برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 7

عارضی رد عمل

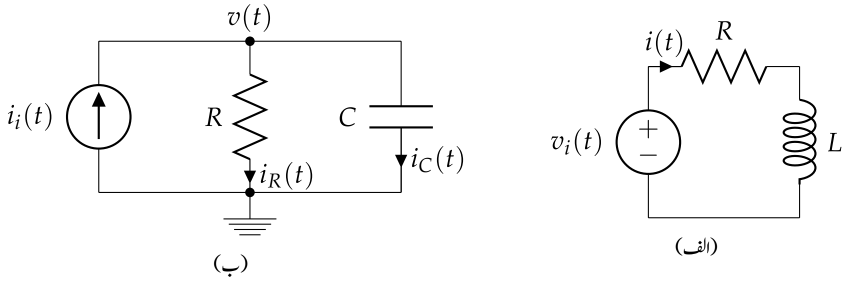
7.1 تعارف

ایسے ادوار جن میں امالہ گیر اور (یا) برق گیر پائے جاتے ہوں میں توانائی ذخیرہ کرنے کی صلاحیت ہوتی ہے۔ توانائی ذخیرہ کرنے والے ادوار کا رد عمل منبع طاقت کے علاوہ ذخیرہ توانائی پر بھی منحصر ہوتا ہے۔ ایسے ادوار میں کسی بھی طرح کی تبدیلی سے ذخیرہ توانائی میں تبدیلی رونما ہو سکتی ہے۔ دور میں تبدیلی مثلاً کسی سوئچ کے چالو یا غیر چالو کرنے سے پیدا ہو سکتی ہے۔ ایسی صورت جہاں دور یکساں ایک ہی حالت میں رہے کو **برقرار حالت**[1] کہتے ہیں۔ تبدیلی کے بعد دور متبادل برقرار حالت اختیار کرتا ہے۔ ایک برقرار حالت سے دوسری برقرار حالت تک پہنچنے کے دوران، دور **عارضی حالت**[2] میں ہوتا ہے۔

7.2 ایک درجی ادوار

وہ ادوار جن میں صرف امالہ گیر توانائی ذخیرہ کرتے ہوں کی کرخوف مساوات **ایک درجی تفرقی مساوات**[3] ہوتی ہے۔ اسی طرح وہ ادوار جن میں صرف برق گیر توانائی ذخیرہ کرتے ہوں بھی ایک درجی کرخوف مساوات دیتے ہیں۔ اسی لئے انہیں

---
[1] steady state
[2] transient state
[3] first order differential equation



شکل 7.1: ایک درجی ادوار کی مثالیں۔

یک درجی ادوار[4] کہتے ہیں۔اس کے برعکس ایسے ادوار جن میں امالہ گیر اور برق گیر دونوں پائے جاتے ہوں **دو درجی تفرقی مساوات**[5] دیتے ہیں اور انہیں **دو درجی ادوار**[6] کہا جاتا ہے۔

شکل 7.1 میں ایک درجی ادوار کی مثالیں دی گئی ہیں۔آئیں ان کی کرخوف مساوات لکھ کر دیکھیں۔شکل-الف کی مساوات درج ذیل ہے۔

$$v(t) = i(t)R + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} \tag{7.1}$$

اسی طرح شکل-ب کی کرخوف مساوات درج ذیل ہے۔

$$i_i(t) = \frac{v(t)}{R} + C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \tag{7.2}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ درج بالا دونوں مساوات ایک درجی تفرقی مساوات ہیں۔

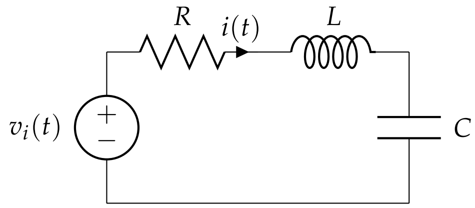
شکل 7.2 میں دو درجی دور دکھایا گیا ہے جس کی کرخوف مساوات درج ذیل ہے۔

$$v_i(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t)\,\mathrm{d}t$$

اس مساوات میں تکمل کی علامت ختم کرنے سے تفرقی مساوات حاصل ہو گی۔تکمل کی علامت ختم کرنے کی خاطر اس کا تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}v_i(t)}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2\, i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{i(t)}{C} \tag{7.3}$$

[4] first order circuits
[5] second order differential equations
[6] second order circuits



شکل 7.2: دو درجی دور۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ امالہ گیر اور برق گیر دونوں کی موجودگی سے دو درجی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

7.2.1 رد عمل کی عمومی مساوات

ایک درجی ادوار کے رد عمل جاننے کی خاطر ان کی تفرقی مساوات حل کی جاتی ہے جس سے دور کے مختلف مقامات پر دباو اور رو حاصل کی جاتی ہے۔ان یک درجی مساوات کی عمومی صورت درج ذیل ہوتی ہے

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+ay(t)=g(t) \tag{7.4}$$

جہاں $y(t)$ دباو یا رو کو ظاہر کرتی ہے، a مستقل ہے اور $g(t)$ **عملی قوت**[7] ہے۔اس مساوات کا آزاد متغیرہ وقت t ہے۔ تفرقی مساوات کا ایک بنیادی مسئلہ کہتا ہے کہ مساوات 7.4 کا مکمل حل اس کے **فطری رد عمل**[8] $y_f(t)$ اور **جبری رد عمل**[9] $y_j(t)$ کا مجموعہ ہے۔مساوات 7.4 کے کسی بھی حل کو بطور جبری رد عمل لیا جا سکتا ہے جبکہ درج ذیل **ہم جنسی مساوات**[10]

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+ay(t)=0 \tag{7.5}$$

کے کسی بھی حل کو فطری رد عمل تصور کیا جا سکتا ہے۔مساوات 7.4 میں $g(t)=0$ پُر کرنے سے ہم جنسی مساوات حاصل ہوتی ہے۔

[7] forcing function
[8] natural response, complementary solution
[9] forced response, particular solution
[10] homogenous equation

آئیں $g(t) = A$ کی صورت میں مساوات 7.4 کا حل حاصل کریں جہاں A ایک مستقل ہے۔ یوں ہمیں درج ذیل دو مساوات کے حل درکار ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}y_j(t)}{\mathrm{d}t} + ay_j(t) = A \tag{7.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}y_f(t)}{\mathrm{d}t} + ay_f(t) = 0 \tag{7.7}$$

جبری حل کو قیاس کے ذریعہ حاصل کیا جائے گا۔ جبری حل کو عملی تفاعل اور اس کے تمام ممکنہ تفرق کے مجموعے کے برابر تصور کرتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔ چونکہ مستقل کا تفرق $(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 0)$ صفر کے برابر ہے لہٰذا جبری حل کو مستقل K_1 تصور کرتے ہیں۔

$$y_j(t) = K_1 \tag{7.8}$$

اس قیمت کو مساوات 7.6 میں پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}K_1}{\mathrm{d}t} + aK_1 &= A\\ 0 + aK_1 &= A\end{aligned}$$

یعنی

$$K_1 = \frac{A}{a} \tag{7.9}$$

حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.7 کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}y_f(t)}{y_f(t)} = -a\,\mathrm{d}t$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا تکمل

$$\ln y_f(t) = -at + c$$

یعنی

$$y_f(t) = K_2e^{-at} \tag{7.10}$$

کے برابر ہے جہاں c تکمل کا مستقل ہے اور $K_2 = e^c$ کے برابر ہے۔ مساوات 7.9 اور مساوات 7.10 سے مکمل حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$y(t) = \frac{A}{a} + K_2e^{-at} \tag{7.11}$$

کسی بھی لمحے پر $y(t)$ جاننے سے درج بالا مساوات میں نامعلوم مستقل K_2 دریافت کیا جا سکتا ہے۔ درج بالا مساوات کو درج ذیل عمومی حل کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے

$$y(t) = K_1 + K_2 e^{-\frac{t}{\tau}} \tag{7.12}$$

جہاں $\tau = \frac{1}{a}$ کے برابر ہے۔

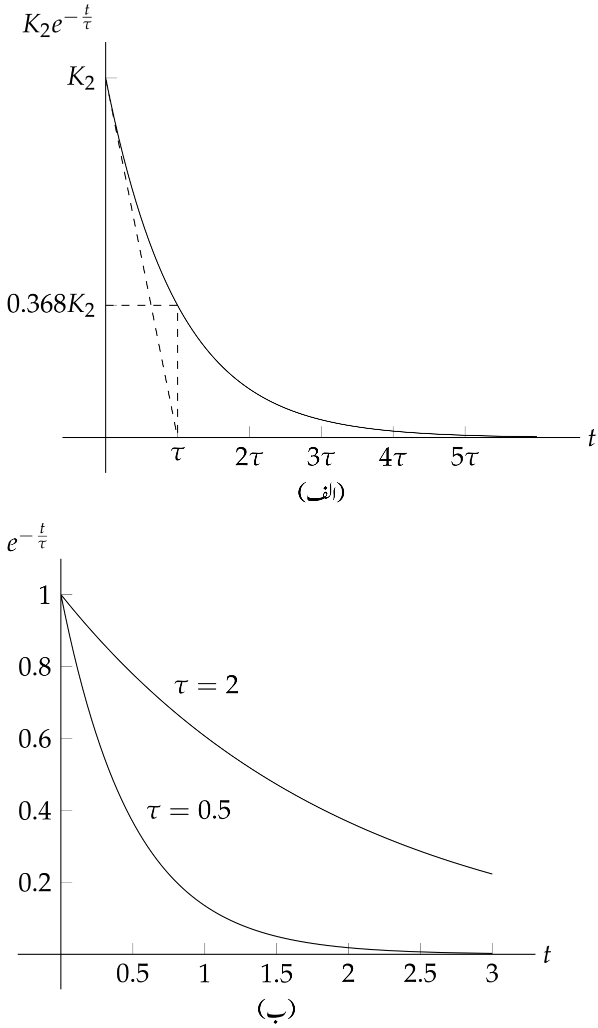
مساوات 7.12 کے مختلف اجزاء کو نام دیے گئے ہیں۔ یوں τ **وقتی مستقل**[11] کہلاتا ہے جبکہ K_1 **برقرار حالت حل**[12] کہلاتا ہے۔ مساوات 7.12 میں $t = \infty$ پُر کرنے سے برقرار حالت حل حاصل ہوتا ہے۔ یوں کسی بھی تبدیلی کے بہت دیر بعد دور برقرار حالت میں ہو گا یعنی ابدی صورت کو برقرار حالت کہا جاتا ہے۔

شکل 7.3-الف میں مثبت a کی صورت میں جبری حل دکھایا گیا ہے۔ ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر $y_j(0) = K_2$ کے برابر ہے جبکہ ایک وقتی مستقل برابر وقت بعد اس کی قیمت $y_j(\tau) = 0.368K_2$ رہ گئی ہے یعنی τ دورانیے میں جبری حل کی قیمت میں 63.2 % کمی واقع ہوئی ہے۔ اسی طرح دو وقتی مستقل وقفے کے بعد $y_j(2\tau) = 0.135K_2$ ہے جو $y_p(\tau)$ کے 0.368 گنا ہے۔ حقیقت میں کسی بھی لمحہ t_1 پر y_j کی قیمت میں لمحہ $t_1 + \tau$ پر 63.2 % کمی واقع ہو گی۔ پانچ وقتی مستقل وقفے کے بعد $y_j(5\tau) = 0.0067K_2$ رہ جاتا ہے جو ابتدائی قیمت کے 0.67 % ہے۔

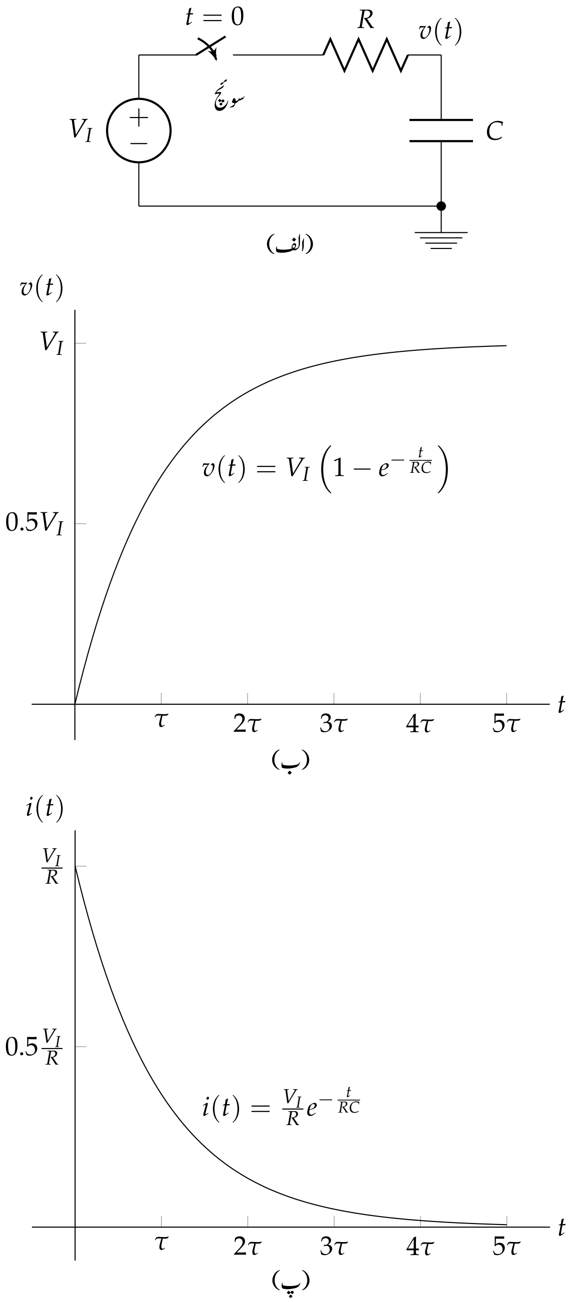
مساوات 7.10 **قوت نمائی انحطاطی**[13] خط ہے۔ قوت نمائی انحطاطی خط کی ایک خصوصیت یہ ہے کہ ابتدائی لمحے پر اس کا مماس افقی محور کو τ پر کاٹتا ہے۔ اس مماس کو شکل 7.3-الف میں $(0, K_2)$ تا $(\tau, 0)$ نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ شکل 7.3-ب میں مختلف τ کی قیمتوں کے لئے مساوات 7.10 کو کھینچا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ کم وقتی مستقل کا خط جلد اختتامی قیمت تک پہنچتا ہے۔ یوں وقتی مستقل کسی بھی دور کے رد عمل کے دورانیے کی ناپ ہے۔

مثال 7.1: شکل 7.4 میں مزاحمت اور بے بار برق گیر سلسلہ وار جڑے ہیں۔ لمحہ $t = 0$ پر سوئچ[14][15] چالو کرتے ہوئے انہیں مستقل منبع دباو V_I کے ساتھ جوڑا جاتا ہے۔ برق گیر کا دباو $v(t)$ اور رو $i(t)$ دریافت کریں۔

[11] time constant
[12] steady state solution
[13] exponential decaying
[14] اس طرز کے سوئچ کا پورا نام ایک قطب ایک چال سوئچ ہے۔
[15] switch, spst, single pole single throw



شکل 7.3: وقتی مستقل



شکل 7.4: مثال 7.1 کا دور، دباو اور رو۔

حل: سوئچ چالو کرنے سے پہلے برق گیر بے بار ہے لہٰذا اس پر دباو صفر کے برابر ہے۔ صفحہ 250 پر مساوات 6.11 کے تحت $v_C(0_+) = v_C(0_-)$ ہو گا یعنی یوں سوئچ چالو کرنے کے فوراً بعد برق گیر کا دباو صفر ہی ہو گا۔ سوئچ چالو کرنے کے بعد دباو جوڑ $v(t)$ کے استعمال سے کرخوف مساوات رو لکھتے ہیں

$$\frac{v(t)-V_I}{R}+C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=0$$

جسے ترتیب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{v(t)}{RC}=\frac{V_I}{RC} \tag{7.13}$$

لکھا جا سکتا ہے جو عمومی مساوات 7.4 کی طرح ہے۔ چونکہ V_I مستقل قیمت ہے لہٰذا اس مساوات کا جبری حل

$$v_j(t)=K_1$$

تصور کیا جا سکتا ہے جسے مساوات 7.13 میں پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}K_1}{\mathrm{d}t}+\frac{K_1}{RC}&=\frac{V_I}{RC}\\0+\frac{K_1}{RC}&=\frac{V_I}{RC}\end{aligned}$$

یعنی

$$K_1=V_I$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں جبری حل درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_j(t)=V_I$$

اس نتیجے کے تحت سوئچ چالو کرنے کے بہت دیر بعد برق گیر پر دباو عین منبع دباو کے برابر ہو گا۔ شکل کو دیکھتے ہوئے اسی نتیجے تک یوں پہنچا جا سکتا ہے کہ سوئچ چالو کرنے کے بعد دور میں رو کی وجہ سے برق گیر پر بار جمع ہونا شروع ہو جائے گا۔ جب تک برق گیر کا دباو منبع کے دباو سے کم ہو، مزاحمت پر دباو پایا جائے گا لہٰذا اس میں رو پائی جائے گی۔ یہ رو برق گیر پر جمع بار میں اضافہ کرتی رہے گی۔ عین اس وقت جب برق گیر اور منبع کے دباو برابر ہو جائیں، رو کی قیمت صفر ہو جائے گی اور برق گیر کا دباو اسی قیمت پر ابد تک برقرار رہے گا۔

آئیں اب فطری حل دریافت کریں۔ فطری حل ہم جنسی مساوات سے حاصل ہوتا ہے۔ مساوات 7.13 کے دائیں بازو کو صفر کے برابر پُر کرنے سے ہم جنسی مساوات

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{v(t)}{RC}=0 \tag{7.14}$$

حاصل ہوتی ہے۔اس کو

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{v(t)} = -\frac{\mathrm{d}t}{RC}$$

لکھتے ہوئے تکمل لینے سے

$$\ln v(t) = -\frac{t}{RC} + c$$

یعنی

$$v_f(t) = K_2 e^{-\frac{t}{RC}}$$

فطری حل حاصل ہوتا ہے۔ جبری اور فطری حل کا مجموعہ مکمل حل ہو گا۔

$$v(t) = V_I + K_2 e^{-\frac{t}{RC}}$$

مکمل حل میں نامعلوم مستقل کو ابتدائی شرائط[16] سے حاصل کرتے ہیں جس کے تحت $t = 0_+$ پر $v_C(0_+) = 0$ کی قیمت معلوم ہے۔ان قیمتوں کو درج بالا مساوات میں پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے

$$\begin{aligned}
0 &= V_I + K_2 e^{-\frac{0}{RC}} \\
0 &= V_I + K_2
\end{aligned}$$

یعنی

$$K_2 = -V_I$$

حاصل ہوتا ہے۔

جبری حل اور فطری حل کا مجموعہ مکمل حل دیتا ہے

$$\begin{aligned}
v(t) &= v_j(t) + v_f(t) \\
&= V_I\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \\
&= V_I\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)
\end{aligned} \tag{7.15}$$

[16] initial conditions

درج بالا مساوات میں وقتی مستقل درج ذیل ہے۔

$$\tau = RC \tag{7.16}$$

یوں R یا(اور) C بڑھانے سے وقتی مستقل بڑھے گا جس سے دور برقرار صورت زیادہ دیر کے بعد اختیار کرے گا۔

رو $i(t)$ کو درج بالا مساوات سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} i(t) &= C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= CV_I\left(0 + \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\right) \\ &= \frac{V_I}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

یہی رو مزاحمت پر اوہم کے قانون کی مدد سے بھی حاصل کی جا سکتی ہے یعنی

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{V_I - v(t)}{R} \\ &= \frac{V_I}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

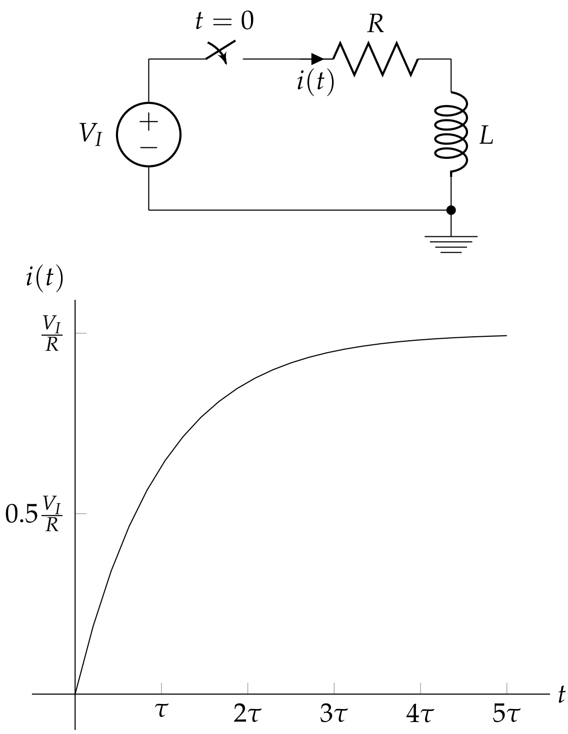
مثال 7.2: شکل 7.5 میں لمحہ $t = 0$ پر سوئچ چالو کیا جاتا ہے۔ رو کا خط کھینچیں۔

حل: کرخوف مساوات دباو

$$V_I = i(t)R + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

کو ترتیب دیتے ہوئے عمومی شکل میں لاتے ہیں

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{V_I}{L} \tag{7.17}$$



شکل 7.5: مثال 7.2 کے اشکال۔

جس کا جبری حل

$$i_j(t) = K_1$$

ہو گا۔ جبری حل کو عمومی مساوات میں پُر کرتے ہوئے حل کرنے سے

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}K_1}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}K_1 &= \frac{V_I}{L}\\ 0 + \frac{R}{L}K_1 &= \frac{V_I}{L}\end{aligned}$$

یعنی

$$K_1 = \frac{V_I}{R}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے جبری حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$i_j(t) = \frac{V_I}{R}$$

یہی جواب منطق سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ چونکہ یک سمتی رو کے لئے امالہ گیر بطور قصر دور کردار ادا کرتا ہے لہٰذا عارضی دورانیہ گزر جانے کے بعد ہم امالہ گیر کو قصر دور تصور کر سکتے ہیں۔ شکل 7.5 میں امالہ گیر کو قصر دور کرتے ہوئے اوہم کے قانون سے $i_j(t) = \frac{V_I}{R}$ لکھا جا سکتا ہے۔

فطری حل حاصل کرنے کی خاطر مساوات 7.17 میں دیے گئے عمومی مساوات کا دایاں ہاتھ صفر کے برابر پُر کرتے ہوئے درج ذیل ہم جنسی مساوات حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i(t) = 0$$

اس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{i(t)} = -\frac{R}{L}\,\mathrm{d}t$$

تکمل لینے سے

$$\ln i(t) = -\frac{R}{L}t + c$$

یعنی

$$i_f(t) = K_2 e^{-\frac{R}{L}t}$$

حاصل ہوتا ہے۔

جبری اور فطری حل کا مجموعہ مکمل حل دیتا ہے

$$\begin{aligned} i(t) &= i_j(t) + i_f(t) \\ &= \frac{V_I}{R} + K_2 e^{-\frac{R}{L}t} \\ &= \frac{V_I}{R} + K_2 e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned} \tag{7.18}$$

جہاں وقتی مستقل درج ذیل ہے۔

$$\tau = \frac{R}{L} \tag{7.19}$$

مکمل حل میں نا معلوم مستقل K_2 کو ابتدائی معلومات سے حاصل کیا جا سکتا ہے۔ سوئچ چالو کرنے سے پہلے دور میں رو صفر کے برابر ہے۔ صفحہ 263 پر مساوات 6.21 کے تحت امالہ کی رو بلا جوڑ تفاعل

$$i_L(t_+) = i_L(t_-)$$

ہے لہٰذا سوئچ چالو کرنے کے فوراً بعد امالہ کی رو وہی ہو گی جو سوئچ چالو کرنے کے فوراً پہلے تھی یعنی لمحہ $t = 0_+$ پر $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$ ہو گی۔ ان معلومات کو مساوات 7.18 میں دیے مکمل حل میں پُر کرنے سے

$$0 = \frac{V_I}{R} + K_2 e^{-\frac{0}{\tau}}$$

یعنی

$$K_2 = -\frac{V_I}{R}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں مکمل حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$i(t) = \frac{V_I}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) \tag{7.20}$$

رو کے خط کو شکل 7.5-ب میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 7.3: ازل سے شکل 7.6 میں **ایک قطب دو چال سوئچ**[17] اسی جگہ پر ہے۔ لمحہ $t=0$ پر اس کی جگہ تبدیل کرتے ہوئے $5\,\mathrm{k\Omega}$ مزاحمت کو زمین کے ساتھ جوڑا جاتا ہے۔ برق گیر پر دباو دریافت کریں۔

حل: ازل سے دور منبع کے ساتھ جڑا رہا ہے۔ یوں دور برقرار حالت میں ہو گا اور برق گیر کو کھلا دور تصور کیا جاتا ہے۔ ایسا کرنے سے شکل-ب حاصل ہوتی ہے جہاں سے تقسیم دباو کے کلیے سے برق گیر کا ابتدائی دباو درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$v_C(0_-)=20\left(\frac{15\,\mathrm{k\Omega}}{5\,\mathrm{k\Omega}+15\,\mathrm{k\Omega}}\right)=15\,\mathrm{V}$$

برق گیر کا دباو بلا جوڑ ہے لہٰذا

$$v_C(0_+)=v_C(0_-)=15\,\mathrm{V} \qquad \text{ابتدائی حالت}$$

ہو گا۔ لمحہ $t=0$ کے بعد کی صورت شکل-پ میں دکھائی گئی ہے۔ ہمیں اس شکل میں $v(t)$ درکار ہے جسے کرخوف مساوات رو کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{v_C(t)}{5000}+\frac{v_C(t)}{15000}+200\times10^{-6}\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{\mathrm{d}t}=0$$

اس ہم جنسی مساوات کو ترتیب دیتے ہوئے

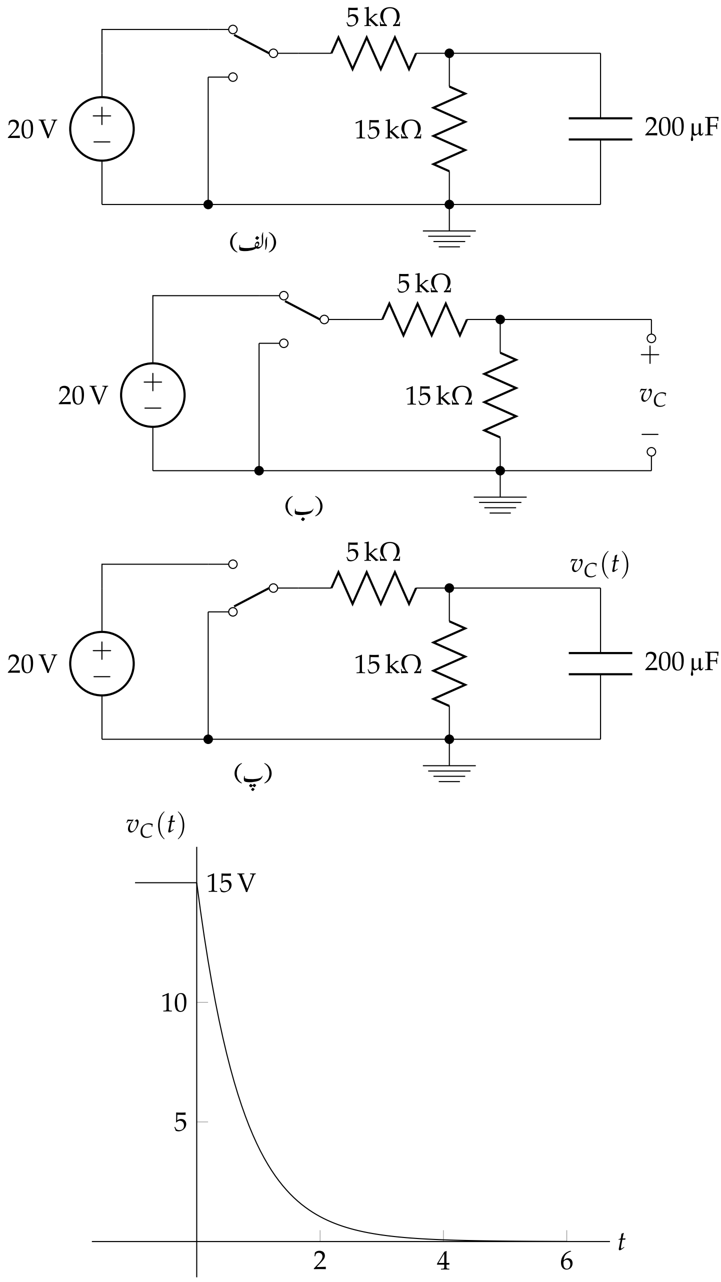
$$\frac{\mathrm{d}v_C(t)}{v_C(t)}=-\frac{4}{3}\,\mathrm{d}t$$

لکھا جا سکتا ہے جس کا تکمل

$$\ln v_C(t)=-\frac{4}{3}t+c$$

---

[17] single pole double throw switch, spdt



شکل 7.6: مثال 7.3 کے اشکال۔

یا

$$v_C(t) = Ke^{-\frac{4}{3}t}$$

کے برابر ہے جہاں تکمل کے مستقل کو c یا K لکھا گیا ہے۔ابتدائی حالت کی معلومات اس مساوات میں پُر کرتے ہوئے

$$15 = Ke^0$$

سے K کی قیمت درج ذیل

$$K = 15$$

حاصل ہوتی ہے۔یوں

$$v_C(t) = 15e^{-\frac{4}{3}t}$$

حاصل ہوتا ہے جس میں وقتی مستقل $\tau = \frac{3}{4}$ کے برابر ہے۔یوں سوئچ چالو کرنے کے $0.75\,\mathrm{s}$ بعد برق گیر کا دباو ابتدائی قیمت کے $36.8\,\%$ یعنی $0.368 \times 15 = 5.52\,\mathrm{V}$ ہو گا۔

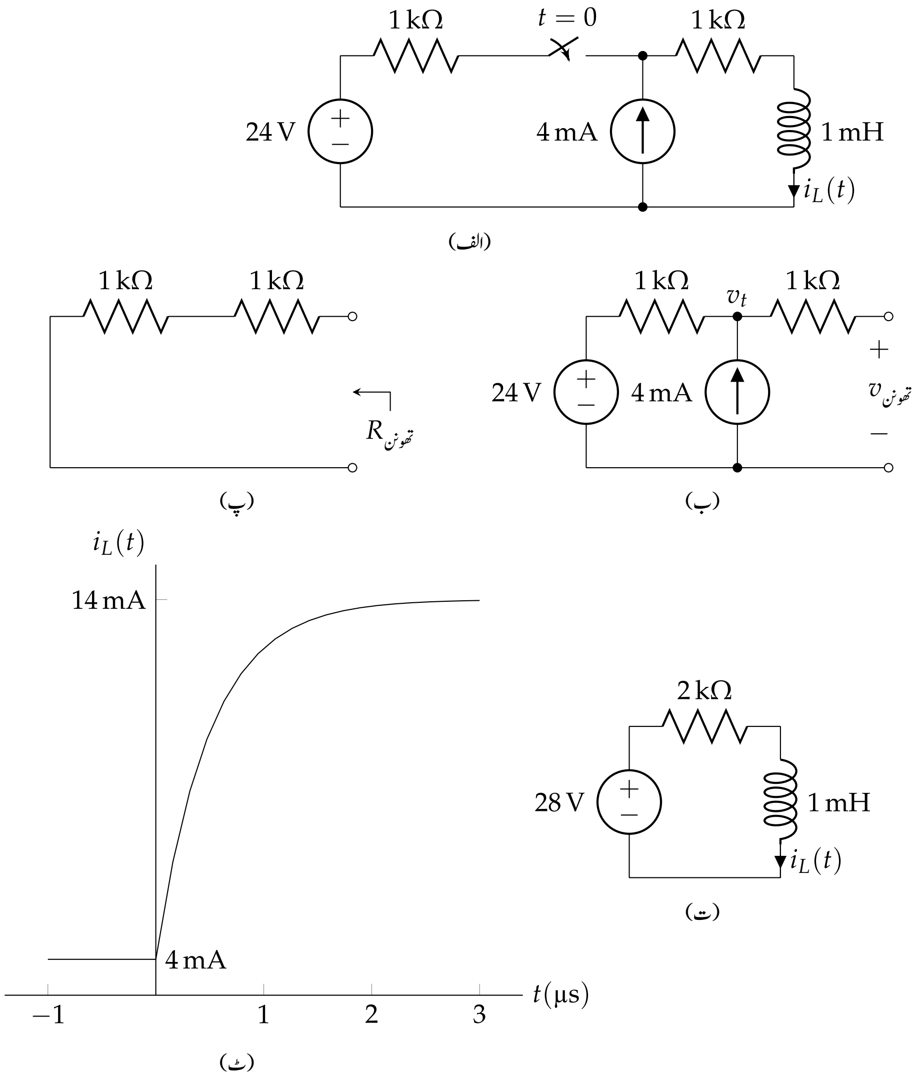
مثال 7.4: ازل سے شکل 7.7 میں سوئچ غیر چالو تھا جسے $t = 0$ پر چالو کیا جاتا ہے۔امالہ گیر کی رو $i_L(t)$ دریافت کریں۔

حل: غیر چالو سوئچ کی صورت میں منبع رو کی تمام رو امالہ گیر سے گزرتی ہے لہٰذا

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 4\,\mathrm{mA}$$

ہو گا۔اس دور کو مسئلہ تھونن کی مدد سے حل کرتے ہیں۔یوں امالہ کو بوجھ تصور کرتے ہوئے بقایا دور کا تھونن مساوی حاصل کرتے ہیں۔تھونن دباو حاصل کرنے کی خاطر بوجھ کو کھلے دور کیا جاتا ہے جس سے شکل 7.7-ب حاصل ہوتی ہے۔اس شکل میں منبع رو کی تمام رو بائیں مزاحمت اور منبع دباو سے گزرے گی لہٰذا مزاحمت پر $4\,\mathrm{V}$ کا دباو ہو گا۔یوں

$$v_t = v_{\text{تھونن}} = 24\,\mathrm{V} + 4\,\mathrm{V} = 28\,\mathrm{V}$$



شکل 7.7: مثال 7.4 کے اشکال۔

لکھا جا سکتا ہے۔ یاد رہے کہ بالائی دائیں مزاحمت میں رو صفر کے برابر ہے لہٰذا اس پر دباو بھی صفر ہو گا اور یوں v_t اور $v_{\text{تھونن}}$ برابر ہوں گے۔

منبع دباو کو قصر دور اور منبع رو کو کھلے دور کرتے ہوئے شکل-پ حاصل ہوتی ہے جسے دیکھتے ہوئے تھونن مزاحمت

$$R_{\text{تھونن}} = 2\,\mathrm{k\Omega}$$

لکھی جا سکتی ہے۔

تھونن مساوی دور استعمال کرتے ہوئے شکل-الف کو شکل-ت کی طرز پر بنایا جا سکتا ہے۔ شکل-ت کی کرخوف مساوات

$$28 = 2000i(t) + 0.001\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

کو عمومی صورت میں لکھتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + 2\times 10^6 i(t) = 28000$$

اس مساوات کا جبری حل

$$i_j(t) = K_1 = 14\,\mathrm{mA}$$

حاصل ہوتا ہے اور اس کا فطری حل

$$i_f(t) = K_2 e^{-2\times 10^6 t}$$

ہے-یوں امالہ گیر کے رو کا مکمل حل

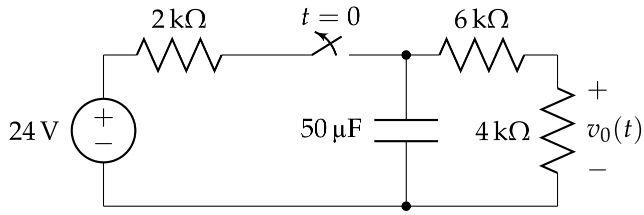
$$i(t) = 0.014 + K_2 e^{-2\times 10^6 t}$$

ہے۔ ابتدائی معلومات کو اس مساوات میں حل کرتے ہوئے

$$0.004 = 0.014 + K_2 e^0$$

سے

$$K_2 = -10\,\mathrm{mA}$$



شکل 7.8: مشق 7.1 کا دور۔

حاصل ہوتا ہے۔یوں مکمل حل درج ذیل ہے۔

$$i_L(t) = 0.014 - 0.01e^{-2\times10^6 t} \tag{7.21}$$

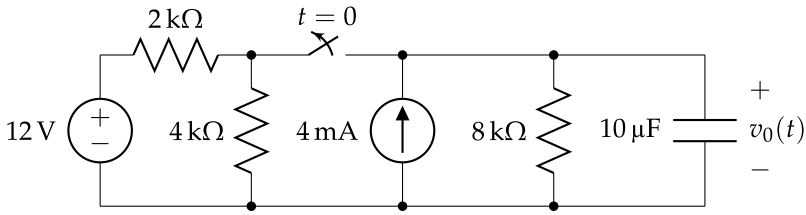
اس مساوات کا وقتی مستقل $\tau = 0.5\,\mu\text{s}$ ہے۔یوں تقریباً $5\tau = 2.5\,\mu\text{s}$ میں دور پہلی برقرار حالت سے دوسری برقرار حالت اختیار کر پاتا ہے۔مساوات 7.21 کو شکل-ٹ میں دکھایا گیا ہے۔

مشق 7.1: شکل 7.8 میں ازل سے چالو سوئچ کو لمحہ $t = 0$ پر منقطع کیا جاتا ہے۔برق گیر پر ابتدائی دباو دریافت کرتے ہوئے $v_0(t)$ دریافت کریں۔اس دور کا وقتی مستقل کیا ہے۔

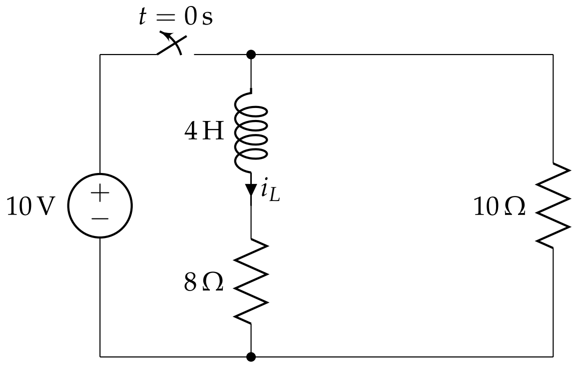
جوابات: $v_C(0_+) = 20\,\text{V}$ ، $v_0(t) = 8e^{-\frac{t}{0.5}}\,\text{V}$ ، $\tau = 0.5\,\text{s}$

مشق 7.2: شکل 7.9 میں ازل سے چالو سوئچ کو لمحہ $t = 0$ پر منقطع کیا جاتا ہے۔برق گیر پر ابتدائی دباو دریافت کرتے ہوئے $v_0(t)$ دریافت کریں۔

جوابات: $v_0(0_+) = \frac{80}{7}\,\text{V}$ ، $v_0(t) = 32 - \frac{144}{7}e^{-\frac{100t}{7}}\,\text{V}$



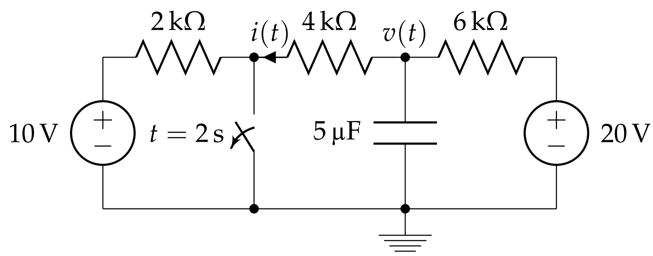
شکل 7.9: مشق 7.2 کا دور۔



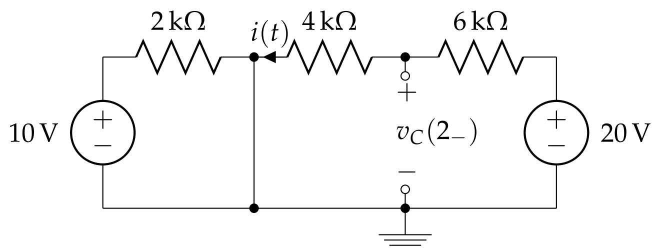
شکل 7.10: مشق 7.3 کا دور۔

مشق 7.3: شکل 7.10 میں ازل سے چالو سوئچ کو لمحہ $t = 0$ پر منقطع کیا جاتا ہے۔امالہ گیر میں ابتدائی رو دریافت کرتے ہوئے $i_L(t)$ دریافت کریں۔دور کا وقتی مستقل حاصل کریں۔

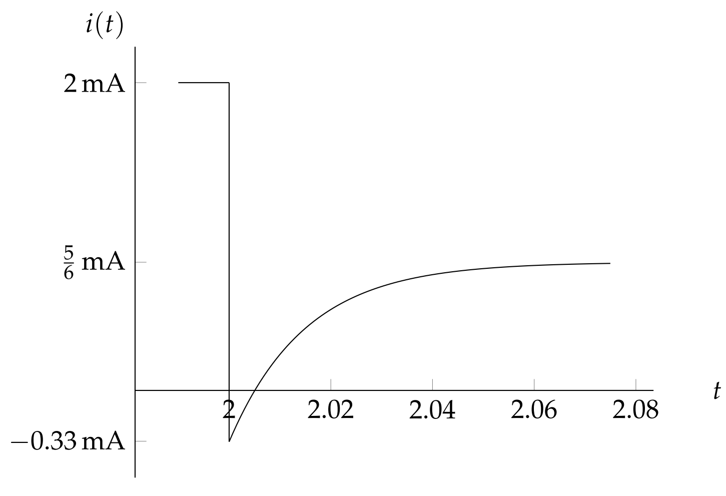
جوابات: $i_L(0_+) = 1.25\,\mathrm{A}$ ، $i_L(t) = 1.25e^{-3000t}\,\mathrm{A}$ ، $\tau = \frac{1}{3}\,\mathrm{ms}$



(الف)



(ب)



(پ)

شکل 7.11: مثال 7.5 کے اشکال۔

مثال 7.5: شکل 7.11 میں ازل سے چالو سوئچ لمحہ $t=2\,\mathrm{s}$ پر منقطع کیا جاتا ہے۔ رو $i(t)$ دریافت کریں۔

حل: سوئچ منقطع کرنے سے فوراً پہلے کی صورت حال شکل-ب میں دکھائی گئی ہے۔ چونکہ ازل سے سوئچ چالو تھا لہٰذا دور برقرار حالت میں ہو گا اور یوں برق گیر کو کھلا دور تصور کیا جائے گا۔ شکل-ب کو دیکھ کر

$$i(t<2\,\mathrm{s})=\frac{20}{4000+6000}=2\,\mathrm{mA}$$

اور

$$v_C(2_-)=v_C(2_+)=20\left(\frac{4000}{4000+6000}\right)=8\,\mathrm{V}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ سوئچ منقطع ہونے کے بعد کی صورت حال شکل-الف میں دی گئی ہے۔ جوڑ $v(t)$ پر کرخوف مساوات رو لکھتے ہوئے

$$\frac{v(t)-10}{2000+4000}+5\times10^{-6}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{v(t)-20}{6000}=0$$

ترتیب دینے سے

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{200}{3}v(t)=1000$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس کے جبری اور فطری حل درج ذیل ہیں

$$\begin{aligned}v_j(t)&=K_1=15\,\mathrm{V}\\ v_f(t)&=K_2e^{-\frac{200}{3}t}\end{aligned}$$

جن کا مجموعہ مکمل حل

$$v(t>2)=15+K_2e^{-\frac{200}{3}t}$$

دیتا ہے۔ ابتدائی معلومات $v(2_+)=8\,\mathrm{V}$ لمحہ $t=2\,\mathrm{s}$ پر ہم جانتے ہیں جنہیں درج بالا مساوات میں پُر کرتے ہوئے

$$8=15+K_2e^{-\frac{200}{3}\times2}$$

K_2 کی قیمت درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$K_2=-7e^{\frac{400}{3}}$$

یوں مکمل حل درج ذیل ہو گا۔

$$v(t>2)=15-7e^{\frac{200}{3}(2-t)}$$

اب شکل-الف کو دیکھ کر

$$\begin{aligned} i(t>2)&=\frac{v(t>2)-10}{6000}\\ &=\frac{5}{6}-\frac{7}{6}e^{\frac{200}{3}(2-t)}\,\mathrm{mA} \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے جو درکار مساوات ہے۔یوں سوئچ منقطع کرنے سے پہلے اور اس کے بعد کے جوابات سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

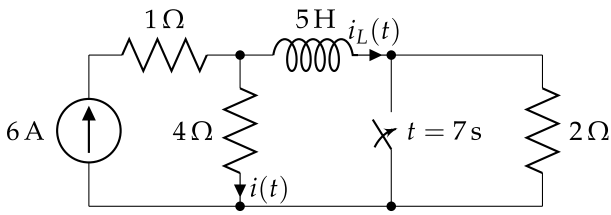
$$i(t)=\begin{cases}2\,\mathrm{mA} & t<2\,\mathrm{s}\\ \frac{5}{6}-\frac{7}{6}e^{\frac{200}{3}(2-t)}\,\mathrm{mA} & t>2\,\mathrm{s}\end{cases}$$

جیسے شکل-پ میں دکھایا گیا ہے جہاں سے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سوئچ منقطع کرنے سے پہلے برقرار رو $2\,\mathrm{mA}$ تھی جبکہ سوئچ منقطع کرنے کے بعد برقرار حالت $(t\to\infty)$ میں رو $\frac{5}{6}\,\mathrm{mA}$ ہے۔یاد رہے کہ برق گیر کا دباو فوراً تبدیل نہیں ہو سکتا البتہ اس میں رو یک دم تبدیل ہو سکتی ہے۔

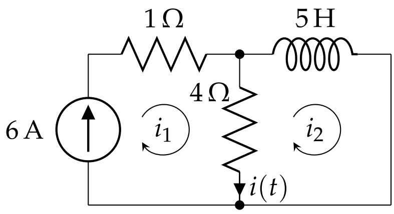
وقت $t\to\infty$ پر دور برقرار حالت اختیار کر چکا ہو گا لہٰذا برق گیر کو کھلا دور کرتے ہوئے شکل 7.11-الف سے برقرار حالت رو درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$i(t\to\infty)=\frac{20-10}{2000+4000+6000}=\frac{5}{6}\,\mathrm{mA}$$

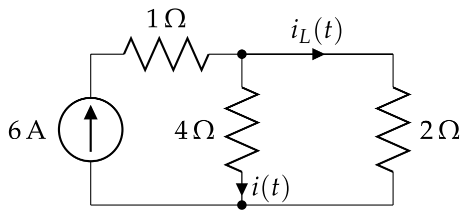
مثال 7.6: شکل 7.12-الف میں ازل سے منقطع سوئچ لمحہ $t=7\,\mathrm{s}$ پر چالو کیا جاتا ہے۔رو $i(t)$ دریافت کریں۔



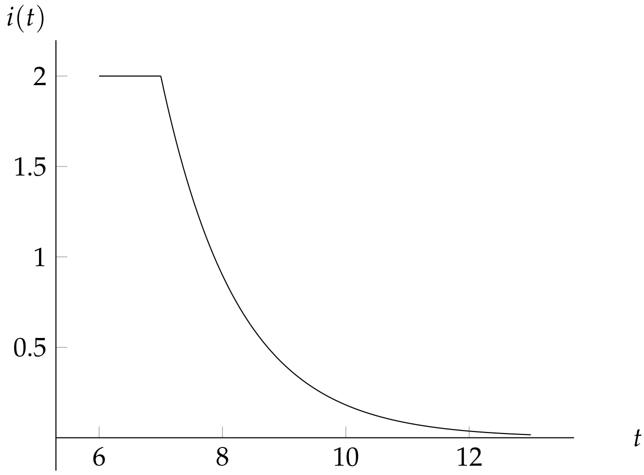
(الف)



(پ)



(ب)



(ت)

شکل 7.12: مثال 7.6 کے اشکال۔

حل: منقطع سوئچ کی صورت میں دور برقرار حالت میں ہو گا لہٰذا امالہ گیر کو قصر دور تصور کرتے ہوئے شکل-ب حاصل کی گئی ہے۔ تقسیم رو کے کلیے سے

$$i_L(7_-) = i_L(7_+) = 6\left(\frac{4}{4+2}\right) = 4\,\mathrm{A}$$

اور

$$i(t) = 6\,\mathrm{A} - i_L(t) = 6 - 4 = 2\,\mathrm{A} \qquad (t < 7\,\mathrm{s}) \tag{7.22}$$

لکھا جا سکتا ہے۔ سوئچ چالو کرنے کے بعد کی صورت حال شکل-پ میں دکھائی گئی ہے جہاں سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} i_1 &= 6\,\mathrm{A} \\ 5\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + 4(i_2 - i_1) &= 0 \end{aligned}$$

ان مساوات کو ملاتے ہوئے

$$5\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + 4(i_2 - 6) = 0$$

یعنی

$$\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{4}{5}i_2 = \frac{24}{5}$$

حاصل ہوتا ہے جس کا مکمل حل درج ذیل ہے۔

$$i_2 = 6 + K_2 e^{-\frac{4}{5}t}$$

چونکہ i_2 درحقیقت i_L ہی ہے لہٰذا نامعلوم مستقل K_2 کو ابتدائی معلومات سے حاصل کرتے ہیں۔ درج بالا مساوات میں $t = 7\,\mathrm{s}$ پر $i_L(7_+) = 4\,\mathrm{A}$ پُر کرتے ہوئے

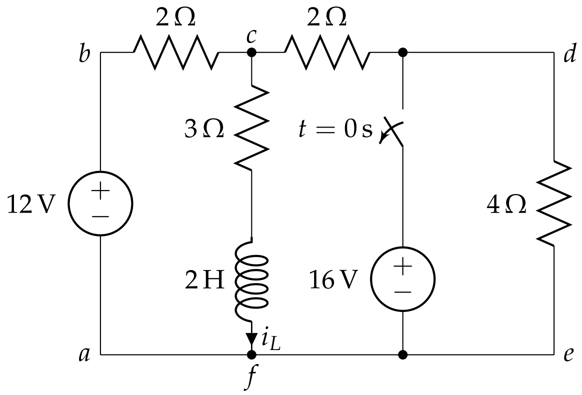
$$4 = 6 + K_2 e^{-\frac{4}{5}\times 7}$$

سے

$$K_2 = -2e^{\frac{4}{5}\times 7}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں سوئچ چالو کرنے کے بعد i_2 کا مکمل حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$i_2 = 6 - 2e^{\frac{4}{5}(7-t)}$$



شکل 7.13: مشق 7.4 کا دور۔

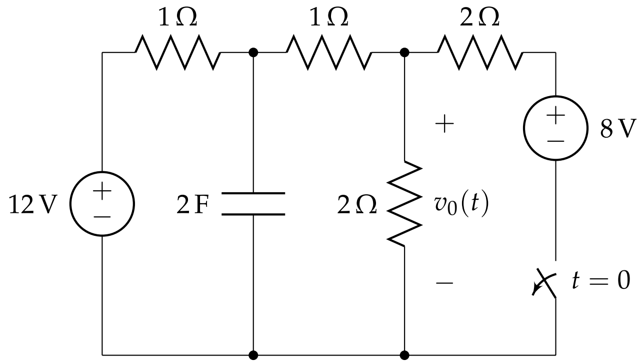
اب شکل-پ کو دیکھتے ہوئے

$$\begin{aligned} i(t) &= i_1 - i_2 \\ &= 6 - \left(6 - 2^{\frac{4}{5}(7-t)}\right) \\ &= 2e^{\frac{4}{5}(7-t)} \qquad (t > 7\,\mathrm{s}) \end{aligned}$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں ازل سے ابد تک $i(t)$ کو مساوات 7.22 اور درج بالا مساوات پیش کرتے ہیں۔انہیں اکٹھے لکھتے اور شکل-ت میں پیش کرتے ہیں۔

$$i(t) = \begin{cases} 2\,\mathrm{A} & t < 7\,\mathrm{s} \\ 2e^{\frac{4}{5}(7-t)}\,\mathrm{A} & t > 7\,\mathrm{s} \end{cases} \tag{7.23}$$

مشق 7.4: شکل 7.13 میں ابتدائی حالت $i_L(0_+)$ دریافت کریں۔دائرہ $abcfa$ میں i_1 اور $abdea$ میں i_2 لیتے ہوئے کرخوف مساوات دباو لکھیں۔ان مساوات سے صرف i_1 پر مبنی مساوات حاصل کریں۔یوں ازل سے ابد تک i_L دریافت کریں۔



شکل 7.14: مشق 7.5 کا دور۔

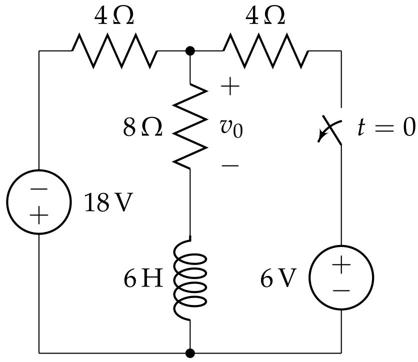
جوابات: $i_L(0_+) = 3.5\,\mathrm{A}$ ، $\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + 2.25i_1 = 4.5$ ، $i_L(t > 0) = 2 + 1.5e^{-2.25t}\,\mathrm{A}$

مشق 7.5: شکل 7.14 میں $v_0(t)$ حاصل کریں۔

جوابات: $v_0(t) = \frac{24}{5} + \frac{1}{5}e^{-\frac{5}{8}t}\,\mathrm{V}$

مشق 7.6: شکل 7.15 میں سوئچ منقطع کرنے کے بعد v_0 حاصل کریں۔

جوابات: $v_0 = -12 + \frac{9}{2}e^{-2t}\,\mathrm{V}$



شکل 7.15: مشق 7.6 کا دور۔

7.3 دھڑکن

گزشتہ حصے میں سوئچ کو چالو یا منقطع کرتے ہوئے ادوار میں یکدم تبدیلی پیدا کی گئی۔ فوراً تبدیلی پیدا کرنے والے دو عدد تفاعل نہایت اہم ہیں۔ انہیں **اکائی سیڑھی تفاعل**[18] اور **اکائی جھٹکا تفاعل**[19] کہتے ہیں۔ آئیں اکائی سیڑھی تفاعل پر غور کریں۔

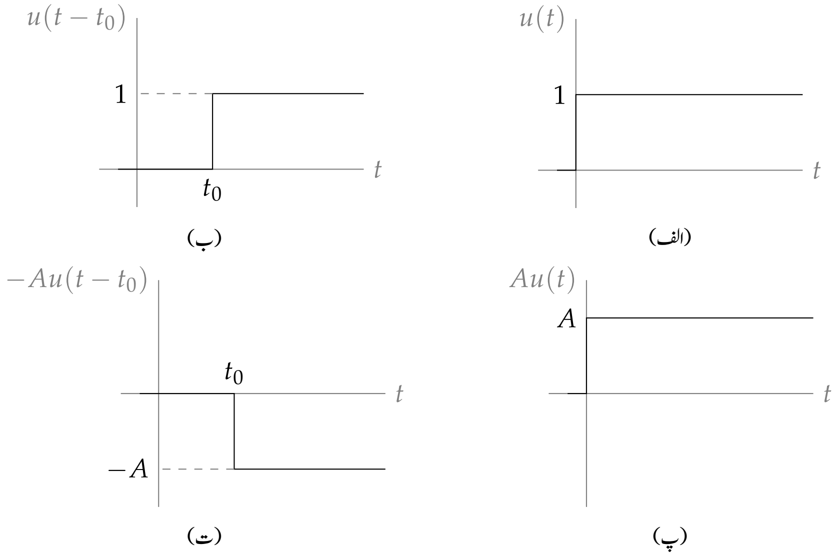
اکائی سیڑھی تفاعل $u(t)$ کی الجبرائی تعریف درج ذیل ہے۔

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} \tag{7.24}$$

اکائی سیڑھی تفاعل بے بعد[20] ہے جو منفی t کی صورت میں صفر کے برابر جبکہ مثبت t کی صورت میں اکائی کے برابر ہے۔ شکل 7.16-الف میں اکائی سیڑھی تفاعل کو دکھایا گیا ہے۔ اکائی سیڑھی تفاعل کے متغیرہ کو $t - t_0$ لکھتے ہوئے شکل 7.16-ب حاصل ہوتا ہے جو افقی محدد پر t_0 دائیں منتقل اکائی سیڑھی تفاعل $u(t - t_0)$ ہے۔ یہ تفاعل منفی $t - t_0$ کی صورت میں صفر کے برابر ہے جبکہ مثبت $t - t_0$ کی صورت میں یہ اکائی کے برابر ہے۔ اکائی سیڑھی تفاعل کو V_0 وولٹ کی دباو سے ضرب دینے سے V_0 وولٹ کا سیڑھی تفاعل حاصل ہو گا جس سے بعد وولٹ V ہے۔ یوں بے بعد سیڑھی تفاعل سے کسی بھی بعد کی سیڑھی تفاعل حاصل کی جا سکتی ہے۔ شکل 7.16-پ میں $Au(t)$ اور شکل 7.16-ت میں $-Au(t - t_0)$ دکھائے گئے ہیں جہاں A از خود مثبت عدد ہے۔

---

[18] unit step function
[19] unit impulse function
[20] dimensionless



شکل 7.16: اکائی سیڑھی تفاعل۔

اکائی سیڑھی تفاعل سے مستطیل تفاعل حاصل کیا جا سکتا ہے۔ یہ عمل شکل 7.17 میں دکھایا گیا ہے جہاں $Au(t)$ اور $-Au(t-t_0)$ کا مجموعہ

$$f(t)=Au(t)-Au(t-t_0) \tag{7.25}$$

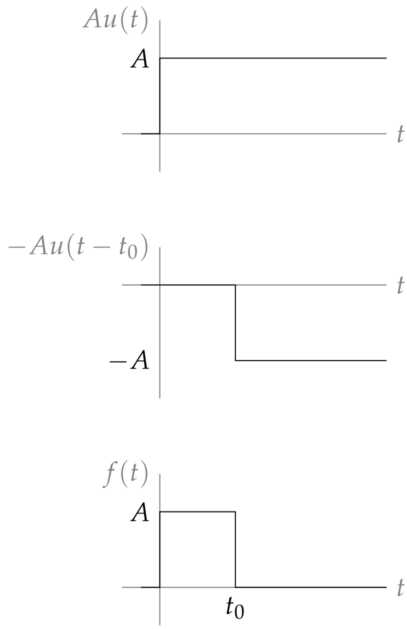
لیتے ہوئے A حیطے کا مستطیل تفاعل حاصل کیا گیا ہے۔

مثال 7.7: اکائی سیڑھی تفاعل کے استعمال سے T طول موج اور V_0 حیطے کی چکور موج حاصل کریں۔

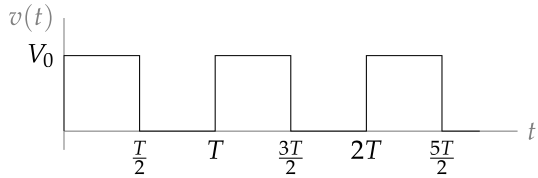
حل: شکل 7.17 کی طرز پر متعدد مستطیل اشارات سے ایسی موج حاصل کی جا سکتی ہے۔ ایسا کرنے کی خاطر متعدد اکائی سیڑھی تفاعل استعمال کی جائیں گی۔ درکار تفاعل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$v(t)=V_0\left[u(t)-u(t-0.5T)+u(t-T)-u(t-1.5T)+u(t-2T)-\cdots\right]$$

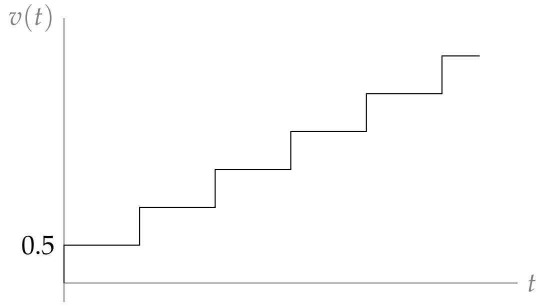
جسے شکل 7.18-الف میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 7.17: اکائی سیڑھی تفاعل سے مستطیل تفاعل کا حصول۔



(الف) چکور موج۔



(ب) بڑھتی سیڑھی۔

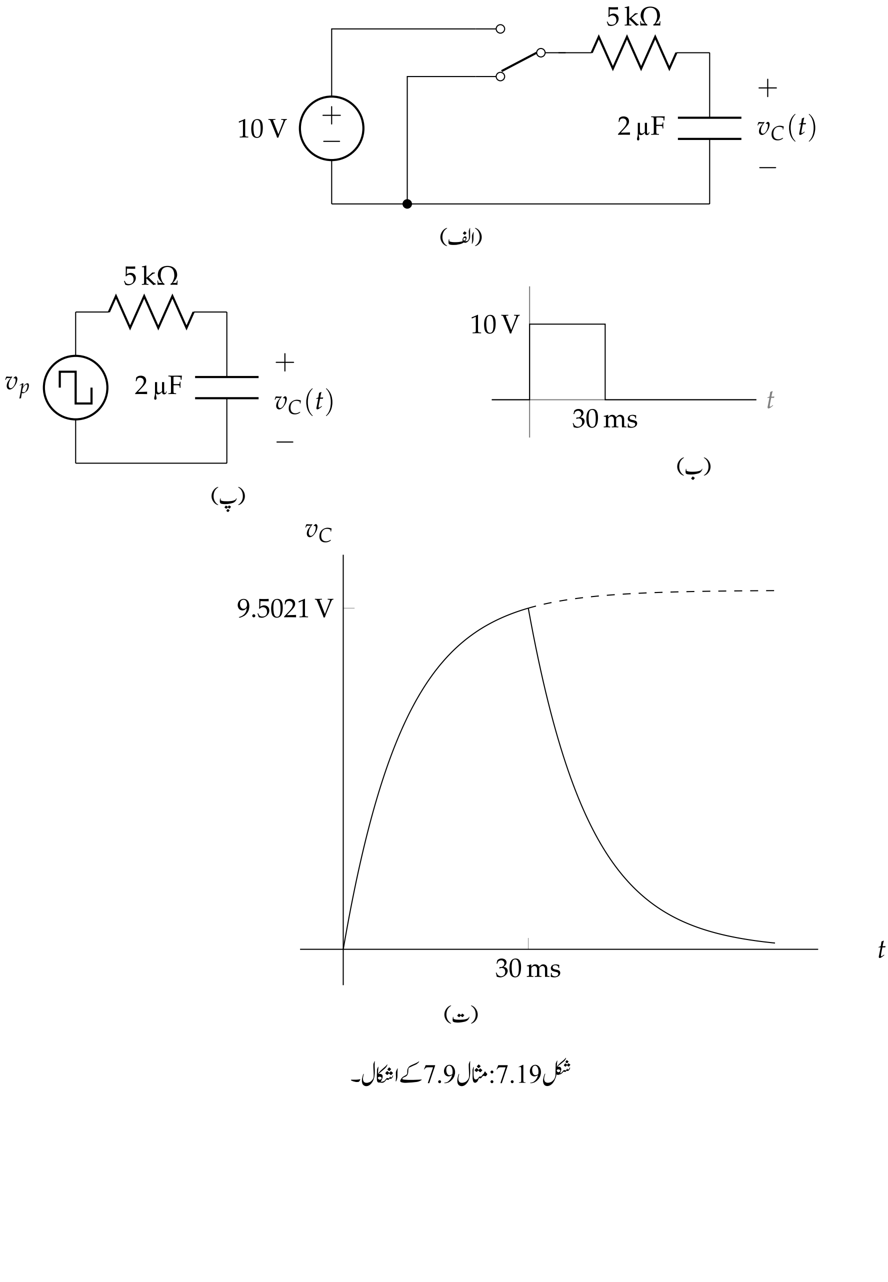
شکل 7.18: اکائی سیڑھی تفاعل سے چکور موج کا حصول۔

مثال 7.8: اکائی سیڑھی تفاعل سے اوپر جانب بڑھتی سیڑھی تفاعل حاصل کریں۔ سیڑھی کی اونچائی 0.5 رکھیں۔

حل: درج بالا مثال میں اجزاء کو بالترتیب جمع اور منفی کیا گیا۔ یہاں انہیں صرف جمع کیا جاتا ہے یعنی

$$v(t) = 0.5\left[u(t) + u(t-0.5T) + u(t-T) + u(t-1.5T) + u(t-2T) + \cdots\right]$$

جس سے درکار سیڑھی حاصل ہو گی۔ بڑھتی سیڑھی کو شکل 7.18-ب میں دکھایا گیا ہے۔



شکل 7.19: مثال 7.9 کے اشکال۔

مثال 7.9: شکل 7.19-الف میں ایک قطب دو چال کا سوئچ استعمال کیا گیا ہے جو ازل سے دور کو زمین سے ملایا ہوا ہے۔ لمحہ $t = 0\,\mathrm{s}$ پر سوئچ کو پلٹتے ہوئے دور کو منبع دباو کے ساتھ ملایا جاتا ہے۔ لمحہ $t = 30\,\mathrm{ms}$ پر سوئچ کو واپس اپنی حالت میں لاتے ہوئے دور کو ایک بار پھر زمین کے ساتھ جوڑا جاتا ہے۔ دباو $v_C(t)$ حاصل کریں۔

حل: سوئچ کو پلٹ کر واپس کرنے سے دور اور منبع $30\,\mathrm{ms}$ کے لئے جڑتے ہیں۔ یوں دور کو اس دورانیے کے لئے $10\,\mathrm{V}$ ملتا ہے۔ شکل-ب میں اس دباو کو دکھایا گیا ہے۔ شکل-الف میں سوئچ اور منبع دباو کی جگہ مستطیل دباو پیدا کرنے والا منبع v_p نسب کرنے سے شکل-پ حاصل ہوتا ہے جہاں

$$v_p = 10\left[u(t) - u(t - 30\,\mathrm{ms})\right]$$

کے برابر ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ شکل-پ میں بھی دور کو عین شکل-ب کا دباو مہیا کیا گیا ہے لہٰذا ان دونوں ادوار کے حل میں کوئی فرق نہیں ہو گا۔

ازل سے داخلی دباو صفر کے برابر ہونے کی بنا

$$v_C(0_-) = v_C(0_+) = 0\,\mathrm{V}$$

ہو گا۔ دورانیہ $t = 0\,\mathrm{s}$ تا $t = 30\,\mathrm{ms}$ شکل-پ میں داخلی دباو $v_p = 10\,\mathrm{V}$ کے برابر ہے لہٰذا کرخوف مساوات رو درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$\frac{v_C - 10}{5000} + 2 \times 10^{-6} \frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} = 0$$

اس کو ترتیب دیتے ہوئے

$$\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t} + 100 v_C = 1000$$

لکھا جا سکتا ہے جس کے جبری اور فطری حل درج ذیل ہیں۔

$$\begin{aligned} v_{C,j} &= K_1 = 10 \\ v_{C,f} &= K_2 e^{-100t} \end{aligned}$$

یوں مکمل حل درج ذیل لکھا جائے گا

$$v_C(t) = 10 + K_2 e^{-100t} \qquad (0 < t < 30\,\mathrm{ms})$$

جس میں لمحہ $t=0\,\mathrm{s}$ کے معلومات پُر کرتے

$$0=10+K_2e^{-100\times 0}$$

ہوئے نامعلوم متغیر کی قیمت $K_2=-10$ حاصل ہوتی ہے۔یوں مکمل حل درج ذیل ہے۔

$$v_C(t)=10-10e^{-100t}\qquad (0<t<30\,\mathrm{ms}) \tag{7.26}$$

لمحہ $t=30\,\mathrm{ms}$ پر داخلی دباو میں دوبارہ یک دم تبدیلی پائی جاتی ہے لہٰذا اس لمحے کے معلومات اگلے دورانیے کے حل کے لئے درکار ہوں گے۔مساوات 7.26 سے $t=30\,\mathrm{ms}$ پر $v_C(0.03_-)$ کی قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$v_C(0.03_-)=v_C(0.03_+)=10-10e^{-100\times 0.03}=9.5021\,\mathrm{V}$$

اگلے دورانیے یعنی $30\,\mathrm{ms}<t$ کا حل تلاش کرتے ہیں۔اس دورانیے میں داخلی دباو $v_p=0\,\mathrm{V}$ کے برابر ہے لہٰذا شکل-پ کا کرخوف مساوات رو درج ذیل ہو گا

$$\frac{v_C-0}{5000}+2\times 10^{-6}\frac{\mathrm{d}v_C}{\mathrm{d}t}=0$$

جس کا مکمل حل

$$v_C=K_3e^{-100t}\qquad (30\,\mathrm{ms}<t)$$

ہے۔اس میں لمحہ $t=30\,\mathrm{ms}$ پر $V_C(0.03_+)$ پر کرتے ہوئے

$$9.5021=K_3e^{-100\times 0.03}$$

نامعلوم متغیرہ $K_3=190.8554$ حاصل ہوتا ہے لہٰذا مکمل حل درج ذیل لکھا جائے گا۔

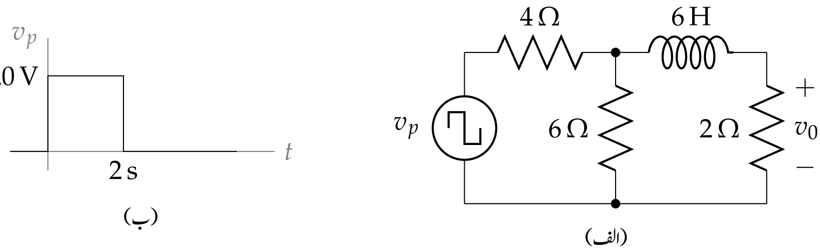
$$v_C=190.8554e^{-100t}\qquad (30\,\mathrm{ms}<t) \tag{7.27}$$

مساوات 7.26 اور مساوات 7.27 کو اکٹھے لکھتے ہوئے اس کا خط

$$v_C=\begin{cases}10-10e^{-100t} & 0<t<30\,\mathrm{ms}\\ 190.8554e^{-100t} & 30\,\mathrm{ms}<t\end{cases} \tag{7.28}$$

شکل-ت میں کھینچتے ہیں۔

اگر لمحہ $t=30\,\mathrm{ms}$ اور اس کے بعد بھی داخلی دباو $10\,\mathrm{V}$ پر برقرار رہتا تب v_C نقطہ دار لکیر پر چلتے ہوئے $10\,\mathrm{V}$ تک جا پہنچتا۔



شکل 7.20: مشق 7.7 کے اشکال۔

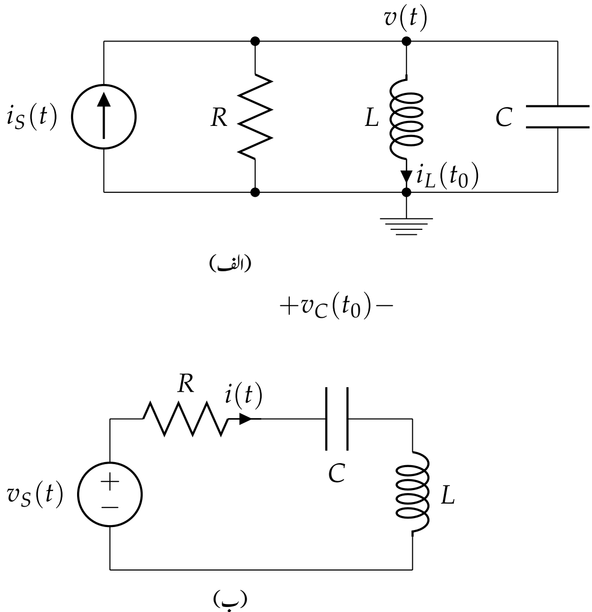
مشق 7.7: شکل 7.20-الف کو شکل 7.20-ب کا داخلی دباو مہیا کیا جاتا ہے۔ دباو v_0 دریافت کریں۔

جواب: $v_0(t<0)=0\,\mathrm{V}$ ، $v_0(0<t<2)=\frac{30}{29}\left(1-e^{-\frac{29}{15}t}\right)$ ،
$v_0(2<t)=8.78074e^{-\frac{11}{15}t}$

7.4 دودرجی ادوار

شکل 7.21-الف میں R ، L اور C متوازی منبع رو $i_S(t)$ کے ساتھ جڑے ہیں جبکہ شکل-ب میں منبع دباو کے ساتھ تینوں پرزے سلسلہ وار جڑے ہیں۔ شکل-الف کی کرخوف مساوات رو اور شکل-ب کی کرخوف مساوات دباو بالترتیب درج ذیل ہیں۔

$$\frac{v(t)}{R}+\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t}v(t)\,\mathrm{d}t+i_L(t_0)+C\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=i_S(t)$$
$$i(t)R+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t}i(t)\,\mathrm{d}t+v_C(t_0)+L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=v_S(t)$$



شکل 7.21: دو درجی ادوار۔

یہ مساوات یکساں صورت رکھتے ہیں للہٰذا ان کا حل بالکل یکساں ہو گا۔ان مساوات کا تفرق لے کر ترتیب دینے سے درج ذیل تفرقی مساوات حاصل ہوتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
C\frac{\mathrm{d}^2 v(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{v(t)}{C}&=\frac{\mathrm{d}i_S(t)}{\mathrm{d}t}\\
L\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2}+R\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{i(t)}{C}&=\frac{\mathrm{d}v_S(t)}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

آپ نے دیکھا کہ دونوں مساوات میں تفرقی جزو کے عددی سر، مستقل مقدار ہیں۔آئیں مستقل عددی سر کے دو درجی تفرقی مساوات کو حل کرنا سیکھتے ہیں۔

مستقل عددی سر کے دو درجی تفرقی مساوات کی عمومی صورت درج ذیل ہے جہاں دو درجی تفرق کے عددی سر کو اکائی برابر رکھا گیا ہے۔

$$
\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+a_2 y(t)=f(t) \tag{7.29}
$$

ایک درجی مساوات کے حل کی طرح یہاں بھی اگر مساوات 7.29 کا جبری حل $y_j(t)$ ہو اور درج ذیل ہم جنسی مساوات کا فطری حل $y_f(t)$ ہو

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + a_2 y(t) = 0 \tag{7.30}$$

تب مساوات 7.29 کا مکمل حل

$$y(t) = y_j(t) + y_f(t) \tag{7.31}$$

ہو گا۔ یاد رہے کہ کسی بھی تفرقی مساوات میں عملی قوت کو صفر $(f(t) = 0)$ پُر کرنے سے اس کی ہم جنسی مساوات حاصل ہوتی ہے۔ مستقل عملی قوت، یعنی $f(t) = A$ ، کی صورت میں جبری حل بھی مستقل ہو گا جسے K_1 تصور کرتے ہوئے مساوات 7.29 میں پُر کرتے ہوئے

$$y_j(t) = K_1 = \frac{A}{a_2} \tag{7.32}$$

حاصل ہوتا ہے۔

ہم جنسی مساوات میں $a_1 = 2\zeta\omega_0$ اور $a_2 = \omega_0^2$ پُر کرنے سے

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 y(t) = 0 \tag{7.33}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں ω_0 کو **(غیر تقصیری) قدرتی تعدد**[21] اور ζ کو **تقصیری تناسب**[22] کہا جاتا ہے۔ ان کی افادیت جلد سامنے آئے گی۔ مساوات 7.33 ہم جنسی مساوات کی عمومی صورت ہے جو طبیعیات کے دیگر شعبوں میں بھی استعمال کی جاتی ہے۔ اس مساوات کا فطری حل

$$y_f(t) = Ke^{st}$$

تصور کرتے ہیں۔ آئیں اس فطری حل کو ہم جنسی مساوات میں پُر کرتے ہیں۔

$$s^2Ke^{st} + 2\zeta\omega_0 sKe^{st} + \omega_0^2Ke^{st} = 0$$

اس کو Ke^{st} سے تقسیم کرتے ہوئے

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 + \omega_0^2 = 0 \tag{7.34}$$

---

[21] undamped natural frequency
[22] damping ratio

حاصل ہوتا ہے۔اس دو درجی مساوات کو s کے لئے حل کرتے ہوئے

$$s = \frac{-2\zeta\omega_0 \mp \sqrt{4\zeta^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\zeta\omega_0 \mp \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \tag{7.35}$$

یعنی

$$\begin{aligned} s_1 &= -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ s_2 &= -\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{aligned} \tag{7.36}$$

ملتے ہیں۔یوں دو فطری حل $K_2 e^{s_1 t}$ اور $K_3 e^{s_2 t}$ ممکن ہیں۔ایسی صورت میں عمومی فطری حل ان کا مجموعہ ہو گا یوں عمومی فطری حل کو

$$y_f(t) = K_2 e^{s_1 t} + K_3 e^{s_2 t} \tag{7.37}$$

جہاں مستقل K_2 اور K_3 کو ابتدائی معلومات مثلاً $y(0)$ اور $\left.\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$ سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مساوات 7.36 پر غور کرنے سے ظاہر ہوتا ہے کہ s_1 اور s_2 کی قیمتوں کا دارومدار ζ کی قیمت پر ہے۔تین ممکنہ صورتیں پائی جاتی ہیں یعنی $1 > \zeta$ ، $\zeta < 1$ اور $\zeta = 1$ جن سے بالترتیب s_1 اور s_2 کی قیمتیں حقیقی اور مختلف، خیالی اور مختلف اور حقیقی اور برابر حاصل ہوتی ہیں۔آئیں ان تینوں صورتوں پر تفصیلاً غور کریں۔

زیادہ مقصور صورت، $\zeta > 1$

زیادہ مقصور صورت[23] میں s_1 اور s_2 کی قیمتیں حقیقی اور آپس میں مختلف حاصل ہوتی ہیں۔زیادہ مقصور حالت $zeta > 1$ کی صورت میں پائی جاتی ہے۔ایسی صورت میں فطری حل کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$y_f(t) = K_2 e^{-(\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2-1})t} + K_3 e^{-(\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2-1})t} \tag{7.38}$$

جو دو عدد، قوت نمائی انحطاطی تفاعل کا مجموعہ ہے۔

[23] over damped condition

کم مقصور صورت، $\zeta < 1$

کم مقصور صورت[24] $\zeta < 1$ میں s_1 اور s_2 کی قیمتیں خیالی حاصل ہوتی ہیں جنہیں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
s_1 &= -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma + j\omega_d \\
s_2 &= -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = -\sigma - j\omega_d
\end{aligned} \tag{7.39}
$$

جہاں $\zeta\omega_0 = \sigma$ اور $\omega\sqrt{1-\zeta^2} = \omega_d$ لکھے گئے ہیں جبکہ $j = \sqrt{-1}$ ہے۔یوں فطری حل

$$
\begin{aligned}
y_f(t) &= K_2 e^{-\sigma t + j\omega_d t} + K_3 e^{-\sigma t - j\omega_d t} \\
&= e^{-\sigma t}\left[K_2 e^{j\omega_d t} + K_3 e^{-j\omega_d t}\right] \\
&= e^{-\sigma t}\left[K_2(\cos\omega_d t + j\sin\omega_d t) + K_3(\cos\omega_d t - j\sin\omega_d t)\right] \\
&= e^{-\sigma t}\left[(K_2+K_3)\cos\omega_d t + j(K_2-K_3)\sin\omega_d t\right]
\end{aligned}
$$

یعنی

$$
y_f(t) = e^{-\sigma t}\left(c_1\cos\omega_d t + jc_2\sin\omega_d t\right) \tag{7.40}
$$

لکھا جائے گا جہاں $K_2 + K_3 = c_1$ اور $K_2 - K_3 = c_2$ لکھے گئے ہیں۔فطری حل کے مستقل c_1 اور c_2 کو ابتدائی معلومات سے حاصل کیا جاتا ہے۔

مساوات 7.40 میں

$$
\begin{aligned}
c_1 &= A\cos\theta \\
c_2 &= A\sin\theta
\end{aligned}
$$

پُر کرتے ہوئے

$$
y_f(t) = e^{-\sigma t}\left(A\cos\theta\cos\omega_d t + jA\sin\theta\sin\omega_d t\right)
$$

یعنی

$$
y_f(t) = Ae^{-\sigma t}\cos(\omega_d t - \theta) \tag{7.41}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 7.41 کے مستقل A اور θ ہیں جنہیں ابتدائی معلومات سے حاصل کیا جاتا ہے۔مساوات 7.41 **قصری ارتعاش**[25] کو ظاہر کرتی ہے۔

---

[24] under damped condition
[25] damped oscillation

فاصل مقصور صورت، $\zeta = 1$

فاصل مقصور صورت $\zeta = 1$ میں

$$s_1 = s_2 = -\zeta\omega_0 \tag{7.42}$$

حاصل ہوتے ہیں۔جب s_1 اور s_2 کی قیمتیں ایک دونوں کے برابر $s_1 = s_2$ ہوں تب عمومی فطری حل درج ذیل لکھا جاتا ہے

$$y_f(t) = K_2 e^{-\zeta\omega_0 t} + K_3 t e^{-\zeta\omega_0 t} \tag{7.43}$$

جہاں دوسرے جزو کو t سے ضرب دیا گیا ہے۔مساوات کے مستقل K_2 اور K_3 کو ابتدائی معلومات سے حاصل کیا جاتا ہے۔