برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

باب 9

برقرار برقی طاقت

9.1 لمحاتی طاقت

شکل 9.1 میں بوجھ Z کو بدلتی رو منبع طاقت فراہم کرتا ہے۔اس عمومی دور کے برقرار دباو اور برقرار رو درج ذیل لکھے جا سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned} v(t) &= V_0 \cos(\omega t + \phi_v) \\ i(t) &= I_0 \cos(\omega t + \phi_i) \end{aligned} \tag{9.1}$$

یوں کسی بھی لمحہ بوجھ کو منتقل طاقت درج ذیل ہو گا

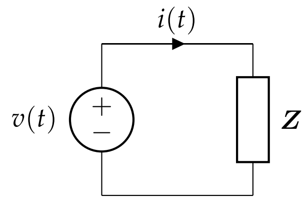
$$\begin{aligned} p(t) &= v(t)i(t) \\ &= V_0 I_0 \cos(\omega t + \phi_v) \cos(\omega t + \phi_i) \end{aligned} \tag{9.2}$$

جس میں

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)}{2} \tag{9.3}$$

استعمال کرتے ہوئے

$$p(t) = \frac{V_0 I_0}{2}\left[\cos(\phi_v - \phi_i) + \cos(2\omega t + \phi_v + \phi_i)\right] \tag{9.4}$$



شکل 9.1: بدلتی رو دور۔

ملتا ہے جہاں $\alpha = \omega t + \phi_v$ اور $\beta = \omega t + \phi_i$ لئے گئے ہیں۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لمحاتی طاقت دو اجزاء کا مجموعہ ہے۔پہلا جزو مستقل طاقت ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتا جبکہ دوسرا جزو دگنی تعدد کا بدلتی رو طاقت ہے۔

مثال 9.1: شکل 9.1 میں برقرار دباو $v(t) = 15\cos(100t + 45^\circ)\,\mathrm{V}$ اور $Z = 5\underline{/20^\circ}\,\Omega$ ہیں۔بوجھ کو منتقل لمحاتی طاقت دریافت کریں۔

حل: دوری سمتیات استعمال کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\hat{I} &= \frac{15\underline{/45^\circ}}{5\underline{/20^\circ}} \\
&= 3\underline{/25^\circ}\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

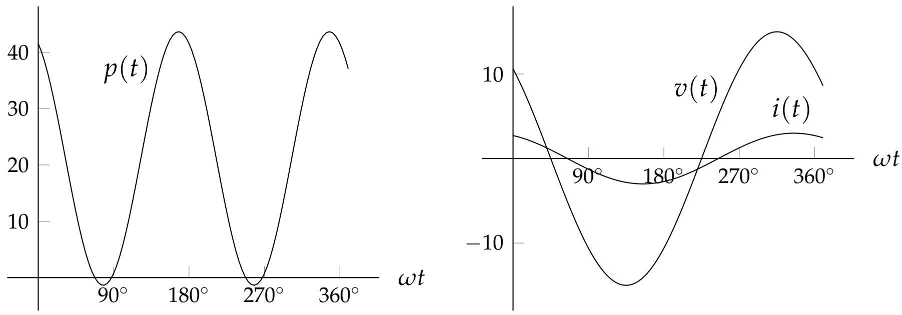
یعنی

$$
i(t) = 3\cos(100t + 25^\circ)\,\mathrm{A}
$$

لکھا جا سکتا ہے۔یوں مساوات 9.4 سے لمحاتی طاقت درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
p(t) &= 22.5\left[\cos 20^\circ + \cos(200t + 70^\circ)\right] \\
&= 21.143 + 22.5\cos(200t + 70^\circ)\,\mathrm{W}
\end{aligned}
$$

دباو، رو اور طاقت کے خط شکل 9.2 میں دکھائے گئے ہیں۔درج بالا مساوات میں $21.143\,\mathrm{W}$ مستقل طاقت ہے جو وقت کے ساتھ تبدیل نہیں ہوتا جبکہ $22.5\cos(200t + 70^\circ)\,\mathrm{W}$ بدلتی رو طاقت ہے جس کی تعدد $200\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ ہے۔



شکل 9.2: مثال 9.1 کے اشکال۔

مثال 9.2: شکل 9.1 میں $v(t) = V_0 \cos(\omega t + \phi_v)\,\mathrm{V}$ اور $\boldsymbol{Z} = Z_0\underline{/\phi_z}\,\Omega$ ہیں۔رو دریافت کریں۔

حل: دوری سمتیات استعمال کرتے ہوئے

$$
\begin{aligned}
\hat{I} &= \frac{V_0\underline{/\phi_v}}{Z_0\underline{/\phi_z}} \\
&= \frac{V_0}{Z_0}\underline{/\phi_v - \phi_z}
\end{aligned}
$$

لکھا جا سکتا ہے جس سے وقتی دائرہ کار میں رو درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$
i(t) = \frac{V_0}{Z_0}\cos(\omega t + \phi_v - \phi_z) \tag{9.5}
$$

مساوات 9.1 میں دیے عمومی رو کے ساتھ موازنہ کرتے ہوئے آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ϕ_i در حقیقت میں $\phi_v - \phi_z$ کے برابر ہے جسے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\phi_v - \phi_i = \phi_z \tag{9.6}
$$

9.2 اوسط طاقت

دہراتے تفاعل (مثلاً سائن نما تفاعل) کے ایک دوری عرصے پر تکمل کو دوری عرصے سے تقسیم کرنے سے تفاعل کی اوسط قیمت حاصل ہوتی ہے۔یوں مساوات 9.1 میں دیے دباو اور رو کی صورت میں بوجھ کو منتقل اوسط طاقت درج ذیل ہو گی

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{V_0 I_0}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(\omega t+\phi_v)\cos(\omega t+\phi_i)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{9.7}$$

جہاں t_0 کوئی بھی لمحہ ہو سکتا ہے جبکہ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ دباو یا رو کا دوری عرصہ ہے۔حقیقت میں ہم ایک دوری عرصے کی بجائے n مکمل دوری عرصے پر تکمل لیتے ہوئے n دوری عرصے سے تقسیم کرتے ہوئے بھی اوسط قیمت حاصل کر سکتے ہیں۔یوں اوسط طاقت درج ذیل بھی لکھی جا سکتی ہے۔

$$P = \frac{V_0 I_0}{nT}\int_{t_0}^{t_0+nT} \cos(\omega t+\phi_v)\cos(\omega t+\phi_i)\,\mathrm{d}t \tag{9.8}$$

مساوات 9.4 کی مدد سے مساوات 9.7 درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$\begin{aligned}P &= \frac{V_0 I_0}{2T}\int_{t_0}^{t_0+T} \left[\cos(\phi_v-\phi_i)+\cos(2\omega t+\phi_v+\phi_i)\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{V_0 I_0}{2T}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(\phi_v-\phi_i)\,\mathrm{d}t + \frac{V_0 I_0}{2T}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(2\omega t+\phi_v+\phi_i)\,\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{9.9}$$

درج بالا تکمل کے دو اجزاء کو باری باری حل کرتے ہیں۔پہلا جزو مستقل ہے لہٰذا اس کو تکمل کے باہر لکھتے ہوئے حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\frac{V_0 I_0}{2T}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(\phi_v-\phi_i)\,\mathrm{d}t &= \frac{V_0 I_0}{2T}\cos(\phi_v-\phi_i)\int_{t_0}^{t_0+T}\mathrm{d}t \\ &= \frac{V_0 I_0}{2T}\cos(\phi_v-\phi_i)t\Big|_{t_0}^{t_0+T} \\ &= \frac{V_0 I_0}{2}\cos(\phi_v-\phi_i)\end{aligned}$$

اب مساوات 9.9 کے دوسرے جزو کو حل کرتے ہیں

$$\begin{aligned}\frac{V_0 I_0}{2T}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(2\omega t+\phi_v+\phi_i)\,\mathrm{d}t &= \frac{V_0 I_0}{2T}\frac{\sin(2\omega t+\phi_v+\phi_i)}{2\omega}\Big|_{t_0}^{t_0+T} \\ &= 0\end{aligned}$$

جہاں $\sin\alpha = \sin(\alpha + T)$ کا استعمال کیا گیا ہے۔یوں مساوات 9.9 سے درج ذیل اوسط طاقت حاصل ہوتا ہے۔

$$P = \frac{V_0 I_0}{2}\cos(\phi_v - \phi_i) \tag{9.10}$$

چونکہ $\cos(\alpha) = \cos(-\alpha)$ کے برابر ہے لہٰذا درج بالا مساوات میں کوسائن کا دلیل $\phi_v - \phi_i$ یا $\phi_i - \phi_v$ لکھا جا سکتا ہے۔مساوات 9.6 کو استعمال کرتے ہوئے درج بالا مساوات کو دوبارہ لکھتے ہیں۔

$$P = \frac{V_0 I_0}{2}\cos\phi_z \tag{9.11}$$

خالص مزاحمتی رکاوٹ $\boldsymbol{Z} = R\underline{/0^\circ}$ کا زاویہ ہٹاو 0° ہوتا ہے لہٰذا $\cos 0^\circ = 1$ لیتے ہوئے مزاحمتی بوجھ کا طاقت

$$P_{\text{مزاحمتی}} = \frac{V_0 I_0}{2} \tag{9.12}$$

ہو گا جہاں V_0 سے مراد مزاحمت کے دباو کا حیطہ ہے۔قانون اوہم سے درج بالا کو درج ذیل صورتوں میں بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$P_{\text{مزاحمتی}} = \frac{I_0^2 R}{2} \tag{9.13}$$

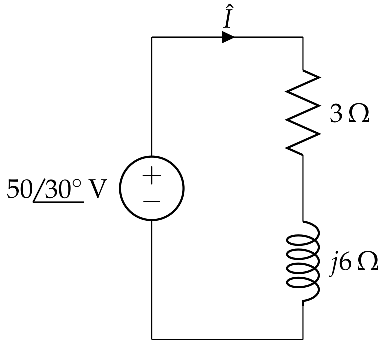
$$P_{\text{مزاحمتی}} = \frac{V_0^2}{2R} \tag{9.14}$$

درج بالا تینوں مساوات کا یک سمتی رو میں مزاحمتی ضیاع کے مساوات کے ساتھ موازنہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ موجودہ تینوں مساوات کے نسب نما میں دو (2) کا اضافی عدد پایا جاتا ہے جس پر حصہ 9.4 میں تبصرہ کیا جائے گا۔

امالی متعاملیت کی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}_L = X_L\underline{/90^\circ}$ جبکہ برق گیر متعاملیت کی رکاوٹ $\boldsymbol{Z}_C = X_C\underline{/-90^\circ}$ ہوتی ہے۔چونکہ $\cos(\mp 90^\circ) = 0$ ہوتا ہے لہٰذا غیر مزاحمتی رکاوٹ کی طاقت صفر ہو گی۔

$$P_{\text{متعاملی}} = 0 \tag{9.15}$$

چونکہ خالص متعامل پرزوں کو صفر اوسط طاقت منتقل ہوتی ہے لہٰذا انہیں بے ضیاع پرزے[1] کہتے ہیں۔دور کا متعامل حصہ، دوری عرصے کے کچھ حصے میں دور سے طاقت حاصل کرتے ہوئے ذخیرہ کرتا ہے جبکہ دوری عرصے کے کسی دوسرے حصے میں اسی طاقت کو دور کو واپس کرتا ہے۔



شکل 9.3: مثال 9.3 کا دور۔

مثال 9.3: شکل 9.3 میں رکاوٹ کی اوسط طاقت دریافت کریں۔

حل: رو درج ذیل ہے۔

$$\hat{I}=\frac{50\underline{/30^\circ}}{3+j6}=\frac{50\underline{/30^\circ}}{3+j6}=\frac{50\underline{/30^\circ}}{\sqrt{45}\underline{/63.435^\circ}}=7.454\underline{/-33.435^\circ}\,\mathrm{A}$$

یوں

$$\begin{aligned}P&=\frac{V_0I_0}{2}\cos(\phi_v-\phi_i)\\&=\frac{(50)(7.454)}{2}\cos[30^\circ-(-33.435^\circ)]\\&=83.34\,\mathrm{W}\end{aligned}$$

ہو گا۔ چونکہ طاقت صرف مزاحمت میں ضائع ہوتی ہے لہٰذا یہی جواب مساوات 9.12 سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے جہاں V_0 سے مراد مزاحمت کے دباو کا حیطہ ہے۔ تقسیم دباو سے مزاحمت کا دباو درج ذیل ہے

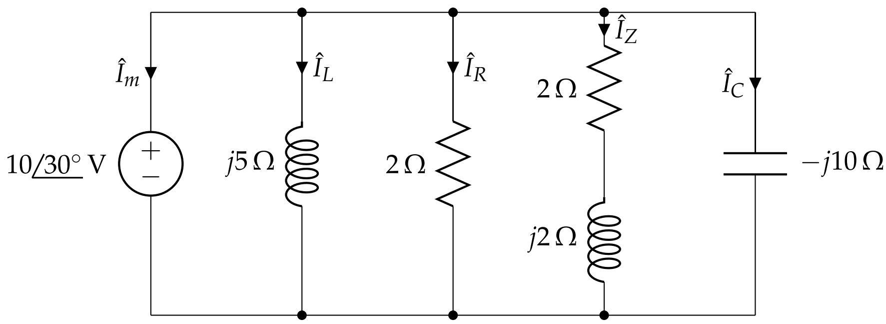
$$\hat{V}_R=\left(\frac{3}{3+j6}\right)50\underline{/30^\circ}=22.361\underline{/-33.435^\circ}$$

جس سے مزاحمت کا اوسط طاقت درج ذیل ہو گا۔

$$P=\frac{V_0I_0}{2}=\frac{(22.361)(7.454)}{2}=83.34\,\mathrm{W}$$

---

lossless components[1]



شکل 9.4: مثال 9.4 کا دور۔

اسی طرح مساوات 9.13 اور مساوات 9.14 بھی استعمال کیے جا سکتے ہیں

$$P = \frac{I_0^2 R}{2} = \frac{(7.454^2)(3)}{2} = 83.34\,\mathrm{W}$$
$$P = \frac{V_0^2}{2R} = \frac{(22.361^2)}{(2)(3)} = 83.34\,\mathrm{W}$$

مثال 9.4: شکل 9.4 میں منبع دباو کا اوسط طاقت حاصل کریں۔ دور کے بقایا پرزوں کا اوسط طاقت بھی دریافت کریں۔

حل: پہلے تمام رو دریافت کرتے ہیں۔ شکل میں دباو کو دیکھتے ہوئے انفعالی رائج رو کے تحت رو کی سمتیں چننی گئی ہیں۔

$$\hat{I}_L = \frac{10\underline{/30^\circ}}{j5} = \frac{10\underline{/30^\circ}}{5\underline{/90^\circ}} = 2\underline{/-60^\circ}$$
$$\hat{I}_R = \frac{10\underline{/30^\circ}}{2} = \frac{10\underline{/30^\circ}}{2\underline{/0^\circ}} = 5\underline{/30^\circ}$$
$$\hat{I}_Z = \frac{10\underline{/30^\circ}}{2+j2} = \frac{10\underline{/30^\circ}}{\sqrt{8}\underline{/45^\circ}} = \frac{5}{\sqrt{2}}\underline{/-15^\circ}$$
$$\hat{I}_C = \frac{10\underline{/30^\circ}}{-j10} = \frac{10\underline{/30^\circ}}{10\underline{/-90^\circ}} = 1\underline{/120^\circ}$$
$$\hat{I}_m = -\left[\hat{I}_L + \hat{I}_R + \hat{I}_Z + \hat{I}_C\right] = 8.27647\underline{/-175.01689^\circ}$$

یوں انفرادی شاخوں کے اوسط طاقت مساوات 9.10 یا مساوات 9.11 سے درج ذیل ہوں گے۔

$$
\begin{aligned}
P_L &= \frac{(30)(2)}{2}\cos(90^\circ) && = 0\,\mathrm{W}\\
P_R &= \frac{(30)(5)}{2}\cos(0^\circ) && = 75\,\mathrm{W}\\
P_Z &= \frac{(30)(\frac{5}{\sqrt{2}})}{2}\cos(45^\circ) && = 37.5\,\mathrm{W}\\
P_C &= \frac{(30)(1)}{2}\cos(90^\circ) && = 0\,\mathrm{W}\\
P_m &= \frac{(30)(8.27647)}{2}\cos[(30^\circ + 175.01689^\circ)] && = -112.5\,\mathrm{W}
\end{aligned}
$$

مثبت جواب طاقت کا ضیاع ہے جبکہ منفی جواب طاقت کی پیداوار ہے۔آپ دیکھ سکتے ہیں کہ منبع کی طاقتی پیداوار $112.5\,\mathrm{W}$ ہے جو دور میں طاقت کے ضیاع

$$
P_L + P_R + P_Z + P_C = 0 + 75 + 37.5 + 0 = 112.5\,\mathrm{W}
$$

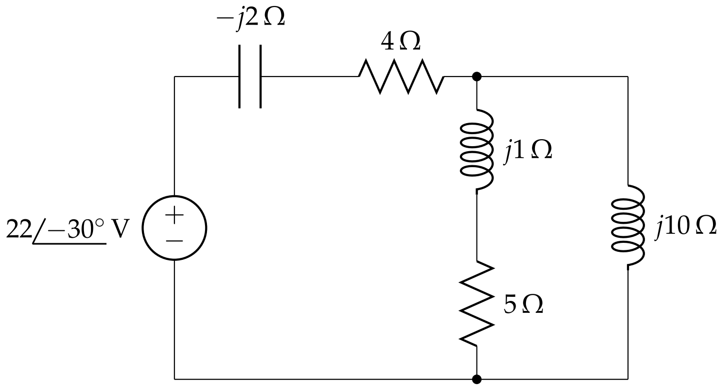
کے عین برابر ہے۔

مشق 9.1: شکل 9.5 کے تمام مزاحمتوں میں ضائع ہونے والا اوسط طاقت دریافت کریں۔

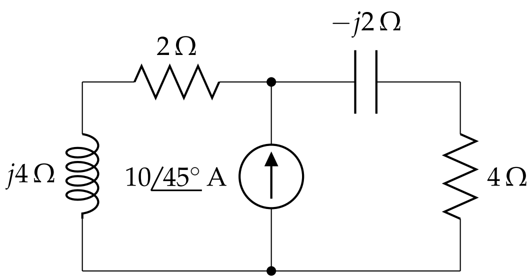
جوابات: $P_{4\,\Omega} = 17.491\,\mathrm{W}$ ، $P_{5\,\Omega} = 14.975\,\mathrm{W}$

مشق 9.2: شکل 9.6 کے تمام مزاحمتوں میں ضائع ہونے والا اوسط طاقت دریافت کریں۔

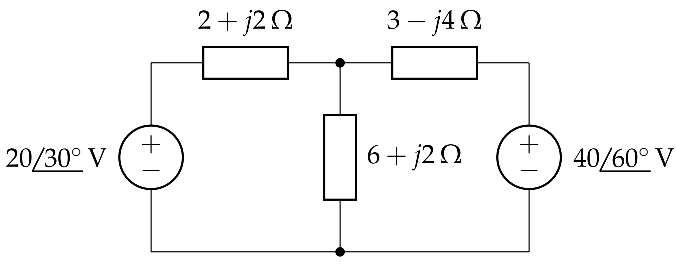
جوابات: $P_{2\,\Omega} = 50\,\mathrm{W}$ ، $P_{4\,\Omega} = 100\,\mathrm{W}$



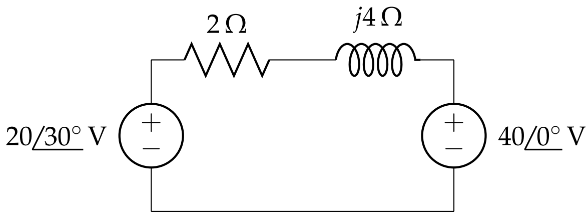
شکل 9.5: مشق 9.1 کا دور۔



شکل 9.6: مشق 9.2 کا دور۔



شکل 9.7: مشق 9.3 کا دور۔



شکل 9.8: مشق 9.4 کا دور۔

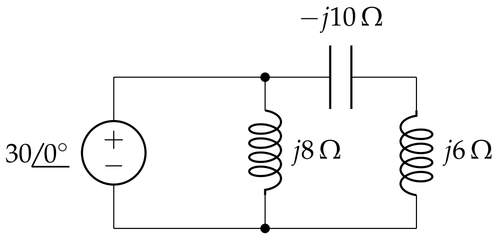
مشق 9.3: شکل 9.7 کے تمام مزاحمتوں میں ضائع ہونے والا اوسط طاقت دریافت کریں۔

جوابات: $P_{2\,\Omega} = 22.72\,\mathrm{W}$ ، $P_{3\,\Omega} = 5.71\,\mathrm{W}$ ، $P_{6\,\Omega} = 11.42\,\mathrm{W}$

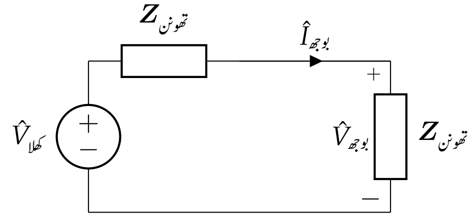
ایک سے زیادہ منبع کی صورت میں آپ کسی بھی ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے شاخوں کی رو اور جوڑ کے دباو حاصل کرتے ہوئے طاقت دریافت کر سکتے ہیں۔البتہ یاد رہے کہ ترکیب نفاذ سے طاقت کا تخمینہ نہیں لگایا جا سکتا چونکہ طاقت مربع دباو (یا مربع رو) کا تعلق رکھتا ہے جو غیر خطی تعلق ہے۔

مشق 9.4: شکل 9.8 میں اوسط طاقت کی پیداوار اور ضیاع معلوم کریں۔

$P_{20\angle 30^\circ} = -25.36\,\mathrm{W}$ ، $P_{40\angle 0^\circ} = -5.36\,\mathrm{W}$ ، $P_{2\,\Omega} = 30.72\,\mathrm{W}$



شکل 9.9: مشق 9.5 کا دور۔



شکل 9.10: زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ۔

مشق 9.5: شکل 9.9 میں اوسط طاقت کی پیداوار اور ضیاع معلوم کریں۔

جواب: اوسط طاقت کی پیداوار اور طاقت کا ضیاع صفر واٹ ہیں۔

9.3 زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ

یک سمتی رو ادوار میں ہم زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرنے کے مسئلے پر ہم حصہ 5.8 میں غور کر چکے ہیں۔ آئیں بدلتی رو کی صورت میں اسی مسئلے پر دوبارہ غور کریں۔

کسی بھی دور کا تھونن مساوی حاصل کیا جا سکتا ہے۔ شکل 9.10 میں تھونن مساوی دور کے ساتھ بوجھ جوڑا گیا ہے جہاں تھونن دباو کو $\hat{V}_{کھلا}$ کہا گیا ہے۔ ہم جاننا چاہتے ہیں کہ بوجھ کو کس صورت میں زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل ہو گا۔

شکل کو دیکھ کر درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\hat{I}_{\text{بوجھ}} = \frac{\hat{V}_{\text{کھلا}}}{\boldsymbol{Z}_{\text{تھونن}} + \boldsymbol{Z}_{\text{بوجھ}}} \tag{9.16}$$

جہاں

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_{\text{تھونن}} &= R_{\text{تھونن}} + jX_{\text{تھونن}}\\ \boldsymbol{Z}_{\text{بوجھ}} &= R_{\text{بوجھ}} + jX_{\text{بوجھ}}\\ \hat{V}_{\text{کھلا}} &= V_{\text{کھلا}}\underline{/\phi_{\text{کھلا}}}\end{aligned}$$

ہیں۔ درج بالا میں امالی رکاوٹ کی صورت میں X کی قیمت مثبت ہو گی جبکہ برق گیر رکاوٹ کی صورت میں اس کی قیمت منفی ہو گی۔ یوں مساوات 9.16 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$\hat{I}_{\text{بوجھ}} = \frac{V_{\text{کھلا}}\underline{/\phi_{\text{کھلا}}}}{R_{\text{تھونن}} + jX_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}} + jX_{\text{بوجھ}}}$$

جس کی حتمی قیمت درج ذیل ہے۔

$$I_{\text{بوجھ}} = \frac{V_{\text{کھلا}}}{\sqrt{(R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}})^2 + (X_{\text{تھونن}} + X_{\text{بوجھ}})^2}}$$

بوجھ کو منتقل اوسط طاقت مساوات 9.13 کی مدد سے لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}P_{\text{بوجھ}} &= \frac{1}{2} I_{\text{بوجھ}}^2 R_{\text{بوجھ}}\\ &= \frac{\frac{1}{2} V_{\text{کھلا}}^2 R_{\text{بوجھ}}}{(R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}})^2 + (X_{\text{تھونن}} + X_{\text{بوجھ}})^2}\end{aligned} \tag{9.17}$$

ہم جانتے ہیں کہ X میں طاقت ضائع نہیں ہوتا لہٰذا اس کو اوسطاً صفر طاقت منتقل ہوتا ہے۔ درج بالا مساوات میں کسر کے نسب نما میں $X_{\text{بوجھ}} + X_{\text{تھونن}}$ کی قیمت کم سے کم کرتے ہوئے طاقت بڑھائی جا سکتی ہے۔ درج ذیل صورت میں اس قیمت کو صفر بنایا جا سکتا ہے۔

$$X_{\text{بوجھ}} = -X_{\text{تھونن}} \qquad \text{بوجھ کو زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کا پہلا شرط} \tag{9.18}$$

مساوات 9.18 کے شرط پر پورا اترتے ہوئے مساوات 9.17 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$P_{\text{بوجھ}} = \frac{V_{\text{کھلا}}^2 R_{\text{بوجھ}}}{2(R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}})^2} \tag{9.19}$$

آئیں جانتے ہیں کہ کس قیمت کے $R_{\text{بوجھ}}$ کو زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہو گی۔ یہ جاننے کے لئے درج بالا مساوات کے تفرق کو صفر کے برابر پُر کرتے ہوئے $R_{\text{بوجھ}}$ کی درکار قیمت حاصل کرتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}P_{\text{بوجھ}}}{\mathrm{d}R_{\text{بوجھ}}} = \frac{V_{\text{بوجھ}}^2 \left(R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}}\right)^2 - 2V_{\text{بوجھ}}^2 R_{\text{بوجھ}} \left(R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}}\right)}{2\left(R_{\text{تھونن}} + R_{\text{بوجھ}}\right)^4} = 0$$

اس سے

$$R_{\text{بوجھ}} = R_{\text{تھونن}} \qquad \text{بوجھ کو زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کا دوسرا شرط} \tag{9.20}$$

حاصل ہوتا ہے۔ اس نتیجے کے تحت بوجھ کو اس صورت زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہو گی جب بوجھ کی مزاحمت دور کے تھونن مزاحمت کے برابر ہو۔ مساوات 9.18 اور مساوات 9.20 کو استعمال کرتے ہوئے، بوجھ کو زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہونے کی شرط کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} R_{\text{بوجھ}} + jX_{\text{بوجھ}} &= R_{\text{تھونن}} - jX_{\text{تھونن}} \\ \boldsymbol{Z}_{\text{بوجھ}} &= \boldsymbol{Z}_{\text{تھونن}}^* \end{aligned} \tag{9.21}$$

مساوات 9.21 کی صورت میں زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت درج ذیل حاصل ہو گی۔

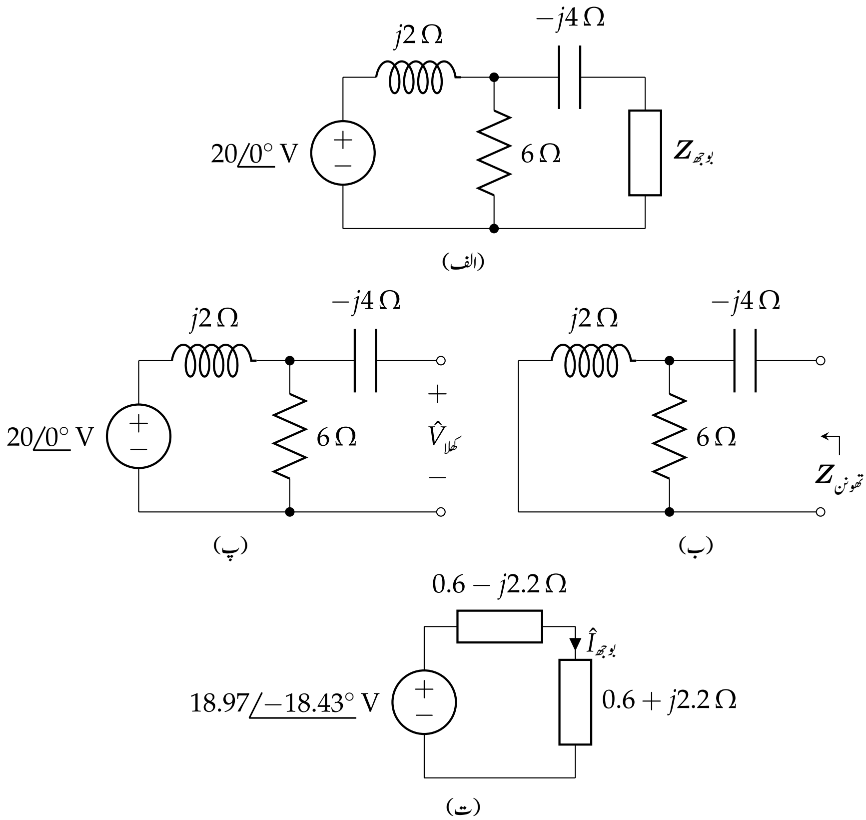
$$P_{\text{بلند تر}} = \frac{V_{\text{کھلا}}^2}{8R_{\text{بوجھ}}} \tag{9.22}$$

آخر میں یہ بھی بتلاتا چلوں کہ مزاحمتی بوجھ $(X_L = 0)$ کی صورت میں مساوات 9.17 کے تفرق کو صفر

$$\frac{\mathrm{d}P_{\text{بوجھ}}}{\mathrm{d}R_{\text{بوجھ}}} = 0$$

کے برابر پر کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$R_{\text{بوجھ}} = \sqrt{R_{\text{تھونن}}^2 + X_{\text{تھونن}}^2} \tag{9.23}$$



شکل 9.11: مثال 9.5 کا دور۔

مثال 9.5: شکل 9.11 میں بوجھ کے رکاوٹ کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر بوجھ کو زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل ہو گا۔اس طاقت کی قیمت بھی دریافت کریں۔

حل: سب سے پہلے بوجھ کو ہٹاتے ہوئے بقایا دور کا تھونن مساوی حاصل کرنا ہو گا۔ شکل-ب میں منبع دباو کو قصر دور کیا گیا ہے تا کہ تھونن مزاحمت حاصل کی جا سکے۔اسی طرح شکل-پ میں کھلے دور دباو کی نشاندہی کی گئی ہے۔ شکل-ب تھونن

رکاوٹ لکھتے ہیں۔

$$Z_{\text{تھونن}} = -j4 + \frac{(6)(j2)}{6+j2} = \frac{3}{5} - j\frac{11}{5}\,\Omega$$

یوں بوجھ کو زیادہ سے زیادہ طاقت کی منتقلی کے لئے ضروری ہے کہ بوجھ کی رکاوٹ درج ذیل ہو۔

$$Z_{\text{بوجھ}} = \frac{3}{5} + j\frac{11}{5}\,\Omega$$

شکل-پ میں برق گیر میں صفر رو ہے لہٰذا اس پر دباو بھی صفر ہو گا۔اس طرح مزاحمت پر دباو ہی تھونن دباو ہے جسے تقسیم دباو کے کلیے سے لکھتے ہیں۔

$$\hat{V}_{\text{کھلا}} = \left(\frac{6}{6+j2}\right)(20\underline{/0^\circ}) = 18.97\underline{/-18.43^\circ}\,\text{V}$$

شکل-ت میں تھونن مساوی دور کو بوجھ کے ساتھ جوڑ کر دکھایا گیا ہے جہاں سے رو حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_{\text{بوجھ}} &= \frac{18.97\underline{/-18.43^\circ}}{\frac{3}{5} - j\frac{11}{5} + \frac{3}{5} + j\frac{11}{5}}\\ &= 15.81\underline{/-18.43^\circ}\,\text{A}\end{aligned}$$

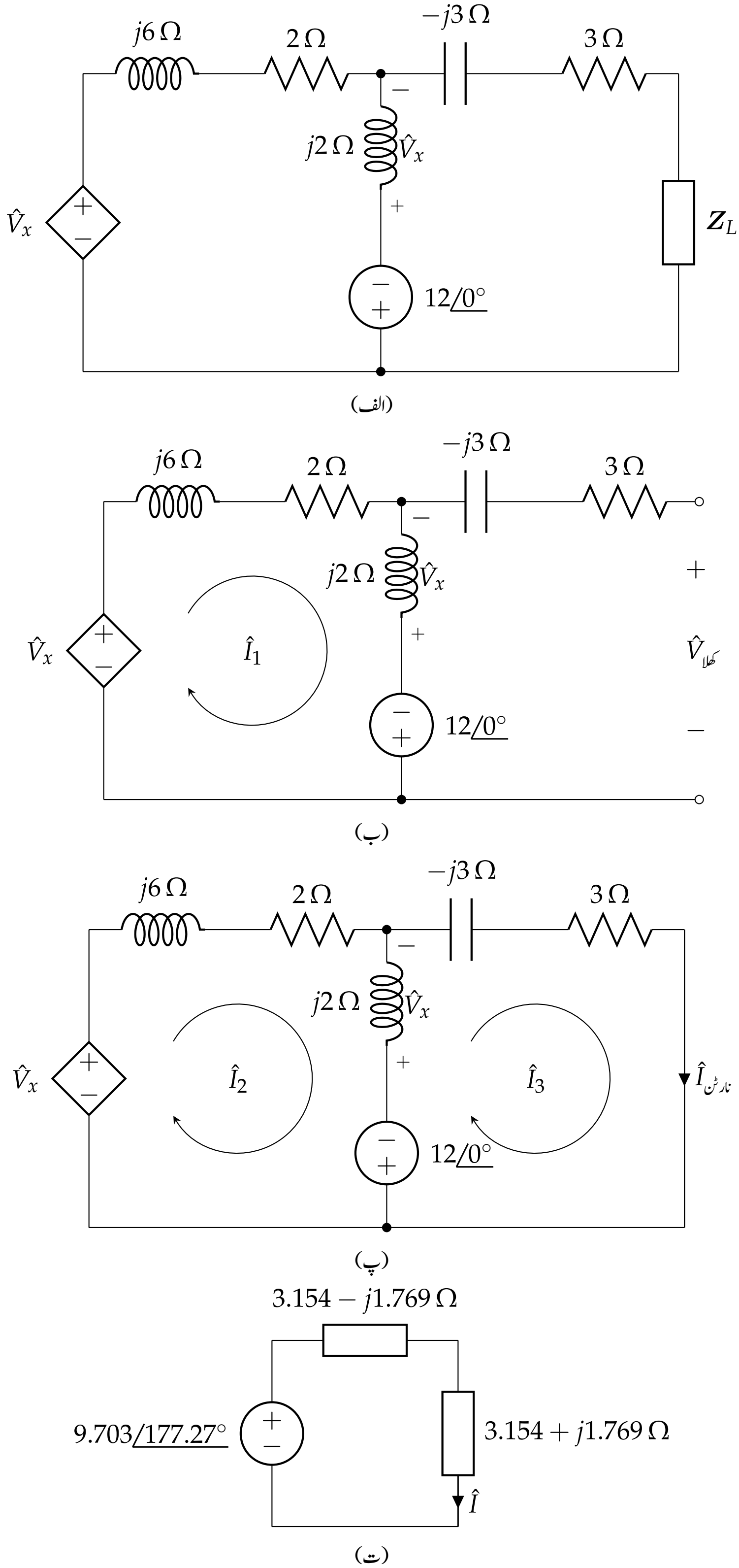
یوں بوجھ کو منتقل اوسط طاقت درج ذیل ہو گا۔

$$P_{\text{بوجھ}} = \frac{(15.81^2)(0.6)}{2} = 74.99\,\text{W}$$

مثال 9.6: شکل 9.12 میں بوجھ کے رکاوٹ Z_L کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر اس کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل ہو گا۔اس طاقت کو تخمینہ بھی لگائیں۔

حل: بوجھ کے ساتھ جڑے دور کا تھونن مساوی حاصل کرتے ہیں۔شکل-ب سے نارٹن دباو $\hat{V}_{\text{کھلا}}$ حاصل ہو گا۔شکل-ب کے بائیں دائرے کی مساوات لکھتے ہیں

$$\hat{V}_x + 12\underline{/0^\circ} = \hat{I}_1(j6 + 2 + j2)$$



شکل 9.12: مثال 9.6 کا دور۔

جہاں

$$\hat{V}_x = -j2\hat{I}_1$$

کے برابر ہے۔ درج بالا دو مساوات کو حل کرنے سے درج ذیل ملتا ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_1 &= \frac{12\angle 0^\circ}{2+j10}\\ &= \frac{3}{13} - j\frac{15}{13}\\ &= 1.17669\angle -78.69^\circ\,\mathrm{A}\end{aligned}$$

یوں تھونن دباو درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\hat{V}_{\text{کھلا}} &= (j2)(\hat{I}_1) - 12\angle 0^\circ\\ &= 9.703\angle 177.27^\circ\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

شکل-پ سے نارٹن رو دریافت کرتے ہیں۔ دونوں دائروں کے کرخوف مساوات اور $\hat{V}_x$ کی مساوات لکھتے ہیں

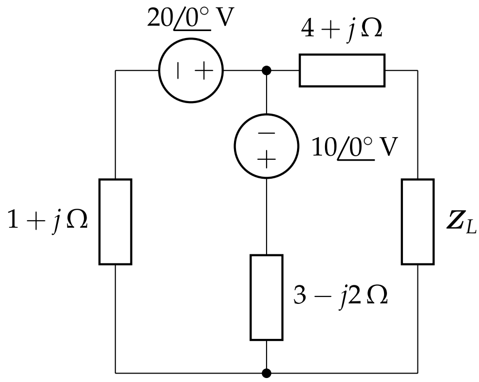
$$\begin{aligned}\hat{V}_x + 12 &= \hat{I}_2(j6+2+j2) - \hat{I}_3(j2)\\ 12 + \hat{I}_3(j2-j3+3) - \hat{I}_2(j2) &= 0\\ \hat{V}_x &= (\hat{I}_3 - \hat{I}_2)(j2)\end{aligned}$$

درج بالا تین ہمزاد مساوات کو $\hat{I}_3$ کے لئے حل کرنے سے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$\begin{aligned}\hat{I}_3 = \hat{I}_{\text{نارٹن}} &= -\frac{12}{5} - j\frac{6}{5}\\ &= 2.683\angle -153.435^\circ\,\mathrm{A}\end{aligned}$$

تھونن دباو اور نارٹن رو سے تھونن رکاوٹ حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}_{\text{تھونن}} &= \frac{\hat{V}_{\text{کھلا}}}{\hat{I}_{\text{نارٹن}}}\\ &= \frac{9.703\angle 177.27^\circ}{2.683\angle -153.435^\circ}\\ &= 3.616\angle -29.291^\circ\\ &= 3.154 - j1.769\,\Omega\end{aligned}$$



شکل 9.13: مشق 9.6 کا دور۔

بوجھ کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنے کی خاطر بوجھ کے رکاوٹ کی درکار قیمت $Z_{\text{بوجھ}} = 3.154 + j1.769\,\Omega$ ہے۔ شکل-ت میں تھونن دور کے ساتھ بوجھ جڑا ہوا دکھایا گیا ہے جہاں سے بوجھ کی رو حاصل کرتے ہیں۔

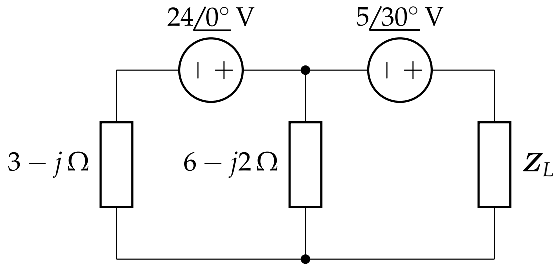
$$
\begin{aligned}
\hat{I} &= \frac{9.703\underline{/177.27^\circ}}{3.154 - j1.769 + 3.154 + j1.769} \\
&= 1.538\underline{/177.27^\circ}\,\text{A}
\end{aligned}
$$

یوں بوجھ کو درج ذیل اوسط طاقت منتقل ہو گا۔

$$
P_{\text{بلند تر}} = \frac{(1.538^2)(3.154)}{2} = 3.73\,\text{W}
$$

مشق 9.6: شکل 9.13 میں بوجھ Z_L کے رکاوٹ کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر بوجھ کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ منتقل اوسط طاقت کی قیمت بھی دریافت کریں۔

جوابات: $Z_L = 5.1 - j1.53\,\Omega$ ، $7.18\,\text{W}$



شکل 9.14: مشق 9.7 کا دور۔

مشق 9.7: شکل 9.14 میں بوجھ Z_L کے رکاوٹ کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر بوجھ کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ منتقل اوسط طاقت کی قیمت بھی دریافت کریں۔

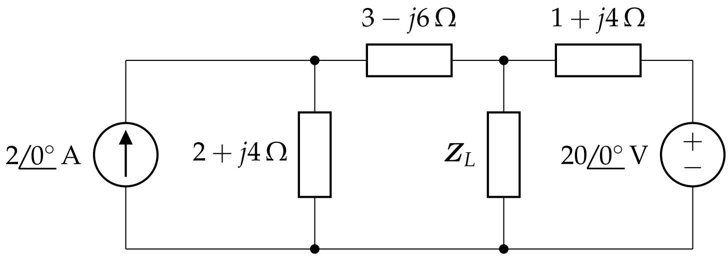
جوابات: $Z_L = 2 + j\frac{2}{3}\,\Omega$ ، $26.2\,\mathrm{W}$

مشق 9.8: شکل 9.15 میں بوجھ Z_L کے رکاوٹ کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر بوجھ کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ منتقل اوسط طاقت کی قیمت بھی دریافت کریں۔

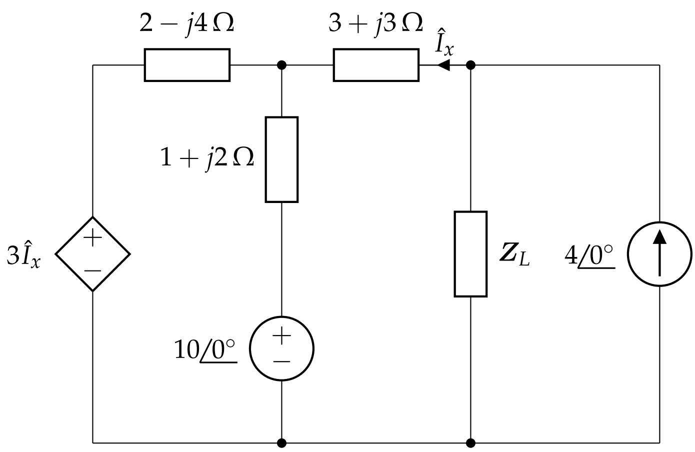
جوابات: $Z_L = 2.85 - j2.05\,\Omega$ ، $5.96\,\mathrm{W}$

مشق 9.9: شکل 9.16 میں بوجھ Z_L کے رکاوٹ کی وہ قیمت دریافت کریں جس پر بوجھ کو زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل ہو گا۔ زیادہ سے زیادہ منتقل اوسط طاقت کی قیمت بھی دریافت کریں۔

جوابات: $Z_L = 5.077j6.385\,\Omega$ ، $33.03\,\mathrm{W}$



شکل 9.15: مشق 9.8 کا دور۔



شکل 9.16: مشق 9.9 کا دور۔

9.4 موثر قیمت

یک سمتی رو ادوار پر ہم تفصیلاً غور کر چکے ہیں جہاں ہم نے دیکھا کہ مزاحمت R میں یک سمتی رو I کے گزرنے سے مزاحمت میں I^2R طاقت کا ضیاع ہوتا ہے۔یک سمتی رو کی مقدار تبدیل نہیں ہوتی لہٰذا مزاحمت کو ہر لمحہ برقرار I^2R طاقت فراہم ہوتا ہے۔ غیر تغیر طاقت کا اوسط بھی I^2R ہو گا۔اس کے برعکس سائن نما رو کی صورت میں مزاحمت کو منتقل طاقت لمحہ بالمحہ تبدیل ہوتا ہے۔یوں $i(t) = I_0 \cos(\omega t)\,\mathrm{A}$ کی صورت میں لمحہ $t = 0$ پر مزاحمتی طاقت زیادہ سے زیادہ ہو گا جبکہ $t = \frac{\pi}{2\omega}$ پر مزاحمتی طاقت صفر کے برابر ہو گا۔اسی اتار چڑھاو کی وجہ سے سائن نما رو کی صورت میں مزاحمت کو منتقل اوسط طاقت $\frac{I_0^2 R}{2}$ حاصل ہوتا ہے۔یوں I_0 حیطے کی سائن نما رو مزاحمت کو $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ قیمت کے یک سمتی رو برابر طاقت فراہم کرتا ہے۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ I_0 حیطے کی سائن نما رو کی موثر قیمت $\frac{I_0}{\sqrt{2}}$ ہے۔اسی طرح کسی بھی شکل کی دہراتی ہوئی رو کی موثر قیمت I_m سے مراد وہ یک سمتی رو ہے جو مزاحمت کو اس دہراتی ہوئی رو کے طاقت کے برابر طاقت منتقل کرتی ہو۔

ہم جانتے ہیں کہ رو $i(t)$ مزاحمت R کو $i^2(t)R$ لمحاتی طاقت منتقل کرتی ہے۔اگر اس رو کا دوری عرصہ T ہو تب مزاحمت کو اوسطاً

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) R \,\mathrm{d}t \tag{9.24}$$

طاقت منتقل ہو گا۔ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ I_m یک سمتی رو اسی مزاحمت کو درج ذیل طاقت منتقل کرتی ہے۔

$$P = I_m^2 R \tag{9.25}$$

اگر مزاحمت کو دونوں رو ایک برابر طاقت منتقل کرتی ہوں تب درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$I_m^2 R = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) R \,\mathrm{d}t$$

جس سے

$$I_m = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t) \,\mathrm{d}t} \tag{9.26}$$

حاصل ہوتا ہے۔مساوات 9.26 موثر رو I_m کی تعریف ہے۔

موثر دباو کو بھی اسی طرح حاصل کیا جا سکتا ہے۔مزاحمت R کے متوازی دباو $v(t)$ نسب کرنے سے مزاحمت کو لحاتی طور پر $\frac{v^2(t)}{R}$ طاقت منتقل ہو گا۔اگر دباو کا دوری عرصہ T ہو تب مزاحمت کو اوسطاً

$$P = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{v^2(t)}{R}\,\mathrm{d}t \tag{9.27}$$

طاقت منتقل ہو گا۔اسی مزاحمت کو یک سمتی دباو V_m اوسطاً درج ذیل طاقت فراہم کرتا ہے۔

$$P = \frac{V_m^2}{R} \tag{9.28}$$

دونوں طاقت برابر ہونے کی صورت میں موثر دباو کی مساوات درج ذیل حاصل ہوتی ہے۔

$$V_m = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} v^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{9.29}$$

آئیں ان مساوات کی مدد سے چند امواج کی موثر قیمتیں دریافت کریں۔

مثال 9.7: بدلتی رو $i(t) = I_0\cos(\omega t + \phi)$ کی موثر قیمت دریافت کریں۔

حل: اس موج کا دوری عرصہ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ہے۔مساوات 9.26 سے رو کی موثر قیمت حاصل کرتے ہیں۔فی الحال جذر کی نشان سے چھٹکارا حاصل کرنے کی خاطر مساوات کا مربع لکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔

$$I_m^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I_0^2\cos^2(\omega t + \phi)\,\mathrm{d}t$$

یہاں $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$ کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے

$$I_m^2 = \frac{I_0^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t + \frac{I_0^2}{T}\int_0^T \frac{\cos 2(\omega t + \phi)}{2}\,\mathrm{d}t$$

جس میں دوسرا تکمل صفر کے برابر ہے۔پہلا تکمل حل کرتے ہوئے

$$I_m^2 = \frac{I_0^2}{T}\frac{1}{2}t\bigg|_0^T$$

یعنی

$$I_m = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \tag{9.30}$$

لکھا جا سکتا ہے۔

مشق 9.10: درج بالا مثال میں دوسرے تکمل کو حل کرتے ہوئے ثابت کریں کہ یہ صفر کے برابر ہے۔
