برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 15

فوریئر تجزیہ

دوری تفاعل[1] سے مراد وہ تفاعل ہے جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہے جہاں T_0 **دوری عرصہ**[2] کہلاتی ہے۔

$$f(t) = f(t + nT_0), \quad n = \mp 1, \mp 2, \mp 3, \cdots \tag{15.1}$$

درج بالا مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی لمحہ t پر دوری تفاعل کی قیمت $f(t)$ اور اس لمحے سے T_0 وقت بعد تفاعل کی قیمت $f(t + T_0)$ برابر ہیں۔ شکل 15.1 میں اس کی وضاحت کی گئی ہے۔ دوری عرصے کو سیکنڈ (s) میں ناپا جاتا ہے۔ دوری عرصہ T_0 اور **تعدد** f_0 کا تعلق درج ذیل ہے جہاں تعدد کو ہرٹز[3] (Hz) میں ناپا جاتا ہے۔

$$f_0 = \frac{1}{T_0} \tag{15.2}$$

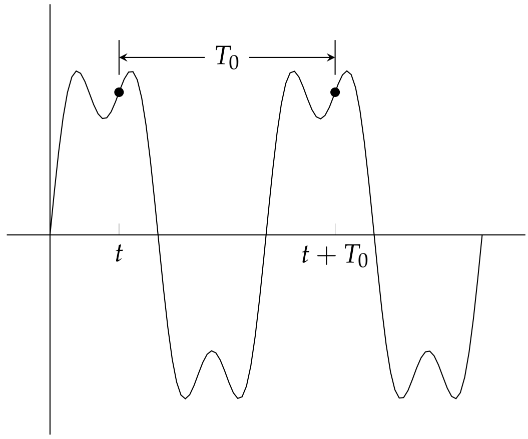
زاویائی تعدد ω_0 اور تعدد f_0 کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \tag{15.3}$$

زاویائی تعدد کو ریڈیئن فی سیکنڈ $(\mathrm{rad\,s^{-1}})$ میں ناپا جاتا ہے۔ شکل 15.2 میں چند **دوری امواج**[4] دکھائے گئے ہیں۔

---

[1] periodic function
[2] time period
[3] Hertz, Hz
[4] periodic wave



شکل 15.1: دوری عرصہ۔

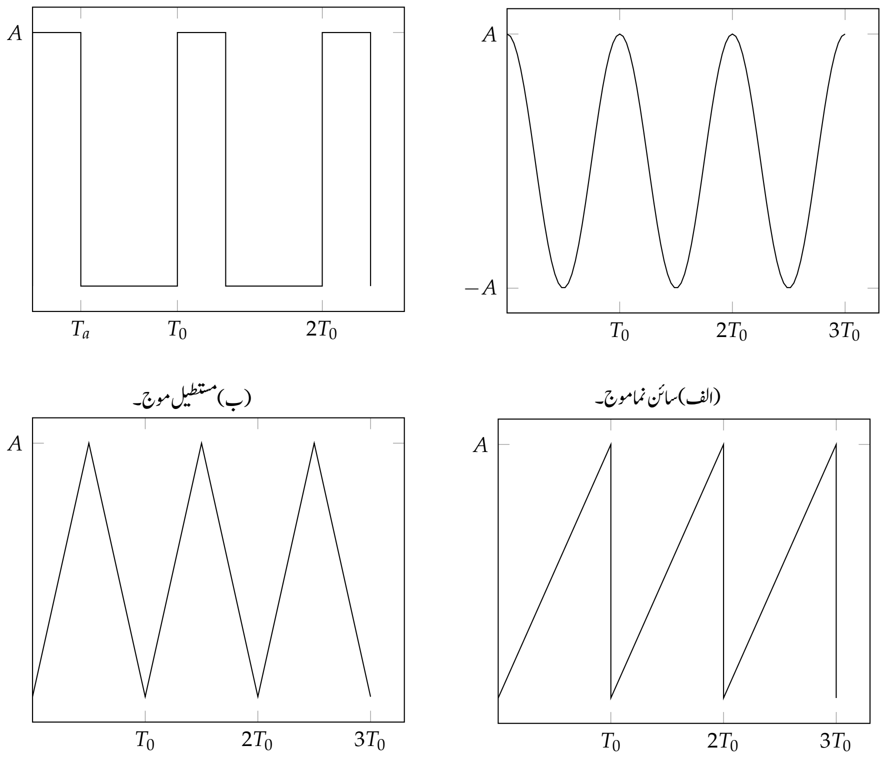
کسی بھی دوری تفاعل کو بطور درج ذیل **فوریئر تسلسل**[5] لکھا[6] جا سکتا ہے

$$
\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t) \right] \\
&= a_0 + a_1 \cos\omega_0 t + a_2 \cos(2\omega_0 t) + a_3 \cos(3\omega_0 t) + \cdots \\
&\quad + b_1 \sin\omega_0 t + b_2 \sin(2\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t) + \cdots
\end{aligned} \tag{15.4}
$$

جہاں a_0 ، a_1 ، a_2 ، b_1 وغیرہ تسلسل کے **عددی سر**[7] کہلاتے ہیں۔ فوریئر تسلسل کی اوسط قیمت a_0 کے برابر ہے۔ ایک دوری عرصہ T_0 میں $\cos\omega_0 t$ یا $\sin\omega_0 t$ کی ایک لہر، $\cos(2\omega_0 t)$ یا $\sin(2\omega_0 t)$ کی دو لہریں اور $\cos(m\omega_0 t)$ یا $\sin(m\omega_0 t)$ کی m لہریں پوری آتی ہیں۔ اس حقیقت کو شکل 15.3 میں دکھایا گیا ہے جہاں وضاحت کی خاطر امواج کے حیطے مختلف رکھے گئے ہیں۔ فوریئر تسلسل میں $a_1 \cos\omega_0 t + b_1 \sin\omega_0 t$ **بنیادی رکن**[8] یا **پہلا ہارمونی رکن** کہلاتا ہے، $a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t)$ **دوسرا ہارمونی رکن**[9] کہلاتا ہے، $a_3 \cos(3\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t)$ تیسرا ہارمونی رکن اور اسی طرح $a_m \cos(m\omega_0 t) + b_m \sin(m\omega_0 t)$ ایم ہارمونی رکن کہلاتا ہے۔ ہم یہاں اصل رک کر چند حقائق اور تکملات پر غور کرتے ہیں جو فوریئر تسلسل میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

---

[5] Fourier series
[6] جین بپٹسٹ یوسف فوریئر نے حرارتی توانائی کے بہاو پر غور کے دوران اس تسلسل کو دریافت کیا۔
[7] coefficients
[8] fundamental component
[9] second harmonic



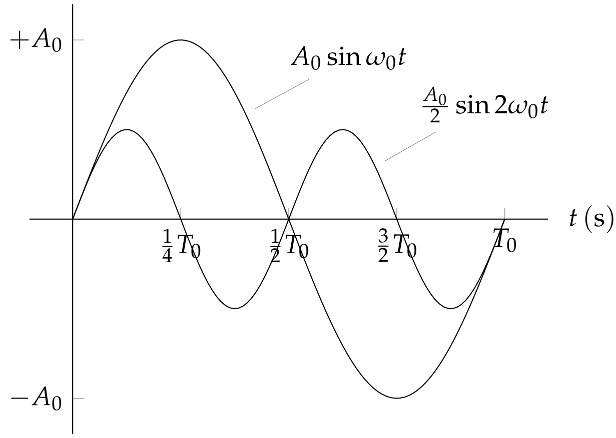
(الف) سائن نما موج۔

(ب) مستطیل موج۔

(پ) دندان موج۔

(ت) تکونی موج۔

شکل 15.2: چند دوری امواج۔



شکل 15.3: ایک دوری عرصہ میں فوریئر تسلسل کے ارکان کی تعداد۔

آپ دو سمتیوں کے **نقطہ ضرب**[10] سے خوب واقف ہیں۔ سمتیہ **A** اور **B** کا نقطہ ضرب یا **غیر سمتی ضرب**[11] درج ذیل ہے جہاں دونوں سمتیوں کے مابین زاویہ θ ہے۔

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB \cos \theta \tag{15.5}$$

آپس میں **عمودی**[12] سمتیوں کے مابین $\theta = 90^\circ$ ہونے کی بدولت $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ ہوتا ہے جبکہ کسی بھی سمتیہ کے خود نقطہ ضرب کا جذر اس کے حیطے کے برابر ہوتا ہے۔

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}} \tag{15.6}$$

اسی سوچ کے ساتھ تفاعل کا نقطہ ضرب بیان کیا جاتا ہے۔

اگر تفاعل $f(t) \neq 0$ اور $g(t) \neq 0$ کے حاصل ضرب کا تکمل $a \leq t \leq b$ فاصلے پر صفر کے برابر ہو

$$\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{15.7}$$

تو $a \leq t \leq b$ فاصلے پر ان تفاعل کو آپس میں **عمودی** تصور کیا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ دونوں تفاعل از خود **غیر سمتی**[13] اور غیر صفر ہیں۔

[10] dot product
[11] scalar product
[12] orthogonal
[13] scalar

کسی بھی مقدار کا مربع مثبت ہوتا ہے لہٰذا تفاعل کا مربع $f^2(t)$ ہر نقطے پر مثبت ہو گا۔ فاصلہ $a \le t \le b$ پر تفاعل کے **معیار**[14] $\| f(t) \|$ سے مراد

$$\| f(t) \| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)\, \mathrm{d}t} \tag{15.8}$$

ہے۔

مثال 15.1: ثابت کریں کہ $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر $\cos(m\omega_0 t)$ اور $\cos(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی ہیں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ اور $n = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہیں لیکن $m \neq n$ ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{T_0} \frac{\cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right] + \cos\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{\sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}\right|_0^{T_0} \\
&= \frac{\sin[(m+n)2\pi]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin[(m-n)2\pi]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} \\
&\quad - \frac{\sin[(m+n)0]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin[(m-n)0]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}
\end{aligned}$$

چونکہ m اور n عدد صحیح ہیں لہٰذا $m+n$ اور $m-n$ بھی عدد صحیح ہوں گے لہٰذا $\sin[(m+n)2\pi] = 0$ اور $\sin[(m-n)2\pi] = 0$ ہوں گے۔اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\cos(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (m \neq n) \tag{15.9}$$

---

[14] norm

مثال 15.2: ثابت کریں کہ $0 \leq t \leq T_0$ فاصلے پر $\sin(m\omega_0 t)$ اور $\sin(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی ہیں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ اور $n = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہیں لیکن $m \neq n$ ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل لیتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{T_0} \frac{\cos\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right] - \cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{\sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}}\right|_0^{T_0} \\
&= \frac{\sin[(m-n)2\pi]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin[(m+n)2\pi]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} \\
&\qquad - \frac{\sin[(m-n)0]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin[(m+n)0]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}}
\end{aligned}
$$

چونکہ m اور n عدد صحیح ہیں لہٰذا $m+n$ اور $m-n$ بھی عدد صحیح ہوں گے لہٰذا $\sin[(m+n)2\pi] = 0$ اور $\sin[(m-n)2\pi] = 0$ ہوں گے۔ اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$
\int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (m \neq n) \tag{15.10}
$$

مثال 15.3: ثابت کریں کہ $0 \leq t \leq T_0$ فاصلے پر $\cos(m\omega_0 t)$ اور $\sin(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی ہیں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ اور $n = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہیں۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل لیتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^{T_0} \sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right] - \sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]\mathrm{d}t\\
&= \left. -\frac{\cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\cos\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}\right|_0^{T_0}\\
&= -\frac{\cos[(m+n)2\pi]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\cos[(m-n)2\pi]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}\\
&\qquad + \frac{\cos[(m+n)0]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\cos[(m-n)0]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}}
\end{aligned}
$$

چونکہ m اور n عدد صحیح ہیں لہٰذا $m+n$ اور $m-n$ بھی عدد صحیح ہوں گے لہٰذا $\cos(m+n)2\pi = 1$ اور $\cos(m-n)2\pi = 1$ ہوں گے۔اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$
\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\sin(n\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = 0 \quad (m \neq n) \tag{15.11}
$$

مثال 15.4: تفاعل $f(t) = \cos(m\omega_0 t)$ کا معیار $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر حاصل کریں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر معیار کو تکمل سے حاصل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\| f(t) \|^2 &= \int_0^{T_0} \cos^2\left(m\frac{2\pi}{T_0}t\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{T_0} \left[1+\cos\left(2m\frac{2\pi}{T_0}t\right)\right] \mathrm{d}t \\
&= \left. \frac{t}{2} + \frac{\sin\left(2m\frac{2\pi}{T_0}t\right)}{4m\frac{2\pi}{T_0}} \right|_0^{T_0} \\
&= \frac{T_0}{2} + \frac{\sin 4m\pi}{4m\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4m\frac{2\pi}{T_0}} \\
&= \frac{T_0}{2}
\end{aligned}
$$

دونوں اطراف کا جذر لیتے ہوئے $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر معیار ملتا ہے۔

$$
\| \cos(m\omega_0 t) \| = \sqrt{\int_0^{T_0} \cos^2(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{T_0}{2}} \tag{15.12}
$$

مشق 15.1: تفاعل $f(t) = \sin m\omega_0 t$ کا معیار $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر درج ذیل ہے جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہے۔ اس معیار کو حاصل کریں۔

$$
\| \sin(m\omega_0 t) \| = \sqrt{\int_0^{T_0} \sin^2(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{T_0}{2}} \tag{15.13}
$$

مشق 15.2: درج ذیل دو مساوات کو ثابت کریں جہاں $m = 1, 2, 3, \cdots$ ممکن ہے۔

$$\int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t)\, \mathrm{d}t = 0 \tag{15.14}$$

$$\int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t)\, \mathrm{d}t = 0 \tag{15.15}$$

مساوات 15.9، مساوات 15.10 اور مساوات 15.11 مل کر ثابت کرتے ہیں کہ فوریئر تسلسل میں استعمال ہونے والا ہر تفاعل بقایا تمام تفاعل کے ساتھ $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر عمودی ہے۔یوں $\cos 3\omega_0 t$ کو مثال بناتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ $\cos(\omega_0 t)$ ، $\cos(2\omega_0 t)$ ، $\cos(4\omega_0 t)$ ، $\sin(\omega_0 t)$ ، $\sin(2\omega_0 t)$ ، $\sin(3\omega_0 t)$ وغیرہ کے ساتھ عمودی ہے۔

درج بالا تکملات حاصل کرنے کے بعد اصل مضمون یعنی فوریئر تسلسل پر دوبارہ آتے ہیں۔مساوات 15.9 تا مساوات 15.15 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.4 کے عددی سر $a_0, a_1, a_2, b_1, \cdots$ حاصل کئے جا سکتے ہیں۔آئیں ایسا ہی کریں۔

عددی سر a_0 کی قیمت دریافت کرنے کی خاطر ہم مساوات 15.4 کا تکمل $0 \le t \le T_0$ فاصلے پر لیتے ہیں

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} f(t)\, \mathrm{d}t &= \int_0^{T_0} a_0\, \mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)\, \mathrm{d}t \\ &= a_0 T_0\end{aligned}$$

جہاں مساوات 15.14 اور مساوات 15.15 کو استعمال کرتے ہوئے مجموعے میں دیے تمام تکمل کو صفر کے برابر پر کیا گیا ہے۔یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t)\, \mathrm{d}t \tag{15.16}$$

مساوات 15.16 کہتا ہے کہ a_0 تفاعل $f(t)$ کی اوسط قیمت ہے۔

عددی سر a_m حاصل کرنے کی خاطر مساوات 15.4 کے دونوں اطراف کو $\cos(m\omega_0 t)$ سے ضرب دیتے ہوئے ایک دوری عرصے پر تکمل کرتے ہیں۔ہم تکمل کو $0 \le t \le T_0$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \\ &\int_0^{T_0} a_0\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} a_n\cos(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} b_n\sin(n\omega_0 t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{15.17}$$

دائیں ہاتھ پہلا تکمل مساوات 15.14 کی بنا صفر کے برابر ہے جبکہ مساوات 15.11 کے تحت تیسرا تکمل صفر کے برابر ہے۔آئیں دوسرے تکمل پر غور کریں۔

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} a_n\cos n\omega_0 t\cos m\omega_0 t\,\mathrm{d}t &= \\ &\int_0^{T_0}\cos(m\omega_0 t)\,\big[a_1\cos\omega_0 t + a_2\cos(2\omega_0 t) + \cdots \\ &\quad + a_{m-1}\cos[(m-1)\omega_0 t] + a_m\cos(m\omega_0 t) + \cdots\big]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

اب اگر $n \neq m$ ہو تب مساوات 15.9 کے تحت تکمل صفر کے برابر ہو گا۔البتہ $n = m$ کی صورت میں مساوات 15.12 کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_0^{T_0} a_m\cos^2(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = a_m\frac{T_0}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ان قیمتوں کو مساوات 15.17 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$a_m = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \tag{15.18}$$

عددی سر b_m حاصل کرنے کی خاطر مساوات 15.4 کے دونوں اطراف کو $\sin(m\omega_0 t)$ سے ضرب دیتے ہوئے

ایک دوری عرصے پر تکمل کرتے ہیں۔ہم تکمل کو $0 \leq t \leq T_0$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \\ &\int_0^{T_0} a_0 \sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} a_n \cos(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ &\qquad + \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} b_n \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{15.19}$$

دائیں ہاتھ پہلا تکمل مساوات 15.15 کی بنا صفر کے برابر ہے جبکہ مساوات 15.11 کے تحت دوسرا تکمل صفر کے برابر ہے۔آئیں تیسرے تکمل پر غور کریں۔

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{T_0} b_n \sin(n\omega_0 t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t &= \\ &\int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t)\,\big[b_1 \sin\omega_0 t + b_2\sin(2\omega_0 t) + \cdots \\ &\qquad + b_{m-1}\sin[(m-1)\omega_0 t] + b_m \sin(m\omega_0 t) + \cdots\big]\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

اب اگر $n \neq m$ ہو تب مساوات 15.10 کے تحت تکمل صفر کے برابر ہو گا۔البتہ $n = m$ کی صورت میں مساوات 15.13 کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_0^{T_0} b_m \sin^2(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t = b_m \frac{T_0}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ان قیمتوں کو مساوات 15.17 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$b_m = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \tag{15.20}$$

مساوات 15.16، مساوات 15.18 اور مساوات 15.20 فوریئر تکمل کے عددی سر دیتے ہیں۔انہیں یہاں اکٹھے پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\,\mathrm{d}t \\ a_m &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\ b_m &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{15.21}$$

مثال 15.5: شکل 15.4-الف میں دکھائے گئے **دندان موج** کا فوریئر تسلسل حاصل کریں۔ دو، پانچ اور پچاس فوریئر ارکان استعمال کرتے ہوئے موج کا خط کھینچیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موج کا دوری عرصہ $T_0 = 3\,\mathrm{s}$ ہے۔

حل: شکل میں دکھائی گئی موج $(0,0)$ سے $(3,1)$ تک بالکل سیدھی لکیر کی مانند ہے جس کی ڈھلوان

$$\text{ڈھلوان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{3-0} = \frac{1}{3}$$

ہے لہٰذا اس سیدھے حصے کی مساوات درج ذیل لکھی جا سکتی ہے جہاں لکیر پر کسی بھی نقطے کے کارتیسی محدد مساوات میں پر کرنے سے c کی قیمت حاصل کی جا سکتی ہے۔

$$y = \frac{x}{3} + c$$

ہم درج بالا میں $(0,0)$ پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{0}{3} + c$$

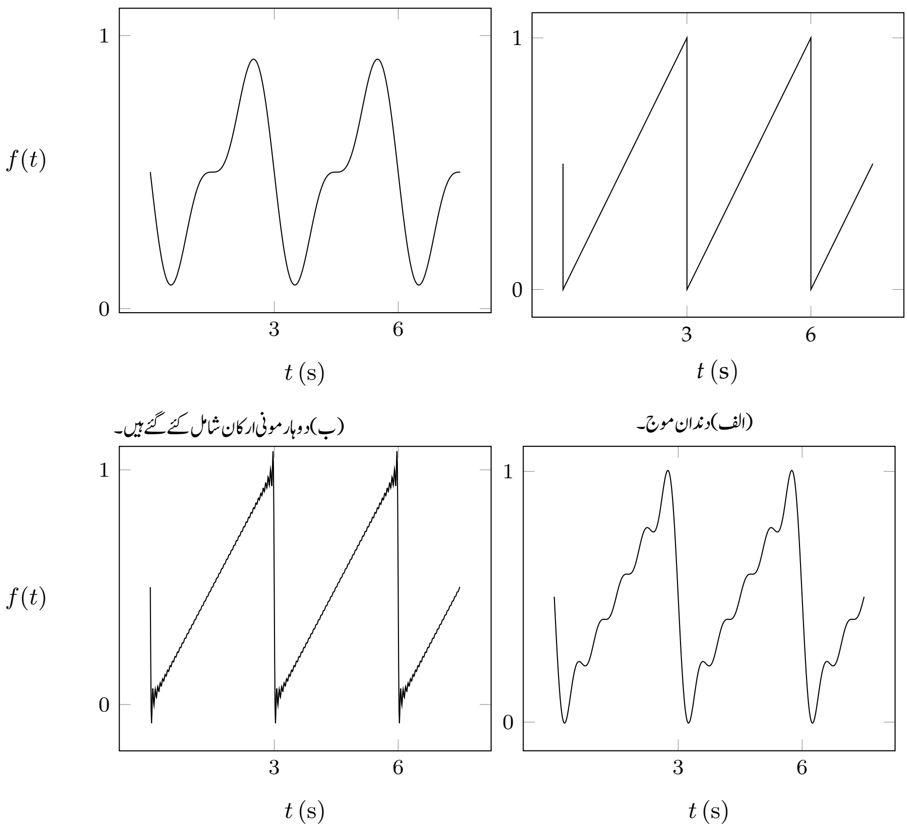
$c = 0$ حاصل کرتے ہیں لہٰذا سیدھی حصے کی مساوات $y = \frac{x}{3}$ یعنی

$$f(t) = \frac{t}{3} \tag{15.22}$$

ہے جہاں کارتیسی نظام کے x محور پر t اور y محور پر $f(t)$ پر کیے گئے ہیں۔

مساوات 15.21 سے فوریئر تسلسل کے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{t}{3}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\frac{t^2}{6}\bigg|_0^3 \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$



(الف) دندان موج۔

(ب) دو ہار مونی ارکان شامل کئے گئے ہیں۔

(پ) پانچ ہار مونی ارکان شامل کئے گئے ہیں۔

(ت) پچاس ہار مونی ارکان شامل کئے گئے ہیں۔

شکل 15.4: مثال 15.5 کی دندان موج۔

چونکہ a_0 تفاعل کی اوسط قیمت کے برابر ہے لہٰذا یہی جواب تکون کے رقبے $\frac{3}{2} = 1 \times 3 \times \frac{1}{2}$ اور قاعدہ 3 سے حاصل کی جا سکتی ہے یعنی

$$\text{اوسط} = \frac{\text{رقبہ}}{\text{قاعدہ}} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

عددی سر a_m حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{3} \frac{t}{3}\cos(m\frac{2\pi}{3}t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left.\frac{2}{9}t\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}mt)}{\frac{2\pi}{3}m} + \frac{2}{9}\frac{\cos(\frac{2\pi}{3}mt)}{\left(\frac{2\pi}{3}m\right)^2}\right|_0^3 \\
&= 0
\end{aligned}$$

اس کا مطلب ہے کہ دندان موج کی فوریئر تسلسل میں کوئی کوسائن تفاعل نہیں پایا جاتا۔

عددی سر b_m حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0} f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}\int_0^{3} \frac{t}{3}\sin(m\frac{2\pi}{3}t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left.-\frac{2}{9}t\frac{\cos(\frac{2\pi}{3}mt)}{\frac{2\pi}{3}m} + \frac{2}{9}\frac{\sin(\frac{2\pi}{3}mt)}{\left(\frac{2\pi}{3}m\right)^2}\right|_0^3 \\
&= -\frac{1}{m\pi}
\end{aligned}$$

یوں $m = 1, 2, 3, \cdots$ پر کرتے ہوئے عددی سر حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$
\begin{aligned}
b_1 &= -\frac{1}{\pi} \\
b_2 &= -\frac{1}{2\pi} \\
b_3 &= -\frac{1}{3\pi} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

لہٰذا فوریئر تسلسل درج ذیل لکھی جائے گی۔

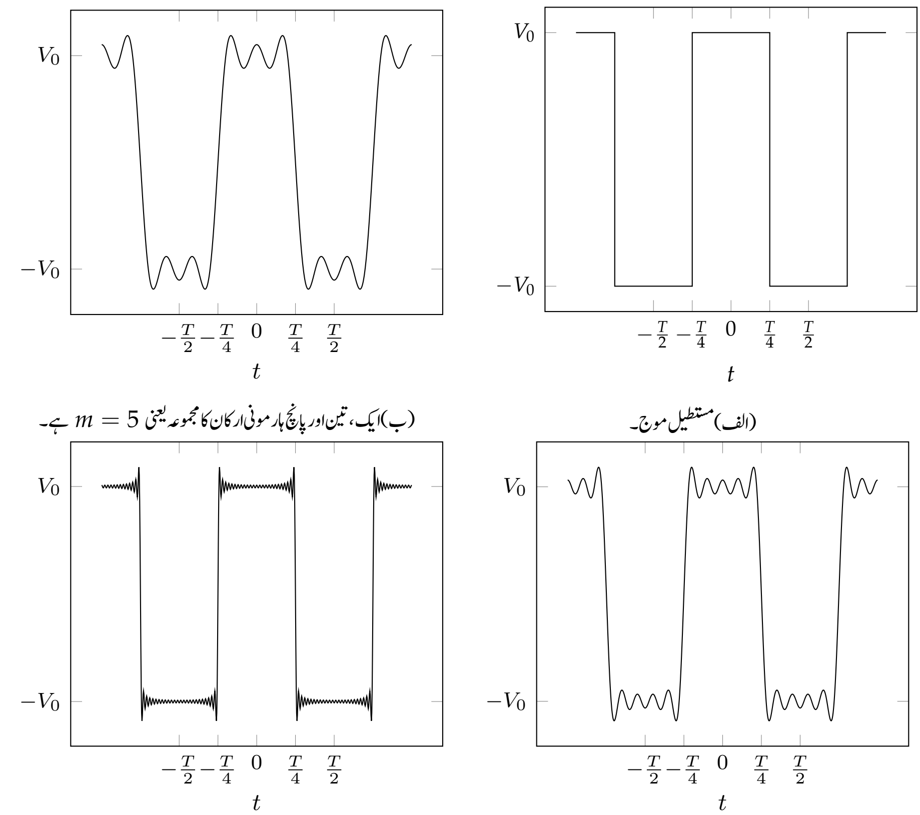
$$
f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left[\sin\omega_0 t + \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \cdots\right] \tag{15.23}
$$

شکل 15.4-ب میں مساوات 15.23 کو $m = 2$ تک استعمال کرتے ہوئے خط کھینچا گیا ہے۔ شکل-پ میں پانچ ہارمونی ارکان استعمال کئے گئے ہیں جبکہ شکل-ت میں پچاس ہارمونی ارکان استعمال کئے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ارکان بڑھانے سے اصل موج کے قریب تر خط حاصل کیا جا سکتا ہے۔

مثال 15.6: آئیں شکل 15.5-الف میں دکھائے گئے دوری مستطیل موج کا فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

حل: افقی محور کے دونوں اطراف برابر موج پائی جاتی ہے لہٰذا اس کی اوسط قیمت صفر ہو گی اور یوں $a_0 = 0$ ہو گا۔ آئیں یہی جواب مساوات 15.21 سے حاصل کریں۔ اس مرتبہ ہم دوری عرصے کو $-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$ لیتے ہیں۔ شکل کو دیکھ معلوم ہوتا ہے کہ $-\frac{T}{4} \le t \le \frac{T}{4}$ تفاعل کی قیمت V_0 ہے جبکہ $-\frac{T}{2} \le t \le -\frac{T}{4}$ اور $\frac{T}{4} \le t \le \frac{T}{2}$ پر تفاعل کی قیمت $-V_0$ ہے۔

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\left(-V_0\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}}\mathrm{d}t + V_0\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}\mathrm{d}t - V_0\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{T}\left[-V_0\left(-\frac{T}{4}+\frac{T}{2}\right) + V_0\left(\frac{T}{4}+\frac{T}{4}\right) - V_0\left(\frac{T}{2}-\frac{T}{4}\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$



(الف) مستطیل موج۔

(ب) ایک، تین اور پانچ ہارمونی ارکان کا مجموعہ یعنی $m = 5$ ہے۔

((پ) $m = 9$ تک ارکان کا مجموعہ۔

(ت) $m = 49$ تک ارکان کا مجموعہ۔

شکل 15.5: مثال 15.6 کی مستطیل موج۔

کوسائن کے عددی سر a_m کو مساوات 15.21 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔ مستقل V_0 کو تکمل کے باہر لکھا گیا ہے۔

$$
\begin{aligned}
a_m &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2}{T}V_0\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}}\cos(\frac{2\pi m}{T}t)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{T}V_0\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}\cos(\frac{2\pi m}{T}t)\,\mathrm{d}t - \frac{2}{T}V_0\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}\cos(\frac{2\pi m}{T}t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2V_0}{T}\left.\frac{\sin(\frac{2\pi m}{T}t)}{\frac{2\pi m}{T}}\right|_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} + \frac{2V_0}{T}\left.\frac{\sin(\frac{2\pi m}{T}t)}{\frac{2\pi m}{T}}\right|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - \frac{2V_0}{T}\left.\frac{\sin(\frac{2\pi m}{T}t)}{\frac{2\pi m}{T}}\right|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{4V_0}{m\pi}\sin(\frac{m\pi}{2})
\end{aligned}
$$

اس سے درج ذیل عددی سر لکھے جا سکتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \frac{4V_0}{1\pi}\sin(\frac{1\pi}{2}) = \frac{4V_0}{\pi} \\
a_2 &= \frac{4V_0}{2\pi}\sin(\frac{2\pi}{2}) = 0 \\
a_3 &= \frac{4V_0}{3\pi}\sin(\frac{3\pi}{2}) = -\frac{4V_0}{3\pi} \\
a_4 &= \frac{4V_0}{4\pi}\sin(\frac{4\pi}{2}) = 0 \\
a_5 &= \frac{4V_0}{5\pi}\sin(\frac{5\pi}{2}) = \frac{4V_0}{5\pi} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

سائن کے عددی سر b_m کو مساوات 15.21 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔ مستقل V_0 کو تکمل کے باہر لکھا گیا ہے۔

$$
\begin{aligned}
b_m &= \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(m\omega_0 t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2}{T}V_0\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}}\sin(\frac{2\pi m}{T}t)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{T}V_0\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}\sin(\frac{2\pi m}{T}t)\,\mathrm{d}t - \frac{2}{T}V_0\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}\sin(\frac{2\pi m}{T}t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2V_0}{T}\left.\frac{\cos(\frac{2\pi m}{T}t)}{\frac{2\pi m}{T}}\right|_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} - \frac{2V_0}{T}\left.\frac{\cos(\frac{2\pi m}{T}t)}{\frac{2\pi m}{T}}\right|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} + \frac{2V_0}{T}\left.\frac{\cos(\frac{2\pi m}{T}t)}{\frac{2\pi m}{T}}\right|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

اس معلومات کو استعمال کرتے ہوئے مستطیل موج کی فوریئر مساوات لکھتے ہیں۔

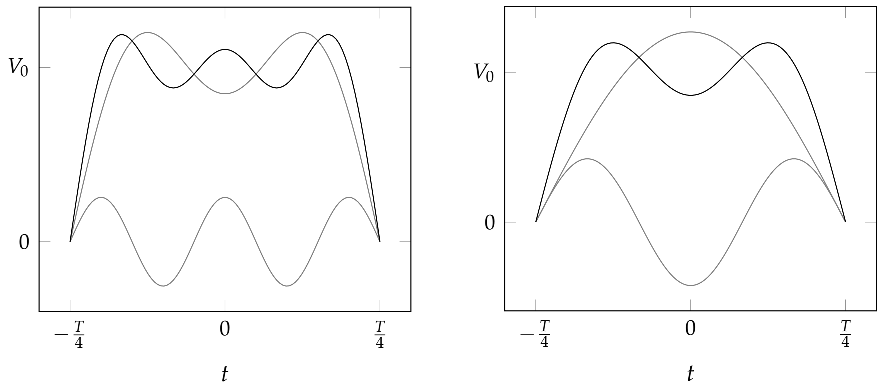
$$f(t)=\frac{4V_0}{\pi}\left[\cos(\omega_0 t)-\frac{1}{3}\cos(3\omega_0 t)+\frac{1}{5}\cos(5\omega_0 t)-\frac{1}{7}\cos(7\omega_0 t)+\cdots\right] \tag{15.24}$$

مختلف تعداد میں فوریئر تسلسل کے ارکان شامل کرتے ہوئے تفاعل کو شکل 15.5-ب تا شکل 15.5-ت میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 15.6 میں مستطیل موج کی فوریئر تسلسل حاصل کی گئی۔آئیں تسلسل کے ایک رکن سے شروع کرتے ہوئے دیکھیں کہ اس میں مزید ارکان شامل کرتے ہوئے مستطیل موج کیسے حاصل ہوتی ہے۔شکل 15.6-الف میں مساوات 15.24 کا پہلا ہارمونی رکن $\frac{4V_0}{\pi}\cos\omega_0 t$ اور تیسرا ہارمونی رکن $-\frac{4V_0}{3\pi}\cos(3\omega_0 t)$ ہلکی سیاہی میں دکھائے گئے ہیں۔دونوں سائن نما صورت رکھتے ہیں جس کا مستطیل سے دور دور تک کوئی واسطہ نہیں ہے۔اسی شکل میں دونوں کے مجموعے کو گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دو سائن نما امواج مل کر ایسی شکل بناتے ہیں جو مستطیل زیادہ اور سائن نما کم نظر آتا ہے۔مستطیل موج کی چوٹی V_0 ہے جبکہ پہلے ہارمونی رکن کی چوٹی $\frac{4V_0}{\pi}=1.27V_0$ ہے۔تیسرا ہارمونی رکن اس چوٹی کو نیچے کھینچتا ہے۔اسی طرح مستطیل موج $\mp\frac{T}{4}$ پر یکدم قیمت تبدیل کرتی ہے جبکہ پہلا ہارمونی جزو نہایت صبر و تحمل کے ساتھ منفی چوٹی سے مثبت چوٹی اور مثبت چوٹی سے منفی چوٹی پہنچتی ہے۔یہاں بھی تیسرا ہارمونی رکن پہلے رکن کے اطراف کو کھینچ کر ان کی ڈھلوان بڑھاتی ہے۔

شکل 15.6-الف میں تیسرا رکن زیادہ جزبات میں آکر پہلی رکن کی چوٹی ضرورت سے زیادہ نیچے کھینچ دیتا ہے۔شکل-ب میں پہلے اور تیسرے ارکان سے حاصل موج کو ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ساتھ ہی ساتھ پانچویں رکن کو بھی ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ان کے مجموعے کو گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں پانچواں رکن ضرورت سے زیادہ نیچے کھینچی گئی چوٹی کو معمولی اٹھاتا ہے تا کہ یہ V_0 کے قریب ہو جائے۔اسی طرح یہ رکن بھی موج کے اطراف کی ڈھلوان بڑھاتا ہے۔فوریئر تسلسل کے بقایا ارکان بھی اسی طرح مدد کرتے ہوئے اطراف کو زیادہ عمودی اور چوٹی کو بالکل چپٹی بنانے میں مدد دیتے ہیں حتٰی کہ ہمیں بالکل مستطیل موج نظر آتی ہے۔

شکل 15.5-ب، پ اور ت میں آپ دیکھتے ہیں کہ فوریئر تسلسل سے حاصل موج $\mp\frac{T}{4}$ پر درکار قیمت سے تجاوز کرتے ہوئے آگے نکل جاتی ہے۔تسلسل میں ارکان کی تعداد بڑھانے سے ان تجاوزات کا خاتمہ نہیں ہوتا۔



(الف) پہلا اور تیسرا ہارمونی رکن مل کر مستطیل صورت بنانے کی کوشش کرتے ہیں۔

(ب) پہلے، تیسرا اور پانچواں ہارمونی ارکان مل کر مستطیل شکل بناتے ہیں۔

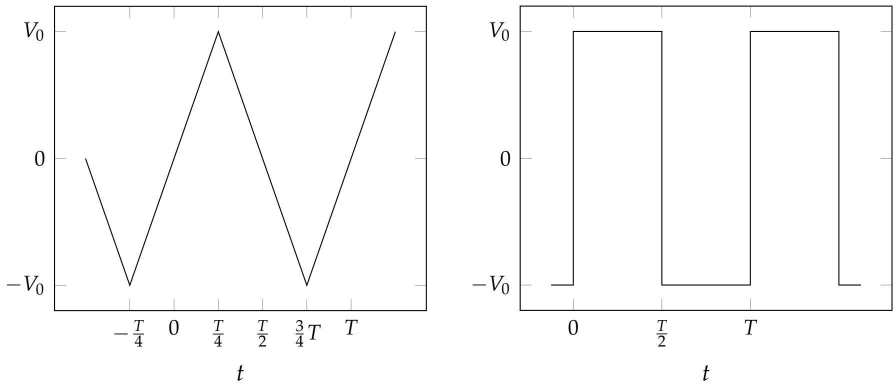
شکل 15.6: بتدریج زیادہ ارکان شامل کرتے ہوئے مستطیل موج کی صورت ابھرتے ہوئے دیکھتے ہیں۔

مشق 15.3: شکل 15.7-الف میں دکھائے گئے مستطیل موج کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

جواب: $f(t) = \frac{4V}{\pi}\left[\sin\omega_0 t + \frac{1}{3}\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t) + \cdots\right]$

مشق 15.4: شکل 15.7-ب میں دکھائے گئے تکونی موج کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔ پہلے $-\frac{T}{4} \le t \le \frac{T}{4}$ اور $\frac{T}{4} \le t \le \frac{3T}{4}$ سیدھے حصوں کے مساوات حاصل کریں۔

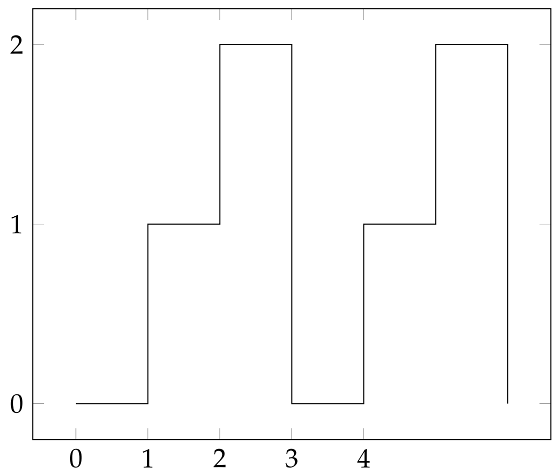
حل: $f_1(t) = \frac{4V_0}{T}t$ ، $f_2(t) = 2V_0(1-2\frac{t}{T})$ ،
$f(t) = \frac{8V_0}{\pi^2}\left[\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{3^2}\sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2}\sin(5\omega_0 t) - \cdots\right]$



(الف) مستطیل موج۔

(ب) تکونی موج۔

شکل 15.7: مشق 15.3 اور مشق 15.4 کے امواج۔



شکل 15.8: مشق 15.5 کا تفاعل۔

مشق 15.5: شکل 15.8 میں دیے تفاعل کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

جواب:

$$1 - \frac{3}{\pi}\left[\sin\omega_0 t + \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{4}\sin(4\omega_0 t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega_0 t) + \frac{1}{7}\sin(7\omega_0 t) + \cdots\right]$$

15.1 تشاکل تفاعل

آپ نے مختلف تفاعل کے فوریئر تسلسل دیکھے۔ان میں کئی ایسے تھے جن کے یا تمام a_m اور یا تمام b_m صفر کے برابر تھے۔آئیں اس کی وجہ سمجھیں اور تکملات حل کرنے سے پہلے یہ دریافت کرنا سیکھیں کہ آیا فوریئر تسلسل میں a_m اور یا تمام b_m صفر کے برابر ہوں گے۔فوریئر تسلسل کے ارکان کا دارومدار تفاعل کی شکل و صورت پر ہے۔ تین قسم کے تشاکل تفاعل پائے جاتے ہیں۔ان پر باری باری غور کرتے ہیں۔

15.1.1 جفت تفاعل تشاکل

جفت تفاعل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہو۔

$$f(t) = f(-t) \tag{15.25}$$

جفت تفاعل عمودی محور کے دونوں اطراف یکساں دکھائی دیتا ہے۔جفت تفاعل کی اہم مثال $\cos(n\omega_0 t)$ ہے۔آپ جانتے ہیں کہ $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ ہوتا ہے لہٰذا یہ جفت تفاعل ہے۔