برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 15

فوریئر تجزیہ

دوری تفاعل[1] سے مراد وہ تفاعل ہے جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہے جہاں T_0 **دوری عرصہ**[2] کہلاتی ہے۔

$$f(t) = f(t + nT_0), \quad n = \mp 1, \mp 2, \mp 3, \cdots \tag{15.1}$$

درج بالا مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی لمحہ t پر دوری تفاعل کی قیمت $f(t)$ اور اس لمحے سے T_0 وقت بعد تفاعل کی قیمت $f(t + T_0)$ برابر ہیں۔ شکل 15.1 میں اس کی وضاحت کی گئی ہے۔ دوری عرصے کو سیکنڈ (s) میں ناپا جاتا ہے۔ دوری عرصہ T_0 اور **تعدد** f_0 کا تعلق درج ذیل ہے جہاں تعدد کو ہرٹز[3] (Hz) میں ناپا جاتا ہے۔

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \tag{15.2}$$

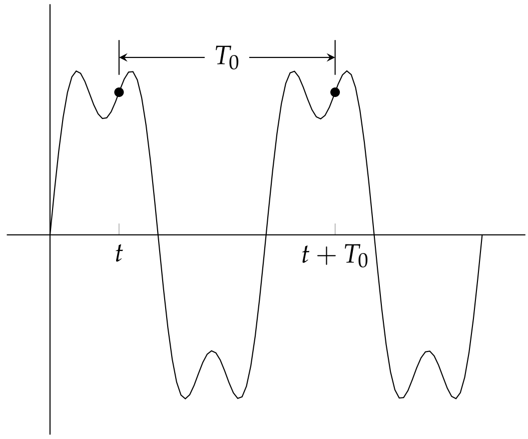
زاویائی تعدد ω_0 اور تعدد f_0 کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \tag{15.3}$$

زاویائی تعدد کو ریڈیئن فی سیکنڈ $(\mathrm{rad\,s^{-1}})$ میں ناپا جاتا ہے۔ شکل 15.2 میں چند **دوری امواج**[4] دکھائے گئے ہیں۔

---

[1] periodic function
[2] time period
[3] Hertz, Hz
[4] periodic wave



شکل 15.1: دوری عرصہ۔

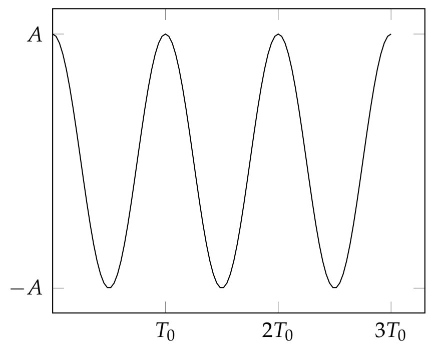
کسی بھی دوری تفاعل کو بطور درج ذیل **فوریئر تسلسل**[5] لکھا[6] جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \\
&= a_0 + a_1 \cos\omega_0 t + a_2 \cos(2\omega_0 t) + a_3 \cos(3\omega_0 t) + \cdots \\
&\quad + b_1 \sin\omega_0 t + b_2 \sin(2\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t) + \cdots
\end{aligned}
\tag{15.4}
$$

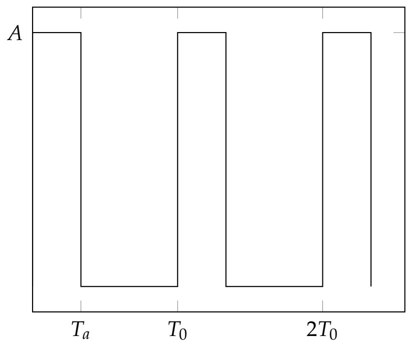
جہاں a_0 ، a_1 ، a_2 ، b_1 وغیرہ تسلسل کے **عددی سر**[7] کہلاتے ہیں۔ فوریئر تسلسل کی اوسط قیمت a_0 کے برابر ہے۔ ایک دوری عرصہ T_0 میں $\cos\omega_0 t$ یا $\sin\omega_0 t$ کی ایک لہر، $\cos(2\omega_0 t)$ یا $\sin(2\omega_0 t)$ کی دو لہریں اور $\cos(m\omega_0 t)$ یا $\sin(m\omega_0 t)$ کی m لہریں پوری آتی ہیں۔ اس حقیقت کو شکل 15.3 میں دکھایا گیا ہے جہاں وضاحت کی خاطر امواج کے حیطے مختلف رکھے گئے ہیں۔ فوریئر تسلسل میں $a_1 \cos\omega_0 t + b_1 \sin\omega_0 t$ **بنیادی رکن**[8] یا **بنیادی جزو** کہلاتا ہے، $a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t)$ **دوسرا ہارمونی رکن**[9] کہلاتا ہے، $a_3 \cos(3\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t)$ تیسرا ہارمونی رکن اور اسی طرح $a_m \cos(m\omega_0 t) + b_m \sin(m\omega_0 t)$ ایم ہارمونی رکن کہلاتا ہے۔ ہم یہاں اصل رک کر چند حقائق اور تکملات پر غور کرتے ہیں جو فوریئر تسلسل میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

---

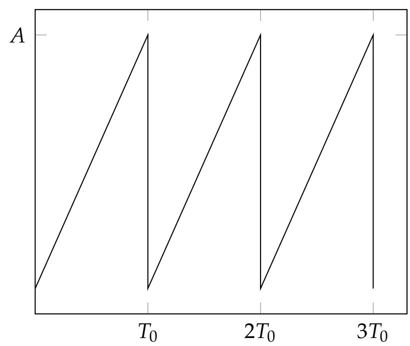
[5] Fourier series
[6] جین بپٹسٹ یوسف فوریئر نے حرارتی توانائی کے بہاو پر غور کے دوران اس تسلسل کو دریافت کیا۔
[7] coefficients
[8] fundamental component
[9] second harmonic



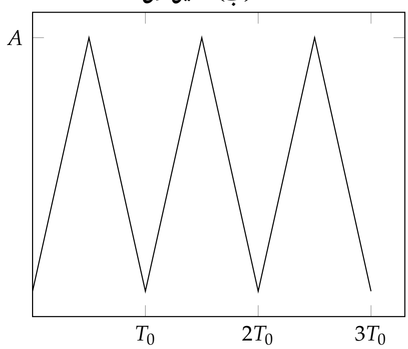
(الف) سائن نما موج۔



(ب) مستطیل موج۔

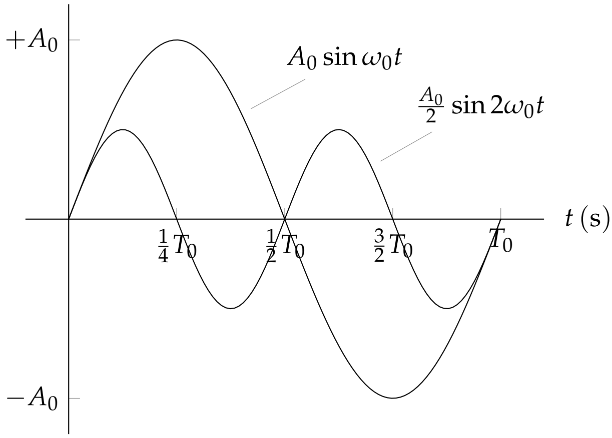


(پ) دندان موج۔



(ت) تکونی موج۔

شکل 15.2: چند دوری امواج۔



شکل 15.3: ایک دوری عرصہ میں فوریئر تسلسل کے ارکان کی تعداد۔

آپ دو سمتیوں کے **نقطہ ضرب**[10] سے خوب واقف ہیں۔ سمتیہ **A** اور **B** کا نقطہ ضرب یا **غیر سمتی ضرب**[11] درج ذیل ہے جہاں دونوں سمتیوں کے مابین زاویہ θ ہے۔

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB\cos\theta \tag{15.5}$$

آپس میں **عمودی**[12] سمتیوں کے مابین $\theta = 90°$ ہونے کی بدولت $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ ہوتا ہے جبکہ کسی بھی سمتیہ کے خود نقطہ ضرب کا جذر اس کے حیطے کے برابر ہوتا ہے۔

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}} \tag{15.6}$$

اسی سوچ کے ساتھ تفاعل کا نقطہ ضرب بیان کیا جاتا ہے۔

اگر تفاعل $f(t) \neq 0$ اور $g(t) \neq 0$ کے حاصل ضرب کا تکمل $a \leq t \leq b$ فاصلے پر صفر کے برابر ہو

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{15.7}$$

تو $a \leq t \leq b$ فاصلے پر ان تفاعل کو آپس میں **عمودی** تصور کیا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ دونوں تفاعل از خود غیر سمتی[13] اور غیر صفر ہیں۔

---

[10] dot product
[11] scalar product
[12] orthogonal
[13] scalar

کسی بھی مقدار کا مربع مثبت ہوتا ہے لہٰذا تفاعل کا مربع $f^2(t)$ ہر نقطے پر مثبت ہو گا۔ فاصلہ $a \le t \le b$ پر تفاعل کے **معیار**[14] $\| f(t) \|$ سے مراد

$$\| f(t) \| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{15.8}$$

ہے۔

مثال 15.1: ثابت کریں کہ $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر $\cos(m\omega_0 t)$ اور $\cos(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی ہیں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ اور $n = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہیں لیکن $m \ne n$ ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{T_0} \frac{\cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right] + \cos\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{\sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}\right|_0^{T_0} \\
&= \frac{\sin[(m+n)2\pi]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin[(m-n)2\pi]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} \\
&\quad - \frac{\sin[(m+n)0]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin[(m-n)0]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}
\end{aligned}$$

چونکہ m اور n عدد صحیح ہیں لہٰذا $m+n$ اور $m-n$ بھی عدد صحیح ہوں گے لہٰذا $\sin[(m+n)2\pi] = 0$ اور $\sin[(m-n)2\pi] = 0$ ہوں گے۔ اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (m \ne n) \tag{15.9}$$

---

[14] norm

مثال 15.2: ثابت کریں کہ $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر $\sin(m\omega_0 t)$ اور $\sin(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی ہیں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ اور $n = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہیں لیکن $m \neq n$ ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{T_0} \frac{\cos\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right] - \cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{\sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}}\right|_0^{T_0} \\
&= \frac{\sin[(m-n)2\pi]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin[(m+n)2\pi]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} \\
&\qquad - \frac{\sin[(m-n)0]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin[(m+n)0]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}}
\end{aligned}$$

چونکہ m اور n عدد صحیح ہیں لہٰذا $m+n$ اور $m-n$ بھی عدد صحیح ہوں گے لہٰذا $\sin[(m+n)2\pi] = 0$ اور $\sin[(m-n)2\pi] = 0$ ہوں گے۔ اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (m \neq n) \tag{15.10}$$

مثال 15.3: ثابت کریں کہ $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر $\cos(m\omega_0 t)$ اور $\sin(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی ہیں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ اور $n = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہیں۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^{T_0} \sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right] - \sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]\mathrm{d}t\\ &= \left. -\frac{\cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\cos\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}\right|_0^{T_0}\\ &= -\frac{\cos[(m+n)2\pi]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\cos[(m-n)2\pi]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}\\ &\qquad + \frac{\cos[(m+n)0]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\cos[(m-n)0]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}\end{aligned}$$

چونکہ m اور n عدد صحیح ہیں لہٰذا $m+n$ اور $m-n$ بھی عدد صحیح ہوں گے لہٰذا $\cos(m+n)2\pi = 1$ اور $\cos(m-n)2\pi = 1$ ہوں گے۔اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (m \neq n) \tag{15.11}$$

مثال 15.4: تفاعل $f(t) = \cos(m\omega_0 t)$ کا معیار $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر حاصل کریں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر معیار کو تکمل سے حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\| f(t) \|^2 &= \int_0^{T_0} \cos^2 \left(m \frac{2\pi}{T_0} t \right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \left[1 + \cos \left(2m \frac{2\pi}{T_0} t \right) \right] \mathrm{d}t \\
&= \left. \frac{t}{2} + \frac{\sin \left(2m \frac{2\pi}{T_0} t \right)}{4m \frac{2\pi}{T_0}} \right|_0^{T_0} \\
&= \frac{T_0}{2} + \frac{\sin 4m\pi}{4m \frac{2\pi}{T_0}} - \frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4m \frac{2\pi}{T_0}} \\
&= \frac{T_0}{2}
\end{aligned}
$$

دونوں اطراف کا جذر لیتے ہوئے $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر معیار ملتا ہے۔

$$
\| \cos(m\omega_0 t) \| = \sqrt{\int_0^{T_0} \cos^2(m\omega_0 t) \, \mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{T_0}{2}} \tag{15.12}
$$

مشق 15.1: تفاعل $f(t) = \sin m\omega_0 t$ کا معیار $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر درج ذیل ہے جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہے۔ اس معیار کو حاصل کریں۔

$$
\| \sin(m\omega_0 t) \| = \sqrt{\int_0^{T_0} \sin^2(m\omega_0 t) \, \mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{T_0}{2}} \tag{15.13}
$$

مشق 15.2: درج ذیل دو مساوات کو ثابت کریں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہے۔

$$\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{15.14}$$

$$\int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{15.15}$$

مساوات 15.9، مساوات 15.10 اور مساوات 15.11 مل کر ثابت کرتے ہیں کہ فوریئر تسلسل میں استعمال ہونے والا ہر تفاعل بقایا تمام تفاعل کے ساتھ $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر عمودی ہے۔یوں $\cos 3\omega_0 t$ کو مثال بناتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ $\cos(\omega_0 t)$ ، $\cos(2\omega_0 t)$ ، $\cos(4\omega_0 t)$ ، $\sin(\omega_0 t)$ ، $\sin(2\omega_0 t)$ ، $\sin(3\omega_0 t)$ وغیرہ کے ساتھ عمودی ہے۔

درج بالا تکملات حاصل کرنے کے بعد اصل مضمون یعنی فوریئر تسلسل پر دوبارہ آتے ہیں۔مساوات 15.9 تا مساوات 15.15 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.4 کے عددی سر $a_0, a_1, a_2, b_1, \cdots$ حاصل کئے جا سکتے ہیں۔آئیں ایسا ہی کریں۔

عددی سر a_0 کی قیمت دریافت کرنے کی خاطر ہم مساوات 15.4 کا تکمل $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر لیتے ہیں

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{T_0} a_0\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\\ &= a_0 T_0\end{aligned}$$

جہاں مساوات 15.14 اور مساوات 15.15 کو استعمال کرتے ہوئے مجموعے میں دیے تمام تکمل کو صفر کے برابر پر کیا گیا ہے۔یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\,\mathrm{d}t \tag{15.16}$$

مساوات 15.16 کہتا ہے کہ a_0 تفاعل $f(t)$ کی اوسط قیمت ہے۔

عددی سر a_m حاصل کرنے کی خاطر مساوات 15.4 کے دونوں اطراف کو $\cos(m\omega_0 t)$ سے ضرب دیتے ہوئے ایک دوری عرصے پر تکمل کرتے ہیں۔ہم تکمل کو $0 \le t \le T_0$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \\ \int_0^{T_0} a_0\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &+ \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} a_n\cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} b_n\sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{15.17}$$

دائیں ہاتھ پہلا تکمل مساوات 15.14 کی بنا صفر کے برابر ہے جبکہ مساوات 15.11 کے تحت تیسرا تکمل صفر کے برابر ہے۔آئیں دوسرے تکمل پر غور کریں۔

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} a_n\cos n\omega_0 t\cos m\omega_0 t\,\mathrm{d}t &= \\ \int_0^{T_0}\cos(m\omega_0 t)\,\big[a_1\cos\omega_0 t &+ a_2\cos(2\omega_0 t) + \cdots \\ &+ a_{m-1}\cos[(m-1)\omega_0 t] + a_m\cos(m\omega_0 t) + \cdots\big]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

اب اگر $n \ne m$ ہو تب مساوات 15.9 کے تحت تکمل صفر کے برابر ہو گا۔البتہ $n = m$ کی صورت میں مساوات 15.12 کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_0^{T_0} a_m\cos^2(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = a_m\frac{T_0}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ان قیمتوں کو مساوات 15.17 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$a_m = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \tag{15.18}$$

عددی سر b_m حاصل کرنے کی خاطر مساوات 15.4 کے دونوں اطراف کو $\sin(m\omega_0 t)$ سے ضرب دیتے ہوئے

ایک دوری عرصے پر تکمل کرتے ہیں۔ہم تکمل کو $0 \leq t \leq T_0$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \\ &\int_0^{T_0} a_0 \sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} a_n\cos(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ &\qquad + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} b_n\sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{15.19}$$

دائیں ہاتھ پہلا تکمل مساوات 15.15 کی بنا صفر کے برابر ہے جبکہ مساوات 15.11 کے تحت دوسرا تکمل صفر کے برابر ہے۔آئیں تیسرے تکمل پر غور کریں۔

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} b_n\sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \\ &\int_0^{T_0}\sin(m\omega_0 t)\left[b_1\sin\omega_0 t + b_2\sin(2\omega_0 t)+\cdots\right. \\ &\qquad \left. +b_{m-1}\sin[(m-1)\omega_0 t] + b_m\sin(m\omega_0 t)+\cdots\right]\mathrm{d}t\end{aligned}$$

اب اگر $n \neq m$ ہو تب مساوات 15.10 کے تحت تکمل صفر کے برابر ہو گا۔البتہ $n = m$ کی صورت میں مساوات 15.13 کو استعمال کرتے ہوئے

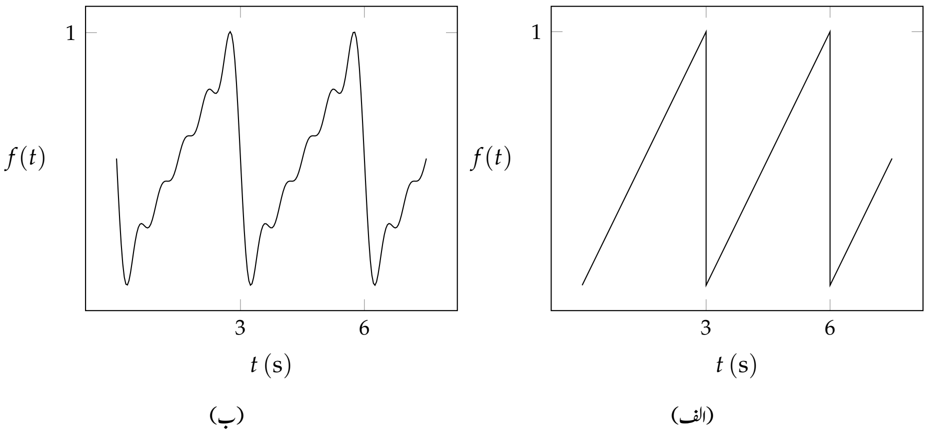
$$\int_0^{T_0} b_m\sin^2(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = b_m\frac{T_0}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ان قیمتوں کو مساوات 15.17 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$b_m = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \tag{15.20}$$

مساوات 15.16، مساوات 15.18 اور مساوات 15.20 فوریئر تکمل کے عددی سر دیتے ہیں۔انہیں یہاں اکٹھے پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\,\mathrm{d}t \\ a_m &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ b_m &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{15.21}$$



شکل 15.4: مثال 15.5 کی دندان موج۔

مثال 15.5: شکل 15.4 میں دکھائے گئے **دندان موج** کا فوریئر تسلسل حاصل کریں۔ دو، تین اور دس فوریئر ارکان استعمال کرتے ہوئے موج کا خط کھینچیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موج کا دوری عرصہ $T_0 = 3\,\mathrm{s}$ ہے۔

حل: شکل میں دکھائی گئی موج $(0,0)$ سے $(3,1)$ تک بالکل سیدھی لکیر کی مانند ہے جس کی ڈھلوان

$$\text{ڈھلوان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

ہے لہٰذا اس سیدھے حصے کی مساوات درج ذیل لکھی جا سکتی ہے جہاں لکیر پر کسی بھی نقطے کے کارتیسی محدد مساوات میں پر کرنے سے c کی قیمت حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$y = \frac{x}{3} + c$$

ہم درج بالا میں $(0,0)$ پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{0}{3} + c$$

$c = 0$ حاصل کرتے ہیں لہٰذا سیدھی حصے کی مساوات $y = \frac{x}{3}$ یعنی

$$f(t) = \frac{t}{3} \tag{15.22}$$

ہے جہاں کارتیسی نظام کے x محور پر t اور y محور پر $f(t)$ پر کئے گئے ہیں۔

مساوات 15.21 سے فوریئر تسلسل کے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{t}{3}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\frac{t^2}{6}\bigg|_0^3 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

چونکہ a_0 تفاعل کی اوسط قیمت کے برابر ہے لہٰذا یہی جواب تکون کے رقبے $\frac{3}{2} = 1 \times 3 \times \frac{1}{2}$ اور قاعدہ 3 سے حاصل کی جا سکتی ہے یعنی

$$\text{اوسط} = \frac{\text{رقبہ}}{\text{قاعدہ}} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

عددی سر a_m حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}\int_0^3 \frac{t}{3}\cos(m\frac{2\pi}{3}t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{9}t\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}mt)}{\frac{2\pi}{3}m} + \frac{2}{9}\frac{\cos(\frac{2\pi}{3}mt)}{\left(\frac{2\pi}{3}m\right)^2}\Bigg|_0^3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

اس کا مطلب ہے کہ دندان موج کی فوریئر تسلسل میں کوئی کوسائن تفاعل نہیں پایا جاتا۔

عددی سر b_m حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
b_m &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\\
&= \frac{2}{3}\int_0^3 \frac{t}{3}\sin(m\frac{2\pi}{3}t)\,\mathrm{d}t\\
&= \left. -\frac{2}{9}t\frac{\cos(\frac{2\pi}{3}mt)}{\frac{2\pi}{3}m}+\frac{2}{9}\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}mt)}{\left(\frac{2\pi}{3}m\right)^2}\right|_0^3\\
&= -\frac{1}{m\pi}
\end{aligned}
$$

یوں $m = 1, 2, 3, \cdots$ پر کرتے ہوئے عددی سر حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$
\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{1}{\pi}\\
b_2 &= -\frac{1}{2\pi}\\
b_3 &= -\frac{1}{3\pi}\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

لہٰذا فوریئر تسلسل درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$
f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left[\sin\omega_0 t + \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \cdots\right] \tag{15.23}
$$