

## برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی  
کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

1	بنیاد	1
1	برقی بار، برقی رو اور برقی دباؤ	1.1
6	قانون اوہم	1.2
8	توانائی اور طاقت	1.3
15	برقی پڑے	1.4
15	غیر تابع منبع	1.4.1
17	تابع منبع	1.4.2
27	مزا جتنی ادوار	2
27	قانون اوہم	2.1
35	قوانین کرخوف	2.2
51	سلسلہ وار جڑے پڑوں میں رو	2.3
52	تقسیم دباؤ	2.4
55	متعدد سلسلہ وار مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت	2.5
58	سلسلہ وار متعدد منبع دباؤ اور مزاحمت	2.6
59	متوازی جڑے مزاحمت پر یکساں دباؤ پایا جاتا ہے	2.7
61	تقسیم رو اور متعدد متوازی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت	2.8
68	سلسلہ وار اور متوازی مزاحمت	2.9
73	تخصیص مزاحمت	2.10
76	سلسلہ وار اور متوازی مزاحمتوں کے ادوار کا حل	2.11
84	ستارہ-تکون تبادلہ	2.12
91	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	2.13
101	ترکیب جوڑ اور دائری ترکیب	3
101	تجزیہ جوڑ	3.1
104	غیر تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار	3.2
117	تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار	3.3
123	غیر تابع منبع دباؤ استعمال کرنے والے ادوار	3.4

132	تابع منبع دباو استعمال کرنے والے ادوار	3.5
139	دائری تجزیہ	3.6
140	غیر تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	3.7
148	غیر تابع منبع رواستعمال کرنے والے ادوار	3.8
154	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	3.9
158	دائری ترکیب اور ترکیب جوڑ کا موازنہ	3.10
161	حسابی ایپلیفائر	4
171	کامل حسابی ایپلیفائر	4.1
171	منفی ایپلیفائر	4.2
174	مثبت ایپلیفائر	4.3
176	مستقام کار	4.4
176	منفی کار	4.5
178	جمع کار	4.6
181	متوازن اور غیر متوازن صورت	4.7
185	موازنہ کار	4.8
185	آلاتی ایپلیفائر	4.9
187	مسئلے	5
187	مساوی دور	5.1
187	مسئلہ خطیت	5.2
191	مسئلہ نفاذ	5.3
201	مساوی ادوار	5.4
206	مسئلہ تھون، مسئلہ نارٹن اور مسئلہ متبادلہ منبع	5.5
225	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	5.6
231	تابع منبع اور غیر تابع منبع دونوں استعمال کرنے والے ادوار	5.7
239	زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ	5.8
247	برق گیر اور امالہ گیر	6
247	برق گیر	6.1
261	امالہ گیر	6.2
270	برق گیر اور امالہ گیر کے خصوصیات	6.3
273	سلسلہ وار جڑے برق گیر	6.4
277	متوازی جڑے برق گیر	6.5
281	سلسلہ وار امالہ گیر	6.6
283	متوازی امالہ گیر	6.7
287	حسابی ایپلیفائر کے RC ادوار	6.8
288	تفرق کار	6.9
293	عارضی رد عمل	7
293	تعارف	7.1
293	ایک درجی ادوار	7.2

295	7.2.1 رد عمل کی عمومی مساوات
321	7.3 دھڑکن
328	7.4 دو درجی ادوار
359	8 تجزیہ برقرار حال
359	8.1 مخلوط اعداد
364	8.2 سائن نمائندگی
373	8.3 سائن نما اور مخلوط جبری تفاعل
381	8.4 دوری سمتیہ
386	8.5 مزاحمت، امالہ گیر اور برقی گیر کے انفرادی دوری سمتیہ تعلق
396	8.6 برقی رکاوٹ اور برقی فراوانی
409	8.7 دوری سمتیہ کے اشکال
419	8.8 کر خوف مساوات
424	8.9 تجزیاتی تراکیب
443	9 برقرار برقی طاقت
443	9.1 لمبائی طاقت
446	9.2 اوسط طاقت
453	9.3 زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ
463	9.4 موثر قیمت
472	9.5 جزو طاقت
476	9.6 مخلوط طاقت
484	9.7 جزو طاقت کی درستی
489	9.8 برقی چھٹکا
491	9.9 نم زمین
492	9.10 ایک دور کا نظام
497	9.11 حفاظتی تدابیر
499	10 مقناطیسی جڑے ادوار
499	10.1 مشترکہ امالہ
517	10.2 مشترکہ امالہ میں توانائی کا ذخیرہ
523	10.3 کامل ٹرانسفارمر
547	11 تین دوری نظام
547	11.1 تین دوری ستارہ دیاو
553	11.2 ستارہ ستارہ (YY) جوڑ
561	11.3 تین دوری ٹکونی (Δ) دیاو
566	11.4 ٹکونی بوجھ
571	11.5 طاقت کے کلیات
580	11.6 جزو طاقت کی درستی

585	12	تعددی رد عمل
596 . . . . .	12.1	جال
598 . . . . .	12.2	صفر اور قطب
601 . . . . .	12.3	سائن نما تعددی تجزیہ
601 . . . . .	12.3.1	یوڈا خطوط
622 . . . . .	12.4	گمکی ادوار
656 . . . . .	12.5	چیلنی
669	13	لاپلاس بدل
669 . . . . .	13.1	تعاریف
670 . . . . .	13.2	تفاعل کیتائی
677 . . . . .	13.3	لاپلاس بدل کی جوڑیاں
681 . . . . .	13.4	خواص البدل
686 . . . . .	13.5	الٹ لاپلاس بدل کا حصول
687 . . . . .	13.5.1	جزوی کسری پھیلاؤ
698 . . . . .	13.6	تکمل الجھاؤ
702 . . . . .	13.7	مسئلہ ابتدائی قیمت اور مسئلہ اختتامی قیمت
707	14	ادوار کا حل بذریعہ لاپلاس بدل
707 . . . . .	14.1	ادوار کا حل
709 . . . . .	14.2	پرزوں کے مساوی لاپلاسی ادوار
713 . . . . .	14.3	تجزیاتی تراکیب
733 . . . . .	14.4	تبادلی تفاعل جال
745 . . . . .	14.5	ترسیم قطبین و صفر اور یوڈا خط
747 . . . . .	14.6	برقرار حال رد عمل
757	15	فوریئر تجزیہ

## باب 15

### فوریر تجزیہ

دوری تفاعل<sup>1</sup> سے مراد وہ تفاعل ہے جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہے جہاں  $T_0$  دوری عرصہ<sup>2</sup> کہلاتی ہے۔

$$(15.1) \quad f(t) = f(t + nT_0), \quad n = \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$$

درج بالا مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی لمحہ  $t$  پر دوری تفاعل کی قیمت  $f(t)$  اور اس لمحے سے  $T_0$  وقت بعد تفاعل کی قیمت  $f(t + T_0)$  برابر ہیں۔ شکل 15.1 میں اس کی وضاحت کی گئی ہے۔ دوری عرصے کو سیکنڈ (s) میں ناپا جاتا ہے۔ دوری عرصہ  $T_0$  اور تعدد  $f_0$  کا تعلق درج ذیل ہے جہاں تعدد کو ہرٹر<sup>3</sup> (Hz) میں ناپا جاتا ہے۔

$$(15.2) \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

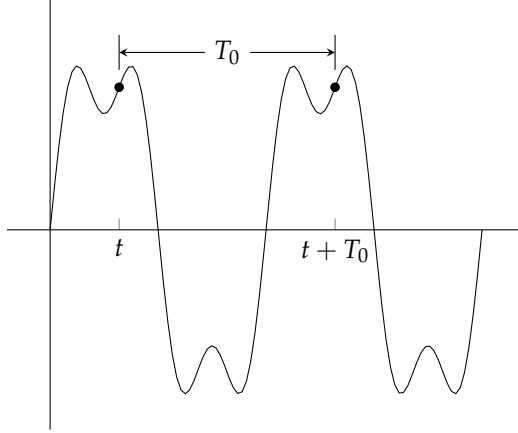
زاویائی تعدد  $\omega_0$  اور تعدد  $f_0$  کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$(15.3) \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$

زاویائی تعدد کو ریڈین فی سیکنڈ ( $\text{rad s}^{-1}$ ) میں ناپا جاتا ہے۔ شکل 15.2 میں چند دوری امواج<sup>4</sup> دکھائے گئے ہیں۔

---

periodic function<sup>1</sup>  
time period<sup>2</sup>  
Hertz, Hz<sup>3</sup>  
periodic wave<sup>4</sup>



شکل 15.1: دوری عرصہ۔

کسی بھی دوری تقابل کو بطور درج ذیل فوریئر تسلسل<sup>5</sup> لکھا<sup>6</sup> جاسکتا ہے

$$\begin{aligned}
 f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \\
 (15.4) \quad &= a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos(2\omega_0 t) + a_3 \cos(3\omega_0 t) + \dots \\
 &\quad + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin(2\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t) + \dots
 \end{aligned}$$

جہاں  $a_0$ ،  $a_1$ ،  $a_2$ ،  $b_1$  وغیرہ تسلسل کے عددی سر<sup>7</sup> کہلاتے ہیں۔ فوریئر تسلسل کی اوسط قیمت  $a_0$  کے برابر ہے۔ ایک دوری عرصہ  $T_0$  میں  $\cos \omega_0 t$  یا  $\sin \omega_0 t$  کی ایک لہر،  $\cos(2\omega_0 t)$  یا  $\sin(2\omega_0 t)$  کی دو لہریں اور  $\cos(m\omega_0 t)$  یا  $\sin(m\omega_0 t)$  کی  $m$  لہریں پوری آتی ہیں۔ اس حقیقت کو شکل 15.3 میں دکھایا گیا ہے جہاں وضاحت کی خاطر امواج کے حیطے مختلف رکھے گئے ہیں۔ فوریئر تسلسل میں  $a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t$  بنیادی رکن<sup>8</sup> یا بنیادی جزو کہلاتا ہے،  $a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t)$  دوسرا ہارمونی رکن<sup>9</sup> کہلاتا ہے،  $a_3 \cos(3\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t)$  تیسرا ہارمونی رکن اور اسی طرح  $a_m \cos(m\omega_0 t) + b_m \sin(m\omega_0 t)$  ایم ہارمونی رکن کہلاتا ہے۔ ہم یہاں اصل رک کر چند حقائق اور نکلمات پر غور کرتے ہیں جو فوریئر تسلسل میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

<sup>5</sup> Fourier series

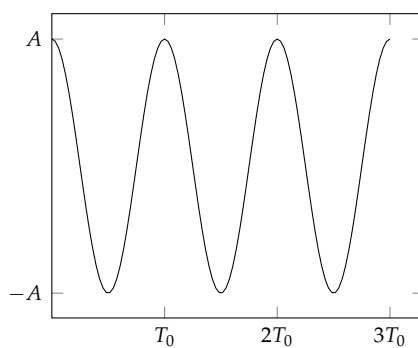
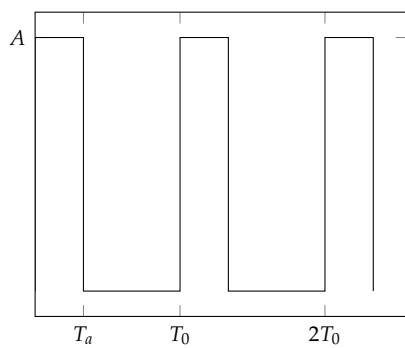
<sup>6</sup> جیمز پیٹ یوسف فوریئر نے حرارتی توانائی کے بہاؤ پر غور کے دوران اس تسلسل کو دریافت کیا۔

<sup>7</sup> coefficients

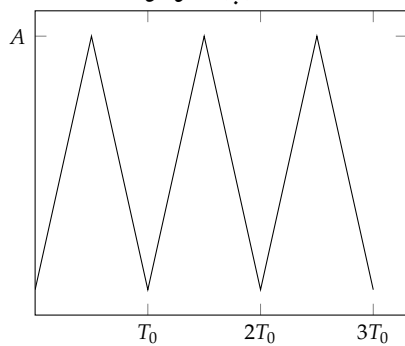
<sup>8</sup> fundamental component

<sup>9</sup> second harmonic



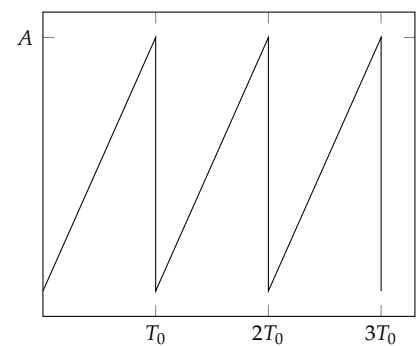


(ب) مستطیل موج۔



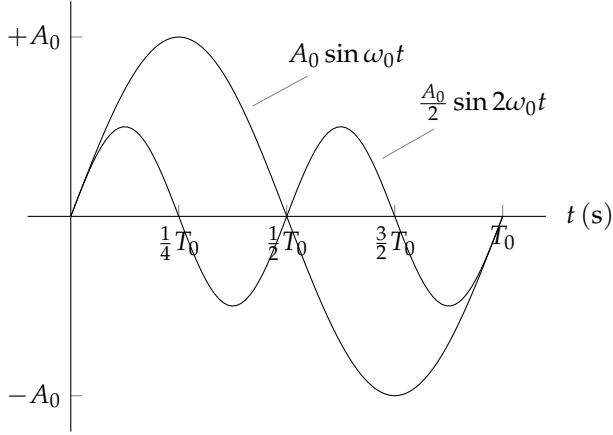
(ت) تکیونی موج۔

(الف) سائن نمائندہ موج۔



(پ) دندان موج۔

شکل 15.2: چند دوری امواج۔



شکل 15.3: ایک دوری عرصہ میں فوریئر تسلسل کے ارکان کی تعداد۔

آپ دو سمتیوں کے نقطہ ضرب<sup>10</sup> سے خوب واقف ہیں۔ سمتیہ  $A$  اور  $B$  کا نقطہ ضرب یا غیر سمعی ضرب<sup>11</sup> درج ذیل ہے جہاں دونوں سمتیوں کے مابین زاویہ  $\theta$  ہے۔

$$(15.5) \quad A \cdot B = AB \cos \theta$$

آپس میں عمودی<sup>12</sup> سمتیوں کے مابین  $\theta = 90^\circ$  ہونے کی بدولت  $A \cdot B = 0$  ہوتا ہے جبکہ کسی بھی سمتیہ کے خود نقطہ ضرب کا جذر اس کے حیظے کے برابر ہوتا ہے۔

$$(15.6) \quad |A| = \sqrt{A \cdot A}$$

اسی سوچ کے ساتھ تفاعل کا نقطہ ضرب بیان کیا جاتا ہے۔

اگر تفاعل  $f(t) \neq 0$  اور  $g(t) \neq 0$  کے حاصل ضرب کا تکمل  $a \leq t \leq b$  فاصلے پر صفر کے برابر ہو

$$(15.7) \quad \int_a^b f(t)g(t) dt = 0$$

تو  $a \leq t \leq b$  فاصلے پر ان تفاعل کو آپس میں عمودی تصور کیا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ دونوں تفاعل از خود غیر سمعی<sup>13</sup> اور غیر صفر ہیں۔

<sup>10</sup> dot product

<sup>11</sup> scalar product

<sup>12</sup> orthogonal

<sup>13</sup> scalar

کسی بھی مقدار کا مربع مثبت ہوتا ہے لہذا تفاعل کا مربع  $f^2(t)$  ہر نقطے پر مثبت ہوگا۔ فاصلہ  $a \leq t \leq b$  پر تفاعل کے معیار<sup>14</sup>  $\|f(t)\|$  سے مراد

$$(15.8) \quad \|f(t)\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}$$

ہے۔

مثال 15.1: ثابت کریں کہ  $0 \leq t \leq T_0$  فاصلے پر  $\cos(m\omega_0 t)$  اور  $\cos(n\omega_0 t)$  آپس میں عمودی ہیں جہاں  $m = 1, 2, 3, \dots$  اور  $n = 1, 2, 3, \dots$  ممکن ہیں لیکن  $m \neq n$  ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا مکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt &= \int_0^{T_0} \frac{\cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right] + \cos\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2} dt \\ &= \frac{\sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} \Bigg|_0^{T_0} \\ &= \frac{\sin[(m+n)2\pi]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin[(m-n)2\pi]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} \\ &\quad - \frac{\sin[(m+n)0]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin[(m-n)0]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} \end{aligned}$$

چونکہ  $m$  اور  $n$  عدد صحیح ہیں لہذا  $m+n$  اور  $m-n$  بھی عدد صحیح ہوں گے لہذا  $\sin[(m+n)2\pi] = 0$  اور  $\sin[(m-n)2\pi] = 0$  ہوں گے۔ اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(15.9) \quad \int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad (m \neq n)$$

مثال 15.2: ثابت کریں کہ  $0 \leq t \leq T_0$  فاصلے پر  $\sin(m\omega_0 t)$  اور  $\sin(n\omega_0 t)$  آپس میں عمودی ہیں جہاں  $m = 1, 2, 3, \dots$  اور  $n = 1, 2, 3, \dots$  ممکن ہیں لیکن  $m \neq n$  ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا مکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt &= \int_0^{T_0} \frac{\cos\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right] - \cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2} dt \\ &= \frac{\sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} \Bigg|_0^{T_0} \\ &= \frac{\sin[(m-n)2\pi]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin[(m+n)2\pi]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} \\ &\quad - \frac{\sin[(m-n)0]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin[(m+n)0]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} \end{aligned}$$

چونکہ  $m$  اور  $n$  عدد صحیح ہیں لہذا  $m+n$  اور  $m-n$  بھی عدد صحیح ہوں گے لہذا  $\sin[(m+n)2\pi] = 0$  اور  $\sin[(m-n)2\pi] = 0$  ہوں گے۔ اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(15.10) \quad \int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = 0 \quad (m \neq n)$$

مثال 15.3: ثابت کریں کہ  $0 \leq t \leq T_0$  فاصلے پر  $\sin(n\omega_0 t)$  اور  $\cos(m\omega_0 t)$  آپس میں عمودی ہیں جہاں  $m = 1, 2, 3, \dots$  اور  $n = 1, 2, 3, \dots$  ممکن ہیں۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \sin \left[ (m+n) \frac{2\pi}{T_0} t \right] - \sin \left[ (m-n) \frac{2\pi}{T_0} t \right] dt \\
 &= -\frac{\cos \left[ (m+n) \frac{2\pi}{T_0} t \right]}{2(m+n) \frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\cos \left[ (m-n) \frac{2\pi}{T_0} t \right]}{2(m-n) \frac{2\pi}{T_0}} \Bigg|_0^{T_0} \\
 &= -\frac{\cos[(m+n)2\pi]}{2(m+n) \frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\cos[(m-n)2\pi]}{2(m-n) \frac{2\pi}{T_0}} \\
 &\quad + \frac{\cos[(m+n)0]}{2(m+n) \frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\cos[(m-n)0]}{2(m-n) \frac{2\pi}{T_0}}
 \end{aligned}$$

چونکہ  $m$  اور  $n$  عدد صحیح ہیں لہذا  $m+n$  اور  $m-n$  بھی عدد صحیح ہوں گے لہذا  $\cos(m+n)2\pi = 1$  اور  $\cos(m-n)2\pi = 1$  ہوں گے۔ اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(15.11) \quad \int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = 0 \quad (m \neq n)$$

مثال 15.4: تفاعل  $f(t) = \cos(m\omega_0 t)$  کا معیار  $0 \leq t \leq T_0$  فاصلے پر حاصل کریں جہاں  $m = 1, 2, 3, \dots$  ممکن ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر معیار کو مکمل سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \|f(t)\|^2 &= \int_0^{T_0} \cos^2\left(m \frac{2\pi}{T_0} t\right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \left[1 + \cos\left(2m \frac{2\pi}{T_0} t\right)\right] dt \\
 &= \frac{t}{2} + \frac{\sin\left(2m \frac{2\pi}{T_0} t\right)}{4m \frac{2\pi}{T_0}} \Bigg|_0^{T_0} \\
 &= \frac{T_0}{2} + \frac{\sin 4m\pi}{4m \frac{2\pi}{T_0}} - \frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4m \frac{2\pi}{T_0}} \\
 &= \frac{T_0}{2}
 \end{aligned}$$

دونوں اطراف کا جذر لیتے ہوئے  $0 \leq t \leq T_0$  فاصلے پر معیار ملتا ہے۔

$$(15.12) \quad \|\cos(m\omega_0 t)\| = \sqrt{\int_0^{T_0} \cos^2(m\omega_0 t) dt} = \sqrt{\frac{T_0}{2}}$$


---



---

مشق 15.1: تفاعل  $f(t) = \sin m\omega_0 t$  کا معیار  $0 \leq t \leq T_0$  فاصلے پر درج ذیل ہے جہاں  $m = 1, 2, 3, \dots$  ممکن ہے۔ اس معیار کو حاصل کریں۔

$$(15.13) \quad \|\sin(m\omega_0 t)\| = \sqrt{\int_0^{T_0} \sin^2(m\omega_0 t) dt} = \sqrt{\frac{T_0}{2}}$$


---



---

مشق 15.2: درج ذیل دو مساوات کو ثابت کریں جہاں  $m = 1, 2, 3, \dots$  ممکن ہے۔

$$(15.14) \quad \int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) dt = 0$$

$$(15.15) \quad \int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t) dt = 0$$

مساوات 15.9، مساوات 15.10 اور مساوات 15.11 مل کر ثابت کرتے ہیں کہ فوریر تسلسل میں استعمال ہونے والا ہر تفاعل بقایا تمام تفاعل کے ساتھ  $0 \leq t \leq T_0$  فاصلے پر عمودی ہے۔ یوں  $\cos 3\omega_0 t$  کو مثال بناتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ  $\sin(3\omega_0 t)$ ،  $\sin(2\omega_0 t)$ ،  $\sin(\omega_0 t)$ ،  $\cos(4\omega_0 t)$ ،  $\cos(2\omega_0 t)$ ،  $\cos(\omega_0 t)$  وغیرہ کے ساتھ عمودی ہے۔

درج بالا کھمبات حاصل کرنے کے بعد اصل مضمون یعنی فوریر تسلسل پر دوبارہ آتے ہیں۔ مساوات 15.9 تا مساوات 15.15 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.4 کے عددی سر  $a_0, a_1, a_2, b_1, \dots$  حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ انہیں ایسا ہی کریں۔

عددی سر  $a_0$  کی قیمت دریافت کرنے کی خاطر ہم مساوات 15.4 کا مکمل  $0 \leq t \leq T_0$  فاصلے پر لیتے ہیں

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} f(t) dt &= \int_0^{T_0} a_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) dt \\ &= a_0 T_0 \end{aligned}$$

جہاں مساوات 15.14 اور مساوات 15.15 کو استعمال کرتے ہوئے مجموعے میں دیے تمام مکمل کو صفر کے برابر پر کیا گیا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(15.16) \quad a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt$$

مساوات 15.16 کہتا ہے کہ  $a_0$  تفاعل  $f(t)$  کی اوسط قیمت ہے۔

عددی سر  $a_m$  حاصل کرنے کی خاطر مساوات 15.4 کے دونوں اطراف کو  $\cos(m\omega_0 t)$  سے ضرب دیتے ہوئے ایک دوری عرصے پر مکمل کرتے ہیں۔ ہم مکمل کو  $0 \leq t \leq T_0$  پر حاصل کرتے ہیں۔

$$(15.17) \quad \int_0^{T_0} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt = \int_0^{T_0} a_0 \cos(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} a_n \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} b_n \sin(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt$$

دائیں ہاتھ پہلا مکمل مساوات 15.14 کی بنا صفر کے برابر ہے جبکہ مساوات 15.11 کے تحت تیسرا مکمل صفر کے برابر ہے۔ انہیں دوسرے مکمل پر غور کریں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} a_n \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = \int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) [a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \dots + a_{m-1} \cos[(m-1)\omega_0 t] + a_m \cos(m\omega_0 t) + \dots] dt$$

اب اگر  $n \neq m$  ہو تب مساوات 15.9 کے تحت مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ البتہ  $n = m$  کی صورت میں مساوات 15.12 کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_0^{T_0} a_m \cos^2(m\omega_0 t) dt = a_m \frac{T_0}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان قیمتوں کو مساوات 15.17 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(15.18) \quad a_m = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt$$

عددی سر  $b_m$  حاصل کرنے کی خاطر مساوات 15.4 کے دونوں اطراف کو  $\sin(m\omega_0 t)$  سے ضرب دیتے ہوئے



ایک دوری عرصے پر مکمل کرتے ہیں۔ ہم مکمل کو  $0 \leq t \leq T_0$  پر حاصل کرتے ہیں۔

$$(15.19) \quad \int_0^{T_0} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt = \int_0^{T_0} a_0 \sin(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} a_n \cos(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} b_n \sin(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt$$

دائیں ہاتھ پہلا مکمل مساوات 15.15 کی بنا صفر کے برابر ہے جبکہ مساوات 15.11 کے تحت دوسرا مکمل صفر کے برابر ہے۔ آئیں تیسرے مکمل پر غور کریں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} b_n \sin(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt = \int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t) [b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots + b_{m-1} \sin[(m-1)\omega_0 t] + b_m \sin(m\omega_0 t) + \dots] dt$$

اب اگر  $n \neq m$  ہو تب مساوات 15.10 کے تحت مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ البتہ  $n = m$  کی صورت میں مساوات 15.13 کو استعمال کرتے ہوئے

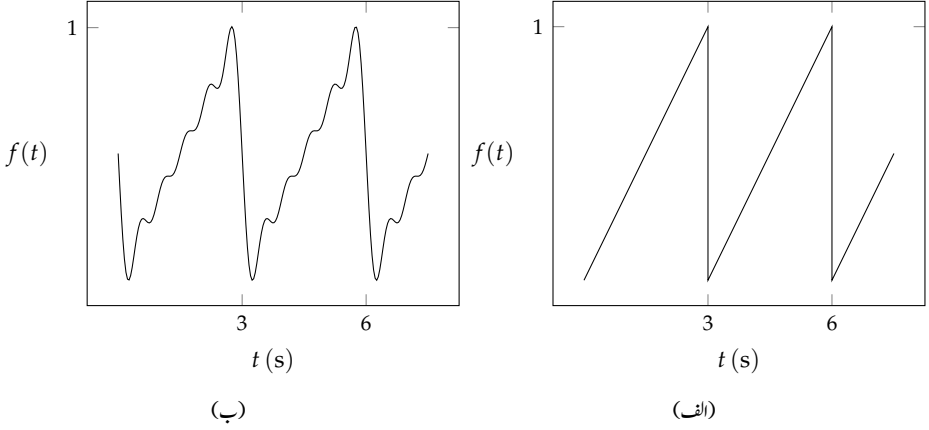
$$\int_0^{T_0} b_m \sin^2(m\omega_0 t) dt = b_m \frac{T_0}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان قیمتوں کو مساوات 15.17 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(15.20) \quad b_m = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt$$

مساوات 15.16، مساوات 15.18 اور مساوات 15.20 فوریز مکمل کے عددی سر دیئے ہیں۔ انہیں یہاں اکٹھے پیش کرتے ہیں۔

$$(15.21) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt \\ a_m &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt \\ b_m &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt \end{aligned}$$



شکل 15.4: مثال 15.5 کی دندان موج۔

مثال 15.5: شکل 15.4 میں دکھائے گئے دندان موج کا فوریئر تسلسل حاصل کریں۔ دو، تین اور دس فوریئر ارکان استعمال کرتے ہوئے موج کا خط کھینچیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موج کا دوری عرصہ  $T_0 = 3$  s ہے۔

حل: شکل میں دکھائی گئی موج  $(0, 0)$  سے  $(3, 1)$  تک بالکل سیدھی لکیر کی مانند ہے جس کی ڈھلوان

$$\text{ڈھلوان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{3 - 0} = \frac{1}{3}$$

ہے لہذا اس سیدھے حصے کی مساوات درج ذیل لکھی جاسکتی ہے جہاں لکیر پر کسی بھی نقطے کے کارتیسی محدد مساوات میں پر کرنے سے  $c$  کی قیمت حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$y = \frac{x}{3} + c$$

ہم درج بالا میں  $(0, 0)$  پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{0}{3} + c$$

$c = 0$  حاصل کرتے ہیں لہذا سیدھی حصے کی مساوات  $y = \frac{x}{3}$  یعنی

$$(15.22) \quad f(t) = \frac{t}{3}$$

ہے جہاں کارتیسی نظام کے  $x$  محور پر  $t$  اور  $y$  محور پر  $f(t)$  پر کئے گئے ہیں۔

مساوات 15.21 سے فوریئر تسلسل کے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 \frac{t}{3} dt \\ &= \frac{1}{3} \frac{t^2}{2} \Big|_0^3 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

چونکہ  $a_0$  تفاعل کی اوسط قیمت کے برابر ہے لہذا یہی جواب تگولن کے رقبے  $\frac{3}{2} = 1 \times 3 \times \frac{1}{2}$  اور قاعدہ 3 سے حاصل کی جاسکتی ہے یعنی

$$\text{اوسط} = \frac{\text{رقبہ}}{\text{قاعدہ}} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

عددی سر  $a_m$  حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 \frac{t}{3} \cos\left(m \frac{2\pi}{3} t\right) dt \\ &= \frac{2}{9} t \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3} mt\right)}{\frac{2\pi}{3} m} + \frac{2}{9} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3} mt\right)}{\left(\frac{2\pi}{3} m\right)^2} \Big|_0^3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

اس کا مطلب ہے کہ دندان موج کی فوریئر تسلسل میں کوئی کوسائن تفاعل نہیں پایا جاتا۔

عددی سر  $b_m$  حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 b_m &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt \\
 &= \frac{2}{3} \int_0^3 \frac{t}{3} \sin\left(m\frac{2\pi}{3}t\right) dt \\
 &= -\frac{2}{9}t \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}mt\right)}{\frac{2\pi}{3}m} + \frac{2}{9} \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}mt\right)}{\left(\frac{2\pi}{3}m\right)^2} \Bigg|_0^3 \\
 &= -\frac{1}{m\pi}
 \end{aligned}$$

یوں  $m = 1, 2, 3, \dots$  پر کرتے ہوئے عددی سر حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned}
 b_1 &= -\frac{1}{\pi} \\
 b_2 &= -\frac{1}{2\pi} \\
 b_3 &= -\frac{1}{3\pi} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

لہذا فوریرس تسلسل درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$(15.23) \quad f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left[ \sin \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \dots \right]$$


---