

## برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی  
کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد  
khalidyousafzai@comsats.edu.pk



# عنوان

1	بنیاد	1
1	برقی بار، برقی رو اور برقی دباؤ	1.1
6	قانون اوہم	1.2
8	توانائی اور طاقت	1.3
15	برقی پڑے	1.4
15	غیر تابع منبع	1.4.1
17	تابع منبع	1.4.2
27	مزا جتنی ادوار	2
27	قانون اوہم	2.1
35	قوانین کرخوف	2.2
51	سلسلہ وار جڑے پڑوں میں رو	2.3
52	تقسیم دباؤ	2.4
55	متعدد سلسلہ وار مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت	2.5
58	سلسلہ وار متعدد منبع دباؤ اور مزاحمت	2.6
59	متوازی جڑے مزاحمت پر یکساں دباؤ پایا جاتا ہے	2.7
61	تقسیم رو اور متعدد متوازی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت	2.8
68	سلسلہ وار اور متوازی مزاحمت	2.9
73	تخصیص مزاحمت	2.10
76	سلسلہ وار اور متوازی مزاحمتوں کے ادوار کا حل	2.11
84	ستارہ-تکون تبادلہ	2.12
91	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	2.13
101	ترکیب جوڑ اور دائری ترکیب	3
101	تجزیہ جوڑ	3.1
104	غیر تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار	3.2
117	تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار	3.3
123	غیر تابع منبع دباؤ استعمال کرنے والے ادوار	3.4

132 . . . . .	تابع منبع دباو استعمال کرنے والے ادوار . . . . .	3.5
139 . . . . .	دائری تجزیہ . . . . .	3.6
140 . . . . .	غیر تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار . . . . .	3.7
148 . . . . .	غیر تابع منبع رواستعمال کرنے والے ادوار . . . . .	3.8
154 . . . . .	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار . . . . .	3.9
158 . . . . .	دائری ترکیب اور ترکیب جوڑ کا موازنہ . . . . .	3.10
161	حسابی ایپلیفائر	4
171 . . . . .	کامل حسابی ایپلیفائر	4.1
171 . . . . .	منفی ایپلیفائر	4.2
174 . . . . .	مثبت ایپلیفائر	4.3
176 . . . . .	مستقام کار	4.4
176 . . . . .	منفی کار	4.5
178 . . . . .	جمع کار	4.6
181 . . . . .	متوازن اور غیر متوازن صورت	4.7
185 . . . . .	موازنہ کار	4.8
185 . . . . .	آلاتی ایپلیفائر	4.9
187	مسئلے	5
187 . . . . .	مساوی دور	5.1
187 . . . . .	مسئلہ خطیت	5.2
191 . . . . .	مسئلہ نفاذ	5.3
201 . . . . .	مساوی ادوار	5.4
206 . . . . .	مسئلہ تھون، مسئلہ نارٹن اور مسئلہ متبادلہ منبع	5.5
225 . . . . .	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	5.6
231 . . . . .	تابع منبع اور غیر تابع منبع دونوں استعمال کرنے والے ادوار	5.7
239 . . . . .	زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ	5.8
247	برق گیر اور امالہ گیر	6
247 . . . . .	برق گیر	6.1
261 . . . . .	امالہ گیر	6.2
270 . . . . .	برق گیر اور امالہ گیر کے خصوصیات	6.3
273 . . . . .	سلسلہ وار جڑے برق گیر	6.4
277 . . . . .	متوازی جڑے برق گیر	6.5
281 . . . . .	سلسلہ وار امالہ گیر	6.6
283 . . . . .	متوازی امالہ گیر	6.7
287 . . . . .	حسابی ایپلیفائر کے RC ادوار	6.8
288 . . . . .	تفرق کار	6.9
293	عارضی رد عمل	7
293 . . . . .	تعارف	7.1
293 . . . . .	ایک درجی ادوار	7.2

295	7.2.1 رد عمل کی عمومی مساوات	
321	7.3 دھڑکن	
328	7.4 دو درجی ادوار	
359	8 برقرار حالت بدلتی رو	
359	8.1 مخلوط اعداد	
364	8.2 سائن نما تفاعل	
373	8.3 سائن نما اور مخلوط جبری تفاعل	
381	8.4 دوری سمتیہ	
386	8.5 مزاحمت، امالہ گیر اور برقی گیر کے انفرادی دوری سمتی تعلق	
396	8.6 برقی رکاوٹ اور برقی فراوانی	
409	8.7 دوری سمتیت کے اشکال	
419	8.8 کرخوف مساوات	
424	8.9 تجزیاتی تراکیب	
443	9 برقرار برقی طاقت	
443	9.1 لمبائی طاقت	
446	9.2 اوسط طاقت	
453	9.3 زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ	
463	9.4 موثر قیمت	
472	9.5 جزو طاقت	
476	9.6 مخلوط طاقت	
484	9.7 جزو طاقت کی درستی	
489	9.8 برقی چھٹکا	
491	9.9 نم زمین	
492	9.10 ایک دور کا نظام	
497	9.11 حفاظتی تدابیر	
499	10 مقناطیسی جڑے ادوار	
499	10.1 مشترکہ امالہ	
517	10.2 مشترکہ امالہ میں توانائی کا ذخیرہ	
523	10.3 کامل ٹرانسفارمر	
547	11 تین دوری نظام	
547	11.1 تین دوری ستارہ دیاو	
553	11.2 ستارہ ستارہ (YY) جوڑ	
561	11.3 تین دوری ٹکونی (Δ) دیاو	
566	11.4 ٹکونی بوجھ	
571	11.5 طاقت کے کلیات	
580	11.6 جزو طاقت کی درستی	

585	تعدوی رد عمل	12
596 . . . . .	جال	12.1
598 . . . . .	صفر اور قطب	12.2
600 . . . . .	سائن نما تعدوی تجزیہ	12.3
600 . . . . .	یوڈا خطوط	12.3.1



## باب 12

### تعددی رد عمل

گزشتہ بابوں میں ہم RLC ادوار کو حل کر چکے ہیں جہاں تعدد غیر متغیر تھی۔ اس باب میں تعدد تبدیل کرتے ہوئے ادوار کا رد عمل بالمقابل تعدد دیکھا جائے گا۔ آئیں شروع میں سادہ ترین پرزوں کا تعدد دی رد عمل دیکھیں۔ سادہ ترین پرزے مزاحمت، امالہ اور برق گیر ہیں۔ تعدد دی رد عمل دیکھتے ہوئے سائن نما اشارات زیر استعمال لائے جائیں گے۔

شکل 12.1- الف میں مزاحمت دکھایا گیا ہے۔ مزاحمت کی رکاوٹ درج ذیل ہے۔

$$(12.1) \quad Z_R = R/0^\circ$$

یوں مزاحمت کی رکاوٹ پر تعدد  $\omega$  کا کوئی اثر نہیں پایا جاتا۔ مزاحمت کے رکاوٹ کی حتمی قیمت  $|Z_R|$  تمام تعدد پر R کے برابر ہے جبکہ اس کا زاویائی ہٹاؤ  $\angle Z_R$  تمام تعدد پر صفر درجے رہتا ہے۔ یہ حقائق شکل 12.1-ب اور شکل 12.1-پ میں دکھائے گئے ہیں۔

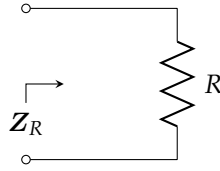
امالہ گیر کو شکل 12.2- الف میں دکھایا گیا ہے۔ امالہ گیر کی رکاوٹ درج ذیل ہے۔

$$(12.2) \quad Z_L = j\omega L = \omega L/90^\circ$$

اس طرح امالہ گیر کے رکاوٹ کی حتمی قیمت تعدد بڑھانے سے بڑھتی ہے۔ رکاوٹ کی مقدار کا تعدد کے ساتھ راست تنابلی رشتہ ہے۔

$$(12.3) \quad |Z_L| = \omega L$$

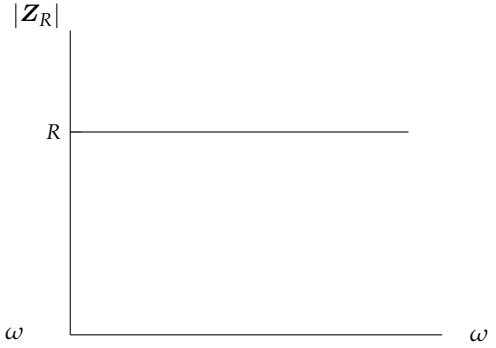




(الف) مزاحمت کی رکاوٹ۔

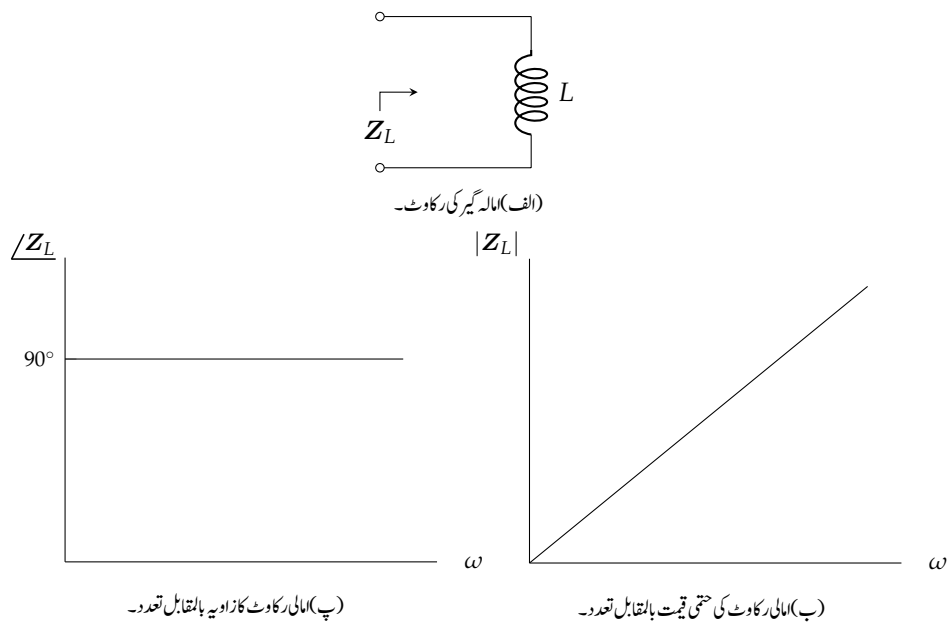


(پ) مزاحمتی رکاوٹ کا زاویہ بالمقابل تعدد۔



(ب) مزاحمتی رکاوٹ کی حتمی قیمت بالمقابل تعدد۔

شکل 12.1: مزاحمتی رکاوٹ کا تعدد رد عمل۔



شکل 12.2: امالی رکاوٹ کا تعدد رد عمل۔

صفر تعدد پر امالہ گیر کی رکاوٹ  $0 \Omega$  ہو جاتی ہے اور یہ قصر دور خاصیت رکھتا ہے جبکہ لامتناہی تعدد پر رکاوٹ کی مقدار لامتناہی ہو جاتی ہے اور امالہ گیر بطور کھلا دور عمل کرتا ہے۔ امالی رکاوٹ کا زاویہ تمام تعدد پر  $90^\circ$  رہتا ہے۔

$$\angle Z_L = 90^\circ \quad (12.4)$$

شکل 12.2-ب اور شکل 12.2-پ میں ان حقائق کو دکھایا گیا ہے۔

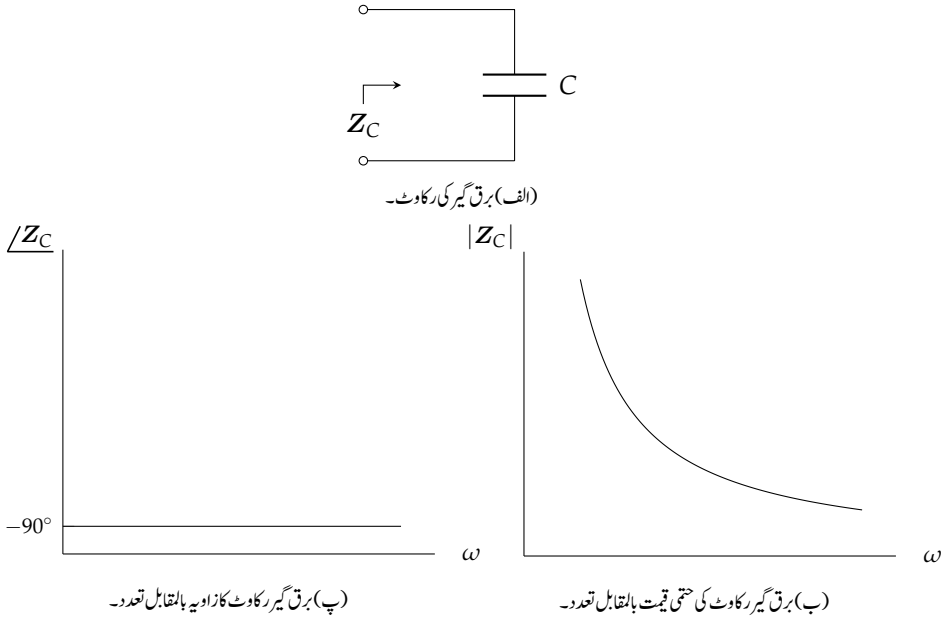
برق گیر کو شکل 12.3-الف میں دکھایا گیا ہے۔ برق گیر کی رکاوٹ درج ذیل ہے۔

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ \quad (12.5)$$

اس طرح برق گیر کے رکاوٹ کی مقدار کا تعدد کے ساتھ بالعکس متناسب کا رشتہ ہے جبکہ اس کا زاویہ تمام تعدد پر  $-90^\circ$  رہتا ہے۔

$$|Z_C| = \frac{1}{\omega C} \quad (12.6)$$

$$\angle Z_C = -90^\circ \quad (12.7)$$



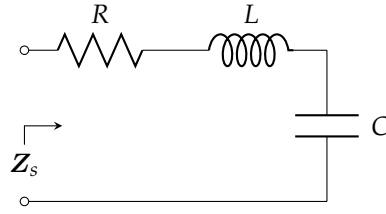
شکل 12.3: برق گیر رکاوٹ کا تعدد رد عمل۔

ان تعلقات کو شکل 12.3-ب اور شکل 12.3-پ میں دکھایا گیا ہے۔ صفر تعدد پر برق گیر کی رکاوٹ لامتناہی ہو جاتی ہے لہذا یہ بطور کھلا دور عمل کرتا ہے جبکہ لامتناہی تعدد پر رکاوٹ کی مقدار صفر ہو جاتی ہے اور یہ قصر دور کردار ادا کرتا ہے۔ سادہ ترین پرزوں کو نپٹانے کے بعد ذرہ مشکل ادوار دیکھتے ہیں۔ شکل میں مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر سلسلہ وار جڑے دکھائے گئے ہیں۔ ان کی کل رکاوٹ  $Z_s$  لکھتے ہیں

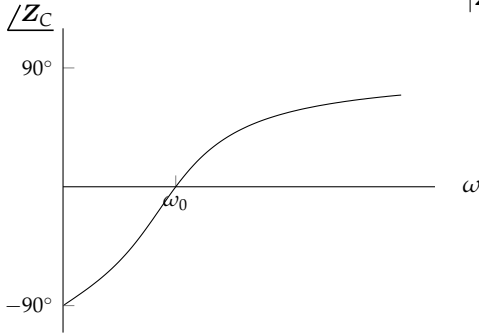
$$\begin{aligned} Z_s &= Z_R + Z_L + Z_C \\ &= R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \\ &= R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \end{aligned}$$

اس تفاعل کو شکل 12.4-ب اور شکل 12.4-پ میں دکھایا گیا ہے۔

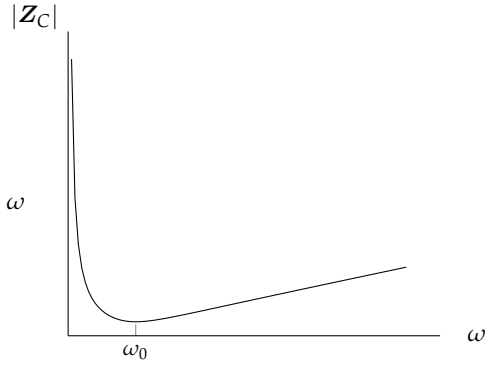
مثال 12.1: شکل 12.5-الف میں مزاحمت پر دبا و حاصل کریں۔ اس کے مقدار بالمقابل تعدد اور زاویہ بالمقابل تعدد کے



(الف) سلسلہ وار دور۔



(پ) زاویہ بالمقابل تعدد۔



(ب) مقدار بالمقابل تعدد۔

شکل 12.4: سلسلہ وار جڑے مزاحمت، امالہ گیر اور برق گیر کا تعدد رد عمل۔

خط کھینچیں۔

حل: دور سے مزاحمت کا دباؤ درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\hat{V}_R = \frac{(4)(20/0^\circ)}{4 + j(2\pi f 0.15 - \frac{1}{2\pi f 0.004})}$$

جو مخلوط تفاعل ہے۔ اس کی حتمی مقدار  $\hat{V}_R$  بالمقابل تعدد  $f$  کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔ اس ترسیم میں دونوں محور کی پیمائش لاگ<sup>1</sup> میں ہے۔ اس طرز کے ترسیم کو لاگ لاگ<sup>2</sup> ترسیم کہا جاتا ہے۔ مقدار بالمقابل تعدد کے خط عموماً لاگ لاگ محور پر دکھائے جاتے ہیں۔ زاویہ دباؤ  $\angle \hat{V}_R$  بالمقابل تعدد کو شکل-پ میں نیم لاگ<sup>3</sup> محور پر دکھایا گیا ہے۔ کم تعدد پر دباؤ کا زاویہ  $+90^\circ$  جبکہ بلند تعدد پر زاویہ  $-90^\circ$  ہے۔

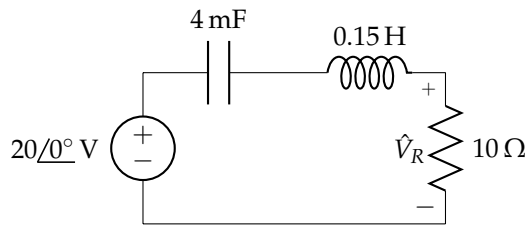
یہاں لاگ لاگ اور نیم لاگ محور پر قیمتیں پڑھنا سیکھ لیں چونکہ اس باب میں انہیں کا استعمال ہو گا۔ یوں شکل 12.5-ب میں حتمی مقدار کی چوٹی  $10^1$  یعنی دس ہرٹز پر پائی جاتی ہے۔ یہ چوٹی  $10^1$  یعنی دس وولٹ کو ظاہر کرتی ہے۔ اسی طرح  $10^2$  Hz یعنی سو ہرٹز پر دباؤ تقریباً  $1.6$  V ہے۔

سمعی<sup>4</sup> اشارات کو عددی صورت<sup>5</sup> میں تبدیل کرتے ہوئے کمپیوٹر میں ذخیرہ کیا جاتا ہے۔ انہیں کو دوبارہ مماثل صورت<sup>6</sup> میں تبدیل کرتے ہوئے سنا جاسکتا ہے۔ آئیں ان اشارات پر ایک مثال دیکھیں۔

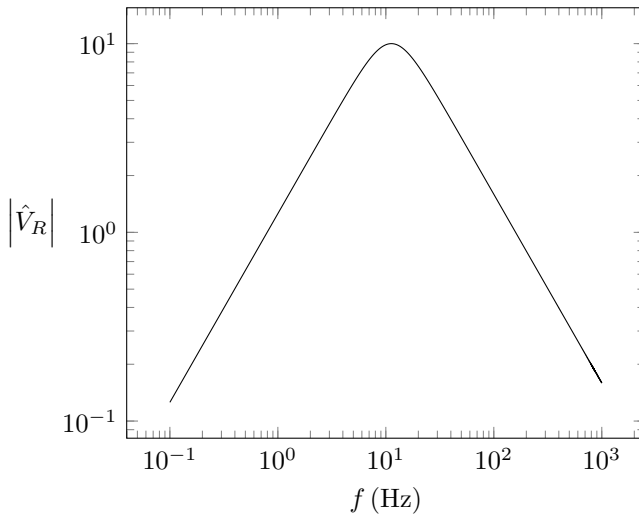
کمپیوٹر سے حاصل موسیقی کے مماثل اشارات کی چوٹی  $1.5$  V ہے۔ ہم چاہتے ہیں کہ سمعی دباؤ ایمپلیفائر<sup>7</sup> استعمال کرتے ہوئے  $8 \Omega$  کے سپیکر<sup>8</sup> کو  $10$  W طاقت فراہم کی جائے۔ ان حقائق سے ایمپلیفائر کے داخلی مماثل اشارہ کی موثر قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$v_m = \frac{1.5}{\sqrt{2}} = 1.061 \text{ V rms}$$

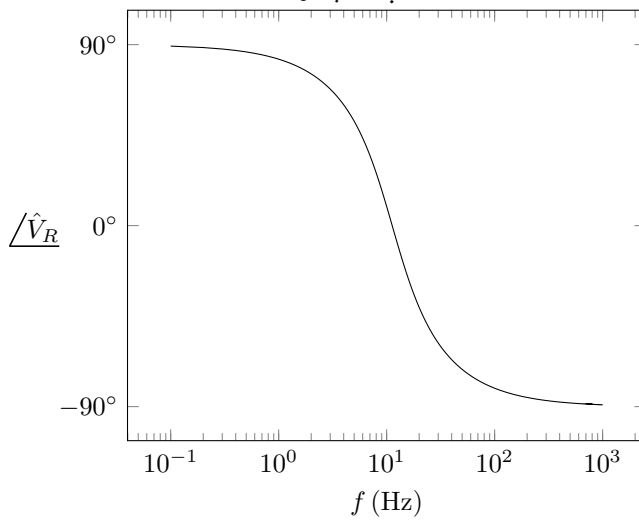
log<sup>1</sup>  
log-log<sup>2</sup>  
semilog<sup>3</sup>  
audio<sup>4</sup>  
digital form<sup>5</sup>  
analog form<sup>6</sup>  
voltage amplifier<sup>7</sup>  
loud speaker<sup>8</sup>



(الف)



(ب) مقدار بالمقابل تعدد کا خط۔



(پ) زاویہ بالمقابل تعدد کا خط۔

شکل 12.5: مثال 12.1 کا دور۔

طاقت کے لیے  $P = \frac{V_{rms}^2}{R}$  سے آٹھ اوہم کے سپیکر کو دس واٹ طاقت کے لئے درکار موثر دباؤ حاصل کرتے ہیں۔

$$v_0 = \sqrt{(10)(8)} = 8.944 \text{ V rms}$$

یوں ایمپلیفائر کی درکار افزائش دباؤ درج ذیل ہے۔

$$A_v = \frac{v_0}{v_m} = \frac{8.944}{1.061} = 8.43 \text{ V V}^{-1}$$

شکل 12.6- الف میں ایمپلیفائر اور سپیکر دکھائے گئے ہیں جہاں  $v_m$  کمپیوٹر سے حاصل ممال سمعی اشارہ ہے اور  $A_v = 10.53 \text{ V V}^{-1}$  - انسان 20 Hz تا 20 kHz کے سمعی اشارات سن سکتا ہے لہذا ہمارے ایمپلیفائر کو اس تعددی پٹی کے اشارات کا جیٹ بڑھانا ہوگا۔ جیٹ بڑھاتے ہوئے اصل آواز کی خاصیت تبدیل نہیں ہونی چاہیے۔ اگر پوری تعددی پٹی پر ایمپلیفائر کی افزائش کی قیمت یکساں ہو تب آواز کی خاصیت برقرار رہے گی۔ یوں ہم چاہیں گے 20 Hz تا 20 kHz پر ایمپلیفائر کی افزائش  $8.43 \text{ V V}^{-1}$  رہے۔ ایمپلیفائر کے افزائش بالمقابل تعددی خط کو شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔

برق گیر کی رکاوٹ  $Z_C = \frac{1}{j\omega C}$  لکھی جاتی ہے جس میں  $j\omega = s$  پر کرتے ہوئے  $Z_C = \frac{1}{sC}$  لکھا جاسکتا ہے۔ ایسا ہی کرتے ہوئے ایمپلیفائر کو دوبارہ شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔ آپ میں سے کچھ طلبہ  $s$  کو پہچان گئے ہوں گے۔ یہ لاپلاس بدل<sup>10</sup> کا متغیر ہے۔

آئیں شکل-ب کو حل کریں۔ داخلی جانب بالائی جوڑ پر کر خوف مساوات رو لکھتے ہیں

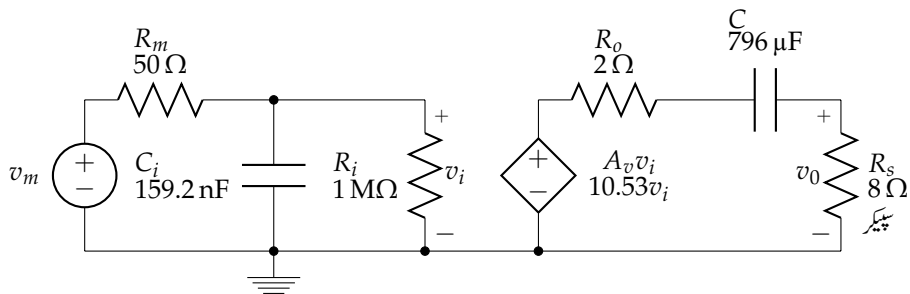
$$\frac{v_i - v_m}{R_m} + sC_i v_i + \frac{v_i}{R_i} = 0$$

جس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

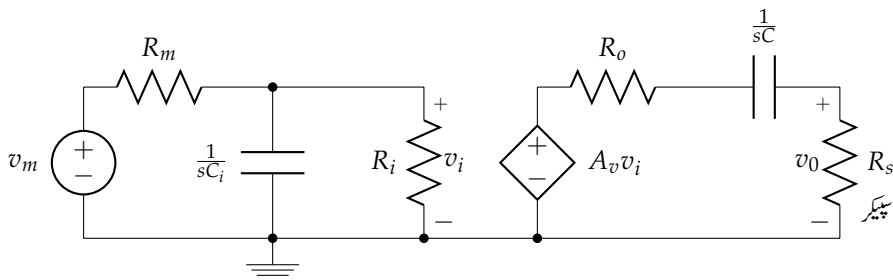
$$v_i \left( \frac{1}{R_m} + sC_i + \frac{1}{R_i} \right) = \frac{v_m}{R_m}$$

اس میں قوسین کے اندر مزاحمتوں کو قریب قریب لکھتے ہوئے  $v_i$  کے لئے حل کرتے ہیں۔

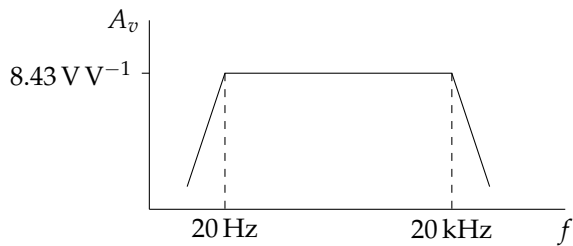
$$v_i = \frac{v_m}{R_m \left( \frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i} + sC_i \right)}$$



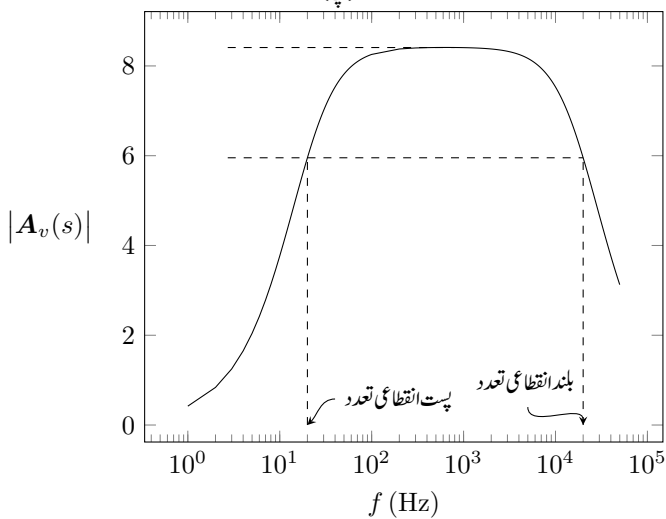
(الف)



(ب)



(پ)



(ت) ایسیپلیٹار کی افزائش با متقابل تعددی خط۔

شکل 12.6: ایسیپلیٹار اور اس کی افزائش با متقابل تعددی خط۔



شکل 12.6-ب کے دائیں جانب تقسیم دباؤ کے کلیے سے  $v_0$  لکھتے ہیں۔

$$v_0 = \frac{A_v v_i R_s}{R_o + R_s + \frac{1}{sC}}$$

اس میں  $v_i$  کی قیمت پر کرتے ہیں

$$\begin{aligned} v_0 &= \left( \frac{A_v R_s}{R_o + R_s + \frac{1}{sC}} \right) \frac{v_m}{R_m \left( \frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i} + sC_i \right)} \\ &= \left[ \frac{sC R_s A_v}{1 + sC(R_o + R_s)} \right] \frac{v_m}{R_m \left( \frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i} \right) \left( 1 + \frac{sC_i}{\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i}} \right)} \\ &= \frac{R_s A_v v_m}{R_m \left( \frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i} \right)} \left[ \frac{sC}{1 + sC(R_o + R_s)} \right] \frac{1}{\left( 1 + \frac{sC_i}{\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i}} \right)} \end{aligned}$$

جہاں دوسری قدم پر دائیں بٹنی توسین سے  $\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i}$  باہر نکالا گیا اور تیسری قدم پر اسی کو پہلی توسین کا حصہ بنایا گیا۔ اس مساوات میں

$$\begin{aligned} \omega_{p1} &= \frac{1}{C(R_o + R_s)} \\ \omega_{p2} &= \frac{1}{C_i} \left( \frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i} \right) \end{aligned}$$

لکھتے ہوئے درج ذیل صاف ستھرا مساوات حاصل ہوتا ہے جہاں  $\omega_{p1}$  اور  $\omega_{p2}$  مساوات کے قطب<sup>11</sup> کہلاتے ہیں اور انہیں تعدد کی اکائی یعنی ہرٹز Hz یا ریڈین فی سیکنڈ  $\text{rad s}^{-1}$  میں ناپا جاتا ہے۔

$$(12.8) \quad A_v(s) = \frac{v_0}{v_m} = \frac{R_s A_v}{R_m \left( \frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i} \right)} \frac{sC}{\left( 1 + \frac{s}{\omega_{p1}} \right) \left( 1 + \frac{s}{\omega_{p2}} \right)}$$

شکل-الف میں دی گئی مزاحمتوں اور برق گیروں کی قیمتیں استعمال کرتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\omega_{p1} &= \frac{1}{796 \times 10^{-6}(2+8)} = 125.63 \text{ rad s}^{-1} \\ \omega_{p2} &= \frac{1}{159.2 \times 10^{-9} \left( \frac{1}{50} + \frac{1}{1000000} \right)} = 125.634 \text{ krad s}^{-1} \\ \frac{R_s A_v}{R_m \left( \frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_i} \right)} &= \frac{8 \times 10.53}{50 \left( \frac{1}{50} + \frac{1}{1000000} \right)} \approx 84.2\end{aligned}$$

یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(12.9) \quad A_v(s) = 84.2 \frac{sC}{\left(1 + \frac{s}{125.63}\right) \left(1 + \frac{s}{125634}\right)}$$

آئیں اس میں واپس  $s = j\omega = j2\pi f$  پر کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}(12.10) \quad A_v(s) &= 84.2 \frac{j2\pi f \times 796 \times 10^{-6}}{\left(1 + \frac{j2\pi f}{125.63}\right) \left(1 + \frac{j2\pi f}{125634}\right)} \\ &= \frac{j0.421f}{\left(1 + \frac{jf}{20}\right) \left(1 + \frac{jf}{20000}\right)}\end{aligned}$$

اس کے حتمی قیمت  $|A_v(s)|$  بالمقابل تعدد  $f$  کو شکل 12.6-ت میں دکھایا گیا ہے۔

$$|A_v(s)| = \frac{0.421f}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{20}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{20000}\right)^2}}$$

شکل-ب میں 20 Hz کو پست انقطاعی تعدد<sup>12</sup> اور 20 kHz کو بلند انقطاعی تعدد<sup>13</sup> کہتے ہیں۔ انہیں خط کے کونے کی تعدد<sup>14</sup> بھی کہا جاتا ہے۔

شکل 12.6-ت میں انقطاعی تعدد کے مابین درمیانی تعدد خطے<sup>15</sup> میں ایمپلیفائر کی افزائش  $8.41 \text{ V V}^{-1}$  ہے جو ہمیں درکار تھی۔ اس کو درمیانی تعدد پر افزائش کہتے ہیں۔ البتہ انقطاعی تعدد کے قریب ایمپلیفائر کی افزائش گھٹ جاتی

<sup>12</sup> low cut-off frequency

<sup>13</sup> high cut-off frequency

<sup>14</sup> corner frequencies

<sup>15</sup> mid-frequency range

ہے۔ یوں پست اور بلند انقطاعی تعدد پر افزائش  $5.95 \text{ V V}^{-1}$  ہے۔ جس تعدد پر افزائش کی قیمت درمیانی تعدد کے افزائش کے  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  گنا رہ جاتی ہے اس کو انقطاعی تعدد کہتے ہیں۔ چونکہ طاقت  $P = \frac{V_{\text{rms}}^2}{R}$  کے برابر ہے لہذا دباؤ کی قیمت  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  گنا ہو جانے سے طاقت کی قیمت نصف ہو جاتی ہے۔ یوں انقطاعی تعدد اس تعدد کو کہتے ہیں جس پر اشارے کی طاقت نصف رہ جاتی ہے۔ ہمارے ایمپلیفائر کی درمیانی تعدد پر افزائش  $8.41 \text{ V V}^{-1}$  ہے۔ اس کا  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  گنا  $8.4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 5.95 \text{ V V}^{-1}$  ہے۔

حقیقت میں پرزوں کی قیمتیں یوں رکھی جائیں گی کہ پست انقطاعی تعدد  $20 \text{ Hz}$  سے کئی گنا کم ہو اور اسی طرح بلند انقطاعی تعدد  $20 \text{ kHz}$  سے کئی گنا زیادہ ہو۔ یوں حقیقی ایمپلیفائر میں آپ انقطاعی تعدد کو  $2 \text{ Hz}$  اور  $200 \text{ kHz}$  رکھیں گے تاکہ پوری تعددی پیٹی پر ایمپلیفائر سے درکار افزائش میسر ہو۔

مساوات 12.10 میں درمیانی تعددی پیٹی پر انقطاعی تعدد سے دور تعدد

$$20 \text{ Hz} \ll f \ll 20000 \text{ Hz}$$

کی صورت میں  $1 \ll \frac{f}{20000}$  اور  $\frac{f}{20} \gg 1$  ہو گا۔ یوں مساوات 12.10 کے بائیں قوسین میں  $1 + \frac{jf}{20} = \frac{jf}{20}$  اور دائیں قوسین میں  $1 + \frac{jf}{20000} = 1$  لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جو درمیانی تعدد پر افزائش ہے۔

$$A_v(s) \approx \frac{j0.421f}{\left(\frac{jf}{20}\right)(1)} = 8.42 \quad (20 \text{ Hz} \ll f \ll 20 \text{ kHz})$$

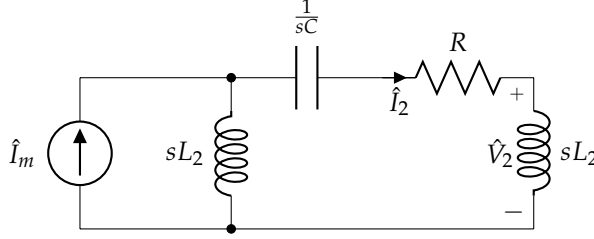
## 12.1 جال

کسی بھی دور میں متعدد پرزے اور تار پائے جاتے ہیں جسے پرزوں اور تاروں کا جال تصور کیا جاسکتا ہے۔ یوں دور کو بوقی جال یا صرف جال<sup>16</sup> بھی کہا جاتا ہے۔ گزشتہ حصے میں ایمپلیفائر کی افزائش دباؤ  $A_v(s)$  کی بات کی گئی جو جال کے مختلف تفاعل  $H(s)$  میں سے ایک ہے۔ جال میں کسی مقام پر رد عمل اور داخلی اشارے کی تناسب کو  $H(s)$  لکھا جاتا ہے۔ چونکہ جال میں عموماً رد عمل کو اس مقام پر نہیں ناپا جاتا جس پر داخلی اشارہ لاگو کیا گیا ہو لہذا  $H(s)$  کو تبدیلی تفاعل<sup>17</sup> کہا جاتا ہے۔ داخلی اشارہ دباؤ یا رد عمل بھی دباؤ یا رد عمل کی صورت میں ممکن ہے لہذا تبدیلی تفاعل کے چار اقسام ممکنہ پائے جاتے ہیں جنہیں جدول 12.1 میں پیش کیا گیا ہے۔

<sup>16</sup> network transfer function  
<sup>17</sup>

جدول 12.1: جال کے تبادلی تفاعل

داخلی	خارجی	تبادلی تفاعل	علامت
دباؤ	دباؤ	افزائش دباؤ	$A_v(s)$
رو	رو	افزائش رو	$A_i(s)$
دباؤ	رو	موصول نما افزائش	$A_g(s)$
رو	دباؤ	دباؤ نما افزائش	$A_r(s)$



شکل 12.7: مثال 12.2 کا دور۔

مثال 12.2: شکل 12.7 میں تبادلی تفاعل  $A_i(s) = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_m}$  اور  $A_r(s) = \frac{\hat{V}_2}{\hat{I}_m}$  حاصل کریں۔

حل: تقسیم رو کے کلیے سے درج ذیل لکھتے ہیں

$$\hat{I}_2 = \frac{sL_1 \hat{I}_m}{sL_1 + \frac{1}{sC} + R + sL_2}$$

جس سے افزائش رو کی تفاعل لکھتے ہیں۔

$$A_i(s) = \frac{\hat{I}_2}{\hat{I}_m} = \frac{s^2 L_1 C}{s^2 (L_1 + L_2) C + sRC + 1}$$

رو  $\hat{I}_2$  جانتے ہوئے  $\hat{V}_2$  لکھتے ہیں

$$\begin{aligned} \hat{V}_2 &= sL_2 \hat{I}_2 \\ &= \frac{s^3 L_1 L_2 C \hat{I}_m}{s^2 (L_1 + L_2) C + sRC + 1} \end{aligned}$$

جس سے مزاحمت نما افزائش لکھتے ہیں۔

$$A_r(s) = \frac{\hat{V}_2}{\hat{I}_m} = \frac{s^3 L_1 L_2 C}{s^2 (L_1 + L_2) C + sRC + 1}$$

## 12.2 صفرا اور قطب

درج بالا مثال میں ہم نے دیکھا کہ تبدیلی تفاعل کو دو سلسلوں کا تناسب  $\frac{A(s)}{B(s)}$  لکھا جاسکتا ہے جن کا متغیر  $s$  ہے۔ چونکہ ادوار میں پرزوں کی قیمت اور تابع یا غیر تابع منبع کی قیمت حقیقی اعداد ہوتے ہیں لہذا ان سلسلوں کے سر حقیقی اعداد ہوں گے۔ یوں کسی بھی جال کا تبدیلی تفاعل درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(12.11) \quad H(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}$$

جہاں شمار کنندہ کثیر رکنی  $m$  درجے کا ہے جبکہ نسب نما کثیر رکنی  $n$  درجے کا ہے۔ مساوات 12.11 کو بذریعہ تجزیہ درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(12.12) \quad H(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)}$$

یہاں غور کریں کہ اگر  $s = -z_1$  ہو تب  $H(s) = 0$  ہو گا۔ اسی طرح اگر  $s = -z_2$  یا  $s = -z_3$  ہو تو  $H(s) = 0$  ہو گا۔ یہی وجہ ہے کہ  $-z_1$  تا  $-z_m$  تفاعل کے صفرو<sup>18</sup> کہلاتے ہیں۔ اس کے برعکس اگر  $s = -p_1$  ہو یا  $s = -p_2$  ہو تب  $H(s)$  کی قیمت لامتناہی ہوگی۔ اسی لئے  $-p_1$  تا  $-p_n$  تفاعل کے قطب<sup>19</sup> کہلاتے ہیں۔ تفاعل کے صفرا اور قطب مخلوط اعداد ہو سکتے ہیں۔ مخلوط اعداد کی صورت میں ان کی جوڑیاں پائی جاتی ہیں جہاں جوڑی کے دونوں اعداد ایک دوسرے کے جوڑی دار مخلوط<sup>20</sup> ہوتے ہیں۔ ایسی جوڑی کے قوسین ضرب کرنے سے حقیقی سروالے کثیر رکنی دیتے ہیں جو ادوار کو ظاہر کر سکتے ہیں۔ مساوات 12.12 کسی بھی خطی اور وقت کے

<sup>18</sup> zeroes

<sup>19</sup> poles

<sup>20</sup> complex conjugate

ساتھ نہ بدلنے والے نظام کے تبادلی تفاعل لکھنے کا انتہائی اہم طریقہ ہے چونکہ اس کے قطبین کو دیکھ کر تفاعل کی خاصیت کے بارے میں جانا جاسکتا ہے۔ ایسے نظام کے تبادلی تفاعل کو عموماً اسی صورت میں لکھا جاتا ہے۔

مساوات 12.12 میں شمار کنندہ سے  $z_1$  تا  $z_m$  اور نسب نما سے  $p_1$  تا  $p_n$  باہر نکالتے اور ترتیب دیتے ہوئے ذیل ملتا ہے

$$H(s) = \frac{K(z_1 z_2 \cdots z_m)(1 + \frac{s}{z_1})(1 + \frac{s}{z_2}) \cdots (1 + \frac{s}{z_m})}{(p_1 p_2 \cdots p_n)(1 + \frac{s}{p_1})(1 + \frac{s}{p_2}) \cdots (1 + \frac{s}{p_n})}$$

جس میں  $K_0 = \frac{K(z_1 z_2 \cdots z_m)}{(p_1 p_2 \cdots p_n)}$  لکھتے ہوئے مساوات کی معیاری شکل ملتی ہے۔

$$(12.13) \quad H(s) = \frac{K_0(1 + \frac{s}{z_1})(1 + \frac{s}{z_2}) \cdots (1 + \frac{s}{z_m})}{(1 + \frac{s}{p_1})(1 + \frac{s}{p_2}) \cdots (1 + \frac{s}{p_n})}$$

مشق 12.1: شکل 12.6-الف کا تبادلی تفاعل مساوات 12.9 میں دیا گیا ہے۔ اس کے صفر اور قطب دریافت کریں۔

جوابات:  $-z_1 = 0 \text{ Hz}$  ،  $-p_1 = -20 \text{ Hz}$  ،  $-p_2 = -20 \text{ kHz}$

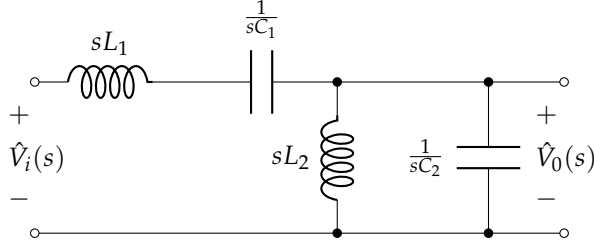
مشق 12.2: شکل 12.6-الف میں داخلی اشارے کو درپیش رکاوٹ دریافت کریں۔

$$\text{جواب: } R_m + \frac{R_i}{1 + sR_i C_i}$$

مشق 12.3: شکل 12.8 میں تبادلی تفاعل  $\frac{\hat{V}_0(s)}{\hat{V}_i(s)}$  حاصل کریں۔

جواب:

$$\frac{\hat{V}_0(s)}{\hat{V}_i(s)} = \frac{s^2 L_2 C_1}{s^4 L_1 L_2 C_1 C_2 + s^2 (L_1 C_1 + L_2 C_2 + L_2 C_1) + 1}$$



شکل 12.8: مثال 12.3 کا دور۔

### 12.3 سائن نمائندگی تجزیہ

بعض اوقات ہم جال کو کسی مخصوص تعدد پر چلاتے ہیں۔ اس کی مثال 50 Hz پر چلنے والا واپڈا کا نظام ہے۔ اس کے برعکس کئی ادوار بدلتی تعدد پر استعمال کئے جاتے ہیں۔ سمعی ایمپلیفائر ایسا دور ہے جو 20 Hz تا 20 kHz کے تعدد پر چلایا جاتا ہے۔ ہم یہاں ادوار کی کارکردگی بالمقابل تعدد میں دلچسپی رکھتے ہیں۔ تبدلی تفاعل مخلوط عدد ہے لہذا اس کو زاویائی طرز میں لکھا جاسکتا ہے

$$(12.14) \quad H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\phi(\omega)}$$

جہاں حتمی مقدار کا تفاعل  $|H(\omega)|$  اور زاویائی تفاعل  $\phi(\omega)$  دونوں تعدد پر منحصر ہیں۔ حتمی مقدار بالمقابل تعدد کے خط کو مقداری خصلت<sup>21</sup> اور زاویہ بالمقابل تعدد کے خط کو زاویائی خصلت<sup>22</sup> کہتے ہیں۔

#### 12.3.1 بوڈا خطوط

افقی محور پر  $\log_{10} \omega$  اور عمودی محور پر  $20 \log_{10} |H(\omega)|$  رکھنے سے مقداری بوڈا خط<sup>23</sup> ملتا<sup>24</sup> ہے۔ تبدلی تفاعل کو دیکھ کر بوڈا خط کھینچا جاتا ہے۔ یہی بوڈا خطوط کی مقبولیت کی وجہ ہے۔ تعدد تابع<sup>25</sup> ادوار مثلاً ایمپلیفائر، فلٹر وغیرہ کے تجزیے اور تخلیق میں بوڈا خطوط نہایت اہم ثابت ہوتے ہیں۔ مقداری بوڈا خط کے عمودی محور کی پیمائش ڈیسی بیل<sup>26</sup>

<sup>21</sup> magnitude characteristic

<sup>22</sup> phase characteristic

<sup>23</sup> Bode plots

<sup>24</sup> ہینڈرک واڈیو نے اس طرز کو دریافت کیا۔

<sup>25</sup> frequency dependent

<sup>26</sup> decibel

dB میں کی جاتی ہے۔ ڈیسی بیل کو بنیادی طور پر آواز کے طاقت کی تناسب ناپنے کے لئے استعمال کیا جاتا تھا جہاں دو طاقتوں کے تناسب کے لاگ  $\log_{10} \frac{P_2}{P_1}$  کو بیل<sup>27</sup> میں ناپا جاتا تھا۔ جیسے ایک میٹر 1 m میں دس ڈیسی میٹر 10 dm ہوتے ہیں، اسی طرح ایک بیل میں دس ڈیسی بیل ہوتے ہیں لہذا ڈیسی بیل کا کلیہ درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$(12.15) \quad \text{ڈیسی بیل میں طاقت کے تناسب کی پیمائش} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1}$$

اگر دونوں طاقت یکساں قیمت کے مزاحمت  $R$  کو مہیا کی جائے تب  $P = I^2 R$  اور  $P = \frac{V^2}{R}$  استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(12.16) \quad \begin{aligned} \text{ڈیسی بیل میں طاقت کے تناسب کی پیمائش} &= 10 \log_{10} \frac{|I_2|^2 R}{|I_1|^2 R} = 20 \log_{10} \frac{|I_2|}{|I_1|} \\ \text{ڈیسی بیل میں طاقت کے تناسب کی پیمائش} &= 10 \log_{10} \frac{|\hat{V}_2|^2 / R}{|\hat{V}_1|^2 / R} = 20 \log_{10} \frac{|\hat{V}_2|}{|\hat{V}_1|} \end{aligned}$$

مساوات 12.16 میں دیے ڈیسی بیل کے کلیے اتنے مقبول ہوئے ہیں کہ غیر یکساں مزاحمت کی صورت میں بھی دباؤ کی تناسب یارو کی تناسب کو انہیں کلیوں سے ڈیسی بیل میں ناپا جاتا ہے۔

مشق 12.4: ایک ایمپلیفائر کو  $P_i = 10 \text{ mW}$  طاقت کا داخلی اشارہ فراہم کیا جاتا ہے جبکہ ایمپلیفائر خارجی جانب سپیکر کو  $P_o = 15 \text{ W}$  طاقت فراہم کرتا ہے۔ ایمپلیفائر کی افزائش طاقت  $A_p = \frac{P_o}{P_i}$  کو ڈیسی بیل میں حاصل کریں۔

جواب:  $A_p = 31.76 \text{ dB}$

مشق 12.5: ایک ایمپلیفائر کی افزائش دباؤ  $A_v = 22 \text{ V V}^{-1}$  ہے۔ اس کی افزائش دباؤ کو ڈیسی بیل میں لکھیں۔



جواب:  $A_v = 26.85 \text{ dB}$

مشق 12.6: سلسلہ وار جڑے  $414 \Omega$  اور  $1000 \Omega$  مزاحمتوں کو  $\hat{V}_i = 100 \text{ V rms}$  کا داخلی اشارہ مہیا کیا جاتا ہے جبکہ  $1 \text{ k}\Omega$  پر خارجی اشارہ  $\hat{V}_0$  ناپا جاتا ہے۔ جال کی افزائش دباؤ کو ڈیسی بیل میں دریافت کریں۔

جواب: خارجی دباؤ  $\hat{V}_0 = \frac{100 \times 1000}{1000 + 414} = 70.72 \text{ V rms}$  ہے جو داخلی دباؤ کے  $0.7072$  گنا ہے۔ دباؤ کی قیمت  $0.7072$  گنا ہونے سے طاقت کی قیمت  $0.5$  گنا رہ جاتی ہے جو  $-3 \text{ dB}$  کے برابر ہے۔

بوڈا مقداری خط کھینچنا چند مثالوں سے سیکھتے ہیں۔ پہلی مثال میں تبادلی تفاعل درج ذیل لیتے ہیں جس میں ایک عدد صفر پایا جاتا ہے۔

$$(12.17) \quad H(\omega) = K(j\omega + z_1)$$

اس کو ترتیب دیتے ہوئے معیاری شکل میں لکھتے ہیں جہاں دوسری قدم پر  $Kz_1 = K_0$  لکھا گیا ہے۔

$$(12.18) \quad \begin{aligned} H(\omega) &= Kz_1 \left( 1 + j\frac{\omega}{z_1} \right) \\ &= K_0 \left( 1 + j\frac{\omega}{z_1} \right) \end{aligned}$$

اس کی حتمی قیمت

$$(12.19) \quad |H(\omega)| = K_0 \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_1^2}}$$

کا  $20 \log_{10} |H(\omega)|$  لیتے ہیں

$$(12.20) \quad 20 \log_{10} |H(\omega)| = 20 \log_{10} K_0 + 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_1^2}}$$

جس میں  $\log_{10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y$  کا استعمال کیا گیا ہے۔

مساوات 12.20 پر غور کریں۔ اس کا پہلا جزو ایک مستقل ہے جو تعدد پر منحصر نہیں ہے۔ اس کو شکل 12.9-الف میں دکھایا گیا ہے۔ مساوات کے دوسرے جزو کو دو مختلف تعدد کے پیوں پر دیکھتے ہیں۔ اگر تعدد کی قیمت  $z_1$  سے بہت کم ہو یعنی  $\omega \ll z_1$  تب  $\frac{\omega^2}{z_1^2} \ll 1$  ہو گا لہذا دوسرے جزو میں  $\frac{\omega^2}{z_1^2}$  کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ ایسا کرنے سے دوسرا جزو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں  $\log_{10} 1 = 0$  کا استعمال کیا گیا ہے۔

$$20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_1^2}} \approx 20 \log_{10} \sqrt{1 + 0} = 0 \text{ dB}$$

شکل 12.9-الف میں  $z_1$  سے بہت کم تعدد پر دوسرا جزو 0 dB کے برابر ہو گا۔ نقطہ  $a$  پر  $\omega = \frac{z_1}{100}$  ہے لہذا اس نقطے پر دوسرا جزو صفر ڈیسی بیل دکھایا گیا ہے۔ اس نقطے کی نشاندہی دائرے سے کی گئی ہے۔ اسی طرح نقطہ  $b$  پر  $\omega = \frac{z_1}{10}$  ہے لہذا یہاں بھی دوسرا جزو صفر ڈیسی بیل کے برابر ہے۔

آئیں اب مساوات 12.20 کے دوسرے جزو کو  $z_1$  سے بہت زیادہ تعدد پر دیکھیں۔ اگر  $\omega \gg z_1$  ہو تب اس جزو میں  $\frac{\omega^2}{z_1^2} \gg 1$  ہو گا لہذا اس کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_1^2}} \approx 20 \log_{10} \sqrt{\frac{\omega^2}{z_1^2}} = 20 \log_{10} \frac{\omega}{z_1}$$

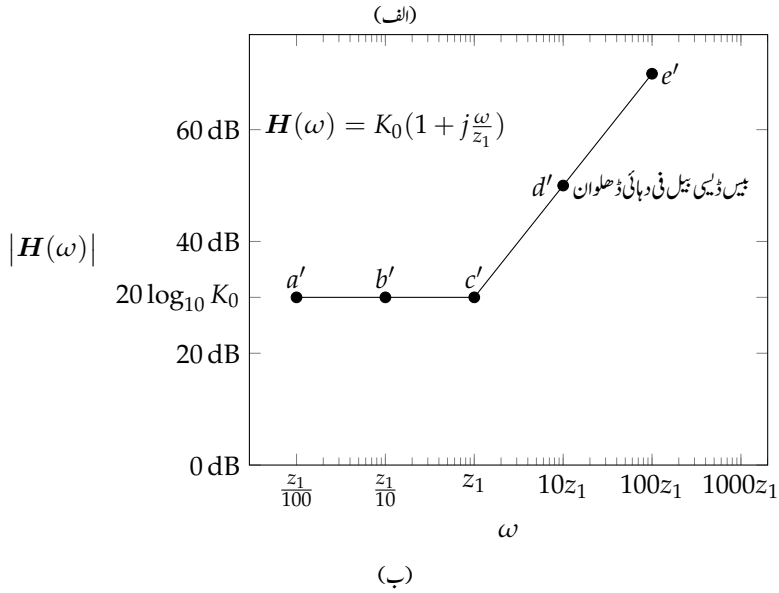
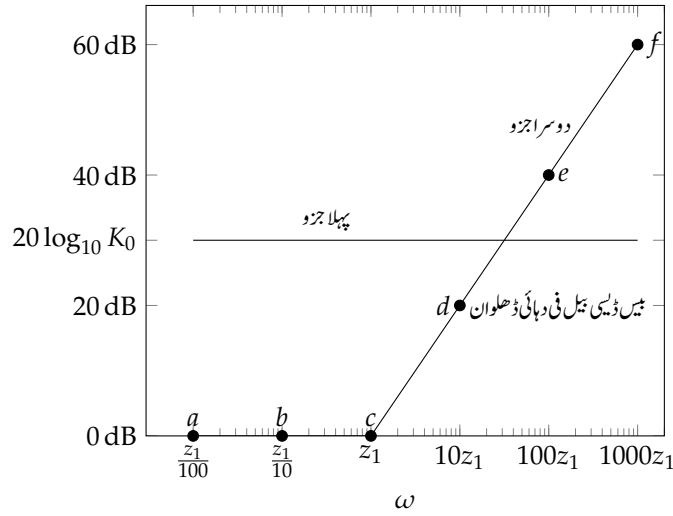
جس کی قیمت  $\omega = z_1$  پر

$$20 \log_{10} \frac{\omega}{z_1} = 20 \log_{10} \frac{z_1}{z_1} = 20 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

اور  $\omega = 10z_1$  پر

$$20 \log_{10} \frac{\omega}{z_1} = 20 \log_{10} \frac{10z_1}{z_1} = 20 \log_{10} 10 = 20 \text{ dB}$$

حاصل ہوتی ہے۔ ان قیمتوں کو شکل 12.9-الف میں نقطہ  $c$  اور  $d$  ظاہر کرتی ہیں۔ اسی طرح  $\omega = 100z_1$  اور  $\omega = 1000z_1$  پر اس جزو کی قیمتیں 40 dB اور 60 dB حاصل ہوتی ہیں جنہیں شکل میں نقطہ  $e$  اور  $f$  ظاہر کرتے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $\omega = z_1$  سے سیدھا خط نکلتا ہے جس کی قیمت  $10z_1$  تعدد پر بڑھ کر 20 dB ہو جاتی ہے۔ یوں نقطہ  $c$  پر تعدد  $z_1$  کے برابر ہے اور مساوات 12.20 کے دوسرے جزو کی قیمت 0 dB ہے۔ تعدد دس گنا یعنی  $\omega = 10z_1$  کرنے سے اس جزو کی قیمت 20 dB ہو جاتی ہے جسے نقطہ  $d$  ظاہر کرتا ہے۔ تعدد مزید



شکل 12.9: ایک عدد صفر والے تبادلی تعامل کا مقداری بوڈا خط۔

دس گنا بڑھانے  $\omega = 100z_1$  سے اس جزو کی قیمت مزید 20 dB بڑھ کر 40 dB ہو جاتی ہے جس سے نقطہ  $e$  حاصل ہوتا ہے۔ ہم کہتے ہیں کہ  $\omega = z_1$  تعداد سے شروع ہوتے اس خط کی ڈھلوان بیس ڈیسی بیل فی دہائی کے برابر ہے۔

مساوات 12.20 کے اجزاء کا مجموعہ لیتے ہوئے شکل 12.9-ب حاصل ہوتا ہے۔ شکل-الف میں  $\omega = \frac{z_1}{100}$  تعداد پر پہلا جزو  $20 \log_{10} K_0$  اور دوسرا جزو 0 dB کے برابر ہے لہذا ان کا مجموعہ  $20 \log_{10} K_0$  کے برابر ہو گا جسے شکل-ب میں نقطہ  $a'$  دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح بقایا تعداد پر مجموعہ لیتے ہوئے  $b'$ ،  $c'$ ،  $d'$  اور  $e'$  نقطے حاصل کئے جاتے ہیں۔

شکل 12.9-ب کو دیکھتے ہوئے درج بالا تمام قصبے کا نچوڑ یہ ہے۔ صفر تعداد سے  $z_1$  تعداد تک مساوات 12.18 کے متبادلی تفاعل کی مقدار  $20 \log_{10} K_0$  رہتی ہے جبکہ  $z_1$  تعداد سے اس کی مقدار بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھنے شروع ہو جاتی ہے اور مسلسل اسی شرح سے بڑھتی ہے۔ یوں مساوات 12.20 سے  $K_0$  اور  $z_1$  حاصل کرتے ہوئے مقداری بوڈا خط کھینچا جاسکتا ہے۔

شکل 12.10 میں مساوات 12.20 کے دوسرے جزو  $20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_1^2}}$  کو ہلکی سیاہی میں کھینچا گیا ہے اور ساتھ ہی اس کا بوڈا خط گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ آئیں دونوں کی قیمتیں کونے پر حاصل کریں۔ کونا  $\omega = z_1$  پر پایا جاتا ہے جس پر اس جزو کی اصل قیمت درج ذیل ہے

$$(12.21) \quad 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_1^2}} = 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{z_1^2}{z_1^2}} = 20 \log_{10} \sqrt{2} = 3 \text{ dB}$$

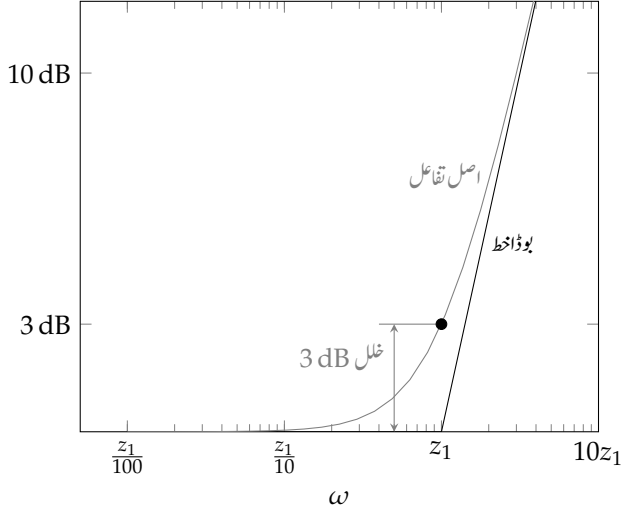
جبکہ بوڈا خط کی قیمت اس تعداد پر 0 dB ہے۔ یوں بوڈا خط کے قیمت میں کونے پر 3 dB کا خلل پایا جاتا ہے جو بوڈا خط اور اصل تفاعل کے قیمت میں زیادہ سے زیادہ فرق ہے۔ شکل 12.10 میں اس خلل کی وضاحت کی گئی ہے۔ اس شکل میں یہ بھی دیکھا جاسکتا ہے کہ کونے سے دس گنا کم تعداد  $\omega = \frac{z_1}{10}$  یا دس گنا زیادہ تعداد  $\omega = 10z_1$  پر اصل تفاعل اور بوڈا خط میں فرق قابل نظر انداز ہوتا ہے۔

آئیں اب درج ذیل متبادلی تفاعل لیتے ہیں جس میں ایک قطب پایا جاتا ہے۔

$$(12.22) \quad H(\omega) = \frac{K}{j\omega + p_1}$$

اس کو ترتیب دے کر لکھتے ہیں جہاں  $K_0 = \frac{K}{p_1}$  لکھا گیا ہے۔

$$(12.23) \quad H(\omega) = \frac{K}{p_1 \left(1 + j\frac{\omega}{p_1}\right)} = \frac{K_0}{1 + j\frac{\omega}{p_1}}$$



شکل 12.10: کوئے پر بوڈا خط میں 3 dB خلل پایا جاتا ہے۔

اس کی حتمی قیمت حاصل کرتے ہیں

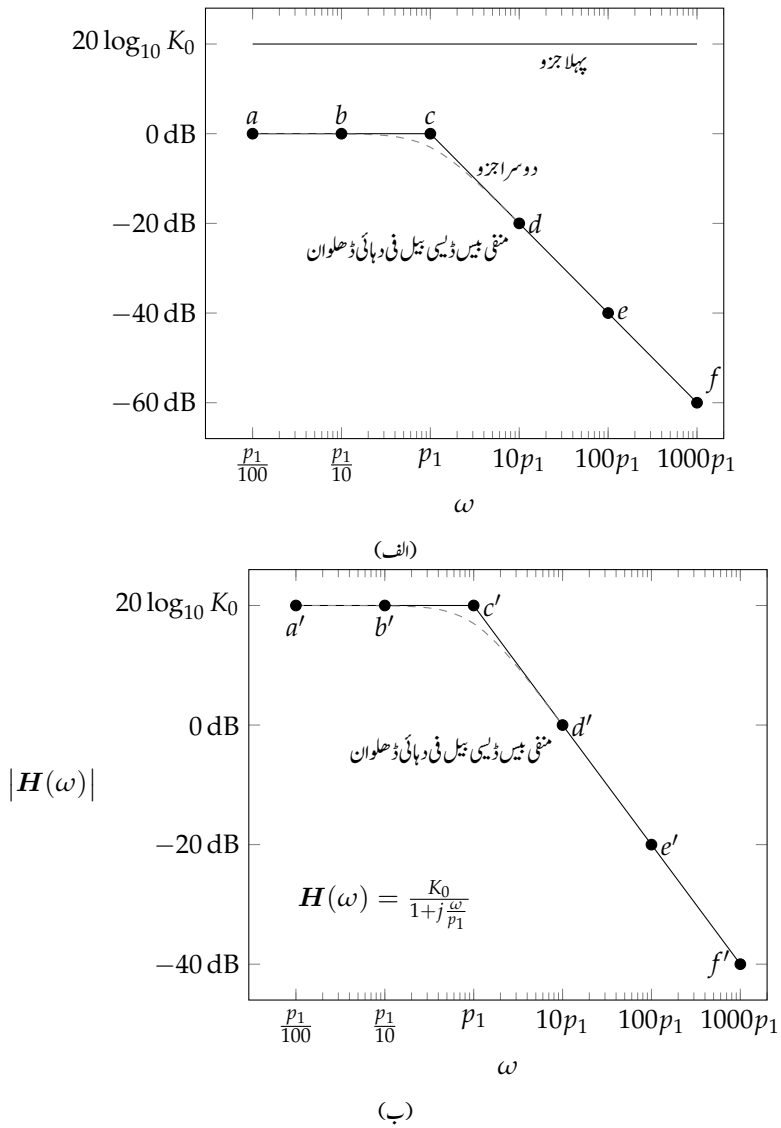
$$(12.24) \quad |H(\omega)| = \frac{K_0}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{p_1^2}}}$$

جس کو  $20 \log_{10} |H(\omega)|$  صورت میں لکھتے ہیں

$$(12.25) \quad 20 \log_{10} |H(\omega)| = 20 \log_{10} K_0 - 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{p_1^2}}$$

جہاں  $\log_{10} \frac{x}{y} = \log_{10} x - \log_{10} y$  کا استعمال کیا گیا ہے۔

مساوات 12.25 کے دو اجزاء پائے جاتے ہیں جنہیں شکل 12.11-الف میں دکھایا گیا ہے جبکہ ان کے مجموعے کو شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ  $p_1$  سے کم تعدد پر تبادلی تفاعل کی حتمی قیمت  $20 \log_{10} K_0$  رہتی ہے جبکہ  $p_1$  تعدد سے شروع ہو کر اس کی قیمت مسلسل منفی بیس ڈیسی بیل فی دہائی تبدیل ہوتی ہے۔ شکل-الف میں ہلکی سیاہی میں نقطہ دار لکیر سے اصل دوسرا جزو بھی دکھایا ہے جہاں بوڈا خط میں -3 dB کا خلل واضح ہے۔ شکل-ب میں پورا تفاعل اور پورے تفاعل کا بوڈا خط دکھائے گئے ہیں۔ بوڈا خط میں کوئے پر منفی بیس ڈیسی بیل کا خلل پایا جاتا ہے۔ بوڈا



شکل 12.11: ایک عدد قطب والے تباہی تفاعل کا مقداری بودا خط۔

خط اور اصل تفاعل میں زیادہ سے زیادہ خلل کو نے پر پایا جاتا ہے۔ اگر کو نا تفاعل کے صفر پر ہو تب خلل 3 dB ہوتا ہے اور اگر کو نا تفاعل کے قطب کی وجہ سے ہو تب خلل -3 dB ہوتا ہے۔

مثال 12.3: تبادلی تفاعل  $H(\omega) = 10(j\omega + 10)$  کا بوڈا خط کھینچیں۔

حل: اس کو ترتیب دیتے ہوئے معیاری شکل میں لکھتے ہیں۔

$$H(\omega) = 100 \left( 1 + j \frac{\omega}{10} \right)$$

یوں نیم لاگ محور پر خط کھینچتے ہوئے  $10 \text{ rad s}^{-1}$  سے کم تعدد پر تفاعل کی حتمی قیمت  $20 \log_{10} 100 = 40 \text{ dB}$  ہو گی جبکہ اس تعدد سے زیادہ تعدد پر حتمی قیمت بتدریج بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھے گی۔ ان نتائج کو شکل 12.12 میں دکھایا گیا ہے۔ نقطہ  $a$  پر تعدد  $10 \text{ radian/s}$  اور تفاعل کی حتمی قیمت  $40 \text{ dB}$  ہے۔ تعدد کو دس گنا کرنے سے  $\omega = 100 \text{ rad s}^{-1}$  حاصل ہوتا ہے جس پر تفاعل کی حتمی مقدار بڑھ پر  $40 \text{ dB} + 20 \text{ dB} = 60 \text{ dB}$  ہو جاتی ہے جسے نقطہ  $b$  سے ظاہر کیا گیا ہے۔ ان دو نقطوں سے گزرتی سیدھی خط کھینچی گئی ہے جس کی ڈھلوان بیس ڈیسی بیل فی دہائی ہو گی۔

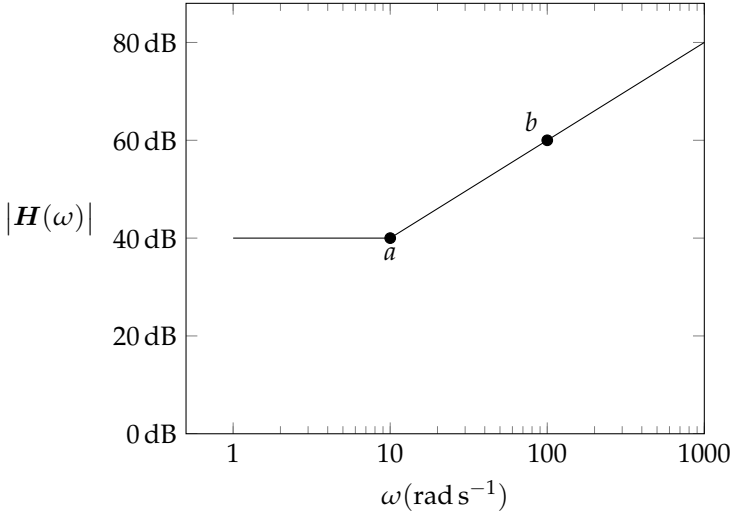
مثال 12.4: تبادلی تفاعل  $H(\omega) = \frac{1000(j\omega + 100)}{j\omega + 10000}$  کا مقداری بوڈا خط کھینچیں۔

حل: اس کو معیاری شکل میں لکھتے ہوئے

$$H(\omega) = 10 \left( \frac{1 + j \frac{\omega}{100}}{1 + j \frac{\omega}{10000}} \right)$$

حتمی قیمت کو ڈیسی بیل میں لکھتے ہیں۔

$$20 \log_{10} |H(\omega)| = 20 \log_{10} 10 + 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100^2}} - 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{10000^2}}$$



شکل 12.12: مثال 12.3 کا دور۔

درج بالا مساوات کے تینوں اجزاء کو شکل 12.13-الف میں اور ان کے مجموعے کو شکل 12.13-ب میں دکھایا گیا ہے۔ درج بالا مساوات کو دیکھ کر بوڈا مقداری خط کھینچا جاتا ہے جہاں  $\omega = 100 \text{ rad s}^{-1}$  سے کم تعدد پر مقدار  $20 \log_{10} 10 = 20 \text{ dB}$  ہے، ٹھیک  $20 \log_{10} 10 = 20 \text{ dB}$  تعدد پر مقدار کی قیمت بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھنا شروع ہو جاتی ہے۔ تعدد  $\omega = 10 \text{ rad s}^{-1}$  سے زیادہ تعدد پر دوسرے جزو کے مثبت بیس ڈیسی بیل فی دہائی کو تیسرے جزو کا منفی بیس ڈیسی بیل فی دہائی مکمل طور پر ختم کرتا ہے لہذا بوڈا خط اسی قیمت پر برقرار رہتا ہے۔ شکل میں ہلکی سیاہی میں نقطہ دار لکیر سے اصل تفاعل کا خط بھی دکھایا گیا ہے جہاں بوڈا خط کے کونوں پر  $\pm 3 \text{ dB}$  خلل واضح ہے۔

آئیں اب تبادلی تفاعل کے زاویائی بوڈا خط<sup>28</sup> کھینچنا سیکھیں۔ ہم درج ذیل تفاعل کو مثال بناتے ہیں

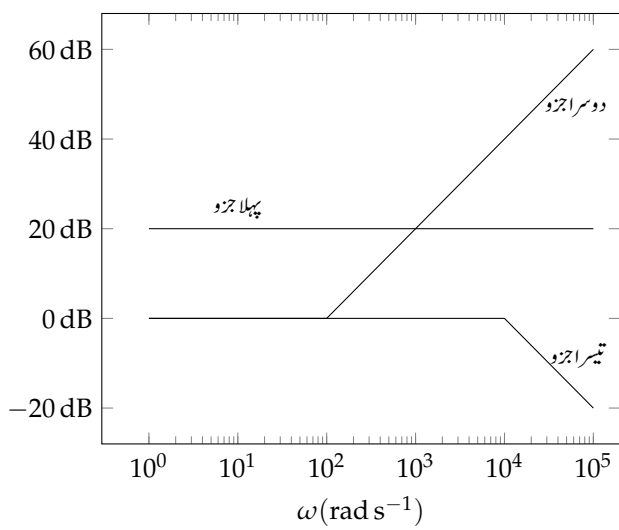
$$(12.26) \quad H(\omega) = K_0 \left( 1 + j \frac{\omega}{z_1} \right)$$

جس کا زاویہ ذیل ہے

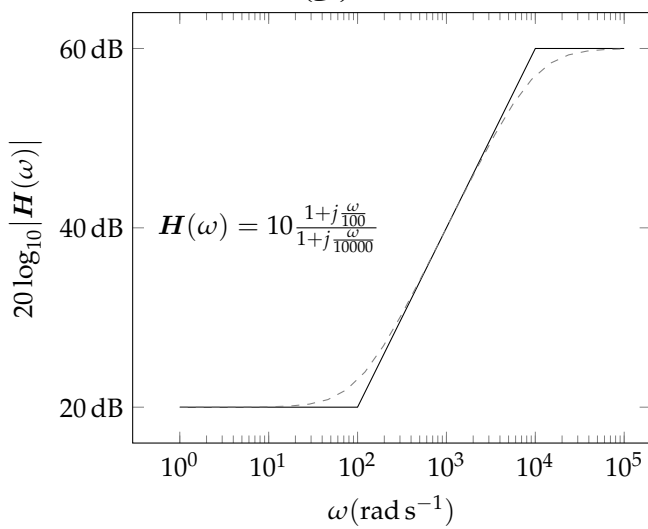
$$(12.27) \quad \angle H(\omega) = \angle \tan^{-1} \frac{\omega}{z_1}$$

Bode phase plot<sup>28</sup>



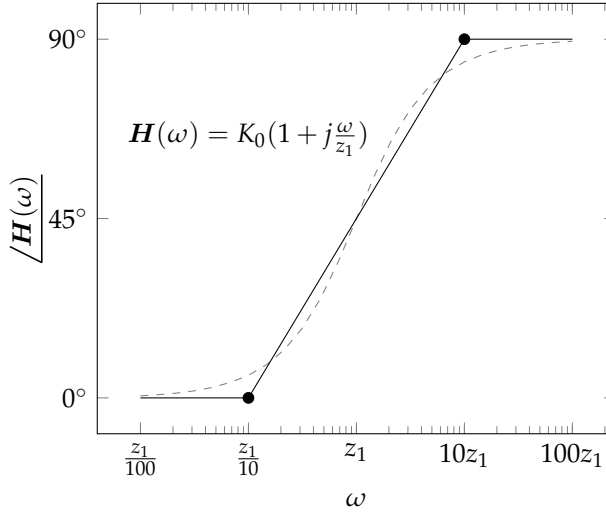


(الف)



(ب)

شکل 12.13: مثال 12.4 کا پوڈ انظر۔



شکل 12.14: ایک صفروالے تفاعل کا بوڈا زوایائی خط۔

جس کو شکل 12.14 میں ہلکی سیاہی سے نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ عین کونے ( $\omega = z_1$ ) پر زاویہ

$$\angle H(z_1) = \angle \tan^{-1} \frac{\omega}{z_1} = \angle \tan^{-1} \frac{z_1}{z_1} = 45^\circ$$

حاصل ہوتا ہے جبکہ کونے سے دس گنا زیادہ تعدد ( $\omega = 10z_1$ ) پر

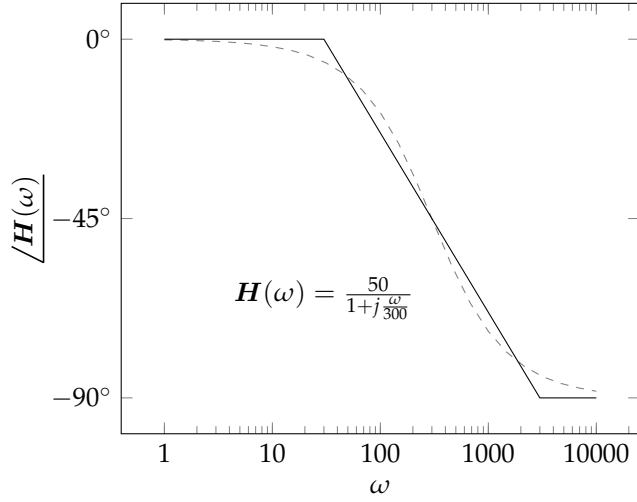
$$\angle H(10z_1) = \angle \tan^{-1} \frac{10z_1}{z_1} = 84.3^\circ$$

اور کونے سے دس گنا کم تعدد ( $\omega = \frac{z_1}{10}$ ) پر

$$\angle H(10z_1) = \angle \tan^{-1} \frac{\frac{z_1}{10}}{z_1} = 5.7^\circ$$

زاویے حاصل ہوتے ہیں۔ بوڈا زوایائی خط میں اس حقیقت کو استعمال کرتے ہوئے کونے سے دس گنا کم تعدد ( $\omega = \frac{z_1}{10}$ ) پر  $0^\circ$  اور کونے سے دس گنا زیادہ تعدد ( $\omega = 10z_1$ ) پر  $90^\circ$  چنتے ہوئے انہیں سیدھی لکیر سے ملایا جاتا ہے جبکہ  $0^\circ < \omega < \frac{z_1}{10}$  پر زاویہ  $0^\circ$  اور  $\omega > 10z_1$  پر زاویہ  $90^\circ$  رکھا جاتا ہے۔ شکل 12.14 میں سیدھے خطوط پر مبنی بوڈا زوایائی خط کو گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 12.5: تبدیلی تفاعل  $H(\omega) = \frac{50}{1 + j\frac{\omega}{300}}$  کا زوایائی بوڈا خط کھینچیں۔



شکل 12.15: ایک قطب والے تفاعل کا بوڈا زاویائی خط۔

حل: اس تفاعل کا زاویہ ذیل ہے جہاں کونا  $\omega = 300 \text{ rad s}^{-1}$  پر پایا جاتا ہے۔

(12.28)

$$\angle H(\omega) = \frac{1}{\angle \tan^{-1} \frac{\omega}{300}} = \angle -\tan^{-1} \frac{\omega}{300}$$

اس تفاعل کو شکل 12.15 میں ہلکی سیاہی میں نقطہ دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔

بوڈا خط میں کونے سے دس گنا کم تعدد پر زاویہ  $0^\circ$  اور کونے سے دس گنا زیادہ تعدد پر زاویہ  $-90^\circ$  چنتے ہوئے ان نقطوں کو سیدھے خط سے ملایا جاتا ہے۔ یوں  $\omega = 30 \text{ rad s}^{-1}$  پر  $0^\circ$  اور  $\omega = 3000 \text{ rad s}^{-1}$  پر  $-90^\circ$  چنتے ہوئے انہیں سیدھے لکیر سے ملایا گیا ہے۔ مزید  $\omega = 30 \text{ rad s}^{-1}$  سے کم تعدد پر زاویہ  $0^\circ$  ہی رکھا جاتا ہے جبکہ  $\omega = 3000 \text{ rad s}^{-1}$  سے زیادہ تعدد پر زاویہ  $-90^\circ$  رکھا جاتا ہے۔ بوڈا زاویائی خط کو شکل 12.15 میں گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔

یوں کونے  $(\omega = 300 \text{ rad s}^{-1})$  پر، کونے سے دس گنا زیادہ تعدد  $(\omega = 3000 \text{ rad s}^{-1})$  پر اور کونے سے دس گنا کم تعدد  $(\omega = 30 \text{ rad s}^{-1})$  پر زاویے درج ذیل حاصل ہوتے ہیں۔

$$\angle H(200) = \angle -\tan^{-1} \frac{300}{300} = \angle -45^\circ$$

$$\angle H(2000) = \angle -\tan^{-1} \frac{3000}{300} = \angle -84.3^\circ$$

$$\angle H(20) = \angle -\tan^{-1} \frac{30}{300} = \angle -5.7^\circ$$

مثال 12.6: تبادلی تفاعل  $H(\omega) = \frac{j10\omega}{(1+j\frac{\omega}{100})(1+j\frac{\omega}{10000})}$  کا مقداری بوڈا خط کھینچیں۔

حل: اس تفاعل کی حتمی قیمت

$$|H(\omega)| = \frac{10\omega}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100^2}} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{10000^2}}}$$

کو ڈیسی بیل میں لکھتے ہیں۔

$$(12.29) \quad 20 \log_{10} 10 + 20 \log_{10} \omega - 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{100^2}} - 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{10000^2}}$$

مساوات 12.29 کا پہلا رکن 20 dB کا مستقل ہے۔ اس کا دوسرا رکن  $\omega = 1 \text{ rad s}^{-1}$  پر 0 dB کے برابر ہے جبکہ اس تعداد سے زیادہ تعداد پر بتدریج بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھتا ہے۔ تیسرے اور چوتھے اراکان کے بوڈا خط بالترتیب  $100 \text{ rad s}^{-1}$  اور  $10 \text{ krad s}^{-1}$  تعداد پر منفی بیس ڈیسی بیل فی دہائی گھٹنا شروع ہوتے ہیں۔ ان تمام اراکان کو شکل 12.16-الف اور ان کا مجموعہ شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔

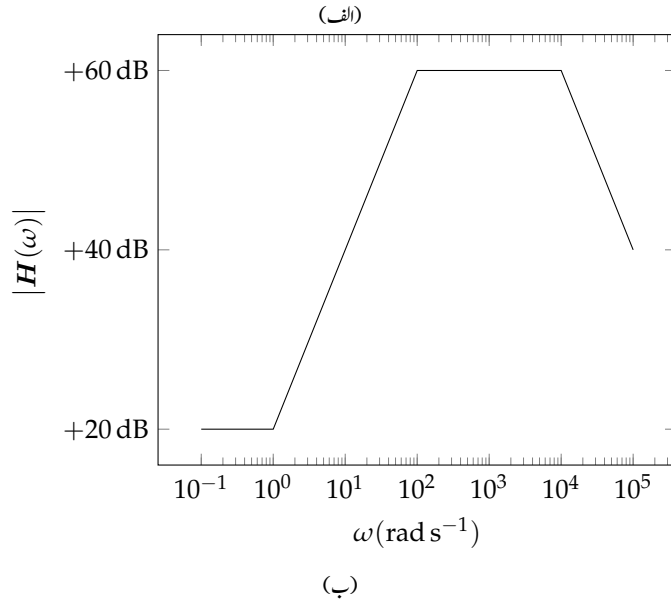
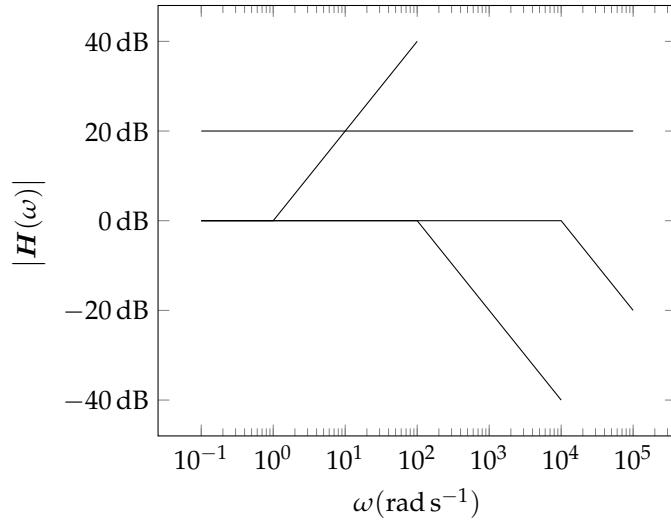
ہمیں عموماً درمیانی تعداد پر بوڈا خط میں زیادہ دلچسپی ہوتی ہے۔ ایسی صورت میں بوڈا مقداری خط درمیانی تعداد  $100 \text{ rad s}^{-1} < \omega < 10 \text{ krad s}^{-1}$  سے شروع کرنا بہتر ثابت ہوتا ہے۔ دونوں کونوں سے دور یعنی  $\omega \ll 10 \text{ krad s}^{-1}$  اور  $\omega \gg 100 \text{ rad s}^{-1}$  پر  $1 + \frac{\omega^2}{100^2} \approx \frac{\omega^2}{100^2}$  اور  $1 + \frac{\omega^2}{10000^2} \approx 1$  لکھتے ہوئے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$|H(\omega)| = \frac{10\omega}{\left(\sqrt{\frac{\omega^2}{100^2}}\right) (\sqrt{1})} = 1000$$

لہذا درمیانی تعدادی پٹی پر ڈیسی بیل میں مقدار درج ذیل ہوگی

$$20 \log_{10} |H(\omega)| = 20 \log_{10} 1000 = 60 \text{ dB}$$

جسے شکل 12.16-ب میں  $\omega = 100 \text{ rad s}^{-1}$  تا  $10 \text{ krad s}^{-1}$  دکھایا گیا ہے۔ چونکہ حقیقت میں پست تعدادی کونے سے کم تعداد پر مقدار مسلسل بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھتے ہوئے عین  $\omega = 100 \text{ rad s}^{-1}$  پر 60 dB تک



شکل 12.16: ایک صفر اور دو قطب والے تفاعل کا بوڈا مقدار کی خط۔

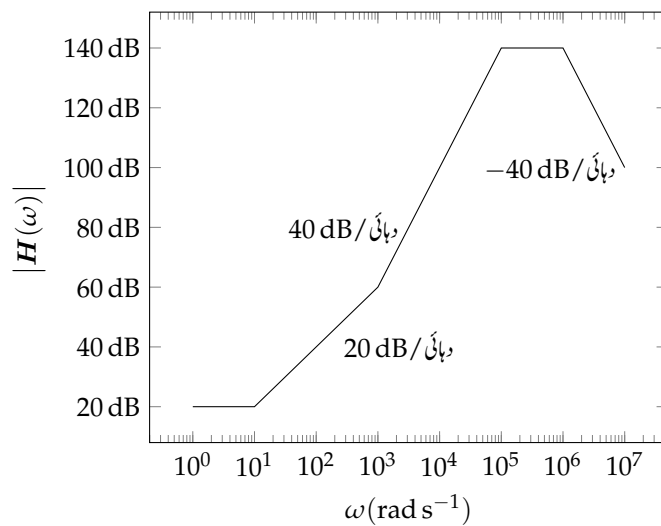
پہنچتی ہے لہذا پست تعددی کونے سے بیس ڈیسی بیل فی دہائی ڈھلوان کا خط کھینچیں۔ اسی طرح بلند تعدد کونے پر بھی بیس ڈیسی بیل فی دہائی ڈھلوان کا خط کھینچیں۔ یوں مکمل بوڈا خط حاصل ہو گا۔

مثال 12.7: تبدیلی تفاعل  $H(\omega) = \frac{10(1+j\frac{\omega}{10})(1+j\frac{\omega}{1000})}{(1+j\frac{\omega}{100000})^2(1+j\frac{\omega}{1000000})^2}$  کا مقداری بوڈا خط کھینچیں۔

حل: تفاعل کی مقدار کو ڈیسی بیل میں لکھتے ہیں۔ ان کا مجموعہ شکل 12.17 میں دکھایا گیا ہے۔

$$20 \log_{10} |H(\omega)| = 20 \log_{10} 10 + 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{10^2}} + 20 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{10^6}} \\ - 40 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{10^{10}}} - 40 \log_{10} \sqrt{1 + \frac{\omega^2}{10^{12}}}$$

یہاں  $10 \text{ rad s}^{-1}$  پر درج بالا مساوات کا دوسرا جزو بیس ڈیسی بیل فی دہائی بڑھنا شروع ہو جاتا ہے جبکہ تیسرا جزو اسی شرح سے  $1000 \text{ rad s}^{-1}$  پر بڑھنا شروع ہوتا ہے۔ یوں ان کا مجموعہ لیتے ہوئے  $1000 \text{ rad s}^{-1}$  تعدد سے خط کی ڈھلوان  $40 \text{ dB}$  فی دہائی ہوگی۔ اسی طرح  $100 \text{ krad s}^{-1}$  پر چھوٹا جزو  $40 \text{ dB}$  فی دہائی سے گھٹنا شروع ہوتا ہے جو دوسرے اور تیسرے اجزاء کو ختم کرتا ہے لہذا بوڈا خط برقرار  $140 \text{ dB}$  پر رہتا ہے۔ آخر کار  $1 \text{ Mrad s}^{-1}$  پر پانچواں جزو چالیس ڈیسی بیل فی دہائی سے گھٹنا شروع ہوتا ہے۔



شکل 12.17: مثال 12.7 کا مقدار ی بوڈا خط۔