

برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	بنیاد	1
1	برقی بار، برقی رو اور برقی دباؤ	1.1
6	قانون اوہم	1.2
8	توانائی اور طاقت	1.3
15	برقی پڑے	1.4
15	غیر تابع منبع	1.4.1
17	تابع منبع	1.4.2
27	مزا جتنی ادوار	2
27	قانون اوہم	2.1
35	قوانین کرخوف	2.2
51	سلسلہ وار جڑے پڑوں میں رو	2.3
52	تقسیم دباؤ	2.4
55	متعدد سلسلہ وار مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت	2.5
58	سلسلہ وار متعدد منبع دباؤ اور مزاحمت	2.6
59	متوازی جڑے مزاحمت پر یکساں دباؤ پایا جاتا ہے	2.7
61	تقسیم رو اور متعدد متوازی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت	2.8
68	سلسلہ وار اور متوازی مزاحمت	2.9
73	تخصیص مزاحمت	2.10
76	سلسلہ وار اور متوازی مزاحمتوں کے ادوار کا حل	2.11
84	ستارہ-تکون تبادلہ	2.12
91	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	2.13
101	ترکیب جوڑ اور دائری ترکیب	3
101	تجزیہ جوڑ	3.1
104	غیر تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار	3.2
117	تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار	3.3
123	غیر تابع منبع دباؤ استعمال کرنے والے ادوار	3.4

132	تابع منبع دباو استعمال کرنے والے ادوار	3.5
139	دائری تجزیہ	3.6
140	غیر تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	3.7
148	غیر تابع منبع رواستعمال کرنے والے ادوار	3.8
154	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	3.9
158	دائری ترکیب اور ترکیب جوڑ کا موازنہ	3.10

161	حسابی ایپلیفائر	4
171	کامل حسابی ایپلیفائر	4.1
171	منفی ایپلیفائر	4.2
174	مثبت ایپلیفائر	4.3
176	مستقام کار	4.4
176	منفی کار	4.5
178	جمع کار	4.6
181	متوازن اور غیر متوازن صورت	4.7
185	موازنہ کار	4.8
185	آلاتی ایپلیفائر	4.9

187	مسئلے	5
187	مساوی دور	5.1
187	مسئلہ خطیت	5.2
191	مسئلہ نفاذ	5.3
201	مساوی ادوار	5.4
206	مسئلہ تھون، مسئلہ نارٹن اور مسئلہ متبادلہ منبع	5.5
225	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	5.6
231	تابع منبع اور غیر تابع منبع دونوں استعمال کرنے والے ادوار	5.7
239	زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ	5.8

247	برق گیر اور امالہ گیر	6
247	برق گیر	6.1
261	امالہ گیر	6.2
270	برق گیر اور امالہ گیر کے خصوصیات	6.3
273	سلسلہ وار جڑے برق گیر	6.4
277	متوازی جڑے برق گیر	6.5
281	سلسلہ وار امالہ گیر	6.6
283	متوازی امالہ گیر	6.7
287	حسابی ایپلیفائر کے RC ادوار	6.8
288	تفرق کار	6.9

293	عارضی رد عمل	7
293	تعارف	7.1
293	ایک درجی ادوار	7.2

295	7.2.1 رد عمل کی عمومی مساوات
321	7.3 دھڑکن
328	7.4 دو درجی ادوار
359	8 برقرار حالت بدلتی رو
359	8.1 مخلوط اعداد
364	8.2 سائن نما تفاعل
373	8.3 سائن نما اور مخلوط جبری تفاعل
381	8.4 دوری سمتیہ
386	8.5 مزاحمت، امالہ گیر اور برقی گیر کے انفرادی دوری سمتی تعلق
396	8.6 برقی رکاوٹ اور برقی فراوانی
409	8.7 دوری سمتیت کے اشکال
419	8.8 کر خوف مساوات
424	8.9 تجزیاتی تراکیب
443	9 برقرار برقی طاقت
443	9.1 لمبائی طاقت
446	9.2 اوسط طاقت
453	9.3 زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ
463	9.4 موثر قیمت
472	9.5 جزو طاقت
476	9.6 مخلوط طاقت
484	9.7 جزو طاقت کی درستی
489	9.8 برقی چھٹکا
491	9.9 نم زمین
492	9.10 ایک دور کا نظام
497	9.11 حفاظتی تدابیر
499	10 مقناطیسی جڑے ادوار
499	10.1 مشترکہ امالہ
517	10.2 مشترکہ امالہ میں توانائی کا ذخیرہ
523	10.3 کامل ٹرانسفارمر
547	11 تین دوری نظام
547	11.1 تین دوری ستارہ دیاو
553	11.2 ستارہ ستارہ (YY) جوڑ
561	11.3 تین دوری ٹکونی (Δ) دیاو
566	11.4 ٹکونی بوجھ
571	11.5 طاقت کے کلیات
580	11.6 جزو طاقت کی درستی

585	12	تعدوی رد عمل
596	12.1	جال
598	12.2	صفر اور قطب
600	12.3	سائن نما تعدوی تجزیہ
600	12.3.1	یوڈا خطوط
621	12.4	گمکی ادوار

باب 12

تعددی رد عمل

گزشتہ بابوں میں ہم RLC ادوار کو حل کر چکے ہیں جہاں تعدد غیر متغیر تھی۔ اس باب میں تعدد تبدیل کرتے ہوئے ادوار کا رد عمل بالمقابل تعدد دیکھا جائے گا۔ آئیں شروع میں سادہ ترین پرزوں کا تعددی رد عمل دیکھیں۔ سادہ ترین پرزے مزاحمت، امالہ اور برق گیر ہیں۔ تعددی رد عمل دیکھتے ہوئے سائن نما اشارات زیر استعمال لائے جائیں گے۔

شکل 12.1- الف میں مزاحمت دکھایا گیا ہے۔ مزاحمت کی رکاوٹ درج ذیل ہے۔

$$(12.1) \quad Z_R = R/0^\circ$$

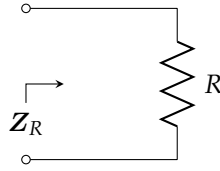
یوں مزاحمت کی رکاوٹ پر تعدد ω کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ مزاحمت کے رکاوٹ کی حتمی قیمت $|Z_R|$ تمام تعدد پر R کے برابر ہے جبکہ اس کا زاویائی ہٹاؤ $\angle Z_R$ تمام تعدد پر صفر درجے رہتا ہے۔ یہ حقائق شکل 12.1-ب اور شکل 12.1-پ میں دکھائے گئے ہیں۔

امالہ گیر کو شکل 12.2- الف میں دکھایا گیا ہے۔ امالہ گیر کی رکاوٹ درج ذیل ہے۔

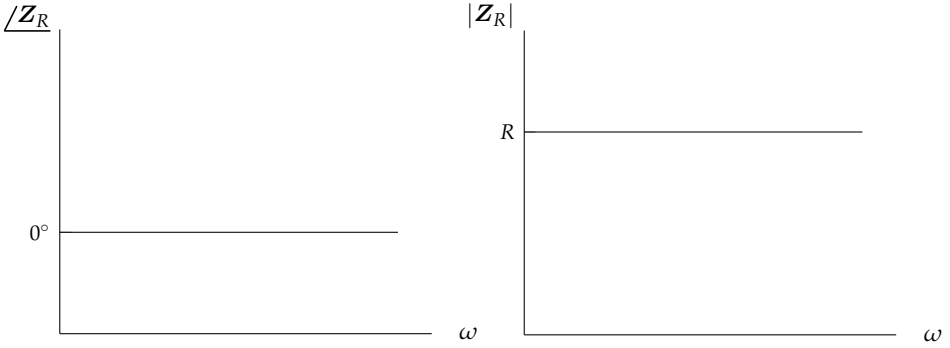
$$(12.2) \quad Z_L = j\omega L = \omega L/90^\circ$$

اس طرح امالہ گیر کے رکاوٹ کی حتمی قیمت تعدد بڑھانے سے بڑھتی ہے۔ رکاوٹ کی مقدار کا تعدد کے ساتھ راست تنابلی رشتہ ہے۔

$$(12.3) \quad |Z_L| = \omega L$$



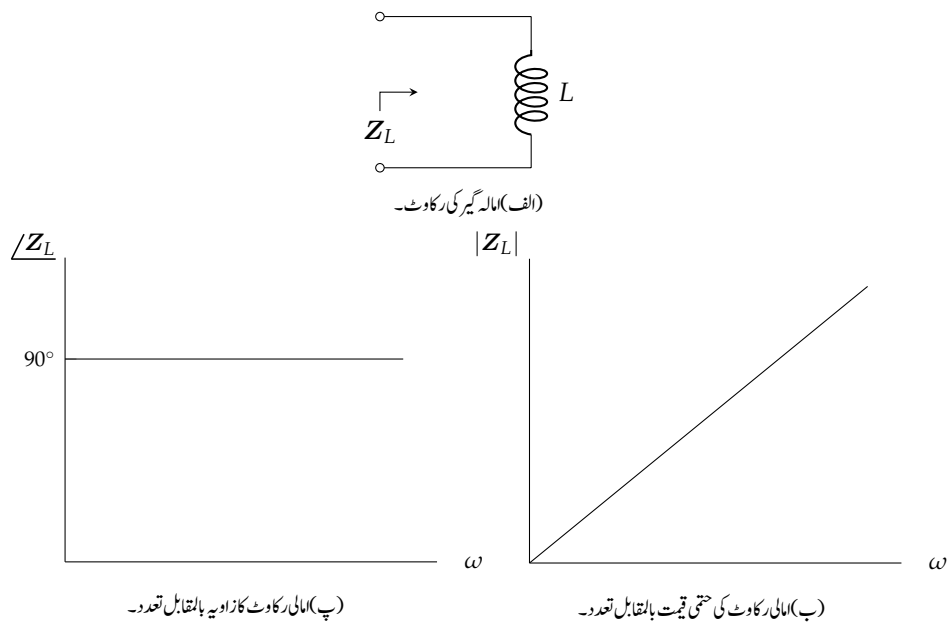
(الف) مزاحمت کی رکاوٹ۔



(پ) مزاحمتی رکاوٹ کا زاویہ بالمقابل تعدد۔

(ب) مزاحمتی رکاوٹ کی حتمی قیمت بالمقابل تعدد۔

شکل 12.1: مزاحمتی رکاوٹ کا تعدد رد عمل۔



شکل 12.2: امالی رکاوٹ کا تعدد رد عمل۔

صفر تعدد پر امالہ گیر کی رکاوٹ 0Ω ہو جاتی ہے اور یہ قصر دور خاصیت رکھتا ہے جبکہ لامتناہی تعدد پر رکاوٹ کی مقدار لامتناہی ہو جاتی ہے اور امالہ گیر بطور کھلا دور عمل کرتا ہے۔ امالی رکاوٹ کا زاویہ تمام تعدد پر 90° رہتا ہے۔

$$\angle Z_L = 90^\circ \quad (12.4)$$

شکل 12.2-ب اور شکل 12.2-پ میں ان تھانق کو دکھایا گیا ہے۔

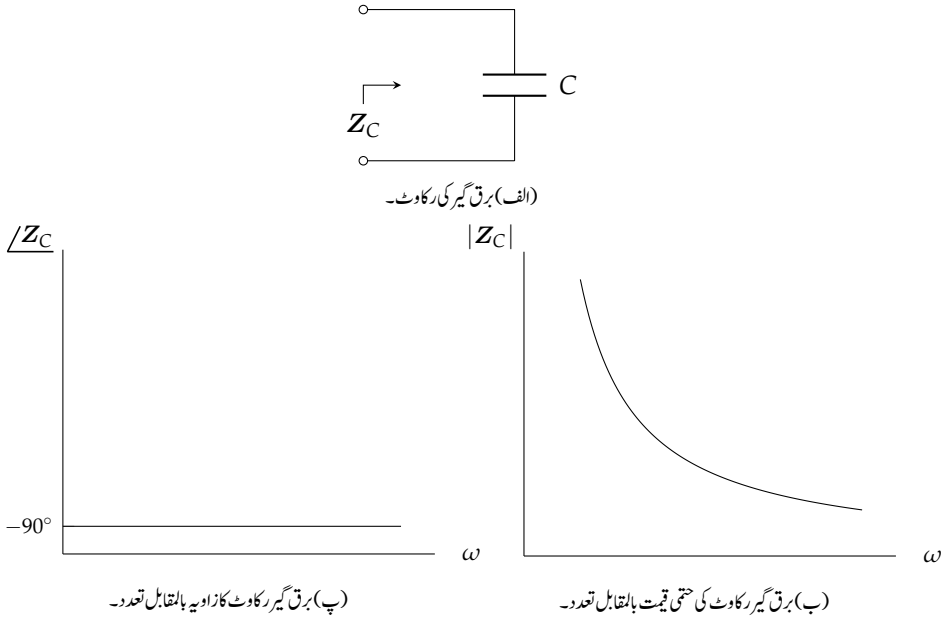
برق گیر کو شکل 12.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔ برق گیر کی رکاوٹ درج ذیل ہے۔

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \quad (12.5)$$

اس طرح برق گیر کے رکاوٹ کی مقدار کا تعدد کے ساتھ بالعکس متناسب کا رشتہ ہے جبکہ اس کا زاویہ تمام تعدد پر -90° رہتا ہے۔

$$|Z_C| = \frac{1}{\omega C} \quad (12.6)$$

$$\angle Z_C = -90^\circ \quad (12.7)$$



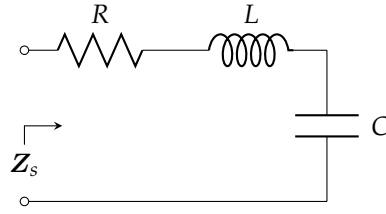
شکل 12.3: برق گیر رکاوٹ کا تعدد رد عمل۔

ان تعلقات کو شکل 12.3-ب اور شکل 12.3-پ میں دکھایا گیا ہے۔ صفر تعدد پر برق گیر کی رکاوٹ لامتناہی ہو جاتی ہے لہذا یہ بطور کھلا دور عمل کرتا ہے جبکہ لامتناہی تعدد پر رکاوٹ کی مقدار صفر ہو جاتی ہے اور یہ قصر دور کردار ادا کرتا ہے۔ سادہ ترین پرزوں کو نپٹانے کے بعد ذرہ مشکل ادوار دیکھتے ہیں۔ شکل میں مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر سلسلہ وار جڑے دکھائے گئے ہیں۔ ان کی کل رکاوٹ Z_s لکھتے ہیں

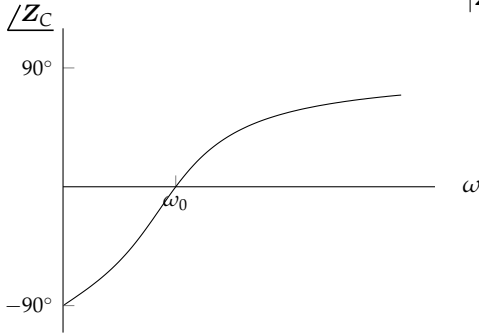
$$\begin{aligned} Z_s &= Z_R + Z_L + Z_C \\ &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\ &= R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \end{aligned}$$

اس تفاعل کو شکل 12.4-ب اور شکل 12.4-پ میں دکھایا گیا ہے۔

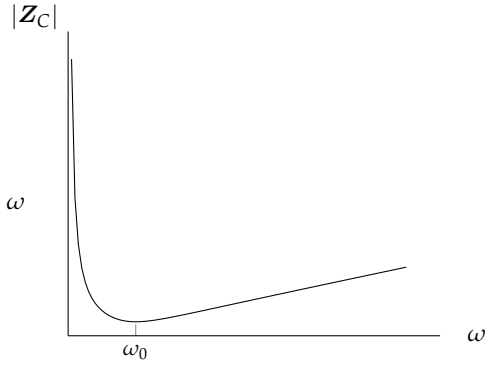
مثال 12.1: شکل 12.5-الف میں مزاحمت پر دبا و حاصل کریں۔ اس کے مقدار بالمقابل تعدد اور زاویہ بالمقابل تعدد کے



(الف) سلسلہ وار دور۔



(پ) زاویہ بالمقابل تعدد۔



(ب) مقدار بالمقابل تعدد۔

شکل 12.4: سلسلہ وار جڑے مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر کا تعدد رد عمل۔

خط کھینچیں۔

حل: دور سے مزاحمت کا دباؤ درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\hat{V}_R = \frac{(4)(20/0^\circ)}{4 + j(2\pi f 0.15 - \frac{1}{2\pi f 0.004})}$$

جو مخلوط تفاعل ہے۔ اس کی حتمی مقدار \hat{V}_R بالمقابل تعدد f کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس ترسیم میں دونوں محور کی پیمائش لاگ¹ میں ہے۔ اس طرز کے ترسیم کو لاگ لاگ² ترسیم کہا جاتا ہے۔ مقدار بالمقابل تعدد کے خط عموماً لاگ لاگ محور پر دکھائے جاتے ہیں۔ زاویہ دباؤ $\angle \hat{V}_R$ بالمقابل تعدد کو شکل-پ میں نیم لاگ³ محور پر دکھایا گیا ہے۔ کم تعدد پر دباؤ کا زاویہ $+90^\circ$ جبکہ بلند تعدد پر زاویہ -90° ہے۔

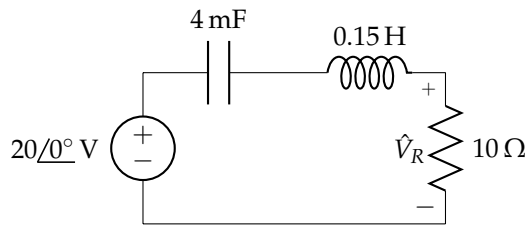
یہاں لاگ لاگ اور نیم لاگ محور پر قیمتیں پڑھنا سیکھ لیں چونکہ اس باب میں انہیں کا استعمال ہو گا۔ یوں شکل 12.5-ب میں حتمی مقدار کی چوٹی 10^1 یعنی دس ہرٹز پر پائی جاتی ہے۔ یہ چوٹی 10^1 یعنی دس وولٹ کو ظاہر کرتی ہے۔ اسی طرح 10^2 Hz یعنی سو ہرٹز پر دباؤ تقریباً 1.6 V ہے۔

سمعی⁴ اشارات کو عددی صورت⁵ میں تبدیل کرتے ہوئے کمپیوٹر میں ذخیرہ کیا جاتا ہے۔ انہیں کو دوبارہ مماثل صورت⁶ میں تبدیل کرتے ہوئے سنا جاسکتا ہے۔ آئیں ان اشارات پر ایک مثال دیکھیں۔

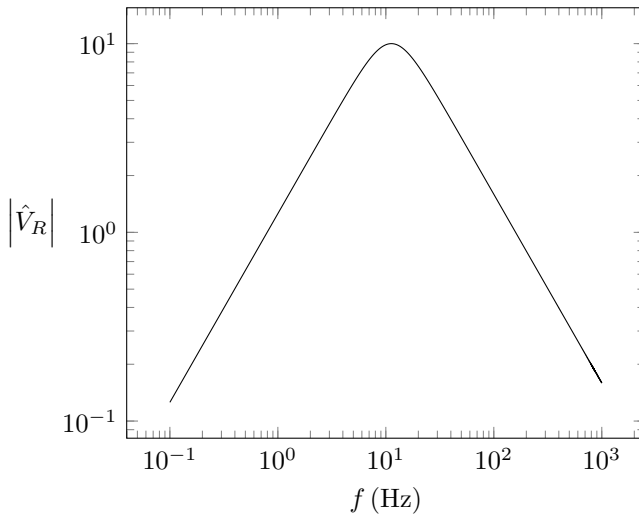
کمپیوٹر سے حاصل موسیقی کے مماثل اشارات کی چوٹی 1.5 V ہے۔ ہم چاہتے ہیں کہ سمعی دباؤ ایمپلیفائر⁷ استعمال کرتے ہوئے 8Ω کے سپیکر⁸ کو 10 W طاقت فراہم کی جائے۔ ان حقائق سے ایمپلیفائر کے داخلی مماثل اشارہ کی موثر قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$v_m = \frac{1.5}{\sqrt{2}} = 1.061 \text{ V rms}$$

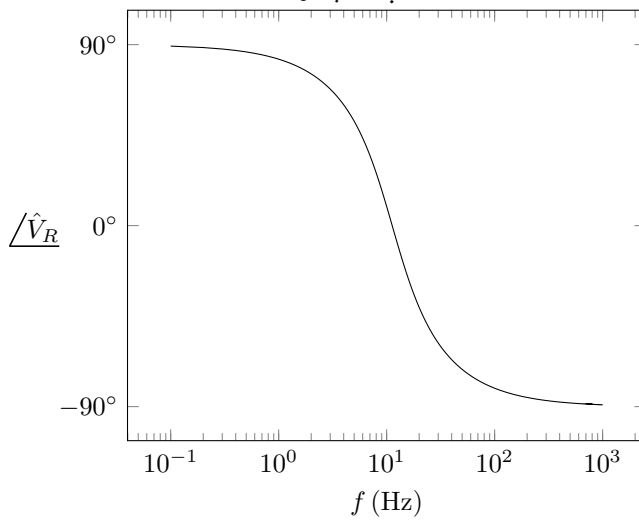
- log¹
- log-log²
- semilog³
- audio⁴
- digital form⁵
- analog form⁶
- voltage amplifier⁷
- loud speaker⁸



(الف)



(ب) مقدار بالمقابل تعدد کا خط۔



(پ) زاویہ بالمقابل تعدد کا خط۔

شکل 12.5: مثال 12.1 کا دور۔

طاقت کے کلیے $P = \frac{V_{rms}^2}{R}$ سے آٹھ اوہم کے سپیکر کو دس واٹ طاقت کے لئے درکار موثر دباؤ حاصل کرتے ہیں۔

$$v_0 = \sqrt{(10)(8)} = 8.944 \text{ V rms}$$

یوں ایمپلیفائر کی درکار افزائش دباؤ درج ذیل ہے۔

$$A_v = \frac{v_0}{v_m} = \frac{8.944}{1.061} = 8.43 \text{ V V}^{-1}$$

شکل 12.6- الف میں ایمپلیفائر اور سپیکر دکھائے گئے ہیں جہاں v_m کمپیوٹر سے حاصل ممال سمعی اشارہ ہے اور $A_v = 10.53 \text{ V V}^{-1}$ - انسان 20 Hz تا 20 kHz کے سمعی اشارات سن سکتا ہے لہذا ہمارے ایمپلیفائر کو اس تعددی پٹی کے اشارات کا حیثہ بڑھانا ہوگا۔ حیثہ بڑھاتے ہوئے اصل آواز کی خاصیت تبدیل نہیں ہونی چاہیے۔ اگر پوری تعددی پٹی پر ایمپلیفائر کی افزائش کی قیمت یکساں ہو تب آواز کی خاصیت برقرار رہے گی۔ یوں ہم چاہیں گے 20 Hz تا 20 kHz پر ایمپلیفائر کی افزائش 8.43 V V^{-1} رہے۔ ایمپلیفائر کے افزائش بالمقابل تعددی خط کو شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔

برق گیر کی رکاوٹ $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$ لکھی جاتی ہے جس میں $j\omega = s$ پر کرتے ہوئے $Z_C = \frac{1}{sC}$ لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے ایمپلیفائر کو دوبارہ شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔ آپ میں سے کچھ طلبہ s کو پہچان گئے ہوں گے۔ یہ لاپلاس بدل¹⁰ کا متغیر ہے۔

آئیں شکل-ب کو حل کریں۔ داخلی جانب بالائی جوڑ پر کر خوف مساوات رو لکھتے ہیں

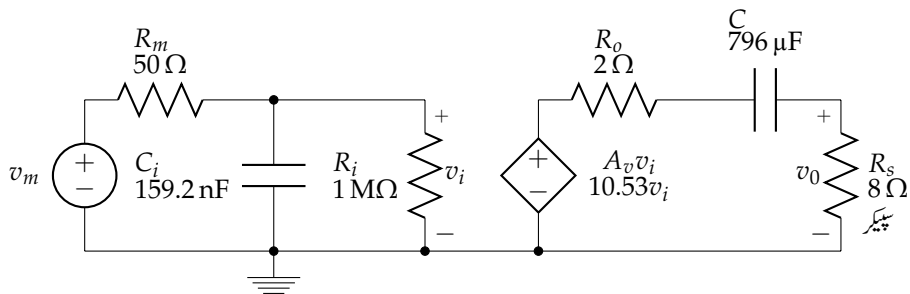
$$\frac{v_i - v_m}{R_m} + sC_i v_i + \frac{v_i}{R_i} = 0$$

جس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

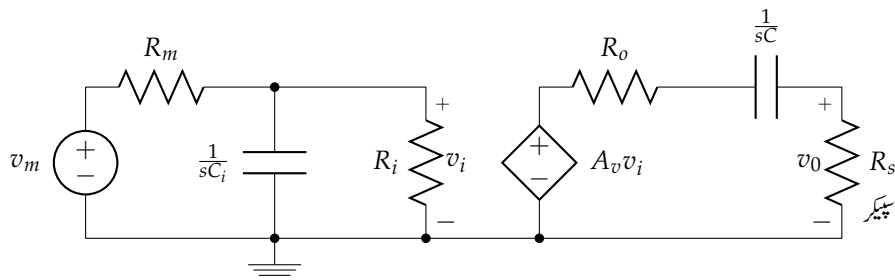
$$v_i \left(\frac{1}{R_m} + sC_i + \frac{1}{R_i} \right) = \frac{v_m}{R_m}$$

اس میں قوسین کے اندر مزاحمتوں کو قریب قریب لکھتے ہوئے v_i کے لئے حل کرتے ہیں۔

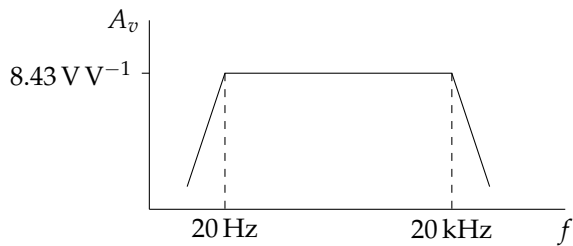
$$v_i = \frac{v_m}{R_m \left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i} + sC_i \right)}$$



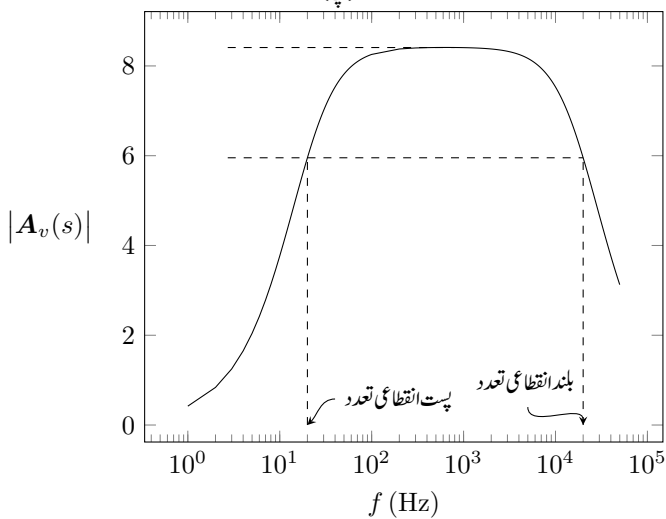
(الف)



(ب)



(پ)



(ت) ایسیپلیٹار کی افزائش بالمقابل تعددی خط۔

شکل 12.6: ایسیپلیٹار اور اس کی افزائش بالمقابل تعددی خط۔

شکل 12.6-ب کے دائیں جانب تقسیم دباؤ کے کلیے سے v_0 لکھتے ہیں۔

$$v_0 = \frac{A_v v_i R_s}{R_o + R_s + \frac{1}{sC}}$$

اس میں v_i کی قیمت پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned} v_0 &= \left(\frac{A_v R_s}{R_o + R_s + \frac{1}{sC}} \right) \frac{v_m}{R_m \left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i} + sC_i \right)} \\ &= \left[\frac{sC R_s A_v}{1 + sC(R_o + R_s)} \right] \frac{v_m}{R_m \left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i} \right) \left(1 + \frac{sC_i}{\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i}} \right)} \\ &= \frac{R_s A_v v_m}{R_m \left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i} \right)} \left[\frac{sC}{1 + sC(R_o + R_s)} \right] \frac{1}{\left(1 + \frac{sC_i}{\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i}} \right)} \end{aligned}$$

جہاں دوسری قدم پر دائیں بچی توسین سے $\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i}$ باہر نکالا گیا اور تیسری قدم پر اسی کو پہلی توسین کا حصہ بنایا گیا۔ اس مساوات میں

$$\begin{aligned} \omega_{p1} &= \frac{1}{C(R_o + R_s)} \\ \omega_{p2} &= \frac{1}{C_i} \left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i} \right) \end{aligned}$$

لکھتے ہوئے درج ذیل صاف ستھرا مساوات حاصل ہوتا ہے جہاں ω_{p1} اور ω_{p2} مساوات کے قطب¹¹ کہلاتے ہیں اور انہیں تعدد کی اکائی یعنی ہرٹز Hz یا ریڈین فی سیکنڈ rad s^{-1} میں ناپا جاتا ہے۔

$$(12.8) \quad A_v(s) = \frac{v_0}{v_m} = \frac{R_s A_v}{R_m \left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i} \right)} \frac{sC}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{p1}} \right) \left(1 + \frac{s}{\omega_{p2}} \right)}$$

شکل-الف میں دی گئی مزاحمتوں اور برق گیروں کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\omega_{p1} &= \frac{1}{796 \times 10^{-6}(2+8)} = 125.63 \text{ rad s}^{-1} \\ \omega_{p2} &= \frac{1}{159.2 \times 10^{-9} \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{1000000} \right)} = 125.634 \text{ krad s}^{-1} \\ \frac{R_s A_v}{R_m \left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i} \right)} &= \frac{8 \times 10.53}{50 \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{1000000} \right)} \approx 84.2\end{aligned}$$

یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(12.9) \quad A_v(s) = 84.2 \frac{sC}{\left(1 + \frac{s}{125.63}\right) \left(1 + \frac{s}{125634}\right)}$$

آئیں اس میں واپس $s = j\omega = j2\pi f$ پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(12.10) \quad A_v(s) &= 84.2 \frac{j2\pi f \times 796 \times 10^{-6}}{\left(1 + \frac{j2\pi f}{125.63}\right) \left(1 + \frac{j2\pi f}{125634}\right)} \\ &= \frac{j0.421f}{\left(1 + \frac{jf}{20}\right) \left(1 + \frac{jf}{20000}\right)}\end{aligned}$$

اس کے حتمی قیمت $|A_v(s)|$ بالمقابل تعدد f کو شکل 12.6-ت میں دکھایا گیا ہے۔

$$|A_v(s)| = \frac{0.421f}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{20}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{20000}\right)^2}}$$

شکل-ب میں 20 Hz کو پست انقطاعی تعدد¹² اور 20 kHz کو بلند انقطاعی تعدد¹³ کہتے ہیں۔ انہیں خط کے کونے کی تعدد¹⁴ بھی کہا جاتا ہے۔

شکل 12.6-ت میں انقطاعی تعدد کے مابین درمیانی تعدد خطے¹⁵ میں ایمپلیفائر کی افزائش 8.41 V V^{-1} ہے جو ہمیں درکار تھی۔ اس کو درمیانی تعدد پر افزائش کہتے ہیں۔ البتہ انقطاعی تعدد کے قریب ایمپلیفائر کی افزائش گھٹ جاتی

¹² low cut-off frequency
¹³ high cut-off frequency
¹⁴ corner frequencies
¹⁵ mid-frequency range

ہے۔ یوں پست اور بلند انقطاعی تعدد پر افزائش 5.95 V V^{-1} ہے۔ جس تعدد پر افزائش کی قیمت درمیانی تعدد کے افزائش کے $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا رہ جاتی ہے اس کو انقطاعی تعدد کہتے ہیں۔ چونکہ طاقت $P = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R}$ کے برابر ہے لہذا دباؤ کی قیمت $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا ہو جانے سے طاقت کی قیمت نصف ہو جاتی ہے۔ یوں انقطاعی تعدد اس تعدد کو کہتے ہیں جس پر اشارے کی طاقت نصف رہ جاتی ہے۔ ہمارے ایمپلیفائر کی درمیانی تعدد پر افزائش 8.41 V V^{-1} ہے۔ اس کا $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنا $8.4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 5.95 \text{ V V}^{-1}$ ہے۔

حقیقت میں پرزوں کی قیمتیں یوں رکھی جائیں گی کہ پست انقطاعی تعدد 20 Hz سے کئی گنا کم ہو اور اسی طرح بلند انقطاعی تعدد 20 kHz سے کئی گنا زیادہ ہو۔ یوں حقیقی ایمپلیفائر میں آپ انقطاعی تعدد کو 2 Hz اور 200 kHz رکھیں گے تاکہ پوری تعددی پیٹی پر ایمپلیفائر سے درکار افزائش میسر ہو۔

مساوات 12.10 میں درمیانی تعددی پیٹی پر انقطاعی تعدد سے دور تعدد

$$20 \text{ Hz} \ll f \ll 20000 \text{ Hz}$$

کی صورت میں $1 \ll \frac{f}{20000}$ اور $\frac{f}{20} \gg 1$ ہو گا۔ یوں مساوات 12.10 کے بائیں قوسین میں $1 + \frac{jf}{20} = \frac{jf}{20}$ اور دائیں قوسین میں $1 + \frac{jf}{20000} = 1$ لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جو درمیانی تعدد پر افزائش ہے۔

$$A_v(s) \approx \frac{j0.421f}{\left(\frac{jf}{20}\right)(1)} = 8.42 \quad (20 \text{ Hz} \ll f \ll 20 \text{ kHz})$$

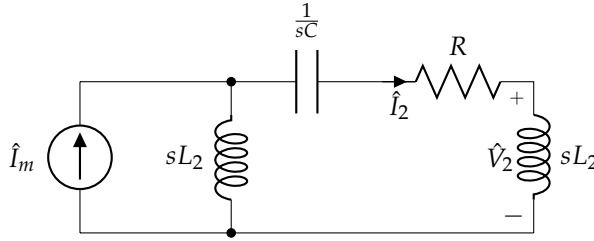
12.1 جال

کسی بھی دور میں متعدد پرزے اور تار پائے جاتے ہیں جسے پرزوں اور تاروں کا جال تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں دور کو بوقی جال یا صرف جال¹⁶ بھی کہا جاتا ہے۔ گزشتہ حصے میں ایمپلیفائر کی افزائش دباؤ $A_v(s)$ کی بات کی گئی جو جال کے مختلف تفاعل $H(s)$ میں سے ایک ہے۔ جال میں کسی مقام پر رد عمل اور داخلی اشارے کی تناسب کو $H(s)$ لکھا جاتا ہے۔ چونکہ جال میں عموماً رد عمل کو اس مقام پر نہیں ناپا جاتا جس پر داخلی اشارہ لاگو کیا گیا ہو لہذا $H(s)$ کو تبدیلی تفاعل¹⁷ کہا جاتا ہے۔ داخلی اشارہ دباؤ یا رد عمل بھی دباؤ یا رد عمل کی صورت میں ممکن ہے لہذا تبدیلی تفاعل کے چار اقسام ممکنہ پائے جاتے ہیں جنہیں جدول 12.1 میں پیش کیا گیا ہے۔

¹⁶ network transfer function
¹⁷

جدول 12.1: جال کے تبادلی تفاعل

علامت	تبادلی تفاعل	خارجی	داخلی
$A_v(s)$	افزائش دباؤ	دباؤ	دباؤ
$A_i(s)$	افزائش رو	رو	رو
$A_g(s)$	موصول نما افزائش	رو	دباؤ
$A_r(s)$	دباؤ نما افزائش	دباؤ	رو



شکل 12.7: مثال 12.2 کا دور۔

مثال 12.2: شکل 12.7 میں تبادلی تفاعل $A_i(s) = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_m}$ اور $A_r(s) = \frac{\hat{V}_2}{\hat{I}_m}$ حاصل کریں۔

حل: تقسیم رو کے کلیے سے درج ذیل لکھتے ہیں

$$\hat{I}_2 = \frac{sL_1 \hat{I}_m}{sL_1 + \frac{1}{sC} + R + sL_2}$$

جس سے افزائش رو کی تفاعل لکھتے ہیں۔

$$A_i(s) = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_m} = \frac{s^2 L_1 C}{s^2 (L_1 + L_2) C + sRC + 1}$$

رو \hat{I}_2 جانتے ہوئے \hat{V}_2 لکھتے ہیں

$$\begin{aligned} \hat{V}_2 &= sL_2 \hat{I}_2 \\ &= \frac{s^3 L_1 L_2 C \hat{I}_m}{s^2 (L_1 + L_2) C + sRC + 1} \end{aligned}$$

جس سے مزاحمت نما افزائش لکھتے ہیں۔

$$A_r(s) = \frac{\hat{V}_2}{\hat{I}_m} = \frac{s^3 L_1 L_2 C}{s^2 (L_1 + L_2) C + sRC + 1}$$

12.2 صفرا اور قطب

درج بالا مثال میں ہم نے دیکھا کہ تبدیلی تفاعل کو دو سلسلوں کا تناسب $\frac{A(s)}{B(s)}$ لکھا جاسکتا ہے جن کا متغیر s ہے۔ چونکہ ادوار میں پرزوں کی قیمت اور تابع یا غیر تابع منبع کی قیمت حقیقی اعداد ہوتے ہیں لہذا ان سلسلوں کے سر حقیقی اعداد ہوں گے۔ یوں کسی بھی جال کا تبدیلی تفاعل درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(12.11) \quad H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

جہاں شمار کنندہ کثیر رکنی m درجے کا ہے جبکہ نسب نما کثیر رکنی n درجے کا ہے۔ مساوات 12.11 کو بذریعہ تجزیہ درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(12.12) \quad H(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)}$$

یہاں غور کریں کہ اگر $s = -z_1$ ہو تب $H(s) = 0$ ہو گا۔ اسی طرح اگر $s = -z_2$ یا $s = -z_3$ ہو تو $H(s) = 0$ ہو گا۔ یہی وجہ ہے کہ $-z_1$ تا $-z_m$ تفاعل کے صفر¹⁸ کہلاتے ہیں۔ اس کے برعکس اگر $s = -p_1$ ہو یا $s = -p_2$ ہو تب $H(s)$ کی قیمت لامتناہی ہوگی۔ اسی لئے $-p_1$ تا $-p_n$ تفاعل کے قطب¹⁹ کہلاتے ہیں۔ تفاعل کے صفر اور قطب مخلوط اعداد ہو سکتے ہیں۔ مخلوط اعداد کی صورت میں ان کی جوڑیاں پائی جاتی ہیں جہاں جوڑی کے دونوں اعداد ایک دوسرے کے جوڑی دار مخلوط²⁰ ہوتے ہیں۔ ایسی جوڑی کے قوسین ضرب کرنے سے حقیقی سروالے کثیر رکنی دیتے ہیں جو ادوار کو ظاہر کر سکتے ہیں۔ مساوات 12.12 کسی بھی خطی اور وقت کے

¹⁸ zeroes

¹⁹ poles

²⁰ complex conjugate

ساتھ نہ بدلنے والے نظام کے تبادلی تفاعل لکھنے کا انتہائی اہم طریقہ ہے چونکہ اس کے قطبین کو دیکھ کر تفاعل کی خاصیت کے بارے میں جانا جاسکتا ہے۔ ایسے نظام کے تبادلی تفاعل کو عموماً اسی صورت میں لکھا جاتا ہے۔

مساوات 12.12 میں شمار کنندہ سے z_1 تا z_m اور نسب نما سے p_1 تا p_n باہر نکالتے اور ترتیب دیتے ہوئے ذیل ملتا ہے

$$H(s) = \frac{K(z_1 z_2 \cdots z_m)(1 + \frac{s}{z_1})(1 + \frac{s}{z_2}) \cdots (1 + \frac{s}{z_m})}{(p_1 p_2 \cdots p_n)(1 + \frac{s}{p_1})(1 + \frac{s}{p_2}) \cdots (1 + \frac{s}{p_n})}$$

جس میں $K_0 = \frac{K(z_1 z_2 \cdots z_m)}{(p_1 p_2 \cdots p_n)}$ لکھتے ہوئے مساوات کی معیاری شکل ملتی ہے۔

$$(12.13) \quad H(s) = \frac{K_0(1 + \frac{s}{z_1})(1 + \frac{s}{z_2}) \cdots (1 + \frac{s}{z_m})}{(1 + \frac{s}{p_1})(1 + \frac{s}{p_2}) \cdots (1 + \frac{s}{p_n})}$$

مشق 12.1: شکل 12.6-الف کا تبادلی تفاعل مساوات 12.9 میں دیا گیا ہے۔ اس کے صفر اور قطب دریافت کریں۔

جوابات: $-z_1 = 0 \text{ Hz}$ ، $-p_1 = -20 \text{ Hz}$ ، $-p_2 = -20 \text{ kHz}$

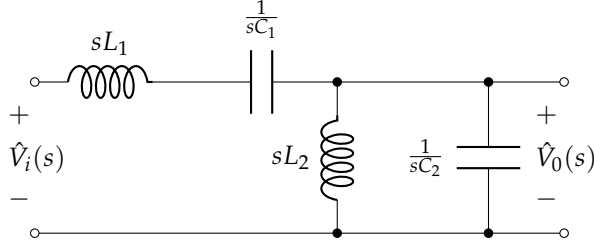
مشق 12.2: شکل 12.6-الف میں داخلی اشارے کو درپیش رکاوٹ دریافت کریں۔

$$\text{جواب: } R_m + \frac{R_i}{1 + sR_i C_i}$$

مشق 12.3: شکل 12.8 میں تبادلی تفاعل $\frac{\hat{V}_0(s)}{\hat{V}_i(s)}$ حاصل کریں۔

جواب:

$$\frac{\hat{V}_0(s)}{\hat{V}_i(s)} = \frac{s^2 L_2 C_1}{s^4 L_1 L_2 C_1 C_2 + s^2 (L_1 C_1 + L_2 C_2 + L_2 C_1) + 1}$$



شکل 12.8: مثال 12.3 کا دور۔

12.3 سائن نمائندگی تجزیہ

بعض اوقات ہم جال کو کسی مخصوص تعدد پر چلاتے ہیں۔ اس کی مثال 50 Hz پر چلنے والا واپڈا کا نظام ہے۔ اس کے برعکس کئی ادوار بدلتی تعدد پر استعمال کئے جاتے ہیں۔ سمعی ایمپلیفائر ایسا دور ہے جو 20 Hz تا 20 kHz کے تعدد پر چلایا جاتا ہے۔ ہم یہاں ادوار کی کارکردگی بالمقابل تعدد میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ تبدیلی تفاعل مخلوط عدد ہے لہذا اس کو زاویائی طرز میں لکھا جاسکتا ہے

$$(12.14) \quad H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

جہاں حتمی مقدار کا تفاعل $|H(\omega)|$ اور زاویائی تفاعل $\phi(\omega)$ دونوں تعدد پر منحصر ہیں۔ حتمی مقدار بالمقابل تعدد کے خط کو مقداری خصلت²¹ اور زاویہ بالمقابل تعدد کے خط کو زاویائی خصلت²² کہتے ہیں۔

12.3.1 بوڈا خطوط

افقی محور پر $\log_{10} \omega$ اور عمودی محور پر $20 \log_{10} |H(\omega)|$ رکھنے سے مقداری بوڈا خط²³ ملتا²⁴ ہے۔ جیسے آپ آگے جاکر دیکھیں گے، تبدیلی تفاعل کو دیکھ کر بوڈا خط کھینچا جاتا ہے۔ یہی بوڈا خطوط کی مقبولیت کی وجہ ہے۔ تعدد تابع²⁵ ادوار مثلاً ایمپلیفائر، فلٹر وغیرہ کے تجزیے اور تخلیق میں بوڈا خطوط نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔ مقداری بوڈا خط

²¹ magnitude characteristic

²² phase characteristic

²³ Bode plots

²⁴ ہینڈ راک واڈ بوڈا نے اس طرز کو دریافت کیا۔

²⁵ frequency dependent

کے عمودی محور کی پیمائش ڈیسی بیل 26 dB میں کی جاتی ہے۔ ڈیسی بیل کو بنیادی طور پر آواز کے طاقت کی تناسب ناپنے کے لئے استعمال کیا جاتا تھا جہاں دو طاقتوں کے تناسب کے لاگ $\log_{10} \frac{P_2}{P_1}$ کو بیل 27 میں ناپا جاتا تھا۔ جیسے ایک میٹر 1 m میں دس ڈیسی میٹر 10 dm ہوتے ہیں، اسی طرح ایک بیل میں دس ڈیسی بیل ہوتے ہیں لہذا ڈیسی بیل کا کلیہ درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(12.15) \quad \text{ڈیسی بیل میں طاقت کے تناسب کی پیمائش} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$$

اگر دونوں طاقت یکساں قیمت کے مزاحمت R کو مہیا کی جائے تب $P = I^2 R$ اور $P = \frac{V^2}{R}$ استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(12.16) \quad \begin{aligned} \text{ڈیسی بیل میں طاقت کے تناسب کی پیمائش} &= 10 \log_{10} \frac{|\hat{I}_2|^2 R}{|\hat{I}_1|^2 R} = 20 \log_{10} \frac{|\hat{I}_2|}{|\hat{I}_1|} \\ \text{ڈیسی بیل میں طاقت کے تناسب کی پیمائش} &= 10 \log_{10} \frac{|\hat{V}_2|^2 / R}{|\hat{V}_1|^2 / R} = 20 \log_{10} \frac{|\hat{V}_2|}{|\hat{V}_1|} \end{aligned}$$

مساوات 12.16 میں دیے ڈیسی بیل کے کلیے اتنے مقبول ہوئے ہیں کہ غیر یکساں مزاحمت کی صورت میں بھی دباؤ کی تناسب یا رو کی تناسب کو انہیں کلیوں سے ڈیسی بیل میں ناپا جاتا ہے۔

مشق 12.4: ایک ایمپلیفائر کو $P_i = 10 \text{ mW}$ طاقت کا داخلی اشارہ فراہم کیا جاتا ہے جبکہ ایمپلیفائر خارجی جانب سپیکر کو $P_o = 15 \text{ W}$ طاقت فراہم کرتا ہے۔ ایمپلیفائر کی افزائش طاقت $A_p = \frac{P_o}{P_i}$ کو ڈیسی بیل میں حاصل کریں۔

جواب: $A_p = 31.76 \text{ dB}$

مشق 12.5: ایک ایمپلیفائر کی افزائش دباؤ $A_v = 22 \text{ V V}^{-1}$ ہے۔ اس کی افزائش دباؤ کو ڈیسی بیل میں لکھیں۔

decibel²⁶
Bell²⁷

جواب: $A_v = 26.85 \text{ dB}$

مشق 12.6: سلسلہ وار جڑے 414Ω اور 1000Ω مزاحمتوں کو $\hat{V}_i = 100 \text{ V rms}$ کا داخلی اشارہ مہیا کیا جاتا ہے جبکہ $1 \text{ k}\Omega$ پر خارجی اشارہ \hat{V}_0 ناپا جاتا ہے۔ جال کی افزائش دباؤ کو ڈیسی بیل میں دریافت کریں۔

جواب: خارجی دباؤ $\hat{V}_0 = \frac{100 \times 1000}{1000 + 414} = 70.72 \text{ V rms}$ ہے جو داخلی دباؤ کے 0.7072 گنا ہے۔ دباؤ کی قیمت 0.7072 گنا ہونے سے طاقت کی قیمت 0.5 گنا رہ جاتی ہے جو -3 dB کے برابر ہے۔

بوڈا مقداری خط کھینچنا چند مثالوں سے سیکھتے ہیں۔ پہلی مثال میں تبدیلی تقابل درج ذیل لیتے ہیں جس میں ایک عدد صفر پایا جاتا ہے۔

$$(12.17) \quad H(\omega) = K(j\omega + z_1)$$

اس کو ترتیب دیتے ہوئے معیاری شکل میں لکھتے ہیں جہاں دوسری قدم پر $Kz_1 = K_0$ لکھا گیا ہے۔

$$(12.18) \quad \begin{aligned} H(\omega) &= Kz_1 \left(1 + j\frac{\omega}{z_1} \right) \\ &= K_0 \left(1 + j\frac{\omega}{z_1} \right) \end{aligned}$$

اس کی حتمی قیمت

$$(12.19) \quad |H(\omega)| = K_0 \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_1^2}}$$

کا $20 \log_{10} |H(\omega)|$ لیتے ہیں

$$(12.20) \quad 20 \log_{10} |H(\omega)| = 20 \log_{10} K_0 + 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_1^2}}$$

جس میں $\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

مساوات 12.20 پر غور کریں۔ اس کا پہلا جزو ایک مستقل ہے جو تعدد پر منحصر نہیں ہے۔ اس کو شکل 12.9-الف میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات کے دوسرے جزو کو دو مختلف تعدد کے پیوں پر دیکھتے ہیں۔ اگر تعدد کی قیمت z_1 سے بہت کم ہو یعنی $\omega \ll z_1$ تب $\frac{\omega^2}{z_1^2} \ll 1$ ہو گا لہذا دوسرے جزو میں $\frac{\omega^2}{z_1^2}$ کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے سے دوسرا جزو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں $\log_{10} 1 = 0$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_1^2}} \approx 20 \log_{10} \sqrt{1 + 0} = 0 \text{ dB}$$

شکل 12.9-الف میں z_1 سے بہت کم تعدد پر دوسرا جزو 0 dB کے برابر ہو گا۔ نقطہ a پر $\omega = \frac{z_1}{100}$ ہے لہذا اس نقطے پر دوسرا جزو صفر ڈیسی بیل دکھایا گیا ہے۔ اس نقطے کی نشاندہی دائرے سے کی گئی ہے۔ اسی طرح نقطہ b پر $\omega = \frac{z_1}{10}$ ہے لہذا یہاں بھی دوسرا جزو صفر ڈیسی بیل کے برابر ہے۔

آئیں اب مساوات 12.20 کے دوسرے جزو کو z_1 سے بہت زیادہ تعدد پر دیکھیں۔ اگر $\omega \gg z_1$ ہو تب اس جزو میں $\frac{\omega^2}{z_1^2} \gg 1$ ہو گا لہذا اس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_1^2}} \approx 20 \log_{10} \sqrt{\frac{\omega^2}{z_1^2}} = 20 \log_{10} \frac{\omega}{z_1}$$

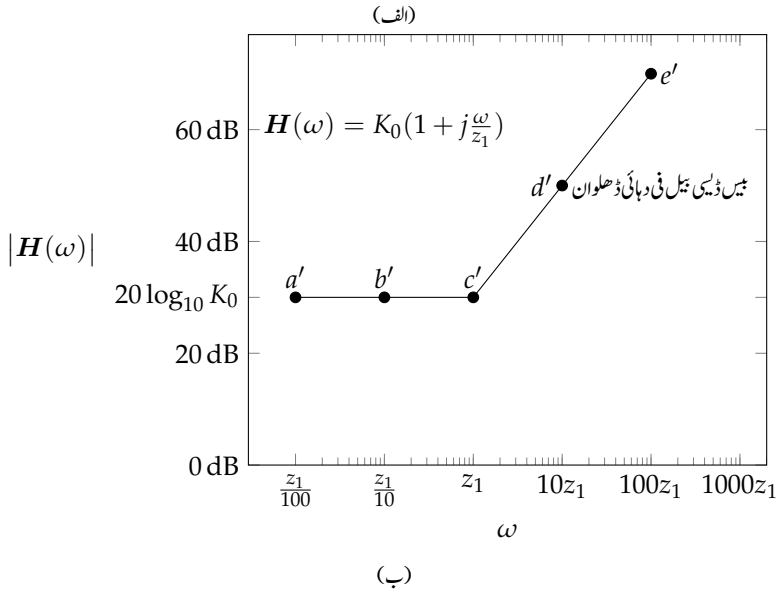
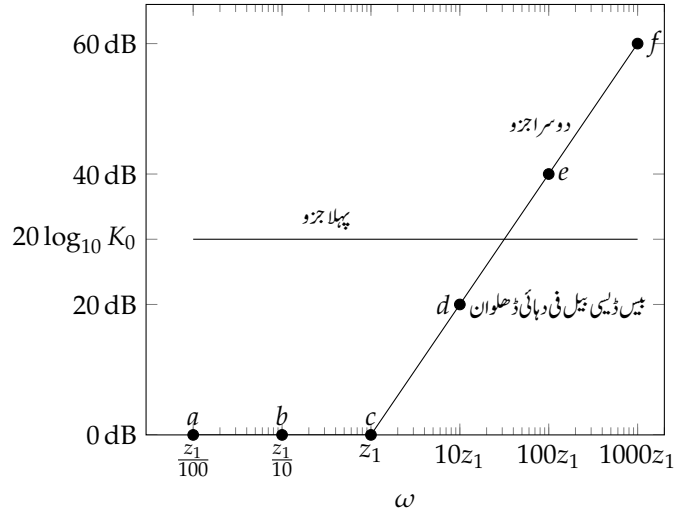
جس کی قیمت $\omega = z_1$ پر

$$20 \log_{10} \frac{\omega}{z_1} = 20 \log_{10} \frac{z_1}{z_1} = 20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

اور $\omega = 10z_1$ پر

$$20 \log_{10} \frac{\omega}{z_1} = 20 \log_{10} \frac{10z_1}{z_1} = 20 \log_{10} 10 = 20 \text{ dB}$$

حاصل ہوتی ہے۔ ان قیمتوں کو شکل 12.9-الف میں نقطہ c اور d ظاہر کرتی ہیں۔ اسی طرح $\omega = 100z_1$ اور $\omega = 1000z_1$ پر اس جزو کی قیمتیں 40 dB اور 60 dB حاصل ہوتی ہیں جنہیں شکل میں نقطہ e اور f ظاہر کرتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\omega = z_1$ سے سیدھا خط نکلتا ہے جس کی قیمت $10z_1$ تعدد پر بڑھ کر 20 dB ہو جاتی ہے۔ یوں نقطہ c پر تعدد z_1 کے برابر ہے اور مساوات 12.20 کے دوسرے جزو کی قیمت 0 dB ہے۔ تعدد دس گنا یعنی $\omega = 10z_1$ کرنے سے اس جزو کی قیمت 20 dB ہو جاتی ہے جسے نقطہ d ظاہر کرتا ہے۔ تعدد مزید



شکل 12.9: ایک عدد صفر والے تبادلی تعامل کا مقداری بوڈا خط۔

دس گنا بڑھانے $\omega = 100z_1$ سے اس جزو کی قیمت مزید 20 dB بڑھ کر 40 dB ہو جاتی ہے جس سے نقطہ e حاصل ہوتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ $\omega = z_1$ تعداد سے شروع ہوتے اس خط کی ڈھلوان بیس ڈیسی بیل فی دہائی کے برابر ہے۔

مساوات 12.20 کے اجزاء کا مجموعہ لیتے ہوئے شکل 12.9-ب حاصل ہوتا ہے۔ شکل-الف میں $\omega = \frac{z_1}{100}$ تعداد پر پہلا جزو $20 \log_{10} K_0$ اور دوسرا جزو 0 dB کے برابر ہے لہذا ان کا مجموعہ $20 \log_{10} K_0$ کے برابر ہو گا جسے شکل-ب میں نقطہ a' دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح بقایا تعداد پر مجموعہ لیتے ہوئے b' ، c' ، d' اور e' نقطے حاصل کئے جاتے ہیں۔

شکل 12.9-ب کو دیکھتے ہوئے درج بالا تمام قصبے کا نچوڑ یہ ہے۔ صفر تعداد سے z_1 تعداد تک مساوات 12.18 کے متبادلی تفاعل کی مقدار $20 \log_{10} K_0$ رہتی ہے جبکہ z_1 تعداد سے اس کی مقدار بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھنے شروع ہو جاتی ہے اور مسلسل اسی شرح سے بڑھتی ہے۔ یوں مساوات 12.20 سے K_0 اور z_1 حاصل کرتے ہوئے مقداری بوڈا خط کھینچا جاسکتا ہے۔

شکل 12.10 میں مساوات 12.20 کے دوسرے جزو $20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_1^2}}$ کو ہلکی سیاہی میں کھینچا گیا ہے اور ساتھ ہی اس کا بوڈا خط گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ آئیں دونوں کی قیمتیں کونے پر حاصل کریں۔ کونا $\omega = z_1$ پر پایا جاتا ہے جس پر اس جزو کی اصل قیمت درج ذیل ہے

$$(12.21) \quad 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_1^2}} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{z_1^2}{z_1^2}} = 20 \log_{10} \sqrt{2} = 3 \text{ dB}$$

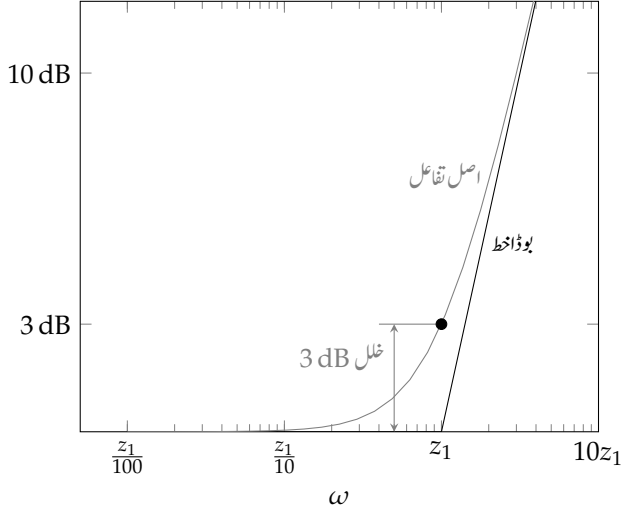
جبکہ بوڈا خط کی قیمت اس تعداد پر 0 dB ہے۔ یوں بوڈا خط کے قیمت میں کونے پر 3 dB کا خلل پایا جاتا ہے جو بوڈا خط اور اصل تفاعل کے قیمت میں زیادہ سے زیادہ فرق ہے۔ شکل 12.10 میں اس خلل کی وضاحت کی گئی ہے۔ اس شکل میں یہ بھی دیکھا جاسکتا ہے کہ کونے سے دس گنا کم تعداد $\omega = \frac{z_1}{10}$ یا دس گنا زیادہ تعداد $\omega = 10z_1$ پر اصل تفاعل اور بوڈا خط میں فرق قابل نظر انداز ہوتا ہے۔

آئیں اب درج ذیل متبادلی تفاعل لیتے ہیں جس میں ایک قطب پایا جاتا ہے۔

$$(12.22) \quad H(\omega) = \frac{K}{j\omega + p_1}$$

اس کو ترتیب دے کر لکھتے ہیں جہاں $K_0 = \frac{K}{p_1}$ لکھا گیا ہے۔

$$(12.23) \quad H(\omega) = \frac{K}{p_1 \left(1 + j\frac{\omega}{p_1}\right)} = \frac{K_0}{1 + j\frac{\omega}{p_1}}$$



شکل 12.10: کوئے پر بوذا خط میں 3 dB خلل پایا جاتا ہے۔

اس کی حتمی قیمت حاصل کرتے ہیں

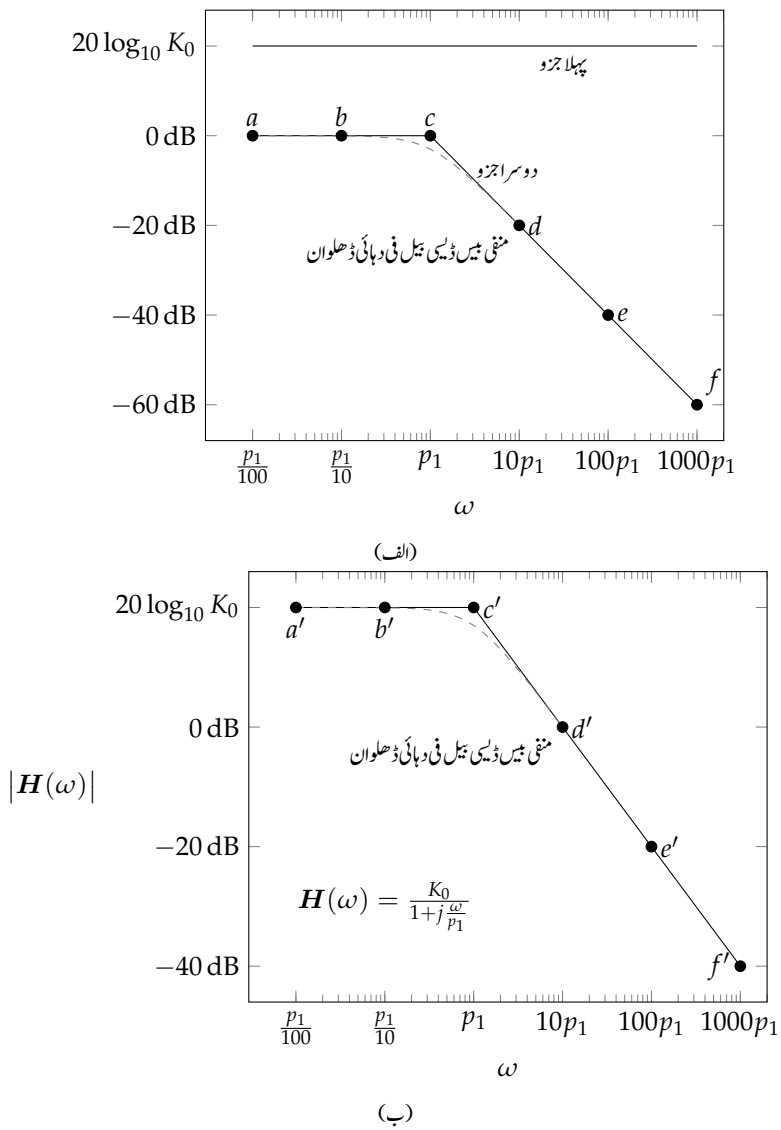
$$(12.24) \quad |H(\omega)| = \frac{K_0}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{p_1^2}}}$$

جس کو $20 \log_{10} |H(\omega)|$ صورت میں لکھتے ہیں

$$(12.25) \quad 20 \log_{10} |H(\omega)| = 20 \log_{10} K_0 - 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{p_1^2}}$$

جہاں $\log_{10} \frac{x}{y} = \log_{10} x - \log_{10} y$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

مساوات 12.25 کے دو اجزاء پائے جاتے ہیں جنہیں شکل 12.11-الف میں دکھایا گیا ہے جبکہ ان کے مجموعے کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ p_1 سے کم تعدد پر تبادلی تفاعل کی حتمی قیمت $20 \log_{10} K_0$ رہتی ہے جبکہ p_1 تعدد سے شروع ہو کر اس کی قیمت مسلسل منفی بیس ڈیسی بیل فی دہائی تبدیل ہوتی ہے۔ شکل-الف میں ہلکی سیاہی میں نقطہ دار لکیر سے اصل دوسرا جزو بھی دکھایا ہے جہاں بوذا خط میں -3 dB کا خلل واضح ہے۔ شکل-ب میں پورا تفاعل اور پورے تفاعل کا بوذا خط دکھائے گئے ہیں۔ بوذا خط میں کوئے پر منفی بیس ڈیسی بیل کا خلل پایا جاتا ہے۔ بوذا



شکل 12.11: ایک عدد قطب والے تباہی تفاعل کا مقداری بودا خط۔

خط اور اصل تفاعل میں زیادہ سے زیادہ خلل کو نہ پر پایا جاتا ہے۔ اگر کوئی تفاعل کے صفر پر ہو تب خلل 3 dB ہوتا ہے اور اگر کوئی تفاعل کے قطب کی وجہ سے ہو تب خلل -3 dB ہوتا ہے۔

مثال 12.3: تبادلہ تفاعل $H(\omega) = 10(j\omega + 10)$ کا بوڈا خط کھینچیں۔

حل: اس کو ترتیب دیتے ہوئے معیاری شکل میں لکھتے ہیں۔

$$H(\omega) = 100 \left(1 + j \frac{\omega}{10} \right)$$

یوں نیم لاگ محور پر خط کھینچتے ہوئے 10 rad s^{-1} سے کم تعدد پر تفاعل کی حتمی قیمت $20 \log_{10} 100 = 40 \text{ dB}$ ہو گی جبکہ اس تعدد سے زیادہ تعدد پر حتمی قیمت بتدریج بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھے گی۔ ان نتائج کو شکل 12.12 میں دکھایا گیا ہے۔ نقطہ a پر تعدد 10 radian/s اور تفاعل کی حتمی قیمت 40 dB ہے۔ تعدد کو دس گنا کرنے سے $\omega = 100 \text{ rad s}^{-1}$ حاصل ہوتا ہے جس پر تفاعل کی حتمی مقدار بڑھ پر $40 \text{ dB} + 20 \text{ dB} = 60 \text{ dB}$ ہو جاتی ہے جسے نقطہ b سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ان دو نقطوں سے گزرتی سیدھی خط کھینچی گئی ہے جس کی ڈھلوان بیس ڈیسی بیل فی دہائی ہو گی۔

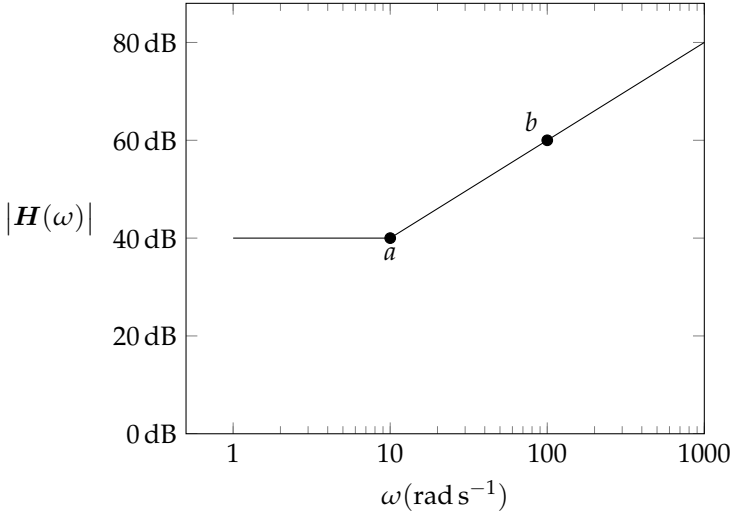
مثال 12.4: تبادلہ تفاعل $H(\omega) = \frac{1000(j\omega + 100)}{j\omega + 10000}$ کا مقداری بوڈا خط کھینچیں۔

حل: اس کو معیاری شکل میں لکھتے ہوئے

$$H(\omega) = 10 \left(\frac{1 + j \frac{\omega}{100}}{1 + j \frac{\omega}{10000}} \right)$$

حتمی قیمت کو ڈیسی بیل میں لکھتے ہیں۔

$$20 \log_{10} |H(\omega)| = 20 \log_{10} 10 + 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100^2}} - 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{10000^2}}$$



شکل 12.12: مثال 12.3 کا دور۔

درج بالا مساوات کے تینوں اجزاء کو شکل 12.13-الف میں اور ان کے مجموعے کو شکل 12.13-ب میں دکھایا گیا ہے۔ درج بالا مساوات کو دیکھ کر بوڈا مقداری خط کھینچا جاتا ہے جہاں $\omega = 100 \text{ rad s}^{-1}$ سے کم تعدد پر مقدار $20 \log_{10} 10 = 20 \text{ dB}$ ہے، ٹھیک $20 \log_{10} 10 = 20 \text{ dB}$ تعدد پر مقدار کی قیمت بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھنا شروع ہو جاتی ہے۔ تعدد $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$ سے زیادہ تعدد پر دوسرے جزو کے مثبت بیس ڈیسی بیل فی دہائی کو تیسرے جزو کا منفی بیس ڈیسی بیل فی دہائی مکمل طور پر ختم کرتا ہے لہذا بوڈا خط اسی قیمت پر برقرار رہتا ہے۔ شکل میں ہلکی سیاہی میں نقطہ دار لکیر سے اصل تفاعل کا خط بھی دکھایا گیا ہے جہاں بوڈا خط کے کونوں پر $\pm 3 \text{ dB}$ خلل واضح ہے۔

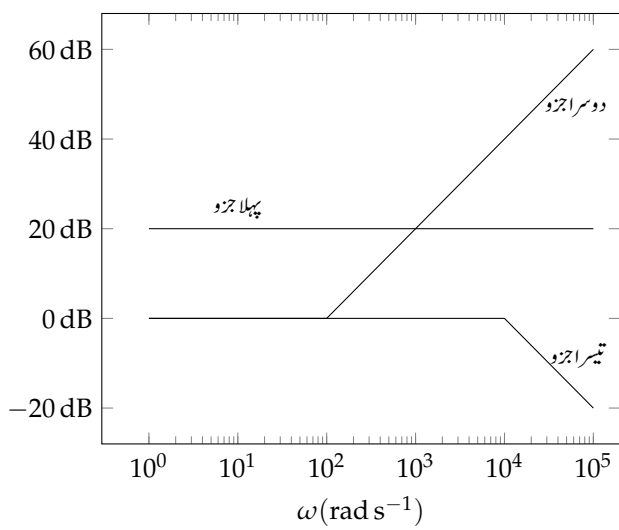
آئیں اب تبادلی تفاعل کے زاویائی بوڈا خط²⁸ کھینچنا سیکھیں۔ ہم درج ذیل تفاعل کو مثال بناتے ہیں

$$(12.26) \quad H(\omega) = K_0 \left(1 + j \frac{\omega}{z_1} \right)$$

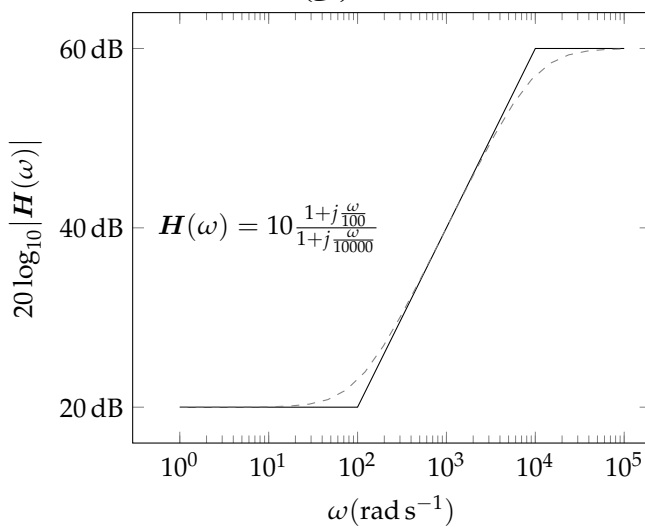
جس کا زاویہ ذیل ہے

$$(12.27) \quad \angle H(\omega) = \angle \tan^{-1} \frac{\omega}{z_1}$$

Bode phase plot²⁸

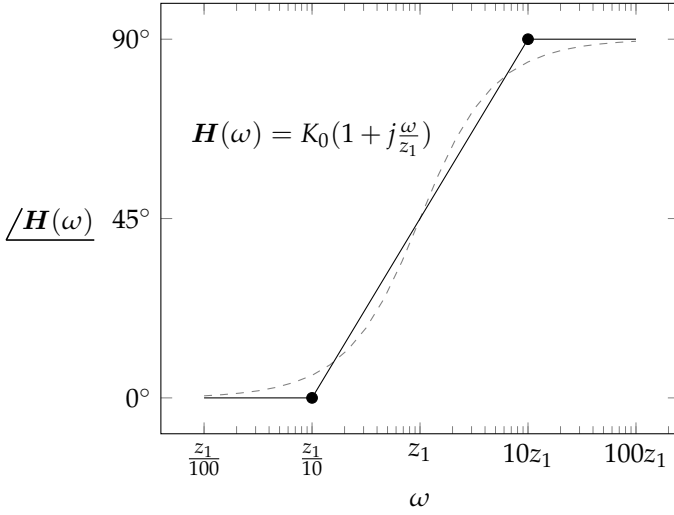


(الف)



(ب)

شکل 12.13: مثال 12.4 کا پوڈ انظر۔



شکل 12.14: ایک صفروالے تفاعل کا زاویائی بوڈا خط۔

جس کو شکل 12.14 میں ہلکی سیاہی سے نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ عین کونے ($\omega = z_1$) پر زاویہ

$$\angle H(z_1) = \angle \tan^{-1} \frac{\omega}{z_1} = \angle \tan^{-1} \frac{z_1}{z_1} = \angle 45^\circ$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ کونے سے دس گنا زیادہ تعدد ($\omega = 10z_1$) پر

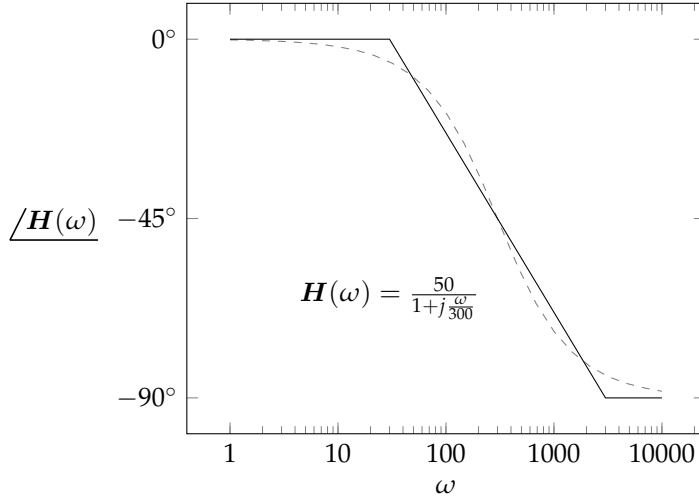
$$\angle H(10z_1) = \angle \tan^{-1} \frac{10z_1}{z_1} = \angle 84.3^\circ$$

اور کونے سے دس گنا کم تعدد ($\omega = \frac{z_1}{10}$) پر

$$\angle H(10z_1) = \angle \tan^{-1} \frac{\frac{z_1}{10}}{z_1} = \angle 5.7^\circ$$

زاویے حاصل ہوتے ہیں۔ بوڈا زاویائی خط میں اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کونے سے دس گنا کم تعدد ($\omega = \frac{z_1}{10}$) پر 0° اور کونے سے دس گنا زیادہ تعدد ($\omega = 10z_1$) پر 90° چنتے ہوئے انہیں سیدھی لکیر سے ملایا جاتا ہے جبکہ $0^\circ < \omega < \frac{z_1}{10}$ پر زاویہ 0° اور $\omega > 10z_1$ پر زاویہ 90° رکھا جاتا ہے۔ شکل 12.14 میں سیدھے خطوط پر مبنی بوڈا زاویائی خط کو گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 12.5: تبدیلی تفاعل $H(\omega) = \frac{50}{1 + j\frac{\omega}{300}}$ کا زاویائی بوڈا خط کھینچیں۔



شکل 12.15: ایک قطب والے تفاعل کا بوڈا زاویائی خط۔

حل: اس تفاعل کا زاویہ ذیل ہے جہاں کونا $\omega = 300 \text{ rad s}^{-1}$ پر پایا جاتا ہے۔

(12.28)

$$\angle H(\omega) = \frac{1}{\angle \tan^{-1} \frac{\omega}{300}} = \angle -\tan^{-1} \frac{\omega}{300}$$

اس تفاعل کو شکل 12.15 میں ہلکی سیاہی میں نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔

بوڈا خط میں کونے سے دس گنا کم تعدد پر زاویہ 0° اور کونے سے دس گنا زیادہ تعدد پر زاویہ -90° چنتے ہوئے ان نقطوں کو سیدھے خط سے ملایا جاتا ہے۔ یوں $\omega = 30 \text{ rad s}^{-1}$ پر 0° اور $\omega = 3000 \text{ rad s}^{-1}$ پر -90° چنتے ہوئے انہیں سیدھے لکیر سے ملایا گیا ہے۔ مزید $\omega = 30 \text{ rad s}^{-1}$ سے کم تعدد پر زاویہ 0° ہی رکھا جاتا ہے جبکہ $\omega = 3000 \text{ rad s}^{-1}$ سے زیادہ تعدد پر زاویہ -90° رکھا جاتا ہے۔ بوڈا زاویائی خط کو شکل 12.15 میں گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔

یوں کونے $(\omega = 300 \text{ rad s}^{-1})$ پر، کونے سے دس گنا زیادہ تعدد $(\omega = 3000 \text{ rad s}^{-1})$ پر اور کونے سے دس گنا کم تعدد $(\omega = 30 \text{ rad s}^{-1})$ پر زاویے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \angle H(200) &= \angle -\tan^{-1} \frac{300}{300} = \angle -45^\circ \\ \angle H(2000) &= \angle -\tan^{-1} \frac{3000}{300} = \angle -84.3^\circ \\ \angle H(20) &= \angle -\tan^{-1} \frac{30}{300} = \angle -5.7^\circ \end{aligned}$$

مثال 12.6: تبدیلی تفاعل $H(\omega) = \frac{j20\omega(1+j\frac{\omega}{200})}{1+j\frac{\omega}{30000}}$ کا زاویائی بوڈا خط کھینچیں۔

حل: اس تفاعل کا زاویہ لکھتے ہیں۔

$$\angle H(\omega) = \angle 90^\circ + \angle \tan^{-1} \frac{\omega}{200} - \angle \tan^{-1} \frac{\omega}{30000}$$

شمار کنندہ میں $j20\omega = 0 + j20\omega$ لکھتے ہوئے زاویہ $\tan^{-1} \frac{j20\omega}{0} = 90^\circ$ حاصل ہوتا ہے۔ دوسرا رکن 300 rad s^{-1} پر 0° اور 2 krad s^{-1} پر 90° جبکہ تیسرا رکن 300 rad s^{-1} پر 0° اور 300 krad s^{-1} پر -90° ہے۔ ان تمام ارکان کو شکل 12.16 میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 12.7: تبدیلی تفاعل $H(\omega) = \frac{j10\omega}{(1+j\frac{\omega}{100})(1+j\frac{\omega}{10000})}$ کا مقداری بوڈا خط کھینچیں۔

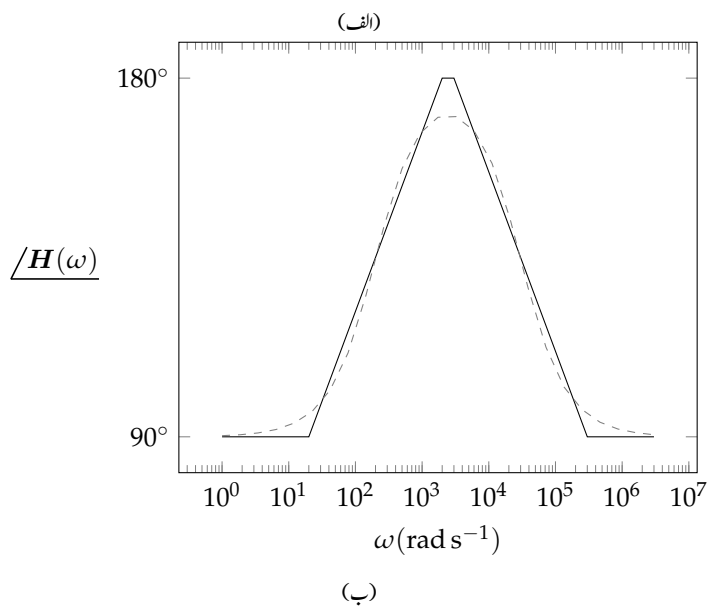
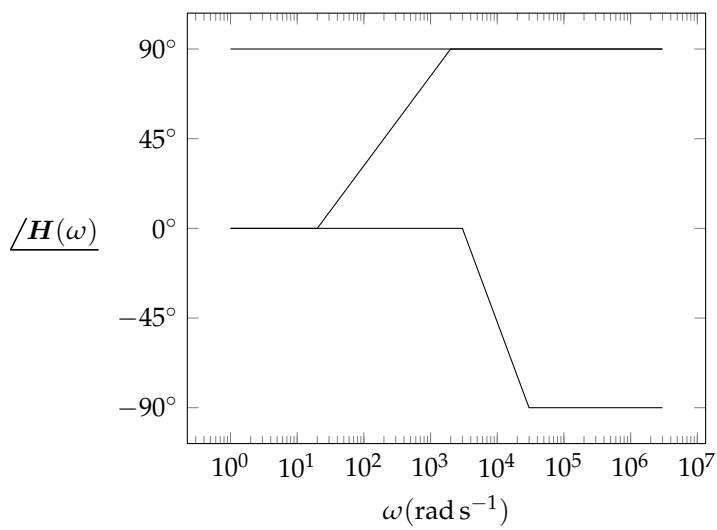
حل: اس تفاعل کی حتمی قیمت

$$|H(\omega)| = \frac{10\omega}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100^2}} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{10000^2}}}$$

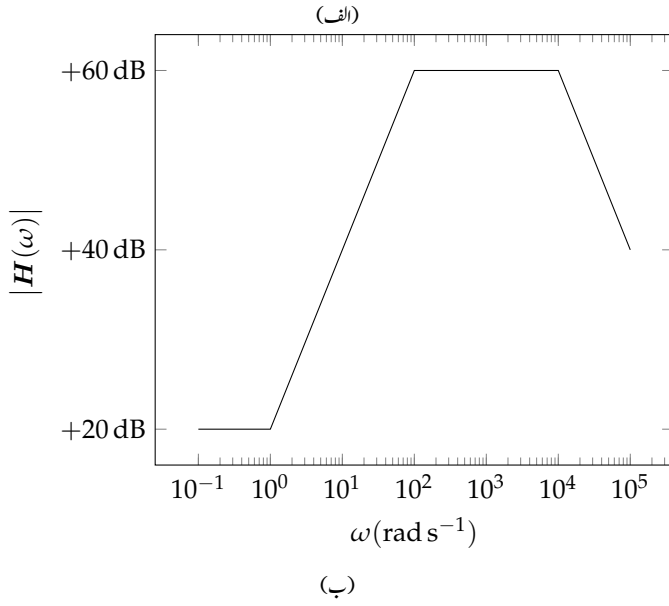
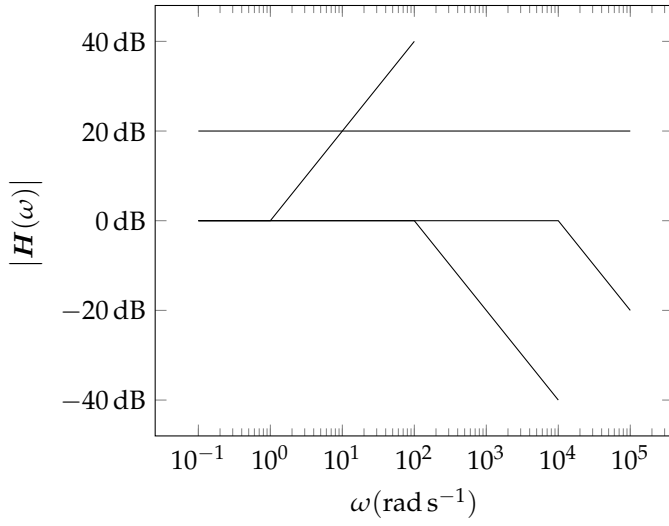
کو ڈیسی بیل میں لکھتے ہیں۔

$$(12.29) \quad 20 \log_{10} 10 + 20 \log_{10} \omega - 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100^2}} - 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{10000^2}}$$

مساوات 12.29 کا پہلا رکن 20 dB کا مستقل ہے۔ اس کا دوسرا رکن $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$ پر 0 dB کے برابر ہے جبکہ اس تعدد سے زیادہ تعدد پر بتدریج بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھتا ہے۔ تیسرے اور چوتھے ارکان کے بوڈا خط بالترتیب



شکل 12.16: مثال 12.6 کا زاویائی پوڈا خط۔



شکل 12.17: ایک صفر اور دو قطب والے تفاعل کا بوڈا مقدار کی خط۔

12.17- الف اور ان کا مجموعہ شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔
 10 krad s^{-1} اور 100 rad s^{-1} تعدد پر منفی بیس ڈیسی بیل فی دہائی گھٹنا شروع ہوتے ہیں۔ ان تمام ارکان کو شکل

ہمیں عموماً درمیانی تعدد پر بوڈا خط میں زیادہ دلچسپی ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں بوڈا مقداری خط درمیانی تعدد ($100 \text{ rad s}^{-1} < \omega < 10 \text{ krad s}^{-1}$) سے شروع کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ دونوں کونوں سے دور یعنی $\omega \ll 10 \text{ krad s}^{-1}$ اور $\omega \gg 100 \text{ rad s}^{-1}$ پر $1 + \frac{\omega^2}{100^2} \approx \frac{\omega^2}{100^2}$ اور $1 + \frac{\omega^2}{10000^2} = 1$ لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$|H(\omega)| = \frac{10\omega}{\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{100^2}}\right) (\sqrt{1})} = 1000$$

لہذا درمیانی تعددی پٹی پر ڈیسی بیل میں مقدار درج ذیل ہوگی

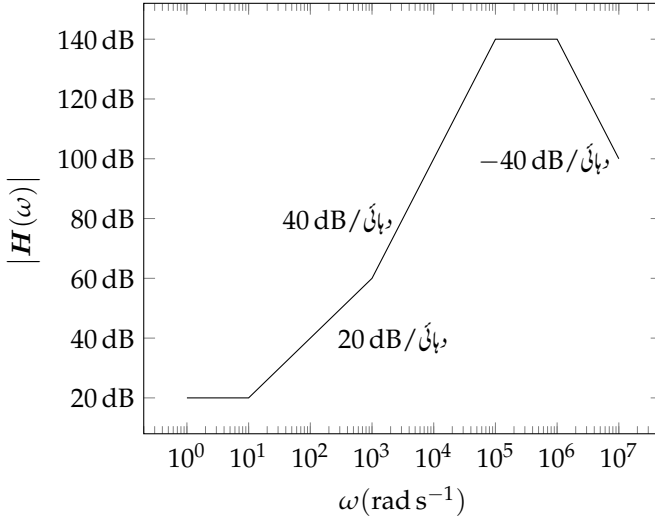
$$20 \log_{10} |H(\omega)| = 20 \log_{10} 1000 = 60 \text{ dB}$$

جسے شکل 12.17-ب میں $\omega = 100 \text{ rad s}^{-1}$ تا 10 krad s^{-1} دکھایا گیا ہے۔ چونکہ حقیقت میں پست تعددی کونے سے کم تعدد پر مقدار مسلسل بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھتے ہوئے عین $\omega = 100 \text{ rad s}^{-1}$ پر 60 dB تک پہنچتی ہے لہذا پست تعددی کونے سے بیس ڈیسی بیل فی دہائی ڈھلوان کا خط کھینچیں۔ اسی طرح بلند تعدد کونے پر بھی بیس ڈیسی بیل فی دہائی ڈھلوان کا خط کھینچیں۔ یوں مکمل بوڈا خط حاصل ہوگا۔

مثال 12.8: تبادلی تفاعل $H(\omega) = \frac{10(1+j\frac{\omega}{10})(1+j\frac{\omega}{1000})}{(1+j\frac{\omega}{10000})^2(1+j\frac{\omega}{100000})}$ کا مقداری بوڈا خط کھینچیں۔

حل: تقاول کی مقدار کو ڈیسی بیل میں لکھتے ہیں۔ ان کا مجموعہ شکل 12.18 میں دکھایا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} 20 \log_{10} |H(\omega)| &= 20 \log_{10} 10 + 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{10^2}} + 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{10^6}} \\ &\quad - 40 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{10^{10}}} - 40 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{10^{12}}} \end{aligned}$$



شکل 12.18: مثال 12.8 کا مقداری بوڈا خط۔

یہاں 10 rad s^{-1} پر درج بالا مساوات کا دوسرا جزو بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھنا شروع ہو جاتا ہے جبکہ تیسرا جزو اسی شرح سے 1000 rad s^{-1} پر بڑھنا شروع ہوتا ہے۔ یوں ان کا مجموعہ لیتے ہوئے 1000 rad s^{-1} تعداد سے خط کی ڈھلوان 40 dB فی دہائی ہو گی۔ اسی طرح 100 krad s^{-1} پر چھوٹا جزو 40 dB فی دہائی سے گھٹنا شروع ہوتا ہے جو دوسرے اور تیسرے اجزاء کو ختم کرتا ہے لہذا بوڈا خط برقرار 140 dB پر رہتا ہے۔ آخر کار 1 Mrad s^{-1} پر پانچواں جزو چالیس ڈیسی بیل فی دہائی سے گھٹنا شروع ہوتا ہے۔

تبادلی تعامل کے صفر اور قطب مخلوط اعداد بھی ہو سکتے ہیں۔ ایسی صورت میں ان کے جوڑی دار جوڑے پائے جاتے ہیں۔ انہیں ان پر غور کریں۔ تبادلی تعامل

$$H(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)}$$

کے قوسین کو ضرب دیتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں۔

$$H(s) = \frac{K}{s^2 + s(a+b) + ab}$$

$$= \frac{K}{ab[1 + \frac{s(a+b)}{ab} + \frac{s^2}{ab}]}$$

اس کو درج ذیل معیاری صورت میں لکھا جاسکتا ہے

$$(12.30) \quad H(s) = \frac{K_0}{1 + 2\zeta(s\tau) + (s\tau)^2}$$

جہاں

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

$$\zeta = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$$

کے برابر ہیں۔ مساوات 12.30 میں ζ کو تقصیری تناسب²⁹ کہتے ہیں۔

فرض کریں کہ ہمیں مساوات 12.30 دی گئی ہے اور ہم اس کے قطب جاننا چاہتے ہیں۔ قطب جاننے کے لئے نسب نما کے جذر حاصل کرنے ہوں گے جنہیں دو درجی مساوات کے کلیے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$s = \frac{-2\zeta\tau \mp \sqrt{4\zeta^2\tau^2 - 4\tau^2}}{2\tau^2}$$

جذر کی علامت کے اندر مقدار کی قیمت صفر سے زیادہ، صفر کے برابر یا صفر سے کم ممکن ہے یعنی

$$4\zeta^2\tau^2 - 4\tau^2 > 0$$

$$4\zeta^2\tau^2 - 4\tau^2 = 0$$

$$4\zeta^2\tau^2 - 4\tau^2 < 0$$

جن سے بالترتیب درج ذیل شرائط حاصل ہوتے ہیں۔

$$\zeta > 1 \quad \text{حقیقی دو عدد مختلف قطب}$$

$$(12.31) \quad \zeta = 1 \quad \text{حقیقی دو عدد یکساں قطب}$$

$$\zeta < 1 \quad \text{جوڑی دار مخلوط قطب}$$

تقصیری تناسب کی قیمت اکائی سے زیادہ یا اکائی کے برابر ہونے کی صورت میں حقیقی قطب پائے جاتے ہیں جن پر ہم غور کر چکے ہیں۔ انہیں مخلوط قطب پر غور کریں۔

مشق 12.7: تبادلی تفاعل $H(s) = \frac{35}{4s^2 + 2s + 1}$ کا τ اور ζ حاصل کریں۔ اس تفاعل کے قطب بھی دریافت کریں۔ تفاعل کو اجزائے ضربی کی صورت میں لکھیں۔

جواب: $\tau = 2$ ، $\zeta = 0.5$ ، $p_1 = -s_1 = \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{4}$ ، $p_2 = -s_2 = \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{4}$ ،

$$H(s) = \frac{35}{(s + \frac{1}{4} + j\frac{\sqrt{3}}{4})(s + \frac{1}{4} - j\frac{\sqrt{3}}{4})}$$

مساوات 12.30 میں $s = j\omega$ پر کر کے ترتیب دیتے ہوئے

$$H(\omega) = \frac{K_0}{1 + 2\zeta(j\omega\tau) + (j\omega\tau)^2}$$

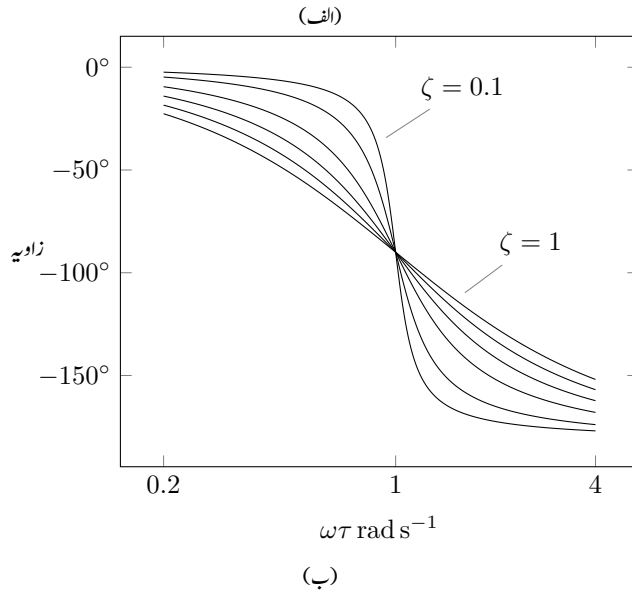
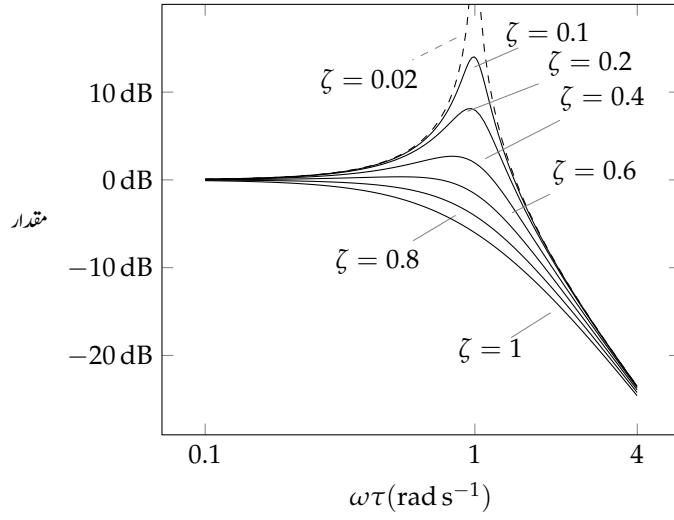
$$= \frac{K_0}{1 - \omega^2\tau^2 + j2\zeta\omega\tau}$$

اس کی حتمی مقدار کو ڈیسی بیل میں لکھتے ہیں۔

$$(12.32) \quad 20 \log_{10} |H(\omega)| = 20 \log_{10} K_0 - 20 \log_{10} \sqrt{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + (2\zeta\omega\tau)^2}$$

مساوات 12.32 کا پہلا جزو مستقل ہے جبکہ دوسرے جزو کی مقدار کا دار و مدار تعدد کے علاوہ تقصیری تناسب پر بھی منحصر ہے۔ شکل 12.19-الف میں مختلف ζ کے لئے مساوات 12.32 کے دوسرے جزو کے خطوط دکھائے گئے ہیں۔ اب تک ہم دیکھتے آرہے ہیں کہ قطب پر مقداری خط گھٹنے شروع ہوتا ہے لیکن یہاں ایسا نہیں ہو رہا ہے۔ مخلوط قطبین کی صورت میں مقداری خط گھٹنے سے پہلے بڑھتا ہے۔ بڑھنے کی مقدار کا دار و مدار ζ پر ہے۔ تقصیری تناسب کی قیمت صفر ($\zeta = 0$) ہونے کی صورت میں $\omega\tau = 1$ پر تفاعل بے قابو بڑھتا ہے۔ شکل میں $\zeta = 0.02$ کے خط کو نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ تقصیری تناسب کی قیمت صفر ہونا دور میں گونج یا گمک³⁰ کو ظاہر کرتی ہے۔

شکل 12.19-ب میں تبادلی تفاعل کا زاویائی خط $\zeta = 0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$ کے لئے دکھایا گیا ہے۔



شکل 12.19: مختلف تقصیری تناسب کے لئے مخلوط جوڑی دار قطب کے تفاعل کے خط۔

12.4 گمکی ادوار

سلسلہ وار گمک

شکل 12.20 میں سلسلہ وار دور دکھایا گیا ہے جس کی رکاوٹ

$$(12.33) \quad Z(\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$$

ہے۔ قوسین کی قیمت صفر ہونے کی صورت میں اس دور کی رکاوٹ حقیقی مقدار

$$(12.34) \quad Z(\omega) = R$$

یعنی مزاحمتی ہوگی۔ ایسا ایک مخصوص تعدد ω_0 پر ممکن ہے جسے قوسین صفر کے برابر پر کرنے

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

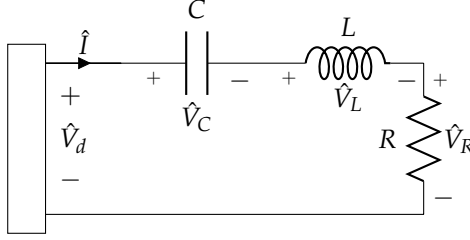
سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

$$(12.35) \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{گمکی تعدد}$$

اس تعدد (ω_0) کو دور کی گمکی تعدد³¹ کہتے ہیں اور اس تعدد پر دور گونجتا یا گمکتا ہے۔ ایسا دور جو گونج سکتا ہو کو گمکی دور³² کہتے ہیں۔

گمکی تعدد پر امالی متعاملیت اور برق گیر متعاملیت برابر ہوتے ہیں۔ چونکہ سلسلہ وار دور میں یکساں رو پائی جاتی ہے لہذا گمکی تعدد پر امالی دباو اور برق گیر دباو مقدار میں برابر لیکن آپس میں 180° زاویے پر ہوں گے۔ زاویائی طور پر آپس میں بالکل الٹ ہونے کی بنا ان کا مجموعہ صفر کے برابر ہو گا اور یوں شکل 12.20 میں داخلی دباو \hat{V}_d اور مزاحمتی دباو \hat{V}_R برابر ہوں گے۔

resonant frequency³¹
resonant circuit³²



شکل 12.20: سلسلہ وار RLC دور۔

گمکی تعدد سے ہٹ کر کسی بھی تعدد پر مساوات 12.33 کا خیالی جزو صفر کے برابر نہیں ہو گا لہذا رکاوٹ کی حتمی قیمت R سے زیادہ ہو گی۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ گمکی تعدد پر رکاوٹ کی قیمت کم سے کم ہو گی اور رو کی قیمت زیادہ سے زیادہ ہو گی۔ گمکی تعدد پر دور میں رو اور داخلی دباؤ ہم زاویہ ہوں گے۔ گمکی تعدد سے کم تعدد پر برق گیر متعاملیت کی مقدار امالی متعاملیت کے مقدار سے زیادہ ہو گی لہذا سلسلہ وار رکاوٹ برق گیر خاصیت رکھے گا اور داخلی دباؤ سے رو آگے پائی جائے گی۔ اس کے برعکس گمکی تعدد سے زیادہ تعدد پر امالی متعاملیت کی مقدار برق گیر متعاملیت کی مقدار سے زیادہ ہو گی لہذا کل رکاوٹ امالی ہو گا اور داخلی دباؤ سے رو پیچھے ہو گی۔ رکاوٹ کی مقدار بالمقابل تعدد کو شکل 12.21 میں دکھایا گیا ہے۔

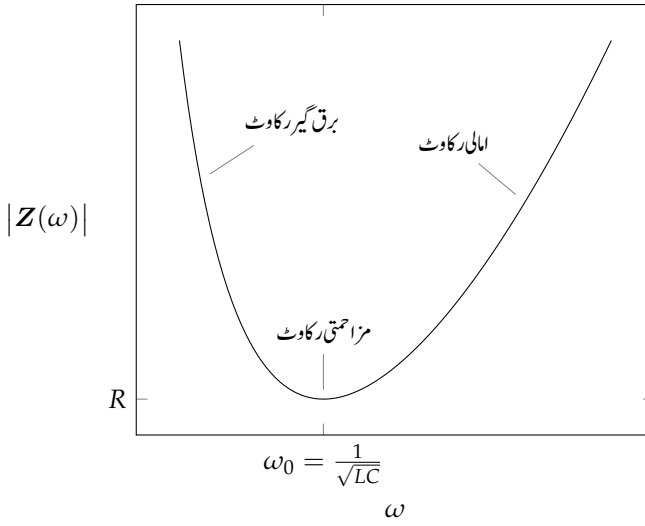
رو کے حوالے سے تینوں پوزوں کے دباؤ کے دوری سمتیات شکل 12.22 میں دکھائے گئے ہیں۔ گمکی تعدد سے کم تعدد پر برق گیر کا دباؤ امالہ گیر کے دباؤ سے زیادہ ہے لہذا داخلی دباؤ V_d سے رو آگے ہے۔ گمکی تعدد پر داخلی دباؤ اور رو ہم زاویہ ہیں جبکہ گمکی تعدد سے زیادہ تعدد پر امالہ کی متعاملیت برق گیر کے متعاملیت سے زیادہ ہے لہذا امالی دباؤ کی قیمت برق گیر دباؤ سے زیادہ ہے اور یوں داخلی دباؤ سے رو پیچھے ہے۔ داخلی دباؤ اور رو کے مابین زاویہ θ_z مساوات 12.33 میں دیے رکاوٹ کا زاویہ ہے۔

$$(12.36) \quad \theta_z = \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

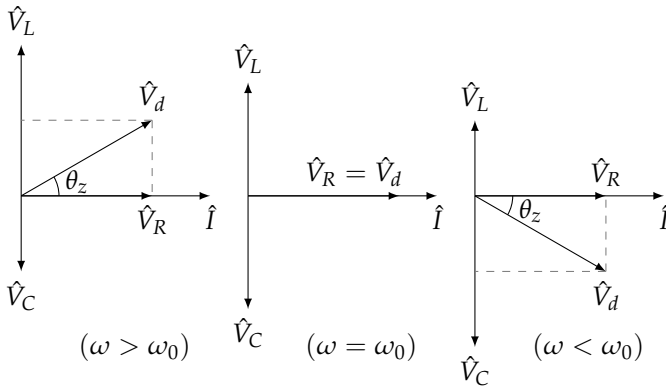
سلسلہ وار RLC دور کا معیاری مستقل Q ³³ نہایت اہم مقدار ہے جس کی تعریف درج ذیل مساوات دیتی ہے۔

$$(12.37) \quad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

quality factor³³



شکل 12.21: سلسلہ وار RLC کی رکاوٹ بالمتقابل تعدد کا خط۔



شکل 12.22: سلسلہ وار RLC کے دوری سمتیات۔

گمکی تعدد پر $\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$ ہوتا ہے لہذا رکاوٹ

$$Z = R + j \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} \right) = R$$

ہوگا جس سے

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}_d}{Z} = \frac{\hat{V}_d}{R}$$

اور

$$\hat{V}_L = j\omega_0 L \hat{I} = \frac{j\omega_0 L \hat{V}_d}{R}$$

$$\hat{V}_C = \frac{\hat{I}}{j\omega_0 C} = \frac{\hat{V}_d}{j\omega_0 RC}$$

$$\hat{V}_R = \hat{I}R = \hat{V}_d$$

حاصل ہوتے ہیں۔ درج بالا مساوات میں دونوں جانب حتمی قیمتیں لیتے ہوئے گمکی تعدد کے لئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

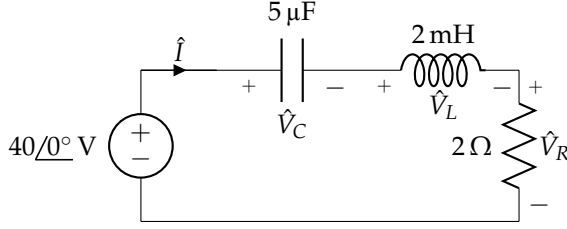
$$\begin{aligned} V_L &= QV_d \\ V_C &= QV_d \\ V_R &= V_d \end{aligned} \quad (12.38)$$

جہاں دباؤ کے حتمی قیمتوں کو V_L ، V_C ، V_R اور V_d لکھا گیا ہے۔ مساوات 12.38 کے تحت گمکی تعدد پر امالی دباؤ اور برق گیر دباؤ کی قیمتیں داخلی دباؤ کے Q گنا ہوں گے۔ یوں $Q > 1$ کی صورت میں امالی اور برق گیر دباؤ کی قیمت داخلی دباؤ سے زیادہ ہوگی۔

مثال 12.9: شکل 12.23 کے دور کی گمکی تعدد اور معیاری مستقل دریافت کریں۔ گمکی تعدد پر رو حاصل کرتے ہوئے تینوں پرزوں کے دباؤ حاصل کریں۔

حل: گمکی تعدد اور معیاری مستقل دریافت کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2 \times 10^{-3} \times 5 \times 10^{-6}}} = 10 \text{ krad s}^{-1} \\ Q &= \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{10000 \times 2 \times 10^{-3}}{2} = 10 \end{aligned}$$



شکل 12.23: مثال 12.9 کا دور۔

گمکی تعدد پر رو حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{I} = \frac{40/0^\circ}{2 + j10000 \times 2 \times 10^{-3} - \frac{j}{10000 \times 5 \times 10^{-6}}} = 20/0^\circ \text{ A}$$

چونکہ گمکی تعدد پر رکاوٹ مزاحمتی ہوتا ہے لہذا رو کو $i = \frac{40/0^\circ}{2} = 20/0^\circ \text{ A}$ سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

پرزوں کے دباؤ حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{V}_R = \hat{I}R = (20/0^\circ)(2) = 40/0^\circ \text{ V}$$

$$\hat{V}_L = (j\omega_0 L)\hat{I} = j10000 \times 2 \times 10^{-3} \times 20/0^\circ = 400/90^\circ \text{ V}$$

$$\hat{V}_C = \left(\frac{-j}{\omega_0 C} \right) \hat{I} = \frac{-j \times 20/0^\circ}{10000 \times 5 \times 10^{-6}} = 400/-90^\circ \text{ V}$$

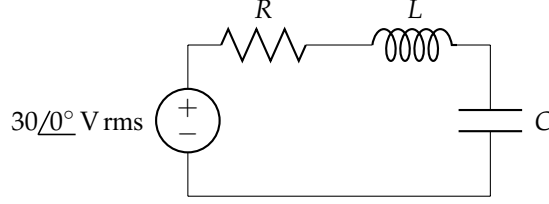
دباؤ کے یہی جوابات مساوات 12.38 کی مدد سے بھی حاصل کئے جاسکتے ہیں یعنی

$$V_R = V_d = 40 \text{ V}$$

$$V_L = QV_d = 10 \times 40 = 400 \text{ V}$$

$$V_C = QV_d = 10 \times 40 = 400 \text{ V}$$

جہاں مزاحمتی دباؤ اور داخلی دباؤ ہم زاویہ ہیں جبکہ امالی دباؤ اور برق گیر دباؤ بالترتیب داخلی دباؤ سے 90° آگے اور پیچھے ہیں۔ اس مثال میں $Q = 10$ ہے لہذا گمکی تعدد پر امالی اور برق گیر دباؤ کی قیمتیں داخلی دباؤ سے دس گنا زیادہ ہیں۔



شکل 12.24: مثال 12.10 اور مشق 12.8 کا دور۔

مثال 12.10: برق گیر استعمال کرتے ہوئے ضروری ہے کہ برق گیر کی استعداد سے تجاوز نہ کیا جائے۔ برق گیر پر اس کے استعداد سے زیادہ دباؤ ڈالنے سے برق گیر غیر فعال ہو جائے گا۔ برق گیر عموماً غیر فعال ہونے کی صورت میں خوفناک دھماکے سے پھٹتا ہے۔ جزو طاقت درست کرنے والے برق گیر یا کارخانوں میں دیگر استعمال ہونے والے بڑے جسامت کے برق گیر کا پھٹنا جان لیوا ثابت ہو سکتا ہے۔

آپ جانتے ہیں کہ تار لپیٹنے سے امالہ گیر بنایا جاتا ہے۔ یوں نہ چاہتے ہوئے بھی امالہ گیر میں درکار امالی رکاوٹ کے ساتھ ساتھ غیر مطلوب مزاحمتی رکاوٹ بھی پایا جاتا ہے۔ شکل 12.24 میں ایسا ہی امالہ گیر اور برق گیر سلسلہ وار جوڑے گئے ہیں جہاں $L = 90 \text{ mH}$ اور $C = 100 \mu\text{F}$ ہیں۔ امالہ گیر کا معیاری مستقل $Q = 6$ ہے۔ برق گیر پر گمکی تعدد پر دباؤ حاصل کریں۔

حل: معیاری مستقل کی قیمت سے گمکی تعدد پر برق گیر کا دباؤ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$V_C = QV_d = 6 \times 30 = 180 \text{ V rms}$$

یوں اس دور کو استعمال کرنے سے پہلے تسلی کر لیں کہ استعمال ہونے والے برق گیر کی استعداد کم از کم 180 V rms ہے۔

مشق 12.8: شکل 12.24 میں $C = 10 \mu\text{F}$ ہے اور گنکی تعدد پر $I = 15 \text{ A rms}$ اور $V_C = 120 \text{ V rms}$ ہیں۔ امالہ اور مزاحمت دریافت کریں۔

جوابات: $R = 2 \Omega$ ، $L = 0.64 \text{ mH}$

مشق 12.9: سلسلہ وار RLC دور میں داخلی دباؤ $22 \cos \omega t \text{ V}$ ہے۔ مزاحمت 2Ω اور $L = 120 \mu\text{H}$ ہے۔ دور کی گنکی تعدد $f_0 = 10 \text{ kHz}$ کے لئے درکار برق گیر معلوم کریں۔ دور میں f_0 ، $\frac{f_0}{2}$ اور $2f_0$ پر رو دریافت کریں۔

جوابات: $C = 2.11 \mu\text{F}$ ، $11 \cos(20000\pi t) \text{ A}$ ، $1.92 \cos(40000\pi - 80^\circ) \text{ A}$ ، $1.92 \cos(10000\pi + 80^\circ) \text{ A}$

آئیں شکل 12.20 میں دکھائے گئے سلسلہ وار RLC دور میں $\frac{\hat{V}_R}{\hat{V}_d}$ تناسب کے لئے Q ، ω_0 اور ω پر مبنی عمومی مساوات حاصل کریں۔ مساوات 12.37 سے $\frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0}$ اور $\frac{1}{RC} = Q\omega_0$ کو دور کے رکاوٹ میں پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} Z(j\omega) &= R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \\ &= R\left[1 + j\left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)\right] \\ &= R\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right] \end{aligned}$$

دور میں رو

$$\begin{aligned} \hat{I} &= \frac{\hat{V}_d}{Z} \\ &= \frac{\hat{V}_d}{R\left[1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]} \end{aligned}$$

سے مزاحمتی دباؤ $\hat{V}_R = \hat{I}R$ لکھ کر دباؤ کا تناسب لکھتے ہیں

$$\frac{\hat{V}_R}{\hat{V}_d} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

جس کی حتمی مقدار $M(\omega)$ اور زاویہ $\phi(\omega)$ درج ذیل ہیں جنہیں شکل 12.25 میں دکھایا گیا ہے۔

$$(12.39) \quad M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$(12.40) \quad \phi(\omega) = -\tan^{-1} Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

مقدار بالمقابل تعدد کا خط پٹی گزار فلٹر³⁴ کی طرح ہے۔ آئیں اس کے کونے دریافت کرتے ہیں۔ کونوں پر طاقت کی قیمت نصف ہوتی ہے۔ نصف طاقت $\frac{1}{\sqrt{2}}$ گنارو پر پایا جاتا ہے یوں مساوات 12.39 میں $M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ پر کرنے سے کونوں کی تعدد (انقطاعی تعدد) دریافت کئے جاسکتے ہیں۔

$$\frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

اس سے

$$Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \mp 1$$

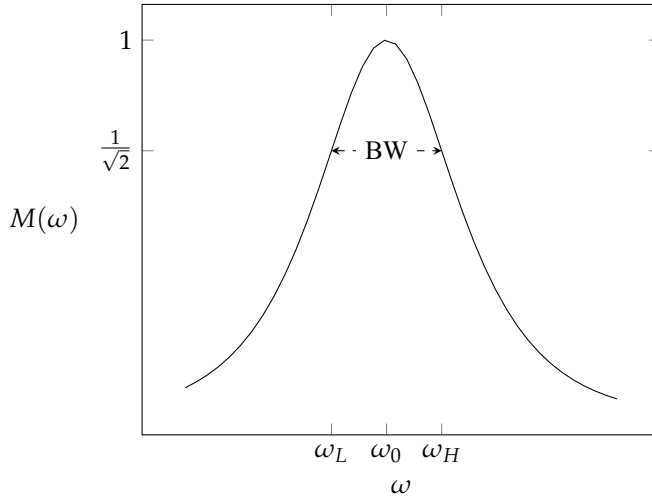
یعنی

$$\omega = \mp \frac{\omega_0}{2Q} \mp \omega_0 \sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} + 1}$$

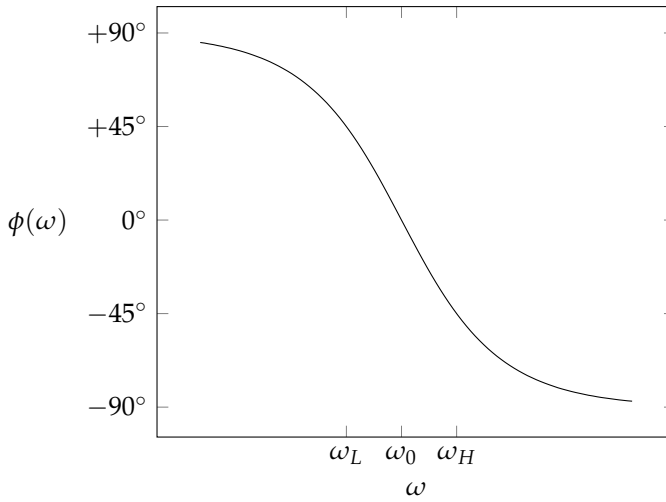
حاصل ہوتا ہے۔ منفی تعدد کے جوابات رد کرتے ہوئے صرف مثبت جوابات تسلیم کرتے ہوئے درج ذیل کونے حاصل ہوتے ہیں۔

$$(12.41) \quad \omega_L = \omega_0 \left[-\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} + 1} \right]$$

$$(12.42) \quad \omega_H = \omega_0 \left[+\frac{1}{2Q} + \sqrt{\frac{1}{(2Q)^2} + 1} \right]$$



(الف)



(ب)

شکل 12.25: مقدار بالتقابل تعدد اور زاویہ بالتقابل تعدد کے خط۔

پست تعددی کونے ω_L اور بلند تعددی کونے ω_H کے مابین خطہ عرض پٹی³⁵ کہلاتا اور BW سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(12.43) \quad BW = \omega_H - \omega_L = \frac{\omega_0}{Q} \quad \text{عرض پٹی}$$

عرض پٹی کے مساوات کو درج ذیل بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$(12.44) \quad BW = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{R}{L}$$

چونکہ کونوں پر طاقت گھٹ کر نصف رہ جاتا ہے اور نصف طاقت -3 dB کہلاتا ہے لہذا تعددی پٹی کو تین ڈیسی بیل پٹی³⁶ بھی کہتے ہیں۔

کونوں کے تعدد کو ضرب دینے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے لہذا گمگی تعدد دونوں انقطاعی تعدد کا ہندسی اوسط ہے۔

$$(12.45) \quad \omega_H \omega_L = \omega_0^2$$

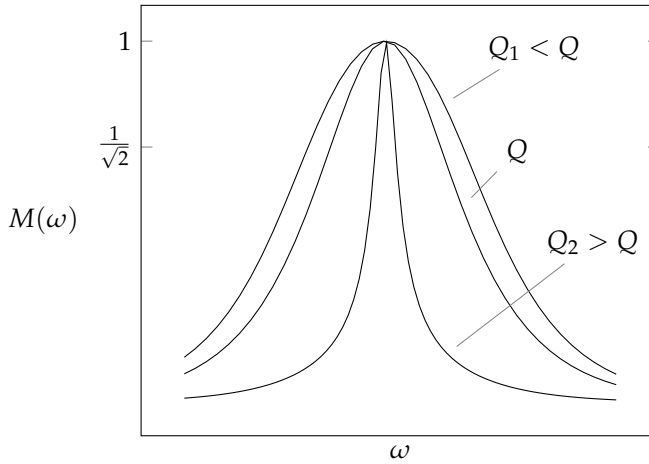
پست انقطاعی کونے پر زاویہ 45° ، بلند انقطاعی کونے پر 45° اور گمگی تعدد پر 0° ہے۔

مشق 12.10: شکل 12.23 کے دور کی پست انقطاعی تعدد ω_L ، بلند انقطاعی تعدد ω_H اور عرض پٹی BW دریافت کریں۔

جوابات: $BW = 1000 \text{ rad s}^{-1}$ ، $\omega_H = 10512 \text{ rad s}^{-1}$ ، $\omega_L = 9512 \text{ rad s}^{-1}$

مساوات 12.37 کے تحت زیادہ Q کے لئے کم R درکار ہے اور مساوات 12.43 کے تحت تنگ عرض پٹی کے لئے زیادہ Q درکار ہے۔ یوں تنگ Q کم R کی صورت میں حاصل ہوگا۔ تنگ عرض پٹی کا دور نہایت عمدگی سی مخصوص تعدد کو چننے کی صلاحیت رکھتا ہے۔ شکل 12.26 میں مختلف Q کے لئے مساوات 12.39 کو دکھایا گیا ہے۔ داخلی اشارات سے صرف وہ اشارات خارجی جانب پہنچتے ہیں جو عرض پٹی پر پائے جاتے ہوں۔ عرض پٹی سے باہر تعدد کے اشارات گھٹتے ہیں۔ یوں RLC بطور پٹی گزار فلٹر کام کرتا ہے۔

³⁵ bandwidth
³⁶ 3 dB bandwidth



شکل 12.26: عرض پٹی بالقابل معیاری مستقل۔

معیاری مستقل Q کو توانائی کے نقطہ نظر سے دیکھا جاسکتا ہے۔ شکل 12.27 پر غور کریں جہاں RLC کو گمکی تعدد کا اشارہ مہیا کیا گیا ہے۔ گمکی تعدد پر رکاوٹ $Z = R$ ہوتی ہے لہذا $i(t) = \frac{V_m}{R} \cos \omega_0 t$ A اور برق گیر کا دباؤ

$$\hat{V}_C = \frac{1}{j\omega_0 C} \hat{I} = \frac{1}{j\omega_0 t} \frac{V_m}{R} \angle 0^\circ = \frac{V_m}{\omega_0 RC} \angle -90^\circ$$

یعنی

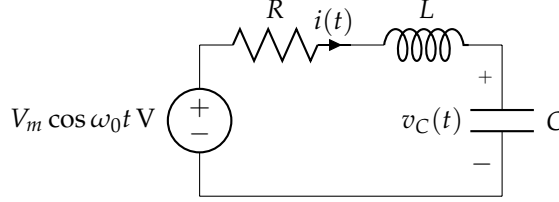
$$v_C(t) = \frac{V_m}{\omega_0 RC} \cos(\omega_0 t - 90^\circ) \text{ V} = \frac{V_m}{\omega_0 RC} \sin \omega_0 t \text{ V}$$

لکھا جائے گا۔ آپ کو یاد ہو گا کہ امالہ گیر میں $\frac{Li^2}{2}$ اور برق گیر میں $\frac{Cv^2}{2}$ توانائی ذخیرہ ہوتی ہے لہذا امالہ گیر کی توانائی

$$(12.46) \quad w_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) = \frac{1}{2} L \left(\frac{V_m}{R} \cos \omega_0 t \right)^2 = \frac{LV_m^2}{2R^2} \cos^2 \omega_0 t \text{ J}$$

اور برق گیر کی توانائی

$$w_C(t) = \frac{1}{2} Cv^2(t) = \frac{1}{2} C \left(\frac{V_m}{\omega_0 RC} \sin \omega_0 t \right)^2 = \frac{V_m^2}{2\omega_0^2 R^2 C} \sin^2 \omega_0 t \text{ J}$$



شکل 12.27: سلسلہ وار RLC کو گمئی تعدد کا اشارہ مہیا کیا گیا ہے۔

لکھی جائے گی۔ گمئی تعدد پر $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ہوتا ہے لہذا برق گیر کی توانائی کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(12.47) \quad w_C(t) = \frac{V_m^2}{2 \frac{1}{LC} R^2 C} \sin^2 \omega_0 t = \frac{LV_m^2}{2R^2} \sin^2 \omega_0 t \text{ J}$$

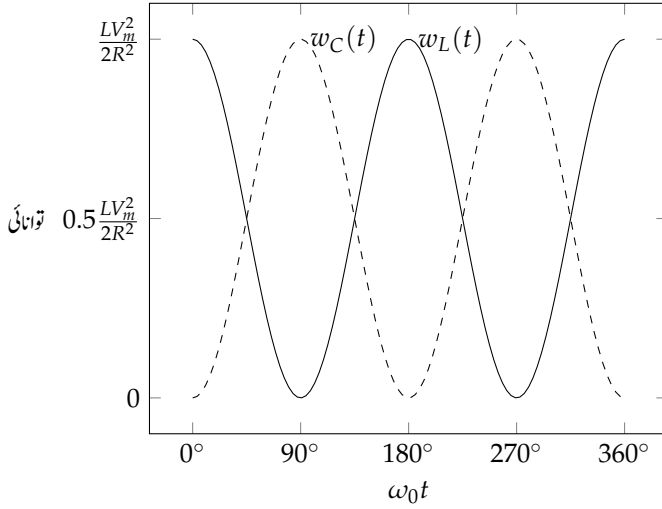
دور میں کل ذخیرہ توانائی ان دونوں کا مجموعہ ہے

$$(12.48) \quad \begin{aligned} w_{\text{ذخیرہ}} &= w_L(t) + w_C(t) \\ &= \frac{LV_m^2}{2R^2} \cos^2 \omega_0 t + \frac{LV_m^2}{2R^2} \sin^2 \omega_0 t \\ &= \frac{LV_m^2}{2R^2} \end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ یوں دور میں کل ذخیرہ توانائی وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتی اور اس کی مقدار اٹل ہے۔

مساوات 12.46 اور مساوات 12.47 کو شکل 12.28 میں دکھایا گیا ہے۔ ان مساوات کے تحت امالہ گیر اور برق گیر میں ذخیرہ توانائی وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ہے جبکہ مساوات 12.48 کے تحت ان کا مجموعہ اٹل مقدار ہے۔ یہ ایک دلچسپ صورت حال ہے۔ لمحہ $\omega_0 t = 0^\circ$ پر امالہ گیر کی توانائی زیادہ سے زیادہ جبکہ برق گیر کی توانائی صفر ہوتی ہے۔ اس کے برعکس $\omega_0 t = 90^\circ$ پر امالہ گیر کی توانائی صفر جبکہ برق گیر کی توانائی زیادہ سے زیادہ ہوتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جیسے جیسے ایک پرزے میں ذخیرہ توانائی گھٹتی ہے ویسے ویسے دوسرے پرزے میں ذخیرہ توانائی بڑھتی ہے۔ ہر لمحہ ایک پرزے میں توانائی کی کمی دوسرے پرزے میں توانائی کے اضافے کے برابر ہوتی ہے۔

گمئی تعدد پر سلسلہ وار RLC میں کل $\frac{LV_m^2}{2R^2}$ توانائی ذخیرہ ہوتی ہے۔ انہیں تعدد کے ایک چکر میں توانائی کا ضیاع w



شکل 12.28: گہکی دور میں توانائی کا تبادلہ۔

دریافت کریں۔ توانائی صرف مزاحمت میں ضائع ہوتی ہے۔

$$w_{\text{ضیاع}} = \int_0^T i^2(t) R dt = \int_0^T \left(\frac{V_m}{R} \cos \omega_0 t \right)^2 R dt = \frac{V_m^2 T}{2R}$$

کل ذخیرہ توانائی اور فی چکر توانائی کے ضیاع کا تناسب لکھتے ہیں۔

$$\frac{w_{\text{ذخیرہ}}}{w_{\text{ضیاع}}} = \frac{\frac{LV_m^2}{2R^2}}{\frac{V_m^2 T}{2R}} = \frac{L}{RT} = \frac{L}{R \frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{\omega_0 L}{2\pi R}$$

چونکہ $\frac{\omega_0 L}{R} = Q$ ہے لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جو معیاری مستقل Q کی عمومی تعریف ہے۔

$$(12.49) \quad Q = 2\pi \frac{w_{\text{ذخیرہ}}}{w_{\text{ضیاع}}} \quad \text{معیاری مستقل کی عمومی تعریف}$$

معیاری مستقل کی عمومی تعریف برقی میدان کے علاوہ میکانیکی میدان اور سمعی میدان میں بھی استعمال ہوتی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کم مزاحمت ضیاع کے دور کا معیاری مستقل زیادہ ہوگا۔

مثال 12.11: سلسلہ وار RLC دور میں $R = 1 \Omega$ ، $L = 2 \text{ mH}$ اور $C = 20 \mu\text{F}$ ہیں۔ دور کی ω_0 ، Q اور BW حاصل کریں۔ مزاحمت کی قیمت $R = 0.1 \Omega$ کرتے ہوئے تینوں قیمتیں دوبارہ حاصل کریں۔

حل: درکار قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{2 \times 10^{-3} \times 20 \times 10^{-6}}} = 5000 \text{ rad s}^{-1}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{1} \sqrt{\frac{2 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-6}}} = 10$$

$$\text{BW} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{5000}{10} = 500 \text{ rad s}^{-1}$$

مزاحمت کی قیمت دس گنا کم کرنے کے بعد تمام قیمتیں دوبارہ حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ گنگی تعدد میں مزاحمت کا کوئی دخل نہیں ہے لہذا اس کی قیمت وہی رہے گی۔

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{0.1} \sqrt{\frac{2 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-6}}} = 100$$

$$\text{BW} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{5000}{100} = 50 \text{ rad s}^{-1}$$

مزاحمت کی قیمت دس گنا کم کرنے سے معیاری مستقل کی قیمت دس گنا بڑھتی ہے جبکہ عرض پٹی دس گنا کم ہوتی ہے۔

مشق 12.11: سلسلہ وار RLC دور میں $R = 2 \Omega$ ، $L = 1 \text{ mH}$ اور $C = 2 \mu\text{H}$ ہیں۔ گنگی تعدد، معیاری مستقل اور عرض پٹی دریافت کریں۔

جوابات: $\omega_0 = 22361 \text{ rad s}^{-1}$ ، $Q = 11.2$ ، $\text{BW} = 2000 \text{ rad s}^{-1}$

مشق 12.12: سلسلہ وار RLC دور کا $R = 5 \Omega$ ، $\omega_0 = 6 \text{ krad s}^{-1}$ اور $\text{BW} = 600 \text{ rad s}^{-1}$ ہیں۔ آپ سے گزارش ہے کہ L اور C دریافت کریں۔

جوابات: $C = 3.33 \mu\text{F}$ ، $L = 8.33 \text{ mH}$

مثال 12.12: ایسا سلسلہ وار RLC دور تخلیق دیں کہ $\omega_0 = 1000 \text{ rad s}^{-1}$ اور $\text{BW} = 80 \text{ rad s}^{-1}$ ہوں۔

حل: گمکی تعدد اور عرض پٹی کے مساوات درج ذیل ہیں۔

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\text{BW} = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\frac{1}{\sqrt{LC}}}{\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{R}{L}$$

ہم دیکھتے ہیں کہ درکار متغیرات تین جبکہ مساوات دو عدد ہیں۔ تخلیق کے دوران عموماً ایسی ہی مسائل درپیش آتے ہیں جہاں ممکنہ مساوات سے تمام جوابات حاصل کرنا ممکن نہیں ہوتا۔ ایسے مسائل تجربے سے حل کئے جاتے ہیں۔ تجربے کی بنیاد پر کسی ایک متغیرہ کو چنتے ہوئے بقایا کو مساوات کے ذریعہ حاصل کیا جاتا ہے۔ اگر حاصل جوابات قابل قبول نہ ہوں تب متغیرہ کی قیمت تبدیل کرتے ہوئے دوبارہ حل کیا جاتا ہے۔ یہ سلسلہ اس وقت تک جاری رکھا جاتا ہے جب تک قابل قبول جوابات حاصل نہ ہوں جائے۔

ہم برق گیر کی قیمت ایسی چنتے ہیں جو دستیاب ہو مثلاً $C = 10 \mu\text{F}$ لہذا درج ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{1000^2 \times 10 \times 10^{-6}} = 0.1 \text{ H}$$

$$RL\text{BW} = 0.1 \times 80 = 8 \Omega$$

مساوات 12.38 کے تحت سلسلہ وار RLC دور میں گمکی تعدد پر امالی دباؤ اور برق گیر دباؤ کی قیمتیں داخلی دباؤ کے Q گنا ہوتی ہیں۔ انہیں دیکھیں کہ آیا امالی دباؤ اور برق گیر دباؤ کی زیادہ سے زیادہ قیمت گمکی تعدد پر ہی پائی جاتی ہے یا کہ کسی دوسری تعدد پر۔ شکل 12.29 کو دیکھتے ہوئے برق گیر کا دباؤ لکھتے ہیں

$$\hat{V}_C = \left(\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \right) \hat{V}_m$$

جس کو ترتیب دے کر ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(12.50) \quad \hat{V}_C = \frac{\hat{V}_m}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

اس کی حتمی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$(12.51) \quad |\hat{V}_C| = \frac{|\hat{V}_m|}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}$$

زیادہ سے زیادہ $|\hat{V}_C|$ پر تعدد بلند تر طاقت ω درج ذیل عمل

$$\frac{d|\hat{V}_C|}{d\omega} = 0$$

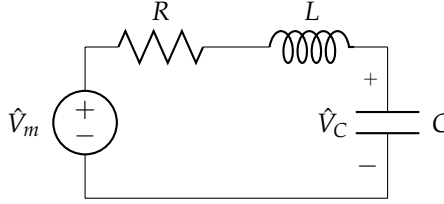
سے

$$(12.52) \quad \omega \text{ بلند تر طاقت} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} \right)^2}$$

حاصل ہوتی ہے جس میں $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ اور $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ پر کرتے ہوئے

$$(12.53) \quad \omega \text{ بلند تر طاقت} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_0}{Q} \right)^2}$$

$$= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$



شکل 12.29: برقی گیر پر زیادہ سے زیادہ دباؤ۔

لکھا جاسکتا ہے۔ درج بالا مساوات کے تحت زیادہ سے زیادہ دباؤ گمکی تعدد پر نہیں پایا جاتا اگرچہ Q کی قیمت زیادہ ہونے کی صورت میں درج بالا تعدد تقریباً گمکی تعدد ہی ہوگی۔ مساوات 12.53 کو مساوات 12.51 میں پر کرتے ہوئے اور $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ اور $\omega_0^2 R^2 C^2 = \frac{1}{Q^2}$ استعمال کرتے ہوئے زیادہ سے زیادہ دباؤ کی قیمت حاصل ہوتی ہے

$$(12.54) \quad |\hat{V}_C|_{\text{بلندتر}} = \frac{Q |\hat{V}_m|}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

جو $Q \gg 1$ کی صورت میں درج ذیل قیمت اختیار کرتا ہے۔

$$(12.55) \quad |\hat{V}_C|_{\text{بلندتر}} \approx Q |\hat{V}_m|$$

مثال 12.13: شکل 12.29 میں $L = 10 \text{ mH}$ اور $C = 1 \mu\text{F}$ ہیں۔ مزاحمت کی قیمت 50Ω اور 1Ω ہونے کی صورت میں ω_0 اور بلندتر ω دریافت کریں۔

حل: گمکی تعدد پر مزاحمت کا کوئی اثر نہیں ہے۔

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{10 \times 10^{-3} \times 1 \times 10^{-6}}} = 10 \text{ krad s}^{-1}$$

مزاحمت 50Ω کی صورت میں

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{10000 \times 10 \times 10^{-3}}{50} = 2$$

اور

$$\begin{aligned}
 \omega_{\text{بلندتر}} &= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \\
 &= 10000 \sqrt{1 - \frac{1}{2 \times 2^2}} \\
 &= 9354 \text{ rad s}^{-1}
 \end{aligned}$$

مزاہمت 1Ω کی صورت میں

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{10000 \times 10 \times 10^{-3}}{1} = 100$$

اور

$$\begin{aligned}
 \omega_{\text{بلندتر}} &= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \\
 &= 10000 \sqrt{1 - \frac{1}{2 \times 100^2}} \\
 &\approx 10000 \text{ rad s}^{-1}
 \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔

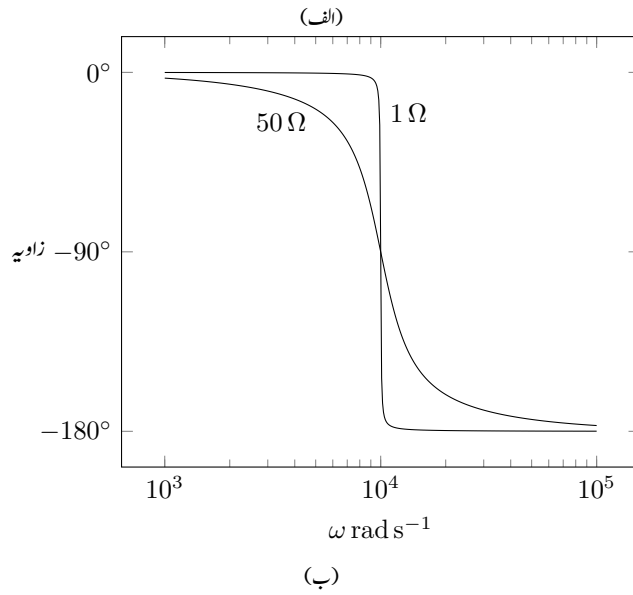
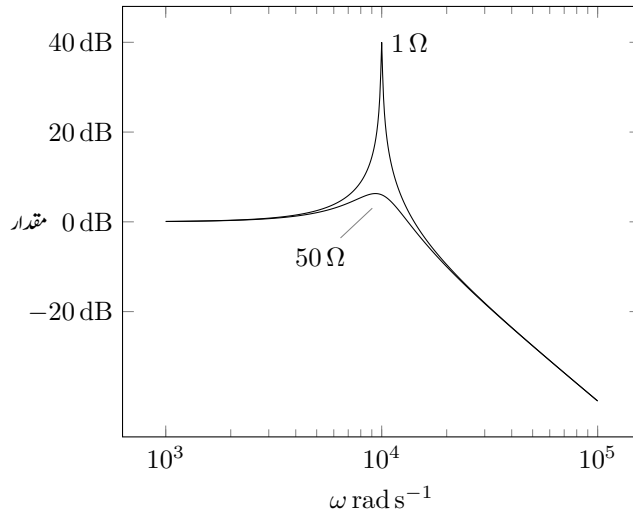
آئیں تبادلی تفاعل $\frac{\hat{V}_C}{\hat{V}_m}$ کے خطوط کھینچیں۔ مساوات 12.50 سے $R = 50 \Omega$ کی صورت میں تبادلی تفاعل لکھتے ہیں۔

$$(12.56) \quad \frac{\hat{V}_C}{\hat{V}_m} = \frac{1}{1 - 10^{-8}\omega^2 + j50 \times 10^{-6}\omega}$$

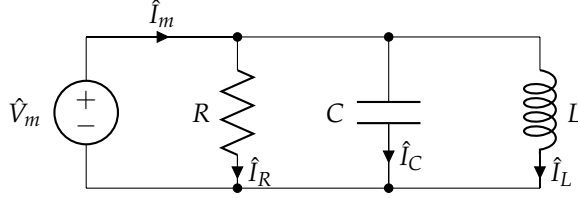
اسی طرح $R = 1 \Omega$ کی صورت میں تبادلی تفاعل لکھتے ہیں۔

$$(12.57) \quad \frac{\hat{V}_C}{\hat{V}_m} = \frac{1}{1 - 10^{-8}\omega^2 + j1 \times 10^{-6}\omega}$$

ان تبادلی تفاعل کو شکل 12.30 میں دکھایا گیا ہے۔ آپ نے دیکھا کہ زیادہ Q والا جال باریک بینی سے تعدد چنتا ہے جبکہ کم Q والا جال اتنی باریک بینی سے تعدد نہیں چنتا ہے۔



شکل 12.30: مثال 12.13 کے خطوط۔



شکل 12.31: متوازی RLC کی گمک۔

متوازی گمک

اب تک ہم سلسلہ وار RLC کے گمک پر غور کرتے رہے ہیں۔ حقیقت میں متوازی جڑے اور سلسلہ وار جڑے RLC میں مشابہت زیادہ اور فرق کم پایا جاتا ہے۔ شکل 12.31 میں متوازی RLC دکھایا گیا ہے جس کی کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں

$$\begin{aligned}\hat{I}_m &= \hat{I}_R + \hat{I}_L + \hat{I}_C \\ &= \frac{\hat{V}_m}{R} + j\omega C \hat{V}_m + \frac{\hat{V}_m}{j\omega L} \\ &= \hat{V}_m \left[G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right]\end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر $\frac{1}{R} = G$ لکھا گیا ہے۔ گمک تعدد پر $\omega C = \frac{1}{\omega L}$ ہوتا ہے لہذا درج ذیل ہوتی ہے۔

$$\hat{I}_m = G \hat{V}_m$$

دور کی داخلی فراوانی $Y(j\omega)$ درج ذیل ہے

$$(12.58) \quad Y(j\omega) = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}$$

جو گمکی تعدد پر

$$(12.59) \quad Y(j\omega_0) = R$$

ہے۔