برقی آلات

خالد خان یوسفزئی
کامسیٹ انسٹیٹیوٹ آف انفارمیشن ٹیکنالوجی، اسلام آباد
khalidyousafzai@comsats.edu.pk

عنوان

دیباچہ

گزشتہ چند برسوں سے حکومتِ پاکستان اعلیٰ تعلیم کی طرف توجہ دے رہی ہے جس سے ملک کی تاریخ میں پہلی مرتبہ اعلیٰ تعلیمی اداروں میں تحقیق کا رجحان پیدا ہوا ہے۔امید کی جاتی ہے کہ یہ سلسلہ جاری رہے گا۔

پاکستان میں اعلیٰ تعلیم کا نظام انگریزی زبان میں رائج ہے۔دنیا میں تحقیقی کام کا بیشتر حصہ انگریزی زبان میں ہی چھپتا ہے۔انگریزی زبان میں ہر موضوع پر لاتعداد کتابیں پائی جاتی ہیں جن سے طلبہ و طالبات استفادہ حاصل کر سکتے ہیں۔

ہمارے ملک میں طلبہ و طالبات کی ایک بہت بڑی تعداد بنیادی تعلیم اردو زبان میں حاصل کرتی ہے۔ان کے لئے انگریزی زبان میں موجود مواد سے استفادہ حاصل کرنا تو ایک طرف، انگریزی زبان ازخود ایک رکاوٹ کے طور پر ان کے سامنے آتی ہے۔یہ طلبہ و طالبات ذہین ہونے کے باوجود آگے بڑھنے اور قوم و ملک کی بھر پور خدمت کرنے کے قابل نہیں رہتے۔ایسے طلبہ و طالبات کو اردو زبان میں نصاب کی اچھی کتابیں درکار ہیں۔ہم نے قومی سطح پر ایسا کرنے کی کوئی خاطر خواہ کوشش نہیں کی۔

میں برسوں تک اس صورت حال کی وجہ سے پریشانی کا شکار رہا۔کچھ کرنے کی نیت رکھنے کے باوجود کچھ نہ کر سکتا تھا۔میرے لئے اردو میں ایک صفحہ بھی لکھنا ناممکن تھا۔آخر کار ایک دن میں نے اپنی اس کمزوری کو کتاب نہ لکھنے کا جواز بنانے سے انکار کر دیا اور یوں یہ کتاب وجود میں آئی۔

یہ کتاب اردو زبان میں تعلیم حاصل کرنے والے طلبہ و طالبات کے لئے نہایت آسان اردو میں لکھی گئی ہے۔کوشش کی گئی ہے کہ اسکول کی سطح پر نصاب میں استعمال تکنیکی الفاظ ہی استعمال کئے جائیں۔جہاں ایسے الفاظ موجود نہ تھے وہاں روز مرہ میں استعمال ہونے والے الفاظ چنے گئے۔تکنیکی الفاظ کی چنائی کے وقت اس بات کا دہان رکھا گیا کہ ان کا استعمال دیگر مضامین میں بھی ممکن ہو۔

کتاب میں بین الاقوامی نظامِ اکائی استعمال کی گئ ہے۔اہم متغیرات کی علامتیں وہی رکھی گئی ہیں جو موجودہ نظامِ تعلیم کی نصابی کتابوں میں رائج ہیں۔یوں اردو میں لکھی اس کتاب اور انگریزی میں اسی مضمون پر لکھی کتاب پڑھنے والے طلبہ و طالبات کو ساتھ کام کرنے میں دشواری نہیں ہو گی۔

امید کی جاتی ہے کہ یہ کتاب ایک دن خالصتاً اردو زبان میں انجنیئرنگ کی نصابی کتاب کے طور پر استعمال کی جائے گی۔اردو زبان میں الیکٹریکل انجنیئرنگ کی مکمل نصاب کی طرف یہ پہلا قدم ہے۔

اس کتاب کے پڑھنے والوں سے گزارش کی جاتی ہے کہ اسے زیادہ سے زیادہ طلبہ و طالبات تک پہنچانے میں مدد دیں اور انہیں جہاں اس کتاب میں غلطی نظر آئے وہ اس کی نشاندہی میری ای۔میل پر کریں۔میں ان کا نہایت شکر گزار ہوں گا۔

اس کتاب میں تمام غلطیاں مجھ سے ہی ہوئی ہیں البتہ اسے درست بنانے میں بہت لوگوں کا ہاتھ ہے ۔میں ان سب کا شکریہ ادا کرتا ہوں۔ یہ سلسلہ ابھی جاری ہے اور مکمل ہونے پر ان حضرات کے تاثرات یہاں شامل کئے جائیں گے۔
میں یہاں کامسیٹ یونیورسٹی اور ہائر ایجوکیشن کمیشن کا شکریہ ادا کرنا چاہتا ہوں جن کی وجہ سے ایسی سرگرمیاں ممکن ہوئیں۔

خالد خان یوسفزئی
28 اکتوبر 2011

الباب 1

برقی اور میکانی توانائی کا باہمی تبادلہ

برقی رو یا مقناطیسی بہاؤ کی مدد سے برقی توانائی کو میکانی توانائی یا میکانی توانائی کو برقی توانائی میں تبدیل کیا جاتا ہے۔ مختلف مشین میں یہ عمل ہوتا ہے۔ ناپنے کے مشین نہایت کم طاقت کا تبادلہ کرتے ہیں۔ ان میں لاؤڈ سپیکر، مائکروفون وغیرہ شامل ہیں۔ ان کے برعکس ایک اور قسم کے مشین قوت پیدا کرتے ہیں۔ ان میں برقی مقناطیس، رِیلے[1] وغیرہ شامل ہیں۔ ایک تیسری قسم، جن میں برقی موٹر اور جنریٹر شامل ہیں، لگاتار توانائی کو ایک شکل سے دوسری شکل میں تبدیل کرتے ہیں۔

اس باب میں مقناطیسی بہاؤ کی مدد سے توانائی کے تبادلہ پر غور کیا جائے گا۔برقی رو کی مدد سے توانائی کے تبادلہ کو انہیں طرح کے طریقوں سے حل کیا جاتا ہے اگرچہ ان کا تذکرہ اس کتاب میں نہیں کیا جائے گا۔

اس باب میں جو تراکیب ہم سیکھیں گے وہ بہت اہمیت رکھتے ہیں اور انجنیئرنگ میں بہت سے مسائل حل کرنے میں مددگار ثابت ہوتے ہیں۔

1.1 مقناطیسی نظام میں قوت اور مروڑ

اگر ایک برقی میدان میں چارج q رکھا جائے تو اس پر قوت

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} \tag{1.1}$$

پائی جاتی ہے۔اگر چارج مثبت ہو تو یہ قوت برقی شدت $\boldsymbol{E}$ کی سمت میں ہوتی ہے اور اگر چارج منفی ہو تو یہ قوت $\boldsymbol{E}$ کی الٹ سمت میں ہوتی ہے۔ اسی طرح اگر ایک چارج مقناطیسی میدان میں حرکت کر رہا ہو اور اس کی سمتی رفتار[2] $\boldsymbol{v}$ ہو تو اس پر قوت

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{1.2}$$

[1] relay
[2] velocity

پائی جاتی ہے۔ اس مرتبہ مثبت چارج پر قوت کی سمت دائیں ہاتھ کے قانون[3] سے معلوم کی جاتی ہے۔ اگر دائیں ہاتھ کی چار انگلیاں $\boldsymbol{v}$ کی سمت میں رکھ کر انہیں $\boldsymbol{B}$ کی سمت میں موڑا جائے تو انگوٹھا $\boldsymbol{F}$ کی سمت میں ہوگا۔ منفی چارج پر قوت اس کے مخالف سمت میں ہوگی۔یہاں سمتی رفتار q اور $\boldsymbol{B}$ کے مابین ہے۔ اگر ایک چارج بیک وقت مقناطیسی اور برقی میدان میں حرکت کر رہا ہو تب اس پر قوت ہمیں گزشتہ دو قوانین ملا کر یعنی مساوات لورینز[4] سے ملتی ہے۔

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \tag{1.3}$$

مساوات 1.2 میں اگر $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{L}/\,\mathrm{d}t$ لی جائے تو اسے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= q\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{B}\right)\\ &= \frac{q}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}\right)\\ &= i\left(\mathrm{d}\boldsymbol{L} \times \boldsymbol{B}\right)\end{aligned} \tag{1.4}$$

مثال 1.1: شکل 1.1 میں ایک لچھا مقناطیسی میدان میں دکھایا گیا ہے۔لچھے کی رداس 15 سم، محوری لمبائی 50 سم اور اس میں برقی رو 5 ایمپیئر ہے۔کثافتِ مقناطیسی بہاؤ کو نقطہ دار نوک والی لکیروں سے شمالی قطب سے جنوبی قطب کی جانب دکھایا گیا ہے۔اگر کثافتِ مقناطیسی بہاؤ 0.55 ٹیسلہ ہو تو

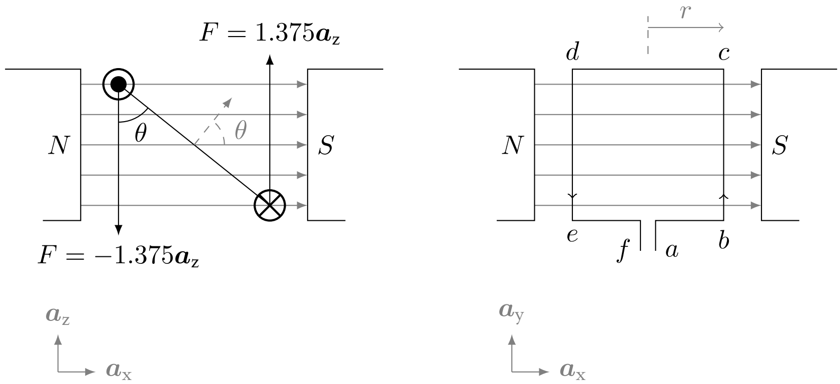
- لچھے کے اطراف پر قوت معلوم کریں اور
- لچھے پر مروڑ $\boldsymbol{\tau}$ معلوم کریں

حل: شکل کے حصہ الف اور با میں کارتیسی اکائی سمتیہ دیئے گئے ہیں۔اگر برقی تار کے سروں کو نظر انداز کیا جائے اور اسے ایک بند دائرہ سمجھا جائے تو حصہ الف سے تار کی اطراف کی لمبائیاں برقی رو کی سمت

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_{bc} &= l\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\ \boldsymbol{L}_{cd} &= -2r\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\\ \boldsymbol{L}_{de} &= -l\boldsymbol{a}_{\mathrm{y}}\\ \boldsymbol{L}_{eb} &= 2r\boldsymbol{a}_{\mathrm{x}}\end{aligned}$$

---

[3] right hand rule
[4] Lorenz equation



شکل 1.1: ایک چکر کے لچھے پر قوت اور مروڑ

ہیں جبکہ $\boldsymbol{B} = B_0\boldsymbol{a}_x$ ہے۔یوں مساوات 1.2 سے ان اطراف پر قوت

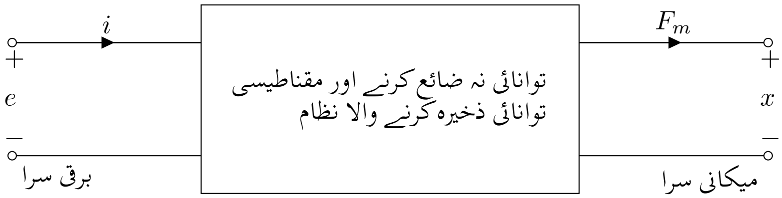
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{bc} &= i\left(\boldsymbol{L}_{bc} \times B_0\boldsymbol{a}_x\right)\\
&= 5\left(0.5\boldsymbol{a}_y \times 0.55\boldsymbol{a}_x\right)\\
&= -1.375\boldsymbol{a}_z\\
\boldsymbol{F}_{cd} &= 5\left(-0.3\boldsymbol{a}_x \times 0.55\boldsymbol{a}_x\right)\\
&= 0\\
\boldsymbol{F}_{de} &= 5\left(-0.5\boldsymbol{a}_y \times 0.55\boldsymbol{a}_x\right)\\
&= 1.375\boldsymbol{a}_z\\
\boldsymbol{F}_{ea} &= 0
\end{aligned}
$$

نیوٹن ہو گی۔ہم دیکھتے ہیں کہ قوت محوری لمبائی کی جانب اطراف پر ہی لاگو ہے۔یہ دو قوت حصہ با میں دکھائے گئے ہیں جہاں سے یہ واضح ہے کہ یہ مروڑ پیدا کریں گی۔ اس مروڑ کی سمت دائیں ہاتھ کے قانون سے بھی با آسانی معلوم کی جا سکتی ہے۔مروڑ

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\tau} &= -1.375 \times 2 \times 0.15 \times \sin\theta\boldsymbol{a}_y\\
&= -0.4125\sin\theta\boldsymbol{a}_y
\end{aligned}
$$

نیوٹن-میٹر ہے۔

ان مساوات کا استعمال صرف سادہ ترین جگہوں ممکن ہوتا ہے۔ استعمال میں آنے والی مشین میں ان مساوات سے قوت کا تعین کرنا نہایت مشکل ثابت ہوتا ہے۔ اب ہم وہ طریقہ سیکھتے ہیں جس کی مدد سے ہم مختلف مشین میں قوت کا تعین کر سکیں گے۔ اس طریقہ کو توانائی کا طریقہ کہتے ہیں اور یہ توانائی کے اٹل ہونے پر مبنی ہے۔



شکل 1.2: برقی توانائی سے میکانی توانائی کے تبادلہ کا نظام۔

گھومتی برقی مشین میں عموماً دو لچھے ہوتے ہیں۔ ان میں ایک لچھا مشین کے ساکن حصہ پہ لپٹا ہوتا ہے اور اسی لئے ساکن رہتا ہے۔ لہٰذا اس کو ساکن لچھا[5] کہتے ہیں ۔ دوسرا لچھا مشین کے گھومنے والے حصہ پہ لپٹا ہوتا ہے اور مشین گھومنے سے یہ بھی گھومتا ہے۔ لہٰذا اس کو گھومتا لچھا[6] کہتے ہیں۔ ایسے مشین کو اس طرح سمجھنا نہایت آسان ہے کہ ہم ان دو لچھوں کو دو مقناطیس سمجھیں۔ جس طرح دو مقناطیس اگر قریب لائے جائیں تو یہ کوشش کرتے ہیں کہ ایک کا شمال N دوسرے کے جنوب S کی سمت ہو۔

موٹر میں دونوں لچھے مقناطیس پیدا کرتے ہیں۔ ساکن لچھے کا مقناطیسی بہاؤ، گھومتے لچھے کے مقناطیسی بہاؤ سے کچھ آگے رہتا ہے اور اسے کھینچتا رہتا ہے۔ ایسا کرنے سے یہ کام کرتا ہے۔ جنریٹر میں اس کے برعکس گھومتا لچھا، ساکن لچھے پر کام کرتا ہے۔

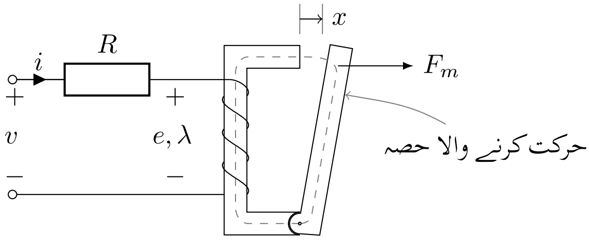
توانائی کے طریقے کو شکل 1.2 کی مدد سے سمجھا جا سکتا ہے۔یہاں مقناطیسی نظام کو ایک ڈبہ کی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس کو برقی توانائی مہیا کی جاتی ہے جس سے یہ میکانی توانائی پیدا کرتا ہے۔ یہاں برقی توانائی کے دو متغیرہ e اور i ہیں اور میکانی توانائی کے متغیرہ فاصلہ x اور میدانی قوت[7] F_m ہیں۔ اس شکل میں بائیں جانب یعنی ابتدائی یا اولین جانب i کا رُخ باہر سے اندر کی طرف ہے اور دائیں جانب یعنی ثانوی جانب F_m کا رُخ اندر سے باہر کی جانب ہے۔یہ ٹرانسفارمر دور کے شکل کی مانند ہے۔

اگر نظام میں توانائی کی ضیاع کو توانائی کے ذخیرہ ہونے سے علیحدہ کرنا ممکن ہو تو ایسی صورت میں توانائی کے ضیاع کو بیرونی رکن سے پیش کیا جاتا ہے۔ شکل 1.3 میں ایک ایسا ہی نظام دکھایا گیا ہے جس میں لچھا برقی نظام کو پیش کرتا ہے اور حرکت کرنے والا حصہ میکانی نظام کو پیش کرتا ہے۔ یہاں لچھے میں توانائی کے ضیاع کو، بیرونی مزاحمت R سے ظاہر کیا گیا ہے۔

توانائی کا بنیادی اصول کہتا ہے کہ توانائی نا تو پیدا کی جا سکتی ہے اور نا ہی اسے تباہ کیا جا سکتا ہے۔ اس کو صرف ایک قسم سے دوسرے قسم کی توانائی میں تبدیل کیا جا سکتا ہے۔ لہٰذا اسے جو برقی توانائی $\partial W_{\text{برقی}}$ دی جائے اس میں سے کچھ میکانی توانائی $\partial W_{\text{میکانی}}$ میں تبدیل ہو گی، کچھ مقناطیسی میدان میں ذخیرہ ہو گی یعنی $\partial W_{\text{مقناطیسی}}$ اور بقایا مختلف طریقوں سے ضائع $\partial W_{\text{ضائع}}$ ہو گی جو ہمارے کسی کام نہ آ سکے گی۔ یعنی

$$\partial W_{\text{برقی}} = \partial W_{\text{میکانی}} + \partial W_{\text{مقناطیسی}} + \partial W_{\text{ضائع}} \tag{1.5}$$

[5] stator coil
[6] rotor coil
[7] میدانی قوت F_m میں چھوٹی لکھائی میں m لفظ میدانی کو ظاہر کر رہا ہے۔



شکل 1.3: قوت پیدا کرنے والا آلا۔

اگر برقی توانائی کے ضیاع کو نظرانداز کیا جائے تو

$$\partial W_{\text{برقی}} = \partial W_{\text{میکانی}} + \partial W_{\text{مقناطیسی}} \tag{1.6}$$

اس مساوات کو ∂t سے تقسیم کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\partial W_{\text{برقی}}}{\partial t} = \frac{\partial W_{\text{میکانی}}}{\partial t} + \frac{\partial W_{\text{مقناطیسی}}}{\partial t} \tag{1.7}$$

یہ مساوات توانائی کی بجائے طاقت کی بات کرتا ہے۔ اگر ہم بائیں ہاتھ کی جانب یعنی برقی طاقت کو ei لکھیں اور دائیں ہاتھ کی جانب میکانی حصہ میں $\partial W_{\text{میکانی}} = F_m \partial x$ لکھیں تو

$$ei = F_m \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial W_m}{\partial t} \tag{1.8}$$

حاصل ہوتا ہے جہاں $W_{\text{مقناطیسی}}$ کو W_m لکھا گیا ہے۔مساوات کے استعمال سے اسے یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$i \frac{\partial \lambda}{\partial t} = F_m \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial W_m}{\partial t} \tag{1.9}$$

یا

$$i \partial \lambda = F_m \partial x + \partial W_m \tag{1.10}$$

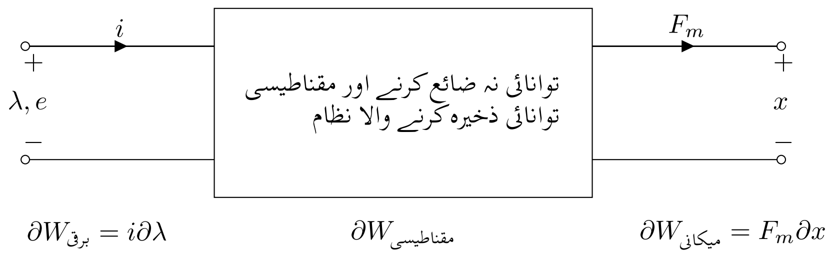
مساوات 1.10 توانائی کے طریقہ کی بنیاد ہے۔ یہ مساوات استعمال کرتے وقت یاد رہے کہ قوت بنیادی طور پر لورینز کے قانون[8] سے ہی پیدا ہوتی ہے۔مساوات 1.10 میں برقی متغیرہ i اور e کی بجائے i اور λ ہیں۔ لہٰذا شکل 1.2 کو شکل 1.4 کی طرح بھی بنایا جا سکتا ہے۔

کسی بھی تفاعل[9] $z(x, y)$ کے لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\partial z(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} \, \mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y} \, \mathrm{d}y$$

---

[8] Lorenz equation
[9] function



شکل 1.4: توانائی کی شکل تبدیل کرنے والا ایک نظام۔

اسی طرح ہم $W_m(x,\lambda)$ کے لئے لکھ سکتے ہیں۔

$$\partial W_m(x,\lambda) = \frac{\partial W_m}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial W_m}{\partial \lambda}\,\mathrm{d}\lambda \tag{1.11}$$

اس مساوات اور مساوات 1.10 سے ہم اخذ کر سکتے ہیں کہ

$$F_m(x,\lambda) = -\left.\frac{\partial W_m(x,\lambda)}{\partial t}\right|_{\lambda_0} \tag{1.12}$$

$$i(x,\lambda) = \left.\frac{\partial W_m(x,\lambda)}{\partial \lambda}\right|_{x_0} \tag{1.13}$$

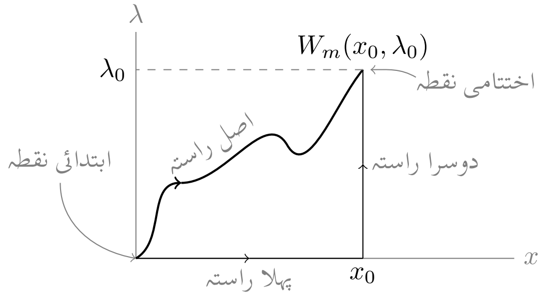
اگر ہم مقناطیسی میدان میں مقناطیسی توانائی $W_m(x,\lambda)$ معلوم کر سکیں تو مساوات 1.12 کو استعمال کر کے ہم قوت کا حساب لگا سکتے ہیں۔ ہم اگلے حصہ میں یہی کرتے ہیں۔

1.2 تبادلہ توانائی والا ایک لچھے کا نظام

شکل میں ایک لچھے کا سادہ نظام دکھایا گیا ہے۔ لچھے میں برقی ضیاع کو بیرونی مزاحمت سے پیش کیا گیا ہے۔ میکانی نظام میں حرکت کرنے والے حصہ کے کمیت کو نظرانداز کیا گیا ہے۔ اگر اس کمیت کے اثر کا بھی حساب لگانا ہو تو اس کمیت کو ایک بیرونی کمیت تصور کیا جا سکتا ہے۔ اس طرح تبادلہ توانائی کے نظام پر غور کرنا آسان ہو جاتا ہے۔

قوت پیدا کرنے والے مشین میں حرکت ناگزیر ہے۔عموماً حرکت تب ممکن ہوتی ہے جب مقناطیسی مرکز میں خلا ہو جو کم اور زیادہ ہو سکے۔ عموماً $\Re_a \gg \Re_c$ ہوتا ہے۔لہٰذا جب بھی خلائی درز رکنے والی مقناطیسی دور حل کرنی ہو، ہم $\Re_c$ کو نظرانداز کر سکتے ہیں۔ایسا کرنے سے، جیسا مساوات میں دیا گیا ہے، ہم مقناطیسی دباؤ τ اور مقناطیسی بہاؤ ϕ کو براہ راست متناسب لکھ سکتے ہیں۔ اسی طرح مساوات کو اب ہم یوں لکھ سکتے ہیں

$$\lambda = L(x)i \tag{1.14}$$



شکل 1.5: مقناطیسی میدان میں توانائی۔

اس مساوات میں امالہ کو $L(x)$ لکھ کر اس بات کی نشان دہی کی گئی ہے کہ یہ صرف اور صرف شکل میں خلا کی لمبائی x پر منحصر ہے۔

شکل میں قوت F_m کی سمت میں طے ہونے والا فاصلہ x ہے۔ یوں میکانی کام $\partial W_{\text{میکانی}} = F_m \,\mathrm{d}x$ کے برابر ہو گا جبکہ $\partial W_{\text{برقی}} = i \,\mathrm{d}\lambda$۔ یوں شکل کو مساوات 1.10 ظاہر کرتی ہے۔ اگر ہمیں مقناطیسی میدان میں ذخیرہ توانائی W_m معلوم کرنی ہو تو ہمیں مساوات 1.10 کا تکمل[10] لینا ہوگا۔ یعنی

$$\int \partial W_m = \int i(x,\lambda)\,\mathrm{d}\lambda + \int F_m(x,\lambda)\,\mathrm{d}x \tag{1.15}$$

اس تکمل کا حصول شکل 1.5 سے واضح ہوگا۔ابتدائی نقطے پر مقناطیسی نظام کو کوئی برقی توانائی نہیں دی گئی۔ اس لئے اس میں برقی رو صفر ہے۔ برقی رو صفر ہونے کی وجہ سے مقناطیسی بہاؤ اور اِرتَباطِ بہاؤ بھی صفر ہے۔اسی وجہ سے مقناطیسی میدان میں مقناطیسی توانائی بھی صفر ہے۔یوں قوت اور حرکت بھی صفر ہے۔ یعنی ابتدائی نقطہ پر

$$i = \phi = \lambda = W_m = F_m = x = 0$$

ہے۔ابتدائی نقطہ شکل 1.5 میں دکھایا گیا ہے۔ ہم اب لچھے کو برقی توانائی فراہم کرتے ہیں۔ لچھے میں برقی رو رواں ہوتی ہے جس سے قوت اور حرکت پیدا ہوتی ہے۔ ہم آخر کار اختتامی نقطے پہ پہنچ جاتے ہیں۔اختتامی نقطہ بھی شکل میں دکھایا گیا ہے۔ اس نقطہ پہ $\lambda = \lambda_0$ اور $x = x_0$ ہے اور یہاں مقناطیسی میدان میں توانائی $W_m(x_0,\lambda_0)$ ہے۔ہم ابتدائی نقطہ سے اختتامی نقطہ تک پہنچنے کے لئے برقی توانائی کو یوں بڑھاتے ہیں کہ λ اور x شکل 1.5 میں موٹی لکیر سے دکھائے اصل راستے پر رہیں۔لہٰذا ہمیں آخری نقطہ پہ مقناطیسی میدان میں مقناطیسی توانائی $W_m(x_0,\lambda_0)$ معلوم کرنے کے لئے مساوات کا اصل راستے پہ تکمل کرنا ہوگا۔ ایسا کرنا خاصا مشکل کام ہے۔ بجائے یہ ہم ایک بہتر راستہ اختیار کرتے ہیں۔

ہم اس حقیقت سے فائدہ اٹھاتے ہیں کہ مقناطیسی میدان ایک قدامت پسند میدان[11] ہے جس کا مطلب ہے کہ مقناطیسی میدان میں مقناطیسی توانائی صرف اور صرف اختتامی نقطہ کے x_0 اور λ_0 کی مقدار پر

[10] integral
[11] conservative field

منحصر ہے[12]۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ ہم جس راستے سے بھی آخری نقطہ تک پہنچیں ہمیں مقناطیسی میدان میں مقناطیسی توانائی یکساں ملے گی۔ لہٰذا ہم تکمل کرتے وقت شکل 1.5 میں ابتدائی نقطہ سے پہلے راستے چلتے ہیں اور جب ہم فاصلہ x_0 طے کر لیں تو یہاں سے دوسرا راستہ اختیار کر کے اختتامی نقطہ (x_0, λ_0) پہ پہنچتے ہیں۔ لہٰذا ہم مساوات کو اب دو ٹکڑوں میں لکھیں گے، نقطہ $0, 0$ سے نقطہ $(x_0, 0)$ تک اور پھر یہاں سے نقطہ (x_0, λ_0) تک

$$\int_{\text{اصل راستہ}} \partial W_m = \int_{\text{پہلا راستہ}} \partial W_m + \int_{\text{دوسرا راستہ}} \partial W_m \tag{1.16}$$

اس مساوات کی دائیں جانب جز کو باری باری دیکھتے ہیں۔پہلے راستے تکمل کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{\text{پہلا راستہ}} \partial W_m = \int_0^0 i(x, 0)\,\mathrm{d}\lambda - \int_0^{x_0} F_m(x, 0)\,\mathrm{d}x \tag{1.17}$$

اس راستے جیسے شکل سے ظاہر ہے اگر ہم $x = 0$ سے $x = x_0$ تک چلیں تو اس پورے راستے پر λ صفر کے برابر ہی رہتا ہے۔ مساوات میں اس بات کو برقی رو $i(x, 0)$ اور قوت $F_m(x, 0)$ لکھ کر واضح کیا گیا ہے۔ چونکہ λ کے شروع اور آخری مقدار برابر ہیں لہٰذا اس مساوات میں $\int_0^0 i(x, 0)\,\mathrm{d}\lambda = 0$ ہے۔

اگر $\lambda = 0$ ہو تو مقناطیسی بہاؤ بھی صفر ہوگا۔ مقناطیسی بہاؤ کے صفر ہونے کا مطلب ہے کہ کوئی مقناطیسی اثر موجود نہیں لہٰذا قوت F_m بھی صفر ہوگا۔ اور ہم جانتے ہیں کہ صفر کا تکمل صفر ہی ہوتا ہے۔ لہٰذا اس مساوات میں $\int_0^{x_0} F_m(x, 0)\,\mathrm{d}x = 0$ ہوگا۔ یوں پہلے راستے پر تکمل یعنی مساوات صفر کے برابر ہے یعنی

$$\int_{\text{پہلا راستہ}} \partial W_m = \int_0^0 i(x, 0)\,\mathrm{d}\lambda - \int_0^{x_0} F_m(x, 0)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.18}$$

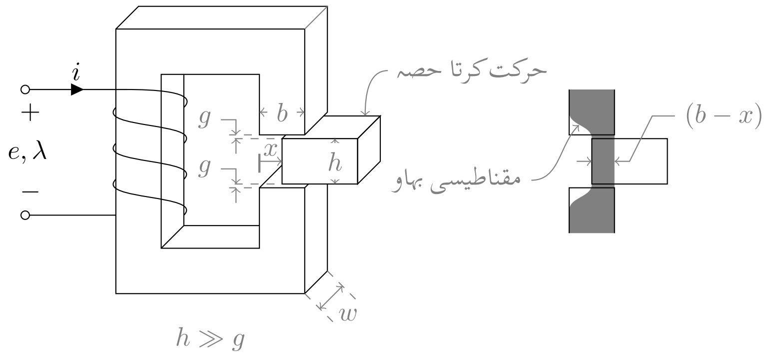
اسی طرح مساوات کی دوسرے راستے کے تکمل کے جُز کو یوں لکھا جا سکتا ہے۔

$$\int_{\text{دوسرا راستہ}} \partial W_m = \int_0^{\lambda_0} i(x_0, \lambda)\,\mathrm{d}\lambda - \int_{x_0}^{x_0} F_m(x_0, \lambda)\,\mathrm{d}x \tag{1.19}$$

اس میں ہم دیکتے ہیں کہ پورے راستے $x = x_0$ رہتا ہے۔ قوت کا تکمل صفر ہے چونکہ x کے ابتدائی اور اختتامی قیمتیں برابر ہیں۔ یعنی

$$\int_{x_0}^{x_0} F_m(x_0, \lambda)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.20}$$

[12] تجاذبی میدان بھی قدامت پسند میدان ہے اسی لئے اگر کمیت m کو کسی بھی راستے h کی بلندی تک لے جایا جائے تو اس کی توانائی mgh ہو گی۔



شکل 1.6: حرکت اور توانائی۔

آخر میں رہ گیا برقی رو کا تکمل۔ مساوات کو استعمال کرتے ہوئے

$$\int_0^{\lambda_0} i(x_0, \lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{L(x_0)} \int_0^{\lambda_0} \lambda\,\mathrm{d}\lambda = \frac{\lambda_0^2}{2L(x_0)} \tag{1.21}$$

اس طرح ہمیں آخر کار مقناطیسی میدان میں توانائی کی مساوات حاصل ہو گئی۔

$$W = \frac{\lambda_0^2}{2L(x_0)} \tag{1.22}$$

اس مساوات کی مدد سے مساوات کے ذریعہ قوت $F_m(x, \lambda)$ اور مساوات کے ذریعہ برقی رو $i(x, \lambda)$ کا حساب اب ممکن ہے۔

مثال 1.2: شکل 1.6 میں حرکت کرنے والا ایک مقناطیسی نظام دکھایا گیا ہے۔ حرکت کرنے والے حصے اور ساکن حصے کے مابین خلائی درز g ہے۔ اگر $N = 500$، $g = 1\,\mathrm{mm}$، $b = 0.2\,\mathrm{m}$، $w = 0.4\,\mathrm{m}$ اور $i = 30\,\mathrm{A}$ ہوں تو اس خلائی درز میں توانائی W_m معلوم کریں۔

حل: چونکہ $h \gg g$ ہے لہٰذا مقناطیسی بہاو کا بیشتر حصہ حرکت کرتے حصے سے گزرے گا۔ ساکن حصے میں مقناطیسی بہاو خلائی درز کے قریب مڑ کر حرکت کرتے حصے میں سے گزرے گا۔ ہمیں معلوم ہے کہ $W_m = \frac{\lambda^2}{2L}$ اور $L = \lambda i$ ہیں لہٰذا $W_m = \frac{1}{2}Li^2$ لکھا جا سکتا ہے جہاں $L = \frac{N^2\mu_0 A_g}{2g}$ اور $A_g = w(b-x)$ کے برابر ہیں۔ یوں

$$\begin{aligned}
W_m &= \frac{1}{2}\frac{N^2\mu_0 A_g}{2g} i^2 \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{500^2 \times 4\pi 10^{-7} \times 0.4(0.2-x)}{2 \times 0.001} \times 30^2 \\
&= 28278(0.2-x)
\end{aligned}$$

جاول کے برابر ہے۔

مثال 1.3: شکل میں توانائی کے طریقہ سے قوت F_m معلوم کریں۔

حل: مساوات کہتا ہے کہ $F_m = - \left. \frac{\partial W_m(x,\lambda)}{\partial x} \right|_{\lambda_0}$ ہے۔اس کا مطلب ہے کہ توانائی کے متغیرہ x اور λ ہونے چاہئے۔

مثال 1.2 میں ہم نے توانائی معلوم کی۔البتہ یہ معلوم کرنے کے لئے ہم نے λ کی بجائے $\lambda = Li$ استعمال کیا۔ یوں توانائی کے متغیرہ x اور i بن گئے ۔ ہم $W_m(x,i) = 28278(0.2 - x)$ کو استعمال نہیں کر سکتے۔ ہمیں $W_m(x,\lambda)$ چاہئے۔ درست طریقہ یہ ہے

$$W_m(x,\lambda) = \frac{\lambda^2}{2L} = \frac{\lambda^2}{2\left(\frac{N^2\mu_0 A_g}{2g}\right)} = \frac{g\lambda^2}{N^2\mu_0 w(b-x)}$$

اب اسے مساوات میں استعمال کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} F_m &= -\frac{\partial W_m(x,\lambda)}{\partial x} \\ &= -\frac{g\lambda^2}{N^2\mu_0 w(b-x)^2} \end{aligned}$$

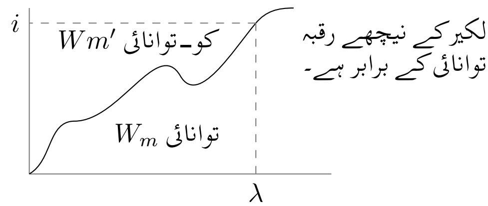
تفرق لینے کے بعد λ کی جگہ Li پُر کیا جا سکتا ہے۔یوں قوت

$$\begin{aligned} F_m &= -\frac{gL^2 i^2}{N^2\mu_0 w(b-x)^2} \\ &= -\frac{N^2\mu_0 w i^2}{4g} \\ &= -28\,278 \end{aligned}$$

نیوٹن حاصل ہوتا ہے۔منفی قوت کا مطلب ہے کہ قوت x کی اُلٹ جانب ہے یعنی حرکت کرنے والا حصہ اس جانب حرکت کرے گا جس جانب فاصلہ کم ہوتا ہو۔

1.3 توانائی اور کو-توانائی

شکل 1.7 میں λ اور i کے مابین گراف دکھایا گیا ہے۔ جیسا آپ دیکھ سکتے ہیں کہ لکیر کے نیچے رقبہ دراصل توانائی ہی ہے۔ اگر ہم اس گراف پر کوئی ایک نقطہ (λ, i) لیں اور اس نکتے سے ایک لکیر نیچے کی طرف اور دوسری لکیر بائیں جانب کھینچے تو ہمیں ایک مستطیل ملتا ہے جس کا رقبہ λi کے برابر



شکل 1.7: کو-توانائی کی تعریف۔

ہو گا۔ اگر اس میں سے ہم توانائی W_m منفی کر لیں تو جو مقدار ملتی ہے اس کو کو-توانائی W'_m کہتے ہیں یعنی

$$W'_m = \lambda i - W_m \tag{1.23}$$

اس مساوات کے تدریجی تفرق[13]

$$\begin{aligned} \partial W'_m &= \partial(\lambda i) - \partial W_m \\ &= \lambda \partial i + i \partial \lambda - \partial W_m \end{aligned}$$

میں مساوات کے استعمال سے

$$\partial W'_m = \lambda \partial i + i \partial \lambda - (i \partial \lambda - F_m \partial x)$$

یعنی

$$\partial W'_m = \lambda \partial i + F_m \partial x \tag{1.24}$$

حاصل ہوتا ہے۔

مساوات ، ، اور کی طرح یہاں بھی کسی بھی تفاعل $z(x,y)$ کا تدریجی فرق

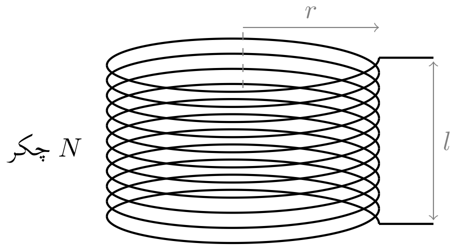
$$\partial z(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

ہے۔یوں ہم کو-توانائی $W'_m(x,i)$ کے لئے لکھ سکتے ہیں

$$\partial W'_m(x,i) = \frac{\partial W'_m}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial W'_m}{\partial i}\,\mathrm{d}i \tag{1.25}$$

---

partial differential[13]



شکل 1.8: پیچدار لچھا۔

اس مساوات کو مساوات کے سات دیکھیں تو

$$\lambda = \left.\frac{\partial W'_m}{\partial i}\right|_{x_0} \tag{1.26}$$

$$F_m = \left.\frac{\partial W'_m}{\partial x}\right|_{i_0} \tag{1.27}$$

حاصل ہوتے ہیں۔قوت معلوم کرنے کی یہ دوسری مساوات ہے۔ اس مساوات میں کو۔توانائی استعمال ہوتی ہے جبکہ مساوات میں توانائی کے ذریعہ قوت حاصل کی گئی۔

بالکل توانائی کے طریقہ سے ان مساوات کے تکمل سے حاصل ہوتا ہے

$$W'_m(i_0, x_0) = \int_0^{i_0} \lambda(i, x_0)\,\mathrm{d}i \tag{1.28}$$

جن نظام میں λ اور i تغیر راست ہوں اور جنہیں مساوات کے تعلق سے پیش کیا جا سکے ان کے لئے اس مساوات کو مزید یوں حل کیا جا سکتا ہے۔

$$W'_m(i, x) = \int_0^{i} L(x) i\,\mathrm{d}i = \frac{L(x) i^2}{2} \tag{1.29}$$

کچھ مسائل میں توانائی اور کچھ میں کو۔توانائی کا استعمال زیادہ آسان ہوتا ہے۔

مثال 1.4: شکل 1.8 میں ایک پیچدار لچھا[14] دکھایا گیا ہے جس کی محوری لمبائی l، رداس r اور چکر N ہیں۔ایسے پیچدار لچھے کی مقناطیسی بہاؤ محوری سمت میں لچھے کے اندر ہی رہتی ہے۔ لچھے کے باہر مقناطیسی بہاؤ کی مقدار قابلِ نظر انداز ہوتی ہے۔یوں لچھے کے اندر محوری لمبائی کی سمت میں میدانی شدت $H \approx NI/l$ ہوتی ہے۔

ایسے پیچدار لچھے موصل دھاتوں کو امالی برقی توانائی کے ذریعہ گلانے کے لئے استعمال کئے جاتے ہیں۔میں اس طرح کی 100 کلوواٹ سے 1500 کلو واٹ برقی طاقت کی 100 کلوگرام سے 3000 کلوگرام

[14]spiral coil

لوہا گلانے کی امالی برقی بھٹیاں[15] بناتا رہا ہوں جو 500 ہرٹز سے 1200 ہرٹز کے درمیاں کام کرتی ہیں۔اس طرح کے پیچدار لچھے میں غیر موصل پیالے میں موصل دھات کے ٹکڑے ڈالے جاتے ہیں اور اس لچھے میں بدلتی رو گزاری جاتی ہے۔دھات میں بھنور نما امالی برقی رو اسے گرم کر کے پگلا دیتی ہے۔لوہے کو یوں 1650 ڈگری ٹلسئس[16] تک گرم کیا جاتا ہے۔

- اس پیچدار لچھے پر معین برقی رو I_0 گزرنے کی صورت میں رداسی سمت میں میکانی دباؤ یعنی قوت فی مربع رقبہ معلوم کریں۔
- میری 3000 کلوگرام لوہا گلانے کی بھٹی کے پیچدار لچھے کی تفصیل کچھ یوں ہے۔

$$N = 11, \quad I_0 = 10\,000\,\mathrm{A}, \quad l = 0.94\,\mathrm{m}, \quad r = 0.49\,\mathrm{m}$$

اس پر رداسی سمت میں میکانی دباؤ، نیوٹن فی مربع میٹر، میں حاصل کریں۔

حل الف:
ہم کو-توانائی کا طریقہ استعمال کرتے ہیں۔

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2}{l} \\ W'_m(r,i) &= \frac{Li^2}{2} = \frac{\mu_0 N^2 \pi r^2 I_0^2}{2l} \\ F &= \frac{\partial W'_m}{\partial r} = \frac{\mu_0 N^2 \pi r I_0^2}{l} \end{aligned}$$

یہ مثبت قوت رداسی سمت میں باہر کی جانب ہے۔لچھے کی گول سطح $A = 2\pi r l$ ہے۔یوں میکانی دباو

$$\frac{F}{A} = \frac{\mu_0 N^2 \pi r I_0^2}{2\pi r l^2} = \frac{\mu_0 N^2 I_0^2}{2l^2}$$

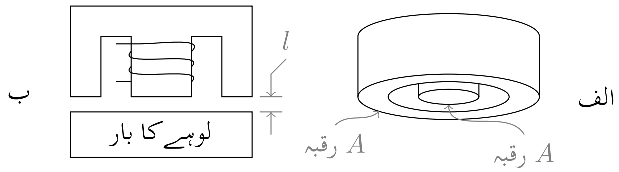
ہے۔

حل ب:

$$\frac{F}{A} = \frac{4\pi 10^{-7} \times 11^2 \times 10000^2}{2 \times 0.94^2} = 8605\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}$$

مثال 1.5: 2000 کلوواٹ سے 3000 کلوواٹ کی لوہا گلانے کی بھٹیاں 30 ٹن[17] سے 70 ٹن لوہا روزانہ گلاتی ہیں۔[18]اتنا وزن ایک جگہ سے دوسری جگہ منتقل کرنے کی خاطر عموما برقی مقناطیس استعمال ہوتا

[15] high frequency, induction furnaces
[16] Celsius, Centigrade
[17] ہزار کلوگرام ایک ٹن کے برابر ہوتے ہیں۔
[18] یہ میں اپنے تجربے کی بنیاد پر کہہ رہا ہوں۔



شکل 1.9: برقی مقناطیس۔

ہے۔شکل 1.9۔الف میں ایک ایسا ہی برقی مقناطیس دکھایا گیا ہے جس کی تفصیل کچھ یوں ہے۔

$$N = 300, \quad A = 0.8\,\mathrm{m}^2, \quad I = 30\,\mathrm{A}$$

اگر برقی مقناطیسی اور لوہے کے درمیان اوسط فاصلہ 2.5 سنٹی میٹر لیا جائے تو یہ برقی مقناطیسی کتنی کمیت لوہا اٹھا سکتی ہے۔

حل:

$$\begin{aligned} L &= \frac{\mu_0 N^2 A}{2l} \\ W'_m(l,i) &= \frac{Li^2}{2} = \frac{\mu_0 N^2 A i^2}{4l} \\ F &= \frac{\partial W_m}{\partial l} = -\frac{\mu_0 N^2 A i^2}{4l^2} = -\frac{4\pi 10^{-7} \times 300^2 \times 0.8 \times 30^2}{4 \times 0.0254^2} = 31\,558\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

یوں یہ مقناطیس $\frac{31558}{9.8} = 3220\,\mathrm{kg}$ کمیت اٹھا سکتا ہے۔

مثال 1.6: مثال 1.3 کو کو-توانائی کے طریقہ سے حل کریں۔

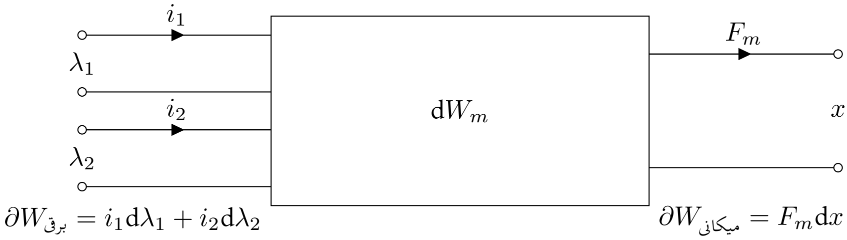
حل: مساوات سے

$$W'_m = \frac{L(x)i^2}{2} = \frac{N^2 \mu_0 w (b-x) i^2}{4g}$$

اور مساوات سے

$$F_m = \frac{\partial W_m}{\partial x} = -\frac{N^2 \mu_0 w i^2}{4g} = -28\,278\,\mathrm{N}$$

یہ اتنی ہی قوت ہے۔ہونا بھی ایسا ہی چاہئے۔



شکل 1.10: دو لچھوں کا نظام۔

1.4 زیادہ لچھوں کا مقناطیسی نظام

ابھی تک صرف ایک لچھے کے نظام کا مطالعہ کیا گیا ہے۔ اس حصہ میں ایک سے زیادہ لچھوں کے نظام کا مطالعہ کیا جائے گا۔ زیادہ لچھوں کا نظام بھی بالکل ایک لچھے کے نظام کی طرح حل ہوتے ہیں۔ شکل 1.10 میں بائیں جانب ایک لچھے کا برقی رو i_1 اور دوسرے لچھے کا برقی رو i_2 ہے۔ لہٰذا

$$\partial W_{\text{برقی}} = i_1 \,\mathrm{d}\lambda_1 + i_2 \,\mathrm{d}\lambda_2 \tag{1.30}$$

$$\partial W_{\text{برقی}} = \partial W_{\text{میکانی}} + \partial W_m \tag{1.31}$$

$$i_1 \,\mathrm{d}\lambda_1 + i_2 \,\mathrm{d}\lambda_2 = F_m \,\mathrm{d}x + \partial W_m \tag{1.32}$$

لکھا جا سکتا ہے جہاں پہلی مساوات کو دوسری میں پُر کرتے ہوئے تیسری مساوات حاصل کی گئی جسے مزید یوں لکھ سکتے ہیں۔

$$\partial W_m(\lambda_1, \lambda_2, x) = i_1 \,\mathrm{d}\lambda_1 + i_2 \,\mathrm{d}\lambda_2 - F_m \,\mathrm{d}x \tag{1.33}$$

اب بالکل مساوات کی طرح

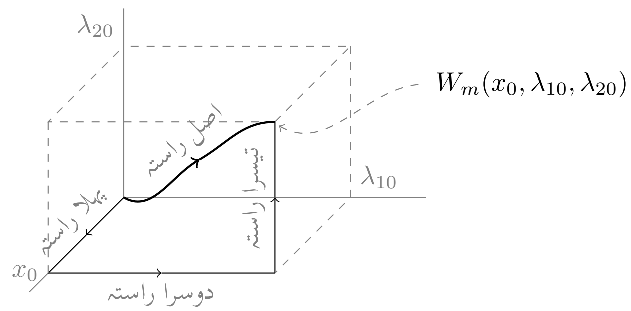
$$\partial W_m(\lambda_1, \lambda_2, x) = \frac{\partial W_m}{\partial \lambda_1} \,\mathrm{d}\lambda_1 + \frac{\partial W_m}{\partial \lambda_2} \,\mathrm{d}\lambda_2 + \frac{\partial W_m}{\partial x} \,\mathrm{d}x \tag{1.34}$$

اس مساوات میں ہم نے دائیں طرف کی جگہ لکھا ہے۔ مساوات 1.33 اور 1.34 سے حاصل ہوتا ہے

$$i_1 = \left.\frac{\partial W_m(\lambda_1, \lambda_2, x)}{\partial \lambda_1}\right|_{\lambda_2, x} \tag{1.35}$$

$$i_2 = \left.\frac{\partial W_m(\lambda_1, \lambda_2, x)}{\partial \lambda_2}\right|_{\lambda_1, x} \tag{1.36}$$

$$F_m = \left.\frac{\partial W_m(\lambda_1, \lambda_2, x)}{\partial x}\right|_{\lambda_1, \lambda_2} \tag{1.37}$$



شکل 1.11: دو لچھوں کے نظام میں مقناطیسی میدان میں توانائی۔

یہ مساوات تب استعمال ہو سکتے ہیں جب ہمیں توانائی W_m معلوم ہو لہٰذا ہم پہلے اسی کو معلوم کرتے ہیں۔

شکل 1.10 میں دونوں لچھوں کو اس طرح طاقت دی جاتی ہے کہ λ_1 اور λ_2 آہستا آہستا صفر سے بڑھتے ہوئے λ_{1_0} اور λ_{2_0} تک پہنچ جاتے ہیں اور سات ہی سات x صفر سے تبدیل ہو کر x_0 ہو جاتا ہے۔ اس اصل راستے کو شکل 1.11 میں موٹی لکیر سے ظاہر کیا گیا ہے۔ بالکل مساوات کی طرح ہم لکھ سکتے ہیں۔

$$\int\limits_{\text{اصل راستہ}} \partial W_m = \int\limits_{\text{پہلا راستہ}} \partial W_m + \int\limits_{\text{دوسرا راستہ}} \partial W_m + \int\limits_{\text{تیسرا راستہ}} \partial W_m \tag{1.38}$$

ہم دائیں جانب کے تکمل کو باری باری حل کرتے ہیں۔

$$\int\limits_{\text{پہلا راستہ}} \partial W_m = \int_0^0 i_1 \,\mathrm{d}\lambda_1 + \int_0^0 i_2 \,\mathrm{d}\lambda_2 - \int_0^{x_0} F_m \,\mathrm{d}x \tag{1.39}$$

اگر تکمل کے ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہوں تو تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$\int_0^0 i_1 \,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_0^0 i_2 \,\mathrm{d}\lambda_2 = 0 \tag{1.40}$$

ہوں گے۔پہلے راستے λ_1 اور λ_2 دونوں صفر ہیں۔ اس کا مطلب ہے کہ دونوں لچھوں میں برقی رو صفر ہے، لہٰذا مقناطیسی بہاؤ کی غیر موجودگی میں قوت $F_m = 0$ ہو گا اور صفر کا تکمل صفر ہی ہوتا ہے یعنی

$$\int_0^{x_0} F_m \,\mathrm{d}x = \int_0^{x_0} 0 \,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.41}$$

اس طرح

$$\int_{\text{پہلا راستہ}} \partial W_m = 0 \tag{1.42}$$

حاصل ہوتا ہے۔دوسرے راستے پر

$$\int_{\text{دوسرا راستہ}} \partial W_m = \int_0^{\lambda_{1_0}} i_1 \, \mathrm{d}\lambda_1 + \int_0^0 i_2 \, \mathrm{d}\lambda_2 - \int_{x_0}^{x_0} F_m \, \mathrm{d}x \tag{1.43}$$

جیسا پہلے ذکر کیا گیا کہ اگر تکمل کے ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہوں تو تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$\int_0^0 i_2 \, \mathrm{d}\lambda_2 = \int_{x_0}^{x_0} F_m \, \mathrm{d}x = 0 \tag{1.44}$$

ہوں گے جس سے

$$\int_{\text{دوسرا راستہ}} \partial W_m = \int_0^{\lambda_{1_0}} i_1 \, \mathrm{d}\lambda_1 \tag{1.45}$$

رہ جاتا ہے۔یہاں ہمیں مساوات ، اور کی ضرورت پڑتی ہے۔ یہ تین مساوات مندرجہ ذیل ہیں

$$\lambda_1 = L_{11} i_1 + L_{12} i_2 \tag{1.46}$$

$$\lambda_2 = L_{21} i_1 + L_{22} i_2 \tag{1.47}$$

$$L_{12} = L_{21} \tag{1.48}$$

ان مساواتوں کو ہم i_1 اور i_2 کے لئے حل کریں تو حاصل ہوتا ہے۔

$$i_1 = \frac{L_{22}\lambda_1 - L_{12}\lambda_2}{D} \tag{1.49}$$

$$i_2 = \frac{L_{11}\lambda_2 - L_{21}\lambda_1}{D} \tag{1.50}$$

جہاں

$$D = L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21} \tag{1.51}$$

کے برابر ہے۔اب ہم مساوات میں استعمال کرتے ہیں۔ چونکہ دوسرے راستے پہ λ_2 صفر ہے لہٰذا

$$\int_0^{\lambda_{1_0}} \left(\frac{L_{22}\lambda_1 - L_{12}\lambda_2}{D} \right) \mathrm{d}\lambda_1 = \frac{L_{22}}{D} \int_0^{\lambda_{1_0}} \lambda_1 \, \mathrm{d}\lambda_1 = \frac{L_{22}\lambda_{1_0}^2}{2D} \tag{1.52}$$

کے برابر ہے۔یوں

$$\int_{\text{تیسرا راستہ}} \partial W_m = \frac{L_{22}\lambda_{1_0}^2}{2D} \tag{1.53}$$

حاصل ہوتا ہے۔
اسی طرح تیسرے راستے پر

$$\int_{\text{تیسرا راستہ}} \partial W_m = \int_{\lambda_{1_0}}^{\lambda_{1_0}} i_1 \,\mathrm{d}\lambda_1 + \int_0^{\lambda_{2_0}} i_2 \,\mathrm{d}\lambda_2 - \int_{x_0}^{x_0} F_m \,\mathrm{d}x \tag{1.54}$$

جیسا پہلے ذکر کیا گیا کہ اگر تکمل کے ابتدائی اور اختتامی نقطے ایک ہی ہوں تو تکمل صفر کے برابر ہوتا ہے لہٰذا

$$\int_{\lambda_{1_0}}^{\lambda_{1_0}} i_1 \,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_{x_0}^{x_0} F_m \,\mathrm{d}x = 0 \tag{1.55}$$

ہوں گے اور بقایا حصے میں i_2 پُر کرتے ہوئے

$$\begin{aligned} \int_0^{\lambda_{2_0}} i_2 \,\mathrm{d}\lambda_2 &= \int_0^{\lambda_{2_0}} \left(\frac{L_{11}\lambda_2 - L_{21}\lambda_1}{D}\right) \mathrm{d}\lambda_2 \\ &= \frac{L_{11}\lambda_{2_0}}{2D} - \frac{L_{21}\lambda_{10}\lambda_{20}}{D} \end{aligned} \tag{1.56}$$

حاصل ہوتا ہے جس سے

$$\int_{\text{تیسرا راستہ}} \partial W_m = \frac{L_{11}\lambda_{2_0}^2}{2D} - \frac{L_{21}\lambda_{1_0}\lambda_{2_0}}{D} \tag{1.57}$$

ملتا ہے۔
مساوات ، اور کو جمع کر کے مساوات کا حل ملتا ہے۔

$$\int \partial W_m = \frac{L_{22}\lambda_{1_0}^2}{2D} + \frac{L_{11}\lambda_{2_0}^2}{2D} - \frac{L_{21}\lambda_{1_0}\lambda_{2_0}}{D} \tag{1.58}$$

اسی طرح اگر ہم کو۔توانائی سے حل کرتے تو

$$\partial W_m'(x, i_1, i_2) = \lambda_1 \,\mathrm{d}i_1 + \lambda_2 \,\mathrm{d}i_2 + F_m \,\mathrm{d}x \tag{1.59}$$

جہاں

$$\lambda_1 = \left.\frac{\partial W'_m(x, i_1, i_2)}{\partial i_1}\right|_{x, i_2} \tag{1.60}$$

$$\lambda_2 = \left.\frac{\partial W'_m(x, i_1, i_2)}{\partial i_2}\right|_{x, i_1} \tag{1.61}$$

$$F_m = \left.\frac{\partial W'_m(x, i_1, i_2)}{\partial x}\right|_{i_1, i_2} \tag{1.62}$$

اسی طرح مساوات کی جگہ کو۔توانائی کے لئے حاصل ہوتا ہے

$$W'_m(x, i_1, i_2) = \frac{1}{2}L_{11}(x)i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}(x)i_2^2 + L_{12}(x)i_1 i_2 \tag{1.63}$$

جس سے قوت کی مساوات

$$F_m = \frac{i_1^2}{2}\frac{\mathrm{d}L_{11}(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{i_2^2}{2}\frac{\mathrm{d}L_{22}(x)}{\mathrm{d}x} + i_1 i_2 \frac{\mathrm{d}L_{12}(x)}{\mathrm{d}x} \tag{1.64}$$

حاصل ہوتی ہے۔

مثال 1.7: شکل میں میکانی کام کو $\partial W_{\text{میکانی}} = T_m \,\mathrm{d}\theta$ لکھ کر توانائی کے طریقہ سے حل کریں۔

حل:

$$\partial W_{\text{برقی}} = i_1 \,\mathrm{d}\lambda_1 + i_2 \,\mathrm{d}\lambda_2$$

اور $\partial W_{\text{میکانی}} = T_m \,\mathrm{d}\theta$ کو

$$\partial W_{\text{برقی}} = \partial W_{\text{میکانی}} + \partial W_m$$

میں پُر کرنے سے

$$\partial W_m = i_1 \,\mathrm{d}\lambda_1 + i_2 \,\mathrm{d}\lambda_2 - T_m \,\mathrm{d}\theta \tag{1.65}$$

حاصل ہوتا ہے۔W_m کے جزوی تفرق

$$\partial W_m(\lambda_1, \lambda_2, \theta) = \frac{\partial W_m}{\partial \lambda_1}\,\mathrm{d}\lambda_1 + \frac{\partial W_m}{\partial \lambda_2}\,\mathrm{d}\lambda_2 + \frac{\partial W_m}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta$$

کا مساوات 1.65 کے ساتھ موازنہ کرنے سے

$$i_1 = \left.\frac{\partial W_m(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \lambda_1}\right|_{\lambda_2, \theta} \tag{1.66}$$

$$i_2 = \left.\frac{\partial W_m(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \lambda_2}\right|_{\lambda_1, \theta} \tag{1.67}$$

$$T_m = -\left.\frac{\partial W_m(\lambda_1, \lambda_2, \theta)}{\partial \theta}\right|_{\lambda_1, \lambda_2} \tag{1.68}$$

حاصل ہوتے ہیں۔ان مساوات کا آخری جز بالکل مساوات کی طرح ہے۔اس کو حل کرنے کا ایک ایک قدم بالکل مساوات کو حل کرنے کی طرح ہوگا بس فاصلہ x کی جگہ زاویہ θ آئے گا۔یوں جواب میں میدانی توانائی کے متغیرات $\lambda_1, \lambda_2, \theta$ ہوں گے یعنی۔

$$W_m(\lambda_{1_0}, \lambda_{2_0}, \theta_0) = \int W_m = \frac{L_{22}\lambda_{1_0}^2}{2D} + \frac{L_{11}\lambda_{2_0}^2}{2D} - \frac{L_{21}\lambda_{1_0}\lambda_{2_0}}{D} \tag{1.69}$$

اسی طرح کو۔توانائی کے لئے جواب یہ ہے

$$\partial W'_m(i_1, i_2, \theta) = \lambda_1 \,\mathrm{d}i_1 + \lambda_2 \,\mathrm{d}i_2 + T_m \,\mathrm{d}\theta \tag{1.70}$$

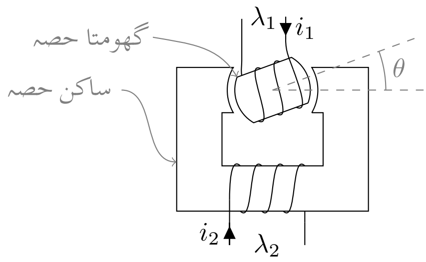
$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \left.\frac{\partial W'_m(i_1, i_2, \theta)}{\partial i_1}\right|_{i_2, \theta} \\
\lambda_2 &= \left.\frac{\partial W'_m(i_1, i_2, \theta)}{\partial i_2}\right|_{i_1, \theta} \\
T_m &= \left.\frac{\partial W'_m(i_1, i_2, \theta)}{\partial \theta}\right|_{i_1, i_2}
\end{aligned} \tag{1.71}$$

جہاں

$$W'_m(i_1, i_2, \theta) = \frac{1}{2}L_{11}i_1^2 + \frac{1}{2}L_{22}i_2^2 + L_{12}i_1 i_2 \tag{1.72}$$

ہے۔

مثال 1.8: شکل 1.12 میں دو لچھوں کا نظام دکھایا گیا ہے۔اس نظام کا ایک حصہ ساکن رہتا ہے اور دوسرا گھوم سکتا ہے۔افقی لکیر سے گھڑی کی اُلٹی جانب زاویہ θ ناپا جاتا ہے۔لچھوں کی خود امالہ اور



شکل 1.12: دو لچھوں کے نظام میں مروڑ۔

مشترکہ امالہ مندرجہ ذیل ہیں۔

$$
\begin{aligned}
L_{11} &= 20 + 30\cos 2\theta \\
L_{22} &= (20 + 30\cos 2\theta) \times 10^{-3} \\
L_{12} &= 0.15\cos\theta
\end{aligned}
$$

برقی رو $i_1 = 0.02\,\mathrm{A}, i_2 = 5\,\mathrm{A}$ پر مروڑ T_m معلوم کریں۔
حل:مساوات سے کو-توانائی حاصل ہوتی ہے اور مساوات کے آخری جز سے مروڑ یعنی

$$
\begin{aligned}
T_m = \frac{\partial W'_m}{\partial\theta} &= -30 i_1^2 \sin 2\theta - 30\times 10^{-3} i_2^2 \sin 2\theta - 0.15 i_1 i_2 \sin\theta \\
&= -0.012\sin 2\theta - 0.75\sin 2\theta - 0.015\sin\theta \\
&= -0.762\sin 2\theta - 0.015\sin\theta
\end{aligned}
$$

مروڑ منفی ہونے کا مطلب ہے کہ یہ زاویہ کی اُلٹ سمت میں ہے۔یوں اگر آپ زاویہ بڑھائیں گے تو یہ نظام اسے کم کرنے کی جانب مروڑ پیدا کرے گا اور اگر آپ زاویہ کم کرنے کی کوشش کریں تو یہ زاویہ بڑھانے کی جانب مروڑ پیدا کرے گا۔سادہ زبان میں گھومتا حصہ اُفقی لکیر پر رہنے کی کوشش کرے گا۔