برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 7

عارضی رد عمل

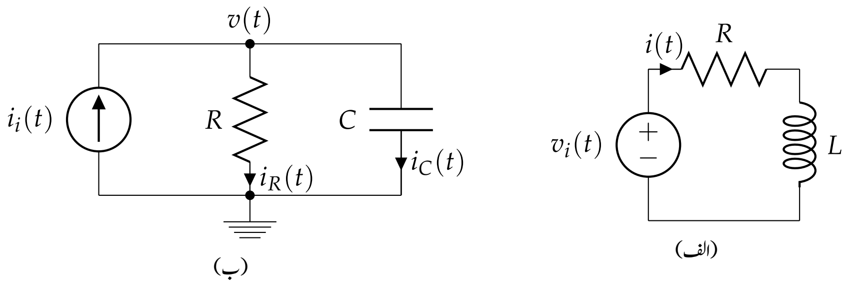
7.1 تعارف

ایسے ادوار جن میں امالہ گیر اور (یا) برق گیر پائے جاتے ہوں میں توانائی ذخیرہ کرنے کی صلاحیت ہوتی ہے۔توانائی ذخیرہ کرنے والے ادوار کا رد عمل منبع طاقت کے علاوہ ذخیرہ توانائی پر بھی منحصر ہوتا ہے۔ایسے ادوار میں کسی بھی طرح کی تبدیلی سے ذخیرہ توانائی میں تبدیلی رونما ہو سکتی ہے۔دور میں تبدیلی مثلاً کسی سوئچ کے چالو یا غیر چالو کرنے سے پیدا ہو سکتی ہے۔ایسی صورت جہاں دور یکساں ایک ہی حالت میں رہے کو **برقرار حالت**[1] کہتے ہیں۔ تبدیلی کے بعد دور متبادل برقرار حالت اختیار کرتا ہے۔ایک برقرار حالت سے دوسری برقرار حالت تک پہنچنے کے دوران، دور **عارضی حالت**[2] میں ہوتا ہے۔

7.2 ایک درجی ادوار

وہ ادوار جن میں صرف امالہ گیر توانائی ذخیرہ کرتے ہوں کی کرخوف مساوات **ایک درجی تفرقی مساوات**[3] ہوتی ہے۔اسی طرح وہ ادوار جن میں صرف برق گیر توانائی ذخیرہ کرتے ہوں بھی ایک درجی کرخوف مساوات دیتے ہیں۔اسی لئے انہیں

steady state[1]
transient state[2]
first order differential equation[3]



شکل 7.1: ایک درجی ادوار کی مثالیں۔

یک درجی ادوار[4] کہتے ہیں۔اس کے بر عکس ایسے ادوار جن میں امالہ گیر اور برق گیر دونوں پائے جاتے ہوں **دو درجی تفرقی مساوات**[5] دیتے ہیں اور انہیں **دو درجی ادوار**[6] کہا جاتا ہے۔

شکل 7.1 میں ایک درجی ادوار کی مثالیں دی گئی ہیں۔آئیں ان کی کرخوف مساوات لکھ کر دیکھیں۔شکل-الف کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$v(t) = i(t)R + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{7.1}$$

اسی طرح شکل-ب کی کرخوف مساوات درج ذیل ہے۔

$$i_i(t) = \frac{v(t)}{R} + C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{7.2}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج بالا دونوں مساوات ایک درجی تفرقی مساوات ہیں۔

شکل 7.2 میں دو درجی دور دکھایا گیا ہے جس کی کرخوف مساوات درج ذیل ہے۔

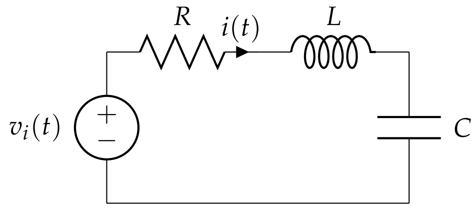
$$v_i(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t$$

اس مساوات میں تکمل کی علامت ختم کرنے سے تفرقی مساوات حاصل ہو گی۔تکمل کی علامت ختم کرنے کی خاطر اس کا تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}v_i(t)}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2\, i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{i(t)}{C} \tag{7.3}$$

---

[4] first order circuits
[5] second order differential equations
[6] second order circuits



شکل 7.2: دو درجی دور۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ امالہ گیر اور برق گیر دونوں کی موجودگی سے دو درجی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

7.2.1 رد عمل کی عمومی مساوات

ایک درجی ادوار کے رد عمل جاننے کی خاطر ان کی تفرقی مساوات حل کی جاتی ہے جس سے دور کے مختلف مقامات پر دباو اور رو حاصل کی جاتی ہے۔ان یک درجی مساوات کی عمومی صورت درج ذیل ہوتی ہے

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+ay(t)=g(t) \tag{7.4}$$

جہاں $y(t)$ دباو یا رو کو ظاہر کرتی ہے، a مستقل ہے اور $g(t)$ **تفاعل عملی**[7] ہے۔اس مساوات کا آزاد متغیرہ وقت t ہے۔ تفرقی مساوات کا ایک بنیادی مسئلہ کہتا ہے کہ مساوات 7.4 کا مکمل حل اس کے **فطری رد عمل**[8] $y_f(t)$ اور **جبری رد عمل**[9] $y_j(t)$ کا مجموعہ ہے۔مساوات 7.4 کے کسی بھی حل کو بطور جبری رد عمل لیا جا سکتا ہے جبکہ درج ذیل **ہم جنسی مساوات**[10]

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+ay(t)=0 \tag{7.5}$$

کے کسی بھی حل کو فطری رد عمل تصور کیا جا سکتا ہے۔مساوات 7.4 میں $g(t)=0$ پُر کرنے سے ہم جنسی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

[7] forcing function
[8] natural response, complementary solution
[9] forced response, particular solution
[10] homogenous equation

آئیں $g(t) = A$ کی صورت میں مساوات 7.4 کا حل حاصل کریں جہاں A ایک مستقل ہے۔یوں ہمیں درج ذیل دو مساوات کے حل درکار ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y_j(t)}{\mathrm{d}t} + ay_j(t) = A \tag{7.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_f(t)}{\mathrm{d}t} + ay_f(t) = 0 \tag{7.7}$$

جبری حل کو قیاس کے ذریعہ حاصل کیا جائے گا۔ جبری حل کو تفاعل عملی اور اس کے تمام ممکنہ تفرق کے مجموعے کے برابر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔چونکہ مستقل کا تفرق $\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 0\right)$ صفر کے برابر ہے لہٰذا جبری حل کو مستقل K_1 تصور کرتے ہیں۔

$$y_j(t) = K_1 \tag{7.8}$$

اس قیمت کو مساوات 7.6 میں پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}K_1}{\mathrm{d}t} + aK_1 &= A\\ 0 + aK_1 &= A\end{aligned}$$

یعنی

$$K_1 = \frac{A}{a} \tag{7.9}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 7.7 کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}y_f(t)}{y_f(t)} = -a\,\mathrm{d}t$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا تکمل

$$\ln y_f(t) = -at + c$$

یعنی

$$y_f(t) = K_2 e^{-at} \tag{7.10}$$

کے برابر ہے جہاں c تکمل کا مستقل ہے اور $K_2 = e^c$ کے برابر ہے۔مساوات 7.9 اور مساوات 7.10 سے مکمل حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$y(t) = \frac{A}{a} + K_2 e^{-at} \tag{7.11}$$

کسی بھی لمحے پر $y(t)$ جاننے سے درج بالا مساوات میں نامعلوم مستقل K_2 دریافت کیا جا سکتا ہے۔درج بالا مساوات کو درج ذیل عمومی حل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$y(t) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7.12}$$

جہاں $\tau = \frac{1}{a}$ کے برابر ہے۔

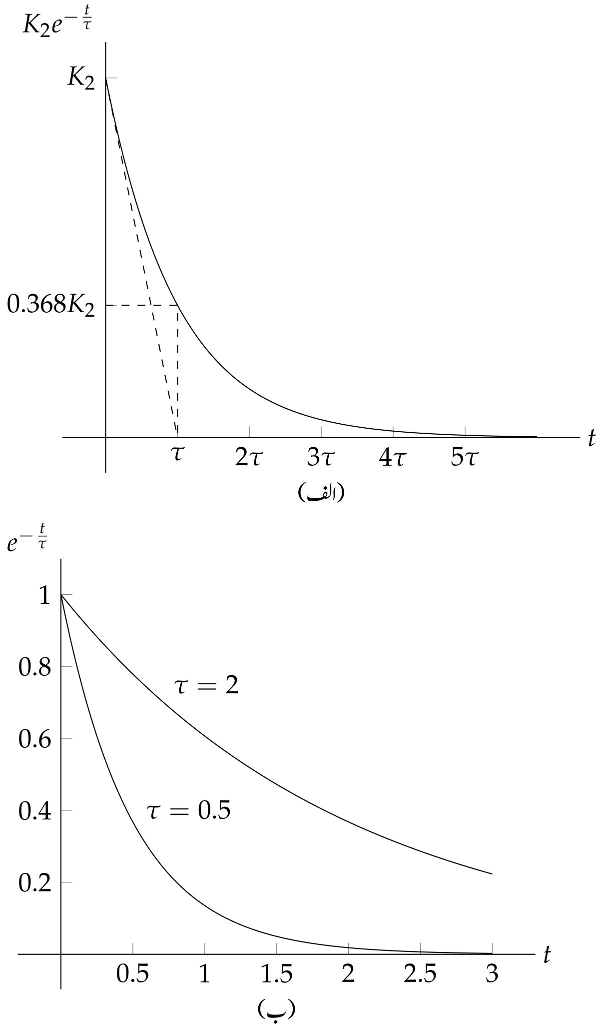
مساوات 7.12 کے مختلف اجزاء کو نام دیے گئے ہیں۔یوں τ **وقتی مستقل**[11] کہلاتا ہے جبکہ K_1 **برقرار حالت حل**[12] کہلاتا ہے۔مساوات 7.12 میں $t = \infty$ پُر کرنے سے برقرار حالت حل حاصل ہوتا ہے۔یوں کسی بھی تبدیلی کے بہت دیر بعد دور برقرار حالت میں ہو گا یعنی ابدی صورت کو برقرار حالت کہا جاتا ہے۔

شکل 7.3-الف میں مثبت a کی صورت میں جبری حل دکھایا گیا ہے۔ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر $y_j(0) = K_2$ کے برابر ہے جبکہ ایک وقتی مستقل برابر وقت بعد اس کی قیمت $y_j(\tau) = 0.368K_2$ رہ گئی ہے یعنی τ دورانیے میں جبری حل کی قیمت میں %63.2 کمی واقع ہوئی ہے۔اسی طرح دو وقتی مستقل وقفے کے بعد $y_j(2\tau) = 0.135K_2$ ہے جو $y_p(\tau)$ کے 0.368 گنا ہے۔حقیقت میں کسی بھی لمحہ t_1 پر y_j کی قیمت میں لمحہ $t_1 + \tau$ پر %63.2 کمی واقع ہو گی۔پانچ وقتی مستقل وقفے کے بعد $y_j(5\tau) = 0.0067K_2$ رہ جاتا ہے جو ابتدائی قیمت کے %0.67 ہے۔

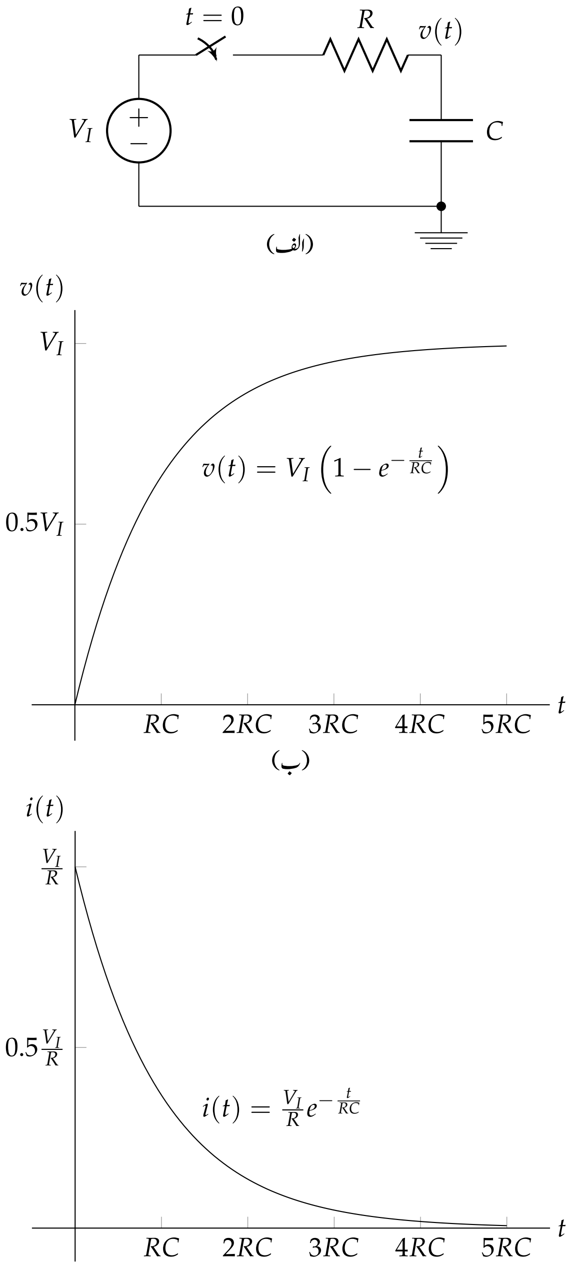
مساوات 7.10 **قوت نمائی انحطاطی**[13] خط ہے۔قوت نمائی انحطاطی خط کی ایک خصوصیت یہ ہے کہ ابتدائی لمحے پر اس کا مماس افقی محور کو τ پر کاٹتا ہے۔اس مماس کو شکل 7.3-الف میں $(0, K_2)$ تا $(\tau, 0)$ نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ شکل 7.3-ب میں مختلف τ کی قیمتوں کے لئے مساوات 7.10 کو کھینچا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کم وقتی مستقل کا خط جلد اختتامی قیمت تک پہنچتا ہے۔یوں وقتی مستقل کسی بھی دور کے رد عمل کے دورانیے کی ناپ ہے۔

مثال 7.1: شکل 7.4 میں مزاحمت اور بے بار برق گیر سلسلہ وار جڑے ہیں۔لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو کرتے ہوئے انہیں مستقل منبع دباو V_I کے ساتھ جوڑا جاتا ہے۔برق گیر کا دباو $v(t)$ اور رو $i(t)$ دریافت کریں۔

[11] time constant
[12] steady state solution
[13] exponential decaying



شکل 7.3: وقتی مستقل



شکل 7.4: مثال 7.1 کا دور، دباو اور رو۔

حل: سوئچ چالو کرنے سے پہلے برق گیر بے بار ہے لٰہذا اس پر دباو صفر کے برابر ہے۔ صفحہ 250 پر مساوات 6.11 کے تحت $v_C(0_+) = v_C(0_-)$ ہو گا یعنی یوں سوئچ چالو کرنے کے فوراً بعد برق گیر کا دباو صفر ہی ہو گا۔ سوئچ چالو کرنے کے بعد دباو جوڑ $v(t)$ کے استعمال سے کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں

$$\frac{v(t)-V_I}{R}+C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=0$$

جسے ترتیب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{v(t)}{RC}=\frac{V_I}{RC} \tag{7.13}$$

لکھا جا سکتا ہے جو عمومی مساوات 7.4 کی طرح ہے۔ چونکہ V_I مستقل قیمت ہے لٰہذا اس مساوات کا جبری حل

$$v_j(t)=K_1$$

تصور کیا جا سکتا ہے جسے مساوات 7.13 میں پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}K_1}{\mathrm{d}t}+\frac{K_1}{RC}&=\frac{V_I}{RC}\\ 0+\frac{K_1}{RC}&=\frac{V_I}{RC}\end{aligned}$$

یعنی

$$K_1=V_I$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں جبری حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_j(t)=V_I$$

اس نتیجے کے تحت سوئچ چالو کرنے کے بہت دیر بعد برق گیر پر دباو عین منبع دباو کے برابر ہو گا۔ شکل کو دیکھتے ہوئے اسی نتیجے تک یوں پہنچا جا سکتا ہے کہ سوئچ چالو کرنے کے بعد دور میں رو کی وجہ سے برق گیر پر بار جمع ہونا شروع ہو جائے گا۔ جب تک برق گیر کا دباو منبع کے دباو سے کم ہو، مزاحمت پر دباو پایا جائے گا لٰہذا اس میں رو پائی جائے گی۔ یہ رو برق گیر پر جمع بار میں اضافہ کرتی رہے گی۔ عین اس وقت جب برق گیر اور منبع کے دباو برابر ہو جائیں، رو کی قیمت صفر ہو جائے گی اور برق گیر کا دباو اسی قیمت پر ابد تک برقرار رہے گا۔

آئیں اب فطری حل دریافت کریں۔ فطری حل ہم جنسی مساوات سے حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.13 کے دائیں بازو کو صفر کے برابر پُر کرنے سے ہم جنسی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{v(t)}{RC}=0 \tag{7.14}$$

حاصل ہوتی ہے۔ اس کو

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{v(t)} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC}$$

لکھتے ہوئے تکمل لینے سے

$$\ln v(t) = -\frac{t}{RC} + c$$

یعنی

$$v_f(t) = K_2 e^{-\frac{t}{RC}}$$

فطری حل حاصل ہوتا ہے۔ جبری اور فطری حل کا مجموعہ مکمل حل ہو گا۔

$$v(t) = V_I + K_2 e^{-\frac{t}{RC}}$$

مکمل حل میں نامعلوم مستقل کو ابتدائی شرائط[14] سے حاصل کرتے ہیں جس کے تحت $t = 0_+$ پر $v_C(0_+) = 0$ کی قیمت معلوم ہے۔ ان قیمتوں کو درج بالا مساوات میں پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے

$$\begin{aligned}
0 &= V_I + K_2 e^{-\frac{0}{RC}} \\
0 &= V_I + K_2
\end{aligned}$$

یعنی

$$K_2 = -V_I$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مکمل حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v(t) = V_I \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ وقتی مستقل RC کے برابر ہے۔ یوں R یا(اور) C بڑھانے سے وقتی مستقل بڑھے گا جس سے دور برقرار صورت زیادہ دیر میں اختیار کرے گا۔

---

[14] initial conditions

رو $i(t)$ کو درج بالا مساوات سے حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
i(t) &= C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \\
&= CV_I\left(0+\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\right) \\
&= \frac{V_I}{R}e^{-\frac{t}{RC}}
\end{aligned}
$$

یہی رو مزاحمت پر اوہم کے قانون کی مدد سے بھی حاصل کی جا سکتی ہے یعنی

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \frac{V_I-v(t)}{R} \\
&= \frac{V_I}{R}e^{-\frac{t}{RC}}
\end{aligned}
$$