برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 8

برقرار حالت بدلتی رو

جبری تفاعل میں یکدم تبدیلی سے دور عارضی حالت اختیار کرتا ہے۔ محدود قیمت کے وقتی مستقل کی صورت میں آخر کار عارضی دورانیہ گزر جاتا ہے اور دور ایک بار پھر برقرار حالت اختیار کر لیتا ہے۔ جبری تفاعل میں یکدم تبدیلی کی غیر موجودگی میں دور برقرار صورت میں رہتا ہے۔ اس باب میں ایسے ہی ادوار پر غور کیا جائے گا جن کے جبری تفاعل میں یکدم تبدیلی نہیں پائی جاتی۔ ایسی صورت میں جبری حل ہی مکمل حل ہو گا۔ اس باب میں مکمل حل سے مراد جبری حل ہو گا۔

8.1 مخلوط اعداد

حقیقی[1] عدد اور **خیالی**[2] عدد کے مجموعے کو **مخلوط**[3] عدد کہتے ہیں۔ مخلوط اعداد کو **مخلوط سطح**[4] پر دکھایا جایا ہے۔ مخلوط سطح پر افقی محدد حقیقی اعداد کو ظاہر کرتا ہے جبکہ عمودی محدد خیالی اعداد کو ظاہر کرتا ہے۔

[1] real number
[2] imaginary number
[3] complex number
[4] complex plane

شکل 8.1-الف میں مخلوط عدد $3 + j2$ دکھایا گیا ہے۔اسی شکل میں ایک مستطیل بھی دکھایا گیا ہے۔اس عدد کے حقیقی اور خیالی اجزاء مستطیل کے اطراف ہیں۔یوں مخلوط عدد کو حقیقی اور خیالی اجزاء کے مجموعے یعنی $3 + j2$ کے طرز پر لکھنے کو **مستطیلی طرز**[5] کہتے ہیں۔

شکل 8.1-الف میں مخلوط نقطہ $(3 + j2)$ سے محدد کے مرکز $(0, 0)$ تک لکیر کھینچی گئی ہے۔اس لکیر کی لمبائی r کو مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے

$$r = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

لکھا جا سکتا ہے۔اسی طرح افقی محدد سے لکیر تک کا زاویہ درج ذیل ہو گا۔

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2}{3} = 33.69°$$

شکل 8.1-ب میں اسی مخلوط عدد کو $r\underline{/\theta}$ کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔مخلوط عدد کو حیطے اور زاویے سے ظاہر کرنے کو **زاویائی طرز**[6] کہتے ہیں۔

کسی بھی مخلوط عدد m کو

$$m = x + jy \qquad \text{مستطیل طرز} \tag{8.1}$$

یا

$$m = r\underline{/\theta} \qquad \text{زاویائی طرز} \tag{8.2}$$

میں لکھا جا سکتا ہے جہاں مستطیلی طرز سے زاویائی طرز درج ذیل طریقے سے حاصل کی جاتی ہے

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{y}{x} \end{aligned} \tag{8.3}$$

جبکہ زاویائی طرز سے مستطیل طرز درج ذیل سے حاصل کی جاتی ہے۔

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \tag{8.4}$$

---

[5] rectangular form
[6] angular form

ToDueDiscardedImage]] [[make'and`/tikz/external/mode=list

(الف) مخلوط عدد لکھنے کی مستطیل طرز۔

ToDueDiscardedImage]] [[make'and`/tikz/external/mode=list

(ب) مخلوط عدد لکھنے کی زاویائی طرز۔

شکل 8.1: مخلوط اعداد کو لکھنے کے طریقے۔

مخلوط اعداد کو جمع، منفی، ضرب اور تقسیم کرنے کی چند مثالیں دیکھتے ہیں۔

مثال 8.1: مخلوط اعداد $a = 2 + j3$ اور $b = 4 + j5$ دیے گئے ہیں۔ درج ذیل حاصل کریں۔

$$a + b, \qquad a - b, \qquad ab, \qquad \frac{a}{b}$$

حل: مخلوط اعداد جمع (منفی) کرتے وقت حقیقی اجزاء کو علیحدہ جمع (منفی) کیا جاتا ہے اور خیالی اجزاء کو علیحدہ جمع (منفی) کیا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned}
a + b &= (2 + j3) + (4 + j5) = (2 + 4) + j(3 + 5) = 6 + j8 \\
a - b &= (2 + j3) - (4 + j5) = (2 - 4) + j(3 - 5) = -2 - j2
\end{aligned}$$

مخلوط اعداد کو ضرب دیتے ہوئے $j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ لکھا جاتا ہے۔

$$ab = (2 + j3)(4 + j5) = 8 + j10 + j12 + j^2 15 = (8 - 15) + j(10 + 12) = -7 + j22$$

مخلوط اعداد کو تقسیم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{2 + j3}{4 + j5} \\
&= \left(\frac{2 + j3}{4 + j5}\right)\left(\frac{4 - j5}{4 - j5}\right) \\
&= \frac{8 - j10 + j12 - j^2 15}{4^2 - (j5)^2} \\
&= \frac{23 + j2}{16 + 25} \\
&= \frac{23}{41} + j\frac{2}{41} \\
&= 0.56098 + j0.04878
\end{aligned}$$

مثال 8.2: گزشتہ مثال میں مخلوط اعداد کو زاویائی طرز پر لکھتے ہوئے ab اور $\frac{a}{b}$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 8.3 استعمال کرتے ہوئے $a = 2 + j3$ کا حیطہ اور زاویہ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
r_a &= \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \\
\theta_a &= \tan^{-1} \frac{3}{2} = 56.31^\circ
\end{aligned}
$$

یوں

$$a = \sqrt{13} \underline{/56.31^\circ}$$

لکھا جائے گا۔ اسی طرح $b = 4 + j5$ کا حیطہ اور زاویہ حاصل کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
r_b &= \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41} \\
\theta_b &= \tan^{-1} \frac{5}{4} = 51.34^\circ
\end{aligned}
$$

درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$b = \sqrt{41} \underline{/51.34^\circ}$$

اس طرح

$$
\begin{aligned}
ab &= \left(\sqrt{13} \underline{/56.31^\circ} \right) \left(\sqrt{41} \underline{/51.34^\circ} \right) \\
&= \sqrt{13} \sqrt{41} \underline{/56.31^\circ + 51.34^\circ} \\
&= \sqrt{533} \underline{/107.65^\circ}
\end{aligned}
$$

اور

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{\sqrt{13} \underline{/56.31^\circ}}{\sqrt{41} \underline{/51.34^\circ}} \\
&= \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{41}} \underline{/56.31^\circ - 51.34^\circ} \\
&= \sqrt{\frac{13}{41}} \underline{/4.97^\circ}
\end{aligned}
$$

حاصل ہوتے ہیں۔

ان جوابات کو مستطیلی طرز میں درج ذیل لکھا جائے گا جو گزشتہ مثال کے جوابات ہیں۔

$$
\begin{aligned}
ab &= \sqrt{533}\cos 107.65^\circ + j\sqrt{533}\sin 107.65^\circ = -7 + j22\\
\frac{a}{b} &= \sqrt{\frac{13}{41}}\cos 4.97^\circ + j\sqrt{\frac{13}{41}}\sin 4.97^\circ = 0.56098 + j0.04878
\end{aligned}
$$

ہم نے دیکھا کہ زاویائی طرز میں لکھا مخلوط عدد $a = r\underline{/\theta}$ مستطیل طرز میں بھی لکھا جا سکتا ہے یعنی

$$a = r\underline{/\theta} = r\cos\theta + jr\sin\theta \tag{8.5}$$

یولر مساوات[7] درج ذیل ہے۔

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{8.6}$$

مندرجہ بالا دو مساوات کو ملاتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$r\underline{/\theta} = re^{j\theta} = r\left(\cos\theta + j\sin\theta\right) \tag{8.7}$$

مثال 8.3: مخلوط عدد $m = 5 - j12$ کو زاویائی طرز میں لکھیں۔

حل: مساوات 8.3 کے استعمال سے درج ذیل حاصل کرتے ہیں

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\\
\theta &= \tan^{-1}\frac{-12}{5} = -67.38^\circ
\end{aligned}
$$

لہٰذا درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
m &= 13e^{-j67.38^\circ}\\
m &= 13\underline{/-67.38^\circ}
\end{aligned}
$$

---

[7] Euler's equation

8.2 سائن نما تفاعل

سائن نما[8] تفاعل سے مراد سائن تفاعل $\sin\theta$ اور کوسائن تفاعل $\cos\theta$ ہیں۔ شکل 8.2-الف میں رداس A_0 کے گول دائرے پر ایک نقطہ یکساں رفتار کے ساتھ، گھڑی کی گردش کی الٹ سمت میں، حرکت کر رہا ہے۔ یہ دائرہ **کارتیسی محدد**[9] کے مرکز $(0,0)$ پر پایا جاتا ہے۔ لمحہ t پر زاویہ $\measuredangle aox$ کی قیمت θ کے برابر ہے۔ نقطے سے x محدد پر عمودی لکیر محدد کو $x(t)$ پر ٹکراتی ہے جبکہ y محدد پر عمودی لکیر $y(t)$ پر ٹکراتی ہے۔ شکل کو دیکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y(t) = A_0 \sin\theta \tag{8.8}$$

جہاں A_0 موج کی چوٹی ہے جسے موج کا **حیطہ**[10] کہتے ہیں اور θ کو تفاعل کا **دلیل**[12][11] کہتے ہیں۔ اس مساوات میں θ از خود وقت t پر منحصر ہے۔

گردش کرتا نقطہ ایک چکر میں $360°$ درجے کا زاویہ یعنی 2π ریڈیئن طے کرتا ہے۔ ایک چکر کاٹنے کے لئے درکار دورانیے کو **دوری عرصہ**[13] کہتے ہیں جسے T سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مشق 8.1: شکل 8.2-الف میں نقطہ ایک چکر $20\,\mathrm{ms}$ میں پورا کرتا ہے۔ یہ نقطہ ایک سیکنڈ میں کتنے چکر پورا کرے گا۔ یہ نقطہ ایک سیکنڈ میں کتنے ریڈیئن کا زاویہ طے کرتا ہے۔

جوابات: 50 چکر، $100\pi\,\mathrm{rad}$

اگر ایک چکر کاٹنے کے لئے T سیکنڈ کا وقت درکار ہو تب ایک سیکنڈ میں چکروں کی تعداد $\frac{1}{T}$ ہو گی جسے **تعدد**[14] کہتے اور f سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$f = \frac{1}{T} \tag{8.9}$$

---

[8] sinusoidal
[9] Cartesian coordinates
[10] amplitude
[11] ایک ماہر ریاضی اپنی خیالی دنیا میں کوسائن $\cos\theta$ تفاعل کے ساتھ بحث میں مصروف ہوتا ہے۔ ماہر ریاضی تفاعل کو دلیل کے طور پر صفر پیش کرتا ہے۔ تفاعل اس کا فوراً جواب اکائی $(\cos 0 = 1)$ دیتا ہے۔
[12] argument
[13] time period
[14] frequency

تعدد کی اکائی ہرٹز[15] ہے جسے Hz سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

ایک چکر 2π ریڈیئن کو کہتے ہیں لہٰذا f چکر سے مراد $2\pi f$ ریڈیئن کا زاویہ ہے۔یوں f تعدد پر گردش کرتا نقطہ ایک سیکنڈ میں $2\pi f$ ریڈیئن کا زاویہ طے کرے گا یعنی اس کی زاویائی رفتار[16] کی قیمت $2\pi f$ ہو گی۔زاویائی رفتار کو ω سے ظاہر کیا جاتا ہے جبکہ اس کی اکائی ریڈیئن فی سیکنڈ $\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔

$$\omega = 2\pi f \tag{8.10}$$

زاویائی رفتار ω سے گردش کرتا ہوا نقطہ t سیکنڈ میں $2\pi ft$ ریڈیئن کا زاویہ طے کرے گا۔یوں اگر $t=0$ پر نقطہ عین x محدد کے مثبت حصے پر ہو تب لمحہ t پر

$$\theta = \omega t = 2\pi ft \tag{8.11}$$

لکھا جائے گا۔یوں مساوات 8.8 کو

$$\begin{aligned} y(t) &= A_0 \sin 2\pi ft \\ &= A_0 \sin \frac{2\pi}{T} t \\ &= A_0 \sin \omega t \end{aligned} \tag{8.12}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

برقی میدان میں $y(t)$ وقت کے ساتھ بدلتے دباو یا وقت کے ساتھ بدلتی رو کو ظاہر کر سکتی ہے۔مساوات 8.12 میں دیے تفاعل، جسے شکل 8.2-ب میں دکھایا گیا ہے، کا آزاد متغیرہ وقت t ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ تفاعل ہر T سیکنڈ کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہے۔اس حقیقت کو ریاضی میں درج ذیل لکھا جاتا ہے۔

$$y(t+T) = y(t) \tag{8.13}$$

جس سے مراد یہ ہے کہ تفاعل کی قیمت لمحہ t اور لمحہ $t+T$ پر برابر ہیں۔

مساوات 8.12 کے خط کو ωt کے ساتھ بھی کھینچا جا سکتا ہے۔ایسا ہی شکل 8.2-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں سے واضح ہے کہ یہ تفاعل ہر 2π ریڈیئن کے بعد اپنے آپ کو دہراتا ہے۔

---

[15] Hertz
[16] angular speed

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

الف

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ب)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(پ)

شکل 8.2: سائن موج۔

مشق 8.2: شکل 8.2-الف میں گردش کرتا نقطہ $0.2\,\mathrm{s}$ میں $40°$ کا زاویہ طے کرتا ہے۔ زاویائی رفتار، تعدد اور دوری عرصہ دریافت کریں۔

جوابات: $\omega = \frac{10\pi}{9}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ، $f = 1.8\,\mathrm{Hz}$ ، $T = \frac{5}{9}\,\mathrm{s}$

شکل 8.3 میں عمومی صورت حال دکھائی گئی ہے جہاں ω زاویائی رفتار سے گردش کرتا نقطہ، لمحہ $t = 0$ پر زاویہ α پر پایا جاتا ہے۔ یہ نقطہ وقت t کے دوران ωt زاویہ طے کرتے ہوئے $\theta = \omega t + \alpha$ پہنچ جائے گا لہٰذا اس کے لئے

$$y(t) = A_0 \sin(\omega t + \alpha) \tag{8.14}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں α کو زاویائی ہٹاو[17] کہتے ہیں۔ اس مساوات کا دلیل $\omega t + \alpha$ ہے۔ شکل 8.3-ب میں مساوات 8.12 اور مساوات 8.14 کو دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ان مساوات میں α زاویائی فرق[18] پایا جاتا ہے۔ مساوات 8.12 سے مساوات 8.14 α ریڈیئن آگے[19] ہے۔ یہ بھی کہا جا سکتا ہے کہ مساوات 8.14 سے مساوات 8.12 α ریڈیئن پیچھے[20] ہے۔ ایک ہی تعدد کے دو تفاعل

$$\begin{aligned} y_1(t) &= A_{01} \sin(\omega t + \alpha) \\ y_2(t) &= A_{02} \sin(\omega t + \beta) \end{aligned} \tag{8.15}$$

میں $y_1(t)$ تفاعل $y_2(t)$ سے $\alpha - \beta$ ریڈیئن آگے ہے۔ ہم یہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ $y_2(t)$ تفاعل $y_1(t)$ سے $\beta - \alpha$ ریڈیئن پیچھے ہے یا کہ $y_1(t)$ تفاعل $y_2(t)$ سے $\beta - \alpha$ ریڈیئن آگے ہے۔ اگر $\alpha = \beta$ ہو تب تفاعل ہم زاویہ[21] کہلاتے ہیں جبکہ $\alpha \neq \beta$ کی صورت میں تفاعل الگ زاویہ[22] کہلاتے ہیں۔

---

phase angle[17]
phase difference[18]
lead[19]
lag[20]
in phase[21]
out of phase[22]

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ب) زاویائی ہٹاو۔

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(الف)

شکل 8.3: لمحہ $t = 0$ پر زاویہ α ہے۔

زاویائی ہٹاو کو عموماً درجوں میں بیان کیا جاتا ہے لہٰذا $\alpha = \frac{\pi}{4}$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$y(t) = A_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = A_0 \sin\left(\omega t + 45^\circ\right) \tag{8.16}$$

باضابطہ طور پر چونکہ ωt کی قیمت ریڈیئن میں ہے لہٰذا α کی قیمت بھی ریڈیئن میں ہونا لازم ہے لہٰذا تفاعل لکھنے کا صحیح طریقہ $y(t) = A_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ ہی ہے لیکن زاویائی ہٹاو کو درجوں میں لکھنے کی روایت نہایت مقبول ہے لہٰذا اس کتاب میں بھی اس روایت کو برقرار رکھا جائے گا۔ مساوات 8.16 میں 45° لکھتے ہوئے زیر بالا میں درجے کی علامت $(^\circ)$ استعمال کی گئی ہے جبکہ $\frac{\pi}{4}$ پر کوئی علامت نہیں لگائی گئی۔ اسی علامت سے ریڈیئن یا درجوں کی پہچان کی جاتی ہے۔

مثال 8.4: مساوات $y_1(t) = 15\sin(100t + 60^\circ)$ اور $y_2(t) = 22\sin(200t + 0.2\pi)$ کی قیمت $t = 25\,\mathrm{ms}$ پر دریافت کریں۔

حل: پہلی تفاعل میں 50° کا زاویائی ہٹاو $\frac{60^\circ}{180^\circ} \times \pi = \frac{\pi}{3}$ ریڈیئن کے برابر ہے۔ یوں لمحہ $t = 25\,\mathrm{ms}$ پر

$$y_1(0.025) = 15\sin\left(100 \times 25 \times 10^{-3} + \frac{\pi}{3}\right) = -5.918619766$$

اور

$$y_2(0.025) = 22\sin(200 \times 0.025 + 0.2\pi) = -13.39917888$$

حاصل ہوتے ہیں۔

اگرچہ اب تک کی بحث میں ہم نے سائن تفاعل استعمال کیا، ہم اس کی جگہ کوسائن تفاعل بھی استعمال کر سکتے تھے۔ان دو تفاعل کی صورت بالکل یکساں ہے پس دونوں میں 90° کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔

$$\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\omega t \tag{8.17}$$

$$\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\omega t \tag{8.18}$$

سائن نما تفاعل کے دلیل کے ساتھ 2π ریڈیئن یا 360° کا مضرب جمع کرنے سے تفاعل کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔

$$\cos(\omega t+\alpha+2\pi n)=\cos(\omega t+\alpha) \qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{8.19}$$

$$\sin(\omega t+\alpha+2\pi n)=\sin(\omega t+\alpha) \qquad n=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{8.20}$$

دو سائن نما تفاعل میں زاویائی فرق تین شرائط پورا کرنے کے بعد دریافت کیا جا سکتا ہے۔پہلی شرط یہ ہے کہ دونوں تفاعل کی تعدد برابر ہو۔دوسری شرط یہ ہے کہ دونوں کو سائن تفاعل اور یا پھر دونوں کو کوسائن تفاعل کی صورت میں لکھا جائے۔تیسری اور آخری شرط یہ ہے کہ دوسری شرط میں لکھے گئے تفاعل کے حیطے مثبت ہوں۔درج ذیل مماثل ان شرائط کو پورا کرنے میں مدد دیتے ہیں۔

$$-\sin(\omega t+\alpha)=\sin(\omega t+\alpha\pm180^\circ) \tag{8.21}$$

$$-\cos(\omega t+\alpha)=\cos(\omega t+\alpha\pm180^\circ) \tag{8.22}$$

ان کے علاوہ درج ذیل مماثل بھی نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \tag{8.23}$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \tag{8.24}$$

ایک آخری تفاعل جس کا ذکر ضروری ہے درج ذیل ہے۔

$$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1 \tag{8.25}$$

مثال 8.5: درج ذیل تفاعل کے خط کھینچیں۔

- $v(t)=1\cos(\omega t+60^\circ)$

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(الف)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ب)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(پ)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ت)

شکل 8.4: مثال 8.5 کے خط۔

- $v(t) = 1\cos(\omega t + 240^\circ)$
- $v(t) = 1\cos(\omega t - 300^\circ)$

حل: شکل 8.4-الف میں $v(\omega t) = 1\cos\omega t$ کا خط دکھایا گیا ہے۔اس کو افقی محدد پر 60° درجے بائیں منتقل کرنے سے $v(\omega t) = 1\cos(\omega t + 60^\circ)$ کا خط حاصل ہوتا ہے جسے شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔ ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں

$$v(\omega t) = 1\cos(\omega t + 240^\circ) = 1\cos(\omega t + 60^\circ + 180^\circ) = -1\cos(\omega t + 60^\circ)$$

جہاں مساوات 8.22 کا استعمال کیا گیا ہے۔درج بالا مساوات کو شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ شکل-ب کا منفی ہے۔اسی طرح مساوات 8.19 کی مدد سے

$$v(\omega t) = 1\cos(\omega t - 300^\circ) = 1\cos(\omega t - 300^\circ + 360^\circ) = 1\cos(\omega t + 60^\circ)$$

لکھتے ہوئے شکل-ت حاصل ہوتی ہے جو عین شکل-ب ہی ہے۔

مثال 8.6: درج ذیل امواج کی تعدد ہرٹز میں حاصل کریں۔ امواج کے مابین زاویائی فرق دریافت کریں۔ یہ بھی بتلائیں کہ کونسی موج آگے ہے۔

$$\begin{aligned} v_1(\omega t) &= 100\sin(400t - 30^\circ) \\ v_2(\omega t) &= -250\cos(400t + 0.2\pi) \end{aligned}$$

حل: ان امواج میں $\omega = 400\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے لہٰذا

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{400}{2\pi} = 63.66\,\mathrm{Hz}$$

ہو گا۔ زاویائی فرق دریافت کرنے کی خاطر دونوں امواج کو مثبت حیطے کے کوسائن موج کی صورت میں لکھتے ہیں۔ ساتھ ہی ساتھ ان کے زاویائی ہٹاو کو درجوں میں لکھتے ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned}
v_1(\omega t) &= 100\sin(400t - 30^\circ)\\
&= 100\cos(400t - 30^\circ - 90^\circ)\\
&= 100\cos(400t - 120^\circ)\\
&= 100\cos(400t + 240^\circ)
\end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں آخری قدم پر مساوات 8.19 کا استعمال کیا گیا۔ اسی طرح

$$\begin{aligned}
v_2(\omega t) &= -250\cos(400t + 0.2\pi)\\
&= 250\cos(400t + 0.2\pi + \pi)\\
&= 250\cos(400t + 216^\circ)
\end{aligned}$$

بھی لکھا جا سکتا ہے جہاں آخری قدم پر 1.2π ریڈیئن کو 216° درجے لکھا گیا ہے۔ ان امواج کے مابین

$$240^\circ - 216^\circ = 24^\circ$$

کا زاویائی فرق پایا جاتا ہے اور موج $v_1(\omega t)$ آگے ہے۔

مشق 8.3: ایک دور میں درج ذیل تین رو پائے جاتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
i_1(1) &= 30\cos(100\pi t + 30^\circ)\\
i_2(2) &= 55\sin(100\pi t + 40^\circ)\\
i_3(t) &= 20\sin(100\pi t + 60^\circ)
\end{aligned}$$

i_2 سے i_1 کتنی آگے ہے اور i_3 سے i_1 کتنی پیچھے ہے۔

جوابات: 80° ، -60° یا 300°

[[make'and`/tikz/external/mode=listToDueDiscardedImage]]

شکل 8.5: مثال 8.7 کا دور۔

8.3 سائن نما اور مخلوط جبری تفاعل

گزشتہ باب میں دور پر مستقل جبری تفاعل مسلط کرتے ہوئے، دور کا جبری رد عمل بھی مستقل قیمت کا حاصل ہوا۔ تفرقی مساوات کا جبری رد عمل، مسلط جبری تفاعل اور اس کے تمام بلند درجی تفرق کا مجموعہ ہوتا ہے۔ یوں دور پر جبری دباو $v(t) = \sin \omega t$ مسلط کرنے سے رو کا جبری رد عمل $i(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$ متوقع ہو گا۔ پس جبری رد عمل کے مستقل c_1 اور c_2 معلوم کرنا باقی ہے۔

مثال 8.7: شکل 8.5 میں رو $i_J(t)$ حاصل کریں۔

حل: دور کی تفرقی مساوات لکھتے ہیں۔

$$Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = V_0 \cos \omega t \tag{8.26}$$

دور پر مسلط جبری تفاعل اور اس تفاعل کے تمام بلند درجی تفرق کا مجموعہ جبری حل کے برابر ہو گا۔

$$i_J(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

اس جبری حل کو مساوات 8.26 میں پُر کرتے ہوئے c_1 اور c_2 مستقل دریافت کرتے ہیں۔

$$R(c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) + L(-c_1\omega \sin \omega t + c_2\omega \cos \omega t) = V_0 \cos \omega t$$

درج بالا مساوات میں دونوں اطراف $\cos \omega t$ کے عددی سر برابر ہوں گے۔ اسی طرح دونوں اطراف $\sin \omega t$ کے عددی سر برابر ہوں گے۔

$$\begin{aligned} c_1 R + c_2 \omega L &= V_0 \\ -c_1 \omega L + c_2 R &= 0 \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو c_1 اور c_2 کے لئے حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{RV_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \\ c_2 &= \frac{\omega L V_0}{R^2 + \omega^2 L^2} \end{aligned}$$

لہذا جبری حل

$$i_J(t) = \frac{RV_0}{R^2+\omega^2L^2}\cos\omega t + \frac{\omega LV_0}{R^2+\omega^2L^2}\sin\omega t \tag{8.27}$$

ہو گا۔

مثال 8.8: درج بالا مثال میں $R = 100\,\Omega$ ، $L = 5\,\text{mH}$ ، $V_0 = 310\,\text{V}$ اور $\omega = 10\,\text{krad}\,\text{s}^{-1}$ کی صورت میں جبری حل کو مساوات 8.24 کی مدد سے $i(t) = I_0\cos(\omega t - \phi)$ کے طرز پر لکھیں۔

حل: مساوات 8.27 میں دی گئی قیمتیں پُر کرنے سے

$$i_J(t) = \frac{100\times 310}{100^2+(10\,000\times 0.005)^2}\cos\omega t + \frac{10\,000\times 0.005\times 310}{100^2+(10\,000\times 0.005)^2}\sin\omega t$$

یعنی درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$i_J(t) = 2.48\cos\omega t + 1.24\sin\omega t \tag{8.28}$$

مساوات 8.24 سے جبری حل کی درکار صورت کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$i(t) = I_0\cos(\omega t-\phi) = I_0\cos\phi\cos\omega t + I_0\sin\phi\sin\omega t \tag{8.29}$$

مساوات 8.28 میں $\cos\omega t$ اور $\sin\omega t$ کے عددی سر کو مساوات 8.29 کے عددی سر کے برابر پُر کرتے ہیں۔

$$I_0\cos\phi = 2.48 \tag{8.30}$$
$$I_0\sin\phi = 1.24 \tag{8.31}$$

ان ہمزاد مساوات کے مربع جمع کرتے ہوئے

$$I_0^2\cos^2\phi + I_0^2\sin^2\phi = 2.48^2 + 1.24^2$$

ملتا ہے جس میں مساوات 8.25 کے استعمال سے $\cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$ پُر کرتے ہوئے

$$I_0 = \sqrt{2.48^2+1.24^2} = 2.7727$$

ملتا ہے۔اسی طرح مساوات 8.31 کو مساوات 8.30 سے تقسیم کرنے سے

$$\frac{\sin\phi}{\cos\phi}=\frac{1.24}{2.48}=\tan\phi$$

یعنی

$$\phi=\tan^{-1}\frac{1.24}{2.48}=\underline{/26.6^\circ}$$

ملتا ہے۔یوں جبری حل درج ذیل لکھا جائے گا

$$i_J(t)=2.77\cos(\omega t-26.6^\circ)=2.77\cos(10\,000t-26.6^\circ) \tag{8.32}$$

جہاں سے ظاہر ہے کہ دباو سے رو 26.6° درجے پیچھے ہے۔ مخلوط جبری حل درج ذیل لکھا جائے گا جس کا حقیقی جزو درج بالا مساوات ہے۔

$$i_M(t)=2.77e^{j(10\,000t-26.6^\circ)} \tag{8.33}$$

مثال 8.9: مثال 8.8 کے طرز پر مثال 8.7 میں حاصل کئے گئے جبری حل کو $i_J(t)=I_0\cos(\omega t-\phi)$ کی صورت میں لکھیں۔

حل: مساوات 8.27 میں $\cos\omega t$ اور $\sin\omega t$ کے عددی سر کو مساوات 8.29 میں $\cos\omega t$ اور $\sin\omega t$ کے عددی سر کے برابر پُر کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}I_0\cos\phi&=\frac{RV_0}{R^2+\omega^2L^2}\\I_0\sin\phi&=\frac{\omega LV_0}{R^2+\omega^2L^2}\end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات میں دوسری مساوات کو پہلی سے تقسیم کرتے ہوئے

$$\frac{\sin\phi}{\cos\phi}=\tan\phi=\frac{\omega L}{R}$$

یعنی

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \tag{8.34}$$

ملتا ہے جبکہ دونوں ہمزاد مساوات کے مربع کا مجموعہ لیتے ہوئے

$$\begin{aligned}
I_0^2 \cos^2 \phi + I_0^2 \sin^2 \phi = I_0^2 &= \left(\frac{RV_0}{R^2+\omega^2L^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega LV_0}{R^2+\omega^2L^2}\right)^2 \\
&= \frac{(R^2+\omega^2L^2)V_0^2}{(R^2+\omega^2L^2)^2} \\
&= \frac{V_0^2}{R^2+\omega^2L^2}
\end{aligned}$$

یعنی

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \tag{8.35}$$

ملتا ہے۔یوں جبری حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$i_J(t) = \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}} \cos\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right) \tag{8.36}$$

مساوات 8.36 سے ظاہر ہے کہ $L = 0$ کی صورت میں $\phi = 0$ ہو گا لہٰذا دباو اور رو ہم زاویہ ہوں گے جبکہ $R = 0$ کی صورت میں $\phi = 90^\circ$ ہو گا لہٰذا دباو سے رو 90° درجے پیچھے ہو گی۔مزاحمت اور امالہ کے دیگر قیمتوں کی صورت میں دباو سے رو 0° تا 90° کے مابین کسی مخصوص درجے پر پیچھے رہے گی۔اسی لئے مزاحمت اور امالہ کے ادوار کو پیچھے رہنے والے ادوار کہا جاتا ہے۔

سلسلہ وار جڑے مزاحمت اور امالہ کے دور کا حل آپ نے دیکھا۔یقیناً اس دور کا حل سلسلہ وار جڑے دو عدد مزاحمتی دور کے حل سے کئی گنا مشکل تھا۔آپ خود تصور کر سکتے ہیں کہ زیادہ تعداد کے پرزوں کا دور حل کرنا کتنا مشکل ہو گا۔اسی مشکل کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم **مخلوط تفاعل**[23] کو پیش کرتے ہیں جس سے ادوار کا حل انتہائی آسان ثابت ہوتا ہے۔

[23] complex function

مخلوط تفاعل اور سائن نما تفاعل کا تعلق یولر مساوات[24]

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t \qquad \text{یولر مساوات} \tag{8.37}$$

دیتی ہے جہاں $j = \sqrt{-1}$ خیالی عدد ہے۔یولر مساوات میں $\cos\omega t$ **حقیقی**[25] مقدار اور $\sin\omega t$ **خیالی**[26] مقدار ہیں۔

حقیقی دنیا میں مخلوط جبری تفاعل نہیں پایا جاتا۔اس کے باوجود، دور پر سائن نما جبری تفاعل کی جگہ مخلوط جبری تفاعل مسلط کرتے ہوئے مخلوط حل حاصل کیا جا سکتا ہے۔مخلوط جبری تفاعل کو حقیقی جبری تفاعل اور خیالی جبری تفاعل کا مجموعہ تصور کیا جا سکتا ہے۔خطی ادوار میں مسئلہ نفاذ کے تحت تمام جبری تفاعل کی علیحدہ علیحدہ اثرات کا مجموعہ لیا جا سکتا ہے۔یوں جبری تفاعل کے حقیقی جزو سے حل کا حقیقی جزو جبکہ جبری تفاعل کے خیالی جزو سے حل کا خیالی جزو حاصل ہو گا۔یوں مخلوط حل کے خیالی جزو کو رد کرتے ہوئے حقیقی جزو کو سائن نما تفاعل کا ردعمل تسلیم کیا جاتا ہے۔اس ترکیب کو مثال کی مدد سے زیادہ آسانی سے سمجھا جا سکتا ہے۔

مثال 8.10: شکل 8.5 میں حقیقی جبری تفاعل $V_0\cos\omega t$ کی جگہ مخلوط جبری تفاعل نسب کرتے ہوئے حقیقی $i(t)$ کے لئے حل کریں۔

حل: حقیقی جبری تفاعل $v(t) = V_0\cos\omega t$ کی جگہ دور میں مخلوط جبری تفاعل $v(t) = V_0 e^{j\omega t}$ نسب کرتے ہوئے کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = V_0 e^{j\omega t}$$

جبری تفاعل $e^{j\omega t}$ کا تفرق $j\omega e^{j\omega t}$ بھی جبری تفاعل ہی ہے لہٰذا درج بالا مساوات کا مخلوط حل $i_M(t) = I_0 e^{j\omega t}$ فرض کرتے ہیں جہاں I_0 نامعلوم مخلوط مستقل ہے۔اس حل کو درج بالا مساوات میں پُر کرتے ہوئے

$$RI_0 e^{j\omega t} + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_0 e^{j\omega t}\right) = V_0 e^{j\omega t}$$

درکار تفرق کے بعد

$$RI_0 e^{j\omega t} + j\omega L I_0 e^{j\omega t} = V_0 e^{j\omega t} \tag{8.38}$$

---

[24] Euler's equation
[25] real
[26] imaginary

ملتا ہے جس کے دونوں اطراف کو $e^{j\omega t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$RI_0 + j\omega L I_0 = V_0 \tag{8.39}$$

اس سے I_0 حاصل کرتے ہیں۔

$$I_0 = \frac{V_0}{R + j\omega L} \tag{8.40}$$

یوں مخلوط رو درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned} i_M(t) &= I_0 e^{j\omega t} \\ &= \frac{V_0 e^{j\omega t}}{R + j\omega L} \end{aligned} \tag{8.41}$$

ہمیں اس کا حقیقی جزو درکار ہے۔یولر مساوات کی مدد سے درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$i_M(t) = \frac{V_0(\cos\omega t + j\sin\omega t)}{R + j\omega L}$$

دائیں ہاتھ کسر کے بالائی اور نچلے حصے کو $R - j\omega t$ سے ضرب دیتے ہیں

$$\begin{aligned} i_M(t) &= \frac{V_0(\cos\omega t + j\sin\omega t)(R - j\omega L)}{(R + j\omega L)(R - j\omega L)} \\ &= \frac{V_0(R\cos\omega t + \omega L\sin\omega t) + jV_0(R\sin\omega t - \omega L\cos\omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2} \end{aligned}$$

جہاں دوسرا قدم ترتیب دیتے ہوئے لکھا گیا ہے۔اس کا حقیقی جزو درکار حل ہے

$$i(t) = \frac{V_0(R\cos\omega t + \omega L\sin\omega t)}{R^2 + \omega^2 L^2} \tag{8.42}$$

جو عین مساوات 8.27 ہی ہے۔

ہم مساوات 8.40 کے مخلوط مستقل I_0 کو زاویائی شکل میں لکھ کر بھی آگے بڑھ سکتے ہیں۔مخلوط مستقل کو درج ذیل لکھا

جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
I_0 &= \frac{V_0}{R+j\omega L} \\
&= \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}\,\underline{/\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}}} \\
&= \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}\,e^{j\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}}} \\
&= \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} e^{-j\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}}
\end{aligned}
$$

جہاں دوسری قدم پر کسر کے نچلی حصے کو مساوات 8.3 کی مدد سے زاویائی صورت میں لکھا گیا ہے اور تیسری قدم پر یولر مساوات کا استعمال کیا گیا ہے۔زاویہ $\theta = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$ کو شکل 8.6 میں دکھایا گیا ہے۔ یوں مخلوط رو درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$
\begin{aligned}
i_M &= I_0 e^{j\omega t} \\
&= \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} e^{j\left(\omega t - \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}\right)}
\end{aligned}
$$

اس مساوات میں $\tan^{-1}\frac{\omega L}{R} = \theta$ لکھتے ہوئے حقیقی جزو لے کر حقیقی رو حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \left.\frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} e^{j(\omega t-\theta)}\right|_{\text{حقیقی}} \\
&= \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \cos(\omega t-\theta) \\
&= \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \left(\cos\omega t\cos\theta + \sin\omega t\sin\theta\right)
\end{aligned}
$$

شکل 8.6 سے $\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}$ اور $\sin\theta = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}$ پُر کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
i(t) &= \frac{V_0}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} \left(\cos\omega t\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}} + \sin\omega t\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2}}\right) \\
&= \frac{V_0(R\cos\omega t + \omega L\sin\omega t)}{R^2+\omega^2 L^2}
\end{aligned}
$$

[[make'and`/tikz/external/mode=listToDueDiscardedImage]]

شکل 8.6: مثال 8.10 کا شکل۔

8.4 دوری سمتیہ

درج بالا حصے میں ہم نے دیکھا کہ حقیقی جبری تفاعل کی جگہ مخلوط جبری تفاعل نسب کرتے ہوئے مخلوط حل حاصل کیا جا سکتا ہے جس کا حقیقی جزو حقیقی جبری رد عمل ہو گا۔ اس ترکیب کو مثال 8.10 میں استعمال کیا گیا جہاں مساوات 8.38 کو $e^{j\omega t}$ سے تقسیم کرتے ہوئے مساوات 8.39 حاصل کی گئی۔ مساوات 8.39 سے I_0 حاصل کی گئی جسے $e^{j\omega t}$ سے ضرب دیتے ہوئے مخلوط حل حاصل کیا گیا۔ مخلوط حل کا حقیقی جزو یعنی مساوات 8.42 درکار جواب ہے۔ مثال 8.8 میں مخصوص قیمتیں استعمال کرتے ہوئے مخلوط رو کو مساوات 8.33 میں پیش کیا گیا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ جزو $e^{j\omega t}$ جوں کا توں مخلوط جبری تفاعل اور مخلوط جبری حل میں پایا جاتا ہے۔

حقیقت میں کسی بھی خطی دور پر مخلوط جبری تفاعل مثلاً

$$v_M = V_0 e^{j\omega t} \tag{8.43}$$

مسلط کرنے سے دور میں تمام رو کی صورت $i_M(t) = I_0 e^{j(\omega t+\phi)}$ اور دباو کی صورت $v_M(t) = V_0 e^{j(\omega t+\phi)}$ ہو گی جہاں تمام رو اور دباو کی تعدد ω جبکہ ان کے انفرادی حیطے مختلف ہوں گے۔ ان کے انفرادی زاویہ ہٹاو بھی مختلف ہوں گے۔ یہاں حیطہ حقیقی مقدار ہے۔

یوں تعدد جانتے ہوئے کسی بھی مخلوط تفاعل مثلاً مخلوط رو کو اس کے حیطے I_0 اور زاویائی ہٹاو ϕ سے مکمل طور پر ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ مخلوط تفاعل مثلاً

$$i_M(t) = I_0 e^{j(\omega t+\phi)} \tag{8.44}$$

سے حقیقی تفاعل درج ذیل

$$i(t) = I_0 e^{j(\omega t+\phi)}\Big|_{\text{حقیقی}} \tag{8.45}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں I_0 حقیقی مقدار ہے اور زیر نوشت میں لفظ "حقیقی" لکھنے کا مطلب ہے کہ اس تفاعل کا حقیقی جزو لیا جائے یعنی

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi) \tag{8.46}$$

مساوات 8.45 حقیقی رو دیتی ہے۔اس طرز کے تمام مساوات میں $e^{j\omega t}$ پایا جاتا ہے اور مساوات کا حقیقی جزو ہی حقیقی مقدار ہوتا ہے۔یوں ایسے مساوات میں لفظ "حقیقی" اور $e^{j\omega t}$ کو ذہن میں رکھتے ہوئے انہیں لکھنے سے گریز کیا جاتا ہے۔مساوات 8.45 میں ایسا ہی کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا

$$\hat{I} = I_0 e^{j\phi} \tag{8.47}$$

جہاں رو کو ٹوپی والے بڑے حرف سے ظاہر کیا گیا ہے۔دباو کی صورت میں تفاعل کو $\hat{V}$ لکھا جاتا۔ٹوپی والے بڑے حرف سے ظاہر کردہ تفاعل کو $e^{j\omega t}$ سے ضرب دے کر حقیقی جزو لینے سے حقیقی تفاعل حاصل کیا جاتا ہے۔

مساوات 8.47 کا صفحہ 363 پر مساوات 8.7 سے موازنہ کریں۔ایسا معلوم ہوتا ہے جیسے $\hat{I}$ مخلوط عدد کو ظاہر کرتا ہے۔اگرچہ مساوات 8.47 درحقیقت میں مساوات 8.45 کو چھوٹا لکھنے کا طریقہ ہے لہٰذا $\hat{I}$ مخلوط عدد کو ظاہر نہیں کرتا لیکن دیکھا یہ گیا ہے کہ $\hat{I}$ کو مخلوط عدد تصور کر لینے سے ہمارے لئے آسانی پیدا ہوتی ہے۔آئیں $\hat{V}$ کو مخلوط عدد فرض کرتے ہوئے اس کو مخلوط سطح پر ظاہر کریں۔

مثال 8.11: مخلوط دباو $v_M(t) = 50e^{j(100\pi t - 35^\circ)}$ سے $\hat{V}$ حاصل کرتے ہوئے $\hat{V}$ کو مخلوط سطح پر دکھائیں۔

حل: مخلوط دباو سے حقیقی دباو لکھتے ہیں۔

$$v(t) = 50e^{j(100\pi t - 35^\circ)}\Big|_{\text{حقیقی}}$$

اس مساوات کی تعدد $(\omega = 100\pi)$ کو ذہن نشین کرتے ہوئے لفظ "حقیقی" اور $e^{j100\pi t}$ لکھنے سے گریز کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جائے گا

$$\begin{aligned}\hat{V} &= 50e^{-j35^\circ}\\ &= 50\underline{/-35^\circ}\end{aligned}$$

جسے شکل 8.7 میں مخلوط سطح پر دکھایا گیا ہے۔حقیقی محدد سے گھڑی کی گردش کی جانب مثبت زاویہ ناپا جاتا ہے لہٰذا منفی زاویے کو گھڑی کی گردش کے الٹ جانب دکھایا گیا ہے۔مخلوط اعداد اور $\hat{V}$ میں فرق رکھنے کی خاطر $\hat{V}$ کو مخلوط سطح پر تیر کی نشان سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 8.11 میں $\hat{V}$ کو مخلوط سطح پر تیر کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے جسے دیکھ کر یوں معلوم ہوتا ہے جیسے $\hat{V}$ ایک سمتیہ ہے۔اسی حقیقت کی بنا پر $\hat{V}$ یا $\hat{I}$ کو **دوری سمتیہ**[27] کہتے ہیں اور شکل 8.7 کو **دوری سمتیہ شکل**[28] کہتے ہیں۔

[27] phasor
[28] phasor diagram

[[make'and`/tikz/external/mode=listToDueDiscardedImage]]

شکل 8.7: مثال 8.11 کی دوری سمتیہ۔

مخلوط عدد لکھنے کے تمام طرز پر دوری سمتیہ کو لکھا جاتا ہے لہٰذا درج ذیل لکھنا ممکن ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{I} &= I_0 e^{j\phi} \\ &= I_0 \underline{/\phi} \\ &= I_x + jI_y\end{aligned} \tag{8.48}$$

دوری سمتیہ کا حیطہ حقیقی اور مثبت مقدار ہوتا ہے۔یوں درج بالا مساوات میں I_0 حقیقی مثبت مقدار ہے۔

مساوات 8.46 کو تفاعل کی **وقتی دائرہ کار**[29] صورت کہتے ہیں جبکہ مساوات 8.48 کو تفاعل کی **تعددی دائرہ کار**[30] صورت کہتے ہیں۔

مثال 8.12: درج ذیل تفاعل کے دوری سمتیہ دریافت کریں۔

$$v_1(t) = 20\cos(100t + 30^\circ), \quad v_2(t) = -40\sin(310t - 40^\circ), \quad i(t) = 22\cos(\omega t + 0.2\pi)$$

حل: دباو $v_1(t)$ کو مخلوط تفاعل کا حقیقی جزو لکھ کر

$$v_1(t) = 20e^{j(100t+30^\circ)}\Big|_{\text{حقیقی}}$$

تعدد کو ذہن نشین کرتے ہوئے، e^{j100t} نہ لکھتے ہوئے اور زیر نوشت میں لفظ "حقیقی" نہ لکھتے ہوئے دوری سمتیہ حاصل ہوتا ہے۔

$$\hat{V}_1 = 20e^{j30^\circ} = 20\underline{/30^\circ}$$

اسی طرح $v_2(t)$ کو $\cos$ کی صورت میں یوں لکھتے ہیں کہ حیطہ مثبت لکھا جائے۔

$$v_2 = -40\sin(310t - 40^\circ) = 40\cos(310t - 40^\circ + 90^\circ) = 40\cos(310t + 50^\circ)$$

---

[29] time domain
[30] frequency domain

اس کو مخلوط تفاعل کا حقیقی جزو لکھتے ہیں۔

$$v_2 = 40e^{j(310t+50^\circ)}\Big|_{\text{حقیقی}}$$

اس مساوات کے زیر نوشت میں لفظ "حقیقی" نہ لکھتے ہوئے اور ساتھ ہی ساتھ e^{j310t} نہ لکھتے ہوئے دوری سمتیہ حاصل ہوتی ہے یعنی

$$\hat{V}_2 = 40e^{j50^\circ}$$

جس کو درج ذیل بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\hat{V}_2 = 40\underline{/50^\circ}$$

رو کو بھی مخلوط تفاعل کا حقیقی جزو لکھ کر

$$i(t) = 22e^{j(\omega t+0.2\pi)}\Big|_{\text{حقیقی}}$$

دوری سمتیہ حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{I} = 22e^{j0.2\pi} = 22\underline{/0.2\pi}$$

مشق 8.4: درج ذیل کو تعددی دائرہ کار میں لکھیں جہاں $\omega = 400\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔

$$\hat{I} = 35\underline{/44^\circ}, \quad \hat{V} = 12e^{j\frac{\pi}{4}}, \quad \hat{I} = 33\underline{/-77^\circ}$$

جوابات: $i(t) = 35\cos(400t + 44^\circ)$ ، $v(t) = 12\cos(400t + \frac{\pi}{4})$ ، $i(t) = 33\cos(400t - 77^\circ)$

[[make'and`/tikz/external/mode=listToDueDiscardedImage]]

شکل 8.8: دوری سمتیات کے اشکال۔

شکل 8.8 میں $\hat{I}=25\underline{/20^\circ}$ اور $\hat{V}=30e^{j55^\circ}$ کھینچے گئے ہیں جہاں سے دوری سمتیات کا زاویائی تعلق بھی ظاہر ہوتا ہے۔ شکل 8.8 میں دباو سے رو 33° درجے پیچھے ہے۔

کسی بھی حقیقی تفاعل مثلاً حقیقی دباو کو $v(t)=V_0\cos(\omega t+\phi)$ صورت میں لکھتے ہوئے جہاں V_0 مثبت حقیقی مقدار ہو، V_0 اور ϕ استعمال کرتے ہوئے دوری سمتیہ فوراً

$$\hat{V}=V_0\underline{/\phi} \tag{8.49}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مثال 8.13: درج ذیل کے دوری سمتیات فوراً لکھیں۔

$$\begin{aligned}
i_1(t)&=20\cos(132t-27^\circ)\\
v_1(t)&=-100\cos(20t-60^\circ)\\
i_2(t)&=-90\sin(450t-100^\circ)
\end{aligned}$$

حل: رو i_1 میں $I_0=20$ اور $\phi=-27^\circ$ ہے لہٰذا درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\hat{I}_1=20\underline{/-27^\circ}$$

دباو کا حیطہ منفی ہے لہٰذا مثبت حیطہ حاصل کرنے کی خاطر دباو کو درج ذیل لکھتے ہیں

$$v_1(t)=100\cos(20t-60^\circ+180^\circ)=100\cos(20t+120^\circ)$$

جس سے دوری سمتیہ درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\hat{V}_1=100\underline{/120^\circ}$$

رو $i_2(t)$ کو $i(t)=I_0\cos(\omega t+\phi)$ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$i_2(t)=90\cos(450t-100^\circ+90^\circ)=90\cos(450t-10^\circ)$$

یوں دوری سمتیہ درج ذیل ہو گا۔

$$\hat{I}_2=90\underline{/-10^\circ}$$

8.5 مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر کے انفرادی دوری سمتی تعلق

شکل 8.9 پر نظر رکھتے ہوئے پڑھیں۔ مزاحمت R پر مخلوط دباو $v(t) = V_0 e^{j(\omega t+\phi_v)}$ مسلط کرنے سے مزاحمت میں مخلوط رو $i(t) = I_0 e^{j(\omega t+\phi_i)}$ گزرے گی۔ اوہم کے قانون کے تحت

$$V_0 e^{j(\omega t+\phi_v)} = R I_0 e^{j(\omega t+\phi_i)}$$

یعنی

$$V_0 e^{j\phi_v} = R I_0 e^{j\phi_i}$$

ہو گا۔ اس کو دوری سمتیہ کی صورت میں

$$\hat{V} = R\hat{I} \tag{8.50}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں

$$\begin{aligned} \hat{V} &= V_0 e^{j\phi_v} \\ \hat{I} &= I_0 e^{j\phi_i} \end{aligned}$$

یعنی

$$\begin{aligned} \hat{V} &= V_0 \underline{/\phi_v} \\ \hat{I} &= I_0 \underline{/\phi_i} \end{aligned} \tag{8.51}$$

کے برابر ہیں۔ اس طرح مساوات 8.50 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$V_0 \underline{/\phi_v} = R I_0 \underline{/\phi_i}$$

یاد رہے کہ دوری سمتیات میں V_0 اور I_0 حقیقی اور مثبت مقدار ہیں۔ درج بالا مساوات میں بائیں ہاتھ اور دائیں ہاتھ کے مخلوط اعداد صرف اور صرف اس صورت برابر ہوں گے جب ان کے حیطے برابر ہوں اور ان کے زاویے برابر ہوں یعنی

$$\begin{aligned} V_0 &= I_0 R \\ \phi_v &= \phi_i \end{aligned} \tag{8.52}$$

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(الف)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ب)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(پ)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ت)

شکل 8.9: مزاحمت کے دباو اور رو کے تعددی اور وقتی تفاعل۔

اس طرح مزاحمت کی رو اور دباو ہم زاویہ ہیں۔ مساوات 8.52 کی مدد سے مساوات 8.51 درج ذیل صورت اختیار کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{V} &= V_0\angle\phi_v \\ \hat{I} &= \frac{V_0}{R}\angle\phi_v\end{aligned} \tag{8.53}$$

شکل 8.9-پ میں مزاحمت کے $\hat{I}$ اور $\hat{V}$ دوری سمتیات دکھائے گئے ہیں جو تعددی تفاعل ہیں جبکہ شکل 8.9-ت میں مزاحمت کے $i(t)$ اور $v(t)$ دکھائے گئے ہیں جو وقتی تفاعل ہیں۔

مثال 8.14: شکل 8.9-ب میں $10\,\Omega$ کے مزاحمت پر $v(t) = 22\cos(30t - 66^\circ)$ دباو مسلط کی گئی ہے۔ مزاحمت کے رو کو وقتی دائرہ کار میں لکھیں۔ رو کی تعددی دائرہ کار صورت شکل 8.9-الف سے دریافت کریں۔

حل: اوہم کے قانون کی مدد سے رو کی وقتی دائرہ کار صورت معلوم کرتے ہیں۔

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{22\cos(30t - 66^\circ)}{10} = 2.2\cos(30t - 66^\circ)\ \mathrm{A}$$

آئیں اب رو کی تعددی دائرہ کار صورت حاصل کرتے ہیں۔ دوری دباو

$$\hat{V} = 22\angle{-66^\circ}\ \mathrm{V}$$

ہے لہٰذا دوری رو درج ذیل ہو گی۔

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{R} = \frac{22\angle{-66^\circ}}{10} = 2.2\angle{-66^\circ}\ \mathrm{A}$$

مشق 8.5: بارہ اوہم کے مزاحمت میں دوری رو $\hat{I} = 37\underline{/43^\circ}\,\mathrm{A}$ ہے جبکہ تعدد $\omega = 172\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔ دباو کی وقتی دائرہ کار صورت لکھیں۔

جواب: $v(t) = 444\cos(172t + 43^\circ)\,\mathrm{V}$

شکل 8.10 پر نظر رکھتے ہوئے پڑھیں۔ امالہ گیر کے دباو اور رو کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$v = L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{8.54}$$

امالہ گیر پر مخلوط دباو $v(t) = V_0 e^{j(\omega t+\phi_v)}$ مسلط کرنے سے اس میں مخلوط رو $i(t) = I_0 e^{j(\omega t+\phi_i)}$ پیدا ہو گی۔ ان قیمتوں کو درج بالا مساوات میں پُر کرنے سے

$$\begin{aligned} V_0 e^{j(\omega t+\phi_v)} &= L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[I_0 e^{j(\omega t+\phi_i)}\right] \\ &= j\omega L I_0 e^{j(\omega t+\phi_i)} \end{aligned}$$

یعنی

$$V_0 e^{j\phi_v} = j\omega L I_0 e^{j\phi_i}$$

ملتا ہے جو دوری مساوات ہے۔ یہ دوری مساوات درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$\hat{V} = j\omega L\hat{I} \tag{8.55}$$

آپ نے دیکھا کہ مساوات 8.54 جو تفرقی اور وقتی مساوات ہے سے مساوات 8.55 حاصل ہوتا ہے جو تعددی اور الجبرائی مساوات ہے۔ دوری سمتیات کی مدد سے تفرقی مساوات سے الجبرائی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ الجبرائی مساوات حل کرنا نہایت آسان ہوتا ہے جبکہ تفرقی مساوات کو حل کرنا دشوار ہوتا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ دوری سمتیات اتنے مقبول ہیں۔

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(الف)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ب)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(پ)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ت)

شکل 8.10: امالہ کے دباو اور رو کے تعددی اور وقتی تفاعل۔

آپ جانتے ہیں کہ

$$\underline{/90^\circ} = e^{j90^\circ} = \cos 90^\circ + j\sin 90^\circ = j \tag{8.56}$$

لکھا جا سکتا ہے لہٰذا مساوات 8.55 کو

$$\hat{V} = \omega L\hat{I}e^{j90^\circ}$$

یعنی

$$V_0 e^{j\phi_v} = \omega L I_0 e^{j(\phi_i + 90^\circ)} \tag{8.57}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ مساوات 8.57 میں دونوں ہاتھ کے مخلوط اعداد صرف اور صرف اس وقت برابر ہوں گے جب ان کے حیطے برابر ہوں اور ان کے زاویے برابر ہوں لہٰذا اس مساوات کے تحت

$$\begin{aligned} V_0 &= \omega L I_0 \\ \phi_v &= \phi_i + 90^\circ \end{aligned} \tag{8.58}$$

ہوں گے۔ یوں دباو کا زاویہ، رو کے زاویے سے 90° درجے زیادہ ہے لہٰذا رو سے دباو 90° درجے آگے ہے یا دباو سے رو 90° پیچھے ہے۔ شکل 8.10-پ میں دوری سمتیات دکھائے گئے ہیں جہاں دباو سے رو 90° درجے پیچھے دکھایا گیا ہے۔

مساوات 8.57 سے وقتی مساوات درج ذیل لکھی جائے گی جہاں مساوات 8.58 کے تحت $\phi_v = \phi_i + 90^\circ$ ہو گا۔

$$V_0\cos(\omega t + \phi_v) = \omega L I_0 \cos(\omega t + \phi_i + 90^\circ) \tag{8.59}$$

درج بالا مساوات میں دیے دباو اور رو کو شکل 8.10-ت میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 8.15: شکل 8.10 میں $4\,\mathrm{mH}$ امالہ گیر پر $v(t) = 12\cos(1000t + 22^\circ)$ دباو مسلط کی جاتی ہے۔ امالہ گیر کی رو دریافت کریں۔

حل: دوری سمتیہ دباو درج ذیل ہے۔

$$\hat{V} = 12\underline{/22^\circ}$$

مساوات 8.55 کی مدد سے دوری سمتیہ رو حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned}\hat{I} &= \frac{\hat{V}}{j\omega L}\\ &= \frac{12\underline{/22^\circ}}{j1000 \times 0.004}\\ &= \frac{12\underline{/22^\circ}}{4\underline{/90^\circ}}\\ &= 3\underline{/-68^\circ}\,\mathrm{A}\end{aligned}$$

جہاں مساوات 8.56 کا استعمال کرتے ہوئے $j = \underline{/90^\circ}$ لکھا گیا ہے۔ یوں رو کی وقتی دائرہ کار صورت درج ذیل ہو گی۔

$$i(t) = 3\cos(1000t - 68^\circ)\,\mathrm{A}$$

مشق 8.6: امالہ کی قیمت $10\,\mathrm{mH}$ جبکہ اس میں رو $\hat{I} = 8\underline{/44^\circ}$ کی تعدد $500\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔ دباو کی وقتی دائرہ کار صورت دریافت کریں۔

جواب: $v(t) = 40\cos(500t + 134^\circ)\,\mathrm{V}$

شکل 8.11 پر نظر رکھتے ہوئے پڑھیں جہاں برق گیر پر دباو $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi_v)$ مسلط کی گئی ہے۔ برق گیر کی تفرقی مساوات

$$i(t) = C \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{8.60}$$

میں مخلوط دباو اور مخلوط رو پُر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} I_0 e^{j(\omega t + \phi_i)} &= C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left[V_0 e^{j(\omega t + \phi_v)} \right] \\ &= j\omega C V_0 e^{j(\omega t + \phi_v)} \end{aligned}$$

یعنی

$$I_0 e^{j\phi_i} = j\omega C e^{j\phi_v}$$

حاصل ہوتا ہے جس کو دوری سمتیہ کی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\hat{I} = j\omega C \hat{V} \tag{8.61}$$

مساوات 8.60 برق گیر کی تفرقی مساوات ہے جبکہ مساوات 8.61 برق گیر کی الجبرائی مساوات ہے۔

مساوات 8.61 میں $j = e^{j90^\circ}$ لکھنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$I_0 e^{j\phi_i} = \omega C e^{j(\phi_v + 90^\circ)} \tag{8.62}$$

اس مساوات کے دونوں اطراف صرف اور صرف اس صورت برابر ہو سکتے ہیں جب دونوں اطراف کے حیطے برابر ہوں اور ان کے زاویے برابر ہوں۔

$$\begin{aligned} I_0 &= \omega C V_0 \\ \phi_i &= \phi_v + 90^\circ \end{aligned} \tag{8.63}$$

درج بالا مساوات کے تحت دباو سے رو 90° درجے آگے ہے۔

مساوات 8.62 سے وقتی دائرہ کار صورت لکھتے ہیں جہاں درج بالا مساوات کے تحت $\phi_i = \phi_v + 90^\circ$ ہو گا۔

$$I_0 \cos(\omega t + \phi_i) = \omega C V_0 \cos(\omega t + \phi_v + 90^\circ) \tag{8.64}$$

شکل 8.11-پ میں دوری سمتیات دکھائے گئے ہیں جبکہ شکل-ت میں دباو اور رو کی وقتی دائرہ کار صورت دکھائی گئی ہے۔

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(الف)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ب)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(پ)

ToDueDiscardedImage]]
[[make'and`/tikz/external/mode=list

(ت)

شکل 8.11: برق گیر کے دباو اور رو کے تعددی اور وقتی تفاعل۔

مثال 8.16: شکل 8.11 میں $100\,\mu\mathrm{F}$ برق گیر پر $v(t) = 7\cos(5000t - 60^\circ)\,\mathrm{V}$ کا دباو مسلط کیا گیا ہے۔ رو حاصل کریں۔

حل: مسلط دباو کی دوری سمتیہ لکھتے ہیں۔

$$\hat{V} = 7\underline{/-60^\circ}$$

یوں رو درج ذیل ہو گی

$$\begin{aligned}
\hat{I} &= j\omega C\hat{V} \\
&= j5000 \times 100 \times 10^{-6} 7\underline{/-60^\circ} \\
&= 3.5\underline{/-60^\circ + 90^\circ} \\
&= 3.5\underline{/30^\circ}\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

جس کی وقتی دائرہ کار صورت درج ذیل ہے۔

$$i(t) = 3.5\cos(5000t + 30^\circ)\,\mathrm{A}$$

مشق 8.7: شکل 8.11 میں $330\,\mu\mathrm{F}$ برق گیر کی رو $\hat{I} = 11\underline{/-12^\circ}\,\mathrm{A}$ ہے۔ رو کی تعدد $6000\,\mathrm{Hz}$ ہے۔ دباو کی وقتی دائرہ کار صورت حاصل کریں۔

جواب: $v(t) = 0.884\cos(12000\pi t - 102^\circ)\ \mathrm{V}$

8.6 برقی رکاوٹ اور برقی فراوانی

قانون اوہم کے تحت برقی مزاحمت کو $R = \frac{V}{I}$ لکھا جا سکتا ہے۔ بالکل اسی طرح، شکل 8.12 میں دوری سمتیہ دباو اور دوری سمتیہ رو کی شرح کو **برقی رکاوٹ**[31] کہتے اور $\boldsymbol{Z}$ سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$\boldsymbol{Z} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} \tag{8.65}$$

برقی رکاوٹ کو عموماً رکاوٹ کہا جاتا ہے۔ چونکہ $\hat{V}$ اور $\hat{I}$ مخلوط اعداد ہیں لہٰذا $\mathbf{Z}$ بھی مخلوط عدد ہو گا۔

$$\boldsymbol{Z} = \frac{V_0\underline{/\phi_v}}{I_0\underline{/\phi_i}} = \frac{V_0}{I_0}\underline{/\phi_v - \phi_i} = Z_0\underline{/\phi_z} \tag{8.66}$$

چونکہ دباو اور رو کی شرح کو اوہم Ω میں ناپتے ہیں لہٰذا رکاوٹ کی اکائی بھی اوہم ہے۔ یوں بدلتی رو دور کی رکاوٹ یک سمتی رو دور کی مزاحمت کی مانند ہے۔ رکاوٹ کو مستطیل طرز میں بھی لکھا جا سکتا ہے

$$\boldsymbol{Z}(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \tag{8.67}$$

جہاں R حقیقی جزو یعنی **مزاحمت**[32] ہے جبکہ X خیالی جزو یعنی **متعاملیت**[33] ہے۔ رکاوٹ مخلوط عدد ہے ناکہ دوری سمتیہ چونکہ دوری سمتیہ سائن نما تفاعل کو ظاہر کرتی ہے جبکہ رکاوٹ سائن نما تفاعل نہیں ہے۔

کسی بھی مخلوط عدد کی طرح، رکاوٹ کو بھی مستطیل طرز اور زاویائی طرز میں لکھا جا سکتا ہے

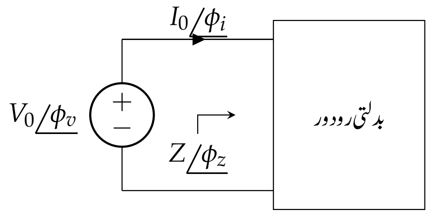
$$\boldsymbol{Z} = Z\underline{/\phi_z} = R + jX \tag{8.68}$$

جہاں ایک طرز سے دوسری طرز میں تبادلہ درج ذیل مساوات سے کیا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} R &= Z\cos\phi_z \\ X &= Z\sin\phi_z \qquad \text{زاویائی سے مستطیل طرز} \end{aligned} \tag{8.69}$$

---

[31] impedance
[32] resistive
[33] reactance



شکل 8.12: برقی رکاوٹ کی تعریف۔

$$
\begin{aligned}
Z &= \sqrt{R^2 + X^2} \\
\phi_z &= \tan^{-1} \frac{X}{R} \qquad \text{مستطیل سے زاویائی طرز}
\end{aligned}
\tag{8.70}
$$

مساوات 8.65 رکاوٹ کی تعریف ہے۔ اسے استعمال کرتے ہوئے مساوات 8.50، مساوات 8.55 اور مساوات 8.61 سے بالترتیب مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر کی رکاوٹ لکھتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
Z_R &= R \\
Z_L &= j\omega L = jX_L \\
Z_C &= \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C} = -jX_C
\end{aligned}
\tag{8.71}
$$

درج بالا میں برق گیر کی رکاوٹ لکھتے ہوئے $\frac{1}{j} = \frac{1\times j}{j\times j} = \frac{j}{-1} = -j$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ یوں امالی متعاملیت اور برق گیری متعاملیت درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
X_L &= \omega L \\
X_C &= \frac{1}{\omega C}
\end{aligned}
\tag{8.72}
$$

مشق 8.8: مزاحمت $R = 30\,\Omega$، امالہ $L = 20\,\text{mH}$ اور برق گیر $C = 2000\,\mu\text{F}$ کی رکاوٹ $100\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$، $1000\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ اور $9000\,\text{Hz}$ تعدد پر دریافت کریں۔

جوابات: پہلی تعدد پر $Z_R = 30\,\Omega$، $Z_L = j2\,\Omega$، $Z_C = -j5\,\Omega$ ہیں۔
دوسری تعدد پر $Z_R = 30\,\Omega$، $Z_L = j20\,\Omega$، $Z_C = -j0.5\,\Omega$ ہیں۔

تیسری تعدد پر $Z_R = 30\,\Omega$ ، $Z_L = j1131\,\Omega$ ، $Z_C = -j0.00884\,\Omega$ ہیں۔

قوانین کرخوف وقتی دائرہ کار کے علاوہ تعددی دائرہ کار میں بھی لاگو ہوتے ہیں۔ صفحہ 55 پر حصہ 2.5 میں سلسلہ وار جڑے مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت مساوات 2.33 میں حاصل کیا گیا۔اسی طرح صفحہ 61 پر حصہ 2.8 میں متعدد مساوی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت مساوات 2.47 میں پیش کیا گیا۔ بالکل اسی طرح متعدد سلسلہ وار جڑے رکاوٹ اور متعدد متوازی رکاوٹ کے مساوی رکاوٹ حاصل کی جا سکتی ہے۔ مشق میں آپ سے ایسا ہی کرنے کو کہا گیا ہے۔

مساوات 8.73 متعدد سلسلہ وار رکاوٹ کی مساوی رکاوٹ دیتی ہے جبکہ مساوات 8.74 متعدد متوازی رکاوٹوں کی مساوی رکاوٹ دیتی ہے۔

$$\boldsymbol{Z}_s = \boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2 + \boldsymbol{Z}_3 + \cdots + \boldsymbol{Z}_n \quad \text{سلسلہ وار رکاوٹوں کا مساوی رکاوٹ} \tag{8.73}$$

$$\frac{1}{\boldsymbol{Z}_m} = \frac{1}{\boldsymbol{Z}_1} + \frac{1}{\boldsymbol{Z}_2} + \frac{1}{\boldsymbol{Z}_3} + \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{Z}_n} \quad \text{متوازی رکاوٹوں کا مساوی رکاوٹ} \tag{8.74}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ یہ مساوات ہوبہو مزاحمتوں کی مساوات کی طرح ہیں۔

مشق 8.9: صفحہ 56 پر شکل 2.23 میں سلسلہ وار مزاحمت جڑے دکھائے گئے ہیں۔مزاحمتوں کی جگہ رکاوٹ نسب کرتے ہوئے، مخلوط دباو اور مخلوط رو کے استعمال سے مساوی رکاوٹ کی مساوات حاصل کریں۔اسی طرح متعدد رکاوٹوں کو متوازی جوڑتے ہوئے ان کا مساوی رکاوٹ حاصل کریں۔

جوابات: مساوات 8.73 اور مساوات 8.74

مثال 8.17: متعدد برق گیر سلسلہ وار جڑے ہیں۔ان کی انفرادی رکاوٹیں استعمال کرتے ہوئے مساوی رکاوٹ حاصل کریں۔مساوی رکاوٹ سے مساوی برقی گیر دریافت کریں۔

حل: برق گیر C_1 تا C_n کی ω تعدد پر رکاوٹیں $\frac{1}{j\omega C_1}$ ، $\frac{1}{j\omega C_2}$ ، $\cdots$ ، $\frac{1}{j\omega C_n}$ ہوں گی۔ان کے مساوی برق گیر کو C_s کہتے ہوئے مساوی رکاوٹ $\frac{1}{j\omega C_s}$ لکھا جائے گا۔یوں مساوات 8.73 کے تحت درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{1}{j\omega C_s} = \frac{1}{j\omega C_1} + \frac{1}{j\omega C_2} + \frac{1}{j\omega C_3} + \cdots + \frac{1}{j\omega C_n}$$

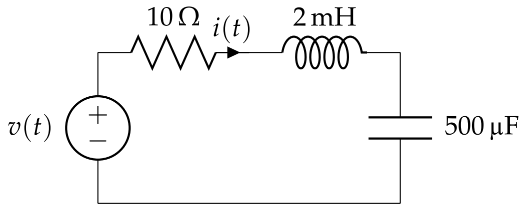
اس مساوات کے دونوں اطراف کو $j\omega$ سے ضرب دیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے جو عین مساوات 6.22 ہی ہے۔

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_n}$$

مشق 8.10: متعدد برق گیر متوازی جڑے ہیں۔ان کی رکاوٹیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 8.74 کی مدد سے ان کا مساوی رکاوٹ حاصل کریں۔مساوی رکاوٹ سے مساوی برق گیر کی مساوات حاصل کریں۔متعدد متوازی برق گیر کا مساوی برق گیر مساوات 6.25 دیتی ہے۔

مشق 8.11: متعدد امالہ گیر متوازی جڑے ہیں۔ان کی رکاوٹیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 8.74 کی مدد سے ان کا مساوی رکاوٹ حاصل کریں۔مساوی رکاوٹ سے مساوی امالہ گیر کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: صفحہ 284 پر مساوات 6.29



شکل 8.13: مثال 8.18 کا دور۔

مشق 8.12: متعدد امالہ گیر سلسلہ جڑے ہیں۔ان کی رکاوٹیں استعمال کرتے ہوئے مساوات 8.73 کی مدد سے ان کا مساوی رکاوٹ حاصل کریں۔مساوی رکاوٹ سے مساوی امالہ گیر کی مساوات حاصل کریں۔

جواب: صفحہ 281 پر مساوات 6.27

مثال 8.18: شکل 8.13 میں منبع دباو کو درپیش مساوی رکاوٹ $50\,\mathrm{Hz}$ اور $2000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ تعدد پر دریافت کریں۔دباو $v(t)=30\cos(\omega t+45^\circ)\,\mathrm{V}$ کی صورت میں دونوں تعدد پر وقتی دائرہ کار میں رو دریافت کریں۔

حل: مساوات 8.71 سے انفرادی پرزوں کی رکاوٹ $50\,\mathrm{Hz}$ تعدد پر حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
Z_R &= 10\,\Omega\\
Z_L &= j2\pi\times 50\times 2\times 10^{-3} = j0.6283\,\Omega\\
Z_C &= \frac{1}{j2\pi\times 50\times 500\times 10^{-6}} = -j6.3662\,\Omega
\end{aligned}
$$

چونکہ تمام پرزے سلسلہ وار جڑے ہیں لہٰذا ان کا مساوی رکاوٹ درج ذیل ہو گا۔

$$
\boldsymbol{Z}_s = 10 + j0.6283 - j6.3662 = 10 - j5.7379\,\Omega
$$

دباو کو دوری سمتیہ صورت میں لکھتے ہوئے تعددی دائرہ کار میں رو حاصل کرتے ہیں۔

$$
\hat{I} = \frac{\hat{V}}{\boldsymbol{Z}_s} = \frac{30\underline{/45^\circ}}{10-j5.7379} = \frac{30\underline{/45^\circ}}{11.5292\underline{/-29.85^\circ}} = 2.6\underline{/74.85^\circ}\,\mathrm{A}
$$

اس سے وقتی دائرہ کار میں رو لکھتے ہیں۔

$$i(t) = 2.6\cos(100\pi t + 74.85^\circ)\ \text{A}$$

اب $2000\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ پر قیمتیں دریافت کرتے ہیں۔ انفرادی رکاوٹ درج ذیل ہیں

$$\begin{aligned}
Z_R &= 10\,\Omega\\
Z_L &= j2000 \times 2 \times 10^{-3} = j4\,\Omega\\
Z_C &= \frac{1}{j2000 \times 500 \times 10^{-6}} = -j1\,\Omega
\end{aligned}$$

جن سے مساوی رکاوٹ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\boldsymbol{Z}_s = 10 + j4 - j1 = 10 + j3 = 10.44\underline{/16.7^\circ}\,\Omega$$

یوں دوری رو درج ذیل ہو گی

$$\hat{I} = \frac{30\underline{/45^\circ}}{10.44\underline{/16.7^\circ}} = 2.87\underline{/28.3^\circ}$$

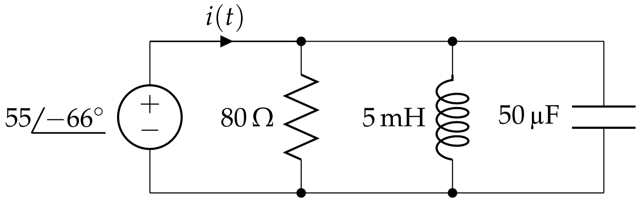
جس سے وقتی دائرہ کار میں رو لکھتے ہیں۔

$$i(t) = 2.87\cos(2000t + 28.3^\circ)\ \text{A}$$

آپ نے دیکھا کہ $50\,\text{Hz}$ پر کل رکاوٹ برق گیر کی خاصیت رکھتا ہے یعنی $\boldsymbol{Z} = R - jX$ لکھا جاتا ہے جبکہ $2000\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ پر $\boldsymbol{Z} = R + jX$ لکھا جاتا ہے جو امالی خاصیت کو ظاہر کرتا ہے۔

مشق 8.13: شکل 8.14 میں وقتی دائرہ کار میں رو حاصل کریں۔ تعدد $1000\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ ہے۔

جواب: $8.28\cos(1000t - 151.23^\circ)\ \text{A}$



شکل 8.14: مشق 8.13 کا دور۔

بدلتی رو ادوار میں برقی رکاوٹ Z کے علاوہ **برقی فراوانی**[34] Y بھی نہایت اہم ثابت ہوتی ہے۔ رکاوٹ کے بالعکس متناسب کو فراوانی کہتے ہیں۔

$$Y = \frac{1}{Z} \tag{8.75}$$

مخلوط رکاوٹ کی صورت میں فراوانی بھی مخلوط ہو گی۔ فراوانی کو سیمنز S میں ناپا جاتا ہے۔ فراوانی کو مستطیل طرز درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$Y = G + jB \tag{8.76}$$

جہاں G کو **ایصالیت**[35] اور B کو **تاثریت**[36] کہتے ہیں۔

رکاوٹ سے فراوانی کے اجزاء درج ذیل مساوات سے شروع کرتے ہوئے

$$G + jB = \frac{1}{R + jX} \tag{8.77}$$

حاصل کی جا سکتی ہے یعنی

$$\begin{aligned} G &= \frac{R}{R^2 + X^2} \\ B &= \frac{-X}{R^2 + X^2} \end{aligned} \tag{8.78}$$

اسی طرح فراوانی کے اجزاء سے رکاوٹ کے اجزاء درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\begin{aligned} R &= \frac{G}{G^2 + B^2} \\ X &= \frac{-B}{G^2 + B^2} \end{aligned} \tag{8.79}$$

---

[34] admittance
[35] conductance
[36] susceptance

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مخلوط رکاوٹ کی صورت میں G اور R آپس میں بالعکس متناسب نہیں ہیں۔اسی طرح B اور X بھی آپس میں بالعکس متناسب نہیں ہیں۔اگر رکاوٹ میں $X=0$ ہو تب $G=\frac{1}{R}$ ہو گا۔

انفرادی پرزوں کی فراوانی درج ذیل ہے۔

$$\begin{aligned}
Y_R &= \frac{1}{R} = G \\
Y_L \frac{1}{j\omega L} &= \frac{1}{\omega L}\angle{-90^\circ} \\
Y_C &= j\omega C = \omega C\angle{90^\circ}
\end{aligned} \tag{8.80}$$

جہاں انفرادی مزاحمت کی صورت میں $\frac{1}{R}=G$ لکھا گیا ہے۔

قوانین کرخوف فراوانی پر بھی لاگو ہوتے ہیں لہٰذا باب دوم کی طرز پر سلسلہ وار اور متوازی جڑے فراوانی کی مساوی فراوانی بالترتیب درج ذیل مساوات سے حاصل کی جا سکتی ہے۔

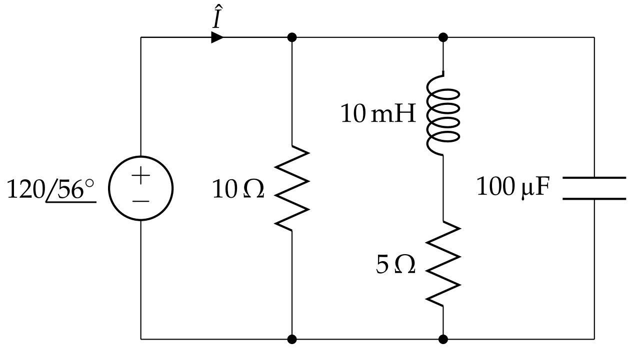
$$\frac{1}{\boldsymbol{Z}_s} = \frac{1}{\boldsymbol{Y}_1} + \frac{1}{\boldsymbol{Y}_2} + \frac{1}{\boldsymbol{Y}_3} + \cdots + \frac{1}{\boldsymbol{Y}_n} \quad \text{سلسلہ وار جڑے} \tag{8.81}$$

$$\boldsymbol{Y}_m = \boldsymbol{Y}_1 + \boldsymbol{Y}_2 + \boldsymbol{Y}_3 + \cdots + \boldsymbol{Y}_n \quad \text{متوازی جڑے} \tag{8.82}$$

مثال 8.19: شکل 8.15 میں منبع کے متوازی جڑے دور کی فراوانی $500\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر دریافت کرتے ہوئے رو $\hat{I}$ حاصل کریں۔

حل: دور میں تین متوازی حصوں کے انفرادی رکاوٹ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
Z_1 &= 10\,\Omega \\
Z_2 &= 5 + j500 \times 10 \times 10^{-3} = 5 + j5\,\Omega \\
Z_3 &= \frac{1}{j500 \times 100 \times 10^{-6}} = -j20\,\Omega
\end{aligned}$$



شکل 8.15: مثال 8.19 کا دور۔

یوں تینوں حصوں کے فراوانی درج ذیل ہو گی۔

$$
\begin{aligned}
Y_1 &= \frac{1}{10} = 0.1\,\mathrm{S}\\
Y_2 &= \frac{1}{5+j5} = 0.1 - j0.1\,\mathrm{S}\\
Y_3 &= \frac{1}{-j20} = j0.05\,\mathrm{S}
\end{aligned}
$$

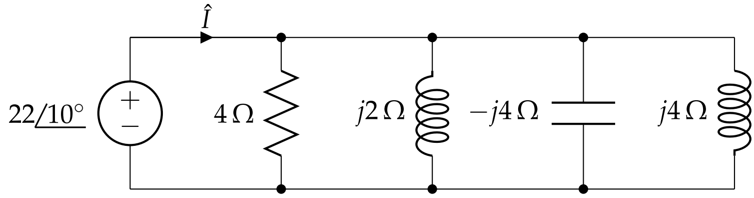
یوں تینوں حصوں کو متوازی جوڑنے سے درج ذیل مساوی فراوانی حاصل ہو گی

$$\boldsymbol{Y}_m = (0.1) + (0.1 - j0.1) + (j0.05) = 0.2 - j0.05\,\mathrm{S}$$

جسے استعمال کرتے ہوئے رو حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\hat{I} &= \boldsymbol{Y}\hat{V}\\
&= (0.2 - j0.05)(120\underline{/56^\circ})\\
&= 24.74\underline{/41.96^\circ}\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

مشق 8.14: شکل 8.16 میں منبع کے متوازی دور کی فراوانی دریافت کرتے ہوئے $\hat{I}$ حاصل کریں۔



شکل 8.16: مشق 8.14 کا دور۔

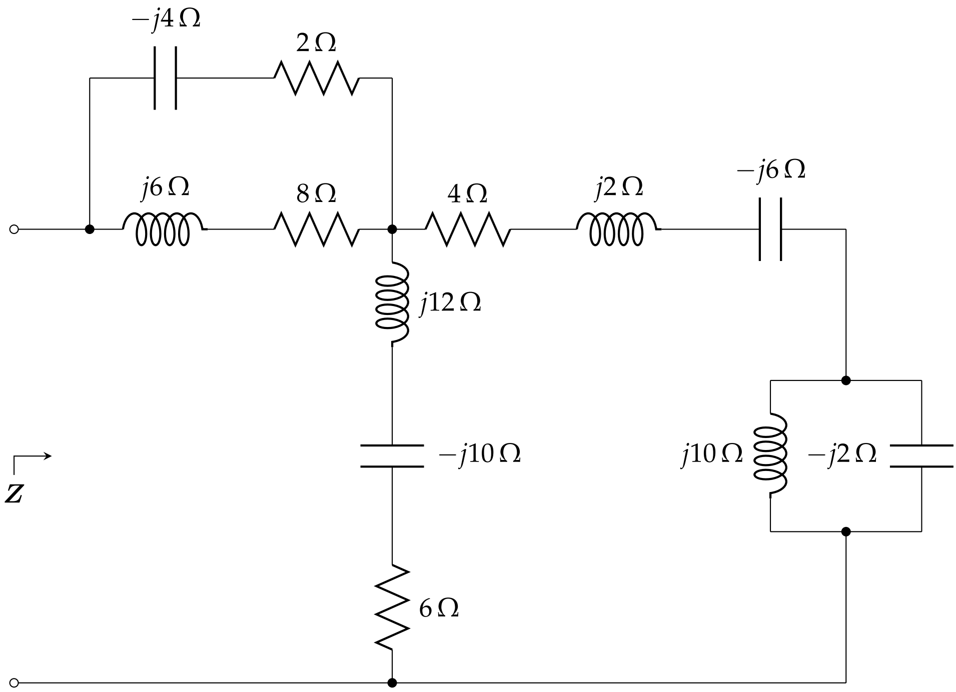
جواب: $12.298\underline{/-53.4^\circ}$ A

آئیں مختلف انداز میں جڑے متعدد پرزوں کی مساوی رکاوٹ حاصل کرنا ایک مثال کی مدد سے سیکھیں۔ مساوی رکاوٹ حاصل کرنے کا عمل بالکل ویسا ہی ہے جیسا مزاحمتی دور کا مساوی مزاحمت حاصل کرنے کا عمل۔ مزاحمتی دور میں حقیقی اعداد استعمال ہوتے ہیں جبکہ رکاوٹی دور میں مخلوط اعداد استعمال ہوتے ہیں۔

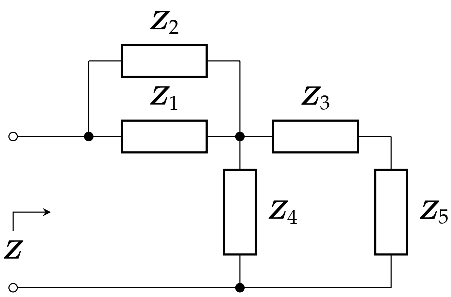
مثال 8.20: شکل 8.17-الف میں متعدد پرزے مختلف طرز پر جڑے دکھائے گئے ہیں۔ دور کے دو سروں پر مساوی رکاوٹ Z دریافت کریں۔

حل: شکل 8.17-ب میں دور کے مختلف حصوں کی نشاندہی کی گئی ہے جن کا مساوی رکاوٹ آسانی سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ ان حصوں کی رکاوٹ دریافت کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
Z_1 &= 8 + j6\,\Omega \\
Z_2 &= 2 - j4\,\Omega \\
Z_3 &= 4 + j2 - j6 = 4 - j4\,\Omega \\
Z_4 &= 6 - j10 + j12 = 6 + j2\,\Omega
\end{aligned}
$$



(الف)



(ب)

شکل 8.17: مثال 8.20 کا دور۔

اور

$$\begin{aligned}\frac{1}{\boldsymbol{Z}_5} &= \frac{1}{j10} + \frac{1}{-j2} \\ &= \frac{1}{j10} - \frac{1}{j2} \\ &= \frac{j2 - j10}{(j10)(j2)} \\ &= \frac{-j8}{-20}\,\mathrm{S}\end{aligned}$$

سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\boldsymbol{Z}_5 = \frac{20}{j8} = -j\frac{5}{2}\,\Omega$$

رکاوٹ $\boldsymbol{Z}_3$ اور $\boldsymbol{Z}_5$ سلسلہ وار جڑے ہیں لہٰذا ان کا مساوی رکاوٹ درج ذیل ہو گا۔

$$\boldsymbol{Z}_{35} = \boldsymbol{Z}_3 + \boldsymbol{Z}_5 = 4 - j4 - j\frac{5}{2} = 4 - j7.5\,\Omega$$

اب $\boldsymbol{Z}_4$ اور $\boldsymbol{Z}_{35}$ متوازی ہیں لہٰذا ان رکاوٹ کی فراوانی دریافت کرتے ہیں۔یوں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}_4 &= \frac{1}{\boldsymbol{Z}_4} \\ &= \frac{1}{6 + j2} \\ &= \left(\frac{1}{6 + j2}\right)\left(\frac{6 - j2}{6 - j2}\right) \\ &= \frac{6 - j2}{36 + 4} \\ &= 0.15 - j0.05\end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}_{35} &= \frac{1}{\boldsymbol{Z}_{35}} \\ &= \frac{1}{4 - j7.5} \\ &= \frac{4 + j7.5}{4^2 + 7.5^2} \\ &= 0.05536 + j0.10381\end{aligned}$$

حاصل کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Y}_{435} &= \boldsymbol{Y}_4 + \boldsymbol{Y}_{35}\\ &= 0.15 - j0.05 + 0.05536 + j0.10381\\ &= 0.20536 + j0.05381\,\mathrm{S}\end{aligned}$$

جس سے

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_{435} &= \frac{1}{\boldsymbol{Y}_{435}}\\ &= \frac{1}{0.20536 + j0.05381}\\ &= 4.55665 - j1.19397\,\Omega\end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے جو متوازی جڑے $\boldsymbol{Z}_4$ اور $\boldsymbol{Z}_{35}$ کا مساوی رکاوٹ ہے۔رکاوٹ $\boldsymbol{Z}_1$ اور $\boldsymbol{Z}_2$ متوازی جڑے ہیں۔ان کا مساوی رکاوٹ درج ذیل ہو گا۔

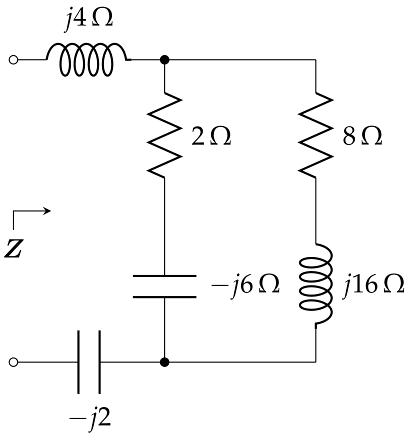
$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_{12} &= \frac{\boldsymbol{Z}_1\boldsymbol{Z}_2}{\boldsymbol{Z}_1 + \boldsymbol{Z}_2}\\ &= \frac{(8+j6)(2-j4)}{(8+j6)+(2-j4)}\\ &= 3.46154 - j2.69231\,\Omega\end{aligned}$$

یوں شکل 8.17 میں دیے دور کا مساوی مزاحمت درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z} &= \boldsymbol{Z}_{12} + \boldsymbol{Z}_{435}\\ &= 3.46154 - j2.69231 + 4.55665 - j1.19397\\ &= 8.01819 - j3.88628\,\Omega\end{aligned}$$

مشق 8.15: شکل 8.18 میں $\boldsymbol{Z}$ حاصل کریں۔

جواب: $\boldsymbol{Z} = \frac{24}{5} - j\frac{22}{5}\,\Omega$



شکل 8.18: مشق 8.15 کا دور۔

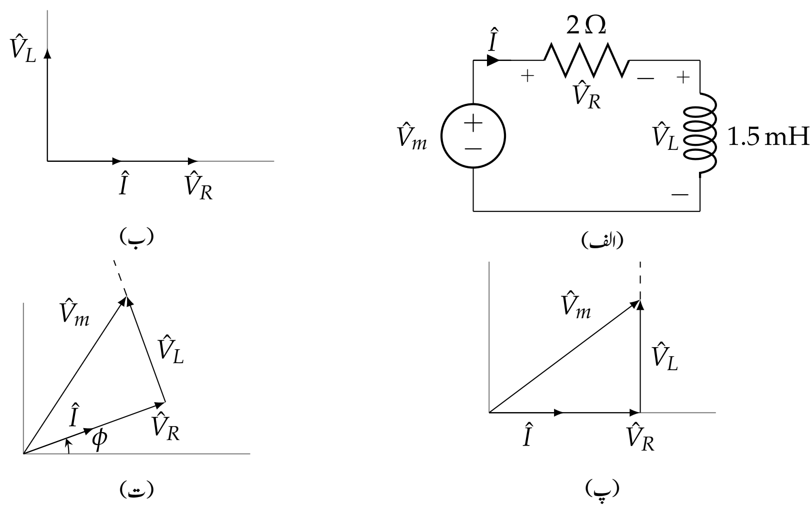
8.7 دوری سمتیات کے اشکال

رکاوٹ کی قیمت تعدد پر منحصر ہوتی ہے۔یوں دور میں رو اور دباو کا دارومدار بھی تعدد پر ہو گا۔دوری سمتی اشکال کی مدد سے رو اور دباو پر تعدد کے اثر پر غور کرنے میں مدد ملتی ہے۔آئیں اس پر چند مثال دیکھیں۔

مثال 8.21: شکل 8.19 میں $\hat{I}$ ، $\hat{V}_R$ ، $\hat{V}_L$ اور $\hat{V}_m$ کے دوری سمتیہ مختلف تعدد پر کھینچیں۔تعدد $\omega = 1000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر $\hat{I} = 5\underline{/0^\circ}\,\mathrm{A}$ کی صورت میں $\hat{V}_m$ حاصل کریں۔

حل: دوری سمتیات کے خط کسی ایک دوری سمتیہ کے حوالے سے کھینچے جاتے ہیں۔ہم $\hat{I}$ کو حوالہ سمتیہ تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔مزید، ہم اس دوری سمتیہ کو صفر زاویے پر تصور کرتے ہیں یعنی ہم $\hat{I} = I_0\underline{/0^\circ}$ تصور کرتے ہیں۔تعدد ω پر مزاحمتی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}_R = R$ جبکہ امالی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}_L = \omega L\underline{/90^\circ}$ ہو گی لہٰذا ان پرزوں پر دباو درج ذیل ہو گا۔

$$\hat{V}_R = \hat{I}\boldsymbol{Z}_R = I_0 R\underline{/0^\circ}$$
$$\hat{V}_L = \hat{I}\boldsymbol{Z}_L = I_0\omega L\underline{/90^\circ}$$



شکل 8.19: مثال 8.21 کے اشکال۔

یوں مزاحمت پر دباو عین رو کے ہم زاویہ ہے جبکہ امالہ پر دباو، رو سے $90°$ آگے ہے۔ شکل 8.19-ب میں ان دوری سمتیات کو دکھایا گیا ہے۔ چونکہ مزاحمتی رکاوٹ کی قیمت پر تعدد کا کوئی اثر نہیں لہٰذا $\hat{V}_R$ کی قیمت اور زاویہ تعدد تبدیل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتے۔ اس کے برعکس امالی رکاوٹ تعدد کے راست متناسب ہے لہٰذا تعدد بڑھانے سے $\boldsymbol{Z}_L$ کی قیمت بڑھے گی اور یوں $\hat{V}_L$ کا حیطہ بھی بڑھے گا جبکہ اس کا زاویہ جوں کا توں رہے گا۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $\omega = 0\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ پر $\hat{V}_L$ کی قیمت صفر ہو گی جبکہ تعدد بڑھانے سے $\hat{V}_L$ کی نوک خیالی محدد پر رہتے ہوئے مرکز سے دور ہو گی۔

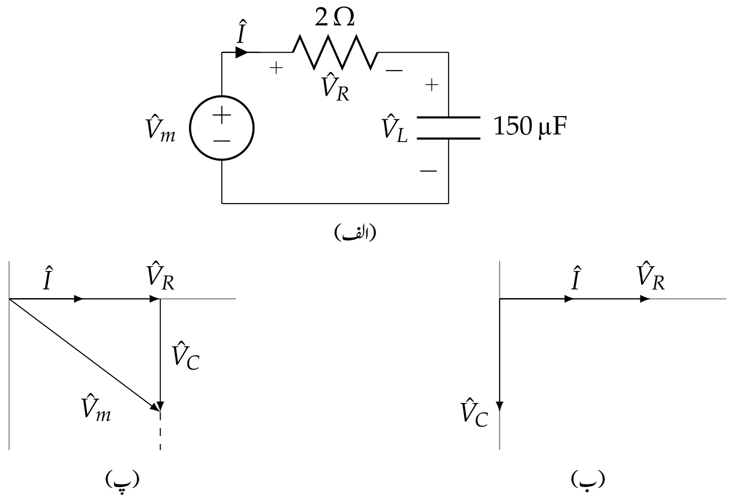
شکل 8.19-الف سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\hat{V}_m = \hat{V}_R + \hat{V}_L$$

شکل 8.19-پ میں اس سمتی جمع کو دکھایا گیا ہے جہاں دم سے سر جوڑنے کا طریقہ استعمال کیا گیا ہے۔ تعدد کو کم یا زیادہ کرنے سے $\hat{V}_L$ کا حیطہ کم اور زیادہ ہو گا لہٰذا شکل میں $\hat{V}_m$ کی نوک نقطہ دار لکیر پر حرکت کرے گی۔ صفر تعدد کی صورت میں $\hat{V}_m = \hat{V}_R$ ہو گا جبکہ لامتناہی تعدد پر $\hat{V}_m$ کا زاویہ تقریباً $90°$ ہو گا۔

$\omega = 1000\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ اور $\hat{I} = 5\underline{/0°}\,\text{A}$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\hat{V}_R = \hat{I}\boldsymbol{Z}_R = (5\underline{/0°})(2) = 10\underline{/0°}\,\text{V}$$
$$\hat{V}_L = \hat{I}\boldsymbol{Z}_L = (5\underline{/0°})(1000 \times 1.5 \times 10^{-3}) = 7.5\underline{/90°}\,\text{V}$$



شکل 8.20: مثال 8.22 کے اشکال۔

جس سے منبع کا دباو درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{V}_m &= 10\underline{/0^\circ} + 7.5\underline{/90^\circ}\\ &= 10 + j7.5\\ &= 12.5\underline{/36.87^\circ}\end{aligned}$$

یہی جواب شکل 8.19-پ سے بھی ترسیمی طریقے سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔

یہاں بتلاتا چلوں کہ حوالہ دوری سمتیہ کا زاویہ صفر درجے رکھنا ضروری نہیں ہے۔ہم $\hat{I} = I_0\underline{/\phi}$ لے سکتے ہیں۔ایسی صورت میں تمام سمتیات اسی زاویے سے گھوم جائیں گے۔شکل 8.19-ت میں ایسا ہی دکھایا گیا ہے۔

مثال 8.22: شکل 8.20 میں $\hat{I}$ ، $\hat{V}_R$ ، $\hat{V}_L$ اور $\hat{V}_m$ کے دوری سمتیہ مختلف تعدد پر کھینچیں۔

حل: رو کو حوالہ لیتے ہیں۔یوں $\hat{I} = I_0\underline{/0^\circ}$ ہو گا۔تعدد ω پر مزاحمتی رکاوٹ $Z_R = R$ جبکہ برق گیر کی رکاوٹ $Z_C = \frac{1}{\omega C}\underline{/-90^\circ}$ ہو گی لہٰذا ان پرزوں پر دباو درج ذیل ہو گا۔

$$\hat{V}_R = \hat{I}Z_R = I_0 R\underline{/0^\circ}$$
$$\hat{V}_C = \hat{I}Z_C = \frac{I_0}{\omega C}\underline{/-90^\circ}$$

یوں مزاحمت پر دباو عین رو کے ہم زاویہ ہے جبکہ برق گیر پر دباو، رو سے 90° پیچھے ہے۔شکل 8.20-ب میں ان دوری سمتیات کو دکھایا گیا ہے۔چونکہ مزاحمتی رکاوٹ کی قیمت پر تعدد کا کوئی اثر نہیں لہٰذا $\hat{V}_R$ کی قیمت اور زاویہ تعدد تبدیل کرنے سے تبدیل نہیں ہوتے۔اس کے برعکس برق گیر رکاوٹ تعدد کے بالعکس متناسب ہے لہٰذا تعدد بڑھانے سے Z_C کی قیمت کم ہو گی اور یوں $\hat{V}_C$ کا حیطہ بھی کم ہو گا جبکہ اس کا زاویہ جوں کا توں رہے گا۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لامتناہی تعدد پر $\hat{V}_C$ کی قیمت صفر ہو گی جبکہ تعدد کم کرنے سے $\hat{V}_C$ کی نوک خیالی محدد پر رہتے ہوئے مرکز سے دور ہو گی۔

شکل 8.20-الف سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\hat{V}_m = \hat{V}_R + \hat{V}_C$$

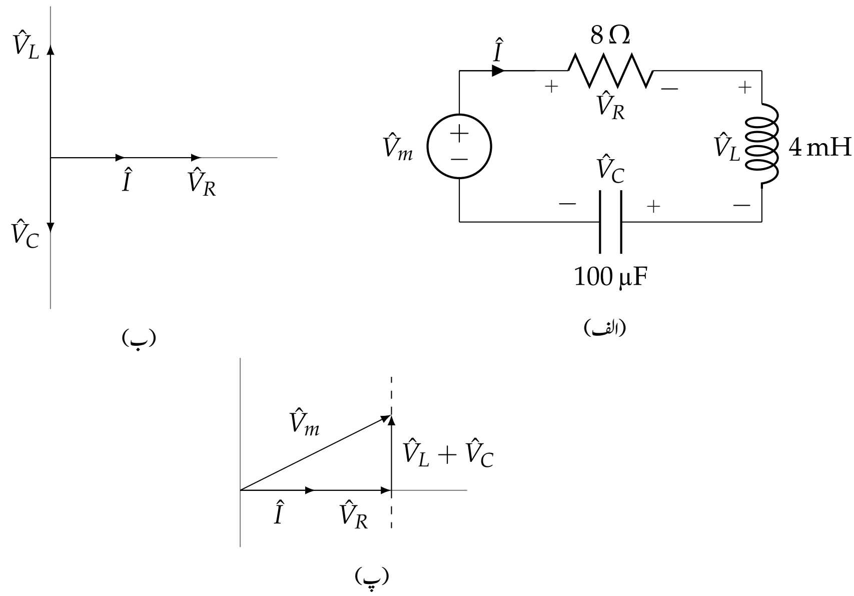
شکل 8.20-پ میں اس سمتی جمع کو دکھایا گیا ہے جہاں دم سے سر جوڑنے کا طریقہ استعمال کیا گیا ہے۔تعدد کو کم یا زیادہ کرنے سے $\hat{V}_C$ کا حیطہ زیادہ اور کم ہو گا لہٰذا شکل میں $\hat{V}_m$ کی نوک نقطہ دار لکیر پر حرکت کرے گی۔لامتناہی تعدد کی صورت میں $\hat{V}_m = \hat{V}_R$ ہو گا جبکہ صفر تعدد پر $\hat{V}_m$ کا زاویہ تقریباً -90° ہو گا۔

مثال 8.23: شکل 8.21-الف میں دکھائے دور کے $\hat{I}$ ، $\hat{V}_R$ ، $\hat{V}_L$ ، $\hat{V}_C$ اور $\hat{V}_m$ دوری سمتیہ مختلف تعدد پر کھینچیں۔

حل: یہاں بھی رو کو حوالہ دوری سمتیہ $\hat{I} = I_0\underline{/0^\circ}\,\mathrm{A}$ تصور کرتے ہیں۔مزاحمت کا دباو اسی سمت میں ہو گا جبکہ امالہ کا دباو 90° آگے اور برق گیر کا دباو 90° پیچھے ہو گا۔شکل 8.21-ب میں انہیں دکھایا گیا ہے۔

جن تعدد پر $\omega L > \frac{1}{\omega C}$ ہو، ان تعدد پر امالہ کا دباو، برق گیر کے دباو سے زیادہ ہو گا لہٰذا $\hat{V}_L + \hat{V}_C$ کا زاویہ 90° ہو گا یعنی ان کا مجموعی تاثیر امالی ہو گا۔شکل 8.21-پ میں ایسی ہی تعدد پر درج ذیل سمتی مجموعہ دکھایا گیا ہے۔

$$\hat{V}_m = \hat{V}_R + \hat{V}_L + \hat{V}_C$$



شکل 8.21: مثال 8.23 کے اشکال۔

جس تعدد پر $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ ہو یعنی $(\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}})$ اس تعدد پر $\hat{V}_L + \hat{V}_C = 0$ ہو گا لہٰذا درج بالا مجموعے سے $\hat{V}_m = \hat{V}_R$ حاصل ہو گا۔ تعدد ω_0 سلسلہ وار جڑے LC کی **قدرتی تعدد** یا اس کی **گھمکی تعدد**[37] کہلاتی ہے۔ تعدد کم اور زیادہ کرنے سے $\hat{V}_m$ کی نوک نقطہ دار لکیر پر حرکت کرتی ہے۔ عین ω_0 پر $\hat{V}_m = \hat{V}_R$ ہو گا۔ گھمکی تعدد سے زیادہ تعدد پر $\hat{V}_m$ کی نوک، نقطہ دار لکیر پر رہتے ہوئے، افقی محدد سے اوپر ہو گی جبکہ ω_0 سے کم تعدد پر $\hat{V}_m$ کی نوک، نقطہ دار لکیر پر رہتے ہوئے، افقی محدد سے نیچے ہو گی۔ شکل 8.21-پ گھمکی تعدد سے زیادہ تعدد کی صورت حال دکھا رہا ہے۔

مثال 8.24: گزشتہ مثال میں $\hat{V}_m = 120\underline{/40^\circ}\,\text{V}$ ہے۔ شکل 8.21-الف میں پرزوں کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے $\omega = 1000\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$ پر $\hat{V}_m$ اور $\hat{I}$ دوری سمتیوں کے خط کھینچیں۔

[37] resonant frequency

حل: اس مرتبہ ہم $\hat{V}_m$ کو حوالہ لیتے ہیں۔ دی گئی تعدد پر درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z}_R &= 8\,\Omega \\
\boldsymbol{Z}_L &= 1000 \times 0.004\underline{/90^\circ} = 4\underline{/90^\circ}\,\Omega \\
\boldsymbol{Z}_C &= \frac{1}{1000 \times 100 \times 10^{-6}}\underline{/-90^\circ} = 10\underline{/-90^\circ}\,\Omega
\end{aligned}
$$

شکل 8.21-الف کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$
\hat{V}_m = \hat{V}_R + \hat{V}_L + \hat{V}_C
$$

جس میں قیمتیں پُر کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
120\underline{/40^\circ} &= \hat{I}\boldsymbol{Z}_R + \hat{I}\boldsymbol{Z}_L + \hat{I}\boldsymbol{Z}_C \\
&= \hat{I}\left(8 + 4\underline{/90^\circ} + 10\underline{/-90^\circ}\right) \\
&= \hat{I}\left(8 + j4 - j10\right) \\
&= \hat{I}\left(8 - j6\right) \\
&= \hat{I}\left(10\underline{/-36.87^\circ}\right)
\end{aligned}
$$

ملتا ہے۔ اس مساوات سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\hat{I} &= \frac{120\underline{/40^\circ}}{10\underline{/-36.87^\circ}} \\
&= 12\underline{/76.87^\circ}
\end{aligned}
$$

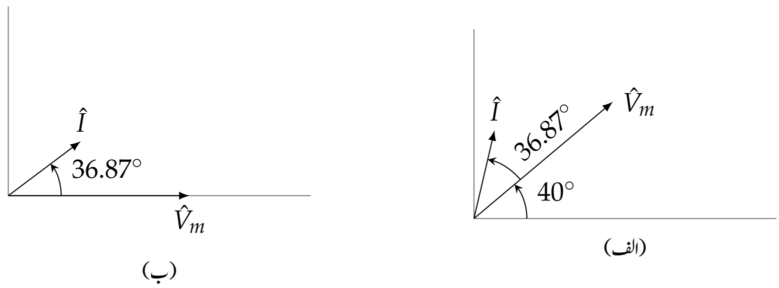
$\hat{V}_m$ اور $\hat{I}$ کو شکل 8.22-الف میں دکھایا گیا ہے جہاں حیطوں کو درست تناسب سے نہیں دکھایا گیا ہے۔

دور کی قدرتی تعدد درج ذیل ہے

$$
\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{0.004 \times 100 \times 10^{-6}}} = 1581\,\mathrm{rad\,s^{-1}}
$$

جبکہ دور کو $1000\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ پر حل کیا گیا ہے۔ یہی وجہ ہے کہ دور برق گیر تاثیر رکھتا ہے اور رو منبع کے دباو سے 37.87° درجے آگے ہے۔ عین قدرتی تعدد پر

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z}_L &= j1581 \times 0.004 = 6.32\underline{/90^\circ}\,\Omega \\
\boldsymbol{Z}_C &= \frac{1}{j1581 \times 100 \times 10^{-6}} = 6.32\underline{/-90^\circ}\,\Omega
\end{aligned}
$$



شکل 8.22: مثال 8.24 کے دوری سمتیوں کے خط۔

حاصل ہوتے ہیں۔

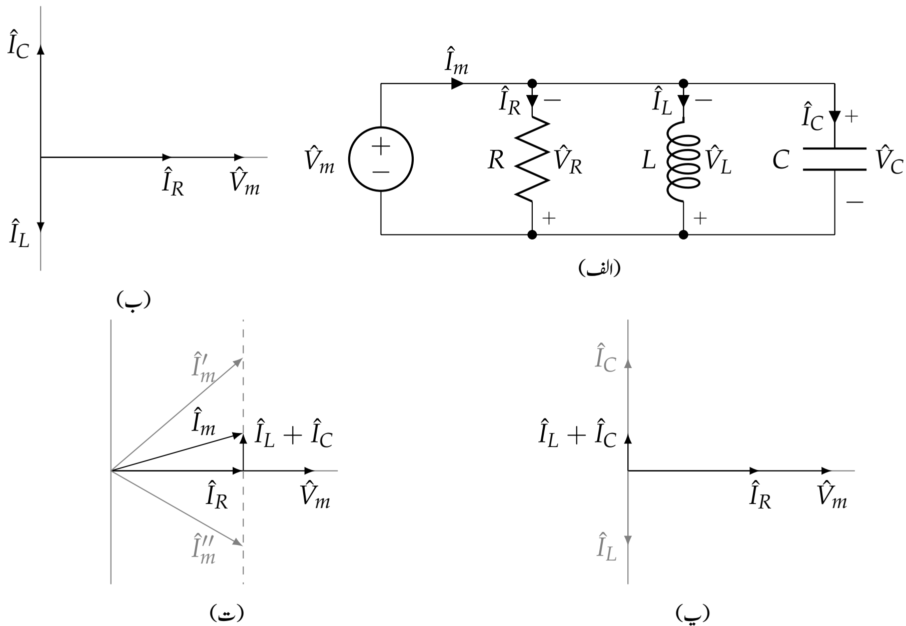
عموماً حوالہ دوری سمتیہ کا زاویہ 0° رکھا جاتا ہے۔یوں اگر ہم منبع دباو کا زاویہ 40° کی جگہ 0° چنتے تب $\hat{V}_m = 120\underline{/0^\circ}$ لکھا جاتا اور رو درج ذیل حاصل ہوتی۔

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}_m}{\boldsymbol{Z}} = \frac{120\underline{/0^\circ}}{10\underline{/-36.87^\circ}} = 12\underline{/36.87^\circ}\,\mathrm{A}$$

انہیں شکل 8.22-ب میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شکل-الف کو گھڑی کے گردش کی سمت میں 40° گھمانے سے شکل-ب ملتا ہے۔یوں حوالہ سمتیہ کا زاویہ تبدیل کرنے سے تمام دوری سمتیہ کی شکل گھوم جاتی ہے، البتہ انفرادی دوری سمتیات کے تعلق پر کوئی فرق نہیں پڑتا۔یوں شکل-الف اور شکل-ب دونوں میں رو 36.87° درجے دباو سے آگے ہے۔

مثال 8.25: شکل 8.23 کے دور میں دیے تمام دوری سمتیات کے خط کھینچیں۔

حل: دباو $\hat{V}_m$ کو حوالہ دوری سمتیہ لیتے ہوئے اس کا زاویہ صفر درجے چنتے ہیں۔تینوں پرزوں پر $\hat{V}_m$ دباو پایا جاتا ہے



شکل 8.23: مثال 8.25 کے اشکال۔

لہٰذا ان کی انفرادی رو درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\hat{I}_R &= \frac{\hat{V}_m}{\boldsymbol{Z}_R} = \frac{V_m\angle 0^\circ}{R} = \frac{V_m}{R}\angle 0^\circ \\
\hat{I}_L &= \frac{\hat{V}_m}{\boldsymbol{Z}_L} = \frac{V_m\angle 0^\circ}{\omega L\angle 90^\circ} = \frac{V_m}{\omega L}\angle -90^\circ \\
\hat{I}_C &= \frac{\hat{V}_m}{\boldsymbol{Z}_C} = \frac{V_m\angle 0^\circ}{\frac{1}{\omega C}\angle -90^\circ} = \omega C V_m\angle 90^\circ
\end{aligned}$$

انہیں شکل 8.23-ب میں دکھایا گیا ہے۔

قدرتی تعدد $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ پر امالی رکاوٹ اور برق گیری رکاوٹ کے مقدار برابر $(\omega L = \frac{1}{\omega C})$ ہوتے ہیں۔ قدرتی تعدد پر $\hat{I}_m = \hat{I}_R$ ہو گا۔ قدرتی تعدد سے زیادہ تعدد پر $\boldsymbol{Z}_L > \boldsymbol{Z}_C$ لہٰذا $I_C > I_L$ ہو گا۔ اس صورت حال کو شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔

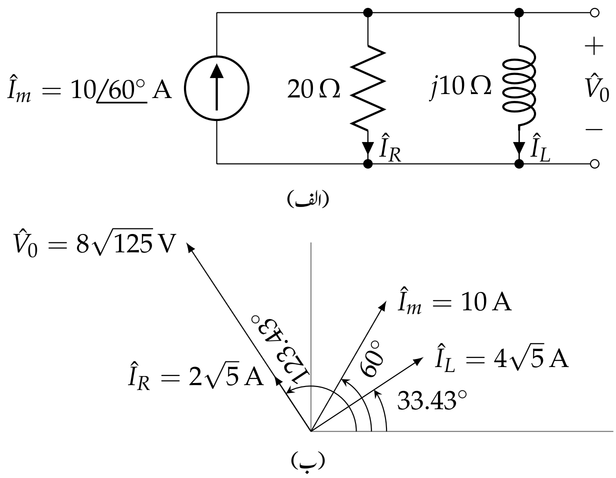
کرخوف قانون رو سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\hat{I}_m = \hat{I}_R + \hat{I}_L + \hat{I}_C$$

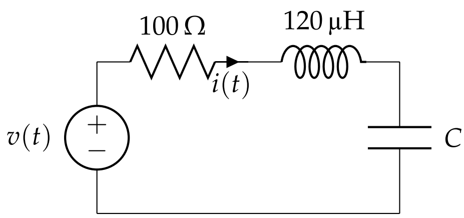
جسے $\omega > \omega_0$ کی صورت میں شکل-ت میں دکھایا گیا ہے۔ تعدد مزید بڑھانے سے $\hat{I}_m$ کی نوک نقطہ دار لکیر پر رہتے ہوئے افقی محدد سے مزید دور ہو گی۔ دوری سمتیہ $\hat{I}'_m$ ایسی صورت کو ظاہر کرتی ہے۔

قدرتی تعدد سے کم تعدد $(\omega < \omega_0)$ پر $\boldsymbol{Z}_C > \boldsymbol{Z}_L$ اور $I_L > I_C$ ہو گا لہٰذا دوری سمتیہ کی نوک نقطہ دار لکیر پر افقی محدد سے نیچے کی طرف ہو گی۔ دوری سمتیہ $\hat{I}''_m$ ایسی صورت کو ظاہر کرتی ہے۔

مشق 8.16: شکل 8.24-الف میں تمام رو اور دباو کے دوری سمتیات کے خط کھینچیں۔ تقسیم رو کا کلیہ استعمال کیا جا سکتا ہے۔ جواب کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 8.24: مشق 8.16 کے اشکال۔



شکل 8.25: مشق 8.17 کا دور۔

مشق 8.17: شکل 8.25 میں برق گیر کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر $v(t) = 120\cos(5500t - 30^\circ)\,\mathrm{V}$ اور $i(t)$ ہم زاویہ ہوں گے۔اس تعدد پر $i(t)$ دریافت کریں۔

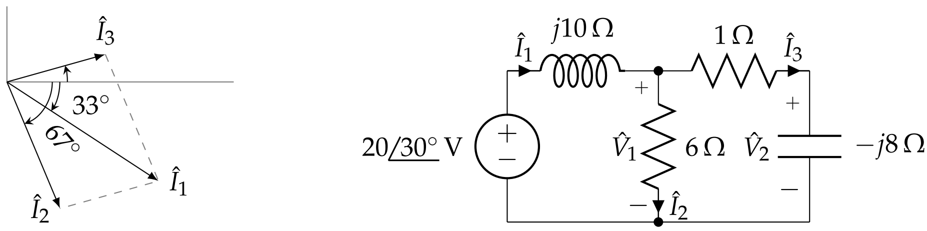
جواب: $C = 275.48\,\mu\mathrm{F}$ ، $i(t) = 1.2\cos(5500t - 30^\circ)\,\mathrm{A}$

8.8 کرخوف مساوات

یک سمتی رو ادوار کو کرخوف کے قوانین سے حل کرنا ہم گزشتہ بابوں میں دیکھ چکے ہیں۔ قوانین کرخوف دوری سمتیات پر بھی لاگو ہوتے ہیں۔یوں بدلتی رو ادوار کو کرخوف مساوات سے بالکل یک سمتی رو ادوار کی طرح حل کیا جا سکتا ہے۔یک سمتی رو ادوار حل کرنے کے تمام ترکیب یعنی مسئلہ تھونن، مسئلہ نارٹن، مسئلہ تبادلہ منبع، مسئلہ نفاذ، تقسیم رو اور تقسیم دباو کو بدلتی رو ادوار حل کرنے کے لئے بھی استعمال کیا جاتا ہے۔بدلتی رو ادوار کی صورت میں مخلوط الجبرا کا استعمال کیا جاتا ہے۔ گزشتہ حصے میں ہم نے چند سادہ مثال اسی طرح حل کئے۔آئیں نسبتاً مشکل ادوار حل کریں۔متعدد منبع کی صورت میں دوری سمتیات کی ترکیب صرف اس صورت میں قابل استعمال ہو گی جب تمام منبع کی تعدد یکساں ہو البتہ ان کے انفرادی زاویے مختلف ہو سکتے ہیں۔

مثال 8.26: شکل 8.26 میں تمام نامعلوم دباو اور رو دریافت کریں۔

حل: ہم پہلے منبع سے جڑی کل رکاوٹ حاصل کرتے ہوئے $\hat{I}_1$ دریافت کرتے ہیں جسے جانتے ہوئے $j2\,\Omega$ امالہ کا دباو حاصل کیا جا سکتا ہے۔اس دباو کو $\hat{V}_m$ سے منفی کرتے ہوئے $\hat{V}_1$ حاصل کیا جائے گا۔اب $\hat{V}_1$ جانتے ہوئے $\hat{I}_2$ حاصل کیا جا سکتا ہے جسے استعمال کرتے ہوئے $\hat{I}_3 = \hat{I}_1 - \hat{I}_2$ لکھا جا سکتا ہے۔آخر میں $\hat{V}_2 = \hat{I}_3(-j8)$ لکھتے ہوئے برق گیر کا دباو حاصل کیا جائے گا۔



(الف) (ب)

شکل 8.26: مثال 8.26 کے اشکال۔

منبع کو درج ذیل رکاوٹ نظر آتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{Z} &= j10 + \frac{6(1-j8)}{6+1-j8} \\
&= j10 + \frac{6-j48}{7-j8} \\
&= j10 + \left(\frac{6-j48}{7-j8}\right)\left(\frac{7+j8}{7+j8}\right) \\
&= j10 + \frac{426-j288}{113} \\
&= 3.7699 + j7.4513 \\
&= 8.3507\underline{/63.163^\circ}\,\Omega
\end{aligned}
$$

یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
\hat{I}_1 &= \frac{\hat{V}_m}{\boldsymbol{Z}} \\
&= \frac{20\underline{/30^\circ}}{8.3507\underline{/63.163^\circ}} \\
&= 2.395\underline{/-33.163^\circ}\,\text{A}
\end{aligned}
$$

جس سے $\hat{V}_1$ حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_1 &= \hat{V}_m - \hat{I}_1(j2) \\
&= 20\underline{/30^\circ} - (2.395\underline{/-33.163^\circ})(2\underline{/90^\circ}) \\
&= 4.219 - j10.049 \\
&= 10.8987\underline{/-67.224^\circ}\,\text{V}
\end{aligned}
$$

آپ $\hat{V}_1$ کو یوں بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{V}_1 &= \frac{6(1-j8)}{6+1-j8}\hat{I}_1\\ &= 10.8987\underline{/-67.224^\circ}\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

اس کے علاوہ $\hat{V}_1$ کو تقسیم دباو کے کلیے سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\begin{aligned}\hat{V}_1 &= \left(\frac{\frac{6(1-j8)}{6+1-j8}}{j10+\frac{6(1-j8)}{6+1-j8}}\right)20\underline{/30^\circ}\\ &= 10.8987\underline{/-67.224^\circ}\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

دباو $\hat{V}_1$ جانتے ہوئے $\hat{I}_2$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_2 &= \frac{\hat{V}_1}{6}\\ &= \frac{10.8987\underline{/-67.224^\circ}}{6}\\ &= 1.816\underline{/-67.224^\circ}\,\mathrm{A}\end{aligned}$$

یوں $\hat{I}_3$ درج ذیل ہو گا۔

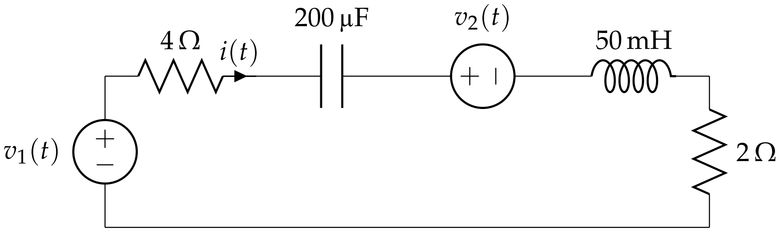
$$\begin{aligned}\hat{I}_3 &= \hat{I}_1-\hat{I}_2\\ &= 2.395\underline{/-33.163^\circ}-1.816\underline{/-67.224^\circ}\\ &= (2.005-j1.310)-(0.703-j1.675)\\ &= 1.302+j0.365\\ &= 1.352\underline{/15.65^\circ}\,\mathrm{A}\end{aligned}$$

آپ $\hat{I}_3$ کو درج ذیل سے بھی حاصل کر سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_3 &= \frac{\hat{V}_1}{1-j8}\\ &= 1.352\underline{/15.65^\circ}\,\mathrm{A}\end{aligned}$$

برق گیر کا دباو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{V}_2 &= \hat{I}_3(-j8)\\ &= (1.352\underline{/15.65^\circ})(8\underline{/-90^\circ})\\ &= 10.816\underline{/-74.35^\circ}\,\mathrm{V}\end{aligned}$$



شکل 8.27: مشق 8.18 کا دور۔

اس دباو کو تقسیم دباو کے کلیے سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

$$\begin{aligned}\hat{V}_2 &= \left(\frac{-j8}{1-j8}\right)\hat{V}_1 \\ &= 10.816\underline{/-74.35^\circ}\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

اس کے علاوہ $1\,\Omega$ مزاحمت میں $\hat{I}_3$ گزرتی ہے۔یوں $\hat{V}_1$ سے اس مزاحمت کی دباو منفی کرنے سے بھی برق گیر کا دباو حاصل کیا جا سکتا ہے یعنی

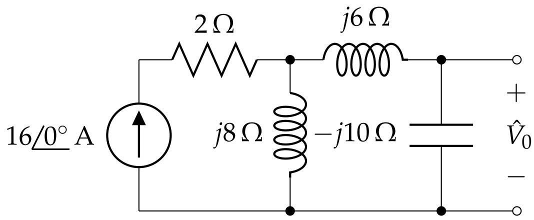
$$\begin{aligned}\hat{V}_2 &= \hat{V}_1 - (\hat{I}_3)(1) \\ &= 10.816\underline{/-74.35^\circ}\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

آپ نے دیکھا کہ آپ اپنے مرضی کی کوئی بھی ترکیب استعمال کرتے ہوئے جوابات حاصل کر سکتے ہیں۔شکل-ب میں دوری رو دکھائے گئے ہیں جہاں نقطہ دار لکیر قانون متوازی الاضلاع سے $\hat{I}_1 = \hat{I}_2 + \hat{I}_3$ دکھاتی ہے۔

مشق 8.18: شکل 8.27 میں

$$\begin{aligned}v_1(t) &= 10\cos(300t+30^\circ)\,\mathrm{V} \\ v_2(t) &= 30\cos(300t+60^\circ)\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

ہیں۔دوری سمتیات استعمال کرتے ہوئے $i(t)$ حاصل کریں۔



شکل 8.28: مشق 8.19 کا دور۔

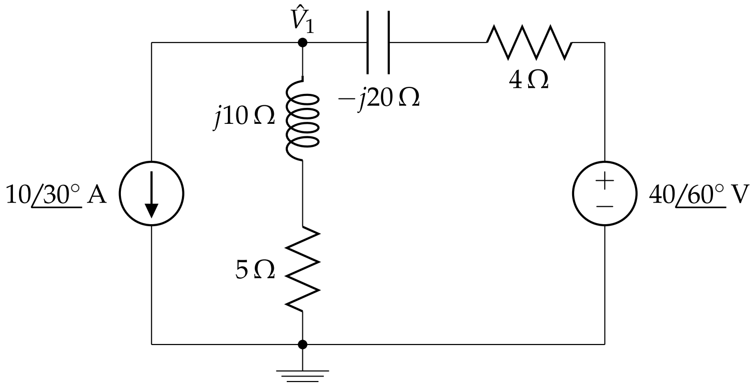
جواب: $i(t) = 3.52\cos(300t - 91.3^\circ)$ A

مشق 8.19: شکل 8.28 میں $\hat{V}_0$ دریافت کریں۔

جواب: $\hat{V}_0 = 320\angle -90^\circ$ V

مشق 8.20: شکل 8.29 میں $\hat{V}_1$ دریافت کریں۔

جواب: $\hat{V}_1 = 182.88\angle -127.16^\circ$ V



شکل 8.29: مشق 8.20 کا دور۔