برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 10

مقناطیسی جڑے ادوار

10.1 مشترکہ امالہ

شکل 10.1-الف میں N چکر کا لچھا[1] مقناطیسی مادے سے بنائے گئے قالب[2] پر لپیٹا گیا دکھایا گیا ہے۔اس لچھے میں i رو گزر رہی ہے۔ایمپیئر کے قانون کے تحت رو کے گزرنے سے مقناطیسی میدان پیدا ہوتا ہے۔یوں رو کے گزرنے سے لچھے میں ϕ مقناطیسی بہاو[3] پیدا ہوتا ہے جسے ہلکی سیاہی میں نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔

لچھے میں رو کی سمت اور مقناطیسی بہاو کی سمت کے تعلق پر غور کریں۔ان کا تعلق دائیں ہاتھ کا قانون کہلاتا ہے۔دائیں ہاتھ کا قانون درج ذیل ہے۔

اگر لچھے کو دائیں ہاتھ سے یوں پکڑا جائے کہ ہاتھ کی چار انگلیاں رو کی سمت میں لپیٹے جائیں تب اسی ہاتھ کا انگوٹھا بہاو کی سمت دے گا۔

مقناطیسی بہاو کو کسی مخصوص خطے میں رکھنے کی خاطر مقناطیسی قالب استعمال کیا جاتا ہے۔مقناطیسی بہاو کے لئے مقناطیسی مادے سے گزرنا زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے لہٰذا شکل 10.1-الف میں بہاو قالب کے اندر ہی رہتے ہوئے گھڑی کے سوئیوں

[1] coil
[2] core
[3] magnetic flux

کے گھومنے کی سمت میں گھومتا ہے۔یوں مقناطیسی بہاو ϕ لچھے کے تمام چکروں کے اندر سے گزرتا ہے۔لچھے کا ارتباط بہاو[4] λ درج ذیل ہے۔

$$\lambda = N\phi \tag{10.1}$$

اس کتاب میں صرف خطی نظام پر غور کیا گیا ہے۔خطی صورت میں ارتباط بہاو اور رو کا تعلق درج ذیل ہے

$$\lambda = Li \tag{10.2}$$

جہاں مساوات کے مستقل L کو **خود امالہ**[5] یا **امالہ** کہتے ہیں۔باب 6 میں امالہ پر غور کیا گیا ہے۔درج بالا دو مساوات کو ملاتے ہوئے بہاو اور رو کا تعلق ملتا ہے۔

$$\phi = \frac{Li}{N} \tag{10.3}$$

قانون فیراڈے کے تحت بدلتی ارتباط بہاو لچھے میں امالی دباو پیدا کرتا ہے۔

$$v = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} \tag{10.4}$$

مساوات 10.2 کو درج بالا مساوات میں پر کرتے ہیں۔

$$v = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(Li)}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$$

مستقل امالہ کی صورت میں اس مساوات سے امالہ کی جانی پہچانی درج ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے۔

$$v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{10.5}$$

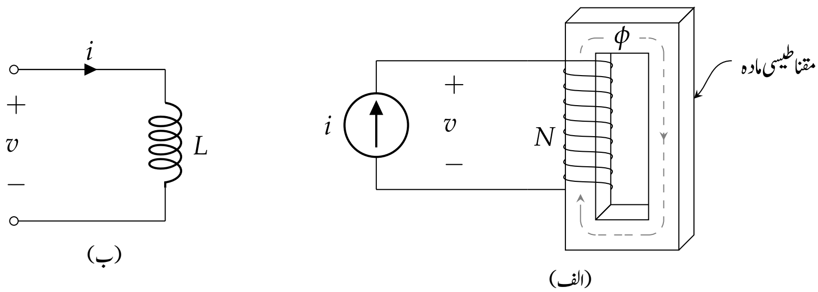
اس کتاب میں مستقل امالہ پر ہی غور کیا جائے گا۔شکل 10.1-ب میں اس امالہ کو دکھایا گیا ہے۔یہاں غور کریں کہ مزاحمت کی طرح امالہ کے دباو اور رو بھی انفعالی رائج سمت کے تحت ہیں۔یوں امالہ میں رو مثبت دباو والے سر سے داخلی ہوتی ہے۔مساوات 10.5 کہتا ہے کہ بدلتی رو کے گزرنے سے امالہ میں دباو پیدا ہوتا ہے۔

شکل 10.1-الف میں موجود لچھے کے قریب دوسرا لچھا رکھنے سے شکل 10.2 حاصل ہوتا ہے۔دوسرے لچھے میں رو نہیں گزر رہی ہے۔پہلے لچھے کا ارتباط بہاو درج ذیل ہے۔

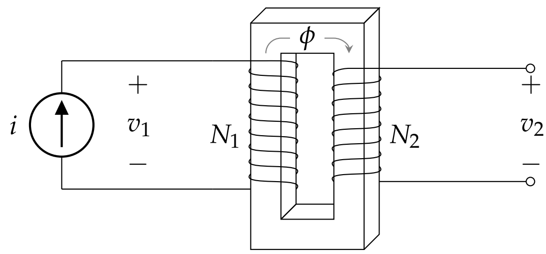
$$\lambda_1 = N_1\phi = L_1 i_1 \tag{10.6}$$

---

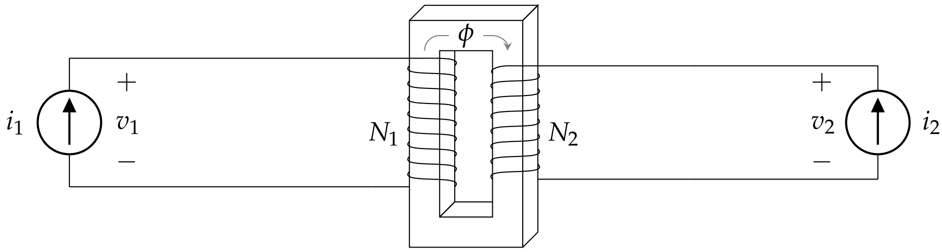
[4] flux linkage
[5] self inductance



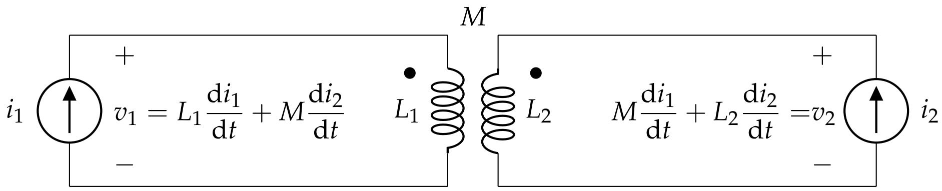
شکل 10.1: خود امالہ کی تعریف۔



شکل 10.2: لچھے مقناطیسی میدان کے ذریعے رابطے میں ہیں۔



(الف)



(ب)

شکل 10.3: قالب میں لچھوں کے بہاو ایک ہی سمت میں ہیں۔

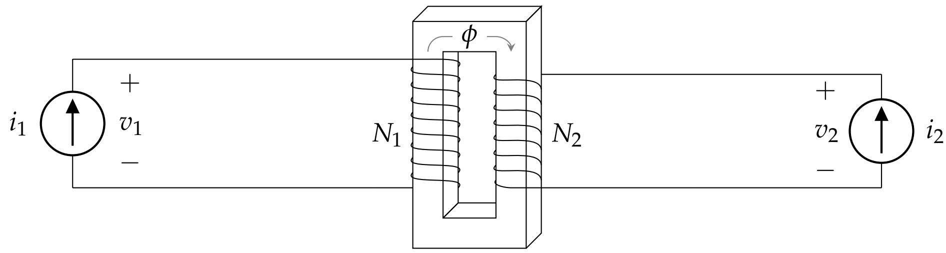
بدلتی رو کی صورت میں ارتباط بہاو بھی وقت کے ساتھ تبدیل ہو گا۔ بدلتا ارتباط بہاو پہلے لچھے میں دباو $v_1 = \frac{\mathrm{d}\lambda_1}{\mathrm{d}t} = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ پیدا کرے گا۔ متعدد لچھوں کی صورت میں L_1 کو **خود امالہ**[6] کہا جاتا ہے۔

دوسرے لچھے کا ارتباط بہاو $\lambda_2 = N_2\phi$ ہے جو دوسرے لچھے میں قانون فیراڈے کے تحت درج ذیل دباو پیدا کرے گا۔

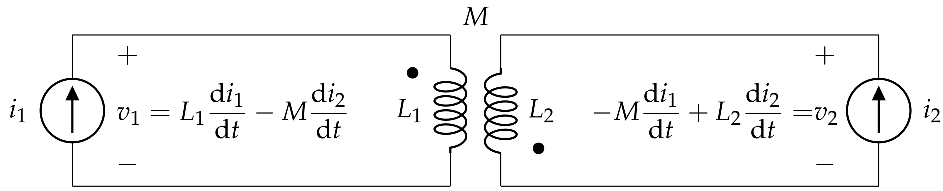
$$v_2 = \frac{\mathrm{d}\lambda_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(N_2\phi\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(N_2 \frac{L_1 i_1}{N_1}\right) = \frac{N_2}{N_1} L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = L_{21} \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{10.7}$$

دوسرے لچھے کا دباو پہلے لچھے کی رو کے وقتی تفرق کے راست تناسب ہے۔ راست تناسب کے مستقل L_{21} کو دونوں لچھوں کا **مشترکہ امالہ**[7] کہا جاتا ہے جسے ہینری H میں ناپا جاتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ یہ لچھے آپ میں مقناطیسی میدان کے ذریعہ رابطے میں ہیں۔ یوں ان لچھوں کو **مربوط لچھے**[8] کہا جاتا ہے۔ شکل 10.3-الف میں دونوں لچھوں کو انفرادی منبع سے رو فراہم کی گئی ہے۔ دونوں لچھوں پر باری باری غور کریں۔ ان کی رو اور قالب کے گرد لچھے کے چکروں کی سمت کو دیکھیں۔ انفرادی لچھے کی رو گھڑی کی سمت میں گھومتی بہاو پیدا کرتی ہے۔ اس طرح دونوں رو مل کر مقناطیسی بہاو ϕ

[6] self inductance
[7] mutual inductance
[8] coupled coils



(الف)



(ب)

شکل 10.4: قالب میں لچھوں کے بہاو آپس میں الٹ سمت ہیں۔

پیدا کرتی ہیں۔یوں لچھوں کی ارتباط بہاو درج ذیل ہو گی۔

$$\lambda_1 = L_1 i_1 + L_{12} i_2 \tag{10.8}$$
$$\lambda_2 = L_{21} i_1 + L_2 i_2 \tag{10.9}$$

فیراڈے کے قانون کے تحت لچھوں کے دباو حاصل کرتے ہیں۔

$$v_1 = \frac{d\lambda_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_{12} \frac{di_2}{dt} \tag{10.10}$$
$$v_2 = \frac{d\lambda_2}{dt} = L_{21} \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} \tag{10.11}$$

ان مساوات میں $L_{12} = L_{21} = M$ کے برابر ہے جہاں مشترکہ امالہ کو M سے ظاہر کیا گیا ہے۔لچھے کے دباو کے دو اجزاء ہیں۔پہلا جزو لچھے کی اپنی رو کی بنا ہے اور یہ خود جزو کہلاتا ہے۔دوسرا جزو قریبی لچھے کی رو کے بنا ہے اور یہ مشترک جزو کہلاتا ہے۔

شکل 10.3-ب میں مربوط لچھوں کو ظاہر کرنا دکھایا گیا ہے۔لچھوں کے انفرادی خود امالہ کو L_1 اور L_2 سے ظاہر کیا گیا ہے جبکہ ان کے مابین مشترکہ امالہ کو M سے ظاہر کیا گیا ہے۔

شکل 10.4-الف میں قالب کے گرد، دائیں لچھے کے چکر الٹائے گئے ہیں۔یوں قالب میں بائیں لچھے کا بہاو گھڑی کی سمت میں گھومتا ہے جبکہ دائیں لچھے کا بہاو گھڑی کی الٹ سمت میں گھومتا ہے لہٰذا کل بہاو ϕ حاصل کرنے کی خاطر بائیں لچھے کے بہاو سے دائیں لچھے کا بہاو منفی کرنا ہو گا۔اس طرح لچھوں کی ارتباط بہاو

$$\lambda_1 = L_1 i_1 - M i_2 \tag{10.12}$$
$$\lambda_2 = -M i_1 + L_2 i_2 \tag{10.13}$$

لکھی جائے گی اور ان کے دباو درج ذیل لکھے جائیں گے۔

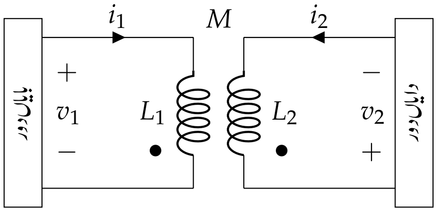
$$v_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{10.14}$$
$$v_2 = -M \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \tag{10.15}$$

شکل 10.3-الف میں دونوں لچھوں کی انفرادی بہاو کا مجموعہ قالب میں کل بہاو دیتا ہے جبکہ شکل 10.4-الف میں بائیں لچھے کے بہاو سے دائیں لچھے کا بہاو تفریق کرنے سے قالب میں کل بہاو ϕ حاصل ہوتا ہے۔لچھوں میں رو کی سمت، قالب کے گرد چکر کی سمت اور قالب میں بہاو کی سمت کو نہایت عمدگی سے نقطوں کی مدد سے ظاہر کیا جاتا ہے۔شکل 10.3-ب اور شکل 10.4-ب میں ان نقطوں کا استعمال دکھایا گیا ہے۔

انفرادی لچھے کی رو اور دباو کو انفعالی رائج سمت کے تحت چننیں۔دونوں لچھوں میں نقطوں والے سر سے رو داخل ہونے کی صورت میں دباو کا مشترک جزو مثبت لکھا جاتا ہے جبکہ ایک لچھے کی رو نقطے والے سر اور دوسرے لچھے کی رو بے نقطے والے سر سے داخل ہونے کی صورت میں مشترک دباو منفی لکھا جاتا ہے۔دونوں رو بے نقطے سروں سے داخل ہونے کی صورت میں مشترک دباو مثبت لکھا جائے گا۔دباو کا خود جزو تمام صورتوں میں انفعالی رائج سمت کے تحت مثبت لکھا جاتا ہے۔یوں شکل 10.3 میں مساوات 10.10 اور مساوات 10.11 دباو دیں گے جبکہ شکل 10.4 میں مساوات 10.14 اور مساوات 10.15 دباو دیں گے۔

مشترک امالہ کے کرخوف مساوات دباو نسبتاً زیادہ آسانی سے لکھے جاتے ہیں۔

مثال 10.1: شکل 10.5 میں دیے دور کے دونوں اطراف کے دباو کے مساوات لکھیں۔



شکل 10.5: مثال 10.1 کا دور۔

حل: بائیں جانب v_1 اور i_1 عین انفعالی رائج سمت کے تحت لکھے گئے ہیں۔یوں دباو کا خود جزو مثبت لکھا جائے گا۔دونوں لچھوں میں رو بے نقطے سروں سے داخل ہوتی ہے لہٰذا دباو کا مشترک جزو مثبت لکھا جائے گا۔یوں بائیں جانب کرخوف کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$v_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

دائیں جانب v_2 اور i_2 انفعالی رائج سمت کے تحت نہیں چننے گئے ہیں۔یوں دباو کے اجزاء لکھتے ہوئے اس کا خیال رکھا جائے گا۔دوسرے لچھے کی مساوات درج ذیل

$$-v_2 = L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

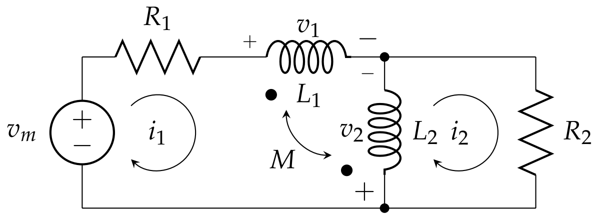
یعنی

$$v_2 = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

لکھی جائے گی۔

مثال 10.2: شکل 10.6 کے دور کے کرخوف مساوات دباو لکھیں۔

حل: مشترکہ امالہ کے انفرادی دباو کی نشاندہی v_1 اور v_2 سے کی گئی ہے جنہیں بالترتیب i_1 اور i_2 کو دیکھتے ہوئے انفعالی رائج سمت کے تحت چننا گیا ہے۔امالہ L_1 کے دباو کے دو اجزاء ہیں۔اس کے خود جزو $L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ ہے۔امالہ L_2



شکل 10.6: مثال 10.2 کا دور۔

میں رو امالہ L_1 کے دباو کا مشترک جزو دیتی ہے۔امالہ L_2 کے نقطے والے سر سے کل داخلی ہونے والی رو $i_2 - i_1$ لکھی جا سکتی ہے جو L_1 کے نقطے والے سر پر مثبت دباو پیدا کرتی ہے۔یوں L_1 کا مشترک جزو $M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - i_1)$ ہے۔اس طرح پہلے امالہ کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$v_1 = L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - i_1) \tag{10.16}$$

امالہ L_2 کا خود جزو $L_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - i_1)$ ہے۔امالہ L_1 کے نقطے والے سر سے i_1 داخل ہوتا ہے جو امالہ L_2 کے نقطے والے سر پر مثبت دباو پیدا کرے گا۔یوں L_2 کے دباو کا مشترک جزو $M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ ہو گا۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

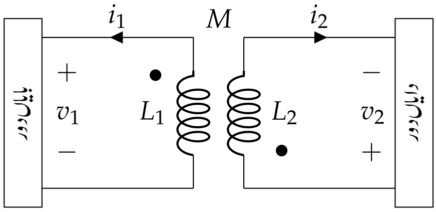
$$v_2 = L_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - i_1) + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{10.17}$$

اب دور کو دیکھتے ہوئے کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

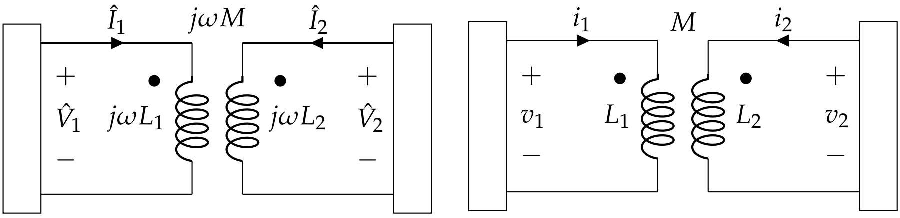
$$v_m = i_1R_1 + v_1 - v_2 \tag{10.18}$$
$$0 = v_2 + i_2R_2 \tag{10.19}$$

ان میں مساوات 10.16 اور مساوات 10.17 پر کرتے ہوئے جواب لکھتے ہیں۔

$$v_m = i_1R_1 + L_1\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - i_1) - L_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - i_1) - M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \tag{10.20}$$
$$0 = L_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - i_1) + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + i_2R_2 \tag{10.21}$$



شکل 10.7: مشق 10.1 کا دور۔



(ب) (الف)

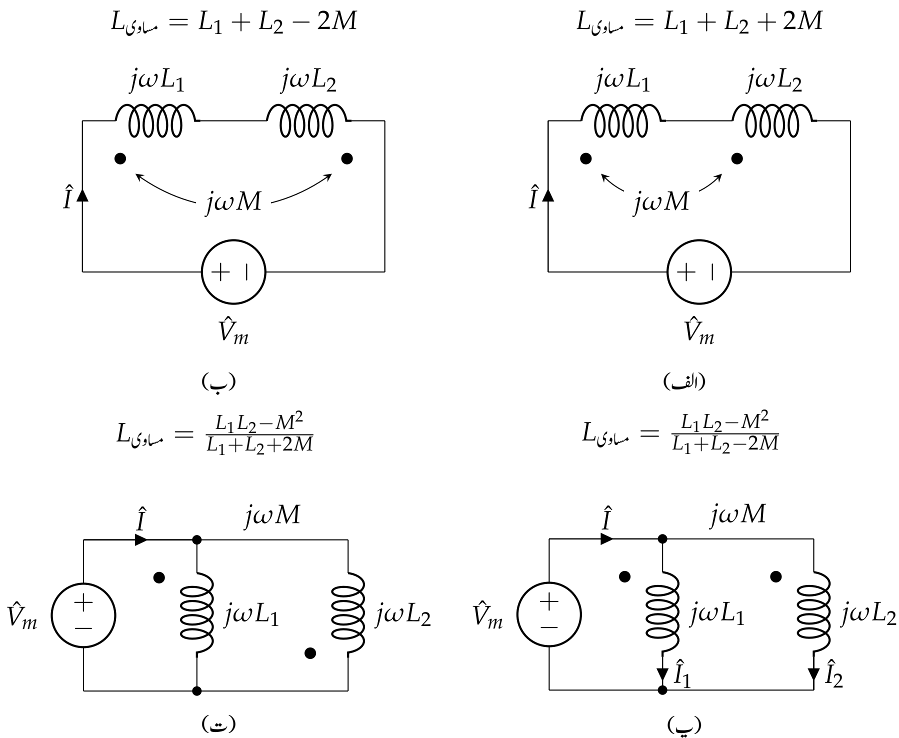
شکل 10.8: وقتی دائرہ کار سے تعددی دائرہ کار کا حصول۔

مشق 10.1: شکل 10.7 میں دیے دور کے دونوں اطراف کے دباو لکھیں۔

جوابات: $v_1 = -L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ ، $v_2 = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$

شکل 10.8-الف میں وقتی دائرہ کار کا دور جبکہ شکل-ب میں اسی کو تعددی دائرہ کار کی صورت میں دکھایا گیا ہے۔ شکل-ب کے کرخوف مساوات درج ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_1 &= j\omega L_1 \hat{I}_1 + j\omega M \hat{I}_2\\
\hat{V}_2 &= j\omega M \hat{I}_1 + j\omega L_2 \hat{I}_2
\end{aligned}
$$



شکل 10.9: دو مربوط لچھوں کے چار ممکنہ ادوار اور ان کا مساوی امالہ۔

مثال 10.3: دو عدد مربوط لچھے چار مختلف طریقوں سے آپس میں جوڑے جا سکتے ہیں جنہیں شکل 10.9 میں دکھایا گیا ہے۔ چاروں صورتوں میں ان کا مساوی امالہ حاصل کریں۔ شکل میں ان مساوی امالہ $L_{\text{مساوی}}$ کو بھی لکھا گیا ہے۔

حل: شکل 10.9-الف کو دیکھتے ہوئے کرخوف مساوات دباو لکھتے ہیں

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_m &= j\omega L_1\hat{I} + j\omega M\hat{I} + j\omega L_2\hat{I} + j\omega M\hat{I}\\
&= j\omega\hat{I}(L_1 + L_2 + 2M)\\
&= j\omega\hat{I}L_{\text{مساوی}}
\end{aligned}
$$

جہاں آخری قدم پر قوسین میں بند جزو کو مساوی امالہ $L_{\text{مساوی}}$ کہا گیا ہے۔

$$L_{\text{مساوی}} = L_1 + L_2 + 2M \tag{10.22}$$

شکل 10.9-ب کو دیکھتے ہوئے کرخوف مساوات دباو لکھتے ہیں

$$\begin{aligned}
\hat{V}_m &= j\omega L_1 \hat{I} - j\omega M \hat{I} + j\omega L_2 \hat{I} - j\omega M \hat{I} \\
&= j\omega \hat{I}(L_1 + L_2 - 2M) \\
&= j\omega \hat{I} L_{\text{مساوی}}
\end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر قوسین میں بند جزو کو مساوی امالہ $L_{\text{مساوی}}$ کہا گیا ہے۔

$$L_{\text{مساوی}} = L_1 + L_2 - 2M \tag{10.23}$$

شکل 10.9-پ کو دیکھتے ہوئے دونوں لچھوں کے مساوات لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\hat{V}_m &= j\omega L_1 \hat{I}_1 + j\omega M \hat{I}_2 \\
\hat{V}_m &= j\omega L_2 \hat{I}_2 + j\omega M \hat{I}_1
\end{aligned}$$

ان دو عدد ہمزاد مساوات کو حل کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

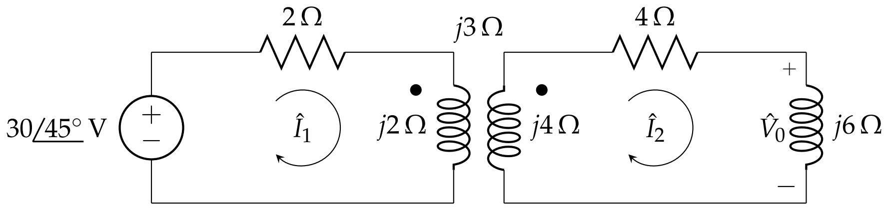
$$\begin{aligned}
\hat{I}_1 &= \frac{\hat{V}_m (L_2 - M)}{j\omega (L_1 L_2 - M^2)} \\
\hat{I}_2 &= \frac{\hat{V}_m (L_1 - M)}{j\omega (L_1 L_2 - M^2)}
\end{aligned}$$

کرخوف مساوات رو سے $\hat{I} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2$ لکھا جا سکتا ہے جس میں درج بالا حاصل شدہ نتائج پر کرتے ہوئے ترتیب دیتے ہیں

$$\begin{aligned}
\hat{I} &= \hat{I}_1 + \hat{I}_2 \\
&= \frac{\hat{V}_m (L_1 + L_2 - M)}{j\omega (L_1 L_2 - M^2)} \\
&= \frac{\hat{V}_m}{j\omega L_{\text{مساوی}}}
\end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر مساوی امالہ کی نشاندہی کی گئی ہے یعنی

$$L_{\text{مساوی}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M} \tag{10.24}$$



شکل 10.10: مثال 10.4 کا دور۔

مشق 10.2: شکل 10.9-ت میں دیے دور کا مساوی امالہ دریافت کریں۔

جواب:

$$L_{\text{مساوی}} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 + 2M} \tag{10.25}$$

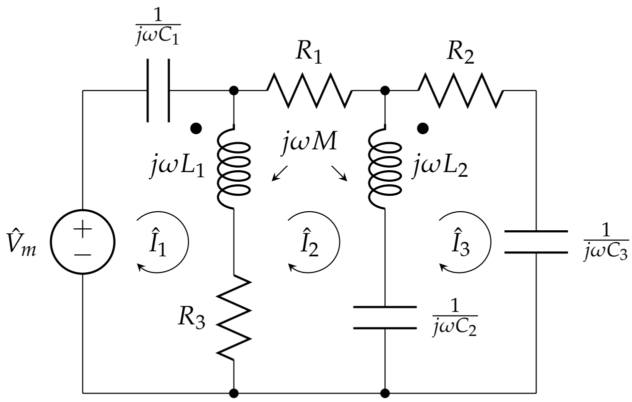
مثال 10.4: شکل 10.10 میں $\hat{V}_0$ دریافت کریں۔

حل: کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} 30\underline{/45^\circ} &= (2 + j2)\hat{I}_1 - j3\hat{I}_2 \\ 0 &= -j3\hat{I}_1 + (j4 + 4 + j6)\hat{I}_2 \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کو حل کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= 11.474\underline{/17.08^\circ}\,\text{A} \\ \hat{I}_2 &= 3.196\underline{/38.88^\circ}\,\text{A} \end{aligned}$$



شکل 10.11: مثال 10.5 کا دور۔

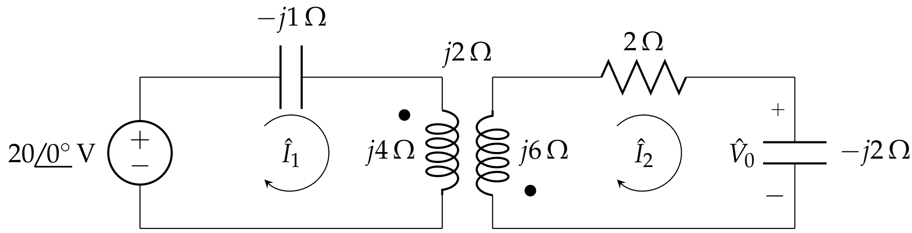
رو $\hat{I}_2$ کو استعمال کرتے ہوئے خارجی دباو حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{V}_0 = (j6)(\hat{I}_2) = (6\underline{/90^\circ})(3.196\underline{/38.88^\circ}) = 19.176\underline{/128.88^\circ}\,\mathrm{V}$$

مثال 10.5: شکل 10.11 کے دائری کرخوف مساوات لکھیں۔ بعض اوقات دور میں دو عدد سے زیادہ مربوط امالہ موجود ہوتے ہیں۔ ایسی صورت میں تیر کے لکیروں سے دو دو امالہ کی نشاندہی کی جاتی ہے۔ اس شکل میں L_1 اور L_2 کے تعلق $j\omega M$ کی نشاندہی کی گئی ہے۔

حل: کرخوف مساوات لکھتے ہوئے محتاط اور چوکس رہیں۔ تین خانوں کے مساوات درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned}
\hat{V}_m &= \frac{\hat{I}_1}{j\omega C_1} + j\omega L_1(\hat{I}_1 - \hat{I}_2) + R_3(\hat{I}_1 - \hat{I}_2) + j\omega M(\hat{I}_2 - \hat{I}_3)\\
0 &= R_3(\hat{I}_2 - \hat{I}_1) + j\omega L_1(\hat{I}_2 - \hat{I}_1) + R_1 I_2 + j\omega L_2(\hat{I}_2 - \hat{I}_3)\\
&\qquad + \frac{1}{j\omega C_2}(\hat{I}_2 - \hat{I}_3) - j\omega M(\hat{I}_2 - \hat{I}_3) + j\omega M(\hat{I}_1 - \hat{I}_2)\\
0 &= \frac{\hat{I}_3}{j\omega C_3} + j\omega L_2(\hat{I}_3 - \hat{I}_2) + R_2\hat{I}_3 + \frac{\hat{I}_3}{j\omega C_3} - j\omega M(\hat{I}_1 - \hat{I}_2)
\end{aligned}$$



شکل 10.12: مشق 10.3 کا دور۔

انہیں ترتیب دیتے ہوئے دوبارہ لکھتے ہیں۔ ترتیب دینے سے متشاکل مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

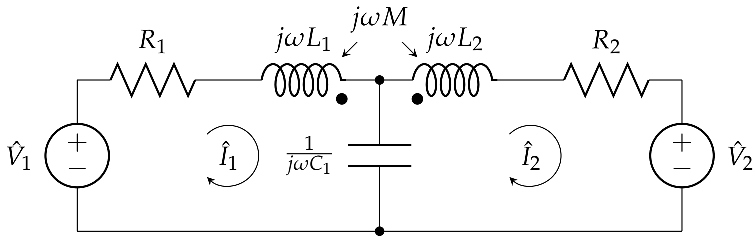
$$\left(\frac{1}{j\omega C_1}+j\omega L_1+R_3\right)\hat{I}_1-\left(j\omega L_2+R_3-j\omega M\right)\hat{I}_2-j\omega M\hat{I}_3=\hat{V}_m$$

$$-\left(j\omega L_1+R_3-j\omega M\right)\hat{I}_1+\left(R_3+j\omega L_1+R_1+j\omega L_2+\frac{1}{j\omega C_2}-2j\omega M\right)\hat{I}_2$$
$$-\left(\frac{1}{j\omega C_2+j\omega L_2+R_2+\frac{1}{j\omega C_3}}-j\omega M\right)\hat{I}_3=0$$

$$-j\omega M\hat{I}_1-\left(j\omega L_2+\frac{1}{j\omega C_2}-j\omega M\right)\hat{I}_2+\left(\frac{1}{j\omega C_2}+j\omega L_2+R_2+\frac{1}{j\omega C_3}\right)\hat{I}_3=0$$

مشق 10.3: شکل 10.12 میں $\hat{I}_1$ ، $\hat{I}_2$ اور $\hat{V}_0$ دریافت کریں۔

جوابات: $\hat{I}_1=8.9\underline{/-79.7^\circ}\,\text{A}$ ، $\hat{I}_2=4\underline{/126.9^\circ}\,\text{A}$ ، $\hat{V}_0=8\underline{/36.9^\circ}\,\text{V}$



شکل 10.13: مشق 10.4 کا دور۔

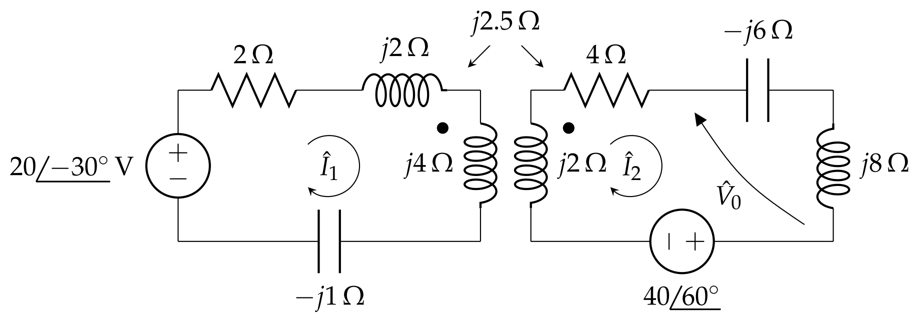
مشق 10.4: شکل 10.13 کے کرخوف مساوات لکھیں۔

جوابات:

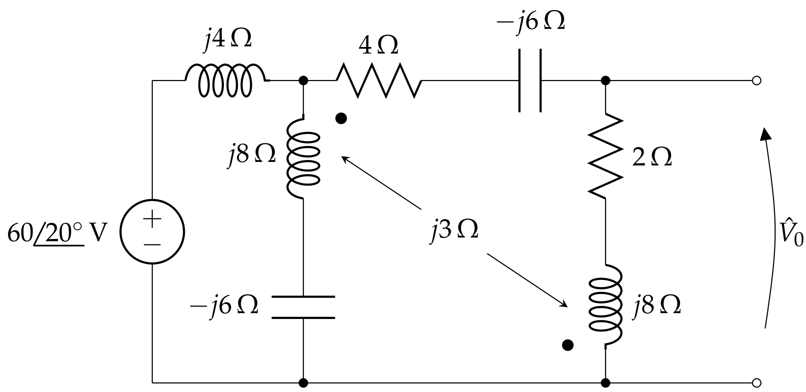
$$
\begin{aligned}
\left(R_1 + j\omega L_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)\hat{I}_1 - \left(\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega M\right)\hat{I}_2 &= \hat{V}_1 \\
-\left(\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega M\right)\hat{I}_1 + \left(\frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_2 + R_2\right)\hat{I}_2 &= -\hat{V}_2
\end{aligned}
$$

مشق 10.5: شکل 10.14 میں $\hat{I}_1$ اور $\hat{I}_2$ معلوم کرتے ہوئے $\hat{V}_0$ دریافت کریں جہاں تیر والے لکیر سے ان نقطوں کی نشاندہی کی گئی ہے جن کے مابین دباو درکار ہے۔ تیر والا سر مثبت دباو کے مقام کی نشاندہی کرتا ہے۔ یوں $j8\,\Omega$ امالہ کا نچلی سرا حوالہ لیتے ہوئے $-j6\,\Omega$ برق گیر کے بائیں سر پر دباو حاصل کرنا درکار ہے۔

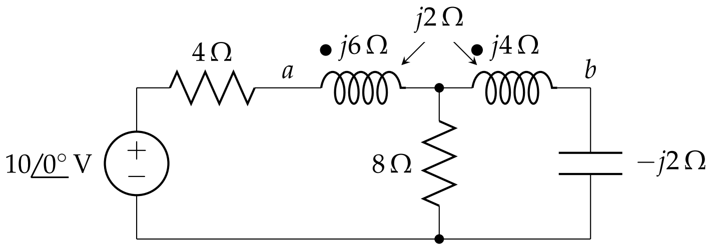
جوابات: $6.89\underline{/252.3^\circ}\,\mathrm{A}$ ، $7.08\underline{/219.9^\circ}\,\mathrm{A}$ ، $14.15\underline{/-50.1^\circ}\,\mathrm{V}$



شکل 10.14: مشق 10.5 کا دور۔



شکل 10.15: مشق 10.6 کا دور۔



شکل 10.16: مشق 10.7 کا دور۔

مشق 10.6: شکل 10.15 میں بائیں اور دائیں دائروں کی رو حاصل کرتے ہوئے $\hat{V}_0$ دریافت کریں۔ دباو حاصل کرتے ہوئے دباو کا مشترک جزو شامل کرنا مت بھولیں۔

جوابات: $13.9\underline{/-55.2^\circ}$ A ، $5.97\underline{/-24.2^\circ}$ A ، $31.4\underline{/83.55^\circ}$ V

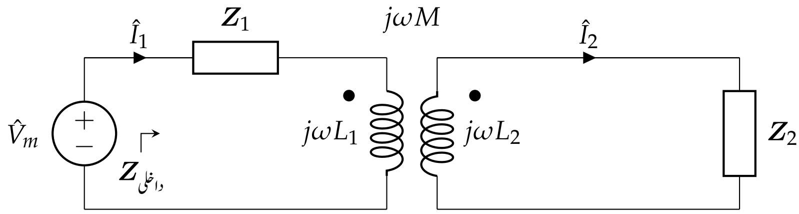
مشق 10.7: شکل 10.16 میں $\hat{V}_{ab}$ دریافت کریں۔ دونوں امالہ کے دباو کے مشترک جزو شامل کرنا مت بھولیں۔

جواب: $10.5\underline{/15^\circ}$ V

مثال 10.6: شکل 10.17 میں منبع دباو کو نظر آنے والا داخلی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}_{\text{داخلی}}$ دریافت کریں۔

حل: رو $\hat{I}_1$ دریافت کرتے ہوئے رکاوٹ کو $\frac{\hat{V}_m}{\hat{I}_1}$ سے حاصل کیا جائے گا۔ دونوں دائروں کے کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{V}_m &= (\boldsymbol{Z}_1 + j\omega L_1)\hat{I}_1 - j\omega M\hat{I}_2\\ 0 &= -j\omega M\hat{I}_1 + (j\omega L_2 + \boldsymbol{Z}_2)\hat{I}_2\end{aligned}$$



شکل 10.17: مثال 10.6 کا دور۔

دوسری مساوات سے $\hat{I}_2$ حاصل کرتے ہوئے

$$\hat{I}_2 = \frac{j\omega M}{j\omega L_2 + Z_2} \hat{I}_1$$

اس کو بائیں دائرے کی کرخوف مساوات میں پر کرتے ہیں

$$\hat{V}_m = (Z_1 + j\omega L_1)\hat{I}_1 - j\omega M \frac{j\omega M}{j\omega L_2 + Z_2} \hat{I}_1$$

جہاں سے داخلی رکاوٹ درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

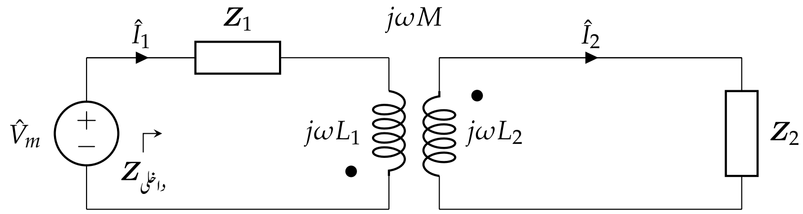
$$Z_{داخلی} = \frac{\hat{V}_m}{\hat{I}_1} = Z_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + Z_2}$$

مشق 10.8: درج بالا مثال کے دور میں مشترکہ امالہ پر ایک نقطے کا مقام تبدیل کرتے ہوئے شکل 10.18 حاصل کیا گیا ہے۔ اس میں منبع دباو کو نظر آنے والا داخلی رکاوٹ $Z_{داخلی}$ دریافت کریں۔

جواب:

$$Z_{داخلی} = \frac{\hat{V}_m}{\hat{I}_1} = Z_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + Z_2}$$

آپ نے دیکھا کہ اس دور میں نقطے کا مقام تبدیل کرنے سے داخلی رکاوٹ تبدیل نہیں ہوتا۔



شکل 10.18: مشق 10.8 کا دور۔

مشق 10.9: شکل 10.16 میں منبع دباو کو کیا رکاوٹ نظر آتا ہے۔

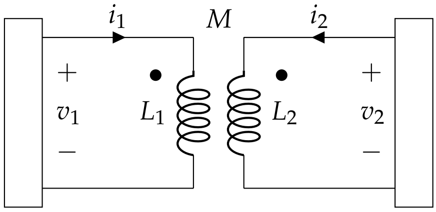
جواب: $5.88 + j11.53\,\Omega$

10.2 مشترکہ امالہ میں توانائی کا ذخیرہ

شکل 10.19 کو دیکھیے۔ رو مقناطیسی میدان پیدا کرتی ہے۔ رو کی غیر موجودگی میں اس دور میں مقناطیسی بہاو نہیں پایا جائے گا۔ یوں اس میں ذخیرہ مقناطیسی توانائی بھی صفر کے برابر ہو گی۔ اب تصور کریں کہ دایاں لچھا کھلے سر رکھتے ہوئے بائیں لچھے کی رو t_1 دورانیے میں I_1 کر دی جاتی ہے۔ اس دورانیے کے دوران بائیں لچھے کو درج ذیل توانائی فراہم کی جائے گی۔

$$\int_0^{t_1} v_1(t) i_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{t_1}\left[L_1\frac{\mathrm{d}i_1(t)}{\mathrm{d}t}\right] i_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{I_1} L_1 i_1\,\mathrm{d}i_1 = \frac{L_1 I_1^2}{2}$$

اس دوران دائیں لچھے کی رو صفر کے برابر ہے لہٰذا t_1 کے دوران دائیں لچھے کو کوئی توانائی فراہم نہیں کی جاتی۔ اب فرض کریں کہ بائیں لچھے کی رو اسی قیمت پر رکھی جاتی ہے جبکہ دائیں لچھے کی رو t_1 تا t_2 بڑھا کر I_2 کر دی جاتی ہے۔ چونکہ



شکل 10.19: مشترکہ امالہ میں ذخیرہ توانائی۔

t_1 تا t_2 بائیں لچھے کی رو تبدیل نہیں ہو رہی ہے لہٰذا دائیں لچھے کے دباو میں مشترک جزو صفر کے برابر ہو گا۔ یوں دائیں لچھے کا دباو $v_2 = L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$ لکھا جائے گا۔ اس طرح دائیں لچھے کو درج ذیل توانائی فراہم کی جاتی ہے۔

$$\int_{t_1}^{t_2} v_2(t) i_2(t) \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left[L_2 \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} \right] i_2(t) \,\mathrm{d}t = \int_0^{I_2} L_2 i_2 \,\mathrm{d}i_2 = \frac{L_2 I_2^2}{2}$$

اسی دورانیے (t_1 تا t_2) میں چونکہ دائیں لچھے کی رو تبدیل ہو رہی ہے (جبکہ $i_1 = I_1$ مستقل ہے) لہٰذا بائیں لچھے کے دباو میں مشترک جزو پایا جائے گا اور یوں اس کا دباو درج ذیل لکھا جائے گا

$$v_1 = L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = M \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

جہاں i_1 مستقل ہونے کی وجہ سے $\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} = 0$ ہے۔ یوں t_1 تا t_2 کے دوران بائیں لچھے کو درج ذیل توانائی مہیا کی جاتی ہے۔

$$\int_{t_1}^{t_2} v_1(t) i(t) \,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \left[M \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} \right] I_1 \,\mathrm{d}t = \int_0^{I_2} M I_1 \,\mathrm{d}i_2 = M I_1 I_2$$

ان تینوں جوابات کا مجموعہ لمحہ t_2 تک مشترکہ امالہ کو فراہم کی گئی توانائی دیتا ہے۔

$$w = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2 \tag{10.26}$$

اگر ایک لچھے پر نقطے کا مقام تبدیل کرتے ہوئے جواب حاصل کیا جائے تب درج ذیل جواب حاصل ہوتا ہے۔

$$w = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} - M I_1 I_2 \tag{10.27}$$

آپ نے دیکھا کہ ذخیرہ توانائی کا دارومدار رو پر ہے نا کہ t_1 اور t_2 پر۔ یوں کسی بھی لمحے لمحوں کی رو $i_1(t)$ اور $i_2(t)$ لکھتے ہوئے اس لمحے ذخیرہ توانائی کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$w(t) = \frac{L_1 i_1^2(t)}{2} + \frac{L_2 i_2^2(t)}{2} \mp M i_1(t) i_2(t) \tag{10.28}$$

چونکہ مشترکہ امالہ غیر عامل پرزہ ہے لہٰذا یہ توانائی پیدا نہیں کرتا۔ یوں اس کی توانائی کبھی بھی منفی نہیں ہو سکتی۔ یوں درج بالا مساوات میں غیر ضروری معلومات نہ لکھتے ہوئے درج ذیل لکھتے ہیں

$$w(t) = \frac{L_1 i_1^2}{2} + \frac{L_2 i_2^2}{2} \mp M i_1 i_2 \tag{10.29}$$

جس میں $\frac{M^2 i_1^2}{2L_2}$ جمع اور منفی کر کے ترتیب دیتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$w = \frac{1}{2}\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right) i_1^2 + \frac{L_2}{2}\left(i_2 + \frac{M}{L_2 i_1}\right)^2 \tag{10.30}$$

درج بالا مساوات کا دوسرا جزو مربع ہے لہٰذا یہ ہر صورت مثبت ہو گا۔ چونکہ غیر عامل مشترکہ امالہ کی توانائی مثبت ہے لہٰذا اس مساوات کا پہلا جزو بھی مثبت ہو گا جس سے درج ذیل شرط حاصل ہوتا ہے۔

$$M \le \sqrt{L_1 L_2} \tag{10.31}$$

یہ مساوات مشترکہ امالہ کی زیادہ سے زیادہ قیمت کا حد بیان کرتا ہے۔ یوں مشترکہ امالہ صفر تا $\sqrt{L_1 L_2}$ ممکن ہے۔

$$0 \le M \le \sqrt{L_1 L_2} \tag{10.32}$$

کسی بھی مشترکہ امالہ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} \tag{10.33}$$

جہاں k کو **ارتباطی مستقل**[9] کہتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ارتباطی مستقل صفر تا اکائی ممکن ہے۔

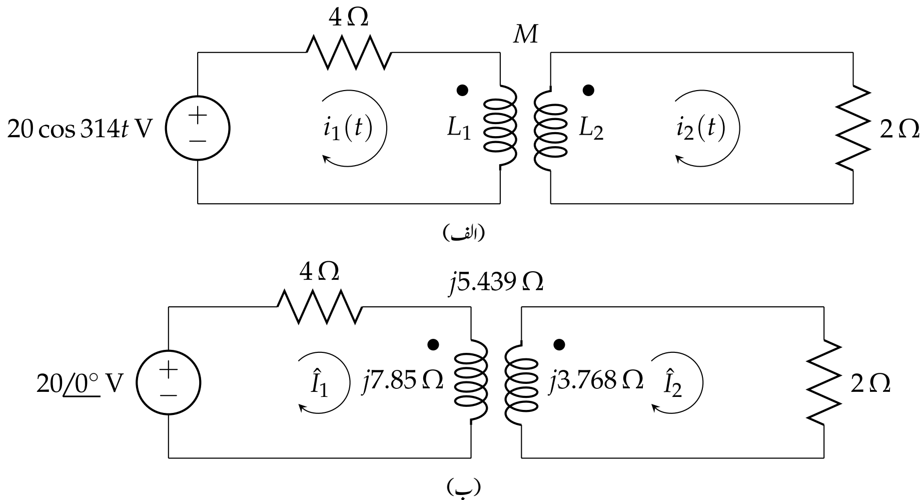
$$0 \le k \le 1 \tag{10.34}$$

ارتباطی مستقل کی تعریف درج ذیل مساوات دیتی ہے۔

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \tag{10.35}$$

---

coupling coefficient[9]



شکل 10.20: مثال 10.7 کا دور۔

ارتباطی مستقل یہ بتلاتا ہے کہ ایک لچھے کی کتنی بہاو دوسرے لچھے کے اندر سے گزرتی ہے۔اس باب کے شروع میں مشترکہ امالہ کے اشکال بناتے ہوئے ہم نے مقناطیسی قالب استعمال کیا۔مقناطیسی قالب کے استعمال سے ایک لچھے کی تقریباً تمام بہاو دوسرے لچھے سے بھی گزاری جا سکتی ہے۔ایسی صورت میں $k \approx 1$ ہو گا۔اس کے برعکس ایک دونوں سے دور، قالب سے نہ جوڑے گئے لچھوں کی صورت میں $k = 0$ ہو گا چونکہ ایک لچھے کا بہاو دوسرے لچھے تک نہیں پہنچ پائے گا۔ارتباطی مستقل کی قیمت زیادہ $(k \geq 0.5)$ ہونے کی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ لچھوں کا **رابطہ مضبوط**[10] ہے جبکہ $k < 0.5$ کی صورت میں ہم کہتے ہیں کہ لچھوں کا **رابطہ کمزور**[11] ہے۔

مثال 10.7: شکل 10.20-الف میں $L_1 = 25\,\mathrm{mH}$ ، $L_2 = 12\,\mathrm{mH}$ اور $k = 1$ ہیں۔لمحہ $t = 6.2\,\mathrm{ms}$ پر مشترکہ امالہ میں ذخیرہ توانائی دریافت کریں۔

حل: منبع دباو سے تعدد $\omega = 314\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ اور مساوات 10.33 سے مشترکہ امالہ

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 1\sqrt{(0.025)(0.012)} = 17.321\,\mathrm{mH}$$

---

[10] strongly coupled
[11] weakly coupled

لیتے ہوئے شکل-ب میں تعددی دائرہ کار میں دور کو دوبارہ دکھایا گیا ہے جہاں درج ذیل قیمتیں استعمال کی گئی ہیں۔

$$\begin{aligned}
j\omega L_1 &= j(314)(0.025) = j7.85\,\Omega\\
j\omega L_2 &= j(314)(0.012) = j3.768\,\Omega\\
j\omega M &= j(314)(0.017321) = j5.439\,\Omega
\end{aligned}$$

دونوں دائروں کے کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
20\underline{/0^\circ} &= (4+j7.85)\hat{I}_1 - j5.439\hat{I}_2\\
0 &= -j5.439\hat{I}_1 + (2+j3.768)\hat{I}_2
\end{aligned}$$

ان میں سے دوسری مساوات سے $\hat{I}_2$ لیتے ہوئے پہلی میں پر کرتے

$$20\underline{/0^\circ} = (4+j7.85)\hat{I}_1 - j5.439\left(\frac{j5.439}{2+j3.768}\right)\hat{I}_1$$

ہوئے $\hat{I}_1$ حاصل کرتے ہیں۔

$$\hat{I}_1 = \frac{20}{7.251+j1.725} = 2.610 - j0.621 = 2.683\underline{/-13.38^\circ}\,\mathrm{A}$$

اسی طرح $\hat{I}_2$ درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

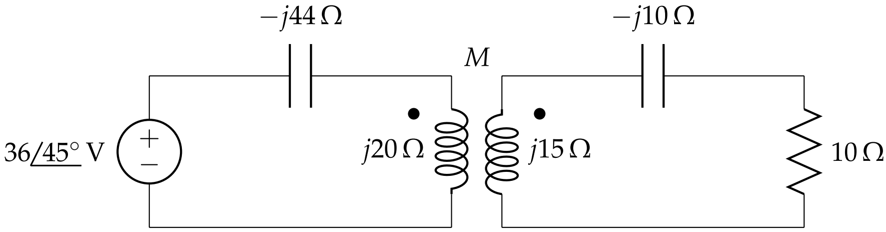
$$\hat{I}_2 = \left(\frac{j5.439}{2+j3.768}\right)\hat{I}_1 = 3.421\underline{/14.57^\circ}\,\mathrm{A}$$

حاصل شدہ رو کو وقتی دائرہ کار میں لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
i_1(t) &= 2.683\cos(314t - 13.38^\circ)\,\mathrm{A}\\
i_2(t) &= 3.421\cos(314t + 14.57^\circ)\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$

لمحہ $t = 6.2\,\mathrm{ms}$ پر رو کی قیمتیں حاصل کرتے ہیں۔ایسا کرتے ہوئے زاویہ ہٹاو کو ریڈیئن میں لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned}
i_1(t=6.2\,\mathrm{ms}) = I_1 &= 2.683\cos\left[(314)(0.0062) - 13.38\left(\frac{\pi}{180}\right)\right] = 2.487\,\mathrm{A}\\
i_2(t=6.2\,\mathrm{ms}) = I_2 &= 3.421\cos\left[(314)(0.062) + 14.57\left(\frac{\pi}{180}\right)\right] = 2.199\,\mathrm{A}
\end{aligned}$$



شکل 10.21: مشق 10.10 کا دور۔

لمحہ $6.2\,\mathrm{ms}$ پر رو کی قیمتیں جاننے کے بعد مساوات 10.27 سے ذخیرہ توانائی حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
w(t=6.2\,\mathrm{ms}) &= \frac{L_1I_1^2}{2}+\frac{L_2I_2^2}{2}+MI_1I_2\\
&= \frac{(0.025)(2.487)^2}{2}+\frac{(0.012)(2.199)^2}{2}+0.0173(2.487)(2.199)\\
&= 0.201\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

مشق 10.10: شکل 10.21 میں تعدد $50\,\mathrm{Hz}$ اور $k=0.6$ ہیں۔ لمحہ $t=5.5\,\mathrm{ms}$ پر مشترکہ امالہ میں ذخیرہ توانائی دریافت کریں۔

جواب: $24.4\,\mathrm{mJ}$

10.3 کامل ٹرانسفارمر

شکل 10.22 کو دیکھیے جہاں دو لچھوں کو مقناطیسی قالب پر لپیٹا گیا ہے۔ یہ روزمرہ میں استعمال ہونے والا ٹرانسفارمر ہے۔ قالب میں ϕ مقناطیسی بہاو پائی جاتی ہے۔ یوں دونوں لچھوں سے یکساں بہاو گزرتی ہے۔ یہ بہاو لچھوں میں درج ذیل دباو پیدا کرتی ہے۔

$$v_1(t) = N_1 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \tag{10.36}$$

$$v_2(t) = N_2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \tag{10.37}$$

مساوات 10.36 کو مساوات 10.37 سے تقسیم کرتے ہیں۔

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{N_1 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}}{N_2 \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}} = \frac{N_1}{N_2} \tag{10.38}$$

قانون ایمپیئر کے تحت قالب کے گرد درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\oint H \cdot \mathrm{d}l = i_{\text{گھیرا}} = N_1 i_1 + N_2 i_2$$

جہاں تکمل کو قالب کے اندر گھومتے ہوئے حاصل کیا جاتا ہے جبکہ H قالب کے اندر **مقناطیسی شدت**[12] ہے۔ مقناطیسی قالب میں H کی قیمت قابل نظر انداز ہوتی ہے۔ یوں H کا تکمل بھی قابل نظر انداز ہوتا ہے۔ درج بالا مساوات میں تکمل کو صفر کے برابر کرنے سے درج ذیل

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = 0 \tag{10.39}$$

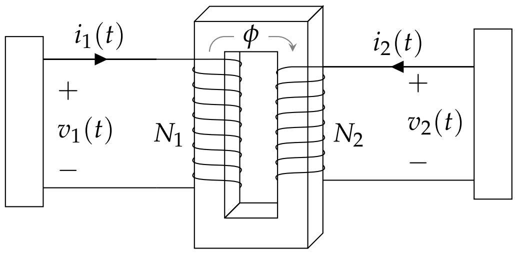
یعنی

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} \tag{10.40}$$

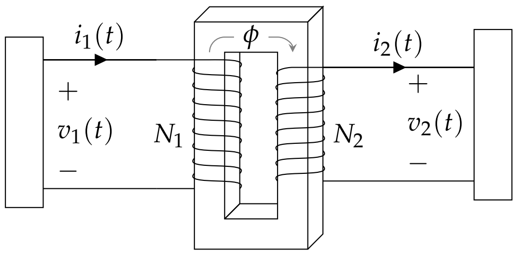
حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 10.39 کو $\frac{v_1}{N_1}$ سے ضرب دینے سے

$$v_1 i_1 + \frac{N_2}{N_1} v_1 i_2 = 0 \tag{10.41}$$

[12] magnetic field intensity



شکل 10.22: ٹرانسفارمر کی ساخت۔



شکل 10.23: کامل ٹرانسفارمر کے دباو اور رو۔

ملتا ہے جس میں مساوات 10.38 سے $\frac{N_2}{N_1}v_1 = v_2$ پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_1 i_1 + v_2 i_2 = 0 \tag{10.42}$$

یہ مساوات کہتا ہے کہ کامل ٹرانسفارمر کو کل صفر طاقت درکار ہے یعنی کامل ٹرانسفارمر بے ضیاع پرزہ ہے۔

شکل 10.22 میں i_2 کی سمت الٹ کرنے سے شکل 10.23 حاصل ہوتا ہے۔اس کے مساوات درج ذیل ہیں جہاں دونوں اطراف کے رو کی تناسب میں منفی کی علامت نہیں پائی جاتی۔

$$\frac{v_1(t)}{v_2(t)} = \frac{N_1}{N_2} \tag{10.43}$$

$$\frac{i_1(t)}{i_2(t)} = \frac{N_2}{N_1} \tag{10.44}$$

ٹرانسفارمر کو شکل 10.22 سے ظاہر کیا جاتا ہے اور درج بالا دو عدد مساوات ٹرانسفارمر کے بنیادی مساوات لکھنے کا عمومی طریقہ ہے۔