

برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	بنیاد	1
1	برقی بار، برقی رواور برقی دباو	1.1
6	قانون اوہم	1.2
8	توانائی اور طاقت	1.3
15	برقی پڑے	1.4
15	غیر تابع منبع	1.4.1
17	تابع منبع	1.4.2
27	مزامتی ادوار	2
27	قانون اوہم	2.1
35	قوانین کر خوف	2.2
51	سلسلہ وار جڑے پڑوں میں رو	2.3
52	تقسیم دباو	2.4
55	متعدد سلسلہ وار مزاحمت	2.5
58	سلسلہ وار متعدد منبع دباو اور مزاحمت	2.6
59	متوازی جڑے مزاحمت پر یکساں دباو پایا جاتا ہے	2.7
61	تقسیم رو	2.8
68	سلسلہ وار اور متوازی مزاحمت	2.9
73	تخصیص مزاحمت	2.10
76	سلسلہ وار اور متوازی مزاحمتوں کے ادوار کا حل	2.11
84	ستارہ-تکون تبادلہ	2.12
91	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	2.13
101	ترکیب جوڑ اور دائری ترکیب	3
101	تجزیہ جوڑ	3.1
104	غیر تابع منبع رواستعمال کرنے والے ادوار	3.2
117	تابع منبع رواستعمال کرنے والے ادوار	3.3
123	غیر تابع منبع دباو استعمال کرنے والے ادوار	3.4

132	تابع منبع دباو استعمال کرنے والے ادوار	3.5
139	دائری تجزیہ	3.6
140	غیر تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	3.7
148	غیر تابع منبع رواستعمال کرنے والے ادوار	3.8
154	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	3.9
158	دائری ترکیب اور ترکیب جوڑ کا موازنہ	3.10
161	حسابی ایپلیفائر	4
171	کامل حسابی ایپلیفائر	4.1
171	منفی ایپلیفائر	4.2
174	مثبت ایپلیفائر	4.3
176	مستقام کار	4.4
176	منفی کار	4.5
178	جمع کار	4.6
181	متوازن اور غیر متوازن صورت	4.7
185	موازنہ کار	4.8
185	آلاتی ایپلیفائر	4.9
187	مسئلے	5
187	مساوی دور	5.1
187	مسئلہ خطیت	5.2
191	مسئلہ نفاذ	5.3
201	مساوی ادوار	5.4
206	مسئلہ تھون، مسئلہ نارٹن اور مسئلہ متبادلہ منبع	5.5
225	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	5.6
231	تابع منبع اور غیر تابع منبع دونوں استعمال کرنے والے ادوار	5.7
239	زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ	5.8
247	برق گیر اور امالہ گیر	6
247	برق گیر	6.1
261	امالہ گیر	6.2
270	برق گیر اور امالہ گیر کے خصوصیات	6.3
273	سلسلہ وار جڑے برق گیر	6.4
277	متوازی جڑے برق گیر	6.5
281	سلسلہ وار امالہ گیر	6.6
283	متوازی امالہ گیر	6.7
287	حسابی ایپلیفائر کے RC ادوار	6.8
288	تفرق کار	6.9
293	عارضی رد عمل	7
293	تعارف	7.1
293	ایک درجی ادوار	7.2

295	رد عمل کی عمومی مساوات	7.2.1
321	دھڑکن	7.3
328	دو درجی ادوار	7.4

باب 7

عارضی رد عمل

7.1 تعارف

ایسے ادوار جن میں امالہ گیر اور (یا) برق گیر پائے جاتے ہوں میں توانائی ذخیرہ کرنے کی صلاحیت ہوتی ہے۔ توانائی ذخیرہ کرنے والے ادوار کا رد عمل منبع طاقت کے علاوہ ذخیرہ توانائی پر بھی منحصر ہوتا ہے۔ ایسے ادوار میں کسی بھی طرح کی تبدیلی سے ذخیرہ توانائی میں تبدیلی رونما ہو سکتی ہے۔ دور میں تبدیلی مثلاً کسی سوئچ کے چالو یا غیر چالو کرنے سے پیدا ہو سکتی ہے۔ ایسی صورت جہاں دور یکساں ایک ہی حالت میں رہے کو برقرار حالت¹ کہتے ہیں۔ تبدیلی کے بعد دور متبادل برقرار حالت اختیار کرتا ہے۔ ایک برقرار حالت سے دوسری برقرار حالت تک پہنچنے کے دوران، دور عارضی حالت² میں ہوتا ہے۔

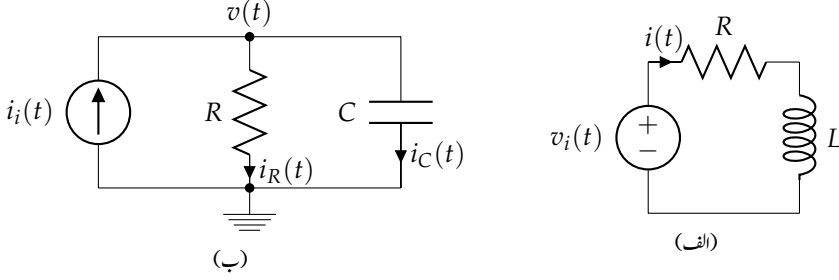
7.2 ایک درجی ادوار

وہ ادوار جن میں صرف امالہ گیر توانائی ذخیرہ کرتے ہوں کی کرخوف مساوات ایک درجی تفرقی مساوات³ ہوتی ہے۔ اسی طرح وہ ادوار جن میں صرف برق گیر توانائی ذخیرہ کرتے ہوں بھی ایک درجی کرخوف مساوات دیتے ہیں۔ اسی لئے انہیں

¹ steady state

² transient state

³ first order differential equation



شکل 7.1: ایک درجی ادوار کی مثالیں۔

ایک درجی ادوار⁴ کہتے ہیں۔ اس کے برعکس ایسے ادوار جن میں امالہ گیر اور برق گیر دونوں پائے جاتے ہوں دو درجی تفرقی مساوات⁵ دیتے ہیں اور انہیں دو درجی ادوار⁶ کہا جاتا ہے۔

شکل 7.1 میں ایک درجی ادوار کی مثالیں دی گئی ہیں۔ آئیں ان کی کرخوف مساوات لکھ کر دیکھیں۔ شکل-الف کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$(7.1) \quad v(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt}$$

اسی طرح شکل-ب کی کرخوف مساوات درج ذیل ہے۔

$$(7.2) \quad i_i(t) = \frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt}$$

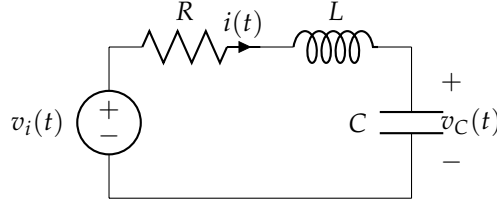
آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج بالا دونوں مساوات ایک درجی تفرقی مساوات ہیں۔

شکل 7.2 میں دو درجی دور دکھایا گیا ہے جس کی کرخوف مساوات درج ذیل ہے جہاں $v_C(0)$ لمحہ $t = 0$ پر برق گیر کا دباؤ ہے۔

$$(7.3) \quad \begin{aligned} v_i(t) &= Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt \\ &= Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + v_C(0) \end{aligned}$$

اس تکمل و تفرقی مساوات⁷ میں تکمل کی علامت ختم کرنے سے تفرقی مساوات⁸ حاصل ہوگی۔ تکمل کی علامت ختم

first order circuits⁴
second order differential equations⁵
second order circuits⁶
integro-differential equation⁷
differential equation⁸



شکل 7.2: دودرجی دور۔

کرنے کی خاطر اس کا تفرق لیتے ہیں۔

$$(7.4) \quad \frac{dv_i(t)}{dt} = R \frac{di(t)}{dt} + L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{i(t)}{C}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ امالہ گیر اور برق گیر دونوں کی موجودگی سے دودرجی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

مساوات 7.3 رو $i(t)$ کی مکمل ورتنی مساوات ہے۔ اس مساوات میں

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

پُر کرنے سے دباو $v_C(t)$ کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$(7.5) \quad v_i(t) = RC \frac{dv_C(t)}{dt} + LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + v_C(t)$$

7.2.1 رد عمل کی عمومی مساوات

ایک درجی ادوار کے رد عمل جاننے کی خاطر ان کی تفرقی مساوات حل کی جاتی ہے جس سے دور کے مختلف مقامات پر دباو اور رو حاصل کی جاتی ہے۔ ان ایک درجی مساوات کی عمومی صورت درج ذیل ہوتی ہے

$$(7.6) \quad \frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = g(t)$$

جہاں $y(t)$ دباو یا رو کو ظاہر کرتی ہے، a مستقل ہے اور $g(t)$ جبری قوت⁹ ہے۔ اس مساوات کا آزاد متغیرہ وقت t ہے۔ تفرقی مساوات کا ایک بنیادی مسئلہ کہتا ہے کہ مساوات 7.6 کا مکمل حل اس کے فطری رد عمل¹⁰ $y_f(t)$ اور

⁹ forcing function
¹⁰ natural response, complementary solution

جبری رد عمل¹¹ $y_j(t)$ کا مجموعہ ہے۔ مساوات 7.6 کے کسی بھی حل کو بطور جبری رد عمل لیا جاسکتا ہے جبکہ درج ذیل ہم جنسی مساوات¹²

$$(7.7) \quad \frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = 0$$

کے کسی بھی حل کو فطری رد عمل تصور کیا جاسکتا ہے۔ مساوات 7.6 میں $g(t) = 0$ پُر کرنے سے ہم جنسی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

آئیں $g(t) = A$ کی صورت میں مساوات 7.6 کا حل حاصل کریں جہاں A ایک مستقل ہے۔ یوں ہمیں درج ذیل دو مساوات کے حل درکار ہیں۔

$$(7.8) \quad \frac{dy_j(t)}{dt} + ay_j(t) = A$$

$$(7.9) \quad \frac{dy_f(t)}{dt} + ay_f(t) = 0$$

جبری حل کو قیاس کے ذریعہ K_1 تصور کرتے ہیں جہاں K ایک مستقل ہے۔

$$(7.10) \quad y_j(t) = K_1$$

جبری حل $y_j(t) = K_1$ کو مساوات 7.8 میں پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے

$$\frac{dK_1}{dt} + aK_1 = A$$

$$0 + aK_1 = A$$

یعنی

$$(7.11) \quad K_1 = \frac{A}{a}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.9 کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\frac{dy_f(t)}{y_f(t)} = -a dt$$

forced response, particular solution¹¹
homogenous equation¹²

لکھا جاسکتا ہے جس کا مکمل

$$\ln y_f(t) = -at + c$$

یعنی

$$(7.12) \quad y_f(t) = K_2 e^{-at}$$

کے برابر ہے جہاں c مکمل کا مستقل ہے اور $K_2 = e^c$ کے برابر ہے۔ مساوات 7.11 اور مساوات 7.12 سے مکمل حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(7.13) \quad y(t) = \frac{A}{a} + K_2 e^{-at}$$

کسی بھی لمحے پر $y(t)$ جاننے سے درج بالا مساوات میں نامعلوم مستقل K_2 دریافت کیا جاسکتا ہے۔ درج بالا مساوات کو درج ذیل عمومی حل کی صورت میں لکھا جاسکتا ہے

$$(7.14) \quad y(t) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

جہاں $\tau = \frac{1}{a}$ کے برابر ہے۔

مساوات 7.14 کے مختلف اجزاء کو نام دیے گئے ہیں۔ یوں τ وقتی مستقل¹³ کہلاتا ہے جبکہ K_1 برقرار حالت حل¹⁴ کہلاتا ہے۔ مساوات 7.14 میں $t = \infty$ پر کرنے سے برقرار حالت حل حاصل ہوتا ہے۔ یوں کسی بھی تبدیلی کے بہت دیر بعد دور برقرار حالت میں ہوگا یعنی ابدی صورت کو برقرار حالت کہا جاتا ہے۔

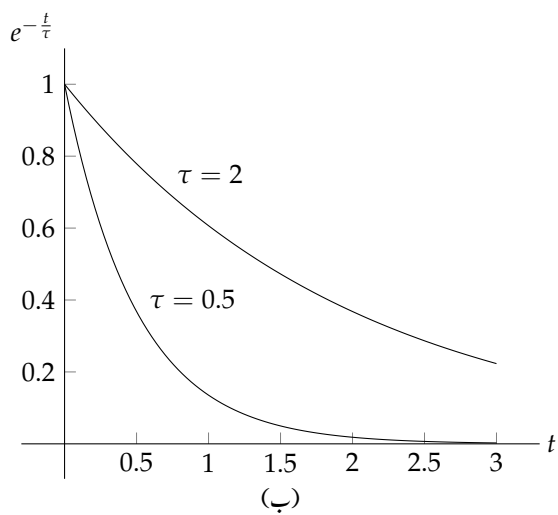
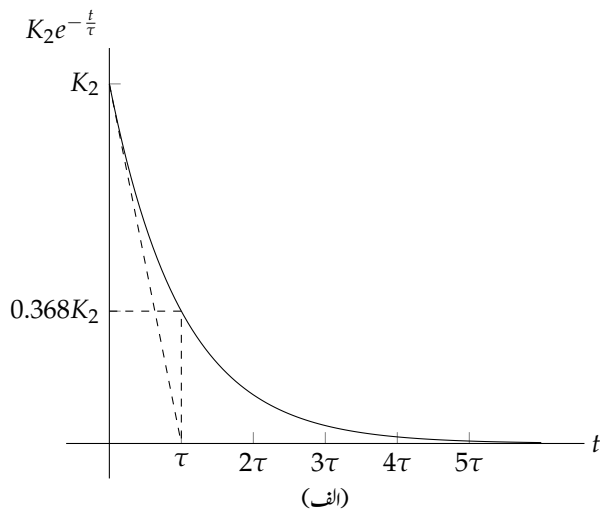
شکل 7.3-الف میں مثبت a کی صورت میں جبری حل دکھایا گیا ہے۔ ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر $y_j(0) = K_2$ کے برابر ہے جبکہ ایک وقتی مستقل برابر وقت بعد اس کی قیمت $y_j(\tau) = 0.368K_2$ رہ گئی ہے یعنی τ دورانیے میں جبری حل کی قیمت میں 63.2% کمی واقع ہوئی ہے۔ اسی طرح دو وقتی مستقل وقفے کے بعد $y_j(2\tau) = 0.135K_2$ ہے جو $y_p(\tau)$ کے 0.368 گنا ہے۔ حقیقت میں کسی بھی لمحہ t_1 پر y_j کی قیمت میں لمحہ $t_1 + \tau$ پر 63.2% کمی واقع ہوگی۔ پانچ وقتی مستقل وقفے کے بعد $y_j(5\tau) = 0.0067K_2$ رہ جاتا ہے جو ابتدائی قیمت کے 0.67% ہے۔

مساوات 7.12 قوت نمائی انخطاطی¹⁵ خط ہے۔ قوت نمائی انخطاطی خط کی ایک خصوصیت یہ ہے کہ ابتدائی لمحے پر اس کا مماس افقی محور کو τ پر کاٹتا ہے۔ اس مماس کو شکل 7.3-الف میں $(0, K_2)$ تا $(\tau, 0)$ نقطہ دار لکیر سے دکھایا

¹³ time constant

¹⁴ steady state solution

¹⁵ exponential decaying



شکل 7.3: وقتی مستقل

گیا ہے۔ شکل 7.3-ب میں مختلف τ کی قیمتوں کے لئے مساوات 7.12 کو کھینچا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کم وقتی مستقل کا خط جلد اختتامی قیمت تک پہنچتا ہے۔ یوں وقتی مستقل کسی بھی دور کے رد عمل کے دورانیے کی ناپ ہے۔

مثال 7.1: شکل 7.4 میں مزاحمت اور بے بار برق گیر سلسلہ وار جڑے ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر سوئچ¹⁷ چالو کرتے ہوئے انہیں مستقل منبع دباؤ V_I کے ساتھ جوڑا جاتا ہے۔ برق گیر کا دباؤ $v(t)$ اور رو $i(t)$ دریافت کریں۔

حل: سوئچ چالو کرنے سے پہلے برق گیر بے بار ہے لہذا اس پر دباؤ صفر کے برابر ہے۔ صفحہ 250 پر مساوات 6.11 کے تحت $v_C(0_+) = v_C(0_-)$ ہو گا یعنی یوں سوئچ چالو کرنے کے فوراً بعد برق گیر کا دباؤ صفر ہی ہو گا۔ سوئچ چالو کرنے کے بعد دباؤ جوڑ $v(t)$ کے استعمال سے کر خوف مساوات رو لکھتے ہیں

$$\frac{v(t) - V_I}{R} + C \frac{dv(t)}{dt} = 0$$

جسے ترتیب دیتے ہوئے

$$(7.15) \quad \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{RC} = \frac{V_I}{RC}$$

لکھا جاسکتا ہے جو عمومی مساوات 7.6 کی طرح ہے۔ چونکہ V_I مستقل قیمت ہے لہذا اس مساوات کا جبری حل

$$v_j(t) = K_1$$

تصور کیا جاسکتا ہے جسے مساوات 7.15 میں پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے

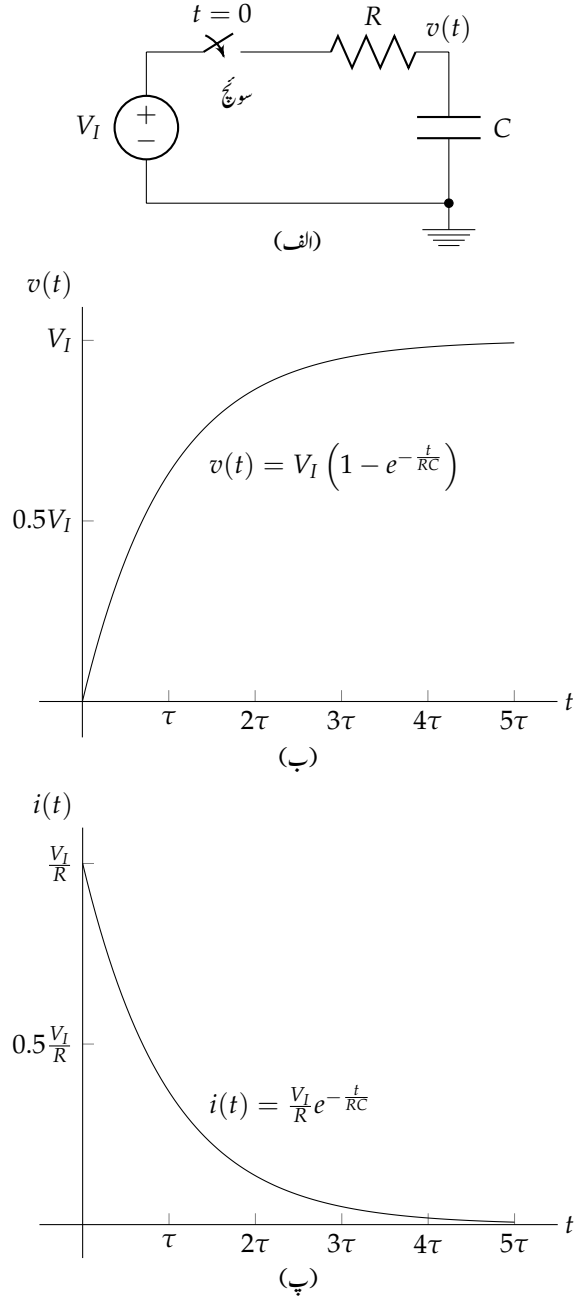
$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{dt} + \frac{K_1}{RC} &= \frac{V_I}{RC} \\ 0 + \frac{K_1}{RC} &= \frac{V_I}{RC} \end{aligned}$$

یعنی

$$K_1 = V_I$$

¹⁶ اس طرز کے سوئچ کا پورا نام ایک قطب ایک چال سوئچ ہے۔

¹⁷ switch, spst, single pole single throw



شکل 7.4: مثال 7.1 کا دورہ، پاد اور رو۔

حاصل ہوتا ہے۔ یوں جبری حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_j(t) = V_I$$

اس نتیجے کے تحت سوئچ چالو کرنے کے بہت دیر بعد برق گیر پر دباؤ عین منبع دباؤ کے برابر ہو گا۔ شکل کو دیکھتے ہوئے اسی نتیجے تک یوں پہنچا جاسکتا ہے کہ سوئچ چالو کرنے کے بعد دور میں رو کی وجہ سے برق گیر پر بار جمع ہونا شروع ہو جائے گا۔ جب تک برق گیر کا دباؤ منبع کے دباؤ سے کم ہو، مزاحمت پر دباؤ پایا جائے گا لہذا اس میں رو پائی جائے گی۔ یہ رو برق گیر پر جمع بار میں اضافہ کرتی رہے گی۔ عین اس وقت جب برق گیر اور منبع کے دباؤ برابر ہو جائیں، رو کی قیمت صفر ہو جائے گی اور برق گیر کا دباؤ اسی قیمت پر ابد تک برقرار رہے گا۔

آئیں اب فطری حل دریافت کریں۔ فطری حل ہم جنسی مساوات سے حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.15 کے دائیں بازو کو صفر کے برابر پُر کرنے سے ہم جنسی مساوات

$$(7.16) \quad \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{RC} = 0$$

حاصل ہوتی ہے۔ اس کو

$$\frac{dv(t)}{v(t)} = -\frac{dt}{RC}$$

لکھتے ہوئے مکمل لینے سے

$$\ln v(t) = -\frac{t}{RC} + c$$

یعنی

$$v_f(t) = K_2 e^{-\frac{t}{RC}}$$

فطری حل حاصل ہوتا ہے۔ جبری اور فطری حل کا مجموعہ مکمل حل ہو گا۔

$$v(t) = V_I + K_2 e^{-\frac{t}{RC}}$$

مکمل حل میں نامعلوم مستقل کو ابتدائی شرائط¹⁸ سے حاصل کرتے ہیں جس کے تحت $v_C(0_+) = 0$ پر $t = 0_+$ کی قیمت معلوم ہے۔ ان قیمتوں کو درج بالا مساوات میں پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے

$$0 = V_I + K_2 e^{-\frac{0}{RC}}$$

$$0 = V_I + K_2$$

یعنی

$$K_2 = -V_I$$

حاصل ہوتا ہے۔

جبری حل اور فطری حل کا مجموعہ مکمل حل دیتا ہے

$$\begin{aligned} v(t) &= v_j(t) + v_f(t) \\ &= V_I \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \\ &= V_I \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \end{aligned} \quad (7.17)$$

درج بالا مساوات میں وقتی مستقل درج ذیل ہے۔

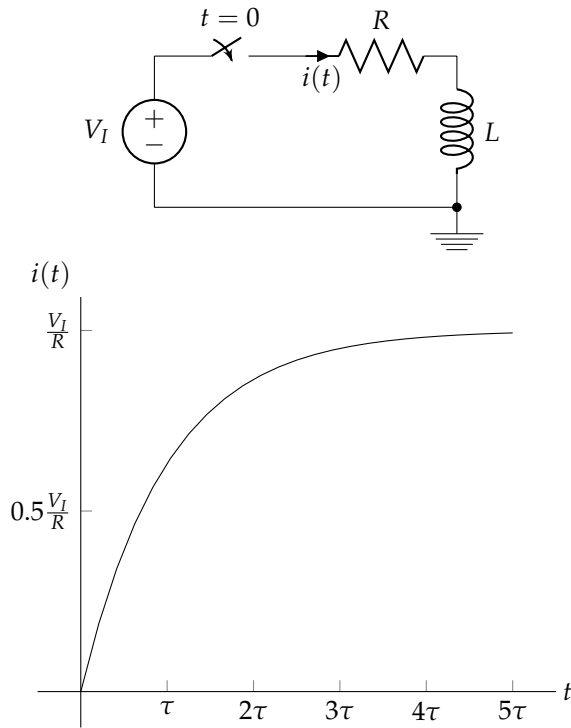
$$(7.18) \quad \tau = RC$$

یوں R یا C (اور) C بڑھانے سے وقتی مستقل بڑھے گا جس سے دور برقرار صورت زیادہ دیر کے بعد اختیار کرے گا۔رو $i(t)$ کو درج بالا مساوات سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{dv(t)}{dt} \\ &= CV_I \left(0 + \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}}\right) \\ &= \frac{V_I}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

یہی رومزاحمت پر اوہم کے قانون کی مدد سے بھی حاصل کی جاسکتی ہے یعنی

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{V_I - v(t)}{R} \\ &= \frac{V_I}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$



شکل 7.5: مثال 7.2 کے اشکال۔

مثال 7.2: شکل 7.5 میں لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو کیا جاتا ہے۔ رو کا خط کھینچیں۔

حل: کرخوف مساوات دباؤ

$$V_I = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt}$$

کو ترتیب دیتے ہوئے عمومی شکل میں لاتے ہیں

$$(7.19) \quad \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{V_I}{L}$$

جس کا جبری حل

$$i_j(t) = K_1$$

ہوگا۔ جبری حل کو عمومی مساوات میں پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے

$$\begin{aligned} \frac{dK_1}{dt} + \frac{R}{L}K_1 &= \frac{V_I}{L} \\ 0 + \frac{R}{L}K_1 &= \frac{V_I}{L} \end{aligned}$$

یعنی

$$K_1 = \frac{V_I}{R}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے جبری حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$i_j(t) = \frac{V_I}{R}$$

یہی جواب منطق سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ چونکہ یک سمتی رو کے لئے امالہ گیر بطور قصر دور کردار ادا کرتا ہے لہذا عارضی دورانیہ گزر جانے کے بعد ہم امالہ گیر کو قصر دور تصور کر سکتے ہیں۔ شکل 7.5 میں امالہ گیر کو قصر دور کرتے ہوئے اوہم کے قانون سے $i_j(t) = \frac{V_I}{R}$ لکھا جاسکتا ہے۔

فطری حل حاصل کرنے کی خاطر مساوات 7.19 میں دیے گئے عمومی مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر پُر کرتے ہوئے درج ذیل ہم جنسی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = 0$$

اس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\frac{di(t)}{i(t)} = -\frac{R}{L} dt$$

تکمل لینے سے

$$\ln i(t) = -\frac{R}{L}t + c$$

یعنی

$$i_f(t) = K_2 e^{-\frac{R}{L}t}$$

حاصل ہوتا ہے۔

جبری اور فطری حل کا مجموعہ مکمل حل دیتا ہے

$$\begin{aligned} i(t) &= i_i(t) + i_f(t) \\ &= \frac{V_I}{R} + K_2 e^{-\frac{R}{L}t} \\ &= \frac{V_I}{R} + K_2 e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned} \quad (7.20)$$

جہاں وقتی مستقل درج ذیل ہے۔

$$\tau = \frac{R}{L} \quad (7.21)$$

مکمل حل میں نا معلوم مستقل K_2 کو ابتدائی معلومات سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ سوئچ چالو کرنے سے پہلے دور میں رو صفر کے برابر ہے۔ صفحہ 263 پر مساوات 6.21 کے تحت امالہ کی رو بلا جوڑ تفاعل

$$i_L(t_+) = i_L(t_-)$$

ہے لہذا سوئچ چالو کرنے کے فوراً بعد امالہ کی رو وہی ہوگی جو سوئچ چالو کرنے کے فوراً پہلے تھی یعنی لمحہ $t = 0_+$ پر $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$ ان معلومات کو مساوات 7.20 میں دیے مکمل حل میں پُر کرنے سے

$$0 = \frac{V_I}{R} + K_2 e^{-\frac{0}{\tau}}$$

یعنی

$$K_2 = -\frac{V_I}{R}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مکمل حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(7.22) \quad i(t) = \frac{V_I}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

رو کے خط کو شکل 7.5-ب میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 7.3: ازل سے شکل 7.6 میں ایک قطب دو چال سوئچ¹⁹ اسی جگہ پر ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر اس کی جگہ تبدیل کرتے ہوئے $5 \text{ k}\Omega$ مزاحمت کو زمین کے ساتھ جوڑا جاتا ہے۔ برق گیر پر دباؤ دریافت کریں۔

حل: ازل سے دور منبع کے ساتھ جڑا رہا ہے۔ یوں دور برقرار حالت میں ہوگا اور برق گیر کو کھلا دور تصور کیا جاتا ہے۔ ایسا کرنے سے شکل-ب حاصل ہوتی ہے جہاں سے تقسیم دباؤ کے کلیے سے برق گیر کا ابتدائی دباؤ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_C(0_-) = 20 \left(\frac{15 \text{ k}\Omega}{5 \text{ k}\Omega + 15 \text{ k}\Omega} \right) = 15 \text{ V}$$

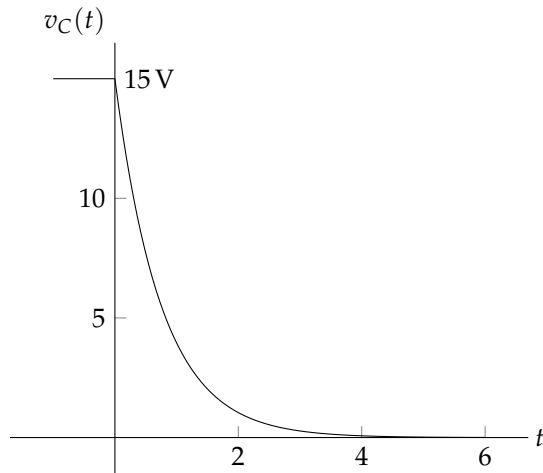
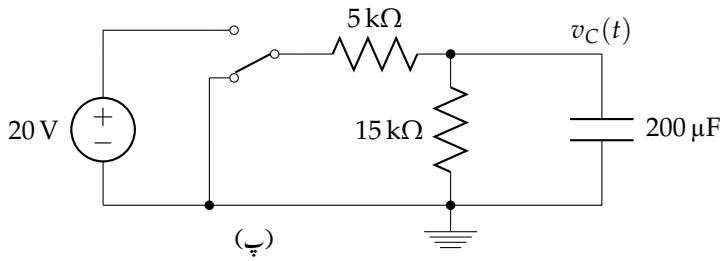
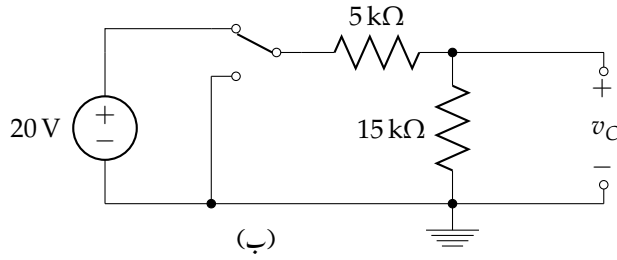
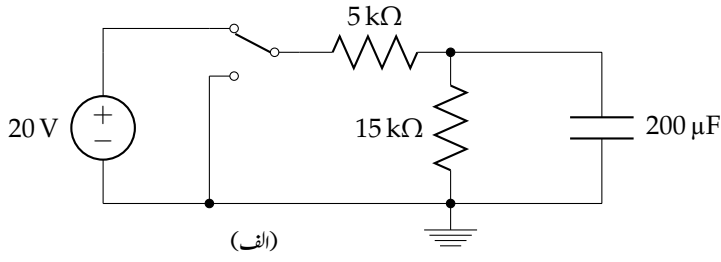
برق گیر کا دباؤ بلا جوڑے لہذا

$$v_C(0_+) = v_C(0_-) = 15 \text{ V} \quad \text{ابتدائی حالت}$$

ہوگا۔ لمحہ $t = 0$ کے بعد کی صورت شکل-پ میں دکھائی گئی ہے۔ ہمیں اس شکل میں $v(t)$ درکار ہے جسے کرخوف مساوات رو کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{v_C(t)}{5000} + \frac{v_C(t)}{15000} + 200 \times 10^{-6} \frac{dv_C(t)}{dt} = 0$$

¹⁹ single pole double throw switch, spdt



شکل 7.6: مثال 7.3 کے اشکال۔

اس ہم جنسی مساوات کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\frac{dv_C(t)}{v_C(t)} = -\frac{4}{3} dt$$

لکھا جاسکتا ہے جس کا تکمیل

$$\ln v_C(t) = -\frac{4}{3}t + c$$

یا

$$v_C(t) = Ke^{-\frac{4}{3}t}$$

کے برابر ہے جہاں تکمیل کے مستقل کو c یا K لکھا گیا ہے۔ ابتدائی حالت کی معلومات اس مساوات میں پُر کرتے ہوئے

$$15 = Ke^0$$

سے K کی قیمت درج ذیل

$$K = 15$$

حاصل ہوتی ہے۔ یوں

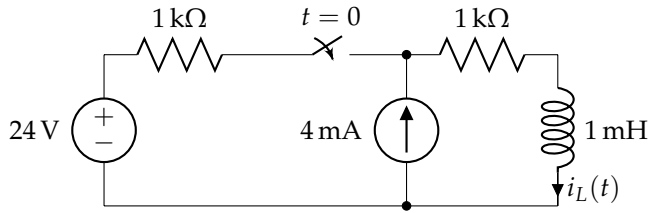
$$v_C(t) = 15e^{-\frac{4}{3}t}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں وقتی مستقل $\tau = \frac{3}{4}$ کے برابر ہے۔ یوں سوئچ چالو کرنے کے 0.75 s بعد برق گیر کا دباؤ ابتدائی قیمت کے 36.8 % یعنی $0.368 \times 15 = 5.52 \text{ V}$ ہو گا۔

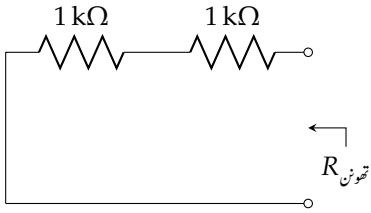
مثال 7.4: ازل سے شکل 7.7 میں سوئچ غیر چالو تھا جسے $t = 0$ پر چالو کیا جاتا ہے۔ امالہ گیر کی رو $i_L(t)$ دریافت کریں۔

حل: غیر چالو سوئچ کی صورت میں منبع رو کی تمام رو امالہ گیر سے گزرتی ہے لہذا

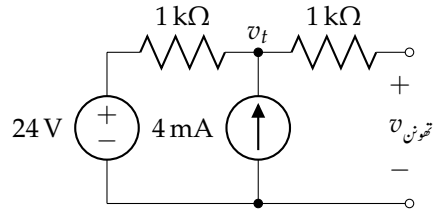
$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 4 \text{ mA}$$



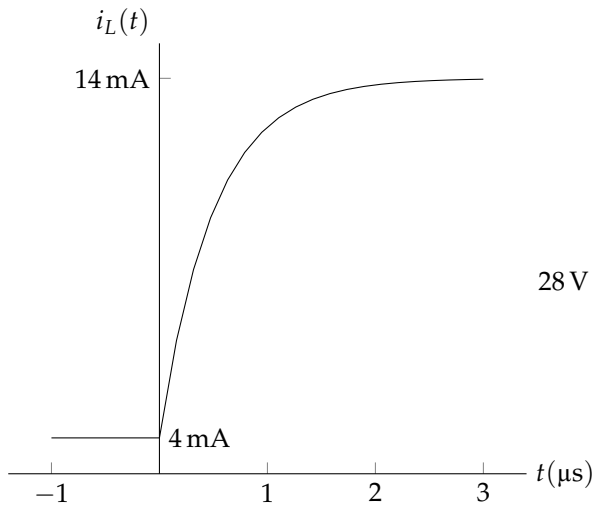
(الف)



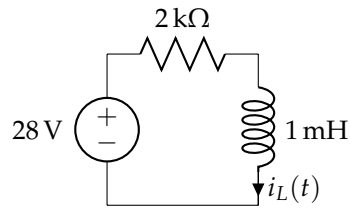
(پ)



(ب)



(ث)



(ت)

شکل 7.7: مثال 7.4 کے اشکال۔

ہوگا۔ اس دور کو مسئلہ تھونن کی مدد سے حل کرتے ہیں۔ یوں امالہ کو بوجھ تصور کرتے ہوئے بقایا دور کا تھونن مساوی حاصل کرتے ہیں۔ تھونن دباؤ حاصل کرنے کی خاطر بوجھ کو کھلے دور کیا جاتا ہے جس سے شکل 7.7-ب حاصل ہوتی ہے۔ اس شکل میں منبع رو کی تمام رو بائیں مزاحمت اور منبع دباؤ سے گزرے گی لہذا مزاحمت پر $4V$ کا دباؤ ہوگا۔ یوں

$$v_t = v_{\text{تھونن}} = 24V + 4V = 28V$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یاد رہے کہ بالائی دائیں مزاحمت میں رو صفر کے برابر ہے لہذا اس پر دباؤ بھی صفر ہوگا اور یوں v_t اور تھونن v برابر ہوں گے۔

منبع دباؤ کو قصر دور اور منبع رو کو کھلے دور کرتے ہوئے شکل-پ حاصل ہوتی ہے جسے دیکھتے ہوئے تھونن مزاحمت

$$R_{\text{تھونن}} = 2k\Omega$$

لکھی جاسکتی ہے۔

تھونن مساوی دور استعمال کرتے ہوئے شکل-الف کو شکل-ت کی طرز پر بنایا جاسکتا ہے۔ شکل-ت کی کرخوف مساوات

$$28 = 2000i(t) + 0.001 \frac{di(t)}{dt}$$

کو عمومی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\frac{di(t)}{dt} + 2 \times 10^6 i(t) = 28000$$

اس مساوات کا جبری حل

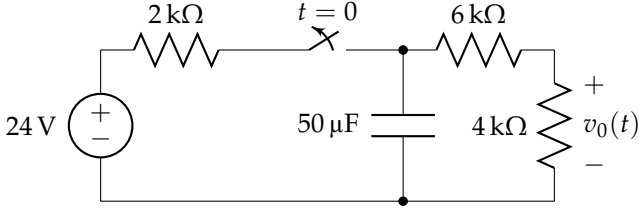
$$i_j(t) = K_1 = 14 \text{ mA}$$

حاصل ہوتا ہے اور اس کا فطری حل

$$i_f(t) = K_2 e^{-2 \times 10^6 t}$$

ہے۔ یوں امالہ گیر کے رو کا مکمل حل

$$i(t) = 0.014 + K_2 e^{-2 \times 10^6 t}$$



شکل 7.8: مشق 7.1 کا دور۔

ہے۔ ابتدائی معلومات کو اس مساوات میں حل کرتے ہوئے

$$0.004 = 0.014 + K_2 e^0$$

سے

$$K_2 = -10 \text{ mA}$$

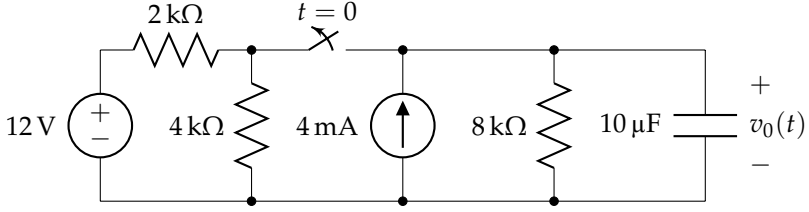
حاصل ہوتا ہے۔ یوں مکمل حل درج ذیل ہے۔

$$(7.23) \quad i_L(t) = 0.014 - 0.01e^{-2 \times 10^6 t}$$

اس مساوات کا وقتی مستقل $\tau = 0.5 \mu\text{s}$ ہے۔ یوں تقریباً $5\tau = 2.5 \mu\text{s}$ میں دور پہلی برقرار حالت سے دوسری برقرار حالت اختیار کر پاتا ہے۔ مساوات 7.23 کو شکل-ٹ میں دکھایا گیا ہے۔

مشق 7.1: شکل 7.8 میں ازل سے چالو سوئچ کو لمحہ $t = 0$ پر منقطع کیا جاتا ہے۔ برق گیر پر ابتدائی دباؤ دریافت کرتے ہوئے $v_0(t)$ دریافت کریں۔ اس دور کا وقتی مستقل کیا ہے۔

$$\text{جوابات: } \tau = 0.5 \text{ s} , v_0(t) = 8e^{-\frac{t}{0.5}} \text{ V} , v_C(0_+) = 20 \text{ V}$$



شکل 7.9: مشق 7.2 کا دور۔

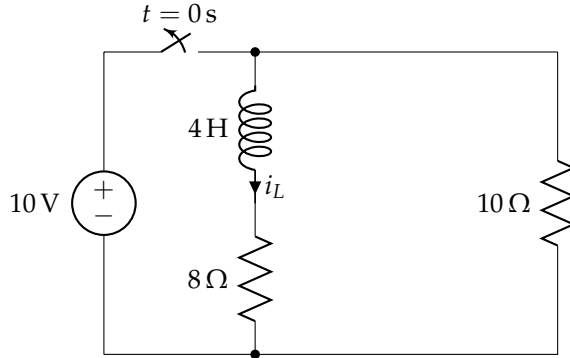
مشق 7.2: شکل 7.9 میں ازل سے چالو سوئچ کو لمحہ $t = 0$ پر منقطع کیا جاتا ہے۔ برق گیر پر ابتدائی دباؤ دریافت کرتے ہوئے $v_0(t)$ دریافت کریں۔

جوابات: $v_0(t) = 32 - \frac{144}{7}e^{-\frac{100t}{7}} \text{ V}$ ، $v_0(0_+) = \frac{80}{7} \text{ V}$

مشق 7.3: شکل 7.10 میں ازل سے چالو سوئچ کو لمحہ $t = 0$ پر منقطع کیا جاتا ہے۔ امالہ گیر میں ابتدائی رو دریافت کرتے ہوئے $i_L(t)$ دریافت کریں۔ دور کا وقتی مستقل حاصل کریں۔

جوابات: $\tau = \frac{1}{3} \text{ ms}$ ، $i_L(t) = 1.25e^{-3000t} \text{ A}$ ، $i_L(0_+) = 1.25 \text{ A}$

مثال 7.5: شکل 7.11 میں ازل سے چالو سوئچ کو لمحہ $t = 2 \text{ s}$ پر منقطع کیا جاتا ہے۔ رو $i(t)$ دریافت کریں۔



شکل 7.10: مشق 7.3 کا دور۔

حل: سوئچ منقطع کرنے سے فوراً پہلے کی صورت حال شکل-ب میں دکھائی گئی ہے۔ چونکہ ازل سے سوئچ چالو تھا لہذا دور برقرار حالت میں ہوگا اور یوں برق گیر کو کھلا دور تصور کیا جائے گا۔ شکل-ب کو دیکھ کر

$$i(t < 2\text{ s}) = \frac{20}{4000 + 6000} = 2\text{ mA}$$

اور

$$v_C(2-) = v_C(2+) = 20 \left(\frac{4000}{4000 + 6000} \right) = 8\text{ V}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ سوئچ منقطع ہونے کے بعد کی صورت حال شکل-الف میں دی گئی ہے۔ جوڑ $v(t)$ پر کرخوف مساوات رو لکھتے ہوئے

$$\frac{v(t) - 10}{2000 + 4000} + 5 \times 10^{-6} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t) - 20}{6000} = 0$$

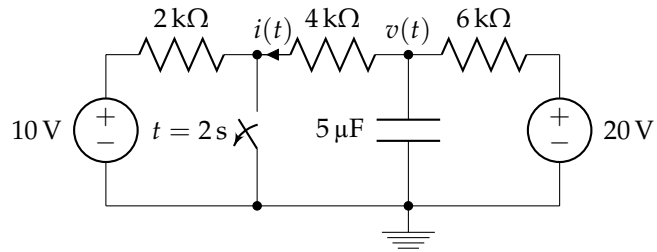
ترتیب دینے سے

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{200}{3}v(t) = 1000$$

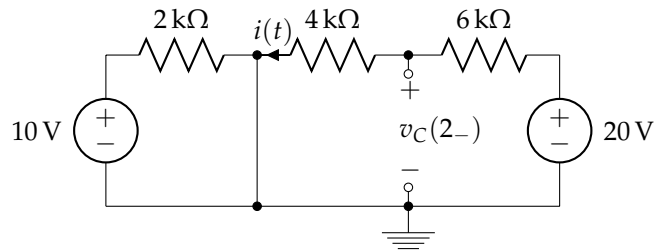
حاصل ہوتا ہے۔ اس کے جبری اور فطری حل درج ذیل ہیں

$$v_j(t) = K_1 = 15\text{ V}$$

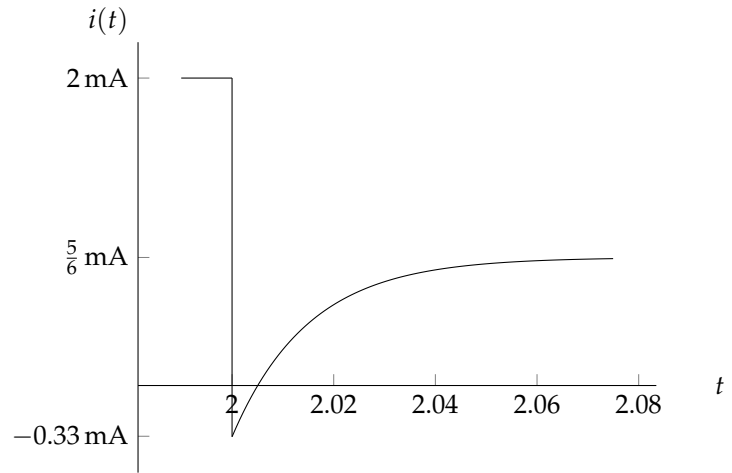
$$v_f(t) = K_2 e^{-\frac{200}{3}t}$$



(الف)



(ب)



(پ)

شکل 7.11: مثال 7.5 کے اشکال۔

جن کا مجموعہ مکمل حل

$$v(t > 2) = 15 + K_2 e^{-\frac{200}{3}t}$$

دیتا ہے۔ ابتدائی معلومات $v(2+) = 8V$ لمحہ $t = 2s$ پر ہم جانتے ہیں جنہیں درج بالا مساوات میں پُر کرتے ہوئے

$$8 = 15 + K_2 e^{-\frac{200}{3} \times 2}$$

K_2 کی قیمت درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$K_2 = -7e^{\frac{400}{3}}$$

یوں مکمل حل درج ذیل ہو گا۔

$$v(t > 2) = 15 - 7e^{\frac{200}{3}(2-t)}$$

اب شکل-الف کو دیکھ کر

$$\begin{aligned} i(t > 2) &= \frac{v(t > 2) - 10}{6000} \\ &= \frac{5}{6} - \frac{7}{6} e^{\frac{200}{3}(2-t)} \text{ mA} \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جو درکار مساوات ہے۔ یوں سوئچ منقطع کرنے سے پہلے اور اس کے بعد کے جوابات سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$i(t) = \begin{cases} 2 \text{ mA} & t < 2 \text{ s} \\ \frac{5}{6} - \frac{7}{6} e^{\frac{200}{3}(2-t)} \text{ mA} & t > 2 \text{ s} \end{cases}$$

جسے شکل-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سوئچ منقطع کرنے سے پہلے برقرار رو 2 mA تھی جبکہ سوئچ منقطع کرنے کے بعد برقرار حالت ($t \rightarrow \infty$) میں رو $\frac{5}{6} \text{ mA}$ ہے۔ یاد رہے کہ برق گیر کا دباؤ فوراً تبدیل نہیں ہو سکتا البتہ اس میں رو یک دم تبدیل ہو سکتی ہے۔

وقت $t \rightarrow \infty$ پر دور برقرار حالت اختیار کر چکا ہو گا لہذا برق گیر کو کھلا دور کرتے ہوئے شکل 7.11-الف سے برقرار حالت رو درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$i(t \rightarrow \infty) = \frac{20 - 10}{2000 + 4000 + 6000} = \frac{5}{6} \text{ mA}$$

مثال 7.6: شکل 7.12- الف میں ازل سے منقطع سوئچ لمحہ $t = 7 \text{ s}$ پر چالو کیا جاتا ہے۔ رو $i(t)$ دریافت کریں۔

حل: منقطع سوئچ کی صورت میں دور برقرار حالت میں ہو گا لہذا امالہ گیر کو قصر دور تصور کرتے ہوئے شکل-ب حاصل کی گئی ہے۔ تقسیم رو کے کلیے سے

$$i_L(7_-) = i_L(7_+) = 6 \left(\frac{4}{4+2} \right) = 4 \text{ A}$$

اور

$$(7.24) \quad i(t) = 6 \text{ A} - i_L(t) = 6 - 4 = 2 \text{ A} \quad (t < 7 \text{ s})$$

لکھا جاسکتا ہے۔ سوئچ چالو کرنے کے بعد کی صورت حال شکل-پ میں دکھائی گئی ہے جہاں سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$i_1 = 6 \text{ A}$$

$$5 \frac{di_2}{dt} + 4(i_2 - i_1) = 0$$

ان مساوات کو ملائے ہوئے

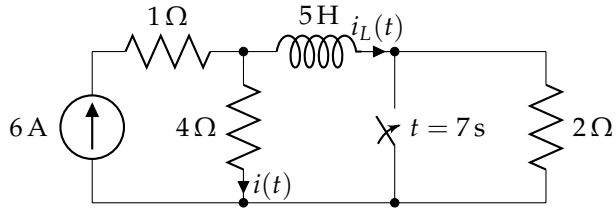
$$5 \frac{di_2}{dt} + 4(i_2 - 6) = 0$$

یعنی

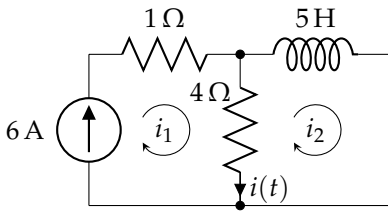
$$\frac{di_2}{dt} + \frac{4}{5}i_2 = \frac{24}{5}$$

حاصل ہوتا ہے جس کا مکمل حل درج ذیل ہے۔

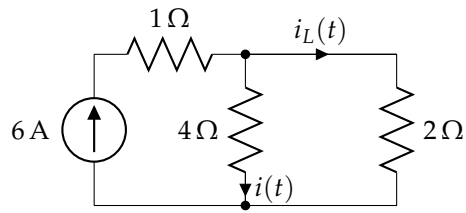
$$i_2 = 6 + K_2 e^{-\frac{4}{5}t}$$



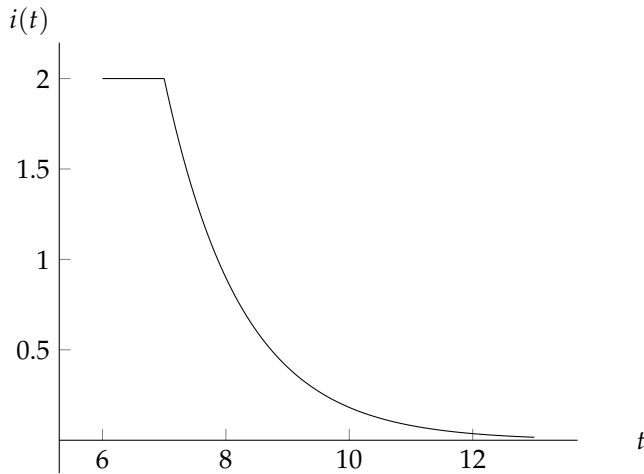
(الف)



(پ)



(ب)



(ت)

شکل 7.12: مثال 7.6 کے اسکال۔

چونکہ i_2 در حقیقت i_L ہی ہے لہذا نامعلوم مستقل K_2 کو ابتدائی معلومات سے حاصل کرتے ہیں۔ درج بالا مساوات میں $t = 7 \text{ s}$ پر $i_L(7+) = 4 \text{ A}$ پُر کرتے ہوئے

$$4 = 6 + K_2 e^{-\frac{4}{5} \times 7}$$

سے

$$K_2 = -2e^{\frac{4}{5} \times 7}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں سوچ چالو کرنے کے بعد i_2 کا مکمل حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$i_2 = 6 - 2e^{\frac{4}{5}(7-t)}$$

اب شکل-پ کو دیکھتے ہوئے

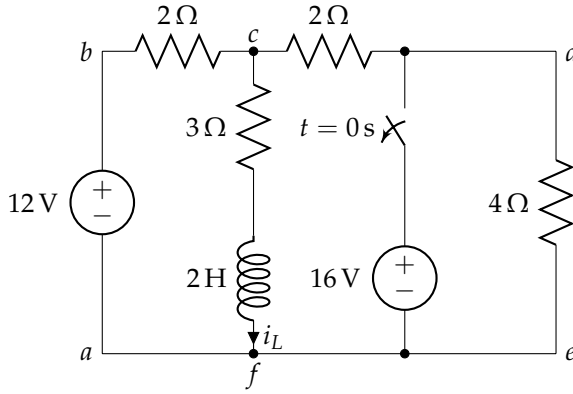
$$\begin{aligned} i(t) &= i_1 - i_2 \\ &= 6 - \left(6 - 2e^{\frac{4}{5}(7-t)}\right) \\ &= 2e^{\frac{4}{5}(7-t)} \quad (t > 7 \text{ s}) \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ یوں ازل سے ابد تک $i(t)$ کو مساوات 7.24 اور درج بالا مساوات پیش کرتے ہیں۔ انہیں اکٹھے لکھتے اور شکل-ت میں پیش کرتے ہیں۔

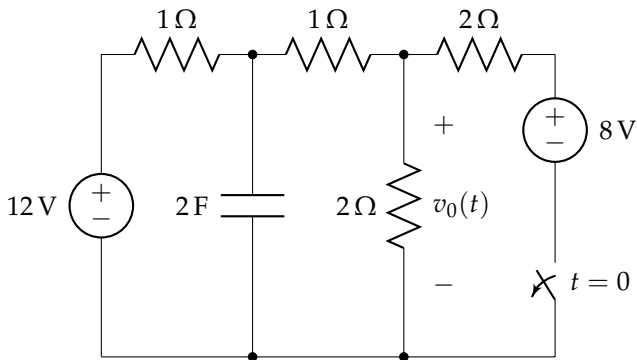
$$(7.25) \quad i(t) = \begin{cases} 2 \text{ A} & t < 7 \text{ s} \\ 2e^{\frac{4}{5}(7-t)} \text{ A} & t > 7 \text{ s} \end{cases}$$

مشق 7.4: شکل 7.13 میں ابتدائی حالت $i_L(0_+)$ دریافت کریں۔ دائرہ $abcfa$ میں i_1 اور $abdea$ میں i_2 لیتے ہوئے کرخوف مساوات دباؤ لکھیں۔ ان مساوات سے صرف i_1 پر مبنی مساوات حاصل کریں۔ یوں ازل سے ابد تک i_L دریافت کریں۔

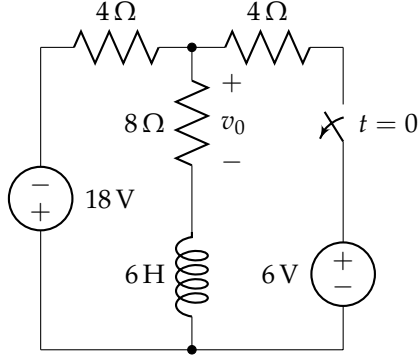
$$\text{جوابات: } i_L(0_+) = 3.5 \text{ A} , \frac{di_1}{dt} + 2.25i_1 = 4.5 , i_L(t > 0) = 2 + 1.5e^{-2.25t} \text{ A}$$



شکل 7.13: مشق 7.4 کا دور۔



شکل 7.14: مشق 7.5 کا دور۔



شکل 7.15: مشق 7.6 کا دور۔

مشق 7.5: شکل 7.14 میں $v_0(t)$ حاصل کریں۔

جوابات: $v_0(t) = \frac{24}{5} + \frac{1}{5}e^{-\frac{5}{8}t} \text{ V}$

مشق 7.6: شکل 7.15 میں سوئچ منقطع کرنے کے بعد v_0 حاصل کریں۔

جوابات: $v_0 = -12 + \frac{9}{2}e^{-2t} \text{ V}$

7.3 دھڑکن

گزشتہ حصے میں سوچ کو چالو یا منقطع کرتے ہوئے ادوار میں یکدم تبدیلی پیدا کی گئی۔ فوراً تبدیلی پیدا کرنے والے دو عدد تفاعل نہایت اہم ہیں۔ انہیں اکائی سیڑھی تفاعل²⁰ اور اکائی جھٹکا تفاعل²¹ کہتے ہیں۔ آئیں اکائی سیڑھی تفاعل پر غور کریں۔

اکائی سیڑھی تفاعل $u(t)$ کی الجبرائی تعریف درج ذیل ہے۔

$$(7.26) \quad u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

اکائی سیڑھی تفاعل بے بعد²² ہے جو منفی t کی صورت میں صفر کے برابر جبکہ مثبت t کی صورت میں اکائی کے برابر ہے۔ شکل 7.16-الف میں اکائی سیڑھی تفاعل کو دکھایا گیا ہے۔ اکائی سیڑھی تفاعل کے متغیر کو $t - t_0$ لکھتے ہوئے شکل 7.16-ب حاصل ہوتا ہے جو افقی محدود پر t_0 دائیں منتقل اکائی سیڑھی تفاعل $u(t - t_0)$ ہے۔ یہ تفاعل منفی $t - t_0$ کی صورت میں صفر کے برابر ہے جبکہ مثبت $t - t_0$ کی صورت میں یہ اکائی کے برابر ہے۔ اکائی سیڑھی تفاعل کو V_0 وولٹ کی دباؤ سے ضرب دینے سے V_0 وولٹ کا سیڑھی تفاعل حاصل ہوگا جس سے بعد وولٹ V ہے۔ یوں بے بعد سیڑھی تفاعل سے کسی بھی بعد کی سیڑھی تفاعل حاصل کی جاسکتی ہے۔ شکل 7.16-پ میں $Au(t)$ اور شکل 7.16-ت میں $-Au(t - t_0)$ دکھائے گئے ہیں جہاں A از خود مثبت عدد ہے۔

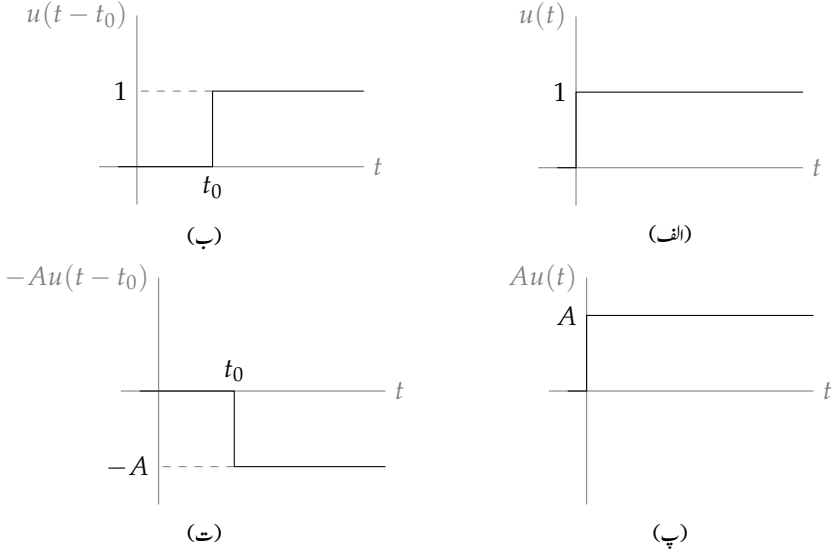
اکائی سیڑھی تفاعل سے مستطیل تفاعل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ یہ عمل شکل 7.17 میں دکھایا گیا ہے جہاں $Au(t)$ اور $-Au(t - t_0)$ کا مجموعہ

$$(7.27) \quad f(t) = Au(t) - Au(t - t_0)$$

لیتے ہوئے A حیطے کا مستطیل تفاعل حاصل کیا گیا ہے۔

مثال 7.7: اکائی سیڑھی تفاعل کے استعمال سے T طول موج اور V_0 حیطے کی چکور موج حاصل کریں۔

unit step function²⁰
unit impulse function²¹
dimensionless²²



شکل 7.16: اکائی سیڑھی تعامل۔

حل: شکل 7.17 کی طرز پر متعدد مستطیل اشارات سے ایسی موج حاصل کی جاسکتی ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر متعدد اکائی سیڑھی تعامل استعمال کی جائیں گی۔ درکار تعامل کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

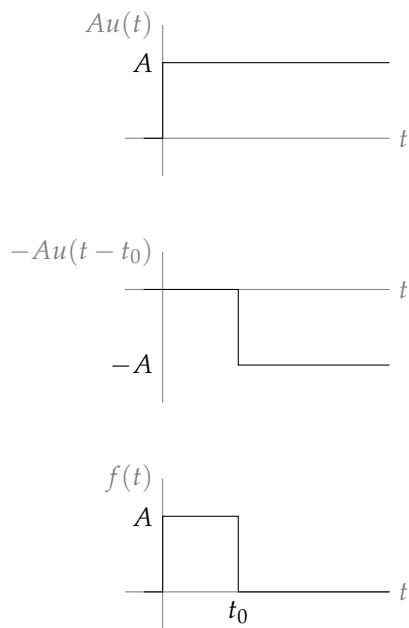
$$v(t) = V_0 [u(t) - u(t - 0.5T) + u(t - T) - u(t - 1.5T) + u(t - 2T) - \dots]$$

جسے شکل 7.18-الف میں دکھایا گیا ہے۔

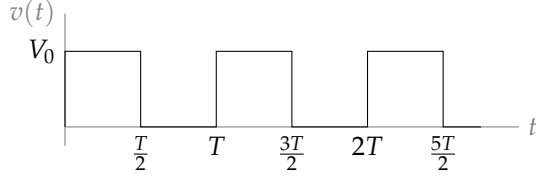
مثال 7.8: اکائی سیڑھی تعامل سے اوپر جانب بڑھتی سیڑھی تعامل حاصل کریں۔ سیڑھی کی اونچائی 0.5 رکھیں۔

حل: درج بالا مثال میں اجزاء کو بالترتیب جمع اور منفی کیا گیا۔ یہاں انہیں صرف جمع کیا جاتا ہے یعنی

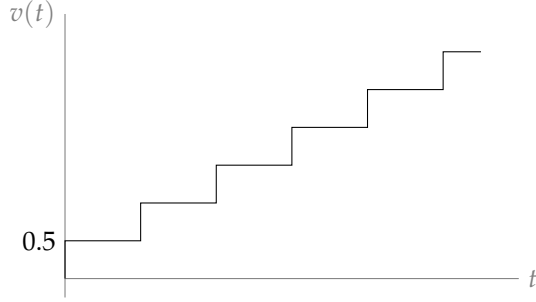
$$v(t) = 0.5 [u(t) + u(t - 0.5T) + u(t - T) + u(t - 1.5T) + u(t - 2T) + \dots]$$



شکل 7.17: اکائی سیڑھی تفاعل سے مستطیل تفاعل کا حصول۔



(الف) پکڑ موج۔



(ب) بڑھتی سیزھی۔

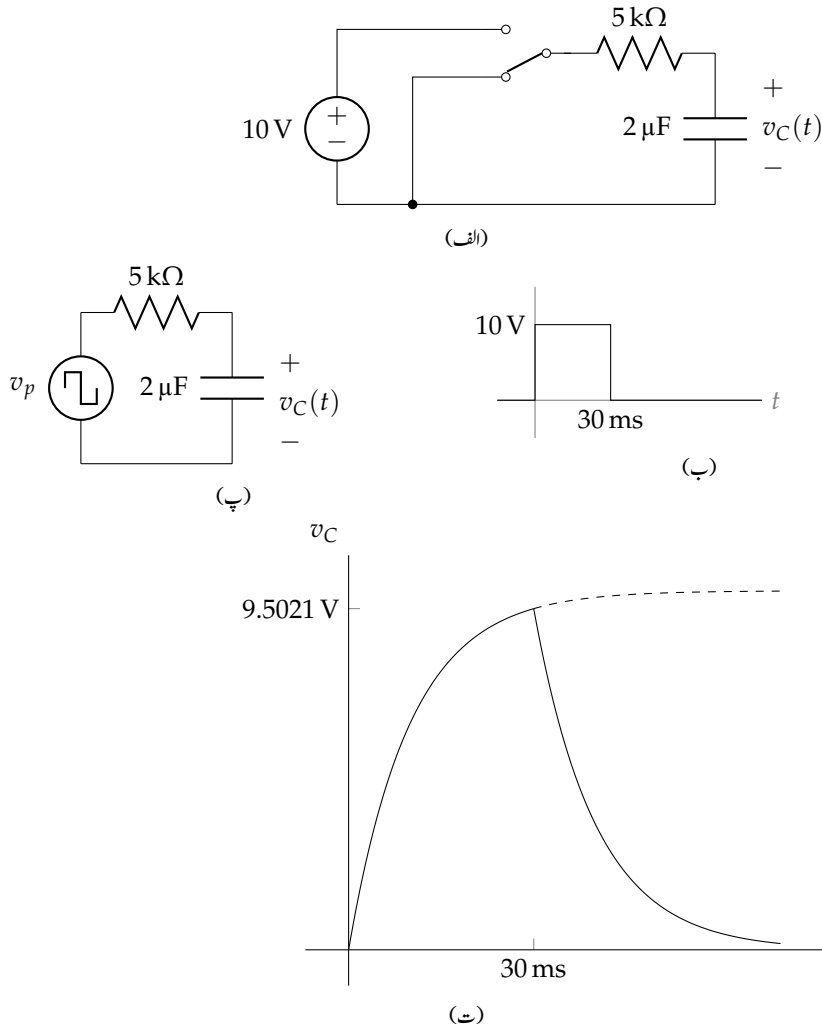
شکل 7.18: اکائی سیزھی تعامل سے پکڑ موج کا حصول۔

جس سے درکار سیزھی حاصل ہوگی۔ بڑھتی سیزھی کو شکل 7.18-ب میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 7.9: شکل 7.19-الف میں ایک قطب دو چال کا سوئچ استعمال کیا گیا ہے جو ازل سے دور کو زمین سے ملایا ہوا ہے۔ لمحہ $t = 0$ s پر سوئچ کو پلٹتے ہوئے دور کو منبع دباؤ کے ساتھ ملایا جاتا ہے۔ لمحہ $t = 30$ ms پر سوئچ کو واپس اپنی حالت میں لاتے ہوئے دور کو ایک بار پھر زمین کے ساتھ جوڑا جاتا ہے۔ دباؤ $v_C(t)$ حاصل کریں۔

حل: سوئچ کو پلٹ کر واپس کرنے سے دور اور منبع 30 ms کے لئے جڑتے ہیں۔ یوں دور کو اس دور اپنے کے لئے 10 V ملتا ہے۔ شکل-ب میں اس دباؤ کو دکھایا گیا ہے۔ شکل-الف میں سوئچ اور منبع دباؤ کی جگہ مستطیل دباؤ پیدا کرنے والا منبع v_p نسب کرنے سے شکل-پ حاصل ہوتا ہے جہاں

$$v_p = 10 [u(t) - u(t - 30 \text{ ms})]$$



شکل 7.19: مثال 7.9 کے اسکال۔

کے برابر ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شکل-پ میں بھی دور کو عین شکل-ب کا دباؤ مہیا کیا گیا ہے لہذا ان دونوں ادوار کے حل میں کوئی فرق نہیں ہوگا۔

ازل سے داخلی دباؤ صفر کے برابر ہونے کی بنا

$$v_C(0_-) = v_C(0_+) = 0 \text{ V}$$

ہوگا۔ دورانیہ $t = 0 \text{ s}$ تا $t = 30 \text{ ms}$ شکل-پ میں داخلی دباؤ $v_p = 10 \text{ V}$ کے برابر ہے لہذا کر خوف مساوات رواج ذیل لکھی جائے گی۔

$$\frac{v_C - 10}{5000} + 2 \times 10^{-6} \frac{dv_C}{dt} = 0$$

اس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\frac{dv_C}{dt} + 100v_C = 1000$$

لکھا جاسکتا ہے جس کے جبری اور فطری حل درج ذیل ہیں۔

$$v_{C,j} = K_1 = 10$$

$$v_{C,f} = K_2 e^{-100t}$$

یوں مکمل حل درج ذیل لکھا جائے گا

$$v_C(t) = 10 + K_2 e^{-100t} \quad (0 < t < 30 \text{ ms})$$

جس میں لمحہ $t = 0 \text{ s}$ کے معلومات پُر کرتے

$$0 = 10 + K_2 e^{-100 \times 0}$$

ہوئے نامعلوم متغیر کی قیمت $K_2 = -10$ حاصل ہوتی ہے۔ یوں مکمل حل درج ذیل ہے۔

$$(7.28) \quad v_C(t) = 10 - 10e^{-100t} \quad (0 < t < 30 \text{ ms})$$

لمحہ $t = 30 \text{ ms}$ پر داخلی دباؤ میں دوبارہ یک دم تبدیلی پائی جاتی ہے لہذا اس لمحے کے معلومات اگلے دورانیے کے حل کے لئے درکار ہوں گے۔ مساوات 7.28 سے $t = 30 \text{ ms}$ پر $v_C(0.03_-)$ کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$v_C(0.03_-) = v_C(0.03_+) = 10 - 10e^{-100 \times 0.03} = 9.5021 \text{ V}$$

اگلے دورانیے یعنی $t < 30 \text{ ms}$ کا حل تلاش کرتے ہیں۔ اس دورانیے میں داخلی دباؤ $v_p = 0 \text{ V}$ کے برابر ہے لہذا شکل-پ کا کرخوف مساوات روج ذیل ہوگا

$$\frac{v_C - 0}{5000} + 2 \times 10^{-6} \frac{dv_C}{dt} = 0$$

جس کا مکمل حل

$$v_C = K_3 e^{-100t} \quad (30 \text{ ms} < t)$$

ہے۔ اس میں لمحہ $t = 30 \text{ ms}$ پر $V_C(0.03_+)$ پر کرتے ہوئے

$$9.5021 = K_3 e^{-100 \times 0.03}$$

نا معلوم متغیرہ $K_3 = 190.8554$ حاصل ہوتا ہے لہذا مکمل حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(7.29) \quad v_C = 190.8554 e^{-100t} \quad (30 \text{ ms} < t)$$

مساوات 7.28 اور مساوات 7.29 کو اکٹھے لکھتے ہوئے اس کا خط

$$(7.30) \quad v_C = \begin{cases} 10 - 10e^{-100t} & 0 < t < 30 \text{ ms} \\ 190.8554 e^{-100t} & 30 \text{ ms} < t \end{cases}$$

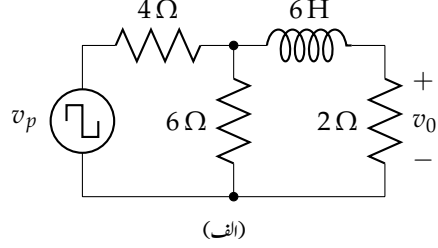
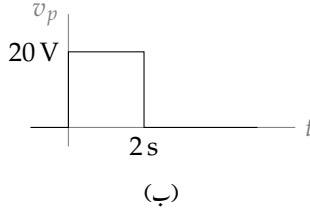
شکل-ت میں کھینچتے ہیں۔

اگر لمحہ $t = 30 \text{ ms}$ اور اس کے بعد بھی داخلی دباؤ 10 V پر برقرار رہتا تب v_C نقطہ دار لکیر پر چلتے ہوئے 10 V تک جا پہنچتا۔

مشق 7.7: شکل 7.20-الف کو شکل 7.20-ب کا داخلی دباؤ مہیا کیا جاتا ہے۔ دباؤ v_0 دریافت کریں۔

$$\text{جواب: } v_0(t < 0) = 0 \text{ V}, \quad v_0(0 < t < 2) = \frac{30}{29} \left(1 - e^{-\frac{29}{15}t}\right),$$

$$v_0(2 < t) = 8.78074 e^{-\frac{11}{15}t}$$



شکل 7.20: مشتق 7.7 کے اشکال۔

7.4 دو درجی ادوار

شکل 7.21-الف میں R ، L اور C متوازی منبع رو $i_S(t)$ کے ساتھ جڑے ہیں جبکہ شکل-ب میں منبع دباؤ کے ساتھ تینوں پرزے سلسلہ وار جڑے ہیں۔ شکل-الف کی کرخوف مساوات رو اور شکل-ب کی کرخوف مساوات دباؤ بالترتیب درج ذیل ہیں۔

$$\frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(t) dt + i_L(t_0) + C \frac{dv(t)}{dt} = i_S(t)$$

$$i(t)R + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(t) dt + v_C(t_0) + L \frac{di(t)}{dt} = v_S(t)$$

یہ مساوات یکساں صورت رکھتے ہیں لہذا ان کا حل بالکل یکساں ہوگا۔ ان مساوات کا تفرق لے کر ترتیب دینے سے درج ذیل تفرقی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

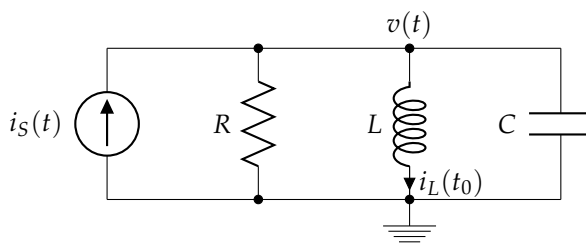
$$C \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{L} = \frac{di_S(t)}{dt}$$

$$L \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{C} = \frac{dv_S(t)}{dt}$$

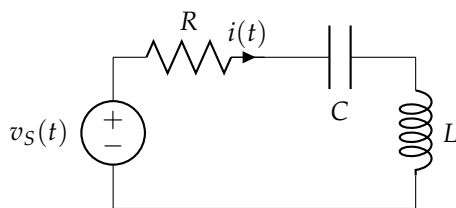
آپ نے دیکھا کہ دونوں مساوات میں تفرقی جزو کے عددی سر، مستقل مقدار ہیں۔ انہیں مستقل عددی سر کے دو درجی تفرقی مساوات کو حل کرنا سیکھتے ہیں۔

مستقل عددی سر کے دو درجی تفرقی مساوات کی عمومی صورت درج ذیل ہے جہاں دو درجی تفرق کے عددی سر کو اکائی برابر رکھا گیا ہے۔

$$(7.31) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = f(t)$$



(الف)

 $+v_C(t_0)-$ 

(ب)

شکل 7.21: دودرجی ادوار۔

ایک درجی مساوات کے حل کی طرح یہاں بھی اگر مساوات 7.31 کا جبری حل $y_j(t)$ ہو اور درج ذیل ہم جنسی مساوات کا فطری حل $y_f(t)$ ہو

$$(7.32) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 y(t) = 0$$

تب مساوات 7.31 کا مکمل حل

$$(7.33) \quad y(t) = y_j(t) + y_f(t)$$

ہوگا۔ یاد رہے کہ کسی بھی تفرقی مساوات میں جبری قوت کو صفر ($f(t) = 0$) پُر کرنے سے اس کی ہم جنسی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ مستقل جبری قوت، یعنی $f(t) = A$ ، کی صورت میں جبری حل بھی مستقل ہوگا جسے K_1 تصور کرتے ہوئے مساوات 7.31 میں پُر کرتے ہوئے

$$(7.34) \quad y_j(t) = K_1 = \frac{A}{a_2}$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم جنسی مساوات میں $a_1 = 2\zeta\omega_0$ اور $a_2 = \omega_0^2$ پُر کرنے سے

$$(7.35) \quad \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dy(t)}{dt} + \omega_0^2 y(t) = 0$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ω_0 کو (غیر نقصیری) قدرتی تعدد²³ اور ζ کو نقصیری تناسب²⁴ کہا جاتا ہے۔ ان کی افادیت جلد سامنے آئے گی۔ مساوات 7.35 ہم جنسی مساوات کی عمومی صورت ہے جو طبیعیات کے دیگر شعبوں میں بھی استعمال کی جاتی ہے۔ اس مساوات کا فطری حل

$$y_f(t) = Ke^{st}$$

تصور کرتے ہیں۔ انہیں اس فطری حل کو ہم جنسی مساوات میں پُر کرتے ہیں۔

$$s^2 Ke^{st} + 2\zeta\omega_0 s Ke^{st} + \omega_0^2 Ke^{st} = 0$$

اس کو Ke^{st} سے تقسیم کرتے ہوئے

$$(7.36) \quad s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

undamped natural frequency²³
damping ratio²⁴

حاصل ہوتا ہے۔ اس دودرجی مساوات کو s کے لئے حل کرتے ہوئے

$$(7.37) \quad s = \frac{-2\zeta\omega_0 \mp \sqrt{4\zeta^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2}}{2} \\ = -\zeta\omega_0 \mp \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

یعنی

$$(7.38) \quad s_1 = -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ s_2 = -\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

ملتے ہیں۔ یوں دوفطری حل $K_2e^{s_1t}$ اور $K_3e^{s_2t}$ ممکن ہیں۔ ایسی صورت میں عمومی فطری حل ان کا مجموعہ ہو گا یوں عمومی فطری حل کو

$$(7.39) \quad y_f(t) = K_2e^{s_1t} + K_3e^{s_2t}$$

جہاں مستقل K_2 اور K_3 کو ابتدائی معلومات مثلاً $y(0)$ اور $\left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0}$ سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مساوات 7.38 پر غور کرنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ s_1 اور s_2 کی قیمتوں کا دارومدار ζ کی قیمت پر ہے۔ تین ممکنہ صورتیں پائی جاتی ہیں یعنی $\zeta > 1$ ، $\zeta < 1$ اور $\zeta = 1$ جن سے بالترتیب s_1 اور s_2 کی قیمتیں حقیقی اور مختلف، خیالی اور مختلف اور حقیقی اور برابر حاصل ہوتی ہیں۔ ان تینوں صورتوں پر تفصیلاً غور کریں۔

زیادہ مقصور صورت، $\zeta > 1$

زیادہ مقصور صورت²⁵ میں s_1 اور s_2 کی قیمتیں حقیقی اور آپس میں مختلف حاصل ہوتی ہیں۔ زیادہ مقصور حالت $\zeta > 1$ کی صورت میں پائی جاتی ہے۔ ایسی صورت میں فطری حل کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(7.40) \quad y_f(t) = K_2e^{-(\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1})t} + K_3e^{-(\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1})t}$$

جو دود عدد، قوت نمائی انحطاطی تفاعل کا مجموعہ ہے۔

کم مقصور صورت، $\zeta < 1$

کم مقصور صورت²⁶ $\zeta < 1$ میں s_1 اور s_2 کی قیمتیں خیالی حاصل ہوتی ہیں جنہیں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(7.41) \quad \begin{aligned} s_1 &= -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma + j\omega_d \\ s_2 &= -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma - j\omega_d \end{aligned}$$

جہاں $\zeta\omega_0 = \sigma$ اور $\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = \omega_d$ لکھے گئے ہیں جبکہ $j = \sqrt{-1}$ ہے۔ یوں فطری حل

$$\begin{aligned} y_f(t) &= K_2 e^{-\sigma t + j\omega_d t} + K_3 e^{-\sigma t - j\omega_d t} \\ &= e^{-\sigma t} [K_2 e^{j\omega_d t} + K_3 e^{-j\omega_d t}] \\ &= e^{-\sigma t} [K_2 (\cos \omega_d t + j \sin \omega_d t) + K_3 (\cos \omega_d t - j \sin \omega_d t)] \\ &= e^{-\sigma t} [(K_2 + K_3) \cos \omega_d t + j(K_2 - K_3) \sin \omega_d t] \end{aligned}$$

یعنی

$$(7.42) \quad \begin{aligned} y_f(t) &= e^{-\sigma t} (c_1 \cos \omega_d t + c_2 \sin \omega_d t) \\ &= e^{-\zeta\omega_0 t} \left[c_1 \cos \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t + c_2 \sin \omega_0 \sqrt{1-\zeta^2} t \right] \end{aligned}$$

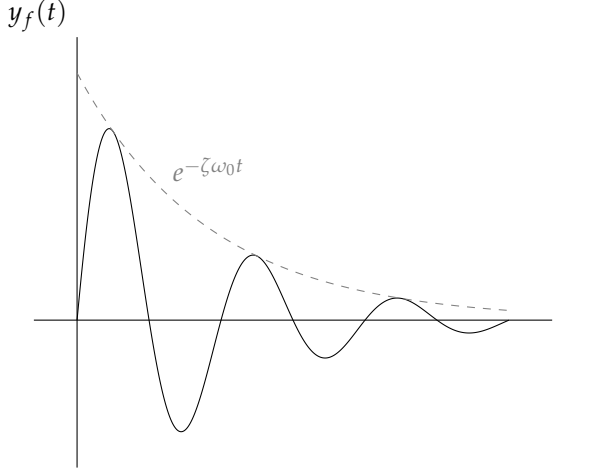
لکھا جائے گا جہاں $K_2 + K_3 = c_1$ اور $j(K_2 - K_3) = c_2$ لکھے گئے ہیں۔ فطری حل کے مستقل c_1 اور c_2 کو ابتدائی معلومات سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مساوات 7.42 میں

$$\begin{aligned} c_1 &= A \cos \theta \\ c_2 &= A \sin \theta \end{aligned}$$

پُر کرتے ہوئے

$$y_f(t) = e^{-\sigma t} (A \cos \theta \cos \omega_d t + A \sin \theta \sin \omega_d t)$$



شکل 7.22: قسری ارتعاش۔

یعنی

$$(7.43) \quad \begin{aligned} y_f(t) &= Ae^{-\sigma t} \cos(\omega_d t - \theta) \\ &= Ae^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t - \theta) \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 7.43 کے مستقل A اور θ ہیں جنہیں ابتدائی معلومات سے حاصل کیا جاتا ہے۔ جیسا شکل 7.22 میں دکھایا گیا ہے، مساوات 7.43 قسری ارتعاش²⁷ کو ظاہر کرتی ہے۔ کم قسری مساوات میں $e^{-\zeta\omega_0 t}$ قسری ارتعاش کے غلاف²⁸ کو ظاہر کرتی ہے جسے شکل میں نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔

فاصل مقصور صورت، $\zeta = 1$

فاصل مقصور صورت $\zeta = 1$ میں

$$(7.44) \quad s_1 = s_2 = -\zeta\omega_0$$

damped oscillation²⁷
envelope²⁸

حاصل ہوتے ہیں۔ جب s_1 اور s_2 کی قیمتیں ایک دونوں کے برابر ($s_1 = s_2$) ہوں تب عمومی فطری حل درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$(7.45) \quad y_f(t) = K_2 e^{-\zeta \omega_0 t} + K_3 t e^{-\zeta \omega_0 t}$$

جہاں دوسرے جزو کو t سے ضرب دیا گیا ہے۔ مساوات کے مستقل K_2 اور K_3 کو ابتدائی معلومات سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مشق 7.8: سلسلہ وار RLC دور میں $R = 2 \Omega$ ، $L = 5H$ اور $C = 4F$ ہیں۔ تقصیری تناسب اور غیر تقصیری قدرتی تعدد دریافت کریں۔

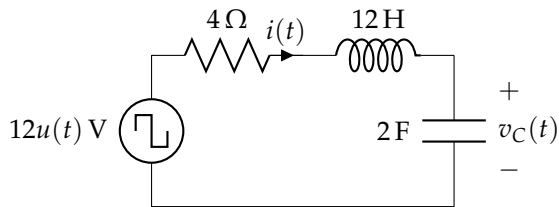
$$\text{جوابات: } \zeta = 0.8944 \text{ ، } \omega_0 = 0.2236 \text{ rad s}^{-1}$$

مشق 7.9: متوازی RLC دور میں $R = 2 \Omega$ ، $L = 5H$ اور $C = 4F$ ہیں۔ تقصیری تناسب اور غیر تقصیری قدرتی تعدد دریافت کریں۔

$$\text{جوابات: } \zeta = 0.2795 \text{ ، } \omega_0 = 0.2236 \text{ rad s}^{-1}$$

مشق 7.10: سلسلہ وار RLC دور میں $R = 4 \Omega$ اور $L = 12H$ ہیں۔ دور کار عمل $C = 6F$ ، $C = 2F$ اور $C = 3F$ کی صورت میں کیا ہوگا۔

جوابات: زیادہ قسری، کم قسری اور فاصل قسری۔



شکل 7.23: مثال 7.10 کا دور۔

مثال 7.10: شکل 7.23 میں $v_C(t)$ دریافت کریں جہاں لمحہ $t = 0$ پر ابتدائی معلومات $i_L(0) = 2 \text{ A}$ اور $v_C(0) = 4 \text{ V}$ ہیں۔

حل: دور کی کرخوف مساوات لمحہ $t = 0$ کے بعد لکھتے ہیں۔

$$(7.46) \quad i(t)R + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt = 12$$

اس میں

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

$$v_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(t) dt$$

پُر کرتے ہوئے

$$(7.47) \quad RC \frac{dv_C(t)}{dt} + LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + v_C(t) = 12$$

ملتا ہے۔ آئیں مساوات 7.47 کو حل کریں۔

مساوات 7.47 میں دی گئی قیمتیں پُر کرتے ہوئے ترتیب دینے سے درج ذیل ملتا ہے

$$(7.48) \quad \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{3} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{24} = \frac{1}{2}$$

جس میں جبری تفاعل کو صفر کے برابر پُر کرنے سے ہم جنسی مساوات

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{3} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{24} = 0$$

حاصل ہوتی ہے۔ مساوات 7.48 میں جبری تفاعل ایک مستقل مقدار ہے لہذا جبری حل کو مستقل $y_j(t) = K_1$ تصور کرتے ہوئے مساوات 7.48 میں پُر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \frac{d^2 K_1}{dt^2} + \frac{1}{3} \frac{dK_1}{dt} + \frac{K_1}{24} &= \frac{1}{2} \\ 0 + 0 + \frac{K_1}{24} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

حل کرنے سے

$$v_{C,j}(t) = K_1 = 12 \text{ V}$$

ملتا ہے۔ یہی جواب شکل 7.23 کو دیکھ کر بھی اخذ کیا جاسکتا ہے جہاں لمحہ $t = 0$ کے بہت دیر بعد، برقرار حالت کی صورت میں برق گیر کو کھلا دور تصور کرتے ہوئے صاف ظاہر ہے کہ برق گیر کا دباؤ عین داخلی دباؤ کے برابر ہوگا۔

ہم جنسی مساوات سے $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{24}}$ اور $\zeta = \frac{2}{\sqrt{6}} = 0.333$ حاصل ہوتا ہے۔ چونکہ $\zeta < 1$ ہے لہذا یہ کم قسری مساوات ہے جس کا حل مساوات 7.42 کے تحت

$$v_{C,f}(t) = e^{-\frac{t}{6}} \left(c_1 \cos \frac{t}{9\sqrt{2}} + c_2 \sin \frac{t}{9\sqrt{2}} \right)$$

ہے جہاں $\sigma = \omega_0 \zeta = \frac{1}{6}$ اور $\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} = \frac{1}{6\sqrt{2}}$ استعمال کئے گئے۔ یوں مکمل حل درج ذیل ہو گا

$$\begin{aligned} v_C(t) &= v_{C,j}(t) + v_{C,f}(t) \\ (7.49) \quad &= 12 + e^{-\frac{t}{6}} \left(c_1 \cos \frac{t}{6\sqrt{2}} + c_2 \sin \frac{t}{6\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

جس میں مستقل c_1 اور c_2 معلوم کرنا باقی ہے۔ ابتدائی دباؤ $v_C(0) = 4 \text{ V}$ کو مکمل حل میں پُر کرنے سے

$$\begin{aligned} 4 &= 12 + e^{-\frac{0}{6}} \left(c_1 \cos \frac{0}{6\sqrt{2}} + c_2 \sin \frac{0}{6\sqrt{2}} \right) \\ &= 12 + c_1 \end{aligned}$$

یعنی

$$(7.50) \quad c_1 = -8$$

ملتا ہے۔ ابتدائی رو $i_L(0) = 2 \text{ A}$ کو استعمال کرنے کی خاطر مساوات 7.49 کے دونوں اطراف کو C سے ضرب دیتے ہوئے تفرق لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} C \frac{dv_C(t)}{dt} &= -\frac{C}{6} e^{-\frac{t}{6}} \left(-8 \cos \frac{t}{6\sqrt{2}} + c_2 \sin \frac{t}{6\sqrt{2}} \right) \\ &\quad + \frac{C}{6\sqrt{2}} e^{-\frac{t}{6}} \left(8 \sin \frac{t}{6\sqrt{2}} + c_2 \cos \frac{t}{6\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

اس میں $C \frac{dv_C(t)}{dt} = i_C(t)$ کے برابر ہے لہذا

$$\begin{aligned} i_C(t) &= -\frac{1}{3} e^{-\frac{t}{6}} \left(-8 \cos \frac{t}{6\sqrt{2}} + c_2 \sin \frac{t}{6\sqrt{2}} \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{6} e^{-\frac{t}{6}} \left(8 \sin \frac{t}{6\sqrt{2}} + c_2 \cos \frac{t}{6\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

لکھا جاسکتا ہے جہاں بائیں ہاتھ $i_C(t)$ کے برابر ہے اور دائیں ہاتھ $C = 2$ پُر کیا گیا ہے۔ چونکہ L اور C سلسلہ وار جڑے ہیں لہذا $i_C(t) = i_L(t)$ ہو گا۔ درج بالا مساوات میں ابتدائی رو $i_L(0) = i_C(0) = 2 \text{ A}$ پُر کرتے ہوئے

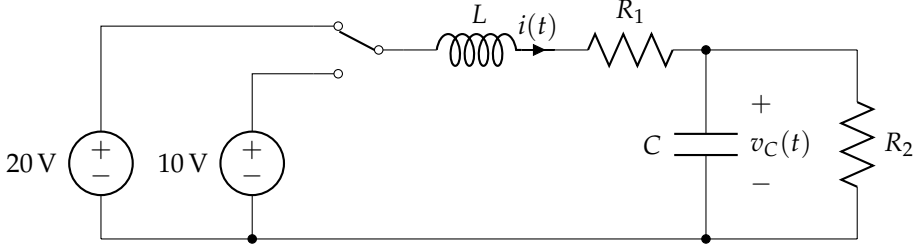
$$\begin{aligned} 2 &= -\frac{1}{3} e^{-\frac{0}{6}} \left(-8 \cos \frac{0}{6\sqrt{2}} + c_2 \sin \frac{0}{6\sqrt{2}} \right) \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{6} e^{-\frac{0}{6}} \left(8 \sin \frac{0}{6\sqrt{2}} + c_2 \cos \frac{0}{6\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

یعنی

$$c_2 = -\sqrt{8}$$

ملتا ہے۔ مساوات کے مستقل جاننے ہوئے مکمل حل کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(7.51) \quad v_C(t) = 12 + e^{-\frac{t}{6}} \left(-8 \cos \frac{t}{9\sqrt{2}} - \sqrt{8} \sin \frac{t}{9\sqrt{2}} \right)$$



شکل 7.24: مثال 7.11 کا دور۔

اس مساوات سے $t = 0$ s پر $v_C = 4$ V اور $t = \infty$ پر $v_C = 12$ V حاصل ہوتا ہے۔ پہلا جواب ابتدائی دباؤ ہی ہے جبکہ دوسرا جواب ابدی برقرار حالت یعنی جبری حل ہے۔

مثال 7.11: شکل 7.24 میں سوئچ ازل سے دکھائے گئے حالت میں ہے۔ لمحہ $t = 0$ پر اس کو پلٹایا جاتا ہے۔ دور کا رد عمل $R_1 = 15 \Omega$ ، $R_2 = 5 \Omega$ ، $L = 2$ H اور $C = 0.5$ F کی صورت میں معلوم کریں۔

حل: لمحہ $t = 0$ s کے بعد دور کے کر خوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$L \frac{di(t)}{dt} + R_1 i(t) + v_C(t) = 10$$

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R_2} = i(t)$$

نچلی مساوات کی رو کو بالائی مساوات میں پُر کرتے ہوئے

$$L \left[C \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{1}{R_2} \frac{dv_C(t)}{dt} \right] + R_1 \left[C \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{R_2} \right] + v_C(t) = 10$$

یعنی

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \left[\frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right] \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{R_1}{R_2 L C} v_C(t) = \frac{10}{LC}$$

ملتا ہے۔ پوزوں کی قیمتیں پُر کرنے سے

$$(7.52) \quad \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 7.9 \frac{dv_C(t)}{dt} + 3v_C(t) = 10$$

حاصل ہوتا ہے جس سے $\omega_0 = \sqrt{3}$ اور $\zeta = 2.28$ ملتے ہیں۔ چونکہ $\zeta > 1$ ہے لہذا دور زیادہ قسری ہے۔ مستقل جبری قوت کی بنا $v_{C,j}(t) = K_1$ متوقع ہے جسے مندرجہ بالا مساوات میں پُر کرنے سے

$$v_{C,j} = \frac{10}{3} V$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.52 میں جبری قوت کو صفر پُر کرنے، یعنی دائیں ہاتھ کو صفر کے برابر پُر کرنے، سے درج ذیل ہم جنسی مساوات حاصل ہوگی

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 7.9 \frac{dv_C(t)}{dt} + 3v_C(t) = 0$$

جس کا متوقع حل $v_{C,f} = e^{st}$ ہے۔ متوقع حل کو ہم جنسی مساوات میں پُر کرتے ہوئے

$$s^2 e^{st} + 7.9 s e^{st} + 3 e^{st} = 0$$

حاصل ہوتا ہے جس کے دونوں اطراف کو e^{st} سے تقسیم کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے

$$s^2 + 7.9s + 3 = 0$$

جس کے حل

$$s_1 = \frac{-1 - \sqrt{7.9^2 - 4 \times 3}}{2} = -7.5$$

$$s_2 = \frac{-1 + \sqrt{7.9^2 - 4 \times 3}}{2} = -0.4$$

ہیں۔ یوں فطری حل درج ذیل ہوگا

$$v_{C,f} = c_1 e^{-7.5t} + c_2 e^{-0.4t}$$

اور مکمل حل

$$(7.53) \quad v_C(t) = v_{C,j}(t) + v_{C,f}(t)$$

$$= \frac{10}{3} + c_1 e^{-7.5t} + c_2 e^{-0.4t}$$

ہوگا۔

مساوات کے مستقل حاصل کرنے کے لئے ابتدائی معلومات درکار ہیں۔ لمحہ $t = 0$ سے پہلے 20 V کی منبع دور کو طاقت فراہم کر رہی تھی۔ اس برقرار صورت میں برق گیر کو کھلا دور اور امالہ گیر کو قصر دور تصور کرتے ہوئے

$$v_C(0_-) = v_C(0_+) = 20 \left(\frac{5000}{15000 + 5000} \right) = 5 \text{ V}$$

$$i(0_-) = i(0_+) = \frac{20 - v_C}{R_1} = \frac{20 - 5}{15000} = 1 \text{ mA}$$

ملتے ہیں۔ ابتدائی دباؤ کو مساوات 7.53 میں پُر کرتے ہوئے

$$5 = \frac{10}{3} + c_1 e^{-7.5 \times 0} + c_2 e^{-0.4 \times 0}$$

یعنی

$$(7.54) \quad c_1 + c_2 = \frac{5}{3}$$

ملتا ہے۔

مساوات 7.53 کو C سے ضرب دے کر اس کا تفرق لیتے ہوئے

$$C \frac{dv_C(t)}{dt} = 0 - 0.5 \times 7.5 c_1 e^{-7.5t} - 0.5 \times 0.4 c_2 e^{-0.4t}$$

یعنی

$$i_C(t) = -3.75 c_1 e^{-7.5t} - 0.2 c_2 e^{-0.4t}$$

ملتا ہے۔ لمحہ $t = 0_+$ پر برق گیر کی رو درج بالا مساوات سے

$$i_C(0_+) = -3.75 c_1 e^{-7.5 \times 0} - 0.2 c_2 e^{-0.4 \times 0}$$

$$= -3.75 c_1 - 0.2 c_2$$

حاصل ہوتی ہے جبکہ اسی لمحے پر R_2 کی رو درج ذیل ہوگی۔

$$i_{R2}(0_+) = \frac{v_C(0_+)}{R_2} = \frac{5}{5000} = 1 \text{ mA}$$

چونکہ $i_L(t) = i(t)$ ہی ہے لہذا کرخوف مساوات روکے تحت

$$\begin{aligned} i_L(0+) &= i_C(0+) + i_{R2}(0+) \\ 0.001 &= 0.001 - 3.75c_1 - 0.2c_2 \end{aligned}$$

یعنی

$$(7.55) \quad c_1 + c_2 = 0$$

ہوگا۔ مساوت 7.54 اور مساوات 7.55 ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{20}{213} \\ c_2 &= \frac{125}{71} \end{aligned}$$

یوں مکمل حل درج ذیل ہے۔

$$(7.56) \quad v_C(t) = \frac{10}{3} - \frac{20}{213}e^{-7.5t} + \frac{125}{71}e^{-0.4t}$$

یہ مساوات $t = 0+$ پر متوقع جوابات $v_C(0+) = 5V$ اور $t = \infty$ پر $v_C(\infty) = \frac{10}{3}V$ دیتی ہے۔

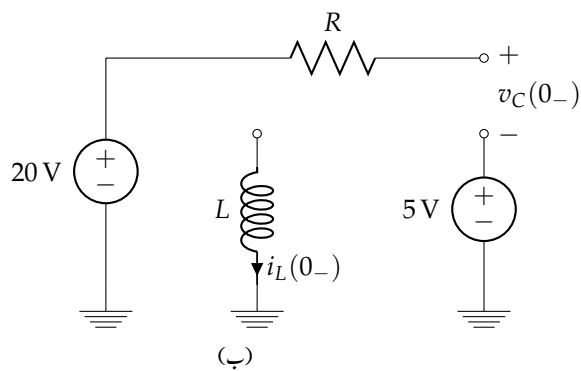
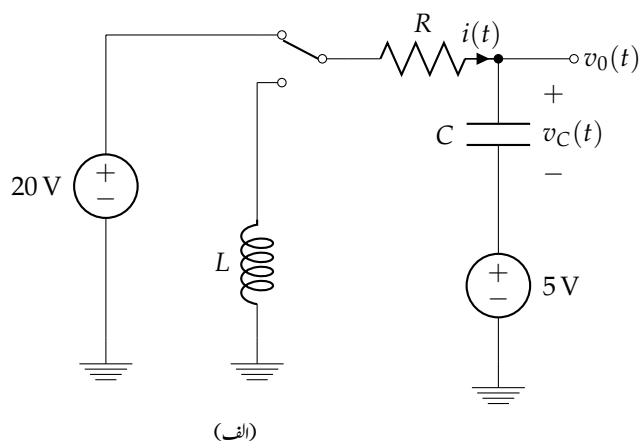
مثال 7.12: شکل 7.25 میں لمحہ $t = 0$ پر سوئچ کو امالہ گیر پر لے جایا جاتا ہے۔ $v_0(t)$ دریافت کریں۔ پوزوں کی قیمتیں $R = 20\Omega$ ، $C = 0.04F$ اور $L = 4H$ ہیں۔

حل: سوئچ امالہ پر کرنے کے بعد کرخوف مساوات لکھتے ہیں

$$v_C(t) + Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + 5 = 0$$

جہاں

$$i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt}$$



شکل 7.25: مثال 7.12 کا دور

کے برابر ہے۔ درج بالا دو مساوات کو ملاتے ہوئے

$$v_C(t) + RC \frac{dv_C(t)}{dt} + LC \frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 5 = 0$$

ملتا ہے جسے ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{v_C(t)}{LC} = -\frac{5}{LC}$$

پرزوں کی قیمتیں پُر کرنے سے

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 5 \frac{dv_C(t)}{dt} + 6.25 v_C(t) = -31.25$$

حاصل ہوتا ہے جس سے $\omega_0 = 2.5 \text{ rad s}^{-1}$ ، $\zeta = 1$ ، جبری حل

$$v_{C,j} = K_1 = -5 \text{ V}$$

اور ہم جنسی مساوات درج ذیل ملتا ہے۔

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + 5 \frac{dv_C(t)}{dt} + 6.25 v_C(t) = 0$$

ہم جنسی مساوات میں e^{st} پُر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل کیا جاسکتا ہے

$$(7.57) \quad s^2 + 5s + 6.25 = 0$$

جس کا حل درج ذیل ہے۔

$$s_1 = s_2 = -2.5$$

$\zeta = 1$ کے تحت دور فاصل قسری ہے اور $s_1 = s_2$ ہی متوقع تھا۔ فاصل قسری مساوات کا فطری حل درج ذیل ہے۔

$$v_{C,f}(t) = c_1 e^{-2.5t} + c_2 t e^{-2.5t}$$

یوں مکمل حل

$$(7.58) \quad v_C(t) = -5 + (c_1 + t c_2) e^{-2.5t}$$

ہوگا۔ مکمل حل کے مستقل ابتدائی معلومات سے حاصل کی جاسکتی ہیں۔ ابتدائی معلومات سوچ بلانے سے پہلے برقرار حال سے ملتی ہیں۔ لمحہ $t = 0$ سے پہلے برقرار صورت میں برق گیر کو کھلا دور تصور کرتے ہوئے شکل-ب ملتا ہے جہاں سے

$$v_C(0_-) = v_C(0_+) = 20 - 5 = 15 \text{ V}$$

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0 \text{ A}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ مساوات 7.58 میں $t = 0$ پر $v_C(0_+)$ پُر کرنے

$$15 = -5 + (c_1 + 0 \times c_2)e^{-2.5 \times 0}$$

سے

$$c_1 = 20$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.58 کو استعمال کرتے ہوئے

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \\ = 0.04 \times (-2.5c_1 + c_2 - 2.5tc_2)e^{-2.5t}$$

لکھا جاسکتا ہے۔ لمحہ $t = 0$ کے بعد شکل-الف کو دیکھتے ہوئے $i_L(t) = -i(t)$ لکھا جاسکتا ہے۔ یوں امالہ گیر کی ابتدائی رو سے لمحہ $t = 0_+$ پر $i(0_+) = -i_L(0_+) = 0$ کو درج بالا مساوات میں پُر کرتے

$$= 0.04 \times (-2.5c_1 + c_2 - 2.5 \times 0 \times c_2)e^{-2.5 \times 0}$$

ہوئے

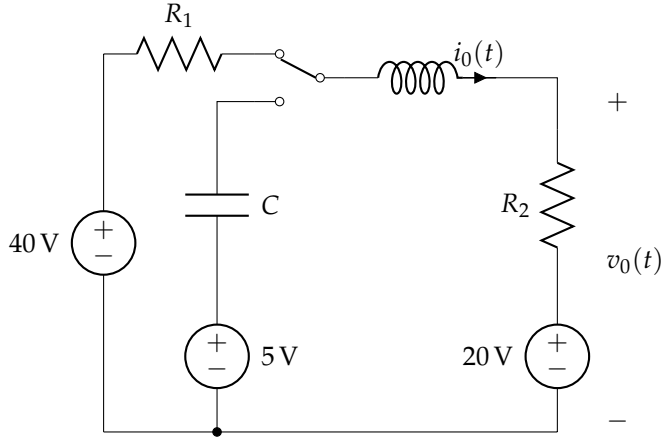
$$c_2 = 50$$

ملتا ہے۔ یوں مکمل حل کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$v_C(t) = v_{C,j}(t) + v_{C,f}(t) \\ = -5 + (20 + 50t)e^{-2.5t} \text{ V}$$

ہمیں $v_0(t)$ درکار ہے جسے شکل-الف سے دیکھ کر لکھتے ہیں۔

$$(7.59) \quad v_0(t) = 5 + v_C(t) = (20 + 50t)e^{-2.5t} \text{ V}$$



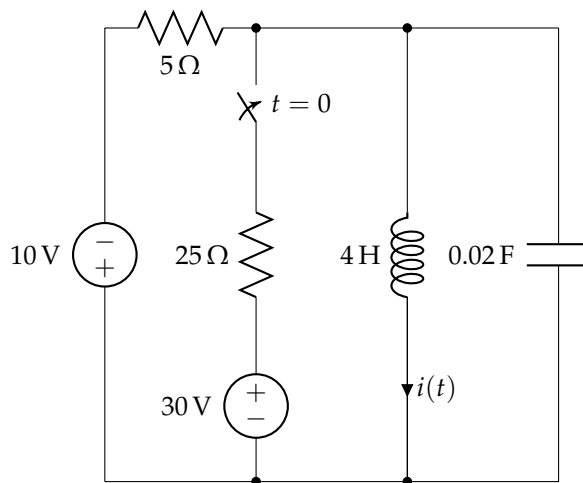
شکل 7.26: مشق 7.11 کا دورہ۔

مشق 7.11: شکل 7.26 میں $v_0(t)$ دریافت کریں۔ پرزوں کی قیمتیں $R_1 = 8\Omega$ ، $R_2 = 22\Omega$ ، $L = 4\text{ H}$ اور $C = 0.04\text{ F}$ ہیں۔

جوابت: $v_0(t) = 20 + i_0(t)R_2$ ، $i_0(t) = 2.77e^{-3.8964t} - 2.103e^{-1.6043t}$

مشق 7.12: شکل 7.27 میں سوئچ چالو کرنے کے بعد $i(t)$ دریافت کریں۔

جواب: $i(t) = 3 + 1.3035e^{-17.071t} - 6.035e^{-2.9289t}$



شکل 7.27: مشق 7.12 کا دورہ۔