برقی آلات

خالد خان یوسفزئی

جامعہ کامسیٹ، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

تاریخ درستگی: 12 مئی 2020

عنوان

باب 4

برقی اور میکانی توانائی کا باہمی تبادلہ

برقی رو یا مقناطیسی بہاو کی مدد سے برقی توانائی کو میکانی توانائی یا میکانی توانائی کو برقی توانائی میں مختلف مشین تبدیل کرتے ہیں۔ پیمائشی آلات، لاؤڈ سپیکر، مائکروفون، وغیرہ نہایت کم طاقت کا تبادلہ کرتے ہیں جبکہ ریلے [1]، برقی مقناطیس، وغیرہ، قوت پیدا کرتے ہیں۔ کئی مشین، جن میں برقی موٹر اور جنریٹر شامل ہیں، ایک قسم کی توانائی کو دوسری قسم کی توانائی میں مسلسل تبدیل کرتے ہیں۔

اس باب میں مقناطیسی بہاو کی مدد سے توانائی کے تبادلہ پر غور کیا جائے گا۔ برقی رو کی مدد سے بھی توانائی کا تبادلہ سمجھا جا سکتا ہے جس کا تذکرہ اس کتاب میں نہیں کیا جائے گا۔

اس باب میں ہم وہ اہم تراکیب سیکھیں گے جو انجنیئری مسائل حل کرنے میں مددگار ثابت ہوں گے۔

4.1 مقناطیسی نظام میں قوت اور قوت مروڑ

برقی میدان $\boldsymbol{E}$ میں برقی بار q پر درج ذیل قوت اثر انداز ہو گی۔

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{4.1}$$

[1] relay

مثبت برقی بار پر قوت برقی شدت $\boldsymbol{E}$ کے رخ ہو گی جبکہ منفی بار پر قوت $\boldsymbol{E}$ کے مخالف رخ ہو گی۔

مقناطیسی میدان میں متحرک بار q ، جس کی سمتی رفتار[2] $\boldsymbol{v}$ ہو، پر درج ذیل قوت اثر انداز ہو گی۔

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{4.2}$$

مثبت برقی بار پر قوت کا رخ دائیں ہاتھ کا قانون[3] دیگا۔دائیں ہاتھ کے انگوٹھے کو باقی انگلیوں کے ساتھ برقرار قائمہ رکھ کر اس ہاتھ کی چار انگلیوں کو $\boldsymbol{v}$ کے رخ سے شروع کر کے، چھوٹے زاویہ پر گھما کر، $\boldsymbol{B}$ کے رخ موڑنے سے انگوٹھا $\boldsymbol{F}$ کا رخ دیگا۔ منفی بار پر قوت مخالف رخ ہو گی۔

یہاں سمتی رفتار q اور $\boldsymbol{B}$ کے بیچ ہے۔

برقی اور مقناطیسی (دونوں) میدان میں حرکت پذیر بار پر قوت مساوات 4.1 اور مساوات 4.2 کے مجموعہ سے حاصل ہو گی جس کو مساوات لورینز[4] کہتے ہیں۔

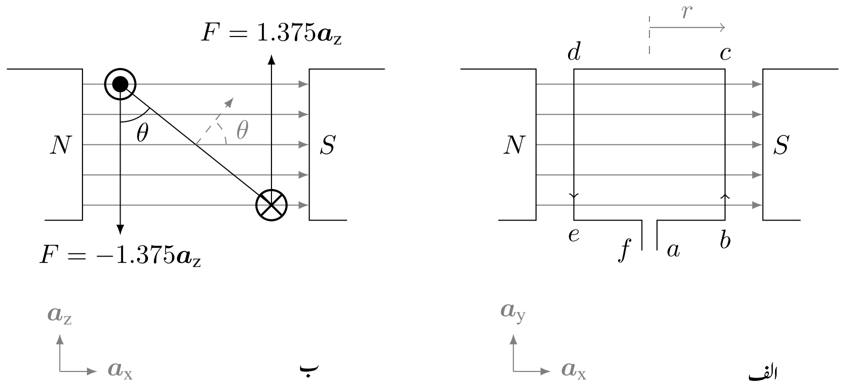
$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \qquad \text{مساوات لورینز} \tag{4.3}$$

مساوات 4.2 میں $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\,\mathrm{d}t$ لکھ کر درج ذیل حاصل ہو گا جہاں آخری قدم پر $i = q/\,\mathrm{d}t$ لکھا گیا ہے۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= q\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{B}\right) \\
&= \frac{q}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}\right) \\
&= i\left(\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}\right)
\end{aligned} \tag{4.4}$$

مثال 4.1: شکل 4.1 میں ایک لچھا مقناطیسی میدان میں دکھایا گیا ہے۔لچھے کا رداس 15 سم، محوری لمبائی 50 سم اور اس میں برقی رو 5 ایمپیئر ہے۔کثافت مقناطیسی بہاو کو نقطہ دار نوکیلی لکیروں سے شمالی قطب سے جنوبی قطب کے رخ دکھایا گیا ہے۔اگر کثافت مقناطیسی بہاو 0.55 ٹسلا ہو تب

- لچھے کے اطراف پر قوت دریافت کریں اور
- لچھے پر قوت مروڑ τ دریافت کریں۔



شکل 4.1: ایک چکر کے لچھے پر قوت اور قوت مروڑ

حل: شکل-الف اور ب میں کارتیسی اکائی سمتیات دکھائے گئے ہیں۔ برقی تار کے سروں کو نظر انداز کرتے ہوئے اسے ایک بند مستطیل تصور کرتے ہیں۔ یوں شکل-الف میں برقی رو کے رخ تار کے اطراف کی لمبائیاں درج ذیل ہوں گی جبکہ $\boldsymbol{B}=B_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}$ ہو گا۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}_{bc}&=l\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\
\boldsymbol{L}_{cd}&=-2r\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\\
\boldsymbol{L}_{de}&=-l\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\
\boldsymbol{L}_{eb}&=2r\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}
\end{aligned}$$

یوں مساوات 4.2 کے تحت ان اطراف پر قوت (نیوٹن) درج ذیل ہو گی۔

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{bc}&=i\left(\boldsymbol{L}_{bc}\times B_0\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\right)\\
&=5\left(0.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\times 0.55\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\right)\\
&=-1.375\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\
\boldsymbol{F}_{cd}&=5\left(-0.3\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\times 0.55\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\right)\\
&=0\\
\boldsymbol{F}_{de}&=5\left(-0.5\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\times 0.55\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\right)\\
&=1.375\boldsymbol{a}_{\mathrm{z}}\\
\boldsymbol{F}_{ea}&=0
\end{aligned}$$

velocity[2]
right hand rule[3]
Lorenz equation[4]

ہم دیکھتے ہیں کہ صرف محوری اطراف پر قوتیں پائی جاتی ہیں جنہیں شکل 4.1-ب میں دکھایا گیا ہے۔ محوری اطراف پر اثر انداز قوت، مروڑ پیدا کرتی ہیں جس کا رخ دائیں ہاتھ کے قانون سے حاصل ہو گا۔ مستطیل تار پر قوت مروڑ (نیوٹن میٹر) درج ذیل ہو گا۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau} &= -1.375 \times 2 \times 0.15 \times \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}} \\ &= -0.4125 \sin\theta \boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\end{aligned}$$

□

مساوات 4.1 تا مساوات 4.3 کا استعمال صرف سادہ ترین صورتوں میں ممکن ہوتا ہے۔ حقیقی مشینوں میں ان مساوات سے قوت تعین کرنا مشکل ثابت ہوتا ہے۔ آئیں ایک ایسی ترکیب سیکھتے ہیں جس سے ہم مختلف مشینوں میں پائی جانی والی قوتیں تعین کر سکیں ۔ اس ترکیب ہم-توانائی کا طریقہ کہتے ہیں جو توانائی کے اٹل ہونے پر مبنی ہے۔

گھومتی برقی مشین عموماً دو لچھوں پر مشتمل ہوتی ہیں۔ ان میں ایک لچھا مشین کے ساکن حصہ پر لپٹا ہوتا ہے جس کی بنا یہ ساکن رہتا ہے اور ساکن لچھا[5] کہلاتا ہے ۔ دوسرا لچھا مشین کے گھومنے حصہ پر لپٹا ہوتا ہے اور مشین گھومنے سے یہ بھی گھومتا ہے۔ اس کو گھومتا لچھا[6] کہتے ہیں۔ان لچھوں کو دو عدد مقناطیس تصور کرتے ہوئے ایسی مشینوں کی کارکردگی باآسانی سمجھی جا سکتی ہے۔

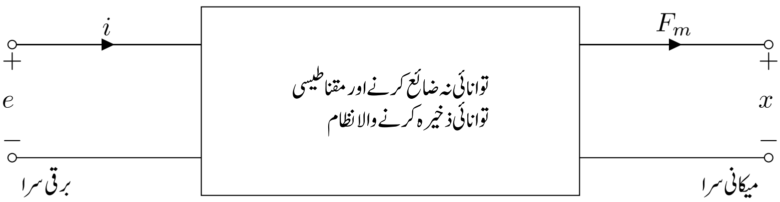
جس طرح دو مقناطیس اگر قریب لائے جائیں تو یہ کوشش کرتے ہیں کہ ایک کا شمال N دوسرے کے جنوب S کی سمت ہو۔

موٹر کے دو لچھے مقناطیس پیدا کرتے ہیں۔ہم جانتے ہیں کہ ایک مقناطیس کے شمال N اور دوسرے کے جنوب S کے بیچ قوت کشش پائی جاتی ہے۔ ساکن لچھے کا مقناطیسی بہاو گھومتے لچھے کے مقناطیسی بہاو سے کچھ آگے رہ کر اسے کھینچ کر کام کرتا ہے۔ جنریٹر میں اس کے برعکس گھومتا لچھا، ساکن لچھے پر کام کرتے ہوئے اس میں برقی دباو پیدا کرتا ہے۔

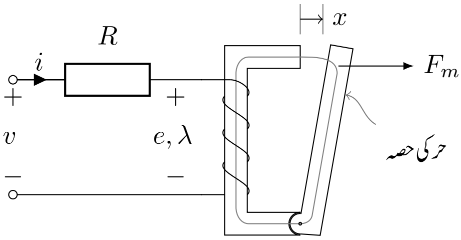
توانائی کے طریقے کو شکل 4.2 کی مدد سے سمجھا جا سکتا ہے۔یہاں مقناطیسی نظام کو ایک ڈبہ مانند دکھایا گیا ہے۔ اس نظام کو برقی توانائی مہیا کی جاتی ہے جس کو یہ میکانی توانائی میں تبدیل کرتا ہے۔ یہاں برقی توانائی کے متغیرات e

---

[5] stator coil
[6] rotor coil



شکل 4.2: برقی توانائی سے میکانی توانائی کے تبادلہ کا نظام۔



شکل 4.3: قوت پیدا کرنے والا آلا۔

اور i ہیں جبکہ میکانی توانائی کے متغیرات فاصلہ x اور میدانی قوت[7] F_m ہیں۔ اس شکل میں بائیں یعنی ابتدائی یا اولین جانب i کا رُخ باہر سے اندر ہے جبکہ دائیں یعنی ثانوی جانب F_m کا رُخ اندر سے باہر رخ ہے۔یہ ٹرانسفارمر دور کے شکل 3.7 کی مانند ہے۔

جہاں نظام میں توانائی کے ضیاع کو ذخیرہ توانائی سے علیحدہ کرنا ممکن ہو وہاں توانائی کے ضیاع کو بیرونی رکن تصور کیا جاتا ہے۔ شکل 4.3 میں ایک ایسا ہی نظام دکھایا گیا ہے جس میں لچھا برقی نظام اور حرکی حصہ میکانی نظام کو ظاہر کرتے ہیں اور لچھے میں توانائی کے ضیاع کو بیرونی مزاحمت R سے ظاہر کیا گیا ہے۔

توانائی کا بنیادی اصول کہتا ہے کہ توانائی نا تو پیدا کی جا سکتی ہے اور نا ہی اسے تباہ کیا جا سکتا ہے۔ اس کو صرف ایک قسم سے دوسرے قسم کی توانائی میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ یوں نظام کو فراہم برقی توانائی $\partial W_{\text{برقی}}$ کا ایک حصہ میکانی توانائی $\partial W_{\text{میکانی}}$ میں تبدیل ہو گا جبکہ اس کا دوسرا حصہ، $\partial W_{\text{مقناطیسی}}$، مقناطیسی میدان میں ذخیرہ ہو گا اور باقی حصہ، $\partial W_{\text{ضائع}}$، مختلف طریقوں سے ضائع ہو گیا جو ہمارے کسی کام نہ آ سکے گا:

$$\partial W_{\text{برقی}} = \partial W_{\text{میکانی}} + \partial W_{\text{مقناطیسی}} + \partial W_{\text{ضائع}} \tag{4.5}$$

[7] میدانی قوت F_m میں چھوٹی لکھائی میں m لفظ میدانی کو ظاہر کر رہا ہے۔

برقی توانائی کے ضیاع کو نظرانداز کرتے ہوئے

$$\partial W_{\text{برقی}} = \partial W_{\text{میکانی}} + \partial W_{\text{مقناطیسی}} \tag{4.6}$$

لکھا جا سکتا ہے جس کو ∂t سے تقسیم کر کے

$$\frac{\partial W_{\text{برقی}}}{\partial t} = \frac{\partial W_{\text{میکانی}}}{\partial t} + \frac{\partial W_{\text{مقناطیسی}}}{\partial t} \tag{4.7}$$

لکھا جا سکتا ہے جو توانائی کی بجائے طاقت کی بات کرتی ہے۔ اس مساوات کے بائیں ہاتھ برقی طاقت کو ei اور دائیں ہاتھ میکانی حصہ میں $\partial W_{\text{میکانی}} = F_m \partial x$ لکھ کر

$$ei = F_m \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial W_m}{\partial t} \tag{4.8}$$

حاصل ہو گا جہاں $W_{\text{مقناطیسی}}$ کو W_m لکھا گیا ہے۔مساوات 2.27 استعمال کرتے ہوئے اس کو

$$i\frac{\partial \lambda}{\partial t} = F_m \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial W_m}{\partial t} \tag{4.9}$$

لکھا جا سکتا ہے۔دونوں اطراف کو ∂t سے ضرب دے کر ترتیب نو کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\partial W_m = i\partial\lambda - F_m \partial x \tag{4.10}$$

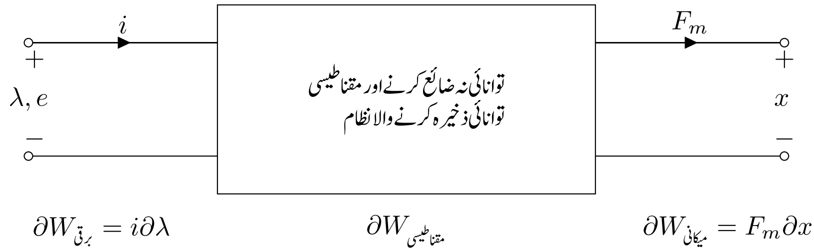
مساوات 4.10 توانائی کے طریقہ کی بنیاد ہے۔ اس مساوات کو استعمال کرتے وقت یاد رہے کہ قوت بنیادی طور پر لورینز کے قانون[8] سے ہی پیدا ہوتی ہے۔مساوات 4.10 میں برقی متغیرات i اور e کی بجائے i اور λ ہیں۔ لہٰذا شکل 4.2 کو شکل 4.4 کی طرح بھی بنایا جا سکتا ہے۔

کسی بھی تفاعل[9] $z(x,y)$ کا کل تفرق درج ذیل ہو گا جہاں $\frac{\partial z}{\partial x}$ لیتے ہوئے y کو مستقل تصور کیا جاتا ہے اور $\frac{\partial z}{\partial y}$ لیتے ہوئے x کو مستقل تصور کیا جاتا ہے۔

$$\partial z(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y \tag{4.11}$$

---

[8] Lorenz equation
[9] function



شکل 4.4: توانائی کی قسم تبدیل کرنے والا ایک نظام۔

اسی طرح $W_m(x,\lambda)$ کا کل تفرق

$$\partial W_m(x,\lambda) = \frac{\partial W_m}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial W_m}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}\lambda \tag{4.12}$$

ہو گا جس کا موازنہ مساوات 4.10 کے ساتھ کر کے درج ذیل اخذ کیا جا سکتا ہے جہاں ایک متغیر کے ساتھ جزوی تفرق لیتے وقت دوسرے متغیر کو صریحاً مستقل ظاہر کیا گیا ہے۔

$$F_m(x,\lambda) = -\left.\frac{\partial W_m(x,\lambda)}{\partial x}\right|_{\lambda_0} \tag{4.13}$$

$$i(x,\lambda) = \left.\frac{\partial W_m(x,\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{x_0} \tag{4.14}$$

مقناطیسی میدان میں مقناطیسی توانائی $W_m(x,\lambda)$ دریافت کر کے مساوات 4.13 کی استعمال سے قوت دریافت کی جا سکتی ہے۔ اگلے حصہ میں مقناطیسی توانائی کا حصول سکھایا جائے گا۔

4.2 تبادلہ توانائی والا ایک لچھے کا نظام

شکل 4.3 میں ایک لچھے کا سادہ نظام دکھایا گیا ہے۔ لچھے میں برقی ضیاع کو بیرونی مزاحمت سے ظاہر کیا گیا ہے جبکہ میکانی نظام میں حرکی حصہ کی کمیت کو نظرانداز کیا گیا ہے۔ جہاں اس کمیت کا اثر جاننا ضروری ہو وہاں اس کو ایک بیرونی کمیت تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح تبادلہ توانائی کے نظام پر غور کرنا آسان ہوتا ہے۔

قوت پیدا کرنے والی مشین میں حرکت ناگزیر ہے۔ عموماً حرکت تب ممکن ہو گی جب مقناطیسی قالب میں قابل تبدیل خلاء موجود ہو۔ قالب میں خلاء کی موجودگی کی بنا عام طور پر $\Re_a \gg \Re_c$ ہو گا اور ایسا مقناطیسی دور حل کرتے

ہوئے $\Re_c$ کو نظر انداز کیا جائے گا۔ یوں، جیسا مساوات 2.19 میں دیا گیا ہے، مقناطیسی دباو τ اور مقناطیسی بہاو ϕ براہ راست متناسب ہوں گے۔ ایسی صورت میں مساوات 2.29 میں امالہ L شکل 4.3 میں خلاء کی لمبائی x پر منحصر ہو گی لہٰذا اس مساوات کو درج ذیل لکھتے ہیں۔

$$\lambda = L(x) i \tag{4.15}$$

شکل 4.3 میں قوت F_m کے رخ طے ہونے والا فاصلہ x ہے۔ یوں میکانی کام $\partial W_{\text{میکانی}} = F_m \,\mathrm{d}x$ ہو گا جبکہ فراہم برقی توانائی $\partial W_{\text{برقی}} = i \,\mathrm{d}\lambda$ ہو گی۔ یوں شکل 4.3 کو مساوات 4.10 ظاہر کرتی ہے۔ مقناطیسی میدان میں ذخیرہ توانائی W_m کو مساوات 4.10 کا تکمل[10] لے کر حاصل کرتے ہیں۔

$$\int \partial W_m(x,\lambda) = \int i(x,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda - \int F_m(x,\lambda)\,\mathrm{d}x \tag{4.16}$$

اس تکمل کا حصول شکل 4.5 سے واضح ہو گا۔ابتدائی نقطے پر مقناطیسی نظام کو کوئی برقی توانائی فراہم نہیں کی گئی ہے۔یوں نظام میں برقی رو صفر ہو گی جس کی بنا مقناطیسی بہاو اور ارتباط بہاو بھی صفر ہوں گے لہٰذا مقناطیسی میدان میں مقناطیسی توانائی بھی صفر ہو گی۔ کسی بھی مقناطیس کی قوت کشش اس کی مقناطیسی بہاو پر منحصر ہوتی ہے لہٰذا صفر مقناطیسی بہاو کی بنا اس نظام میں قوت کشش صفر ہو گا اور یوں اس میں حرکت بھی صفر ہو گا۔اس طرح ابتدائی نقطہ پر درج ذیل ہوں گے۔

$$i = \phi = \lambda = W_m = F_m = x = 0$$

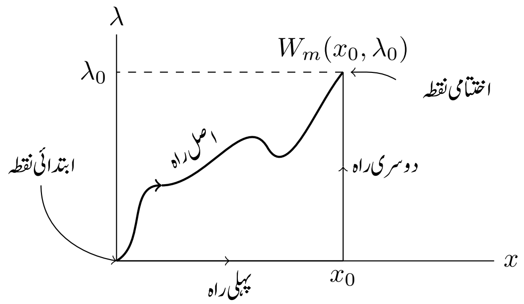
ابتدائی نقطہ شکل 4.5 میں دکھایا گیا ہے۔ اب لچھے کو برقی توانائی فراہم کی جاتی ہے۔ لچھے میں برقی رو کی بنا قوت اور حرکت پیدا ہو گی۔ آخر کار نظام اختتامی نقطے پر پہنچے گا۔اختتامی نقطہ بھی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس نقطہ پر $\lambda = \lambda_0$ اور $x = x_0$ ہیں اور مقناطیسی میدان میں توانائی $W_m(x_0,\lambda_0)$ ہے۔ابتدائی نقطہ سے اختتامی نقطہ تک پہنچنے کے لئے برقی توانائی کو یوں بڑھایا جاتا ہے کہ λ اور x شکل 4.5 میں موٹی لکیر (اصل راستے) پر رہیں۔ آخری نقطہ پر مقناطیسی میدان میں مقناطیسی توانائی $W_m(x_0,\lambda_0)$ جاننے کے لئے اصل راستے پر مساوات 4.16 کا تکمل حاصل کرنا ہو گا جو ایک مشکل کام ہے۔اس راہ پر تکمل کی بجائے ہم متبادل راستہ اختیار کرتے ہیں۔

ہم اس حقیقت سے فائدہ اٹھاتے ہیں کہ مقناطیسی میدان ایک قدامت پسند میدان[11] ہے جس کا مطلب ہے کہ مقناطیسی میدان میں مقناطیسی توانائی صرف اور صرف اختتامی نقطہ کے x_0 اور λ_0 کی مقدار پر منحصر ہو گی[12]۔چونکہ

[10] integral

[11] conservative field

[12] تجاذبی میدان بھی قدامت پسند میدان ہے۔اسی لئے اگر کمیت m کو کسی بھی راستے h کی بلندی تک لے جایا جائے تو اس کی مخفی توانائی mgh ہو گی۔



شکل 4.5: مقناطیسی میدان میں توانائی۔

توانائی کا دارومدار راہ پر منحصر نہیں ہے لہٰذا توانائی کے حصول کے تکمل میں ہم من پسند راستہ اختیار کرتے ہیں۔ ہم تکمل لیتے ہوئے شکل 4.5 میں ابتدائی نقطہ سے پہلی راہ چل کر فاصلہ x_0 طے کر کے دوسری راہ اختیار کر کے اختتامی نقطہ (x_0, λ_0) تک پہنچتے ہیں۔ یوں مساوات 4.16 کو دو تکملات کا مجموعہ لکھا جائے گا۔ ایک تکمل نقطہ $(0, 0)$ سے نقطہ $(x_0, 0)$ تک اور دوسرا یہاں سے نقطہ (x_0, λ_0) تک لیا جائے گا:

$$\int_{\text{اصل راہ}} \partial W_m(x, \lambda) = \int_{\text{پہلی راہ}} \partial W_m(x, \lambda) + \int_{\text{دوسری راہ}} \partial W_m(x, \lambda) \tag{4.17}$$

اس مساوات کے دائیں ہاتھ تکملات کو باری باری دیکھتے ہیں۔ پہلی راہ تکمل کو مساوات 4.16 کی مدد سے لکھتے ہیں۔

$$\int_{\text{پہلی راہ}} \partial W_m(x, \lambda) = \int_0^0 i(x, 0)\,\mathrm{d}\lambda - \int_0^{x_0} F_m(x, 0)\,\mathrm{d}x \tag{4.18}$$

جیسا شکل 4.5 میں دکھایا گیا ہے، پہلی راہ پر $\lambda = 0$ ہے۔ مساوات 4.18 میں اس بات کو برقی رو $i(x, 0)$ اور قوت $F_m(x, 0)$ لکھ کر واضح کیا گیا ہے۔ چونکہ ابتدائی اور اختتامی نقطوں پر λ صفر ہے لہٰذا $\int_0^0 i(x, 0)\,\mathrm{d}\lambda = 0$ ہو گا۔ ایسے تکمل کی قیمت صفر ہوتی ہے جس کا ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک دوسرے کے برابر ہوں۔

پہلی راہ پر $\lambda = 0$ ہونے کی بنا اس راہ پر مقناطیسی بہاو بھی صفر ہو گا لہٰذا اس راہ پر مقناطیسی اثر نہیں پایا جائے گا اور قوت F_m صفر ہو گا۔ ہم جانتے ہیں کہ صفر کا تکمل صفر ہوتا ہے لہٰذا $\int_0^{x_0} F_m(x, 0)\,\mathrm{d}x = 0$ ہو گا۔ یوں

پہلی راہ پر کا تکمل (مساوات 4.18) صفر ہو گا:

$$\int_{\text{پہلی راہ}} \partial W_m(x,0) = \int_0^0 i(x,0)\,\mathrm{d}\lambda - \int_0^{x_0} F_m(x,0)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{4.19}$$

مساوات 4.17 میں دوسری راہ کا تکمل

$$\int_{\text{دوسری راہ}} \partial W_m(x_0,\lambda) = \int_0^{\lambda_0} i(x_0,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda - \int_{x_0}^{x_0} F_m(x_0,\lambda)\,\mathrm{d}x \tag{4.20}$$

ہو گا۔دوسری راہ پر $x = x_0$ ہے لہٰذا مساوات 4.20 میں دائیں ہاتھ دوسرے تکمل کا ابتدائی نقطہ x_0 اور اختتامی نقطہ بھی x_0 ہو گا جس کی بنا قوت کا تکمل صفر ہو گا:

$$\int_{x_0}^{x_0} F_m(x_0,\lambda)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{4.21}$$

آخر میں مساوات 4.20 کے دائیں ہاتھ، برقی رو کا تکمل حل کرنا باقی ہے۔ مساوات 4.15 استعمال کرتے ہوئے اسے حل کرتے ہیں۔

$$\int_0^{\lambda_0} i(x_0,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{L(x_0)}\int_0^{\lambda_0} \lambda\,\mathrm{d}\lambda = \frac{\lambda_0^2}{2L(x_0)} \tag{4.22}$$

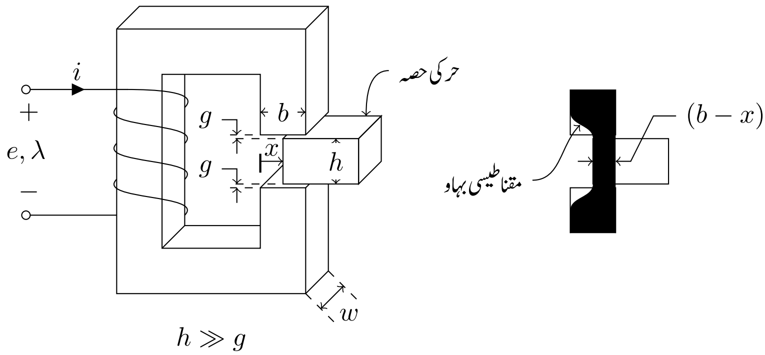
مساوات 4.20، مساوات 4.21 اور مساوات 4.22 کے نتائج استعمال کرتے ہوئے مساوات 4.17 میں دیے تکمل کا حل لکھتے ہیں:

$$W(x_0,\lambda_0) = \frac{\lambda_0^2}{2L(x_0)}$$

اس مساوات میں اختتامی نقطہ کو عمومی نقطہ (x,λ) لیتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا جو مقناطیسی میدان میں توانائی کی مساوات ہے۔

$$W(x,\lambda) = \frac{\lambda^2}{2L(x)} \tag{4.23}$$

مساوات 4.23 کی مدد سے مساوات 4.13 کے ذریعہ قوت $F_m(x,\lambda)$ اور مساوات 4.14 کے ذریعہ برقی رو $i(x,\lambda)$ کا حساب اب ممکن ہے۔



شکل 4.6: حرکت اور توانائی۔

مثال 4.2: شکل 4.6 میں حرکت کرنے والا ایک مقناطیسی نظام دکھایا گیا ہے۔ حرکی اور ساکن حصوں کے بیچ خلائی درز g موجود ہے۔ اگر $N = 500$، $g = 1\,\mathrm{mm}$، $b = 0.2\,\mathrm{m}$، $w = 0.4\,\mathrm{m}$ اور $i = 30\,\mathrm{A}$ ہوں تب اس خلائی درز میں توانائی W_m کیا ہو گی؟

حل: چونکہ $h \gg g$ ہے لہٰذا ساکن حصہ میں مقناطیسی بہاو کا بیشتر حصہ بالائی بازو سے نچلے بازو تک پہنچنے کے لئے حرکی حصہ سے گزرے گا (شکل 4.6)۔ یوں ساکن حصہ میں مقناطیسی بہاو خلائی درز کے قریب مڑ کر حرکی حصے میں سے گزرے گا۔ توانائی کے کلیہ $W_m(x,\lambda) = \frac{\lambda^2}{2L(x)}$ میں $\lambda = L(x)i$ پر کرنے سے $W_m(x,i) = \frac{1}{2}L(x)i^2$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $L = \frac{N^2\mu_0 A_g}{2g}$ اور $A_g = w(b-x)$ ہیں۔ یوں

$$W_m(x,i) = \frac{1}{2}\frac{N^2\mu_0 w(b-x)}{2g}i^2 \tag{4.24}$$

ہو گا جس میں دی گئی معلومات پر کرنے سے درج ذیل توانائی حاصل ہو گی (جس کی اکائی جاول ہے)۔

$$\begin{aligned} W_m(x,i) &= \frac{1}{2} \times \frac{500^2 \times 4\pi 10^{-7} \times 0.4(0.2-x)}{2 \times 0.001} \times 30^2 \\ &= 28278(0.2-x) \end{aligned}$$

□

مثال 4.3: شکل 4.6 میں توانائی کے طریقہ سے قوت F_m دریافت کریں۔

حل: مساوات 4.13 کہتی ہے کہ $F_m = -\left.\frac{\partial W_m(x,\lambda)}{\partial x}\right|_{\lambda_0}$ ہو گا جہاں توانائی کے متغیرات x اور λ ہیں۔

مثال 4.2 میں مساوات 4.24 حاصل کی جو توانائی کا کلیہ ہے۔ایسا کرتے ہوئے λ کی جگہ $\lambda = L(x)i$ پر کیا گیا جس کی بنا مساوات 4.24 میں W_m کے متغیرات x اور λ کی بجائے x اور i ہیں۔ قوت کے حصول کے لئے مساوات 4.24 استعمال نہیں کیا جا سکتا ہے۔ ہمیں توانائی کے درست متغیرات درکار ہوں گے تا کہ توانائی $W_m(x,\lambda)$ ہو (آپ مساوات 4.24 کا تفرق لے کر تسلی کر لیں کہ اس سے درست قوت حاصل نہیں ہوتا ہے)۔ درست طریقہ درج ذیل ہے۔

$$W_m(x,\lambda) = \frac{\lambda^2}{2L} = \frac{\lambda^2}{2\left(\frac{N^2\mu_0 A_g}{2g}\right)} = \frac{g\lambda^2}{N^2\mu_0 w(b-x)} \tag{4.25}$$

مساوات 4.25 اور مساوات 4.13 مل کر درج ذیل دیتی ہیں۔

$$\begin{aligned}F_m &= -\frac{\partial W_m(x,\lambda)}{\partial x}\\ &= -\frac{g\lambda^2}{N^2\mu_0 w(b-x)^2}\end{aligned}$$

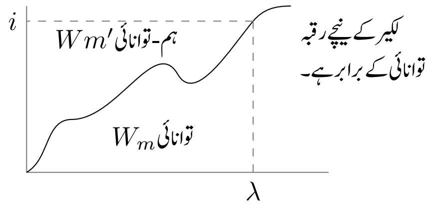
تفرق لینے کے بعد λ کی جگہ Li پر کیا جا سکتا ہے۔یوں قوت

$$\begin{aligned}F_m &= -\frac{gL^2i^2}{N^2\mu_0 w(b-x)^2}\\ &= -\frac{N^2\mu_0 w i^2}{4g}\\ &= -28\,278\end{aligned}$$

نیوٹن حاصل ہوتی ہے۔قوت کی علامت منفی ہے جس کے تحت قوت گھٹتے x رخ ہو گی۔یوں حرکی حصہ بائیں رخ کھینچا جائے گا۔ □

4.3 توانائی اور ہم-توانائی

شکل 4.7 میں λ اور i کے مابین ترسیم دکھایا گیا ہے۔اس لکیر کے نیچے رقبہ ہم-توانائی W_m' تصور کریں۔ اس ترسیم پر کوئی ایک نقطہ (λ, i) لے کر ایک لکیر نیچے اور دوسری بائیں کھینچ کر ایک مستطیل مکمل کیا گیا ہے جس کا



شکل 4.7: ہم-توانائی کی تعریف۔

رقبہ λi ہے۔ مستطیل کے رقبہ سے توانائی W_m منفی کرنے سے حاصل رقبہ **ہم-توانائی**[13] W'_m کہلاتا ہے۔

$$W'_m = \lambda i - W_m \tag{4.26}$$

ہم-توانائی کے جزوی فرق

$$\begin{aligned} \partial W'_m &= \partial(\lambda i) - \partial W_m \\ &= \lambda \partial i + i \partial \lambda - \partial W_m \end{aligned}$$

میں مساوات 4.10 کا استعمال

$$\partial W'_m = \lambda \partial i + i \partial \lambda - (i \partial \lambda - F_m \partial x)$$

یعنی

$$\partial W'_m = \lambda \partial i + F_m \partial x \tag{4.27}$$

دیگا۔

یہاں بھی مساوات 4.11 تا مساوات 4.14 کی طرح کسی بھی تفاعل $z(x,y)$ کا جزوی فرق

$$\partial z(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

ہو گا لہذا ہم-توانائی $W'_m(x,i)$ کا جزوی فرق درج ذیل ہو گا۔

$$\partial W'_m(x,i) = \frac{\partial W'_m}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial W'_m}{\partial i}\,\mathrm{d}i \tag{4.28}$$

[13] co-energy

مساوات 4.28 کا مساوات 4.27 کے ساتھ موازنہ کرنے سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\lambda = \left. \frac{\partial W'_m}{\partial i} \right|_{x_0} \tag{4.29}$$

اور

$$F_m = \left. \frac{\partial W'_m}{\partial x} \right|_{i_0} \tag{4.30}$$

مساوات 4.30 قوت دریافت کرنے کا دوسرا کلیہ دیتی ہے۔ مساوات 4.30 میں ہم-توانائی جبکہ مساوات 4.13 میں توانائی کے ذریعہ قوت حاصل کی گئی۔

توانائی کے طریقہ کی طرح مساوات 4.29 سے درج ذیل تکمل لکھا جا سکتا ہے۔

$$W'_m(i_0, x_0) = \int_0^{i_0} \lambda(i, x_0) \, \mathrm{d}i \tag{4.31}$$

جن نظام میں λ اور i کا تعلق تغیر راست ہو، جس کو مساوات 2.29 بیان کرتی ہو، ان کے لئے درج بالا تکمل کا حل درج ذیل ہو گا جہاں i_0، x_0 کی بجائے عمومی متغیرات i اور x لکھے گئے ہیں۔

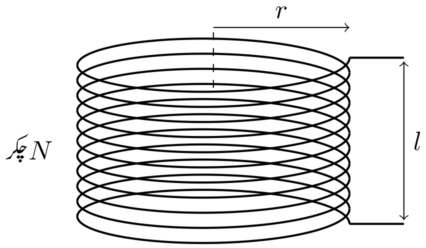
$$W'_m(i, x) = \int_0^{i} L(x) i \, \mathrm{d}i = \frac{L(x) i^2}{2} \tag{4.32}$$

بعض مسائل میں توانائی اور بعض میں ہم-توانائی کا استعمال زیادہ آسان ثابت ہوتا ہے۔

مثال 4.4: شکل 4.8 میں ایک پیچدار لچھا دکھایا گیا ہے جس کی محوری لمبائی l، رداس r اور چکر N ہیں۔ پیچدار لچھے کے مقناطیسی بہاو کا بیشتر حصہ محوری رخ لچھے کے اندر رہتا ہے۔ لچھے کے باہر مقناطیسی بہاو کو نظر انداز کرتے ہوئے لچھے کے اندر محوری لمبائی رخ میدانی شدت $H \approx \frac{NI}{l}$ ہو گی۔

موصل دھات کو امالی برقی توانائی سے پگھلانے کے لئے پیچدار لچھا استعمال کیا جاتا ہے۔ میں 100 تا 1500 کلو واٹ برقی طاقت کی امالی برقی بھٹیاں[14] بناتا رہا جو بالترتیب 500 تا 1200 ہرٹز پر کام کرتی اور 100 سے 3000 کلو گرام لوہا پگھلاتی ہیں۔

[14] high frequency, induction furnaces



شکل 4.8: پیچدار لچھا۔

امالی بھٹی کے پیچدار لچھے کے اندر غیر موصل پیالے میں دھات کے ٹکڑے ڈال کر لچھے میں بدلتا رو گزاری جاتی ہے جو دھات میں بھنور نما امالی برقی رو پیدا کرتی ہے۔ بھنور نما رو دھات کو گرم کر کے پگھلاتی ہے۔امالی برقی بھٹی میں لوہے کو 1650 ڈگری سیلسیئس[15] تک گرم کیا جاتا ہے۔

پیچدار لچھے میں برقی رو I_0 کی بنا لچھے پر رداسی رخ میکانی دباو یعنی قوت فی مربع رقبہ پیدا ہو گا۔میری 3000 کلو گرام لوہا پگھلانے کی بھٹی کے پیچدار لچھے کی تفصیل درج ذیل ہے۔

$$N = 11, \quad I_0 = 10\,000\,\mathrm{A}, \quad l = 0.94\,\mathrm{m}, \quad r = 0.49\,\mathrm{m}$$

اس پر رداسی رخ میکانی دباو (نیوٹن فی مربع میٹر) حاصل کریں۔

حل: ہم-توانائی کا طریقہ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{l} \\ W'_m(r,i) &= \frac{Li^2}{2} = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2 I_0^2}{2l} \\ F &= \frac{\partial W'_m}{\partial r} = \frac{\mu_0 N^2 \pi r I_0^2}{l} \end{aligned}$$

اس قوت کی علامت مثبت ہے لہٰذا یہ رداسی رخ باہر جانب ہو گا۔لچھے کو نلکی تصور کریں جس کی گول سطح کا رقبہ $A = 2\pi r l$ ہو گا۔یوں میکانی دباو درج ذیل ہو گا۔

$$\frac{F}{A} = \frac{\mu_0 N^2 \pi r I_0^2}{2\pi r l^2} = \frac{\mu_0 N^2 I_0^2}{2 l^2}$$

[15] Celsius, Centigrade

شکل 4.9: برقی مقناطیس۔

دی گئی معلومات پر کرتے ہوئے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\frac{F}{A} = \frac{4\pi 10^{-7} \times 11^2 \times 10\,000^2}{2 \times 0.94^2} = 8605\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

□

مثال 4.5: 2700 کلوواٹ امالی بھٹی یومیہ 70 ٹن[16] لوہا پگھلاتی[17] ہے۔اتنے وزن کی منتقلی کے لئے برقی مقناطیس استعمال کیا جاتا ہے۔شکل 4.9 میں ایک ایسا برقی مقناطیس دکھایا گیا ہے جس کی تفصیل درج ذیل ہے۔

$$N = 300, \quad A = 0.8\,\mathrm{m}^2, \quad I = 30\,\mathrm{A}$$

برقی مقناطیس اور لوہے کے بیچ اوسط فاصلہ 2.5 سنٹی میٹر لیں۔ یہ برقی مقناطیس کتنی کمیت کا لوہا اٹھا سکتا ہے؟

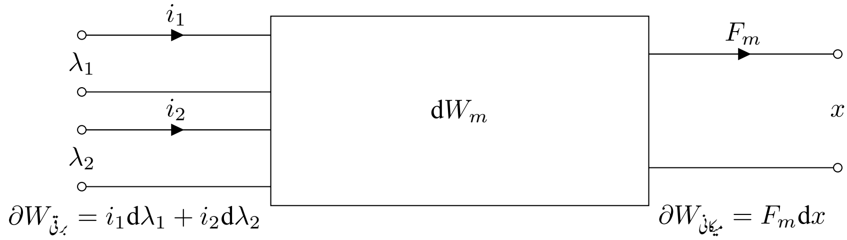
حل:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{\mu_0 N^2 A}{2l} \\
W'_m(l,i) &= \frac{Li^2}{2} = \frac{\mu_0 N^2 A i^2}{4l} \\
F &= \frac{\partial W'_m}{\partial l} = -\frac{\mu_0 N^2 A i^2}{4l^2} = -\frac{4\pi 10^{-7} \times 300^2 \times 0.8 \times 30^2}{4 \times 0.0254^2} = -31\,558\,\mathrm{N}
\end{aligned}$$

قوت کی علامت منفی ہے۔یوں یہ مقناطیس اور لوہے کے بیچ فاصلہ کم کرنے کی کوشش کرتی ہے۔ یہ مقناطیس $\frac{31558}{9.8} = 3220\,\mathrm{kg}$ کمیت اٹھا سکتا ہے۔
□

---

[16] ہزار کلوگرام ایک ٹن کے برابر ہوتے ہیں۔
[17] یہ میں اپنے تجربے کی بنیاد پر کہہ رہا ہوں۔



شکل 4.10: دو لچھوں کا نظام۔

مثال 4.6: مثال 4.3 کو ہم-توانائی کے طریقہ سے حل کریں۔

حل: مساوات 4.32 سے

$$W'_m = \frac{L(x)i^2}{2} = \frac{N^2\mu_0 w(b-x)i^2}{4g}$$

لکھ کر مساوات 4.30 سے درج ذیل قوت حاصل ہوتی ہے۔

$$F_m = \frac{\partial W'_m}{\partial x} = -\frac{N^2\mu_0 w i^2}{4g} = -28\,278\,\mathrm{N}$$

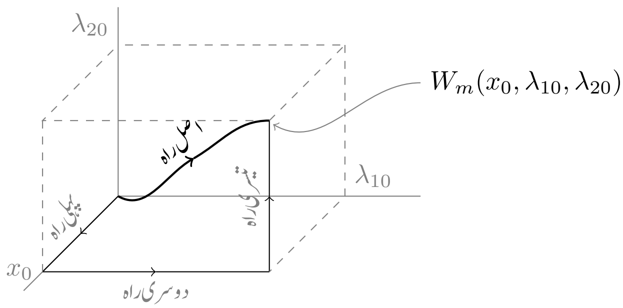
□

4.4 متعدد لچھوں کا مقناطیسی نظام

اب تک ایک لچھے کے نظام پر غور کیا گیا۔ اس حصہ میں ایک سے زیادہ لچھوں کے نظام پر غور کیا جائے گا۔ متعدد لچھوں کا نظام بھی ایک لچھے کے نظام کی طرح حل ہوتے ہیں۔ شکل 4.10 میں ایک لچھے کا برقی رو i_1 اور دوسرے لچھے کا برقی رو i_2 ہے۔ اس نظام کے لئے درج ذیل لکھنا ممکن ہے جہاں W_m ذخیرہ توانائی کو ظاہر کرتی ہے۔

$$\partial W_{\text{برقی}} = i_1\,\mathrm{d}\lambda_1 + i_2\,\mathrm{d}\lambda_2 \tag{4.33}$$

$$\partial W_{\text{برقی}} = \partial W_{\text{میکانی}} + \partial W_m \tag{4.34}$$



شکل 4.11: دو لچھوں کے نظام میں مقناطیسی میدان میں توانائی۔

پہلی مساوات کو دوسری میں پُر کرتے ہوئے درج ذیل مساوات حاصل ہوتی ہے جس میں $\partial W_{\text{میکانی}} = F_m \,\mathrm{d}x$ لکھا گیا ہے۔

$$i_1 \,\mathrm{d}\lambda_1 + i_2 \,\mathrm{d}\lambda_2 = F_m \,\mathrm{d}x + \partial W_m \tag{4.35}$$

اس کی ترتیب نو درج ذیل دیگی۔

$$\partial W_m(\lambda_1, \lambda_2, x) = i_1 \,\mathrm{d}\lambda_1 + i_2 \,\mathrm{d}\lambda_2 - F_m \,\mathrm{d}x \tag{4.36}$$

اب بالکل مساوات 4.12 کی طرح درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\partial W_m(\lambda_1, \lambda_2, x) = \frac{\partial W_m}{\partial \lambda_1} \,\mathrm{d}\lambda_1 + \frac{\partial W_m}{\partial \lambda_2} \,\mathrm{d}\lambda_2 + \frac{\partial W_m}{\partial x} \,\mathrm{d}x \tag{4.37}$$

مساوات 4.36 اور 4.37 کے موازنہ سے درج ذیل تعلقات اخذ ہوتے ہیں۔

$$i_1 = \left.\frac{\partial W_m(\lambda_1, \lambda_2, x)}{\partial \lambda_1}\right|_{\lambda_2, x} \tag{4.38}$$

$$i_2 = \left.\frac{\partial W_m(\lambda_1, \lambda_2, x)}{\partial \lambda_2}\right|_{\lambda_1, x} \tag{4.39}$$

$$F_m = \left.\frac{\partial W_m(\lambda_1, \lambda_2, x)}{\partial x}\right|_{\lambda_1, \lambda_2} \tag{4.40}$$

ان مساوات کا استعمال تب ممکن ہو گا جب ہمیں توانائی W_m معلوم ہو لہٰذا ہم پہلے توانائی دریافت کرتے ہیں۔

شکل 4.10 میں لچھوں کو یوں طاقت دی جاتی ہے کہ λ_1 اور λ_2 صفر سے بالترتیب λ_{1_0} اور λ_{2_0} تک پہنچتے ہیں اور ساتھ ہی x صفر سے تبدیل ہو کر x_0 ہوتا ہے۔ اس عمل کو شکل 4.11 میں موٹی لکیر سے بطور "اصل راہ"

دکھایا گیا ہے۔ مساوات 4.17 کی طرح ذخیرہ توانائی کے تکمل کے لئے درج ذیل لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int\limits_{\text{اصل راہ}} \partial W_m = \int\limits_{\text{پہلی راہ}} \partial W_m + \int\limits_{\text{دوسری راہ}} \partial W_m + \int\limits_{\text{تیسری راہ}} \partial W_m \tag{4.41}$$

ہم دائیں ہاتھ تکملات کو باری باری حل کرتے ہیں۔

پہلی راہ پر λ_1 اور λ_2 صفر رہتے ہیں جبکہ x کی ابتدائی قیمت 0 اور اختتامی قیمت x_0 ہے۔یوں پہلی راہ پر تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int\limits_{\text{پہلی راہ}} \partial W_m = \int_0^0 i_1 \,\mathrm{d}\lambda_1 + \int_0^0 i_2 \,\mathrm{d}\lambda_2 - \int_0^{x_0} F_m \,\mathrm{d}x \tag{4.42}$$

کسی بھی تکمل کا ابتدائی اور اختتامی نقطہ ایک دوسرے جیسا ہونے کی صورت میں تکمل کی قیمت صفر ہوتی ہے لہٰذا درج بالا میں دائیں ہاتھ، پہلے دو تکملات صفر ہوں گے:

$$\int_0^0 i_1 \,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_0^0 i_2 \,\mathrm{d}\lambda_2 = 0 \tag{4.43}$$

پہلی راہ پر λ_1 اور λ_2 صفر ہیں،یعنی، دونوں لچھوں میں برقی رو صفر ہے، لہٰذا مقناطیسی بہاو اور قوت F_m صفر ہوں گے۔ یوں مساوات 4.42 میں قوت کا تکمل صفر ہو گا۔

$$\int_0^{x_0} F_m \,\mathrm{d}x = \int_0^{x_0} 0 \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{(صفر کا تکمل صفر ہو گا)} \tag{4.44}$$

مساوات 4.43 اور مساوات 4.44 کے نتائج کے تحت پہلی راہ پر تکمل صفر ہو گا۔

$$\int\limits_{\text{پہلی راہ}} \partial W_m = 0 \tag{4.45}$$

دوسری راہ پر λ_1 کی ابتدائی قیمت 0 اور اختتامی قیمت λ_{10} ہے، λ_2 صفر رہتا ہے جبکہ x کی قیمت x_0 رہتی ہے۔ یوں دوسری راہ پر تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int\limits_{\text{دوسری راہ}} \partial W_m = \int_0^{\lambda_{1_0}} i_1 \,\mathrm{d}\lambda_1 + \int_0^0 i_2 \,\mathrm{d}\lambda_2 - \int_{x_0}^{x_0} F_m \,\mathrm{d}x \tag{4.46}$$

تکمل کا ابتدائی اور اختتامی نقطہ ایک جیسا ہونے کی صورت میں تکمل صفر ہو گا:

$$\int_0^0 i_2 \, \mathrm{d}\lambda_2 = \int_{x_0}^{x_0} F_m \, \mathrm{d}x = 0$$

یوں مساوات 4.46 درج ذیل صورت اختیار کرتی ہے۔

$$\int_{\text{دوسری راہ}} \partial W_m = \int_0^{\lambda_{1_0}} i_1 \, \mathrm{d}\lambda_1 \tag{4.47}$$

یہاں مساوات 2.33، 2.36 اور 2.38 کی ضرورت پیش آئے گی جنہیں دوبارہ پیش کرتے ہیں۔

$$\lambda_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 \tag{4.48}$$

$$\lambda_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2 \tag{4.49}$$

$$L_{12} = L_{21} \tag{4.50}$$

مساوات 4.48 اور مساوات 4.49 کو i_1 اور i_2 کے لئے حل کے

$$i_1 = \frac{L_{22}\lambda_1 - L_{12}\lambda_2}{D} \tag{4.51}$$

$$i_2 = \frac{L_{11}\lambda_2 - L_{21}\lambda_1}{D} \tag{4.52}$$

حاصل ہو گا جہاں D درج ذیل ہے۔

$$D = L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21}$$

مساوات 4.47 کو مساوات 4.51 کے برابر ٹھرا کر، دوسری راہ پر λ_2 صفر لے کر درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int_0^{\lambda_{10}} \left(\frac{L_{22}\lambda_1 - L_{12}\lambda_2}{D} \right) \mathrm{d}\lambda_1 = \frac{L_{22}}{D} \int_0^{\lambda_{10}} \lambda_1 \, \mathrm{d}\lambda_1 = \frac{L_{22}\lambda_{1_0}^2}{2D}$$

یوں دوسری راہ پر تکمل کی قیمت درج ذیل ہو گی۔

$$\int_{\text{دوسری راہ}} \partial W_m = \frac{L_{22}\lambda_{1_0}^2}{2D} \tag{4.53}$$

تیسری راہ پر λ_1 کی قیمت λ_{10} اور x کی قیمت x_0 پر برقرار رہتی ہے جبکہ λ_2 کی ابتدائی قیمت 0 اور اختتامی قیمت λ_{20} ہے۔ یوں تیسری راہ پر تکمل درج ذیل ہو گا۔

$$\int_{\text{تیسری راہ}} \partial W_m = \int_{\lambda_{10}}^{\lambda_{10}} i_1 \, \mathrm{d}\lambda_1 + \int_0^{\lambda_{20}} i_2 \, \mathrm{d}\lambda_2^2 - \int_{x_0}^{x_0} F_m \, \mathrm{d}x \tag{4.54}$$

تکمل کا ابتدائی اور اختتامی نقطہ ایک جیسا ہونے کی صورت میں تکمل کی قیمت صفر ہوتی ہے لہٰذا درج بالا میں دائیں ہاتھ پہلا اور تیسرا تکمل صفر ہو گا:

$$\int_{\lambda_{10}}^{\lambda_{10}} i_1 \,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_{x_0}^{x_0} F_m \,\mathrm{d}x = 0 \tag{4.55}$$

مساوات 4.52 کی استعمال سے مساوات 4.54 کا باقی حصہ حل کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned}
\int_0^{\lambda_{20}} i_2 \,\mathrm{d}\lambda_2 &= \int_0^{\lambda_{20}} \left(\frac{L_{11}\lambda_2 - L_{21}\lambda_{10}}{D}\right) \mathrm{d}\lambda_2 \\
&= \frac{L_{11}}{D}\int_0^{\lambda_{20}} \lambda_2 \,\mathrm{d}\lambda_2 - \frac{L_{21}\lambda_{10}}{D}\int_0^{\lambda_{20}} \mathrm{d}\lambda_2 \\
&= \frac{L_{11}\lambda_{20}^2}{2D} - \frac{L_{21}\lambda_{10}\lambda_{20}}{D}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

مساوات 4.55 اور مساوات 4.56 کی نتائج سے تیسری راہ کا تکمل درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\int_{\text{تیسری راہ}} \partial W_m = \frac{L_{11}\lambda_{20}^2}{2D} - \frac{L_{21}\lambda_{1_0}\lambda_{20}}{D} \tag{4.57}$$

مساوات 4.45، 4.53 اور 4.57 کو جمع کر کے مساوات 4.41 کا درج ذیل حل حاصل ہو گا جہاں λ_{10}، λ_{20}، x_0 کی جگہ عمومی متغیرات λ_1، λ_2، x لکھے گئے ہیں۔

$$W_m(x, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{L_{22}\lambda_1^2}{2D} + \frac{L_{11}\lambda_2^2}{2D} - \frac{L_{21}\lambda_1\lambda_2}{D} \tag{4.58}$$

دو لچھوں کے نظام میں ہم-توانائی کی تعریف

$$W_m' = i_1\lambda_1 + i_2\lambda_2 - W_m$$

ہو گی۔ یوں درج ذیل ہو گا۔

$$\partial W_m' = i_1\partial\lambda_1 + \lambda_1\partial i_1 + i_2\partial\lambda_2 + \lambda_2\partial i_2 - \partial W_m$$

مساوات 4.36 استعمال کرتے ہوئے ہم-توانائی کے جزوی فرق کی مساوات حاصل ہو گی:

$$\partial W_m'(x, i_1, i_2) = \lambda_1 \,\mathrm{d}i_1 + \lambda_2 \,\mathrm{d}i_2 + F_m \,\mathrm{d}x \tag{4.59}$$

جبکہ λ_1 ، λ_2 اور F_m کی مساواتیں درج ذیل ہوں گی۔

$$\lambda_1 = \left.\frac{\partial W'_m(x,i_1,i_2)}{\partial i_1}\right|_{x,i_2} \tag{4.60}$$

$$\lambda_2 = \left.\frac{\partial W'_m(x,i_1,i_2)}{\partial i_2}\right|_{x,i_1} \tag{4.61}$$

$$F_m = \left.\frac{\partial W'_m(x,i_1,i_2)}{\partial x}\right|_{i_1,i_2} \tag{4.62}$$

مساوات 4.58 کی مقابل ہم-توانائی کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$W'_m(x,i_1,i_2) = \frac{1}{2}L_{11}(x)i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}(x)i_2^2 + L_{12}(x)i_1 i_2 \tag{4.63}$$

ہم-توانائی سے قوت حاصل کرتے ہیں:

$$F_m = \left.\frac{\partial W'_m(x,i_1,i_2)}{\partial x}\right|_{i_1,i_2} = \frac{i_1^2}{2}\frac{\mathrm{d}L_{11}(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{i_2^2}{2}\frac{\mathrm{d}L_{22}(x)}{\mathrm{d}x} + i_1 i_2\frac{\mathrm{d}L_{12}(x)}{\mathrm{d}x} \tag{4.64}$$

مثال 4.7: شکل 4.10 میں میکانی کام کو $\partial W_{\text{میکانی}} = T_m\,\mathrm{d}\theta$ لکھ کر توانائی کے طریقہ سے حل کریں۔

حل: توانائی کی مساوات

$$\partial W_{\text{برقی}} = \partial W_{\text{میکانی}} + \partial W_m$$

میں

$$\partial W_{\text{برقی}} = i_1\,\mathrm{d}\lambda_1 + i_2\,\mathrm{d}\lambda_2$$

اور $\partial W_{\text{میکانی}} = T_m\,\mathrm{d}\theta$ پر کر کے ترتیب نو سے درج ذیل حاصل ہو گا۔

$$\partial W_m = i_1\,\mathrm{d}\lambda_1 + i_2\,\mathrm{d}\lambda_2 - T_m\,\mathrm{d}\theta \tag{4.65}$$

W_m کے جزوی فرق

$$\partial W_m(\lambda_1,\lambda_2,\theta) = \frac{\partial W_m}{\partial\lambda_1}\,\mathrm{d}\lambda_1 + \frac{\partial W_m}{\partial\lambda_2}\,\mathrm{d}\lambda_2 + \frac{\partial W_m}{\partial\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

کا مساوات 4.65 کے ساتھ موازنہ کرنے سے درج ذیل اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

$$i_1 = \left.\frac{\partial W_m(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \lambda_1}\right|_{\lambda_2, \theta} \tag{4.66}$$

$$i_2 = \left.\frac{\partial W_m(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \lambda_2}\right|_{\lambda_1, \theta} \tag{4.67}$$

$$T_m = -\left.\frac{\partial W_m(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \theta}\right|_{\lambda_1, \lambda_2} \tag{4.68}$$

مساوات 4.65 عین مساوات 4.36 کی مانند ہے۔مساوات 4.65 حل کرنے کا ایک ایک قدم مساوات 4.36 حل کرنے کی طرح ہے، بس فاصلہ x کی جگہ زاویہ θ آئے گا۔یوں جواب میں میدانی توانائی کے متغیرات $\lambda_1, \lambda_2, \theta$ ہوں گے:

$$W_m(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \frac{L_{22}\lambda_1^2}{2D} + \frac{L_{11}\lambda_2^2}{2D} - \frac{L_{21}\lambda_1\lambda_2}{D} \tag{4.69}$$

اسی طرح ہم-توانائی کے لئے درج ذیل ہوں گے۔

$$\partial W'_m(i_1, i_2, \theta) = \lambda_1 \,\mathrm{d}i_1 + \lambda_2 \,\mathrm{d}i_2 + T_m \,\mathrm{d}\theta \tag{4.70}$$

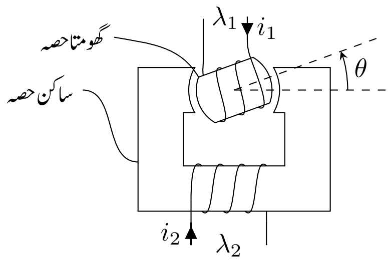
$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \left.\frac{\partial W'_m(i_1, i_2, \theta)}{\partial i_1}\right|_{i_2, \theta} \\
\lambda_2 &= \left.\frac{\partial W'_m(i_1, i_2, \theta)}{\partial i_2}\right|_{i_1, \theta} \\
T_m &= \left.\frac{\partial W'_m(i_1, i_2, \theta)}{\partial \theta}\right|_{i_1, i_2}
\end{aligned} \tag{4.71}$$

ہم-توانائی کی مساوات درج ذیل ہو گی۔

$$W'_m(i_1, i_2, \theta) = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 + L_{12}i_1i_2 \tag{4.72}$$

□

مثال 4.8: شکل 4.12 میں دو لچھوں کا نظام دکھایا گیا ہے۔اس نظام کا ایک حصہ ساکن رہتا ہے اور دوسرا گھوم سکتا ہے۔افقی لکیر سے گھڑی کی سوئیوں کے مخالف رخ گھومتے ہوئے زاویہ θ ناپا جاتا ہے۔لچھوں کی خود امالہ



شکل 4.12: دو لچھوں کے نظام میں قوت مروڑ۔

اور مشترکہ امالہ مندرجہ ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
L_{11} &= 20 + 30\cos 2\theta \\
L_{22} &= (20 + 30\cos 2\theta) \times 10^{-3} \\
L_{12} &= 0.15\cos\theta
\end{aligned}
$$

برقی رو $i_1 = 0.02\,\mathrm{A}, i_2 = 5\,\mathrm{A}$ پر **قوت مروڑ** T_m معلوم کریں۔

حل: مساوات 4.72 ہم-توانائی دیتی ہے۔

$$W'_m = \frac{1}{2}(20 + 30\cos 2\theta)i_1^2 + \frac{1}{2}(20 + 30\cos 2\theta)(10^{-3})i_2^2 + (0.15\cos\theta)i_1 i_2$$

مساوات 4.71 کا آخری جزو قوت مروڑ دیتی ہے۔

$$
\begin{aligned}
T_m = \frac{\partial W'_m}{\partial \theta} &= -30 i_1^2 \sin 2\theta - 30 \times 10^{-3} i_2^2 \sin 2\theta - 0.15 i_1 i_2 \sin\theta \\
&= -0.012\sin 2\theta - 0.75\sin 2\theta - 0.015\sin\theta \\
&= -0.762\sin 2\theta - 0.015\sin\theta
\end{aligned}
$$

قوت مروڑ کی علامت منفی ہے لہٰذا یہ زاویہ میں تبدیلی کی مخالفت کرے گا۔یوں اگر آپ زاویہ بڑھائیں (مثبت θ) تو یہ نظام زاویہ کم کرنے کے رخ قوت مروڑ (منفی T_m) پیدا کرے گا اور اگر آپ زاویہ کم (منفی θ) کرنے کی کوشش کریں تو یہ نظام زاویہ بڑھانے کے رخ قوت مروڑ (مثبت T_m) پیدا کرے گا۔سادہ زبان میں گھومتا حصہ اُفقی لکیر پر رہنے کی کوشش کرے گا۔ □

فرہنگ