

برقی ادوار

خالد خان یوسفزئی
کامیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

1	بنیاد	1
1	برقی بار، برقی رو اور برقی دباؤ	1.1
6	قانون اوہم	1.2
8	توانائی اور طاقت	1.3
15	برقی پڑے	1.4
15	غیر تابع منبع	1.4.1
17	تابع منبع	1.4.2
27	مزا جتنی ادوار	2
27	قانون اوہم	2.1
35	قوانین کرخوف	2.2
51	سلسلہ وار جڑے پڑوں میں رو	2.3
52	تقسیم دباؤ	2.4
55	متعدد سلسلہ وار مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت	2.5
58	سلسلہ وار متعدد منبع دباؤ اور مزاحمت	2.6
59	متوازی جڑے مزاحمت پر یکساں دباؤ پایا جاتا ہے	2.7
61	تقسیم رو اور متعدد متوازی مزاحمتوں کا مساوی مزاحمت	2.8
68	سلسلہ وار اور متوازی مزاحمت	2.9
73	تخصیص مزاحمت	2.10
76	سلسلہ وار اور متوازی مزاحمتوں کے ادوار کا حل	2.11
84	ستارہ-تکون تبادلہ	2.12
91	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	2.13
101	ترکیب جوڑ اور دائری ترکیب	3
101	تجزیہ جوڑ	3.1
104	غیر تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار	3.2
117	تابع منبع رو استعمال کرنے والے ادوار	3.3
123	غیر تابع منبع دباؤ استعمال کرنے والے ادوار	3.4

132	تابع منبع دباو استعمال کرنے والے ادوار	3.5
139	دائری تجزیہ	3.6
140	غیر تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	3.7
148	غیر تابع منبع رواستعمال کرنے والے ادوار	3.8
154	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	3.9
158	دائری ترکیب اور ترکیب جوڑ کا موازنہ	3.10
161	حسابی ایپلیفائر	4
171	کامل حسابی ایپلیفائر	4.1
171	منفی ایپلیفائر	4.2
174	مثبت ایپلیفائر	4.3
176	مستقام کار	4.4
176	منفی کار	4.5
178	جمع کار	4.6
181	متوازن اور غیر متوازن صورت	4.7
185	موازنہ کار	4.8
185	آلاتی ایپلیفائر	4.9
187	مسئلے	5
187	مساوی دور	5.1
187	مسئلہ خطیت	5.2
191	مسئلہ نفاذ	5.3
201	مساوی ادوار	5.4
206	مسئلہ تھون، مسئلہ نارٹن اور مسئلہ متبادلہ منبع	5.5
225	تابع منبع استعمال کرنے والے ادوار	5.6
231	تابع منبع اور غیر تابع منبع دونوں استعمال کرنے والے ادوار	5.7
239	زیادہ سے زیادہ طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ	5.8
247	برق گیر اور امالہ گیر	6
247	برق گیر	6.1
261	امالہ گیر	6.2
270	برق گیر اور امالہ گیر کے خصوصیات	6.3
273	سلسلہ وار جڑے برق گیر	6.4
277	متوازی جڑے برق گیر	6.5
281	سلسلہ وار امالہ گیر	6.6
283	متوازی امالہ گیر	6.7
287	حسابی ایپلیفائر کے RC ادوار	6.8
288	تفرق کار	6.9
293	عارضی رد عمل	7
293	تعارف	7.1
293	ایک درجی ادوار	7.2

295	7.2.1 رد عمل کی عمومی مساوات
321	7.3 دھڑکن
328	7.4 دو درجی ادوار
359	8 تجزیہ برقرار حال
359	8.1 مخلوط اعداد
364	8.2 سائن نمائندگی
373	8.3 سائن نما اور مخلوط جبری تعامل
381	8.4 دوری سمتیہ
386	8.5 مزاحمت، امالہ گیر اور برقی گیر کے انفرادی دوری سمتیہ تعلق
396	8.6 برقی رکاوٹ اور برقی فراوانی
409	8.7 دوری سمتیہ کے اشکال
419	8.8 کر خوف مساوات
424	8.9 تجزیاتی تراکیب
443	9 برقرار برقی طاقت
443	9.1 لمبائی طاقت
446	9.2 اوسط طاقت
453	9.3 زیادہ سے زیادہ اوسط طاقت منتقل کرنے کا مسئلہ
463	9.4 موثر قیمت
472	9.5 جزو طاقت
476	9.6 مخلوط طاقت
484	9.7 جزو طاقت کی درستی
489	9.8 برقی چھٹکا
491	9.9 نم زمین
492	9.10 ایک دور کا نظام
497	9.11 حفاظتی تدابیر
499	10 مقناطیسی جڑے ادوار
499	10.1 مشترکہ امالہ
517	10.2 مشترکہ امالہ میں توانائی کا ذخیرہ
523	10.3 کامل ٹرانسفارمر
547	11 تین دوری نظام
547	11.1 تین دوری ستارہ دیاو
553	11.2 ستارہ ستارہ (YY) جوڑ
561	11.3 تین دوری ٹکونی (Δ) دیاو
566	11.4 ٹکونی بوجھ
571	11.5 طاقت کے کلیات
580	11.6 جزو طاقت کی درستی

585	12	تعددی رد عمل
596	12.1	جال
598	12.2	صفر اور قطب
601	12.3	سائن نما تعددی تجزیہ
601	12.3.1	یوڈا خطوط
622	12.4	گمگی ادوار
656	12.5	چیلنی
669	13	لاپلاس بدل
669	13.1	تعاریف
670	13.2	تفاعل کیتائی
677	13.3	لاپلاس بدل کی جوڑیاں
681	13.4	خواص البدل
686	13.5	الٹ لاپلاس بدل کا حصول
687	13.5.1	جزوی کسری پھیلاؤ
698	13.6	مکمل البھاؤ
702	13.7	مسئلہ ابتدائی قیمت اور مسئلہ اختتامی قیمت
707	14	ادوار کا حل بذریعہ لاپلاس بدل
707	14.1	ادوار کا حل
709	14.2	پرزوں کے مساوی لاپلاسی ادوار
713	14.3	تجزیاتی تراکیب
733	14.4	تبادلی تفاعل جال
745	14.5	ترسیم قطبین و صفر اور یوڈا خط
747	14.6	برقرار حال رد عمل
757	15	فوریز تجزیہ
783	15.1	تشاکل تفاعل
783	15.1.1	جفت تفاعل تشاکل
785	15.1.2	طاق تفاعل تشاکل
787	15.2	منتقلی وقت
789	15.3	تخلیق موج
790	15.4	تعددی طیف
795	15.5	برقرار حال برقی جال
795	15.5.1	اوسط طاقت
800	15.6	فوریز بدل

باب 15

فوریر تجزیہ

دوری تفاعل¹ سے مراد وہ تفاعل ہے جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہے جہاں T_0 دوری عرصہ² کہلاتی ہے۔

$$(15.1) \quad f(t) = f(t + nT_0), \quad n = \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots$$

درج بالا مساوات کہتی ہے کہ کسی بھی لمحہ t پر دوری تفاعل کی قیمت $f(t)$ اور اس لمحے سے T_0 وقت بعد تفاعل کی قیمت $f(t + T_0)$ برابر ہیں۔ شکل 15.1 میں اس کی وضاحت کی گئی ہے۔ دوری عرصے کو سیکنڈ (s) میں ناپا جاتا ہے۔ دوری عرصہ T_0 اور تعدد f_0 کا تعلق درج ذیل ہے جہاں تعدد کو ہرٹز³ (Hz) میں ناپا جاتا ہے۔

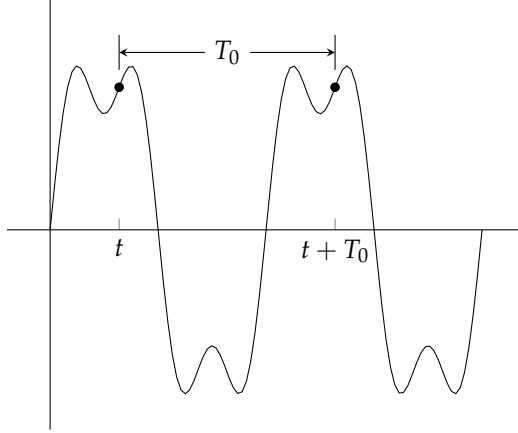
$$(15.2) \quad f_0 = \frac{1}{T_0}$$

زاویائی تعدد ω_0 اور تعدد f_0 کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$(15.3) \quad \omega_0 = 2\pi f_0$$

زاویائی تعدد کو ریڈین فی سیکنڈ (rad s^{-1}) میں ناپا جاتا ہے۔ شکل 15.2 میں چند دوری امواج⁴ دکھائے گئے ہیں۔

periodic function¹
time period²
Hertz, Hz³
periodic wave⁴



شکل 15.1: دوری عرصہ۔

کسی بھی دوری تقابل کو بطور درج ذیل (تکوینیاتی) فوریئر تسلسل⁵ لکھا⁶ جاسکتا ہے

$$\begin{aligned}
 f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \\
 (15.4) \quad &= a_0 + a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos(2\omega_0 t) + a_3 \cos(3\omega_0 t) + \dots \\
 &\quad + b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin(2\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t) + \dots
 \end{aligned}$$

جہاں a_0 ، a_1 ، a_2 ، b_1 وغیرہ تسلسل کے عددی سر⁷ کہلاتے ہیں۔ فوریئر تسلسل کی اوسط قیمت a_0 کے برابر ہے۔ ایک دوری عرصہ T_0 میں $\cos \omega_0 t$ یا $\sin \omega_0 t$ کی ایک لہر، $\cos(2\omega_0 t)$ یا $\sin(2\omega_0 t)$ کی دو لہریں اور $\cos(m\omega_0 t)$ یا $\sin(m\omega_0 t)$ کی m لہریں پوری آتی ہیں۔ اس حقیقت کو شکل 15.3 میں دکھایا گیا ہے جہاں وضاحت کی خاطر امواج کے حیطے مختلف رکھے گئے ہیں۔ فوریئر تسلسل میں $a_1 \cos \omega_0 t + b_1 \sin \omega_0 t$ بنیادی رکن⁸ یا پہلا ہارمونی رکن کہلاتا ہے، $a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t)$ دوسرا ہارمونی رکن⁹ کہلاتا ہے، $a_3 \cos(3\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t)$ تیسرا ہارمونی رکن اور اسی طرح $a_m \cos(m\omega_0 t) + b_m \sin(m\omega_0 t)$ ایم ہارمونی رکن کہلاتا ہے۔ ہم یہاں اصل رک کر چند حقائق اور نکلمات پر غور کرتے ہیں جو فوریئر تسلسل میں کلیدی کردار ادا کرتے ہیں۔

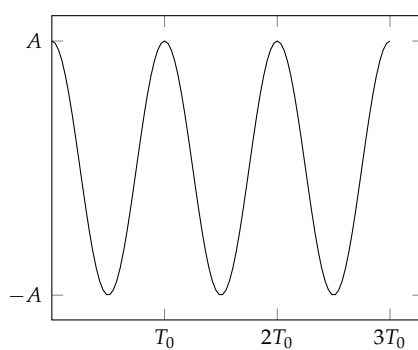
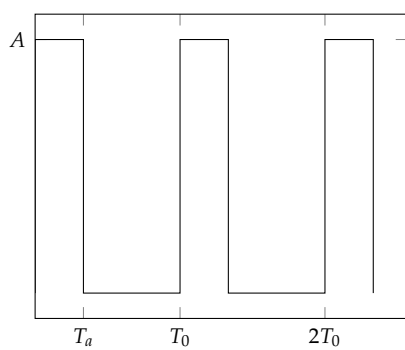
⁵ trigonometric Fourier series

⁶ جیمز پیٹ یوسف فوریئر نے حرارتی توانائی کے بہاؤ پر غور کے دوران اس تسلسل کو دریافت کیا۔

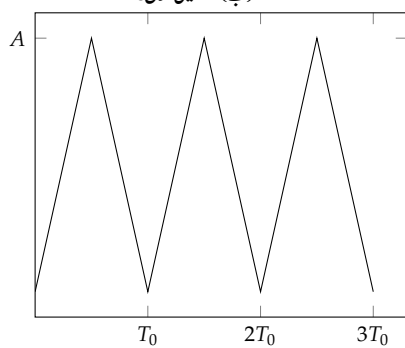
⁷ coefficients

⁸ fundamental component

⁹ second harmonic

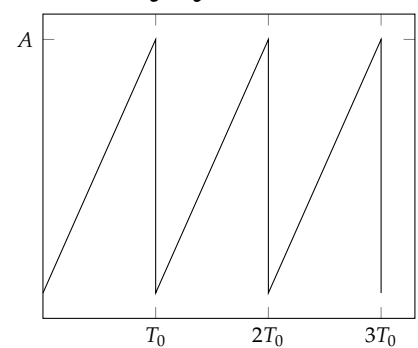


(ب) مستطیل موج۔



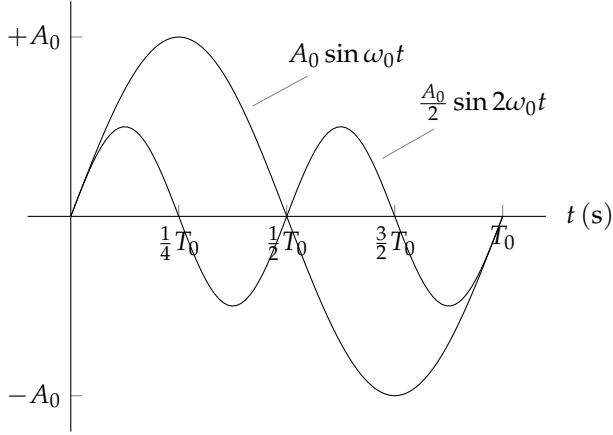
(ت) تکیونی موج۔

(الف) سائن نمائوج۔



(پ) دندان موج۔

شکل 15.2: چند دوری امواج۔



شکل 15.3: ایک دوری عرصہ میں فوریئر تسلسل کے ارکان کی تعداد۔

آپ دو سمتیوں کے نقطہ ضرب¹⁰ سے خوب واقف ہیں۔ سمتیہ A اور B کا نقطہ ضرب یا غیر سمتی ضرب¹¹ درج ذیل ہے جہاں دونوں سمتیوں کے مابین زاویہ θ ہے۔

$$(15.5) \quad A \cdot B = AB \cos \theta$$

آپس میں عمودی¹² سمتیوں کے مابین $\theta = 90^\circ$ ہونے کی بدولت $A \cdot B = 0$ ہوتا ہے جبکہ کسی بھی سمتیہ کے خود نقطہ ضرب کا جذر اس کے حیظے کے برابر ہوتا ہے۔

$$(15.6) \quad |A| = \sqrt{A \cdot A}$$

اسی سوچ کے ساتھ تفاعل کا نقطہ ضرب بیان کیا جاتا ہے۔

اگر تفاعل $f(t) \neq 0$ اور $g(t) \neq 0$ کے حاصل ضرب کا تکمل $a \leq t \leq b$ فاصلے پر صفر کے برابر ہو

$$(15.7) \quad \int_a^b f(t)g(t) dt = 0$$

تو $a \leq t \leq b$ فاصلے پر ان تفاعل کو آپس میں عمودی تصور کیا جاتا ہے۔ یاد رہے کہ دونوں تفاعل از خود غیر سمتی¹³ اور غیر صفر ہیں۔

¹⁰ dot product

¹¹ scalar product

¹² orthogonal

¹³ scalar

کسی بھی مقدار کا مربع مثبت ہوتا ہے لہذا تفاعل کا مربع $f^2(t)$ ہر نقطے پر مثبت ہوگا۔ فاصلہ $a \leq t \leq b$ پر تفاعل کے معیار¹⁴ $\|f(t)\|$ سے مراد

$$(15.8) \quad \|f(t)\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt}$$

ہے۔

مثال 15.1: ثابت کریں کہ $0 \leq t \leq T_0$ فاصلے پر $\cos(m\omega_0 t)$ اور $\cos(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی ہیں جہاں $m = 1, 2, 3, \dots$ اور $n = 1, 2, 3, \dots$ ممکن ہیں لیکن $m \neq n$ ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا مکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt &= \int_0^{T_0} \frac{\cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right] + \cos\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2} dt \\ &= \frac{\sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} \Bigg|_0^{T_0} \\ &= \frac{\sin[(m+n)2\pi]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin[(m-n)2\pi]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} \\ &\quad - \frac{\sin[(m+n)0]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin[(m-n)0]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} \end{aligned}$$

چونکہ m اور n عدد صحیح ہیں لہذا $m+n$ اور $m-n$ بھی عدد صحیح ہوں گے لہذا $\sin[(m+n)2\pi] = 0$ اور $\sin[(m-n)2\pi] = 0$ ہوں گے۔ اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(15.9) \quad \int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) \cos(n\omega_0 t) dt = 0 \quad (m \neq n)$$

مثال 15.2: ثابت کریں کہ $0 \leq t \leq T_0$ فاصلے پر $\sin(m\omega_0 t)$ اور $\sin(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی ہیں جہاں $m = 1, 2, 3, \dots$ اور $n = 1, 2, 3, \dots$ ممکن ہیں لیکن $m \neq n$ ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا مکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt &= \int_0^{T_0} \frac{\cos\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right] - \cos\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2} dt \\ &= \frac{\sin\left[(m-n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin\left[(m+n)\frac{2\pi}{T_0}t\right]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} \Bigg|_0^{T_0} \\ &= \frac{\sin[(m-n)2\pi]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\sin[(m+n)2\pi]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} \\ &\quad - \frac{\sin[(m-n)0]}{2(m-n)\frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\sin[(m+n)0]}{2(m+n)\frac{2\pi}{T_0}} \end{aligned}$$

چونکہ m اور n عدد صحیح ہیں لہذا $m+n$ اور $m-n$ بھی عدد صحیح ہوں گے لہذا $\sin[(m+n)2\pi] = 0$ اور $\sin[(m-n)2\pi] = 0$ ہوں گے۔ اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(15.10) \quad \int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = 0 \quad (m \neq n)$$

مثال 15.3: ثابت کریں کہ $0 \leq t \leq T_0$ فاصلے پر $\sin(n\omega_0 t)$ اور $\cos(m\omega_0 t)$ آپس میں عمودی ہیں جہاں $m = 1, 2, 3, \dots$ اور $n = 1, 2, 3, \dots$ ممکن ہیں۔

حل: دیے گئے فاصلے پر دونوں تفاعل کے حاصل ضرب کا تکمل لیتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt &= \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \sin \left[(m+n) \frac{2\pi}{T_0} t \right] - \sin \left[(m-n) \frac{2\pi}{T_0} t \right] dt \\
 &= -\frac{\cos \left[(m+n) \frac{2\pi}{T_0} t \right]}{2(m+n) \frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\cos \left[(m-n) \frac{2\pi}{T_0} t \right]}{2(m-n) \frac{2\pi}{T_0}} \Bigg|_0^{T_0} \\
 &= -\frac{\cos[(m+n)2\pi]}{2(m+n) \frac{2\pi}{T_0}} + \frac{\cos[(m-n)2\pi]}{2(m-n) \frac{2\pi}{T_0}} \\
 &\quad + \frac{\cos[(m+n)0]}{2(m+n) \frac{2\pi}{T_0}} - \frac{\cos[(m-n)0]}{2(m-n) \frac{2\pi}{T_0}}
 \end{aligned}$$

چونکہ m اور n عدد صحیح ہیں لہذا $m+n$ اور $m-n$ بھی عدد صحیح ہوں گے لہذا $\cos(m+n)2\pi = 1$ اور $\cos(m-n)2\pi = 1$ ہوں گے۔ اس طرح درج ذیل حاصل ہوتا ہے جو عمودی تفاعل کو ظاہر کرتی ہے۔

$$(15.11) \quad \int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt = 0 \quad (m \neq n)$$

مثال 15.4: تفاعل $f(t) = \cos(m\omega_0 t)$ کا معیار $0 \leq t \leq T_0$ فاصلے پر حاصل کریں جہاں $m = 1, 2, 3, \dots$ ممکن ہے۔

حل: دیے گئے فاصلے پر معیار کو مکمل سے حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 \|f(t)\|^2 &= \int_0^{T_0} \cos^2\left(m \frac{2\pi}{T_0} t\right) dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{T_0} \left[1 + \cos\left(2m \frac{2\pi}{T_0} t\right)\right] dt \\
 &= \frac{t}{2} + \frac{\sin\left(2m \frac{2\pi}{T_0} t\right)}{4m \frac{2\pi}{T_0}} \Bigg|_0^{T_0} \\
 &= \frac{T_0}{2} + \frac{\sin 4m\pi}{4m \frac{2\pi}{T_0}} - \frac{0}{2} - \frac{\sin 0}{4m \frac{2\pi}{T_0}} \\
 &= \frac{T_0}{2}
 \end{aligned}$$

دونوں اطراف کا جذر لیتے ہوئے $0 \leq t \leq T_0$ فاصلے پر معیار ملتا ہے۔

$$(15.12) \quad \|\cos(m\omega_0 t)\| = \sqrt{\int_0^{T_0} \cos^2(m\omega_0 t) dt} = \sqrt{\frac{T_0}{2}}$$

مشق 15.1: تفاعل $f(t) = \sin m\omega_0 t$ کا معیار $0 \leq t \leq T_0$ فاصلے پر درج ذیل ہے جہاں $m = 1, 2, 3, \dots$ ممکن ہے۔ اس معیار کو حاصل کریں۔

$$(15.13) \quad \|\sin(m\omega_0 t)\| = \sqrt{\int_0^{T_0} \sin^2(m\omega_0 t) dt} = \sqrt{\frac{T_0}{2}}$$

مشق 15.2: درج ذیل دو مساوات کو ثابت کریں جہاں $m = 1, 2, 3, \dots$ ممکن ہے۔

$$(15.14) \quad \int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) dt = 0$$

$$(15.15) \quad \int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t) dt = 0$$

مساوات 15.9، مساوات 15.10 اور مساوات 15.11 مل کر ثابت کرتے ہیں کہ فوریر تسلسل میں استعمال ہونے والا ہر تفاعل بقایا تمام تفاعل کے ساتھ $0 \leq t \leq T_0$ فاصلے پر عمودی ہے۔ یوں $\cos 3\omega_0 t$ کو مثال بناتے ہوئے ہم دیکھتے ہیں کہ یہ $\sin(3\omega_0 t)$ ، $\sin(2\omega_0 t)$ ، $\sin(\omega_0 t)$ ، $\cos(4\omega_0 t)$ ، $\cos(2\omega_0 t)$ ، $\cos(\omega_0 t)$ وغیرہ کے ساتھ عمودی ہے۔

درج بالا کھمبات حاصل کرنے کے بعد اصل مضمون یعنی فوریر تسلسل پر دوبارہ آتے ہیں۔ مساوات 15.9 تا مساوات 15.15 کو استعمال کرتے ہوئے مساوات 15.4 کے عددی سر $a_0, a_1, a_2, b_1, \dots$ حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ انہیں ایسا ہی کریں۔

عددی سر a_0 کی قیمت دریافت کرنے کی خاطر ہم مساوات 15.4 کا مکمل $0 \leq t \leq T_0$ فاصلے پر لیتے ہیں

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} f(t) dt &= \int_0^{T_0} a_0 dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) dt \\ &= a_0 T_0 \end{aligned}$$

جہاں مساوات 15.14 اور مساوات 15.15 کو استعمال کرتے ہوئے مجموعے میں دیے تمام مکمل کو صفر کے برابر پر کیا گیا ہے۔ یوں درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(15.16) \quad a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt$$

مساوات 15.16 کہتا ہے کہ a_0 تفاعل $f(t)$ کی اوسط قیمت ہے۔

عددی سر a_m حاصل کرنے کی خاطر مساوات 15.4 کے دونوں اطراف کو $\cos(m\omega_0 t)$ سے ضرب دیتے ہوئے ایک دوری عرصے پر تکمیل کرتے ہیں۔ ہم تکمیل کو $0 \leq t \leq T_0$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$(15.17) \quad \int_0^{T_0} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt = \int_0^{T_0} a_0 \cos(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} a_n \cos(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} b_n \sin(n\omega_0 t) \cos(m\omega_0 t) dt$$

دائیں ہاتھ پہلا تکمیل مساوات 15.14 کی بنا صفر کے برابر ہے جبکہ مساوات 15.11 کے تحت تیسرا تکمیل صفر کے برابر ہے۔ انہیں دوسرے تکمیل پر غور کریں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} a_n \cos n\omega_0 t \cos m\omega_0 t dt = \int_0^{T_0} \cos(m\omega_0 t) [a_1 \cos \omega_0 t + a_2 \cos(2\omega_0 t) + \dots + a_{m-1} \cos[(m-1)\omega_0 t] + a_m \cos(m\omega_0 t) + \dots] dt$$

اب اگر $n \neq m$ ہو تب مساوات 15.9 کے تحت تکمیل صفر کے برابر ہو گا۔ البتہ $n = m$ کی صورت میں مساوات 15.12 کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_0^{T_0} a_m \cos^2(m\omega_0 t) dt = a_m \frac{T_0}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان قیمتوں کو مساوات 15.17 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(15.18) \quad a_m = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt$$

عددی سر b_m حاصل کرنے کی خاطر مساوات 15.4 کے دونوں اطراف کو $\sin(m\omega_0 t)$ سے ضرب دیتے ہوئے

ایک دوری عرصے پر مکمل کرتے ہیں۔ ہم مکمل کو $0 \leq t \leq T_0$ پر حاصل کرتے ہیں۔

$$(15.19) \quad \int_0^{T_0} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt = \int_0^{T_0} a_0 \sin(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} a_n \cos(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} b_n \sin(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt$$

دائیں ہاتھ پہلا مکمل مساوات 15.15 کی بنا صفر کے برابر ہے جبکہ مساوات 15.11 کے تحت دوسرا مکمل صفر کے برابر ہے۔ آئیں تیسرے مکمل پر غور کریں۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{T_0} b_n \sin(n\omega_0 t) \sin(m\omega_0 t) dt = \int_0^{T_0} \sin(m\omega_0 t) [b_1 \sin \omega_0 t + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \dots + b_{m-1} \sin[(m-1)\omega_0 t] + b_m \sin(m\omega_0 t) + \dots] dt$$

اب اگر $n \neq m$ ہو تب مساوات 15.10 کے تحت مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ البتہ $n = m$ کی صورت میں مساوات 15.13 کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_0^{T_0} b_m \sin^2(m\omega_0 t) dt = b_m \frac{T_0}{2}$$

حاصل ہوتا ہے۔ ان قیمتوں کو مساوات 15.17 میں پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$(15.20) \quad b_m = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt$$

مساوات 15.16، مساوات 15.18 اور مساوات 15.20 فوریز مکمل کے عددی سر دیئے ہیں۔ انہیں یہاں اکٹھے پیش کرتے ہیں۔

$$(15.21) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt \\ a_m &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt \\ b_m &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

مثال 15.5: شکل 15.4-الف میں دکھائے گئے دندان موج کا فوریرس تسلسل حاصل کریں۔ دو، پانچ اور پچاس فوریرس ارکان استعمال کرتے ہوئے موج کا خط کھینچیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ موج کا دوری عرصہ $T_0 = 3\text{ s}$ ہے۔

حل: شکل میں دکھائی گئی موج $(0,0)$ سے $(3,1)$ تک بالکل سیدھی لکیر کی مانند ہے جس کی ڈھلوان

$$\text{ڈھلوان} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0}{3 - 0} = \frac{1}{3}$$

ہے لہذا اس سیدھے حصے کی مساوات درج ذیل لکھی جاسکتی ہے جہاں لکیر پر کسی بھی نقطے کے کارتیسی محدود مساوات میں پر کرنے سے c کی قیمت حاصل کی جاسکتی ہے۔

$$y = \frac{x}{3} + c$$

ہم درج بالا میں $(0,0)$ پر کرتے ہوئے

$$0 = \frac{0}{3} + c$$

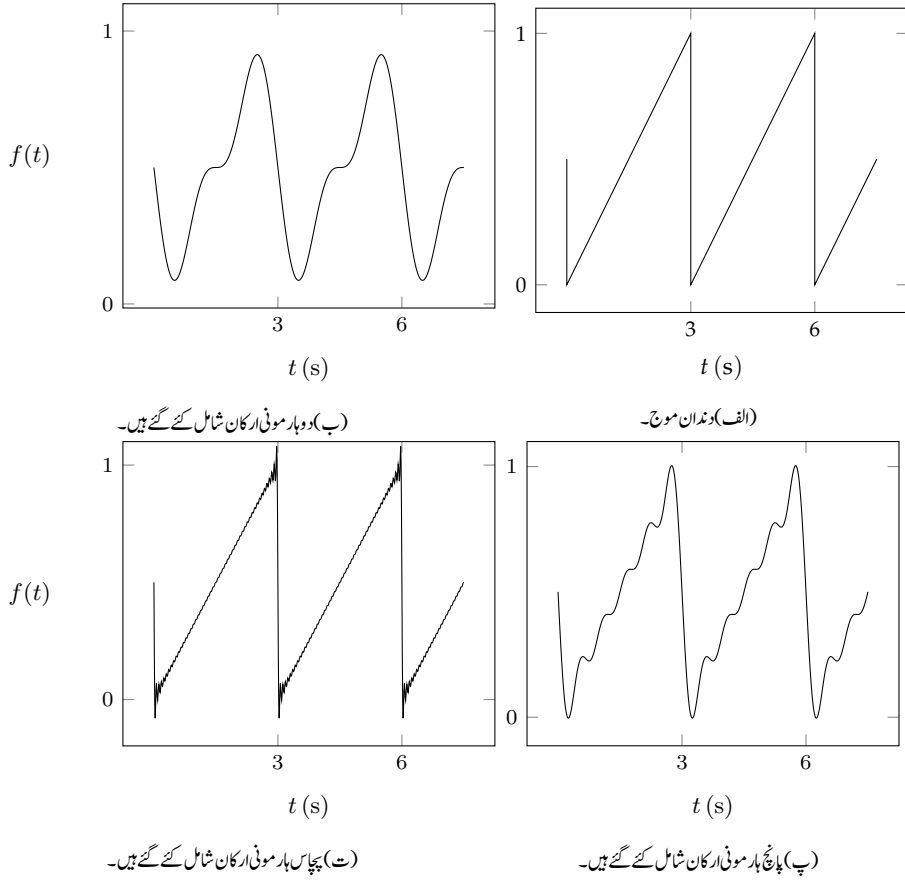
$c = 0$ حاصل کرتے ہیں لہذا سیدھی حصے کی مساوات $y = \frac{x}{3}$ یعنی

$$(15.22) \quad f(t) = \frac{t}{3}$$

ہے جہاں کارتیسی نظام کے x محور پر t اور y محور پر $f(t)$ پر کئے گئے ہیں۔

مساوات 15.21 سے فوریرس تسلسل کے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) dt \\ &= \frac{1}{3} \int_0^3 \frac{t}{3} dt \\ &= \frac{1}{3} \frac{t^2}{2} \Big|_0^3 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$



شکل 15.4: مثال 15.5 کی دندان موج۔

چونکہ a_0 تفاعل کی اوسط قیمت کے برابر ہے لہذا یہی جواب تکلون کے رقبہ $\frac{3}{2} = 1 \times 3 \times \frac{1}{2}$ اور قاعدہ 3 سے حاصل کی جاسکتی ہے یعنی

$$\text{اوسط} = \frac{\text{رقبہ}}{\text{قاعدہ}} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2}$$

عددی سر a_m حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 \frac{t}{3} \cos\left(m\frac{2\pi}{3}t\right) dt \\ &= \frac{2}{9} t \frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}mt\right)}{\frac{2\pi}{3}m} + \frac{2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}mt\right)}{9 \left(\frac{2\pi}{3}m\right)^2} \Bigg|_0^3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

اس کا مطلب ہے کہ دندان موج کی فوریئر تسلسل میں کوئی کوسائن تفاعل نہیں پایا جاتا۔

عددی سر b_m حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{3} \int_0^3 \frac{t}{3} \sin\left(m\frac{2\pi}{3}t\right) dt \\ &= -\frac{2}{9} t \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{3}mt\right)}{\frac{2\pi}{3}m} + \frac{2 \sin\left(\frac{2\pi}{3}mt\right)}{9 \left(\frac{2\pi}{3}m\right)^2} \Bigg|_0^3 \\ &= -\frac{1}{m\pi} \end{aligned}$$

یوں $m = 1, 2, 3, \dots$ پر کرتے ہوئے عددی سر حاصل ہوتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{\pi} \\ b_2 &= -\frac{1}{2\pi} \\ b_3 &= -\frac{1}{3\pi} \\ &\vdots \end{aligned}$$

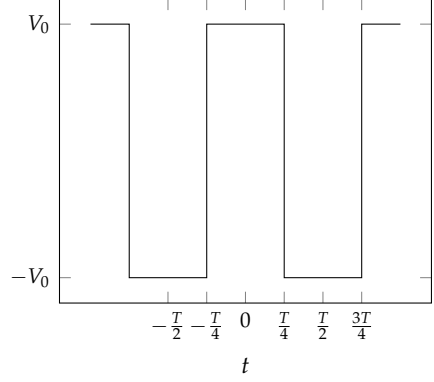
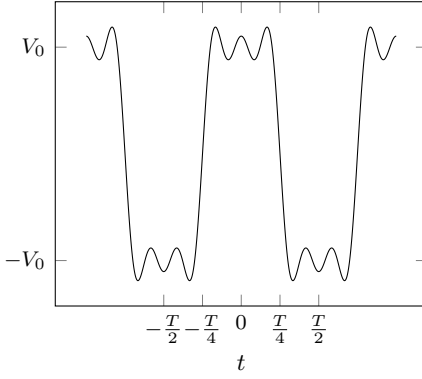
لہذا فوریر تسلسل درج ذیل لکھی جائے گی۔

$$(15.23) \quad f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left[\sin \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \dots \right]$$

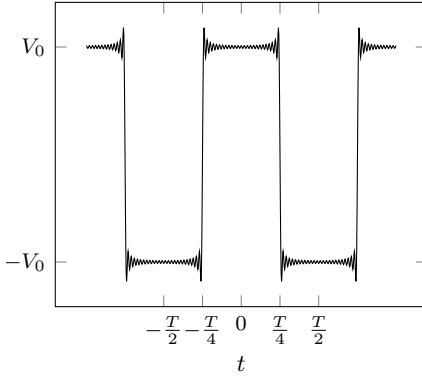
شکل 15.4-ب میں مساوات 15.23 کو $m = 2$ تک استعمال کرتے ہوئے خط کھینچا گیا ہے۔ شکل-پ میں پانچ ہارمونی ارکان استعمال کئے گئے ہیں جبکہ شکل-ت میں پچاس ہارمونی ارکان استعمال کئے گئے ہیں۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ ارکان بڑھانے سے اصل موج کے قریب تر خط حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 15.6: آئیں شکل 15.5-الف میں دکھائے گئے دوری مستطیل موج کا فوریر تسلسل حاصل کریں جس میں دوری عرصے کو T لکھا گیا ہے۔

حل: افقی محور کے دونوں اطراف برابر موج پائی جاتی ہے لہذا اس کی اوسط قیمت صفر ہوگی اور یوں $a_0 = 0$ ہوگا۔ آئیں یہی جواب مساوات 15.21 سے حاصل کریں۔ اس مرتبہ ہم دوری عرصے کو $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ لیتے ہیں۔ شکل کو دیکھ معلوم ہوتا ہے کہ $-\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4}$ تفاعل کی قیمت V_0 ہے جبکہ $-\frac{T}{2} \leq t \leq -\frac{T}{4}$ اور $\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2}$ پر

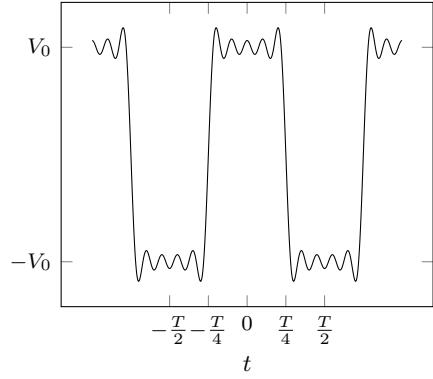


(ب) ایک، تین اور پانچ ہارمونک ارکان کا مجموعہ یعنی $m = 5$ ہے۔



(ت) تک ارکان کا مجموعہ۔ $m = 49$

(الف) مستطیل موج۔



(پ) تک ارکان کا مجموعہ۔ $m = 9$

شکل 15.5: مثال 15.6 کی مستطیل موج۔

تفاعل کی قیمت $-V_0$ ہے۔

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\
 &= \frac{1}{T} \left(-V_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} dt + V_0 \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} dt - V_0 \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} dt \right) \\
 &= \frac{1}{T} \left[-V_0 \left(-\frac{T}{4} + \frac{T}{2} \right) + V_0 \left(\frac{T}{4} + \frac{T}{4} \right) - V_0 \left(\frac{T}{2} - \frac{T}{4} \right) \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

کوسائن کے عددی سر a_m کو مساوات 15.21 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔ مستقل V_0 کو تکمل کے باہر لکھا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}
 a_m &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(m\omega_0 t) dt \\
 &= -\frac{2}{T} V_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} \cos\left(\frac{2\pi m}{T} t\right) dt + \frac{2}{T} V_0 \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \cos\left(\frac{2\pi m}{T} t\right) dt - \frac{2}{T} V_0 \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \cos\left(\frac{2\pi m}{T} t\right) dt \\
 &= -\frac{2V_0}{T} \frac{\sin\left(\frac{2\pi m}{T} t\right)}{\frac{2\pi m}{T}} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} + \frac{2V_0}{T} \frac{\sin\left(\frac{2\pi m}{T} t\right)}{\frac{2\pi m}{T}} \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} - \frac{2V_0}{T} \frac{\sin\left(\frac{2\pi m}{T} t\right)}{\frac{2\pi m}{T}} \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \\
 &= \frac{4V_0}{m\pi} \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

اس سے درج ذیل عددی سر لکھے جاسکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{4V_0}{1\pi} \sin\left(\frac{1\pi}{2}\right) = \frac{4V_0}{\pi} \\
 a_2 &= \frac{4V_0}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) = 0 \\
 a_3 &= \frac{4V_0}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{4V_0}{3\pi} \\
 a_4 &= \frac{4V_0}{4\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{2}\right) = 0 \\
 a_5 &= \frac{4V_0}{5\pi} \sin\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{4V_0}{5\pi} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

سائن کے عددی سر b_m کو مساوات 15.21 کی مدد سے حاصل کرتے ہیں۔ مستقل V_0 کو مکمل کے باہر لکھا گیا ہے۔

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(m\omega_0 t) dt \\ &= -\frac{2}{T} V_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} \sin\left(\frac{2\pi m}{T} t\right) dt + \frac{2}{T} V_0 \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \sin\left(\frac{2\pi m}{T} t\right) dt - \frac{2}{T} V_0 \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi m}{T} t\right) dt \\ &= \frac{2V_0}{T} \frac{\cos\left(\frac{2\pi m}{T} t\right)}{\frac{2\pi m}{T}} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} - \frac{2V_0}{T} \frac{\cos\left(\frac{2\pi m}{T} t\right)}{\frac{2\pi m}{T}} \Big|_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} + \frac{2V_0}{T} \frac{\cos\left(\frac{2\pi m}{T} t\right)}{\frac{2\pi m}{T}} \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

اس معلومات کو استعمال کرتے ہوئے مستطیل موج کی فوریر مساوات لکھتے ہیں۔

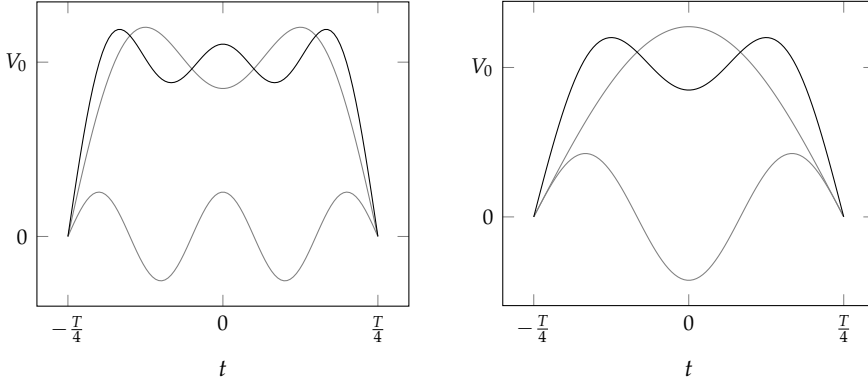
(15.24)

$$f(t) = \frac{4V_0}{\pi} \left[\cos(\omega_0 t) - \frac{1}{3} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \cos(5\omega_0 t) - \frac{1}{7} \cos(7\omega_0 t) + \dots \right]$$

مختلف تعداد میں فوریر تسلسل کے ارکان شامل کرتے ہوئے تفاعل کو شکل 15.5-ب تا شکل 15.5-ت میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 15.6 میں مستطیل موج کی فوریر تسلسل حاصل کی گئی۔ آئیں تسلسل کے ایک رکن سے شروع کرتے ہوئے دیکھیں کہ اس میں مزید ارکان شامل کرتے ہوئے مستطیل موج کیسے حاصل ہوتی ہے۔ شکل 15.6-الف میں مساوات 15.24 کا پہلا ہارمونک رکن $\frac{4V_0}{\pi} \cos \omega_0 t$ اور تیسرا ہارمونک رکن $-\frac{4V_0}{3\pi} \cos(3\omega_0 t)$ ہلکی سیاہی میں دکھائے گئے ہیں۔ دونوں سائن نما صورت رکھتے ہیں جس کا مستطیل سے دور دور تک کوئی واسطہ نہیں ہے۔ اسی شکل میں دونوں کے مجموعے کو گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ دو سائن نما امواج مل کر ایسی شکل بناتے ہیں جو مستطیل زیادہ اور سائن نما کم نظر آتا ہے۔ مستطیل موج کی چوٹی V_0 ہے جبکہ پہلے ہارمونک رکن کی چوٹی $\frac{4V_0}{\pi} = 1.27V_0$ ہے۔ تیسرا ہارمونک رکن اس چوٹی کو نیچے کھینچتا ہے۔ اسی طرح مستطیل موج $\mp \frac{T}{4}$ پر یکدم قیمت تبدیل کرتی ہے جبکہ پہلا ہارمونک جزو نہایت صبر و تحمل کے ساتھ منفی چوٹی سے مثبت چوٹی اور مثبت چوٹی سے منفی چوٹی پہنچتی ہے۔ یہاں بھی تیسرا ہارمونک رکن پہلے رکن کے اطراف کو کھینچ کر ان کی ڈھلوان بڑھاتی ہے۔

شکل 15.6-الف میں تیسرا رکن زیادہ جزبات میں آکر پہلی رکن کی چوٹی ضرورت سے زیادہ نیچے کھینچ دیتا ہے۔ شکل-ب میں پہلے اور تیسرے ارکان سے حاصل موج کو ہلکی سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ ساتھ ہی ساتھ پانچویں رکن کو بھی ہلکی سیاہی



(الف) پہلا اور تیسرا ہارمونی رکن مل کر مستطیل صورت بنانے کی کوشش کرتے ہیں۔ (ب) پہلے، تیسرا اور پانچواں ہارمونی رکن مل کر مستطیل شکل بناتے ہیں۔

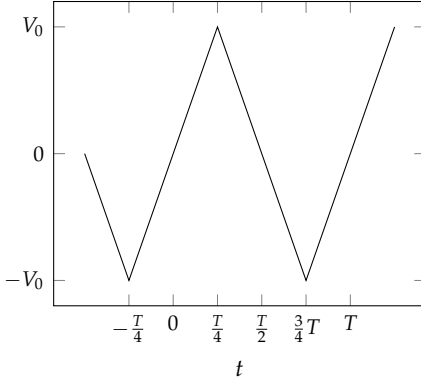
شکل 15.6: بتدریج زیادہ ارکان شامل کرتے ہوئے مستطیل موج کی صورت ابھرتے ہوئے دیکھتے ہیں۔

میں دکھایا گیا ہے۔ ان کے مجموعے کو گہری سیاہی میں دکھایا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں پانچواں رکن ضرورت سے زیادہ نیچے کھینچی گئی چوٹی کو معمولی اٹھاتا ہے تاکہ یہ V_0 کے قریب ہو جائے۔ اسی طرح یہ رکن بھی موج کے اطراف کی ڈھلوان بڑھاتا ہے۔ فوریر تسلسل کے بقایا ارکان بھی اسی طرح مدد کرتے ہوئے اطراف کو زیادہ عمودی اور چوٹی کو بالکل چپٹی بنانے میں مدد دیتے ہیں حتیٰ کہ ہمیں بالکل مستطیل موج نظر آتی ہے۔

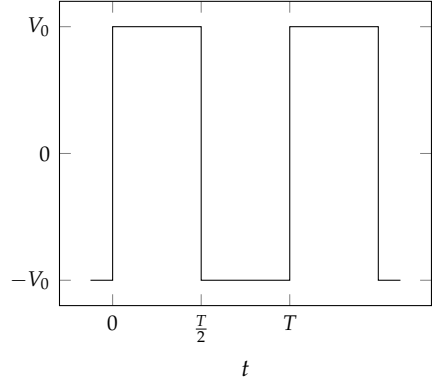
شکل 15.5-ب، پ اور ت میں آپ دیکھتے ہیں کہ فوریر تسلسل سے حاصل موج $\pm \frac{T}{4}$ پر درکار قیمت سے تجاوز کرتے ہوئے آگے نکل جاتی ہے۔ تسلسل میں ارکان کی تعداد بڑھانے سے ان تجاوزات کا خاتمہ نہیں ہوتا۔

مشق 15.3: شکل 15.5-الف میں عددی سر حاصل کرتے ہوئے مکملات کو $-\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4}$ پر حاصل کرتے ہوئے فوریر تسلسل حاصل کریں۔

جواب: عددی سر حاصل کرتے ہوئے دوری موج کے کسی بھی حصے پر مسلسل ایک دوری عرصے پر مکمل حاصل کیا جاسکتا ہے۔ جوابات میں کوئی فرق نہیں پایا جاتا۔



(ب) تکونی موج۔



(الف) مستطیل موج۔

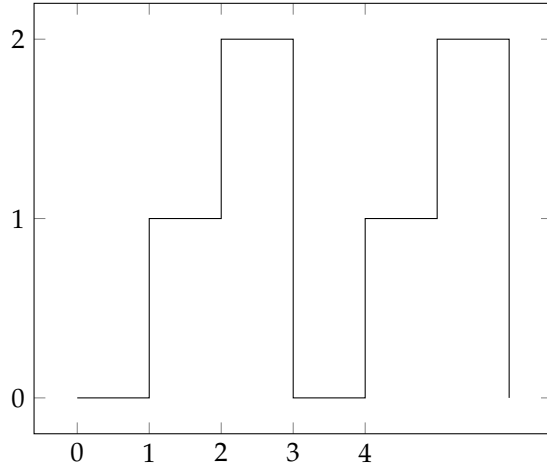
شکل 15.7: مشق 15.4 اور مشق 15.5 کے امواج۔

مشق 15.4: شکل 15.7-الف میں دکھائے گئے مستطیل موج کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔

جواب: $f(t) = \frac{4V}{\pi} \left[\sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \dots \right]$

مشق 15.5: شکل 15.7-ب میں دکھائے گئے تکونی موج کی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔ پہلے $-\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4}$ اور $\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{3T}{4}$ سیدھے حصوں کے مساوات حاصل کریں۔

حل: $f_2(t) = 2V_0(1 - 2\frac{t}{T})$ ، $f_1(t) = \frac{4V_0}{T}t$: $f(t) = \frac{8V_0}{\pi^2} \left[\sin(\omega_0 t) - \frac{1}{3^2} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{5^2} \sin(5\omega_0 t) - \dots \right]$



شکل 15.8: مشتق 15.6 کا تفاعل۔

مشتق 15.6: شکل 15.8 میں دیے تفاعل کی فوریر تسلسل حاصل کریں۔

جواب:

$$1 - \frac{3}{\pi} \left[\sin \omega_0 t + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{4} \sin(4\omega_0 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_0 t) + \frac{1}{7} \sin(7\omega_0 t) + \dots \right]$$

فوریر تسلسل کے m ہارمونی کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$a_m \cos(m\omega_0 t) + b_m \sin(m\omega_0 t) = D_m \cos(m\omega_0 t + \theta_m)$$

جہاں

$$(15.25) \quad D_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}$$

$$(15.26) \quad \theta_m = \tan^{-1} \frac{b_m}{a_m}$$

ہیں۔ یوں تکنیکیاتی فوریرس تسلسل کی دوسری صورت درج ذیل لکھی جاسکتی ہے۔

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + D_1 \cos(\omega_0 t + \theta_1) + D_2 \cos(2\omega_0 t + \theta_2) + \dots \\ (15.27) \quad &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \end{aligned}$$

چونکہ $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ لکھا جاسکتا ہے لہذا مساوات 15.27 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \frac{e^{j(n\omega_0 t + \theta_n)} + e^{-j(n\omega_0 t + \theta_n)}}{2} \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n e^{j\theta_n}}{2} e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_n e^{-j\theta_n}}{2} e^{-jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

مساوات 15.25 کے تحت D_m حقیقی مقدار ہے لہذا درج بالا مساوات میں $\frac{D_n e^{j\theta_n}}{2}$ اور $\frac{D_n e^{-j\theta_n}}{2}$ آپس میں جوڑی دار مخلوط ہیں۔ یوں $\frac{D_n e^{j\theta_n}}{2} = d_n$ لکھتے ہوئے $\frac{D_n e^{-j\theta_n}}{2} = d_n^*$ لکھا جائے گا لہذا درج بالا کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$(15.28) \quad f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^* e^{-jn\omega_0 t}$$

دونوں مجموعوں کو پھیلا کر لکھتے ہیں

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^* e^{-jn\omega_0 t} \\ &= d_1 e^{j1\omega_0 t} + d_2 e^{j2\omega_0 t} + \dots + d_1^* e^{-j1\omega_0 t} + d_2^* e^{-j2\omega_0 t} + \dots \\ &= \dots + d_2^* e^{-j2\omega_0 t} + d_1^* e^{-j1\omega_0 t} + d_1 e^{j1\omega_0 t} + d_2 e^{j2\omega_0 t} + \dots \end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر e کی طاقت کے لہذا سے ترتیب دیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ $n = 0$ کے علاوہ درج بالا تسلسل کی وسعت منفی لامتناہی سے مثبت لامتناہی تک ہے۔ اس تسلسل کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے جہاں عددی سر کو c_n کہا گیا ہے۔

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n^* e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

یوں مساوات 15.28 سے فوریئر تسلسل کی تیسری صورت یعنی قوت نمائی فوریئر تسلسل¹⁵ حاصل ہوتی ہے جہاں تسلسل کے عددی سر c_n مخلوط مقدار ہیں۔

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0 + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \\ (15.29) \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

مجموعے میں $n = 0$ کا رکن شامل کرتے ہوئے بیرونی رکن a_0 کو مجموعے میں ضم کیا گیا ہے۔

تینوں طرز کے فوریئر تسلسل کے عددی سر کا تعلق درج ذیل ہے۔

$$(15.30) \quad D_n / \theta_n = 2c_n = a_n - jb_n$$

قوت نمائی فوریئر تسلسل کا عددی سر c_m حاصل کرنے کی خاطر مساوات 15.29 کے دونوں اطراف کو $e^{-jm\omega_0 t}$ سے ضرب دیتے ہوئے $0 \leq t \leq T_0$ پر ان کا مکمل حاصل کیا جاتا ہے۔

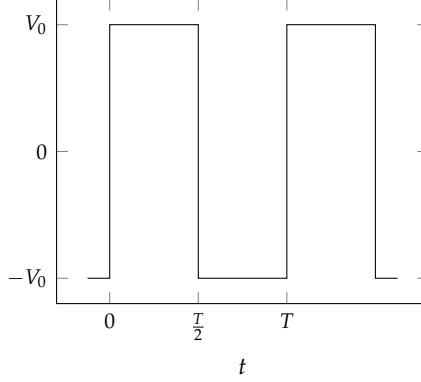
$$(15.31) \quad \int_0^{T_0} f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{T_0} c_n e^{j(n-m)\omega_0 t} dt$$

اگر $n \neq m$ ہو تب

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0} c_n e^{j(n-m)\omega_0 t} dt &= \frac{c_n e^{j(n-m)\omega_0 t}}{j(n-m)\omega_0} \Big|_0^{T_0} \\ &= \frac{c_n [e^{j(n-m)2\pi} - e^0]}{j(n-m)\omega_0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ملتا ہے جہاں آخری قدم پر $e^{j(n-m)2\pi} = \cos[(n-m)2\pi] + j \sin[(n-m)2\pi] = 1$ اور $e^0 = 1$ کا استعمال کیا گیا ہے۔ اس کے برعکس $n = m$ کی صورت میں c_n کو c_m لکھا جاسکتا ہے اور

$$\int_0^{T_0} c_m dt = T_0 c_m$$



شکل 15.9: مثال 15.7 کا تفاعل۔

ہو گا لہذا مساوات 15.31 کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(15.32) \quad c_m = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt$$

مثال 15.7: ہم شکل 15.7-الف کے مستطیل تفاعل کا تکنیاتی فوریئر تسلسل حاصل کر چکے ہیں۔ آئیں اس کی قوت نمائی فوریئر تسلسل حاصل کریں۔ تفاعل کو شکل 15.9 میں دوبارہ دکھایا گیا ہے۔

حل: مساوات 15.32 استعمال کرتے ہوئے c_0 حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} V_0 dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T (-V_0) dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

اسی طرح c_m حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 c_m &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{V_0}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-jm\omega_0 t} dt - \frac{V_0}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T e^{-jm\omega_0 t} dt \\
 &= \frac{V_0 e^{-jm\omega_0 t}}{-jm\omega_0 T} \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{V_0 e^{-jm\omega_0 t}}{-jm\omega_0 T} \Big|_{\frac{T}{2}}^T \\
 &= \frac{jV_0}{m\pi} (\cos m\pi - 1) \quad -\infty \leq m \leq \infty \\
 &\quad m \neq 0
 \end{aligned}$$

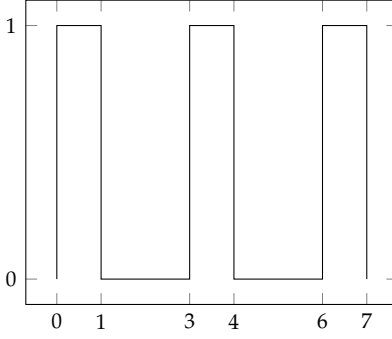
جس سے درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$\begin{aligned}
 c_1 &= c_1^* = -\frac{j2V_0}{\pi} \\
 c_2 &= c_2^* = 0 \\
 c_3 &= c_3^* = -\frac{j2V_0}{3\pi} \\
 c_4 &= c_4^* = 0 \\
 c_5 &= c_5^* = -\frac{j2V_0}{5\pi}
 \end{aligned}$$

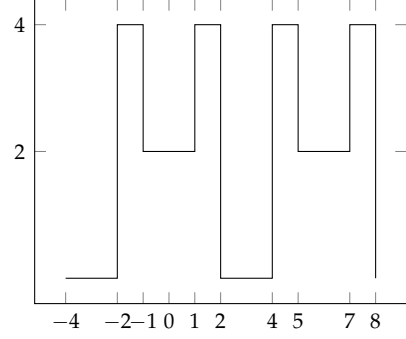
یوں شکل میں دیے مستطیل تفاعل کی فوریر تسلسل درج ذیل ہوگی۔

$$(15.33) \quad f(t) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n=\text{طاق} \\ n \neq 0}}^{\infty} -\frac{j2V_0}{n\pi} e^{jn\omega_0 t}$$

مشق 15.7: مساوات 15.33 میں $c_n e^{jn\omega_0 t} + c_n^* e^{-jn\omega_0 t}$ اکٹھے کرتے ہوئے مشق 15.4 میں دیا جواب حاصل کریں۔



(ب)



(الف)

شکل 15.10: مشتق 15.8 اور مشتق 15.9 کے تفاعل۔

مشتق 15.8: شکل 15.10-الف میں دیے تفاعل کے قوت نمائی فوریئر تسلسل کے عددی سر معلوم کریں۔

جوابات:

$$c_0 = \frac{1}{2}$$

$$c_n = \frac{2}{n\pi} \left[2 \sin \frac{2\pi n}{3} - \sin \frac{n\pi}{3} \right]$$

مشتق 15.9: شکل 15.10-ب میں دیے تفاعل کے قوت نمائی فوریئر تسلسل کے عددی سر معلوم کریں۔

جوابات:

$$c_0 = \frac{1}{3}$$

$$c_n = \frac{1 - e^{-j\frac{2}{3}n\pi}}{j2n\pi}$$

15.1 تشاگل تفاعل

آپ نے مختلف تفاعل کے فوریر تسلسل دیکھے۔ ان میں کئی ایسے تھے جن کے یا تمام a_m اور یا تمام b_m صفر کے برابر تھے۔ آئیں اس کی وجہ سمجھیں اور کلمات حل کرنے سے پہلے یہ دریافت کرنا سیکھیں کہ آیا فوریر تسلسل میں a_m اور یا تمام b_m صفر کے برابر ہوں گے۔ فوریر تسلسل کے ارکان کا دارومدار تفاعل کی شکل و صورت پر ہے۔ تین قسم کے تشاگل تفاعل پائے جاتے ہیں۔ ان پر باری باری غور کرتے ہیں۔

15.1.1 جفت تفاعل تشاگل

جفت تفاعل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہو۔

$$(15.34) \quad f(t) = f(-t)$$

جفت تفاعل عمودی محور کے دونوں اطراف یکساں دکھائی دیتا ہے۔ جفت تفاعل کی اہم مثال $\cos(n\omega_0 t)$ ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$ ہوتا ہے لہذا یہ جفت تفاعل ہے۔ شکل 15.5-الف بھی جفت تفاعل ہے۔ آئیں جفت تفاعل کے فوریر تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔

مساوات 15.21 میں مکمل کو $-\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2}$ لیتے ہوئے یہاں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$(15.35) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) dt \\ a_m &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt \\ b_m &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

a_0 کی مساوات کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^0 f(t) dt + \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) dt$$

ان میں پہلے مکمل میں متغیرہ کو تبدیل کرتے ہوئے $t = -x$ سے لکھنے سے $f(t) = f(-x)$ اور $dt = -dx$ لکھے جائیں گے اور مکمل کے حدود $0 \leq t \leq \frac{T_0}{2}$ ہوں گے۔ چونکہ تفاعل جفت ہے لہذا $f(-x) = f(x)$ گا۔ یوں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}}^0 f(-x) dx + \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) dt \\ (15.36) \quad &= \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(x) dx + \frac{1}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) dt \\ &= \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) dt \end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر دونوں مکمل میں صرف متغیرات کی علامت مختلف ہے لہذا ان کی قیمتیں برابر ہیں۔

a_m کو بھی اسی طرح حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^0 f(t) \cos(m\omega_0 t) dt + \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt \\ (15.37) \quad &= -\frac{2}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}}^0 f(-x) \cos(-m\omega_0 x) dx + \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt \\ &= \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(x) \cos(m\omega_0 x) dx + \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt \\ &= \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt \end{aligned}$$

آخر میں b_m کو اسی ترکیب سے حاصل کرتے ہیں

$$\begin{aligned}
 b_m &= \frac{2}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^0 f(t) \sin(m\omega_0 t) dt + \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt \\
 (15.38) \quad &= -\frac{2}{T_0} \int_{\frac{T_0}{2}}^0 f(-x) \sin(-m\omega_0 x) dx + \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt \\
 &= \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(x) \sin(-m\omega_0 x) dx + \frac{2}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) \cos(m\omega_0 t) dt \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

جہاں آخری قدم پر $\sin(-m\omega_0 t) = -\sin(m\omega_0 t)$ کا استعمال کیا گیا ہے۔

آپ نے دیکھا کہ جفت تفاعل کی صورت میں فوریر تسلسل کے $b_m = 0$ ہیں لہذا انہیں حاصل کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔

15.1.2 طاق تفاعل

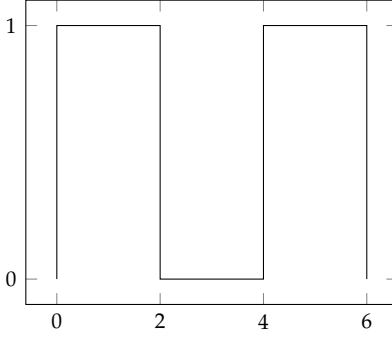
طاق تفاعل سے مراد ایسا تفاعل ہے جو درج ذیل مساوات پر پورا اترتا ہو۔

$$(15.39) \quad f(-t) = -f(t)$$

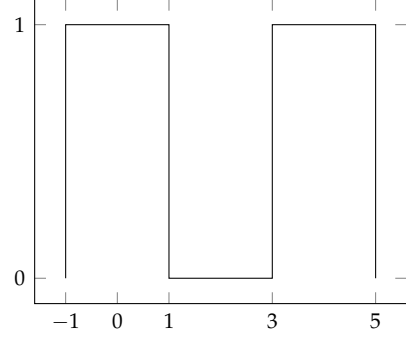
طاق تفاعل کی مثال $\sin(m\omega_0 t)$ ہے۔ ہم جفت تفاعل کی طرح طاق تفاعل کے عددی سر حاصل کرتے ہوئے درج ذیل نتائج پر پہنچتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0 \\
 a_m &= 0 \\
 (15.40) \quad b_m &= \frac{4}{T_0} \int_0^{\frac{T_0}{2}} f(t) \sin(m\omega_0 t) dt
 \end{aligned}$$

یوں طاق تفاعل کے فوریر تسلسل کے صرف b_m عددی سر حاصل کرنے کی ضرورت پیش آئے گی۔



(ب)



(الف)

شکل 15.11: مثال 15.8 اور مثال 15.9 کے اشکال۔

مثال 15.8: شکل 15.11-الف میں جفت تفاعل دکھایا گیا ہے۔ اس کے فوریئر ٹکونیاتی تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔

حل: چونکہ دیا تفاعل جفت ہے لہذا $b_m = 0$ ہوں گے۔ بقایا عددی سر دریافت کرتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 1 \, dt \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{4} \int_{-1}^1 \cos(n\omega_0 t) \, dt \\ &= \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \end{aligned}$$

مثال 15.9: شکل 15.11-ب میں طاق تفاعل دکھایا گیا ہے۔ اس کے فوریئر ٹکونیاتی تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔

حل: چونکہ دیا تعامل طاق ہے لہذا $a_m = 0$ ہوں گے۔ بقایا عددی سر دریافت کرتے ہیں یعنی

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{4} \int_0^2 2 dt \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

اور

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{4} \int_0^2 \sin(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} \end{aligned}$$

15.2 منتقلی وقت

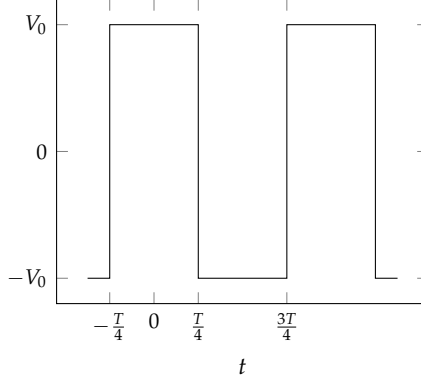
فرض کریں کہ ایک تعامل جس کی فوریر تسلسل درج ذیل ہے

$$(15.41) \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

کو وقت کے لحاظ سے منتقل کیا جاتا ہے۔ تعامل $f(t)$ کو t_0 سیکنڈ تاخیر سے $f(t - t_0)$ لکھا جاتا ہے۔

$$\begin{aligned} (15.42) \quad f(t - t_0) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0(t-t_0)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{-jn\omega_0 t_0}) e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

چونکہ $e^{-jn\omega_0 t_0}$ سے مراد زاویائی فاصلہ ہے لہذا وقت میں منتقل تعامل $f(t - t_0)$ کے فوریر عددی سر اصل تعامل $f(t)$ کے عددی سر ہوتے ہیں جن میں تعدد کے راست متناسب زاویائی ہٹاؤ $e^{-jn\omega_0 t_0}$ پایا جاتا ہے۔ اس طرح وقتی دائرہ کار میں تبادلے سے تعددی دائرہ کار میں مراد زاویائی تبادلہ ہے۔



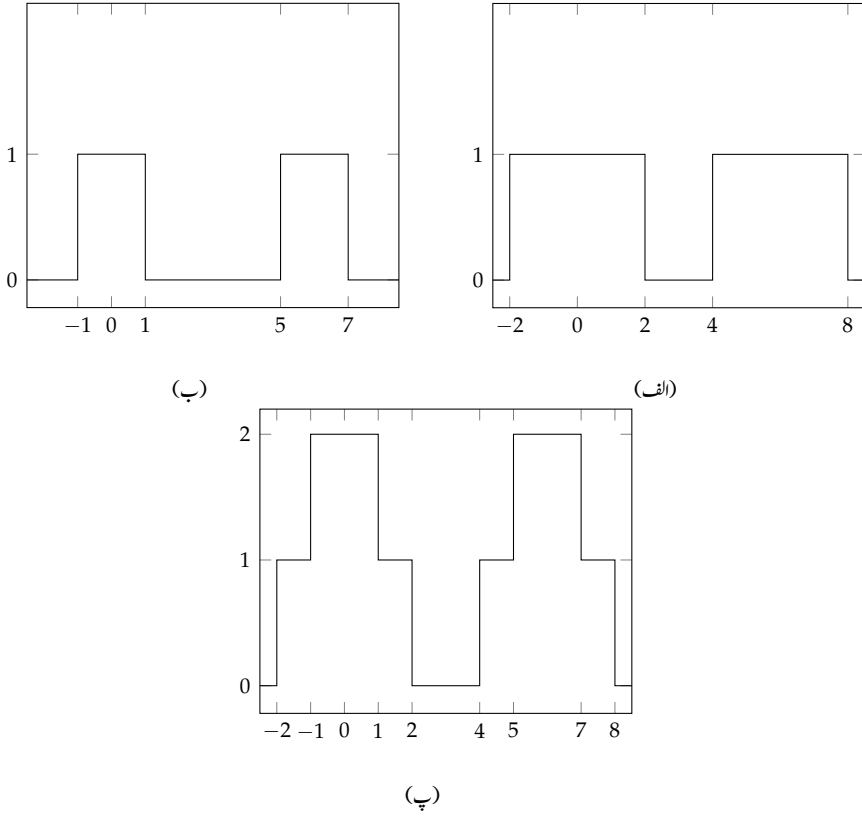
شکل 15.12: مثال 15.10 کا تفاعل۔

مثال 15.10: مثال 15.7 میں ہم شکل 15.9 کے تفاعل $f(t)$ کا قوت نمائی فوریئر تسلسل حاصل کر چکے ہیں۔ اس تفاعل کو $\frac{T}{4}$ بائیں منتقل کرتے ہوئے شکل 15.12 یعنی $f(t + \frac{T}{4})$ حاصل ہوتا ہے جس کی قوت نمائی فوریئر تسلسل درکار ہے۔ حل: اس کو تبادلہ وقت کے پلے سے حل کرتے ہیں۔ مساوات 15.42 کے ذریعہ نئے عددی سر حاصل کرتے ہیں۔ چونکہ $t_0 = -\frac{T}{4}$ ہے لہذا زاویائی ہٹاؤ

$$-jn\omega_0 t_0 = jn \frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} = jn \frac{\pi}{2}$$

ہوگا۔ یوں بنیادی ہارمونک رکن کے عددی سر میں 90° کا زاویائی ہٹاؤ پایا جائے گا۔ مساوات 15.33 میں ان زاویائی ہٹاؤ کو شامل کرتے ہوئے فوریئر تسلسل لکھتے ہیں۔

$$(15.43) \quad f\left(t + \frac{T}{4}\right) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n=\text{طاق} \\ n \neq 0}}^{\infty} -\frac{j2V_0}{n\pi} e^{jn(\omega_0 + \frac{\pi}{2})t}$$



شکل 15.13: دو یادو سے زیادہ امواج کے جمع و منفی سے نئی موج کی تخلیق۔

15.3 تخلیق موج

دو یادو سے زیادہ امواج کا مجموعہ لیتے ہوئے دیگر امواج حاصل کئے جاسکتے ہیں۔ یوں شکل 15.13-الف اور شکل-ب مل کر شکل-پ دیتے ہیں۔ انفرادی امواج کے فوریر تسلسل کا مجموعہ حاصل موج کی فوریر تسلسل دے گی۔ فوریر تسلسل میں تعددی ارکان کا دار و مدار وقت کے لحاظ سے موج کی صورت پر منحصر ہوتا ہے تاکہ موج کی حتمی قیمت پر۔ یوں جس نسبت سے موج کا حیثہ تبدیل کیا جائے اسی نسبت سے تسلسل کو ضرب دیتے ہوئے کم یا زیادہ حیثے کی موج کا تسلسل حاصل کیا جاسکتا ہے۔

فوریر تسلسل میں $\sum a_n \cos(n\omega_0 t)$ جفت موج کو ظاہر کرتی ہے جبکہ $\sum b_n \sin(n\omega_0 t)$ طاق موج کو ظاہر

کرتی ہے لہذا کسی بھی موج کو جفت موج اور طاق موج کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے۔

مشق 15.10: شکل 15.13-الف اور ب کی فوریر قوت نمائی تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔ ان کے مجموعے سے شکل-پ کی تسلسل کے عددی سر حاصل کریں۔

$$c_n = \frac{\sin \frac{2n\pi}{3} + \sin \frac{n\pi}{3}}{n\pi}, \quad c_0 = 1 \quad \text{جواب:}$$

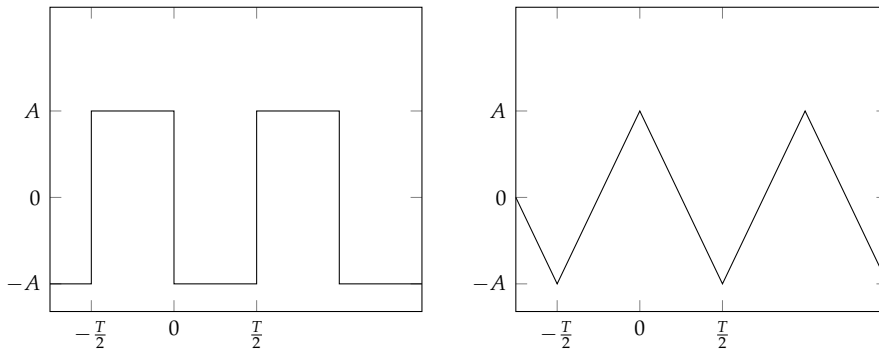
مشق 15.11: شکل 15.14-ال اور ب کا مجموعہ شکل-پ ہے۔ شکل-الف اور ب کے فوریر تسلسل حاصل کرتے ہوئے شکل-پ کا تسلسل حاصل کریں۔

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4A}{n\pi} \sin(n\omega_0 t) - \frac{8A}{n^2\pi^2} \cos(n\omega_0 t) \right] \quad \text{جواب:}$$

15.4 تعددی طیف

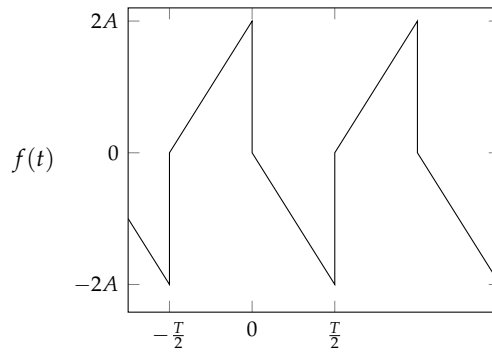
تفاعل $f(t)$ کے عددی سر کی مقدار بالمقابل تعدد کے ترسیم کو مقداری طیف¹⁶ کہتے ہیں جبکہ عددی سر کی زاویائی ہٹاؤ بالمقابل تعدد کے ترسیم کو زاویائی ہٹاؤ طیف¹⁷ کہتے ہیں۔ چونکہ طیف انفرادی لکیروں پر مشتمل ہے لہذا اسے انفرادی لکیری طیف¹⁸ کہتے ہیں۔ انفرادی لکیری طیف تفاعل کی تعددی مواد کے بارے میں معلومات دیتی ہے۔

¹⁶ amplitude spectrum
¹⁷ phase spectrum
¹⁸ discrete line spectra



(ب)

(الف)



(پ)

شکل 15.14: مشتق 15.11 کے اشکال۔

مثال 15.11: مشق 15.11 میں شکل 15.14-پ کا تسلسل حاصل کیا گیا جو $A = 5$ کی صورت میں درج ذیل ہوگا۔

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{20}{n\pi} \sin(n\omega_0 t) - \frac{40}{n^2\pi^2} \cos(n\omega_0 t) \right]$$

تفاعل کی مقداری طیف اور زاویائی ہٹاؤ طیف درکار ہے۔

حل: چونکہ $D_n/\theta_n = a_n - jb_n$ ہے لہذا پہلے چار D_n/θ_n درج ذیل ہوں گے۔

$$D_1/\theta_1 = -\frac{40}{\pi^2} - j\frac{20}{\pi} = 7.5/\underline{-122^\circ}$$

$$D_3/\theta_1 = -\frac{40}{9\pi^2} - j\frac{20}{3\pi} = 2.2/\underline{-102^\circ}$$

$$D_5/\theta_1 = -\frac{40}{25\pi^2} - j\frac{20}{5\pi} = 1.3/\underline{-97^\circ}$$

$$D_7/\theta_1 = -\frac{40}{49\pi^2} - j\frac{20}{7\pi} = 0.91/\underline{-95^\circ}$$

مقداری طیف اور زاویائی ہٹاؤ طیف کو شکل 15.15 میں دکھایا گیا ہے۔

مثق 15.12: شکل 15.16 میں دیے تفاعل کے D_n عددی سر حاصل کریں۔ جوابات:

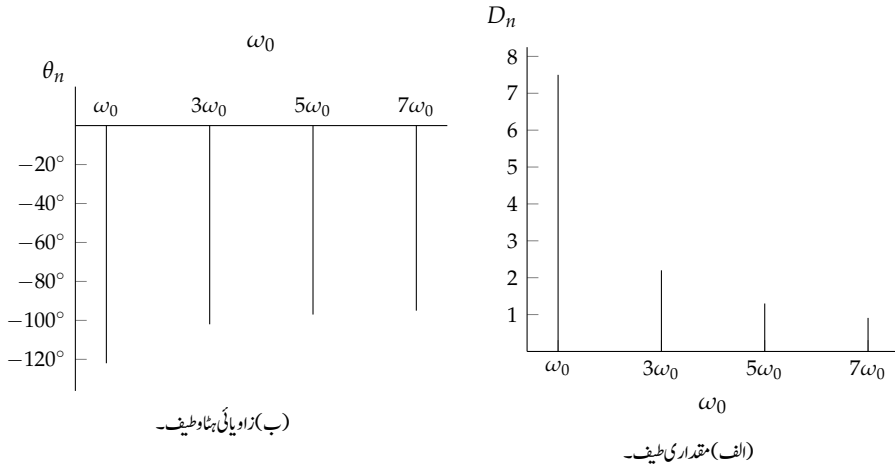
$$a_0 = \frac{1}{2}$$

$$D_1 = -\frac{j}{\pi}$$

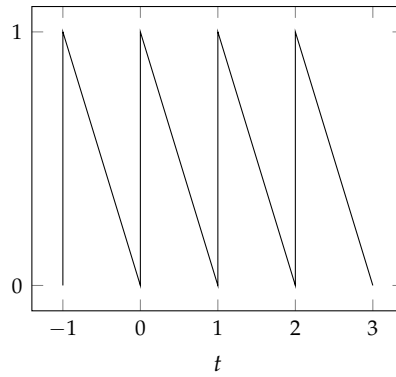
$$D_2 = -\frac{j}{2\pi}$$

$$D_3 = -\frac{j}{3\pi}$$

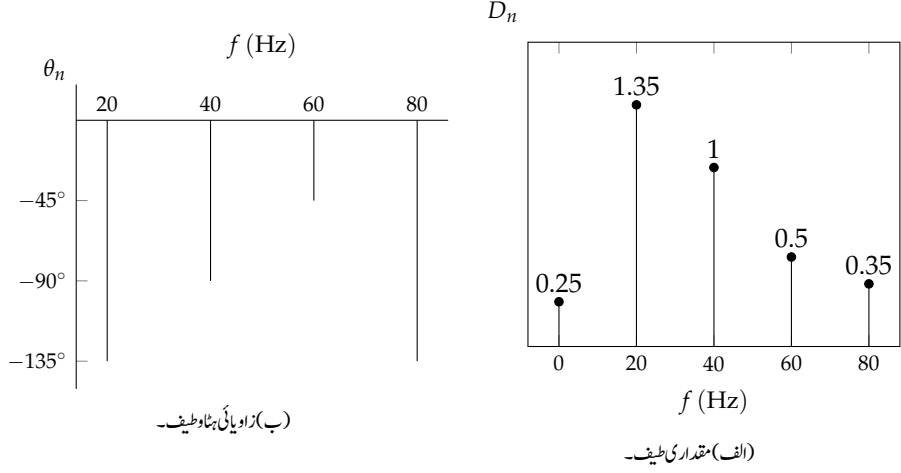
$$D_4 = -\frac{j}{4\pi}$$



شکل 15.15: مثال 15.11 کے طیف۔



شکل 15.16: مشتق 15.12 کا تعامل۔



شکل 15.17: مشتق 15.13 کے طیف۔

مشتق 15.13: انفرادی لکیری طیف شکل 15.17 میں دکھائے گئے ہیں۔ تفاعل کی تکنیکی تسلسل لکھیں۔

جواب:

$$f(t) = 0.25 + 1.35 \cos(40\pi t - 135^\circ) + 1 \cos(80\pi t - 90^\circ) + 0.5 \cos(120\pi t - 45^\circ) + 0.35 \cos(160\pi t - 135^\circ) + \dots$$

15.5 برقرار حال برقی جال

کسی دور پر سائن نماد باو مسلط کرتے ہوئے دور میں مختلف مقامات پر دباو اور رو حاصل کرنا ہم دیکھ چکے ہیں۔ فرض کریں کہ کسی دور پر دوری دباو $v(t)$ مسلط کی جاتی ہے۔ ایسے دور کو حل کرنے کی خاطر ہم مسلط دباو کا فوریزر تسلسل حاصل کرتے ہیں۔ فوریزر تسلسل کا ہر رکن سائن نماد باو ہو گا۔ انفرادی پارامونی دباو کے لئے دور کو تعددی دائرہ کار میں حل کیا جاتا ہے۔ ان جوابات کا وقتی دائرہ کار میں مطلوبہ قیمت حاصل کی جاتی ہے۔ تمام جوابات کا مجموعہ درکار جواب ہوتا ہے۔

15.5.1 اوسط طاقت

جیسا اوپر ذکر کیا گیا، دور پر دوری دباو یا دوری رو مسلط کرنے سے مختلف مقامات پر دباو اور رو پیدا ہوں گے جنہیں تسلسل کی صورت میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

$$(15.44) \quad v(t) = V_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{v,n})$$

$$(15.45) \quad i(t) = I_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{i,n})$$

انفعالی رانج سمت استعمال کرتے ہوئے فرض کریں کہ کسی پرزے پر دباو اور اس میں رو درج بالا مساوات دیتے ہیں۔ یوں اس پرزے کی اوسط طاقت درج ذیل ہوگی۔

$$(15.46) \quad P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t) dt$$

درج بالا مساوات میں دو فوریزر تسلسل کے حاصل ضرب کا مکمل لیا گیا ہے۔ دو عدد فوریزر تسلسل کے حاصل ضرب میں تین قسم کے ارکان پائے جاتے ہیں۔ ایک رکن $V_{DC}I_{DC}$ ہے جس کا مکمل تقسیم T از خود $V_{DC}I_{DC}$ کے برابر ہے۔ دوسرا قسم وہ ہے جو $V_{DC}I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{i,n})$ یا $I_{DC}V_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{v,n})$ صورت رکھتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ سائن نماد تفاعل کا ایک دوری عرصے پر مکمل صفر کے برابر ہوتا ہے لہذا ایسے تمام ارکان صفر کے برابر ہوں گے۔ تیسرا اور سب سے زیادہ تعداد میں ارکان $\cos(m\omega_0 t - \theta_{v,n}) \cos(n\omega_0 t - \theta_{i,n})$ صورت رکھتے ہیں۔ آپ جانتے ہیں کہ $\cos(n\omega_0 t)$ اور $\sin(n\omega_0 t)$ آپس میں عمودی تفاعل ہیں لہذا $m \neq n$ کی صورت

میں تمام $\cos(m\omega_0 t - \theta_{v,n}) \cos(n\omega_0 t - \theta_{i,n})$ کا ایک دوری عرصے پر مکمل صفر کے برابر ہو گا۔ یوں صرف ایسے ارکان غیر صفر ہوں گے جن میں دباؤ کی تعدد اور رو کی تعدد برابر ہو یعنی

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{T} \int_0^T V_n I_n \cos(n\omega_0 t - \theta_{v,n}) \cos(n\omega_0 t - \theta_{i,n}) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_n}{2} \cos(\theta_{v,n} - \theta_{i,n})$$

اس طرح اوسط طاقت درج ذیل ہوگی۔

$$(15.47) \quad P = V_{DC} I_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_n}{2} \cos(\theta_{v,n} - \theta_{i,n})$$

درج بالا مساوات کا مطلب ہے کہ تمام انفرادی ہارمونی اجزاء کے اوسط طاقت کا مجموعہ کل اوسط طاقت دیتا ہے۔

مثال 15.12: شکل 15.18- الف پر درج ذیل داخلی دباؤ $v_d(t)$ مسلط کی گئی ہے۔ خارجی دباؤ $v_0(t)$ حاصل کریں۔

$$v_d(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20}{n\pi} \sin(2nt) - \frac{40}{n^2 \pi^2} \cos(2nt)$$

حل: داخلی دباؤ کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔

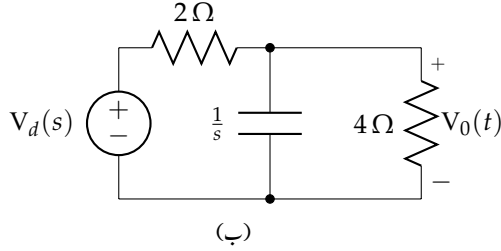
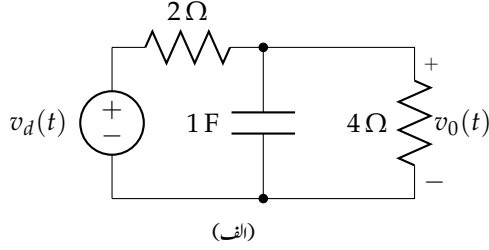
$$(15.48) \quad v_d(t) = 7.5 \cos(2t - 122^\circ) + 2.2 \cos(6t - 102^\circ) + 1.3 \cos(10t - 97^\circ) + 0.91 \cos(14t - 95^\circ) + \dots$$

شکل 15.18- ب میں تعددی دائرہ کار میں دور کو دکھایا گیا ہے جس میں متوازی جڑے برق گیر اور مزاحمت کی رکاوٹ ہے لہذا تقسیم دباؤ سے خارجی دباؤ درج ذیل لکھا جاسکتا ہے۔ $\frac{4(1/j\omega)}{4+1/j\omega} = \frac{4}{1+j4\omega}$

$$(15.49) \quad V_0(\omega) = \frac{\frac{4}{1+j4\omega}}{2 + \frac{4}{1+j4\omega}} V_d(s) = \frac{2}{3 + j4\omega} V_d$$

مساوات 15.48 کے پہلے رکن سے $\omega_0 = 2 \text{ rad s}^{-1}$ دیکھا جاسکتا ہے لہذا تسلسل کے پہلے رکن سے پیدا خارجی دباؤ درج بالا مساوات سے

$$V_0(\omega_0) = \left(\frac{2}{3 + j8} \right) 7.5 \angle -122^\circ = 1.7556 \angle -191.4^\circ$$



شکل 15.18: مثال 15.12 کا دور۔

ہوگا۔ داخلی دباؤ کے تسلسل میں اگلے رکن یعنی تیسرے ہارمونی جزو کی تعدد $\omega = 3\omega_0 = 6 \text{ rad s}^{-1}$ جبکہ پانچویں ہارمونی رکن کی تعدد $5\omega_0$ ہے۔ یوں ان ارکان سے پیدا خارجی دباؤ کو مساوات 15.49 میں درست تعدد پر کرتے ہوئے حاصل کی جاسکتی ہے۔

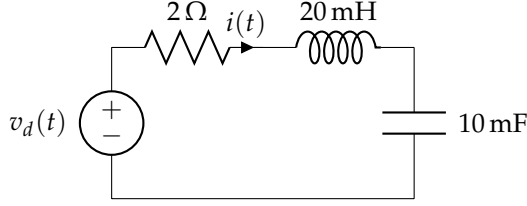
$$V_0(3\omega_0) = \frac{\frac{4}{1+j24}}{2 + \frac{4}{1+j24}} 2.2 \angle -102^\circ = 0.1819 \angle -184.9^\circ$$

$$V_0(5\omega_0) = \frac{\frac{4}{1+j40}}{2 + \frac{4}{1+j40}} 1.3 \angle -97^\circ = 0.0648 \angle -182.7^\circ$$

$$V_0(7\omega_0) = \frac{\frac{4}{1+j56}}{2 + \frac{4}{1+j56}} 0.91 \angle -95^\circ = 0.0325 \angle -181.9^\circ$$

یوں برقرار خارجی دباؤ درج ذیل ہوگا۔

$$(15.50) \quad v_d(t) = 1.7556 \cos(2t - 191.4^\circ) + 0.1819 \cos(6t - 184.9^\circ) \\ + 0.0648 \cos(10t - 182.7^\circ) + 0.0325 \cos(14t - 181.9^\circ) + \dots$$



شکل 15.19: مثال 15.13 کا دور۔

مثال 15.13: شکل 15.19 میں سلسلہ وار RLC پر درج ذیل دباؤ $v_d(t)$ مسلط کیا گیا ہے۔ مزاحمت میں اوسط طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔

$$v_d(t) = 33 + 2 \cos(100t - 30^\circ) + 1.1 \cos(200t - 45^\circ) + 0.6 \cos(300t - 60^\circ) + \dots$$

حل: برق گیریک سے سمتی رو نہیں گزرتی لہذا داخلی دباؤ کا ایک سمتی جزو یعنی 33 V کوئی رو نہیں پیدا کر پائے گا اور $I_{DC} = 0$ ہو گا۔ پہلے ہارمونی جزو سے $\omega_0 = 100 \text{ rad s}^{-1}$ دیکھا جاسکتا ہے۔ داخلی دباؤ کے تسلسل کے بقایا ارکان کو باری باری حل کرتے ہوئے رو حاصل کرتے ہیں۔

$$I(\omega_0) = \frac{2 \angle -30^\circ}{2 + j100 \times 0.02 + \frac{1}{j100 \times 0.01}} = 0.89 \angle -56.6^\circ$$

$$I(2\omega_0) = \frac{1.1 \angle -45^\circ}{2 + j200 \times 0.02 + \frac{1}{j200 \times 0.01}} = 0.27 \angle -105.3^\circ$$

$$I(3\omega_0) = \frac{0.6 \angle -60^\circ}{2 + j300 \times 0.02 + \frac{1}{j300 \times 0.01}} = 0.099 \angle -130.6^\circ$$

یوں رو

$$i(t) = 0.89 \cos(100t - 56.6^\circ) + 0.27 \cos(200t - 105.3^\circ) + 0.099 \cos(300t - 130.6^\circ) + \dots$$

ہوگی۔ دور میں صرف مزاحمت طاقت ضائع کرتی ہے لہذا پورے دور کا ضیاع مزاحمتی ضیاع ہوگا۔ دور میں کل اوسط طاقت کا ضیاع درج ذیل ہے

$$P = \frac{2 \times 0.89}{2} \cos(56.6^\circ - 30^\circ) + \frac{1.1 \times 0.27}{2} \cos(105.3^\circ - 45^\circ) + \frac{0.6 \times 0.099}{2} \cos(130.6^\circ - 60^\circ) + \dots$$

یعنی

$$P \approx 0.61 \text{ W}$$

مشق 15.14: ایک دور کے داخلی دباؤ اور داخلی رو درج ذیل ہیں۔ دور میں اوسط طاقت کا ضیاع دریافت کریں۔

$$v_d(t) = 20 + 7 \cos(100t - 30^\circ) + 5 \cos(200t - 45^\circ) + 2 \cos(300t - 60^\circ) + \dots$$

$$i_d(t) = 5 + 3 \cos(100t + 40^\circ) + 1 \cos(200t - 45^\circ) + 0.2 \cos(300t - 70^\circ) + \dots$$

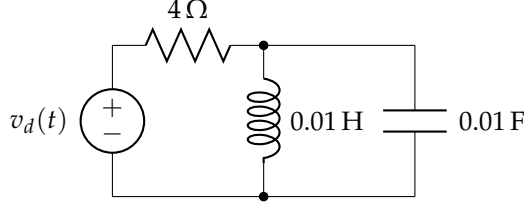
$$P = 108.99 \text{ W} \text{ جواب:}$$

مشق 15.15: شکل 15.20 میں داخلی رو دریافت کریں۔ داخلی دباؤ درج ذیل ہے۔

$$v_d(t) = 5 \cos(50t - 30^\circ) + 4 \cos(100t + 45^\circ) + 2 \cos(150t - 10^\circ) \text{ V}$$

جواب: متوازی امالہ اور برق گیر کی قدرتی تعدد 100 rad s^{-1} ہے جس پر ان کی رکاوٹ لامتناہی ہو جاتی ہے لہذا رو میں 100 rad s^{-1} کا جزو نہیں پایا جاتا۔

$$i_d(t) = 1.23 \cos(50t - 39.5^\circ) + 0.48 \cos(150t + 6.7^\circ) \text{ A}$$



شکل 15.20: مشق 15.15 کا دور۔

15.6 فوریر بدل

ہم دوری تفاعل کو فوریر تسلسل سے ظاہر کرنا دیکھ چکے ہیں۔ انہیں اب غیر دوری¹⁹ تفاعل کو ظاہر کرنے پر غور کریں۔

شکل 15.21-الف میں غیر دوری تفاعل $f(t)$ دکھایا گیا ہے۔ شکل-ب میں اس تفاعل کو T دورانیہ پر دہراتے ہوئے تفاعل $f_d(t)$ حاصل کیا گیا ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ شکل-ب کے دوری تفاعل کو ہم قوت نمائی تسلسل سے ظاہر کر سکتے ہیں

$$(15.51) \quad f_d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

جہاں

$$(15.52) \quad c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_d(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

اور

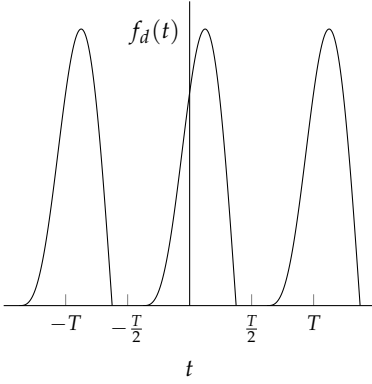
$$(15.53) \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

ہیں۔ شکل 15.21-ب میں $T \rightarrow \infty$ کرنے سے شکل-الف حاصل ہوتا ہے یعنی تفاعل غیر دوری ہو گا۔ ایسی صورت میں $-T$ ، T ، $2T$ وغیرہ پر پائے جانے والے حصے لامتناہی پر پائے جائیں گے۔

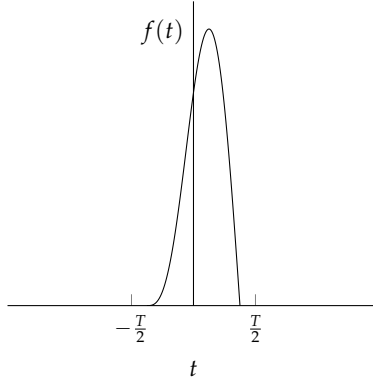
دوری تفاعل کے لکیری طیف میں لکیری ہارمونی تعدد $n\omega_0$ پر پائی جاتی ہے لہذا دو قریبی لکیریوں کے مابین تعددی فاصلہ

$$(15.54) \quad \Delta\omega = (n+1)\omega_0 - n\omega_0 = \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

¹⁹aperiodic



(ب) دوری قائل۔



(الف) غیر دوری قائل۔

شکل 15.21: دوری اور غیر دوری قائل۔

ہو گا۔ شکل 15.22-الف میں ان حقائق کی وضاحت کی گئی ہے۔ دوری فاصلہ T بڑھانے سے طیفی لکیروں کے مابین تعددی فاصلہ کم ہو گا۔ شکل-ب اور پ میں ایسا دکھایا گیا ہے۔ جیسا شکل-ت میں دکھایا گیا ہے، $T \rightarrow \infty$ کرنے سے $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ ہو گا، طیف اپنی لکیری خاصیت کھو دے گا اور یہ ایک مسلسل طیف کی صورت اختیار کر لیگا۔ ایسی صورت میں طیف انفرادی تعدد $n\omega_0$ کی بجائے تمام تعدد ω پر پایا جائے گا لہذا $n\omega_0$ کو ω فرض کیا جاسکتا ہے یعنی

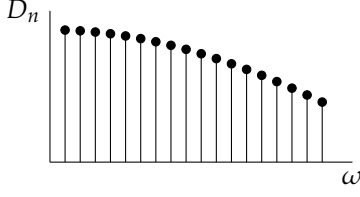
$$(15.55) \quad n\omega_0 = \omega$$

چونکہ $T \rightarrow \infty$ کرنے سے مساوات 15.52 میں $c_n \rightarrow 0$ ہوں گے لہذا ہم $c_n T$ پر نظر رکھتے ہوئے آگے بڑھتے ہیں۔

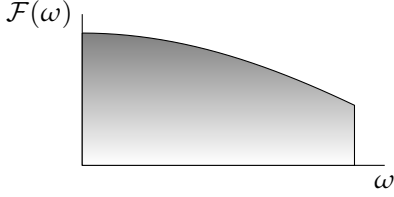
$$c_n T = \int_{-T/2}^{T/2} f_d(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

دوری عرصے کی حد لاتناہی کرتے ہوئے درج بالا مساوات کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

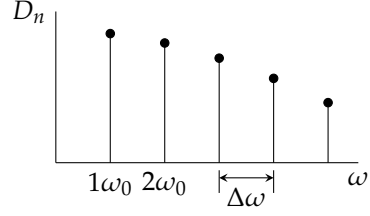
$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} (c_n T) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f_d(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$



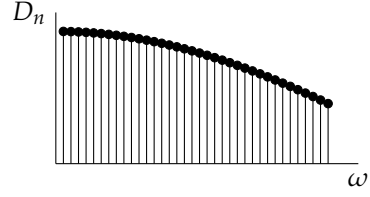
(ب) دوری عرصہ بڑھانے سے طیفی
لکیروں کے مابین فاصلہ کم ہوتا ہے۔



(ت) لاتناہی دوری عرصے کی صورت میں طیفی لکیریں آپس
میں مل جاتی ہیں اور ان میں فرق کرنا ممکن نہیں رہتا۔



طیفی لکیروں کے مابین فاصلہ ω_0 ہے۔



(پ) دوری عرصہ بہت بڑھانے سے طیفی لکیروں
کے مابین فاصلہ نہایت کم ہو جاتا ہے۔

شکل 15.22: لکیری طیف سے مسلسل طیف کا حصول۔

جہاں مندرجہ بالا بحث کو مد نظر رکھتے ہوئے، دوسری قدم پر دوری تعامل $f_d(t)$ کی جگہ غیر دوری تعامل $f(t)$ پر
کیا گیا ہے اور مساوات 15.55 کا استعمال کیا گیا ہے۔ اس مکمل کو فوڈیئر بدل²⁰ کہتے اور $F(\omega)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$(15.56) \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

اسی طرح دوری تعامل کو درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$\begin{aligned} f_d(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n T) e^{jn\omega_0 t} \frac{1}{T} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n T) e^{jn\omega_0 t} \frac{\Delta\omega}{2\pi} \end{aligned}$$

جس کو $T \rightarrow \infty$ کی صورت میں درج ذیل لکھا جاسکتا ہے

$$(15.57) \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

جہاں مساوات 15.55 کا استعمال کیا گیا ہے۔

مساوات 15.56 اور مساوات 15.57 فوریر جوڑی کہلاتے ہیں۔ چونکہ $f(t)$ کا فوریر بدل $F(\omega)$ ہے لہذا $F(\omega)$ کا الٹ فوریر بدل $f(t)$ ہے۔ فوریر جوڑی کو اکٹھے لکھتے ہیں۔

$$(15.58) \quad \begin{aligned} F(\omega) &= \mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ f(t) &= \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

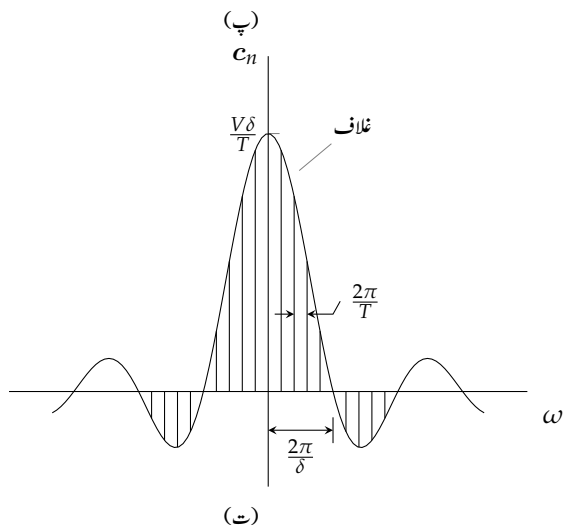
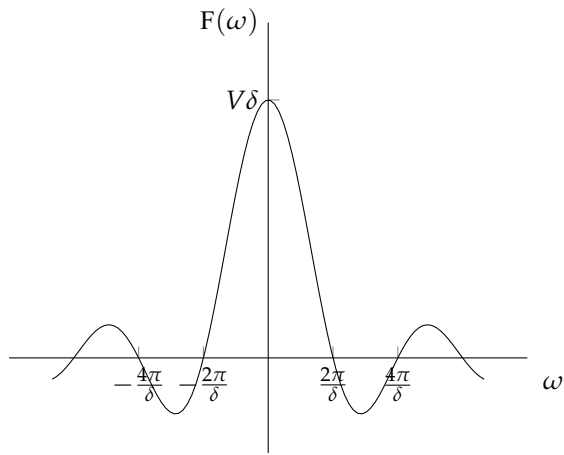
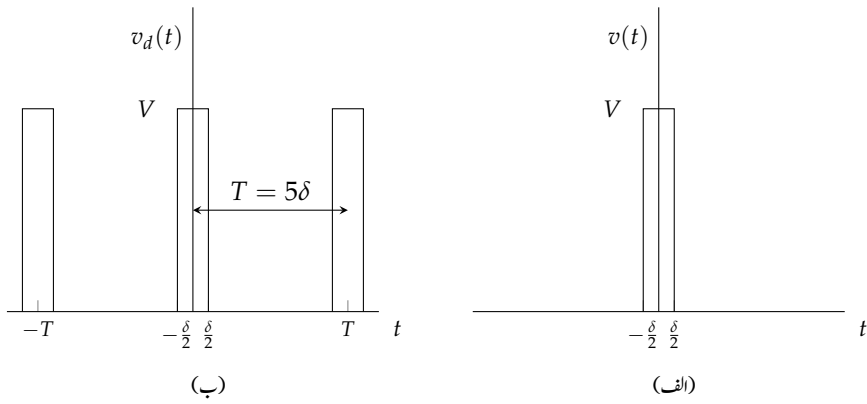
چند اہم فوریر بدل جوڑیاں

چند فوریر بدل کی جوڑیاں حاصل کرتے ہیں۔

مثال 15.14: شکل 15.23-الف میں دیے مستطیل تفاعل $f(t)$ کی فوریر بدل $F(\omega)$ حاصل کریں۔

حل: مساوات 15.58 استعمال کرتے ہوئے فوریر بدل حاصل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} V e^{-j\omega t} dt \\ &= \left. \frac{V e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right|_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \\ &= V \frac{e^{-j\omega \frac{\delta}{2}} - e^{+j\omega \frac{\delta}{2}}}{j\omega} \\ &= V \delta \frac{\sin \frac{\omega \delta}{2}}{\frac{\omega \delta}{2}} \end{aligned}$$



شکل 15.23: مثال 15.14 کا قائل۔

یوں وقتی دائرہ کار کے تفاعل $f(t)$

$$(15.59) \quad f(t) = \begin{cases} 0 & -\infty < t \leq -\frac{\delta}{2} \\ V & -\frac{\delta}{2} < t < \frac{\delta}{2} \\ 0 & \frac{\delta}{2} \leq t < \infty \end{cases}$$

کا فوریر بدل $F(\omega)$ درج ذیل ہے۔

$$(15.60) \quad F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)] = V\delta \frac{\sin \frac{\omega\delta}{2}}{\frac{\omega\delta}{2}}$$

اس مثال پر مزید غور کرتے ہیں۔ شکل 15.23-الف کے تفاعل کو شکل-ب میں T فاصلے کے دورانیے پر دہراتے ہوئے دوری تفاعل $f_d(t)$ حاصل کیا گیا ہے۔ دوری تفاعل $f_d(t)$ کے فوریر تسلسل کے عددی سر درج ذیل ہیں۔

$$(15.61) \quad c_n = \frac{V\delta \sin \frac{n\omega_0\delta}{2}}{T \frac{n\omega_0\delta}{2}}$$

شکل 15.23-ت میں لکیری طیف دکھائی گئی ہے۔ ساتھ ہی ساتھ شکل-پ کی مسلسل طیف بھی موازنے کے لئے دکھائی گئی ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لکیری طیف کا غلاف²³ مسلسل طیف ہے۔

