برقی آلات

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

تاریخ درستگی: 12 مئی 2020ء

عنوان

باب 5

گھومتے مشین کے بنیادی اصول

اس باب میں مختلف گھومتے مشینوں کے بنیادی اصولوں پر غور کیا جائے گا۔ظاہری طور پر مختلف مشین ایک ہی قسم کے اصولوں پر کام کرتے ہیں جنہیں اس باب میں اکٹھا کیا گیا ہے۔

5.1 قانون فیراڈے

قانون فیراڈے[1] کے تحت جب بھی کسی لچھے کا ارتباط بہاو λ وقت کے ساتھ تبدیل ہو، اس لچھے میں برقی دباو پیدا ہو گا:

$$e = \frac{\partial \lambda}{\partial t} = N \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{5.1}$$

گھومتے مشین میں ارتباط بہاو کی تبدیلی مختلف طریقوں سے پیدا کی جا سکتی ہے۔مثلاً لچھے کو ساکن مقناطیسی بہاو میں گھما کر یا ساکن لچھے میں مقناطیس گھما کر، وغیرہ وغیرہ۔

[1] Faraday's law

ان برقی مشینوں میں لچھے مقناطیسی قالب[2] پر لپیٹے جاتے ہیں۔ اس طرح کم سے کم مقناطیسی دباو سے زیادہ سے زیادہ مقناطیسی بہاو حاصل کیا جاتا ہے اور لچھوں کے مابین مشترکہ مقناطیسی بہاو بڑھایا جاتا ہے۔ مزید قالب کی شکل تبدیل کر کہ مقناطیسی بہاو کو ضرورت کے مقام پر پہنچایا جاتا ہے۔

ان مشینوں کے قالب میں مقناطیسی بہاو وقت کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے لہٰذا قالب میں بھنور نما برقی رو[3] پیدا ہوتا ہے۔ان بھنور نما برقی رو کو کم سے کم کرنے کی خاطر باریک لوہے کی پتری[4] تہہ در تہہ رکھ قالب بنایا جاتا ہے ۔ آپ کو یاد ہو گا، ٹرانسفارمر کا قالب بھی اسی طرح بنایا جاتا ہے۔

5.2 معاصر مشین

شکل 5.1 میں معاصر برقی جنریٹر کا ایک بنیادی شکل دکھایا گیا ہے جس کے قالب میں ایک مقناطیس ہے جو کہ گھوم سکتا ہے۔ میکانی زاویہ θ_m مقناطیس کا مقام دیتا ہے۔ افقی لکیر سے خلاف گھڑی زاویہ θ_m ناپا جاتا ہے۔

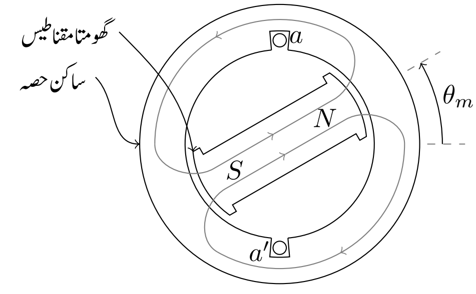
یہاں کچھ باتیں وضاحت طلب ہیں۔ اگر مقناطیس ایک مقررہ رفتار سے، فی سیکنڈ n مکمل چکر کاٹتا ہو تب ہم کہتے ہیں کہ اس مقناطیس کے گھومنے کا تعدد n ہرٹز[5] ہے۔اسی بات کو یوں بھی بیان کیا جاتا ہے کہ مقناطیس $60n$ چکر فی منٹ[6] کی رفتار سے گھوم رہا ہے۔ آپ جانتے ہیں کہ ایک چکر $360°$ زاویہ یا 2π ریڈیئن[7] پر مشتمل ہوتا ہے لہٰذا گھومنے کی اس رفتار کو $2\pi n$ ریڈیئن فی سیکنڈ بھی کہہ سکتے ہیں۔ یوں اگر مقناطیس f ہرٹز کی رفتار سے گھوم رہا ہو تب یہ $2\pi f$ ریڈیئن فی سیکنڈ کی رفتار سے گھومے گا جس کو ω سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

$$\omega = 2\pi f \tag{5.2}$$

اس کتاب میں گھومنے کی رفتار کو عموماً ریڈیئن فی سیکنڈ میں بیان کیا جائے گا۔

شکل 5.1 میں مشین کے دو مقناطیسی قطب ہیں، اس لئے اس کو دو قطبی مشین کہتے ہیں۔ ساکن قالب میں، اندر کی جانب دو شگاف ہیں، جن میں N چکر کا لچھا موجود ہے۔ لچھے کو a اور a' سے ظاہر کیا گیا ہے۔اس لچھے کی بنا

[2] magnetic core
[3] eddy currents
[4] laminations
[5] Hertz
[6] rounds per minute, rpm
[7] radians



شکل 5.1: دو قطب، یک دوری معاصر جنریٹر۔

اس مشین کو ایک لچھے کا مشین بھی کہتے ہیں۔ چونکہ یہ لچھا جنریٹر کے ساکن حصہ پر پایا جاتا ہے لہٰذا یہ لچھا بھی ساکن ہو گا جس کی بنا اسے ساکن لچھا[8] کہتے ہیں۔

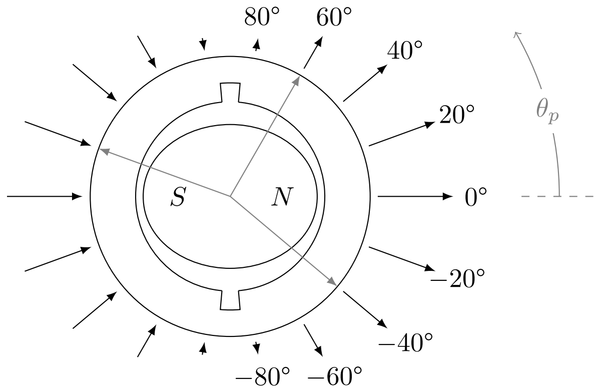
مقناطیس کا مقناطیسی بہاو شمالی قطب[9] N سے خارج ہو کر خلائی درز میں سے ہوتا ہوا، باہر گول قالب میں سے گزر کر، دوسرے خلائی درز میں سے ہوتا ہوا، مقناطیس کے جنوبی قطب[10] S میں داخل ہو گا۔ اس مقناطیسی بہاو کو ہلکی سیاہی کے لکیروں سے دکھایا گیا ہے۔ یہ مقناطیسی بہاو، سارا کا سارا، ساکن لچھے میں سے بھی گزرتا ہے۔ شکل 5.1 میں مقناطیس سیدھی سلاخ کی مانند دکھایا گیا ہے۔

شکل 5.2 میں مقناطیس تقریباً گول ہے اور اس کے محور کا زاویہ θ_m صفر کے برابر ہے۔ مقناطیس اور ساکن قالب کے بیچ صفر زاویہ، $\theta = 0°$، پر خلائی درز کی لمبائی کم سے کم اور نوے زاویہ، $|\theta| = 90°$، پر زیادہ سے زیادہ ہے۔ کم خلائی درز پر ہچکچاہٹ کم ہو گی جبکہ زیادہ خلائی درز پر ہچکچاہٹ زیادہ ہو گی لہٰذا $\theta = 0°$ پر خلائی درز سے زیادہ مقناطیسی بہاو گزرے گا جبکہ $\theta = 90°$ پر کم بہاو گزرے گا۔ خلائی درز کی لمبائی یوں تبدیل کی جاتی ہے کہ خلائی درز میں سائن نما مقناطیسی بہاو پیدا ہو۔ مقناطیسی بہاو مقناطیس سے قالب میں عمودی زاویہ پر داخل ہوتا ہے۔ اگر خلائی درز میں B سائن نما ہو

$$B = B_0 \cos \theta_p \tag{5.3}$$

تب کثافت مقناطیسی بہاو B صفر زاویہ $\theta_p = 0°$، پر زیادہ سے زیادہ اور نوے زاویہ، $|\theta_p| = 90°$، پر صفر ہو گی اور خلائی درز میں مقناطیسی بہاو θ_p کے ساتھ تبدیل ہو گا۔ θ_p کو مقناطیس کے شمالی قطب سے گھڑی کے مخالف

[8] stator coil
[9] north pole
[10] south pole



شکل 5.2: کثافتِ مقناطیسی بہاو اور زاویہ کا تبدیلی۔

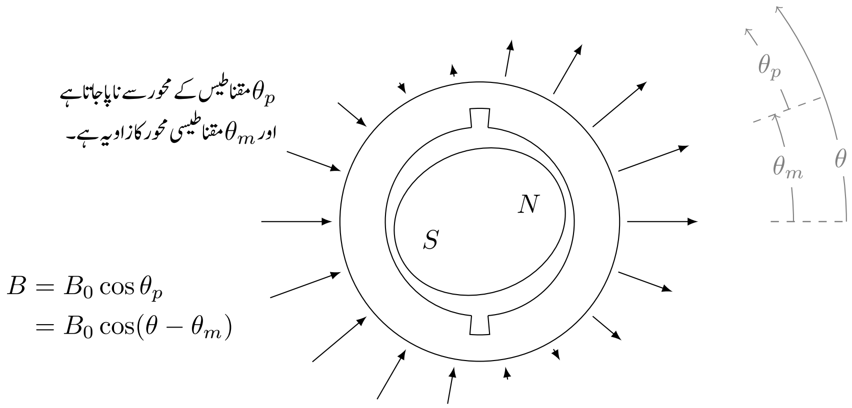
رخ ناپا جاتا ہے۔ شکل 5.2 میں ساکن حصے کے باہر نوکیلی لکیروں کی لمبائی سے کثافت مقناطیسی بہاو کی مطلق قیمت اور لکیروں کے رخ سے بہاو کا رخ دکھایا گیا ہے۔اس شکل میں ہلکی سیاہی سے $-40°$، $60°$ اور $160°$ زاویوں پر رداسی رخ دکھایا گیا ہے۔زاویات $-40°$ اور $60°$ پر مقناطیسی بہاو رداسی رخ جبکہ $160°$ پر مقناطیسی بہاو رداسی رخ کے مخالف ہے۔یوں شکل 5.2 میں آدھے خلائی درز میں کثافت مقناطیسی بہاو رداسی رخ جبکہ باقی آدھے میں مخالف رداسی رخ ہو گا۔ خلائی درز میں کثافت مقناطیسی بہاو B اور θ_p کا ترسیم سائن نما ہو گا۔ شکل 5.3 میں مقناطیس دوسرے زاویہ پر دکھایا گیا ہے۔یاد رہے کثافت مقناطیسی بہاو کی مطلق قیمت مقناطیس کے شمالی قطب پر زیادہ سے زیادہ ہو گی اور شمالی قطب پر کثافت مقناطیسی بہاو رداسی رخ ہو گی۔ شکل 5.3 میں خلائی درز میں کثافتِ مقناطیسی بہاو B، زاویے θ_p اور θ_m دکھائے گئے ہیں جہاں سے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned} B &= B_0 \cos\theta_p \\ \theta_p &= \theta - \theta_m \end{aligned} \tag{5.4}$$

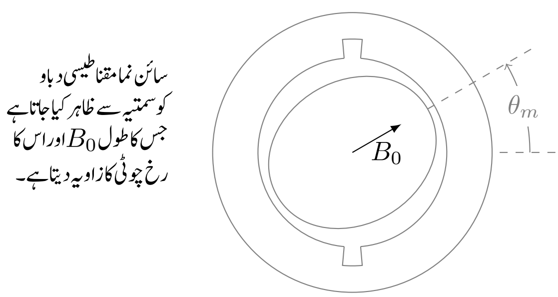
یوں درج ذیل ہو گا۔

$$B = B_0 \cos(\theta - \theta_m) \tag{5.5}$$

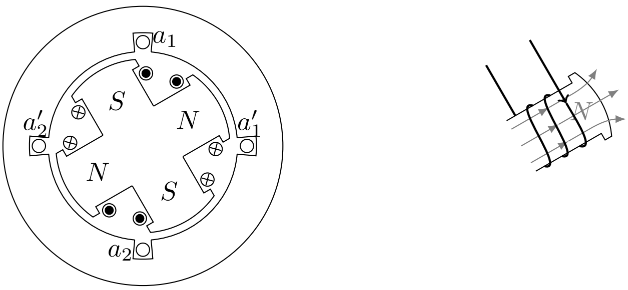
شکل 5.3 میں مقناطیس اور اس کا سائن نما مقناطیسی دباو پیش کیا گیا ہے۔ جیسا شکل 5.4 میں دکھایا گیا ہے، ایسے مقناطیسی دباو کو عموماً ایک سمتیہ سے ظاہر کیا جاتا ہے جہاں سمتیہ کا طول مقناطیسی دباو کا حیطہ اور سمتیہ کا رخ مقناطیس کے شمال کو ظاہر کرتا ہے۔



شکل 5.3: کثافت مقناطیسی بہاو اور مقناطیس کا زاویہ۔



شکل 5.4: مقناطیسی دباو کو سمتیہ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔



شکل 5.5: چار قطب یک دوری معاصر جنریٹر۔

شکل 5.3 میں مقناطیس کو لمحہ t_1، زاویہ $\theta_m(t_1)$ پر دکھایا گیا ہے جہاں ساکن لچھے کا ارتباط بہاو λ_θ ہے۔ اگر مقناطیس گھڑی کے مخالف رخ ایک مقررہ رفتار ω_0 سے گھوم رہا ہو تب ساکن لچھے میں اس لمحہ پر برقی دباو $e(t)$ پیدا ہو گا:

$$e(t) = \frac{\mathrm{d}\lambda_\theta}{\mathrm{d}t} \tag{5.6}$$

آدھے چکر، π ریڈیئن گھومنے کے، بعد مقناطیسی قطبین آپس میں جگہیں تبدیل کرتے ہیں، لچھے میں مقناطیسی بہاو کا رخ الٹ ہو گا، لچھے میں ارتباط بہاو $-\lambda_\theta$ اور اس میں امالی برقی دباو $-e(t)$ ہو گا۔ایک مکمل چکر بعد مقناطیس دوبارہ اسی مقام پر ہو گا جو شکل 5.3 میں دکھایا گیا ہے، ساکن لچھے کا ارتباط بہاو دوبارہ λ_θ اور اس میں امالی برقی دباو $e(t)$ ہو گا۔ یوں جب بھی مقناطیس $\theta_m = 2\pi$ میکانی زاویہ طے کرے، امالی برقی دباو کے برقی زاویہ میں $\theta_e = 2\pi$ تبدیلی رونما ہو گی لہٰذا دو قطب، ایک لچھے کی مشین میں میکانی زاویہ θ_m اور برقی زاویہ θ_e ایک دوسرے کے برابر ہوں گے:

$$\theta_e = \theta_m$$

اس مشین میں اگر مقناطیس f_m چکر فی سیکنڈ کی رفتار سے گھومتا ہو تب لچھے میں امالی برقی دباو $e(t)$ بھی ایک سیکنڈ میں f_m مکمل چکر کاٹے گا لہٰذا $e(t)$ کے **تعدد**[11] f_e کی **قیمت** f_m ہرٹز[12] ہو گی۔

$$f_e = f_m$$

اس مشین میں میکانی زاویہ θ_m اور برقی زاویہ θ_e وقت کے ساتھ تبدیل ہونے کے باوجود آپس میں ایک تناسب رکھتے ہیں لہٰذا ایسے مشین کو معاصر مشین[13] کہتے ہیں۔ یہاں یہ تناسب ایک کے برابر ہے۔

---

[11] frequency
[12] Hertz
[13] synchronous machine

شکل 5.5 میں چار قطب، یک دوری معاصر جنریٹر دکھایا گیا ہے۔ چھوٹے مشینوں میں عموماً مقناطیس جبکہ بڑے مشینوں میں **برقی مقناطیس**[14] استعمال ہوتے ہیں۔ اس شکل میں برقی مقناطیس استعمال کیے گئے ہیں۔ دو سے زائد قطبین والے مشینوں میں کسی ایک شمالی قطب کو حوالہ قطب تصور کیا جاتا ہے۔ شکل میں اس حوالہ قطب کو θ_m پر دکھایا گیا ہے اور یوں دوسرا شمالی قطب $(\theta_m + \pi)$ زاویہ پر ہے۔

جیسا کہ نام سے واضح ہے، اس مشین میں مقناطیس کے چار قطبین ہیں۔ ہر ایک شمالی قطب کے بعد ایک جنوبی قطب آتا ہے۔ یک دوری آلات میں مقناطیسی قطبین کے جوڑوں کی تعداد اور ساکن لچھوں کی تعداد ایک دوسرے کے برابر ہوتی ہے۔ شکل 5.5 میں مشین کے چار قطب یعنی دو جوڑی قطبین ہیں، لہٰذا اس مشین کے ساکن حصہ پر دو ساکن لچھے ہوں ہیں۔ ایک لچھے کو a_1 سے واضح کیا گیا ہے اور دوسرے کو a_2 سے۔ لچھے a_1 کو قالب میں موجود دو شگاف a_1 اور a_1' میں لپیٹا گیا ہے۔ اسی طرح a_2 لچھے کو دو شگاف a_2 اور a_2' میں رکھا گیا ہے۔ ان دونوں لچھوں میں یکساں برقی دباو پیدا ہوتا ہے۔ دونوں لچھوں کو سلسلہ وار[15] جوڑا جاتا ہے۔ اس طرح جنریٹر سے حاصل برقی دباو ایک لچھے میں پیدا برقی دباو کا دگنا ہو گا۔ یک دوری آلات میں قالب کو مقناطیس کے قطبین کی تعداد کے برابر حصوں میں تقسیم کرنے سے مشین کا ہر ساکن لچھا ایک حصہ گھیرتا ہے۔ شکل 5.5 میں چار قطبین ہیں لہٰذا اس کا ایک لچھا نوے میکانی زاویہ کے احاطے کو گھیرتا ہے۔

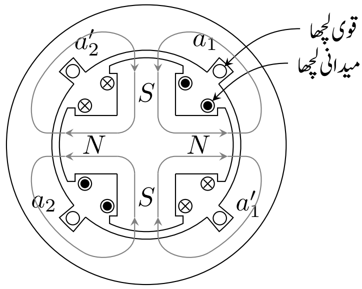
ساکن اور حرکی لچھوں کی کارکردگی ایک دوسرے سے مختلف ہوتی ہے۔ اس کی وضاحت کرتے ہیں۔

جیسا پہلے بھی ذکر کیا گیا چھوٹی گھومتی مشینوں میں مقناطیسی میدان ایک مقناطیس فراہم کرتا ہے جبکہ بڑی مشینوں میں برقی مقناطیس میدان فراہم کرتا ہے۔ اگرچہ اب تک کی اشکال میں مقناطیس کو گھومتا حصہ دکھایا گیا ہے، حقیقت میں مقناطیس کسی مشین میں گھومتا اور کسی میں ساکن ہو گا۔ میدان فراہم کرنے والا لچھا مشین کے کل برقی طاقت کے چند فی صد برابر برقی طاقت استعمال کرتا ہے۔ میدان فراہم کرنے والے اس لچھے کو **میدانی لچھا**[16] کہتے ہیں۔ اس کے برعکس مشین میں موجود دوسری نوعیت کے لچھے کو **قوی لچھا**[17] کہتے ہیں۔ برقی جنریٹر کے قوی لچھے سے برقی طاقت حاصل کی جاتی ہے۔ برقی موٹروں میں میدانی لچھے میں چند فی صد برقی طاقت کے ضیاع کے علاوہ تمام برقی طاقت قوی لچھے کو فراہم کی جاتی ہے۔

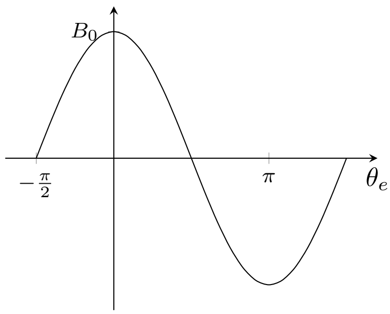
شکل 5.6 میں گھومتے اور ساکن حصہ کے بیچ خلائی درز میں شمالی قطب سے مقناطیسی بہاو باہر نکل کر قالب میں داخل ہوتا ہے جبکہ جنوبی قطب پر مقناطیسی بہاو قالب سے نکل کر جنوبی قطب میں داخل ہوتا ہے۔ شکل 5.6 میں

---

electromagnet[14]
series connected[15]
field coil[16]
armature coil[17]



شکل 5.6: چار قطب، دو لچھے مشین میں مقناطیسی بہاو۔



شکل 5.7: سائن نما کثافتِ مقناطیسی بہاو۔

اس مقناطیسی بہاو کی کثافت کو دکھایا گیا ہے۔ یوں اگر ہم اس خلائی درز میں ایک گول چکر کاٹیں تو مقناطیسی بہاو کا رخ دو مرتبہ باہر کی جانب اور دو مرتبہ اندر کی جانب ہو گا۔ ان مشینوں میں کوشش کی جاتی ہے کہ خلائی درز میں B سائن نما ہو۔ یہ کیسے کیا جاتا ہے، اس پر آگے غور کیا جائے گا۔ اگر تصور کر لیا جائے کہ B سائن نما ہے تب خلائی درز میں B کی مطلق قیمت شکل 5.7 کی طرح ہو گی جہاں θ_e برقی زاویہ ہے۔

P قطبی مقناطیس کے معاصر مشین کے لئے لکھ درج ذیل ہو گا۔

$$\theta_e = \frac{P}{2}\theta_m \tag{5.7}$$

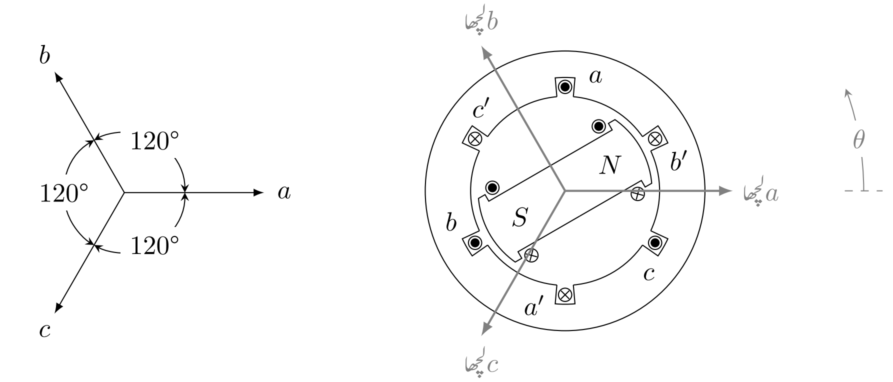
$$f_e = \frac{P}{2} f_m \tag{5.8}$$

یہاں برقی اور میکانی تعدد کا تناسب 2 ہے۔

مثال 5.1: پاکستان میں گھریلو اور صنعتی صارفین کو 50 Hz کی برقی طاقت فراہم کی جاتی ہے۔یوں ہمارے ہاں $f_e = 50$ ہو گا۔

- اگر برقی طاقت دو قطبی جنریٹر سے حاصل کی جائے تب جنریٹر کی رفتار کتنی ہو گی؟۔
- اگر جنریٹر کے بیس قطب ہوں تب جنریٹر کی رفتار کتنی ہو گی؟

حل:



شکل 5.8: دو قطب، تین دوری معاصر مشین۔

- مساوات 5.8 کے تحت دو قطبی، $P = 2$، جنریٹر کا میکانی رفتار $f_m = \frac{2}{2}(50) = 50$ چکر فی سیکنڈ یعنی 3000 چکر فی منٹ[18] ہو گا۔
- بیس قطبی، $P = 20$، جنریٹر کا میکانی رفتار $f_m = \frac{2}{20}(50) = 5$ چکر فی سیکنڈ یعنی 300 چکر فی منٹ ہو گا۔

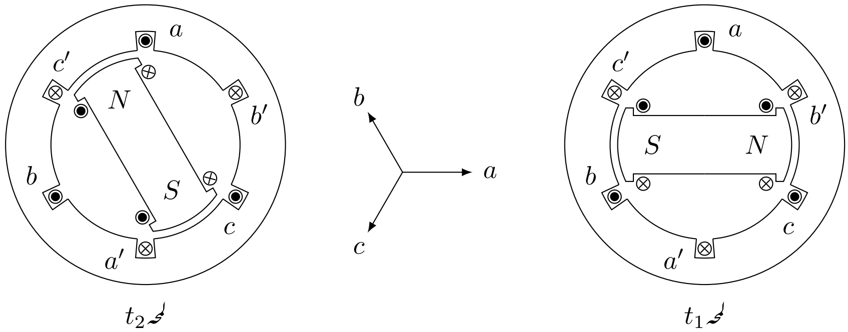
□

اب یہ فیصلہ کس طرح کیا جائے کہ جنریٹر کے قطب کتنے رکھے جائیں۔ درحقیقت پانی سے چلنے والے جنریٹر سست رفتار جبکہ ٹربائن سے چلنے والے جنریٹر تیز رفتار ہوتے ہیں، لہٰذا پانی سے چلنے والے جنریٹر زیادہ قطب رکھتے ہیں جبکہ ٹربائن سے چلنے والے جنریٹر عموماً دو قطب کے ہوتے ہیں۔

شکل 5.8 میں دو قطب تین دوری معاصر مشین دکھایا گیا ہے۔اس میں تین ساکن لچھے ہیں۔ان میں ایک لچھا a ہے جو قالب میں شگاف a اور a' میں رکھا گیا ہے۔ اگر اس شکل میں باقی دو لچھے نہ ہوتے تب یہ بالکل شکل 5.1 میں دیا گیا مشین ہی تھا۔البتہ دیے گئے شکل میں ایک کی بجائے تین ساکن لچھے ہیں۔

لچھے کا رخ درج ذیل طریقہ سے تعین کیا جاتا ہے۔

18 rpm, rounds per minute



شکل 5.9: دو قطب تین دوری مشین۔

- دائیں ہاتھ کی چار انگلیوں کو دونوں شگافوں میں برقی رو کے رخ لپیٹیں۔ دائیں ہاتھ کا انگوٹھا لچھے کا رخ دے گا۔

شکل 5.8 میں لچھا a کا برقی رو شگاف a میں، کتاب کے صفحہ کو عمودی، باہر رخ جبکہ a' میں اس کے مخالف اندر رخ تصور کرتے ہوئے لچھا a کا رخ تیر دار لکیر سے دکھایا گیا ہے۔ اس رخ کو ہم صفر زاویہ تصور کرتے ہیں۔ یوں لچھا a صفر زاویہ پر لپیٹا گیا ہے، یعنی $\theta_a = 0°$ ہے۔ باقی لچھوں کے زاویات لچھا a کے رخ سے، گھڑی کے مخالف رُخ ناپے جاتے ہیں۔

شکل 5.8 میں لچھا b کو شگاف b اور b' میں رکھا گیا ہے اور لچھا c کو شگاف c اور c' میں رکھا گیا ہے۔ مزید لچھا b کو $120°$ زاویہ اور لچھا c کو $240°$ زاویہ پر رکھا گیا ہے۔ یوں $\theta_b = 120°$ اور $\theta_c = 240°$ ہوں گے۔

شکل 5.9 میں اگر لمحہ t_1 پر لچھا a کا ارتباط بہاو $\lambda_a(t_1)$ ہو تب لمحہ t_2 پر، جب مقناطیس $120°$ زاویہ طے کر لے، لچھا b کا ارتباط بہاو $\lambda_b(t_2)$ ہو گا۔ لمحہ t_2 پر مقناطیس اور لچھا b ایک دوسرے کے لحاظ سے بالکل اسی طرح نظر آتے ہیں جیسے t_1 پر مقناطیس اور لچھا a ایک دوسرے کے لحاظ سے نظر آتے تھے۔ یوں لمحہ t_2 پر لچھا b کا ارتباط بہاو اتنا ہی ہو گا جتنا لمحہ t_1 پر a لچھا کا ارتباط بہاو تھا:

$$\lambda_b(t_2) = \lambda_a(t_1) \tag{5.9}$$

اسی طرح لمحہ t_3 پر، جب مقناطیس مزید $120°$ زاویہ طے کر لے، لچھا c کا ارتباط بہاو $\lambda_c(t_3)$ ہو گا جو $\lambda_a(t_1)$ کے برابر ہو گا۔یوں درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\lambda_c(t_3) = \lambda_b(t_2) = \lambda_a(t_1) \tag{5.10}$$

ان لمحات پر لچھوں کے امالی برقی دباو

$$e_a(t_1) = \frac{\mathrm{d}\lambda_a(t_1)}{\mathrm{d}t} \tag{5.11}$$

$$e_b(t_2) = \frac{\mathrm{d}\lambda_b(t_2)}{\mathrm{d}t} \tag{5.12}$$

$$e_c(t_3) = \frac{\mathrm{d}\lambda_c(t_3)}{\mathrm{d}t} \tag{5.13}$$

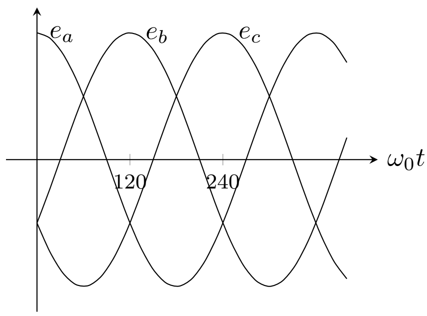
ہوں گے۔ مساوات 5.10 کی روشنی میں درج ذیل ہو گا۔

$$e_a(t_1) = e_b(t_2) = e_c(t_3) \tag{5.14}$$

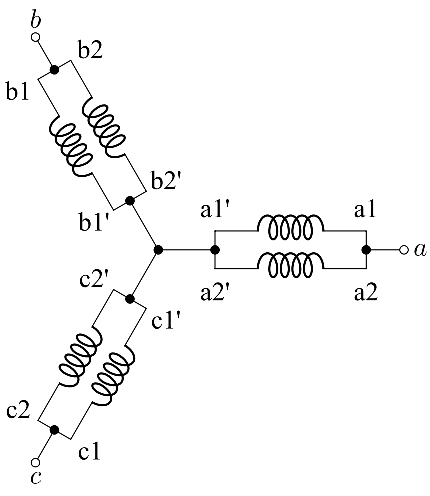
اگر شکل 5.9 میں صرف لچھا a پایا جاتا تب یہ بالکل شکل 5.1 کی طرح ہوتا اور اگر ایسی صورت میں مقناطیس گھڑی کے مخالف رخ ایک مقررہ رفتار ω_0 سے گھمایا جاتا تب، جیسے پہلے تذکرہ کیا گیا ہے، لچھا a میں سائن نما برقی دباو پیدا ہوتا۔ شکل 5.9 میں کسی ایک لچھے کو کسی دوسرے لچھے پر کوئی برتری حاصل نہیں ہے۔ یوں اگر شکل 5.9 میں مقناطیس اسی طرح گھمایا جائے تب تینوں ساکن لچھوں میں سائن نما برقی دباو پیدا ہو گا البتہ مساوات 5.14 کے تحت یہ برقی دباو آپس میں $120°$ زاویہ پر ہوں گے۔ ان امالی برقی دباو کو شکل 5.10 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر لمحہ t_1 پر e_1 کی مثبت چوٹی ہو تب لمحہ t_2 پر e_2 اور لمحہ t_3 پر e_3 کی چوٹی پائی جائے گی۔ یوں درج ذیل ہوں گے۔

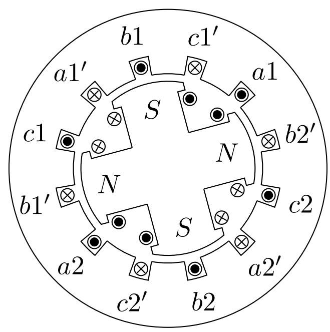
$$\begin{aligned}
e_a(t) &= E_0 \cos \omega_0 t \\
e_b(t) &= E_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{2}{3}\pi\right) \\
e_c(t) &= E_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{4}{3}\pi\right) = E_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{2}{3}\pi\right)
\end{aligned}$$

شکل 5.11 میں چار قطب، تین دوری معاصر مشین دکھایا گیا ہے۔ گھومتے حصے پر شمالی اور جنوبی قطبین باری باری پائے جاتے ہیں اور $180°$ میکانی زاویہ میں شمال اور قریبی جنوب قطب کی ایک جوڑی پائی جاتی ہے۔ یہی میکانی زاویہ $360°$ برقی زاویہ کے برابر ہو گا۔ شکل 5.8 میں ساکن حصہ کے $360°$ برقی زاویہ کے احاطہ میں تین دوری لچھے نسب ہیں جن کی اطراف کی ترتیب، گھڑی کے مخالف رخ چلتے ہوئے، a، c'، b، a'، c اور b' ہے۔ شکل 5.11 میں دو قطبین کے احاطہ، $180°$ میکانی زاویہ (یا $360°$ برقی زاویہ)، میں بالکل اسی طرح تین دوری لچھوں کے اطراف کی ترتیب $a1$، $c1'$، $b1$، $a1'$، $c1$ اور $c1'$ ہے۔ باقی دو قطبین کے احاطے میں بھی بالکل اسی طرح آپ کو $a2$، $c2'$،



شکل 5.10: تین دوری امالی برقی دباو میں زاویائی فرق پایا جاتا ہے۔





شکل 5.11: چار قطب، تین دوری معاصر مشین۔

$b2$، $a2'$، $c2$ اور $c2'$ نظر آئیں گے۔ کسی بھی لمحہ $a1$ اور $a2$ لچھوں میں بالکل یکساں برقی دباو پیدا ہو گا۔ تین دوری دو یکساں لچھوں کو سلسلہ وار یا متوازی جوڑ کر تین دوری برقی دباو حاصل کا جاتا ہے۔ شکل 5.11 میں انہیں متوازی جوڑ کر دکھایا گیا ہے جہاں a لچھے کو صفر زاویہ پر تصور کیا گیا ہے۔

5.3 محرک برقی دباو

قانون لورینز[19] کے تحت مقناطیسی میدان $\boldsymbol{B}$ میں سمتی رفتار $\boldsymbol{v}$ سے حرکت کرتا ہوا برقی بار[20] q درج ذیل قوت $\boldsymbol{F}$ محسوس کرے گا۔

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{5.15}$$

یہاں سمتی رفتار سے مراد برقی میدان کے لحاظ سے برقی بار کی سمتی رفتار ہے لہٰذا $\boldsymbol{F}$ کو ساکن مقناطیسی میدان میں برقی بار کی سمتی رفتار تصور کیا جا سکتا ہے۔ مثبت برقی بار پر قوت کا رخ دائیں ہاتھ کا قانون[21] دیگا (صفحہ 104 پر شکل 4.1)۔ دائیں ہاتھ کے انگوٹھے کو باقی انگلیوں کے ساتھ برقرار قائمہ رکھ کر اس ہاتھ کی چار انگلیوں کو $\boldsymbol{v}$ کے رخ سے شروع کر کے، چھوٹے زاویہ پر گھما کر، $\boldsymbol{B}$ کے رخ موڑنے سے انگوٹھا $\boldsymbol{F}$ کا رخ دیگا۔

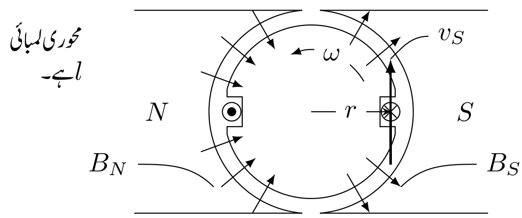
مقناطیسی میدان میں ابتدائی نقطہ سے اختتامی نقطہ تک، جن کے بیچ ہٹاو $\boldsymbol{l}$ ہے، برقی بار q منتقل کرنے کے لئے درکار کام W ہو گا:

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{l} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{l} \tag{5.16}$$

اکائی مثبت برقی بار کو ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ منتقل کرنے کے لئے درکار کام کو ان دو نقطوں کے بیچ برقی دباو[22] کہتے ہیں جس کی اکائی وولٹ[23] V ہے۔ یوں اس مساوات سے ان دو نقطوں کے بیچ درج ذیل برقی دباو ہو گا۔

$$e = \frac{W}{q} = (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{l} \quad \text{وولٹ} \tag{5.17}$$

[19] Lorentz law
[20] charge
[21] right hand rule
[22] potential difference, voltage
[23] volt



شکل 5.12: ایک چکر کا لچھا مقناطیسی میدان میں گھوم رہا ہے۔

حرکت کی مدد سے یوں حاصل برقی دباو کو **محرک برقی دباو**[24] کہتے ہیں۔ روایتی طور پر کسی بھی طریقہ سے پیدا برقی دباو کو محرک برقی دباو کہتے ہیں۔ یوں کیمیائی برقی سیل وغیرہ کا برقی دباو بھی محرک برقی دباو کہلائے گا۔

شکل 5.12 میں خلاف گھڑی گھومتے حصہ پر ایک چکر کا لچھا نسب ہے۔ بائیں خلاء میں لچھا کی تار کے قطع پر غور کریں۔ مساوات 5.15 کے تحت بایاں قطع میں موجود مثبت برقی بار پر صفحہ کے عمودی باہر رخ قوت پیدا ہو گی جبکہ اس قطع میں موجود منفی برقی بار پر اس کے مخالف رخ قوت پیدا ہو گی۔ مساوات 5.17 کے تحت اس قطع کا بالائی سرا مثبت اور نچلا سرا منفی برقی دباو پر ہو گا۔

ہم گھومتے حصہ کی محور پر نلکی محدد قائم کرتے ہیں۔ یوں جنوبی قطب کے سامنے خلاء میں $\boldsymbol{B}$ رداسی رخ جبکہ شمالی قطب کے سامنے خلاء میں $\boldsymbol{B}$ رداس کے مخالف رخ ہو گا۔ جنوبی قطب کے سامنے شگاف میں برقی تار $\boldsymbol{l}_S$ کے لئے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_S &= v\boldsymbol{a}_\theta = \omega r \boldsymbol{a}_\theta \\
\boldsymbol{B}_S &= B\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}} \\
\boldsymbol{l}_S &= l\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}
\end{aligned} \tag{5.18}
$$

یوں جنوبی قطب کے سامنے تار کے قطع میں درج ذیل محرک برقی دباو پیدا ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
e &= (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{l} \\
&= \omega r B l (\boldsymbol{a}_\theta \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\
&= \omega r B l (-\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}) \cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}} \\
&= -\omega r B l
\end{aligned} \tag{5.19}
$$

جنوبی مقناطیسی قطب کے سامنے شگاف میں برقی تار کی لمبائی کا رخ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لیا گیا ہے۔ اس مساوات میں برقی دباو منفی ہونے کا مطلب ہے کہ برقی تار کا مثبت سرا تار پر $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ رخ ہے یعنی تار کا نچلا سرا مثبت اور بالائی سرا منفی ہے۔

[24] electromotive force, emf

اگر اس تار میں رو گزر سکے تو اس رو کا رخ $-\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ یعنی صفحہ کو عمودی اندر رخ ہو گا جسے شکل 5.12 میں شگاف میں دائرہ کے اندر صلیبی نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اسی طرح شمالی مقناطیسی قطب کے سامنے شگاف میں موجود برقی تار کے لئے ہم درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_N &= v\boldsymbol{a}_\theta = \omega r \boldsymbol{a}_\theta\\ \boldsymbol{B}_N &= -B\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}\\ \boldsymbol{l}_N &= l\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\end{aligned} \tag{5.20}$$

یوں اس قطع میں درج ذیل دباو ہو گا۔

$$\begin{aligned}e_N &= (\boldsymbol{v}_N \times \boldsymbol{B}_N)\cdot \boldsymbol{l}_N\\ &= -\omega r B l(\boldsymbol{a}_\theta \times \boldsymbol{a}_{\mathrm{r}})\cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\ &= -\omega r B l(-\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}})\cdot \boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\ &= \omega r B l\end{aligned} \tag{5.21}$$

شمالی مقناطیسی قطب کے سامنے شگاف میں برقی تار کی لمبائی کا رخ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ لیا گیا ہے۔اس مساوات میں برقی دباو مثبت ہونے کا مطلب ہے کہ برقی تار کا مثبت سرا تار پر $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ رخ ہو گا یعنی تار کا بالائی سرا مثبت اور نچلا سرا منفی ہو گا۔اگر اس تار میں رو گزر سکے تو اس کا رخ $\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}$ یعنی صفحہ کو عمودی باہر رخ ہو گا جسے شکل 5.12 میں شگاف میں دائرہ کے اندر نقطہ کے نشان سے دکھایا گیا ہے۔

یہ دونوں تار مل کر ایک چکر کا لچھا بناتے ہیں۔ ان تاروں کے نچلے سر ایک دوسرے کے ساتھ سلسلہ وار جڑے ہیں جس کو شکل میں نہیں دکھایا گیا۔یوں اس لچھے کے بالائی، نظر آنے والے، سروں پر کل برقی دباو e ان دو برقی تاروں میں پیدا برقی دباو کا مجموعہ ہو گا:

$$\begin{aligned}e &= 2rlB\omega\\ &= AB\omega\end{aligned} \tag{5.22}$$

یہاں لچھے کا رقبہ $A = 2rl$ ہے۔اگر ایک چکر سے اتنا برقی دباو حاصل ہو تب N چکر کے لچھے سے درج ذیل دباو حاصل ہو گا جہاں $\phi = AB$ مقناطیسی بہاو ہے۔

$$\begin{aligned}e &= \omega N A B\\ &= 2\pi f N A B\\ &= 2\pi f N \phi\end{aligned} \tag{5.23}$$

گھومتی مشینوں کی خلائی درز میں $\boldsymbol{B}$ اور $\boldsymbol{v}$ ہر لمحہ ایک دوسرے کے عمودی ہوتے ہیں۔مساوات 5.17 کے تحت مستقل زاویائی رفتار اور محوری لمبائی کی صورت میں پیدا کردہ برقی دباو ہر لمحہ B کا براہ راست متناسب ہو گا۔ خلائی درز میں زاویہ کے ساتھ تبدیل ہوتے ہوئے B کی صورت میں گھومتے لچھے میں پیدا برقی دباو بھی زاویہ کے ساتھ تبدیل ہو گا۔یوں جس شکل کا برقی دباو درکار ہو اسی شکل کی کثافت مقناطیسی دباو خلائی درز میں پیدا کرنی ہو گی۔سائن نما برقی دباو پیدا کرنے کے لئے خلائی درز میں سائن نما کثافتِ مقناطیسی بہاو درکار ہو گی۔

اگلے حصے میں خلائی درز میں ضرورت کے تحت B پیدا کرنے کی ترکیب بتلائی جائے گی۔

5.4 پھیلے لچھے اور سائن نما مقناطیسی دباو

ہم نے اب تک جتنے مشین دیکھے ان سب میں گچھ[25] لچھے دکھائے گئے۔مزید ان مشینوں میں گھومتے حصے پر موجود مقناطیس کے ابھرے قطب[26] تھے۔عموماً حقیقی مشینوں کے ہموار قطب[27] اور پھیلے لچھے[28] ہوتے ہیں جن کی بنا ساکن اور گھومتے حصوں کے بیچ خلائی درز میں سائن نما مقناطیسی دباو اور سائن نما کثافت مقناطیسی بہاو پیدا کرنا ممکن ہوتا ہے۔

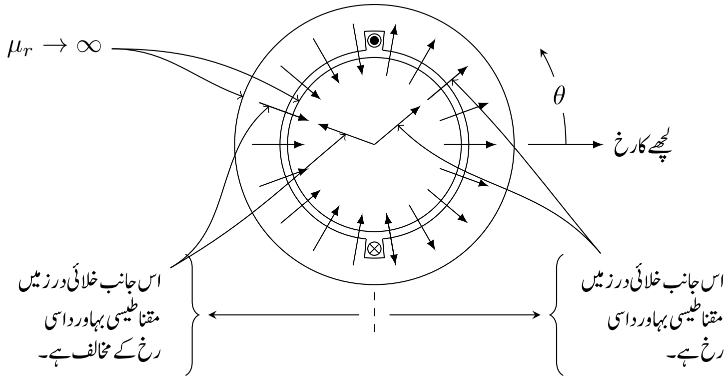
شکل 5.13 میں ایک گچھ لچھا دکھایا گیا ہے جہاں مشین کے گھومتے حصے کا عمودی تراش گول شکل کا ہو گا۔ متحرک اور ساکن قالب کا $\mu_r \to \infty$ ہے لہٰذا ان کی ہچکچاہٹ صفر ہو گی۔لچھے کا مقناطیسی دباو $\tau = Ni$، مقناطیسی بہاو ϕ پیدا کرتا ہے جس کو تیر دار لکیروں سے ظاہر کیا گیا ہے۔ مقناطیسی بہاو خلائی درز میں سے دو مرتبہ گزرتا ہوا لچھے کے گرد ایک چکر کاٹتا ہے۔یوں ایک چکر، یعنی دو درزوں، کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$\tau = Ni = 2Hl_a \tag{5.24}$$

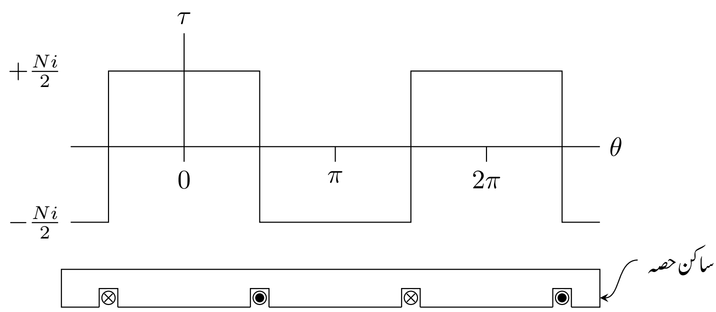
اس مساوات کی دونوں اطراف کو 2 سے تقسیم کرتے ہوئے ایک درز کی مساوات لکھی جا سکتی ہے جہاں ایک درز پر لاگو مقناطیسی دباو کو τ_a سے ظاہر کیا گیا ہے:

$$\tau_a = \frac{\tau}{2} = Hl_a$$

[25] non-distributed coils
[26] salient poles
[27] non-salient poles
[28] distributed winding



شکل 5.13: ساکن لچھا گچھ ہے۔



شکل 5.14: گچھ لچھے کی خلائی درز میں مقناطیسی دباو۔

یوں ساکن لچھے کے مقناطیسی دباو کا ایک آدھا حصہ ایک خلائی درز اور دوسرا آدھا حصہ دوسری خلائی درز میں مقناطیسی بہاو پیدا کرتا ہے۔ مزید زاویہ $-90°$ تا $90°$ خلائی درز میں مقناطیسی دباو (اور مقناطیسی بہاو) رداسی رخ جبکہ زاویہ $90°$ تا $270°$ خلائی درز میں رداس کے مخالف رخ ہے۔ ہم رداسی رخ کو مثبت تصور کرتے ہیں۔ چونکہ مقناطیسی بہاو (اور مقناطیسی دباو) $\frac{\pi}{2} > \theta > -\frac{\pi}{2}$ کے درمیان رداسی رخ ہے لہٰذا اسے مثبت تصور کیا جائے گا جبکہ باقی حصہ پر مقناطیسی دباو (اور مقناطیسی بہاو) رداس کے مخالف رخ ہے لہٰذا اسے منفی تصور کیا جائے گا۔ شکل 5.14 میں خلائی درز میں مقناطیسی دباو کو زاویہ کے ساتھ ترسیم کیا گیا ہے۔ وقفہ $\frac{\pi}{2} > \theta > -\frac{\pi}{2}$ کی خلائی درز میں مقناطیسی دباو τ_a لچھے کے مقناطیسی دباو τ کا آدھا ہے اور اس کا رخ مثبت ہے جبکہ وقفہ $\frac{3\pi}{2} > \theta > \frac{\pi}{2}$ کی خلائی درز میں مقناطیسی دباو لچھے کے مقناطیسی دباو کا آدھا اور منفی رخ ہے۔ یاد رہے مقناطیسی دباو کا رخ رداسی رخ کے حوالہ سے تعین کیا جاتا ہے۔

5.4.1 بدلتارو مشین

بدلتارو (اے سی) مشین بناتے وقت کوشش کی جاتی ہے کہ خلائی درز میں مقناطیسی دباو سائن نما ہو۔ سائن نما مقناطیسی دباو کے حصول کی خاطر لچھوں کو ایک سے زیادہ شگافوں میں تقسیم کیا جاتا ہے۔ ایسا کرنے سے سائن نما مقناطیسی دباو کیسے حاصل ہوتا ہے، اس بات کی یہاں وضاحت کی جائے گی۔

فوریئر تسلسل[29] کے تحت ہم کسی بھی تفاعل[30] $f(\theta_p)$ کو درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$f(\theta_p) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta_p + b_n \sin n\theta_p) \tag{5.25}$$

تفاعل کا دوری عرصہ[31] T ہونے کی صورت میں فوریئر تسلسل کے عددی سر درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\theta_p) \, \mathrm{d}\theta_p \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\theta_p) \cos n\theta_p \, \mathrm{d}\theta_p \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\theta_p) \sin n\theta_p \, \mathrm{d}\theta_p \end{aligned} \tag{5.26}$$

Fourier series[29]
function[30]
time period[31]

مثال 5.2: شکل 5.14 میں دیے گئے مقناطیسی دباو کا

- فوریئر تسلسل حاصل کریں،
- تیسری موسیقائی جزو[32] اور بنیادی جزو[33] کا تناسب معلوم کریں۔

حل:

- مساوات 5.26 کی مدد سے

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2}\left(-\frac{Ni}{2}\right)\mathrm{d}\theta_p + \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{Ni}{2}\right)\mathrm{d}\theta_p + \int_{\pi/2}^{\pi}\left(-\frac{Ni}{2}\right)\mathrm{d}\theta_p\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\left(-\frac{Ni}{2}\right)\left(-\frac{\pi}{2}+\pi\right) + \left(\frac{Ni}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + \left(-\frac{Ni}{2}\right)\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

اور درج ذیل حاصل ہوں گے۔

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{2\pi}\frac{Ni}{2}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} -\cos n\theta_p \,\mathrm{d}\theta_p + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos n\theta_p \,\mathrm{d}\theta_p + \int_{\pi/2}^{\pi} -\cos n\theta_p \,\mathrm{d}\theta_p\right] \\
&= \frac{Ni}{2\pi}\left[-\left.\frac{\sin n\theta_p}{n}\right|_{-\pi}^{-\pi/2} + \left.\frac{\sin n\theta_p}{n}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \left.\frac{\sin n\theta_p}{n}\right|_{\pi/2}^{\pi}\right] \\
&= \frac{Ni}{2n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2} + 2\sin\frac{n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2}\right] \\
&= \left(\frac{4}{n\pi}\right)\left(\frac{Ni}{2}\right)\sin\frac{n\pi}{2}
\end{aligned}
$$

اس مساوات میں n کی قیمت ایک، دو، تین لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہوتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
&a_1 = \left(\frac{4}{\pi}\right)\left(\frac{Ni}{2}\right), \quad a_3 = -\left(\frac{4}{3\pi}\right)\left(\frac{Ni}{2}\right), \quad a_5 = \left(\frac{4}{5\pi}\right)\left(\frac{Ni}{2}\right) \\
&a_2 = a_4 = a_6 = 0
\end{aligned}
$$

---

[32] third harmonic component
[33] fundamental component

اسی طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2\pi}\frac{Ni}{2}\left[\int_{-\pi}^{-\pi/2} -\sin n\theta_p \,\mathrm{d}\theta_p + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin n\theta_p \,\mathrm{d}\theta_p + \int_{\pi/2}^{\pi} -\sin n\theta_p \,\mathrm{d}\theta_p\right] \\
&= \frac{Ni}{2\pi}\left[\left.\frac{\cos n\theta_p}{n}\right|_{-\pi}^{-\pi/2} - \left.\frac{\cos n\theta_p}{n}\right|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \left.\frac{\cos n\theta_p}{n}\right|_{\pi/2}^{\pi}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

- ان نتائج کا یکجا کرتے ہیں:

$$\left|\frac{a_3}{a_1}\right| = \frac{\left(\frac{4}{3\pi}\right)\left(\frac{Ni}{2}\right)}{\left(\frac{4}{\pi}\right)\left(\frac{Ni}{2}\right)} = \frac{1}{3}$$

یوں تیسرا موسیقائی جزو بنیادی جزو کا تیسرا حصہ یعنی 33.33 فی صد ہو گا۔ $\square$

مثال 5.2 میں حاصل کردہ $a_1, a_2, \cdots$ استعمال کرتے ہوئے ہم خلائی درز میں مقناطیسی دباو τ کا فوریئر تسلسل لکھتے ہیں۔

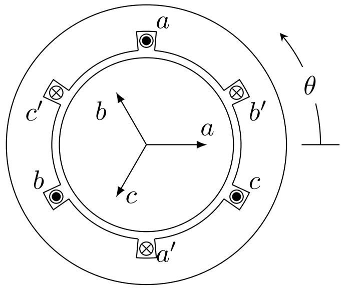
$$\tau_a = \frac{4}{\pi}\frac{Ni}{2}\cos\theta_p - \frac{4}{3\pi}\frac{Ni}{2}\cos 3\theta_p + \frac{4}{5\pi}\frac{Ni}{2}\cos 5\theta_p - \cdots \tag{5.27}$$

مثال 5.2 کے مقناطیسی دباو کے موسیقائی اجزاء کی قیمتیں اتنی کم نہیں کہ انہیں رد کیا جا سکے۔جیسا آپ اس باب میں آگے دیکھیں گے حقیقی مقناطیسی دباو کے موسیقائی اجزاء قابل نظر انداز ہوں گے اور ہمیں صرف بنیادی جزو سے غرض ہو گا۔اسی حقیقت کو مد نظر رکھتے ہوئے ہم تسلسل کے موسیقائی اجزاء کو نظر انداز کرتے ہوئے مساوات 5.27 سے

$$\tau_a = \frac{4}{\pi}\frac{Ni}{2}\cos\theta_p = \tau_0\cos\theta_p \tag{5.28}$$

لکھتے ہیں جہاں τ_0 درج ذیل ہے۔

$$\tau_0 = \frac{4}{\pi}\frac{Ni}{2} \tag{5.29}$$



شکل 5.15: تین دور لچھے۔

خلائی درز میں τ ، H اور B ایک دوسرے کے برائے راست متناسب ہوتے ہیں۔ یوں مساوات 5.28 کے تحت شکل 5.13 کا لچھے اور شکل 5.2 میں صفر زاویہ پر سلاخ نما مقناطیس یکساں τ (اور B) دیں گے۔ اسی طرح اگر شکل 5.13 کا لچھا زاویہ θ_m پر ہوتا تب ہمیں شکل 5.3 میں موجود مقناطیس کے نتائج حاصل ہوتے۔

شکل 5.15 میں تین لچھے آپس میں $120°$ زاویہ پر دکھائے گئے ہیں۔ ہم مساوات 5.64 کی طرح اس شکل میں لچھا a کے لئے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

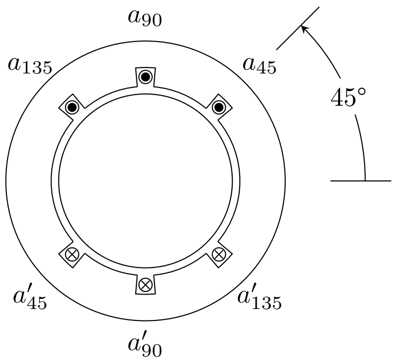
$$
\begin{aligned}
\tau_a &= \tau_0 \cos \theta_{p_a} \\
\theta_{p_a} &= \theta - \theta_{m_a} = \theta - 0° \\
\tau_a &= \tau_0 \cos(\theta - \theta_m) = \tau_0 \cos \theta
\end{aligned}
\tag{5.30}
$$

اسی طرح لچھا b اور c جو بالترتیب $\theta_{m_b} = 120°$ اور $\theta_{m_c} = 240°$ زاویہ پر ہیں کے لئے درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\tau_b &= \tau_0 \cos \theta_{p_b} \\
\theta_{p_b} &= \theta - \theta_{m_b} = \theta - 120° \\
\tau_b &= \tau_0 \cos(\theta - \theta_{m_b}) = \tau_0 \cos(\theta - 120°)
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_c &= \tau_0 \cos \theta_{p_c} \\
\theta_{p_c} &= \theta - \theta_{m_c} = \theta - 240° \\
\tau_c &= \tau_0 \cos(\theta - \theta_{m_c}) = \tau_0 \cos(\theta - 240°) = \tau_0 \cos(\theta + 120°)
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

اگرچہ ظاہری طور پر خلائی درز میں مقناطیسی دباو سائن نما ہرگز نہیں لگتا لیکن مساوات 5.27 ہمیں بتلاتی ہے کہ یہ محض نظر کا دھوکا ہے۔ اس مقناطیسی دباو کا بیشتر حصہ سائن نما ہی ہے۔ اگر ہم کسی طرح مساوات 5.27 میں پہلے رکن کے علاوہ باقی تمام ارکان کو صفر کر سکیں تب ہمیں سائن نما مقناطیسی دباو حاصل ہو گا۔



شکل 5.16: پھیلا لچھا۔

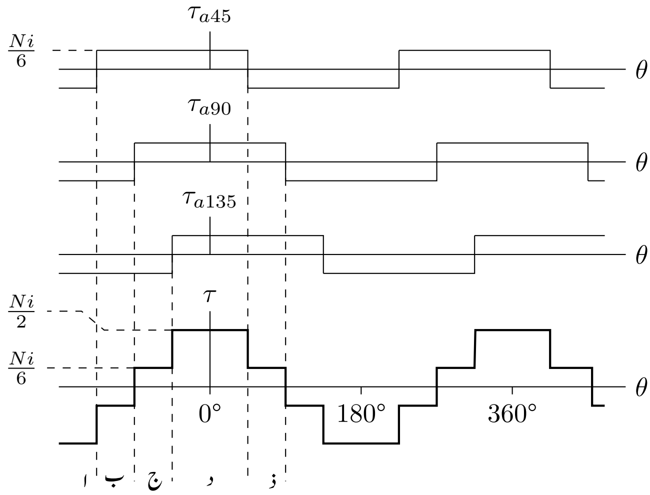
شکل 5.13 کے N چکر لچھے کو تین چھوٹے یکساں لچھوں میں تقسیم کرتے ہوئے شکل 5.16 حاصل کیا گیا ہے جہاں ہر چھوٹا لچھا $\frac{N}{3}$ چکر کا ہے۔ ایسے چھوٹے لچھوں کو سلسلہ وار جوڑا[34] جاتا ہے لہٰذا ان میں ایک جیسا برقی رو i گزرے گا۔ ان تین لچھوں کو تین مختلف شگافوں میں رکھا گیا ہے۔پہلے لچھے کو شگاف a_{45} اور a'_{45} میں رکھا گیا ہے۔ دوسرے لچھے کو شگاف a_{90} اور a'_{90} میں اور تیسرے لچھے کو شگاف a_{135} اور a'_{135} میں رکھا گیا ہے۔

شگافوں کے ایک جوڑا کو ایک ہی طرح کے نام دیے گئے ہیں، البتہ ایک شگاف کو a اور دوسرے کو a' نام دیا گیا ہے۔یوں شگافوں کا پہلے جوڑا a_{45} اور a'_{45} ہے۔ شگاف کا نام شگاف کے زاویہ کے لحاظ سے رکھا گیا ہے۔یوں شگاف a_{45} درحقیقت $45°$ زاویہ پر ہے، شگاف a_{90} نوے درجہ زاویہ پر اور شگاف a_{135} ایک سو پینتیس درجہ زاویہ پر ہے۔اسی طرح a'_{45} شگاف a_{45} کا جوڑا ہے۔

تمام لچھے $\frac{N}{3}$ چکر کے ہیں اور تمام لچھوں میں برقی رو i ایک دوسرے جیسا ہے۔ شکل 5.16 کے پھیلے لچھے کا مقناطیسی دباو بالمقابل زاویہ کا ترسیم شکل 5.17 میں موٹی لکیر سے دکھایا گیا ہے۔سب سے اوپر لچھا a_{45} کے مقناطیسی دباو کی ترسیم ہے جو شکل 5.14 کی ترسیم کی طرح لیکن صفر زاویہ سے $-45°$ ہٹ کر ہے۔دوسری ترسیم لچھا a_{90} کی ہے جو ہو بہو شکل 5.14 کی طرح ہے جبکہ تیسری ترسیم لچھا a_{135} کی ہے جو صفر زاویہ سے $+45°$ ہٹ کر ہے۔ان تینوں ترسیمات کا انفرادی طول $\frac{Ni}{6}$ ہے۔

ترسیمات τ_{a45} ، τ_{a90} اور τ_{a135} سے کل مقناطیسی دباو کی ترسیم τ حاصل کرنا سیکھتے ہیں۔ شکل 5.17 میں عمودی نقطہ دار لکیریں لگائی گئی ہیں۔ سب سے بائیں پہلی لکیر کی بائیں طرف خطہ کو "ا" کہا گیا ہے۔اس

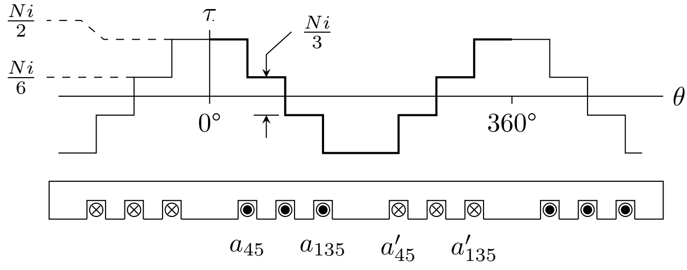
series connected[34]



شکل 5.17: پھیلے لچھے کا کل مقناطیسی دباو۔

خطہ میں ترسیمات τ_{a45} ، τ_{a90} اور τ_{a135} کی انفرادی قیمتیں $-\frac{Ni}{6}$ ہیں لہٰذا ان کا مجموعہ $-\frac{Ni}{2}$ ہو گا۔یوں خطہ "ا" میں کل مقناطیسی دباو τ کی ترسیم کی قیمت $-\frac{Ni}{2}$ ہو گی۔ اسی طرح خطہ "ب" میں τ_{a45} کی قیمت $+\frac{Ni}{6}$ ، τ_{a90} کی $-\frac{Ni}{6}$ اور τ_{a135} کی بھی $-\frac{Ni}{6}$ ہے۔ ان کا مجموعہ $-\frac{Ni}{6}$ ہے جو کل مقناطیسی دباو τ ہو گا۔خطہ "ج" میں بالائی تینوں ترسیمات کی قیمتیں بالترتیب $+\frac{Ni}{6}$، $+\frac{Ni}{6}$ اور $-\frac{Ni}{6}$ ہیں جن کا مجموعہ $+\frac{Ni}{6}$ کل مقناطیسی دباو ہو گا۔ اسی طرح آپ پوری ترسیم کھینچ سکتے ہیں۔

شکل 5.17 کی τ کو شکل 5.18 میں دوبارہ پیش گیا ہے۔شکل 5.18 پھیلے لچھے اور شکل 5.14 گچھ لچھے



شکل 5.18: پھیلے لچھے کا مقناطیسی دباو۔

کے دباو کی ترسیمات ہیں۔ شکل 5.14 کے لحاظ سے شکل 5.18 کی صورت سائن نما کے زیادہ قریب ہے۔ فوریئر تسلسل حل کرنے سے بھی یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔ شگافوں کے مقامات اور ان میں لچھوں کے چکر یوں رکھے جا سکتے ہیں کہ ان کے پیدا کردہ مقناطیسی دباو کی ترسیم کی صورت سائن نما کی زیادہ سے زیادہ قریب ہو۔

پھیلے لچھے کے مختلف حصے ایک ہی زاویہ پر مقناطیسی دباو نہیں بناتے لہٰذا ان سے حاصل کل مقناطیسی دباو کا حیطہ (اتنے ہی چکر کے) ایک گچھ لچھے کے حیطہ سے کم ہوتا ہے۔ مساوات 5.29 میں اس اثر کو شامل کرنے کے لئے جزو k_w متعارف کیا جاتا ہے

$$\begin{aligned}\tau_0 &= k_w \frac{4}{\pi}\frac{Ni}{2}\\ \tau_a &= k_w \frac{4}{\pi}\frac{Ni}{2}\cos\theta = \tau_0\cos\theta\end{aligned} \tag{5.33}$$

جہاں k_w جزو پھیلاو[35] کہلاتا ہے۔ جزو پھیلاو کی قیمت اکائی سے کم ہوتی ہے۔

$$0 < k_w < 1 \tag{5.34}$$

مثال 5.3: شکل 5.16 کے پھیلے لچھے کا k_w تلاش کریں۔

حل: ہمیں شکل 5.18 کی موج کا بنیادی جزو درکار ہے لہٰذا ہم اس موج کے فوریئر تسلسل کا عددی سر a_1 تلاش کرتے ہیں۔ عددی سر کے حصول میں پورے موج کی بجائے ہم آدھی موج پر $-90°$ تا $90°$ تکمل لیتے ہیں۔ یوں a_1 کا کلیہ درج ذیل صورت اختیار کرتا ہے۔ (آپ چاہیں تو پوری موج پر تکمل لے سکتے ہیں۔)

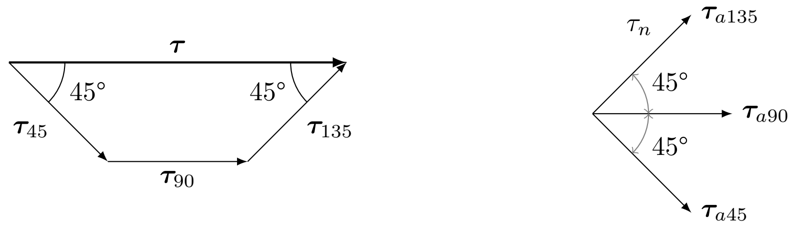
$$a_1 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{T}\int_{-T/4}^{T/4} f(\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

اس طرح درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{2}{\pi}\Big[\int_{-\pi/2}^{-\pi/4}\frac{Ni}{6}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta + \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{Ni}{2}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{Ni}{6}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\Big]\\ &= 0.8047\frac{4}{\pi}\frac{Ni}{2}\end{aligned}$$

---

[35] winding factor



شکل 5.19: پھیلے لچھے کا جزو پھیلاو۔

یوں $k_w = 0.8047$ ہو گا۔ □

مقناطیسی دباو کو سمتیہ تصور کرتے ہوئے درج بالا مثال کو دوبارہ حل کرتے ہیں۔ آپ دیکھیں گے کہ یہ ترکیب نسبتاً آسان ہے۔

مثال 5.4: شکل 5.16 کے پھیلے لچھے کا k_w تلاش کریں۔

حل: شکل 5.19 سے رجوع کریں۔ شکل 5.16 کے تین چھوٹے لچھے ایک جیسا مقناطیسی دباو $\tau_n = \frac{4}{\pi}\frac{ni}{2}$ پیدا کرتے ہیں البتہ ان کے رخ مختلف ہیں۔ یہاں ایک لچھا $\frac{N}{3}$ چکر کا ہے لہٰذا $n = \frac{N}{3}$ ہو گا۔ ہم تینوں مقناطیسی دباو کے دوری سمتیات کا مجموعہ لے کر مقناطیسی دباو τ معلوم کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}\tau_a &= \tau_n \cos 45° + \tau_n + \tau_n \cos 45° \\ &= 2.4142\tau_n\end{aligned}$$

یوں درج ذیل ہو گا

$$\tau_a = 2.4142\frac{4}{\pi}\frac{ni}{2} = \frac{2.4142}{3}\frac{4}{\pi}\frac{Ni}{2} = 0.8047\frac{4}{\pi}\frac{Ni}{2}$$

لہٰذا $k_w = 0.8047$ کے برابر ہے۔ □

مثال 5.5: تین دوری، 50 ہرٹز، ستارہ جڑے جنریٹر کو 3000 چکر فی منٹ کی رفتار سے چلایا جاتا ہے۔ تیس چکر کے میدانی لچھے کا جزو پھیلاو $k_{w,m} = 0.9$ جبکہ پندرہ چکر قوی لچھے کا جزو پھیلاو $k_{w,q} = 0.833$ ہے۔ مشین کا رداس 0.7495 میٹر اور لمبائی $l = 2.828$ میٹر ہے۔ خلائی درز کی لمبائی $l_k = 0.04$ میٹر ہے۔ میدانی لچھے میں 1000 ایمپیئر برقی رو کی صورت میں درج ذیل تلاش کریں۔ خلاء میں مقناطیسی بہاو سائن نما ہو گا۔

- میدانی مقناطیسی دباو کی زیادہ سے زیادہ قیمت۔
- خلائی درز میں کثافت مقناطیسی بہاو کی زیادہ سے زیادہ قیمت۔
- ایک قطب پر مقناطیسی بہاو۔
- متحرک تار پر برقی دباو۔

حل:

- $\tau_0 = k_{w,m}\frac{4}{\pi}\frac{N_m i_m}{2} = 0.9\times\frac{4}{\pi}\times\frac{30\times1000}{2} = 17\,186\,\mathrm{A\cdot turns/m}$
- $B_0 = \mu_0 H_0 = \mu_0\frac{\tau_0}{l_k} = 4\pi10^{-7}\times\frac{17186}{0.04} = 0.54\,\mathrm{T}$
- $\phi_0 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} rlB_0\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 2B_0lr = 2\times0.54\times2.828\times0.7495 = 2.289\,15\,\mathrm{Wb}$
- $$\begin{aligned}E_{rms} &= 4.44fk_{w,q}N_q\phi_0\\ &= 4.44\times50\times0.833\times15\times2.28915\\ &= 6349.85\,\mathrm{V}\end{aligned}$$

یوں ستارہ جڑی جنریٹر کی تار کا برقی دباو درج ذیل ہو گا۔

$$\sqrt{3}\times6349.85\approx11\,000\,\mathrm{V}$$

□

ہم سائن نما مقناطیسی دباو حاصل کرنا چاہتے ہیں۔ چھوٹے لچھوں کے چکر اور شگافوں کے مقامات یوں چنے جاتے ہیں کہ یہ مقصد پورا ہو۔ شکل 5.18 میں صفر زاویہ کے دونوں اطراف مقناطیسی دباو کی ترسیم ایک جیسے گھٹتی یا بڑھتی ہے۔ مثلاً جمع اور منفی پینتالیس زاویہ پر مقناطیسی دباو $\frac{Ni}{3}$ گھٹتا ہے۔ اسی طرح جمع اور منفی نوے زاویہ پر دباو مزید $\frac{Ni}{3}$ گھٹتا ہے، وغیرہ وغیرہ۔ یہ ایک بنیادی اصول ہے جس کا خیال رکھنا ضروری ہے۔

چھوٹے لچھوں کے چکر اور شگافوں کے مقامات کا فیصلہ فوریئر تسلسل کی مدد سے کیا جاتا ہے۔ فوریئر تسلسل میں موسیقائی جزو کم سے کم اور بنیادی جزو زیادہ سے زیادہ رکھا جاتا ہے۔

ساکن لچھوں کی طرح متحرک لچھوں کو بھی ایک سے زیادہ چھوٹے لچھوں میں تقسیم کیا جاتا ہے تا کہ سائن نما مقناطیسی دباو حاصل ہو۔

5.5 مقناطیسی دباو کی گھومتی امواج

گھومتے مشین کے لچھوں کو برقی دباو فراہم کیا جاتا ہے جس سے اس کا گھومنے والا حصہ حرکت میں آتا ہے۔ یہاں ہم اس بات کا مطالعہ کرتے ہیں کہ گھومنے کی حرکت کیسے پیدا ہوتی ہے۔

5.5.1 ایک دور کی لپٹی مشین

مساوات 5.33 میں ایک لچھے کا مقناطیسی دباو

$$\tau_a = k_w \frac{4}{\pi} \frac{Ni}{2} \cos\theta \tag{5.35}$$

دیا گیا ہے جو سائن نما برقی رو

$$i_a = I_0 \cos\omega t \tag{5.36}$$

کی صورت میں

$$\tau_a = k_w \frac{4}{\pi} \frac{NI_0}{2} \cos\theta \cos\omega t = \tau_0 \cos\theta \cos\omega t \tag{5.37}$$

مقناطیسی دباو دے گا جہاں τ_0 درج ذیل ہے اور لچھا کے برقی رو کو i_a کہا گیا ہے۔

$$\tau_0 = k_w \frac{4}{\pi} \frac{NI_0}{2} \tag{5.38}$$

مساوات 5.37 کہتی ہے کہ مقناطیسی دباو زاویہ θ اور لمحہ t کے ساتھ تبدیل ہوتا ہے۔ مساوات 5.37 کو کلیہ

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)}{2} \tag{5.39}$$

کی مدد سے دو ٹکڑوں

$$\tau_a = \tau_0 \left[\frac{\cos(\theta+\omega t) + \cos(\theta-\omega t)}{2} \right] = \tau_a^- + \tau_a^+ \tag{5.40}$$

میں تقسیم کیا جا سکتا ہے جہاں τ_a^- اور τ_a^+ درج ذیل ہوں گے۔

$$\tau_a^- = \frac{\tau_0}{2}\cos(\theta + \omega t) \tag{5.41}$$

$$\tau_a^+ = \frac{\tau_0}{2}\cos(\theta - \omega t) \tag{5.42}$$

مساوات 5.40 کہتی ہے کہ مقناطیسی دباو دو آپس میں مخالف رخ گھومتے مقناطیسی دباو کی موجوں کا مجموعہ ہے۔ اس کا پہلا جزو τ_a^- زاویہ θ گھٹنے کے رخ، یعنی گھڑی وار، گھومتا ہے جبکہ اس کا دوسرا جزو τ_a^+ خلاف گھڑی، زاویہ بڑھنے کے رخ، گھومتا ہے۔

ایک دور کی لپٹی مشینوں میں گھومتے مقناطیسی دباو کی امواج میں سے کسی ایک کو بالکل ختم یا کم سے کم کرنے کی کوشش کی جاتی ہے۔ اس طرح ایک ہی رخ مقناطیسی دباو گھومتا ملے گا جو بالکل ایک گھومتے ہوئے مقناطیس کی مانند ہو گا۔ تین دوری مشینوں میں ایسا کرنا نہایت آسان ہوتا ہے لہٰذا انہیں پہلے سمجھ لینا زیادہ بہتر ہو گا۔

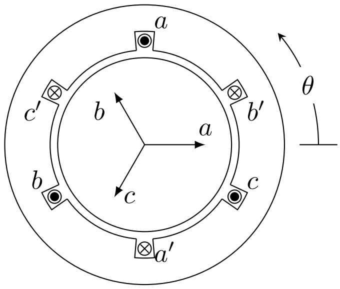
5.5.2 تین دور کی لپٹی مشین کا تحلیلی تجزیہ

شکل 5.20 میں تین دور کی لپٹی مشین دکھائی گئی ہے۔ مساوات 5.30 ، 5.31 اور 5.32 میں ایسے تین لچھوں کے فوریئر تسلسل کے بنیادی اجزاء دیے گئے ہیں جن میں جزو پھیلاو k_x شامل کر کے دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\tau_a &= k_w \frac{4}{\pi}\frac{N_a i_a}{2}\cos\theta \\
\tau_b &= k_w \frac{4}{\pi}\frac{N_b i_b}{2}\cos(\theta - 120^\circ) \\
\tau_c &= k_w \frac{4}{\pi}\frac{N_c i_c}{2}\cos(\theta + 120^\circ)
\end{aligned} \tag{5.43}$$

ان لچھوں میں بالترتیب تین دوری برقی رو

$$\begin{aligned}
i_a &= I_0\cos(\omega t + \alpha) \\
i_b &= I_0\cos(\omega t + \alpha - 120^\circ) \\
i_c &= I_0\cos(\omega t + \alpha + 120^\circ)
\end{aligned} \tag{5.44}$$



$$\begin{aligned}\tau_a &= \tau_0 \cos(\omega t + \theta_0)\cos(\theta)\\ \tau_b &= \tau_0 \cos(\omega t + \theta_0 - 120^\circ)\cos(\theta - 120^\circ)\\ \tau_c &= \tau_0 \cos(\omega t + \theta_0 + 120^\circ)\cos(\theta + 120^\circ)\end{aligned}$$

شکل 5.20: تین دور کی لپٹی مشین۔

لینے سے مساوات 5.43 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہیں۔

$$\begin{aligned}\tau_a &= k_w \frac{4}{\pi}\frac{N_a I_0}{2}\cos\theta\cos(\omega t + \alpha)\\ \tau_b &= k_w \frac{4}{\pi}\frac{N_b I_0}{2}\cos(\theta - 120^\circ)\cos(\omega t + \alpha - 120^\circ)\\ \tau_c &= k_w \frac{4}{\pi}\frac{N_c I_0}{2}\cos(\theta + 120^\circ)\cos(\omega t + \alpha + 120^\circ)\end{aligned} \tag{5.45}$$

تینوں لچھوں کے چکر ایک دوسرے کے برابر

$$N_a = N_b = N_c = N$$

لیتے ہوئے مساوات 5.39 کی استعمال سے

$$\begin{aligned}\tau_a &= \frac{\tau_0}{2}\left[\cos(\theta + \omega t + \alpha) + \cos(\theta - \omega t - \alpha)\right]\\ \tau_b &= \frac{\tau_0}{2}\left[\cos(\theta + \omega t + \alpha - 240^\circ) + \cos(\theta - \omega t - \alpha)\right]\\ \tau_c &= \frac{\tau_0}{2}\left[\cos(\theta + \omega t + \alpha + 240^\circ) + \cos(\theta - \omega t - \alpha)\right]\end{aligned} \tag{5.46}$$

لکھے جا سکتے ہیں جہاں τ_0 درج ذیل ہے۔

$$\tau_0 = k_w \frac{4}{\pi}\frac{N I_0}{2} \tag{5.47}$$

کل مقناطیسی دباو τ ان سب کا مجموعہ ہو گا۔ انہیں جمع کرنے سے پہلے ہم درج ذیل ثابت کرتے ہیں۔

$$\cos\gamma + \cos(\gamma - 240^\circ) + \cos(\gamma + 240^\circ) = 0$$

ہم کلیات

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}
$$

میں $\gamma = \alpha$ اور $\beta = 240°$ لے کر

$$
\begin{aligned}
\cos(\gamma+240°) &= \cos\gamma\cos 240° - \sin\gamma\sin 240°\\
\cos(\gamma-240°) &= \cos\gamma\cos 240° + \sin\gamma\sin 240°
\end{aligned}
$$

حاصل کرتے ہیں جن میں $\cos 240° = -\frac{1}{2}$ اور $\sin 240° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ پر کر کے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\cos(\gamma+240°) &= -\frac{1}{2}\cos\gamma + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\gamma\\
\cos(\gamma-240°) &= -\frac{1}{2}\cos\gamma - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\gamma
\end{aligned}
$$

ان مساوات کو $\cos\gamma$ کے ساتھ جمع کرنے سے صفر حاصل ہو گا۔

$$
\cos\gamma + \cos(\gamma+240°) + \cos(\gamma-240°) = 0
$$

$\gamma = \theta + \omega t + \alpha$ کے لئے اس مساوات کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

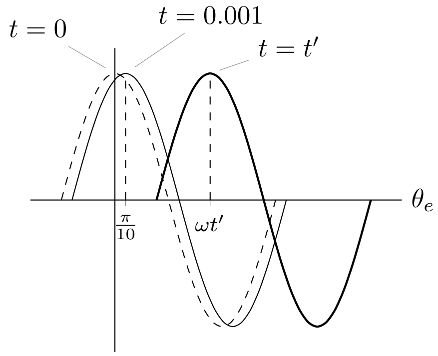
$$
\cos(\theta+\omega t+\alpha) + \cos(\theta+\omega t+\alpha+240°) + \cos(\theta+\omega t+\alpha-240°) = 0 \tag{5.48}
$$

اب مساوات 5.46 میں دئے τ_a ، τ_b اور τ_c کو جمع کر کے مساوات 5.48 کا استعمال کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$
\tau^+ = \tau_a + \tau_b + \tau_c = \frac{3\tau_0}{2}\cos(\theta - \omega t - \alpha) \tag{5.49}
$$

مساوات 5.49 کہتی ہے کہ کل مقناطیسی دباو کا حیطہ کسی ایک لچھے کے مقناطیسی دباو کے حیطہ کا $\frac{3}{2}$ گنا ہو گا۔مزید مقناطیسی دباو کی موج گھڑی کے مخالف رخ گھومے گی۔ یوں تین لچھوں کو $120°$ زاویہ پر رکھنے اور انہیں تین دوری برقی رو، جو آپس میں $120°$ پر ہوں، سے ہیجان کرنے سے مقناطیسی دباو کی واحد ایک موج وجود میں آتی ہے۔ یہاں اس بات کا ذکر کرنا ضروری ہے کہ کسی دو برقی رو کو آپس میں تبدیل کرنے سے مقناطیسی موج کا رخ تبدیل ہوتا ہے۔

مساوات 5.49 ایک گھومتے موج کو ظاہر کرتی ہے جس میں ہم برقی رو کا تعدد 50 Hz اور اپنی آسانی کے لئے α کو صفر لیتے ہیں۔ یوں اس موج کی چوٹی کا تعین تفاعل $\cos(\theta - \omega t)$ کرے گا۔ تفاعل $\cos(\theta - \omega t)$ کی چوٹی پر نظر رکھیں۔ تفاعل $\cos(\theta - \omega t)$ کی چوٹی اکائی ہے جو $\theta - \omega t = 0$ پر پائی جاتی ہے۔



شکل 5.21: حرکت کرتی موج۔

ابتدائی لمحہ 0 $t = 0$ پر $\cos(\theta - \omega t)$ کی چوٹی 0 $(\theta - \omega t) = 0$ پر ہو گی جس کو $t = 0$ کے لئے حل کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\theta - \omega t &= 0 \\
\theta - \omega \times 0 &= 0 \\
\theta &= 0
\end{aligned}
$$

یوں موج کی چوٹی صفر برقی زاویہ پر ہو گی جسے شکل 5.21 میں نقطہ دار لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ہم کچھ وقفہ، مثلاً $t = 0.001$ سیکنڈ، بعد اس چوٹی پر دوبارہ نظر ڈالتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\theta - \omega t &= 0 \\
\theta - 0.001\omega &= 0 \\
\theta &= 0.001\omega \\
&= 0.001 \times 2 \times \pi \times 50 \\
&= 0.3142\,\mathrm{rad}
\end{aligned}
$$

اب یہ چوٹی 0.3142 یا $\frac{\pi}{10}$ برقی ریڈیئن یعنی 18° برقی زاویہ پر ہے جسے شکل 5.21 میں باریک ٹھوس لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ آپ دیکھ سکتے ہیں کہ مقناطیسی دباو کی موج گھڑی کے مخالف رخ، یعنی زاویہ بڑھنے کے رخ، گھوم گئی ہے۔ اسی طرح لمحہ $t = 0.002$ پر چوٹی 36° برقی زاویہ پر نظر آئے گی۔ عمومی لمحہ t' پر چوٹی کا مقام $\theta - \omega t' = 0$ سے درج ذیل حاصل ہو گا جسے موٹی ٹھوس لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔

$$
\theta = \omega t' \tag{5.50}
$$

مساوات 5.50 کہتی ہے کہ چوٹی کا مقام تعین کرنے والا زاویہ وقت کے ساتھ بتدریج بڑھتا ہے۔اس مساوات سے ایک مکمل چکر یعنی $\theta = 2\pi$ برقی زاویہ طے کرنے کا دورانیہ T حاصل کرتے ہیں۔

$$T = t' = \frac{\theta}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi f} = \frac{1}{f} \tag{5.51}$$

یاد رہے f برقی رو کا تعدد ہے۔یوں 50 ہرٹز برقی رو کی صورت میں مقناطیسی دباو کی موج ہر $0.02 = \frac{1}{50}$ سیکنڈ میں ایک مکمل برقی چکر کاٹے گی اور ایک سیکنڈ میں 50 برقی چکر مکمل کرے گی۔

دو قطبی مشینوں میں مساوات 5.7

$$\theta_e = \frac{P}{2}\theta_m \tag{5.52}$$

کے تحت برقی زاویہ θ_e اور میکانی زاویہ θ_m ایک دوسرے کے برابر ہوں گے۔ یوں دو قطبی مشینوں کی بات کرتے ہوئے مساوات 5.51 کے تحت ایک سیکنڈ میں مقناطیسی دباو کی موج f برقی یا میکانی چکر مکمل کرے گی جہاں f برقی رو کی تعدد ہے۔ P قطبی مشینوں کے مقناطیسی دباو کی موج ایک سیکنڈ میں f مقناطیسی چکر یعنی $\frac{2}{P}f$ میکانی شکر مکمل کرے گی۔

ہم مساوات 5.52 کی دونوں اطراف کا وقت کے ساتھ تفرق لیتے ہیں۔

$$\frac{\mathrm{d}\theta_e}{\mathrm{d}t} = \frac{P}{2}\frac{\mathrm{d}\theta_m}{\mathrm{d}t}$$

اب $\frac{\mathrm{d}\theta_e}{\mathrm{d}t}$ برقی زاویائی رفتار ω_e اور $\frac{\theta_m}{\mathrm{d}t}$ میکانی زاویائی رفتار ω_m کو ظاہر کرتے ہیں۔اسی طرح برقی رو کی تعدد کو f_e، مقناطیسی دباو کی موج کی چوٹی کے برقی زاویہ کو θ_e، میکانی زاویہ کو θ_m اور مقناطیسی دباو کی موج کی برقی زاویائی رفتار کو ω_e اور میکانی زاویائی رفتار کو ω_m سے ظاہر کرتے ہوئے درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned}
\omega_m &= \frac{2}{P}\omega_e \quad \text{rad/s} \\
f_m &= \frac{2}{P}f_e \quad \text{Hz} \\
n &= \frac{120 f_e}{P} \quad \text{چکر فی سیکنڈ}
\end{aligned} \tag{5.53}$$

مقناطیسی موج کی برقی معاصر زاویائی رفتار ω_e برقی زاویہ فی سیکنڈ اور میکانی معاصر زاویائی رفتار ω_m میکانی زاویہ فی سیکنڈ ہو گی۔اسی طرح موج کی برقی معاصر رفتار f_e برقی ہرٹز اور میکانی معاصر رفتار[36] f_m میکانی ہرٹز ہو گی۔برقی

[36] synchronous speed

معاصر رفتار f_e ہرٹز ہونے سے مراد ہے کہ ایک سیکنڈ میں موج f_e برقی چکر کا فاصلہ طے کرتی ہے جو دو قطب کا یعنی 2π ریڈیئن کا میکانی زاویہ ہے۔اسی طرح میکانی معاصر رفتار f_m ہرٹز ہونے کا مطلب ہے کہ موج ایک سیکنڈ میں f_m میکانی چکر کا فاصلہ طے کرے گی۔ایک میکانی چکر روز مرہ زندگی میں ایک چکر کو ہی کہتے ہیں۔ اس مساوات میں n، میکانی چکر فی منٹ[37] کو ظاہر کرتی ہے۔ مساوات 5.53 معاصر رفتار کی مساوات ہے۔

یہاں اس بات کا ذکر کرنا ضروری ہے کہ q دور کی لپٹی مشین جس کے لچھے $\frac{2\pi}{q}$ برقی زاویہ پر رکھے گئے ہوں اور جن میں برقی رو q دوری ہو میں، تین دوری مشین کی طرح، ایک ہی رخ گھومتے مقناطیسی دباو کی موج پیدا ہو گی۔مزید، اس موج کا حیطہ کسی ایک لچھے کے مقناطیسی دباو کے حیطہ کا $\frac{q}{2}$ گنا ہو گا اور اس کی زاویائی رفتار $\omega_e = 2\pi f$ برقی ریڈیئن فی سیکنڈ ہو گی۔

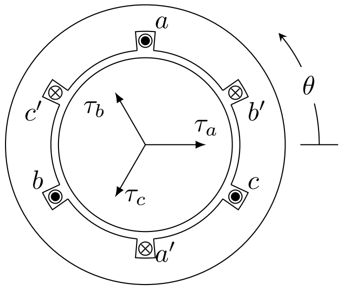
5.5.3 تین دور کی لپٹی مشین کا ترسیمی تجزیہ

شکل 5.22 میں تین دور کی لپٹی مشین دکھائی گئی ہے جس میں مثبت برقی رو کے رخ دکھائے گئے ہیں۔یوں a شگاف میں برقی رو کا رخ صفحہ سے عمودی باہر کو ہے جسے نقطہ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ اسی طرح a' شگاف میں برقی رو کا رخ صفحہ میں عمودی اندر کو ہے اور جسے صلیب کے نشان سے ظاہر کیا گیا ہے۔یوں شگاف a اور a' میں مثبت برقی رو کا مقناطیسی دباو τ_a صفر زاویہ پر ہو گا جو عین لچھا a کا رخ ہے۔ لچھے میں برقی رو سے پیدا مقناطیسی دباو کا رخ دائیں ہاتھ کے قانون سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔

اب اگر لچھا a میں برقی رو منفی ہو تب برقی رو مثبت رخ کے مخالف ہو گا، یعنی اب برقی رو کا رخ شگاف a میں صفحہ کے عمودی اندر اور شگاف a' میں صفحہ کے عمودی باہر ہو گا۔ یوں منفی برقی رو سے پیدا مقناطیسی دباو بھی لچھا a کے رخ کا مخالف ہو گا۔آپ نے دیکھا کہ برقی رو منفی ہونے سے مقناطیسی دباو کا رخ الٹ ہو جاتا ہے۔ شکل 5.22 میں لچھوں کے برقی رو اور مقناطیسی دباو درج ذیل ہیں جبکہ ان کے مثبت رخ شکل میں دیے گئے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
i_a &= I_0 \cos \omega t \\
i_b &= I_0 \cos(\omega t - 120^\circ) \\
i_c &= I_0 \cos(\omega t + 120^\circ)
\end{aligned}
\tag{5.54}
$$

[37] rpm, rounds per minute



شکل 5.22: تین دور کی لپٹی مشین میں مثبت برقی رو اور ان سے حاصل مقناطیسی دباو کے رخ۔

$$
\begin{aligned}
\tau_a &= k_w \frac{4}{\pi}\frac{Ni_a}{2} = k_w \frac{4}{\pi}\frac{NI_0}{2}\cos\omega t = \tau_0 \cos\omega t \\
\tau_b &= k_w \frac{4}{\pi}\frac{Ni_b}{2} = k_w \frac{4}{\pi}\frac{NI_0}{2}\cos(\omega t - 120^\circ) = \tau_0 \cos(\omega t - 120^\circ) \\
\tau_c &= k_w \frac{4}{\pi}\frac{Ni_c}{2} = k_w \frac{4}{\pi}\frac{NI_0}{2}\cos(\omega t + 120^\circ) = \tau_0 \cos(\omega t + 120^\circ)
\end{aligned} \tag{5.55}
$$

ہم مختلف لمحات پر ان کی قیمتوں تلاش کرتے ہیں اور ان کا مجموعی مقناطیسی دباو حاصل کرتے ہیں۔

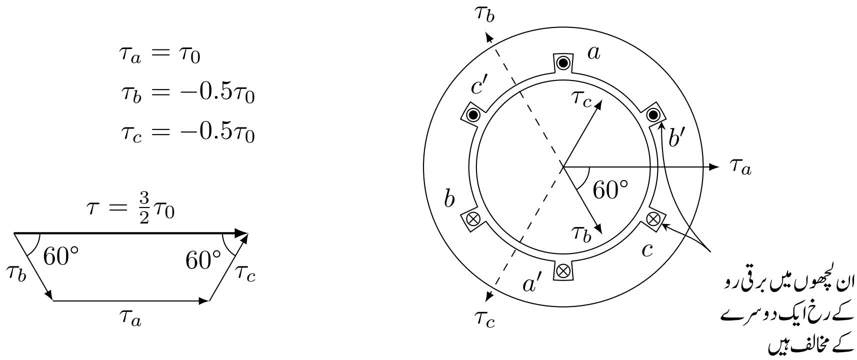
لمحہ $t = 0$ پر ان درج بالا مساوات سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
i_a &= I_0 \cos 0 = I_0 \\
i_b &= I_0 \cos(0 - 120^\circ) = -0.5 I_0 \\
i_c &= I_0 \cos(0 + 120^\circ) = -0.5 I_0
\end{aligned} \tag{5.56}
$$

$$
\begin{aligned}
\tau_a &= \tau_0 \cos 0 = \tau_0 \\
\tau_b &= \tau_0 \cos(0 - 120^\circ) = -0.5 \tau_0 \\
\tau_c &= \tau_0 \cos(0 + 120^\circ) = -0.5 \tau_0
\end{aligned} \tag{5.57}
$$

یہاں رک کر ذرا غور کریں۔ لمحہ $t = 0$ پر i_a مثبت جبکہ i_b اور i_c منفی ہیں۔ یوں i_a کا رخ وہی ہو گا جسے شکل 5.22 کی a اور a' شگافوں میں نقطے اور صلیب سے دکھایا گیا ہیں جبکہ i_b اور i_c کے رخ شکل میں دیے گئے رخ کے مخالف ہوں گے۔ لمحہ $t = 0$ پر تینوں برقی رو کے درست رخ اور تینوں مقناطیسی دباو شکل 5.23 میں دکھائے گئے ہیں۔

کل مقناطیسی دباو با آسانی بذریعہ ترسیم (شکل 5.23)، مجموعہ سمتیات سے یا الجبرا کے ذریعہ حاصل کیا جا سکتا



شکل 5.23: لمحہ $t_0 = 0$ پر برقی رو اور مقناطیسی دباو۔

ہے۔

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau}_a &= \tau_0 \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \\
\boldsymbol{\tau}_b &= 0.5\tau_0 \left[\cos(60°)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} - \sin(60°)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right] \\
\boldsymbol{\tau}_c &= 0.5\tau_0 \left[\cos(60°)\boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} + \sin(60°)\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\right]
\end{aligned} \tag{5.58}
$$

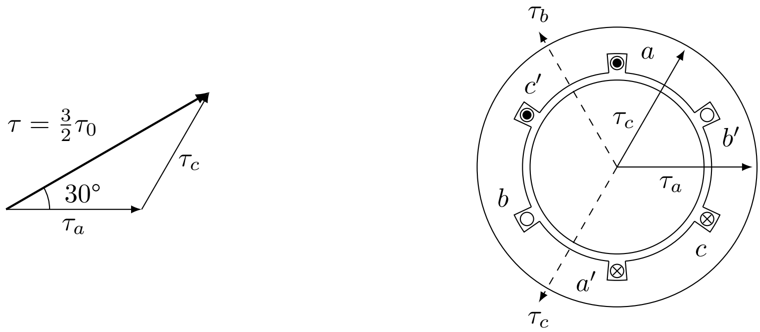
ان کا مجموعہ درج ذیل ہو گا۔

$$
\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_b + \boldsymbol{\tau}_c = \frac{3}{2}\tau_0 \boldsymbol{a}_{\mathrm{X}} \tag{5.59}
$$

لمحہ $t = 0$ پر کل مقناطیسی دباو ایک لچھے کے مقناطیسی دباو کا ڈیڑھ گنا اور صفر زاویہ پر ہے۔

اب ہم گھڑی کو چلنے دیتے ہیں اور کچھ وقفہ بعد لمحہ t_1 پر دوبارہ مقناطیسی دباو تلاش کرتے ہیں۔ مساوات 5.54 اور مساوات 5.55 میں متغیر t کی بجائے ωt کا استعمال زیادہ آسان ہے لہٰذا ہم لمحہ t_1 یوں منتخب کرتے ہیں کہ $\omega t_1 = 30°$ ہو۔ ایسا کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا جنہیں شکل 5.24 میں دکھایا گیا ہے۔

$$
\begin{aligned}
i_a &= I_0 \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} I_0 \\
i_b &= I_0 \cos(30° - 120°) = 0 \\
i_c &= I_0 \cos(30° + 120°) = -\frac{\sqrt{3}}{2} I_0
\end{aligned} \tag{5.60}
$$



شکل 5.24: لمحہ $\omega t_1 = 30°$ پر برقی رو اور مقناطیسی دباو۔

$$
\begin{aligned}
\tau_a &= \tau_0 \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}\tau_0 \\
\tau_b &= \tau_0 \cos(30° - 120°) = 0 \\
\tau_c &= \tau_0 \cos(30° + 120°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\tau_0
\end{aligned} \tag{5.61}
$$

کل مقناطیسی دباو کا طول τ اور زاویہ تکون سے حاصل کرتے ہیں۔

$$
\tau = \sqrt{\tau_a^2 + \tau_c^2 - 2\tau_a\tau_c \cos 120°} = \frac{3}{2}\tau_0 \tag{5.62}
$$

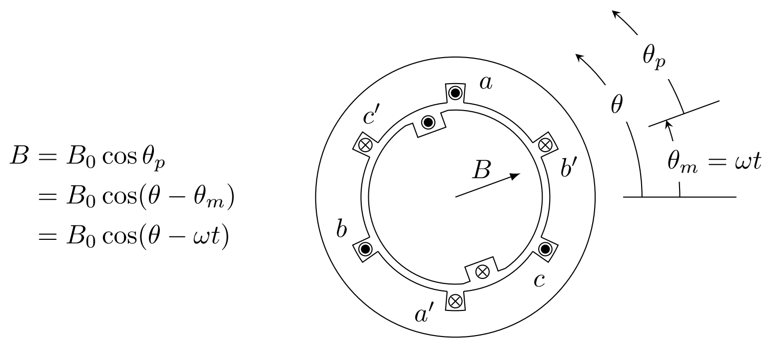
تکون کے دو اطراف کی لمبائیاں ایک دوسرے کے برابر اور ان کے بیچ زاویہ $60°$ ہے لہٰذا مقناطیسی دباو کا زاویہ افقی لکیر سے $30°$ ہو گا۔

کل مقناطیسی دباو جو پہلے صفر زاویہ پر تھا اب گھڑی کے مخالف رخ گھوم کر $30°$ زاویہ پر ہے۔ اسی طرح لمحہ $\omega t = 40°$ پر حل کرنے سے زاویہ $45°$ پر کل مقناطیسی دباو $\frac{3}{2}\tau_0$ حاصل ہو گا۔ عمومی لمحہ t ، جس پر $\omega t = \theta°$ ہو، زاویہ $\theta°$ پر کل مقناطیسی دباو $\frac{3}{2}\tau_0$ پیدا کرتا ہے۔

5.6 محرک برقی دباو

یہاں محرک برقی دباو[38] کو ایک دوسرے نقطہ نظر سے پیش کرتے ہیں۔

[38] ابتداء میں حرکت سے پیدا برقی دباو کو محرک برقی دباو کہتے تھے۔ اب روایتی طور پر کسی بھی طرح پیدا کردہ برقی دباو کو محرک برقی دباو کہتے ہیں۔



شکل 5.25: بنیادی بدلتارو جنریٹر۔

5.6.1 بدلتارو برقی جنریٹر

شکل 5.25 میں ایک بنیادی بدلتارو جنریٹر[39] دکھایا گیا ہے۔اس کا گھومتا برقی مقناطیس، خلائی درز میں سائن نما مقناطیسی دباو پیدا کرتا ہے جس سے درز میں سائن نما کثافت مقناطیسی بہاو B پیدا ہوتا ہے:

$$B = B_0 \cos\theta_p \tag{5.63}$$

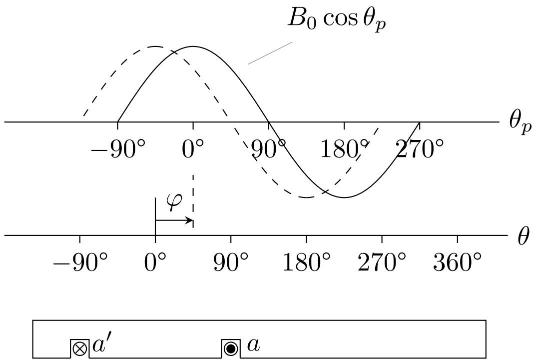
یہ مقناطیس ω زاویاتی رفتار سے گھوم رہا ہے۔ابتدائی لمحہ $t = 0$ پر اس مقناطیس کو لچھا a کے رخ افقی لکیر پر تصور کریں۔ یوں لمحہ t پر مقناطیس گھوم کر زاویہ $\theta_m = \omega t$ پر ہو گا۔اس طرح درج بالا مساوات درج ذیل لکھی جا سکتی ہے۔

$$\begin{aligned} B &= B_0 \cos(\theta - \theta_m) \\ &= B_0 \cos(\theta - \omega t) \end{aligned} \tag{5.64}$$

شکل 5.26 میں B کو زاویہ θ اور θ_p کے ساتھ ترسیم کیا گیا ہے اور ساتھ ہی لچھا a دکھایا گیا ہے۔لمحہ $t = 0$ پر، جب گھومتے برقی مقناطیس کا محور اور لچھا a کا محور ایک رخ ہیں، B کو نقطہ دار لکیر سے ظاہر گیا ہے جبکہ عمومی لمحہ t پر B کو ٹھوس لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔چونکہ B کی چوٹی ہر صورت $\theta_p = 0^\circ$ پر ہو گی لہٰذا ترسیم میں محور θ_p پر دکھائے گئے زاویات 90° تا 270° عمومی لمحہ t کے لئے درست ہیں نا کہ لمحہ $t = 0^\circ$ کے لئے۔لمحہ $t = 0$ پر B کی چوٹی عین $\theta = 0^\circ$ پر ہو گی۔عمومی لمحہ t پر برقی مقناطیس کے محور اور لچھے کے محور کے بیچ ϑ زاویہ ہے۔ یہ زاویہ برقی مقناطیس کے گھومنے کی رفتار ω پر منحصر ہو گا۔

$$\vartheta = \omega t \tag{5.65}$$

[39] ac generator



شکل 5.26: لچھے میں سے گزرتا مقناطیسی بہاو۔

لمحہ $t=0$ پر لچھا a میں مقناطیسی بہاو زیادہ سے زیادہ ہو گا۔ خلائی درز باریک ہونے کی بنا درز کی اندرونی اور بیرونی رداس کو ایک دوسرے کے برابر تصور کیا جا سکتا ہے۔ برقی مقناطیس کے گھومنے کی محور سے خلائی درز تک کا اوسط رداسی فاصلہ ρ اور برقی مقناطیس کی محوری لمبائی[40] l ہونے کی صورت میں لچھے میں مقناطیسی بہاو وہی ہو گا جو خلائی درز میں $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ کے بیچ ہے۔ لمحہ $t=0$ پر لچھا a سے گزرتا بہاو تلاش کرتے ہیں۔

$$
\begin{aligned}
\phi_a(0) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (B_0 \cos\theta_p)(l\rho \,\mathrm{d}\theta_p) \\
&= B_0 l\rho \sin\theta_p \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\
&= 2B_0 l\rho \\
&= \phi_0
\end{aligned}
\tag{5.66}
$$

[40] axial length

آخری قدم پر $\phi_a(0)$ کو ϕ_0 کہا گیا ہے۔ یہی حساب لمحہ t پر درج ذیل ہو گا جہاں آخری قدم پر $\omega t = \vartheta$ لیا گیا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\phi_a(t) &= \int_{-\frac{\pi}{2}-\vartheta}^{+\frac{\pi}{2}-\vartheta} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}-\vartheta}^{+\frac{\pi}{2}-\vartheta} (B_0 \cos\theta_p)(l\rho \,\mathrm{d}\theta_p) \\
&= B_0 l\rho \sin\theta_p \Big|_{-\frac{\pi}{2}-\vartheta}^{+\frac{\pi}{2}-\vartheta} \\
&= 2B_0 l\rho \cos\vartheta \\
&= 2B_0 l\rho \cos\omega t
\end{aligned}
\tag{5.67}
$$

اسی بہاو کو درج ذیل طریقہ سے بھی حاصل کیا جا سکتا ہے۔

$$
\begin{aligned}
\phi_a(t) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (B_0 \cos(\theta - \omega t))(l\rho \,\mathrm{d}\theta) \\
&= B_0 l\rho \sin(\theta - \omega t)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \\
&= B_0 l\rho \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2} - \omega t\right)\right] \\
&= 2B_0 l\rho \cos\omega t
\end{aligned}
\tag{5.68}
$$

اس مرتبہ تکمل کو زاویہ θ کے ساتھ حاصل کیا گیا ہے۔ مساوات 5.66 کی مدد سے $\phi_a(t)$ کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$
\phi_a(t) = 2B_0 l\rho \cos\omega t = \phi_0 \cos\omega t \tag{5.69}
$$

مساوات 5.68 کی طرح b اور c لچھوں کے مقناطیسی بہاو کی مساواتیں بھی حاصل کی جا سکتی ہیں۔ شکل 5.25 میں زاویہ $-\frac{\pi}{2}$ سے $+\frac{\pi}{2}$ تک کا مقناطیسی بہاو لچھا a میں گزرتا ہے۔ اس لئے $\phi_a(t)$ معلوم کرنے کے لئے مساوات 5.68 میں تکمل کی حدیں یہی رکھی گئیں تھی۔ یوں لچھا b کے تکمل کی حدیں $+\frac{\pi}{6}$ اور $+\frac{7\pi}{6}$ جبکہ c کی حد $+\frac{5\pi}{6}$

اور $+\frac{11\pi}{6}$ ہوں گی۔ تمام زاویات ریڈیئن میں دیے گئے ہیں۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\phi_b(t) &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}} (B_0\cos(\theta-\omega t))(l\rho\,\mathrm{d}\theta)\\
&= B_0 l\rho\,\sin(\theta-\omega t)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{7\pi}{6}}\\
&= B_0 l\rho\left[\sin\left(\frac{7\pi}{6}-\omega t\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}-\omega t\right)\right]\\
&= 2B_0 l\rho\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}
\tag{5.70}
$$

اور

$$
\begin{aligned}
\phi_c(t) &= \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\\
&= \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} (B_0\cos(\theta-\omega t))(l\rho\,\mathrm{d}\theta)\\
&= B_0 l\rho\,\sin(\theta-\omega t)\Big|_{\frac{5\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}}\\
&= B_0 l\rho\left[\sin\left(\frac{11\pi}{6}-\omega t\right)-\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\omega t\right)\right]\\
&= 2B_0 l\rho\cos\left(\omega t+\frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}
\tag{5.71}
$$

ایک لچھا N چکری تصور کرتے ہوئے تینوں لچھوں میں پیدا برقی دباو معلوم کرتے ہیں۔ لچھوں میں ارتباط بہاو درج ذیل ہو گا۔

$$
\begin{aligned}
\lambda_a &= N\phi_a(t) = N\phi_0\cos\omega t\\
\lambda_b &= N\phi_b(t) = N\phi_0\cos(\omega t-120^\circ)\\
\lambda_c &= N\phi_c(t) = N\phi_0\cos(\omega t+120^\circ)
\end{aligned}
\tag{5.72}
$$

ان مساوات میں $\frac{2\pi}{3}$ ریڈیئن کو $120°$ لکھا گیا ہے۔ لچھوں میں پیدا امالی برقی دباو درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}
e_a(t) &= \frac{\mathrm{d}\lambda_a}{\mathrm{d}t} = -\omega N \phi_0 \sin \omega t \\
e_b(t) &= \frac{\mathrm{d}\lambda_b}{\mathrm{d}t} = -\omega N \phi_0 \sin(\omega t - 120°) \\
e_c(t) &= \frac{\mathrm{d}\lambda_c}{\mathrm{d}t} = -\omega N \phi_0 \sin(\omega t + 120°)
\end{aligned} \tag{5.73}$$

ان مساوات کو

$$\begin{aligned}
e_a(t) &= \omega N \phi_0 \cos(\omega t + 90°) \\
e_b(t) &= \omega N \phi_0 \cos(\omega t - 30°) \\
e_c(t) &= \omega N \phi_0 \cos(\omega t + 210°)
\end{aligned} \tag{5.74}$$

لکھا جا سکتا ہے جو آپس میں $120°$ زاویہ پر تین دوری محرک برقی دباو کو ظاہر کرتی ہیں۔ ان سب کے حیطے E_0 ہیں:

$$E_0 = \omega N \phi_0 \tag{5.75}$$

یوں تینوں برقی دباو کی موثر قیمتیں[41] درج ذیل ہوں گی۔

$$E_{\text{موثر}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} = \frac{2\pi f N \phi_0}{\sqrt{2}} = 4.44 f N \phi_0 \tag{5.76}$$

چونکہ $\phi = BA$ ہوتا ہے لہٰذا مساوات 5.76 صفحہ 50 پر دی گئی مساوات 2.52 کی طرح ہے۔

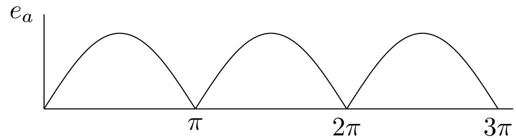
خلائی درز میں برقی مقناطیس کا مقناطیسی بہاو تصور کر کے مساوات 5.74 حاصل کی گئیں۔ حقیقت میں خلائی درز میں کسی بھی طرح یہی مقناطیسی بہاو پیدا کرنے سے یہی مساوات حاصل ہوں گی۔ یوں اگر درز میں ساکن، متحرک یا دونوں لچھے مل کر یہی مقناطیسی بہاو پیدا کریں تب یہی مساوات، یعنی یہی برقی دباو، حاصل ہوں گی۔

مساوات 5.76 ہمیں ایک گچھ لچھے میں پیدا برقی دباو دیتی ہے۔ اگر لچھا تقسیم شدہ ہو تب مختلف شگافوں میں موجود اس لچھے کے حصوں میں برقی دباو ہم قدم نہیں ہوں گے لہٰذا مجموعی برقی دباو ان سب کا حاصل جمع نہیں ہو گا بلکہ اس سے کچھ کم ہو گا۔ یوں پھیلے لچھے کے لئے یہ مساوات درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے جہاں k_w جزو پھیلاو ہے۔

$$E_{\text{موثر}} = 4.44 k_w f N \phi_0 \tag{5.77}$$

تین دوری برقی جنریٹر کے k_w کی قیمت 0.85 تا 0.95 ہوتی ہے۔ یہ مساوات ہمیں یک دوری برقی دباو دیتی ہے۔ تین دوری برقی جنریٹر میں اس طرح کی تین لچھوں کی جوڑیاں ہوتی ہیں جنہیں Y یعنی ستارہ یا Δ یعنی تکونی جوڑا جاتا ہے۔

[41] rms



شکل 5.27: یک دوری یک سمت برقی دباو۔

5.6.2 یک سمت رو برقی جنریٹر

ہر گھومنے والا برقی جنریٹر بنیادی طور پر بدلتا رو جنریٹر ہوتا ہے۔ البتہ جہاں یک سمت برقی دباو[42] کی ضرورت ہو وہاں مختلف طریقوں سے بدلتا برقی دباو کو یک سمت برقی دباو میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ جنریٹر کے باہر **برقیاتی سمت کار**[43] یا جنریٹر کے اندر **میکانی سمت کار**[44] نسب کر کے بدلتا دباو سے یک سمت دباو حاصل کیا جا سکتا ہے۔ مساوات 5.73 کے e_a کو یک سمت برقی دباو میں تبدیل کرنے سے شکل 5.27 حاصل ہو گا۔

مثال 5.6: شکل 5.27 میں یک سمت برقی دباو دکھایا گیا ہے۔اس یک سمت برقی دباو کی اوسط قیمت حاصل کریں۔

حل:

$$E_{\text{اوسط}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \omega N\phi_0 \sin\omega t \,\mathrm{d}(\omega t) = \frac{2\omega N\phi_0}{\pi}$$

□

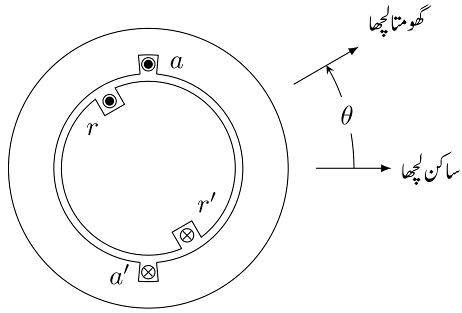
یک سمت جنریٹر پر باب 8 میں غور کیا جائے گا۔

5.7 ہموار قطب مشینوں میں قوت مروڑ

اس حصہ میں کامل مشین کی **قوت مروڑ**[45] کے حصول کے دو تراکیب پر غور کیا جائے گا۔ ایک ترکیب میں مشین کو دو مقناطیس تصور کر کے ان مقناطیسوں کے بیچ قوت کشش، قوت دفع اور قوت مروڑ حاصل کیے جائیں گے جبکہ دوسری ترکیب میں مشین کے ساکن اور گھومتے لچھوں کو امالہ تصور کر کے (باب چار کی طرح) توانائی اور ہم-توانائی سے ان کا حساب لگایا جائے گا۔ پہلے توانائی کی ترکیب پر غور کرتے ہیں۔

---

[42] DC voltage
[43] rectifier
[44] commutator
[45] torque



شکل 5.28: ساکن امالہ اور گھومتا امالہ۔

5.7.1 میکانی قوت مروڑ بذریعہ ترکیب توانائی

یہاں یک دوری مشین پر غور کیا جائے گا جس سے حاصل نتائج با آسانی زیادہ دور کی مشینوں پر لاگو کیے جا سکتے ہیں۔ شکل 5.28 میں یک دوری کامل مشین دکھائی گئی ہے۔ کسی بھی لمحہ اس مشین کے دو لچھوں کے بیچ کوئی زاویہ ہو گا جسے θ سے ظاہر کیا گیا ہے۔ خلائی درز ہر مقام پر یکساں ہے لہٰذا ابھرے قطب کے اثرات کو نظر انداز کیا جاتا ہے۔ مزید، قالب کا جزو مقناطیسی مستقل لامتناہی ($\mu_r \to \infty$) تصور کیا گیا ہے لہٰذا لچھوں کا امالہ صرف خلائی درز کے مقناطیسی مستقل[46] μ_0 پر منحصر ہو گا۔

اس طرح ساکن لچھے کا امالہ L_{aa} اور گھومے لچھے کا امالہ L_{rr} مستقل ہوں گے جبکہ ان کا مشترکہ امالہ $L_{ar}(\theta)$ زاویہ θ پر منحصر ہو گا۔ جس لمحہ $\theta = 0$ یا $\theta = \mp 2\pi$ ہو اس لمحہ ایک لچھے کا سارا مقناطیسی بہاو دوسرے لچھے سے بھی گزرتا ہے اور ان کا مشترکہ امالہ زیادہ سے زیادہ ہو گا جسے L_{ar0} سے ظاہر کیا جائے گا۔ جس لمحہ $\theta = \mp 180°$ ہو اس لمحہ دوبارہ ایک لچھے کا سارا مقناطیسی بہاو دوسرے لچھے سے بھی گزرتا ہے لیکن اس بار اس کا رخ الٹ ہوتا ہے لہٰذا ان کا مشترکہ امالہ منفی ہو گا، $-L_{ar0}$، جبکہ $\theta = \mp 90°$ پر ان کا مشترکہ امالہ صفر ہو گا۔ خلائی درز میں مقناطیسی بہاو سائن نما تصور کرتے ہوئے مشترکہ امالہ درج ذیل ہو گا۔

$$L_{ar} = L_{ar0} \cos\theta \tag{5.78}$$

ساکن اور گھومتے لچھوں کے ارتباط بہاو (مساوات 2.33 اور مساوات 2.36 کے تحت) درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} \lambda_a &= L_{aa} i_a + L_{ar}(\theta) i_r = L_{aa} i_a + L_{ar0} \cos(\theta) i_r \\ \lambda_r &= L_{ar}(\theta) i_a + L_{rr} i_r = L_{ar0} \cos(\theta) i_a + L_{rr} i_r \end{aligned} \tag{5.79}$$

---

[46] magnetic constant, permeability

ساکن لچھے کی مزاحمت R_a اور گھومتے لچھے کی مزاحمت R_r لیتے ہوئے ان لچھوں کے سروں پر قانون کرخوف سے برقی دباو درج ذیل ہوں گے۔

$$\begin{aligned} v_a &= i_a R_a + \frac{\mathrm{d}\lambda_a}{\mathrm{d}t} = i_a R_a + L_{aa}\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + L_{ar0}\cos\theta\frac{\mathrm{d}i_r}{\mathrm{d}t} - L_{ar0} i_r \sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \\ v_r &= i_r R_r + \frac{\mathrm{d}\lambda_r}{\mathrm{d}t} = i_r R_r + L_{ar0}\cos\theta\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} - L_{ar0} i_a \sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + L_{rr}\frac{\mathrm{d}i_r}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{5.80}$$

یہاں θ برقی زاویہ ہے جس کی وقت کے ساتھ تبدیلی، زاویائی رفتار ω ہو گا۔

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega \tag{5.81}$$

میکانی قوت مروڑ بذریعہ ہم-توانائی حاصل کی جا سکتی ہے۔ ہم-توانائی صفحہ 126 پر مساوات 4.72 سے حاصل ہو گی۔یہ مساوات موجودہ استعمال کے لئے درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$W'_m = \frac{1}{2}L_{aa} i_a^2 + \frac{1}{2}L_{rr} i_r^2 + L_{ar0} i_a i_r \cos\theta \tag{5.82}$$

اس سے میکانی قوت مروڑ T_m حاصل کرتے ہیں۔

$$T_m = \frac{\partial W'_m(\theta_m, i_a, i_r)}{\partial \theta_m} = \frac{\partial W'_m(\theta, i_a, i_r)}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \theta_m} \tag{5.83}$$

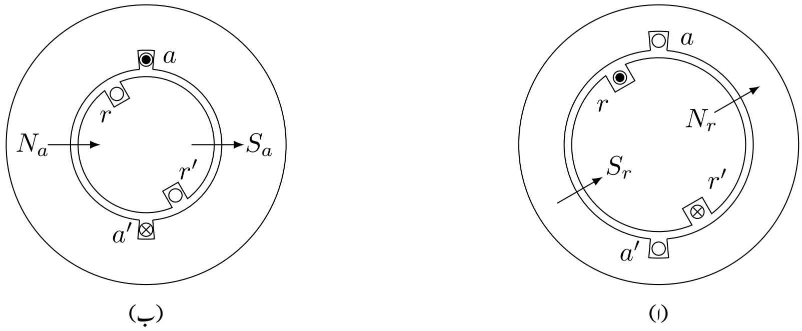
چونکہ P قطب مشینوں کے لئے درج ذیل ہوتا ہے

$$\theta = \frac{P}{2}\theta_m \tag{5.84}$$

لہٰذا ہمیں مساوات 5.83 سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$T_m = -\frac{P}{2} L_{ar0} i_a i_r \sin\left(\frac{P}{2}\theta_m\right) \tag{5.85}$$

اس مساوات میں قوت مروڑ T_m کی علامت منفی ہے۔ یوں جس لمحہ پر ساکن اور گھومتے لچھوں کے مقناطیسی بہاو کے بیچ زاویہ مثبت ہو، اس لمحہ پر ان لچھوں کے بیچ قوت مروڑ منفی ہو گا۔ قوت مروڑ دونوں مقناطیسی بہاو کو ایک رخ میں رکھنے کی کوشش کرتا ہے۔



شکل 5.29: لچھوں کے قطبین۔

5.7.2 میکانی قوت مروڑ بذریعہ مقناطیسی بہاو

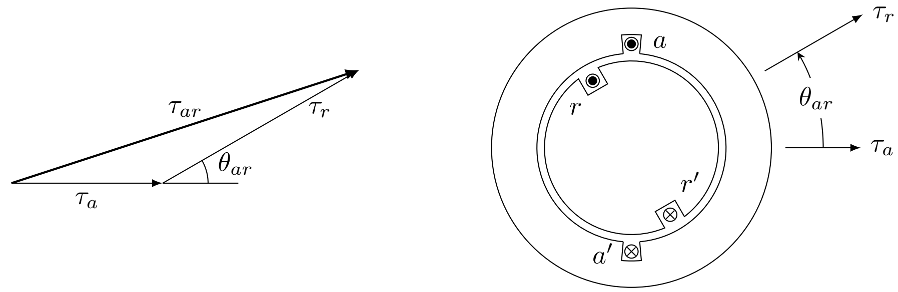
شکل 5.29-ا میں دو قطبی یک دوری مشین کے صرف گھومتے لچھے میں برقی رو پایا جاتا ہے۔ مشین کا گھومتا حصہ ایک مقناطیس کی مانند ہے جس کے شمالی اور جنوبی قطبین دکھائے گئے ہیں۔ اس لچھے کا مقناطیسی بہاو تیر کے نشان سے دکھایا گیا ہے لہٰذا تیر اس مقناطیس کے محور کو ظاہر کرتا ہے۔

شکل 5.29-ب میں صرف ساکن لچھے میں برقی رو پایا جاتا ہے۔ ساکن حصہ سے مقناطیسی بہاو خارج ہو کر خلائی درز سے ہوتا ہوا گھومتے حصہ میں داخل ہوتا ہے لہٰذا یہی اس کا شمالی قطب ہو گا۔ یہاں ساکن حصہ ایک مقناطیس مانند ہے جس کا محور تیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اگرچہ شکل 5.29 میں کچھ لچھے دکھائے گئے ہیں، درحقیقت دونوں لچھوں کے مقناطیسی دباو سائن-نما ہوں گے اور تیر کے نشانات ان مقناطیسی دباو کی امواج کی چوٹیوں کو ظاہر کریں گے۔

شکل 5.30 میں دونوں لچھوں کو برقی رو فراہم کیا گیا ہے۔ دونوں لچھوں کے مخالف قطبین کے بیچ قوت کشش پائی جائے گی جس کی بنا دونوں لچھے ہم رخ ہونے کی کوشش کریں گے۔

واضح رہے کہ دونوں لچھے (مقناطیس) کوشش کریں گے کہ θ_{ar} صفر کے برابر ہو یعنی ان کا میکانی قوت مروڑ θ_{ar} کے مخالف رخ ہو گا۔ یہی مساوات 5.85 کہتی ہے۔



شکل 5.30: خلائی درز میں مجموعی مقناطیسی دباو۔

لچھوں کے مقناطیسی دباو کو مقناطیسی محور کے رخ τ_a اور τ_r سے ظاہر کیا گیا ہے جہاں τ_a اور τ_r سائن نما مقناطیسی دباو کی چوٹیوں کے برابر ہیں۔ خلائی درز میں کل مقناطیسی دباو τ_{ar} ان کا مجموعہ ہو گا جس کا طول τ_{ar} کلیہ کوسائن [47] سے حاصل ہو گا:

$$\begin{aligned}\tau_{ar}^2 &= \tau_a^2+\tau_r^2-2\tau_a\tau_r\cos(180^\circ-\theta_{ar})\\ &= \tau_a^2+\tau_r^2+2\tau_a\tau_r\cos\theta_{ar}\end{aligned} \tag{5.86}$$

خلائی درز میں کل مقناطیسی دباو τ_{ar} درج ذیل مقناطیسی شدت H_{ar} پیدا کرے گا جہاں l_g کلائی درز کی لمبائی ہے۔

$$\tau_{ar}=H_{ar}l_g \tag{5.87}$$

H_{ar} مقناطیسی شدت کی چوٹی کو ظاہر کرتا ہے۔ خلاء میں جس مقام پر مقناطیسی شدت H ہو وہاں مقناطیسی ہم-توانائی کی کثافت $\frac{\mu_0}{2}H^2$ ہوتی ہے۔ خلائی درز میں اوسط ہم-توانائی کی کثافت، درز میں H^2 کی اوسط کو $\frac{\mu_0}{2}$ سے ضرب کر کے حاصل ہو گا۔ کسی بھی سائن نما موج $H=H_0\cos\theta$ کے H^2 کا اوسط $H^2_{\text{اوسط}}$ حاصل کرتے ہیں:

$$\begin{aligned}H^2_{\text{اوسط}} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} H^2\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} H_0^2\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{H_0^2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta=\frac{H_0^2}{\pi}\left.\frac{\theta+\frac{\sin 2\theta}{2}}{2}\right|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}=\frac{H_0^2}{2}\end{aligned} \tag{5.88}$$

[47] cosine law

یوں خلائی درز میں اوسط ہم-توانائی کی کثافت $\frac{\mu_0}{2}\frac{H_{ar}^2}{2}$ ہو گی۔ خلائی درز میں اوسط ہم-توانائی کو خلاء کے حجم سے ضرب کر کے درز میں کل ہم-توانائی W'_m حاصل ہو گی:

$$W'_m = \frac{\mu_0}{2}\frac{H_{ar}^2}{2}2\pi r l_g l = \frac{\mu_0 \pi r l}{2 l_g}\tau_{ar}^2 \tag{5.89}$$

اس مساوات میں خلائی درز کی رداسی لمبائی l_g اور دھرے[48] کے رخ محوری لمبائی[49] l ہے۔ محور سے خلائی درز کا اوسط رداسی فاصلہ r ہے۔ مزید $l_g \ll r$ تصور کیا گیا ہے جس کی بنا درز میں رداسی رخ، کثافت مقناطیسی بہاو کی تبدیلی نظر انداز کی جا سکتی ہے۔ اس مساوات کو ہم مساوات 5.86 کی مدد سے درج ذیل لکھ سکتے ہیں۔

$$W'_m = \frac{\mu_0 \pi r l}{2 l_g}\left(\tau_a^2 + \tau_r^2 + 2\tau_a\tau_r\cos\theta_{ar}\right) \tag{5.90}$$

یوں میکانی قوت مروڑ درج ذیل ہو گا۔

$$T_m = \frac{\partial W'_m}{\partial \theta_{ar}} = -\frac{\mu_0 \pi r l}{l_g}\tau_a\tau_r\sin\theta_{ar} \tag{5.91}$$

مساوات 5.91 میں قوت مروڑ دو قطبی مشین کے لئے حاصل کی گئی۔ P قطبی مشین کے لئے یہ مساوات ہر جوڑی قطب کی میکانی قوت مروڑ دیتی ہے لہٰذا P قطبی مشین کی قوت مروڑ $\frac{P}{2}$ گنّا ہو گی:

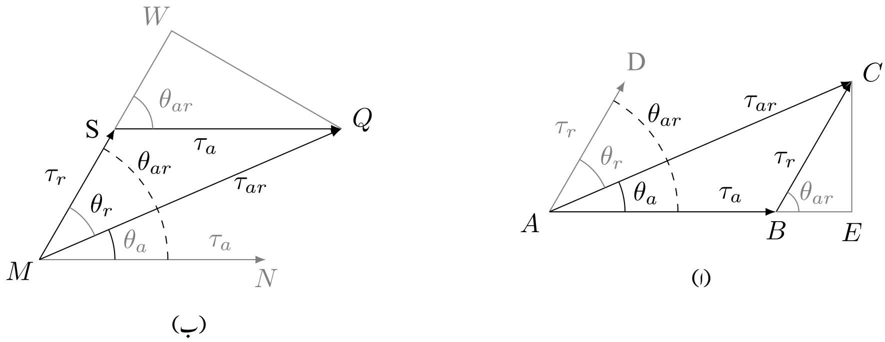
$$T_m = -\frac{P}{2}\frac{\mu_0 \pi r l}{l_g}\tau_a\tau_r\sin\theta_{ar} \tag{5.92}$$

مساوات 5.92 ایک اہم مساوات ہے جس کے مطابق مشین کی میکانی قوت مروڑ، ساکن اور گھومتے لچھوں کے مقناطیسی دباو کی چوٹیوں اور دونوں کے بیچ برقی زاویہ θ_{ar} کے سائن کی راست متناسب ہو گی۔ منفی میکانی قوت مروڑ کا مطلب ہے کہ یہ زاویہ θ_{ar} کے مخالف رخ ہو گی یعنی میکانی قوت مروڑ اس زاویہ کو کم کرنے کی کوشش کرے گی۔ مشین کے ساکن اور گھومتے حصوں پر ایک دوسرے کے برابر لیکن مخالف رخ میکانی قوت مروڑ ہو گی البتہ ساکن حصے کی قوت مروڑ مشین کے وجود کے ذریعہ زمین تک منتقل ہو گی جبکہ گھومتے حصے کی میکانی قوت مروڑ اس حصہ کو متحرک کرتی ہے۔

چونکہ مقناطیسی دباو لچھے کے برقی رو کا راست متناسب ہے لہٰذا τ_a اور i_a آپس میں راست متناسب ہوں گے جبکہ τ_r اور i_r آپس میں راست متناسب ہوں گے۔ یوں ظاہر ہوتا ہے کہ مساوات 5.85 اور 5.92 ایک دوسرے جیسے ہیں۔ درحقیقت یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ یہ دونوں بالکل ایک جیسے ہیں۔

---

[48] axis
[49] axial length



شکل 5.31: مقناطیسی بہاو اور ان کے زاویے۔

شکل 5.31 میں دوبارہ ساکن اور گھومتے لچھوں کے مقناطیسی دباو دکھائے گئے ہیں۔ شکل-ا کی تکون ΔAEC اور ΔBEC میں CE مشترک ہے جو درج ذیل ہو گا۔

$$CE = \tau_r \sin\theta_{ar} = \tau_{ar}\sin\theta_a \tag{5.93}$$

اس مساوات کی مدد سے مساوات 5.92 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$T_m = -\frac{P}{2}\frac{\mu_0 \pi r l}{l_g}\tau_a\tau_{ar}\sin\theta_a \tag{5.94}$$

اسی طرح شکل 5.31-ب کی تکون ΔMWQ اور تکون ΔSWQ میں WQ مشترک ہے جو درج ذیل ہو گا۔

$$WQ = \tau_a \sin\theta_{ar} = \tau_{ar}\sin\theta_r \tag{5.95}$$

اس مساوات کی مدد سے مساوات 5.92 کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$T_m = -\frac{P}{2}\frac{\mu_0 \pi r l}{l_g}\tau_r\tau_{ar}\sin\theta_r \tag{5.96}$$

مساوات 5.92، مساوات 5.94 اور مساوات 5.96 کو ایک ساتھ لکھتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
T_m &= -\frac{P}{2}\frac{\mu_0 \pi r l}{l_g}\tau_a\tau_r\sin\theta_{ar}\\
T_m &= -\frac{P}{2}\frac{\mu_0 \pi r l}{l_g}\tau_a\tau_{ar}\sin\theta_a\\
T_m &= -\frac{P}{2}\frac{\mu_0 \pi r l}{l_g}\tau_r\tau_{ar}\sin\theta_r
\end{aligned} \tag{5.97}$$

ان مساوات سے واضح ہے کہ میکانی قوت مروڑ کو دونوں لچھوں کے مقناطیسی دباو اور ان کے بیچ زاویہ کی صورت میں، یا کسی ایک لچھے کے مقناطیسی دباو، کل مقناطیسی دباو اور ان کے بیچ زاویہ کی صورت میں لکھا جا سکتا ہے۔

اس بات کو یوں بیان کیا جا سکتا ہے کہ میکانی قوت مروڑ دو مقناطیسی دباو کی آپس میں رد عمل کی وجہ سے پیدا اور مقناطیسی دباو کی چوٹیوں اور ان کے بیچ زاویہ پر منحصر ہوتا ہے۔

مقناطیسی دباو، مقناطیسی شدت، کثافت مقناطیسی بہاو اور مقناطیسی بہاو آپس میں تعلق رکھتے ہیں جنہیں مختلف طریقوں سے لکھا جا سکتا ہے۔ مثلاً خلائی درز میں کل مقناطیسی دباو τ_{ar} اور درز میں کثافت مقناطیسی بہاو B_{ar} کا تعلق

$$B_{ar}=\frac{\mu_0\tau_{ar}}{l_g} \tag{5.98}$$

استعمال کر کے مساوات 5.97 کے آخری جزو کو درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$T_m=-\frac{P}{2}\pi r l\tau_r B_{ar}\sin\theta_r \tag{5.99}$$

مقناطیسی مشینوں کی قابلی مقناطیسی مستقل μ کی محدود قیمت کی بنا قالب میں کثافت مقناطیسی بہاو تقریباً ایک ٹسلا تک ہی بڑھائی جا سکتی ہے۔ مشین کی بناوٹ کے وقت اس حد کو مد نظر رکھنا ہو گا۔ اسی طرح گھومتے لچھے کا مقناطیسی دباو اس لچھے میں برقی رو پر منحصر ہوتا ہے۔ اس برقی رو سے لچھے کی مزاحمت میں برقی توانائی ضائع ہوتی ہے جس سے لچھا گرم ہوتا ہے۔ برقی رو کو اس حد تک بڑھایا جا سکتا ہے جہاں تک لچھے کو ٹھنڈا رکھنا ممکن ہو۔ یوں مقناطیسی دباو کو ایک حد سے نیچے رکھنا ہو گا۔ مساوات 5.99 میں B_{ar} اور τ_r دونوں صریحاً موجود ہیں لہٰذا مشین کی بناوٹ کے نقطہ نظر سے یہ ایک اہم مساوات ہے۔

مساوات 5.99 کی دوسری اہم صورت دیکھتے ہیں۔ قطب پر اوسط کثافت مقناطیسی بہاو $B_{\text{اوسط}}$ اور قطب کے رقبہ A_P

$$B_{\text{اوسط}}=\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}B_0\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{2B_0}{\pi} \tag{5.100}$$

$$A_P=\frac{2\pi r l}{P} \tag{5.101}$$

کا حاصل ضرب قطب پر مقناطیسی بہاو ϕ_P ہوتا ہے لہٰذا

$$\phi_P=\frac{2B_0}{\pi}\frac{2\pi r l}{P} \tag{5.102}$$

اور

$$T_m = -\frac{\pi}{2}\left(\frac{P}{2}\right)^2 \phi_{ar}\tau_r \sin\theta_r \tag{5.103}$$

ہوں گے۔ مساوات 5.103 معاصر مشینوں کے لئے بہت کار آمد ہے۔

فرہنگ