

برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

| | | |
|-----|--|-------|
| 1 | بنیاد | 1 |
| 1 | برقی بار، برقی رو اور برقی دباؤ | 1.1 |
| 6 | قانون اوہم | 1.2 |
| 8 | توانائی اور طاقت | 1.3 |
| 15 | برقی پڑے | 1.4 |
| 15 | غیر تابع منبع | 1.4.1 |
| 17 | تابع منبع | 1.4.2 |
| 27 | مزا جتنی ادوار | 2 |
| 27 | قانون اوہم | 2.1 |
| 35 | قوانین کرخوف | 2.2 |
| 51 | سلسلہ وار جڑے پڑوں میں رو | 2.3 |
| 52 | تقسیم دباؤ | 2.4 |
| 55 | متعدد سلسلہ وار مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت | 2.5 |
| 58 | سلسلہ وار متعدد منبع دباؤ اور مزاحمت | 2.6 |
| 59 | متوازی جڑے مزاحمت پر یکساں دباؤ پایا جاتا ہے | 2.7 |
| 61 | تقسیم رو اور متعدد متوازی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت | 2.8 |
| 68 | سلسلہ وار اور متوازی مزاحمت | 2.9 |
| 73 | تخصیص مزاحمت | 2.10 |
| 76 | سلسلہ وار اور متوازی مزاحمتوں کے ادوار کا حل | 2.11 |
| 84 | ستارہ-تکون تبادلہ | 2.12 |
| 91 | تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار | 2.13 |
| 101 | ترکیب جوڑ اور دائری ترکیب | 3 |
| 101 | تجزیہ جوڑ | 3.1 |
| 104 | غیر تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار | 3.2 |
| 117 | تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار | 3.3 |
| 123 | غیر تابع منبع دباؤ استعمال کرنے والے ادوار | 3.4 |

| | | |
|---------------|---|------|
| 132 | تابع منبع دباو استعمال کرنے والے ادوار | 3.5 |
| 139 | دائری تجزیہ | 3.6 |
| 140 | غیر تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار | 3.7 |
| 148 | غیر تابع منبع رواستعمال کرنے والے ادوار | 3.8 |
| 154 | تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار | 3.9 |
| 158 | دائری ترکیب اور ترکیب جوڑ کا موازنہ | 3.10 |

| | | |
|---------------|----------------------------|-----|
| 161 | حسابی ایپلیفائر | 4 |
| 171 | کامل حسابی ایپلیفائر | 4.1 |
| 171 | منفی ایپلیفائر | 4.2 |
| 174 | مثبت ایپلیفائر | 4.3 |
| 176 | مستقام کار | 4.4 |
| 176 | منفی کار | 4.5 |
| 178 | جمع کار | 4.6 |
| 181 | متوازن اور غیر متوازن صورت | 4.7 |
| 185 | موازنہ کار | 4.8 |
| 185 | آلاتی ایپلیفائر | 4.9 |

| | | |
|---------------|---|-----|
| 187 | مسئلے | 5 |
| 187 | مساوی دور | 5.1 |
| 187 | مسئلہ خطیت | 5.2 |
| 191 | مسئلہ نفاذ | 5.3 |
| 201 | مساوی ادوار | 5.4 |
| 206 | مسئلہ تھون، مسئلہ نارٹن اور مسئلہ متبادلہ منبع | 5.5 |
| 225 | تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار | 5.6 |
| 231 | تابع منبع اور غیر تابع منبع دونوں استعمال کرنے والے ادوار | 5.7 |
| 239 | زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ | 5.8 |

| | | |
|---------------|----------------------------------|-----|
| 247 | برق گیر اور امالہ گیر | 6 |
| 247 | برق گیر | 6.1 |
| 261 | امالہ گیر | 6.2 |
| 270 | برق گیر اور امالہ گیر کے خصوصیات | 6.3 |
| 273 | سلسلہ وار جڑے برق گیر | 6.4 |
| 277 | متوازی جڑے برق گیر | 6.5 |
| 281 | سلسلہ وار امالہ گیر | 6.6 |
| 283 | متوازی امالہ گیر | 6.7 |
| 287 | حسابی ایپلیفائر کے RC ادوار | 6.8 |
| 288 | تفرق کار | 6.9 |

| | | |
|---------------|----------------|-----|
| 293 | عارضی رد عمل | 7 |
| 293 | تعارف | 7.1 |
| 293 | ایک درجی ادوار | 7.2 |

| | | |
|-----|--|--|
| 295 | 7.2.1 رد عمل کی عمومی مساوات | |
| 321 | 7.3 دھڑکن | |
| 328 | 7.4 دو درجی ادوار | |
| 359 | 8 برقرار حالت بدلتی رو | |
| 359 | 8.1 مخلوط اعداد | |
| 364 | 8.2 سائن نما تفاعل | |
| 373 | 8.3 سائن نما اور مخلوط جبری تفاعل | |
| 381 | 8.4 دوری سمتیہ | |
| 386 | 8.5 مزاحمت، امالہ گیر اور برقی گیر کے انفرادی دوری سمتی تعلق | |
| 396 | 8.6 برقی رکاوٹ اور برقی فراوانی | |
| 409 | 8.7 دوری سمتیت کے اشکال | |
| 419 | 8.8 کر خوف مساوات | |
| 424 | 8.9 تجزیاتی تراکیب | |
| 443 | 9 برقرار برقی طاقت | |
| 443 | 9.1 لمبائی طاقت | |
| 446 | 9.2 اوسط طاقت | |
| 453 | 9.3 زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ | |
| 463 | 9.4 موثر قیمت | |
| 472 | 9.5 جزو طاقت | |
| 476 | 9.6 مخلوط طاقت | |
| 484 | 9.7 جزو طاقت کی درستی | |
| 489 | 9.8 برقی چھٹکا | |
| 491 | 9.9 نم زمین | |
| 492 | 9.10 ایک دور کا نظام | |
| 497 | 9.11 حفاظتی تدابیر | |
| 499 | 10 مقناطیسی جڑے ادوار | |
| 499 | 10.1 مشترکہ امالہ | |
| 517 | 10.2 مشترکہ امالہ میں توانائی کا ذخیرہ | |
| 523 | 10.3 کامل ٹرانسفارمر | |
| 547 | 11 تین دوری نظام | |
| 547 | 11.1 تین دوری ستارہ دیاو | |
| 553 | 11.2 ستارہ ستارہ (YY) جوڑ | |
| 561 | 11.3 تین دوری ٹکونی (Δ) دیاو | |
| 566 | 11.4 ٹکونی بوجھ | |
| 571 | 11.5 طاقت کے کلیات | |
| 580 | 11.6 جزو طاقت کی درستی | |

| | | |
|---------------|--------|---|
| 585 | 12 | تعددی رد عمل |
| 596 | 12.1 | جال |
| 598 | 12.2 | صفر اور قطب |
| 601 | 12.3 | سائن نما تعددی تجزیہ |
| 601 | 12.3.1 | بوڈا خطوط |
| 622 | 12.4 | گمکی ادوار |
| 656 | 12.5 | چیلنی |
| 669 | 13 | لاپلاس بدل |
| 669 | 13.1 | تعریف |
| 670 | 13.2 | تفاعل کیتائی |
| 677 | 13.3 | لاپلاس بدل کی جوڑیاں |
| 681 | 13.4 | خواص البدل |
| 686 | 13.5 | الٹ لاپلاس بدل کا حصول |
| 687 | 13.5.1 | جزوی کسری پھیلاؤ |
| 698 | 13.6 | مکمل الجھاؤ |
| 701 | 13.7 | مسئلہ ابتدائی قیمت اور مسئلہ اختتامی قیمت |
| 705 | 14 | ادوار کا حل بذریعہ لاپلاس بدل |
| 705 | 14.1 | ادوار کا حل |
| 707 | 14.2 | پرزوں کے مساوی لاپلاسی ادوار |
| 711 | 14.3 | تجزیاتی تراکیب |
| 731 | 14.4 | تبادلی تفاعل جال |
| 743 | 14.5 | ترسیم قطبین و صفر اور بوڈا خط |

باب 14

ادوار کا حل بذریعہ لاپلاس بدل

14.1 ادوار کا حل

لاپلاس بدل کا استعمال دیکھنے کی خاطر شکل 14.1 میں RL دور کو حل کرتے ہوئے $i(t)$ دریافت کرتے ہیں۔ دور کی کرخوف مساوات لکھتے ہیں۔

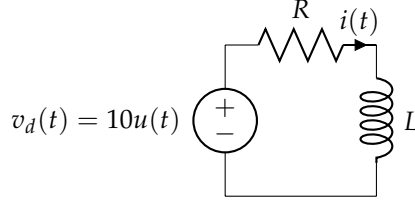
$$v_d(t) = i(t)R + L \frac{di(t)}{dt}$$

اس دور کے فطری حل اور جبری حل کا مجموعہ درکار حل ہو گا۔ لاپلاس بدل سے دور حل کرتے ہوئے مکمل حل ایک ہی بار میں حاصل ہوتا ہے۔ درج بالا مساوات کے دونوں اطراف کا لاپلاس بدل لیتے ہیں۔

$$\mathcal{L}[10u(t)] = R\mathcal{L}[i(t)] + L\mathcal{L}\left[\frac{di(t)}{dt}\right]$$

صفحہ 680 پر جدول 13.1 اور صفحہ 684 پر جدول 13.2 کی مدد لیتے ہیں۔

$$\frac{10}{s} = RI(s) + L[sI(s) - i(0)]$$

شکل 14.1: سلسلہ وار RL دور۔

چونکہ $i(0) = 0 \text{ A}$ ہے لہذا

$$\frac{10}{s} = RI(s) + sLI(s)$$

یعنی

$$I(s) = \frac{10}{s(sL + R)}$$

یا

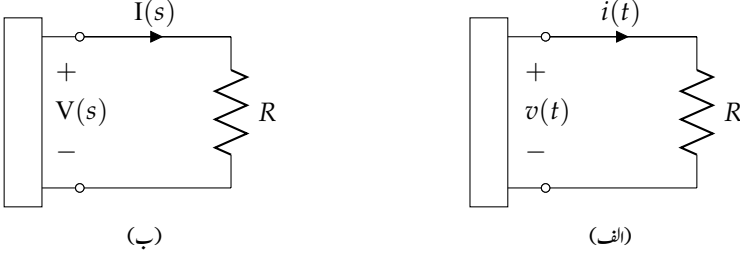
$$I(s) = \frac{10}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right)$$

حاصل ہوتا ہے جہاں جزوی کسری پھیلاؤ لکھی گئی ہے۔ درج بالا سے وقتی تعامل لکھتے ہیں۔

$$i(t) = \frac{10}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) u(t)$$

آپ نے دیکھا کہ مکمل حل ایک وقت حاصل ہوتا ہے۔ دور کی ابتدائی معلومات لاپلاس بدل لیتے وقت استعمال کی جاتی ہے۔

جیسا آپ نے دیکھا، لاپلاس بدل سے تفرقی و تکمیلی مساوات الجبرائی مساوات میں تبدیل ہو جاتی ہے جس سے درکار تعامل کا لاپلاس بدل نہایت آسانی سے حاصل ہوتا ہے۔ حاصل تعامل کا الٹ لاپلاس بدل وقتی تعامل دیتا ہے۔ الٹ لاپلاس بدل جدول کی مدد سے حاصل کیا جاتا ہے۔



شکل 14.2: وقتی اور مخلوط تعددی دائرہ کار میں مزاحمت کا اظہار۔

14.2 پروزوں کے مساوی لاپلاسی ادوار

برقی پروزوں کی خصوصیات سے ان کے مساوی لاپلاسی ادوار حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ تمام پروزوں کے دباؤ بالمقابل رو تعلق لکھتے ہوئے انفعالی رانج سمت استعمال کئے گئے ہیں۔ مزاحمت کے دباؤ اور رو کا تعلق

$$(14.1) \quad v(t) = Ri(t)$$

ہے۔ دونوں اطراف کا لاپلاس بدل لیتے ہوئے اس تعلق کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(14.2) \quad V(s) = RI(s)$$

شکل 14.2 میں مزاحمت کے دباؤ بالمقابل کا تعلق وقتی دائرہ کار اور مخلوط تعددی دائرہ کار میں دکھائے گئے ہیں۔

برق گیر کے تعلقات

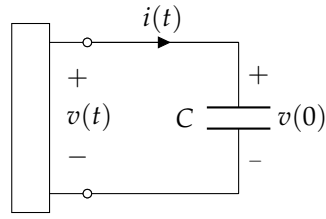
$$(14.3) \quad v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + v(0)$$

$$(14.4) \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}$$

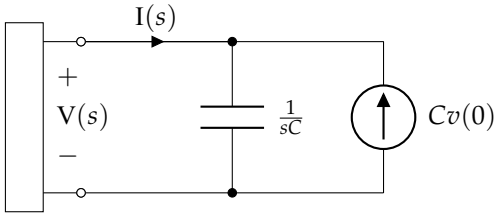
ہیں۔ دونوں اطراف کا لاپلاس بدل لیتے ہوئے مخلوط تعددی دائرہ کار میں تعلقات حاصل ہوتے ہیں جنہیں شکل 14.3 میں دکھایا گیا ہے۔ ابتدائی معومات سے پیدا منبع رو کی سمت اور منبع دباؤ کے قطب پر غور کریں۔ ابتدائی رو کی سمت الٹ کرنے یا ابتدائی دباؤ کے قطب الٹ کرنے سے پیدا منبع رو کی سمت اور منبع دباؤ کے قطب الٹ ہوں گے۔

$$(14.5) \quad V(s) = \frac{I(s)}{sC} + \frac{v(0)}{s}$$

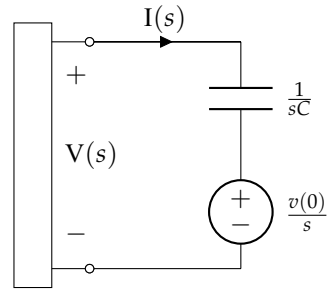
$$(14.6) \quad I(s) = sCV(s) - Cv(0)$$



(الف)

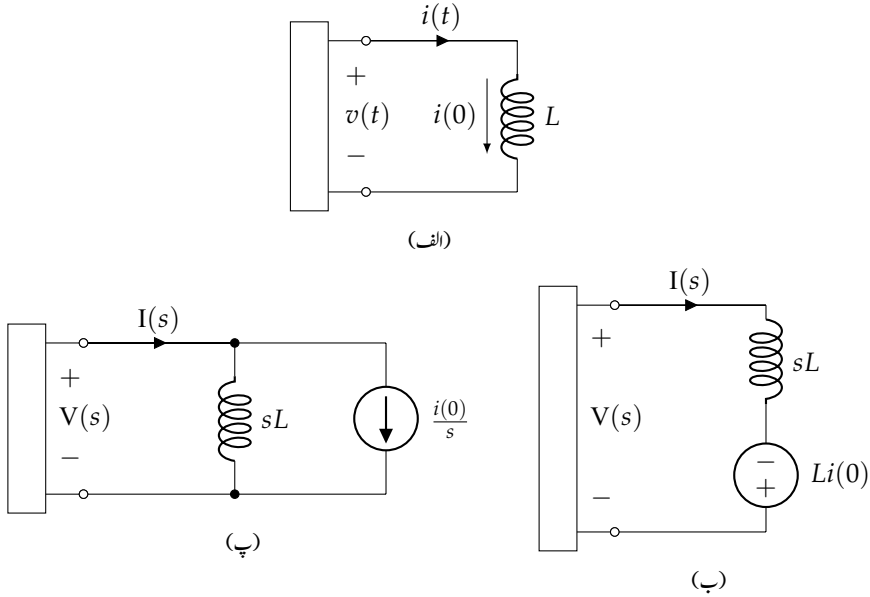


(پ)



(ب)

شکل 14.3: وقتی اور مخلوط تعددی دائرہ کار میں برق گیر کا اظہار۔



شکل 14.4: وقتی اور مخلوط تعددی دائرہ کار میں امالہ گیر کا اظہار۔

امالہ گیر کے تعلقات

$$(14.7) \quad v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

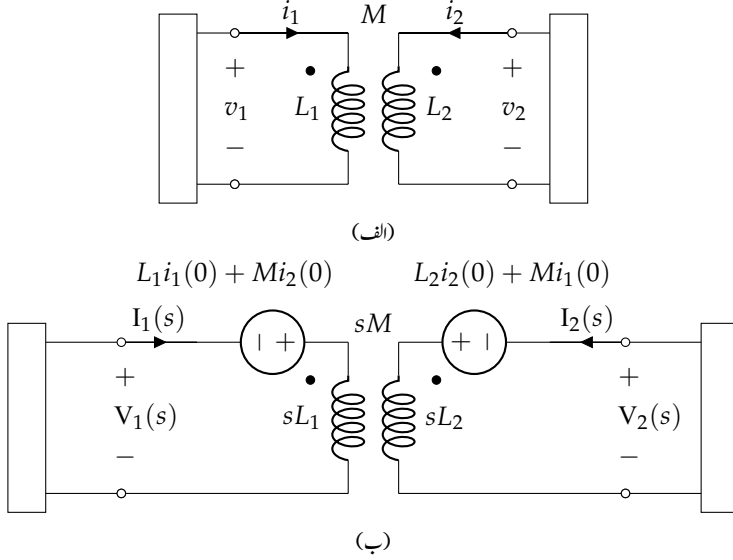
$$(14.8) \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(t) dt + i(0)$$

ہیں جن سے

$$(14.9) \quad V(s) = sLI(s) - Li(0)$$

$$(14.10) \quad I(s) = \frac{V(s)}{sL} + \frac{i(0)}{s}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ انہیں شکل 14.4 میں دکھایا گیا ہے۔ یہاں بھی ابتدائی معلومات سے پیدا منبج کا دار و مدار ابتدائی روکی سمت اور ابتدائی دباؤ کے قطب پر ہے۔



شکل 14.5: مشترکہ امالہ کا لاپلاس بدل۔

شکل 14.5 میں دکھائے گئے مربوط لچھوں کے تعلق درج ذیل ہیں۔

$$(14.11) \quad v_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}$$

$$(14.12) \quad v_2(t) = L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt}$$

یہی مساوات s دائرہ کار میں درج ذیل لکھے جائیں گے۔

$$(14.13) \quad V_1(s) = sL_1 I_1(s) - L_1 i_1(0) + sM I_2(s) - M i_2(0)$$

$$(14.14) \quad V_2(s) = sL_2 I_2(s) - L_2 i_2(0) + sM I_1(s) - M i_1(0)$$

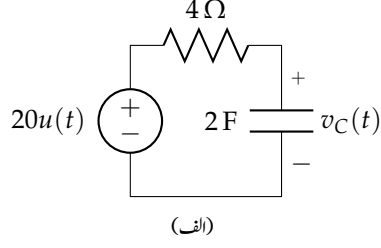
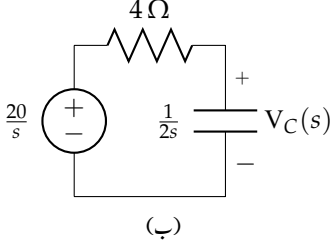
تابع اور غیر تابع منبع دباؤ اور منبع رو کو بھی s دائرہ کار میں ظاہر کیا جاسکتا ہے

$$(14.15) \quad V_1(s) = \mathcal{L}[v_1(t)]$$

$$(14.16) \quad I_2(s) = \mathcal{L}[i_2(t)]$$

اور اگر $v_1(t) = A_r i_2(t)$ ہو جہاں A_r انفرانش مزاحمت نما ہے تب

$$(14.17) \quad V_1(s) = A_r I_2(s)$$



شکل 14.6: مثال 14.1 کا دور۔

لکھا جاسکتا ہے۔

14.3 تجزیاتی ترکیب

درج بالا حصے میں ہم نے برقی پوزوں کے s دائرہ کار میں مساوی ادوار حاصل کئے۔ انہیں استعمال کرتے ہوئے ادوار حل کئے جاسکتے ہیں۔ ایسا کرنے کی خاطر درج ذیل کرنا ہوگا۔

• ابتدائی حالت جاننے کے لئے $t < 0$ کے لئے دور حل کریں۔ اگر $t < 0$ میں دور برقرار حالت میں ہو تب برق گیر کو کھلے سر اور امالہ گیر کو قصر دور تصور کرتے ہوئے ابتدائی روادور ابتدائی دباو حاصل کئے جاسکتے ہیں۔

• ابتدائی معلومات شامل کرتے ہوئے تمام پوزوں کی جگہ ان کے مساوی مخلوط تعددی دائرہ کار کے ادوار نسب کریں۔

• کسی بھی ترکیب کو استعمال کرتے ہوئے دور کو حل کریں۔ جوابات s دائرہ کار میں ہوں گے۔

• الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے وقتی دائرہ کار میں جوابات حاصل کریں۔

مثال 14.1: لاپلاس بدل کی مدد سے شکل 14.6-الف میں $v_C(t)$ حاصل کریں۔

حل: ابتدائی دباؤ $v_C(0) = 0V$ ہے۔ تمام پرزوں کی جگہ s دائرہ کار کے مساوی دور پر کرتے ہوئے شکل-ب حاصل ہوتا ہے۔ شکل-ب میں تقسیم دباؤ کے کلیے سے برق گیر کا دباؤ لکھتے ہیں۔

$$V_C(s) = \left(\frac{\frac{1}{2s}}{4 + \frac{1}{2s}} \right) \frac{20}{s}$$

$$= 20 \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{8}} \right)$$

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے $v_C(t)$ حاصل کرتے ہیں۔

$$v_C(t) = 20 \left(1 - e^{-\frac{t}{8}} \right) u(t)$$

مثال 14.2: شکل 14.7 کے دائری مساوات اور مساوات جوڑ لکھیں۔

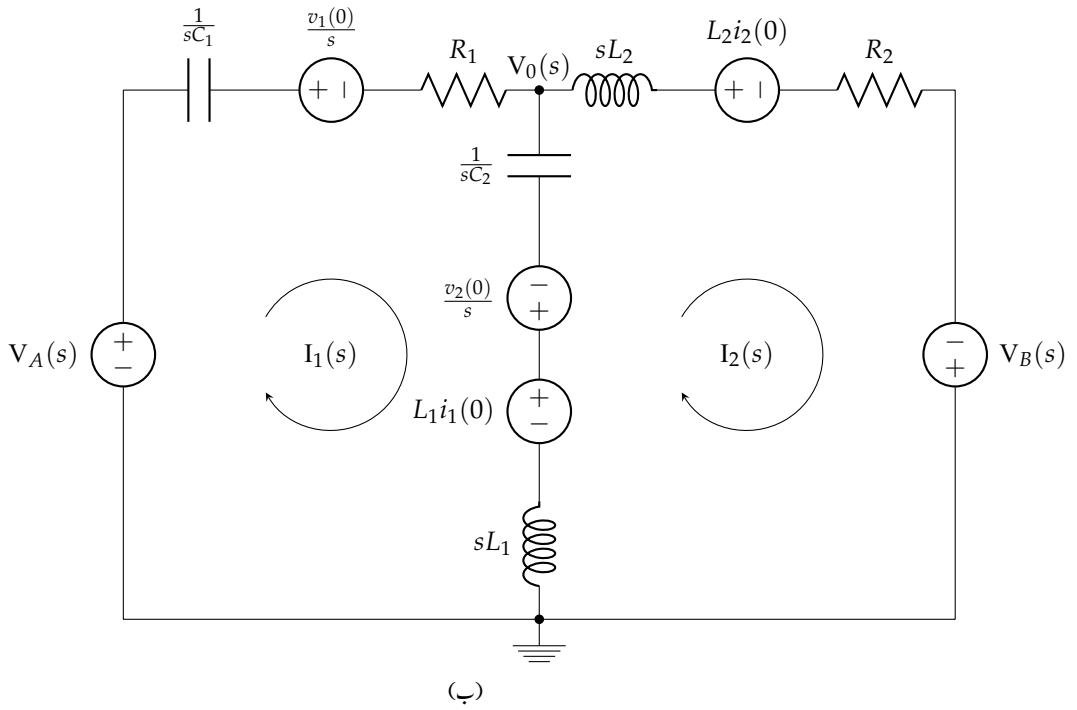
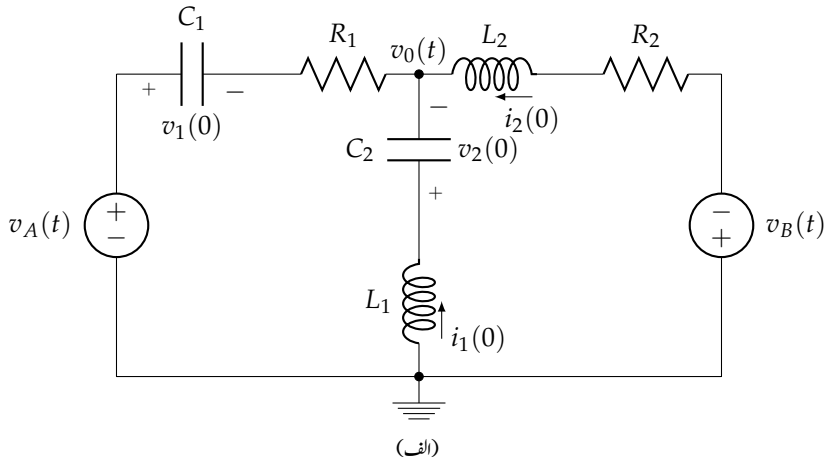
حل: لاپلاس بدل شکل 14.7-ب میں دکھایا گیا ہے جہاں سے کرخوف دائری مساوات لکھتے ہیں۔

$$I_1(s) \left[\frac{1}{sC_1} + R_1 + \frac{1}{sC_2} + sL_1 \right] - I_2(s) \left[\frac{1}{sC_2} + sL_1 \right] = V_A(s) - \frac{v_1(0)}{s} + \frac{v_2(0)}{s} - L_1 i_1(0)$$

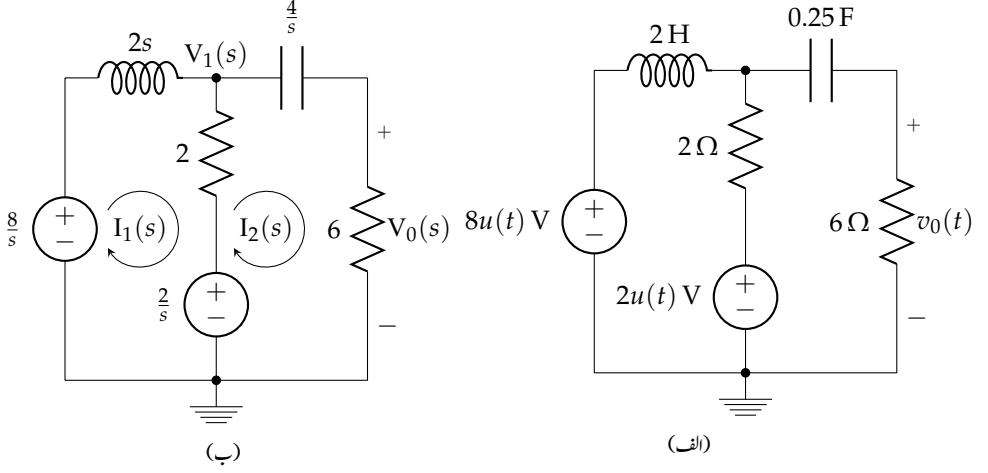
$$-I_1(s) \left[sL_1 + \frac{1}{sC_2} \right] + I_2(s) \left[sL_1 + \frac{1}{sC_2} + sL_2 + R_2 \right] = V_B(s) + L_1 i_1(0) - \frac{v_2(0)}{s} - L_2 i_2(0)$$

مساوات جوڑ لکھتے ہیں۔

$$\frac{V_0(s) - V_A(s) + \frac{v_1(0)}{s}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} + \frac{V_0(s) + \frac{v_2(0)}{s} - L_1 i_1(0)}{\frac{1}{sC_2} + sL_1} + \frac{V_0(s) - L_2 i_2(0) + V_B(s)}{sL_2 + R_2} = 0$$



شکل 14.7: مثال 14.2 کا دور



شکل 14.8: مثال 14.3 کا دور۔

مثال 14.3: شکل 14.8-الف میں دور دیا گیا ہے۔ اس کو ہم دائری ترکیب، ترکیب جوڑ، مسئلہ نفاذ، متبادلہ منبع اور مسئلہ تھونن کی مدد سے حل کرتے ہیں۔

حل: لاپلاس مساوی شکل-ب میں دکھایا گیا ہے۔ ہم جوڑ $V_1(s)$ کو حاصل کرتے ہوئے $V_0(s)$ کو تقسیم دباؤ کے کلیے سے حاصل کریں گے۔ مساوات جوڑ لکھتے ہیں

$$\frac{V_1(s) - \frac{8}{s}}{2s} + \frac{V_1(s) - \frac{2}{s}}{2} + \frac{V_1(s)}{6 + \frac{4}{s}} = 0$$

جس سے

$$V_1(s) \left(\frac{1}{2s} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6 + \frac{4}{s}} \right) = \frac{4}{s^2} + \frac{1}{s}$$

یعنی

$$V_1(s) = \frac{2(s+4)(3s+2)}{s(4s^2+5s+2)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ تقسیم دباؤ کے لیے سے $V_0(s)$ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} V_0(s) &= \left(\frac{6}{6 + \frac{4}{s}} \right) V_1(s) \\ &= \left(\frac{6s}{6s + 4} \right) \left[\frac{2(s + 4)(3s + 2)}{s(4s^2 + 5s + 2)} \right] \\ &= \frac{6(s + 4)}{4s^2 + 5s + 2} \end{aligned}$$

اس دباؤ کا جزوی کسری پھیلاؤ لکھتے ہوئے وقتی تفاعل حاصل کرنا ہوگا۔ میں یہاں گزارش کروں گا ہوں کہ آپ صفحہ 599 پر مثال 12.3 کو ضرور دیکھیں۔

$$\begin{aligned} V_0(s) &= \frac{6(s + 4)}{4(s^2 + \frac{5}{4}s + \frac{1}{2})} \\ &= \frac{6(s + 4)}{4(s + \frac{5}{8} + j\frac{\sqrt{7}}{8})(s + \frac{5}{8} - j\frac{\sqrt{7}}{8})} \\ &= \frac{K}{s + \frac{5}{8} + j\frac{\sqrt{7}}{8}} + \frac{K^*}{s + \frac{5}{8} - j\frac{\sqrt{7}}{8}} \end{aligned}$$

مستقل K اور K^* حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} K &= \frac{6(s + 4)}{4(s + \frac{5}{8} - j\frac{\sqrt{7}}{8})} \Big|_{s = -\frac{5}{8} - j\frac{\sqrt{7}}{8}} \\ &= \frac{3}{4} + j\frac{81}{4\sqrt{7}} \\ K^* &= \frac{6(s + 4)}{4(s + \frac{5}{8} + j\frac{\sqrt{7}}{8})} \Big|_{s = -\frac{5}{8} + j\frac{\sqrt{7}}{8}} \\ &= \frac{3}{4} - j\frac{81}{4\sqrt{7}} \end{aligned}$$

یوں درج ذیل لکھا جائے گا۔

$$V_0(s) = \frac{\frac{3}{4} + j\frac{81}{4\sqrt{7}}}{s + \frac{5}{8} + j\frac{\sqrt{7}}{8}} + \frac{\frac{3}{4} - j\frac{81}{4\sqrt{7}}}{s + \frac{5}{8} - j\frac{\sqrt{7}}{8}}$$

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 v_0(t) &= \left(\frac{3}{4} + j \frac{81}{4\sqrt{7}} \right) e^{-(\frac{5}{8} + j\frac{\sqrt{7}}{8})t} + \left(\frac{3}{4} - j \frac{81}{4\sqrt{7}} \right) e^{-(\frac{5}{8} - j\frac{\sqrt{7}}{8})t} \\
 &= e^{-\frac{5}{8}t} \left[\frac{3}{4} \left(e^{-j\frac{\sqrt{7}}{8}t} + e^{j\frac{\sqrt{7}}{8}t} \right) + j \frac{81}{4\sqrt{7}} \left(e^{-j\frac{\sqrt{7}}{8}t} - e^{j\frac{\sqrt{7}}{8}t} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{4} e^{-\frac{5}{8}t} \left[6 \cos \left(\frac{\sqrt{7}t}{8} \right) + \frac{162}{\sqrt{7}} \sin \left(\frac{\sqrt{7}t}{8} \right) \right] \text{ V}
 \end{aligned}$$

آئیں یہی جواب دائری ترکیب سے حاصل کریں۔ دائری مساوات لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 I_1(s) (2s + 2) - 2I_2(s) &= \frac{8}{s} - \frac{2}{s} \\
 -2I_1(s) + I_2(s) \left(2 + \frac{4}{s} + 6 \right) &= \frac{2}{s}
 \end{aligned}$$

ان ہمزاد مساوات کا حل درج ذیل ہے

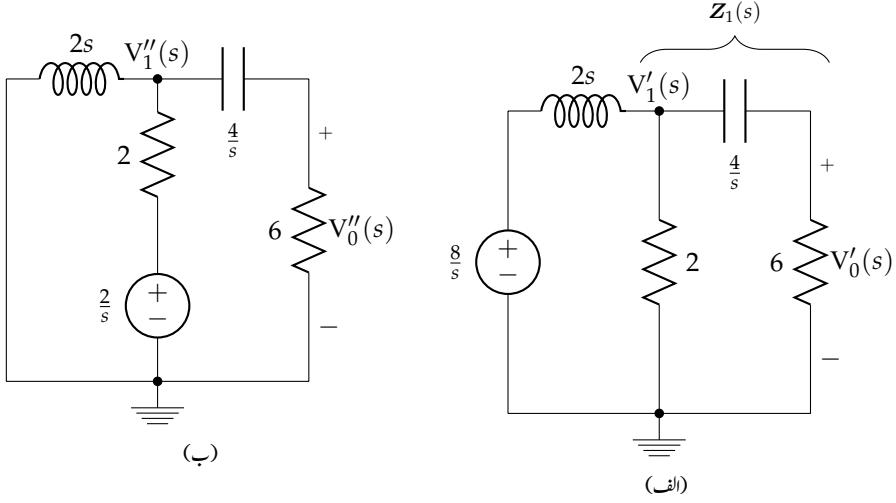
$$\begin{aligned}
 I_1(s) &= \frac{13s + 6}{4s^3 + 5s^2 + 2s} \\
 I_2(s) &= \frac{s + 4}{4s^2 + 5s + 2}
 \end{aligned}$$

جس سے خارجی دباؤ حاصل ہوتا ہے۔

$$V_0(s) = 6I_2(s) = \frac{6(s + 4)}{4s^2 + 5s + 2}$$

مسئلہ نفاذ سے اب اسی دور کو حل کرتے ہیں۔ شکل 14.9 میں باری باری ایک ایک منبع کو لاگو کیا گیا ہے۔ شکل 14.9-الف کو دیکھ کر $Z_1(s)$ لکھتے ہیں۔

$$Z_1(s) = \frac{2(6 + \frac{4}{s})}{2 + 6 + \frac{4}{s}} = \frac{3s + 2}{2s + 1}$$



شکل 14.9: مسئلہ نفاذ سے حل کرتے ہوئے باری باری ایک ایک منبع کو نافذ کیا گیا ہے

یوں تقسیم دباؤ کے کلیے سے $V_1'(s)$ لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} V_1'(s) &= \left(\frac{Z_1(s)}{2s + Z_1(s)} \right) \frac{8}{s} \\ &= \left(\frac{\frac{3s+2}{2s+1}}{2s + \frac{3s+2}{2s+1}} \right) \frac{8}{s} \\ &= \frac{\frac{8}{s}(3s+2)}{4s^2 + 5s + 2} \end{aligned}$$

تقسیم دباؤ کے کلیے کو دوبارہ استعمال کرتے ہوئے $V_1'(s)$ سے $V_0''(s)$ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} V_0'(s) &= \left(\frac{6}{6 + \frac{4}{s}} \right) V_1'(s) \\ &= \left(\frac{3s}{3s+2} \right) \frac{\frac{8}{s}(3s+2)}{4s^2 + 5s + 2} \\ &= \frac{24}{4s^2 + 5s + 2} \end{aligned}$$

اب شکل 14.9-ب سے دوسرے منبع سے پیدا $V_0''(s)$ حاصل کرتے ہیں۔ یہاں $2s$ اور $(6 + \frac{4}{s})$ متوازی جڑے ہیں جن کے مساوی کو $Z_2(s)$ کہہ کر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} Z_2(s) &= \frac{2s(6 + \frac{4}{s})}{2s + 6 + \frac{4}{s}} \\ &= \frac{2s(3s + 2)}{s^2 + 3s + 2} \end{aligned}$$

یوں تقسیم دباؤ کے کلیے سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} V_1''(s) &= \left(\frac{Z_2(s)}{2 + Z_2(s)} \right) \frac{2}{s} \\ &= \left(\frac{\frac{2s(3s+2)}{s^2+3s+2}}{2 + \frac{2s(3s+2)}{s^2+3s+2}} \right) \frac{2}{s} \\ &= \frac{2(3s + 2)}{4s^2 + 5s + 2} \end{aligned}$$

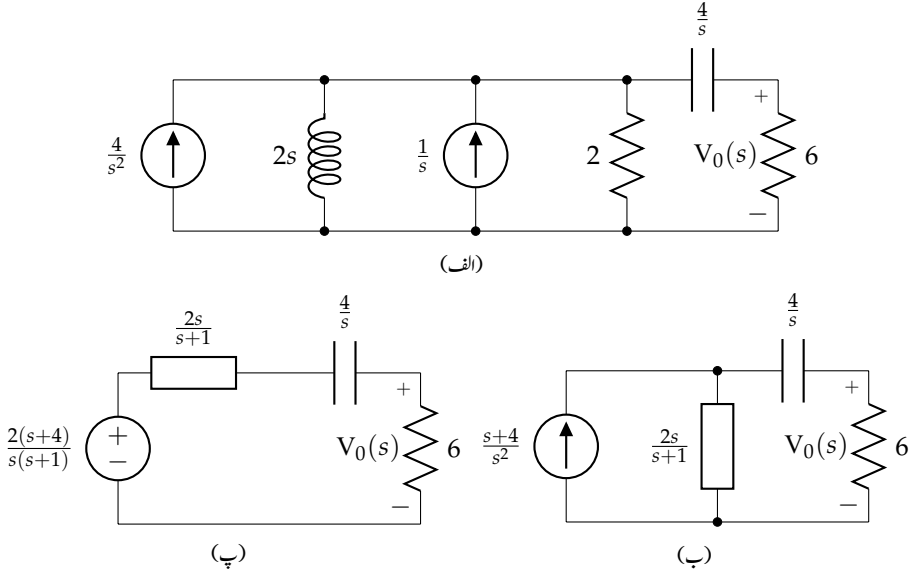
اور ایک مرتبہ دوبارہ تقسیم دباؤ سے

$$\begin{aligned} V_0''(s) &= \left(\frac{6}{6 + \frac{4}{s}} \right) V_1''(s) \\ &= \left(\frac{3s}{3s + 2} \right) \frac{2(3s + 2)}{4s^2 + 5s + 2} \\ &= \frac{6s}{4s^2 + 5s + 2} \end{aligned}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں دونوں منبع کی موجودگی میں $V_0(s) = V_0'(s) + V_0''(s)$ ہو گا۔

$$\begin{aligned} V_0(s) &= \frac{24}{4s^2 + 5s + 2} + \frac{6s}{4s^2 + 5s + 2} \\ &= \frac{6(s + 4)}{4s^2 + 5s + 2} \end{aligned}$$

آئیں اب شکل 14.8-الف کو تبادلہ منبع سے حل کریں۔ دونوں منبع دباؤ کے مساوی منبع رونسب کرتے ہوئے شکل 14.10-الف ملتا ہے جہاں منبع دباؤ $\frac{8}{s}$ اور اس کے سلسلہ وار $2s$ کو منبع رو $\frac{4}{s^2} = \frac{8/s}{2s}$ جس کے متوازی $2s$ جڑا ہے میں



شکل 14.10: منبع دباؤ کی جگہ منبع رولنڈ کیا گیا ہے۔

تبدیل کیا گیا ہے۔ اسی طرح منبع دباؤ $\frac{2}{s}$ اور سلسلہ وار 2 کو منبع رول $\frac{2/s}{s} = \frac{1}{s}$ میں تبدیل کیا گیا ہے جس کے متوازی 2 نسب ہے۔

شکل 14.10-الف میں متوازی جڑے منبع رول کا مساوی منبع رول $\frac{s+4}{s^2} + \frac{1}{s} = \frac{4}{s^2} + \frac{1}{s}$ ہے۔ اسی طرح منبع کے متوازی 2 اور $2s$ مل کر $\frac{2(2s)}{2+2s} = \frac{2s}{s+1}$ دیتے ہیں۔ یوں شکل-ب حاصل ہوتا ہے۔

شکل 14.10-ب میں منبع رول $\frac{s+4}{s^2}$ اور متوازی رکاوٹ $\frac{2s}{s+1}$ کو سلسلہ وار جڑے منبع دباؤ $(\frac{s+4}{s^2})(\frac{2s}{s+1}) = \frac{2(s+4)}{s(s+1)}$ اور رکاوٹ $\frac{2s}{s+1}$ میں تبدیل کرتے ہوئے شکل-پ حاصل ہوتی ہے جس سے تقسیم دباؤ کے کلیے سے $V_0(s)$ لکھتے ہیں۔

$$V_0(s) = \left(\frac{6}{\frac{2s}{s+1} + \frac{4}{s} + 6} \right) \frac{2(s+4)}{s(s+1)}$$

$$= \frac{6(s+4)}{4s^2 + 5s + 2}$$

مسئلہ تھونن سے حل کرنے کی خاطر شکل 14.8-الف میں سلسلہ وار جڑے 6Ω اور 0.25 F کو بوجھ تصور کرتے ہوئے بقایا دور کا تھونن مساوی حاصل کرتے ہیں۔ تھونن دباؤ شکل 14.11-الف اور تھونن رکاوٹ شکل-ب سے حاصل کی جائے گی۔ شکل-الف سے درج ذیل لکھتے

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{\frac{8}{s} - \frac{2}{s}}{2s + 2} \\ &= \frac{3}{s(s+1)} \end{aligned}$$

ہوئے تھونن دباؤ حاصل کی جاسکتی ہے۔

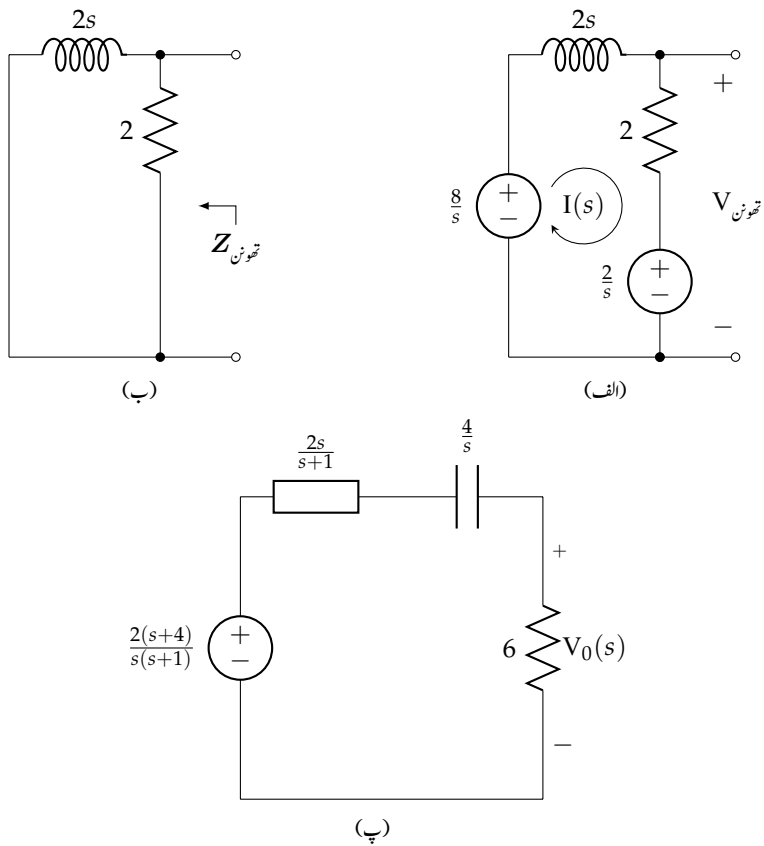
$$\begin{aligned} V_{\text{تھونن}} &= \frac{2}{s} + 2I(s) \\ &= \frac{2}{s} + \frac{6}{s(s+1)} \\ &= \frac{2(s+4)}{s+1} \end{aligned}$$

شکل-ب سے تھونن رکاوٹ حاصل کرتے ہیں۔

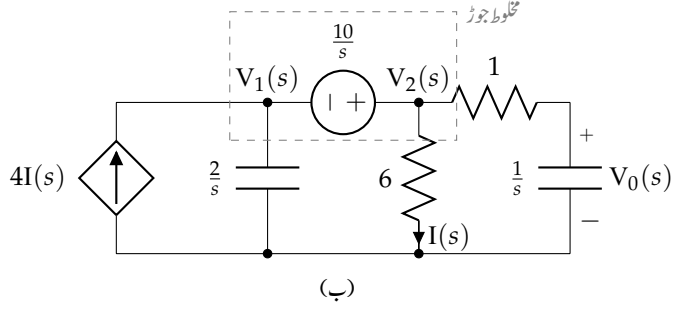
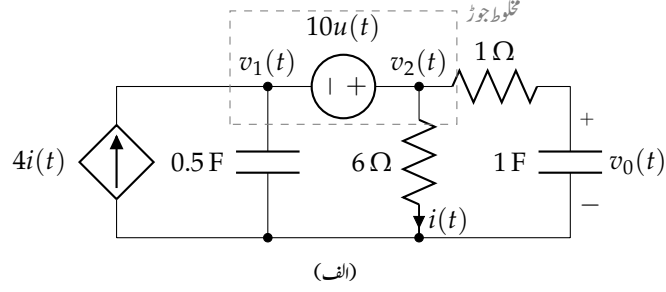
$$\begin{aligned} Z_{\text{تھونن}} &= \frac{(2)(2s)}{2 + 2s} \\ &= \frac{2s}{s+1} \end{aligned}$$

تھونن دباؤ اور تھونن رکاوٹ استعمال کرتے ہوئے تھونن دور حاصل ہوتا ہے جس کے ساتھ بوجھ جوڑتے ہوئے شکل 14.11-پ حاصل ہوتی ہے جہاں سے تقسیم دباؤ کے یکے سے $V_0(s)$ حاصل ہو گا۔

$$\begin{aligned} V_0(s) &= \left(\frac{6}{\frac{2s}{s+1} + \frac{4}{s} + 6} \right) \frac{2(s+4)}{s(s+1)} \\ &= \frac{6(s+4)}{4s^2 + 5s + 2} \end{aligned}$$



شکل 14.11: مثال 14.3 کے دور کا تھونن سے حل۔



شکل 14.12: مثال 14.4 کا دورہ۔

مشق 14.1: شکل 14.8-الف کو مسئلہ نارٹن سے حل کریں۔

مثال 14.4: شکل 14.12-الف میں $v_0(t)$ دریافت کریں۔

حل: اگر $v_2(t)$ معلوم کیا جائے تو $v_0(t)$ کو تقسیم دباؤ کے کلیے سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس دور میں مخلوط جوڑ پایا جاتا ہے لہذا مساوات جوڑ کی تعداد کم ہوگی۔ شکل-ب میں لاپلاس بدل دکھایا گیا ہے جس سے کرخوف مساوات جوڑ لکھتے ہیں

$$\frac{V_2(s)}{6} + \frac{V_2(s)}{1 + \frac{1}{s}} + \frac{V_2(s) - \frac{10}{s}}{\frac{2}{s}} - 4I(s) = 0$$

جہاں

$$I(s) = \frac{V_2(s)}{6}$$

ہے لہذا

$$\frac{V_2(s)}{6} + \frac{V_2(s)}{1 + \frac{1}{s}} + \frac{V_2(s) - \frac{10}{s}}{\frac{2}{s}} - \frac{4V_2(s)}{6} = 0$$

یعنی

$$\frac{V_2(s)}{6} + \frac{sV_2(s)}{s+1} + \frac{sV_2(s) - 10}{2} - \frac{2V_2(s)}{3} = 0$$

یا

$$V_2(s) = \frac{10(s+1)}{s^2 + 2s - 1}$$

حاصل ہوتا ہے۔ تقسیم دباؤ کے کلیے سے درکار جواب لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned} V_0(s) &= V_2(s) \left(\frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}} \right) \\ &= \frac{10(s+1)}{s^2 + 2s - 1} \left(\frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}} \right) \\ &= \frac{10}{s^2 + 2s - 1} \end{aligned}$$

جزوی کسری پھیلاؤ حاصل کرتے ہوئے وقتی دائرہ کار میں دباؤ حاصل ہوگا۔ نسب نما کے جذر $-1 \mp \sqrt{2}$ ہیں لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} V_0(s) &= \frac{10}{(s+1-\sqrt{2})(s+1+\sqrt{2})} \\ &= \frac{K_1}{s+1-\sqrt{2}} + \frac{K_2}{s+1+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

جس سے

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{10}{s+1+\sqrt{2}} \Big|_{s=-1+\sqrt{2}} \\
 &= \frac{5}{\sqrt{2}} \\
 K_2 &= \frac{10}{s+1-\sqrt{2}} \Big|_{s=-1-\sqrt{2}} \\
 &= -\frac{5}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ یوں

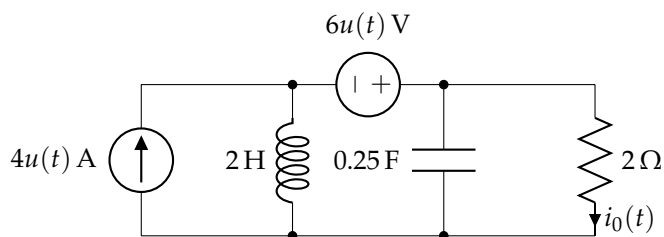
$$V_0(s) = \frac{5}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{s+1-\sqrt{2}} - \frac{1}{s+1+\sqrt{2}} \right)$$

لکھ کر الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے درکار دباؤ حاصل ہو گا۔

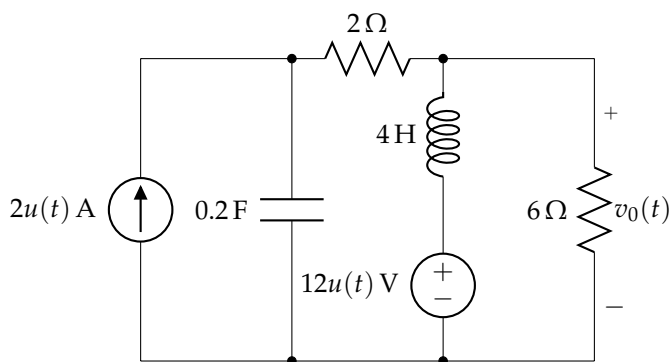
$$\begin{aligned}
 v_0(t) &= \frac{5}{\sqrt{2}} \left[e^{-(1-\sqrt{2})t} - e^{-(1+\sqrt{2})t} \right] u(t) \\
 &= 5\sqrt{2}e^{-t} \sinh(\sqrt{2}t)u(t) \text{ V}
 \end{aligned}$$

مشق 14.2: شکل 14.13 میں $i_0(t)$ بذریعہ مساوات جوڑ دریافت کریں۔

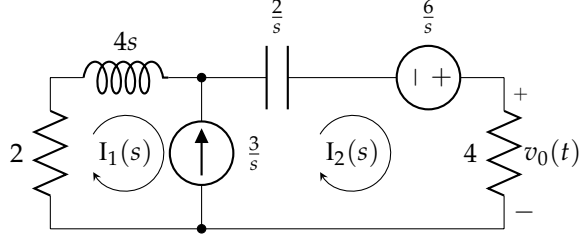
$$i_0(t) = [e^{-t}(5 \sin t - 3 \cos t) + 3]u(t) \text{ A}$$



شکل 14.13: مثال 14.2 کا دورہ



شکل 14.14: مثال 14.3 کا دورہ



شکل 14.15: مثال 14.4 اور مثال 14.5 کا دور۔

مشق 14.3: شکل 14.14 میں $v_0(t)$ بذریعہ مساوات جوڑ دریافت کریں۔

$$v_0(t) = \left[e^{-\frac{t}{2}} \left(7.24 \sin \frac{\sqrt{11}}{4} t - 12 \cos \frac{\sqrt{11}}{4} t \right) + 12 \right] u(t) \text{ V}$$

مشق 14.4: شکل 14.15 میں $v_0(t)$ بذریعہ دائری مساوات دریافت کریں۔

$$v_0(t) = 12e^{-\frac{t}{2}} \text{ V}$$

مشق 14.5: مسئلہ تھونن کی مدد سے شکل 14.15 میں $v_0(t)$ حاصل کریں۔

لاپلاس بدل کی مدد سے کچھ ادوار ہم حل کر چکے جن میں ابتدائی رواد دباؤ صفر تھے۔ آئیں اب چند ایسے ادوار دیکھیں جن میں ابتدائی رواد ابتدائی دباؤ پایا جاتا ہو۔ اس طرز کے ادوار ہم پہلے باب 7 میں حل کر چکے ہیں۔ اس باب کے شروع میں

ابتدائی رو اور ابتدائی دباؤ کو شامل کرتے ہوئے پرزوں کے لاپلاس بدل حاصل کئے گئے نہیں شکل 14.2، شکل 14.3 اور شکل 14.4 میں دکھایا گیا ہے۔ انہیں کو استعمال کرتے ہوئے ادوار حل کئے جائیں گے۔

مثال 14.5: شکل 14.16 میں ازل سے ایک سوئچ منقطع اور ایک سوئچ چالو ہے۔ عین $t = 0$ s پر چالو سوئچ کو منقطع کر دیا جاتا ہے جبکہ منقطع سوئچ کو چالو کر دیا جاتا ہے۔ لمحہ $t < 0$ پر دور کو حل کرتے ہوئے ابتدائی دباؤ اور ابتدائی رو حاصل کرتے ہوئے $t \geq 0$ پر $i_0(t)$ دریافت کریں۔

حل: لمحہ $t < 0$ پر برق گیر کو کھلے دور جبکہ امالہ گیر کو قصر دور تصور کرتے ہوئے شکل-ب حاصل ہوتا ہے جہاں سے امالہ گیر کی ابتدائی رو $i_L(0)$ اور برق گیر کا ابتدائی دباؤ $v_C(0)$ حاصل ہوتے ہیں۔

$$i_L(0) = \frac{2}{4} = 0.5 \text{ A}$$

$$v_C(0) = 2 \text{ V}$$

ابتدائی معلومات کو شامل کرتے ہوئے پرزوں کے لاپلاس مساوی دور پر کرنے سے لمحہ $t \geq 0$ کے لئے شکل حاصل ہوتا ہے۔ مساوات جوڑ لکھتے ہیں

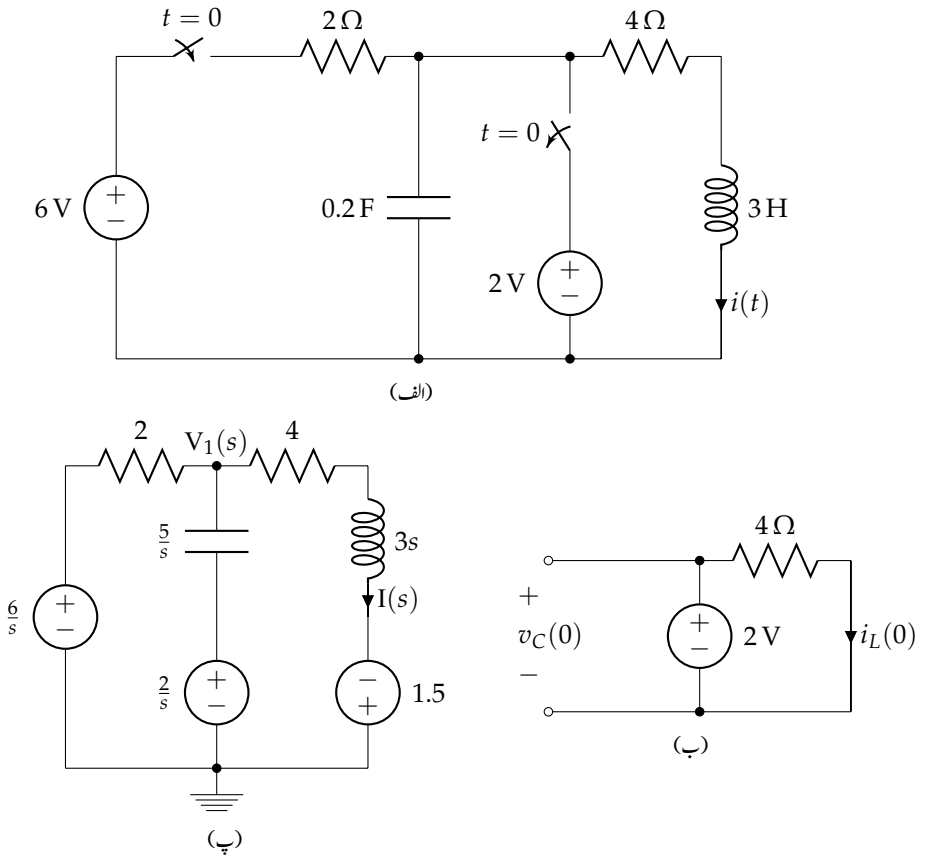
$$\frac{V_1(s) - \frac{6}{s}}{2} + \frac{V_1(s) - \frac{2}{s}}{\frac{5}{s}} + \frac{V_1(s) + 1.5}{3s} = 0$$

جس سے

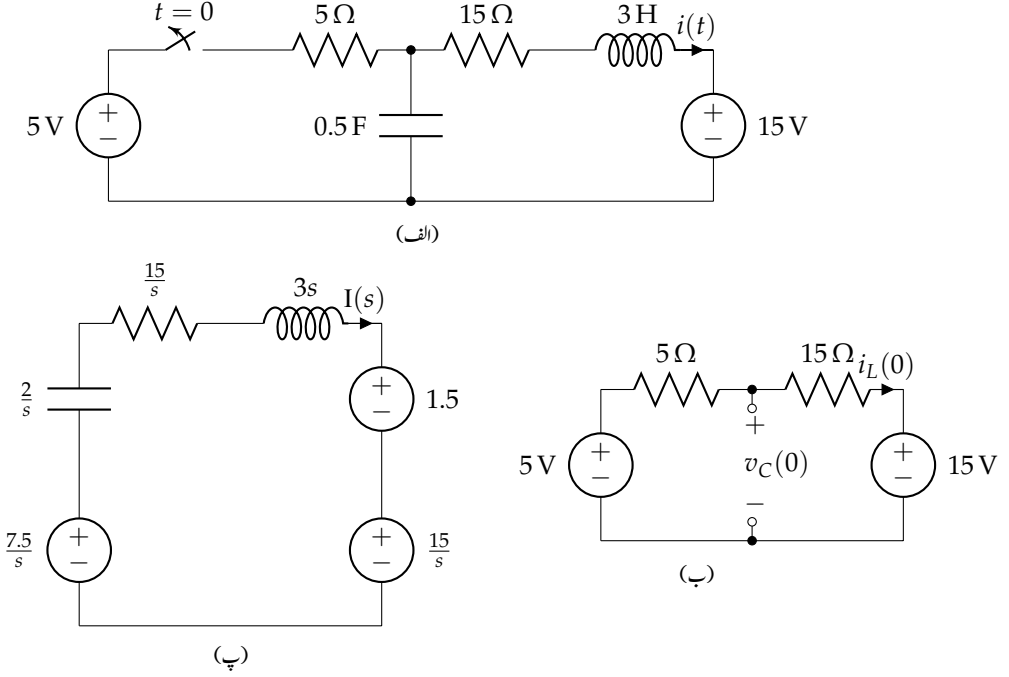
$$V_1(s) = \frac{12s^2 + 91s + 120}{s(6s^2 + 23s + 30)}$$

حاصل ہوتا ہے۔ یوں رو درج ذیل ہے

$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{V_1(s)}{3s + 4} \\ &= \frac{12s^2 + 91s + 120}{s(s + 4)(6s^2 + 23s + 30)} \end{aligned}$$



شکل 14.16: مثال 14.5 کا دورہ



شکل 14.17: مثال 14.6 کا دور۔

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے درج ذیل ملتا ہے۔

$$i(t) = \left[e^{-\frac{23}{12}t} \left(\frac{44}{\sqrt{191}} \sin \frac{\sqrt{191}t}{12} - 2 \cos \frac{\sqrt{191}t}{12} \right) + 4 \right] u(t) \text{ A}$$

مثال 14.6: شکل 14.17 میں ازل سے چالو سوئچ کو لمحہ پر منقطع کیا جاتا ہے۔ سوئچ منقطع ہونے کے بعد کی رو $i(t)$ دریافت کریں۔

حل: چالو سوئچ کی صورت میں برق گیر کو کھلا دور اور امالہ گیر کو قصر دور تصور کرتے ہوئے شکل-ب حاصل ہوتی ہے جہاں سے امالہ گیر کی ابتدائی رو $i_L(0)$ اور برق گیر کی ابتدائی دباؤ $v_C(0)$ حاصل کرتے ہیں۔

$$i_L(0) = \frac{10 - 20}{5 + 15} = -0.5 \text{ A}$$

$$v_C(0) = \frac{5 \times 15 + 15 \times 5}{5 + 15} = 7.5 \text{ V}$$

ابتدائی معلومات کو استعمال کرتے ہوئے، سوئچ منقطع ہونے کے بعد کا لاپلاس بدل دور شکل-پ میں دکھایا گیا ہے۔ ابتدائی رونق ہونے کی وجہ سے امالہ کے لاپلاسی انپہار میں 1.5 V منبع کے قسطنین شکل 14.4 کے الٹ ہیں۔ شکل 14.17-ب سے $I(s)$ لکھتے ہیں۔

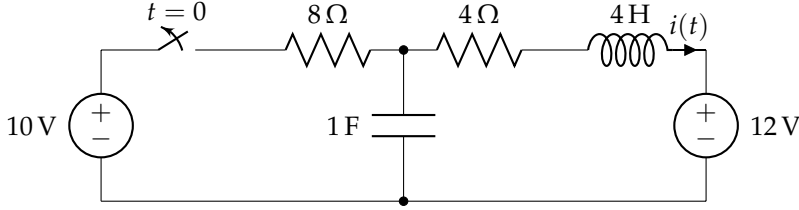
$$\begin{aligned} I(s) &= \frac{\frac{7.5}{s} - 1.5 - \frac{15}{s}}{\frac{2}{s} + 15 + 3s} \\ &= \frac{-(s + 5)}{2(s^2 + 5s + \frac{2}{3})} \\ &= \frac{-(s + 5)}{2(s + \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{201}}{6})(s + \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{201}}{6})} \end{aligned}$$

اس کا الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

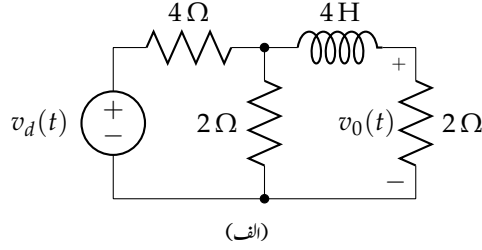
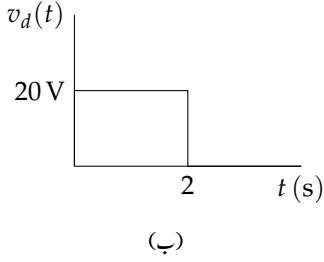
$$i(t) = -e^{-\frac{5}{2}t} \left[\frac{45}{6\sqrt{201}} \sinh\left(\frac{\sqrt{201}}{6}t\right) + \frac{1}{2} \cosh\left(\frac{\sqrt{201}}{6}t\right) \right] u(t) \text{ A}$$

مشق 14.6: شکل 14.18 میں $i_0(t)$ حاصل کریں۔

$$\text{جواب: } i_0(t) = -\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{6} (1 + \frac{t}{2}) u(t) \text{ A}$$



شکل 14.18: مشق 14.6 کا دور۔



شکل 14.19: مشق 14.7 کا دور۔

مشق 14.7: شکل 14.19-الف میں $v_0(t)$ حاصل کریں۔ شکل-ب میں داخلی دباؤ کی مستطیل صورت دی گئی ہے۔

جواب: $v_0(t) = 4(1 - e^{-\frac{5}{6}t})u(t) + 4(1 - e^{-(\frac{5}{6}-2)t})u(t-2)$ V

14.4 تبادلی تفاعل جال

دور میں کسی بھی دباؤ یا رو اور داخلی اشارے کے تناسب کو جال کی تبادلی تفاعل¹ یا تفاعل جال² کہتے ہیں۔ اگر دونوں متغیرات دباؤ ہوں تب تبادلی تفاعل افزائش دباؤ³ کہلاتا ہے، اگر دونوں متغیرات رو ہوں تب اس کو افزائش رو⁴ کہتے

¹ transfer function
² network function
³ voltage gain
⁴ current gain

ہیں۔ اسی طرح دباؤ اور رو کے تناسب کو افزائش مزاحمت نما⁵ کہتے ہیں جبکہ رواؤر دباؤ کے تناسب کو افزائش موصلیت نما⁶ کہتے ہیں۔ تبدلی تفاعل کے حصول میں ابتدائی دباؤ اور ابتدائی رو کو صفر لیا جاتا ہے۔

فرض کریں کہ کسی دور کا تبدلی تفاعل درج ذیل مساوات دیتی ہے جہاں $x_d(t)$ داخلی اشارہ اور $y_0(t)$ خارجی اشارہ ہیں۔

$$b_n \frac{d^n y_0(t)}{dt^n} + b_{n-1} \frac{d^{n-1} y_0(t)}{dt^{n-1}} + \dots + b_1 \frac{d^1 y_0(t)}{dt^1} + b_0 y_0(t) =$$

$$a_m \frac{d^m x_d(t)}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} x_d(t)}{dt^{m-1}} + \dots + a_1 \frac{d^1 x_d(t)}{dt^1} + a_0 x_d(t)$$

تمام ابتدائی معلومات صفر ہونے کی صورت میں درج بالا کا لاپلاس بدل درج ذیل ہو گا

$$(b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0) Y_0(s) =$$

$$(a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0) X_d(s)$$

جس سے تبدلی تفاعل $H(s)$

$$H(s) = \frac{Y_0(s)}{X_d(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}$$

یا

$$(14.18) \quad Y_0(s) = H(s) X_d(s)$$

لکھتے ہیں۔

مساوات 14.18 کہتی ہے کہ تبدلی تفاعل $H(s)$ اور داخلی تفاعل X_d کا حاصل ضرب خارجی تفاعل $Y_0(s)$ کے برابر ہے۔ یوں $x_d(t) = \delta(t)$ کی صورت میں چونکہ $X_d(s) = 1$ ہے لہذا $Y_0(s) = H(s)$ ہو گا۔

$$(14.19) \quad Y_0(s) = H(s) \delta(t)$$

یہ ایک اہم نتیجہ ہے جس کے تحت کسی بھی دور پر اکائی ضرب تفاعل لاگو کرتے ہوئے خارجی اشارے سے دور کا تبدلی تفاعل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ ایک بار دور کا تبدلی تفاعل معلوم ہو جائے اس کے بعد کسی بھی داخلی اشارے پر دور کا رد عمل

⁵transresistance gain
⁶transconductance gain

مساوات 14.18 سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اکائی ضرب تفاعل لاگو کرتے ہوئے خارجی رد عمل $h(t)$ دے گا جس کا لاپلاس بدل لیتے ہوئے $H(s)$ حاصل کیا جائے گا۔ چونکہ تجزیہ گاہ⁷ میں اکائی ضرب تفاعل پیدا کرنا مشکل بلکہ ناممکن کام ہے لہذا ہم دور پر اکائی سیڑھی تفاعل لاگو کرتے ہوئے تبدیلی تفاعل حاصل کر سکتے ہیں۔ چونکہ $u(t)$ کا لاپلاس بدل $\frac{1}{s}$ ہے لہذا دور پر اکائی سیڑھی تفاعل لاگو کرتے ہوئے مساوات 14.18 کے تحت درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(14.20) \quad Y_0(s) = \frac{H(s)}{s} \quad u(t)$$

یوں اکائی سیڑھی تفاعل لاگو کرتے ہوئے دور کا خارجی اشارہ $y_0(t)$ ناپا جاتا ہے۔ خارجی اشارے کا لاپلاس بدل $Y_0(s)$ دے گا۔ درج بالا مساوات کے تحت $H(s) = Y_0(s)$ کے برابر ہے۔ اس کو یوں بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ ناپے گئے خارجی اشارے کے تفرق $\frac{dy_0(t)}{dt}$ کا لاپلاس بدل نظام کا تبدیلی تفاعل $H(s)$ ہو گا۔

مثال 14.7: دور کا اکائی ضرب تفاعل رد عمل $H(s) = \frac{2}{s+5}$ ہے۔ داخلی اشارہ $v_d(t) = 3e^{-4t}u(t)$ V لاگو کرتے ہوئے خارجی اشارہ $v_0(t)$ دریافت کریں۔

حل: داخلی اشارے کا لاپلاس بدل لکھتے ہیں۔

$$V_d(s) = \frac{3}{s+4}$$

یوں مساوات استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} V_0(s) &= H(s)V_d(s) \\ &= \frac{6}{(s+5)(s+4)} \\ &= \frac{6}{s+4} - \frac{6}{s+5} \end{aligned}$$

الٹ لاپلاس بدل لیتے ہوئے خارجی اشارہ حاصل کرتے ہیں۔

$$v_0(t) = 6(e^{-4t} - e^{-5t})u(t) \text{ V}$$

تبادلی تفاعل کے قطب سے دور کے رد عمل کے بارے میں بہت کچھ جانا جاتا ہے۔ ہم ایک درجی اور دو درجہ ادوار پر باب 7 میں غور کر چکے ہیں۔ یہاں نتائج کو دوبارہ پیش کرتے ہیں۔ ایک عدد امالہ گیر یا برق گیر کی صورت میں رد عمل $y(t) = y_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ صورت رکھتا ہے جہاں τ دور کا وقتی مستقل ہے۔ دو درجی ادوار کا رد عمل دور کے امتیازی مساوات

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

کے قطبین پر منحصر ہوتا ہے۔ یاد رہے کہ تبادلی تفاعل کا نسب نما امتیازی مساوات کہلاتا ہے۔ امتیازی مساوات میں ζ تقصیری مستقل اور ω_0 بلا تقصیر قدرتی تعدد ہے اور یہی دو قیمتیں رد عمل کی تین ممکنہ صورتیں تعین کرتی ہیں۔

زیادہ تقصیر: امتیازی مساوات میں $\zeta > 1$ اور مساوات کے جذر

$$s_1 = -\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

$$s_2 = -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

ہیں لہذا جال کا رد عمل درج ذیل ہے۔

$$y(t) = K_1 e^{-(\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1})t} + K_2 e^{-(\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1})t}$$

کم تقصیر: امتیازی مساوات میں $\zeta < 1$ اور مساوات کے جذر

$$s_1 = -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$$

$$s_2 = -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}$$

ہیں لہذا جال کا رد عمل درج ذیل ہے۔

$$y(t) = K_1 e^{-(\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2})t} + K_2 e^{-(\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2})t}$$

$$= K e^{-\zeta\omega_0 t} \cos(\omega_0\sqrt{1 - \zeta^2}t + \phi)$$

فاصل تقصیر: امتیازی مساوات میں $\zeta = 1$ اور مساوات کے جذر

$$s_1 = s_2 = -\omega_0$$

ہیں لہذا جال کا رد عمل درج ذیل ہے۔

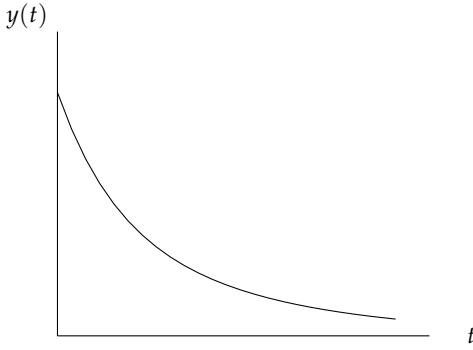
$$y(t) = K_1 e^{-\omega_0 t} + K_2 t e^{-\omega_0 t}$$

جال کے قطبین اور صفروں کو عموماً مخلوط سطح⁸ یا s سطح پر دکھایا جاتا ہے۔ مخلوط سطح کے افقی محور پر σ اور عمودی محور پر $j\omega$ رکھتے ہوئے مخلوط تعدد $s = \sigma + j\omega$ دکھایا جاتا ہے۔ اس سطح پر صفر کو 0 جبکہ قطبین کو \times سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

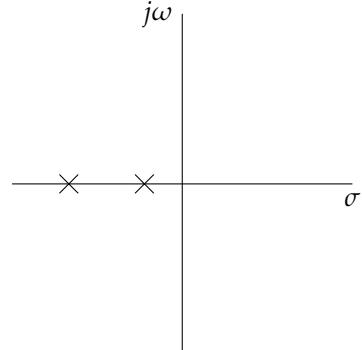
شکل 14.20 میں سادہ اور علیحدہ قطبین، مخلوط قطبین اور کثیر ہم رقتی قطبین مخلوط سطح پر دکھائے گئے ہیں۔ شکل-ٹ میں دو عدد ہم رقتی قطبین کو علیحدہ علیحدہ کر کے دکھایا گیا ہے۔ حقیقت میں یہ دونوں حقیقی محور پر ایک ہی نقطے پر پائے جاتے ہیں۔ ساتھ ہی ساتھ ان سے حاصل رد عمل بھی دکھایا گیا ہے۔ سادہ اور علیحدہ قطبین کے تفاعل کی شرح تبدیلی کم ہوتی ہے لہذا اس کو صفر تک پہنچنے میں زیادہ وقت لگتا ہے۔ مخلوط قطبین کے تفاعل کی شرح تبدیلی زیادہ ہوتی ہے البتہ یہ صفر پر پہنچ کر دوسری جانب نکل جاتا ہے۔ یوں مخلوط قطبین کا تفاعل مقصور سائن⁹ ہوتا ہے۔ کثیر ہم رقتی قطبین کا رد عمل ان دونوں کے درمیان ہے۔ یہ تیز تر ممکنہ رفتار سے صفر تک پہنچتا ہے، البتہ اتنا تیز نہیں کہ صفر پر رکھ نہ سکے اور دوسری جانب نکل جائے۔

شکل 14.21 میں مخلوط سطح پر مختلف تفاعل اور تفاعل کے قطبین دکھائے گئے۔ اس شکل سے کئی حقائق کی وضاحت ہوتی ہے لہذا اس پر کچھ وقت صرف کرتے ہیں۔ فرض کریں کہ p_1 تا p_5 بالترتیب $f_1(t)$ تا $f_5(t)$ تفاعل کو ظاہر کرتے ہیں۔ مخلوط قطبین جوڑیوں میں پائے جاتے ہیں۔ یوں p_2 اور p_2^* مخلوط جوڑی ہے جو $f_2(t)$ کو ظاہر کرتے ہیں۔ حقیقی جزو صفر ہونے کی صورت میں خیالی قطبین کی جوڑی مثلاً p_3 اور p_3^* ملتی ہے۔ قطب کا حقیقی جزو اگر مثبت ہو تو تفاعل مسلسل بڑھتا ہے اور اگر حقیقی جزو منفی ہو تب تفاعل مسلسل گھٹتا ہے۔ یوں $f_4(t)$ یا $f_5(t)$ مسلسل بڑھتے تفاعل ہیں جبکہ $f_1(t)$ اور $f_2(t)$ مسلسل گھٹتے تفاعل ہیں۔ مسلسل بڑھتا تفاعل غیر متوازن صورت حال کو ظاہر کرتی ہے جو حقیقی دنیا میں زیادہ دیر برقرار نہیں رہ سکتی جیسے مسلسل بڑھتی روآخر کار کسی نہ کسی چیز کو تباہ کر کے ہی رہے گی۔ مسلسل گھٹتا تفاعل متوازن صورت حال کو ظاہر کرتی ہے۔ یوں خیالی محور کے دائیں جانب قطب غیر متوازن

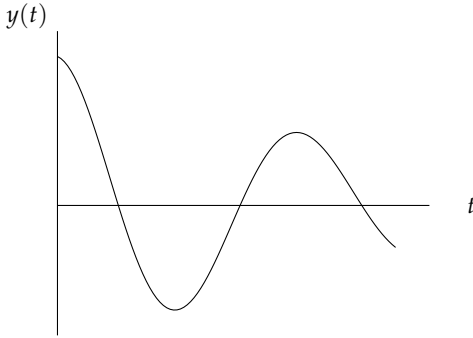
⁸ complex plane
⁹ damped sinusoidal



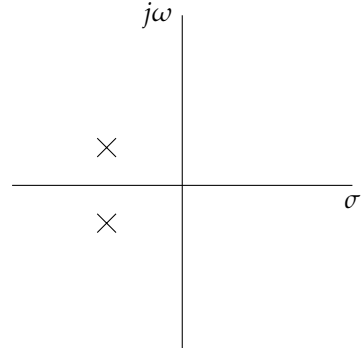
(ب) حقیقی منفی سادہ قطبین سے پیدا رد عمل۔



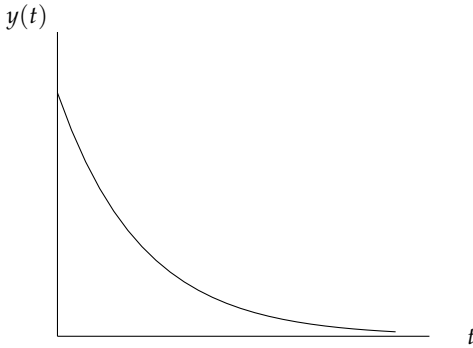
(الف) مخلوط سطح پر حقیقی سادہ قطبین کا اظہار۔



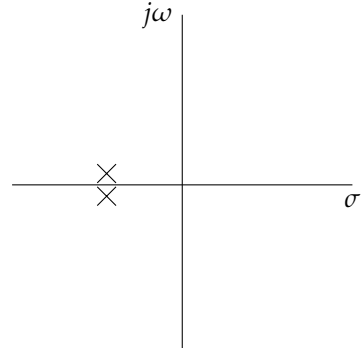
(ت) مخلوط جوڑی دار قطبین سے پیدا رد عمل۔



(پ) مخلوط سطح پر جوڑی دار مخلوط قطبین کا اظہار۔

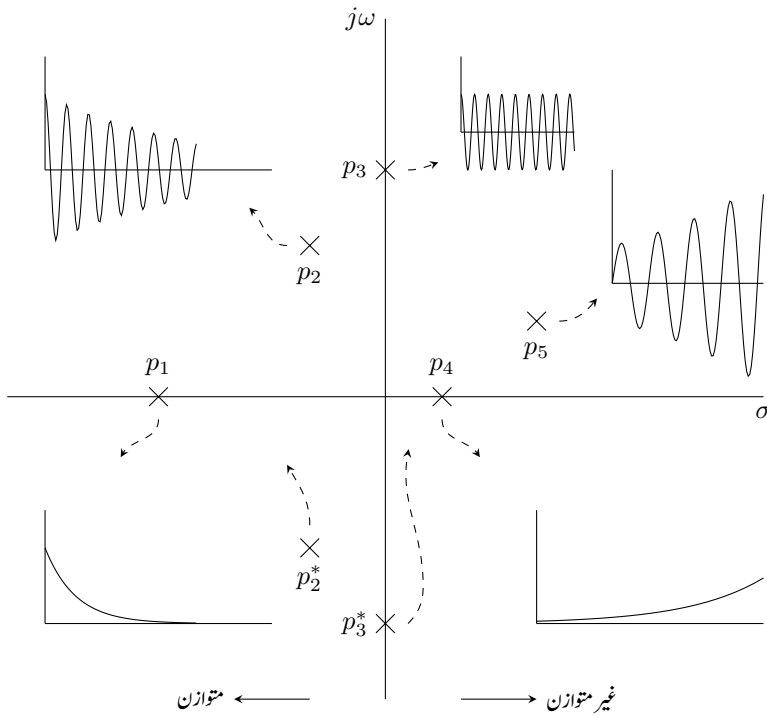


(ث) کثیر ہم رقی حقیقی منفی قطبین سے پیدا رد عمل۔

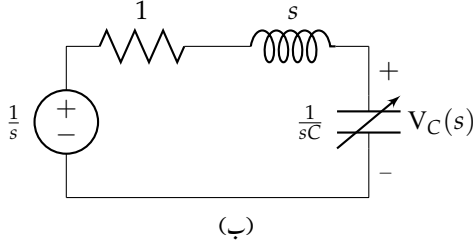
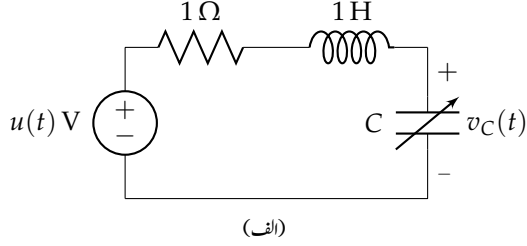


(ث) کثیر ہم رقی حقیقی منفی قطبین۔

شکل 14.20: قطبین اور رد عمل



شکل 14.21: مخلوط سطح مختلف قطبین اور ان کے تفاعل کے رد عمل۔



شکل 14.22: مثال 14.8 کا دور۔

جبکہ محور کے بائیں جانب قطب متوازن نظام کو ظاہر کرتی ہے۔ کسی بھی نظام کی تخلیق کے دوران مخلوط سطح میں قطبین کے مقام پر کھڑی نظر رکھی جاتی ہے اور خیالی محور کے دائیں جانب قطبین سے ہر صورت چھٹکارا حاصل کیا جاتا ہے۔ قطب کا خیالی جزو صفر نہ ہونے کی صورت میں تقابل سائن نما ہو گا لہذا $f_5(t)$ مسلسل بڑھتا سائن نما تقابل ہے جبکہ $f_2(t)$ مسلسل گھٹتا سائن نما یعنی مقصور سائن نما¹⁰ ہے۔ خیالی قطبین کی جوڑی سائن نما تقابل کو ظاہر کرتی ہے لہذا $f_3(t)$ برقرار حیٹے کا سائن نما تقابل ہے۔ حقیقی محور سے جتنا دور جایا جائے، تعدد اتنی بڑھتی ہے لہذا $f_5(t)$ سے $f_2(t)$ کا تعدد زیادہ ہے اور $f_3(t)$ کا تعدد اس سے بھی زیادہ ہے۔ اسی طرح خیالی محور سے جتنا دور جایا جائے، بڑھنے یا گھٹنے کی شرح اتنی بڑھتی ہے لہذا $f_4(t)$ کے بڑھنے کی شرح سے $f_2(t)$ کے گھٹنے کی شرح زیادہ ہو گی جبکہ $f_5(t)$ اس سے زیادہ اور $f_1(t)$ تمام سے زیادہ تیزی سے تبدیل ہو گا۔

مثال 14.8: شکل 14.22-الف میں تغیر پذیر برق گیر استعمال کیا گیا ہے۔ خارجی دباؤ $v_C(t)$ کو $C = 1\text{ F}$ ،
 $C = 10\text{ F}$ اور $C = 4\text{ F}$ کے لئے حاصل کریں۔

¹⁰ damped sinusoidal

شکل 14.22- ب میں لاپلاس بدل دور دکھایا گیا ہے جس سے تقسیم دباؤ کے کلیے سے خارجی دباؤ لکھتے ہیں۔

$$V_C(s) = \left(\frac{\frac{1}{sC}}{1 + s + \frac{1}{sC}} \right) \frac{1}{s}$$

$$= \frac{\frac{1}{C}}{s(s^2 + s + \frac{1}{C})}$$

$C = 1 \text{ F}$ کے لئے $V_C(s)$ کے مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$V_C(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 1)}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{\frac{1}{6}(3 + j\sqrt{3})}{s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\frac{1}{6}(3 - j\sqrt{3})}{s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

امتیازی مساوات کے جذر یعنی $V_C(s)$ کے قطبین $p_1 = 0$ ، $p_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$ اور $p_3 = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$ ہیں۔ یوں ایک عدد حقیقی اور مخلوط جوڑی دار قطبین پائے جاتے ہیں جو کم مقصور صورت حال ہے۔ الٹ لاپلاس بدل سے وقتی دائرہ کار میں خارجی دباؤ حاصل کرتے ہیں۔

$$v_C(t) = \left[1 - e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}t}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}t}{2} \right) \right] u(t) \text{ V}$$

$C = 4 \text{ F}$ کے لئے $V_C(s)$ کے مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$V_C(s) = \frac{0.25}{s(s^2 + s + 0.25)}$$

$$= \frac{0.25}{s(s + \frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{2}} - \frac{1}{2(s + \frac{1}{2})^2}$$

یہاں تینوں قطبین حقیقی ہیں جن میں $p = -\frac{1}{2}$ کثیر رفتی قطب ہے جو فاصل مقصور حال کو ظاہر کرتی ہے۔ الٹ لاپلاس لیتے ہوئے $v_C(t)$ حاصل کرتے ہیں۔

$$v_C(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{2}} - \frac{t}{2} e^{-\frac{t}{2}} \right) u(t) \text{ V}$$

$C = 10 \text{ F}$ کے لئے $V_C(s)$ کے مساوات کو حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} V_C(s) &= \frac{0.1}{s(s^2 + s + 0.1)} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{0.145}{s + 0.887} - \frac{1.145}{s + 0.113} \end{aligned}$$

اس مساوات کے قطبین $p_1 = 0$ ، $p_2 = -0.887$ اور $p_3 = -0.113$ ہیں۔ یوں تینوں سادہ علیحدہ علیحدہ حقیقی قطبین ہیں لہذا تفاعل کا رد عمل زیادہ مقصور ہو گا۔ الٹ لاپلاس بدل سے $v_C(t)$ حاصل کرتے ہیں۔

$$v_C(t) = (1 + 0.145e^{-0.887t} - 1.145e^{-0.113t}) u(t) \text{ V}$$

مثال 14.9: اکائی ضرب رد عمل $y(t) = 2e^{-5t} - 4e^{-2t}$ ہے۔ اکائی سیڑھی رد عمل دریافت کریں۔

حل: اکائی ضرب رد عمل تبادلی تفاعل دیتا ہے لہذا دیے گئے رد عمل کا لاپلاس بدل $H(s)$ ہو گا۔

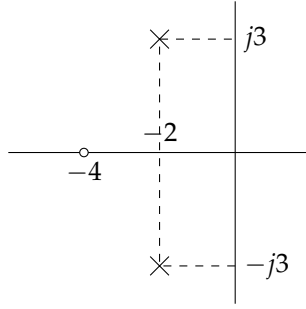
$$H(s) = \frac{2}{s + 5} - \frac{4}{s + 2}$$

یوں اکائی سیڑھی رد عمل درج ذیل ہو گا۔

$$Y(s) = \left(\frac{2}{s + 5} - \frac{4}{s + 2} \right) \frac{1}{s}$$

مخلوط تعددی دائرہ کار میں s سے تقسیم سے مراد وقتی دائرہ کار میں تفاعل کا مکمل ہے لہذا اکائی سیڑھی رد عمل وقتی دائرہ کار میں درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t 2e^{-5t} - 4e^{-2t} dt \\ &= \left. \frac{2e^{-5t}}{-5} - \frac{4e^{-2t}}{-2} \right|_0^t \\ &= \left(-\frac{8}{5} - \frac{2}{5}e^{-5t} + 2e^{-2t} \right) u(t) \end{aligned}$$



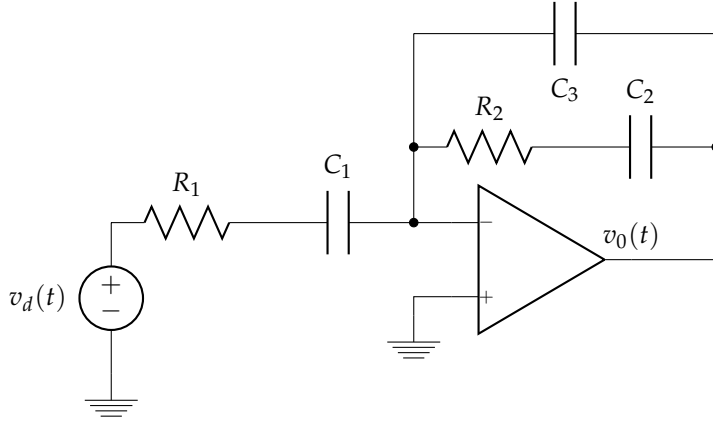
شکل 14.23: مشق 14.9 کے قطبین اور صفر۔

مشق 14.8: اکائی ضرب رد عمل $y(t) = 2 \cos 2t + 3 \sin 2t$ ہے۔ اکائی سیڑھی رد عمل دریافت کریں۔

جواب: $y(t) = \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cos 2t + \sin 2t \right) u(t)$

مشق 14.9: تبدیلی تفاعل $H(s) = \frac{s+4}{s^2+4s+13}$ کے صفر اور قطب حاصل کرتے ہوئے مخلوط سطح پر دکھائیں۔ اس کا اکائی سیڑھی رد عمل بھی حاصل کریں۔

جواب: قطبین اور صفر کو شکل 14.23 میں دکھایا گیا ہے۔ $y(t) = e^{-2t} \left(\cos 3t + \frac{2}{3} \sin 3t \right) u(t)$



شکل 14.24: مشق 14.10 کا دور۔

مشق 14.10: شکل 14.24 کا تبدیلی تفاعل $A_v(s) = \frac{V_0(s)}{V_d(s)}$ حاصل کریں۔

جواب:

$$A_v(s) = - \frac{\frac{1}{R_1 C_3 \left(s + \frac{1}{R_2 C_2} \right)}}{\left(s + \frac{1}{R_1 C_1} \right) \left[s + \frac{1}{R_2} \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) \right]}$$

آپ جانتے ہیں کہ دو درجی کم قصری جال کا امتیازی مساوات درج ذیل ہے

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2$$

جس کے مخلوط جوڑی دار قطبین

$$s_1 = -\zeta\omega_0 - j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$s_2 = -\zeta\omega_0 + j\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$$

کو مخلوط سطح پر شکل 14.25 میں دکھایا گیا ہے۔ قطب p کو زاویائی صورت میں لکھتے ہیں۔ محدود کے مرکز $(0, 0)$ سے قطب کا فاصلہ مسئلہ فیثاغورث کی مدد سے حاصل کرتے ہیں

$$رداس = \sqrt{(\zeta\omega_0)^2 + \left(\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\right)^2} = \omega_0$$

جسے شکل میں ω_0 دکھایا گیا ہے۔ اسی طرح زاویہ θ شکل سے دیکھ کر لکھا جاسکتا ہے۔ شکل میں ٹکون کا قاعدہ $\omega_0\zeta$ اور وتر ω_0 ہیں لہذا درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\omega_0\zeta}{\omega_0} \\ &= \zeta\end{aligned}$$

یوں درج ذیل لکھے جاسکتے ہیں۔

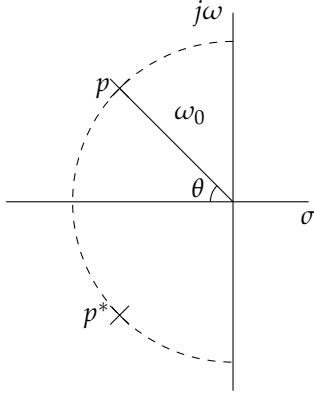
$$\begin{aligned}(14.21) \quad \omega_0 &= \text{رداس} \\ \zeta &= \cos^{-1} \theta = \text{زاویہ}\end{aligned}$$

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مرکز سے قطب تک فاصلہ ω_0 کے برابر ہے جبکہ زاویہ $\zeta = \cos^{-1}$ ہے۔ یوں ζ تبدیل کرنے سے رداس تبدیل نہیں ہوتا البتہ زاویہ تبدیل ہونے سے قطب دائری حرکت کرتا ہے۔ شکل-ب میں ζ تبدیل کرنے سے مخلوط جوڑی دار قطبین نقطہ دار دائرے پر حرکت کرتے ہیں۔

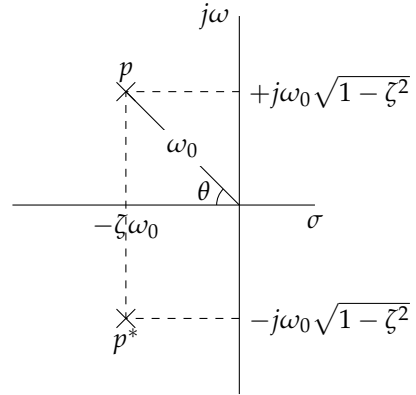
14.5 ترسیم قطبین و صفر اور بوڈا خط

ہم تعددی رد عمل پر غور کے دوران بوڈا خطوط پر بحث کر چکے ہیں۔ آئیں تبادلی تفاعل کے ترسیم قطبین و صفر اور بوڈا خط کے تعلق پر غور کریں۔ ایسا کرنے کی خاطر ہم شکل 14.26 میں دیے RLC کا تبادلی تفاعل

$$\begin{aligned}H(s) &= \frac{V_R(s)}{V_d(s)} \\ &= \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}\end{aligned}$$

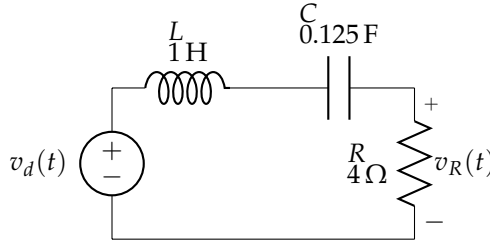


(ب) تقصیر تبدیل کرنے سے قطب نقطہ دار دائرے پر حرکت کرتا ہے۔



(الف) قطب تک رسد اس ω_0 ہے جبکہ زاویہ $\zeta^{-1} \cos$ ہے۔

شکل 14.25: کم قسری، دو درجی جال کے مخلوط جوڑی دار قطبین۔

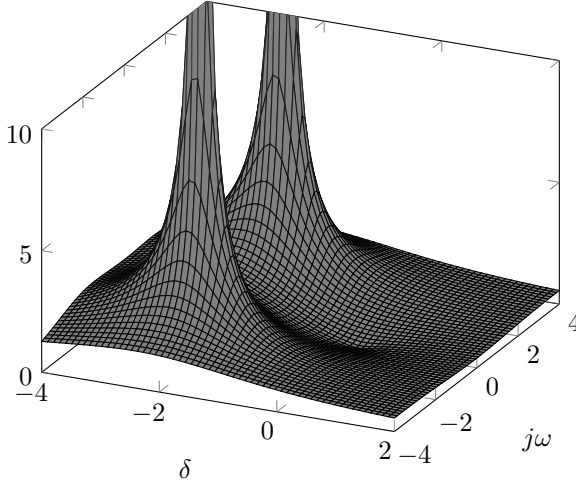


شکل 14.26: RLC دور۔

استعمال کریں گے جو پوزوں کی دی گئی قیمتیں پر کرنے سے درج ذیل صورت اختیار کر لیتا ہے۔

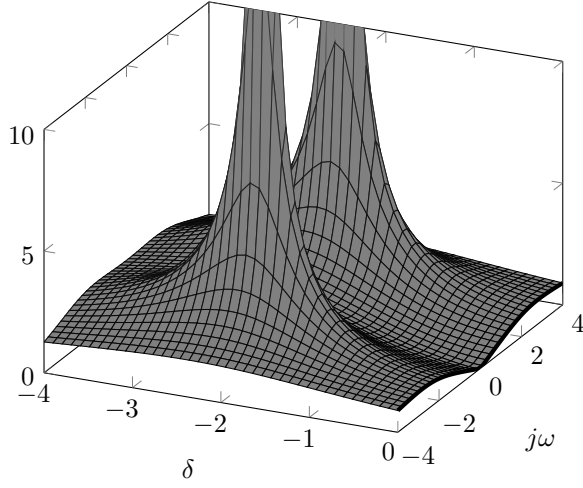
$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{4s}{s^2 + 4s + 8} \\
 &= \frac{4s}{(s + 2 - j2)(s + 2 + j2)}
 \end{aligned}
 \quad (14.22)$$

درج بالا تبدیلی تفاعل کی تین بعدی مقداری ترسیم شکل 14.27 میں دکھائی گئی ہے۔ تبدیلی تفاعل کا صفر $s = 0$ پر پایا جاتا ہے جبکہ $s = -2 \pm j2$ پر قطبین پائے جاتے ہیں۔ یوں قطبین پر تین بعدی ترسیم لامتناہی ہوگی جبکہ صفر پر اس کی قیمت صفر ہوگی۔

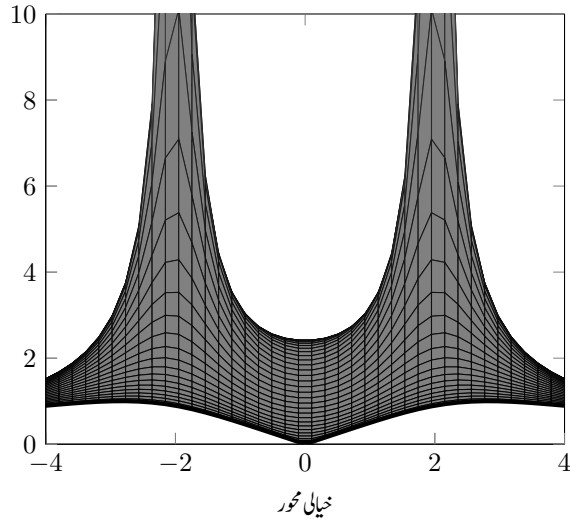


شکل 14.27: مساوات 14.22 کا تین بعدی ترسیم۔

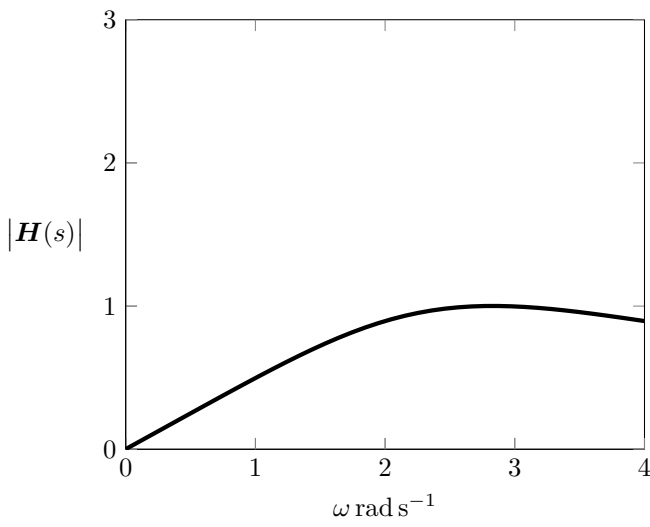
حقیقی دنیا میں تعدد ω ہوتا ہے تاکہ $\delta + j\omega$ جو کہ مخلوط تعدد ہے۔ بوڈا مقداری خط ω بالمقابل مقدار کا خط ہے۔ مخلوط سطح کے خیالی محور پر $s = j\omega$ ہوتا ہے لہذا مخلوط سطح کے خیالی محور پر بوڈا مقداری خط پایا جاتا ہے۔ تین بعدی ترسیم کو $\delta = 0$ پر کاٹتے ہوئے شکل 14.28 ملتی ہے جس کے خیالی محور پر بوڈا مقداری خط کو موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ شکل 14.28 کو یوں گھماتے ہیں کہ حقیقی محور صفحہ کتاب کے عمودی ہو۔ اس طرح شکل 14.29 ملتا ہے جہاں حقیقی محور کے دونوں جانب برابر فاصلے پر قطبین دیکھے جاسکتے ہیں۔ اس شکل میں حقیقی محور δ کے دونوں جانب بوڈا خط بالکل یکساں ہے لہذا ہم خیالی محور کا مثبت حصہ لیتے ہوئے شکل 14.30 حاصل کرتے ہیں جہاں صرف اور صرف خیالی محور پر تفاعل کا مقدار دکھایا گیا ہے۔ یہی بوڈا مقداری خط ہے۔



شکل 14.28: تین بعدی ترسیم کے خیالی محور پر بوڈا خط پایا جاتا ہے۔



شکل 14.29: تین بعدی ترسیم کا حقیقی محور صفحہ کتاب کے عمودی ہے۔



شکل 14.30: تین بعدی ترسیم کے مثبت خیالی محور پر بوڈا مقدار کی خط پایا جاتا ہے۔

