برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 15

فوریئر تجزیہ

دوری تفاعل[1] سے مراد وہ تفاعل ہے جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہے جہاں T_0 **دوری عرصہ**[2] کہلاتی ہے۔

$$f(t) = f(t + nT_0), \quad n = \mp 1, \mp 2, \mp 3, \cdots \tag{15.1}$$

درج بالا مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی لمحہ t پر دوری تفاعل کی قیمت $f(t)$ اور اس لمحے سے T_0 وقت بعد تفاعل کی قیمت $f(t + T_0)$ برابر ہیں۔ شکل 15.1 میں اس کی وضاحت کی گئی ہے۔ دوری عرصے کو سیکنڈ (s) میں ناپا جاتا ہے۔ دوری عرصہ T_0 اور **تعدد** f_0 کا تعلق درج ذیل ہے جہاں تعدد کو ہرٹز[3] (Hz) میں ناپا جاتا ہے۔

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \tag{15.2}$$

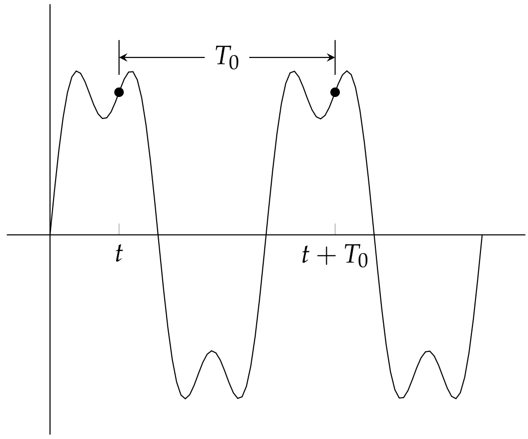
زاویائی تعدد ω_0 اور تعدد f_0 کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \tag{15.3}$$

زاویائی تعدد کو ریڈیئن فی سیکنڈ $(\mathrm{rad\,s^{-1}})$ میں ناپا جاتا ہے۔ شکل 15.2 میں چند **دوری امواج**[4] دکھائے گئے ہیں۔

---

periodic function[1]
time period[2]
Hertz, Hz[3]
periodic wave[4]



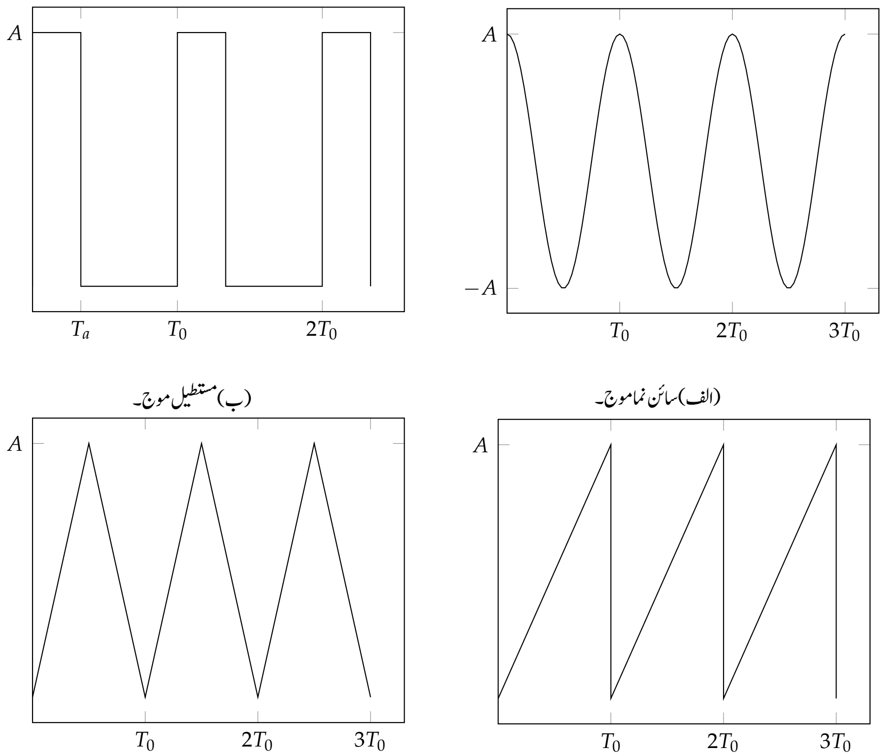
شکل 15.1: دوری عرصہ۔

کسی بھی دوری تفاعل کو بطور درج ذیل (تکونیاتی) **فوریئر تسلسل**[5] لکھا[6] جا سکتا ہے

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right] \\ &= a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos(2\omega_0 t) + a_3 \cos(3\omega_0 t) + \cdots \\ &\quad + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin(2\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t) + \cdots \end{aligned} \tag{15.4}$$

جہاں a_0 ، a_1 ، a_2 ، b_1 وغیرہ تسلسل کے **عددی سر**[7] کہلاتے ہیں۔ فوریئر تسلسل کی اوسط قیمت a_0 کے برابر ہے۔ ایک دوری عرصہ T_0 میں $\cos \omega_0 t$ یا $\sin \omega_0 t$ کی ایک لہر، $\cos(2\omega_0 t)$ یا $\sin(2\omega_0 t)$ کی دو لہریں اور $\cos(m\omega_0 t)$ یا $\sin(m\omega_0 t)$ کی m لہریں پوری آتی ہیں۔ اس حقیقت کو شکل 15.3 میں دکھایا گیا ہے جہاں وضاحت کی خاطر امواج کے حیطے مختلف رکھے گئے ہیں۔ فوریئر تسلسل میں $a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t$ **بنیادی رکن**[8] یا **پہلا ہارمونی رکن** کہلاتا ہے، $a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t)$ **دوسرا ہارمونی رکن**[9] کہلاتا ہے، $a_3 \cos(3\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t)$ تیسرا ہارمونی رکن اور اسی طرح $a_m \cos(m\omega_0 t) + b_m \sin(m\omega_0 t)$ ایم ہارمونی رکن کہلاتا ہے۔ ہم یہاں اصل رک کر چند حقائق اور تکملات پر غور کرتے ہیں جو فوریئر تسلسل میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

[5] trignometric Fourier series
[6] جین بپٹسٹ یوسف فوریئر نے حرارتی توانائی کے بہاو پر غور کے دوران اس تسلسل کو دریافت کیا۔
[7] coefficients
[8] fundamental component
[9] second harmonic



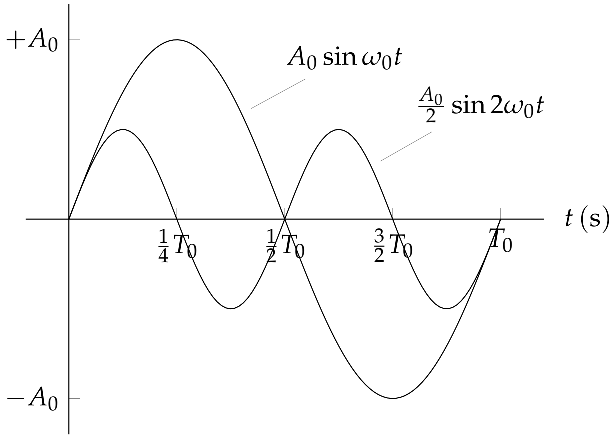
(الف)سائن نما موج۔

(ب)مستطیل موج۔

(پ)دندان موج۔

(ت)تکونی موج۔

شکل 15.2: چند دوری امواج۔



شکل 15.3: ایک دوری عرصہ میں فوریئر تسلسل کے ارکان کی تعداد۔

آپ دو سمتیوں کے **نقطہ ضرب**[10] سے خوب واقف ہیں۔ سمتیہ **A** اور **B** کا نقطہ ضرب یا **غیر سمتی ضرب**[11] درج ذیل ہے جہاں دونوں سمتیوں کے مابین زاویہ θ ہے۔

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB\cos\theta \tag{15.5}$$

آپس میں **عمودی**[12] سمتیوں کے مابین $\theta = 90^\circ$ ہونے کی بدولت $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ ہوتا ہے جبکہ کسی بھی سمتیہ کے خود نقطہ ضرب کا جذر اس کے حیطے کے برابر ہوتا ہے۔

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}} \tag{15.6}$$

اسی سوچ کے ساتھ تفاعل کا نقطہ ضرب بیان کیا جاتا ہے۔

اگر تفاعل $f(t) \neq 0$ اور $g(t) \neq 0$ کے حاصل ضرب کا تکمل $a \le t \le b$ فاصلے پر صفر کے برابر ہو

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{15.7}$$

تو $a \le t \le b$ فاصلے پر ان تفاعل کو آپس میں **عمودی** تصور کیا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ دونوں تفاعل از خود **غیر سمتی**[13] اور غیر صفر ہیں۔

---

[10] dot product
[11] scalar product
[12] orthogonal
[13] scalar

کسی بھی مقدار کا مربع مثبت ہوتا ہے لہٰذا تفاعل کا مربع $f^2(t)$ ہر نقطے پر مثبت ہو گا۔ فاصلہ $a \le t \le b$ پر تفاعل کے **معیار**[14] $\| f(t) \|$ سے مراد

$$\| f(t) \| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{15.8}$$

ہے۔

مثال 15.1: ثابت کریں کہ $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر $\cos(m\omega_0 t)$ اور $\cos(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی ہیں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ اور $n = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہیں لیکن $m \neq n$ ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{T_0} \frac{\cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right] + \cos\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{\sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}\right|_0^{T_0} \\
&= \frac{\sin[(m+n)2\pi]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin[(m-n)2\pi]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} \\
&\qquad - \frac{\sin[(m+n)0]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin[(m-n)0]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}
\end{aligned}$$

چونکہ m اور n عدد صحیح ہیں لہٰذا $m+n$ اور $m-n$ بھی عدد صحیح ہوں گے لہٰذا $\sin[(m+n)2\pi] = 0$ اور $\sin[(m-n)2\pi] = 0$ ہوں گے۔ اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (m \neq n) \tag{15.9}$$

---

[14] norm

مثال 15.2: ثابت کریں کہ $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر $\sin(m\omega_0 t)$ اور $\sin(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی ہیں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ اور $n = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہیں لیکن $m \neq n$ ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل لیتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{T_0} \frac{\cos\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right] - \cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{\sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}}\right|_0^{T_0} \\
&= \frac{\sin[(m-n)2\pi]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin[(m+n)2\pi]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} \\
&\quad - \frac{\sin[(m-n)0]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin[(m+n)0]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}}
\end{aligned}
$$

چونکہ m اور n عدد صحیح ہیں لہٰذا $m+n$ اور $m-n$ بھی عدد صحیح ہوں گے لہٰذا $\sin[(m+n)2\pi] = 0$ اور $\sin[(m-n)2\pi] = 0$ ہوں گے۔اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$
\int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (m \neq n) \tag{15.10}
$$

مثال 15.3: ثابت کریں کہ $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر $\cos(m\omega_0 t)$ اور $\sin(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی ہیں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ اور $n = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہیں۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^{T_0} \sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right] - \sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]\mathrm{d}t\\
&= -\frac{\cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\cos\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}\Bigg|_0^{T_0}\\
&= -\frac{\cos[(m+n)2\pi]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\cos[(m-n)2\pi]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}\\
&\qquad + \frac{\cos[(m+n)0]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\cos[(m-n)0]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}
\end{aligned}$$

چونکہ m اور n عدد صحیح ہیں لہٰذا $m+n$ اور $m-n$ بھی عدد صحیح ہوں گے لہٰذا $\cos(m+n)2\pi = 1$ اور $\cos(m-n)2\pi = 1$ ہوں گے۔اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (m \neq n) \tag{15.11}$$

مثال 15.4: تفاعل $f(t) = \cos(m\omega_0 t)$ کا معیار $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر حاصل کریں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر معیار کو تکمل سے حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\| f(t) \|^2 &= \int_0^{T_0} \cos^2\left(m\frac{2\pi}{T_0}t\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{T_0} \left[1+\cos\left(2m\frac{2\pi}{T_0}t\right)\right] \mathrm{d}t \\
&= \left. \frac{t}{2} + \frac{\sin\left(2m\frac{2\pi}{T_0}t\right)}{4m\frac{2\pi}{T_0}} \right|_0^{T_0} \\
&= \frac{T_0}{2} + \frac{\sin 4m\pi}{4m\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4m\frac{2\pi}{T_0}} \\
&= \frac{T_0}{2}
\end{aligned}
$$

دونوں اطراف کا جذر لیتے ہوئے $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر معیار ملتا ہے۔

$$
\| \cos(m\omega_0 t) \| = \sqrt{\int_0^{T_0} \cos^2(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{T_0}{2}} \tag{15.12}
$$

مشق 15.1: تفاعل $f(t) = \sin m\omega_0 t$ کا معیار $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر درج ذیل ہے جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہے۔ اس معیار کو حاصل کریں۔

$$
\| \sin(m\omega_0 t) \| = \sqrt{\int_0^{T_0} \sin^2(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{T_0}{2}} \tag{15.13}
$$

مشق 15.2: درج ذیل دو مساوات کو ثابت کریں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہے۔

$$\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) \, \mathrm{d}t = 0 \tag{15.14}$$

$$\int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t) \, \mathrm{d}t = 0 \tag{15.15}$$

مساوات 15.9، مساوات 15.10 اور مساوات 15.11 مل کر ثابت کرتے ہیں کہ فوریئر تسلسل میں استعمال ہونے والا ہر تفاعل بقایا تمام تفاعل کے ساتھ $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر عمودی ہے۔یوں $\cos 3\omega_0 t$ کو مثال بناتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ $\cos(\omega_0 t)$ ، $\cos(2\omega_0 t)$ ، $\cos(4\omega_0 t)$ ، $\sin(\omega_0 t)$ ، $\sin(2\omega_0 t)$ ، $\sin(3\omega_0 t)$ وغیرہ کے ساتھ عمودی ہے۔

درج بالا تکملات حاصل کرنے کے بعد اصل مضمون یعنی فوریئر تسلسل پر دوبارہ آتے ہیں۔ مساوات 15.9 تا مساوات 15.15 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.4 کے عددی سر $a_0, a_1, a_2, b_1, \cdots$ حاصل کئے جا سکتے ہیں۔آئیں ایسا ہی کریں۔

عددی سر a_0 کی قیمت دریافت کرنے کی خاطر ہم مساوات 15.4 کا تکمل $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر لیتے ہیں

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} f(t) \, \mathrm{d}t &= \int_0^{T_0} a_0 \, \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \, \mathrm{d}t \\ &= a_0 T_0\end{aligned}$$

جہاں مساوات 15.14 اور مساوات 15.15 کو استعمال کرتے ہوئے مجموعے میں دیے تمام تکمل کو صفر کے برابر پر کیا گیا ہے۔یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \, \mathrm{d}t \tag{15.16}$$

مساوات 15.16 کہتا ہے کہ a_0 تفاعل $f(t)$ کی اوسط قیمت ہے۔

عددی سر a_m حاصل کرنے کی خاطر مساوات 15.4 کے دونوں اطراف کو $\cos(m\omega_0 t)$ سے ضرب دیتے ہوئے ایک دوری عرصے پر تکمل کرتے ہیں۔ہم تکمل کو $0 \le t \le T_0$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \\ &\int_0^{T_0} a_0 \cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} a_n \cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ &\qquad + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} b_n \sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{15.17}$$

دائیں ہاتھ پہلا تکمل مساوات 15.14 کی بنا صفر کے برابر ہے جبکہ مساوات 15.11 کے تحت تیسرا تکمل صفر کے برابر ہے۔آئیں دوسرے تکمل پر غور کریں۔

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} a_n \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t\,\mathrm{d}t &= \\ &\int_0^{T_0}\cos(m\omega_0 t)\,\big[a_1\cos\omega_0 t + a_2\cos(2\omega_0 t) + \cdots \\ &\qquad + a_{m-1}\cos[(m-1)\omega_0 t] + a_m \cos(m\omega_0 t) + \cdots\big]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

اب اگر $n \neq m$ ہو تب مساوات 15.9 کے تحت تکمل صفر کے برابر ہو گا۔البتہ $n = m$ کی صورت میں مساوات 15.12 کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_0^{T_0} a_m \cos^2(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = a_m \frac{T_0}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ان قیمتوں کو مساوات 15.17 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$a_m = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \tag{15.18}$$

عددی سر b_m حاصل کرنے کی خاطر مساوات 15.4 کے دونوں اطراف کو $\sin(m\omega_0 t)$ سے ضرب دیتے ہوئے

ایک دوری عرصے پر تکمل کرتے ہیں۔ہم تکمل کو $0 \le t \le T_0$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \\ \int_0^{T_0} a_0 \sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} a_n \cos(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} b_n \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{15.19}$$

دائیں ہاتھ پہلا تکمل مساوات 15.15 کی بنا صفر کے برابر ہے جبکہ مساوات 15.11 کے تحت دوسرا تکمل صفر کے برابر ہے۔آئیں تیسرے تکمل پر غور کریں۔

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} b_n \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = \\ \int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t)\,\big[b_1 \sin\omega_0 t + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \cdots \\ + b_{m-1}\sin[(m-1)\omega_0 t] + b_m \sin(m\omega_0 t) + \cdots\big]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

اب اگر $n \neq m$ ہو تب مساوات 15.10 کے تحت تکمل صفر کے برابر ہو گا۔البتہ $n = m$ کی صورت میں مساوات 15.13 کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_0^{T_0} b_m \sin^2(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = b_m \frac{T_0}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ان قیمتوں کو مساوات 15.17 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$b_m = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \tag{15.20}$$

مساوات 15.16، مساوات 15.18 اور مساوات 15.20 فوریئر تکمل کے عددی سر دیتے ہیں۔انہیں یہاں اکٹھے پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\,\mathrm{d}t \\ a_m &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ b_m &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \end{aligned} \tag{15.21}$$

مثال 15.5: شکل 15.4-الف میں دکھائے گئے **دندان موج** کا فوریئر تسلسل حاصل کریں۔دو، پانچ اور پچاس فوریئر ارکان استعمال کرتے ہوئے موج کا خط کھینچیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موج کا دوری عرصہ $T_0 = 3\,\mathrm{s}$ ہے۔

حل: شکل میں دکھائی گئی موج $(0,0)$ سے $(3,1)$ تک بالکل سیدھی لکیر کی مانند ہے جس کی ڈھلوان

$$\text{ڈھلوان} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

ہے لہٰذا اس سیدھے حصے کی مساوات درج ذیل لکھی جا سکتی ہے جہاں لکیر پر کسی بھی نقطے کے کارتیسی محدد مساوات میں پر کرنے سے c کی قیمت حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$y = \frac{x}{3} + c$$

ہم درج بالا میں $(0,0)$ پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{0}{3} + c$$

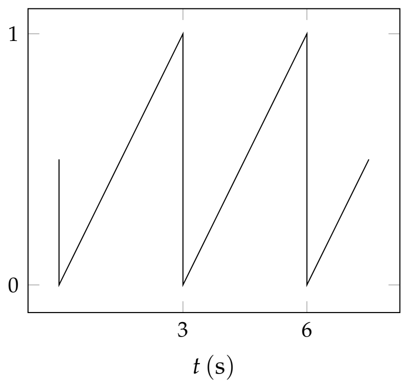
$c = 0$ حاصل کرتے ہیں لہٰذا سیدھی حصے کی مساوات $y = \frac{x}{3}$ یعنی

$$f(t) = \frac{t}{3} \tag{15.22}$$

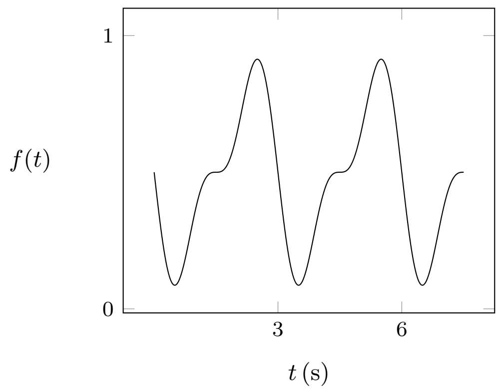
ہے جہاں کارتیسی نظام کے x محور پر t اور y محور پر $f(t)$ پر کئے گئے ہیں۔

مساوات 15.21 سے فوریئر تسلسل کے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

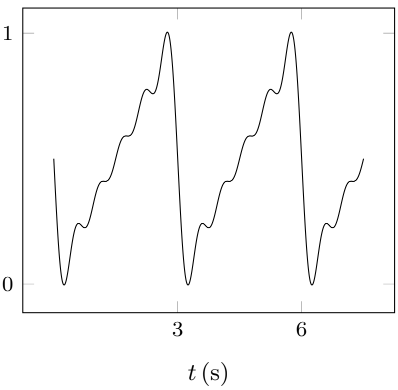
$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{t}{3}\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{3}\frac{t^2}{6}\bigg|_0^3\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$



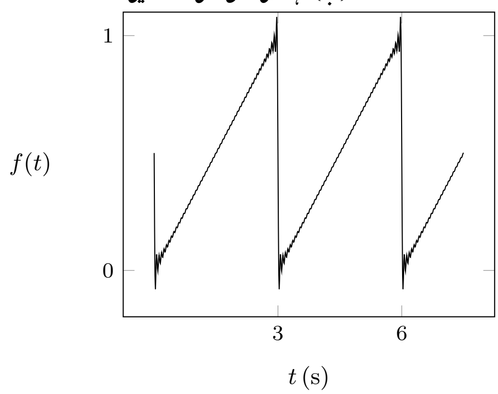
(الف) دندان موج۔



(ب) دو ہارمونی ارکان شامل کئے گئے ہیں۔



(پ) پانچ ہارمونی ارکان شامل کئے گئے ہیں۔



(ت) پچاس ہارمونی ارکان شامل کئے گئے ہیں۔

شکل 15.4: مثال 15.5 کی دندان موج۔

چونکہ a_0 تفاعل کی اوسط قیمت کے برابر ہے لہٰذا یہی جواب تکون کے رقبے $\frac{3}{2} = 1 \times 3 \times \frac{1}{2}$ اور قاعدہ 3 سے حاصل کی جا سکتی ہے یعنی

$$\text{اوسط} = \frac{\text{رقبہ}}{\text{قاعدہ}} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

عددی سر a_m حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}\int_0^3 \frac{t}{3}\cos(m\frac{2\pi}{3}t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{9}t\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}mt)}{\frac{2\pi}{3}m} + \frac{2}{9}\frac{\cos(\frac{2\pi}{3}mt)}{\left(\frac{2\pi}{3}m\right)^2}\Bigg|_0^3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

اس کا مطلب ہے کہ دندان موج کی فوریئر تسلسل میں کوئی کوسائن تفاعل نہیں پایا جاتا۔

عددی سر b_m حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}\int_0^3 \frac{t}{3}\sin(m\frac{2\pi}{3}t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2}{9}t\frac{\cos(\frac{2\pi}{3}mt)}{\frac{2\pi}{3}m} + \frac{2}{9}\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}mt)}{\left(\frac{2\pi}{3}m\right)^2}\Bigg|_0^3 \\
&= -\frac{1}{m\pi}
\end{aligned}$$

یوں $m = 1, 2, 3, \cdots$ پر کرتے ہوئے عددی سر حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$
\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{1}{\pi} \\
b_2 &= -\frac{1}{2\pi} \\
b_3 &= -\frac{1}{3\pi} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

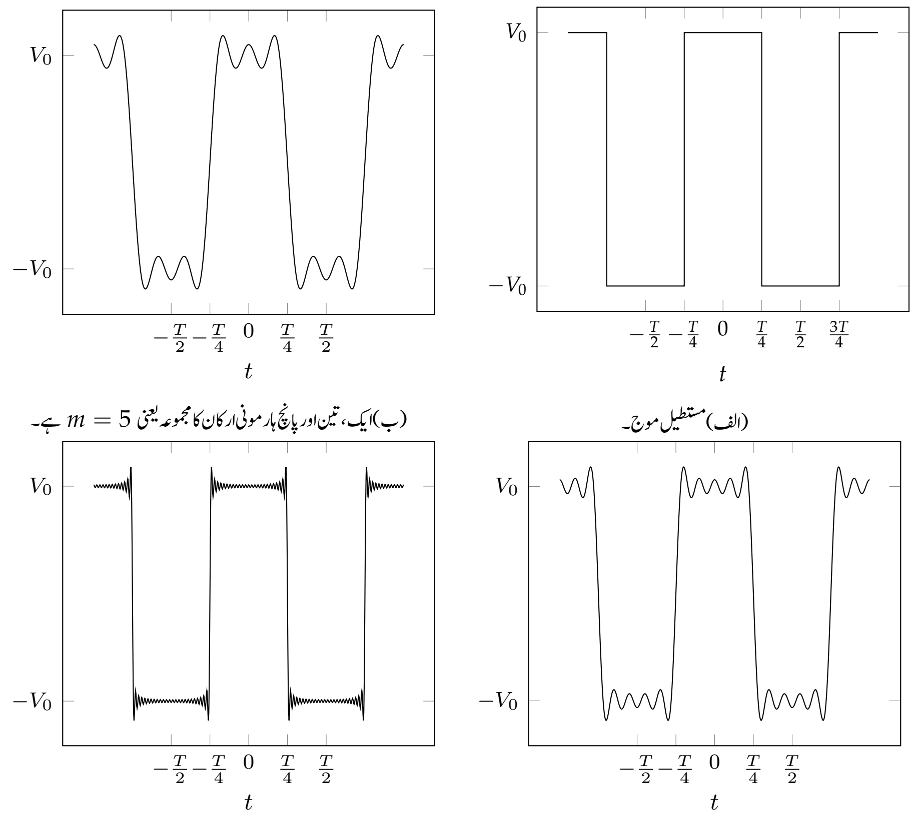
لہٰذا فوریئر تسلسل درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$
f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left[\sin\omega_0 t + \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \cdots\right] \tag{15.23}
$$

شکل 15.4-ب میں مساوات 15.23 کو $m = 2$ تک استعمال کرتے ہوئے خط کھینچا گیا ہے۔ شکل-پ میں پانچ ہارمونی ارکان استعمال کئے گئے ہیں جبکہ شکل-ت میں پچاس ہارمونی ارکان استعمال کئے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ارکان بڑھانے سے اصل موج کے قریب تر خط حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 15.6: آئیں شکل 15.5-الف میں دکھائے گئے دوری مستطیل موج کا فوریئر تسلسل حاصل کریں جس میں دوری عرصے کو T لکھا گیا ہے۔

حل: افقی محور کے دونوں اطراف برابر موج پائی جاتی ہے لہٰذا اس کی اوسط قیمت صفر ہو گی اور یوں $a_0 = 0$ ہو گا۔ آئیں یہی جواب مساوات 15.21 سے حاصل کریں۔ اس مرتبہ ہم دوری عرصے کو $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$ لیتے ہیں۔ شکل کو دیکھ معلوم ہوتا ہے کہ $-\frac{T}{4} \le t \le \frac{T}{4}$ تفاعل کی قیمت V_0 ہے جبکہ $-\frac{T}{2} \le t \le -\frac{T}{4}$ اور $\frac{T}{4} \le t \le \frac{T}{2}$ پر



(الف) مستطیل موج۔

(ب) ایک، تین اور پانچ ہارمونی ارکان کا مجموعہ یعنی $m = 5$ ہے۔

(پ) $m = 9$ تک ارکان کا مجموعہ۔

(ت) $m = 49$ تک ارکان کا مجموعہ۔

شکل 15.5: مثال 15.6 کی مستطیل موج۔

تفاعل کی قیمت $-V_0$ ہے۔

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\left(-V_0\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}}\mathrm{d}t + V_0\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}\mathrm{d}t - V_0\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{T}\left[-V_0\left(-\frac{T}{4}+\frac{T}{2}\right) + V_0\left(\frac{T}{4}+\frac{T}{4}\right) - V_0\left(\frac{T}{2}-\frac{T}{4}\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

کوسائن کے عددی سر a_m کو مساوات 15.21 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔ مستقل V_0 کو تکمل کے باہر لکھا گیا ہے۔

$$
\begin{aligned}
a_m &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2}{T}V_0\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}}\cos(\frac{2\pi m}{T}t)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{T}V_0\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}\cos(\frac{2\pi m}{T}t)\,\mathrm{d}t - \frac{2}{T}V_0\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}\cos(\frac{2\pi m}{T}t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2V_0}{T}\left.\frac{\sin(\frac{2\pi m}{T}t)}{\frac{2\pi m}{T}}\right|_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} + \frac{2V_0}{T}\left.\frac{\sin(\frac{2\pi m}{T}t)}{\frac{2\pi m}{T}}\right|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - \frac{2V_0}{T}\left.\frac{\sin(\frac{2\pi m}{T}t)}{\frac{2\pi m}{T}}\right|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{4V_0}{m\pi}\sin(\frac{m\pi}{2})
\end{aligned}
$$

اس سے درج ذیل عددی سر لکھے جا سکتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{4V_0}{1\pi}\sin(\frac{1\pi}{2}) = \frac{4V_0}{\pi} \\
a_2 &= \frac{4V_0}{2\pi}\sin(\frac{2\pi}{2}) = 0 \\
a_3 &= \frac{4V_0}{3\pi}\sin(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{4V_0}{3\pi} \\
a_4 &= \frac{4V_0}{4\pi}\sin(\frac{4\pi}{2}) = 0 \\
a_5 &= \frac{4V_0}{5\pi}\sin(\frac{5\pi}{2}) = \frac{4V_0}{5\pi} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

سائن کے عددی سر b_m کو مساوات 15.21 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔ مستقل V_0 کو تکمل کے باہر لکھا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{2}{T}V_0\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}}\sin(\frac{2\pi m}{T}t)\,\mathrm{d}t+\frac{2}{T}V_0\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}\sin(\frac{2\pi m}{T}t)\,\mathrm{d}t-\frac{2}{T}V_0\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}\sin(\frac{2\pi m}{T}t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{2V_0}{T}\;\frac{\cos(\frac{2\pi m}{T}t)}{\frac{2\pi m}{T}}\Bigg|_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}}-\frac{2V_0}{T}\;\frac{\cos(\frac{2\pi m}{T}t)}{\frac{2\pi m}{T}}\Bigg|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}+\frac{2V_0}{T}\;\frac{\cos(\frac{2\pi m}{T}t)}{\frac{2\pi m}{T}}\Bigg|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}\\
&= 0
\end{aligned}$$

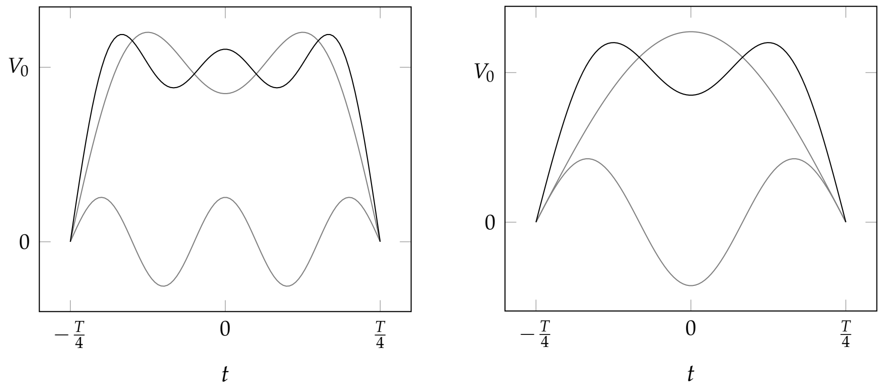
اس معلومات کو استعمال کرتے ہوئے مستطیل موج کی فوریئر مساوات لکھتے ہیں۔

$$f(t)=\frac{4V_0}{\pi}\left[\cos(\omega_0 t)-\frac{1}{3}\cos(3\omega_0 t)+\frac{1}{5}\cos(5\omega_0 t)-\frac{1}{7}\cos(7\omega_0 t)+\cdots\right] \tag{15.24}$$

مختلف تعداد میں فوریئر تسلسل کے ارکان شامل کرتے ہوئے تفاعل کو شکل 15.5-ب تا شکل 15.5-ت میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 15.6 میں مستطیل موج کی فوریئر تسلسل حاصل کی گئی۔ آئیں تسلسل کے ایک رکن سے شروع کرتے ہوئے دیکھیں کہ اس میں مزید ارکان شامل کرتے ہوئے مستطیل موج کیسے حاصل ہوتی ہے۔ شکل 15.6-الف میں مساوات 15.24 کا پہلا ہارمونی رکن $\frac{4V_0}{\pi}\cos\omega_0 t$ اور تیسرا ہارمونی رکن $-\frac{4V_0}{3\pi}\cos(3\omega_0 t)$ ہلکی سیاہی میں دکھائے گئے ہیں۔ دونوں سائن نما صورت رکھتے ہیں جس کا مستطیل سے دور دور تک کوئی واسطہ نہیں ہے۔ اسی شکل میں دونوں کے مجموعے کو گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دو سائن نما امواج مل کر ایسی شکل بناتے ہیں جو مستطیل زیادہ اور سائن نما کم نظر آتا ہے۔ مستطیل موج کی چوٹی V_0 ہے جبکہ پہلے ہارمونی رکن کی چوٹی $\frac{4V_0}{\pi}=1.27V_0$ ہے۔ تیسرا ہارمونی رکن اس چوٹی کو نیچے کھینچتا ہے۔ اسی طرح مستطیل موج $\mp\frac{T}{4}$ پر یکدم قیمت تبدیل کرتی ہے جبکہ پہلا ہارمونی جزو نہایت صبر و تحمل کے ساتھ منفی چوٹی سے مثبت چوٹی اور مثبت چوٹی سے منفی چوٹی پہنچتی ہے۔ یہاں بھی تیسرا ہارمونی رکن پہلے رکن کے اطراف کو کھینچ کر ان کی ڈھلوان بڑھاتی ہے۔

شکل 15.6-الف میں تیسرا رکن زیادہ جزبات میں آ کر پہلی رکن کی چوٹی ضرورت سے زیادہ نیچے کھینچ دیتا ہے۔ شکل-ب میں پہلے اور تیسرے ارکان سے حاصل موج کو ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ پانچویں رکن کو بھی ہلکی سیاہی



(الف) پہلا اور تیسرا ہارمونی رکن مل کر مستطیل صورت بنانے کی کوشش کرتے ہیں۔

(ب) پہلے، تیسرا اور پانچواں ہارمونی ارکان مل کر مستطیل شکل بناتے ہیں۔

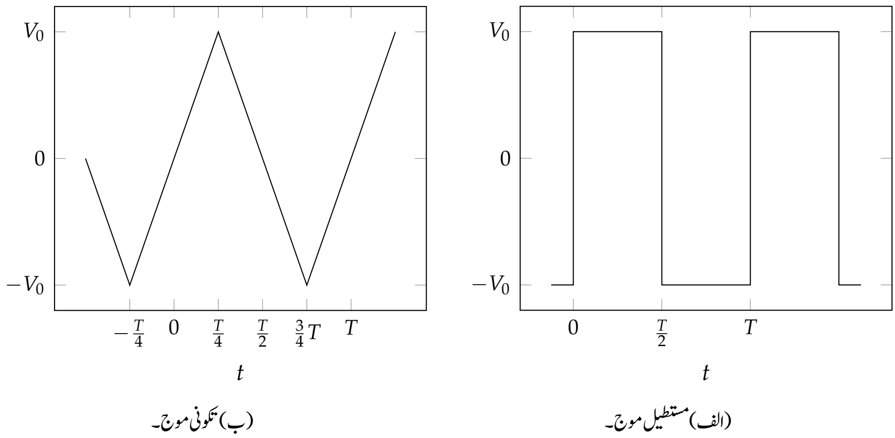
شکل 15.6: بتدریج زیادہ ارکان شامل کرتے ہوئے مستطیل موج کی صورت ابھرتے ہوئے دیکھتے ہیں۔

میں دکھایا گیا ہے۔ان کے مجموعے کو گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں پانچواں رکن ضرورت سے زیادہ نیچے کھینچی گئی چوٹی کو معمولی اٹھاتا ہے تاکہ یہ V_0 کے قریب ہو جائے۔اسی طرح یہ رکن بھی موج کے اطراف کی ڈھلوان بڑھاتا ہے۔فوریئر تسلسل کے بقایا ارکان بھی اسی طرح مدد کرتے ہوئے اطراف کو زیادہ عمودی اور چوٹی کو بالکل چپٹی بنانے میں مدد دیتے ہیں حتٰی کہ ہمیں بالکل مستطیل موج نظر آتی ہے۔

شکل 15.5-ب، پ اور ت میں آپ دیکھتے ہیں کہ فوریئر تسلسل سے حاصل موج $\mp\frac{T}{4}$ پر درکار قیمت سے تجاوز کرتے ہوئے آگے نکل جاتی ہے۔تسلسل میں ارکان کی تعداد بڑھانے سے ان تجاوزات کا خاتمہ نہیں ہوتا۔

مشق 15.3: شکل 15.5-الف میں عددی سر حاصل کرتے ہوئے تکملات کو $-\frac{T}{4} \le t \le \frac{3T}{4}$ پر حاصل کرتے ہوئے فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

جواب: عددی سر حاصل کرتے ہوئے دوری موج کے کسی بھی حصے پر مسلسل ایک دوری عرصے پر تکمل حاصل کیا جا سکتا ہے۔جوابات میں کوئی فرق نہیں پایا جاتا۔



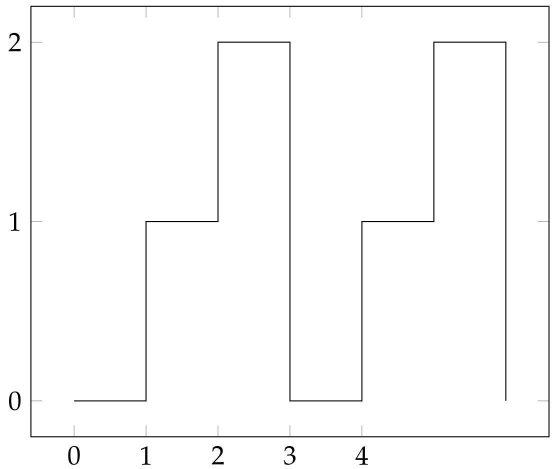
شکل 15.7: مشق 15.4 اور مشق 15.5 کے امواج۔

مشق 15.4: شکل 15.7-الف میں دکھائے گئے مستطیل موج کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

جواب: $f(t)=\frac{4V}{\pi}\left[\sin\omega_0 t+\frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t)+\cdots\right]$

مشق 15.5: شکل 15.7-ب میں دکھائے گئے تکونی موج کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔ پہلے $-\frac{T}{4}\le t\le\frac{T}{4}$ اور $\frac{T}{4}\le t\le\frac{3T}{4}$ سیدھے حصوں کے مساوات حاصل کریں۔

حل: $f_1(t)=\frac{4V_0}{T}t$ ، $f_2(t)=2V_0(1-2\frac{t}{T})$ ،
$f(t)=\frac{8V_0}{\pi^2}\left[\sin(\omega_0 t)-\frac{1}{3^2}\sin(3\omega_0 t)+\frac{1}{5^2}\sin(5\omega_0 t)-\cdots\right]$



شکل 15.8: مشق 15.6 کا تفاعل۔

مشق 15.6: شکل 15.8 میں دیے تفاعل کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

جواب:

$$1-\frac{3}{\pi}\left[\sin\omega_0 t+\frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t)+\frac{1}{4}\sin(4\omega_0 t)+\frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t)+\frac{1}{7}\sin(7\omega_0 t)+\cdots\right]$$

فوریئر تسلسل کے m ہارمونی کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$a_m\cos(m\omega_0 t)+b_m\sin(m\omega_0 t)=D_m\cos(m\omega_0 t+\theta_m)$$

جہاں

$$D_m=\sqrt{a_m^2+b_m^2} \tag{15.25}$$

$$\theta_m=\tan^{-1}\frac{b_m}{a_m} \tag{15.26}$$

ہیں۔یوں تکونیاتی فوریئر تسلسل کی دوسری صورت درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + D_1\cos(\omega_0 t + \theta_1) + D_2\cos(2\omega_0 t + \theta_2) + \cdots \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)
\end{aligned} \tag{15.27}
$$

چونکہ $\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$ لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 15.27 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{e^{j(n\omega_0 t+\theta_n)} + e^{-j(n\omega_0 t+\theta_n)}}{2} \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n e^{j\theta_n}}{2} e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n e^{-j\theta_n}}{2} e^{-jn\omega_0 t}
\end{aligned}
$$

مساوات 15.25 کے تحت D_m حقیقی مقدار ہے لہٰذا درج بالا مساوات میں $\frac{D_n e^{j\theta_n}}{2}$ اور $\frac{D_n e^{-j\theta_n}}{2}$ آپس میں جوڑی دار مخلوط ہیں۔یوں $\boldsymbol{d_n} = \frac{D_n e^{j\theta_n}}{2}$ لکھتے ہوئے $\boldsymbol{d}_n^* = \frac{D_n e^{-j\theta_n}}{2}$ لکھا جائے گا لہٰذا درج بالا کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$
f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{d}_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{d}_n^* e^{-jn\omega_0 t} \tag{15.28}
$$

دونوں مجموعوں کو پھیلا کر لکھتے ہیں

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{d}_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{d}_n^* e^{-jn\omega_0 t} \\
&\qquad = \boldsymbol{d}_1 e^{j1\omega_0 t} + \boldsymbol{d}_2 e^{j2\omega_0 t} + \cdots + \boldsymbol{d}_1^* e^{-j1\omega_0 t} + \boldsymbol{d}_2^* e^{-j2\omega_0 t} + \cdots \\
&\qquad = \cdots + \boldsymbol{d}_2^* e^{-j2\omega_0 t} + \boldsymbol{d}_1^* e^{-j1\omega_0 t} + \boldsymbol{d}_1 e^{j1\omega_0 t} + \boldsymbol{d}_2 e^{j2\omega_0 t} + \cdots
\end{aligned}
$$

جہاں آخری قدم پر e کی طاقت کے لحاظ سے ترتیب دیا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $n = 0$ کے علاوہ درج بالا تسلسل کی وسعت منفی لامتناہی سے مثبت لامتناہی تک ہے۔اس تسلسل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے جہاں عددی سر کو $\boldsymbol{c}_n$ کہا گیا ہے۔

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{d}_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{d}_n^* e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \boldsymbol{c}_n e^{jn\omega_0 t}
$$

یوں مساوات 15.28 سے فوریئر تسلسل کی تیسری صورت یعنی قوت نمائی فوریئر تسلسل[15] حاصل ہوتی ہے جہاں تسلسل کے عددی سر $\boldsymbol{c}_n$ مخلوط مقدار ہیں۔

$$f(t) = a_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \boldsymbol{c}_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{c}_n e^{jn\omega_0 t} \tag{15.29}$$

مجموعے میں $n = 0$ کا رکن شامل کرتے ہوئے بیرونی رکن a_0 کو مجموعے میں ضم کیا گیا ہے۔

تینوں طرز کے فوریئر تسلسل کے عددی سر کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$D_n \underline{/\theta_n} = 2\boldsymbol{c}_n = a_n - jb_n \tag{15.30}$$

قوت نمائی فوریئر تسلسل کا عددی سر $\boldsymbol{c}_m$ حاصل کرنے کی خاطر مساوات 15.29 کے دونوں اطراف کو $e^{-jm\omega_0 t}$ سے ضرب دیتے ہوئے $0 \le t \le T_0$ پر ان کا تکمل حاصل کیا جاتا ہے۔

$$\int_0^{T_0} f(t) e^{-jm\omega_0 t} \, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{T_0} \boldsymbol{c}_n e^{j(n-m)\omega_0 t} \, \mathrm{d}t \tag{15.31}$$

اگر $n \neq m$ ہو تب

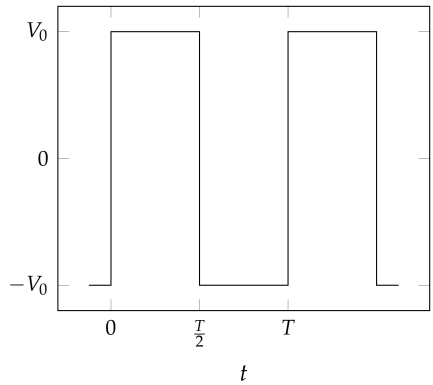
$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \boldsymbol{c}_n e^{j(n-m)\omega_0 t} \, \mathrm{d}t &= \left. \frac{\boldsymbol{c}_n e^{j(n-m)\omega_0 t}}{j(n-m)\omega_0} \right|_0^{T_0} \\ &= \frac{\boldsymbol{c}_n \left[e^{j(n-m)2\pi} - e^0 \right]}{j(n-m)\omega_0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں آخری قدم پر $e^{j(n-m)2\pi} = \cos[(n-m)2\pi] + j\sin[(n-m)2\pi] = 1$ اور $e^0 = 1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔اس کے برعکس $n = m$ کی صورت میں $\boldsymbol{c}_n$ کو $\boldsymbol{c}_m$ لکھا جا سکتا ہے اور

$$\int_0^{T_0} \boldsymbol{c}_m \, \mathrm{d}t = T_0 \boldsymbol{c}_m$$

---

[15] exponential Fourier series



شکل 15.9: مثال 15.7 کا تفاعل۔

ہو گا لہٰذا مساوات 15.31 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$c_m=\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)e^{-jm\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \tag{15.32}$$

مثال 15.7: ہم شکل 15.7-الف کے مستطیل تفاعل کا تکونیاتی فوریئر تسلسل حاصل کر چکے ہیں۔آئیں اس کی قوت نمائی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔تفاعل کو شکل 15.9 میں دوبارہ دکھایا گیا ہے۔

حل: مساوات 15.32 استعمال کرتے ہوئے c_0 حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
c_0&=\frac{1}{T}\int_0^{T} f(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} V_0\,\mathrm{d}t+\frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T}(-V_0)\,\mathrm{d}t\\
&=0
\end{aligned}$$

اسی طرح c_m حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
c_m &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jm\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{V_0}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-jm\omega_0 t}\,\mathrm{d}t - \frac{V_0}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T} e^{-jm\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{V_0 e^{-jm\omega_0 t}}{-jm\omega_0 T}\right|_0^{\frac{T}{2}} - \left.\frac{V_0 e^{-jm\omega_0 t}}{-jm\omega_0 T}\right|_{\frac{T}{2}}^{T} \\
&= \frac{jV_0}{m\pi}(\cos m\pi - 1) \qquad {}_{\substack{-\infty\le m\le\infty \\ m\neq 0}}
\end{aligned}$$

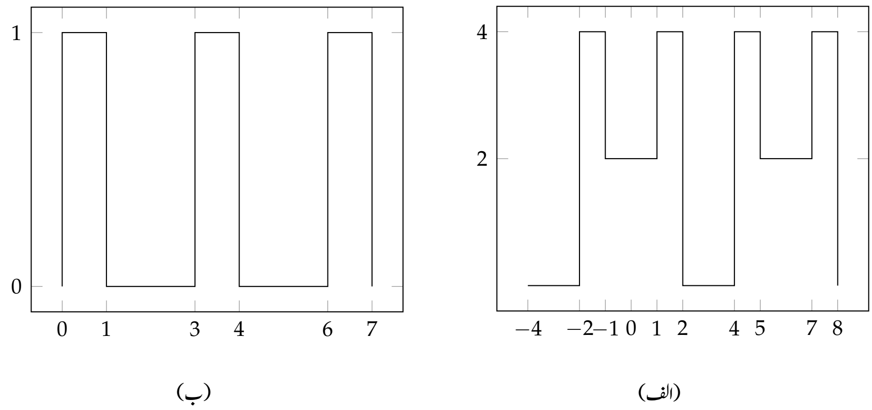
جس سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
c_1 &= c_1^* = -\frac{j2V_0}{\pi} \\
c_2 &= c_2^* = 0 \\
c_3 &= c_3^* = -\frac{j2V_0}{3\pi} \\
c_4 &= c_4^* = 0 \\
c_5 &= c_5^* = -\frac{j2V_0}{5\pi}
\end{aligned}$$

یوں شکل میں دیے مستطیل تفاعل کی فوریئر تسلسل درج ذیل ہو گی۔

$$f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n=\text{طاق} \\ n\neq 0}}^{\infty} -\frac{j2V_0}{n\pi} e^{jn\omega_0 t} \tag{15.33}$$

مشق 15.7: مساوات 15.33 میں $c_n e^{jn\omega_0 t} + c_n^* e^{-jn\omega_0 t}$ اکٹھے کرتے ہوئے مشق 15.4 میں دیا جواب حاصل کریں۔



شکل 15.10: مشق 15.8 اور مشق 15.9 کے تفاعل۔

مشق 15.8: شکل 15.10-الف میں دیے تفاعل کے قوت نمائی فوریئر تسلسل کے عددی سر معلوم کریں۔

جوابات:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{c}_0 &= \frac{1}{2}\\
\boldsymbol{c}_n &= \frac{2}{n\pi}\left[2\sin\frac{2\pi n}{3}-\sin\frac{n\pi}{3}\right]
\end{aligned}
$$

مشق 15.9: شکل 15.10-ب میں دیے تفاعل کے قوت نمائی فوریئر تسلسل کے عددی سر معلوم کریں۔

جوابات:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{c}_0 &= \frac{1}{3}\\
\boldsymbol{c}_n &= \frac{1-e^{-j\frac{2}{3}n\pi}}{j2n\pi}
\end{aligned}
$$

15.1 تشاکل تفاعل

آپ نے مختلف تفاعل کے فوریئر تسلسل دیکھے۔ان میں کئی ایسے تھے جن کے یا تمام a_m اور یا تمام b_m صفر کے برابر تھے۔آئیں اس کی وجہ سمجھیں اور تکملات حل کرنے سے پہلے یہ دریافت کرنا سیکھیں کہ آیا فوریئر تسلسل میں a_m اور یا تمام b_m صفر کے برابر ہوں گے۔فوریئر تسلسل کے ارکان کا دارومدار تفاعل کی شکل و صورت پر ہے۔ تین قسم کے تشاکل تفاعل پائے جاتے ہیں۔ان پر باری باری غور کرتے ہیں۔

15.1.1 جفت تفاعل تشاکل

جفت تفاعل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہو۔

$$f(t) = f(-t) \tag{15.34}$$

جفت تفاعل عمودی محور کے دونوں اطراف یکساں دکھائی دیتا ہے۔جفت تفاعل کی اہم مثال $\cos(n\omega_0 t)$ ہے۔آپ جانتے ہیں کہ $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ ہوتا ہے لٰہذا یہ جفت تفاعل ہے۔شکل 15.5-الف بھی جفت تفاعل ہے۔آئیں جفت تفاعل کے فوریئر تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔

مساوات 15.21 میں تکمل کو $-\frac{T_0}{2} \le t \le \frac{T_0}{2}$ لیتے ہوئے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t \\
a_m &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
b_m &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{15.35}$$

a_0 کی مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$$

ان میں پہلے تکمل میں متغیرہ کو تبدیل کرتے ہوئے $t = -x$ لکھنے سے $f(t) = f(-x)$ اور $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$ لکھے جائیں گے اور تکمل کے حدود $0 \le t \le \frac{T_0}{2}$ ہوں گے۔چونکہ تفاعل جفت ہے لہٰذا $f(x) = f(-x)$ ہو گا۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{1}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{0} f(-x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{15.36}$$

جہاں آخری قدم پر دونوں تکمل میں صرف متغیرات کی علامت مختلف ہے لہٰذا ان کی قیمتیں برابر ہیں۔

a_m کو بھی اسی طرح حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\\
&= -\frac{2}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{0} f(-x)\cos(-m\omega_0 x)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(x)\cos(m\omega_0 x)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{4}{T_0}\int_{0}^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{15.37}$$

آخر میں b_m کو اسی ترکیب سے حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{2}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{0} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2}{T_0}\int_{\frac{T_0}{2}}^{0} f(-x)\sin(-m\omega_0 x)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} f(x)\sin(-m\omega_0 x)\,\mathrm{d}x + \frac{2}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= 0
\end{aligned} \tag{15.38}$$

جہاں آخری قدم پر $\sin(-m\omega_0 t) = -\sin(m\omega_0 t)$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

آپ نے دیکھا کہ جفت تفاعل کی صورت میں فوریئر تسلسل کے $b_m = 0$ ہیں لہٰذا انہیں حاصل کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

15.1.2 طاق تفاعل تشاکل

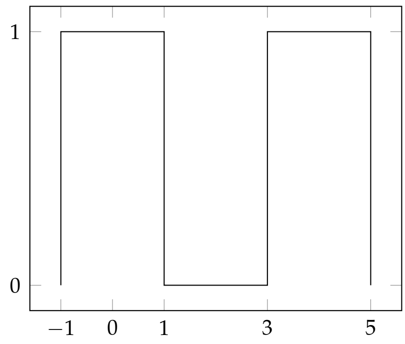
طاق تفاعل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہو۔

$$f(-t) = -f(t) \tag{15.39}$$

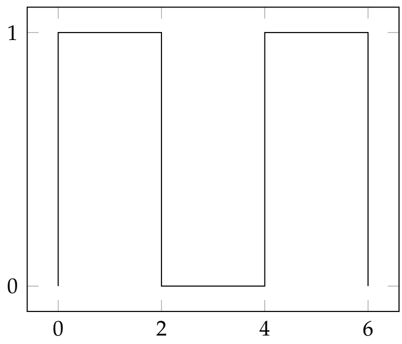
طاق تفاعل کی مثال $\sin(m\omega_0 t)$ ہے۔ہم جفت تفاعل کی طرح طاق تفاعل کے عددی سر حاصل کرتے ہوئے درج ذیل نتائج پر پہنچتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0 \\
a_m &= 0 \\
b_m &= \frac{4}{T_0}\int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{15.40}$$

یوں طاق تفاعل کے فوریئر تسلسل کے صرف b_m عددی سر حاصل کرنے کی ضرورت پیش آئے گی۔



(الف)



(ب)

شکل 15.11: مثال 15.8 اور مثال 15.9 کے اشکال۔

مثال 15.8: شکل 15.11-الف میں جفت تفاعل دکھایا گیا ہے۔اس کے فوریئر تکونیاتی تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔

حل: چونکہ دیا تفاعل جفت ہے لہٰذا $b_m = 0$ ہوں گے۔بقایا عددی سر دریافت کرتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4}\int_{-1} 1\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{4}\int_{-1}^{1} \cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \end{aligned}$$

مثال 15.9: شکل 15.11-ب میں طاق تفاعل دکھایا گیا ہے۔اس کے فوریئر تکونیاتی تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔

حل: چونکہ دیا تفاعل طاق ہے لہٰذا $a_m = 0$ ہوں گے۔ بقایا عددی سر دریافت کرتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4}\int_0 2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{4}\int_0^2 \sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1-\cos n\pi}{n\pi} \end{aligned}$$

15.2 منتقلی وقت

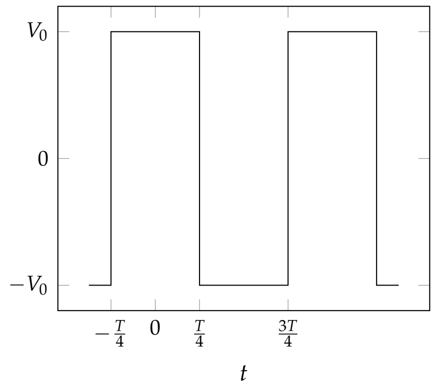
فرض کریں کہ ایک تفاعل جس کی فوریئر تسلسل درج ذیل ہے

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{c}_n e^{jn\omega_0 t} \tag{15.41}$$

کو وقت کے لحاظ سے منتقل کیا جاتا ہے۔ تفاعل $f(t)$ کو t_0 سیکنڈ تاخیر سے $f(t-t_0)$ لکھا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} f(t-t_0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \boldsymbol{c}_n e^{jn\omega_0(t-t_0)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\boldsymbol{c}_n e^{-jn\omega_0 t_0}\right) e^{jn\omega_0 t} \end{aligned} \tag{15.42}$$

چونکہ $e^{-jn\omega_0 t_0}$ سے مراد زاویائی فاصلہ ہے لہٰذا وقت میں منتقل تفاعل $f(t-t_0)$ کے فوریئر عددی سر اصل تفاعل $f(t)$ کے عددی سر ہوتے ہیں جن میں تعدد کے راست متناسب زاویائی ہٹاو $e^{-jn\omega_0 t_0}$ پایا جاتا ہے۔ اس طرح وقتی دائرہ کار میں تبادلے سے تعددی دائرہ کار میں مراد زاویائی تبادلہ ہے۔



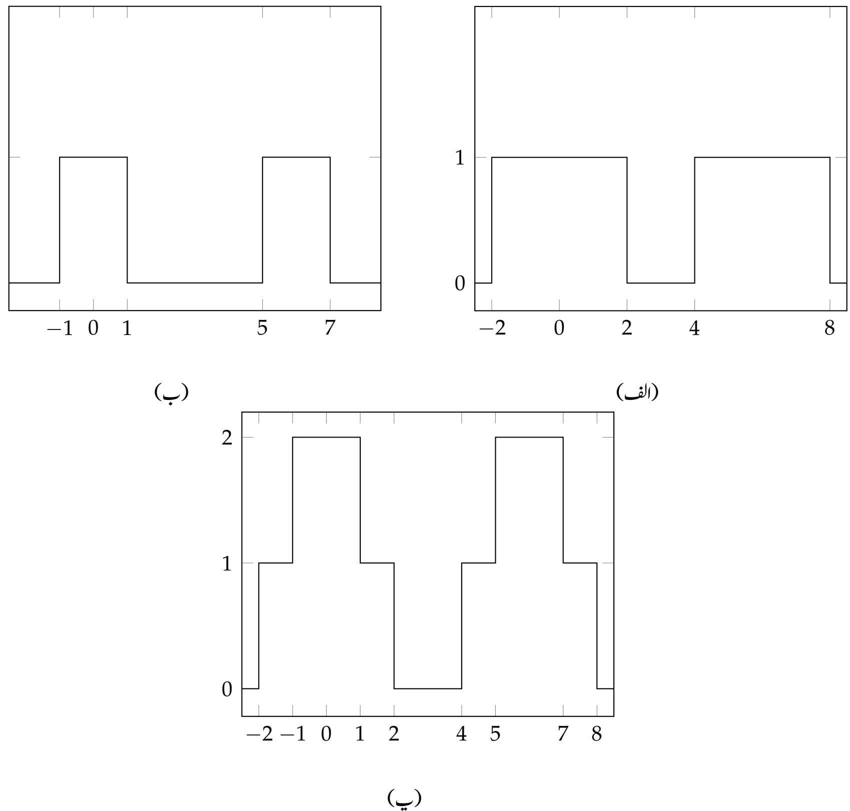
شکل 15.12: مثال 15.10 کا تفاعل۔

مثال 15.10: مثال 15.7 میں ہم شکل 15.9 کے تفاعل $f(t)$ کا قوت نمائی فوریئر تسلسل حاصل کر چکے ہیں۔ اس تفاعل کو $\frac{T}{4}$ بائیں منتقل کرتے ہوئے شکل 15.12 یعنی $f(t+\frac{T}{4})$ حاصل ہوتا ہے جس کی قوت نمائی فوریئر تسلسل درکار ہے۔ حل: اس کو تبادلہ وقت کے کلیے سے حل کرتے ہیں۔ مساوات 15.42 کے ذریعہ نئے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ $t_0=-\frac{T}{4}$ ہے لہٰذا زاویائی ہٹاو

$$-jn\omega_0 t_0 = jn\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} = jn\frac{\pi}{2}$$

ہو گا۔ یوں بنیادی ہارمونی رکن کے عددی سر میں 90° کا زاویائی ہٹاو پایا جائے گا۔ مساوات 15.33 میں ان زاویائی ہٹاو کو شامل کرتے ہوئے فوریئر تسلسل لکھتے ہیں۔

$$f\left(t+\frac{T}{4}\right) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n=\text{طاق} \\ n\neq 0}}^{\infty} -\frac{j2V_0}{n\pi} e^{jn\left(\omega_0+\frac{\pi}{2}\right)t} \tag{15.43}$$



شکل 15.13: دو یا دو سے زیادہ امواج کے جمع و منفی سے نئی موج کی تخلیق۔

15.3 تخلیق موج

دو یا دو سے زیادہ امواج کا مجموعہ لیتے ہوئے دیگر امواج حاصل کئے جا سکتے ہیں۔یوں شکل 15.13-الف اور شکل-ب مل کر شکل-پ دیتے ہیں۔انفرادی امواج کے فوریئر تسلسل کا مجموعہ حاصل موج کی فوریئر تسلسل دے گی۔ فوریئر تسلسل میں تعددی ارکان کا دارومدار وقت کے لحاظ سے موج کی صورت پر منحصر ہوتا ہے نا کہ موج کی حتمی قیمت پر۔یوں جس نسبت سے موج کا حیطہ تبدیل کیا جائے اسی نسبت سے تسلسل کو ضرب دیتے ہوئے کم یا زیادہ حیطے کی موج کا تسلسل حاصل کیا جا سکتا ہے۔

فوریئر تسلسل میں $\sum a_n \cos(n\omega_0 t)$ جفت موج کو ظاہر کرتی ہے جبکہ $\sum b_n \sin(n\omega_0 t)$ طاق موج کو ظاہر

کرتی ہے لہٰذا کسی بھی موج کو جفت موج اور طاق موج کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔

مشق 15.10: شکل 15.13-الف اور ب کی فوریئر قوت نمائی تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔ان کے مجموعے سے شکل-پ کی تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔

جواب: $c_0 = 1$ ، $c_n = \dfrac{\sin\frac{2n\pi}{3} + \sin\frac{n\pi}{3}}{n\pi}$

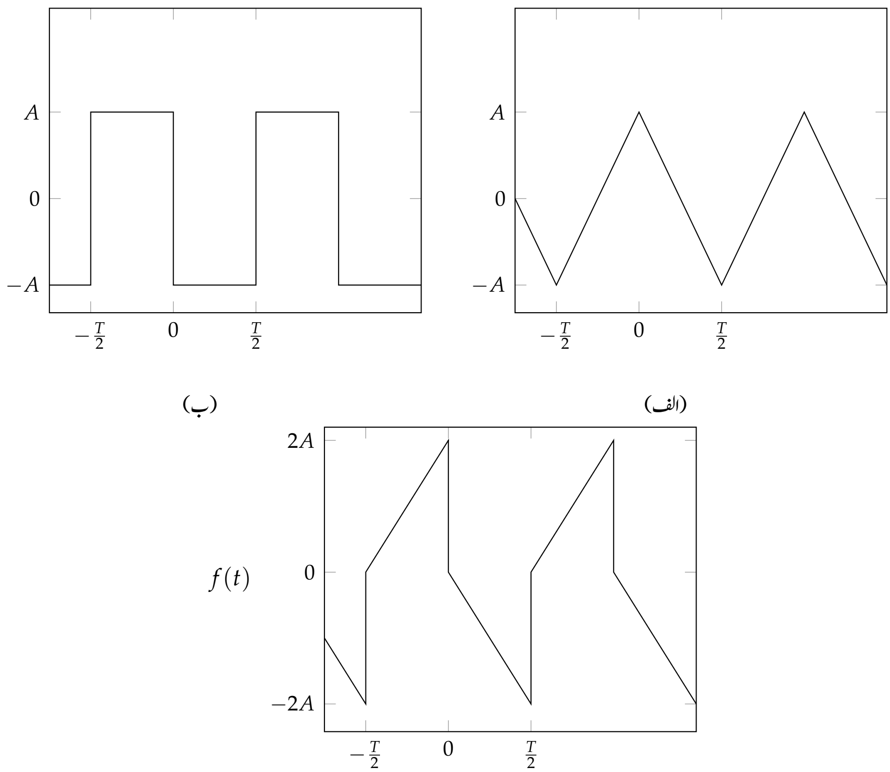
مشق 15.11: شکل 15.14-ال اور ب کا مجموعہ شکل-پ ہے۔ شکل-الف اور ب کے فوریئر تسلسل حاصل کرتے ہوئے شکل-پ کا تسلسل حاصل کریں۔

جواب: $f(t) = \sum_{\substack{n=1\\ \text{طاق}}}^{\infty} \left[\frac{4A}{n\pi}\sin(n\omega_0 t) - \frac{8A}{n^2\pi^2}\cos(n\omega_0 t)\right]$

15.4 تعددی طیف

تفاعل $f(t)$ کے عددی سر کی مقدار بالمقابل تعدد کے ترسیم کو مقداری طیف[16] کہتے ہیں جبکہ عددی سر کی زاویائی ہٹاو بالمقابل تعدد کے ترسیم کو زاویائی ہٹاو طیف[17] کہتے ہیں۔ چونکہ طیف انفرادی لکیروں پر مشتمل ہے لہٰذا اسے انفرادی لکیری طیف[18] کہتے ہیں۔انفرادی لکیری طیف تفاعل کی تعددی مواد کے بارے میں معلومات دیتی ہے۔

[16] amplitude spectrum
[17] phase spectrum
[18] discrete line spectra



(پ)

شکل 15.14: مشق 15.11 کے اشکال۔

مثال 15.11: مشق 15.11 میں شکل 15.14-پ کا تسلسل حاصل کیا گیا جو $A=5$ کی صورت میں درج ذیل ہو گا۔

$$f(t)=\sum_{\substack{n=1\\ \text{طاق}}}^{\infty}\left[\frac{20}{n\pi}\sin(n\omega_0 t)-\frac{40}{n^2\pi^2}\cos(n\omega_0 t)\right]$$

تفاعل کی مقداری طیف اور زاویائی ہٹاو طیف درکار ہے۔

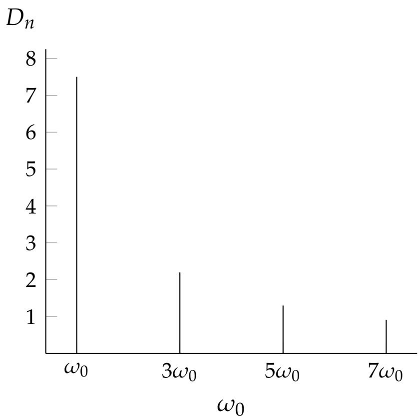
حل: چونکہ $D_n\underline{/\theta_n}=a_n-jb_n$ ہے لہٰذا پہلے چار $D_n\underline{/\theta_n}$ درج ذیل ہوں گے۔

$$D_1\underline{/\theta_1}=-\frac{40}{\pi^2}-j\frac{20}{\pi}=7.5\underline{/-122^\circ}$$
$$D_3\underline{/\theta_1}=-\frac{40}{9\pi^2}-j\frac{20}{3\pi}=2.2\underline{/-102^\circ}$$
$$D_5\underline{/\theta_1}=-\frac{40}{25\pi^2}-j\frac{20}{5\pi}=1.3\underline{/-97^\circ}$$
$$D_7\underline{/\theta_1}=-\frac{40}{49\pi^2}-j\frac{20}{7\pi}=0.91\underline{/-95^\circ}$$

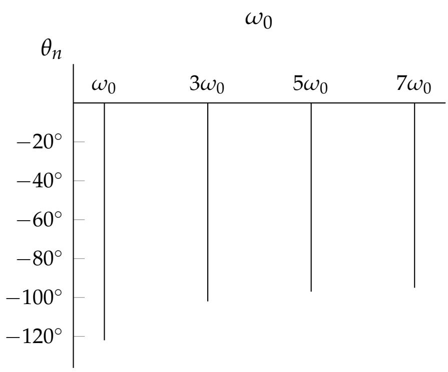
مقداری طیف اور زاویائی ہٹاو طیف کو شکل 15.15 میں دکھایا گیا ہے۔

مشق 15.12: شکل 15.16 میں دیے تفاعل کے D_n عددی سر حاصل کریں۔ جوابات:

$$a_0=\frac{1}{2}$$
$$D_1=-\frac{j}{\pi}$$
$$D_2=-\frac{j}{2\pi}$$
$$D_3=-\frac{j}{3\pi}$$
$$D_4=-\frac{j}{4\pi}$$

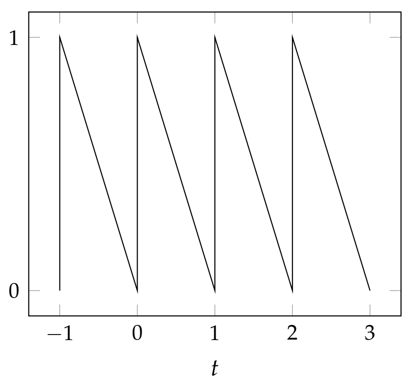


(الف) مقداری طیف۔

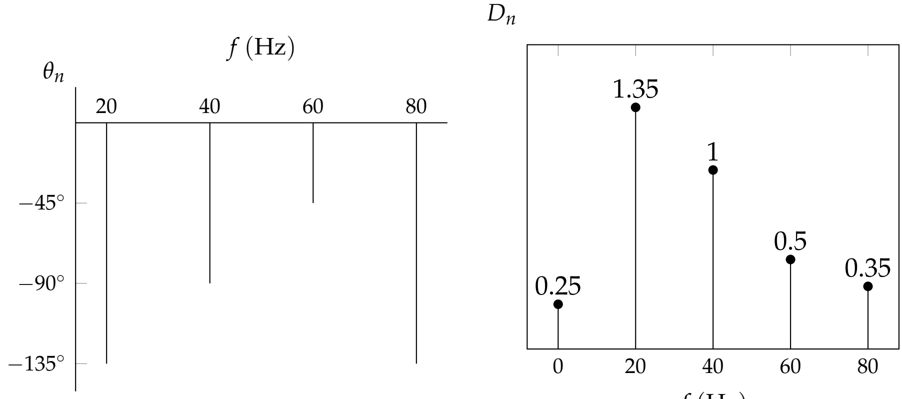


(ب) زاویائی ہٹاو طیف۔

شکل 15.15: مثال 15.11 کے طیف۔



شکل 15.16: مشق 15.12 کا تفاعل۔



(ب) زاویائی ہٹاو طیف۔

(الف) مقداری طیف۔

شکل 15.17: مشق 15.13 کے طیف۔

مشق 15.13: انفرادی لکیری طیف شکل 15.17 میں دکھائے گئے ہیں۔ تفاعل کی تکونیاتی تسلسل لکھیں۔

جواب:

$$
\begin{aligned}
f(t) = 0.25 &+ 1.35\cos(40\pi t - 135°) + 1\cos(80\pi t - 90°) \\
&+ 0.5\cos(120\pi t - 45°) + 0.35\cos(160\pi t - 135°) + \cdots
\end{aligned}
$$

15.5 برقرار حال برقی جال

کسی دور پر سائن نما دباو مسلط کرتے ہوئے دور میں مختلف مقامات پر دباو اور رو حاصل کرنا ہم دیکھ چکے ہیں۔ فرض کریں کہ کسی دور پر دوری دباو $v(t)$ مسلط کی جاتی ہے۔ایسے دور کو حل کرنے کی خاطر ہم مسلط دباو کا فوریئر تسلسل حاصل کرتے ہیں۔ فوریئر تسلسل کا ہر رکن سائن نما دباو ہو گا۔انفرادی ہارمونی دباو کے لئے دور کو تعددی دائرہ کار میں حل کیا جاتا ہے۔ ان جوابات کا وقتی دائرہ کار میں مطلوبہ قیمت حاصل کی جاتی ہے۔ تمام جوابات کا مجموعہ درکار جواب ہوتا ہے۔

15.5.1 اوسط طاقت

جیسا اوپر ذکر کیا گیا، دور پر دوری دباو یا دوری رو مسلط کرنے سے مختلف مقامات پر دباو اور رو پیدا ہوں گے جنہیں تسلسل کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v(t) = V_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{v,n}) \tag{15.44}$$

$$i(t) = I_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{i,n}) \tag{15.45}$$

انفعالی رائج سمت استعمال کرتے ہوئے فرض کریں کہ کسی پرزے پر دباو اور اس میں رو درج بالا مساوات دیتے ہیں۔یوں اس پرزے کی اوسط طاقت درج ذیل ہو گی۔

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T v(t)i(t)\,\mathrm{d}t \tag{15.46}$$

درج بالا مساوات میں دو فوریئر تسلسل کے حاصل ضرب کا تکمل لیا گیا ہے۔ دو عدد فوریئر تسلسل کے حاصل ضرب میں تین قسم کے ارکان پائے جاتے ہیں۔ایک رکن $V_{DC}I_{DC}$ ہے جس کا تکمل تقسیم T از خود $V_{DC}I_{DC}$ کے برابر ہے۔ دوسرا قسم وہ ہے جو $I_{DC}V_n\cos(n\omega_0 t - \theta_{v,n})$ یا $V_{DC}I_n\cos(n\omega_0 t - \theta_{i,n})$ صورت رکھتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ سائن نما تفاعل کا ایک دوری عرصے پر تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا ایسے تمام ارکان صفر کے برابر ہوں گے۔ تیسرا اور سب سے زیادہ تعداد میں ارکان $\cos(m\omega_0 t - \theta_{v,n})\cos(n\omega_0 t - \theta_{i,n})$ صورت رکھتے ہیں۔آپ جانتے ہیں کہ $\cos(n\omega_0 t)$ اور $\sin(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی تفاعل ہیں لہٰذا $m \neq n$ کی صورت

میں تمام $\cos(m\omega_0 t - \theta_{v,n})\cos(n\omega_0 t - \theta_{i,n})$ کا ایک دوری عرصے پر تکمل صفر کے برابر ہو گا۔ یوں صرف ایسے ارکان غیر صفر ہوں گے جن میں دباو کی تعدد اور رو کی تعدد برابر ہو یعنی

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{T}\int_0^T V_n I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{v,n})\cos(n\omega_0 t - \theta_{i,n})\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_n I_n}{2}\cos(\theta_{v,n} - \theta_{i,n})$$

اس طرح اوسط طاقت درج ذیل ہو گی۔

$$P = V_{DC} I_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{V_n I_n}{2}\cos(\theta_{v,n} - \theta_{i,n}) \tag{15.47}$$

درج بالا مساوات کا مطلب ہے کہ تمام انفرادی ہارمونی اجزاء کے اوسط طاقت کا مجموعہ کل اوسط طاقت دیتا ہے۔

مثال 15.12: شکل 15.18-الف پر درج ذیل داخلی دباو $v_d(t)$ مسلط کی گئی ہے۔ خارجی دباو $v_0(t)$ حاصل کریں۔

$$v_d(t) = \sum_{\substack{n=1\\ \text{طاق}}}^{\infty}\frac{20}{n\pi}\sin(2nt) - \frac{40}{n^2\pi^2}\cos(2nt)$$

حل: داخلی دباو کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

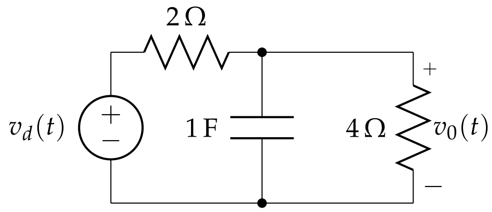
$$\begin{aligned} v_d(t) &= 7.5\cos(2t - 122^\circ) + 2.2\cos(6t - 102^\circ) \\ &\quad + 1.3\cos(10t - 97^\circ) + 0.91\cos(14t - 95^\circ) + \cdots \end{aligned} \tag{15.48}$$

شکل 15.18-ب میں تعددی دائرہ کار میں دور کو دکھایا گیا ہے جس میں متوازی جڑے برق گیر اور مزاحمت کی رکاوٹ $\frac{4(1/j\omega)}{4+1/j\omega} = \frac{4}{1+j4\omega}$ ہے لہٰذا تقسیم دباو سے خارجی دباو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

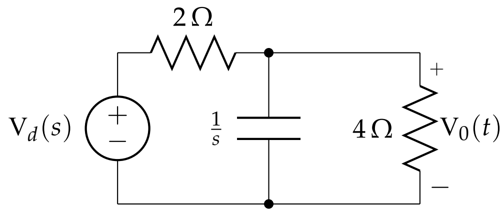
$$\mathrm{V}_0(\omega) = \frac{\frac{4}{1+j4\omega}}{2+\frac{4}{1+j4\omega}}\mathrm{V}_d(s) = \frac{2}{3+j4\omega}\mathrm{V}_d \tag{15.49}$$

مساوات 15.48 کے پہلے رکن سے $\omega_0 = 2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ دیکھا جا سکتا ہے لہٰذا تسلسل کے پہلے رکن سے پیدا خارجی دباو درج بالا مساوات سے

$$\mathrm{V}_0(\omega_0) = \left(\frac{2}{3+j8}\right)7.5\underline{/-122^\circ} = 1.7556\underline{/-191.4^\circ}$$



(الف)



(ب)

شکل 15.18: مثال 15.12 کا دور۔

ہو گا۔ داخلی دباو کے تسلسل میں اگلے رکن یعنی تیسرے ہارمونی جزو کی تعدد $\omega = 3\omega_0 = 6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ جبکہ پانچویں ہارمونی رکن کی تعدد $5\omega_0$ ہے۔ یوں ان ارکان سے پیدا خارجی دباو کو مساوات 15.49 میں درست تعدد پر کرتے ہوئے حاصل کی جا سکتی ہے۔

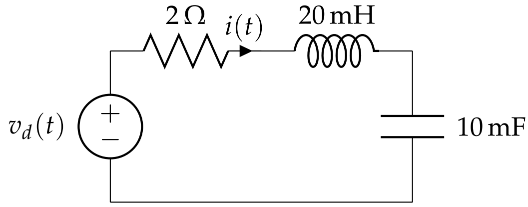
$$V_0(3\omega_0) = \frac{\frac{4}{1+j24}}{2+\frac{4}{1+j24}} 2.2\underline{/-102^\circ} = 0.1819\underline{/-184.9^\circ}$$

$$V_0(5\omega_0) = \frac{\frac{4}{1+j40}}{2+\frac{4}{1+j40}} 1.3\underline{/-97^\circ} = 0.0648\underline{/-182.7^\circ}$$

$$V_0(7\omega_0) = \frac{\frac{4}{1+j56}}{2+\frac{4}{1+j56}} 0.91\underline{/-95^\circ} = 0.0325\underline{/-181.9^\circ}$$

یوں برقرار خارجی دباو درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} v_d(t) &= 1.7556\cos(2t - 191.4^\circ) + 0.1819\cos(6t - 184.9^\circ) \\ &\quad + 0.0648\cos(10t - 182.7^\circ) + 0.0325\cos(14t - 181.9^\circ) + \cdots \end{aligned} \tag{15.50}$$



شکل 15.19: مثال 15.13 کا دور۔

مثال 15.13: شکل 15.19 میں سلسلہ وار RLC پر درج ذیل دباو $v_d(t)$ مسلط کیا گیا ہے۔ مزاحمت میں اوسط طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔

$$v_d(t) = 33 + 2\cos(100t - 30^\circ) + 1.1\cos(200t - 45^\circ) + 0.6\cos(300t - 60^\circ) + \cdots$$

حل: برق گیر یک سے سمتی رو نہیں گزرتی لہٰذا داخلی دباو کا یک سمتی جزو یعنی 33 V کوئی رو نہیں پیدا کر پائے گا اور $I_{DC} = 0$ ہو گا۔ پہلے ہارمونی جزو سے $\omega_0 = 100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ دیکھا جا سکتا ہے۔ داخلی دباو کے تسلسل کے بقایا ارکان کو باری باری حل کرتے ہوئے رو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(\omega_0) &= \frac{2\underline{/-30^\circ}}{2 + j100 \times 0.02 + \frac{1}{j100\times 0.01}} = 0.89\underline{/-56.6^\circ} \\
\mathrm{I}(2\omega_0) &= \frac{1.1\underline{/-45^\circ}}{2 + j200 \times 0.02 + \frac{1}{j200\times 0.01}} = 0.27\underline{/-105.3^\circ} \\
\mathrm{I}(3\omega_0) &= \frac{0.6\underline{/-60^\circ}}{2 + j300 \times 0.02 + \frac{1}{j300\times 0.01}} = 0.099\underline{/-130.6^\circ}
\end{aligned}$$

یوں رو

$$\begin{aligned}
i(t) = 0.89\cos(100t - 56.6^\circ) &+ 0.27\cos(200t - 105.3^\circ) \\
&+ 0.099\cos(300t - 130.6^\circ) + \cdots
\end{aligned}$$

ہو گی۔ دور میں صرف مزاحمت طاقت ضائع کرتی ہے لہٰذا پورے دور کا ضیاع مزاحمتی ضیاع ہو گا۔ دور میں کل اوسط طاقت کا ضیاع درج ذیل ہے

$$P = \frac{2 \times 0.89}{2} \cos(56.6^\circ - 30^\circ) + \frac{1.1 \times 0.27}{2} \cos(105.3^\circ - 45^\circ) + \frac{0.6 \times 0.099}{2} \cos(130.6^\circ - 60^\circ) + \cdots$$

یعنی

$$P \approx 0.61\,\mathrm{W}$$

مشق 15.14: ایک دور کے داخلی دباو اور داخلی رو درج ذیل ہیں۔ دور میں اوسط طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔

$$v_d(t) = 20 + 7\cos(100t - 30^\circ) + 5\cos(200t - 45^\circ) + 2\cos(300t - 60^\circ) + \cdots$$
$$i_d(t) = 5 + 3\cos(100t + 40^\circ) + 1\cos(200t - 45^\circ) + 0.2\cos(300t - 70^\circ) + \cdots$$

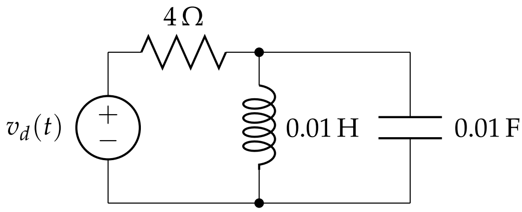
جواب: $P = 108.99\,\mathrm{W}$

مشق 15.15: شکل 15.20 میں داخلی رو دریافت کریں۔ داخلی دباو درج ذیل ہے۔

$$v_d(t) = 5\cos(50t - 30^\circ) + 4\cos(100t + 45^\circ) + 2\cos(150t - 10^\circ)\,\mathrm{V}$$

جواب: متوازی امالہ اور برق گیر کی قدرتی تعدد $100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے جس پر ان کی رکاوٹ لامتناہی ہو جاتی ہے لہٰذا رو میں $100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ کا جزو نہیں پایا جاتا۔

$$i_d(t) = 1.23\cos(50t - 39.5^\circ) + 0.48\cos(150t + 6.7^\circ)\,\mathrm{A}$$



شکل 15.20: مشق 15.15 کا دور۔

15.6 فوریئر بدل

ہم دوری تفاعل کو فوریئر تسلسل سے ظاہر کرنا دیکھ چکے ہیں۔آئیں اب **غیر دوری**[19] تفاعل کو ظاہر کرنے پر غور کریں۔

شکل 15.21-الف میں غیر دوری تفاعل $f(t)$ دکھایا گیا ہے۔شکل-ب میں اس تفاعل کو T دورانیے پر دہراتے ہوئے تفاعل $f_d(t)$ حاصل کیا گیا ہے۔آپ جانتے ہیں کہ شکل-ب کے دوری تفاعل کو ہم قوت نمائی تسلسل سے ظاہر کر سکتے ہیں

$$f_d(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{c}_n e^{jn\omega_0 t} \tag{15.51}$$

جہاں

$$\boldsymbol{c}_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_d(t)e^{-jn\omega_0 t}\,\mathrm{d}t \tag{15.52}$$

اور

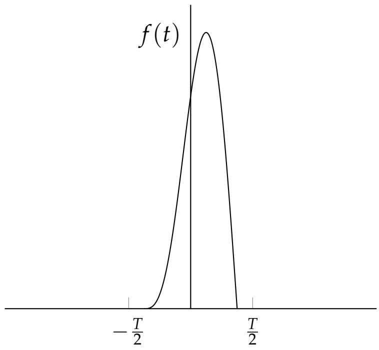
$$\omega_0=\frac{2\pi}{T} \tag{15.53}$$

ہیں۔شکل 15.21-ب میں $T\to\infty$ کرنے سے شکل-الف حاصل ہوتا ہے یعنی تفاعل غیر دوری ہو گا۔ایسی صورت میں $-T$ ، T ، $2T$ وغیرہ پر پائے جانے والے حصے لامتناہی پر پائے جائیں گے۔

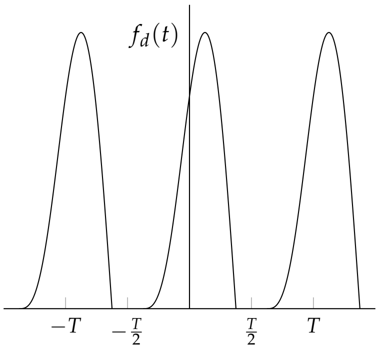
دوری تفاعل کے لکیری طیف میں لکیریں ہارمونی تعدد $n\omega_0$ پر پائی جاتی ہے لہٰذا دو قریبی لکیروں کے مابین تعددی فاصلہ

$$\Delta\omega=(n+1)\omega_0-n\omega_0=\omega_0=\frac{2\pi}{T} \tag{15.54}$$

[19] aperiodic



(الف) غیر دوری تفاعل۔



(ب) دوری تفاعل۔

شکل 15.21: دوری اور غیر دوری تفاعل۔

ہو گا۔ شکل 15.22-الف میں ان حقائق کی وضاحت کی گئی ہے۔ دوری فاصلہ T بڑھانے سے طیفی لکیروں کے مابین تعددی فاصلہ کم ہو گا۔ شکل-ب اور پ میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ جیسا شکل-ت میں دکھایا گیا ہے، $T \to \infty$ کرنے سے $\Delta\omega \to \mathrm{d}\omega$ ہو گا، طیف اپنی لکیری خاصیت کھو دے گا اور یہ ایک مسلسل طیف کی صورت اختیار کر لیگا۔ ایسی صورت میں طیف انفرادی تعدد $n\omega_0$ کی بجائے تمام تعدد ω پر پایا جائے گا لہٰذا $n\omega_0$ کو ω فرض کیا جا سکتا ہے یعنی

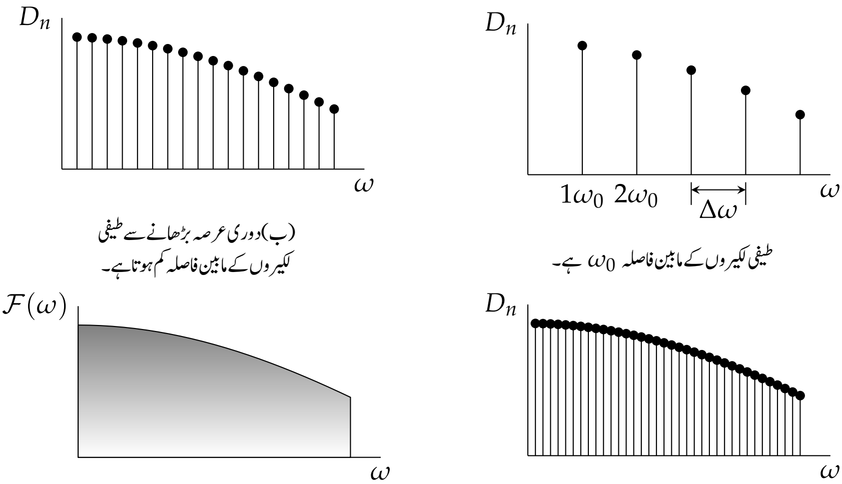
$$n\omega_0 = \omega \tag{15.55}$$

چونکہ $T \to \infty$ کرنے سے مساوات 15.52 میں $c_n \to 0$ ہوں گے لہٰذا ہم $c_n T$ پر نظر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔

$$\boldsymbol{c}_n T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_d(t) e^{-jn\omega_0 t} \,\mathrm{d}t$$

دوری عرصے کی حد لامتناہی کرتے ہوئے درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} (\boldsymbol{c}_n T) &= \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_d(t) e^{-jn\omega_0 t} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} \,\mathrm{d}t\end{aligned}$$



طیفی لکیروں کے مابین فاصلہ ω_0 ہے۔

(ب)دوری عرصہ بڑھانے سے طیفی لکیروں کے مابین فاصلہ کم ہوتا ہے۔

(پ)دوری عرصہ بہت بڑھانے سے طیفی لکیروں کے مابین فاصلہ نہایت کم ہو جاتا ہے۔

(ت)لا متناہی دوری عرصے کی صورت میں طیفی لکیریں آپس میں مل جاتی ہیں اور ان میں فرق کرنا ممکن نہیں رہتا۔

شکل 15.22: لکیری طیف سے مسلسل طیف کا حصول۔

جہاں مندرجہ بالا بحث کو مد نظر رکھتے ہوئے، دوسری قدم پر دوری تفاعل $f_d(t)$ کی جگہ غیر دوری تفاعل $f(t)$ پر کیا گیا ہے اور مساوات 15.55 کا استعمال کیا گیا ہے۔ اس تکمل کو **فوریئر بدل**[20] کہتے اور $\mathcal{F}(\omega)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\mathrm{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{15.56}$$

اسی طرح دوری تفاعل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}
f_d(t)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{c}_n e^{jn\omega_0 t}\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\boldsymbol{c}_n T)e^{jn\omega_0 t}\frac{1}{T}\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\boldsymbol{c}_n T)e^{jn\omega_0 t}\frac{\Delta\omega}{2\pi}
\end{aligned}$$

---

[20] Fourier transform

جس کو $T \to \infty$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \tag{15.57}$$

جہاں مساوات 15.55 کا استعمال کیا گیا ہے۔

مساوات 15.56 اور مساوات 15.57 فوریئر جوڑی کہلاتے ہیں۔ چونکہ $f(t)$ کا **فوریئر بدل**[21] $\mathcal{F}(\omega)$ ہے لہٰذا $\mathcal{F}(\omega)$ کا **الٹ فوریئر بدل**[22] $f(t)$ ہے۔ فوریئر جوڑی کو اکٹھے لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\ f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[\mathrm{F}(\omega)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \end{aligned} \tag{15.58}$$

چند اہم فوریئر بدل جوڑیاں

چند فوریئر بدل کی جوڑیاں حاصل کرتے ہیں۔

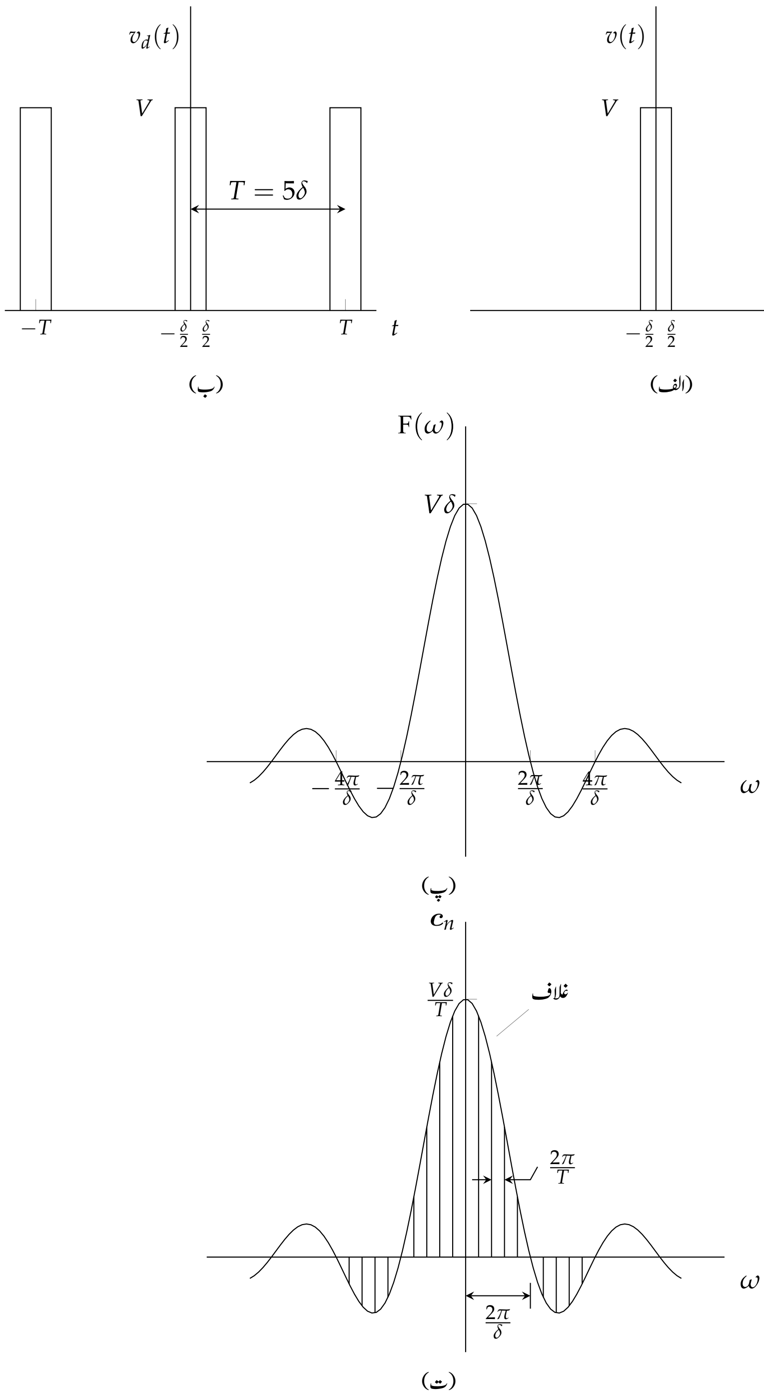
مثال 15.14: شکل 15.23-الف میں دیے مستطیل تفاعل $f(t)$ کی فوریئر بدل $\mathrm{F}(\omega)$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.58 استعمال کرتے ہوئے فوریئر بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(\omega) &= \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} Ve^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= \left.\frac{Ve^{-j\omega t}}{-j\omega}\right|_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \\ &= V\frac{e^{-j\omega\frac{\delta}{2}} - e^{+j\omega\frac{\delta}{2}}}{j\omega} \\ &= V\delta\frac{\sin\frac{\omega\delta}{2}}{\frac{\omega\delta}{2}} \end{aligned}$$

---

[21] Fourier transform
[22] inverser Fourier transform



شکل 15.23: مثال 15.14 کا تفاعل۔

یوں وقتی دائرہ کار کے تفاعل $f(t)$

$$f(t)=\begin{cases}0 & -\infty<t\le-\frac{\delta}{2}\\ V & -\frac{\delta}{2}<t<\frac{\delta}{2}\\ 0 & \frac{\delta}{2}\le t<\infty\end{cases} \tag{15.59}$$

کا فوریئر بدل $\mathrm{F}(\omega)$ درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{F}(\omega)=\mathcal{F}[f(t)]=V\delta\frac{\sin\frac{\omega\delta}{2}}{\frac{\omega\delta}{2}} \tag{15.60}$$

اس مثال پر مزید غور کرتے ہیں۔ شکل 15.23-الف کے تفاعل کو شکل-ب میں T فاصلے کے دورانیے پر دہراتے ہوئے دوری تفاعل $f_d(t)$ حاصل کیا گیا ہے۔ دوری تفاعل $f_d(t)$ کے فوریئر تسلسل کے عددی سر درج ذیل ہیں۔

$$c_n=\frac{V\delta}{T}\frac{\sin\frac{n\omega_0\delta}{2}}{\frac{n\omega_0\delta}{2}} \tag{15.61}$$

شکل 15.23-ت میں لکیری طیف دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لکیری طیف کے **غلاف**[23] کی شکل اور مسلسل طیف کی شکل بالکل یکساں ہیں۔

اس مثال کے نتائج اور مساوات سے ظاہر ہے کہ $T\to\infty$ کرنے سے دوری تفاعل تبدیل ہو کر غیر دوری تفاعل بن جاتا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ جیسے جیسے T بڑھتا ہے ویسے ویسے طیفی لکیر قریب ہوتے ہیں اور ان کا حیطہ کم ہوتا ہے حتیٰ کہ آخر کار لکیری طیف مسلسل طیف میں تبدیل ہو جاتا ہے۔ چونکہ فوریئر تسلسل مخصوص تعدد پر اشارے کا حیطہ اور زاویائی ہٹاو دیتا ہے لہٰذا فوریئر بدل بھی اشارے کی تعددی معلومات دیتا ہے۔

مثال 15.15: اکائی ضرب تفاعل $\delta(t-a)$ اور $\delta(t)$ کا فوریئر بدل حاصل کریں۔

[23] envelope

حل: اکائی ضرب تفاعل کا فوریئر بدل تکمل سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \mathrm{F}(\omega) &= \int_0^\infty \delta(t-a)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-j\omega a} \end{aligned} \tag{15.62}$$

تکمل کو حل میں اکائی ضرب تفاعل کی نمونہ بندی خاصیت استعمال کی گئی۔ درج بالا میں $a = 0$ پر کرنے سے اکائی ضرب تفاعل $\delta(t)$ کا فوریئر بدل ملتا ہے۔

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1 \tag{15.63}$$

آپ نے دیکھا کہ اکائی ضرب تفاعل $\delta(t)$ کا فوریئر بدل ایک مستقل مقدار ہے جو تعدد کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتا۔ یہ اکائی ضرب تفاعل کی ایک اہم خصوصیت ہے۔

مثال 15.16: تفاعل $e^{j\omega_0 t}$ کا فوریئر بدل حاصل کریں۔

حل: یہاں اگر $\mathrm{F}(\omega) = 2\pi\delta(t-t_0)$ لیا جائے تب $f(t)$ درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(t-t_0)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega \\ &= e^{j\omega_0 t} \end{aligned} \tag{15.64}$$

جہاں $\delta(t-t_0)$ کی نمونہ بندی کی خاصیت استعمال کی گئی۔ یوں $f(t) = e^{j\omega_0 t}$ اور $\mathrm{F}(\omega) = 2\pi\delta(t-t_0)$ فوریئر بدل جوڑی ہیں۔

مشق 15.16: تفاعل $\cos\omega t$ کا فوریئر بدل دریافت کریں۔

جواب: $\mathrm{F}(\omega) = \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0)$

چند اہم فوریئر بدل جوڑیوں کو جدول 15.1 میں اکٹھے کیا گیا ہے۔

جدول 15.1: فوریئر بدل جوڑیاں۔

$f(t)$	$\mathcal{F}(\omega)$
A	$2\pi A\delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega a}$
$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\sin\omega_0 t$	$j\pi\delta(\omega+\omega_0)-j\pi\delta(\omega-\omega_0)$
$\cos\omega_0 t$	$\pi\delta(\omega-\omega_0)+\pi\delta(\omega+\omega_0)$
$e^{-at}u(t),\ a>0$	$\frac{1}{a+j\omega}$
$e^{-a\lvert t\rvert}u(t),\ a>0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
$e^{-at}\sin\omega_0 t\,u(t),\ a>0$	$\frac{\omega_0}{(j\omega+0)^2+\omega_0^2}$
$e^{-at}\cos\omega_0 t\,u(t),\ a>0$	$\frac{j\omega+a}{(j\omega+0)^2+\omega_0^2}$

15.7 فوریئر بدل کے خواص

فوریئر بدل کے چند مخصوص مسئلوں کو جدول 15.2 میں پیش کیا گیا ہے۔ان میں سے **مسئلہ وقتی الجھاو**[24] کو ثابت کرتے ہیں۔جدول میں دیے بقایا مسئلے بھی انتہائی آسانی سے ثابت کئے جا سکتے ہیں۔

تفاعل $f(t)$ کا فوریئر بدل درج ذیل ہے۔

$$\mathcal{F}[f(t)]=\mathrm{F}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{15.65}$$

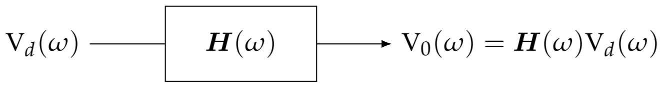
فرض کریں کہ

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f_1(t)]&=\mathrm{F}_1(\omega)\\ \mathcal{F}[f_2(t)]&=\mathrm{F}_2(\omega)\end{aligned}$$

ہیں تب

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x)f_2(t-x)\,\mathrm{d}x\right]&=\int_{t=-\infty}^{\infty}\int_{x=-\infty}^{\infty}f_1(x)f_2(t-x)\,\mathrm{d}x e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\\ &=\int_{x=-\infty}^{\infty}f_1(x)\int_{t=-\infty}^{\infty}f_2(t-x)e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

[24] time convolution theorem



شکل 15.24: وقتی الجھاو۔

جدول 15.2: فوریئر بدل کے مسئلے۔

مسئلہ	$f(t)$	$\mathcal{F}(\omega)$
خطیت	$Af(t)$	$A\mathrm{F}(\omega)$
	$f_1(t) \mp f_2(t)$	$\mathrm{F}_1(\omega) \mp \mathrm{F}_2(\omega)$
مسئلہ متناسب وقت	$f(at)$	$\frac{1}{a}\mathrm{F}\left(\frac{\omega}{a}\right),\ a > 0$
مسئلہ منتقلی وقت	$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}\mathrm{F}(\omega)$
ترمیم تعدد	$e^{j\omega t_0} f(t)$	$\mathrm{F}(\omega - \omega_0)$
	$\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}$	$(j\omega)^n \mathrm{F}(\omega)$
تفرق	$t^n f(t)$	$(j)^n \frac{\mathrm{d}^n \mathrm{F}(\omega)}{\mathrm{d}\omega^n}$
	$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t - x)\,\mathrm{d}x$	$\mathrm{F}_1(\omega)\mathrm{F}_2(\omega)$
الجھاو	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{F}_1(x)\mathrm{F}_2(\omega - x)\,\mathrm{d}x$

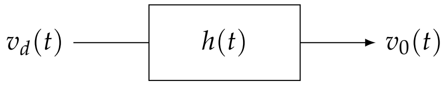
اب اگر ہم $u = t - x$ پر کریں تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(t-x)\,\mathrm{d}x\right] &= \int_{x=-\infty}^{\infty} f_1(x) \int_{t=-\infty}^{\infty} f_2(u) e^{-j\omega(u+x)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-j\omega x}\,\mathrm{d}x \int_{t=-\infty}^{\infty} f_2(u) e^{-j\omega u}\,\mathrm{d}u \\
&= \mathrm{F}_1(\omega)\mathrm{F}_2(\omega)
\end{aligned}
$$

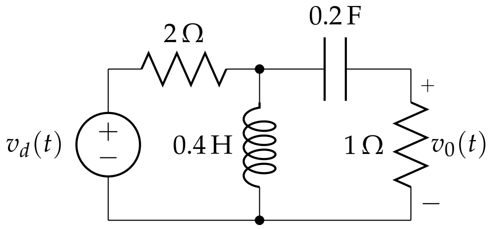
شکل 15.24 کو دیکھتے ہوئے مسئلہ وقتی الجھاو کہتا ہے کہ اگر $V_d(\omega) = \mathcal{F}[v_d(t)]$ ، $H(\omega) = \mathcal{F}[h(t)]$ اور $V_0(\omega) = \mathcal{F}[v_0(t)]$ ہوں تب

$$
V_0(\omega) = \boldsymbol{H}(\omega) V_d(\omega) \tag{15.66}
$$

ہو گا۔



شکل 15.25: مشق 15.17 کا دور۔



شکل 15.26: مشق 15.18 کا دور۔

مشق 15.17: شکل 15.25 میں داخلی دباو $v_d(t) = e^{-t}u(t)\,\mathrm{V}$ ، دور کا اکائی ضرب رد عمل $h(t) = e^{-2t}u(t)$ جبکہ ابتدائی معلومات صفر ہیں۔ خارجی دباو $v_0(t)$ دریافت کریں۔

جواب: $v_0(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)\,\mathrm{V}$

مشق 15.18: شکل 15.26 میں $v_d(t) = 42\cos 3t\,\mathrm{V}$ ہے۔ فوریئر بدل کے طریقے سے $v_0(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = 12.57\cos(10t + 86.2^\circ)\,\mathrm{V}$

15.8 مسئلہ پارسیوال

مسئلہ پارسیوال[25] کی الجبرائی صورت درج ذیل ہے۔

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathrm{F}(\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega \tag{15.67}$$

اس تعلق کو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(\omega)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(-\omega)t}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(\omega)\mathrm{F}(-\omega)\,\mathrm{d}\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{F}(\omega)\mathrm{F}^*(\omega)\,\mathrm{d}\omega\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathrm{F}(\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

فرض کریں کہ $1\,\Omega$ کی مزاحمت میں رو $f(t)$ ہے۔اس مزاحمت میں طاقت $f^2(t)$ اور توانائی کا ضیاع $\int f^2(t)\,\mathrm{d}t$ ہو گا۔مسئلہ پارسیوال کہتا ہے کہ $1\,\Omega$ کی مزاحمتی ضیاع یا تقابل پذیر ضیاع کو وقتی دائرہ کار یا تعددی دائرہ کار میں حاصل کیا جا سکتا ہے۔

پٹی گزار چھلنی جو $\omega_1 \le \omega \le \omega_2$ کے تعدد گزارتا ہو درج ذیل توانائی گزارے گی۔

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\omega_1}^{\omega_2}\left|\mathrm{F}(\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega \tag{15.68}$$

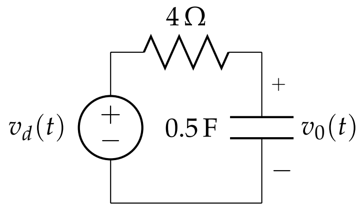
یوں $\Delta\omega$ کی باریک تعددی پٹی میں درج ذیل توانائی پائی جائے گی۔

$$\Delta W = \frac{1}{2\pi}\left|\mathrm{F}(\omega)\right|^2\Delta\omega \tag{15.69}$$

اگرچہ توانائی کو پارسیوال تکمل کے دونوں اطراف سے حاصل کیا جا سکتا ہے، تعددی دائرہ کار میں توانائی کسی مخصوص تعددی پٹی میں بھی حاصل کی جا سکتی ہے۔

---

[25] Parseval's theorem



شکل 15.27: مثال 15.17 اور مثال 15.18 کا دور۔

مثال 15.17: شکل 15.27 میں $v_d(t) = 10e^{-4t}u(t)\,\mathrm{V}$ کی صورت میں $v_0(t)$ فوریئر طریقے سے حاصل کریں۔ اسی دور کو فوریئر طریقے سے $v_d(t) = 15\cos 5t\,\mathrm{V}$ کے لئے بھی حل کریں۔

حل: داخلی دباو $v_d(t)$ کا فوریئر بدل جدول 15.1 سے لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{V}_d(\omega) = \frac{10}{4 + j\omega}$$

دور کا $\boldsymbol{H}(\omega)$ درج ذیل ہے۔

$$\boldsymbol{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j2\omega}$$

مساوات 15.66 کے تحت

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_0(\omega) &= \boldsymbol{H}(\omega)\mathrm{V}_d(\omega)\\
&= \frac{10}{(1 + j2\omega)(4 + j\omega)}\\
&= \frac{10}{7(j\omega + 0.5)} - \frac{10}{7(j\omega + 4)}
\end{aligned}$$

ہو گا۔ جدول 15.1 سے الٹ فوریئر بدل لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_0(t) = \frac{10}{7}e^{-0.5t}u(t) - \frac{10}{7}e^{-4t}u(t)\,\mathrm{V}$$

آئیں اب $v_d(t) = 15\cos 5t\,\mathrm{V}$ کا فوریئر بدل جدول سے لکھیں۔

$$\mathrm{V}_d(\omega) = 15\pi\delta(\omega - 5) + 15\pi\delta(\omega + 5)$$

خارجی دباو لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\mathrm{V}_0(\omega) &= \boldsymbol{H}(\omega)\mathrm{V}_d(\omega)\\
&= \frac{15\pi}{1+j2\omega}[\delta(\omega-5)+\delta(\omega+5)]
\end{aligned}
$$

فوریئر الٹ بدل لیتے ہیں

$$
\begin{aligned}
v_0(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 15\pi\frac{\delta(\omega-5)+\delta(\omega+5)}{1+j2\omega}e^{j\omega t}\,\mathrm{d}\omega\\
&= 7.5\frac{e^{j5t}}{1+j10}+7.5\frac{e^{-j5t}}{1-j10}\\
&= \frac{7.5e^{5t}}{\sqrt{101}e^{j84.3^\circ}}+\frac{7.5e^{-5t}}{\sqrt{101}e^{-j84.3^\circ}}\\
&= 1.493\cos(5t-84.3^\circ)\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

جہاں تکمل کو نمونہ بندی کی خاصیت سے حاصل کیا گیا۔

مثال 15.18: شکل 15.27 میں $v_d(t) = 10e^{-4t}u(t)\,\mathrm{V}$ کی صورت میں داخلی اور خارجی تقابل پذیر توانائی دریافت کریں۔

حل: اکائی اوہم داخلی توانائی حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
W_d &= \int_0^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_0^{\infty} 100e^{-8t}\,\mathrm{d}t\\
&= \left.\frac{100e^{-8t}}{-8}\right|_0^{\infty}\\
&= 12.5\,\mathrm{J}
\end{aligned}
$$

خارجی توانائی کو مسئلہ پارسیوال سے حاصل کرتے ہیں۔ گزشتہ مثال میں درج ذیل حاصل کیا گیا

$$\mathrm{V}_0(\omega) = \frac{10}{(j2\omega+1)(j\omega+4)}$$

لہٰذا

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{V}_0\right|^2 &= \frac{100}{(4\omega^2+1)(\omega^2+16)} \\
&= \frac{100}{63(\omega^2+0.25)} - \frac{100}{63(\omega^2+16)}
\end{aligned}$$

ہو گا اور تقابل پذیر خارجی توانائی

$$\begin{aligned}
W_d &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathrm{V}_0(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega \\
&= \frac{50}{63\pi}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2+0.5^2} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2+4^2}\right) \\
&= \frac{50}{63\pi}\left(\frac{1}{0.5}\tan^{-1}\frac{\omega}{0.5}\bigg|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{4}\tan^{-1}\frac{\omega}{4}\bigg|_{-\infty}^{\infty}\right) \\
&= \frac{50}{63\pi}\left(\frac{\pi}{0.5}-\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{25}{18}\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

ہو گی۔

مثال 15.19: تفاعل $f(t) = e^{-at}u(t)$ کی اکائی اوہم توانائی دریافت کریں۔ وہ انقطاعی تعدد ω_0 دریافت کریں جس سے کم تعدد کی پٹی میں 95 % توانائی پائی جاتی ہو۔

حل: اکائی اوہم توانائی حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
W &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2at}u(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-2at}\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{e^{-2at}}{-2a}\right|_0^{\infty}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2a}
\end{aligned}
$$

تفاعل کا فوریئر بدل درج ذیل ہے

$$
\mathrm{F}(\omega) = \frac{1}{j\omega + a}
$$

لہٰذا

$$
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\mathrm{F}(\omega)\right|^2 \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2 + a^2} = \frac{1}{2a}
$$

ہو گا۔ درج بالا کو ثابت کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ $\mathrm{F}(\omega)$ جفت تفاعل ہے لہٰذا

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2 + a^2} &= \frac{2}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2 + a^2} \\
&= \left.\frac{1}{\pi a}\tan^{-1}\frac{\omega}{a}\right|_0^{\infty} \\
&= \frac{1}{2a}
\end{aligned}
$$

ہم تعدد ω_0 جاننا چاہتے ہیں جس کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
\frac{0.95}{2a} &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\omega_0} \frac{\mathrm{d}\omega}{\omega^2 + a^2} \\
&= \left.\frac{1}{\pi a}\tan^{-1}\frac{\omega}{a}\right|_0^{\omega_0} \\
&= \frac{1}{\pi a}\tan^{-1}\frac{\omega_0}{a}
\end{aligned}
$$

جس سے

$$\omega_0 = 12.706\,\text{rad}$$

حاصل ہوتا ہے لہٰذا $95\,\%$ توانائی $0 \le \omega \le 12.706\,\text{rad}$ کی پٹی میں پائی جاتی ہے۔

مشق 15.19: تفاعل $f(t) = e^{-4t}u(t)$ کی اکائی اوہم توانائی وقتی دائرہ کار اور تعددی دائرہ کار میں حاصل کریں۔

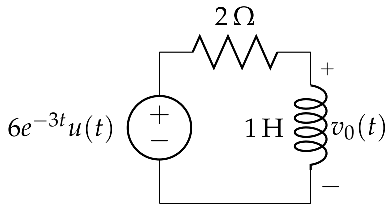
جواب: $125\,\text{mJ}$

مشق 15.20: تفاعل $f(t) = e^{-4t}u(t)$ کی اکائی اوہم توانائی $0 \le \omega \le 1\,\text{rad}$ کی پٹی میں حاصل کریں۔

جواب: $19.49\,\text{mJ}$

مشق 15.21: شکل 15.28 میں $v_0(t)$ کی اکائی اوہم توانائی دریافت کریں۔

جواب: $W = 3.6\,\text{J}$



شکل 15.28: مشق 15.21 کا دور۔

مثال 15.20: بے تار نشریات میں بلند تعدد $v_c(t) = A\cos\omega_c t$ کے سائن نما سواری پر سمعی اشارہ f_s سوار کیا جاتا ہے۔ سمعی اشارے کی تعدد $20\,\text{Hz} \le f_s \le 20\,000\,\text{Hz}$ ہوتی ہے جبکہ f_c کی قیمت اس کی نسبت انتہائی زیادہ ہوتی ہے۔ سمعی اشارے $v_s(t)$ سے سواری اشارے کا حیطہ ترمیم کرتے ہوئے حیطہ سوار اشارہ حاصل کیا جاتا ہے جس کی الجبرائی صورت درج ذیل ہے۔

$$v(t) = [A + v_s(t)]\cos(\omega_c t) \tag{15.70}$$

اینٹینا کے ذریعہ $v(t)$ کو نشر کیا جاتا ہے۔اشارہ حاصل کرنے والا اینٹینا $v(t)$ کا دھندلا نقش حاصل کرتا ہے جس کا حیطہ نہایت کم لیکن صورت ہو بہو $v(t)$ جیسے ہوتی ہے۔

آئیں سمعی اشارہ $v_s(t)$

$$v_s(t) = \cos\omega_s t \tag{15.71}$$

اور نشر اشارہ $v(t)$

$$v(t) = [1 + \cos\omega_s t]\cos\omega_c t \tag{15.72}$$

کے لکیری طیف حاصل کریں جہاں $f_s = 1\,\text{kHz}$ ، $f_c = 1260\,\text{kHz}$ اور $A = 1$ ہیں۔پشاور شہر کے ریڈیو اسٹیشن کی نشریات $1260\,\text{kHz}$ پر ہوتی ہے۔

سمعی اشارے کے فوریئر بدل

$$\text{V}_s(\omega) = \mathcal{F}[\cos\omega_s t] = \pi\delta(\omega - \omega_s) + \pi\delta(\omega + \omega_s) \tag{15.73}$$

کو شکل 15.29-الف میں دکھایا گیا ہے۔نشر اشارے کو درج ذیل لکھتے

$$v(t) = [1 + v_s(t)]\cos\omega_c t = \cos\omega_c t + v_s(t)\cos\omega_c t$$

ہیں جس میں $\cos \omega_c t$ کا فوریئر بدل

$$\mathcal{F}[\cos \omega_c t] = \pi\delta(\omega - \omega_c) + \pi\delta(\omega + \omega_c) \tag{15.74}$$

ہے جبکہ

$$v_s(t) \cos \omega_c t = v_s(t) \frac{e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}}{2}$$

لکھتے ہوئے فوریئر بدل کے مسئلہ ترمیم کی مدد سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathcal{F}[v_s(t) \cos \omega - ct] = \frac{1}{2}\left[\mathrm{V}_s(\omega - \omega_c) + \mathrm{V}_s(\omega + \omega_c)\right]$$

مساوات 15.73 میں دیے سمعی اشارے کا بدل استعمال کرتے ہوئے یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[v_s(t) \cos \omega_c t] = \frac{\pi}{2}\big[&\delta(\omega - \omega_s - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_s - \omega_c)\\ &+\delta(\omega - \omega_s + \omega_c) + \delta(\omega + \omega_s + \omega_c)\big]\end{aligned}$$

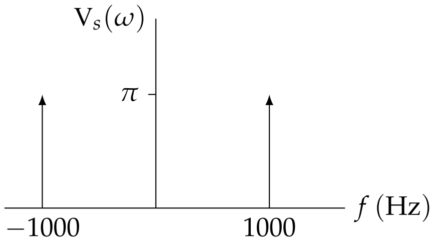
ان تمام کو استعمال کرتے ہوئے نشر اشارے کا بدل لکھتے ہیں جسے شکل 15.29-ب میں دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(\omega) = \frac{\pi}{2}\big[&2\delta(\omega - \omega_c) + 2\delta(\omega + \omega_c) + \delta(\omega - \omega_s - \omega_c)\\ &+\delta(\omega + \omega_s - \omega_c) + \delta(\omega - \omega_s + \omega_c) + \delta(\omega + \omega_s + \omega_c)\big]\end{aligned} \tag{15.75}$$

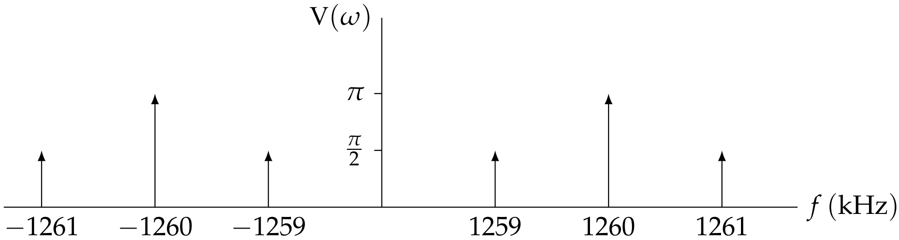
مشق 15.22: انجنیئرنگ کی ڈگری لینے کے بعد میری پہلی ذمہ داری سائن نما انورٹر[26] کی تخلیق[27] تھی۔ انورٹر یک سمتی دباو کو بدلتے دباو میں تبدیل کرتا ہے۔ غیر سائن نما انورٹر مستطیلی دباو پیدا کرتا ہے جس کو شکل 15.30 میں دکھایا گیا ہے۔ آئیں اس پر غور کریں۔

[26] inverter

[27] میں نے کام کا آغاز اسلام آباد کے نجی ادارے rwr (موجودہ نام) سے کیا جہاں میں نے سائن نما انورٹر پر ہی انجنیئرنگ تخلیق سیکھی۔

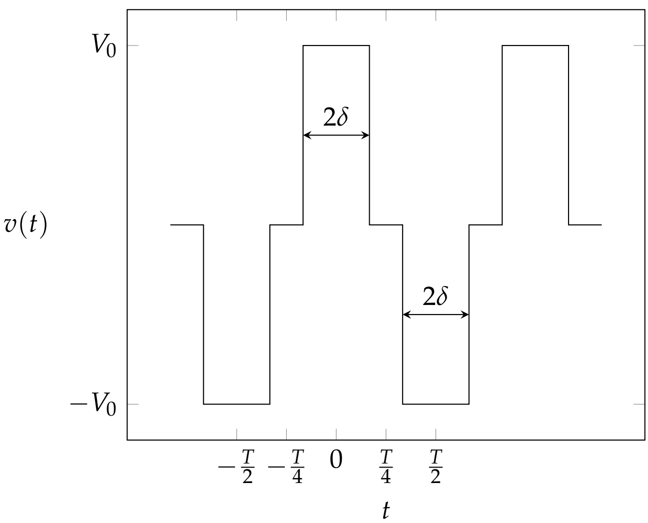


(الف) سمعی اشارے کا لکیری طیف۔



(ب) نشر اشارے کا لکیری طیف۔

شکل 15.29: مثال 15.20 کے لکیری طیف۔



شکل 15.30: مشق 15.22 کے انورٹر کا مستطیلی دباو۔

شکل میں دکھائے گئے دباو کی اوسط قیمت صفر ہے لہٰذا $a_0 = 0$ ہو گا۔ ساتھ ہی چونکہ دباو جفت ہے لہٰذا $b_n = 0$ ہوں گے۔ آئیں a_n دریافت کریں۔

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} v(t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{T}\left[\int_0^{\delta} V_0\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{T}{2}-\delta}^{\frac{T}{2}} V_0\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \frac{4V_0}{T}\left.\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right|_0^{\delta} - \frac{4V_0}{T}\left.\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right|_{\frac{T}{2}-\delta}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{4V_0}{n\omega_0 T}\sin(n\omega_0\delta) - \frac{4V_0}{n\omega_0 T}\sin\left(n\omega_0\frac{T}{2}\right) + \frac{4V_0}{n\omega_0 T}\sin[n\omega_0(\frac{T}{2}-\delta)]
\end{aligned}$$

اس میں $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4V_0}{n\frac{2\pi}{T}T}\sin(n\frac{2\pi}{T}\delta) - \frac{4V_0}{n\frac{2\pi}{T}T}\sin\left(n\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2}\right) + \frac{4V_0}{n\frac{2\pi}{T}T}\sin[n\frac{2\pi}{T}(\frac{T}{2}-\delta)] \\
&= \frac{2V_0}{n\pi}\sin(n\frac{2\pi}{T}\delta) - \frac{2V_0}{n\pi}\sin n\pi + \frac{2V_0}{n\pi}\sin[n\frac{2\pi}{T}(\frac{T}{2}-\delta)] \\
&= \frac{2V_0}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi\delta}{T}\right) + \frac{2V_0}{n\pi}\sin\left(n\pi - \frac{2n\pi\delta}{T}\right)
\end{aligned}$$

یہاں دائیں ہاتھ پر $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2V_0}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi\delta}{T}\right) + \frac{2V_0}{n\pi}\left[\sin n\pi\cos(\frac{2n\pi\delta}{T}) - \cos n\pi\sin(\frac{2n\pi\delta}{T})\right] \\
&= \frac{2V_0}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi\delta}{T}\right) - \frac{2V_0}{n\pi}\cos n\pi\sin(\frac{2n\pi\delta}{T}) \\
&= \frac{2V_0}{n\pi}\sin\left(\frac{2n\pi\delta}{T}\right)(1-\cos n\pi)
\end{aligned}$$

اس مساوات میں $n = 1, 2, 3, \cdots$ پر کرتے ہوئے چند عددی سر لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{4V_0}{\pi} \sin \frac{2\pi\delta}{T} \\
a_2 &= 0 \\
a_3 &= \frac{4V_0}{3\pi} \sin \frac{6\pi\delta}{T} \\
a_4 &= 0 \\
a_5 &= \frac{4V_0}{5\pi} \sin \frac{10\pi\delta}{T}
\end{aligned}
$$

ہم درج بالا عددی سر کی معلومات استعمال کرتے ہوئے δ یوں رکھ سکتے ہیں کہ مخصوص عددی سر صفر کے برابر ہو جائے مثلاً $\delta = \frac{T}{3}$ رکھتے ہوئے

$$
a_3 = \frac{4V_0}{3\pi} \sin \frac{6\pi \frac{T}{3}}{T} = 0
$$

حاصل ہوتا ہے۔
