برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 8

برقرار حالت بدلتی رو

8.1 سائن نما تفاعل

سائن نما[1] تفاعل سے مراد سائن تفاعل $\sin\theta$ اور کوسائن تفاعل $\cos\theta$ ہیں۔ شکل 8.1-الف میں رداس A_0 کے گول دائرے پر ایک نقطہ یکساں رفتار کے ساتھ، گھڑی کی گردش کی الٹ سمت میں، حرکت کر رہا ہے۔ یہ دائرہ **کارتیسی محدد**[2] کے مرکز $(0,0)$ پر پایا جاتا ہے۔ لمحہ t پر زاویہ $\underline{/aox}$ کی قیمت θ کے برابر ہے۔ نقطے سے x محدد پر عمودی لکیر محدد کو $x(t)$ پر ٹکراتی ہے جبکہ y محدد پر عمودی لکیر $y(t)$ پر ٹکراتی ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y(t) = A_0 \sin\theta \tag{8.1}$$

جہاں A_0 موج کی چوٹی ہے جسے موج کا **حیطہ**[3] کہتے ہیں اور θ کو تفاعل کا **دلیل**[54] کہتے ہیں۔ اس مساوات میں θ از خود وقت t پر منحصر ہے۔

---

[1] sinusoidal
[2] Cartesian coordinates
[3] amplitude
[4] ایک ماہر ریاضی اپنی خیالی دنیا میں کوسائن $\cos\theta$ تفاعل کے ساتھ بحث میں مصروف ہوتا ہے۔ ماہر ریاضی تفاعل کو دلیل کے طور پر صفر پیش کرتا ہے۔ تفاعل اس کا فوراً جواب اکائی $(\cos 0 = 1)$ دیتا ہے۔
[5] argument

گردش کرتا نقطہ ایک چکر میں $360°$ درجے کا زاویہ یعنی 2π ریڈیئن طے کرتا ہے۔ایک چکر کاٹنے کے لئے درکار دورانیے کو **دوری عرصہ**[6] کہتے ہیں جسے T سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مشق 8.1: شکل 8.1-الف میں نقطہ ایک چکر $20\,\mathrm{ms}$ میں پورا کرتا ہے۔یہ نقطہ ایک سیکنڈ میں کتنے چکر پورا کرے گا۔یہ نقطہ ایک سیکنڈ میں کتنے ریڈیئن کا زاویہ طے کرتا ہے۔

جوابات: 50 چکر، $100\pi\,\mathrm{rad}$

اگر ایک چکر کاٹنے کے لئے T سیکنڈ کا وقت درکار ہو تب ایک سیکنڈ میں چکروں کی تعداد $\frac{1}{T}$ ہو گی جسے **تعدد**[7] کہتے اور f سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$f = \frac{1}{T} \tag{8.2}$$

تعدد کی اکائی ہرٹز[8] ہے جسے Hz سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ایک چکر 2π ریڈیئن کو کہتے ہیں لہٰذا f چکر سے مراد $2\pi f$ ریڈیئن کا زاویہ ہے۔یوں f تعدد پر گردش کرتا نقطہ ایک سیکنڈ میں $2\pi f$ ریڈیئن کا زاویہ طے کرے گا یعنی اس کی **زاویائی رفتار**[9] کی قیمت $2\pi f$ ہو گی۔زاویائی رفتار کو ω سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ اس کی اکائی ریڈیئن فی سیکنڈ $\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔

$$\omega = 2\pi f \tag{8.3}$$

زاویائی رفتار ω سے گردش کرتا ہوا نقطہ t سیکنڈ میں $2\pi f t$ ریڈیئن کا زاویہ طے کرے گا۔یوں اگر $t = 0$ پر نقطہ عین x محدد کے مثبت حصے پر ہو تب لمحہ t پر

$$\theta = \omega t = 2\pi f t \tag{8.4}$$

---

[6] time period
[7] frequency
[8] Hertz
[9] angular speed

لکھا جائے گا۔ یوں مساوات 8.1 کو

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 \sin 2\pi f t \\ &= A_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \\ &= A_0 \sin \omega t \end{aligned} \tag{8.5}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

برقی میدان میں $y(t)$ وقت کے ساتھ بدلتے دباو یا وقت کے ساتھ بدلتی رو کو ظاہر کر سکتی ہے۔ مساوات 8.5 میں دیے تفاعل، جسے شکل 8.1-ب میں دکھایا گیا ہے، کا آزاد متغیرہ وقت t ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تفاعل ہر T سیکنڈ کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہے۔ اس حقیقت کو ریاضی میں درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$y(t+T) = y(t) \tag{8.6}$$

جس سے مراد یہ ہے کہ تفاعل کی قیمت لمحہ t اور لمحہ $t+T$ پر برابر ہیں۔

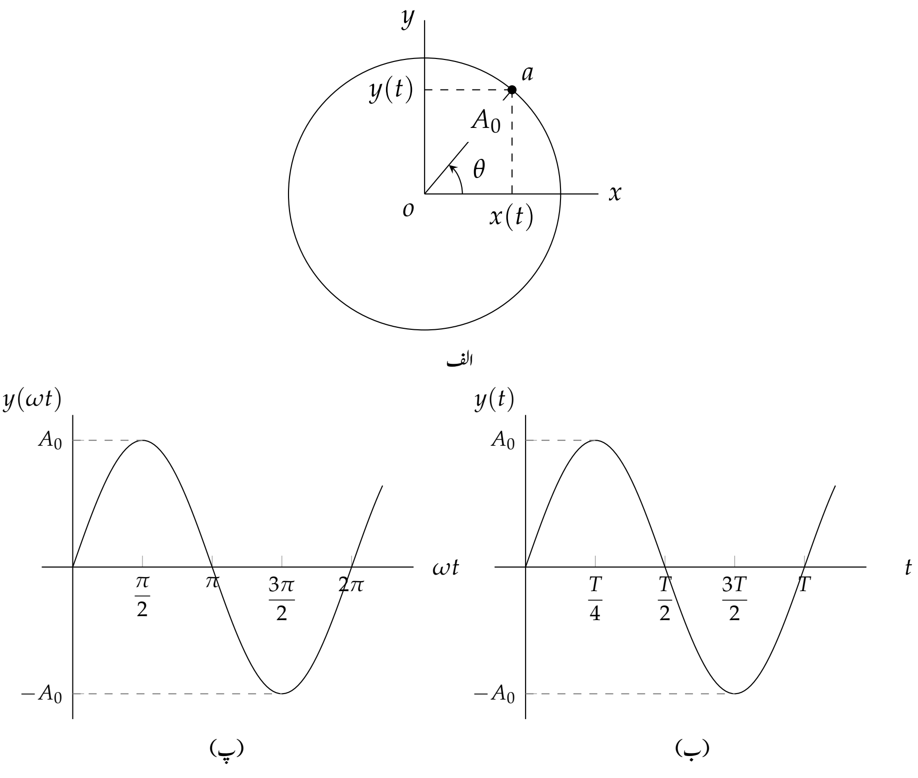
مساوات 8.5 کے خط کو ωt کے ساتھ بھی کھینچا جا سکتا ہے۔ ایسا ہی شکل 8.1-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ یہ تفاعل ہر 2π ریڈیئن کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہے۔

مشق 8.2: شکل 8.1-الف میں گردش کرتا نقطہ $0.2\,\mathrm{s}$ میں $40°$ کا زاویہ طے کرتا ہے۔ زاویائی رفتار، تعدد اور دوری عرصہ دریافت کریں۔

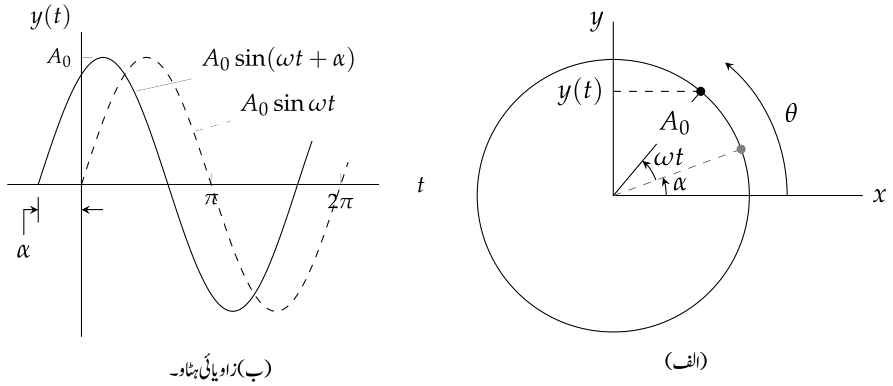
جوابات: $\omega = \frac{10\pi}{9}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $f = 1.8\,\mathrm{Hz}$ ، $T = \frac{5}{9}\,\mathrm{s}$

شکل 8.2 میں عمومی صورت حال دکھائی گئی ہے جہاں ω زاویائی رفتار سے گردش کرتا نقطہ، لمحہ $t=0$ پر زاویہ α پر پایا جاتا ہے۔ یہ نقطہ وقت t کے دوران ωt زاویہ طے کرتے ہوئے $\theta = \omega t + \alpha$ پہنچ جائے گا لہٰذا اس کے لئے

$$y(t) = A_0 \sin(\omega t + \alpha) \tag{8.7}$$



شکل 8.1: سائن موج۔



شکل 8.2: لمحہ $t = 0$ پر زاویہ α ہے۔

لکھا جا سکتا ہے جہاں α کو زاویائی ہٹاو[10] کہتے ہیں۔ اس مساوات کا دلیل $\omega t + \alpha$ ہے۔ شکل 8.2-ب میں مساوات 8.5 اور مساوات 8.7 کو دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ان مساوات میں α زاویائی فرق[11] پایا جاتا ہے۔ مساوات 8.5 سے مساوات 8.7 α ریڈیئن آگے[12] ہے۔ یہ بھی کہا جا سکتا ہے کہ مساوات 8.7 سے مساوات 8.5 α ریڈیئن پیچھے[13] ہے۔ ایک ہی تعدد کے دو تفاعل

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_{01} \sin(\omega t + \alpha) \\ y_2(t) &= A_{02} \sin(\omega t + \beta) \end{aligned} \tag{8.8}$$

میں $y_1(t)$ تفاعل $y_2(t)$ سے $\alpha - \beta$ ریڈیئن آگے ہے۔ ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ $y_2(t)$ تفاعل $y_1(t)$ سے $\beta - \alpha$ ریڈیئن آگے ہے یا کہ $y_1(t)$ تفاعل $y_2(t)$ سے $\beta - \alpha$ ریڈیئن پیچھے ہے۔ اگر $\alpha = \beta$ ہو تب تفاعل ہم زاویہ[14] کہلاتے ہیں جبکہ $\alpha \neq \beta$ کی صورت میں تفاعل الگ زاویہ[15] کہلاتے ہیں۔

زاویائی ہٹاو کو عموماً درجوں میں بیان کیا جاتا ہے لہٰذا $\alpha = \frac{\pi}{4}$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y(t) = A_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = A_0 \sin\left(\omega t + 45^\circ\right) \tag{8.9}$$

---

phase angle[10]
phase difference[11]
lead[12]
lag[13]
in phase[14]
out of phase[15]

باضابطہ طور پر چونکہ ωt کی قیمت ریڈیئن میں ہے لٰہذا α کی قیمت بھی ریڈیئن میں ہونا لازم ہے لٰہذا تفاعل لکھنے کا صحیح طریقہ $y(t) = A_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ ہی ہے لیکن زاویائی ہٹاو کو درجوں میں لکھنے کی روایت نہایت مقبول ہے لٰہذا اس کتاب میں بھی اس روایت کو برقرار رکھا جائے گا۔ مساوات 8.9 میں 45° لکھتے ہوئے زیر بالا میں درجے کی علامت $(^\circ)$ استعمال کی گئی ہے جبکہ $\frac{\pi}{4}$ پر کوئی علامت نہیں لگائی گئی۔ اسی علامت سے ریڈیئن یا درجوں کی پہچان کی جاتی ہے۔

مثال 8.1: مساوات $y_1(t) = 15\sin(100t + 60^\circ)$ اور $y_2(t) = 22\sin(200t + 0.2\pi)$ کی قیمت $t = 25\,\text{ms}$ پر دریافت کریں۔

حل: پہلی تفاعل میں 50° کا زاویائی ہٹاو $\frac{60^\circ}{180^\circ} \times \pi = \frac{\pi}{3}$ ریڈیئن کے برابر ہے۔ یوں لمحہ $t = 25\,\text{ms}$ پر

$$y_1(0.025) = 15\sin\left(100 \times 25 \times 10^{-3} + \frac{\pi}{3}\right) = -5.918619766$$

اور

$$y_2(0.025) = 22\sin(200 \times 0.025 + 0.2\pi) = -13.39917888$$

حاصل ہوتے ہیں۔

اگرچہ اب تک کی بحث میں ہم نے سائن تفاعل استعمال کیا، ہم اس کی جگہ کوسائن تفاعل بھی استعمال کر سکتے تھے۔ ان دو تفاعل کی صورت بالکل یکساں ہے پس دونوں میں 90° کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔

$$\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\omega t \tag{8.10}$$

$$\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\omega t \tag{8.11}$$

سائن نما تفاعل کے دلیل کے ساتھ 2π ریڈیئن یا 360° کا مضرب جمع کرنے سے تفاعل کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔

$$\cos(\omega t + \alpha + 2\pi n) = \cos(\omega t + \alpha) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{8.12}$$

$$\sin(\omega t + \alpha + 2\pi n) = \sin(\omega t + \alpha) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{8.13}$$

دو سائن نما تفاعل میں زاویائی فرق تین شرائط پورا کرنے کے بعد دریافت کیا جا سکتا ہے۔ پہلی شرط یہ ہے کہ دونوں تفاعل کی تعدد برابر ہو۔ دوسری شرط یہ ہے کہ دونوں کو سائن تفاعل اور یا پھر دونوں کو کوسائن تفاعل کی صورت میں لکھا جائے۔ تیسری اور آخری شرط یہ ہے کہ دوسری شرط میں لکھے گئے تفاعل کے حیطے مثبت ہوں۔ درج ذیل مماثل ان شرائط کو پورا کرنے میں مدد دیتے ہیں۔

$$-\sin(\omega t+\alpha)=\sin(\omega t+\alpha\pm 180^\circ) \tag{8.14}$$
$$-\cos(\omega t+\alpha)=\cos(\omega t+\alpha\pm 180^\circ) \tag{8.15}$$

ان کے علاوہ درج ذیل مماثل بھی نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \tag{8.16}$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \tag{8.17}$$

مثال 8.2: درج ذیل تفاعل کے خط کھینچیں۔

- $v(t)=1\cos(\omega t+60^\circ)$
- $v(t)=1\cos(\omega t+240^\circ)$
- $v(t)=1\cos(\omega t-300^\circ)$

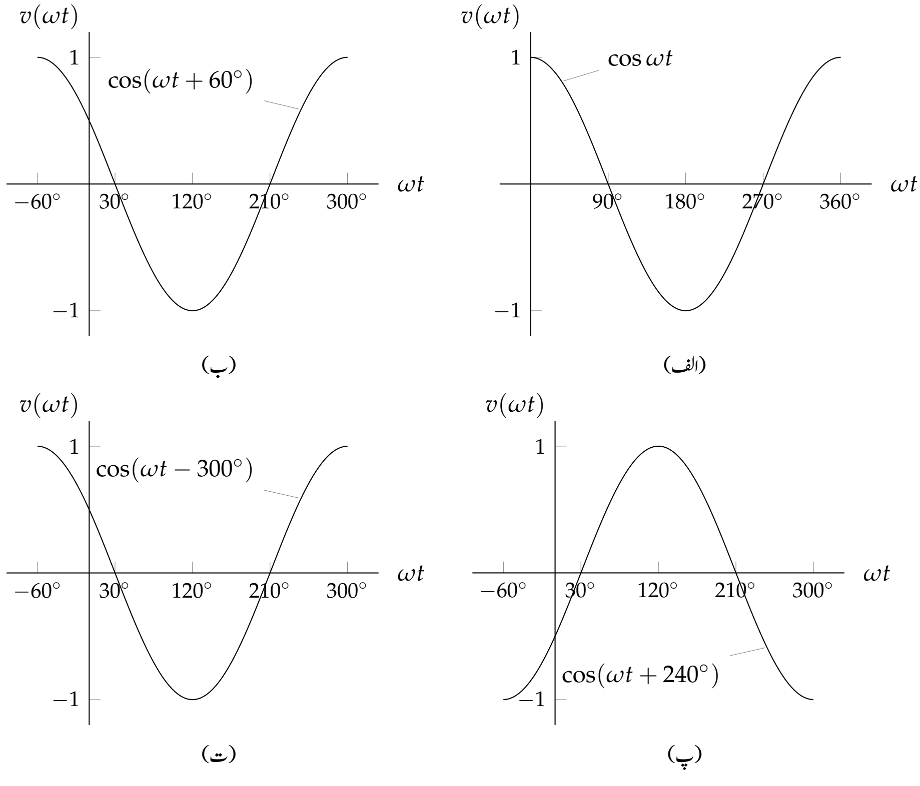
حل: شکل 8.3-الف میں $v(\omega t)=1\cos\omega t$ کا خط دکھایا گیا ہے۔ اس کو افقی محدد پر 60° درجے بائیں منتقل کرنے سے $v(\omega t)=1\cos(\omega t+60^\circ)$ کا خط حاصل ہوتا ہے جسے شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔ ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$v(\omega t)=1\cos(\omega t+240^\circ)=1\cos(\omega t+60^\circ+180^\circ)=-1\cos(\omega t+60^\circ)$$

جہاں مساوات 8.15 کا استعمال کیا گیا ہے۔ درج بالا مساوات کو شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ شکل-ب کا منفی ہے۔ اسی طرح مساوات 8.12 کی مدد سے

$$v(\omega t)=1\cos(\omega t-300^\circ)=1\cos(\omega t-300^\circ+360^\circ)=1\cos(\omega t+60^\circ)$$

لکھتے ہوئے شکل-ت حاصل ہوتی ہے جو عین شکل-ب ہی ہے۔



شکل 8.3: مثال 8.2 کے خط۔

مثال 8.3: درج ذیل امواج کی تعدد ہرٹز میں حاصل کریں۔ امواج کے مابین زاویائی فرق دریافت کریں۔ یہ بھی بتلائیں کہ کونسی موج آگے ہے۔

$$\begin{aligned} v_1(\omega t) &= 100\sin(400t - 30^\circ) \\ v_2(\omega t) &= -250\cos(400t + 0.2\pi) \end{aligned}$$

حل: ان امواج میں $\omega = 400\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے لہٰذا

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{400}{2\pi} = 63.66\,\mathrm{Hz}$$

ہو گا۔ زاویائی فرق دریافت کرنے کی خاطر دونوں امواج کو مثبت حیطے کے کوسائن موج کی صورت میں لکھتے ہیں۔ ساتھ ہی ساتھ ان کے زاویائی ہٹاو کو درجوں میں لکھتے ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned} v_1(\omega t) &= 100\sin(400t - 30^\circ) \\ &= 100\cos(400t - 30^\circ - 90^\circ) \\ &= 100\cos(400t - 120^\circ) \\ &= 100\cos(400t + 240^\circ) \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں آخری قدم پر مساوات 8.12 کا استعمال کیا گیا۔ اسی طرح

$$\begin{aligned} v_2(\omega t) &= -250\cos(400t + 0.2\pi) \\ &= 250\cos(400t + 0.2\pi + \pi) \\ &= 250\cos(400t + 216^\circ) \end{aligned}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے۔ ان امواج کے مابین 24° کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے اور موج $v_1(\omega t)$ آگے ہے۔

8.2 سائن نما اور مخلوط جبری تفاعل