برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 14

ادوار کا حل بذریعہ لاپلاس بدل

14.1 ادوار کا حل

لاپلاس بدل کا استعمال دیکھنے کی خاطر شکل 14.1 میں RL دور کو حل کرتے ہوئے $i(t)$ دریافت کرتے ہیں۔دور کی کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

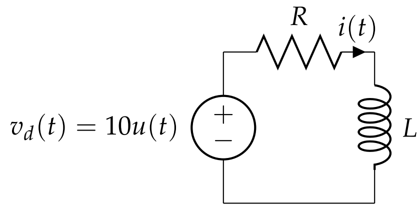
$$v_d(t) = i(t)R + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

اس دور کے فطری حل اور جبری حل کا مجموعہ درکار حل ہو گا۔لاپلاس بدل سے دور حل کرتے ہوئے مکمل حل ایک ہی بار میں حاصل ہوتا ہے۔درج بالا مساوات کے دونوں اطراف کا لاپلاس بدل لیتے ہیں۔

$$\mathcal{L}\left[10u(t)\right] = R\mathcal{L}[i(t)] + L\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right]$$

صفحہ 680 پر جدول 13.1 اور صفحہ 684 پر جدول 13.2 کی مدد لیتے ہیں۔

$$\frac{10}{s} = R\mathrm{I}(s) + L[s\mathrm{I}(s) - i(0)]$$



شکل 14.1: سلسلہ وار RL دور۔

چونکہ $i(0) = 0\,\mathrm{A}$ ہے لہٰذا

$$\frac{10}{s} = R\mathrm{I}(s) + sL\mathrm{I}(s)$$

یعنی

$$\mathrm{I}(s) = \frac{10}{s(sL+R)}$$

یا

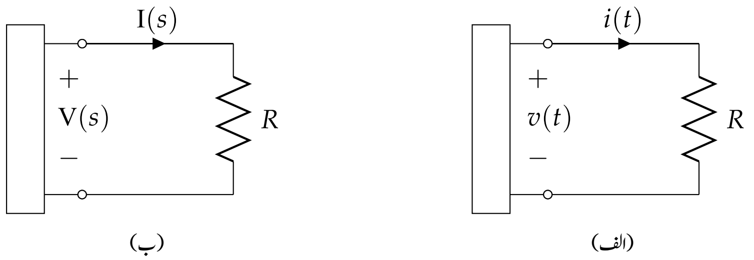
$$\mathrm{I}(s) = \frac{10}{R}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{R}{L}}\right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں جزوی کسری پھیلاو لکھی گئی ہے۔ درج بالا سے وقتی تفاعل لکھتے ہیں۔

$$i(t) = \frac{10}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)u(t)$$

آپ نے دیکھا کہ مکمل حل یک وقت حاصل ہوتا ہے۔ دور کی ابتدائی معلومات لاپلاس بدل لیتے وقت استعمال کی جاتی ہے۔

جیسا آپ نے دیکھا، لاپلاس بدل سے تفرقی و تکملی مساوات الجبرائی مساوات میں تبدیل ہو جاتی ہے جس سے درکار تفاعل کا لاپلاس بدل نہایت آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ حاصل تفاعل کا الٹ لاپلاس بدل وقتی تفاعل دیتا ہے۔ الٹ لاپلاس بدل جدول کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔



شکل 14.2: وقتی اور مخلوط تعددی دائرہ کار میں مزاحمت کا اظہار۔

14.2 پرزوں کے مساوی لاپلاسی ادوار

برقی پرزوں کی خصوصیات سے ان کے مساوی لاپلاسی ادوار حاصل کئے جا سکتے ہیں۔ تمام پرزوں کے دباو بالمقابل رو تعلق لکھتے ہوئے انفعالی رائج سمت استعمال کئے گئے ہیں۔ مزاحمت کے دباو اور رو کا تعلق

$$v(t) = Ri(t) \tag{14.1}$$

ہے۔ دونوں اطراف کا لاپلاس بدل لیتے ہوئے اس تعلق کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathrm{V}(s) = R\mathrm{I}(s) \tag{14.2}$$

شکل 14.2 میں مزاحمت کے دباو بالمقابل کا تعلق وقتی دائرہ کار اور مخلوط تعددی دائرہ کار میں دکھائے گئے ہیں۔

برق گیر کے تعلقات

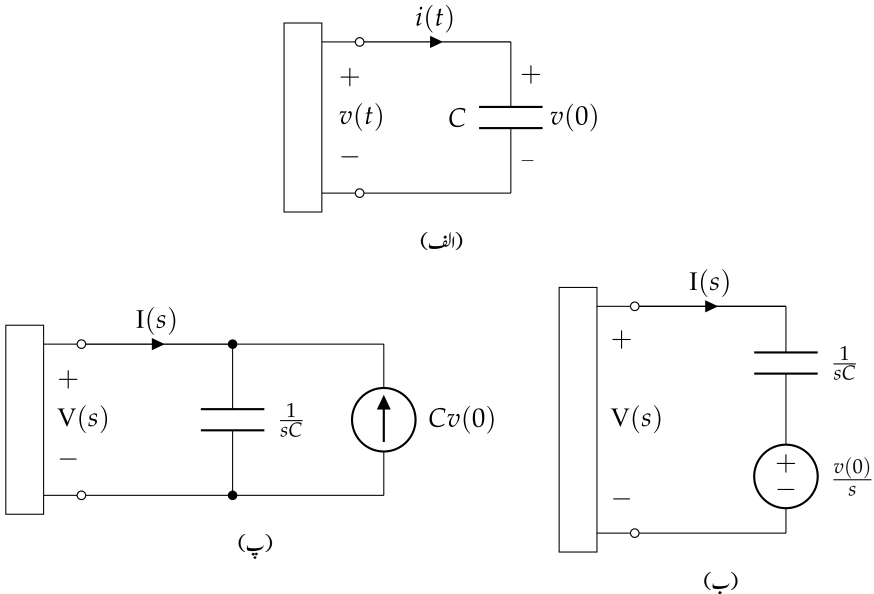
$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)\,\mathrm{d}t + v(0) \tag{14.3}$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{14.4}$$

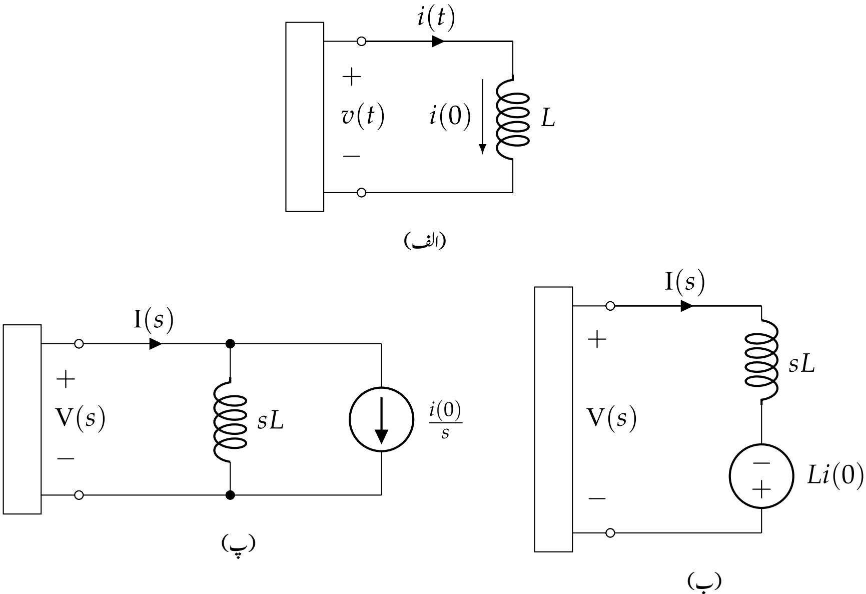
ہیں۔ دونوں اطراف کا لاپلاس بدل لیتے ہوئے مخلوط تعددی دائرہ کار میں تعلقات حاصل ہوتے ہیں جنہیں شکل 14.3 میں دکھایا گیا ہے۔ ابتدائی معومات سے پیدا منبع رو کی سمت اور منبع دباو کے قطب پر غور کریں۔ ابتدائی رو کی سمت الٹ کرنے یا ابتدائی دباو کے قطب الٹ کرنے سے پیدا منبع رو کی سمت اور منبع دباو کے قطب الٹ ہوں گے۔

$$\mathrm{V}(s) = \frac{\mathrm{I}(s)}{sC} + \frac{v(0)}{s} \tag{14.5}$$

$$\mathrm{I}(s) = sC\mathrm{V}(s) - Cv(0) \tag{14.6}$$



شکل 14.3: وقتی اور مخلوط تعددی دائرہ کار میں برق گیر کا اظہار۔



شکل 14.4: وقتی اور مخلوط تعددی دائرہ کار میں امالہ گیر کا اظہار۔

امالہ گیر کے تعلقات

$$v(t) = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{14.7}$$

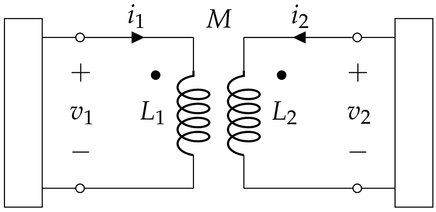
$$i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(t)\,\mathrm{d}t + i(0) \tag{14.8}$$

ہیں جن سے

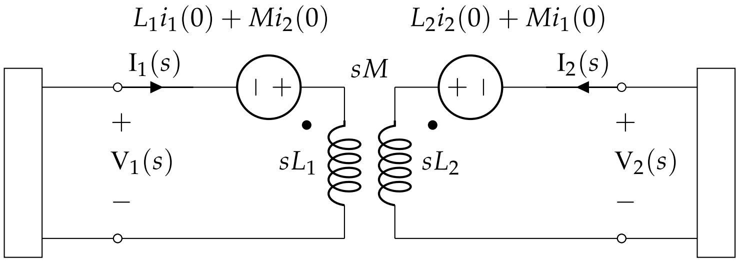
$$\mathrm{V}(s) = sL\mathrm{I}(s) - Li(0) \tag{14.9}$$

$$\mathrm{I}(s) = \frac{\mathrm{V}(s)}{sL} + \frac{i(0)}{s} \tag{14.10}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ انہیں شکل 14.4 میں دکھایا گیا ہے۔ یہاں بھی ابتدائی معلومات سے پیدا منبع کا دارومدار ابتدائی رو کی سمت اور ابتدائی دباو کے قطب پر ہے۔



(الف)



(ب)

شکل 14.5: مشترکہ امالہ کا لاپلاسی بدل۔

شکل 14.5 میں دکھائے گئے مربوط لچھوں کے تعلق درج ذیل ہیں۔

$$v_1(t) = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} \tag{14.11}$$

$$v_2(t) = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + M \frac{i_1(t)}{\mathrm{d}t} \tag{14.12}$$

یہی مساوات s دائرہ کار میں درج ذیل لکھے جائیں گے۔

$$\mathrm{V}_1(s) = sL_1 \mathrm{I}_1(s) - L_1 i_1(0) + sM \mathrm{I}_2(s) - M i_2(0) \tag{14.13}$$

$$\mathrm{V}_2(s) = sL_2 \mathrm{I}_2(s) - L_2 i_2(0) + sM \mathrm{I}_1(s) - M i_1(0) \tag{14.14}$$

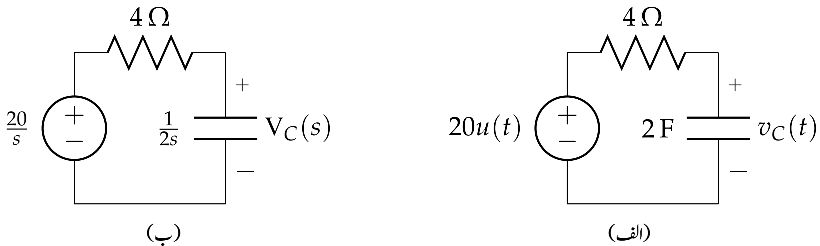
تابع اور غیر تابع منبع دباو اور منبع رو کو بھی s دائرہ کار میں ظاہر کیا جا سکتا ہے

$$\mathrm{V}_1(s) = \mathcal{L}[v_1(t)] \tag{14.15}$$

$$\mathrm{I}_2(s) = \mathcal{L}[i_2(t)] \tag{14.16}$$

اور اگر $v_1(t) = A_r i_2(t)$ ہو جہاں A_r افزائش مزاحمت نما ہے تب

$$\mathrm{V}_1(s) = A_r \mathrm{I}_2(s) \tag{14.17}$$



شکل 14.6: مثال 14.1 کا دور۔

لکھا جا سکتا ہے۔

14.3 تجزیاتی تراکیب

درج بالا حصے میں ہم نے برقی پرزوں کے s دائرہ کار میں مساوی ادوار حاصل کئے۔انہیں استعمال کرتے ہوئے ادوار حل کئے جا سکتے ہیں۔ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل کرنا ہو گا۔

- ابتدائی حالت جاننے کے لئے $t < 0\,\mathrm{s}$ کے لئے دور حل کریں۔اگر $t < 0\,\mathrm{s}$ میں دور برقرار حالت میں ہو تب برق گیر کو کھلے سر اور امالہ گیر کو قصر دور تصور کرتے ہوئے ابتدائی رو اور ابتدائی دباو حاصل کئے جا سکتے ہیں۔
- ابتدائی معلومات شامل کرتے ہوئے تمام پرزوں کی جگہ ان کے مساوی مخلوط تعددی دائرہ کار کے ادوار نسب کریں۔
- کسی بھی ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے دور کو حل کریں۔جوابات s دائرہ کار میں ہوں گے۔
- الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے وقتی دائرہ کار میں جوابات حاصل کریں۔

مثال 14.1: لاپلاس بدل کی مدد سے شکل 14.6-الف میں $v_C(t)$ حاصل کریں۔

حل: ابتدائی دباو $v_C(0) = 0\,\text{V}$ ہے۔ تمام پرزوں کی جگہ s دائرہ کار کے مساوی دور پر کرتے ہوئے شکل-ب حاصل ہوتا ہے۔ شکل-ب میں تقسیم دباو کے کلیے سے برق گیر کا دباو لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_C(s) &= \left(\frac{\frac{1}{2s}}{4+\frac{1}{2s}}\right)\frac{20}{s}\\ &= 20\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{8}}\right)\end{aligned}$$

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے $v_C(t)$ حاصل کرتے ہیں۔

$$v_C(t) = 20\left(1-e^{-\frac{t}{8}}\right)u(t)$$

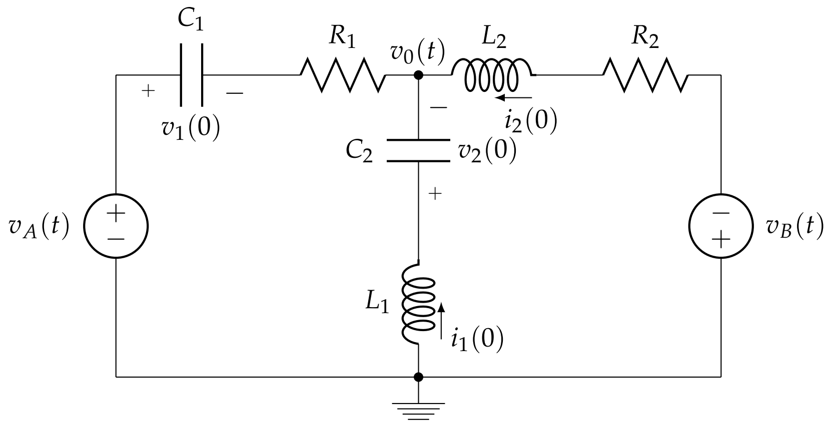
مثال 14.2: شکل 14.7 کے دائری مساوات اور مساوات جوڑ لکھیں۔

حل: لاپلاس بدل شکل 14.7-ب میں دکھایا گیا ہے جہاں سے کرخوف دائری مساوات لکھتے ہیں۔

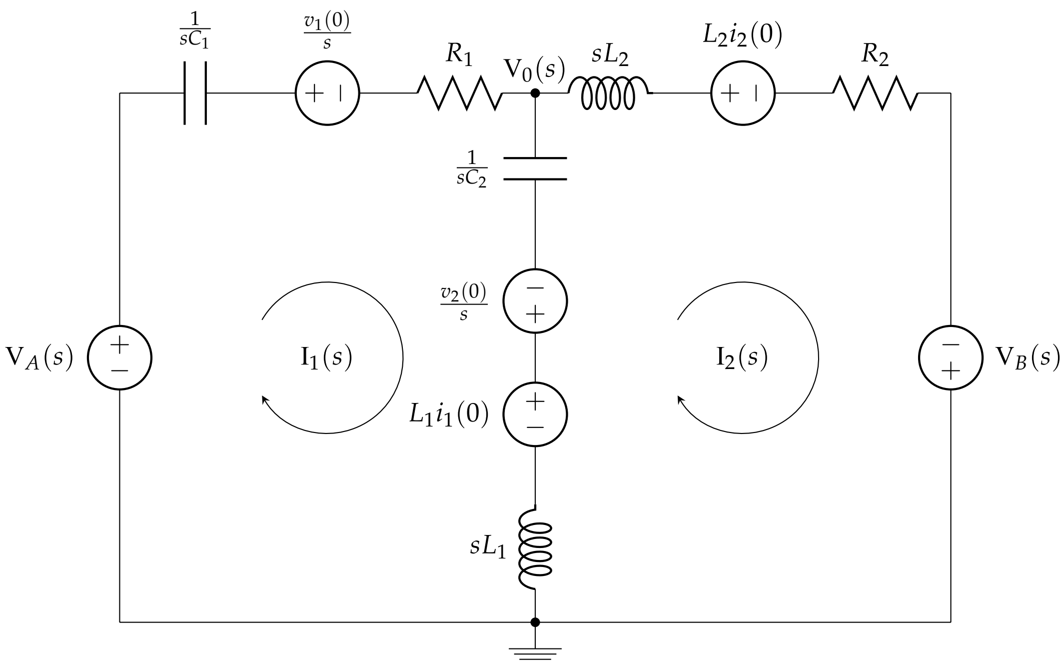
$$\begin{aligned}\mathrm{I}_1(s)\left[\frac{1}{sC_1}+R_1+\frac{1}{sC_2}+sL_1\right]-\mathrm{I}_2(s)\left[\frac{1}{sC_2}+sL_1\right] &= \mathrm{V}_A(s)-\frac{v_1(0)}{s}+\frac{v_2(0)}{s}-L_1i_1(0)\\ -\mathrm{I}_1(s)\left[sL_1+\frac{1}{sC_2}\right]+\mathrm{I}_2(s)\left[sL_1+\frac{1}{sC_2}+sL_2+R_2\right] &= \mathrm{V}_B(s)+L_1i_1(0)-\frac{v_2(0)}{s}-L_2i_2(0)\end{aligned}$$

مساوات جوڑ لکھتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{V}_0(s)-\mathrm{V}_A(s)+\frac{v_1(0)}{s}}{R_1+\frac{1}{sC_1}}+\frac{\mathrm{V}_0(s)+\frac{v_2(0)}{s}-L_1i_1(0)}{\frac{1}{sC_2}+sL_1}+\frac{\mathrm{V}_0(s)-L_2i_2(0)+\mathrm{V}_B(s)}{sL_2+R_2}=0$$

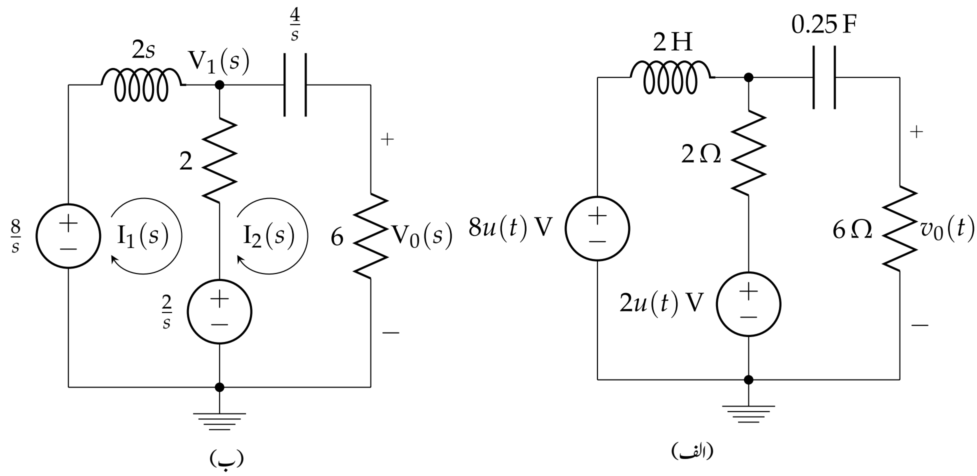


(الف)



(ب)

شکل 14.7: مثال 14.2 کا دور۔



شکل 14.8: مثال 14.3 کا دور۔

مثال 14.3: شکل 14.8-الف میں دور دیا گیا ہے۔اس کو ہم دائری ترکیب، ترکیب جوڑ، مسئلہ نفاذ، تبادلہ منبع اور مسئلہ تھونن کی مدد سے حل کرتے ہیں۔

حل: لاپلاس مساوی شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔ ہم جوڑ $V_1(s)$ کو حاصل کرتے ہوئے $V_0(s)$ کو تقسیم دباو کے کلیے سے حاصل کریں گے۔ مساوات جوڑ لکھتے ہیں

$$\frac{V_1(s)-\frac{8}{s}}{2s}+\frac{V_1(s)-\frac{2}{s}}{2}+\frac{V_1(s)}{6+\frac{4}{s}}=0$$

جس سے

$$V_1(s)\left(\frac{1}{2s}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6+\frac{4}{s}}\right)=\frac{4}{s^2}+\frac{1}{s}$$

یعنی

$$V_1(s)=\frac{2(s+4)(3s+2)}{s(4s^2+5s+2)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ تقسیم دباو کے کلیے سے $V_0(s)$ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
V_0(s) &= \left(\frac{6}{6+\frac{4}{s}}\right) V_1(s) \\
&= \left(\frac{6s}{6s+4}\right)\left[\frac{2(s+4)(3s+2)}{s(4s^2+5s+2)}\right] \\
&= \frac{6(s+4)}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}$$

اس دباو کا جزوی کسری پھیلاو لکھتے ہوئے وقتی تفاعل حاصل کرنا ہو گا۔ میں یہاں گزارش کروں گا ہوں کہ آپ صفحہ 599 پر مثال 12.3 کو ضرور دیکھیں۔

$$\begin{aligned}
V_0(s) &= \frac{6(s+4)}{4(s^2+\frac{5}{4}s+\frac{1}{2})} \\
&= \frac{6(s+4)}{4(s+\frac{5}{8}+j\frac{\sqrt{7}}{8})(s+\frac{5}{8}-j\frac{\sqrt{7}}{8})} \\
&= \frac{K}{s+\frac{5}{8}+j\frac{\sqrt{7}}{8}} + \frac{K^*}{s+\frac{5}{8}-j\frac{\sqrt{7}}{8}}
\end{aligned}$$

مستقل K اور K^* حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
K &= \left.\frac{6(s+4)}{4(s+\frac{5}{8}-j\frac{\sqrt{7}}{8})}\right|_{s=-\frac{5}{8}-j\frac{\sqrt{7}}{8}} \\
&= \frac{3}{4}+j\frac{81}{4\sqrt{7}} \\
K^* &= \left.\frac{6(s+4)}{4(s+\frac{5}{8}+j\frac{\sqrt{7}}{8})}\right|_{s=-\frac{5}{8}+j\frac{\sqrt{7}}{8}} \\
&= \frac{3}{4}-j\frac{81}{4\sqrt{7}}
\end{aligned}$$

یوں درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$V_0(s) = \frac{\frac{3}{4}+j\frac{81}{4\sqrt{7}}}{s+\frac{5}{8}+j\frac{\sqrt{7}}{8}} + \frac{\frac{3}{4}-j\frac{81}{4\sqrt{7}}}{s+\frac{5}{8}-j\frac{\sqrt{7}}{8}}$$

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
v_0(t) &= \left(\frac{3}{4}+j\frac{81}{4\sqrt{7}}\right)e^{-(\frac{5}{8}+j\frac{\sqrt{7}}{8})t}+\left(\frac{3}{4}-j\frac{81}{4\sqrt{7}}\right)e^{-(\frac{5}{8}-j\frac{\sqrt{7}}{8})t}\\
&= e^{-\frac{5}{8}t}\left[\frac{3}{4}\left(e^{-j\frac{\sqrt{7}}{8}t}+e^{j\frac{\sqrt{7}}{8}t}\right)+j\frac{81}{4\sqrt{7}}\left(e^{-j\frac{\sqrt{7}}{8}t}-e^{j\frac{\sqrt{7}}{8}t}\right)\right]\\
&= \frac{1}{4}e^{-\frac{5}{8}t}\left[6\cos\left(\frac{\sqrt{7}t}{8}\right)+\frac{162}{\sqrt{7}}\sin\left(\frac{\sqrt{7}t}{8}\right)\right]\ \mathrm{V}
\end{aligned}
$$

آئیں یہی جواب دائری ترکیب سے حاصل کریں۔ دائری مساوات لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_1(s)\,(2s+2)-2\mathrm{I}_2(s) &= \frac{8}{s}-\frac{2}{s}\\
-2\mathrm{I}_1(s)+\mathrm{I}_2(s)\left(2+\frac{4}{s}+6\right) &= \frac{2}{s}
\end{aligned}
$$

ان ہمزاد مساوات کا حل درج ذیل ہے

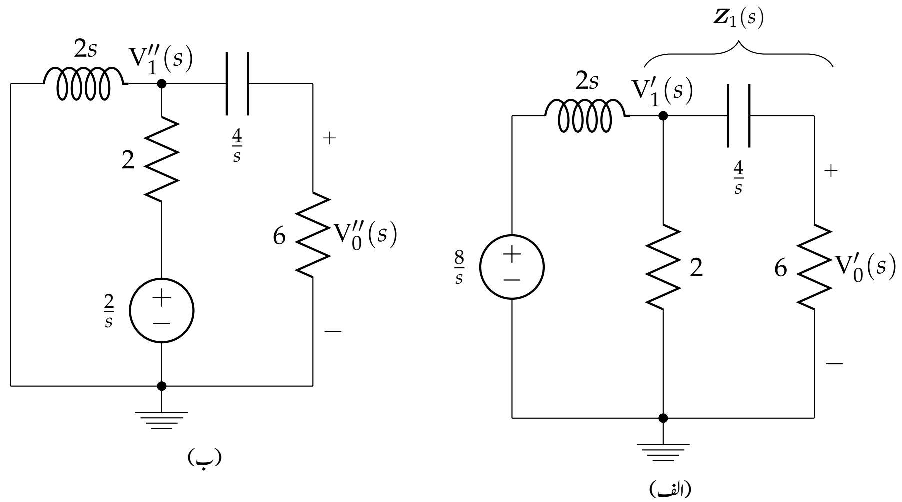
$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}_1(s) &= \frac{13s+6}{4s^3+5s^2+2s}\\
\mathrm{I}_2(s) &= \frac{s+4}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}
$$

جس سے خارجی دباو حاصل ہوتا ہے۔

$$
\mathrm{V}_0(s) = 6\mathrm{I}_2(s) = \frac{6(s+4)}{4s^2+5s+2}
$$

مسئلہ نفاذ سے اب اسی دور کو حل کرتے ہیں۔ شکل 14.9 میں باری باری ایک ایک منبع کو لاگو کیا گیا ہے۔ شکل 14.9-الف کو دیکھ کر $\boldsymbol{Z}_1(s$ لکھتے ہیں۔

$$
\boldsymbol{Z}_1(s) = \frac{2(6+\frac{4}{s})}{2+6+\frac{4}{s}} = \frac{3s+2}{2s+1}
$$



شکل 14.9: مسئلہ نفاذ سے حل کرتے ہوئے باری باری ایک ایک منبع کو نافذ کیا گیا ہے

یوں تقسیم دباو کے کلیے سے $V_1'(s)$ لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
V_1'(s) &= \left(\frac{Z_1(s)}{2s+Z_1(s)}\right)\frac{8}{s} \\
&= \left(\frac{\frac{3s+2}{2s+1}}{2s+\frac{3s+2}{2s+1}}\right)\frac{8}{s} \\
&= \frac{\frac{8}{s}(3s+2)}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}
$$

تقسیم دباو کے کلیے کو دوبارہ استعمال کرتے ہوئے $V_1'(s)$ سے $V_0''(s)$ لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
V_0'(s) &= \left(\frac{6}{6+\frac{4}{s}}\right)V_1'(s) \\
&= \left(\frac{3s}{3s+2}\right)\frac{\frac{8}{s}(3s+2)}{4s^2+5s+2} \\
&= \frac{24}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}
$$

اب شکل 14.9-ب سے دوسرے منبع سے پیدا $V_0''(s)$ حاصل کرتے ہیں۔ یہاں $2s$ اور $(6+\frac{4}{s})$ متوازی جڑے ہیں جن کے مساوی کو $Z_2(s)$ کہہ کر حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
Z_2(s) &= \frac{2s(6+\frac{4}{s})}{2s+6+\frac{4}{s}} \\
&= \frac{2s(3s+2)}{s^2+3s+2}
\end{aligned}
$$

یوں تقسیم دباو کے کلیے سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
V_1''(s) &= \left(\frac{Z_2(s)}{2+Z_2(s)}\right)\frac{2}{s} \\
&= \left(\frac{\frac{2s(3s+2)}{s^2+3s+2}}{2+\frac{2s(3s+2)}{s^2+3s+2}}\right)\frac{2}{s} \\
&= \frac{2(3s+2)}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}
$$

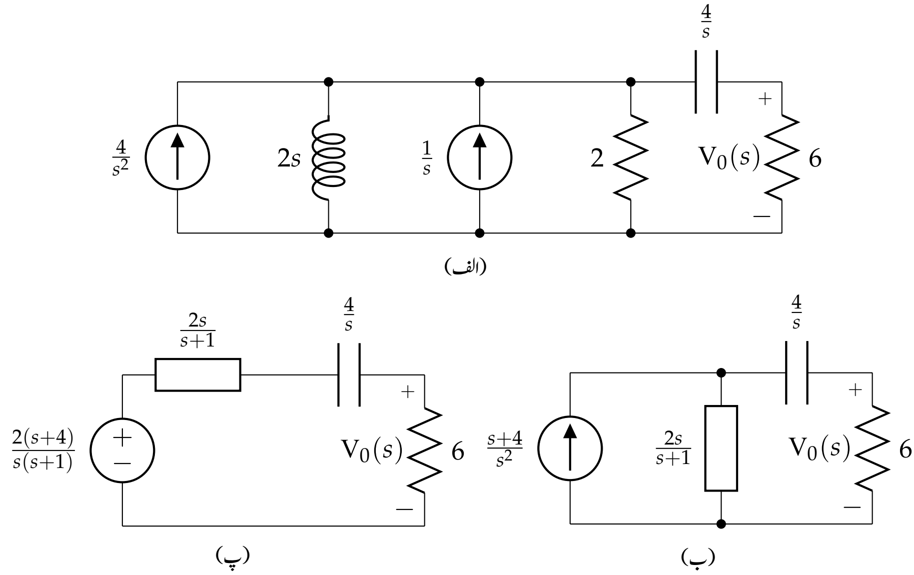
اور ایک مرتبہ دوبارہ تقسیم دباو سے

$$
\begin{aligned}
V_0''(s) &= \left(\frac{6}{6+\frac{4}{s}}\right)V_1''(s) \\
&= \left(\frac{3s}{3s+2}\right)\frac{2(3s+2)}{4s^2+5s+2} \\
&= \frac{6s}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں دونوں منبع کی موجودگی میں $V_0(s) = V_0'(s) + V_0''(s)$ ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
V_0(s) &= \frac{24}{4s^2+5s+2} + \frac{6s}{4s^2+5s+2} \\
&= \frac{6(s+4)}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}
$$

آئیں اب شکل 14.8-الف کو تبادلہ منبع سے حل کریں۔ دونوں منبع دباو کے مساوی منبع رو نسب کرتے ہوئے شکل 14.10-الف ملتا ہے جہاں منبع دباو $\frac{8}{s}$ اور اس کے سلسلہ وار $2s$ کو منبع رو $\frac{8/s}{2s} = \frac{4}{s^2}$ جس کے متوازی $2s$ جڑا ہے میں



شکل 14.10: منبع دباو کی جگہ منبع رو نسب کیا گیا ہے۔

تبدیل کیا گیا ہے۔اسی طرح منبع دباو $\frac{2}{s}$ اور سلسلہ وار 2 کو منبع رو $\frac{2/s}{2} = \frac{1}{s}$ میں تبدیل کیا گیا ہے جس کے متوازی 2 نسب ہے۔

شکل 14.10-الف میں متوازی جڑے منبع رو کا مساوی منبع رو $\frac{4}{s^2} + \frac{1}{s} = \frac{s+4}{s^2}$ ہے۔اسی طرح منبع کے متوازی 2 اور $2s$ مل کر $\frac{2(2s)}{2+2s} = \frac{2s}{s+1}$ دیتے ہیں۔یوں شکل-ب حاصل ہوتا ہے۔

شکل 14.10-ب میں منبع رو $\frac{s+4}{s^2}$ اور متوازی رکاوٹ $\frac{2s}{s+1}$ کو سلسلہ وار جڑے منبع دباو $\left(\frac{s+4}{s^2}\right)\left(\frac{2s}{s+1}\right) = \frac{2(s+4)}{s(s+1)}$ اور رکاوٹ $\frac{2s}{s+1}$ میں تبدیل کرتے ہوئے شکل-پ حاصل ہوتی ہے جس سے تقسیم دباو کے کلیے سے $V_0(s)$ لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
V_0(s) &= \left(\frac{6}{\frac{2s}{s+1} + \frac{4}{s} + 6}\right) \frac{2(s+4)}{s(s+1)} \\
&= \frac{6(s+4)}{4s^2 + 5s + 2}
\end{aligned}
$$

مسئلہ تھونن سے حل کرنے کی خاطر شکل 14.8-الف میں سلسلہ وار جڑے $6\,\Omega$ اور $0.25\,\mathrm{F}$ کو بوجھ تصور کرتے ہوئے بقایا دور کا تھونن مساوی حاصل کرتے ہیں۔ تھونن دباو شکل 14.11-الف اور تھونن رکاوٹ شکل-ب سے حاصل کی جائے گی۔ شکل-الف سے درج ذیل لکھتے

$$\begin{aligned}
\mathrm{I}(s) &= \frac{\frac{8}{s} - \frac{2}{s}}{2s+2} \\
&= \frac{3}{s(s+1)}
\end{aligned}$$

ہوئے تھونن دباو حاصل کی جا سکتی ہے۔

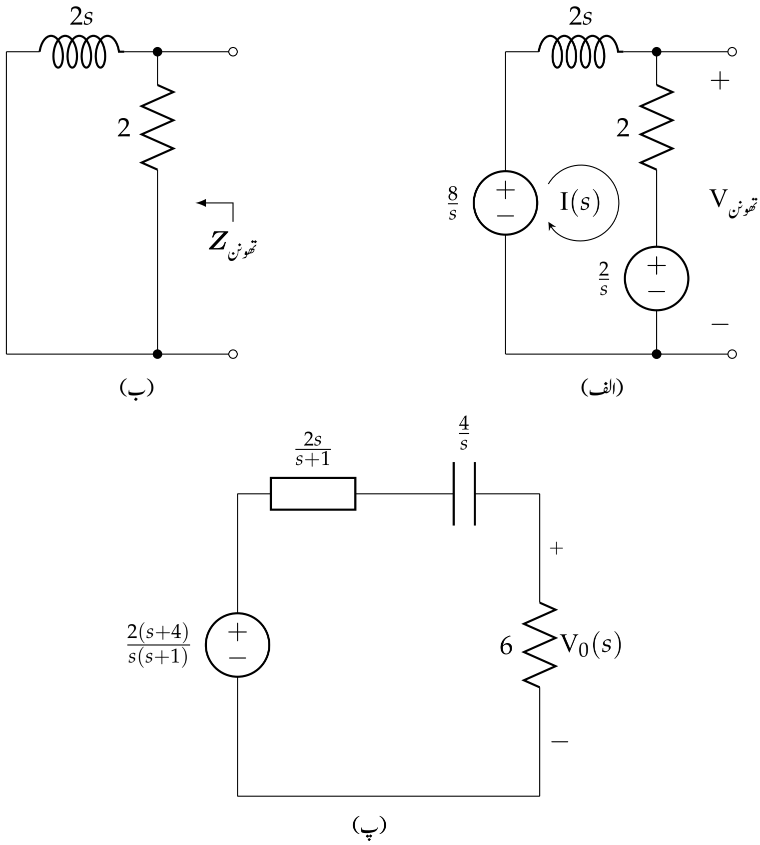
$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_{\text{تھونن}} &= \frac{2}{s} + 2\mathrm{I}(s) \\
&= \frac{2}{s} + \frac{6}{s(s+1)} \\
&= \frac{2(s+4)}{s+1}
\end{aligned}$$

شکل-ب سے تھونن رکاوٹ حاصل کرتے ہیں۔

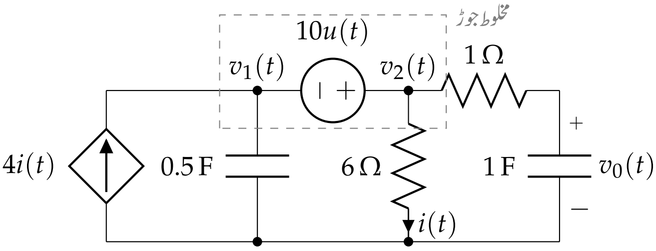
$$\begin{aligned}
Z_{\text{تھونن}} &= \frac{(2)(2s)}{2+2s} \\
&= \frac{2s}{s+1}
\end{aligned}$$

تھونن دباو اور تھونن رکاوٹ استعمال کرتے ہوئے تھونن دور حاصل ہوتا ہے جس کے ساتھ بوجھ جوڑتے ہوئے شکل 14.11-پ حاصل ہوتی ہے جہاں سے تقسیم دباو کے کلیے سے $\mathrm{V}_0(s)$ حاصل ہو گا۔

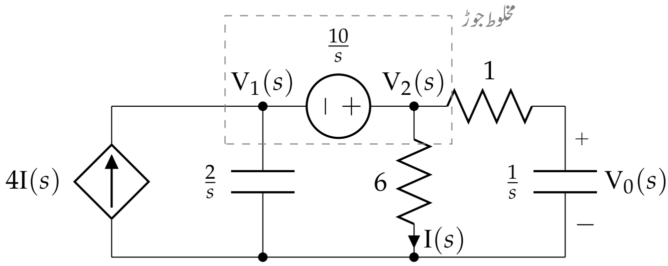
$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_0(s) &= \left(\frac{6}{\frac{2s}{s+1} + \frac{4}{s} + 6}\right)\frac{2(s+4)}{s(s+1)} \\
&= \frac{6(s+4)}{4s^2+5s+2}
\end{aligned}$$



شکل 14.11: مثال 14.3 کے دور کا تھونن سے حل۔



(الف)



(ب)

شکل 14.12: مثال 14.4 کا دور۔

مشق 14.1: شکل 14.8-الف کو مسئلہ نارٹن سے حل کریں۔

مثال 14.4: شکل 14.12-الف میں $v_0(t)$ دریافت کریں۔

حل: اگر $v_2(t)$ معلوم کیا جائے تو $v_0(t)$ کو تقسیم دباو کے کلیے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس دور میں مخلوط جوڑ پایا جاتا ہے لہٰذا مساوات جوڑ کی تعداد کم ہو گی۔ شکل-ب میں لاپلاس بدل دکھایا گیا ہے جس سے کرخوف مساوات جوڑ لکھتے ہیں

$$\frac{V_2(s)}{6}+\frac{V_2(s)}{1+\frac{1}{s}}+\frac{V_2(s)-\frac{10}{s}}{\frac{2}{s}}-4I(s)=0$$

جہاں

$$I(s) = \frac{V_2(s)}{6}$$

ہے لہٰذا

$$\frac{V_2(s)}{6} + \frac{V_2(s)}{1+\frac{1}{s}} + \frac{V_2(s) - \frac{10}{s}}{\frac{2}{s}} - \frac{4V_2(s)}{6} = 0$$

یعنی

$$\frac{V_2(s)}{6} + \frac{sV_2(s)}{s+1} + \frac{sV_2(s) - 10}{2} - \frac{2V_2(s)}{3} = 0$$

یا

$$V_2(s) = \frac{10(s+1)}{s^2+2s-1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ تقسیم دباو کے کلیے سے درکار جواب لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
V_0(s) &= V_2(s)\left(\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}}\right)\\
&= \frac{10(s+1)}{s^2+2s-1}\left(\frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}}\right)\\
&= \frac{10}{s^2+2s-1}
\end{aligned}$$

جزوی کسری پھیلاو حاصل کرتے ہوئے وقتی دائرہ کار میں دباو حاصل ہو گا۔ نسب نما کے جذر $-1 \mp \sqrt{2}$ ہیں لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}
V_0(s) &= \frac{10}{(s+1-\sqrt{2})(s+1+\sqrt{2})}\\
&= \frac{K_1}{s+1-\sqrt{2}} + \frac{K_2}{s+1+\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

جس سے

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \left.\frac{10}{s+1+\sqrt{2}}\right|_{s=-1+\sqrt{2}} \\
&= \frac{5}{\sqrt{2}} \\
K_2 &= \left.\frac{10}{s+1-\sqrt{2}}\right|_{s=-1-\sqrt{2}} \\
&= -\frac{5}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

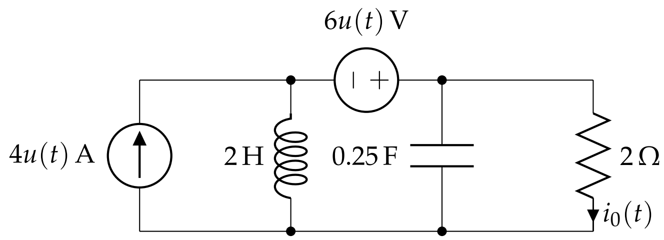
$$
\mathrm{V}_0(s) = \frac{5}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{s+1-\sqrt{2}} - \frac{1}{s+1+\sqrt{2}}\right)
$$

لکھ کر الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے درکار دباو حاصل ہو گا۔

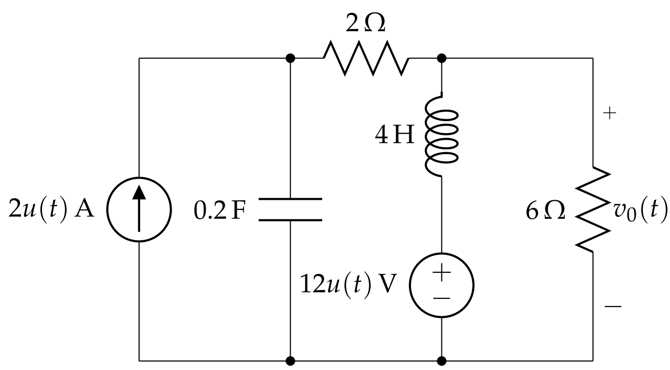
$$
\begin{aligned}
v_0(t) &= \frac{5}{\sqrt{2}}\left[e^{-(1-\sqrt{2})t} - e^{-(1+\sqrt{2})t}\right]u(t) \\
&= 5\sqrt{2}e^{-t}\sinh(\sqrt{2}t)u(t)\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

مشق 14.2: شکل 14.13 میں $i_0(t)$ بذریعہ مساوات جوڑ دریافت کریں۔

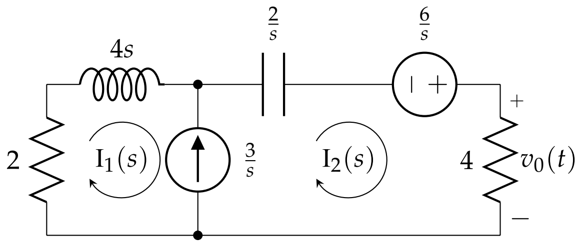
جواب: $i_0(t) = [e^{-t}(5\sin t - 3\cos t) + 3]u(t)\,\mathrm{A}$



شکل 14.13: مثال 14.2 کا دور۔



شکل 14.14: مثال 14.3 کا دور۔



شکل 14.15: مثال 14.4 اور مثال 14.5 کا دور۔

مشق 14.3: شکل 14.14 میں $v_0(t)$ بذریعہ مساوات جوڑ دریافت کریں۔

جواب: $v_0(t)=\left[e^{-\frac{t}{2}}\left(7.24\sin\frac{\sqrt{11}}{4}t-12\cos\frac{\sqrt{11}}{4}t\right)+12\right]u(t)\,\mathrm{V}$

مشق 14.4: شکل 14.15 میں $v_0(t)$ بذریعہ دائری مساوات دریافت کریں۔

جواب: $v_0(t)=12e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{V}$

مشق 14.5: مسئلہ تھونن کی مدد سے شکل 14.15 میں $v_0(t)$ حاصل کریں۔

لاپلاس بدل کی مدد سے کچھ ادوار ہم حل کر چکے جن میں ابتدائی رو اور دباو صفر تھے۔ آئیں اب چند ایسے ادوار دیکھیں جن میں ابتدائی رو یا ابتدائی دباو پایا جاتا ہو۔اس طرز کے ادوار ہم پہلے باب 7 میں حل کر چکے ہیں۔اس باب کے شروع میں

ابتدائی رو اور ابتدائی دباو کو شامل کرتے ہوئے پرزوں کے لاپلاس بدل حاصل کئے گئے نہیں شکل 14.2، شکل 14.3 اور شکل 14.4 میں دکھایا گیا ہے۔انہیں کو استعمال کرتے ہوئے ادوار حل کئے جائیں گے۔

مثال 14.5: شکل 14.16 میں ازل سے ایک سوئچ منقطع اور ایک سوئچ چالو ہے۔عین $t = 0\,\mathrm{s}$ پر چالو سوئچ کو منقطع کر دیا جاتا ہے جبکہ منقطع سوئچ کو چالو کر دیا جاتا ہے۔لمحہ $t < 0$ پر دور کو حل کرتے ہوئے ابتدائی دباو اور ابتدائی رو حاصل کرتے ہوئے $t \geq 0$ پر $i_0(t)$ دریافت کریں۔

حل: لمحہ $t < 0$ پر برق گیر کو کھلے دور جبکہ امالہ گیر کو قصر دور تصور کرتے ہوئے شکل-ب حاصل ہوتا ہے جہاں سے امالہ گیر کی ابتدائی رو $i_L(0)$ اور برق گیر کا ابتدائی دباو $v_C(0)$ حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} i_L(0) &= \frac{2}{4} = 0.5\,\mathrm{A} \\ v_C(0) &= 2\,\mathrm{V} \end{aligned}$$

ابتدائی معلومات کو شامل کرتے ہوئے پرزوں کے لاپلاس مساوی دور پر کرنے سے لمحہ $t \geq 0$ کے لئے شکل حاصل ہوتا ہے۔مساوات جوڑ لکھتے ہیں

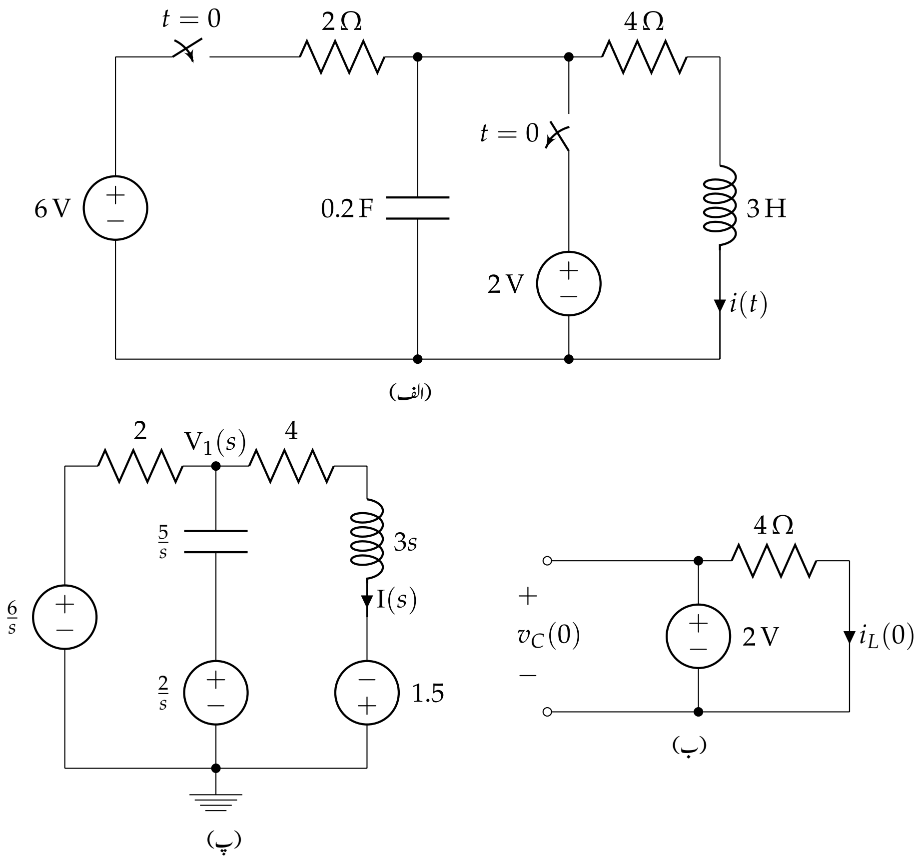
$$\frac{\mathrm{V}_1(s) - \frac{6}{s}}{2} + \frac{\mathrm{V}_1(s) - \frac{2}{s}}{\frac{5}{s}} + \frac{\mathrm{V}_1(s) + 1.5}{3s} = 0$$

جس سے

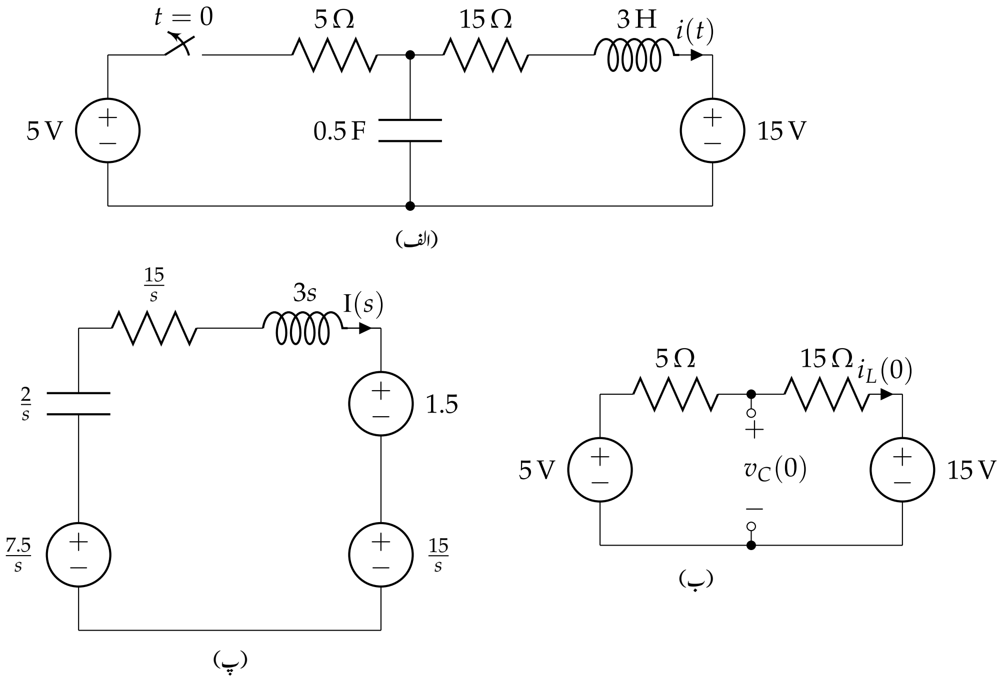
$$\mathrm{V}_1(s) = \frac{12s^2 + 91s + 120}{s(6s^2 + 23s + 30)}$$

حاصل ہوتا ہے۔یوں رو درج ذیل ہے

$$\begin{aligned} \mathrm{I}(s) &= \frac{\mathrm{V}_1(s)}{3s + 4} \\ &= \frac{12s^2 + 91s + 120}{s(s + 4)(6s^2 + 23s + 30)} \end{aligned}$$



شکل 14.16: مثال 14.5 کا دور۔



شکل 14.17: مثال 14.6 کا دور۔

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$i(t) = \left[e^{-\frac{23}{12}t} \left(\frac{44}{\sqrt{191}} \sin \frac{\sqrt{191}t}{12} - 2\cos \frac{\sqrt{191}t}{12} \right) + 4 \right] u(t)\,\mathrm{A}$$

مثال 14.6: شکل 14.17 میں ازل سے چالو سوئچ کو لمحہ پر منقطع کیا جاتا ہے۔ سوئچ منقطع ہونے کے بعد کی رو $i(t)$ دریافت کریں۔

حل: چالو سوئچ کی صورت میں برق گیر کو کھلا دور اور امالہ گیر کو قصر دور تصور کرتے ہوئے شکل-ب حاصل ہوتی ہے جہاں سے امالہ گیر کی ابتدائی رو $i_L(0)$ اور برق گیر کی ابتدائی دباو $v_C(0)$ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
i_L(0) &= \frac{10-20}{5+15} = -0.5\,\mathrm{A} \\
v_C(0) &= \frac{5\times 15 + 15\times 5}{5+15} = 7.5\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

ابتدائی معلومات کو استعمال کرتے ہوئے، سوئچ منقطع ہونے کے بعد کا لاپلاس بدل دور شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔ ابتدائی رو منفی ہونے کی وجہ سے امالہ کے لاپلاسی اظہار میں $1.5\,\mathrm{V}$ منبع کے قطبین شکل 14.4 کے الٹ ہیں۔ شکل 14.17-ب سے $\mathrm{I}(s)$ لکھتے ہیں۔

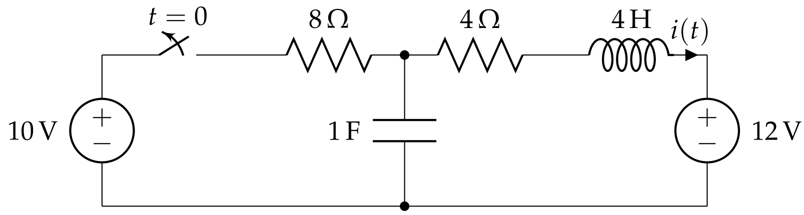
$$
\begin{aligned}
\mathrm{I}(s) &= \frac{\frac{7.5}{s} - 1.5 - \frac{15}{s}}{\frac{2}{s} + 15 + 3s} \\
&= \frac{-(s+5)}{2(s^2+5s+\frac{2}{3})} \\
&= \frac{-(s+5)}{2(s+\frac{5}{2}-\frac{\sqrt{201}}{6})(s+\frac{5}{2}+\frac{\sqrt{201}}{6})}
\end{aligned}
$$

اس کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

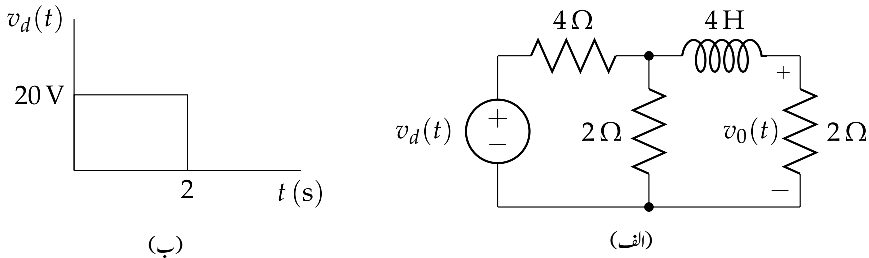
$$
i(t) = -e^{-\frac{5}{2}t}\left[\frac{45}{6\sqrt{201}}\sinh\left(\frac{\sqrt{201}}{6}t\right) + \frac{1}{2}\cosh\left(\frac{\sqrt{201}}{6}t\right)\right]u(t)\,\mathrm{A}
$$

مشق 14.6: شکل 14.18 میں $i_0(t)$ حاصل کریں۔

جواب: $i_0(t) = -\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{6}(1+\frac{t}{2})u(t)\,\mathrm{A}$



شکل 14.18: مشق 14.6 کا دور۔



شکل 14.19: مشق 14.7 کا دور۔

مشق 14.7: شکل 14.19-الف میں $v_0(t)$ حاصل کریں۔ شکل-ب میں داخلی دباو کی مستطیل صورت دی گئی ہے۔

جواب: $v_0(t) = 4(1 - e^{-\frac{5}{6}t})u(t) + 4(1 - e^{-(\frac{5}{6}-2)t})u(t-2)\,\mathrm{V}$

14.4 تبادلی تفاعل جال

دور میں کسی بھی دباو یا رو اور داخلی اشارے کے تناسب کو جال کی **تبادلی تفاعل**[1] یا **تفاعل جال**[2] کہتے ہیں۔ اگر دونوں متغیرات دباو ہوں تب تبادلی تفاعل **افزائش دباو**[3] کہلاتا ہے، اگر دونوں متغیرات رو ہوں تب اس کو **افزائش رو**[4] کہتے

[1] transfer function
[2] network function
[3] voltage gain
[4] current gain

ہیں۔اسی طرح دباو اور رو کے تناسب کو افزائش مزاحمت نما[5] کہتے ہیں جبکہ رو اور دباو کے تناسب کو افزائش موصلیت نما[6] کہتے ہیں۔تبادلی تفاعل کے حصول میں ابتدائی دباو اور ابتدائی رو کو صفر لیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ کسی دور کا تبادلی تفاعل درج ذیل مساوات دیتی ہے جہاں $x_d(t)$ داخلی اشارہ اور $y_0(t)$ خارجی اشارہ ہیں۔

$$\begin{aligned} b_n \frac{\mathrm{d}^n y_0(t)}{\mathrm{d}t^n} + b_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y_0(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + b_1 \frac{\mathrm{d}^1 y_0(t)}{\mathrm{d}t^1} + b_0 y_0(t) = \\ a_m \frac{\mathrm{d}^m x_d(t)}{\mathrm{d}t^m} + a_{m-1}\frac{\mathrm{d}^{m-1} x_d(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}} + \cdots + a_1 \frac{\mathrm{d}^1 x_d(t)}{\mathrm{d}t^1} + a_0 x_d(t) \end{aligned}$$

تمام ابتدائی معلومات صفر ہونے کی صورت میں درج بالا کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} \left(b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0\right) \mathrm{Y}_0(s) = \\ \left(a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0\right) \mathrm{X}_d(s) \end{aligned}$$

جس سے تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(s)$

$$\boldsymbol{H}(s) = \frac{\mathrm{Y}_0(s)}{\mathrm{X}_d(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

یا

$$\mathrm{Y}_0(s) = \boldsymbol{H}(s)\mathrm{X}_d(s) \tag{14.18}$$

لکھتے ہیں۔

مساوات 14.18 کہتی ہے کہ تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(s)$ اور داخلی تفاعل X_d کا حاصل ضرب خارجی تفاعل $\mathrm{Y}_0(s)$ کے برابر ہے۔یوں $x_d(t) = \delta(t)$ کی صورت میں چونکہ $\mathrm{X}_d(s) = 1$ ہے لہٰذا $\mathrm{Y}_0(s) = \boldsymbol{H}(s)$ ہو گا۔

$$\mathrm{Y}_0(s) = \boldsymbol{H}(s) \quad \delta(t) \tag{14.19}$$

یہ ایک اہم نتیجہ ہے جس کے تحت کسی بھی دور پر اکائی ضرب تفاعل لاگو کرتے ہوئے خارجی اشارے سے دور کا تبادلی تفاعل حاصل کیا جا سکتا ہے۔ایک بار دور کا تبادلی تفاعل معلوم ہو جائے اس کے بعد کسی بھی داخلی اشارے پر دور کا رد عمل

[5] transresistance gain
[6] transconductance gain

مساوات 14.18 سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔اکائی ضرب تفاعل لاگو کرتے ہوئے خارجی رد عمل $h(t)$ دے گا جس کا لاپلاس بدل لیتے ہوئے $\boldsymbol{H}(s)$ حاصل کیا جائے گا۔چونکہ تجزیہ گاہ[7] میں اکائی ضرب تفاعل پیدا کرنا مشکل بلکہ ناممکن کام ہے لہٰذا ہم دور پر اکائی سیڑھی تفاعل لاگو کرتے ہوئے تبادلی تفاعل حاصل کر سکتے ہیں۔چونکہ $u(t)$ کا لاپلاس بدل $\frac{1}{s}$ ہے لہٰذا دور پر اکائی سیڑھی تفاعل لاگو کرتے ہوئے مساوات 14.18 کے تحت درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\mathrm{Y}_0(s) = \frac{\boldsymbol{H}(s)}{s} \quad u(t) \tag{14.20}$$

یوں اکائی سیڑھی تفاعل لاگو کرتے ہوئے دور کا خارجی اشارہ $y_0(t)$ ناپا جاتا ہے۔خارجی اشارے کا لاپلاس بدل $\mathrm{Y}_0(s)$ دے گا۔درج بالا مساوات کے تحت $\boldsymbol{H}(s) = \mathrm{Y}_0(s)$ کے برابر ہے۔اس کو یوں بھی بیان کیا جا سکتا ہے کہ ناپے گئے خارجی اشارے کے تفرق $\frac{\mathrm{d}y_0(t)}{\mathrm{d}t}$ کا لاپلاس بدل نظام کا تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(s)$ ہو گا۔

مثال 14.7: دور کا اکائی ضرب تفاعل رد عمل $\boldsymbol{H}(s) = \frac{2}{s+5}$ ہے۔داخلی اشارہ $v_d(t) = 3e^{-4t}u(t)\,\mathrm{V}$ لاگو کرتے ہوئے خارجی اشارہ $v_0(t)$ دریافت کریں۔

حل: داخلی اشارے کا لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{V}_d(s) = \frac{3}{s+4}$$

یوں مساوات استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_0(s) &= \boldsymbol{H}(s)\mathrm{V}_d(s)\\ &= \frac{6}{(s+5)(s+4)}\\ &= \frac{6}{s+4} - \frac{6}{s+5}\end{aligned}$$

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے خارجی اشارہ حاصل کرتے ہیں۔

$$v_0(t) = 6\left(e^{-4t} - e^{-5t}\right) u(t)\,\mathrm{V}$$

---

[7] lab

تبادلی تفاعل کے قطب سے دور کے رد عمل کے بارے میں بہت کچھ جانا جاتا ہے۔ہم ایک درجی اور دو درجہ ادوار پر باب 7 میں غور کر چکے ہیں۔یہاں نتائج کو دوبارہ پیش کرتے ہیں۔ایک عدد امالہ گیر یا برق گیر کی صورت میں رد عمل $y(t) = y_0e^{-\frac{t}{\tau}}$ صورت رکھتا ہے جہاں τ دور کا وقتی مستقل ہے۔دو درجی ادوار کا رد عمل دور کے **امتیازی مساوات**

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

کے قطبین پر منحصر ہوتا ہے۔یاد رہے کہ تبادلی تفاعل کا نسب نما امتیازی مساوات کہلاتا ہے۔امتیازی مساوات میں ζ **تقصیری مستقل** اور ω_0 **بلا تقصیر قدرتی تعدد** ہے اور یہی دو قیمتیں رد عمل کی تین ممکنہ صورتیں تعین کرتی ہیں۔

زیادہ تقصیر: امتیازی مساوات میں $\zeta > 1$ اور مساوات کے جذر

$$\begin{aligned}
s_1 &= -\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}\\
s_2 &= -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}
\end{aligned}$$

ہیں لہٰذا حال کا رد عمل درج ذیل ہے۔

$$y(t) = K_1 e^{-(\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2-1})t} + K_2 e^{-(\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2-1})t}$$

کم تقصیر: امتیازی مساوات میں $\zeta < 1$ اور مساوات کے جذر

$$\begin{aligned}
s_1 &= -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}\\
s_2 &= -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}
\end{aligned}$$

ہیں لہٰذا حال کا رد عمل درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
y(t) &= K_1 e^{-(\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2})t} + K_2 e^{-(\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2})t}\\
&= K e^{-\zeta\omega_0 t}\cos(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}t + \phi)
\end{aligned}$$

فاصل تقصیر: امتیازی مساوات میں $\zeta = 1$ اور مساوات کے جذر

$$s_1 = s_2 = -\omega_0$$

ہیں لہٰذا جال کا ردعمل درج ذیل ہے۔

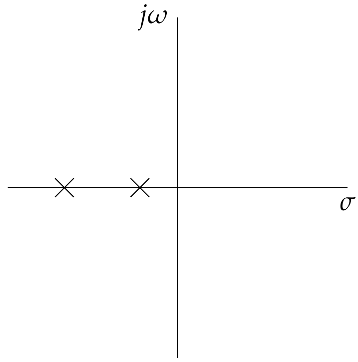
$$y(t) = K_1 e^{-\omega_0 t} + K_2 t e^{-\omega_0 t}$$

جال کے قطبین اور صفروں کو عموماً **مخلوط سطح**[8] یا s سطح پر دکھایا جاتا ہے۔ مخلوط سطح کے افقی محور پر σ اور عمودی محور پر $j\omega$ رکھتے ہوئے مخلوط تعدد $s = \sigma + j\omega$ دکھایا جاتا ہے۔ اس سطح پر صفر کو 0 جبکہ قطبین کو $\times$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

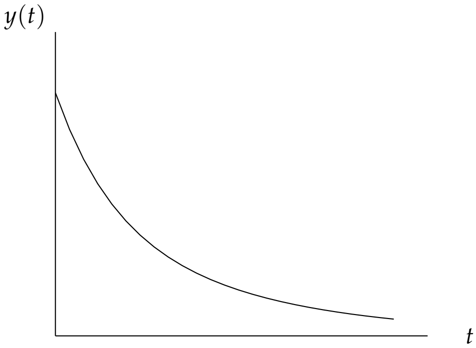
شکل 14.20 میں سادہ اور علیحدہ قطبین، مخلوط قطبین اور کثیر ہم رتبی قطبین مخلوط سطح پر دکھائے گئے ہیں۔ شکل-ٹ میں دو عدد ہم رتبی قطبین کو علیحدہ علیحدہ کر کے دکھایا گیا ہے۔ حقیقت میں یہ دونوں حقیقی محور پر ایک ہی نقطے پر پائے جاتے ہیں۔ ساتھ ہی ساتھ ان سے حاصل ردعمل بھی دکھایا گیا ہے۔ سادہ اور علیحدہ قطبین کے تفاعل کی شرح تبدیلی کم ہوتی ہے لہٰذا اس کو صفر تک پہنچنے میں زیادہ وقت لگتا ہے۔ مخلوط قطبین کے تفاعل کی شرح تبدیلی زیادہ ہوتی ہے البتہ یہ صفر پر پہنچ کر دوسری جانب نکل جاتا ہے۔ یوں مخلوط قطبین کا تفاعل **مقصور سائن نما**[9] ہوتا ہے۔ کثیر ہم رتبی قطبین کا ردعمل ان دونوں کے درمیان ہے۔ یہ تیز تر ممکنہ رفتار سے صفر تک پہنچتا ہے، البتہ اتنا تیز نہیں کہ صفر پر رکھ نہ سکے اور دوسری جانب نکل جائے۔

شکل 14.21 میں مخلوط سطح پر مختلف تفاعل اور تفاعل کے قطبین دکھائے گئے۔ اس شکل سے کئی حقائق کی وضاحت ہوتی ہے لہٰذا اس پر کچھ وقت صرف کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ p_1 تا p_5 بالترتیب $f_1(t)$ تا $f_5(t)$ تفاعل کو ظاہر کرتے ہیں۔ مخلوط قطبین جوڑیوں میں پائے جاتے ہیں۔ یوں p_2 اور p_2^* مخلوط جوڑی ہے جو $f_2(t)$ کو ظاہر کرتے ہیں۔ حقیقی جزو صفر ہونے کی صورت میں خیالی قطبین کی جوڑی مثلاً p_3 اور p_3^* ملتی ہے۔ قطب کا حقیقی جزو اگر مثبت ہو تو تفاعل مسلسل بڑھتا ہے اور اگر حقیقی جزو منفی ہو تب تفاعل مسلسل گھٹتا ہے۔ یوں $f_4(t)$ یا $f_5(t)$ مسلسل بڑھتے تفاعل ہیں جبکہ $f_1(t)$ اور $f_2(t)$ مسلسل گھٹتے تفاعل ہیں۔ مسلسل بڑھتا تفاعل غیر متوازن صورت حال کو ظاہر کرتی ہے جو حقیقی دنیا میں زیادہ دیر برقرار نہیں رہ سکتی جیسے مسلسل بڑھتی رو آخر کار کسی نہ کسی چیز کو تباہ کر کے ہی رہے گی۔ مسلسل گھٹتا تفاعل متوازن صورت حال کو ظاہر کرتی ہے۔ یوں خیالی محور کے دائیں جانب قطب غیر متوازن

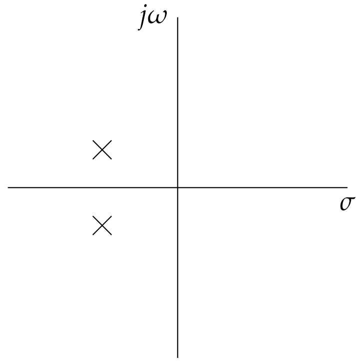
[8] complex plane
[9] damped sinusoidal



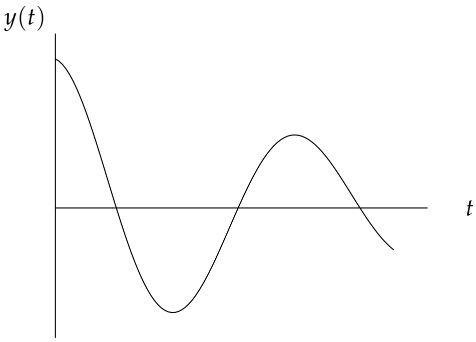
(الف) مخلوط سطح پر حقیقی سادہ قطبین کا اظہار۔



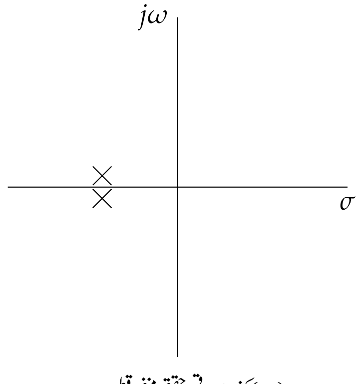
(ب) حقیقی منفی سادہ قطبین سے پیدا رد عمل۔



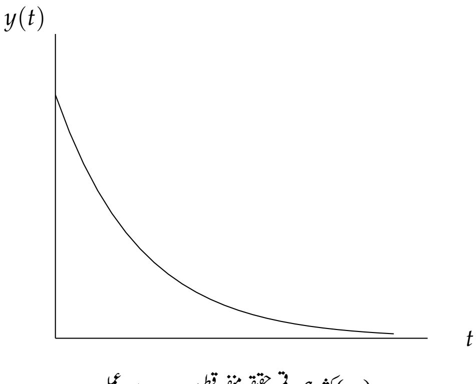
(پ) مخلوط سطح پر جوڑی دار مخلوط قطبین کا اظہار۔



(ت) مخلوط جوڑی دار قطبین سے پیدا رد عمل۔

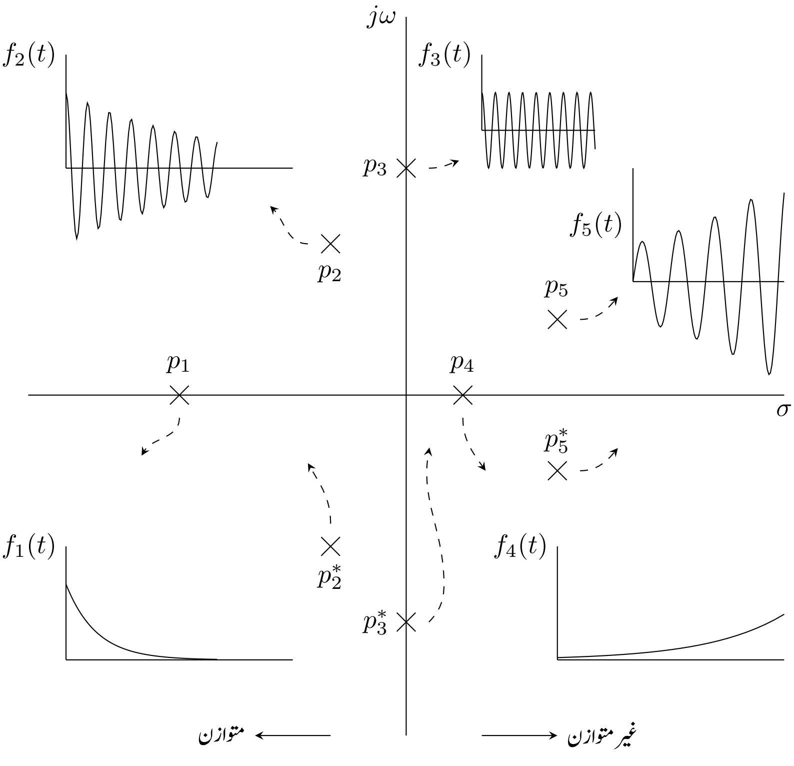


(ٹ) کثیر ہم رتبی حقیقی منفی قطبین۔

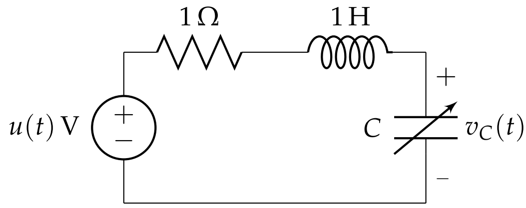


(ث) کثیر ہم رتبی حقیقی منفی قطبین سے پیدا رد عمل۔

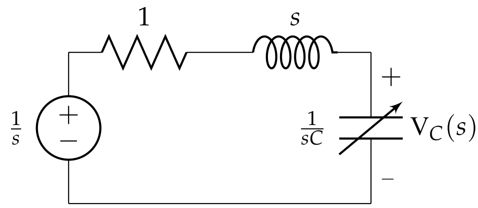
شکل 14.20: قطبین اور رد عمل



شکل 14.21: مخلوط سطح پر مختلف قطبین اور ان کے تفاعل کے رد عمل۔



(الف)



(ب)

شکل 14.22: مثال 14.8 کا دور۔

جبکہ محور کے بائیں جانب قطب متوازن نظام کو ظاہر کرتی ہے۔ کسی بھی متوازن نظام کی تخلیق کے دوران مخلوط سطح میں قطبین کے مقام پر کھڑی نظر رکھی جاتی ہے اور خیالی محور کے دائیں جانب قطبین سے ہر صورت چھٹکارا حاصل کیا جاتا ہے۔ قطب کا خیالی جزو صفر نہ ہونے کی صورت میں تفاعل سائن نما ہو گا لہٰذا $f_5(t)$ مسلسل بڑھتا سائن نما تفاعل ہے جبکہ $f_2(t)$ مسلسل گھٹتا سائن نما یعنی مقصور سائن نما[10] ہے۔ خیالی قطبین کی جوڑی سائن نما تفاعل کو ظاہر کرتی ہے لہٰذا $f_3(t)$ برقرار حیطے کا سائن نما تفاعل ہے۔ حقیقی محور سے جتنا دور جایا جائے، تعدد اتنی بڑھتی ہے لہٰذا $f_5(t)$ سے $f_2(t)$ کا تعدد زیادہ ہے اور $f_3(t)$ کا تعدد اس سے بھی زیادہ ہے۔ اسی طرح خیالی محور سے جتنا دور جایا جائے، بڑھنے یا گھٹنے کی شرح اتنی بڑھتی ہے لہٰذا $f_4(t)$ کے بڑھنے کی شرح سے $f_2(t)$ کے گھٹنے کی شرح زیادہ ہو گی جبکہ $f_5(t)$ اس سے زیادہ اور $f_1(t)$ تمام سے زیادہ تیزی سے تبدیل ہو گا۔

مثال 14.8: شکل 14.22-الف میں تغیر پذیر برق گیر استعمال کیا گیا ہے۔ خارجی دباو $v_C(t)$ کو $C = 1\,\mathrm{F}$ ، $C = 4\,\mathrm{F}$ اور $C = 10\,\mathrm{F}$ کے لئے حاصل کریں۔

---

[10] damped sinusoidal

شکل 14.22-ب میں لاپلاس بدل دور دکھایا گیا ہے جس سے تقسیم دباو کے کلیے سے خارجی دباو لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
V_C(s) &= \left(\frac{\frac{1}{sC}}{1+s+\frac{1}{sC}}\right)\frac{1}{s}\\
&= \frac{\frac{1}{C}}{s(s^2+s+\frac{1}{C})}
\end{aligned}$$

$C = 1\,\mathrm{F}$ کے لئے $V_C(s)$ کے مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
V_C(s) &= \frac{1}{s(s^2+s+1)}\\
&= \frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{6}(3+j\sqrt{3})}{s+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\frac{1}{6}(3-j\sqrt{3})}{s+\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}
\end{aligned}$$

امتیازی مساوات کے جذر یعنی $V_C(s)$ کے قطبین $p_1 = 0$ ، $p_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $p_3 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہیں۔یوں ایک عدد حقیقی اور مخلوط جوڑی دار قطبین پائے جاتے ہیں جو **کم مقصور صورت حال** ہے۔الٹ لاپلاس بدل سے وقتی دائرہ کار میں خارجی دباو حاصل کرتے ہیں۔

$$v_C(t) = \left[1 - e^{-\frac{t}{2}}\left(\cos\frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}t}{2}\right)\right]u(t)\,\mathrm{V}$$

$C = 4\,\mathrm{F}$ کے لئے $V_C(s)$ کے مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
V_C(s) &= \frac{0.25}{s(s^2+s+0.25)}\\
&= \frac{0.25}{s(s+\frac{1}{2})^2}\\
&= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2(s+\frac{1}{2})^2}
\end{aligned}$$

یہاں تینوں قطبین حقیقی ہیں جن میں $p = -\frac{1}{2}$ کثیر رتبی قطب ہے جو **فاصل مقصور حال** کو ظاہر کرتی ہے۔الٹ لاپلاس لیتے ہوئے $v_C(t)$ حاصل کرتے ہیں۔

$$v_C(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} - \frac{t}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right)u(t)\,\mathrm{V}$$

$C = 10\,\mathrm{F}$ کے لئے $\mathrm{V}_C(s)$ کے مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\mathrm{V}_C(s) &= \frac{0.1}{s(s^2+s+0.1)}\\ &= \frac{1}{s} + \frac{0.145}{s+0.887} - \frac{1.145}{s+0.113}\end{aligned}$$

اس مساوات کے قطبین $p_1 = 0$ ، $p_2 = -0.887$ اور $p_3 = -0.113$ ہیں۔یوں تینوں سادہ علیحدہ علیحدہ حقیقی قطبین ہیں لہٰذا تفاعل کا رد عمل **زیادہ مقصور** ہو گا۔الٹ لاپلاس بدل سے $v_C(t)$ حاصل کرتے ہیں۔

$$v_C(t) = \left(1 + 0.145e^{-0.887t} - 1.145e^{-0.113t}\right) u(t)\,\mathrm{V}$$

مثال 14.9: اکائی ضرب رد عمل $y(t) = 2e^{-5t} - 4e^{-2t}$ ہے۔اکائی سیڑھی رد عمل دریافت کریں۔

حل: اکائی ضرب رد عمل تبادلی تفاعل دیتا ہے لہٰذا دیے گیے رد عمل کا لاپلاس بدل $\boldsymbol{H}(s)$ ہو گا۔

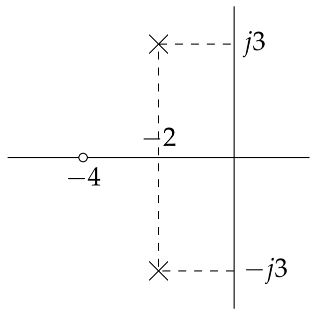
$$\boldsymbol{H}(s) = \frac{2}{s+5} - \frac{4}{s+2}$$

یوں اکائی سیڑھی رد عمل درج ذیل ہو گا۔

$$\mathrm{Y}(s) = \left(\frac{2}{s+5} - \frac{4}{s+2}\right)\frac{1}{s}$$

مخلوط تعددی دائرہ کار میں s سے تقسیم سے مراد وقتی دائرہ کار میں تفاعل کا تکمل ہے لہٰذا اکائی سیڑھی رد عمل وقتی دائرہ کار میں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_0^t 2e^{-5t} - 4e^{-2t}\,\mathrm{d}t\\ &= \left.\frac{2e^{-5t}}{-5} - \frac{4e^{-2t}}{-2}\right|_0^t\\ &= \left(-\frac{8}{5} - \frac{2}{5}e^{-5t} + 2e^{-2t}\right)u(t)\end{aligned}$$



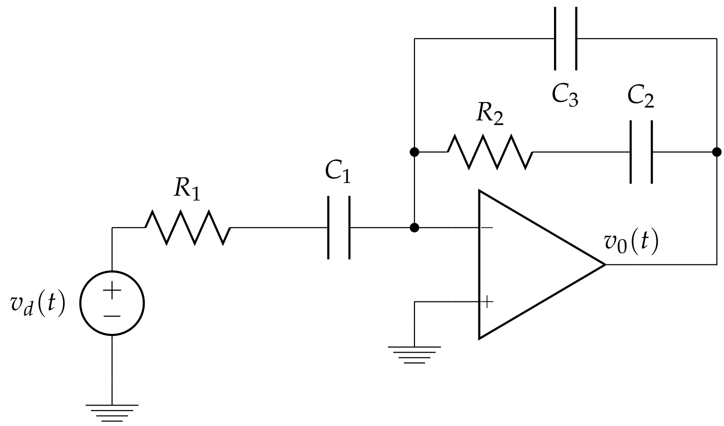
شکل 14.23: مشق 14.9 کے قطبین اور صفر۔

مشق 14.8: اکائی ضرب رد عمل $y(t) = 2\cos 2t + 3\sin 2t$ ہے۔ اکائی سیڑھی رد عمل دریافت کریں۔

جواب: $y(t) = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos 2t + \sin 2t\right) u(t)$

مشق 14.9: تبادلی تفاعل $\boldsymbol{H}(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+13}$ کے صفر اور قطب حاصل کرتے ہوئے مخلوط سطح پر دکھائیں۔ اس کا اکائی سیڑھی رد عمل بھی حاصل کریں۔

جواب: قطبین اور صفر کو شکل 14.23 میں دکھایا گیا ہے۔ $y(t) = e^{-2t}\left(\cos 3t + \frac{2}{3}\sin 3t\right) u(t)$



شکل 14.24: مشق 14.10 کا دور۔

مشق 14.10: شکل 14.24 کا تبادلی تفاعل $\mathrm{A}_v(s)=\frac{\mathrm{V}_0(s)}{\mathrm{V}_d(s)}$ حاصل کریں۔

جواب:

$$\mathrm{A}_v(s)=-\frac{\frac{1}{R_1C_3\left(s+\frac{1}{R_2C_2}\right)}}{\left(s+\frac{1}{R_1C_1}\right)\left[s+\frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}\right)\right]}$$

آپ جانتے ہیں کہ دو درجی کم قصری جال کا امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2$$

جس کے مخلوط جوڑی دار قطبین

$$s_1=-\zeta\omega_0-j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$s_2=-\zeta\omega_0+j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

کو مخلوط سطح پر شکل 14.25 میں دکھایا گیا ہے۔ قطب p کو زاویائی صورت میں لکھتے ہیں۔ محدد کے مرکز $(0,0)$ سے قطب کا فاصلہ مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے حاصل کرتے ہیں

$$\text{رداس} = \sqrt{(\zeta\omega_0)^2 + \left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2} = \omega_0$$

جسے شکل میں ω_0 دکھایا گیا ہے۔اسی طرح زاویہ θ شکل سے دیکھ کر لکھا جا سکتا ہے۔ شکل میں تکون کا قاعدہ $\omega_0\zeta$ اور وتر ω_0 ہیں لہٰذا درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\omega_0\zeta}{\omega_0}\\ &= \zeta\end{aligned}$$

یوں درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

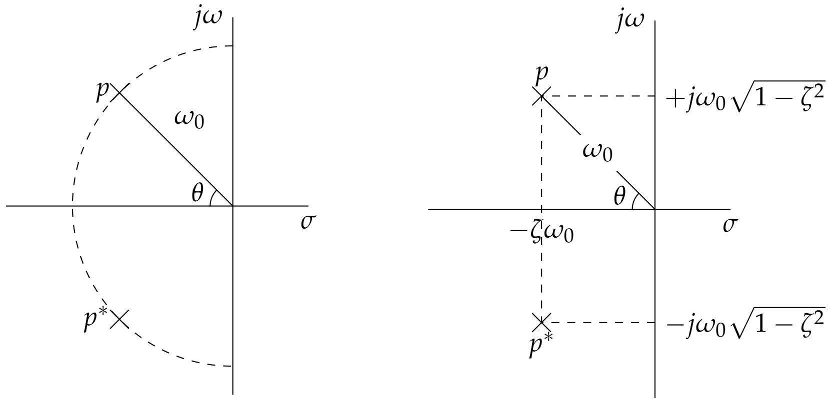
$$\begin{aligned}\text{رداس} &= \omega_0\\ \text{زاویہ} &= \theta = \cos^{-1}\zeta\end{aligned} \tag{14.21}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ محدد کے مرکز سے قطب تک فاصلہ ω_0 کے برابر ہے جبکہ زاویہ $\cos^{-1}\zeta$ ہے۔یوں ζ تبدیل کرنے سے رداس تبدیل نہیں ہوتا البتہ زاویہ تبدیل ہونے سے قطب دائری حرکت کرتا ہے۔ شکل-ب میں ζ تبدیل کرنے سے مخلوط جوڑی دار قطبین نقطہ دار دائرے پر حرکت کرتے ہیں۔

14.5 ترسیم قطبین و صفر اور بوڈا خط

ہم تعددی ردعمل پر غور کے دوران بوڈا خطوط پر بحث کر چکے ہیں۔آئیں تبادلی تفاعل کے ترسیم قطبین و صفر اور بوڈا خط کے تعلق پر غور کریں۔ایسا کرنے کی خاطر ہم شکل 14.26 میں دیے RLC کا تبادلی تفاعل

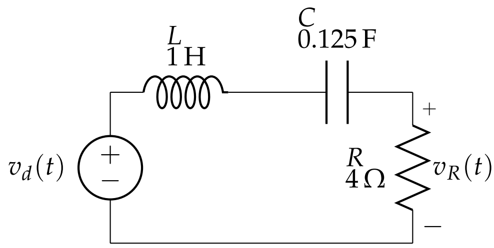
$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(s) &= \frac{\mathrm{V}_R(s)}{\mathrm{V}_d(s)}\\ &= \frac{\frac{R}{L}s}{s^2+\frac{R}{L}s+\frac{1}{LC}}\end{aligned}$$



(الف) قطب تک رداس ω_0 ہے جبکہ زاویہ $\cos^{-1}\zeta$ ہے۔

(ب) تقصیر تبدیل کرنے سے قطب نقطہ دار دائرے پر حرکت کرتا ہے۔

شکل 14.25: کم قصری، دو درجی جال کے مخلوط جوڑی دار قطبین۔

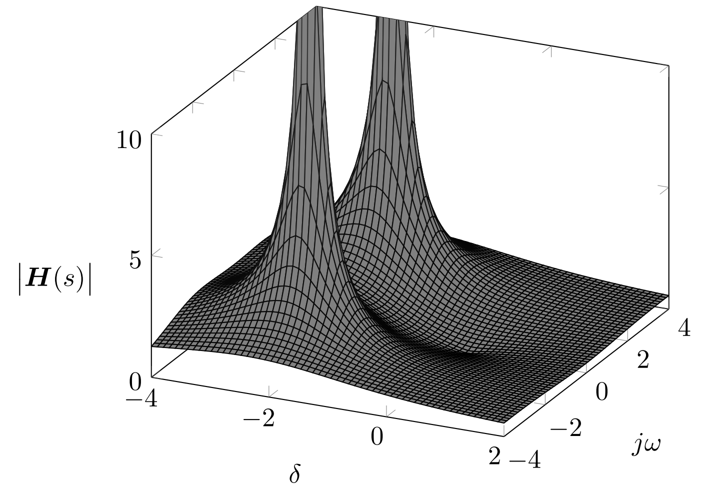


شکل 14.26: RLC دور۔

استعمال کریں گے جو پرزوں کی دی گئی قیمتیں پر کرنے سے درج ذیل صورت اختیار کر لیتا ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(s) &= \frac{4s}{s^2+4s+8} \\ &= \frac{4s}{(s+2-j2)(s+2+j2)}\end{aligned} \tag{14.22}$$

درج بالا تبادلی تفاعل کی تین بعدی مقداری ترسیم شکل 14.27 میں دکھائی گئی ہے۔ تبادلی تفاعل کا صفر $s=0$ پر پایا جاتا ہے جبکہ $s=-2\mp j2$ پر قطبین پائے جاتے ہیں۔ یوں قطبین پر تین بعدی ترسیم لا متناہی ہو گی جبکہ صفر پر اس کی قیمت صفر ہو گی۔



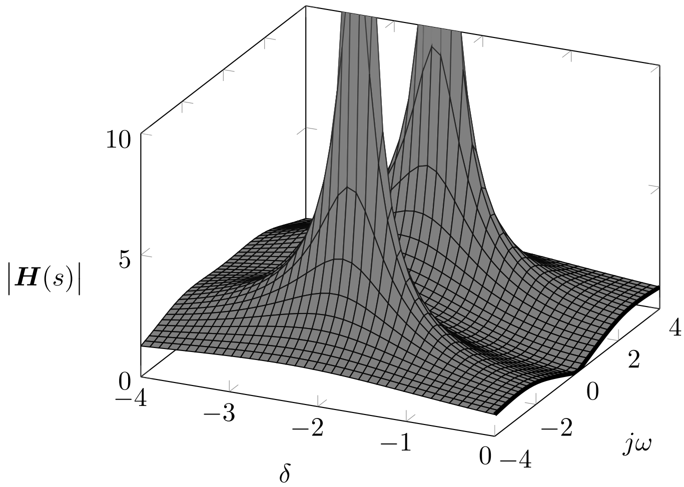
شکل 14.27: مساوات 14.22 کا تین بعدی ترسیم۔

حقیقی دنیا میں تعدد ω ہوتا ہے نا کہ $\delta + j\omega$ جو کہ مخلوط تعدد ہے۔بوڈا مقداری خط ω بالمقابل مقدار کا خط ہے۔مخلوط سطح کے خیالی محور پر $s = j\omega$ ہوتا ہے لہٰذا مخلوط سطح کے خیالی محور پر بوڈا مقداری خط پایا جاتا ہے۔تین بعدی ترسیم کو $\delta = 0$ پر کاٹتے ہوئے شکل 14.28 ملتی ہے جس کے خیالی محور پر بوڈا مقداری خط کو موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ شکل 14.28 کو یوں گھماتے ہیں کہ حقیقی محور صفحہ کتاب کے عمودی ہو۔اس طرح شکل 14.29 ملتا ہے جہاں حقیقی محور کے دونوں جانب برابر فاصلے پر قطبین دیکھے جا سکتے ہیں۔اس شکل میں حقیقی محور δ کے دونوں جانب بوڈا خط بالکل یکساں ہے لہٰذا ہم خیالی محور کا مثبت حصہ لیتے ہوئے شکل 14.30 حاصل کرتے ہیں جہاں صرف اور صرف خیالی محور پر تفاعل کا مقدار دکھایا گیا ہے۔یہی بوڈا مقداری خط ہے۔

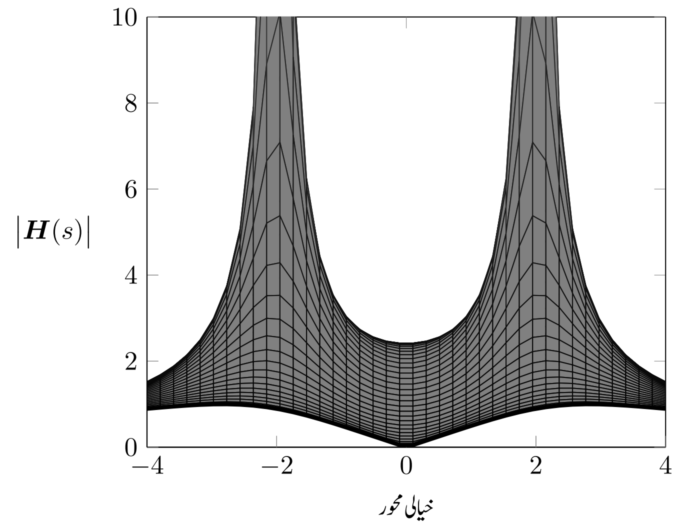
14.6 برقرار حال ردعمل

کسی بھی نظام کے عارضی ردعمل اور برقرار ردعمل کا مجموعہ مکمل ردعمل ہوتا ہے۔عارضی ردعمل $t \to \infty$ پر ختم ہو جاتا ہے جبکہ برقرار ردعمل تمام اوقات پر پایا جاتا ہے۔آئیں برقرار ردعمل کو براہ راست حاصل کرنے کا طریقہ سیکھیں۔آپ جانتے ہیں کہ ردعمل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

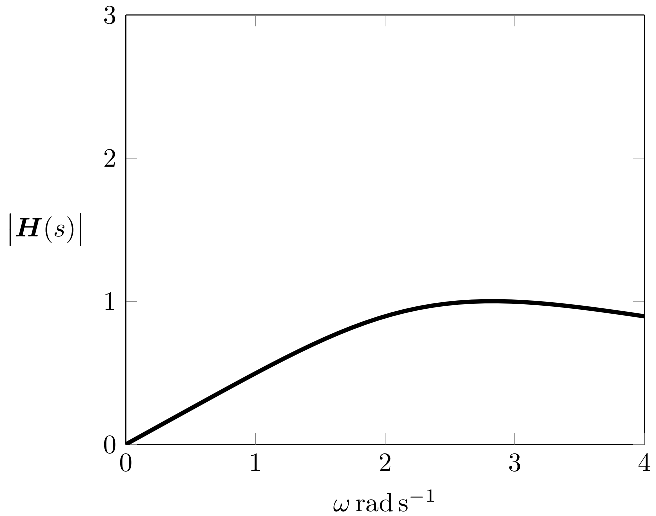
$$\mathrm{Y}(s) = \boldsymbol{H}(s)\mathrm{X}(s) \tag{14.23}$$



شکل 14.28: تین بعدی ترسیم کے خیالی محور پر بوڈا خط پایا جاتا ہے۔



شکل 14.29: تین بعدی ترسیم کا حقیقی محور صفحہ کتاب کے عمودی ہے۔



شکل 14.30: تین بعدی ترسیم کے مثبت خیالی محور پر بوڈا مقداری خط پایا جاتا ہے۔

جہاں $\mathrm{X}(s)$ داخلی اشارہ، $\mathrm{Y}(s)$ ردعمل اور $\boldsymbol{H}(s)$ نظام کا تبادلی تفاعل ہے۔عارضی ردعمل $\boldsymbol{H}(s)$ کے قطبین سے پیدا ہوتا ہے جبکہ برقرار ردعمل داخلی اشارے یعنی جبری تفاعل کے قطبین سے پیدا ہوتا ہے۔

بالکل حصہ 8.3 کی طرح چلتے ہوئے ہم فرض کرتے ہیں کہ داخلی اشارہ مخلوط تفاعل

$$x(t) = X_0 e^{j(\omega_0 t+\theta)} \tag{14.24}$$

ہے جس کا لاپلاس بدل درج ذیل ہے۔

$$\mathrm{X}(s) = \frac{X_0 e^{j\theta}}{s - j\omega_0}$$

یوں ردعمل

$$\begin{aligned} \mathrm{Y}(s) &= \boldsymbol{H}(s)\mathrm{X}(s) \\ &= \boldsymbol{H}(s)\left(\frac{X_0 e^{j\theta}}{s - j\omega_0}\right) \end{aligned}$$

ہو گا۔یہاں ہم فرض کرتے ہیں کہ داخلی اشارے میں $\frac{1}{s-j\omega_0}$ نہیں پایا جاتا یعنی اس میں $j\omega_0$ قطب نہیں پایا جاتا۔اگر داخلی اشارے میں $j\omega_0$ قطب پایا جاتا ہو تب ہمیں برقرار حالت دریافت کرنے میں دشواری پیش آتی ہے۔درج بالا کا

جزوی کسری پھیلاو لکھتے ہیں۔

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{K_1}{s - j\omega_0} + \text{تبادلی تفاعل } \boldsymbol{H}(s) \text{ کے قطبین سے پیدا کسر}$$

مستقل K_1 حاصل کرنے کی خاطر مساوات کے دونوں اطراف کو $s - j\omega_0$ سے ضرب دیتے ہوئے $s = j\omega_0$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}K_1 &= \boldsymbol{H}(\omega_0) X_0 e^{j\theta}\\ &= \left|\boldsymbol{H}(\omega_0)\right| X_0 e^{j(\phi_{H0}+\theta)}\end{aligned}$$

یوں جزوی کسری پھیلاو درج ذیل لکھی جا سکتی ہے

$$\mathrm{Y}(s) = \frac{\left|\boldsymbol{H}(\omega_0)\right| X_0 e^{j(\phi_{H0}+\theta)}}{s - j\omega_0} + \cdots$$

جس کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}y(t) &= \left|\boldsymbol{H}(\omega_0)\right| X_0 e^{j(\phi_{H0}+\theta)} e^{j\omega_0 t} + \cdots\\ &= \left|\boldsymbol{H}(\omega_0)\right| X_0 e^{j(\omega_0 t+\phi_{H0}+\theta)} + \cdots\end{aligned}$$

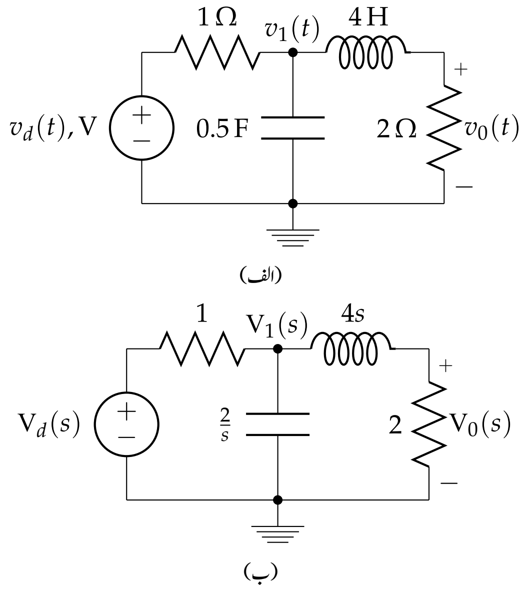
درج بالا مساوات میں دیا جزو جبری رد عمل یا برقرار رد عمل ہے جبکہ بقایا اجزاء فطری رد عمل یا عارضی رد عمل کو ظاہر کریں گی۔ یوں برقرار حال یا جبری رد عمل درج ذیل ہو گا

$$y_j(t) = y_{\text{برقرار}}(t) = \left|\boldsymbol{H}(\omega_0)\right| X_0 e^{j(\omega_0 t+\phi_{H0}+\theta)}$$

جو مخلوط رد عمل ہے۔ اصل جبری تفاعل مساوات 14.24 کا حقیقی جزو یعنی $x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t + \theta)$ ہو گا۔ اسی طرح اصل برقرار رد عمل درج بالا مساوات کا حقیقی جزو ہو گا یعنی

$$y_j(t) = y_{\text{برقرار}}(t) = \left|\boldsymbol{H}(\omega_0)\right| X_0 \cos(\omega_0 t + \phi_{H0} + \theta) \tag{14.25}$$

مثال 14.10: شکل 14.31-الف میں برقرار خارجی اشارہ $v_0(t)$ دریافت کریں جہاں $v_d(t) = 10\cos 4t\, u(t)\,\mathrm{V}$ ہے۔



شکل 14.31: مثال 14.10 کا دور۔

حل: شکل-ب میں لاپلاس بدل دکھایا گیا ہے۔ اس دور کو کسی بھی طریقے سے حل کیا جا سکتا ہے۔ ہم ترکیب جوڑ سے $V_1(s)$ حاصل کرتے ہوئے تقسیم دباو کے کلیے سے $V_0(s)$ حاصل کریں گے۔ کرخوف مساوات جوڑ لکھتے ہیں

$$\frac{V_1(s)-V_d(s)}{1}+\frac{V_1(s)}{\frac{2}{s}}+\frac{V_1(s)}{4s+2}=0$$

جس سے

$$\begin{aligned}V_1(s)&=\frac{V_d(s)}{1+\frac{s}{2}+\frac{1}{4s+2}}\\&=\frac{(4s+2)V_d(s)}{2s^2+5s+3}\end{aligned}$$

ملتا ہے۔ تقسیم دباو کے کلیے سے خارجی دباو لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
V_0(s) &= V_1(s)\left(\frac{2}{4s+2}\right)\\
&= \frac{(4s+2)V_d(s)}{2s^2+5s+3}\left(\frac{2}{4s+2}\right)\\
&= \frac{2V_d(s)}{2s^2+5s+3}
\end{aligned}
$$

مساوات 14.23 کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے تبادلی تفاعل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\boldsymbol{H}(s) = \frac{2}{2s^2+5s+3}
$$

دی گئی داخلی اشارے کی تعدد $\omega_0 = 4\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے لہٰذا اس تعدد پر تبادلی تفاعل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}(j4) &= \frac{2}{2(j4)^2+5(j4)+3}\\
&= 0.057\underline{/214.6^\circ}
\end{aligned}
$$

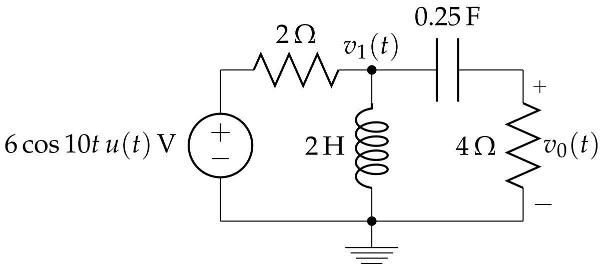
یوں مساوات 14.25 سے برقرار رد عمل لکھی جا سکتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
v_0(t) &= 10(0.057)\cos(4t+214.6^\circ)\\
&= 0.57\cos(4t+214.6^\circ)\,\mathrm{V}
\end{aligned}
$$

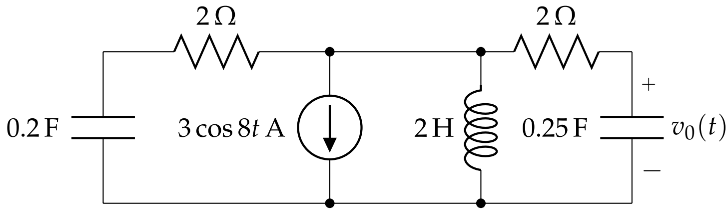
مکمل رد عمل

$$
\begin{aligned}
V_0(s) &= \frac{2V_d(s)}{2s^2+5s+3}\\
&= \frac{20s}{(s^2+4^2)(2s^2+5s+3)}
\end{aligned}
$$

کے الٹ لاپلاس بدل سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔



شکل 14.32: مشق 14.11 کا دور۔



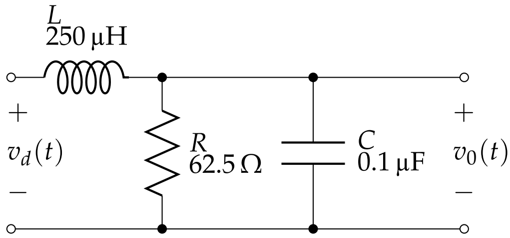
شکل 14.33: مشق 14.12 کا دور۔

مشق 14.11: شکل 14.32 کا برقرار رد عمل حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = 3.99\cos(10t + 7.6^\circ)u(t)\,\mathrm{V}$

مشق 14.12: شکل 14.33 کا برقرار رد عمل حاصل کریں۔

جواب: $v_0(t) = 0.768\cos(8t + 92^\circ)u(t)\,\mathrm{V}$



شکل 14.34: مثال 14.11 کا دور۔

مثال 14.11: شکل 14.34 میں پست گزار چھلنی دکھائی گئی ہے۔اس کو استعمال کرتے ہوئے دیکھا گیا کہ مستطیل داخلی دباو پر خارجی دباو درکار قیمت سے تجاوز کرتے ہوئے آگے نکل جاتا ہے جو کم تقصیر کی نشانی ہے۔تقصیر بڑھاتے ہوئے اس مسئلے کو حل کریں۔

حل: متوازی جڑے برق گیر اور مزاحمت کی رکاوٹ $\frac{R}{1+sRC}$ لیتے ہوئے تقسیم دباو کے کلیے سے چھلنی کا تبادلی تفاعل لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}(s) &= \frac{\frac{R}{1+sRC}}{sL+\frac{R}{1+sRC}}\\
&= \frac{\frac{1}{LC}}{s^2+\frac{s}{RC}+\frac{1}{LC}}\\
&= \frac{\omega_0^2}{s^2+2\zeta\omega_0 s+\omega_0^2}
\end{aligned}
$$

پرزوں کی دی گئی قیمتیں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$
\boldsymbol{H}(s) = \frac{4\times 10^{10}}{s^2+1.6\times 10^5 s+4\times 10^{10}}
$$

یعنی $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 200\,\mathrm{krad\,s^{-1}}$ اور $\zeta = \frac{160000}{2\times 200000} = 0.4$ ہیں۔یقیناً تقصیری مستقل کی قیمت نہایت کم ہے جس کو بڑھا کر $\zeta = 1$ کرنے سے ہمارا مسئلہ حل ہو سکتا ہے۔تعدد کو تبدیل کئے بغیر ایسا مزاحمت کو تبدیل

کرنے سے ہو گا۔مزاحمت کی نئی قیمت $2\zeta\omega_0=\frac{1}{RC}$ سے حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
R&=\frac{1}{2\zeta\omega_0 C}\\
&=\frac{1}{2\times 1\times 2\times 10^5\times 0.1\times 10^{-1}}\\
&=25\,\Omega
\end{aligned}
$$

یوں مزاحمت کو تبدیل کرتے ہوئے $62.5\,\Omega$ کی جگہ $25\,\Omega$ نسب کرنے سے خارجی اشارہ درکار حد سے آگے گزرنا بند کر دیگا۔