}+\frac{(-10+j5)}{s+1-j}+\frac{(-10-j5)}{s+1+j}$$

الٹ لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
f(t) = \mathcal{L}^{-1}\mathrm{F}(s) &= \left[20 + (-10 + j5)e^{-(1-j)t} + (-10 - j5)e^{-(1+j)t}\right] u(t) \\
&= \left[20 - 10e^{-t}\left(e^{jt} + e^{-jt}\right) + j5e^{-t}\left(e^{jt} - e^{-jt}\right)\right] u(t) \\
&= \left(20 - 20e^{-t}\cos t - 10e^{-t}\sin t\right) u(t) \\
&= \left[20 - 10\sqrt{5}e^{-t}\cos(t + 26.56^\circ)\right] u(t)
\end{aligned}$$

آئیں حاصل جواب کا لاپلاس بدل حاصل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ ہمارا جواب درست ہے۔ ہم درج ذیل

$$f(t) = \left(20 - 20e^{-t}\cos t - 10e^{-t}\sin t\right) u(t)$$

کا لاپلاس بدل جدول 13.1 کی مدد سے لکھتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(s) &= \frac{20}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1^2} - \frac{10}{(s+1)^2 + 1^1} \\
&= \frac{10(s+4)}{s(s^2 + 2s + 2)}
\end{aligned}$$

اصل لاپلاس بدل حاصل کرتے ہوئے ہم نے ثابت کیا کہ ہم نے صحیح وقتی تفاعل حاصل کیا ہے۔

مشق 13.8: لاپلاس تفاعل $\mathrm{F}(s) = \frac{2s+3}{s^2+6s+34}$ دیا ہوا ہے۔ اس کا الٹ لاپلاس تفاعل $f(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $f(t) = e^{-3t}\left(2\cos 5t - \frac{3}{5}\sin 5t\right) u(t)$

مشق 13.9: تفاعل $\mathrm{F}(s) = \frac{5(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+5)}$ کا الٹ لاپلاس تفاعل دریافت کریں۔

جواب: $f(t) = \left[-\frac{5}{8}e^{-3t} + \frac{1}{8}e^{-t}\left(5\cos 2t + 15\sin 2t\right)\right] u(t)$

کثیر ہم قطبین

فرض کریں کہ $\mathrm{F}(s)$ میں $-p_1$ قطب r مرتبہ پایا جاتا ہے۔ایسی صورت میں تفاعل کا جزوی کسری پھیلاو درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(s) &= \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}_1(s+p_1)^r}\\ &= \frac{K_r}{(s+p_1)^r}+\frac{K_{r-1}}{(s+p_1)^{r-1}}+\frac{K_{r-2}}{(s+p_1)^{r-2}}+\frac{K_{r-3}}{(s+p_1)^{r-3}}+\cdots\\ &\qquad +\frac{K_3}{(s+p_1)^3}+\frac{K_2}{(s+p_1)^2}+\frac{K_1}{(s+p_1)^1}+\cdots\end{aligned}$$

مساوات کے دونوں اطراف کو $(s+p_1)^r$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}_1} &= K_r+K_{r-1}(s+p_1)^1+K_{r-2}(s+p_1)^2+K_{r-3}(s+p_1)^3+\cdots\\ &\qquad +K_3(s+p_1)^{r-3}+K_2(s+p_1)^{r-2}+K_1(s+p_1)^{r-1}+\cdots\end{aligned} \tag{13.29}$$

درج بالا مساوات میں $s=-p_1$ پر کرنے سے K_r حاصل ہوتا ہے۔

$$K_r = \left.\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}_1}\right|_{s=-p_1} = \left.(s+p_1)^r\mathrm{F}\right|_{s=-p_1} \tag{13.30}$$

مساوات 13.29 کا ایک مرتبہ تفرق لیتے ہوئے۔

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}_1}\right] &= K_{r-1}+2K_{r-2}(s+p_1)^1+3K_{r-3}(s+p_1)^2+\cdots+(r-3)K_3(s+p_1)^{r-4}\\ &\qquad +(r-2)K_2(s+p_1)^{r-3}+(r-1)K_1(s+p_1)^{r-2}+\cdots\end{aligned} \tag{13.31}$$

حاصل جواب میں $s=-p_1$ پر کرنے سے K_{r-1} حاصل ہوتا ہے۔

$$K_{r-1} = \left.\frac{1}{1!}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[(s+p_1)^r\mathrm{F}\right]\right|_{s=-p_1} \tag{13.32}$$

اسی طرح مساوات 13.29 کا دو مرتبہ تفرق لے کر اس میں $s=-p_1$ پر کرنے سے K_{r-2} حاصل ہو گا۔

$$K_{r-2} = \left.\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\left[(s+p_1)^r\mathrm{F}\right]\right|_{s=-p_1} \tag{13.33}$$

یوں مستقل حاصل کرنے کی عمومی مساوات درج ذیل ہے۔

$$K_{r-m} = \frac{1}{m!}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}s^m}\left[(s+p_1)^r \mathrm{F}\right]\Bigg|_{s=-p_1} \tag{13.34}$$

مثال 13.12: لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s) = \frac{s+1}{(s+2)^3(s+3)}$ سے وقتی تفاعل حاصل کریں۔

حل: دیے گئے تفاعل کا جزوی کسری پھیلاو لکھتے ہیں۔

$$\frac{s+1}{(s+2)^3(s+3)} = \frac{K_0}{s+3} + \frac{K_1}{(s+2)} + \frac{K_2}{(s+2)^2} + \frac{K_3}{(s+2)^3} \tag{13.35}$$

مستقل K_0 حاصل کرنے کی خاطر مساوات کے دونوں اطراف کو $(s+3)$ سے ضرب دیتے ہوئے

$$\frac{s+1}{(s+2)^3} = K_0 + \frac{(s+3)K_1}{(s+2)} + \frac{(s+3)K_2}{(s+2)^2} + \frac{(s+3)K_3}{(s+2)^3}$$

دونوں اطراف میں $s = -3$ پر کرتے ہوئے

$$\frac{-3+1}{(-3+2)^3} = K_0 + \frac{(-3+3)K_1}{(-3+2)} + \frac{(-3+3)K_2}{(-3+2)^2} + \frac{(-3+3)K_3}{(-3+2)^3}$$

بائیں ہاتھ تین قوسین صفر کے برابر ہو جاتے ہیں لہٰذا

$$K_0 = 2$$

حاصل ہوتا ہے۔ مستقل K_3 حاصل کرنے کی خاطر مساوات 13.35 کے دونوں اطراف کو $(s+2)^3$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$\frac{s+1}{s+3} = \frac{(s+2)^3}{s+3}K_0 + (s+2)^2K_1 + (s+2)K_2 + K_3 \tag{13.36}$$

اس میں $s = -2$ پر کرنے سے K_3 حاصل ہوتا ہے۔

$$K_3 = -1$$

مساوات 13.36 کا ایک مرتبہ تفرق لینے کے بعد $s=-2$ پر کرنے سے K_2 حاصل ہو گا۔چونکہ ایسا کرتے ہوئے صرف K_2 کا جزو باقی رہتا ہے لٰہذا بائیں ہاتھ بقایا اجزاء کا تفرق لینے کی ضرورت نہیں ہے۔مساوات کے بائیں ہاتھ کا ایک درجی تفرق $\frac{2}{(s+3)^2}$ ہے۔

$$K_2 = \left.\frac{2}{(s+3)^2}\right|_{s=-2} = 2$$

مساوات 13.36 کا دو درجی تفرق لینے کے بعد دونوں اطراف $s=-2$ پر کرنے سے K_1 حاصل ہوتا ہے۔بائیں ہاتھ کا دو درجی تفرق $\frac{-4}{(s+3)^2}$ ہے جبکہ دائیں جانب K_1 والے جزو کا دو درجی تفرق $2K_1$ کے برابر ہے۔

$$2K_1 = \left.-\frac{4}{(s+3)^3}\right|_{s=-2}$$

اس سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$K_1 = -2$$

تمام مستقل جاننے کے بعد مساوات 13.35 کو دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{F}(s) = \frac{2}{s+3} - \frac{2}{(s+2)} + \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{1}{(s+2)^3}$$

جدول 13.1 کی مدد سے تمام اجزاء کے الٹ بدل لکھتے ہیں۔

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\mathrm{F}(s) = \left(2e^{-3t} - 2e^{-2t} + 2te^{-2t} - \frac{t^2e^{-2t}}{2}\right)u(t)$$

مشق 13.10: لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s) = \frac{s+2}{(s+3)^2}$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $f(t) = \left(e^{-3t} - te^{-3t}\right)u(t)$

مشق 13.11: لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s)=\frac{s+1}{s^2(s+2)}$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $f(t)=\frac{1}{4}\left(1+2t-e^{-2t}\right)u(t)$

مشق 13.12: لاپلاس بدل $\mathrm{F}(s)=\frac{80}{s^2(s+2)^3}$ کا الٹ لاپلاس بدل حاصل کریں۔

جواب: $f(t)=\left(10t^2e^{-2t}+20te^{-2t}+15e^{-2t}+10t-15\right)u(t)$

باب 7 میں دور کی امتیازی مساوات کی بات کی گئی۔آپ جلد دیکھیں گے کہ $\mathrm{Q}(s)$ دور کی امتیازی مساوات ہے۔ہم نے اس باب میں دیکھا کہ $\mathrm{F}(s)$ سے حاصل وقتی تفاعل کے اجزاء کا دارومدار $\mathrm{Q}(s)$ کے قطبین پر ہے۔سادہ قطب $\frac{1}{s+a}$ کی صورت میں e^{-at} حاصل ہو گا جو وقت کے ساتھ گھٹتا ہے۔اس کے برعکس سادہ قطب $\frac{1}{s-b}$ کی صورت میں e^{bt} حاصل ہو گا جو وقت کے ساتھ مسلسل بڑھتا ہے۔حقیقت میں وقت کے ساتھ مسلسل بڑھتا دباو یا رو آخر کار دور کو تباہ کر دے گا لہٰذا ادوار تخلیق دیتے ہوئے ایسے قطبین پر کھڑی نظر رکھی جاتی ہے اور ان سے چھٹکارا حاصل کیا جاتا ہے۔ کثیر قطبین کی صورت میں te^{-at} ، t^2e^{-at} وغیرہ حاصل ہوتے ہیں جبکہ مخلوط قطبین $e^{-at}\cos(\omega t+\theta)$ کو جنم دیتے ہیں جو وقت کے ساتھ گھٹتی سائن نما تفاعل ہے۔مخلوط قطبین کا حقیقی جزو صفر ہونے کی صورت میں خیالی قطبین کی جوڑی ملتی ہے جو مسلسل ارتعاش کرتے سائن نما تفاعل $\cos(\omega t+\theta)$ کو جنم دیتے ہیں۔یوں صرف قطبین کے بارے میں جان لینے سے دور کے بارے میں بہت کچھ کہا جا سکتا ہے۔

ہم نے کہا کہ مساوات 13.20 کسی بھی دور کے لاپلاس بدل کو ظاہر کر سکتی ہے۔اگر $m\geq n$ ہو تب اس کو مساوات 13.21 کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے جس میں مستقل C_0 پایا جاتا ہے۔جدول 13.1 کے تحت $\mathrm{F}(s)=1$ کا الٹ لاپلاس بدل اکائی ضرب تفاعل $\delta(t)$ ہے لہٰذا $\mathrm{F}(s)=C_0$ کا الٹ لاپلاس بدل $C_0\delta(t)$ ہو گا۔ہم اس حقیقت پر تبصرہ کر چکے ہیں کہ حقیقی دنیا میں اکائی ضرب تفاعل نہیں پایا جاتا لہٰذا کسی بھی دور کا رد عمل اکائی ضرب تفاعل نہیں ہو سکتا۔اس سے ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ کسی بھی حقیقی دور کے لاپلاس بدل میں $m<n$ ہو گا۔

13.6 تکمل الجھاو

جدول 13.2 میں لاپلاس مسئلہ الجھاو بیان کیا گیا ہے جس کے تحت

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\lambda) f_2(\lambda) \,\mathrm{d}\lambda = \int_0^t f_1(\lambda) f_2(t-\lambda) \,\mathrm{d}\lambda \tag{13.37}$$

کا لاپلاس بدل

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathrm{F}_1(s)\mathrm{F}_2(s) \tag{13.38}$$

ہے جہاں

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f_1(t)] &= \mathrm{F}_1(s)\\ \mathcal{L}[f_2(t)] &= \mathrm{F}_2(s)\end{aligned}$$

ہیں۔ مساوات 13.37 کو **تکمل الجھاو**[19] کہتے ہیں۔ تفاعل کی الجھاو نہایت اہم ہے جو ادوار اور **تجزیہ نظام**[20] میں کلیدی کردار ادا کرتی ہے۔

لاپلاس بدل کی تعریف یعنی مساوات 13.1 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 13.38 کو ثابت کرتے ہیں۔

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f_1(t-\lambda) f_2(\lambda) \,\mathrm{d}\lambda\right] e^{-st} \,\mathrm{d}t \tag{13.39}$$

اندرونی تکمل کے حدود کو صفر تا لامتناہی بنانے کی خاطر اندرونی تکمل کو $u(t-\lambda)$ سے ضرب دیتے ہیں۔

$$u(t-\lambda) = \begin{cases} 1 & \lambda < t \\ 0 & \lambda > t \end{cases}$$

اندرونی تکمل کے اضافی احاطے یعنی t تا ∞ میں چونکہ $u(t-\lambda) = 0$ ہے لہٰذا تکمل کی قیمت میں کوئی تبدیلی رونما نہیں ہو گی۔ یوں مساوات 13.39 کو درج ذیل

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f_1(t-\lambda) f_2(\lambda) u(t-\lambda) \,\mathrm{d}\lambda\right] e^{-st} \,\mathrm{d}t$$

---

[19] convolution integral
[20] systems analysis

یعنی

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f_2(\lambda) \left[\int_0^\infty f_1(t-\lambda)u(t-\lambda)e^{-st} \, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\lambda$$

لکھا جا سکتا ہے۔ قوسین کے اندر تکمل مساوات 13.18 میں دیا گیا مسئلہ منتقلی وقت ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^\infty f_2(\lambda) \mathrm{F}_1(s) e^{-s\lambda} \, \mathrm{d}\lambda \\
&= \mathrm{F}_1(s) \int_0^\infty f_2(\lambda) e^{-s\lambda} \, \mathrm{d}\lambda \\
&= \mathrm{F}_1(s) \mathrm{F}_2(s)
\end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقتی دائرہ کار میں الجھاو، تعددی دائرہ کار میں ضرب کے مترادف ہے۔ آئیں اس پر ایک مثال دیکھیں۔

مثال 13.13:
